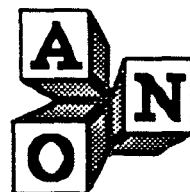


USTL

LABORATOIRE D'ANALYSE NUMERIQUE ET  
D'OPTIMISATION

50376  
1993  
344

n° d'ordre : 1223



50376  
1993  
344

# THESE

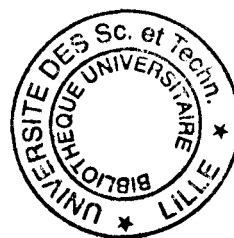
Nouveau régime

présentée à  
l'Université des Sciences et Technologies de Lille

pour obtenir le titre de

DOCTEUR en MATHÉMATIQUES  
par

Thierry GENSANE



## COURBES RATIONNELLES A PARALLELES RATIONNELLES ET APPROXIMATION RATIONNELLE DE COURBES PARALLELES

soutenue le 10 décembre 1993 devant la commission d'examen

Membres du jury

|                      |                |
|----------------------|----------------|
| Président :          | C. Brezinski   |
| Rapporteurs :        | P.J. Laurent   |
|                      | A. Le Méhauté  |
| Membres :            | H. Gaudier     |
|                      | P. Jeannin     |
|                      | P. Sablonnière |
| Directeur de thèse : | J.C. Fiorot    |

Laboratoire d'Analyse Numérique et d'Optimisation, UFR IEEA - M3, USTL Flandres-Artois,  
59655 Villeneuve d'Ascq - Cedex - FRANCE.





Courbes Rationnelles à Parallèles Rationnelles  
Approximation Rationnelle de Courbes Parallèles.



# Chapter 1

## Introduction.

La notion de courbes parallèles se rencontre par exemple lors de l'étude de trajectoires d'outils pour machine à commande numérique, de l'analyse de la tolérance, de l'agrandissement ou du rétrécissement d'objets. Dans le domaine de la CAGD on les nomme "offset curves". Plus précisément:

**Définition 1.1** Soit  $r(t) = (x(t), y(t))$  une courbe paramétrée sur  $[a, b]$ , avec  $a, b \in \mathbb{R}$ . Les courbes  $r_d(t) = r(t) + dn(t)$  où  $d$  est un réel quelconque et  $n(t) = (-y'(t)/\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}, x'(t)/\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)})$  est le vecteur normal unitaire à  $r(t)$ , sont appelées courbes parallèles à  $r(t)$ .

Les deux exemples élémentaires que constituent les droites et les cercles (dont les parallèles sont évidemment des droites et des cercles), n'apportent pas une intuition correcte des difficultés que les courbes parallèles peuvent générer. Le problème essentiel qui est à l'origine de l'étude récente des courbes parallèles est le suivant: les courbes parallèles d'une courbe rationnelle ne sont généralement pas rationnelles (il faut en effet pour cela que le dénominateur  $\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}$  de  $n(t)$  soit rationnel). L'ellipse rassemble les différents problèmes rencontrés lors de leur utilisation: ses parallèles ne sont pas des ellipses, à partir d'une certaine distance apparaissent points multiples et points singuliers, les parallèles de l'ellipse ne sont jamais rationnelles.

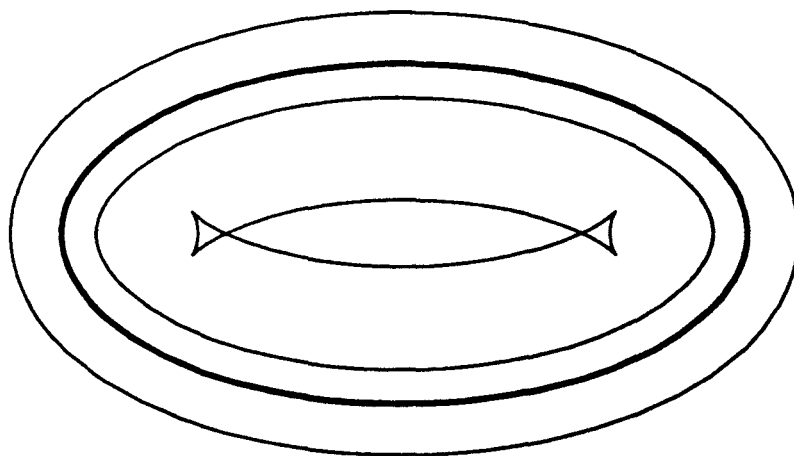


Figure 1.1: Les parallèles de l'ellipse ne sont pas rationnelles.

Précisons que l'ensemble des points singuliers de toutes les courbes  $r_d(t)$  pour  $d \in \mathbb{R}$  décrit exactement la développée de  $r(t)$ . Pour une étude complète des propriétés analytiques classiques des "offsets" on peut se référer à Farouki et Neff [9].

Dans l'article précédemment cité est donnée une définition topologique de ce que les auteurs appellent "*trimmed offset*". Il s'agit d'éliminer les points de la courbe parallèle qui sont à distance strictement inférieure à  $d$  de la courbe  $r(t)$ . Pour ce faire, l'intervalle  $[a, b]$  est scindé en une suite d'intervalles  $[i_k, i_{k+1}]$  où les  $i_k$  sont les paramètres des points multiples de "l'offset"  $r_d(t)$ . On montre que l'une des deux assertions suivantes est vérifiée:

$$\begin{aligned} \text{soit } d(r_d(\tau), r) &= |d| \text{ pour tout } \tau \in ]i_k, i_{k+1}[ , \\ \text{soit } d(r_d(\tau), r) &< |d| \text{ pour tout } \tau \in ]i_k, i_{k+1}[ . \end{aligned} \tag{1.1}$$

où  $d(r_d(\tau), r) = \inf_{t \in [a, b]} |r_d(\tau) - r(t)|$ . Définir la "trimmed offset" consiste alors à restreindre la courbe  $r_d(t)$  aux intervalles pour lesquels la distance d'un point de la courbe parallèle à la courbe  $r(t)$  est strictement égale à  $d$ . Dans le cas de l'ellipse, les deux "queues de poisson" des parallèles à points multiples sont alors écartées.

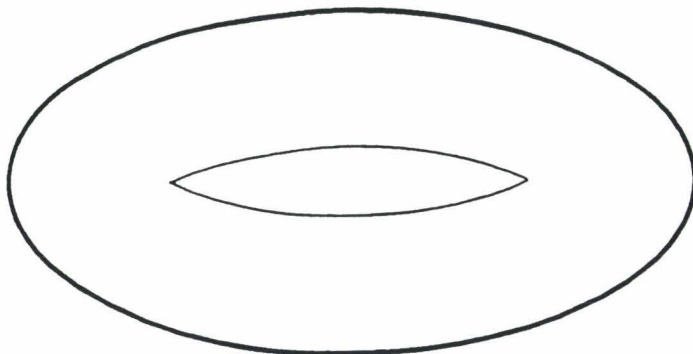


Figure 1.2: La "trimmed offset" est le lieu des points à distance strictement égale à  $d$  de la courbe.

Afin d'éviter l'approximation de courbes parallèles, R.T. Farouki et Sakkalis [10,11] ont introduit une classe de courbes polynomiales dont les parallèles sont rationnelles. Ils disposent, en se restreignant à cet ensemble de courbes, d'une représentation rationnelle des parallèles  $r_d(t)$ .

Le problème se pose pour une classe plus grande de courbes: déterminer l'ensemble des courbes rationnelles à parallèles rationnelles, cet ensemble sera noté  $I_{\mathcal{R}}$ . Dans ce cas, on ne dispose pas de la forme explicite de leur paramétrisation. Plus généralement

ce problème a été abordé à la fin du siècle dernier dans le domaine complexe: Raffy [29] caractérise l'ensemble  $I_{\mathcal{R}}$ . La grande difficulté réside dans l'extraction des courbes réelles. Dans le même ordre d'idée G. Humbert [23] s'intéresse aux courbes algébriques dont l'arc est algébrique.

Dans le chapitre 2, nous donnerons la forme générale des paramétrisations des courbes de  $I_{\mathcal{R}}$  et de leurs parallèles. H. Pottmann [27,28] a résolu simultanément ce problème, il utilise par ailleurs la forme Bézier duale pour la représentation des courbes de  $I_{\mathcal{R}}$ . Une seconde caractérisation de l'ensemble  $I_{\mathcal{R}}$  sera apportée par une approche géométrique. Nous montrerons d'abord que les caustiques (enveloppe des rayons réfléchis sur un miroir) des courbes rationnelles ont des parallèles rationnelles, mais elles ne constituent qu'un sous-ensemble strict de  $I_{\mathcal{R}}$ . L'ensemble  $C_{\mathcal{R}}$  des caustiques des courbes rationnelles est en fait égal à l'ensemble  $\mathcal{A}_{\mathcal{R}}$  des courbes rationnelles dont l'abscisse curviligne est rationnelle ou rationnelle par morceaux. Nous décrirons alors l'ensemble  $I_{\mathcal{R}}$  comme ensemble des développantes des courbes de  $\mathcal{A}_{\mathcal{R}} = C_{\mathcal{R}}$ .

Dans le chapitre 3, nous étendons certains des résultats donnés dans [10,11] en donnant une caractérisation géométrique des quintiques polynomiales à parallèles rationnelles et une méthode d'interpolation en deux points à l'ordre  $k$  par des courbes polynomiales à parallèles rationnelles. Une autre expression de la caractérisation des quintiques à parallèles rationnelles et la forme générale des polygones de contrôle des courbes polynomiales à parallèles rationnelles (ces dernières constituant l'ensemble  $I_{\mathcal{P}}$ ) a été établi parallèlement au présent travail par Farouki [12].

De nombreux papiers des années 80 [7,21,22,24,26,30] ont pour but d'appliquer aux "offsets" des schémas d'interpolation polynomiale ou rationnelle. Néanmoins, jamais ces auteurs ne s'attaquent directement à l'interpolation du vecteur normal  $n(t)$  en vue d'obtenir des interpolants de  $r(t) + dn(t)$ .

Dans le chapitre 4, nous déterminons une approximation rationnelle des parallèles à une courbe rationnelle  $r(t)$ . Par commodité, comme dans le chapitre précédent, nous identifions un point du plan avec sa représentation en nombre complexe. Le problème est ramené à la détermination d'un interpolant de type Hermite de  $n(t)$ , vecteur normal unité de  $r(t)$ . Bien qu'il s'agisse a priori d'un problème non linéaire, en écrivant l'interpolant  $Z(t)$  de  $n(t)$  sous la forme  $Z(t) = \frac{z(t)}{\bar{z}(t)}$  où  $z(t)$  est une courbe polynomiale, nous le transformons en un problème linéaire. A cet effet, nous déterminons un ensemble de nombres complexes  $(b_i^j)$  dits admissibles, tel que l'interpolant polynomial  $z(t)$  de ces nombres fournisse une solution  $Z(t)$ . Comme nous recherchons l'interpolant des parallèles à  $r(t)$  sous la forme d'une spline rationnelle, nous traitons le problème de l'interpolation

d'Hermite à l'ordre  $k$  en deux points. Une liberté nous permet d'ajouter la valeur en un point intermédiaire. Par *ajustement* des données admissibles, nous sommes capables de déterminer un interpolant polynomial  $z(t)$  en général de degré  $k+1$ , et donc une solution  $Z(t)$  de degré  $2k+2$ . Une variante est proposée pour la recherche d'un ensemble de données admissibles de départ afin d'éviter le calcul des dérivées de  $n(t)$ , ces dernières introduisant l'évaluation de radicaux. Finalement, nous disposons d'un interpolant rationnel  $r(t) + dZ(t)$  de la courbe  $r_d(t)$ .

Cette étude a été motivée par le fait que toute courbe rationnelle est décrite sous forme (BR) au moyen d'un polygone de vecteurs massiques (Fiorot et Jeannin [14,15,16,17]). Les parallèles des courbes de  $I_P$  ou de  $I_R$ , les interpolants des courbes parallèles construits au chapitre 4 pourront alors être représentés sous la forme (BR). Les courbes (BR) contiennent les courbes Bézier polynomiales [1,5] et les courbes Bézier rationnelles [8,13].

#### NOTATIONS:

Nous noterons  $\overline{\mathbb{R}}$  l'ensemble  $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ ,

$\mathbb{R}[X]$  l'anneau des polynômes à coefficients réels,

$\mathbb{R}(X)$  le corps des fractions rationnelles,

$\mathcal{D}$  l'ensemble des courbes paramétrées rationnelles à support sur une droite,

$\mathcal{C}$  l'ensemble des courbes paramétrées rationnelles à support sur un cercle,

$I_P$  l'ensemble des courbes paramétrées polynomiales à parallèles rationnelles ou rationnelles par morceaux,

$I_R$  l'ensemble des courbes paramétrées rationnelles à parallèles rationnelles ou rationnelles par morceaux,

$\mathcal{C}_R$  l'ensemble des caustiques des courbes paramétrées rationnelles,

$\mathcal{A}_R$  l'ensemble des courbes paramétrées rationnelles dont l'abscisse curviligne est rationnelle ou rationnelle par morceaux.



## Chapter 2

# Courbes Rationnelles à Parallèles Rationnelles

### 2.1 Les Ensembles $I_{\mathcal{P}}$ et $I_{\mathcal{R}}$

Les courbes parallèles d'une courbe paramétrée rationnelle  $r(t)$  sont rationnelles si et seulement si l'application de Gauss  $t \rightarrow n(t)$  est rationnelle i.e.

$$\text{ssi l'application } t \rightarrow |r'(t)| \text{ est rationnelle} \quad (2.1)$$

$$\text{ssi } \exists C \in \mathbb{R}(X), x'^2(t) + y'^2(t) = C^2(t). \quad (2.2)$$

Nous noterons  $I_{\mathcal{P}}$  l'ensemble des courbes polynomiales à parallèles rationnelles . Les courbes de  $I_{\mathcal{P}}$  sont appelées par Farouki et Sakkalis [10,11] "Pythagorean-hodograph curves". Tiller et Hanson [30] montrent que l'ensemble des courbes polynomiales à parallèles polynomiales est réduit à l'ensemble des droites paramétrées.

Pour donner une caractérisation de l'ensemble  $I_{\mathcal{P}}$  et de l'ensemble  $I_{\mathcal{R}}$ , nous utiliserons le théorème donné par Kubota [25]:

**Théorème 2.1.1** Soient  $a, b, c \in \mathbb{R}[X]$ ,  $a^2 + b^2 = c^2$  si et seulement si il existe  $K, M, N \in \mathbb{R}[X]$  tel que

$$\begin{aligned} a &= K(M^2 - N^2) \\ b &= K(2MN). \end{aligned}$$

L'ensemble  $I_P$  peut alors être exprimé par

$$I_P = \left\{ r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} / \begin{array}{l} x(t) = \int K(t) (M^2(t) - N^2(t)) dt \\ y(t) = \int K(t) (2M(t) N(t)) dt \\ K, M, N \in \mathbb{R}[X] \end{array} \right\}.$$

### Remarques

1) En fixant  $K(t) = 1$  et  $M(t) = \alpha$ ,  $N(t) = \beta$  avec  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , nous obtenons les paramétrisations affines des droites.

2) Les courbes de  $I_P$  de degré plus élevé que les droites sont les cubiques déterminées par  $K(t) = 1$ ,  $M(t) = \alpha t + \beta$  et  $N(t) = \gamma t + \delta$ .

Farouki and Sakkalis [10] donnent une caractérisation de ces cubiques par une condition géométrique sur leur polygone de contrôle (voir le chapitre 3 pour une autre formulation de cette condition et une généralisation aux quintiques de  $I_P$ ).

Ils observent aussi qu'il n'existe qu'une seule cubique (à un ensemble de transformations élémentaires près). Cette courbe est la cubique de Tschirnhausen qui est aussi la caustique de la parabole [11].

**Corollaire 2.1.1** (i) L'ensemble  $I_R$  est déterminé par

$$I_R = \left\{ r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} / \begin{array}{l} x(t) = \int K(t) \frac{M^2(t) - N^2(t)}{R^2(t)} dt \\ y(t) = \int K(t) \frac{2M(t) N(t)}{R^2(t)} dt \end{array} \text{ soient rationnelles} \right\}.$$

Nous avons de façon équivalente:

(ii)  $P(t) \in I_R$  ssi  $P(t)$  est rationnelle et il existe  $K, M, N \in \mathbb{R}[X]$  tels que  $P'(t) = K(t) \left( \frac{M(t) + iN(t)}{R(t)} \right)^2$ .

### Preuve:

Soit  $r(t) = (P(t)/R(t), Q(t)/R(t))$  une courbe rationnelle. La courbe  $r(t) \in I_R$  ssi il existe  $C \in \mathbb{R}(X)$  tel que

$$(P'R - PR')^2 + (Q'R - QR')^2 = C^2 R^2.$$

Remarquant que  $C^2 R^2 \in \mathbb{R}[X]$  et par Kubota,  $\exists K, M, N \in \mathbb{R}[X]$  tels que

$$\frac{P'R - PR'}{R^2} = K \frac{M^2 - N^2}{R^2} \text{ et } \frac{Q'R - QR'}{R^2} = K \frac{2MN}{R^2}$$

ce qui prouve (i).

En écrivant  $P(t) = x(t) + iy(t)$  où  $i^2 = -1$ , (i) et (ii) sont clairement équivalents.  $\square$

**Exemples 2.1.1** 1) La paramétrisation du cercle unité privé du point  $(-1, 0)$  donnée par  $r(t) = ((1 - t^2)/(1 + t^2), (2t/(1 + t^2)))$  peut être obtenue sous la forme précédente

$$r(t) = \left( \int K(t) \frac{M^2(t) - N^2(t)}{R^2(t)} dt, \int K(t) \frac{2M(t)N(t)}{R^2(t)} dt \right)$$

avec  $K(t) = -1$ ,  $M(t) = 1 + t$ ,  $N(t) = 1 - t$ ,  $R(t) = 1 + t^2$ .

2) La paramétrisation de l'astroïde

$$r(t) = \left( \left( \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \right)^3, \left( \frac{2t}{1 + t^2} \right)^3 \right)$$

est donnée par

$$K(t) = -12t(1 - t^2), M(t) = 1, N(t) = t, R(t) = (1 + t^2). \quad (2.3)$$

Ses parallèles sont déterminées par

$$r_d(t) + \varepsilon(t) \cdot \left( \frac{-2t}{1 + t^2}, \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \right)$$

où  $\varepsilon(t)$  est le signe de  $-12t(1 - t^2)$ .

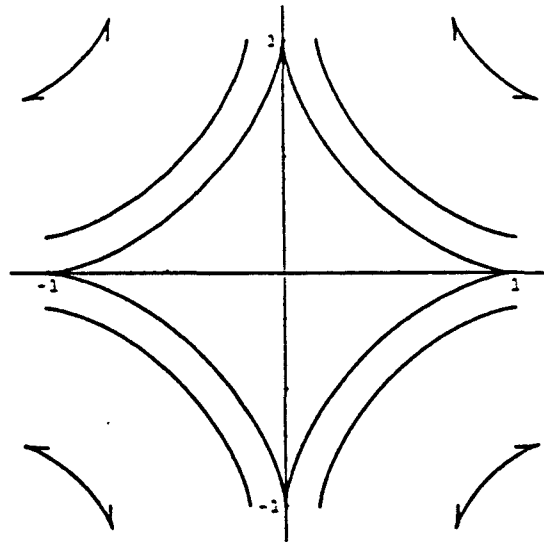


Figure 2.1: L'astroïde est une courbe de  $I_{\mathcal{R}}$ .

Les deux équivalences du corollaire 2.1.1 mènent à deux approches différentes en vue de la résolution du problème. Nous examinons brièvement le premier, qui n'est pas efficace:

Soient  $K, M, N, R \in \mathbb{R}(X)$  et soient  $r_0, r_1, \dots, r_n$  les racines complexes de  $R(t)$ . Soit  $Z(t) = (\int K(t) \frac{M^2(t) - N^2(t)}{R^2(t)} dt, \int K(t) \frac{2M(t)N(t)}{R^2(t)} dt)$  une courbe paramétrée.  $Z(t) \in I_{\mathcal{R}}$  ssi pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ , les résidus de  $Z(t)$  en  $r_i$  sont nuls. Le résidu  $\text{Res}(\frac{K(M^2 - N^2)}{R^2}, r_i)$  ou  $\text{Res}(\frac{2KMN}{R^2}, r_i)$  est le coefficient du terme  $\frac{1}{t - r_i}$  de la série de Laurent. Rappelons (Henrici [20]) que nous avons

$$\text{Res}(\frac{P}{Q}, r_i) = \frac{1}{(\alpha_i - 1)!} \frac{d^{\alpha_i - 1}}{dt^{\alpha_i - 1}} \left( (t - r_i)^{\alpha_i} \frac{P(t)}{Q(t)} \right) \Big|_{t=r_i}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

où  $\alpha_i$  est l'ordre de la racine  $r_i$  de  $Q(t)$ . Ce calcul qui nécessite la détermination des zéros de  $Q(t)$  est numériquement coûteux.

Nous allons contourner ces difficultés algébriques en considérant le point (ii). Nous donnons maintenant la forme explicite des paramétrisations des courbes de  $I_{\mathcal{R}}$ .

**Théorème 2.1.2** Une courbe  $r(t) = (x(t), y(t))$  appartient à  $I_{\mathcal{R}}$  ssi

$$\begin{cases} x(t) = \frac{f'(M^2 - N^2) - f(M^2 - N^2)'}{2(MN' - M'N)(M^2 + N^2)}(t) \\ y(t) = \frac{f'(2MN) - f(2MN)'}{2(MN' - M'N)(M^2 + N^2)}(t) \end{cases} \quad (2.4)$$

où  $f \in \mathbb{R}(X)$  et  $M, N \in \mathbb{R}[X]$ .

**Preuve:**

La courbe  $r(t)$  appartient à  $I_{\mathcal{R}}$

ssi  $r(t)$  est rationnelle et  $r'(t) = K(t)(\frac{M(t) + iN(t)}{R(t)})^2$ , d'après le corollaire 2.1.1(ii)

ssi  $r(t)$  est rationnelle et les tangentes  $D_t$  de  $r(t)$  peuvent être mises sous la forme

$$D_t \equiv K(t) \frac{2M(t)N(t)}{R^2(t)} x - K(t) \frac{M^2(t) - N^2(t)}{R^2(t)} y = c(t) \quad (2.5)$$

où  $c(t)$  est une fonction rationnelle.

Cette forme est équivalente à

$$D_t \equiv 2M(t)N(t) x - (M^2(t) - N^2(t)) y = f(t) \quad (2.6)$$

où  $f(t)$  est une fonction rationnelle. Remarquons que l'on peut considérer toute courbe  $r(t)$  comme enveloppe de ses tangentes. Or, l'enveloppe d'une famille de droites  $a(t)x +$

$b(t)y = c(t)$  est déterminée par le système

$$\begin{cases} a(t)X(t) + b(t)Y(t) = c(t) \\ a'(t)X(t) + b'(t)Y(t) = c'(t) \end{cases}$$

où une solution  $(X(t), Y(t))$  (si elle existe) est un point de l'enveloppe.

Par un simple calcul on obtient:  $r(t)$  appartient à  $I_{\mathcal{R}}$  ssi

$$x(t) = \frac{\begin{vmatrix} f(t) & M^2(t) - N^2(t) \\ f'(t) & (M^2(t) - N^2(t))' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2M(t)N(t) & M^2(t) - N^2(t) \\ (2M(t)N(t))' & (M^2(t) - N^2(t))' \end{vmatrix}} \quad (2.7)$$

et

$$y(t) = \frac{\begin{vmatrix} f(t) & 2M(t)N(t) \\ f'(t) & (2M(t)N(t))' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2M(t)N(t) & M^2(t) - N^2(t) \\ (2M(t)N(t))' & (M^2(t) - N^2(t))' \end{vmatrix}} \quad (2.8)$$

ce qui mène au résultat.  $\square$

**Exemple 2.1.1** Paramétrisation du cercle.

En posant  $f(t) = \lambda(M^2(t) + N^2(t))$  dans (2.4) on obtient

$$x(t) = \lambda \frac{-2M(t)N(t)}{M^2(t) + N^2(t)} \text{ et } y(t) = \lambda \frac{M^2(t) - N^2(t)}{M^2(t) + N^2(t)}$$

soit la forme explicite des paramétrisations des courbes de  $\mathcal{C}$  (ceci sera montré dans la preuve du lemme 2.3.1). La paramétrisation donnée dans l'exemple 2.1.1 est obtenue avec  $M(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+t)$  et  $N(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-t)$ .

Un autre exemple est donné par la proposition suivante:

**Proposition 2.1.1** *Les cubiques de  $I_{\mathcal{P}}$  n'appartenant pas à  $\mathcal{D}$  sont obtenues par l'expression (2.4) en posant  $f(t) = \lambda(M^2(t) + N^2(t))^2$  avec  $M(t) = at + b$ ,  $N(t) = ct + d$ ,  $(a, c) \neq (0, 0)$  et  $ad - bc \neq 0$ .*

**Preuve:**

Le polynôme  $2(M(t)N'(t) - M'(t)N(t)) = 2(ad - bc)$  est constant non nul. Le polynôme  $M^2(t) + N^2(t)$  divise le numérateur de  $x(t)$  et  $y(t)$ . L'expression de la courbe ainsi obtenue est celle d'une courbe dont le support n'est pas sur une droite.

Réciproquement, considérons une cubique de  $I_{\mathcal{P}}$ ,  $r(t) = (f(M^2(t) - N^2(t)) dt,$

$\int 2M(t)N(t) dt$  avec  $K(t) = 1$ ,  $M(t) = at + b$ ,  $N(t) = ct + d$ ,  $(a, c) \neq (0, 0)$  et  $ad - bc \neq 0$ . Nous recherchons une fraction rationnelle  $f$  telle que  $r(t)$  soit aussi obtenue par (2.4).  $f$  qui est le terme de droite de l'équation (2.6) est donc aussi un polynôme de degré 4. Le polynôme  $M^2(t) + N^2(t)$  divise  $x(t)$  et  $y(t)$  ssi il divise le numérateur de  $x(t) + iy(t)$  i.e. le polynôme  $f'(t)A^2(t) - f(t)(A^2(t))'$  qui est égal à  $A(t)(f'(t)A(t) - 2f(t)A'(t))$ , avec  $A(t) = M(t) + iN(t)$ . Remarquons que  $M(t)$  et  $N(t)$  n'ont pas de racine commune. En notant  $t_0$  une des deux racines complexes de  $M^2(t) + N^2(t)$ , nous recherchons donc  $f$  de degré 4 telle que  $(f'(t_0)A(t_0) - 2f(t_0)A'(t_0)) = 0$  ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} f'(t_0)M(t_0) = 2f(t_0)M'(t_0) \\ f'(t_0)N(t_0) = 2f(t_0)N'(t_0) \end{cases} \quad (2.9)$$

Ce système implique  $2f(t_0)f'(t_0)(M(t_0)N'(t_0) - M'(t_0)N(t_0)) = 0$ , comme  $M(t_0)N'(t_0) - M'(t_0)N(t_0) = ad - bc \neq 0$ , on a  $f(t_0)f'(t_0) = 0$ . Le système (2.9) donne  $f(t_0) = f'(t_0) = 0$  car  $(a, c) \neq (0, 0)$ .

Le conjugué  $\bar{t}_0$  est l'autre racine de  $M^2(t) + N^2(t)$ , ainsi nous avons  $f(\bar{t}_0) = f'(\bar{t}_0) = 0$ . Le degré de  $f$  étant 4, on obtient  $f(t) = \lambda(t - t_0)^2(t - \bar{t}_0)^2$  qui est égal à  $\beta(M^2(t) + N^2(t))^2$ , avec  $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ .  $\square$

Nous allons maintenant donner la forme explicite du vecteur normal d'une courbe  $r(t)$  définie par (2.4). Nous disposerons alors des paramétrisations des courbes parallèles aux courbes de  $I_{\mathcal{R}}$ .

**Lemme 2.1.1** Soit  $f \in \mathbb{R}(X)$  et  $M, N \in \mathbb{R}[X]$ . La courbe  $r(t)$  définie en (2.4) peut être mise sous la forme

$$r(t) = \left( \int g(t) \frac{M^2(t) - N^2(t)}{R^2(t)} dt, \int g(t) \frac{2M(t)N(t)}{R^2(t)} dt \right) \quad (2.10)$$

avec  $R(t) = 2(M(t)N'(t) - M'(t)N(t))(M^2(t) + N^2(t))$  et

$$g(t) = \begin{vmatrix} f(t) & 2M(t)N(t) & M^2(t) - N^2(t) \\ f'(t) & (2M(t)N(t))' & (M^2(t) - N^2(t))' \\ f''(t) & (2M(t)N(t))'' & (M^2(t) - N^2(t))'' \end{vmatrix}$$

**Preuve:**

Il suffit de dériver les expressions (2.7) et (2.8) de  $x(t)$  et  $y(t)$ . Nous obtenons

$$x'(t) = \frac{-(f(t)a''(t)R(t) - f(t)a'(t)R'(t) - a(t)(-f''(t)R(t) + f'(t)R'(t)))}{R^2(t)}$$

où  $a(t) = M^2(t) - N^2(t)$ ,  $R(t) = b(t)a'(t) - b'(t)a(t)$  avec  $b(t) = 2M(t)N(t)$  soit

$$\begin{aligned} x'(t) = \frac{M^2(t) - N^2(t)}{R^2(t)} & (f(t)b'(t)a''(t) - f(t)b''(t)a'(t) \\ & - f'(t)b(t)a''(t) + f'(t)b''(t)a(t) \\ & f''(t)b(t)a'(t) - f''(t)b'(t)a(t)). \end{aligned}$$

Le terme de droite de l'expression ci-dessus est le déterminant recherché. Un calcul similaire sur  $y(t)$  donne le résultat.  $\square$

### Remarque

Soit  $r(t)$  une courbe définie par (2.10). Notons  $g(t) = \frac{g_1(t)}{g_2(t)}$ . En écrivant  $g(t) = \frac{g_1(t)g_2(t)}{g_2^2(t)}$  on obtient  $r(t)$  sous la forme du corollaire 2.1.1 avec  $K(t) = g_1(t)g_2(t)$  et  $R(t)g_2(t)$  à la place de  $R(t)$ .

Finalement (2.10) donne le vecteur normal de  $r(t)$  et

**Corollaire 2.1.2** Soit  $r(t)$  une courbe définie par (2.4) avec  $f \in \mathbb{R}(X)$  et  $M, N \in \mathbb{R}[X]$ . Les courbes parallèles  $r_d(t)$  de  $r(t)$  sont définies par

$$r_d(t) = r(t) + d\varepsilon(t) \left( \frac{-2M(t)N(t)}{M^2(t) + N^2(t)}, \frac{M^2(t) - N^2(t)}{M^2(t) + N^2(t)} \right)$$

où  $\varepsilon(t)$  est le signe du déterminant

$$\begin{vmatrix} f(t) & 2M(t)N(t) & M^2(t) - N^2(t) \\ f'(t) & (2M(t)N(t))' & (M^2(t) - N^2(t))' \\ f''(t) & (2M(t)N(t))'' & (M^2(t) - N^2(t))'' \end{vmatrix} \quad (2.11)$$

### Remarque

Les courbes de  $I_{\mathcal{R}}$  sont données par (2.4) et leurs parallèles par le corollaire (2.1.2). Pour leur utilisation en CAGD et CAM nous pourrions les représenter sous la forme  $(BR)$  donnée dans [14,15,16,17]. Elles seront stockées sous la forme d'un polygone de vecteurs massiques.

**Exemple 2.1.2** Posons  $M(t) = 1$ ,  $N(t) = t$  et  $f(t) = \frac{5t+2}{t+2}$  dans (2.4), nous obtenons la courbe de  $I_{\mathcal{R}}$

$$r(t) = \left( \frac{4 + 4t + 8t^2 + 5t^3}{(2+t)^2(1+t^2)}, \frac{-(4 + 4t + 5t^2)}{(2+t)^2(1+t^2)} \right)$$

Le déterminant (2.11) est égal à  $\frac{-4t(12+6t+5t^2)}{(2+t)^3}$ . Il est positif si  $t \in ]-2, 0[$  et négatif sinon. Nous représentons le graphe des courbes  $r(t)$  et  $r_d(t)$  avec  $d = \frac{1}{2}$  sur  $] -1, +\infty[$ :

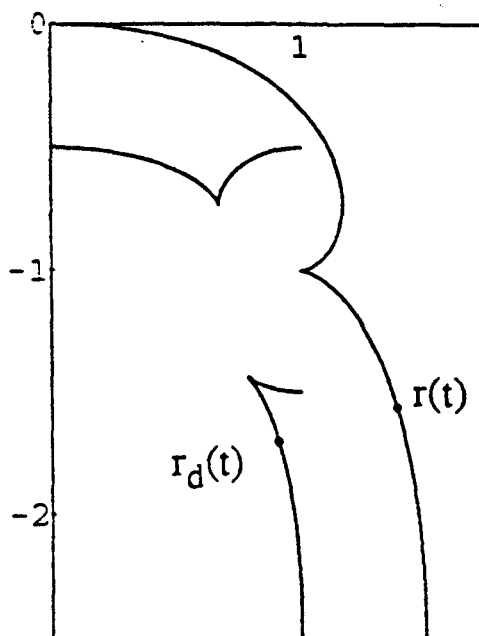


Figure 2.2: La direction du vecteur normal  $\varepsilon(t) \left( \frac{-2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2} \right)$  change en  $t = 2$ .

Pour un réel  $d$  donné, la courbe  $r(t)$  et ses parallèles paramétrées sur  $] -\infty, +\infty[$  seront représentées sur les trois intervalles  $] -\infty, -2[$ ,  $] -2, 0[$  et  $[0, +\infty[$ . Sur chacun de ces intervalles  $r(t)$  et ses parallèles sont alors définies par cinq vecteurs massiques,

#### Remarque

Il est clair que l'abscisse curviligne d'une courbe rationnelle est donnée sous la forme d'une intégrale hyperelliptique

$$S(t) = \int \frac{\sqrt{P(t)}}{Q(t)} dt \quad (2.12)$$

où  $P, Q \in \mathbb{R}[X]^2$ . Dans le cas où  $r(t)$  est une courbe de  $I_{\mathcal{R}}$ , on obtient

$$S(t) = \int |K(t)| \frac{M^2(t) + N^2(t)}{R^2(t)} dt.$$

Généralement cette intégrale est non rationnelle et nous allons maintenant caractériser le sous ensemble de  $I_{\mathcal{R}}$  constitué des courbes paramétrées rationnelles dont l'abscisse curviligne est rationnelle ou rationnelle par morceaux.



## 2.2 Caustiques des Courbes Rationnelles

Nous considérons ici les caustiques comme solutions d'un problème d'optique élémentaire: Une caustique est l'enveloppe des rayons réfléchis sur un miroir, on supposera que la source de lumière est à l'infini (voir Brieskorn et Knoerer [2] et aussi Bruce, Giblin et Gibson [3,4], pour une étude plus récente). Plus précisément, soit  $r(t) = (x(t), y(t))$  une courbe paramétrée considérée comme miroir. La source de lumière étant à l'infini, les rayons sont parallèles à la droite  $y = 0$ , provenant d'un côté ou de l'autre du plan selon la convexité de la courbe:

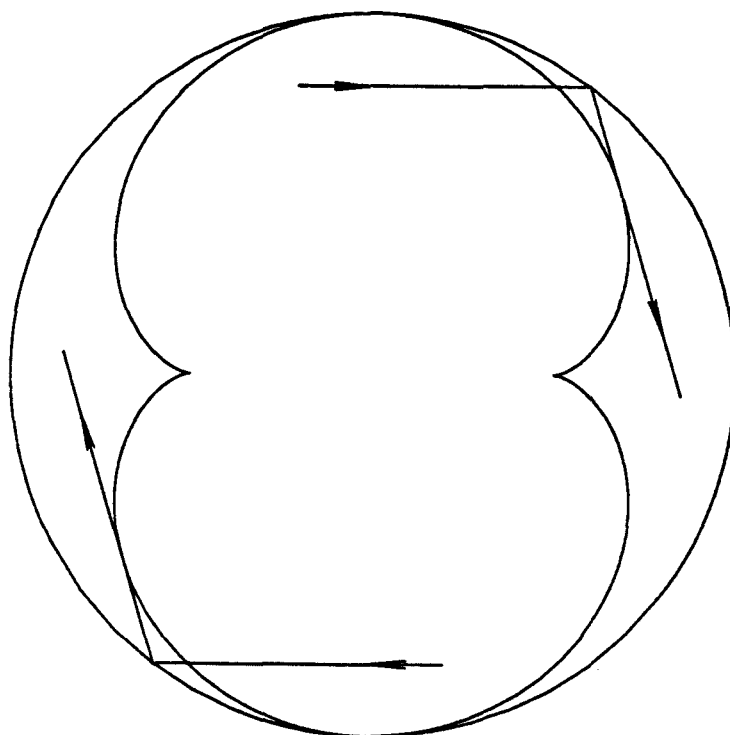


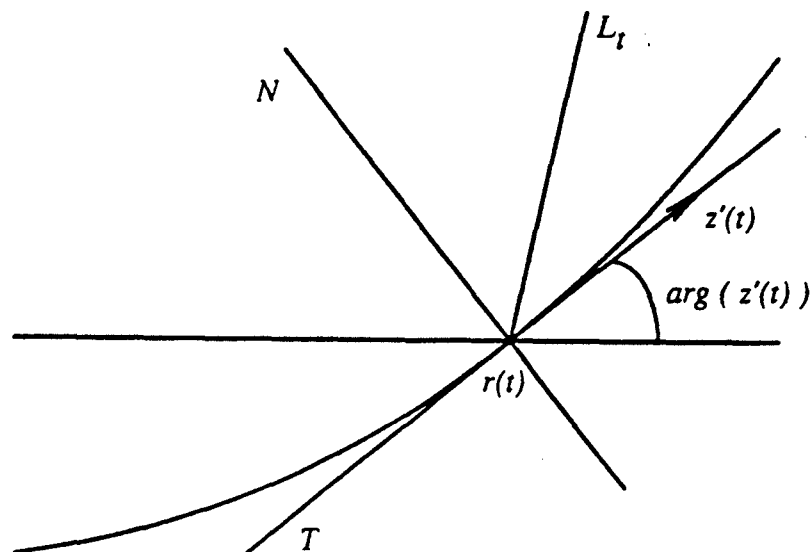
Figure 2.3: La caustique du cercle est la néphroïde.

Dans le cas où la source de lumière est à distance finie, les résultats donnés ici ne sont plus vrais. Nous allons maintenant montrer que les parallèles des caustiques des courbes rationnelles sont rationnelles.

**Lemme 2.2.1** *L'équation de la droite réfléchie  $L_t$  par une courbe paramétrée  $r(t) = (x(t), y(t))$  est*

$$(y - y(t))(y'^2(t) - x'^2(t)) + (x - x(t))(2x'(t)y'(t)) = 0. \quad (2.13)$$

**Preuve:** Dans la figure ci-dessous,  $T$  est la tangente à la courbe  $r(t)$  et  $N$  la droite perpendiculaire à  $T$ .



Comme  $N$  et  $T$  sont les deux bissectrices de la droite parallèle à l'axe des  $x$  et passant par  $r(t)$  et de la droite  $L_t$ , la pente de  $L_t$  est

$$\tan(2\arg z'(t)) = \tan(\arg z'^2(t))$$

où  $z(t) = x(t) + iy(t)$ . La pente de  $L_t$  est donc  $2x'(t)y'(t) / (x'^2(t) - y'^2(t))$  ce qui donne le résultat.  $\square$

**Lemme 2.2.2** L'équation de la caustique d'une courbe paramétrée  $r(t) = (x(t), y(t))$  est

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \frac{y'(t)}{x''(t)y'(t) - x'(t)y''(t)} \begin{pmatrix} x'^2(t) - y'^2(t) \\ 2x'(t)y'(t) \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

De plus

$$\begin{pmatrix} X'(t) \\ Y'(t) \end{pmatrix} = k(t) \begin{pmatrix} x'^2(t) - y'^2(t) \\ 2x'(t)y'(t) \end{pmatrix}$$

où  $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Si de plus  $r(t)$  est rationnelle, la caustique l'est aussi.

**Preuve:** La caustique est l'enveloppe de la famille des droite réfléchies  $L_t$ . Soit  $(X(t), Y(t))$  un point défini de cette enveloppe. Le point  $(X(t), Y(t))$  est alors solution de

$$(Y(t) - y(t))(y'^2(t) - x'^2(t)) + (X(t) - x(t))(2x'(t)y'(t)) = 0 \quad (2.15)$$

$$(Y(t) - y(t))(y'^2(t) - x'^2(t))' + (X(t) - x(t))(2x'(t)y'(t))' = y'(t)(y'^2(t) - x'^2(t)) + x'(t)(2x'(t)y'(t)). \quad (2.16)$$

En soustrayant la dérivée de (2.15) de l'équation (2.16) on obtient

$$Y'(t)(y'^2(t) - x'^2(t)) + X'(t)(2x'(t)y'(t)) = 0. \quad (2.17)$$

Par conséquence, il existe une application  $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\begin{cases} X'(t) = k(t) (x'^2(t) - y'^2(t)) \\ Y'(t) = k(t) (2x'(t)y'(t)) \end{cases} \quad (2.18)$$

ce qui montre le second point du lemme. De la même façon on obtient de (2.15) une application  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\begin{cases} X(t) - x(t) = c(t) (x'^2(t) - y'^2(t)) \\ Y(t) - y(t) = c(t) (2x'(t)y'(t)). \end{cases} \quad (2.19)$$

Substituer les équations (2.19) dans (2.16) donne

$$c(t) = \frac{y'(t)(y'^2(t) - x'^2(t)) + x'(t)(2x'(t)y'(t))}{2x'(t)y'(t)(y'^2(t) - x'^2(t))' + (x'^2(t) - y'^2(t))(2x'(t)y'(t))'}.$$

Simplifions maintenant  $c(t)$ :

$$\begin{aligned} c(t) &= \frac{\operatorname{Re}(z'(t).i.\bar{z}'^2(t))}{\operatorname{Re}(z'^2(t).i.2\bar{z}'(t)\bar{z}''(t))} \\ &= \frac{\operatorname{Im}(\bar{z}'(t))}{\operatorname{Im}(z'(t)\bar{z}''(t))} \\ &= \frac{1}{2} \frac{y'(t)}{x''(t)y'(t) - x'(t)y''(t)}, \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve du lemme.  $\square$

**Proposition 2.2.1** Soit  $C_R$  l'ensemble des caustiques des courbes paramétrées rationnelles. On a

$$C_R \subset I_R$$

**Preuve :**

Soit  $R(t) = (X(t), Y(t))$  la caustique de la courbe rationnelle  $r(t) = (x(t), y(t))$ . Du lemme 2.2.2 on déduit

$$X'^2(t) + Y'^2(t) = k^2(t) (x'^2(t) + y'^2(t))^2,$$

où  $k \in \mathbb{R}(X)$  car  $R'(t)$  est rationnelle.

La courbe  $R(t)$  appartient donc à  $I_R$  d'après (2.2).  $\square$

On pourrait penser que toute courbe de  $I_R$  est la caustique d'une courbe rationnelle. Ce n'est cependant pas le cas, nous illustrerons ceci dans l'exemple 2.2.1 et la section 2.3. Nous donnons maintenant une autre caractérisation de l'ensemble  $C_R$ .

**Théorème 2.2.1** Soit  $\mathcal{A}_R$  l'ensemble des courbes paramétrées rationnelles dont l'abscisse curviligne est rationnelle ou rationnelle par morceaux, alors

$$C_R = \mathcal{A}_R.$$

Pour prouver le théorème 2.2.1 nous avons besoin du

**Lemme 2.2.3** Une courbe  $R(t)$  de  $I_R$  est la caustique d'une courbe rationnelle si et seulement si son abscisse curviligne est rationnelle ou rationnelle par morceaux.

**Preuve :**

Soit  $R(t) = (X(t), Y(t)) \in I_R$  alors il existe  $K, M, N, R \in \mathbb{R}[X]$  tels que

$$\begin{cases} X'(t) = K(t) \frac{M^2(t) - N^2(t)}{R^2(t)} \\ Y'(t) = K(t) \frac{2M(t)N(t)}{R^2(t)} \end{cases} \quad (2.20)$$

les polynômes  $M$  et  $N$  étant supposés premier entre eux ( ceci sans perte de généralité car dans le cas contraire il suffit de factoriser leur PGCD et de l'intégrer dans le polynôme

$K(t)$ .

En notant  $Z(t) = X(t) + iY(t)$  on a

$$Z'(t) = K(t) \left( \frac{M(t) + iN(t)}{R(t)} \right)^2. \quad (2.21)$$

Nous recherchons une courbe  $z(t) = x(t) + iy(t)$  qui admet pour caustique  $Z(t) = X(t) + iY(t)$ .

La courbe  $z(t)$  recherchée est donc telle que  $2 \arg z'(t) \equiv \arg Z'(t) (\pi)$ , i.e.  $\arg z'^2(t) \equiv \arg Z'(t) (\pi)$ , elle vérifie

$$\begin{cases} z(t) = Z(t) + g(t) Z'(t) & (a) \\ z'^2(t) = f(t) Z'(t) & (b) \end{cases} \quad (2.22)$$

où  $(f, g) \in \mathbb{R}(X)^2$ .

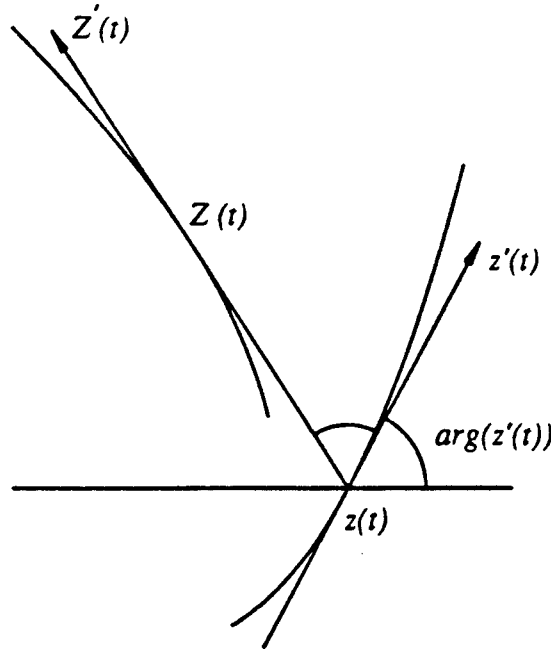


Figure 2.4: Existe-t-il un miroir rationnel  $z(t)$  ?

En dérivant (2.22-a) et par (2.21) on obtient

$$\begin{aligned} z'(t) &= (M(t) + iN(t)) \left[ \frac{K(t)}{R^2(t)} (M(t) + iN(t))(1 + g'(t)) \right. \\ &\quad \left. + g(t) \left( \left( \frac{K(t)}{R^2(t)} \right)' (M(t) + iN(t)) + 2 \frac{K(t)}{R^2(t)} (M'(t) + iN'(t)) \right) \right] \end{aligned}$$

on notera cette dernière équation  $z'(t) = (M(t) + iN(t)) A(t)$ .  
Il faut que (voir (2.22-b))

$$z'^2(t) = f(t) \frac{K(t)}{R^2(t)} (M(t) + iN(t))^2.$$

Nous recherchons donc  $g(t) \in \mathbb{R}(X)$  telle que

$$A^2(t) \in \mathbb{R}(X).$$

Ceci est équivalent à

$$\begin{aligned} \frac{K}{R^2} M (1 + g') + g \left( \left( \frac{K}{R^2} \right)' M + 2 \frac{K}{R^2} M' \right) &= 0 & (a) \\ \text{ou} & & (2.23) \\ \frac{K}{R^2} N (1 + g') + g \left( \left( \frac{K}{R^2} \right)' N + 2 \frac{K}{R^2} N' \right) &= 0 & (b). \end{aligned}$$

L'équation ci-dessus est symétrique en  $M$  et  $N$ , il suffit de résoudre (2.23-a). On obtient

$$g' = -g \left( \ln \left( |K| \frac{M^2}{R^2} \right) \right)' - 1$$

qui admet pour solution

$$g(t) = \left[ |K(t)| \frac{M^2(t)}{R^2(t)} \right]^{-1} \left[ \lambda - \int |K(t)| \frac{M^2(t)}{R^2(t)} dt \right], \lambda \in \mathbb{R}. \quad (2.24)$$

De même l'équation (2.23-b) a pour solution

$$h(t) = \left[ |K(t)| \frac{N^2(t)}{R^2(t)} \right]^{-1} \left[ \lambda - \int |K(t)| \frac{N^2(t)}{R^2(t)} dt \right], \lambda \in \mathbb{R}. \quad (2.25)$$

Nous trouvons donc deux classes de miroirs

$$\begin{aligned} z_1(t) &= Z(t) + g(t) Z'(t) \\ z_2(t) &= Z(t) + h(t) Z'(t) \end{aligned} \quad (2.26)$$

ayant la courbe  $Z(t)$  pour caustique.

Observons maintenant sous quelles conditions elles sont rationnelles.

Supposons en premier,  $R(t)$  non singulière i.e.  $K(t) \neq 0$  pour tout  $t$ . Nous supposons de plus  $K \geq 0$ . Alors d'après (2.24)

$$z_1(t) \text{ est rationnelle ssi } \int K(t) \frac{M^2(t)}{R^2(t)} dt \text{ est rationnelle.}$$

$R(t) \in I_{\mathcal{R}}$  implique  $\int K(t) \frac{M^2(t) - N^2(t)}{R^2(t)} dt$  rationnelle. Donc,

$$z_1(t) \text{ est rationnelle ssi } \int K(t) \frac{N^2(t)}{R^2(t)} dt \text{ est rationnelle,}$$

soit ssi

$$\int K(t) \frac{M^2(t) + N^2(t)}{R^2(t)} dt \text{ est rationnelle.} \quad (2.27)$$

La dernière expression est celle de l'abscisse curviligne de  $R(t)$ .

Remarquons

$$z_1(t) \text{ rationnelle est équivalent à } z_2(t) \text{ rationnelle.} \quad (2.28)$$

Soit maintenant  $R(t)$  singulière. Contrairement au premier cas, où la constante  $\lambda$  était arbitraire, il nous faut prendre maintenant  $\lambda = 0$  dans (2.24) et (2.25). Alors

$$\begin{aligned} g(t) &= - \left[ |K(t)| \frac{M^2(t)}{R^2(t)} \right]^{-1} \left[ \int |K(t)| \frac{M^2(t)}{R^2(t)} dt \right] \\ &= - \left[ K(t) \frac{M^2(t)}{R^2(t)} \right]^{-1} \left[ \int K(t) \frac{M^2(t)}{R^2(t)} dt \right] \end{aligned}$$

et nous retrouvons le cas régulier.  $\square$

**Remarque**

Une courbe régulière de  $\mathcal{A}_{\mathcal{R}}$  admet deux classes infinies de miroirs qui l'admettent pour caustique. Si la courbe est singulière, i.e. si son abscisse curviligne est rationnelle par morceaux, il n'existe que deux miroirs rationnels, les autres étant rationnels par morceaux.

**Exemple 2.2.1** La paramétrisation de l'astroïde considérée dans l'exemple 2.1.1 fournit un exemple de courbe de  $I_{\mathcal{R}}$  qui n'est pas la caustique d'une courbe rationnelle. En effet, son abscisse curviligne est non rationnelle par morceaux:

$$S(t) = 12 \int \left| -t + \frac{2t}{1+t^2} \right| dt.$$

Néanmoins on sait que l'astroïde est la caustique de la deltoïde. Nous pouvons donc générer une paramétrisation de l'astroïde appartenant à  $\mathcal{A}_{\mathcal{R}} = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}$  comme caustique de la deltoïde

$$r(t) = \left( \frac{3 - 6t^2 - t^4}{(1+t^2)^2}, \frac{8t^3}{(1+t^2)^2} \right)$$

La formule (2.14) donne

$$R(t) = \left( \frac{3 - 15t^2 + 9t^4 - 5t^6}{(1+t^2)^3}, \frac{32t^3}{(1+t^2)^3} \right).$$

On peut retrouver la deltoïde et les autres miroirs de l'astroïde (qui sont seulement rationnels par morceaux) en utilisant (2.26). On représente ci-dessous le miroir  $z_1(t) = R(t) + g(t) \cdot R'(t)$  avec  $\lambda = 0.25$ .

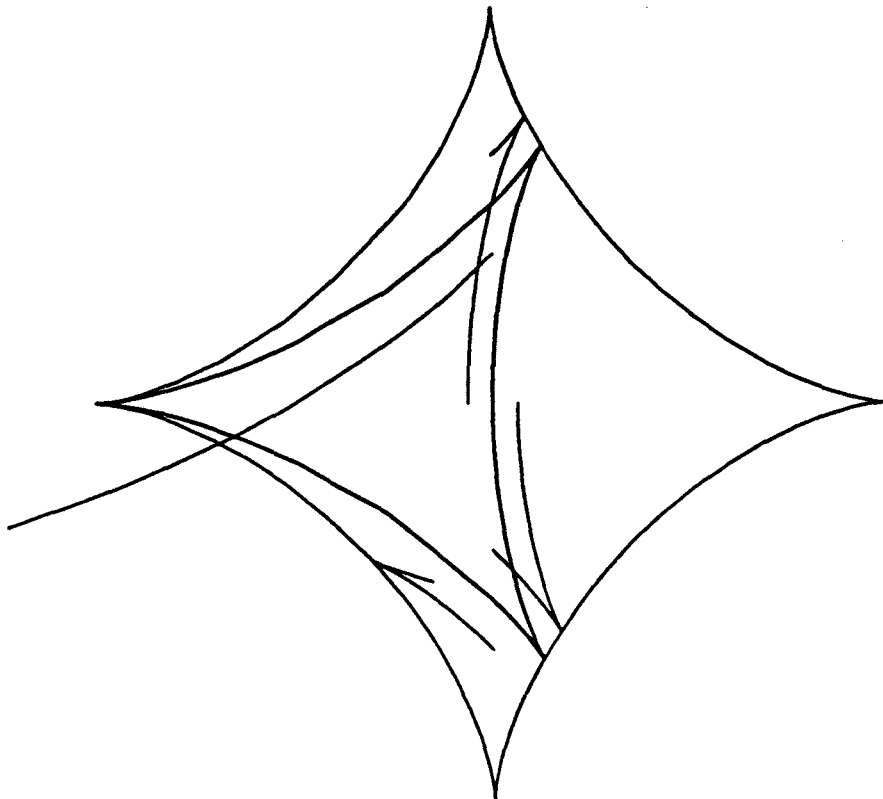


Figure 2.5: L'astroïde dont l'abscisse curviligne est rationnelle est la caustique de la deltoïde.

#### Preuve du théorème 2.2.1:

Soit  $M(t) \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}$ , d'après la proposition 2.2.1  $M(t) \in I_{\mathcal{R}}$ . Le lemme 2.2.3 montre que  $M(t) \in \mathcal{A}_{\mathcal{R}}$ , et donc  $\mathcal{C}_{\mathcal{R}} \subset \mathcal{A}_{\mathcal{R}}$ .

Réciproquement,  $M(t) \in \mathcal{A}_{\mathcal{R}}$  implique d'après (2.1) que  $M(t) \in I_{\mathcal{R}}$ , on obtient toujours en utilisant le lemme 2.2.3 que  $M(t) \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}$  et finalement  $\mathcal{A}_{\mathcal{R}} \subset \mathcal{C}_{\mathcal{R}}$ .  $\square$

## 2.3 Un Sous-ensemble de $I_{\mathcal{R}} \setminus \mathcal{A}_{\mathcal{R}}$

**Proposition 2.3.1** Soit  $r(t) \in \mathcal{A}_{\mathcal{R}}$ . Une parallèle  $r_d(t)$  de  $r(t)$  avec  $d \neq 0$  appartient à  $I_{\mathcal{R}} \setminus \mathcal{A}_{\mathcal{R}}$  sur tout intervalle où  $r(t)$  n'admet pas de point de rebroussement.

Tout d'abord, démontrons le lemme suivant



**Lemme 2.3.1** *L'abscisse curviligne d'une courbe de  $\mathcal{C}$  n'est pas rationnelle.*

**Preuve :**

Soit  $Z(t) = \frac{P(t)}{R(t)} + i \frac{Q(t)}{R(t)}$  une courbe de  $\mathcal{C}$ . Nous supposons que le rayon du cercle est 1. Alors  $P^2(t) + Q^2(t) = R^2(t)$ . D'après le théorème 2.1.1, il existe  $K, M, N \in \mathbb{R}[X]$  tels que

$$Z(t) = \frac{M^2(t) - N^2(t) + i 2M(t)N(t)}{M^2(t) + N^2(t)} = \frac{z(t)}{\bar{z}(t)}$$

avec  $z(t) = M(t) + iN(t)$ . Nous avons

$$Z'(t) = \frac{2i \operatorname{Im}(z'(t)\bar{z}(t))}{\bar{z}^2(t)} \quad \text{et} \quad \bar{Z}'(t) = \frac{-2i \operatorname{Im}(z'(t)\bar{z}(t))}{z^2(t)}. \quad (2.29)$$

Donc, l'abscisse curviligne  $S_a(t)$  de  $Z(t)$  est

$$S_a(t) = \int_a^t 2 \frac{|N'(u)M(u) - N(u)M'(u)|}{M^2(u) + N^2(u)} du.$$

Soit un intervalle  $[a, d] \subset [a, b]$  tel que  $N'(u)M(u) - N(u)M'(u) \neq 0$  pour tout  $u \in ]a, d]$ . Alors par le changement de variable  $v = \frac{N(u)}{M(u)}$  on obtient

$$S_a(t) = 2 \left( \arctan \frac{N(t)}{M(t)} - \arctan \frac{N(a)}{M(a)} \right)$$

ce qui prouve le lemme.  $\square$

**Preuve de la proposition 2.3.1:**

Soit  $r(t) \in \mathcal{A}_R$ ,  $t \in [a, b]$ . Sur un intervalle où le vecteur normal de  $r(t)$  ne change pas de direction, toute parallèle  $r_d(t)$  est élément de  $I_R$  car ses parallèles, qui sont aussi parallèles à  $r(t)$ , sont rationnelles.

D'après [9] l'abscisse curviligne  $S_a^d(t)$  d'une parallèle non singulière  $r_d(t)$  est  $S_a^d(t) = S_a(t) + d|\theta(t)|$  où  $S_a(t)$  est l'abscisse curviligne de  $r(t)$  et  $\theta(t)$  l'angle des vecteurs  $n(a)$  et  $n(t)$ .

Pour montrer le résultat il suffit de supposer  $r_d(t)$  régulière. Si  $r_d(t)$  admet des points singuliers, on somme la longueur des arcs où  $r_d(t)$  est régulière.

$\theta(t)$  peut être considérée comme abscisse curviligne de la courbe  $n(t)$  qui est rationnelle car  $r(t) \in I_R$ . Le lemme 2.3.1 montre que  $\theta(t)$  est non rationnelle et donc que  $S_a^d(t)$  ne l'est pas. Finalement  $r_d(t) \in I_R \setminus \mathcal{A}_R$ .  $\square$

## 2.4 Une Caractérisation Géométrique de $I_{\mathcal{R}}$

Rappelons quelques définitions et propriétés de géométrie différentielle élémentaire (voir par exemple [6]). On appelle développée d'une courbe  $r(t) = (x(t), y(t))$ , la courbe  $ev(r(t)) = r(t) - \rho(t)n(t)$ , où  $\rho(t)$  est le rayon de courbure. La développée est le centre des rayons de courbure de  $r(t)$ .

La courbe  $inv(R(t)) = R(t) + S_{t_0}(t) \frac{R'(t)}{|R'(t)|}$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$  où  $S_{t_0}$  est l'abscisse curviligne de  $R(t)$ , est appelée développante de la courbe  $R(t)$ .

**Propriété 2.4.1** i)  $ev(inv(R(t))) = R(t)$ .

ii) Les développantes d'une courbe sont parallèles entre elles.

iii) Les développées d'une courbe de  $I_{\mathcal{R}}$  sont rationnelles (leur courbure étant rationnelle) et sont définies en tout point où la courbure ne s'annule pas.

iiii) Les courbes dont le support est sur un cercle sont les seules dont les développées sont réduites à un point. En dehors des courbes dont le support est sur une droite ou sur un cercle, toute courbe est égale à la développante de sa développée.

**Lemme 2.4.1** (i) Les développantes d'une courbe de  $\mathcal{A}_{\mathcal{R}}$  appartiennent à  $I_{\mathcal{R}}$ .

(ii) L'ensemble  $\mathcal{A}_{\mathcal{R}}$  est égal à l'ensemble des courbes rationnelles à développantes rationnelles

(iii) La développée d'une courbe de  $I_{\mathcal{R}} \setminus \mathcal{D}$  appartient à  $\mathcal{A}_{\mathcal{R}}$ .

**Preuve :**

(i) Soit  $r(t) \in \mathcal{A}_{\mathcal{R}}$ ; l'application  $t \longrightarrow S_{t_0} \frac{r'(t)}{|r'(t)|}$  est rationnelle d'après (2.1). Les développantes  $inv(r(t))$  sont donc rationnelles et d'après la propriété 2.4.1 ii), elles sont parallèles entre elles. Finalement,  $inv(r(t)) \in I_{\mathcal{R}}$ .

(ii) Le point précédent (i) énonce que les développantes d'une courbe de  $\mathcal{A}_{\mathcal{R}}$  sont rationnelles.

Réciproquement, soit  $r(t) = (x(t), y(t))$  une courbe rationnelle dont les développantes  $inv(r(t))$  sont rationnelles. D'après la propriété 2.4.1 ii),  $inv(r(t)) \in I_{\mathcal{R}}$ , alors sa courbure est rationnelle. Le résultat est obtenu en considérant que la longueur d'un arc

de la développée d'une courbe est égale à la différence des rayons de courbure aux deux extrémités de l'arc.

(iii) Soit  $r(t) \in I_{\mathcal{R}} \setminus (\mathcal{D} \cup \mathcal{C})$ . Sa développée  $ev(t)$  est rationnelle et admet  $r(t)$  comme développante. D'après (ii) l'abscisse curviligne de  $ev(t)$  est rationnelle et donc  $ev(t) \in \mathcal{A}_{\mathcal{R}}$ . Les développées des courbes de  $\mathcal{C}$  sont réduites à un point qui est la caustique de la parabole (en considérant la direction de la lumière suivant l'axe de la parabole).  $\square$

Finalement nous obtenons

**Proposition 2.4.1** *L'ensemble  $I_{\mathcal{R}}$  des courbes rationnelles à parallèles rationnelles est la réunion des développantes des caustiques des courbes rationnelles et de  $\mathcal{D} \cup \mathcal{C}$ .*

**Preuve:**

Il est clair que  $\mathcal{D} \subset I_{\mathcal{R}}$ .

Soit  $Z(t) = z(t)/\bar{z}(t)$  une courbe de  $\mathcal{C}$ . On déduit de (2.29) que

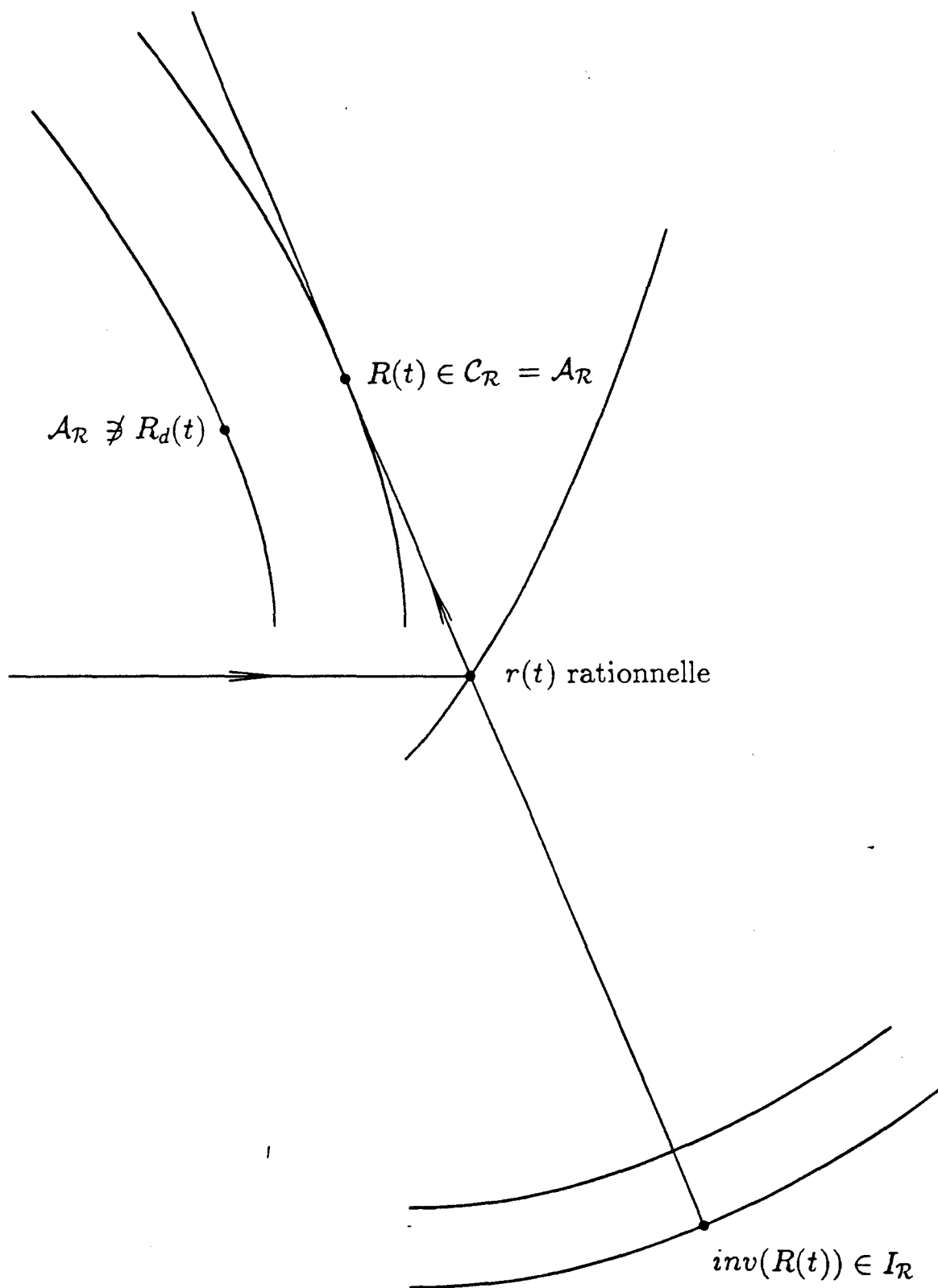
$$|Z'(t)|^2 = \frac{4(\operatorname{Im}(z'(t)\bar{z}(t)))^2}{|z(t)|^4},$$

donc  $Z(t) \in I_{\mathcal{R}}$ .

D'après le lemme 2.4.1 (i), les développantes d'une courbe de  $\mathcal{C}_{\mathcal{R}} = \mathcal{A}_{\mathcal{R}}$  appartiennent à  $I_{\mathcal{R}}$ .

Pour l'inclusion réciproque, considérons une courbe  $r(t) \in I_{\mathcal{R}} \setminus \{\mathcal{D} \cup \mathcal{C}\}$ . Alors le lemme 2.4.1(iii) donne  $ev(r(t)) \in \mathcal{A}_{\mathcal{R}} = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}$ . On a  $inv(ev(r(t))) = r(t)$  (d'après la propriété 2.4.1 iiiii), ainsi  $r(t)$  est la développante d'une courbe de  $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}$ . On vient de montrer que  $I_{\mathcal{R}} \setminus \{\mathcal{D} \cup \mathcal{C}\} \subset inv(\mathcal{C}_{\mathcal{R}})$  ce qui termine la démonstration.  $\square$

Dans la dernière figure de ce chapitre, nous rassemblons les différents résultats obtenus:



# Chapter 3

## Courbes Polynomiales à Parallèles Rationnelles

### 3.1 Introduction

Rappelons qu'une courbe polynomiale  $r(t) = (x(t), y(t))$  admet des parallèles rationnelles (i.e. est élément de l'ensemble  $I_{\mathcal{P}}$ ) si et seulement si

$$\begin{cases} x(t) = \int K(t)(M^2(t) - N^2(t))dt \\ y(t) = \int K(t)(2M(t)N(t))dt \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $K, M, N \in \mathbb{R}[X]$ .

On notera  $I_{\mathcal{P}}^m$  le sous ensemble de  $I_{\mathcal{P}}$  constitué des courbes de la forme (3.1) avec  $K$  constant et  $\max(\deg(M), \deg(N)) = m$ .  $I_{\mathcal{P}}^m$  constitue un sous ensemble des courbes de degré  $2m + 1$  de  $I_{\mathcal{P}}$ .

Nous aimerions caractériser les courbes de  $I_{\mathcal{P}}$  par des conditions géométriques sur leur polygone de contrôle. Farouki et Sakkalis [10,11] apportent une réponse dans le cas des cubiques de  $I_{\mathcal{P}}^1$  :

**Théorème 3.1.1** Soit  $(P_0, P_1, P_2, P_3)$  le polygone de contrôle d'une cubique polynomiale  $r(t)$ . En notant  $L_1 = | \vec{P_0P_1} |$ ,  $L_2 = | \vec{P_1P_2} |$  et  $L_3 = | \vec{P_2P_3} |$  et  $\theta_1 = (\vec{P_0P_1}, \vec{P_1P_2})$ ,  $\theta_2 = (\vec{P_1P_2}, \vec{P_2P_3})$ , on a

$$r(t) \in I_{\mathcal{P}}^1 \text{ ssi } \begin{cases} \theta_1 = \theta_2 \\ L_2 = \sqrt{L_1 L_3} \end{cases} \quad (3.2)$$

Nous cherchons à généraliser cette condition aux courbes de  $I_{\mathcal{P}}^m$ . Pour cela, nous allons rechercher la forme du polygone de contrôle de ces courbes que nous utiliserons dans un premier temps pour reformuler le théorème précédent et donner une caractérisation des quintiques de  $I_{\mathcal{P}}^2$ . Nous l'utiliserons ensuite pour établir un schéma d'interpolation en deux points à l'ordre  $k$  par des courbes de  $I_{\mathcal{P}}^m$ .

### 3.2 Forme Générale du Polygone de Contrôle des Courbes de $I_{\mathcal{P}}^m$ .

Une courbe  $r(t)$  est dans  $I_{\mathcal{P}}$  si et seulement si

$$r(t) = \int K(t)z^2(t)dt$$

avec  $z(t) = M(t) + iN(t)$  une courbe polynomiale et  $K \in \mathbb{R}[X]$ . Les courbes de  $I_{\mathcal{P}}^m$  sont alors obtenues par

$$r(t) = \int z^2(t)dt.$$

Si nous disposons du polygone de contrôle de la courbe  $z(t)$  (les points de contrôle de la courbe sont alors des nombres complexes), nous pouvons déterminer les points de contrôle de la courbe  $z^2(t)$  puis ceux de  $\int z^2(t)dt$ .

Dans la suite de ce chapitre, nous noterons  $u_i$  le nombre complexe correspondant au  $i^{\text{ème}}$  côté du polygone de contrôle d'une courbe Bézier. Ainsi, le polygone de contrôle d'une courbe Bézier de longueur  $n$  sera indifféremment noté  $(A_0, A_1, \dots, A_n)$  ou  $(A_0, u_1, \dots, u_{n-1})$  avec  $u_i = A_i - A_{i-1}$ ,  $A_i \in \mathbb{C}$ . Cette notation est particulièrement adaptée aux courbes obtenues comme primitive d'une courbe Bézier.

**Lemme 3.2.1** Soit  $P(t) = BP[R_0, R_1, \dots, R_{n-1}](t)$ . Le polygone de contrôle de la courbe  $\int P(t)dt$  s'écrit  $(A, u_1, \dots, u_n)$  avec

$$A \in \mathbb{C} \text{ et } u_{i+1} = \frac{1}{n}R_i \text{ pour } i = 0, \dots, n-1 \quad (3.3)$$

**Preuve:**

Soit  $(B_i^n)_{i=0, \dots, n}$  la base de Bernstein des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ :  $B_i^n(t) = C_n^i(1-t)^{n-i}t^i$  pour  $i = 0, \dots, n$ .

On a

$$\int B_k^{n-1}(t) dt = \frac{1}{n} \sum_{j=k+1}^n B_j^n(t) \text{ pour } k = 0, \dots, n-1. \quad (3.4)$$

On obtient

$$\begin{aligned}\int P(t)dt &= \sum_{i=0}^{n-1} \left( \int B_i^{n-1}(t)dt \right) R_i \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \left( \sum_{j=i+1}^n B_j^n(t) \right) R_i + A\end{aligned}$$

avec  $A \in \mathbb{C}$ . Soit

$$\begin{aligned}\int P(t)dt &= \frac{1}{n} [R_0 B_1^n(t) + (R_0 + R_1) B_2^n(t) + \dots \\ &\quad + (R_0 + R_1 + \dots + R_{n-1}) B_n^n(t)] + A \\ &= \frac{1}{n} [A_0 B_0^n(t) + (A_0 + R_0) B_1^n(t) + (A_0 + R_0 + R_1) B_2^n(t) + \dots \\ &\quad + (A_0 + R_0 + R_1 + \dots + R_{n-1}) B_n^n(t)]\end{aligned}\tag{3.5}$$

en ayant posé  $A_0 = nA$  et en utilisant la partition de l'unité:  $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1$ , le lemme est alors montré.  $\square$

**Proposition 3.2.1** *Le polygone  $(A_0, u_1, \dots, u_{2n+1})$  d'une courbe  $r(t)$  de  $I_{\mathcal{P}}^m$  i.e.  $r(t) = \int z^2(t) dt$  avec  $z(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(t)$  s'exprime par*

$$A_0 \in \mathbb{C} \text{ et } u_{k+1} = \frac{1}{2n+1} Q_k \text{ pour } k = 0, \dots, 2n\tag{3.6}$$

avec

$$Q_k = \sum_{i=\max(0, k-n)}^{\min(k, n)} \lambda_n^{i, k-i} P_i \cdot P_{k-i}\tag{3.7}$$

**Preuve:**

Considérons  $z(t) = M(t) + iN(t)$  une courbe polynomiale de degré  $n$ , on la considère sous la forme Bézier

$$z(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(t) \text{ avec } P_i \in \mathbb{C} \text{ pour } i \in \{0, \dots, n\}.$$

La courbe  $z^2(t)$  est de degré  $2n$ , on la note

$$z^2(t) = \sum_{i=0}^{2n} Q_i B_i^{2n}(t) \text{ avec } Q_i \in \mathbb{C} \text{ pour } i \in \{0, \dots, 2n\}.$$

Nous allons maintenant exprimer les points de contrôle de la courbe  $z^2(t)$  en fonction de ceux de  $z(t)$ . On a

$$\begin{aligned} z^2(t) &= \left( \sum_{j=0}^n P_j \cdot B_j^n(t) \right)^2 \\ &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n P_i \cdot P_j B_i^n(t) B_j^n(t), \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} B_i^n(t) B_j^n(t) &= C_n^i (1-t)^{n-i} t^i C_n^j (1-t)^{n-j} t^j \\ &= C_n^i C_n^j (1-t)^{2n-i-j} t^{i+j} \\ &= \lambda_n^{i,j} B_{i+j}^{2n}(t) \end{aligned}$$

avec  $\lambda_n^{i,j} = \frac{C_n^i C_n^j}{C_{2n}^{i+j}}$ . La courbe  $z^2(t)$  s'exprime par

$$\begin{aligned} z^2(t) &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n \lambda_n^{i,j} P_i \cdot P_j B_{i+j}^{2n}(t) \\ &= \sum_{k=0}^{2n} \left( \sum_{i=0}^k \lambda_n^{i,k-i} P_i \cdot P_{k-i} \right) B_k^{2n}(t) \\ &\quad + \sum_{k=n+1}^{2n} \left( \sum_{i=k-n}^n \lambda_n^{i,k-i} P_i \cdot P_{k-i} \right) B_k^{2n}(t) \end{aligned}$$

On trouve

$$Q_k = \sum_{i=0}^k \lambda_n^{i,k-i} P_i \cdot P_{k-i} \text{ pour } k = 0, \dots, n \quad (3.8)$$

et

$$Q_k = \sum_{i=k-n}^n \lambda_n^{i,k-i} P_i \cdot P_{k-i} \text{ pour } k = n+1, \dots, 2n \quad (3.9)$$

L'expression (3.7) des  $Q_k$  est équivalente à (3.8) et (3.9).  $\square$

Dans le corollaire suivant nous donnons en exemple la forme des polygones des cubiques de  $I_P^1$  et des quintiques de  $I_P^2$ , elles seront utilisées dans les caractérisations ultérieures.



**Corollaire 3.2.1** (i) Une cubique  $r(t) = BP[(A_0, u_1, u_2, u_3)](t)$  est dans  $I_P^1$  si et seulement si il existe  $P_0, P_1 \in \mathbb{C}$  tels que

$$\begin{aligned} 3u_1 &= P_0^2 \\ 3u_2 &= P_0 P_1 \\ 3u_3 &= P_1^2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

(ii) Une quintique  $r(t) = BP[(A_0, u_1, \dots, u_5)](t)$  est dans  $I_P^2$  si et seulement si il existe  $P_0, P_1, P_2 \in \mathbb{C}$  tels que

$$\begin{aligned} 5u_1 &= P_0^2 \\ 5u_2 &= P_0 P_1 \\ 5u_3 &= \frac{1}{3} P_0 P_2 + \frac{2}{3} P_1^2 \\ 5u_4 &= P_1 P_2 \\ 5u_5 &= P_2^2 \end{aligned} \quad (3.11)$$

**Preuve:**

Il suffit d'appliquer la proposition 3.2.1 pour  $n = 1$  et  $n = 2$ , i.e. pour  $z(t) = BP[P_0, P_1](t)$  et  $z(t) = BP[P_0, P_1, P_2](t)$ , on obtient respectivement les points (i) et (ii).

### 3.3 Caractérisation Géométrique du Polygone de Contrôle des Cubiques de $I_P^1$ et des Quintiques de $I_P^2$ .

**Théorème 3.3.1** Caractérisation des cubiques de  $I_P^1$

Soit  $r(t) = BP[A_0, u_1, u_2, u_3]$  une cubique polynomiale telle que les points de contrôle  $A_i$  soient consécutivement distincts, i.e.  $u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \neq 0$  alors  $r(t) \in I_P^1$  ssi

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} \quad (3.12)$$

**Preuve:**

Si  $r(t)$  est dans  $I_P^1$  alors d'après le corollaire 3.2.1 (i) il existe  $P_0, P_1 \in \mathbb{C}$  tels que

$$\begin{aligned} 3u_1 &= P_0^2 \\ 3u_2 &= P_0 \cdot P_1 \\ 3u_3 &= P_1^2 \end{aligned}$$

Les rapports  $\frac{u_2}{u_1}$  et  $\frac{u_3}{u_2}$  sont tous deux égaux à  $\frac{P_1}{P_0}$ .

Réciproquement, considérons une courbe  $r(t) = BP[A_0, u_1, u_2, u_3](t)$  telle que  $u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \neq$

0 et  $\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2}$  i.e.  $u_2^2 = u_1 u_3$ . Il existe  $P_0, P_1 \in \mathbb{C}$  tels que  $3u_1 = P_0^2$  et  $3u_3 = P_1^2$ . On trouve alors que  $9u_2^2 = P_0^2 \cdot P_1^2$  soit  $3u_2 = \varepsilon P_0 \cdot P_1$  avec  $\varepsilon = \pm 1$ . On a trouvé deux points  $(\varepsilon P_0), P_1 \in \mathbb{C}$  tels que

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{3}(\varepsilon P_0)^2 \\ u_2 &= \frac{1}{3}(\varepsilon P_0)P_1 \\ u_3 &= \frac{1}{3}P_1^2, \end{aligned}$$

La courbe  $r(t)$  appartient à  $I_P^1$  d'après le corollaire 3.2.1.  $\square$

### **Théorème 3.3.2** Caractérisation des quintiques de $I_P^2$

Soit  $r(t) = BP[A_0, u_1, \dots, u_5](t)$  une courbe polynomiale de degré 5,

(i) Si  $\prod_{i=1}^5 u_i \neq 0$  (deux points consécutifs sont distincts),  $r(t) \in I_P^2$  ssi

$$\frac{u_3}{u_2} = \frac{2u_2}{3u_1} + \frac{1u_5}{3u_4} \quad \text{et} \quad \frac{u_3}{u_4} = \frac{2u_4}{3u_5} + \frac{1u_1}{3u_2} \quad (3.13)$$

(ii) Si  $u_1 = u_2 = 0$  (resp.  $u_4 = u_5 = 0$ ) et  $u_3 \cdot u_4 \cdot u_5 \neq 0$  (resp.  $u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \neq 0$ ) alors  $r(t) \in I_P^2$  ssi

$$\frac{u_3}{u_4} = \frac{2u_4}{3u_5} \quad (\text{resp.} \quad \frac{u_3}{u_2} = \frac{2u_2}{3u_1}) \quad (3.14)$$

(iii) Si  $u_2 = u_4 = 0$  et  $u_1 \cdot u_3 \cdot u_5 \neq 0$  alors  $r(t) \in I_P^2$  ssi

$$\frac{u_3}{u_1} = \frac{1u_5}{9u_3} \quad (3.15)$$

(iiii) Si  $u_3 = 0$  et  $u_1 \cdot u_2 \cdot u_4 \cdot u_5 \neq 0$  alors  $r(t) \in I_P^2$  ssi

$$2\frac{u_2}{u_1} + \frac{u_5}{u_4} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{u_2^2}{u_4^2} = \frac{u_1}{u_5} \quad (3.16)$$

**Preuve:**

(i) Soit  $r(t) = BP[A_0, u_1, \dots, u_5](t)$  telle que  $\prod_{i=1}^5 u_i \neq 0$ . Le corollaire 3.2.1 montre l'existence de  $P_0, P_1, P_2 \in \mathbb{C}$  tels que

$$\begin{aligned} 5u_1 &= P_0^2 \\ 5u_2 &= P_0 P_1 \\ 5u_3 &= \frac{1}{3}P_0 P_2 + \frac{2}{3}P_1^2 \\ 5u_4 &= P_1 P_2 \\ 5u_5 &= P_2^2 \end{aligned}$$

Ces équations impliquent

$$\frac{u_3}{u_2} = \frac{1}{3}\frac{P_2}{P_1} + \frac{2}{3}\frac{P_1}{P_0} \quad \text{et} \quad \frac{u_3}{u_4} = \frac{1}{3}\frac{P_0}{P_1} + \frac{2}{3}\frac{P_1}{P_2}$$

et nous donnent la condition nécessaire recherchée en remarquant que

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{u_4}{u_5} \text{ et } \frac{P_1}{P_0} = \frac{u_2}{u_1}.$$

Réciproquement, soit  $r(t) = BP[A_0, u_1, \dots, u_5](t)$  telle que  $\prod_{i=1}^5 u_i \neq 0$  et vérifiant les équations (3.13). En multipliant l'égalité

$$\frac{u_3}{u_2} = \frac{2}{3} \frac{u_2}{u_1} + \frac{1}{3} \frac{u_5}{u_4} \quad (3.17)$$

par  $\frac{u_1}{u_2} \cdot \frac{u_4}{u_5}$ , il vient

$$\frac{u_1}{u_2} \cdot \frac{u_4}{u_5} \cdot \frac{u_3}{u_2} = \frac{u_3}{u_4}$$

i.e.

$$\frac{u_2^2}{u_4^2} = \frac{u_1}{u_5} \text{ car } u_3 \neq 0. \quad (3.18)$$

Il existe  $P_0, P_2 \in \mathbb{C}$  tels que  $5u_1 = P_0^2$  et  $5u_5 = P_2^2$ . L'équation (3.18) s'écrit alors

$$\frac{u_2}{u_4} = \varepsilon_1 \frac{P_0}{P_2} \quad (3.19)$$

avec  $\varepsilon_1 = \pm 1$ . D'autre part, il existe  $P_1$  tel que  $5u_3 = \frac{1}{3}\varepsilon_1 P_0 P_2 + \frac{2}{3}P_1^2$ . L'égalité (3.17) multipliée par  $5u_4$  donne

$$\frac{u_4}{u_2} \cdot 5u_3 = \frac{1}{3}5u_5 + 5 \frac{2}{3} \frac{u_2 u_4}{u_1} \quad (3.20)$$

soit

$$\begin{aligned} 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot u_2 u_4 &= \frac{1}{5} P_0^2 \left( \varepsilon_1 \frac{P_2}{P_0} \cdot \left( \frac{1}{3} \varepsilon_1 P_0 P_2 + \frac{2}{3} P_1^2 \right) - \frac{1}{3} P_2^2 \right) \\ &= \frac{1}{5} P_0^2 \left( \frac{1}{3} P_2^2 (\varepsilon_1^2 - 1) + \frac{2}{3} \varepsilon_1 \frac{P_2 P_1^2}{P_0} \right) \\ &= \frac{1}{5} \frac{2}{3} \varepsilon_1 P_0 P_2 P_1^2, \end{aligned}$$

en utilisant (3.19) on obtient que  $(5u_4)^2 = (P_1 P_2)^2$  et par suite

$$5u_4 = \varepsilon_2 P_1 P_2 \text{ et } 5u_2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 P_0 P_1$$

On a donc trouvé trois nombres complexes  $(\varepsilon_1 P_0), (\varepsilon_2 P_1), P_2$  tels que

$$\begin{aligned} 5u_1 &= (\varepsilon_1 P_0)^2 \\ 5u_2 &= (\varepsilon_1 P_0)(\varepsilon_2 P_1) \\ 5u_3 &= \frac{1}{3}(\varepsilon_1 P_0)P_2 + \frac{2}{3}(\varepsilon_2 P_1)^2 \\ 5u_4 &= (\varepsilon_2 P_1)P_2 \\ 5u_5 &= P_2^2 \end{aligned}$$

Finalement, la courbe  $r(t)$  appartient à  $I_P^2$  d'après le corollaire 3.2.1.

(ii) Considérons une courbe  $r(t) = BP[A_0, 0, 0, u_3, u_4, u_5](t)$  avec  $u_3 \cdot u_4 \cdot u_5 \neq 0$ . La courbe  $r(t) \in I_P^2$  ssi il existe  $P_1, P_2 \in \mathbb{C}$  tels que

$$\begin{aligned} 5u_3 &= \frac{2}{3}P_1^2 \\ 5u_4 &= P_1P_2 \\ 5u_5 &= P_2^2 \end{aligned}$$

par le corollaire 3.2.1 et en remarquant que  $u_1 = u_2 = 0$  ssi  $P_0 = 0$ . La suite de la démonstration est alors identique à celle de la caractérisation des cubiques (théorème 3.3.1).

(iii) Similaire au point (iii) en remarquant que si  $u_1 = u_3 = u_5 = 0$  alors  $u_2 = u_4 = 0$  ssi  $P_1 = 0$ .

(iiii) La démonstration de ce point est identique à celle du point (i): Soit  $r(t) = BP[A_0, u_1, u_2, 0, u_4, u_5](t)$  une courbe de  $I_P^2$  telle que  $u_1 \cdot u_2 \cdot u_4 \cdot u_5 \neq 0$ . D'après le corollaire (3.2.1) il existe  $P_0, P_1, P_2 \in \mathbb{C}$  tels que

$$\begin{aligned} 5u_1 &= P_0^2 \\ 5u_2 &= P_0P_1 \\ 0 &= \frac{1}{3}P_0P_2 + \frac{2}{3}P_1^2 \\ 5u_4 &= P_1P_2 \\ 5u_5 &= P_2^2 \end{aligned}$$

On vérifie aisément que

$$2\frac{u_2}{u_1} + \frac{u_5}{u_4} = 0 \text{ et } \frac{u_2^2}{u_4^2} = \frac{u_1}{u_5}$$

Réciproquement, soit une courbe  $r(t) = BP[A_0, u_1, u_2, 0, u_4, u_5](t)$  avec  $u_1 \cdot u_2 \cdot u_4 \cdot u_5 \neq 0$  qui vérifie les hypothèses (3.16). Il existe  $P_0, P_2 \in \mathbb{C}$  tels que  $5u_1 = P_0^2$  et  $5u_5 = P_2^2$ , l'hypothèse  $\frac{u_2^2}{u_4^2} = \frac{u_1}{u_5}$  devient

$$u_2 = \varepsilon_1 \frac{P_0}{P_2} u_4. \quad (3.21)$$

Il existe  $P_1$  tel que

$$\varepsilon_1 P_0 P_2 = -2P_1^2. \quad (3.22)$$

Or  $2u_2 \cdot u_4 = -u_1 \cdot u_5$  ce qui donne  $2\varepsilon_1 \frac{P_0}{P_2} u_4^2 = -\frac{1}{5} P_0^2 P_2^2$  par (3.21), puis  $5u_4 = \varepsilon_2 P_1 P_2$  en utilisant (3.22). Là encore, on a trouvé trois points  $(\varepsilon_1 P_0), (\varepsilon_2 P_1), P_2$  dans  $\mathbb{C}$  tels que

$$\begin{aligned} 5u_1 &= (\varepsilon_1 P_0)^2 \\ 5u_2 &= (\varepsilon_1 P_0)(\varepsilon_2 P_1) \\ 5u_3 = 0 &= \frac{1}{3}(\varepsilon_1 P_0)P_2 + \frac{2}{3}(\varepsilon_2 P_1)^2 \\ 5u_4 &= (\varepsilon_2 P_1)P_2 \\ 5u_5 &= P_2^2 \end{aligned}$$

ce qui montre le résultat.  $\square$

### Remarque

Les seuls cas volontairement écartés dans le théorème 3.3.2 sont ceux du cas dégénéré  $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_5 = 0$  et ceux du sous-ensemble des droites de  $I_{\mathcal{P}}^2$  donné par  $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$  et  $u_2 = u_3 = u_4 = u_5 = 0$ .

## 3.4 Interpolation par des Courbes de $I_{\mathcal{P}}^m$ .

Nous nous proposons de résoudre le problème d'interpolation suivant:

**Problème 0** Soit  $a_0^0, \dots, a_0^k, a_1^0, \dots, a_1^k$  une donnée de nombres complexes, on veut trouver une courbe  $r(t) \in I_{\mathcal{P}}^m$  telle que

$$r^{(j)}(0) = a_0^j \quad \text{et} \quad r^{(j)}(1) = a_1^j \quad \text{pour } j = 0, \dots, k.$$

Quel est le plus petit entier  $m$  apportant une (ou des) solution(s) pour  $k$  donné ?

Nous savons (Farouki [10,11]) qu'il existe quatre quintiques de  $I_{\mathcal{P}}^2$  qui interpolent deux points et leur dérivée (i.e. qui soient solutions du problème 0 pour  $k = 1$ ).

Nous pouvons retrouver ces quatre interpolants en utilisant la forme du polygone de contrôle des quintiques de  $I_{\mathcal{P}}^2$ :

On recherche une courbe  $r(t) = BP[A_0, u_1, \dots, u_5](t) \in I_{\mathcal{P}}^2$  telle que

$$A_0 = a_0^0, \quad A_0 + \sum_{i=0}^5 u_i = a_1^0,$$

et

$$5u_1 = a_0^1 \quad \text{et} \quad 5u_5 = a_1^1.$$

Or  $r(t) \in I_{\mathcal{P}}^2$  si et seulement si

$$r(t) = \int (P_0 B_0^2(t) + P_1 B_1^2(t) + P_2 B_2^2(t))^2 dt \quad \text{avec } P_0, P_1, P_2 \in \mathbb{C} \quad (3.23)$$

si et seulement s'il existe  $P_0, P_1, P_2 \in \mathbb{C}$  tels que

$$\begin{aligned} 5u_1 &= P_0^2 \\ 5u_2 &= P_0 P_1 \\ 5u_3 &= \frac{1}{3} P_0 P_2 + \frac{2}{3} P_1^2 \\ 5u_4 &= P_1 P_2 \\ 5u_5 &= P_2^2 \end{aligned}$$

La constante arbitraire de la primitive (3.23) permet l'interpolation du point  $a_0^0$ . La recherche d'une solution du problème 0 pour  $k = 1$  est donc équivalente à la recherche de  $P_0, P_1, P_2 \in \mathbb{C}$  tels que

$$P_0^2 = a_0^1 \quad \text{et} \quad P_2^2 = a_1^1 \quad (3.24)$$

et

$$P_0^2 + P_2^2 + \frac{1}{3}P_0P_2 + P_1(P_0 + P_2) + \frac{2}{3}P_1^2 = 5(a_1^0 - a_0^0) \quad (3.25)$$

On trouve quatre couples solutions  $(P_0, P_2)$ , solutions de (3.24) et pour chacun de ces couples, deux solutions à l'équation (3.25) du second degré en  $P_1$ . On a donc trouvé huit polygones de contrôle et donc huit courbes  $z(t)$  tels que les courbes  $r(t) = \int z^2(t)dt$  soient solutions de notre problème. En fait, ces huit polygones ne fournissent que quatre courbes distinctes  $r(t)$ : la forme des coefficients de l'équation (3.25) montre qu'il est équivalent que trois complexes  $P_0, P_1, P_2$  soient solutions des équations (3.24) et (3.25) ou que  $-P_0, -P_1, -P_2$  le soient. Parmi les huit polygones solutions  $(P_0, P_1, P_2)$  on trouve donc quatre polygones et leurs symétriques relativement à l'origine. Or, si deux courbes  $z_1(t)$  et  $z_2(t)$  ont deux polygones de contrôle symétriques par rapport à l'origine, les courbes  $z_1^2(t)$  et  $z_2^2(t)$  sont identiques.

On peut généraliser la méthode exposée ci-dessus pour la résolution du problème 0 pour  $k \in \mathbb{N}$ :

**Proposition 3.4.1** Soient  $a_0^0, a_1^0, \dots, a_0^k, a_1^k, \dots, a_1^k \in \mathbb{C}$  tels que  $a_0^1$  et  $a_1^1$  soient non nuls. Il existe quatre courbes de  $I_p^{2k}$  solutions du problème 0 pour  $k \in \mathbb{N}$ .

Il est bien connu qu'un problème d'interpolation en deux points est facilement résoluble quand on recherche l'interpolant sous forme Bézier, la recherche du polygone de l'interpolant consistant en la résolution de deux systèmes triangulaires. Dans le problème qui nous occupe, les  $k + 1$  premiers et les  $k + 1$  derniers points de contrôle d'une courbe de  $I_p^m$  sont déterminés de la même façon:

**Lemme 3.4.1** Soit  $r(t) = BP[A_0, u_1, \dots, u_n](t)$  une courbe polynomiale. Si  $r(t)$  est solution du problème 0 alors

$$A_0 = a_0^0 \quad (3.26)$$

$$A_0 + \sum_{i=0}^n u_i = a_1^0$$

et

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix} = D_1^{-1} \cdot B_1^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a_0^1 \\ \vdots \\ a_0^k \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_{n-k-1} \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = D_2^{-1} \cdot B_2^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a_1^k \\ \vdots \\ a_1^1 \end{pmatrix}$$

avec

$$D_1 = \begin{pmatrix} \frac{n!}{(n-1)!} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{n!}{(n-2)!} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & \cdots & \frac{n!}{(n-k)!} \end{pmatrix},$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} \frac{n!}{(n-k)!} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ & & \frac{n!}{(n-2)!} & 0 \\ 0 & & \cdots & \frac{n!}{(n-1)!} \end{pmatrix},$$

et

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \ddots & 0 \\ (-1)^{k-1} & \cdots & (-1)^{k-1+j} C_{k-1}^j & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} (-1)^{k-1} & \cdots & (-1)^{k-j} C_{k-1}^j & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & & & 1 \\ & & \ddots & -2 & 1 \\ \vdots & & & -1 & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

#### Méthode de détermination des solutions. Preuve de la proposition 3.4.1:

On recherche une courbe  $z(t) = B_0^{2k}(t)P_0 + \dots + B_{2k}^{2k}(t)P_{2k}$  telle que  $r(t) = \int z^2(t) dt$  soit solution du problème 0. La courbe  $r(t)$  étant élément de  $I_{\mathcal{P}}^{2k}$ , la condition nécessaire donnée par le lemme 3.4.1 pour  $n = 4k + 1$  est aussi suffisante. Or le polygone de contrôle

$(A_0, u_1, \dots, u_{4k})$  de la courbe  $r(t)$  s'exprime par  $u_{j+1} = \frac{1}{4k+1} Q_j$  pour  $j = 0, \dots, 4k$  où les  $Q_j$  sont déterminés par la proposition 3.2.1.

On évalue les valeurs

$$\begin{pmatrix} A_0^1 \\ \vdots \\ A_0^k \end{pmatrix} = (4k+1) D_1^{-1} \cdot B_1^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a_0^1 \\ \vdots \\ a_0^k \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} A_1^k \\ \vdots \\ A_1^1 \end{pmatrix} = (4k+1) D_2^{-1} \cdot B_2^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a_1^k \\ \vdots \\ a_1^1 \end{pmatrix},$$

le coefficient  $4k+1$  provient de l'expression des  $Q_i$  donnée en (3.6), intégré ici pour que les termes de droite des équations ci-dessous soient plus simples.

La courbe  $r(t)$  est solution du problème 0 ssi

$$\begin{aligned} P_0^2 &= A_0^1 \\ P_0 P_1 &= A_0^2 \\ \frac{1}{3} P_0 \cdot P_2 + P_1^2 &= A_1^3 \\ &\vdots \\ \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_{2k}^{i, k-1-i} P_i \cdot P_{k-1-i} &= A_0^k \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} P_{2k}^2 &= A_1^1 \\ P_{2k-1} P_{2k} &= A_1^2 \\ \frac{1}{3} P_{2k} \cdot P_{2k-2} + P_{2k-1}^2 &= A_1^3 \\ &\vdots \\ \sum_{i=k+1}^{2k} \lambda_{2k}^{i, 3k+1-i} P_i \cdot P_{3k+1-i} &= A_1^k \end{aligned} \quad (3.28)$$

et

$$\frac{1}{4k+1} \sum_{j=0}^{4k} Q_j = a_1^0 - a_0^0 \quad (3.29)$$

avec

$$Q_j = \sum_{i=\max(0, j-2k)}^{\min(j, 2k)} \lambda_{2k}^{i, j-i} P_i \cdot P_{j-i}$$

Résolvons le système (3.27). Soit  $P_0$  égale à une des deux solutions de  $P_0^2 = A_0^1$ .

Soit la  $j^{\text{ème}}$  égalité ( $1 \leq j \leq k$ ) du système (3.27) que l'on considère comme équation en  $P_{j-1}$ :

$$2\lambda_{2k}^{0, j-1} P_0 \cdot P_{j-1} + \sum_{i=1}^{j-2} \lambda_{2k}^{i, j-1-i} P_i \cdot P_{j-1-i} = A_0^j, \quad (3.30)$$



la somme des  $\lambda_{2k}^{i,j-1-i} P_i \cdot P_{j-1-i}$  est fonction des points  $P_1, \dots, P_{j-2}$ . On peut donc calculer itérativement les points  $P_1, \dots, P_{k-1}$  par  $P_1 = \frac{A_0^1}{P_0}$  et pour  $j = 3, \dots, k$

$$P_{j-1} = \frac{A_0^j - \sum_{i=1}^{j-2} \lambda_{2k}^{i,j-1-i} P_i \cdot P_{j-1-i}}{2\lambda_{2k}^{0,j-1} P_0}$$

Notons  $P_1^*, \dots, P_{k-1}^*$  les points ainsi obtenus en ayant choisi  $P_0$  comme solution de l'équation  $P_0^2 = A_0^1$ , et  $P_1^\Delta, \dots, P_{k-1}^\Delta$  ceux obtenus pour le choix  $-P_0$ . Montrons que  $P_l^\Delta = -P_l^*$  pour  $l = 0, \dots, k-1$ .

L'équation  $P_0 \cdot P_1 = A_0^2$  donne  $P_1^\Delta = -P_1^*$ . On montre itérativement le résultat: on suppose que  $P_1^\Delta = -P_1^*, \dots, P_{j-2}^\Delta = -P_{j-2}^*$  pour  $3 \leq j \leq k-2$ , on a

$$2\lambda_{2k}^{0,j-1}(-P_0) \cdot P_{j-1}^\Delta + \sum_{i=1}^{j-2} \lambda_{2k}^{i,j-1-i} P_i^\Delta \cdot P_{j-1-i}^\Delta = A_0^j$$

i.e.

$$2\lambda_{2k}^{0,j-1} P_0 \cdot (-P_{j-1}^\Delta) + \sum_{i=1}^{j-2} \lambda_{2k}^{i,j-1-i} P_i^* \cdot P_{j-1-i}^* = A_0^j$$

car  $P_i^\Delta \cdot P_{j-1-i}^\Delta = (-P_i^*) \cdot (-P_{j-1-i}^*)$  pour  $1 \leq j \leq j-2$ . L'équation (3.30) étant vérifiée par les  $P_1^*, \dots, P_{j-1}^*$  on obtient  $-P_j^\Delta = P_j^*$ .

On a donc exhibé deux  $k$ -uplets  $(P_0, \dots, P_{k-1})$  et  $(-P_0, \dots, -P_{k-1})$  solutions du système (3.27). De même on calcule  $(P_{k+1}, \dots, P_{2k})$  et  $(-P_{k+1}, \dots, -P_{2k})$  solutions du système (3.28).

Le dernier point de contrôle de la courbe  $z(t) = B_0^{2k}(t)P_0 + \dots + B_{2k}^{2k}(t)P_{2k}$  à notre disposition permet de réaliser l'égalité (3.29) qui est maintenant une équation du second degré en  $P_k$ : le terme  $Q_{2k} = \sum_{i=0}^{2k} \lambda_{2k}^{i,2k-i} P_i \cdot P_{2k-i}$  de la somme (3.29) contient le terme  $\lambda_{2k}^{k,k} P_k^2$ . Chacune des sommes  $Q_j$  pour  $j = k, \dots, 2k-1$  et  $j = 2k+1, \dots, 3k-1$  contient deux termes en  $P_k$ , plus précisément:

Pour  $j = k, \dots, 2k-1$  ou  $j = 2k+1, \dots, 3k$

$$Q_j = \sum_{\substack{i = \min(0, j-2k) \\ i \neq k \\ j-i \neq k}}^{\min(j, 2k)} \lambda_{2k}^{i,j-i} P_i \cdot P_{j-i} + 2\lambda_{2k}^{k,j-k} P_k \cdot P_{j-k}$$

L'équation (3.29) s'écrit maintenant :

$$\alpha_k + \beta_k P_k + \lambda_{2k}^{k,k} P_k^2 = 0 \quad (3.31)$$

avec

$$\beta_k = \sum_{\substack{j=k \\ j \neq 2k}}^{3k} 2\lambda_{2k}^{k,j-k} P_{j-k} \quad (3.32)$$

et

$$\alpha_k = \sum_{j=0}^{k-1} Q_j + \sum_{j=3k+1}^{4k} Q_j + \sum_{\substack{j=k \\ j \neq 2k}}^{3k} \sum_{\substack{i=\max(0, j-2k) \\ i \neq k \\ j-i \neq k}}^{\min(j, 2k)} \lambda_{2k}^{i,j-i} P_i \cdot P_{j-i} \quad (3.33)$$

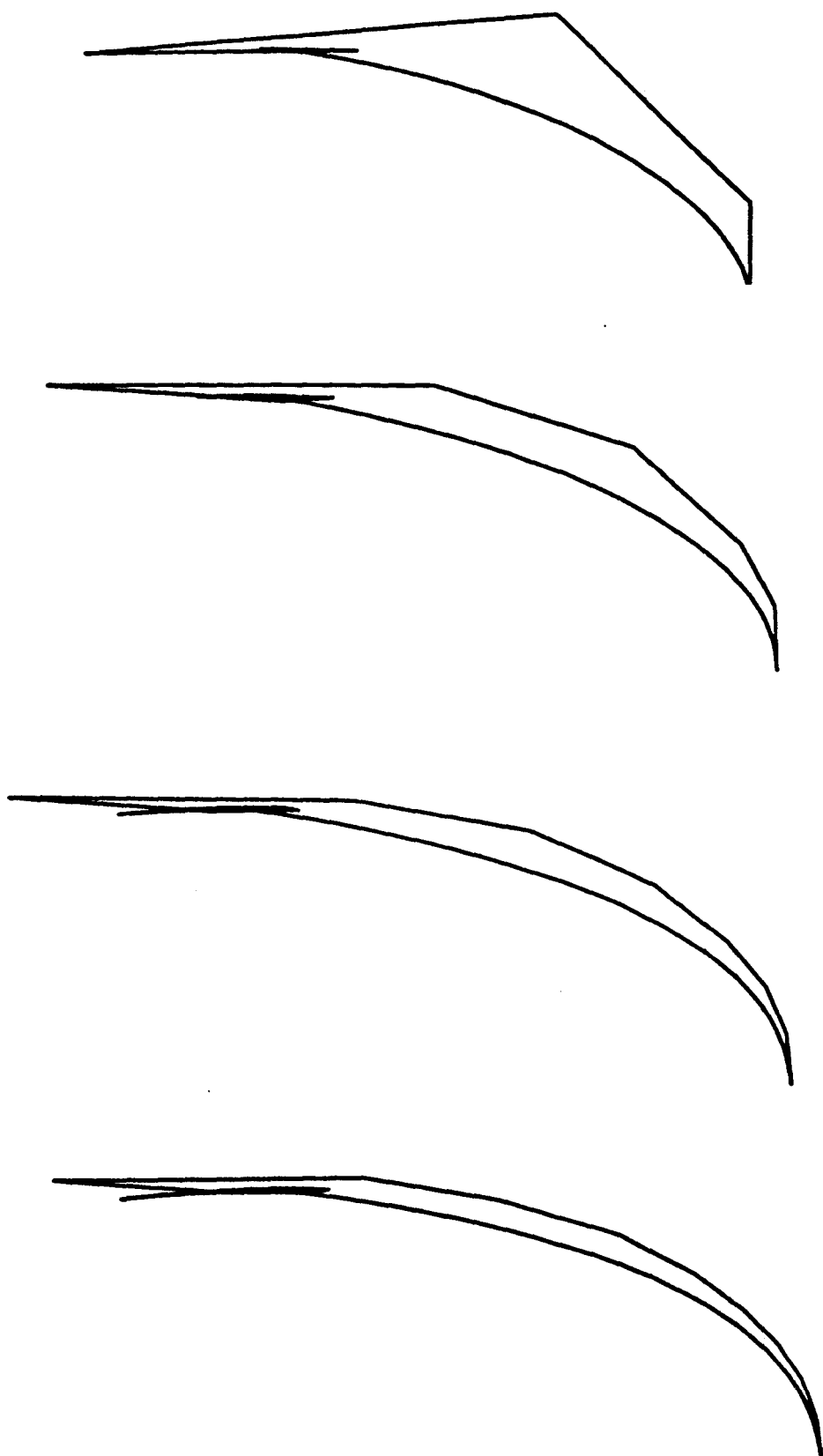
Si on note  $U_k^1, U_k^2$  les deux solutions de l'équation (3.31) relatifs à un  $2k$ -uplet  $(P_0, \dots, P_{k-1}, P_{k+1}, \dots, P_{2k})$  - solution des systèmes (3.27) et (3.28) - et  $V_k^1, V_k^2$  les deux solutions relatives à  $(-P_0, \dots, -P_{k-1}, -P_{k+1}, \dots, -P_{2k})$ , la forme des coefficients de l'équation (3.31) donne que  $U_k^1 = -V_k^1$  et  $U_k^2 = -V_k^2$ . On vient donc de mettre en évidence quatre polygones de contrôle dont deux symétriques des deux autres. Une considération identique sur les  $2k$ -uplets  $(P_0, \dots, P_{k-1}, -P_{k+1}, \dots, -P_{2k})$  et  $(-P_0, \dots, -P_{k-1}, P_{k+1}, \dots, P_{2k})$  apporte de la même façon deux polygones de contrôle et leur symétrique. Les huit polygones de contrôle ainsi construits donnent quatre courbes  $z^2(t)$  distinctes et donc quatre courbes  $r(t) = \int z^2(t)dt$  solutions du problème 0.  $\square$

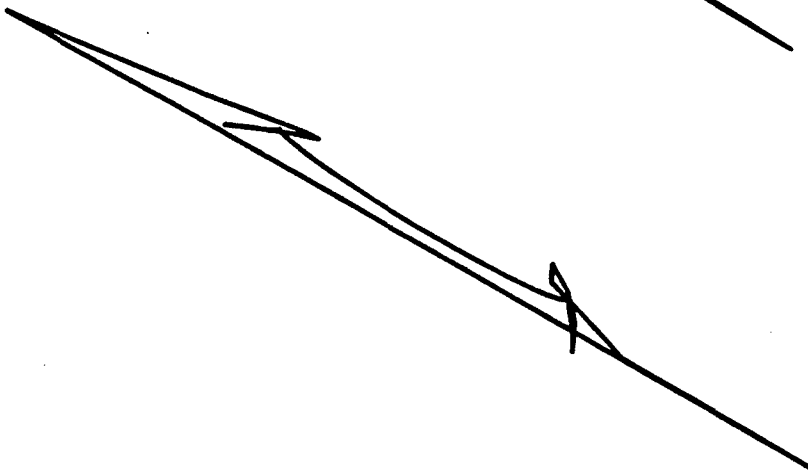
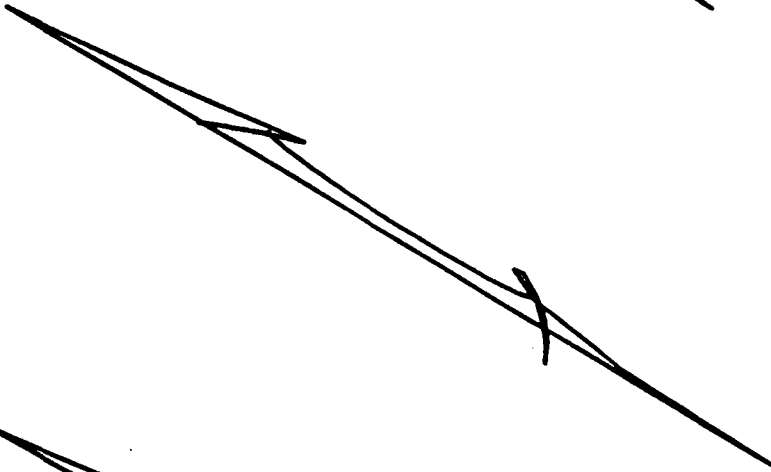
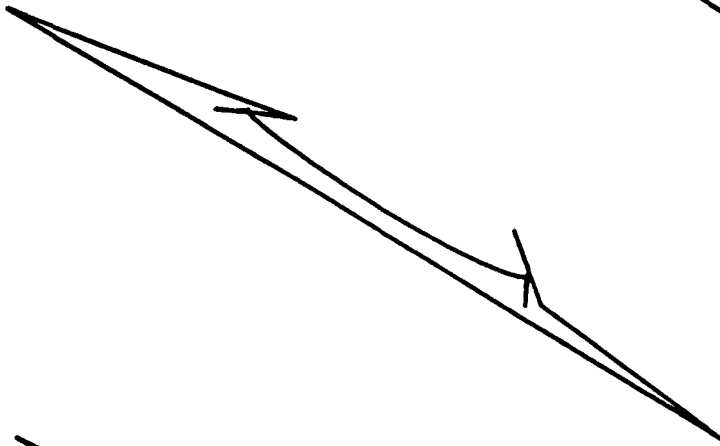
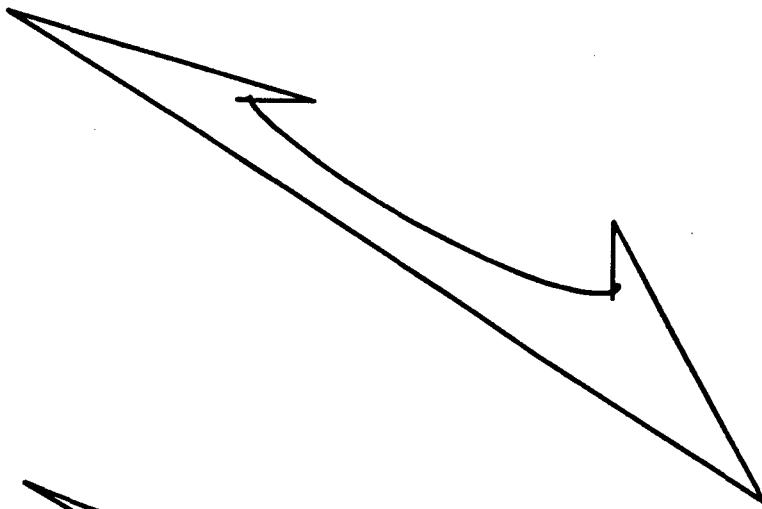
### Exemple:

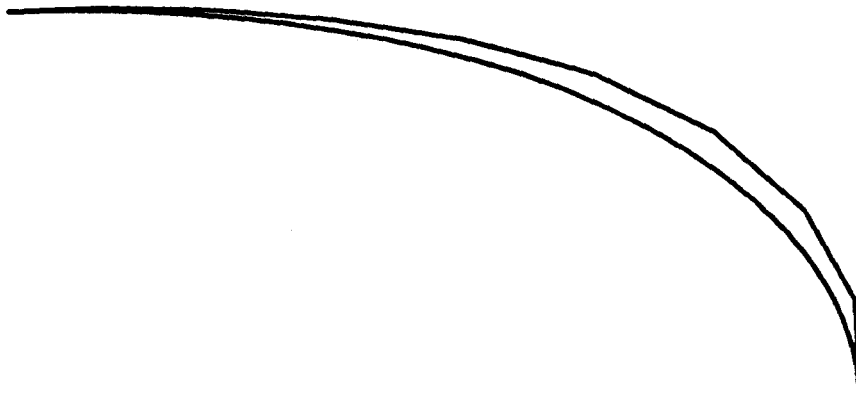
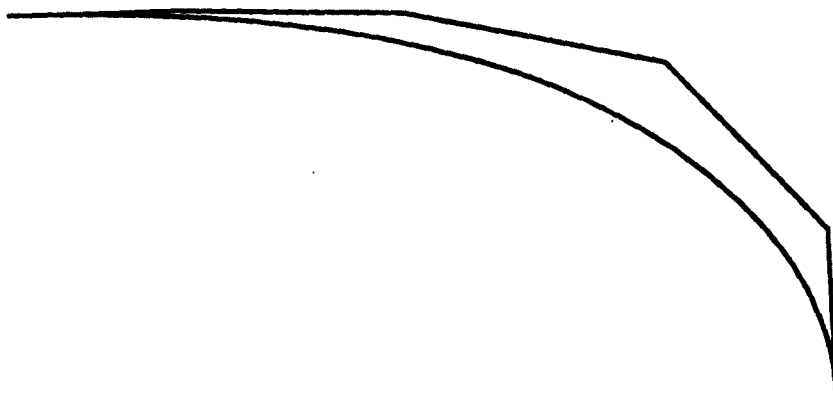
Nous déterminons en résolvant les systèmes (3.27), (3.28) et l'équation (3.31), les interpolants d'un quart de l'ellipse:  $r(t) = (\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{t}{1+t^2})$  paramétrée sur  $[0, 1]$ . Le choix de l'un des quatre couples  $(P_0, P_1)$ ,  $(-P_0, P_1)$ ,  $(P_0, -P_1)$  et  $(-P_0, -P_1)$  détermine la suite des interpolants relatifs à  $k = 0, 1, \dots$ . On représente sur chacune des pages suivantes les interpolants (jusque  $k = 4$ ) obtenus pour un des choix de  $(\varepsilon P_0, \varepsilon P_1)$ ,  $(\varepsilon = \pm 1)$ .

On remarque que l'un des quatres couples fournit une suite d'interpolants qui semble converger vers l'ellipse. Ce phénomène a été observé sur l'ensemble des exemples traités.



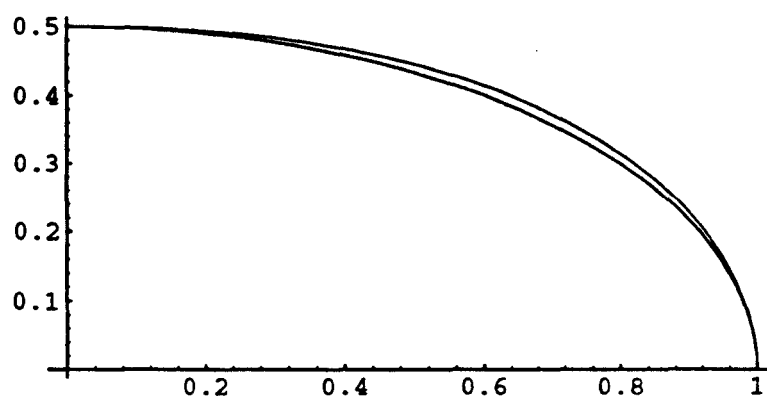




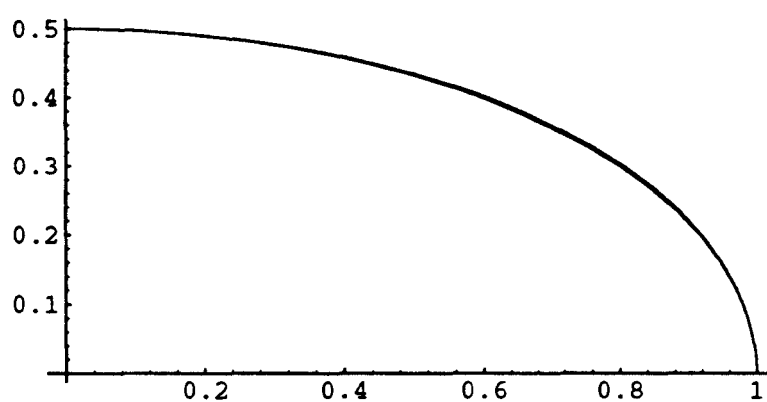


Ci-dessous, l'ellipse et ses "bons interpolants":

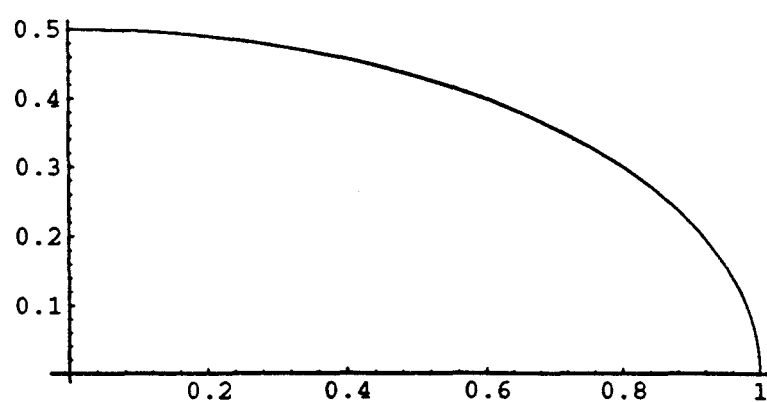
$k = 1 :$



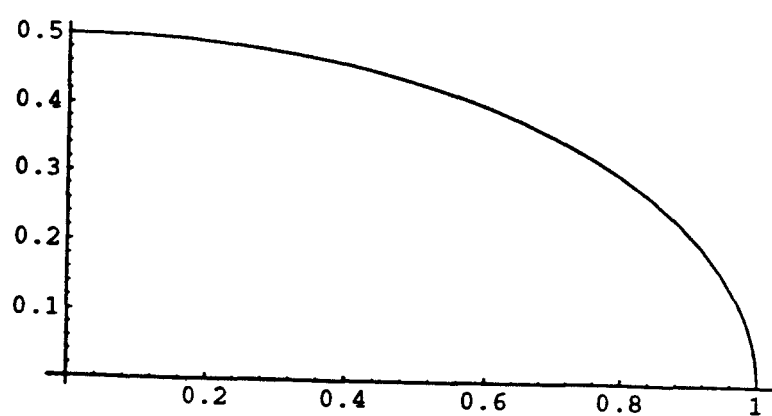
$k = 2 :$



$k = 3 :$



$k = 4 :$



## Chapter 4

# Interpolation Rationnelle de Courbes Parallèles

### 4.1 Interpolation Rationnelle du Cercle Unité

L'ensemble des courbes paramétrées rationnelles admettant le cercle unité pour support sera noté  $\mathcal{C}$ .

#### 4.1.1 Le problème

On considère une courbe  $r(t)$  rationnelle et ses parallèles  $r_d(t) = r(t) + dn(t)$ . En général l'application de Gauss  $t \rightarrow n(t)$  n'est pas rationnelle. Une méthode naturelle d'interpolation des courbes  $r_d(t)$  consiste en l'interpolation de la courbe  $n(t)$  par une courbe rationnelle  $Z(t)$ . On dispose alors des courbes  $r(t) + dZ(t)$  qui interpolent pour chaque valeur de  $d \in \mathbb{R}$  la parallèle  $r_d(t)$ . Le but de cette partie est de rechercher des interpolants  $Z(t)$  qui soient comme  $n(t)$  sur le cercle unité, on se propose de résoudre le

#### Problème 1

Soit  $Z_0(t) = X_0(t) + iY_0(t)$  une courbe paramétrée non nécessairement rationnelle à support sur le cercle unité i.e.  $X_0^2(t) + Y_0^2(t) = 1 \quad \forall t \in [a, b]$ .

On cherche  $Z(t) \in \mathcal{C}$  telle que

$$Z^{(j)}(t_i) = Z_0^{(j)}(t_i) \text{ pour } i = 0, \dots, m \text{ et } j = 0, \dots, \gamma_i.$$

On note  $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_m)$  et  $\Gamma$  l'ensemble des couples d'indices défini par

$$(i, j) \in \Gamma \text{ ssi } 0 \leq j \leq \gamma_i \text{ et } 0 \leq i \leq m.$$



Rappelons la forme des paramétrisations des courbes de  $C$ , la preuve de cette propriété ayant été donnée au sein du lemme 2.3.1.

**Propriété 4.1.1.1** Une courbe  $Z(t) = \frac{P(t)}{R(t)} + i \frac{Q(t)}{R(t)}$  rationnelle est élément de  $C$  si et seulement si il existe une courbe polynomiale  $z(t) = M(t) + iN(t)$  telle que

$$Z(t) = \frac{z(t)}{\bar{z}(t)} \quad (4.1)$$

### Remarque

H. Pottmann [27] remarque que l'on peut trouver la forme

$$Z(t) = \frac{M^2 - N^2}{M^2 + N^2}(t) + i \frac{2MN}{M^2 + N^2}(t) \quad (4.2)$$

en considérant l'ensemble des projections stéréographiques des paramétrisations rationnelles d'une droite ne passant pas par le pôle.

L'expression (4.2) incite à penser que le problème 1 est non linéaire. Nous allons montrer que la forme (4.1) permet de le transformer en un problème d'interpolation polynomiale sur  $z(t)$  et donc en un problème linéaire. Nous donnerons deux méthodes pour réaliser cette interpolation. La première où l'on considérera les dérivées de  $Z_0(t)$  évaluées aux points  $t_i$  (paragraphe 4.1.2). La seconde où  $Z_0(t)$  est le vecteur normal d'une courbe  $r(t)$  (section 4.2). Dans ce cas, la méthode n'utilisera pas les dérivées  $Z_0^{(j)}(t_i)$  mais les valeurs  $r^{(j+1)}(t_i)$ . Il est important de constater

### Remarque

Le problème consistant en l'interpolation d'une courbe  $Z_0(t)$  telle  $|Z_0(t)| = 1$  peut sembler plus général que celui de l'interpolation du vecteur normal d'une courbe paramétrée quelconque. En fait, en écrivant  $Z_0(t) = \cos \theta(t) + i \sin \theta(t)$  nous obtenons pour vecteur normal  $n_0 = (-\cos \theta \cdot \frac{\theta'}{|\theta'|}, -\sin \theta \cdot \frac{\theta'}{|\theta'|})$ . Si  $\theta' > 0$  ( $Z_0(t)$  parcourt le cercle dans le sens trigonométrique) alors  $n_0 = -Z_0$ , sinon  $n_0 = Z_0$ . Par suite, toute courbe  $Z_0(t)$  sur le cercle unité peut être considérée comme vecteur normal de la courbe  $r(t)$  définie par  $r(t) = -Z_0(t)$  sur tout intervalle où  $Z_0(t)$  parcourt le cercle dans le sens trigonométrique et  $r(t) = Z_0(t)$  sinon.

### Résolution pour $m \in N$ et $\gamma = (0, 0, \dots, 0)$

Nous recherchons  $z(t)$  polynomiale telle que  $\frac{z(t_i)}{\bar{z}(t_i)} = Z_0(t_i)$  pour  $i = 0, \dots, m$ . Les arguments des nombres complexes  $z(t_0), \dots, z(t_m)$  doivent respectivement être égaux à la

moitié (modulo  $\pi$ ) des nombres  $Z_0(t_0), \dots, Z_0(t_m)$ .

Réciproquement, toute courbe  $z(t)$  vérifiant la condition nécessaire précédente fournit une solution  $Z(t) = \frac{z(t)}{\bar{z}(t)}$  au problème 1 pour  $\gamma = (0, 0, \dots, 0)$ , car on obtient  $\arg Z(t_i) = \arg Z_0(t_i)$  et  $|Z(t_i)| = 1$ .

On note  $\theta_i = \arg Z_0(t_i)$  et  $D_i$  la droite de pente  $\tan \frac{\theta_i}{2}$ .

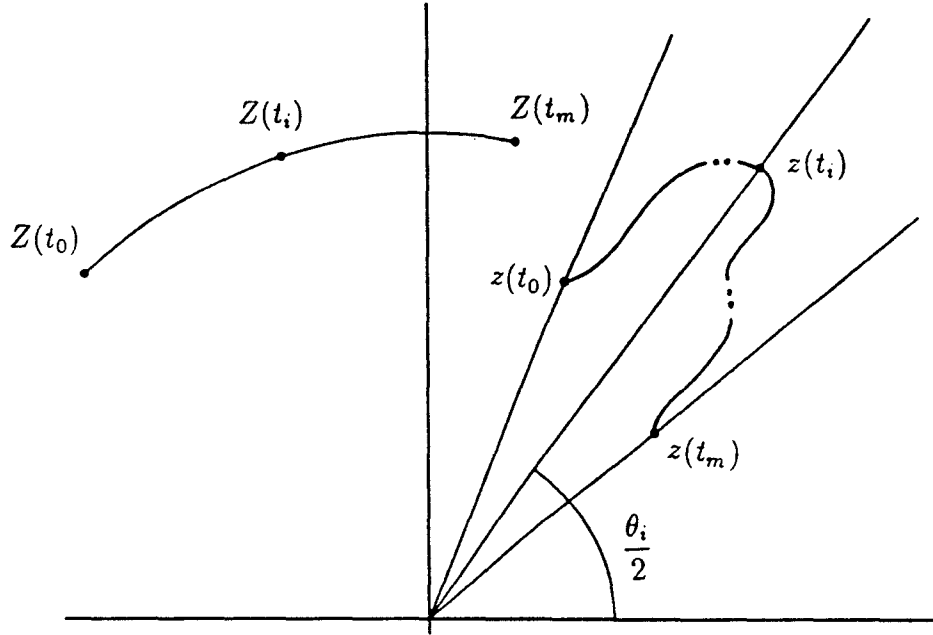


Figure 4.1: Les conditions sur la courbe  $z(t)$  pour que  $Z(t) = \frac{z(t)}{\bar{z}(t)}$  soit solution du problème 1 s'expriment par:  $z(t_i) \in D_i$  pour  $i \in 0, \dots, m$ .

Explicitons maintenant la démarche proposée pour la résolution du problème 1:

Etant donnée une paramétrisation du cercle  $Z_0(t)$  (i.e.  $|Z_0(t)| = 1$ ) et les valeurs  $Z_0^{(j)}(t_i)$  avec  $(i, j) \in \Gamma$ , il s'agit de déterminer des nombres complexes  $(b_i^j)_{(i,j) \in \Gamma}$  tels que le polynôme  $z$  vérifiant  $z^{(j)}(t_i) = b_i^j$  soit tel que

$$\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^{(j)}(t_i) = Z_0^{(j)}(t_i) \text{ pour } (i, j) \in \Gamma.$$

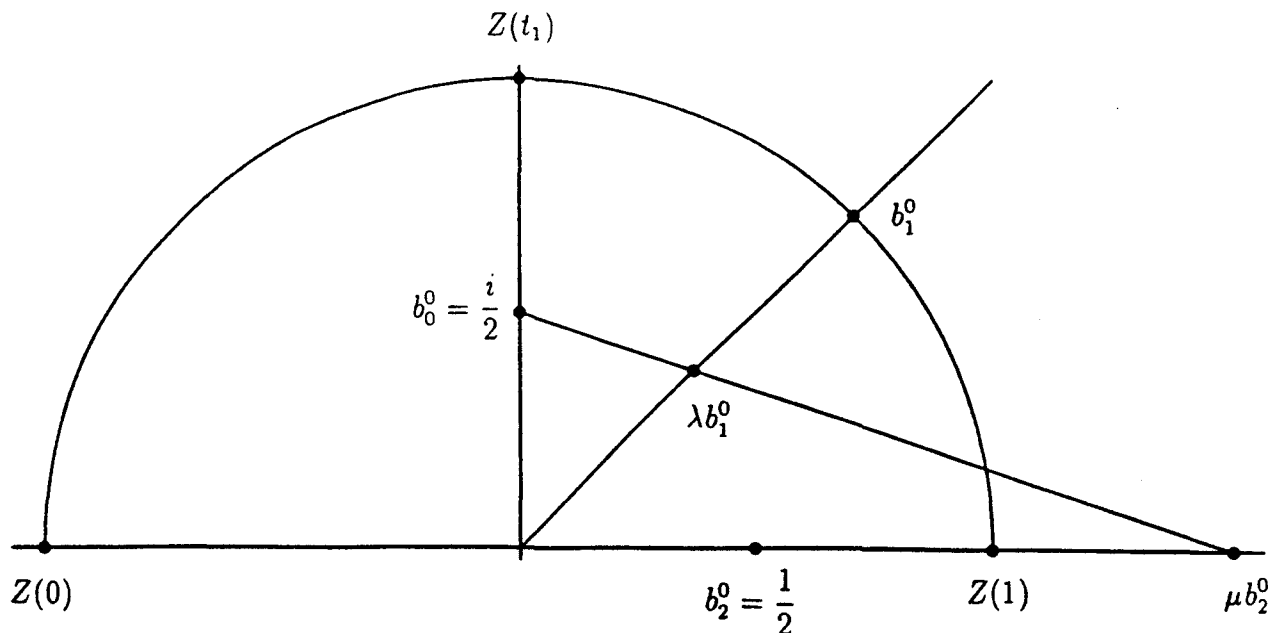
Par suite  $Z(t) = \frac{z(t)}{\bar{z}(t)}$  est solution du problème 1:  $Z(t)$  vérifie  $Z^{(j)}(t_i) = Z_0^{(j)}(t_i)$  et  $|Z(t)| = 1$ .

**Définition 4.1.1.1** Les nombres complexes  $(b_i^j)_{(i,j) \in \Gamma}$  sont dits admissibles pour le problème 1.

Dans un premier temps le travail consistera à construire l'ensemble des données admissibles. Nous pourrions soit les déterminer par la construction 4.1.2.1 et le corollaire 4.1.2.1, soit dans le cas où  $Z_0(t)$  est le vecteur normal d'une courbe paramétrée  $r(t)$ , par la proposition 4.2.1 et le même corollaire.

Un interpolant  $z(t)$  de ces données est de degré inférieur ou égal à  $\sum_{i=0}^m (\gamma_i + 1) - 1$ . Le degré de  $Z(t)$ , i.e. celui de  $\frac{M^2(t) - N^2(t)}{M^2(t) + N^2(t)} + i \frac{2M(t)N(t)}{M^2(t) + N^2(t)}$ , est le double du degré de  $z(t)$ . Nous posons le problème de déterminer les données admissibles qui fournissent un interpolant  $z(t)$  de degré le plus petit possible. Comme le montre l'exemple 4.1.1.1, pour  $m = 2$  et  $\gamma = (0, 0, 0)$  nous déterminerons une donnée admissible qui donne un interpolant  $z(t)$  de degré 1 au lieu de 2, et donc un interpolant  $Z(t)$  de degré 2 au lieu de 4. Nous montrerons dans le cas  $m = 2$  et  $\gamma = (k, 0, k)$  qu'il peut exister une unique donnée  $(b_i^j)_{(i,j) \in \Gamma}$  à un coefficient multiplicatif près qui fournit un interpolant  $z(t)$  de degré  $k + 1$  au lieu de  $2k + 2$  et donc une unique solution du problème 1 de degré  $2k + 2$ .

**Exemple 4.1.1.1** Considérons le problème 1 relatif à l'interpolation des points  $Z_0(0) = -1$ ,  $Z_0(t_1) = i$  et  $Z_0(1) = 1$ .



La donnée  $b_0^0 = \frac{i}{2}$ ,  $b_1^0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $b_2^0 = \frac{1}{2}$  est admissible puisque les arguments de ces

trois nombres complexes sont moitié ceux de  $Z_0(0)$ ,  $Z_0(t_1)$ ,  $Z_0(1)$ . On trouve alors une solution  $Z(t) = \frac{z(t)}{\bar{z}(t)}$  où  $z(t)$  est une parabole interpolant les trois points  $b_0^0$ ,  $b_1^0$ ,  $b_2^0$ . Néanmoins, il est possible de trouver  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tels que l'on puisse déterminer une courbe  $z(t)$  de degré 1 qui interpole en  $t_0 = 0$ ,  $t_1$ ,  $t_2 = 1$  les points  $b_0^0$ ,  $\lambda b_1^0$  et  $\mu b_2^0$ :

L'interpolation de  $b_0^0$  et  $\mu b_2^0$  donne

$$z(t) = \frac{i}{2}B_0^1(t) + \frac{1}{2}\mu B_1^1(t).$$

L'égalité  $z(t_1) = \lambda b_1^0$  s'écrit alors

$$\lambda\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{i}{2}(1 - t_1) + \mu\frac{1}{2}t_1,$$

on trouve,  $t_1$  étant différent de 0 et 1

$$\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - t_1) \quad \text{et} \quad \mu = \frac{1}{t_1} - 1.$$

La donnée  $b_0^0 = \frac{i}{2}$ ,  $b_1^0 = \frac{1}{2}(1 - t_1)(1 + i)$ ,  $b_2^0 = \frac{1}{2}\frac{1-t_1}{t_1}$  fournit un interpolant polynomial  $z(t)$  de degré 1 et une paramétrisation du demi-cercle sur  $[0, 1]$ :

$$Z(t) = \frac{\frac{i}{2}B_0^1(t) + \frac{1-t_1}{t_1}B_1^1(t)}{-\frac{i}{2}B_0^1(t) + \frac{1-t_1}{t_1}B_1^1(t)},$$

qui interpole  $-1, i, 1$  en  $t_0 = 0$ ,  $t_1 \notin \{0, 1\}$ ,  $t_2 = 1$ .

#### 4.1.2 Détermination de l'ensemble des solutions du problème 1

La recherche de l'ensemble des données admissibles s'articulera autour du théorème suivant:

**Théorème 4.1.2.1** Soit  $Z_1(t) = \frac{z_1(t)}{\bar{z}_1(t)}$  une solution du problème 1 et  $Z(t) = \frac{z(t)}{\bar{z}(t)}$  une autre paramétrisation du cercle. Les trois assertions suivantes sont équivalentes:

(i)  $Z(t) = \frac{z(t)}{\bar{z}(t)}$  est une autre solution du problème 1

(ii) Il existe un polynôme  $P$  tel que

$$z^{(j)}(t_i) = (P \cdot z_1)^{(j)}(t_i) \quad \text{pour } (i, j) \in \Gamma \quad (4.3)$$

(iii) Pour tout  $i \in \{0, \dots, m\}$  il existe  $\lambda_i^0, \lambda_i^1, \dots, \lambda_i^{\gamma_i} \in \mathbb{R}$  tels que

$$\begin{cases} z(t_i) = \lambda_i^0 z_1(t_i) \\ z'(t_i) = \lambda_i^0 z_1'(t_i) + \lambda_i^1 z_1(t_i) \\ \vdots \\ z^{(j)}(t_i) = \sum_{l=0}^j C_j^l \lambda_i^l z_1^{(j-l)}(t_i) \\ \vdots \\ z^{(\gamma_i)}(t_i) = \lambda_i^0 z_1^{(\gamma_i)}(t_i) + \gamma_i \lambda_i^1 z_1^{(\gamma_i-1)}(t_i) + \dots + \lambda_i^{\gamma_i} z_1(t_i) \end{cases} \quad (4.4)$$

**Preuve:**

Les points (ii) et (iii) sont équivalents: Considérons un polynôme  $P$  vérifiant les équations (4.3). En appliquant la formule de Leibniz à ces équations, on trouve que  $z(t)$  vérifie (4.4) avec  $\lambda_i^j = P^j(t_i)$  pour  $(i, j) \in \Gamma$ .

Réciproquement, si  $z(t)$  vérifie les équations (4.4), le polynôme  $P$  du point (ii) est donné par l'interpolation de la donnée de nombres réels  $(\lambda_i^j)_{(i,j) \in \Gamma}$  (i.e.  $P^j(t_i) = \lambda_i^j$  pour  $(i, j) \in \Gamma$ ).

Montrons que (ii) implique (i). Supposons l'existence d'un polynôme  $P$  vérifiant (4.3). Soit  $i \in \{0, \dots, m\}$  et  $j \in \{0, \dots, \gamma_i\}$ . Par hypothèse,  $(P \cdot z_1)^{(l)}(t_i) = z^{(l)}(t_i)$  et  $(P \cdot \bar{z}_1)^{(l)}(t_i) = \bar{z}^{(l)}(t_i)$  pour tout entier  $l \in \{0, \dots, j\}$  et donc

$$\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^{(j)}(t_i) = \left(\frac{P \cdot z_1}{P \cdot \bar{z}_1}\right)^{(j)}(t_i).$$

On vient de montrer que pour tout  $i \in \{0, \dots, m\}$  et pour tout  $j \in \{0, \dots, \gamma_i\}$ ,  $Z^{(j)}(t_i)$  est égale à  $Z_1^{(j)}(t_i)$  et donc

$$Z^{(j)}(t_i) = Z_0^{(j)}(t_i) \text{ pour } i \in \{0, \dots, m\} \text{ et } j \in \{0, \dots, \gamma_i\},$$

car  $Z_1(t)$  est solution du problème 1.

Achevons la preuve du théorème en montrant que (i) donne (iii). On suppose que  $Z(t)$  est une solution du problème 1, il vient

$$Z^{(j)}(t_i) = Z_0^{(j)}(t_i) \text{ pour } (i, j) \in \Gamma \quad (4.5)$$

Soit  $i \in \{0, \dots, m\}$ . En considérant les arguments de  $Z(t_i)$  et  $Z_1(t_i)$  qui sont égaux, on trouve que  $\arg z(t_i) = \arg z_1(t_i)$ . Il existe donc un réel  $\lambda_i^0$  tel que  $z(t_i) = \lambda_i^0 z_1(t_i)$ .

Supposons qu'il existe  $\lambda_i^0, \lambda_i^1, \dots, \lambda_i^j \in \mathbb{R}$  tels que

$$z^{(j)}(t_i) = \sum_{k=0}^j C_j^k \lambda_i^k z_1^{(j-k)}(t_i) \text{ pour } j = 0, \dots, l-1 \text{ et } l \leq \gamma_i. \quad (4.6)$$

On note  $Z(t) = X(t) + iY(t)$ ,  $z(t) = x(t) + iy(t)$ . L'égalité  $Z(t) = \frac{z(t)}{i(t)}$  se met sous la forme  $A(t) \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = 0$  avec  $A(t) = \begin{pmatrix} X(t) - 1 & Y(t) \\ -Y(t) & X(t) + 1 \end{pmatrix}$ .

Le produit matriciel  $A(t) \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$  sera noté  $A(t) \cdot z(t)$ . En adoptant des notations similaires pour  $Z_1(t)$  on obtient  $A_1(t) \cdot z_1(t)$ . L'hypothèse entraîne

$$A^{(j)}(t_i) = A_1^{(j)}(t_i) \text{ pour } j = 0, \dots, \gamma_i. \quad (4.7)$$

Dérivant  $l$  fois l'égalité  $A(t) \cdot z(t) = 0$  il vient

$$A(t) \cdot z^{(l)}(t) = - \sum_{p=1}^l C_l^p A^{(p)}(t) \cdot z^{(l-p)}(t),$$

soit en  $t = t_i$

$$A(t_i) \cdot z^{(l)}(t_i) = - \sum_{p=1}^l \left[ C_l^p A_1^{(p)}(t_i) \cdot \left( \sum_{q=0}^{l-p} C_{l-p}^q \lambda_i^q z_1^{(l-p-q)}(t_i) \right) \right]$$

d'après (4.7) et l'égalité (4.6).

$$\begin{aligned} A(t_i) \cdot z^{(l)}(t_i) &= - \sum_{q=0}^{l-1} \sum_{p=1}^{l-q} C_l^p C_{l-p}^q \lambda_i^q A_1^{(p)}(t_i) \cdot z_1^{(l-p-q)}(t_i) \\ &= - \sum_{q=0}^{l-1} \lambda_i^q C_l^q \sum_{p=1}^{l-q} C_{l-p}^p A_1^{(p)}(t_i) \cdot z_1^{(l-p-q)}(t_i) \end{aligned}$$

car  $C_l^p C_{l-p}^q = C_l^q C_{l-q}^p$  et donc

$$\begin{aligned} A(t_i) \cdot z^{(l)}(t_i) &= - \sum_{q=0}^{l-1} \lambda_i^q C_l^q \left[ \sum_{p=0}^{l-q} \left( C_{l-p}^p A_1^{(p)}(t_i) \cdot z_1^{(l-p-q)}(t_i) \right) - A_1(t_i) \cdot z_1^{(l-q)}(t_i) \right] \\ &= \sum_{q=0}^{l-1} \lambda_i^q C_l^q A_1(t_i) \cdot z_1^{(l-q)}(t_i) \end{aligned}$$

car  $\sum_{p=0}^{l-q} C_{l-p}^p A_1^{(p)}(t_i) \cdot z_1^{(l-p-q)}(t_i) = (A_1 \cdot z_1)^{(l-q)}(t_i) = 0$

Il vient

$$A_1(t_i) \cdot \left[ z^{(l)}(t_i) - \sum_{q=0}^{l-1} \lambda_i^q C_l^q z_1^{(l-q)}(t_i) \right] = 0.$$

La matrice  $A_1(t_i)$  est de rang 1,  $z_1(t_i)$  appartient au noyau (qui est de dimension 1): Il existe  $\lambda_i^l \in \mathbb{R}$  tel que

$$\begin{aligned} z^{(l)}(t_i) &= \sum_{q=0}^{l-1} \lambda_i^q C_l^q z_1^{(l-q)}(t_i) + \lambda_i^l z_1(t_i) \\ &= \sum_{q=0}^l \lambda_i^q C_l^q z_1^{(l-q)}(t_i) \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration.  $\square$

Ce théorème nous permettra, une fois connue une donnée admissible au problème 1, de les déterminer toutes explicitement. Montrons maintenant que les données admissibles au problème 1 sont solutions d'un ensemble de systèmes linéaires de rang  $\gamma_i + 1$  (point (i)) qui admettent effectivement des solutions (point (ii)).

**Proposition 4.1.2.1** (i) La donnée d'interpolation  $(b_i^j)_{(i,j) \in \Gamma}$  est admissible si et seulement si pour tout  $i \in \{0, \dots, m\}$  le nombre complexe  $b_i^0$  est non nul et si  $b_i^0, b_i^1, \dots, b_i^{\gamma_i}$  sont solutions des systèmes linéaires

$$\begin{cases} A_0(t_i) \cdot b_i^0 = 0 \\ A_0(t_i) \cdot b_i^1 = -A_0'(t_i) \cdot b_i^0 \\ \vdots = \vdots \\ A_0(t_i) \cdot b_i^{\gamma_i} = -\sum_{q=1}^{\gamma_i} C_{\gamma_i}^q A_0^q(t_i) \cdot b_i^{\gamma_i-q} \end{cases} \quad (4.8)$$

(ii) L'ensemble des solutions  $b_i^0, b_i^1, \dots, b_i^{\gamma_i}$  du système précédent est non vide.

**Preuve:**

(i) Soit  $(b_i^j)$  une donnée admissible et  $z(t)$  une courbe polynomiale qui en réalise l'interpolation i.e.  $z^{(j)}(t_i) = b_i^j$  pour  $(i, j) \in \Gamma$ , on a  $\left(\frac{z}{z}\right)^{(j)}(t_i) = Z_0^{(j)}(t_i)$  pour  $(i, j) \in \Gamma$ .

Rappelons qu'en notant  $Z(t) = X(t) + iY(t)$  et  $A(t) = \begin{pmatrix} X(t) - 1 & Y(t) \\ -Y(t) & X(t) + 1 \end{pmatrix}$ , l'égalité  $Z(t) = \frac{z(t)}{\bar{z}(t)}$  s'écrit

$$A(t) \cdot z(t) = 0 \quad (4.9)$$

et que l'égalité  $Z^{(j)}(t_i) = Z_0^{(j)}(t_i)$  se traduit par

$$A^{(j)}(t_i) = A_0^{(j)}(t_i) \quad (4.10)$$

où

$$A_0(t) = \begin{pmatrix} X_0(t) - 1 & Y_0(t) \\ -Y_0(t) & X_0(t) + 1 \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Soit  $i \in \{0, \dots, m\}$ ; d'après (4.9) en  $t = t_i$  et par (4.10) pour  $j = 0$ , on trouve que  $b_i^0$  est solution du système linéaire  $A_0(t_i) \cdot b_i^0 = 0$ .

En dérivant successivement l'équation (4.9) par la formule de Leibniz jusqu'au rang  $\gamma_i$  en  $t = t_i$  et par (4.10) on trouve que la condition est nécessaire.

Considérons maintenant  $b_i^0, \dots, b_i^{\gamma_i}$  vérifiant le système (4.8) pour tout  $i \in \{0, \dots, m\}$  et montrons que cette donnée est admissible. Soit une courbe  $z(t)$  telle que  $z^{(j)}(t_i) = b_i^j$ , montrons que la courbe  $Z(t) = \frac{z(t)}{z(t)}$  est effectivement solution du problème 1.

$A(t_i) \cdot z(t_i) = 0$  donne  $A(t_i) \cdot b_i^0 = 0$ . Par construction de  $b_i^0$  on a  $A_0(t_i) \cdot b_i^0 = 0$ , ce qui implique

$$(A(t_i) - A_0(t_i)) \cdot b_i^0 = 0. \quad (4.12)$$

Or

$$A(t) - A_0(t) = \begin{pmatrix} X(t) - X_0(t) & Y(t) - Y_0(t) \\ -(Y(t) - Y_0(t)) & X(t) - X_0(t) \end{pmatrix}$$

le déterminant de cette matrice est égal à  $(X(t) - X_0(t))^2 + (Y(t) - Y_0(t))^2$ ,  $b_i^0$  étant non nul on obtient par (4.12) que  $X(t_i) = X_0(t_i)$  et  $Y(t_i) = Y_0(t_i)$  et donc que  $Z(t_i) = Z_0(t_i)$ . Supposons que l'on ait montré que  $Z^{(j)}(t_i) = Z_0^{(j)}(t_i)$  i.e.  $A^{(j)}(t_i) = A_0^{(j)}(t_i)$  pour  $j = 0, \dots, l-1$  et  $l \leq \gamma_i$ . En dérivant (4.9)  $l$  fois par Leibniz en  $t = t_i$  et en remplaçant  $z^{(j)}(t_i)$  par  $b_i^j$  on obtient

$$A^{(l)}(t_i) \cdot b_i^0 = - \sum_{q=0}^{l-1} C_l^q A_0^{(q)}(t_i) \cdot b_i^{l-q}$$

or d'après l'équation  $l$  de (4.8)

$$A_0^{(l)}(t_i) \cdot b_i^0 = - \sum_{q=0}^{l-1} C_l^q A_0^{(q)}(t_i) \cdot b_i^{l-q}$$

qui implique

$$(A^{(l)}(t_i) - A_0^{(l)}(t_i)) \cdot b_i^0 = 0.$$

Le déterminant de  $A^{(l)}(t) - A_0^{(l)}(t)$  est  $(X^{(l)}(t) - X_0^{(l)}(t))^2 + (Y^{(l)}(t) - Y_0^{(l)}(t))^2$ , là encore  $b_i^0$  non nul donne  $Z^{(l)}(t_i) = Z_0^{(l)}(t_i)$ , et le résultat quand  $l = \gamma_i$ . Finalement  $Z(t)$  est une solution du problème 1 et donc  $(b_i^j)$  est une donnée admissible au problème 1.

(ii) Montrons l'existence de solutions, elle sera également montrée à la proposition (4.2.1)



(l'existence d'une solution au problème 1 est équivalente à l'existence d'une donnée admissible).

Notons  $E_j$  la  $j^{\text{ième}}$  équation du système (4.8). Les solutions de l'équation  $E_0$  i.e.  $A_0(t_i) \cdot b_i^0 = 0$ , forment un espace vectoriel de dimension 1 car la matrice  $A_0(t_i)$  est de rang 1.

On suppose que le système formé des équations  $E_0, \dots, E_j$  (avec  $0 \leq j \leq \gamma_i - 1$ ) admet des solutions. Il en est de même du système  $E_0, \dots, E_{j+1}$  si et seulement si la compatibilité du second membre de l'équation

$$A_0(t_i) \cdot b_i^{j+1} = - \sum_{q=1}^{j+1} C_{j+1}^q A_0^{(q)}(t_i) \cdot b_i^{j+1-q} \quad (4.13)$$

est assurée. On note  $b_i^{j+1} = \alpha_{j+1} + i\beta_{j+1}$ . L'équation (4.13) devient

$$\begin{aligned} (X_0(t_i) - 1)\alpha_{j+1} + Y_0(t_i)\beta_{j+1} &= - \sum_{q=1}^{j+1} C_{j+1}^q (X_0^{(q)}(t_i)\alpha_{j+1-q} + Y_0^{(q)}(t_i)\beta_{j+1-q}) \\ -Y_0(t_i)\alpha_{j+1} + (X_0(t_i) + 1)\beta_{j+1} &= - \sum_{q=1}^{j+1} C_{j+1}^q (-Y_0^{(q)}(t_i)\alpha_{j+1-q} + X_0^{(q)}(t_i)\beta_{j+1-q}) \end{aligned} \quad (4.14)$$

On suppose que  $X_0(t_i)$  est différent de  $-1$  et  $1$  i.e.  $Y_0(t_i)$  différent de  $0$ .

En multipliant la première équation par  $-Y_0(t_i)$  et la seconde par  $X_0(t_i) - 1$ , on obtient en soustrayant

$$\begin{aligned} Y_0(t_i) \sum_{q=1}^{j+1} C_{j+1}^q (X_0^{(q)}(t_i)\alpha_{j+1-q} + Y_0^{(q)}(t_i)\beta_{j+1-q}) &= \\ -(X_0(t_i) - 1) \sum_{q=1}^{j+1} C_{j+1}^q (-Y_0^{(q)}(t_i)\alpha_{j+1-q} + X_0^{(q)}(t_i)\beta_{j+1-q}) \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} X_0^{(j+1)}(t_i)(Y_0(t_i)\alpha_0 + (X_0(t_i) - 1)\beta_0) + Y_0^{(j+1)}(t_i)(Y_0(t_i)\beta_0 - (X_0(t_i) - 1)\alpha_0) \\ = -Y_0(t_i) \sum_{q=1}^j C_{j+1}^q (X_0^{(q)}(t_i)\alpha_{j+1-q} + Y_0^{(q)}(t_i)\beta_{j+1-q}) \\ -(X_0(t_i) - 1) \sum_{q=1}^j C_{j+1}^q (-Y_0^{(q)}(t_i)\alpha_{j+1-q} + X_0^{(q)}(t_i)\beta_{j+1-q}) \end{aligned} \quad (4.15)$$

L'équation  $E_0$  entraîne

$$Y_0(t_i)\alpha_0 + (X_0(t_i) - 1)\beta_0 = 2\beta_0 X_0(t_i)$$

et

$$Y_0(t_i)\beta_0 - (X_0(t_i) - 1)\alpha_0 = 2\beta_0 Y_0(t_i).$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que le système  $(E_0, \dots, E_{j+1})$  admette des solutions est que  $(X_0^{(j+1)}(t_i), Y_0^{(j+1)}(t_i))$  appartienne à la droite

$$2\beta_0 X_0(t_i)U + 2\beta_0 Y_0(t_i)V = s_{j+1} \quad (4.16)$$

où  $s_{j+1}$  est le terme de droite de l'équation (4.15). Or, par dérivation de l'égalité  $X_0^2(t) + Y_0^2(t) = 1$  en  $t = t_i$  on obtient

$$\begin{aligned} 2(X_0(t_i)X_0^{(j+1)}(t_i) + Y_0(t_i)Y_0^{(j+1)}(t_i)) = \\ - \sum_{q=1}^j C_{j+1}^q (X_0^q(t_i)X_0^{(j+1-q)}(t_i) + Y_0^q(t_i)Y_0^{(j+1-q)}(t_i)) \end{aligned}$$

Soit  $(U_0, V_0)$  un point de la droite (4.16), le système (4.14) admet des solutions  $(\alpha_{j+1}, \beta_{j+1})$  qui sont telles que la donnée  $(b_i^0, \dots, b_i^{j+1})$  soit admissible au problème 1 pour l'interpolation des dérivées  $Z_0^{(l)}(t_i)$   $l = 0, \dots, j$  et  $Z_0^{(j)}(t_i) = U_0 + iV_0$ .

Il existe donc une courbe  $Z(t) = X(t) + iY(t)$  telle que

$$Z^{(l)}(t_i) = X_0^{(l)}(t_i) + iY_0^{(l)}(t_i) \text{ pour } l = 0, \dots, j$$

et

$$Z^{(j+1)}(t_i) = U_0 + iV_0$$

En dérivant  $j + 1$  fois l'égalité  $X^2(t) + Y^2(t) = 1$  en  $t = t_i$  on obtient

$$\sum_{k=0}^{j+1} C_j^k (X^{(k)}(t_i)X^{(j+1-k)}(t_i) + Y^{(k)}(t_i)Y^{(j+1-k)}(t_i)) = 0$$

soit

$$2(X(t_i)X^{(j+1)}(t_i) + Y(t_i)Y^{(j+1)}(t_i)) = - \sum_{k=1}^j C_j^k (X^{(k)}(t_i)X^{(j+1-k)}(t_i) + Y^{(k)}(t_i)Y^{(j+1-k)}(t_i))$$

$(U_0, V_0)$  appartient donc à la droite

$$2X_0(t_i)U + 2Y_0(t_i)V = - \sum_{k=1}^j C_j^k (X_0^{(k)}(t_i)X_0^{(j+1-k)}(t_i) + Y_0^{(k)}(t_i)Y_0^{(j+1-k)}(t_i)). \quad (4.17)$$

Nous venons de montrer que la droite (4.16) est égale à la droite d'équation (4.17). Or, le point  $(X_0^{(j+1)}(t_i), Y_0^{(j+1)}(t_i))$  appartient à la droite d'équation (4.17) car cette

équation considérée en  $(U, V) = (X_0^{(j+1)}(t_i), Y_0^{(j+1)}(t_i))$  n'est autre que la dérivée  $(j+1)^{\text{ième}}$  de  $X_0^2(t) + Y_0^2(t)$  en  $t = t_i$ . L'équation (4.16) est donc vérifiée en  $(U, V) = (X_0^{(j+1)}(t_i), Y_0^{(j+1)}(t_i))$  et finalement, la condition de compatibilité relative à l'équation  $E_{j+1}$  est assurée. Ceci étant vrai jusque  $j = \gamma_i - 1$  nous obtenons alors le résultat annoncé.

S'il existe  $i \in \{0, \dots, m\}$  tel que  $Y_0(t_i)$  soit nul, il suffit de considérer un changement d'axes qui soit tel qu'aucun des  $Y_0(t_i)$  ne soit nul. Le système (4.8) relatif à ce nouveau problème admet des solutions (ceci d'après le cas général précédent), qui fournissent une solution  $Z^*(t)$ . En revenant au repère d'origine nous obtenons une solution au problème 1, il y a donc bien compatibilité du système (4.13) si un des  $Y_0(t_i)$  est nul.  $\square$

Par le corollaire 4.1.2.1 nous pourrions déterminer explicitement l'ensemble des données admissibles au problème 1. Tout d'abord, construisons une donnée admissible particulière.

#### Construction 4.1.2.1 Un jeu de données admissibles.

On choisit une donnée admissible au problème 1 comme solution particulière des systèmes (4.8):

En posant  $b_i^j = \alpha_j + i\beta_j$  ( $i^2 = -1$ ), on prend

$$\begin{aligned} b_i^0 &= 1 + i \frac{1 - X_0(t_i)}{Y_0(t_i)} \text{ si } Y_0(t_i) \neq 0 \\ &= 1 \quad \text{si } Y_0(t_i) = 0 \text{ et } X_0(t_i) = 1 \\ &= i \quad \text{si } Y_0(t_i) = 0 \text{ et } X_0(t_i) = -1 \end{aligned} \quad (4.18)$$

puis si  $Y_0(t_i) \neq 0$  alors pour  $j = 1, \dots, \gamma_i$  on prend

$$\alpha_j = 1 \text{ et } \beta_j = \frac{1}{Y_0(t_i)} \left( 1 - X_0(t_i) - \sum_{q=1}^j C_j^q (X_0^{(q)}(t_i) + \beta_{j-q} Y_0^{(q)}(t_i)) \right).$$

Si  $Y_0(t_i) = 0$  et  $X_0(t_i) = 1$ ,

$$\alpha_j = 0 \text{ et } \beta_j = -\frac{1}{2} \sum_{q=1}^j C_j^q \beta_{j-q} X_0^{(q)}(t_i).$$

Si  $Y_0(t_i) = 0$  et  $X_0(t_i) = -1$ ,

$$\beta_j = 0 \text{ et } \alpha_j = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^j C_j^q \alpha_{j-q} X_0^{(q)}(t_i).$$

ceci jusque  $j = \gamma_i$  et pour tout  $i \in \{0, \dots, m\}$ .

**Corollaire 4.1.2.1** Soit  $(b_i^j)_{(i,j) \in \Gamma}$  une donnée admissible particulière. Une donnée  $(a_i^j)_{(i,j) \in \Gamma}$  est admissible si et seulement si pour tout  $i \in \{0, \dots, m\}$  il existe  $\lambda_i^0, \dots, \lambda_i^{\gamma_i} \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_i^0$  étant non nul, tels que

$$\begin{cases} a_i^0 &= \lambda_i^0 b_i^0 \\ a_i^1 &= \lambda_i^0 b_i^1 + \lambda_i^1 b_i^0 \\ \vdots &= \vdots \\ a_i^{\gamma_i} &= \lambda_i^0 b_i^{\gamma_i} + \dots + C_{\gamma_i}^k \lambda_i^k b_i^k + \dots + \lambda_i^{\gamma_i} b_i^0 \end{cases}$$

**Preuve:**

Soit  $(b_i^j)_{(i,j) \in \Gamma}$  une donnée admissible. Considérons deux courbes polynomiales  $z(t)$  et  $z_1(t)$  telles que

$$z^{(j)}(t_i) = a_i^j \quad \text{et} \quad z_1^{(j)}(t_i) = b_i^j \quad \text{pour } (i, j) \in \Gamma \quad (4.19)$$

On note encore  $Z(t) = \frac{z(t)}{z_1(t)}$  et  $Z_1(t) = \frac{z_1(t)}{z_1(t)}$ . La courbe  $Z_1(t)$  est une solution du problème 1 car  $(b_i^j)_{(i,j) \in \Gamma}$  est admissible.

$(a_i^j)_{(i,j) \in \Gamma}$  est admissible si et seulement si  $Z^{(j)}(t_i) = Z_0^{(j)}(t_i)$  pour tout  $(i, j) \in \Gamma$ . D'après l'équivalence (i)  $\iff$  (iii) du théorème 4.1.2.1 et en utilisant (4.19) nous obtenons le résultat souhaité.  $\square$

**Corollaire 4.1.2.2** L'ensemble des données admissibles est un espace vectoriel de dimension  $\sum_{i=0}^m (\gamma_i + 1)$ .

**Preuve:**

L'ensemble est non vide et d'après le corollaire ci dessus, une donnée  $(a_i^j)_{(i,j) \in \Gamma}$  est admissible si et seulement si  $(a_i^0, \dots, a_i^{\gamma_i})$  est combinaison linéaire des vecteurs  $(b_i^0, b_i^1, \dots, b_i^{\gamma_i})$ ,  $(0, b_i^0, \dots, C_{\gamma_i}^1 b_i^{\gamma_i-1})$ ,  $\dots$ ,  $(0, \dots, 0, b_i^0)$ .  $\square$

### 4.1.3 Résolution du problème pour $m = 2$ et $\gamma = (k, 0, k)$ .

Nous voulons montrer qu'il existe une unique courbe rationnelle  $Z(t) = \frac{z(t)}{z_1(t)}$  de longueur  $2k + 2$  qui soit solution du problème 1 pour  $m = 2$  et  $\gamma = (k, 0, k)$  avec ici  $t_0 = 0 < t_1 < t_2 = 1$ .

Pour cela, on recherche une courbe polynomiale  $z(t)$  de degré  $k + 1$  i.e.

$$z(t) = \sum_{i=0}^{k+1} B_i^{k+1}(t) P_i \quad \text{avec } P_0, P_1, \dots, P_{k+1} \in \mathbb{C}, \quad (4.20)$$

telle que  $Z(t) = \frac{z(t)}{z_1(t)}$  soit solution du problème 1.

On détermine à l'aide de la construction 4.1.2.1 une donnée admissible  $b_0^0, \dots, b_0^k, b_1^0,$

$b_2^0, \dots, b_2^k \in \mathbb{C}$ . Toutes les données admissibles sont alors déterminées par le corollaire 4.1.2.1. Nous nous proposons de déterminer  $\lambda_0^0, \dots, \lambda_0^k, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_2^k \in \mathbb{R}$  tels que la courbe  $z(t)$  (de degré  $k+1$ ) vérifie

$$\begin{cases} z(0) = \lambda_0^0 b_0^0 \\ z'(0) = \lambda_0^0 b_0^1 + \lambda_1^0 b_0^0 \\ \vdots = \vdots \\ z^{(k)}(0) = \lambda_0^0 b_0^k + \dots + C_k^j \lambda_0^j b_0^j + \dots + \lambda_0^k b_0^0 \end{cases} \quad (4.21)$$

$$z(t_1) = \lambda_0^1 b_1^0 \quad (4.22)$$

$$\begin{cases} z(1) = \lambda_2^0 b_2^0 \\ z'(1) = \lambda_2^0 b_2^1 + \lambda_2^1 b_2^0 \\ \vdots = \vdots \\ z^{(k)}(1) = \lambda_2^0 b_2^k + \dots + C_k^j \lambda_2^j b_2^j + \dots + \lambda_2^k b_2^0 \end{cases} \quad (4.23)$$

La recherche d'une courbe  $z(t)$  de la forme (4.20) vérifiant (4.21), (4.22) et (4.23) consiste en la résolution du système linéaire de  $4k+6$  équations réelles:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta^0 P_0 = \lambda_0^0 b_0^0 & \\ (k+1)\Delta^1 P_0 = \lambda_0^0 b_0^1 + \lambda_1^0 b_0^0 & \\ k(k+1)\Delta^2 P_0 = \lambda_0^0 b_0^2 + 2\lambda_0^1 b_0^1 + \lambda_0^2 b_0^0 & (a) \\ \vdots = \vdots & \\ (k+1)!\Delta^k P_0 = \lambda_0^0 b_0^k + \dots + C_k^j \lambda_0^j b_0^j + \dots + \lambda_0^k b_0^0 & \\ \sum_{i=0}^{k+1} B_i^{k+1}(t_1) P_i = \lambda_1^0 b_1^0 & (b) \\ (k+1)!\Delta^k P_1 = \lambda_2^0 b_2^k + \dots + C_k^j \lambda_2^j b_2^j + \dots + \lambda_2^k b_2^0 & \\ \vdots = \vdots & \\ k(k+1)\Delta^2 P_{k-1} = \lambda_2^0 b_2^2 + 2\lambda_2^1 b_2^1 + \lambda_2^2 b_2^0 & (c) \\ (k+1)\Delta^1 P_k = \lambda_2^0 b_2^1 + \lambda_2^1 b_2^0 & \\ \Delta^0 P_{k+1} = \lambda_2^0 b_2^0 & \end{array} \right. \quad (4.24)$$

où les inconnues sont

$$\underbrace{(P_0, P_1, \dots, P_{k+1})}_{k+2 \text{ points}}, \underbrace{(\lambda_0^0, \dots, \lambda_0^k, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_2^k)}_{2k+3 \text{ réels}}$$

i.e.  $4k+7$  inconnues. Considérons  $\lambda_1^0$  comme paramètre, on obtient  $4k+6$  équations à  $4k+6$  inconnues, le second membre de ce système étant de la forme  $\lambda_1^0 \cdot (0, \dots, 0, b_1^0, 0, \dots, 0)$ .

Notons  $z_p(t)$  la courbe polynomiale obtenue en ayant posé  $\lambda_1^0 = 1$ . Toute courbe  $z(t)$  solution du système pour une autre valeur de  $\lambda_1^0$  est égale à  $\lambda_1^0 z_p(t)$ , (les points de contrôle de  $z(t)$  étant égaux à  $\lambda_1^0$  fois ceux de  $z_p(t)$ ). Toutes les solutions  $Z(t) = \frac{z(t)}{z_p(t)}$  du problème 1 obtenues par  $\lambda_1^0 \in \mathbb{R}^*$  sont donc égales à  $z_p(t)/\bar{z}_p(t)$ .

La structure du système (4.24 a-c) nous permet de déterminer dans un premier temps les valeurs  $\lambda_0^0, \dots, \lambda_0^k, \lambda_2^0, \dots, \lambda_2^k$  en ayant pris  $\lambda_1^0 = 1$ , puis de trouver les points  $P_0, P_1, \dots, P_k$  par le système (4.24-a) et  $P_{k+1}$  par l'égalité  $P_{k+1} = \lambda_2^0 b_2^0$ . Notons  $D_1$  et  $D_2$  les matrices diagonales

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (k+1) & \dots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & \dots & (k+1)! \end{pmatrix}$$

et

$$D_2 = \begin{pmatrix} (k+1)! & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ & & (k+1) & 0 \\ 0 & & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

En exprimant matriciellement les systèmes (4.24-a) et (4.24-c) il apparaît les matrices

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \ddots & 0 \\ (-1)^k & \dots & (-1)^{k+j} C_k^j & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$B_2 = \begin{pmatrix} (-1)^k & \dots & (-1)^{k+1-j} C_k^j & \dots & 1 \\ 0 & \ddots & & & 1 \\ & & \ddots & & -2 & 1 \\ \vdots & & & & -1 & 1 \\ 0 & \dots & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les systèmes (4.24-a) et (4.24-c) s'écrivent alors respectivement

$$\begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_k \end{pmatrix} = B_1^{-1} \cdot D_1^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_0^0 & & & & \\ \vdots & \ddots & & & \\ & & b_0^0 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ b_0^k & \dots & C_k^j b_0^j & \dots & b_0^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0^0 \\ \lambda_0^1 \\ \vdots \\ \lambda_0^k \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

et

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_{k+1} \end{pmatrix} = B_2^{-1} \cdot D_2^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_2^k & \dots & C_k^j b_2^j & \dots & b_2^0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & b_2^0 & & \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & b_2^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2^k \\ \vdots \\ \lambda_2^1 \\ \lambda_2^0 \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

On a

$$B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & & \vdots \\ 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 1 & \dots & & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$B_2^{-1} = B_2$$

En identifiant les expressions de  $P_i$  données par la  $(i+1)$ <sup>ième</sup> ligne de (4.25) et la  $i$ <sup>ième</sup> ligne de (4.26) ceci pour  $i \in \{1, \dots, k\}$  on obtient un système linéaire homogène de  $2k$  équations à  $2k+2$  inconnues. Si la matrice de ce système est de rang  $2k$ , on le résout en considérant par exemple  $\lambda_0^0$  et  $\lambda_2^0$  comme paramètres. Les réels  $\lambda_0^1, \dots, \lambda_0^k, \lambda_2^1, \dots, \lambda_2^k$  sont alors combinaisons linéaires de  $\lambda_0^0$  et  $\lambda_2^0$ . En calculant  $(P_0, P_1, \dots, P_k)$  par (4.25),

nous disposons de

$$\begin{cases} P_0 = \lambda_0^0 b_0^0 \\ P_i = \lambda_0^0 \alpha_i + \lambda_2^0 \beta_i \\ P_{k+1} = \lambda_2^0 b_2^0 \end{cases} \quad \text{avec } i \in \{1, \dots, k\} \text{ et } \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}.$$

L'égalité (4.24-b) fournit l'équation  $\lambda_0^0 \tau + \lambda_2^0 \delta = b_1^0$  avec  $\tau, \delta \in \mathbb{C}$  qui admet a priori une unique solution  $(\lambda_0^0, \lambda_2^0)$ . Si les deux valeurs  $\lambda_0^0$  et  $\lambda_2^0$  sont non nulles, le terme de droite des équations (4.21), (4.22) et (4.23) constitue effectivement une donnée admissible (d'après le corollaire 4.1.2.1), rappelons que l'on a pris  $\lambda_1^0 = 1$ . Le polygone de contrôle  $(P_0, P_1, \dots, P_{k+1})$  de  $z(t)$  étant entièrement déterminé, on dispose de l'unique solution  $Z(t) = \frac{z(t)}{\bar{z}(t)}$  du problème 1 de longueur  $2k + 2$ .

**Exemples (i)** Considérons  $\gamma = (0, 0, 0)$  et  $b_0^0, b_1^0, b_2^0$  une donnée admissible relativement à l'interpolation de  $Z_0(0), Z_0(t_1), Z_0(1)$ . On pose  $\lambda_1^0 = 1$ . Recherchons  $P_0, P_1 \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda_0^0, \lambda_2^0 \in \mathbb{R}$  tels que

$$\begin{cases} P_0 = \lambda_0^0 b_0^0 \\ B_0^1(t_1)P_0 + B_1^1(t_1)P_1 = b_1^0 \\ P_1 = \lambda_2^0 b_2^0 \end{cases}$$

avec  $t_1 \in ]0, 1[$ .

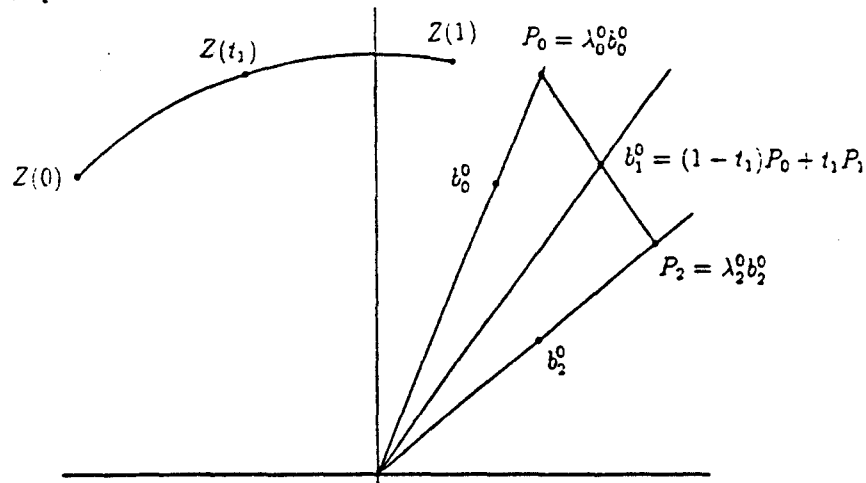


Figure 4.2: Les valeurs  $\lambda_0^0, \lambda_2^0$  sont calculées pour que  $(1 - t_1)P_0 + t_1P_1$  coïncide avec  $b_1^0$ . On trouve ainsi l'unique courbe de  $\mathcal{C}$  de longueur 2 qui interpole trois points distincts sur le cercle.



Les réels  $\lambda_0^0, \lambda_2^0$  sont déterminés par

$$\lambda_0^0 B_0^1(t_1) b_0^0 + \lambda_2^0 B_1^1(t_1) b_2^0 = b_1^0,$$

cette équation admet un unique couple solution  $(\lambda_0^0, \lambda_2^0)$  si  $(b_0^0, b_2^0)$  constitue une base de  $\mathbb{C}$ , ce qui est le cas si  $Z_0(0) \neq Z_0(1)$ . Si  $Z_0(t_1)$  est différent de  $Z_0(0)$  et  $Z_0(1)$ , les réels  $\lambda_0^0$  et  $\lambda_2^0$  sont non nuls. La donnée  $\lambda_0^0 b_0^0, b_1^0, \lambda_2^0 b_2^0$  est admissible et fournit une solution  $Z(t) = \frac{z(t)}{\bar{z}(t)}$  de longueur 2 avec  $z(t) = P_0 B_0^1(t) + P_1 B_1^1(t)$ .

(ii) Nous prenons maintenant  $\gamma = (1, 0, 1)$  et  $b_0^0, b_1^0, b_2^0, b_2^1$  une donnée admissible. On recherche  $P_0, P_1, P_2 \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda_0^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \lambda_2^1 \in \mathbb{R}$  tels que

$$\begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_0^0 & 0 \\ b_1^0 & b_2^0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_0^0 \\ \lambda_1^0 \end{pmatrix} \quad (a)$$

$$(1 - t_1)^2 P_0 + 2t_1(1 - t_1)P_1 + t_1^2 = b_1^0 \quad (b) \quad (4.27)$$

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_2^0 & b_2^1 \\ 0 & b_2^0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_2^1 \\ \lambda_2^0 \end{pmatrix} \quad (c)$$

avec  $t_1 \in ]0, 1[$ . Les deux expressions de  $P_1$  données par (4.27-a) et (4.27-c) conduisent à

$$(b_0^0 + \frac{1}{2}b_1^0)\lambda_0^0 + \frac{1}{2}b_2^0\lambda_1^0 = -\frac{1}{2}b_2^1\lambda_2^1 + (-\frac{1}{2}b_2^1 + b_2^0)\lambda_2^0,$$

soit

$$\frac{1}{2}b_2^0\lambda_1^0 + \frac{1}{2}b_2^1\lambda_2^1 = -(-\frac{1}{2}b_2^1 + b_2^0)\lambda_2^0 - (b_0^0 + \frac{1}{2}b_1^0)\lambda_0^0 \quad (4.28)$$

Là encore si  $(b_0^0, b_2^0)$  forme une base de  $\mathbb{C}$ , il existe un seul couple  $(\lambda_0^1, \lambda_2^1)$  vérifiant l'équation (4.28) pour  $\lambda_0^0, \lambda_2^0$  fixés. On trouve

$$\begin{aligned} \lambda_0^1 &= \delta_1 \lambda_0^0 + \delta_2 \lambda_2^0 \\ \lambda_2^1 &= \tau_1 \lambda_0^0 + \tau_2 \lambda_2^0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

En remplaçant les valeurs de  $P_0, P_1, P_2$  qui sont maintenant fonctions de  $(\lambda_0^0, \lambda_2^0)$  dans (4.27-b), on trouve  $\lambda_0^0, \lambda_2^0$  comme solutions d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues. Si  $\lambda_0^0$  et  $\lambda_2^0$  sont non nuls, nous disposons de l'unique courbe  $Z(t) = \frac{z(t)}{\bar{z}(t)}$  de longueur 4 avec  $z(t) = P_0 B_0^2(t) + P_1 B_1^2(t) + P_2 B_2^2(t)$  qui soit solution du problème 1 pour  $\gamma = (1, 0, 1)$ .

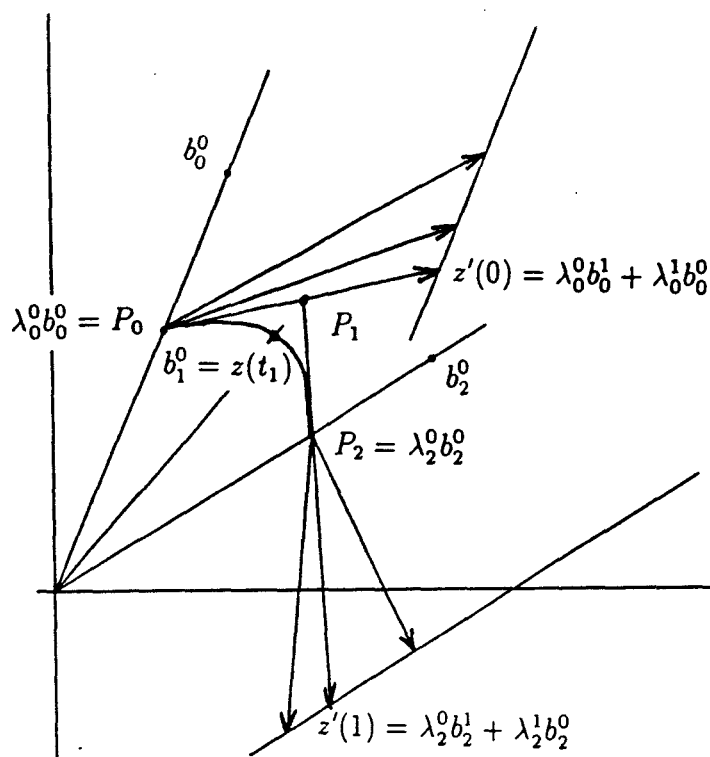


Figure 4.3: Les réels  $\lambda_0^0, \lambda_0^1, \lambda_2^0, \lambda_2^1$  sont déterminés pour que  $z'(1) = \lambda_2^0 b_2^1 + \lambda_2^1 b_2^0$ ,  $z'(0) = \lambda_0^0 b_0^1 + \lambda_0^1 b_0^0$  et  $z(t_1) = b_1^0$ .

#### 4.1.4 Représentation sous forme (BR) d'une courbe sur le cercle unité

Soit  $z(t)$  une courbe polynomiale dont le polygone de contrôle est noté  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ . On identifiera les sommets de ce polygone aux nombres complexes les admettant pour affixe.

La courbe  $Z(t) = \frac{z(t)}{\bar{z}(t)}$  est égale à  $\frac{z^2(t)}{z(t) \cdot \bar{z}(t)}$ . La courbe  $z^2(t)$  est de degré  $2n$ . Ses points de contrôle  $Q_0, Q_1, \dots, Q_{2n}$  s'expriment en fonction des points  $P_0, P_1, \dots, P_n$ :

$$Q_k = \sum_{i=0}^k \lambda_n^{i, k-i} P_i \cdot P_{k-i} \text{ pour } k = 0, \dots, n$$

et

$$Q_k = \sum_{i=k-n}^n \lambda_n^{i, k-i} P_i \cdot P_{k-i} \text{ pour } k = n+1, \dots, 2n$$

Menons un calcul identique pour calculer les coordonnées  $(\beta_k)_{k \in \{0, \dots, 2n\}}$  de la fonction réelle  $t \rightarrow z(t) \cdot \bar{z}(t)$  dans la base de Bernstein  $(B_k^{2n}(t))_{k \in \{0, \dots, 2n\}}$ :

$$z(t) \cdot \bar{z}(t) = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n \lambda_n^{i,j} P_i \cdot \bar{P}_j B_{i+j}^{2n}(t),$$

on trouve

$$\beta_k = \sum_{i=0}^k \lambda_n^{i,k-i} P_i \cdot \bar{P}_{k-i} \text{ pour } k = 0, \dots, n$$

et

$$\beta_k = \sum_{i=k-n}^n \lambda_n^{i,k-i} P_i \cdot \bar{P}_{k-i} \text{ pour } k = n+1, \dots, 2n$$

On note  $I$  l'ensemble des indices des réels  $\beta_k$  non nuls et  $\bar{I}$  son complémentaire dans  $\{0, \dots, 2n\}$ . La courbe  $Z(t) = \frac{z(t)}{\bar{z}(t)}$  est alors déterminée sous la forme (BR):

$$Z(t) = \frac{\sum_{i \in I} \beta_i R_i B_i^{2n}(t)}{\beta(t)} + \frac{\sum_{i \in \bar{I}} \bar{U}_i B_i^{2n}(t)}{\beta(t)}$$

avec

$$\begin{aligned} R_k &= \frac{\sum_{i=0}^k \lambda_n^{i,k-i} P_i \cdot \bar{P}_{k-i}}{\sum_{i=0}^k \lambda_n^{i,k-i} P_i \cdot \bar{P}_{k-i}} \text{ pour } k \in I \text{ et } k \leq n \\ &= \frac{\sum_{i=k-n}^n \lambda_n^{i,k-i} P_i \cdot \bar{P}_{k-i}}{\sum_{i=k-n}^n \lambda_n^{i,k-i} P_i \cdot \bar{P}_{k-i}} \text{ pour } k \in I \text{ et } k \geq n+1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{U}_k &= \sum_{i=0}^k \lambda_n^{i,k-i} P_i \cdot \bar{P}_{k-i} \text{ pour } k \in \bar{I} \text{ et } k \leq n \\ &= \sum_{i=k-n}^n \lambda_n^{i,k-i} P_i \cdot \bar{P}_{k-i} \text{ pour } k \in \bar{I} \text{ et } k \geq n+1 \end{aligned}$$

et

$$\beta(t) = \sum_{i=0}^{2n} \beta_i B_i^{2n}(t).$$

## 4.2 Application: Interpolation des Courbes Parallèles à une Courbe Rationnelle.

Considérons une courbe rationnelle  $r(t) = (x(t), y(t))$  et  $d \in \mathbb{R}$ . On veut interpoler la courbe parallèle  $r_d(t) = r(t) + d n(t)$  par une courbe rationnelle  $A_d(t)$  en les paramètres  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_m = 1$ . Le vecteur normal  $n(t) = \frac{-y'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} + i \frac{x'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}$  est une

courbe dont le support est sur le cercle unité. Dans le cas où il n'est pas défini en une ou plusieurs des valeurs  $t_i$ , on peut le prolonger en factorisant:

$$(x'(t), y'(t)) = k(t) \cdot (x_1(t), y_1(t)) \quad (4.30)$$

avec  $k(t) \in \mathbb{R}(X)$  et  $(x_1(t_i), y_1(t_i)) \neq 0 \quad \forall i \in \{0, \dots, m\}$ .

On obtient alors

$$n(t) = \varepsilon(t)N(t) \text{ avec } N(t) = \frac{-y_1(t)}{\sqrt{x_1^2(t) + y_1^2(t)}} + i \frac{x_1(t)}{\sqrt{x_1^2(t) + y_1^2(t)}} \quad (4.31)$$

où  $\varepsilon(t)$  est le signe de  $k(t)$ .

On suppose que le vecteur normal de  $r(t)$  peut être prolongé continuellement sur  $[0, 1]$ , i.e. que  $\varepsilon(t)$  est constant sur  $]0, 1[$ . On écarte ainsi les points de rebroussements situés en des valeurs de paramètres comprises strictement entre 0 et 1.

La méthode décrite dans le paragraphe 4.1.2 nous permet de construire des interpolants  $Z(t) = \frac{z(t)}{\bar{z}(t)}$  de  $N(t)$ . On est donc en mesure de résoudre le

**Problème 2** Déterminer  $Z(t) = \frac{z(t)}{\bar{z}(t)}$  avec  $z(t) = M(t) + iN(t)$  telle que

$$Z^{(j)}(t_i) = N^{(j)}(t_i) \quad \text{pour } (i, j) \in \Gamma$$

On obtient alors la courbe  $A_d(t) = r(t) + dZ(t)$  interpolant de  $r_d(t)$  aux points  $t_0, t_1, \dots, t_m$ :

$$A_d^{(j)}(t_i) = r_d^{(j)}(t_i) \quad \text{pour } (i, j) \in \Gamma$$

En fait, les deux courbes  $A_d(t)$  et  $r_d(t)$  ne se raccordent pas seulement  $C^\gamma$  en  $t = t_i$  mais aussi  $\mathcal{G}C^{\gamma+1}$ , ce qui sera montré dans la proposition 4.2.2.

Nous allons maintenant exposer une recherche de données admissibles qui se contentera des évaluations des dérivées de  $r(t)$  aux points d'interpolation, évitant ainsi celles de  $N(t)$ .

**Définition 4.2.1** Soit  $\varepsilon = \pm 1$  et  $P(t) = P_1(t) + iP_2(t)$  une courbe paramétrée sur  $[0, 1]$ . On note indifféremment  $R(t)$  une des deux courbes définies par  $R(t) = \varepsilon(p_1(t) + ip_2(t))$  avec

$$p_1(t) = \text{Signe}(P_2(t)) \sqrt{\frac{1}{2}(P_1(t) + \sqrt{P_1^2(t) + P_2^2(t)})} \quad (4.32)$$

et

$$p_2(t) = \sqrt{\frac{1}{2}(-P_1(t) + \sqrt{P_1^2(t) + P_2^2(t)})} \quad (4.33)$$

où  $\text{Signe}(P_2(t))$  vaut 1 si  $P_2(t) \geq 0$  et -1 sinon.

On vérifie facilement que

$$p_1^2(t) - p_2^2(t) = P_1(t) \text{ et } 2p_1(t)p_2(t) = P_2(t). \quad (4.34)$$

On a alors

**Propriété 4.2.1**

$$(R(t))^2 = P(t) \quad \forall t \in [0, 1] \quad (4.35)$$

Montrons maintenant qu'un interpolant  $z(t)$  de  $R(t)$  fournit un interpolant  $z^2(t)$  de la courbe  $P(t)$ .

**Lemme 4.2.1** Soit une courbe  $P(t) = P_1(t) + iP_2(t)$  et une courbe polynomiale  $z(t) = M(t) + iN(t)$  telle que  $z^{(j)}(t_i) = R^{(j)}(t_i)$  pour tout  $(i, j) \in \Gamma$ , la courbe  $R(t)$  ayant été définie en 4.2.1, alors

$$(z^2)^{(j)}(t_i) = P^{(j)}(t_i) \text{ pour } (i, j) \in \Gamma$$

**Preuve:**

Soit  $i \in \{0, \dots, m\}$ . On suppose  $M^{(j)}(t_i) = \varepsilon p_1^{(j)}(t_i)$  et  $N^{(j)}(t_i) = \varepsilon p_2^{(j)}(t_i)$  pour  $j \in \{0, \dots, \gamma_i\}$ . Il vient

$$\begin{cases} (M^2 - N^2)^{(j)}(t_i) = (p_1^2 - p_2^2)^{(j)}(t_i) \\ (2MN)^{(j)}(t_i) = (2p_1 p_2)^{(j)}(t_i) \end{cases}$$

pour  $j \in \{0, \dots, \gamma_i\}$ , ce qui est équivalent à  $(z^2)^{(j)}(t_i) = P^{(j)}(t_i)$  d'après la propriété 4.2.1.

□

Finalement

**Proposition 4.2.1** Soit  $r(t)$  une courbe paramétrée dont la dérivée a été factorisée en (4.30). Nous écrivons alors  $-y'(t) + ix'(t) = k(t) \cdot P(t)$  avec  $P(t_i) \neq 0$  pour tout  $i \in \{0, \dots, m\}$ . La donnée  $(R^{(j)}(t_i))_{(i,j) \in \Gamma}$  est admissible pour le problème 2.

**Preuve:** Soit une courbe polynomiale  $z(t) = M(t) + iN(t)$  telle que  $z^{(j)}(t_i) = R^{(j)}(t_i)$  pour  $(i, j) \in \Gamma$ , alors  $(z^2)^{(j)}(t_i) = P^{(j)}(t_i)$  pour  $(i, j) \in \Gamma$  d'après le lemme 4.2.1. Ceci est équivalent à

$$\begin{cases} (M^2 - N^2)^{(j)}(t_i) = -(y_1)^{(j)}(t_i) \\ (2MN)^{(j)}(t_i) = (x_1)^{(j)}(t_i) \end{cases} \quad \text{pour } (i, j) \in \Gamma$$

Alors, la courbe  $\frac{z(t)}{\bar{z}(t)} = \frac{M^2 - N^2 + i 2MN}{\sqrt{(M^2 - N^2)^2 + (2MN)^2}}(t)$  est une solution du problème 2 car elle interpole le vecteur normal  $\frac{-v_1(t) + ix_1(t)}{\sqrt{x_1^2(t) + v_1^2(t)}}$ , la donnée  $(R^{(j)}(t_i))$  est bien admissible.  $\square$

### Remarque

On peut choisir sans perte de généralité  $\varepsilon = 1$  dans la définition 4.2.1, la connaissance d'une donnée admissible entraînant la connaissance de toutes les données admissibles (d'après la propriété 4.1.2.1).

### Calcul des dérivées $R^{(j)}(t_i)$

Il peut sembler peu économique, pour éviter l'évaluation des dérivées de  $n(t)$  en  $t = t_i$ , de s'imposer le calcul des dérivées de  $R(t)$  en  $t = t_i$ : l'expression des coordonnées  $p_1(t)$  et  $p_2(t)$  ne sont pas ce que l'on peut appeler des fonctions aisées à dériver. En fait, les seuls calculs non linéaires à effectuer pour l'évaluation des  $R^{(j)}(t_i)$ ,  $(i, j) \in \Gamma$  sont ceux de  $R(t_i)$  avec  $i \in \{0, \dots, m\}$ . En effet:

Considérons  $i \in \{0, \dots, m\}$  et calculons  $R(t_i)$  par l'évaluation de (4.32) et (4.33). En dérivant l'égalité (4.35) on obtient

$$2 R(t) \cdot R'(t) = P'(t) \quad (4.36)$$

Remarquant qu'une équation  $az = b$  où  $a, b \in \mathbb{C}$  est équivalente à un système linéaire de deux équations à deux inconnues, on calcul  $R'(t_i)$  comme solution du système

$$2R(t_i) \cdot u = P'(t_i) \quad (4.37)$$

qui admet une solution unique car  $r'(t_i) \neq 0$  implique  $R(t_i) \neq 0$ .

On applique alors Leibniz à l'équation (4.36) en  $t = t_i$ :

soit  $j \in \{2, \dots, \gamma_i\}$ , on a  $2(R \cdot R')^{(j-1)}(t_i) = P^{(j)}(t_i)$  i.e.

$$R(t_i) \cdot R^{(j)}(t_i) = \frac{1}{2}P^{(j)}(t_i) - \sum_{p=0}^{j-1} C_{j-1}^p R^{(p)}(t_i) \cdot R^{(j-p)}(t_i)$$

On suppose que les valeurs de  $R^{(j)}(t_i)$  ont été préalablement calculées pour  $p = 1, \dots, j-1$ ,  $R^{(j)}(t_i)$  est l'unique solution du système linéaire

$$R(t_i) \cdot u = \frac{1}{2}P^{(j)}(t_i) - \sum_{p=1}^{j-1} C_{j-1}^p R^{(p)}(t_i) \cdot R^{(j-p)}(t_i). \quad (4.38)$$

Les valeurs  $R(t_i), \dots, R^{(\gamma_i)}(t_i)$  sont donc calculées quand  $j = \gamma_i$ .

Résumons les deux méthodes à notre disposition pour l'interpolation du vecteur normal  $n(t)$  d'une courbe  $r(t)$ : on considère connue la factorisation  $r'(t) = k(t) \cdot (x_1(t), y_1(t))$  et donc  $N(t)$  défini en (4.31):

### Première méthode.

On évalue les dérivées  $N^{(j)}(t_i)$  notées  $X_0^{(j)}(t_i) + iY_0^{(j)}(t_i)$  pour  $(i, j) \in \Gamma$ . On dispose alors des matrices  $A_0^{(j)}(t_i)$  définies par la dérivation terme à terme de la matrice (4.11). On construit une donnée admissible particulière en 4.1.2.1, il s'en suit l'ensemble des données admissibles (corollaire 4.1.2.1). Un interpolant polynomial  $z(t)$  d'une de ces données admissibles fournit une solution  $Z(t) = \frac{z(t)}{\bar{z}(t)}$  au problème 1. En vue de déterminer les interpolants rationnels de  $r_d(t)$  sous la forme de splines rationnelles, nous traitons le problème avec  $m = 2$  et  $\gamma = (k, 0, k)$ , i.e. pour les valeurs des dérivées jusque l'ordre  $k$  en deux points extrémités et la valeur en un point intermédiaire. La méthode explicitée dans le paragraphe 4.1.3 nous permet, par ajustement des données admissibles, de déterminer en général un interpolant  $z(t)$  de degré  $k + 1$ , et donc une solution  $Z(t)$  de degré  $2k + 2$ . Dans le cas où les systèmes linéaires rencontrés ne seraient pas de rang maximal ou si un des deux nombres  $\lambda_0^0$  ou  $\lambda_2^0$  déterminés lors de la résolution de (4.24) est nul, il faut envisager de relâcher le degré de l'interpolant  $z(t)$  recherché.

### Deuxième méthode.

Elle ne diffère de la première que par la construction d'une donnée admissible particulière:

On évalue d'après (4.37) et (4.38) les dérivées de la courbe  $R(t)$  associée, d'après la définition 4.2.1, à  $P(t) = -y_1(t) + ix_1(t)$ . La donnée  $R^{(j)}(t_i)$  est admissible au problème 2 (proposition 4.2.1). La recherche d'un interpolant de degré minimal s'effectue de manière identique à la première méthode.

Terminons par deux propriétés géométriques des interpolants  $A_d(t) = r(t) + dZ(t)$ .

### Définition 4.2.2 Raccord géométrique [19].

Soit  $X(t)$  et  $Y(t)$  deux courbes paramétrées sur  $[a, b]$  et  $u_0 \in [a, b]$  on dit que  $X(t)$  et  $Y(t)$  se raccordent  $\mathcal{GC}^k$  en  $t = u_0$  ssi il existe une application  $\varphi: I \rightarrow [a, b]$  telle que

$$\exists u_0 \in I, \varphi(u_0) = u_0, \varphi'(u_0) \geq 0 \text{ et } (X \circ \varphi)^{(i)}(u_0) = Y^{(i)}(u_0)$$

**Exemples 4.2.1** (i) Deux courbes  $X(t)$  et  $Y(t)$  se raccordent  $\mathcal{GC}^1$  en  $t = u_0$

ssi  $X(u_0) = Y(u_0)$  et  $\exists \lambda_1 \in \mathbb{R}_+^*$  tels que  $Y'(u_0) = \lambda_1 X'(u_0)$

(ii) Deux courbes  $X(t)$  et  $Y(t)$  se raccordent  $\mathcal{GC}^2$  en  $t = u_0$

ssi  $X(u_0) = Y(u_0)$  et  $\exists \lambda_1 > 0$  et  $\lambda_2$  tels que

$$\begin{aligned} Y'(u_0) &= \lambda_1 X'(u_0) \\ Y''(u_0) &= \lambda_1^2 X''(u_0) + \lambda_2 X'(u_0) \end{aligned}$$

**Proposition 4.2.2** Si  $Z(t) = \frac{z(t)}{z'(t)}$  se raccorde  $C^{\gamma_i}$  avec  $n(t)$  en  $t = t_i$ , alors si  $r'(t_i) \neq 0$ ,  $A_d(t) = r(t) + d Z(t)$  et  $r_d(t)$  se raccordent  $C^{\gamma_i}$  et  $\mathcal{G}C^{\gamma_i+1}$  en  $t = t_i$ .

**Lemme 4.2.2** Soit deux courbes  $f_1(t)$  et  $f_2(t)$  se raccordant  $C^k$  en  $t = u_0$ , elles se raccordent  $\mathcal{G}C^{k+1}$  en  $t = u_0$  ssi

$$\exists \beta_{k+1} \in \mathbb{R} \text{ tel que } f_2^{(k+1)}(u_0) = f_1^{(k+1)}(u_0) + \beta_{k+1} f_1'(u_0) \quad (4.39)$$

**Preuve:**

En reprenant les notations de Gregory, la condition nécessaire et suffisante s'obtient avec  $\beta_1 = 1$  et  $\beta_2, \dots, \beta_k = 0$ .  $\square$

**Preuve de la propriété 4.2.2:**

Soit  $i \in \{0, \dots, m\}$ . On suppose

$$Z^{(j)}(t_i) = n^{(j)}(t_i) \text{ pour } j = 0, \dots, \gamma_i, \quad (4.40)$$

$A_d(t)$  et  $r_d(t)$  se raccordent donc  $C^{\gamma_i}$  en  $t = t_i$ .

Il existe deux applications  $\theta_Z(t)$  et  $\theta_n(t)$  telles que  $Z(t) = e^{i\theta_Z(t)}$  et  $n(t) = e^{i\theta_n(t)}$ . Les égalités (4.40) entraînent

$$\theta_Z^{(j)}(t_i) = \theta_n^{(j)}(t_i) \text{ pour } j = 0, \dots, \gamma_i. \quad (4.41)$$

On a

$$\begin{aligned} Z^{(k+1)}(t) &= (i \cdot \theta_Z'(t) e^{i\theta_Z(t)})^{(k)} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} i C_k^i \theta_Z^{(i+1)}(t) (e^{i\theta_Z(t)})^{(k-i)} + i \theta_Z^{(k+1)}(t) e^{i\theta_Z(t)} \end{aligned}$$

En dérivant de la même façon  $n(t)$  et d'après (4.41) on obtient

$$Z^{(k+1)}(t_i) = n^{(k+1)}(t_i) + e^{i\theta_n(t_i)} (\theta_Z^{(k+1)}(t_i) - \theta_n^{(k+1)}(t_i))$$

Finalement  $Z(t)$  et  $n(t)$  se raccordent  $\mathcal{G}C^{k+1}$  en appliquant le lemme 4.2.2 avec  $\lambda = (\theta_Z^{(k+1)}(t_i) - \theta_n^{(k+1)}(t_i)) / \theta_n'(t_i)$ .  $\square$

On peut aussi préciser dans le cas de l'interpolation d'une offset  $r_d(t)$  qui n'admet pas de point multiple que  $A_d(t)$  ne peut être "au delà" de  $r_d(t)$  relativement à la courbe  $r(t)$ :

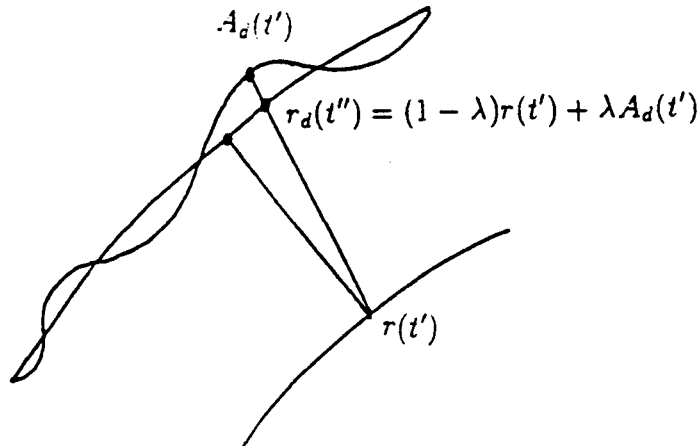


**Proposition 4.2.3** Soit une offset  $r_d(t) = r(t) + dn(t)$  sans point multiple i.e. pour tout  $t' \neq t''$ ,  $r_d(t') \neq r_d(t'')$ . Le segment  $[r(t), A_d(t)]$  intersecte la courbe  $r_d(t)$  ssi  $t = t_i$  avec  $i \in \{0, \dots, m\}$ . Dans ce cas, l'intersection de  $[r(t), A_d(t)]$  et du graphe de  $r_d(t)$  est réduit à  $r_d(t_i) = A_d(t_i)$ .

**Preuve:**

Si  $t = t_i$  avec  $i \in \{0, \dots, m\}$  alors  $A_d(t_i) = r_d(t_i)$ .

On suppose qu'il existe  $t' \neq t''$  et  $\lambda \in ]0, 1[$  tels que  $(1 - \lambda)r(t') + \lambda A_d(t') = r_d(t'')$ ,

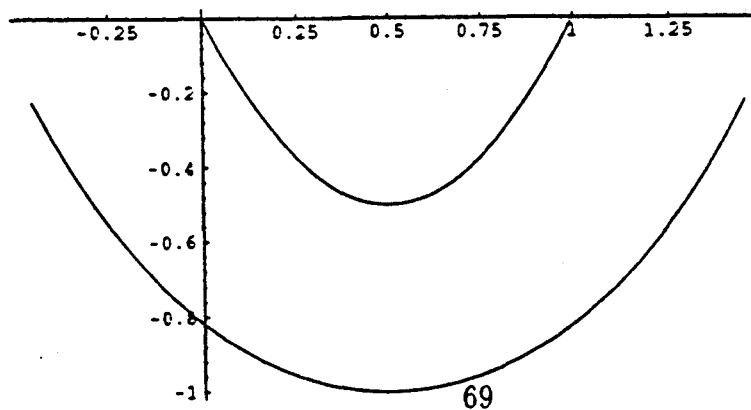


i.e.  $r(t') + \lambda dZ(t') = r_d(t'')$  ce qui implique  $|r_d(t'') - r(t')| = \lambda d < |d|$  et donc la distance entre le point  $r_d(t'')$  et la courbe  $r(t)$  est strictement inférieure à  $d$ . Ceci est en contradiction avec 1.1 car tout point de la courbe  $r_d(t)$  n'admettant pas de point multiple est à distance strictement égale à  $d$  de la courbe  $r(t)$ .  $\square$

### Exemples

Les deux méthodes exposées dans ce chapitre sont applicables pour trouver les résultats suivants:

1) Soit la parabole  $r(t) = (t, 2t^2 - 2t)$ , représentée ici avec la parallèle  $r_{-\frac{1}{2}}(t)$ :



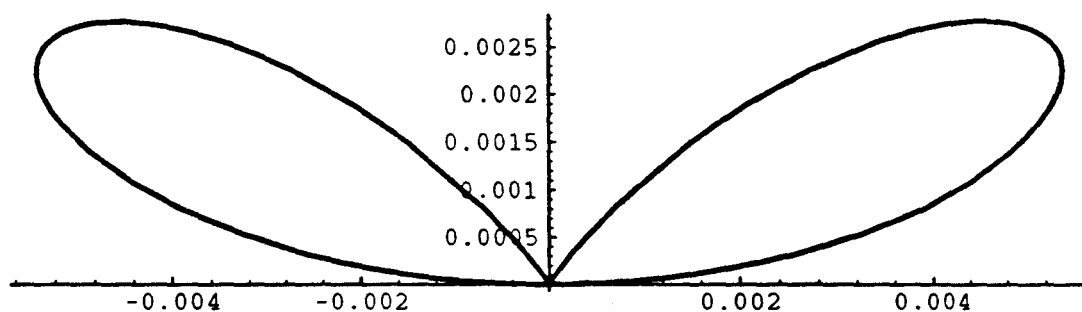
Nous déterminons les courbes  $Z(t) \in \mathcal{C}$  de longueur  $2k + 2$  qui interpolent le vecteur normal  $n(t)$  pour  $\gamma = (k, 0, k)$  en  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = \frac{1}{2}$ ,  $t_2 = 1$ , ceci pour  $k \in \{0, \dots, 5\}$ . On ne rencontre pas dans cet exemple, le problème de non existence de la solution de degré  $2k + 2$ .

L'erreur commise lors de l'interpolation de  $r_d(t)$  par  $A_d(t)$  est

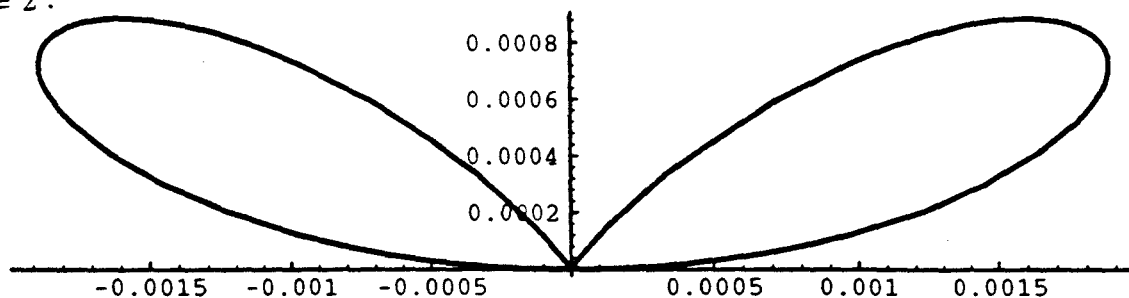
$$r_d(t) - A_d(t) = d(n(t) - Z(t))$$

En prenant  $d = 1$ , nous représentons ci-dessous pour chaque valeur de  $k$ , la courbe  $n(t) - Z(t)$ . La suite des interpolants semble converger géométriquement, au sens usuel de la convergence géométrique des suites, vers  $n(t)$ : la valeur  $\sup_{t \in [0,1]} |Z(t) - n(t)|$  est approximativement divisée par 3 lors du passage à un ordre supérieur.

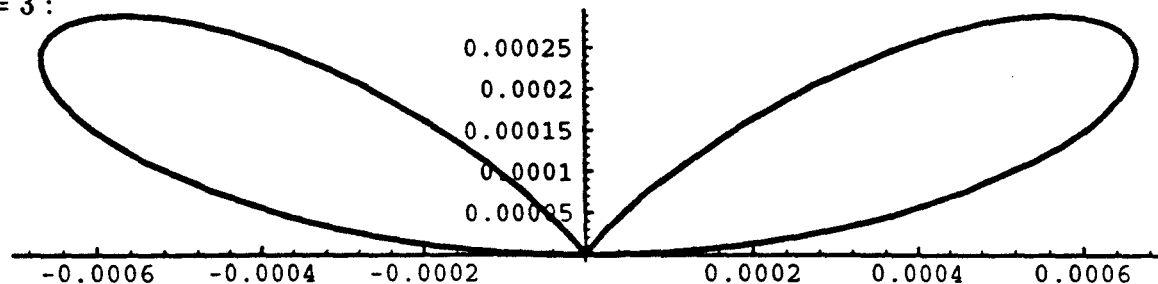
$k = 1$  :



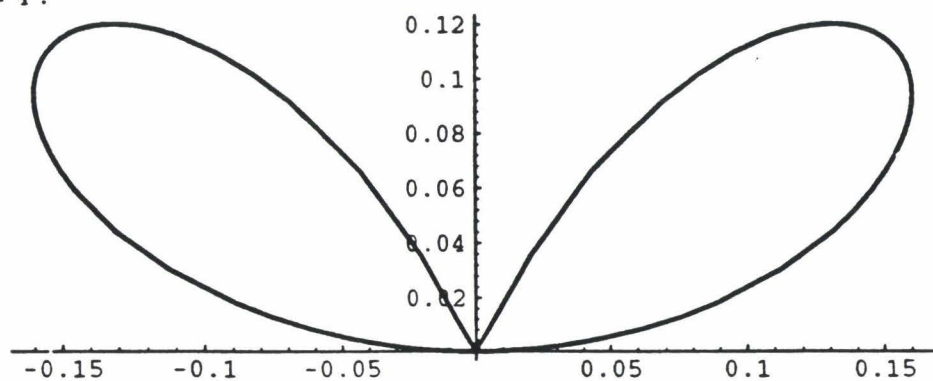
$k = 2$  :



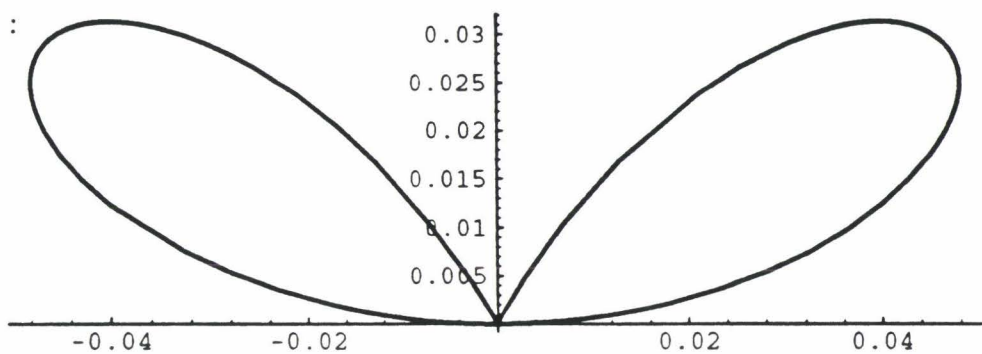
$k = 3$  :



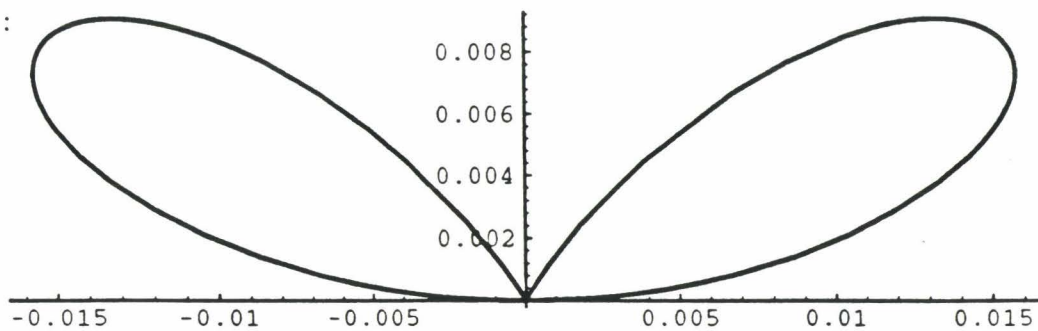
$k = 4 :$



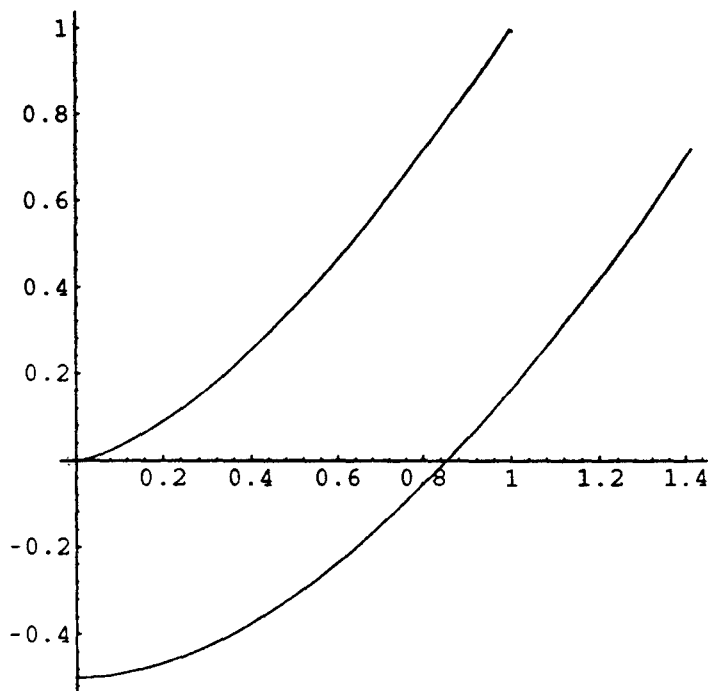
$k = 5 :$



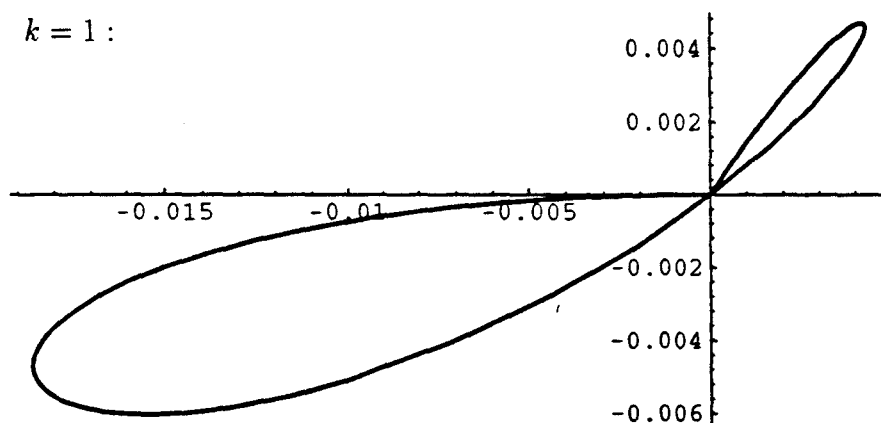
$k = 6 :$



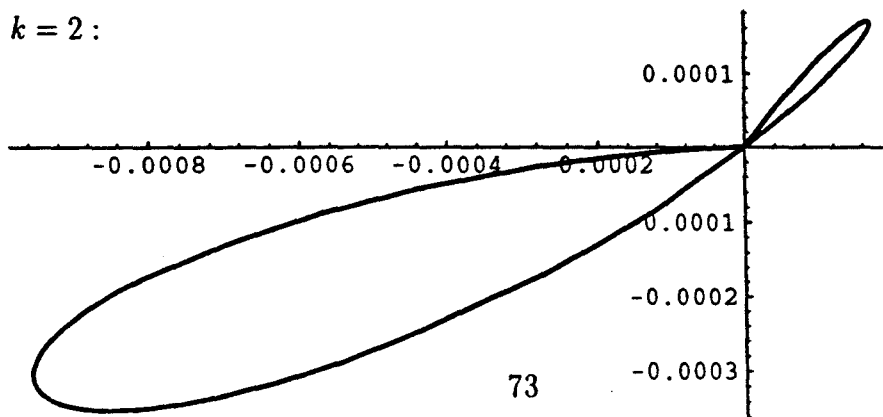
2) On effectue un travail identique pour la cubique  $r(t) = (t^2, t^3)$ . On prolonge  $n(t)$  à droite en  $t = 0$ : on obtient  $N(t) = (\frac{-3t}{\sqrt{4+9t^2}}, \frac{2}{\sqrt{4+9t^2}})$  pour  $t \in [0, 1]$ . En passant à l'ordre supérieur, l'erreur d'interpolation est ici approximativement divisée par 20.



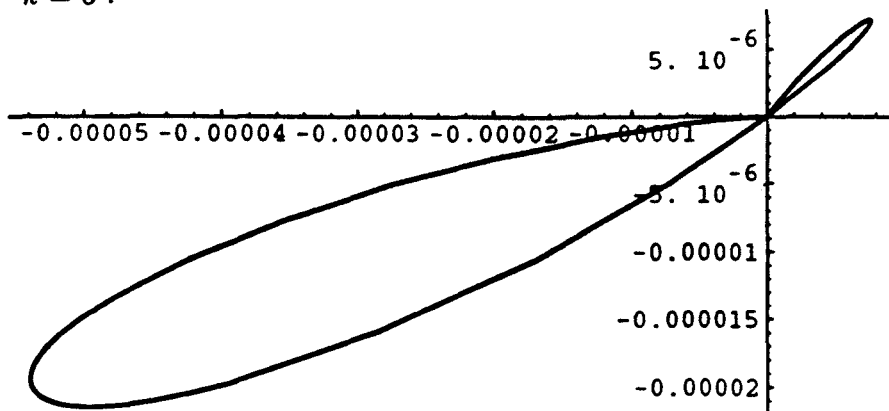
$k = 1$ :



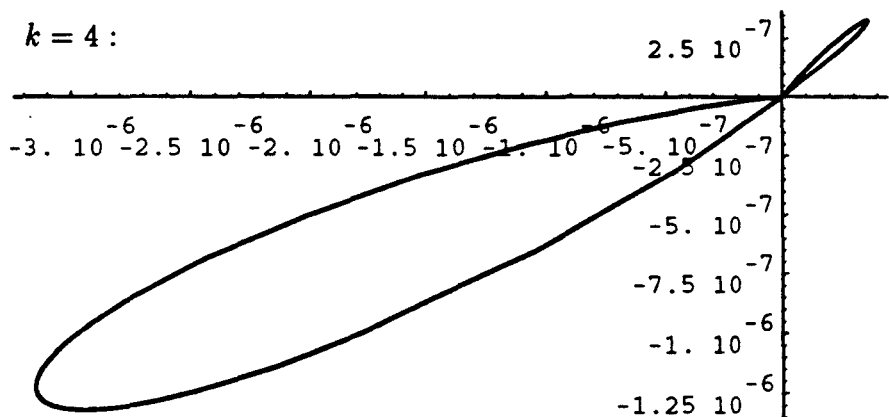
$k = 2$ :



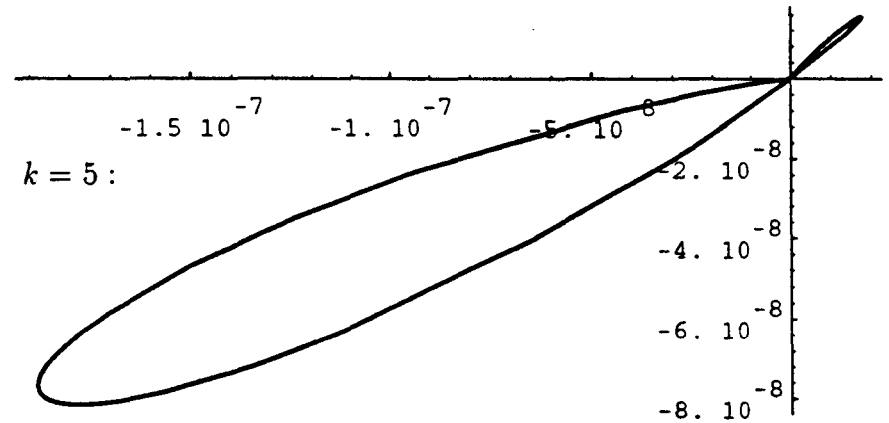
$k = 3 :$



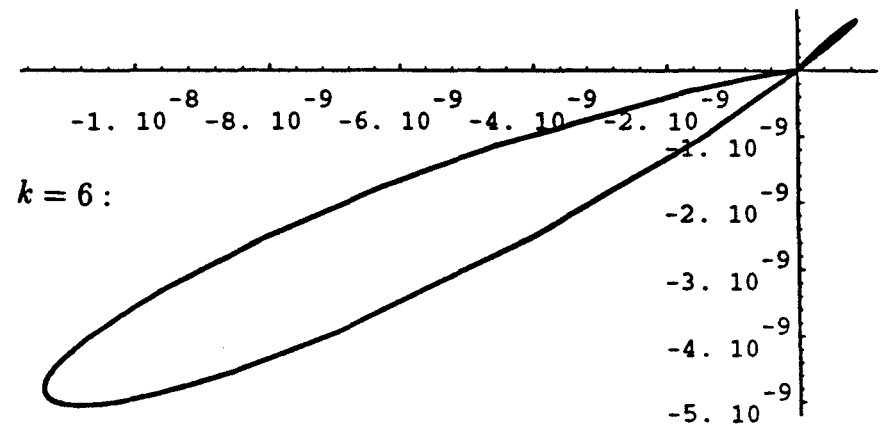
$k = 4 :$



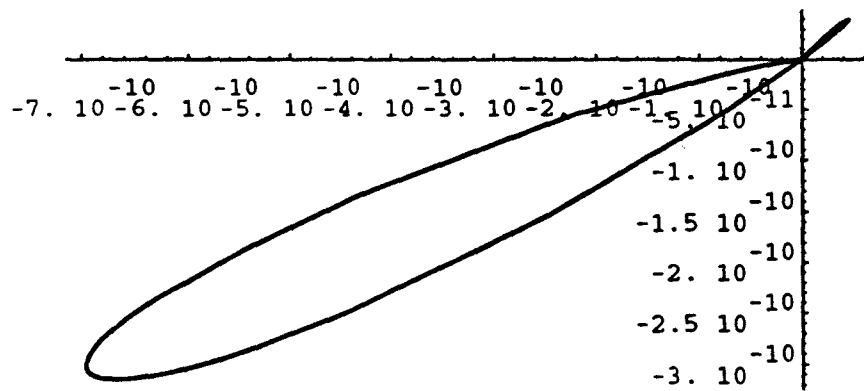
$k = 5 :$



$k = 6 :$



$k=7:$



# Bibliography

- [1] P. Bezier, Procédé de définition numérique des courbes et surfaces non mathématiques, système Unisurf, Automatisation 13 (1968).
- [2] E. Brieskorn, H. Knorrer, *Plane Algebraic Curves*, Birkhauser Verlag (1986).
- [3] J.W. Bruce, P.J. Giblin, G. Gibson, On caustics by reflexion, *Topology*, 21 (1982) 179-199.
- [4] J.W. Bruce, P.J. Giblin, G. Gibson, Caustics in extended euclidean space, *SIAM J. Math. Anal.*, Vol.15, No 1 (1984) 50-68.
- [5] De Casteljau, Outillage, méthode de calcul, Andre Citroën Automobile S.A., Paris (1959).
- [6] M.P. Do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., (1976).
- [7] G. Farin, Curvature continuity and offsets for piecewise conics, *ACM Transactions on Graphics*, vol 8 (1989) 88-99.
- [8] G. Farin, Algorithms for rational Bézier curves, *CAD* 15 (1983) 73-77.
- [9] R.T. Farouki, C.A. Neff, Analytic properties of plane offsets curves, *CAGD* 7 (1990) 83-99.
- [10] R.T. Farouki, T. Sakkalis, Pythagorean hodographs, *IBM, Journal of Research and Development*, Vol 34, No 5 (1990) 736-752.
- [11] R.T. Farouki, Pythagorean hodographs curves in practical use, in *Geometry Processing*, R.E. Barnhill (ed.), SIAM Publications, Philadelphia (1992).
- [12] R.T. Farouki, The conformal Map  $z \rightarrow z^2$  of the hodograph plane. To appear in *CAGD*.

- [13] I.E. Faux and M.J.Pratt, *Computational geometry for design and manufacture*, Ellis Horwood, Chistester,(1979). surfaces, Applications to
- [14] J.C. Fiorot , P. Jeannin , Courbes Bézier rationnelles, XIX<sup>ème</sup> Congrès National d'Analyse Numérique, Port-Barcarés, France, 26-30 mai 1986.
- [15] J.C. Fiorot, P. Jeannin, Nouvelle description et calcul des courbes rationnelles à l'aide de points et vecteurs de contrôle, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 305, Série I (1987), 435-440.
- [16] J.C. Fiorot, P. Jeannin, B-Rational curves and surfaces, N-Rational splines, in *Curves and Surfaces* , P.J. Laurent, A. Le Méhauté and L.L. Schumaker (eds.), Academic Press, New York, 1991, 181-184.
- [17] J.C. Fiorot, P. Jeannin, *Courbes et Surfaces Rationnelles, Applications à la CAO*, Masson, RMA 12, Paris (1989). English version: *Rational Curves and Surfaces, Applications to CAD*, J.Wiley and sons, Chichester (1992).
- [18] T.Gensane, Etude des courbes parallèles rationnelles, 24<sup>ième</sup> Congrès National d'Analyse Numérique, 25-28 mai 1992, Vittel, France.
- [19] J.A. Gregory, Geometric continuity, in *Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design*, T. Lyche and L.L. Schumaker (eds.), Academic Press, Boston, 1989, 353-371.
- [20] P. Henrici, *Applied and Computational Complex Analysis*, Vol 1, Wiley, New York, 1974.
- [21] J. Hoschek, N. Wissel, Optimal approximate conversion of spline curves and spline approximation of offset curves, CAD 20 (1988) 475-483.
- [22] J. Hoschek, Offset curves in the plane, CAD 17 (1985) 33-40.
- [23] G. Humbert, Sur les courbes algébriques rectifiables, C.R.A.S. de Paris, t.104 (1887) 1051-1052.
- [24] R. Klass, An offset spline approximation for plane cubic splines, CAD 15 (1983) 297-299.
- [25] K.K. Kubota, Pythagorean triples in unique factorization domains, Amer. Math. Monthly, 79 (1972) 503-505.



- [26] B. Pham, Offset approximation of uniform B-splines, CAD 20 (1988) 471-474.
- [27] H. Pottmann, Rational curves and surfaces with rational offsets, à paraître dans CAGD.
- [28] H. Pottmann, Applications of the dual Bézier representation of rational curves and surfaces, *Curves and Surfaces II*, P.J. Laurent, A. Le Méhauté, et L.L. Schumaker (eds.), AKPeters, Boston 1994.
- [29] L. Raffy, Sur la rectification des courbes planes unicursales, C.R.A.S. de Paris, t.104 (1887) 892-893.
- [30] W. Tiller, E.G. Hanson, Offset of two dimensional profiles, IEEE Computer Graphics Appl 4 (1984) 36-46.

