USTL

LABORATOIRE D'ANALYSE NUMERIQUE ET D'OPTIMISATION

n° d'ordre : 1131

THESE

Nouveau régime

présentée à
l'Université des Sciences et Technologies de Lille

pour obtenir le titre de

DOCTEUR en MATHEMATIQUES
par

Ahmed SALAM

EXTRAPOLATION: EXTENSION ET NOUVEAUX RESULTATS

soutenue le 24 juin 1993 devant la commission d'examen

Membres du jury

Président : C. BREZINSKI, U.S.T.L.
Rapporteurs : J. DELLA DORA, L'ENSIMAG de Grenoble.
P.R. GRAVES-MORRIS, Université de Bradford (Angleterre).

Membres : A. Cuyt Université d'Anvers
B. GERMAIN-BONNE, U.S.T.L.

Laboratoire d'Analyse Numérique et d'Optimisation, UFR IEEA - M3, USTL Flandres-Artois,
59655 Villeneuve d'Ascq - Cedex - FRANCE.

UNIVERSITE DES SCIENCES
ET TECHNOLOGIES DE LILLE

DOYENS HONORAIRES DE L'ANCIENNE FACULTE DES SCIENCES

M. H. LEFEBVRE, M. PARREAU

PROFESSEURS HONORAIRES DES ANCIENNES FACULTES DE DROIT ET SCIENCES ECONOMIQUES, DES SCIENCES ET DES LETTRES

MM. ARNOULT, BONTE, BROCHARD, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, DECUYPER, DEHEUVELS, DEHORS, DION, FAUVEL, FLEURY, GERMAIN, GLACET, GONTIER, KOURGANOFF, LAMOTTE, LASSERRE, LELONG, LHOMME, LIEBAERT, MARTINOT-LAGARDE, MAZET, MICHEL, PEREZ, ROIG, ROSEAU, ROUELLE, SCHILTZ, SAVARD, ZAMANSKI, Mes BEAUJEU, LELONG.

PROFESSEUR EMERITE

M. A. LEBRUN

ANCIENS PRESIDENTS DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

MM. M. PARREAU, J. LOMBARD, M. MIGEON, J. CORTOIS, A.DUBRULLE

PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

M. P. LOUIS

PROFESSEURS - CLASSE EXCEPTIONNELLE

M. CHAMLEY Hervé	Géotechnique
M. CONSTANT Eugène	Electronique
M. ESCAIG Bertrand	Physique du solide
M. FOURET René	Physique du solide
M. GABILLARD Robert	Electronique
M. LABLACHE COMBIER Alain	Chimie
M. LOMBARD Jacques	Sociologie
M. MACKE Bruno	Physique moléculaire et rayonnements atmosphériques

M. MIGEON Michel	EUDIL
M. MONTREUIL Jean	Biochimie
M. PARREAU Michel	Analyse
M. TRIDOT Gabriel	Chimie appliquée

PROFESSEURS - 1ère CLASSE

M. BACCHUS Pierre	Astronomie
M. BIAYS Pierre	Géographie
M. BILLARD Jean	Physique du Solide
M. BOILLY Bénoni	Biologie
M. BONNELLE Jean Pierre	Chimie-Physique
M. BOSCO Denis	Probabilités
M. BOUGHON Pierre	Algèbre
M. BOURIQUET Robert	Biologie Végétale
M. BRASSELET Jean Paul	Géométrie et topologie
M. BREZINSKI Claude	Analyse numérique
M. BRIDOUX Michel	Chimie Physique
M. BRUYELLE Pierre	Géographie
M. CARREZ Christian	Informatique
M. CELET Paul	Géologie générale
M. COEURE Gérard	Analyse
M. CORDONNIER Vincent	Informatique
M. CROSNIER Yves	Electronique
Mme DACHARRY Monique	Géographie
M. DAUCHET Max	Informatique
M. DEBOURSE Jean Pierre	Gestion des entreprises
M. DEBRABANT Pierre	Géologie appliquée
M. DECLERCQ Roger	Sciences de gestion
M. DEGAUQUE Pierre	Electronique
M. DESCHEPPER Joseph	Sciences de gestion
Mme DESSAUX Odile	Spectroscopie de la réactivité chimique
M. DHAINAUT André	Biologie animale
Mme DHAINAUT Nicole	Biologie animale
M. DJAFARI Rouhani	Physique
M. DORMARD Serge	Sciences Economiques
M. DOUKHAN Jean Claude	Physique du solide
M. DUBRULLE Alain	Spectroscopie hertzienne
M. DUPOUY Jean Paul	Biologie
M. DYMENT Arthur	Mécanique
M. FOCT Jacques Jacques	Métallurgie
M. FOUQUART Yves	Optique atmosphérique
M. FOURNET Bernard	Biochimie structurale
M. FRONTIER Serge	Ecologie numérique
M. GLORIEUX Pierre	Physique moléculaire et rayonnements atmosphériques
M. GOSSELIN Gabriel	Sociologie
M. GOUDMAND Pierre	Chimie-Physique
M. GRANELLE Jean Jacques	Sciences Economiques
M. GRUSON Laurent	Algèbre
M. GUILBAULT Pierre	Physiologie animale
M. GUILLAUME Jean	Microbiologie
M. HECTOR Joseph	Géométrie
M. HENRY Jean Pierre	Génie mécanique
M. HERMAN Maurice	Physique spatiale
M. LACOSTE Louis	Biologie Végétale
M. LANGRAND Claude	Probabilités et statistiques

M. LATTEUX Michel	Informatique
M. LAVEINE Jean Pierre	Paléontologie
Mme LECLERCQ Ginette	Catalyse
M. LEHMANN Daniel	Géométrie
Mme LENOBLE Jacqueline	Physique atomique et moléculaire
M. LEROY Jean Marie	Spectrochimie
M. LHENAFF René	Géographie
M. LHOMME Jean	Chimie organique biologique
M. LOUAGE Françis	Electronique
M. LOUCHEUX Claude	Chimie-Physique
M. LUCQUIN Michel	Chimie physique
M. MAILLET Pierre	Sciences Economiques
M. MAROUF Nadir	Sociologie
M. MICHEAU Pierre	Mécanique des fluides
M. PAQUET Jacques	Géologie générale
M. PASZKOWSKI Stéfan	Mathématiques
M. PETIT Francis	Chimie organique
M. PORCHET Maurice	Biologie animale
M. POUZET Pierre	Modélisation - calcul scientifique
M. POVY Lucien	Automatique
M. PROUVOST Jean	Minéralogie
M. RACZY Ladislas	Electronique
M. RAMAN Jean Pierre	Sciences de gestion
M. SALMER Georges	Electronique
M. SCHAMPS Joël	Spectroscopie moléculaire
Mme SCHWARZBACH Yvette	Géométrie
M. SEGUIER Guy	Electrotechnique
M. SIMON Michel	Sociologie
M. SLIWA Henri	Chimie organique
M. SOMME Jean	Géographie
Melle SPIK Geneviève	Biochimie
M. STANKIEWICZ François	Sciences Economiques
M. THIEBAULT François	Sciences de la Terre
M. THOMAS Jean Claude	Géométrie - Topologie
M. THUMERELLE Pierre	Démographie - Géographie humaine
M. TILLIEU Jacques	Physique théorique
M. TOULOTTE Jean Marc	Automatique
M. TREANTON Jean René	Sociologie du travail
M. TURRELL Georges	Spectrochimie infrarouge et raman
M. VANEECLOO Nicolas	Sciences Economiques
M. VAST Pierre	Chimie inorganique
M. VERBERT André	Biochimie
M. VERNET Philippe	Génétique
M. VIDAL Pierre	Automatique
M. WALLART Françis	Spectrochimie infrarouge et raman
M. WEINSTEIN Olivier	Analyse économique de la recherche et développement
M. ZEYTOUNIAN Radyadour	Mécanique

PROFESSEURS - 2ème CLASSE

M. ABRAHAM Francis	
M. ALLAMANDO Etienne	Composants électroniques
M. ANDRIES Jean Claude	Biologie des organismes
M. ANTOINE Philippe	Analyse
M. BALL Steven	Génétique
M. BART André	Biologie animale
M. BASSERY Louis	Génie des procédés et réactions chimiques
Mme BATTIAU Yvonne	Géographie
M. BAUSIERE Robert	Systèmes électroniques
M. BEGUIN Paul	Mécanique
M. BELLET Jean	Physique atomique et moléculaire
M. BERNAGE Pascal	Physique atomique, moléculaire et du rayonnement
M. BERTHOUD Arnaud	Sciences Economiques
M. BERTRAND Hugues	Sciences Economiques
M. BERZIN Robert	Analyse
M. BISKUPSKI Gérard	Physique de l'état condensé et cristallographie
M. BKOUCHE Rudolphe	Algèbre
M. BODARD Marcel	Biologie végétale
M. BOHIN Jean Pierre	Biochimie métabolique et cellulaire
M. BOIS Pierre	Mécanique
M. BOISSIER Daniel	Génie civil
M. BOIVIN Jean Claude	Spectrochimie
M. BOUCHER Daniel	Physique
M. BOUQUELET Stéphane	Biologie appliquée aux enzymes
M. BOUQUIN Henri	Gestion
M. BROCARD Jacques	Chimie
Mme BROUSMICHE Claudine	Paléontologie
M. BUISINE Daniel	Mécanique
M. CAPURON Alfred	Biologie animale
M. CARRE François	Géographie humaine
M. CATTEAU Jean Pierre	Chimie organique
M. CAYATTE Jean Louis	Sciences Economiques
M. CHAPOTON Alain	Electronique
M. CHARET Pierre	Biochimie structurale
M. CHIVE Maurice	Composants électroniques optiques
M. COMYN Gérard	Informatique théorique
Mme CONSTANT Monique	Composants électroniques et optiques
M. COQUERY Jean Marie	Psychophysiologie
M. CORIAT Benjamin	Sciences Economiques
Mme CORSIN Paule	Paléontologie
M. CORTOIS Jean	Physique nucléaire et corpusculaire
M. COUTURIER Daniel	Chimie organique
M. CRAMPON Norbert	Tectolique géodynamique
M. CURGY Jean Jacques	Biologie
M. DANGOISSE Didier	Physique théorique
M. DE PARIS Jean Claude	Analyse
M. DECOSTER Didier	Composants électroniques et optiques
M. DEJAEGER Roger	Electrochimie et Cinétique
M. DELAHAYE Jean Paul	Informatique
M. DELORME Pierre	Physiologie animale
M. DELORME Robert	Sciences Economiques
M. DEMUNTER Paul	Sociologie
Mme DEMUYNCK Claire	Physique atomique, moléculaire et du rayonnement
M. DENEL Jacques	Informatique
M. DEPREZ Gilbert	Physique du solide - christallographie

M. DERIEUX Jean Claude	Microbiologie
M. DERYCKE Alain	Informatique
M. DESCAMPS Marc	Physique de l'état condensé et cristallographie
M. DEVRAINNE Pierre	Chimie minérale
M. DEWAILLY Jean Michel	Géographie humaine
M. DHAMELINCOURT Paul	Chimie physique
M. DI PERSIO Jean	Physique de l'état condensé et cristallographie
M. DUBAR Claude	Sociologie démographique
M. DUBOIS Henri	Spectroscopie hertzienne
M. DUBOIS Jean Jacques	Géographie
M. DUBUS Jean Paul	Spectrométrie des solides
M. DUPONT Christophe	Vie de la firme
M. DUTHOIT Bruno	Génie civil
Mme DUVAL Anne	Algèbre
Mme EVRARD Micheline	Génie des procédés et réactions chimiques
M. FAKIR Sabah	Algèbre
M. FARVACQUE Jean Louis	Physique de l'état condensé et cristallographie
M. FAUQUEMBERGUE Renaud	Composants électroniques
M. FELIX Yves	Mathématiques
M. FERRIERE Jacky	Tectonique - Géodynamique
M. FISCHER Jean Claude	Chimie organique, minérale et analytique
M. FONTAINE Hubert	Dynamique des cristaux
M. FORSE Michel	Sociologie
M. GADREY Jean	Sciences économiques
M. GAMBLIN André	Géographie urbaine, industrielle et démographie
M. GOBLOT Rémi	Algèbre
M. GOURIEROUX Christian	Probabilités et statistiques
M. GREGORY Pierre	I.A.E.
M. GREMY Jean Paul	Sociologie
M. GREVET Patrice	Sciences Economiques
M. GRIMBLOT Jean	Chimie organique
M. GUELTON Michel	Chimie physique
M. GUICHAOUA André	Sociologie
M. HAIMAN Georges	Modélisation,calcul scientifique, statistiques
M. HOUDART René	Physique atomique
M. HUEBSCHMANN Johannes	Mathématiques
M. HUTTNER Marc	Algèbre
M. ISAERT Noël	Physique de l'état condensé et cristallographie
M. JACOB Gérard	Informatique
M. JACOB Pierre	Probabilités et statistiques
M. JEAN Raymond	Biologie des populations végétales
M. JOFFRE Patrick	Vie de la firme
M. JOURNEL Gérard	Spectroscopie hertzienne
M. KOENIG Gérard	Sciences de gestion
M. KOSTRUBIEC Benjamin	Géographie
M. KREMBEL Jean	Biochimie
Mme KRIFA Hadjila	Sciences Economiques
M. LANGEVIN Michel	Algèbre
M. LASSALLE Bernard	Embryologie et biologie de la différenciation
M. LE MEHAUTE Alain	Modélisation,calcul scientifique,statistiques
M. LEBFEVRE Yannic	Physique atomique,moléculaire et du rayonnement
M. LECLERCQ Lucien	Chimie physique
M. LEFEBVRE Jacques	Physique
M. LEFEBVRE Marc	Composants électroniques et optiques
M. LEFEVRE Christian	Pétrologie
Melle LEGRAND Denise	Algèbre
M. LEGRAND Michel	Astronomie - Météorologie
M. LEGRAND Pierre	Chimie
Mme LEGRAND Solange	Algèbre
Mme LEHMANN Josiane	Analyse
M. LEMAIRE Jean	Spectroscopie hertzienne

M. LE MAROIS Henri	Vie de la firme
M. LEMOINE Yves	Biologie et physiologie végétales
M. LESCURE François	Algèbre
M. LESENNE Jacques	Systèmes électroniques
M. LOCQUENEUX Robert	Physique théorique
Mme LOPES Maria	Mathématiques
M. LOSFELD Joseph	Informatique
M. LOUAGE Francis	Electronique
M. MAHIEU François	Sciences économiques
M. MAHIEU Jean Marie	Optique - Physique atomique
M. MAIZIERES Christian	Automatique
M. MANSY Jean Louis	Géologie
M. MAURISSON Patrick	Sciences Economiques
M. MERIAUX Michel	EUDIL
M. MERLIN Jean Claude	Chimie
M. MESMACQUE Gérard	Génie mécanique
M. MESSELYN Jean	Physique atomique et moléculaire
M. MOCHE Raymond	Modélisation,calcul scientifique,statistiques
M. MONTEL Marc	Physique du solide
M. MORCELLET Michel	Chimie organique
M. MORE Marcel	Physique de l'état condensé et cristallographie
M. MORTREUX André	Chimie organique
Mme MOUNIER Yvonne	Physiologie des structures contractiles
M. NIAY Pierre	Physique atomique,moléculaire et du rayonnement
M. NICOLE Jacques	Spectrochimie
M. NOTELET Francis	Systèmes électroniques
M. PALAVIT Gérard	Génie chimique
M. PARSY Fernand	Mécanique
M. PECQUE Marcel	Chimie organique
M. PERROT Pierre	Chimie appliquée
M. PERTUZON Emile	Physiologie animale
M. PETIT Daniel	Biologie des populations et écosystèmes
M. PLIHON Dominique	Sciences Economiques
M. PONSOLLE Louis	Chimie physique
M. POSTAIRE Jack	Informatique industrielle
M. RAMBOUR Serge	Biologie
M. RENARD Jean Pierre	Géographie humaine
M. RENARD Philippe	Sciences de gestion
M. RICHARD Alain	Biologie animale
M. RIETSCH François	Physique des polymères
M. ROBINET Jean Claude	EUDIL
M. ROGALSKI Marc	Analyse
M. ROLLAND Paul	Composants électroniques et optiques
M. ROLLET Philippe	Sciences Economiques
Mme ROUSSEL Isabelle	Géographie physique
M. ROUSSIGNOL Michel	Modélisation,calcul scientifique,statistiques
M. ROY Jean Claude	Psychophysiologie
M. SALERNO Françis	Sciences de gestion
M. SANCHOLLE Michel	Biologie et physiologie végétales
Mme SANDIG Anna Margarette	
M. SAWERYSYN Jean Pierre	Chimie physique
M. STAROSWIECKI Marcel	Informatique
M. STEEN Jean Pierre	Informatique
Mme STELLMACHER Irène	Astronomie - Météorologie
M. STERBOUL François	Informatique
M. TAILLIEZ Roger	Génie alimentaire
M. TANRE Daniel	Géométrie - Topologie
M. THERY Pierre	Systèmes électroniques
Mme TJOTTA Jacqueline	Mathématiques
M. TOURSEL Bernard	Informatique
M. TREANTON Jean René	Sociologie du travail

M. TURREL Georges	Spectrochimie infrarouge et raman
M. VANDIJK Hendrik	
Mme VAN ISEGHEM Jeanine	Modélisation,calcul scientifique,statistiques
M. VANDORPE Bernard	Chimie minérale
M. VASSEUR Christian	Automatique
M. VASSEUR Jacques	Biologie
Mme VIANO Marie Claude	
M. WACRENIER Jean Marie	Electronique
M. WARTEL Michel	Chimie inorganique
M. WATERLOT Michel	géologie générale
M. WEICHERT Dieter	Génie mécanique
M. WERNER Georges	Informatique théorique
M. WIGNACOURT Jean Pierre	
M. WOZNIAK Michel	Spectrochimie
Mme ZINN JUSTIN Nicole	Algèbre

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur C.Brezinski, Professeur à l'Université des Sciences et Technologies de Lille. Il a dirigé cette thèse avec beaucoup d'intérêt. Nos discussions enrichissantes et ses encouragements m'ont permis de mener à terme cette thèse dans de très bonnes conditions. Je remercie à nouveau Monsieur C.Brezinski qui m'a fait l'honneur de présider ce jury.

Je remercie également Monsieur J.Della Dora, Professeur à l'ENSIMAG de Grenoble, Monsieur P.R.Graves-Morris, Professeur à l'Université de Bradford (Angleterre) de s'être interéssés à ce travail et d'avoir accepté d'en être rapporteurs.

Madame A.Cuyt, Professeur à l'Université d'Anvers, Monsieur Germain-Bonne, Professeur à l'Université des Sciences et Technologies de Lille ont bien accepté de faire partie du jury. C'est un honneur pour moi, et je les remercie vivement.

Je remercie tous mes collègues du Laboratoire d'Analyse Numérique et d'Optimisation pour les discussions fructueuses que nous avons échangées.

Introduction générale

Le contenu de cette thèse est réparti en quatre chapitres.

Le premier chapitre concerne l'étude de la première et de la seconde généralisation de ε-algorithme.

A trvers les chapitres 2 et 3, nous montrons comment les désignants (1927) nous permettent de développer une théorie d'extrapolation dans le cas non commutatif et de généraliser dans ce sens les résultats déjà connus.

Le chapitre 4 est un chapitre d'application. En particulier, gràce à l'utilisation de l'algèbre de Clifford et des désignants, nous résolvons une question ouverte depuis trente ans déjà, à savoir si l'on peut écrire, sous forme d'un rapport de deux déterminants, les quantités calculées par l'ε-algorithme vectoriel de Wynn. Ce résultat nous permettra ainsi d'énoncer de nouveaux résultats et de retrouver, d'une manière différente, d'autres déjà connus.

Table des matières

Chapitre 1

Sur la première et la seconde généralisation de l'ε algorithme

1.1 Introduction

Soit (S_n) une suite de nombres réels ou complexes. La transformation de Shanks [38], transforme la suite (S_n) en un ensemble de suites $e_k(S_n)$ où :

$$e_k(S_n) = \frac{\begin{vmatrix} S_n & S_{n+1} & \cdots & S_{n+k} \\ S_{n+1} & S_{n+2} & \cdots & S_{n+k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n+k} & S_{n+k+1} & \cdots & S_{n+2k} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta^2 S_n & \Delta^2 S_{n+1} & \cdots & \Delta^2 S_{n+k-1} \\ \Delta^2 S_{n+1} & \Delta^2 S_{n+2} & \cdots & \Delta^2 S_{n+k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta^2 S_{n+k-1} & \Delta^2 S_{n+k} & \cdots & \Delta^2 S_{n+2k-2} \end{vmatrix}}$$

avec$\Delta^0 S_n = S_n$ et $\Delta^{i+1} S_n = \Delta^i S_{n+1} - \Delta^i S_n$ pour $i = 0, 1, ...$
Les nombres $e_k(S_n)$ sont calculés récursivement par l'ε-algorithme de Wynn[39]:

$$\varepsilon_{-1}^n = 0; \varepsilon_0^n = S_n \quad n = 0, 1, ...$$

$$\varepsilon_{k+1}^n = \varepsilon_{k-1}^{n+1} + \frac{1}{\varepsilon_k^{n+1} - \varepsilon_k^n} \quad k, n = 0, 1, ...$$

Nous obtenons

$$\varepsilon_{2k}^n = e_k(S_n) \text{ et } \varepsilon_{2k+1}^n = \frac{1}{e_k(S_n)}.$$

L'ε-algorithme est une méthode puissante pour l'accélération de la convergence d'une certaine classe de suites. Voir[5] pour plus de détails, pour les applications et les programmes.
Soit maintenant une suite auxilaire de nombres x_n. Dans [8], Brezinski a proposé deux généralisations de l'ε-algorithme:
La première généralisation

$$\varepsilon_1^n = 0; \varepsilon_0^n = S_n; \varepsilon_{k+1}^n = \varepsilon_{k-1}^{n+1} + \frac{\Delta x_n}{\varepsilon_k^{n+1} - \varepsilon_k^n}$$

La seconde généralisation

$$\delta_{-1}^{n} = 0; \delta_{0}^{n} = S_N; \delta_{k+1}^{n} = \delta_{k-1}^{n+1} + \frac{\Delta x_{n+k}}{\delta_k^{n+1} - \delta_k^n}$$

Ces deux algorithmes sont obtenus en modifiant directement les règles de l'ε-algorithme.
A partir de la théorie développée dans[13], il est connu, pour les algorithmes de ce type, que les quantités calculées peuvent être exprimées sous forme d'un rapport de deux déterminants comme pour l'ε-algorithme de Wynn.
Une telle expression a été donnée par Brezinski dans[8] pour la première généralisation. Cependant, pour la seconde généralisation, une telle expression n'a pas été donnée. Ce sera l'objet de la section 1.2 de répondre à cette question. Dans [8], le noyau de la première généralisation a été présenté sous forme d'une équation aux différences finies. La résolution de cette dernière a été faite uniquement dans le cas particulier k=1.
Au 1.3, nous donnerons le noyau de la seconde généralisation sous forme d'une équation aux différences finies. Au 1.4, nous résoudrons cette équation aux différences finies à la fois pour la première et la seconde généralisation et ceci pour k quelconque. Ainsi, nous aurons explicitement le noyau de chacune des deux généralisations.

1.2 Rapport de deux déterminants

Posons $u_n = S_{n+1}.\Delta x_n$. Définissons l'opérateur R par

$$Ru_n = \Delta(\tfrac{u_{n-1}}{\Delta x_{n-1}})$$

et ses puissances par :

$$R^{k+1}u_n = \Delta(\frac{R^k u_{n-1}}{\Delta x_{n-1}})$$

Nous avons le

Théorème 1.1

$$\delta_{2k}(S_n) = \delta_{2k}^n = \frac{\begin{vmatrix} u_{n+k-1} & \cdots & u_{n+2k-1} \\ Ru_{n+k-1} & \cdots & u_{n+2k-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R^k u_{n+k-1} & \cdots & R^k u_{n+2k-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta x_{n+k-1} & \cdots & \Delta x_{n+2k-1} \\ Ru_{n+k-1} & \cdots & Ru_{n+2k-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R^k u_{n+k-1} & \cdots & R^k u_{n+2k-1} \end{vmatrix}}$$

$$\delta_{2k+1}^n = \frac{\begin{vmatrix} \Delta x_{n+k} & \cdots & \Delta x_{n+2k} \\ R^2 u_{n+k} & \cdots & R^2 u_{n+2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R^{k+1} u_{n+k} & \cdots & R^{k+1} u_{n+2k} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Ru_{n+k} & \cdots & Ru_{n+2k} \\ R^2 u_{n+k} & \cdots & R^2 u_{n+2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R^{k+1} u_{n+k} & \cdots & R^{k+1} u_{n+2k} \end{vmatrix}} = \frac{1}{\delta_{2k}(Ru_{n+1})}$$

<u>Démonstration</u>

Nous allons démontrer ce résultat par récurrence. Il est facile de vérifier ces égalités pour $k = 1$.

Supposons maintenant que les δ_i^n peuvent être écrits comme rapport de deux déterminants, comme cela est indiqué dans le théorème, pour $i = 0, ..., 2k$. Nous devons démontrer que ces égalités sont encore vraies pour δ_{2k+1}^n et δ_{2k+2}^n.

Pour cela, nous allons tout d'abord calculer les quantités $\delta_{2k+1}^n - \delta_{2k-1}^{n+1}$ et $\Delta x_{n+2k}/(\delta_{2k}^{n+1} - \delta_{2k}^n)$ et établir leur égalité.

Nous avons

$\delta_{2k+1}^n - \delta_{2k-1}^{n+1} =$

$$\frac{\begin{vmatrix} \Delta x_{n+k} & \dots & \Delta x_{n+2k} \\ R^2u_{n+k} & \dots & R^2u_{n+2k} \\ \vdots & & \vdots \\ R^{k+1}u_{n+k} & \dots & R^{k+1}u_{n+2k} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Ru_{n+k} & \dots & Ru_{n+2k} \\ R^2u_{n+k} & \dots & R^2u_{n+2k} \\ \vdots & & \vdots \\ R^{k+1}u_{n+k} & \dots & R^{k+1}u_{n+2k} \end{vmatrix}} - \frac{\begin{vmatrix} \Delta x_{n+k} & \dots & \Delta x_{n+2k-1} \\ R^2u_{n+k} & \dots & R^2u_{n+2k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ R^{k}u_{n+k} & \dots & R^{k}u_{n+2k-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Ru_{n+k} & \dots & Ru_{n+2k-1} \\ R^2u_{n+k} & \dots & R^2u_{n+2k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ R^{k}u_{n+k} & \dots & R^{k}u_{n+2k-1} \end{vmatrix}}.$$

Appliquons l'identité de Schweins ([1]), nous obtenons
$\delta_{2k+1}^{n} - \delta_{2k-1}^{n+1} =$

$$\frac{\begin{vmatrix} \Delta x_{n+k} & \dots & \Delta x_{n+2k} \\ Ru_{n+k} & \dots & Ru_{n+2k} \\ \vdots & & \vdots \\ R^{k}u_{n+k} & \dots & R^{k}u_{n+2k} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} R^2u_{n+k} & \dots & R^2u_{n+2k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ R^{k+1}u_{n+k} & \dots & R^{k+1}u_{n+2k-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Ru_{n+k} & \dots & Ru_{n+2k} \\ R^2u_{n+k} & \dots & R^2u_{n+2k} \\ \vdots & & \vdots \\ R^{k+1}u_{n+k} & \dots & R^{k+1}u_{n+2k} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Ru_{n+k} & \dots & Ru_{n+2k-1} \\ R^2u_{n+k} & \dots & R^2u_{n+2k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ R^{k}u_{n+k} & \dots & R^{k}u_{n+2k-1} \end{vmatrix}} \tag{1.1}$$

De la même manière, nous avons
$\delta_{2k}^{n+1} - \delta_{2k}^{n} =$

$$\frac{\begin{vmatrix} u_{n+k} & \dots & u_{n+2k} \\ Ru_{n+k} & \dots & Ru_{n+2k} \\ \vdots & & \vdots \\ R^{k}u_{n+k} & \dots & R^{k}u_{n+2k} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta x_{n+k} & \dots & \Delta x_{n+2k} \\ Ru_{n+k} & \dots & Ru_{n+2k} \\ \vdots & & \vdots \\ R^{k}u_{n+k} & \dots & R^{k}u_{n+2k} \end{vmatrix}} - \frac{\begin{vmatrix} u_{n+k-1} & \dots & u_{n+2k-1} \\ Ru_{n+k-1} & \dots & Ru_{n+2k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ R^{k}u_{n+k-1} & \dots & R^{k}u_{n+2k-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta x_{n+k-1} & \dots & \Delta x_{n+2k-1} \\ Ru_{n+k} & \dots & Ru_{n+2k} \\ \vdots & & \vdots \\ R^{k}u_{n+k-1} & \dots & R^{k}u_{n+2k-1} \end{vmatrix}}.$$

Posons

$$A = \begin{vmatrix} u_{n+k} & \dots & u_{n+2k} \\ Ru_{n+k} & \dots & Ru_{n+2k} \\ \vdots & & \vdots \\ R^k u_{n+k} & \dots & R^k u_{n+2k} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Delta x_{n+k-1} & \dots & \Delta x_{n+2k-1} \\ Ru_{n+k-1} & \dots & Ru_{n+2k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ R^k u_{n+k-1} & \dots & R^k u_{n+2k-1} \end{vmatrix} -$$

$$\begin{vmatrix} u_{n+k-1} & \dots & u_{n+2k-1} \\ Ru_{n+k-1} & \dots & Ru_{n+2k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ R^k u_{n+k-1} & \dots & R^k u_{n+2k-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Delta x_{n+k} & \dots & \Delta x_{n+2k} \\ Ru_{n+k} & \dots & Ru_{n+2k} \\ \vdots & & \vdots \\ R^k u_{n+k} & \dots & R^k u_{n+2k} \end{vmatrix}$$

En appliquant l'identité de Sylvester, nous avons

$$A = \begin{vmatrix} \Delta x_{n+k-1} & \dots & \Delta x_{n+2k} \\ u_{n+k-1} & \dots & u_{n+2k} \\ Ru_{n+k-1} & \dots & Ru_{n+2k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ R^k u_{n+k-1} & \dots & R^k u_{n+2k} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Ru_{n+k} & \dots & Ru_{n+2k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ R^k u_{n+k} & \dots & R^k u_{n+2k-1} \end{vmatrix}$$

D'où

$$\Delta x_{n+2k}/(\delta_{2k}^{n+1} - \delta_{2k}^{n}) =$$

$$\frac{\Delta x_{n+2k} \begin{vmatrix} \Delta x_{n+k} & \dots & \Delta x_{n+2k} \\ Ru_{n+k} & \dots & Ru_{n+2k} \\ \vdots & & \vdots \\ R^k u_{n+k} & \dots & R^k u_{n+2k} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Delta x_{n+k-1} & \dots & \Delta x_{n+2k-1} \\ Ru_{n+k-1} & \dots & Ru_{n+2k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ R^k u_{n+k-1} & \dots & R^k u_{n+2k-1} \end{vmatrix}}{A} \tag{1.2}$$

Pour avoir l'égalité entre (1.1) et (1.2), il faut démonter que

$$\frac{\begin{vmatrix} R^2 u_{n+k} & \dots & R^2 u_{n+2k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ R^{k+1} u_{n+k} & \dots & R^{k+1} u_{n+2k-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Ru_{n+k} & \dots & Ru_{n+2k} \\ \vdots & & \vdots \\ R^{k+1} u_{n+k} & \dots & R^{k+1} u_{n+2k} \end{vmatrix}} = \Delta x_{n+2k} \frac{\begin{vmatrix} \Delta x_{n+k-1} & \dots & \Delta x_{n+2k-1} \\ Ru_{n+k-1} & \dots & Ru_{n+2k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ R^k u_{n+k-1} & \dots & R^k u_{n+2k-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta x_{n+k-1} & \dots & \Delta x_{n+2k} \\ u_{n+k-1} & \dots & u_{n+2k} \\ \vdots & & \vdots \\ R^k u_{n+k-1} & \dots & R^k u_{n+2k} \end{vmatrix}} \tag{1.3}$$

En effet, considérons le membre à droite de l'égalité, il est égal à

$$\frac{\Delta x_{n+k-1}\ldots\Delta x_{n+2k}\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \frac{Ru_{n+k-1}}{\Delta x_{n+k-1}} & \ldots & \frac{Ru_{n+2k-1}}{\Delta x_{n+2k-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{R^k u_{n+k-1}}{\Delta x_{n+k-1}} & \ldots & \frac{R^k u_{n+2k-1}}{\Delta x_{n+2k-1}} \end{vmatrix}}{\Delta x_{n+k-1}\ldots\Delta x_{n+2k}\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \frac{Ru_{n+k-1}}{\Delta x_{n+k-1}} & \ldots & \frac{Ru_{n+2k}}{\Delta x_{n+2k}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{R^k u_{n+k-1}}{\Delta x_{n+k-1}} & \ldots & \frac{R^k u_{n+2k}}{\Delta x_{n+2k}} \end{vmatrix}}$$

En simplifiant par $\Delta x_{n+k-1}\ldots\Delta x_{n+2k}$ et en soustrayant la première colonne de la seconde, la seconde de la troisième et ainsi de suite (au numérateur et au dénominateur), nous obtenons

$$\frac{\begin{vmatrix} \Delta(\frac{Ru_{n+k-1}}{\Delta x_{n+k-1}}) & \ldots & \Delta(\frac{Ru_{n+2k-1}}{\Delta x_{n+2k-1}}) \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta(\frac{R^k u_{n+k-1}}{\Delta x_{n+k-1}}) & \ldots & \Delta(\frac{R^k u_{n+2k-1}}{\Delta x_{n+2k-1}}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta(\frac{Ru_{n+k-1}}{\Delta x_{n+k-1}}) & \ldots & \Delta(\frac{Ru_{n+2k}}{\Delta x_{n+2k}}) \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta(\frac{R^k u_{n+k-1}}{\Delta x_{n+k-1}}) & \ldots & \Delta(\frac{R^k u_{n+2k}}{\Delta x_{n+2k}}) \end{vmatrix}}$$

qui est par définition de l'opérateur R, égal à

$$\frac{\begin{vmatrix} R^2 u_{n+k} & \ldots & R^2 u_{n+2k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ R^{k+1} u_{n+k} & \ldots & R^{k+1} u_{n+2k-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Ru_{n+k} & \ldots & Ru_{n+2k} \\ \vdots & & \vdots \\ R^{k+1} u_{n+k} & \ldots & R^{k+1} u_{n+2k} \end{vmatrix}}.$$

Ainsi (1.1) et (1.2) sont égaux. De la même manière, nous allons démontrer que $\delta_{2k+2}^{(n)} - \delta_{2k}^{(n)} = \dfrac{\Delta x_{n+2k+1}}{\delta_{2k+1}^{(n+1)} - \delta_{2k+1}^{(n)}}$. En effet $\delta_{2k+2}^{n} - \delta_{2k}^{n+1} =$

$$\frac{\begin{vmatrix} u_{n+k} & \dots & u_{n+2k+1} \\ Ru_{n+k} & \dots & Ru_{n+2k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ R^{k+1}u_{n+k} & \dots & R^{k+1}u_{n+2k+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta x_{n+k} & \dots & \Delta x_{n+2k+1} \\ Ru_{n+k} & \dots & Ru_{n+2k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ R^{k+1}u_{n+k} & \dots & R^{k+1}u_{n+2k+1} \end{vmatrix}} - \frac{\begin{vmatrix} u_{n+k} & \dots & u_{n+2k} \\ Ru_{n+k} & \dots & Ru_{n+2k} \\ \vdots & & \vdots \\ R^{k}u_{n+k} & \dots & R^{k}u_{n+2k} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta x_{n+k} & \dots & \Delta x_{n+2k} \\ Ru_{n+k} & \dots & Ru_{n+2k} \\ \vdots & & \vdots \\ R^{k}u_{n+k} & \dots & R^{k}u_{n+2k} \end{vmatrix}}$$

Appliquons l'identité de Schweins ([1]), nous obtenons

$$\delta_{2k+2}^{n} - \delta_{2k}^{n+1} =$$

$$\frac{\begin{vmatrix} u_{n+k} & \dots & u_{n+2k+1} \\ \Delta x_{n+k} & \dots & \Delta x_{n+2k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ R^{k}u_{n+k} & \dots & R^{k}u_{n+2k+1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Ru_{n+k} & \dots & Ru_{n+2k} \\ \vdots & & \vdots \\ R^{k+1}u_{n+k} & \dots & R^{k+1}u_{n+2k} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta x_{n+k} & \dots & \Delta x_{n+2k+1} \\ Ru_{n+k} & \dots & Ru_{n+2k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ R^{k+1}u_{n+k} & \dots & R^{k+1}u_{n+2k+1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Delta x_{n+k} & \dots & \Delta x_{n+2k} \\ Ru_{n+k} & \dots & Ru_{n+2k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ R^{k}u_{n+k} & \dots & R^{k}u_{n+2k} \end{vmatrix}} \tag{1.4}$$

Pour le membre à droite, nous avons

$$\frac{\Delta x_{n+2k+1}}{\delta_{2k+1}^{(n+1)} - \delta_{2k+1}^{(n)}} =$$

$$\frac{\Delta x_{n+2k+1} \begin{vmatrix} Ru_{n+k+1} & \dots & Ru_{n+2k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ R^{k+1}u_{n+k+1} & \dots & R^{k+1}u_{n+2k+1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Ru_{n+k} & \dots & Ru_{n+2k} \\ \vdots & & \vdots \\ R^{k+1}u_{n+k} & \dots & R^{k+1}u_{n+2k} \end{vmatrix}}{B}$$

avec

$$B = \begin{vmatrix} \Delta x_{n+k+1} & \dots & \Delta x_{n+2k+1} \\ R^2u_{n+k+1} & \dots & R^2u_{n+2k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ R^{k+1}u_{n+k+1} & \dots & R^{k+1}u_{n+2k+1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Ru_{n+k} & \dots & Ru_{n+2k} \\ \vdots & & \vdots \\ R^{k+1}u_{n+k} & \dots & R^{k+1}u_{n+2k} \end{vmatrix} -$$

$$\begin{vmatrix} \Delta x_{n+k} & \dots & \Delta x_{n+2k} \\ R^2 u_{n+k} & \dots & R^2 u_{n+2k} \\ \vdots & & \vdots \\ R^{k+1} u_{n+k} & \dots & R^{k+1} u_{n+2k} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} R u_{n+k+1} & \dots & R u_{n+2k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ R^{k+1} u_{n+k+1} & \dots & R^{k+1} u_{n+2k+1} \end{vmatrix}$$

En appliquant l'identité de Sylvester au dénominateur B, nous obtenons

$$\Delta x_{n+2k+1} / (\delta_{2k+1}^{n+1} - \delta_{2k+1}^{n}) =$$

$$\frac{-\Delta x_{n+2k+1} \begin{vmatrix} R u_{n+k+1} & \dots & R u_{n+2k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ R^{k+1} u_{n+k+1} & \dots & R^{k+1} u_{n+2k+1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} R u_{n+k} & \dots & R u_{n+2k} \\ \vdots & & \vdots \\ R^{k+1} u_{n+k} & \dots & R^{k+1} u_{n+2k} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta x_{n+k} & \dots & \Delta x_{n+2k+1} \\ R u_{n+k} & \dots & R u_{n+2k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ R^{k+1} u_{n+k} & \dots & R^{k} u_{n+2k+1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} R^2 u_{n+k+1} & \dots & R^2 u_{n+2k} \\ \vdots & & \vdots \\ R^{k+1} u_{n+k+1} & \dots & R^{k} u_{n+2k} \end{vmatrix}} \tag{1.5}$$

Pour avoir l'égalité entre (1.4) et (1.5), il faut et il suffit de démonter que

$$\frac{\begin{vmatrix} \Delta x_{n+k} & \dots & \Delta x_{n+2k+1} \\ u_{n+k} & \dots & u_{n+2k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ R^k u_{n+k} & \dots & R^k u_{n+2k+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta x_{n+k} & \dots & \Delta x_{n+2k} \\ R u_{n+k} & \dots & R u_{n+2k} \\ \vdots & & \vdots \\ R^k u_{n+k} & \dots & R^k u_{n+2k} \end{vmatrix}} = \Delta x_{n+2k+1} \frac{\begin{vmatrix} R u_{n+k+1} & \dots & R u_{n+2k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ R^{k+1} u_{n+k+1} & \dots & R^{k+1} u_{n+2k+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R^2 u_{n+k+1} & \dots & R^2 u_{n+2k} \\ \vdots & & \vdots \\ R^{k+1} u_{n+k+1} & \dots & R^{k+1} u_{n+2k} \end{vmatrix}}$$

Le membre à gauche de l'égalité, est égal à

$$\Delta x_{n+2k+1}\frac{\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \frac{u_{n+k}}{\Delta x_{n+k}} & \dots & \frac{u_{n+2k+1}}{\Delta x_{n+2k+1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{R^k u_{n+k}}{\Delta x_{n+k}} & \dots & \frac{R^k u_{n+2k+1}}{\Delta x_{n+2k+1}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \frac{R u_{n+k}}{\Delta x_{n+k}} & \dots & \frac{R u_{n+2k}}{\Delta x_{n+2k}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{R^k u_{n+k}}{\Delta x_{n+k}} & \dots & \frac{R^k u_{n+2k}}{\Delta x_{n+2k}} \end{vmatrix}}$$

En soustrayant la première colonne de la seconde, la seconde de la troisième et ainsi de suite (au numérateur et au dénominateur), nous obtenons le membre à droite. ■

1.3 Le noyau

Le théorème1.1 est important pour l'étude des propriétés de la seconde généralisation de l'ε-algorithme, en particulier, il nous permet de déterminer implicetement le noyau. Nous avons le

Théorème 1.2 *Une condition nécéssaire et suffisante pour que:*

$$\forall n \;\; \delta_{2k}^{n} = S$$

est

$$\exists C_0, C_1, ..., C_k$$

constants, non tous nuls tels que:

$$\forall n C_0(S_{n+k} - S)\Delta x_{n+k-1} + \sum_{i=1}^{k} C_i R^i u_{n+k-1} = 0$$

Démonstration

$$\delta_{2k}^n = S \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} u_{n+k-1} - S\Delta x_{n+k-1} & \cdots & u_{n+2k-1} - S\Delta x_{n+2k-1} \\ Ru_{n+k-1} & \cdots & u_{n+2k-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R^k u_{n+k-1} & \cdots & R^k u_{n+2k-1} \end{vmatrix} = 0$$

Ce déterminant est nul si et seulement si il existe $a_0^n, ..., a_k^n$ non tous nuls tels que:

$$\begin{cases} a_0^n(u_{n+k-1} - S\Delta x_{n+k-1}) + & \cdots & +a_k^n(u_{n+2k-1} - S\Delta x_{n+2k-1}) = 0 \\ a_0^n R u_{n+k-1} + & \cdots & +a_k^n R u_{n+2k-1} = 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0^n R^k u_{n+k-1} + & \cdots & +a_k^n R^k u_{n+2k-1} = 0 \end{cases}$$

d'où $(u_{n+k-1} - S\Delta x_{n+k-1}), Ru_{n+k-1}, R^k u_{n+k-1}$ sont solutions de l'équation aux différences: $a_0^n y_n + ... + a_k^n y_{n+k} = 0$

Or l'ensemble solution de cette équation est un espace vectoriel de dimension inférieure ou égale à k([27]) et donc il existe $C_0, ..., C_k$ non tous nuls tels que: $C_0(S_{n+k} - S)\Delta x_{n+k-1} + \sum_{i=1}^k C_i R^i u_{n+k-1} = 0$

La réciproque est triviale.

Remarques

1) D'aprés le théorème1.1, on peut déduire que la seconde généralisation peut être considérée comme un cas particulier du E-algorithme [6]. En effet si l'on prend $g(n)_i = R^i u_{n-1}/(\Delta x_{n-1})$, nous aurons alors $E_k(S_{n+k}) = \delta_{2k}(S_n)$.

2) Le noyau de la première et de la seconde généralisation n'est connu explicitement que pour $k = 1$[8].

1.4 Noyaux explicites de la première et de la seconde généralisation

1.4.1 Noyau explicite de la première généralisation

Le noyau de la première généralisation de l'ε-algorithme est l'ensemble des suites $(S_n)_{n\in N}$ qui vérifient:([8])

$$(S_n - s^*)\Delta x_n = \sum_{i=1}^k a_i R^i v_n \tag{1.6}$$

où $a_i \in I\!R$; $i = 1, ..., k; v_n = S_n.\Delta x_n$ et R un opérateur défini par

$$R^{k+1}v_n = \Delta(R^k v_n/\Delta x_n); R^0 v_n = v_n$$

Nous avons démontré que le noyau de la seconde généralisation de l'ε-algorithme est formé des suites $(S_n)_{n \in I\!N}$ qui vérifient:

$$(S_{n+k} - S)\Delta x_{n+k-1} = \sum_{i=1}^{k} a_i U^i u_{n+k-1} \tag{1.7}$$

où $a_i \in I\!R$; $i = 1, ..., k$; $u_n = S_{n+1}.\Delta x_n$ et U un opérateur défini par:
$U u_n = \Delta(u_{n-1}/\Delta x_{n-1})$ et $R^{k+1}u_n = \Delta(R^k u_{n-1}/\Delta x_{n-1})$.
Dans [8], Brezinski a donné l'ensemble solution de (1.6),(1.7) pour $k = 1$. Le but de ce travail est de résoudre (1.6) et (1.7) pour k quelconque. Ainsi nous donnerons explicitement le noyau de la première et de la seconde généralistion de l'ε-algorithme.

a) Rappel

Rappelons ici un résultat élémentaire de l'algèbre linéaire. Soit V un $I\!R$-espace vectoriel (de dimension finie ou infinie)
$P : V \longrightarrow V$ un opérateur linéaire, c'est à dire que P vérifie :
$\forall \mu, \lambda \in R$, $\forall v_1, v_2 \in V$, $P(\lambda v_1 + \mu v_2) = \lambda P(v_1) + \mu P(v_2)$.
Soit $q \in V$, soit à résoudre$P(u) = 0$. Supposons connaître l'ensemble solution de l'équation $P(u) = 0$. Notons le N (noyau de P). Supposons connaître une solution particulière de l'équation $P(u) = q$.

Proposition 1.1 *L'ensemble solution S de l'équation $P(u) = q$ est*

$$S = \{u \in V | u = f + a; a \in N\}.$$

Démonstration

Soit g une solution de $P(u) = q$. On a alors $P(g - f) = 0$. Donc

$$\exists a \in N | g - f = a$$

b) Définitions et notations

SR: l'ensemble des suites réelles
SRC: l'ensemble des suites réelles convergentes
SRC_0: l'ensemble des suites réelles convergentes vers 0.

$(SR, +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension infinie.
SRC, SRC_0 sont des $\mathbb{R}$-sous-espaces vectoriels de SR.

c) Résolution de l'équation (1.6)

Revenons maintenant à la première généralisation de l'ε-algorithme. Soit $(\Delta x_n)_{n \in N}$ une suite dont les éléments $\Delta x_n \neq 0$ $\forall n$. Considérons l'opérateur

$$R : SR \longrightarrow SR; S \longrightarrow R(S)([3])$$

avec:

$$(R(S))_n = \frac{\Delta S_n}{\Delta x_n} \forall n \in N.$$

L'opérateur R est linéaire. Notons I l'opérateur

$$I : SR \longrightarrow SR; S \longrightarrow I(S) = S.$$

C'est donc l'opérateur identité.
Soit $s^* \in R$. Soit $s \in SR$ telle que $s_n = s^* \forall n \in N$ (s est donc la suite constante de valeur s_*).
L'équation (1.6) caractérisant le noyau de la première généralisation a donc une formulation équivalente :

$$S = s + \sum_{i=1}^{k} a_i R^i(S) \tag{1.8}$$

où $S, s \in SR$; a_i $i = 1, ..., k$ éléments de $\mathbb{R}$.
Nous cherchons donc l'ensemble A des suites S vérifiant (1.8) où les a_i décrivent $\mathbb{R}$. Cet ensemble est le même que celui donné par:

$$(I + \sum_{i=1}^{k} a_i R^i)(S) = s \tag{1.9}$$

Nous allons d'abord résoudre l'équation (1.9) pour $k = 2$, puis nous généraliserons à k quelconque. Pour $k = 2$, (1.9) s'écrit:

$$(I + a_1 R + a_2 R^2)(S) = s \tag{1.10}$$

Une solution particulière de (1.10) est $S = s$ car, pour toute suite à valeur constante, on a $R(s) = 0$. D'aprés la proposition1, pour trouver la solution générale de l'équation(1.10), il suffit de déterminer la solution générale de l'équation:

$$(I + a_1R + a_2R^2)(S) = 0 \tag{1.11}$$

Soient b_1 et b_2 les deux solutions du polynôme $(1 + a_1X + a_2X^2) = 0$. Il est clair que $b_1 \neq 0$ et $b_2 \neq 0$ (puisque $a_2 \neq 0$). Nous avons:

$$1 + a_1X + a_2X^2 = (1 - \frac{X}{b_1}).(1 - \frac{X}{b_2})$$

1^{er}cas :

$$\Delta = a_1^2 - 4a_2 > 0$$

Nous avons alors $b_1 \neq b_2; b_1, b_2 \in I\!R$. Dans ce cas (1.11) s'écrit :

$$(I - \frac{R}{b_1}).(I - \frac{R}{b_2}) = 0 \tag{1.12}$$

Naturellement, le produit de l'opérateur $(I - \frac{R}{b_1})$, par $(I - \frac{R}{b_2})$ est au sens de la composition. Les deux opérateurs $(I - \frac{R}{b_1})$ et $(I - \frac{R}{b_2})$ commutent, ce qui est important, comme nous allons le voir, pour la résolution de l'équation (1.10)

Théorème 1.3 *Si $\Delta = a_1^2 - 4a_2 > 0$, alors l'ensemble solution de l'équation(1.10) est formé des suites S telles que :*

$$S_n = s^* + \lambda_1 \prod_{i=0}^{n-1}(1 + b_1\Delta x_i) + \lambda_2 \prod_{i=0}^{n-1}(1 + b_2\Delta x_i)$$

où b_1 et b_2 sont solutions de $1 + a_1X + a_2X^2 = 0$
λ_1, λ_2 des nombres réels quelconques.

Démonstration

Cherchons les solutions de $(I - \frac{R}{b_1})(S) = 0$.

$$(I - \frac{R}{b_1})(S) = 0 \Longleftrightarrow \forall n \in I\!N\, S_n - \frac{(R(S))_n}{b_1} = 0.$$

$$(I - \frac{R}{b_1})(S) = 0 \Longleftrightarrow \forall n \in I\!N\, S_n - \frac{\Delta S_n}{b_1.\Delta x_n} = 0.$$

$$(I - \frac{R}{b_1})(S) = 0 \Longleftrightarrow \forall n \in I\!N\, S_n(1 + \frac{1}{b_1.\Delta x_n}) = \frac{S_{n+1}}{b_1.\Delta x_n}.$$

$$(I - \frac{R}{b_1})(S) = 0 \Longleftrightarrow \forall n \in I\!N\, S_{n+1} = (1 + b_1.\Delta x_n)S_n.$$

$$(I - \frac{R}{b_1})(S) = 0 \Longleftrightarrow \forall n \in I\!N\, S_n = \prod_{i=0}^{n-1}(1 + b_1.\Delta x_i)S_0.$$

où S_0 est un réel quelconque. De même, nous avons:

$$(I - \frac{R}{b_2})(S) = 0 \Longleftrightarrow \forall n \in I\!N\, S_n = \prod_{i=0}^{n-1}(1 + b_2.\Delta x_i)S_0.$$

où S_0 est un réel quelconque.
Pour simplifier les notations, nous prenons par convention :

$$\prod_{i=0}^{n-1}(1 + b_1.\Delta x_i) = 1 \,\mathrm{pour}\, j < 0$$

Ainsi soit S^1 la suite donnée par :

$$S_n^1 = \prod_{i=0}^{n-1}(1 + b_1.\Delta x_i)\; n \geq 0$$

soit S^2 la suite donnée par :

$$S_n^2 = \prod_{i=0}^{n-1}(1 + b_2.\Delta x_i)\ n \geq 0$$

L'ensemble solution de l'équation $(I - \frac{R}{b_1})(S) = 0$ est donc $\{\lambda S^1 | \lambda \in I\!R\}$; de même l'ensemble solution de l'équation $(I - \frac{R}{b_2})(S) = 0$ est $\{\mu S^2 | \mu \in I\!R\}$. Les deux suites S^1 et S^2 sont linéairement indépendantes. En effet

$$\beta_1 S^1 + \beta_2 S^2 = 0 \Longrightarrow \beta_1 + \beta_2 = 0\ (n = 0)$$

Supposons que $\beta_1 \neq 0$, nous avons $\beta_1(S^1 - S^2) = 0$. Ceci implique $S^1 = S^2$. En particulier pour $n = 1$, on aura : $1 + b_1 \Delta x_0 = 1 + b_2 \Delta x_0$. Ceci implique $b_1 = b_2$. Or d'après l'hypothèse $b_1 \neq b_2$. D'où $\beta_1 = \beta_2 = 0$
Démontrons maintenant que $\lambda_1 S^1 + \lambda_2 S^2$ est solution de (1.12). En effet

$$(I - \frac{R}{b_1})(I - \frac{R}{b_2})(\lambda_1 S^1 + \lambda_2 S^2) =$$

$$(I - \frac{R}{b_1})(I - \frac{R}{b_2})(\lambda_1 S^1) + (I - \frac{R}{b_1})(I - \frac{R}{b_2})(\lambda_2 S^2)$$

Or $(I - \frac{R}{b_2})(\lambda_2 S^2) = 0$. D'où

$$(I - \frac{R}{b_1})(I - \frac{R}{b_2})(\lambda_1 S^1 + \lambda_2 S^2) = (I - \frac{R}{b_1})(I - \frac{R}{b_2})(\lambda_1 S^1)$$

Comme $(I - \frac{R}{b_1})$ et$(I - \frac{R}{b_2})$ commutent,

$$(I - \frac{R}{b_1})(I - \frac{R}{b_2})(\lambda_1 S^1 + \lambda_2 S^2) = (I - \frac{R}{b_2})(I - \frac{R}{b_1})(\lambda_1 S^1) = 0$$

Comme l'ensemble solution de l'équation (1.12) est un espace vectoriel de dimension 2, il est engendré par S^1 et S^2. D'après la proposition1.1, l'ensemble solution de l'équation (1.10) est donc $S = s + \lambda_1 S^1 + \lambda_2 S_2$. En passant aux composantes:

$$S_n = s^* + \lambda_1 \prod_{i=0}^{n-1}(1 + b_1 \Delta x_i) + \lambda_2 \prod_{i=0}^{n-1}(1 + b_2 \Delta x_i)\ \blacksquare$$

Remarque

Si $\Delta x_i = cste$, on retrouve le noyau de la transformation de Shanks pour $k = 2$: $S_n = \lambda_1 a_1^n + \lambda_2 a_2^n$.

2^{ieme}cas:

$$\Delta = a_1^2 - 4a_2 = 0$$

Dans ce cas on a $b_1 = b_2 = b \neq 0$. Nous avons alors le

Théorème 1.4 *Si $\Delta = a_1^2 - 4a_2 = 0$, alors l'ensemble solution de l'équation (1.10) est formé des suites S telles que :*

$$S_n = s^n + (\lambda_1 + \lambda_2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b\Delta x_k}{1 + b\Delta x_k}) \prod_{i=0}^{n-1}(1 + b\Delta x_k) \;\; n \geq 0.$$

avec la convention :$\sum_{k=0}^{j} u_k = 0$ pour $j < 0$;$\prod_{k=0}^{j} u_k = 1$ pour $j < 0$.

Démonstration

Dans ce cas l'équation (1.12) s'écrit :

$$(I - \frac{R}{b})^2(S) = 0 \tag{1.13}$$

(1.13) est équivalente au système :

$$\begin{cases} (I - \frac{R}{b})(S) = Q & (1.14.1) \\ (I - \frac{R}{b})(Q) = 0 & (1.14.2) \end{cases} \tag{1.14}$$

Nous connaissons déjà la solution générale de l'équation (1.14.2). La solution générale de l'équation (1.14.1) s'obtient comme somme d'une solution particulière de l'équation (1.14.1) et de la solution générale de (1.14.1) sans second membre (proposition1.1).

La solution générale de (1.14.2) est :

$$Q_n = \lambda . \prod_{i=0}^{n-1}(1 + b\Delta x_i) \quad n \geq 0.$$

Avec la technique de Lagrange [27] (variation de la constante), nous allons chercher une solution particulière de (1.9.1).
posons

$$S_n = \lambda_n . \prod_{i=0}^{n-1}(1 + b\Delta x_i) \quad n \geq 0.$$

Nous avons:

$$((I - \frac{R}{b})(S))_n = S_n(1 + \frac{1}{b\Delta x_n}) - \frac{1}{b\Delta x_n} S_{n+1}.$$

$$((I - \frac{R}{b})(S))_n = \lambda_n . \prod_{i=0}^{n-1}(1 + b\Delta x_i).(1 + \frac{1}{b\Delta x_n}) - \frac{1}{b\Delta x_n}\lambda_{n+1} . \prod_{i=0}^{n}(1 + b\Delta x_i).$$

$$((I - \frac{R}{b})(S))_n = \underbrace{\lambda_n .(\prod_{i=0}^{n-1}(1 + b\Delta x_i).(1 + \frac{1}{b\Delta x_n}) - \frac{1}{b\Delta x_n}\lambda_n . \prod_{i=0}^{n}(1 + b\Delta x_i) +}$$

$$\frac{(\lambda_n - \lambda_{n+1})}{b\Delta x_n} \prod_{i=0}^{n}(1 + b\Delta x_i).$$

$$((I - \frac{R}{b})(S))_n = -\frac{\Delta \lambda_n}{b\Delta x_n} \prod_{i=0}^{n}(1 + b\Delta x_i).$$

Ce terme doit être égal à Q_n, donc:

$$-\frac{\Delta \lambda_n}{b\Delta x_n} \prod_{i=0}^{n}(1 + b\Delta x_i) = \lambda . \prod_{i=0}^{n-1}(1 + b\Delta x_i).$$

On en déduit

$$\Delta \lambda_n = -\lambda . \frac{b\Delta x_n}{1 + b\Delta x_n};$$

$$\sum_{n=0}^{k} \Delta \lambda_n = -\lambda \sum_{n}^{k} \frac{b\Delta x_n}{1 + b\Delta x_n},$$

d'où

$$\lambda_{k+1} - \lambda_0 = -\lambda \sum_{n}^{k} \frac{b\Delta x_n}{1 + b\Delta x_n}.$$

Avec la convention $\sum_{i=0}^{j} u_i = 0$ pour $j < 0$,on peut écrire:

$$\lambda_{k+1} = \lambda_0 - \lambda \sum_{k}^{n-1} \frac{b\Delta x_k}{1 + b\Delta x_k}$$

La solution particulière cherchée est donc:

$$S_n = (\lambda_0 - \lambda \sum_{n}^{k} \frac{b\Delta x_n}{1 + b\Delta x_n}) \prod_{i=0}^{n-1} (1 + b\Delta x_i) \;\; n \geq 0.$$

La solution générale de l'equation (1.13) est donc:

$$S_n = ((\lambda_0 + \mu) - \lambda \sum_{k}^{n-1} \frac{b\Delta x_k}{1 + b\Delta x_k}) \prod_{i=0}^{n-1} (1 + b\Delta x_i) \;\; n \geq 0.$$

Comme μ, λ, λ_0 sont des constantes quelconques, on peut écrire:

$$S_n = (\lambda_1 + \lambda_2 \sum_{k}^{n-1} \frac{b\Delta x_k}{1 + b\Delta x_k}) \prod_{i=0}^{n-1} (1 + b\Delta x_i) \;\; n \geq 0.$$

D'après la proposition1.1, la solution générale de l'équation (1.10) est donc :

$$S_n = s^* + (\lambda_1 + \lambda_2 \sum_{n}^{k} \frac{b\Delta x_n}{1 + b\Delta x_n}) \prod_{i=0}^{n-1} (1 + b\Delta x_i) \;\; n \geq 0. \blacksquare$$

<u>3^{ieme}cas</u>

$$\Delta = a_1^2 - 4a_2 < 0.$$

Dans ce cas b_1, b_2 sont deux complexes conjugués non nuls. (1.12) s'écrit alors:

$$(I - \frac{R}{b})(I - \frac{R}{\overline{b}})(S) = 0 \qquad (1.15)$$

Théorème 1.5 *Si* $\Delta = a_1^2 - 4a_2 < 0$ *, alors l'ensemble solution de l'équation* (1.10) *est formé des suites S telles que :*

$$S_n = s^* + \sum_{i=0}^{n} (\lambda_1 \cos(i\theta) + \lambda_2 \sin(i\theta)) A_i^{(n)}$$

où :

$$A_0^{(n)} = 1; A_i^{(n)} = r^i \sum_{0 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_i \le n-1} \Delta x_{j_1} \ldots \Delta x_{j_i} \quad 0 \le i \le n$$

avec: $b = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

Démonstration

Soient S^1, S^2 les suites :

$$S_n^1 = \prod_{i=0}^{n-1} (1 + b\Delta x_i) \quad n \ge 0$$

$$S_n^2 = \prod_{i=0}^{n-1} (1 + \bar{b}\Delta x_i) \quad n \ge 0$$

S^1, S^2 sont donc deux suites conjuguées solutions de(1.7). On en déduit que $\frac{1}{2}(S^1 + S^2)$ est une solution réelle de l'équation (1.7)., de même $\frac{1}{2i}(S^1 - S^2)$ est une solution réelle de l'équation (1.7)

Posons :

$$Y^1 = \frac{1}{2}(S^1 + S^2)$$

$$Y^2 = \frac{1}{2i}(S^1 - S^2)$$

Y^1 et Y^2 sont linéairement indépendantes.

La solution générale de (1.5) est donc $S = s + \lambda_1 Y^1 + \lambda_2 Y^2$.

Développons Y^1 et Y^2. Nous avons:

$$\prod_{i=0}^{n} (1 + b\Delta x_i) = 1 + b\sum_{i=0}^{n} \Delta x_i + b^2 \sum_{i,j=0_{i<j}}^{n} \Delta x_i . \Delta x_j + \ldots + b^{n+1} \Delta x_0 \ldots \Delta x_n.$$

Il vient alors:

$$\prod_{i=0}^{n-1} (1 + b\Delta x_i) + \prod_{i=0}^{n-1} (1 + \bar{b}\Delta x_i) =$$

$$2+(b+\overline{b})\sum_{i=0}^{n-1}\Delta x_i+(b^2+\overline{b^2})\sum_{0\leq i<j\leq n-1}^{n-1}\Delta x_i.\Delta x_j+...+(b^n+\overline{b}^n\Delta x_0...\Delta x_{n-1}.$$

D'où

$$Y^1=1+(r\cos\theta)\sum_{i=0}^{n-1}\Delta x_i+(r^2\cos(2\theta))\sum_{0\leq i<j\leq n-1}^{n-1}\Delta x_i.\Delta x_j+...+(r^n\cos(n\theta))\Delta x_0...\Delta x_{n-1}.$$

$$Y^2=1+(r\sin\theta)\sum_{i=0}^{n-1}\Delta x_i+(r^2\sin(2\theta))\sum_{0\leq i<j\leq n-1}^{n-1}\Delta x_i.\Delta x_j+...+(r^n\sin(n\theta))\Delta x_0...\Delta x_{n-1}.$$

Posons:

$$A_0^{(n)}=1;A_i^{(n)}=r^i\sum_{0\leq j_1<j_2<...<j_i\leq n-1}\Delta x_{j_1}...\Delta x_{j_i}\quad 0\leq i\leq n$$

Nous avons alors:

$$Y^1=\sum_{i=0}^{n}\cos(i\theta)A_i^n;$$

$$Y^2=\sum_{i=0}^{n}\sin(i\theta)A_i^n.$$

Nous allons résoudre maintenant l'équation (1.9) à savoir $(I+\sum_{i=1}^{k}a_iR^i)(S)=s$ pour k quelconque.
L'idée de base est de décomposer cet opérateur $(I+\sum_{i=1}^{k}a_iR^i)$ en produit d'opérateurs simples. En effet:

$$\exists b_1,...,b_k\ \in\mathbb{C}|(I+\sum_{i=1}^{k}a_iR^i)(S)=(I-\frac{R}{b_1})...(I-\frac{R}{b_k}).$$

Les $b_1,...,b_k$ ne sont autres que les racines du polynôme $1+a_1X+...+a_kX^n$.
Il est évident que toutes ces racines sont non nulles (puisque $a_k\neq 0$).
Supposons qu'il y a N_r racines réelles(sans compter la multiplicité).
Chaque racine i_r est de multiplicité m_{i_r}.
Le nombre de racines réelles en comptant la multiplicité est donc: $\sum_{ir=1}^{Nr}m_{ir}$.
Soit $2N_c$ le nombre de racines complexes (sans compter la multiplicité).
Chaque racine complexe i_c est de multiplicité m_{ic}

Le nombre de racines complexes en comptant la multiplicité est donc: $\sum_{ic=1}^{2N_c} m_{ic}$.

En décomposant en produit de facteurs simples, l'équation (1.9) s'écrit donc:

$$(I-\frac{R}{b_{1r}})^{m_{1r}}...(I-\frac{R}{b_{Nr}})^{m_{Nr}}.(I-\frac{R}{b_{1c}})^{m_{1c}}.(I-\frac{R}{\overline{b_{1c}}})^{m_{1c}}...(I-\frac{R}{b_{Nc}})^{m_{Nc}}.(I-\frac{R}{\overline{b_{Nc}}})^{m_{Nc}}(S) = s \quad (1.16)$$

D'après la proposition1.1, résoudre l'équation (1.16) revient à résoudre l'équation:

$$\prod_{ir=1}^{Nr}(I-\frac{R}{b_{ir}})^{m_{ir}}.\prod_{ic=1}^{Nc}(I-\frac{R}{b_{ic}})^{m_{ic}}.(I-\frac{R}{\overline{b_{ic}}})^{m_{ic}}(S) = 0 \quad (1.17)$$

et de trouver une solution particulière de l'équation (1.16).

Or $S = s$ est une solution particulière de l'équation (1.16). Il nous suffit donc de trouver la solution générale de (1.17). Pour cela, nous avons besoin de résoudre d'abord l'équation

$$(I-\frac{R}{b})^m(S) = 0 \quad (1.18)$$

Théorème 1.6 *L'ensemble solution de l'équation* (1.18) *est formé des suites* S *telles que:*

$$\begin{aligned} S_n &= (\lambda_1 + \lambda_2\sum_{k_1=0}^{n-1}\frac{b\Delta x_{k_1}}{1+b\Delta x_{k_1}} + \lambda_3\sum_{k_1=0}^{n-1}\sum_{k_2=0}^{k_1-1}\frac{(b\Delta x_{k_1}).(b\Delta x_{k_2})}{(1+b\Delta x_{k_1}).(1+b\Delta x_{k_2})} + \\ &\lambda_m\sum_{k_1=0}^{n-1}\sum_{k_2=0}^{k_1-1}\cdots\sum_{k_{m-1}=0}^{k_{m-2}-1}\frac{(b\Delta x_{k_1}).(b\Delta x_{k_2})...(b\Delta x_{k_{m-1}})}{(1+b\Delta x_{k_1}).(1+b\Delta x_{k_2})...(1+b\Delta x_{k_{m-1}})})\prod_{i=0}^{n-1}(1+b\Delta x_k\end{aligned}$$

où $\lambda_1,...,\lambda_m \in I\!R$

<u>Démonstration</u>

Par récurrence: Nous avons vu ci-dessus que le théorème est vrai pour $m = 1$, $m = 2$. Supposons que cela reste vrai pour un m. Démontrons que le résultat reste valable pour $m+1$. Nous cherchons donc la solution de $(I-\frac{R}{b})^{m+1}(S)=0$. Cette équation est équivalente au système suivant:

$$\left\{\begin{array}{ll} (I-\frac{R}{b})^m(S)=Q & (1.19.1) \\ (I-\frac{R}{b})(Q)=0 & (1.19.2) \end{array}\right. \tag{1.19}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, nous connaissons déjà la forme générale de la solution de (1.19.1). Reste à résoudre (1.19.2).
La solution générale de (1.19.2) s'obtient comme somme de la solution générale de $(I-\frac{R}{b})(S)=0$. et d'une solution particulière de $(I-\frac{R}{b})(S)=Q$. Or nous connaissons déjà la forme générale de la solution de $(I-\frac{R}{b})(S)=0$. Cherchons donc une solution particulière de $(I-\frac{R}{b})(S)=Q$. Pour cela, utilisons la technique de Lagrange [27](variation de la constante).

pour une solution particulière P, nous pouvons poser:

$$P_n=\lambda_n\prod_{i=0}^{n-1}(1+b\Delta x_i).$$

Nous avons alors:

$$((I-\frac{R}{b})(P))_n=-\frac{\Delta\lambda_n}{b\Delta x_n}\prod_{i=0}^{n}(1+b\Delta x_i)$$

(calcul déjà fait ci-dessus).
Nous devons donc avoir:

$$-\frac{\Delta\lambda_n}{b\Delta x_n}\prod_{i=0}^{n}(1+b\Delta x_i)=Q_n.$$

Or d'après l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} Q_n &= (\lambda_1+\lambda_2\sum_{k_1=0}^{n-1}\frac{b\Delta x_{k_1}}{1+b\Delta x_{k_1}}+\lambda_3\sum_{k_1=0}^{n-1}\sum_{k_2=0}^{k_1-1}\frac{(b\Delta x_{k_1}).(b\Delta x_{k_2})}{(1+b\Delta x_{k_1}).(1+b\Delta x_{k_2})}+ \\ &\quad \lambda_m\sum_{k_1=0}^{n-1}\sum_{k_2=0}^{k_1-1}\cdots\sum_{k_{m-1}=0}^{k_{m-2}-1}\frac{(b\Delta x_{k_1}).(b\Delta x_{k_2})\dots(b\Delta x_{k_{(m-1)}})}{(1+b\Delta x_{k_1}).(1+b\Delta x_{k_2})\dots(1+b\Delta x_{k_{(m-1)}})})\prod_{i=0}^{n-1}(1+b\Delta x_k) \end{aligned}$$

Par identification, nous aurons:

$$
\begin{aligned}
-\Delta\lambda_n &= (\lambda_1 + \lambda_2 \sum_{k_1=0}^{n-1} \frac{b\Delta x_{k_1}}{1+b\Delta x_{k_1}} + \lambda_3 \sum_{k_1=0}^{n-1}\sum_{k_2=0}^{k_1-1} \frac{(b\Delta x_{k_1}).(b\Delta x_{k_2})}{(1+b\Delta x_{k_1}).(1+b\Delta x_{k_2})} + \\
&\quad \lambda_m \sum_{k_1=0}^{n-1}\sum_{k_2=0}^{k_1-1}\cdots\sum_{k_{m-1}=0}^{k_{m-2}-1} \frac{(b\Delta x_{k_1}).(b\Delta x_{k_2})...(b\Delta x_{k_{(m-1)}})}{(1+b\Delta x_{k_1}).(1+b\Delta x_{k_2})...(1+b\Delta x_{k_{(m-1)}})})(\frac{b\Delta x_n}{1+b\Delta x_k}
\end{aligned}
$$

Nous en déduisons:

$$
\begin{aligned}
-\lambda_k &= \lambda_0 + \lambda_1 \sum_{n=0}^{k-1} \frac{b\Delta x_n}{1+b\Delta x_n} + \lambda_2 \sum_{n=0}^{k-1}\sum_{k_1=0}^{n-1} \frac{(b\Delta x_n)(b\Delta x_{k_1}}{(1+b\Delta x_{k_1})(1+b\Delta x_n)} + \\
&\quad \lambda_m \sum_{n=0}^{k-1}\sum_{k_1=0}^{n-1}\sum_{k_2=0}^{k_1-1}\cdots\sum_{k_{m-1}=0}^{k_{m-2}-1} \frac{(b\Delta x_{k_1}).(b\Delta x_{k_2})...(b\Delta x_{k_{(m-1)}})(b\Delta x_n)}{(1+b\Delta x_{k_1}).(1+b\Delta x_{k_2})...(1+b\Delta x_{k_{(m-1)}})(1+b\Delta x
\end{aligned}
$$

En faisant un changement d'indice, et comme λ_0,λ_1,..., λ_m sont des réels quelconques, nous pouvons écrire: (avec les conventions citées ci-dessous)

$$
\begin{aligned}
\lambda_n &= \lambda_1 + \lambda_2 \sum_{k_1=0}^{n-1} \frac{b\Delta x_{k_1}}{1+b\Delta x_{k_1}} + \lambda_3 \sum_{k_1=0}^{n-1}\sum_{k_2=0}^{k_1-1} \frac{(b\Delta x_n)(b\Delta x_{k_1}}{(1+b\Delta x_{k_1})(1+b\Delta x_n)} + \\
&\quad \lambda_{m+1} \sum_{k_1=0}^{n-1}\sum_{k_2=0}^{k_1-1}\sum_{k_2=0}^{k_1-1}\cdots\sum_{k_m=0}^{k_{(m-1)}-1} \frac{(b\Delta x_{k_1}).(b\Delta x_{k_2})...(b\Delta x_{k_m})(b\Delta x_n)}{(1+b\Delta x_{k_1}).(1+b\Delta x_{k_2})...(1+b\Delta x_{k_m})}.
\end{aligned}
$$

La solution générale de l'équation $(I - \frac{R}{b})^{m+1}(S) = 0$ est donc:

$$
S_n = \lambda_1 + \lambda_2 \sum_{k_1=0}^{n-1} \frac{b\Delta x_{k_1}}{1+b\Delta x_{k_1}} + \lambda_3 \sum_{k_1=0}^{n-1}\sum_{k_2=0}^{k_1-1} \frac{(b\Delta x_n)(b\Delta x_{k_1})}{(1+b\Delta x_{k_1})(1+b\Delta x_n)} +
$$

$$
\lambda_{m+1} \sum_{k_1=0}^{n-1}\sum_{k_2=0}^{k_1-1}\sum_{k_2=0}^{k_1-1}\cdots\sum_{k_m=0}^{k_{(m-1)}-1} \frac{(b\Delta x_{k_1}).(b\Delta x_{k_2})...(b\Delta x_{k_m})(b\Delta x_n)}{(1+b\Delta x_{k_1}).(1+b\Delta x_{k_2})...(1+b\Delta x_{k_m})} \prod_{i=0}^{n-1}(1+b\Delta x_i).
$$

Par simplicité, nous notons $S_n(b, \lambda_1, ..., \lambda_m)$ la solution générale de l'équation (1.18) donnée par le théorème 4, où $\lambda_1, ..., \lambda_m$ sont des réels qui décrivent $I\!R$.

Considérons maintenant l'équation:

$$(I-\frac{R}{b})^m.(I-\frac{R}{\bar{b}})^m(S)=0 \tag{1.20}$$

où b est un nombre complexe (non réel). Nous avons alors le

Théorème 1.7 *L'ensembe solution de l'équation (1.120) est formé des suites Y_n telles que $Y_n =$*

$$1/2\{(S_n(b,\lambda_1,\dots,\lambda_m)+S_n(\bar{b},\lambda_1,\dots,\lambda_m))+$$
$$1/i(S_n(b,\mu_1,\dots,\mu_m)-S_n(\bar{b},\mu_1,\dots,\mu_m))\}$$

<u>Démonstration</u>
L'intérêt de cette écriture est uniquement de donner sous forme de suites réelles la solution générale de l'équation (1.120).
Il est évident que $S(b,\lambda_1,\dots,\lambda_m)$, $S(\bar{b},\mu_1,\dots,\mu_m)$ sont solutions de (1.20) puisque $(I-\frac{R}{b})^m S(b,\lambda_1,\dots,\lambda_m)=0$ et $(I-\frac{R}{\bar{b}})^m S(\bar{b},\mu_1,\dots,\mu_m)=0$ et $(I-\frac{R}{b})^m,(I-\frac{R}{\bar{b}})^m$ commutent. Il en résulte que Y_n est solution de (1.120), en plus elle est réelle. Comme l'ensemble des Y de cette forme est $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $2m$, il en découle que c'est la forme générale.
Il est maintenant tout à fait simple de donner la solution générale de l'équation (1.17). Soit $n \in \mathbb{N}$; Si $b \in \mathbb{R}$, notons :

$$X_1(b,n)=\prod_{i=0}^{n-1}(1+b\Delta x_i).$$

$$X_2(b,n)=(\sum_{k_1=0}^{n-1}\frac{b\Delta x_{k_1}}{1+b\Delta x_{k_1}})X_1(b,n).$$

$$\vdots$$

$$X_m(b,n)=\sum_{k_1=0}^{n-1}\cdots\sum_{k_{(m-1)}=0}^{k_{(m-2)}-1}\frac{(b\Delta x_1)\cdots(b\Delta x_{k_{m-1}})}{(1+b\Delta x_1)\cdots(1+b\Delta x_{k_{m-1}})}X_1(b,n).$$

Si $b \in \mathbb{C}-\mathbb{R}$, notons:

$$Y_1(b,n)=\frac{X_1(b,n)+X_1(\bar{b},n)}{2}.$$

$$\vdots$$

$$Y_m(b,n) = \frac{X_m(b,n) + X_m(\bar{b},n)}{2}.$$

$$Z_1(b,n) = \frac{X_1(b,n) - X_1(\bar{b},n)}{2i}.$$

$$\vdots$$

$$Z_m(b,n) = \frac{X_m(b,n) - X_m(\bar{b},n)}{2i}.$$

Avec ces notations, nous pouvons énoncer le

Théorème 1.8 *Le noyau de la première généralisation de l'ε-algorithme est formé des suites S telles que :*

$$S_n = s^* + \sum_{ir=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{m_{ir}} \lambda_j^{(ir)} X_j(b_{ir}, n)$$

$$+ \sum_{ic=1}^{N_c} \sum_{j=1}^{m_{ic}} \mu_j^{(ic)} Y_j(b_{ic}, n)$$

$$+ \sum_{ic=1}^{N_c} \sum_{j=1}^{m_{ic}} \nu_j^{(ic)} Z_j(b_{ic}, n)$$

où les b_{ir} , $ir = 1, ..., N_r$; b_{ic} , $ic = 1, ..., N_c$ sont les éléments ci-dessus

$$\lambda_j^{ir} \in I\!R \;\; j = 1, ..., m_{ir}; ir = 1, ..., N_r$$

$$\mu_j^{ic} \in I\!R \;\; j = 1, ..., m_{ic}; ir = 1, ..., N_c$$

$$\nu_j^{ic} \in I\!R \;\; j = 1, ..., m_{ic}; ir = 1, ..., N_c$$

m_{ir}, m_{ic}, N_r, N_c vérifient la relation suivante :

$$\sum_{ir=1}^{Nr} m_{ir} + 2 \sum_{ic=1}^{Nc} m_{ic} = k$$

Démonstration
Le théorème est une conséquence immédiate des résultats que nous avons démontrés ci-dessus: $X_j(b_{ir},n)$, $j = 1,\ldots,m_{ir}$; $i = 1,\ldots,N_r$
$Y_j(b_{ic},n), Z_j(b_{ic},n)$ $j = 1,\ldots,m_{ic}$; $ic = 1,\ldots,N_c$ sont k suites réelles indépendantes (avec $k = \sum_{ir=1}^{Nr} m_{ir} + 2\sum_{ic=1}^{Nc} m_{ic}$).
L'ensemble solution A de l'équation (1.17) est un espace vectoriel de dimension inférieure ou égale à k. Comme les opérateurs $(I - \frac{R}{b_{ir}})$; $(I - \frac{R}{b_{ic}})$; $(I - \frac{R}{\bar{b}_{ic}})$ sont linéaires et commuttent entre eux, nous avons:
- Toute solution de $(I - \frac{R}{b_{ir}})^{m_{ir}}(S) = 0$ ou $(I - \frac{R}{b_{ic}})^{m_{ic}}(I - \frac{R}{\bar{b}_{ic}})^{m_{ic}}(S) = 0$ est solution de (1.17).
- Toute combinaison linéaire de ces solutions est solution de (1.17).
Or la solution générale de $(I - \frac{R}{b_{ir}})^{m_{ir}}(S) = 0$ est $\sum_{j=1}^{m_{ir}} \lambda_j^{(ir)} X_j(b_{ir},n)$, et la solution générale de $(I - \frac{R}{b_{ic}})^{m_{ic}}(I - \frac{R}{\bar{b}_{ic}})^{m_{ic}}(S) = 0$ est $\sum_{j=1}^{m_{ic}} \mu_j^{(ic)} Y_j(b_{ic},n) + \nu_j^{(ic)} Z_j(b_{ic},n)$. Il en résulte que

$$\sum_{ir=1}^{N_r}\sum_{j=1}^{m_{ir}} \lambda_j^{(ir)} X_j(b_{ir},n)$$
$$+\sum_{ic=1}^{N_c}\sum_{j=1}^{m_{ic}} \mu_j^{(ic)} Y_j(b_{ic},n)$$
$$+\sum_{ic=1}^{N_c}\sum_{j=1}^{m_{ic}} \nu_j^{(ic)} Z_j(b_{ic},n)$$

est solution de (1.17). Comme la dimension de A est inférieure ou égale à k, cette forme est la forme de la solution générale. $s(s_i = s^*)$ est une solution particulière de l'équation (1.16). Le résultat final découle de la proposition1.1.

1.4.2 Noyau explicite de la seconde généralisation

Le même travail peut se faire pour la seconde généralisation de l'ε-algorithme et permet ainsi d'avoir l'ensemble solution de l'équation du noyau.
Mais avant, nous devons montrer que l'équation du noyau s'écrit sous la forme suivante

$$(I + a_1G_1 + a_2G^2 + \ldots + a_kG^k)(S) = s \qquad (1.21)$$

avec,
$G : SR \longrightarrow SR$ un opérateur linéaire. La suite s étant la suite constante de valeur $s^* \in I\!R$ ($s_i = s^* \ \forall \, i$).
Nous savons que $\delta_{2k}^{(n)}$ s'écrit

$$\delta_{2k}^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} u_{n+k-1} & \dots & u_{n+2k-1} \\ Ru_{n+k-1} & \dots & Ru_{n+2k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ R^k u_{n+k-1} & \dots & R^k u_{n+2k-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta x_{n+k-1} & \dots & \Delta x_{n+2k-1} \\ Ru_{n+k-1} & \dots & Ru_{n+2k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ R^k u_{n+k-1} & \dots & R^k u_{n+2k-1} \end{vmatrix}}$$

avec $u_n = S_{n+1}\Delta x_n$
L'opérateur R est défini par $Ru_n = \Delta(\frac{u_{n-1}}{\Delta x_{n-1}})$, les puissances
$R^{k+1}u_n = \Delta(\frac{R^k u_{n-1}}{\Delta x_{n-1}})$; $\delta_{2k}^{(n)}$ peut également s'écrire

$$\delta_{2k}^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} S_{n+k} & \dots & S_{n+2k} \\ \frac{Ru_{n+k-1}}{\Delta x_{n+k-1}} & \dots & \frac{Ru_{n+2k-1}}{\Delta x_{n+2k-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{R^k u_{n+k-1}}{\Delta x_{n+k-1}} & \dots & \frac{R^k u_{n+2k-1}}{\Delta x_{n+2k-1}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \frac{Ru_{n+k-1}}{\Delta x_{n+k-1}} & \dots & \frac{Ru_{n+2k-1}}{\Delta x_{n+2k-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{R^k u_{n+k-1}}{\Delta x_{n+k-1}} & \dots & \frac{R^k u_{n+2k-1}}{\Delta x_{n+2k-1}} \end{vmatrix}}.$$

La suite Δx_n étant donnée. $\Delta x_n \neq 0 \ \forall n$. On définit l'opérateur
$G : SR \longrightarrow SR \quad S \longrightarrow G(S)$

$$(G(S))_{n+k} = (\frac{\Delta S_{n+k-1}}{\Delta x_{n+k-1}}) \tag{1.22}$$

Puisque $Ru_{n+k-1} = (\frac{\Delta u_{n+k-2}}{\Delta x_{n+k-2}}) = \Delta S_{n+k-1}$, il vient alors
$(G(S))_{n+k} = \frac{Ru_{n+k-1}}{\Delta x_{n+k-1}}$. Montrons maintenant que:

$$(G^i(S))_{n+k} = \frac{R^i u_{n+k-1}}{\Delta x_{n+k-1}}. \tag{1.23}$$

Par récurrence: Ceci est vrai pour $i = 1$
Supposons que l'égalité soit vraie pour i. Montrons que nous avons encore

$$(G^{i+1}(S))_{n+k} = \frac{R^{i+1} u_{n+k-1}}{\Delta x_{n+k-1}}.$$

En effet, $(G^{i+1}(S))_{n+k} = (G(G^i(S)))_{n+k} = \frac{\Delta(G^i(S)_{n+k-1})}{\Delta x_{n+k-1}}$.
D'après l'hypothèse de récurrence

$$(G^{i+1}(S))_{n+k} = \Delta(\frac{R^i u_{n+k-2}}{\Delta x_{n+k-2}})/\Delta x_{n+k-1} = \frac{R^{i+1} u_{n+k-1}}{\Delta x_{n+k-1}}$$

(Ceci d'après la définition de R^{i+1}). Il est évident que
$G: SR \longrightarrow SR\ S \longrightarrow G(S);\ (G(S))_{n+1} = \frac{\Delta Sn}{\Delta x_n}$
est un opérateur linéaire. Nous avons donc le

Théorème 1.9 *Soit G l'opérateur linéaire*

$$G: SR \longrightarrow SR\ S \longrightarrow G(S);\ (G(S))_{n+1} = \frac{\Delta Sn}{\Delta x_n}$$

on a

$$\delta_{2k}^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} S_{n+k} & \dots & S_{n+2k} \\ G(S)_{n+k} & \dots & G(S)_{n+k} \\ \vdots & & \vdots \\ G^k(S)_{n+k} & \dots & G^k(S)_{n+k} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ G(S)_{n+k} & \dots & G(S)_{n+k} \\ \vdots & & \vdots \\ G^k(S)_{n+k} & \dots & G^k(S)_{n+k} \end{vmatrix}}.$$

Avec G^k : la puissance k'ième de G

L'équation du noyau de la seconde généralisation de l'ε-algorithme s'écrit donc

$$S_{n+k} + \sum_{i=1}^{k} a_i (G^i(S))_{n+k} = s^* \tag{1.24}$$

Ce qui a une forme équivalente en termes d'opérateurs linéaires

$$(I + \sum_{i=1}^{k} a_i G^i)(S) = s \tag{1.25}$$

Pour résoudre cette équation, nous suivons la même démarche utilisée pour la première généralisation. Nous utilisons la même convention à savoir $\prod_{i=0}^{j} u_i = 1$ pour $j < 0$; $\sum_{i=0}^{j} u_i = 0$ pour $i < 0$.
Soient $b_1, \ldots, b_k$ les solutions du polynôme $1 + a_1 X + \ldots + a_k X^k = 0$. Les b_i; $i = 1, \ldots, k$ sont tous non nuls (car $a_k \neq 0$). L'équation ci-dessus peut s'écrire

$$(I - \frac{G}{b_1}).(I - \frac{G}{b_2}) \ldots (I - \frac{G}{b_k}) = s \tag{1.26}$$

D'après la proposition1.1, la solution générale de (1.26) s'obtient comme somme d'une solution particulière de (1.26) et de la solution générale de l'équation

$$(I - \frac{G}{b_1}).(I - \frac{G}{b_2}) \ldots (I - \frac{G}{b_k}) = 0 \tag{1.27}$$

Les opŕateurs linéaires $(I - \frac{G}{b_i})$ $i = 1, \ldots, k$ commutent entre eux, ce qui est fondamental pour la résolution.
Comme pour la première généralisation, l'ensemble solution de (1.27) est un espace vectoriel de dimension égale à k ([27]) $(aveca_k \neq 0)$

Théorème 1.10 *Si $b_i, i = 1, \ldots, k$ sont les solutions réelles simples du polynôme $1 + a_1 X + \ldots + a_k X^k = 0$, alors l'ensemble solution de l'équation (1.19) est formé des suites S telles que*

$$S_n = s^* + \lambda_1 \prod_{i=0}^{n-1} (\frac{1}{1 - b_1 \Delta x_i}) + \ldots + \lambda_k \prod_{i=0}^{n-1} (\frac{1}{1 - b_k \Delta x_i})$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ décrivent $\mathbb{R}$.

Démonstration
Il est évident que si $S^i \in SR$ est solution de

$$(I - \frac{G}{b_i}) \tag{1.28}$$

alors $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i S^i$ est solution de l'équation (1.27). Ceci résulte du fait que $(I - \frac{G}{b_i})$ sont linéaires et commutent entre eux. En effet,
$(I - \frac{G}{b_1}).(I - \frac{G}{b_2}) \dots (I - \frac{G}{b_k})(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i S^i) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_i (I - \frac{G}{b_1}).(I - \frac{G}{b_2})(S^i$
Or, comme $(I - \frac{G}{b_j})$ commutent entre eux
$(I - \frac{G}{b_1}).(I - \frac{G}{b_2}) \dots (I - \frac{G}{b_k})(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i S^i) = \sum_{i=1}^{k} \prod_{j=1, j \neq i}^{k} (I - \frac{G}{b_j})(I - \frac{G}{b_i})(S^i) = 0$
puisque $(I - \frac{G}{b_i})(S^i) = 0$.
Cherchons maintenant l'ensemble solution de l'équation (1.28).

$$(I - \frac{G}{b_1})(S) = 0 \Longrightarrow \forall n \geq 1 \; S_n - \frac{\Delta S_{n-1}}{b_1 \Delta x_{n-1}} = 0$$

$$(I - \frac{G}{b_1})(S) = 0 \Longrightarrow \forall n \geq 1 \; S_n(1 - \frac{1}{b_1 \Delta x_{n-1}}) + \frac{S_{n-1}}{b_1 \Delta x_{n-1}} = 0$$

$$(I - \frac{G}{b_1})(S) = 0 \Longrightarrow \forall n \geq 1 \; S_n = \frac{1}{1 - b_1 \Delta x_{n-1}}) S_{n-1}$$

$$(I - \frac{G}{b_1})(S) = 0 \Longrightarrow \forall n \geq 1 \; S_n = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{1 - b_1 \Delta x_i}) S_0$$

$$(I - \frac{G}{b_1})(S) = 0 \Longrightarrow \forall n \geq 1 \; S_n = \lambda_1 \prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{1 - b_1 \Delta x_i})$$

Comme b_i $i = 1, \dots, k$ sont solutions simples, les suites
$(S^i)_n = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{1}{1 - b_i \Delta x_j}$ sont linéairement indépendantes.
L'ensemble solution de l'équation (1.27) est donc formé des suites
S telles que $S_n = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{1 - b_j \Delta x_i})$.
L'ensemble solution de l'équation (1.26) est formé des suites S telles que $S_n = s^* + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{1 - b_j \Delta x_i}$, puisque s, suite de valeur constante s^* est solution particulière de (1.26) ■

Théorème 1.11 *Soeint $b_1, \dots, b_{N_r}$ les racines réelles, $c_1, \dots, c_{N_c}, \bar{c}_1, \dots, \bar{c}_{N_c}$ les racines complexes de l'équation* $1 + a_1 X + \dots + a_k X^k = 0$.

Nous supposons que toutes ces racines sont simples $(2Nc + Nr = k)$.
L'ensemble solution de l'équation (1.24) est formé des suites S *telles que*

$$S_n = s^* + \lambda_1 \prod_{i=0}^{n-1}(\frac{1}{1-b_1\Delta x_i}) + \ldots + \lambda_{Nr}\prod_{i=0}^{n-1}(\frac{1}{1-b_{Nr}\Delta x_i}) +$$

$$u_1(\prod_{j=0}^{n-1} R_j^{(1)})cos(\sum_{j=0}^{(n-1)}\theta_j^{(1)}) + \ldots + u_{Nc}(\prod_{j=0}^{n-1} R_j^{(Nc)})cos(\sum_{j=0}^{(n-1)}\theta_j^{(Nc)}) +$$

$$\nu_1(\prod_{j=0}^{n-1} R_j^{(1)})sin(\sum_{j=0}^{(n-1)}\theta_j^{(1)}) + \ldots + \nu_{Nc}(\prod_{j=0}^{n-1} R_j^{(Nc)})sin(\sum_{j=0}^{(n-1)}\theta_j^{(Nc)}).$$

où

$$\frac{1}{1-c_k\Delta x_j} = R_j^k e^{i\theta_j^{(k)}}$$

<u>Démonstration</u>
Considérons la suite réelle

$$R_n^1 = \frac{1}{2}\{\prod_{j=0}^{n-1}\frac{1}{1-c_1\Delta x_j} + \frac{1}{1-\bar{c}_1\Delta x_j}\}$$

Elle est solution de l'équation (1.27).
Posons

$$\frac{1}{1-c_1\Delta x_j} = R_j^1 e^{i\theta_j^{(1)}},$$

nous avons alors

$$R_n^1 = \frac{1}{2}\prod_{j=0}^{n-1} R_j^{(1)}(e^{i(\sum_{j=0}^{n-1}\theta_j^{(1)}} + e^{-i(\sum_{j=0}^{n-1}\theta_j^{(1)}})$$

$$R_n^1 = \frac{1}{2}\prod_{j=0}^{n-1} R_j^{(1)}cos(\sum_{j=0}^{n-1}\theta_j^{(1)}).$$

De même posons $I_n^1 = \frac{1}{2i}\{\prod_{j=0}^{n-1}(\frac{1}{1-c_1\Delta x_j}) - \prod_{j=0}^{n-1}(\frac{1}{1-\bar{c}_1\Delta x_j})\}$
Elle est solution de l'équation (1.27). De même on peut écrire:

$$I_n^1 = \frac{1}{2}\prod_{j=0}^{n-1} R_j^{(1)} sin(\sum_{j=0}^{n-1}\theta_j^{(1)}).$$

D'où les suites réelles

$$\prod_{j=0}^{n-1}(\frac{1}{1-b_i\Delta x_j}) \quad i = 1,\ldots,Nr.$$

$$R_n^l = \frac{1}{2}\prod_{j=0}^{n-1} R_j^{(l)} cos(\sum_{j=0}^{n-1}\theta_j^{(l)}) \quad l = 1,\ldots,Nc.$$

$$I_n^l = \frac{1}{2}\prod_{j=0}^{n-1} R_j^{(l)} sin(\sum_{j=0}^{n-1}\theta_j^{(l)}) \quad l = 1,\ldots,Nc.$$

sont des solutions inépendantes de l'équation (1.27). Comme $Nr + 2Nc = k$ et la dimension de l'ensemble solution de l'équation (1.27) est égale à k, on en déduit que la solution générale de (1.27) est

$$\sum_{i=1}^{Nr}\lambda_i\prod_{j=0}^{n-1}(\frac{1}{1-b_i\Delta x_j}) + \sum_{l=1}^{Nc}\nu_l R_n^{(l)} + \sum_{l=1}^{Nc}\mu_l I_n^{(l)}.$$

Comme s est une solution particulière de l'équation (1.25), nous déduisons de la proposition1.1 la solution générale de (1.25)

$$S_n = s^* + \sum_{i=1}^{Nr}\lambda_i\prod_{j=0}^{n-1}\frac{1}{1-b_i\Delta x_j} + \sum_{l=1}^{Nc}\nu_l R_n^{(l)} + \sum_{l=1}^{Nc}\mu_l I_n^{(l)},$$

où λ_i, $i = 1,\ldots,Nr$, ν_l, $l = 1,\ldots,Nc$, μ_l, $l = 1,\ldots,Nc$ sont des réels décrivant $\mathbb{R}$.
Comme pour la première généralisation, nous allons étudier le cas où une racine est multiple.
Supposons que chaque racine b_i soit de multiplicité m_i. Ainsi l'équation (1.27) s'écrit

$$(I - \frac{G}{b_1})^{m_1}\ldots(I - \frac{G}{b_N})^{m_N}(S) = 0 \tag{1.29}$$

N étant le nombre de racines du polynôme $1 + a_1X + \ldots + a_kX^k = 0$ sans naturellement compter la multiplicité. Puisque les $(I - \frac{G}{b_i})$ sont linéaires et commutent entre eux, toute solution de l'équation

$$((I - \frac{G}{b_i})^{m_i})(S) = 0 \tag{1.30}$$

est solution de (1.29). Pour donner la solution générale de l'équation (1.29), nous allons d'abord résoudre l'équation (1.30).
Résolvons d'abord l'équation (1.30) pour $m_i = 2$

$$((I - \frac{G}{b_i})^2)(S) = 0 \tag{1.31}$$

Ceci revient à résoudre le système

$$\begin{cases} (I - \frac{G}{b_i})(S) = Q & 1.32.1 \\ (I - \frac{G}{b_i})(Q) = 0 & 1.32.2 \end{cases} \tag{1.32}$$

Nous avons vu que la solution générale de l'équation (1.32.2) est

$$Q_n = \lambda \prod_{j=0}^{n-1} (\frac{1}{1 - b_i \Delta x_j})$$

La solution générale de l'équation (1.32.1) s'obtient comme somme d'une solution particulière de (1.32.1) et de la solution générale de l'équation

$$(I - \frac{G}{b_i})(S) = 0 \tag{1.33}$$

Or la solution générale de (1.33) est

$$S_n = \mu \prod_{j=0}^{n-1} (\frac{1}{1 - b_i \Delta x_j}).$$

Pour trouver une solution particulière de (1.32.1), nous utilisons la technique de Lagrange (variation de la constante). Posons

$$S_n = \mu_n \prod_{j=0}^{n-1} (\frac{1}{1 - b_i \Delta x_j}).$$

$$(I-\frac{G}{b_i})(S)=Q \Longrightarrow \forall n\geq 1\ S_n(1-\frac{1}{b_i\Delta x_{n-1}})+\frac{S_{n-1}}{b_i\Delta x_{n-1}}=Q_n$$

Or

$$S_n(1-\frac{1}{b_i\Delta x_{n-1}})+\frac{S_{n-1}}{b_i\Delta x_{n-1}}=\mu_n\underbrace{(\prod_{j=0}^{n-1}(\frac{1}{1-b_i\Delta x_j})(1-\frac{1}{b_i\delta x_{n-1}}+\frac{1}{b_i\delta x_{n-1}}\prod_{j=0}^{n-2}(\frac{1}{1-b_i\Delta x_j})}$$

$$+\frac{1}{b_i\delta x_{n-1}}(-\mu_n+\mu_{n-1}\prod_{j=0}^{n-2}(\frac{1}{1-b_i\Delta x_j})$$

Or

$$\underbrace{(\prod_{j=0}^{n-1}(\frac{1}{1-b_i\Delta x_j})(1-\frac{1}{b_i\delta x_{n-1}}+\frac{1}{b_i\delta x_{n-1}}\prod_{j=0}^{n-2}(\frac{1}{1-b_i\Delta x_j})}=0$$

D'où

$$-\frac{\Delta\mu_{n-1}}{b_i\delta x_{n-1}}\prod_{j=0}^{n-2}(\frac{1}{1-b_i\Delta x_j})=\lambda\prod_{j=0}^{n-1}(\frac{1}{1-b_i\Delta x_j})\ /;\forall n\geq 1.$$

En simplifiant, nous aurons

$$\Delta\mu_{n-1}=-\lambda\frac{b_i\Delta x_{n-1}}{1-b_i\Delta x_{n-1}}/;\forall n\geq 1.$$

Nous en déduisons

$$\mu_k=\mu_0-\lambda\sum_{n=0}^{k-1}\frac{b_i\Delta x_n}{1-b_i\Delta x_n}$$

Ainsi la solution particulière cherchée est:

$$S_n=(\mu_0-\lambda\sum_{k=0}^{n-1}\frac{b_i\Delta x_k}{1-b_i\Delta x_k})\prod_{j=0}^{n-1}(\frac{1}{1-b_i\Delta x_j}).$$

D'après la proposition1.1, la solution générale de l'équation (1.31) est

$$S_n=(\mu_1+\mu_2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{b_i\Delta x_k}{1-b_i\Delta x_k})\prod_{j=0}^{n-1}(\frac{1}{1-b_i\Delta x_j})\ \ \forall n\geq 0.$$

D'une manière générale, nous avons le

Théorème 1.12 *La solution générale de l'équation (1.30) est*

$$S_n = \{\alpha_1 + \alpha_2 \sum_{k_1=0}^{n-1} \frac{b_i \Delta x_{k_1}}{1 - b_i \Delta x_{k_1}} + \alpha_3 \sum_{k_1=0}^{n-1} \sum_{k_2=0}^{k_1-1} \frac{(b_i \Delta x_{k_1})(b_i \Delta x_{k_2})}{(1 - b_i \Delta x_{k_1})(1 - b_i \Delta x_{k_2})} + \ldots +$$

$$\alpha_{m_i} \sum_{k_1=0}^{n-1} \sum_{k_2=0}^{k_1-1} \cdots \sum_{k_{m_i-2}=0}^{k_{m_i}-1} \frac{(b_i \Delta x_{k_1}) \ldots (b_i \Delta x_{k_{m_i-1}})}{(1 - b_i \Delta x_{k_1}) \ldots (1 - b_i \Delta x_{k_{m_i-1}})}\} \prod_{j=0}^{n-1} (\frac{1}{1 - b_i \Delta x_j})$$

<u>Démonstration</u>

i désigne le numéro de la racine b_i. Nous pouvons, sans perdre la généralité, prendre $i = 1$. Le théorème est vrai pour $m_1 = 1, m_1 = 2$

Supposons que l'assertion reste vraie pour m_1. Démontrons que cela reste vrai pour $m_1 + 1$. Nous cherchons donc à résoudre l'équation

$$(I - \frac{G}{b_1})^{m_1+1}(S) = 0 \tag{1.34}$$

Cette équation est équivalente au système

$$\begin{cases} (I - \frac{G}{b_1})(S) = Q \ \ 1.35.1 \\ (I - \frac{G}{b_1})^{m_1}(Q) = 0 \ \ 1.35.2 \end{cases} \tag{1.35}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, nous connaissons déjà la solution générale de 1.35.2. La solution générale de (1.35.1) s'obtient comme somme de la solution générale de (1.35.1) sans second membre et d'une solution particulière de (1.35.1).

Comme nous l'avons déjà fait, cherchons une solution particulière sous forme $S_n = \lambda_n \prod_{i=0}^{n-1} (\frac{1}{1 - b_1 \Delta x_i})$. Nous avons déjà vu que

$$((I - \frac{G}{b_1})(S))_n = -\frac{\Delta \lambda_{n-1}}{b_1 \Delta x_{n-1}} \prod_{i=0}^{n-2} (\frac{1}{1 - b_1 \Delta x_i})$$

Nous devons donc avoir

$$-\frac{\Delta \lambda_{n-1}}{b_1 \Delta x_{n-1}} = \{\alpha_1 + \alpha_2 \sum_{k_1=0}^{n-1} \frac{b_i \Delta x_{k_1}}{1 - b_1 \Delta x_{k_1}} + \alpha_3 \sum_{k_1=0}^{n-1} \sum_{k_2=0}^{k_1-1} \frac{(b_1 \Delta x_{k_1})(b_1 \Delta x_{k_2})}{(1 - b_1 \Delta x_{k_1})(1 - b_1 \Delta x_{k_2})}$$

$$+ \ldots + \alpha_{m_1} \sum_{k_1=0}^{n-1} \sum_{k_2=0}^{k_1-1} \cdots \sum_{k_{m_i-2}=0}^{k_{m_1}-1} \frac{(b_1 \Delta x_{k_1}) \ldots (b_1 \Delta x_{k_{m_1-1}})}{(1 - b_1 \Delta x_{k_1}) \ldots (1 - b_1 \Delta x_{k_{m_1-1}})}\} (\frac{1}{1 - b_1 \Delta x_{n-1}})$$

Nous en déduisons

$$\lambda_n - \lambda_0 = -\{\alpha_1 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(b_1 \Delta x_i)}{(1 - b_1 \Delta x_i)} + \alpha_2 \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k_1=0}^{i-1} \frac{(b_1 \Delta x_{k_1})(b_1 \Delta x_i)}{(1 - b_1 \Delta x_{k_1})(1 - b_1 \Delta x_i)} +$$

$$\alpha_3 \sum_{k_1=0}^{n-1} \sum_{k_2=0}^{k_1-1} \frac{(b_1 \Delta x_{k_1})(b_1 \Delta x_{k_2})}{(1 - b_1 \Delta x_{k_1})(1 - b_1 \Delta x_{k_2})} + \ldots +$$

$$\alpha_{m_1} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k_1=0}^{i-1} \sum_{k_2=0}^{k_1-1} \cdots \sum_{k_{m_i-2}=0}^{k_{m_1}-1} \frac{(b_1 \Delta x_{k_1}) \ldots (b_1 \Delta x_{k_{m_1-1}})(b_1 \Delta x_i)}{(1 - b_1 \Delta x_{k_1}) \ldots (1 - b_1 \Delta x_{k_{m_1-1}})(1 - b_1 \Delta x_{k_i})}\}.$$

D'où en faisant le changement d'indices $i \longrightarrow k_1$, $k_j \longrightarrow k_{j+1}$ et puisque $\lambda_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m_1}$ sont des réels quelconques, nous pouvons écrire

$$\lambda_n = \alpha_1 + \alpha_2 \sum_{k_1=0}^{n-1} \frac{b_1 \Delta x_{k_1}}{1 - b_1 \Delta x_{k_1}} + \alpha_3 \sum_{k_1=0}^{n-1} \sum_{k_2=0}^{k_1-1} \frac{(b_1 \Delta x_{k_1})(b_1 \Delta x_{k_2})}{(1 - b_1 \Delta x_{k_1})(1 - b_1 \Delta x_{k_2})} + \ldots +$$

$$\alpha_{m_1+1} \sum_{k_1=0}^{n-1} \sum_{k_2=0}^{k_1-1} \cdots \sum_{k_{m_1}=0}^{k_{m_1}-1} \frac{(b_1 \Delta x_{k_1}) \ldots (b_1 \Delta x_{k_{m_1}})}{(1 - b_1 \Delta x_{k_1}) \ldots (1 - b_1 \Delta x_{k_{m_1}})}$$

Nous déduisons que la solution générale de l'équation (1.34) est

$$S_n = \{\alpha_1 + \alpha_2 \sum_{k_1=0}^{n-1} \frac{b_1 \Delta x_{k_1}}{1 - b_1 \Delta x_{k_1}} + \alpha_3 \sum_{k_1=0}^{n-1} \sum_{k_2=0}^{k_1-1} \frac{(b_1 \Delta x_{k_1})(b_1 \Delta x_{k_2})}{(1 - b_1 \Delta x_{k_1})(1 - b_1 \Delta x_{k_2})} + \ldots +$$

$$\alpha_{m_1+1} \sum_{k_1=0}^{n-1} \sum_{k_2=0}^{k_1-1} \cdots \sum_{k_{m_1}=0}^{k_{m_1}-1} \frac{(b_1 \Delta x_{k_1}) \ldots (b_1 \Delta x_{k_{m_1}})}{(1 - b_1 \Delta x_{k_1}) \ldots (1 - b_1 \Delta x_{k_{m_1}})}\} \prod_{i=0}^{n-1} (\frac{1}{1 - b_1 \Delta x_i}) \blacksquare$$

Il est maitenant simple de fournir la solution générale de l'équation (1.25). Soit Nr le nombre de racines réelles de l'équation $1 + a_1 X + \ldots + a_k X^k = 0$. Chaque racine est comptée une fois (on ne tient pas compte de la multiplicité). Chaque racine b_i $1 \leq i \geq Nr$ est de multiplicité μ_i

De même, soit $2Nc$ le nombre de racines complexes de la même équation $1 + a_1 X + \ldots + a_k X^k = 0$. Chaque racine $c_i, \bar{c}_i$ est de multiplicité ν_i.

Comme pour la première généralisation:

Soit $n \in \mathbb{N}$, si $b \in \mathbb{R}$, notons :

$$X_1(b,n) = \prod_{i=0}^{n-1} (1 - b\Delta x_i)^{-1}$$

$$X_2(b,n) = (\sum_{k_1=0}^{n-1} \frac{b\Delta x_{k_1}}{1 - b\Delta x_{k_1}})X_1(b,n).$$

$$\vdots$$

$$X_m(b,n) = \sum_{k_1=0}^{n-1} \cdots \sum_{k_{(m-1)}=0}^{k_{(m-2)}-1} \frac{(b\Delta x_1)\cdots(b\Delta x_{k_{m-1}})}{(1 - b\Delta x_1)\cdots(1 - b\Delta x_{k_{m-1}})} X_1(b,n).$$

Si $b \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, notons :

$$Y_1(b,n) = \frac{X_1(b,n) + X_1(\bar{b},n)}{2}.$$

$$\vdots$$

$$Y_m(b,n) = \frac{X_m(b,n) + X_m(\bar{b},n)}{2}.$$

$$Z_1(b,n) = \frac{X_1(b,n) - X_1(\bar{b},n)}{2i}.$$

$$\vdots$$

$$Z_m(b,n) = \frac{X_m(b,n) - X_m(\bar{b},n)}{2i}.$$

Nous pouvons énoncer le

Théorème 1.13 *Le noyau de la seconde généralisation de l'ε-algorithme est formé des suites S telles que :*

$$S_n = s^* + \sum_{ir=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{m_{ir}} \lambda_j^{(ir)} X_j(b_{ir},n)$$

$$+ \sum_{ic=1}^{N_c} \sum_{j=1}^{m_{ic}} \mu_j^{(ic)} Y_j(b_{ic},n)$$

$$+\sum_{ic=1}^{N_c}\sum_{j=1}^{m_{ic}}\nu_j^{(ic)}Z_j(b_{ic},n)$$

où les b_{ir} , $ir = 1,...,N_r; b_{ic}$, $ic = 1,...,N_c$ sont les éléments ci-dessus

$$\lambda_j^{ir} \in I\!R\ j = 1,...,m_{ir}; ir = 1,...,N_r$$
$$\mu_j^{ic} \in I\!R\ j = 1,...,m_{ic}; ir = 1,...,N_c$$
$$\nu_j^{ic} \in I\!R\ j = 1,...,m_{ic}; ir = 1,...,N_c$$

m_{ir}, m_{ic}, N_r, N_c vérifient la relation suivante :

$$\sum_{ir=1}^{Nr} m_{ir} + 2\sum_{ic=1}^{Nc} m_{ic} = k$$

Démonstration
Même démarche à suivre que celle de la démonstration du théorème1.6

Chapitre 2

Les Désignants. Définitions et Propriétés

2.1 Introduction

Les méthodes d'extrapolation et leurs applications (résolution des systèmes d'équations linéaires, approximation d'une limite ou anti-limite d'une suite, accélération de la convergence d'une suite,..., [5]) utilisées jusqu'à présent, ont pour "corps de base" les corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ où la loi multiplicative est commutative.

La théorie d'une grande majorité de ces méthodes repose fondamentalement sur la théorie des déterminants. Ces derniers servent à construire des algorithmes récursifs correspondants à ces méthodes d'extrapolation (E-algorithme [6], ε-algorithme [39], ...).

L'idée motrice du chapitre suivant est de répondre à la question suivante: est-il possible de généraliser ces méthodes d'extrapolation à "un corps de base" dont la loi multiplicative est non commutative. Un tel corps est dit gauche ou non commutatif.

Il y a plusieurs difficultés à surmonter, principalement la suivante: les déterminants n'existent pas sur un corps (ou un anneau) non commutatif. C'est à dire:

Soit $\mathbb{K}$ un corps (ou un anneau) non commutatif.
$\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$: l'ensemble des matrices carrées à coefficients dans $\mathbb{K}$. On entend par déterminant, toute application det:

$$\mathbb{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$A \longrightarrow det(A)$$

qui vérifie:
1) det est multilinéaire.
2) $det(A) = 0 \Longleftrightarrow A$ non inversible.
3) $det(A.B) = det(A).det(B)$.
Le théorème de Dyson ([20], [31]) affirme que si l'on a une application det qui satisfait 1),2) et 3) alors la loi multiplicative sur $\mathbb{K}$ est forçément commutative.

J. Dieudonné [18] a montré le rôle important que joue la commutativité

de la loi mutiplicative dans la théorie des déterminants. Ainsi, étant donné un corps $\mathbb{K}$ commutatif ou non, $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} - 0$; C : l'ensemble (le groupe) des commutateurs du groupe $\mathbb{K}^*$.
$\mathbb{K}^*/C$: le groupe $\mathbb{K}^*$ quotienté par le groupe distingué C. Dieudonné définit une application

$$det : \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow (\mathbb{K}^*/C) \cup 0,$$

qui vérifie bien les propriétés 1),2) et 3) et qui coïncide avec le déterminant habituel quand le corps est commutatif. Dans le cas non commutatif, la valeur de *det* n'est plus dans $\mathbb{K}$, mais dans $(\mathbb{K}^*) \cup 0$. C'est à dire *det* est une classe d'equivalence. Cette théorie n'est donc d'aucune utilité pour nos méthodes d'extrapolation sur un corps non commutatif.

O.Ore [33] définit un certain "déterminant" d'un système d'équations linéaires à coefficients dans $\mathbb{K}$ (corps non commutatif). Mais l'absence de relation de récurrence rend cette définition inexploitable.

Un travail qui nous sera par contre d'une grande utilité pour les deux chapitres suivants est celui d'Heyting [29]. C'est pour cette raison que nous lui consacrons ce chapitre. Les résultats donnés dans [29] sont cités sans démonstration.

2.2 Désignants

Soit $\mathbb{K}$ un corps non commutatif. Soit le système d'équations linéaires homogénes à deux inconnues x_1, x_2 à coefficients à droite

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} = 0 \\ \qquad\qquad a_{ij} \in \mathbb{K} \;\; i,j = 1,2 \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} = 0 \end{array} \right. \tag{2.1}$$

Supposons que $a_{11} \neq 0$. En éliminant l'inconnue x_1 de la seconde équation, on aura:

$$x_2(a_{22} - a_{12}a_{11}^{-1}a_{21}) = 0.$$

On note alors

$$\Delta_d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}_d = a_{22} - a_{12}a_{11}^{-1}a_{21}.$$

Δ_d: s'appelle le d.désignant (désignant à droite) du système 2.1
La lettre d indique que le désignant en question est un désignant d'un système d'équations linéaires à coefficients à droite. Elle indique également le sens du calcul.
De même, soit le système d'équations linéaires homogènes à deux inconnues x_1, x_2 à coefficients à gauche

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ \qquad\qquad a_{ij} \in I\!\!K \;\; i,j = 1,2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0 \end{array}\right. \tag{2.2}$$

Supposons que $a_{11} \neq 0$. En éliminant l'inconnue x_1 de la seconde équation, on aura:

$$(a_{22} - a_{21}a_{11}^{-1}a_{12})x_2 = 0.$$

On note alors

$$\Delta_g = \left| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right|_g = a_{22} - a_{21}a_{11}^{-1}a_{12}.$$

Δ_g: s'appelle le g.désignant (désignant à gauche) du système 2.2
La lettre g indique que le désignant en question est un désignant d'un système d'équations linéaires à coefficients à gauche. Elle indique également le sens du calcul.
Si $\Delta_d \neq 0$ (respectivement $\Delta_g \neq 0$) le système 2.1 (respectivement le système 2.2) a l'unique solution triviale.
Si $\Delta_d = 0$ (respectivement $\Delta_g = 0$) le système 2.1 (respectivement le système 2.2) a plusieurs solutions.
Avant de passer au cas général, faisons la même chose pour le système d'équations linéaires homogènes à trois inconnues x_1, x_2, x_3 à coefficients à droite:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1a_{11} + x_2a_{12} + x_3a_{13} = 0 \\ x_1a_{21} + x_2a_{22} + x_3a_{23} = 0 \\ x_1a_{31} + x_2a_{32} + x_3a_{33} = 0 \end{array}\right. \qquad a_ij \in I\!\!K \;\; i,j = 1,2 \tag{2.3}$$

Supposons que $a_{11} \neq 0$. En éliminant x_1 de la première et de la seconde équation, nous aurons:

$$\left\{\begin{array}{l} x_2(a_{22} - a_{12}a_{11}^{-1}a_{21}) + x_3(a_{23} - a_{13}a_{11}^{-1}a_{21}) = 0 \\ x_2(a_{32} - a_{12}a_{11}^{-1}a_{21}) + x_3(a_{33} - a_{13}a_{11}^{-1}a_{31}) = 0 \end{array}\right.$$

Supposons que $a_{22} - a_{12}a_{11}^{-1}a_{21} \neq 0$, nous aurons:

$$x_3 \begin{vmatrix} a_{22} - a_{12}a_{11}^{-1}a_{21} & a_{23} - a_{13}a_{11}^{-1}a_{21} \\ a_{32} - a_{12}a_{11}^{-1}a_{21} & a_{33} - a_{13}a_{11}^{-1}a_{31} \end{vmatrix}_d = 0.$$

le coefficient $\begin{vmatrix} a_{22} - a_{12}a_{11}^{-1}a_{21} & a_{23} - a_{13}a_{11}^{-1}a_{21} \\ a_{32} - a_{12}a_{11}^{-1}a_{21} & a_{33} - a_{13}a_{11}^{-1}a_{31} \end{vmatrix}_d$ s'appelle le d.désignant du système 2.3

On note

$$\Delta_d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}_d =$$

$$\begin{vmatrix} a_{22} - a_{12}a_{11}^{-1}a_{21} & a_{23} - a_{13}a_{11}^{-1}a_{21} \\ a_{32} - a_{12}a_{11}^{-1}a_{21} & a_{33} - a_{13}a_{11}^{-1}a_{31} \end{vmatrix}_d = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}_d & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}_d \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}_d & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}_d \end{vmatrix}_d$$

De la même manière, pour un système d'équations linéaires homogènes à trois inconnues x_1, x_2, x_3 à coefficients à gauche

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases} \qquad a_ij \in I\!K \;\; i,j = 1,2 \tag{2.4}$$

en supposant que $a_{11} \neq 0$ et $(a_{22} - a_{21}a_{11}^{-1}a_{12}) \neq 0$, nous aurons

$$\Delta_g x_3 = 0$$

Δ_g s'appelle le g.désignant du système 2.4

On note $\Delta_g = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, et est égal à $\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}_g & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}_g \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}_g & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}_g \end{vmatrix}_g$.

Remarque

Le d.désignant $\Delta_d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}_d$ n'a de sens que si son mineur principal $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}_d \neq 0$. Celui-ci n'a de sens que si $a_{11} \neq 0$. Ainsi Δ_d existe si tous les mineurs principaux sont différents de 0. Ceci est valable pour les g.désignants.

Cas général

Soit le système d'équations linéaires homogènes à n inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$ à coefficients à droite

$$\begin{cases} x_1a_{11} + x_2a_{12} + \ldots + x_na_{1n} = 0 \\ x_1a_{21} + x_2a_{22} + \ldots + x_na_{2n} = 0 \qquad a_{ij} \in \mathbb{K}\ i,j = 1,..,n \\ \vdots \\ x_1a_{n1} + x_2a_{n2} + \ldots + x_na_{nn} = 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

Avec le même procédé d'élimination des inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, on arrive à $x_n\Delta_d = 0$.

Δ_d: s'appelle le d.désignant du système 2.5 et l'on note

$$\Delta_d = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & nn \end{vmatrix}_d$$

Δ_d a un sens que si son mineur principal $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-11} & \cdots & nn-1 \end{vmatrix}_d$ a un sens et est différent de zéro.

A son tour $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-11} & \cdots & n-1n-1 \end{vmatrix}_d$ a un sens que si son mineur principal $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-21} & \cdots & n-2n-2 \end{vmatrix}_d$ a un sens et est différent de zéro. Ainsi de suite. Donc $\Delta_d = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & nn \end{vmatrix}_d$ a un sens si tous les mineurs principaux $a_{11}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}_d, \ldots, \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-11} & \cdots & a_{n-1n-1} \end{vmatrix}_d$ sont différents de zéro.

De même, considérons le système d'équations linéaires homogènes à n inconnues à coefficients à gauche.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \qquad a_{ij} \in I\!\!K \ i,j = 1,..,n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

Avec le même procédé d'élimination des inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, on arrive à $\Delta_g x_n = 0$.

Δ_g: s'appelle le g.désignant du système 2.6 et l'on note

$$\Delta_g = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & nn \end{vmatrix}_g$$

$\Delta_g = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & nn \end{vmatrix}_g$ a un sens si tous les mineurs principaux

$a_{11}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}_g, \ldots, \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-11} & \cdots & a_{n-1n-1} \end{vmatrix}_g$ sont différents de zéro.

2.3 Propriétés

2.3.1 Notations

Soit $\Delta_d = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & nn \end{vmatrix}_d$

A_{pq}: le d.désignant d'ordre $(n-1)$ obtenu à partir de Δ_d en gardant les lignes $1, 2, .., n-2, p$ et les colonnes $1, 2, .., n-2, q$.

A^p: le d.désignant d'ordre p obtenu à partir de Δ en gardant les lignes $1, 2, .., p$ et les colonnes $1, .., p$.

A^p_{qr}: le d.désignant d'ordre $p+1$ obtenu à partir de Δ_d en gardant les lignes $1, .., p, q$ et les colonnes $1, 2, .., p, r$ $(q, r > p)$. Ainsi on a: $A^{(p)}_{p+1,p+1} = A^{(p+1)}$.

2.3.2 Relations de récurrence, identité de Sylvester

Propriété 2.1

$$\Delta_d = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & nn \end{vmatrix}_d = \begin{vmatrix} A^{(p)}_{p+1,p+1} & \cdots & A^{(p)}_{p+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{(p)}_{n,p+1} & \cdots & A^{(p)}_{n,n} \end{vmatrix}_d$$

En mettant $p = n-2$, on obtient l'analogue de l'identité de Sylvester ([1]):

$$\Delta_d = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & nn \end{vmatrix}_d = \begin{vmatrix} A^{(n-2)}_{n-1,n-1} & A^{(n-2)}_{n-1,n} \\ A^{(n-2)}_{n,n-1} & A^{(n-2)}_{n,n} \end{vmatrix}_d$$

2.3.3 Relation entre désignant et déterminant

Soit D le déterminant du système 2.5 quand le corps $I\!K$ est commutatif. Δ_d le d.désignant du même système (ici $\Delta_d = \Delta_g$). On a alors

Propriété 2.2

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & nn \end{vmatrix}_d = \Delta_d . A^{(n-1)} ... A^{(2)} . a_{11}$$

2.3.4 Multiplication d'une ligne ou d'une colonne par un nombre

Propriété 2.3 *Un d.désignant d'ordre n ne change pas si l'on multiplie à droite la ligne i différente de la dernière ($i \neq n$) par un élément $\lambda \in I\!K^*$.*

Si l'on multiplie à droite la dernière ligne par un élément $\lambda \in I\!K$, le d.désignant obtenu est multiplié à droite par λ.

exemple: $\lambda \neq 0$

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda & a_{12}\lambda \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}_d = a_{22} - (a_{12}\lambda).(a_{11}\lambda)^{-1}a_{21} = a_{22} - a_{12}\lambda.(\lambda)^{-1}a_{11}^{-1}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}_d .$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}\lambda & a_{22}\lambda \end{vmatrix}_d = a_{22}\lambda - a_{12}.a_{11}^{-1}a_{21}\lambda == \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}_d \lambda.$$

Propriété 2.4 *Un d.désignant d'ordre n ne change pas si l'on multiplie à gauche la colonne i différente de la dernière ($i \neq n$) par un élément $\lambda in I\!K^*$.*

Si l'on multiplie à gauche la dernière colonne par un élément $\lambda \in I\!K$, le d.désignant est multiplié à gauche par λ.

exemple: $\lambda \neq 0$

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}_d = a_{22}-a_{12}.(\lambda a_{11})^{-1}\lambda a_{21} = a_{22}-a_{12}a_{11}^{-1}\lambda^{-1}.\lambda a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}_d .$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & \lambda a_{22} \end{vmatrix}_d = \lambda a_{22} - \lambda a_{12}.a_{11}^{-1}a_{21} == \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}_d .$$

Remarque

Les propriétés 2.3 et 2.4 sont donc différentes de celles connues pour les déterminants.

2.3.5 Relation entre d.désignant et g.désignant

Propriété 2.5

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_g$$

Propriété 2.6

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-11} & \cdots & a_{n-1n} \\ a_{n1}+b_{n1} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{vmatrix}_d = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-11} & \cdots & a_{n-1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_d + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-11} & \cdots & a_{n-1n} \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}_d$$

Propriété 2.7

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn}+b_{nn} \end{vmatrix}_d =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix}_d + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & b_{nn} \end{vmatrix}_d$$

2.3.6 Lignes proportionnelles

Définition 2.1 *Deux lignes $A_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$, $A_j = (a_{j1}, \ldots, a_{jn})$ sont proportionnelles à droite s'il existe $\lambda \in I\!K$ tel que $A_i = A_j\lambda$*
Elles sont proportionnelles à gauche s'il existe $\lambda \in I\!K$ tel que $A_i = \lambda A_j$
Même définition pour les colonnes

Propriété 2.8 *Le d.désignant est égal à zéro si la dernière ligne et une autre ligne supérieure sont proportionnelles à droite.*

Exemple

$$\begin{vmatrix} a_{21}\lambda & a_{22}\lambda \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}_d = a_{22} - a_{22}\lambda lambda^{-1}{a_{21}}^{-1}a_{21} = a_{22} - a_{22} = 0.$$

Propriété 2.9 *Le d.désignant est égal à zéro si la dernière colonne et une autre colonne sont proportionnelles à gauche.*

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{21} & a_{22} \\ \lambda a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}_d = a_{22} - a_{12}{a_{12}}^{1}\lambda^{-1}\lambda a_{22} = 0.$$

2.3.7 Permutation de deux lignes, de deux colonnes

Propriété 2.10 *Si l'on permute la ligne i avec la ligne j, toutes les deux différentes de la dernière ($i \neq n$, $j \neq n$), si le d.désignant existe, alors ces deux désignants sont égaux. C'est à dire*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_d = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_d$$

Propriété 2.11 *Si l'on permute la colonne i avec la colonne j, toutes les deux différentes de la dernière ($i \neq n$, $j \neq n$), si le d.désignant existe, alors ces deux désignants sont égaux. C'est à dire*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_d = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_d$$

2.3.8 Addition de lignes

Propriété 2.12 *Le d.désignant ne change pas si l'on ajoute à la ligne p la ligne q multipliée à droite par un élément $\lambda \in \mathbb{K}$, avec $p \neq q$, $q \neq n$. C'est à dire*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{p1} + a_{q1}\lambda & \cdots & a_{pn} + a_{qn}\lambda \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_d = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_d \quad q \neq n.$$

Propriété 2.13 *Un d.désignant est une fonction linéaire à coefficients à droite en éléments de sa dernière colonne*

Remarque

Toutes les propriétés citées ci-dessus restent valables si l'on remplace d.désignant par g.désignant, à condition de remplacer chaque mot colonne par ligne et chaque mot ligne par colonne.

Nous complétons ces propriétés par les suivantes:

Propriété 2.14 *Un d.désignant est également fonction linéaire à coefficients à gauche en éléments de sa dernière ligne.*

Démonstration

La propriété est vraie pour un d.désignant d'ordre 2.

En effet $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}_d = a_{22} - (a_{12}a_{11}^{-1})a_{21}$.

Supposons que la propriété soit vraie pour les d.désignants d'ordre $n-1$. On a

$$\begin{vmatrix} A_{22}^{(1)} & \cdots & A_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_d = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{n2}^{(1)} & \cdots & A_{nn}^{(1)} \end{vmatrix}_d .$$

Seuls les éléments $A_{nj}^{(1)}$ contiennent les éléments de la derniére ligne.
D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $B_2, \ldots, B_n$ indépendants de la dernière ligne, tels que $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_d = B_2 A_{n2}^{(1)} + \ldots + B_n A_{nn}^{(1)}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_d = B_2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{n1} & a_{n2} \end{vmatrix}_d + \ldots + B_n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix}_d$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_d = B_2 a_{n2} - (B_2 a_{12} a_{11}) a_{n1} + \ldots + B_n a_{nn} - (B_n a_{1n} a_{11}^{-1}) a_{n1}$$

D'où l'on déduit: $\exists\ C_1, \ldots, C_n$ indépendants de la dernière ligne:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_d = c_1 a_{n1} + \ldots + c_n a_{nn}. \quad \blacksquare$$

Propriété 2.15 *Le d.désignant ne change pas si l'on ajoute à la colonne p la colonne q multipliée à gauche par un élément $\lambda \in I\!K$, avec $p \neq q$, $q \neq n$.*

Démonstration

La propriété est vraie pour un d.désignant d'ordre 2.
En effet $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + \lambda a_{11} \\ a_{21} & a_{22} + \lambda a_{21} \end{vmatrix}_d = a_{22} + \lambda a_{21} - (a_{12} + \lambda a_{11}) a_{11}^{-1} a_{21}$

qui est égal à $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}_d$

Supposons que la propriété soit vraie pour les désignants d'ordre $n-1$. Considérons le d.désignant d'ordre n

$$\Delta_d = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} + \lambda a_{1q} & \cdots & a_{1q} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} + \lambda a_{nq} & \cdots & a_{nq} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_d$$

$$\Delta_d = \begin{vmatrix} A^1_{22} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1p}+\lambda a_{1q} \\ a_{21} & a_{1p}+\lambda a_{2q} \end{vmatrix}_d & \cdots & A_{2q} & \cdots & A^1_{2n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ A^1_{n2} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1p}+\lambda a_{1q} \\ a_{n1} & a_{np}+\lambda a_{nq} \end{vmatrix}_d & \cdots & A_{nq} & \cdots & A^1_{nn} \end{vmatrix}_d$$

D'après la propri $\acute{}$ té 2.7

$$\Delta_d = \begin{vmatrix} A^1_{22} & \cdots & A^1_{2p}+\lambda A^1_{2q} & \cdots & A^1_{2q} & \cdots & A^1_{2n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ A^1_{n2} & \cdots & A^1_{np}+\lambda A^1_{nq} & \cdots & A^1_{nq} & \cdots & A^1_{nn} \end{vmatrix}_d$$

Soit $p > 1$. $A^1_{iq} = 0$ $i = 2, \ldots, n$ et

$$\Delta_d = \begin{vmatrix} A^1_{22} & \cdots & A^1_{2p} & \cdots & A^1_{2q} & \cdots & A^1_{2n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ A^1_{n2} & \cdots & A^1_{np} & \cdots & A^1_{nq} & \cdots & A^1_{nn} \end{vmatrix}_d = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_d$$

Si $p = 1$, on aura:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{1q} & a_{12} & \cdots & a_{1q} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n1}+\lambda a_{nq} & a_{n2} & \cdots & a_{nq} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_d =$$

$$\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{1q} & a_{12} \\ a_{21}+\lambda a_{2q} & a_{22} \end{vmatrix}_d & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{1q} & a_{1q} \\ a_{21}+\lambda a_{2q} & a_{2q} \end{vmatrix}_d & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{1q} & a_{1n} \\ a_{21}+\lambda a_{2q} & a_{2n} \end{vmatrix}_d \\ \vdots & & & & \vdots \\ \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{1q} & a_{12} \\ a_{n1}+\lambda a_{nq} & a_{n2} \end{vmatrix}_d & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{1q} & a_{1q} \\ a_{n1}+\lambda a_{nq} & a_{nq} \end{vmatrix}_d & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{1q} & a_{1n} \\ a_{n1}+\lambda a_{nq} & a_{nn} \end{vmatrix}_d \end{vmatrix}_d . \quad (a)$$

Par ailleurs on a:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{1q} & a_{1r} \\ a_{21}+\lambda a_{2q} & a_{2r} \end{vmatrix}_d = a_{2r} - a_{1r}(a_{11}+\lambda a_{1q})^{(-1)}(a_{21}+\lambda a_{2q}) \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{1q} & a_{1r} \\ a_{21}+\lambda a_{2q} & a_{2r} \end{vmatrix}_d =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1r} \\ a_{21} & a_{2r} \end{vmatrix}_d + a_{1r}a_{11}^{-1}a_{21} - a_{1r}(a_{11}+\lambda a_{1q})^{-1}(a_{21}+\lambda a_{2q}).$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1r} \\ a_{21} & a_{2r} \end{vmatrix}_d - a_{1r}(a_{11}+\lambda a_{1q})^{-1}\{-(a_{11}+\lambda a_{1q})a_{11}^{-1}a_{21} + a_{21} + \lambda a_{2q}\} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1r} \\ a_{21} & a_{2r} \end{vmatrix}_d - a_{1r}(a_{11}+\lambda a_{1q})^{-1}\{-a_{21} - \lambda a_{1q})a_{11}^{-1}a_{21} + a_{21} + \lambda a_{2q}\}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1r} \\ a_{21} & a_{2r} \end{vmatrix}_d - a_{1r}(a_{11}+\lambda a_{1q})^{-1}\lambda\{-a_{21} - a_{1q})a_{11}^{-1}a_{21}\}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1r} \\ a_{21} & a_{2r} \end{vmatrix}_d - a_{1r}(a_{11} + \lambda a_{1q})^{-1}\lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1q} \\ a_{21} & a_{2q} \end{vmatrix}_d$$

Si $r = q$ nous aurons:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \lambda a_{1q} & a_{1q} \\ a_{21} + \lambda a_{2q} & a_{2q} \end{vmatrix}_d = \{1 - a_{1q}(a_{11} + \lambda a_{1q})^{-1}\lambda\} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1q} \\ a_{21} & a_{2q} \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda a_{1q} & a_{1q} \\ a_{21} + \lambda a_{2q} & a_{2q} \end{vmatrix}_d =$$

$$(a_{1q}(a_{11} + \lambda a_{1q})^{-1})((a_{11} + \lambda a_{1q})a_{1q}^{-1} - \lambda) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1q} \\ a_{21} & a_{2q} \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda a_{1q} & a_{1q} \\ a_{21} + \lambda a_{2q} & a_{2q} \end{vmatrix}_d =$$

$$a_{1q}(a_{11} + \lambda a_{1q})^{-1} a_{11} a_{1q}^{-1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1q} \\ a_{21} & a_{2q} \end{vmatrix}_d$$

En injectant ces formules dans (a) et en utilisant la propriété 2.4 et l'hypothèse de récurrence, on a le résultat. ■

2.3.9 Autres propriétés

Pour les besoins des chapitres 3 et 4, nous allons démontrer certaines propriétés.

Propriété 2.16

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k-2} & a_{1k-1} & a_{1k} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{k-11} & \cdots & a_{k-1k-2} & a_{k-1k-1} & a_{k-1k} \\ v_{k1} & \cdots & v_{kk-2} & v_{kk-1} & v_{kk} \end{vmatrix}_d =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k-2} & a_{1k} & a_{1k-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{k-11} & \cdots & a_{k-1k-2} & a_{k-1k} & a_{k-1k-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}_d^{-1} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k-2} & a_{1k} & a_{1k-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{k-11} & \cdots & a_{k-1k-2} & a_{k-1k} & a_{k-1k-1} \\ v_{k1} & \cdots & v_{kk-2} & v_{kk} & v_{kk-1} \end{vmatrix}_d$$

Ainsi la propriété 2.16 donne explicitement le facteur multiplicatif, quand on permute la dernière colonne avec une autre (ici l'avant dernière).

Démonstration

Pour $k = 2$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{vmatrix}_d = v_{22} - a_{12}a_{11}^{-1}v_{21} = a_{12}a_{11}^{-1}(a_{11}a_{12}^{-1}v_{22} - v_{21})$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{vmatrix}_d = -a_{12}a_{11}^{-1}(v_{21} - a_{11}a_{12}^{-1}v_{22})$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{vmatrix}_d = (-a_{11}a_{12})^{-1}(v_{21} - a_{11}a_{12}^{-1}v_{22})$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{vmatrix}_d = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ 1 & 0 \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ v_{22} & v_{21} \end{vmatrix}_d$$

Pour $k = 3$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}_d^{-1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ v_{31} & v_{33} & v_{32} \end{vmatrix}_d =$$

$$-\left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}_d^{-1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}_d \right)^{-1} \times$$

$$\left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ v_{31} & v_{32} \end{vmatrix}_d - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}_d^{-1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ v_{31} & v_{33} \end{vmatrix}_d \right)$$

Or $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}_d = 1$. D'où

$$= -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}_d^{-1} \times$$

$$\left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ v_{31} & v_{32} \end{vmatrix}_d - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}_d^{-1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ v_{31} & v_{33} \end{vmatrix}_d \right)$$

$$= -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}_d^{-1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ v_{31} & v_{32} \end{vmatrix}_d + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ v_{31} & v_{33} \end{vmatrix}_d .$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{vmatrix}_d$$

Pour k quelconque, on aura

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1k-2} & a_{1k} & a_{1k-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{k-11} & \cdots & a_{k-1k-2} & a_{k-1k} & a_{k-1k-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{matrix}\right|_d^{-1} \left|\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1k-2} & a_{1k} & a_{1k-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{k-11} & \cdots & a_{k-1k-2} & a_{k-1k} & a_{k-1k-1} \\ v_{k1} & \cdots & v_{kk-2} & v_{kk} & v_{kk-1} \end{matrix}\right|_d =$$

$$\left\{0 - \left|\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1k-2} & a_{1k-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k-11} & \cdots & a_{k-1k-2} & a_{k-1k-1} \end{matrix}\right|_d \left|\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1k-2} & a_{1k} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k-11} & \cdots & a_{k-1k-2} & a_{k-1k} \end{matrix}\right|_d^{-1} \right.$$

$$\left. \left|\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1k-2} & a_{1k} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k-21} & \cdots & a_{k-2k-2} & a_{k-2k} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{matrix}\right|_d \right\}^{-1} \times \left\{ \left|\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1k-2} & a_{1k-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k-21} & \cdots & a_{k-2k-2} & a_{k-2k-1} \\ v_{k1} & \cdots & v_{kk-2} & v_{kk-1} \end{matrix}\right|_d \right.$$

$$- \left|\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1k-2} & a_{1k-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k-11} & \cdots & a_{k-1k-2} & a_{k-1k-1} \end{matrix}\right|_d \left|\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1k-2} & a_{1k} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k-11} & \cdots & a_{k-1k-2} & a_{k-1k} \end{matrix}\right|_d^{-1}$$

$$\left. \left|\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1k-2} & a_{1k} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k-21} & \cdots & a_{k-2k-2} & a_{k-2k} \\ v_{k1} & \cdots & v_{kk-2} & v_{kk} \end{matrix}\right|_d \right\}$$

Or $\left|\begin{matrix} u_{11} & \cdots & & u_{1k} \\ \vdots & & \vdots & \\ u_{k-11} & \cdots & & u_{k-1k} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{matrix}\right| = 1$. En effet, ceci est vrai pour k=2 (calcul direct).

Supposons que cette propriété soit vraie pour des désignants de cette forme d'ordre $(k-1)$. On a

$$U = \left|\begin{matrix} u_{11} & \cdots & & u_{1k} \\ \vdots & & \vdots & \\ u_{k-11} & \cdots & & u_{k-1k} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{matrix}\right|_d = \left|\begin{matrix} u_{11} & \cdots & u_{1k-2} & u_{1k} \\ \vdots & & \vdots & \\ u_{k-21} & \cdots & u_{k-2k-2} & u_{k-2k} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{matrix}\right|_d -$$

$$\begin{vmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1k-2} & u_{1k} \\ \vdots & & \vdots & \\ u_{k-11} & \cdots & u_{k-1k-2} & u_{k-1k} \end{vmatrix}_d \times \begin{vmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1k-2} & u_{1k-1} \\ \vdots & & \vdots & \\ u_{k-11} & \cdots & u_{k-1k-2} & u_{k-1k-1} \end{vmatrix}_d^{-1} \times$$

$$\begin{vmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1k-2} & u_{1k-1} \\ \vdots & & \vdots & \\ u_{k-21} & \cdots & u_{k-2k-2} & u_{k-2k-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_d$$

Or le dernier facteur du deuxième terme de l'égalité est nul.
D'où d'après l'hypothèse de récurrence, on aura $U = 1$. D'où

$$\Delta = -\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k-2} & a_{1k} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k-11} & \cdots & a_{k-1k-2} & a_{k-1k} \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k-2} & a_{1k-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k-11} & \cdots & a_{k-1k-2} & a_{k-1k-1} \end{vmatrix}_d^{-1} \times$$

$$\left\{ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k-2} & a_{1k-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k-21} & \cdots & a_{k-2k-2} & a_{k-2k-1} \\ v_{k1} & \cdots & v_{kk-2} & v_{kk-1} \end{vmatrix}_d - \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k-11} & \cdots & a_{k-1k-1} \end{vmatrix}_d \right.$$

$$\left. \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k-2} & a_{1k} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k-11} & \cdots & a_{k-1k-2} & a_{k-1k} \end{vmatrix}_d^{-1} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k-2} & a_{1k} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k-21} & \cdots & a_{k-2k-2} & a_{k-2k} \\ v_{k1} & \cdots & v_{kk-2} & v_{kk} \end{vmatrix}_d \right\}$$

$$\Delta = -\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k-2} & a_{1k} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k-11} & \cdots & a_{k-1k-2} & a_{k-1k} \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k-2} & a_{1k-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k-11} & \cdots & a_{k-1k-2} & a_{k-1k-1} \end{vmatrix}_d^{-1} \times$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k-2} & a_{1k-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k-21} & \cdots & a_{k-2k-2} & a_{k-2k-1} \\ v_{k1} & \cdots & v_{kk-2} & v_{kk-1} \end{vmatrix}_d + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k-2} & a_{1k} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k-21} & \cdots & a_{k-2k-2} & a_{k-2k} \\ v_{k1} & \cdots & v_{kk-2} & v_{kk} \end{vmatrix}_d$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k-2} & a_{1k-1} & a_{1k} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{k-11} & \cdots & a_{k-1k-2} & a_{k-1k-1} & a_{k-1k} \\ v_{k1} & \cdots & v_{kk-2} & v_{kk-1} & v_{kk} \end{vmatrix}_d . \quad \blacksquare$$

Propriété 2.17

$$\begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1k-1} & a_{1k} & a_{1k+1} \\ a_{22} & \cdots & a_{2k-1} & a_{2k} & a_{2k+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k-12} & \cdots & a_{k-1k-1} & a_{k-1k} & a_{k-1k+1} \\ a_{k2} & \cdots & a_{kk-1} & a_{kk} & a_{kk+1} \end{vmatrix}_d - \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1k-1} & a_{11} & a_{1k+1} \\ a_{22} & \cdots & a_{2k-1} & a_{21} & a_{2k+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k-12} & \cdots & a_{k-1k-1} & a_{k-11} & a_{k-1k+1} \\ a_{k2} & \cdots & a_{kk-1} & a_{k1} & a_{kk+1} \end{vmatrix}_d =$$

$$\begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1k-1} & a_{1k+1} \\ a_{22} & \cdots & a_{2k-1} & a_{2k+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{k-12} & \cdots & a_{k-1k-1} & a_{k-1k+1} \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k-12} & \cdots & a_{k-1k} \end{vmatrix}_d^{-1} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}_d$$

La propriété 2.17 donne sous forme d'un produit la différence de deux désignants qui ne diffèrent que d'une seule colonne.

Démonstration

La propriété est vraie pour $k = 3$. En effet

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}_d - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{14} \\ a_{22} & a_{21} & a_{24} \\ a_{32} & a_{31} & a_{34} \end{vmatrix}_d$$

$$= \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}_d^{-1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}_d$$

$$- \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}_d^{-1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}_d$$

$$= \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}_d^{-1}$$

$$\left\{ \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}_d - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}_d^{-1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}_d \right\}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}_d^{-1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}_d$$

$$= \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}_d^{-1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}_d$$

Pour le cas général, la démonstration se fait de la même manière. Posons E

le membre gauche de l'égalité de la propriťé 2.17. En développant :

$$E = \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1k-1} & a_{1k+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k-12} & \cdots & a_{k-1k-1} & a_{k-1k+1} \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k-12} & \cdots & a_{k-1k} \end{vmatrix}_d^{-1} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k-22} & \cdots & a_{k-2k} \\ a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}_d -$$

$$\begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1k-1} & a_{1k+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k-12} & \cdots & a_{k-1k-1} & a_{k-1k+1} \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1k-1} & a_{11} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k-12} & \cdots & a_{k-1k-1} & a_{k-11} \end{vmatrix}_d^{-1}$$

$$\begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1k-1} & a_{11} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k-22} & \cdots & a_{k-2k-1} & a_{k-21} \\ a_{k2} & \cdots & a_{kk-1} & a_{k1} \end{vmatrix}_d$$

$$= \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1k-1} & a_{1k+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k-12} & \cdots & a_{k-1k-1} & a_{k-1k+1} \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k-12} & \cdots & a_{k-1k} \end{vmatrix}_d^{-1} \times$$

$$\left\{ \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k-22} & \cdots & a_{k-2k} \\ a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}_d - \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k-12} & \cdots & a_{k-1k} \end{vmatrix}_d \times \right.$$

$$\left. \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1k-1} & a_{11} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k-12} & \cdots & a_{k-1k-1} & a_{k-11} \end{vmatrix}_d^{-1} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1k-1} & a_{11} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k-22} & \cdots & a_{k-2k-1} & a_{k-21} \\ a_{k2} & \cdots & a_{kk-1} & a_{k1} \end{vmatrix}_d \right\}$$

On obtient donc
$E =$

$$\begin{vmatrix} a_{12}\cdots & a_{1k-1} & a_{1k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k-12}\cdots & a_{k-1k-1} & a_{k-1k+1} \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} a_{12}\cdots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots \\ a_{k-12}\cdots & a_{k-1k} \end{vmatrix}_d^{-1} \begin{vmatrix} a_{12}\cdots & a_{1k-1} & a_{11} & a_{1k} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k-12}\cdots & a_{k-1k-1} & a_{k-11} & a_{k-1k} \\ a_{k2}\cdots & a_{kk-1} & a_{k1} & a_{kk} \end{vmatrix}$$

Le résultat provient directement en appliquant la propriété 2.11 au dernier désignant du produit. ■

2.3.10 L'identité de Schweins

Nous allons proposer une identité verifiée par les désignants qui est l'analogue de l'identité de Schweins pour les determinants [1].

Propriété 2.18

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & h_1 \\ \dots & & & \dots \\ a_{k+11} & \dots & a_{k+1k} & h_{k+1} \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_1 \\ \dots & & & \dots \\ a_{k+11} & \dots & a_{k+1k} & a_{k+1} \end{vmatrix}_d^{-1}$$

$$-\begin{vmatrix} a_{12} & \dots & a_{1k} & h_1 \\ \dots & & & \dots \\ a_{k2} & \dots & a_{kk} & h_k \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} a_{12} & \dots & a_{1k} & a_1 \\ \dots & & & \dots \\ a_{k2} & \dots & a_{kk} & a_k \end{vmatrix}_d^{-1}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{12} & \dots & a_{1k} & a_1 & h_1 \\ \dots & & & & \dots \\ a_{k+12} & \dots & a_{k+1k} & a_{k+1} & h_{k+1} \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_1 \\ \dots & & & \dots \\ a_{k+11} & \dots & a_{k+1k} & a_{k+1} \end{vmatrix}_d^{-1}$$

Démonstration
Pour $k = 1$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & h_1 \\ a_{21} & h_2 \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_{21} & a_2 \end{vmatrix}_d^{-1} - h_1 a_1^{-1} =$$

$$\left\{ \begin{vmatrix} a_{11} & h_1 \\ a_{21} & h_2 \end{vmatrix}_d - h_1 a_1^{-1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_{21} & a_2 \end{vmatrix}_d \right\} \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_{21} & a_2 \end{vmatrix}_d^{-1}$$

$$= h_2 - h_1 a_{11}^{-1} a_{21} - h_1 a_1^{-1}(a_2 - a_1 a_{11}^{-1} a_{21})) \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_{21} & a_2 \end{vmatrix}_d^{-1}$$

$$= (h_2 - h_1 a_1^{-1} a_2) \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_{21} & a_2 \end{vmatrix}_d^{-1}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & h_1 \\ a_2 & h_2 \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_{21} & a_2 \end{vmatrix}_d^{-1}$$

Pour $k = 2$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & h_1 \\ a_{21} & a_{22} & h_2 \\ a_{31} & a_{32} & h_3 \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_3 \end{vmatrix}_d^{-1} -$$

$$\begin{vmatrix} a_{12} & h_1 \\ a_{22} & h_2 \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} a_{12} & a_1 \\ a_{22} & a_2 \end{vmatrix}_d^{-1} =$$

$$\left\{ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & h_1 \\ a_{21} & a_{22} & h_2 \\ a_{31} & a_{32} & h_3 \end{vmatrix}_d - \begin{vmatrix} a_{12} & h_1 \\ a_{22} & h_2 \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} a_{12} & a_1 \\ a_{22} & a_2 \end{vmatrix}_d^{-1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_3 \end{vmatrix}_d \right\}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_3 \end{vmatrix}_d^{-1}$$

d'après la propriété 2.11:

$$= \left\{ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & h_1 \\ a_{21} & a_{22} & h_2 \\ a_{31} & a_{32} & h_3 \end{vmatrix}_d - \begin{vmatrix} a_{12} & h_1 \\ a_{22} & h_2 \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} a_{12} & a_1 \\ a_{22} & a_2 \end{vmatrix}_d^{-1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_1 \\ a_{22} & a_{21} & a_2 \\ a_{32} & a_{31} & a_3 \end{vmatrix}_d \right\}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_3 \end{vmatrix}_d^{-1}$$

En développant ce qui est entre parenthèse

$$= \left\{ \begin{vmatrix} a_{12} & h_1 \\ a_{32} & h_3 \end{vmatrix}_d - \begin{vmatrix} a_{12} & h_1 \\ a_{22} & h_2 \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}_d^{-1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}_d - \begin{vmatrix} a_{12} & h_1 \\ a_{22} & h_2 \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} a_{12} & a_1 \\ a_{22} & a_2 \end{vmatrix}_d^{-1} \times \right.$$

$$\left. \left(\begin{vmatrix} a_{12} & a_1 \\ a_{32} & a_3 \end{vmatrix}_d - \begin{vmatrix} a_{12} & a_1 \\ a_{22} & a_2 \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}_d^{-1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}_d \right) \right\} \times \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} a_1 \\ a_{21} & a_{22} a_2 \\ a_{31} & a_{32} a_3 \end{vmatrix}_d^{-1}$$

$$= \left\{ \begin{vmatrix} a_{12} & h_1 \\ a_{32} & h_3 \end{vmatrix}_d - \begin{vmatrix} a_{12} & h_1 \\ a_{22} & h_2 \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} a_{12} & a_1 \\ a_{22} & a_2 \end{vmatrix}_d^{-1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_1 \\ a_{32} & a_3 \end{vmatrix}_d \right\} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_3 \end{vmatrix}_d^{-1}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{12} & a_1 & h_1 \\ a_{22} & a_2 & h_2 \\ a_{32} & a_3 & h_3 \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_3 \end{vmatrix}_d^{-1}$$

Pour le cas général, la démonstration se fait de la même manière. En effet posons

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & h_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k+11} & \dots & a_{k+1k} & h_{k+1} \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k+11} & \dots & a_{k+1k} & a_{k+1} \end{vmatrix}_d^{-1} -$$

$$\begin{vmatrix} a_{12} & \dots & a_{1k} & h_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k2} & \dots & a_{kk} & h_k \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} a_{12} & \dots & a_{1k} & a_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k2} & \dots & a_{kk} & a_k \end{vmatrix}_d^{-1} =$$

$$\left\{ \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & h_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k+11} & \dots & a_{k+1k} & h_{k+1} \end{vmatrix}_d - \begin{vmatrix} a_{12} & \dots & a_{1k} & h_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k2} & \dots & a_{kk} & h_k \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} a_{12} & \dots & a_{1k} & a_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k2} & \dots & a_{kk} & a_k \end{vmatrix}_d^{-1} \right.$$

$$\left. \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k+11} & \dots & a_{k+1k} & a_{k+1} \end{vmatrix}_d \right\} \times \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k+11} & \dots & a_{k+1k} & a_{k+1} \end{vmatrix}_d^{-1}$$

Posons

$$a = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k+11} & \dots & a_{k+1k} & a_{k+1} \end{vmatrix}_d$$

En permutant la 1^{ere} colonne avec l'avant dernière du premier terme et du troisième facteur du second terme

$$= \left\{ \begin{vmatrix} a_{1k} & a_{12} & \dots & a_{1k-1} & a_{11} & h_1 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{k+1k} & a_{k+12} & \dots & a_{k+1k-1} & a_{k+11} & h_{k+1} \end{vmatrix}_d - \begin{vmatrix} a_{12} & \dots & a_{1k} & h_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k2} & \dots & a_{kk} & h_k \end{vmatrix}_d \right.$$

$$\left. \begin{vmatrix} a_{12} & \dots & a_{1k} & a_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k2} & \dots & a_{kk} & a_k \end{vmatrix}_d^{-1} \begin{vmatrix} a_{1k} & a_{12} & \dots & a_{1k-1} & a_{11} & a_1 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{k+1k} & a_{k+12} & \dots & a_{k+1k-1} & a_{k+11} & a_{k+1} \end{vmatrix}_d \right\} a^{-1}$$

En développant le premier terme et le troisième facteur du second terme

$$= \left\{ \begin{vmatrix} a_{1k} & a_{12} & \cdots & a_{1k-1} & h_1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{k-11k} & a_{k-12} & \cdots & a_{k-1k-1} & h_{k-1} \\ a_{k+1k} & a_{k+12} & \cdots & a_{k+1k-1} & h_{k+1} \end{vmatrix}_d - \begin{vmatrix} a_{1k} & a_{12} & \cdots & a_{1k-1} & h_1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{kk} & a_{k2} & \cdots & a_{kk-1} & h_k \end{vmatrix}_d \right.$$

$$\begin{vmatrix} a_{1k} & a_{12} & \cdots & a_{1k-1} & a_{11} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{kk} & a_{k2} & \cdots & a_{kk-1} & a_{k1} \end{vmatrix}_d^{-1} \begin{vmatrix} a_{1k} & a_{12} & \cdots & a_{1k-1} & a_{11} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{k-1k} & a_{k-12} & \cdots & a_{k-1k-1} & a_{k-11} \\ a_{k+1k} & a_{k+12} & \cdots & a_{k+1k-1} & a_{k+11} \end{vmatrix}_d -$$

$$\begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1k} & h_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k2} & \cdots & a_{kk} & h_k \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1k} & a_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k2} & \cdots & a_{kk} & a_k \end{vmatrix}_d^{-1} \left(\begin{vmatrix} a_{1k} & a_{12} & \cdots & a_{1k-1} & a_1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{k-1k} & a_{k-12} & \cdots & a_{k-1k-1} & a_{k-1} \\ a_{k+1k} & a_{k+12} & \cdots & a_{k+1k-1} & a_{k+1} \end{vmatrix}_d \right.$$

$$- \begin{vmatrix} a_{1k} & a_{12} & \cdots & a_{1k-1} & a_1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{kk} & a_{k2} & \cdots & a_{kk-1} & a_k \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} a_{1k} & a_{12} & \cdots & a_{1k-1} & a_{11} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{kk} & a_{k2} & \cdots & a_{kk-1} & a_{k1} \end{vmatrix}_d^{-1}$$

$$\left. \left. \begin{vmatrix} a_{1k} & a_{12} & \cdots & a_{1k-1} & a_{11} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{k-1k} & a_{k-12} & \cdots & a_{k-1k-1} & a_{k-11} \\ a_{k+1k} & a_{k+12} & \cdots & a_{k+1k-1} & a_{k+11} \end{vmatrix}_d \right) \right\} a^{-1}$$

En simplifiant

$$= \left\{ \begin{vmatrix} a_{1k} & a_{12} & \cdots & a_{1k-1} & h_1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{k-11k} & a_{k-12} & \cdots & a_{k-1k-1} & h_{k-1} \\ a_{k+1k} & a_{k+12} & \cdots & a_{k+1k-1} & h_{k+1} \end{vmatrix}_d - \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1k} & h_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k2} & \cdots & a_{kk} & h_k \end{vmatrix}_d \right.$$

$$\left. \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1k} & a_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k2} & \cdots & a_{kk} & a_k \end{vmatrix}_d^{-1} \begin{vmatrix} a_{1k} & a_{12} & \cdots & a_{1k-1} & a_1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{k-1k} & a_{k-12} & \cdots & a_{k-1k-1} & a_{k-1} \\ a_{k+1k} & a_{k+12} & \cdots & a_{k+1k-1} & a_{k+1} \end{vmatrix}_d \right\} a^{-1}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1k} & a_{12} & \cdots & a_{1k-1} & a_1 & h_1 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{kk} & a_{k2} & \cdots & a_{kk-1} & a_k & h_k \\ a_{k+1k} & a_{k+12} & \cdots & a_{k+1k-1} & a_{k+1} & h_{k+1} \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & a_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k+11} & \cdots & a_{k+1k} & a_{k+1} \end{vmatrix}_d^{-1}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & \dots & a_{1k} & a_1 & h_1 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{k2} & a_{k2} & \dots & a_{kk} & a_k & h_k \\ a_{k+12} & a_{k+12} & \dots & a_{k+1k} & a_{k+1} & h_{k+1} \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k+11} & \dots & a_{k+1k} & a_{k+1} \end{vmatrix}_d^{-1} . \blacksquare$$

Dépendance linéaire de lignes ou colonnes.

Nous notons :

$$c^i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}, l^i = \begin{bmatrix} a_{1i} & \dots & a_{in} \end{bmatrix}$$

Propriété 2.19

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots a a_{1n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

si et seulement si les vecteurs colonnes sont linéairement dépendants à gauche. C'est à dire
$\exists\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in I\!K$ *non tous nuls tels que :*
$\lambda_1 c^1 + \dots + \lambda_n c^n = 0.$

Démonstration

Considérons le système d'équations linéaires homogènes à coefficients à droite

$$\begin{cases} x_1 a_{11} + \dots + x_n a_{1n} = 0 \\ \vdots \\ x_1 a_{n1} + \dots + x_n a_{nn} = 0 \end{cases}$$

Nous avons vu que $x_n \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$

Si $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$, le système ci-dessus aura une solution $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ différente de la solution triviale nulle. Donc, les vecteurs colonnes seront linéairement dépendants à gauche.

Réciproquement, supposons que les vecteurs colonnes soient linéairement

dépendants à gauche. Si le d.désignant $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$, on aura $x_n = 0$.
Mais en remontant le procédé d'élimination, on aura également
$$\begin{cases} x_{n-1}A^{n-2}_{n-1n-1} + x_n A^{n-2}_{n-1n} = 0 \\ x_{n-1}A^{n-2}_{nn-1} + x_n A^{n-2}_{nn} = 0 \end{cases}$$
Or $A^{n-2}_{n-1n-1} \neq 0$ (d.désignant principal de $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}_d$)
Comme $x_n = 0$, on aura $x_{n-1} = 0$. Ainsi de suite, en remontant le procédé d'élimination jusqu'au système ci-dessus.
Comme $x_n = x_{n-1} = \ldots = x_2 = 0$ et $a_{11} \neq 0$, on aura $x_1 = 0$. Ce qui est contradictoire avec l'hypothèse . ■

Propriété 2.20

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}_d = 0 \iff$$

les vecteurs lignes sont linéairement dépendants à droite. C'est à dire
$\exists\, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}$ *non tous nuls tels que*
$l^1\beta_1 + \ldots + l^n\beta_n = 0$

Démonstration

Considérons le système d'équations linéaires homogènes à coefficients à gauche
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{n1}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{1n}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$
On démontre de la même manière que ci-dessus:
$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}_g = 0 \iff$ les vecteurs lignes sont linéairement dépendants à droite.
Comme $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}_d = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}_g$ (propriété 2.5), le résultat est immédiat. ■

Chapitre 3

Extrapolation sur un corps non commutatif $\mathbb{K}$

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, quand $\mathbb{K}$ est non commutatif, nous montrons que les désignants jouent un rôle important pour la méthode d'extrapolation linéaire non commutative, pour la transformation de Shanks "non commutative", aussi important que le rôle des déterminants pour ces mêmes méthodes, quand $\mathbb{K}$ est commutatif. Ces désignants sont à la base de la construction des versions non commutatives du E-algorithme et de l'ε-algorithme.
Ainsi, au §1, nous présentons le problème d'extrapolation linéaire dans un corps non commutatif $\mathbb{K}$. Deux formulations naturelles du problème apparaîssent.
Au §2, nous résolvons le problème en présentant deux versions du E-algorithme: ${}^{d}E$-algorithme et ${}^{g}E$-algorithme.
Au §3, nous traitons le cas vectoriel.
Au §4, nous présentons la transformation de Shanks. Là aussi, il y a deux formulations.
Le §5 est consacré à la construction de l'algorithme correspondant à ces deux formulations de la transformation.

3.2 Méthode d'extrapolation générale sur un corps $\mathbb{K}$ non commutatif

Dans [6], Brezinski a proposé une méthode d'extrapolation générale sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Le but de ce travail est de voir si l'on peut construire une méthode analogue sur un corps non commutatif (ou même un anneau unitaire non commutatif). La grande difficulté provient du fait que, sur un anneau non commutatif, les déterminants n'existent pas (§1 ch.2). Cette difficulté sera surmontée grâce à l'utilisation des désignants.

Soit $\mathbb{K}$ un corps gauche. Soit (S_n) une suite d éléments de $\mathbb{K}$ telle que: $\exists\, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$, $\exists\, g_1(n), \ldots, g_k(n) \in \mathbb{K}$, $\exists\, S \in K$

$$S_n = a_1 g_1(n) + a_2 g_2(n) + \ldots + a_k g_k(n) + S \quad \forall n \tag{3.1}$$

Pour exprimer S en fonction des termes de la suite (S_n), on résoud le système d'équations linéaires à coefficients à droite suivant:

$$\left\{\begin{array}{l} S_n = a_1 g_1(n) + a_2 g_2(n) + \ldots + a_k g_k(n) + S \\ S_{n+1} = a_1 g_1(n+1) + a_2 g_2(n+1) + \ldots + a_k g_k(n+1) + S \\ \vdots \\ S_{n+k} = a_1 g_1(n+k) + a_2 g_2(n+k) + \ldots + a_k g_k(n+k) + S \end{array}\right. \tag{3.2}$$

On suppose toujours que ce système (3.2) est non singulier, ce qui est équivalent à dire que son d.désignant est non nul.
Si la suite (S_n) n'a pas la forme exacte (3.1), S dépendra de k et de n, et on le notera ${}^dE_k(S_n)$. On a alors

$${}^dE_k(S_n) = \begin{vmatrix} g_1(n) & \ldots & g_k(n) & S_n \\ g_1(n+1) & \ldots & g_k(n+1) & S_{n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_1(n+k) & \ldots & g_k(n+k) & S_{n+k} \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} g_1(n) & \ldots & g_k(n) & 1 \\ g_1(n+1) & \ldots & g_k(n+1) & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_1(n+k) & \ldots & g_k(n+k) & 1 \end{vmatrix}_d^{-1} \tag{3.3}$$

De même, soit (S_n) une suite d'éléments de $I\!\!K$ telle que: $\exists\ a_1, \ldots, a_k \in I\!\!K$, $\exists\ g_1(n), \ldots, g_k(n) \in I\!\!K$, $\exists\ S \in K$

$$S_n = g_1(n)a_1 + g_2(n)a_2 + \ldots + g_k(n)a_k + S \quad \forall n \tag{3.4}$$

Pour exprimer S en fonction des termes de la suite (S_n), on résoud le système d'équations linéaires à coefficients à gauche suivant:

$$\left\{\begin{array}{l} S_n = g_1(n)a_1 + g_2(n)a_2 + \ldots + g_k(n)a_k + S \\ S_{n+1} = g_1(n+1)a_1 + g_2(n+1)a_2 + \ldots + g_k(n+1)a_k + S \\ \vdots \\ S_{n+k} = g_1(n+k)a_1 + g_2(n+2)a_2 + \ldots + g_k(n+k)a_k + S \end{array}\right. \tag{3.5}$$

On suppose toujours que ce système (3.5) est non singulier ce qui est équivalent à dire que son d.désignant est non nul.
Si la suite (S_n) n'a pas la forme exacte (3.4), S dépendra de k et de n, et on

le notera ${}^gE_k(S_n)$. On a alors

$$
{}^gE_k(S_n) = \begin{vmatrix} g_1(n) & \dots & g_k(n) & 1 \\ g_1(n+1) & \dots & g_k(n+1) & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_1(n+k) & \dots & g_k(n+k) & 1 \end{vmatrix}_g^{-1} \begin{vmatrix} g_1(n) & \dots & g_k(n) & S_n \\ g_1(n+1) & \dots & g_k(n+1) & S_{n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_1(n+k) & \dots & g_k(n+k) & S_{n+k} \end{vmatrix}_g \tag{3.6}
$$

3.3 Un algorithme récursif

Naturellement le grand problème est: comment peut-on calculer ces éléments ${}^dE_k(S_n)$ sans calculer les désignants?
Nous allons donner une version de E-algorithme ([6]), version non commutative, qui nous permet de calculer récursivement les ${}^dE_k(S_n)$. Cet algorithme est le suivant: on considère les quantités ${}^dE_k^{(n)}$ et ${}^dg_{k,i}^{(n)}$ calculées par

Initialisation:

${}^dE_0^{(n)} = S_n$; $n = 0, 1, \dots$
${}^dd_{0,i}^{(n)} = g_i(n)$; $i = 1, 2, \dots$; $n = 0, 1, \dots$

Itération:

Pour $k = 1, 2, \dots$; $n = 0, 1, \dots$
$${}^dE_k^{(n)} = \{{}^dE_{k-1}^{(n+1)}({}^dg_{k-1,k}^{(n+1)})^{-1} - {}^dE_{k-1}^{(n)}({}^dg_{k-1,k}^{(n)})^{-1}\}\{({}^dg_{k-1,k}^{(n+1)})^{-1} - ({}^dg_{k-1,k}^{(n)})^{-1}\}^{-1}$$

$${}^dg_{k,i}^{(n)} = \{{}^dg_{k-1,i}^{(n+1)}({}^dg_{k-1,k}^{(n+1)})^{-1} - {}^dg_{k-1,i}^{(n)}({}^dg_{k-1,k}^{(n)})^{-1}\}\{({}^dg_{k-1,k}^{(n+1)})^{-1} - ({}^dg_{k-1,k}^{(n)})^{-1}\}^{-1}$$
$i = k+1, k+2, \dots$

Remarque
Si $I\!\!K$ est commutatif, cette version coïncide avec le E-algorithme.

Pour ces quantités, on a le

Théorème 3.1

$${}^dE_k^{(n)} = {}^dE_k(S_n) \tag{3.7}$$

Démonstration:
Nous allons démontrer simultanément:

$$\begin{cases} {}^dE_k^n = {}^dE_k(S_n) \\ {}^dg_{k,i}(n) = \begin{vmatrix} g_1(n) & \dots & g_k(n) & g_i(n) \\ g_1(n+1) & \dots & g_k(n+1) & g_i(n+1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_1(n+k) & \dots & g_k(n+k) & g_i(n+k) \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} g_1(n) & \dots & g_k(n) & 1 \\ g_1(n+1) & \dots & g_k(n+1) & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_1(n+k) & \dots & g_k(n+k) & 1 \end{vmatrix}_d^{-1} \end{cases} \quad (3.8)$$

Par récurrence
(3.8) est vérifiée pour $k = 0$
Supposons qu'elle soit vérifiée pour $(k-1)$.
Posons:

$$A = \begin{vmatrix} g_1(n) & \dots & g_k(n) & S_n \\ g_1(n+1) & \dots & g_k(n+1) & S_{n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_1(n+k) & \dots & g_k(n+k) & S_{n+k} \end{vmatrix}_d = \begin{vmatrix} g_1(n+1) & \dots & g_k(n+1) & S_{n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_1(n+k-1) & \dots & g_k(n+k-1) & S_{n+k-1} \\ g_1(n) & \dots & g_k(n) & S_n \\ g_1(n+k) & \dots & g_k(n+k) & S_{n+k} \end{vmatrix}_d$$

(propriété 10).
En appliquant l'identité de Sylvester (propriété 10 du chap.2) $A =$

$$\begin{vmatrix} g_1(n+1) & \dots & g_{k-1}(n+1) & S_{n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_1(n+k) & \dots & g_{k-1}(n+k) & S_{n+k} \end{vmatrix}_d - \begin{vmatrix} g_1(n+1) & \dots & g_{k-1}(n+1) & S_{n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_1(n+k-1) & \dots & g_{k-1}(n+k-1) & S_{n+k-1} \\ g_1(n) & \dots & g_{k-1}(n) & S_n \end{vmatrix}_d \times$$

$$\begin{vmatrix} g_1(n+1) & \dots & g_k(n+1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1(n+k-1) & \dots & g_k(n+k-1) \\ g_1(n) & \dots & g_k(n) \end{vmatrix}_d^{-1} \begin{vmatrix} g_1(n+1) & \dots & g_k(n+1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1(n+k) & \dots & g_k(n+k) \end{vmatrix}_d$$

Posons:

$$J = \begin{vmatrix} g_1(n+1) & \dots & g_k(n+1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1(n+k) & \dots & g_k(n+k) \end{vmatrix}_d,$$

$$B = \begin{vmatrix} g_1(n+1) & \dots & g_k(n+1) & S_{n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_1(n+k) & \dots & g_{k-1}(n+k) & S_{n+k} \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} g_1(n+1) & \dots & g_k(n+1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1(n+k) & \dots & g_k(n+k) \end{vmatrix}_d^{-1} \text{ et}$$

$$C = \begin{vmatrix} g_1(n+1) & \dots & g_{k-1}(n+1) & S_{n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_1(n+k-1) & \dots & g_{k-1}(n+k-1) & S_{n+k-1} \\ g_1(n) & \dots & g_{k-1}(n) & S_n \end{vmatrix}_d$$

$$\begin{vmatrix} g_1(n+1) & \dots & g_k(n+1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1(n+k-1) & \dots & g_k(n+k-1) \\ g_1(n) & \dots & g_k(n) \end{vmatrix}_d^{-1}$$ Il vient alors:

$AJ^{-1} = B - C$; B peut s'écrire:

$$B = \begin{vmatrix} g_1(n+1) & \dots & g_k(n+1) & S_{n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_1(n+k) & \dots & g_{k-1}(n+k) & S_{n+k} \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} g_1(n+1) & \dots & g_{k-1}(n+1) & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_1(n+k) & \dots & g_{k-1}(n+k) & 1 \end{vmatrix}_d^{-1}$$

$$\begin{vmatrix} g_1(n+1) & \dots & g_{k-1}(n+1) & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_1(n+k) & \dots & g_{k-1}(n+k) & 1 \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} g_1(n+1) & \dots & g_k(n+1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1(n+k) & \dots & g_k(n+k) \end{vmatrix}_d^{-1}$$

D'après l'hypothèse de récurrence:

$$B = E_{k-1}^{n+1}(g_{k-1,k}^{(n+1)})^{-1}.$$

Pour le membre C, tout aurait été facile , comme pour le membre B, si l'on pouvait permuter une ligne avec la dernière sans que le d.désignant ne change de valeur (propriété 16).

Mais heureusement ce qui nous intéresse, c'est uniquement le produit des deux facteurs de C et non pas la valeur de chacun de ces deux désignants.

Quand on permute la dérnière ligne de chacun des deux facteurs de C avec une ligne i de chacun des deux facteurs, les deux facteurs changent de valeur, mais leur produit reste le même. C'est à dire que nous aurons encore:

$$C = \begin{vmatrix} g_1(n) & \dots & g_{k-1}(n) & S_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_1(n+k-1) & \dots & g_{k-1}(n+k-1) & S_{n+k-1} \end{vmatrix}_d$$

$$\begin{vmatrix} g_1(n) & \dots & g_k(n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1(n+k-1) & \dots & g_k(n+k-1) \end{vmatrix}_d^{-1}.$$

Ceci provient tout simplement du fait que C est solution unique du système

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_1g_1(n+1) & + & \dots & + & a_{k-1}g_{k-1}(n+1) & + & Cg_k(n+1) & = & S_{n+1} \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_1g_1(n+k-1) & + & \dots & + & a_{k-1}g_{k-1}(n+k-1) & + & Cg_k(n+k-1) & = & S_{n+k-1} \\ a_1g_1(n) & + & \dots & + & a_{k-1}g_{k-1}(n) & + & Cg_k(n) & = & S_n \end{array}\right.$$

Mais c'est aussi solution unique du système

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_1g_1(n) & + & \dots & + & a_{k-1}g_{k-1}(n) & + & Cg_k(n) & = & S_n \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_1g_1(n+k-1) & + & \dots & + & a_{k-1}g_{k-1}(n+k-1) & + & Cg_k(n+k-1) & = & S_{n+k-1} \end{array}\right.$$

Une démonstration par un calcul direct est faisable aussi. Donc:

$$C = \left|\begin{array}{llll} g_1(n) & \dots & g_{k-1}(n) & S_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_1(n+k-1) & \dots & g_{k-1}(n+k-1) & S_{n+k-1} \end{array}\right|_d$$

$$\left|\begin{array}{llll} g_1(n) & \dots & g_{k-1}(n) & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_1(n+k-1) & \dots & g_{k-1}(n+k-1) & 1 \end{array}\right|_d^{-1}$$

$$\times \left|\begin{array}{llll} g_1(n) & \dots & g_{k-1}(n) & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_1(n+k-1) & \dots & g_{k-1}(n+k-1) & 1 \end{array}\right|_d \left|\begin{array}{lll} g_1(n) & \dots & g_k(n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1(n+k-1) & \dots & g_k(n+k-1) \end{array}\right|_d^{-1}.$$

Par hypothèse de récurrence:
$C = {}^dE_{k-1}^{(n)}({}^dg_{k-1,k}^{(n)})^{-1}$. Ainsi on a: $AJ^{-1} = {}^dE_{k-1}^{(n+1)}({}^dg_{k-1,k}^{(n+1)})^{-1} - {}^dE_{k-1}^{(n)}({}^dg_{k-1,k}^{(n)})^{-1}$.

Posons: $A' = \left|\begin{array}{llll} g_1(n) & \dots & g_k(n) & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_1(n+k) & \dots & g_k(n+k) & 1 \end{array}\right|_d$;

nous avons par définition ${}^dE(S_n) = AA'{-}1$. En suivant le même chemin que celui de "A", on a:

$$A' = \begin{vmatrix} g_1(n+1) & \dots & g_{k-1}(n+1) & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_1(n+k) & \dots & g_{k-1}(n+k) & 1 \end{vmatrix}_d - \begin{vmatrix} g_1(n+1) & \dots & g_{k-1}(n+1) & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_1(n+k-1) & \dots & g_{k-1}(n+k-1) & 1 \\ g_1(n) & \dots & g_{k-1}(n) & 1 \end{vmatrix}_d$$

$$\begin{vmatrix} g_1(n+1) & \dots & g_k(n+1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1(n+k-1) & \dots & g_k(n+k-1) \\ g_1(n) & \dots & g_k(n) \end{vmatrix}_d^{-1} \begin{vmatrix} g_1(n+1) & \dots & g_k(n+1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1(n+k) & \dots & g_k(n+k) \end{vmatrix}_d .$$

D'où
$B' =$

$$\begin{vmatrix} g_1(n+1) & \dots & g_{k-1}(n+1) & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_1(n+k) & \dots & g_{k-1}(n+k) & 1 \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} g_1(n+1) & \dots & g_k(n+1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1(n+k) & \dots & g_k(n+k) \end{vmatrix}_d^{-1}$$

et $C' =$

$$\begin{vmatrix} g_1(n+1) & \dots & g_{k-1}(n+1) & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_1(n+k-1) & \dots & g_{k-1}(n+k-1) & 1 \\ g_1(n) & \dots & g_{k-1}(n) & 1 \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} g_1(n+1) & \dots & g_k(n+1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1(n+k-1) & \dots & g_k(n+k-1) \\ g_1(n) & \dots & g_k(n) \end{vmatrix}_d^{-1}$$

Il vient alors:
$A'J^{-1} = B' - C'$. Pour les mêmes raisons que pour "C"
$C' =$

$$\begin{vmatrix} g_1(n) & \dots & g_{k-1}(n) & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_1(n+k-1) & \dots & g_{k-1}(n+k-1) & 1 \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} g_1(n) & \dots & g_k(n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1(n+k-1) & \dots & g_k(n+k-1) \end{vmatrix}_d^{-1} .$$

Donc:

$$A'J^{-1} = \left(\begin{vmatrix} g_1(n+1) & \dots & g_{k-1}(n) & g_k(n+1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_1(n+k) & \dots & g_{k-1}(n+k) & g_k(n+k) \end{vmatrix}_d \right.$$

$$\left| \begin{matrix} g_1(n+1) & \dots & g_{k-1}(n+1) & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_1(n+k) & \dots & g_{k-1}(n+k) & 1 \end{matrix} \right|_d^{-1} \Bigg)^{-1} -$$

$$\left(\left| \begin{matrix} g_1(n) & \dots & g_{k-1}(n) & g_k(n) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_1(n+k-1) & \dots & g_{k-1}(n+k-1) & g_k(n) \end{matrix} \right|_d \right.$$

$$\left. \left| \begin{matrix} g_1(n) & \dots & g_{k-1}(n) & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_1(n+k-1) & \dots & g_{k-1}(n+k-1) & 1 \end{matrix} \right|_d^{-1} \right)^{-1}.$$

Par hypothèse de récurrence:

$$A'J^{-1} = ({}^d g_{k-1,k}^{(n+1)})^{-1} - ({}^d g_{k-1,k}^{(n)}{}^{-1}).$$

Par suite

$${}^d E_k(S_n) = AA'^{-1} = AJ^{-1}JA'^{-1} = AJ^{-1}(A'J^{-1})^{-1}$$

$$E_k(S_n) = \{{}^d E_{k-1}^{(n+1)}({}^d g_{k-1,k}^{(n+1)})^{-1} - {}^d E_{k-1}^{(n)}({}^d g_{k-1,k}^{(n)})^{-1}\}\{({}^d g_{k-1,k}^{(n+1)})^{-1} - ({}^d g_{k-1,k}^{(n)})^{-1}\}$$
$$= {}^d E_k^{(n)}.$$

La même procédure permet d'établir la relation concernant les ${}^d g_{k,i}^{(n)}$ puisqu'il suffit de remplacer S_n par $g_i(n)$ ∎

Considérons maintenant les quantités ${}^g E_k^{(n)}$ et ${}^g g_{k,i}^{(n)}$ calculées par

Initialisation:

${}^g E_0^{(n)} = S_n$; $n = 0, 1, \ldots$
${}^g g_{0,i}^{(n)} = g_i(n)$; $i = 1, 2, \ldots$; $n = 0, 1, \ldots$

Itération:

Pour $k = 1, 2, \ldots$; $n = 0, 1, \ldots$
${}^g E_k^{(n)} = \{({}^g g_{k-1,k}^{(n+1)})^{-1} - ({}^g g_{k-1,k}^{(n)})^{-1}\}^{-1}\{({}^g g_{k-1,k}^{(n+1)})^{-1}\,{}^g E_{k-1}^{(n+1)} - ({}^g g_{k-1,k}^{(n)})^{-1}\,{}^g E_{k-1}^{(n)}\}$

$$ {}^g g_{k,i}^{(n)} = \{({}^g g_{k-1,k}^{(n+1)})^{-1} - ({}^g g_{k-1,k}^{(n)})^{-1}\}^{-1}\{({}^g g_{k-1,k}^{(n+1)})^{-1}\, {}^g g_{k-1,i}^{(n+1)} - ({}^g g_{k-1,k}^{(n)})^{-1}\, {}^g g_{k-1,i}^{(n)}\} $$
$i = k+1, k+2, \ldots$

Pour ces quantités, on a le

Théorème 3.2

$$ {}^g E_k^{(n)} = {}^g E_k(S_n) $$

<u>Démonstration:</u>
Nous allons démontrer simultanément:

$$ \left\{ \begin{array}{l} {}^g E_k^n = {}^g E_k(S_n) \\ {}^g g_{k,i}(n) = \begin{vmatrix} g_1(n) & \ldots & g_k(n) & 1 \\ g_1(n+1) & \ldots & g_k(n+1) & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_1(n+k) & \ldots & g_k(n+k) & 1 \end{vmatrix}_g^{-1} \begin{vmatrix} g_1(n) & \ldots & g_k(n) & S_n \\ g_1(n+1) & \ldots & g_k(n+1) & S_{n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_1(n+k) & \ldots & g_k(n+k) & S_{n+k} \end{vmatrix}_g \end{array} \right. \tag{3.9} $$

Par récurrence
(3.9) est vérifiée pour $k = 0$
Supposons qu'elle soit vérifiée pour $(k-1)$.
Posons:

$$ A = \begin{vmatrix} g_1(n) & \ldots & g_k(n) & S_n \\ g_1(n+1) & \ldots & g_k(n+1) & S_{n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_1(n+k) & \ldots & g_k(n+k) & S_{n+k} \end{vmatrix}_g = $$

$$ \begin{vmatrix} g_1(n+1) & \ldots & g_k(n+1) & S_{n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_1(n+k-1) & \ldots & g_k(n+k-1) & S_{n+k-1} \\ g_1(n) & \ldots & g_k(n) & S_n \\ g_1(n+k) & \ldots & g_k(n+k) & S_{n+k} \end{vmatrix}_g $$

(propriété 10).
En appliquant l'identité de Sylvester (propriété 1 du chap.2)
$A =$

$$ \begin{vmatrix} g_1(n+1) & \ldots & g_{k-1}(n+1) & S_{n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_1(n+k) & \ldots & g_{k-1}(n+k) & S_{n+k} \end{vmatrix}_g - $$

$$\begin{vmatrix} g_1(n+1) & \dots & g_{k-1}(n+1) & g_k(n+1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_1(n+k) & \dots & g_{k-1}(n+k) & g_k(n+k) \end{vmatrix}_g \begin{vmatrix} g_1(n+1) & \dots & g_k(n+1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1(n+k-1) & \dots & g_k(n+k-1) \\ g_1(n) & \dots & g_k(n) \end{vmatrix}_g^{-1}$$

$$\begin{vmatrix} g_1(n+1) & \dots & g_{k-1}(n+1) & S_{n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_1(n+k-1) & \dots & g_{k-1}(n+k-1) & S_{n+k-1} \\ g_1(n) & \dots & g_{k-1}(n) & S_n \end{vmatrix}_g$$

Posons:

$$J = \begin{vmatrix} g_1(n+1) & \dots & g_k(n+1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1(n+k) & \dots & g_k(n+k) \end{vmatrix}_g,$$

$$B = \begin{vmatrix} g_1(n+1) & \dots & g_k(n+1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1(n+k) & \dots & g_k(n+k) \end{vmatrix}_g^{-1} \begin{vmatrix} g_1(n+1) & \dots & g_{k-1}(n+1) & S_{n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_1(n+k) & \dots & g_{k-1}(n+k) & S_{n+k} \end{vmatrix}_g \text{ et}$$

$$C = \begin{vmatrix} g_1(n+1) & \dots & g_k(n+1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1(n+k-1) & \dots & g_k(n+k-1) \\ g_1(n) & \dots & g_k(n) \end{vmatrix}_g^{-1}$$

$$\begin{vmatrix} g_1(n+1) & \dots & g_{k-1}(n+1) & S_{n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_1(n+k-1) & \dots & g_{k-1}(n+k-1) & S_{n+k-1} \\ g_1(n) & \dots & g_{k-1}(n) & S_n \end{vmatrix}_g.$$

Il vient alors:

$J^{-1}A = B - C$; B peut s'écrire:

$$B = \begin{vmatrix} g_1(n+1) & \dots & g_k(n+1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1(n+k) & \dots & g_k(n+k) \end{vmatrix}_g^{-1} \begin{vmatrix} g_1(n+1) & \dots & g_{k-1}(n+1) & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_1(n+k) & \dots & g_{k-1}(n+k) & 1 \end{vmatrix}_g$$

$$\begin{vmatrix} g_1(n+1) & \dots & g_{k-1}(n+1) & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_1(n+k) & \dots & g_{k-1}(n+k) & 1 \end{vmatrix}_g^{-1} \begin{vmatrix} g_1(n+1) & \dots & g_k(n+1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1(n+k-1) & \dots & g_k(n+k-1) \\ g_1(n) & \dots & g_k(n) \end{vmatrix}_g$$

D'après l'hypothèse de récurrence:

$$B = ({}^g g_{k-1,k}^{(n+1)})^{-1g} E_{k-1}^{n+1};$$

De même nous aurons: $C =$

$$\begin{vmatrix} g_1(n) & \dots & g_k(n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1(n+k-1) & \dots & g_k(n+k-1) \end{vmatrix}_g^{-1} \begin{vmatrix} g_1(n) & \dots & g_{k-1}(n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1(n+k-1) & \dots & g_{k-1}(n+k-1) \end{vmatrix}$$

$$C = ({}^g g_{k-1,k}^{(n)})^{-1g} E_{k-1}^{(n)}.$$

Posons: $A' = \begin{vmatrix} g_1(n) & \dots & g_k(n) & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_1(n+k) & \dots & g_k(n+k) & 1 \end{vmatrix}_g;$

En procédant de la même manière que pour "A", on établit

$$J^{-1}A' = ({}^g g_{k-1,k}^{(n+1)})^{-1} - ({}^g g_{k-1,k}^{(n)})^{-1}.$$

Or

$${}^g E_k(S_n) = A'^{-1}A = A'^{-1}JJ^{-1}A = (J^{-1}A')^{-1}(J^{-1}A)$$

$${}^g E_k(S_n) = \{({}^g g_{k-1,k}^{(n+1)})^{-1} - ({}^g g_{k-1,k}^{(n)})^{-1}\}^{-1}\{({}^g g_{k-1,k}^{(n+1)})^{-1\,g} E_{k-1}^{(n+1)} - ({}^g g_{k-1,k}^{(n)})^{-1\,g} E_{k-1}^{(n)}\}$$

$${}^g E_k(S_n) = {}^g E_k^{(n)}.$$

La même procédure permet d'établir la relation concernant les ${}^g g_{k,i}^{(n)}$ puisqu'il suffit de remplacer S_n par $g_i(n)$ dans ce qui a été fait. ∎

Remarques

1) Les ${}^dE$, ${}^gE$ algorithmes coïncident avec le E-algorithme quand le corps $I\!K$ est commutatif.

2) Le ${}^dE$-algorithme peut s'écrire comme suit:

${}^d E_0^{(n)} = S_n \quad n = 0, 1, \dots$

${}^d g_{0,i}^{(n)} = g_i(n) \quad i = 1, 2 \dots, \; n = 0, 1, \dots$

Pour $k = 1, 2, \dots, \; n = 0, 1, \dots$

${}^d E_k(n) = {}^d E_{k-1}(n) - \Delta({}^d E_{k-1}(n))(\Delta({}^d g_{k-1,k}^{(n)})^{-1d} g_{k-1,k}^{(n)}$

${}^d g_{k,i}(n) = {}^d g_{k-1,i}(n) - \Delta({}^d g_{k-1,i}(n))(\Delta({}^d g_{k-1,k}^{(n)})^{-1d} g_{k-1,k}^{(n)}$

$i = k+1, \dots$

où l'opérateur Δ agit sur les indices supérieurs n.

3) Le ${}^gE$-algorithme peut sécrire aussi comme suit: ${}^gE_0^{(n)} = S_n \quad n = 0, 1, \ldots$
${}^gg_{0,i}^{(n)} = g_i(n) \quad i = 1, 2 \ldots, \; n = 0, 1, \ldots$
Pour $k = 1, 2, \ldots, \; n = 0, 1, \ldots$
${}^gE_k(n) = {}^gE_{k-1}(n) - {}^gg_{k-1,k}^{(n)}(\Delta({}^gg_{k-1,k}^{(n)})^{-1}\Delta({}^gE_{k-1}(n))$
${}^gg_{k,i}(n) = {}^gg_{k-1,i}(n) - {}^gg_{k-1,k}^{(n)}(\Delta({}^gg_{k-1,k}^{(n)})^{-1}\Delta({}^gg_{k-1,i}(n))$
$i = k+1, \ldots$
où l'opérateur Δ agit sur les indices supérieurs n.
2) 3) résultent d'un simple calcul.

Théorème 3.3 *Si* $S_n = S + a_1 g_1(n) + \ldots + a_k g_k(n) \quad \forall\, n$ *alors*

$$ {}^dE_k^{(n)} = S \quad \forall\, n $$

Démonstration
Cela résulte de la construction.

Théorème 3.4 *Si* $S_n = S + a_1 g_1(n) + \ldots + a_k g_k(n) \quad \forall\, n$ *alors*

$$ {}^dE_k^{(n)} = S + a_{k+1}{}^dg_{k,k+1}^{(n)} + a_{k+2}{}^dg_{k,k+2}^{(n)} + \ldots \quad \forall\, n, k $$

Démonstration
La propriété est vraie pour $k = 0$.
Supposons qu'elle reste vraie jusqu'à l'ordre k. On a alors:
${}^dE_k^{(n)} = S + a_{k+1}{}^dg_{k,k+1}^{(n)} + a_{k+2}{}^dg_{k,k+2}^{(n)} + \ldots$
${}^dE_{k+1}^{(n)} = \{{}^dE_k^{(n+1)}({}^dg_{k,k+1}^{(n+1)})^{-1} - {}^dE_k^{(n)}({}^dg_{k,k+1}^{(n)})^{-1}\}\{({}^dg_{k,k+1}^{(n+1)})^{-1} - ({}^dg_{k,k+1}^{(n)})^{-1}\}^{-1}$

d'où:
$E_{k+1}^{(n+1)}(g_{k,k+1}^{(n+1)})^{-1} = S(g_{k,k+1}^{(n+1)})^{-1} + a_{k+1} + a_{k+2}{}^dg_{k,k+2}^{(n+1)}g_{k,k+1}^{(n+1)})^{-1}$
$E_{k+1}^{(n)}(g_{k,k+1}^{(n)})^{-1} = S(g_{k,k+1}^{(n)})^{-1} + a_{k+1} + a_{k+2}{}^dg_{k,k+2}^{(n)}g_{k,k+1}^{(n)})^{-1}$
En faisant la soustraction des deux membres,
$E_{k+1}^{(n+1)}(g_{k,k+1}^{(n+1)})^{-1} - E_{k+1}^{(n)}(g_{k,k+1}^{(n)})^{-1} =$
$S((g_{k,k+1}^{(n+1)})^{-1} - (g_{k,k+1}^{(n+1)})^{-1}) + a_{k+2}({}^dg_{k,k+2}^{(n+1)}(g_{k,k+1}^{(n+1)})^{-1} - {}^dg_{k,k+2}^{(n)}(g_{k,k+1}^{(n)})^{-1}) + \ldots$

d'où:
$^dE_{k+1}^{(n)} = S + a_{k+2}{}^dg_{k+1,k+2}^{(n)} + a_{k+3}{}^dg_{k+1,k+3}^{(n)} + \dots$ ∎

Théorème 3.5 *Il existe des coefficients $A_j^{(k,n)}$ tels que:*
$^dE_k^{(n)} = \sum_{j=0}^{k} S_{n+j}A_j^{(k,n)}$; $^dg_{k,i}^{(n)} = \sum_{j=0}^{k} g_i(n+j)A_j^{(k,n)}$
avec $\sum_{j=0}^{k} A_j^{(k,n)} = 1$

Démonstration
La propriété est vraie pour $k = 0$
Supposons que la propriété soit vraie pour $k-1$
$^dE_{k-1}^{(n)} = \sum_{j=0}^{k-1} S_{n+j}A_j^{(k-1,n)}$; $^dg_{k-1,i}^{(n)} = \sum_{j=0}^{k-1} g_i(n+j)A_j^{(k-1,n)}$
avec $\sum_{j=0}^{k-1} A_j^{(k-1,n)} = 1$
Il faut d'abord montrer que $^dE_k^{(n)}$ est fonction linéaire des S_{n+j}, avec les coefficients à droite, même chose pour les $g_{k,i}^{(n)}$ et puis $\sum_{j=0}^{k} A_j^{(k,n)} = 1$.
Comme $^dE_k^{(n)} = \{{}^dE_{k-1}^{(n+1)}({}^dg_{k-1,k}^{(n+1)})^{-1} - {}^dE_{k-1}^{(n)}({}^dg_{k-1,k}^{(n)})^{-1}\}\{({}^dg_{k-1,k}^{(n+1)})^{-1} - ({}^dg_{k-1,k}^{(n)})^{-1}\}^{-1}$.

D'après l'hypothèse de récurrence, $^dE_{k-1}^{(n+1)}$ est fonction linéaire à coefficients à droite des éléments $S_{n+1}, \dots, S_{n+k-1}$.
$^dE_{k-1}^{(n)}$ est fonction linéaire à coefficients à droite des éléments $S_n, \dots, S_{n+k-1}$.
D'après l'expression de $^dE_k^n$ en fonction de $^dE_{k-1}^{n+1}$, $^dE_{k-1}^n$, et puisque $g_{k-1,k}^{(n)}$ sont indépendantes de $S_n, \dots$, on en conclut que $^dE_k^n$ est fonction linéaire à droite des éléments $S_n, \dots, S_{n+k}$.
Ceci étant valable également pour les $g_{k,i}^{(n)}$. Il s'agit maintenant de montrer que $\sum_{j=0}^{k} A_j^{(k,n)} = 1$. En effet:
$^dE_k^{(n)} = \{(\sum_{j=0}^{k-1} S_{n+j+1}A_j^{(k-1,n+1)})({}^dg_{k-1,k}^{(n+1)})^{-1} - (\sum_{j=0}^{k-1} S_{n+j}A_j^{(k-1,n)})({}^dg_{k-1,k}^{(n)})^{-1}\}$

$\{({}^dg_{k-1,k}^{(n+1)})^{-1} - ({}^dg_{k-1,k}^{(n)})^{-1}\}^{-1}$.

${}^dE_k^{(n)} = \{\sum_{j=0}^{k-2}(S_{n+j+1}A_j^{(k-1,n+1)}({}^dg_{k-1,k}^{(n+1)})^{-1}) - \sum_{j=0}^{k-2}(S_{n+j+1}A_{j+1}^{(k-1,n)}({}^dg_{k-1,k}^{(n)})^{-1}) -$
$S_nA_{(0)}^{(k-1,n)}({}^dg_{k-1,k}^{(n)})^{-1} + S_{n+k}A_{(k-1)}^{(k-1,n+1)}({}^dg_{k-1,k}^{(n+1)})^{-1}\}\{({}^dg_{k-1,k}^{(n+1)})^{-1} - ({}^dg_{k-1,k}^{(n)})^{-1}\}^{-1}$.

${}^dE_k^{(n)} = \{\sum_{l=1}^{k-1} S_{n+l}(A_{l-1}^{(k-1,n+1)}({}^dg_{k-1,k}^{(n+1)})^{-1} - A_l^{(k-1,n)}({}^dg_{k-1,k}^{(n)})^{-1}) - S_nA_{(0)}^{(k-1,n)}({}^dg_{k-1,k}^{(n)})^{-1} +$
$S_{n+k}A_{(k-1)}^{(k-1,n+1)}({}^dg_{k-1,k}^{(n+1)})^{-1}\}\{({}^dg_{k-1,k}^{(n+1)})^{-1} - ({}^dg_{k-1,k}^{(n)})^{-1}\}^{-1}$.

d'où:
$A_0^{(k,n)} = -A_{(0)}^{(k-1,n)}({}^dg_{k-1,k}^{(n)})^{-1}\{({}^dg_{k-1,k}^{(n+1)})^{-1} - ({}^dg_{k-1,k}^{(n)})^{-1}\}^{-1}$

$A_k^{(k,n)} = A_{(k-1)}^{(k-1,n+1)}({}^dg_{k-1,k}^{(n+1)})^{-1}\{({}^dg_{k-1,k}^{(n+1)})^{-1} - ({}^dg_{k-1,k}^{(n)})^{-1}\}^{-1}$

Pour $0 < j < k$, on a:
$A_j^{(k,n)} = \{A_{j-1}^{(k-1,n+1)}({}^dg_{k-1,k}^{(n+1)})^{-1} - A_j^{(k-1,n)}({}^dg_{k-1,k}^{(n)})^{-1}\}\{({}^dg_{k-1,k}^{(n+1)})^{-1} - ({}^dg_{k-1,k}^{(n)})^{-1}\}^{-1}$

donc:
$\sum_{j=0}^{k} A_j^{(k,n)} = \{A_{(k-1)}^{(k-1,n+1)}({}^dg_{k-1,k}^{(n+1)})^{-1} - A_{(0)}^{(k-1,n)}({}^dg_{k-1,k}^{(n)})^{-1} + \sum_{l=1}^{k-1}(A_{j-1}^{(k-1,n+1)}({}^dg_{k-1,k}^{(n+1)})^{-1} -$
$A_j^{(k-1,n)}({}^dg_{k-1,k}^{(n)})^{-1})\}\{({}^dg_{k-1,k}^{(n+1)})^{-1} - ({}^dg_{k-1,k}^{(n)})^{-1}\}^{-1}$

$\sum_{j=0}^{k} A_j^{(k,n)} = \{(A_{(k-1)}^{(k-1,n+1)} + + \sum_{l=1}^{k-1}(A_{j-1}^{(k-1,n+1)})({}^dg_{k-1,k}^{(n+1)})^{-1} - \sum_{j=0}^{k-1} A_j^{(k-1,n)}({}^dg_{k-1,k}^{(n)})^{-1})\}$

$\{({}^dg_{k-1,k}^{(n+1)})^{-1} - ({}^dg_{k-1,k}^{(n)})^{-1}\}^{-1}$

D'après l'hypothèse de récurrence
$\sum_{j=0}^{k} A_j^{(k,n)} = \{1({}^dg_{k-1,k}^{(n+1)})^{-1} - 1({}^dg_{k-1,k}^{(n)})^{-1})\}\{({}^dg_{k-1,k}^{(n+1)})^{-1} - ({}^dg_{k-1,k}^{(n)})^{-1}\}^{-1}$
d'où $\sum_{j=0}^{k} A_j^{(k,n)} = 1$
De la même manière, on établit la propriété pour les $g_i(n)$. ■
Remarques
1) On a donc
$A_0^{(k,n)}\Delta({}^dg_{k-1,k}^{(n)})^{-1} = -A_0^{(k-1,n)}({}^dg_{k-1,k}^{(n)})^{-1}$.
Pour $0 < j < k$
$A_j^{(k,n)}\Delta({}^dg_{k-1,k}^{(n)})^{-1} = A_{j-1}^{(k-1,n+1)}({}^dg_{k-1,k}^{(n+1)})^{-1} - A_j^{(k-1,n)}({}^dg_{k-1,k}^{(n)})^{-1}$.

Pour $j = k$
$A_k^{(k,n)}\Delta({}^d g_{k-1,k}^{(n)})^{-1} = A_{k-1}^{(k-1,n+1)}({}^d g_{k-1,k}^{(n+1)})^{-1}$.
avec $A_0^{(0,n)} = 1 \; \forall n \quad \Delta^d g_{k-1,k}^{(n)} = {}^d g_{k-1,k}^{(n+1)} - {}^d g_{k-1,k}^{(n)}$
Ces relations peuvent être utilisées pour l'implementation paralléle de la méthode d'extrapolation à la place de ${}^d E$-algorithme. Cette méthode est particulièrement adaptée à l'extrapolation simultanée de plusieurs suites avec la même famille de suites $g_i(n)$.

2) Nous ne traitons pas le problème de convergence. Il est par exemple, intéressant d'étudier cette question pour le corps des quaternions [28].

3.4 Cas vectoriel

Etant donné un corps non commutatif $\mathbb{K}$.
$\mathbb{K}^p$ peut être muni d'une structure d'espace vectoriel à gauche en définissant la loi externe de la manière suivante

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K}^p \\ \left(\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}\right) & \longrightarrow & \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_p \end{pmatrix} \end{array}$$

Soit $(\mathbb{K}^p)^*$ le dual de $\mathbb{K}^p$. C'est un espace vectoriel à droite sur $\mathbb{K}$ (voir [22]).
Soit (S_n) une suite d'éléments de $\mathbb{K}^p$ telle que:

$$S_n = S + a_1 g_1(n) + \ldots + a_k g_k(n) \tag{3.10}$$

où $S \in \mathbb{K}^p$, $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$.
Pour exprimer S en fonction des $g_i(n)$, $i = 1, \ldots, k$, nous devons résoudre le système:

$$\left\{\begin{array}{lllllll} a_1 g_1(n) & + \ldots + & a_k g_k(n) & + & S & = & S_n \\ a_1 \Delta g_1(n) & + \ldots + & a_k \Delta g_k(n) & + & & = & \Delta S_n \\ \vdots & & \vdots & & & & \\ a_1 \Delta g_1(n+k-1) & + \ldots + & a_k \Delta g_k(n+k-1) & + & & = & \Delta S_{n+k-1} \end{array}\right. \tag{3.11}$$

Soit $y \in (\mathbb{K}^p)^p$. Notons $y(x) = (x, y)$ où $x \in \mathbb{K}^p$ et $(x, y) \in \mathbb{K}$.
Appliquons y aux équations du système (3.11) sauf la première, nous obtenons:

$$\left\{\begin{array}{llllllll} a_1(\Delta g_1(n),y) & + & \dots & + & a_k(\Delta g_k(n),y) & + & & = (\Delta S_n, y) \\ \vdots & & & & \vdots & & & \\ a_1(\Delta g_1(n+k-1),y) & + & \dots & + & a_k(\Delta g_k(n+k-1),y) & + & & = (\Delta S_{n+k-1}, y) \\ a_1 g_1(n) & + & \dots & + & a_k g_k(n) & + & S & = S_n \end{array}\right. \tag{3.12}$$

Notons S^i, S_n^i, $g_l^i(n)$, $i = 1, \dots, p$ les composantes respectives des vecteurs S, S_n, $g_l(n)$. Si les désignants

$$\begin{vmatrix} (\Delta g_1(n),y) & \dots & (\Delta g_k(n),y) & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (\Delta g_1(n+k-1),y) & \dots & (\Delta g_k(n+k-1),y) & 0 \\ g_1^i(n) & \dots & g_k^i(n) & 1 \end{vmatrix}_d \neq 0 \quad i = 1, \dots, p$$

On aura

$$S^i = \begin{vmatrix} (\Delta g_1(n),y) & \dots & (\Delta g_k(n),y) & (\Delta S_n, y) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (\Delta g_1(n+k-1),y) & \dots & (\Delta g_k(n+k-1),y) & (\Delta S_{n+k-1}, y) \\ g_1^i(n) & \dots & g_k^i(n) & S_n^i \end{vmatrix}_d \times \tag{3.13}$$

$$\begin{vmatrix} (\Delta g_1(n),y) & \dots & (\Delta g_k(n),y) & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (\Delta g_1(n+k-1),y) & \dots & (\Delta g_k(n+k-1),y) & 0 \\ g_1^i(n) & \dots & g_k^i(n) & 1 \end{vmatrix}_d^{-1}$$

Définition 3.1 *Soient u_{ij} $i = 1, \dots, k-1$; $j = 1, \dots, k$ des éléments de $I\!K$*
Soient v_{kj} $j = 1, \dots, k$ des éléments de $I\!K^p$.
On appelle le d.désignant vectoriel

$$\begin{vmatrix} u_{11} & \dots & u_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{k1} & \dots & v_{kk} \end{vmatrix},$$

le d.désignant obtenu en développant par rapport à la dernière ligne.

Remarques

1) Cette définition est une généralisation des "déterminants vectoriels" (voir

[11]) au cas non commutatif.
2) Toutes les relations récursives scalaires restent valables.
3) Cette définition n'aura aucun sens si les v_{ki} $i = 1, \dots, k$ occupent une autre ligne que la dernière.
4)Les composantes du vecteur d.désignant sont les d.désignants des composantes c.à .d

$$\begin{vmatrix} u_{11} & \dots & u_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{k1} & \dots & v_{kk} \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} u_{11} & \dots & u_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{k1}^1 & \dots & v_{kk}^1 \end{vmatrix} \dots \begin{vmatrix} u_{11} & \dots & u_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{k1}^p & \dots & v_{kk}^p \end{vmatrix} \right)^T .$$

Lemme 3.1 *Soient u_{ij} $i = 1, \dots, k+1$, $j = 1, \dots, k$ des éléments de $I\!K$*

Le d.désignant $\begin{vmatrix} u_{11} & \dots & u_{1k} & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 \\ u_{k1} & \dots & u_{kk} & 0 \\ u_{k+11} & \dots & u_{k+1k} & 1 \end{vmatrix}_d$ *est égal à 1.*

Démonstration
La propriété est vraie pour $k = 1$. En effet:

$$\begin{vmatrix} u_{11} & 0 \\ u_{21} & 1 \end{vmatrix}_d = 1 - 0.u_{11}^{-1}.u_{21} = 1.$$

Supposons que la propriété soit vraie pour k. Pour $k+1$, on a

$$\begin{vmatrix} u_{11} & \dots & u_{1k} & u_{1k+1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & 0 \\ u_{k+11} & \dots & u_{k+1k} & u_{k+1k+1} & 0 \\ u_{k+21} & \dots & u_{k+2k} & u_{k+2k+1} & 1 \end{vmatrix}_d = \begin{vmatrix} u_{11} & \dots & u_{1k} & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 \\ u_{k1} & \dots & u_{kk} & 0 \\ u_{k+21} & \dots & u_{k+2k} & 1 \end{vmatrix}_d -$$

$$\begin{vmatrix} u_{11} & \dots & u_{1k} & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 \\ u_{k1} & \dots & u_{kk} & 0 \\ u_{k+11} & \dots & u_{k+1k} & 0 \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} u_{11} & \dots & u_{1k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{k1} & \dots & u_{kk} \\ u_{k+11} & \dots & u_{k+1k+1} \end{vmatrix}_d^{-1} \begin{vmatrix} u_{11} & \dots & u_{1k} & u_{1k+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_{k1} & \dots & u_{kk} & u_{kk+1} \\ u_{k+21} & \dots & u_{k+2k} & u_{k+2k+1} \end{vmatrix}_d$$

Le premier terme du second membre de l'égalité est égal à 1 d'après l'hypothèse de récurrence. le premier facteur du second terme du second membre de l'égalité est égal à 0. ∎

Lemme 3.2 *On a*

$$S = \begin{vmatrix} (\Delta S_n, y) & (\Delta g_1(n), y) & \dots & (\Delta g_k(n), y) \\ \vdots & & & \vdots \\ (\Delta S_{n+k-1}, y) & (\Delta g_1(n+k-1), y) & \dots & (\Delta g_k(n+k-1), y) \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}_d^{-1} \times$$

$$\begin{vmatrix} (\Delta S_n, y) & (\Delta g_1(n), y) & \dots & (\Delta g_k(n), y) \\ \vdots & & & \vdots \\ (\Delta S_{n+k-1}, y) & (\Delta g_1(n+k-1), y) & \dots & (\Delta g_k(n+k-1), y) \\ S_n & g_1(n) & \dots & g_k(n) \end{vmatrix}_d$$

<u>Démonstration</u>
D'après le lemme2.1, l'expression (3.13) s'écrit:

$$S^i = \begin{vmatrix} (\Delta g_1(n), y) & \dots & (\Delta g_k(n), y) & (\Delta S_n, y) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (\Delta g_1(n+k-1), y) & \dots & (\Delta g_k(n+k-1), y) & (\Delta S_{n+k-1}, y) \\ g_1^i(n) & \dots & g_k^i(n) & S_n^i \end{vmatrix}_d \tag{3.14}$$

En appliquant la propriété 16 du ch.2, puis la propriété 11, on a

$$S^i = \begin{vmatrix} (\Delta S_n, y) & (\Delta g_1(n), y) & \dots & (\Delta g_k(n), y) \\ \vdots & & & \vdots \\ (\Delta S_{n+k-1}, y) & (\Delta g_1(n+k-1), y) & \dots & (\Delta g_k(n+k-1), y) \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}_d^{-1} \times$$

$$\begin{vmatrix} (\Delta S_n, y) & (\Delta g_1(n), y) & \dots & (\Delta g_k(n), y) \\ \vdots & & & \vdots \\ (\Delta S_{n+k-1}, y) & (\Delta g_1(n+k-1), y) & \dots & (\Delta g_k(n+k-1), y) \\ S_n^i & g_1(n)^i & \dots & g_k^i(n) \end{vmatrix}_d$$

Nous en déduisons immédiatement

$$S = \begin{vmatrix} (\Delta S_n, y) & (\Delta g_1(n), y) & \dots & (\Delta g_k(n), y) \\ \vdots & & & \vdots \\ (\Delta S_{n+k-1}, y) & (\Delta g_1(n+k-1), y) & \dots & (\Delta g_k(n+k-1), y) \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}_d^{-1} \times$$

$$\begin{vmatrix} (\Delta S_n, y) & (\Delta g_1(n), y) & \dots & (\Delta g_k(n), y) \\ \vdots & & & \vdots \\ (\Delta S_{n+k-1}, y) & (\Delta g_1(n+k-1), y) & \dots & (\Delta g_k(n+k-1), y) \\ S_n & g_1(n) & \dots & g_k(n) \end{vmatrix}_d \quad \blacksquare$$

Remarques

1) L'expression de S donnée par le lemme 2 ressemble à celle donnée par C.Brezinski dans [5], mais dans l'ordre ($I\!\!K$ est non commutatif)

2) Si $I\!\!K$ est commutatif, on retrouve les mêmes résultats que dans [5], puisque d'après la propriété 2 du ch.2, on a le déterminant

$$\begin{vmatrix} (\Delta S_n, y) & (\Delta g_1(n), y) & \dots & (\Delta g_k(n), y) \\ \vdots & & & \vdots \\ (\Delta S_{n+k-1}, y) & (\Delta g_1(n+k-1), y) & \dots & (\Delta g_k(n+k-1), y) \\ S_n & g_1(n) & \dots & g_k(n) \end{vmatrix}$$

est égal à

$$\Delta \times A^{(k)} \times \ldots \times A^{(2)} \times A^1$$

où

$$\Delta = \begin{vmatrix} (\Delta S_n, y) & (\Delta g_1(n), y) & \dots & (\Delta g_k(n), y) \\ \vdots & & & \vdots \\ (\Delta S_{n+k-1}, y) & (\Delta g_1(n+k-1), y) & \dots & (\Delta g_k(n+k-1), y) \\ S_n & g_1(n) & \dots & g_k(n) \end{vmatrix}_d$$

et les A^i $i = 1, \dots, k$ sont les d.désignants principaux Δ

De même le déterminant

$$\begin{vmatrix} (\Delta S_n, y) & (\Delta g_1(n), y) & \dots & (\Delta g_k(n), y) \\ \vdots & & & \vdots \\ (\Delta S_{n+k-1}, y) & (\Delta g_1(n+k-1), y) & \dots & (\Delta g_k(n+k-1), y) \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

est égal à

$$\begin{vmatrix} (\Delta S_n, y) & (\Delta g_1(n), y) & \dots & (\Delta g_k(n), y) \\ \vdots & & & \vdots \\ (\Delta S_{n+k-1}, y) & (\Delta g_1(n+k-1), y) & \dots & (\Delta g_k(n+k-1), y) \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}_d A^k \ldots A^1.$$

D'où en remplaçant dans l'expression de S

$$S = \begin{vmatrix} (\Delta S_n, y) & (\Delta g_1(n), y) & \dots & (\Delta g_k(n), y) \\ \vdots & & & \vdots \\ (\Delta S_{n+k-1}, y) & (\Delta g_1(n+k-1), y) & \dots & (\Delta g_k(n+k-1), y) \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}^{-1} \times$$

$$\begin{vmatrix} (\Delta S_n, y) & (\Delta g_1(n), y) & \dots & (\Delta g_k(n), y) \\ \vdots & & & \vdots \\ (\Delta S_{n+k-1}, y) & (\Delta g_1(n+k-1), y) & \dots & (\Delta g_k(n+k-1), y) \\ S_n & g_1(n) & \dots & g_k(n) \end{vmatrix}$$

qui est égal à

$$\frac{\begin{vmatrix} S_n & g_1(n) & \dots & g_k(n) \\ (\Delta S_n, y) & (\Delta g_1(n), y) & \dots & (\Delta g_k(n), y) \\ \vdots & & & \vdots \\ (\Delta S_{n+k-1}, y) & (\Delta g_1(n+k-1), y) & \dots & (\Delta g_k(n+k-1), y) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (\Delta g_1(n), y) & \dots & (\Delta g_k(n), y) \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta g_1(n+k-1), y) & \dots & (\Delta g_k(n+k-1), y) \end{vmatrix}}$$

qui est l'expression donnée dans [5].

3) Si la suite de vecteurs (S_n) n'a pas la forme exacte (3.10), S dépendra de n et de k. On notera ${}^dE_k(S_n)$.

$${}^dE_k(S_n) = \begin{vmatrix} (\Delta S_n, y) & (\Delta g_1(n), y) & \dots & (\Delta g_k(n), y) \\ \vdots & & & \vdots \\ (\Delta S_{n+k-1}, y) & (\Delta g_1(n+k-1), y) & \dots & (\Delta g_k(n+k-1), y) \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}_d^{-1} \times$$

$$\begin{vmatrix} (\Delta S_n, y) & (\Delta g_1(n), y) & \dots & (\Delta g_k(n), y) \\ \vdots & & & \vdots \\ (\Delta S_{n+k-1}, y) & (\Delta g_1(n+k-1), y) & \dots & (\Delta g_k(n+k-1), y) \\ S_n & g_1(n) & \dots & g_k(n) \end{vmatrix}_d$$

Il s'agit maintenant de construire un algorithme qui calcule récursivement ces quantités ${}^dE_k(S_n)$.

Considérons maintenant les quantités ${}^gE_k^{(n)}$ et ${}^gg_{k,i}^{(n)}$ calculées par

Initialisation:

$^{g}E_0^{(n)} = S_n \; ; \; n = 0,1,\ldots$
$^{g}g_{0,i}^{(n)} = g_i(n) \; ; \; i = 1,2,\ldots \; ; \; n = 0,1,\ldots$

Itération:

Pour $k = 1,2,\ldots,\ n = 0,1,\ldots$
$^{d}E_k(n) = {}^{d}E_{k-1}(n) - (\Delta({}^{d}E_{k-1}(n)),y)(\Delta({}^{d}g_{k-1,k}^{(n)}),y)^{-1}\,{}^{d}g_{k-1,k}^{(n)}$
$^{d}g_{k,i}(n) = {}^{d}g_{k-1,i}(n) - (\Delta({}^{d}g_{k-1,i}(n)),y)(\Delta({}^{d}g_{k-1,k}^{(n)}),y)^{-1}\,{}^{d}g_{k-1,k}^{(n)}$
$i = k+1,\ldots$
où l'opérateur Δ agit sur les indices supérieurs n.
Pour ces quantités, on a le

Théorème 3.6 $^{d}E_k^{(n)} = {}^{d}E_k(S_n)$

Démonstration
Nous allons démontrer simultanément:

$$\left\{\begin{array}{l} {}^{d}E_k^{n} = {}^{d}E_k(S_n) \\ {}^{d}g_{k,i}(n) = \left|\begin{array}{llll} (\Delta g_i(n),y) & (\Delta g_1(n),y) & \ldots & (\Delta g_k(n),y) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (\Delta g_i(n+k-1),y) & (\Delta g_1(n+k-1),y) & \ldots & (\Delta g_k(n+k-1),y) \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right|_d^{-1} \\ \left|\begin{array}{llll} (\Delta g_i(n),y) & (\Delta g_1(n),y) & \ldots & (\Delta g_k(n),y) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (\Delta g_i(n+k-1),y) & (\Delta g_1(n+k-1),y) & \ldots & (\Delta g_k(n+k-1),y) \\ g_i(n) & g_1(n) & \ldots & g_k(n) \end{array}\right|_d \end{array}\right.$$

Par récurrence
La propriété est vérifiée pour $k = 0$.
Supposons qu'elle soit vérifiée pour $(k-1)$.

$$^{d}E_k(S_n) = \left|\begin{array}{llll} (\Delta S_n,y) & (\Delta g_1(n),y) & \ldots & (\Delta g_k(n),y) \\ \vdots & & & \vdots \\ (\Delta S_{n+k-1},y) & (\Delta g_1(n+k-1),y) & \ldots & (\Delta g_k(n+k-1),y) \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right|_d^{-1} \times$$

$$\begin{vmatrix} (\Delta S_n, y) & (\Delta g_1(n), y) & \dots & (\Delta g_k(n), y) \\ \vdots & & & \vdots \\ (\Delta S_{n+k-1}, y) & (\Delta g_1(n+k-1), y) & \dots & (\Delta g_k(n+k-1), y) \\ S_n & g_1(n) & \dots & g_k(n) \end{vmatrix}_d$$

En appliquant l'identité de Sylvester (propriété 2.1 du ch.2), on aura
${}^dE_k(S_n) = \{-AB^{-1}C\}^{-1} \times \{D - AB^{-1}E\}$ où

$$A = \begin{vmatrix} (\Delta g_1(n), y) & \dots & (\Delta g_k(n), y) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\Delta g_1(n+k-1), y) & \dots & (\Delta g_k(n+k-1), y) \end{vmatrix}_d$$

$$B = \begin{vmatrix} (\Delta g_1(n), y) & \dots & (\Delta g_{k-1}(n), y) & (\Delta S_n, y) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (\Delta g_1(n+k-1), y) & \dots & (\Delta g_{k-1}(n+k-1), y) & (\Delta S_{n+k-1}, y) \end{vmatrix}_d$$

$$C = \begin{vmatrix} (\Delta g_1(n), y) & \dots & (\Delta g_{k-1}(n), y) & (\Delta S_n, y) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (\Delta g_1(n+k-1), y) & \dots & (\Delta g_{k-1}(n+k-1), y) & (\Delta S_{n+k-1}, y) \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}_d$$

$$D = \begin{vmatrix} (\Delta g_1(n), y) & \dots & (\Delta g_{k-1}(n), y) & (\Delta g_k(n), y) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (\Delta g_1(n+k-1), y) & \dots & (\Delta g_{k-1}(n+k-1), y) & (\Delta g_k(n+k-1), y) \\ g_1(n) & \dots & g_{k-1}(n) & g_k(n) \end{vmatrix}_d$$

$$E = \begin{vmatrix} (\Delta g_1(n), y) & \dots & (\Delta g_{k-1}(n), y) & (\Delta S_n, y) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (\Delta g_1(n+k-1), y) & \dots & (\Delta g_{k-1}(n+k-1), y) & (\Delta S_{n+k-1}, y) \\ g_1(n) & \dots & g_{k-1}(n) & S_n \end{vmatrix}_d$$

${}^dE_k(S_n) = -C^{-1}BA^{-1}D + C^{-1}BA^{-1}AB^{-1}E$
${}^dE_k(S_n) = C^{-1}E - C^{-1}BA^{-1}D.$

Or $C = 1$ (même démonstration que pour le lemme 3.1) donc:
${}^dE(S_n) = E - BA^{-1}D$. Or d'après l'expression (3.14) et l'hypothèse de récurrence, on a $E = {}^dE^n_{k-1}$ d'où ${}^dE_k(S_n) = {}^dE^{(n)}_{k-1} - BA^{-1}D$.

$$D = \begin{vmatrix} (\Delta g_1(n),y) & \dots & (\Delta g_{k-1}(n),y) & (\Delta g_k(n),y) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (\Delta g_1(n+k-1),y) & \dots & (\Delta g_{k-1}(n+k-1),y) & (\Delta g_k(n+k-1),y) \\ g_1(n) & \dots & g_{k-1}(n) & g_k(n) \end{vmatrix}_d ;$$

En appliquant la propriété 2.16 du ch.2, puis la propriété 2.11, on a:
$D =$

$$\begin{vmatrix} (\Delta g_k(n),y) & (\Delta g_1(n),y) & \dots & (\Delta g_{k-1}(n),y) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\Delta g_k(n+k-1),y) & (\Delta g_1(n+k-1),y) & \dots & (\Delta g_{k-1}(n+k-1),y) \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}_d^{-1} \times$$

$$\begin{vmatrix} (\Delta g_k(n),y) & (\Delta g_1(n),y) & \dots & (\Delta g_{k-1}(n),y) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (\Delta g_k(n+k-1),y) & (\Delta g_1(n+k-1),y) & \dots & (\Delta g_{k-1}(n+k-1),y) \\ g_k(n) & g_1(n) & \dots & g_{k-1}(n) \end{vmatrix}_d$$

$D = {}^d g_{k-1,k}^{(n)}$ (d'après l'hypothèse de récurrence). D'où
${}^dE_k(S_n) = {}^dE_{k-1}^{(n)} - BA^{-1}\,{}^d g_{k-1,k}^{(n)}$. Posons $I = BA^{-1}$.
D'après l'expression de I, I est un scalaire. Il vient donc

$$({}^dE_k(S_n) - {}^dE_{k-1}(S_n), y) = -I({}^d g_{k-1,k}^{(n)}, y).$$

Or, il est facile de voir que $({}^dE_k(S_n), y) = {}^dE_k(S_n, y)$
(Naturellement les vecteurs $g_1(n), \dots, g_k(n)$ sont remplacés par

$$(g_1(n), y), \dots, (g_k(n), y).$$

Or d'après les règles du ${}^dE$-algorithme scalaire, on a

$${}^dE_k(S_n, y) - {}^dE_{k-1}(S_n, y) = -\Delta\, {}^dE_{k-1}(S_n, y)(\Delta\, {}^d g_{k-1,k}{}^n, y)^{-1}({}^d g_{k-1,k}{}^n, y).$$

d'où $I = (\Delta\, {}^dE_{k-1}(S_n, y))(\Delta\, {}^d g_{k-1,k}{}^n, y)^{-1} = (\Delta\, {}^dE_{k-1}{}^n, y)(\Delta\, {}^d g_{k-1,k}^n, y)^{-1}$.
Ainsi on a enfin

$${}^dE_k(S_n) = {}^dE_{k-1}{}^n - (\Delta\, {}^dE_{k-1}^{(n)}, y)^{-1}\, {}^d g_{k-1,k}{}^{(n)} = {}^dE_k^n.$$

Pour les ${}^d g_{k,i}(n)$, la démonstration est la même, puisq'il suffit de remplacer S_n par $g_i(n)$. ■

Théorème 3.7 *Si* $S_n = S + a_1 g_1(n) + \ldots + a_k g_k(n) \ \forall\, n$ *alors* ${}^dE_k^n = S \ \forall\, n$

Démonstration
Cela résulte de la construction. Plus généralement encore

Théorème 3.8 *Si* $S_n = S + a_1 g_1(n) + \ldots + a_k g_k(n) \quad \forall\, n$ *alors* ${}^dE_k^n = S + a_{k+1}{}^d g_{k,k+1}^{(n)} + a_{k+2}{}^d g_{k,k+2}^{(n)} + \ldots \quad \forall\, n, k$

Démonstration
La propriété est vraie pour $k = 0$.
Supposons que c'est vrai pour $k - 1$.
${}^dE_k^{(n)} = S + \sum_{i>k-1} a_i{}^d g_{k-1,i}^{(n)} - \sum_{i>k-1}(a_i \Delta^d g_{k-1,i}^{(n)}, y)(\Delta^d g_{k-1,k}^{(n)}, y)^{-1\,d} g_{k-1,k}^{(n)}$
${}^dE_k^{(n)} = S + \sum_{i>k-1}\{a_i{}^d g_{k-1,i}^{(n)} - (\Delta^d g_{k-1,i}^{(n)}, y)(\Delta^d g_{k-1,k}^{(n)}, y)^{-1\,d} g_{k-1,k}^{(n)}\}$
${}^dE_k^{(n)} = S + \sum_{i>k} a_i{}^d g_{k,i}^{(n)}$ car $({}^d g_{k,k}^{(n)} = 0.)$ ■ De même, étant donné un corps non commutatif $I\!\!K$.
$I\!\!K^p$ peut être muni d'une structure d'espace vectoriel à droite en définissant la loi externe de la manière suivante

$$\begin{array}{ccc} I\!\!K^p \times I\!\!K & \longrightarrow & I\!\!K^p \\ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \quad \lambda \right) & \longrightarrow & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \lambda = \begin{pmatrix} x_1\lambda \\ \vdots \\ x_p\lambda \end{pmatrix} \end{array}$$

Soit $(I\!\!K^p)^*$ le dual de $I\!\!K^p$. C'est un espace vectoriel à gauche sur $I\!\!K$ (voir [22]).
Soit (S_n) une suite d'éléments de $I\!\!K^p$ telle que:

$$S_n = S + g_1(n)a_1 + \ldots + g_k(n)a_k \tag{3.15}$$

où $S \in I\!\!K^p$, $a_1, \ldots, a_k \in I\!\!K$.
Pour exprimer S en fonction des $g_i(n)$, $i = 1, \ldots, k$, nous devons résoudre le système:

$$\left\{ \begin{array}{llllllll} g_1(n)a_1 & + & \ldots & + & g_k(n)a_k & + & S = & S_n \\ \Delta g_1(n)a_1 & + & \ldots & + & \Delta g_k(n)a_k & + & = & \Delta S_n \\ \vdots & & & & \vdots & & & \\ \Delta g_1(n+k-1)a_1 & + & \ldots & + & \Delta g_k(n+k-1)a_k & + & = & \Delta S_{n+k-1} \end{array} \right. \tag{3.16}$$

Soit $y \in (\mathbb{K}^p)^p$. Notons $y(x) = (x, y)$ où $x \in \mathbb{K}^p$ et $(x, y) \in \mathbb{K}$.
Appliquons y aux équations du système (3.16) sauf la première, nous obtenons:

$$\left\{\begin{array}{llllllll}
(\Delta g_1(n), y)a_1 & + & \ldots & + & (\Delta g_k(n), y)a_k & + & & = (\Delta S_n, y) \\
\vdots & & & & \vdots & & & \\
(\Delta g_1(n+k-1), y)a_1 & + & \ldots & + & (\Delta g_k(n+k-1), y)a_k & + & & = (\Delta S_{n+k-1}, y \\
g_1(n)a_1 & + & \ldots & + & g_k(n)a_k & + & S & = S_n
\end{array}\right. \tag{3.17}$$

3) Si la suite de vecteurs (S_n) n'a pas la forme exacte (3.10), S dépendra de n et de k. On notera ${}^dE_k(S_n)$.

$${}^dE_k(S_n) = \begin{vmatrix} (\Delta S_n, y) & (\Delta g_1(n), y) & \ldots & (\Delta g_k(n), y) \\ \vdots & & & \vdots \\ (\Delta S_{n+k-1}, y) & (\Delta g_1(n+k-1), y) & \ldots & (\Delta g_k(n+k-1), y) \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}_d^{-1} \times$$

$$\begin{vmatrix} (\Delta S_n, y) & (\Delta g_1(n), y) & \ldots & (\Delta g_k(n), y) \\ \vdots & & & \vdots \\ (\Delta S_{n+k-1}, y) & (\Delta g_1(n+k-1), y) & \ldots & (\Delta g_k(n+k-1), y) \\ S_n & g_1(n) & \ldots & g_k(n) \end{vmatrix}_d$$

Il s'agit maintenant, comme pour le cas précédent, de construire un algorithme qui calcule récursivement ces quantités ${}^gE_k(S_n)$.

Considérons maintenant les quantités ${}^gE_k^{(n)}$ et ${}^gg_{k,i}^{(n)}$ calculées par

Initialisation:

${}^gE_0^{(n)} = S_n \ ; \ n = 0, 1, \ldots$
${}^gg_{0,i}^{(n)} = g_i(n) \ ; \ i = 1, 2, \ldots \ ; \ n = 0, 1, \ldots$

Itération:

Pour $k = 1, 2, \ldots, \ n = 0, 1, \ldots$
${}^gE_k(n) = {}^gE_{k-1}(n) - {}^gg_{k-1,k}^{(n)}(\Delta({}^gg_{k-1,k}^{(n)}), y)^{-1}(\Delta({}^gE_{k-1}(n)), y)$
${}^gg_{k,i}(n) = {}^dg_{k-1,i}(n) - {}^gg_{k-1,k}^{(n)}(\Delta({}^gg_{k-1,k}^{(n)}), y)^{-1}(\Delta({}^gg_{k-1,i}(n)), y)$
$i = k + 1, \ldots$

où l'opérateur Δ agit sur les indices supérieurs n.
Pour ces quantités, on a le

Théorème 3.9

$${}^gE_k^{(n)} = {}^gE_k(S_n)$$

Démonstration
Elle se fait de la même manière que la démonstration du theoème 3.1 avec ${}^gg_{k,i}(n) =$

$$\begin{vmatrix} (\Delta g_i(n), y) & (\Delta g_1(n), y) & \dots & (\Delta g_k(n), y) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (\Delta g_i(n+k-1), y) & (\Delta g_1(n+k-1), y) & \dots & (\Delta g_k(n+k-1), y) \\ g_i(n) & g_1(n) & \dots & g_k(n) \end{vmatrix}_g$$

$$\begin{vmatrix} (\Delta g_i(n), y) & (\Delta g_1(n), y) & \dots & (\Delta g_k(n), y) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (\Delta g_i(n+k-1), y) & (\Delta g_1(n+k-1), y) & \dots & (\Delta g_k(n+k-1), y) \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}_g^{-1}$$

Théorème 3.10 *Si* $S_n = S + g_1(n)a_1 + \ldots + g_k(n)a_k \ \ \forall\, n$ *alors* ${}^gE_k^{(n)} = S \ \ \forall\, n$

Démonstration
Comme pour le théorème 3.7, cela résulte de la construction. Un résultat plus général encore

Théorème 3.11 *Si* $S_n = S + g_1(n)a_1 + \ldots + g_k(n)a_k \ \ \forall\, n$ *alors* ${}^gE_k^{(n)} = S + {}^gg_{k,k+1}^{(n)}a_{k+1} + {}^gg_{k,k+2}^{(n)}a_{k+2} + \ldots \ \ \forall\, k, n$

La démonstration se fait d'une manière analogue à celle faite pour le théorème 3.8

3.5 Transformation de Shanks

Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d éléments du corps non commutatif $\mathbb{K}$ qui vérifie:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_0S_n & + & a_1S_{n+1} & + & \dots & + & a_kS_{n+k} & = & S \\ a_0 & + & a_1 & + & \dots & + & a_k & = & 1 \quad \forall n \end{array} \right. \tag{3.18}$$

Pour exprimer S en termes de la suite, on résoud le système suivant:

$$\left\{\begin{array}{llllllll} a_0 & + & a_1 & + \ldots + & a_k & & = & 1 \\ a_0 S_n & + & a_1 S_{n+1} & + \ldots + & a_k S_{n+k} & -S & = & 0 \\ a_0 \Delta S_n & + & a_1 \Delta S_{n+1} & + \ldots + & a_k \Delta S_{n+k} & & = & 0 \\ \ldots & & & & & & & \\ a_0 \Delta S_{n+k-1} & + & a_1 S_{n+k} & + \ldots + & a_k \Delta S_{n+2k-1} & & = & 0 \end{array}\right. \quad (3.19)$$

en supposant que le d.désignant de ce système soit non nul, on a

$$S = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ S_n & S_{n+1} & \ldots & S_{n+k} & 0 \\ \Delta S_n & \Delta S_{n+1} & \ldots & \Delta S_{n+k} & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \Delta S_{n+k-1} & \Delta S_{n+k} & \ldots & \Delta S_{n+2k-1} & 0 \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \\ S_n & S_{n+1} & \ldots & S_{n+k} & -1 \\ \Delta S_n & \Delta S_{n+1} & \ldots & \Delta S_{n+k} & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \Delta S_{n+k-1} & \Delta S_{n+k} & \ldots & \Delta S_{n+2k-1} & 0 \end{vmatrix}_d^{-1}$$

Pour une suite S_n qui n'a pas la forme exacte 3.18, S dépendra de k et de n.
On notera ${}^d\varepsilon_{2k}(S_n)$ au lieu de S.
La transformation
${}^dT : (S_n)_{n\in I\!N} \longrightarrow {}^d\varepsilon_{2k}(S_n)$ est la transformation de Shanks à droite.
Nous allons constuire de la même manière ${}^gT$:
Soit $(S_n)_{n\in I\!N}$ une suite d éléments du corps non commutatif $I\!K$ qui vérifie:

$$\left\{\begin{array}{lllllll} S_n a_0 & + & S_{n+1} a_1 & + \ldots + & S_{n+k} a_k & = & S \\ a_0 & + & a_1 & + \ldots + & a_k & = & 1 \quad \forall n \end{array}\right. \quad (3.20)$$

Pour exprimer S en termes de la suite, on résoud le système suivant:

$$\left\{\begin{array}{llllllll} a_0 & + & a_1 & + \ldots + & a_k & & = & 1 \\ S_n a_0 & + & S_{n+1} a_1 & + \ldots + & S_{n+k} a_k & -S & = & 0 \\ \Delta S_n a_0 & + & \Delta S_{n+1} a_1 & + \ldots + & \Delta S_{n+k} a_k & & = & 0 \\ \ldots & & & & & & & \\ \Delta S_{n+k-1} a_0 & + & \Delta S_{n+k} a_1 & + \ldots + & \Delta S_{n+2k-1} a_k & & = & 0 \end{array}\right. \quad (3.21)$$

en supposant que le d.désignant de ce système soit non nul, on a

$$S = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ S_n & S_{n+1} & \dots & S_{n+k} & -1 \\ \Delta S_n & \Delta S_{n+1} & \dots & \Delta S_{n+k} & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \Delta S_{n+k-1} & \Delta S_{n+k} & \dots & \Delta S_{n+2k-1} & 0 \end{vmatrix}_g^{-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ S_n & S_{n+1} & \dots & S_{n+k} & 0 \\ \Delta S_n & \Delta S_{n+1} & \dots & \Delta S_{n+k} & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \Delta S_{n+k-1} & \Delta S_{n+k} & \dots & \Delta S_{n+2k-1} & 0 \end{vmatrix}_g$$

Pour une suite S_n qui n'a pas la forme exacte 3.18, S dépendra de k et de n. On notera ${}^g\varepsilon_{2k}(S_n)$ au lieu de S.
La transformation
${}^gT : (S_n)_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow {}^g\varepsilon_{2k}(S_n)$ est la transformation de Shanks à gauche.
Il s'agit maintenant de trouver un algorithme qui calcule récursivement les quantités ${}^d\varepsilon_{2k}(S_n), {}^g\varepsilon_{2k}(S_n)$ sans calculer explicitement les d.désignants et les g.désignants en question.

3.6 L'ε-algorithme

Wynn in [39,41] a construit un algorithme, ε-algorithme, qui permet la mise en oeuvre de la transformation de Shanks (ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
Nous allons voir que cet algorithme est encore valable pour la mise en oeuvre de ${}^dT, {}^dT$. (c à d que l'ε-algorithme va nous permettre le calcul récursif des quantités ${}^d\varepsilon_{2k}(S_n), {}^g\varepsilon_{2k}(S_n)$.
Nous posons ${}^d\varepsilon_{2k+1}(S_n) = ({}^d\varepsilon_{2k}(\Delta S_n))^{-1}$ et
${}^g\varepsilon_{2k+1}(S_n) = ({}^g\varepsilon_{2k}(\Delta S_n))^{-1}$.
Soient ε_k^n les quantités calculées de la manière suivante:
$\varepsilon_{-1}^n = 0 \quad n = 0, 1, \dots$
$\varepsilon_0^n = S_n \quad n = 0, 1, \dots$
Pour $k = 0, 1, \dots, \quad n = 0, 1, \dots$
$\varepsilon_{k+1}^n = \varepsilon_{k-1}^{n+1} + (\varepsilon_k^{n+1} - \varepsilon_k^n)^{-1}$

Théorème 3.12

$$\varepsilon_k^n = {}^d\varepsilon_k(S_n) \quad \forall k, n$$

Démonstration

${}^d\varepsilon_0(S_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ S_n & 0 \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ S_n & -1 \end{vmatrix}_d^{-1} = (0 - 1 \times 1 \times S_n) \times (0 - 0 \times 1 \times S_n)^{-1} =$
$S_n = \varepsilon_0^n$.
De même
${}^d\varepsilon_1(S_n) = ({}^d\varepsilon_0(\Delta S_n))^{-1} = \varepsilon_1^n$.
Nous allons démontrer par un calcul direct que
${}^d\varepsilon_2(S_n) - {}^d\varepsilon_0(S_{n+1}) = ({}^d\varepsilon_1(S_{n+1}) - {}^d\varepsilon_1(S_n))^{-1}$.
C'est à dire

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ S_n & S_{n+1} & 0 \\ \Delta S_n & \Delta S_{n+1} & 0 \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ S_n & S_{n+1} & -1 \\ \Delta S_n & \Delta S_{n+1} & 0 \end{vmatrix}_d^{-1} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ S_n & 0 \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ S_n & -1 \end{vmatrix}_d^{-1} =$$

$$\{(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \Delta S_{n+1} & 0 \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \Delta S_{n+1} & -1 \end{vmatrix}_d^{-1})^{-1} - (\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \Delta S_n & 0 \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \Delta S_n & -1 \end{vmatrix}_d^{-1})^{-1}\}^{-1}$$

Développons le premier membre de l'égalité. Il est égal à
$-\Delta S_n + S_n(\Delta S_n)^{-1}(\Delta S_{n+1} - \Delta S_n)) \times ((\Delta S_n)^{-1}(\Delta S_{n+1} - \Delta S_n))^{-1} - S_{n+1}$
$= -\Delta S_n((\Delta S_n)^{-1}(\Delta S_{n+1} - \Delta S_n))^{-1} + S_n - S_{n+1}$
$= -\Delta S_n(\Delta S_{n+1} - \Delta S_n)^{-1}\Delta S_n - \Delta S_n$
$= -\Delta S_n(\Delta S_{n+1} - \Delta S_n)^{-1}(\Delta S_n + (\Delta S_{n+1} - \Delta S_n))$
$= -\Delta S_n(\Delta S_{n+1} - \Delta S_n)^{-1}\Delta S_{n+1}$
$= -\Delta S_n(\Delta S_{n+1}((\Delta S_n)^{-1} - (\Delta S_{n+1})^{-1})\Delta S_n)^{-1}\Delta S_{n+1}$
$= -\Delta S_n(\Delta S_n)^{-1}((\Delta S_{n+1})^{-1} - (\Delta S_n)^{-1})^{-1}(\Delta S_{n+1})^{-1}\Delta S_{n+1}$
$= ((\Delta S_{n+1})^{-1} - (\Delta S_n)^{-1})^{-1}$
qui est tout simplement le second membre de l'égalité.
Démontrons aussi que
${}^d\varepsilon_3(S_n) - {}^d\varepsilon_1(S_{n+1}) = ({}^d\varepsilon_2(S_{n+1}) - {}^d\varepsilon_2(S_n))^{-1}$. ${}^d\varepsilon_3(S_n) - {}^d\varepsilon_1(S_{n+1}) =$

$$\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \Delta S_n & \Delta S_{n+1} & 0 \\ \Delta^2 S_n & \Delta^2 S_{n+1} & 0 \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \Delta S_n & \Delta S_{n+1} & -1 \\ \Delta^2 S_n & \Delta^2 S_{n+1} & 0 \end{vmatrix}_d^{-1}\right)^{-1}$$

$$- \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \Delta S_{n+1} & 0 \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \Delta S_{n+1} & -1 \end{vmatrix}_d^{-1}\right)^{-1}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \Delta S_n & \Delta S_{n+1} & -1 \\ \Delta^2 S_n & \Delta^2 S_{n+1} & 0 \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \Delta S_n & \Delta S_{n+1} & 0 \\ \Delta^2 S_n & \Delta^2 S_{n+1} & 0 \end{vmatrix}_d^{-1} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \Delta S_{n+1} & -1 \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \Delta S_{n+1} & 0 \end{vmatrix}_d^{-1}$$

En appliquant l'identité de Schweins (propriété 3.18 ch.2), on a

$$^d\varepsilon_3(S_n) - {}^d\varepsilon_1(S_{n+1}) =$$
$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \Delta S_{n+1} & 0 & -1 \\ \Delta^2 S_{n+1} & 0 & 0 \end{vmatrix}_d}_{E} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \Delta S_n & \Delta S_{n+1} & 0 \\ \Delta^2 S_n & \Delta^2 S_{n+1} & 0 \end{vmatrix}_d^{-1}}_{F^{-1}}$$

De même

$$^d\varepsilon_2(S_{n+1}) - {}^d\varepsilon_2(S_n) =$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ S_{n+1} & S_{n+2} & 0 \\ \Delta S_{n+1} & \Delta S_{n+2} & 0 \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ S_{n+1} & S_{n+2} & -1 \\ \Delta S_{n+1} & \Delta S_{n+2} & 0 \end{vmatrix}_d -$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ S_n & S_{n+1} & 0 \\ \Delta S_n & \Delta S_{n+1} & 0 \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ S_n & S_{n+1} & -1 \\ \Delta S_n & \Delta S_{n+1} & 0 \end{vmatrix}_d$$

$$^d\varepsilon_2(S_{n+1}) - {}^d\varepsilon_2(S_n) =$$
$$\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ S_{n+1} & S_{n+2} & 0 \\ \Delta S_{n+1} & \Delta S_{n+2} & 0 \end{vmatrix}_d - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ S_n & S_{n+1} & 0 \\ \Delta S_n & \Delta S_{n+1} & 0 \end{vmatrix}_d \right.$$
$$\left. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ S_n & S_{n+1} & -1 \\ \Delta S_n & \Delta S_{n+1} & 0 \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ S_{n+1} & S_{n+2} & -1 \\ \Delta S_{n+1} & \Delta S_{n+2} & 0 \end{vmatrix}_d \right) \times$$
$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ S_{n+1} & S_{n+2} & -1 \\ \Delta S_{n+1} & \Delta S_{n+2} & 0 \end{vmatrix}_d^{-1}}_{E'^{-1}}$$

Notons F' la quantité qui est entre parenthèse.
Ainsi

$$({}^d\varepsilon_2(S_{n+1}) - {}^d\varepsilon_2(S_n))^{-1} = E'(F')^{-1}$$

Montrons que $E = E'$. En effet, en appliquant la propriété 2.1 du ch.2, on a:

$$E = \left| \begin{array}{cc} \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ \Delta S_{n+1} & 0 \end{array} \right|_d & \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \Delta S_{n+1} & -1 \end{array} \right|_d \\ \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ \Delta^2 S_{n+1} & 0 \end{array} \right|_d & \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \Delta^2 S_{n+1} & 0 \end{array} \right|_d \end{array} \right|_d = \left| \begin{array}{cc} -\Delta S_{n+1} & -1 \\ -\Delta^2 S_{n+1} & 0 \end{array} \right|_d = \left| \begin{array}{cc} 1\Delta S_{n+1} & -1 \\ \Delta^2 S_{n+1} & 0 \end{array} \right|_d$$

(prop 2.4)

De même

$$E' = \left| \begin{array}{cc} \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ S_{n+1} & S_{n+2} \end{array} \right|_d & \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ S_{n+1} & -1 \end{array} \right|_d \\ \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ \Delta S_{n+1} & \Delta S_{n+2} \end{array} \right|_d & \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \Delta S_{n+1} & 0 \end{array} \right|_d \end{array} \right|_d = \left| \begin{array}{cc} \Delta S_{n+1} & -1 \\ \Delta^2 S_{n+1} & 0 \end{array} \right|_d$$

Démontrons maintenant que $F = F'$. Considérons le d.désignant

$$\left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ S_{n+1} & S_{n+2} & -1 & 0 \\ \Delta S_n & \Delta S_{n+1} & 0 & 0 \\ \Delta S_{n+1} & \Delta S_{n+2} & 0 & 0 \end{array} \right|_d .$$

Il est égal à

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ S_{n+1} & S_{n+2} & 0 \\ \Delta S_{n+1} & \Delta S_{n+2} & 0 \end{array} \right|_d -$$

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ S_{n+1} & S_{n+2} & 0 \\ \Delta S_n & \Delta S_{n+1} & 0 \end{array} \right|_d \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ S_{n+1} & S_{n+2} & -1 \\ \Delta S_n & \Delta S_{n+1} & 0 \end{array} \right|_d^{-1} \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ S_{n+1} & S_{n+2} & -1 \\ \Delta S_{n+1} & \Delta S_{n+2} & 0 \end{array} \right|_d$$

or

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ S_{n+1} & S_{n+2} & 0 \\ \Delta S_n & \Delta S_{n+1} & 0 \end{array} \right|_d \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ S_{n+1} & S_{n+2} & -1 \\ \Delta S_n & \Delta S_{n+1} & 0 \end{array} \right|_d^{-1} =$$

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ S_n & S_{n+1} & 0 \\ \Delta S_n & \Delta S_{n+1} & 0 \end{array} \right|_d \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ S_n & S_{n+1} & -1 \\ \Delta S_n & \Delta S_{n+1} & 0 \end{array} \right|_d^{-1} = F'.$$

En appliquant la propriété 2.10,2.11 puis 2.1 du ch.2, on a

$$F' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ S_{n+1} & S_{n+2} & -1 & 0 \\ \Delta S_n & \Delta S_{n+1} & 0 & 0 \\ \Delta S_{n+1} & \Delta S_{n+2} & 0 & 0 \end{vmatrix}_d = \begin{vmatrix} S_{n+1} & S_{n+2} & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ \Delta S_n & \Delta S_{n+1} & 0 & 0 \\ \Delta S_{n+1} & \Delta S_{n+2} & 0 & 0 \end{vmatrix}_d =$$

$$\begin{vmatrix} -1 & S_{n+1} & S_{n+2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \Delta S_n & \Delta S_{n+1} & 0 \\ 0 & \Delta S_{n+1} & \Delta S_{n+2} & 0 \end{vmatrix}_d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \Delta S_n & \Delta S_{n+1} & 0 \\ \Delta S_{n+1} & \Delta S_{n+2} & 0 \end{vmatrix}_d = F$$

Nous allons suivre la même démarche pour la démonstration dans le cas général.
Démontrons que
$\varepsilon_{2k+2}(S_n) - \varepsilon_{2k}(S_{n+1}) = (\varepsilon_{2k+1}(S_{n+1}) - \varepsilon_{2k+1}(S_n))^{-1}$.
$\varepsilon_{2k+2}(S_n) - \varepsilon_{2k}(S_{n+1}) =$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ S_n & S_{n+1} & \dots & S_{n+k+1} & 0 \\ \Delta S_n & \Delta S_{n+1} & \dots & \Delta S_{n+k+1} & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \Delta S_{n+k} & \Delta S_{n+k+1} & \dots & \Delta S_{n+2k+1} & 0 \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ S_n & S_{n+1} & \dots & S_{n+k+1} & -1 \\ \Delta S_n & \Delta S_{n+1} & \dots & \Delta S_{n+k+1} & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \Delta S_{n+k} & \Delta S_{n+k+1} & \dots & \Delta S_{n+2k+1} & 0 \end{vmatrix}_d^{-1} -$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ S_{n+1} & S_{n+2} & \dots & S_{n+k+1} & 0 \\ \Delta S_{n+1} & \Delta S_{n+2} & \dots & \Delta S_{n+k+1} & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \Delta S_{n+k} & \Delta S_{n+k+1} & \dots & \Delta S_{n+2k+1} & 0 \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ S_{n+1} & S_{n+2} & \dots & S_{n+k+1} & -1 \\ \Delta S_{n+1} & \Delta S_{n+2} & \dots & \Delta S_{n+k+1} & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \Delta S_{n+k} & \Delta S_{n+k+1} & \dots & \Delta S_{n+2k} & 0 \end{vmatrix}_d^{-1}$$

En appliquant l'identité de Schweins
$\varepsilon_{2k+2}(S_n) - \varepsilon_{2k}(S_{n+1}) =$

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ S_{n+1} & \dots & S_{n+k+1} & -1 & 0 \\ \Delta S_{n+1} & \dots & \Delta S_{n+k+1} & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \Delta S_{n+k+1} & \dots & \Delta S_{n+2k+1} & 0 & 0 \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 \\ S_n & \dots & S_{n+k+1} & -1 \\ \Delta S_n & \dots & \Delta S_{n+k+1} & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \Delta S_{n+k} & \dots & \Delta S_{n+2k+1} & 0 \end{vmatrix}_d^{-1}$$

$$(\varepsilon_{2k+2}(S_n) - \varepsilon_{2k}(S_{n+1}))^{-1} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 0 \\ S_n & \cdots & S_{n+k+1} & -1 \\ \Delta S_n & \cdots & \Delta S_{n+k+1} & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \Delta S_{n+k} & \cdots & \Delta S_{n+2k+1} & 0 \end{vmatrix}_d}_{E'} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ S_{n+1} & \cdots & S_{n+k+1} & -1 & 0 \\ \Delta S_{n+1} & \cdots & \Delta S_{n+k+1} & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \Delta S_{n+k+1} & \cdots & \Delta S_{n+2k+1} & 0 & 0 \end{vmatrix}_d^{-1}}_{F'^{-1}} .$$

$$\varepsilon_{2k+1}(S_{n+1}) - \varepsilon_{2k+1}(S_n) =$$

$$\left(\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \Delta S_{n+1} & \cdots & \Delta S_{n+k+1} & 0 \\ \Delta^2 S_{n+1} & \cdots & \Delta^2 S_{n+k+1} & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \Delta^2 S_{n+k} & \cdots & \Delta^2 S_{n+2k+1} & 0 \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 0 \\ \Delta S_{n+1} & \cdots & \Delta S_{n+k+1} & -1 \\ \Delta^2 S_{n+1} & \cdots & \Delta^2 S_{n+k+1} & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \Delta^2 S_{n+k} & \cdots & \Delta^2 S_{n+2k} & 0 \end{vmatrix}_d^{-1} \right)^{-1} -$$

$$\left(\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \Delta S_n & \cdots & \Delta S_{n+k} & 0 \\ \Delta^2 S_n & \cdots & \Delta^2 S_{n+k} & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \Delta^2 S_{n+k-1} & \cdots & \Delta^2 S_{n+2k-1} & 0 \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 0 \\ \Delta S_n & \cdots & \Delta S_{n+k} & -1 \\ \Delta^2 S_n & \cdots & \Delta^2 S_{n+k} & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \Delta^2 S_{n+k-1} & \cdots & \Delta^2 S_{n+2k-1} & 0 \end{vmatrix}_d^{-1} \right)^{-1}$$

$$\varepsilon_{2k+1}(S_{n+1}) - \varepsilon_{2k+1}(S_n) =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 0 \\ \Delta S_{n+1} & \cdots & \Delta S_{n+k+1} & -1 \\ \Delta^2 S_{n+1} & \cdots & \Delta^2 S_{n+k+1} & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \Delta^2 S_{n+k} & \cdots & \Delta^2 S_{n+2k} & 0 \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \Delta S_{n+1} & \cdots & \Delta S_{n+k+1} & 0 \\ \Delta^2 S_{n+1} & \cdots & \Delta^2 S_{n+k+1} & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \Delta^2 S_{n+k} & \cdots & \Delta^2 S_{n+2k+1} & 0 \end{vmatrix}_d^{-1} -$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 0 \\ \Delta S_n & \cdots & \Delta S_{n+k} & -1 \\ \Delta^2 S_n & \cdots & \Delta^2 S_{n+k} & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \Delta^2 S_{n+k-1} & \cdots & \Delta^2 S_{n+2k-1} & 0 \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \Delta S_n & \cdots & \Delta S_{n+k} & 0 \\ \Delta^2 S_n & \cdots & \Delta^2 S_{n+k} & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \Delta^2 S_{n+k-1} & \cdots & \Delta^2 S_{n+2k-1} & 0 \end{vmatrix}_d^{-1}$$

$$
\varepsilon_{2k+1}(S_{n+1}) - \varepsilon_{2k+1}(S_n) =
$$

$$
\left(
\begin{vmatrix}
1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\
\Delta S_{n+1} & \Delta S_{n+2} & \dots & \Delta S_{n+k+1} & -1 \\
\Delta^2 S_{n+1} & \Delta^2 S_{n+2} & \dots & \Delta^2 S_{n+k+1} & 0 \\
\vdots & & & & \vdots \\
\Delta^2 S_{n+k} & \Delta^2 S_{n+k+1} & \dots & \Delta^2 S_{n+2k} & 0
\end{vmatrix}_d
\right.
$$

$$
- \begin{vmatrix}
1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\
\Delta S_{n} & \Delta S_{n+1} & \dots & \Delta S_{n+k} & -1 \\
\Delta^2 S_{n} & \Delta^2 S_{n+1} & \dots & \Delta^2 S_{n+k} & 0 \\
\vdots & & & & \vdots \\
\Delta^2 S_{n+k-1} & \Delta^2 S_{n+k} & \dots & \Delta^2 S_{n+2k-1} & 0
\end{vmatrix}_d
$$

$$
\begin{vmatrix}
1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\
\Delta S_{n} & \Delta S_{n+1} & \dots & \Delta S_{n+k} & 0 \\
\Delta^2 S_{n} & \Delta^2 S_{n+1} & \dots & \Delta^2 S_{n+k} & 0 \\
\vdots & & & & \vdots \\
\Delta^2 S_{n+k-1} & \Delta^2 S_{n+k} & \dots & \Delta^2 S_{n+2k-1} & 0
\end{vmatrix}_d^{-1}
$$

$$
\left.
\begin{vmatrix}
1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\
\Delta S_{n+1} & \Delta S_{n+2} & \dots & \Delta S_{n+k+1} & 0 \\
\Delta^2 S_{n+1} & \Delta^2 S_{n+2} & \dots & \Delta^2 S_{n+k+1} & 0 \\
\vdots & & & & \vdots \\
\Delta^2 S_{n+k} & \Delta^2 S_{n+k+1} & \dots & \Delta^2 S_{n+2k+1} & 0
\end{vmatrix}_d
\right)
$$

$$
\underbrace{
\begin{vmatrix}
1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\
\Delta S_{n+1} & \Delta S_{n+2} & \dots & \Delta S_{n+k+1} & 0 \\
\Delta^2 S_{n+1} & \Delta^2 S_{n+2} & \dots & \Delta^2 S_{n+k+1} & 0 \\
\vdots & & & & \vdots \\
\Delta^2 S_{n+k} & \Delta^2 S_{n+k+1} & \dots & \Delta^2 S_{n+2k+1} & 0
\end{vmatrix}_d^{-1}
}_{F^{-1}}
$$

Montrons que $F' = F$. En effet $F' =$

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ S_{n+1} & \dots & S_{n+k+1} & -1 & 0 \\ \Delta S_{n+1} & \dots & \Delta S_{n+k+1} & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \Delta S_{n+k+1} & \dots & \Delta S_{n+2k+1} & 0 & 0 \end{vmatrix}_d = \begin{vmatrix} S_{n+1} & \dots & S_{n+k+1} & -1 & 0 \\ 1 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ \Delta S_{n+1} & \dots & \Delta S_{n+k+1} & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \Delta S_{n+k+1} & \dots & \Delta S_{n+2k+1} & 0 & 0 \end{vmatrix}_d =$$

$$\begin{vmatrix} -1 & S_{n+1} & \dots & S_{n+k+1} & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & \Delta S_{n+1} & \dots & \Delta S_{n+k+1} & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \Delta S_{n+k+1} & \dots & \Delta S_{n+2k+1} & 0 \end{vmatrix}_d = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ \Delta S_{n+1} & \dots & \Delta S_{n+k+1} & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \Delta S_{n+k+1} & \dots & \Delta S_{n+2k+1} & 0 \end{vmatrix}_d =$$

F

Montrons que $E = E'$. Pour cela, considérons le d.désignant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ \Delta S_{n+1} & \Delta S_{n+2} & \dots & \Delta S_{n+k+1} & 0 & -1 \\ \Delta^2 S_{n+1} & \Delta^2 S_{n+2} & \dots & \Delta^2 S_{n+k+1} & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta^2 S_{n+k-1} & \Delta^2 S_{n+k} & \dots & \Delta^2 S_{n+2k-1} & 0 & 0 \\ \Delta^2 S_n & \Delta^2 S_{n+1} & \dots & \Delta^2 S_{n+k} & 0 & 0 \\ \Delta^2 S_{n+k} & \Delta^2 S_{n+k+1} & \dots & \Delta^2 S_{n+2k} & 0 & 0 \end{vmatrix}_d =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \Delta S_{n+1} & \Delta S_{n+2} & \dots & \Delta S_{n+k+1} & 0 \\ \Delta^2 S_{n+1} & \Delta^2 S_{n+2} & \dots & \Delta^2 S_{n+k+1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta^2 S_{n+k-1} & \Delta^2 S_{n+k} & \dots & \Delta^2 S_{n+2k-1} & 0 \\ \Delta^2 S_{n+k} & \Delta^2 S_{n+k+1} & \dots & \Delta^2 S_{n+2k} & 0 \end{vmatrix}_d -$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 \\ \Delta S_{n+1} & \dots & \Delta S_{n+k+1} & -1 \\ \Delta^2 S_{n+1} & \dots & \Delta^2 S_{n+k+1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta^2 S_{n+k-1} & \dots & \Delta^2 S_{n+2k-1} & 0 \\ \Delta^2 S_n & \dots & \Delta^2 S_{n+k} & 0 \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ \Delta S_{n+1} & \dots & \Delta S_{n+k+1} & 0 \\ \Delta^2 S_{n+1} & \dots & \Delta^2 S_{n+k+1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta^2 S_{n+k-1} & \dots & \Delta^2 S_{n+2k-1} & 0 \\ \Delta^2 S_n & \dots & \Delta^2 S_{n+k} & 0 \end{vmatrix}_d^{-1}}_{E}$$

$$\times \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \Delta S_{n+1} & \Delta S_{n+2} & \dots & \Delta S_{n+k+1} & 0 \\ \Delta^2 S_{n+1} & \Delta^2 S_{n+2} & \dots & \Delta^2 S_{n+k+1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta^2 S_{n+k-1} & \Delta^2 S_{n+k} & \dots & \Delta^2 S_{n+2k-1} & 0 \\ \Delta^2 S_{n+k-1} & \Delta^2 S_{n+k} & \dots & \Delta^2 S_{n+2k-1} & 0 \\ \Delta^2 S_{n+k} & \Delta^2 S_{n+k+1} & \dots & \Delta^2 S_{n+2k} & 0 \end{vmatrix}_d$$

Or $E =$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ \Delta S_{n+1} & \Delta S_{n+2} & \dots & \Delta S_{n+k+1} & -1 \\ \Delta^2 S_n & \Delta^2 S_{n+1} & \dots & \Delta^2 S_{n+k} & 0 \\ \Delta^2 S_{n+1} & \Delta^2 S_{n+2} & \dots & \Delta^2 S_{n+k+1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta^2 S_{n+k-1} & \Delta^2 S_{n+k} & \dots & \Delta^2 S_{n+2k-1} & 0 \\ \Delta^2 S_{n+k-1} & \Delta^2 S_{n+k} & \dots & \Delta^2 S_{n+2k-1} & 0 \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \Delta S_{n+1} & \Delta S_{n+2} & \dots & \Delta S_{n+k+1} & 0 \\ \Delta^2 S_n & \Delta^2 S_{n+1} & \dots & \Delta^2 S_{n+k} & 0 \\ \Delta^2 S_{n+1} & \Delta^2 S_{n+2} & \dots & \Delta^2 S_{n+k+1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta^2 S_{n+k-1} & \Delta^2 S_{n+k} & \dots & \Delta^2 S_{n+2k-1} & 0 \\ \Delta^2 S_{n+k-1} & \Delta^2 S_{n+k} & \dots & \Delta^2 S_{n+2k-1} & 0 \end{vmatrix}_d^{-1}.$$

Ainsi, en comparant avec E, il vient

$$E = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ \Delta S_{n+1} & \Delta S_{n+2} & \dots & \Delta S_{n+k+1} & 0 & -1 \\ \Delta^2 S_{n+1} & \Delta^2 S_{n+2} & \dots & \Delta^2 S_{n+k+1} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta^2 S_{n+k-1} & \Delta^2 S_{n+k} & \dots & \Delta^2 S_{n+2k-1} & 0 & 0 \\ \Delta^2 S_n & \Delta^2 S_{n+1} & \dots & \Delta^2 S_{n+k} & 0 & 0 \\ \Delta^2 S_{n+k} & \Delta^2 S_{n+k+1} & \dots & \Delta^2 S_{n+2k} & 0 & 0 \end{vmatrix}_d =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ \Delta S_{n+1} & \Delta S_{n+2} & \dots & \Delta S_{n+k+1} & 0 & -1 \\ \Delta^2 S_n & \Delta^2 S_{n+1} & \dots & \Delta^2 S_{n+k} & 0 & 0 \\ \Delta^2 S_{n+1} & \Delta^2 S_{n+2} & \dots & \Delta^2 S_{n+k+1} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta^2 S_{n+k-1} & \Delta^2 S_{n+k} & \dots & \Delta^2 S_{n+2k-1} & 0 & 0 \\ \Delta^2 S_{n+k} & \Delta^2 S_{n+k+1} & \dots & \Delta^2 S_{n+2k} & 0 & 0 \end{vmatrix}_d =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ \Delta S_n & \Delta S_{n+1} & \dots & \Delta S_{n+k} & 0 & -1 \\ \Delta^2 S_n & \Delta^2 S_{n+1} & \dots & \Delta^2 S_{n+k} & 0 & 0 \\ \Delta^2 S_{n+1} & \Delta^2 S_{n+2} & \dots & \Delta^2 S_{n+k+1} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta^2 S_{n+k-1} & \Delta^2 S_{n+k} & \dots & \Delta^2 S_{n+2k-1} & 0 & 0 \\ \Delta^2 S_{n+k} & \Delta^2 S_{n+k+1} & \dots & \Delta^2 S_{n+2k} & 0 & 0 \end{vmatrix}_d =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \Delta S_n & \Delta S_{n+1} & \dots & \Delta S_{n+k} & -1 \\ 0 & \Delta^2 S_n & \Delta^2 S_{n+1} & \dots & \Delta^2 S_{n+k} & 0 \\ 0 & \Delta^2 S_{n+1} & \Delta^2 S_{n+2} & \dots & \Delta^2 S_{n+k+1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \Delta^2 S_{n+k-1} & \Delta^2 S_{n+k} & \dots & \Delta^2 S_{n+2k-1} & 0 \\ 0 & \Delta^2 S_{n+k} & \Delta^2 S_{n+k+1} & \dots & \Delta^2 S_{n+2k} & 0 \end{vmatrix}_d =$$

$$\begin{vmatrix} \Delta S_n & \dots & \Delta S_{n+k} & -1 \\ \Delta^2 S_n & \dots & \Delta^2 S_{n+k} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \Delta^2 S_{n+k} & \dots & \Delta^2 S_{n+2k} & 0 \end{vmatrix}_d$$

(Ceci provient de l'application de la propriété 2.1 (p=1) du ch.2)
Pour E' on a

$$E' = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 \\ S_n & \dots & S_{n+k+1} & -1 \\ \Delta S_n & \dots & \Delta S_{n+k+1} & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \Delta S_{n+k} & \dots & \Delta S_{n+2k+1} & 0 \end{vmatrix}_d =$$

$$\begin{vmatrix} \Delta S_n & S_{n+2} - S_n & \dots & S_{n+k+1} - S_n & -1 \\ \Delta^2 S_n & \Delta S_{n+2} - \Delta S_n & \dots & \Delta S_{n+k+1} - \Delta S_n & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \Delta^2 S_{n+k} & \Delta S_{n+k+2} - \Delta S_{n+k} & \dots & \Delta S_{n+2k+1} - \Delta S_{n+k} & 0 \end{vmatrix}_d$$

(Ceci provient de la propriété 2.1 du ch.2 (p=1))

$$= \begin{vmatrix} \Delta S_n & \Delta S_{n+1} & \dots & \Delta S_{n+1} & -1 \\ \Delta^2 S_n & \Delta^2 S_{n+1} & \dots & \Delta^2 S_{n+k} & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \Delta^2 S_{n+k} & \Delta^2 S_{n+k+1} & \dots & \Delta^2 S_{n+2k} & 0 \end{vmatrix}_d$$

(Ceci provient d'après la propriété 2.15 du ch.2).
Nous allons démontrer de la même façon que:
$\varepsilon_{2k+3}(S_n) - \varepsilon_{2k+1}(S_{n+1}) = (\varepsilon_{2k+2}(S_{n+1}) - \varepsilon_{2k+2}(S_n))^{-1}$. En effet
$\varepsilon_{2k+3}(S_n) - \varepsilon_{2k+1}(S_{n+1}) =$

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 \\ \Delta S_n & \dots & \Delta S_{n+k+1} & -1 \\ \Delta^2 S_n & \dots & \Delta^2 S_{n+k+1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \Delta^2 S_{n+k} & \dots & \Delta^2 S_{n+2k+1} & 0 \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ \Delta S_n & \dots & \Delta S_{n+k+1} & 0 \\ \Delta^2 S_n & \dots & \Delta^2 S_{n+k+1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \Delta^2 S_{n+k} & \dots & \Delta^2 S_{n+2k+1} & 0 \end{vmatrix}_d^{-1} -$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 \\ \Delta S_{n+1} & \dots & \Delta S_{n+k+1} & -1 \\ \Delta^2 S_{n+1} & \dots & \Delta^2 S_{n+k+1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \Delta^2 S_{n+k} & \dots & \Delta^2 S_{n+2k} & 0 \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ \Delta S_{n+1} & \dots & \Delta S_{n+k+1} & 0 \\ \Delta^2 S_{n+1} & \dots & \Delta^2 S_{n+k+1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \Delta^2 S_{n+k} & \dots & \Delta^2 S_{n+2k} & 0 \end{vmatrix}_d^{-1}$$

En appliquant l'identité de Schweins

$\varepsilon_{2k+3}(S_n) - \varepsilon_{2k+1}(S_{n+1}) =$

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ \Delta S_{n+1} & \dots & \Delta S_{n+k+1} & 0 & -1 \\ \Delta^2 S_{n+1} & \dots & \Delta^2 S_{n+k+1} & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta^2 S_{n+k+1} & \dots & \Delta^2 S_{n+2k+1} & 0 & 0 \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ \Delta S_n & \dots & \Delta S_{n+k+1} & 0 \\ \Delta^2 S_n & \dots & \Delta^2 S_{n+k+1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \Delta^2 S_{n+k} & \dots & \Delta^2 S_{n+2k+1} & 0 \end{vmatrix}_d^{-1} -$$

$(\varepsilon_{2k+3}(S_n) - \varepsilon_{2k+1}(S_{n+1}))^{-1} =$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1\\ \Delta S_n & \dots & \Delta S_{n+k+1} & 0\\ \Delta^2 S_n & \dots & \Delta^2 S_{n+k+1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \Delta^2 S_{n+k} & \dots & \Delta^2 S_{n+2k+1} & 0\end{vmatrix}_d}_{E} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 0\\ \Delta S_{n+1} & \dots & \Delta S_{n+k+1} & 0 & -1\\ \Delta^2 S_{n+1} & \dots & \Delta^2 S_{n+k+1} & 0 & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ \Delta^2 S_{n+k+1} & \dots & \Delta^2 S_{n+2k+1} & 0 & 0\end{vmatrix}_d^{-1}}_{F^{-1}}$$

$\varepsilon_{2k+2}(S_{n+1}) - \varepsilon_{2k+2}(S_n) =$

$$\left(\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1\\ S_{n+1} & \dots & S_{n+k+2} & 0\\ \Delta S_{n+1} & \dots & \Delta S_{n+k+2} & 0\\ \vdots & & & \vdots\\ \Delta S_{n+k+1} & \dots & \Delta S_{n+2k+2} & 0 \end{vmatrix}_d - \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1\\ S_n & \dots & S_{n+k+1} & 0\\ \Delta S_n & \dots & \Delta S_{n+k+1} & 0\\ \vdots & & & \vdots\\ \Delta S_{n+k} & \dots & \Delta S_{n+2k+1} & 0 \end{vmatrix}_d \right.$$

$$\left. \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 0\\ S_n & \dots & S_{n+k+1} & -1\\ \Delta S_n & \dots & \Delta S_{n+k+1} & 0\\ \vdots & & & \vdots\\ \Delta S_{n+k} & \dots & \Delta S_{n+2k+1} & 0 \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 0\\ S_{n+1} & \dots & S_{n+k+2} & -1\\ \Delta S_{n+1} & \dots & \Delta S_{n+k+2} & 0\\ \vdots & & & \vdots\\ \Delta S_{n+k+1} & \dots & \Delta S_{n+2k+2} & 0 \end{vmatrix}_d \right)$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 0\\ S_{n+1} & \dots & S_{n+k+2} & -1\\ \Delta S_{n+1} & \dots & \Delta S_{n+k+2} & 0\\ \vdots & & & \vdots\\ \Delta S_{n+k+1} & \dots & \Delta S_{n+2k+2} & 0 \end{vmatrix}_d^{-1}}_{F'^{-1}}$$

Posons $E' =$

$$\left(\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1\\ S_{n+1} & \dots & S_{n+k+2} & 0\\ \Delta S_{n+1} & \dots & \Delta S_{n+k+2} & 0\\ \vdots & & & \vdots\\ \Delta S_{n+k+1} & \dots & \Delta S_{n+2k+2} & 0 \end{vmatrix}_d - \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1\\ S_n & \dots & S_{n+k+1} & 0\\ \Delta S_n & \dots & \Delta S_{n+k+1} & 0\\ \vdots & & & \vdots\\ \Delta S_{n+k} & \dots & \Delta S_{n+2k+1} & 0 \end{vmatrix}_d \right.$$

$$\left.\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 \\ S_n & \dots & S_{n+k+1} & -1 \\ \Delta S_n & \dots & \Delta S_{n+k+1} & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \Delta S_{n+k} & \dots & \Delta S_{n+2k+1} & 0 \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 \\ S_{n+1} & \dots & S_{n+k+2} & -1 \\ \Delta S_{n+1} & \dots & \Delta S_{n+k+2} & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \Delta S_{n+k+1} & \dots & \Delta S_{n+2k+2} & 0 \end{vmatrix}_d)\right).$$

Nous avons

$$F = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \Delta S_{n+1} & \dots & \Delta S_{n+k+1} & -1 \\ 0 & \Delta^2 S_{n+1} & \dots & \Delta^2 S_{n+k+1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \Delta^2 S_{n+k+1} & \dots & \Delta^2 S_{n+2k+1} & 0 \end{vmatrix}_d = \begin{vmatrix} \Delta S_{n+1} & \dots & \Delta S_{n+k+1} & -1 \\ \Delta^2 S_{n+1} & \dots & \Delta^2 S_{n+k+1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \Delta^2 S_{n+k+1} & \dots & \Delta^2 S_{n+2k+1} & 0 \end{vmatrix}_d$$

(propriété 2.1 avec p=1 du ch.2)

$$F' = \begin{vmatrix} \Delta S_{n+1} & S_{n+3} - S_{n+1} & \dots & S_{n+k+2} - S_{n+1} & -1 \\ \Delta^2 S_{n+1} & \Delta S_{n+3} - \Delta S_{n+1} & \dots & \Delta S_{n+k+2} - \Delta S_{n+1} & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \Delta^2 S_{n+k+1} & \Delta S_{n+k+3} - \Delta S_{n+k+1} & \dots & \Delta S_{n+2k+2} - \Delta S_{n+k+1} & 0 \end{vmatrix}_d = F$$

(propriété 2.1 et 2.15)

Nous allons maintenant démontrer que $E = E'$. Considérons le d.désignant

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ S_{n+1} & \dots & S_{n+k+2} & -1 & 0 \\ \Delta S_{n+1} & \dots & \Delta S_{n+k+2} & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \Delta S_{n+k} & \dots & \Delta S_{n+2k+1} & 0 & 0 \\ \Delta S_n & \dots & \Delta S_{n+k+1} & 0 & 0 \\ \Delta S_{n+k+1} & \dots & \Delta S_{n+2k+2} & 0 & 0 \end{vmatrix}_d = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ S_{n+1} & \dots & S_{n+k+2} & 0 \\ \Delta S_{n+1} & \dots & \Delta S_{n+k+2} & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \Delta S_{n+k+1} & \dots & \Delta S_{n+2k+2} & 0 \end{vmatrix}_d -$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ S_{n+1} & \dots & S_{n+k+2} & 0 \\ \Delta S_{n+1} & \dots & \Delta S_{n+k+2} & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \Delta S_{n+k} & \dots & \Delta S_{n+2k+1} & 0 \\ \Delta S_n & \dots & \Delta S_{n+k+1} & 0 \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 \\ S_{n+1} & \dots & S_{n+k+2} & -1 \\ \Delta S_{n+1} & \dots & \Delta S_{n+k+2} & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \Delta S_{n+k} & \dots & \Delta S_{n+2k+1} & 0 \\ \Delta S_n & \dots & \Delta S_{n+k+1} & 0 \end{vmatrix}_d^{-1}}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 0 \\ S_{n+1} & \cdots & S_{n+k+2} & -1 \\ \Delta S_{n+1} & \cdots & \Delta S_{n+k+2} & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \Delta S_{n+k+1} & \cdots & \Delta S_{n+2k+2} & 0 \end{vmatrix}_d$$

Ce qui est au dessus de l'accolade est égal à

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ S_{n+1} & \cdots & S_{n+k+2} & 0 \\ \Delta S_n & \cdots & \Delta S_{n+k+1} & 0 \\ \Delta S_{n+1} & \cdots & \Delta S_{n+k+2} & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \Delta S_{n+k} & \cdots & \Delta S_{n+2k+1} & 0 \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 0 \\ S_{n+1} & \cdots & S_{n+k+2} & -1 \\ \Delta S_n & \cdots & \Delta S_{n+k+1} & 0 \\ \Delta S_{n+1} & \cdots & \Delta S_{n+k+2} & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \Delta S_{n+k} & \cdots & \Delta S_{n+2k+1} & 0 \end{vmatrix}_d^{-1}}.$$

En appliquant la propriété 2.12 du ch.2

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ S_n & \cdots & S_{n+k+1} & 0 \\ \Delta S_n & \cdots & \Delta S_{n+k+1} & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \Delta S_{n+k} & \cdots & \Delta S_{n+2k+1} & 0 \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 0 \\ S_n & \cdots & S_{n+k+1} & -1 \\ \Delta S_n & \cdots & \Delta S_{n+k+1} & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \Delta S_{n+k} & \cdots & \Delta S_{n+2k+1} & 0 \end{vmatrix}_d^{-1}}.$$

d'où en comparant avec le développement initial de E', il vient:

$$E' = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ S_{n+1} & \cdots & S_{n+k+2} & -1 & 0 \\ \Delta S_{n+1} & \cdots & \Delta S_{n+k+2} & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \Delta S_{n+k} & \cdots & \Delta S_{n+2k+1} & 0 & 0 \\ \Delta S_n & \cdots & \Delta S_{n+k+1} & 0 & 0 \\ \Delta S_{n+k+1} & \cdots & \Delta S_{n+2k+2} & 0 & 0 \end{vmatrix}_d = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ S_n & \cdots & S_{n+k+1} & -1 & 0 \\ \Delta S_n & \cdots & \Delta S_{n+k+1} & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \Delta S_{n+k+1} & \cdots & \Delta S_{n+2k+2} & 0 & 0 \end{vmatrix}_d$$

$$= \begin{vmatrix} S_n & \dots & S_{n+k+1} & -1 & 0 \\ 1 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ \Delta S_n & \dots & \Delta S_{n+k+1} & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \Delta S_{n+k+1} & \dots & \Delta S_{n+2k+2} & 0 & 0 \end{vmatrix}_d = \begin{vmatrix} -1 & S_n & \dots & S_{n+k+1} & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & \Delta S_n & \dots & \Delta S_{n+k+1} & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \Delta S_{n+k+1} & \dots & \Delta S_{n+2k+2} & 0 \end{vmatrix}_d =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ \Delta S_n & \dots & \Delta S_{n+k+1} & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \Delta S_{n+k+1} & \dots & \Delta S_{n+2k+2} & 0 \end{vmatrix}_d = E$$

(Les étapes intermédiaires sont obtenues en appliquant les propriétés 2.10, 2.11 et la propriété 2.1 avec p=1 du ch.2)
Nous avons donc démontré que
${}^d\varepsilon_{k+1}(S_n) = {}^d\varepsilon_{k-1}(S_{n+1}) + ({}^d\varepsilon_k(S_{n+1}) - {}^d\varepsilon_k(S_n))^{-1}$.
Comme nous avons déjà vérifié que ${}^d\varepsilon_0(S_n) = \varepsilon_0^n$ et ${}^d\varepsilon_1(S_n) = \varepsilon_1^n$, il vient donc:

$${}^d\varepsilon_k(S_n) = \varepsilon_k^n \quad \forall n, k. \ \blacksquare$$

De la même manière, on établit

Théorème 3.13

$${}^g\varepsilon_k(S_n) = \varepsilon_k^n \quad \forall n, k.$$

Remarques
1) Toute cette construction reste valable si l'on se place dans un anneau associatif unitaire non commutatif $I\!K$ à condition de remplacer ci-dessus toute hypothèse
H_1: élément différent de 0 par l'hypothèse
H_2: élément inversible. Ainsi par exemple:
Dans $I\!K$ corps non commutatif, l'existence du d.désignant $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ est conditionnée par la satisfaction de l'hypothèse H_1: $a_{11} \neq 0$.
Dans $I\!K$ anneau associatif unitaire non commutatif, l'existence du d.désignant $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ est conditionnée par la satisfaction de l'hypothèse H_2: a_{11} inversible.

Cette remarque est importante pour le chapitre suivant puisque, comme nous allons le voir, $\mathbb{K}$ sera un anneau associatif unitaire non commutatif bien spécifique.

2) Du théorème 3.12, et du théorème 3.13, on déduit ${}^d\varepsilon_k(S_n) = {}^g\varepsilon_k(S_n)$. Cela veut dire que pour les systèmes (3.20) et (3.21), les (a_i) ne sont pas les mêmes pour une suite donnée (S_n), mais S est le même pour les deux systèmes.
En revenant aux désignants, l'égalité ${}^d\varepsilon_k(S_n) = {}^g\varepsilon_k(S_n)$ se traduit par

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ S_n & \dots & S_{n+k} & 0 \\ \Delta S_n & \dots & \Delta S_{n+k} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \Delta S_{n+k-1} & \dots & \Delta S_{n+2k-1} & 0 \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 \\ S_n & \dots & S_{n+k} & -1 \\ \Delta S_n & \dots & \Delta S_{n+k} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \Delta S_{n+k-1} & \dots & \Delta S_{n+2k-1} & 0 \end{vmatrix}_d^{-1} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 \\ S_n & \dots & S_{n+k} & -1 \\ \Delta S_n & \dots & \Delta S_{n+k} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \Delta S_{n+k-1} & \dots & \Delta S_{n+2k-1} & 0 \end{vmatrix}_g^{-1} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ S_n & \dots & S_{n+k} & 0 \\ \Delta S_n & \dots & \Delta S_{n+k} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \Delta S_{n+k-1} & \dots & \Delta S_{n+2k-1} & 0 \end{vmatrix}_g$$

Cette égalité a une forme équivalente donnée par Wynn [42]:

$$postQ_r^{(m)}(\lambda).postP_r^{(m)}(\lambda)^{-1} = preP_r^{(m)}(\lambda)^{-1}preQ_r^{(m)}(\lambda).$$

Nous reviendrons à cette question avec un peu plus de détails dans le chapitre suivant. Remarquons tout simplement l'analogie parfaite qu'il y a entre les deux expressions. Précisons pour le moment que $postP_r^{(m)}, postQ_r^{(m)}, preP_r^{(m)}, preQ^{(m)}$ sont des polynômes avec une certaine définition qui tient compte de l'ordre du produit.

3) Par de simples manipulations des d.désignants, on peut écrire

$$ {}^d\varepsilon_{2k}(S_n) = \begin{vmatrix} \Delta S_n & \dots & \Delta S_{n+k-1} & S_n \\ \Delta S_{n+1} & \dots & \Delta S_{n+k} & S_{n+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \Delta S_{n+k} & \dots & \Delta S_{n+2k-1} & S_{n+k} \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} \Delta S_n & \dots & \Delta S_{n+k-1} & 1 \\ \Delta S_{n+1} & \dots & \Delta S_{n+k} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \Delta S_{n+k} & \dots & \Delta S_{n+2k-1} & 1 \end{vmatrix}_d^{-1} \tag{3.22}$$

Cette expression est similaire (de point de vue forme) à celle donnée dans [5] p.9 à l'aide des déterminants (Dans ce cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
De même, on peut écrire

$$
{}^g\varepsilon_{2k}(S_n) = \begin{vmatrix} \Delta S_n & \dots & \Delta S_{n+k-1} & 1 \\ \Delta S_{n+1} & \dots & \Delta S_{n+k} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \Delta S_{n+k} & \dots & \Delta S_{n+2k-1} & 1 \end{vmatrix}_d^{-1} \begin{vmatrix} \Delta S_n & \dots & \Delta S_{n+k-1} & S_n \\ \Delta S_{n+1} & \dots & \Delta S_{n+k} & S_{n+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \Delta S_{n+k} & \dots & \Delta S_{n+2k-1} & S_{n+k} \end{vmatrix}_d \quad (3.23)
$$

4) De la relation (3.22) ci-dessus, et de la relation (3.3), on déduit que ${}^d\varepsilon_{2k}(S_n)$ peut être calculé à l'aide du ${}^dE$-algorithme en choisissant $g_i(n) = \Delta S_{n+i-1}$ comme ${}^d\varepsilon_{2k}(S_n) = \varepsilon_{2k}^n = {}^dE_k^{(n)}$ $(g_i(n) = \Delta S_{n+i-1}$
${}^g\varepsilon_{2k}(S_n) = \varepsilon_{2k}^n = {}^gE_k^{(n)}$ même initialisation
On aura ${}^dE_k^{(n)} = {}^gE_k^{(n)} = \varepsilon_{2k}^n$. C'est à dire que ε_{2k}^n peuvent être calculées indépendamment par ${}^dE$-algorithme ou ${}^gE$-algorithme.

3.7 Conclusion

Les désignants apparaîssent donc comme une généralisation des déterminants, puisqu'ils nous permettent:
1) d'étendre les méthodes d'extrapolation à des ensembles encore plus généraux (corps non commutatif, anneau associatif unitaire non commutatif,...)
2) Si l'on se place dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou dans un corps commutatif $\mathbb{K}$, en utilisant les méthodes exposées ci-dessus à l'aide des désignants, les résultats sont les mêmes que ceux des mêmes méthodes utilisant des déterminants.

Chapitre 4

Sur l'ε-algorithme vectoriel de Wynn, algèbre de Clifford, désignants et autres.

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, les §2, 3 sont consacrés à la contruction et aux propriétés de l'algèbre de Clifford, le §4 à l'extrapolation générale dans l'algèbre de Clifford $C(V)$, d'où provient un algorithme généralisant l'ε-algorithme de Wynn.
Le §5 est réservé à l'établissement d'un résultat fondamental concernant l'ε-algorithme vectoriel de Wynn. En effet depuis trente ans déjà, on se pose la question de savoir si l'on peut exprimer les quantités vectorielles ε_k^n en fonction des termes de la suite S_n sous forme d'un rapport de deux déterminants. Le résultat fondamental est la réponse à cette question.
Au §6, on fait le lien entre ces nouveaux résultats et les travaux de Graves-Morris, Roberts, Wynn.
On présente de nouveaux algorithmes dans le §7.

4.2 Algèbre de Clifford réelle

4.2.1 Construction

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension d. Soit q une forme quadratique régulière sur V [17].
Considérons l'espace quadratique (V, q). Nous allons construire un certain anneau associatif unitaire non commutatif appelé l'algèbre de Clifford $C(V)$ de V [2]. Pour les besoins de la construction, nous devons introduire quelques notions élémentaires de la théorie des ensembles.
Soit M un ensemble. Soient $S_1, \ldots, S_r$ des sous-ensembles de M. On définit une certaine somme $S_1 + S_2 + \ldots + S_r$ (différente en général de la réunion). Elle est formée des éléments de M qui appartiennent à un nombre impair des ensembles S_i.
Par exemple: $M = \{1,2,3\}$, on a $\{1\} + \{2\} = \{1,2\}$ $\{2\} + \{2\} = \emptyset$.
($\emptyset$ l'ensemble vide).
(Voir [2] pour plus de propriétés de cette somme).
Soit $a_1, \ldots, a_d$ une base orthogonale de V. $q(a_i)$ sera noté $a_i.a_i = a_i^2$: le carré scalaire. Prenons $M = \{1, 2, \ldots, d\}$. $CardP(M)$: le cardinal de l'ensemble des parties de M est égal à 2^d. On construit un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $C(V)$ de dimension 2^d ayant pour base E_s, $S \in P(M)$. (un vecteur E_s pour chaque partie S de M).

Dans $C(V)$, on définit une multiplication des éléments de base, notée $\times$, et on l étend par linéarité à $C(V)$ tout entier.
La définition de la multiplication interne de $\times$ est:
$E_S \times E_T = \prod (s,t)_{s\in S, t\in T} \prod_{i\in S\cap T} a_i^2 . E_{S+T}$
Le symbole (s,t) est défini de la manière suivante

$$(s,t) = \begin{cases} 1 & \text{si } s \leq t \\ -1 & \text{si } s > t \end{cases} \tag{4.1}$$

Si S, T ou $S \cap T$ sont vides, alors des "produits vides" apparaissent dans la définition. Ils doivent être interprétés comme étant égaux à 1.
Cette définition un peu compliquée, deviendra bientôt compréhensible.
Dans [2], on établit le

Théorème 4.1 $(C(V), +, \times, .)$ *est une algèbre associative appelée l'algèbre de Clifford associée à l'espace quadratique* (V, q). *Cette algèbre est non commutative pour* $d > 1$.

4.2.2 Propriétés et exemples

Propriété 4.1 $C(V)$ *est unitaire;* $E_\emptyset$ *est l élément neutre.*

<u>Démonstration</u>
Par définition on a:$E_\emptyset \times E_s = E_s \times E_\emptyset \ \forall S \in P(M)$.
On en déduit $E_\emptyset \times X = X \times E_\emptyset \ \forall X \in C(V)$. En effet
$X = \sum_{S\in Q(M)} \alpha_s E_s \ \alpha_s \in I\!R$ (puisque $(S_s)_{s\in P(M)}$.) est une base de $C(V)$. d'où
$E_\emptyset \times X = E_\emptyset(\sum \alpha_s E_s) = \sum \alpha_s E_\emptyset E_s = \sum \alpha_s (E_s E_\emptyset) = (\sum \alpha_s E_s) E_\emptyset = X \times E_\emptyset$.
<u>Identification</u>
Par souci de simplicité, notons E_0 au lieu de $E_\emptyset$ et E_i au lieu de $E_{\{i\}}$; donc E_0 est l élément neutre de $C(V)$.
L'ensemble des multiples scalaires de E_0, $I\!RE_0$ sera identifié à $I\!R$. Le vecteur a_i sera identifié au vecteur E_i, le vecteur $X = \sum_{i=1}^{d} x_i a_i$ de V sera identifié au vecteur $\sum_{i=1}^{d} x_i E_i$ de $C(V)$. Avec ces identifications, nous avons $I\!R \in C(V)$; $V \in C(V)$.

Cette identification étant faite, il faut maintenant distinguer l'ancien produit scalaire $X.Y$ et le produit $X \times Y$ dans $C(V)$.

Propriété 4.2 *On a,*

$$a_i \times a_i = E_i \times E_i = (i,i)a_i^2 E_0 \tag{4.2}$$

$$Si\, i \neq j\ a_i \times a_j + a_j \times a_i = (i,j)E_{\{i,j\}} + \times(j,i)E_{\{i,j\}} = 0 \tag{4.3}$$

$$X \times Y + Y \times X = 2X.Y \quad \forall X \in V, Y \in V \tag{4.4}$$

<u>Démonstration</u>
(4.2) résulte de la définition.
(4.3) résulte de la définition et du fait que $(i \neq j\ (i,j) = -(j,i)$.
(4.4) $X = \sum_{i=1}^{d} x_i a_i$, $Y = \sum_{j=1}^{d} y_i a_j$ alors
$X \times Y + Y \times X = \sum_{i,j=1}^{d} x_i y_j (a_i \times a_j + a_j \times a_i)$; d'après (4.3)
$X \times Y + Y \times X = 2\sum_{i=1}^{d} x_i y_j a_i^2 = 2(X.Y)$
<u>Remarque</u>
La relation (4.4) a deux cas particuliers:
la règle de commutation, quand X, Y sont orthogonaux.

$$X \times Y = -Y \times X \tag{4.5}$$

Et

$$X \times X = X^2 \tag{4.6}$$

où X^2 note le carré scalaire ($X^2 = \sum_{i=1}^{d} x_i^2 a_i^2$).

Propriété 4.3 *Les éléments $E_1, \ldots, E_d$ sont des générateurs de l'algèbre de Clifford $C(V)$ associée à l'espace quadratique (V,q). C'est à dire que tout élément de $C(V)$ est une combinaison linéaire des produits finis des E_i.*

En effet, soit $S \in P(M)$ non vide. Rangeons les éléments de S dans l'ordre croissant $i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leq d$. On établit aisément par récurrence [2] que: $E_S = E_{i_1} \times E_{i_2} \times \ldots \times E_{i_r}$ d'où le résultat.

On comprend mieux maintenant la définition de la multiplication des éléments de base donnée au §2.
Ainsi si
$S = \{i_1, \ldots, i_r\}$ $i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leq d$.
$T = \{j_1, \ldots, j_s\}$ $j_1 < j_2 < \ldots < j_s \leq d$.
alors $E_S = E_{i_1} \times E_{i_2} \times \ldots \times E_{i_r}$; $E_T = E_{j_1} \times E_{j_2} \times \ldots \times E_{j_s}$.
Le produit $E_S \times E_T$ s'obtient en appliquant un nombre de fois la relation (4.2) de la propriété 4.2, et un nombre de fois la relation (4.3) de la même propriété 4.2.
Ainsi par exemple
$E_{1,2} \times E_{1,3} = (E_1 \times E_2) \times (E_1 \times E_3)$
$E_{1,2} \times E_{1,3} = E_1 \times (E_2 \times E_1) \times E_3$
$E_{1,2} \times E_{1,3} = -E_1 \times E_1 \times E_2) \times E_3$ (règle 4.2)
$E_{1,2} \times E_{1,3} = -(E_1 \times E_1) \times (E_2 \times E_3)$
$E_{1,2} \times E_{1,3} = -a_1^2(E_2 \times E_3)$ (règle 4.1)
Il résulte de la propriété 3 que tout élément A de $C(V)$ s'écrit comme combinaison linéaire:
$A = \alpha_0 E_0 + \alpha_1 E_1 + \ldots + \alpha_d E_d + \alpha_{12} E_1 \times E_2 + \ldots + \alpha_{d-1d} E_{d-1} \times E_d + \ldots + \alpha_{i_1 \ldots i_r} E_{i_1} \times \ldots E_{i_r} + \ldots + \alpha_{12 \ldots d} E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_d$.
<u>Quelques exemples</u>
$d = 1$ considérons $(I\!R, q)$, avec q la forme quadratique négative $q(x) = -x^2$ $\forall x \in I\!R$.
$A_1(I\!R)$: l'algèbre de Clifford associée à $(I\!R, q)$ est constituée des éléments de la forme $\alpha_0 E_0 + \alpha_1 E_1$ isomorphe à l'ensemble $\mathbb{C}$ [2,17].

$d = 2$ considérons $(I\!R^2, q)$, avec q la forme quadratique telle que pour une base orthogonale a_1, a_2 on a $q(a_1) = q(a_2) = -1$.
$A_2(I\!R)$: l'algèbre de Clifford associée à $(I\!R^2, q)$ est constituée des éléments de la forme $\alpha_0 E_0 + \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \alpha_{12} E_1 \times E_2$.
Si l'on pose $E_0 = 1$, $i = E_1$, $j = E_2$, $k = E_1 \times E_2$, on obtient que $A_2(I\!R)$ est isomorphe au corps des quaternions réels $I\!H$ [35].
Si pour la base orthogonale a_1, a_2 on a $q(a_1) = a \in I\!R$; $q(a_2) = b \in I\!R$ alors l'algèbre de Clifford associée à $(I\!R^2, q)$ est isomorphe à l'algèbre des quaternions généralisés $(\frac{a, b}{I\!R})$ [2,17].
Nous donnons encore quelques propriétés élémentaires de $C(V)$.
Soit $C^+(V) = Span\{E_0, E_1 \times E_2, \ldots,, E_{d-1} \times E_d, \ldots\}$ l'espace vectoriel en-

gendré par des produits pairs des éléments $E_1, \ldots, E_d$.
Soit $C^-(V) = Span\{E_1, \ldots, , E_d, E_1 \times E_2 \times E_3, \ldots\}$ l'espace vectoriel engendré par des produits impairs des éléments $E_1, \ldots, E_d$.

Propriété 4.4 *$C^+(V)$ est une sous algèbre de $C(V)$ de dimension $2^{(d-1)}$.*
$C^-(V)$ est un sous espace vectoriel de $C(V)$ de dimension $2^{(d-1)}$.
On a également $C(V) = C^+(V) \oplus C^-(V)$ et
$C^+ \times C^+(V) \subset C^+(V)$; $C^- \times C^+(V) \subset C^-(V)$
$C^- \times C^-(V) \subset C^+(V)$; $C^+ \times C^-(V) \subset C^-(V)$

Propriété 4.5 *Si $u \in V$, $v \in V$ alors le produit $u \times v$ n'appartient pas en général à V.*

Propriété 4.6 *L'algèbre de Clifford $C(V)$ n'est pas en général intégre.*

4.3 Représentation matricielle

Soit V un $I\!R$-espace vectoriel euclidien. Soit $e_1, \ldots, e_d$ une base orthonormale de V. La forme quadratique considérée est donc $q(x) = \sum_{i=1}^d x_i^2$, où $x = \sum_{i=1}^{d} x_i e_i$.
Pour toute la suite, et sauf mention du contraire, nous nous plaçons dans ce cas de figure.
Les relations (4.2) et (4.3) de la propriété 4.2 du §2 peuvent être condensées en une seule

$$e_i \times e_j + e_j \times e_i = E_i \times E_j + E_j \times E_i = 2\delta_{ij} E_0 \tag{4.7}$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. Cette relation montre déjà que l'algèbre de Clifford $C(V)$ ne peut pas être commutative pour $d > 1$.

$$\text{Pour } X, Y \in V \quad X \times Y + Y \times X = 2(X.Y) \tag{4.8}$$

où $(X.Y)$ est le produit scalaire habituel
$(X.Y) = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i$ où $X = \sum_{i=1}^{d} x_i e_i$, $Y = \sum_{i=1}^{d} y_i e_i$.

Remarque

Nous avons déjà fait l'identification entre le vecteur $\sum_{i=1}^{d} x_i e_i$, et le vecteur $\sum_{i=1}^{d} x_i E_i$. Pour un vecteur X de V, nous utiliserons l'une ou l'autre notation.
Ceci résulte du fait suivant: Soit $V_{I\!R}$ le sous espace vectoriel de $C(V)$ engendré par la base $E_1, \ldots, E_d$. Il y a un isomorphisme d'espace vectoriel

$$\begin{array}{rlcl} H: & V & \longrightarrow & V_{I\!R} \\ & x = \sum_{i=1}^{d} x_i e_i & \longrightarrow & \sum_{i=1}^{d} x_i E_i. \end{array}$$

Nous ne ferons plus la distinction entre ces deux vecteurs.
Considérons $\sum_{i=1}^{d} x_i E_i$; $\| X \| = (\sum_{i=1}^{d} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$ la norme de X.
En mettant $X = Y$ dans la relation (4.8), nous avons

$$X \times X = (\| X \|)^2 \tag{4.9}$$

Si $X \neq 0$, la norme $\| X \| \neq 0$ d'où
$\frac{X}{\| X \|} \times X = X \times \frac{X}{\| X \|} = E_0$ Ceci implique donc

Propriété 4.7 *Tout vecteur X de V non nul est inversible, son inverse appartient à V, et est égal à $X^{-1} = \frac{X}{\| X \|^2}$.*

Remarques

1) L'inverse d'un vecteur X de V ($V \subset C(V)$) coïncide avec l'inverse généralisé d'un vecteur au sens de Moore-Penrose [34].
2) Alors que le produit de deux vecteurs de V n'appartient pas en général à V, l'inverse d'un vecteur de V (s'il est non nul) est toujours dans V.
3) $C(V)$ n'est pas intégre. Ainsi par exemple
$E_0 + E_1 \neq 0$, $E_0 - E_1 \neq 0$, mais $(E_0 + E_1) \times (E_0 - E_1) = E_0 - E_1 + E_1 - E_0 = 0$.
L'algèbre de Clifford associée à un espace quadratique (V, q) est déterminée d'une manière unique à un isomorphisme d'algèbre près [17]. L'algèbre de Clifford est tŕes riche en propriétés algèbriques et a beaucoup d'applications dans des domaines scientifiques divers [16]. Elle a plusieurs représentations

sous forme matricielle. Mentionnons [30]; les matrices de Cartan [14,15]; les matrices de Dirac pour $d = 1$ qui jouent un rôle trés important dans la mécanique quantique [17].
Nous présentons ici la représentation proposée par Mc-Leod [32]. Chaque élément de base de $C(V)$ E_i est représenté par une matrice de dimension $2^d \times 2^d$.
La construction est la suivante:
$E_1 = \begin{bmatrix} I_{(d-1)} & O_{(d-1)} \\ O_{(d-1)} & -I_{(d-1)} \end{bmatrix}$ où
$I_{(d-1)}$: la matrice identité de dimension $2^{(d-1)} \times 2^{(d-1)}$
$O_{(d-1)}$: la matrice nulle de dimension $2^{(d-1)} \times 2^{(d-1)}$
E_2 s'obtient de E_1 en remplaçant $O_{(d-1)}$ par la matrice
$\begin{bmatrix} I_{(d-2)} & O_{(d-2)} \\ O_{(d-2)} & -I_{(d-2)} \end{bmatrix}$ et $I_{(d-1)}$ par la matrice $O_{(d-1)}$.
Nous avons donc

$$E_2 = \left[\begin{array}{cc:cc} \multicolumn{2}{c:}{\multirow{2}{*}{$O_{(d-1)}$}} & O_{(d-2)} & I_{(d-2)} \\ & & I_{(d-2)} & O_{(d-2)} \\ \hdashline I_{(d-2)} & O_{(d-2)} & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$O^{(d-1)}$}} \\ O_{(d-2)} & -I_{(d-2)} & & \end{array}\right].$$

Puis chaque élément E_i s'obtient du précédent en remplaçant la matrice $O^{(n-i+1)}$ par la matrice
$\begin{bmatrix} I_{(d-i)} & O_{(d-i)} \\ O_{(d-i)} & -I_{(d-i)} \end{bmatrix}$
Exemple $d = 3$

$$E_1 = \begin{bmatrix} I_{(2)} & O_{(2)} \\ O_{(2)} & -I_{(2)} \end{bmatrix} \quad E_2 = \left[\begin{array}{cc:cc} \multicolumn{2}{c:}{\multirow{2}{*}{$O_{(2)}$}} & O_{(1)} & I_{(1)} \\ & & I_{(1)} & O_{(1)} \\ \hdashline I_{(1)} & O_{(1)} & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$O^{(2)}$}} \\ O_{(1)} & -I_{(1)} & & \end{array}\right].$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} O^2 & \begin{matrix} O^1 & \begin{matrix}1&0\\0&-1\end{matrix} \\ \begin{matrix}1&0\\0&-1\end{matrix} & O^1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} O^1 & \begin{matrix}1&0\\0&-1\end{matrix} \\ \begin{matrix}1&0\\0&-1\end{matrix} & O^1 \end{matrix} & O^2 \end{bmatrix}$$

Ainsi on peut considérer l'algèbre de Clifford associée à (V, q) comme étant l'algèbre de matrices de dimension $2^d \times 2^d$ engendrée par les matrices de base $E_1, \ldots, E_d$.

4.4 Extrapolation linéaire sur $C(V)$. Cas général

Nous avons vu que l'algèbre de Clifford $C(V)$ est en général non intégre. L'anneau $(C(V), +, \times)$ est un anneau associatif unitaire, non commutatif pour $d \geq 1$.
Nous allons appliquer les résultats du ch.2 et du ch.3 au cas particulier $I\!K = C(V)$.
Soit $(S_n)_{n \in I\!N}$ une suite d éléments de V $(V \subset C^-(V))$, qui verifie

$$S_n = S + a_1 \times g_1(n) + a_2 \times g_2(n) + \ldots + a_k \times g_k(n) \qquad (4.10)$$

où

$$S, S_n, g_1(n), \ldots, g_k(n) \in V \; ; a_1, \ldots, a_k \in C(V).$$

Remarques
1) Rien n'empêche de poser le problème dans sa généralité

$$S_n = S + a_1 \times g_1(n) + a_2 \times g_2(n) + \ldots + a_k \times g_k(n) \qquad (4.11)$$

où $S, g_1(n), \ldots, g_k(n), a_1, \ldots, a_k \in C(V)$.
2) Comme on l'a déjà vu, $C(V)$ est un anneau en génŕal non intégre. Mais il présente plusieurs sous-ensembles qui n'ont pas de diviseurs de 0.(Pour ces sous-ensembles, tout élément non nul est inversible). Par exemple le $I\!R$-espace vectoriel V. Ce problème d'intégrité va poser certaines difficultés pour la suite. On va y remédier en posant pour le moment certaines hypothèses

supplémentaires.
Revenons maintenant à notre équation (4.10). Nous avons vu que pour exprimer S en termes de la suite (S_n), on doit résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{lllllll} S_n & = & S + & a_1 \times g_1(n) & + \dots + & a_k \times g_k(n) \\ \Delta S_n & = & & a_1 \times \Delta g_1(n) & + \dots + & a_k \times \Delta g_k(n) \\ \vdots & & & & & \\ \Delta S_{n+k-1} & = & & a_1 \times \Delta g_1(n+k-1) & + \dots + & a_k \times \Delta g_k(n+k-1) \end{array}\right. \tag{4.12}$$

Hypothèse supplémentaire: si l'on suppose que le d.désignant de ce système

$$\begin{vmatrix} g_1(n) & \dots & g_k(n) & 1 \\ \Delta g_1(n) & \dots & \Delta g_k(n) & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \Delta g_1(n+k-1) & \dots & \Delta g_k(n+k-1) & 0 \end{vmatrix}_d$$

est inversible alors

$$S = \begin{vmatrix} g_1(n) & \dots & g_k(n) & S_n \\ \Delta g_1(n) & \dots & \Delta g_k(n) & \Delta S_n \\ \vdots & & & \vdots \\ \Delta g_1(n+k-1) & \dots & \Delta g_k(n+k-1) & \Delta S_{n+k-1} \end{vmatrix}_d$$

$$\begin{vmatrix} g_1(n) & \dots & g_k(n) & 1 \\ \Delta g_1(n) & \dots & \Delta g_k(n) & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \Delta g_1(n+k-1) & \dots & \Delta g_k(n+k-1) & 0 \end{vmatrix}_d^{-1}$$

Nous avons vu (th.3.1 §3 ch.3) que S peut être calculé récursivement par le ${}^dE$-algorithme. ${}^dE_0^{(n)} = S_n \quad n = 0, 1, \dots$
${}^dg_{0,i}^{(n)} = g_i(n) \quad i = 1, 2, \dots \quad n = 0, 1, \dots$
Pour $l = 1, 2, \dots \quad n = 0, 1, \dots$
${}^dE_l^{(n)} = {}^dE_{l-1}^{(n)} - \Delta({}^dE_l^{(n)}) \times (\Delta({}^dg_{l-1,l}^{(n)}))^{-1} \times {}^dg_{l-1,l}^{(n)}$
${}^dg_{l,i}^{(n)} = {}^dg_{l-1,i}^{(n)} - \Delta({}^dg_{l-1,i}^{(n)}) \times (\Delta({}^dg_{l-1,l}^{(n)}))^{-1} \times {}^dg_{l-1,l}^{(n)} \qquad i = l+1, l+2, \dots$
On a

$${}^dE_k^n = S$$

Nous n'allons pas étudier en détail cet algorithme, mais quelques éclaircissements s'imposent

Propriété 4.8 *Soient*

$$(S_n) \in V,\ S \in V,\ g_1(n), \ldots, g_k(n) \in V \quad a_1, \ldots, a_k \in C(V).$$

On a ${}^d g_{l,i}^{(n)} \in C^-(V)$; ${}^d E_l^n \in C^-(V) \quad \forall n, l, i$

Démonstration
On a par hypothèse ${}^d g_{0,i}^{(n)} = g_i(n) \ \in \ V \ \subset C^-(V)$
Supposons que ${}^d g_{l-1,i}^{(n)}$ appartienne à $C^-(V)$. Supposons avoir démontré que $(\Delta({}^d g_{l-1,l}^{(n)}))^{-1}$ appartienne à $C^-(V)$.
Puisque ${}^d g_{l,i}^{(n)} = {}^d g_{l-1,i}^{(n)} - \Delta({}^d g_{l-1,i}^{(n)}) \times (\Delta({}^d g_{l-1,l}^{(n)}))^{-1} \times {}^d g_{l-1,l}^{(n)}$
Or comme $(\Delta({}^d g_{l-1,i}^{(n)})) \in C^-(V)$, $(\Delta({}^d g_{l-1,l}^{(n)}))^{-1} \in C^-(V)$ et ${}^d g_{l-1,l}^{(n)} \in C^-(V)$, alors le produit $(\Delta^d g_{l-1,i}^{(n)}) \times (\Delta({}^d g_{l-1,l}^{(n)}))^{-1} \times {}^d g_{l-1,l}^{(n)} \in C^-(V)$ (Ceci provient de la propriété 4.4 du §2 et de l'hypothèse de récurrence). Reste à démontrer que $(\Delta({}^d g_{l-1,l}^{(n)}))^{-1} \in C^-(V)$.
Pour cela, il suffit de démontrer que l'inverse d'un élément u de $C^-(V)$ est aussi un élément de $C^-(V)$.
Posons $u^{-1} = u_1 + u_2$; $u_1 \in C^-(V)$, $u_2 \in C^+(V)$
(Puisque $C(V) = C^-(V) \oplus C^+(V)$, cette décomposition est unique.)
On a $u \times u^- = 1 = u \times (u_1 + u_2) \in C^+(V)$ (car $1 \in C^+(V)$).
Comme $u \times u_1 \in C^+(V)$, $u \times u_2 \in C^-(V)$, il en résulte $u \times u_2 = 0$. Comme u est supposé inversible, il en découle $u_2 = 0$. Donc $u^{-1} \in C^-(V)$.
Pour établir que

$${}^d E_l^{(n)} \in C^-(V),$$

le même raisonnement est valable. ∎

Remarques
1) Cet algorithme présente quelques inconvénients majeurs d'ordre pratique en plus des hypothèses supposées verifiées ci-dessus. Ces inconvénients sont:
a) Nous avons vu que pour un élément $X \in V$, le calcul de l'inverse X^{-1} quand $X \neq 0$ est simple: $X^{-1} = \dfrac{X}{\| X \|^2}$.
Mais pour un élément $u \in C^-(v)$, l'existence et le calcul de u^{-1} sont deux

problèmes beaucoup moins évidents, puisque u a une expression plus compliquée: $u = \sum_{\{1\leq i_1<\ldots<i_r\leq d\}} \alpha_{i_1\ldots i_r}E_{i_1}\times\ldots\times E_{i_r}$, où r est un entier impair.

b) chaque vecteur ${}^dE_l^{(n)}$, ${}^dg_{l,i}^{(n)}$ a au plus $2^{(d-1)}$ composantes (puisque $dimC^-(V) = 2^{(d-1)}$) dans la base canonique $E_1,\ldots,E_d,E_1\times E_2\times E_3,\ldots,E_{d-2}\times E_{d-1}\times E_d,\ldots$

En fait, cela demande une étude plus poussée de l'algorithme. Concernant la compléxité de l'algorithme, faisons remarquer tout simplement que le nombre de composantes (à calculer) de ${}^dE_l^{(n)}$, ${}^dg_{l,i}^{(n)}$ dépend du numéro de l'étape de calcul. En réalité, ${}^dE_l^{(n)}$, ${}^dg_{l,i}^{(n)}$ appartiennent à un sous-espace V_l de dimension inférieure à celle de $C^-(V)$. Nous avons $V_0\subset V_1\subset V_2\ldots$. Cette chaîne devient stationnaire à partir d'un certain rang.

Rappelons que $\dfrac{d!}{i!(d-i)!}$ est le nombre de parties à i éléments d'un ensemble à d éléments. D'où il en découle:

$$dim(C^-(V)) = 2^{(d-1)} = \sum_{\{i=0,i impair\}}^{d} \frac{d!}{i!(d-i)!}$$

$$dim(C^+(V)) = 2^{(d-1)} = \sum_{\{i=0,i pair\}}^{d} \frac{d!}{i!(d-i)!}$$

Nous allons déterminer le nombre de composantes à calculer à chaque itération, les restantes sont nulles. Ainsi à

l'étape 0:

${}^dE_0^{(n)} = S_n^1E_1+\ldots+S_n^dE_d$

${}^dg_{0,i}^{(n)} = g_i(n) = g_i^1(n)E_1+\ldots+g_i^d(n)E_d$

${}^dE_0^{(n)}$ a d composantes éventuellement non nulles, les restantes nulles. C'est à dire $\dfrac{d!}{1!(d-1)!} = d$. De même pour ${}^dg_{0,i}^{(n)}$.

l'étape 1:

${}^dE_1^{(n)} = {}^dE_0^{(n)} - \Delta({}^dE_0^{(n)})\times(\Delta({}^dg_{0,1}^{(n)}))^{-1}\times{}^dg_{0,1}^{(n)}$

${}^dg_{1,i}^{(n)} = {}^dg_{0,i}^{(n)} - \Delta({}^dg_{0,i}^{(n)})\times(\Delta({}^dg_{0,1}^{(n)}))^{-1}\times{}^dg_{0,1}^{(n)}$

De ces deux règles, il vient que ${}^dE_1^{(n)}$, ${}^dg_{1,i}^{(n)}$ ont des composantes éventuellement non nulles uniquement pour les éléments de base dont le produit est impair et le nombre de facteurs ne dépasse pas 3. Les autres composantes sont nulles. Ce nombre de composantes "utiles" est donc $\dfrac{d!}{1!(d-1)!}+\dfrac{d!}{3!(d-3)!}$. Et ainsi

de suite, à
l'étape i: le nombre de composantes "utiles" est
$\displaystyle\sum_{\{i=0,\, i\ impair\}}^{min(d,3^i)} \frac{d!}{i!(d-i)!}$. Donc, le nombre de composantes "utiles" augmente à chaque étape. Ceci est vrai dans le cas général. Si l'on dispose des informations supplémentaires sur la nature de la suite, ce nombre peut être mieux déterminé. Ainsi par exemple, une suite qui verifie (4.1), à l'étape k, le nombre de composantes "utiles" est d et non pas $\displaystyle\sum_{\{i=0,\, i\ impair\}}^{min(d,3^k)} \frac{d!}{i!(d-i)!}$.

Exemple $d = 5$
$C^-(V) = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_1 \times E_2 \times E_3, E_1 \times E_2 \times E_4, E_1 \times E_2 \times E_5, E_1 \times E_2 \times E_3, E_1 \times E_2 \times E_3, E_1 \times E_3 \times E_4, E_1 \times E_3 \times E_5, E_1 \times E_4 \times E_5, E_2 \times E_3 \times E_4, E_2 \times E_3 \times E_5, E_2 \times E_4 \times E_5, E_3 \times E_4 \times E_5, E_1 \times E_2 \times E_3 \times E_4 \times E_5\}$
$dim(C^-(V)) = 2^{(5-1)} = 16.$, $V_0 = V = sapn\{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5\}$, ${}^dE_0^{(n)}, g(n)_i \in V_0$. Le nombre de composantes "utiles" de ${}^dE_0^{(n)}, g(n)_i$ est $\frac{5!}{1!(4)!} = 5$.

$$V_1 = span\{\{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5\} \cup \{E_{i_1} \times E_{i_2} \times E_{i_3}\ 1 \leq< i_1 < i_2 < i_3 \leq 5\}\}$$

$dimV_1 = \frac{5!}{1!(4)!} + \frac{5!}{3!(2)!} = 15$ $\ V_0 \subset V_1$. Le nombre de composantes "utiles" de $E_1^{(n)}, g_{1,i}^{(n)}$ est 15. la composante relative à $E_1 \times E_2 \times E_3 \times E_4 \times E_5$ est donc nulle.

$$V_2 = C^-(V),\ dimV_2 = \sum_{\{i=0,\, i\ impair\}}^{min(4,3^2)} \frac{d!}{i!(d-i)!} = 16.$$

La suite des espaces vectoriels V_i est stationnaire à partir de l'indice $i = 2$.
2) Le H-algorithme d'Henrici [7] se présente comme un cas particulier de ${}^dE$-algorithme. En effet, si l'on impose aux $g_i(n)$ d'appartenir à $I\!R$ ($I\!R \subset C^-(V)$), et aux a_i d'appartenir à V $(V \subset C^-(V))$ dans la relation (11), on peut alors modifier l'écriture de ${}^dE$-algorithme:
${}^dE_0^{(n)} = S_n \in V \;\; n = 0, 1, \ldots$
$g_{0,i}^{(n)} = g_i(n) \in I\!R \;\; i = 1, 2, \ldots,\; n = 0, 1, \ldots$
De la relation

$${}^dg_{l,i}^{(n)} = {}^dg_{l-1,i}^{(n)} - \Delta({}^dg_{l-1,i}^{(n)}) \times (\Delta({}^dg_{l-1,l}^{(n)}))^{-1} \times {}^dg_{l-1,l}^{(n)},$$

on déduit que ${}^{d}g_{l,i}^{(n)} \in I\!R$, $\forall k,i,n$. D'où $(\Delta({}^{d}g_{l-1,l}^{(n)}))^{-1} = \dfrac{1}{\Delta({}^{d}g_{l-1,l}^{(n)})}$.
Comme les réels commutent avec tout vecteur de $C(V)$, le ${}^{d}E$-algorithme peut s'écrire

$$
{}^{d}E_0^{(n)} = S_n \in V \quad n = 0,1,\ldots
$$

$$
g_{0,i}^{(n)} = g_i(n) \in I\!R \quad i = 1,2,\ldots,\ n = 0,1,\ldots
$$

Pour $l = 1,2,\ldots \quad n = 0,1,\ldots$

$$
{}^{d}E_l^{(n)} = {}^{d}E_{l-1}^{(n)} - \Delta({}^{d}E_l^{(n)})\frac{{}^{d}g_{l-1,l}^{(n)}}{\Delta({}^{d}g_{l-1,l}^{(n)})} \in V
$$

$$
{}^{d}g_{l,i}^{(n)} = {}^{d}g_{l-1,i}^{(n)} - \Delta({}^{d}g_{l-1,i}^{(n)})\frac{{}^{d}g_{l-1,l}^{(n)}}{\Delta({}^{d}g_{l-1,l}^{(n)})} \in I\!R \qquad i = l+1, l+2,\ldots
$$

qui est tout simplement le H-algorithme d'Henrici

4.5 L'ε-algorithme vectoriel

l'ε-algorithme de Wynn [40] est l'un des algorithmes les plus puissants, les plus utilisés pour l'accélération de la convergence d'une suite vectorielle.
Mais il a d'autres domaines d'applications aussi importants, en particulier, la résolution des systèmes d'équations linéaires [9,21], d'équations non linéaires [12], le calcul des valeurs propres d'une matrice [10].
Il intervient également dans la théorie d'approximation vectorielle (fractions continues vectorielles [42], interpolation vectorielle, approximants de Padé [23,24,25,26]).
Il était l'objet de plusieurs recherches, mais il manque encore de résultats théoriques.
Dans ce paragraphe, nous allons démontrer que ε-algorithme vectoriel de Wynn, comme les autres algorithmes d'extrapolation connus, réalise une certaine extrapolation dans $C(V)$, résoud un certain système d'équations linéaires dans $C(V)$ et s'écrit comme "rapport" de deux désignants.
Nous avons vu que $(C(V), +, \times)$ est un anneau associatif unitaire. Il est non commutatif quand $d > 1$.

Nous avons vu également que $V \subset C(V)$; $I\!R \subset C(V)$. Pour tout $X = \sum_{i=1}^{d} x_i E_i$ de V non nul, nous avons vu que son inverse est $X^{-1} = \frac{X}{\|X\|^2}$ où $\| X \| = (\sum_{i=1}^{d} x_i^2)^{1/2}$.
L'ε-algorithme vectoriel de Wynn s'écrit donc
$\varepsilon_{-1}^{(n)} = 0 \ \ n = 0, 1, \ldots; \ \ \varepsilon_0^{(n)} = S_n \in V \ \ n = 0, 1, \ldots$
$\varepsilon_{k+1}^{(n)} = \varepsilon_{k-1}^{(n+1)} + (\varepsilon_k^{(n+1)} - \varepsilon_k^{(n)})^{-1}, \ k = 0, 1, \ldots; \ n = 0, 1, \ldots$
L'inverse considéré est l'inverse ci-dessus.
Contrairement au E^d-algorithme, les quantités $\varepsilon_k^{(n)}$ appartiennent toujours à V. Ceci est dû au fait que la somme et la différence sont des opérations stables dans V, et l'inverse d'un élément de V est un élément de V.
Le fait que $(C(V), +, \times)$ soit une algèbre, nous permet de regarder les élménts de $C(V)$ comme scalaires de l'anneau $(C(V), +, \times)$ et comme des vecteurs de l'espace vectoriel $(C(V), +, .)$.
Soit S_n une suite de vecteurs de V (scalaires de $(C(V), +, \times)$ telle que

$$\left\{ \begin{array}{llllllll} a_0 \times S_n & + & a_1 \times S_{n+1} & + & \ldots & + & a_k \times S_{n+k} & = S \\ a_0 & + & a_1 & + & \ldots & + & a_k & = 1 \end{array} \right. \tag{4.13}$$

où $S \in V$; $a_0, a_1, \ldots, a_k \in C(V)/$.
Pour exprimer S en termes de la suite, on résoud

$$\left\{ \begin{array}{llllllll} a_0 & + & a_1 & + & \ldots & + & a_k & = 1 \\ a_0 \times S_n & + & a_1 \times S_{n+1} & + & \ldots & + & a_k \times S_{n+k} & = S \\ a_0 \times \Delta S_n & + & a_1 \times \Delta S_{n+1} & + & \ldots & + & a_k \times \Delta S_{n+k} & = 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ a_0 \times \Delta S_{n+k-1} & + & a_1 \times \Delta S_{n+k} & + & \ldots & + & a_k \times \Delta S_{n+2k-1} & = 0 \end{array} \right. \tag{4.14}$$

En supposant que le désignant de ce système soit inversible, on a

$$S = \left| \begin{array}{llll} 1 & \ldots & 1 & 1 \\ S_n & \ldots & S_{n+k} & 0 \\ \Delta S_n & \ldots & \Delta S_{n+k} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \Delta S_{n+k-1} & \ldots & \Delta S_{n+2k-1} & 0 \end{array} \right|_d \left| \begin{array}{llll} 1 & \ldots & 1 & 0 \\ S_n & \ldots & S_{n+k} & -1 \\ \Delta S_n & \ldots & \Delta S_{n+k} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \Delta S_{n+k-1} & \ldots & \Delta S_{n+2k-1} & 0 \end{array} \right|_d^{-1} \tag{4.15}$$

Pour une suite (S_n) qui n'a pas la forme (4.13), S dépendra de k et de n. On notera $\varepsilon_{2k}(S_n)$ au lieu de S.

Nous avons vu que (4.15) (remarque 3 §6 ch.3) peut s'écrire

$$\varepsilon_{2k}(S_n) = \begin{vmatrix} \Delta S_n & \dots & \Delta S_{n+k-1} & S_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \Delta S_{n+k} & \dots & \Delta S_{n+2k-1} & S_{n+k} \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} \Delta S_n & \dots & \Delta S_{n+k-1} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \Delta S_{n+k} & \dots & \Delta S_{n+2k-1} & 1 \end{vmatrix}_d^{-1}$$

En appliquant le théorème 3.12 §6 du ch.3 pour $\mathbb{K} = (C(V), +, \times)$, nous avons le

Théorème 4.2 *L'ε-algorithme vectoriel s'écrit comme "rapport" de deux désignants*

$$\varepsilon_{2k}^{(n)} = \begin{vmatrix} \Delta S_n & \dots & \Delta S_{n+k-1} & S_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \Delta S_{n+k} & \dots & \Delta S_{n+2k-1} & S_{n+k} \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} \Delta S_n & \dots & \Delta S_{n+k-1} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \Delta S_{n+k} & \dots & \Delta S_{n+2k-1} & 1 \end{vmatrix}_d^{-1}$$

$$\varepsilon_{2k+1}^{(n)} = (\varepsilon_{2k}(\Delta S_n))^{-1}.$$

Ainsi ce théorème donne explicitement l'expression de $\varepsilon_k^{(n)}$ en fonction des termes de la suite.

Théorème 4.3 $\varepsilon_{2k}^{(n)} = S \iff \exists\, A_1, \dots, A_k \in C(V) |\ S_n = S + A_1 \times \Delta S_n + \dots + A_k \Delta S_{n+k-1}$

<u>Démonstration</u>

C'est une conséquence directe de l'écriture sous forme d'un "rapport" de deux désignants. En effet

$$\varepsilon_{2k}^{(n)} = S \iff \begin{vmatrix} \Delta S_n & \dots & \Delta S_{n+k-1} & S_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \Delta S_{n+k} & \dots & \Delta S_{n+2k-1} & S_{n+k} \end{vmatrix}_d = S \times \begin{vmatrix} \Delta S_n & \dots & \Delta S_{n+k-1} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \Delta S_{n+k} & \dots & \Delta S_{n+2k-1} & 1 \end{vmatrix}_d .$$

D'après la propriété 2.4 §3 du ch.2

$$\varepsilon_{2k}^{(n)} = S \iff \begin{vmatrix} \Delta S_n & \dots & \Delta S_{n+k-1} & S_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \Delta S_{n+k} & \dots & \Delta S_{n+2k-1} & S_{n+k} \end{vmatrix}_d = \begin{vmatrix} \Delta S_n & \dots & \Delta S_{n+k-1} & S \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \Delta S_{n+k} & \dots & \Delta S_{n+2k-1} & S \end{vmatrix}_d .$$

$$\varepsilon_{2k}^{(n)} = S \iff \begin{vmatrix} \Delta S_n & \dots & \Delta S_{n+k-1} & S_n - S \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \Delta S_{n+k} & \dots & \Delta S_{n+2k-1} & S_{n+k} - S \end{vmatrix}_d = 0.$$

D'après la propriété 2.19 §3 du ch.2,

$\exists A_1, \dots, A_k |\ S_n - S = A_1 \Delta S_n + \dots + A_k \Delta S_{n+k-1}$. ■

Remarques

1) Le problème d'intégrité ne se pose pas pour l'ε-algorithme vectoriel, car toutes les quantités ε_k^n appartiennent à V et tout élément non nul de V est inversible.

2) Si l'on pose $g_i(n) = \Delta S_{n+i-1}$; ${}^dE_0^{(n)} = S_n$, alors les quantités $\varepsilon_{2k}^{(n)}$ peuvent être calculées à l'aide du E^d-algorithme et l'on a $\varepsilon_{2k}^{(n)} = {}^dE_k^{(n}$ $(\in V)$.

Cependant, il faut remarquer que les $g_{k,i}^{(n)}$ correspondants n'appartiennent pas forcément à V (mais sûrement à $C^-(V)$)

3) On retrouve le résultat algèbrique fondamental de McLeod [32] comme cas particulier du théorème 2 en imposant aux A_i d'appartenir à $I\!R$ $(\subset C^-(V))$.

Du théorème 1, nous pouvons déduire encore des résultats intéressants et en retrouver d'autres comme cas particulier.

Théorème 4.4 *Soient $\varepsilon_{2k}^{(n)}$ les vecteurs obtenus en appliquant l'ε-algorithme vectoriel à la suite de vecteurs S_n éléments de V.*

Soient A, B deux éléments de $C(V)$ inversibles, C un élément de V.

Soient $\tilde{\varepsilon}_k^{(n)}$ les vecteurs obtenus en appliquant l'ε-algorithme à la suite $A \times S_n \times B + C$ alors

$\tilde{\varepsilon}_{2k}^{(n)} = A \times \varepsilon_{2k}^{(n)} \times B + C$, $\tilde{\varepsilon}_{2k+1}^{(n)} = B^{-1} \times \varepsilon_{2k+1}^{(n)} \times A^{-1}$

Démonstration

$$\tilde{\varepsilon}_{2k}^{(n)} = \left|\begin{matrix} A \times \Delta S_n \times B & \dots & A \times \Delta S_{n+k-1} \times B & A \times S_n \times B + C \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ A \times \Delta S_{n+k} \times B & \dots & A \times \Delta S_{n+2k-1} \times B & A \times S_{n+k} \times B + C \end{matrix}\right|_d \left|\begin{matrix} A \times \Delta S_n \times B & \dots & A \times \Delta S_{n+k-1} \times B & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ A \times \Delta S_{n+k} \times B & \dots & A \times \Delta S_{n+2k-1} \times B & 1 \end{matrix}\right|_d^{-1}$$

D'après la propriété 2.7 du §3 du ch.2

$$\tilde{\varepsilon}_{2k}^{(n)} = \left|\begin{matrix} A \times \Delta S_n \times B & \dots & A \times \Delta S_{n+k-1} \times B & A \times S_n \times B \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ A \times \Delta S_{n+k} \times B & \dots & A \times \Delta S_{n+2k-1} \times B & A \times S_{n+k} \times B \end{matrix}\right|_d$$

$$\begin{vmatrix} A\times\Delta S_n\times B & \dots & A\times\Delta S_{n+k-1}\times B & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ A\times\Delta S_{n+k}\times B & \dots & A\times\Delta S_{n+2k-1}\times B & 1 \end{vmatrix}_d +$$

$$\begin{vmatrix} A\times\Delta S_n\times B & \dots & A\times\Delta S_{n+k-1}\times B & C \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ A\times\Delta S_{n+k}\times B & \dots & A\times\Delta S_{n+2k-1}\times B & C \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} A\times\Delta S_n\times B & \dots & A\times\Delta S_{n+k-1}\times B & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ A\times\Delta S_{n+k}\times B & \dots & A\times\Delta S_{n+2k-1}\times B & 1 \end{vmatrix}_d$$

Notons E le premier terme de la somme, F le second terme de la somme.
En appliquant la propriété 2.4 du §3 du ch.2, on a

$$F = C \times \begin{vmatrix} A\times\Delta S_n\times B & \dots & A\times\Delta S_{n+k-1}\times B & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ A\times\Delta S_{n+k}\times B & \dots & A\times\Delta S_{n+2k-1}\times B & 1 \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} A\times\Delta S_n\times B & \dots & A\times\Delta S_{n+k-1}\times B & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ A\times\Delta S_{n+k}\times B & \dots & A\times\Delta S_{n+2k-1}\times B & 1 \end{vmatrix}_d^{-1} = C.$$

En appliquant la propriété 2.3 du §3 du ch.2 on a

$$E = \begin{vmatrix} A\times\Delta S_n & \dots & A\times\Delta S_{n+k-1} & A\times S_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ A\times\Delta S_{n+k} & \dots & A\times\Delta S_{n+2k-1} & A\times S_{n+k} \end{vmatrix}_d \times B \left(\begin{vmatrix} A\times\Delta S_n & \dots & A\times\Delta S_{n+k-1} & B^{-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ A\times\Delta S_{n+k} & \dots & A\times\Delta S_{n+2k-1} & B^{-1} \end{vmatrix}_d \times B \right)^{-1}$$

$$E = \begin{vmatrix} A\times\Delta S_n & \dots & A\times\Delta S_{n+k-1} & A\times S_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ A\times\Delta S_{n+k} & \dots & A\times\Delta S_{n+2k-1} & A\times S_{n+k} \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} A\times\Delta S_n & \dots & A\times\Delta S_{n+k-1} & B^{-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ A\times\Delta S_{n+k} & \dots & A\times\Delta S_{n+2k-1} & B^{-1} \end{vmatrix}_d^{-1}$$

En appliquant la propriété 2.4 du §3 du ch.2, on a

$$E = A\times \begin{vmatrix} \Delta S_n & \dots & \Delta S_{n+k-1} & S_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \Delta S_{n+k} & \dots & \Delta S_{n+2k-1} & S_{n+k} \end{vmatrix}_d \left(B^{-1} \times \begin{vmatrix} \Delta S_n & \dots & \Delta S_{n+k-1} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \Delta S_{n+k} & \dots & \Delta S_{n+2k-1} & 1 \end{vmatrix}_d \right)^{-}$$

$$E = A\times \begin{vmatrix} \Delta S_n & \dots & \Delta S_{n+k-1} & S_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \Delta S_{n+k} & \dots & \Delta S_{n+2k-1} & S_{n+k} \end{vmatrix}_d \times \begin{vmatrix} \Delta S_n & \dots & \Delta S_{n+k-1} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \Delta S_{n+k} & \dots & \Delta S_{n+2k-1} & 1 \end{vmatrix}_d^{-1} \times$$
B

d'où $\tilde{\varepsilon}_{2k}^{(n)} = E + F = A \times \varepsilon_{2k}^{(n)} \times B + C.$ ■

Comme cas particulier du théorème 4.3, nous avons le résultat déjà connu [5]

Théorème 4.5 *Soit M une matrice carrée de dimension $d \times d$ orthogonale ($M^t M = I$). Soient $\varepsilon_k^{\tilde{n}}$ les vecteurs obtenus en appliquant l'ε-algorithme à la suite vectorielle MS_n où C un vecteur constant de V; MS_n le produit d'une matrice et d'un vecteur de V. alors*
$\varepsilon_{2k}^{\tilde{n}} = M\varepsilon_{2k}^{n} + C$; $\varepsilon_{2k+1}^{\tilde{n}} = M\varepsilon_{2k+1}^{n}$

Démonstration

Soit u l'endomorphisme de V dans V dont la matrice relativement à la base $E_1, \dots, E_d$ est M.

Soit $x = \sum_{i=1}^{d} x_i E_i$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$.

Le vecteur image $u(x)$ s'écrit en forme matricielle MX.

Pour démontrer que le théorème 4.5 est un cas particulier du théorème 4.4, nous allons démontrer que tout isomorphisme orthogonal $u : V \longrightarrow V$, il existe $B \in C(V)$ inversible tel que $\forall x \in V \;\; u(x) = \varepsilon B \times x \times B^{-1}$ où $\varepsilon = 1$.

Supposons avoir démontré cette assertion, $\varepsilon_{2k}(MS_n + C)$ s'écrit donc $\varepsilon_{2k}(\varepsilon B \times S_n \times B^{-1} + C)$.

D'après le théorème 4.4, on a donc $\varepsilon_{2k}(\varepsilon B \times S_n \times B^{-1} + C) = \varepsilon B \times \varepsilon_{2k}(S_n) \times B^{-1} + C$ qui est en écriture matricielle $M\varepsilon_{2k}(S_n) + C$.

De même $\varepsilon_{2k+1}(MS_n + C)$ s'écrit $\varepsilon_{2k+1}(\varepsilon B \times S_n \times B^{-1} + C)$ qui est égal d'après le théorème 4.4 à $(B^{-1})^{-1} \times \varepsilon_{2k+1}(S_n)(\varepsilon B)^{-1}$ qui est égal à $\varepsilon B \times \varepsilon_{2k+1}(S_n) \times B^{-1}$ (puisque $\varepsilon^{-1} = \varepsilon$; $(B^{-1})^{-1} = B$) qui est égal en écriture matricielle se traduit par $M\varepsilon_{2k+1}(S_n)$.

Donc nous avons bien $\varepsilon_{2k}^{\tilde{n}} = M\varepsilon_{2k}^{n} + C$; $\varepsilon_{2k+1}^{\tilde{n}} = M\varepsilon_{2k+1}^{n}$ pour toute matrice orthogonale M. Il nous reste à démontrer l'assertion de départ qu'on a supposée vraie.

L'application $\begin{array}{ccc} C(V) & \longrightarrow & C(V) \\ \xi & \longrightarrow & \xi^\alpha = \alpha \times \xi \times \alpha^{-1} \end{array}$ où α est un élément de $C(V)$ inversible, est un automorphisme de $C(V)$ qui vérifie $(\xi^\beta)^\alpha = \xi^{\alpha\times\beta}$. Notons $R(V)$ l'ensemble de tous les α inversibles qui appliquent dans lui même le sous-espace vectoriel V de $C(V)$. C'est à dire pour lesquels $X \in V$ implique $X^\alpha \in V$. Soit α un tel élément. Considérons l'égalité $\forall\ X \in V$; $\forall\ Y \in V\ \ X \times Y + Y \times X = 2(X.Y)$ où $(X.Y)$ est le produit scalaire (élément de $I\!R \subset C(V)$). Transformons par α les deux membres de cette égalité. Pour le membre de droite, nous avons $\alpha\times(2X.Y)\times\alpha^{-1} = \alpha\times\alpha^{-1}\times 2(X.Y) = 2(X.Y)$, (puisque $2(X.Y) \in I\!R$).

Pour le membre gauche, nous avons $\alpha \times (X\times Y + Y\times X)\times\alpha^{-1} = \alpha\times X\times Y\times\alpha^{-1} + \alpha\times Y\times X\times\alpha^{-1} = \alpha\times X\times\alpha^{-1}\times\alpha\times Y\times\alpha^{-1} + \alpha\times Y\times\alpha^{-1}\times\alpha\times X\times\alpha^{-1} = X^\alpha\times Y^\alpha + Y^\alpha\times X^\alpha = 2(X^\alpha.Y^\alpha)$.

Nous obtenons donc $(X.Y) = (X^\alpha.Y^\alpha)$. Ceci montre que α induit une isométrie sur V (conservation du produit scalaire).

Soient $D, X \in V$ et $\| D \| \neq 0$. Nous avons

$D \times X = 2(D.X) - X \times D$. Comme $D \in V$, on a $D^{-1} = \frac{D}{\|D\|^2}$.

Donc $X^D = D\times X\times D^{-1} = 2\frac{D.X}{\|D\|^2}D - X = -\tau_D(X)$ où $\tau_D(X) = X - 2\frac{D.X}{\|D\|^2}D$; l'application $\tau_D\ V \longrightarrow V$ est l'identité sur l'hyperplan orthogonal à D et $\tau_D(D) = -D$. C'est donc la symétrie par rapport au plan orthogonal à D.

Or nous savons que chaque isométrie σ de V est un produit $\sigma = \tau_{B_1}\ldots\tau_{B_r}$ de symétries [19] (on peut réaliser $r \le d$).

Donc pour une isométrie u quelconque, il existe $B_1\ldots B_r \in V$ tels que

$\forall x \in V\ \ u(x) = (\tau_{B_1}\ldots\tau_{B_r})(x)$

$\forall x \in V\ \ u(x) = -(\tau_{B_1}\ldots\tau_{B_{r-1}})(B_r x B_r^{-1})$

$\forall x \in V\ \ u(x) = (-1)^r(\tau_{B_1}\ldots B_r)x(\tau_{B_1}\ldots B_r)^{-1}$

$\forall x \in V\ \ u(x) = \varepsilon B x B^{-1}$ avec $B = \tau_{B_1}\ldots B_r$ et $\varepsilon = (-1)^r$.

Pour plus d'informations sur le lien entre l'algèbre de Clifford et les groupes orthogonaux classiques, nous envoyons au [2]. ■

4.6 Fractions continues non commutatives, approximants de Padé vectoriels,...

Dans ce paragraphe, nous revenons à la remarque 2 §6 ch.3.
Il est connu qu'il y a un lien étroit entre les fractions continues scalaires, approximants de Padé scalaires et l'ε-algorithme scalaire. Ces liens ont été developpés dans le cas vectoriel par Wynn [42,43], puis Graves-Morris a donné d'autres définitions, axiomes et résultats dans [23,24,25]. Roberts a étudié également la question en introduisant l'algèbre de Clifford [36,37]. Et recemment, de nouveaux résultats ont été présentés par Graves-Morris et Roberts dans [26].
Ici, nous reprenons rapidement et sommairement chacun de ces travaux, et montrons que, comme au cas scalaire, il y a une parfaite analogie entre les résultats trouvés par ces auteurs et leurs formulations en terme de désignants. Sur des exemples, nous allons montrer que ces auteurs (Wynn, Roberts), sans le savoir, ont utilisé explicitement des désignants.
Ce travail est limité ici uniquement à cette comparaison de "form". Une étude plus poussée sera faite ultérieurement pour tenter de répondre à un certain nombre de questions, parmi lesquelles:
1) Comment, à l'aide de cette écriture sous forme d'un "rapport" de deux désignants, du lien entre les fractions continues vectorielles, approximants de Padé vectoriels,..., peut-on avancer l'étude théorique de l'ε-algorithme et vice-versa?
2) Peut-on, par exemple, traiter les questions de break-down, near-down, à l'aide de ces nouveaux résultats à notre disposition (méthode de Bordage adaptée,...)?

1 Wunn [42,43]

Etant donné une série entière en λ^{-1}
$F(\lambda) = \sum_{t=0}^{\infty} u_t \lambda^{-t-1}$. Il est formellement possible de déterminer les coefficients (α_t, β_t) de la fraction continue $\frac{u_0}{\lambda-\alpha 0-} \frac{\beta_0}{\lambda-\alpha 1-} \cdots \frac{\beta_{r-2}}{\lambda-\alpha r-1-} \cdots$ dont le $r$ième convergent est $\frac{u_0}{\lambda-\alpha 0-} \frac{\beta_0}{\lambda-\alpha 1-} \cdots \frac{\beta_{r-2}}{\lambda-\alpha r-1}$ (qui est une fraction rationnelle en λ) possède un développement en série entière en λ^{-1} qui coïncide avec $F(\lambda)$ pour les $2r$ premiers termes. C'est la fraction continue associée à $F(\lambda)$. Le convergent peut se mettre sous la forme $\frac{q_r(\lambda)}{p_r(\lambda)}$ où $q_r(\lambda), p_r(\lambda)$ sont des polynômes de degrés respectifs r et $r-1$.
De même, nous pouvons faire exactement la même chose pour $F_m(\lambda) =$

$\sum_{t=0}^{\infty} u_{t+m}\lambda^{-t-1}$. et nous obtenons les polynômes $q_r^m(\lambda), p_r^m(\lambda)$.
Ainsi $F_m(\lambda) = \sum_{t=0}^{m-1} u_t\lambda^{-t-1} + \lambda^{-m}\frac{q_r^m(\lambda)}{p_r^m(\lambda)}$ coïncide avec $F(\lambda)$ pour les $2r+m$ premiers termes.
Dans [43], Wynn a donné une large théorie des fractions continues non commutatives.
Si l'on se place dans une algèbre non commutative (en l'occurrence ici l'algèbre de Clifford), il faut préciser l'ordre dans lequel se fait la multiplication d'un élément de l'algèbre par un inverse.
Ainsi Wynn définit deux systèmes de fractions continues:
le premier "the pre-continued fractions" qui correspond à la multiplication d'un élément par un inverse à gauche ($pre\frac{A}{B} = B^{-1}A$.) noté $pre[B_0+\frac{A_1}{B_1+}\frac{A_2}{B_2+}\ldots]$ dont les convergents successifs $\{preC_r\}$ sont calculés par :

$$preC_r = D'_r$$
$$D'_0 = B_r,\ \ D'_{t+1} = B_{r-t-1} + D'^{-1}_t A_{r-t} \quad t = 0\ldots, r-1$$

le second "the post-continued fractions" qui correspond à la multiplication d'un élément par un inverse à droite ($post\frac{A}{B} = AB^{-1}$.) noté $post[B_0 + \frac{A_1}{B_1+}\frac{A_2}{B_2+}\ldots]$ dont les convergents successifs $\{postC_r\}$ sont calculés par :

$$preC_r = D''_r$$
$$D''_0 = B_r,\ \ D''_{t+1} = B_{r-t-1} + A_{r-t}D''^{-1}_t \quad t = 0\ldots, r-1$$

Il a été possible de développer la théorie des fractions continues des deux systèmes associés à une série $F(\lambda) = \sum_{t=0}^{\infty} U_t\lambda^{-t-1}$ où l'argument λ est un scalaire et où les coefficients $\{U_t\}$ obeissent à une multiplication non commutative (exemple $\lambda \in I\!R$, $U_t \in V$, la multiplication étant celle de l'algèbre de Clifford $(C(V))$).
Les coefficients de la fraction continue de chacun des deux systèmes provenant de la même série différent en général, mais les polynômes associés $\{preP_r^m\}, \{preQ_r^m(\lambda)\}$ pour le premier système, $\{postP_r^m\}, \{postQ_r^m(\lambda)\}$ pour le second système vérifient:
$\varepsilon_{2r}^m = \sum_{t=0}^{m-1} U_t\lambda^{-t-1} + \lambda^{-m} preP_r^m(\lambda)^{-1} preQ_r^m(\lambda)$
$\varepsilon_{2r}^m = \sum_{t=0}^{m-1} U_t\lambda^{-t-1} + \lambda^{-m} postQ_r^m(\lambda) postP_r^m(\lambda)^{-1}$ (lemme 3 [42])
Ce qui donne

$$preP_r^m(\lambda)^{-1} preQ_r^m(\lambda) = postQ_r^m(\lambda) postP_r^m(\lambda)^{-1}$$

(relation 20 [42])
Si l'on pose $S_n = \sum_{t=0}^{m-1} U_t\lambda^{-t-1}$, ce lemme 3, [42] s'exprime d'une manière équivalente à l'aide des désignants à travers le théorème 1 §4 de ce chapitre.

$$\varepsilon_{2r}^{(m)} = \begin{vmatrix} \Delta S_n & \dots & \Delta S_{n+r-1} & S_n \\ \vdots & & & \vdots \\ \Delta S_n & \dots & \Delta S_{n+r-1} & S_n \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} \Delta S_n & \dots & \Delta S_{n+r-1} & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ \Delta S_n & \dots & \Delta S_{n+r-1} & 1 \end{vmatrix}_d^{-1}$$

$$\varepsilon_{2r}^{(m)} = \begin{vmatrix} \Delta S_n & \dots & \Delta S_{n+r-1} & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ \Delta S_n & \dots & \Delta S_{n+r-1} & 1 \end{vmatrix}_g^{-1} \begin{vmatrix} \Delta S_n & \dots & \Delta S_{n+r-1} & S_n \\ \vdots & & & \vdots \\ \Delta S_n & \dots & \Delta S_{n+r-1} & S_n \end{vmatrix}_g$$

donc de la forme

$$\varepsilon_{2r}^{(m)} = \|\|_d \|\|_d^{-1} = \|\|_g^{-1} \|\|_g$$

Remarquons cette parfaite analogie entre cette forme et la relation 20 du [42] où
le suffix d joue le rôle de *post*,
le suffix g joue le rôle de *pre*.
Wynn a en effet, sans le savoir, utilisé les désignants. Pour illustrer cela, considérons son exemple (relation 15 [42].
Il trouve:
$preP_1^m = \lambda - U_{m+1}U_m^{-1}$
$preQ_1^m = U_m$ qui sont tout simplement les désignants
$preP_1^m = \begin{vmatrix} U_m & 1 \\ U_{m+1} & \lambda \end{vmatrix}_d, \quad preQ_1^m = \begin{vmatrix} U_m \end{vmatrix}_d$
de même
$postP_1^m = \lambda - U_m^{-1}U_{m+1}$
$postQ_1^m = U_m$ qui sont tout simplement les désignants
$postP_1^m = \begin{vmatrix} U_m & 1 \\ U_{m+1} & \lambda \end{vmatrix}_g, \quad postQ_1^m = \begin{vmatrix} U_m \end{vmatrix}_g$
Mieux encore $\varepsilon_2^{(m)} = \sum_{t=0}^{m-1} U_t\lambda^{-t-1} + \lambda^{-m}U_m(\lambda - U_m^{-1}U_{m+1})$ (lemme 3 [42]).
Nous allons montrer que c'est le "rapport" de deux désignants comme indiqué ci dessus.
Par simplicité, prenons $m = 1$; nous avons
$\varepsilon_2^{(1)} = U_0\lambda^{-1} + \lambda^{-1}U_1(\lambda - U_1^{-1}U_2)$. Montrons que

$\varepsilon_2^1 = \begin{vmatrix} \Delta S_1 & S_1 \\ \Delta S_2 & S_2 \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} \Delta S_1 & 1 \\ \Delta S_2 & 1 \end{vmatrix}_d$. En effet

$S_1 = U_0\lambda^{-1}$; $S_2 = U_0\lambda^{-1} + U_1\lambda^{-2}$; $S_3 = U_0\lambda^{-1} + U_1\lambda^{-2} + U_2\lambda^{-3}$.

D'où $\Delta S_1 = U_1\lambda^{-2}; \Delta S_2 = U_2\lambda^{-3}$.

$$\begin{vmatrix} U_1\lambda^{-2} & U_0\lambda^{-1} \\ U_2\lambda^{-3} & U_0\lambda^{-1} + U_1\lambda^{-2} \end{vmatrix}_d = U_0\lambda^{-1} \begin{vmatrix} U_1 & 1 \\ U_2\lambda^{-1} & 1 \end{vmatrix}_d + \begin{vmatrix} U_1 & 0 \\ U_2\lambda^{-1} & U_1\lambda^{-2} \end{vmatrix}_d$$

(propriétés des désignants cités dans le ch.2)

$\begin{vmatrix} U_1\lambda^{-2} & 1 \\ U_2\lambda^{-3} & 1 \end{vmatrix}_d = \begin{vmatrix} U_1 & 1 \\ U_2\lambda^{-1} & 1 \end{vmatrix}_d$ (propriété des désignants). D'où

$$\begin{vmatrix} \Delta S_1 & S_1 \\ \Delta S_2 & S_2 \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} \Delta S_1 & 1 \\ \Delta S_2 & 1 \end{vmatrix}_d =$$

$$\left(U_0\lambda^{-1} \begin{vmatrix} U_1 & 1 \\ U_2\lambda^{-1} & 1 \end{vmatrix}_d + \begin{vmatrix} U_1 & 0 \\ U_2\lambda^{-1} & U_1\lambda^{-2} \end{vmatrix}_d\right) \begin{vmatrix} U_1 & 1 \\ U_2\lambda^{-1} & 1 \end{vmatrix}_d^{-1}$$

$$= U_0\lambda^{-1} + \lambda^{-2} \begin{vmatrix} U_1 & 0 \\ U_2\lambda^{-1} & U_1 \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} U_1 & 1 \\ U_2\lambda^{-1} & 1 \end{vmatrix}_d^{-1}$$

$$= U_0\lambda^{-1} + \lambda^{-2}U_1(1 - U_1^{-1}U_2\lambda^{-1})^{-1}$$

$$= U_0\lambda^{-1} + \lambda^{-1}U_1(\lambda - U_1^{-1}U_2)^{-1} = \varepsilon_2^1.$$

Faisons remarquer un point important, les coefficients des polynômes

$$preP_r^m(\lambda),\ preQ_r^m(\lambda),\ postP_r^m(\lambda),\ postQ_r^m(\lambda)$$

ne sont pas forçement dans V (par exemple $postP_1^m(\lambda) = \lambda - U_m^{-1}U_{m+1}$, $U_m^{-1}U_{m+1}$ n'appartient pas forçement à V), mais les convergents successifs le sont (remarque déjà citée en [42]). Ceci a un parallèle dans ce que nous venons de faire tout au long de ce travail: pour les systèmes d'équations linéaires (dans $C(V)$), qui ont servi à la construction de l'ε-algorithme, les coefficients a_i n'appartiennent pas forçément à V (mais sûrement à $C(V)$) mais la solution appartient à V.

2 Graves-Morris, Roberts [23,24,25,26,36,37]

Dans [23,24,25], Graves-Morris définit et étudie extensivement les
GIRF: "Generalised Inverse Rational Fraction"
GIRI: "Generalised Inverse Rational Interpolant"
GIPA: "Generalised Inverse vector-valued Padé Approximant"
ainsi que d'autres définitions. L'inverse généralisé d'un vecteur au sens de Moore-Penrose est à la base de ces définitions. Aucun appel à l'algèbre de

Clifford n'est mentionné.
Dans [36,37], Roberts se sert fondamentalement de l'algèbre de Clifford pour définir et étudier:
VPA: "Vector-valued Padé approximant"
VRI: "Vector-valued Rational Interpolant". Il établit, sous certaine condition, l'identification entre VPA et $GIPA$, entre VRI et $GIRI$. D'autres résultats sont obtenus dans [26].
Dans [37], les $VPAs$ sont définis de la manière suivante:
considèrons une fonction $f(z) \in \mathbb{C}^{d+1}$ ayant le développement
$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_k z^k + \ldots$ où $c_i \in \mathbb{C}^{d+1}$ $i = 0, 1, \ldots$ $z \in \mathbb{C}$.
Il définit un "right-handed $[M/N]VPA$", s'il existe, par
$P_M^R(z)[q_N^R(z)]^{-1} - f(z) = O(z^{M+N+1})$ où $P_M^R(z), q_N^R(z)$ sont des polynônes de degrés respectifs M et N dont les coefficients appartiennent à $A_d(\mathbb{C})$ (en effet, en général, leurs coefficients n'appartiennent pas à $\mathbb{C}$).
De même il définit un "left-handed $[M/N]VPA$, s'il existe, par $[q_N^L(z)]^{-1}P_M^L(z) - f(z) = O(z^{M+N+1})$. Dans [4], il est établi que les deux versions "gauche" et "droite" sont identiques:

$$P_M^R(z)[q_N^R(z)]^{-1} = [q_N^L(z)]^{-1} P_M^L(z)$$

Cette relation se traduit à l'aide des désignants (comme dans 1 Wynn) sous forme $\| \|_d \| \|_d^{-1} = \| \|_g^{-1} \| \|_g$ où
l'indice d joue le rôle R: right
l'indice l joue le rôle L: left.
Mieux encore, Roberts donne une relation liant $P_M^R(z)$ et $P_M^L(z)$, $Q_M^R(z)$ et $Q_M^L(z)$. Nous allons voir que cette relation se déduit facilement à partir des désignants. Elle traduit tout simplement la propriété 5 §2 ch.2. En effet soit $\tilde{}$ l'anti-automorphisme de $A_d(\mathbb{C})$ défini par : $\begin{array}{ccc} \tilde{} \; A_d(\mathbb{C}) & \longrightarrow & A_d(\mathbb{C}) \\ e_{j_1} \ldots e_{j_r} & \longrightarrow & e_{j_r} \ldots e_{j_1} \end{array}$

On en déduit $\widetilde{(uv)} = \tilde{v}\tilde{u}$, $\tilde{\tilde{u}} = u$. Ainsi on remarque que $\tilde{}$ a l'effet d'une transposition matricielle [26].
Roberts établit $\begin{cases} P_M^R(z) = \widetilde{P_M^L}(z) \\ q_N^R(z) = \widetilde{q_N^L}(z) \end{cases}$
ceci se traduit, en utilisant les désignants, par la propriété 5 §2 ch.2.
En effet on a $\left| \; A \; \right|_d = \left| \; A^T \; \right|_L = \left| \; \tilde{A} \; \right|_L$
(pour établir $\left| \; A^T \; \right|_L = \left| \; \tilde{A} \; \right|_L$, une simple récurrence le permet).

Ces questions seront reprises avec beaucoup plus de détails ultérieurement, avançons juste un exemple pour éclaircir ces relations, et montrer encore que Roberts, a utilisé, sans le savoir les désignants.

Dans [36] la relation (3.9) donne $\begin{cases} P_1^R(z) = c_0 + z(c_1 - c_0 c_1^{-1} c_2) \\ q_1^R(z) = e_0 + z c_1^{-1} c_2) \end{cases}$

(où e_0 l'élément de $A_d(\mathbb{C})$ qu'on note aussi 1), ce qui donne "the right $[1/1] VPA$" (realation 3.10 [36]).

$[1/1] = [c_0 + z(c_1 - c_0 c_1^{-1} c_2)][e_0 - z c_1^1 c_2]^{-1}$. Nous remarquons tout de suite que $P_1^R(z), q_1^R(z)$ s'écrivent sous forme de désignants: $P_1^R(z) = \left| c_0 \right|_d + z \begin{vmatrix} c_1 & c_0 \\ c_2 & c_1 \end{vmatrix}_d$

$q_1^R(z) = \begin{vmatrix} c_1 & z \\ c_2 & e_0 \end{vmatrix}_d$

Mieux encore, posons $S_m \sum_{i=0}^m c_i t^i$, nous allons montrer:

$[1/1] = \varepsilon_2^0 = \begin{vmatrix} \Delta S_0 & S_0 \\ \Delta S_1 & S_1 \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} \Delta S_0 & 1 \\ \Delta S_1 & 1 \end{vmatrix}_d^{-1}$; nous avons:

$\varepsilon_2^0 = \begin{vmatrix} c_1 z & c_0 \\ c_2 z^2 & c_0 + c_1 z \end{vmatrix}_d \begin{vmatrix} c_1 z & 1 \\ c_2 z^2 & 1 \end{vmatrix}_d^{-1}$

$= (c_0 + c_1 z - c_0 (c_1 z)^{-1} c_2 z^2) \times (1 - (c_1 z)^{-1} c_2 z^2)^{-1}$

$= (c_0 + c_1 z - c_0 (c_1 z)^{-1} c_2 z^2) \times (1 - z c_1^{-1} c_2)^{-1}$

$= (c_0 + z(c_1 - c_0 c_1^{-1} c_2) \times (1 - z c_1^{-1} c_2)^{-1} = [1/1]$ ∎

Nous avons en plus $P_1^R(z) = \begin{vmatrix} \Delta S_0 & \Delta S_0 \\ \Delta S_1 & \Delta S_1 \end{vmatrix}_d$; $q_1^R(z) = \begin{vmatrix} \Delta S_0 & 1 \\ \Delta S_1 & 1 \end{vmatrix}_d$.

de même, nous avons $P_1^L(z) = \begin{vmatrix} \Delta S_0 & \Delta S_0 \\ \Delta S_1 & \Delta S_1 \end{vmatrix}_g$; $q_1^L(z) = \begin{vmatrix} \Delta S_0 & 1 \\ \Delta S_1 & 1 \end{vmatrix}_g$.

et $[1/1] = \varepsilon_2^0 = [q_1^L(z)]^{-1} P_1^L(z)$;

Appliquons la propriété 5 §2 ch.2:

$P_1^R(z) = \begin{vmatrix} \Delta S_0 & S_0 \\ \Delta S_1 & S_1 \end{vmatrix}_d = \left(\begin{vmatrix} \Delta S_0 & S_0 \\ \Delta S_1 & S_1 \end{vmatrix}_d^T \right) = \begin{vmatrix} \Delta \tilde{S_0} & S_0 \\ \Delta S_1 & S_1 \end{vmatrix}_g = \tilde{P_1^L}(z).$

Nous pensons que ces résultats sont généraux. Ils feront l'objet d'un travail ultérieur. Tous les résultats du [36] peuvent alors être retrouvés à partir des propriétés des désignants, mais en plus, nous aurons explicitement $P_M^L(z), q_N^L(z), P_M^R(z), q_N^R(z)$ sous forme dun désignant et également

$$\varepsilon_{2k}^M = [M + k/k] VPA$$

Nous aurons le même genre de résultats pour les fractions continues du [36].

4.7 Nouveaux algorithmes

Nous avons vu que le E^d-algorithme
${}^dE_0^{(n)} = S_n \in V; \; n = 0,1,\ldots \quad {}^dg_{0,i}^{(n)} = g_i(n) \in V \; i = 1,\ldots, \; n = 0,1,\ldots$
pour $l = 1,2,\ldots, \; n = 0,1,\ldots$
${}^dE_l^{(n)} = {}^dE_{l-1}^{(n)} - ({}^d\Delta E_{l-1}^{(n)})({}^dg_{l-1,l}^{(n)})^{-1} \times {}^dg_{l-1,l}^{(n)}$
${}^dg_{l,i}^{(n)} = {}^dg_{l-1,i}^{(n)} - ({}^d\Delta g_{l-1,i}^{(n)})({}^dg_{l-1,l}^{(n)})^{-1} \times {}^dg_{l-1,l}^{(n)}$
pour $i = l+1, l+2, \ldots$
où les éléments ${}^dE_l^{(n)}; {}^dg_{l,i}^n$ appartiennent à $C^-(V)$, pose un certain nombre de difficultés, spécialement:
- La complexité de l'algorithme (qui reste à étudier avec plus de détails)
- Un élément non nul de $C^-(V)$ n'est pas forçément inversible, et si c'est le cas, nous n'avons pas une méthode pour calculer cet inverse.

C'est pour ces raisons que l'on va intervenir directement sur les règles de calcul de l'algorithme pour donner d'autres algorithmes ne présentant pas ces inconvénients.

Le F-algorithme Il est dérivé du E^d-algorithme de la manière suivante: à chaque étape, on calcule ${}^dE_l^{(n)}, {}^dg_{l,i}^{(n)}$ avec les règles du ${}^dE$-algorithme puis on projecte ${}^dE_l^{(n)}, {}^dg_{l,i}{}^{(n)}$ sur l'espace vectoriel V ($\subset C^-(V)$). Il s'écrit donc
${}^dF_0^{(n)} = S_n \in V; \; n = 0,1,\ldots \quad {}^dg_{0,i}^{(n)} = g_i(n) \in V \; i = 1,\ldots, \; n = 0,1,\ldots$
pour $l = 1,2,\ldots, \; n = 0,1,\ldots$
${}^dF_l^{(n)} = {}^dF_{l-1}^{(n)} - \overline{({}^d\Delta F_{l-1}^{(n)})({}^dg_{l-1,l}^{(n)})^{-1} \times {}^dg_{l-1,l}^{(n)}}$
${}^dg_{l,i}^{(n)} = {}^dg_{l-1,i}^{(n)} - \overline{({}^d\Delta g_{l-1,i}^{(n)})({}^dg_{l-1,l}^{(n)})^{-1} \times {}^dg_{l-1,l}^{(n)}}$
pour $i = l+1, l+2, \ldots$
$\overline{F}$ désigne la projection de lélément F de $C(V)$ sur l'espace $V \subset C^-(V)$.
Ainsi dans ce cas $(\Delta^d g_{k-1,k}^{(n)})^{-1} = \frac{\Delta^d g_{k-1,k}^{(n)}}{\|\Delta^d g_{k-1,k}^{(n)}\|^2}$.
Nous allons expliciter un peu les calculs de cet algorithme:

Propriété 4.9 *Soient* $u, v, w \in V$; $u = u_1E_1 + u_2E_2 + \ldots + u_dE_d$;
$v = v_1E_1 + v_2E_2 + \ldots + v_dE_d$; $w = w_1E_1 + w_2E_2 + \ldots + w_dE_d$
$u_i \in \mathbb{R}\, i = 1,\ldots,d$; $v_i \in \mathbb{R}\, i = 1,\ldots,d$; $w_i \in \mathbb{R}\, i = 1,\ldots,d$.

Soit $(u.v)$ *le produit scalaire;* $(u.v) = \sum_{i=1}^{d} u_i v_i$. *On a*
$u \times v = (u.v)E_0 + \sum_{1\leq i\leq j\leq d}(u_iv_j - u_jv_i)E_i \times E_j$
$u \times v \times w = \sum_{i=1}^{d}\{(u.v)w_i + \sum_{1\leq j\leq d; j\neq i}(u_iv_j - u_jv_i)w_j\}E_i + \sum_{1\leq i<j<k\leq d} r_{ijk}E_i \times E_j \times E_k$.
avec
$r_{ijk} = (u_iv_j - u_jv_i)w_k + (u_kv_i - u_iv_k)w_j + (u_jv_k - u_kv_j)w_i$

<u>Démonstration</u>
$u \times v = (\sum_{i=1}^{d} u_iE_i) \times (\sum_{i=1}^{d} v_iE_i) = (u.v)E_0 + \sum_{1\leq i\leq j\leq d}(u_iv_j - u_jv_i)E_i \times E_j$ $u \times v \times w = (u.v)E_0 + \sum_{1\leq i\leq j\leq d}(u_iv_j - u_jv_i)E_i \times E_j) \times (\sum_{l=1}^{d} w_lE_l$

$$= (u.v)(\sum_{l=1}^{d} w_lE_l + \underbrace{\sum_{1\leq i<j\leq d}\sum_{l=1}^{d}(u_iv_j - u_jv_i)E_i \times E_j \times E_l}_{D}$$

$D = \sum_{1\leq i<j\leq d}\{\sum_{l=1, l\neq i, l\neq j}^{d}(u_iv_j - u_jv_i)w_lE_i \times E_j \times E_l + (u_iv_j - u_jv_i)w_iE_i \times E_j \times E_i + (u_iv_j - u_jv_i)w_jE_i \times E_j \times E_j\}$
Ainsi nous avons $D = A + B + C$ avec
$A = \sum_{1\leq i<j\leq d}\sum_{l=1, l\neq i, l\neq j}^{d}(u_iv_j - u_jv_i)w_lE_i \times E_j \times E_l$
$B = -\sum_{1\leq i<j\leq d}(u_iv_j - u_jv_i)w_iE_j$
$C = \sum_{1\leq i<j\leq d}(u_iv_j - u_jv_i)w_jE_i$
B peut s'écrire
$B = -\sum_{1\leq j\leq d}(\sum_{1\neq i<j}(u_iv_j - u_jv_i)w_i)E_j$
$B = -\sum_{1\leq i\leq d}(\sum_{1\neq j<i}(u_jv_i - u_iv_j)w_j)E_i$;
on a alors
$B + C = \sum_{1\leq i\leq d}(\sum_{1\neq j<i}(u_iv_j - u_jv_i)w_j)E_i + \sum_{1\leq i\leq d}(\sum_{i<j\leq d}(u_iv_j - u_jv_i)w_j)E_i = \sum_{1\leq i\leq d}(\sum_{1\leq j\leq d}(u_iv_j - u_jv_i)w_j)E_i$.
Développons A

$$A = \underbrace{\sum_{1\leq i<j\leq d}\sum_{1\leq i<j<l\leq d}(u_iv_j - u_jv_i)w_lE_i \times E_j \times E_l}_{A_1} - \underbrace{\sum_{1\leq i<j\leq d}\sum_{1\leq i<l<j\leq d}(u_iv_j - u_jv_i)w_lE_i \times E_l \times E_j}_{A_2} \underbrace{\sum_{1\leq i<j\leq d}\sum_{1\leq l<i<j\leq d}(u_iv_j - u_jv_i)w_lE_l \times E_i \times E_j}_{A_3}$$

A_1 peut sécrire

$A_1 = \sum_{1\leq i<j<k\leq d}(u_iv_j - u_jv_i)w_kE_i \times E_j \times E_k$ de même
$A_2 = \sum_{1\leq i<l<j\leq d}(u_jv_i - u_iv_j)w_lE_i \times E_l \times E_j = \sum_{1\leq i<j<k\leq d}(u_kv_i - u_iv_k)w_jE_i \times$
$E_j \times E_k$ de même
$A_3 = \sum_{1\leq l<i<j\leq d}(u_iv_j - u_jv_i)w_lE_l \times E_i \times E_j = \sum_{1\leq i<j<k\leq d}(u_jv_k - u_kv_j)w_iE_i \times$
$E_j \times E_k$. Comme $A = A_1 + A_2 + A_3$
$A = \sum_{1\leq i<j<k\leq d}\{(u_iv_j - u_jv_i)w_k + (u_kv_i - u_iv_k)w_j + (u_jv_k - u_kv_j)w_i\}E_i \times$
$E_j \times E_k$ *carre*
Ainsi on a donc $\overline{u \times v \times w} = \sum_{i=1}^{d}\{(u.v)w_i + \sum_{1\leq j\leq d}(u_iv_j - u_jv_i)w_j\}E_i$ donc
$\overline{\Delta F_{l-1}^{(n)} \times (\Delta g_{l-1,l}^{(n)})^{-1} \times g_{l-1,l}^{(n)}} = \| \Delta g_{l-1,l}^{(n)} \|^{-2}\ \overline{\Delta F_{l-1}^{(n)} \times (\Delta g_{l-1,l}^{(n)}) \times g_{l-1,l}^{(n)}} = \| \Delta g_{l-1,l}^{(n)} \|^{-2}$
$\sum_{i=1}^{d} r_iE_i$
avec
$r_i = (\Delta F_{l-1}^{(n)}.\Delta g_{l-1,l)}^{(n)})(g_{l-1,l}^{(n)})_i + \sum_{1\leq j\leq d}\{(\Delta F_{l-1}^{(n)})_i(\Delta g_{l-1,l}^{(n)})_j - (\Delta F_{l-1}^{(n)})_j(\Delta g_{l-1,l}^{(n)})_i\}(g_{l-1,l}^{(n)})$

de même
$(\Delta g_{l-1,i}^{(n)}) \times (\Delta g_{l-1,l}^{(n)})^{-1} \times (g_{l-1,l}^{(n)})^{-1} \times g_{l-1,l}^{(n)}) = \| \Delta g_{l-1,l}^{(n)} \|^{-2}\ \overline{(\Delta g_{l-1,i}^{(n)}) \times (\Delta g_{l-1,l}^{(n)}) \times g_{l-1,l}^{(n)})}$

$= \| \Delta g_{l-1,l}^{(n)} \|^{-2} \sum_{l=1}^{d} s_lE_l$; s_l s'obtient de l'expression de r_l en remplaçant $F_{l-1}^{(n)}$ par $g_{l-1,i}^{(n)}$.
$s_m = (\Delta g_{l-1,i}^{(n)}.\Delta g_{l-1,l)}^{(n)})(g_{l-1,l}^{(n)})_m + \sum_{1\leq j\leq d}\{(\Delta g_{l-1,i}^{(n)})_i(\Delta g_{l-1,l}^{(n)})_j - (\Delta g_{l-1,i}^{(n)})_j(\Delta g_{l-1,l}^{(n)})_m\}(g$
Le F-algorithme s'écrit donc
$F_0^{(n)} = S_n \in V \quad n = 0, 1, \ldots$
$g_{0,i}^{(n)} = g(n)_i \in V \quad i = 1, 2, \ldots \quad n = 0, 1, \ldots$
Pour $k = 1, \ldots \quad n = 0, 1, \ldots \ F_k^{(n)} = F_{k-1}^{(n)} - \sum_{l=1}^{d} r_l'E_l$
$g_{k,i}^{(n)} = g_{k-1,i}^{(n)} - \sum_{l=1}^{d} s_l'E_l \quad i = k+1, k+2, \ldots$ où $r_l' = \| \Delta g_{k-1,k}^{(n)} \|^{-2} r_l$; $s_l' = \| \Delta g_{k-1,k}^{(n)} \|^{-2} s_l$.
Le F-algorithme nécessite encore l'étude de
- la complexité
- la convergence
- expériences numériques
- liens avec d'autres algorithmes.

On peut cependant remarquer que si dans l'expression de r_l, s_l, on se limite uniquement aux premiers termes $r_l = (\Delta F_{k-1}^{(n)}.\Delta g_{k-1,k}^{(n)})g_{k-1,k}^{(n)})_l$ $s_l = (\Delta g_{k-1,i}^{(n)}.\Delta g_{k-1,k}^{(n)})g_{k-1,k}^{(n)})_l$, on retrouve le E-algorithme vectoriel [6]
$E_0^{(n)} = S_n \quad n = 0, 1, \ldots$

$g_{0,i}^{(n)} = g(n)_i \;\; i = 1,2,\dots \;\; n = 0,1,\dots$
pour $k = 1,2,\dots \;\; n = 0,1,\dots$

$$E_k^n = E_{k-1}^n - \frac{(y.\Delta E_{k-1}^n) g_{k-1,k}^{(n)}}{(y.\Delta_{k-1,k}^{(n)})}$$

$$g_{k,i}^n = g_{k-1,i}^n - \frac{(y.\Delta g_{k-1,i}^n) g_{k-1,k}^{(n)}}{(y.\Delta_{k-1,k}^{(n)})}$$

$i = k+1, k+2, \dots$
avec un choix particulier de $y \in V$ mais variable $y = (\Delta g_{k-1,k}^{(n)})$. Avec ce choix de r_l, s_l l'algorithme s'écrit

G-algorithme

$G_0^{(n)} = S_n \;\; n = 0,1,\dots$
$g_{0,i}^{(n)} = g(n)_i \;\; i = 1,2,\dots \;\; n = 0,1,\dots$
pour $k = 1,2,\dots \;\; n = 0,1,\dots$

$$G_k^n = G_{k-1}^n - \frac{(\Delta g_{k-1,k}^{(n)}.\Delta G_{k-1}^n) g_{k-1,k}^{(n)}}{\|\Delta_{k-1,k}^{(n)}\|^2}$$

$$g_{k,i}^n = g_{k-1,i}^n - \frac{(\Delta g_{k-1,k}^{(n)}.\Delta g_{k-1,i}^n) g_{k-1,k}^{(n)}}{\|\Delta_{k-1,k}^{(n)}\|^2}$$

$i = k+1, k+2, \dots$
Comme pour le E-algorithme vectoriel [6], nous avons

Propriété 4.10 *Si* $S_n = a_1 g_1(n) + \ldots + a_k g_k(n)$; *où* $g_i(n) \in V$; $a_i \in \mathbb{R}$ *alors* $G_g^n = S$.

De même, nous avons le résultat plus général

Propriété 4.11 *Si* $S_n = a_1 g_1(n) + \ldots + a_k g_k(n) + \ldots$
alors $G_k^n = S + a_{k+1} g_{k,k+1}^{(n)} + a_{k+2} g_{k,k+2}^{(n)} + \ldots$

Pour la démonstration, c'est à peu près la même que celle dans [6].

Autres algorithmes

Notre souci, pour éviter les invonvénients du E-algorithme est d'avoir $\Delta E_{k-1}^{(n)} \times (\Delta g_{k-1,k}^{(n)})^{-1} \times g_{k-1,k}^{(n)} \in V$;
$\Delta g_{k-1,i}^{(n)} \times (\Delta g_{k-1,k}^{(n)})^{-1} \times g_{k-1,k}^{(n)} \in V$;
Ceci a été fait pour les algorithmes cités ci-dessus, mais on peut en "fabriquer" d'autres en intervenant directement sur le produit.

M-**algorithme** (Mélange de deux multiplications)

L'idée consiste à prendre l'inverse $(\Delta g_{k-1,k}^{(n)})^{-1}$ égal à $\frac{\Delta g_{k-1,k}^{(n)})}{\|\Delta g_{k-1,k}^{(n)})\|^2}$.

C'est l'inverse compatible avec la multiplication définie sur $C(V)$, quand $\Delta g_{k-1,k}^{(n)}$ appartient à V, et on remplace la multiplication $\times$ par une autre multiplication $*$ de telle sorte que le produit $u * v$ reste toujours dans V.

Si l'on choisit par exemple $u * v = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 v_1 \\ \vdots \\ u_d v_d \end{pmatrix}$,

on obtient l'algorithme

$M_0^{(n)} = S_n \;\; n = 0, 1, \ldots$

$g_{0,i}^{(n)} = g(n)_i \;\; i = 1, 2, \ldots \;\; n = 0, 1, \ldots$

pour $k = 1, 2, \ldots \;\; n = 0, 1, \ldots$

$M_k^n = M_{k-1}^n - \frac{(\Delta g_{k-1,k}^{(n)} * \Delta G_{k-1}^n) * g_{k-1,k}^{(n)}}{\|\Delta_{k-1,k}^{(n)}\|^2} \in V$

$g_{k,i}^n = g_{k-1,i}^n - \frac{(\Delta g_{k-1,k}^{(n)} * \Delta g_{k-1,i}^n) * g_{k-1,k}^{(n)}}{\|\Delta_{k-1,k}^{(n)}\|^2} \in V$

$i = k+1, k+2, \ldots$

Si $V = \mathbb{R}$, on retrouve tout simplement le E-algorithme scalaire.

Aucune étude concernant la convergence, les applications, n'a été faite pour cet algorithme.

Une autre manière d'obtenir d'autres algorithmes est la suivante: dans l'algorithme général

$$\begin{cases} E_k^{(n)} &= E_{k-1}^{(n)} - \Delta E_{k-1}^{(n)} \times^1 (\Delta g_{k-1,k}^{(n)})^{-1} \times^2 g_{k-1,k}^{(n)} \\ g_{k,i}^{(n)} &= g_{k-1,i}^{(n)} - \Delta g_{k-1,i}^{(n)} \times^1 (\Delta g_{k-1,k}^{(n)})^{-1} \times^2 g_{k-1,k}^{(n)} \end{cases}$$

Si l'on pose $(\Delta_{k-1,k}^{(n)})^{-1} = \frac{\Delta g_{k-1,k}^{(n)}}{\|\Delta g_{k-1,k}^{(n)}\|^2}$, et si l'on remplace la multiplication (1) par le produit scalaire, on retrouve le G-algorithme ci dessus. Dans les égalités donnant G_k^n et $g_{k,i}^{(n)}$ la direction du second terme du second membre est imposée par $g_{k-1,k}^{(n)}$. Rien n'empêche de faire la même chose pour la multiplication 2. Ceci donne alors le N-algorithme suivant

$N_0^{(n)} = S_n \;\; n = 0, 1, \ldots$

$g_{0,i}^{(n)} = g(n)_i \;\; i = 1, 2, \ldots \;\; n = 0, 1, \ldots$

pour $k = 1, 2, \ldots \;\; n = 0, 1, \ldots$

$N_k^n = N_{k-1}^n - \frac{(\Delta g_{k-1,k}^{(n)} \cdot g_{k-1,k}^{(n)}) \Delta N_{k-1}^n)}{\|\Delta_{k-1,k}^{(n)}\|^2} \in V$

$$g_{k,i}^{n} = g_{k-1,i}^{n} - \frac{(\Delta g_{k-1,k}^{(n)} \cdot g_{k-1,k}^{(n)} \Delta g_{k-1,i}^{n})}{\|\Delta_{k-1,k}^{(n)}\|^2} \in V$$
$i = k+1, k+2, \ldots$
Si $V = \mathbb{R}$, on retrouve le E-algorithme scalaire. Pour cet algorithme, la direction du second terme du second membre de l'égalité est imposée par $\Delta N_{k-1}^{(n)}$.
Le dernier choix qui reste donne le K-algorithme
$K_0^{(n)} = S_n \;\; n = 0, 1, \ldots$
$g_{0,i}^{(n)} = g(n)_i \;\; i = 1, 2, \ldots \;\; n = 0, 1, \ldots$
pour $k = 1, 2, \ldots \;\; n = 0, 1, \ldots$
$$K_k^{n} = K_{k-1}^{n} - \frac{(\Delta K_{k-1}^{n} \cdot g_{k-1,k}^{(n)}) \Delta g_{k-1,k}^{(n)}}{\|\Delta_{k-1,k}^{(n)}\|^2} \in V$$
$$g_{k,i}^{n} = g_{k-1,i}^{n} - \frac{(\Delta g_{k-1,i}^{(n)} \cdot g_{k-1,k}^{(n)}) \Delta g_{k-1,k}^{n}}{\|\Delta_{k-1,k}^{(n)}\|^2} \in V$$
$i = k+1, k+2, \ldots$
De même, si $V = \mathbb{R}$, on retrouve le E-algorithme scalaire.
Pour le K-algorithme, la direction du second terme du second membre de l'égalité est imposée par $\Delta g_{k-1,k}^{(n)}$.
Aucune étude concernant la convergence, les applications, les propriétés des ces algorithmes n'a été faite.
Nous pouvons faire évidemment la même chose pour le E-algorithme vectoriel [6]. Le premier choix est $L_0^{(n)} = S_n \;\; n = 0, 1, \ldots$
$g_{0,i}^{(n)} = g(n)_i \;\; i = 1, 2, \ldots \;\; n = 0, 1, \ldots$
pour $k = 1, 2, \ldots \;\; n = 0, 1, \ldots$
$$L_k^{n} = L_{k-1}^{n} - \frac{(y \cdot g_{k-1,k}^{(n)}) \Delta L_{k-1}^{(n)}}{y \cdot \Delta_{k-1,k}^{(n)}}$$
$$g_{k,i}^{n} = g_{k-1,i}^{n} - \frac{(y \cdot g_{k-1,k}^{(n)}) \Delta g_{k-1,i}^{n}}{y \cdot \Delta_{k-1,k}^{(n)}}$$
$i = k+1, k+2, \ldots$
où $y \in V$ choisi une fois pour toute.
Ainsi pour cet algorithme, si l'on choisit
$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} ; g_i^{(n)} = \begin{pmatrix} h_i^{(n)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$ où $h_i^{(n)} \in \mathbb{R}$, on retrouve le H-algorithme
Si $V = \mathbb{R}$, on retrouve le E-algorithme scalaire.
Nous pouvons encore transformer le ${}^{d}E$-algorithme pour donner 3 autres al-

gorithmes

${}^{1}I_0^{(n)} = S_n \ \ n = 0, 1, \ldots$

$g_{0,i}^{(n)} = g(n)_i \ \ i = 1, 2, \ldots \ \ n = 0, 1, \ldots$

pour $k = 1, 2, \ldots \ \ n = 0, 1, \ldots$

$${}^{1}I_k^n = {}^{1}I_{k-1}^n - \frac{(y.\Delta^1 I_{k-1}^{(n)})(y.\Delta g_{k-1,k}^{(n)})g_{k-1,k}^{(n)}}{||y||^2||\Delta g_{k-1,k}^{(n)}||^2}$$

$$g_{k,i}^n = g_{k-1,i}^n - \frac{(y.\Delta g_{k-1,i}^{(n)}(y.\Delta g_{k-1,k}^n)g_{k-1,k}^{(n)}}{||y||^2||\Delta_{k-1,k}^{(n)}||^2}$$

$i = k + 1, k + 2, \ldots$

${}^{2}I_0^{(n)} = S_n \ \ n = 0, 1, \ldots$

$g_{0,i}^{(n)} = g(n)_i \ \ i = 1, 2, \ldots \ \ n = 0, 1, \ldots$

pour $k = 1, 2, \ldots \ \ n = 0, 1, \ldots$

$${}^{2}I_k^n = {}^{2}I_{k-1}^n - \frac{(y.g_{k-1,k}^{(n)})(y.\Delta g_{k-1,k}^{(n)})\Delta({}^{2}I_{k-1}^{(n)})}{||y||^2||\Delta g_{k-1,k}^{(n)}||^2}$$

$$g_{k,i}^n = g_{k-1,i}^n - \frac{y.g_{k-1,i}^{(n)}.(y.\Delta g_{k-1,k}^n)\Delta g_{k-1,i}^n}{||y||^2||\Delta_{k-1,k}^{(n)}||^2}$$

$i = k + 1, k + 2, \ldots$

Le dernier choix est

${}^{3}I_0^{(n)} = S_n \ \ n = 0, 1, \ldots$

$g_{0,i}^{(n)} = g(n)_i \ \ i = 1, 2, \ldots \ \ n = 0, 1, \ldots$

pour $k = 1, 2, \ldots \ \ n = 0, 1, \ldots$

$${}^{3}I_k^n = {}^{3}I_{k-1}^n - \frac{(y.g_{k-1,k}^{(n)})(y.\Delta^3 I_{k-1}^{(n)})\Delta g_{k-1,k}^{(n)}}{||y||^2||\Delta g_{k-1,k}^{(n)}||^2}$$

$$g_{k,i}^n = g_{k-1,i}^n - \frac{(y.g_{k-1,i}^{(n)})(y.\Delta g_{k-1,k}^n)\Delta g_{k-1,k}^n}{||y||^2||\Delta_{k-1,k}^{(n)}||^2}$$

$i = k + 1, k + 2, \ldots$

Pour les trois algorithmes, si l'on se place dans le cas scalaire, on retrouve le E-algorithme scalaire.
Pour l'algorithme ${}^{1}I$, si l'on prend $y = \Delta_{k-1,k}^{(n)}$, on retrouve le G-algorithme. Comme pour les autres algorithmes nouveaux, aucune étude concernant la convergence, les applications, les propriétés, les expériences numériques, n'a été faite. Nous comptons bien traiter ces questions dans un travail ultérieur.

Références

[1] A.C. Aitken, *Determinants and Matrices*, Oliver and Boyd, Edinburgh, 1965.

[2] A.Artin, *Geometric Algebra*, Interscience, NewYork, 1966.

[3] S.Banach, *Théorie des Opérations Linéaires*. Chelsea publishing company, New York, 1932.

[4] D.Bessis, *Topics in the Theory of Pade Approximants*, in Pade Approximants, ed.P.R. Graves-Morris (Bristol, institute of Physics) 1973.

[5] C.Brezinski, M.Redivo Zaglia, *Extrapolation Methods. Theory and Practice*, North-Holland, Amsterdam, 1991.

[6] C.Brezinski, A general extrapolation algorithm, Numer. Math., 35(1980)175-187.

[7] C.Brezinski, About Henrici's method for nonlinear equations. Symposium on Numerical Analysis and Computational Complex Analysis, Zürich, unpublished, August 1983.

[8] C.Brezinski, Conditions d'applications et de convergence de procédés d'extrapolation. Numer.Math., 20:64-79,1972.

[9] C.Brezinski, Some results in the theory of the vector ε-algorithm., Linear Alg. Appl., 8(1974)77-86.

[10] C.Brezinski, Computation of the eigenelements of a matrix by the ε-algorithm, Linear Alg. Appl., 11(1975)7-20.

[11] C.Brezinski, Some determinantal identities in a vector space, with applications. In *Padé Approximation and its Applications. Bad-Honnef H.Werner and H.J.Bünger,eds, 1983*, Springer-Verlag, Berlin, LNM 1071(1984)1-11.

[12] C.Brezinski, Application de l'ε-algorithme à la résolution des systèmes non linéaires, C.R.Acad.Sci.Paris, 271A(1970)1174-1177.

[13] C.Brezinski and G.Walz, Sequences of transformations and triangular recursion schemes with application in numerical analysis. J.Comput.Appl.Math, 34(1991) 361-383.

[14] E.Cartan, *Leçons sur la Théorie des Spineurs*, Hermann, Paris 1938.

[15] E.Cartan, Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane, Bull soc. Math.France 41(1913), 53-96.

[16] J.Chisholm and A.Common (eds), *Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics*, Reidel, Dordrecht, 1986

[17] R.Deheuvels, *Formes Quadratiques et Groupes Classiques*, Presses Universitaires de France, Paris, 1981.

[18] J.Dieudonné, Les déterminants sur un corps non commutatif, Bull.Soc.Math. France, 7(1943)27-45.

[19] J.Dieudonné, *La Géométrie des Groupes Classiques*,Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge, Heft5, Springer, Berlin, 1952.

[20] F.J.Dyson, Quaternion determinants, Helv.Phys.Acta, 45(1972)289-302.

[21] E.Gekeler, On the solution of systems of equations by the epsilon algorithm of Wynn, Math.Comput., 26(1972)427-436.

[22] R.Godement, *Cours d'Algèbre*, Hermann, Paris,1966.

[23] P.R.Graves-Morris, Vector-valued rational interpolants I, Numer. Math., 42(1983)331-348.

[24] P.R.Graves-Morris, Vector-valued rational interpolants II, I.M.A.J.Num.Anal, 4(1984)209-224.

[25] P.R.Graves-Morris and C.D. Jenkins, Vector-valued rational interpolants III, Constr.Approx., 2(1986)263-289.

[26] P.R.Graves-Morris and D.E. Roberts, From matrix to vector Padé approximants, J.Comp.Appl.Math., to appear.

[27] G.O. Guelfond, *Calcul de Différences Finies*, Dunod, Paris, 1963

[28] W.R. Hamilton, *Elements of Quaternions*, second edition, C.J.Joly (ed), Longmans, London, 1899, reprinted, Chelsea, New York, 1969.

[29] A.Heyting, Die theorie der linearen Gleichungen in einer Zahlenspezies mit nichtkommutativer Multiplikation, Math.Ann., 98(1927)465-490.

[30] G.N. Hile, P.Lounesto, Matrix representations of Clifford algebras, Linear Alg. Appl.,128(1990)51-63.

[31] M.L.Mehta, *Matrix Theory. Selected Topics and Useful Results*, Les éditions de Physique, Les Ulis, 1989.

[32] J.B.McLeod, A note on the ε-algorithm, Computing, 7(1971)17-24.

[33] O.Ore, Linear equations in non-commutative fields, Ann.Math., 32(1931)463-477.

[34] R.Penrose, A generalised inverse for matrices, Proc. Cambridge Phil. Soc., 51(1955),406-413.

[35] IR.Porteous, *Topological Geometry,* 2nd ed, Cambridge University Press, Cambridge, 1981.

[36] D.E.Roberts, Clifford algebras and vector-valued rational forms I,Proc.Roy.Soc., A431(1990)285-300.

[37] D.E.Roberts, Clifford algebras and vector-valued rational forms II, Numerical Algorithms.

[38] D.Shanks, Non linear transformations of divergent and slowly convergent sequences, J.Math.phys., 34(1955)1-42.

[39] P.Wynn, On a device for computing the $e_m(S_n)$ transformation, MTAC, 10(1956)91-96.

[40] P.Wynn, Acceleration techniques for iterated vector and matrix problems, Math.Comput., 16(1962)301-322.

[41] P.Wynn, The rational approximation of functions wich are formally defined by a power series expansion, Math.comp., 14(1960)147-186.

[42] P.Wynn, Vector continued fractions, Linear Alg. Appl., 1(1968)357-395.

[43] P.Wynn, Continued fractions whose coefficients obey a non-commutative law of multiplication., Arch.rational Mech.Anal., 12(1963)273-312.