

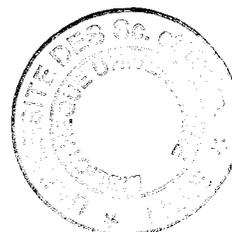
N° d'ordre : 1157

50376
1993
310

THESE DE DOCTORAT
Présentée à l'
UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE
pour obtenir le titre de
DOCTEUR
Spécialité : Mécanique
par
Hassane GHFIRI

APPLICATION DE LA MECANIQUE DE LA RUPTURE AUX MATERIAUX A
COMPORTEMENT NON LINEAIRE

Contributions respectives des dimensions finies et du comportement du matériau
dans l'expression du paramètre énergétique J



soutenue le 19 juillet 1993 devant la commission d'examen

Jury :

MESMACQUE G.	Président	Professeur	IUT A de Lille (USTL)
PLUVINAGE G.	Rapporteur	Professeur	Université de Metz
POUYET J.	Rapporteur	Professeur	Université de Bordeaux
RIETSCH F.	Examineur	Professeur	EUDIL (USTL)
CIOCLOV D.	Examineur	Professeur	Directeur de l'Institut de Soudure de Timosoara (Roumanie)
NAÏT ABDELAZIZ M.	Examineur	Maître de Conférences	IUT A de Lille (USTL)
NEVIERE R.	Examineur	Docteur	Ingénieur Société Nat. Poudre et Explosifs

A la mémoire de mon père

- REMERCIEMENTS -

Ce travail a été effectué au Laboratoire de Mécanique des Matériaux de L'I.U.T. "A" de l'Université des Sciences et Technologies de Lille, composante du Laboratoire de Mécanique de Lille (L.M.L URA CNRS 1441), sous la direction de Monsieur **G.MESMACQUE** à qui j'exprime ma profonde gratitude pour m'avoir accepté au sein de son équipe.

Monsieur **M.NAIT-ABDELAZIZ**, Maître de conférences, m'a proposé le sujet de ce travail dont il a assuré le suivi. Ses conseils, son esprit de synthèse et ses connaissances ont largement contribué à la réalisation de ce travail. Qu'il me soit permis de lui exprimer ma très grande reconnaissance.

Je remercie Monsieur **G.PLUVINAGE**, professeur de l'Université de Metz, et Monsieur **J.POUYET**, professeur de l'Université de Bordeaux, qui m'ont fait l'honneur de juger ce travail, ainsi que Messieurs **F.RIETSCH**, Professeur à l'USTL, et **D. CIOCLOV**, directeur de l'Institut de Soudure de Timisoara, qui ont bien voulu participer au jury d'examen.

Mes remerciements vont aussi à Monsieur **R.NEVIERE**, Ingénieur de la Société Nationale des Poudres et Explosifs, pour ses judicieuses suggestions.

J'adresse enfin mes remerciements à l'ensemble du personnel de l'I.U.T. de mécanique, notamment mes collègues chercheurs, pour l'aide qu'ils m'ont apportée.

INTRODUCTION	1
PREMIERE PARTIE : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE	
CHAPITRE 1 : GENERALITES SUR LES ELASTOMERES	3
I.1/ PRELIMINAIRE	3
I.2/ GENERALITES SUR LE COMPORTEMENT DES ELASTOMERES	3
I.2.1/ Aspects microstructuraux	
I.2.2/ Phénomène "d'inversion thermoélastique"	
I.2.3/ Analyse thermodynamique	
I.2.4/ Propriétés mécaniques des élastomères	
I.2.4.1/ Cas des élastomères non chargés	
I.2.4.2/ Influence de la charge	
I.3/ LOIS HYPERELASTIQUES	13
I.3.1/ Définition d'un milieu hyperélastique	
I.3.2/ Théorie statistique de l'élasticité	
I.3.2.1/ Forme statistique d'une chaîne moléculaire	
I.3.2.2/ Développement de la théorie de l'élasticité	
I.3.2.3/ Application de la théorie statistique	
a) Cas de la traction uniaxiale	
b) Cas du cisaillement simple	
c) Cas du cisaillement pur	
I.3.2.4/ Formulation de MOONEY- RIVLIN	
CHAPITRE II : MECANIQUE DE LA RUPTURE	
II.1/ MECANIQUE DE LA RUPTURE	27
II.2/ APPROCHE LOCALE	27
II.2.1/ Facteur d'intensité de contrainte	
II.2.2/ Facteur de densité d'énergie de déformation (critère de SIH 2)	

II.3/ APPROCHES GLOBALES	29
II.3.1/ Bilan énergétique d'un système mécanique	30
II.3.2/ Critère de l'énergie surfacique de rupture	31
II.3.3/ Taux de restitution d'énergie G	32
II.3.4/ Intégrale J	34
II.3.4.1/ Définition de J	
II.3.4.2/ Expression de Rice	
II.3.4.3/ Expression de J en fonction du travail dépensé	
II.3.4.3.1/ Relation de Sumpter et Turner	
II.3.4.3.2/ Calcul du coefficient de proportionnalité η dans des cas particuliers.	
a) Cas d'un comportement élastique linéaire	
b) Cas d'un comportement élasto-plastique	
II.3.4.4/ Détermination expérimentale de l'intégrale J	
a) Méthode de BEGLEY-LANDES	
b) Méthode dite "des fissures profondes"	
II.3.5/ Critère énergétique de déchirement	46
I.3.5.1/ Définition	
I.3.5.2/ Expression de l'énergie de déchirement	
a) Eprouvette en cisaillement pur	
b) Eprouvette en traction uniaxiale contenant une petite fissure	
II.3.5.3/ Conclusion	
II.3.6/ Théorie généralisée de la mécanique de la rupture	52
II.3.6.1/ Première équation de la théorie généralisée d'Andrews	
II.3.6.1.1/ Développement de la théorie d'Andrews	
a) Cas de dimensions infinies	
b) Cas de dimensions finies	
II.3.6.1.2/ Application de la 1ère équation d'Andrews à l'éprouvette en cisaillement pur de RIVLIN et THOMAS	
II.3.6.1.3/ Développement expérimental de la théorie généralisée (1ère équation)	
II.3.6.2/ Deuxième équation de la théorie généralisée d'Andrews	
II.3.7/ Conclusion	61

DEUXIEME PARTIE : ETUDE EXPERIMENTALE

INTRODUCTION	64
CHAPITRE III : PROTOCOLE EXPERIMENTAL ET EXPLOITATION DES RESULTATS	
III.1/ PROTOCOLE EXPERIMENTAL	65
III 1.1/ Matériau-Echantillons	
III 1.2/ Dispositif expérimental	
III.2/ EXPLOITATION DES RESULTATS EXPERIMENTAUX	70
III.2.1/ Base théorique : théorie généralisée	70
III.2.2/ Détermination de J	71
III.2.2.1/ Méthode des pseudo-compliances (Méthode 1)	
III.2.2.2/ Deuxième approche basée sur la méthode du travail dépensé (Méthode 2)	
III.2.3/ Identification expérimentale de la fonction de potentiel $k(W_o)$ et de la fonction de géométrie $F(a/w)$	74
III.2.3.1/ Identification de $k(W_o)$ et de $F(a/w)$ à partir de la fonction $N(W_o, a/w, a/h)$	
a) Détermination de $N(W_o, a/w, a/h...)$	
b) Séparation de $N(W_o, a/w)$ en utilisant une fonction de calibration linéaire	
c) Notre hypothèse	
III.2.3.2/ Identification de $k(W_o)$ et de $F(a/w)$ à partir de la séparation de J	
a) Méthode de détermination expérimentale de $H(W_o)$ et de $G(a/w)$	
b) Résultats expérimentaux	
c) Détermination de $k(W_o)$ et de $F(a/w)$	
III.3/ CONCLUSION	93
CHAPITRE IV : METHODE DE SEPARATION DE L'ENERGIE	
IV- 1 / INTRODUCTION	97
IV- 2 / SEPARATION DE L'ENERGIE (METHODE 3)	97

IV- 3/ IDENTIFICATION DE $k(W_0)$ et de $F(a/w)$	99
---	-----------

IV- 3.1/ Géométrie S.E.NT. et C.C.T.

a) Détermination expérimentale de $G(a/w)$

b) Détermination de $k(W_0)$ et de $F(a/w)$

IV - 3.2/ Géométrie C.P.

TROISIEME PARTIE : DISCUSSIONS - CONCLUSIONS

INTRODUCTION	115
---------------------	------------

CHAPITRE V : ANALYSE DES RESULTATS - CONCLUSIONS

V-1/ Comparaison entre la méthode de pseudo-compliance et la méthode de séparation de l'énergie.	116
---	------------

V-1-1/ Fonction de calibration non-linéaire

V-1-2/ Fonction de potentiel $k(W_0)$

V-1-3/ Cas de l'éprouvette de cisaillement pur (C.P.)

V-2/ Validité de la méthode de séparation de l'énergie	120
---	------------

V-3/ Application à d'autres types de matériaux	126
---	------------

CONCLUSION GENERALE	135
----------------------------	------------

ANNEXE 1 : TRANSFORMATIONS FINIS EN GRANDES DEFORMATIONS	138
---	------------

ANNEXE 2 : LOIS HYPERELASTIQUES	149
--	------------

ANNEXE 3 : APPLICATION DE LA METHODE DE SEPARATION DE L' ENERGIE A D' AUTRES GEOMETRIES	157
--	------------

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	
------------------------------------	--

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

Depuis leur apparition au début du XXème siècle, les polymères synthétiques suscitent l'intérêt de nombreux laboratoires de recherches industrielles, particulièrement en raison de leurs performances techniques (tenu au choc ou à la chaleur...) et économiques. Ils ont fait l'objet de nombreuses études, tant du point de vue chimique que mécanique. Et de nombreux résultats sont désormais disponibles.

La mécanique de la rupture, a montré depuis de nombreuses années son efficacité à répondre au moins pour les matériaux usuels (comportement élastique linéaire ou élastoplastique) aux impératifs de conception des structures industrielles.

Pour l'expérimentateur, l'observation et la compréhension des processus de rupture dans un matériau se réalisent en laboratoire sur des échantillons dont la géométrie est simple pour fournir des résultats plus facilement exploitables.

Cette configuration expérimentale rend impérative une identification quantitative de l'influence de la géométrie des échantillons utilisés afin d'obtenir à partir des mesures les propriétés intrinsèques recherchées.

Dans le cas d'un comportement non-linéaire, la recherche de telles propriétés, passe le plus souvent par l'utilisation de critères énergétiques globaux de la mécanique de la rupture. Ces méthodes d'approche globales, basées sur un bilan énergétique du système en question, permettent de s'affranchir de la connaissance des contraintes et des déformations à la pointe d'une fissure.

Ce travail a donc pour but, à partir d'un matériau caoutchoutique (EPDM) de mettre en évidence les contributions respectives de l'influence des dimensions finies des échantillons utilisés et des effets de la non-linéarité du comportement dans l'expression du paramètre énergétique J .

A cet effet, nous nous intéresserons plus particulièrement à la théorie généralisée développée par ANDREWS, puisqu'elle exprime ce dernier proportionnellement à la densité d'énergie de déformation uniforme et à la longueur de fissure.

Ce mémoire est ainsi composé de trois parties :

- Dans une première partie bibliographique, nous présenterons quelques généralités sur le comportement des élastomères. Nous montrerons, en rappelant les travaux de ANTHONY et autres

[6], et de MEYER et FERRI [5], que la haute élasticité de ces matériaux est d'origine entropique (chapitre I). Nous évoquerons également dans ce chapitre, la théorie statistique d'élasticité développée par H. KHAN pour modéliser le comportement des élastomères.

L'objet du second chapitre bibliographique est de traiter des notions utilisées en mécanique de la rupture dans le contexte du bilan énergétique d'un processus de propagation stable.

- Dans la seconde partie, nous présenterons nos résultats expérimentaux réalisés sur trois géométries différentes: S.E.N.T. (Eprouvette à fissure latérale), C.C.T. (Eprouvette à fissure centrale) et C.P. (Cisaillement Pur).

Nous appliquerons à ces résultats des méthodes classiques de détermination du paramètre énergétique J (méthode de pseudo-compliance et celle de l'énergie totale dépensée) dans le but d'exprimer ce dernier sous forme multiplicative à l'aide de deux fonctions liées respectivement aux comportements du matériau et aux dimensions finies des échantillons utilisés (chapitre III).

A la fin de cette seconde partie, nous proposerons une méthode expérimentale originale dont l'intérêt est de séparer directement dans l'énergie dépensée (ou dans l'énergie complémentaire), les effets de la géométrie des échantillons utilisés des effets de la non-linéarité du comportement (chapitre IV).

Afin de confirmer la validité de la méthode que nous proposons, nous la comparerons, dans cette dernière partie, aux deux méthodes classiques utilisées, puis nous l'appliquerons à des résultats expérimentaux extraits de la littérature pour d'autres types de matériaux.

PREMIERE PARTIE : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

CHAPITRE I : GENERALITE SUR LES ELASTOMERES

CHAPITRE I : GENERALITES SUR LES ELASTOMERES

I-1/ PRELIMINAIRE

Les polymères sont constitués d'un grand nombre d'unités fondamentales: les monomères (molécules organiques dont le noyau est un atome de carbone ou de silicium dans le cas des polymères silicones). Ces monomères se présentent souvent sous forme de chaînes moléculaires obtenues par polymérisation.

Selon le mode de polymérisation, la structure des polymères peut prendre plusieurs formes. Leur comportement dépend en grande partie du type de la structure obtenue et de son degré de réticulation.

Ces matériaux peuvent être divisés en trois classes: les thermoplastiques, les thermodurcissables et les élastomères. Seuls les élastomères seront développés puisqu'ils font l'objet de ce travail.

I-2/ GENERALITES SUR LE COMPORTEMENT DES ELASTOMERES

I-2-1/ Aspects microstructuraux

Ce sont des polymères quasiment linéaires, avec quelques liaisons intermoléculaires ou pont de réticulation. Ces ponts fournissent au matériau une mémoire de sa forme initiale.

Le caoutchouc vulcanisé est un polymère réticulé, obtenu par pontage des chaînes par des atomes de soufre. Il fût découvert en 1839 par CHARLES GOODYEAR, et connaît, aujourd'hui, un grand succès dans l'industrie du pneumatique.

Lorsque la contrainte est nulle, les élastomères présentent une structure amorphe. Cependant, après sollicitation ou à basse température, la structure peut être partiellement cristallisée (fig.1).

Sous contrainte, la grande flexibilité des chaînes permet d'obtenir de grandes déformations élastiques totalement réversibles (d'environ plusieurs centaines de pour cent) [1, 3, 4] (fig.2).

Ces chaînes ont tendance à s'aligner, au cours de la déformation, dans la direction du chargement, il se produit, alors, une augmentation de la rigidité du matériau .

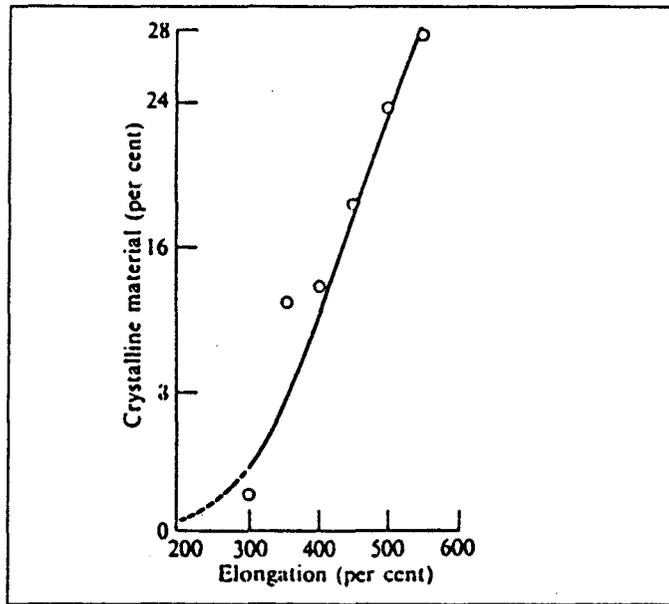


Fig.1 : Evolution du taux de cristallisation en fonction de l'élongation pour un caoutchouc vulcanisé (Goppel [2])

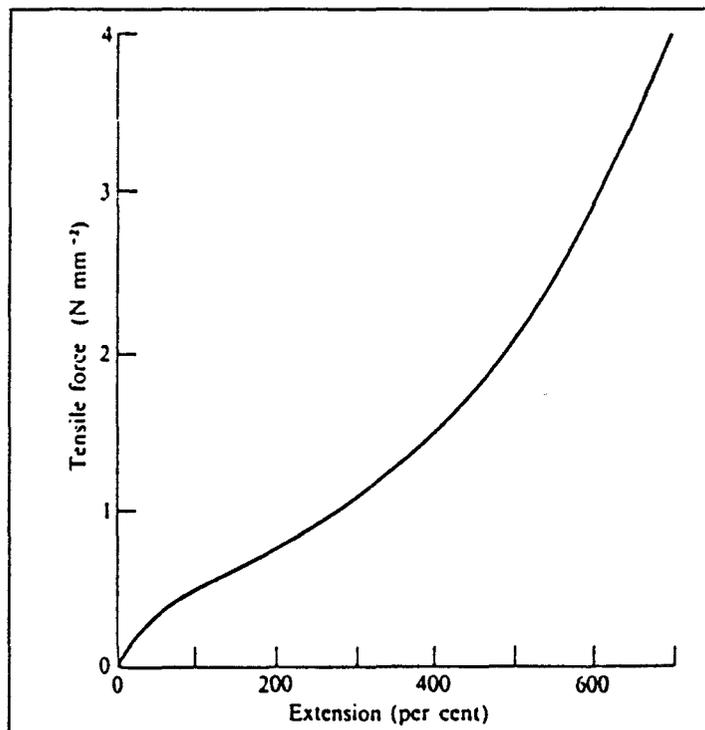


Fig.2 : Courbe contrainte-élongation pour un caoutchouc vulcanisé

I-2-2/ Phénomène "d'inversion thermoélastique"

La théorie cinétique attribue les grandes déformations des élastomères à une variation de l'entropie de configuration du système due à l'orientation des chaînes moléculaires sous l'effet de la sollicitation. Quant à la variation d'énergie interne, elle est considérée constante [3].

Pour une élongation donnée, la force élastique est proportionnelle à la température absolue [5, 6].

La figure 3 montre l'évolution de la contrainte, à élongation constante, en fonction de la température.

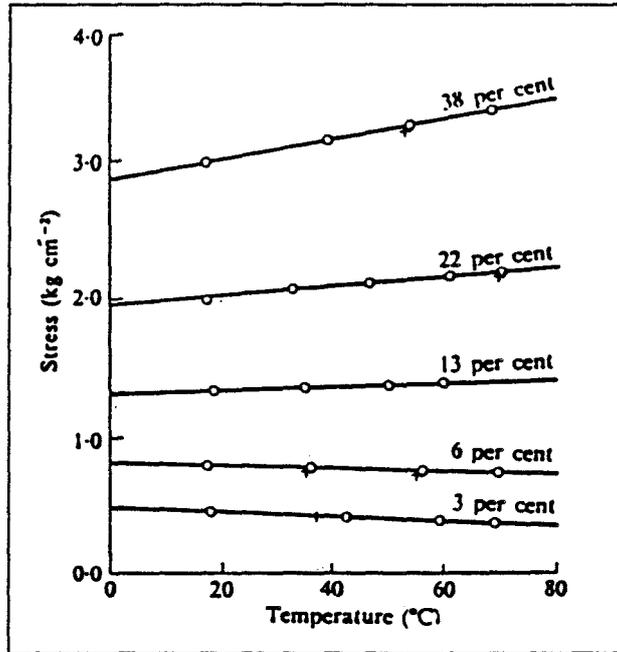


Fig.3 : Evolution de la contrainte globale, à élongation constante, en fonction de la température [6].

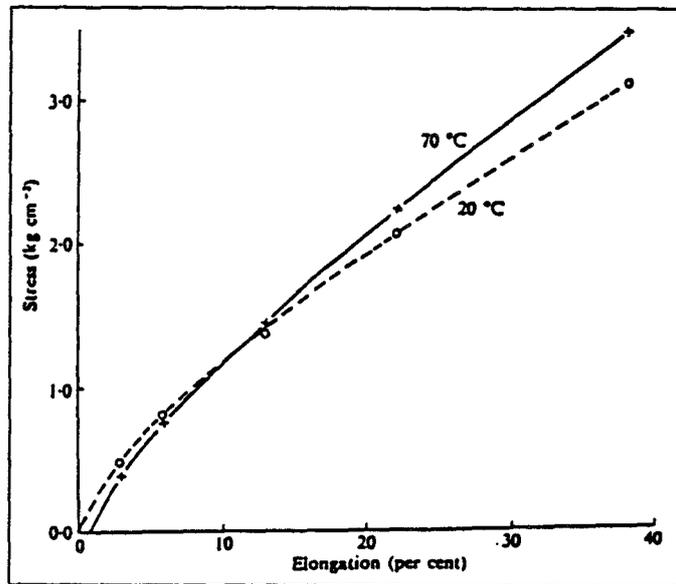


Fig.4 : Courbes contrainte-élongation à 20°C et à 70°C

(Les élongations sont calculées à partir d'une longueur initiale mesurée à 20°C).

On constate sur cette figure que, pour un allongement inférieur à 10 %, la contrainte globale diminue au lieu d'augmenter en fonction de la température. L'explication de ce phénomène, connu sous le nom de l'inversion thermoélastique, est donnée par les figures 4 et 5 [5, 6].

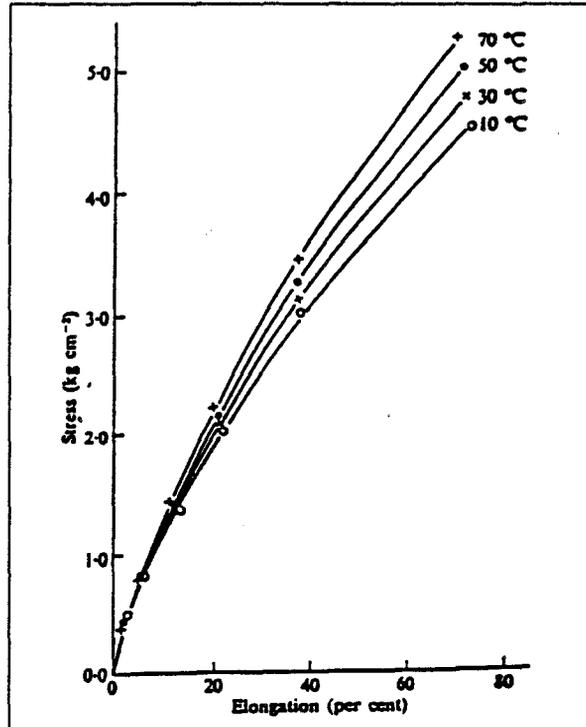


Fig.5 : Courbes contrainte-élongation pour différentes Températures (les élongations sont calculées à partir d'une longueur initiale mesurée à la température de l'essai [6])

Si les élongations sont calculées en prenant comme longueur initiale, celle mesurée à 20°C, l'origine de la courbe contrainte-élongation à 70° C est déplacée, la pente de cette courbe augmente. Les deux courbes se croisent pour une élongation égale à 10 % environ (fig 4).

Cependant, si les élongations sont calculées, en prenant comme longueur initiale, celle mesure à la température de l'essai, les courbes contrainte-élongation pour différentes températures, passent par la même origine. La contrainte, pour une élongation donnée, est proportionnelle à la température absolue (fig 5). De ce fait, l'inversion thermoélastique est éliminée.

Pour mieux comprendre ce phénomène thermoélastique, il est important de connaître les relations liant les grandeurs thermodynamiques (entropie, énergie interne, énergie libre...) aux grandeurs mécaniques (force élastique, élongation, ...).

Nous allons développer ces relations à partir d'une analyse thermodynamique, qui nous servira par la suite comme base théorique pour introduire les bilans énergétiques (2^{ème} partie bibliographique).

I-2-3/ Analyse thermodynamique

La variation de l'énergie interne dU , d'un système donné, s'exprime à partir du premier principe de la thermodynamique par :

$$dU = dQ + dW \quad (I-1)$$

où dQ et dW représentent respectivement la quantité de chaleur absorbée par le système et le travail des forces extérieures.

Le deuxième principe de la thermodynamique définit la variation d'entropie dS , d'un système réversible par la relation :

$$TdS = dQ \quad (I-2)$$

T étant la température du milieu.

Nous aurons donc, en posant l'hypothèse de réversibilité:

$$dU = TdS + dW \quad (I-3)$$

En introduisant l'énergie libre Ψ défini par:

$$\Psi = U - T.S \quad (I-4)$$

Le travail des forces extérieures dW sera égal, dans le cas d'un système réversible isotherme (la température étant constante), à la variation de l'énergie libre $d\Psi$:

$$dW = d\Psi \quad \text{à } T = \text{cste} \quad (I-5)$$

Si f désigne la résultante des forces appliquées au système et p la pression hydrostatique, ce travail s'exprime par:

$$dW = f.dl + p.dV \quad (I-6)$$

dl et dV représentent respectivement la variation de la longueur et du volume de l'échantillon

Les élastomères sont des matériaux incompressibles, la variation du volume dV est très faible, si p désigne la pression atmosphérique, le terme $p dV$ devient alors négligeable devant le terme $f \cdot dl$ dans l'équation (I-6) on obtient alors :

$$dW = f \cdot dl \quad (I-7)$$

d'où

$$f = \left(\frac{dW}{dl} \right)_{T=\text{cste}} = \left(\frac{d\Psi}{dl} \right)_{T=\text{cste}} \quad (I-8)$$

$$f = \left(\frac{dU}{dl} \right)_T - T \cdot \left(\frac{dS}{dl} \right)_T \quad (I-9)$$

où $\left(\frac{dU}{dl} \right)$ et $\left(\frac{dS}{dl} \right)$ représentent respectivement la variation de l'énergie interne et de l'entropie causée par l'allongement. Ils peuvent être calculées à partir des courbes force-température, par :

$$\left(\frac{dS}{dl} \right)_T = \left(\frac{df}{dT} \right)_l \quad (I-10)$$

et

$$\left(\frac{dU}{dl} \right)_T = f - \left(\frac{df}{dT} \right)_l \quad (I-11)$$

L'application des équations (I-10) et (I-11) aux résultats expérimentaux de la figure (3), indique que la déformation est d'origine entropique au-delà d'un allongement de 10 %. Par contre, en dessous, la contribution de l'énergie interne est non négligeable (fig.6).

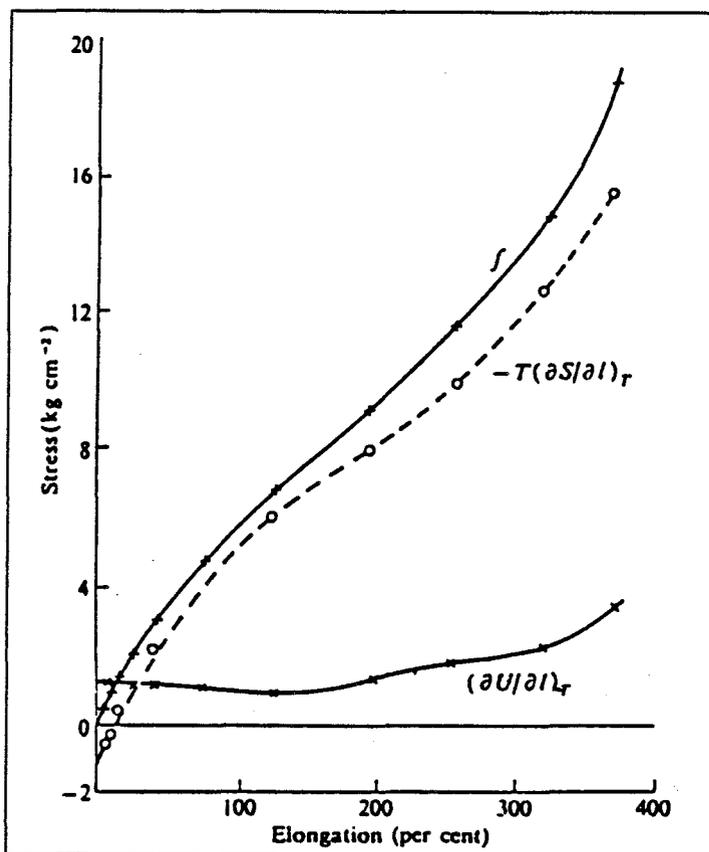


Fig.6 : Evolution de la force de rappel de l'énergie interne (U) et de l'entropie (S) en fonction de l'élongation [6].

Cette remarque a été faite pour la première fois en 1935 par MAYER et FERRI [5]. En effet, cette prédominance de l'entropie pour des grandes déformations, suggérait une analogie d'ordre thermodynamique beaucoup plus avec la compressibilité des gaz parfaits qu'avec l'élasticité des solides peu déformables.

I-2-4/ PROPRIETES MECANQUES DES ELASTOMERES

I-2-4-1/ Cas des élastomères non chargés

Comme pour tous les polymères, les propriétés mécaniques des élastomères dépendent, au-dessous de leur température de transition vitreuse, des conditions de sollicitation et tout particulièrement de la température et du temps [1, 7, 8].

Sous contrainte (σ), un polymère se déforme d'une quantité qui augmente avec la durée de chargement et avec le temps. Le module de relaxation E_R dépend à la fois du temps et de la température:

$$E_R = \frac{\sigma}{\varepsilon(t, T)} \quad (I-12)$$

Le module caoutchouteux (E_R à l'état caoutchoutique) est faible, de l'ordre du MPa (fig.7). Plus le polymère est réticulé, plus le plateau du régime caoutchouteux s'étend, et plus le module caoutchouteux augmente [9].

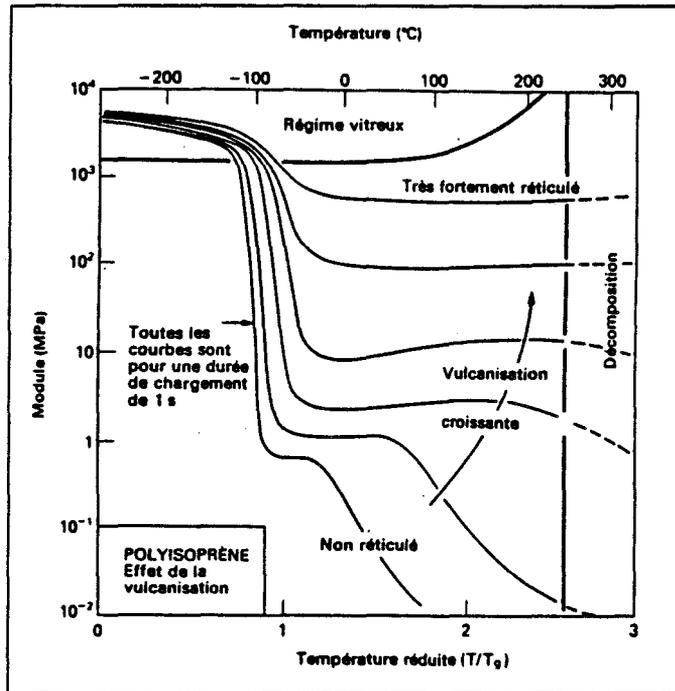


Fig.7 :L'influence du pontage sur l'évolution du module de relaxation (E_R) pour le polyisoprène [9]

Le caoutchouc vulcanisé fait preuve d'une rigidité plus grande qu'un caoutchouc non vulcanisé lorsque le degré de réticulation est élevé, certains élastomères présentent une viscoélasticité réduite.

Le comportement mécanique des élastomères dépend fortement de la masse moléculaire. La figure 8 montre l'évolution de la contrainte de rupture en traction uniaxiale, dans le cas d'un caoutchouc vulcanisé pur gomme, en fonction de la masse moléculaire [10].

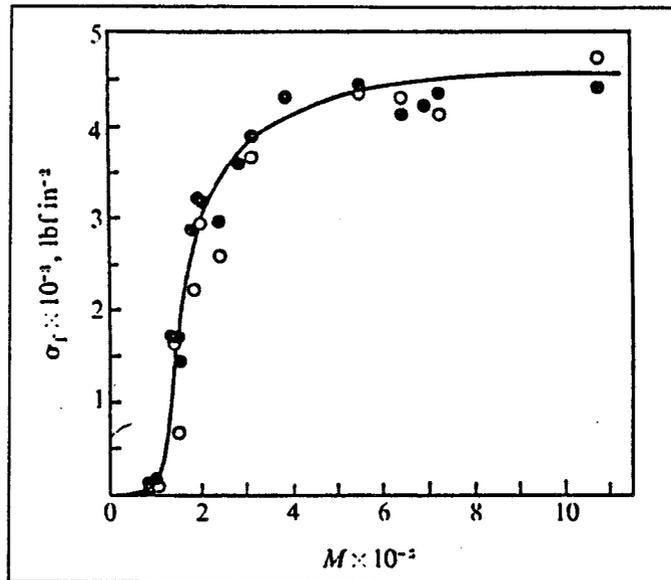


Fig.8 :Evolution de la contrainte à rupture σ_r en fonction de la masse moléculaire pour un caoutchouc vulcanisé [10]

Pour des faibles masses moléculaires, les élastomères n'opposent aucune résistance à la traction, car les molécules courtes glissent trop facilement les unes sur les autres. La résistance croît avec la masse moléculaire, la viscosité aussi. On obtient, alors, un comportement viscoélastique.

La déformation des élastomères est un processus thermoélastique. La force élastique est d'origine entropique au-delà de 10 % d'élongation. En négligeant les déformations inférieures à 10 % et en supposant que la variation de l'énergie interne est négligeable ($dU = 0$), l'équation (I-1) devient :

$$dW = dQ \quad (\text{à température constante}) \quad (I-13)$$

Les caoutchoucs dégagent donc de la chaleur en traction. Joule en 1859, puis James et Guth en 1943 ont mis en évidence des mesures de variation de température en milieu adiabatique (fig.9).

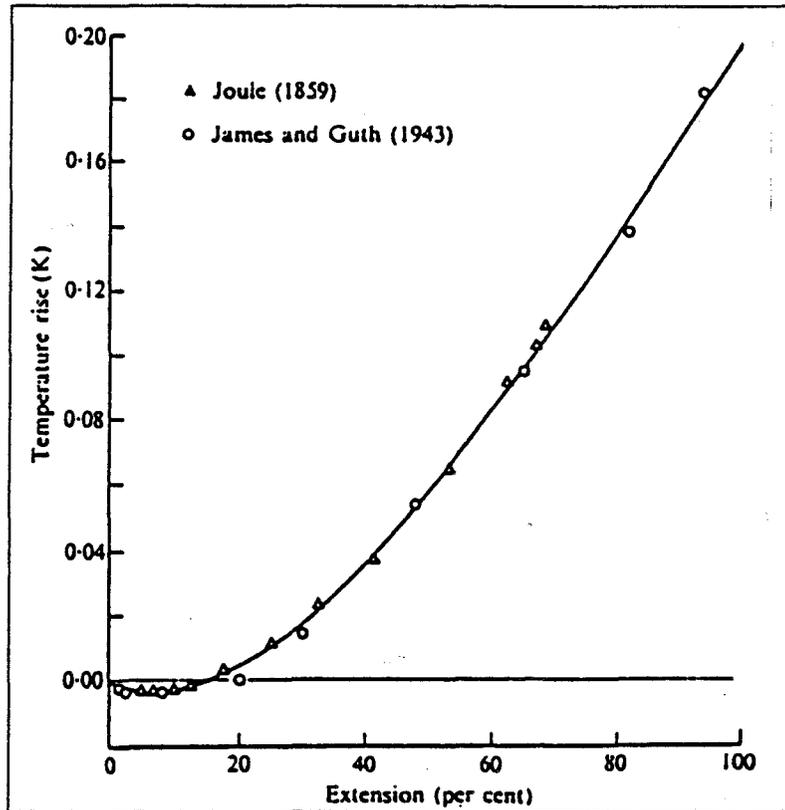


Fig.9 :Evolution de la température avec la déformation d'après Joule, James et Guth rapporté dans [3]

On constate une diminution de la température pour de faibles élongations, le minimum de la courbe température-élongation correspond au point d'inversion thermoélastique observé par ANTHONY et autres [6] et par MAYER et FERRI [5]. Expérimentalement, ce minimum est atteint pour une élongation d'environ 10 %.

I-2-4-2/ Influence des charges additionnées dans un élastomère

Le comportement global de ce type de matériau est voisin du liant élastomérique (jusqu'à une fraction volumique critique).

Jusqu'à un certain taux d'allongement, c'est le liant qui subit la déformation. Les charges étant, elles, d'une rigidité supérieure. Elles ont donc tendance à rigidifier les élastomères.

La présence des charges dans des élastomères peut conduire à un comportement viscoélastique linéaire ou non linéaire, couplé ou non à des effets d'endommagement, ce qui rend la modélisation du comportement mécanique de ces matériaux particulièrement complexe.

Sous certaines hypothèses, (grandes déformations, viscoélasticité réduite, absence d'effets d'endommagement, incompressibilité du matériau...), il existe tout un ensemble de lois hyperélastiques permettant de modéliser le comportement des élastomères.

I-3/ LOIS HYPERELASTIQUES

I-3-1/ Définition d'un milieu hyperélastique:

Un milieu hyperélastique est caractérisé par une dissipation intrinsèque volumique identiquement nulle. Elle est complètement définie, dans le cas d'une évolution isotherme (à température constante), par la donnée de l'énergie libre spécifique .

Dans le cas d'un milieu homogène isotrope, cette énergie libre ne dépend que des trois invariants I_1 , I_2 , I_3 du tenseur des élongations de Cauchy-Green droit \mathbf{C} (annexe 1) [11]:

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{trace}(\mathbf{C}) \\ I_2 &= \frac{1}{2} \left[(\text{trace}(\mathbf{C}))^2 - \text{trace}(\mathbf{C}^2) \right] \\ I_3 &= \det(\mathbf{C}) \end{aligned} \quad (I-14)$$

Dans ces conditions, l'énergie de déformation W (où potentiel d'énergie) rapporté à l'unité de volume de la configuration de référence C_0 est définie par [11] :

$$W(\mathbf{C}) = \rho_0 \Psi(T_0, \mathbf{C}) \quad (I-15)$$

où ρ_0 est la masse volumique de la configuration de référence C_0

La dissipation intrinsèque volumique est définie par (voir annexe 2) :

$$\phi_1 = \left(\sigma_{ij} - 2 \cdot \rho \cdot F_{i\alpha} \cdot \frac{d\Psi}{dC_{\alpha\beta}} \cdot F_{j\beta} \right) \cdot D_{ij} \quad (I-16)$$

Ou encore

$$\phi_1 = \left(\sigma_{ij} - 2 \cdot \frac{\rho}{\rho_0} \cdot F_{i\alpha} \cdot \frac{dW}{dC_{\alpha\beta}} \cdot F_{j\beta} \right) \cdot D_{ij} \quad (I-17)$$

avec (F_{ij}) : composante du tenseur gradient F
 (σ_{ij}) : composante du tenseur de contrainte de Cauchy σ
 (D_{ij}) : composante du tenseur des taux de déformation D
 ρ est la masse volumique de la configuration actuelle.

Ces grandeurs sont définies en annexe 1.

En hyperélasticité, ϕ_1 doit être nulle pour des D_{ij} arbitraires. On en déduit:

$$\sigma = 2 \cdot \frac{\rho}{\rho_0} \cdot F \cdot \frac{dW}{dC} \cdot F^T \quad (I-18)$$

où F^T est la matrice transposée du tenseur gradient F .

Le tenseur de Piola-Kirchoff-2, S , est défini à partir du potentiel d'énergie W et du tenseur des élongations C par l'expression suivante (annexe 2) :

$$S = 2 \cdot \frac{dW}{dC} \quad (I-19)$$

Le terme $\frac{dW}{dC}$ est donné en fonction des invariants de C par (annexe 2):

$$\frac{dW}{dC} = \frac{dW}{dl_1} \cdot I + \frac{dW}{dl_2} \cdot (I_1 \cdot I - C) + \frac{dW}{dl_3} \cdot I_3 \cdot C^{-1} \quad (I-20)$$

C^{-1} désigne la matrice réciproque de C . I est la matrice unité.

Dans le cas d'un matériau isotrope incompressible ($I_3 = 1$), en introduisant la pression hydrostatique p , S s'exprime par :

$$S = 2 \cdot \left[\left(\frac{dW}{dl_1} + I_1 \cdot \frac{dW}{dl_2} \right) \cdot I - \frac{dW}{dl_2} \cdot C + p \cdot C^{-1} \right] \quad (I-21)$$

Les caoutchoucs présentent en général, une incompressibilité du type liquide. Leur énergie interne ne dépend pratiquement pas de la force appliquée pour des transformations finies (grandes déformations).

La théorie statistique de l'élasticité, développée par KUHN[1, 3, 12, 13] dans les années 30, permet de modéliser leur comportement en partant des observations physiques (réseau, chaînes, ...). Le potentiel d'énergie de déformation W est établi, alors, à partir de paramètres physiques du réseau.

I-3-2/ THEORIE STATISTIQUE DE L'ELASTICITE

I-3-2-1/ Forme statistique d'une chaîne moléculaire

Considérons une molécule d'un polymère normalement enchevêtrée avec les molécules voisines, de façon désordonnée. On l'a représenté par une succession de segments identiques C_1C_2 , C_2C_3 , C_3C_4 , qui forment au total une chaîne flexible AB (fig.10).

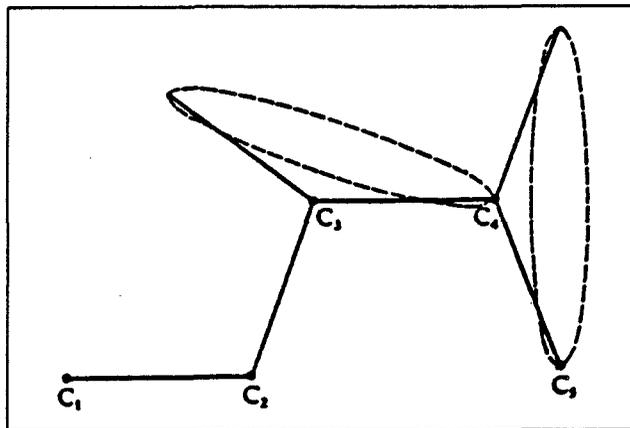


Fig.10: Modèle moléculaire en chaîne pour un élastomère

Pour caractériser la configuration de cette chaîne, nous considérons la distance moyenne quadratique entre ses deux extrémités. En supposant que celle-ci est constituée de N segments de longueur a , la distance est proportionnelle à \sqrt{N} [3], en effet :

$$\bar{R}^2 = (\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \dots)(\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \dots) = N \cdot a^2 + \sum a_i a_j \quad (I-22)$$

Puisque la répartition des segments est aléatoire, le terme $\sum a_i a_j$ est nul. On obtient donc:

$$\bar{R}^2 = N \cdot a^2 \quad (I-23)$$

I-3-2-2/ Développement de la théorie statistique de l'élasticité

Dans le cas d'un caoutchouc vulcanisé, le modèle formé par une chaîne unique isolé ne convient évidemment pas, puisque celui-ci constitue une macromolécule tridimensionnelle géante, n'ayant en fait d'autres limites que la surface extérieure du caoutchouc. Kuhn [3, 12, 13] a considéré alors un réseau dont les différentes mailles sont formées par des éléments de chaînes. Sa théorie statistique est basée sur les hypothèses suivantes :

- 1) Le réseau contient V chaînes par unité de volume. On entend par chaîne un segment entre deux noeuds du réseau.
- 2) La distance moyenne quadratique entre deux extrémités d'une chaîne est donnée par la relation (23).
- 3) La déformation s'effectue sans variation de volume.
- 4) La déformation des chaînes est supposée affine (fig.11). Si on considère une chaîne dont l'extrémité est repérée au repos par le vecteur \vec{r}_0 de coordonnées (x_0, y_0, z_0) . Après déformation, celle-ci est repérée par le vecteur \vec{r} de coordonnées (x, y, z) tel que:

$$x = \lambda_1 x_0, \quad y = \lambda_2 y_0, \quad z = \lambda_3 z_0 \quad (I-24)$$

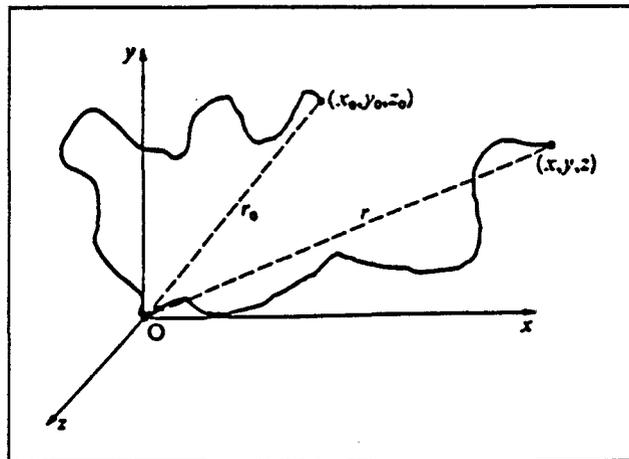


Fig.11 : Déformation affine d'une chaîne moléculaire

- 5) La déformation est d'origine entropique. La variation d'entropie totale du réseau est la somme des variations d'entropies de chaque chaîne.

Imposons à ce réseau une déformation. Le déploiement des segments s'accompagne d'une diminution d'entropie puisque le système passe à un état plus ordonné qu'au repos.

L'entropie d'une chaîne est donnée par l'expression de Boltzman :

$$s = k.Ln(\omega) \quad (I-25)$$

où ω est la probabilité de la configuration la plus probable et k est la constante de Boltzman.

Pour calculer ω , on suppose que les segments sont rotulés (il n'y a pas d'angle de valence), que le matériau est isotrope (mêmes propriétés dans toutes les directions). On raisonne sur un axe (par exemple l'axe des x), puis on généralise.

Chaque segment de la chaîne n'a comme possibilité que de se déplacer à droite (dans le sens positif de l'axe) ou à gauche (sens négatif).

On désigne par N^+ le nombre de segments dirigés vers le sens positif et par N^- celui des segments dirigés vers le sens négatif.

On a :

$$N = N^+ + N^- \quad (I-26)$$

On pose

$$P = N^+ - N^- \quad (I-27)$$

D'où:

$$N^+ = \frac{N + P}{2}, \quad N^- = \frac{N - P}{2} \quad (I-28)$$

Les segments N^+ donnent la même longueur finale (de même pour les segments N^-)

La probabilité ω est donnée par l'expression :

$$\omega = \left(\frac{1}{2}\right)^n C_n^p = \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad (I-29)$$

Ce qui donne, avec $p = N^+$ et $n = N$:

$$\omega = \left(\frac{1}{2}\right)^N \frac{N!}{N^+! - N^-!} = \left(\frac{1}{2}\right)^N \frac{N!}{\left(\frac{N + P}{2}\right)! \left(\frac{N - P}{2}\right)!} \quad (I-30)$$

$$Ln(\omega) = N Ln\left(\frac{1}{2}\right) + Ln(N!) - \left\{ Ln\left(\frac{N + P}{2}\right)! + Ln\left(\frac{N - P}{2}\right)! \right\} \quad (I-31)$$

Pour N grand, on a $Ln(N!) = N Ln(N) - N$

D'où :

$$\text{Ln}(\omega) = N \text{Ln}\left(\frac{1}{2}\right) + N \text{Ln}(N) - N - \left\{ \left(\frac{N+P}{2}\right) \text{Ln}\left(\frac{N+P}{2}\right) - \left(\frac{N+P}{2}\right) + \left(\frac{N-P}{2}\right) - \left(\frac{N-P}{2}\right) \right\} \quad (I-32)$$

$$\text{Ln}(\omega) = - \left\{ \frac{N+P}{2} \cdot \text{Ln}\left(1 + \frac{P}{N}\right) + \frac{N-P}{2} \cdot \text{Ln}\left(1 - \frac{P}{N}\right) \right\} \quad (I-33)$$

avec $\frac{P}{N} \ll 1$ (en moyenne la longueur est nulle)

or pour ε petit $\text{Ln}(1+\varepsilon) \approx \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2}$

D'où
$$\text{Ln}(\omega) = - \frac{1}{2} \frac{P^2}{N} \quad (I-34)$$

Soit x la longueur probable qu'aura p segments de longueur a :

$$x = p \frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow p = \frac{x\sqrt{3}}{a} \quad (I-35)$$

La probabilité de la configuration dans la direction de l'axe des x est donnée par l'expression :

$$\text{Ln}(\omega_x) = - \frac{1}{2 \cdot N} \cdot \left(\frac{x\sqrt{3}}{a}\right)^2 = \frac{-3}{2N} \cdot \frac{x^2}{a^2} \quad (I-36)$$

On obtient dans l'espace (en généralisant l'expression (I-36)) :

$$s = k \ln(\omega_{xyz}) = - \frac{3k}{2Na^2} (x^2 + y^2 + z^2) \quad (I-37)$$

Si on prend pour origine la configuration sans sollicitation, l'entropie d'une chaîne non déformée est donnée par :

$$s_0 = \frac{-3k}{2 \cdot N \cdot a^2} (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) \quad (I-38)$$

Après déformation, la variation d'entropie d'une chaîne s'exprime par :

$$\Delta s = s - s_0 = -\frac{3}{2} \frac{k}{N \cdot a^2} \left\{ (\lambda_1^2 - 1)x_0^2 + (\lambda_2^2 - 1)y_0^2 + (\lambda_3^2 - 1)z_0^2 \right\} \quad (I-39)$$

L'ensemble des chaînes non déformées a une configuration totalement aléatoire, par conséquent, on peut écrire :

$$\sum x_0^2 = \sum y_0^2 = \sum z_0^2 = \frac{1}{3} \sum r_0^2 = \frac{1}{3} N \cdot a^2 \quad (I-40)$$

avec $r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$

La variation d'entropie de l'ensemble du réseau est égale à la somme des variations d'entropie de chaque chaîne, en utilisant la relation (I-39), on obtient :

$$\Delta S = \sum \Delta s = -\frac{k}{2} (\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 - 3) \quad (I-41)$$

Le terme $(\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2)$ correspond au premier invariant du tenseur des élongations **C**. Au repos, $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = 1$, on obtient une variation d'entropie nulle.

La déformation est d'origine entropique. Le potentiel de déformation du réseau s'exprime en utilisant la relation (I-3) par :

$$W = -T \Delta S = \frac{k \cdot T}{2} (I_1 - 3) \quad (I-42)$$

avec T : la température absolue (en K)

I_1 : $\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2$, premier invariant du tenseur des élongations **C**

Soit V le nombre de chaînes par unité de volume, le potentiel d'énergie de déformation macroscopique s'exprime alors par :

$$W_{\text{macro}} = \frac{V k T}{2} \cdot (I_1 - 3) = \frac{\rho R T}{2 M_c} \cdot (I_1 - 3) \quad (I-43)$$

avec R : constante des gaz parfaits ($8.32 \text{ JK}^{-1} \text{ mole}^{-1}$)

ρ : masse volumique (Kg/m^3)

M_c : masse moléculaire (Kg/mole)

Remarque :

Dans le cas d'une répartition aléatoire des chaînes avec angles de Valence θ entre les segments, il faut multiplier le résultat de l'équation (I-39) par $\cos \theta$.

I-3-2-3/ Application de la théorie statistique :

a) Cas de la traction uniaxiale :

Soit λ_1 l'élongation dans le sens de la traction et λ_2 l'élongation dans les deux sens perpendiculaires ($\lambda_2 = \lambda_3$ par isotropie).

Les élastomères sont, à la température ambiante, des matériaux incompressibles, on obtient donc :

$$\lambda_1 = \lambda; \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \quad (I-44)$$

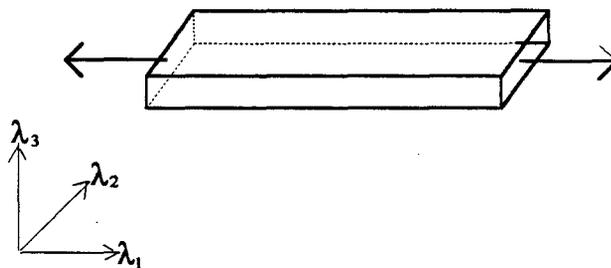


Fig.12 : Parallélépipède en sollicitation de traction uniaxiale

Le potentiel d'énergie de déformation W s'exprime, alors, par :

$$W = C_1 \left(\lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3 \right) \quad (I-45)$$

avec $C_1 = \frac{NkT}{2}$ est une constante du matériau.

La contrainte de traction σ est donnée par (annexe 1) :

$$\sigma = \frac{dW}{d\lambda} = C_1 \cdot \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \quad (I-46)$$

Remarque:

Pour des faibles déformations ($\lambda = 1 + \varepsilon$, avec ε très faible), on peut écrire:

$$\lambda^{-2} = (1 + \varepsilon)^{-2} \approx 1 - 2\varepsilon \quad (I-47)$$

L'équation (42) devient alors :

$$\sigma = 3C_1 \cdot \varepsilon = E \cdot \varepsilon \quad (I-48)$$

avec $E = 3C_1$

Nous obtenons la loi de Hooke pour les petites déformations.

b) Cas du cisaillement simple

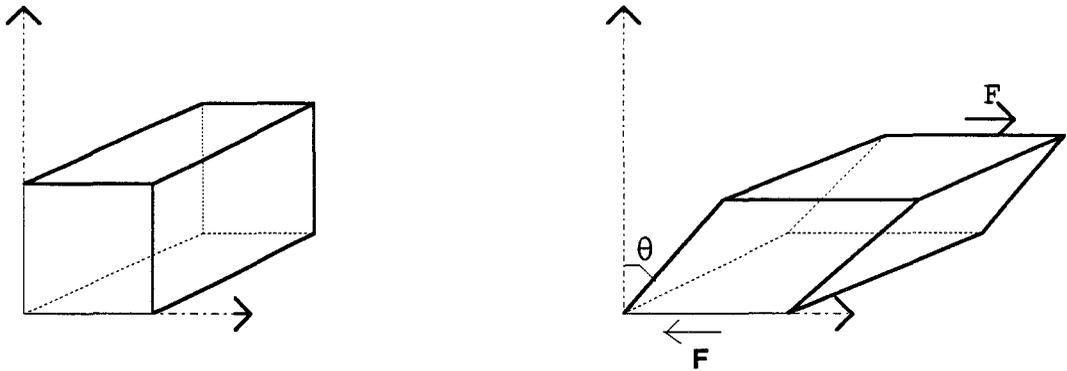


Fig.13 : Cube en sollicitation de cisaillement simple

Avec l'hypothèse de l'incompressibilité, on peut écrire :

$$\lambda_1 = \lambda \quad \lambda_2 = \frac{1}{\lambda} \quad \lambda_3 = 1 \quad (1-49)$$

W s'exprime dans ce cas par :

$$\begin{aligned} W &= C_1 \left(\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} + 1 - 3 \right) \\ &= C_1 \left(\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} - 2 \right) - C_1 \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right)^2 = C_1 \cdot \gamma^2 \end{aligned} \quad (1-50)$$

où $\gamma = \lambda - \frac{1}{\lambda} = \text{tg}\theta$ est le glissement (ou distorsion)

La contrainte de cisaillement τ , s'exprime (annexe 1) par:

$$\tau = \frac{dW}{d\gamma} = \frac{C_1}{2} \cdot \gamma = G \cdot \gamma \quad (1-51)$$

avec $G = \frac{C_1}{2} = \nu kT$ est le module de cisaillement

Pour le cisaillement simple, on obtient une loi de comportement linéaire.

c) Cas du cisaillement pur

Dans ce type de sollicitation λ prend la valeur 1 pendant tout l'essai. Si le matériau est incompressible on aura :

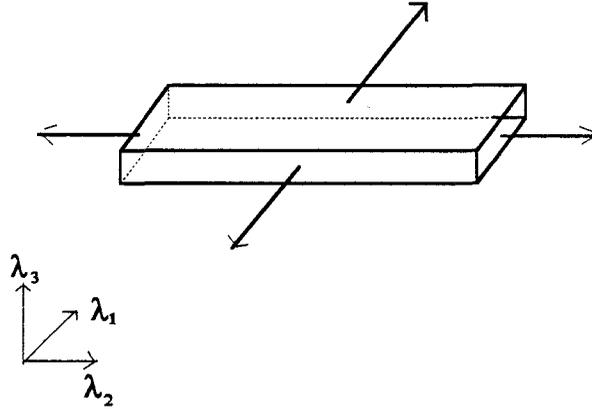


Fig.14 : Parallélépipède en sollicitation de cisaillement pur

$$\lambda_1 = \lambda; \lambda_2 = 1; \lambda_3 = \frac{1}{\lambda} \tag{I-52}$$

L'équation du potentiel de déformation devient:

$$W = C_1 \cdot \left(\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} - 2 \right) \tag{I-53}$$

La contrainte est définie par :

$$\sigma = \frac{dW}{d\lambda} = 2C_1 \cdot \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right) \tag{I-54}$$

Dans le cas de petites déformations, on obtient :

$$\sigma = 2C_1 \cdot [1 + \varepsilon - (1 - 3\varepsilon)] = 8C_1 \cdot \varepsilon = 4 \nu kT \cdot \varepsilon \tag{I-55}$$

I-3-2-4/ Formulation de MOONEY-RIVLIN

RIVLIN[14] a proposé de représenter le potentiel W sous la forme d'une série infinie par l'expression :

$$W = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} C_{ijk} \cdot (I_1 - 3)^i \cdot (I_2 - 3)^j \cdot (I_3 - 1)^k \tag{I-56}$$

où C_{ijk} représentent les constantes du matériau.

La condition d'incompressibilité ($I_1 = 1$), conduit à la formulation suivante :

$$W = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} C_{ij} \cdot (I_1 - 3)^i \cdot (I_2 - 3)^j \quad (I-57)$$

La forme la plus utilisée de cette expression est celle qui correspond à l'ordre 1 (i = j = 1 sans l'expression croisée C₁₁(I₁ - 3) (I₂ - 3)):

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) \quad (I-58)$$

ou

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3)$$

Cette expression a été proposée par MOONEY[15] en 1944, la constante C₁ est la même que celle de la théorie statistique gaussienne : $C_1 = \frac{VKT}{2}$

Dans le cas de la traction uniaxiale (avec l'hypothèse d'incompressibilité) la contrainte σ (annexe 1) s'exprime par :

$$\sigma = \frac{F}{A_0} = 2 \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \left(C_1 + \frac{C_2}{\lambda} \right) \quad (I-59)$$

Ce qui donne:

$$\frac{\sigma}{2 \left(\lambda + \frac{1}{\lambda^2} \right)} = C_1 + C_2 \cdot \left(\frac{1}{\lambda} \right) \quad (I-60)$$

Les coefficients C₁ et C₂ peuvent être calculés à partir d'un essai de traction .

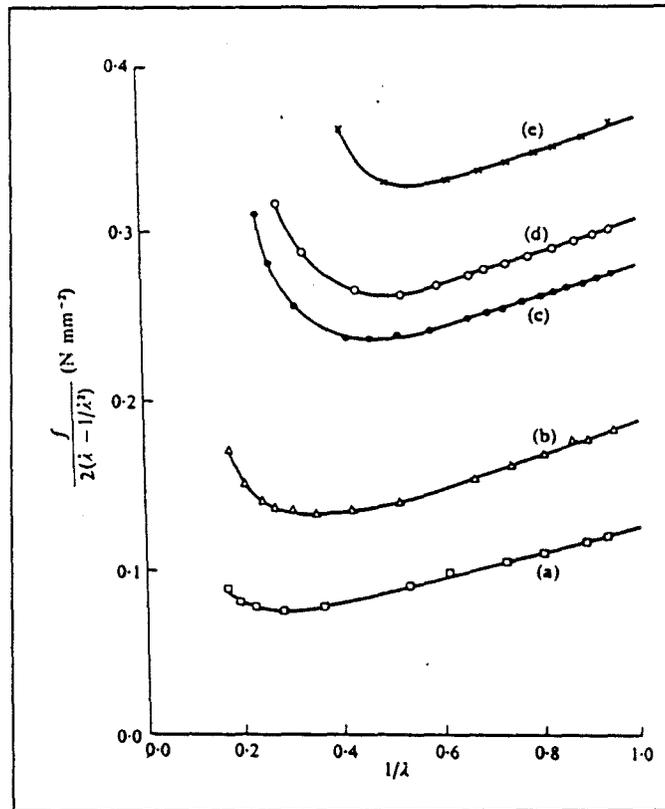


Fig.15 : Evolution de $\frac{\sigma}{2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right)}$ en fonction de $\frac{1}{\lambda}$ pour différents types de caoutchouc (Cas de la traction uniaxiale) [3]

L'évolution de la quantité $\frac{\sigma}{2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right)}$ en fonction de $\frac{1}{\lambda}$ pour un caoutchouc naturel vulcanisé

(fig.15) est linéaire pour des valeurs de $1/\lambda$ comprises entre 0.5 et 0.9. L'écart de la linéarité observé pour des valeurs de $1/\lambda < 0.45$ est dû probablement à une cristallisation prédominante du matériau [16].

Ceci montre que deux coefficients (C_1 et C_2) peuvent ne pas suffire pour écrire le potentiel d'énergie W .

Il existe d'autres écritures du potentiel W pour représenter le comportement des élastomères. OGDEN[17] a proposé d'écrire W directement en fonction des élongations :

$$W = \sum_n \frac{\mu_n}{a_n} (\lambda_1^{\alpha_n} + \lambda_2^{\alpha_n} + \lambda_3^{\alpha_n} - 3) \tag{I-61}$$

où μ_n est une constante. Les exposants α_n peuvent prendre des valeurs positives ou négatives.

Avec $\alpha_1=2$ et $\alpha_2=-2$, on retrouve l'expression de Mooney-Rivlin.

VALANIS-LANDEL[18] ont exprimé, quant à eux, le potentiel hyperélastique comme la somme de trois fonctions identiques, w , dépendante de chaque élongation principale:

$$W = w(\lambda_1) + w(\lambda_2) + w(\lambda_3) \quad (I-62)$$

La forme la plus utilisée de la fonction w est donnée par :

$$\frac{dW}{d\lambda_1} = 2 \cdot \mu \cdot \ln(\lambda_1) + \frac{C}{\lambda_1} \quad (I-63)$$

PREMIERE PARTIE : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

CHAPITRE II : MECANIQUE DE LA RUPTURE

CHAPITRE II : MECANIQUE DE LA RUPTURE

II-1/ INTRODUCTION

La mécanique de la rupture a pour but de prédire l'évolution des défauts (ou fissures) dans un matériau soumis à des sollicitations mécaniques. Ces défauts apparaissent essentiellement lors de l'élaboration du matériau ou lors de sa mise en forme. Elles peuvent être aussi créées par endommagement sous l'effet de la sollicitation.

La question qui se pose est la suivante :

Y-a-t-il une grandeur constante à la rupture quelque soit le champ de sollicitation qu'on impose à ces matériaux fissurés ?

La recherche d'une telle grandeur dépend du comportement du matériau:

Dans le cas des matériaux élastiques fragiles, cette recherche est abordée par des approches locales construites à partir du champ des contraintes en fond de fissure.

Pour des matériaux présentant des comportements plus complexes (grandes déformations, viscoélasticité, ...), il n'y a pas de solution analytique du champs des contraintes ou des déformations autour de la fissure. Le processus de rupture est abordé alors par des approches dites globales basées sur le bilan énergétique d'une fissure en cours de propagation stable.

II-2/ APPROCHES LOCALES

Elles sont, en général, développées pour des matériaux fragiles à comportement élastique linéaire. la connaissance de la distribution des champs de contraintes et des déformations à la pointe de la fissure est nécessaire pour prédire la rupture de ces matériaux.

II-2-1/ Facteur d'intensité de contrainte

A partir de l'hypothèse de l'élasticité linéaire en petites déformations, IRWIN[19] montre que le champ de contrainte au voisinage de la pointe de la fissure est décrit par un paramètre appelé "facteur d'intensité de contrainte", noté K. La rupture survient lorsque K est supérieur à une valeur critique K_c caractéristique du matériau appelé "ténacité".

Le facteur d'intensité de contrainte s'exprime, dans le cas d'une fissure traversant une plaque infinie soumise à un chargement d'ouverture (mode I), sous la forme :

$$K_I = \sigma_0 \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \quad (II-1)$$

où a est la longueur initiale de la fissure et σ_0 est la contrainte uniforme appliquée.

Pour des géométries de dimensions finies, le champ intrinsèque à la pointe de la fissure est modifié par l'interaction avec les bords libres, on prend en compte cette modification par un facteur de correction Y dépendant de la géométrie de l'échantillon étudié:

$$K_I = Y \cdot \sigma_0 \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \quad (II-2)$$

Les facteurs de correction Y , appelés aussi fonctions de calibration, peuvent être évalués, soit par calcul analytique lorsque c'est possible, mais souvent par calcul numérique. Expérimentalement, on utilise la photo-élasticimétrie.

II-2-2/ Facteur de densité d'énergie de déformation (critère de SIH-2)

Plusieurs critères ont été proposés lorsque deux ou trois modes de sollicitation existent simultanément, un des plus utilisés est le critère de SIH-2.

Ce critère est uniquement applicable dans le cas de la mécanique linéaire de la rupture, il suppose que la propagation d'une fissure a lieu pour une valeur critique de la densité locale d'énergie de déformation W , et dans la direction où la variation de celle-ci est minimale.

Si on considère le cas d'un problème plan où les trois modes de rupture (mode d'ouverture, mode de cisaillement plan et mode de cisaillement antiplan) peuvent exister simultanément, la densité d'énergie de déformation W , à la distance r de la pointe de la fissure et dans la direction définie par les deux angles θ et ϕ (figure 16), s'exprime comme une fonction quadratique des trois facteurs d'intensités de contrainte (K_I, K_{II}, K_{III}) par:

$$\frac{dW}{dV} = \frac{a_{11} \cdot K_I^2 + 2a_{12} K_I \cdot K_{II} + a_{22} K_{II}^2 + a_{33} \cdot K_{III}^2}{16 \cdot \pi \cdot G \cdot r \cdot \cos \Phi} \quad (II-3)$$

où dV est un élément de volume, G est le module d'élasticité de cisaillement et ν est le coefficient de poisson.

$$a_{11} = (k - \cos \theta) \cdot (1 + \cos \theta)$$

$$a_{12} = (2 \cos \theta - k + 1) \cdot \sin \theta$$

$$a_{22} = (k + 1) \cdot (1 - \cos \theta) + (1 + \cos \theta) \cdot (3 \cos \theta - 1)$$

$$a_{33} = 4$$

$$\text{avec } k = \begin{cases} 3 - 4 \cdot \nu & \text{pour des déformations planes} \\ (3 - \nu) / (1 + \nu) & \text{pour des contraintes planes} \end{cases}$$

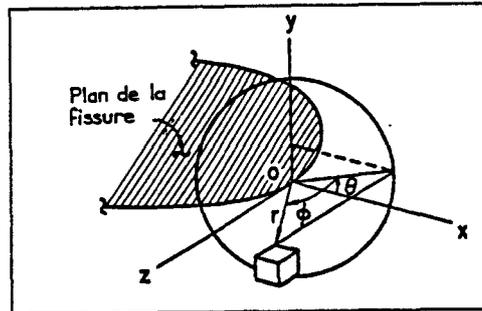


Fig.16: Problème de rupture en mode mixte

SIH [20] a défini alors un facteur de densité d'énergie de déformation S par la relation:

$$S = \frac{r \cdot dW}{dV} \quad (II-4)$$

-La fissure se propagera lorsque S atteint une valeur critique S_c .

-La direction de la propagation de la fissure correspond à celle où le facteur de densité d'énergie de déformation S est minimal.

C'est à dire:
$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = 0 ; \frac{\partial S}{\partial \phi} = 0 \quad (II-5)$$

Dans le cas de la mécanique élasto-plastique, la densité d'énergie de déformation W se décompose en un terme W_v traduisant la déformation volumique et d'un terme correspondant à la densité de distorsion W_d :

$$W = W_v + W_d \quad (II-6)$$

THEOCARIS[21], à partir des résultats expérimentaux obtenus pour du PMMA, considère que ce critère de rupture doit inclure la densité d'énergie de déformation volumique W_v contrairement au critère de VON MISES qui ne considère que la densité d'énergie de distorsion W_d .

II-3/ APPROCHES GLOBALES

A l'inverse des critères locaux, les critères globaux ne nécessitent pas la connaissance du champ des contraintes et des déformations à la pointe de la fissure. On peut, donc, traiter le cas de matériaux au comportement plus complexe pour lesquels justement cette connaissance est inaccessible analytiquement.

Ces critères ont pour support théorique une analyse énergétique faisant le bilan de l'énergie nécessaire pour propager la fissure.

II-3-1/ BILAN ENERGETIQUE D'UN SYSTEME MECANIQUE

Considérons le cas d' un système fissuré isolé (figure 17), supposé élastique, auquel on fournit un incrément d'énergie ∂U_1 sous forme de travail de forces extérieures.

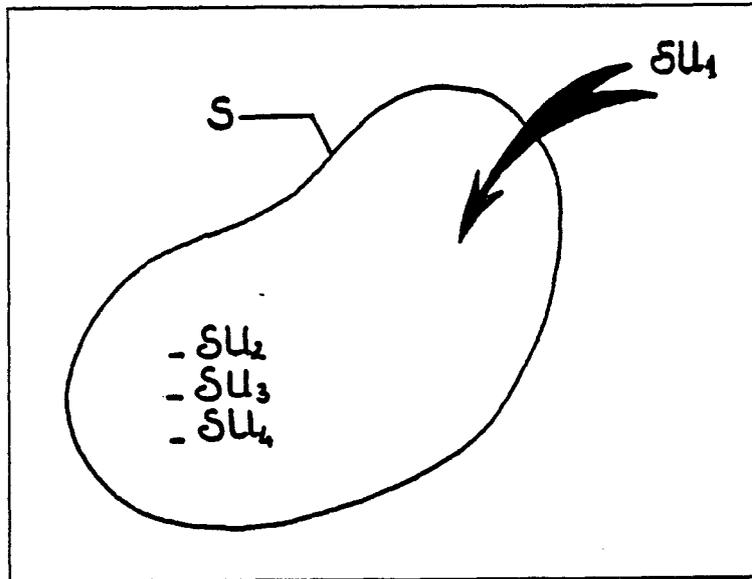


Fig.17: Système mécanique isolé

Cette opération a pour conséquence :

- a) Une variation de l'énergie dissipée de façon irréversible par le système (notée ∂U_2 , énergie utilisée pour rompre les liaisons interatomiques).
- b) Une variation de l'énergie élastique stockée dans le système. C'est une énergie restituable dans le cadre de l'hypothèse de réversibilité et donc une énergie potentielle que l'on notera ∂U_3 .
- c) Une variation de l'énergie cinétique du système ∂U_4 . Ce terme permettra de définir les conditions de stabilités de la propagation.

Si l'on applique le premier principe de la thermodynamique à ce système mécanique, on obtient :

$$\Delta U_1 = \Delta U_2 + \Delta U_3 + \Delta U_4 \tag{II-7}$$

Si l'on rapporte la variation de ces différents termes consécutifs à la propagation du défaut sur une surface unitaire ∂A , il vient:

$$\frac{\partial U_1}{\partial A} - \frac{\partial U_2}{\partial A} = \frac{\partial U_3}{\partial A} + \frac{\partial U_4}{\partial A} \quad (\text{II-8})$$

On définit la résistance à la rupture R et le taux de restitution d'énergie G par :

$$R = \frac{dU_2}{dA} \quad (\text{II-9})$$

$$G = \frac{dU_1}{dA} - \frac{dU_3}{dA} \quad (\text{II-10})$$

Si l'on omet le terme d'énergie cinétique, on obtient à l'écriture du bilan, le critère de GRIFFITH[22] :

$$G = R \quad (\text{II-11})$$

La seule hypothèse introduite est celle de la réversibilité du comportement à savoir que la résistance R ne contient que l'énergie nécessaire à la séparation des liaisons atomiques. Mais dans la plupart des cas réels, des phénomènes dissipatifs apparaissent soit dans une zone proche de la pointe de la fissure, soit de façon diffuse dans le matériau (viscoélasticité, endommagement, ...)

Si les phénomènes sont suffisamment locaux pour être considérés comme spécifiques du processus de rupture, la résistance R n'est plus alors l'énergie de rupture, mais un travail surfacique de rupture.

II-3-2/ CRITERE DE L'ENERGIE SURFACIQUE DE RUPTURE.

Ce critère énergétique est une extension des travaux de GRIFFITH[22] et OROWAN[23]. GRIFFITH postula que la propagation quasi statique de la fissure est le résultat d'une conversion du travail des forces extérieures (U_1) et de l'énergie potentielle stockée dans le matériau (U_3) en une énergie surfacique (Γ) nécessaire pour créer des nouvelles surfaces de rupture.

Pour une propagation de fissure d'un incrément ∂a , on écrit:

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial a} - \frac{\partial U_3}{\partial a} \right) 2 \cdot \gamma \cdot \frac{\partial A}{\partial a} \quad (\text{II-12})$$

où γ : énergie surfacique libre (énergie nécessaire pour rompre une unité d'aire de liaisons atomiques)

∂A : incrément de surface associé à un incrément de fissure ∂a .

Dans le cas d'une plaque d'épaisseur B, contenant une fissure de longueur a, nous pouvons

écrire :

$$\partial A = 2.B.\partial a \quad (II-13)$$

La relation (II-12) devient alors :

$$\frac{1}{B} \cdot \left[\frac{\partial U_1}{\partial a} - \frac{\partial U_3}{\partial a} \right] \cdot 2 \cdot \gamma = \Gamma \quad (II-14)$$

avec $\Gamma = 2 \cdot \gamma$ énergie surfacique de rupture.

On montre [24] que l'énergie nécessaire pour propager la fissure est supérieure à l'énergie surfacique de rupture Γ , puisque tous les matériaux ne sont pas des solides parfaits et qu'il existe toujours de la dissipation. Le terme Γ est ainsi remplacé par un autre terme prenant en compte les énergies dissipées, c'est une extension de γ en supposant que les dissipations sont intrinsèques au processus de rupture dans une zone locale à la pointe de la fissure.

La relation (II-14) devient alors:

$$\frac{1}{B} \cdot \left[\frac{\partial U_1}{\partial a} - \frac{\partial U_3}{\partial a} \right] \cdot G_c \quad (II-15)$$

Le membre gauche de la relation (II-15) n'est autre que le taux de restitution d'énergie G introduite par GRIFFITH, et G_c sa valeur critique.

II-3-3/ TAUX DE RESTITUTION D'ENERGIE G

Le taux de restitution d'énergie G est donné, à partir du bilan énergétique, par :

$$G = \frac{dU_1}{dA} - \frac{dU_3}{dA} \quad (II-16)$$

Exprimons les énergies nécessaire à la détermination de G en fonction des différents paramètres accessibles expérimentalement.

Considérons le système mécanique de la fig.17. Soit P la force appliquée sur la frontière S de ce système et u le déplacement.

Le travail correspondant à un déplacement du , résultant de la variation dA de la surface de fissure est défini par :

$$\frac{dU_1}{dA} = P \cdot \frac{du}{dA} \quad (II-17)$$

L'énergie stockée dans l'échantillon est donnée par l'aire sous la courbe charge-déplacement :

$$\frac{dU_3}{dA} = \frac{d}{dA} \int P du \quad (II-18)$$

G s'exprime alors par:

$$G = P \cdot \frac{du}{dA} - \frac{d}{dA} \int P du \quad (II-19)$$

En général, l'énergie stockée U_3 est fonction de P, u et de A donc :

$$\frac{dU_3}{dA} = \frac{\partial U_3}{\partial A} + \frac{\partial U_3}{\partial P} \cdot \frac{\partial P}{\partial A} + \frac{\partial U_3}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial A} \quad (II-20)$$

or $P = \frac{\partial U_3}{\partial u}$, d'où la relation (II-17) s'écrit :

$$G = - \left(\frac{\partial U_3}{\partial A} + \frac{\partial U_3}{\partial P} \cdot \frac{\partial P}{\partial A} \right) = - \frac{dU_3}{dA} \Big|_{u=cst} \quad (II-21)$$

Ce résultat indique que, même si la propagation n'a pas forcément lieu à déplacement constant, la détermination de G se fait dans cette condition sur la courbe charge-déplacement (fig.18)

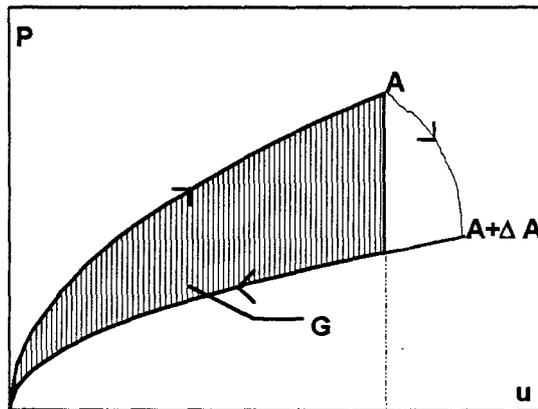


Fig.18 : Détermination expérimentale de G.

*** Relation entre approche locale et approche globale**

Elasticité linéaire

A partir d'un calcul du champ de contrainte au voisinage de la fissure effectué par INGLIS [25], GRIFFITH a montré que le taux de restitution d'énergie G peut s'écrire, pour une plaque infinie contenant une fissure de longueur $2.a$, soumise à une contrainte uniforme σ_0 (fig.19), sous la forme :

$$G = \pi \cdot \frac{\sigma_0^2}{E} \cdot a = \frac{K_I^2}{E} \quad (II-22)$$

(en contraintes planes).

où E est le module de Young du matériau, K_I est le facteur d'intensité de contrainte en mode I.

La valeur critique G_c de G est donnée par :

$$G_c = \pi \cdot \frac{\sigma_{0c}^2}{E} \cdot a \quad (II-23)$$

où σ_{0c} est la contrainte globale critique à l'amorçage de la fissure.

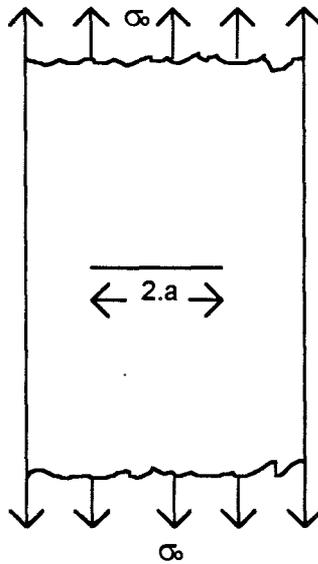


Fig.19: Plaque infinie fissurée soumise à un champ de contrainte uniforme.

II-3-4/ INTEGRALE J

Développée par RICE [26], l'intégrale J se présente comme un moyen commode d'étendre les concepts de la mécanique linéaire de la rupture à des matériaux pouvant présenter des déformations irréversibles en pointe de fissure. Il se prête bien au calculs numériques.

II-3-4-1/ Définition de J

On considère un système plan contenant une fissure de longueur a , contenue dans un milieu infini et on effectue le bilan des flux d'énergie à travers un contour fermé Γ (fig.20).

La variation du travail des efforts T_j s'exprime en fonction du déplacement u_j , du point du contour où ils s'appliquent par :

$$\frac{dU_1}{da} = T_i \cdot \left(\frac{du_i}{da} \right) \cdot dS \quad (II-24)$$

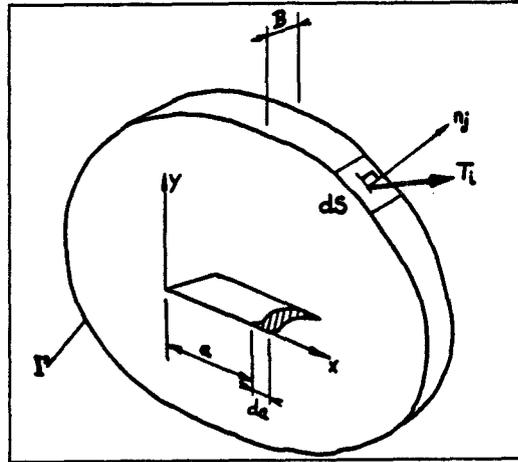


Fig.20: Système plan contenant une fissure contenue dans un contour fermé .

L'énergie potentielle totale stockée s'exprime en fonction de la densité d'énergie de déformation locale $W(P)$ en un point $P(X, Y)$ interne au contour par :

$$U_3 = \int_V W(P).dV = B. \int_S W(P).dX.dY \quad (II-25)$$

et

$$\frac{dU_3}{dA} = \frac{d}{da} \left[\int W(P).dX.dY \right] \quad (II-26)$$

or $dX = -da$, il vient alors :

$$\frac{dU_3}{dA} = - \int_S W(P) . dY \quad (II-27)$$

d'où l'expression proposée par RICE [26] :

$$J = -B. \int_S \left\{ W.dY - T_i \left(\frac{du}{dX} \right) \right\} . dS \quad (II-28)$$

Ce résultat s'introduit en fait de façon plus rigoureuse à l'aide du tenseur moment-énergie décrit par ESHELBY [27, 28], qui conduit d'ailleurs à d'autres intégrales de contour dans le cas général (autre que le problème plan). Dans le champ de la mécanique de la rupture, le paramètre J est devenu la grandeur la plus couramment utilisée par les expérimentateurs pour l'étude des processus de rupture des matériaux élasto-plastiques.

Tout l'intérêt de cette formulation réside dans le fait qu'il est possible de montrer que le résultat de l'intégration est indépendant du contour choisi pour son estimation. Cette propriété, démontrée théoriquement dans le cas élastique est seulement vérifiée expérimentalement dans le cas élasto-plastique.

II-3-4-2/ Expression de Rice.

Puisque J est le bilan des flux à travers le contour , RICE [26] a montré que l'intégrale J était égale à la différence d'énergie potentielle, à déplacement constant, entre deux corps fissurés de longueurs de fissure voisines soumises au même chargement :

$$J = - \frac{dU_3}{dA} \Big|_{u = \text{cst}} \quad (\text{II-29})$$

où encore
$$J = - \frac{1}{dA} \int P \cdot du \quad (\text{II-30})$$

Dans le cas d'un corps élastique J est équivalent au taux de restitution d'énergie G :

$$J = G \quad (\text{II-31})$$

II-3-4-3/ Expression de J en fonction du travail dépensé**II-3-4-3-1/ Relation de Sumpter et Turner**

En faisant l'hypothèse que J est proportionnel à l'aire sous la courbe charge-déplacement U_3 , SUMPTER [29] a montré que ce paramètre énergétique peut s'exprimer sous la forme :

$$J = \eta \cdot \frac{U_3}{A_l} \quad (\text{II-32})$$

avec, dans le cas plan
$$\eta = \frac{\ln(U_3)}{\ln(w - a)} \quad (\text{II-33})$$

où $w - a$ est la longueur du ligament (w étant la largeur de l'échantillon), et A_l est la surface de celui-ci.

Dans le cas d'un comportement élastique le travail total dépensé est purement élastique et peut être libéré pour produire la propagation de la fissure.

d'où
$$J = G = \eta_{el} \cdot \frac{U_{el}}{A_l} \quad (\text{II-34})$$

Dans le cas d'un comportement élastique parfaitement plastique, SUMPTER et TURNER [30] ont suggéré de décomposer le paramètre énergétique J en une composante élastique J_{el} et une composante plastique J_{pl} :

$$J = J_{el} + J_{pl} \quad (II-35)$$

Par analogie avec la relation (II-34), ils ont proposé de relier la composante J_{el} au travail élastique dépensé U_{el} et la composante J_{pl} au travail plastique dépensé U_{pl} :

$$J_{el} = \eta_{el} \cdot \frac{U_{el}}{A_l} \quad (II-36)$$

et

$$J_{pl} = \eta_{pl} \cdot \frac{U_{pl}}{A_l} \quad (II-37)$$

où A_l est la surface du ligament.

La composante J_{el} est identique à G (taux de restitution d'énergie), dans le cas de l'élasticité linéaire on peut écrire :

$$J_{el} = G = \frac{P^2}{(2.B)} \cdot \frac{dC}{da} \quad (II-38)$$

où P est la charge, C est la complaisance (défini par $C = \frac{u}{P}$), B est l'épaisseur et a est la longueur de la fissure.

En combinant les relations (II-36) et (II-38), le facteur de proportionnalité η_{el} peut être calculé facilement à partir de la relation :

$$\eta_{el} = (w - a) \cdot \frac{1}{C} \cdot \frac{dC}{da} \quad (II-39)$$

ERNST et AI [31] ont montré que le facteur de proportionnalité η_{pl} n'existe que si la charge est un produit de fonctions :

$$P = G(a) \cdot H(u_{pl}) \quad (II-40)$$

où G est une fonction de la longueur de fissure et H est une fonction du déplacement plastique u_{pl} .

Le facteur η_{pl} sera donné dans ce cas par :

$$\eta_{pl} = (w - a) \cdot \frac{1}{G(a)} \cdot \frac{dG(a)}{da} \quad (II-41)$$

II-3-4-3-2/ Calcul du coefficient de proportionnalité η dans des cas particuliers.

La détermination de ce paramètre a fait l'objet de nombreuses publications [31, 32, 33]. Nous renvoyons le lecteur intéressé par ces techniques de calcul à l'ouvrage bien documenté de G.PLUVINAGE [34] qui consacre tout un chapitre sur la détermination de ce paramètre. En revanche nous reppelons, ici, le calcul de η dans deux cas de comportement particulier (cas de l'élasticité linéaire et de l'élastoplasticité).

a) Cas d'un comportement élastique linéaire

Dans le cas particulier d'un matériau dont le comportement mécanique est linéaire élastique, le taux de restitution d'énergie G est identique à J_{el} et s'exprime par :

$$G = J_{el} = \eta_{el} \cdot \frac{U_{3el}}{A_1} \quad (II-42)$$

avec, dans le cas plan, $\eta_{el} = \frac{b}{C} \cdot \frac{dC}{da}$

Le travail élastique dépensé U_{3el} est donnée par :

$$U_{3el} = \frac{P \cdot u}{2} = \frac{C \cdot P^2}{2} = \frac{u^2}{2C} \quad (II-43)$$

où C est la complaisance $\left(C = \frac{u}{P} \right)$

Le déplacement u peut être exprimé en fonction du facteur d'intensité de contrainte, K , sous la forme:

$$u = \frac{B}{E'} \cdot \int_0^a \frac{\partial K^2}{\partial P} \cdot da \quad (II-44)$$

avec $E' = \begin{cases} \frac{E}{(1 - \nu)} & \text{en déformation plane} \\ E & \text{en contrainte plane} \end{cases}$

où E est le module de Young et ν est le coefficient de poisson.

Le facteur d'intensité de contrainte K est défini par :

$$K = Y \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a} = Y \cdot \frac{P}{B \cdot w} \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \quad (II-45)$$

où Y est la fonction de calibration linéaire utilisée en mécanique linéaire de la rupture (MLER)

La complaisance C s'exprime alors par :

$$C = \frac{u}{P} = \frac{\frac{B}{E'} \cdot \int_0^a \frac{\partial K^2}{\partial P} \cdot da}{P} = \frac{2}{E' \cdot B \cdot w^2} \cdot \int_0^a Y^2 \cdot a \cdot da \quad (II-46)$$

d'où
$$\frac{dC}{da} = \frac{2 \cdot Y^2 \cdot a}{E' \cdot B \cdot w^2} \quad (II-47)$$

finalement on obtient l'expression du facteur de proportionnalité η_{el} , par:

$$\eta_{el} = (w - a) \cdot \frac{Y^2 \cdot a}{\int_0^a Y^2 \cdot a \cdot da} \quad (II-48)$$

La figure(21) montre l'évolution de η_{el} en fonction de la longueur de fissure normalisée $\frac{a}{w}$, d'après TURNER [33].

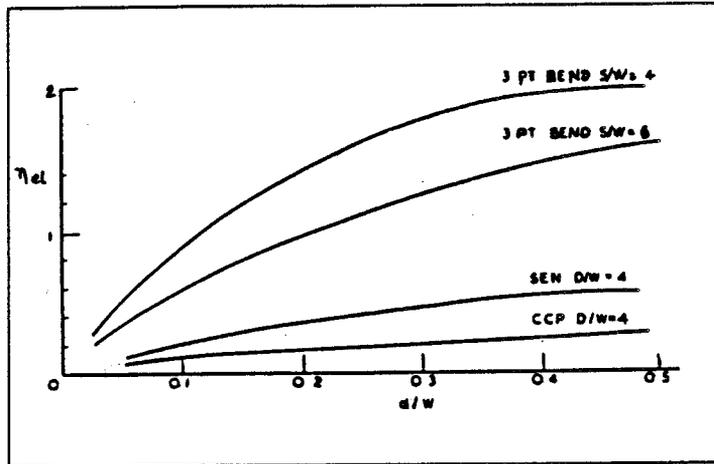


Fig.21: Evolution de η_{el} en fonction de a/w d'après [33]

b) Cas d'un comportement élasto-plastique :

Dans un travail plus récent, SHAROBAM et LANDES [35] ont proposé une nouvelle méthode expérimentale de détermination du facteur η_{pl} basée sur la séparation de la charge P à la longueur de fissure donnée a, et à déplacement imposée u_{pl} :

$$P = G\left(\frac{a}{w}\right) \cdot H\left(\frac{u_{pl}}{w}\right) \quad (II-49)$$

où G est une fonction liée à la géométrie de l'échantillon et H est une fonction du déplacement

plastique normalisé.

Le facteur η_{pl} est donné par la relation (II-41) :

$$\eta_{pl} = -\frac{b}{w} \cdot \frac{1}{G\left(\frac{a}{w}\right)} \cdot \frac{dG\left(\frac{a}{w}\right)}{d\left(\frac{a}{w}\right)} \quad (II-50)$$

où $b = w$. a est la longueur du ligament

or puisque :
$$\frac{dG\left(\frac{a}{w}\right)}{d\left(\frac{a}{w}\right)} = \frac{dG\left(\frac{b}{w}\right)}{d\left(\frac{b}{w}\right)}$$

la relation (II-50) devient alors :

$$\eta_{pl} = \frac{b}{w} \cdot \frac{1}{G\left(\frac{b}{w}\right)} \cdot \frac{dG\left(\frac{b}{w}\right)}{d\left(\frac{b}{w}\right)} \quad (II-51)$$

La méthode de SHAROBAM et LANDES consiste à déterminer expérimentalement la fonction de géométrie $G\left(\frac{b}{w}\right)$ à partir des courbes charge-déplacement obtenues. En effet, on considère le rapport de charge S_{ij} , à déplacement plastique constant, correspondant à deux longueurs de fissures a_i et a_j (fig.22a).

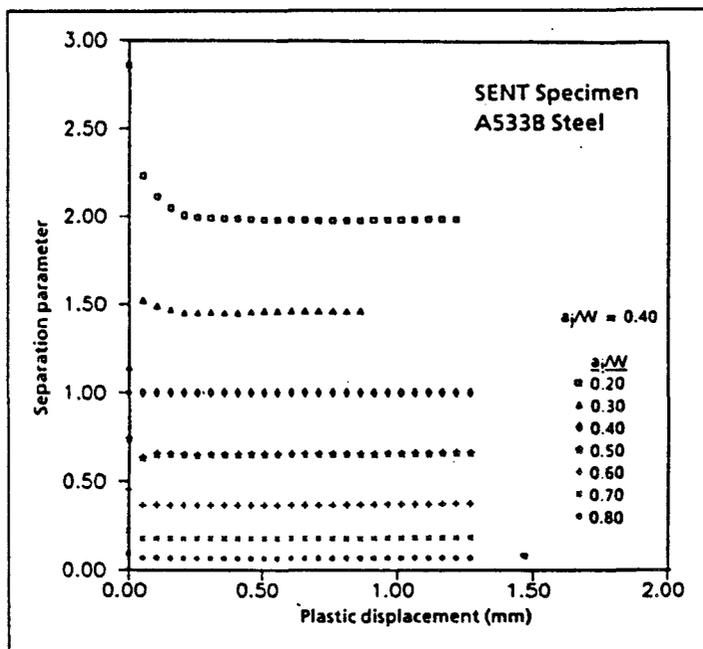


Fig.22a: Evolution du rapport S_{ij} en fonction de u_{pl} pour la géométrie S.E.N.T[35]

$$S_{ij} = \frac{P(a_i, u_{pl})}{P(a_j, u_{pl})} \Big|_{u_{pl}=cst} = \frac{G\left(\frac{a_i}{w}\right) \cdot H\left(\frac{u_{pl}}{w}\right)}{G\left(\frac{a_j}{w}\right) \cdot H\left(\frac{u_{pl}}{w}\right)} = \frac{G\left(\frac{a_i}{w}\right)}{G\left(\frac{a_j}{w}\right)} \quad (II-52)$$

Le rapport S_{ij} ne dépend, donc, que de a_i et de a_j , il est indépendant du déplacement plastique u_{pl} .

Pour une longueur de fissure a_j fixée, on peut calculer la fonction $G\left(\frac{b_i}{w}\right)$ à partir de

l'expression suivante:

$$S_{ij} = A_j \cdot G\left(\frac{b_i}{w}\right) \quad (II-53)$$

avec $A_j = \left[G\left(\frac{b_i}{w}\right) \right]^{-1} = \text{constante}$

On reporte S_{ij} sur un graphe bilogarithmique en fonction de la largeur du ligament normalisée $\frac{b_i}{w}$ (pour $\frac{b_i}{w}$ fixée, fig(22b)).

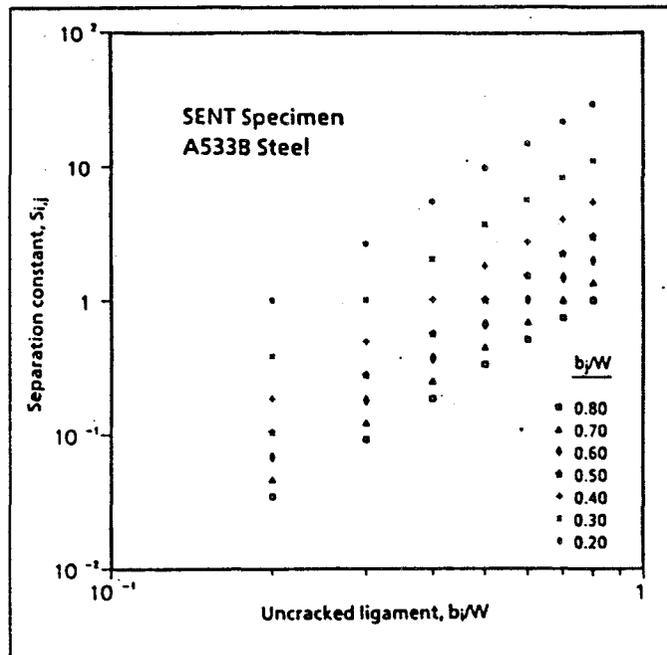


Fig.22b: Evolution de Ln(S_{ij}) en fonction de Ln(b_i/w) [35]

On constate[35] que les points expérimentaux s'alignent sur une droite. Par lissage (moindres carrés), on obtient une expression de S_{ij} lois puissance de $\frac{b_i}{w}$:

$$S_{ij} = C_1 \cdot \left[\frac{b_i}{w} \right]^m \quad (II-54)$$

où C_1 et m sont des constantes de la régression linéaire. C_1 est donné par :

$$C_1 = \left[\frac{b_j}{w} \right]^m \quad (II-55)$$

Les valeurs de la fonction G sont directement accessibles, pour chaque valeur de la largeur du ligament normalisée b_i/w , à partir de la relation:

$$G\left(\frac{b_i}{w}\right) = C \cdot \left[\frac{b_i}{w} \right]^m \quad (II-56)$$

où C est une constante.

Par substitution de l'équation (II-56) dans la relation (II-50), on obtient l'expression du facteur η_{pl} :

$$\eta_{pl} = \frac{b_i}{w} \cdot m \frac{\left[\frac{b_i}{w} \right]^{m-1}}{\left[\frac{b_i}{w} \right]^m} = m \quad (II-57)$$

Les valeurs de η_{pl} obtenues par cette nouvelle méthode[35], sont comparées aux valeurs obtenues par la méthode classique, pour deux aciers (A533B et HY130) et pour deux géométries différentes, SENT (Single Edge Notched Tension specimen) et CCT (Center Cracked Tension specimen), (Tableau I).

a/w	η_{pl} (Méthode classique[33])	η_{pl} (Nouvelle méthode[35])
0,3	2,45	2,451
0,4	2,43	2,442
0,5	2,40	2,434
0,6	2,58	2,442
0,7	2,51	2,439

Tableau I: Valeurs de η_{pl}

Alors que le coefficient η_{pl} dépend du rapport a/w pour la première méthode, la deuxième méthode conduit à une valeur sensiblement constante.

SHAROBAM et LANDES [35] attribuent cette divergence à l'accumulation d'erreurs induites par la méthode classique[33].

II-3-4-4/ Détermination expérimentale du paramètre énergétique J

La relation (II-29) a permis à BEGLEY et LANDES [36] de proposer la première évaluation expérimentale de l'intégrale J par la méthode dite "à multiples échantillons" ou "pseudo-complaisance".

Toutefois, cette méthode est coûteuse en échantillons et en expérience et on a donc naturellement recherché à réduire leur nombre. Le travail de RICE, PARIS et MERKLE [37], qui a conduit à la méthode dite "des fissures profondes", est une étape importante dans la réduction du travail expérimental.

Nous rappelons dans ce qui suit le principe de ces méthodes.

a) Méthode de BEGLEY-LANDES

A partir de n éprouvettes identiques, contenant des fissures de longueur croissantes a_i , on enregistre les diagrammes charge-déplacement jusqu'à rupture (fig.23a).

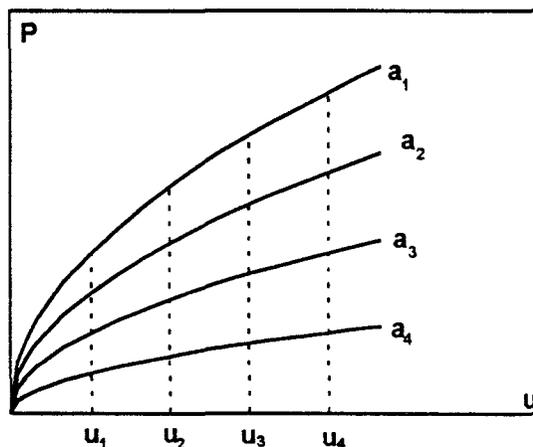


fig.23a: Courbes charge-déplacement pour n éprouvettes contenant des fissures de longueurs a_i

On détermine ensuite, pour un certain nombre de valeurs du déplacement (u_1, u_2, u_3, \dots), l'énergie potentielle stockée par unité d'épaisseur $\frac{U_3(u_i, a_i)}{B}$ mesurée par l'aire sous la courbe charge-déplacement de l'éprouvette considérée (a_i) et pour le déplacement u_j .

Les couples de points $\left(a_i, \frac{U_3(u_i, a_i)}{B} \right)$ sont reportés sur un graphe (fig.23b).

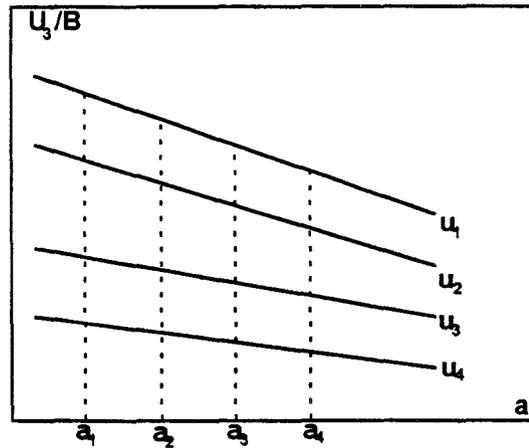


fig.23b: Energie potentielle par unité d'épaisseur $\frac{U_3}{B}$
en fonction de la longueur de fissure a

Lorsque les points expérimentaux peuvent être lissés par des droites, la valeur de J est donnée, pour chaque déplacement u_j , par la valeur absolue de la pente de ces droites :

$$J(u_i) = -\frac{1}{B} \cdot \frac{dU_3}{da}(u_i) \quad (II-58)$$

On obtient ainsi l'évolution de J en fonction du déplacement u (fig.23c) :

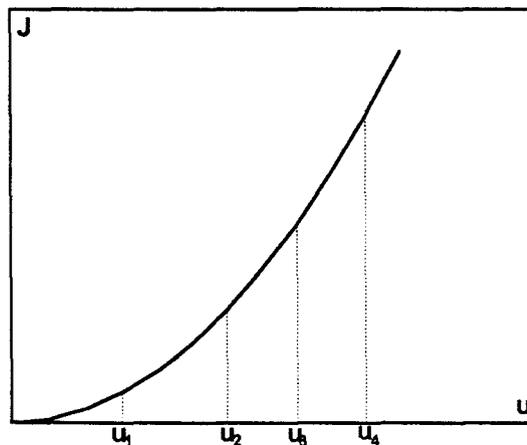


Fig.23c: Courbe J-u (schématique)

Au moment de l'amorçage de la fissure correspond un déplacement critique u_c , et donc une valeur critique J_c de J supposée caractéristique intrinsèque du matériau.

b) Méthode dite "des fissures profondes".

Ce calcul a été réalisé par RICE, PARIS et MERKLE [37], dans le cas des "fissures profondes" pour des géométries particulières. Dans le cas d'une éprouvette de flexion 3 points ou de l'éprouvette C.T, la relation (II-29) s'écrit, en substituant le moment appliqué M à la charge P et l'angle de déformation θ_{total} au déplacement u, sous la forme :

$$J = \int_0^M \left(\frac{\partial \theta_{total}}{\partial a} \right)_M . dM = - \int_0^M \left(\frac{\partial \theta_{total}}{\partial b} \right)_M . dM \quad (II-59)$$

relation dans laquelle $b = w - a$ est la largeur du ligament.

L'angle de déformation θ_{total} peut être décomposé en une composante due à l'éprouvette sans fissure θ_{nofis} et une composante due à l'introduction de la fissure θ_{fis} :

$$\theta_{total} = \theta_{nofis} + \theta_{fis} \quad (II-60)$$

θ_{fis} est fonction du rapport $\left(\frac{M}{Bb^2} \right)$ [37]:

$$\theta_{fis} = \left(\frac{M}{Bb^2} \right) \quad (II-61)$$

ce qui donne:

$$\left(\frac{\partial \theta_{fis}}{\partial b} \right)_M = - \frac{2.M}{B.b^3} . f' \left(\frac{M}{B.b^2} \right) \quad (II-62)$$

et

$$\left(\frac{\partial \theta_{fis}}{\partial M} \right)_b = \frac{1}{B.b^2} f' \left(\frac{M}{B.b^2} \right) \quad (II-63)$$

on suppose que $\left(\frac{\partial \theta_{total}}{\partial b} \right) = \left(\frac{\partial \theta_{fis}}{\partial b} \right)$, d'où :

$$- \left(\frac{\partial \theta_{total}}{\partial b} \right)_M = - \left(\frac{\partial \theta_{fis}}{\partial b} \right)_M = \frac{2.M}{B.b^3} f' \left(\frac{M}{B.b^2} \right) = \frac{2.M}{B.b} \left(\frac{\partial \theta_{fis}}{\partial M} \right)_b \quad (II-64)$$

En substituant l'équation(II-64) dans la relation (II-59), on obtient :

$$J = \frac{2}{B.b} \int_0^{\theta_{tr}} M . d\theta_{fis} \quad (II-65)$$

or $\int_0^{\theta_{tr}} M . d\theta_{fis}$ représente l'aire sous la courbe moment-angle de flexion, l'équation (II-65) s'écrit, alors,

sous la forme :

$$J = 2 \cdot \frac{U_3}{B \cdot b} = 2 \cdot \frac{U_3}{A_1} \quad (\text{II-66})$$

où A_1 est la surface du ligament.

Cette expression est analogue à (II-32), le facteur η étant ici égal à 2.

II-3-5/ CRITERE ENERGETIQUE DE DECHIREMENT

II-3-5-1/ Définition

Ce critère a été introduit en 1953 par RIVLIN et THOMAS [24]. C'est une extension des travaux de GRIFFITH pour des matériaux présentant de grandes déformations.

En effet, partant du bilan énergétique du système fissuré, on fait l'hypothèse que la fissure se propagera lorsqu'une quantité de travail égale à $T \cdot dA$ (où T est une énergie caractéristique du matériau et dA un élément de surface) sera fournie au système. Ce critère s'exprime alors par l'inéquation suivante :

$$\left[-\frac{dU_3}{dA} \right]_u > T \quad (\text{II-67})$$

où U_3 est l'énergie de déformation stockée dans le système. L'indice u signifie que le travail des forces extérieures est supposé nul pendant la propagation (propagation à déplacement constant).

La relation (II-67) est similaire à celle proposée par GRIFFITH [22], mais T ne peut être interprétée comme une énergie surfacique de rupture. T est une énergie de déchirement supposée caractéristique du matériau.

II-3-5-2/ Expression de l'énergie de déchirement T

Si l'on considère des cas de géométries particulières, on peut évaluer le membre gauche de l'inéquation (II-67) en fonction des quantités accessibles expérimentalement (force, déformation, ...).

Considérons le cas d'une plaque plane d'épaisseur B contenant une fissure de longueur a , dans ce cas $A = 2 \cdot B \cdot a$ et la relation (II-67) devient alors:

$$-\frac{1}{2 \cdot B} \cdot \frac{dU_3}{da} \Big|_u > T \quad (\text{II-68})$$

a) Eprouvette en cisaillement pur

Considérons l'éprouvette de cisaillement pur (fig.24) étudiée par RIVLIN et THOMAS [24]: c'est une plaque, de faible hauteur (h) et de faible épaisseur (B), contenant une fissure de longueur a ,

très grande par rapport à h et à B. la largeur w, doit être suffisamment grande par rapport aux autres dimensions.

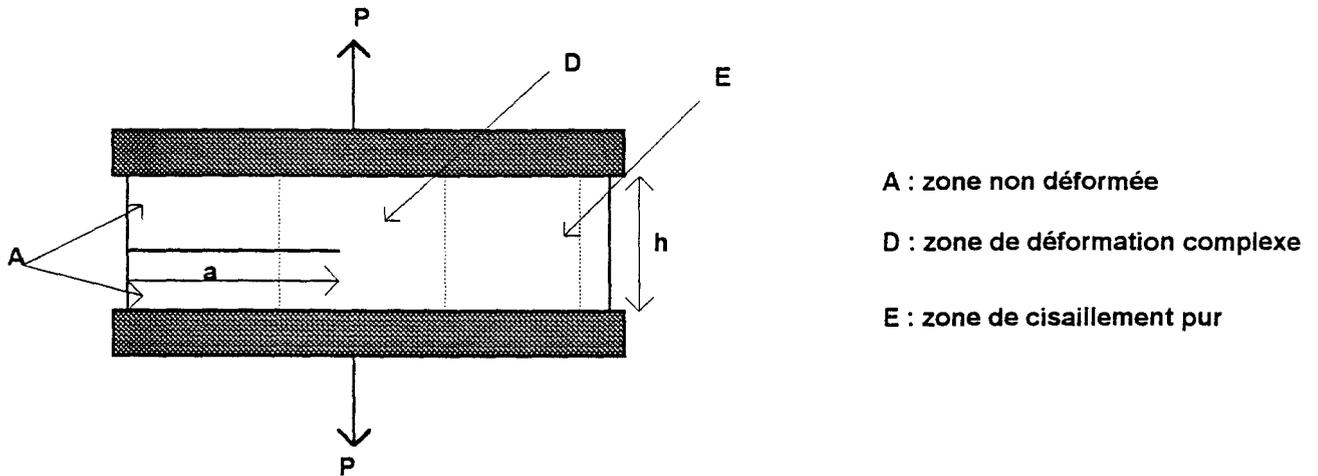


Fig.24 : Eprouvette de cisaillement pur étudiée par RIVLIN et THOMAS [24]

La propagation de la fissure d'une longueur da ne modifie pas l'état de déformation dans la région E, mais déplace simplement cette région parallèlement à la direction de la fissure, entraînant ainsi un accroissement de la région A aux dépens de la région E.

Le bilan énergétique montre alors, que la fissure a "consommé" l'énergie contenue dans une colonne de matière de volume (B.h.da.). Comme dans la région E, la densité d'énergie potentielle est uniforme et égale à W_0 , la variation de l'énergie potentielle de déformation ΔU_3 s'exprime alors par :

$$\Delta U_3 = W_0 \cdot h \cdot B \cdot \Delta a = \frac{1}{2} \cdot W_0 \cdot h \cdot \Delta A \quad (II-69)$$

avec $\Delta A = 2 \cdot B \cdot \Delta a$, le facteur 2 étant imputable au fait que deux surfaces de fissures sont créées lors de la propagation.

d'où l'expression de l'énergie de déchirement T :

$$T = \frac{1}{2} \cdot W_{0c} \cdot h \quad (II-70)$$

où W_{0c} est la valeur critique, à l'amorçage, de la densité d'énergie de déformation uniforme W_0 .

b) Eprouvette en traction uniaxiale contenant une petite fissure latérale.

Dans le cas d'un échantillon plan, d'épaisseur B de largeur finie w, contenant une fissure dont la longueur est faible devant la hauteur, et soumise à une traction uniaxiale (fig.25) :

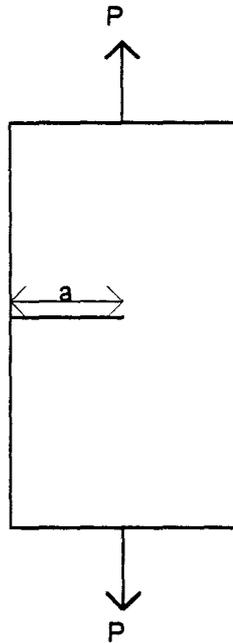


Fig.25 : Eprouvette en traction uniaxiale contenant une fissure

Pour des considérations géométriques, RIVLIN [24] montre que la variation de l'énergie potentielle de déformation stockée dans l'éprouvette par unité d'épaisseur $\left(\frac{U_3}{B}\right)$, due à l'introduction de la fissure, est proportionnelle à a^2 . Si le matériau obéit à l'élasticité linéaire classique (MLER), cette variation d'énergie potentielle est proportionnelle à la densité d'énergie de déformation uniforme W_0 [24].

d'où

$$\Delta U_3 = k.a^2.B.W_0 \tag{II-71}$$

k est un facteur de proportionnalité qui dépend du taux d'extension $\lambda \left(\lambda = 1 + \frac{\Delta h}{h_0} \right)$

(en MLER, k = constante = π)

A l'amorçage de la fissure, on obtient l'expression de l'énergie de déchirement T :

$$T = k(\lambda_0).W_{0c}.a \tag{II-72}$$

A partir de la relation (II-71), on peut calculer $k(\lambda)$ sous la forme :

$$k(\lambda) = \frac{\Delta U_3}{B.a^2.W_0} = \frac{U_0 - U_3}{B.a^2.W_0} \tag{II-73}$$

La variation d'énergie potentielle de déformation ($U_0 - U_3$) est donnée par l'expression suivante :

$$U_o - U_3 = \int_{h_o}^h (F_o - F).dh \quad (II-74)$$

où F_o et F représentent la charge respectivement en l'absence de la fissure et en présence de la fissure.

La densité d'énergie de déformation W_o est égale à:

$$W_o = \int_1^{\lambda} \left(\frac{F_o}{A_o} \right).d\lambda \quad (II-75)$$

où A_o est la section initiale ($A_o = B.w$)

En remplaçant, dans la relation (II-73), ($U_o - U_3$) et W_o par leurs expressions, on obtient $k(\lambda)$ sous la forme :

$$k(\lambda) = \frac{\int_{h_o}^h (F_o - F).dh}{B.a^2 \int_1^{\lambda} \left(\frac{F_o}{A_o} \right).d\lambda} \quad (II-76)$$

La différence ($F_o - F$) est faible, GREENSMITH [38] a proposé une méthode différentielle pour mesurer ($F_o - F$) et F_o . En effet, il a considéré une éprouvette de longueur $2.h_o$ dont on a placé au milieu un système de serrage de telle façon à obtenir deux parties identiques de longueur h_o , on a introduit au milieu de la partie inférieure, et sur un bord, une petite fissure de longueur a . L'ensemble est soumis à un effort de traction (fig.26a).

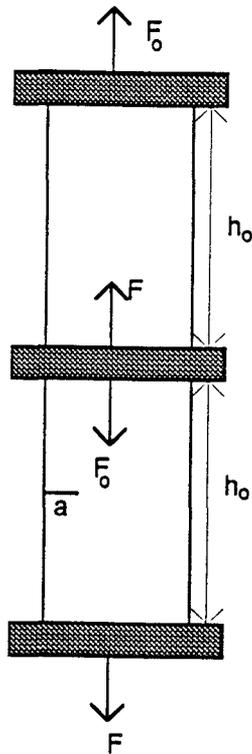


Fig.26a : Essai de traction selon GREENSMITH[38]

L'évolution de $k(\lambda)$ en fonction de λ est montré dans la fig.26b. $k(\lambda)$ diminue d'une valeur d'environ 3 aux petites elongations à une valeur proche de 2 pour $\lambda = 3$. LAKE [39] a proposée une expression analytique de $k(\lambda)$ sous la forme:

$$k(\lambda) = \frac{\pi}{\lambda^{1/2}}$$

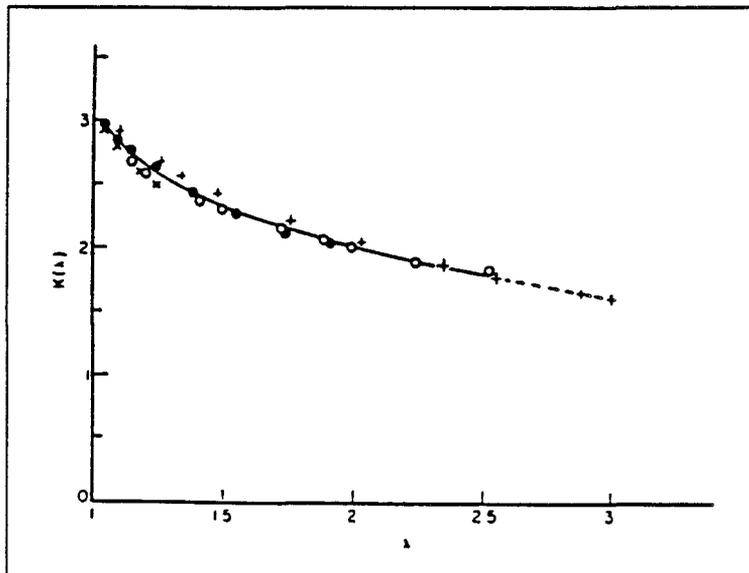


Fig.26b : Evolution de $k(\lambda)$ en fonction de λ selon GREENSMITH [38]

II-3-5-3/ Conclusion

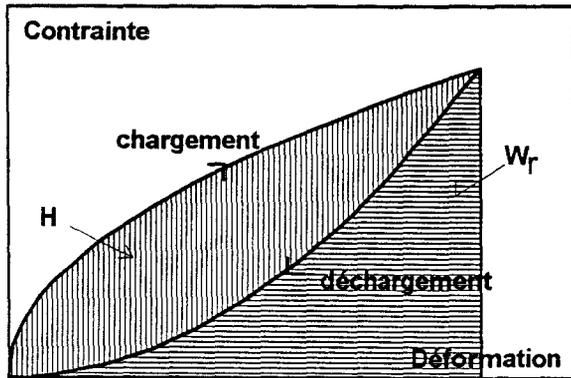
L'intérêt du critère de déchirement de RIVLIN et THOMAS est l'application d'un bilan énergétique direct qui permet d'étudier la rupture des matériaux présentant de fortes elongations tels que les caoutchoucs.

La dépendance explicite des expressions (II-69) et (II-71) vis-à-vis de la densité d'énergie de déformation uniforme W_0 , permet de traiter le cas d' un comportement élastique non linéaire.

Cependant, certains auteurs [40, 41] proposent, pour des comportements inélastiques, de remplacer W_0 par la densité d'énergie recouvrable W_r (fig.27) calculée sous la courbe charge-déplacement en déchargement afin de tenir compte de la perte d'énergie par dissipation interne :

$$T = k(\lambda) \cdot W_{rc} \cdot a \tag{II-77}$$

où W_{rc} est la valeur critique, à l'amorçage de la fissure, de W_r .



- H : Hystéresis(densité d'énergie de déformation perdue)
- W_r : Densité d'énergie de déformation récupérée
- $W_i = H + W_r$: Densité d'énergie de déformation fournie

Fig.27 : Définition de la densité d'énergie de déformation recouvrable W_r .

A partir des résultats expérimentaux obtenus sur un élastomère chargé, KINLOCH et TOD [40] ont proposé une expression analytique de W_r en fonction de la déformation, du temps de chargement t_p , et du temps de déchargement t_u :

$$W_r = C_0 + C_1 \cdot x + C_2 \cdot x^2 + C_3 \cdot x^3 + C_4 \cdot x^4 + C_5 \cdot \varepsilon + C_6 \cdot \varepsilon \cdot \ln(t_u) + C_7 \cdot \varepsilon^2 \cdot \ln(t_u) + C_8 \cdot \ln(t_u) \tag{II-78}$$

avec: $x = \varepsilon / \left(1 + t_p^{\frac{1}{7}} \right)$

$C_0 = -14.93$	$C_3 = 1272.17$	$C_6 = 251.71$
$C_1 = 2785.4$	$C_4 = -173.43$	$C_7 = -2.27$
$C_2 = -2194.68$	$C_5 = -345.26$	$C_8 = -481.37$

Les résultats en terme d'énergie de rupture, sont montrés (fig.28) en fonction de la vitesse de fissuration, en utilisant une éprouvette dite "pantalon"[40].

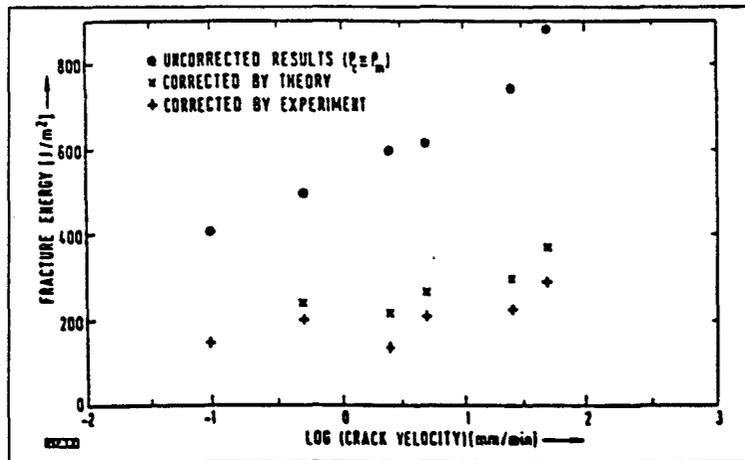


Fig.28 : Evolution de l'énergie de rupture G_c , en fonction de la vitesse de fissuration pour une éprouvette "pantalon" [40]

II-3-6/ THEORIE GENERALISEE DE LA MECANIQUE DE LA RUPTURE.

Cette théorie est une extension du concept de RIVLIN et THOMAS à des matériaux ayant un comportement non linéaire élastique ou anélastique.

Les premiers éléments de cette approche furent introduits en 1968 par ANDREWS [42] à partir des résultats expérimentaux de rupture pour des polymères. Elle fut ensuite étendue au cas des métaux et de l'adhésion [43, 44, 45].

II-3-6-1/ Première équation de la théorie généralisée d'ANDREWS

II-3-6-1-1/ Développement de la théorie d'ANDREWS.

a) Cas de dimensions infinies:

Considérons une plaque infinie contenant une fissure de longueur $2a$ soumise à un champ de contraintes uniforme σ_0 , fig.29 :

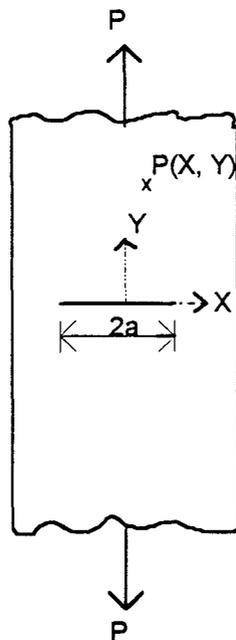


Fig.29 : Plaque infinie fissurée.

ANDREWS [43] propose de calculer la variation d'énergie potentielle due à la propagation de la fissure à partir de la distribution de la densité d'énergie de déformation locale $W(P)$ en un point P de coordonnées X, Y puisque :

$$\frac{dU_3}{dA} = \frac{1}{dA} \cdot \left\{ \int_V W(P) \cdot dV \right\} \quad (II-79)$$

où dA est un élément de surface et dV est un élément de volume au point P .

Le tenseur de contraintes σ en un point P de coordonnées X, Y peut s'écrire sous la forme :

$$\sigma_{ij}(P) = \sigma_o \cdot f_{ij}(X, Y, \varepsilon_o) \quad (II-80)$$

où ε_o et σ_o représentent respectivement les champs uniformes de déformation et de contrainte loin du défaut.

Par analogie, la densité d'énergie de déformation locale est exprimée par la relation :

$$W(P) = W_o \cdot f(X, Y, \varepsilon_o) \quad (II-81)$$

où W_o est la densité d'énergie de déformation loin du défaut.

Puisque seule la longueur de fissure est une grandeur finie du problème, on se propose de le résoudre de façon addimensionnelle en introduisant les coordonnées réduites $(x = \frac{X}{a}, y = \frac{Y}{a})$. La différentiation de $W(P)$ par la longueur de fissure a conduit à :

$$\frac{dW(P)}{da} = W_0 \cdot \left\{ \frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial a} \frac{\partial f}{\partial y} \right\} \quad (II-82)$$

avec $\frac{\partial x}{\partial a} = -\frac{X}{a^2} = -\frac{x}{a}$ $\frac{\partial y}{\partial a} = -\frac{Y}{a^2} = -\frac{y}{a}$

la relation (81) devient:

$$\frac{dW(P)}{da} = -\frac{W_0}{a} \left\{ x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right\} \quad (II-83)$$

en introduisant la relation (II-83) dans (II-79) on obtient ($dV = B \cdot a^2 \cdot dx \cdot dy$) :

$$\frac{dU_3}{dA} = -W_0 \cdot a \cdot \int_S \left\{ x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right\} \cdot dx \cdot dy \quad (II-84)$$

En posant:

$$k(W_0) = \int_S \left\{ x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right\} \cdot dx \cdot dy \quad (II-85)$$

nous obtenons l'expression proposée par ANDREWS :

$$-\frac{dU_3}{dA} = k(W_0) \cdot W_0 \cdot a \quad (II-86)$$

Cette relation constitue la 1^{ère} équation d'Andrews. Elle est analogue à celle proposée par RIVLIN et THOMAS [24] dans le cas du déchirement d'une éprouvette contenant une petite fissure ($k(W_0)$) est une fonction explicite de W_0 mais contient la dépendance par rapport à ϵ_0 car W_0 et ϵ_0 sont liés par une relation univoque (hypothèse d'élasticité).

C'est aussi une généralisation du critère de GRIFFITH. En effet, dans le cas d'un matériau dont le comportement mécanique est linéaire élastique, le critère de GRIFFITH s'écrit :

$$G = \pi \cdot \frac{\sigma_0^2}{2 \cdot E} \cdot a \quad (II-87)$$

Par identification, il vient: $k(W_0) = \pi$, $W_0 = \frac{\sigma_0^2}{2 \cdot E}$

où E est le module de YOUNG.

A l'amorçage de la fissure, la quantité $\frac{-dU_3}{dA}$ atteint une valeur critique Γ_0 :

$$\Gamma_0 = \left(-\frac{dU}{dA} \right)_{\text{crit}} = k(W_{0\text{crit}}) \cdot W_{0\text{crit}} \cdot a \quad (\text{II-88})$$

Cette valeur critique représente l'énergie surfacique de rupture, supposée une caractéristique du matériau.

b) Cas de dimensions finies :

Dans ce cas, il est impératif d'introduire, lors de la réduction des variables X, Y, toutes les dimensions finies.

Ainsi, dans le cas d'une plaque finie, de longueur h et de largeur w, contenant une fissure de longueur a, la densité d'énergie de déformation s'exprime de la façon suivante :

$$W(P) = W_0 \cdot f\left(\frac{X}{a}, \frac{Y}{a}, \frac{X}{h}, \frac{Y}{h}, \frac{X}{w}, \frac{Y}{w}\right) \quad (\text{II-89})$$

en posant

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{X}{a}; x_2 = \frac{X}{h}; x_3 = \frac{X}{w} \\ y_1 &= \frac{Y}{a}; y_2 = \frac{Y}{h}; y_3 = \frac{Y}{w} \end{aligned} \quad (\text{II-90})$$

on obtient :

$$W(P) = W_0 \cdot f(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, W_0) \quad (\text{II-91})$$

La différenciation par rapport à la longueur de fissure conduisant à :

$$\frac{dW}{da} = -\frac{W_0}{a} \left\{ x_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial y_1} + \frac{a}{h} \cdot \frac{\partial X}{\partial a} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{a}{h} \cdot \frac{\partial Y}{\partial a} \cdot \frac{\partial f}{\partial y_2} + \dots \right\} \quad (\text{II-92})$$

or $\frac{\partial X}{\partial a} = \frac{\partial Y}{\partial a} = 0$

d'où
$$\frac{dW(P)}{da} = -\frac{W_0}{a} \left\{ x_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial y_1} \right\} \quad (\text{II-93})$$

f étant fonction de a, h, w et W₀.

d'où la variation d'énergie potentielle obtenue par sommation de l'expression précédente :

$$-\frac{dU_3}{dA} = N \left(\frac{a}{w}, \frac{a}{h}, \dots, W_0 \right) \cdot W_0 \cdot a \quad (\text{II-94})$$

Le terme N n'est plus une caractéristique du matériau puisqu'il contient des termes dimensionnels liés à la géométrie de l'éprouvette.

II-3-6-1-2/ Application de la 1^{ère} équation d'ANDREWS à l'éprouvette en cisaillement pur de RIVLIN et THOMAS.

Appliquons maintenant cette première équation à l'éprouvette en cisaillement pur étudiée par RIVLIN et THOMAS (figure 30):

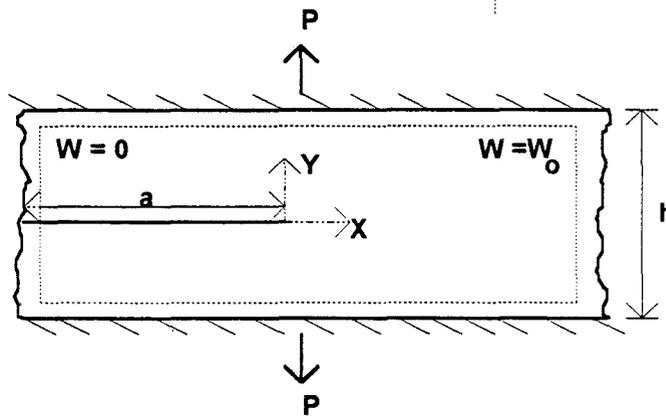


Fig.30 : Eprouvette en cisaillement pur étudiée par [24].

Dans ce cas la seule origine identifiable pour les coordonnées du système est la pointe de la fissure. Seule la hauteur h est une variable finie, donc la réduction se fera par rapport à celle-ci :

$$x = \frac{X}{h} \quad y = \frac{Y}{h}$$

d'où:

$$\frac{\partial x}{\partial a} = -\frac{1}{h} \cdot \frac{\partial X}{\partial a} = -\frac{1}{h} \quad (\text{l'origine se déplaçant avec l'accroissement de la fissure})$$

$$\frac{\partial y}{\partial a} = \frac{1}{h} \cdot \frac{\partial Y}{\partial a} = 0$$

D'après la relation (II-83) on obtient :

$$\frac{dW(P)}{da} = -\frac{W_0}{h} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \quad (II-95)$$

soit, avec $A = 2 \cdot B \cdot a$ et $dV = B \cdot h^2 \cdot dx \cdot dy$,

$$-\frac{dU_3}{dA} = \frac{1}{2} \cdot W_0 \cdot h \cdot \int_s \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \quad (II-96)$$

Les conditions aux limites sont telles que:

$$f = 1 \text{ pour } x \rightarrow +\infty \quad (II-97)$$

$$f = 0 \text{ pour } x \rightarrow -\infty$$

$$-\frac{1}{2} < y < \frac{1}{2}$$

Par conséquent, on obtient :

$$-\frac{dU_3}{dA} = \frac{1}{2} W_0 \cdot h \cdot \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dy \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx \quad (II-98)$$

d'où le résultat déjà montré pour cette géométrie :

$$-\frac{dU_3}{dA} = \frac{1}{2} \cdot W_0 \cdot h \quad (II-99)$$

II-3-6-1-3/ Développement expérimental de la théorie généralisée (1^{ère} équation)

La procédure expérimentale est analogue à celle de BEGLEY-LANDES, pour la détermination du paramètre énergétique J. Elle nécessite une série d'enregistrement charge-déplacement sur des éprouvettes identiques contenant des fissures de longueurs croissantes (y compris l'éprouvette sans fissure).

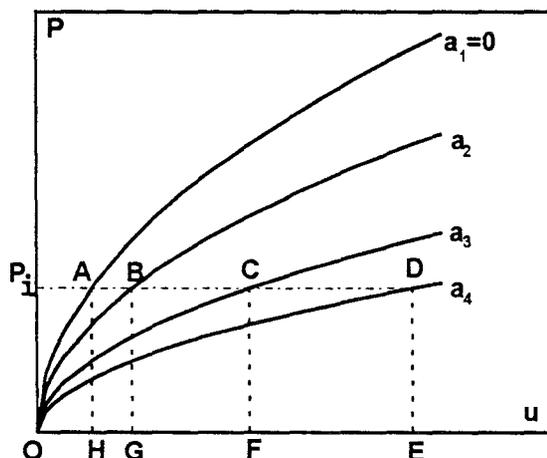


Fig.31a : Courbes charge-déplacement

Dans le cas de géométrie uniaxiale, la densité d'énergie de déformation uniforme W_0 étant contrôlée par la charge, la détermination se fait à charge constante.

Pour chaque charge P_i , on peut calculer la densité d'énergie de déformation correspondante W_{0i} et la quantité $U(a_j, W_{0i}) = U_0 - U(a_j)$, où $U(a_j)$ et U_0 représentent l'aire sous la courbe charge-déplacement respectivement pour une longueur de fissure a_j et pour une longueur de fissure nulle.

W_{0i} est donnée par l'aire $\frac{OAH}{\text{volume}}$ de l'éprouvette et $U(a_j, W_{0i})$ est donnée par les aires OAB, OAC, OAD,

Pour une valeur W_{0i} donnée, on reporte en fonction de la longueur de fissure a , les quantités $U(a_j, W_{0i})$.

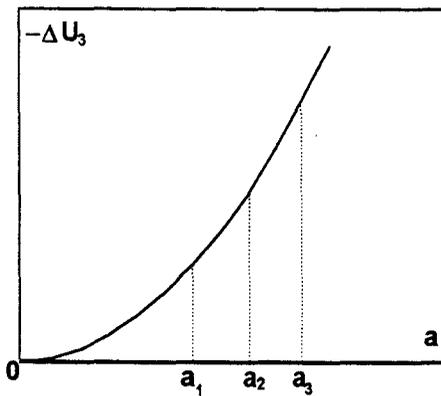


Fig.31b : Courbes $-\Delta U_3 = f(a)$

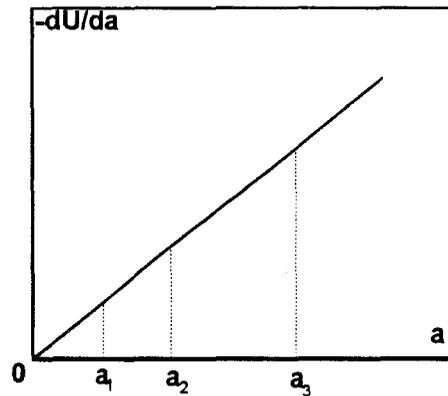


Fig.31c : Détermination de $k(W_0)$

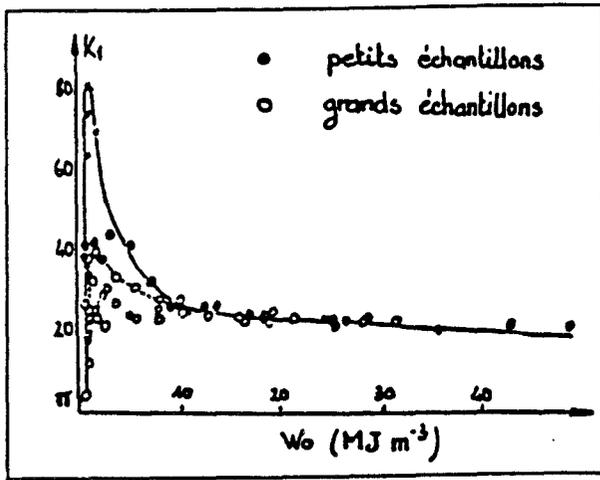
Par différentiation et division par l'épaisseur B , on obtient la quantité $-\frac{dU}{2B da} \cdot W_0$ pour une valeur de W_0 donnée.

La relation (85) permet d'accéder à la valeur de k pour une valeur de W_0 donnée :

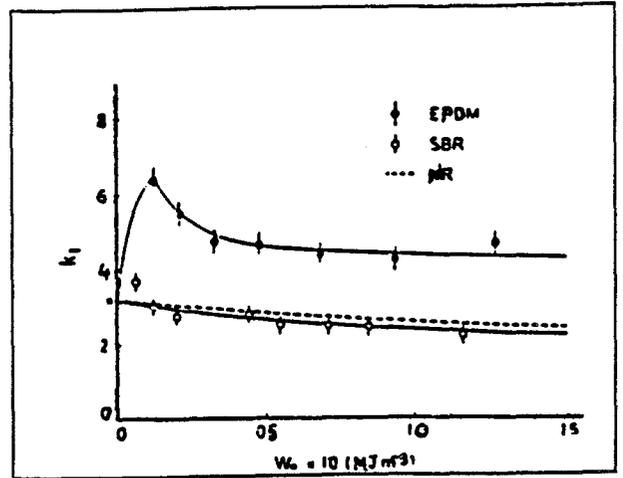
$$k|_{W_0} = \frac{\left(\frac{-dU_3}{dA} \right) |_{W_0}}{(W_0 \cdot a)} \tag{II-100}$$

or $\frac{-dU_3}{dA} = \alpha |_{W_0} \cdot a$ (fig19c) (II-101)

d'où $k|_{W_0} = \frac{\alpha |_{W_0}}{2.B.W_0}$ (II-102)



a) alliage Cu-Be



b) différents types de polymères

Fig.32 : Evolution de $k(W_0)$ en fonction de W_0

On remarque que pour les faibles valeurs de W_0 la fonction $k(W_0)$ tend vers la valeur π (fig.19), obtenue dans la théorie de GRIFFITH pour les matériaux au comportement linéaire élastique. On observe aussi la présence d'un pic, qui selon ANDREWS, est associé à la plastification progressive du ligament.

WILLIAMS [46] a proposé d'introduire le rayon de la zone plastique r_p explicitement dans la 1ère équation d'ANDREWS (II-86), sous la forme:

$$J = -\frac{dU_3}{B \cdot da} = 2 \cdot k \cdot W_0 \cdot (a + r_p) \quad (II-103)$$

expression conduisant expérimentalement à une valeur de r_p comparable à celle que l'on obtient par la solution de correction de zone plastique:

$$r_p = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{E \cdot J_c}{\sigma_e^2} \right) \quad (108)$$

où E est le module d'YOUNG, J_c est la valeur critique de $\left(\frac{-dU_3}{dA} \right)$ et σ_e est la limite élastique du matériau considéré. En fait, c'est un parallèle à la méthode de la fissure équivalente d'IRWIN.

WILLIAMS compare ensuite le facteur de proportionnalité k avec la fonction de calibration Y^2 utilisée en mécanique élastique linéaire.

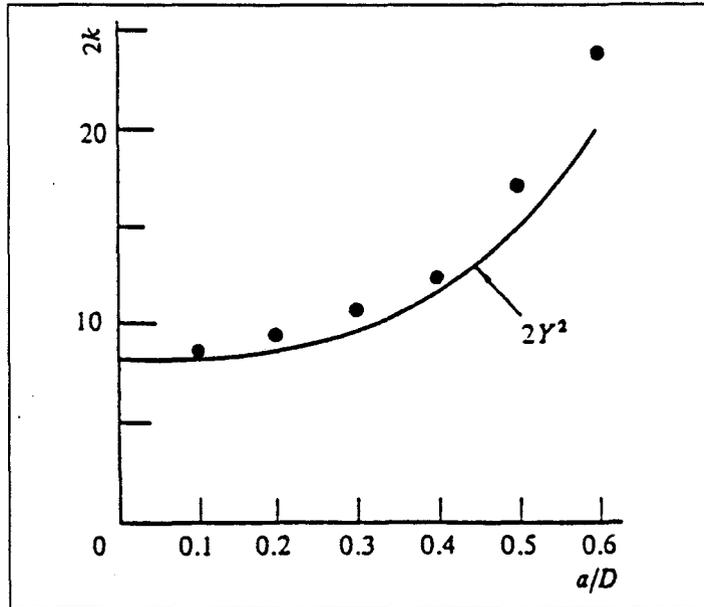


Fig.33 : Comparaison de 2.k, obtenue en utilisant $r_p = 10$ mm, avec $2.Y^2$

Ce résultat indique que le facteur de correction n'est pas influencé par la non linéarité du comportement du matériau étudié, mais plutôt par la géométrie de l'échantillon. Si la fonction $2k$ est proche de la calibration linéaire $2.Y^2$, c'est parce qu' au delà de la pointe de la fissure, le champ est linéaire.

Donc un examen attentif, pour chaque cas particulier de la fonction $k(W_0)$, peut conduire à des renseignements qualitatifs supplémentaires sur le processus de rupture.

II-3-6-2/ Deuxième équation de la théorie généralisée d'ANDREWS.

Dans le cas des matériaux inélastique, ANDREWS [44] a proposé de prendre en compte l'énergie dissipée, lors de la déformation, dans une fonction de perte Φ sous forme multiplicative:

$$\Gamma = \Gamma_0 \cdot \Phi(W_0, \dot{\epsilon}, T) \tag{II-104}$$

Cette expression montre que l'énergie apparente Γ , à la vitesse de déformation $\dot{\epsilon}$ et à la température T , est le produit d'une énergie à l'équilibre Γ_0 et d'un terme de dissipation Φ .

Φ s'exprime selon [44], dans le cas d'une plaque semi-infinie qui contient une fissure sur un bord, par :

$$\Phi = \frac{k_1(W_0)}{k_2(W_0, \dot{\epsilon}, T)} \tag{II-105}$$

avec

$$k_2(W_0, \dot{\varepsilon}, T) = k_1(W_0) - \int_{\text{déchargé}} \beta \cdot g(x, y, W_0) \cdot \delta x \cdot \delta y \quad (\text{II-106})$$

$$k_1(W_0) = \int_{\text{chargé}} g(x, y, W_0) \cdot \delta x \cdot \delta y \quad (\text{II-107})$$

$$g(x, y, W_0) = x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \quad (\text{II-108})$$

$$f(x, y, W_0) = \frac{W(P)}{W_0} \quad (\text{II-109})$$

$$\beta = \frac{W - W_0}{W} \quad (\text{II-110})$$

où β est le taux d'hysteresis.

Dans le cas d'un matériau élastique, et pour des conditions d'essais données (T et $\dot{\varepsilon}$), Φ est égale à 1, mais dans le cas des matériaux dissipatifs, la détermination de k_2 n'est pas très facile et nécessite des mesures délicates du champ de déformation au voisinage de la fissure.

II-3-7/ CONCLUSION.

La plupart des critères de rupture, présentés dans notre étude bibliographique, ont été développés dans le cas des matériaux élastoplastiques (cas des métaux), puis étendus à d'autres matériaux (polymères).

A l'inverse, le critère de déchirement de Rivlin et Thomas, a été développé pour les caoutchoucs présentant de fortes élongations et généralisé par la suite, par Andrews, à d'autres matériaux.

Ce sont des critères basés sur la valeur critique d'un seul paramètre supposé caractéristique intrinsèque du matériau. Ce paramètre caractérise le champ des contraintes et des déformations existant au voisinage de la pointe de la fissure. Il doit donc s'exprimer de façon simple à l'aide des grandeurs accessibles par l'expérimentation (charge, déplacement, ...).

De nombreuses méthodes de détermination expérimentales de ce paramètre existent, au moins pour les matériaux usuels (comportement élastique linéaire ou élastoplastique).

Dans le cas des matériaux linéaires élastiques, ce paramètre peut être le facteur d'intensité de contrainte.

Dans le cas élastoplastique, l'intégrale de Contour J, peut être ce paramètre.

Dans le cas du comportement non linéaire, la théorie généralisée d' Andrews permet de relier le paramètre énergétique $J \left(J = \frac{dU_1}{dA} - \frac{dU_3}{dA} \right)$ au comportement du matériau (densité de l'énergie de déformation uniforme W_0). En effet, cette théorie est une généralisation du critère de GRIFFITH, puisque dans le cas linéaire, le taux de restitution d'énergie G est équivalent à J:

$$J = G = \pi \cdot \frac{\sigma_0^2}{2 \cdot E} \cdot a = k(W_0) \cdot a \cdot W_0$$

Dans le cas non linéaire, tout écart de la fonction $k(W_0)$ par rapport à la valeur π représentera donc les effets de la non linéarité qui sont à relier au comportement mécanique du matériau étudié.

Toutefois, lorsque l'échantillon est de dimensions finies, la fonction k dépend de toutes les dimensions par l'intermédiaire de rapports addimensionnels, conséquence de la réduction des variables $\left(k = N \left(W_0, \frac{a}{h}, \frac{a}{w} \right) \right)$ ce qui rend impérative une identification quantitative de cette influence de la géométrie.

DEUXIEME PARTIE : ETUDE EXPERIMENTALE

CHAPITRE III : PROTOCOLE EXPERIMENTAL ET EXPLOITATION DES **RESULTATS**

CHAPITRE III : PROTOCOLE EXPERIMENTAL ET EXPLOITATION DES RESULTATS

INTRODUCTION

La recherche d'une propriété intrinsèque gouvernant l'initiation d'une fissure se réalise en laboratoire sur des géométries d'éprouvettes spécifiques et de dimensions finies, excluant du fait les hypothèses relatives à la plaque infinie.

Dans cette situation, nous avons vu que le développement de la théorie généralisée d'ANDREWS conduit à l'expression suivante de la fonction k :

$$k = N\left(W_o, \frac{a}{w}, \frac{a}{h}, \dots\right) \quad (\text{III-111})$$

NAIT-ABDELAZIZ[47], puis NEVIERE[48] ont supposé que les contributions respectives de W_o et de rapports de dimensions se font indépendamment l'une de l'autre et que par conséquent :

$$N\left(W_o, \frac{a}{w}, \frac{a}{h}, \dots\right) = k(W_o) \cdot F\left(\frac{a}{w}, \frac{a}{h}, \dots\right) \quad (\text{III-112})$$

où $k(W_o)$ dépend uniquement de W_o , et F est une fonction liée à la géométrie de l'éprouvette.

Pour soutenir expérimentalement cette hypothèse on se propose de montrer que:

*Si la fonction $k(W_o)$ existe, elle est une caractéristique intrinsèque du matériau et donc pour un matériau donné et pour un même type de sollicitation, elle doit être unique quelle que soit la géométrie utilisée.

*Pour une même géométrie d'éprouvettes et pour des matériaux ayant le même type de comportement, la fonction F doit être identique.

Si ces hypothèses sont vérifiées on disposera alors d'une expression simple du paramètre énergétique J (détermination de J par un échantillon unique).

Cette étude consiste à identifier expérimentalement les deux fonctions $k(W_o)$ et $F\left(\frac{a}{w}, \frac{a}{h}, \dots\right)$ à partir de deux méthodes:

(i)- L'identification de ces deux fonctions est effectuée à partir de la détermination du paramètre énergétique J . Ce dernier est calculé en utilisant la méthode de pseudo-compliance [36] et la méthode de l'énergie totale dépensée [29, 33].

(ii)- Les deux fonctions sont calculées à partir d'une méthode expérimentale, que nous avons

développée, et qui est basée sur la séparation dans l'énergie dépensée, des effets dus aux dimensions finies et à la non-linéarité du comportement.

Notre hypothèse fondamentale sera que le terme $\frac{dU}{dA} = \frac{dU_1}{dA} - \frac{dU_3}{dA}$, qui représente la variation de l'énergie nécessaire pour propager la fissure d'un incrément de surface dA . (dU_1 et dU_3 représentent respectivement la variation du travail des forces extérieures et celle de l'énergie de déformation élastique stockée dans le système), caractérise bien la propriété de résistance à la rupture du matériau étudié.

Nous supposons que le comportement est réversible au sens thermodynamique avec une relation contrainte-déformation non linéaire.

CHAPITRE III : PROTOCOLE EXPERIMENTAL ET EXPLOITATION DES RESULTATS

III-1/ PROTOCOLE EXPERIMENTAL

III-1-1/ MATERIAU - ECHANTILLONS

Le matériau testé est un caoutchouc (utilisé comme isolant thermique), présentant un comportement non linéaire. C'est un E.P.D.M. (Ethylène-Propylène-Diene élastomères) chargé au noir de carbone et réticulé au soufre.

Il est évidemment intéressant d'utiliser un certain nombre de géométries particulières. Trois géométries d'échantillons distinctes, parmi les plus couramment utilisées dans les laboratoires expérimentaux, ont été retenues. Il s'agit de :

- L'éprouvette S.E.N.T. (Eprouvette à fissure latérale)
- L'éprouvette C.C.T. (Eprouvette à fissure centrale)
- L'éprouvette C.P. (Cisaillement Pur)

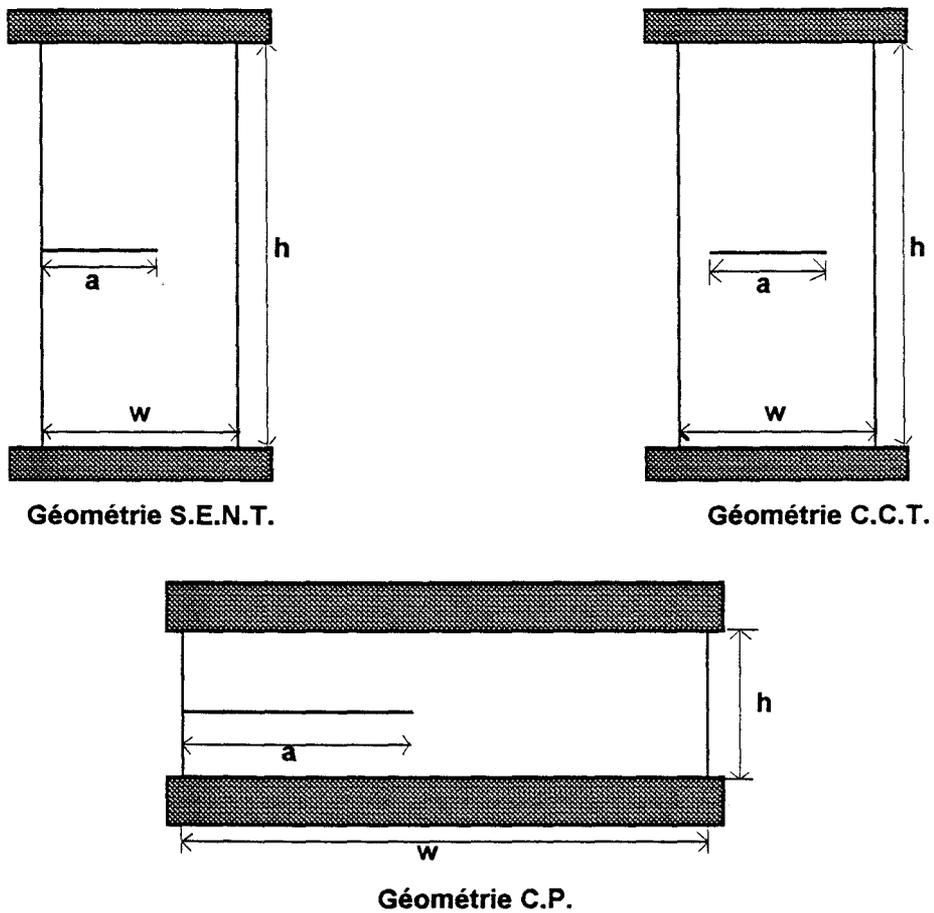


Fig.34 : Géométries des échantillons

Nous avons choisi deux types de dimensions pour chaque géométrie (tableau II).

Géométrie	Hauteur (mm)	Largeur (mm)	Epaisseur (mm)
S.E.N.T. (I)	200	40	3,4
S.E.N.T. (II)	700	140	3,4
C.C.T. (I)	220	100	3,4
C.C.T. (II)	320	80	3,4
C.P. (I)	30	140	3,4
C.P. (II)	60	140	3,4

Tableau II : Dimensions des échantillons

Les éprouvettes de chaque géométrie sont découpées dans une même plaque du matériau. La fissure initiale a été réalisée à l'aide d'une lame de rasoir.

III-1-2/ DISPOSITIF EXPERIMENTAL

Les essais sont effectués sur une machine de traction INSTRON équipée d'une cellule de charge de faible capacité (1 kN), avec une vitesse de déplacement de la traverse de 10 mm/mn.

Les échantillons sont serrés entre deux supports permettant leur mise en place sur un montage adapté à la machine de traction.

Les mesures de charge et de déplacement sont directement disponibles aux sorties analogiques de la machine. L'acquisition de ces données se fait par un micro-ordinateur, via une liaison numérique de type parallèle (IEEE), dont nous avons dû concevoir les programmes de pilotage et de stockage des données. L'ensemble du dispositif est représenté figure 35.

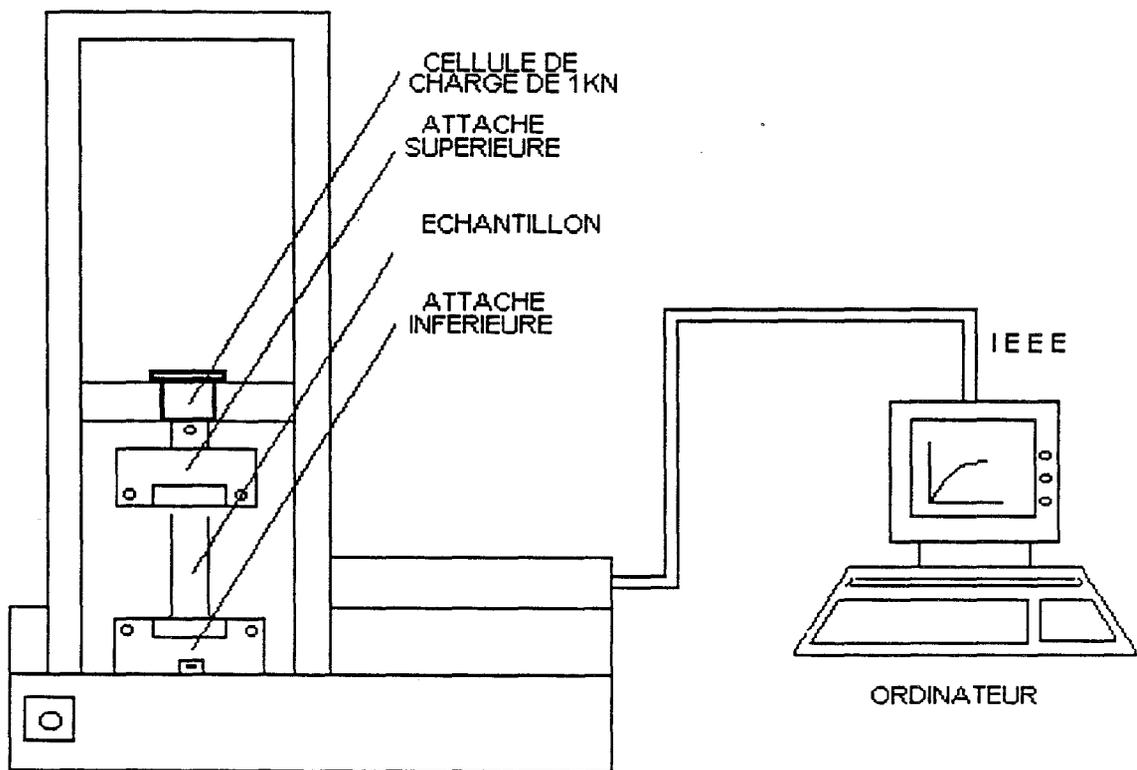


Fig.35 : Dispositif expérimental

Pour chaque type de géométrie les essais sont réalisés sur des éprouvettes identiques contenant des fissures de longueur croissante. Pendant l'essai, nous détectons l'amorçage de la fissure visuellement ce qui permet de connaître la charge critique correspondante.

Le tableau III rappelle les longueurs de fissures choisies pour chacune des géométries.

Géométrie	Longueurs de fissures (mm)							
	S.E.N.T. (I)	0	12	16	20	24	28	--
S.E.N.T. (II)	0	27	42	55	71	84	98	112
C.C.T. (I)	0	20	30	40	50	60	70	--
C.C.T. (II)	0	36	40	44	50	55	60	--
C.P. (I)	0	27,5	41,5	55	70	84	96	111
C.P. (II)	0	28	42	56	70	84	98	112

Tableau III: Valeurs des longueurs de fissures

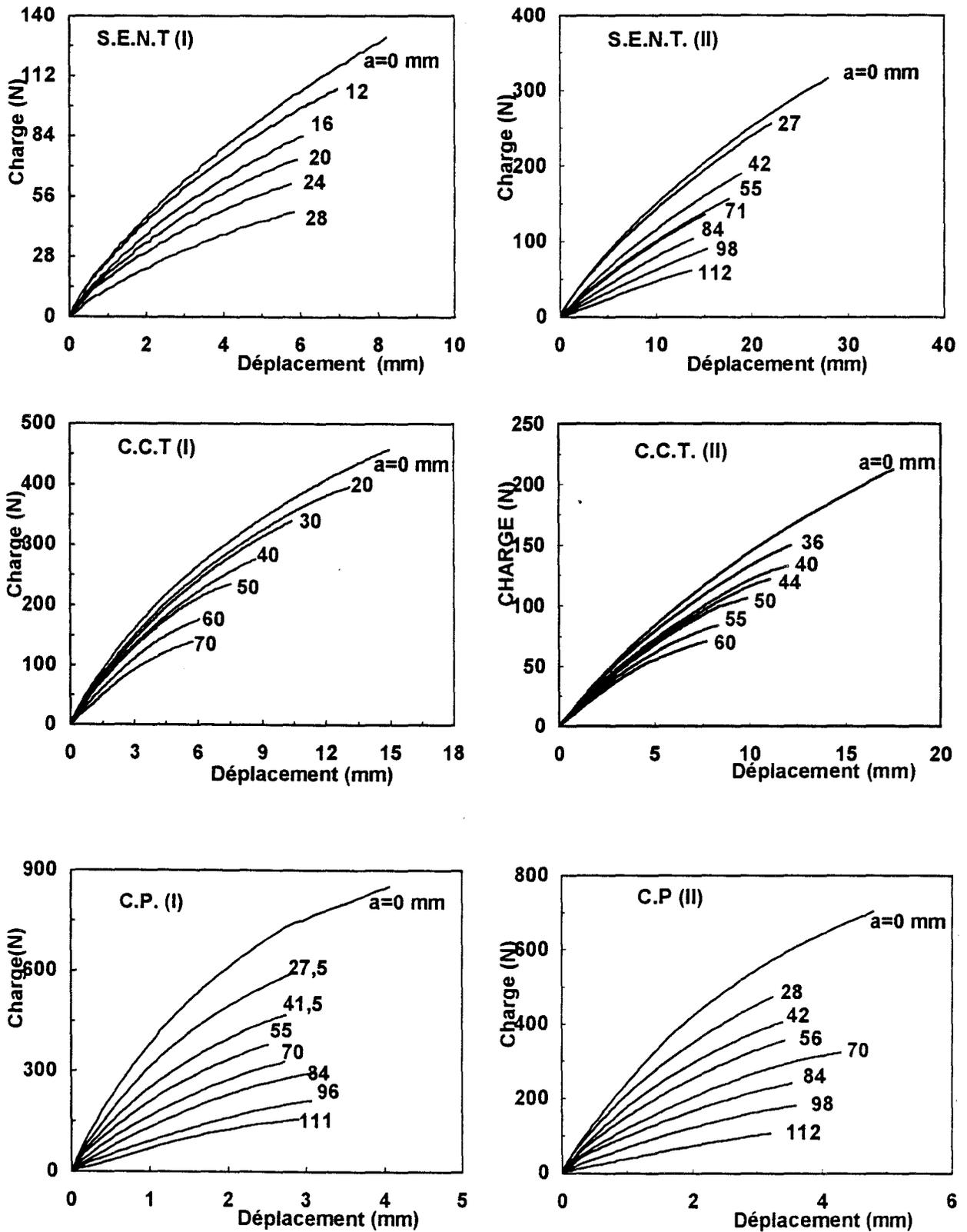


Fig.36 : Courbes charge-déplacement.

III-2 / EXPLOITATION DES RESULTATS

III-2-1/ Base théorique.

La partie théorique de cette méthode a été exposée au chapitre II, rappelons l'hypothèse énoncée par ANDREWS, dans le cas de dimensions finies: La variation de l'énergie, nécessaire à la propagation de la fissure, est proportionnelle au produit de la densité d'énergie de déformation uniforme, W_0 , par la longueur de fissure a . Le facteur de proportionnalité étant lui-même fonction de W_0 et des rapports de dimensions a/w , a/h , ... :

$$J = \left(\frac{dU_1}{dA} - \frac{dU_3}{dA} \right) = N \left(W_0, \frac{a}{w}, \frac{a}{h}, \dots \right) \cdot W_0 \cdot a \quad (III-113)$$

L'étude expérimentale consiste à évaluer le terme $\frac{dU}{dA} = \frac{dU_1}{dA} - \frac{dU_3}{dA}$, la mesure de cette variation d'énergie peut s'effectuer de deux manières:

(i)- A déplacement constant (fig.37a):

Dans ce cas, le travail des forces extérieures est nul : $\frac{dU_1}{dA} = 0$

d'où
$$\frac{dU}{dA} = - \frac{dU_3}{dA} \quad (III-114)$$

(U_3 est l'aire sous la courbe charge-déplacement). ($dU_3 =$ l'aire OAB)

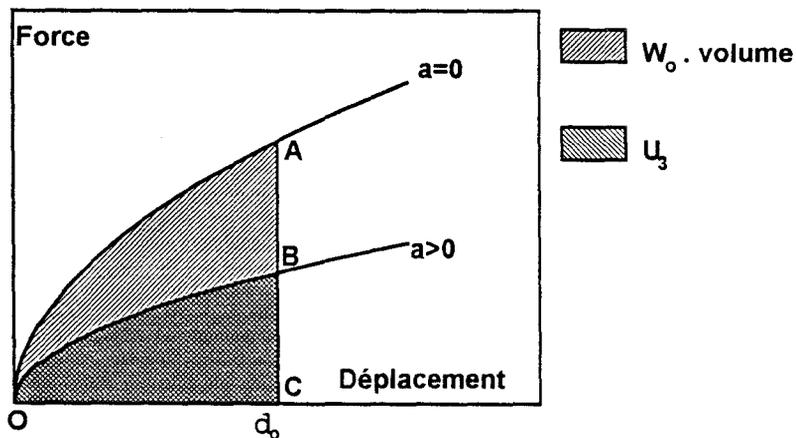


Fig.37a: Propagation à déplacement constant

(ii)- A charge constante (fig.37b):

Dans ce cas la propagation entraîne un déplacement, donc le travail des forces extérieures

n'est pas nul:

$$dU_1 = ABCD \quad (III-115)$$

$$\begin{aligned} dU_3 &= OBD - OAC = (OEBD - OEB) - (OEAC - OEA) \\ &= (OEBD - OEAC) + (OEA - OEB) \quad (III-116) \\ &= ABCD + (OEA - OEB) \end{aligned}$$

$$d'ou \quad dU = dU_1 - dU_3 = OEB - OEA = OAB = dU^*_3 \quad (III-117)$$

(U^*_3 est l'énergie complémentaire de U_3)

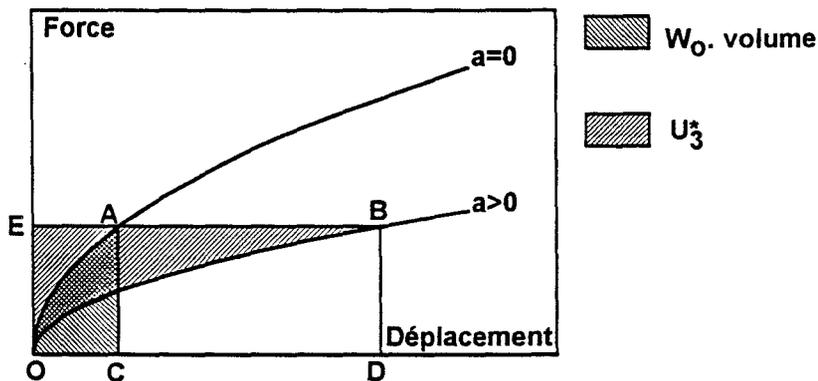


Fig.37b: Propagation à charge constante.

Donc, à déplacement constant nous utilisons l'aire sous la courbe charge-déplacement, notée U_3 et à charge constante nous utilisons l'aire complémentaire U^*_3 .

III-2-2/ Détermination de J.

Dans le cas des géométries S.E.N.T et C.C.T., la densité d'énergie de déformation uniforme W_0 , étant contrôlée par la charge, J sera déterminé à charge constante en utilisant l'énergie complémentaire U^*_3 (fig.37b). Dans le cas particulier de la géométrie C.P., W_0 , est contrôlée par le déplacement, la mesure de J s'effectue à déplacement constant en utilisant directement l'aire sous la courbe charge-déplacement, notée U_3 (fig.37a).

Dans ce paragraphe seules les deux premiers types des géométries S.E.N.T. et C.C.T. seront utilisées.

III-2-2-1/ Méthode de pseudo-compliance de BEGLEY-LANDES (méthode 1).

* Géométries S.E.N.T. et C.C.T.

Nous disposons de courbes charge-déplacement obtenues après expérimentation d'échantillons de géométrie identique contenant des fissures de longueur croissante (Fig.36). Partant de ces résultats nous déterminons, pour différentes charges P_i et pour chaque longueur de fissure a_i , l'énergie complémentaire U_3^* .

Cette énergie complémentaire U_3^* est reportée sur un graphe en fonction de a et paramétrée par P_i (fig.38).

Le lissage par des fonctions polynomiales ou exponentielles permet d'accéder directement à la variation d'énergie complémentaire $\frac{dU_3^*}{dA}$.

Pour ces deux géométries l'incrément de surface est donné par:

$$dA = 2.B.da \quad (\text{III-118})$$

Le facteur 2 étant imputable au fait que deux surfaces de fissure sont créées lors de la propagation. B est l'épaisseur de l'échantillon.

d'où l'expression de J :

$$J = \left(\frac{dU_1}{dA} - \frac{dU_3^*}{dA} \right) = \frac{dU_3^*}{2.B.da} \quad (\text{III-119})$$

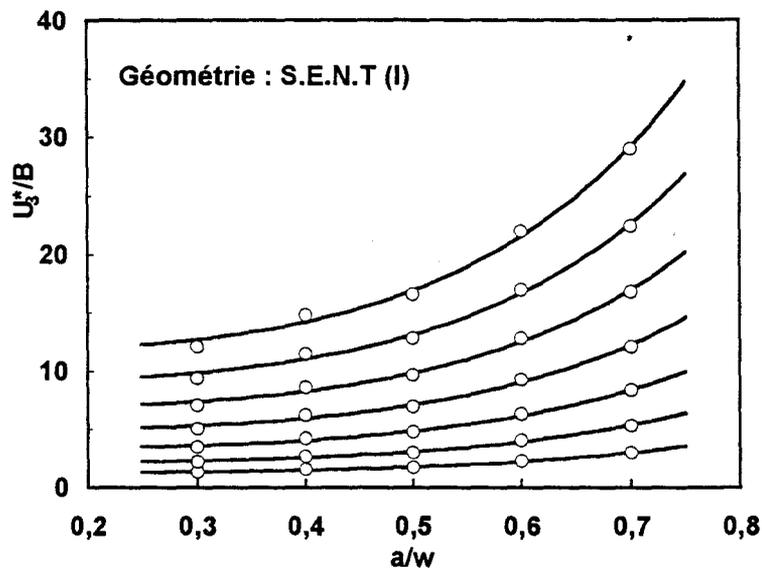


Fig.38a : Energie/épaisseur en fonction de la longueur de fissure normalisée a/w. (S.E.N.T.)

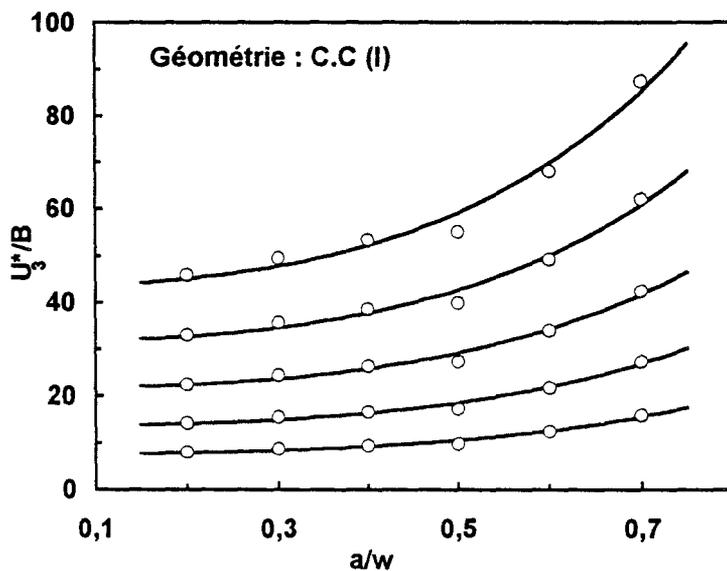


Fig.38b : Energie/épaisseur en fonction de la longueur de fissure normalisée, a/w, (C.C.T.)

III-2-2-2/ Méthode de l'énergie dépensée (méthode 2)

Cette approche est basée sur les travaux de TURNER et SUMPTER[30]. Elle consiste d'une manière générale à exprimer la variation d'énergie potentielle proportionnellement à l'énergie dépensée. le facteur de proportionnalité η dépend de la géométrie de l'éprouvette:

$$\frac{dU_3^*}{dA} = \eta \cdot \frac{U_3^*}{2.B.(w - a)} \quad (III-120)$$

Le facteur η est donné par:
$$\eta = - \frac{dLn(U_3^*)}{dLn(w - a)} \quad (III-121)$$

Signalons que la plupart des travaux à ce sujet font l'hypothèse que ce facteur est uniquement fonction du rapport $\frac{a}{w}$ [29, 33].

A ce stade, nous ne faisons aucune hypothèse concernant la dépendance de η vis-à-vis des variables $\frac{a}{w}$ et W_0 , puisque ce terme nous sert uniquement d'intermédiaire dans le calcul pour la détermination de $\frac{dU_3^*}{dA}$.

Comme pour la méthode précédente, à partir des courbes charge-déplacement dont nous disposons, nous calculons U_3^* pour différentes valeurs de P_i (donc de W_{0i}) et pour chaque longueur de fissure a_i .

Le lissage par des fonctions polynomiales ou exponentielle permet d'accéder au facteur de proportionnalité η puisque:

$$\eta = \frac{-dLn(U_3^*)}{dLn(w - a)} = - \frac{(w - a).dLn(U_3^*)}{da} \quad (III-122)$$

La valeur de $\frac{dU_3^*}{dA}$ est ensuite déduite de la relation (III-120)

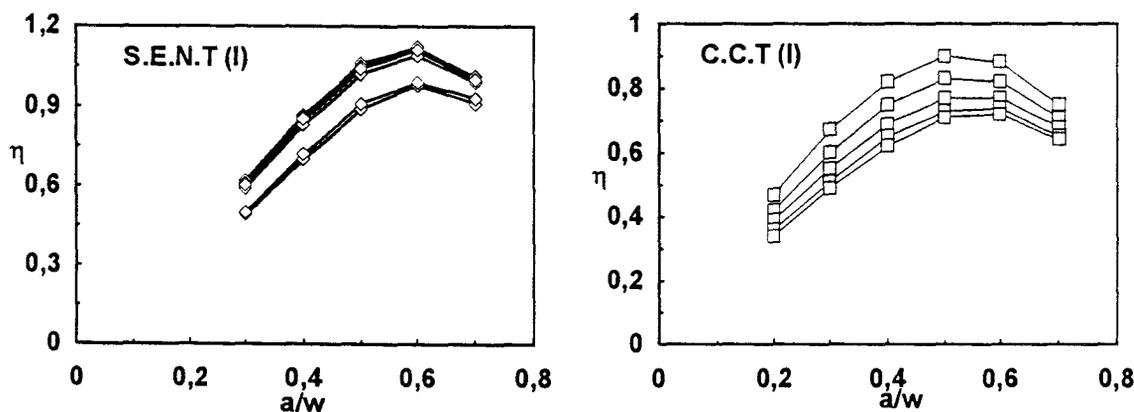


Fig.39 : Evolution du facteur de proportionnalité η en fonction de a/w

III-2-3/ IDENTIFICATION DE LA FONCTION DE POTENTIEL $k(W_0)$ ET DE LA FONCTION DE GEOMETRIE $F\left(\frac{a}{w}\right)$.

III-2-3-1/ Identification de $k(W_o)$ et de $F(a/w)$ à partir de la fonction $N(W_o, \frac{a}{w}, \frac{a}{h} \dots)$

a) Détermination de $N(W_o, \frac{a}{w}, \frac{a}{h} \dots)$

Afin de simplifier notre démarche, nous proposons de ne prendre en compte que l'influence d'un terme géométrique à savoir le rapport a/w . La relation (III-113) devient, à charge constante :

$$J = \frac{dU_3^*}{dA} = N\left(W_o, \frac{a}{w}\right) \cdot W_o \cdot a \quad (III-123)$$

Connaissant la variation de l'énergie complémentaire $\frac{dU_3^*}{dA}$ et en utilisant la relation (III-123), nous pouvons calculer, pour chaque valeur de W_o , la valeur du facteur de proportionnalité $N\left(W_o, \frac{a}{w}\right)$ correspondante par la relation:

$$N\left(W_o, \frac{a}{w}\right) = \left[\frac{\left(\frac{dU_3^*}{dA}\right)}{W_o \cdot a} \right]_{p=cste} \quad (III-124)$$

Les figures (40) et (41) montrent l'évolution de la fonction N , obtenue par les deux approches proposées (méthode de pseudo-compliance et celle de η).

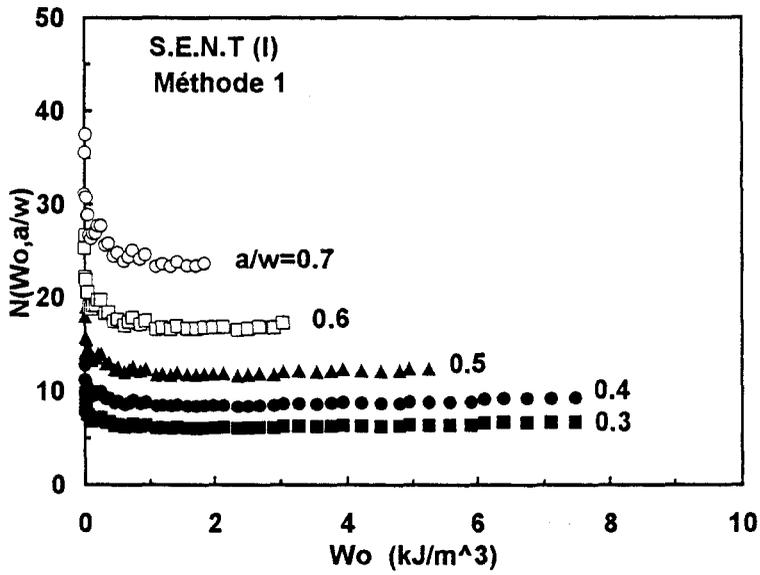


Fig.40a : Valeurs de $N(W_o, a/w)$ en fonction W_o . (Méthode 1)

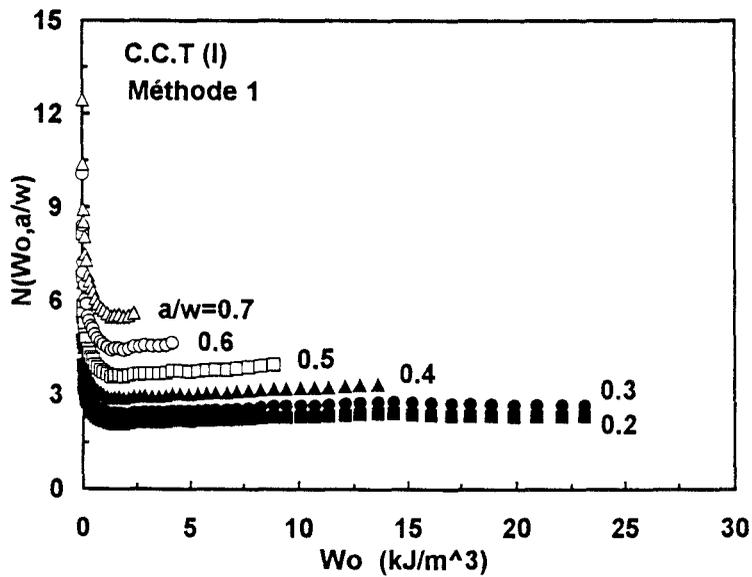


Fig.40b : Valeurs de $N(W_o, a/w)$ en fonction W_o . (Méthode 1)

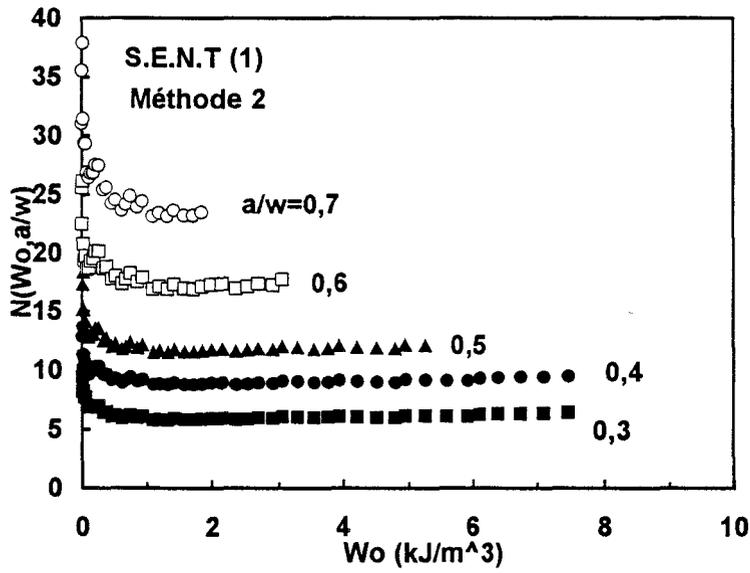


Fig.41a : Valeurs de $N(W_o, a/w)$ en fonction W_o . (Méthode 2)

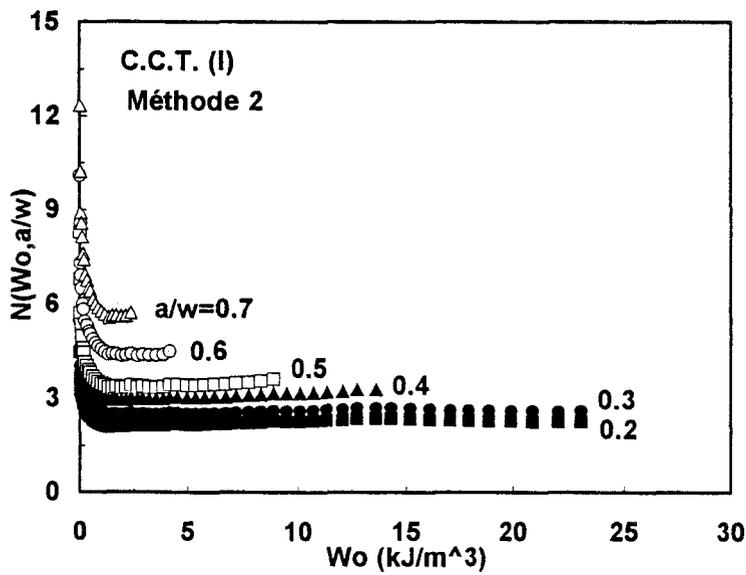


Fig.41b : Valeurs de $N(W_o, a/w)$ en fonction W_o . (Méthode 2)

On peut constater que, pour chaque longueur de fissure a , correspond une fonction $N(W_0, \frac{a}{w})$. Ceci montre, sans ambiguïté, que la fonction N n'est plus une caractéristique intrinsèque du matériau puisqu'elle dépend des caractéristiques géométriques de l'éprouvette testée.

A cet effet, NAIT-ABDELAZIZ [47] puis NEVIERE [48] ont proposé de dissocier les effets géométriques de ceux caractérisant le comportement du matériau en mettant la fonction N sous la forme:

$$N(W_0, \frac{a}{w}) = k(W_0) \cdot F(\frac{a}{w}) \quad (III-125)$$

Ici, $k(W_0)$ est analogue au terme proposé par ANDREWS[43], dans le cas de dimensions infinies. F est une fonction liée à la géométrie de l'éprouvette (au même titre que les fonctions de calibration utilisées en mécanique élastique linéaire de la rupture (M.L.E.R.)).

Toute la difficulté réside dans l'identification de ces deux termes : $k(W_0)$ et $F(\frac{a}{w})$.

b) Séparation de $N(W_0, \frac{a}{w})$ en utilisant une fonction de calibration linéaire.

NAIT-ABDELAZIZ [47] avait proposé, en faisant l'analogie avec la mécanique linéaire élastique, de remplacer la fonction F par une fonction de calibration de type linéaire $Y(\frac{a}{w})$

En effet, pour des éprouvettes de dimensions finies, le facteur d'intensité de contrainte K_I s'exprime par:

$$K_I = Y\left(\frac{a}{w}\right) \cdot \sigma_0 \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \quad (III-126)$$

où σ_0 est la contrainte uniforme calculée loin de la fissure.

Or, nous avons vu (dans le 2^{ème} chapitre) qu'il existe en M.L.E.R. une relation entre le facteur d'intensité de contrainte K_I et le taux de restitution d'énergie G :

$$G = K_I^2 \cdot Cte \quad (III-127)$$

Comme J est l'équivalent de G en mécanique non linéaire, on peut écrire:

$$J = \frac{dU_3}{dA} = k(W_0) \cdot W_0 \cdot a \cdot Y^2\left(\frac{a}{w}\right) \quad (III-128)$$

A partir de cette expression on peut déduire, pour chaque valeur de W_0 donnée, la valeur

de $k(W_0)$:

$$k(W_0) = \frac{\frac{dU_3^*}{dA}}{\left[W_0 \cdot a \cdot Y^2 \left(\frac{a}{w} \right) \right]} \quad (\text{III-129})$$

Pour chacune des géométries utilisées, les fonctions de calibration linéaires $Y\left(\frac{a}{w}\right)$ sont issues de la référence [49].

Pour la géométrie S.E.N.T. cette fonction, lorsque l'on prend en compte les effets de flexion dus à la dissymétrie de cette éprouvette, est exprimée sous forme polynomiale [49] par:

$$Y\left(\frac{a}{w}\right) = 1,12 - 0,13 \cdot \left(\frac{a}{w}\right) + 10,6 \cdot \left(\frac{a}{w}\right)^2 - 21,7 \cdot \left(\frac{a}{w}\right)^3 + 30,4 \cdot \left(\frac{a}{w}\right)^4 \quad (\text{III-130})$$

Pour la géométrie C.C.T. cette fonction est donnée [32] par:

$$Y\left(\frac{a}{w}\right) = \frac{1 - 0,5 \cdot \left(\frac{a}{w}\right) + 0,326 \cdot \left(\frac{a}{w}\right)^2}{\sqrt{1 - \frac{a}{w}}} \quad (\text{III-131})$$

L'application de la relation (III-129) à nos essais, en utilisant ces fonctions de calibration linéaires, conduit aux résultats des figures (42a) et (42b).

Ces figures montrent l'évolution de $k(W_0)$ en fonction de W_0 . Nous pouvons constater que pour chaque longueur de fissure il existe une fonction $k(W_0)$. Ceci montre que l'introduction d'une fonction de géométrie linéaire ne conduit pas à une fonction $k(W_0)$ unique. Ceci est particulièrement vrai dans le cas de l'éprouvette S.E.N.T.. Les écarts relevés pour les éprouvettes C.C.T. étant plus faibles.

Nous proposons dans, ce qui suit, de montrer qu'il est possible de trouver une fonction $k(W_0)$ unique, ne dépendant que de W_0 . En fait, nous poursuivons simplement l'analogie avec la mécanique linéaire élastique de la rupture.

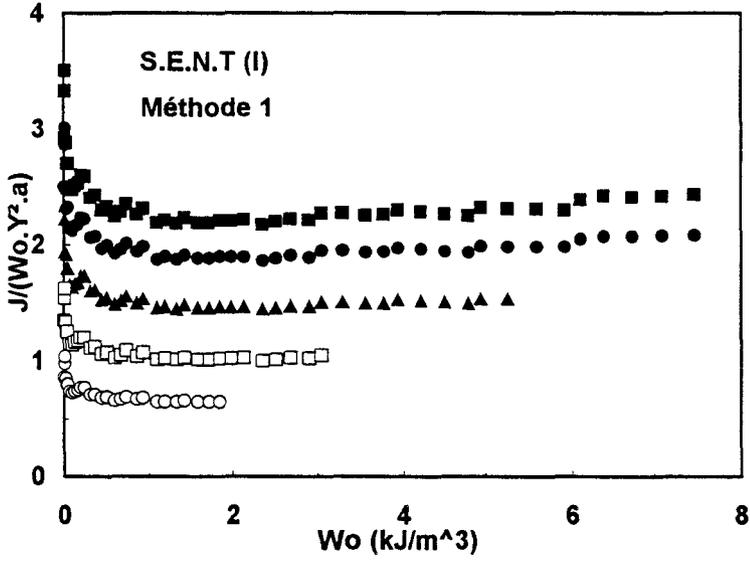


Fig.42a : Valeurs de $\frac{J}{W_o.Y^2.a}$ en fonction de W_o . (Méthode 1)

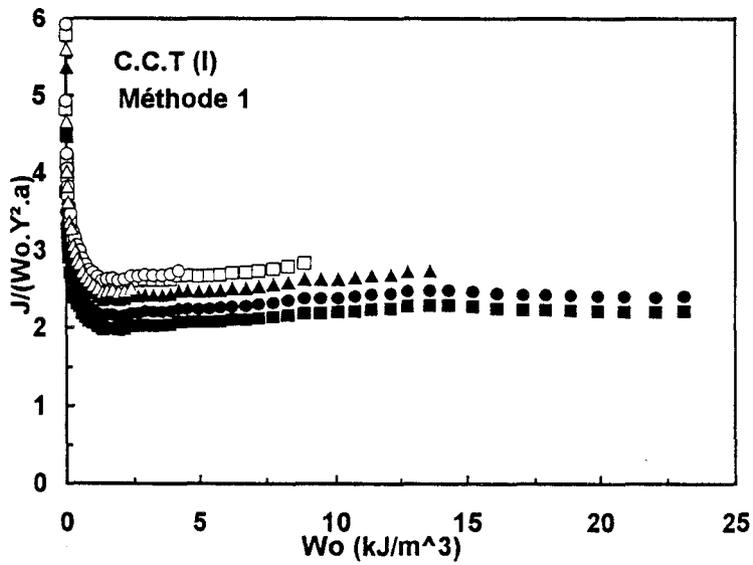


Fig.42b : Valeurs de $\frac{J}{W_o.Y^2.a}$ en fonction de W_o . (Méthode 1)

c) Notre hypothèse:

Pour obtenir la fonction F , nous faisons l'hypothèse que lorsque W_0 tend vers 0, la fonction $k(W_0)$ tend vers π [50]. Ceci peut s'expliquer par le fait que, lorsque la densité d'énergie de déformation est faible, tous les matériaux se comportent de façon élastique linéaire, et de ce fait, répondent au critère de GRIFFITH [22].

La fonction $F\left(\frac{a}{w}\right)$ sera donc donnée par:

$$F\left(\frac{a}{w}\right) = \frac{N\left(W_0, \frac{a}{w}\right)_{w_0 \rightarrow 0}}{\pi} \quad (\text{III-132})$$

(En pratique, nous prenons la valeur de N correspondant à la plus petite valeur de W_0)

Utilisant la relation (III-125) on peut calculer $k(W_0)$:

$$k(W_0) = \frac{N\left(W_0, \frac{a}{w}\right)}{F\left(\frac{a}{w}\right)} \quad (\text{III-133})$$

Les résultats en terme de $F(a/w)$ et de $k(W_0)$, pour les deux types de géométries utilisées, sont représentés figures (43), (44) et (45)

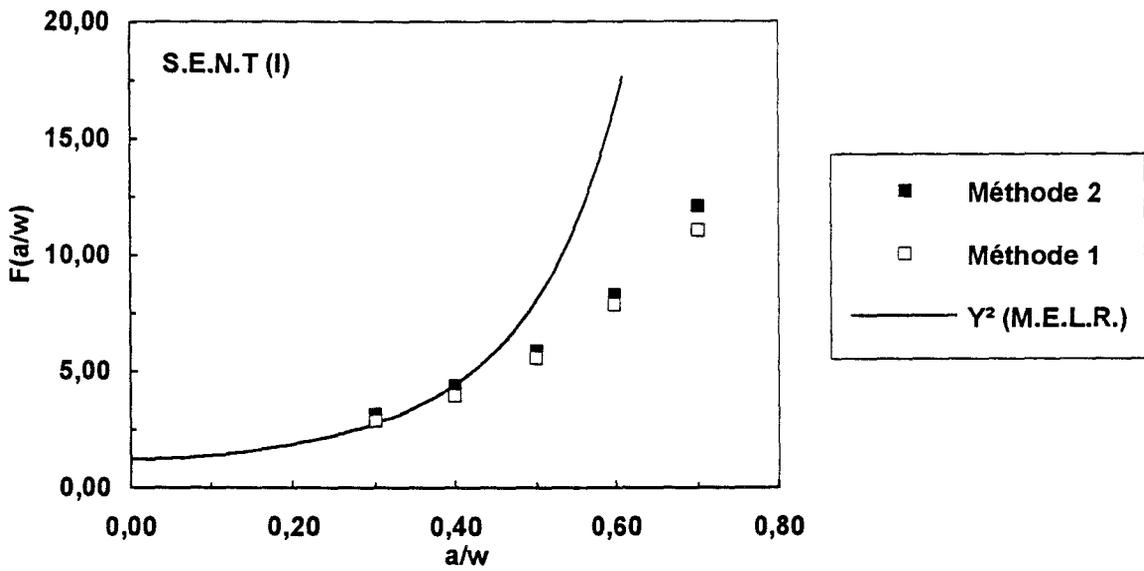


Fig.43a : Valeurs de $F(a/w)$ comparées à la fonction de calibration linéaire Y^2 .
Géométrie S.E.N.T.(I)

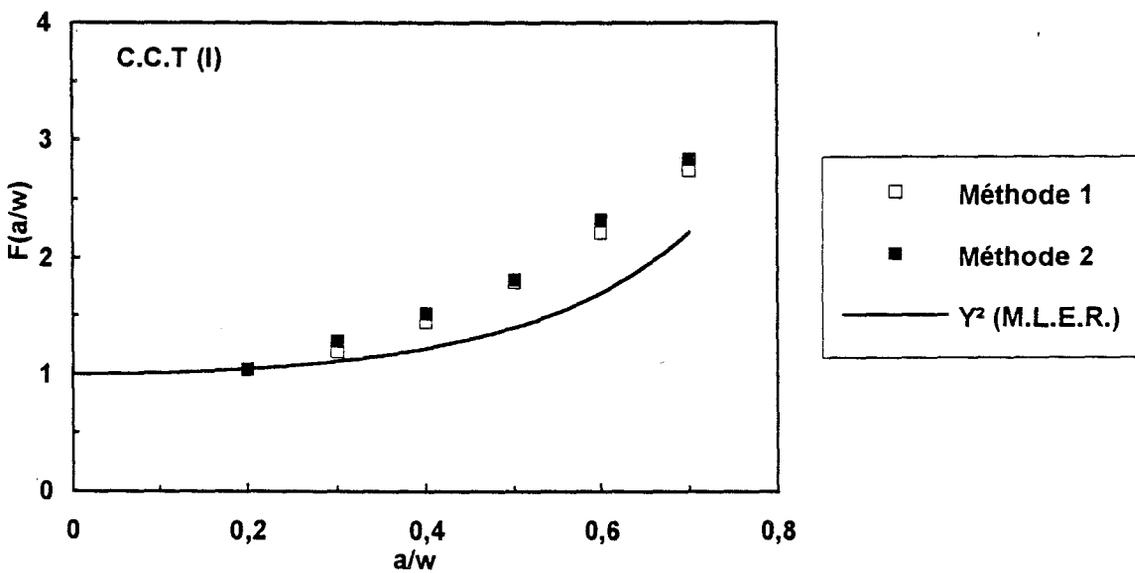
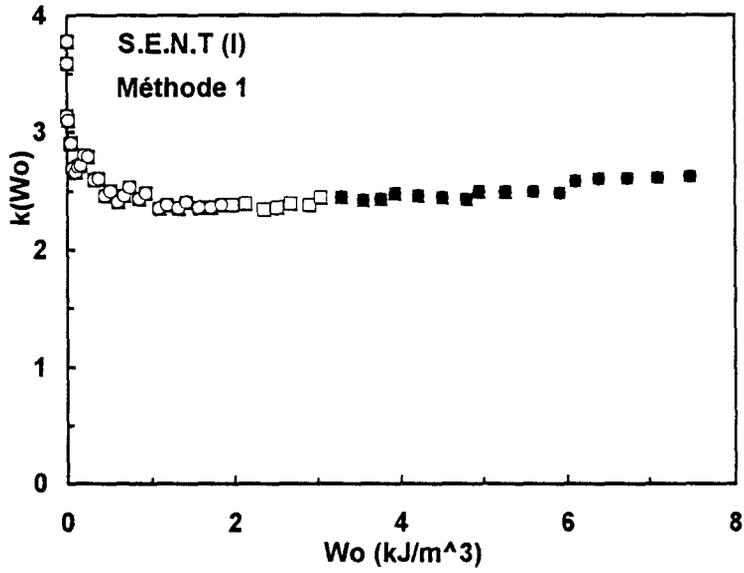
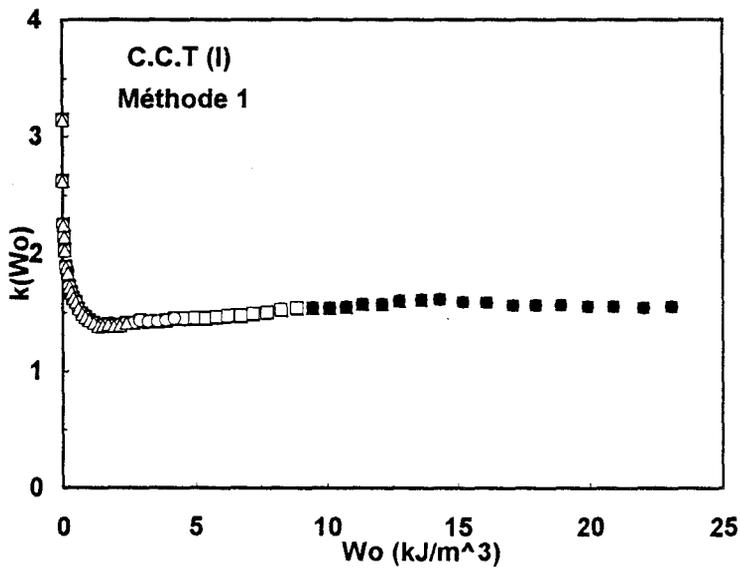


Fig.43b : Valeurs de $F(a/w)$ comparées à la fonction de calibration linéaire Y^2 . Géométrie C.C.T.
(I)

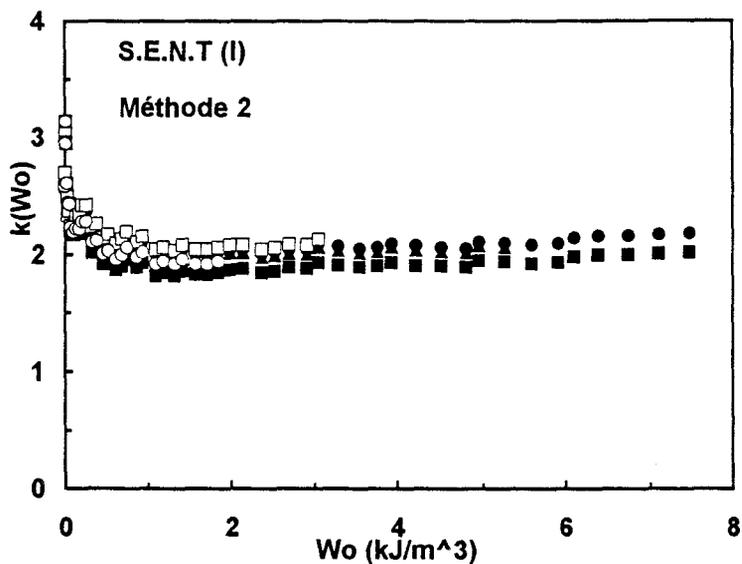


a) Géométrie S.E.N.T. (I). (Méthode 1,)

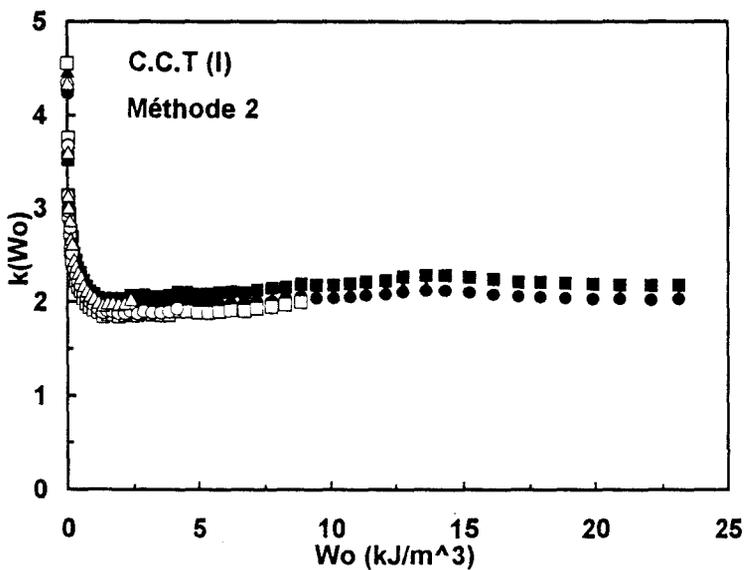


b) Géométrie C.C.T. (I). (Méthode 1)

Fig.44 : Evolution de $k(W_o)$ en fonction de W_o .



a) Géométrie S.E.N.T. (I). (Méthode 2)



a) Géométrie C.C.T. (I). (Méthode 2)

Fig.45 : Evolution de $k(W_0)$ en fonction de W_0 .

(i)- Evolution de $k(W_0)$:

Nous pouvons constater que la fonction $k(W_0)$ est unique et ne dépend que de W_0 . On peut remarquer aussi que quelle que soit la méthode utilisée(méthode 1 ou méthode 2), on retrouve des

valeurs de $k(W_0)$ similaire. Les dispersions les plus importantes sont observées dans le cas de la méthode 2.

Dans les deux cas de géométries, la fonction $k(W_0)$ décroît d'une valeur d'environ π , aux faibles valeurs de W_0 , à une valeur proche de 2. Ensuite elle semble être constante pour les plus grandes valeurs de W_0 .

(ii)- Evolution de $F\left(\frac{a}{w}\right)$:

C'est à priori l'existence de cette fonction qu'il nous fallait mettre en évidence sous forme multiplicative conformément à l'hypothèse de la relation (III-125).

Nous pouvons constater, après les différentes fonctions obtenues à partir des deux méthodes proposées, que l'on retrouve la même fonction pour une même géométrie donnée. L'extrapolation de ces fonctions vers l'abscisse zéro donnerait, a priori, une valeur proche de 1. D'un autre côté, nous observons une divergence entre la fonction F et la fonction de calibration linéaire $Y^2\left(\frac{a}{w}\right)$ issue de la référence[32], et ceci pour les deux géométries testées (S.E.N.T et C.C.T.).

Toutefois, l'inconvénient de cette méthode est que l'on calcule la valeur de F pour des valeurs faibles de W_0 correspondant à des valeurs très petites des charges et des déplacements. Les limites de cette méthode sont liées aux précisions des capteurs utilisés (cellule de forces et capteur de déplacements)

III-2-3-2/ Identification de $k(W_0)$ et de $F(a/w)$ à partir de la séparation de J .

A fin de pallier aux inconvénients de la méthode précédente, il est possible d'identifier directement les fonctions $k(W_0)$ et $F(a/w)$ sans passer par la détermination de la fonction de $N(W_0, a/w, \dots)$. En effet, en introduisant l'hypothèse faite sur la fonction $N\left(W_0, \frac{a}{w}, \frac{a}{h}, \dots\right)$ (équation III-120), nous obtenons l'expression suivante du paramètre énergétique J :

$$J = k(W_0) \cdot W_0 \cdot a \cdot F\left(\frac{a}{w}, \frac{a}{h}, \dots\right) \quad \text{(III-134)}$$

qu'on peut écrire sous la forme :

$$J = H(W_0) \cdot G\left(a, \frac{a}{w}, \frac{a}{h}, \dots\right) \quad \text{(III-135)}$$

avec $H(W_0) = k(W_0) \cdot W_0 \quad \text{(III-136)}$

et
$$G\left(a, \frac{a}{w}, \frac{a}{h}, \dots\right) = a.F\left(\frac{a}{w}, \frac{a}{h}, \dots\right) \quad (III-137)$$

La détermination expérimentale des fonctions H et G permet d'accéder directement aux fonctions de potentiel $k(W_0)$ et de calibration $F\left(a, \frac{a}{w}, \frac{a}{h}, \dots\right)$ [51].

a) Méthode de détermination expérimentale de $H(W_0)$ et de $G\left(a, \frac{a}{w}, \frac{a}{h}, \dots\right)$

Le paramètre énergétique, J, s'exprime par :

$$J = \frac{dU}{dA} = H(W_0) \cdot G\left(\frac{a}{w}\right) \quad (III-138)$$

Dans le cas d'un problème plan, on a $dA = 2.B.da$ (puisque l'on crée deux nouvelles surfaces de fissures).

Après sommation de la relation (III-146), à W_0 constant, on obtient :

$$\frac{U}{2B} = H(W_0) \int G\left(\frac{a}{w}\right) da = H(W_0) \cdot G_0\left(\frac{a}{w}\right) + H_0(W_0) \quad (III-139)$$

$G_0\left(\frac{a}{w}\right)$ est une primitive de la fonction $G\left(\frac{a}{w}\right)$, et $H_0(W_0)$ est une constante de l'intégration qui dépend de W_0 .

A partir des courbes charge-déplacement, on mesure pour différentes charges P_i (ou différents déplacements u_i) et pour chaque longueur de fissure a_i , l'énergie U. Le lissage (moindres carrés) des points expérimentaux $\left(\frac{U_i}{B}, \frac{a_i}{w}\right)$ par des fonctions mathématiques du type :

$$\frac{U_i}{B} \Big|_{W_{0i}} = H \Big|_{W_{0i}} \cdot G_0\left(\frac{a_i}{w}\right) + H_0 \Big|_{W_{0i}} \quad (III-140)$$

permet d'évaluer la fonction H pour chaque W_{0i} donné. La fonction $G\left(\frac{a}{w}\right)$ est obtenue en dérivant la fonction $G_0\left(\frac{a}{w}\right)$ par rapport à la longueur de fissure normalisée.

b) Résultats expérimentaux:

Nous avons pris en considération dans cette partie, en plus des deux géométries S.E.N.T. (I) et C.C.T. (I), la troisième géométrie de cisaillement pur (C.P.). Les deux types de dimensions (I) et (II) des éprouvettes S.E.N.T. et C.P. ont été utilisés.

Les fonctions de lissage $G_o\left(\frac{a}{w}\right)$, des courbes $\left(\frac{U}{B}, \frac{a}{w}\right)$, ont pour expressions :

* pour les géométries S.E.N.T. et C.C.T. :

$$G_o\left(\frac{a}{w}\right) = \text{Exp} \left[\left(\frac{a}{w}\right)^n \right] \quad (\text{III-141})$$

n est une constante pour chaque géométrie donnée.

* Pour la géométrie C.P. :

$$G_o\left(\frac{a}{w}\right) = \frac{a}{w} \quad (\text{III-142})$$

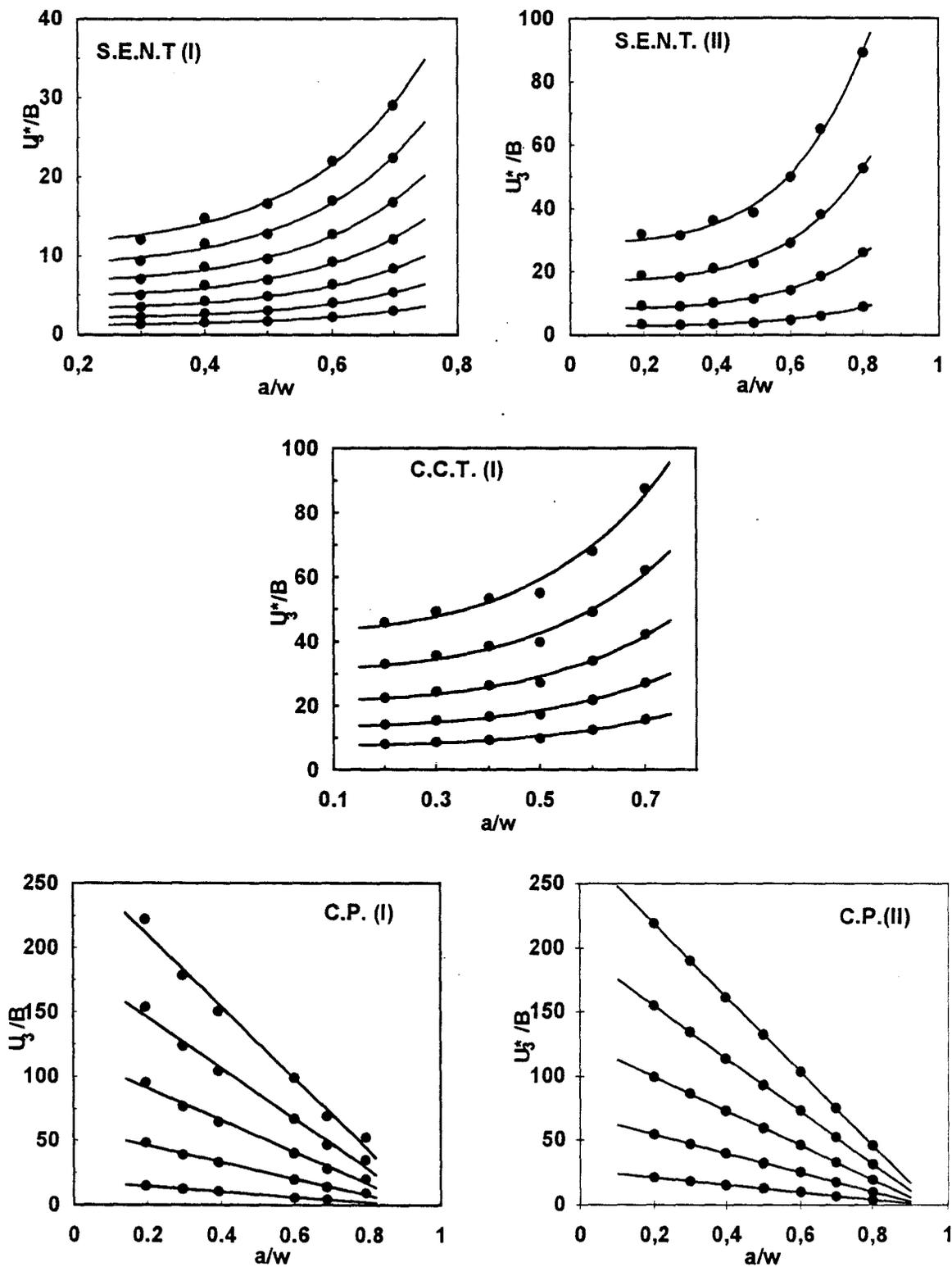


Fig.48 : Energie/épaisseur en fonction de a/w .

c) Détermination de $k(W_0)$ et de $F\left(\frac{a}{w}\right)$

(i)-Géométries S.E.N.T et C.C.T :

La figure 46 montre, l'évolution schématique du rapport $\frac{H(W_0)}{W_0}$ en fonction de W_0 .

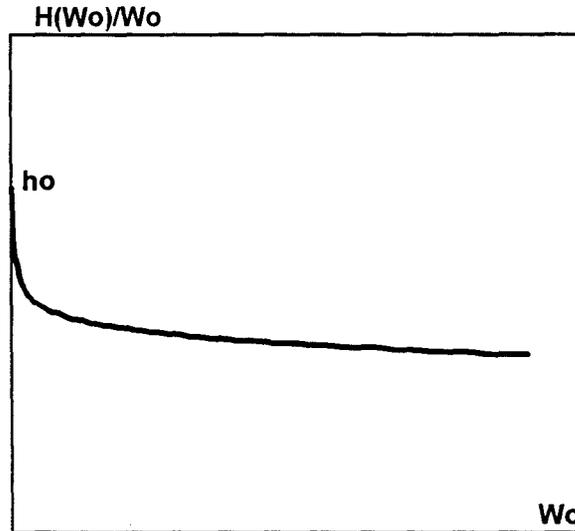


Fig.49 : Evolution du rapport $H(W_0)/W_0$ en fonction de W_0 . (schématique)

On constate que l'allure de ce rapport est semblable à l'évolution de $k(W_0)$ en fonction de W_0 observé précédemment, si ce n'est que la valeur de ce rapport lorsque W_0 tend vers 0 est différente de π
 $\left(\frac{H(W_0)}{W_0} \rightarrow h_0 \text{ lorsque } W_0 \rightarrow 0\right)$.

En normalisant ce rapport à π lorsque $W_0 \rightarrow 0$, on peut en déduire l'expression de $k(W_0)$, puis celle de $F\left(\frac{a}{w}\right)$ [51] :

$$k(W_0) = \frac{H(W_0) \cdot \pi}{W_0 \cdot h_0} \tag{III-143}$$

$$F\left(\frac{a}{w}\right) = \frac{G\left(\frac{a}{w}\right) \cdot h_0}{a \cdot \pi} \tag{III-144}$$

avec $G\left(\frac{a}{w}\right) = \frac{d}{da} \left[G_0\left(\frac{a}{w}\right) \right]$

* Evolution de $k(W_0)$:

La fonction $k(W_0)$ obtenue à partir de la relation (III-143) est identique pour les deux géométries S.E.N.T. et C.C.T. (fig.50). Une nette dépendance de la densité d'énergie de déformation

uniforme W_0 est observée pour les faibles valeurs de W_0 . Lorsque W_0 croît, $k(W_0)$ décroît et devient constante pour $W_0 > 0.8 \text{ kJ/m}^3$.

* *Evolution de $F\left(\frac{a}{w}\right)$:*

En ce qui concerne la géométrie S.E.N.T., l'évolution de F , en fonction de $\frac{a}{w}$, est montrée figure 51a. On constate d'une part, que la relation (III-143) donne des valeurs de F similaires pour les deux types de dimensions testées de cette géométrie. D'autre part, une nette divergence est observée lorsqu'on compare F avec la fonction de calibration $Y^2\left(\frac{a}{w}\right)$ associée [49], issue de la mécanique linéaire élastique de la rupture.

Pour la géométrie C.C.T., la figure 51b montre l'évolution de F en fonction de $\frac{a}{w}$. Là aussi, on observe une divergence entre F , obtenue à partir de la relation (III-143), et la fonction de calibration linéaire $Y^2\left(\frac{a}{w}\right)$ associée [49].

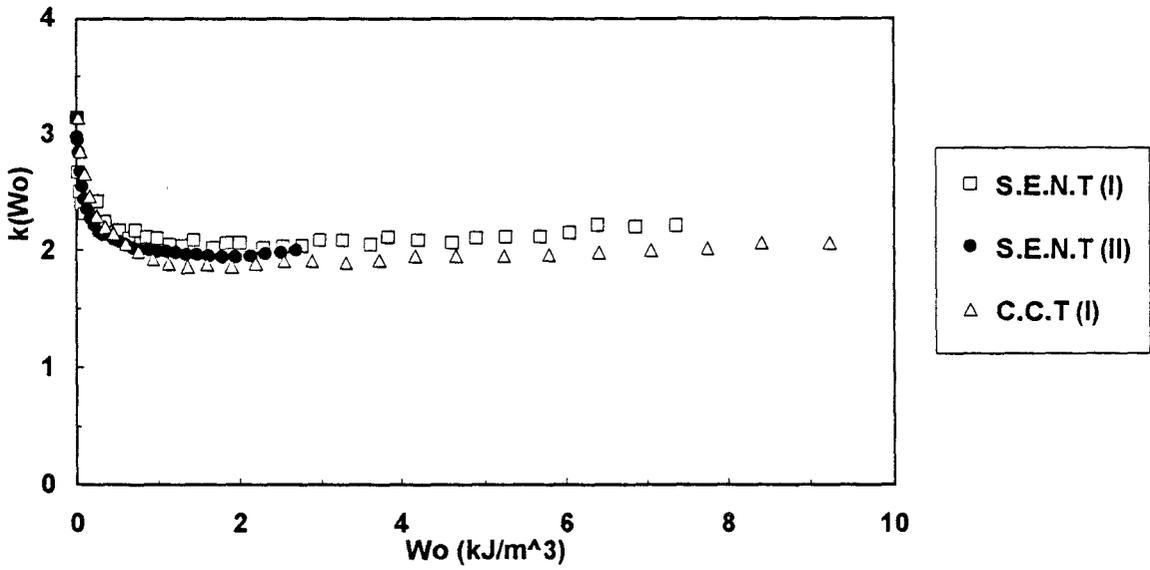


Fig.50 : Valeurs de $k(W_o)$ en fonction de W_o .

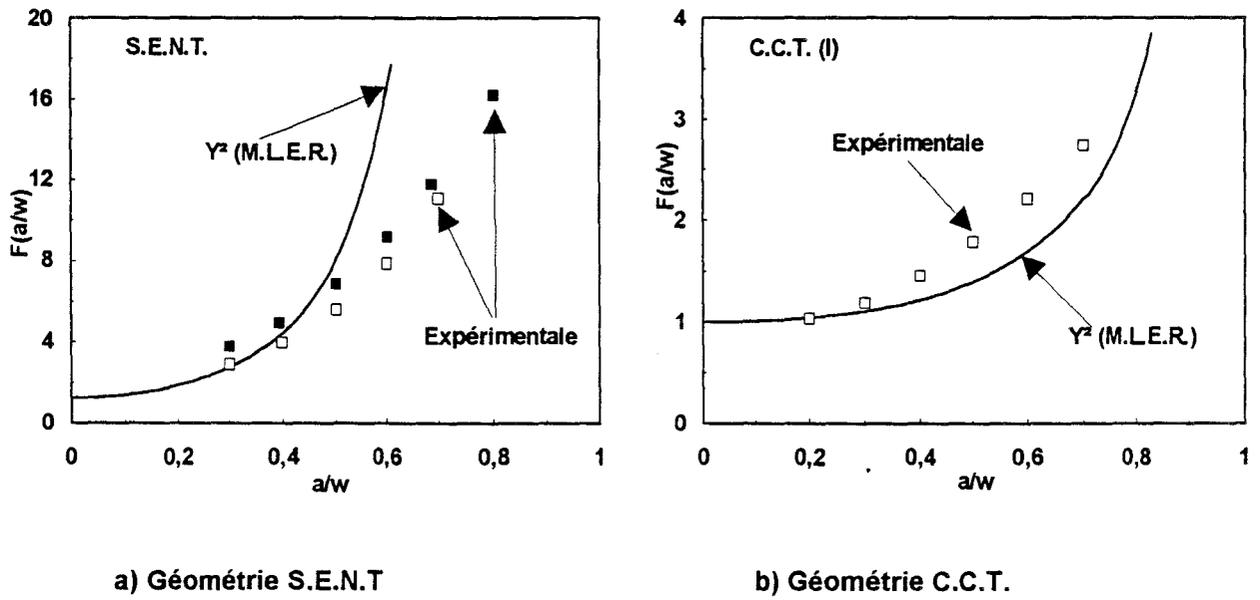


Fig.51 : Valeurs de $F(a/w)$ comparées à la fonction de calibration linéaire Y^2 .

(ii)-Géométrie C.P. :

Pour cette géométrie, le paramètre énergétique J est donné par:

$$J = H(W_0).cte \tag{III-145}$$

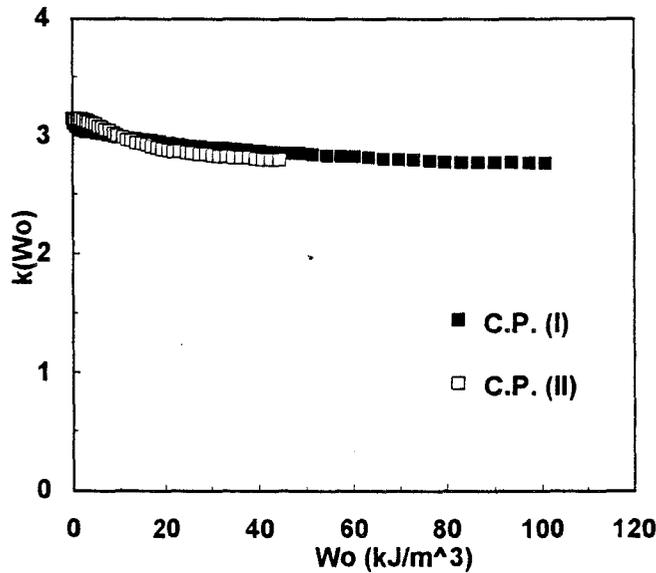


Fig.52 : Valeurs de $k(W_0)$ en fonction de W_0 . Géométrie C.P.

La figure 52 montre l'évolution du rapport normalisé $\frac{H(W_0)}{W_0} \cdot \frac{\pi}{h_0}$ en fonction de W_0 . Si l'on suppose ce rapport, définissant la fonction $k(W_0)$, constant et égal à π , cela entraîne que la fonction $\frac{H(W_0)}{W_0}$ est constante et égale à h_0 .

En tenant compte de ce résultat, l'équation (III-145) devient :

$$J = W_0 \cdot h_0 \tag{III-146}$$

Cette expression est similaire à la relation proposée par RIVLIN et THOMAS[24] pour ce type de géométrie, à savoir :

$$J = W_0 \cdot h \tag{III-147}$$

où h est la hauteur de l'échantillon testé.

Cette relation est valable pour des rapports $\frac{a}{h} \gg 1$.

En utilisant les relations (III-146) et (III-147), J est reporté sur un graphe (figure 53) en fonction de $W_o.h$ (produit de la densité d'énergie de déformation uniforme par la hauteur de l'échantillon).

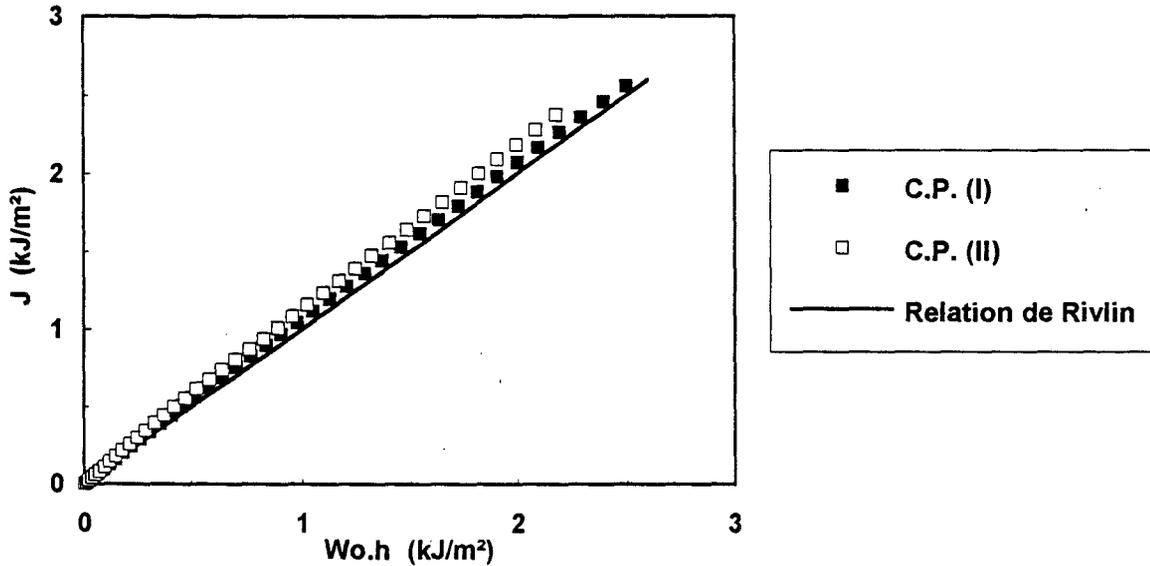


Fig.53 : Evolution de J en fonction de $W_o.h$. Géométrie C.P.

Un bon accord est observé entre nos points expérimentaux et la relation (III-147) proposée par RIVLIN et THOMAS dans le cas de l'éprouvette C.P. du type I (plus faible hauteur, $h = 30$ mm). Par contre, on constate une divergence entre nos points expérimentaux et la relation (III-147) dans le cas de l'éprouvette C.P. du type II (plus grande hauteur ($h = 60$ mm)).

Cette hauteur, trop importante par rapport à la largeur, nous place en dehors des hypothèses de cisaillement pur.

III-3/ CONCLUSION :

Cette première partie a permis de mettre en évidence l'influence de la géométrie sur le paramètre énergétique J.

Concernant la fonction de potentiel $k(W_o)$, les méthodes de dépouillement utilisées ont conduit globalement aux mêmes résultats.

L'identification de la fonction de géométrie $F\left(\frac{a}{w}\right)$ est difficile d'accès au niveau expérimental, à cause des difficultés liées, d'une part à l'influence du lissage des points expérimentaux lors du calcul de $\frac{dU_3^*}{dA}$ (ou $-\frac{dU_3}{dA}$) et de η (ce lissage est effectué sur un nombre faible de valeurs), et d'autre part, aux incertitudes de mesures des forces et des déplacements dans le début de la courbe de traction.

Nous avons obtenu, dans le cas des géométries S.E.N.T. et C.C.T. une fonction $k(W_0)$ unique qui décroît rapidement pour les faibles valeurs de W_0 et tend ensuite vers une valeur constante pour les grandes valeurs de W_0 .

Dans le cas de la géométrie C.P., $k(W_0)$ est sensiblement constant. Ceci est dû probablement au fait que la densité d'énergie de déformation uniforme est contrôlée par le déplacement dans ce cas et par la charge dans le cas des géométries S.E.N.T. et C.C.T..

D'après Andrews, la fonction $k(W_0)$ est liée aux effets de non-linéarité des comportements du matériau.

Nous pouvons caractériser cette non-linéarité, dans le cas d'un comportement élastique, en comparant l'aire sous la courbe charge-déplacement (U_3), à l'aire complémentaire (U_3^*).

Dans le cas d'un comportement linéaire, les deux aires sont égales, de ce fait, le rapport $\frac{U_3^*}{U_3}$ est égal à 1 quel que soit le niveau de chargement et quel que soit la géométrie utilisée. Dans le cas d'un comportement non linéaire, tout écart du terme $\frac{U_3^*}{U_3}$ par rapport à cette valeur traduit les effets de la non-linéarité du comportement .

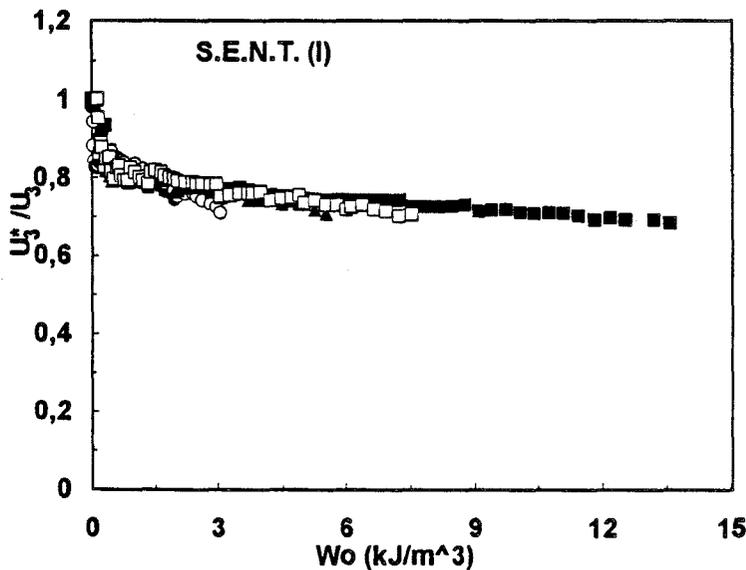


Fig.54 : Evolution du rapport $\frac{U_3^*}{U_3}$ en fonction de W_0 . Géométrie S.E.N.T.

Nos résultats expérimentaux sur l' E.P.D.M. montrent que ce rapport ne dépend pratiquement pas de la géométrie des éprouvettes utilisées (fig.54). De plus il évolue de la même façon que k en

fonction de la densité d'énergie de déformation uniforme W_0 .

Cette observation nous a conduit à proposer une méthode expérimentale originale basée sur la séparation de l'énergie U_3^* (ou U_3) afin d'identifier la fonction $k(W_0)$ et la fonction de géométrie

$$F\left(\frac{a}{w}\right).$$

DEUXIEME PARTIE : ETUDE EXPERIMENTALE

CHAPITRE IV : METHODE DE SEPARATION DE L'ENERGIE

CHAPITRE IV : METHODE DE SEPARATION DE L'ENERGIE.

IV-1/ INTRODUCTION

Partant de nos résultats expérimentaux obtenus sur l' E.P.D.M., nous proposons de séparer les effets de non-linéarité des effets imputables à la géométrie de l'échantillon dans l'expression de l'énergie potentielle U_3 (ou dans son énergie complémentaire U_3^*).

En utilisant la théorie généralisée d'Andrews, nous proposons, avec l'hypothèse de la réversibilité, un protocole expérimental basé sur la séparation de l'énergie, afin d'identifier la fonction $k(W_0)$ liée à la non-linéarité du comportement et la fonction $F\left(\frac{a}{w}\right)$ liée à la géométrie de l'échantillon testé.

Nous considérons le cas des géométries planes de dimensions finies, définies précédemment (S.E.N.T., C.C.T., C.P.). Nous supposons que le terme $\frac{dU}{dA} = \frac{dU_1}{dA} - \frac{dU_3}{dA}$ caractérise bien la résistance à l'amorçage de la fissure.

IV-2/ SEPARATION DE L'ENERGIE (METHODE 3).

Pour la détermination du paramètre énergétique J , nous distinguerons, comme précédemment, le cas des géométries uniaxiales (S.E.N.T., C.C.T.) pour lesquelles la mesure de $\frac{dU}{dA}$ se fait à charge constante $\left(\frac{dU}{dA}\right)_{p=cst} = \frac{dU_3^*}{dA}$, et le cas de la géométrie de cisaillement pur, pour laquelle la mesure de $\frac{dU}{dA}$ se fait à déplacement constant $\left(\frac{dU}{dA}\right)_{u=cst} = -\frac{dU_3}{dA}$. (U_3 est l'énergie potentielle et U_3^* son énergie complémentaire).

Puisque nous avons introduit l'hypothèse de la réversibilité, les quantités d'énergies U_3 et U_3^* dépendent globalement de la densité d'énergie de déformation uniforme W_0 et des rapports de dimensions $\left(\frac{a}{w}, \frac{a}{h} \dots\right)$ de l'échantillon donné :

$$U_3 = U_3\left(W_0, \frac{a}{w}, \frac{a}{h} \dots\right)$$

$$U_3^* = U_3^*\left(W_0, \frac{a}{w}, \frac{a}{h} \dots\right)$$

Partant des observations expérimentales obtenues sur l'E.P.D.M. (fig.54), nous supposons, pour une géométrie donnée, que les contributions respectives de W_0 et des rapports de dimensions, se font indépendamment l'une de l'autre. Par conséquent :

$$U_3 = H_1(W_0) \cdot G\left(\frac{a}{w}, \frac{a}{h} \dots\right) \quad (IV-148)$$

$$U_3^* = H_2(W_0) \cdot G\left(\frac{a}{w}, \frac{a}{h} \dots\right) \quad (IV-149)$$

où H_1 et H_2 dépendent uniquement de W_0 et $G\left(\frac{a}{w}, \frac{a}{h} \dots\right)$ est une fonction liée à la géométrie de l'échantillon donné.

Avec cette hypothèse et pour une géométrie donnée, le rapport U_3^*/U_3 s'exprime alors par :

$$\frac{U_3^*}{U_3} = \frac{H_2(W_0) \cdot G\left(\frac{a}{w}, \frac{a}{h} \dots\right)}{H_1(W_0) \cdot G\left(\frac{a}{w}, \frac{a}{h} \dots\right)} = \frac{H_2(W_0)}{H_1(W_0)} = L(W_0) \quad (IV-150)$$

Le paramètre énergétique J défini par :

$$J = \left(\frac{dU_1}{dA} - \frac{dU_3}{dA} \right) \Big|_{p=cste} = \frac{dU_3^*}{dA} \quad (IV-151)$$

ou :

$$J = \left(\frac{dU_1}{dA} - \frac{dU_3}{dA} \right) \Big|_{u=cste} = -\frac{dU_3}{dA} \quad (IV-152)$$

s'exprimera dans ce cas par :

à charge constante : $J = \frac{dU_3^*}{dA} = H_2(W_0) \cdot \frac{dG\left(\frac{a}{w}, \frac{a}{h} \dots\right)}{dA} \quad (IV-153)$

à déplacement constant : $J = -\frac{dU_3}{dA} = -H_1(W_0) \cdot \frac{dG\left(\frac{a}{w}, \frac{a}{h} \dots\right)}{dA} \quad (IV-154)$

En comparaison avec la relation (III-142), il vient :

$$k(W_0) \cdot W_0 \equiv \begin{cases} H_2(W_0) & \text{à charge constante} \\ -H_1(W_0) & \text{à déplacement constant} \end{cases} \quad (IV-155)$$

et

$$F\left(\frac{a}{w}\right) \cdot a \equiv \frac{dG\left(\frac{a}{w}\right)}{dA} \quad (IV-156)$$

La connaissance des fonctions H_1 (ou H_2) et de G , permet de déterminer la fonction de potentiel $k(W_0)$ et la fonction de géométrie $F\left(\frac{a}{w}\right)$.

IV-3/ IDENTIFICATION DE $k(W_0)$ ET DE $F(a/w)$:

* Géométrie S.E.N.T. et C.C.T.

a) Détermination expérimentale de $G\left(\frac{a}{w}\right)$:

La démarche est identique à celle proposée par SHAROBAM et LANDES [35] pour le calcul de η dans le cas d'un comportement élastoplastique basé sur la séparation de la charge (2ème Chapitre de la bibliographie).

Pour une densité d'énergie de déformation uniforme W_0 donnée et pour deux longueurs de fissures a_i et a_j différentes, on définit le rapport R_{ij} par :

$$R_{ij} = \frac{U_3^* \left(W_0, \frac{a_i}{w} \right) \Big|_{W_0}}{U_3^* \left(W_0, \frac{a_j}{w} \right) \Big|_{W_0}} \quad (IV-157)$$



Les figures 54 et 55 montrent l'évolution du paramètre de séparation, R_{ij} , en fonction de W_0 , pour les deux géométries S.E.N.T et C.C.T du type I.

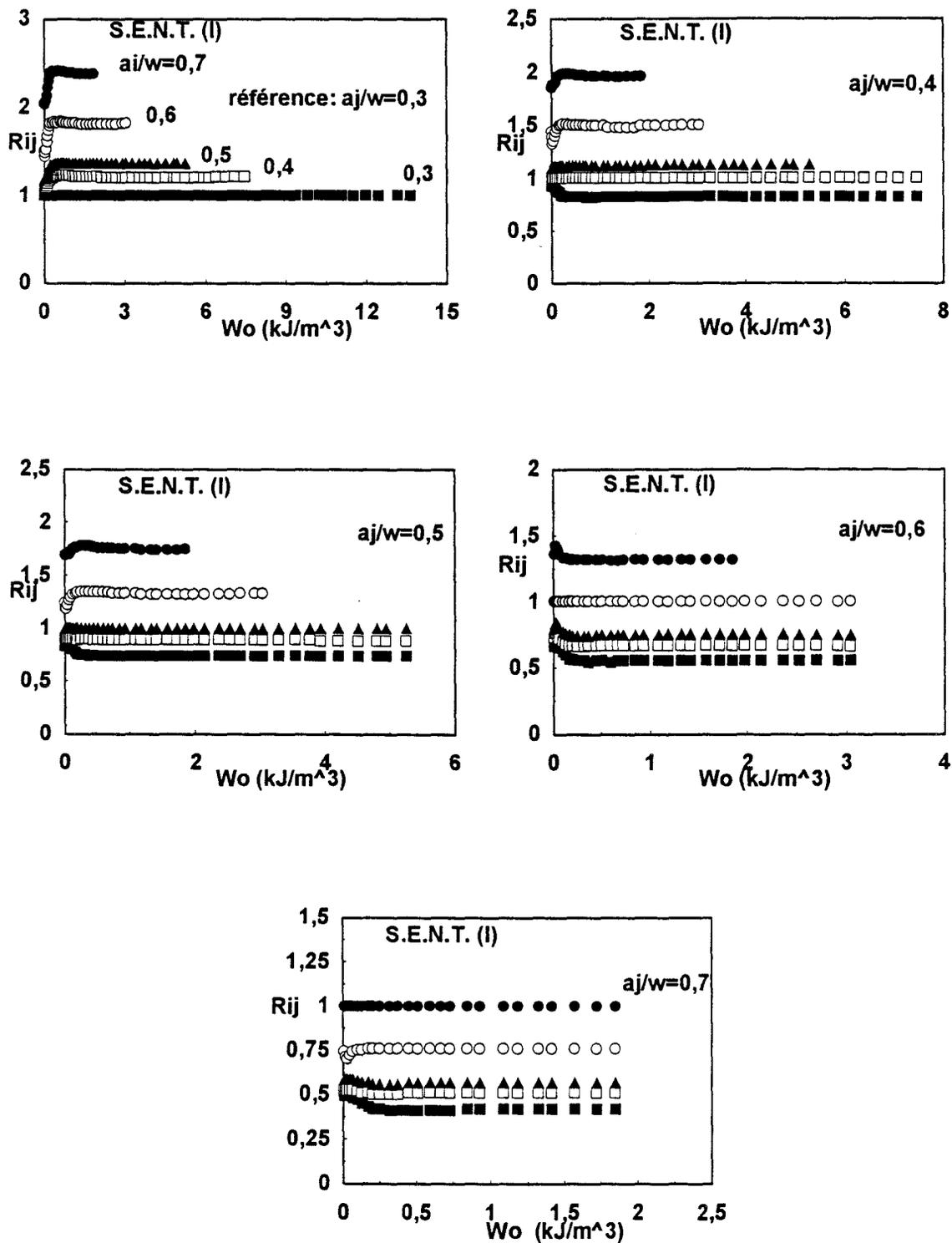


Fig.54 : Paramètre de séparation, R_{ij} , en fonction de W_o . Géométrie S.E.N.T.

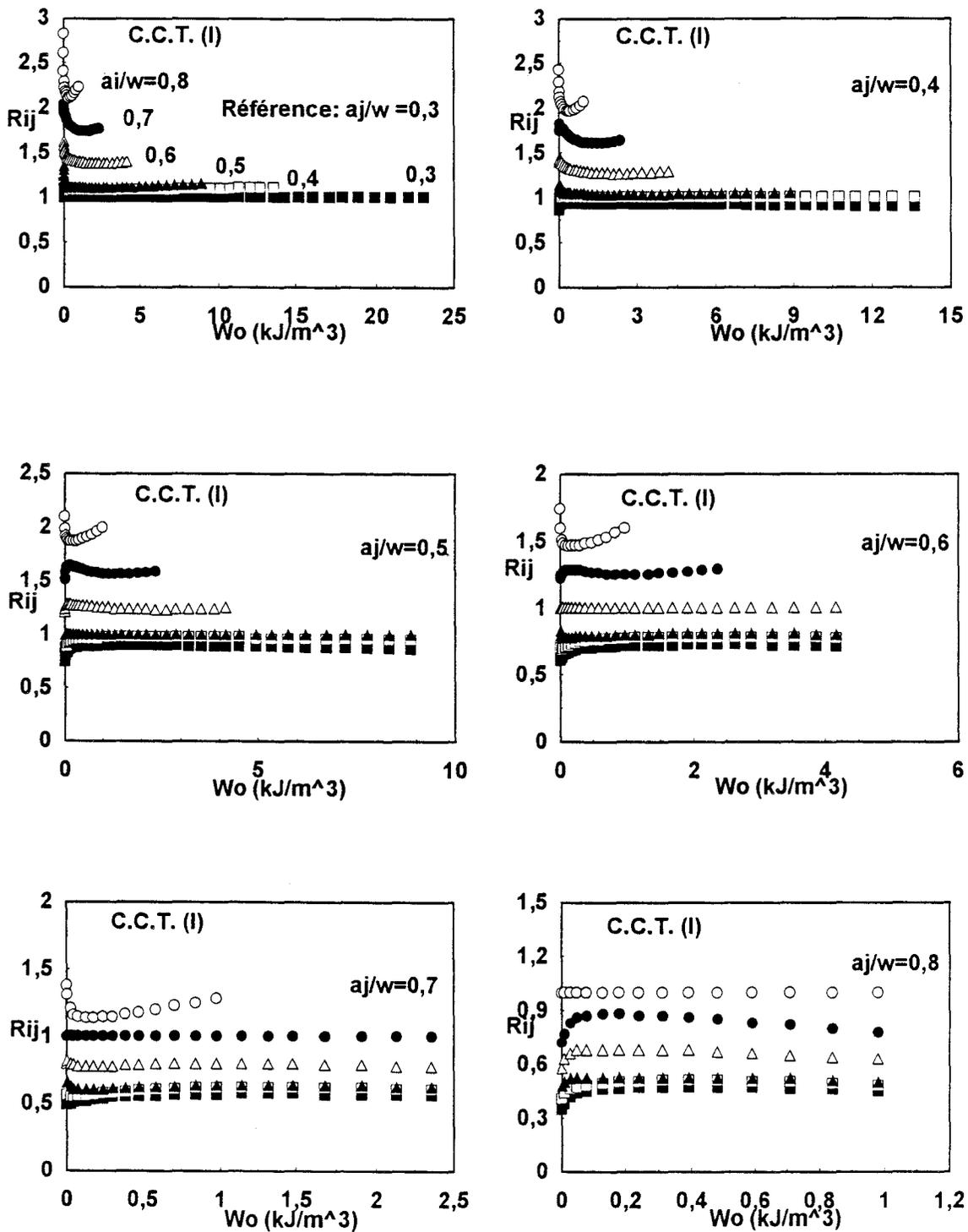


Fig.55 : Paramètre de séparation, R_{ij} , en fonction de W_o . Géométrie C.C.T.

Nous pouvons constater que le rapport R_{ij} est très peu dépendant de W_0 , et peut être considéré constant pour une référence donnée. Nous déduisons, donc, que ce paramètre est indépendant de W_0 . Ceci confirme notre hypothèse de séparation de l'énergie (équation IV-156).

En introduisant cette hypothèse dans la relation (IV-157), nous pouvons écrire:

$$R_{ij} = \frac{H_2(W_0) \cdot G\left(\frac{a_i}{w}\right)}{H_2(W_0) \cdot G\left(\frac{a_j}{w}\right)} = \frac{G\left(\frac{a_i}{w}\right)}{G\left(\frac{a_j}{w}\right)} \quad (IV-158)$$

Ce rapport ne dépend que de a_i/w et a_j/w (figures 54 et 55). Pour a_j/w fixé, on peut donc calculer la fonction $G\left(\frac{a_i}{w}\right)$ à partir de l'expression suivante :

$$R_{ij}(a_i, a_j) = A_j \cdot G\left(\frac{a_i}{w}\right) \quad (IV-159)$$

avec $A_j = \left[G\left(\frac{a_j}{w}\right) \right]^{-1}$ = constante pour une longueur de fissure a_j fixée.

Pour déterminer une expression du paramètre R_{ij} , nous avons reporté, sur un graphe bilogarithmique, les valeurs moyennes de R_{ij} , obtenues pour chaque a_i/w donné et pour chaque référence a_j/w , en fonction de la longueur du ligament normalisé $\frac{b_i}{w} \left(= \frac{w - a_i}{w} \right)$, (figures 56a et 56b).

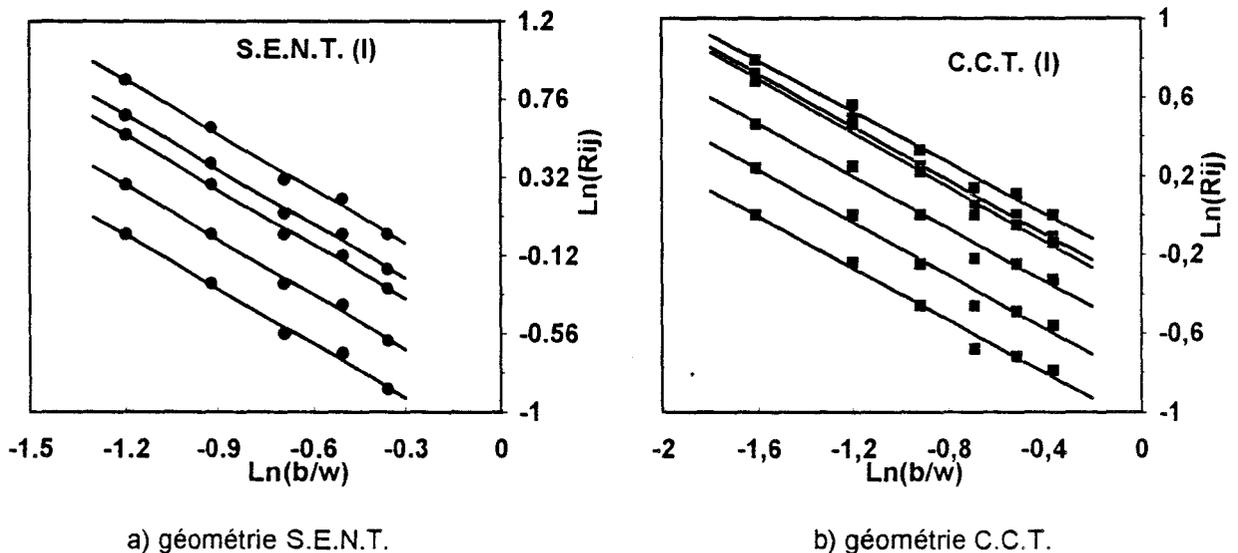


Fig.56 : Paramètre de séparation R_{ij} en fonction de la longueur du ligament normalisée b/w .

Nous pouvons constater un bon ajustement des points expérimentaux sur des droites. Par lissage (moindres carrés), nous obtenons une expression de R_{ij} en fonction de $\frac{b_i}{w}$ sous la forme :

$$R_{ij} = C_j \left[\frac{b_i}{w} \right]^{m_j} = C_j \left[1 - \frac{a_i}{w} \right]^{m_j} \quad (IV-160)$$

où C_j et m_j sont des constantes de la régression linéaire (avec un coefficient de corrélation moyenne $\bar{R}^2 = 0,994$).

Par combinaisons des relations (IV-159) et (IV-160), nous obtenons une expression de G en fonction de a_i/w , sous la forme:

$$G\left(\frac{a_i}{w}\right) = C \left(1 - \frac{a_i}{w} \right)^{m_j} \quad (IV-161)$$

où C est donné par : $C = \frac{C_j}{A_j}$

Les valeurs des m_j , de C_j et de C pour les géométries S.E.N.T. (I) et C.C.T. (I), sont données dans le tableau (VI) suivant:

Géométrie S.E.N.T. (I)			
b_j/w	m_j	C_j	$C = C_j/[b_j/w]^{-m_j}$
0,7	-1,023	0,700	1,008
0,6	-1,019	0,577	0,971
0,5	-1,025	0,510	1,037
0,4	-1,024	0,385	0,984
0,3	-1,021	0,293	1,001
Géométrie C.C.T. (I)			
b_j/w	m_j	C_j	$C = C_j/[b_j/w]^{-m_j}$
0,7	-0,646	0,799	0,981
0,6	-0,679	0,693	0,981
0,5	-0,686	0,665	1,069
0,4	-0,665	0,548	1,008
0,3	-0,671	0,430	0,964
0,2	0,661	0,345	1,000

Tableau VI : Récapitulatif des valeurs de m_j , C_j et de C .

Nous constatons que les valeurs de C sont proches de 1, et que le paramètre m_j peut être supposé constant. Nous déduisons, donc, une expression de la fonction $G(a/w)$ sous la forme :

$$G\left(\frac{a}{w}\right) = \left[\frac{b}{w} \right]^m = \left[1 - \frac{a}{w} \right]^m \quad (IV-162)$$

avec m une moyenne des valeurs des m_j .

En introduisant cette expression dans l'équation (IV-156), nous obtenons la valeur de la fonction H_2 pour chaque W_o donnée:

$$H_2(W_o) = \frac{U_3^*(W_o, a/w)}{[1 - a/w]^m} \quad (IV-163)$$

b) Détermination de $k(W_o)$ et de $F(a/w)$

L'évaluation du paramètre énergétique J est obtenue en différenciant l'expression (IV-148), à charge constante, par rapport à $dA (=2B.da)$:

$$J = \frac{dU_3^*}{dA} = H_2(W_o) \cdot \frac{dG(a/w)}{dA} \quad (IV-164)$$

avec $\frac{dG(a/w)}{dA} = \left[-\frac{m}{B \cdot w} \right] \cdot \left[1 - \frac{a}{w} \right]^{m-1}$

A partir des relations (IV-155) et (IV-156), nous en déduisons:

$$k(W_o) \equiv \frac{H_2(W_o)}{W_o} \quad (IV-165)$$

$$F\left(\frac{a}{w}\right) \equiv \frac{1}{a} \cdot \frac{dG(a/w)}{2 \cdot B \cdot da} \quad (IV-166)$$

Les figures (57a) et (57b) montrent l'évolution du rapport $H(W_o)/U_o$ en fonction de W_o pour les géométries S.E.N.T. (I) et C.C.T. (I). (où U_o est donné par $U_o = W_o \cdot \text{volume}$).

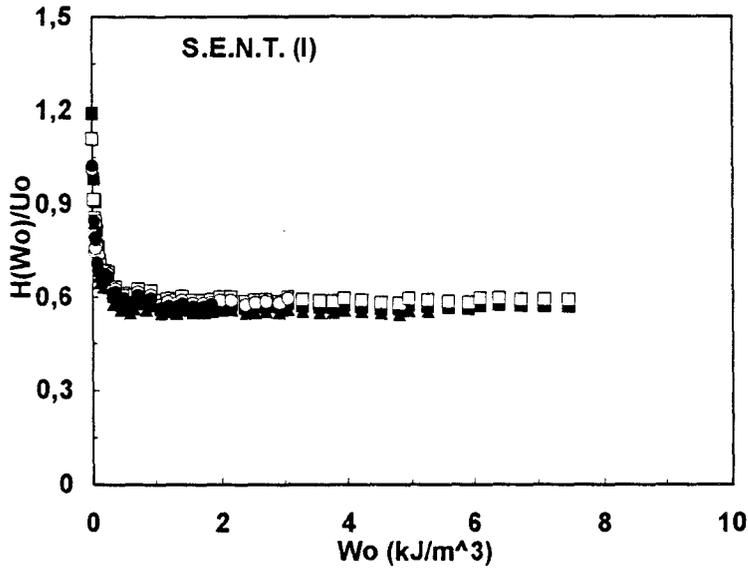


Fig.57a : Evolution du rapport $(H(W_o)/U_o)$ en fonction de W_o . Géométrie S.E.N.T.

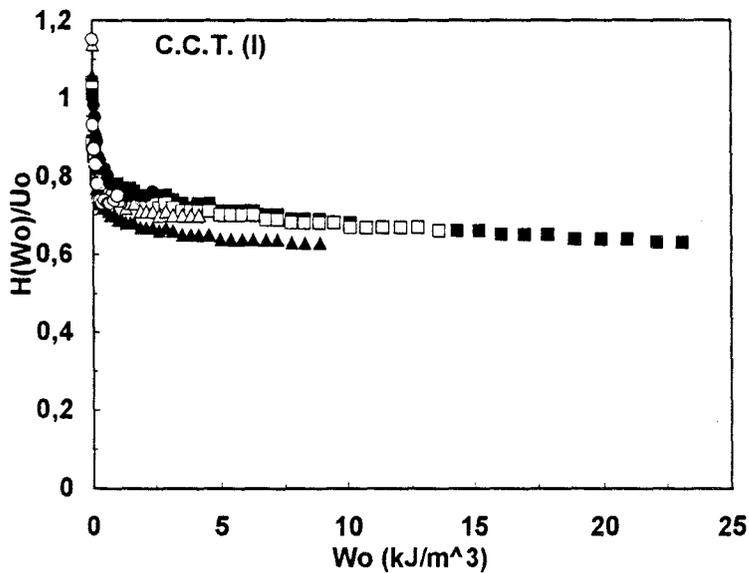


Fig.58b : Evolution du rapport $(H(W_o)/U_o)$ en fonction de W_o . Géométrie C.C.T.

L'allure de ce rapport est semblable à l'évolution de la fonction $k(W_o)$ observé précédemment. En normalisant ce rapport à π lorsque W_o tend vers 0, nous pouvons en déduire une expression de la fonction $k(W_o)$ sous la forme:

$$\begin{aligned}
 k(W_o) &= \frac{H_2(W_o)}{U_o} \cdot \pi & (IV-167) \\
 &= \frac{H_2(W_o)}{W_o} \cdot \frac{\pi}{\text{Volume}}
 \end{aligned}$$

La fonction $F(a/w)$ sera donnée, donc, par l'expression suivante:

$$F\left(\frac{a}{w}\right) = \frac{1}{a} \cdot \frac{dG\left(\frac{a}{w}\right)}{2.B.da} \cdot \frac{\text{Volume}}{\pi} \quad (\text{IV-168})$$

(i)- Evolution de $k(W_0)$

Les figures 59 et 60 montrent les fonctions $k(W_0)$ obtenues par cette méthode pour les deux géométries (S.E.N.T. et C.C.T.).

Dans le cas des éprouvettes S.E.N.T., les fonctions $k(W_0)$ sont semblables pour les deux types d'échantillons choisis (S.E.N.T. (I) et S.E.N.T. (II)). Par contre, ce n'est pas le cas pour les éprouvettes C.C.T.. Ceci est certainement dû au matériau, l'éprouvette C.C.T. (II) ayant été tirée d'une plaque dont la fabrication a été postérieure à celle de C.C.T. (I).

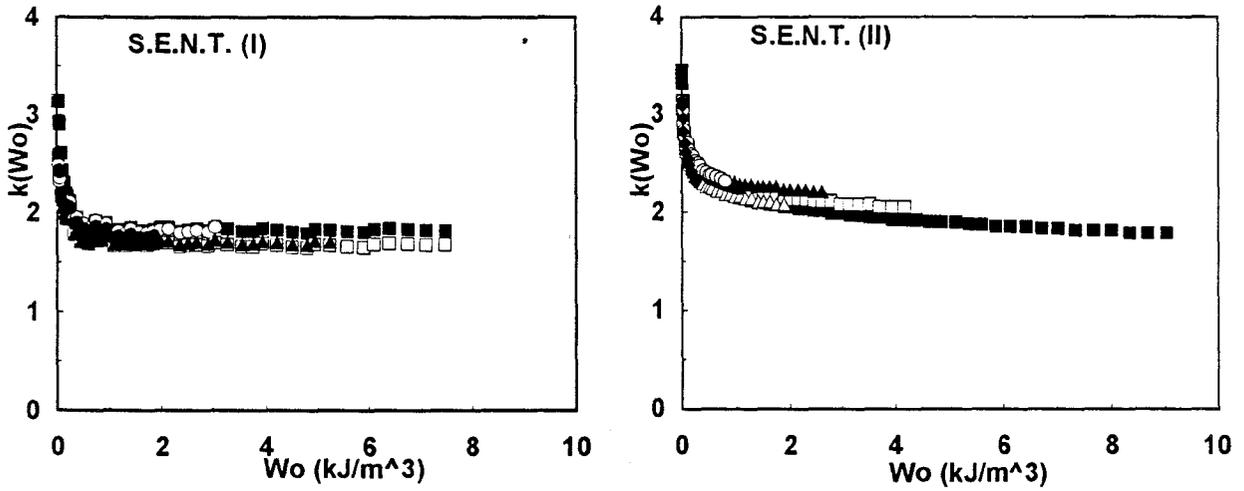


Fig.59 : Valeurs de $k(w_o)$ en fonction de W_o . Géométrie S.E.N.T., (Méthode 3)

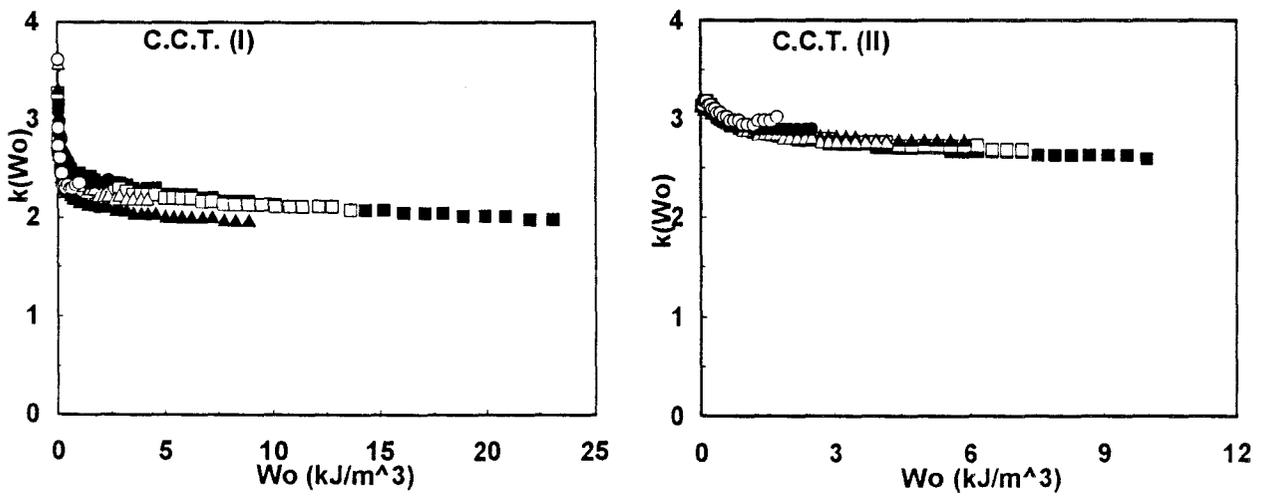


Fig.60 : Valeurs de $k(w_o)$ en fonction de W_o . Géométrie C.C.T., (Méthode 3)

(ii)- Evolution de $F(a/w)$

Nous avons comparé les résultats en terme de $F(a/w)$, obtenus par la méthode de séparation de l'énergie, avec la fonction de calibration linéaire, Y^2 , issue de la référence [49] (figures 61 et 62).

- Pour la géométrie S.E.N.T., nous avons représenté, sur le même graphe (fig.61), les valeurs de $F(a/w)$ correspondant aux deux types d'éprouvettes choisies (S.E.N.T. (I) et S.E.N.T. (II)) et les deux formes de la fonction de calibration linéaire(avec flexion et sans flexion).

Les deux types d'éprouvettes testées conduisent aux mêmes résultats pour des valeurs de a/w comprise entre 0,3 et 0,7. Mais on observe une divergence de ces valeurs avec les deux expressions de Y^2 . Il faut noter que ces fonctions de calibration linéaire correspondent à un rapport h/w (hauteur/largeur) égale à:

- $h/w = 1$ pour l'expression avec flexion
- $h/w = \infty$ pour l'expression sans flexion

et que pour nos éprouvettes ce rapport est égal à 5.

- En ce qui concerne la géométrie C.C.T., les résultats de $F(a/w)$, obtenus par cette méthode, sont proche de la fonction de calibration linéaire Y^2 , pour des valeurs de a/w comprises entre 0,4 et 0,7 (fig.62). Ceci est vrai pour les deux types d'éprouvettes testées (C.C.T. (I) et C.C.T. (II)). Ceci indique, pour ce type d'éprouvette, que la méthode que nous proposons semble être plus précise et conduit à moins d'incertitudes que les deux précédentes. Cela indique aussi, qu'il n' y a pas d'influence de la non linéarité du matériau sur F , cette non linéarité étant rigoureusement pris en compte par $k(W_0)$. C'est une conclusion qui permet de penser que la divergence observée pour l'éprouvette S.E.N.T. entre F et la fonction de calibration Y^2 serait imputable à des effets de dissymétrie (flexion).

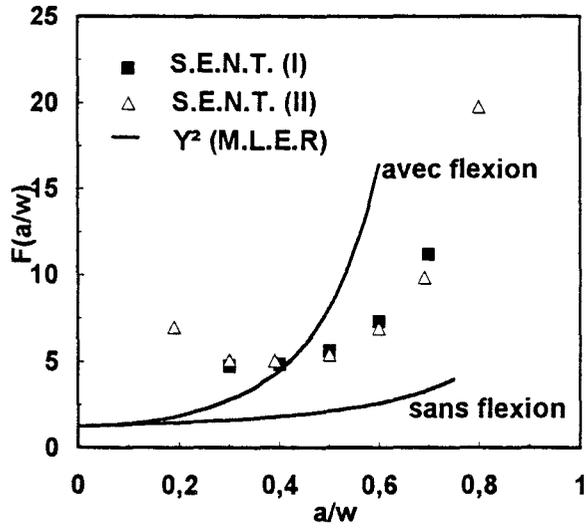


Fig.61 : Comparaison de $F(a/w)$, obtenue expérimentalement, avec la fonction de calibration linéaire Y^2 . Géométrie S.E.N.T.

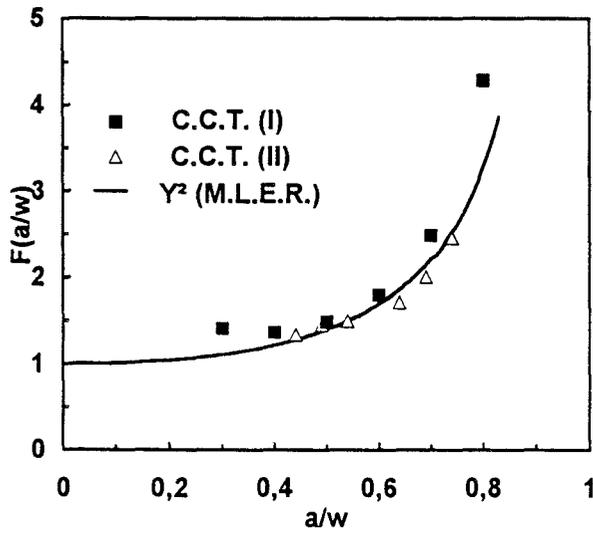


Fig.62 : Comparaison de $F(a/w)$, obtenue expérimentalement, avec la fonction de calibration linéaire Y^2 . Géométrie C.C.T.

IV-3-2/ Géométrie C.P.

Dans ce cas de géométrie, et comme nous l'avons cité auparavant, la densité d'énergie de déformation uniforme W_0 est contrôlée par le déplacement. Par conséquent nous avons utilisé, pour l'identification de $k(W_0)$ et de $F(a/w)$, la séparation de l'énergie potentielle U_3 (équation IV-156).

A W_0 constant, nous définissons le paramètre de séparation R_{ij} , pour deux longueurs de fissures normalisées, (a_i/w et a_j/w), par:

$$R_{ij} \Big|_{w_0} = \frac{U_3 \left(W_0, \frac{a_i}{w} \right) \Big|_{w_0}}{U_3 \left(W_0, \frac{a_j}{w} \right) \Big|_{w_0}} \quad (IV-169)$$

La figure (63) montre l'évolution de ce paramètre en fonction de W_0 , le paramètre R_{ij} est sensiblement constant sauf pour la dernière référence où l'influence de W_0 semble importante (effet de bord).

En introduisant l'hypothèse de séparation de l'énergie potentielle, U_3 , (équation IV-156) dans la relation (IV-169), nous obtenons une expression de R_{ij} en fonction de la fonction de géométrie G :

$$R_{ij} = \frac{H_1(W_0) \cdot G\left(\frac{a_i}{w}\right)}{H_1(W_0) \cdot G\left(\frac{a_j}{w}\right)} = \frac{G\left(\frac{a_i}{w}\right)}{G\left(\frac{a_j}{w}\right)} \quad (IV-170)$$

En reportant les valeurs du paramètre de séparation R_{ij} , dans un graphe logarithmique, en fonction de la largeur du ligament normalisée, (b_i/w), (figure 64), nous obtenons un bon ajustement de nos points expérimentaux sur des droites. Par lissage (moindres carrés), on en déduit une expression de R_{ij} sous la forme:

$$R_{ij} = C_j \cdot \left[\frac{b_i}{w} \right]^{m_j} \quad (IV-171)$$

C_j et m_j sont des constantes de la régression linéaire (tableau V) (avec un coefficient de corrélation $\bar{R}^2 = 0,996$).

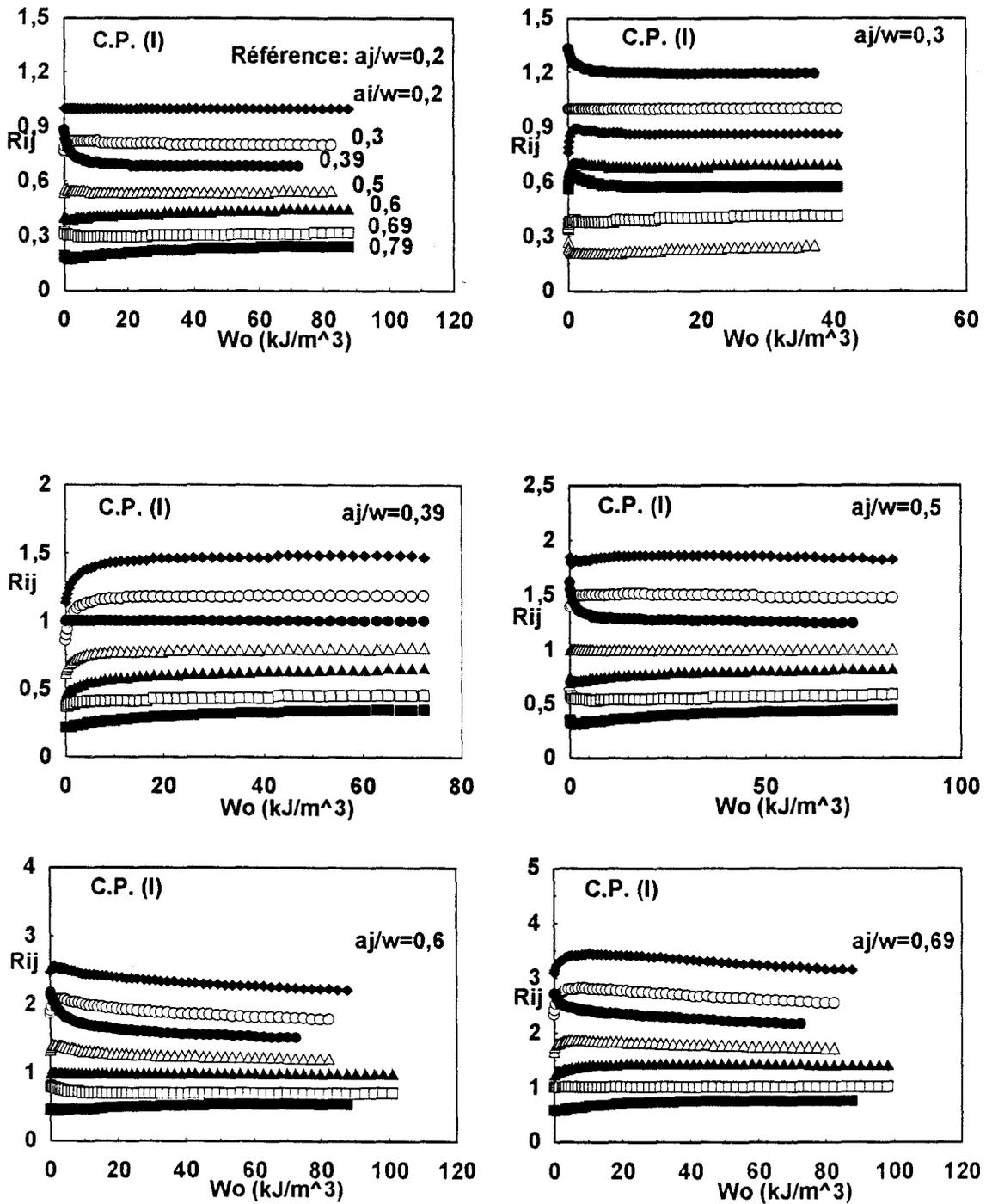


Fig.63 : Paramètre de séparation, R_{ij} , en fonction de W_o . Géométrie C.P.

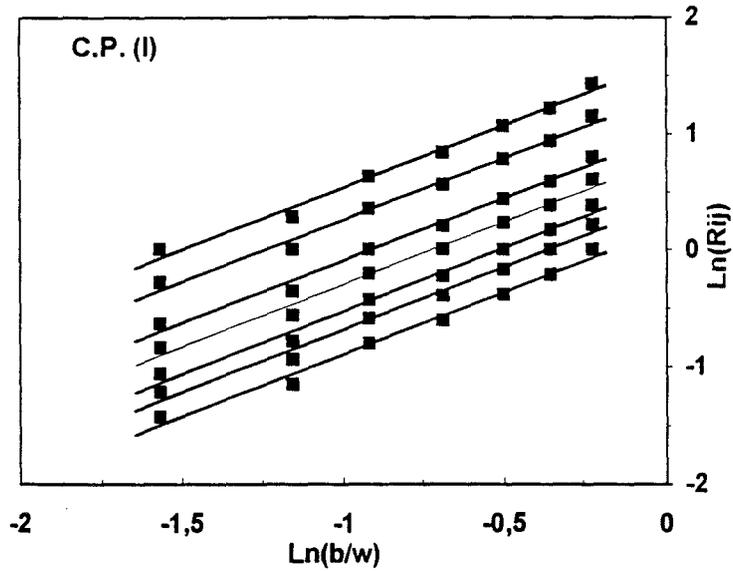


Fig.64 : Paramètre de séparation, R_{ij} , en fonction de la longueur du ligament normalisée, b/w . Géométrie C.P.

Géométrie C.P. (I)			
b_j/w	m_j	C_j	$C = C_j/[1-a_j/w]^{-m_j}$
0,80	1,057	1,178	0,935
0,70	1,062	1,465	1,009
0,61	1,073	1,735	1,016
0,50	1,065	2,160	1,032
0,40	1,065	2,646	0,997
0,31	1,062	3,745	1,096
0,21	1,068	4,984	0,928

Tableau V : Récapitulatif des valeurs de m_j , C_j et de C

A partir des relations (IV-169) et (IV-170), nous pouvons en déduire, comme pour les géométries S.E.N.T. et C.C.T., une expression de la fonction de géométrie, G, sous la forme:

$$G\left(\frac{a}{w}\right) = \left[1 - \frac{a}{w}\right]^{m_j} \tag{IV-172}$$

Où m est une valeur moyenne des m_j , C est donnée par: $C = \frac{C_j}{\left[\frac{b_j}{w}\right]^{m_j}}$

Par combinaison des relations (IV-148) et (IV-172), nous obtenons une expression de la fonction $H_1(W_0)$:

$$H_1(W_o) = \frac{U_3(W_o, a/w)}{[1 - a/w]^m} \quad (IV-173)$$

La figure (65) montre l'évolution du rapport $\frac{H_1(W_o)}{W_o}$ en fonction de W_o .

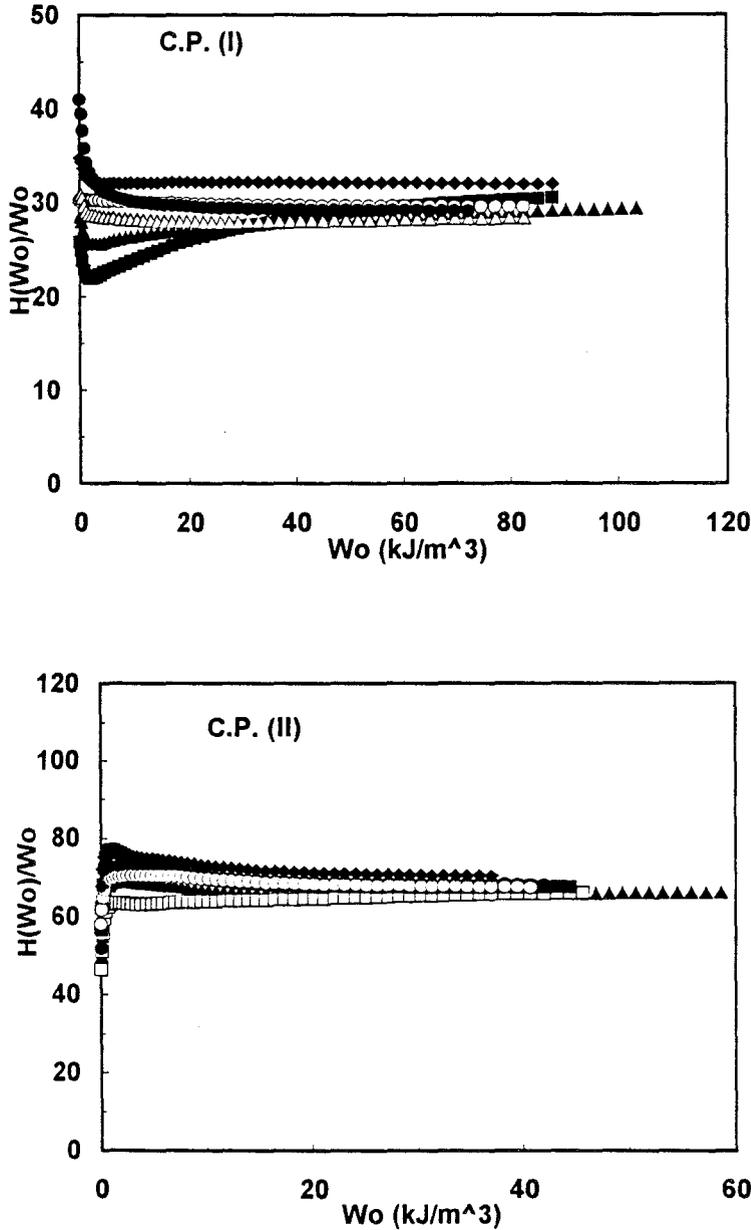


Fig.65 : Valeurs de $H(W_o)/W_o$ en fonction de W_o . Géométrie C.P.

Nous pouvons constater que, pour des grandes valeurs de W_o , ce rapport est constant, et que cette constante est proche de la hauteur de l'échantillon testé ($h=30$ mm pour C.P. (I) et $h=60$ pour C.P. (II)). Toutefois une dispersion est observée pour des faibles valeurs de W_o . (Pour les éprouvettes C.P. (II), les différentes phases du dépouillement sont donnés en annexe 3).

TROISIEME PARTIE : DISCUSSIONS - CONCLUSIONS

CHAPITRE V : ANALYSE DES RESULTATS ET CONCLUSIONS

INTRODUCTION

L'étude expérimentale a consisté en l'identification de la fonction de potentiel $k(W_0)$, qui prend en compte les effets de la non-linéarité du comportement du matériau ainsi que de la fonction de calibration $F(a/w)$ liée aux rapports de dimensions de l'échantillon utilisé. Cette identification est basée sur la connaissance du paramètre énergétique J défini par :

$$J = \left. \frac{dU_1}{dA} - \frac{dU_3}{da} \right|_{P=Cste} = \frac{dU_3^*}{dA}$$

ou

$$J = \left. \frac{dU_1}{dA} - \frac{dU_3}{dA} \right|_{U=Cste} = - \frac{dU_3}{dA}$$

Dans un premier temps, nous avons utilisé pour la détermination de J , les deux méthodes classiques : méthodes de compliance de BEGLEY - LANDES [36] et la méthode de TURNER et SUMPTER [30] (J est proportionnel à l'énergie dépensée), pour simplifier nous avons appelé cette méthode, méthode η référence au coefficient de proportionnalité entre J et l'énergie dépensée.

Il faut rappeler l'hypothèse fondamentale introduite au début de cette étude concernant la réversibilité du comportement, avec une relation charge-déplacement non linéaire.

Nous avons supposé pour la détermination de $F(a/w)$ que la fonction $k(W_0)$ tend vers la valeur π lorsque la densité d'énergie de déformation uniforme W_0 tend vers 0 (tous les matériaux ont un comportement linéaire quand W_0 tend vers 0).

Dans un deuxième temps, et à partir de nos résultats expérimentaux sur l' E.P.D.M., nous avons développé une méthode expérimentale originale basée sur des concepts énergétiques dont l'intérêt est de séparer les effets de la géométrie, des effets de la non-linéarité du comportement dans l'énergie dépensée U_3 (ou son énergie complémentaire U_3^*).

Dans cette dernière partie, nous comparerons les résultats obtenus par la méthode que nous avons proposée, avec ceux obtenus par la méthode du pseudo-compliance et la méthode de η .

Nous cherchons par cette comparaison, à vérifier la validité de notre méthode.

Nous discuterons ensuite de l'existence de la fonction $k(W_0)$ en appliquant, l'analyse de WILLIAMS[46], pour l'estimation du rayon de zone plastique par la théorie généralisée d'ANDREWS.

Finalement, la valeur critique du paramètre énergétique J obtenu pour les géométries S.E.N.T. et C.C.T. est comparée à la valeur critique J_c de la géométrie C.P.

Afin de confirmer la validité de la méthode que nous avons proposée, Nous l'appliquerons à des résultats expérimentaux extraits de la littérature pour des matériaux caoutchoutiques [24, 52], et à un matériau hétérogène viscoélastique (le propergol).

CHAPITRE V : ANALYSE DES RESULTATS-CONCLUSIONS

V-1/ Comparaison entre la méthode de pseudo-compliance et la méthode de séparation de l'énergie

V-1-1/ Fonction de calibration expérimentale

* Géométrie C.C.T.

Nous avons reporté sur la figure 66, les valeurs expérimentales de $F(a/w)$, obtenues par les deux méthodes (méthode de la séparation de l'énergie et celle de pseudo-compliance). Nous avons aussi reporté sur ce même graphe la fonction de calibration linéaire Y^2 associée, issue de la référence [49]. L'expression de cette calibration linéaire est donnée par l'équation (III-139).

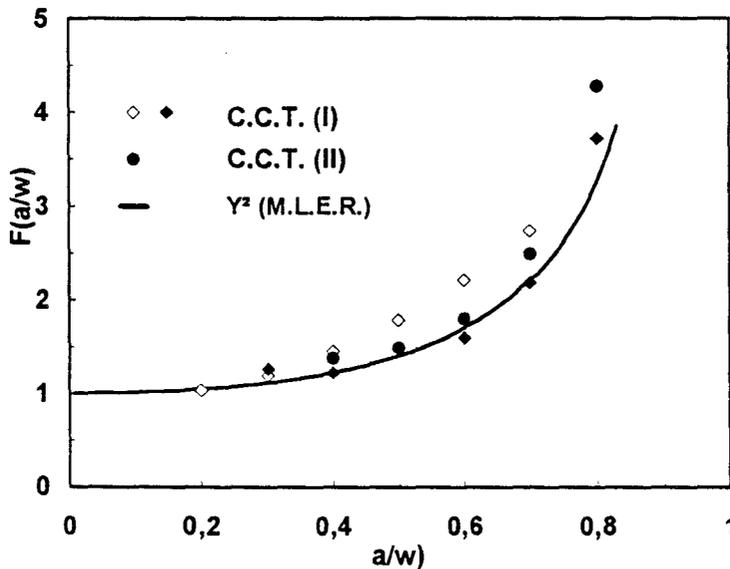


Fig.66 : Valeurs de $F(a/w)$ en fonction de a/w . Géométrie C.C.T.

(●,●): Méthode de séparation de l'énergie, (◇): méthode de pseudo-compliance

La méthode de séparation de l'énergie donne des résultats très proches de la fonction de calibration linéaire $Y^2(a/w)$. Ceci montre que la non-linéarité du comportement n'affecte pas la fonction de géométrie $F(a/w)$, comme pourrait le laisser supposer la méthode de pseudo-compliance. La divergence observée des résultats obtenus par cette méthode est due certainement au lissage des points expérimentaux ($U^*/B, a$) par des fonctions mathématiques qui n'ont pas de signification physique.

* Géométrie S.E.N.T.

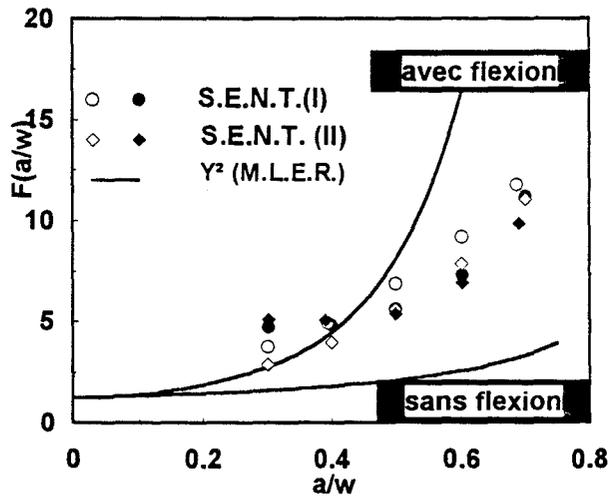


Fig.67 : Valeurs de F(a/w) en fonction de a/w. Géométrie S.E.N.T.

(•,•): Méthode de séparation de l'énergie, (◊,◊): méthode de pseudo-compliance

Pour ce cas de figure, nous constatons que, pour les deux types de dimensions (S.E.N.T. I et II), la méthode proposée conduit à des résultats concordants alors que la méthode de compliance fait apparaître une plus grande divergence.

Ceci est lié, vraisemblablement comme pour l'éprouvette CCT, au choix arbitraire des fonctions de lissage.

Sur la figure 67, l'évolution générale de la fonction de calibration obtenue pour cette configuration d'éprouvette est identique.

Par ailleurs, pour les faibles longueurs de fissures, les valeurs obtenues par la méthode de séparation dans l'énergie complémentaire sont vraisemblablement surestimées.

Ce résultat était cependant prévisible si l'on analyse l'évolution des rapports R_{ij} pour ce cas de figure (fig.54).

En effet, pour les faibles longueurs de fissures, ce rapport supposé constant pour une référence donnée et une longueur de fissure donnée, est en réalité dépendant de la densité d'énergie de déformation.

Ceci indique donc que le domaine de validité est restreint aux rapports a/w supérieur à 0.3.

Mais une divergence est observée lorsque l'on compare cette fonction de géométrie avec les deux expressions de la calibration linéaire $Y^2(a/w)$, celle tenant compte de la flexion et qui est donnée par l'équation (III-138) et celle sans flexion et qui a pour expression :

$$Y\left(\frac{a}{w}\right) = \frac{5}{\left[20 - 13\left(\frac{a}{w}\right) - 7\left(\frac{a}{w}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \quad (V-174)$$

Ceci est certainement dû à la dissymétrie de cette géométrie. D'ailleurs, nous pouvons constater sur la figure 67 que nos points expérimentaux sont situés entre les deux courbes de la calibration linéaire. Il faut signaler que la fonction linéaire tenant compte de la flexion, correspond à un rapport $h/w = 1$ et que dans le cas de nos éprouvettes S.E.N.T., ce rapport est égal à 5.

V-1-2/ Fonction de potentiel $k(W_0)$.

La figure 68 montre l'évolution de la fonction de potentiel $k(W_0)$, obtenue par les deux méthodes (méthode de séparation de l'énergie et la méthode des pseudo-compliance), en fonction de la densité d'énergie de déformation uniforme W_0 et ceci pour les deux types d'éprouvettes testés des géométries S.E.N.T. et C.C.T.

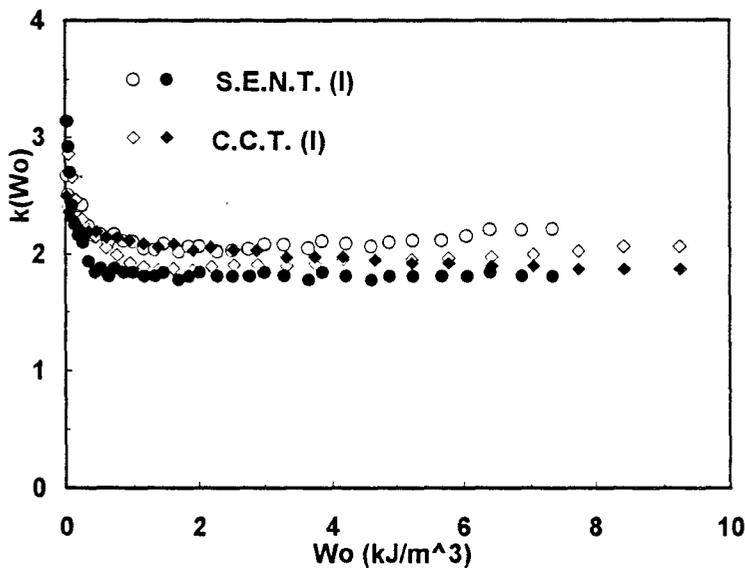


Fig.68 : Comparaison des valeurs de $k(W_0)$ obtenus pour les deux géométries S.E.N.T. et C.C.T. (\bullet , \blacklozenge): méthode de la séparation de l'énergie, (\circ , \diamond): méthode de pseudo-compliance

Nous constatons que l'évolution de la fonction $k(W_0)$ est identique pour les deux méthodes et pour les deux types de géométries. Cette fonction varie sensiblement pour des valeurs de W_0 proche de zéro pour tendre vers une valeur asymptotique lorsque W_0 croît. L'allure générale obtenue est identique à l'évolution du rapport U^*_3/U_3 (fig.54), ce qui indique que $k(W_0)$ est lié au comportement du matériau d'une part et au type de chargement d'autre part.

V-1-3/ Cas de l'éprouvette de cisaillement pur (C.P.)

La méthode de séparation de l'énergie que nous avons développée, donne des résultats différents pour cette géométrie par rapport aux géométries précédentes.

Le paramètre énergétique J ne dépend pratiquement pas de la géométrie. Ceci a été déjà observé pour la méthode de pseudo-compliance (chapitre III).

Nous avons représenté sur les figures 69a et 69b l'évolution de J en fonction du produit de la densité d'énergie de déformation uniforme W_o par la hauteur ($W_o.h$). Et ceci pour les deux types d'éprouvettes testés C.P. (I) ($h = 30$ mm) et C.P. (II) ($h = 60$ mm).

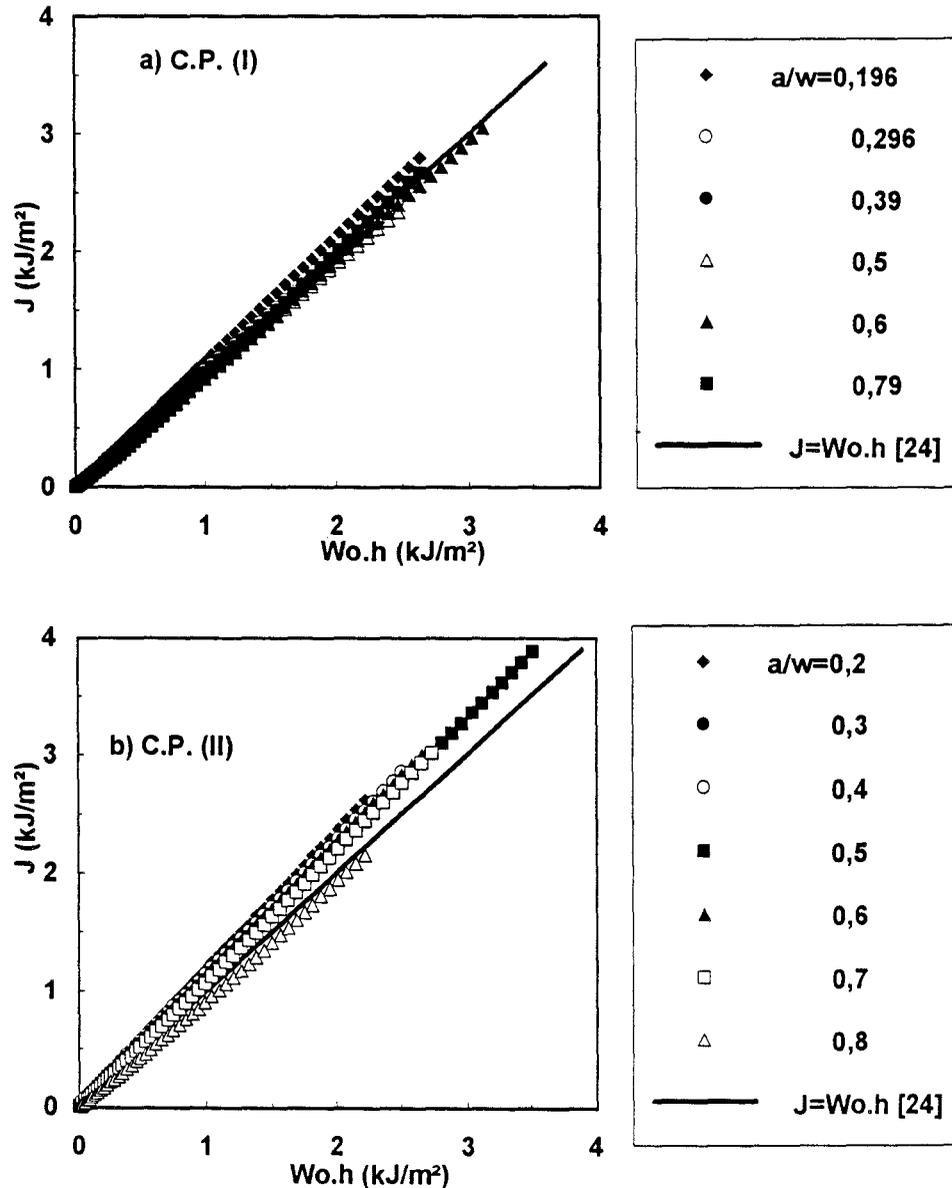


Fig.69 : Comparaison de J obtenu par la méthode de séparation de l'énergie avec la relation proposée par RIVLIN et THOMAS [24]. Cas du cisaillement pur

Nous avons représenté sur les mêmes graphes la relation proposée par RIVLIN et THOMAS [24] pour ce type d'éprouvettes ($J = W_o.h$).

Nous constatons un bon accord entre nos résultats expérimentaux et la relation de RIVLIN pour les éprouvettes C.P. (I) (faible hauteur). Lorsque la hauteur augmente (cas des éprouvettes C.P. (II)), les résultats divergent par rapport à la relation de RIVLIN. Ceci est certainement une

conséquence des conditions de validité de cette dernière qui n'est pas respecté dans ce deuxième cas (le rapport h/a devant être très petit devant 1).

Ce résultat montre que la fonction de potentiel recherchée est ici constante. Ce qui confirme bien que celle-ci est liée au type de sollicitation, puisque pour ce type d'éprouvette, la densité d'énergie de déformation est contrôlée par le déplacement.

V-2/ Validité de la méthode de séparation de l'énergie.

Les figures 70 et 71 montrent l'évolution des rapports $\frac{J \text{ (pseudo-compliance)}}{J \text{ (méthode de séparation de l'énergie)}}$ et $\frac{J \text{ (séparation de U)}}{J \text{ (méthode de } \eta)}$, en fonction de la densité d'énergie de déformation uniforme W_0 et ceci pour la géométrie S.E.N.T. de type (I).

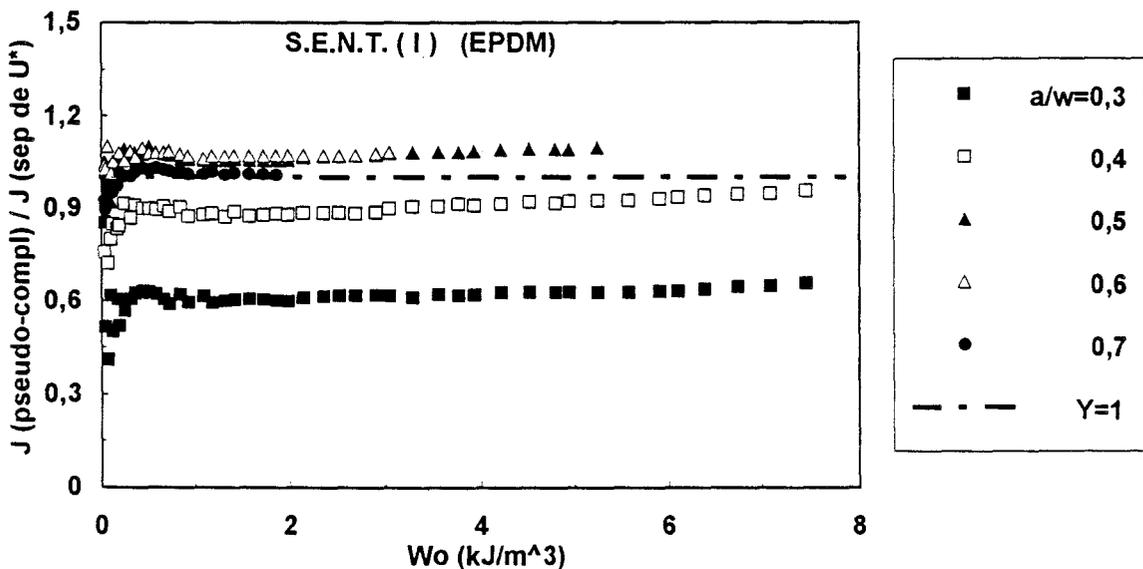


Fig.70 : Evolution du rapport $J \text{ (pseudo-compliance)}/J \text{ (méthode de la séparation de l'énergie)}$.

Afin de vérifier la validité de la méthode proposée, il nous a semblé intéressant de comparer l'évolution du paramètre énergétique J obtenue selon cette technique avec les résultats issus de la méthode de pseudo-compliance d'une part et ceux calculés avec le facteur de proportionnalité η d'autre part. Ce facteur η a été obtenu par rapport à la méthode de compliance qui, il faut le souligner, nous sert de référence. Nous pouvons constater que ce rapport est constant dans un large domaine de W_0 . La figure 70 montre clairement que la valeur de J est cependant fortement surestimée pour les plus grandes valeurs de la taille du ligament, alors qu'un bon accord est obtenu pour les fissures profondes.

Ceci confirme bien, comme nous l'avons indiqué précédemment, le domaine de validité de la méthode proposée est limitée par des conditions liées à la taille du ligament ($a/w \geq 0.4$).

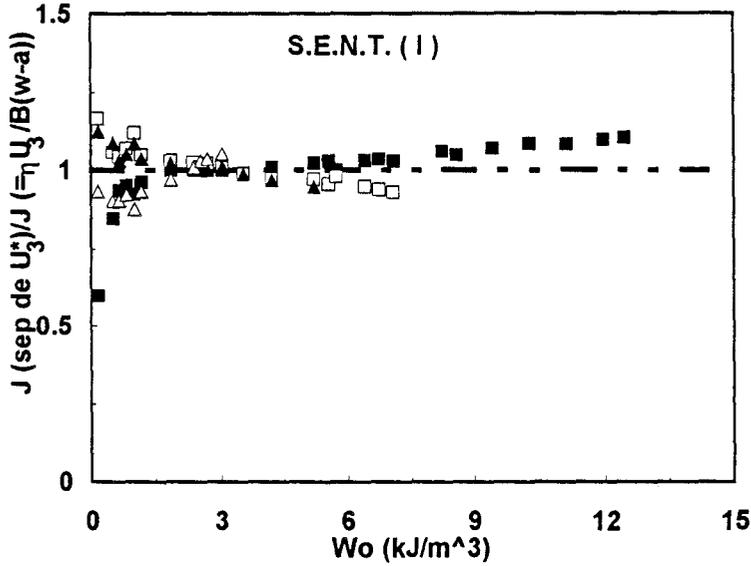


Fig.71 : Evolution du rapport J (méthode de séparation de l'énergie) / J (méthode de η).

Dans ce domaine de validité, l'expression de J selon la relation ($J=H(W_0).G(a/w)$) décrit bien l'évolution de ce paramètre. La figure 71 montre par ailleurs un bon accord entre notre méthode de calcul et celle issue du paramètre η et ce pour toutes les longueurs de fissures. Nous pouvons donc conclure que l'expression de J proportionnellement à l'énergie dépensée est, elle aussi, conditionnée par la taille du ligament.

Dans le cas des éprouvettes de cisaillement pur (C.P.), nous avons vu que l'expression du paramètre énergétique J obtenu par la méthode que nous avons proposée, est identique à la relation de RIVLIN et THOMAS pour ce type d'éprouvette. Nous remarquons dans cette expression de J que $k(W_0)$ est constant contrairement à ce qui été obtenu pour les essais de traction uniaxiales (S.E.N.T., C.C.T.).

Nous pensons que cette fonction de potentiel dépend, en plus de la non linéarité du comportement, du type de sollicitation choisie, puisque la densité d'énergie de déformation uniforme W_0 dépend elle même de la sollicitation.

J.G. WILLIAMS [46] considère dans son estimation du rayon de zone plastique en utilisant la théorie généralisée d'ANDREWS, que la fonction $k(W_0)$ est constante est égale π quelque que soit la longueur de fissure. Il introduit explicitement dans l'expression du paramètre énergétique J, le rayon de zone plastique sous la forme :

$$J = 2. \pi. \alpha(a/w). W_0. (a + r_p) \tag{V-175}$$

$\alpha(a/w)$ est une fonction de géométrie identique, selon WILLIAMS, à la calibration linéaire Y^2 , et r_p est le rayon de la zone plastique en fond de fissure.

Nous avons appliqué cette analyse à nos résultats expérimentaux sur l'E.P.D.M., dans le cas des éprouvettes S.E.N.T. du type (I), afin de comparer le paramètre énergétique J, obtenu par la méthode que nous avons proposée, avec J calculé par cette analyse.

Il faut signaler qu'on ne peut pas parler de plasticité dans le cas de notre matériau, mais plutôt d'endommagement, caractérisé par une zone blanchâtre qui se crée en fond de fissure pendant la sollicitation.

Nous avons représenté sur la figure 72 l'évolution du rapport J/W_0 en fonction de la longueur de fissure et pour différents niveaux de chargement (J est calculé par la méthode de pseudo-compliance à partir d'enregistrement de courbes charge-déplacement).

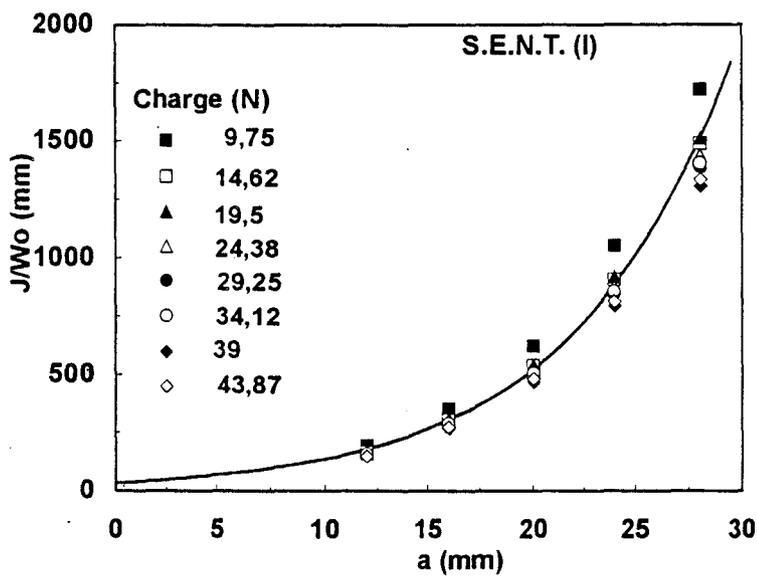


Fig.72. : Evolution de J/W_0 en fonction la longueur de fissure. Géométrie S.E.N.T.

Nous constatons que ce rapport dépend fortement de la longueur de la fissure et du niveau de chargement, particulièrement pour les grandes valeurs de a. Lorsque a tend vers 0, ce rapport prend une valeur finie. L'hypothèse développée par WILLIAMS est que l'influence du niveau de chargement peut être négligée.

En approximant au mieux l'évolution de ce rapport en fonction de a et en extrapolant la courbe vers $a=0$, nous obtenons la valeur du rapport J/W_0 permettant ainsi de calculer r_p à partir de l'expression (V-79) en prenant comme hypothèse comme le préconise WILLIAMS:

$$\alpha(0) = Y^2(0) = 1.25$$

La fonction $\alpha(a/w)$ obtenue à partir de la relation (V-79), est représentée sur la figure 73. Nous avons reporté sur cette même figure les deux expressions de la calibration linéaire Y^2 correspondant à la géométrie S.E.N.T. (celle tenant compte de la flexion et celle sans flexion).

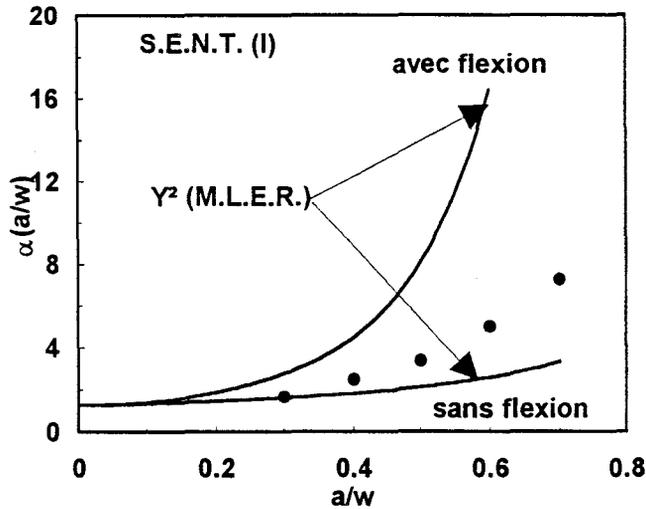


Fig.73 : Evolution du facteur de proportionnalité α en fonction de a/w . géométrie S.E.N.T.

Les points expérimentaux de la fonction $\alpha(a/w)$ sont situés entre les deux courbes de la calibration linéaire et sont plus proche de celle sans flexion, contrairement à WILLIAMS qui obtient une bonne corrélation pour le cas qu'il a étudié en utilisant la fonction $Y^2(a/w)$ (sans flexion).

Nous avons représenté sur la figure 74 l'évolution du rapport de J (obtenu par l'analyse de WILLIAMS) par J calculé en utilisant la méthode de compliance en fonction de W_0 .

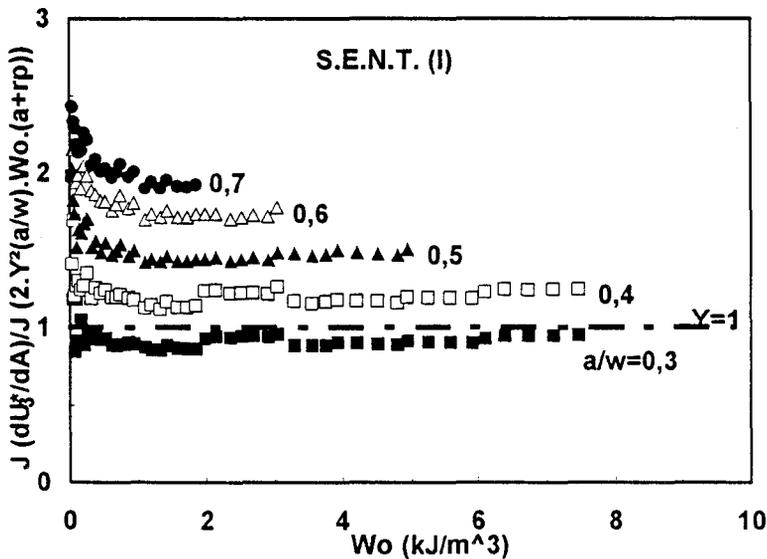


Fig.74 : Evolution du rapport J (pseudo-compliance) / J (analyse de WILLIAMS) en fonction de W_0 . Géométrie S.E.N.T.

La figure montre clairement que, hormis le plus faible rapport a/w , la démarche proposée par WILLIAMS conduit à une surestimation importante du paramètre énergétique.

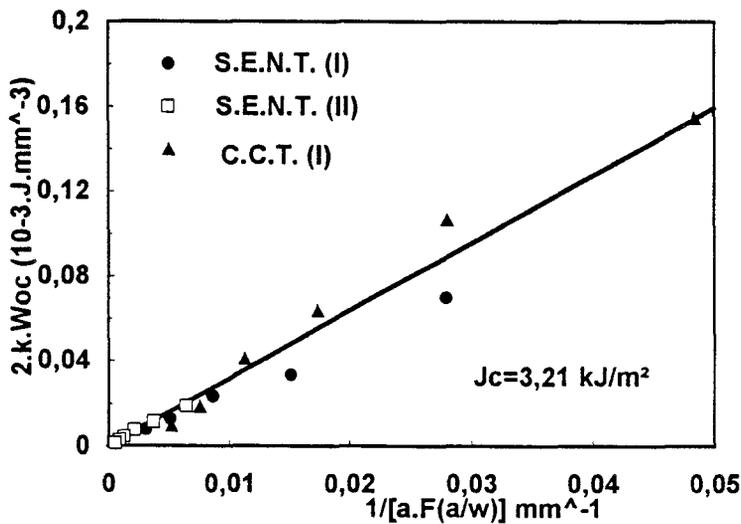
Le fait d'introduire une correction de zone plastique indépendante du niveau de chargement est une des explications de cette divergence avec la méthode de compliance qui nous sert de référence.

En considérant nos résultats, il est donc à notre sens impératif de prendre en compte le niveau de chargement dans l'expression de la zone endommagée. L'expression du paramètre énergétique en fonction de $k(w_0)$ répond à cette exigence.

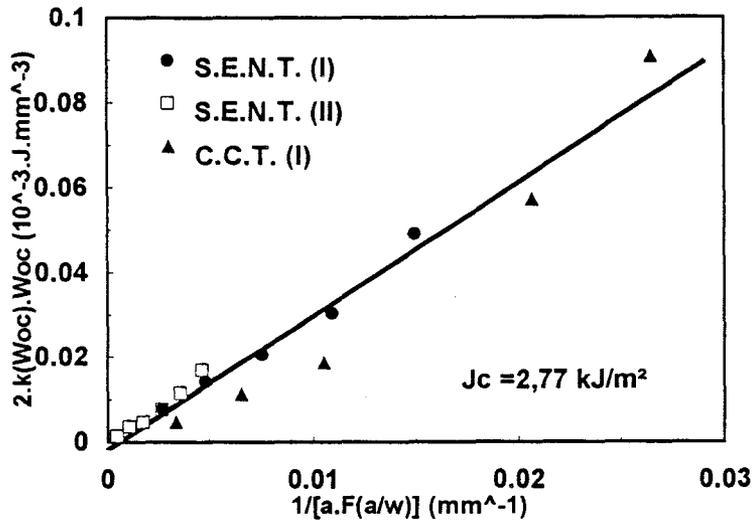
V-3/ Energie surfacique de rupture J_c

La détermination de l'énergie surfacique de rupture J_c (valeur critique du paramètre énergétique J) est effectuée en traçant, sur le même graphe, les points expérimentaux $2.k(W_{oc}).W_{oc}$ en fonction de $1/[a.F(a/w)]$ pour les deux géométries S.E.N.T. et C.C.T. (W_{oc} étant la valeur critique de la densité d'énergie de déformation uniforme W_0 correspondant à l'amorçage de la fissure, et $k(W_{oc})$ est la valeur de k correspondante).

La valeur de J_c est donnée par la pente de la droite de régression sur les figures 75a (méthode de pseudo-compliance) et 75b (méthode de séparation de l'énergie).



a) Détermination de J_c par la méthode de pseudo-compliance



b) Détermination de J_c par la méthode de la séparation de L'énergie

Fig.75 : Détermination de l'énergie surfacique de rupture J_c .

Pour la géométrie C.P., une valeur moyenne de J_c est obtenue à partir de la relation $J_c = W_{oc}.h_o$.

Les valeurs de J_c , obtenues par les deux méthodes sont rappelées dans le tableau VI:

Géométrie S.E.N.T. et C.C.T.	Géométrie C.P.	
J_c (kJ/m ²)		
3,21	2,88	Méthode de pseudo-compliance
2,77	2,65	méthode de séparation de l'énergie

Tableau VI: Valeurs de J_c pour les trois géométries S.E.N.T., C.C.T. et C.P.

V-4/ APPLICATION A D' AUTRES TYPES DE MATERIAUX

Nous avons appliqué notre technique de séparation à trois matériaux différents:

- Un caoutchouc naturel vulcanisé étudié par RIVLIN et THOMAS [24]
- Un caoutchouc thermoplastique (santoprène 201-73) étudié par KIM et JOE [52]
- Un propergol solide composite : c'est un caoutchouc fortement chargé obtenu par l'insertion de charges cristallines oxydantes (le plus employé est le perchlorate d'ammonium) dans une matrice thermoplastique ou thermodurcissable faisant office de réducteurs (souvent du polybutadiène ou du polyuréthane).

Les courbes charge-déplacement pour les deux premiers matériaux, ont été relevées directement à partir de reproduction agrandies des figures de RIVLIN et THOMAS [24] (pour des éprouvettes C.C.T. et S.E.N.T.) et KIM et JOE [52] (pour des éprouvettes C.P.).

Les dimensions et les longueurs de fissures des échantillons utilisées par ces auteurs, sont récapitulées dans les tableaux VII et VIII suivants :

Géométrie	Hauteur (mm)	Largeur (mm)	Epaisseur (mm)
C.C.T. (Caoutchouc Naturel)	180	80	0,9
S.E.N.T. (Caoutchouc Naturel)	180	80	0,85
C.P. (Santoprène)	30	80	1,55

Tableau VII : Dimensions des échantillons utilisées.

Géométrie	Longueur de fissure (mm)				
C.C.T.[24]	0	27	50	63	68
S.E.N.T. [24]	0	18	26	44	54
C.P. [47]	0	36	50	64	71

Tableau VIII : Valeurs des longueurs de fissures.

- Les relevés des courbes charge-déplacement sont présents sur les figures 75a, 75b et 75c.

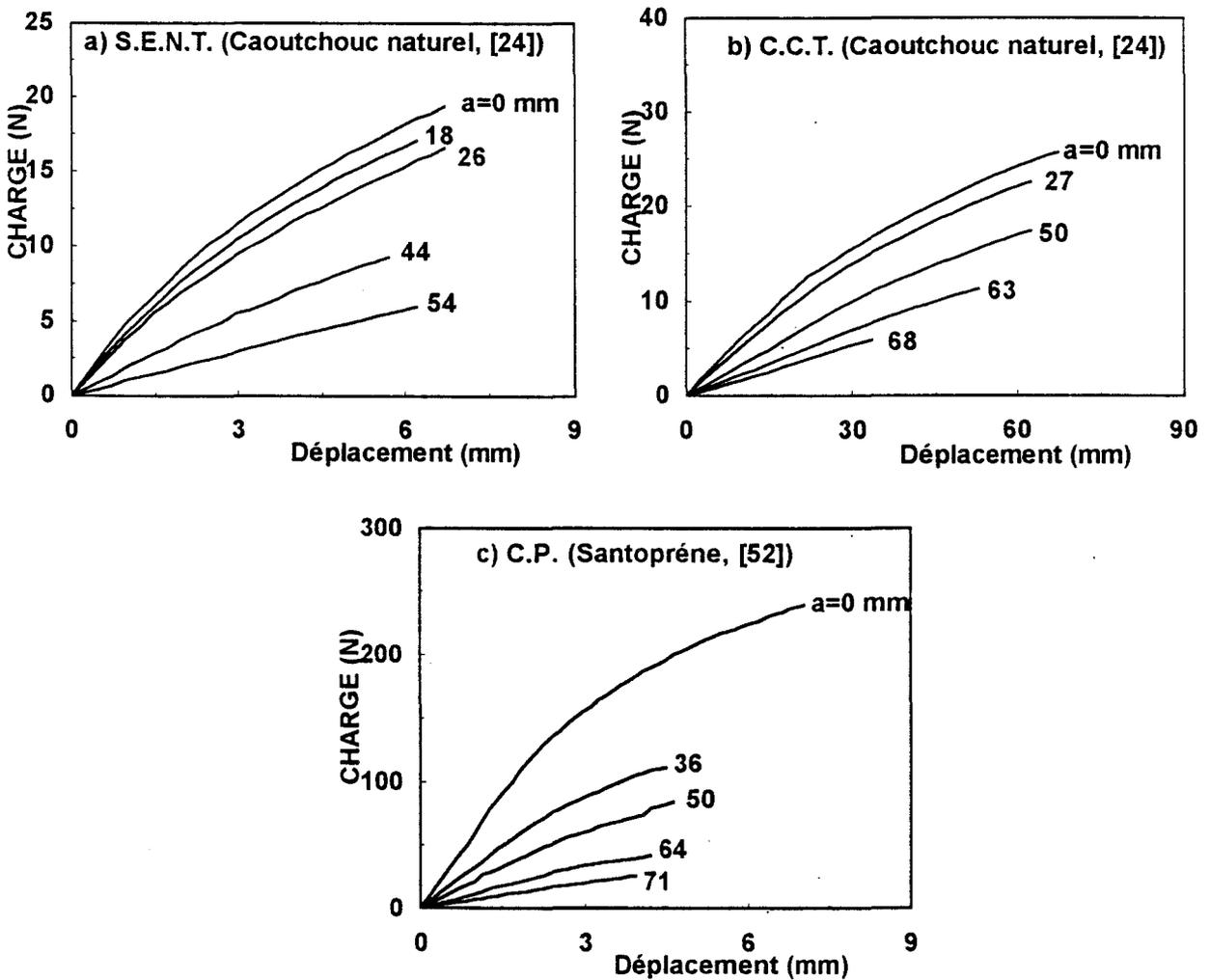


Fig.75 :Relevé des Courbes charge-déplacement.

- Pour le propergol solide, les résultats expérimentaux nous ont été fournis par la Société Nationale des Poudres et Explosifs (S.N.P.E.). Les essais ont été réalisés sur trois types de géométries (S.E.N.T., C.C.T. et C.P.).

Les dimensions et les longueurs de fissures choisies pour ces éprouvettes, sont données dans les tableaux IX et X ci-dessous :

Géométrie	Largeur (mm)	Hauteur (mm)	Epaisseur (mm)
S.E.N.T	40	170	49
C.C.T.	100	220	10
C.P.	180	40	4.85

Tableau IX : Dimensions des échantillons utilisés pour le propergol.

Géométrie	Longueurs de fissures (mm)				
	0	8,5	13	20	26
S.E.N.T.	0	8,5	13	20	26
C.C.T.	0	40	50	60	70
C.P.	0	5	9,5	19,5	40

Tableau X : Valeurs des longueurs de fissures.

Les courbes charge-déplacement sont représentées sur les figures 76a, 76b et 76c:

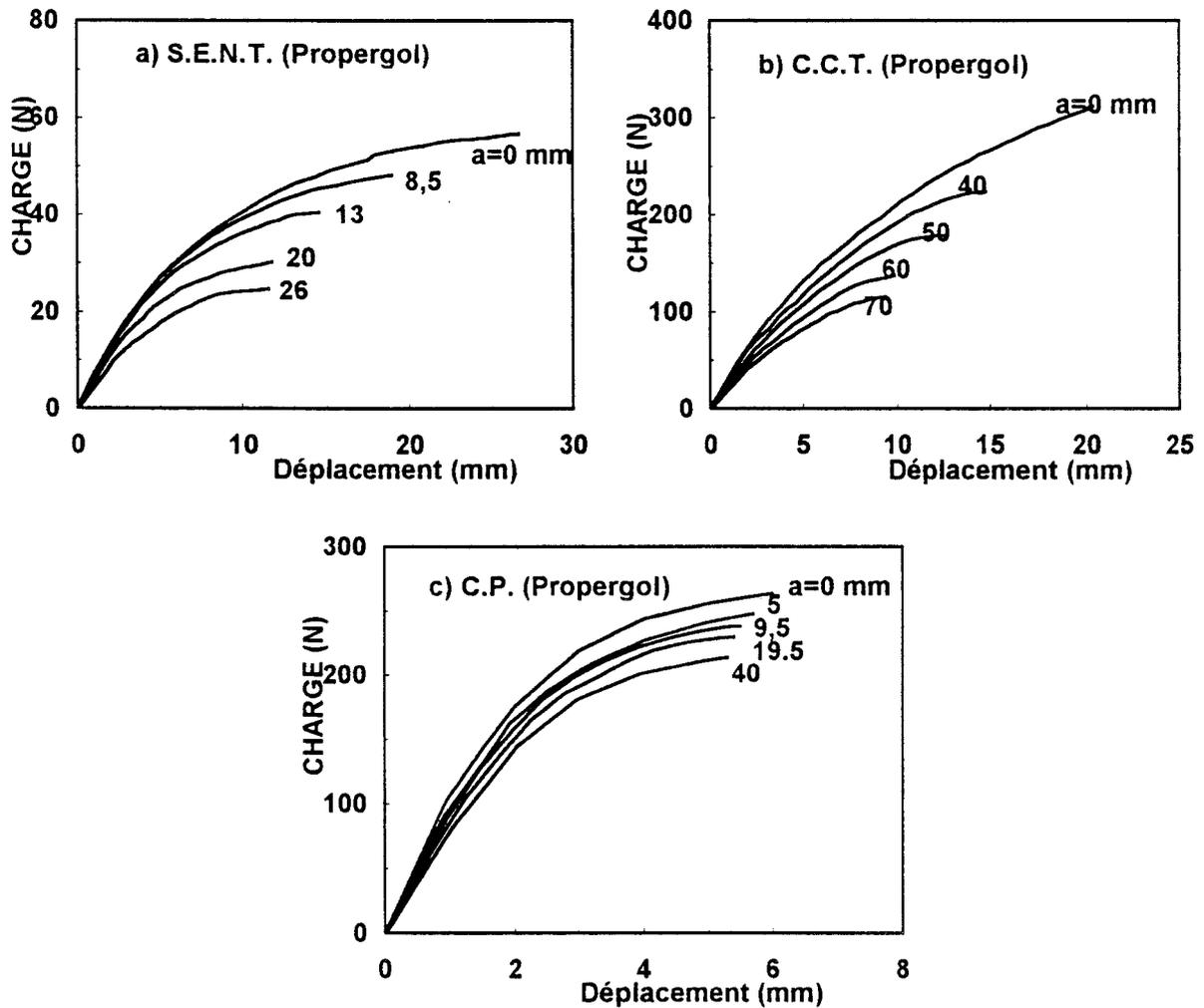


Fig.76 : Courbes Charge-déplacement pour le Propergol

(i)- Géométries S.E.N.T. et C.C.T.

Les fonctions $k(W_0)$ obtenues pour chaque matériau par la méthode proposée, sont montrées sur la figure 77.

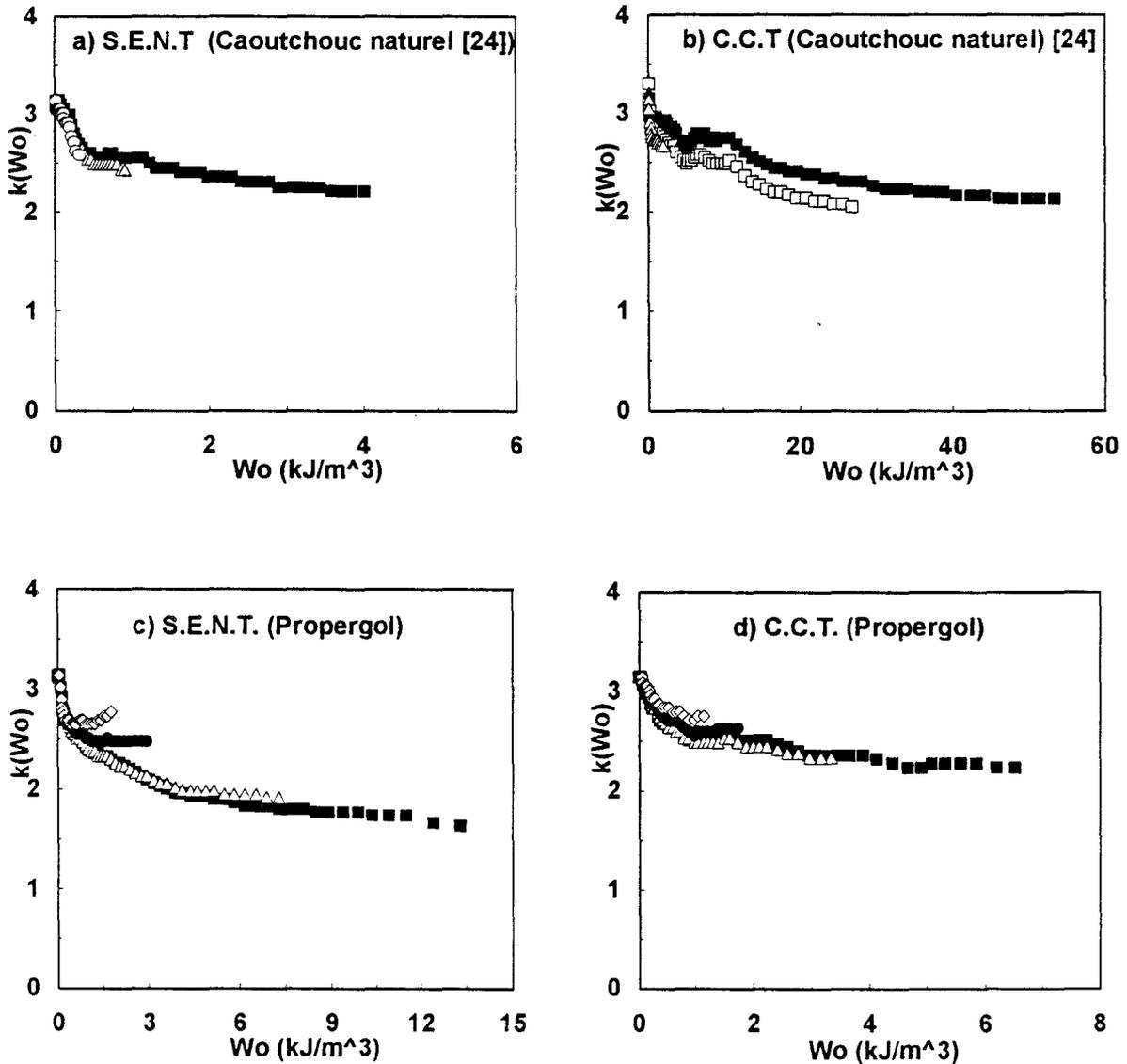


Fig.77 : Valeurs de $k(W_0)$ obtenues par la méthode de séparation de l'énergie.

Nous avons comparé sur les figures 78a et 78b les valeurs de la fonction $k(W_0)$ obtenues par la méthode que nous avons proposée, pour les deux géométries S.E.N.T. et C.C.T. et pour les deux matériaux: le propergol et le caoutchouc naturel [24]. Nous pouvons constater, comme pour notre matériau, que les deux types d'éprouvettes conduisent à une même évolution de k .

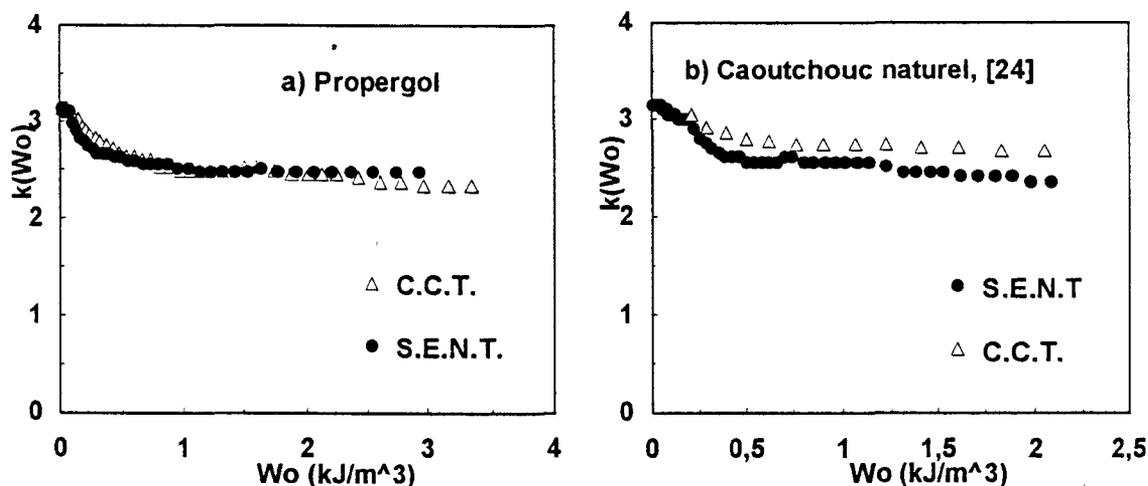


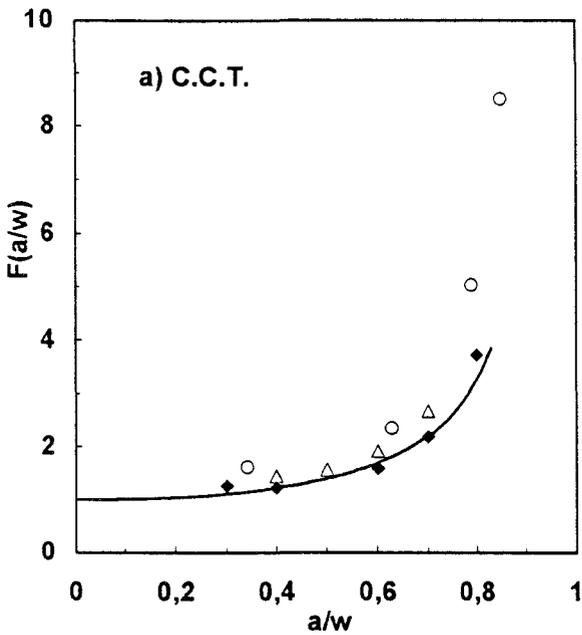
Fig.78 : Comparaison des valeurs de $k(Wo)$ obtenues pour les deux géométries S.E.N.T. et C.C.T. Cas du propergol et du caoutchouc naturel

Nous avons reporté sur les figures 79a et 79b les fonctions de géométries $F(a/w)$ obtenues pour le propergol, le caoutchouc naturel et le matériau EPDM.

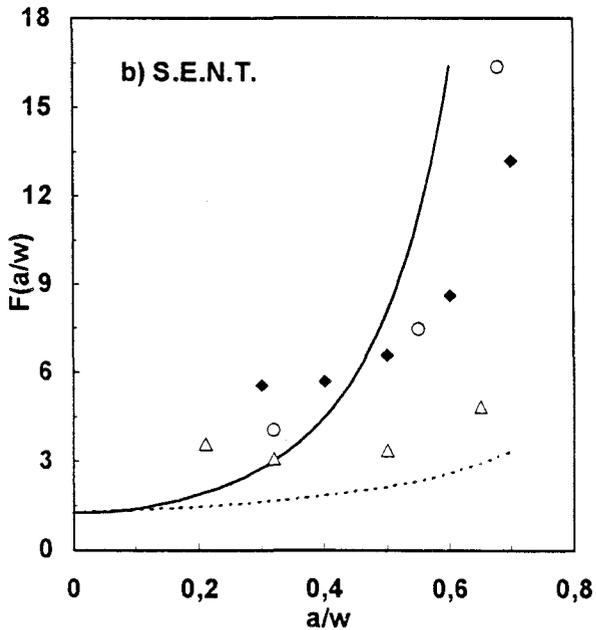
Pour la géométrie C.C.T., les résultats obtenus pour les trois types de matériaux (EPDM, propergol et caoutchouc naturel) (figure 79a) sont en bonne corrélation avec la fonction de calibration linéaire Y^2 associée. Ceci confirme les résultats énoncés précédemment à savoir que ces fonctions de géométries ne sont pas, significativement, affectées par la non-linéarité du comportement.

Dans le cas de la géométrie S.E.N.T., la fonction de géométrie obtenue dans le cas du propergol semble le plus proche de la calibration linéaire Y^2 (sans flexion) pour des longueurs de fissures normalisées $a/w > 0,4$ (figure 79b).

La divergence de ces résultats, avec ceux de la fonction de calibration linéaires, est une conséquence de la dissymétrie de cette géométrie, celle-ci semblant jouer un rôle moindre en ce qui concerne le matériau propergol.



Matériau	Hauteur / Largeur
◆ E.P.D.M.	2,2
△ Propergols	2,2
○ Caoutchouc naturel [24]	2,25
— Y ² (M.L.E.R.)	infini



Matériau	Hauteur / Largeur
◆ E.P.D.M.	5
△ Propergols	4,25
○ Caoutchouc naturel [24]	2,25
— Y ² (M.L.E.R.) (avec flexion)	1
--- Y ² (M.L.E.R.) (sans flexion)	infini

Fig.79 : Evolution de $F(a/w)$ en fonction de a/w pour les trois matériaux: l'E.P.D.M., le propergol et le caoutchouc naturel.

(ii)- Géométrie C.P :

Les figures 80a et 80b montrent l'évolution du rapport $H(W_0/W_0)$ en fonction de W_0 dans le cas du propergol et du santoprène.

Nous pouvons constater que pour des valeurs de $a/w \geq 0,4$ (cas des éprouvettes C.P. du santoprène), ce rapport est pratiquement constant et égal à la hauteur des échantillons utilisées. Ce n'est pas le cas lorsque $a/w < 0,3$ (cas des éprouvettes C.P. du propergol). Ceci peut s'expliquer d'une part par le fait que la méthode que nous avons proposé n'est pas applicable à des longueurs de fissures normalisées $\leq 0,4$, puisque le paramètre de séparation de l'énergie (R_{ij}) pour des références $b_j/w < 0,4$, dépend de la densité d'énergie de déformation uniforme W_0 (voir Annexe III) et d'autre part, la condition $h/a \leq 1$ (c' est une des hypothèses du cisaillement pur) n'est pas respectée ici.

Les résultats des figures 81a et 81b montrent la comparaison des valeurs du paramètre énergétique obtenues par notre méthode avec celles obtenues en appliquant la relation de RIVLIN et THOMAS [24] pour ce type de géométrie.

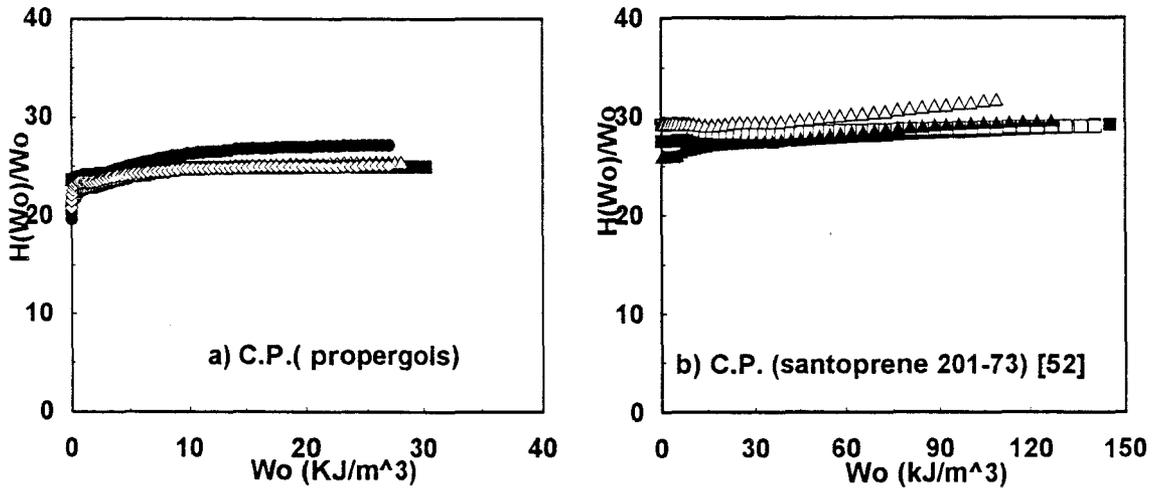


Fig.80 : Evolution du rapport $H(W_o)/W_o$ en fonction de W_o pour des éprouvettes C.P.:
Cas du propergol et du santoprène.

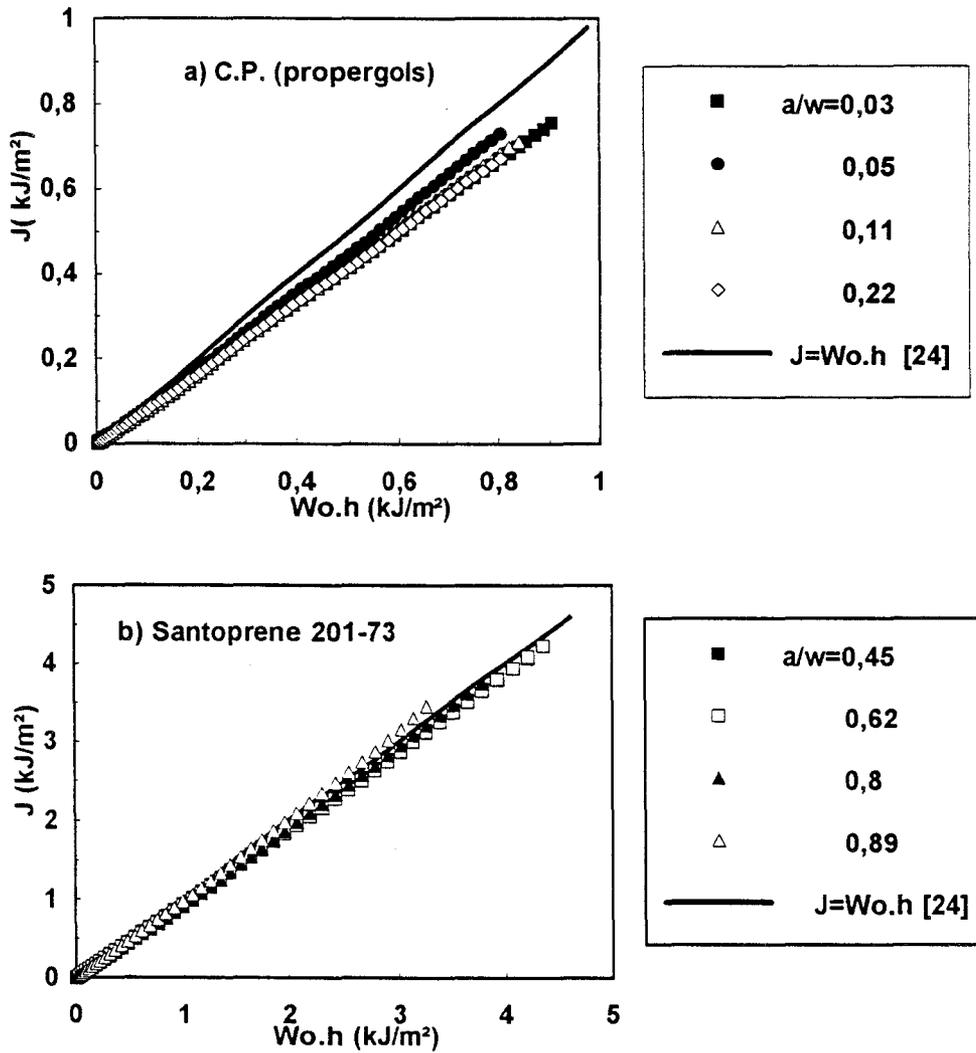


Fig.81 : Evolution de J en fonction de $W_o.h$. Géométrie C.P.

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GENERALE

Cette étude a permis, à partir des résultats expérimentaux obtenus sur un matériau caoutchoutique (EPDM), de mettre en évidence les contributions respectives des dimensions finies et de la non-linéarité du comportement dans l'expression du paramètre énergétique J sous une forme multiplicative.

Dans un premier temps, nous avons utilisé deux méthodes de détermination de J (la méthode de pseudo-compliance et celle de l'énergie totale dépensée). L'identification avec la relation proposée par ANDREWS (1^{ère} équation de sa théorie généralisée), et dans laquelle nous avons dissocié les effets dus aux dimensions finies des échantillons utilisés, a conduit à des résultats satisfaisants.

La fonction $k(W_0)$ tenant compte de la non-linéarité du comportement est identique pour les deux types de géométries S.E.N.T. et C.C.T.. Les éprouvettes de cisaillement pur ont donné des résultats différents. Ceci indique clairement que la fonction de potentiel $k(W_0)$ dépend de la sollicitation considérée.

Les deux méthodes de détermination de J citées précédemment ont conduit aux mêmes résultats en ce qui concerne la fonction de géométrie $F(a/w)$. Cependant des écarts significatifs existent lorsque l'on compare cette fonction avec la calibration linéaire associée. Ceci est probablement une conséquence des lissages par des fonctions mathématiques qui ne conviennent pas obligatoirement mais qui dans tous les cas n'ont pas de significations physiques.

Pour y remédier, nous avons proposé une méthode expérimentale originale permettant d'exprimer J sous une forme multiplicative en séparant directement dans l'énergie dépensée les effets liés respectivement au comportement du matériau et aux dimensions finies de l'échantillon utilisé.

Cette méthode a mis en évidence l'existence d'une fonction de potentiel $k(W_0)$ représentant la non-linéarité du comportement. Elle est identique pour les deux types de géométries S.E.N.T. et C.C.T., mais différent pour les éprouvettes C.P.; Ceci confirme le résultat des deux méthodes précédentes et montre que les conditions de chargement jouent un rôle important dans la détermination de cette fonction. En effet, la densité d'énergie de déformation uniforme W_0 est contrôlée soit par la charge soit par le déplacement suivant le type de géométrie utilisée.

Nous avons, par cette méthode, pour l'éprouvette CCT, mis en évidence une fonction de géométrie identique aux fonctions de calibration utilisées en mécanique linéaire élastique de la rupture (M.L.E.R.), ce qui montre que la non-linéarité du comportement n'influe pas de façon sensible sur ces fonctions.

Ces résultats semblent d'ailleurs confirmés pour d'autres matériaux caoutchoutiques à partir des résultats expérimentaux extraits de la littérature et pour un matériau hétérogène (le propergol).

L'expression du paramètre énergétique J sous forme multiplicative, lorsque l'on respecte le domaine de validité conditionné par la taille du ligament, représente d'une façon tout à fait correcte son évolution.

En terme de perspectives, il serait intéressant de répondre à un certain nombre de questions soulevées dans cette étude auxquelles nous avons apporté des éléments de réponse .

Nous pensons que le passage au calcul numérique peut y contribuer.

- Sur les fonctions de calibration:

Nous avons mis en évidence, pour l'éprouvette SENT, des effets de flexions induits par la dissymétrie de cette éprouvette.

Comment influe le rapport h/w sur cette fonction?

Expérimentalement, il est difficile de constituer une banque de données assez importantes pour deux raisons essentielles:

- d'une part, le coût prohibitif d'une telle campagne d'essais.
- d'autre part, pour un rapport h/w donné, des mesures significativement différentes (en charge et déplacement) ne peuvent être obtenues que si la variation du rapport a/w est suffisamment importante.

Nous envisageons de ce fait, à partir de calculs aux éléments finis, en utilisant une loi de comportement hyperélastique de type MOONEY-RIVLIN d'apporter un certain nombre d'éclaircissements à cette question.

- Sur l'interaction entre $k(w_0)$ et le type de chargement:

L'expérience a montré que ce paramètre influe de façon notable sur $k(w_0)$ (éprouvette C.C.T-S.E.N.T. et C.P.).

Le calcul cité précédemment permettra aussi d'apporter des renseignements supplémentaires si l'on étend les calculs à des rapports h/w proches de ceux utilisés pour l'éprouvette de cisaillement pur.

- Sur la validité de l'expression de J en fonction de la densité d'énergie de déformation:

Là également, il serait intéressant de comparer les résultats obtenus par cette expression au calcul numérique de l'intégrale de contour dont, il faut le rappeler, le paramètre énergétique J est une extension.

Enfin, en ce qui concerne le processus de rupture, des liens pouvaient être établis entre paramètres locaux et analyse globale. Cependant, une meilleure connaissance des paramètres physiques ainsi qu'une analyse morphologique de la zone endommagée est préalablement nécessaire afin d'identifier et d'expliquer ces mécanismes.

ANNEXE I : TRANSFORMATIONS FINIS EN GRANDES DEFORMATIONS

Annexe I : TRANSFORMATIONS FINIES EN GRANDES DEFORMATIONS
INTRODUCTION

Considérons un solide dans sa configuration actuelle $C(t)$ à l'instant t repéré en variable de Lagrange par rapport à sa configuration initiale C_0 à t_0 (fig 1) :

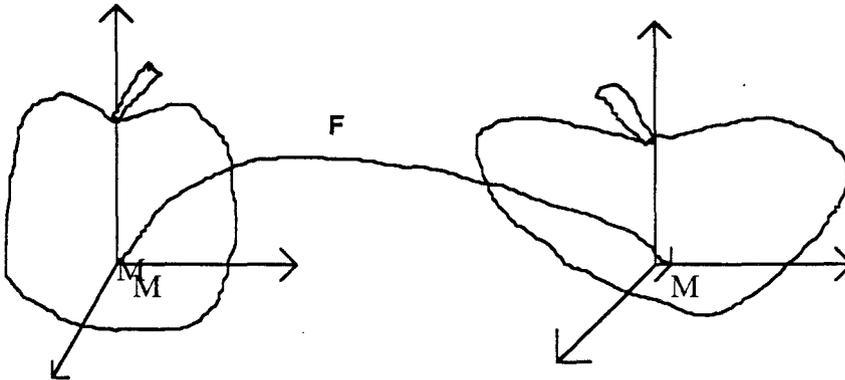


fig-I-1 : Déformation d'un solide d'une configuration initiale C_0 vers une configuration actuelle $C(t)$

Soit M , un point du solide dans sa configuration actuelle :

$$M = M(M_0, t_0, t) \quad (\text{A1-1})$$

et soit \mathcal{F} La transformation qui permet de passer de M_0 à M pour un vecteur

$$\bar{x}(M) = \mathcal{F}(x(M_0), t_0, t) \quad (\text{A1-2})$$

La déformation peut s'exprimer à partir de la transformation linéaire tangente qui exprime la transformation au voisinage de M_0 et M :

$$d\bar{x}(M) = \mathbf{F} \cdot d\bar{x}(M_0) \quad (\text{A1-3})$$

où \mathbf{F} est le tenseur gradient de \mathcal{F} défini par :

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathcal{F}}{d\bar{x}(M_0)} \quad (\text{A1-4})$$

Le tenseur \mathbf{F} peut ne pas être symétrique, son déterminant noté J est lié aux masses volumiques ρ et ρ_0 des deux configurations :

$$J = \det \mathbf{F} = \frac{\rho_0}{\rho} = \left[\frac{V}{V_0} \right] \quad (\text{A1-5})$$

***Les tenseurs de déformations**

Si l'on choisit l'état de référence en C_0 (configuration initiale), on introduit alors le tenseur de Green-Lagrange L défini par :

$$L = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{1}) \quad (\text{A1-6})$$

On pose
$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \quad (\text{A1-7})$$

\mathbf{C} est un tenseur symétrique appelé tenseur des élongations (où de dilatations) de Cauchy-Green-droit. Il est entièrement défini sur la configuration de référence C_0 .

La relation (A1-6) devient alors :

$$L = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1}) \quad (\text{A1-8})$$

Si l'on choisit l'état de référence en $C(t)$ (configuration actuelle), on est conduit à caractériser la déformation par le tenseur des déformations d'Almansi-Euler \mathbf{E} défini par :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{B}^{-1}) \quad (\text{A1-9})$$

avec
$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T \quad (\text{A1-10})$$

\mathbf{B} est le tenseur d'élongation de Cauchy-Green-Droit défini sur la configuration actuelle $C(t)$.

Remarque :

Le tenseur gradient \mathbf{F} peut être considéré comme le produit soit, d'un tenseur d'élongation droit \mathbf{U} et d'un tenseur de rotation \mathbf{R} , soit d'un tenseur d'élongation gauche \mathbf{V} et d'un tenseur de rotation \mathbf{R} :

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \quad (\text{A1-11})$$

\mathbf{U} et \mathbf{V} sont des matrices symétriques définies et positives, \mathbf{R} est une matrice orthogonale tel que $\det(\mathbf{R}) = 1$.

Le tenseur d'élongation de Cauchy-Green-Droit \mathbf{C} s'exprime alors sous la forme :

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \mathbf{U} \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{U}^2 \quad (\text{A1-12})$$

Toute base principale de \mathbf{U} est aussi base principale de \mathbf{C} . Les valeurs propres de \mathbf{C} (qui sont positives), sont les carrés des valeurs propres de \mathbf{U} .

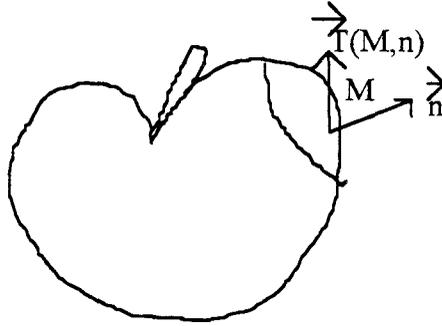
Dans le repère principal, on a donc :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \sqrt{C_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{C_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{C_3} \end{bmatrix} \quad (\text{A1-13})$$

Le tenseur d'élongation de Cauchy-Green-Droit gauche B sera donné par :

$$\mathbf{B} = \mathbf{V}^2 \quad (\text{A1-14})$$

***Définition du tenseur de contrainte :**



Considérons notre solide dans sa configuration actuelle , C(t).

Le vecteur $\vec{T}(M,n)$ s'appelle le vecteur contrainte en M pour la direction. $T(M,n)$ est une densité surfacique des forces s'exerçant sur un élément de surface dS normale à .

On montre l'existence d'un tenseur σ de composantes σ_{ij} tel que:

$$T_i = (x, t, n) = \sigma_{ij} (x, t) n_j \quad (\text{A1-15})$$

Ce tenseur est appelé tenseur des contraintes de Cauchy. Il est symétrique et définit sur la configuration actuelle C(t).

La densité surfacique des forces T (M, n) peut être exprimée par rapport à la configuration initiale Co par :

$$T_i (x, t, n) = \pi_{ij} (x_o, t_o) n_{o_j} \quad (\text{A1-16})$$

où π_{ij} sont les composantes d'une tenseur des contraintes appelé premier tenseur de Piola-Kirschhoff Π . Il est défini sur les deux configurations $C_0 (\bar{n}_0)$ et C (t), donc il n'est ni lagrangien ni eulérien et non symétrique.

$$\sigma_{ij} \cdot n_j = \pi_{ij} \cdot n_{o_j} \quad (\text{A1-17})$$

$$J \sigma_{ij} = \Pi_{ij} F_{j\alpha} \Rightarrow J = \det(\mathbf{F}) \quad (\text{A1-18})$$

En notation matricielle, l'équation (A1-3) peut s'écrire sous la forme :

$$J\sigma = \Pi F^T \quad (A1-19)$$

$$\text{où} \quad \Pi = J\sigma (F^T)^{-1} \quad (A1-20)$$

Par transport convectif du vecteur $\bar{T}(M, n)$ de $C(t)$ vers C_0 , on peut écrire :

$$T_i = F_{i\alpha} T_\alpha^0 \Rightarrow T_\alpha^0 = G_{\alpha i} T_i \quad (A1-21)$$

$$\text{avec } G = F^{-1}$$

$$T_\alpha^0 = G_{\alpha i} \Pi_{ij} n_{oj} \quad (A1-22)$$

$$T_\alpha^0 = J G_{\alpha i} \sigma_{ij} G_{\beta j} n_\beta^0 = S_{\alpha\beta} n_\beta^0 \quad (A1-23)$$

On posera, en rotation matricielle :

$$S = G\Pi = J G \sigma G^T \quad (A1-24)$$

$$\text{ou} \quad S = F^{-1}\Pi = J F^{-1}\sigma (F^{-1})^T$$

La matrice S , de composantes $S_{\alpha\beta}$ représente un tenseur symétrique appelé second tenseur de Piola-Kirschhoff. Il est défini sur la configuration initiale C_0 et n'a pas de signification physique.

En petites déformations, les tenseurs σ , Π , et S sont identiques au premier ordre.

Application :

Considérons un cube qui se transforme, après déformation au parallélépipède fig.1-2 :

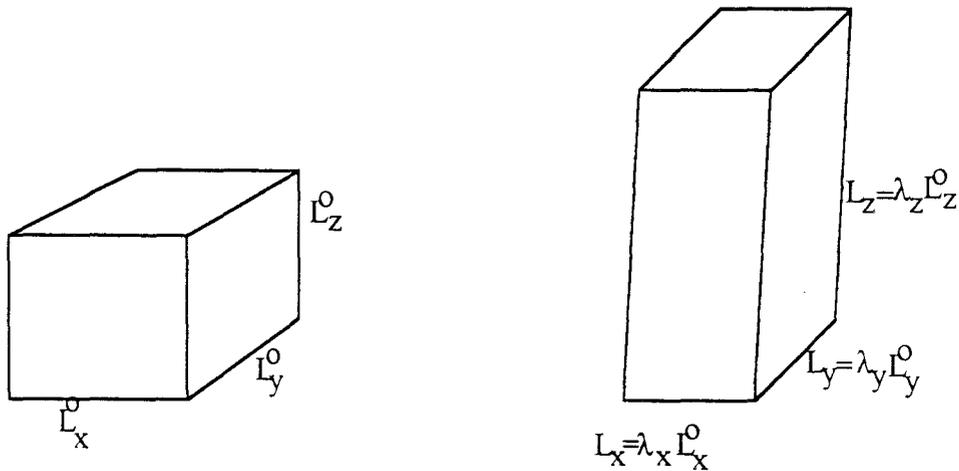


Fig.1-2: Transformation d'un cube en parallélépipède.

On note par λ_x , λ_y , λ_z les élongations sous les trois directions, le volume dans la configuration déformée (actuelle) est égale à :

$$V = \lambda_x \lambda_y \lambda_z V_0 \quad (A1-25)$$

où V_0 est le volume dans la configuration initiale.

Si le matériau est incompressible ($V_0 = V$), on aura :

$$\lambda_x \lambda_y \lambda_z = 1 \quad (\text{A1-26})$$

La transformation \mathbf{F} s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z \end{bmatrix} \quad (\text{A1-27})$$

*Cas de la traction uniaxiale

Dans le cas d'un matériau isotrope incompressible (cas du caoutchouc), on peut écrire :

$$\lambda_x = \lambda \quad \lambda_y = \lambda_z = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \quad (\text{A1-28})$$

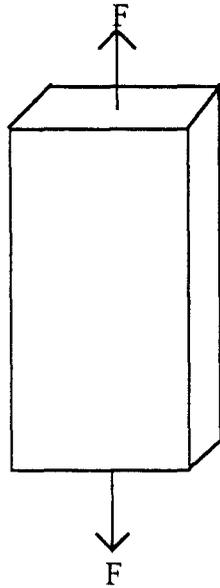


Fig.I-3: Traction Uniaxiale

La transformation \mathbf{F} devient alors :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{\lambda} \end{bmatrix} \quad (\text{A1-29})$$

Le tenseur des élongations de Cauchy-Green-Droit \mathbf{C} est calculé à partir de \mathbf{F} par :

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda \end{bmatrix} \quad (\text{A1-30})$$

Les trois invariants de \mathbf{C} I_1, I_2, I_3 sont donnés par :

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \text{trace } \mathbf{C} = \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} \\
 I_2 &= \frac{1}{2} \left[(\text{trace } \mathbf{C})^2 - \text{trace } \mathbf{C}^2 \right] = 2\lambda + \frac{1}{\lambda^2} \\
 I_3 &= \det \mathbf{C} = 1
 \end{aligned} \tag{A1-31}$$

Le tenseur de Piola-Kirchoff Π est donné par :

$$\Pi = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ avec } \Pi_{11} = \frac{F}{S_0} \tag{A1-32}$$

S_0 est la section à l'état non déformé (configuration initiale G).

A partir de la relation (A1-19), on obtient le tenseur de contrainte de Cauchy σ par :

$$\sigma = \frac{1}{J} \Pi \cdot \mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} s_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{A1-33}$$

$$\text{avec } s_{11} = \frac{F}{S}$$

S est la section réelle du solide à l'état déformé.

Le tenseur de Piola-Kirchoff.2, \mathbf{S} s'exprime à partir de la relation (A1-24) par :

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \Pi = \begin{bmatrix} S_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{A1-34}$$

$$\text{avec } S_{11} = \frac{F}{S_0} \cdot \frac{1}{\lambda}$$

*Cas du cisaillement simple

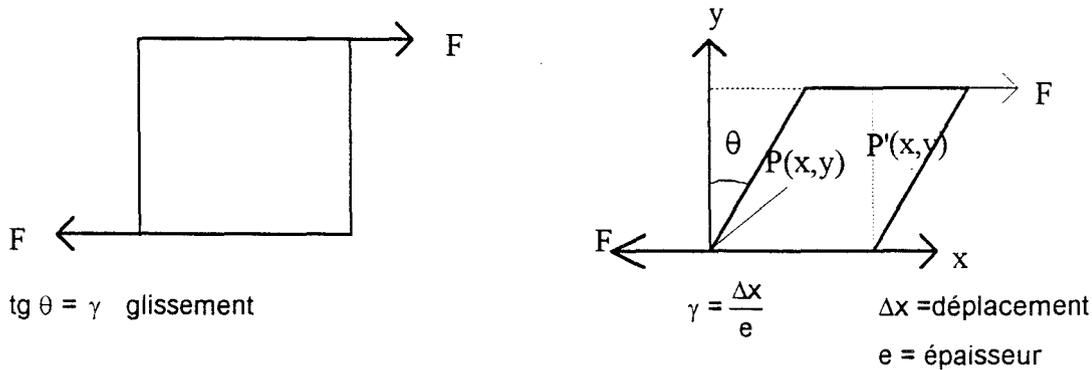


Fig.I-4: Cisaillement simple

La transformation F s'écrit :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A1-35})$$

Le tenseur de Cauchy-Green-Droit s'exprime par :

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1+\gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A1-36})$$

Le tenseur de déformation s'exprime donc par :

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1}) = \begin{bmatrix} 0 & \gamma/2 & 0 \\ \gamma/2 & \gamma^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A1-37})$$

Le tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff.1 est donné par :

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & 0 \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A1-38})$$

avec $\Pi_{12} = \frac{F}{S_0} \Pi_{12} = \frac{F}{S_0}$ où S_0 la surface de cisaillement à l'état non déformé.

Le tenseur des contraintes de Cauchy σ est défini par :

$$\sigma = \frac{1}{J} \mathbf{\Pi} \mathbf{F}^T \text{ avec } J = \det \mathbf{F} = 1 \quad (\text{A1-39})$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & 0 \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A1-40})$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \Pi_{11} + \gamma \Pi_{12} \\ \sigma_{12} = \Pi_{12} = \frac{F}{S_0} = \Pi_{21} + \gamma \Pi_{22} \\ \sigma_{22} = \Pi_{22} \end{cases} \quad (\text{A1-41})$$

Le second tenseur de Piola-Kirchoff.2, S est donné par :

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{\Pi} \text{ avec } \mathbf{F}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A1-42})$$

$$\text{d'où } \mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & 0 \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A1-43})$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} S_{11} = \Pi_{11} - \gamma \Pi_{21} \\ S_{12} = \Pi_{12} - \gamma \Pi_{22} \\ S_{22} = \Pi_{22} \end{cases} \quad (\text{A1-44})$$

Recherche des directions principales:

L'élongation λ est donnée par :

$$\lambda^2 = \frac{OP'^2}{OP^2} + \frac{(x+\gamma y)^2 + y^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 + \gamma^2 y^2 + 2\gamma xy + y^2}{x^2 + y^2}$$

$$\lambda^2 = 1 + \frac{\gamma(\gamma y^2 + 2yx)}{x^2 + y^2} = 1 + \frac{\gamma(\gamma - 2\beta)}{1 + \beta^2} \quad (\text{A1-45})$$

$$\text{avec } \text{tg}\beta = \frac{x}{y}$$

Pour quelle valeur de β . λ est maximum ?

$$\frac{d}{d\beta} \left(\frac{\lambda^2 - 1}{\gamma} \right) = 0 = \frac{2(1 + \beta^2) - 2\beta(\gamma + 2\beta)}{(1 + \beta^2)^2} \quad (\text{A1-46})$$

$$\text{d'où } \beta^2 + \gamma\beta - 1 = 0 \quad (\text{A1-47})$$

Le produit des racines de cette équation est égale à 1 :

$$\beta_1 \beta_2 = 1 \quad (\text{A1-48})$$

donc les directions principales sont perpendiculaires. Les racines sont données par :

$$\beta = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + 4}}{2} \quad (\text{A1-49})$$

Si γ est faible ($\gamma \rightarrow 0$) on aura :

$\beta = \pm 45^\circ$ par rapport à la direction de cisaillement.

Si γ est important $\Rightarrow \beta$ est quelconque.

*Cas du cisaillement pur

C'est un cas particulier du cisaillement simple dans lequel on a supprimé la rotation.

L'éprouvette est de largeur w , de hauteur h et de faible épaisseur e . Le rapport h/w est supposé très faible de telle façon à réaliser une sollicitation pour laquelle on a $\lambda_2 = 1$ pendant tout l'essai.

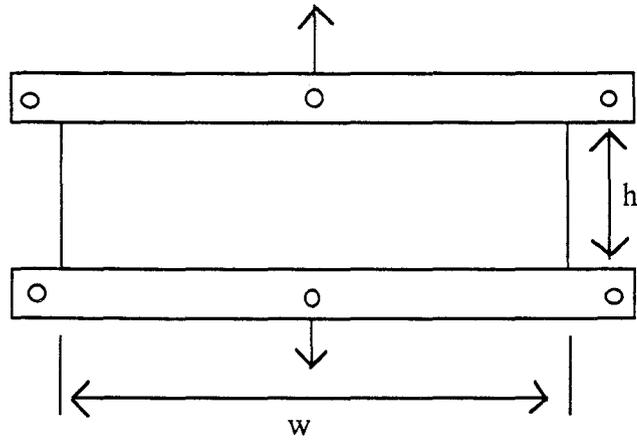


Fig.I-5: Cisaillement pur

Les élastomères sont souvent des matériaux incompressibles. La transformation F s'exprime donc (dét $F = 1$) par :

$$F = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda \end{bmatrix} \quad (A1-50)$$

Le tenseur des élongations de Cauchy-Green-Droit s'exprime par :

$$C = F^T F = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda^2 \end{bmatrix} \quad (A1-51)$$

Le tenseur des déformations de Green-Lagrange sera donc donné par :

$$L = \frac{1}{2}(C - 1) = \begin{bmatrix} \lambda^2 - 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2\lambda^2 - 1/2 \end{bmatrix} \quad (A1-51)$$

Le tenseur des contraintes de Piola-Kirschhoff s'exprime par :

$$\Pi = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \Pi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (A1-52)$$

avec $\Pi_{11} = \frac{F}{S_0}$ ou S_0 est la section initiale de l'éprouvette. La contrainte Π_{22} ne peut être calculée qu'avec un loi de comportement.

Le tenseur de contrainte de Cauchy est défini par :

$$\sigma = \frac{1}{J} \Pi F^T = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \Pi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda \end{bmatrix} \quad (A1-53)$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \lambda \Pi_{11} = \lambda \frac{F}{S_0} \\ \sigma_{22} = \Pi_{22} \end{cases} \quad (\text{A1-54})$$

Le second tenseur de Piola-Kirchoff s'exprime par :

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\Pi} = \begin{bmatrix} S_{11} & 0 & 0 \\ 0 & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A1-55})$$

avec

$$\begin{cases} S_{11} = \frac{\Pi_{11}}{\lambda} = \frac{h_0}{h} \frac{F}{S_0} \\ S_{22} = \Pi_{22} \end{cases} \quad (\text{A1-56})$$

ANNEXE II : LOIS HYPERELASTIQUES

Annexe 2: LOIS HYPERELASTIQUES

I/ RAPPELS DE NOTIONS THERMODYNAMIQUES

L'énergie libre spécifique ψ , d'un système donné, est défini par :

$$\Psi = U - T.S \quad (\text{A2-1})$$

où U est l'énergie interne spécifique, T est la température et s est l'entropie spécifique.

Lorsqu'on suit une particule dans son mouvement, les dérivées particulières (dérivées par rapport au temps) de U et Ψ peuvent s'écrire sous la forme :

$$\frac{dU}{dt} = T \frac{dS}{dt} + P \quad (\text{A2-2})$$

$$\frac{d\Psi}{dt} = -S \frac{dT}{dt} + P \quad (\text{A2-3})$$

avec $P = \frac{d\Psi}{dL_{\alpha\beta}} \cdot \frac{dL_{\alpha\beta}}{dt}$ est une puissance spécifique.

où $\frac{dL}{dt} = \mathbf{F}^T \mathbf{D} \cdot \mathbf{F}$ et \mathbf{D} est le tenseur du taux de déformation, de composante D_{ij} .

La puissance spécifique w s'exprime alors par :

$$P = F_{\alpha\beta} \frac{d\Psi}{dL_{\alpha\beta}} = F_{j\beta} \cdot D_{jk} = \text{trace} \left(\mathbf{F} \frac{d\Psi}{dL} \mathbf{F}^T \mathbf{D} \right) \quad (\text{A2-4})$$

L'inégalité de Clausius-Duhem s'exprime par :

$$\rho \frac{d\Psi}{dt} \leq \sigma_{ij} D_{ij} - \rho S \frac{dT}{dt} - \frac{q}{T} \text{grad } T \quad (\text{A2-5})$$

où q est le vecteur courant de chaleur.

En remplaçant le terme $\frac{d\Psi}{dt}$ par son expression de la relation (A2-5), on obtient l'inégalité fondamentale traduisant le second principe de la thermodynamique.

$$\left(\sigma_{ij} - \rho P \right) - \frac{1}{T} q \text{ grad } T \geq 0 \quad (\text{A2-6})$$

On pose :

$$\Phi_1 = \sigma_{ij} D_{ij} - \rho P \quad (\text{A2-7})$$

$$\Phi_2 = -\frac{1}{T} q \cdot \text{gradient } T \quad (\text{A2-8})$$

Par définition, Φ_1 est la dissipation intrinsèque volumique et Φ_2 est la dissipation thermique volumique.

III/ MILIEUX HYPERELASTIQUES :

II-1) Définition générale

Un milieu hyperélastique est défini par les conditions suivantes :

1° Il existe une configuration de référence $C(0)$ telle que à tout instant t , les composantes $L_{\alpha\beta}$ du tenseur des déformations de Green-Lagrange, constituent avec la température T , un système complet de variables thermodynamiques.

2° Les propriétés thermodynamiques sont décrites par les données de l'énergie libre spécifique $\Psi(T, L)$.

3° La dissipation intrinsèque Φ_1 est toujours identiquement nulle.

4° Dans la configuration de référence, les contraintes sont nulles et la température est uniforme, soit T_0 .

D'après la troisième hypothèse, la dissipation intrinsèque Φ_1 est nulle.

$$\Phi_1 = \sigma_{ij} D_{ij} - \rho P = 0 \quad (A2-9)$$

avec

$$P = \text{trace} \left(F \frac{d\Psi}{dL} F^T D \right) = F_{i\alpha} \frac{d\Psi}{dL_{\alpha\beta}} \quad (A2-10)$$

On obtient :

$$\left(\sigma_{ij} - \rho F_{i\alpha} \frac{d\Psi}{dL_{\alpha\beta}} F_{j\beta} \right) D_{ij} = 0 \quad (A2-11)$$

Puisque Φ_1 doit être nulle pour des D_{ij} arbitraires, on doit avoir :

$$\sigma_{ij} = \rho F_{i\alpha} \frac{d\Psi}{dL_{\alpha\beta}} F_{j\beta} \quad (A2-12)$$

ce qui en notation matricielle s'écrit :

$$\sigma = \rho F \frac{d\Psi}{dL} F^T \quad (A2-13)$$

où

$$\frac{d\Psi}{dL} = \frac{d\Psi}{dC} \cdot \frac{dC}{dL} = 2 \frac{d\Psi}{dC} \quad (A2-14)$$

puisque le tenseur des élongations de Green-Lagrange \mathbf{C} s'exprime en fonction du tenseur de déformation \mathbf{L} par :

$$\mathbf{C} = 2 \mathbf{L} + \mathbf{1} \quad (\text{A2-15})$$

d'où l'expression du tenseur de contrainte de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\rho \mathbf{F} \frac{d\Psi}{d\mathbf{C}} \mathbf{F}^T \quad (\text{A2-16})$$

Le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff.2, \mathbf{S} est défini à partir du tenseur de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ par :

$$\mathbf{S} = \mathbf{J} \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{F}^{-1})^T \quad (\text{A2-17})$$

avec $\mathbf{J} = \det(\mathbf{F})$ et \mathbf{F}^{-1} le tenseur réciproque de \mathbf{F} (tenseur gradient)

Dans le cas d'un matériau incompressible ($\det(\mathbf{F}) = 1$), \mathbf{S} s'exprime d'après les relations (A2-16) et (A2-17) par :

$$\mathbf{S} = 2\rho_0 \frac{d\Psi}{d\mathbf{C}} \quad (\text{A2-18})$$

puisque le potentiel hyperélastique w est défini par :

$$w = \rho_0 \Psi(\mathbf{T}_0, \mathbf{C}) \quad (\text{A2-19})$$

Le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff.2, \mathbf{S} , peut être calculé à partir d'un potentiel hyperélastique w par l'expression :

$$\mathbf{S} = 2 \frac{dw}{d\mathbf{C}} \quad (\text{A2-20})$$

Dans le cas d'un potentiel du type :

$$w = w(I_1, I_2, I_3) \quad (\text{A2-21})$$

où I_1, I_2, I_3 sont les invariants du tenseur des élongations de Cauchy-Green-Droit \mathbf{C} .

Le tenseur s'exprime par :

$$\mathbf{S} = 2 \left[\frac{dw}{dI_1} \frac{dI_1}{d\mathbf{C}} + \frac{dw}{dI_2} \frac{dI_2}{d\mathbf{C}} + \frac{dw}{dI_3} \frac{dI_3}{d\mathbf{C}} \right] \quad (\text{A2-22})$$

avec
$$\frac{dI_1}{d\mathbf{C}} = \frac{d(\text{trace } \mathbf{C})}{d\mathbf{C}} = \mathbf{1}$$

$$\frac{dI_2}{d\mathbf{C}} = \frac{d}{d\mathbf{C}} \left\{ \frac{1}{2} \left[(\text{trace } \mathbf{C})^2 - \text{trace } \mathbf{C}^2 \right] \right\} = I_1 \mathbf{1} - \mathbf{C} \quad (\text{A2-23})$$

$$\frac{dI_3}{d\mathbf{C}} = \frac{d \det \mathbf{C}}{d\mathbf{C}} = I_3 \mathbf{C}^{-1}$$

où \mathbf{C}^{-1} désigne le tenseur réciproque de \mathbf{C} et $\mathbf{1}$ est la matrice unité.

La relation (A2-22) devient alors :

$$\mathbf{S} = 2 \left[\left(\frac{dw}{dI_1} + I_1 \frac{dw}{dI_2} \right) \mathbf{1} - \frac{dw}{dI_2} \mathbf{C} + \frac{dw}{dI_3} I_3 \mathbf{C}^{-1} \right] \quad (\text{A2-24})$$

Les élastomères sont, en général, des matériaux incompressibles. On introduit donc la pression hydrostatique p défini par :

d'où

$$p = \frac{dw}{dI_3} I_3 \quad (\text{A2-25})$$

$$\mathbf{S} = 2 \left[\left(\frac{dw}{dI_1} + I_1 \frac{dw}{dI_2} \right) \mathbf{1} - \frac{dw}{dI_2} \mathbf{C} - p \mathbf{C}^{-1} \right] \quad (\text{A2-26})$$

Le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff 1 s'exprime par :

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{F} \mathbf{S} \quad (\text{A2-27})$$

D'après la relation (A2-20), on peut écrire :

$$\mathbf{\Pi} = 2 \mathbf{F} \frac{dw}{d\mathbf{C}} = 2 \mathbf{F} \frac{dw}{d\mathbf{F}} \frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{C}} \quad (\text{A2-28})$$

On peut donc calculer le tenseur $\mathbf{\Pi}$ à partir du potentiel hyperélastique w , mais \mathbf{F} n'est pas un tenseur symétrique.

II-2/ Calcul des contraintes dans le cas particulier d'un comportement du type néo-hookéen

Le potentiel hyperélastique w est donné par la théorie statistique sous la forme :

$$w = C_1 (I_1 - 3) = \frac{V k T}{2} (I_1 - 3) \quad (\text{A2-29})$$

avec

V = nombre de chaînes par élément de volume

T = température absolue

k = constante de Boltzman

C_1 est une constante du matériau.

Le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff.2 s'exprime alors sous la forme :

$$\mathbf{S} = 2 \left[\frac{dw}{dI_1} \mathbf{1} + p \mathbf{C}^{-1} \right] = 2 \left[C_1 \mathbf{1} + p \mathbf{C}^{-1} \right] \quad (\text{A2-30})$$

Le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff .1 est donné par :

$$\Pi = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} = 2 \left[\mathbf{C}_1 \mathbf{F} + p \mathbf{F} \cdot \mathbf{C}^{-1} \right] \quad (\text{A2-31})$$

(i) Cas de la traction uniaxiale

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{\lambda} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{F}^2 = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S} = 2\mathbf{C}_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 2p \begin{bmatrix} 1/\lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} & \mathbf{S}_{13} \\ \mathbf{S}_{12} & \mathbf{S}_{22} & \mathbf{S}_{32} \\ \mathbf{S}_{13} & \mathbf{S}_{23} & \mathbf{S}_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A2-32})$$

ce qui donne :

$$\mathbf{S}_{11} = 2 \left(\mathbf{C}_1 - \frac{p}{\lambda^2} \right)$$

$$\mathbf{S}_{12} = \mathbf{S}_{13} = 0$$

$$\mathbf{S}_{22} = \mathbf{S}_{33} = 2(\mathbf{C}_1 + \lambda p) = 0$$

d'où

$$p = -\frac{\mathbf{C}_1}{\lambda} \quad (\text{A2-33})$$

$$\mathbf{S}_{11} = 2 \left(\mathbf{C}_1 - \frac{\mathbf{C}_1}{\lambda^3} \right) = 2\mathbf{C}_1 \left(1 - \frac{1}{\lambda^3} \right)$$

$$\Pi = 2\mathbf{C}_1 \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{\lambda} \end{bmatrix} + 2p \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} & \Pi_{23} \\ \Pi_{31} & \Pi_{32} & \Pi_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A2-34})$$

ce qui donne :

$$\Pi_{11} = 2\mathbf{C}_1 \lambda + 2p/\lambda = 2\mathbf{C}_1 \lambda - \frac{2\mathbf{C}_1}{\lambda^2} = 2\mathbf{C}_1 \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \quad (\text{A2-35})$$

$$\Pi_{12} = \Pi_{13} = \Pi_{21} = \Pi_{31} = 0$$

$$\Pi_{22} = \Pi_{33} = \frac{2\mathbf{C}_1}{\sqrt{\lambda}} + \frac{2p\lambda}{\sqrt{\lambda}} = 0$$

donc on a :

$$\Pi_{11} = \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{S}_0} = 2\mathbf{C}_1 \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right)$$

avec \mathbf{F} , la force courante et \mathbf{S}_0 section initiale de l'éprouvette.

(ii) Cas du cisaillement simple

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1+\gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1+\gamma^2 & -\gamma & 0 \\ -\gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S} = [\mathbf{C}_1 + p\mathbf{C}^{-1}] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A2-36})$$

Les composantes de \mathbf{S} sont données donc par :

$$S_{11} = 2[C_1 + p(1 + \gamma^2)]$$

$$S_{22} = 2[C_1 + p]$$

$$S_{33} = 2[C_1 + p] = 0 \Rightarrow p = -C_1$$

$$S_{12} = -2p\gamma$$

$$S_{13} = 0$$

$$S_{23} = 0$$

Finalement on aura :

$$S_{11} = -2C_1 \gamma^2$$

$$S_{12} = +2C_1 \gamma$$

$$S_{22} = S_{33} = S_{13} = S_{23} = 0$$

Les composantes du tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff sont données par :

$$\mathbf{\Pi} = 2[\mathbf{C}_1 \mathbf{F} + p\mathbf{F} \mathbf{C}^{-1}] \quad (\text{A2-37})$$

$$\Pi_{11} = 2C_1 - 2p$$

$$\Pi_{12} = 2C_1 \gamma$$

$$\Pi_{21} = -2p \gamma$$

$$\Pi_{22} = 2C_1 + 2p$$

$$\Pi_{33} = 2C_1 - 2p = 0 \Rightarrow p = -C_1$$

$$\Pi_{13} = \Pi_{23} = \Pi_{31} = \Pi_{32} = 0$$

d'où :

$$\Pi_{11} = \Pi_{22} = \Pi_{21} = \Pi_{33} = \Pi_{13} = \Pi_{23} = \Pi_{31} = \Pi_{32} = 0$$

$$\Pi_{12} = 2C_1 \gamma = \frac{F}{S_0}$$

(iii) Cas du cisaillement pur

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S} = 2[C_1 \mathbf{1} + p\mathbf{C}^{-1}] \quad (\text{A2-38})$$

d'où :

$$S_{11} = 2[C_1 + p/\lambda^2]$$

$$S_{12} = 0 \quad S_{13} = 0$$

$$S_{22} = 2C_1 + 2p$$

$$S_{33} = 2C_1 + 2p \lambda^2 = 0 \Rightarrow p = -\frac{C_1}{\lambda^2}$$

Finalement, les composantes du second tenseur de Piola-Kirchhoff sont données par :

$$S_{11} = 2C_1 \left[1 - \frac{1}{\lambda^4} \right]$$

$$S_{22} = 2C_1 \left[1 - \frac{1}{\lambda^2} \right]$$

$$S_{12} = S_{13} = S_{23} = S_{33} = 0$$

Le tenseur Π est donné par :

$$\Pi = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \quad (\text{A2-39})$$

d'où

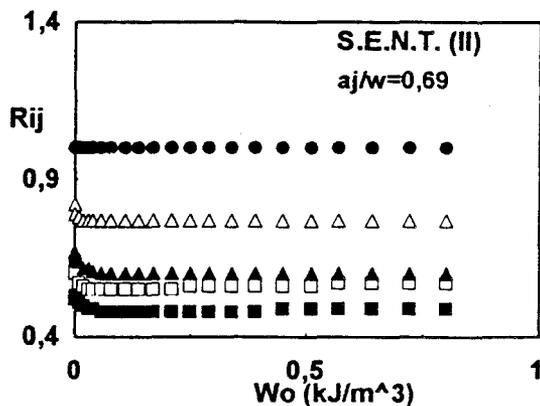
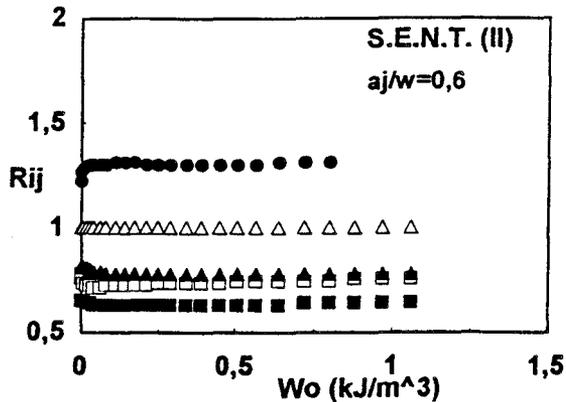
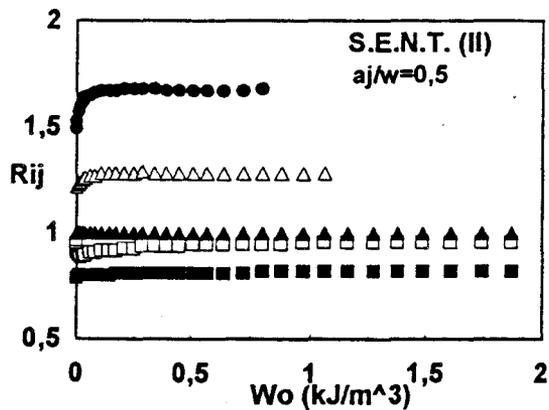
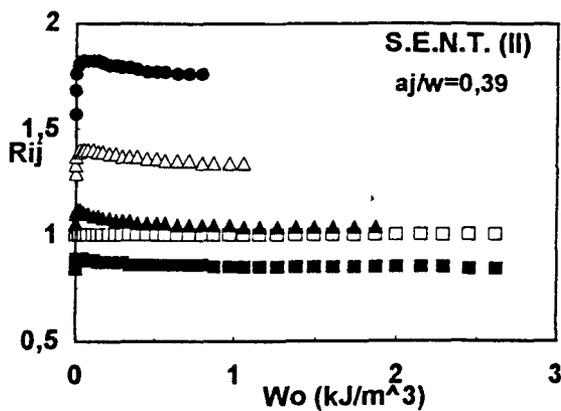
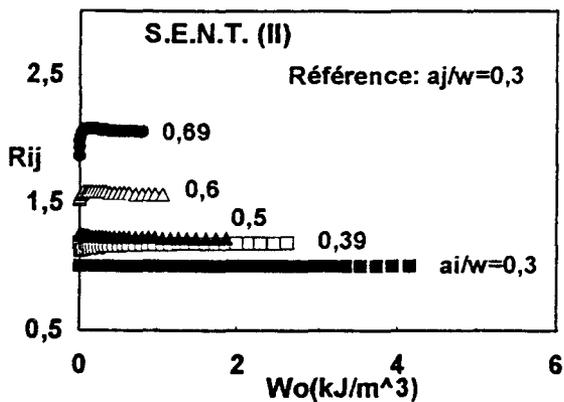
$$\Pi_{11} = 2C_1 \left[\lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right]$$

$$\Pi_{22} = 2C_1 \left[1 - \frac{1}{\lambda^2} \right]$$

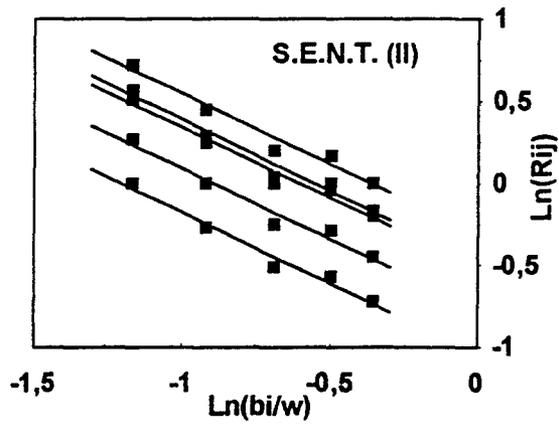
$$\Pi_{12} = \Pi_{21} = \Pi_{13} = \Pi_{31} = \Pi_{23} = \Pi_{32} = \Pi_{33} = 0$$

**ANNEXE III : APPLICATION DE LA METHODE DE SEPARATION DE
L'ENERGIE A D'AUTRE GEOMETRIES**

EPROUVETTE S.E.N.T. (II), CAS DE L'EPDM



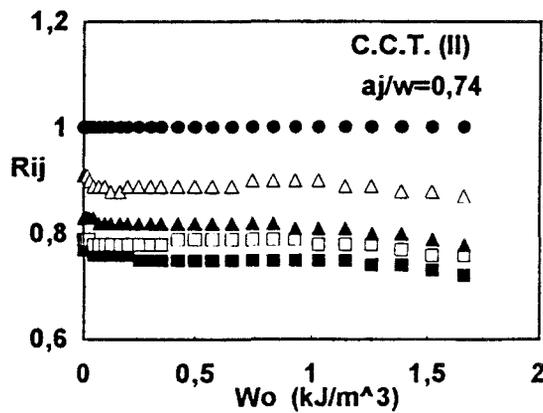
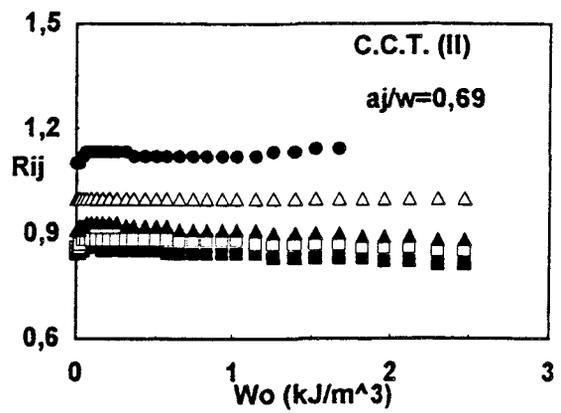
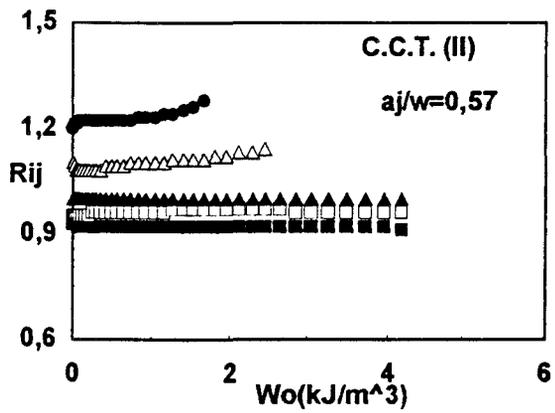
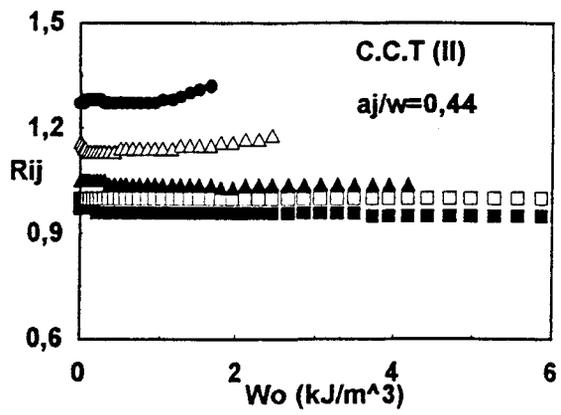
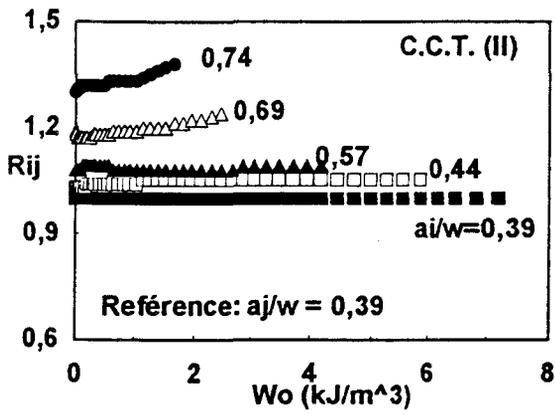
Paramètre de séparation R_{ij} en fonction de W_o . Géométrie S.E.N.T. (II)



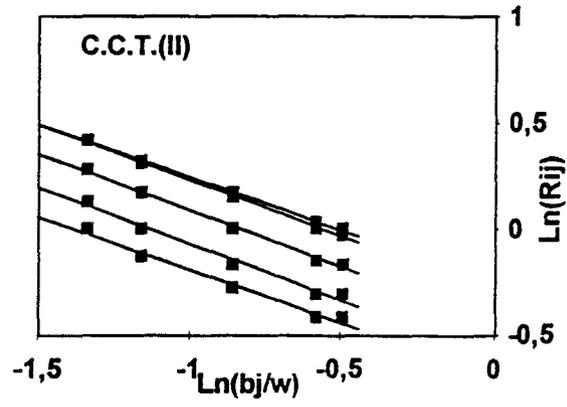
b/w	m_j	C_j	$C = C_j/[b/w]^{m_j}$
0,69	-0,866	0,728	0,991
0,61	-0,882	0,612	0,950
0,5	-0,861	0,575	1,080
0,4	-0,864	0,462	1,020
0,31	0,875	0,350	0,965

Tableau récapitulatif des valeurs m_j , C_j et de C

EPROUVETTE C.C.T. (II), CAS DE L'EPDM



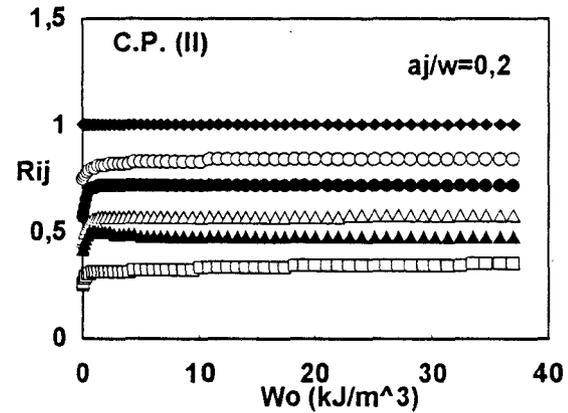
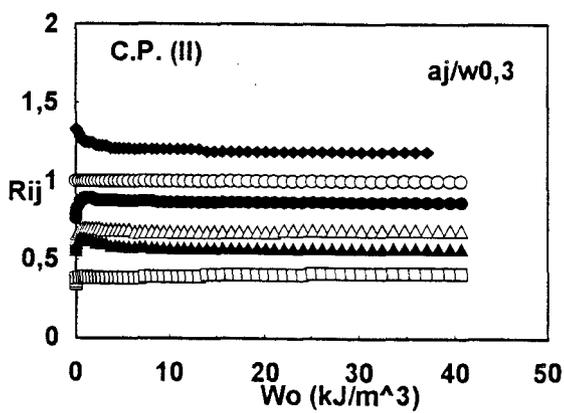
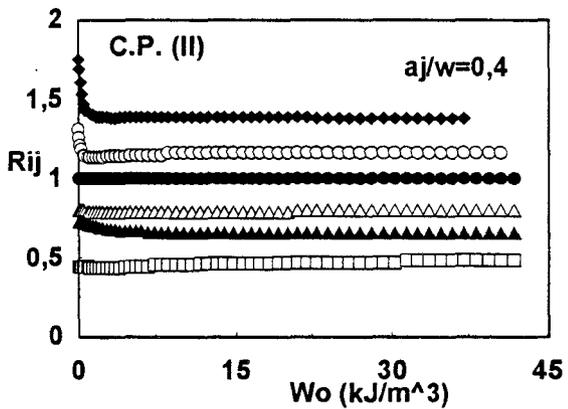
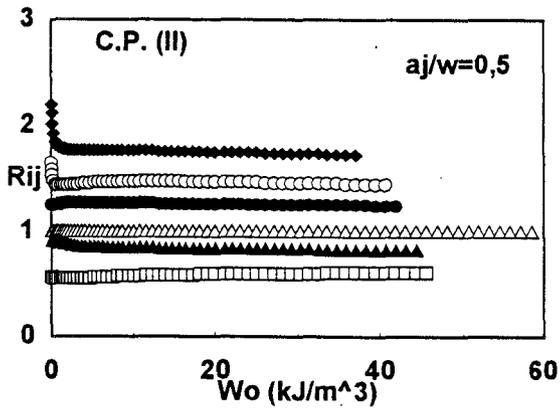
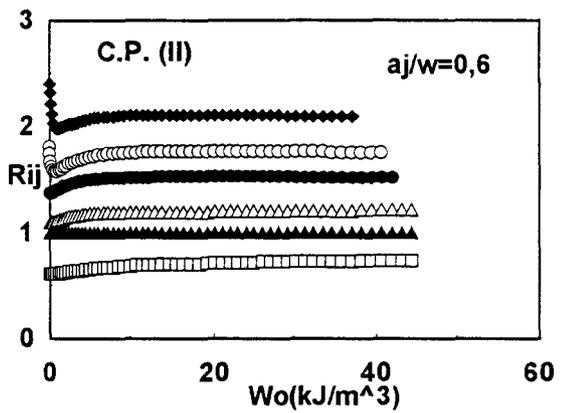
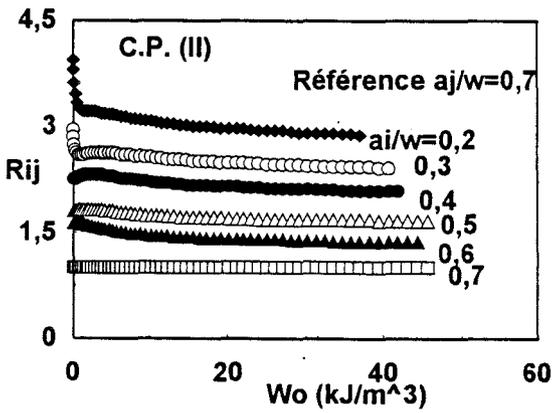
Paramètre de séparation R_{ij} en fonction de Wo . Géométrie C.C.T. (II)



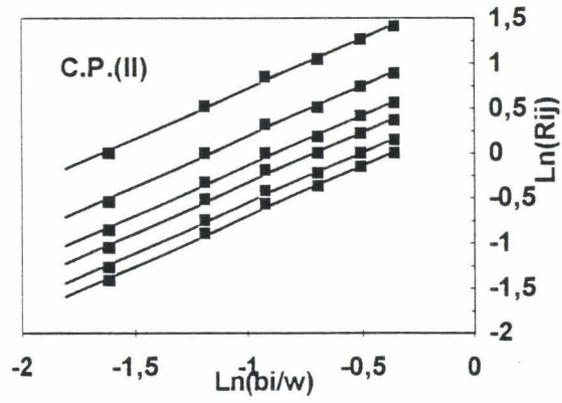
b_j/w	m_j	C_j	$C = C_j/[b_j/w]^{m_j}$
0,61	-0,499	0,775	0,990
0,56	-0,528	0,743	1,007
0,43	-0,533	0,641	1,012
0,31	-0,530	0,549	1,016
0,26	0,499	0,501	0,977

Tableau récapitulatif des valeurs m_j , C_j et de C

EPROUVETTE C.P. (II), CAS DE L'EPDM



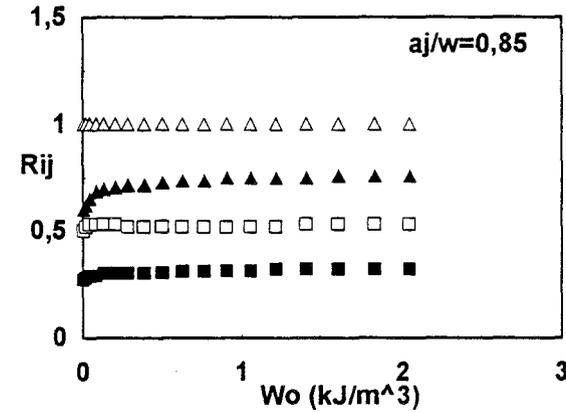
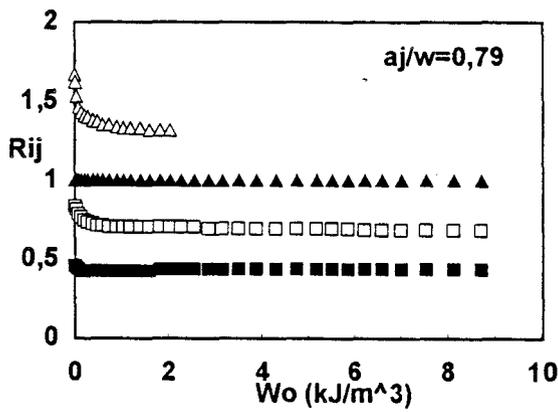
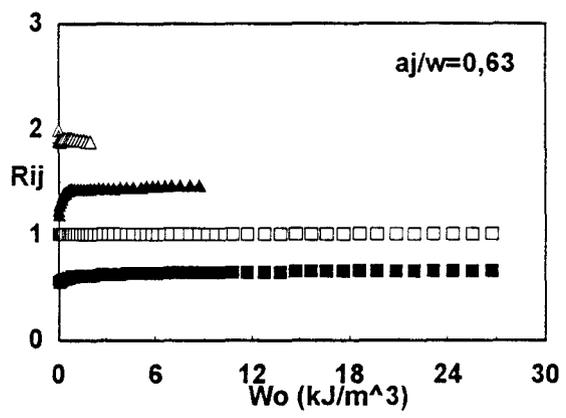
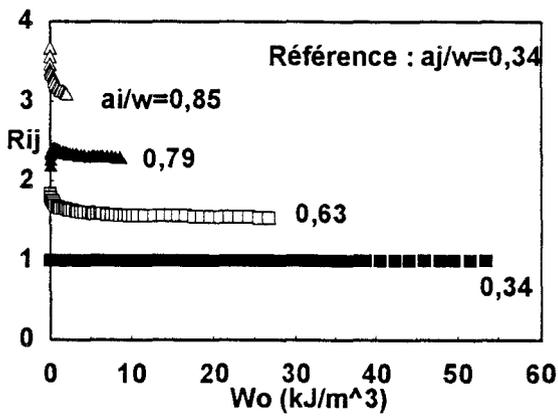
Paramètre de séparation R_{ij} en fonction de W_o . Géométrie C.P. (II)



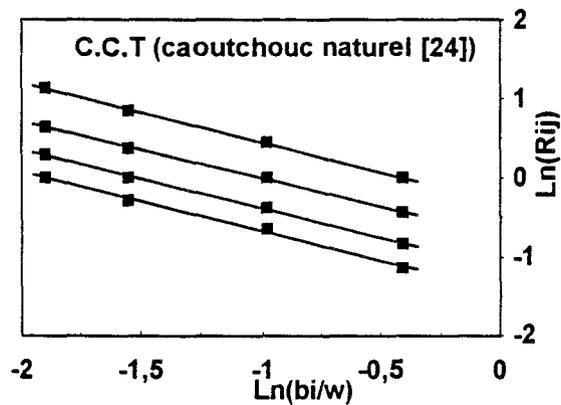
b_j/w	m_j	C_j	$C = C_j/[b_j/w]^{m_j}$
0,8	1,118	1,277	0,995
0,7	1,118	1,527	1,025
0,6	1,120	1,773	1,001
0,5	1,125	2,224	1,020
0,4	1,120	2,681	0,961
0,3	1,128	3,739	0,962

Tableau récapitulatif des valeurs m_j , C_j et de C . Géométrie C.P. (II).

EPROUVETTE C.C.T. CAS DU CAOUTCHOUC NATUREL [24]



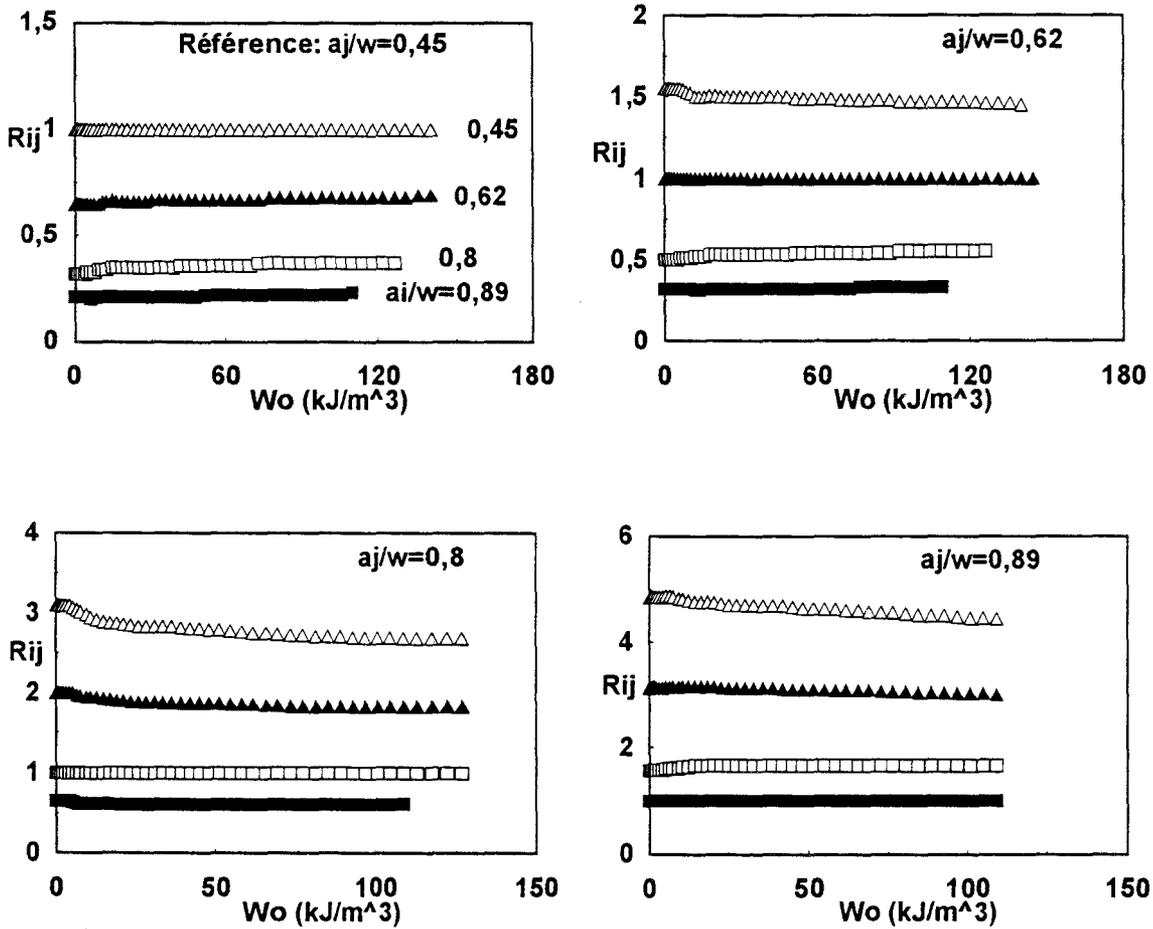
Paramètre de séparation R_{ij} en fonction de W_o . Géométrie C.C.T. Caoutchouc naturel[24]



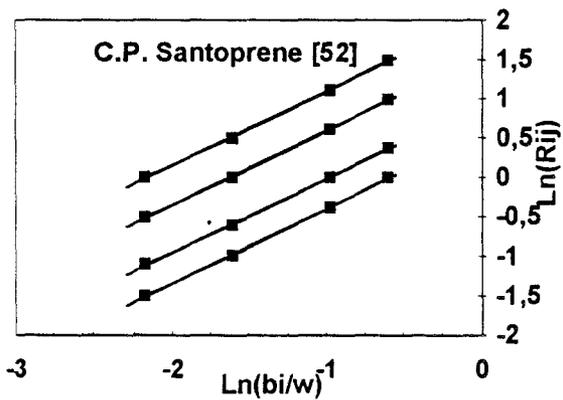
b_j/w	m_j	C_j	$C = C_j/[b_j/w]^{m_j}$
0,66	-0,757	0,731	0,999
0,38	-0,718	0,486	0,982
0,21	-0,745	0,322	1,022
0,15	-0,750	0,241	0,999

Tableau récapitulatif des valeurs m_j , C_j et de C . Caoutchouc naturel [24]

EPEOUVETTE C.P., CAS DU CAOUTCHOUC SANTOPRENE [52]



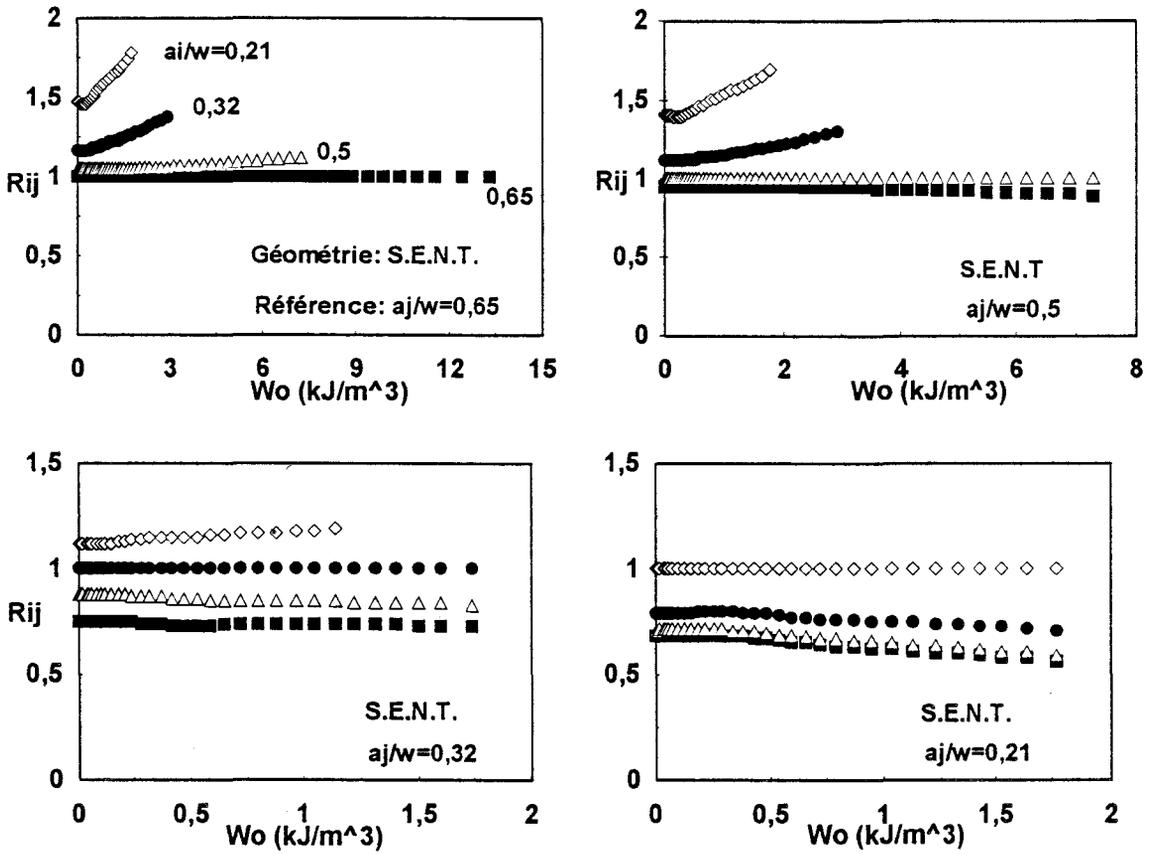
Paramètre de séparation R_{ij} en fonction de W_o . Géométrie C.P. Santoprene [52]



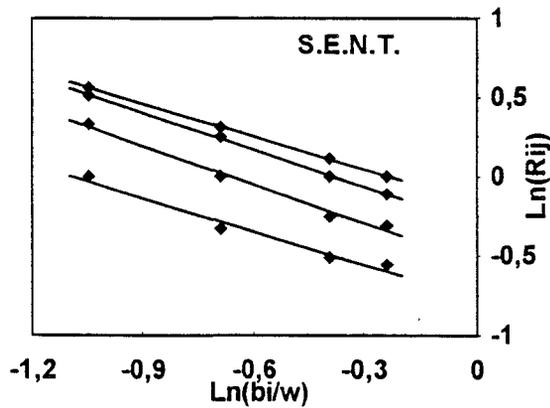
b_j/w	m_j	C_j	$C = C_j/[b_j/w]^{m_j}$
0,55	0,945	1,735	0,998
0,38	0,939	2,525	1,006
0,20	0,944	4,677	1,024
0,11	0,943	7,715	0,983

Tableau récapitulatif des valeurs m_j , C_j et de C . Santoprene [52]

EPROUVETTE S.E.N.T., CAS DU PROPERGOL



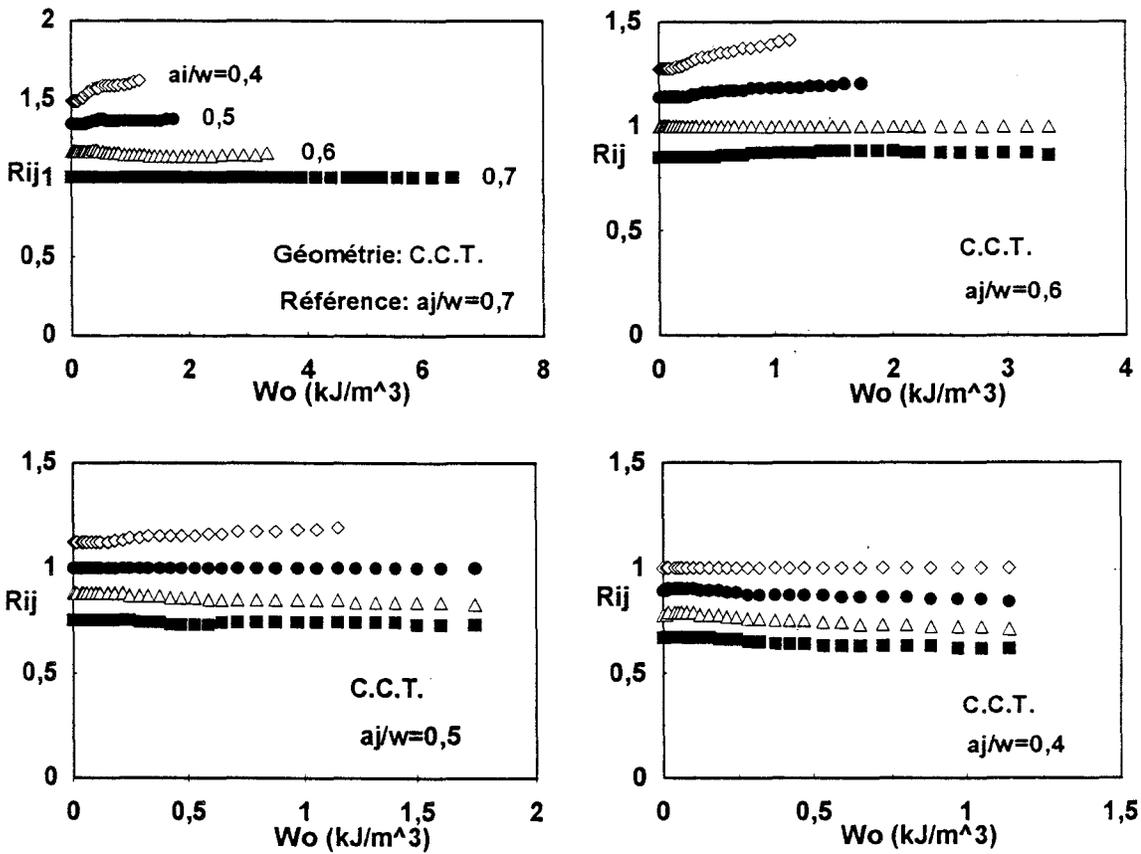
Paramètre de séparation R_{ij} en fonction de W_o . Géométrie S.E.N.T. Propergols



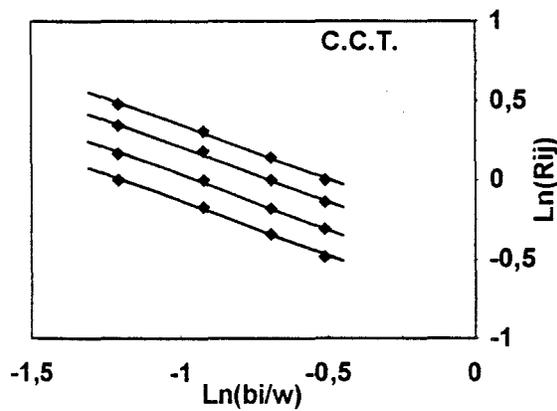
b_j/w	m_j	C_j	$C = C_j/[b_j/w]^{m_j}$
0,79	-0,694	0,848	1,001
0,68	-0,778	0,742	1,008
0,50	-0,807	0,586	1,026
0,35	-0,704	0,463	0,969

Tableau récapitulatif des valeurs m_j , C_j et de C . Propergols

EPROUVETTE C.C.T., CAS DU PROPERGOL



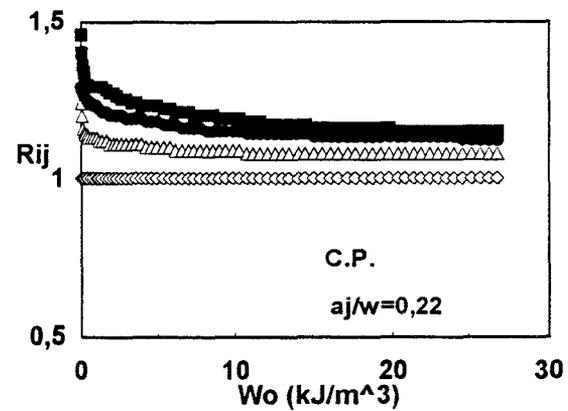
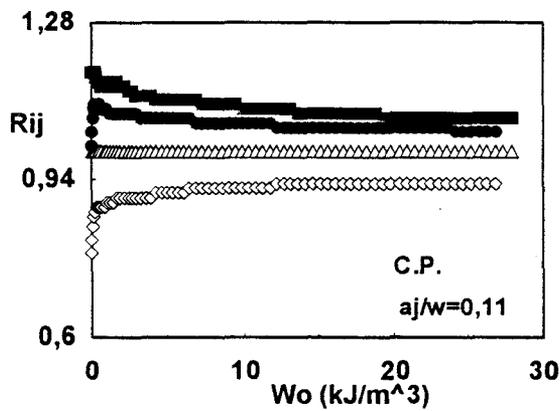
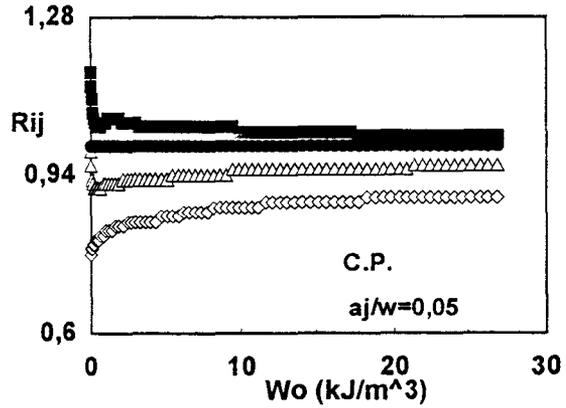
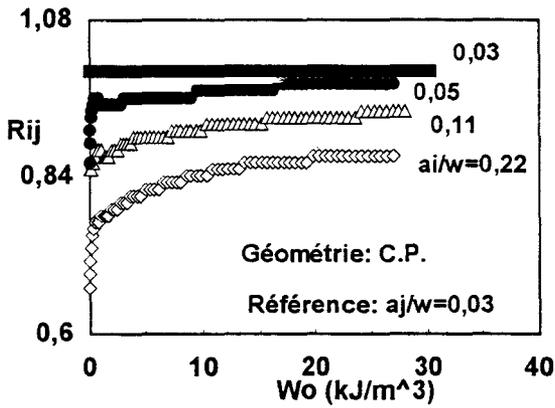
Paramètre de séparation R_{ij} en fonction de W_o . Géométrie C.C.T. Propergols



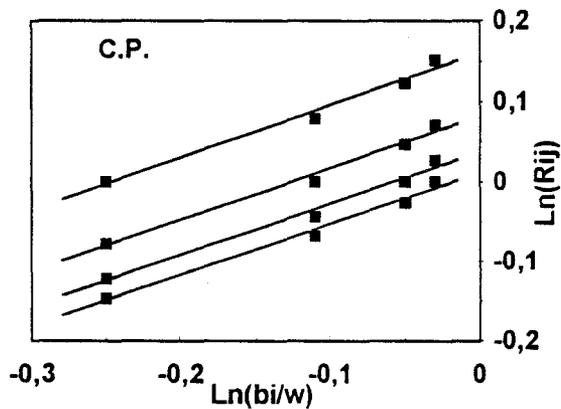
b_j/w	m_j	C_j	$C = C_j/[b_j/w]^{m_j}$
0,6	-0,687	0,713	1,013
0,5	-0,696	0,615	0,997
0,4	-0,704	0,513	0,979
0,3	-0,687	0,442	1,011

Tableau récapitulatif des valeurs m_j , C_j et de C . Propergols

EPROUVETTE C.P., CAS DU PROPERGOL



Paramètre de séparation R_{ij} en fonction de W_o . Géométrie C.P. Propergols



b_j/w	m_j	C_j	$C = C_j/[b_j/w]^{m_j}$
0,97	0,647	1,012	0,993
0,95	0,650	1,039	1,003
0,89	0,647	1,085	1,008
0,78	0,654	1,175	0,997

Tableau récapitulatif des valeurs m_j , C_j et de C . Propergols

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] F.W. BILLMEYER *Polymer Science*
Interscience (1962)
- [2] J.W. GOPPEL Appl. Sci A1, 3 and 18 (1949)
- [3] L.R.G. TREOLAR *The physics of Rubber Elasticity*
Clarendon Press Oxford (1975)
- [4] R.Y. YOUNG Polymers
Chapman and Hall (1979)
- [5] K.H. MEYER AND G. FERRI Helv. chim. Acta 22, 1362 (1936)
- [6] R.L. ANTHONY J. Phys. Chem. 46, 826 (1942)
R.H. CASTON
AND E. GUTH
- [7] R.M. CHRISTENSEN *Theory of viscoelasticity*
Academic Press (1971)
- [8] J.D. FERRY *Viscoelastic Properties of Polymers*
3rd Edition, John Wiley and Sons Inc. (1980)
- [9] M.F. ASHBY *Matériaux 2 : Microstructure et mise en oeuvre*
D.R.H. JONES Dunod (1991)
- [10] J.P. FLORY P.J. Ind. Eng. Chem. 38, 429 (1946)
- [11] P. GERMAIN *Cours de Mécanique des Milieux Continus - Tome 1-*
MASSON et C^{ie}, EDITEURS
- [12] W. KUHN Kolloidzsehr, 68, 2 (1934)
- [13] W. KUHN Kolloidzsehr, 76, 258 (1936)
- [14] R.S. RIVLIN *Large Elastic Deformation of Isotropic Materials*
IV : Further Developments of the General Theory
Trans. Roy. soc. Vol. 241, 10 835, pp 379 - 397 (1948)
- [15] M. MOONEY *A theory of Large Elastic Deformation*
Journal of applied Physics, Vol. 11, p 582, (Déc 1940)
- [16] R.S. RIVLIN *Large Elastic Deformation of Istropic Materials, VII :*
AND D.W. SUNDERS *Experiments on the Deformation of Rubber*
Trans. Roy. Soc., Vol. 243, A. 685, pp 251-288 (1951)
- [17] R.W. OGDEN *Non linear Elastic Deformations*
Ellis Hoorwood Limited (1984)
- [18] K.C. VALANIS J. appl. phys. 38, 2997 (1967)
R.F. LANDLY

- [19] G.R. IRWIN Appl. Mats.Res. 3, pp 65, (1964)
- [20] G.C. SIH ***Strain energy density factor applied to mix mode crack problems***
Int. Journ. of fract., vol.10, n°3, (1974)
- [21] P.S THEOCARIS ***The mises elastic-plastic boundary as the core in fracture criteria***
- [22] A.A GRIFFITH Phil. trans. Roy. Soc. A 221, p 163 (1920)
- [23] E. OROWAN Rep. Pr. gr. phys., 12, p 185 (1948)
- [24] R.S RIVLIN ***Rupture of rubber***
A.G THOMAS J.Polymers Sci., vol.10, p 291, (1953)
- [25] C.E INGLIS ***Stress in a plate due to the presence of cracks and sharpe corners***
Tran. Inst. Naval. Architects, 55, pp 219-241, (1913)
- [26] G.R RICE ***A path independant integral and the approximate analysis of strain concentration by notched cracks***
Jour. of Appl. Mech., p 379, (1968)
- [27] J.D ESHELBY ***Int. Journal of fracture, n°4, p 3, (1968)***
C. ATKINSON
- [28] J.D ESHELBY Phil. Trans. of the American society, n°224, p 87, (1951)
- [29] J.D.G SUMPTER ***Elastic-plastic fracture analysis and design using the finite element method***
Ph D thesis University of London, (1973)
- [30] C.E TURNER ***Note on the applicability of J to elastic-plastic materials,***
J.D.G SUMPTER Int. Jour. of Frac. 9, (1973)
- [31] P.C PARIS ***In fracture mechanics,***
H.A ERNST Twelfth conference ASTM STP 700, p 338-351, (1980)
C.E TURNER
- [32] J.E SRAWLEY ***On the relation of J_1 to work done per unit uncracked area : "total" or "component" due to Crack***
Int. Journ. of Fracture p 2 (1976)
- [33] C.E. TURNER ***The Ubiquitous η Factor***
Fracture Mechanics A S T M S T P 700, p 314-337 (1979)
- [34] G. PLUVINAGE ***Mécanique élastoplastique de la rupture: Critère d'amorçage.***
CEPADUES-EDITIONS (1989)

- [35] M.H. SHAROBEAM ***The load separation criterion and methodology in ductile fracture mechanics,***
J.D. LANDES Int. J of fracture 47, p 84-104 (1991)
- [36] J.A BEGLEY ***The J integral as fracture criterion***
J.D LANDES ASTM STP 514, pp 1-20
- [37] J.R RICE ***Some further results on J integral analysis and estimates, progress in flaw growth and fracture toughness testing,***
P.C PARIS ASTM STP 536, American society for testing and materials, 1973, pp. 231-245
- [38] H.W GREENSMITH ***Rupture of Rubbers. X : The change in stored energy on making a small cut in a test piece held in simple extension***
 Jour. of Appl. Polymer Sci., vo.7, pp 993-1002, (1963)
- [39] G.J LAKE ***Application of fracture mechanics to failure in rubber articles, with particular reference to groove cracking in tyres***
 Conf. Yield deformation and fracture of polymers, Phys. Institute, London (1970)
- [40] A.J KINLOCH ***A New Approach to Crack Growth in Rubbery Composite***
D.A TOD Propellants. Properllants, Explosives, pyrothechnics, 9, 48-55, (1984)
- [41] S.Y HO ***Hysteresis and Fracture Behaviour of Composite Propellants***
D.A TOD Ministry of Defence, Royal Armement Research and Development istablishment, Waltham Abbey, ESSEX, U.K.
- [42] E.H. ANDREWS ***Fracture of polymers***
 Ed. Oliver and Boyd Edinburgh, p 138, (1968)
- [43] E.H. ANDREWS ***A generalized theory of fracture mechanics***
 Jour. Mat. Sci., 9, pp 887-894, (1974)
- [44] E.H. ANDREWS ***Generalized fracture mechanics, Part. 2 :***
E.W BELLINGTON ***Materials subject to general yielding***
 Jour. Mat. Sci. p 1354-1361, (1961)
- [45] E.H. ANDREWS ***Adesion of epoxy resin to glass***
H.E PINGSHENG Proc. Roy. Society London A 381, p 345-361 (1982)
- [46] J.G WILLIAMS ***Fracture of polymers,***
 Ellis-Horwood ed., p 231, (1981)
- [47] M. NAIT ABDELAZIZ ***Experimental investigation of fracture surface energy of a solid propellant under different loading rates.***
R. NEVIERE Eng. fracture mech. 31,1009-1026 (1988)
G. PLUVINAGE
- [48] R.NEVIERE Thèse de doctorat I.N.P.L (1989)

- [49] D.P. ROOKE
D.J. CARTWRIGHT
Compendium of stress intensity factors.
Hellington press. (1976)
- [50] M. NAÏT ABDELAZIZ
H. GHFIRI
G. MESMACQUE
*A global energetic approach fo fracture on non-linear
behaviour materials,*
Proceedings of the 10th Congress on Material Testing
P 152-157, Budapest (1991)
- [51] H. GHFIRI
NAÏT ABDELAZIZ
G. MESMACQUE
*Experimental determination of J on rubbery materials :
influence of finite dimensions*
Eng. Fracture Mech. 44, n°5, 681-689, (1993)
- [52] B.H KIM
C.R JOE
*Single Specimen Test Method for Determining Fracture
Energy (Jc) of Highly Deformable Materials*
Eng. frac. Mech. vol, 32, N°1, pp 155-161, (1989)

