

50376
1993
306

50376
1993
306

N° d'ordre 1173

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir le grade de Docteur (nouveau régime)

Mention Mécanique

par

Mohamed Najib OUARZAZI

**BIFURCATIONS ASSOCIEES A DES IMPERFECTIONS DES
CONDITIONS AUX LIMITES POUR DES PROBLEMES DE
CONVECTION**



soutenue le 11 octobre 1993 devant la commission d'examen

P. A. BOIS
A. DYMENT
A. MERLEN
M. C. NEEL
J. K. PLATTEN
M. TAKI

Directeur de thèse

Rapporteur
Rapporteur

A la mémoire de ma mère

A mon père

A Véronique

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier P. A. Bois, qui m'a dirigé dans ce travail. Il a toujours été disponible pour m'aider et m'encourager. Je voudrais qu'il trouve en ces quelques lignes l'expression de ma plus grande reconnaissance et de ma plus profonde amitié.

Je voudrais exprimer ma gratitude à A. Dymont, A. Merlen, M. C. Néel, J. K. Platten et M. Taki, qui m'ont fait le plaisir d'être dans le jury de cette thèse, J. K. Platten et M. C. Néel ayant bien voulu en être les rapporteurs.

La lecture de la thèse d'état de M. C. Néel me fut très bénéfique lors de la rédaction du présent ouvrage.

Une partie de ce travail a été réalisée en collaboration avec M. Taki. Il a su par son enthousiasme et son dynamisme me communiquer la joie de travailler en équipe.

Enfin, je remercie tous mes amis qui m'ont soutenu dans l'exercice d'une activité parfois difficile.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION GENERALE	1
PREMIERE PARTIE: EFFETS D'UNE INHOMOGENEITE DE LA CONDITION A LA LIMITE DE LA TEMPERATURE DANS LE PROBLEME DE RAYLEIGH-BENARD	
INTRODUCTION	4
CHAPITRE 1: INHOMOGENEITE PERIODIQUE	
1. <u>Présentation du problème</u>	6
2. Imperfection faible	
2.1 Forçage périodique couplé à une structure convective tridimensionnelle ($k_x; k_y$).	8
2.1.1. Forçage périodique couplé à la convection bidimensionnelle	13
2.1.2. Forçage périodique couplé aux cellules convectives dont l'axe est parallèle à Ox	14
2.2 Forçage périodique couplé à deux modes (k_x, k_y) et ($k_x, -k_y$)	15
2.3 Conclusion	16
3. Imperfection forte	18
3.1 Problème bidimensionnel	20
3.2 Problème tridimensionnel	22
3.3 Conclusion	25
CHAPITRE 2: INHOMOGENEITE LENTEMENT VARIABLE DANS L'ESPACE.	
1. <u>Formulation du problème</u>	26
2. <u>Ecoulement de Base</u>	27

3. <u>Stabilité Linéaire</u>	
3.1 $\delta = O(1)$	28
3.2 $\delta = O(\varepsilon^2)$	37
3.3 Conclusion	39
4. <u>Equation d'amplitude</u>	
4.1 Equation d' amplitude pour $\delta = O(1)$	40
4.2 Equation d'amplitude pour $\delta = O(\varepsilon^2)$	44
4.3 Conclusion	45
Conclusion de la première partie	46
REFERENCES	48
DEUXIEME PARTIE	
CHAPITRE 3:	
Convective instability of a fluid mixture in a porous medium with time-dependent temperature gradient	
Preprint d'article soumis pour publication	49
CHAPITRE 4	
Nonlinear interaction of convective instabilities and temporal chaos of a fluid mixture in a porous medium	
Preprint d'article soumis pour publication	84
Annexe 1: Rappel de quelques résultats classiques sur le problème de Rayleigh-Bénard.	
1. <u>Formulation Du Problème de Rayleigh -Bénard.</u>	
1.1 Problème de Rayleigh - Bénard (R.B)	117
1.2 Les Equations Hydrodynamiques.	118

1.3 Les Conditions aux limites	118
1.4 Equations adimensionnelles	119
1.5 La solution de conduction pure	120
2. <u>Stabilité linéaire de la solution de conduction pure</u>	
2.1 Les équations linéarisées.	121
2.2 Analyse en modes normaux	122
2.3 Les différents types de structures convectives.	124
3. <u>Bifurcation et équation d'amplitude.</u>	
3.1 Bifurcations	125
3.2 Equation d'amplitude.	
3.2.1 Cas des structures parfaites	126
3.2.1 Cas des structures modulées	127
REFERENCES	132
Annexe 2: Valeurs de quelques grandeurs utilisées au chapitres 1 et 2.	133
Annexe 3:	
A. La méthode de MELNIKOV et la prédiction du chaos	135
B. Portrait de phase quand $\delta = 0$ (Absence de la modulation)	138

INTRODUCTION GENERALE

La méthode des perturbations permet l'étude théorique des instabilités développées dans les systèmes hors d'équilibre. Elle a été notamment utilisée pour la description des phénomènes de convection dans le problème de Rayleigh-Bénard (R-B). Le système des équations aux dérivées partielles régissant ce problème admet une solution de conduction pure indépendamment de la valeur du paramètre phénoménologique, le nombre de Rayleigh (Ra), qui apparaît dans ces équations. L'analyse de la stabilité linéaire détermine à la fois le point critique R_c , au delà duquel apparaît la structure convective bifurquée, et le module du nombre d'onde de cette structure. Elle autorise la superposition arbitraire des modes sans interaction. Pour décrire complètement la structure bifurquée, les couplages non linéaires de ces modes compromettent toute étude analytique exacte. Pour cette raison, l'analyse non linéaire, s'inspirant des résultats expérimentaux, doit d'abord sélectionner certaines combinaisons spécifiques en écartant les autres. La méthode des perturbations permet d'établir les équations régissant l'évolution de ces modes sélectionnés et d'étudier leur stabilité. L'exemple type d'équation gouvernant ce phénomène est l'équation de Newell-Whitehead-Segel (N-W-S). (voir annexe 1)

$$\frac{\partial A}{\partial \tau} = R_2 A + \left(\frac{\partial}{\partial X} - \frac{i}{2k_c} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \right)^2 A - A |A|^2$$

Cette équation prévoit une bifurcation du système de l'état de conduction pure à l'état de convection, dès lors que R_2 est positif (i.e. $R_a > R_c$). Or certaines expériences de R-B montrent que la transition entre les régions subcritiques ($R_2 < 0$) et supercritiques ($R_2 > 0$) s'opère d'une manière régulière contrairement aux prédictions de la théorie. Cette transition régulière, observée expérimentalement, a été attribuée à des effets "non Boussinesq" tels que la variation des propriétés physiques des fluides avec la température. Cette hypothèse a dû être écartée, suite à des expériences sur l'hélium liquide à basse température, pour lesquelles cette régularité de la transition était confirmée. En fait, l'équation de N-W-S décrit le développement de la convection thermique entre deux parois parfaitement horizontales, dans le cas idéal où chacune d'elles est maintenue à une température constante. Or pour l'expérience, certains types de mesure sont entachés d'un bruit expérimental dont l'amplitude, bien qu'assez faible peut influencer le déroulement des phénomènes que l'on cherche à observer (à ce propos, voir le livre de P. BERGE).

Dans leurs travaux expérimentaux, G. ALHERS & al ont proposé une façon convenable de tenir compte de ces imperfections (bruit, inhomogénéités des conditions aux limites, légères inclinaisons des parois...).

En fait il s'agit d'ajouter un terme inhomogène, dépendant du temps ou des variables d'espace, à l'équation de N-W-S, dont la forme et l'amplitude pourraient contrôler l'échelle du temps de l'établissement d'un régime convectif.

L'objet de la première partie de cette thèse est d'étudier les effets d'une contrainte extérieure au système sous forme d'une inhomogénéité de la condition à la limite en température. Nous verrons que cette contrainte force le système et le conduit à un réarrangement macroscopique résultant, somme toute, de l'interaction entre la convection naturelle de R-B et l'écoulement (ou convection) dû à ces imperfections. Il est bien entendu nécessaire de rappeler que l'équation de N-W-S n'est valable qu'au voisinage de la première bifurcation. En effet, lorsque le paramètre de contrôle, ici le nombre de Rayleigh, augmente la description analytique de la succession des bifurcations qui font passer le système d'un état stationnaire à un état chaotique devient, en général impossible. La difficulté est liée au fait que les solutions stationnaires des équations de Boussinesq ne sont pas connues, même approximativement, lorsque Ra est grand par rapport à Rc . Les bifurcations ne sont analysables que lorsqu'elles se produisent près du seuil de convection. Une idée simple qui vient à l'esprit est alors de déstabiliser simultanément, à partir de l'état de repos du fluide, plusieurs modes dont l'interaction peut conduire à une dynamique plus complexe, mais qui reste régie par des équations d'amplitude calculables. Citons parmi les derniers travaux de cette décennie, sur ce genre de bifurcation dite de codimension multiple, l'étude par P.H. COULLET ET E.A. SPIEGEL de la convection thermohaline, la convection d'un fluide soumis à un champ magnétique vertical étudié par E. KNOBLOCH ET M.R.E. PROCTOR et l'étude de la convection d'un mélange binaire dans un milieu poreux, accomplie par H. BRAND & al STEINBERG. En fait, le dénominateur commun à tous ces problèmes est la coexistence de deux instabilités, l'une stationnaire, l'autre oscillatoire au voisinage d'un point "polycritique" dit de codimension deux.

Dans la deuxième partie de cette thèse, composée de deux chapitres, on s'intéressera au comportement dynamique linéaire et non linéaire de l'instabilité convective d'un mélange binaire dans un milieu poreux soumis à une fluctuation temporelle de la température appliquée sur la paroi inférieure. Il s'agit en fait d'un effet Soret dans un milieu poreux. Le choix de ce problème est motivé par le fait que l'étude de la convection en milieu poreux présente moins de difficultés pour les investigations expérimentales, comparé aux autres problèmes de convection en double-diffusion.

L'analyse linéaire (chapitre 3) met en évidence le rôle du point polycritique dans la détermination des seuils d'instabilité et relie l'un à l'autre, à travers une équation de Mathieu, le seuil obtenu pour une fluctuation périodique et le seuil obtenu pour une fluctuation non périodique des conditions aux limites. L'analyse non linéaire (chapitre 4) montre que le système présente un régime chaotique du type fer-à-cheval (horseshoe). La méthode de MELNIKOV permet d'une part d'identifier analytiquement le seuil à partir duquel apparaît ce type de chaos et d'autre part de mettre en évidence en fonction des valeurs de la fréquence du forçage lesquelles des orbites fermées résonnantes sont préservées et quelle serait alors leur dynamique.

Les analyses effectuées dans les chapitres qui suivent sont des analyses asymptotiques formelles, mettant en jeu très souvent plusieurs paramètres. Il faudrait préciser que comme il s'agit uniquement d'un travail formel, on ne s'est pas intéressé aux conditions de validité précises de ces développements, mais uniquement à la chaîne qui permet de les former.

En fin de mémoire, on a rassemblé dans une première annexe des résultats classiques sur le problème de R-B, ainsi que la présentation de la méthode des perturbations pour l'obtention des équations d'amplitude. Une deuxième annexe est consacrée à un résumé de la méthode de MELNIKOV dans le cas des orbites homoclines et à un rappel des principaux résultats du problème de la convection d'un mélange binaire dans un milieu poreux en absence de la modulation de la température appliquée sur la paroi inférieure.

PREMIERE PARTIE

EFFETS D'UNE INHOMOGENEITE DE LA CONDITION A LA LIMITE
DE LA TEMPERATURE DANS LE PROBLEME DE RAYLEIGH-BENARD.**Introduction :**

L'étude théorique de la convection d'une couche fluide confinée dans une boîte s'étendant à l'infini révèle l'existence d'une infinité de structures géométriques décrivant cette convection, dans le cas idéal où toutes les données du problème sont homogènes. Avec cette dernière hypothèse, ces configurations géométriques peuvent être en nombre fini si le fluide est confiné dans une boîte de petite extension. Ainsi, les rapports de forme de la boîte jouent un rôle essentiel en autorisant certaines structures et en interdisant d'autres. L'hypothèse de l'homogénéité des données n'est souvent pas vérifiée dans des situations expérimentales concrètes, pour lesquelles la prise en compte de certaines imperfections devient inévitable. Ces imperfections peuvent être d'origines diverses. Une légère inclinaison de la boîte, une distribution inhomogène de la température appliquée à la paroi inférieure ou des bords verticaux non adiabatiques constituent quelques exemples de ce genre d'imperfections. CALTAGIRONE et BORIES ont étudié l'effet d'une inclinaison d'une couche poreuse sur l'établissement et le développement de la convection de R -B. Ils ont montré que pour certaines conditions nécessaires concernant des valeurs prises par le nombre de Rayleigh de filtration, l'angle d'inclinaison et les rapports de forme de la boîte, le système peut adopter l'une des trois structures principales, monocellulaire, hexagonale ou des rouleaux longitudinaux. M.C. NEEL a considéré l'effet d'une condition à la limite de la température dont le profil est décrit par une fonction des variables d'espace constante hors d'un domaine borné.

Les travaux cités ci-dessus concernent la convection dans des milieux poreux. Nous sommes intéressés, dans cette première partie par la convection de R-B, en milieu fluide en présence des conditions aux limites thermiques non homogènes. La variation spatiale du gradient de température imposé aux bords prendra deux formes différentes. Au premier chapitre, nous considérons que cette variation est périodique, nous plaçant ainsi dans l'hypothèse de KELLY & PAL . Ces auteurs ont étudié le problème en considérant que la convection se présente sous la forme de cellules bidimensionnelles et que l'imperfection est forte ($k=k_C$). Dans le présent travail, nous étudions l'interaction entre

une imperfection quelconque (forte ou faible), et les diverses structures tridimensionnelles de la convection de R-B.

Au deuxième chapitre, nous considérons que la distribution de la température à la paroi inférieure est décrite par une fonction bornée et lentement variable dans l'espace. Cette fonction est supposée admettre un profil en "cloche" atteignant son maximum en $X=0$. C'est le problème de la tache thermique. Une analyse linéaire basée sur une méthode d'échelles multiples est appliquée pour caractériser la structure convective qui apparaît au voisinage du centre de la tache thermique. L'amplitude de cette structure est décrite par une équation différentielle ordinaire, obtenue par une technique classique en théorie de la stabilité hydrodynamique non linéaire.

Nous pouvons espérer que le principal effet de ces imperfections soit la sélection d'une structure convective parmi toutes celles du cas parfait. La connaissance de cette structure est à la base d'une application importante en mécanique. Il s'agit du phénomène de transport d'une impureté, présente dans le milieu fluide. En effet [SHRAIMAN] montre que l'impureté est transportée par un mécanisme de double diffusion le long des lignes de courant de la structure convective sélectionnée.

CHAPITRE 1: INHOMOGENEITE PERIODIQUE

1. Présentation du problème

On considère un fluide visqueux occupant l'espace intérieur entre deux parois planes et horizontales de températures différentes. On suppose que la température appliquée sur la plaque supérieure est $T = \tilde{T}_1$, alors que celle appliquée sur la plaque inférieure varie en fonction de la variable horizontale d'espace d'une façon périodique $T = \tilde{T}_0 + \delta B \cos kx$. \tilde{T}_0 et \tilde{T}_1 sont des constantes, avec $\tilde{T}_0 > \tilde{T}_1$. $B \cos kx$ est la distribution horizontale de la perturbation sur la plaque $z=0$. δ est un paramètre sans dimension proportionnel à l'amplitude de cette perturbation. ($\delta \ll 1$).

Si nous appelons U, V, W , les composantes du champ de vitesse \vec{u} , T l'écart du champ de température physique à celui de la conduction pure (voir annexe), les équations vérifiant l'approximation de Boussinesq forment le système adimensionné suivant :

$$U_x + V_y + W_z = 0$$

$$\left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right) T + W = UT_x + VT_y + WT_z$$

$$(1.1) \quad \left(\Delta - \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t}\right) \Delta W + Ra \Delta_{\perp} T = + \frac{1}{Pr} \left\{ \Delta (UW_x + VW_y + WW_z) - \frac{\partial}{\partial z} (U_x^2 + V_y^2 + W_z^2 + 2V_x U_y + 2W_x U_z + 2W_y V_z) \right\}$$

$$\Delta (U_y - V_x) = \frac{1}{Pr} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} (UU_x + VU_y + WU_z) - \frac{\partial}{\partial x} (UV_x + VV_y + WV_z) \right\}$$

Les indices x, y, z désignent dans ce système des dérivations par rapport aux coordonnées correspondantes.

On suppose que les surfaces inférieure et supérieure délimitant le fluide sont des surfaces libres. les conditions aux limites du problème sont alors:

$$(1.2a) \quad W = \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z=0 \text{ et } z=1$$

$$(1.2b) \quad T = \delta B \cos kx \quad \text{en } z=0 \quad \text{et} \quad T=0 \quad \text{en } z=1$$

Les conditions aux limites (1.2a) traduisent que la composante verticale de la vitesse et la composante tangentielle du vecteur contrainte aux deux surfaces libres doivent être nulles.

Dans la suite du problème, il est judicieux de travailler avec des conditions aux limites homogènes. Pour cela, définissons une nouvelle température réduite :

$$(1.3) \quad \theta(x,z) = T - F(z) \delta \cos kx \quad ; F(z) = B(1-z)$$

Si on reporte l'expression de $T(x,z)$ tirée de (1.3) dans les équations (1.1) et (1.2b), on obtient :

$$U_x + V_y + W_z = 0$$

$$\left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right) \theta + W = U\theta_x + V\theta_y + W\theta_z - k U F(z) \delta \sin kx + W F'(z) \delta \cos kx + k^2 \delta F(z) \cos kx$$

$$(1.4) \quad \left(\Delta - \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t}\right) \Delta W + Ra \Delta \perp \theta = + \frac{1}{Pr} \{ \Delta (UW_x + VW_y + WW_z) + \delta k^2 Ra F(z) \cos kx - \frac{\partial}{\partial z} (U_x^2 + V_y^2 + W_z^2 + 2V_x U_y + 2W_x U_z + 2W_y V_z) \}$$

$$\Delta(U_y - V_x) = \frac{1}{Pr} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} (UU_x + VU_y + WU_z) - \frac{\partial}{\partial x} (UV_x + VV_y + WV_z) \right\}$$

$$\theta = W = \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z=0 \text{ et } z=1$$

Les équations de Boussinesq et les conditions aux limites du système (1.4) non perturbé ($\delta=0$) sont invariantes par translation et rotation dans le plan horizontal et par symétrie par rapport au plan horizontal médian. Il est important de remarquer que le système perturbé ($\delta \neq 0$) n'est plus invariant pour toutes les translations le long de l'axe Ox , mais seulement pour les translations τ_s avec $s = \frac{2\pi}{k}$. Cette perte de symétrie pourrait être accompagnée d'un phénomène de bifurcation. En effet, pour le problème classique de Rayleigh Bénard ($\delta=0$), se produit une bifurcation de type pitchfork dès que Ra dépasse une valeur critique Rc . Dans ce travail, nous sommes intéressés par savoir comment l'hétérogénéité de la condition à la limite de la température va modifier, qualitativement ou quantitativement, cette bifurcation, en fonction de la valeur prise par k .

à l'ordre δ , nous résolvons le problème stationnaire (1.4) :

$$\begin{aligned} \theta_{10} &= [e^{ikx} + e^{-ikx}] \sum_{j=1}^{\infty} A_j \sin j\pi z \\ (1.5) \quad U_{10} &= -i [e^{ikx} - e^{-ikx}] \sum_{j=1}^{\infty} j\pi B_j \cos j\pi z \\ W_{10} &= -k [e^{ikx} + e^{-ikx}] \sum_{j=1}^{\infty} B_j \sin j\pi z \end{aligned}$$

$$\text{où} \quad A_j = \frac{k^2(Ra - (k^2 + (j\pi)^2)^2)}{j\pi((k^2 + (j\pi)^2)^3 - k^2Ra)} \quad \text{et} \quad B_j = - \frac{kRa j\pi}{(k^2 + (j\pi)^2)^3 - k^2Ra}$$

La prise en compte de l'hétérogénéité force alors le système à adopter une position d'équilibre sous forme d'une configuration convective bidimensionnelle. La taille de l'hétérogénéité étant faible, cette convection forcée reste voisine de la solution de la conduction pure du cas homogène pour $Ra \ll Rc$. Lorsque Ra s'approche de Rc , on doit s'attendre à un couplage entre l'effet de l'hétérogénéité de la condition à la limite de la température et la bifurcation de Rayleigh-Bénard. Nous verrons, selon la valeur prise par k , que ce couplage est responsable d'une part, de la continuité ou non de la transition vers la convection, et d'autre part de la nature de la structure géométrique décrivant cette convection.

Nous parlerons d'imperfection forte suivant la terminologie de TAVANTZIS. & al et de NEEL, lorsque k est égal à k_c . Dans le cas contraire, il s'agira d'un phénomène d'imperfection faible.

2. Imperfection faible

2.1 Forçage périodique couplé à une structure convective tridimensionnelle ($k_x; k_y$).

Dans une couche suffisamment étendue, les cellules décrivant la convection de Rayleigh-Bénard adoptent, dans le plan horizontal, des configurations multiples. Dans un premier temps, on suppose que la structure convective est tridimensionnelle.

Nous désignons par $\varepsilon = \sqrt{Ra - Rc}$ l'amplitude de la convection naturelle et nous prenons l'amplitude du forçage périodique δ comme second paramètre.

Ainsi nous posons:

$$(2.1.1) \quad \theta = \varepsilon \theta_{01} + \varepsilon^2 \theta_{02} + \delta \theta_{10} + \delta^2 \theta_{20} + \varepsilon\delta \theta_{11} + \varepsilon^2\delta \theta_{12} + \dots$$

$$Ra = R_c + \varepsilon^2 R_{02} + \delta R_{10} + \delta^2 R_{20} + \varepsilon\delta R_{11} + \dots$$

De la même manière, on développe les trois composantes du champ de vitesse.

Afin d'alléger les calculs déjà assez longs, on va s'intéresser aux fluides à grand nombre de Prandtl. Les huiles aux silicones font partie de ces fluides. De plus leurs grandeurs thermophysiques ne varient pratiquement pas lorsque la température varie entre 10° et 100°C, si bien qu'elles font partie des fluides vérifiant l'approximation de Boussinesq.

L'introduction des expressions (2.1.1) dans le système (1.4) conduit à une suite infinie d'équations aux dérivées partielles linéaires que l'on peut résoudre analytiquement par récurrence.

à l'ordre ε , le problème est celui de la stabilité linéaire de Rayleigh-Bénard. On cherche des solutions particulières sous la forme:

$$\theta_{01} = A e^{i(k_x x + k_y y)} \sin \pi z + C.C$$

$$(2.1.2) \quad W_{01} = \frac{3}{2} \pi^2 A e^{i(k_x x + k_y y)} \sin \pi z + C.C$$

$$V_{01} = 3i\pi k_y A e^{i(k_x x + k_y y)} \cos \pi z + C.C$$

$$U_{01} = 3i\pi k_x A e^{i(k_x x + k_y y)} \cos \pi z + C.C$$

à l'ordre δ , nous résolvons le problème de la convection forcée bidimensionnelle due à la modulation de la température sur la surface inférieure. On obtient les mêmes expressions que (1.5). Il suffit de changer Ra par Rc

à l'ordre $\delta\epsilon$, on a :

$$U_{11x} + V_{11y} + W_{11z} = 0$$

$$\Delta(U_{11y} - V_{11x}) = 0$$

$$(2.1.3) \quad \Delta\theta_{11} + W_{11} = U_{10}\theta_{01x} + U_{01}\theta_{10x} + W_{10}\theta_{01z} + W_{01}\theta_{10z} - kU_{01}F(z) \sin kx \\ + W_{01}F'(z)\cos kx$$

$$\Delta^2 W_{11} + R_C \Delta_{\perp} \theta_{11} = -R_{10} \Delta_{\perp} \theta_{01}$$

Afin de résoudre (2.1.3) il est utile de développer $F(z) \cos n\pi z$ en série de Fourier:

$$F(z) \cos n\pi z = \sum_{n=1}^{\infty} f_{n,j} \sin n\pi z$$

$$\text{avec : } f_{n,j} = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n+j} + \frac{1}{n-j} \right) & \text{si } n \neq j \\ \frac{1}{2n\pi} & \text{si } n = j \end{cases}$$

Après avoir calculé les seconds membres de (2.1.3), on obtient l'équation vérifiée par $\theta_{11}(x,y,z)$:

$$(2.1.4) \quad \Delta^3 \theta_{11} - R_C \Delta_{\perp} \theta_{11} = -k_C^2 R_{10} A e^{i(k_x x + k_y y)} \sin \pi z \\ + \frac{A}{2} e^{i((k+k_x)x + k_y y)} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} [\alpha_j \sin(j+1)\pi z + \beta_j \sin j\pi z] \right. \\ \left. - \frac{3}{2} \pi^2 B [(k+k_x)^2 + k_y^2 + \pi^2]^2 \sin \pi z \right\} \\ + \frac{A}{2} e^{i((-k+k_x)x + k_y y)} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} [\alpha'_j \sin(j+1)\pi z + \beta'_j \sin j\pi z] \right. \\ \left. - \frac{3}{2} \pi^2 B [(-k+k_x)^2 + k_y^2 + \pi^2]^2 \sin \pi z \right\}$$

où les coefficients α_j , α'_j , β_j , β'_j , ainsi que les autres coefficients liés aux expressions des champs de température et de vitesse, aux différents ordres, dépendent de k , k_x et k_y . Les expressions développées de ces divers coefficients ont été reportées à l'annexe 2 pour ne pas alourdir cet exposé.

Le théorème de Fredholm (voir annexe) permet d'éliminer du second membre de (2.1.4) tous les termes résonnants avec $e^{i(k_x x + k_y y)} \sin \pi z$. Si $k \neq 2k_x$, ce que l'on suppose

pour l'instant, cette condition d'orthogonalité impose nécessairement $R_{10} = 0$. Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned} \theta_{11} = & + \frac{A}{2} e^{i((k+k_x)x + k_y y)} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} [C_j \sin(j+1)\pi z + D_j \sin j\pi z] + E(k) \sin \pi z \right\} \\ & + \frac{A}{2} e^{i((-k+k_x)x + k_y y)} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} [C'_j \sin(j+1)\pi z + D'_j \sin j\pi z] + E(-k) \sin \pi z \right\} + CC \end{aligned}$$

et le système (2.1.3) donne alors :

$$\begin{aligned} W_{11} = & + \frac{A}{2} e^{i((k+k_x)x + k_y y)} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} [K_j \sin(j+1)\pi z + L_j \sin j\pi z] + F(k) \sin \pi z \right\} \\ & + \frac{A}{2} e^{i((-k+k_x)x + k_y y)} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} [K'_j \sin(j+1)\pi z + L'_j \sin j\pi z] + F(-k) \sin \pi z \right\} + CC \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{11} = & i \frac{A}{2} e^{i((k+k_x)x + k_y y)} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} [M_j \cos(j+1)\pi z + N_j \cos j\pi z] + G(k) \cos \pi z \right\} \\ & + i \frac{A}{2} e^{i((-k+k_x)x + k_y y)} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} [M'_j \cos(j+1)\pi z + N'_j \cos j\pi z] + G(-k) \cos \pi z \right\} + CC \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{11} = & i \frac{A}{2} e^{i((k+k_x)x + k_y y)} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} [P_j \cos(j+1)\pi z + Q_j \cos j\pi z] + H(k) \cos \pi z \right\} \\ & + i \frac{A}{2} e^{i((-k+k_x)x + k_y y)} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} [P'_j \cos(j+1)\pi z + Q'_j \cos j\pi z] + H(-k) \cos \pi z \right\} + CC \end{aligned}$$

à l'ordre δ^2 on a :

$$U_{20x} + W_{20z} = 0$$

$$\Delta(U_{20y} - V_{20x}) = 0$$

$$(2.1.5) \quad \Delta\theta_{20} + W_{20} = U_{10}\theta_{10x} + W_{10}\theta_{10z} + W_{01}\theta_{10z} - kU_{10}F(z)\sin kx + W_{10}F'(z)\cos kx$$

$$\Delta^2 W_{20} + R_c \Delta_{\perp} \theta_{20} = 0$$

$$\text{Où: } \theta_{20} = W_{20} = \frac{\partial U_{20}}{\partial z} = \frac{\partial V_{20}}{\partial z} = 0 \text{ en } z=0; 1$$

Les équations (2.1.5) s'intègrent sans difficulté et donnent en tenant compte des conditions aux limites:

$$(2.1.6) \quad \theta_{20} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} [a_{1,j} \sin (j-1)\pi z + b_{1,j} \sin (l+j)\pi z + c_{1,j} \sin l\pi z] + \\ \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} [a'_{1,j} \sin (j-1)\pi z + b'_{1,j} \sin (l+j)\pi z + c'_{1,j} \sin l\pi z] \cos 2kx$$

$$W_{20} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{4k^2 R_c}{[4k^2 + (j-1)^2 \pi^2]^2} a'_{1,j} \sin (j-1)\pi z + \right. \\ \left. \frac{4k^2 R_c}{[4k^2 + (j+1)^2 \pi^2]^2} b'_{1,j} \sin (l+j)\pi z + \frac{4k^2 R_c}{[4k^2 + j^2 \pi^2]^2} c'_{1,j} \sin l\pi z \right] \cos 2kx$$

$$V_{20} = 0 \quad \text{et} \quad U_{20x} = -W_{20z}$$

à l'ordre $\delta^2 \varepsilon$, le système (1.4) devient :

$$(2.1.7) \quad \Delta \theta_{21} + W_{21} = U_{10} \theta_{11x} + U_{01} \theta_{20x} + U_{11} \theta_{10x} + U_{20} \theta_{01x} + W_{10} \theta_{11z} + W_{01} \theta_{20z} \\ + W_{11} \theta_{10z} + W_{21} \theta_{01z} - k U_{11} F(z) \sin kx + W_{11} F'(z) \cos kx$$

$$\Delta^2 W_{21} + R_c \Delta_{\perp} \theta_{21} = -R_{20} \Delta_{\perp} \theta_{01} - R_{11} \Delta_{\perp} \theta_{10} + R_{11} k^2 F(z) \cos kx$$

Pour que ce système ait une solution, il faut qu'une condition de compatibilité, en l'occurrence, la condition d'orthogonalité soit vérifiée. Après calcul des termes du second membre de (2.1.7), cette condition s'énonce comme suit :

$$\frac{R_{20}}{R_c} = \frac{1}{6\pi^2} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \{ \pi B_j [(k-k_x) (C_j + D_{j+1}) + (k+jk_x) (C' + D'_{j+1})] + \right. \\ \pi B_{j+1} [(k-(j+1)k_x) D'_j + (k+(j+1)k_x) D_j] + \pi B_{j+2} [(k-(j+2)k_x) C'_j + (k+(j+2)k_x) C_j] + \\ A_j [k(P'_j + Q'_{j+1}) - P_j - Q_{j+1}] + \pi j (K_j + L_{j+1} + K'_j + L'_{j+1}) \} + \\ A_{j+2} [k(P_j - P'_j) - \pi(j+2) (K_j + K'_j)] + k [(P_j - P'_j) f_{1,j+1} + (Q_j - Q'_j) f_{1,j}] + \\ A_{j+1} [k(Q_j - Q'_j) - \pi(j+1) (L_j + L'_j)] - 6\pi^3 [-a_{j+2,j} + a_{j,j+2} + c_{2,j}] \} + \\ \pi B_2 [(k-2k_x) E(-k) + (k+2k_x) E(k)] + A_2 [k (H(k) - H(-k)) - 2\pi(F(k) + F(-k))] \\ + k f_{1,1} (H(k) - H(-k)) - B (L_1 + L'_1 + F(k) + F(-k)) - 6\pi^3 b_{1,1} \} \quad (2.1.8)$$

A ce stade, nous n'avons considéré que les termes linéaires de la convection naturelle d'amplitude ε , ainsi que leur interaction avec la partie linéaire et non linéaire décrivant la

convection forcée (les termes en $\varepsilon\delta$ et $\varepsilon\delta^2$). Ceci nous a permis d'estimer analytiquement, en fonction de la taille de l'hétérogénéité, des valeurs prises par k_x , k_y et k ($k \neq 2k_x$), le déplacement de la valeur critique du nombre de Rayleigh au delà de laquelle un vrai mouvement de convection s'établit.

Les termes non linéaires de la convection naturelle (voir Annexe 1), déterminent la nature de la bifurcation entre un état proche de la conduction pure (convection forcée d'amplitude infinitésimale) et un état qualitativement différent, qui représente la convection. La prise en compte de ces termes fournit l'équation de LANDAU:

$$(2.1.9) \quad \frac{dA}{dt} = (Ra - R_{cr}) A - A^3$$

$$\text{où } R_{cr} = R_c + \delta^2 R_{20}(k, k_x, k_y)$$

L'équation (2.1.9) a la même forme que dans le cas homogène. Cela veut dire que l'hétérogénéité, dans le cas d'imperfection faible, ne modifie pas qualitativement la bifurcation de Rayleigh-Bénard. Son principal effet est de déplacer, à gauche ou à droite sur le diagramme de bifurcation, le point où se produit celle-ci. Cela signifie physiquement que l'hétérogénéité pourrait avoir un rôle stabilisateur ou déstabilisateur selon les valeurs prises par k , k_x et k_y .

La question que l'on se pose maintenant est de savoir si l'imperfection de la condition à la limite de la température va privilégier une des structures géométriques stationnaires parmi toutes celles qui sont possibles dans le cas homogène. Parmi toutes ces possibilités qui peuvent décrire la convection naissante, intéressons-nous à deux cas extrêmes.

La convection de Rayleigh-Bénard se présente sous la forme de :

- a) cellules bidimensionnelles ($k_x = k_c$ et $k_y = 0$).
- b) cellules dont l'axe est parallèle à Ox ($k_x = 0$ et $k_y = k_c$).

2.1.1. Forçage périodique couplé à la convection bidimensionnelle

On suppose que le mode stationnaire qui représente la convection de Rayleigh-Bénard est bidimensionnel. le champ de température pourrait s'écrire:

$$\theta_{01} = A e^{i k_c x} \sin \pi z + C.C \quad (2.1.10)$$

Etant donné que les opérateurs qui interviennent dans le système (1.4) régissant ce problème sont Δ , Δ_{\perp}, \dots , tous les résultats précédemment obtenus restent valables. Il suffit d'opérer le changement $k_x = k_c$ et $k_y = 0$. Ainsi le seuil de bifurcation de la solution (2.1.10) est:

$$R_{cr} = R_c + \delta^2 R_{20}(k, k_c, 0) \quad (2.1.11), \quad R_{20} \text{ étant fourni par (2.1.8)}$$

La figure (1) représente $\frac{R_{cr} - R_c}{R_c}$ en fonction de k pour $\delta = 0,1$.

On remarque que notre développement asymptotique (2.1.1) n'est plus valable au voisinage de $k=0$ et $k=k_c$. En fait, pour $k \rightarrow 0$, la partie principale de (2.1.11) s'écrit:

$$\frac{R_{cr} - R_c}{R_c} = O\left(\frac{\delta^2}{k^2}\right)$$

si bien que notre développement asymptotique (2.1.1) tombe en défaut dès que k devient du même ordre de grandeur que δ .

2.1.2. Forçage périodique couplé aux cellules convectives dont l'axe est parallèle à Ox

supposons maintenant que le champ de température est décrit par le mode:

$$(2.1.12) \quad \theta_{01} = A e^{i k_c y} \sin \pi z + C.C$$

Pour avoir le seuil de bifurcation de la solution (2.1.12), il suffit de remplacer k_x par 0 et k_y par k_c dans l'expression générale de R_{20} , donnée par (2.1.8):

$$(2.1.13) \quad R_{cr} = R_c + \delta^2 R_{20}(k, 0, k_c)$$

Cette nouvelle valeur critique du nombre de Rayleigh est représentée sur la figure (2) en fonction de k pour $\delta=0,1$.

Comme pour le cas bidimensionnel, on retrouve la même singularité au voisinage de $k=0$ et $k=k_c$.

Pour $k \rightarrow 0$, la partie principale de (2.1.11) s'écrit:

$$\frac{R_{cr} - R_c}{R_c} = O\left(\frac{\delta^2}{k^4}\right)$$

Pour ce problème, notre développement asymptotique (2.1.1) n'est plus valable pour des valeurs de k du même ordre que $\delta^{1/2}$.

2.2 Forçage périodique couplé à deux modes (k_x, k_y) et $(k_x, -k_y)$

On s'intéresse maintenant au cas où le mode décrivant la convection forcée est en résonance avec le mode tridimensionnel (k_x, k_y) qui représente la convection naturelle. Précisément, on s'intéresse à la détermination du seuil de bifurcation dans le cas où $k=2k_x$.

Supposons qu'à l'ordre ε , les champs de température et de vitesse sont de la forme:

$$\begin{aligned}
 \theta_{01} &= [A e^{i(k_x x + k_y y)} + B e^{i(k_x x - k_y y)}] \sin \pi z + C.C \\
 (2.2.1) \quad W_{01} &= \frac{3}{2} \pi^2 [A e^{i(k_x x + k_y y)} + B e^{i(k_x x - k_y y)}] \sin \pi z + C.C \\
 V_{01} &= 3i\pi k_y [A e^{i(k_x x + k_y y)} - B e^{i(k_x x - k_y y)}] \cos \pi z + C.C \\
 U_{01} &= 3i\pi k_x [A e^{i(k_x x + k_y y)} + B e^{i(k_x x - k_y y)}] \cos \pi z + C.C
 \end{aligned}$$

Dans ce cas, et pour $k = 2 k_x$, certains termes du second membre de (2.1.4) sont en $e^{i(k_x x + k_y y)} \sin \pi z$, $e^{i(k_x x - k_y y)} \sin \pi z$ et leur complexes conjugués. L'élimination de ces termes permet le calcul de la première correction non nulle de la valeur critique de Ra . On obtient alors:

$$(2.2.2) \quad \begin{cases} \frac{R_{10}}{R_c} A + \frac{1}{\pi^2} [\pi A_2 + 1/2] [\pi^2 - k^2/2] \bar{B} = 0 \\ \frac{R_{10}}{R_c} \bar{B} + \frac{1}{\pi^2} [\pi A_2 + 1/2] [\pi^2 - k^2/2] A = 0 \end{cases}$$

Ainsi que le complexe conjugué de (2.2.2).

Le système (2.2.2) a une solution non triviale à condition que soit réalisée la condition:

$$\frac{R_{10}}{R_c} = \pm \frac{1}{\pi^2} [\pi A_2 + 1/2] [\pi^2 - k^2/2]$$

On optera pour le signe $-$, puisqu'on s'intéresse à la première valeur critique qui déstabiliserait l'état de base. Ce choix impose $A = \bar{B}$, autrement dit la configuration

convective qui pourrait d'abord déstabiliser l'état de base se présente sous la forme de cellules rectangulaires:

$$\begin{aligned}\theta_{01} &= A [e^{i(k_x x + k_y y)} + e^{i(-k_x x + k_y y)}] \sin \pi z + C.C \\ &= 4 A \cos k_x x \cos k_y y\end{aligned}$$

avec $k_x = k/2$ et $k_x^2 + k_y^2 = k_c^2$

La figure (3) représente $\frac{R_{cr} - R_c}{R_c}$ en fonction de k pour $\delta = 0,1$.

2.3 Conclusion

L'étude du problème classique de Rayleigh-Bénard dans un milieu d'extension infinie, révèle l'existence d'une infinité de modes stationnaires déstabilisant l'état de conduction pure. De la combinaison de cette multiplicité de configurations spatiales pouvant exister, résulte une dynamique turbulente ; cela se produit au seuil même de la première bifurcation [BERGE]. Nous avons montré que ce scénario peut être modifier par la présence de conditions aux limites non homogènes de la température. Ces dernières ont été choisies ici sous la forme d'une fonction périodique en la variable d'espace x . En cas d'imperfection faible, considéré ci-dessus, les principaux résultats sont les suivants:

i) L'hétérogénéité force le fluide à adopter un mouvement faible de "convection forcée", dont l'amplitude est de l'ordre de la taille de l'hétérogénéité.

ii) Cet état de " convection forcée" perd sa stabilité, en faveur d'une structure convective décrite par un mode (k_x, k_y) , dès lors que le nombre de Rayleigh dépasse une valeur critique qui dépend elle-même de la taille de l'hétérogénéité, de son nombre d'onde k , et des valeurs prises par k_x et k_y . En comparant ces nouvelles valeurs critiques du nombre de Rayleigh, on s'aperçoit que le mode le plus déstabilisateur est celui où $k_x = k/2$. Autrement dit, l'imperfection des conditions aux limites de la température est responsable de la sélection, parmi une infinité de configurations convectives possibles en son absence, d'une structure rectangulaire particulière. Cette conclusion reste valable, tant que cette imperfection demeure périodique. En effet, dès que $k \rightarrow 0$, la structure privilégiée est composée de rouleaux dont l'axe est parallèle à Ox .

iii) Toutes ces bifurcations se produisent d'une façon nette "bifurcation pitchfork".

Il reste à noter que ces résultats ne sont valables que si k est loin d'un voisinage de k_c .

convection bidimensionnelle

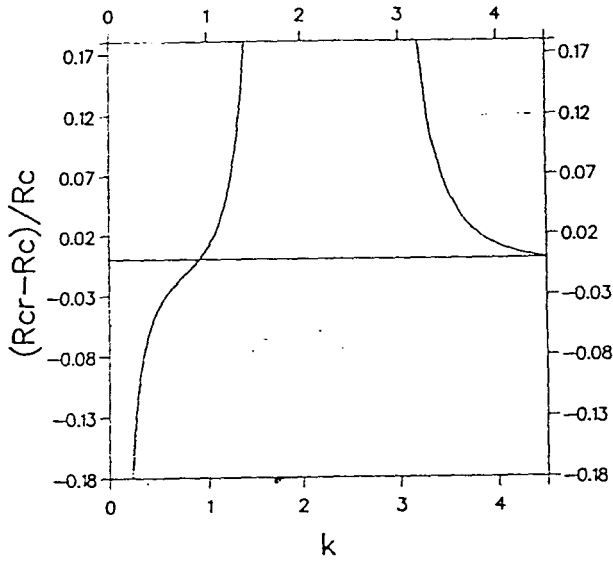


figure (1)

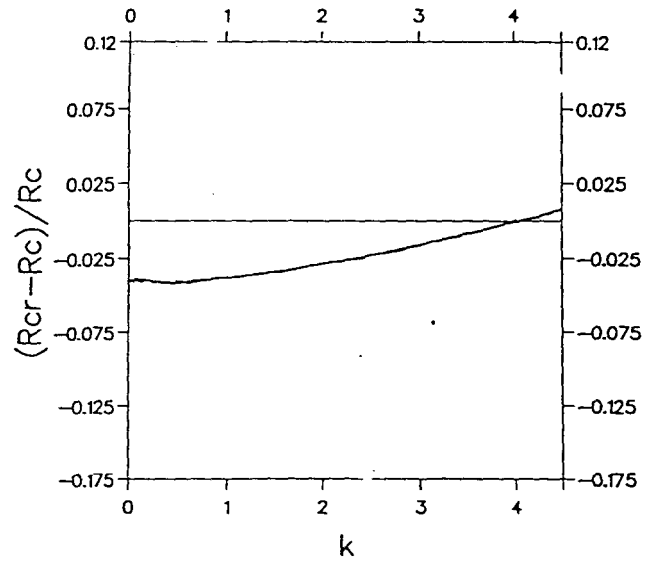


figure (3)

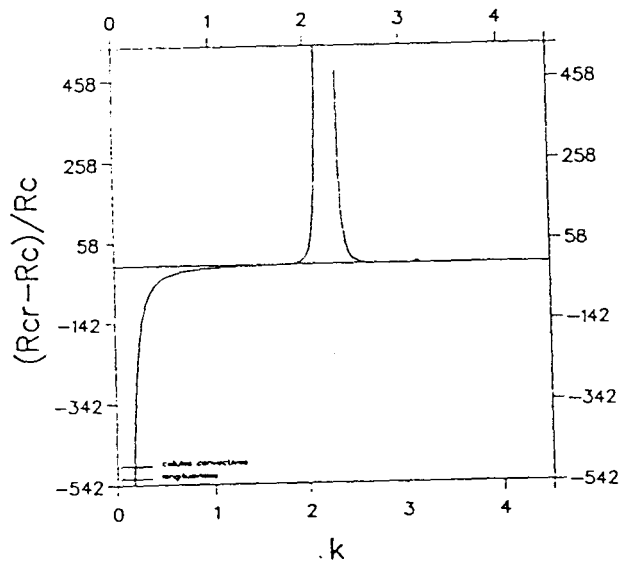


figure (2)

$k_c \approx 2,22$

3. Imperfection forte

Dans cette partie, on suppose que l'imperfection périodique de la condition à la limite de la température contient une composante de nombre d'onde $k = k_c$. L'expression du champ de température, donnée par le système (1.4) à l'ordre δ , s'écrit pour $Ra \neq Rc$:

$$(3.1) \theta_{10} = [e^{ik_c x} + e^{-ik_c x}] \left[-\frac{1}{\pi} \frac{Rc - (k_c^2 + \pi^2)^2}{Ra - Rc} \sin \pi z + \sum_{j=2}^{\infty} A_j \sin j\pi z \right]$$

où A_j a la même expression que dans (1.5) avec $k = k_c$.

On remarque que θ_{10} augmente infiniment dès que $Ra \rightarrow Rc$.

Comme on s'intéresse à un développement asymptotique de la solution perturbée ($\delta \neq 0$) autour de la solution décrivant la convection naturelle d'amplitude ε , on peut écrire: $Ra = Rc + \varepsilon^2 R_{02}$. La solution perturbée s'écrit alors:

$$(3.2) \theta = \varepsilon \theta_{01} + \dots + \frac{\delta}{\varepsilon^2} [e^{ik_c x} + e^{-ik_c x}] \left[-\frac{1}{\pi} \frac{Rc - (k_c^2 + \pi^2)^2}{R_{02}} \sin \pi z + \sum_{j=2}^{\infty} A_j \sin j\pi z \right] + o\left(\frac{\delta}{\varepsilon^2}\right)$$

Si θ_{01} est décrit par des rouleaux d'axe parallèle à Oy (convection bidimensionnelle) où par une configuration rectangulaire tel que $k_x = \frac{k_c}{2}$, le développement asymptotique (3.2) tombe en défaut lorsque $\varepsilon = O(\delta^{1/3})$. Dans ce cas, on est dans une zone de résonance. Pour obtenir les équations valables à l'intérieur de cette zone de résonance, on adopte une méthode suggérée par (ABLOWITZ et al), et qui consiste à développer les champs de température et de vitesse, ainsi que Ra sous la forme:

$$(3.3) \begin{cases} \theta = \delta^{1/3} \theta_1 + \delta^{2/3} \theta_2 + \delta \theta_3 + \dots \\ \vec{u} = \delta^{1/3} \vec{u}_1 + \delta^{2/3} \vec{u}_2 + \delta \vec{u}_3 + \dots \\ Ra = Rc + \delta^{2/3} R_2 + \dots \end{cases}$$

De même, afin de considérer la partie instationnaire de (1.4), on introduit un temps lent de l'ordre de $Ra - Rc$, $t = \delta^{2/3} t$.

Les termes d'indice 1 représentent la convection classique de Rayleigh-Bénard. On suppose qu'elle est décrite par une structure qui correspond à la superposition de trois modes de rouleaux formant entre eux un angle de 120° . Elle s'écrit:

$$\theta_1 = \{ \bar{A} \exp[-ik_c x] + B \exp[ik_c(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y)] + C \exp[ik_c(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y)] \} \sin \pi z + CC$$

$$W_1 = \frac{3}{2} \pi^2 \theta_1 \quad (3.3)$$

$$V_1 = 3i\pi \frac{\sqrt{3}}{2} k_c \{ B \exp[ik_c(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y)] - C \exp[ik_c(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y)] \} \cos \pi z + CC$$

$$U_1 = 3i\pi \frac{k_c}{2} \{ -2\bar{A} \exp[-ik_c x] + B \exp[ik_c(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y)] + C \exp[ik_c(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y)] \} \sin \pi z + CC$$

Pour trouver les solutions aux ordres supérieurs, on insère le développement asymptotique (3.3) dans le système (1.4) et on compare les termes du même ordre en δ .

Après calcul, les solutions du problème à l'ordre $\delta^{2/3}$ sont:

$$(3.4) \quad \theta_2 = \{ b \bar{A} \exp(-ik_c \frac{3}{2}x) [\bar{B} \exp(-ik_c \frac{\sqrt{3}}{2}y) + \bar{C} \exp(ik_c \frac{\sqrt{3}}{2}y)] + \frac{a}{2} [\exp(-ik_c \frac{1}{2}x) (B \bar{A} \exp(ik_c \frac{\sqrt{3}}{2}y) + C \bar{A} \exp(-ik_c \frac{\sqrt{3}}{2}y)) + CC] + a \bar{B} \bar{C} \exp(-ik_c x) + \frac{b}{2} (B \bar{C} \exp[ik_c \sqrt{3}y] + CC) - \frac{3\pi}{8} [|A|^2 + |B|^2 |C|^2] \} \sin 2\pi z + CC$$

$$\text{avec: } (3.5) \quad \begin{cases} b = \frac{3\pi^3}{4} \frac{[3k_c^2 + 4\pi^2]^2}{3k_c^2 R_c - [3k_c^2 + 4\pi^2]^3} \\ a = \frac{9\pi^3}{4} \frac{[k_c^2 + 4\pi^2]^2}{k_c^2 R_c - [k_c^2 + 4\pi^2]^3} \end{cases}$$

W_2, V_2 et U_2 sont données par:

$$(3.6) \quad \begin{cases} \Delta^2 W_2 = -R_c \Delta_{\perp} \theta_2 \\ \Delta_{\perp} V_2 = -W_2 z y \\ U_{2y} = V_{2x} \end{cases}$$

En tenant compte de (3.3), (3.4) et (3.6), le système (1.4), réduit à une équation vérifiée par θ_3 , fait apparaître dans le second membre de celle-ci, des termes proportionnels aux modes critiques de l'opérateur du premier membre. L'élimination de ces termes résonnants fournit trois équations aux amplitudes déterminant le comportement de A, B et C :

$$(3.7) \begin{cases} a_0 \frac{\partial B}{\partial t} = B \left[\frac{R_2}{Rc} - a_1 |A|^2 - a_2 |B|^2 - a_3 |C|^2 \right] \\ a_0 \frac{\partial C}{\partial t} = C \left[\frac{R_2}{Rc} - a_1 |A|^2 - a_2 |C|^2 - a_3 |B|^2 \right] \\ a_0 \frac{\partial A}{\partial t} = A \left[\frac{R_2}{Rc} - a_1 (|B|^2 + |C|^2) - a_2 |A|^2 \right] - a_4 \end{cases}$$

Les coefficients de ces équations sont:

$$a_0 = \frac{2}{3\pi^2} \left(1 + \frac{1}{Pr}\right); \quad a_1 = -\frac{\pi b}{4} + \frac{3\pi^2}{4}; \quad a_2 = \frac{3\pi^2}{4}; \quad a_3 = \frac{3\pi^2}{4} - \frac{\pi}{4}(a+b); \quad a_4 = \frac{2}{3\pi}$$

Rappelons qu'un système analogue pourrait être obtenu en s'intéressant à l'effet d'une imperfection sur la convection en milieu poreux [M.C. NEEL].

Intéressons-nous au comportement de certaines solutions particulières de (3.7) lorsque R_2 varie.

3.1 Problème bidimensionnel

On suppose que les cellules convectives se présentent sous la forme de rouleaux d'axe parallèle à Oy . Cela revient à poser $B = C = 0$ dans (3.7):

$$(3.8) \quad a_0 \frac{\partial A}{\partial t} = A \left[\frac{R_2}{Rc} - a_2 |A|^2 \right] - a_4$$

En posant $A = \hat{A} e^{i\varphi}$, où \hat{A} est réel, la partie stationnaire de (3.8) s'écrit:

$$(3.9) \quad \hat{A} \cos \varphi \left[\frac{R_2}{Rc} - a_2 \hat{A}^2 \right] - a_4 = 0$$

$$(3.10) \quad \hat{A} \sin \varphi \left[\frac{R_2}{Rc} - a_2 \hat{A}^2 \right] = 0$$

L'équation (3.10) nous fournit deux familles de solutions, $\varphi = 0 \pmod{2\pi}$ et $\varphi = \pi \pmod{2\pi}$ et en reportant dans l'équation (3.9) nous trouvons:

$$(3.11) \quad \varphi = 0, \quad \hat{A} \left[\frac{R_2}{R_c} - a_2 \hat{A}^2 \right] - a_4 = 0$$

$$(3.12) \quad \varphi = \pi, \quad \hat{A} \left[\frac{R_2}{R_c} - a_2 \hat{A}^2 \right] + a_4 = 0$$

Les diagrammes des bifurcations de (3.11) et (3.12) sont indiqués à la figure(4):

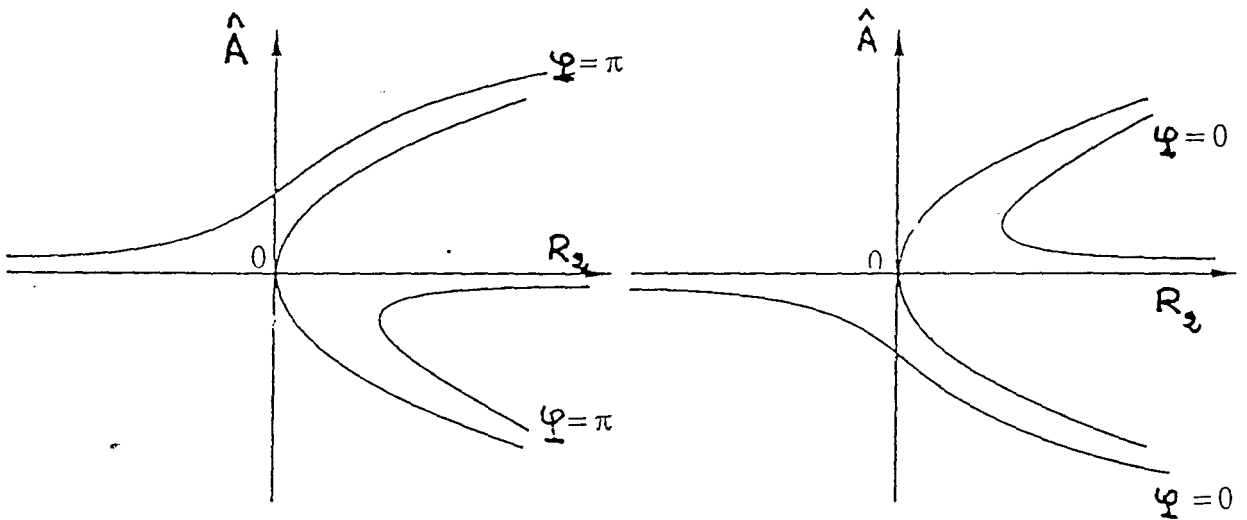


figure (4)

Pour $R_2 > R_{20} = 3 a_2^{1/3} \left(\frac{a_4}{2} \right)^{2/3}$, (3.11) et (3.12) admettent trois solutions de la forme:

$$(3.13) \quad \text{pour } \varphi = \pi, \quad \hat{A}_1 = \left(\frac{R_2}{R_c a_2} \right)^{1/2} \left\{ 1 + \left(\frac{R_c}{R_2} \right)^{3/2} \frac{a_4 a_2}{2} \right\}^{1/2};$$

$$\hat{A}_2 = - \left(\frac{R_2}{R_c a_2} \right)^{1/2} \left\{ 1 - \left(\frac{R_c}{R_2} \right)^{3/2} \frac{a_4 a_2}{2} \right\}^{1/2} \quad \text{et} \quad \hat{A}_3 = -a_4 \frac{R_c}{R_2}$$

pour $\varphi = 0$, on a des solutions opposées à celles obtenues pour $\varphi = \pi$.

Pour $R_2 < R_{20}$, seule \hat{A}_1 est solution de (3.11) et (3.12).

Étudions la stabilité de (3.13), en posant: $A_j(t) = \hat{A}_j + a_j(t)$

$a_j(t)$ est une petite perturbation de l'état stationnaire \hat{A}_j .

On écrit $a_j(t)$ sous la forme: $a_j(t) = \hat{a}_j \exp(\sigma t)$ où $\sigma = \sigma_r + i \sigma_i$

\hat{a}_j est l'amplitude de la perturbation à l'état initial. L'équation (3.8) linéarisée autour de la solution (3.13) donne:

$$(3.14) \quad \begin{cases} a_0 \sigma_r = \frac{R_2}{R_c} - 3 a_2 \hat{A}_j^2 \\ \sigma_i = 0 \end{cases}$$

En substituant \hat{A}_j^2 par leur valeur, on trouve que $\sigma_r < 0$ pour $i = 1; 2$ et $\sigma_r > 0$ pour $i = 3$. On en déduit que les solutions d'équilibre d'amplitude \hat{A}_1 et \hat{A}_2 sont stables. Ceci étant, pour $R_2 < R_{20}$ le système ayant adopté une solution d'équilibre d'amplitude \hat{A}_1 , continue à le faire pour $R_2 > R_{20}$.

3.2 Problème tridimensionnel

Intéressons-nous maintenant à des nouvelles solutions stationnaires de (3.7) telles que $B=C \neq 0$.

On pose $B = \hat{B} e^{i\phi}$ et $A = \hat{A}$; on a alors:

$$(3.15.a) \quad a_1 \hat{A}^2 + (a_2 + a_3) \hat{B}^2 = \frac{R_2}{R_c}$$

$$(3.15.b) \quad \hat{A} \left[\frac{R_2}{R_c} - 2 a_1 \hat{B}^2 - a_2 \hat{A}^2 \right] - a_4 = 0$$

Si on substitue dans (3.15.b) l'expression de $\frac{R_2}{R_c}$ tirée de (3.15.a), on a:

$$(3.16) \quad (a_1 - a_2) \hat{A}^3 + (a_2 + a_3 - 2 a_1) \hat{A} \hat{B}^2 - a_4 = 0$$

(3.15.a) est l'équation d'une ellipse de centre $O(0, 0)$, de sommets:

$$\hat{A}_s \left(\pm \frac{1}{a_1} \frac{R_2}{R_c}, 0 \right) \text{ et } \hat{B}_s \left(\pm \frac{1}{a_2 + a_3} \frac{R_2}{R_c}, 0 \right)$$

Nous avons représenté (3.15.a) et (3.16) sur la figure (5) pour $\hat{A} > 0$ et $\hat{B} > 0$.La courbe qui représente (3.16) rencontre l'axe $O \hat{A}$ au point $((\frac{a_4}{a_1 - a_2})^{1/3}, 0)$.

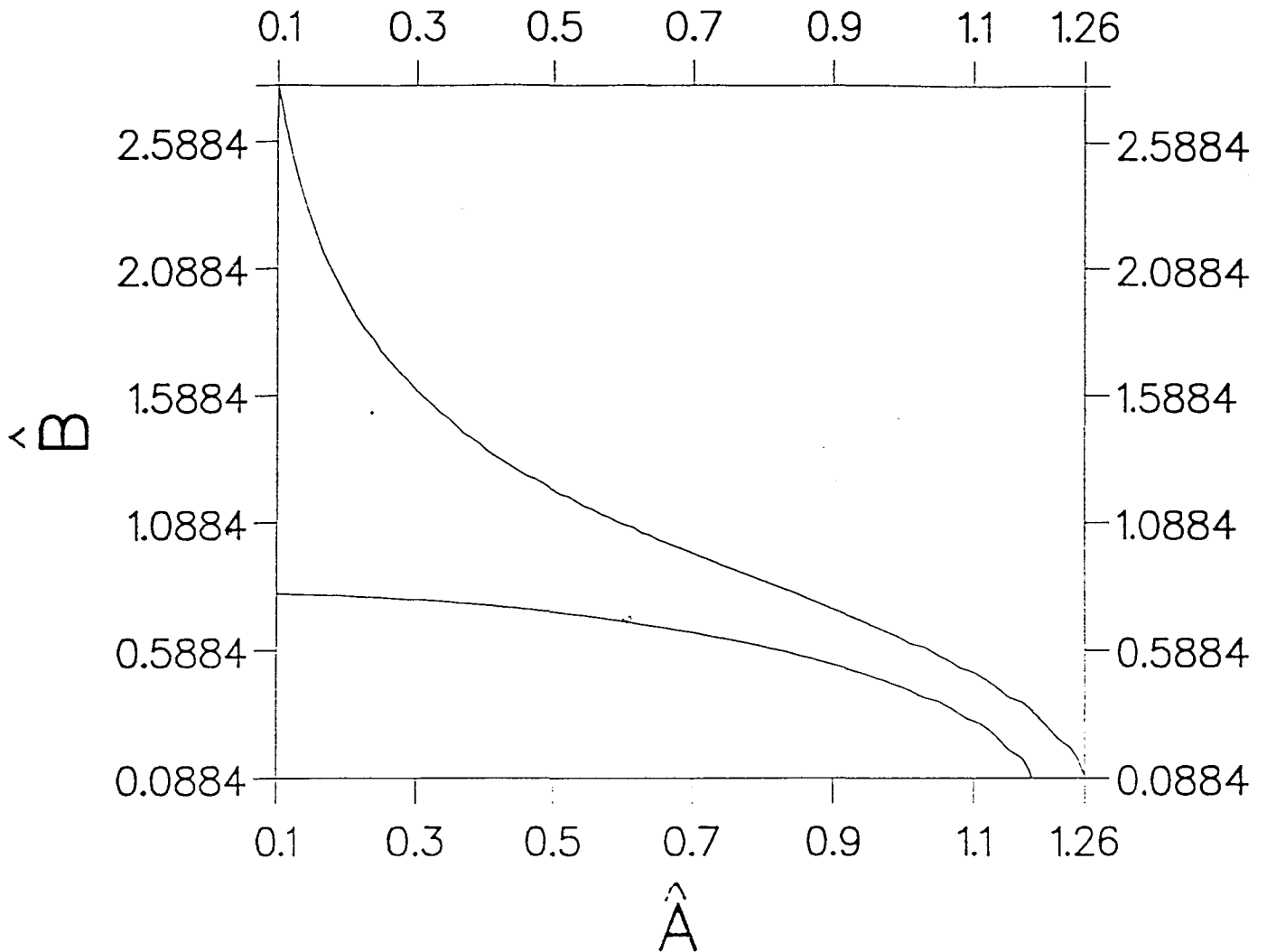


Figure (5)

Maintenant, pour que ces deux équations aient au moins une solution commune, il est suffisant que l'on ait: $\frac{1}{a_1} \frac{R_2}{Rc} > (\frac{a_4}{a_1 - a_2})^{1/3}$.

Pour $\frac{R_2}{Rc} = a_1 \left(\frac{a_4}{a_1 - a_2}\right)^{1/3}$, il y a bifurcation à partir de cellules convectives se présentant sous la forme de rouleaux d'axe parallèle à Oy vers une solution tridimensionnelle composée de trois rouleaux formant entre eux un angle de 120° . On a affaire à des cellules hexagonales si de plus les deux amplitudes \hat{A} et \hat{B} sont égales.

3.3 Conclusion

Si l'imperfection périodique de la condition à la limite de la température est telle que son nombre d'onde k coïncide avec celui du mode critique décrivant la convection naturelle du cas homogène, une sorte de résonance apparaît au voisinage de la valeur critique du nombre de Rayleigh Rc . Loin de cette zone de résonance, et pour des valeurs du nombre de Rayleigh petites devant Rc , un mouvement convectif apparaît sous la forme de rouleaux d'axe parallèle à Oy. Son amplitude, de l'ordre de la taille de l'inhomogénéité δ , grandit au fur et à mesure que l'on s'approche de la zone de résonance où elle prend des valeurs de l'ordre de $\delta^{1/3}$. La transition entre la région subcritique et la région supercritique se produit d'une façon continue, contrairement à la fois, au problème homogène et à celui lié à une imperfection faible. Lorsque le nombre de Rayleigh atteint une certaine valeur que nous avons déterminée, une bifurcation peut se produire, à partir de la solution bidimensionnelle, pour donner naissance à des cellules hexagonales.

CHAPITRE 2: INHOMOGENEITE LENTEMENT VARIABLE DANS L'ESPACE.

Position du problème

Nous avons vu au chapitre précédent que notre étude cesse d'être valable dès que l'inomogénéité spatiale de la condition à la limite de la température se présente sous la forme d'une fonction aperiodique ($k \rightarrow 0$). Dans le présent chapitre, nous aborderons ce cas en considérant que l'imperfection est une fonction lentement variable de la variable d'espace x . Deux manières distinctes seront envisagées pour la description de cette fonction. Cette fonction est choisie de telle sorte qu'elle fait apparaître un certain nombre de taches thermiques où la variation de température entre les deux surfaces a un maximum local. Au voisinage de ces taches thermiques, le nombre de Rayleigh local est proche de la valeur critique R_c du problème homogène. Ce genre d'imperfection pourrait être adéquat pour décrire la convection atmosphérique et océanique. En effet, le rayonnement solaire éclaire la surface de la terre et celles des océans d'une façon non uniforme, de telle sorte que l'on observe des zones plus chaudes que d'autres. Le problème de l'interaction de cette sorte d'imperfection et de la convection de Rayleigh-Bénard se présentant sous forme de rouleaux dont l'axe est parallèle à Oy , a été étudié en détail par WALTON. Ici nous le généralisons en supposant que la convection pourrait se présenter sous forme de rouleaux obliques. Nous verrons qu'en fonction de la taille de l'hétérogénéité, le système se voit forcer d'adopter une configuration qui n'est pas nécessairement bidimensionnelle.

Problème de la tache thermique

1. Formulation du problème

$$\text{-----} T_1$$

$$\text{-----} T_1 + \Delta T \left(1 - \delta \text{th}^2 \frac{x}{L}\right) \quad 0 < \delta \leq 1$$

Le mouvement du fluide est régi par les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie.

Dans l'approximation de Boussinesq, Ces équations, adimensionnées comme au chapitre précédent, donnent le système (1.1).

Nous avons considéré des surfaces libres délimitant la couche fluide en $z=0$ et $z=1$. Les conditions aux limites du problème s'écrivent alors:

$$(1.2) \quad T = 1 - \delta \text{th}^2 \epsilon x \quad \text{en } z=0 \quad W_z = \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \text{ en } z=0; 1$$

$$T = 0 \quad \text{en } z = 1$$

Où δ est l'amplitude de la variation et ϵ , le rapport de la profondeur d à l'échelle L de la variation. Dans ce cas, nous avons une seule tache thermique en $x = 0$.

Le gradient de température imposé en $z = 0$ va engendrer un écoulement bidimensionnel dont les grandeurs physiques dépendent de z et de la variable lente $X = \epsilon x$, contrairement à l'état de base du problème classique de Rayleigh-Bénard où la chaleur est transmise uniquement par conduction et où les composantes de la vitesse sont nulles.

2. Ecoulement de Base

Pour calculer les composantes des champs de vitesse et de température de l'écoulement de base bidimensionnel, on pose :

$$(2.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} = 0, \quad v = \frac{\partial}{\partial y} = 0, \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial}{\partial X}$$

Pour $\epsilon \ll 1$, on cherche des solutions de la forme :

$$(2.2) \quad \begin{pmatrix} T_B \\ W_B \\ U_B \end{pmatrix} = \sum_{r=0}^{\infty} \epsilon^{2r} \begin{pmatrix} T_r \\ \epsilon^2 W_r \\ \epsilon U_r \end{pmatrix}$$

La partie stationnaire du système (1.1) et les expressions des conditions aux limites (1 . 2) d e v i e n n e n t :

$$(2.3) \quad \varepsilon \frac{\partial U_B}{\partial X} + \frac{\partial W_B}{\partial z} = 0$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} \right] T_B = \varepsilon U_B \frac{\partial T_B}{\partial X} + W_B \frac{\partial T_B}{\partial z}$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} W_B \right] + Ra \varepsilon^2 \frac{\partial^2 T_B}{\partial X^2} = \frac{1}{Pr} \left[\nabla^2 \left(\varepsilon U_B \frac{\partial W_B}{\partial X} + W_B \frac{\partial W_B}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \varepsilon^2 \left(\frac{\partial U_B}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_B}{\partial z} \right)^2 + 2\varepsilon \frac{\partial W_B}{\partial X} \frac{\partial U_B}{\partial z} \right\} \right]$$

$$(2.4) \quad T_B = 1 - \delta \text{th}^2 X \quad \text{en } z=0 \quad ; \quad T_B = 0 \quad \text{en } z = 1;$$

$$W_B = \frac{\partial U_B}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = 1$$

En substituant T_B , U_B , et W_B par leur développement (2.2) dans (2.3) et en considérant les conditions aux limites (2.4), on obtient pour les premiers termes :

$$(2.5) \quad \begin{cases} T_0 = (1-z) (1-\delta \bar{F}(X)) \\ W_0 = Ra G_0(z) \bar{F}'(X) \\ U_0 = -Ra G'(z) \bar{F}'(X) \end{cases}$$

avec $G_0(z) = \frac{1}{360} z (3z^4 - 15z^3 + 20z^2 - 8)$ et $\bar{F}(X) = \text{th}^2 X$

On pourra calculer autant de composantes du développement (2.2) que l'on voudra; cependant, on s'arrête aux premiers termes qui seront utiles dans ce qui suit.

On remarque qu'au voisinage de la tache thermique ($X=0$), les particules fluides ont tendance à se déplacer verticalement, et au fur et à mesure qu'elles s'éloignent de la tache thermique, elles ont tendance à se déplacer horizontalement.

3 Stabilité Linéaire

3.1 $\delta = O(1)$

On considère l'effet des petites perturbations tridimensionnelles sur l'état de base. Ecrivons les composantes de la vitesse et la température sous la forme :

$$(3.1) \quad \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_B(X,z) \\ 0 \\ W_B(X,z) \\ T_B(X,z) \end{pmatrix} + \Delta \begin{pmatrix} \bar{U} \\ \bar{V} \\ \bar{W} \\ \bar{T} \end{pmatrix} \quad \Delta \ll 1$$

En introduisant les expressions (3.1) dans le système (1.1), il apparaît deux échelles horizontales : l'une caractérisée par la variable x liée à la perturbation tridimensionnelle, et la seconde est l'échelle caractérisée par la variable X liée à l'état de base. Dans le travail qui suit, on va utiliser une technique d'échelles multiples, suggérée par les deux échelles x et X .

On fait introduire la variable rapide :
$$\eta = \frac{\varphi(X)}{\varepsilon} \quad (3.2)$$

où $\varphi(X)$ devra être déterminée dans la suite du travail.

Les composantes de la vitesse et de la température sont fonctions de X, η, z, y , avec :

$$(3.3) \quad \frac{\partial}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial X} + \frac{d\varphi}{dX} \frac{\partial}{\partial \eta}$$

Les expressions des opérateurs ∇^2 et ∇^4 se trouvent dans l'annexe 2

Après avoir introduit les expressions précédentes dans le système (1.1) linéarisé (termes d'ordre Δ), on développe les perturbations ainsi que le nombre de Rayleigh en série de puissances en ε :

$$(3.4) \quad \begin{cases} \bar{q} = \bar{q}_0(X, \eta, y, z, t) + \varepsilon \bar{q}_1(X, \eta, y, z, t) + \dots \\ Ra = R_0 + \varepsilon R_1 + \varepsilon^2 R_2 + \dots \end{cases}$$

\bar{q} représente la perturbation du champ de température où celui de la vitesse.

A l'ordre $\varepsilon^{(0)}$, on trouve :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (\varphi')^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{\partial}{\partial t} \right] \bar{\theta}_0 + [1 - \delta \bar{F}(x)] \bar{W}_0 = 0 \quad (3.5)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (\varphi')^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial t} \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (\varphi')^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] \bar{W}_0 + \text{Ra} \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + (\varphi')^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] \bar{\theta}_0 = 0$$

$$\varphi' \frac{\partial}{\partial \eta} \bar{U}_0 + \frac{\partial}{\partial y} \bar{V}_0 + \frac{\partial}{\partial z} \bar{W}_0 = 0$$

$$\left[-\frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial t} + \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (\varphi')^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] \right] \left[\frac{\partial}{\partial y} \bar{U}_0 - \varphi' \frac{\partial}{\partial \eta} \bar{V}_0 \right] = 0$$

$$\text{avec: } \bar{\theta}_0 = \bar{W}_0 = \frac{\partial}{\partial z} \bar{U}_0 = \frac{\partial}{\partial z} \bar{V}_0 = 0 \quad \text{en } z=0 \text{ et } z=1$$

En combinant les deux premières équations (3.5), on arrive à une équation vérifiée par \bar{W}_0 :

$$(3.6) \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (\varphi')^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{\partial}{\partial t} \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (\varphi')^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial t} \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (\varphi')^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] \bar{W}_0 - (1 - \delta \bar{F}(X)) \text{Ra} \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + (\varphi')^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] \bar{W}_0 = 0$$

$$\text{où: } \bar{W}_0 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \bar{W}_0 = \frac{\partial^4}{\partial z^4} \bar{W}_0 = 0 \quad \text{en } z=0 \text{ et } z=1$$

On s'intéresse aux solutions sous formes de rouleaux obliques .Sans restreindre la généralité, on pose :

$$(3.7) \quad \bar{W}_0 = A(X) \exp (i [\eta + k_y y] + \sigma t) \sin \pi z$$

Le problème consiste à calculer le taux de croissance σ de chaque mode.

(3.6) et (3.7) fournissent l'équation de dispersion pour σ :

$$(3.8) \quad \frac{1}{\text{Pr}} [\pi^2 + k_y^2 + \varphi'^2] \sigma^2 + \left[1 + \frac{1}{\text{Pr}} \right] [\pi^2 + k_y^2 + \varphi'^2]^2 \sigma + [\pi^2 + k_y^2 + \varphi'^2]^3 -$$

$$[k_y^2 + \varphi'^2] \text{Ra} [1 - \delta \bar{F}] = 0$$

σ étant réelle, tous les modes normaux sont des fonctions monotones croissantes ou décroissantes du temps.

L'état marginal pour ce problème est obtenu pour $\sigma = 0$. On obtient ainsi la relation :

$$(3.9) \quad \bar{R} = \frac{[k_y^2 + \varphi'^2]}{[\pi^2 + k_y^2 + \varphi'^2]^3}$$

où : $\bar{R} = R_0[1 - \delta \bar{F}]$: le nombre de Rayleigh local

k_y : nombre d'onde longitudinal

Afin d'avoir le point le plus instable pour notre problème, rappelons que pour le cas classique ($\delta=0$), on obtient la courbe de stabilité neutre $R = R_C(k)$. Pour des nombres de Rayleigh inférieurs à $R_C(k)$, le mode de nombre d'onde k est amorti. Pour des nombres de Rayleigh supérieurs à $R_C(k)$, on a au contraire amplification du mode correspondant. Le minimum de $R_C(k)$ est obtenu pour un nombre d'onde critique k_C , $R_C(k) = R_C$. Une analyse purement locale pour chaque X permet d'affirmer qu'un mouvement de convection est possible si $\bar{R} > R_C$. Or, vu la forme de $\bar{F}(X)$, le nombre de Rayleigh local est plus grand au voisinage de $X = 0$ qu'à celui de $X = \pm\infty$. On peut donc s'attendre à un mouvement convectif au centre plutôt qu'à $\pm\infty$, et cela se produirait pour $\bar{R}(0) = R_C$ et $[k_y^2 + \varphi'^2(0)]^{\frac{1}{2}} = k_C$.

Au voisinage de $X=0$ où l'instabilité est la plus forte, (3.9) permet de calculer $\varphi'(X)$ en considérant $R_0 = R_C$ et $\varphi'^2(0) = k_x^2 = O(1)$:

$$(3.10) \quad \begin{cases} \varphi'^2(X) = k_x^2 \pm 2ik_C C \delta^{1/2} X + \dots & \text{avec } C = \pi \left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \varphi'^2(X) = -8 k_x^2 + \frac{3}{4} \pi^2 \delta X^2 + \dots \end{cases}$$

où $k_x = \varphi'(0)$ est le nombre d'onde transversal

(3.10) admet six solutions pour $\varphi'(X)$. Les solutions qui nous intéressent sont celles qui décroissent quand $|X|$ croît. On ne retient dans la suite que celles-là. Elles s'écrivent:

$$(3.11) \quad \varphi'_{1,2}(X) = \pm k_x + iC\delta^{1/2} \frac{k_C}{k_x} X + \dots$$

Pour les autres composantes de la vitesse et de la température, on a :

$$(3.12) \begin{cases} \bar{U}_0 &= \frac{i\pi\varphi'(X)}{k_y^2 + \varphi'^2} A(X) \exp i [\eta + k_y y] \cos \pi z \\ \bar{V}_0 &= \frac{i\pi\pi}{k_y^2 + \varphi'^2} A(X) \exp i [\eta + k_y y] \cos \pi z \\ \bar{\theta}_0 &= \frac{1 - \delta\bar{F}}{k_y^2 + \pi^2 + \varphi'^2} A(X) \exp i [\eta + k_y y] \sin \pi z \end{cases}$$

$A(X)$ ne peut être déterminée qu'en considérant les termes d'ordre ε .

A cet ordre, on a le système :

$$i\varphi'(X)\frac{\partial\bar{U}_1}{\partial\eta} + \bar{V}_{1y} + \bar{W}_{1z} = -\bar{U}_{0X} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi^2}{\partial \eta^2} \right]^2 \bar{W}_1 + \text{Rc} \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \varphi'^2 \right] \bar{\theta}_1 = -\text{R1} \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \varphi'^2 \right] \bar{\theta}_0 - \text{Rc} \left[2i\varphi' \frac{\partial}{\partial X} + i\varphi'' \right] \\ & \bar{\theta}_0 - i \left[4\varphi' \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \frac{\partial}{\partial X} + 2\varphi'' \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - 6\varphi'^2 \varphi'' - 4\varphi'^2 \varphi'' - 4\varphi'^3 \frac{\partial}{\partial X} \right] \bar{W}_0 \\ & + \frac{1}{\text{Pr}} i\varphi' \left[U_0 \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \varphi'^2 \right] \bar{W}_0 - \bar{W}_0 \frac{\partial^2 U_0}{\partial z^2} \right] \end{aligned}$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \varphi' \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] \bar{\theta}_1 - \frac{\partial T_0}{\partial z} \bar{W}_1 = -i \left[2\varphi' \frac{\partial}{\partial X} + \varphi'' \right] \bar{\theta}_0 + U_0 i \varphi' \bar{\theta}_0 + \bar{U}_0 \frac{\partial T_0}{\partial X}$$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \varphi'^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] \left[\bar{U}_{1y} - \varphi' \frac{\partial}{\partial \eta} \bar{V}_1 \right] = \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \varphi'^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] \frac{\partial}{\partial X} \bar{V}_0 \\ & - \left[2\varphi' \frac{\partial^2}{\partial X \partial \eta} + \varphi'' \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \left[\bar{U}_{0y} - \varphi' \frac{\partial}{\partial \eta} \bar{V}_0 \right] \end{aligned}$$

$$\text{où: } \bar{\theta}_1 = \bar{W}_1 = \frac{\partial}{\partial z} \bar{U}_1 = \frac{\partial}{\partial z} \bar{V}_1 = 0 \quad \text{en } z=0 \text{ et } z=1$$

Si on applique à la première équation du système (3.13) l'opérateur

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \varphi'^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right], \text{ en tenant compte de la troisième équation de ce système et des}$$

valeurs de $\bar{W}_0, \bar{\theta}_0, \bar{U}_0$ et \bar{V}_0 , alors \bar{W}_1 doit satisfaire une équation dont le second membre est notamment en $e^{i\eta} \sin \pi z$. La présence de ces termes implique que \bar{W}_1 comprendra des termes séculaires. Leur élimination permet de calculer $A(X)$. Cette condition de compatibilité s'écrit :

$$(3.14) \quad f(X) \frac{dA}{dX} + [g(X) + R_1 h(X)] A = 0$$

Les expressions développées de $f(X)$, $g(X)$ et $h(X)$ sont :

$$f(X) = i\varphi' \left[\frac{(\pi^2 + k_y^2 + \varphi'^2)^3}{k_y^2 + \varphi'^2} - 3(\pi^2 + k_y^2 + \varphi'^2)^2 \right]$$

$$h(X) = -\frac{1}{2R_c} (\pi^2 + k_y^2 + \varphi'^2)^3$$

$$g(X) = iR_c \varphi' \pi^2 \frac{d}{dX} \left[\frac{1 - \delta \bar{F}}{\pi^2 + k_y^2 + \varphi'^2} \right] + i\varphi' [\pi^2 + k_y^2 + \varphi'^2]^2 \int_0^1 U_0 \sin^2 \pi z dz$$

$$+ i\varphi'' \left\{ \frac{1}{2} R_c [1 - \delta \bar{F}] \left[\frac{\pi^2}{\pi^2 + k_y^2 + \varphi'^2} \right] - [\pi^2 + k_y^2 + \varphi'^2] [\pi^2 + k_y^2 + 3\varphi'^2] \right\} +$$

$$i\varphi' \frac{1}{P_r} [\pi^2 + k_y^2 + \varphi'^2] \left\{ (\pi^2 + k_y^2 + \varphi'^2) \int_0^1 U_0 \sin^2 \pi z dz + \int_0^1 \frac{\partial^2 U_0}{\partial z^2} \sin^2 \pi z dz \right\}$$

En résolvant (3.14) on a :

$$(3.15) \quad A(X) = D \exp \left\{ - \int_0^1 \frac{g(X) + h(X)R_1}{f(X)} dX \right\}$$

$$D = \text{cste et } f(X) \neq 0$$

Or $f(X) = 0$ si $k_y^2 + \varphi'^2(X) = k_c^2$, soit $\varphi'^2(X) = k_x^2$ et cela se produit en $X = 0$.

On a donc obtenu la solution linéaire valable partout sauf en $X = 0$.

Pour avoir une solution valable au voisinage de $X = 0$, on introduit une nouvelle variable ξ (appelée variable intérieure) et on fait un développement asymptotique valable au voisinage de $X = 0$. On pose:

$$(3.16) \begin{cases} X = \varepsilon^\alpha \xi \\ \bar{q}(X, \eta, y, z, \varepsilon) = \tilde{q}(\xi, \eta, y, z, \varepsilon) \end{cases}$$

et:

$$(3.17) \quad \tilde{q}(\xi, \eta, y, z, \varepsilon) = \exp i \left[\frac{k_x}{\varepsilon} \varepsilon^\alpha \xi + k_y y \right] (\tilde{q}_0(\xi, z) + \varepsilon^\beta \tilde{q}_1(\xi, z) + \varepsilon^{2\beta} \tilde{q}_2(\xi, z))$$

On introduit (3.16) et (3.17) dans le système (1.1). Le principe de "moindre dégénérescence" fournit les égalités :

$$(3.18) \quad \alpha = \frac{1}{2} \text{ et } \beta = \frac{1}{2}$$

En effet, on s'aperçoit que pour éviter des solutions partout nulles, il faut que :

$$k_x^2 \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} \text{ et } \delta X^2 \text{ soient du même ordre, d'où (3.18).}$$

Nous avons résolu ce problème aux différents ordres . Nous obtenons:

A l'ordre $\varepsilon^{(0)}$:

$$(3.19) \quad \begin{aligned} \tilde{W}_0 &= A(\xi) \sin \pi z & \tilde{\theta}_0 &= \frac{1}{\pi^2 + k_c^2} A(\xi) \sin \pi z \\ \tilde{U}_0 &= \frac{i\pi k_x}{k_c^2} A(\xi) \cos \pi z & \text{et } \tilde{V}_0 &= \frac{i\pi k_y}{k_c^2} A(\xi) \cos \pi z \end{aligned}$$

Les termes d'ordre $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ donnent :

$$(3.20) \quad \begin{aligned} \tilde{W}_1 &= 0 & \tilde{\theta}_1 &= \frac{2ik_x}{[\pi^2 + k_c^2]^2} \frac{dA}{d\xi} \sin \pi z \\ \tilde{U}_1 &= \frac{k_c^2 - 2k_x^2}{k_c^4} \pi \frac{dA}{d\xi} \cos \pi z & \text{et } \tilde{V}_1 &= -\frac{2\pi k_x k_y}{k_c^4} \frac{dA}{d\xi} \cos \pi z \end{aligned}$$

Si on prend en considération (3.19) et (3.20), en combinant les équations qu'on trouve à l'ordre ε , on arrive à une équation vérifiée par \tilde{W}_2 de la forme:

$$(3.21) \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k_c^2 \right]^2 \tilde{W}_2 + k_c^2 R_c \tilde{W}_2 = 2 \left[\frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + \left\{ \frac{R_1}{18\pi^2} - \delta C^2 \xi^2 \right\} \left(\frac{k_c}{k_x} \right)^2 A(\xi) \right] \sin \pi z$$

\tilde{W}_2 vérifie les conditions aux limites:

$$\tilde{W}_2 = \frac{\partial^2 \tilde{W}_2}{\partial z^2} = \frac{\partial^4 \tilde{W}_2}{\partial z^4} = 0$$

Si nous multiplions les deux membres de cette équation par $\sin \pi z$, après intégration sur l'épaisseur de la couche, nous obtenons:

$$(3.22) \quad \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + \left\{ \frac{R_1}{18\pi^2} - \delta C^2 \xi^2 \right\} \left(\frac{k_c}{k_x} \right)^2 A(\xi) = 0$$

Afin de déterminer R_1 et trouver la solution valable partout dans le domaine physique considéré, il faut faire le raccord entre la solution distale $\bar{W}_0(X)$ et la solution proximale $\tilde{W}_0(\xi)$.

Pour cela, il nous faut connaître le comportement de $\bar{W}_0(X)$ quand $X \rightarrow 0$ avec ε fixé.

D'après ce qui précède :

$$\bar{W}_0 = A(X) e^{\left\{ i \int_0^X \frac{\varphi'(X)}{\varepsilon} dX + i n y \right\}} \sin \pi z$$

$$\text{Quand } X \rightarrow 0, \quad \varphi'(X) \approx k_x + i C \delta^{1/2} \frac{k_c}{k_x} X + \dots$$

Nous avons évalué les limites de $f(X)$, $g(X)$ et $h(X)$ quand $X \rightarrow 0$, $A(X)$ doit alors vérifier :

$$(3.23) \quad 12[\pi^2 + k_c^2] C \delta^{1/2} X \frac{dA}{dX} + 9 C \delta^{1/2} \pi^2 A(X) - \frac{k_c}{k_x} R_1 A(X) = 0$$

La solution de cette équation s'écrit:

$$(3.24) \quad A(X) \approx X \frac{k_c R_1}{36\pi^2 C \delta^{1/2} k_x} - \frac{1}{2}$$

Exprimons maintenant $\bar{W}_0(X)$ en fonction de la variable intérieure $\xi = \frac{X}{\frac{1}{\epsilon^2}}$:

$$(3.25) \bar{W}_0(X) = \bar{W}_0(\xi) = [\epsilon^{\frac{1}{2}} \xi]^{-\frac{1}{2}} \frac{kcR_1}{36\pi^2 C \delta^{1/2} k_x} \exp\left(-\frac{C \delta^{1/2} kc}{k_x} \frac{\xi^2}{2}\right) \exp i [k_x \xi / \epsilon^{1/2} + k_y y]$$

La condition de raccord s'énonce:

$$(3.26) \lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \bar{W}_0(\xi) = \lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \tilde{W}_0(\xi) = [\epsilon^{\frac{1}{2}} \xi]^{-\frac{1}{2}} \frac{kcR_1}{36\pi^2 C \delta^{1/2} k_x} \exp\left(-\frac{C \delta^{1/2} kc}{k_x} \frac{\xi^2}{2}\right)$$

$$|\xi| \rightarrow \infty \quad |\xi| \rightarrow \infty$$

La solution de (3.22) doit être proportionnelle à la fonction de Weber $D_n(\xi\sqrt{2\beta})$ avec :

$$\beta = \frac{kc}{k_x} C \delta^{\frac{1}{2}}, \quad \alpha = \frac{R_1}{18\pi^2} \left(\frac{kc}{k_x}\right)^2 \quad \text{et} \quad n = \frac{\alpha}{2\beta} - \frac{1}{2}$$

La fonction de Weber a la propriété suivante :

$$(3.27) D_n(\xi\sqrt{2\beta}) \rightarrow \begin{cases} (\xi\sqrt{2\beta})^n \exp\left(-\frac{1}{2}\beta\xi^2\right) & \text{quand } \xi \rightarrow +\infty \\ \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-n)} \frac{\exp\left(\frac{1}{2}\beta\xi^2\right)}{(-\xi\sqrt{2\beta})^{n+1}} & \text{quand } \xi \rightarrow -\infty \end{cases}$$

à moins que n ne soit entier positif ou nul. Dans ce cas ,

$$(3.28) \quad D_n(\xi\sqrt{2\beta}) = (-1)^n D_n(-\xi\sqrt{2\beta})$$

Et c'est justement ce dernier cas qui nous intéresse, vu les conditions de raccord (3.26).

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow \quad R_{1,n} = 18 \pi^2 \frac{kk_x}{kc} C [1 + 2n] \delta^{\frac{1}{2}}$$

Dans ce cas, la fonction de Weber devient proportionnelle aux polynômes d'Hermite et la solution $\tilde{W}_0(\xi)$ est alors :

$$(3.29) \tilde{W}_0(\xi) = D \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{kc}{kk_x} C \delta^{\frac{1}{2}} \xi^2\right) \text{He}_n\left(\xi \sqrt{\frac{kc}{kk_x} 2 C \delta^{\frac{1}{2}}}\right) \exp\left[i\left[\frac{kk_x \xi}{\varepsilon^2} + kk_y y\right]\right] \sin \pi z$$

La valeur minimale de R_1 est alors $R_{1,0} = 18\pi^2 C \frac{k_x}{kc} \delta^{\frac{1}{2}}$, et la solution correspondante est (3.29) où $\text{He}_0 = 1$

On en déduit que la valeur critique du nombre de Rayleigh est :

$$(3.30) \quad R_{cr} = R_c + 18\pi^2 C \frac{k_x}{kc} \delta^{\frac{1}{2}} \varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

Il est nécessaire de rappeler que le seuil (3.30) à partir duquel une solution du type (3.29) apparaît est obtenu avec l'hypothèse $k_x = O(1)$. Sous cette hypothèse, comme par définition $k_x^2 + k_y^2 = k_c^2$, cela suppose que $k_y \rightarrow 0$. Autrement dit, si la taille de l'hétérogénéité δ est supposée $O(1)$, la convection naissante, bien qu'elle soit tridimensionnelle, se développe sous la forme d'une structure géométrique très proche de rouleaux d'axe parallèles à Oy .

Intéressons-nous maintenant au cas où la taille de l'hétérogénéité δ est faible et voyons si cela pourrait modifier la structure convective naissante.

3.2 $\delta = O(\varepsilon^2)$

Il serait intéressant de trouver des solutions pour des petites valeurs de δ . La solution ci-dessus cesse d'être valable pour $\delta = O(\varepsilon^2)$ auquel cas on doit tenir compte des dérivées secondes par rapport à X pour $X = O(1)$. Et alors la solution que l'on trouverait serait valable dans tout le domaine physique considéré. Ceci est motivé par le fait que:

$$k_x^2 \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} \text{ et } \varepsilon^2 \bar{\delta} \bar{F}(X) \text{ sont du même ordre pour tout } X.$$

Cherchons la solution du problème pour $\delta = \varepsilon^2 \bar{\delta}$ ($\bar{\delta} = O(1)$)

L'état de base devient alors :

$$(3.31) \quad T_0 = (1-z)(1 - \varepsilon^2 \bar{\delta} \bar{F}(X)) + \dots$$

$$W_0 = O(\varepsilon^3)$$

$$U_0 = O(\varepsilon^2)$$

Pour étudier la stabilité de cet écoulement de base, On utilise le développement asymptotique (3.4) des perturbations des champs de température, de vitesse et du nombre de Rayleigh. Après un calcul analogue à celui effectué précédemment, on arrive à l'équation différentielle vérifiée par $A(X)$:

$$(3.32) \quad \frac{d^2 A}{dx^2} + \left(\frac{k_c}{k_x}\right)^2 \left[\frac{R_2}{18\pi^2} - \bar{\delta} C^2 \operatorname{th}^2 X \right] A(X) = 0$$

Si on impose à $A(X)$ de tendre vers zéro quand $|X| \rightarrow \infty$, on obtient après manipulation des fonctions hypergéométriques et leurs propriétés :

$$(3.33) \quad A(X) = N \operatorname{Sech}^{b_n} X \left[1 - \frac{n \{ 2 \sqrt{\frac{k_c^2}{k_x^2} \bar{\delta} C^2 + \frac{1}{4}} - n \}}{b_n + 1} e^{-X} \operatorname{Sech} X + \dots \right]$$

avec :

$$(3.34) \quad 0 \leq n \leq \sqrt{\frac{k_c^2}{k_x^2} \bar{\delta} C^2 + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \quad b_n = \sqrt{\frac{k_c^2}{k_x^2} \bar{\delta} C^2 + \frac{1}{4}} - \left(n + \frac{1}{2}\right)$$

Les valeurs propres correspondant à ce problème sont des valeurs propres isolées tant que $R_2 < 18\pi^2 \bar{\delta} C^2$. Elles s'écrivent :

$$(3.35) \quad R_{2,n} = 18\pi^2 \frac{k_x^2}{k_c^2} \left\{ (2n+1) \sqrt{\frac{k_c^2}{k_x^2} \bar{\delta} C^2 + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} - n(n+1) \right\}$$

Si $R_2 > 18\pi^2 \bar{\delta} C^2$, il existe aussi un spectre continu de valeurs propres R_2 pour lesquelles $A(X)$ est bornée quand $|X| \rightarrow \infty$. Précisément :

$$A(X) \rightarrow \exp \pm i \alpha X \quad \text{quand } |X| \rightarrow \infty \quad \text{avec } \alpha^2 = \frac{k_c^2}{k_x^2} \left[\frac{R_2}{18\pi^2} - \bar{\delta} C^2 \right]$$

On montre aisément que $R_{2,n}$ est une fonction croissante de n . Par conséquent, la première correction non nulle du nombre de Rayleigh est obtenue pour $n = 0$. Ainsi, pour ce genre de solutions, la valeur critique du nombre de Rayleigh s'écrit :

$$(3.36) \quad R_{cr} = R_c + 18\pi^2 \frac{k_x^2}{k_c^2} \left\{ \sqrt{\frac{k_c^2}{k_x^2} \bar{\delta} C^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}} \right\} \varepsilon^2$$

Si $\bar{\delta} = O(1)$, la solution (3.33) reste valable tant que $k_x = O(1)$.

Supposons maintenant que $\bar{\delta} \rightarrow 0$. Le schéma ci-dessus reste tout à fait cohérent, à condition d'imposer à k_x une nouvelle échelle. On pose : (3.37) $k_x^2 = \bar{\delta} \bar{k}_x^2$ avec $\bar{k}_x = O(1)$

(3.36) devient alors:

$$(3.38) \quad R_{cr} = R_c + 18\pi^2 \frac{\bar{\delta} \bar{k}_x^2}{k_c^2} \left\{ \sqrt{\frac{k_c^2}{\bar{k}_x^2} C^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}} \right\} \varepsilon^2$$

On constate que si $\bar{\delta} \rightarrow 0$, $R_{cr} \rightarrow R_c$

La solution de ce problème décrirait alors une configuration géométrique très proche des rouleaux dont l'axe est parallèle à Ox ($k_x \rightarrow 0$ et $k_y \rightarrow k_c$).

3.3 Conclusion

Nous avons étudié l'effet d'une imperfection de la condition à la limite de la température sur l'établissement de la convection de Rayleigh-Bénard. Le profil choisi pour décrire cette imperfection ($1 - \delta \text{th}^2 \varepsilon x$, $\varepsilon \ll 1$) a pour effet de provoquer un écoulement bidimensionnel lentement variable en x . Nous avons étudié la stabilité linéaire de cet écoulement de base face à des perturbations tridimensionnelles. Si la taille de l'hétérogénéité δ est $O(1)$, le choix adopté pour la variation de la température sur la surface inférieure rend le voisinage du centre $X=0$, la région où l'instabilité est la plus concentrée. En utilisant deux méthodes de perturbation singulière, à savoir la méthode des échelles multiples et celle des développements asymptotiques raccordés, nous avons calculé la valeur critique du nombre de Rayleigh au delà de laquelle l'écoulement de base perd sa stabilité au profit d'une solution convective qui, bien qu'elle soit

tridimensionnelle, est plutôt proche d'une structure formée de rouleaux d'axe parallèle à Oy. Par ailleurs, si la taille de l'hétérogénéité est supposée du même ordre que ε^2 , nous avons montré que l'instabilité se développe partout dans l'enceinte où baigne le fluide, contrairement au cas précédent où elle a tendance à se concentrer en son centre. En outre l'effet de l'imperfection est de déplacer la valeur critique du nombre de Rayleigh d'un terme de $O(\varepsilon^2)$. Enfin, considérer des perturbations tridimensionnelles nous a permis de montrer que si $\delta \ll \varepsilon^2$, l'imperfection favorise l'établissement d'un régime convectif structuré en rouleaux d'axe parallèle à Ox plutôt qu'en rouleaux d'axe parallèle à Oy.

Ceci étant, l'analyse linéaire est insuffisante pour déterminer la forme et l'amplitude de la perturbation dès que le nombre de Rayleigh dépasse sa valeur critique. Les termes non linéaires jouent un rôle prépondérant, et une analyse de la stabilité non linéaire s'impose.

4. Equation d'amplitude

4.1 Equation d'amplitude pour $\delta=O(1)$.

Dans ce qui suit, on suppose que la solution convective est structurée de rouleaux d'axe parallèle à Oy ($k_x = k_c$ et $k_y = 0$). Dans ce cas l'étude de la stabilité linéaire a permis de déterminer le seuil de bifurcation d'une telle solution :

$$R_{Cr} = R_c + 18 \pi^2 C \delta^{\frac{1}{2}} \varepsilon$$

On cherche à déterminer le comportement asymptotique de la solution dès que le nombre de Rayleigh dépasse sa valeur critique R_{Cr} . On pose alors:

$$(4.1.1) \quad Ra = R_c + \varepsilon R_1 \quad \text{avec} \quad R_1 > R_{1,0} = 18 \pi^2 C \delta^{\frac{1}{2}}$$

La théorie de la faible non linéarité suppose que l'amplitude de la perturbation croît proportionnellement à $\sqrt{Ra - R_{Cr}}$ et que son temps caractéristique diverge comme $(Ra - R_{Cr})^{-1}$.

Ceci nous permet d'introduire un temps lent $\tau = \varepsilon t$ et de considérer que l'amplitude est proportionnelle à $\varepsilon^{1/2}$.

Pour avoir l'équation d'amplitude dans le cas où $\delta = O(1)$, on doit s'intéresser au domaine où l'instabilité est la plus concentrée, c'est à dire le voisinage de $X=0$. On a vu

précédemment que la solution présentait une singularité dans cette zone et qu'il fallait introduire une variable intérieure ξ définie par $X = \varepsilon^{1/2}\xi$

Comme on s'intéresse à la convection bidimensionnelle, si on désigne par ψ la fonction de courant, on peut exprimer la solution globale sous la forme :

$$(4.1.2) \quad \{\psi, \theta\} = \{\psi_b, \theta_b\} + \varepsilon^{1/2} [e^{ikc \xi / \varepsilon^{1/2}} \{\psi_{11}(\xi, \tau, z), \theta_{11}(\xi, \tau, z)\} + \\ \varepsilon [e^{2ikc \xi / \varepsilon^{1/2}} \{\psi_{22}(\xi, \tau, z), \theta_{22}(\xi, \tau, z)\} + e^{ikc \xi / \varepsilon^{1/2}} \{\psi_{21}(\xi, \tau, z), \\ \theta_{21}(\xi, \tau, z)\} + \{\psi_{20}(\xi, \tau, z), \theta_{20}(\xi, \tau, z)\}] + \\ \varepsilon^{3/2} [e^{3ikc \xi / \varepsilon^{1/2}} \{\psi_{33}(\xi, \tau, z), \theta_{33}(\xi, \tau, z)\} + e^{2ikc \xi / \varepsilon^{1/2}} \{\psi_{32}(\xi, \tau, z), \\ \theta_{32}(\xi, \tau, z)\} + e^{ikc \xi / \varepsilon^{1/2}} \{\psi_{31}(\xi, \tau, z), \theta_{31}(\xi, \tau, z)\} + \{\psi_{30}(\xi, \tau, z), \\ \theta_{30}(\xi, \tau, z)\}] + CC$$

Les équations, ainsi que les conditions aux limites vérifiées par ψ et θ sont :

$$(4.1.3) \quad \begin{cases} \nabla^4 \psi - \varepsilon^{1/2} Ra \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = - \frac{\varepsilon^{1/2}}{Pr} \langle \psi, \nabla^2 \psi \rangle + \varepsilon \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial \tau} \nabla^2 \psi \\ \nabla^2 \theta = - \varepsilon^{1/2} \langle \psi, \theta \rangle + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau} \theta \end{cases}$$

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z=0 \text{ et } z=1 \quad \theta = 0 \quad \text{en } z=1 \quad \text{et} \quad \theta = 1 - \delta \varepsilon \xi^2 \quad \text{en } z=0$$

où $\langle f, g \rangle = \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial \xi}$ est le crochet de poisson

L'écoulement de base étant :

$$(4.1.4) \quad \begin{cases} \theta_B = (1 - z) (1 - \delta \varepsilon \xi^2) + o(\varepsilon) \\ \psi_B = \varepsilon^{3/2} Ra G_0(z) 2\delta \xi + o(\varepsilon^{3/2}) \end{cases}$$

$$\text{avec } G_0(z) = \frac{1}{360} z(3z^4 - 15z^3 + 20z^2 - 8)$$

On substitue dans (4.1.3) ψ et θ par leur développement (4.1.2) et en tenant compte de (4.1.4), on obtient une suite d'équations aux dérivées partielles que l'on résoud en égalisant les termes de même puissance en ε .

On obtient alors:

$$(4.1.5) \quad \Psi_{11} = A(\xi) \sin \pi z \quad \text{et} \quad \theta_{11} = -\frac{ik_c}{\pi^2 + k_c^2} A(\xi) \sin \pi z$$

et à l'ordre ε , on a :

$$(4.1.6) \quad \begin{cases} \Psi_{22} = \theta_{22} = 0 \\ \Psi_{20} = 0 \text{ et } \theta_{20} = -\frac{1}{2\pi} \frac{k_c^2}{\pi^2 + k_c^2} \sin 2\pi z |A|^2 \\ \Psi_{21} = 0 \text{ et } \theta_{21} = -\frac{1}{3[\pi^2 + k_c^2]} \frac{dA}{d\xi} \sin \pi z \end{cases}$$

A l'ordre $\varepsilon^{3/2}$, les grandeurs θ_{31} et ψ_{31} vérifient :

$$(4.1.7) \quad \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k_c^2 \right]^2 \psi_{31} - ik_c R_c \theta_{31} = -2 \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - 3k_c^2 \right] \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \psi_{11} + R_c \frac{\partial}{\partial \xi} \theta_{21} + ik_c R_1 \theta_{11} + \frac{1}{Pr} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k_c^2 \right] \frac{\partial \psi_{11}}{\partial \tau}$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k_c^2 \right] \theta_{31} - ik_c \psi_{31} = -2ik_c \frac{\partial}{\partial \xi} \psi_{21} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \theta_{11} - ik_c \psi_{11} \frac{\partial}{\partial z} \theta_{20} - ik_c \delta \xi^2 \psi_{11} + \frac{\partial \theta_{11}}{\partial \tau}$$

$$\psi_{31} = \frac{\partial^2 \psi_{31}}{\partial z^2} = \theta_{31} = 0 \quad \text{pour } z = 0 \text{ et } z = 1$$

On obtient donc une équation vérifiée par ψ_{31} qui doit être orthogonale à ψ_{11} . La condition d'orthogonalité donne :

$$(4.1.8) \quad \left[1 + \frac{1}{Pr} \right] \frac{\partial A}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + \left[\frac{R_1}{18\pi^2} - \delta C^2 \xi^2 \right] A - \frac{\pi^2}{16} A |A|^2 = 0$$

Pour avoir la forme de l'amplitude pour R_1 voisin de $R_{1,0}$ et d'étudier son comportement quand $\tau \rightarrow +\infty$, introduisons un temps $\tau' = (R_1 - R_{1,0})\tau$ et développons $A(\xi, \tau')$:

$$(4.1.9) \quad A(\xi, \tau') = (R_1 - R_{1,0})^{1/2} A_0 + (R_1 - R_{1,0})^{3/2} A_1 + \dots$$

On introduit ces expressions dans (4.1.8) et on obtient le système:

$$(4.1.10) \begin{cases} \frac{\partial^2 A_0}{\partial \xi^2} + \left[\frac{R_{1,0}}{18\pi^2} - \delta C^2 \xi^2 \right] A_0 = 0 \\ \frac{\partial^2 A_1}{\partial \xi^2} + \left[\frac{R_{1,0}}{18\pi^2} - \delta C^2 \xi^2 \right] A_1 = \frac{\pi^2}{16} A_0 |A_0|^2 - \frac{1}{18\pi^2} A_0 + \left[1 + \frac{1}{Pr} \right] \frac{\partial A_0}{\partial \tau'} \end{cases}$$

On déduit de la première équation que l'amplitude A_0 doit être proportionnelle à celle de la solution linéaire déjà obtenue précédemment A_{00} où $|A_{00}| = \exp\left(\frac{1}{2} C \delta^{\frac{1}{2}} \xi^2\right)$

On peut écrire $A_0 = D A_{00}$ $D = D(t)$

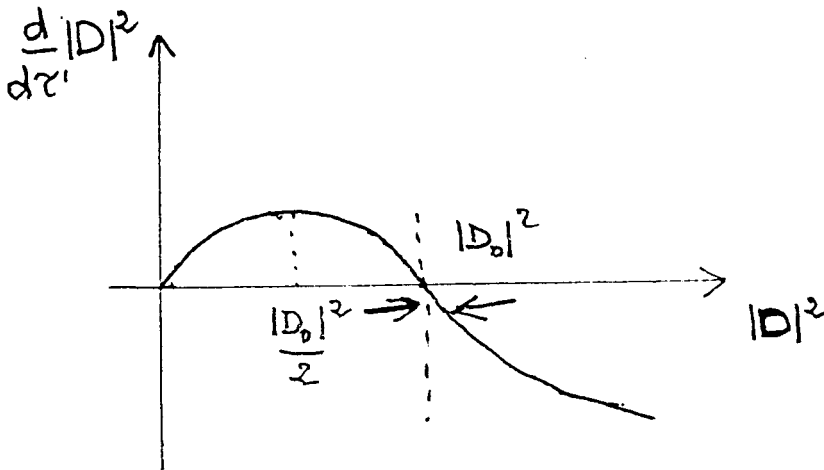
Multiplions par A_1 le complexe conjugué de la première équation, et par \bar{A}_0 la deuxième équation, soustrayons et intégrons de $-\infty$ à $+\infty$, on trouve :

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{Pr} \right) \frac{d|D|^2}{d\tau'} = \frac{1}{18\pi^2} |D|^2 - \frac{\pi^2}{16} |D|^4 - \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |A_{00}|^4 d\xi}{\int_{-\infty}^{+\infty} |A_{00}|^2 d\xi}$$

soit, après évaluation des intégrales:

$$(4.1.11) \quad \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{Pr} \right) \frac{d|D|^2}{d\tau'} = \frac{1}{18\pi^2} |D|^2 - \frac{\pi^2}{16\sqrt{2}} |D|^4$$

Soit $|D_0|$ la solution stationnaire de (4.1.11), $|D_0|^2 = \frac{8\sqrt{2}}{9\pi^4}$. La représentation de $\frac{d|D|^2}{d\tau'}$ comme fonction de $|D|^2$ est la suivante :



Nous avons indiqué par les flèches le sens de variation de $|D_0|^2$ en fonction du temps, dans les divers intervalles de l'axe $|D|^2$, il en résulte que $\lim_{\tau' \rightarrow \infty} |D|^2 = |D_0|^2$

On est en présence d'une instabilité faible.

Dans la suite, on va chercher l'équation d'amplitude pour $\delta = \varepsilon^2 \bar{\delta}$ avec $\bar{\delta} = O(1)$.

4.2. Equation d'amplitude pour $\delta = O(\varepsilon^2)$

De même que précédemment, on suppose que la solution convective est structurée de rouleaux d'axe parallèle à Oy. On cherche à déterminer l'amplitude de la solution dès que le nombre de Rayleigh dépasse sa valeur critique $R_{Cr} = R_c + R_{2,0} \varepsilon^2$, avec:

$R_{2,0} = 18\pi^2 \left\{ \sqrt{\bar{\delta} C^2 + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\}$. Pour cela, on pose $R = R_c + R_2 \varepsilon^2$, on introduit un temps lent $\tau = \varepsilon^2 t$, et on considère que l'amplitude de la perturbation est de l'ordre de ε . Le développement asymptotique approprié de la fonction de courant et de la température s'écrit:

$$(4.2.1) \quad \{\psi, \theta\} = \{\psi_b, \theta_b\} + \varepsilon [e^{ik_c x} \{\psi_{11}(X, \tau, z), \theta_{11}(X, \tau, z)\}] + \\ \varepsilon^2 [e^{2ik_c x} \{\psi_{22}(X, \tau, z), \theta_{22}(X, \tau, z)\} + e^{ik_c x} \{\psi_{21}(X, \tau, z), \theta_{21}(X, \tau, z)\} + \\ \{\psi_{20}(X, \tau, z), \theta_{20}(X, \tau, z)\}] + \\ \varepsilon^3 [e^{3ik_c x} \{\psi_{33}(X, \tau, z), \theta_{33}(X, \tau, z)\} + e^{2ik_c x} \{\psi_{32}(X, \tau, z), \theta_{32}(X, \tau, z)\} + \\ e^{ik_c x} \{\psi_{31}(X, \tau, z), \theta_{31}(X, \tau, z)\} + \{\psi_{30}(X, \tau, z), \theta_{30}(X, \tau, z)\}] + CC$$

ψ_b et θ_b sont données par (3.31)

Une fois que l'on introduit ce développement dans les équations du problème et en comparant les termes du même ordre, on arrive à une condition nécessaire pour l'existence de $\psi_{31}(X, \tau, z)$:

$$(4.2.2) \quad (1 + Pr) \frac{\partial A}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 A}{\partial X^2} + \left[\frac{R_2}{18\pi^2} - K^2 \text{th}^2 X \right] A - \frac{\pi^2}{16} A |A|^2$$

$A(X, \tau)$ étant l'amplitude de ψ_{11} .

La même équation d'amplitude a été obtenue par P. M. EAGLES dans une étude concernant l'effet sur la convection de Rayleigh-Bénard d'une petite déformation de la surface inférieure, lentement variable dans la direction horizontale. Des résultats numériques ont été donnés pour différentes valeurs de $R_2 > R_{20}$

4.3 Conclusion

Nous avons supposé que la solution convective est structurée de rouleaux d'axe parallèle à Oy . Nous avons cherché à déterminer le comportement asymptotique de cette solution dès que le nombre de Rayleigh dépasse sa valeur critique R_{cr} . Par la méthode des perturbations, nous avons réduit l'ensemble des équations aux dérivées partielles associées aux champs de température et de vitesse à une équation différentielle ordinaire. La résolution de cette équation montre que l'amplitude, lentement variable dans l'espace, a un maximum au point $X=0$ et qu'elle décroît lorsque l'on s'éloigne de ce point. Cela signifie que le voisinage du centre de la tache thermique est le siège d'un mouvement convectif qui s'amortit au fur et à mesure que l'on s'éloigne de ce voisinage.

Conclusion de la première partie

Dans cette première partie, nous avons étudié les effets produits par une condition à la limite thermique non homogène sur l'établissement et le développement de la convection de Rayleigh-Bénard. Dans un premier temps, nous avons supposé que l'hétérogénéité est une fonction périodique dans l'espace. Nous avons défini une température réduite θ mesurant l'écart, en chaque point du fluide, entre la température et une fonction qui vérifie les conditions aux limites. Ce changement de variable présente l'avantage de travailler avec des conditions aux limites homogènes. Les champs de vitesse et de température réduite doivent vérifier le système d'équations aux dérivées partielles (1.4) où apparaissent au second membre des termes liés à l'hétérogénéité. L'opérateur linéaire du premier membre de ce système admet une infinité de fonctions propres lorsque le nombre de Rayleigh traverse une valeur dite critique R_C . Pour $Ra=R_C$, l'absence d'une direction privilégiée du vecteur d'onde \vec{k} des modes propres rend infinie la dimension du noyau de cet opérateur. Nous avons montré que la prise en compte de l'hétérogénéité, déplace la valeur critique du nombre de Rayleigh et rend finie la dimension de ce noyau.

Le calcul de la nouvelle valeur critique R_{cr} , en fonction des composantes du vecteur d'onde (k_x, k_y) et de la taille de l'hétérogénéité, a été obtenu grâce à l'application de l'alternative de Fredholm. En comparant ces nouvelles valeurs critiques, on s'aperçoit qu'en cas d'imperfection faible ($k \neq k_C$), la convection adopte une structure rectangulaire particulière, définie par $k_x = \frac{k}{2}$. Ceci est permis tant que l'imperfection demeure périodique. En effet, dès que $k \rightarrow 0$, la structure convective qui apparaît en premier lieu est composée de rouleaux dont l'axe est parallèle à Ox . On montre que ces structures apparaissent d'une façon nette (bifurcation Pitchfork).

Dans le cas où on a affaire à une imperfection forte, un mouvement convectif bidimensionnel d'amplitude de l'ordre de la taille de l'hétérogénéité, apparaît pour de faibles valeurs de Ra . Au voisinage de R_C une sorte de résonance s'installe et entraîne une augmentation infinie de l'amplitude du mouvement convectif. La prise en compte des effets non linéaires dans cette zone de résonance montre que cette amplitude est de l'ordre de $\delta^{1/3}$ et que la transition entre les régions subcritique et supercritique s'opère d'une façon continue. Les travaux de KELLY et PAL concernant l'effet d'une imperfection forte confirme ce résultat. Dans la région supercritique, nous prouvons l'existence d'une

bifurcation, à partir de la solution bidimensionnelle vers une solution formée de cellules hexagonales.

Dans un second temps, nous étudions les instabilités tridimensionnelles qui peuvent se développer lorsque la température appliquée à la surface inférieure est de la forme $1 - \delta \text{th}^2 \epsilon x$. L'effet immédiat de cette distribution de la température est l'établissement d'un écoulement de base, lentement variable dans l'espace, et caractérisé par la présence d'une tache thermique centrée en $X=0$. Le mouvement du fluide s'organise d'une façon presque verticale au voisinage du centre de la tache thermique et a tendance à se déplacer plutôt horizontalement au fur et à mesure que l'on s'éloigne de ce centre. Une méthode de développements asymptotiques raccordés a permis l'étude de la stabilité linéaire de cette configuration de base au voisinage de $X=0$, où l'instabilité est la plus forte. En fonction de ϵ et de la taille de l'hétérogénéité, nous avons calculé la valeur critique de Ra au delà de laquelle, l'écoulement de base perd sa stabilité. Nous montrons que pour $\epsilon^2 \leq \delta \leq 1$, l'instabilité qui apparaît adopte une structure, bien qu'elle soit tridimensionnelle, est plutôt proche d'une structure bidimensionnelle. Par ailleurs, si $\delta \ll \epsilon^2$, nous montrons que l'imperfection favorise l'établissement d'un régime convectif structuré en rouleaux d'axe parallèle à Ox . Ces résultats constituent une généralisation de ceux trouvés par WALTON concernant le problème bidimensionnel.

Pour finir, nous avons cherché à déterminer le comportement asymptotique d'une solution convective bidimensionnelle, lorsque Ra dépasse sa valeur critique R_{cr} . Nous avons obtenu une équation différentielle ordinaire asymptotiquement équivalente au système d'équations aux dérivées partielles du problème de R-B. Cette équation décrit la variation lente, dans l'espace, de l'amplitude de la convection. Elle diffère de l'équation de N. W. S d'un terme lié à la présence de l'imperfection. En supposant que Ra est très voisin de R_{cr} , la résolution de cette équation montre que l'amplitude de la convection présente un maximum au voisinage du centre de la tache thermique et qu'elle faiblit au fur et à mesure que l'on s'en éloigne.

REFERENCES:

- ABLOWITZ M.J., ASKAR A., CAKMAK A.S. et ENGIN H. , 1979, Resonant non-linear vibrations in continuous systems-1.Undamped case, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, vol.14, p. 223-233
- AHLERS G., CROSS M. C., HOHENBERG P. C., et SAFRAN S., 1981, The Amplitude Equations near the Convective Threshold: Application to Time-dependent Heating Experiments, *J. Fluid Mech.* vol.110, p. 149 - 161.
- BERGE P., POMEAU Y. et VIDAL CH., 1988, *L'ordre dans le Chaos*, Hermann
- BRAND HR., HOHENBERG P. C.,et STEINBERG V., 1984, Codimension 2-bifurcations for convection in binary fluid mixtures, *Physical Review*, vol. 30, series A, p. 2548 - 2561.
- CALTAGIRONE J.P. et BORIES S., 1985, Solutions and stability criteria of natural convective flow in an inclined porous layer, *J.F.M.* vol 155, p. 267-287.
- COULLET P.H. et SPIEGEL E.A., 1983, Amplitude equations for systems with competing instabilities, *S.I.A.M. J. Appl. Math.*, vol. 43, p. 776 - 821.
- EAGLES P. M. , 1980, A Bénard convection problem with a perturbed lower wall, *Proc. R. Soc. Lond.A*, vol.371, p. 359-379.
- KELLY R.E. et PAL D., 1978, Thermal convection with spatially boundary conditions: resonant wavelength excitation, *J.F.M.*, vol. 86, part. 3, p. 433-456.
- KNOBLOCH E. et PROCTOR M.R.E., 1981, Nonlinear periodic convection in double-diffusive systems, *J.F.M.*, vol. 108, p. 291-316.
- NEEL M. C., 1990, Bifurcation associée à la convection en milieu poreux inhomogène, Thèse d'état, Université Paul Sabatier de Toulouse.
- SHRAIMAN B. I, 1987, Diffusive transport in Rayleigh-Bénard convection cell, *Phy. Rev. A*, vol. 36, Number 1, p. 261-267.
- TAVANTZIS J., REISS E. et MATKOWSKY B.J., 1978, On the smooth transition to convection, *S.I.A.M. J. Appl. Math.*, vol. 34 (2), p.322-337.
- WALTON I.C, 1982, The effects of slow spatial variations on Bénard convection, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, vol. 35, p. 33-48.

DEUXIEME PARTIE

**CHAPITRE 3: INSTABILITE CONVECTIVE D'UN MELANGE BINAIRE EN
MILIEU POREUX SOUMIS A UN GRADIENT DE TEMPERATURE
DEPENDANT DU TEMPS**

**Convective instability of a fluid mixture in a porous medium
with time-dependent temperature gradient.**

Soumis pour publication

Convective instability of a fluid mixture in a porous medium with time-dependent temperature gradient.

by M.N. OUARZAZI & P.A. BOIS

Laboratoire de Mécanique de Lille, U.R.A. C.N.R.S. 1441 .

U.S.T.L., Bât. M3, F-59655 Villeneuve d'Ascq

Summary. - The convective instability of a fluid mixture in a porous medium is considered when the medium is heated from below or from above (Soret effect). The prescribed temperature gradient is assumed to periodically vary with the time. The twodimensional instability thresholds are estimated, first for an oscillatory instability and then for a stationary, using a linear asymptotic analysis. It is shown that a subharmonic instability develops. This subharmonic instability is always the preponderant instability in the phenomenon. In the plane of the parameters, the neighbourhood of a polycritical point is then studied, in the case of a forcing of small frequency, by a local (inner) expansion: the motion appears as the solution of a Mathieu equation which is asymptotically matched with the outer expansion. The displacement of the polycritical point is then estimated, and the case of vanishing frequency of the forcing is considered.

1. - INTRODUCTION.

It is classical, in measures of experiments, to observe some irregularities which appear because theoretical boundary conditions (e.g. a fixed temperature at a wall) are imperfectly realized. The influence of such irregularities is, in general, negligible. Nevertheless there exist cases in which this influence must be taken in account, and, even can become preponderant. We are interested, in this paper, in the problem of the irregularities appearing in a prescribed boundary temperature at the wall for a convective instability problem. Several disorders due to these irregularities have been experimentally placed in evidence for this problem (an extended bibliography is given, e.g., in AHLERS & *al.*, 1981, or HEINRICHS & *al.* 1987). In order to model the irregularities, we examine the influence of a small time-dependent variation of the boundary conditions.

The problem considered here deals with the convective flow of a binary mixture in a porous medium. This problem has already been studied, in the case of a temperature gradient independent on the time, by BRAND & STEINBERG, first as a linear instability problem (1983a, referred in the sequel as (B.& S.)), and then in

nonlinear convection (1983b). Under classical approximation assumptions, the governing parameters of the problem can be reduced to two numbers denoted by Ra (filtration Rayleigh number) and ψ (separation ratio). The discussion is then summarized by the examination of some curves in the (Ra, ψ) plane. The main results of BRAND & STEINBERG's paper are to show: (i) a stationary instability threshold (first curve in the (Ra, ψ) plane); (ii) an oscillatory instability threshold (second curve in the (Ra, ψ) plane). The two curves intersect at a polycritical point which, from a mathematical point of view, characterizes a bifurcation of codimension 2. There exist very numerous physical problems for which such instabilities can be exhibited: e.g., the convection of a fluid in magnetic field has been studied by KNOBLOCH & PROCTOR (1981). Several other examples can be found in a review paper by COULLET & SPIEGEL (1983).

The aim of the present paper is, for the considered problem, to characterize the influence of the small periodical time perturbation (order δ , with $\delta \ll 1$). For a simple fluid the effect of modulation on Rayleigh-Bénard convection has been studied by various authors: VENEZIAN (1969), HOMSY (1974), DOWDEN (1981). By a linear analysis, we estimate the variation of the critical Rayleigh number Ra_c due to this perturbation. For high frequencies it is shown that the static critical Rayleigh number is only a little displaced (the displacement is of order δ^2). For small frequencies the linear analysis remains valid only far from the polycritical point. Some particular cases are then considered: first, a subharmonic resonance: the analysis shows that the main displacement of the critical Rayleigh number (of order δ) arises in this resonant case. Hence, in realistic situation, the destabilization always appears by such ways. Second, we study the neighbourhood of the polycritical point: this study allows one to consider the limit of vanishing frequency of the forcing. Moreover, the behaviour of the solution shows the interest of studying the phenomenon by a nonlinear instability analysis (see QUARZAZI & al., *in preparation*). Note, to end with, that only twodimensional phenomena are considered here.

In Section 2 we establish the equations used and construct the hydrostatic solution of the problem. This solution is then perturbed (section 3) and the linear instability analysis is performed (section 4). A resonance case of half frequency is equally considered: the role of the resonance is to exhibit at the order 1 a displacement of the critical Rayleigh number which would be, in the general case, of order 2: hence the instability which appears in the phenomenon is always the instability associated to this resonance: the problem exhibits a subharmonic instability. In the Section 5 the singularity of a small exciting pulsation is studied: near the polycritical point a local

analysis (inner expansion) must be performed, leading, at the first order, to a Mathieu equation which can be also discussed. The solution is then matched with the other expansion previously obtained (outer expansion). As a consequence of the behaviour of the solutions of the Mathieu equation, it is then possible to examine the case of vanishing frequency of the periodical forcing.

2. - EQUATIONS OF MOTION, BOUNDARY CONDITIONS AND BASIC STATE.

We first recall, in this section, the basic equations of motion of a fluid mixture in a porous medium. An extended analysis can be found in (B. & S.), and we refer the reader to this paper for more details of calculation. We give only the equations which will be further used.

The entire medium is a mixture of three constituents: (i) a solid phase, which is a solid with small granulometry, and: (ii) a fluid phase, which is itself a mixture of two pure fluids. The equations of the motion can be established following the classical mixture theory (see, for example, BOWEN, 1976). The mean velocity of the medium reduces to the barycentric velocity of the fluid phase. This velocity is the filtration velocity \mathbf{u} of the medium. We denote by ρ the density of the fluid phase and by C the concentration of one of the fluid constituents (the soluted) (the concentration of the solvent being $1 - C$). With these notations the equations of motion read:

$$(1) \quad \rho = \rho_0(1 - \alpha(T^* - T_0) - \alpha'(C - C_0)).$$

$$(2) \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

$$(3) \quad \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = - \frac{1}{\rho_0} \nabla p - \{ \alpha(T^* - T_0) + \alpha'(C - C_0) \} \mathbf{g} - \frac{\nu}{K} \mathbf{u},$$

$$(4) \quad \frac{\partial T^*}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T^* = \kappa \Delta T^*,$$

$$(5) \quad \frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla C = D(\Delta C + \frac{k_T}{T^*} \Delta T^*).$$

Eq. (1) is the equation of state of the fluid mixture: T^* is the temperature, T_0 is a reference temperature, C_0 is a reference concentration. In the sequel we denote by T the difference $T^* - T_0$. Eq. (2) describes, with the Boussinesq approximation, the

conservation of the mass of the fluid mixture. Eq. (3) represents the Darcy law: the coefficient ϵ' is the porosity of the solid phase, and K is the permeability coefficient. The Boussinesq approximation is also taken in account in this equation, and the convective part of the acceleration is, as usually, neglected, being understood that the velocity \mathbf{u} is a filtration velocity (and then is small). The fourth equation is the energy equation for the total mixture. In this equation, the heat capacity of the mixture is assumed to be same as the heat capacity of the liquid, see B.&S. The fifth is the balance of mass for the soluted. In this equation, the diffusion velocity \mathbf{v}_c of the soluted is related to the concentration gradient and to the temperature gradient by a Fick's law with Soret effect (the velocity \mathbf{v}_c doesn't appear in the resulting equation). The corresponding coefficients are denoted by D (diffusion) and k_T (Soret effect). The system (1)-(5) constitutes a closed system of seven equations for the seven scalar unknowns ρ , T , p , C , \mathbf{u} .

We denote, in what follows, by x , y , z , the spatial coordinates and by u , w the velocity components. We assume that the medium occupies a rectangular domain (Ω) . Since the effects considered here are not related to the aspect ratio of (Ω) , we assume that (Ω) is the square:

$$(\Omega): \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq z \leq a.$$

The medium is bounded on ∂W by impermeables walls without heat conduction. The temperature is prescribed at the horizontal walls and we assume that:

$$(6) \quad T = \delta (T_0 - T_1) \cos \omega t \quad \text{at } z = 0, \quad T = T_1 - T_0 \quad \text{at } z = a.$$

The parameter δ is a small nondimensional parameter. The other boundary conditions read $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ and $\mathbf{v}_c \cdot \mathbf{n} = -\rho D(\nabla C + (k_T/T^*)\nabla T) \cdot \mathbf{n} = 0$ on $\partial\Omega$, namely:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial C / \partial x = -(k_T/T_0) \partial T / \partial x, \quad u = 0, \quad \text{at } x = 0 \text{ and } x = a, \\ \partial C / \partial z = -(k_T/T_0) \partial T / \partial z, \quad w = 0, \quad \text{at } z = 0 \text{ and } z = a. \end{array} \right.$$

We first look for an hydrostatic solution of (1)-(5) with the boundary conditions (6)-(7). If the velocity is zero the temperature difference T_h and the concentration C_h verify the equations:

$$(8) \quad \frac{\partial T_h}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 T_h}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial C_h}{\partial t} - D \frac{\partial^2 C_h}{\partial z^2} = \frac{k_T}{T_0} D \frac{\partial^2 T_h}{\partial z^2},$$

with the boundary conditions:

$$(9) \quad \begin{aligned} T_h &= \delta (T_0 - T_1) \cos \omega t \quad \text{at } z = 0, \\ T_h &= T_1 - T_0, \quad \text{at } z = a. \end{aligned}$$

$$(10) \quad \frac{\partial C_h}{\partial z} = \frac{k_T}{T_0} \frac{\partial T_h}{\partial z} \quad \text{at } z = 0 \text{ and } z = a.$$

After some calculations we obtain the basic solution:

$$(11) \quad T_h = T_s(z) + \delta T_1(z, t), \quad C_h = C_s(z) + \delta C_1(z, t),$$

where:

$$(12) \quad T_s(z) = -\frac{T_0 - T_1}{a} z, \quad C_s(z) = \frac{k_T}{T_0} \frac{T_0 - T_1}{a} z,$$

$$(13) \quad T_1(z, t) = (T_0 - T_1) \operatorname{Re} \left\{ \left[a(\lambda) e^{\lambda z/a} + a(-\lambda) e^{-\lambda z/a} \right] e^{i\omega t} \right\},$$

$$(14) \quad C_1(z, t) = \frac{k_T}{T_0} (T_0 - T_1) \frac{1}{\kappa - D} \operatorname{Re} \left\{ \left[D a(\lambda) e^{\lambda z/a} + D a(-\lambda) e^{-\lambda z/a} + \kappa b(\lambda, \mu) e^{\mu z/a} + \kappa b(\lambda, -\mu) e^{-\mu z/a} \right] e^{i\omega t} \right\}.$$

We have set in (13) and (14):

$$(15) \quad \lambda = (1 + i) (\omega a^2 / (2\kappa))^{1/2}, \quad \mu = (1 + i) (\omega a^2 / (2D))^{1/2},$$

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} a(\lambda) &= -\frac{e^{-\lambda}}{e^{\lambda} - e^{-\lambda}}, \\ b(\lambda, \mu) &= \frac{1}{\mu(e^{\mu} - e^{-\mu})} (b_1(\lambda, \mu) + b_1(-\lambda, \mu)), \\ b_1(\lambda, \mu) &= \lambda a(\lambda) (e^{-\mu} - e^{\lambda}). \end{aligned} \right.$$

3. - SMALL PERTURBATION THEORY AND NONDIMENSIONAL VARIABLES.

We now study the linear stability of the static state (11). Hence we consider some perturbation:

$$(17) \quad \mathbf{u} = \eta \mathbf{v}, \quad T = T_h(z, t) + \eta \theta, \quad C = C_h(z, t) + \eta c.$$

where η is a small parameter proportional to the perturbation amplitude. We introduce the expressions (17) in Eqs. (1)-(5). Taking in account the static equations (8) satisfied by the parts T_h and C_h , we obtain, for the perturbations, and keeping the terms of order η only, a system of equations which can be reduced to the following:

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\epsilon'} \Delta \left\{ \frac{\partial w}{\partial t} \right\} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\alpha \theta + \alpha' c) g - \frac{\mathbf{v}}{K} \Delta w, \\ \frac{\partial c}{\partial t} + w \frac{\partial C_h}{\partial z} = D \Delta c + \frac{k_T}{T_0} D \Delta \theta, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + w \frac{\partial T_h}{\partial z} = \kappa \Delta \theta, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \end{array} \right.$$

For a stability problem, we must join to the equations (18) the following homogeneous boundary conditions:

$$(19) \quad u = 0 \quad \text{at } x = 0 \quad \text{and } x = a, \quad w = 0 \quad \text{at } z = 0 \quad \text{and } z = a,$$

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial c}{\partial x} = 0 \quad \text{at } x = 0 \quad \text{and } x = a, \\ (b) \quad \theta = c = 0 \quad \text{at } z = 0 \quad \text{and } z = a. \end{array} \right.$$

The conditions (20, a) are easily satisfied if we assume that the sidewalls are insulated. Equations (20, b) represent idealized boundary conditions: a more realistic condition would be $\nabla c - \nabla \theta = 0$. The corresponding boundary value problem cannot be analytically solved. Using a Galerkin technique, BRAND, HOHENBERG & STEINBERG (1984) have proved that, in the vicinity of the polycritical point, different boundary conditions don't change qualitatively the problem.

It is convenient, in order to go further in the analysis, to write the equations (18) with nondimensional variables. Hence we set:

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = a \bar{x}, \quad z = a \bar{z}, \quad \mathbf{v} = \frac{\kappa}{a} \bar{\mathbf{v}}, \\ t = \frac{a^2}{\kappa} \bar{t}, \quad \theta = \frac{\nu \kappa}{\alpha g K a} \bar{\theta}, \quad c = -\frac{\nu \kappa k_T}{\alpha T_0 g K a} \bar{c}. \end{array} \right.$$

In the sequel we suppress the overbars, being understood that the equations deal with the nondimensional variables. Under these assumptions the equations (18) take the form:

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left[1 + \frac{Da}{\epsilon' Pr} \frac{\partial}{\partial t} \right] \Delta w - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \psi \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta - Ra w = -\delta Ra w f(z, t), \\ \frac{\partial c}{\partial t} - \Lambda \Delta c + \Lambda \Delta \theta - Ra w = \delta Ra w g(z, t), \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \end{array} \right.$$

where we have set:

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(z, t) = Re \left\{ [A(\lambda) e^{\lambda z} + A(-\lambda) e^{-\lambda z}] e^{i\omega t} \right\}, \\ g(z, t) = \frac{1}{\Lambda - 1} Re \left\{ [\Lambda A(\lambda) e^{\lambda z} + \Lambda A(-\lambda) e^{-\lambda z} \right. \\ \quad \left. + B(\lambda, \mu) e^{\mu z} + B(\lambda, -\mu) e^{-\mu z}] e^{i\omega t} \right\}, \\ \lambda = (1 + i) \sqrt{\omega/2}, \quad \mu = (1 + i) \sqrt{\omega/2\Lambda}, \\ A(\lambda) = \frac{\lambda e^{-\lambda}}{e^\lambda - e^{-\lambda}}, \quad B(\lambda, \mu) = \frac{1}{e^\mu - e^{-\mu}} (B_1(\lambda, \mu) + B_1(-\lambda, \mu)), \\ B_1(\lambda, \mu) = A(\lambda)(e^{-\mu} - e^\lambda). \end{array} \right.$$

In the equations (22) there appear six characteristic numbers of the problem:

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} Da = K/a^2 \text{ (Darcy number)}, \quad Pr = \nu/\kappa \text{ (Prandtl number)}, \\ \Lambda = D/\kappa \text{ (Lewis number)}, \quad \epsilon' \text{ (porosity)}, \end{array} \right.$$

and:

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} Ra = \frac{\alpha(T_0 - T_1) g K a}{\nu \kappa} \quad (\text{filtration Rayleigh number}), \\ \psi = -\frac{\alpha'}{\alpha} \frac{k_T}{T_0} \quad (\text{separation ratio}). \end{array} \right.$$

The four parameters (24) characterize the medium, and, for a given problem, are fixed. In the practice, the Darcy number is very small for the media of small granulometry which are considered here. Hence the instationary part of the first of (22) will be neglected in the sequel.

Turning to account the boundary conditions at $x = 0$ and $x = 1$ we now assume:

$$(26) \quad (w, \theta, c) = (w^*(t, z), \theta^*(t, z), c^*(t, z)) \cos n\pi x,$$

where n is an integer. After some calculations the system (22) can be reduced, for the unknown $w^*(t, z)$, to the sixth-order equation:

$$(27) \quad \left(-\frac{\partial^2}{\partial z^2} + n^2\pi^2 \right) \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^2} + \left\{ (1 + \Lambda) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - n^2\pi^2 \right)^2 - n^2\pi^2 Ra(1 + \psi) \right\} \frac{\partial w^*}{\partial t} \\ - \left\{ \Lambda \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - n^2\pi^2 \right)^3 - n^2\pi^2 Ra(\psi + \Lambda\psi + \Lambda) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - n^2\pi^2 \right) \right\} w^* \\ = -n^2\pi^2 \delta Ra \left\{ (f - \psi g) \frac{\partial w^*}{\partial t} - \Lambda(1 + \psi) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - n^2\pi^2 \right) (f w^*) \right. \\ \left. + \psi \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - n^2\pi^2 \right) (g w^*) + \left[\frac{\partial f}{\partial t} - \psi \frac{\partial g}{\partial t} \right] w^* \right\},$$

with the boundary conditions:

$$(28) \quad w^* = \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^2} = \frac{\partial^4 w^*}{\partial z^4} = 0 \quad \text{at } z = 0 \text{ and } z = 1.$$

4. - LINEAR TWODIMENSIONAL INSTABILITY ANALYSIS.

We assume now that the parameters Λ and δ are given, δ being small. We study the stability of the configuration with respect to the data, i.e. with respect of the

external temperature difference $T_1 - T_0$ and the periodical forcing $\delta \cos \omega t$. Hence we look for an asymptotic expansion of the solution of (26) with respect of δ in the form:

$$(29) \quad \begin{cases} (w^*, \theta^*, c^*) = (w_0, \theta_0, c_0) + \delta(w_1, \theta_1, c_1) + \delta^2(w_2, \theta_2, c_2) + \dots, \\ Ra = R_0 + \delta R_1 + \delta^2 R_2 + \dots \end{cases}$$

4.1. - Order 0.

At the order 0, (27) reads:

$$(30) \quad \left(-\frac{\partial^2}{\partial z^2} + n^2 \pi^2 \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + \left\{ (1 + \Lambda) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - n^2 \pi^2 \right)^2 - n^2 \pi^2 Ra (1 + \psi) \right\} \frac{\partial w_0}{\partial t} - \left\{ \Lambda \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - n^2 \pi^2 \right)^3 - n^2 \pi^2 Ra (\psi + \Lambda \psi + \Lambda) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - n^2 \pi^2 \right) \right\} w_0 = 0.$$

Taking into account the boundary conditions at $z = 0$ and $z = 1$, we assume:

$$(31) \quad w_0 = \tilde{w}_0 e^{\sigma t} \sin \pi z,$$

and we obtain from (30) the dispersion equation:

$$(32) \quad (n^2 + 1)\sigma^2 + a_1(R_0, \psi, n)\sigma + a_0(R_0, \psi, n) = 0,$$

where:

$$(33) \quad a_0 = -n^2 \pi^2 R_0 [1 + n^2] [\psi + \Lambda \psi + \Lambda] + \pi^4 \Lambda (1 + n^2)^3,$$

$$(34) \quad a_1 = -[n^2 R_0 (1 + \psi) - \pi^2 (1 + n^2) (1 + \Lambda)].$$

The stationary instability threshold is given by:

$$(35) \quad a_0 = 0, \quad a_1 > 0.$$

Hence:

$$(36) \quad R_0 = \frac{\pi^2(1+n^2)^2\Lambda}{n^2(\Lambda+\psi+\Lambda\psi)}.$$

The smallest value R_{CS} of R_0 is reached for $n = 1$, so that:

$$(37) \quad R_{CS} = \frac{4\pi^2\Lambda}{\Lambda+\psi+\Lambda\psi}.$$

It can be easily verified that $a_1(R_{CS}, \psi, 1) > 0$ when $\psi > -\Lambda^2/(1+\Lambda+\Lambda^2)$.

From the other hand the oscillatory instability threshold is given by:

$$(38) \quad a_1 = 0, \quad a_0 > 0.$$

Hence we obtain the critical Rayleigh number R_{C0} :

$$(39) \quad R_{C0} = \frac{4\pi^2(1+\Lambda)}{1+\psi}, \quad n = 1.$$

The condition $a_0 > 0$ gives the inequalities:

$$(40) \quad -1 < \psi < -\frac{\Lambda^2}{1+\Lambda+\Lambda^2}.$$

The results (36), (37), (39) and (40) can be summarized by stability curves in the (Ra, ψ) plane. These results and these curves, which characterize the linear instability with no time-dependent temperature gradient, are plotted on fig. 1 in the case $\alpha > 0$ (see, for example, in B. & S., realistic materials and mixtures showing a such case). The curve $R_0 = R_{CS}$ corresponds to a transition between the conducting state and the stationary convection which occurs for $\psi > \psi_{pc}$. For $\psi < \psi_{pc}$, the curve $R_0 = R_{C0}$ is the frontier between the conducting state and the oscillatory state. The two curves intersect at a point (ψ_{pc}, Ra_{pc}) (later denoted the polycritical point):

(figure 1)

$$(41) \quad \psi_{pc} = - \frac{\Lambda^2}{1 + \Lambda + \Lambda^2}, \quad Ra_{pc} = 4\pi^2(1 + \Lambda + \Lambda^2).$$

These results are nothing but the results obtained by B. & S. for stationary boundary conditions.

For the value (38) of the Rayleigh number, the corresponding value of σ is given by:

$$(42) \quad \sigma^2 = -\Omega^2 = \frac{4\pi^4}{1 + \psi} \Lambda^2 \left\{ 1 + \psi + \frac{\psi}{\Lambda} + \frac{\psi}{\Lambda^2} \right\} = \frac{4\pi^4}{1 + \psi} \Lambda^2 \left\{ 1 - \frac{\psi}{\psi_{pc}} \right\}.$$

Ω is the pulsation of the oscillation.

In order to solve the problem at the higher orders, we choose the critical value R_{c0} or R_{c5} of the Rayleigh number R_0 . We separately consider the two instabilities.

4.2. - Oscillatory instability.

We first consider an oscillatory instability, so that $R_0 = R_{c0}(\psi)$, and the expansion (29) of Ra reads:

$$(43) \quad Ra = R_{c0} + \delta R_{1c0} + \delta^2 R_{2c0} + \dots$$

(i) Order δ .

At the order 1 the equation (27) reads:

$$(44) \quad \left(-\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \pi^2 \right) \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + \left\{ (1 + \Lambda) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - n^2 \pi^2 \right)^2 - n^2 \pi^2 Ra(1 + \psi) \right\} \frac{\partial w_1}{\partial t} \\ - \left\{ \Lambda \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \pi^2 \right)^3 - \pi^2 R_{c0} (\psi + \Lambda \psi + \Lambda) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \pi^2 \right) \right\} w_1 \\ = -\pi^2 R_{c0} \left\{ (f - \psi g) \frac{\partial w_0}{\partial t} - \Lambda(1 + \psi) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \pi^2 \right) (f w_0) \right. \\ \left. + \psi \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \pi^2 \right) (g w_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial t} - \psi \frac{\partial g}{\partial t} \right] w_0 \right\} \\ + \pi^2 R_{1c0} (1 + \psi) \frac{\partial w_0}{\partial t} - \pi^2 R_{1c0} (\psi + \Lambda \psi + \Lambda) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \pi^2 \right) w_0,$$

where:

$$(45) \quad w_0 = \tilde{w}_0 e^{i\Omega t} \sin \pi z + \text{C.C.}$$

The inhomogeneous equation (44) possesses periodical solutions with respect of the time only if the righthand side is orthogonal to the kernel of the adjoint of the operator of the lefthand side. In fact this orthogonality condition is, in general, naturally satisfied for the equation (44): in effect the right hand side of (44) is a combination of terms of pulsations $\Omega + \omega$ and $\Omega - \omega$, while the eigenpulsation of the left hand side is Ω . Hence there exists a resonance only if $\omega = 2\Omega$. We exclude this singularity for the moment (see Section 4.3), and set $R_{1c0} = 0$.

In order to solve (44), we then expand the righthand side as Fourier series with respect of z . In particular it is convenient to expand $e^{\lambda z} \sin \pi z$:

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{l} e^{\lambda z} \sin \pi z = \sum_{n=1}^{+\infty} f_{nm}(\lambda) \sin n\pi z, \\ f_{nm}(\lambda) = -\frac{4nm\pi^2\lambda [1 + (-1)^{m+n+1} e^\lambda]}{[\lambda^2 + (n+m)^2\pi^2][\lambda^2 + (n-m)^2\pi^2]}. \end{array} \right.$$

Now we set:

$$(47) \quad \left\{ \begin{array}{l} k_{nm}(\lambda) = A(\lambda) f_{nm}(\lambda) + A(-\lambda) f_{nm}(-\lambda), \\ h_{nm}(\lambda, \mu) = \frac{1}{\Lambda - 1} \{ \Lambda k_{nm}(\lambda) + B(\mu) f_{nm}(\mu) + B(-\mu) f_{nm}(-\mu) \}. \end{array} \right.$$

We look for an expansion of w_1 in the form:

$$(48) \quad w_1 = \tilde{w}_0 e^{i\Omega t} \sum_{n=1}^{+\infty} \{ \tilde{w}_{1n}(\omega, \Omega) e^{i\omega t} + \tilde{w}_{1n}(-\omega, \Omega) e^{-i\omega t} \} \sin n\pi z + \text{C.C.}$$

We obtain after some calculation:

$$(49) \quad \tilde{w}_{1n}(\omega, \Omega) = W_{1n}(\omega, \Omega) / \Delta_n(\omega, \Omega),$$

with:

$$(50) \left\{ \begin{aligned} \Delta_n(\omega, \Omega) &= \pi^2(n^2 + 1)(\omega + \Omega)^2 + i(\omega + \Omega)\pi^2 \left\{ R_{co}(1 + \psi) \right. \\ &\quad \left. - \pi^2(n^2 + 1)^2(1 + \Lambda) \right\} \\ &\quad + \pi^4 R_{co}(n^2 + 1)(\Lambda + \Lambda\psi + \psi) - \Lambda\pi^6(n^2 + 1)^3, \\ W_{1n} &= \frac{1}{2} R_{co} \pi^2 \left\{ k_{n1} \left[i(\omega + \Omega) + \Lambda\pi^2(n^2 + 1)(1 + \psi) \right] \right. \\ &\quad \left. - h_{n1} \psi \left[i(\omega + \Omega) + \pi^2(n^2 + 1) \right] \right\}. \end{aligned} \right.$$

Note that, in virtue of (39) and (42) we have for $n = 1$:

$$(51) \quad W_{11} = 0(1), \quad \Delta_1(\omega, \Omega) = 2\pi^2\omega(\omega + 2\Omega),$$

so that the expansion (29) ceases to be valid if $\delta/(\omega(\omega + 2\Omega)) = 0(1)$.

(ii) Order δ^2 .

The preceding computation can be repeated at the order 2 in view to obtain the alteration R_{2co} of the instability onset due to the periodical forcing. The equation satisfied by w_2 corresponding to (44) now takes the form:

$$(52) \quad \left(-\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \pi^2 \right) \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + \left\{ (1 + \Lambda) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - n^2 \pi^2 \right)^2 - n^2 \pi^2 Ra(1 + \psi) \right\} \frac{\partial w_2}{\partial t} \\ - \left\{ \Lambda \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \pi^2 \right)^3 - \pi^2 R_{co} (\psi + \Lambda\psi + \Lambda) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \pi^2 \right) \right\} w_2 \\ = -\pi^2 R_{co} \left\{ (f - \psi g) \frac{\partial w_1}{\partial t} - \Lambda(1 + \psi) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \pi^2 \right) (f w_1) \right. \\ \left. + \psi \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \pi^2 \right) (g w_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial t} - \psi \frac{\partial g}{\partial t} \right] w_1 \right\} \\ + \pi^2 R_{2co} (1 + \psi) \frac{\partial w_1}{\partial t} - \pi^2 R_{2co} (\psi + \Lambda\psi + \Lambda) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \pi^2 \right) w_1.$$

Because of the form (48) taken by w_1 and the form (23) of the functions f and g (which also depend on the time) there appear in (52) some terms which are resonant with the eigensolutions of the operator of the lefthand side. The orthogonality condition is straightforward (it is sufficient to cancel the terms of pulsation Ω in the right hand side). Hence we obtain:

$$(53) \quad 2 R_{2c_0} (\psi + \Lambda \psi + \Lambda) \\ = R_{c_0} \Lambda (1 + \psi) Re \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} [(\tilde{w}_{1n}(\omega, \Omega) k_{n1} + \tilde{w}_{1n}(-\omega, \Omega) \bar{k}_{n1})] \right\} \\ - R_{c_0} \psi Re \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} [(\tilde{w}_{1n}(\omega, \Omega) h_{n1} + \tilde{w}_{1n}(-\omega, \Omega) \bar{h}_{n1})] \right\}.$$

The functions \bar{k}_{n1} and \bar{h}_{n1} figuring in (53) are the complex conjugates of the functions k_{n1} and h_{n1} defined by (47), namely:

$$(54) \quad \left\{ \begin{array}{l} k_{n1}(\lambda) = - \frac{4n\pi^2 \lambda^2}{[\lambda^2 + (n+1)^2 \pi^2][\lambda^2 + (n-1)^2 \pi^2]}, \\ h_{n1}(\lambda, \mu) = \frac{1}{\Lambda - 1} \{ \Lambda k_{n1}(\lambda) + j_{n1}(\lambda, \mu) \}, \\ j_{n1}(\lambda, \mu) \\ = \frac{4n\pi^2 \lambda \mu \{ (e^\lambda + e^{-\lambda})(e^\mu + e^{-\mu}) + 2(-1)^n [(e^\lambda + e^{-\lambda}) - (e^\mu + e^{-\mu})] \}}{[\mu^2 + (n+1)^2 \pi^2][\mu^2 + (n-1)^2 \pi^2][e^\mu - e^{-\mu}][e^\lambda - e^{-\lambda}]} \end{array} \right.$$

There are limiting cases, the study of which is of interest. Assuming ψ to be fixed, let vary ω : it results from (53) the following properties:

(i) if ω is large, then $R_{2c_0} \approx 0(1/\omega^2)$: hence the influence of the instationary perturbation on the onset of stability decreases and vanishes for high frequencies.

(ii) if $\omega \rightarrow 0$, several cases must be distinguished: for $n \neq 1$, the perturbation is of order ω^2 . For $n = 1$, we obtain:

$$(55) \quad R_{2c_0} \approx 2\pi^4 \Lambda \frac{R_{c_0}^2}{R_{c_s}} \frac{1}{\omega^2 - 4\Omega^2} \\ + \frac{1}{32\pi^2 \Lambda^2} R_{c_0}^2 R_{c_s} \psi \frac{\Omega^2}{\omega^2 - 4\Omega^2} \left\{ \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{3} \right\} + 0(\omega^2).$$

R_{2c0} appears as the sum of two terms, which can either stabilize (if $R_{2c0} > 0$) or destabilize (if $R_{2c0} < 0$) the configuration. The limit cases $R_{2c0} = 0$ are obtained when ψ is a root of the third degree equation:

$$(56) \quad (1 + \psi)(\Lambda + \Lambda\psi + \psi)^2 = \psi(\Lambda + \psi + \Lambda\psi + \frac{\psi}{\Lambda})(1 + \pi^2/3).$$

(figure 2)

The variations of R_{2c0} with respect of ψ are plotted, for small ω , on figure 2 (for $\psi < \psi_{pc}$) for the same numerical values of Λ that in the figure 1. When $\psi_{pc} - \psi$ is large, the stability of the system is reduced because of modulation. Nevertheless, when $\psi \rightarrow \psi_{pc}$, R_{2c0} goes to $-\infty$. It is not a surprising result, because, as we have pointed out before, the expansion becomes invalid as early as $\delta/(\omega(\omega + 2\Omega)) = O(1)$, and a local analysis (inner expansion) is needed in order to study the neighbourhood of the polycritical point when $\omega \rightarrow 0$ (see Sect. 5).

The term R_{2c0} being determined, the computation of the solution of (52) can be achieved without difficulty. However, because of the form of the righthand side of (52), it can be noticed that it appears, in this computation, several secondary resonances, which occur whenever $n\Omega = m\omega$, n and m being arbitrary integers such that $m/n \neq 1/2$.

4.3. - The resonant case $\Omega = \omega/2$.

We now consider the preceding equations in the resonant cases, and, first, the primary resonance $\Omega = \omega/2$ in (44). In this case some terms of the righthand side of (44) are time-periodic with the pulsation Ω while ω is just the pulsation of the operator of the lefthand side. In this case the resonant terms of the righthand side can be eliminated by considering a nonzero R_{1c0} . Consider a solution w_0 given by (45). By writing explicitly the right hand side of (44) and canceling the terms of pulsation Ω , we obtain the condition:

$$(57) \quad R_{1c0} \tilde{w}_0 C(\omega) = \tilde{w}_0 D(\omega),$$

where:

$$(58) \quad \left\{ \begin{array}{l} C(\omega) = \frac{8\pi^4 \Lambda}{R_{CS}} + i \frac{\omega}{2} (1 + \psi), \\ D(\omega) = \frac{R_{C0}}{2} \left\{ 2\pi^2 [\Lambda(1 + \psi)k_{1,1} - \psi h_{1,1}] + i \frac{\omega}{2} [k_{1,1} - \psi h_{1,1}] \right\}. \end{array} \right.$$

By canceling the terms of pulsation $-\Omega$ we obtain:

$$(59) \quad R_{1c0} \bar{\tilde{\omega}}_0 \bar{C}(\omega) = \tilde{\omega}_0 \bar{D}(\omega),$$

where $C(\omega)$ and $D(\omega)$ are defined in (58), and the bars stay for complex conjugates. Since R_{1c0} must simultaneously satisfy the two equations (57) and (59), we deduce from one hand that, at an instability onset, $\tilde{\omega}_0$ is not entirely arbitrary, and, from the other hand, that:

$$(60) \quad R_{1c0} = \pm \left| \frac{D(\omega)}{C(\omega)} \right|,$$

the + or - corresponding to the oscillatory solution which degenerates to the instability.

As earlier we consider the limiting cases: for large ω the perturbation doesn't really affect the stability: $R_{1c0} = O(1/\omega^2)$. For small ω we then obtain:

$$(61) \quad R_{1c0} \approx \pm R_{C0}/2 + O(\omega^2).$$

In order to understand how appears the $O(\delta)$ corrective term in the critical Rayleigh number in place of the $O(\delta^2)$ previously determined, it is of interest to let vary ω continuously so that $\omega \rightarrow 2\Omega$. If ω varies, the term $\tilde{\omega}_{11}$ given by (49) reads:

$$(62) \quad \tilde{\omega}_{11}(-\omega, \Omega) = O(1/(2\Omega - \omega)),$$

so that the expansion (29) remains valid only if $\delta/(2\Omega - \omega) = O(1)$. From the other hand, it follows from (53) that, if $\omega - 2\Omega$ is small, $R_{2c0} = O(\tilde{\omega}_{11})$, i.e. δR_{2c0} is of order 1. Hence the part of $\delta^2 R_{2c0}$ which contains $\tilde{\omega}_{11}$ becomes a term of order δ only.

This term is the one given by (56) or (59).

Consider now a secondary resonance $\Omega = (m/n)\omega$: by a procedure analogous to the above procedure, we see that the form of R_{2c0} is modified: to the term given by (53), say R_{2c01} , we must add some corrective term $R_{2c02m,n}$ which is computed using the same method that the method used for the term R_{1c0} given by (60).

In fact, it is not essential to exactly determine the term $R_{2c02m,n}$ because of the following argument: it follows from (57) that, since the corrective term R_{1c0} is a $O(\delta)$ term (instead of a $O(\delta^2)$ in the general case), the destabilization of the configuration induced by the periodical forcing arises by the particular pulsation $\omega/2$. All other cases always arise at higher orders. Hence the instability always arises, for a given frequency of the excitor, by an oscillation of the half frequency.

4.4. - Stationary instability.

The preceding analysis can be repeated for the stationary instability onset $R_0 = R_{CS}$. Since the analysis exactly follows the previous one, we give here only the results. We start from the solution at the order 0 given by (31) for $\Omega = 0$. First, at the order δ , the equation satisfied by w_1 is similar to (44) (with R_{c0} replaced by R_{CS} and taking into account the properties of R_{CS}), the linear operator of the lefthand side being analogous. The righthand side remains regular (except if $\omega = 0$) so that, also in this case, $R_{1CS} = 0$ in general (see later the case $\omega = 0$). We then obtain the expression of w_1 :

$$(63) \quad \left\{ \begin{array}{l} w_1 = \tilde{w}_0 \sum_{n=1}^{+\infty} \tilde{w}_{1n}(\omega) e^{i\omega t} \sin n\pi z + \text{C.C.}, \\ \tilde{w}_{1n}(\omega) = \tilde{W}_{1n}(\omega) / \Delta_n(\omega), \end{array} \right.$$

with:

$$(64) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta_n(\omega) = \pi^2(n^2 + 1)\omega^2 + i\omega\pi^2[R_{CS}(1 + \psi) - \pi^2(n^2 + 1)^2(1 + \Lambda)] \\ \quad \quad \quad + \pi^4 R_{CS}(n^2 + 1)(\Lambda + \Lambda\psi + \psi) - \Lambda\pi^6(n^2 + 1)^3, \\ \tilde{W}_{1n}(\omega) = \frac{\pi^2}{2} R_{CS} \left\{ k_{n1} [i\omega + \Lambda\pi^2(n^2 + 1)(1 + \psi)] \right. \\ \quad \quad \quad \left. - h_{n1} \psi [i\omega + \pi^2(n^2 + 1)] \right\}. \end{array} \right.$$

By the same procedure that the one used in Sect. 4.2. we then obtain, at the order δ^2 , the following orthogonality condition:

$$(65) \quad R_{2cs} \{ \psi + \Lambda \psi + \Lambda \}$$

$$= \frac{1}{2} R_{cs} \sum_{n=1}^{+\infty} \{ \Lambda(1 + \psi) \bar{k}_{n1} \tilde{w}_{1n}(\omega) - \psi \bar{h}_{n1} \tilde{w}_{1n}(\omega) \} + C.C.,$$

which determines R_{2cs} .

The behaviour of R_{2cs} for large ω and small ω can be estimated in the same manner that for the oscillatory instability. For large ω there is no singularity, and R_{2cs} is $O(1/\omega^2)$. For small ω the main singular part of R_{2cs} arises from the term $n = 1$, more precisely:

$$(66) \quad R_{2cs} \approx \frac{R_{cs}^2}{4\omega^2 + (1 + \psi)^2 (R_{cs} - R_{c0})^2}$$

$$\times \left\{ \frac{8\Lambda\pi^4}{R_{cs}} + \frac{1}{2} (1 + \psi)^2 (R_{cs} - R_{c0}) \right\}.$$

It follows from (66) that, for $-1 < \psi$, far from the critical point (ψ_{pc}, R_{apc}) , R_{2cs} is negative: hence the effect of the time-perturbation is to hasten the destabilization of the basic solution. The variations of R_{2cs} with respect of ψ are plotted on Fig. 3.

(figure 3)

In the same manner that for the oscillatory instability, there exists, in the present case, a resonance which arises when $\omega = 0$. Effectively, in this case, the denominator $\Delta_1(\omega)$ given by (64) vanishes. If $|\psi - \psi_{pc}|$ is $O(1)$, this resonance can be solved and explained by the procedure used in Sect. 4.3. In particular there exists in the critical Rayleigh number a corrective term of order δ :

$$(67) \quad R_{1cs} = \pm R_{cs}/2,$$

If $|\psi - \psi_{pc}| \rightarrow 0$, the above analysis becomes invalid, and requires a local study, as for the oscillatory case (see following section).

5. - STUDY OF THE NEIGHBOURHOOD OF THE POLYCRITICAL POINT FOR SMALL ω .

5.1. - Inner expansion.

The preceding analysis, in both resonant and nonresonant cases, has been recognized to be invalid for small ω when the critical values (ψ, R_0) approach the polycritical instability onset (ψ_{pc}, Ra_{pc}) . In order to study this singularity, it is convenient to consider the preceding expansions as outer expansions, while the neighborhood of the polycritical point can be studied by using a second expansion, i.e an inner expansion. This procedure has been used by KNOBLOCH & PROCTOR (1981), in nonlinear stability, in order to study the amplitude equation of a fluid motion in magnetic field. We consider here only the linear procedure. Hence we assume that the value of $|\psi - \psi_{pc}|$ is small, say:

$$(68) \quad \psi = \psi_{pc} + \varepsilon \bar{\psi}, \quad Ra = Ra_{pc} + \varepsilon \bar{Ra},$$

where ε is some small parameter, as yet undetermined. It follows from the expressions (37) and (39) of R_{cs} and R_{co} that:

$$(69) \quad R_{cs} = Ra_{pc}^r + \varepsilon R'_{cs} \bar{\psi}, \quad R_{co} = Ra_{pc} + \varepsilon R'_{co} \bar{\psi},$$

$$(70) \quad R'_{cs} = -\frac{Ra_{pc}^2}{4\pi^2} \left(1 + \frac{1}{\Lambda}\right), \quad R'_{co} = -\frac{Ra_{pc}^2}{4\pi^2} \frac{1}{1 + \Lambda}.$$

Since, after (42), $\Omega \rightarrow 0$ when $\psi \rightarrow \psi_{pc}$, so that $\Omega^2 = O(\psi - \psi_{pc})$, and since the times intervenes in w_0 only through the quantity Ωt , it follows that the times appears, in the unstable solutions at the order 0, only through the slow variable $\sqrt{\varepsilon} t$. Hence we write the equation (27) with the help of the variable:

$$(71) \quad \tau = \sqrt{\varepsilon} t.$$

For the same reason the limit case where the different terms are in competition is the case where ω is small and of the same order as Ω . Hence we set:

$$(72) \quad \omega = \sqrt{\varepsilon} \bar{\omega}, \quad \Omega^2 = \varepsilon \Omega^{2'} \bar{\psi}, \quad \Omega^{2'} = \frac{4\pi^4 \Lambda^2}{(1 + \psi_{pc}) \psi_{pc}}.$$

Note that, in the considered region, $\bar{\psi} < 0$, $\Omega^{2'} < 0$, and that:

$$(73) \quad R'_{co} - R'_{cs} = -\Omega^{2'} \frac{Ra_{pc}}{4\pi^4 \Lambda}.$$

Moreover (see Sect. 4.2), since the outer expansion becomes invalid if $\delta/\omega^2 = O(1)$, we must finally have:

$$(74) \quad \varepsilon = \delta.$$

The equation (74) defines in the (ψ, Ra) plane, the thickness of the inner region around the polycritical point: this thickness is nothing but the order of magnitude of the forcing time-perturbation. Since the instability arises for a one cellule-flow, we then look for an expansion of w^* in the form:

$$(75) \quad w^* = \bar{W}(\tau) \sin \pi z.$$

By introducing (68)-(75) in (27) and keeping only the main part of the equation obtained, we deduce after some calculations, at order 0 with respect of δ , the Mathieu equation satisfied by \bar{W} :

$$(76) \quad \frac{d^2 \bar{W}}{d\tau^{*2}} - [\bar{\theta} + 2\bar{q} \cos 2\tau^*] \bar{W} = O(\sqrt{\delta}),$$

where we have set:

$$(77) \quad \bar{\theta} = \frac{16\pi^4 \Lambda (\bar{Ra} - R'_{cs} \bar{\psi})}{\bar{\omega}^2 Ra_{pc}}, \quad \bar{q} = \frac{8\pi^4 \Lambda}{\bar{\omega}^2}, \quad \tau^* = \frac{\bar{\omega}}{2} \tau.$$

Before we consider the stability of \bar{W} , it is necessary, in order to understand the behaviour of the inner solution, to achieve the matching of the solution in the inner region with the outer expansion.

5.2. - Intermediate expansion.

In order to match the inner solution with the outer one, following the classical asymptotic matching principles (see, for example, NAYFEH, 1981) we consider an intermediate region in the (Ra, ψ) plane, in which the inner and the outer expansions, written with the intermediate variable, are coincident: this intermediate region is defined by the relation:

$$(78) \quad \psi - \psi_{pc} = \eta \tilde{\psi}, \quad \delta \ll \eta \ll 1, \quad \tilde{\psi} = O(1).$$

Since η is small, there exist equalities similar to (68), (69), (71), (72):

$$(79) \quad Ra = Ra_{pc} + \eta \tilde{Ra},$$

$$(80) \quad R_{cs} = Ra_{pc} + \eta R'_{cs} \tilde{\psi}, \quad R_{co} = Ra_{pc} + \eta R'_{co} \tilde{\psi},$$

$$(81) \quad \tilde{\tau} = \sqrt{\eta} t, \quad \tilde{\omega} = \sqrt{\eta} \omega,$$

where R'_{cs} and R'_{co} are defined by (71). The equation corresponding to (76) reads:

$$(82) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \tilde{W}}{d\tilde{\tau}^2} - [\tilde{\theta} + \sqrt{q} \cos \tilde{\omega} \tilde{\tau}] \tilde{W} = O(\sqrt{\eta}), \quad v = \delta/\eta, \\ \tilde{\theta} = 4\pi^4 \Lambda (\tilde{Ra} - R'_{cs} \tilde{\psi}) / Ra_{pc}, \quad \tilde{q} = 4\pi^4 \Lambda. \end{array} \right.$$

For any positive integer p , under the condition $\delta \ll \eta \ll \delta^{2p/(2p+1)}$, then $v \ll 1$ and $\sqrt{\eta} \ll v^p$. Hence there exists a region in which the intermediate expansion can be itself determined from (82) and expanded with respect of the parameter v . This expansion can always be matched with the first approximation of the inner expansion. Choosing $p = 2$, we expand \tilde{W} , $\tilde{\theta}$ and \tilde{Ra} as:

$$(83) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{W} = W_0 + v W_1 + v^2 W_2 + o(v^2), \\ \tilde{\theta} = \tilde{\theta}_0 + v \tilde{\theta}_1 + v^2 \tilde{\theta}_2 + o(v^2), \\ \tilde{Ra} = \tilde{Ra}_0 + v \tilde{Ra}_1 + v^2 \tilde{Ra}_2 + o(v^2). \end{array} \right.$$

We then deduce from (82):

$$(84) \quad \frac{d^2 W_0}{d\tilde{\tau}^2} + \tilde{\Omega}^2 W_0 = 0,$$

$$(85) \quad \frac{d^2 W_1}{d\tilde{\tau}^2} + \tilde{\Omega}^2 W_1 = \tilde{\theta}_1 W_0 + \tilde{q} W_0 \cos \tilde{\omega} \tilde{\tau},$$

$$(86) \quad \frac{d^2 W_2}{d\tilde{\tau}^2} + \tilde{\Omega}^2 W_2 = \tilde{\theta}_2 W_0 + \tilde{\theta}_1 W_1 + \tilde{q} W_1 \cos \tilde{\omega} \tilde{\tau},$$

where we have set:

$$(87) \quad \tilde{\Omega}^2 = -\tilde{\theta}_0.$$

The equation (84) defines the intermediate expansion at order 0. We then deduce from (85) that $\tilde{\theta}_1 = 0$, except if $\tilde{\Omega} = \tilde{\omega}/2$. The equation (86) then shows that $\tilde{\theta}_2 = 0$. After calculation (as in the outer expansion, it is sufficient to cancel the terms of pulsation $\tilde{\Omega}$ in the right hand side), we obtain $\tilde{\theta}_2 = -\tilde{q}^2/(2(4\tilde{\Omega}^2 - \tilde{\omega}^2))$, except if $\tilde{\Omega} = \tilde{\omega}$. Hence:

$$(88) \quad \tilde{\theta} = -\tilde{\Omega}^2 - \frac{\nu^2 \tilde{q}^2}{2(4\tilde{\Omega}^2 - \tilde{\omega}^2)} + o(\nu^2),$$

From the expansion of $\tilde{\theta}$ we then deduce:

$$(89) \quad \tilde{R}a - R'_{cs}\tilde{\psi} = -\frac{Ra_{pc}}{4\pi^4\Lambda} \left\{ \tilde{\Omega}^2 + \frac{\nu^2 \tilde{q}^2}{2(4\tilde{\Omega}^2 - \tilde{\omega}^2)} + o(\nu^2) \right\}.$$

According with the preceding restrictions, (89) is valid except if $\tilde{\Omega} = \tilde{\omega}$ or $\tilde{\omega}/2$: in the first case, the term $O(\nu^2)$ is more complicated, since some terms of the right hand side of (86) are resonant with the left hand side. The second case is more interesting: by considering a solution of (84) of the form:

$$(90) \quad W_0 = A e^{i\tilde{\Omega}t} + \bar{A} e^{-i\tilde{\Omega}t},$$

where \bar{A} is the complex conjugate of A , we obtain as orthogonality condition after some computation:

$$(91) \quad \tilde{\theta}_1 = -\frac{\tilde{q}}{2} \frac{A^2 + \bar{A}^2}{2A\bar{A}} = \frac{\tilde{q}}{2} \left\{ 1 - \frac{(A + \bar{A})^2}{2A\bar{A}} \right\}$$

It results from (91) that:

$$-\tilde{q}/2 \leq \tilde{\theta}_1 \leq \tilde{q}/2,$$

the values $\pm \tilde{q}/2$ corresponding to the marginal unstable states. Hence, for the instability threshold:

$$(92) \quad \tilde{\theta}_1 = \pm \tilde{q}/2.$$

$$(93) \quad \tilde{R}a - R'_{cs}\tilde{\psi} = -\frac{Ra_{pc}}{4\pi^4\Lambda} \left\{ \tilde{\Omega}^2 \pm \frac{\tilde{q}}{2}v + o(v^2) \right\}.$$

5.3. - Matching of the inner expansion and of the outer expansion.

In order to match the outer expansion and the inner expansion, we now identify these expansions with the intermediate one. We begin by assuming that $\tilde{\Omega} = p\tilde{\omega}/2$, p integer (see later this case). In a first step, by writing the outer expansion with the intermediate variable and identifying to the above expressions we obtain:

(i) matching with the stationary unstable solution:

$$(94) \quad \tilde{\Omega}^2 = 0, \quad \tilde{R}a - R'_{cs}\tilde{\psi} = \frac{Ra_{pc}}{8\pi^4\Lambda} \frac{v^2 \tilde{q}^2}{\tilde{\omega}^2} + o(v^2),$$

(ii) matching with the oscillatory unstable solution:

$$(95) \quad \tilde{\Omega}^2 = \frac{4\pi^4\Lambda^2 \tilde{\psi}}{(1 + \psi_{pc}) \psi_{pc}} = \Omega^2 \tilde{\psi},$$

and by using (73), (89) can be rewritten in the form:

$$(96) \quad \tilde{R}a - R'_{co}\tilde{\psi} = -\frac{Ra_{pc}}{8\pi^4\Lambda} \frac{v^2 \tilde{q}^2}{4\tilde{\Omega}^2 - \tilde{\omega}^2} + o(v^2).$$

Now we match the intermediate expansion with the solution of the inner equation: this solution can be written as a Floquet series:

$$(97) \quad \bar{W}(\tau^*) = e^{i\alpha\tau^*} \sum_{n=1}^{+\infty} F_n(\tau^*) + \text{C.C.},$$

where the F_n are 2π -periodic functions and $\alpha(\bar{\theta}, \bar{q})$, as yet undetermined, is the characteristic exponent of \bar{W} . In fact, the only important term in (97) is this exponent. For small \bar{q} , the variable $\bar{\theta}(\alpha, \bar{q})$ admits the following expansion as Taylor series (*):

$$(98) \quad -\bar{\theta} = \alpha^2 + \frac{\bar{q}^2}{2(\alpha^2 - 1)} + o(\bar{q}^4).$$

We now introduce, instead of α , a new variable $\bar{\Omega}$ defined by:

$$(99) \quad \alpha = 2\bar{\Omega}/\bar{\omega}.$$

By introducing (99) in (98) and by writing the obtained expression in terms of the intermediate variable, the identification with (88) finally gives:

$$(100) \quad \bar{\Omega}^2 = \Omega^2 \bar{\psi}.$$

We deduce from (100) the formulae corresponding to (94) and (96), valid if $\bar{q} \ll 1$ and α bounded:

(i) stationary instability:

$$(101) \quad \bar{R}_a - R'_{cs}\bar{\psi} = \frac{Ra_{pc}\bar{q}}{4} + o(\bar{q}), \quad Ra - R_{cs} = \delta \frac{Ra_{pc}\bar{q}}{4}.$$

(ii) oscillatory instability:

$$(102) \quad \bar{R}_a - R'_{co}\bar{\psi} = -\frac{Ra_{pc}\bar{q}\bar{\omega}^2}{4(4\bar{\Omega}^2 - \bar{\omega}^2)} + o(\bar{q}),$$

$$Ra - R_{co} = -\delta \frac{Ra_{pc}\bar{q}\bar{\omega}^2}{4(4\bar{\Omega}^2 - \bar{\omega}^2)}$$

(*) All formulae and expansions used here, concerning the Mathieu functions, can be found in any handbook of mathematical functions, and, in particular, in ABRAMOWITZ & STEGUN, 1965. The formulae (98), (104) and (107) are (20.3.15.), (20.2.25) and (20.2.30) of A. & S.

From (101) and (102), we deduce the displacement of the polycritical point itself (i.e. $\bar{\psi} = 0$). We obtain $\bar{Ra} = -Ra_{pc} \bar{q}/4$. Hence the new approximation of the polycritical point is given by:

$$(103) \quad Ra = Ra_{pc} (1 - \delta \bar{q}/4).$$

The values (101), (102) and (103) are valid only for small \bar{q} , and given nonresonant $\bar{\omega}$. In particular, after (77), for a given Lewis number Λ , (103) becomes invalid if $\bar{\omega} \rightarrow 0$.

5.4. - Resonant cases .

In the resonant cases $\bar{\Omega} = p\bar{\omega}/2$ (p integer) the preceding results are not valid for the "oscillatory" instability. The examination of the inner expansion exhibits, first, a difference between the "stationary" instability and the "oscillatory" instability: the oscillatory instability is, in general (for small \bar{q}) a stable state while the stationary instability corresponds itself to a marginal state between stability and instability. This property results of the behaviour of the Floquet exponents in the $(\bar{\theta}, \bar{q})$ plane (see figure 4). The resonant cases correspond to states where the oscillatory instability is also a marginal state of the medium. In these cases the expansions $\bar{\theta}(\bar{q})$ are different of the ones given by (98). It results from the corresponding formulae (see A. & S), that the only important resonance is the resonance $\bar{\Omega} = \bar{\omega}/2$: all other resonances are described by a behaviour $-\bar{\theta} = p^2 + O(\bar{q}^2)$, while the first resonance is characterized by the local expansion:

$$(104) \quad -\bar{\theta} = 1 \pm \bar{q} - \frac{\bar{q}^2}{8} \mp \frac{\bar{q}^3}{64} + \dots$$

(figure 4)

the \pm corresponding to the first or the second branch of the marginal state curve. The expansion (104) matches with the intermediate expansion (93). By restituting the

Rayleigh number instead of $\bar{\theta}$, we obtain from (104):

$$(105) \quad \bar{Ra} - R'_{co}\bar{\psi} = \pm \frac{Ra_{pc}}{2} + O(\bar{q}).$$

This formula can be rewritten in the form:

$$(106) \quad Ra - R_{co} = \pm \delta \frac{Ra_{pc}}{2}.$$

The formula (105) is the formula corresponding to (102) in the resonant case $\bar{\Omega} = \bar{\omega}/2$. The formula (106) corresponds to (104) and shows that the largest displacement of the polycritical point arises from the resonance $\bar{\Omega} = \bar{\omega}/2$. Hence, the displacement of the polycritical Rayleigh number is the one determined for the subharmonic resonance.

5.5. - Behaviour of the inner expansion and case $\bar{\omega} \rightarrow 0$.

The expansions of preceding sections furnish the values of $\bar{\Omega}$ in the inner expansion. Once $\bar{\Omega}$ is given, then α is also given and the corresponding value of $\bar{\theta}$ can be estimated for any value of \bar{q} . For the "oscillatory instability, in the nonresonant case, $\bar{\theta}$ follows a regular trajectory in the $(\bar{\theta}, \bar{q})$ plan (dotted line of the figure 4). An interest of the resonant cases is to exhibit the proper instabilities of the inner solution: in effect, all resonant cases, which represent the only periodic solutions of the inner equation, are also marginal states (see fig. 4). These cases correspond to bifurcations of the instability of the medium. These unstable states appear as Arnold tongues in the $(\bar{\theta}, \bar{q})$ plane (see, for example, IOOSS & JOSEPH, 1990) and their study requires a nonlinear stability procedure. The subharmonic instability corresponds to a pitchfork bifurcation, while the other resonances correspond to cusp bifurcations.

Now if we consider large values of \bar{q} , we have:

$$(107) \quad \bar{\theta} \approx -2\bar{q} + O(\sqrt{\bar{q}}).$$

The expansion (107) allows us to estimate the behaviour of $Ra - Ra_{pc}$ for small $\bar{\omega}$. By inserting (107) in (77) and restituting $Ra - Ra_{pc}$, we then obtain:

$$(108) \quad Ra - Ra_{pc} \approx \pm \delta Ra_{pc}.$$

The formula (108) replaces (104) for small and for vanishing $\bar{\omega}$: this formula exhibits, in particular, for an aperiodic forcing, the displacement of the polycritical Rayleigh number. This displacement would be, in particular, the one which would be found if we directly consider a constant variation of the prescribed temperature gradient: hence the inner expansion is also a tool in order to consider the case of vanishing ω in the initial problem.

6. - CONCLUSION.

The linear stability of a fluid mixture in a porous medium in the presence of a temperature gradient has been considered when this temperature gradient itself periodically varies with respect of the time (with an amplitude $O(\delta)$, δ small). The influence of this infinitesimal perturbation has been studied by an asymptotic expansion with respect of the amplitude of the excitor. We have evaluated the displacement of the onset of stability with respect of the frequency of the temperature variation. In general cases this displacement is of order δ^2 . In a particular resonant case the displacement becomes of order δ , the apparent convection in the medium being then of frequency $\omega/2$: this case occurs, in particular, if the periodic forcing results from the Fourier analysis of an arbitrary forcing: if a Fourier component is such that $\omega = 2\Omega$, the displacement becomes of order δ and the instability which, practically, develops, is this subharmonic instability.

For the high frequencies, the linear study shows that the shift of the critical Rayleigh number is of order δ/ω^2 . For the low frequencies ($\omega = O(\sqrt{\delta})$), this study must be supplemented by a local study when we approach the polycritical point of the stability diagram. The matching of the outer expansion and the inner expansion shows allows, in this case, to evaluate the displacement of the polycritical Rayleigh number, and, in particular, to estimate this displacement for aperiodic forcing ($\omega \rightarrow 0$). One finds the so-called Arnold's tongues where the motion is mode locked if Ω/ω is rational. Between these tongues, Ω/ω is irrational and we have the nonmode locking. The study of this phenomenon cannot be envisaged by a linear theory: in this case, the nonlinear effects involve a nonlinear version of the Mathieu equation. This discussion is postponed in a subsequent paper (see OUARAZI & al., *in preparation*).

REFERENCES.

ABRAMOWITZ M. & STEGUN I. - "Handbook of mathematical functions". Dover, New York, 1965.

AHLERS G., CROSS M.C., HOHENBERG P.C. & SAFRAN S. - "The amplitude equation near the convective threshold: application to time-dependent experiments". - J.F.M., vol. 110, 1981, p. 149-161.

BOWEN R.M. - "Theory of mixtures". - in "*Continuum Physics*", vol. III, A.C. Eringen ed., Academic Press, 1976, p. 1-127.

BRAND H.R., HOHENBERG P.C. & STEINBERG V. - "Codimension 2-bifurcations for convection in binary fluid mixtures". - Physical Review, vol. 30, 1984, series A, p. 2548-2561.

BRAND H.R. & STEINBERG V. - "Convective instabilities in binary mixtures in a porous medium". - Physica, vol. 119A, 1983a, p. 327-338.

BRAND H.R. & STEINBERG V. - "Nonlinear effects in the convective instability of a binary mixture in a porous medium near threshold". - Physics letters, vol. 93A, 1983b, p. 333-336.

COULLET P.H. & SPIEGEL E.A. - "Amplitude equations for systems with competing instabilities". - S.I.A.M. J. Appl. Math., vol. 43, 1983, p. 776-821.

DOWDEN J. - "The stability of a periodically heated layer of fluid". - J. F.M., vol. 110, 1981, p. 149-159.

HEINRICHS R., AHLERS G. & CANNELL D.S. - "Traveling waves and spatial variation in the convection of a binary mixture". - Phys. Rev., vol. 35, 1987, p. 2761-2764.

HOMSY G. - "Global stability of time-dependent flows. Part 2: modulated layers". - J.F.M., vol. 62, 1974, p. 387-403.

HOSS G. & JOSEPH D.D. - "Elementary stability and bifurcation theory", 2^d ed. - Springer, Berlin, 1990.

KNOBLOCH E. & PROCTOR M.R.E. - "Nonlinear periodic convection in double-diffusive systems". - J. F. M., vol. 108, 1981, p. 291-316.

NAYFEH A.H. - "Introduction to perturbation techniques". - J. Wiley & sons, New York, 1981.

OUARZAZI M.N., BOIS P.A. & TAKI M. - "Nonlinear interaction of convective instabilities and temporal chaos of fluid mixture in porous medium". - *in preparation*.

VENEZIAN G. - "Effect of modulation on the onset of thermal convection". - J.F.M., vol. 35, 1969, p. 243-254.

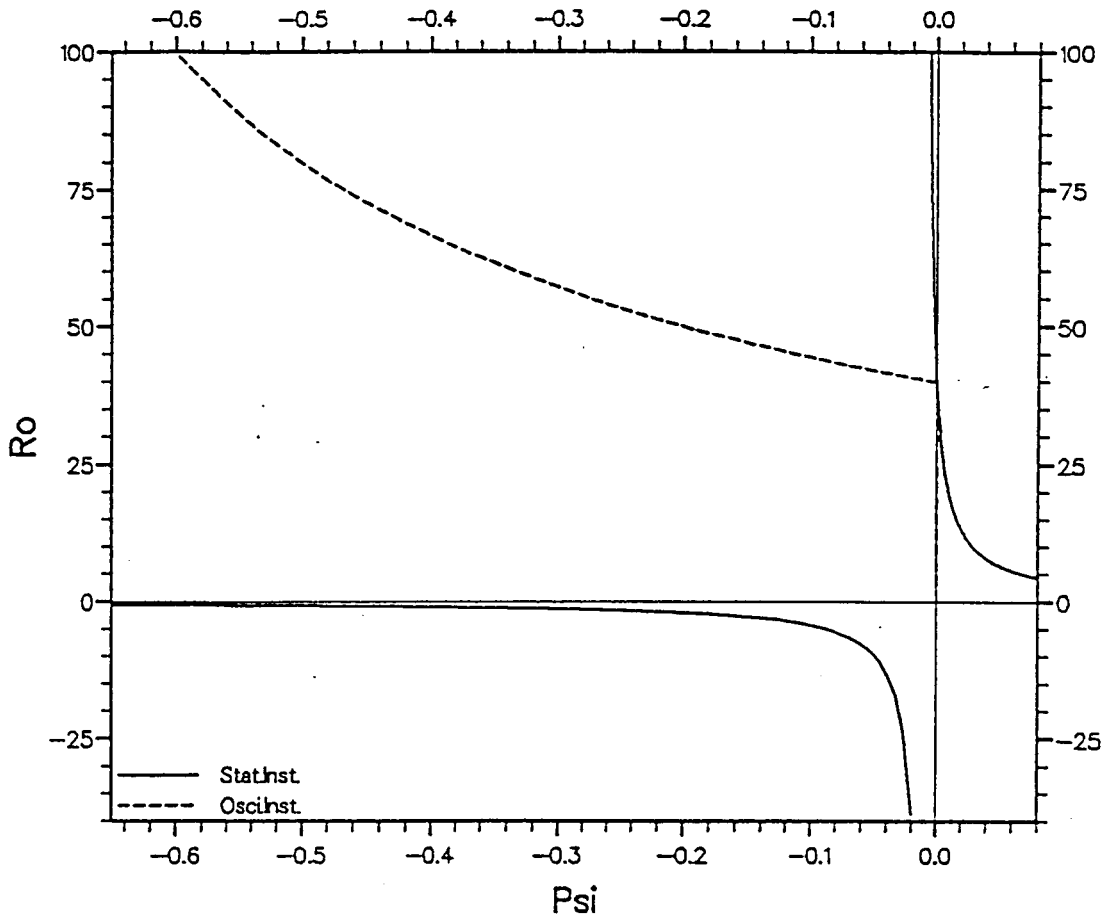
Figure captions

Figure 1. - Stability curve in the (Ra, ψ) plane for no-dependent prescribed temperature gradient ($\Lambda = 10^{-2}$, case $\alpha > 0$, results of BRAND & STEINBERG).

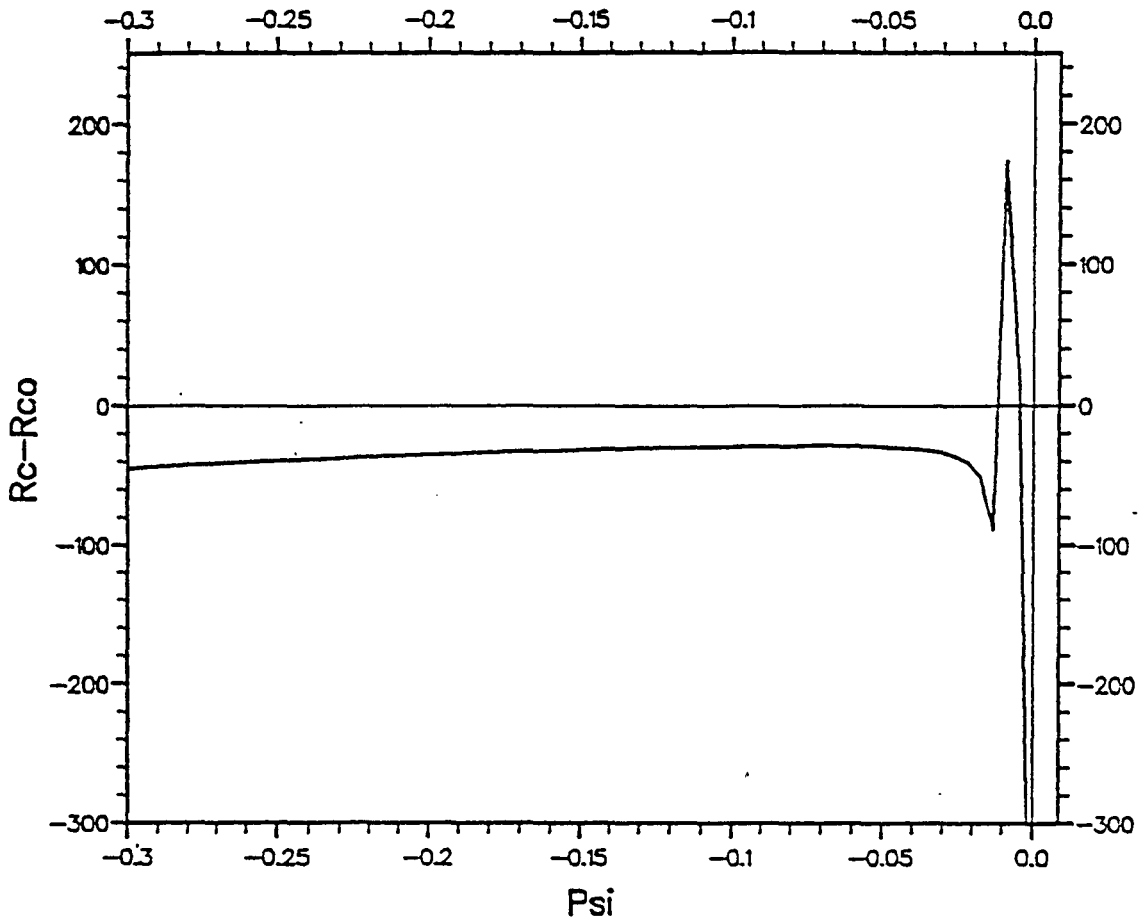
Figure 2. - Variations of the function $R_{2c0}(\psi) - R_{c0}(\psi)$ in the same conditions as Fig.1, according to formula (55) (ω is neglected before Ω). The value of ψ_{pc} is 10^{-4} .

Figure 3. - Variations of the function $R_{2cs}(\psi) - R_{cs}(\psi)$ in the same conditions as Fig.2.

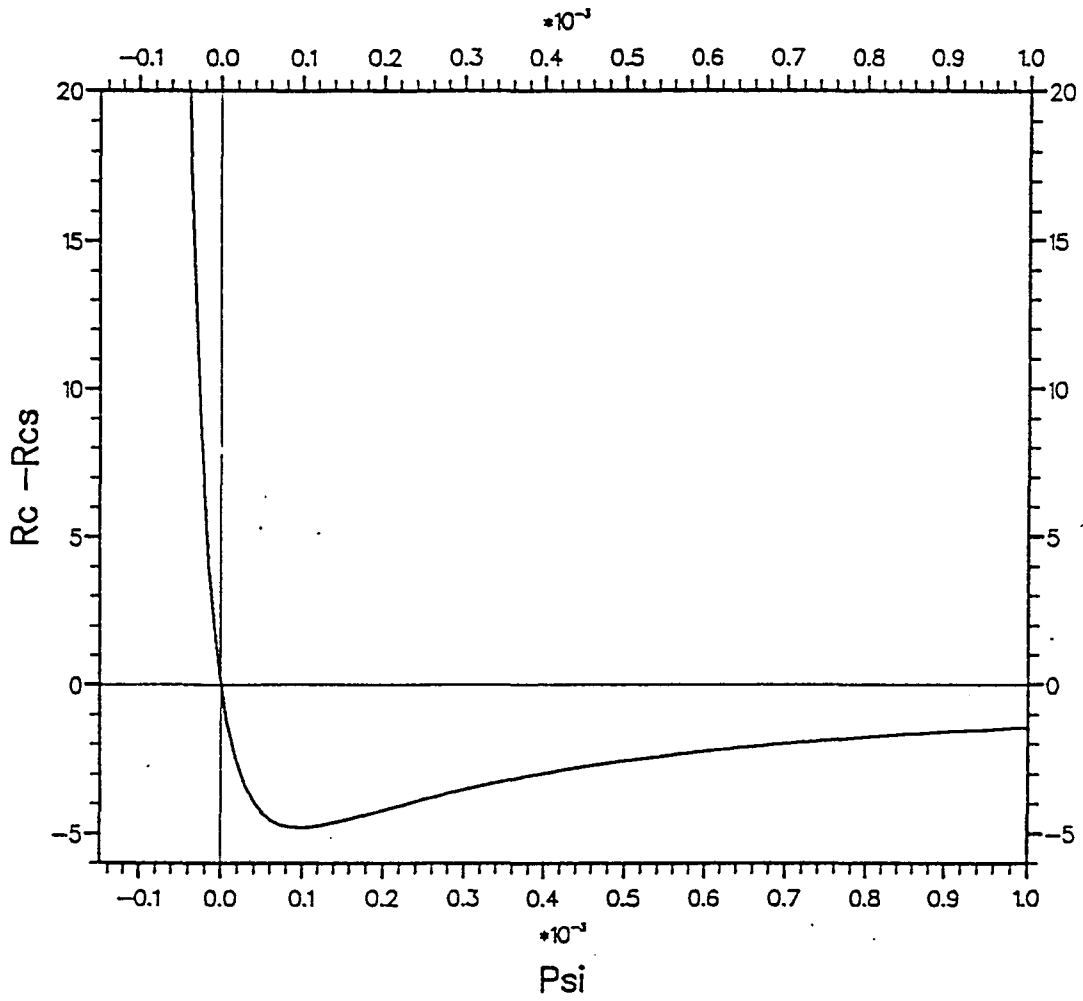
Figure 4. - Stable (clear) and unstable (shaded) solutions of the Mathieu equation (76) in the $(\bar{\theta}, \bar{q})$ plane. The "stationary" instability corresponds to the marginal curve starting from the origin 0. The nonresonant oscillatory instabilities are described by the regular curves (Hopf bifurcations, dotted lines). The resonances (periodic oscillations) correspond to the marginal curves starting from the points $(0, p^2)$ with $p > 1$ (cusp bifurcations). The subharmonic resonance starts from the point $(0, 1)$ (pitchfork bifurcation).



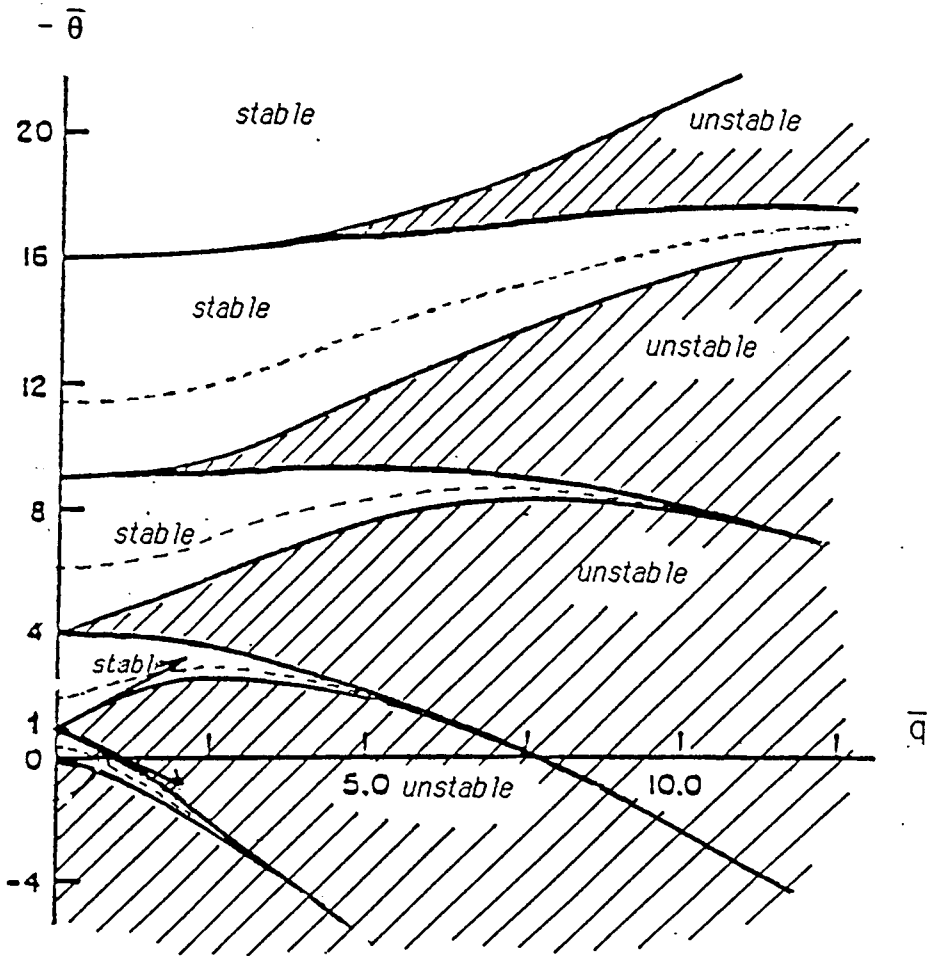
(Figure 1)



(Figure 2)



(Figure 3.)



(Figure 4)

**CHAPITRE 4: INTERACTION NON LINEAIRE DES INSTABILITES
CONVECTIVES ET CHAOS DANS UN MELANGE
BINAIRE EN MILIEU POREUX**

**Nonlinear interaction of convective instabilities and temporal chaos
of a fluid mixture in a porous medium.**

Soumis pour publication

Nonlinear interaction of convective instabilities and temporal chaos of a fluid mixture in a porous medium

M.N. OUARZAZI and P.A. BOIS

Laboratoire de Mécanique de Lille, U.R.A C.N.R.S. 1441

U.S.T.L., Bât. M3, F-59655, Villeneuve d'Ascq

M. TAKI

Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne de Lille, U.R.A.

C.N.R.S. 249, U.S.T.L., Bât. P5, F-59655 Villeneuve d'Ascq

Abstract : A possible route to temporal chaos is proposed as a result of a nonlinear interaction of convective instabilities of a fluid mixture in a porous medium, in the presence of temporal fluctuations of the temperature. In the absence of fluctuations, and in a certain range of the parameters, it is well known by the linear stability analysis that there exists a codimension two bifurcation. In a previous work [OUARZAZI & BOIS , 1993] we showed that, far from the polycritical point, fluctuations lead to a small shift in bifurcating curves. Here it's found that near the codimension two bifurcation, the nonlinear interaction of convective instabilities together with the effect of fluctuations can drastically change the global dynamical behaviour even for small amplitude fluctuations. Thus, a temporal chaotic regime may occur in the system. A reduction to amplitude equations allows, by means of Melnikov's techniques, to derive analytically bifurcation curves for nonlinear resonances, and the threshold for the onset of Smale horseshoe chaos. Numerical simulations are given and are in a good agreement with the theoretical predictions.

I-INTRODUCTION

Nonlinear dynamics are now very developed for a large class of partial differential equations appearing in mechanical and physical problems. Although, the global behaviour of solutions in these equations is not easy to obtain, many progress has been made up to now both in discrete dissipative systems theory [IOOSS & JOSEPH , 1990], and in analytical and numerical investigations in near-integrable systems [TAKI & al. , 1989].

Very often, and that will be our concern, more realistic situations need to add some extra terms (dissipation, external forcing, inhomogeneous boundary conditions and so on) to the basic models and use the perturbative methods. In fact, one of these problems which have been studied extensively is the problem of double-diffusive systems. Dean & al. (1987) developed numerical experiments on two dimensional thermosolutal convection in fluid layers of wide horizontal extend. These experiments reveal, among others, the presence of chaotic waves. Rucklidge (1992) and Knobloch & al. (1992) showed that double-diffusive systems exhibit chaotic solutions associated with heteroclinic trajectories that satisfy Shilnikov's criterion.

In this paper, we showed that double-diffusive systems may also exhibit Smale horseshoe chaos associated with transverse intersections of stable and unstable manifolds. One of interesting futures of these transverse intersecting is the chaotic diffusion and transport throughout some particular regions of the phase space (see for example Wiggins , 1992). More generally, we are interested with the effects, near the polycritical point, of a time-periodic external temperature gradient on the global dynamics of a binary fluid mixture in a porous medium, contained in a rectangular box. First, we emphasize that, in this

problem of the irregularities appearing in a prescribed boundary temperature at the wall for a convective instability problem, several disorders have been experimentally placed in evidence [AHLERS & al. , 1981]. Second, it is well known [BRANDT et al. , 1984] that without periodic fluctuations, the first instability which occurs might be either stationnary or oscillatory giving rise to a polycritical point of codimension two. Therefore, the behaviour is well described by the nonlinear interaction between the stationnary and oscillatory instabilities. While in the presence of thermal periodic fluctuations the local and even global dynamics will depend on the two instabilities and the periodic fluctuations interactions. In a previous work [OUARZAZI & BOIS , 1993] concerning the linear approximation, by using asymptotical methods, we have evaluated the shift of the stability onset depending on the perturbation amplitude and frequency. Physically, this means that the basic solution (hydrostatic state) is just more or less stable in the presence of fluctuations. In addition, this study reveals the presence of the phase-locked phenomena in the vicinity of the polycritical point for low frequencies. In fact, many works have been done to describe this phenomena and let us cite for example IOOSS (1979), GREENSPAN & HOLMES (1984) and GAMBAUDO (1985), who studied weak and strong resonances, by using local perturbation methods.

In the present work, we focus on the study of small perturbations of strong nonlinearities and properties involving the global aspects of the flow and show that the situation may become more drastic. Indeed, the presence of thermal fluctuations complicates greatly the problem, and classical analysis (averaging or perturbation methods) have generally been limited to the case of weak nonlinearity. In particular, we are interested, in a truncated model, with the dynamic of heteroclinic cycles and large amplitude periodic orbits under perturbative terms leading to new and complex invariant sets and attractors. This study is a quite natural extension of the previous work [O. & B., 1993] dealing

with the linear case, inasmuch as it deal with the breakup of heteroclinic cycles. We emphasize that the heteroclinic cycles, which constitute the limit between bound states and unbound ones, give rich informations on the chaotic transition, as they actually play the crucial role in the complex dynamic of strange attractors, in the appropriate phase space. Our method is based on a reduction to an amplitude equation (see TAKI et al. (1988) for an alternative way based on Lagrangian methods to get reduced models in near-integrable systems) which reveals not only a very appropriate method to extract significant variables, but allows to take advantage of mathematical tools of the discrete dynamical systems theory [Guckenheimer & Holmes , 1983] including Melnikov techniques [Melnikov , 1963], Poincaré mapping, etc. We adopt the following strategy.

- (i) A procedure based on modal expansions and an appropriate amplitude equation allows the reduction of the original problem to an ordinary differential system.
- (ii) The Melnikov theory is then applied to study this reduced model and the predicted results are compared with numerical simulations, via Poincaré mappings.

The procedure is valid for any frequency modulation but here we focus on low frequencies since the dynamic is very rich as revealed by the linear analysis. In fact, the thermal periodic fluctuations represent a structural perturbation. As a result of such a perturbation, the integrability of the system is broken. We show that, near the polycritical point of codimension two, the main features are the phase-locked phenomenon leading to nonlinear resonance dynamics and transitions from regular to chaotic regime. Although, the nonlinear resonances involve all subharmonics at any order, we show that even subharmonics appear more easily than the odd ones in the system. Since for the later the effects of the external perturbative terms are of the second order. The dynamics of these phase-

locked solutions correspond, in the Poincaré mappings of the truncated model, to islands or fixed points. The second effect for odd subharmonics is directly related to the size of islands or the convergence ratio of fixed points. Anyway, the hydrostatic state is mostly unstable to the subharmonic of order two (the half of the external frequency).

If the amplitude is large enough to overcome the dissipation then the system may transit to a chaotic behaviour regime, and we show that the chaotic regime is of Smale horseshoe type and give the analytical expressions for the threshold of chaos. Beyond the threshold, the chaotical behaviour is characterized by the appearance of strange attractors and their complex dynamic through transverse intersections, between stable and unstable perturbed manifolds. Nevertheless, while Melnikov method predicts Smale horseshoe nature of chaos, it does not distinguish among the possible routes leading to chaotical regime. Still, the nature of transitions from regular to chaotic behaviours remains unpredicted. Also, we have performed several numerical simulations which reveal the classical quasiperiodicity route to chaos, with different phase-locking. For large amplitudes, perturbative methods fail and numerical simulations show a developed chaotical regime for a certain range of the parameters. In the next section, we recall the equation of motion including the periodic thermal fluctuations. Section III is devoted to the derivation of the amplitude equations and to a truncated model near the polycritical point. The last section contains the analytical analysis and numerical simulations for significant values of the parameters and a comparison with the theoretical predictions, together with concluding remarks.

II-THE EQUATIONS OF MOTION AND THE BASIC STATE.

We first recall, in this section, the basic equations of motion of a fluid mixture in a porous medium. An extended analysis can be found in [PLATTEN

& LEGROS, 1990] for the mixture theory, and [BOWEN, 1976] for porous medium. Below, we only give the equations which will be further used.

We consider a medium which is a mixture of three constituents (i) a solid phase, which is a solid with small granulometry, and (ii) a fluid phase, which is itself a mixture of two pure fluids. The mean velocity of the medium reduces to the barycentric velocity of the fluid phase. This velocity is the filtration velocity \mathbf{u} of the medium. We denote by ρ the density of the fluid phase and by C^* the concentration of one of the fluid constituents. With these notations the appropriate Boussinesq equations of motion read [O. & B., 1993] :

$$(1a) \quad \rho = \rho_0(1 - \alpha(T^* - T_0) - \alpha'(C^* - C_0)).$$

$$(1b) \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

$$(1c) \quad \frac{1}{\varepsilon'} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p - \{\alpha(T^* - T_0) + \alpha'(C^* - C_0)\} \mathbf{g} - \frac{\nu}{K} \mathbf{u},$$

$$(1d) \quad \frac{\partial T^*}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T^* = \kappa \Delta T^*,$$

$$(1e) \quad \frac{\partial C^*}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla C^* = D \left\{ \Delta C^* + \frac{k_t}{T^*} \Delta T^* \right\}.$$

Where ε' and K are respectively the porosity and permeability of the solid phase, κ and D are the thermodiffusivity and the diffusion coefficients, and k_t is the thermodiffusion ratio. In what follows, we consider two-dimensional convection with motion confined to the (x, z) -plane. We denote by u, w , the velocity components and by T and C , respectively, $T^* - T_0$ and $C^* - C_0$.

We assume that the medium occupies a square domain (Ω) :

$$(\Omega) : \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq z \leq a$$

and is bounded on $\partial\Omega$ by impermeable walls with no-mass flux. The temperature is prescribed at the horizontal walls :

$$(2) \quad \begin{aligned} T &= \varepsilon^2 \bar{\delta} (T_0 - T_1) \cos \varepsilon \omega t && \text{at } z=0 \\ T &= T_1 - T_0 && \text{at } z = a. \end{aligned}$$

The parameter $\bar{\delta}$ is a nondimensional parameter as yet undetermined ($O(1)$ or small). The other boundary conditions read :

$$(3) \quad \partial C / \partial x = -(k_t / T_0) \partial T / \partial x, \quad u = 0, \quad \text{at } x = 0 \text{ and } x = a$$

$$(4) \quad \partial C / \partial z = -(k_t / T_0) \partial T / \partial z, \quad w = 0, \quad \text{at } z = 0 \text{ and } z = a.$$

We begin our discussion of the solutions of the system defined by (1)-(4) by assuming the existence of an hydrostatic solution state in which all dependent variables are fonctions of z and the slow variable $\tau = \varepsilon t$. The temperature difference $T_h(z, \tau)$ and the concentration $C_h(z, \tau)$ verify the equations :

$$(5) \quad \varepsilon \frac{\partial T_h}{\partial \tau} - \kappa \frac{\partial^2 T_h}{\partial z^2} = 0, \quad \varepsilon \frac{\partial C_h}{\partial \tau} - D \frac{\partial^2 C_h}{\partial z^2} = \frac{k_t}{T_0} D \frac{\partial^2 T_h}{\partial z^2},$$

with the boundary conditions :

$$(6) \quad \begin{aligned} T_h &= \varepsilon^2 \bar{\delta} (T_0 - T_1) \cos \omega \tau && \text{at } z = 0, \\ T_h &= T_1 - T_0, && \text{at } z = a. \end{aligned}$$

$$\partial C_h / \partial z = -(k_t / T_0) \partial T_h / \partial z, \quad w = 0, \quad \text{at } z = 0 \text{ and } z = a.$$

If we set :

$$\begin{aligned} T_h(z, \tau) &= T_s(z) + \varepsilon^2 \{ T_{10}(z, \tau) + \varepsilon T_{11}(z, \tau) + O(\varepsilon^2) \} \\ (7) \quad C_h(z, \tau) &= C_s(z) + \varepsilon^2 \{ C_{10}(z, \tau) + \varepsilon C_{11}(z, \tau) + O(\varepsilon^2) \}, \end{aligned}$$

and after some calculations, we obtain :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_s}{\partial z} &= -\frac{T_0 - T_1}{a}; & \frac{\partial C_s}{\partial z} &= \frac{k_t}{T_0} \frac{(T_0 - T_1)}{a}; \\ (8) \quad \frac{\partial T_{10}}{\partial z} &= -\frac{\bar{\delta}}{a} (T_0 - T_1) \cos \omega \tau; & \frac{\partial C_{10}}{\partial z} &= \frac{k_t}{T_0} \frac{\bar{\delta}}{a} (T_0 - T_1) \cos \omega \tau; \\ \frac{\partial T_{11}}{\partial z} &= -\frac{1}{\kappa} \bar{\delta} (T_0 - T_1) \omega \left\{ -\frac{a}{3} + z - \frac{z^2}{2a} \right\} \sin \omega \tau; \\ \frac{\partial C_{11}}{\partial z} &= \frac{k_t}{T_0} \bar{\delta} (T_0 - T_1) \omega \left\{ \frac{1}{\kappa} \left(-\frac{a}{3} + z - \frac{z^2}{2a} \right) + \frac{1}{D} \left(\frac{z}{2} - \frac{z^2}{2a} \right) \right\} \sin \omega \tau. \end{aligned}$$

The above expressions constitute the gradient of the basic state as appeared in the system of equations (1). Even though, the expansion may be extended to any order, the third order approximation will be enough for our purpose.

3-A REDUCED MODEL SYSTEM

3.1-Nondimensional Equations.

We now consider the effect of small perturbations on the basic state :

$$(9) \quad \begin{cases} u = V(x, z, \tau) \\ T = T_h(z, \tau) + \theta(x, z, \tau) \\ C = C_h(z, \tau) + c(x, z, \tau) \end{cases}$$

We introduce the expressions (9) in the system (1), and taking into account the static equations (5), (6) satisfied by T_h and C_h and scaling lengths with a , the time with a^2/κ , C with $-v\kappa k_t/\alpha T_0 gKa$ and θ with $v\kappa/\alpha gKa$, we arrive, after

straightforward calculations, at the following dimensionless equations for θ , C , and V :

$$\begin{aligned} & \left\{ 1 + \frac{Da}{\varepsilon' Pr} \frac{\partial}{\partial t} \right\} \Delta w - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \psi \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = 0, \\ (10) \quad & \frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta - Ra w = -\varepsilon^2 \bar{\delta} Ra f(z, \tau, \varepsilon) w - V \cdot \nabla \theta \\ & \frac{\partial c}{\partial t} - \Lambda \Delta c + \Lambda \Delta \theta - Ra w = \varepsilon^2 \bar{\delta} Ra g(z, \tau, \varepsilon) w - V \cdot \nabla c \\ & \nabla \cdot V = 0. \end{aligned}$$

Where we have set :

$$\begin{aligned} f(\tau, \varepsilon) &= -\cos \omega \tau - \varepsilon \omega \left(-\frac{1}{3} + z - \frac{z^2}{2} \right) \sin \omega \tau + O(\varepsilon^2) \\ g(\tau, \varepsilon) &= \cos \omega \tau + \varepsilon \omega \left\{ \left(-\frac{1}{3} + z - \frac{z^2}{2} \right) + \frac{1}{\Lambda} \left(\frac{z}{2} - \frac{z^2}{2} \right) \right\} \sin \omega \tau + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

There are six characteristic numbers of the problem in the equations (10) :

$$\begin{aligned} Da &= K/a^2 \text{ (Darcy number)}, & Pr &= \nu/\kappa \text{ (Prandtl number)}, \\ (11) \quad \Lambda &= D/\kappa \text{ (Lewis number)}, & \varepsilon' &\text{ (porosity)}. \end{aligned}$$

and :

$$\begin{aligned} Ra &= \frac{\alpha(T_0 - T_1) g K a}{\nu \kappa} \text{ (filtration Rayleigh number)} \\ (12) \quad \psi &= -\frac{\alpha' k_t}{\alpha T_0} \text{ (separation ratio)}. \end{aligned}$$

For the medium of small granulometry, which are considered here, the Darcy number is very small. Hence, the instationary part of the first equation of (10) will be neglected in the sequel. The boundary conditions associated with the

system (10) read :

$$(13) \quad \begin{aligned} w = \theta = c = 0 & \quad \text{at } z = 0 \text{ and } z = 1 \\ u = \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial c}{\partial x} = 0 & \quad \text{at } x = 0 \text{ and } x = 1. \end{aligned}$$

The first equation represents idealized boundary conditions : a more realistic condition would be $\nabla c - \nabla \theta = 0$. By the linear analysis [B. et al. , 1984] one can show that in the absence of external periodic fluctuations, the basic state becomes unstable as Ra is sufficiently large. The first instability to occur is either :

(i) an oscillatory instability at $Ra = R_{co}$ for $\psi < \psi_{pc}$, with frequency Ω

(ii) a stationary instability at $Ra = R_{cs}$ for $\psi > \psi_{pc}$ where :

$$(14) \quad \begin{aligned} R_{co} &= \frac{4\pi^2(1+\Lambda)}{1+\psi}, \quad R_{cs} = \frac{4\pi^2\Lambda}{\Lambda+\psi+\Lambda\psi} \\ \Omega^2 &= \frac{4\pi^4}{1+\psi} \Lambda^2 \left\{ 1 + \psi + \frac{\psi}{\Lambda} + \frac{\psi}{\Lambda^2} \right\}. \end{aligned}$$

The two neutral curves intersect when $R_{co} = R_{cs} = R_{pc} = 4\pi^2(1 + \Lambda + \Lambda^2)$ and

$\psi = \psi_{pc} = -\frac{\Lambda^2}{1 + \Lambda + \Lambda^2}$. Thus, the two parameters ψ_{pc} and R_{pc} characterize the polycritical point under investigations.

3.2-Amplitude equation near the polycritical point.

In the following we are interested with the region where the critical values (ψ, Ra) approach the polycritical instability onset (ψ_{pc}, R_{pc}) and we assume that

ψ is always less than ψ_{pc} , so that the first instability which manifests itself is the

oscillatory instability. Under these assumptions, we set : (15) $\psi = \psi_{pc} - \varepsilon^2 \bar{\psi}$;

$\bar{\psi} > 0$, and it follows from (14) that :

$$R_{co} = R_{cp} + \varepsilon^2 \frac{R_{pc}^2}{4\pi^2} (1+\Lambda)^{-1} \bar{\psi} , \quad R_{cs} = R_{pc} + \varepsilon^2 \frac{R_{pc}^2}{4\pi^2} \left(1 + \frac{1}{\Lambda}\right) \bar{\psi}$$

$$\text{and } \Omega^2 = - \frac{4\pi^4}{\psi_{pc} (1 + \psi_{pc})} \Lambda^2 \varepsilon^2 \bar{\psi} .$$

Near the polycritical point, the natural frequency is small, then we use ε to scale slow temperature derivatives according to $\tau = \varepsilon t$. In the system (10), we substitute ψ in (15) and R_a by $R_a = R_{pc} + \varepsilon^2 \mu$ for to derive the amplitude equations following the same procedure as Knobloch & Proctor (1981) in their study of the thermohaline convection and of the convection due to an imposed vertical magnetic field. Taking into account the first modes describing the solution, we therefore set :

$$\begin{aligned} W &= \varepsilon W_1(\tau) \sin \pi z \cos \pi x + O(\varepsilon^3) \\ U &= -\varepsilon W_1(\tau) \sin \pi z \sin \pi x + O(\varepsilon^3) \\ (17) \quad \theta &= \varepsilon \theta_1(\tau) \sin \pi z \cos \pi x + \varepsilon^2 \theta_2(\tau) \sin 2\pi z + O(\varepsilon^3) \\ c &= \varepsilon C_1(\tau) \sin \pi z \cos \pi x + \varepsilon^2 C_2(\tau) \sin 2\pi z + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

By inserting the expansions (17) into the governing equations (10) and expanding

$f(z)\sin\pi z$ and $g(z)\sin\pi z$ as Fourier series, we obtain the fifth order system :

$$\begin{aligned}
 & - 2 W_1(\tau) + \theta_1 + C_1 (\Psi_{pc} - \varepsilon^2 \bar{\psi}) = O(\varepsilon^3) \\
 & \varepsilon \frac{d\theta_1}{d\tau} = - 2 \pi^2 \theta_1 + (R_{pc} + \varepsilon^2 \mu) W_1 + \varepsilon^2 \pi W_1 \theta_2 \\
 & + \varepsilon^2 \bar{\delta} R_{pc} W_1 \left\{ \cos \omega \tau + \varepsilon \frac{w}{4\pi^2} \sin \omega \tau \right\} + O(\varepsilon^4) \\
 (18) \quad & \varepsilon \frac{dC_1}{d\tau} = - 2 \pi^2 \Lambda (C_1 - \theta_1) + (R_{pc} + \varepsilon^2 \mu) W_1 + \varepsilon^2 \pi W_1 C_2 \\
 & + \varepsilon^2 \bar{\delta} R_{pc} W_1 \left\{ \cos \omega \tau + \varepsilon \left[\frac{w}{4\pi^2} + \frac{1}{\Lambda} \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4\pi^2} \right) \right] \omega \sin \omega \tau \right\} + O(\varepsilon^4) \\
 & \varepsilon \frac{d\theta_2}{d\tau} = - 4 \pi^2 \theta_2 - \frac{\pi}{2} W_1 \theta_1 + O(\varepsilon^2) \\
 & \varepsilon \frac{dC_2}{d\tau} = - 4 \pi^2 \Lambda (C_2 - \theta_2) - \frac{\pi}{2} W_1 C_1 + o(\varepsilon^2).
 \end{aligned}$$

Combining the equations (18), and after some calculations, we extract the two order amplitude equation :

$$\begin{aligned}
 (19) \quad & \frac{d^2 W_1}{d\tau^2} = \mu_1 W_1 + f_1 W_1^3 + (\mu_2 - f_2 W_1^2) \varepsilon \frac{dW_1}{d\tau} + \bar{\delta} f_3 W_1 \cos \omega \tau \\
 & - \varepsilon \bar{\delta} \left\{ f_4 W_1 \sin \omega \tau - f_5 \frac{dW_1}{d\tau} \cos \omega \tau \right\} + O(\varepsilon^2).
 \end{aligned}$$

With

$$\begin{aligned}
 \mu_1 &= \frac{4 \pi^4 \Lambda}{R_{pc}} \bar{\psi} \tilde{\mu}_1 ; & \mu_2 &= \frac{2\pi^2}{R_{pc}} (1 + \Lambda) \bar{\psi} \tilde{\mu}_2 ; & f_1 &= \frac{\pi^2}{4} \\
 f_2 &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{\Lambda} \right) ; & f_3 &= 4 \pi^4 \Lambda ; & f_4 &= \frac{\pi^4}{3} \Lambda + 2 \pi^2 (1 + \Lambda) \\
 f_5 &= 2 \pi^2 (1 + \Lambda)
 \end{aligned}$$

and where $\tilde{\mu}_1$ and $\tilde{\mu}_2$ are defined as :

$$\varepsilon^2 \tilde{\mu}_1 = Ra - R_{cs} ; \quad \varepsilon^2 \tilde{\mu}_2 = Ra - R_{co}.$$

In the sequel, our main goal is to study this equation with strong nonlinearity and perturbative terms. Since $\bar{\delta} \ll 1$, it is convenient to write it in the form $\bar{\delta} = \varepsilon \tilde{\delta}$ (dissipative and periodic fluctuations are in the same order), and the equation (19) reduces to :

$$(20) \quad \frac{d^2 W_1}{d\tau^2} = \mu_1 W_1 + f_1 W_1^3 + (\mu_2 - f_2 W_1^2) \varepsilon \frac{d W_1}{d\tau} + \varepsilon \tilde{\delta} f_3 W_1 \cos \omega \tau + \text{h.o.t}$$

This reduced model will be analysed next, essentially with Melnikov's techniques to estimate both the threshold to chaos and the bifurcating curves for nonlinear resonances [G. & H., 1983].

4- MELNIKOV'S METHOD : PERTURBATIONS OF PLANAR HOMOCLINIC AND PERIODIC ORBITS

Consider a system of ordinary differential equations of the form [MELNIKOV,1963] :

$$(4.1) \quad \frac{d X}{dt} = f(X) + \varepsilon g(X, t)$$

where $X = (u, v)$, $f = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} g_1(x, t) \\ g_2(x, t) \end{pmatrix}$ and g is periodic in time of period T .

Assume that, for $\varepsilon = 0$, the system (4.1) possesses a homoclinic solution $X_0(t)$ to hyperbolic saddle point P_0 (or homoclinic cycles), and a continuous family of periodic orbits $X_\alpha(t)$ in the interior of $X_0(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Therefore the Melnikov

function is defined as :

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f[X_0(t)] \wedge g[X_0(t), t + t_0] dt$$

where the wedge product is defined as $X_1 \wedge X_2 = u_1 v_2 - u_2 v_1$.

In fact, $M(t_0)$ provides a good measure (to $O(\epsilon^2)$) of the distance $d(t_0)$ between the stable and unstable perturbed manifolds which is defined as:

$$d(t_0) = \epsilon \frac{M(t_0)}{|f(X_0(0))|} + O(\epsilon^2).$$

In the same spirit the survival and thus the existence of the periodic orbits $X_\alpha(t)$ of period $\frac{mT}{n}$ (the subharmonics) are evaluated by the subharmonic Melnikov function:

$$M^{m/n}(t_0) = \int_0^{mT} f[X_\alpha(t)] \wedge g[X_\alpha(t), t + t_0] dt.$$

Thus, simple zeros of $M(t_0)$ correspond to transverse intersections of stable and unstable manifolds while those of $M^{m/n}(t_0)$ give rise to subharmonic orbits of period mT .

5-TEMPORAL CHAOS AND NONLINEAR RESONANCES

5.1-Smale horseshoe chaos

Return to the equation (20), and suppose $\mu_1 < 0$. Rescaling W_1 , ω and τ by setting $W_1 = (-\frac{\mu_1}{f_1})^{-1/2} \bar{W}_1$, $\tau = (-\mu_1)^{-1/2} \bar{\tau}$ and $\omega = (-\mu_1)^{-1/2} \bar{\omega}$. We write

(20) as a first-order system (suppressing the overbars) :

$$(5.1) \begin{cases} \frac{dW_1}{d\tau} = Z(\tau) \\ \frac{dZ}{d\tau} = -W_1 + W_1^3 + \varepsilon \mu_2^* Z(\tau) - \varepsilon f_2^* W_1^2 Z + \varepsilon \delta^* W_1 \cos \omega \tau \end{cases}$$

were $\delta^* = (-\mu_1)^{-1} \delta$; $\mu_2^* = (-\mu_1)^{-1/2} \mu_2$; $f_2^* = \frac{f_2}{f_1} (-\mu_1)^{1/2}$. The unperturbed

Hamiltonian of the system (5.1) is :

$$(5.2) \quad H(W_1, Z) = \frac{1}{2} Z^2 + \frac{1}{2} W_1^2 - \frac{1}{4} W_1^4 + h ; \quad h \in [0, \frac{1}{4}] .$$

When $\varepsilon = 0$, the system (5.1) possesses one parameter family of level curves in the phase plane (W_1, Z) , as illustrated in fig.1, the heteroclinic and periodic orbits, respectively, are given by :

$$(W_1^\pm(\tau), Z^\pm(\tau)) = \left(\pm \operatorname{th} \frac{\tau}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sech}^2 \frac{\tau}{\sqrt{2}} \right)$$

$$(W_1^{(k)}(\tau), Z^{(k)}(\tau)) = \left(\pm \frac{\sqrt{2} k}{\sqrt{1+k^2}} \operatorname{sn} \left(\frac{\tau}{\sqrt{1+k^2}}, k \right) ; \right. \\ \left. \pm \frac{\sqrt{2} k}{1+k^2} \operatorname{cn} \left(\frac{\tau}{\sqrt{1+k^2}}, k \right) \operatorname{dn} \left(\frac{\tau}{\sqrt{1+k^2}}, k \right) \right)$$

$k \in [0, 1]$, is the elliptic modulus ; $\operatorname{sn}(\cdot)$, $\operatorname{cn}(\cdot)$ and $\operatorname{dn}(\cdot)$ are elliptic functions.

the relationship between the hamiltonian and elliptic modulus is given by :

$$H(k) = \frac{k^2}{(1+k^2)^2} \text{ and the period of periodic orbit with order } k \text{ is :}$$

$$(5.3) \quad T(k) = 4 \sqrt{1+k^2} K .$$

Where K is the complete elliptic integral of the first kind. Note that the periodic orbit approaches the homoclinic cycle when $k \rightarrow 1$ (i.e. $T(k) \rightarrow \infty$ as $k \rightarrow 1$). Now we first introduce the Melnikov function $M(t_0)$ for heteroclinic orbits :

$$\begin{aligned}
 M(\tau_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} Z(\tau) \left[\mu_2^* Z - f_2^* W_1^2 Z + \delta^* W_1 \cos \omega (\tau + \tau_0) \right] d\tau \\
 &= \frac{\mu_2^*}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^4 \frac{\tau}{\sqrt{2}} d\tau - \frac{f_2^*}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^4 \frac{\tau}{\sqrt{2}} \operatorname{th}^2 \frac{\tau}{\sqrt{2}} d\tau \\
 &\quad + \frac{\delta^*}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2 \frac{\tau}{\sqrt{2}} \operatorname{th} \frac{\tau}{\sqrt{2}} \cos \omega (\tau + \tau_0) d\tau \\
 &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \left[\mu_2^* - \frac{f_2^*}{5} \right] - \frac{\delta^* \pi \omega^2}{\operatorname{sh} \frac{\pi \omega}{\sqrt{2}}} \sin \omega \tau_0.
 \end{aligned}$$



It follows from the above expression of $M(t_0)$ that :

$$(i) \quad \delta^* > \frac{2\sqrt{2}}{3\pi\omega^2} \left| \mu_2^* - \frac{f_2^*}{5} \right| \operatorname{sh} \frac{\pi\omega}{\sqrt{2}} = |\delta_c^*|, \text{ then the stable and unstable}$$

perturbed manifolds intersect transversely, since $M(t_0)$ has simple zeros, and the family of systems (5.1) exhibit chaotic behaviours and sets of chaotic orbits exist, in the phase space, and are of Smale horseshoe type [G. & H., 1983]. (ii) $\delta^* < |\delta_c^*|$,

no intersection can occur at all. For $\delta^* = \pm \delta_c^*$, transitions between these two states

occur by a homoclinic bifurcation. More precisely, the last case gives the main result of Melnikov theory that, for any parameter in that region, the whole system is not chaotic. Namely, for any initial condition the behaviour is regular and globally related to planar systems which the typical behaviours are therefore fairly well understood. In particular, we recover the homoclinic bifurcation

curves first predicted by Brandt et al. (1984). Thus δ_c^* is the threshold function to the onset of chaos and for $\delta^* > |\delta_c^*|$ chaotic regimes are possible and they are of Smale horseshoe type. When the fluctuations are absent, we have the homoclinic bifurcation for $\mu_2^* = 2.047$ and $f_2^* = 10.233$ which correspond to experimental parameters (see Eq. (19)). In what follows we fix $\varepsilon \mu_2^* = 0.1$ and $\varepsilon f_2^* = 1$ to be near the polycritical point. For numerical simulations we take the external frequency $\omega=2$ which is exactly the double of the natural frequency of the unperturbed system since it defines the most unstable region and the predicted threshold of chaos is $\delta_c^* = 0.318$. In order to illustrate the preceding statements, and since the driving term is periodic, one can use the Poincaré mapping for the flow generated by the system (5.1). We take the periodic external amplitude δ^* as a control parameter. For $\delta^* = 0$; the only attractor is a quasiperiodic state which corresponds to a limit cycle for the unperturbed system since we are below the homoclinic bifurcation curve. This quasiperiodic state persists up to $\delta^* = 0.2$ as shown in fig. 2. Between $\delta^* = 0.2$ and $\delta^* = 0.318$ the quasiperiodic state becomes unstable giving rise to a phase-locked state of order 1:12 which we have illustrated in fig. 3. When further increasing the value of δ^* the phase-locked state bifurcates to a chaotic regime for $\delta^* = 0.32$! which is in a very good agreement with the predicted threshold. The onset of chaos ($\delta^* = 0.32$) and a developed chaotic regime ($\delta^* = 0.34$) are shown in fig. 4 and in fig. 5, respectively. The chaotic regime persists from $\delta^* = 0.32$ to $\delta^* = 0.39$ and after that the trajectories escape to the unbounded region. Although, the agreement is satisfactory, we have observed that the Melnikov predicted threshold value is lower than the numerical one. Hence, we have integrated the system (5.1) for different sets of parameter values and this tendency is confirmed. This might be

understood by the fact that at the beginning the chaotic regime is very narrow and we observe it numerically a little after the threshold.

5.2-Nonlinear resonances

We have observed in the previous section that the Smale horseshoe chaos may be related to phase-locked phenomena which is important for both transitions the linear to nonlinear resonance and the regular to chaotic behaviour. Thus in this section we focus on the dynamic of large amplitude periodic orbits inside the heteroclinic cycles. The Melnikov function for these resonant orbits is given by :

$$M^{m/n}(\mu_2^*, \delta^*, \tau_0) = \mu_2^* I_2(m, n) - f_2^* I_1(m, n) - \delta^* I_3(m, n) \sin \omega \tau_0$$

where m, n are relatively prime integers satisfying the resonance relation :

$$K \sqrt{1+k^2} = \frac{2\pi m}{\omega n}$$

We have evaluated integrals I_1, I_2 and I_3 by classical relations [see, e.g., Whittaker & Watson, 1965] :

$$I_1 = \frac{16n}{15} \frac{1}{(1+k^2)^{5/2}} \{k'^2 (k^2 - 2) K(k) + 2(k^4 + k'^2) E(k)\}$$

$$I_2 = \frac{8n}{3} \frac{1}{(1+k^2)^{3/2}} \{(1+k^2) E(k) - k'^2 K(k)\}$$

and

$$I_3 = \begin{cases} 0 & \text{for } n \neq 1 \text{ or } m \text{ odd} \\ \frac{2\pi\omega^2}{\text{sh}\left(\frac{\pi m}{2} \frac{K'}{K}\right)} & \text{for } n = 1 \text{ and } m \text{ even} \end{cases}$$

$E(k)$ is the complete elliptic integral of the second kind, $K'(k)$ and k' are respectively the complementary complete elliptic integral of the first kind and the complementary elliptic modulus. For $n \neq 1$ and/or m odd, $I_3(m, n)$ vanishes for all frequencies ω , in lower order in ε : the perturbation of the orbits is a second order effect. We now assume $n=1$ and m even. Then we summarize the results as follows :

$$\text{if } \delta^* > \left| \frac{\mu_2^* I_2(m, 1) - f_2^* I_1(m, 1)}{I_3(m, 1)} \right| = |\delta_c^*(m, 1)|,$$

$M^{m/1}(t_0)$ has simple zeros and the system (5.1) has a subharmonic orbit of period $T = \frac{2\pi m}{\omega}$ and $\delta^* = \pm \delta_c^*(m, 1)$ is a curve at which a saddle-node bifurcation occurs.

Again, we have integrated the system (5.1) to illustrate the survivance of subharmonics and the second effect of the perturbation for odd ones. The second effect may be easily observed for $\mu_2^* = f_2^* = 0$ and $n=1$ when the system is

Hamiltonian. From Melnikov function we see that I_3 is different from zero for even subharmonics but zero for odd ones. Since the survivance of periodic orbits corresponds to simple zeros of the Melnikov function, then the effect of the perturbation is of the second order for the first ones which persist for any small amplitude perturbations. We display this phenomena, for a large amplitude periodic orbit of modulus $k = 1/2$ in fig. 6 with $m=2$ and $m=3$ and in fig.7 with $m=4$ and $m=5$, respectively. The second effect is directly related to the size of islands which is clear in the Poincaré mapping. The saddle-node bifurcations are illustrated in fig. 8 where we have set $\varepsilon \mu_2^* = 0.08$ and $\varepsilon f_2^* = 1$, for the same periodic

orbit ($k=1/2$). Again the Melnikov theoretical value $\delta^* = 0.025$, for the appearance

of the subharmonic of order 2, is in a good agreement with the numerical one $\delta^* = 0.028$.

In conclusion we have shown that the double-diffusive problem and in particular a fluid mixture in a porous medium may exhibit a chaotical regime of Smale horseshoe type, when periodic thermal fluctuations are taken into account. Although, different routes to chaos may be present in the system the phase-locked phenomena is dominant. We have evaluated, by means of Melnikov theory, the threshold of the onset of the chaotic regime as well as the bifurcation curves for large amplitude orbits. It is now very interesting to compare these results to the original problem as well as to some experiments in double-diffusive systems. Anyway, this study links with a very rich up-to-date literature dealing with the existence of spatial coherence in dynamical systems exhibiting temporal chaos under the action of various perturbations.

References :

AHLERS G., CROSS M.C., HOHENBERG P.C. & SAFRAN S. - "The amplitude equation near the convective threshold: application to time-dependent experiments". - J.F.M., vol. 110, 1981 , p. 149-161.

BOWEN R.M. - "Theory of mixtures". - in "*Continuum Physics*", vol. III, A.C. Eringen ed., Academic Press, 1976 , p. 1-127.

BRAND H. R. , HOHENBERG P. C. & STEINBERG V.- "Convective 2-bifurcations for convection in binary fluid mixture". - *Physical Review* , vol. 30, 1984, series A, p. 2548-2561.

DEAN A.M. , KNOBLOCH E. & TOOMRE J. - "Traveling waves and chaos in thermosolutal convection". - *Physical Review* , vol. 36 , 1987 , p. 2862-2868.

GAMBAUDO J. M. - "Perturbation of a Hopf bifurcation by an external time-periodic forcing". - *J. Diff. Eq.* , vol. 57 , 1985 , p. 172-199.

GREENSPAN B. & HOLMES P. - "Repeated resonance and homoclinic bifurcation in a periodically forced family of oscillators". - *S. I. A. M. J. Math. Anal.* , vol. 15 , 1984 , p. 69-97

GUCKENHEIMER J. & HOLMES P. J. - "*Nonlinear Oscillations , Dynamical Systems and Bifurcations in Vector Fields*". Springer-Verlag , Berlin , 1983.

IOOSS G. & JOSEPH D. D. - "*Global stability and bifurcation theory*" , 2^d ed - Springer, Berlin, 1990.

IOOSS G. - "*Bifurcation of maps and applications*". - North-Holland, 1979.

KNOBLOCH E. & PROCTOR M.R.E., - "Nonlinear periodic convection in double-diffusive systems". - *J. F. M.*, vol. 108 , 1981 , p. 291-316.

KNOBLOCH E. , PROCTOR M.R.E. , & WEISS N.O. - "Heteroclinic bifurcations in a simple model of double-diffusive convection". - J. Fluid. Mech. , vol. 239 , 1992 , p. 273-292.

MELNIKOV V. K. -"On the stability of the centre for time-periodic perturbations". - Trans. Mosc. Math. Soc. , vol. 12 , 1963 , p. 1-57.

OUARZAZI M. N. & BOIS P.A. - "Convective instability of a fluid mixture in a porous medium with time-dependent temperature gradient". - submitted to Eur. J. Mech.

PLATTEN J. K. & LEGROS J. C. - "Convection in liquids ". - Springer , 1990.

RUCKLIDGE A.M. - "Chaos in models of double convection". - J. Fluid. Mech. , vol. 237 , 1992 , p. 209-229.

TAKI M. , FERNANDEZ J. C. & REINISCH G. - "Collective-coordinate description of chaotic sine-Gordon breathers and zero-frequency breathers : The nondissipative case". - Phys. Rev. , vol. 38 , 1988 , series A, p. 3086-3097.

TAKI M. , SPATSCHEK K. H. , FERNANDEZ J. C. , GRAUER R. & REINISCH G. - "Breather dynamics in the nonlinear Schrödinger redime of perturbed sine-Gordon systems" . - Physica D , vol. 40 , 1989, p. 65-82.

WHITTAKER E. J. & WATSON G. N. - "A course of Modern Analysis". - Cambridge University Press, 1965.

WIGGINS S. - "Chaotic Transport in Dynamical Systems". Springer-Verlag , New York , 1992.

Figure captions :

Figure 1 : The phase space of the unperturbed ($\epsilon=0$) system (5.1), with the heteroclinic cycles and the bounded region.

Figure 2 : The quasiperiodic solution in T-Flow Poincaré section for an amplitude value lower than the Melnikov chaotic threshold. The parameters used for numerical simulations in the serie of figures 2 to 5 are $\epsilon \mu_2^* = 0.1$, $\epsilon f_2^* = 1$ and $\omega=2$. The control parameter is fixed to $\epsilon \delta^* = 0.2$. This Attractive quasiperiodic solution seems as a global attractor.

Figure 3 : One of the routes to Smale horseshoes chaos. Here we show the limit between a phase-locked phenomena (1:12) and the onset of chaos for $\epsilon \delta^* = 0.318$.

Figure 4 : The onset of the chaotical behavior as predicted by Melnikov method. The predicted value is $\epsilon \delta^* = 0.318$ and the numerical one is $\epsilon \delta^* = 0.32$!

Figure 5 : A region of a developed chaos for $\epsilon \delta^* = 0.34$. Here several initial conditions in phase space are attracted by the same strange attractor. It seems numerically as a global attractor.

Figure 6 : (a) The T-Flow Poincaré section of the system (5.1). The second effect of perturbations for odd subharmonic orbits is clear ($m=2$ and $m=3$) for the Hamiltonian case ($\epsilon \mu_2^* = \epsilon f_2^* = 0$). (b) A zoom showing the sizes of islands for comparison.

Figure 7 : The same situation as in figure 6 except that $m=4$ and $m=5$. We have the same phenomena but the sizes of islands are smaller.

Figure 8 : A sequence of figures showing the saddle-node bifurcation of the periodic orbit of modulus $k=1/2$ for $\varepsilon \mu_2^* = 0.08$ and $\varepsilon f_2^* = 1$. (a) a quasiperiodic state. (b) The transition from a quasiperiodic state to a phase-locked state of order 2. (c) The appearance of the subharmonic of order 2 for $\varepsilon \delta^* = 0.028$; the predicted value is $\varepsilon \delta^* = 0.025$.

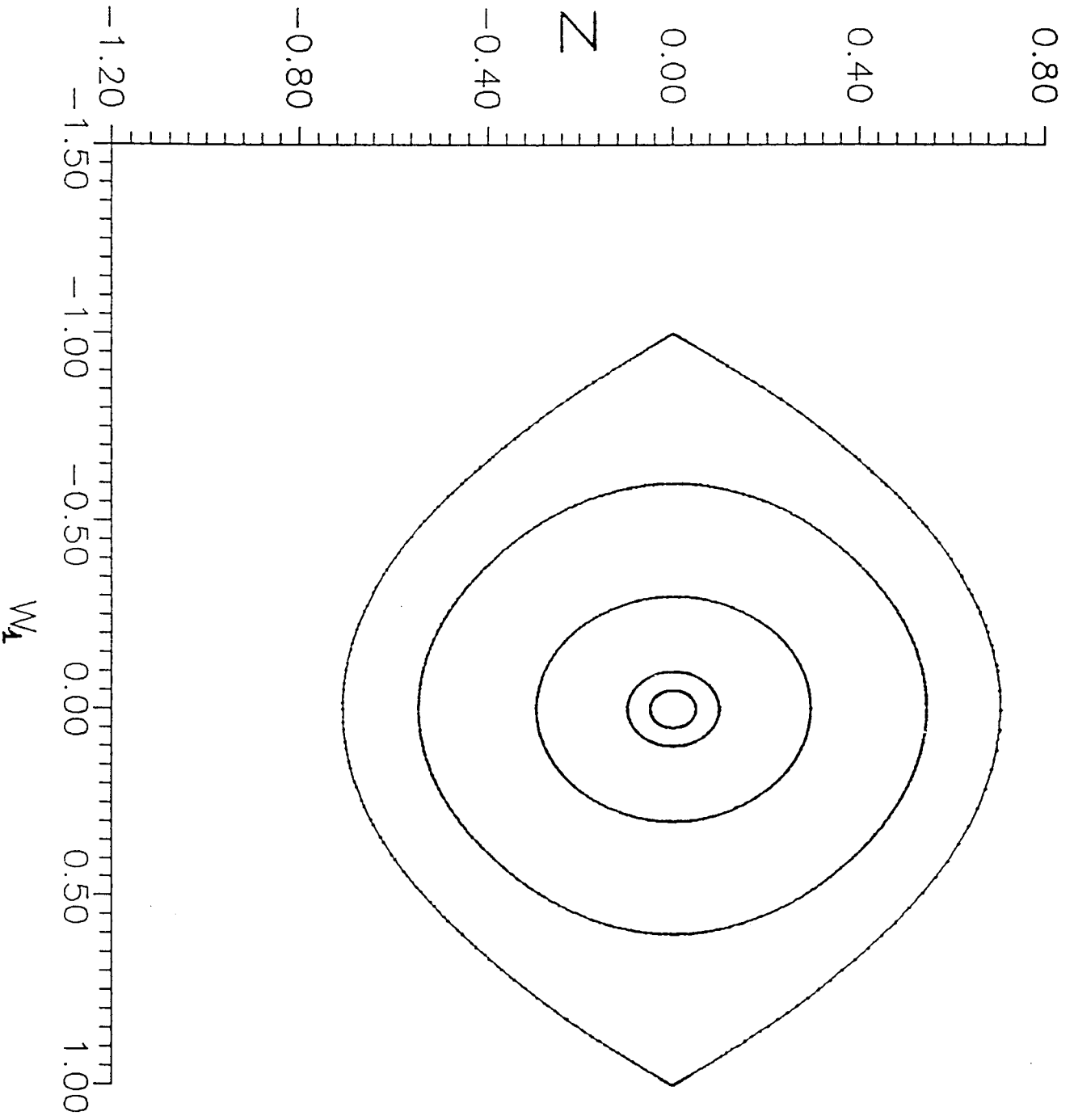


Fig. 1

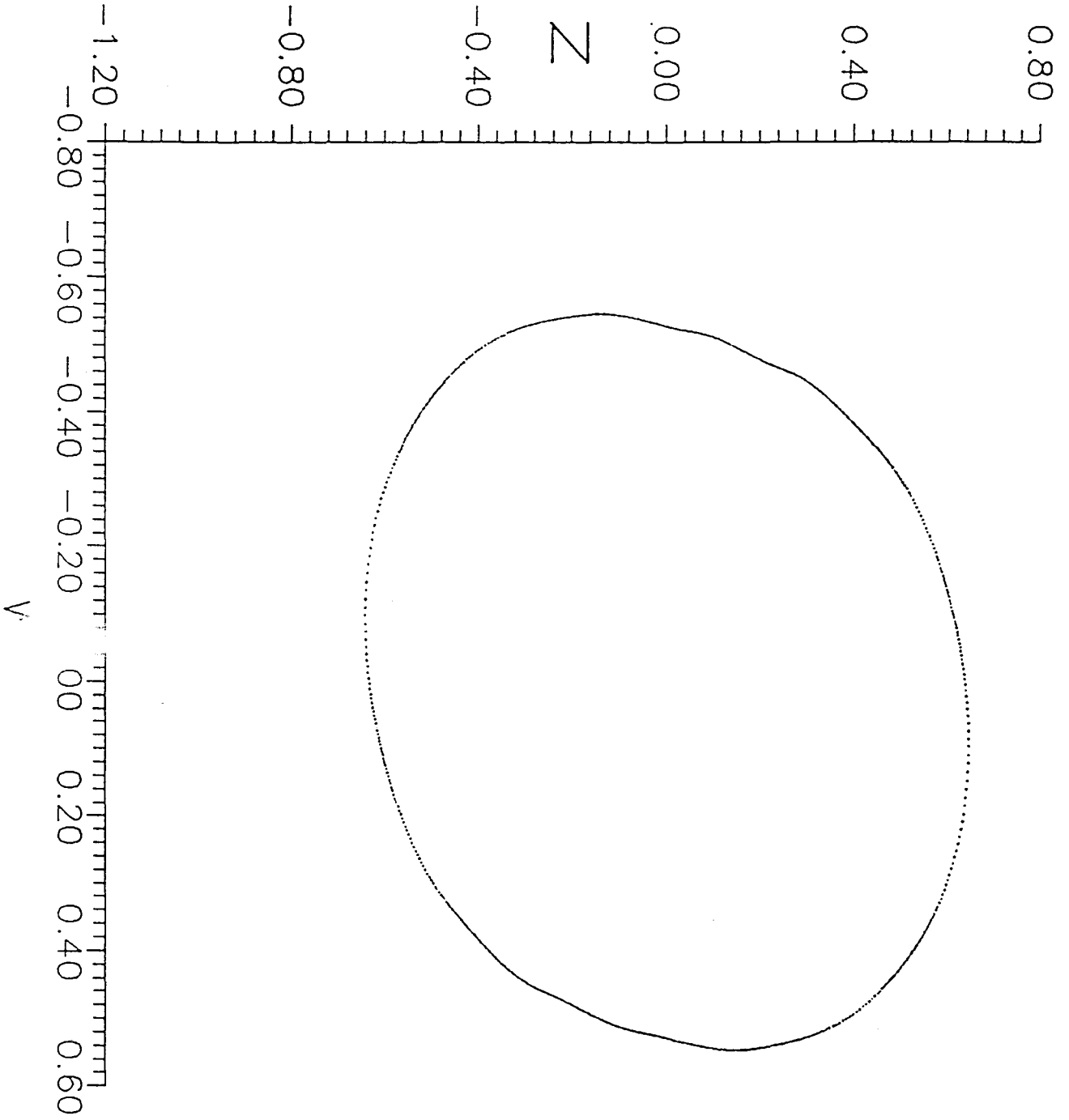


Fig. 2

110

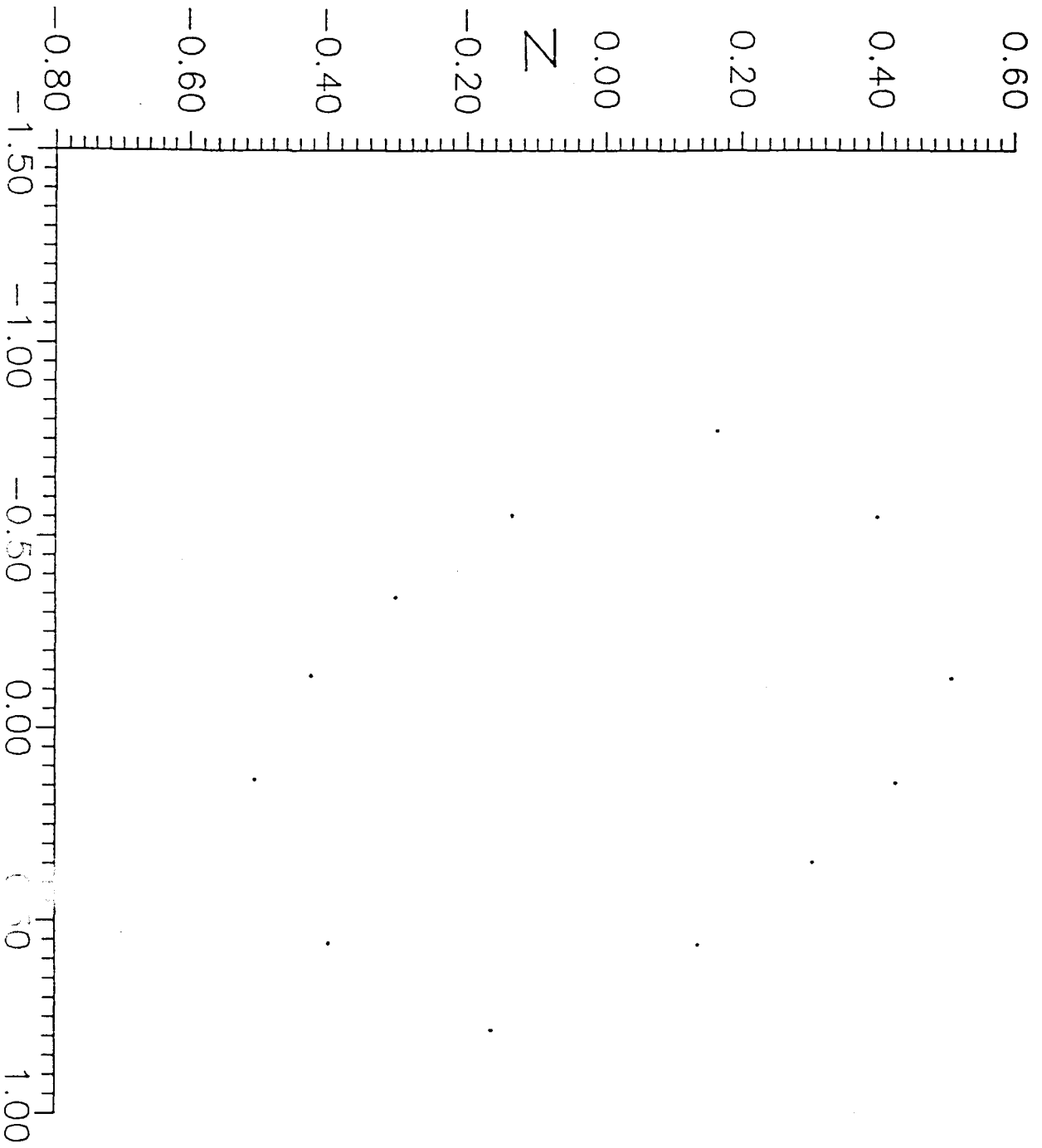


Fig. 3

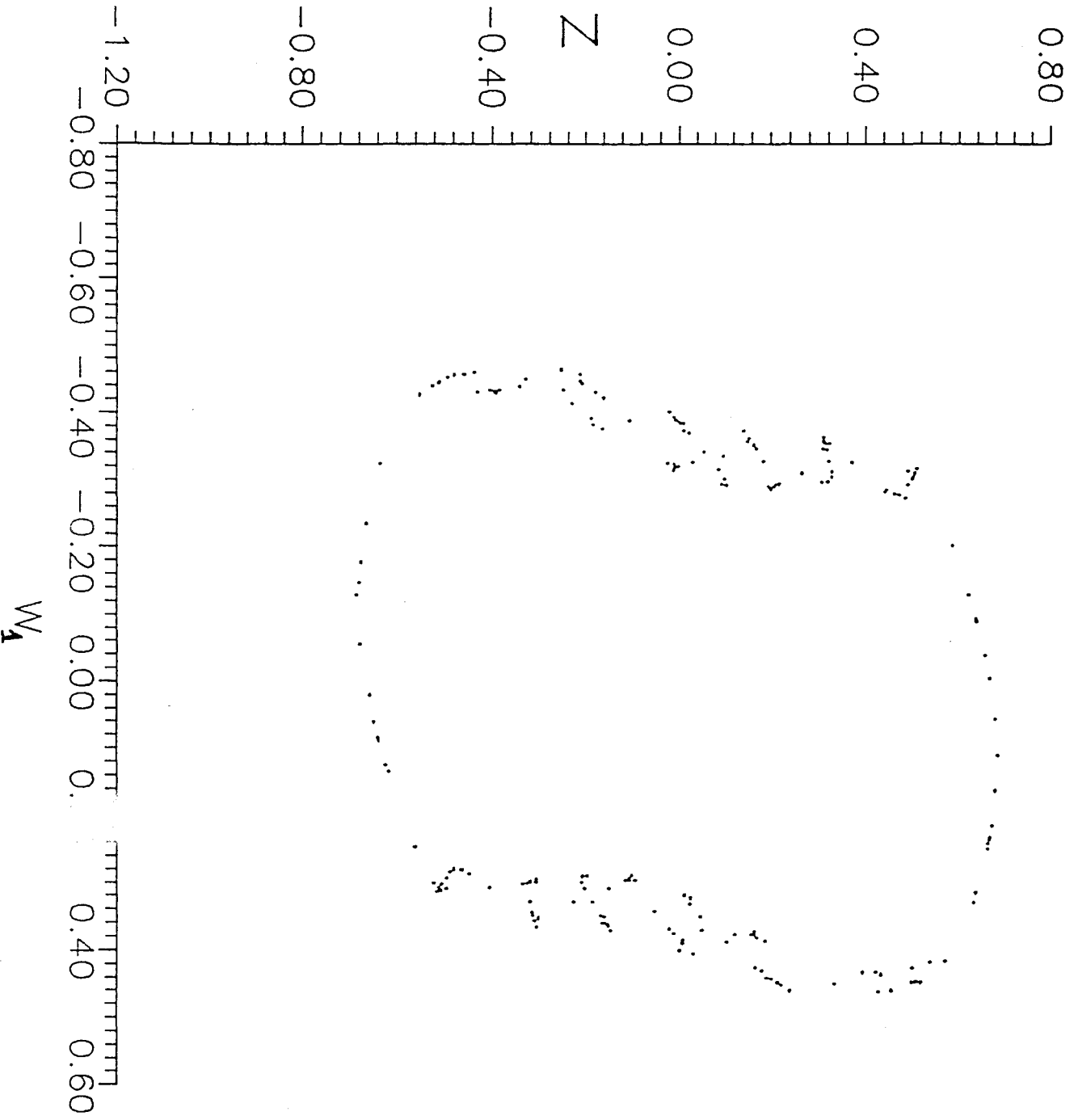


Fig. 4

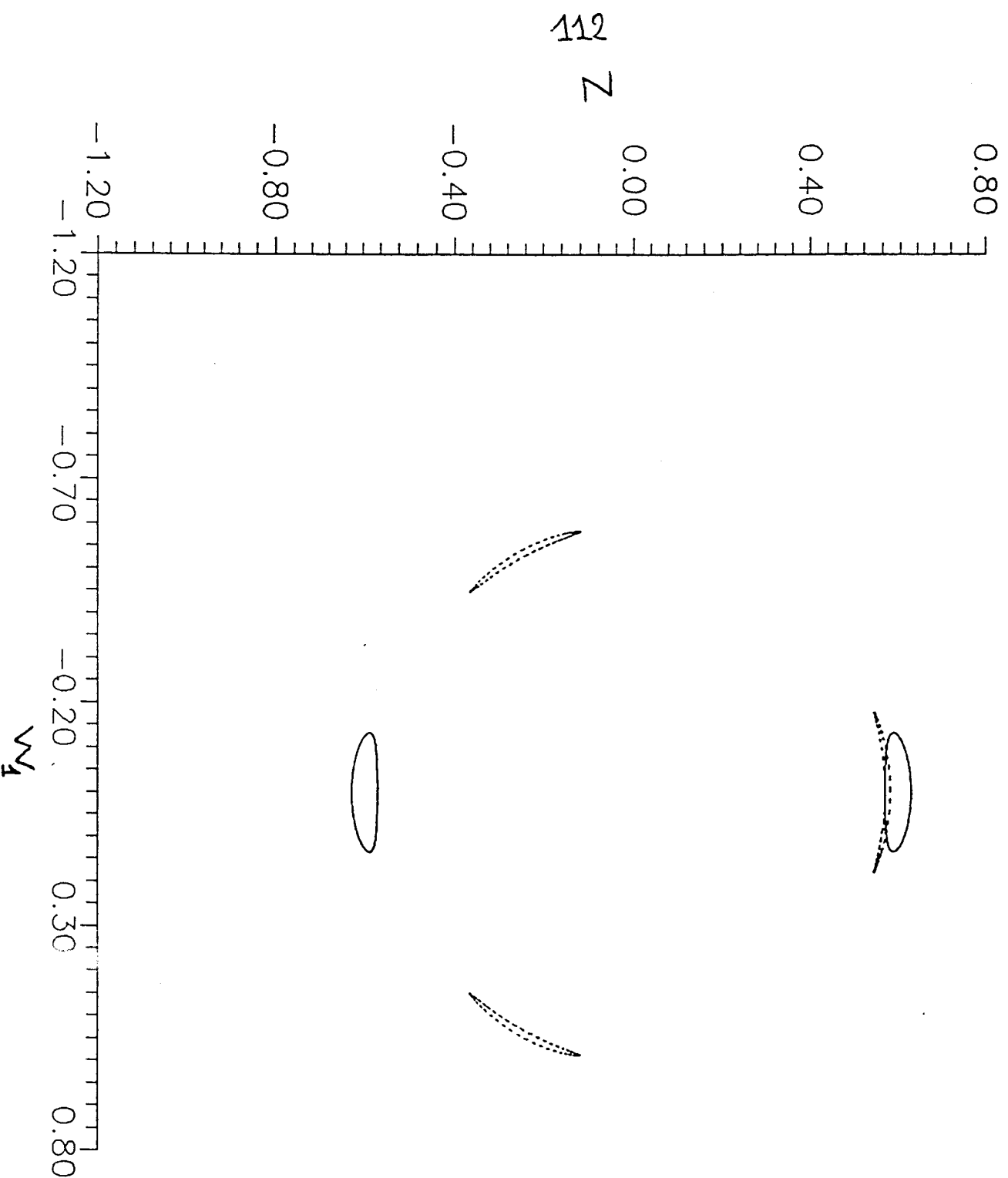


Fig. 6 (a)

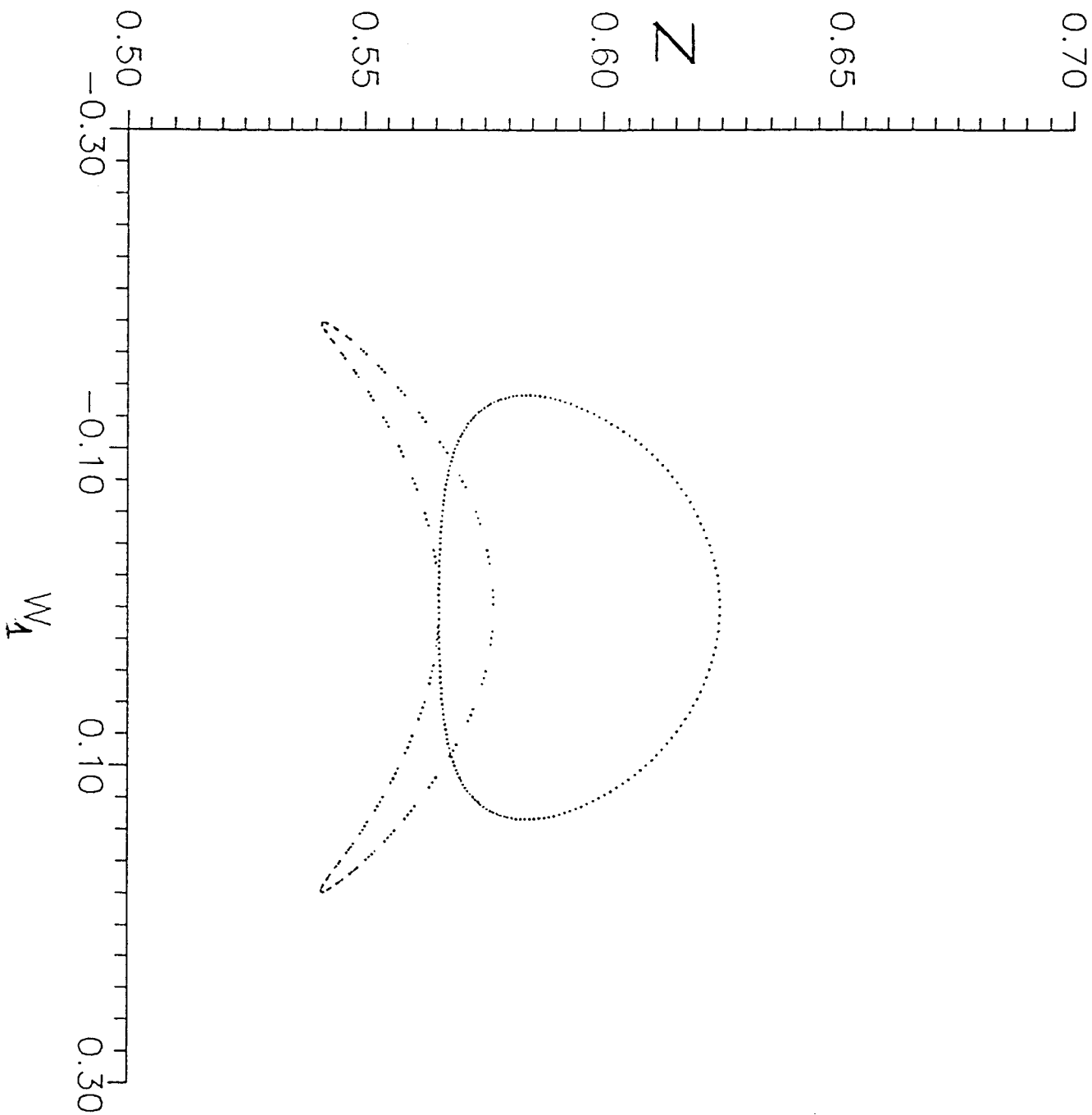


Fig. 6(b)

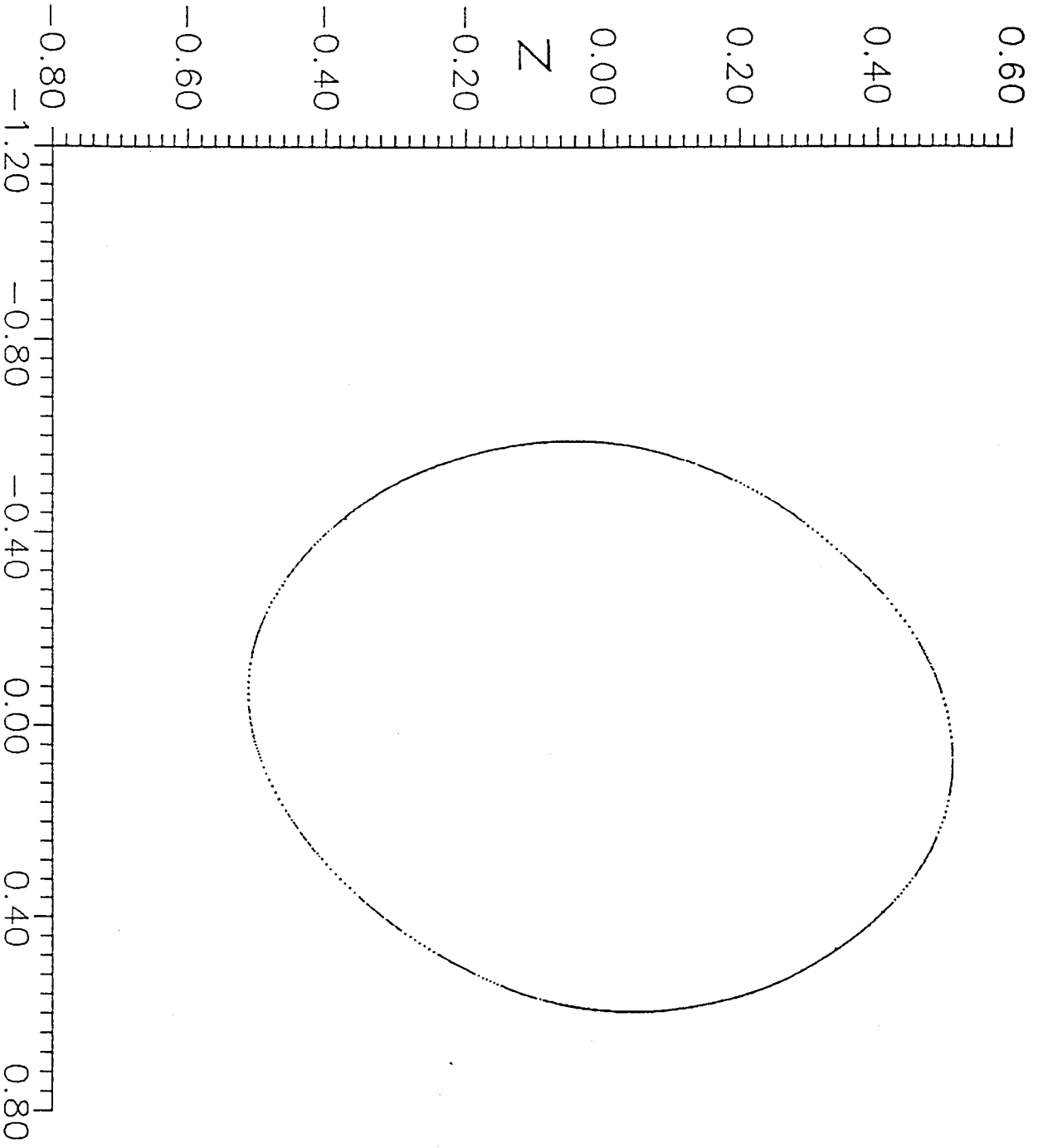


Fig. 8(a)

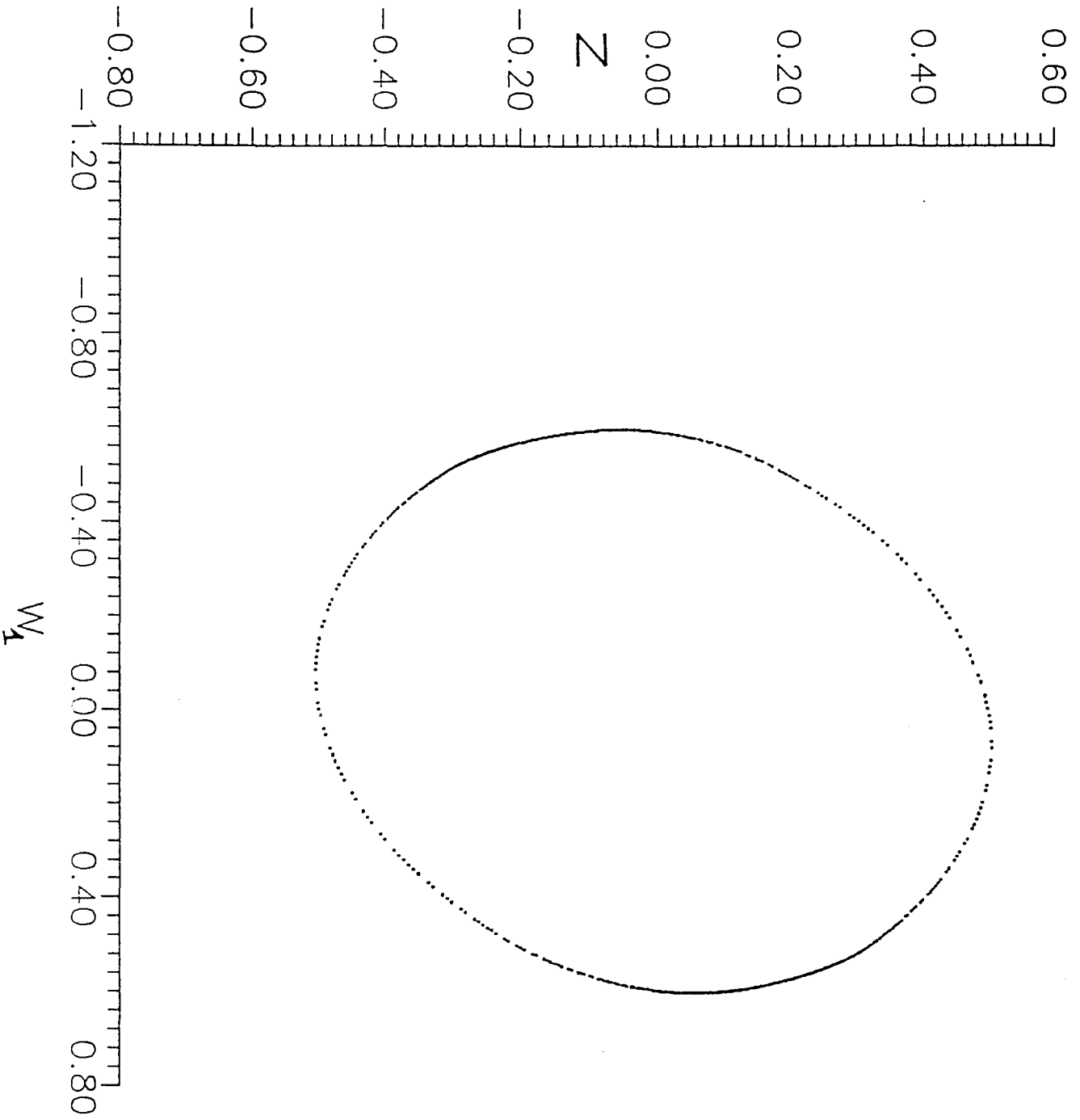


Fig. 8 (b)

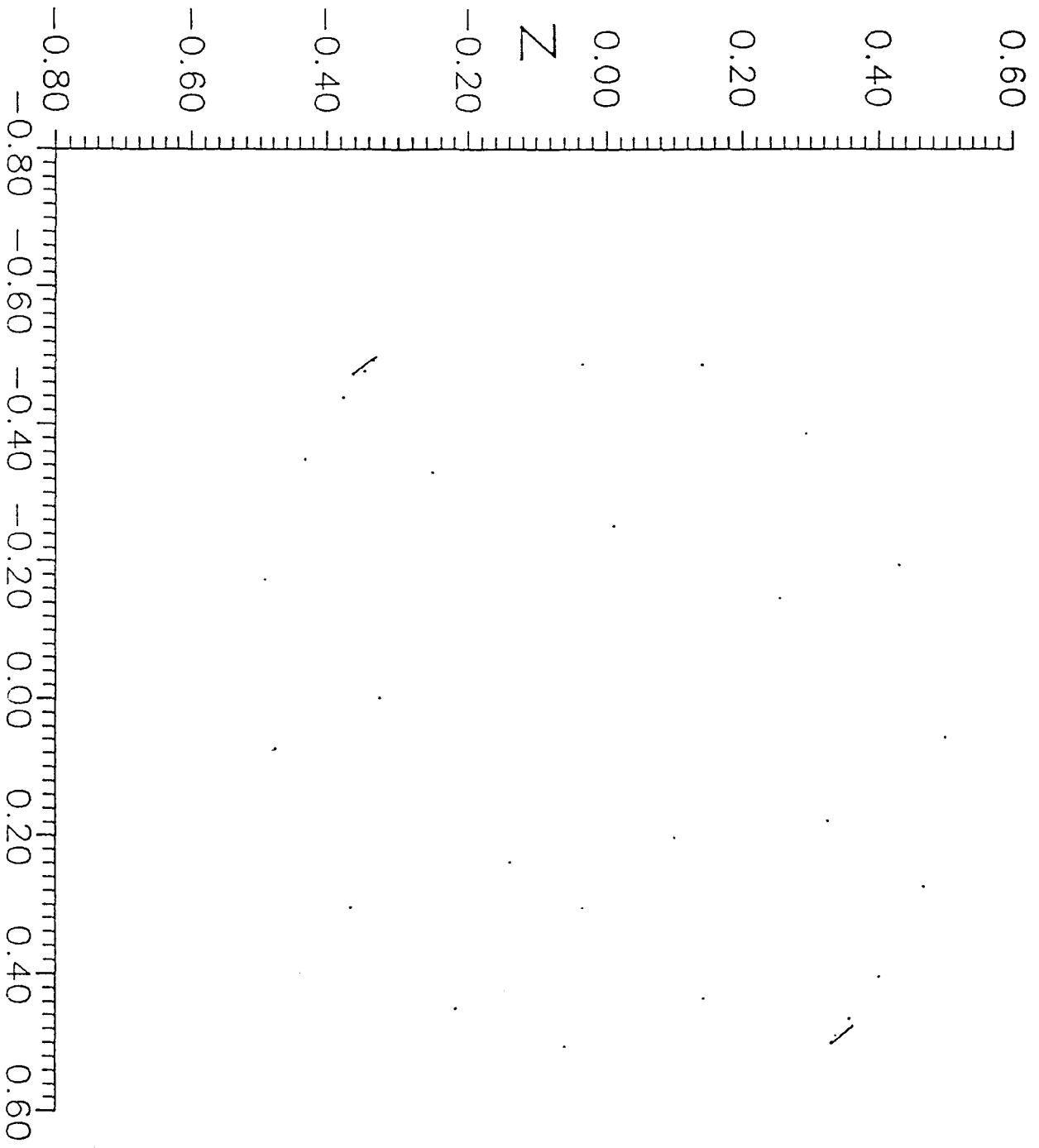


Fig. 8 (c)

Annexe 1: Rappel de quelques résultats classiques sur le problème de Rayleigh-Bénard.

1. Formulation Du Problème de Rayleigh -Bénard.

1.1 Problème de Rayleigh - Bénard (R.B)

On considère une couche mince d'un fluide dilatable comprise entre deux plaques horizontales s'étendant à l'infinie, maintenues à des températures différentes. La température de la plaque inférieure est plus élevée que celle de la plaque supérieure. Le fluide, au voisinage de cette plaque est plus dense et tend à descendre, alors que la partie la plus chaude tend à monter. Il se forme ainsi des courants qui accroissent l'échange de chaleur entre les parties froides et chaudes lorsque la différence de température entre les deux surfaces dépasse une valeur critique. Ces courants s'organisent la plupart du temps en rouleaux de diamètre environ égal à la distance d séparant les plaques. Ce phénomène qui est très répandu dans la nature, peut être mis en évidence aussi bien dans les comportements des fluides atmosphériques ou géophysiques, que dans la formation de petits cristaux, évaporation d'une couche fluide, etc... H. Bénard semble avoir été le premier à effectuer des expériences contrôlées de convection en laboratoire. Les hexagones bien réguliers qu'il a obtenus sur du spermaceti (huile de baleine) comme figures de convection ont constitué pendant longtemps l'illustration classique de la régularité des mouvements de convection créés dans un fluide avec des conditions aux limites bien définies. Aujourd'hui, notamment à cause de son rôle dans la "transition vers la turbulence", l'intérêt porté par de nombreuses équipes, dans divers laboratoires du monde entier aux problèmes de convection et aux problèmes des instabilités dans les systèmes hors d'équilibre est considérable.

Cette annexe a pour objet d'assembler et de présenter des résultats classiques décrivant les instabilités et les différentes structures pouvant apparaître sur une surface plane. Par l'analyse des équations hydrodynamiques vérifiant l'approximation de Boussinesq, on met tout d'abord en évidence l'existence d'une bifurcation vers une structure périodique. On s'intéresse ensuite à la non-linéarité pour rendre compte de la structure bifurquée. Pour une approche plus détaillée, on pourra se reporter par exemple à la synthèse récente "Structures Dissipatives, Chaos et turbulence" de P. Manneville. Les résultats présentés dans cette annexe sont utilisés dans tout le mémoire, soit comme départ de stades ultérieurs, soit comme références en vue de comparaisons.

1. 2 Les Equations Hydrodynamiques.

On suppose que le mouvement du fluide peut être décrit par les équations hydrodynamiques prises dans l'approximation de Boussinesq. En notant \vec{v} le champ de vitesses du fluide et ρ sa densité, on a : l'équation de continuité

$$(1.a) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

l'équation de la quantité de mouvement

$$(1.b) \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} P - \alpha T \vec{g} + \nu \Delta \vec{v}$$

l'équation de l'énergie :

$$(1.c) \quad \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) T = K \Delta T$$

et la loi d'état :

$$\rho = \rho_0 (1 - \alpha (T - T_0))$$

où $P = p^* + \rho_0 g z$ désigne la pression motrice et z est comptée sur un axe ascendant,

T représente l'écart par rapport à T_0 , $T = T^* - T_0$, p^* et T^* sont la pression et la température physiques.

1. 3 Les Conditions aux limites

On considère une couche horizontale de fluide échauffée par le bas, en supposant que les surfaces inférieure et supérieure sont libres. Par exemple, la couche fluide peut reposer sur un autre fluide, non miscible avec le premier. Bien entendu, une telle situation n'est pas aisément réalisée expérimentalement. Cependant, elle présente l'avantage d'être simple du point de vue analytique.

Pour spécifier complètement les conditions d'une expérience de convection, il faut donner des informations sur la géométrie et les propriétés physiques des parois. Ici, nous nous occupons que des conditions aux limites verticales. Les deux surfaces horizontales

ont pour coordonnées verticales $z = 0$ et $z = d$. La température est fixée sur chacune d'elles respectivement à $T^* = T_0 + \Delta T$ et $T^* = T_0$.

La composante normale de la vitesse doit s'annuler sur chaque surface.. D'autre part, la condition de surface libre suppose une contrainte tangentielle nulle en $z = 0$ et $z = d$.

Les conditions aux limites s'écrivent donc : $T = \Delta T$ en $z=0$ $T=0$ en $z=d$ (1.d)

$$w(x, y, 0, t) = w(x, y, d, t) = 0 \quad (1.e)$$

$$\sigma_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 ; \quad \sigma_{yz} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 \quad \text{en } z=0;d$$

Comme $w = 0$ sur chaque surface pour tout x et tout y , la dernière condition s'énonce :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = 0;d$$

ce qui donne, compte tenu de l'équation de continuité :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \quad \text{en } z=0;d \quad (1.f)$$

1.4 Equations adimensionnelles.

Pour rendre adimensionnelles les équations, nous avons rapporté les coordonnées de l'espace à la distance d , l'écart de température à ΔT , le temps à d^2/K , la vitesse à K/d , et la pression à $\rho_0 K^2/d^2$

Les équations (1a - 1.c) rendues adimensionnelles s'écrivent ainsi :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (2.a)$$

$$\frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = -\frac{1}{Pr} \vec{\nabla} P + Ra T \vec{z} + \Delta \vec{v} \quad (2.b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) T = \Delta T \quad (2.c)$$

Les conditions aux limites deviennent :

$$T = 1 \text{ pour } z = 0 \quad ; T = 0 \text{ pour } z = 1 \quad (2;d)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \text{ pour } z = 0 \text{ et } z = 1 \quad (2;e)$$

Dans ces équations, deux nombres sans dimension apparaissent :

Le nombre de Rayleigh : $Ra = \frac{g\alpha d^2 \Delta T}{\nu K}$, qui caractérise l'importance des phénomènes

convectifs et le nombre de Prandtl : $Pr = \frac{\nu}{K}$ caractérisant la nature du fluide.

L'importance relative des termes non linéaires $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$ et $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) T$ sur le comportement du fluide est fonction de la valeur de Pr .

1.5 La solution de conduction pure

la solution de conduction pure est obtenue en supposant que le fluide est au repos et que la température dépend de la seule coordonnée verticale. On a donc $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial x} =$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \text{ et } \vec{v} \text{ est nul partout dans le fluide.}$$

L'équation (2.c) s'écrit $\Delta T = 0$, et donne avec les conditions aux limites :

$$T = 1 - z$$

l'équation (2.b) devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ \frac{1}{Pr} \frac{\partial P}{\partial z} = Ra (1 - z) \end{cases}$$

$$\text{qui se résout en : } P = p_0 + Pr Ra \left(z - \frac{z^2}{2} \right)$$

où p_0 est la pression du fluide en $z = 0$.

2. Stabilité linéaire de la solution de conduction pure

Intéressons-nous à la stabilité de la solution $\vec{v} = 0$, $T = 1 - z$ et $P = p_0 + \text{Pr Ra} \left(z - \frac{z^2}{2} \right)$ qui correspond à la conduction pure. Cette solution ne sera observée physiquement que si elle est stable vis-à-vis des petites perturbations toujours présentes dans le système, c'est à dire si ces perturbations s'amortissent au cours du temps. Inversement, si certaines perturbations viennent à être amplifiées, la solution est dite instable, et le système peut bifurquer vers un autre état. On est donc conduit à étudier l'évolution d'une petite perturbation quelconque. Pour cela, on reporte la solution perturbée dans les équations hydrodynamiques, et on en déduit celles régissant la perturbation. On ne s'intéresse qu'à la partie linéaire des équations obtenues (perturbations infinitésimales).

2.1 Les équations linéarisées.

La solution conductive perturbée s'écrit :

$$\vec{v} = 0 + \vec{u}$$

$$T = 1 - z + \theta$$

$$P = p_0 + \text{Pr Ra} \left(z - \frac{z^2}{2} \right) + p$$

Cette solution perturbée vérifie (2a - 2c). on obtient ainsi en négligeant les termes du second ordre de la perturbation :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (3.a)$$

$$\frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = - \frac{1}{\text{Pr}} \vec{\nabla} p + \text{Ra} \theta \vec{z} + \Delta \vec{u} \quad (3.b)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \Delta \theta + \vec{u} \cdot \vec{z} \quad (3.c)$$

avec: $\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = \theta = 0$ pour $z=0$ et $z=1$ (3;d)

En prenant deux fois le rotationnel de l'équation (3b) et en tenant compte de (3a), on obtient, en projection sur l'axe des z :

$$\frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial t} \Delta W = \Delta^2 W + \text{Ra} \Delta_2 \theta$$

$$\text{où } \Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Ainsi, on est conduit à un problème plus simple défini par :

$$\frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial t} \Delta W = \Delta^2 W + \text{Ra} \Delta_2 \theta \quad (4.a)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \Delta \theta + W \quad (4.b)$$

$$\text{avec: } W = \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = \theta = 0 \quad \text{pour } z=0 \text{ et } z=1 \quad (4.c)$$

2.2 Analyse en modes normaux.

Les coefficients des équations (4a - 4b), ainsi que les conditions aux limites (4.c) sont indépendants du temps et des coordonnées x et y ; d'autre part, la couche fluide est supposée latéralement illimitée, on peut analyser la dépendance horizontale à l'aide de modes de Fourier (W. ECKHAUS) :

$$(5) \begin{cases} W(x, y, z, t) = W(z) \exp(\sigma t + i [k_x x + k_y y]) \\ \theta(x, y, z, t) = \theta(z) \exp(\sigma t + i [k_x x + k_y y]) \end{cases}$$

où k_x et k_y sont des réels qui désignent respectivement des nombres d'onde caractérisant la périodicité de la perturbation dans les directions x et y.

La solution générale est obtenue par superposition de solutions individuelles de vecteur d'onde \vec{k} ($k_x^2 + k_y^2 = k^2$) de longueur et d'orientation différentes et arbitraires.

$W(z)$ et $\theta(z)$ décrivent la structure des solutions selon la direction verticale et assurent les conditions aux limites (4.c). on remarque que celles-ci sont identiquement satisfaites en prenant :

$$(W(z), \theta(z)) = (W_n(z), \theta_n(z)) \sin n\pi z \quad (6)$$

Après insertion de (5) et (6) dans (4a - 4b), on obtient :

$$\left[\frac{\sigma}{Pr} + (n^2 \pi^2 + k^2)\right] [n^2 \pi^2 + k^2] W_n - Ra k^2 \theta_n = 0$$

$$[\sigma + (n^2 \pi^2 + k^2)] \theta_n - W_n = 0$$

Ce problème ne possède une solution non triviale que pour des valeurs particulières de σ , appelées valeurs propres associées aux fonctions propres W_n et θ_n , amplitudes de la perturbation. Ces valeurs propres sont définies comme les racines d'une équation caractéristique, dite équation de dispersion. Celle-ci s'écrit :

$$[\sigma + (n^2 \pi^2 + k^2)] \left[\frac{\sigma}{Pr} + (n^2 \pi^2 + k^2)\right] [n^2 \pi^2 + k^2] - Ra k^2 = 0$$

Développant cette équation, on montre aisément que les modes normaux sont donc des fonctions monotones croissantes ou décroissantes du temps. C'est le principe d'échange des stabilités (CHANDRASEKHAR).

L'état marginal pour ce problème est obtenu pour $\sigma = 0$. W_n et θ_n ne sont alors solutions que si :

$$Ra = \frac{[k^2 + n^2 \pi^2]^3}{k^2}$$

Pour une valeur donnée de k , la valeur minimale de Ra pour laquelle existent des modes normaux correspond à $n=1$. On remarque alors que pour n'importe quelle valeur positive du nombre d'onde k , il existe une valeur propre Ra au delà de laquelle, le mode propre associé est amplifié au cours du temps. Ce phénomène d'amplification des perturbations se produit lorsque Ra dépasse une valeur critique $R_c = \frac{27 \pi^4}{4}$. Le nombre d'onde k_c du mode associé à cette perturbation est $k_c = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

La courbe $Ra(k) = \frac{[k^2 + \pi^2]^3}{k^2}$ est représentée sur la figure 1.

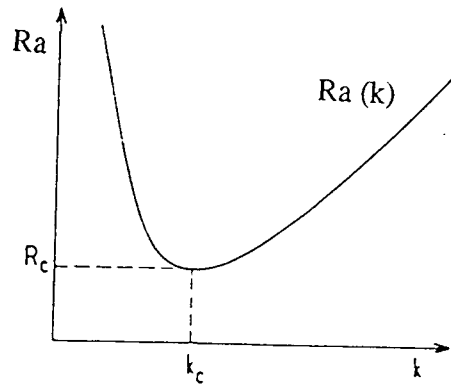


figure (1).

La solution de conduction pure devient instable lorsque le nombre de Rayleigh atteint la valeur R_c . Le système présente alors une bifurcation vers une structure périodique.

Cependant, on n'a pas caractérisé complètement la structure bifurquée, étant donné que l'on ne connaît que le module de son vecteur d'onde horizontal. La direction de celui-ci reste arbitraire tant que le système n'est pas délimité latéralement.

On va maintenant s'intéresser aux différentes structures pouvant être observées dans une expérience de R.B. Ces structures doivent correspondre à une superposition de modes dont le nombre d'onde horizontal est égal à la valeur critique.

2.3 Les différents types de structures convectives.

Dans une couche suffisamment étendue, les cellules de convection adoptent, dans le plan horizontal, des configurations multiples dites "structures convectives". Le processus de sélection d'une structure donnée est un problème complexe. Pour la convection de R.B entre plaques rigides et bonnes conductrices de la chaleur, seuls des rouleaux sont observés. Par contre, entre plaques mauvaises conductrices de la chaleur, la convection apparaît sous forme de carrés ; tandis qu'en présence d'une surface libre, on obtient généralement des hexagones.

(i) Les Rouleaux.

Une structure plane en rouleaux est définie par la superposition d'une seule paire de vecteurs d'onde opposés. Dans ce régime, les perturbations d'un état de base uniforme dépendent localement uniquement de deux coordonnées d'espace, l'une verticale, l'autre horizontale, d'où le nom de convection bidimensionnelle.

$$W = \{ A \exp (i k_c x) + \bar{A} \exp (-i k_c x) \} f(z)$$

A est une amplitude constante (à priori complexe), et $f(z)$, appelée "fonction de structure", décrit le comportement vertical de la solution.

La structure est principalement formée de rouleaux rectilignes équidistants, d'axe perpendiculaire au grand côté de l'enceinte rectangulaire .

(ii) Les carrés et les rectangles.

Dans un mélange binaire soumis à un gradient de température, des fluctuations de concentration peuvent être une source des variations de densité, en plus de la dilatation thermique. C'est le problème de la "convection thermohaline". La structure carrée qui la décrit est définie par la superposition de deux paires de vecteurs d'onde opposés à angle droit. Pour une structure rectangulaire :

$$W = A \{ \exp i (k_x x + k_y y) + \exp i (k_x x - k_y y) \} f(z) \\ + \bar{A} \{ \exp - i (k_x x + k_y y) + \exp - i (k_x x - k_y y) \} f(z)$$

où $k_x^2 + k_y^2 = k_c^2$. Pour une structure carrée, on a : $k_x^2 = k_y^2$

(iii) Les Hexagones.

La structure hexagonale est définie par la superposition de trois paires de vecteurs d'onde à 120° . Elle s'écrit :

$$W = A \{ \exp (-i k_c x) + \exp i k_c \left(\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} y \right) + \exp i k_c \left(\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} y \right) \} f(z) \\ + \bar{A} \{ \exp (i k_c x) + \exp - i k_c \left(\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} y \right) \} + \exp - i k_c \left(\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} y \right) \} f(z)$$

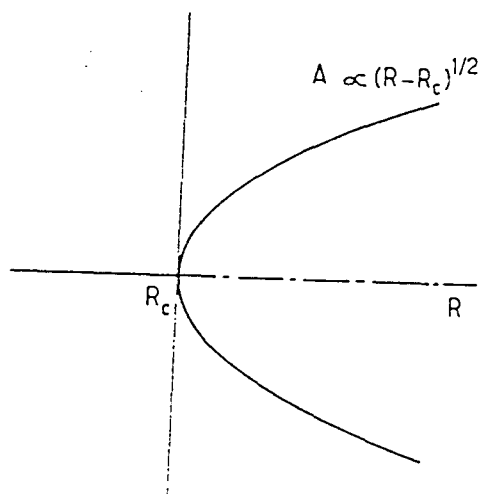
3. Bifurcation et équation d'amplitude.

3.1 Bifurcations

La théorie des bifurcations a pour objet de prévoir les solutions qui résultent de la perte de stabilité de la solution de base étudiée dès que le paramètre de contrôle, (le nombre de Rayleigh dans notre problème) dépasse une valeur critique appelée point de bifurcation. Le livre de G. IOOSS et D. JOSEPH constitue une excellente référence pour

comprendre cette théorie. L'étude du spectre de l'opérateur linéaire associé au problème nous informe sur la stabilité de ces solutions bifurquées. On distingue les bifurcations associées à une valeur propre réelle de celles associées à des valeurs propres de partie imaginaire non nulle.

- Si pour $Ra = R_c$, il y'a une seule valeur propre simple réelle qui s'annule, le problème non linéaire admet deux nouvelles solutions stationnaires stables. C'est le cas du diagramme (2) représentant une bifurcation "pitchfork" :



(fig 2) Bifurcation Pitchfork.

Suivant les conditions initiales, on tend vers l'une ou l'autre de ces solutions stationnaires quand le temps croît indéfiniment.

_ F.H BUSSE a montré que pour $Pr \rightarrow 0$, il existe une valeur du nombre de Rayleigh R_0 pour laquelle existent deux valeurs propres simples imaginaires conjuguées dont la partie réelle s'annule (et non la partie imaginaire). La nouvelle solution du problème non linéaire est une solution instationnaire périodique .

3.2 Equation d'amplitude.

3.2.1 Cas des structures parfaites

D'après l'analyse linéaire, on sait que l'amplitude $A(t)$ du mode de nombre d'onde k_c obéit pour Ra légèrement supérieur à R_c à l'équation :

$$\frac{dA}{dt} = (Ra - R_c) A \quad (7.a)$$

La solution de cette équation linéaire $A=A_0 \exp (Ra-R_c)t$ étant exponentiellement amplifiée, il est nécessaire de prendre en compte les termes non linéaires qui ne restent plus négligeables.

Landau avait remarqué que les états d'amplitude A et $(-A)$ sont physiquement équivalents . Pour cette raison de symétrie, les termes non linéaires ne doivent comporter à priori que des puissances impaires de A ; a l'ordre le plus bas, l'équation (7a) modifiée devient :

$$\frac{dA}{dt} = (Ra - R_c) A - A^3 \quad (7.b)$$

qui est l'équation de Landau.

L'amplitude $A(t)$ augmente pour atteindre une limite stationnaire . Ces considérations ont conduit plusieurs auteurs, dont W.V.R. MALKUS et G. VERONIS (cas de conditions aux limites libre-libre) et A. SCHLUTER, D. LORTZ et F. BUSSE (cas rigide-rigide) à proposer une méthode, inspirée de celle de H.Poincaré et A. Lindstedt, qui consistait à chercher la solution convective du problème non linéaire sous la forme d'un développement en série entière du paramètre $\epsilon = (Ra - R_c)^{1/2}$, amplitude des modes critiques ($k=k_c$). C'est cette méthode de perturbation que nous allons utiliser le long de ce travail. Elle est justifiée mathématiquement par une méthode plus rigoureuse s'appuyant sur le théorème de la variété centrale pour classifier les bifurcations et déduire leur forme normale. Cette approche mathématique a été utilisée notamment par F. SIGNORET (1988) dans une étude du problème de Couette Taylor. Pour un exposé plus détaillé, on pourra également consulter le livre de G. IOOSS et D. Joseph .

3.2.2 Cas des structures modulées.

L'équation (7.b) décrit l'amplitude des structures homogènes représentant la convection "parfaite". Or dans la pratique, il est très difficile d'observer expérimentalement ces structures. Pour des systèmes spatialement étendus, les structures observées sont des structures modulées à une échelle spatiale plus grande que celle de la structure en rouleaux. Nous allons étudier ce problème grâce à la méthode des perturbations développée par L.A. Segel et par A.C Newell et J.A Whitehead en introduisant des échelle lentes X, Y, τ qui représentent respectivement l'échelle de variation de l'amplitude A selon x, y et le temps t et en reliant les ordres de grandeur de ces variables à celui du petit paramètre ϵ .

Dans ce qui suit, par souci de simplicité, nous supposons dans un premier temps que la modulation spatiale transverse (direction y) est complètement gelée. On introduit alors les deux échelles :

$$X = \varepsilon x \text{ et } \tau = \varepsilon^2 t \quad (8)$$

Les hypothèses (8) de deux échelles (rapide et lente) permettent d'étudier le phénomène par une méthode d'échelles multiples en opérant les substitutions :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial X}$$

On fait un développement asymptotique de la solution convective en fonction du paramètre ε qui mesure l'écart entre Ra et R_c :

$$\vec{u} = \varepsilon \vec{u}_1 + \varepsilon^2 \vec{u}_2 + \varepsilon^3 \vec{u}_3 + \dots$$

$$\theta = \varepsilon \theta_1 + \varepsilon^2 \theta_2 + \varepsilon^3 \theta_3 + \dots$$

$$Ra = R_0 + \varepsilon^2 R_2$$

Après quelques arrangements des équations, la solution convective vérifie le problème non linéaire :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial X} \right) (\varepsilon U_1 + \varepsilon^2 U_2 + \dots) + \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon W_1 + \varepsilon^2 W_2 + \dots) = 0; \quad (9.a)$$

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) - 2 \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial X} \right] + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial^2}{\partial X^2} \right) (\varepsilon \theta_1 + \varepsilon^2 \theta_2) - (\varepsilon W_1 + \varepsilon^2 W_2 + \dots) =$$

$$- (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \theta \quad (9.b)$$

$$L (\varepsilon \theta_1 + \varepsilon^2 \theta_2) = \frac{1}{Pr} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} [\vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}] - \Delta [(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) W] \right\} -$$

$$\left(\frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) \Delta (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \theta \quad (9.c)$$

où les termes non linéaires font intervenir les échelles rapides et lentes et L est donné par :

$$L = L_0 + \varepsilon L_1 + \varepsilon^2 L_2 + \dots$$

$$L_0 = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_0 \right) \left(\frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} - \Delta_0 \right) \Delta_0 - R_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$L_1 = 2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_0 \right) \left(\frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} - \Delta_0 \right) - \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_0 \right) \Delta_0 - \left(\frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} - \Delta_0 \right) \Delta_0 - R_0 \right\}$$

$$= 2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial X} m_1$$

$$L_2 = \frac{\partial^2}{\partial X^2} m_1 + \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_0 \right) \Delta_0 + \left(\frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} - \Delta_0 \right) \Delta_0 \right] + 4 \frac{\partial^2}{\partial X^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\Delta_0 - \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_0 \right) \right. \\ \left. - \left(\frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} - \Delta_0 \right) \right] - R_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Les indices zéro correspondent à l'échelle rapide.

Les équations (9.a - 9.c) identifiées à chaque ordre en ε , donnent à l'ordre un :

$$\frac{\partial}{\partial X} U_1 + \frac{\partial}{\partial Z} W_1 = 0$$

$$L_0 \theta_1 = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_0 \right) \theta_1 - W_1 = 0$$

ce sont les solutions marginales, déjà trouvées, des équations linéarisées autour de la solution de conduction pure, en considérant maintenant que l'amplitude $A = A(X, \tau)$

$$\theta_1 = A(X, \tau) \exp(i k_c x) \sin \pi z + C.C$$

$$W_1 = \frac{3\pi^2}{2} \theta_1(X, \tau)$$

$$U_1 = 3i\pi k_c A(X, \tau) \exp(i k_c x) \cos \pi z + C.C$$

A l'ordre deux, après calcul des termes non linéaires apparaissant dans ces équations, on obtient :

$$\vec{\nabla}_0 \vec{u}_2 = - \frac{\partial}{\partial X} U_1 \tag{10.a}$$

$$L_0 \theta_2 + L_1 \theta_1 = 48\pi^7 |A|^2 \sin 2\pi z \tag{10.b}$$

$$- (\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_0) \theta_2 + W_2 = - 2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial X} \theta_1 + 3 \pi^3 |A|^2 \sin 2\pi z \tag{10.c}$$

Afin d'éviter d'introduire une nouvelle amplitude, on suppose que θ_2 est orthogonale à θ_1 (au sens du produit scalaire défini plus loin). Dans ce cas , (10.a) et (10.c) permmentent de poser :

$$\theta_2 = - \frac{3\pi}{4} |A|^2 \sin 2\pi z$$

$$W_2 = - 2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial X} \theta_1$$

U_2 vérifie l'équation de continuité (10.a)

L'équation pour θ s'écrit à l'ordre trois :

$$L_0 \theta_3 = - L_2 \theta_1 - L_1 \theta_2 + \left\{ \frac{1}{Pr} \left[\frac{\partial}{\partial z} [\vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}] - \Delta [(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) W] \right] - \left(\frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) \Delta (\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \theta) \right\}_3$$

où les termes non linéaires du second membre sont calculés à l'ordre 3. Ce problème inhomogène n' a de solution que si le second membre est orthogonal au noyau de l'adjoint de L_0 (théorème de Fredholm) . L'adjoint de L_0 étant défini dans un espace vectoriel sur C , au moyen du produit scalaire:

$$[f, g] = \int_{x=-\frac{\pi}{k}}^{\frac{\pi}{k}} \int_{z=0}^{z=1} \bar{f}(x, z) g(x, z) dx dz$$

Le théorème de Fredholm permet donc d'éliminer du second membre tous les termes résonnants avec : $\exp (+ i k_c x)$ ou $\exp (- i k_c x)$ (éléments de la base du noyau de

l'adjoint de L_0). Les termes quadratiques en \vec{u} intervenant au second membre n'entrent pas en résonance avec ces éléments, puisque \vec{u} ne contient jusqu'à l'ordre deux que des

termes proportionnels à $\exp(i k_c x)$. Compte tenu de ce que $L_1 \theta_2 = 0$, les termes à éliminer sont alors :

$-L_2 \theta_1 + \Delta_0^2 (\vec{u}_1 \cdot \vec{\nabla}_0 \theta_2)$; ce qui donne la condition de solvabilité suivante:

$$\left(1 + \frac{1}{Pr}\right) \frac{\partial A}{\partial \tau} = 4 \frac{\partial^2 A}{\partial X^2} + \frac{2}{9 \pi^2} R_2 A - \frac{9 \pi^4}{8} A |A|^2$$

Cette équation d'amplitude rend compte de la variation lente en temps et en espace suivant la direction perpendiculaire à l'axe des rouleaux. Cependant, du fait que le système est invariant par rotation dans le plan horizontal Oxy , on doit s'attendre à une modulation lente qui va se développer aussi suivant l'axe des rouleaux (Oy). A.C Newell et J.A. Whitehead (1969) ont alors remarqué qu'une légère variation spatiale selon la direction \vec{k} , correspondant à une variation ∂k du module du nombre d'onde, doit être associée à une variation d'ordre $\sqrt{\partial k}$ dans la direction perpendiculaire.

Cela suppose que l'on introduit une nouvelle échelle lente $Y = \varepsilon^{1/2} y$ et que l'on effectue dans le développement de l'opérateur L le remplacement de :

$2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial X}$ par $2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2}$. Cela revient à effectuer dans l'équation d'amplitude le remplacement de $\frac{\partial}{\partial X}$ par $\frac{1}{2ik_c} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + \frac{\partial}{\partial X}$.

L'équation obtenue, appelée équation de Newell-Whitehead-Segel est :

$$\tau_0 \frac{\partial A}{\partial \tau} = R_2 A + h^2 \left(\frac{\partial}{\partial X} + \frac{1}{2ik_c} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \right)^2 A - g A |A|^2$$

$$\text{avec } \tau_0 = \left(1 + \frac{1}{Pr}\right) \frac{9 \pi^2}{2} \quad ; \quad h^2 = 18 \pi^2 \quad \text{et } g = \frac{81 \pi^6}{16}$$

que l'on peut écrire, en prenant h et \sqrt{h} pour échelle d'espace respectivement selon x et y , τ_0 pour échelle de temps et $\frac{1}{\sqrt{g}}$ pour échelle d'amplitude,

$$\frac{\partial A}{\partial \tau} = R_2 A + \left(\frac{\partial}{\partial X} + \frac{1}{2ik_c} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \right)^2 A - A |A|^2 \quad (11)$$

L'équation d'amplitude permet de décrire les modulations des rouleaux convectifs, puisqu'elle autorise une variation en espace et en temps de l'amplitude A .

REFERENCES:

- BENARD H, 1900, Tourbillons cellulaires dans une nappe liquide, Rev. Gén. Sci. Pures Appl., vol.11, p.1261-1271. 1309-1328.
- BUSSE F. H., 1972, The oscillatory instability of convection rolls in a low Prandtl number fluid J. Fluid Mech., vol. 52, p. 97-112
- CHANDRASEKHAR S., 1961, Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability, Clarendon Press-Oxford-.
- ECKHAUS W., 1962, Problèmes non linéaires de stabilité dans un espace à deux dimensions, J. de Mécanique, N° 4, p.413-438.
- IOOSS G. ET JOSEPH D., 1990, Elementary stability and bifurcation theory, 2^{ème} ed., Springer, Berlin.
- MALKUS W. V; R; et VERONIS G., 1958, Finite amplitude cellular convection, J. Fluid Mech., vol.4, p. 225.
- MANNEVILLE P., 1991, Structures dissipatives, Chaos et turbulence, collection Aléa Saclay.
- NEWELL A. C. et WHITEHEAD J.A., 1969, Finite bandwidth, Finite amplitude convection, J. Fluid Mech., vol.38, p.279.
- SEGEL L. A., 1969, Distant side-walls cause slow amplitude modulation of cellular convection, J. Fluid Mech., vol. 38, p. 203.
- SIGNORET F., 1988, Etude de situations singulières et forçage périodique dans le problème de Couette-Taylor, Thèse, Université de Nice.

Annexe 2: Valeurs de quelques grandeurs utilisées au chapitres 1 et 2.

$$\alpha_j(k) = \pi [(-k + jk_x) B_j + (-3kk_x + \frac{3}{2}\pi^2 j) A_j] [(k+k_x)^2 + k_y^2 + (j+1)^2 \pi^2]^2$$

$$\alpha'_j(k) = \pi [(-k - jk_x) B_j + (3kk_x + \frac{3}{2}\pi^2 j) A_j] [(-k+k_x)^2 + k_y^2 + (j+1)^2 \pi^2]^2$$

$$\beta_j(k) = \pi [(-k - (j+1)k_x) B_{j+1} + (-3kk_x - \frac{3}{2}\pi^2(j+1)) A_{j+1} - 3k k_x f_{j,1}] \\ [(k+k_x)^2 + k_y^2 + j^2 \pi^2]^2$$

$$\beta'_j(k) = \pi [(-k + (j+1)k_x) B_{j+1} + (3kk_x - \frac{3}{2}\pi^2(j+1)) A_{j+1} + 3k k_x f_{j,1}] \\ [(-k+k_x)^2 + k_y^2 + j^2 \pi^2]^2$$

$$C_j = \frac{\alpha_j}{R_c [(k+k_x)^2 + k_y^2] - [(k+k_x)^2 + k_y^2 + (j+1)^2 \pi^2]^3}$$

$$C'_j = \frac{\alpha'_j}{R_c [(-k+k_x)^2 + k_y^2] - [(-k+k_x)^2 + k_y^2 + (j+1)^2 \pi^2]^3}$$

$$D_j = \frac{\beta_j}{R_c [(k+k_x)^2 + k_y^2] - [(k+k_x)^2 + k_y^2 + j^2 \pi^2]^3}$$

$$D'_j = \frac{\beta'_j}{R_c [(-k+k_x)^2 + k_y^2] - [(-k+k_x)^2 + k_y^2 + j^2 \pi^2]^3}$$

$$E(k) = \frac{3}{2} B \pi^2 \frac{[(k+k_x)^2 + k_y^2 + \pi^2]^2}{R_c [(k+k_x)^2 + k_y^2] - [(k+k_x)^2 + k_y^2 + \pi^2]^3}$$

$$K_j = \frac{R_c [(k+k_x)^2 + k_y^2]}{[(k+k_x)^2 + k_y^2 + (j+1)^2 \pi^2]^2} C_j$$

$$K'_j = \frac{R_c [(-k+k_x)^2 + k_y^2]}{[(-k+k_x)^2 + k_y^2 + (j+1)^2 \pi^2]^2} C'_j$$

$$L_j = \frac{R_c [(k+k_x)^2 + k_y^2]}{[(k+k_x)^2 + k_y^2 + j^2 \pi^2]^2} D_j$$

$$L'_j = \frac{R_c [(-k+k_x)^2 + k_y^2]}{[(-k+k_x)^2 + k_y^2 + (j+1)^2 \pi^2]^2} D'_j$$

$$L'_j = \frac{R_c [(-k+k_x)^2 + k_y^2]}{[(-k+k_x)^2 + k_y^2 + (j+1)^2 \pi^2]^2} D'_j$$

$$F(k) = \frac{R_c [(k+k_x)^2 + k_y^2]}{[(k+k_x)^2 + k_y^2 + \pi^2]^2} E(k)$$

$$M_j = \frac{k_y (j+1)\pi}{(k+k_x)^2 + k_y^2} K_j$$

$$M'_j = \frac{k_y (j+1)\pi}{(-k+k_x)^2 + k_y^2} K'_j$$

$$N_j = \frac{k_y j \pi}{(k+k_x)^2 + k_y^2} L_j$$

$$N'_j = \frac{k_y j \pi}{(-k+k_x)^2 + k_y^2} L'_j$$

$$G(k) = \frac{k_y \pi}{(k+k_x)^2 + k_y^2} F(k)$$

$$P_j = \frac{-k+k_x}{k_y} M_j ; P'_j = \frac{-k+k_x}{k_y} M'_j ; Q_j = \frac{k+k_x}{k_y} N_j ; Q'_j = \frac{-k+k_x}{k_y} N'_j ; H(k) = (k+k_x; k_y) G(k)$$

$$a_{1,j} = \frac{k A_1 B_j}{(1-j)\pi} \quad 1 \neq j ; b_{1,j} = \frac{k A_1 B_j}{(1+j)\pi} ; c_{1,j} = \frac{k [\pi j f_{1,j} B_j - B B_1]}{l^2 \pi^2}$$

$$\nabla^2 = \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (\varphi'')^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] + \varepsilon \left[2\varphi' \frac{\partial^2}{\partial X \partial \eta} + \varphi'' \frac{\partial}{\partial \eta} \right] + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2}$$

$$\nabla^4 = \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (\varphi'')^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right]^2 + \varepsilon \left[4\varphi' \frac{\partial^2}{\partial X \partial \eta} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] + 2\varphi'' \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\partial}{\partial \eta} + 6\varphi'' \varphi'^2 \frac{\partial^3}{\partial \eta^3} + 4 \frac{\partial^3}{\partial \eta^3} \varphi'^3 \frac{\partial}{\partial X} \right] +$$

$$\varepsilon^2 \left[2 \frac{\partial^4}{\partial X^2 \partial z^2} + 3(\varphi'')^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 4\varphi' \varphi''' \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 12\varphi' \varphi''' \frac{\partial^3}{\partial X \partial \eta^2} + 6\varphi'^2 \frac{\partial^4}{\partial X^2 \partial \eta^2} \right] +$$

$$\varepsilon^3 \left[4\varphi''' \frac{\partial^2}{\partial X \partial \eta} + \varphi'' \frac{\partial^3}{\partial X^2 \partial \eta} + 4\varphi' \frac{\partial^4}{\partial X^3 \partial \eta} + \varphi^{(4)} \frac{\partial}{\partial \eta} \right] + \varepsilon^4 \frac{\partial^4}{\partial X^4} .$$

Annexe 3

A. La méthode de MELNIKOV et la prédiction du chaos

Soit le système périodique suivant:

$$(1) \quad \frac{dX}{dt} = f(X) + \varepsilon g(X, t) \quad \varepsilon \ll 1$$

où $X = (u, v) \in \mathbb{R}^2$, $f = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} g_1(x, t) \\ g_2(x, t) \end{pmatrix}$ et g est une fonction périodique en t de période T .

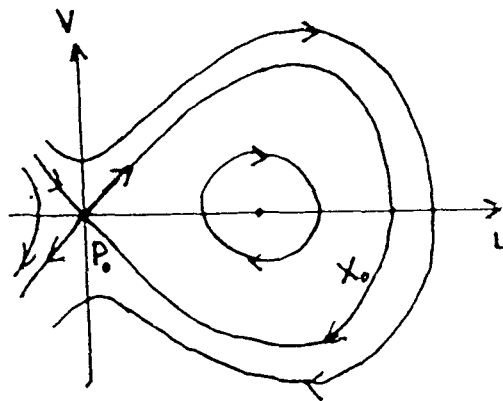
De façon équivalente, le flot associé à (1) s'écrit sous la forme d'un flot autonome:

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{dX}{dt} = f(X) + \varepsilon g(X, \theta) \\ \frac{d\theta}{dt} = 1 \end{cases}$$

avec $(X, \theta) \in \mathbb{R}^2 * S^1$ et S^1 est le cercle unité.

Soient les conditions suivantes:

- i) Quand $\varepsilon=0$, le système (1) a un point d'équilibre du type centre.
- ii) Les fonctions f et g sont analytiques dans un voisinage de ce point.
- iii) Pour $\varepsilon=0$, le système (1) possède une orbite homocline $X_0(t)$ connectée à un point col hyperbolique P_0



On définit l'application de Poincaré:

$$P_\varepsilon^{t_0} : \Sigma_{t_0} \longrightarrow \Sigma_{t_0}$$

Σ_{t_0} est une section globale lié à (2) : $\Sigma_{t_0} = \{ (X, \theta) \in \mathbb{R}^2 * S^1 / \theta = t_0 \}$

On montre que le point col P_0 est structurellement stable; c'est à dire que, sous l'effet de la perturbation, il se déplace sans perdre sa qualité de point col: $P_\varepsilon = P_0 + O(\varepsilon)$. Pour $\varepsilon=0$, P_0 admet des variétés stable (s) et instable (i). L'orbite homocline est l'intersection non transverse des deux variétés. Elle peut se casser sous l'influence de petites perturbations. L'objet de la méthode est de prévoir la nature des intersections des variétés stable et instable. L'intérêt est de détecter les intersections transverses qui impliquent l'apparition du chaos dans le système. Ce genre de chaos est appelé "Smale horseshoe". En résumé, on peut dire que sous l'effet de la perturbation, l'orbite homocline se casse en une orbite stable $X_\varepsilon^s(t)$ et une orbite instable $X_\varepsilon^i(t)$. La méthode de MELNIKOV permet de calculer la distance séparant $X_\varepsilon^s(t_0)$ et $X_\varepsilon^i(t_0)$:

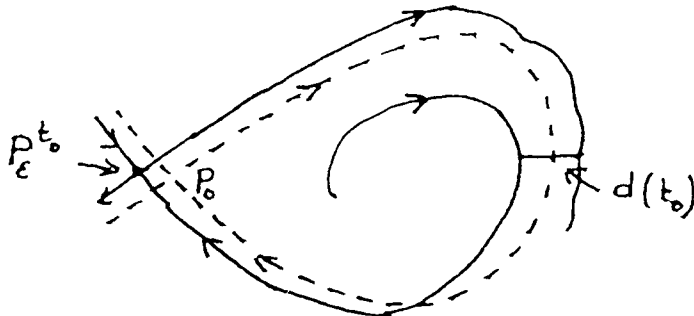
$$d(t_0) = X_\varepsilon^i(t_0) - X_\varepsilon^s(t_0)$$

Cette distance est:

$$d(t_0) = \varepsilon \frac{M(t_0)}{|f(X_0(t_0))|} + O(\varepsilon^2)$$

$$\text{où: } M(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f[X_0(t)] \wedge g[X_0(t), t + t_0] dt$$

et le produit vectoriel est définie par $X_1 \wedge X_2 = u_1 v_2 - u_2 v_1$



Théorème 1

Si $M(t_0)$ a des zéros simples ($M(\tau) = 0$ et $\frac{dM}{dt_0} \neq 0$ en $t_0 = \tau$) et indépendante de ε , alors pour $\varepsilon > 0$ et suffisamment petit, l'intersection des variétés stable et instable est transverse.

Théorème 2

On considère le système avec un seul paramètre μ , $\frac{dX}{dt} = f(X) + \varepsilon g(X, t, \mu)$, $\mu \in \mathbb{R}$. Supposons que les hypothèses 1-3 sont vérifiées. Si $M(t_0, \mu)$ a des zéros doubles:

$M(\tau, \mu_b) = \frac{dM(\tau, \mu_b)}{dt_0} = 0$, alors $\mu_B = \mu_b + O(\varepsilon)$ est un point de bifurcation homocline quadratique pour le système.

SMALE a montré que les intersections transverses sont responsables de l'apparition dans le système d'un ensemble hyperbolique et invariant appelé Smale horseshoe.

B. Portrait de phase quand $\delta = 0$ (Absence de la modulation)

Nous rappelons les principaux résultats concernant le problème de la convection d'un mélange binaire en milieu poreux, lorsque la différence de température imposée sur les parois horizontales est indépendante du temps. Nous nous plaçons, au voisinage du point polycritique. Dans ce cas, l'amplitude de la composante verticale du champ de vitesse doit vérifier l'équation (20) du quatrième chapitre où on pose $\tilde{\delta} = 0$. On peut l'écrire:

$$(3) \begin{cases} \frac{dW_1}{d\tau} = Z(\tau) \\ \frac{dZ}{d\tau} = \mu_1 W_1 + f_1 W^3 + \varepsilon \mu_2^* Z(\tau) - \varepsilon f_2 W_1^2 Z \end{cases}$$

Le système (3) avec $\varepsilon = 0$ (id. absence de dissipation) est un système hamiltonien avec:

$$\frac{dW_1}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial Z} \text{ et } \frac{dZ}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial W_1}$$

$$H(W_1, Z) = \frac{1}{2} Z^2 - \frac{1}{2} \mu_1 W_1^2 - \frac{1}{4} f_1 W_1^4$$

Les points fixes (d'équilibre) de ce problème sont définis par: $Z = \frac{dZ}{d\tau} = 0$. Ce qui donne:

$$(W_{1f}, 0) = \begin{cases} (0, 0) & \text{pour } \mu_1 > 0 \\ (0, 0) \text{ et } (\pm \sqrt{\frac{-\mu_1}{f_1}}, 0) & \text{pour } \mu_1 < 0 \end{cases}$$

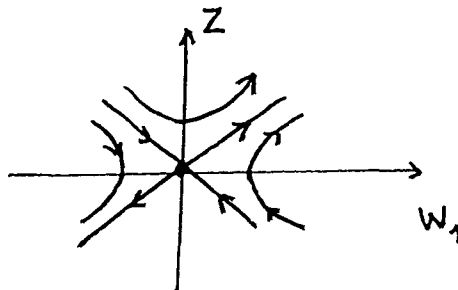
Etudions la stabilité de $(W_{1f}, 0)$. Au voisinage de ces points fixes, on pose:

$$(4) \quad W = W_{1f} + W' \text{ et } Z = Z'$$

Le système (3), linéarisé autour de $(W_{1f}, 0)$ fournit les valeurs propres liées à W' et Z' .

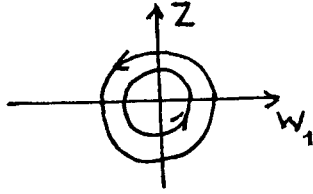
i) Pour $\mu_1 > 0$: $W_{1f} = 0$ et les valeurs propres sont $\pm \sqrt{\mu_1}$

Le point $(0, 0)$ est un point col



ii) Pour $\mu_1 < 0$: les valeurs propres sont $\pm i \sqrt{-\mu_1}$ si $W_1 f = 0$ et $\pm \sqrt{-2\mu_1}$ si $W_1 f = \pm \sqrt{\frac{-\mu_1}{f_1}}$.

Le point $(0,0)$ est un point centre et les deux points $(\pm \sqrt{\frac{-\mu_1}{f_1}}, 0)$ sont des cols

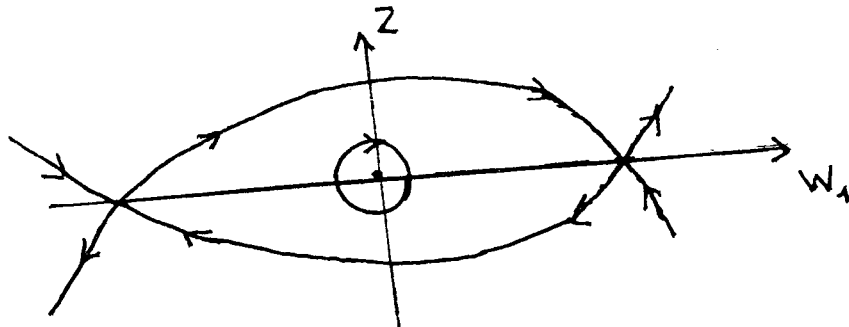


Pour $\varepsilon = 0$ et $\mu_1 < 0$, il existe une paire d'orbites hétéroclines connectant les deux points col $(\pm \sqrt{\frac{-\mu_1}{f_1}}, 0)$. L'équation de ces orbites hétéroclines est: $H(W_1, Z) = \frac{1}{4} \frac{\mu_1^2}{f_1}$; soit:

$$(5) \quad Z^2 - \mu_1 W_1^2 - \frac{1}{2} f_1 W_1^4 = \frac{1}{2} \frac{\mu_1^2}{f_1}$$

En intégrant l'équation (5), on obtient:

$$(W_1^\pm(\tau); Z^\pm(\tau)) = \pm \sqrt{\frac{-\mu_1}{f_1}} \left(\text{th} \sqrt{\frac{-\mu_1}{2}} \tau ; \sqrt{\frac{-\mu_1}{2}} \text{sech}^2 \sqrt{\frac{-\mu_1}{2}} \tau \right)$$

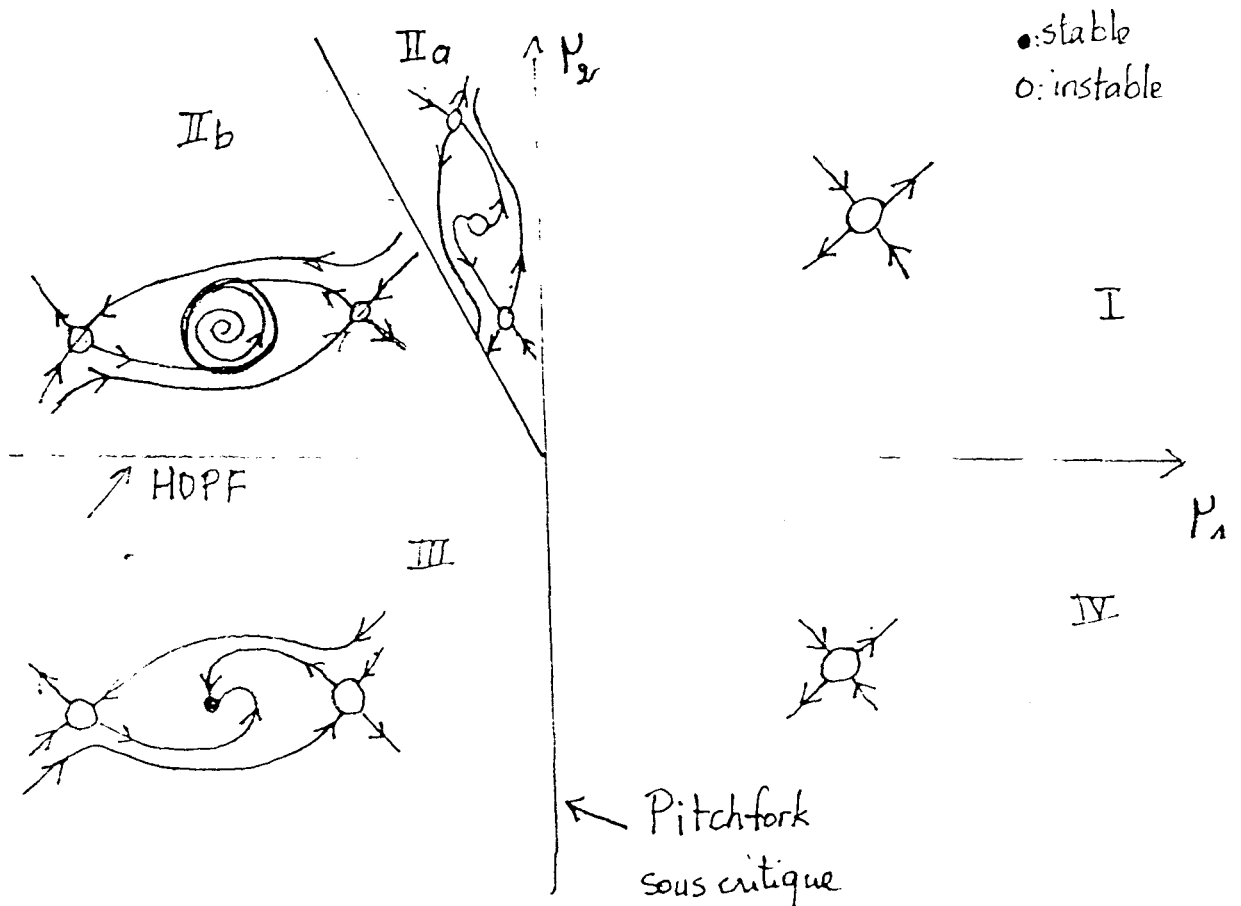


Introduisons la fonction de MELNIKOV pour étudier le système perturbé:

$$\begin{aligned} M(\tau_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} Z^2(\tau) [\mu_2 - f_2 W_1^2] d\tau \\ &= \frac{8}{3f_1} \left(-\frac{\mu_1}{2}\right)^{3/2} \left(\mu_2 + \frac{\mu_1 f_2}{5f_1}\right) \end{aligned}$$

On constate que les deux variétés stable et instable se confondent pour $\mu_2 = -\frac{\mu_1 f_2}{5f_1}$. Cette relation définit le seuil de l'apparition d'une bifurcation homocline. Elle assure la transition

entre une région de l'espace des paramètres ($\mu_2 < -\frac{\mu_1 f_2}{5f_1}$) caractérisé par la présence d'un cycle limite périodique, et la région ($\mu_2 > -\frac{\mu_1 f_2}{5f_1}$) où ce cycle limite disparaît (voir le portrait de phase)



Dans les différents quadrants, nous avons indiqué, dans l'espace de phase, le comportement des solutions de (3), la stabilité des points fixes et les différentes bifurcations présentes dans le système. Le quadrant III a un point fixe stable et deux points fixes instables, tandis que les quadrants I et IV ont un point instable avec une bifurcation Pitchfork sous critique le long de la ligne $\mu_1=0$ et $\mu_2 < 0$. Pour $\mu_2=0$ et $\mu_1 < 0$, le système présente une bifurcation de Hopf donnant naissance à un cycle limite. Ce dernier disparaît le long de la ligne $\mu_2 = -\frac{\mu_1 f_2}{5f_1}$ où la période des oscillations diverge. Dans la région IIa, trois points instables existent et sont reliés entre eux par une orbite hétérocline.