USTL

LIFL Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Lille

présentée à

l'Université des Sciences et Technologies de Lille

pour l'obtention du titre de

Docteur en Informatique

par

Pierre-André Wacrenier

Semi-Commutations et Reconnaissabilité

Soutenue le 12 février 1993 devant la Commission d'Examen :

Président :	**Max**	**Dauchet**
Rapporteurs :	**Joffroy**	**Beauquier**
	Volker	**Diekert**
Examinateurs :	**Mireille**	**Clerbout**
	Michel	**Latteux**
	Yves	**Roos**
	Jacques	**Sakarovitch**
	Wieslaw	**Zielonka**

UNIVERSITE DES SC[illegible]GIES DE LILLE
U.F.R. d'I.E.E.A. Bâ[illegible]'ASCQ CEDEX
Tél. [illegible]

UNIVERSITE DES SCIENCES
ET TECHNOLOGIES DE LILLE

DOYENS HONORAIRES DE L'ANCIENNE FACULTE DES SCIENCES

M. H. LEFEBVRE, M. PARREAU

PROFESSEURS HONORAIRES DES ANCIENNES FACULTES DE DROIT ET SCIENCES ECONOMIQUES, DES SCIENCES ET DES LETTRES

MM. ARNOULT, BONTE, BROCHARD, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, DECUYPER, DEHEUVELS, DEHORS, DION, FAUVEL, FLEURY, GERMAIN, GLACET, GONTIER, KOURGANOFF, LAMOTTE, LASSERRE, LELONG, LHOMME, LIEBAERT, MARTINOT-LAGARDE, MAZET, MICHEL, PEREZ, ROIG, ROSEAU, ROUELLE, SCHILTZ, SAVARD, ZAMANSKI, Mes BEAUJEU, LELONG.

PROFESSEUR EMERITE

M. A. LEBRUN

ANCIENS PRESIDENTS DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

MM. M. PARREAU, J. LOMBARD, M. MIGEON, J. CORTOIS, A.DUBRULLE

PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

M. P. LOUIS

PROFESSEURS - CLASSE EXCEPTIONNELLE

M. CHAMLEY Hervé	Géotechnique
M. CONSTANT Eugène	Electronique
M. ESCAIG Bertrand	Physique du solide
M. FOURET René	Physique du solide
M. GABILLARD Robert	Electronique
M. LABLACHE COMBIER Alain	Chimie
M. LOMBARD Jacques	Sociologie
M. MACKE Bruno	Physique moléculaire et rayonnements atmosphériques

M. MIGEON Michel	EUDIL
M. MONTREUIL Jean	Biochimie
M. PARREAU Michel	Analyse
M. TRIDOT Gabriel	Chimie appliquée

PROFESSEURS - 1ère CLASSE

M. BACCHUS Pierre	Astronomie
M. BIAYS Pierre	Géographie
M. BILLARD Jean	Physique du Solide
M. BOILLY Bénoni	Biologie
M. BONNELLE Jean Pierre	Chimie-Physique
M. BOSCQ Denis	Probabilités
M. BOUGHON Pierre	Algèbre
M. BOURIQUET Robert	Biologie Végétale
M. BRASSELET Jean Paul	Géométrie et topologie
M. BREZINSKI Claude	Analyse numérique
M. BRIDOUX Michel	Chimie Physique
M. BRUYELLE Pierre	Géographie
M. CARREZ Christian	Informatique
M. CELET Paul	Géologie générale
M. COEURE Gérard	Analyse
M. CORDONNIER Vincent	Informatique
M. CROSNIER Yves	Electronique
Mme DACHARRY Monique	Géographie
M. DAUCHET Max	Informatique
M. DEBOURSE Jean Pierre	Gestion des entreprises
M. DEBRABANT Pierre	Géologie appliquée
M. DECLERCQ Roger	Sciences de gestion
M. DEGAUQUE Pierre	Electronique
M. DESCHEPPER Joseph	Sciences de gestion
Mme DESSAUX Odile	Spectroscopie de la réactivité chimique
M. DHAINAUT André	Biologie animale
Mme DHAINAUT Nicole	Biologie animale
M. DJAFARI Rouhani	Physique
M. DORMARD Serge	Sciences Economiques
M. DOUKHAN Jean Claude	Physique du solide
M. DUBRULLE Alain	Spectroscopie hertzienne
M. DUPOUY Jean Paul	Biologie
M. DYMENT Arthur	Mécanique
M. FOCT Jacques Jacques	Métallurgie
M. FOUQUART Yves	Optique atmosphérique
M. FOURNET Bernard	Biochimie structurale
M. FRONTIER Serge	Ecologie numérique
M. GLORIEUX Pierre	Physique moléculaire et rayonnements atmosphériques
M. GOSSELIN Gabriel	Sociologie
M. GOUDMAND Pierre	Chimie-Physique
M. GRANELLE Jean Jacques	Sciences Economiques
M. GRUSON Laurent	Algèbre
M. GUILBAULT Pierre	Physiologie animale
M. GUILLAUME Jean	Microbiologie
M. HECTOR Joseph	Géométrie
M. HENRY Jean Pierre	Génie mécanique
M. HERMAN Maurice	Physique spatiale
M. LACOSTE Louis	Biologie Végétale
M. LANGRAND Claude	Probabilités et statistiques

M. LATTEUX Michel	Informatique
M. LAVEINE Jean Pierre	Paléontologie
Mme LECLERCQ Ginette	Catalyse
M. LEHMANN Daniel	Géométrie
Mme LENOBLE Jacqueline	Physique atomique et moléculaire
M. LEROY Jean Marie	Spectrochimie
M. LHENAFF René	Géographie
M. LHOMME Jean	Chimie organique biologique
M. LOUAGE Françis	Electronique
M. LOUCHEUX Claude	Chimie-Physique
M. LUCQUIN Michel	Chimie physique
M. MAILLET Pierre	Sciences Economiques
M. MAROUF Nadir	Sociologie
M. MICHEAU Pierre	Mécanique des fluides
M. PAQUET Jacques	Géologie générale
M. PASZKOWSKI Stéfan	Mathématiques
M. PETIT Francis	Chimie organique
M. PORCHET Maurice	Biologie animale
M. POUZET Pierre	Modélisation - calcul scientifique
M. POVY Lucien	Automatique
M. PROUVOST Jean	Minéralogie
M. RACZY Ladislas	Electronique
M. RAMAN Jean Pierre	Sciences de gestion
M. SALMER Georges	Electronique
M. SCHAMPS Joël	Spectroscopie moléculaire
Mme SCHWARZBACH Yvette	Géométrie
M. SEGUIER Guy	Electrotechnique
M. SIMON Michel	Sociologie
M. SLIWA Henri	Chimie organique
M. SOMME Jean	Géographie
Melle SPIK Geneviève	Biochimie
M. STANKIEWICZ François	Sciences Economiques
M. THIEBAULT François	Sciences de la Terre
M. THOMAS Jean Claude	Géométrie - Topologie
M. THUMERELLE Pierre	Démographie - Géographie humaine
M. TILLIEU Jacques	Physique théorique
M. TOULOTTE Jean Marc	Automatique
M. TREANTON Jean René	Sociologie du travail
M. TURRELL Georges	Spectrochimie infrarouge et raman
M. VANEECLOO Nicolas	Sciences Economiques
M. VAST Pierre	Chimie inorganique
M. VERBERT André	Biochimie
M. VERNET Philippe	Génétique
M. VIDAL Pierre	Automatique
M. WALLART Françis	Spectrochimie infrarouge et raman
M. WEINSTEIN Olivier	Analyse économique de la recherche et développement
M. ZEYTOUNIAN Radyadour	Mécanique

PROFESSEURS - 2ème CLASSE

M. ABRAHAM Francis	
M. ALLAMANDO Etienne	Composants électroniques
M. ANDRIES Jean Claude	Biologie des organismes
M. ANTOINE Philippe	Analyse
M. BALL Steven	Génétique
M. BART André	Biologie animale
M. BASSERY Louis	Génie des procédés et réactions chimiques
Mme BATTIAU Yvonne	Géographie
M. BAUSIERE Robert	Systèmes électroniques
M. BEGUIN Paul	Mécanique
M. BELLET Jean	Physique atomique et moléculaire
M. BERNAGE Pascal	Physique atomique, moléculaire et du rayonnement
M. BERTHOUD Arnaud	Sciences Economiques
M. BERTRAND Hugues	Sciences Economiques
M. BERZIN Robert	Analyse
M. BISKUPSKI Gérard	Physique de l'état condensé et cristallographie
M. BKOUCHE Rudolphe	Algèbre
M. BODARD Marcel	Biologie végétale
M. BOHIN Jean Pierre	Biochimie métabolique et cellulaire
M. BOIS Pierre	Mécanique
M. BOISSIER Daniel	Génie civil
M. BOIVIN Jean Claude	Spectrochimie
M. BOUCHER Daniel	Physique
M. BOUQUELET Stéphane	Biologie appliquée aux enzymes
M. BOUQUIN Henri	Gestion
M. BROCARD Jacques	Chimie
Mme BROUSMICHE Claudine	Paléontologie
M. BUISINE Daniel	Mécanique
M. CAPURON Alfred	Biologie animale
M. CARRE François	Géographie humaine
M. CATTEAU Jean Pierre	Chimie organique
M. CAYATTE Jean Louis	Sciences Economiques
M. CHAPOTON Alain	Electronique
M. CHARET Pierre	Biochimie structurale
M. CHIVE Maurice	Composants électroniques optiques
M. COMYN Gérard	Informatique théorique
Mme CONSTANT Monique	Composants électroniques et optiques
M. COQUERY Jean Marie	Psychophysiologie
M. CORIAT Benjamin	Sciences Economiques
Mme CORSIN Paule	Paléontologie
M. CORTOIS Jean	Physique nucléaire et corpusculaire
M. COUTURIER Daniel	Chimie organique
M. CRAMPON Norbert	Tectolique géodynamique
M. CURGY Jean Jacques	Biologie
M. DANGOISSE Didier	Physique théorique
M. DE PARIS Jean Claude	Analyse
M. DECOSTER Didier	Composants électroniques et optiques
M. DEJAEGER Roger	Electrochimie et Cinétique
M. DELAHAYE Jean Paul	Informatique
M. DELORME Pierre	Physiologie animale
M. DELORME Robert	Sciences Economiques
M. DEMUNTER Paul	Sociologie
Mme DEMUYNCK Claire	Physique atomique, moléculaire et du rayonnement
M. DENEL Jacques	Informatique
M. DEPREZ Gilbert	Physique du solide - christallographie

M. LE MAROIS Henri	Vie de la firme
M. LEMOINE Yves	Biologie et physiologie végétales
M. LESCURE François	Algèbre
M. LESENNE Jacques	Systèmes électroniques
M. LOCQUENEUX Robert	Physique théorique
Mme LOPES Maria	Mathématiques
M. LOSFELD Joseph	Informatique
M. LOUAGE Francis	Electronique
M. MAHIEU François	Sciences économiques
M. MAHIEU Jean Marie	Optique - Physique atomique
M. MAIZIERES Christian	Automatique
M. MANSY Jean Louis	Géologie
M. MAURISSON Patrick	Sciences Economiques
M. MERIAUX Michel	EUDIL
M. MERLIN Jean Claude	Chimie
M. MESMACQUE Gérard	Génie mécanique
M. MESSELYN Jean	Physique atomique et moléculaire
M. MOCHE Raymond	Modélisation,calcul scientifique,statistiques
M. MONTEL Marc	Physique du solide
M. MORCELLET Michel	Chimie organique
M. MORE Marcel	Physique de l'état condensé et cristallographie
M. MORTREUX André	Chimie organique
Mme MOUNIER Yvonne	Physiologie des structures contractiles
M. NIAY Pierre	Physique atomique,moléculaire et du rayonnement
M. NICOLE Jacques	Spectrochimie
M. NOTELET Francis	Systèmes électroniques
M. PALAVIT Gérard	Génie chimique
M. PARSY Fernand	Mécanique
M. PECQUE Marcel	Chimie organique
M. PERROT Pierre	Chimie appliquée
M. PERTUZON Emile	Physiologie animale
M. PETIT Daniel	Biologie des populations et écosystèmes
M. PLIHON Dominique	Sciences Economiques
M. PONSOLLE Louis	Chimie physique
M. POSTAIRE Jack	Informatique industrielle
M. RAMBOUR Serge	Biologie
M. RENARD Jean Pierre	Géographie humaine
M. RENARD Philippe	Sciences de gestion
M. RICHARD Alain	Biologie animale
M. RIETSCH François	Physique des polymères
M. ROBINET Jean Claude	EUDIL
M. ROGALSKI Marc	Analyse
M. ROLLAND Paul	Composants électroniques et optiques
M. ROLLET Philippe	Sciences Economiques
Mme ROUSSEL Isabelle	Géographie physique
M. ROUSSIGNOL Michel	Modélisation,calcul scientifique,statistiques
M. ROY Jean Claude	Psychophysiologie
M. SALERNO Françis	Sciences de gestion
M. SANCHOLLE Michel	Biologie et physiologie végétales
Mme SANDIG Anna Margarette	
M. SAWERYSYN Jean Pierre	Chimie physique
M. STAROSWIECKI Marcel	Informatique
M. STEEN Jean Pierre	Informatique
Mme STELLMACHER Irène	Astronomie - Météorologie
M. STERBOUL François	Informatique
M. TAILLIEZ Roger	Génie alimentaire
M. TANRE Daniel	Géométrie - Topologie
M. THERY Pierre	Systèmes électroniques
Mme TJOTTA Jacqueline	Mathématiques
M. TOURSEL Bernard	Informatique
M. TREANTON Jean René	Sociologie du travail

M. DERIEUX Jean Claude	Microbiologie
M. DERYCKE Alain	Informatique
M. DESCAMPS Marc	Physique de l'état condensé et cristallographie
M. DEVRAINNE Pierre	Chimie minérale
M. DEWAILLY Jean Michel	Géographie humaine
M. DHAMELINCOURT Paul	Chimie physique
M. DI PERSIO Jean	Physique de l'état condensé et cristallographie
M. DUBAR Claude	Sociologie démographique
M. DUBOIS Henri	Spectroscopie hertzienne
M. DUBOIS Jean Jacques	Géographie
M. DUBUS Jean Paul	Spectrométrie des solides
M. DUPONT Christophe	Vie de la firme
M. DUTHOIT Bruno	Génie civil
Mme DUVAL Anne	Algèbre
Mme EVRARD Micheline	Génie des procédés et réactions chimiques
M. FAKIR Sabah	Algèbre
M. FARVACQUE Jean Louis	Physique de l'état condensé et cristallographie
M. FAUQUEMBERGUE Renaud	Composants électroniques
M. FELIX Yves	Mathématiques
M. FERRIERE Jacky	Tectonique - Géodynamique
M. FISCHER Jean Claude	Chimie organique, minérale et analytique
M. FONTAINE Hubert	Dynamique des cristaux
M. FORSE Michel	Sociologie
M. GADREY Jean	Sciences économiques
M. GAMBLIN André	Géographie urbaine, industrielle et démographie
M. GOBLOT Rémi	Algèbre
M. GOURIEROUX Christian	Probabilités et statistiques
M. GREGORY Pierre	I.A.E.
M. GREMY Jean Paul	Sociologie
M. GREVET Patrice	Sciences Economiques
M. GRIMBLOT Jean	Chimie organique
M. GUELTON Michel	Chimie physique
M. GUICHAOUA André	Sociologie
M. HAIMAN Georges	Modélisation,calcul scientifique, statistiques
M. HOUDART René	Physique atomique
M. HUEBSCHMANN Johannes	Mathématiques
M. HUTTNER Marc	Algèbre
M. ISAERT Noël	Physique de l'état condensé et cristallographie
M. JACOB Gérard	Informatique
M. JACOB Pierre	Probabilités et statistiques
M. JEAN Raymond	Biologie des populations végétales
M. JOFFRE Patrick	Vie de la firme
M. JOURNEL Gérard	Spectroscopie hertzienne
M. KOENIG Gérard	Sciences de gestion
M. KOSTRUBIEC Benjamin	Géographie
M. KREMBEL Jean	Biochimie
Mme KRIFA Hadjila	Sciences Economiques
M. LANGEVIN Michel	Algèbre
M. LASSALLE Bernard	Embryologie et biologie de la différenciation
M. LE MEHAUTE Alain	Modélisation,calcul scientifique,statistiques
M. LEBFEVRE Yannic	Physique atomique,moléculaire et du rayonnement
M. LECLERCQ Lucien	Chimie physique
M. LEFEBVRE Jacques	Physique
M. LEFEBVRE Marc	Composants électroniques et optiques
M. LEFEVRE Christian	Pétrologie
Melle LEGRAND Denise	Algèbre
M. LEGRAND Michel	Astronomie - Météorologie
M. LEGRAND Pierre	Chimie
Mme LEGRAND Solange	Algèbre
Mme LEHMANN Josiane	Analyse
M. LEMAIRE Jean	Spectroscopie hertzienne

M. TURREL Georges	Spectrochimie infrarouge et raman
M. VANDIJK Hendrik	
Mme VAN ISEGHEM Jeanine	Modélisation,calcul scientifique,statistiques
M. VANDORPE Bernard	Chimie minérale
M. VASSEUR Christian	Automatique
M. VASSEUR Jacques	Biologie
Mme VIANO Marie Claude	
M. WACRENIER Jean Marie	Electronique
M. WARTEL Michel	Chimie inorganique
M. WATERLOT Michel	géologie générale
M. WEICHERT Dieter	Génie mécanique
M. WERNER Georges	Informatique théorique
M. WIGNACOURT Jean Pierre	
M. WOZNIAK Michel	Spectrochimie
Mme ZINN JUSTIN Nicole	Algèbre

Remerciements

Max Dauchet me fait la joie de présider le jury de cette thèse. Ses cours ont été pour moi une véritable initiation à la recherche.

J'exprime également toute ma gratitude à :

Joffroy Beauquier qui a bien voulu rapporter cette thèse,

Volker Diekert qui a accepté de lire cette thèse en français et d'en être l'un des rapporteurs,

Jacques Sakarovitch et Wieslaw Zielonka qui me font l'honneur de participer à ce jury,

Edward Ochmański dont je regrette l'absence dans ce jury, mais dont la collaboration a été précieuse.

Michel Latteux, qui m'a transmis sa passion pour l'informatique théorique, et Yves Roos ont dirigé mes travaux. C'est à leur bienveillance et à leur science que je dois de précieuses suggestions et des corrections salutaires. Qu'ils veuillent trouver ici l'expression de ma sincère reconnaissance.

Je suis très heureux de la participation de Mireille Clerbout à ce jury, son soutien et ses conseils ont été un constant encouragement.

J'ai également une pensée pour

Dominique Gonzalez, François Denis et Alain Terlutte qui m'ont supporté pendant les réunions de travail ou dans le bureau 336.

Jean-François Méhaut, mon tuteur, pour ses conseils pédagogiques, entre autres.

les accoutumés des bureaux 304, 316, 322 et 332 pour leur accueil.

Merci à ceux qui contribuent à créer, jour et nuit, été comme hiver, l'ambiance chaleureuse du LIFL et qui en font un lieu où l'on a plaisir à travailler.

Il va sans dire que cette thèse n'aurait jamais vu le jour sans l'amour de mes parents. Qu'eux même et toute ma famille trouvent ici l'expression de mon affectueuse reconnaissance.

Henri Glanc a assuré la reproduction de cette thèse avec la compétence et la sympathie connues de tous.

Table des matières

1

Introduction

Pour augmenter la puissance de traitement des ordinateurs, les informaticiens ont conçu des machines multi-processeurs qui permettent l'exécution de plusieurs instructions de façon simultanée. La programmation de ces machines n'est en rien évidente : en effet, pour traiter un problème avec efficacité, il faut faire coopérer un ensemble de processeurs. De nos jours il existe deux grandes familles d'ordinateurs multi-processeurs :

- Les ordinateurs SIMD où tous les processeurs exécutent la même instruction sur des données différentes.
- Les ordinateurs MIMD où chacun des processeurs travaille sur son morceau de programme avec des données propres ou partagées.

Pour tirer parti de telles machines on doit adapter, ou plutôt repenser, les algorithmes séquentiels déjà connus. Pour les machines MIMD, il faut de plus répartir le travail en tâches et assurer la coordination entre les différentes tâches, ce qui rend leur programmation très ardue. Cette génération de machines nécessite l'élaboration de nouvelles méthodes de conception, d'analyse et de validation des algorithmes.

L'un des buts de l'informatique théorique est de fournir des outils mathématiques permettant une meilleure utilisation des ordinateurs et, naturellement, l'informatique théorique entend répondre aux besoins de l'informatique parallèle en apportant un formalisme, des méthodes de spécification et des outils de preuves de programmes.

C'est dans cette perspective qu'ont été introduits différents modèles formels. Parmi ces modèles on peut distinguer les réseaux de Petri, introduits par C.A. Petri au début des années 60, et les systèmes de transitions d'A. Arnold et M. Nivat [AN82]. L'étude des réseaux de Petri a réellement commencé dans les années 70 et a dégagé des notions importantes de la théorie des langages telles que les systèmes d'addition de vecteurs (SAVE) et le fameux théorème sur l'accessibilité démontré par S.R. Kossaraju et E.W. Mayr [Kos82, May84].

C'est dans le but d'analyser le comportement des réseaux de Petri booléens (*one safe*) que A. Mazurkiewicz ([Maz77]) a introduit la notion de monoïde partiellement commutatif libre dans le monde du parallélisme. L'idée est la suivante : exprimer le parallélisme à l'aide d'une relation d'indépendance sur un alphabet A . Dans une première étape, on représente chaque action par une lettre d'un alphabet A , un mot de A^* représente alors un calcul (i.e. une trace d'exécution d'un programme). Puis on définit une relation d'indépendance symétrique θ entre les lettres, cette relation est appelée *commutation partielle*. Par définition de θ nous savons que pour toutes lettres a et b indépendantes, les calculs m_1abm_2 et m_1bam_2 sont équivalents. Ainsi obtient-on une relation d'équivalence sur les mots du monoïde libre qui définit une congruence $\sim$ sur le monoïde libre :

la congruence $\sim$ sur le monoïde libre A^* associée à la relation d'indépendance θ est la plus petite relation vérifiant "si $(a,b) \in \theta$ alors $m_1abm_2 \sim m_1bam_2$" .

Le monoïde partiellement commutatif libre, noté $\mathbb{M}(A,\theta)$, est défini par le monoïde quotient $A^*/\sim$. Les éléments de ce monoïde sont appelés *traces.*
Un calcul en parallèle n'est donc pas représenté par un mot : une trace représente une classe d'équivalence pour la congruence $\sim$, une trace correspond à l'ensemble de toutes les exécutions séquentielles d'un même calcul. Une trace est aussi un graphe acyclique correspondant exactement au graphe de précédence d'un calcul : chaque noeud est étiqueté par une lettre (une action), les arcs imposant un ordre d'exécution entre les lettres dépendantes.

En fait le monoïde partiellement commutatif libre avait été introduit une dizaine d'années auparavant par P. Cartier et D. Foata ([CF69, Lot83]) pour étudier en combinatoire des problèmes de réarrangement de mots. Ce monoïde a été aussi utilisé par M. Fliess ([Fli74]) à propos de séries rationnelles et de séries reconnaissables. Néanmoins, c'est à partir de l'article révélateur d'A. Mazurkiewicz qu'a débuté l'étude du monoïde partiellement commutatif libre. Cette étude a été menée suivant différents angles d'approche :

- utilisation du monoïde partiellement commutatif libre pour étudier les réseaux de Petri [Die90, Maz87].
- étude des langages et des familles du monoïde partiellement commutatif libre à l'instar de celle qui existe pour les langages du monoïde libre [AH89, AR88, CG93, CL85, CP85, Dub86, GOPR92, GRS91, Mét86c, Och85, Pig92, Per89, Sak92, Tho90, Zie87] ;
- étude des systèmes de réécritures dans le monoïde partiellement commutatif libre [Die90, NO88, Ott87, Ott89, WDO92] ;
- utilisation du monoïde partiellement commutatif libre pour élucider des problèmes de structures partiellement commutatives libres plus riches (algèbre de Lie libre, par exemple) [DK93a, DK93b, Lal91] .

Notons que les commutations partielles ne sont pas utilisées uniquement en informatique théorique ! M.P. Flé et G. Roucairol [FR82, FR85] les ont utilisées comme outils pour des problèmes de bases de données réparties ; la base théorique du système COSY (voir [LTS79]) repose sur la théorie des traces, dans [JM90] R. Janicki et T. Müldner bénéficient de ce fait pour transformer des spécifications séquentielles en spécifications parallèles.

Un certain nombre de généralisations (au moins 4 en 1991-1992 !) sont également apparues. La plus aboutie est sans doute la théorie des langages de traces infinies qui permet de représenter les processus parallèles qui ne terminent pas, comme par exemple les systèmes d'exploitation distribués (voir [DE92]).

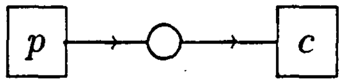
Pour modéliser les processus parallèles de type producteur / consommateur, M. Clerbout et M. Latteux ([Cle84, CL87]) ont introduit une généralisation naturelle des commutations par-

tielles : la notion de semi-commutation. Une semi-commutation est une relation irréflexive sur un alphabet A ; une commutation partielle est donc une semi-commutation symétrique. L'idée de base est la suivante :
La règle du problème du producteur / consommateur est *"on ne peut pas consommer plus que ce que l'on a produit"* ; par contre on peut anticiper la production par rapport à la consommation. Si les lettres p et c représentent respectivement les actions produire et consommer, alors pour tout calcul m_1cpm_2 respectant la règle du producteur / consommateur, le calcul m_1pcm_2 respecte lui aussi cette règle. Par contre l'inverse est évidemment faux : le calcul pc respecte la règle contrairement au calcul cp . Il existe donc une dépendance non symétrique entre le consommateur et le producteur : on a $cp \longrightarrow pc$ mais pas $pc \longrightarrow cp$. Dans le problème du producteur / consommateur, la semi-commutation sous-jacente est définie par : $\theta = \{(c,p)\}$.

Une relation de semi-commutation θ sur un alphabet A peut être aussi vue sous la forme d'un système de réécriture où toutes les règles sont de la forme $xy \longrightarrow yx$, (x, y) étant un couple de lettres appartenant à la relation θ.
Pour obtenir la clôture, transitive et réflexive, d'un mot ou d'un langage par le système de réécriture on utilise une application $f_\theta : 2^{A^*} \mapsto 2^{A^*}$ appelée *fonction de semi-commutation.*

L'étude des semi-commutations s'est développée suivant plusieurs axes :

- Etude des réseaux de Petri à l'aide des semi-commutations : un réseau de Petri est un assemblage de producteurs et de consommateurs, les semi-commutations paraissent donc mieux adaptées à l'étude des réseaux de Petri que les commutations partielles.
  Il est possible de définir, de façon systématique, une relation de semi-commutation θ à partir d'un réseau de Petri : (y, x) appartient à θ si et seulement si toute place en entrée de x n'est pas en sortie de y . Il est alors facile de remarquer que le langage reconnu par le réseau de Petri est toujours clos par la fonction de semi-commutation associée à θ .

  Ici nous avons $\theta = (c,p)$ (la lettre p ne dépend pas de c). Le langage reconnu par ce réseau de Petri est $L = \mathrm{FG}(D_1'^*(p,c))$, l'ensemble des facteurs gauches du langage de semi-Dyck. Il est possible de montrer que le langage L est clos pour θ (i.e. $f_\theta(L) = L$), de même que $L = f_\theta((pc)^*p^*)$.

  L'étude des réseaux de Petri à l'aide des semi-commutations a réellement débuté en 1989 avec le papier de D.V. Hung et E. Knuth [HK89] ; depuis E. Ochmanski l'a poursuivie [Och89a, Och90, Och92].

- Décomposition des semi-commutations en objets plus simples. M. Clerbout et D. Gonzalez [CG90, Gon93] ont montré que toute fonction de semi-commutation pouvait être réalisée par une composition de fonctions de semi-commutation très simples : les semi-commutations atomiques. Cette étude a permis de démontrer, de façon simple, des propriétés conservées par composition ; elle a également apporté une notion de complexité pour les fonctions de semi-commutation : la longueur de la plus courte décomposition.

- Etude de la famille $\mathrm{Reg}_\theta(A^*)$: la famille des langages réguliers (reconnaissables) et clos pour la semi-commutation θ . Le but de cette étude est de fournir des conditions suffisantes ou (et) nécessaires pour que la clôture, par une fonction de semi-commutation, d'un langage régulier soit encore un langage régulier.

  La principale question de ce domaine est le *problème de l'étoile* : *Soit L un langage régulier et θ une semi-commutation. Le langage $f_\theta(L^*)$ est-il régulier ?*

  Dans [CL87], M. Clerbout et M. Latteux ont établi une condition suffisante pour ce problème : le langage itéré doit être fortement connexe (i.e. ne contenir que des mots fortement connexes pour la relation de non-commutation). Ce résultat important a été démontré de façon indépendante par E. Ochmanski [Och85] et par Y. Métivier [Mét86c, Mét86a] dans le cadre des commutations partielles.
  Dans le même papier, E. Ochmanski a proposé des opérations rationnelles pour les traces grâce auxquelles il a démontré un résultat fondamental de la théorie des langages traces : la généralisation du théorème de Kleene.

  L'autre résultat fondamental de cette théorie est la généralisation des automates du monoïde libre : dans [Zie87] W. Zielonka a introduit la notion d'automates asynchrones ; ceux-ci reconnaissent exactement les langages traces réguliers.

  Ces deux joyaux de la théorie des traces n'ont toujours pas d'équivalents pour les semi-commutations. Il faut dire qu'à la différence des commutations partielles, il n'existe pas de "monoïde semi-commutatif libre" .
  Dans [CLRZ92] M. Clerbout, M. Latteux, Y. Roos et W. Zielonka ont tenté de généraliser le théorème d'Ochmanski. A l'aide d'opérations rationnelles très proches de celles d'Ochmanski, ils ont défini, pour chaque semi-commutation (A, θ), une famille de langages réguliers θ-clos : $\mathcal{R}_\theta(A^*)$. Cette construction, suffisante pour les commutations partielles, s'est révélée trop grossière pour les semi-commutations : dès que la semi-commutation est non-symétrique, cette famille est strictement incluse dans $\mathrm{Reg}_\theta(A^*)$, la famille des langages réguliers θ-clos.

Dans ce mémoire nous abordons deux de ces thèmes : nous étudions la composition de deux fonctions de semi-commutation et nous nous intéressons aux *morphismes pour semi-commutations* transformant les langages réguliers clos par une semi-commutation en langages réguliers clos pour une autre semi-commutation.

Nous commençons par exposer les résultats classiques de la théorie de langages concernant la reconnaissabilité, puis présentons quelques familles de langages du monoïde libre, le vocabulaire de base de la théorie des graphes et des réseaux de Petri.
Dans un second temps nous introduisons la notion de semi-commutation et énonçons les principaux résultats de base, résultats que nous utiliserons constamment dans ce mémoire.
La dernière partie des préliminaires rappelle les résultats obtenus sur le thème "langages réguliers et semi-commutations".

Partant du principe "savoir composer pour mieux décomposer", nous consacrons le second chapitre à l'étude de la composition de deux fonctions de semi-commutation réalisé en collaboration de Y. Roos [RW91]. Le problème est le suivant :

Etant donné deux fonctions de semi-commutation f_μ et f_λ travaillant sur le même alphabet A , existe-il une troisième fonction de semi-commutation f_θ telle que pour tout mot m de A^* on ait $f_\theta(m) = f_\lambda \circ f_\mu(m)$?

Nous donnons une caractérisation décidable des fonctions de semi-commutation "composables" reposant sur les graphes de non-commutation des deux semi-commutations. Puis nous présentons quelques applications de ce résultat :

- Propriété de vérification locale de la synchronisation de deux semi-traces : la synchronisation de semi-traces permet d'exprimer le parallélisme de façon modulaire. Pour vérifier si deux semi-traces se synchronisent, il faut tester une condition globale sur les deux semi-traces. Grâce à notre résultat sur la composition, nous caractérisons les couples de semi-commutations pour lesquels une condition très simple permet de décider de la synchronisation de deux semi-traces.
  Cette application généralise, partiellement, un résultat de V. Diekert et W. Vogler [DV89, Die90] ; elle est aussi présentée par K. Reinhardt dans [Rei92] où l'auteur étudie la synchronisation de semi-traces.

- Caractérisation des semi-commutations confluentes : la confluence d'un système de réécriture est une propriété généralement indécidable. Nous montrons qu'une semi-commutation (A, θ) est confluente si et seulement si la composition $f_\theta \circ f_{\theta^{-1}}$ est une fonction de semi-commutation ; nous obtenons alors une condition nécessaire et suffisante décidable.
  Notons que V. Diekert, E. Ochmanski et K. Reinhardt [DOR91] ont obtenu indépendamment une preuve directe de ce résultat.

- Dans [Gon93], D. Gonzalez a caractérisé les fonctions de semi-commutation qui préservent les langages multi-compteurs. La preuve présentée est relativement simple, notamment grâce à l'utilisation de notre critère de "composition". Nous présentons la technique de cette preuve.

Nous terminons ce chapitre sur la complexité de la propriété "la composition de deux fonctions de semi-commutation est une fonction de semi-commutation". Celle-ci se révèle co-NP-complète, résultat entièrement fondé sur l'étude de la complexité de la confluence d'une semi-commutation réalisé dans [DOR91].

Le second thème de ce mémoire est l'étude des morphismes pour semi-commutations : soient (A, θ) et (B, γ) deux semi-commutations et un morphisme $\varphi : A^* \mapsto B^*$, nous appelons morphisme de semi-commutations l'opération $\vec{\varphi} = f_\gamma \circ \varphi$.

Les morphismes pour semi-commutations permettent de spécifier le parallélisme à différents niveaux d'abstraction, permettant ainsi une analyse descendante des problèmes. Dans le

Chapitre 5 nous donnons deux exemples de morphismes et montrons que l'utilisation de morphismes permet de mieux exprimer le parallélisme de certains problèmes, notamment lorsque deux actions peuvent commuter sans, pour autant, pouvoir être exécutées en parallèle.

Dans ce mémoire nous nous intéressons plus particulièrement aux morphismes pour semi-commutations conservant la régularité ; nous baptisons ce type de morphismes "morphismes Reg-compatibles". Un morphisme φ est Reg-compatible si et seulement si pour tout langage L appartenant à $\mathrm{Reg}_\theta(A^*)$ (L est un langage régulier et $f_\theta(L) = L$) le langage $\bar{\varphi}(L)$ est un langage régulier.

Dans le Chapitre 4, réalisé en collaboration d'E. Ochmanski [OW93], nous traitons un cas très particulier de morphismes pour semi-commutations : l'identité. Le problème s'énonce plus simplement, nous parlerons alors de semi-commutations Reg-compatibles : soient (A,θ) et (A,γ) deux semi-commutations, a-t-on $f_\gamma(L) \in \mathrm{Reg}(A^*)$ pour tout langage L de $\mathrm{Reg}_\theta(A^*)$?

Dans le cas des commutations partielles la solution de ce problème est triviale : il faut que γ soit incluse dans θ . Ce problème est plus délicat dans le cadre des semi-commutations, principalement pour trois raisons :

- l'inclusion de γ dans θ n'est plus une condition nécessaire.
- conserver les mots fortement connexes pour $\bar{\theta}$ n'est pas suffisant.
- la famille des langages réguliers et clos pour une semi-commutation est mal connue.

Nous obtenons une caractérisation décidable des couples de semi-commutations Reg-compatibles relativement simple. Pour la démonstration, nous établissons une condition suffisante pour que la clôture d'un langage régulier par une fonction de semi-commutation soit encore un langage régulier : nous généralisons la notion de rang de distribution définie par K. Hashigushi [Has91] dans le cadre des commutations partielles.

Nous donnons ensuite des corollaires de cette caractérisation (établis dans [CGL+92]) : par exemple "θ^{-1} est toujours Reg-compatible avec θ" ou encore "$\theta \cup \theta^{-1}$ est Reg-compatible avec θ si et seulement si θ est confluente". Ce dernier corollaire nous permet de conclure ce chapitre sur la complexité : la propriété Reg-compatible se révèle co-NP-complète.

Le dernier chapitre de ce mémoire est consacré à l'étude des morphismes pour semi-commutations. Après avoir donné des exemples de morphismes, nous abordons le problème des morphismes Reg-compatibles. A nouveau, le cas des morphismes Reg-compatible se révèle relativement simple dans le cadre des commutations partielles. Dans le cadre des semi-commutations nous donnons une condition suffisante pour qu'un morphisme soit Reg-compatible : si un couple de lettres (x,y) n'appartient pas à θ alors $\varphi(x) \times \varphi(y)$ n'est pas inclus dans γ . Nous obtenons une condition suffisante plus large, en combinant cette condition et la caractérisation des semi-commutations Reg-compatibles. Cette condition est nécessaire pour les morphismes non-effaçant et disjoints (deux lettres différentes ont des images par φ sur des alphabets disjoints).

Nous abordons ensuite la simulation d'un morphisme pour semi-commutations par une transduction rationnelle, outil fondamental de la théorie des langages. Pour ce faire nous résolvons deux équations. La première demande au transducteur de faire tout le travail : $\tau = \vec{\varphi}$; la classe de morphismes définie par cette équation est très restreinte. Pour simuler une classe plus grande de morphismes nous étudions une seconde équation : $\tau = \vec{\varphi} \circ f_\theta$. Nous caractérisons la classe de morphismes ainsi définie et montrons notamment que cette équation caractérise les morphismes du monoïde de semi-traces qui peuvent être simulés par une transduction.

Nous concluons ce dernier chapitre sur deux applications de l'équation $\tau = \vec{\varphi} \circ f_\theta$:

- Une nouvelle preuve d'un résultat de M. Clerbout et Y. Roos [CR90] caractérisant les mot u et les semi-commutations θ tels que $f_\theta(u^*)$ soit un langage algébrique.
- Une caractérisation des morphismes de monoïde de traces ($\varphi : \mathbb{M}(A, \theta) \mapsto \mathbb{M}(B, \theta)$) transformant les langages algébriques de $\mathbb{M}(A, \theta)$ en langages algébriques de $\mathbb{M}(B, \gamma)$.

2

Préliminaires

2.1 Eléments de la théorie des langages

2.1.1 Monoïdes et Morphismes

Monoïdes

Un *semigroupe* est un ensemble S muni d'une loi de composition interne associative. Un *monoïde* est un semigroupe $\mathbb{M}$ muni d'un élément neutre, noté 1, pour la loi de composition interne.

Etant donné deux sous-ensembles A, B d'un monoïde $\mathbb{M}$ le produit AB est défini par $AB = \{c \in \mathbb{M} \mid \exists a \in A, \exists b \in B : c = ab\}$.

Un sous-ensemble A d'un monoïde $\mathbb{M}$ est un *sous-monoïde* de $\mathbb{M}$ si $A^2 \subset A$ et $1 \in A$.

Etant donné A un sous-ensemble d'un monoïde $\mathbb{M}$, l'ensemble

$$A^* = \bigcup_{n \geq 0} A^n$$

où $A^0 = \{1\}$ et $A^{n+1} = A^n A$, est un sous-monoïde de $\mathbb{M}$. En fait A^* représente le plus petit sous-monoïde, au sens de l'inclusion, contenant A .

Pour tout ensemble X , X^* est le *monoïde libre* engendré par X ; il est défini par :

- Les éléments de X^* sont des n-uplets $u = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ $n \geq 0$ d'éléments de X .

- Si $v = (y_0, y_1, \ldots, y_m)$ est un élément de X^* alors le produit uv est défini par la concaténation : $uv = (x_0, x_1, \ldots, x_n, y_0, y_1, \ldots, y_m)$

Ceci est un monoïde avec $1 = ()$ comme élément neutre. Nous écrirons x au lieu de (x) ainsi que ε pour $()$. Un élément $u = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de X^* s'écrit alors $u = x_0 x_1 \ldots x_n$ et est appelé *mot*, les éléments de X sont des *lettres* et X est un *alphabet*, une partie de X^* est appelé *langage*.

Morphismes et Congruences

Etant donnés deux semigroupes S et T , un *morphisme de semigroupes* est une application de S dans T telle que pour tous x, y appartenant à S nous ayons $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$.
Lorsque S et T sont deux monoïdes, φ est un *morphisme de monoïdes* si nous avons en plus $\varphi(1) = \{1\}$.

Une substitution ψ de X^* dans Y^* est un morphisme de monoïde de X^* dans 2^{Y^*} . Ainsi pour tout x de X , $\psi(x) \subset Y^*$, $\psi(1) = 1$ et pour u, v dans X^* , $\psi(uv) = \psi(u)\psi(v)$.

Une *congruence* $\sim$ sur le monoïde $\mathbb{M}$ est une relation d'équivalence stable pour la loi de $\mathbb{M}$, i.e. : $\forall x, y, z \in \mathbb{M} : x \sim y \Rightarrow xz \sim yz$ et $zx \sim zy$.

Le *monoïde quotient* de $\mathbb{M}$ par cette congruence, noté $\mathbb{M}/\sim$, est l'ensemble des classes d'équivalence pour $\sim$ muni de la loi induite par $\mathbb{M}$.

L'application canonique $\phi_\sim$ associant à tout élément de $\mathbb{M}$ sa classe d'équivalence pour $\sim$ est un morphisme, appelé *morphisme canonique* de $\mathbb{M}$ sur $\mathbb{M}/\sim$.

Le nombre de classes d'équivalences d'une congruence $\sim$ est appelé *index* de $\sim$. L'index d'une congruence est un entier naturel ou l'infini.

Soit P une partie de $\mathbb{M}$; P est dite *fermée* pour la congruence $\sim$ si P est une union de classes modulo $\sim$. De manière équivalente, P est fermée pour $\sim$ si $\phi_\sim$ *sature* P i.e. :

- soit il existe une partie N du monoïde quotient $\mathbb{M}/\sim$ telle que $P = \phi_\sim^{-1}(N)$.
- soit $P = \phi_\sim^{-1} \circ \phi_\sim(P)$.

2.1.2 Quelques notations

Dans ce paragraphe nous utiliserons l'alphabet A , u , v et w représenteront des mots de A^* .

La *longueur* du mot w sera notée $|w|$ et $|w|_x$ représentera le *nombre d'occurrences* de la lettre x de A dans le mot w .

Nous noterons $\mathrm{alph}(w)$ l'ensemble des lettres occurrant dans w i.e.

$$\mathrm{alph}(w) = \{x \in A \mid |w|_x > 0\}$$

Nous appellerons *mot de permutation* tout mot u ne contenant pas deux occurrences d'une même lettre i.e. $\forall x \in \mathrm{alph}(u), \quad |u|_x = 1$.

Nous noterons $\mathrm{com}(u)$ la *clôture commutative* du mot u :

$$\mathrm{com}(u) = \{w \mid \forall x \in A, \quad |w|_x = |u|_x\}$$

Un mot v est un *sous-mot* de u s'il existe des mots $w_0, \ldots, w_n, v_1, \ldots, v_n$ de A^* tels que $u = w_0 v_1 w_1 \ldots v_n w_n$ et $v = v_1 \ldots v_n$.

Nous noterons $\mathrm{FG}(w)$ l'ensemble des *facteurs gauches* du mot w i.e.

$$\mathrm{FG}(w) = \{u \in A^* \mid \exists v \in A^* \quad w = uv\}$$

Cette définition est étendue pour tout un langage L de A^* :

$$\mathrm{FG}(L) = \bigcup_{w \in L} \mathrm{FG}(w)$$

Nous désignerons par $\Pi_B(w)$ la *projection* du mot w sur le sous-alphabet B de A , c'est l'image de w par l'homomorphisme Π_B défini par :

$$\forall x \in A, \quad \Pi_B(x) = \begin{cases} x & x \in B \\ \varepsilon & x \notin B \end{cases}$$

Nous noterons Π_u la projection sur $\mathrm{alph}(u)$ i.e. $\Pi_{\mathrm{alph}(u)}$.

Le mot $\widetilde{u}$ signifiera le *miroir* de u i.e. si $u = x_0 x_1 \ldots x_n$ alors $\widetilde{u} = x_n \ldots x_1 x_0$ où les x_i sont des lettres de A .

Nous noterons $u \sqcup\!\sqcup v$ le *produit de mélange (shuffle)* des mots u et v i.e.

$$u \sqcup\!\sqcup v = \{u_1 v_1 \ldots u_n v_n \mid u_i \in A^*, v_i \in A^*, \quad u = u_1 \ldots u_n, v = v_1 \ldots v_n\}$$

Nous utiliserons le *produit de mixage* de deux mots, $u \sqcap\!\sqcap v$, introduit par R. De Simone dans [DS84] et défini par :

$$u \sqcap\!\sqcap v = \{w \in (\mathrm{alph}(u) \cup \mathrm{alph}(v))^* \mid \Pi_u(w) = u, \quad \Pi_v(w) = v\}$$

Le produit de mixage de deux langages est défini par

$$L_1 \sqcap\!\sqcap L_2 = \bigcup_{\substack{u \in L_1 \\ v \in L_2}} u \sqcap\!\sqcap v \quad .$$

2.1.3 Parties rationnelles et régulières

Langages rationnels

Soit $\mathbb{M}$ un monoïde, l'ensemble des parties de $\mathbb{M}$ est un monoïde lorsqu'il est muni de l'*opération produit* induite par $\mathbb{M}$ et de son élément neutre $\{1\}$.

L'*opération étoile* est définie pour toute partie P de $\mathbb{M}$ par

$$P^* = \bigcup_{n \geq 0} P^n$$

où $P^0 = \{1\}$ et $P^{n+1} = P^n P$.

L'*opération plus* est définie pour toute partie P de $\mathbb{M}$ par

$$P^+ = \bigcup_{n \geq 1} P^n$$

Les opérations union, produit et étoile sont appelées *opérations rationnelles* .

Définition 2.1.1 *La plus petite famille de parties de* $\mathbb{M}$ *fermée pour les opérations rationnelles et contenant les parties finies de* $\mathbb{M}$ *est appelée* famille des langages rationnels *de* $\mathbb{M}$ *et est notée* $\mathrm{Rat}(\mathbb{M})$.

Langages réguliers

Définition 2.1.2 *Un langage* R *de* $\mathbb{M}$ *est* régulier *s'il existe un monoïde fini* F *et un morphisme* $f : \mathbb{M} \mapsto F$ *saturant* R .

Une définition équivalente est la suivante :

Définition 2.1.3 *Un langage* R *de* $\mathbb{M}$ *est* régulier *s'il existe une congruence d'index fini saturant* R .

Nous noterons $\mathrm{Reg}(\mathbb{M})$ la famille des langages réguliers de $\mathbb{M}$.

La congruence la plus grossière saturant un langage R est la *congruence syntaxique* de R, notée $\approx$ et définie par :

$$x \approx y \Leftrightarrow \forall z, t \in \mathbb{M}, \quad (zxt \in R \Leftrightarrow zyt \in R)$$

Proposition 2.1.4 *Un langage* R *est régulier si et seulement si son* monoïde syntaxique $\mathbb{M}/\!\approx$ *est fini.*

Proposition 2.1.5 $\mathrm{Reg}(\mathbb{M})$ *est fermée par les opérations booléennes : union, intersection et complémentation.*

Définition 2.1.6 *Soient* R *et* L *deux langages de* $\mathbb{M}$ *, le* quotient à gauche *de* R *par* L *est l'ensemble* $L^{-1}R = \{w \in \mathbb{M} \mid Lw \cap R \neq \emptyset\}$.

Proposition 2.1.7 *Soit* L *un langage de* $\mathbb{M}$ *. Si* R *appartient à* $\mathrm{Reg}(\mathbb{M})$ *alors* $L^{-1}R$ *appartient aussi à* $\mathrm{Reg}(\mathbb{M})$.

Automates

Définition 2.1.8 ([Lal79]) *Un* $\mathbb{M}$*-automate* $\mathcal{A} = < Q, q_0, F, \delta >$ *est donné par un ensemble d'états* Q *, un état initial* q_0 *de* Q*, un ensemble d'états finaux* $F \subset Q$ *et une fonction de transition* $\delta : Q \times \mathbb{M} \mapsto Q$ *vérifiant :* $\delta(q, \varepsilon) = q \quad \delta(q, ux) = \delta(q, \delta(u), x)$.

Un élément u de $\mathbb{M}$ est reconnu par un automate $\mathcal{A} = < Q, q_0, F, \delta >$ si et seulement si $\delta(q_0, u) \in F$. Le langage reconnu par l'automate $\mathcal{A}$ est $L(\mathcal{A}) = \{u \in \mathbb{M} \mid \delta(q_0, u) \in F\}$.

Un $\mathbb{M}$-automate $\mathcal{A} = < Q, q_0, F, \delta >$ est fini si et seulement si Q est fini.

Proposition 2.1.9 *Soit* R *un langage de* $\mathbb{M}$ *. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

– *R est* reconnaissable *(i.e. régulier)* .

– *Il existe un automate fini* $\mathcal{A}$ *tel que* $L(\mathcal{A}) = R$.

– *L'ensemble* $\{w^{-1}R \mid w \in \mathbb{M}\}$ *est fini.*

2.1.4 Langages du monoïde libre

Langages réguliers

Théorème 2.1.10 (Théorème de Kleene) *La famille des langages réguliers de* X^* *est égale à la famille des langages rationnels de* X^* .

Proposition 2.1.11 *Les langages réguliers sont clos par union, produit, étoile, plus, intersection, complémentation, miroir, morphisme, morphisme inverse, substitution régulière.*

Langages Algébriques

Définition 2.1.12 *Une* grammaire algébrique $G =< V, X, P >$ *est constituée par un alphabet* V *de* variables, *un alphabet* X , *disjoint de* V , *de* lettres terminales *et un ensemble fini* $P \subset V \times (V \cup X)^*$ *de* règles de production .

L'ensemble des règles de production pour la variable α sera notée $\alpha \xrightarrow[G]{} l_1 \mid l_2 \mid \ldots \mid l_n$.

Soient $G =< V, X, P >$ une grammaire algébrique et $f, g \in (V \cup X)^*$. Alors f se dérive en g , ce que l'on note $f \to g$, si et seulement si il existe des factorisations $f = u\alpha v$ et $g = ulv$ telles que $\alpha \xrightarrow[G]{} l \in P$.

Nous désignerons par $\xrightarrow[G]{*}$ la clôture réflexive et transitive de $\xrightarrow[G]{}$.

Pour toute variable α de V le *langage engendré* par α pour G est défini par :

$$L_G(\alpha) = \{w \in X^* \mid \alpha \xrightarrow[G]{*} w\}$$

Une grammaire algébrique $G =< V, X, P >$ *engendre* un langage $L \subset X^*$ s'il existe une variable $\alpha \in V$ telle que $L = L_G(\alpha)$.

Définition 2.1.13 *Un langage* L *de* X^* *est* algébrique *s'il existe une grammaire algébrique qui engendre* L . *La famille des langages algébriques de* X^* *est notée* $\mathrm{Alg}(X^*)$.

Nous noterons $D_1^*(a, b)$ le langage de Dyck l'ensemble des mots $m \in (a+b)^*$ vérifiant $|m|_a = |m|_b$. C'est un langage algébrique car il est engendré par la grammaire suivante :
$V = \{\alpha\}$ $X = \{a, b\}$ $P = \{\alpha \xrightarrow[G]{} \varepsilon \mid \alpha a \alpha b \alpha \mid \alpha b \alpha a \alpha\}$.

Nous noterons $D_1'^*(a,b)$ le langage de semi-Dyck défini par $D_1'^*(a,b) = \{mw \mid |mw|_a = |mw|_b \quad |m|_a \geq |m|_b\}$. Il est engendré par la grammaire algébrique suivante :
$V = \{\alpha\} \quad X = \{a,b\} \quad P = \{\alpha \underset{G}{\longrightarrow} \varepsilon \mid a\alpha b\alpha\}$.

Langages multi-compteurs

Un compteur est un mot sur un alphabet de deux lettres $\{y_0, y\}$ et appartenant au langage y^*y_0 . Les opérations sur un compteur consiste à empiler, dépiler et tester si la pile est vide (tester le zéro) . Un automate à compteurs est défini par $\mathcal{A} = (X, Q, q_0, F, Y, (y_0, \ldots, y_0), \delta)$ où X est un alphabet d'entrée, Q est un ensemble fini d'états, $q_0 \in Q$ est l'état initial, F est un ensemble d'états finaux, $Y = \{y_0, y\}$ est l'alphabet des compteurs (piles), $(y_0, \ldots, y_0) \in (Y^*)^n$ est un n-uple de compteurs et $\delta \subset Q \times (X \cup \varepsilon) \times (Y \cup \varepsilon)^n \times Q \times (Y^*)^n$ est la fonction de transition dont les éléments sont de la forme $(q, u, z) \longrightarrow (q', z')$ avec deux conditions supplémentaires si z_i, la $i^{\text{ème}}$ composante de z, est égale à y ou à ε alors $z'_i \in y^*$ et si $z_i = y_0$ alors $z'_i \in y^*y_0$.

La famille des langages reconnus par les automates à un compteur est appelée OCL (One Counter Languages) dont fait partie le langage de Dyck (D_1^*). Si on s'interdit de tester le zéro du compteur (les règles sont de la forme $(q, u, z) \longrightarrow (q', z')$ où $z \in (y \cup \varepsilon)^n$ on obtient la famille ROCL (Restricted One Counter Languages) dont fait partie $D_1'^*$.

La famille des langages multi-compteurs est la famille des langages reconnus par les automates à compteurs qui ne testent pas le zéro ; plus formellement :

Définition 2.1.14 *La famille des langages* multi-compteurs, *notée MC, est la plus petite famille contenant $D_1'^*$ et fermée par intersection et transduction rationnelle.*

Par exemple les langages D_1^* , $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ sont des langages multi-compteurs, tandis que $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}^*$ n'en est pas un.

2.1.5 Transductions rationnelles

Nous nous intéressons au monoïde résultant du produit cartésien de deux monoïdes libres X^* et Y^* où l'opération interne est la concaténation de chacun des monoïdes libres, soit $(x,y)(x',y') = (xx', yy')$ et l'élément neutre est $(\varepsilon, \varepsilon)$. Ce monoïde n'est pas libre, en effet nous avons $(x,y) = (x,\varepsilon)(\varepsilon,y) = (\varepsilon,y)(x,\varepsilon)$.

Définition 2.1.15 *Soient X et Y deux alphabets. Une transduction rationnelle τ de $X^* \times Y^*$ est une partie rationnelle de $X^* \times Y^*$.*

Proposition 2.1.16 *L'ensemble* $\mathrm{Rec}(X^* \times Y^*)$ *est strictement inclus dans* $\mathrm{Rat}(X^* \times Y^*)$.

Théorème 2.1.17 ([Niv68]) *Les condition suivantes sont équivalentes :*

– *τ est une transduction rationnelle.*

– *Il existe un alphabet Z , un langage rationnel K de Z^* et deux morphismes $\varphi : Z^* \mapsto X^*$ et $\psi : Z^* \mapsto Y^*$ tels que $\tau = \{(\varphi(u), \psi(u)) \mid u \in K\}$.*

Corollaire 2.1.18 *Toute transduction rationnelle τ préserve la famille des langages réguliers et la famille des langages algébriques i.e. $\tau(L)$ est régulier (resp. algébrique) si L est régulier (resp. algébrique).*

Le théorème de Nivat permet aussi d'écrire une transduction rationnelle sous la forme suivante :

$$\forall u \in X^* \quad \tau(u) = \psi(\varphi^{-1}(u) \cap K) = \psi \circ (\cap K) \circ \varphi^{-1}(u)$$

Enfin une transduction rationnelle peut se représenter par un automate fini avec sortie :

Définition 2.1.19 *Un* transducteur fini *est un 6-uple $\mathcal{A} = < X, Y, Q, q_0, F, \delta >$ où X et Y sont deux alphabets, Q est un ensemble fini d'états, $q_0 \in Q$ est l'état initial, $F \subset Q$ est l'ensemble des états finaux et δ est un sous-ensemble fini de $Q \times X^* \times Y^* \times Q$.*

2.2 Graphes

Définition 2.2.1 *Un* graphe orienté *G est un couple (S, A) où S est un ensemble fini de* sommets *et A une partie de $S \times S$ dont les éléments sont appelés des* arcs.

Un *sous-graphe* d'un graphe (S, A) est un graphe (S', A') tel que $S' \subset S$ et $A' = A \cap S' \times S'$.

Un *chemin* dans un graphe est une suite d'arcs telle que l'extrémité terminale coïncide avec l'extrémité du suivant.

Un *cycle* est un chemin dont l'extrémité terminale coïncide avec l'extrémité initiale.

Un graphe (S, A) est *connexe* si pour tout couple de sommets (x, y) il existe un chemin de x à y dans $(S, A \cup A^{-1})$.

Un graphe (S, A) est *fortement connexe* si pour tout couple de sommets (x, y) il existe un chemin de x à y dans (S, A) .

Les *composantes (fortement) connexes* d'un graphe (S, A) sont les sous-graphes (fortement) connexes maximaux de (S, A) .

Exemple 2.2.2 *Considérons le graphe de la Figure 2.1. La suite d'arcs $(f, e), (e, b), (b, d)$ est un chemin.*
La suite d'arcs $(a, b), (b, c), (c, d), (d, a)$ est un cycle.
Le graphe n'est pas connexe et a fortiori pas fortement connexe.
Dans ce graphe, il existe deux composantes connexes dont les sommets sont $\{a, b, c, d, e, f\}$ et $\{g, h\}$; il y a aussi quatre composantes fortement connexes : $\{a, b, c, d\}$, $\{e\}$, $\{f\}$ et $\{g, h\}$.

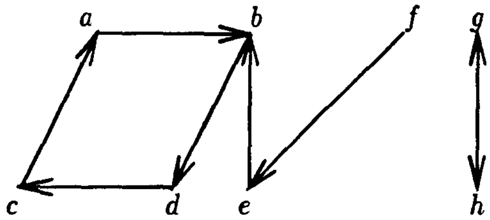


Figure 2.1 : un graphe

2.3 Réseaux de Petri

Définition 2.3.1 *Un* réseau de Petri *est quadruplet* $R =< P, T, pré, post >$ *où :*

- P *est un ensemble fini de* places ,
- T *est un ensemble fini de* transitions *disjoint de* P ,
- *pré est l'application d'*incidence avant *définie de* $P \times T$ *dans* $\mathbb{N}$,
- *post est l'application d'*incidence arrière *définie de* $P \times T$ *dans* $\mathbb{N}$.

Un *réseau marqué* est le couple $N =< R, M >$ formé d'un réseau R et d'une application $M : P \mapsto \mathbb{N}$ appelée *marquage*. On notera $M(p)$ le marquage de la place p i.e. le nombre de *marques* contenues dans p .

Définition 2.3.2 *Une transition t est franchissable pour un marquage M si et seulement si* $\forall p \in P \quad M(p) \geq pré(p, t)$.
On note $M(t)$ *cette relation dans* $\mathbb{N}^{\mathrm{Card}(P)} \times T$ *: c'est la précondition de franchissement de* t .
Si t est franchissable pour M , le franchissement de t permet d'obtenir le nouveau marquage M' *tel que :* $\forall p \in P \quad M'(p) = M(p) - pré(p, t) + \mathrm{post}(p, t)$.
On note $M(t)M'$ *cette relation dans* $\mathbb{N}^{\mathrm{Card}(P)} \times T \times \mathbb{N}^{\mathrm{Card}(P)}$.

Exemple 2.3.3 *Considérons le réseau de Petri de la Figure 2.2.*

Sont franchissables les transitions a, b, c .
Tout mot du langage $(cbda)^*$ *est une séquence franchissable.*

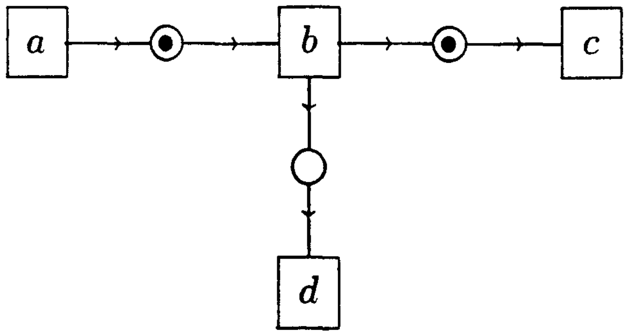


Figure 2.2 : un réseau de Petri

2.4 Semi-commutations

2.4.1 Définitions

Définition 2.4.1 ([Cle84, CL87]) *Une* relation de semi-commutation θ *définie sur un alphabet* A *est une relation irréflexive : c'est un sous-ensemble de* $A \times A$.

Définition 2.4.2 *Une* relation de commutation partielle θ *définie sur un alphabet* A *est une relation symétrique et irréflexive.*

Définition 2.4.3 *A toute semi-commutation* (A, θ) *est associé un système de réécriture* $S_\theta =< A, P >$, *appelé* système de semi-commutation, *où* P *désigne l'ensemble* $\{xy \longrightarrow yx \mid (x, y) \in \theta\}$.

Le mot u se *dérive* en v par S_θ en un pas (noté $u \underset{\theta}{\longrightarrow} v$) s'il existe une règle $xy \longrightarrow yx$ et deux mots m et w tels que $u = wxym$ et $v = wyxm$.
Nous noterons $\overset{+}{\underset{\theta}{\longrightarrow}}$ la clôture transitive de $\underset{\theta}{\longrightarrow}$ et $\overset{*}{\underset{\theta}{\longrightarrow}}$ la clôture réflexive et transitive de $\underset{\theta}{\longrightarrow}$.
Si u se dérive en v ($u \overset{*}{\underset{\theta}{\longrightarrow}} v$) il existe des mots $m_0, m_1 \dots m_n$ tels que $m_0 = u$, $m_n = v$ et $m_i \underset{\theta}{\longrightarrow} m_{i+1}$ pour tout indice $i < n$; l'entier n désignera la *longueur de dérivation* . Enfin $u \overset{n}{\underset{\theta}{\longrightarrow}} v$ signifie que u se dérive en v en n pas de dérivation.

Nous désignerons par θ^{-1} la relation de semi-commutation inverse associée à θ :

$$\theta^{-1} = \{(x, y) \mid (y, x) \in \theta\}$$

Définition 2.4.4 *A toute semi-commutation* (A, θ) *est associé un* graphe de commutation *: c'est le graphe dirigé* $< A, \theta >$ *où* A *désigne l'ensemble des sommets et* θ *l'ensemble des arcs.*

Nous noterons $\bar{\theta}$ la *relation de non-commutation* associé à la semi-commutation (A, θ) :

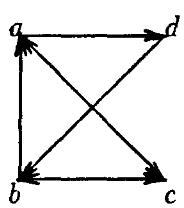
$$\bar{\theta} = \{(x, y) \mid (x, y) \notin \theta\}$$

Définition 2.4.5 *A toute semi-commutation* (A, θ) *est associé un* graphe de non-commutation *: c'est le graphe dirigé* $< A, \bar{\theta} >$ *où* A *désigne l'ensemble des sommets et* $\bar{\theta}$ *l'ensemble des arcs.*

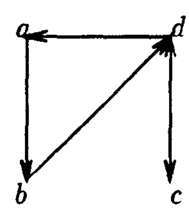
Définition 2.4.6 *Soient* (A,θ) *une semi-commutation et* u *un mot de* A^* . *Le* mot u est connexe *pour* $\bar{\theta}$ *si le sous-graphe* $< \mathrm{alph}(u), \bar{\theta} \cap \mathrm{alph}(u) \times \mathrm{alph}(u) >$ *est connexe.*

Définition 2.4.7 *Soient* (A,θ) *une semi-commutation et* u *un mot de* A^* . *Le* mot u est fortement connexe *pour* $\bar{\theta}$ *si le sous-graphe* $< \mathrm{alph}(u), \bar{\theta} \cap \mathrm{alph}(u) \times \mathrm{alph}(u) >$ *est fortement connexe.*

Exemple 2.4.8 *Soit la semi-commutation* (A,θ) *avec pour alphabet* $A = \{a,b,c,d\}$ *et comme relation de semi-commutation* $\theta = \{(a,d)\ ,\ (a,c)\ ,\ (b,a)\ ,\ (b,c)\ ,\ (c,b)\ ,\ (c,a)\ ,\ (d,b)\}$.
Nous avons $\theta^{-1} = \{(d,a)\ ,\ (c,a)\ ,\ (a,b)\ ,\ (c,b)\ ,\ (b,c)\ ,\ (a,c)\ ,\ (b,d)\}$.



graphe de commutation



graphe de non-commutation

Pour une question de lisibilité nous ne représentons pas les arcs (x,x) *dans le graphe de non-commutation.*

Les mots $a, b, c, d, dc, abc, abcd$ *sont fortement connexes pour* $\bar{\theta}$.
Le mot ab est connexe pour $\bar{\theta}$ *mais n'est pas fortement connexe.*

Définition 2.4.9 *A toute semi-commutation* (A,θ) *est associée une* fonction de semi-commutation $f_\theta : 2^{A^*} \mapsto 2^{A^*}$ *définie par*

$$\forall L \subset A^*, \quad f_\theta(L) = \bigcup_{w \in L} \{u \mid w \xrightarrow[\theta]{*} u\}$$

Si $f_{\theta_1}, f_{\theta_2}, \ldots, f_{\theta_n}$ sont des fonctions de semi-commutation définies sur le même alphabet A , nous noterons $f_{\theta_n} \circ \cdots \circ f_{\theta_2} \circ f_{\theta_1}$ la composition de ces fonctions :

$$\forall w \in A^* \quad f_{\theta_n} \circ \cdots \circ f_{\theta_2} \circ f_{\theta_1}(w) = f_{\theta_n}(\cdots(f_{\theta_2}(f_{\theta_1}(w)))\cdots)$$

Exemple 2.4.10 *Soient les semi-commutations* (A,μ) *et* (A,λ) *avec* $A = \{a,b,c\}$, $\mu = \{(a,b),(a,c)\}$ *et* $\lambda = \{(b,c),(c,b)\}$.
Nous avons $f_\mu(abca) = \{abca\ ,\ baca\ ,\ bcaa\}$ *et*
$f_\lambda \circ f_\mu(abca) = f_\lambda(abca) \cup f_\lambda(abca) \cup f_\lambda(abca) = \{abca\ ,\ acba\ ,\ baca\ ,\ bcaa\ ,cbaa\}$.
Remarquons qu'une fonction de semi-commutation est idempotente i.e. $f_\theta \circ f_\theta = f_\theta$.
Nous avons aussi $f_\mu((ba)^*) = D_1^{\prime *}(b,a)$ *ainsi que* $f_\lambda((bc)^*) = D_1^*(b,c)$. *Ces affirmations peuvent être facilement vérifiées grâce aux lemmes de dérivation que nous présentons maintenant.*

$$\begin{tikzcd} abca \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\lambda"'] & baca \arrow[r, "\mu"] & bcaa \arrow[d, "\lambda"] \\ acba & & cbaa \end{tikzcd}$$

Figure 2.3 : $f_\lambda \circ f_\mu(abca)$

2.4.2 Lemmes de dérivation

Nous exposons ici quelques lemmes de dérivation que nous utiliserons tout au long de ce mémoire.

Lemme 2.4.11 (Lemme de Projection [Cle84]) *Soient (A, θ) une semi-commutation et u et v deux mots de A^* . Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- $v \in f_\theta(u)$.
- $\forall x, y \in A, \quad \Pi_{ab}(v) \in f_\theta(\Pi_{ab}(u))$.

Lemme 2.4.12 (Lemme de Levi pour les semi-traces) *Soient (A, θ) une semi-commutation et u, v deux mots de A^* et $zt \in f_\theta(uv)$. Il existe des mots u', v' , u'', v'' tels que :*

- $z \in f_\theta(u'v')$ *et* $t \in f_\theta(u''v'')$.
- $u'u'' \in f_\theta(u)$ *et* $v'v'' \in f_\theta(v)$.
- $\mathrm{alph}(u'') \times \mathrm{alph}(v') \subset \theta$

Lemme 2.4.13 (Lemme de l'Equivalence [Och90]) *Soient (A, θ) une semi-commutation et u et v deux mots de A^* . Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- $f_\theta(v) = f_\theta(u)$.
- $f_{\theta\cap\theta^{-1}}(v) = f_{\theta\cap\theta^{-1}}(u)$.

Lemme 2.4.14 (Lemme du Miroir [Lat92]) *Soient (A, θ) une semi-commutation et u et v deux mots de A^* . Alors $v \in f_\theta(u)$ si et seulement si $\widetilde{v} \in f_{\theta^{-1}}(\widetilde{u})$.*

Lemme de Numérotation

Il est plus facile de vérifier le Lemme de Projection sur un mot de permutation que sur un mot quelconque. Pour transformer tout mot en un mot de permutation Y. Roos a introduit dans sa thèse [Roo89] la notion de numérotation.

Définition 2.4.15 *Pour une semi-commutation (A, θ) nous posons :*

- $A_N = A \times \mathbb{N}$
- $\theta_N = \{((x,i),(y,j)) \in A_N \times A_N \mid (x,y) \in \theta\}$

Nous définissons inductivement l'application num : $A^* \mapsto A_N^*$ *par*

- $\text{num}(\varepsilon) = \varepsilon$
- $\forall u \in A^*, \quad \forall x \in A, \quad \text{num}(ua) = \text{num}(u)(a, |ua|_a)$.

Le morphisme den : $A_N^* \mapsto A$ *est défini par*

- $\forall (x,i) \in A_N, \quad \text{den}((x,i)) = x$.

Remarquons que A_N un alphabet infini. En général nous noterons x_i un élément (x,i) de A_N . Nous utiliserons aussi d'autres fonctions de numérotations toujours compatibles avec le résultat suivant :

Lemme 2.4.16 (Lemme de Numérotation [Roo89]) *Soit* (A,θ) *une semi-commutation.*

- *Pour tous les mots* u, v *de* A^*, $u \xrightarrow[\theta]{n} v$ *si et seulement si* $\text{num}(u) \xrightarrow[\theta_N]{n} \text{num}(v)$.
- *Pour tous les mots* u, v *de* A_N^*, $u \xrightarrow[\theta_N]{n} v$ *si et seulement si* $\text{den}(u) \xrightarrow[\theta]{n} \text{den}(v)$.

Distances entre deux mots

La distance entre deux mots commutativement équivalents représente le plus petit nombre de dérivations élémentaires à effectuer, à l'aide de la commutation totale, pour passer d'un mot à un autre :

Définition 2.4.17 *Soit* u *un mot de permutation de* X^* . *Nous posons*

$$E_u = \{(x,y) \in X \times X \mid u = m_1 x m_2 y m_3, \ m_1, m_2, m_3 \in X^*\} .$$

Définition 2.4.18 *Soient* u *et* v *deux mots commutativement équivalents. La* distance *entre* u *est* v *est définie par :* $d(u,v) = \text{Card}(E_{\text{num}(u)} \setminus E_{\text{num}(v)})$.

Lemme 2.4.19 (Lemme de Permutation) *Soient* (A,θ) *une semi-commutation et* u *un mot de permutation de* A^* , v *un mot de* $\text{com}(u)$. *Alors :*

- $v \in f_\theta(u)$ *si et seulement si* $E_u \setminus E_v \subset \theta$.
- *Si* $v \in f_\theta(u)$, $d(u,v)$ *est la longueur de la plus courte dérivation de* u *en* v *par* θ .

Lemme 2.4.20 (Lemme des distances [Gon93]) *Soient* (A,θ) *une semi-commutation et* u *et* v *deux mots de* A^* *tels que* $v \in f_\theta(u)$. *Si* $u \xrightarrow[(b,a)]{} w$ *avec* $d(w,v) < d(u,v)$ *alors* $v \in f_\theta(w)$.

2.4.3 Semi-commutations atomiques

M. Clerbout et D. Gonzalez ont introduit une nouvelle sous-classe de semi-commutations : les semi-commutations atomiques, ce sont les semi-commutations qui ne peuvent être obtenues par composition d'autres semi-commutations.

Définition 2.4.21 *Une semi-commutation (A, θ) est* décomposable *s'il existe des semi-commutations $(A, \theta_1), \ldots, (A, \theta_n)$ strictement incluses dans θ telles que : $f_\theta = f_{\theta_n} \circ \cdots \circ f_{\theta_1}$.*

Définition 2.4.22 *Une semi-commutation (A, θ) est* atomique *si et seulement si $\theta = B \times C$ où B et C sont des sous-alphabets de A disjoints.*

Théorème 2.4.23 ([CG90, Gon93]) *Une semi-commutation (A, θ) est décomposable si et seulement si (A, θ) n'est pas atomique.*

Grâce à ce théorème, il est possible de définir une notion de complexité sur les semi-commutations fonction du plus petit nombre de fonctions de semi-commutation atomiques nécessaires pour réaliser une fonction de semi-commutation.
M. Clerbout et D. Gonzalez ont donné un algorithme permettant de décomposer toute fonction de semi-commutation en une composition de fonctions de semi-commutations atomiques ; cependant déterminer le nombre minimal de semi-commutations atomiques utiles est un problème ouvert dans le cas général (voir [Gon93]).

2.5 Semi-commutations et langages réguliers

2.5.1 Monoïde de semi-traces

Par analogie aux monoïdes de traces nous définissons les *monoïdes de semi-traces* : soient (A, θ) une semi-commutation et sa fonction de semi-commutation associée f_θ . Le monoïde de semi-traces de (A, θ) est le triplet $\mathbb{M}(A, \theta) = (\mathbb{M}, ., 1)$ où $\mathbb{M} = \{f_\theta(u) \mid u \in A^*\}$, la concaténation est définie par $f_\theta(u).f_\theta(v) = f_\theta(uv)$ et l'élément neutre est $1 = f_\theta(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$.

Un élément $f_\theta(u)$ de $\mathbb{M}(A, \theta)$ est appelé *semi-trace*, nous le noterons $[u\rangle_\theta$. On notera $[u]_\theta$ un élément du monoïde de traces $\mathbb{M}(A, \theta \cap \theta^{-1})$.

Toujours par analogie aux monoïdes de traces, nous définissons les parties reconnaissables de $\mathbb{M}(A, \theta)$: un sous-ensemble L de $\mathbb{M}(A, \theta)$ est reconnaissable si et seulement si l'ensemble de ses quotients à gauche $\{[u\rangle_\theta^{-1} L \mid [u\rangle_\theta \in \mathbb{M}(A, \theta)\}$ est fini.

Pour un langage de semi-traces $E \subset \mathbb{M}(A, \theta)$ nous désignerons par $\vec{E}$ le langage de mots $\{v \in A^* \mid \exists [u\rangle_\theta \in E,\ v \in f_\theta(u)\}$ lui correspondant.

Dans [Och89a], et à l'aide du Lemme de l'Equivalence, E.Ochmanski donne une caractérisation des parties reconnaissables de $\mathbb{M}(A, \theta)$ et montre à l'occasion qu'un langage de semi-traces $E \subset \mathbb{M}(A, \theta)$ peut être régulier sans que $\vec{E}$ soit une partie régulière de A^* . Ceci provient du fait que, contrairement aux monoïdes de traces, les monoïdes de semi-traces ne sont pas (en général) des monoïdes quotientés par la relation d'indépendance mais sont seulement quotientés par la partie symétrique de la relation d'indépendance : $\theta_s = \theta \cap \theta^{-1}$.

Nous présentons la caractérisation des parties reconnaissables de $\mathbb{M}(A,\theta)$:

Théorème 2.5.1 ([Och89a]) *Un langage de semi-traces L de $\mathbb{M}(A,\theta)$ est reconnaissable si et seulement si $\bigcup_{[u\rangle_\theta \in L} f_{\theta_s}(u)$ est un langage régulier de A^* .*

Soient la semi-commutation (A,θ) où $A = \{a,b\}$ et $\theta = \{(b,a)\}$ et le langage de semi-traces $R = \{[(ab)^n\rangle_\theta \mid n \geq 0\}$. D'une part R est un reconnaissable de $\mathbb{M}(A,\theta)$: $\bigcup_{[u\rangle_\theta \in R} f_{\theta_s}(u) = (ab)^*$; et d'autre part $\vec{R} = f_\theta((ab)^*) = D_1'^*(a,b)$ n'est pas un langage régulier de A^* .

Maintenant considérons la semi-commutation $(A,\theta) = (\{a,b,c\},\{(a,b),(a,c),(b,a),(b,c)\})$ et le langage de mots $L = c(ab)^* + (a+b)^*c$. D'une part le langage $f_\theta(L)$ est un langage régulier de A^* puisqu'il est égal à $(a+b)^*c(a+b)^*$. Mais le langage $\bigcup_{[u\rangle_\theta \in L} f_{\theta_s}(u)$ ne fait pas partie des langages reconnaissables de A^* : $\bigcup_{[u\rangle_\theta \in L} f_{\theta_s}(u) \cap c(a+b)^* = cD_1^*(a,b)$.

En résumé pour un langage de semi-traces $E \subset \mathbb{M}(A,\theta)$ nous n'avons ni $E \in \mathrm{Rec}(\mathbb{M}(A,\theta)) \Rightarrow \vec{E} \in \mathrm{Reg}(A^*)$, ni $\vec{E} \in \mathrm{Reg}(A^*) \Rightarrow E \in \mathrm{Rec}(\mathbb{M}(A,\theta))$.
Nous avons toutefois $f_\theta(L) \in \mathrm{Reg}(A^*) \Rightarrow E = \{[u\rangle_\theta \mid u \in f_\theta(L)\} \in \mathrm{Rec}(\mathbb{M}(A,\theta))$.

2.5.2 Langages réguliers clos par une semi-commutation

Soit (A,θ) une semi-commutation. La famille des langages réguliers et θ-clos de A^* est notée $\mathrm{Reg}_\theta(A^*)$.

$$\mathrm{Reg}_\theta(A^*) = \{R \in \mathrm{Reg}(A^*) \mid f_\theta(R) = R\}$$

Nous présentons ici les résultats principaux concernant la famille $\mathrm{Reg}_\theta(A^*)$.

Automate minimal déterministe de $\mathrm{Reg}_\theta(A^*)$

D.Gonzalez a montré que l'automate minimal déterministe de tout langage de $\mathrm{Reg}_\theta(A^*)$ possède une propriété particulière. Intuitivement, soit R un langage de $\mathrm{Reg}_\theta(A^*)$ et un mot m_1abm_2 dans R , si (a,b) appartient à θ alors le mot m_1bam_2 est lui aussi dans R . Sur l'automate minimal déterministe associé à R cela se traduit par :

Proposition 2.5.2 ([Gon93]) *Soient (A,θ) une semi-commutation, R un langage régulier de A^* et $\mathcal{A} =< A,Q,q_0,\delta,T >$ son automate minimal déterministe.*
Le langage R est θ-clos si et seulement si pour tout couple (a,b) de θ et pour tout état q tels que $\delta(q,ab) = q'$ il existe un état q'' tel que $\delta(q,ba) = q''$ et le langage associé à l'automate $\mathcal{A}'' =< A,Q,q'',\delta,T >$ contient celui associé à $\mathcal{A}' =< A,Q,q',\delta,T >$. De plus si (b,a) est aussi dans θ alors $q' = q''$.

Cette caractérisation est bien utile : il est facile de décider, de façon automatique, si un langage régulier est clos par une fonction de semi-commutation. Parfois, elle permet de faciliter la construction de la fermeture d'un langage régulier par une fonction de semi-commutation.

Propriétés de clôture

Dans le monoïde libre A^* le théorème de Kleene affirme que la famille des langages réguliers est close par union, produit et étoile. Comme dans le cadre des commutations partielles, la famille $\mathrm{Reg}_\theta(A^*)$ est close par union et produit mais n'est pas close par itération.

Proposition 2.5.3 ([CL87]) *Soit (A,θ) une semi-commutation. Si R_1 et R_2 sont deux langages de $\mathrm{Reg}_\theta(A^*)$ alors $f_\theta(R_1+R_2)$ et $f_\theta(R_1.R_2)$ sont aussi des langages de $\mathrm{Reg}_\theta(A^*)$.*

L'exemple suivant montre que la famille $\mathrm{Reg}_\theta(A^*)$ n'est pas close par itération :
Soit $(A,\theta) = (\{a,b\},\{(b,a)\})$ une semi-commutation, le langage $\{ab\}$ appartient à $\mathrm{Reg}_\theta(A^*)$.
Nous avons $f_\theta((ab)^*) = D_1'^*(a,b)$, un langage non régulier de A^* .

Une condition suffisante pour que la clôture, par une fonction de semi-commutation, de l'étoile d'un langage de $\mathrm{Reg}_\theta(A^*)$ reste dans $\mathrm{Reg}_\theta(A^*)$ a été établie par M.Clerbout et M.Latteux :

Proposition 2.5.4 ([CL87]) *Soit (A,θ) une semi-commutation. Si R est un langage régulier et fortement connexe pour $\bar{\theta}$ alors $f_\theta(R^*)$ est aussi un langage de $\mathrm{Reg}_\theta(A^*)$.*

Cette condition n'est pas nécessaire :
Soit $(A,\theta) = (\{a,b\},\{(b,a)\})$ une semi-commutation, le langage $\{ab+a+b\}$ n'est pas fortement connexe, cependant $f_\theta(\{ab+a+b\}^*) = A^*$.

En fait, lorsque le langage à itérer est réduit à un seul mot on obtient une condition nécessaire et suffisante :

Corollaire 2.5.5 ([CL87]) *Soit (A,θ) une semi-commutation et u un mot de A^* . Le langage $f_\theta(u^*)$ est dans $\mathrm{Reg}_\theta(A^*)$ si et seulement si u est un mot fortement connexe.*

La famille $\mathcal{R}_\theta(A^*)$ et les opérations quasi-rationnelles

Le problème abordé dans cette partie est la construction des langages de $\mathrm{Reg}_\theta(A^*)$ à l'aide d'opérations rationnelles : il s'agit de trouver des opérateurs assez faibles pour que $\mathrm{Reg}_\theta(A^*)$ soit clos par ceux-ci, mais aussi assez puissants pour pouvoir décrire tout langage de $\mathrm{Reg}_\theta(A^*)$. Comme nous l'avons vu, il n'y a pas de réel problème pour l'union et la concaténation. Pour l'itération, et dans le cadre des commutations partielles, E.Ochmanski a introduit une nouvelle itération : la co-itération. Avant de présenter cette itération, naturellement généralisée aux semi-commutations, nous définissons la version asynchrone d'un mot ou d'un langage, un opérateur qui *casse* les mots en composantes fortement connexes :

Définition 2.5.6 *Soient* (A,θ) *une semi-commutation et* u *un mot de* A^* . *La version asynchrone du mot* u, *notée* AS(u), *est définie par*

$$\mathrm{AS}(u) = \{\Pi_{X_i}(u) \mid X_i \text{ est une composante fortement connexe de } (\mathrm{alph}(u), \bar{\theta})\}$$

La version asynchrone d'un langage L *de* A^* *est définie par*

$$\mathrm{AS}(L) = \bigcup_{u \in L} \mathrm{AS}(u)$$

Voici les θ-opérateurs pour les semi-commutations :

- θ-union : $R_1 \cup_\theta R_2 = f_\theta(R_1 \cup R_2) = R_1 \cup R_2$
- θ-concaténation : $R_1 \cdot_\theta R_2 = f_\theta(R_1 . R_2)$
- θ-itération : $R^{*_\theta} = f_\theta[AS(R)^*]$

La famille $\mathcal{R}_\theta(A^*)$ est bâtie à l'aide de ces opérateurs :

Définition 2.5.7 *La famille* $\mathcal{R}_\theta(A^*)$ *est la plus petite famille de langages contenant les langages élémentaires – l'ensemble vide* $\emptyset$ *et les singletons* $\{\varepsilon\}$ *et* $\{x\}$ *où* x *est une lettre de* A *– et close par les* θ*-opérateurs :* θ*-union ,* θ*-concaténation et* θ*-itération .*

E.Ochmanski a montré dans le cadre des commutations partielles un résultat très important : la généralisation du théorème de Kleene au monoïde partiellement commutatif.

Théorème 2.5.8 (**[Och85]**) *Soit* (A,θ) *une commutation partielle. Alors*

$$\mathcal{R}_\theta(A^*) = \mathrm{Reg}_\theta(A^*)$$

De part la définition des θ-opérateurs et grâce à la Proposition 2.5.4, pour les semi-commutations nous avons au moins :

Proposition 2.5.9 *Soit* (A,θ) *une semi-commutation. Alors*

$$\mathcal{R}_\theta(A^*) \subset \mathrm{Reg}_\theta(A^*)$$

De la proposition précédente découle :

Proposition 2.5.10 (**[Mét86b]**) *Soit* (A,θ) *une semi-commutation. Si* L *est un langage régulier de* A^* *et si tous les facteurs itérants de* L *sont fortement connexes alors* $f_\theta(L)$ *est dans* $\mathrm{Reg}_\theta(A^*)$.

Pour présenter une caractérisation de $\mathcal{R}_\theta$, due à M. Clerbout, M. Latteux, Y. Roos et W. Zielonka, nous introduisons les notions d'éléments maximaux, d'éléments minimaux d'un langage et de forme normale lexicographique pour une semi-commutation donnée. Cette dernière notion a été introduite par Anisimov et Knuth dand [AK79] et à été utilisée par E.Ochmanski dans la preuve du Théorème 2.5.8.

Définition 2.5.11 *Soient* (A, θ) *une semi-commutation et* L *un langage de* A^* .

$$\mathrm{MAX}_\theta(L) = \{u \in L \mid \forall v \in L,\ u \in f_\theta(v) \Rightarrow v \in f_\theta(u)\}$$

$$\mathrm{MIN}_\theta(L) = \{u \in L \mid \forall v \in L,\ v \in f_\theta(u) \Rightarrow u \in f_\theta(v)\}$$

Définition 2.5.12 *Soient* (A, θ) *une semi-commutation et* u *un mot de* A^*

- $\mathrm{Lex}_\theta(u)$ *représente le plus petit élément pour l'ordre lexicographique de* $f_{\theta_s}(u)$.
- *Le langage* LEX_θ *est représente* $\mathrm{Lex}_\theta(A^*)$.
- *Pour un langage* L *de* A^* , $\mathrm{Lex}_\theta(L) = \{\mathrm{Lex}_\theta(u) \mid u \in L\} = L \cap \mathrm{LEX}_\theta$.

Nous présentons quelques propriétés de $\mathrm{MAX}_\theta(R)$ et de $\mathrm{MIN}_\theta(R)$ sur les langages θ-clos :

Lemme 2.5.13 *Soient* (A, θ) *une semi-commutation et* L *un langage* θ*-clos.*

$$\mathrm{MAX}_\theta(L) = f_{\theta_s}(\mathrm{MAX}_\theta(L)) = \mathrm{MIN}_{\theta^{-1}}(L)$$

$$L = f_\theta(\mathrm{MAX}_\theta(L)) = f_\theta(\mathrm{Lex}_\theta(\mathrm{MAX}_\theta(L)))$$

Remarquons que lorsque L est un langage θ-clos de A^*

$$\mathrm{MIN}_\theta(L) = L - \bigcup_{(a,b)\in\theta\cap\bar{\theta}^{-1}} A^* a f_{\theta_s}(I_a^* I_b^*) b A^*$$

où I_x représente l'ensemble des lettres indépendantes de x i.e $I_x = \{y \mid (x, y) \in \theta_s\}$.
Nous en concluons :

Lemme 2.5.14 *Soient* (A, θ) *une semi-commutation et* R *un langage de* $\mathrm{Reg}_\theta(A^*)$.
Le langage $\mathrm{MIN}_\theta(R)$ *est un langage régulier de* A^* .

En travaillant sur l'automate minimal déterministe d'un langage régulier R de $\mathrm{Reg}_\theta(A^*)$, un résultat similaire peut être obtenu pour $\mathrm{MAX}_\theta(R)$:

Lemme 2.5.15 ([HK89, CLRZ92]) *Soient* (A, θ) *une semi-commutation et* R *un langage de* $\mathrm{Reg}_\theta(A^*)$. *Le langage* $\mathrm{MAX}_\theta(R)$ *est un langage régulier de* A^* .

Nous donnons maintenant un lemme illustrant l'utilité de la forme normale lexicographique pour l'étude des langages de $\mathrm{Reg}_\theta(A^*)$. Tout d'abord remarquons que :

$$\mathrm{LEX}_\theta = A^* - \bigcup_{\{(a,b)\in\theta_s \mid a<b\}} A^* b I_a^* a A^*$$

où $I_x = \{y \mid (x, y) \in \theta_s\}$. Par conséquent :

Lemme 2.5.16 ([Och85]) *Soit* (A, θ) *une semi-commutation.*

- *Le langage* LEX_θ *est un langage régulier de* A^* .

- *Tout facteur d'un mot de* LEX_θ *est aussi un mot de* LEX_θ .

- *Si* u^* *est inclus dans* LEX_θ *alors* u *est un mot connexe pour* $\bar{\theta}$.

Maintenant nous pouvons énoncer la caractérisation de $\mathcal{R}_\theta$:

Théorème 2.5.17 **([CLRZ92])** *Soient* (A, θ) *une semi-commutation et* L *un langage* θ*-clos de* A^* . *Les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

1. $R \in \mathcal{R}_\theta(A^*)$

2. *Le langage* $K = \mathrm{Lex}_\theta(\mathrm{MAX}_\theta(R))$ *est dans* $\mathrm{Reg}(A^*)$ *et*
tout facteur itérant de K *est fortement connexe pour* $\bar{\theta}$.

3. *Le langage* $K = \mathrm{MAX}_\theta(R)$ *est dans* $\mathrm{Reg}(A^*)$ *et*
tout facteur itérant u *de* K , *tel que* $u^* \subset \mathrm{LEX}_\theta$, *est fortement connexe pour* $\bar{\theta}$.

Grâce à ce théorème M. Clerbout, M. Latteux, Y. Roos et W. Zielonka ont montré un résultat bien ennuyeux :

Théorème 2.5.18 **([CLRZ92])** *Soit* (A, θ) *une semi-commutation.*

$$\mathcal{R}_\theta(A^*) = \mathrm{Reg}_\theta(A^*) \text{ si et seulement si } \theta \text{ est une relation symétrique.}$$

preuve : Dans le cas symétrique (A, θ) est une commutation partielle et le Théorème 2.5.8 affirme l'égalité entre $\mathcal{R}_\theta(A^*)$ et $\mathrm{Reg}_\theta(A^*)$.
Si (A, θ) n'est pas symétrique, il existe deux lettres a et b telles que le couple (b, a) appartienne à $\theta \cap \bar{\theta}^{-1}$. Soit R le langage régulier $(ba)^*a(a+b)^*$. Clairement le langage R est θ-clos. Notons qu'ici Lex_θ ne nous est pas d'une grande utilité : $(a+b)^* \subset \mathrm{LEX}_\theta$. Le calcul de $\mathrm{MAX}_\theta(R)$ donne :

$$\mathrm{MAX}_\theta(R) = (ba)^*a(a^* + b + bb + bba + bbb^+a^*)$$

Le facteur itérant ba de $\mathrm{MAX}_\theta(R)$ appartient à LEX_θ mais n'est pas fortement connexe pour $\bar{\theta}$. □

3

Composition de deux semi-commutations

3.1 Présentation

Dans ce chapitre nous étudions la composition de deux fonctions de semi-commutation, il s'agit, étant donné (A,μ) et (A,λ) deux semi-commutations sur le même alphabet, de décider de l'existence d'une troisième semi-commutation (A,θ) telle que pour tout mot m de A^* on ait

$$f_\lambda \circ f_\mu(m) = f_\theta(m)$$

Tout d'abord nous présentons, à l'aide d'exemples, les deux cas de figures :

Exemple 3.1.1 *Soient $A = \{a,b\}$ et $\mu = \{(a,b)\}$, $\lambda = \{(b,a)\}$ deux semi-commutations sur A. La composition des fonctions de semi-commutation f_μ et f_λ est égale à une fonction de semi-commutation : la fonction de commutation totale.*
Prenons un mot m de A^* , nous avons $f_\mu(m) \cap b^*a^* = b^{|m|_b}a^{|m|_a}$. Il est facile de voir que pour tout mot b^pa^q nous avons $f_\lambda(b^pa^q) = \mathrm{com}(b^pa^q)$. Ainsi $f_\lambda(f_\mu(m) \cap b^*a^*) = \mathrm{com}(m)$, par conséquent $f_\lambda \circ f_\mu$ réalise la fonction de commutation totale.

A partir de l'exemple ci-dessus il apparaît que, sur un alphabet de deux lettres, la composition de deux fonctions de semi-commutation est toujours une fonction de semi-commutation, mais sur un alphabet de trois lettres...

Exemple 3.1.2 *Soient $A = \{a,b,c\}$ et $\mu = \{(a,c)\}$, $\lambda = \{(b,c)\}$ deux semi-commutations sur A. La composition des fonctions de semi-commutation f_μ et f_λ n'est pas une fonction de semi-commutation :*
Supposons qu'il existe (A,θ) telle que pour tout mot m on ait $f_\lambda \circ f_\mu(m) = f_\theta(m)$. Puisque $ca \in f_\lambda \circ f_\mu(ac)$, θ doit contenir le couple (a,c) et de façon similaire θ doit contenir (b,c) . Considérons le mot abc : comme $\{(a,c),(b,c)\} \subset \theta$, nous obtenons $cab \in f_\theta(abc)$; pour la composition nous avons $f_\mu(abc) = \{abc\}$ et donc $f_\lambda \circ f_\mu(abc) = f_\lambda(abc) = \{abc, acb\}$. Nous aboutissons à une contradiction : cab appartient à $f_\theta(abc)$ mais pas à $f_\lambda \circ f_\mu(abc)$.

Dans une première partie nous proposons une propriété sur la composition d'un nombre quelconque de fonctions de semi-commutation. A partir de cette propriété nous montrons que si $f_\lambda \circ f_\mu$ est une fonction de semi-commutation alors l'ordre de composition n'importe pas (les deux fonctions de semi-commutation commutent) et leur composée est égale à la fonction de semi-commutation associée à leur union : $(A, \mu \cup \lambda)$.

Dans un deuxième temps nous établissons la décidabilité de ce problème : il suffit de comparer l'image de chaque mot de permutation par la composition des deux fonctions à celle obtenue par la fonction associée à leur union. Nous donnons ensuite le principal résultat de ce chapitre: une caractérisation graphique du problème reposant sur les graphes de non commutation des semi-commutations (A, μ) et (A, λ^{-1}) .

Nous appliquons ensuite notre résultat aux commutations partielles et obtenons ainsi une nouvelle preuve d'un théorème concernant la vérification locale de synchronisation de deux traces, un résultat de V.Diekert et W.Vogler. Après avoir présenté la notion de synchronisation de semi-traces, nous généralisons le résultat de V.Diekert et W.Vogler au cas de deux semi-traces.

En appliquant notre critère de composition au cas particulier $f_\theta \circ f_{\theta^{-1}}$, nous établissons une caractérisation graphique décidable des semi-commutations confluentes. Ce dernier résultat a été obtenu indépendamment par V.Diekert, E.Ochmanski et K.Reinhardt. Nous présentons la complexité de cette caractérisation, obtenue par ces même chercheurs, et l'appliquons à la composition de deux fonctions de semi-commutation.

Nous présentons aussi une utilisation de ce critère de composition : une caractérisation des fonctions de semi-commutation préservant la famille des langages multi-compteurs, un travail de D.Gonzalez.

3.2 Résultats préliminaires

Lemme 3.2.1 *Soient les semi-commutations* $(A, \theta_1), (A, \theta_2), \ldots, (A, \theta_n)$.

Si $f_{\theta_n} \circ f_{\theta_{n-1}} \circ \cdots \circ f_{\theta_1}$ *est égale à une fonction de semi-commutation* f_θ *alors*

$$f_{\theta_n} \circ f_{\theta_{n-1}} \circ \cdots \circ f_{\theta_1} = f_{\theta_1} \circ f_{\theta_2} \circ \cdots \circ f_{\theta_n}$$

preuve : Puisque $f_\theta = f_{\theta_n} \circ f_{\theta_{n-1}} \circ \cdots \circ f_{\theta_1}$ nous devons avoir $(A, \theta) = (A, \bigcup_{i=1}^{i=n} \theta_i)$. A partir de là il est facile de voir que

$$f_{\theta_1} \circ f_{\theta_2} \circ \ldots \circ f_{\theta_n} \sqsubseteq f_\theta$$

Il nous faut montrer $f_\theta \sqsubseteq f_{\theta_1} \circ f_{\theta_2} \circ \ldots \circ f_{\theta_n}$. Pour cela considérons u et v deux mots de A^* tels que $u \xrightarrow[\theta]{*} v$. D'après le Lemme du Miroir nous avons $u \xrightarrow[\theta]{*} v \iff \widetilde{u} \xrightarrow[\theta^{-1}]{*} \widetilde{v}$. Comme

$$f_{\theta^{-1}} = f_{\theta_1^{-1}} \circ f_{\theta_2^{-1}} \circ \ldots \circ f_{\theta_n^{-1}}$$

nous avons

$$\widetilde{u} = w_n \xrightarrow[\theta_n^{-1}]{*} w_{n-1} \xrightarrow[\theta_{n-1}^{-1}]{*} \cdots \xrightarrow[\theta_1^{-1}]{*} w_0 = \widetilde{v}$$

Ainsi pour tout i de $[1,n]$ $w_i \xrightarrow[\theta_i^{-1}]{*} w_{i-1}$, et grâce au Lemme du Miroir, nous obtenons, pour tout i de $[1,n]$, $\widetilde{w}_i \xrightarrow[\theta_i]{*} \widetilde{w}_{i-1}$. Nous concluons :

$$u = \widetilde{w}_n \xrightarrow[\theta_n]{*} \widetilde{w}_{n-1} \xrightarrow[\theta_{n-1}]{*} \cdots \xrightarrow[\theta_1]{*} \widetilde{w}_0 = v$$

□

Malheureusement la réciproque du lemme précédent est fausse :

Exemple 3.2.2 *Soient $A = \{a,b,c\}$ et trois semi-commutations sur A :*
$\theta_1 = \{(a,c)\}$, $\theta_2 = \{(a,b)\}$ *et* $\theta_3 = \theta_1$.

Nous avons $f_{\theta_3} \circ f_{\theta_2} \circ f_{\theta_1} = f_{\theta_1} \circ f_{\theta_2} \circ f_{\theta_3}$. Par contre $f_{\theta_3} \circ f_{\theta_2} \circ f_{\theta_1}$ ne représente pas une fonction de semi-commutation :

$$f_{\theta_1} \circ f_{\theta_2} \circ f_{\theta_3}(abcb) = \{abcb, bacb, bcab\}$$

mais

$$(f_{\theta_1} \circ f_{\theta_2} \circ f_{\theta_3}) \circ (f_{\theta_1} \circ f_{\theta_2} \circ f_{\theta_3})(abcb) = \{abcb, bacb, bcab, bcba\}$$

Une fonction de semi-commutation est idempotente, la composition $f_{\theta_1} \circ f_{\theta_2} \circ f_{\theta_3}$ ne l'est pas.

Néanmoins, lorsqu'on se restreint à deux fonctions de semi-commutation, la réciproque du Lemme 3.2.1 est toujours vérifiée :

Proposition 3.2.3 *Soient (A,μ) et (A,λ) deux semi-commutations. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. $f_\lambda \circ f_\mu$ *est une fonction de semi-commutation.*
2. $f_\lambda \circ f_\mu = f_\mu \circ f_\lambda$
3. $f_\mu \circ f_\lambda \sqsubseteq f_\lambda \circ f_\mu$
4. $f_\lambda \circ f_\mu = f_{\mu \cup \lambda}$

preuve : De façon évidente nous avons $(2) \Rightarrow (3)$ et aussi $(4) \Rightarrow (1)$. Le Lemme 3.2.1 nous assure que $(1) \Rightarrow (2)$. Reste à démontrer $(3) \Rightarrow (4)$:

$$(f_\lambda \circ f_\mu \sqsubset f_\mu \circ f_\lambda) \Rightarrow (f_\lambda \circ f_\mu = f_{\mu \cup \lambda})$$

Nous avons déjà remarqué que $f_\lambda \circ f_\mu \sqsubset f_{\mu \cup \lambda}$. Pour l'autre inclusion considérons deux mots u et v de A^* tels que $v \in f_{\mu \cup \lambda}(u)$. Nous allons faire un raisonnement par récurrence sur la distance entre u et v : $d(u,v)$.

Si $d(u,v) = 0$, alors $u = v$ et, évidemment, $v \in f_\lambda \circ f_\mu(u)$.

Si $d(u,v) > 0$ alors il existe un mot w tel que $u \xrightarrow[\mu \cup \lambda]{} w$ avec $v \in f_{\mu \cup \lambda}(w)$ et $d(w,v) = d(u,v) - 1$. L'hypothèse de récurrence affirme $v \in f_\lambda \circ f_\mu(w)$. Comme $u \xrightarrow[\mu \cup \lambda]{} w$, nous avons $w \in f_\mu(u)$ ou $w \in f_\lambda(u)$:

- $w \in f_\mu(u)$: $v \in f_\lambda \circ f_\mu \circ f_\mu(u) = f_\lambda \circ f_\mu(u)$.
- $w \in f_\lambda(u)$: $v \in f_\lambda \circ f_\mu \circ f_\lambda(u)$. Comme $f_\mu \circ f_\lambda \sqsubset f_\lambda \circ f_\mu$, nous obtenons : $f_\lambda \circ f_\mu \circ f_\lambda(u) \subset f_\lambda \circ f_\mu(u)$, d'où $v \in f_\lambda \circ f_\mu(u)$.

□

Désormais, dans ce chapitre nous utiliserons l'alphabet A et les semi-commutations (A, μ) et (A, λ) .

Grâce à la Proposition 3.2.3 nous savons que la composition de deux fonctions de semi-commutation $f_\lambda \circ f_\mu$ est une fonction de semi-commutation si et seulement si il n'existe pas deux mots u et v de A^* tels que $v \notin f_\lambda \circ f_\mu(u)$ et $v \in f_{\mu \cup \lambda}(u)$. Si de tels mots existent nous dirons que le couple (u, v) satisfait la propriété P.

Le lemme suivant montre que s'il existe un couple de mots vérifiant la propriété P alors il existe un couple de mots (u, v) satisfaisant la propriété P et tel que la dérivation de u en v utilise au moins une règle de λ et une seule règle de $\mu \cap \bar{\lambda}$.

Lemme 3.2.4 *S'il existe un couple de mots de permutation (u, v) vérifiant la propriété P alors il existe un couple de mots (u', v') tel que :*

- *Le couple (u', v') satisfait la propriété P.*
- $u' \xrightarrow[\bar{\mu} \cap \lambda]{} w_1 \xrightarrow[\mu]{*} w_2 \xrightarrow[\mu \cap \bar{\lambda}]{} v'$ *avec* $d(w_1, v') = d(u', v') - 1 = d(w_1, w_2) + 1$.
- u' *appartient à* $\mathrm{com}(u)$.

preuve : Le couple (u, v) vérifie la propriété P, écrivons une dérivation de u dans v par $\mu \cup \lambda$:

$$u = u_0 \xrightarrow[\mu \cup \lambda]{} u_1 \xrightarrow[\mu \cup \lambda]{} \dots \xrightarrow[\mu \cup \lambda]{} u_i \xrightarrow[\mu \cup \lambda]{} \dots \xrightarrow[\mu \cup \lambda]{} u_{n-1} \xrightarrow[\mu \cup \lambda]{} u_n = v$$

Soit j le plus grand indice tel que le couple (u_j, u_n) satisfait la propriété P. Il est évident que $j \neq n$. Supposons que $u_j \xrightarrow[\mu]{} u_{j+1}$. D'après la définition de j nous savons que le couple (u_{j+1}, u_n) ne vérifie pas la propriété P et c'est pourquoi nous avons $u_{j+1} \xrightarrow[\mu]{*} m \xrightarrow[\lambda]{*} u_n$; ceci nous mène à une contradiction : $u_j \xrightarrow[\mu]{*} m \xrightarrow[\lambda]{*} u_n$ donc (u_j, u_n) ne satisfait pas la propriété P. Ainsi il possible de trouver une dérivation

$$u_j = w_0 \xrightarrow[\bar{\mu} \cap \lambda]{} w_1 \xrightarrow[\mu]{} \dots \xrightarrow[\mu]{} w_l \xrightarrow[\lambda]{} \dots \xrightarrow[\lambda]{} w_{k-1} \xrightarrow[\lambda]{} w_k = u_n$$

Avec pour tout indice α compris entre 2 et l $d(w_1, w_\alpha) = d(w_1, w_{\alpha-1}) + 1$.

Maintenant considérons h le plus petit indice tel que le couple (w_0, w_h) satisfait la propriété P. Nous devons avoir $h \neq 0$. La définition de h impose au couple (w_0, w_{h-1}) de ne pas satisfaire la propriété P, d'où $w_0 \xrightarrow[\mu]{*} m' \xrightarrow[\lambda]{*} w_{h-1}$. Comme le couple (w_0, w_h) satisfait la propriété P il est impossible d'avoir $w_{h-1} \xrightarrow[\lambda]{} w_h$ (sinon $w_0 \xrightarrow[\mu]{*} m' \xrightarrow[\lambda]{*} w_h$) d'où $w_{h-1} \xrightarrow[\mu \cap \bar{\lambda}]{} w_h$ et par conséquent $h \leq l$.

Nous avons montré qu'il existe un couple de mots (w_0, w_h) vérifiant la propriété P et tel que :

$$w_0 \xrightarrow[\bar{\mu}\cap\lambda]{} w_1 \xrightarrow[\mu]{*} w_{h-1} \xrightarrow[\mu\cap\bar{\lambda}]{} w_h$$

Supposons maintenant que $d(w_1, w_h) \neq d(w_0, w_h) - 1$: cela signifie $d(w_1, w_h) = d(w_0, w_h) + 1$ et donc qu'il existe un couple de lettres (a, b) tel que $\Pi_{ab}(w_0) = \Pi_{ab}(w_h) \neq \Pi_{ab}(w_1)$, autrement dit la première commutation est inutile ; clairement dans ce cas nous avons $w_0 \xrightarrow[\mu]{*} w_h$ ce qui est impossible.

D'autre part pour tout indice α compris entre 2 et l nous avons $d(w_1, w_\alpha) = d(w_1, w_{\alpha-1}) + 1$ d'où $d(w_1, w_h) = d(w_0, w_h) - 1 = d(w_1, w_{h-1}) + 1$. □

3.3 Une caractérisation décidable

Nous allons voir que s'il existe un couple de mots (u, v) vérifiant la propriété P alors il existe un couple de mots de permutation qui la vérifie. D'abord nous introduisons la notion de *graphe des occurrences* pour les semi-commutations, un outil défini par A.Mazurkiewicz [Maz87] dans le cadre des commutations partielles et utilisé par C.Duboc [Dub86] afin de caractériser les familles quasi-reconstructibles qui sont reconstructibles :

Définition 3.3.1 *Soient (A, θ) une semi-commutation et u un mot de A^* . Le* graphe des occurrences *de u pour (A, θ) , noté $\gamma(u, \theta)$, est le graphe orienté dont les sommets sont les paires (a, i) avec $a \in A$ et $1 \leq i \leq |u|_a$ et dont les arcs sont $(a, i) \rightarrow (b, j)$ si $(a, b) \in \bar{\theta}$ et la $i^{\text{ème}}$ occurrence de a précède la $j^{\text{ème}}$ occurrence de b dans u .*

Le propos du lemme suivant est une condition nécessaire et suffisante pour qu'un mot de permutation ne soit pas dans l'image d'un autre mot par la composition $f_\lambda \circ f_\mu$. Nous le présentons d'abord sur un exemple.

Exemple 3.3.2 *Soient $A = \{a, b, c\}$ et $\mu = \{(a, c)\}$, $\lambda = \{(b, c)\}$ deux semi-commutations sur A. Soient $u = bac$ et $v = cba$; nous avons :*

$$\gamma(u, \mu) = \{b \rightarrow a \ , \ b \rightarrow c\} \qquad et \qquad \gamma(v, \lambda^{-1}) = \{b \rightarrow a \ , \ c \rightarrow a\}$$

Il n'existe pas de cycle dans le graphe $\gamma(u, \mu) \cup \gamma(v, \lambda^{-1})$, le mot bca respecte l'ordre imposé par $\gamma(u, \mu) \cup \gamma(v, \lambda^{-1})$, nous avons $bac \xrightarrow[\mu]{} bca \xrightarrow[\lambda]{} cba$.

Soient $u = abc$ et $v = cab$ on a :

$$\gamma(u, \mu) = \{a \rightarrow b \ , \ b \rightarrow c\} \qquad et \qquad \gamma(v, \lambda^{-1}) = \{c \rightarrow a \ , \ a \rightarrow b\}$$

Le cycle $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$ est dans le graphe $\gamma(u, \mu) \cup \gamma(v, \lambda^{-1})$, ainsi $f_\mu(u) \cap f_{\lambda^{-1}}(v) = \emptyset$.

Lemme 3.3.3 *Soient u et v deux mots de A^* . Le mot v appartient à $f_\lambda \circ f_\mu(u)$ si et seulement si le graphe $\gamma(u, \mu) \cup \gamma(v, \lambda^{-1})$ est sans cycle*[1]*.*

[1] la démonstration de ce lemme est fortement inspiré de la preuve de la Proposition 2.2.2 de [Dub86]

preuve : Posons $\Gamma = \gamma(u,\mu) \cup \gamma(v,\lambda^{-1})$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Nous savons que v appartient à $f_\lambda \circ f_\mu(u)$. Il existe donc un mot m de A^* tel qu'il appartienne à $f_\mu(u) \cap f_{\lambda^{-1}}(v)$. Posons $m = x_0 x_1 \ldots x_n$.

Supposons que Γ contienne un cycle. Soit i le plus petit entier tel que x_i appartienne à un cycle de Γ . Il existe une lettre x_j , appartenant au même cycle de Γ que x_i , tel que $(x_j, x_i) \in \Gamma$. D'après la définition de Γ , le couple (x_j, x_i) appartient à $\gamma(u,\mu)$ ou à $\gamma(v,\lambda^{-1})$. Alors d'après le Lemme de Projection nous devons avoir $\Pi_{x_i x_j}(m) = x_j x_i$, ceci contredit notre hypothèse : x_i n'est pas la première lettre appartenant à un cycle de Γ .

$\boxed{\Longleftarrow}$ Comme Γ est sans cycle, Γ définit un ordre partiel sur l'ensemble des sommets : $(a,i) \rightarrow (b,j) \Rightarrow (a,i) > (b,j)$. En étendant cet ordre partiel afin obtenir un ordre total $(y_1,i_1) > (y_2,i_2) > \cdots > (y_n,i_n)$ on obtient un mot $m = y_1 y_2 \ldots y_n$ respectant à la fois les contraintes imposées par $f_\mu(u)$ et par $f_{\lambda^{-1}}(v)$. □

En considérant un plus petit cycle de Γ nous obtenons :

Lemme 3.3.4 *Il existe un couple de mots de A^* vérifiant la propriété P si et seulement si il existe un couple de mots de permutation de A^* vérifiant la propriété P.*

preuve : Bien entendu, seule la partie *si* est à démontrer : supposons qu'il existe un couple de mots (u,v) ne vérifiant pas la propriété P. Posons $\Gamma = \gamma(u,\mu) \cup \gamma(v,\lambda^{-1})$.

Grâce au Lemme 3.3.3, nous savons que Γ contient un cycle. Soit C un plus petit cycle de Γ . Comme C est un plus petit cycle, il est facile de vérifier que

$$\text{si } C = \{((y_0,i_0),(y_1,i_1))\ ,\ ((y_1,i_1),(y_2,i_2))\ ,\ldots,\ ((y_n,i_n),(y_0,i_0))\}$$

tous les (y_k,i_k) sont des sommets distincts deux à deux et, de plus, si l'arc $((y_j,i_j),(y_k,i_k))$ appartient à Γ alors il appartient aussi à C .

Supposons maintenant que (a,p) et (a,q) , deux occurrences d'une même lettre, apparaissent dans le cycle. Posons $p > q$. Comme (a,p) appartient au cycle C il existe un autre sommet x tel que $((a,p),x) \in C$ et alors :

- Soit $((a,p),x) \in \gamma(u,\mu)$ et comme $p > q$ nous avons, d'après la définition de $\gamma(u,\mu)$, $((a,q),x)$ doit appartenir à Γ .

- Soit $((a,p),x) \in \gamma(v,\lambda^{-1})$ et comme $p > q$ nous avons, d'après la définition de $\gamma(v,\lambda^{-1})$, $((a,q),x)$ doit appartenir à Γ .

C'est pourquoi l'arc $((a,q),x)$ est dans Γ et maintenant, puisque (a,q) et x sont tous deux des sommets du cycle C et par minimalité de C, $((a,q),x)$ doit aussi être un arc du cycle C . Mais, d'après la définition de $\gamma(u,\mu)$, l'arc $((a,q),(a,p))$ doit appartenir à C d'où $x = (a,p)$. Ainsi l'arc $((a,p),(a,p))$ appartient à C et donc à Γ mais ceci entre en contradiction avec la définition des graphes des occurrences.

Ainsi le cycle $C = \{((y_0,i_0),(y_1,i_1))\ ,\ ((y_1,i_1),(y_2,i_2))\ ,\dots,\ ((y_n,i_n),(y_0,i_0))\}$ ne contient pas deux occurrences d'une même lettre.

Considérons les mots u' et v' où l'on a effacé les occurrences des lettres n'appartenant pas à C , nous allons montrer grâce au Lemme de Numérotation et au Lemme de Projection que le couple (u',v') satisfait la propriété P :

Puisque $v \in f_{\mu\cup\lambda}(u)$ nous avons $\mathrm{num}(v) \in f_{\mu_{\mathrm{num}}\cup\lambda_{\mathrm{num}}}(\mathrm{num}(u))$ et donc

$$\Pi_{\{x/\exists y\ (x,y)\in C\}}(\mathrm{num}(v)) \in f_{\mu_{\mathrm{num}}\cup\lambda_{\mathrm{num}}}(\Pi_{\{x|\exists y\ (x,y)\in C\}}(\mathrm{num}(u)))\ .$$

Posons $u' = \mathrm{den}(\Pi_{\{x|\exists y\ (x,y)\in C\}}(\mathrm{num}(u)))$ et $v' = \mathrm{den}(\Pi_{\{x/\exists y\ (x,y)\in C\}}(\mathrm{num}(v)))$.

Nous avons d'une part $v' \in f_{\mu\cup\lambda}(u')$, et d'autre part le graphe $\gamma(u',\mu) \cup \gamma(v',\lambda^{-1})$ est isomorphe à C : le couple de mots de permutation (u',v') satisfait la propriété P. □

Grâce au Lemme 3.3.4, nous pouvons décider si la composition de deux fonctions de semi-commutation est une fonction de semi-commutation : il suffit de comparer l'image de chaque mot de permutation obtenue par la composition des deux fonctions à celle obtenue par la fonction associée à leur union. Le théorème suivant propose une autre caractérisation plus précise : elle repose sur les graphes de commutation de (A,μ) et de (A,λ) et sur les graphes de non commutation de (A,μ) et de (A,λ^{-1}) :

Théorème 3.3.5 *Soient deux semi-commutations (A,μ) et (A,λ) . La composition des deux fonctions de semi-commutation $f_\lambda \circ f_\mu$ est une fonction de semi-commutation si et seulement si il n'existe pas de cycle $\{(x_0,x_1),(x_1,x_2),\dots,(x_i,x_{i+1}),\dots,(x_n,x_0)\}$ inclus dans $\bar\mu \cup \bar\lambda^{-1}$ vérifiant :*

- $x_p = x_q \Leftrightarrow p = q$.
- $(x_0,x_n) \in \mu \cap \bar\lambda$.
- $(x_i,x_{i+1}) \in \lambda \cap \bar\mu$.
- $\{x_0,\dots,x_i\} \times \{x_{i+1},\dots,x_n\} \subset \mu \cup \lambda$.

preuve :

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons qu'il existe un cycle $\{(x_0,x_1),(x_1,x_2),\dots,(x_i,x_{i+1}),\dots,(x_n,x_0)\}$ inclus dans $\bar\mu \cup \bar\lambda^{-1}$ et tel que $x_p = x_q \Leftrightarrow p = q$, $(x_0,x_n) \in \mu\cap\bar\lambda$, $(x_i,x_{i+1}) \in \lambda\cap\bar\mu$ et $\{x_0,\dots,x_i\} \times \{x_{i+1},\dots,x_n\} \subset \mu\cup\lambda$.
Posons $w_1 = x_0x_1\dots x_i$ et $w_2 = x_{i+1}x_{i+2}\dots x_n$.
On vérifie immédiatement que $w_1w_2 \xrightarrow[\mu\cup\lambda]{*} w_2w_1$. Considérons l'union des graphes des occurrences (w_1w_2 étant des mots de permutation, nous allégeons la notation en oubliant le numéro des occurrences) $\Gamma = \gamma(w_1w_2,\mu) \cup \gamma(w_2w_1,\lambda^{-1})$:

Pour tout couple (x_k,x_{k+1}) avec $k \neq i$ nous avons :

- soit $(x_k,x_{k+1}) \in \gamma(w_1w_2,\mu)$ lorsque $(x_k,x_{k+1}) \in \bar\mu$
- soit $(x_k,x_{k+1}) \in \gamma(w_2w_1,\lambda^{-1})$ lorsque $(x_k,x_{k+1}) \in \bar\lambda^{-1}$

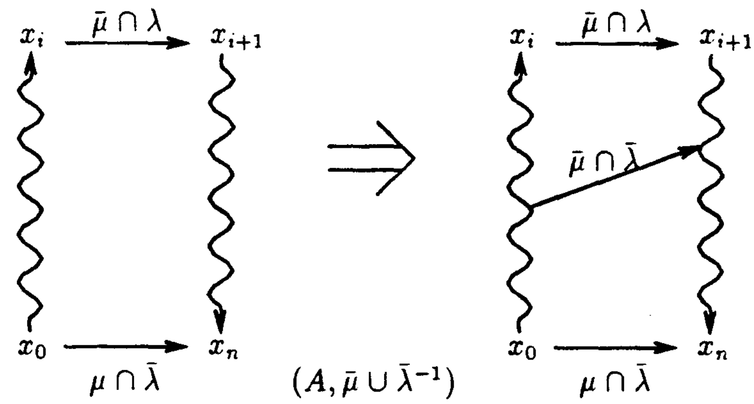


Figure 3.1 : Graphe de la caractérisation

Ainsi tout couple (x_k, x_{k+1}) , avec $k \neq i$, appartient à Γ . Nous avons aussi :

- $(x_0, x_n) \in \mu \cap \bar\lambda$ et $\Pi_{x_0 x_n}(w_2 w_1) = x_n x_0$ d'où $(x_n, x_0) \in \Gamma$
- $(x_i, x_{i+1}) \in \lambda \cap \bar\mu$ et $\Pi_{x_i x_{i+1}}(w_1 w_2) = x_i x_{i+1}$ donc $(x_i, x_{i+1}) \in \Gamma$

Γ contient un cycle et, d'après le Lemme 3.3.3, $w_2 w_1 \notin f_\lambda \circ f_\mu(w_1 w_2)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que la composition $f_\lambda \circ f_\mu$ n'est pas une fonction de semi-commutation.

Grâce au Lemme 3.3.4 nous pouvons trouver un couple (u', v') de mots de permutation de longueurs minimales vérifiant la propriété P. D'après le Lemme 3.2.4 nous savons qu'il existe un couple de mots (u, v) tel que :

- le couple (u, v) satisfait la propriété P .
- $u \underset{\bar\mu \cap \lambda}{\longrightarrow} u_1 \overset{*}{\underset{\mu}{\longrightarrow}} v_1 \underset{\mu \cap \bar\lambda}{\longrightarrow} v$ avec $d(u_1, v) = d(u, v) - 1 = d(u_1, v_1) + 1$.
- u appartient à $\mathrm{com}(u')$.

Comme le couple (u, v) satisfait la propriété P nous savons, grâce au Lemme 3.3.3, qu'il existe un cycle dans $\Gamma = \gamma(u, \mu) \cup \gamma(v, \lambda^{-1})$. Puisque (u, v) vérifie la propriété P et que u appartient à $\mathrm{com}(u')$, (u, v) est un couple de mots de longueurs minimales vérifiant la propriété P.

Remarquons que Γ contient un seul cycle et que toutes les lettres de u y apparaissent : autrement la projection des mots u et v sur le plus petit cycle nous donnerait un couple de mots plus courts satisfaisant la propriété P (Lemme 3.3.3), ce qui est impossible.

C'est pourquoi $\Gamma = \{(x_0, x_1), \ldots, (x_i, x_{i+1}), \ldots, (x_n, x_0)\}$ et u appartient à $\mathrm{com}(x_0 x_1 \ldots x_n)$.

Revenons à la dérivation $u \underset{\bar\mu \cap \lambda}{\longrightarrow} u_1 \overset{*}{\underset{\mu}{\longrightarrow}} v_1 \underset{\mu \cap \bar\lambda}{\longrightarrow} v$: le mot v est obtenu à partir de v_1 en utilisant une règle de $\mu \cap \bar\lambda$; appelons a et b les deux lettres qui commutent en imposant

$\Pi_{\{a,b\}}(v) = ba$. Le couple (b,a) appartient à $\bar{\lambda}^{-1}$ c'est pourquoi (b,a) est dans $\gamma(v,\lambda^{-1})$. Nous pouvons poser $x_0 = a$ et $x_n = b$.

De l'autre côté de la dérivation, u_1 est obtenu à partir de u en utilisant une règle de $\lambda \cap \bar{\mu}$, appelons x_i et x_j les deux lettres qui commutent en imposant $\Pi_{\{x_i,x_j\}}(u) = x_i x_j$. Le couple (x_i, x_j) appartient à $\bar{\mu}$ ce qui entraîne l'appartenance du couple (x_i,x_j) à $\gamma(u,\mu)$ et, par conséquent, à Γ . Il est impossible d'avoir $\{i,j\} = \{0,n\}$ car $d(u_1,v) = d(u,v) - 1 = d(u_1,v_1) + 1$ ce qui impose $\Pi_{x_ix_j}(u_1) = \Pi_{x_ix_j}(v_1) = \Pi_{x_ix_j}(v)$. Ainsi nous pouvons poser $j = i+1$ et nous savons que $n > 1$.

Pour résumer : $\Gamma = \{(x_0,x_1),\ldots,(x_i,x_{i+1}),\ldots,(x_n,x_0)\}$ est inclus dans $\bar{\mu} \cup \bar{\lambda}^{-1}$ avec (x_0,x_n) dans $\mu \cap \bar{\lambda}$ et (x_i,x_{i+1}) dans $\lambda \cup \bar{\mu}$. Nous allons maintenant montrer que $\{x_0,\ldots,x_i\} \times \{x_{i+1},\ldots,x_n\}$ est inclus dans $\mu \cup \lambda$:

D'une part nous avons $u_1 \xrightarrow[\mu]{*} v$: pour tout couple de lettres (x,y) de $\gamma(u_1,\mu)$ nous avons $\Pi_{xy}(v) = xy$ et, d'autre part, pour tout couple (x,y) de $\gamma(v,\lambda^{-1})$ nous avons $\Pi_{xy}(v) = xy$. Ainsi pour tout couple (x,y) de $\gamma(v,\lambda^{-1}) \cup \gamma(u_1,\mu)$ nous avons $\Pi_{xy}(v) = xy$. Il est facile de constater que $\Gamma \setminus \{(x_i,x_{i+1})\}$ est inclus dans $\gamma(v,\lambda^{-1}) \cup \gamma(u_1,\mu)$, c'est pourquoi nous devons avoir $v = x_{i+1}\ldots x_n x_0 \ldots x_i$.

Pour conclure, supposons qu'il existe deux lettres x_h de $\{x_0,\ldots,x_i\}$ et x_j de $\{x_{i+1},\ldots,x_i\}$ telles que $(h,j) \neq (0,n)$ et (x_h,x_j) appartienne à $\bar{\lambda}$: le couple (x_j,x_h) est alors dans $\bar{\lambda}^{-1}$ et comme $\Pi_{x_hx_j}(v) = x_jx_h$ le couple (x_j,x_h) est aussi dans $\gamma(v,\lambda^{-1})$. Comme $(x_h,x_j) \neq (x_0,x_n)$, Γ contient au moins deux cycles distincts, ce qui est impossible. De plus nous savons que (x_0,x_n) est dans μ et, ainsi, $\{x_0,\ldots,x_i\} \times \{x_{i+1},\ldots,x_n\}$ est inclus dans $\mu \cup \lambda$. □

3.4 Applications

3.4.1 Synchronisation de deux semi-traces

Comme une commutation partielle est une semi-commutation symétrique, nous pouvons utiliser le théorème 3.3.5 pour décider si la composition de deux fonctions de commutation partielle est une fonction de commutation partielle. Nous obtenons :

Corollaire 3.4.1 *Soient (A,μ) et (A,λ) deux commutations partielles. La composition des deux fonctions de commutation partielle $f_\lambda \circ f_\mu$ est une fonction de commutation partielle si et seulement si il n'existe pas un sous-alphabet B de A tel que le graphe $(B,\overline{\mu \cap \lambda})$ soit un cycle n'appartenant pas à $(B,\bar{\mu})$, ni à $(B,\bar{\lambda})$.*

En fait ce résultat n'est pas vraiment nouveau : il apparaît sous une forme plus générale dans [DV89]. Afin de présenter leur résultat nous introduisons la notion de synchronisation de traces introduite par A. Mazurkiewicz [Maz87] et généralisée aux semi-traces par K. Reinhardt dans [Rei92]. La synchronisation de semi-traces permet de définir de façon modulaire un système parallèle à l'aide de plusieurs sous-systèmes. L'obligation d'exécuter les actions de même nom au même instant assure la synchronisation des sous-systèmes. (Voir [JM90] pour une application pratique.)

Définition 3.4.2 *Soient les alphabets A et B tels que $A = A' \cup C$, $B = B' \cup C$ et $A' \cap B' = \emptyset$. La* synchronisation *d'un couple de semi-traces $([t_1\rangle_\mu, [t_2\rangle_\lambda)$ de $\mathbb{M}(A,\mu) \times \mathbb{M}(B,\lambda)$ est notée $[t_1\rangle_\mu \parallel [t_2\rangle_\lambda$.*

$$[t_1\rangle_\mu \parallel [t_2\rangle_\lambda = \{t \mid t \in f_\mu(t_1) \sqcap f_\lambda(t_2) \text{ et } \forall x \in C |t_1|_x = |t_2|_x\} .$$

Nous dirons que le couple $([t_1\rangle_\mu , [t_2\rangle_\lambda)$ est synchronisable *si $[t_1\rangle_\mu \parallel [t_2\rangle_\lambda$ n'est pas vide.*

Exemple 3.4.3 *Soient $A = \{a,b,c\}$ et les deux semi-commutations (A,μ) et (A,λ) avec $\lambda = \{(b,c)\}$ et $\mu = \{(a,c)\}$.*

Le couple $([acb\rangle_\mu , [cab\rangle_\lambda)$ est synchronisable : $[acb\rangle_\mu \parallel [cab\rangle_\lambda = cab$.

Le couple $([abc\rangle_\mu, [cab\rangle_\lambda)$ n'est pas synchronisable : nous avons $f_\mu(abc) = abc$, $f_\lambda(cab) = cab$ et $abc \sqcap bac = \emptyset$.

Décider si deux semi-traces sont synchronisables nécessite une vérification globale au niveau des semi-traces : vérifier la synchronisation sur les paires de lettres communes aux deux alphabets des deux semi-traces ne suffit pas. Par exemple :

Exemple 3.4.4 *Reprenons l'exemple précédent - $A = \{a,b,c\}$, $(A,\mu) = (A,\{(a,c)\})$ et $(A,\lambda) = (A,\{(b,c)\})$. Le couple $([abc\rangle_\mu, [cab\rangle_\lambda)$ n'est pas synchronisable mais nous avons $[ab\rangle_\mu \parallel [ab\rangle_\lambda = ab$, $[bc\rangle_\mu \parallel [cb\rangle_\lambda = bc$ et $[ac\rangle_\mu \parallel [ca\rangle_\lambda = ca$.*

Pour vérifier si deux semi-traces sont synchronisables on doit avoir recours au graphe d'occurrences des deux semi-traces et vérifier qu'il ne contient pas de cycle. V.Diekert et W.Vogler ont défini la notion de vérification locale de synchronisation, celle-ci autorise, *sous certaines conditions*, de ne vérifier la synchronisation que sur les paires de lettres communes aux deux alphabets.

Définition 3.4.5 *Soient $(A_1,\mu),(A_2,\lambda)$ deux semi-commutations.*

Un couple de semi-traces $([t_1\rangle_\mu, [t_2\rangle_\lambda)$ de $A_1^* \times A_2^*$ est localement synchronisable *si et seulement si pour tout $a,b \in A_1 \cap A_2$ le couple $([\Pi_{ab}(t_1)\rangle_\mu, [\Pi_{ab}(t_2)\rangle_\lambda)$ est synchronisable.*

Dans le cadre des commutations partielles V.Diekert et W.Vogler ont montré[2] :

Théorème 3.4.6 ([DV89, Die90]) *Soient $(A_1,\mu),(A_2,\lambda)$ des commutations partielles et (A,θ) une commutation partielle défini par son graphe de non commutation : $(A,\bar{\theta}) = (A_1 \cup A_2, \bar{\mu} \cup \bar{\lambda})$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *Tout couple de traces localement synchronisable est synchronisable.*
2. *Tout cycle sans corde C de $(A,\bar{\theta})$ appartient à $(A_1,\bar{\mu})$ ou à $(A_2,\bar{\lambda})$.*

On retrouve bien notre corollaire... et dans le cas de deux semi-commutations nous obtenons :

[2] La formulation originale de ce théorème porte sur un nombre quelconque de traces.

Corollaire 3.4.7 *Soient $A = A' \cup C$ et $B = B' \cup C$ avec $A' \cap B' = \emptyset$. Soient (A,μ) et (B,λ) des semi-commutations, $X = A \cup B$, et les semi-commutations (X,μ_+) où $\bar{\mu}_+ = X \times X \setminus (\bar{\mu} \cup \{(x,x) \mid x \in X\})$ et (X,λ_+) où $\bar{\lambda}_+ = X \times X \setminus (\bar{\lambda} \cup \{(x,x) \mid x \in X\})$.*

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. *Tout couple de $\mathbb{M}(A,\mu) \times \mathbb{M}(B,\lambda)$ localement synchronisable est synchronisable.*

2. *La composition $f_{\lambda_+^{-1}} \circ f_{\mu_+}$ est une fonction de semi-commutation.*

preuve : Posons $(X,\theta) = (X, \lambda_+^{-1} \cup \mu_+)$. Supposons que $f_{\lambda_+^{-1}} \circ f_{\mu_+} = f_\theta$.

Soit $([t_1\rangle_\mu, [t_2\rangle_\lambda)$ un couple de $\mathbb{M}(A,\mu) \times \mathbb{M}(B,\lambda)$. Si $([t_1\rangle_\mu, [t_2\rangle_\lambda)$ est localement synchronisable, on a $\Pi_C(t_1) \xrightarrow[\theta]{*} \Pi_C(t_2)$ et aussi $t_1\Pi_{B'}(t_2) \xrightarrow[\theta]{*} t_2\Pi_{A'}(t_1)$.
Comme $f_{\lambda_+^{-1}} \circ f_{\mu_+} = f_\theta$ il existe un mot t tel que $t_1\Pi_{B'}(t_2) \xrightarrow[\mu_+]{*} t \xrightarrow[\lambda_+^{-1}]{*} t_2\Pi_{A'}(t_1)$: t synchronise $([t_1\rangle_\mu, [t_2\rangle_\lambda)$.

Si $f_{\lambda_+^{-1}} \circ f_{\mu_+}$ n'est pas une fonction de semi-commutation, alors il existe un mot de permutation m_1m_2 de X^* tel que $m_2m_1 \in f_\theta(m_1m_2)$ et $m_2m_1 \notin f_{\lambda_+^{-1}} \circ f_{\mu_+}(m_1m_2)$. Soient $t_1 = \Pi_A(m_1m_2)$ et $t_2 = \Pi_B(m_2m_1)$. Puisque $m_2m_1 \in f_\theta(m_1m_2)$, $([t_1\rangle_\mu, [t_2\rangle_\lambda)$ est localement synchronisable. D'autre part comme $f_{\mu_+}(t_1\Pi_{B'}(t_2)) = f_{\mu_+}(m_1m_2)$ et $f_{\lambda_+^{-1}}(t_2\Pi_{A'}(m_2m_1)) = f_{\lambda_+^{-1}}(m_2m_1)$, nous concluons qu'il n'existe pas de mot t tel que $m_1m_2 \xrightarrow[\mu_+]{*} t \xrightarrow[\lambda_+^{-1}]{*} m_2m_1$. □

Remarque : Ce résultat est aussi présenté par K. Reinhardt dans [Rei92] où l'auteur étudie plus particulièrement la synchronisation d'un nombre quelconque de semi-traces. Contrairement aux traces, la synchronisation de deux semi-traces n'est pas toujours une semi-trace : Soient $(A,\mu) = (A, \{(a,b)\})$ et $(A,\lambda) = (A, \{(b,a)\})$ nous avons $[ab\rangle_\mu \parallel [ba\rangle_\lambda = \{ab, ba\}$, cet ensemble ne représente pas une et une seule semi-trace de $(A, \mu \cap \lambda)$.
K.Reinhardt a donné un critère, reposant sur le graphe des occurrences, pour décider si la synchronisation d'un nombre arbitraire de semi-traces est encore une semi-trace (non vide).

3.4.2 Caractérisation des semi-commutations confluentes

La confluence d'un système de réécriture est une propriété généralement indécidable, en particulier P. Narendram et F.Otto [NO88] ont montré que la confluence d'un système de réécriture de traces, fini, noethérien et de longueur décroissante est indécidable. Ici nous donnons un critère pour décider la confluence d'une semi-commutation généralisant, ainsi, les travaux de Y.Métivier et E. Ochmanski [MO87] sur ce thème : *une semi-commutation antisymétrique est confluente si et seulement si elle est transitive.* Le résultat que nous présentons a aussi été obtenu, de façon indépendante, par V. Diekert, E. Ochmanski et K. Reinhardt dans [DOR91], nous reprenons ici leur formulation. Commençons par un exemple :

Exemple 3.4.8 *Soit (A,θ) défini par le graphe de non commutation suivant :*

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] & b \arrow[d] \\ d \arrow[u] & c \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Cette semi-commutation n'est pas confluente ;

$$\begin{tikzcd} & acbd \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dl] & cabd \arrow[r, leftrightarrow] & cadb \arrow[dr] & \\ abcd & & & & cdab \end{tikzcd} \qquad \textit{dérivations dans } \theta$$

Les mots abcd et cdab ne peuvent pas être réécrits à l'aide de θ.

Lemme 3.4.9 *Un système de semi-commutation (A, θ) est confluent si et seulement si $f_\theta \circ f_{\theta^{-1}}$ est une fonction de semi-commutation.*

preuve : Voir Fig. 3.2

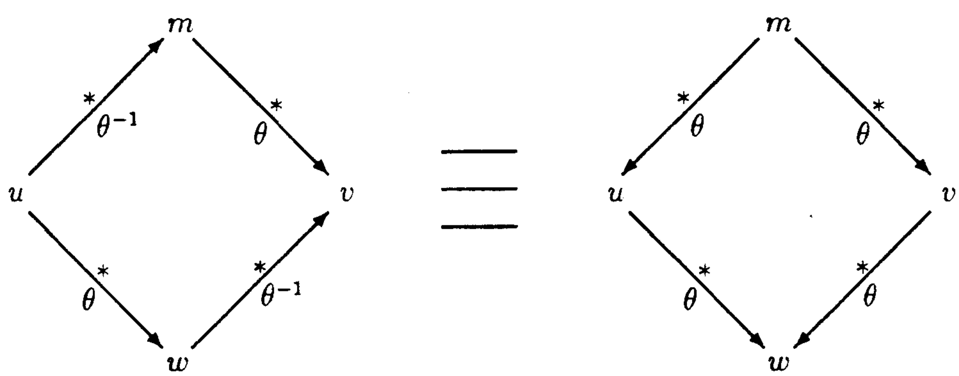


Figure 3.2 : $f_{\theta^{-1}} \circ f_\theta = f_{\theta \cup \theta^{-1}} \Leftrightarrow f_\theta \circ f_{\theta^{-1}} \subseteq f_{\theta^{-1}} \circ f_\theta \Leftrightarrow (A, \theta)$ est confluente

Théorème 3.4.10 *Un système de semi-commutation (A, θ) est confluent si et seulement si tout cycle de $\bar{\theta}$ contenant au moins deux arcs non dirigés est coupé par une corde non dirigée.*

Remarque : Dans une approche plus combinatoire, V.Diekert a utilisé ce théorème pour montrer qu'il existe une bijection canonique entre les semi-commutations confluentes et les extensions non ambigües des fonctions de Möbius ([Die93]).

3.4.3 Semi-commutations à compteur

Dans [Gon93], D.Gonzalez définit la famille des fonctions de semi-commutation préservant les langages multi-compteurs (MC). Une caractérisation simple de ces semi-commutations est donnée. La preuve apportée repose sur le fait que, pour un alphabet donné, la famille des semi-commutations à compteur est close par composition. Nous présentons cette famille de fonctions, ainsi que le mécanisme de la preuve.

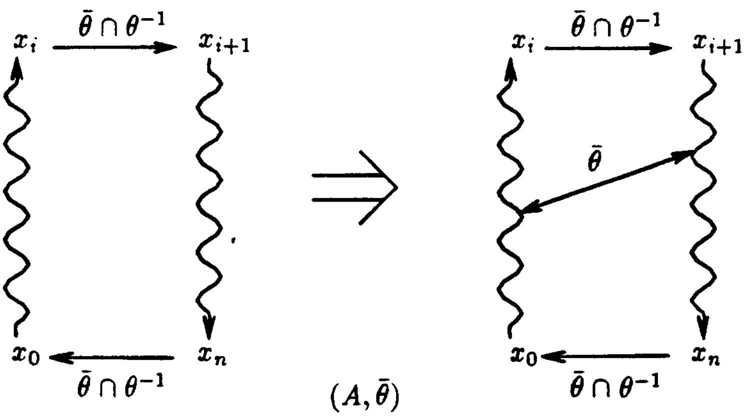


Figure 3.3 : Caractérisation des semi-commutations confluentes

Définition 3.4.11 *Une semi-commutation (A, θ) est une semi-commutation à compteur si et seulement si pour tout couple (a, b) de θ on a $\{a\} \times (A \setminus \{a\}) \subset \theta$ ou $(A \setminus \{b\}) \times \{b\} \subset \theta$.*

Il apparaît clairement que, pour un alphabet donné, cette famille est close par union ; elle l'est aussi par composition :

Théorème 3.4.12 *La composition de deux fonctions de semi-commutation à compteur est une fonction de semi-commutation à compteur.*

La preuve proposée de ce théorème est une application directe de notre critère de composition. Maintenant si l'on veut montrer que cette famille de fonctions préserve effectivement la famille des langages à compteur, il faut d'abord trouver le noyau générateur (par composition) de la famille des fonctions de semi-commutation à compteur : les semi-commutations atomiques à compteur.
Les semi-commutations atomiques sont de la forme $B \times C$ où B et C sont des sous-ensembles de A disjoints. L'intersection de la famille des semi-commutations atomiques et de celle des semi-commutations à compteur définit les semi-commutations atomiques à compteur i.e. $\{a\} \times (A \setminus \{a\})$ ou $(A \setminus \{a\}) \times \{a\}$. Il est facile de voir qu'une semi-commutation à compteur est égale à l'union de semi-commutations atomiques à compteur incluses dans celle-ci, ainsi nous avons :

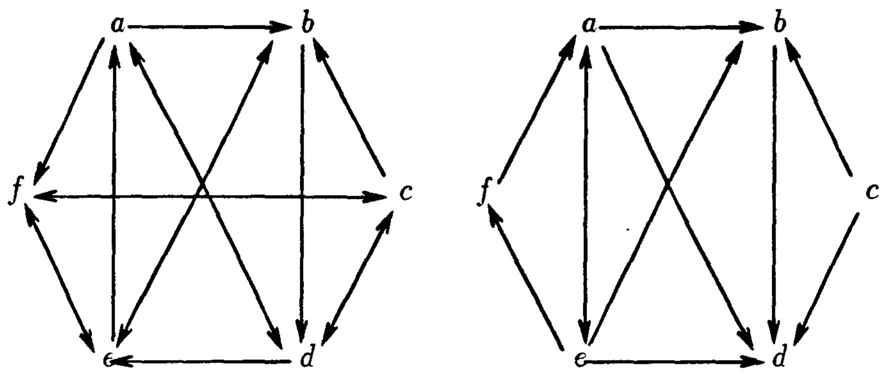
Corollaire 3.4.13 *Toute fonction de semi-commutation à compteur peut être réalisée par la composition de fonctions de semi-commutation atomique à compteur.*

Ainsi si toutes les semi-commutations atomiques à compteur préservent bien les langages multi-compteurs alors toutes les semi-commutations à compteur préservent les langages multi-compteurs. Le problème est donc simplifié, il suffit de vérifier :

1. Si (A, θ) n'est pas une semi-commutation à compteur alors il existe un langage $L \in \mathrm{MC}$ tel que $f_\theta(L) \notin \mathrm{MC}$.
2. Si (A, θ) est égale à $\{a\} \times (A \setminus \{a\})$ ou à $(A \setminus \{a\}) \times \{a\}$ alors $\forall L \in \mathrm{MC}$, $f_\theta(L) \in \mathrm{MC}$.

3.5 Complexité

Prologue



$(A, \bar{\mu})$ $(A, \bar{\lambda})$

Sont elles composables ?

Résultat Dans [DOR91] V.Diekert, E.Ochmanski et K.Reinhardt ont analysé la complexité du problème de la confluence d'une semi-commutation. Nous présentons leur résultat :

Théorème 3.5.1 *Le problème suivant est Co-NP-complet :*

Soit (A, θ) une semi-commutation, est-elle confluente ?

Pour prouver ce théorème, les auteurs ont montré qu'à toute expression booléenne de forme normale conjonctive on pouvait associer un graphe tel que l'expression booléenne est satisfiable si et seulement si le graphe contient un cycle sans corde contenant au moins deux arcs non dirigés.

Grâce à la caractérisation graphique décidant de la composition de deux fonctions de semi-commutation, il est facile de voir que ce problème est Co-NP : il suffit de trouver (de façon non déterministe) les deux parties du cycle $\{x_0, \ldots, x_i\}$ et $\{x_{i+1}, \ldots, x_n\}$ et de vérifier que :

- les deux parties du cycle sont incluses dans $\bar{\mu} \cup \bar{\lambda}^{-1}$
- $(x_0, x_n) \in \mu \cap \bar{\lambda}$
- $(x_i, x_{i+1}) \in \lambda \cap \bar{\mu}$
- $\{x_0, \ldots, x_i\} \times \{x_{i+1}, \ldots, x_n\}$ est inclus dans $\mu \cup \lambda$

Cette vérification se fait en un temps polynomial : il faut vérifier l'appartenance (et parfois la non appartenance) de l'ordre de n^2 couples aux semi-commutations données en entrée alors que l'alphabet de départ contient au moins $n + 1$ lettres. Comme vérifier la confluence d'une semi-commutation n'est qu'un cas particulier de vérification de la composition, il apparaît :

Théorème 3.5.2 *Le problème suivant est Co-NP-complet :*

Soient (A,μ) et (A,λ) deux semi-commutations, est-ce que $f_\mu \circ f_\lambda$ est une fonction de semi-commutation?

Epilogue
Sont elles composables ?

Réponse : NON ! $afe \underset{\lambda}{\longrightarrow} fae \underset{\mu}{\longrightarrow} fea$ mais $f_\mu(afe) = \{afe\}$ et $f_\lambda(afe) = ae \sqcup f$

3.6 Conclusion

Il peut paraître surprenant d'étudier le problème de la composition de deux fonctions de semi-commutation. De notre caractérisation découle la décidabilité de problèmes théorique (confluence) et pratique (vérification locale de synchronisation).

Notre caractérisation peut être aussi vue comme un outil pour simplifier l'étude de propriétés préservées par composition (semi-commutations à compteur) ou pour analyser la complexité intrinsèque d'une semi-commutation (obtention d'une composition de semi-commutations atomiques équivalente à une semi-commutation par décompositions successives d'une semi-commutation en deux semi-commutations).

Le problème de la composition d'un nombre arbitraire de semi-commutations reste ouvert : nous ne savons pas borner la longueur des mots à tester. D'autre part, grâce au Lemme 3.3.4 nous savons que le problème de l'inclusion d'une fonction de semi-commutation dans la composition de deux fonctions ($f_\theta \sqsubset f_\mu \circ f_\lambda$) est décidable : il suffit de tester cette inclusion sur les mots de permutation ; cependant nous ne disposons pas de caractérisation graphique même dans le cas des commutations partielles.

4

Semi-commutations régulièrement compatibles

4.1 Présentation

Ce chapitre est consacré à l'étude des couples de semi-commutations (A, θ) et (A, θ') tels que pour tout langage R régulier et θ-clos, l'image par $f_{\theta'}$ de R est un langage régulier. Si cette condition est vérifiée nous dirons alors que (A, θ') est régulièrement compatible avec (A, θ) (en abrégé : θ' est Reg-compatible avec θ).

De façon évidente si la relation de semi-commutation θ' est incluse dans θ alors θ' est Reg-compatible avec θ : tout langage de $\mathrm{Reg}_\theta(A^*)$ est clos par θ' et appartient ainsi à $\mathrm{Reg}_{\theta'}(A^*)$. Tout aussi facilement nous pouvons résoudre ce problème dans le cadre des commutations partielles : si θ' n'est pas incluse dans θ il existe un couple de lettres (a, b) appartenant à θ' sans appartenir à θ ; le langage $f_\theta((ab)^*) = (ab)^*$ est dans $\mathrm{Reg}_\theta(A^*)$ mais le langage $f_{\theta'}((ab)^*) = D_1^*(a, b)$ n'est pas régulier. Ainsi nous avons :

Fait 4.1.1 *Soient* (A, θ) *et* (A, θ') *deux commutations partielles.*

(A, θ') est Reg-compatible avec (A, θ) si et seulement si θ' est incluse dans θ .

Nous nous intéressons donc aux cas des semi-commutations où il existe des couples de semi-commutations, non triviaux, Reg-compatibles ou non Reg-compatibles. Mais pourquoi cette différence avec les commutations partielles ? Simplement parce qu'il est possible d'ajouter des couples de lettres à une relation de semi-commutation *sans casser les composantes fortement connexes* du graphe de non commutation original. De plus nous verrons que garder les composantes fortement connexes ne suffit pas toujours ; cela est en relation directe avec le fait que pour les semi-commutations tout reconnaissable de Reg_θ ne peut s'exprimer à l'aide des θ-opérateurs, comme le langage $(ba)^*a(a+b)^*$ pour la semi-commutation $\{(b, a)\}$ donné dans la preuve du Théorème 2.5.18.

Comme nous serons amenés à traiter des langages du type $(ba)^*a(a+b)^*$, nous ne pourrons pas utiliser la caractérisation de $\mathcal{R}_\theta(A^*)$ donné par le Théorème 2.5.17. C'est pourquoi nous donnons une nouvelle condition suffisante pour qu'un langage régulier de A^* ait pour image, par une fonction de semi-commutation, un langage régulier. Cette condition suffisante, basée sur la notion de *rang* d'un langage, est une généralisation d'un travail de K.Hashigushi sur les commutations partielles. Nous répondons aussi à une de ses interrogations : cette condition est seulement suffisante.

Ensuite, à l'aide d'exemples nous cernons le problème, et donnons une condition nécessaire simple, mais non suffisante. Nous présentons alors une caractérisation décidable des couples de semi-commutations Reg-compatibles.

Le reste du chapitre est consacré à la preuve et aux corollaires. Pour établir la suffisance de notre caractérisation nous utilisons notre condition suffisante de régularité. Dans l'autre sens nous bâtissons un contre-exemple général à l'aide de langages du type $(ba)^*a(a+b)^*$.

Nous refermons ce chapitre sur trois corollaires : nous montrons que si θ' est incluse dans θ^{-1} alors θ' est Reg-compatible avec θ ; puis nous traitons le cas où θ est incluse dans θ' : nous obtenons une caractérisation en terme de composition de deux fonctions de semi-commutation. Bien que ces corollaires soient des conséquences directes du résultat principal de ce chapitre, nous présentons des idées de preuves offrant, du moins nous l'espérons, une meilleure vision du problème. Enfin nous montrons qu'une semi-commutation θ est Reg-compatible avec sa clôture symétrique $(\theta \cup \theta^{-1})$ si et seulement si θ est confluente. Ce dernier résultat nous permet de conclure sur la complexité : la propriété Reg-compatible est Co-NP-complète.

4.2 Une condition suffisante de régularité

4.2.1 Congruence k-syntaxique

Nous commençons par généraliser la notion de congruence syntaxique :

Définition 4.2.1 *Soient k un entier et L un langage de A^* . Soit $X = (x_1, \ldots, x_k)$ un k-uplet de $(A^*)^k$. Le quotient k-syntaxique de L par X est la partie de $(A^*)^{k+1}$ définie par :*

$$(z_0, z_1 \ldots, z_k) \in L/(x_1, \ldots, x_k) \Leftrightarrow z_0 x_1 z_1 \ldots x_k z_k \in L$$

La congruence k-syntaxique, notée $\approx_L^k$, est définie par :

$$(x_1, \ldots, x_k) \approx_L^k (y_1, \ldots, y_k) \Leftrightarrow L/(x_1, \ldots, x_k) = L/(y_1, \ldots, y_k)$$

Dans le cas $k = 1$ nous retrouvons la congruence syntaxique, que nous noterons plus simplement $\approx_L$, souvent utilisée pour caractériser les langages réguliers :

Théorème 4.2.2 *Un langage L de A^* est régulier si et seulement si $\approx_L$ est d'index fini.*

Grâce à ce théorème fondamental nous obtenons :

Lemme 4.2.3 *Pour tout langage L de A^* et pour tout entier positif k :*

L est un langage régulier si et seulement si $\approx_L^k$ est d'index fini.

preuve : Le cas $k = 1$ est réglé par le Théorème 4.2.2. Si des mots $x_1, \ldots x_k, y_1, \ldots, y_k$ de A^* sont tels que pour tout indice i compris entre 1 et k nous avons $x_i \approx_L y_i$ alors

$(x_1,\ldots,x_k) \approx_L^k (y_1,\ldots,y_k)$. Ainsi, si n est l'index de $\approx_L$, l'index de $\approx_L^k$ est borné par n^k . Pour l'autre sens il suffit de remarquer que si $(x,\varepsilon,\ldots,\varepsilon) \approx_L^k (y,\varepsilon,\ldots,\varepsilon)$ alors $x \approx_L y$. □

4.2.2 Rang d'un langage pour une semi-commutation

Nous rappelons d'abord le Lemme de Levi généralisé pour les semi-traces :

Lemme 4.2.4 *Soient (A,θ) une semi-commutation et u,v,w des mots de A^* .*
$w \xrightarrow[\theta]{*} uv$ si et seulement si il existe une factorisation de $w = u_0v_0u_1v_1\ldots u_nv_n$ telle que

- $u_0\ldots u_n \xrightarrow[\theta]{*} u$
- $v_0v_1\ldots v_n \xrightarrow[\theta]{*} v$
- $\mathrm{alph}(v_i) \times \mathrm{alph}(u_j) \subset \theta$ *pour tout* $i < j$

Nous définissons la notion de rang :

Définition 4.2.5 *Soient (A,θ) une semi-commutation et L un langage de A^* . Soient u,v,w trois mots de A^* tels que $uv \in f_\theta(w)$. Nous dirons que le* rang de distribution *de (u,v) dans w pour θ, noté $\mathrm{rang}_{w,\theta}(u,v)$, est égal à l'entier n si et seulement si $w = v_0u_1v_1\ldots u_nv_n$, $u_1\ldots u_n \xrightarrow[\theta]{*} u$, $v_0v_1\ldots v_n \xrightarrow[\theta]{*} v$ et $\mathrm{alph}(v_i) \times \mathrm{alph}(u_j) \subset \theta$ pour tout $i < j$.*
Pour un langage L de A^* , le rang de distribution de (u,v) dans L pour θ est défini par

$$\mathrm{rang}_{L,\theta}(u,v) = \min\{\mathrm{rang}_{w,\theta}(u,v) \mid w \in L\}$$

Grâce au Lemme de Levi généralisé pour les semi-traces nous savons que la fonction $\mathrm{rang}_{L,\theta}(u,v)$ est une fonction totale de $\{(u,v) \mid uv \in f_\theta(L)\}$ dans $\mathbb{N}$; la définition ci-dessus est donc bien fondée.

Définition 4.2.6 *Soient (A,θ) une semi-commutation et L un langage de A^* . Nous dirons que le rang de L pour θ, noté $\mathrm{rang}_\theta(L)$, est borné si il existe un entier N tel que pour tout $uv \in f_\theta(L)$ nous avons $\mathrm{rang}_{L,\theta}(u,v) \leq N$.*

Notons que la notion de rang borné a été introduite par K.Hashigushi pour les commutations partielles sous le nom de *finite block testability*. La proposition suivante est, du reste, la généralisation d'un résultat sur les commutations partielles présenté par ce chercheur dans [Has91].

4.2.3 Condition suffisante

Proposition 4.2.7 *Soient (A,θ) une semi-commutation et L un langage régulier de A^* .*

Si $\mathrm{rang}_\theta(L)$ est borné alors $f_\theta(L)$ est un langage régulier.

preuve : Nous allons montrer que si le rang de L est borné pour θ alors le nombre de quotients à gauche de $f_\theta(L)$ est fini. Soit N la borne supérieure de $\{\mathrm{rang}_{L,\theta}(u,v) \mid uv \in f_\theta(L)\}$. D'après le Lemme de Levi généralisé et comme pour tout $uv \in f_\theta(L)$ nous avons $\mathrm{rang}_{L,\theta}(u,v) \leq N$, nous pouvons caractériser l'ensemble des quotients à gauche de $f_\theta(L)$ pour un mot u donné :

$$v \in u^{-1}f_\theta(L) \Leftrightarrow uv \in f_\theta(L) \Leftrightarrow \exists w \in L \text{ tel que } \begin{array}{ll} (1) & w = v_0u_1v_1\ldots u_Nv_N \\ (2) & u_1\ldots u_N \xrightarrow[\theta]{*} u \\ (3) & v_0v_1\ldots v_N \xrightarrow[\theta]{*} v \\ (4) & \mathrm{alph}(v_i) \times \mathrm{alph}(u_j) \subset \theta \text{ pour } i < j \end{array}$$

Pour tout mot m de A^* nous définissons l'ensemble

$$D_\theta(m) = \{w \in A^* \mid \mathrm{alph}(w) \times \mathrm{alph}(m) \subset \theta\}$$

et pour tout n-uplet de mots $(m_1,\ldots,m_N)$ de A^{*N} nous posons

$$D_\theta^N(m_1,\ldots,m_N) = D_\theta(m_1\ldots m_N) \times D_\theta(m_2\ldots m_N)\cdots \times D_\theta(m_N) \times A^*$$

Nous définissons l'opération concat : $2^{A^{*N+1}} \mapsto 2^{A^*}$ par

$$\mathrm{concat}(P) = \{w \in A^* \mid w = m_1\ldots m_N m_{N+1} \text{ avec } (m_1,\ldots,m_N,m_{N+1}) \in P\}$$

Nous reformulons la caractérisation de l'ensemble des quotients à gauche de $f_\theta(L)$ pour un mot u donné :

$$u^{-1}f_\theta(L) = \bigcup \left\{ f_\theta\left(\mathrm{concat}(L/(u_1,\ldots,u_N) \cap D_\theta^N(u_1,\ldots,u_N))\right) \mid u_1\ldots u_N \xrightarrow[\theta]{*} u \right\}$$

Clairement la famille $\{D_\theta(m) \mid m \in A^*\}$ est finie, de même que la famille $\{D_\theta^N(m_1,\ldots,m_N) \mid m_1,\ldots,m_N \in A^*\}$. Comme L est un langage régulier de A^* et d'après le Lemme 4.2.3 la famille $\{L/(m_1,\ldots,m_N) \mid m_1,\ldots,m_N \in A^*\}$ est aussi finie.
Ainsi la famille des quotients à gauche $\{u^{-1}f_\theta(L) \mid u \in A^*\}$ est finie. □

Malheureusement cette condition n'est que suffisante, même dans le cas des commutations partielles :

Exemple 4.2.8 *Soit* $(A,\theta) = (\{a,b\},\{(a,b),(b,a)\})$ *une commutation partielle. Considérons le langage* $L = (ab)^*(a^* + b^*)$. *Le langage* $f_\theta(L) = A^*$ *est régulier, cependant la fonction* $\mathrm{rang}_\theta(L)$ *n'est pas bornée :* $\mathrm{rang}_{L,\theta}(a^n,b^n) = n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.[1]

Ce contre-exemple apporte une réponse négative au premier problème posé dans [Has91].

[1] Y. Métivier présente dans sa thèse ([Mét87]) une idée de semi-algorithme pour décider si la cloture, par une commutation partielle (A,θ), d'un langage régulier est toujours régulier. Y. Métivier montre que cet algorithme n'est pas satisfaisant à l'aide du même exemple...

4.3 Le problème

Rappelons d'abord la notion de semi-commutations Reg-compatibles :

Définition 4.3.1 *Soient (A,θ) et (A,θ') deux semi-commutations. La semi-commutation (A,θ') est Reg-compatibles avec (A,θ) si et seulement si pour tout langage R de $\mathrm{Reg}_\theta(A^*)$ le langage $f_{\theta'}(R)$ est régulier.*

Nous avons déjà vu que lorsque θ' est incluse dans θ alors θ' est Reg-compatible avec θ. Cette condition suffisante s'est avérée nécessaire dans le cadre des commutations partielles. Ce n'est plus le cas pour les semi-commutations :

Exemple 4.3.2

$$a \longrightarrow b \qquad\qquad a \qquad b$$
$$(A,\bar\theta) \qquad\qquad\qquad\qquad (A,\bar\theta')$$

Ici θ' est Reg-compatible avec θ : soit R un langage de $\mathrm{Reg}_\theta(A^*)$. Comme R est θ-clos, pour tout mot u de R le mot $a^{|u|_a}b^{|u|_b}$ fait partie aussi de R, ainsi R est inclus dans $\mathrm{com}(R\cap a^*b^*)$ i.e. $f_{\theta'}(R) = \mathrm{com}(R\cap a^*b^*)$. D'autre part comme R est un langage régulier de A^*, le langage $R\cap a^*b^*$ est régulier. De plus tous les facteurs itérants de $R\cap a^*b^*$ sont fortement connexes pour $\bar\theta'$: la Proposition 2.5.4 nous affirme que $\mathrm{com}(R\cap a^*b^*)$ est un langage régulier.

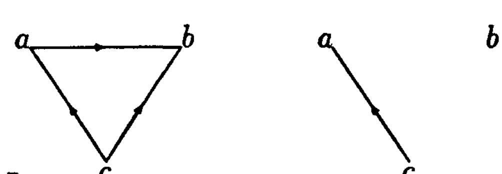
Comme l'illustre l'exemple précédent, en ce qui concerne le problème des semi-commutations Reg-compatibles, la différence essentielle entre les commutations partielles et les semi-commutations réside dans la possibilité d'ajouter des couples de lettres à la relation de semi-commutation tout en conservant les composantes fortement connexes du graphe de non commutation, cette condition est du reste nécessaire :

Lemme 4.3.3 *Soient (A,θ) et (A,θ') deux semi-commutations. Si θ' est Reg-compatible avec θ alors tout mot fortement connexe pour $\bar\theta$ est fortement connexe pour $\bar\theta'$.*

preuve : Supposons qu'il existe un mot u de A^* qui soit fortement connexe pour $\bar\theta$ sans l'être pour $\bar\theta'$. Directement grâce au Corollaire 2.5.5 nous savons que le langage $f_\theta(u^*)$ est régulier et que $f_{\theta'}(u^*)$ ne l'est pas. □

Une question naturelle se pose alors : suffit-il de garder les composantes fortement connexes de $\bar\theta$?

Exemple 4.3.4



$(A,\bar\theta)$ $(A,\bar\theta')$

Ici encore θ' est Reg-compatible avec θ, pour le montrer il suffit de procéder comme dans l'exemple précédent : pour tout langage L de $\mathrm{Reg}_\theta(A^*)$, nous avons $f_{\theta'}(L\cap(a+c)^*b^*) = f_{\theta'}(L)$.

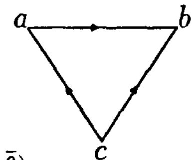
Considérons les semi-commutations $(A,\mu) = (A, \{(a,c)\})$ *et* $(A,\lambda) = (A, \{(a,b),(c,b)\})$.

Il est facile de voir que $f_{\theta'}(L \cap (a+c)^*b^*) = f_\lambda \circ f_\mu(L \cap (a+c)^*b^*)$ *: il suffit de commencer par placer les a par rapport aux c et ensuite de faire remonter les b .*
Nous avons $f_\mu(L \cap (a+c)^*b^*) = L \cap (a+c)^*b^*$ *et ainsi* $f_{\theta'}(L \cap (a+c)^*b^*) = f_\lambda(L \cap (a+c)^*b^*)$.

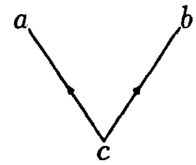
Maintenant tous les facteurs itérants de $L \cap (a+c)^*b^*$ *sont fortement connexes pour* $\bar\lambda$ *et d'après la Proposition 2.5.4* $f_{\theta'}(L) = f_\lambda(L \cap (a+c)^*b^*)$ *est un langage régulier.*

En fait préserver les mots fortement connexes pour $\bar\theta$ ne suffit pas et, plus surprenant encore, il existe une semi-commutation θ'' incluse dans θ' ($\theta'' = \theta' - (c,b)$) telle que θ'' n'est pas Reg-compatible avec θ :

Exemple 4.3.5



$(A, \bar\theta)$



$(A, \bar\theta'')$

θ'' *n'est pas Reg-compatible avec* θ *. Soit* $R = f_\theta[(abc)^*acb(a+b+c)^*]$, *ce langage est dans* $\mathrm{Reg}_\theta(A^*)$ *:*

$$R = f_\theta[(abc)^*acb(a+b+c)^*] = (abc)^*(ac+c^+a)(a+c)^*b(a+b+c)^*$$

Nous allons montrer que le langage $f_{\theta''}(R) \cap (bc)^*a^*acb$ *n'est pas régulier.*

Prenons un mot m de R tel que $f_{\theta''}(m) \cap (bc)^*a^*acb = (bc)^p a^q acb$, *m appartient à R et donc il existe n tel que* $m \in (abc)^n(ac+c^+a)(a+c)^*b(a+b+c)^*$.

Nous avons $((abc)^n)^{-1}m \in (ac+c^+a)(a+c)^*b(a+b+c)^*$, *comme* $(c,b) \in \bar\theta''$ *nous avons* $f_{\theta''}((ac+c^+a)(a+c)^*b(a+b+c)^*) \cap bc(a+b+c)^* = \emptyset$ *: ceci signifie qu'une fois sorti de* $(abc)^*$ *on ne peut plus produire de bc, nous avons donc* $m \in (abc)^n(ac+ca)a^*ba^*$.

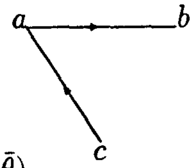
De plus $(c,a) \in \bar\theta''$ *et nous avons aussi* $f_{\theta''}((ac+ca)(a)^*ba^*) \cap a^*cb = acb$.

Remarquons que $abc \xrightarrow[\theta'']{*} bca$ *pour conclure :*

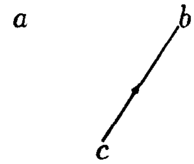
$$f_{\theta''}(R) \cap (bc)^*a^*acb = \{(bc)^n a^n acb \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Nous pouvons simplifier l'exemple précédent :

Exemple 4.3.6



$(A, \bar\theta)$

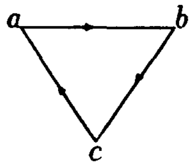


$(A, \bar\theta')$

θ' n'est pas Reg-compatible avec θ... Posons $L = f_\theta([abc + acb]^*[cab + acabbc][a + b + c]^*)$, nous verrons plus tard que ce langage est dans $\mathrm{Reg}_\theta(A^*)$ et que nous avons :

$$f_{\theta'}[L] \cap (bc)^*a^*cab = \{(bc)^n a^m cab \mid n \leq m\}$$

Considérons le graphe $(A, \bar{\theta} \cup \bar{\theta'}^{-1})$:



C'est un graphe fortement connexe !

Remarquons que $abc \xrightarrow[\theta']{*} bca$ contrairement à $abc \not\xrightarrow[\theta]{*} bca$.

Nous énonçons, maintenant le résultat principal de ce chapitre :

Théorème 4.3.7 *Soient (A, θ) et (A, θ') deux semi-commutations. θ' est régulièrement compatible avec θ si et seulement si pour tout mot de permutation uv de A^*, fortement connexe pour $(A, \bar{\theta} \cup \bar{\theta'}^{-1})$, nous avons :*

$$uv \xrightarrow[\theta']{*} vu \Longrightarrow uv \xrightarrow[\theta]{*} vu$$

Notons que cette caractérisation est décidable : il suffit de tester les mots de permutation. Nous concluons cette partie sur un exemple de semi-commutations non Reg-compatibles assez différents des deux précédents et plus proche du cas général :

Exemple 4.3.8

$$\begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & b \\ & & \\ d & \longleftarrow & c \\ \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cc} a & b \\ \downarrow & \uparrow \\ d & c \\ \end{array}$$

$$(A, \bar{\theta}) \qquad\qquad\qquad\qquad (A, \bar{\theta}')$$

Prenons $u = da$ et $v = bc$, d'une part le graphe $(\{a, b, c, d\}, \bar{\theta} \cup \bar{\theta'}^{-1})$ est fortement connexe et d'autre part nous avons $dabc \xrightarrow[\theta']{*} bcda$ mais pas $dabc \xrightarrow[\theta]{*} bcda$. D'après la caractérisation, θ' n'est pas Reg-compatible avec θ .
Posons $L_{ab} = (ab)^*aa^+ba^*b(a + b)^*$ et $L_{dc} = (dc)^*c^+d(d + c)^*$, ces deux langages sont dans $\mathrm{Reg}_\theta(A^*)$ ainsi que leur shuffle. Mais

$$f_{\theta'}(L_{ab} \sqcup\!\sqcup L_{dc}) \cap (bc)^*(da)^*aabbccdd = \{(bc)^p(da)^q aabbccdd \mid q \leq p + 1\}$$

Nous reviendrons sur cet exemple pour illustrer la preuve de la réciproque.

4.4 L'implication : borner le rang de $f_{\theta'}(L)$

Pour montrer que la clôture d'un langage régulier $L \in \mathrm{Reg}(A^*)$ par une fonction de semi-commutation $f_{\theta'}$ est encore un langage régulier il suffit de borner la fonction $\mathrm{rang}_{\theta'}(L)$. Nous allons utiliser cette technique dans la preuve de la proposition suivante :

Proposition 4.4.1 *Soient (A,θ) et (A,θ') deux semi-commutations. Si pour tout mot de permutation uv de A^* fortement connexe pour $\bar{\theta} \cup \bar{\theta'}^{-1}$ vérifiant $uv \xrightarrow[\theta']{*} vu$, nous avons $uv \xrightarrow[\theta]{*} vu$ alors la fonction* $\mathrm{rang}_{\theta'}(L)$ *est bornée pour tout langage L de* $\mathrm{Reg}_\theta(A^*)$.

Soit L un langage de $\mathrm{Reg}_\theta(A^*)$ et uv un mot de $f_{\theta'}(L)$. D'après le Lemme de Levi généralisé nous savons qu'il existe un entier n et un mot w de L tels que :

1. $w = v_0u_1v_1 \dots u_nv_n$
2. $u_1 \dots u_n \xrightarrow[\theta]{*} u$
3. $v_0v_1 \dots v_n \xrightarrow[\theta]{*} v$
4. $\mathrm{alph}(v_i) \times \mathrm{alph}(u_j) \subset \theta'$ pour tout $i < j$

Notation : Par la suite u_{j_k} représentera un certain u_i de même que v_{i_k} représentera un v_j.

Dans un premier temps, nous montrons que si nous n'avons pas toujours $\mathrm{alph}(v_i) \times \mathrm{alph}(u_j) \subset \theta'$ pour tout i et tout j cette propriété est vérifiée très souvent.

Lemme 4.4.2 *Soit $u_{j_1}v_{i_1}u_{j_2}v_{i_2} \dots u_{j_p}v_{i_p}$ un sous-mot de w . Si pour tout k plus petit que p nous avons* $\mathrm{alph}(v_{i_k}) \times \mathrm{alph}(u_{j_k}) \not\subset \theta'$ *alors p est majoré par $|A|$.*

preuve : Soient k et l des indices avec $k < l < p$ et tels que

- il existe un couple de lettres (x_k, y_k) de $\mathrm{alph}(v_{i_k}) \times \mathrm{alph}(u_{j_k})$ tel que (x_k, y_k) n'appartienne pas à θ' .
- il existe un couple (x_l, y_l) de $\mathrm{alph}(v_{i_l}) \times \mathrm{alph}(u_{j_l})$ tel que (x_l, y_l) appartienne à $\bar{\theta}'$.

Puisque $k < l$ nous devons avoir $\mathrm{alph}(v_{i_k}) \times \mathrm{alph}(u_{j_l}) \subset \theta'$ et donc y_l est différent de y_k. Ainsi p est majoré par la cardinalité de A. □

Maintenant il nous reste à borner le nombre de blocs qui commutent dans les deux sens par θ' . Nous introduisons la notion de factorisation (ir)réductible :

Définition 4.4.3 *Soient (A,θ) et (A,θ') deux semi-commutations et u, v, w des mots tels que $w \xrightarrow[\theta']{*} uv$. Une factorisation $w = v_0u_1v_1 \dots u_nv_n$ de (u,v) est* réductible *dans θ si et seulement si il existe un mot w' tel que $w \xrightarrow[\theta]{*} w' \xrightarrow[\theta']{*} uv$ avec* $\mathrm{rang}_{w',\theta'}(u,v) < \mathrm{rang}_{w,\theta'}(u,v)$. *Une factorisation sera* irréductible *dans θ si et seulement si elle n'est pas réductible.*

L'ensemble des mots irréductibles forme une base suffisante pour calculer les quotients à gauche d'un langage :

Lemme 4.4.4 *Soient (A,θ) et (A,θ') deux semi-commutations, un langage L de $\mathrm{Reg}_\theta(A^*)$ et deux mots u,v de A^* . Alors $v \in u^{-1}f_{\theta'}(L)$ si et seulement si il existe un mot m de L tel que $m \xrightarrow[\theta']{*} uv$ et m est une factorisation irréductible de (u,v) dans θ .*

preuve : Nous avons :

$$v \in u^{-1}f_{\theta'}(L) \Leftrightarrow uv \in f_{\theta'}(L) \Leftrightarrow (\exists w) w \xrightarrow[\theta']{*} uv$$

Il suffit de prendre un mot m dans $\{w' \mid w \xrightarrow[\theta]{*} w' \xrightarrow[\theta']{*} uv\}$ tel que $\mathrm{rang}_{m,\theta'}(u,v)$ soit minimal i.e. $\mathrm{rang}_{m,\theta'}(u,v) = \mathrm{rang}_{L,\theta'}(u,v)$ puisque L est θ-clos.

Nous allons étudier la forme des mots irréductibles :

Définition 4.4.5 *Soient (A,θ) et (A,θ') deux semi-commutations. Soit $w = v_0u_1v_1\ldots u_nv_n$ une factorisation de (u,v). On appelle* ballade *un chemin de u_1 à u_n dans $\bar\theta \cup \bar\theta'^{-1}$ de la forme :*

$$\underbrace{b_1}_{u_1} \xrightarrow{\bar\theta} \underbrace{c_1 \text{ —}\bar\theta\cup\bar\theta'^{-1}\longrightarrow d_1}_{v_1} \xrightarrow{\bar\theta} \underbrace{a_2 \text{ —}\bar\theta\cup\bar\theta'^{-1}\longrightarrow b_2}_{u_2} \xrightarrow{\bar\theta} \underbrace{c_2\cdots}_{v_2}\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\underbrace{\cdots b_{n-1}}_{u_{n-1}} \xrightarrow{\bar\theta} \underbrace{c_{n-1} \text{ —}\bar\theta\cup\bar\theta'^{-1}\longrightarrow d_{n-1}}_{v_{n-1}} \xrightarrow{\bar\theta} \underbrace{a_2}_{u_n}$$

où

- *un arc $x \xrightarrow{\bar\theta} y$ signifie $(x,y) \in \bar\theta$;*
- *$\underbrace{x \text{ —}\bar\theta\cup\bar\theta'^{-1}\longrightarrow y}_{m}$ signifie un chemin, dans $\bar\theta\cup\bar\theta'^{-1}$, de x à y dans le mot m ;*
- *il est possible d'avoir $c_i = d_i$ ou $a_i = b_i$ pour tout i ;*
- *la ballade passe par tous les u_i et v_i .*

Voilà ce que nous voulons démontrer :

Lemme 4.4.6 *Soient (A,θ) et (A,θ') deux semi-commutations. Si $w = v_0u_1v_1\ldots u_nv_n$ est une factorisation de (u,v) irréductible dans θ telle que* pour tous les indices *i et j nous avons* $\mathrm{alph}(v_i)\times\mathrm{alph}(u_j) \subset \theta'$ *alors il existe une ballade de u_1 à u_n.*

Pour la démonstration de ce lemme nous avons besoin de quelques définitions...

Pour une factorisation $w = u_1v_1\ldots v_{n-1}u_nv_n$ de (u,v) nous définissons les ensembles suivants :

$P_{u_i} = \{a \in u_i \mid$ il existe une ballade de u_1 à $a\}$ pour $i = 2,\ldots,n$

$X_{u_i} = \{x \in u_i \mid$ il existe un chemin dans $(u_i, \bar\theta\cup\bar\theta'^{-1})$ de P_{u_i} à $x\}$ pour $i = 2,\ldots,n$

$Y_{u_i} = \{y \in u_i \mid$ il n'y a pas de chemin dans $(u_i, \bar{\theta} \cup \bar{\theta}'^{-1})$ de P_{u_i} à $y\}$ pour $i = 2, \ldots, n$

$Q_{u_i} = \{b \in u_i \mid (b, c) \in \bar{\theta}$ pour un $c \in \mathrm{alph}(v_i)\}$ pour $i = 1, \ldots, n-1$

Clairement, $P_{u_i} \subset X_{u_i}$, $X_{u_i} \cap Y_{u_i} = \emptyset$, $X_{u_i} \cup Y_{u_i} = \mathrm{alph}(u_i)$, pour $i = 2, \ldots, n$.

$P_{v_i} = \{c \in v_i \mid$ il existe une ballade de v_1 à $c\}$ pour $i = 1, \ldots, n-1$

$X_{v_i} = \{x \in u_i \mid$ il existe un chemin dans $(v_i, \bar{\theta} \cup \bar{\theta}'^{-1})$ de P_{v_i} à $x\}$ pour $i = 1, \ldots, n-1$

$Y_{v_i} = \{y \in v_i \mid$ il n'y a pas de chemin dans $(v_i, \bar{\theta} \cup \bar{\theta}'^{-1})$ de P_{v_i} à $y\}$ pour $i = 1, \ldots, n-1$

$Q_{v_i} = \{d \in v_i \mid (d, a) \in \bar{\theta}$ pour un $a \in \mathrm{alph}(u_{i+1})\}$ pour $i = 1, \ldots, n-1$

Clairement $P_{v_i} \subset X_{v_i}$, $X_{v_i} \cap Y_{v_i} = \emptyset$, $X_{v_i} \cup Y_{v_i} = \mathrm{alph}(v_i)$, pour $i = 1, \ldots, n-1$.

De par les définitions des ensembles nous avons directement les propriétés suivantes :

1. il n'y a pas d'arc de $\bar{\theta}$ de X_{u_i} à Y_{u_i} pour $i = 2, \ldots, n$
2. il n'y a pas d'arc de $\bar{\theta}$ de X_{v_i} à Y_{v_i} pour $i = 1, \ldots, n-1$
3. il n'y a pas d'arc de $\bar{\theta}$ de u_1 à Y_{v_1}
4. il n'y a pas d'arc de $\bar{\theta}$ de X_{u_i} à Y_{v_i} pour $i = 2, \ldots, n-1$
5. il n'y a pas d'arc de $\bar{\theta}$ de X_{v_i} à $Y_{u_{i+1}}$ pour $i = 1, \ldots, n-1$
6. si $Q_{v_i} \subset Y_{v_i}$ alors il n'y a pas d'arc de $\bar{\theta}$ de X_{v_i} à $Y_{u_{i+1}}$ pour $i = 1, \ldots, n-1$
7. si $Q_{u_i} \subset Y_{u_i}$ alors il n'y a pas d'arc de $\bar{\theta}$ de X_{u_i} à Y_{v_i} pour $i = 2, \ldots, n-1$
8. il n'y a pas d'arc de $\bar{\theta}'^{-1}$ de X_{u_i} à Y_{u_i} $\Longleftrightarrow$ il n'y a pas d'arc de $\bar{\theta}'^{-1}$ de Y_{u_i} à X_{u_i} pour $i = 2, \ldots, n$
9. il n'y a pas d'arc de $\bar{\theta}'^{-1}$ de X_{v_i} à Y_{v_i} $\Longleftrightarrow$ il n'y a pas d'arc de $\bar{\theta}'^{-1}$ de Y_{v_i} à X_{v_i} pour $i = 1, \ldots, n-1$

Nous noterons :

$$u_{i_X} = \Pi_{X_{u_i}}(u_i) \quad \text{et} \quad u_{i_Y} = \Pi_{Y_{u_i}}(u_i) \quad \text{pour } i = 2, \ldots, n.$$

$$v_{i_X} = \Pi_{X_{v_i}}(v_i) \quad \text{et} \quad v_{i_Y} = \Pi_{Y_{v_i}}(v_i) \quad \text{pour } i = 1, \ldots, n-1.$$

Reformulons les propriétés 1–9:

1. $u_i \xrightarrow[\theta]{*} u_{i_Y} u_{i_X}$ pour $i = 2, \ldots, n$
2. $v_i \xrightarrow[\theta]{*} v_{i_Y} v_{i_X}$ pour $i = 1, \ldots, n-1$

3. $u_1 v_{1_Y} \xrightarrow[\theta]{*} v_{1_Y} u_1$

4. $u_{i_X} v_{i_Y} \xrightarrow[\theta]{*} v_{i_Y} u_{i_X}$ pour $i = 2, \ldots, n-1$

5. $v_{i_X} u_{i+1_Y} \xrightarrow[\theta]{*} u_{i+1_Y} v_{i_X}$ pour $i = 1, \ldots, n-1$

6. si $Q_{v_i} \subset Y_{v_i}$ alors $v_{i_X} u_{i+1_X} \xrightarrow[\theta]{*} u_{i+1_X} v_{i_X}$ pour $i = 1, \ldots, n-1$

7. si $Q_{u_i} \subset Y_{u_i}$ alors $u_{i_X} v_{i_X} \xrightarrow[\theta]{*} v_{i_X} u_{i_X}$ pour $i = 2, \ldots, n-1$

8. $u_{i_Y} u_{i_X} \xrightarrow[\theta']{*} u_i$ $i = 2, \ldots, n$

9. $v_{i_Y} v_{i_X} \xrightarrow[\theta']{*} v_i$ $i = 1, \ldots, n-1$

Pour montrer le Lemme 4.4.6 nous allons démontrer un lemme un peu plus précis :

Lemme 4.4.7 *Soient (A, θ) et (A, θ') deux semi-commutations. Si $w = v_0 u_1 v_1 \ldots u_n v_n$ est une factorisation de (u, v) irréductible dans θ telle que* pour tous les indices *i et j nous avons* $\mathrm{alph}(v_i) \times \mathrm{alph}(u_j) \subset \theta'$ *alors il existe une ballade de u_1 à u_n et de plus*

$$u_1 v_1 \ldots u_{n-1} v_{n-1} u_n \xrightarrow[\theta]{*} v_{1_Y} u_1 u_{2_Y} v_{1_X} v_{2_Y} u_{2_X} u_{3_Y} v_{2_X} v_{3_Y} \ldots u_{n-1_X} u_{n_Y} v_{n-1_X} u_{n_X}$$

preuve : par induction sur le rang de factorisation : n.

<u>Première étape</u>: $w = u_1 v_1 u_2$. Nous avons :

$$u_1 v_1 u_2 \xrightarrow[\theta]{(2)*} u_1 \underline{v_{1_Y} v_{1_X}} u_2 \xrightarrow[\theta]{(3)*} \underline{v_{1_Y} u_1} v_{1_X} u_2 \xrightarrow[\theta]{(1)*} v_{1_Y} u_1 v_{1_X} \underline{u_{2_Y} u_{2_X}} \xrightarrow[\theta]{(5)*} v_{1_Y} u_1 \underline{u_{2_Y} v_{1_X}} u_{2_X}$$

Ceci correspond à dérivation attendue pour $n = 2$, occupons-nous de la ballade :

Remarquons que si $Q_{v_1} \subset Y_{v_1}$ alors nous avons $v_{1_Y} u_1 u_{2_Y} v_{1_X} u_{2_X} \xrightarrow[\theta]{(6)*} v_{1_Y} u_1 u_{2_Y} \underline{u_{2_X} v_{1_X}}$.

Et de plus nous obtenons $v_{1_Y} u_1 u_{2_Y} u_{2_X} v_{1_X} \xrightarrow[\theta']{*} u_1 u_{2_Y} u_{2_X} v_{1_Y} v_{1_X} \xrightarrow[\theta']{(8+9)*} u_1 u_2 v_1$.

Ainsi si $Q_{v_1} \subset Y_{v_1}$, alors la factorisation $w = u_1 v_1 u_2$ est réductible dans θ . Puisque $w = u_1 v_1 u_2$ est supposé irréductible dans θ, nous devons avoir $Q_{v_1} \cap X_{v_1} \neq \emptyset$.

Posons $d \in Q_{v_1} \cap X_{v_1}$; alors il existe $b \in u_1$, $c, d \in v_1$, $a \in u_2$ et nous retrouvons la ballade $\underbrace{b}_{u_1} \xrightarrow{\bar\theta} \underbrace{c - \bar\theta \cup \bar\theta'^{-1} \longrightarrow d}_{v_1} \xrightarrow{\bar\theta} \underbrace{a}_{u_2}$.

<u>Induction</u>: $w = v_0 u_1 v_1 \ldots u_{n-1} v_{n-1} u_n$

D'après l'hypothèse d'induction, il existe une ballade de u_1 à u_{n-1} et de plus

$$v_0 u_1 v_1 \ldots u_{n-1} v_{n-1} u_n \xrightarrow[\theta]{*} \underbrace{v_{1_Y} u_1 u_{2_Y} v_{1_X} v_{2_Y} u_{2_X} u_{3_Y} v_{2_X} v_{3_Y} \ldots u_{n-2_X} u_{n-1_Y} v_{n-2_X}}_{m} u_{n-1_X} v_{n-1} u_n$$

et ainsi

$$mu_{n-1_X}u_nv_n \xrightarrow[\theta]{(1+2)*} mu_{n-1_X}\underline{v_{n-1_Y}v_{n-1_X}u_{n_Y}u_{n_X}} \xrightarrow[\theta]{(4+5)*} m\underline{v_{n-1_Y}u_{n-1_X}u_{n_Y}v_{n-1_X}}u_{n_X}$$

Ceci correspond à dérivation attendue pour n, occupons-nous de la ballade :

Remarquons que si $Q_{v_{n-1}} \subset Y_{v_{n-1}}$ alors

$$mv_{n-1_Y}u_{n-1_X}u_{n_Y}v_{n-1_X}u_{n_X} \xrightarrow[\theta]{(6)*} mv_{n-1_Y}u_{n-1_X}u_{n_Y}u_{n_X}v_{n-1_X}$$

$$mv_{n-1_Y}u_{n-1_X}u_{n_Y}u_{n_X}v_{n-1_X} \xrightarrow[\theta']{*} u_1u_{2_Y}u_{2_X}\dots u_{n_Y}u_{n_X}v_{1_Y}v_{1_X}\dots v_{n-1_Y}v_{n-1_X}$$

$$u_1u_{2_Y}u_{2_X}\dots u_{n_Y}u_{n_X}v_{1_Y}v_{1_X}\dots v_{n-1_Y}v_{n-1_X} \xrightarrow[\theta']{(8+9)*} u_1u_2\dots u_nv_1v_2\dots v_{n-1}$$

Ainsi si $Q_{v_{n-1}} \subset Y_{v_{n-1}}$, alors la factorisation $w = u_1v_1u_2\dots u_{n-1}v_{n-1}u_n$ est réductible dans θ, comme elle est supposée irréductible nous avons $Q_{v_{n-1}} \cap X_{v_{n-1}} \neq \emptyset$.

Prenons $d \in Q_{v_{n-1}} \cap X_{v_{n-1}}$; alors il existe $c \in P_{v_{n-1}}$, $a \in u_n$ et finalement nous obtenons

$$\xrightarrow{\bar\theta} \underbrace{c \xrightarrow{\bar\theta \cup \bar\theta'^{-1}} d}_{v_{n-1}} \xrightarrow{\bar\theta} \underbrace{a}_{u_n}$$

Ainsi une ballade de u_1 à c est prolongée de u_1 à u_n. □

Nous pouvons maintenant borner le nombre de blocs qui commutent dans les deux sens par θ' :

Lemme 4.4.8 *Soient (A,θ) et (A,θ') deux semi-commutations telles que pour tout mot de permutation uv de A^* fortement connexe pour $\bar\theta \cup \bar\theta'^{-1}$ nous avons $uv \xrightarrow[\theta']{*} vu$ implique $uv \xrightarrow[\theta]{*} vu$.*
Si $w = v_0u_1v_1\dots u_nv_n$ est une factorisation de (u,v) irréductible dans θ et si $u_kv_k\dots u_l$ un facteur de w tel que pour tous les indices i et j nous avons $\mathrm{alph}(v_i) \times \mathrm{alph}(u_j) \subset \theta'$ *alors $l-k+1 \leq |A|$.*

preuve : D'après le Lemme 4.4.6 il existe une ballade de u_0 à u_n passant par $u_kv_k\dots u_l$ appelons B le sous mot de $u_kv_k\dots u_l$ représentant un morceau de ballade: $B = w_km_k\dots w_{l-1}m_{l-1}w_l$.

Clairement aucun des m_i et des w_j n'est réduit au mot vide. Nous allons montrer que les alphabets des m_j sont disjoints.

Supposons qu'il existe i et j des indices, avec $k \leq i < j \leq l$, tels que $m_i = m_i'xm_i''$ et $m_j = m_j'xm_j''$. Remarquons que $xm_i''w_k\dots w_{j-1}m_j'x$ est un mot fortement connexe pour $\bar\theta \cup \bar\theta'^{-1}$.

Prenons $u = w_{i+1}\dots w_j$ et $v = xm_i''w_k\dots w_{j-1}m_j'x$ nous avons $uv \xrightarrow[\theta']{*} vu$ puisque pour tout indices i' et j' nous avons $\mathrm{alph}(v_{i'}) \times \mathrm{alph}(u_{j'}) \subset \theta'$ mais pas $uv \xrightarrow[\theta]{*} vu$ puisque :

- $\mathrm{alph}(u) \cap \mathrm{alph}(v) = \emptyset$ car pour tout i', j' nous avons $\mathrm{alph}(v_{i'}) \times \mathrm{alph}(u_{j'}) \subset \theta'$
- $u \neq \varepsilon$ puisque pour tout i' $w_{i'} \neq \varepsilon$
- $v \neq \varepsilon$ puisqu'il contient x
- $m_i = md$ et $w_{i+1} = aw$ avec $(d, a) \in \bar{\theta}$ puisque B est un facteur de ballade.

Remarquons que nous pouvons simplifier u et v afin d'obtenir des mots de permutation tout en conservant les propriétés ci-dessus : il suffit de conserver une seule occurrence de chaque lettre.

Ceci contredit notre hypothèse et ainsi tous les m_i doivent avoir des alphabets disjoints. Puisque aucun des m_i n'est réduit à ε nous concluons que $m_k \dots m_{l-2}m_{l-1}$ contient au moins $l - k + 1$ lettres différentes et ainsi $l - k + 1 \leq |A|$. □

Maintenant nous avons tous les éléments pour conclure :

Proposition 4.4.1-bis *Soient (A, θ) et (A, θ') deux semi-commutations telles que pour tout mot de permutation uv de A^* fortement connexe pour $\bar{\theta} \cup \bar{\theta'}^{-1}$ nous avons $uv \xrightarrow[\theta']{*} vu$ implique $uv \xrightarrow[\theta]{*} vu$ alors la fonction $\mathrm{rang}_{\theta'}(L)$ est bornée pour tout langage L de $\mathrm{Reg}_\theta(A^*)$ par $|A|^2 + 2|A|$.*

preuve : Soit uv un mot de $f_{\theta'}(L)$. Il existe un mot irréductible, dans θ, w de L tel que

1. $w = v_0 u_1 v_1 \dots u_n v_n$
2. $u_1 \dots u_n \xrightarrow[\theta]{*} u$
3. $v_0 v_1 \dots v_n \xrightarrow[\theta]{*} v$
4. $\mathrm{alph}(v_i) \times \mathrm{alph}(u_j) \subset \theta'$ pour tout $i < j$
5. $\mathrm{rang}_{L,\theta'}(u, v) = n$

Prenons le plus long sous-mot $m = u_{j_1} v_{i_1} \dots u_{j_p} v_{i_p}$ de w vérifiant pour tout indice k, $\mathrm{alph}(u_{j_k}) \times \mathrm{alph}(v_{i_k}) \not\subset \theta'$ et tel que pour tout u_l et $v_{l'}$ tels que $\mathrm{alph}(u_l) \times \mathrm{alph}(v_{l'}) \not\subset \theta'$ et $l \leq l'$, il existe k tel que $l \leq j_k \leq l'$ ou $l \leq i_k \leq l'$.

Remarquons que la deuxième condition est toujours satisfiable car s'il existe u_l et $v_{l'}$ n'appartenant pas à m et tel que $\mathrm{alph}(u_l) \times \mathrm{alph}(v_{l'}) \not\subset \theta'$ avec $j_k \leq l \leq l' \leq i_k$ alors on remplace u_{j_k} par u_l et v_{i_k} par $v_{l'}$.

Nous savons que p est majoré par $|A|$.

Maintenant les u_l et v'_l entre chaque u_{j_k} et v_{i_k} commutent dans les deux sens par θ', nous savons donc qu'il existe au maximum $|A|$ blocs de $u_l v_l$ entre chaque u_{j_k} et v_{i_k} et entre chaque $v_{i_{k-1}}$ et u_{j_k} .

Nous avons $2p + 1$ espaces libres pour les blocs $u_l v_l$ et les p blocs de $u_{j_k} v_{i_k}$, ainsi $n \leq (2p + 1)|A| + p = 2|A|^2 + 2|A|$

4.5 La réciproque : construction d'un contre exemple

Nous avons vu une condition nécessaire : il faut préserver les mots fortement connexes. Nous savons, grâce à quelques exemples, que cette condition n'est pas suffisante. Dans cette partie nous démontrons que s'il existe un mot de permutation uv fortement connexe pour $\bar\theta \cup \bar\theta'^{-1}$ tel que $uv \xrightarrow[\theta']{*} vu$ mais pas $uv \xrightarrow[\theta]{*} vu$ alors il existe un langage L de $\mathrm{Reg}_\theta(A^*)$ tel que $f_{\theta'}(L)$ ne soit pas un langage régulier.

Pour cela nous avons besoin de mieux connaître les mots uv , nous donnons une caractérisation graphique de ces mots.

4.5.1 Caractérisation graphique

Lemme 4.5.1 *Soient (A, θ) et (A, θ') deux semi-commutations telles que tout mot fortement connexe pour $\bar\theta$ l'est aussi pour $\bar\theta'$*

Si il existe un mot uv de A^* tel que:

- *uv est fortement connexe $\bar\theta \cup \bar\theta'^{-1}$*
- *uv est un mot de permutation*
- *$uv \xrightarrow[\theta']{*} vu$ mais $vu \notin f_\theta(uv)$*

Alors il existe un sous-alphabet $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $\mathrm{alph}(uv)$ tel que :

- $n \geq 3$
- $\{(x_0, x_1), \ldots (x_{i-1}, x_i)\} \subset \bar\theta'^{-1}$
- $\{(x_{i+1}, x_{i+2}), \ldots, (x_{n-1}, x_n)\} \subset \bar\theta \cup \bar\theta'^{-1}$
- $(x_0, x_n) \in \theta \cap \theta' \cap \bar\theta^{-1}$
- $(x_i, x_{i+1}) \in \bar\theta \cap \theta' \cap \theta^{-1}$
- $\{x_0, \ldots, x_i\} \times \{x_{i+1}, \ldots, x_n\} \subset \theta'$

$$\begin{tikzcd}[row sep=large, column sep=large]
x_i \arrow[r, "\bar\theta \cap \theta'"] & x_{i+1} \arrow[d, squiggly, "\bar\theta \cup \bar\theta'^{-1}"] \\
x_0 \arrow[u, squiggly, "\bar\theta'^{-1}"] \arrow[r, "\bar\theta^{-1} \cap \theta'"'] & x_n
\end{tikzcd}$$

preuve : Comme uv est un mot de permutation, $vu \notin f_\theta(vu)$ et $vu \in f_{\theta'}(vu)$ il existe un couple de lettres $(x_i, x_{i+1}) \in \mathrm{alph}(u) \times \mathrm{alph}(v)$ dans $\bar\theta \cap \theta'$. De plus $\bar\theta'$ préserve les mots fortement connexes de $\bar\theta$, nous avons $(x_i, x_{i+1}) \in \bar\theta \cap \theta^{-1} \cap \theta'$.

Posons $D(x_i) = \{y \in \mathrm{alph}(uv) \mid$ il existe un chemin de x_i à y dans $(\mathrm{alph}(uv), \bar\theta')\}$ et $I(x_i) = \mathrm{alph}(uv) \setminus D(x_i)$. Posons $u' = \Pi_{D(x_i)}(uv)$ et $v' = \Pi_{I(x_i)}(uv)$.

Puisque $uv \xrightarrow[\theta']{*} vu$, $D(x_i)$ est inclus dans $\mathrm{alph}(u)$, remarquons alors que nous avons $u'v' \xrightarrow[\theta']{*} v'u'$ et $v'u' \notin f_\theta(u'v')$ (car x_{i+1} est dans v') .

De plus $u'v'$ est fortement connexe pour $\bar\theta \cup \bar\theta'^{-1}$ (car $D(x_i) \cup I(x_i) = \mathrm{alph}(uv)$) et donc il existe dans $(\mathrm{alph}(v'), \bar\theta \cup \bar\theta'^{-1})$ un plus court chemin de x_{i+1} à une lettre, disons x_n, telle qu'il existe un arc de $\bar\theta \cup \bar\theta'^{-1}$ partant de x_n et aboutissant à une lettre x_0 de $\mathrm{alph}(u')$.

Comme $u'v' \xrightarrow[\theta']{*} v'u'$ le couple (x_n, x_0) doit appartenir à $\bar\theta \cap \theta'^{-1}$ et donc à $\bar\theta \cap \theta^{-1} \cap \theta'^{-1}$ car

$\bar{\theta}'$ conserve les mots fortement connexes de $\bar{\theta}$.

Pour conclure, comme x_0 est dans alph(u') x_0 est aussi dans $D(x_i)$ et nous savons qu'il existe un chemin $\{(x_0, x_1), \ldots, (x_{i-1}, x_i)\}$ inclus dans (alph$(u'), \bar{\theta}'^{-1}$). □

4.5.2 Simplification de θ

Le fait suivant nous autorise à utiliser une semi-commutation plus grande que θ :

Fait 4.5.2 *Soient (A,γ) et (A,θ') deux semi-commutations. Si (A,θ') n'est pas Reg-compatible avec (A,γ) alors (A,θ') n'est pas Reg-compatible avec toute semi-commutation incluse dans (A,γ).*

preuve : Tout langage L de $\mathrm{Reg}_\gamma(A^*)$ est clos pour toute semi-commutation incluse dans (A,γ) . Maintenant si (A,θ') n'est pas Reg-compatible avec (A,γ), il existe un langage L tel que $f_{\theta'}(L)$ n'est pas régulier.

Nous définissons la plus grande semi-commutation possible conservant les propriétés du mot uv :

Définition 4.5.3 *Soient (A,θ) et (A,θ') deux semi-commutations telles que :*

- $\{(x_0, x_1), \ldots (x_{i-1}, x_i)\} \subset \bar{\theta}'^{-1}$
- $\{(x_{i+1}, x_{i+2}), \ldots, (x_{n-1}, x_n)\} \subset \bar{\theta} \cup \bar{\theta}'^{-1}$
- $(x_0, x_n) \in \theta \cap \theta' \cap \bar{\theta}^{-1}$
- $(x_i, x_{i+1}) \in \bar{\theta} \cap \theta' \cap \theta^{-1}$
- $\{x_0, \ldots, x_i\} \times \{x_{i+1}, \ldots, x_n\} \subset \theta'$

(A,γ) est définie comme suit :

$$\gamma = A \times A - \{(x_k, x_{k+1}) \in \theta'^{-1}\} - \{(x_n, x_0), (x_i, x_{i+1})\} - \{(x,x) \mid x \in A\}$$

Désormais nous ne travaillerons plus avec θ.

4.5.3 Définition d'un langage

Nous définissons ici des petits langages réguliers sur un modèle proche de $(ab)^*b(a+b)^*$. A l'aide de ceux-ci nous construisons le langage $\mathcal{L}$, de $\mathrm{Reg}_\theta(A^*)$ sur lequel se fonde notre preuve.

Définition 4.5.4 *Soient (A,γ) une semi-commutation et w un mot connexe de $\bar{\gamma}$.*

$$D_w^\gamma = \{m \mid \exists m' \text{ tel que } w \xrightarrow[\gamma\cap\gamma^{-1}]{*} m' \xrightarrow[\gamma\cap\bar{\gamma}^{-1}]{} m \text{ ou } w^2 \xrightarrow[\gamma\cap\gamma^{-1}]{*} m' \xrightarrow[\gamma\cap\bar{\gamma}^{-1}]{} m\}$$

$$L_w^\gamma = \begin{cases} f_\gamma(w^*) \textit{ si } w \textit{ est fortement connexe pour } \bar\gamma \\ f_{\gamma\cap\gamma^{-1}}[w^* f_\gamma(D_w^\gamma[\mathrm{alph}(w)]^*)] \textit{ autrement} \end{cases}$$

Exemple 4.5.5 *Reprenons l'exemple 4.3.8 :*

$$\begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & b \\ & & \\ d & \longleftarrow & c \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cc} a & b \\ \downarrow & \uparrow \\ d & c \end{array}$$

$$(A,\bar\gamma) \qquad\qquad\qquad\qquad (A,\bar\theta')$$

Nous avons $D_{ab} = \{aabb\}$ *et* $D_{dc} = \{cd, cddc, dccd, ccdd\}$.

D'où $L_{ab} = f_{\gamma\cap\gamma^{-1}}[(ab)^* f_\gamma(aabb(a+b)^*)] = (ab)^* aa^+ ba^* b(a+b)^*$,

et $L_{dc} = f_{\gamma\cap\gamma^{-1}}[(dc)^* f_\gamma(\{cd + cddc + dccd\}(c+d)^*)] = (dc)^* c^+ d(d+c)^*$.

Maintenant nous sommes capables de définir le langage qui nous servira pour démontrer que la condition sur uv est nécessaire, nous l'appellerons $\mathcal{L}$:

Définition 4.5.6 *Soient* A *l'alphabet* $\{x_0, \ldots, x_n\}$ *et* (A, γ) *une semi-commutation telle que* $(x_n, x_0) \in \bar\gamma$ *et* $\bar\gamma \subset \{(x_k, x_{k+1}) \mid k < n\} \cup \{(x_n, x_0)\}$.

Notons $m_0 m_1 \ldots m_r$ *la factorisation de* $x_0 x_1 \ldots x_n$ *telle que* $\{m_0 m_r\} \cup \{m_j \mid 0 < j < r\}$ *est l'ensemble des composantes connexes de* $(\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}, \bar\gamma)$.

$$\mathcal{L} \textit{ est défini par } L_{m_1}^\gamma \sqcup\!\sqcup L_{m_2}^\gamma \sqcup\!\sqcup \ldots \sqcup\!\sqcup L_{m_0 m_r}^\gamma$$

Désormais $m_0 m_r$ et les autres m_i représenteront toujours la projection sur les composantes connexes de $x_0 x_1 \ldots x_n$ pour $\bar\gamma$.

Regardons un peu la structure des langage $L_{m_j}^\gamma$, nous avons trois familles :

Première famille : $m_j = y$ est réduit à une lettre alors

$$L_j^\gamma = y^*$$

Deuxième famille : m_j est un mot $y_0 \ldots y_k$ avec $0 < j < r$ et $(\mathrm{alph}(m_j), \bar\gamma) = \{(y_l, y_{l+1} \mid l < k\}$:

$$L_{m_j}^\gamma = f_{\gamma\cap\gamma^{-1}} \left((m_j)^* f_\gamma(D_{m_j}^\gamma \mathrm{alph}(m_j)^*)\right)$$

et par exemple pour $k > 3$

$$\begin{aligned} D_{m_j}^\gamma &= \overline{y_0}\underline{y_0}\overline{y_1 \cdots y_k}\underline{y_1 \ldots y_k} + \overline{y_0 \cdots y_{k-1}}\underline{y_0 \ldots y_{k-1}}\overline{y_k}\underline{y_k} \\ &+ \bigcup_{l \in 2..k-1} (\overline{y_0 \cdots y_{l-1}}\underline{y_0 \ldots y_{l-1}}\overline{y_l \cdots y_k}\underline{y_l \ldots y_k}) \end{aligned}$$

Troisième famille : le mot m_0m_r (cf dc dans l'exemple 4.5.5)

$$L^{\gamma}_{m_0m_r} = f_{\gamma\cap\gamma^{-1}}\left((m_0m_r)^* f_\gamma(D^{\gamma}_{m_j}\mathrm{alph}(m_0m_r)^*)\right)$$

$$D^{\gamma}_{m_0m_r} = m_rm_0 + L^{\gamma}_{m_r} ⧢ m_0x_nm_0x_n + L^{\gamma}_{m_0} ⧢ x_0m_rx_0m_r$$

4.5.4 Un langage régulier

Les langages L^{γ}_m n'appartiennent pas à $\mathcal{R}_\theta$, la famille des langages construits à l'aide des opérations quasi-rationnelles. Dans cette partie nous démontrons que les langages L^{γ}_m sont bien γ-clos et réguliers, et, ainsi, établissons que le langage $\mathcal{L}$ appartient bien à $\mathrm{Reg}_\gamma(A^*)$. Donnons d'abord deux lemmes de dérivation sur les mots de permutation :

Lemme 4.5.7 *Soit (A,θ) une semi-commutation et un mot de permutation w_1abw_2 sur A^* .*

$$\text{si } w_1abw_2 \xrightarrow[\theta]{*} w'_1abw'_2 \text{ alors } w_1baw_2 \xrightarrow[\theta]{*} w'_1baw'_2$$

preuve : Supposons que $w'_1baw'_2$ ne soit pas dans $f_\theta(w_1baw_2)$, grâce au Lemme de Projection nous savons qu'il existe un couple de lettres (x,y) dans $\bar\theta$ tel que $\Pi_{xy}(w_1baw_2) = xy$ et $\Pi_{xy}(w'_1baw'_2) = yx$.

Comme pour tout couple (x,y) différent de (a,b) nous avons $\Pi_{xy}(w_1abw_2) = \Pi_{xy}(w_1baw_2)$ et $\Pi_{xy}(w'_1abw'_2) = \Pi_{xy}(w'_1baw'_2)$ avec $w_1abw_2 \xrightarrow[\theta]{*} w'_1abw'_2$ nous devons avoir $(x,y) = (a,b)$. Mais nous avons $\Pi_{ab}(w_1baw_2) = \Pi_{ab}(w'_1baw'_2)$. □

Lemme 4.5.8 *Soit (A,θ) une semi-commutation et un mot de permutation w sur A^* . Si $w \xrightarrow[\theta]{*} w'$ alors pour tous les mots u,m,v de A^* tels que $w = umv$ nous avons : $u\Pi_m(w')v \xrightarrow[\theta]{*} w'$.*

preuve : Comme u est un mot de permutation et grâce au Lemme de Projection nous savons que w' n'est pas dans $f_\theta(u\Pi_m(w')v)$ si et seulement si il existe au moins un couple de lettres (a,b) n'appartenant pas à θ tel que t $\Pi_{ab}(u\Pi_m(w')v) = ab$ et $\Pi_{ab}(w') = ba$.

Si a ou b n'appartient pas à $\mathrm{alph}(m)$ alors nous avons $\Pi_{ab}(u\Pi_m(w')v) = \Pi_{ab}(w) = ab$, et puisque $w \xrightarrow[\theta]{*} w'$ et $\Pi_{ab}(w') = ba$ ce qui est impossible : $(a,b) \notin \theta$.

Maintenant si a et b appartiennent à $\mathrm{alph}(m)$ nous aboutissons aussi à une impasse :$\Pi_{ab}(u\Pi_m(w')v) = \Pi_{ab}(\Pi_m(w')) = \Pi_{ab}(w')$. □

Proposition 4.5.9 *Soit (A,θ) une semi-commutation et u un mot de A^* tel que* $(\mathrm{alph}(u),\bar\theta)$ *est un graphe connexe.*

Le langage $L_u^\theta = f_{\theta\cap\theta^{-1}}[u^* f_\theta(D_u^\theta[\mathrm{alph}(u)]^*)]$ *est dans* $\mathrm{Reg}_\theta(A^*)$.

preuve : Nous pouvons nous restreindre au cas "u est un mot de permutation" sans rien perdre.

L_u^θ est un langage régulier car on peut le construire à l'aide des opérations quasi-rationnelles définies pour la commutation partielle $(A,\theta_s) = (A,\theta \cap \theta^{-1})$:

> u est connexe pour $\bar\theta$, u est (fortement) connexe pour θ_s ; $L_1 = f_{\theta_s}[u^*]$ est un langage de $\mathrm{Reg}_{\theta_s}(A^*)$.
>
> D_u^θ est un langage fini, $L_2 = f_\theta(D_u^\theta[\mathrm{alph}(u)]^*)]$ est un langage de $\mathrm{Reg}_{\theta_s}(A^*)$.
>
> L_1 et L_2 sont dans $\mathrm{Reg}_{\theta_s}(A^*)$, $L_u^\theta = f_{\theta_s}(L_1L_2)$ l'est aussi.

L_u^θ est θ-clos :

Dans ce paragraphe nous noterons L_u le langage L_u^θ et D_u le langage D_u^θ .

Supposons que L_u n'est pas θ-clos. Par définition, cela entraîne l'existence d'un mot de L_u $w = vabv'$, avec (a,b) un couple de lettres de θ , tel que le mot $w' = vbav'$ ne soit pas dans L_u . Puisque L_u est θ_s-clos (a,b) appartiennent $\theta \cap \bar\theta^{-1}$.

Comme w est dans L_u , il existe un entier k et un mot t de $D_u\mathrm{alph}(u)^*$ tels que $u^kt \in L_u$ avec $t \xrightarrow[\theta]{*} s$ et $u^ks \xrightarrow[\theta_s]{*} w'$. Comme t appartient à $D_u\mathrm{alph}(u)^*$ il existe un mot t' tel que $ut' \xrightarrow[\theta]{*} t$. Ainsi nous avons $u^{k+1}t' \xrightarrow[\theta]{*} u^ks \xrightarrow[\theta_s]{*} w'$.

Nous allons utiliser une numérotation classique, mais avec une semi-commutation adaptée au langage L_u : dans ce langage une partie est θ-close mais le langage est θ_s-clos.

Soit A_N l'alphabet numéroté : $\{x_i \mid x \in A, 1 \le i \le N = |w|\}$.

Posons $w_N = \mathrm{num}(w) = v_Na_ib_jv'_N$, $\mathrm{num}(w') = w'_N$, $\mathrm{num}(u^{k+1}t') = u_1u_2\ldots u_{k+1}t'_N$ où $u = x_0x_1\ldots x_n$ et $u_i = x_{0_i}x_{1_i}\ldots x_{n_i}$.

Nous utiliserons la semi-commutation suivante :

$$\begin{aligned}\theta_N &= \{(x_i,y_j) \mid (x,y)\in\theta,\ x_i\in A_N,\ y_j\in A_N,\ k\le j,\ k\le i\}\\ &\bigcup\{(x_i,y_j) \mid (x,y)\in\theta_s,\ x_i\in A_N,\ y_j\in A_N\}\end{aligned}$$

Clairement, pour tout mot w de A^* nous avons $w \in L_u \iff \mathrm{num}(w) \in \mathrm{num}(L_u)$, de plus :

Résultat : *Si* $i \le k$ *et* $r \in u^iD_u\mathrm{alph}(u^*)$ *avec* $|r| \le |w|$ *alors* $f_{\theta_N}[\mathrm{num}(r)] \subset \mathrm{num}(L_u)$.

preuve : Soit $P = \mathrm{alph}(\mathrm{num}(r)) \setminus \mathrm{alph}(u_1\ldots u_i)$.

Supposons qu'il existe un mot w_1 dans $f_{\theta_N}[\mathrm{num}(r)]$ tel que w_1 ne soit pas dans $\mathrm{num}(L_u)$. Comme $\mathrm{num}(r)$ est un mot de permutation nous pouvons appliquer le Lemme 4.5.8, nous obtenons

$$\mathrm{num}(r) \xrightarrow[\theta_N]{*} u_1\ldots u_i\Pi_P[w_1] \xrightarrow[\theta_N]{*} w_1$$

Le mot $u_1 \dots u_i \Pi_P[w_1]$ appartient à $\mathrm{num}(L_u)$ puisque $f_\theta[D_u \mathrm{alph}(u^*)]$ est θ-clos.

Maintenant si w_1 n'appartient pas à $f_{\theta_N \cap \bar{\theta}_N^{-1}}(u_1 \dots u_i \Pi_P[w_1])$, cela signifie qu'il existe un couple de lettres (x_l, y_k) tel que $\Pi_{x_l y_k}(u_1 \dots u_i \Pi_P[w_1]) = x_l y_k$, $\Pi_{x_l y_k}[w_1] = y_k x_l$ et que $(x_l, y_k) \in \theta_N \cap \bar{\theta}_N^{-1}$, mais c'est impossible :

nous devons avoir $l \leq i$ puisque $\Pi_P(u_1 \dots u_i \Pi_P[w_1]) = \Pi_P[w_1])$ et la d'après la définition de θ_N nous obtenons $(x_l, y_k) \notin \theta_N$.

Maintenant nous sommes équipés pour montrer que L_u est un langage θ-clos :

Premier cas : a_i et b_j appartiennent tous deux à la partie θ-close i.e. $i > k$ et $j > k$. D'après le résultat intermédiaire précédent w'_N appartient à $\mathrm{num}(L_u)$ et ainsi w' est dans L_u .

Deuxième cas : $i \leq k$ ou $j \leq k$
Comme (a, b) appartient à $\theta \cap \bar{\theta}^{-1}$, le mot $a_i b_j$ doit être un sous-mot de w_N et donc $i \leq j$ c'est pourquoi a_i n'est pas dans la partie θ-close (i.e. $i \leq k$).
Supposons maintenant $j > i + 1$, cela signifie que b_{i+1} est devant a_i dans $\mathrm{num}(w)$; cela entraîne l'appartenance de a_i à la partie θ-close : pour obtenir $\mathrm{num}(w)$ il faut utiliser la règle non symétrique $a_i b_{i+1} \longrightarrow b_{i+1} a_i$. Ainsi l'indice j vaut soit i soit $i + 1$.

Nous avons $$u_i u_{i+1} \xrightarrow[\theta_N]{*} \Pi_{u_i u_{i+1}}(w_N) = m_1 a_i b_j m_2$$

et aussi $$u_1 u_2 \dots m_1 a_i b_j m_2 \dots u_{k+1} t'_N \xrightarrow[\theta_N]{*} w_N = v_N a_i b_j v'_N$$

Le Lemme 4.5.7 nous donne $$u_1 u_2 \dots m_1 b_j a_i m_2 \dots u_{k+1} t'_N \xrightarrow[\theta_N]{*} w'_N = v_N b_j a_i v'_N$$

Le mot $u_1 u_2 \dots m_1 b_j a_i m_2 \dots u_{k+1} t'_N$ est dans $\mathrm{num}(L_u)$ *car si nous oublions la numérotation* le mot $m_1 b_j a_i m_2$ appartient à D_u .

Nous pouvons conclure : $u_1 u_2 \dots m_1 b_j a_i m_2 \dots u_{k+1} t'_N \xrightarrow[\theta_N]{*} w'_N$ et
$f_{\theta_N}(u_1 u_2 \dots u_{i-1} m_1 b_j a_i m_2 \dots u_{k+1} t'_N) \subset \mathrm{num}(L_u)$ ainsi $w'_N \in \mathrm{num}(L_u)$, d'où $w' \in L_u$.

Le langage L_u est un langage régulier et θ-clos . □

4.5.5 Calcul d'une intersection

Nous concluons la démonstration du Théorème 4.3.7 par la proposition suivante :

Proposition 4.5.10 *Soit A l'alphabet $\{x_0, \dots, x_n\}$ avec $n \geq 3$. Soient (A, γ) et (A, θ') deux semi-commutations telles que :*

$$\gamma = A \times A - \{(x_k, x_{k+1}) \in \theta'^{-1}\} - \{(x_n, x_0), (x_i, x_{i+1})\} - \{(x, x) \mid x \in A\}$$

et

1. $\{(x_0, x_1), \ldots, (x_{i-1}, x_i)\} \subset \bar{\theta}'^{-1}$
2. $\{(x_{i+1}, x_{i+2}), \ldots, (x_{n-1}, x_n)\} \subset \bar{\gamma} \cup \bar{\theta}'^{-1}$
3. $(x_0, x_n) \in \gamma \cap \theta' \cap \bar{\gamma}^{-1}$
4. $(x_i, x_{i+1}) \in \bar{\gamma} \cap \theta' \cap \gamma^{-1}$
5. $\{x_0, \ldots, x_i\} \times \{x_{i+1}, \ldots, x_n\} \subset \theta'$.

$f_{\theta'}(\mathcal{L})$ n'est pas un langage régulier

Pour mettre en évidence la non régularité de $f_{\theta'}(\mathcal{L})$ nous calculons son intersection avec un langage régulier I . Nous avons à considérer deux cas :

Premier cas : i est supérieur à 1 alors nous posons $u = x_0 \ldots x_i$ et $v = \begin{cases} x_n & \text{si } i+1 = n \\ x_{i+1} \ldots x_n \text{sinon} \end{cases}$

et pour l'intersection nous utiliserons le langage

$$I = (x_{i+1} \ldots x_n)^*(x_0 x_1 \ldots x_i)^* x_1^2 \ldots x_n^2 x_0^2$$

deuxième cas : $i = 0$, nous avons $u = x_0$ et $v = x_1 \ldots x_n$. Nous appellerons x_k la première lettre de m_r .

Si m_r contient au moins deux lettres i.e. $k \neq n$ nous utiliserons pour l'intersection le langage

$$I = (x_1 \ldots x_n)^* x_0^* x_k^2 \ldots x_n^2 x_0^2 x_1^2 \ldots x_{k-1}^2$$

Si $m_r = x_n$ et $n > 2$ nous utiliserons

$$I = (x_1 \ldots x_n)^* x_0^* x_n^2 x_0^2 x_1^2 \ldots x_{n-1}^2$$

Pour $m_r = x_n$ et $n = 2$ nous avons

$$I = (x_1 x_2)^* x_0^* x_2^2 x_0^2 x_1^2$$

En premier lieu nous établissons deux lemmes : le premier met en lumière les contraintes imposées aux mots de $\mathcal{L}$; le second celles des mots de $f_{\theta'^{-1}}(I)$.

Exemple 4.5.11 *(suite de l'exemple 4.3.8)*

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & b \\ & & \\ d & \longleftarrow & c \end{array} & \qquad & \begin{array}{cc} a & b \\ \downarrow & \uparrow \\ d & c \end{array} \\ (A, \bar{\theta}) & & (A, \bar{\theta}') \end{array}$$

Nous avons vu que $L_{ab} = (ab)^* aa^+ ba^* b(a+b)^*$ et $L_{dc} = (dc)^* c^+ d(d+c)^*$, sont deux langages de $\mathrm{Reg}_\theta(A^*)$. Nous calculons l'intersection

$$f_{\theta'}(L_{ab} \sqcup\!\sqcup L_{dc}) \cap (bc)^*(da)^* a^2 b^2 c^2 d^2$$

Lemme 4.5.12

1. Soit $\{x_l, x_{l+1}\} \subset \mathrm{alph}(m_j)$ *avec* $0 < j < r$ *alors*

$$\Pi_{x_l x_{l+1}}(\mathcal{L}) \subset (x_l^2 + x_l x_{l+1} x_l)(x_l + x_{l+1})^*$$

2. Soit $\{x_l, x_{l+1}\} \subset \mathrm{alph}(m_r)(\text{ou } \mathrm{alph}(m_0))$ *alors*

$$\Pi_{x_l x_{l+1}}(\mathcal{L}) \subset x_l(x_l + x_{l+1})^*$$

De plus pour chaque mot m *de* $\mathcal{L}$ *commençant par* x_0 *nous avons*

$$\Pi_{x_l x_{l+1}}(m) \in (x_l^2 + x_l x_{l+1} x_l)(x_l + x_{l+1})^*$$

et

$$\Pi_{x_n x_0}(m) \in x_0 x_n (x_0 + x_n)^*$$

preuve :

1. Nous avons $L_{m_j} \subset f_\gamma[m_j m_j (\mathrm{alph}(m_j))^*]$ c'est pourquoi

$$\Pi_{x_l, x_{l+1}}(L_{m_j}) \subset f_\gamma[x_l x_{l+1} x_l x_{l+1} (x_l + x_{l+1})^*]$$

Comme $(x_l, x_{l+1}) \in \bar{\gamma}$ il est facile de voir

$$\Pi_{x_l x_{l+1}}(L_{m_j}) \subset (x_l^2 + x_l x_{l+1} x_l)(x_l + x_{l+1})^*$$

2. Nous avons $L_{m_0 m_r} \subset f_\gamma[m_0 m_r (\mathrm{alph}(m_0 m_r))^*]$. Lorsque x_0 est la première lettre de m nous avons $\Pi_{m_0 m_r}(m) \in x_0 f_\gamma[({x_0}^{-1} m_0 m_r m_0 m_r (\mathrm{alph}(m_0 m_r))^*]$ c'est pourquoi, comme ci-dessus, $\Pi_{x_l x_{l+1}}(m) \in (x_l^2 + x_l x_{l+1} x_l)(x_l + x_{l+1})^*$ et puisque $(x_n, x_0) \in \bar{\gamma}$ nous obtenons $\Pi_{x_n x_0}(m) \in x_0 x_n (x_0 + x_n)^*$. □

Le lemme suivant peut être facilement montré avec le Lemme de Numérotation et le Lemme de projection :

Lemme 4.5.13 *Soient* m *et* m' *des mots de* A^* *tels que* $m \xrightarrow[\theta']{*} m'$ *et un couple de lettres* (x, y) *de* $\bar{\theta}'$.

Si $\Pi_{xy}(m') \in (yx)^* y^2 x^2$ *alors* $\Pi_{xy}(m) \in {D_1'}^*(y, x)$.

Si $\Pi_{xy}(m') \in (yx)^* x^2 y^2$ *alors* $\Pi_{xy}(m) \in {D_1'}^*(y, x)(\varepsilon + xy + xy^2x + x^2y^2)$.

Nous spécialisons ce dernier lemme pour les deux types d'intersection, pour le cas $i > 0$:

Lemme 4.5.13A *Soit* m *un mot de* $\mathcal{L}$. *Si* $f_{\theta'}(m) \cap I \neq \emptyset$ *alors*

1. Pour tout indice j *différent de* O *et de* i *tel que* $(x_{j+1}, x_j) \in \bar{\theta}'$ *nous avons* $\Pi_{x_{j+1} x_j}(m) \in {D_1'}^*(x_j, x_{j+1})$.

2. Si $i \neq 1$ *alors* $\Pi_{x_i x_1}(m) \in {D_1'}^*(x_1, x_i)$.

3. $\Pi_{x_0 x_1}(m) \in {D_1'}^*(x_0, x_1)(\varepsilon + x_1 x_0 + x_1 x_0^2 x_1 + x_1^2 x_0^2)$.

preuve : 1 et 3 proviennent directement du Lemme 4.5.13. Pour 2 nous avons :

Si $\Pi_{ab}(m) \in D_1'^*(a,b)$ et $\Pi_{bc}(m) \in D_1'^*(b,c)$ alors nous obtenons $\Pi_{ac}(m) \in D_1'^*(a,c)$. Comme $\{(x_1,x_2),\ldots,(x_{i-1},x_i)\}$ est inclus dans $\bar{\theta}'^{-1}$ nous obtenons par 1, $\forall l \in 1..i$ $\forall j \in 1..i$ avec $l > j$ $\Pi_{x_j x_l}(m) \in D_1'^*(x_j,x_l)$. D'où $\Pi_{x_1 x_i}(m) \in D_1'^*(x_1,x_i)$.

Pour le deuxième cas ($i = 0$) nous avons :

Lemme 4.5.13B *Soit m un mot de $\mathcal{L}$. Si $f_{\theta'}(m) \cap I \neq \emptyset$ alors*

1. Pour tout indice j différent de 0 tel que $(x_{j+1},x_j) \in \bar{\theta}'$ nous avons $\Pi_{x_{j+1}x_j}(m) \in D_1'^*(x_j,x_{j+1})$.

2. $\Pi_{x_{k-1}x_k}(m) \in D_1'^*(x_{k-1},x_k)(\varepsilon + x_k x_{k-1} + x_k x_{k-1}^2 x_k + x_k^2 x_{k-1}^2)$ où x_k est la première lettre de m_r

Le premier cas

Nous décortiquons l'exemple 4.3.8, la (longue) preuve que nous donnons illustre le plus fidèlement possible la démonstration qui suivra.

Exemple 4.5.14 *(suite de l'exemple 4.3.8)*

$$\begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & b \\ & & \\ d & \longleftarrow & c \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cc} a & b \\ \downarrow & \uparrow \\ d & c \end{array}$$

$$(A,\bar{\theta}) \qquad\qquad\qquad\qquad (A,\bar{\theta}')$$

Nous avons $L_{ab} = (ab)^*aa^+ba^*b(a+b)^*$ et $L_{dc} = (dc)^*c^+d(d+c)^*$, posons $\mathcal{L} = L_{ab} \sqcup\!\sqcup L_{dc}$. Calculons $f_{\theta'}(\mathcal{L}) \cap \mathcal{I} = (bc)^*(da)^*a^2b^2c^2d^2$:

Remarquons que $m = (dabc)^n(da)^i a^2 (bc)^j b^2c^2d^2 \xrightarrow[\theta']{*} (bc)^{n+j}(da)^{n+i}a^2b^2c^2d^2$ et qu'en particulier m est un mot de $\mathcal{L}$ si et seulement si $i < 2$:
nous avons $L_{ab} = (ab)^*aa^+ba^*b(a+b)^*$ *et* $\Pi_{ab}(m) = (ab)^n a^i a^2 b^j b^2$
et aussi $L_{dc} = (dc)^*c^+d(d+c)^*$ *et* $\Pi_{dc}(m) = (dc)^n d^i c^j c^2 d^2$
si $i > 2$ nous avons $\Pi_{dc}(m') \notin L_{dc}$.
Ainsi le langage $\{(bc)^{n+j}(da)^{n+i}a^2b^2c^2d^2 \mid n,j \leq 0 \text{ et } i \leq 1\}$ est inclus dans $f_{\theta'}(\mathcal{L}) \cap \mathcal{I}$.

Maintenant soit m un mot de $\mathcal{L}$ tel que $f_\theta'(m) \cap \mathcal{I} = (bc)^p(da)^q a^2b^2c^2d^2$

Supposons que m ne commence pas par d , alors si la première lettre de m est

- *a : d'après le Lemme 4.5.13B il faut avoir $\Pi_{da}(m) \in D_1'^*(d,a)(\varepsilon + ad + ad^2a + a^2d^2)$ et ainsi si a est la première lettre de m nous avons $q = 0$.*
- *b : alors m n'est pas un mot de $\mathcal{L}$: $\Pi_{ab}(m) \notin L_{ab} = (ab)^*aa^+ba^*b(a+b)^*$ (Lemme 4.5.12) .*

- *c : le Lemme 4.5.13B nous indique que* $\Pi_{bc} \in D_1'^{*}(b,c)$ *et ainsi* $f_{\theta'}(m) \cap \mathcal{I} = \emptyset$.

Ainsi si m *ne commence pas par* d *nous avons* $q = 0$ *(C'est le Lemme 4.5.15).*

Maintenant si m *a pour première lettre* d *, nous allons montrer que le plus petit facteur gauche de* m *, noté* w *, contenant* c *est égale à* $dabc$ *ou sinon nous avons* $q \leq 1$ *(c'est le Lemme 4.5.16) :*

Supposons qu'au moins une lettre n'appartienne pas à w *, alors si une de ces lettres est :*

- *b : le Lemme 4.5.13B nous indique que* $\Pi_{bc} \in D_1'^{*}(b,c)$ *et ainsi* $f_{\theta'}(m) \cap \mathcal{I} = \emptyset$.
- *soit a : si b apparaît dans* w *nous avons :* m *n'est pas un mot de* $\mathcal{L}$ *:* $\Pi_{ab}(m) \notin L_{ab} = (ab)^* aa^+ ba^* b(a+b)^*$ *(Lemme 4.5.12) .*

Ainsi $a, b, c, d,$ *apparaissent dans* w *. Supposons que nous ayons au moins une lettre qui apparaisse plus d'une fois, si cette lettre est :*

- *d : nous avons* $\Pi_{cd}(m) \in dd^+c(c+d)^*$ *, or* $L_{dc} = (dc)^* c^+ d(d+c)^*$ *,* m *n'est pas un mot de* $\mathcal{L}$.
- *a : nous avons* $\Pi_{ad}(m) \in daa^+(a+d)^*$ *et d'après le Lemme 4.5.13B il faut avoir* $\Pi_{da}(m) \in D_1'^{*}(d,a)(\varepsilon + ad + ad^2a + a^2d^2)$ *et ainsi nous avons* $q < 2$.
- *b : si a apparaît une seule fois dans* w *, nous avons* $\Pi_{ab}(m) \in (abb + bab + bba)(a+b)^*$ *mais* $L_{ab} = (ab)^* aa^+ ba^* b(a+b)^*$ *et donc* $m \notin \mathcal{L}$.

Ainsi si $w \neq dabc$ *nous avons* $q \leq 1$.

Maintenant par récurrence nous montrons que nous avons toujours $q \leq p+1$ *:*

Pour $p = 0$ *: comme nous disposons que de deux b nous avons* $\Pi_{ab}(m) \in aa^+ba^*ba^*$ *ainsi il n'existe pas de mot* m' *tel que* $m = dabcm'$ *ce qui entraîne* $q \leq 1$.

Pour $p = k+1$ *: comme ci-dessus si il n'existe pas de mot* m' *tel que* $m = dabcm'$ *alors* $q \leq 1$.
Supposons que $m = dabcm'$ *; maintenant si* $f_{\theta'}(m') \cap \mathcal{I} = (bc)^k (da)^{q-1} a^2 b^2 c^2 d^2$ *nous appliquons l'hypothèse de récurrence :* $q - 1 \leq k+1$ *i.e.* $q \leq p+1$.
Pour conclure si $f_{\theta'}(m') \cap \mathcal{I} = \emptyset$ *alors nous devons avoir* $q = 0$ *: si* $q > 0$ *comme* $dabcm' \xrightarrow[\theta']{*} (bc)^{k+1}(da)^{\alpha+1} a^2 b^2 c^2 d^2$ *nous avons* $dabcm' \xrightarrow[\theta']{*} dabc(bc)^k (da)^{\alpha} a^2 b^2 c^2 d^2$.

Nous avons montré

$$f_{\theta'}(\mathcal{L}) \cap \mathcal{I} = \{(bc)^p (da)^q a^2 b^2 c^2 d^2 \mid q \leq p+1\}$$

Nous allons montrer que

$$f_{\theta'}(\mathcal{L}) \cap I = \{v^p u^q x_1^2 \ldots x_n^2 x_0^2 \mid q \leq p+1\} = K$$

Tout d'abord montrons l'inclusion $K \subset f_{\theta'}(\mathcal{L}) \cap I$:

Soit K_1 le langage $(uv)^*(\varepsilon + u)x_1^2 \dots x_i^2 v^* x_{i+1}^2 \dots x_n^2 x_0^2$; clairement K_1 est inclus dans $\mathcal{L}$.

Soit $m = (uv)^a u^b x_1^2 \dots x_i^2 v^c x_{i+1}^2 \dots x_n^2 x_0^2$ un mot de K_1 (i.e. $a \geq 0$, $b \in \{0,1\}$, $c \geq 0$). Comme $uv \xrightarrow[\theta']{*} vu$, nous avons $f_{\theta'}(m) \cap I = v^{a+c} u^{a+b} x_1^2 \dots x_i^2 x_{i+1}^2 \dots x_n^2 x_0^2$ ainsi nous obtenons $f_{\theta'}(\mathcal{L}) \cap I = \{v^{a+c} u^{a+b} x_1^2 \dots x_i^2 x_{i+1}^2 \dots x_n^2 x_0^2 \mid a \geq 0,\ b \in \{0,1\},\ c \geq 0\}$ c'est le langage K .

Pour la preuve de l'autre inclusion nous considérons un mot m de $\mathcal{L}$ tel que $f_{\theta'}(m) \cap I = v^p u^q x_1^2 \dots x_n^2 x_0^2$ et nous montrons par récurrence sur p que $q \leq p + 1$.

Le lemme suivant dit que si m ne débute pas par x_0 alors nous "arrêtons la production des u" (i.e. $q = 0$). Ensuite nous exposons un second lemme montrant que si x_0 est la première lettre de m alors le plus petit facteur gauche de m contenant x_n contient toutes les autres lettres.

Lemme 4.5.15 *Soit m un mot de $\mathcal{L}$ tel que $f_{\theta'}(m) \cap I = v^p u^q x_1^2 \dots x_n^2 x_0^2$.*

Si x_0 n'est pas la première lettre de m alors $q = 0$.

preuve : Posons $m = xm'$ et supposons que $x \neq x_0$ alors si

- $x = x_1$: comme $(x_1, x_0) \notin \theta'$, on ne peut plus produire de u et ainsi il existe p tel que $f_{\theta'}(m) \cap I = v^p {x_1}^2 \dots {x_n}^2 {x_0}^2$.

- $x \neq x_1$ et x est la première lettre d'un m_j , posons $x = x_{l+1}$. D'après le Lemme 4.5.13A, comme $(x_{l+1}, x_l) \in \bar{\theta}'$, il faut que $\Pi_{x_l x_{l+1}}(m) \in {D'_1}^*(x_l, x_{l+1})$: contradiction.

- Autre cas $x = x_{l+1}$ est dans un m_j mais n'est pas la première lettre. Nous avons encore une contradiction : d'après le Lemme 4.5.12 il faut $\Pi_{x_l x_{l+1}}(m) \in x_l(x_l + x_{l+1})^*$ d'où $m \notin \mathcal{L}$.

□

Lemme 4.5.16 *Soit m un mot de $\mathcal{L}$ commençant par x_0 et tel que $f_{\theta'}(m) \cap I = v^p u^q x_1^2 \dots x_n^2 x_0^2$. Soit w le plus petit facteur gauche de m contenant x_n .*

Nous avons $\mathrm{alph}(w) = \mathrm{alph}(uv)$ *et* $|w|_{x_0} = 1$. *De plus si* $|w| \neq uv$ *alors* $q \leq 1$.

preuve : Supposons que $\mathrm{alph}(w) \neq \mathrm{alph}(uv)$. Soit l le plus grand indice tel que x_l n'apparaisse pas dans w . Alors si

- x_l est la dernière lettre d'un m_j : comme $x_{l+1} \in \mathrm{alph}(w)$, nous avons $\Pi_{x_l x_{l+1}}(m) \notin {D'_1}^*(x_l, x_{l+1})$ mais (x_{l+1}, x_l) appartient à $\bar{\theta}'$, ceci entre en contradiction avec le Lemme 4.5.13A.

- x_l n'est la dernière lettre d'aucun m_j : cela est impossible comme $x_{l+1} \in \mathrm{alph}(w)$, nous avons$\Pi_{x_l x_{l+1}}(m) \notin x_l(x_l + x_{l+1})^*$ et par le Lemme 4.5.12 nous obtenons : $m \notin \mathcal{L}$.

Ainsi $\mathrm{alph}(w) = \mathrm{alph}(uv)$. De plus comme m commence par x_0 le Lemme 4.5.12 nous indique que $\Pi_{x_0 x_n}(m) \in x_0 x_n (x_0 + x_n)^*$ et donc w contient exactement une occurrence de x_0 .

Maintenant supposons que $w \neq uv$: en raison des contraintes imposées par $\mathcal{L}$ et par I , uv est un sous-mot de w et si $w \neq uv$ alors w contient, au moins deux occurrences d'une même lettre. Soit l le plus petit indice tel que x_l apparaisse au moins deux fois dans w . Alors si

- $l = 0$: nous venons de voir que $|w|_{x_0} = 1$.
- $l = 1$: D'après le Lemme 4.5.13A nous devons avoir $\Pi_{x_0 x_1}(m) D_1'^*(x_0, x_1)(\varepsilon + x_1 x_0 + x_1 x_0^2 x_1 + x_1^2 x_0^2)$. Comme $\Pi_{x_0 x_1}(m) \in x_0 x_1^2 (x_1 + x_0)^*$ il existe au maximum trois occurrences de x_0 dans m et donc $q \leq 1$.
- x_l est la première lettre d'un m_j : nous avons $|w|_{x_{l-1}} = 1$ c'est pourquoi $\Pi_{x_l x_{l-1}}(m) \notin D_1'^*(x_{l-1}, x_l)$; comme (x_l, x_{l-1}) appartient à $\bar{\theta}'$ nous obtenons une contradiction avec le Lemme 4.5.13A.
- x_l est dans $\mathrm{alph}(m_j)$ sans en être la première lettre. Comme x_0 est la première lettre de m , le Lemme 4.5.12 affirme que $\Pi_{x_l x_{l-1}}(m) \in x_{l-1}(\varepsilon + x_l) x_{l-1}(x_{l-1} + x_l)^*$. Mais nous avons $|w|_{x_{l-1}} = 1$ et $|w|_{x_l} > 1$, ainsi m n'est pas un mot de $\mathcal{L}$.

□

Soit m un mot de $\mathcal{L}$ tel que $f_{\theta'}(m) \cap I = v^p u^q x_1^2 \ldots x_n^2 x_0^2$. Nous allons montrer par récurrence sur p que $q \leq p + 1$. Commençons par le cas $p = 0$:

- Soit m ne commence pas par x_0 le Lemme 4.5.15 affirme alors que $q = 0$.
- Soit x_0 commence le mot m :

  Soit w le plus petit facteur gauche de m contenant x_n . D'après le Lemme 4.5.16 nous avons $\mathrm{alph}(w) = \mathrm{alph}(uv)$ et x_0 apparaît une seule fois dans m . Nous avons deux cas à considérer :

  Premier cas : x_i appartient à $\mathrm{alph}(m_j)$ et $j \neq r$.
  Soit x_l la dernière lettre de ce m_j . Comme $|m|_{x_{i+1}} = 2$ (car $p = 0$) et puisque $j \neq r$ nous avons $\Pi_{m_j}(m) \in D_{m_j} x_i^*$ c'est pourquoi nous avons $\Pi_{x_l x_i}(m) \in x_i x_i^+ x_l x_l x_i^*$. Comme $\mathrm{alph}(w) = \mathrm{alph}(uv)$ nous avons $x_l \in \mathrm{alph}(w)$ donc $|w|_{x_i} \geq 2$ d'ø'u $w \neq uv$, le Lemme 4.5.16 affirme, alors, $q \leq 1$.

  Deuxième cas : le mot v est un facteur droit de m_r (i.e. $x_i \in \mathrm{alph}(m_r)$).
  Si $w \neq uv$ alors nous pouvons conclure comme dans le premier cas : $q \leq 1$. si $w = uv$, comme $|m|_{x_n} = 2$, nous devons avoir $\Pi_{x_0 m_r}(m) \in x_0 x_i \ldots x_n f_\gamma(x_i \ldots x_n x_0 (x_i + x_0)^*)$ d'où $\Pi_{x_0 x_i}(m) \in x_0 x_i x_i^+ x_0 (x_i + x_0)^*$.

  Si $i = 1$ et d'après le Lemme 4.5.13A.3 nous avons $|m|_{x_0} \leq 3$ et par conséquent $q \leq 1$. Si $i \neq 1$ alors d'après le Lemme 4.5.13A.2 nous avons $\Pi_{x_1 x_i}(m) \in D_1'^*(x_1, x_i)$ er c'est pourquoi $\Pi_{x_0 x_1}(m) \in x_0 x_1 x_1^+ x_0 (x_1 + x_0)^*$, et nous retrouvons le cas $i = 1$.

Conclusion: si $p = 0$ alors $q \leq 1$.

L'hypothèse d'induction étant la suivante "$q \leq p + 1$ pour $p = k$" nous devons prouver que pour $p = k + 1$ nous avons $q \leq p + 1$:

- Soit x_0 n'est pas la première lettre de m : le Lemme 4.5.15 affirme alors $q = 0$.
- Ou x_0 est la première lettre de m : soit w le plus petit facteur gauche de m contenant x_n . D'après le Lemme 4.5.16 nous avons $\text{alph}(w) = \text{alph}(uv)$. Nous avons
  - Soit $w \neq uv$ et dans ce cas le Lemme 4.5.16 dit que $q \leq 1$.
  - Sinon $w = x_0x_1 \dots x_n$ et il est facile de voir que $w^{-1}m \in \mathcal{L}$, de plus :
    * Soit $f_{\theta'}(w^{-1}m) \cap I = v^k u^{q-1} {x_1}^2 \dots {x_n}^2 {x_0}^2$ et nous appliquons l'hypothèse d'induction : nous avons $q - 1 \leq k + 1$ et donc $q \leq k + 2 = p + 1$.
    * sinon $f_{\theta'}(w^{-1}m) \cap I = \emptyset$. comme $k + 1 > 0$ nous devons avoir $q = 0$: si $uvm' \in \mathcal{L}$ et $f_{\theta'}(uvm') \cap I = v^{k+1}u^{j+1}{x_1}^2 \dots {x_n}^2{x_0}^2$ alors nous devons avoir $f_{\theta'}(m') \cap I = v^j u^k {x_1}^2 \dots {x_n}^2 {x_0}^2$ (Pour montrer cela, s'il en est besoin, nous numérotons les différentes occurrences de chaque lettre de uvm' , puis à l'aide du Lemme 4.5.8 nous dérivons uvm' afin d'obtenir $uvv^ju^k{x_1}^2 \dots {x_n}^2{x_0}^2$).

  D'où $q \leq p + 1$.

Conclusion : Lorsque $|u| > 1$ nous avons montré que $f_{\theta'}(\mathcal{L}) \cap I$ n'est pas un langage régulier : $\{v^p u^q x_1^2 \dots x_n^2 x_0^2 \mid q \leq p + 1\}$.

Le deuxième cas

Le cas $|u| = 1$ est différent du précédent puisqu'on ne peut pas arrêter la production de u ... Pour mettre en évidence la non-régularité de $\mathcal{L}$ nous utilisons une seconde intersection : $I = (x_1 \dots x_n)^* x_0^* x_k^2 \dots x_n^2 x_0^2 x_1^2 \dots x_{k-1}^2$ où x_k est la première lettre du mot m_r .

NB : Pour simplifier les notations nous n'allons pas exposer la preuve pour les cas particuliers $k = n$ ou $n = 2$; du reste, la technique de la preuve est toujours la même.

Posons $K_1 = (uv)^*(x_0x_1 \dots x_n + x_0)x_k^2 \dots x_n^2 x_0^+ x_1^2 \dots x_{k-1}^2$, ce langage est dans $\mathcal{L}$.

Lorsque $x_k \dots x_n x_0 \xrightarrow[\theta']{*} x_0 x_k \dots x_n$ nous obtenons

$$f_{\theta'}(K_1) \cap I = \{v^p x_0^q x_k^2 \dots x_n^2 x_0^2 x_1^2 \dots x_{k-1}^2 \mid p \leq q + 1\}$$

Dans l'autre cas

$$f_{\theta'}(K_1) \cap I = \{v^p x_0^q x_k^2 \dots x_n^2 x_0^2 x_1^2 \dots x_{k-1}^2 \mid p = q \ ou\ p = q \pm 1\}$$

Intuitivement, la lettre x_k va tenir le rôle de la lettre x_1 du premier cas ($|u| > 1$) : soit m un mot de $\mathcal{L}$, si x_k est la première lettre de m alors la production de v est arrêtée, sinon, en raison des contraintes imposées par $\mathcal{L}$ et $f_{\theta'^{-1}}(I)$, cette lettre doit être x_0 . Plus précisément nous avons :

Lemme 4.5.17 *soit m un mot de $\mathcal{L}$ tel que $f_{\theta'}(m) \cap I = v^p u^q x_k^2 \ldots x_n^2 x_0^2 x_1^2 \ldots x_{k-1}^2$.*

Si $\Pi_{x_i x_k}(m) \in x_i x_k^2 (x_i + x_k)^*$, pour un $x_i \notin \mathrm{alph}(m_r)$, alors $p \leq 1$.

Si $\Pi_{x_i x_k}(m) \in x_k (x_i + x_k)^*$, pour un $x_i \notin \mathrm{alph}(m_r)$, alors $p = 0$.

preuve : D'abord nous examinons le cas $x_i = x_{k-1}$: supposons que $\Pi_{x_{k-1}x_k}(m) \in x_k(x_{k-1} + x_k)^*$. D'après le Lemme 4.5.13B nous avons

$$\Pi_{x_{k-1}x_k}(m) \in D_1'^*(x_{k-1}, x_k)(\varepsilon + x_k x_{k-1} + x_k x_{k-1} x_k x_{k-1} + x_k x_k x_{k-1} x_{k-1})$$

Comme $x_k(x_{k-1} + x_k)^* \cap D_1'^*(x_{k-1}, x_k) = \emptyset$ nous obtenons $|m|_{x_k} \leq 2$, d'où $p = 0$.

D'une manière similaire nous obtenons $|m|_{x_k} \leq 3$ lorsque $\Pi_{x_{k-1}x_k}(m) \in x_{k-1} x_k^2 (x_{k-1} + x_k)^*$ d'où $p \leq 1$.

Supposons, maintenant, que $\Pi_{x_{k-1}x_k}(m) \in x_{k-1}^+ x_k (x_{k-1} + x_k)^*$ et qu'il existe un plus grand indice i différent de $k-1$ tel que $x_i \notin \mathrm{alph}(m_r)$ et $\Pi_{x_i x_k}(m) \in x_k(x_i + x_k)^*$.

- Soit x_i est la dernière lettre d'un m_l : nous avons $\Pi_{x_i x_{i+1}}(m) \notin D_1'^*(x_i, x_{i+1})$ ce qui entre en contradiction avec le Lemme 4.5.13B.
- soit x_i appartient à un m_l sans être sa dernière lettre : nous avons $\Pi_{m_l}(m) \notin f_\gamma(m_l \mathrm{alph}(m_l)^*)$ et donc m n'est pas un mot de $\mathcal{L}$.

Maintenant soit i le plus grand indice différent de $k-1$ tel que $x_i \notin \mathrm{alph}(m_r)$ et $\Pi_{x_i x_k}(m) \in x_i x_k^2 (x_i + x_k)^*$. Supposons $p > 1$: cela veut dire que

$$\Pi_{x_{k-1}x_k}(m) \in (x_{k-1} x_{k-1}^+ x_k x_{k-1}^* x_k + x_{k-1} x_k x_{k-1}^+ x_k)(x_{k-1} + x_k)^*$$

Alors si

- x_i est la dernière lettre de m_l nous avons $\Pi_{x_i x_{i+1}}(m) \notin D_1'^*(x_i, x_{i+1})$ et, comme $i \neq k-1$, ceci entraîne une contradiction avec le Lemme 4.5.13B.
- Soit x_i est une lettre de m_l sans en être sa dernière :

  Si m_l n'est pas m_0 alors comme m_l n'est pas non plus m_r le Lemme 4.5.12 nous impose une contradiction : $\Pi_{x_i x_{i+1}}(\mathcal{L}) \subset (x_i^2 + x_i x_{i+1} x_i)(x_i + x_{i+1})^*$.

  Ainsi $l = 0$ et puisque $\Pi_{x_0 x_k}(m) \in x_0(x_0 + x_k)^*$ il nous faut avoir $\Pi_{m_0}(m) \in f_\gamma(m_0^2 \mathrm{alph}(m_0)^*)$ et c'est pourquoi $\Pi_{x_i x_{i+1}}(m) \in (x_i^2 + x_i x_{i+1} x_i)(x_i + x_{i+1})^*$ d'où une contradiction. □

Lemme 4.5.18 *Soit m un mot de $\mathcal{L}$ tel que $f_{\theta'}(m) \cap I = v^p u^q x_k^2 \ldots x_n^2 x_0^2 x_1^2 \ldots x_{k-1}^2$ et commençant par x_0 . Soit w le plus petit facteur gauche de m contenant x_n .*

Alors nous avons $\begin{array}{ll} |w|_{x_j} \leq 1 & \textit{pour tout indice } j \textit{ avec } 0 \leq j < k \\ |w|_{x_j} \geq 1 & \textit{pour tout indice } j \textit{ avec } (k \leq j < n) \end{array}$

De plus si $\Pi_{x_{k-1}x_k}(w) = x_{k-1}x_k$ alors $w = uv$, dans les autres cas nous avons $p \leq 1$.

preuve : Comme x_0 est la première lettre de m nous avons $\Pi_{m_0m_r}(m) \in f_\gamma[m_0m_rm_0m_r\text{alph}(m_0m_r)^*]$.

Nous savons que pour tout j , $k \leq j < n$, que (x_j, x_{j+1}) est dans $\bar{\gamma}$ ainsi $\Pi_{x_jx_{j+1}}(m) \in x_j^+x_{j+1}(x_j + x_{j+1})^*$ c'est pourquoi pour tout j , $k \leq j < n$, nous avons $|w|_{x_j} \geq 1$.

Supposons maintenant qu'il existe une lettre, n'appartenant pas à alph(m_r) , qui apparaisse plus d'une fois dans w . Soit j le plus petit indice tel que $|w|_{x_j} \geq 2$. Clairement, comme $(x_n, x_0) \in \bar{\gamma}$, j est différent de 0. De plus le Lemme 4.5.13B interdit à x_j d'être la première lettre d'un m_i puisque x_{j-1} apparaît une seule fois dans w . Maintenant si x_j appartient à alph(m_i) sans être la première lettre de m_i alors le Lemme 4.5.12 nous indique que m n'est pas un mot de $\mathcal{L}$ puisque qu'il n'y a qu'une occurrence de x_{j-1} dans w .
Ainsi pour tout j , $0 \leq j < k$, nous avons $|w|_{x_j} \leq 1$.

Le cas $\Pi_{x_{k-1}x_k}(w) \neq x_{k-1}x_k$ *:* comme pour chaque j , $0 \leq j < k$, nous avons $|w|_{x_j} \leq 1$ et pour tout j , $k \leq j < n$, nous avons $|w|_{x_j} \geq 1$ il faut que $\Pi_{x_{k-1}x_k}(w) \in (x_k+x_kx_{k-1}+x_{k-1}x_k^2)(x_k)^*$. Le Lemme 4.5.17 nous impose $p \leq 1$.

Le cas $\Pi_{x_{k-1}x_k}(w) = x_{k-1}x_k$ *:* nous avons $\Pi_{x_kx_n}(m) \in x_kx_n(x_k + x_n)^*$. Comme $\Pi_{m_r}(m) \in f_\gamma[m_rm_r\text{alph}(m_r)^*]$ nous obtenons $\Pi_{m_r}(w) = m_r$.
Supposons qu'une lettre n'apparaisse pas dans w . Soit j , $0 \leq j < k-1$, le plus petit indice tel que $|w|_{x_j} = 0$. Le Lemme 4.5.13 interdit à x_j d'être la dernière lettre de m_i : en effet x_{j+1} apparaît dans w . Maintenant si x_j appartient à alph(m_i) alors le Lemme 4.5.12 impose que m n'appartienne pas à $\mathcal{L}$ puisque x_{j+1} n'est présent qu'une fois dans w . Ainsi pour tout j , $0 \leq j < k$, nous avons $|w|_{x_j} = 1$.

Il est facile de conclure que si $\Pi_{x_{k-1}x_k}(w) = x_{k-1}x_k$ alors $w = uv$. □

Soit m un mot de $\mathcal{L}$ tel que $f_{\theta'}(m) \cap I = v^pu^qx_1^2 \ldots x_n^2x_0^2$. Nous allons montrer par induction sur q que $p \leq q+1$. Commençons par le cas $q = 0$:

- Soit m ne commence pas par x_0 et donc x_k doit être la première lettre de m , et le Lemme 4.5.17 impose $p = 0$.

- Soit x_0 est la première lettre de m : appelons w le plus petit facteur gauche de m contenant x_n . D'après le Lemme 4.5.18 nous savons que si w est différent de uv alors $p \leq 1$. Supposons que $m = uvm'$. Comme $p = 0$ nous devons avoir $|m'|_{x_0} = 1$ et c'est ainsi que $\Pi_{m_0m_r}(m) \in m_0m_rf_\lambda(m_rm_0[\text{alph}(m_0m_r) - x_0]^*)$ d'où $\Pi_{x_kx_0}(m) \in x_0x_k^2x_0x_n(x_k)^*$. D'après le Lemme 4.5.17 nous obtenons $p \leq 1$.

Grâce à l'hypothèse d'induction "$p \leq q+1$ pour $q = \alpha$" nous allons montrer que pour $q = \alpha + 1$ nous avons toujours $p \leq q+1$:

- Soit x_0 ne débute pas m : x_k doit être alors la première lettre de m et le Lemme 4.5.17 impose $p = 0$.

- Ou x_0 est la première lettre de m : soit w le plus petit facteur gauche de m contenant x_n . Le Lemme 4.5.18 nous dit que si w est différent de uv alors $p \leq 1$. Supposons $m = uvm'$.

Soit $f_{\theta'}(w^{-1}m) \cap I = v^{p-1}x_0^{\alpha}x_k{}^2 \ldots x_n{}^2 x_0{}^2 \ldots x_{k-1}^2$: nous appliquons l'hypothèse d'induction pour obtenir $(p-1) \leq \alpha + 1$ soit $p \leq q + 1$.

Soit $f_{\theta'}(w^{-1}m) \cap I = \emptyset$: comme $\alpha + 1 > 0$ nous devons avoir $p = 0$ car sinon $uvm' \in \mathcal{L}$ et $f_{\theta'}(uvm') \cap I = v^{j+1}u^{\alpha+1}x_k{}^2 \ldots x_n{}^2 x_0{}^2 \ldots x_{k-1}^2$ d'où $f_{\theta'}(m') \cap I = v^j u^{\alpha} x_k{}^2 \ldots x_n{}^2 x_0{}^2 \ldots x_{k-1}^2$ (on numérote les lettres du mot x_0vm' pour appliquer ensuite le Lemme4.5.8 afin d'obtenir $uvv^ju^{\alpha}x_k{}^2 \ldots x_n{}^2 x_0{}^2 \ldots x_{k-1}^2$).

Ainsi $p \leq q + 1$.

Maintenant nous sommes capables de conclure :

$$K_1 = (uv)^*(x_0x_1 \ldots x_n + x_0)x_k^2 \ldots x_n^2 x_0^+ x_1^2 \ldots x_{k-1}^2 \subset \mathcal{L}$$

et remarquons que

$$\{v^q x_0^q x_k^2 \ldots x_n^2 x_0^2 x_1^2 \ldots x_{k-1}^2 \mid q \in \mathbb{N}^+\} \subset f_{\theta'}(K_1) \cap I$$

comme nous devons avoir $p \leq q + 1$, le langage $f_{\theta'}(K_1) \cap I$ n'est pas régulier. □

NB: A l'aide d'une induction similaire sur p, il est possible de montrer que si

$$x_k \ldots x_n x_0 \not\xrightarrow[\theta']{*} x_0 x_k \ldots x_n$$

alors

$$f_{\theta'}(\mathcal{L}) \cap I = \{v^p x_0^q x_k^2 \ldots x_n^2 x_0^2 x_1^2 \ldots x_{k-1}^2 \mid p = q \text{ or } p = q \pm 1\}$$

La démonstration du Théorème 4.3.8 est terminée.

4.6 Corollaires & Complexité

Dans cette partie nous traitons de la Reg-compatibilité de couples de semi-commutations particuliers. Les corollaires obtenus sont bien sûr conséquences directes du Théorème 4.3.7, nous donnons de nouvelles preuves basées sur la caractérisation de $\mathcal{R}_{\theta'}(A^*)$.

4.6.1 Le cas θ' inclus dans θ^{-1}

Tout d'abord remarquons que θ^{-1} est toujours Reg-compatible avec θ : en effet si il existe un mot de permutation uv fortement connexe pour $\bar{\theta}$, il est impossible d'avoir $uv \xrightarrow[\theta^{-1}]{*} vu$ sans avoir u ou v réduit au mot vide. On peut étendre cette remarque au cas θ' inclus dans θ^{-1} . Nous vous proposons ici une autre démonstration utilisant la famille $\mathcal{R}_{\theta'}(A^*)$:

Corollaire 4.6.1 *Soient (A, θ) et (A, θ') deux semi-commutations. Si θ' est incluse dans θ^{-1} alors θ' est Reg-compatible avec θ .*

preuve : Nous allons utiliser le Théorème 2.5.17. Soit R un langage de $\mathrm{Reg}_\theta(A)$. En premier nous montrons que le langage $K = \mathrm{MAX}_{\theta'}(f_{\theta'}(R))$ est dans est un langage régulier :

Soit u un mot de K , comme K est inclus dans $f_{\theta'}(R)$ il existe un mot v tel que $v \xrightarrow[\theta']{*} u$. D'après la définition de $\mathrm{MAX}_{\theta'}(f_{\theta'}(R))$ nous avons $u \xrightarrow[\theta']{*} v$, et puisque θ' est incluse dans θ^{-1} nous obtenons $v \xrightarrow[\theta]{*} u$ d'où l'inclusion de K dans R. Ainsi $K = \{u \in R \mid v \xrightarrow[\theta']{*} u \Longrightarrow u \xrightarrow[\theta']{*} v\} = \mathrm{MAX}_{\theta'}(R) = \mathrm{MIN}_{\theta'^{-1}}(R)$. Comme θ' est incluse dans θ^{-1} le langage R est clos par ${\theta'}^{-1}$, d'après le Lemme 2.5.14 $\mathrm{MIN}_{\theta'^{-1}}(R)$ est dans $\mathrm{Reg}(A^*)$ ainsi K est un langage régulier.

Maintenant nous devons montrer que tout facteur itérant u du langage K est fortement connexe pour $\bar{\theta}'$:

Supposons qu'il existe un facteur itérant u de K non fortement connexe et tel que u^* soit inclus dans $\mathrm{LEX}_{\theta'}$. Il existe alors des mots u_1 et u_2 tels que :

$$u \xrightarrow[\theta']{*} u_1u_2 \qquad u_1 \neq \varepsilon \text{ et } u_2 \neq \varepsilon \qquad u_2u_1 \xrightarrow[\theta']{+} u_1u_2$$

Comme u est un facteur itérant de K , il existe deux mots x et y tels que le langage xu^*y est inclus dans K , ainsi le mot $xuuy$ est dans K. A comme $xu_2u_2u_1u_1y \xrightarrow[\theta']{+} xuuy$ et $\theta' \subset \theta^{-1}$ nous obtenons $xuuy \xrightarrow[\theta]{+} xu_2u_2u_1u_1y$ c'est pourquoi $xu_2u_2u_1u_1y$ est un mot de R.
Comme u^* est dans $\mathrm{LEX}_{\theta'}$, u est fortement connexe pour $\theta' \cap {\theta'}^{-1}$ ainsi $xu_2u_2u_1u_1y \notin f_{\theta'}(xuuy)$ ce qui entraîne une contradiction : $xuuy \in \mathrm{MAX}_{\theta'}(R)$, $xu_2u_2u_1u_1y \in R$ et $xu_2u_2u_1u_1y \xrightarrow[\theta']{+} xuuy$ mais $xu_2u_2u_1u_1y \notin f_{\theta'}(xuuy)$.

Ainsi K satisfait les conditions du Théorème 2.5.17 et par conséquent $f_{\theta'}(R)$ appartient à $\mathcal{R}_{\theta'}$. □

4.6.2 Le cas θ inclus dans θ'

Maintenant considérons les semi-commutations θ et θ' tel que θ' soit plus grande que θ :

Corollaire 4.6.2 *Soient (A,θ) et (A,θ') deux semi-commutations telles que $\theta \subset \theta'$.*

$$\theta' \textit{ est } \mathcal{REC}\textit{-compatible avec } \theta \textit{ si et seulement si } f_{\theta'} = f_{\theta' \cap \theta^{-1}} \circ f_\theta$$

preuve :

Pour la partie si : nous avons pour tout langage R de $\mathrm{Reg}_\theta(A^*)$ $f_{\theta'}(R) = f_{\theta'\cap\theta^{-1}} \circ f_\theta(R) = f_{\theta'\cap\theta^{-1}}(R)$; le Corollaire 4.6.1 nous affirme que $f_{\theta'\cap\theta^{-1}}(R)$ est un langage régulier.

Pour la partie seulement si : En premier lieu il faut remarquer que si $f_{\theta'} = f_{\theta'\cap\theta^{-1}} \circ f_\theta$ nous devons avoir $\theta' \subset \theta \cup \theta^{-1}$; clairement cela signifie que si xy est un mot fortement connexe pour $\bar{\theta}$, xy l'est aussi pour $\bar{\theta}'$.

Supposons que θ' est incluse dans $\theta \cup \theta^{-1}$ mais que nous n'avons pas $f_{\theta'} = f_{\theta'\cap\theta^{-1}} \circ f_\theta$. En tenant compte du fait $(x,y) \in \bar{\theta}' \Rightarrow (x,y) \in \bar{\theta}$ et grâce au Théorème 3.3.5 nous avons :

Il existe un cycle $\{(x_0,x_1),(x_1,x_2),\ldots,(x_i,x_{i+1}),\ldots,(x_n,x_0)\}$ dans $\bar\theta \cup \bar\theta'^{-1}$ tel que:

- $(x_0,x_n) \in \theta \cap \theta' \cap \bar\theta^{-1}$
- $(x_i,x_{i+1}) \in \bar\theta \cap \theta' \cap \theta^{-1}$
- $\{x_0,\ldots,x_i\} \times \{x_{i+1}\ldots,x_n\} \subset \theta'$

Si pour tout indice j nous avons (x_j,x_{j+1}) dans $\bar\theta$ alors $x_0\ldots x_n$ est un mot fortement connexe pour $\bar\theta$ mais pas pour θ' .

Maintenant si il existe un indice j tel que (x_j,x_{j+1}) soit dans θ alors (x_j,x_{j+1}) est aussi dans $\bar\theta'^{-1} \cap \bar\theta^{-1}$. Pour montrer que θ' n'est pas Reg-compatible avec θ nous utilisons le langage suivant :

$$L = w^* f_\theta[(\varepsilon + w) \bigcup_{(x_j,x_{j+1})\in\theta} w_j\ A^*] \text{ avec } w = x_0\ldots x_n \text{ et } w \underset{\{(x_j,x_{j+1})\}}{\longrightarrow} w_j$$

Clairement L est un langage régulier. Soit $uabv$ un mot de L avec (a,b) dans θ, pour prouver que langage L est θ-clos il suffit d'examiner les trois cas suivants :

$$uabv = \overbrace{w^p(x_0x_1\ldots x_j}^{u}\overbrace{x_jx_{j+1}}^{ab}\overbrace{\ldots x_n)w^qm}^{v},\ m \in f_\theta[w^*w_lA^*]$$

$$uabv = \overbrace{w^k(x_0x_1\ldots x_{n-1}}^{u}\ \overbrace{x_n}^{a}\ )\ \overbrace{m}^{bv}\ ,\ m \in f_\theta[w^*w_lA^*]$$

$$uabv = u_1u_2abv,\ u_2abv \in f_\theta[(\varepsilon + w)w_jA^*]$$

Pour montrer que L n'est pas un langage régulier nous utilisons le langage $K = L \cap f_{\theta'}[w^*w_jA^*]$ pour un j tel que (x_j,x_{j+1}) soit dans θ. Suivant la valeur de j nous avons :

- Si $i > j$ alors
$$K = \{(x_{i+1}x_{i+2}\ldots x_n)^p(x_0x_1\ldots x_i)^qw_j \mid p \geq q\}$$
- Si $j > i$ et $x_{i+1}x_{i+2}\ldots x_nx_0x_1\ldots x_i \xrightarrow[\theta']{*} x_0\ldots x_n$ alors
$$K = \{(x_{i+1}x_{i+2}\ldots x_n)^p(x_0x_1\ldots x_i)^qw_j \mid p \leq q\}$$
- si $j > i$ et $x_0\ldots x_n \notin f_{\theta'}(x_{i+1}x_{i+2}\ldots x_nx_0x_1\ldots x_i)$ alors
$$K = \{(x_{i+1}x_{i+2}\ldots x_n)^p(x_0x_1\ldots x_i)^pw_j\}$$

Pour calculer ces intersections il suffit de remarquer que toute commutation $x_jx_{j+1} \longrightarrow x_{j+1}x_j$ est irréversible : (x_{j+1},x_j) est dans $\bar\theta' \cap \bar\theta$, une fois "sorti de l'étoile " par w_j le couple (x_j,x_{j+1}) est marqué à jamais. □

A partir de ce corollaire, en remplaçant θ' par $\theta \cup \theta^{-1}$ nous obtenons

4.6.3 Le cas $\theta' = \theta \cup \theta^{-1}$

Corollaire 4.6.3 *Soit (A, θ) une semi-commutation.*

La clôture symétrique de θ est Reg-compatible avec θ

$$\Longleftrightarrow$$

$$f_{\theta \cup \theta^{-1}} = f_{\theta^{-1}} \circ f_\theta$$

$$\Longleftrightarrow$$

θ est une semi-commutation confluente

$$\Longleftrightarrow$$

Tout mot fortement connexe pour $\bar{\theta}$ est fortement connexe pour $\bar{\theta} \cap \bar{\theta}^{-1}$.

4.6.4 Complexité

Exactement comme dans le cadre de la composition deux de fonctions de semi-commutation, nous concluons sur la complexité :

Théorème 4.6.4 *Le problème suivant est Co-NP-complet :*

Soit (A, θ) et (A, θ') deux semi-commutations, θ' est-elle Reg-compatible avec θ ?

4.7 Conclusion

Le problème des commutations partielles Reg-compatibles est aussi trivial que possible ; pour la version semi-commutation de ce problème nous avons présenté des exemples non-triviaux de couples de semi-commutations Reg-compatibles ou non-Reg-compatibles : contrairement au cas des commutations partielles il ne suffit pas de préserver les mots fortement connexes. Ce problème fait partie, au même titre que la confluence, de la catégorie des propriétés "faciles" pour les commutations partielles qui deviennent "moins immédiates" dans les cadre des semi-commutations.

Nous apportons une caractérisation décidable relativement simple. Pour la démontrer nous avons utilisé la notion de rang de distribution d'un mot dans un langage pour une semi-commutation ; cette technique n'est pas nouvelle (voir [Och85, Mét86b]), mais l'introduction de la définition de rang de distribution ([Has91]) est éclairante. Pour la réciproque nous avons construit un exemple sur mesure, notamment nous avons dû prouver que le langage utilisé était θ-clos : contrairement au cadre des commutations partielles (théorème d'Ochmanski), nous ne disposons pas de moyen automatique pour décrire les langages réguliers clos par une semi-commutation.

En examinant des cas particuliers, nous avons obtenu des corollaires simples comme "θ est toujours Reg-compatible avec θ^{-1}" ou encore "$\theta \cup \theta^{-1}$ est Reg-compatible avec θ si et seulement si θ est confluente". Pour conclure, mentionnons que le premier pas vers la caractérisation générale fut le Corollaire 4.6.2, résultat qui utilise de façon surprenante la caractérisation des semi-commutations "composables".

5

Morphismes

5.1 Présentation

Les morphismes, outils fondamentaux de la théorie des langages, permettent d'associer une lettre d'un alphabet à un mot sur un autre alphabet. Dans la perspective où un alphabet représente le jeu d'instruction d'une machine, un morphisme permet la traduction de chaque instruction d'une machine M_A en une suite d'instructions du jeu d'une machine M_B de niveau moins élevé. Réciproquement, un morphisme inverse permet de passer d'une machine à une autre de plus haut niveau. Une telle traduction est appelée raffinement d'actions ; mentionnons que l'étude des raffinements d'actions fait l'objet d'une attention soutenue dans la communauté des réseaux de Petri.

Exemple 5.1.1

	P_A		$P_B = \varphi(P_A)$
a	x := x + 1	α	inc x
b	y := y + 1	β	inc y
c	z := x + y	δ_1 δ_2	mov z , x add z , y
a	x := x + 1	α	inc x
b	y := y + 1	β	inc y

Si M_A et M_B sont deux machines séquentielles, un morphisme $\varphi : A^* \mapsto B^*$, traduisant les instructions de M_A en suites d'instructions de M_B , permet d'obtenir, directement, la trace d'un programme P_A sur la machine M_B : $P_B = \varphi(P_A)$.

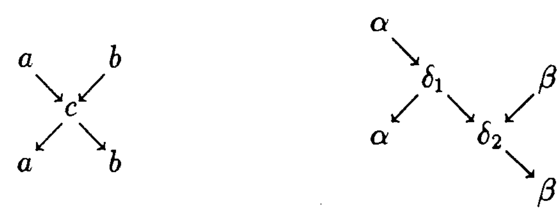
Dans un modèle parallèle un même programme peut avoir plusieurs déroulements : si (A,θ) est la semi-commutation associée au jeu d'instructions de la machine M_A , l'ensemble de exécutions possibles du programme P_A est égale à $f_\theta(P_A)$.
Si nous disposons d'un morphisme $\varphi : A \mapsto B^*$ traduisant les instructions de M_A en suites d'instructions de M_B , et si (B,γ) est la semi-commutation associée au jeu d'instructions de la machine M_B , l'ensemble des exécutions possibles de P_A sur M_B est défini par $f_\gamma \circ \varphi \circ f_\theta(P_A)$.

Nous appellerons morphisme de semi-commutations l'opération $\vec{\varphi} = \varphi \circ f_\gamma$.

Exemple 5.1.2 *Continuons l'exemple précédent. A l'aide des conditions de Bernstein [Ber66] nous obtenons les semi-commutations suivantes :*

$$(A,\bar{\theta}) \quad a - c - b \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \alpha & & \beta \\ | & & | \\ \delta_1 & - & \delta_2 \end{array} \quad (B,\bar{\gamma})$$

Nous en déduisons le graphe de précédence des programmes P_A et P_B :



Notons qu'il existe une exécution de P_B où est incrémentée deux fois la variable x, sans que soit incrémentée la variable y (ceci est impossible pour le programme P_A) :

Nous avons $\varphi(abcab) = \alpha\beta\delta_1\delta_2\alpha\beta \xrightarrow[\gamma]{2} \alpha\delta_1\beta\alpha\delta_2\beta \xrightarrow[\gamma]{} \alpha\delta_1\alpha\beta\delta_2\beta$.

Remarquons que dans l'exemple ci-dessus, nous avons $\vec{\varphi} = \vec{\varphi} \circ f_\theta$, nous appelons ce type de morphisme "morphisme continu" . Grossièrement un morphisme est continu si deux actions indépendantes pour M_A ont leur traductions indépendantes pour M_B . Grâce à ce type de morphisme, il est possible d'observer, à différents niveaux d'abstraction, les multiples exécutions d'un programme donné ; par exemple un observateur humain choisira un niveau élevé, une analyse post-mortem automatisée se situera à un niveau plus fin.

Notons aussi que la machine M_B peut être "plus parallèle" que la machine M_A . Enfin grâce aux morphismes non continus, il est possible de modéliser un programme à mémoire partagée : il se peut que l'ordre d'exécution de deux actions soit indifférent, sans qu'il soit possible d'exécuter ces deux actions en parallèle. Ceci signifie que les deux actions commutent à haut niveau alors que leur traduction sur une machine de plus bas niveau sont dépendantes :

Exemple 5.1.3 *Nous allons présenter le problème du producteur / consommateur sur trois machines de niveaux différents :*

Machine A : nous disposons des instructions produire et consommer représentées par les lettres p et c . La relation d'indépendance sur A est la suivante $\theta = \{(c,p)\}$. Rappelons qu'un programme m respecte la règle du producteur / consommateur si et seulement si il appartient à $D_1'^*(p,c)$ i.e. $f_\theta((pc)^*)$.

Machine B : supposons que, pour communiquer ces résultats au consommateur, le producteur utilise une structure FIFO. Pour garantir l'intégrité des données il nécessaire de réaliser dépôts et retraits en exclusion mutuelle. Afin de réaliser cette exclusion mutuelle nous utilisons l'algorithme de Peterson [Pet81] :

```
Producteur :                              Consommateur :
  p0 produire ;
  p1 Dp := vrai ;                           c1 Dc := vrai
  p2 tour := cons ;                         c2 tour := prod
  p3 tant que (Dc et tour = cons)           c3 tant que (Dp et tour = prod)
           faire rien ;                              faire rien ;
  p4 deposer ;                              c4 prendre ;
  p5 Dp := faux ;                           c5 Dc := faux ;
                                            c6 consommer ;
```

Les variables communes sont les booléens $\mathtt{D}_p$ *et* $\mathtt{D}_c$ *initialisés à* `faux` *et* `tour` *initialisé à* `prod`.

Dans cette deuxième machine les actions de base sont $B = \{P_{012}, P_3, P_{45}, C_{12}, C_3, C_{456}\}$.
Pour passer de la machine A à la machine B on dispose du morphisme $\varphi : A^* \mapsto B^*$ *défini par* $\varphi(p) = P_{012}P_3P_{45}$ *et* $\varphi(c) = C_{12}C_3C_{456}$.
Les programmes du producteur et du consommateur sont séquentiels.
Voici la commutation partielle

$$(B,\gamma) = \{(C_{456}, P_{012}) \ , \ (C_3, P_{012}) \ , \ (P_{45}, C_{12}) \ , \ (P_3, C_{12}) \ , \ (P_{45}, C_{456})\}$$

qui respecte la sémantique du programme.
Remarquons que nous avons $P_{012}P_3P_{45}C_{12}C_3C_{456} \xrightarrow[\gamma]{2} P_{012}C_{12}P_3P_{45}C_3C_{456}$. *Bien que les conditions de Bernstein ne soient pas respectées, on autorise la commutation* (P_3, C_{12}) *car après l'exécution de* P_{012} *nous avons* $\mathtt{D}_p$ `= vrai` *et* `tour = cons`, *de plus :*

- *si* $\mathtt{D}_c$ `= vrai` *alors* C_{12} *ne peut pas suivre directement* P_{012} *: le programme du consommateur est séquentiel et il faut d'abord exécuter* C_{456} .
- *si* $\mathtt{D}_c$ `= faux` *alors* P_3C_{12} *est équivalent à* $C_{12}P_3$ *puisque l'évaluation de* ($\mathtt{D}_c$ `et tour = cons`) *est la même dans les deux cas.*

De façon symétrique on justifie (C_3, P_{012}) , *remarquons enfin que nous avons autorisé la commutation* (P_{45}, C_{456}) *qui ne devrait jamais être utile si l'exclusion mutuelle est établie.*

Machine C : nous pouvons décomposer les actions P_3 *et* C_3 *en* $p_3^d p_3^f$ *et* $c_3^d c_3^f$ *pour représenter l'entrée et la sortie du tant que. Nous définissons le morphisme* $\varphi : B^* \mapsto C^*$ *par* $\psi(P_{012}) = p_0p_1p_2$, $\psi(P_3) = p_3^d p_3^f$, $\psi(P_{45}) = p_4p_5$, $\psi(C_{12}) = c_0c_1c_2$, $\psi(C_3) = c_3^d c_3^f$, $\psi(C_{456}) = c_4c_5c_6$.

Nous définissons la commutation partielle (C, δ) *:*

Le producteur et le consommateur sont deux programmes séquentiels i.e pour tout i et tout j nous avons $(p_i, p_j) \in \bar{\delta}$ *et* $(c_i, c_j) \in \bar{\delta}$.

$$\begin{aligned}(C,\bar{\delta}) \;=\; & \bigcup_{i,j}\{(p_i,p_j)\} \;\bigcup\; \bigcup_{i,j}\{(c_i,c_j)\} \\ & \bigcup\{(p_1,c_3^d),(p_1,c_3^f),(p_2,c_2),(p_2,c_3^f),(p_3^d,c_1),(p_3^f,c_1),(p_3^f,c_2),(p_3^f,c_5),(p_5,c_3^f)\}\end{aligned}$$

Maintenant si nous partons du programme $(pc)^n$ *sur la machine* M_A *, l'ensemble des programmes réalisables sur la machine* M_C *est égal à* $\vec{\psi}\circ\vec{\varphi}\circ f_\theta((pc)^n)$ *qui représente l'ensemble des observation séquentielles du programme du producteur consommateur sur la machine* M_C *.*

Si nous nous contentions de la machine M_B *ou de la machine* M_C *, l'ordre des actions* `deposer` *et* `prendre` *serait figé.*

Dans ce chapitre nous nous intéressons aux morphismes de semi-commutations transformant les langages réguliers clos pour une semi-commutation en langages réguliers clos pour une autre semi-commutation :

Définition 5.1.4 *Soient* (A,θ) *et* (B,γ) *deux semi-commutations et un morphisme* $\varphi : A^* \mapsto B^*$ *. Le morphisme* φ *est Reg-compatible si et seulement si pour tout langage* L *de* $\mathrm{Reg}_\theta(A^*)$ *le langage* $\vec{\varphi}(L) = f_\gamma\circ\varphi$ *est un langage de* $\mathrm{Reg}_\gamma(B^*)$ *.*

Notre but est de généraliser aux semi-commutations les résultats d'E. Ochmanski sur ce thème [Och89b, Och91] :

Théorème 5.1.5 *Soient* (A,θ) *et* (B,γ) *deux commutations partielles. Un morphisme* $\varphi : A^* \mapsto B^*$ *est Reg-compatible si et seulement si pour tout mot* m *connexe pour* $\bar{\theta}$ *le mot* $\varphi(m)$ *est connexe pour* $\bar{\gamma}$ *.*

Il est à noter que si le morphisme φ est l'identité, φ sera Reg-compatible si et seulement si γ est Reg-compatible avec θ . La première partie de ce chapitre se fonde sur l'exploitation de ce fait. Nous définissons la notion de morphisme *fortement connexe sur les lettres* (pour toute lettre a de A , $\varphi(a)$ est un mot fortement connexe pour $\bar{\gamma}$), ainsi que les morphismes *préservant les dépendances* ($(a,b) \in \bar{\theta} \Rightarrow \varphi(a)\times\varphi(b) \not\subset \gamma$). Puis nous montrons qu'un morphisme fortement connexe sur les lettres et préservant les dépendances est toujours Reg-compatible. Enfin en faisant intervenir une nouvelle semi-commutation entre θ et $\vec{\varphi}$ à la fois Reg-compatible avec θ et telle que φ préserve ses dépendances nous obtenons une condition suffisante, assez large, pour qu'un morphisme soit Reg-compatible ; nous montrons que cette condition est nécessaire pour les morphismes *non-effaçant et disjoint* $(\mathrm{alph}(\varphi(a)) \cap \mathrm{alph}(\varphi(b)) = \emptyset \Rightarrow a = b)$.

Dans une deuxième partie nous nous intéressons à la simulation d'un morphisme pour semi-commutation par une transduction rationnelle. Nous étudions une première équation $\vec{\varphi} = \tau$. Les contraintes imposées par les propriétés des transductions rationnelles sont telles que la classe des morphismes réalisables par un transducteur est très réduite.
Pour pouvoir simuler une plus grande classe de morphismes nous faisons intervenir une fonction de semi-commutation devant la transduction, nous obtenons alors une seconde équation : $\vec{\varphi} = \tau\circ f_\theta$. Nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une transduction τ solution de la deuxième équation : le morphisme doit être *fortement connexe sur les lettres*, *continu* et *local.* Pour cela, nous caractérisons les morphismes continus et les morphismes locaux, ces derniers étant une sous-classe des morphismes préservant les dépendances.

Nous concluons cette étude sur deux applications : nous exploitons le fait que la famille des langages algébriques est fermée par transductions rationnelles. Nous caractérisons les mots

u et les semi-commutations (B,γ) tels que $f_\gamma(u^*)$ est un langage algébrique, donnant ainsi une nouvelle preuve d'un résultat obtenu par M. Clerbout et Y. Roos dans [CR90, Roo89] . Enfin, dans le cadre des commutations partielles, nous caractérisons les morphismes continus préservant les langages algébriques θ-clos.

5.2 Morphismes Reg-compatibles

5.2.1 Une condition nécessaire

Fait 5.2.1 *Soient (A,θ) et (B,γ) deux semi-commutations et un morphisme $\varphi : A^* \mapsto B^*$. Si le morphisme φ est Reg-compatible alors pour tout mot m , fortement connexe pour $\bar\theta$, le mot $\varphi(m)$ est fortement connexe pour $\bar\gamma$.*

preuve : Supposons qu'il existe un mot m fortement connexe pour $\bar\theta$ tel que le mot $\varphi(m)$ ne soit pas fortement connexe pour $\bar\gamma$. Posons $w = \varphi(m)$; nous avons $\bar\varphi(m^*) = f_\gamma(w^*)$. D'après le Corollaire 2.5.5 le langage $f_\theta(m^*)$ est un langage régulier contrairement au langage $f_\theta(w^*)$.

Remarquons que le fait ci-dessus impose aux morphismes Reg-compatibles d'être fortement connexes sur les lettres :

Définition 5.2.2 *Soient (A,θ) et (B,γ) deux semi-commutations et un morphisme $\varphi : A^* \mapsto B^*$. Le morphisme φ est fortement connexe sur les lettres si et seulement si l'image de toute lettre de A par φ est un mot fortement connexe pour $\bar\gamma$.*

5.2.2 Morphismes conservant les dépendances

Définition 5.2.3 *Soient (A,θ) et (B,γ) deux semi-commutations et un morphisme $\varphi : A^* \mapsto B^*$. Le morphisme φ préserve les dépendances si et seulement si pour tout chemin $a_1 \xrightarrow{\bar\theta} a_2 \xrightarrow{\bar\theta} \cdots \xrightarrow{\bar\theta} a_n$ il existe un chemin dans $(\mathrm{alph}(\varphi(a_1a_2\dots a_n)),\bar\gamma)$ d'une lettre de $\mathrm{alph}(\varphi(a_1))$ à une lettre de $\mathrm{alph}(\varphi(a_n))$ lorsque $\varphi(a_1) \neq \varepsilon$ et $\varphi(a_n) \neq \varepsilon$.*

Notons qu'un morphisme préservant les dépendances et fortement connexe sur les lettres conserve les mots fortement connexes de A^* : si m est un mot fortement connexe pour $\bar\theta$ alors $\varphi(m)$ est un mot fortement connexe pour $\bar\gamma$.
Nous allons montrer que les morphismes fortement connexes sur les lettres et préservant les dépendances sont toujours Reg-compatibles. Pour cela nous allons montrer que la fonction $\mathrm{rang}_\gamma(\varphi(L))$ est bornée pour tout langage L de $\mathrm{Reg}_\theta(A^*)$. Pour commencer, nous proposons un lemme de dérivation :

Lemme 5.2.4 *Soient (A,θ) et (B,γ) deux semi-commutations et un morphisme $\varphi : A^* \mapsto B^*$. Si le morphisme φ préserve les dépendances alors pour tout $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ avec $x_1 = \varphi(a_1), \dots, x_n = \varphi(a_n)$ nous avons :*

Si $x_1 \ldots x_{n-1}x_n \xrightarrow[\gamma]{*} x_n x_1 \ldots x_{n-1}$ *et* $\mathrm{alph}(x_1 \ldots x_{n-1}) \cap \mathrm{alph}(x_n) = \emptyset$ *alors il existe* $w \in f_\theta(a_1 \ldots a_{n-1}a_n)$ *avec* $\varphi(w) = x_n x_1 \ldots x_{n-1}$.

preuve : Posons $D = \{a_i \mid \text{il existe un chemin de } a_i \text{ à } a_n \text{ dans } (\{a_1, \ldots, a_n\}, \bar{\theta})\}$ et $I = \{a_1, \ldots, a_n\} \setminus D$, $u = \Pi_I(a_1 \ldots a_{n-1})$ et $v = \Pi_D(a_1 \ldots a_{n-1})$. Clairement $a_1 \ldots a_n \xrightarrow[\theta]{*} va_n u$. Puisque φ conserve les dépendances et comme $x_1 \ldots x_{n-1}x_n \xrightarrow[\theta']{*} x_n x_1 \ldots x_{n-1}$ et $\mathrm{alph}(x_1 \ldots x_{n-1}) \cap \mathrm{alph}(x_n) = \emptyset$ nous devons avoir $\varphi(v) = \varepsilon$ ou $\varphi(a_n) = \varepsilon$. Ainsi si $\varphi(v) = \varepsilon$ nous avons $\varphi(va_n u) = x_n x_1 \ldots x_{n-1}$ et si $\varphi(a_n) = \varepsilon$ nous avons $\varphi(a_1 \ldots a_n) = x_n x_1 \ldots x_{n-1}$.
□

Proposition 5.2.5 *Soient* (A, θ) *et* (B, γ) *deux semi-commutations et un morphisme* $\varphi : A^* \mapsto B^*$. *Si le morphisme* φ *préserve les dépendances et est fortement connexe sur les lettres alors* φ *est un morphisme* Reg-*compatible.*

preuve : Soit $\psi : A^* \mapsto 2^{B^*}$ la substitution définie pour toute lettre a de A par $\psi(a) = \vec{\varphi}(a)$. Clairement $\vec{\varphi}(L) = f_\gamma(\psi(L))$.

Montrons que pour tout langage L de $\mathrm{Reg}_\theta(A^*)$, la fonction $\mathrm{rang}_\gamma(\psi(L))$ est bornée.

D'après le lemme de Levi généralisé si nous avons $uv \in f_\gamma(\psi(L))$ alors :

1. $w = v_0 u_1 v_1 \ldots u_n v_n \in \psi(L)$.
2. $u_1 \ldots u_n \xrightarrow[\gamma]{*} u$.
3. $v_0 v_1 \ldots v_n \xrightarrow[\gamma]{*} v$.
4. $\mathrm{alph}(v_i) \times \mathrm{alph}(u_j) \subset \gamma$ pour $i < j$.
5. $v_0 \in \psi(x_0)$, $u_1 v_1 \in \psi(x_1), \ldots, u_n v_n \in \psi(x_n)$ où tous les x_i sont des mots de A^* et $x_0 \ldots x_n \in L$.

Nous dirons qu'un couple (u_i, v_i) satisfait la propriété $\perp_i$ s'il existe un mot $x_i = y_i z_i$ de B^* tel que $u_i \in \psi(y_i)$ et $v_i \in \psi(z_i)$. Nous allons montrer qu'au maximum $\mathrm{Card}(B)$ couples (u_i, v_i) ne satisfont pas cette propriété $\perp_i$:

Supposons que (u_i, v_i) ne satisfait pas $\perp_i$: il existe une lettre t de A telle que $x_i = y_i t z_i$ avec $t_1 t_2 \in \psi(t)$, $t_1 \neq \varepsilon, t_2 \neq \varepsilon$, $u_i \in \psi(y_i)t_1$ et $v_i \in t_2\psi(z_i)$.
Comme φ est fortement connexe sur les lettres, il existe a_i dans $\mathrm{alph}(u_i)$ et b_i dans $\mathrm{alph}(v_i)$ tels que $(b_i, a_i) \in \bar{\gamma}$.
Supposons qu'un autre couple (u_j, v_j) , avec $i < j$, ne satisfait pas $\perp_j$. Nous devons avoir $a_j \neq a_i$ puisque d'un côté $(b_i, a_i) \in \bar{\gamma}$ et de l'autre $(b_i, a_j) \in \gamma$. Ainsi au maximum $\mathrm{Card}(B)$ couples (u_i, v_i) ne satisfont pas $\perp_i$.

Maintenant, d'après le Lemme 5.2.4, si $j + 1$ couples consécutifs $u_k v_k$ (i.e. $u_i v_i \ldots u_{i+j} v_{i+j}$) satisfont la propriété $\perp_k$ alors $v_0 u_1 v_1 \ldots \underline{u_i u_{i+1} \ldots u_{i+j} v_i v_{i+1} \ldots v_{i+j}} \ldots u_n v_n$ est un mot de $\psi(L)$.

Pour conclure nous avons au plus Card(B) couples de mots (u_i, v_i) ne satisfaisant pas la propriété $\perp_i$ et nous avons au maximum un couple de (u_k, v_k) entre chacun de ses couples, ainsi la fonction $\mathrm{rang}_\gamma(L)$ est bornée par $2 * \mathrm{Card}(B) + 1$; la Proposition 4.2.7 affirme que $f_\gamma(\psi(L)) = \vec{\varphi}(L)$ est un langage régulier. □

5.2.3 Décomposition de morphismes

Nous venons de voir que les morphismes conservant les dépendances sont toujours Reg-compatibles ; dans ce paragraphe nous allons donner une condition suffisante moins restrictive. Pour cela nous introduisons une semi-commutation intermédiaire entre (A, θ) et $\vec{\varphi}$: il s'agit de trouver une semi-commutation (A, θ') à la fois Reg-compatible avec (A, θ) et telle que φ préserve les dépendances de (A, θ') . Il faut toutefois une condition supplémentaire : nous devons avoir $\vec{\varphi} \circ f_\theta = \vec{\varphi} \circ f_{\theta'} \circ f_\theta$.

Proposition 5.2.6 *Soient (A, θ) et (B, γ) deux semi-commutations et un morphisme φ : $A^* \mapsto B^*$ fortement connexe sur les lettres. S'il existe une semi-commutation (A, θ') telle que :*

- *θ' est Reg-compatible avec θ*
- *φ préserve les dépendances de (A, θ')*
- *$\vec{\varphi} \circ f_\theta = \vec{\varphi} \circ f_{\theta'} \circ f_\theta$*

alors φ est un morphisme Reg-compatible.

preuve : Prenons un langage L de $\mathrm{Reg}_\theta(A^*)$.
Comme θ' est Reg-compatible avec θ , le langage $L' = f_{\theta'}(L)$ est dans $\mathrm{Reg}_{\theta'}(A^*)$.
Comme le morphisme φ préserve les dépendances de θ' , $\vec{\varphi}(L')$ est un langage de $\mathrm{Reg}_\gamma(B^*)$.
Enfin puisque L est θ-clos nous avons $\vec{\varphi}(L) = \vec{\varphi} \circ f_{\theta'}(L) = vec\varphi \circ f_\theta(L)$. □

A l'aide de cette proposition nous pouvons donner une condition nécessaire et suffisante pour une classe de morphismes : les morphismes non-effaçant et disjoint.

Définition 5.2.7 *Un morphisme $\varphi : A^* \mapsto B^*$ est disjoint si et seulement si* $\mathrm{alph}(\varphi(x)) \cap \mathrm{alph}(\varphi(y)) = \emptyset$ *lorsque $x \neq y$.*

Proposition 5.2.8 *Soient (A, θ) et (B, γ) deux semi-commutations et un morphisme φ : $A^* \mapsto B^*$ fortement connexe sur les lettres, non-effaçant et disjoint.*

Le morphisme φ est Reg-*compatible si et seulement si la semi-commutation (A, θ') , avec $\theta' = \{(x, y) \mid \varphi(x) \times \varphi(y) \subset \gamma\}$, est Reg-compatible avec θ .*

preuve : Tout d'abord remarquons que pour tout mot m de A^* nous avons $\vec{\varphi}(m) = \vec{\varphi} \circ f_{\theta'}(m)$ et que d'autre part φ préserve les dépendances de (A, θ') . Ainsi, d'après la Proposition 5.2.6 si θ' est Reg-compatible avec θ alors φ est un morphisme Reg-compatible.

Maintenant considérons un langage L θ'-clos, nous allons montrer que $L = \varphi^{-1}(\vec{\varphi}(L))$.

Clairement nous avons $L \subset \varphi^{-1}(\varphi(L)) \subset \varphi^{-1}(\vec{\varphi}(L))$. Soit m un mot de $\varphi^{-1}(\vec{\varphi}(L))$, il existe un mot u tel que $\varphi(u) \in \vec{\varphi}(L)$ et donc il existe un mot w de L tel que $\varphi(w) \xrightarrow[\gamma]{*} \varphi(u)$.

Puisque φ est non-effaçant et disjoint le Lemme 5.2.4 nous indique qu'il existe un mot v tel que $w \xrightarrow[\theta']{*} v$ avec $\varphi(v) = \varphi(u)$ et comme φ est non-effaçant et disjoint nous obtenons $u = v$; par hypothèse L est un langage θ'-clos, ainsi u est un mot de L .

Soit R un langage de $\mathrm{Reg}_\theta(A^*)$ en posant $L = R$ et d'après l'égalité $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}\circ f_{\theta'}$ nous obtenons $f_{\theta'}(L) = \varphi^{-1}(\vec{\varphi}\circ f_{\theta'}(L)) = \varphi^{-1}(\vec{\varphi}(L))$. Si φ est Reg-compatible (avec θ), le langage $\vec{\varphi}(L)$ est un langage régulier et par conséquent $f_{\theta'}(L) = \varphi^{-1}(\vec{\varphi}(L))$ l'est aussi : θ' est Reg-compatible avec θ . □

5.3 Morphismes et transductions rationnelles

Etant donné deux semi-commutations (A, θ) et (B, γ) , et un morphisme $\varphi : A^* \mapsto B^*$ peut-on réaliser $\vec{\varphi} = f_\gamma \circ \varphi$ par une transduction rationnelle ? Nous allons étudier deux équations, la première, la plus simple, demande au transducteur d'effectuer tout le travail : $\vec{\varphi} = \tau$. Remarquons que l'existence d'un tel transducteur entraîne la Reg-compatibilité de φ avec la semi-commutation $(A, \emptyset)$. Sous cette contrainte, la caractérisation des morphismes réalisables par transduction rationnelle ne sera pas très étonnante, néanmoins elle nous permettra d'introduire un modèle de transduction rationnelle qui nous servira pour la deuxième équation.

5.3.1 Première équation : $\vec{\varphi} = \tau$

Proposition 5.3.1 *Soient un alphabet A , une semi-commutation (B, γ) et un morphisme $\varphi : A^* \mapsto B^*$. Il existe un transducteur τ tel que $\tau = \vec{\varphi}$ si et seulement si φ est fortement connexe sur les lettres et si les images de deux lettres ne commutent pas par γ i.e. $\varphi(x) \times \varphi(y) \not\subset \gamma$ pour toutes lettres x, y de A^* telles que $\varphi(x) \neq \varepsilon$ et $\varphi(y) \neq \varepsilon$.*

preuve : Ces conditions sont clairement nécessaires : s'il existe un mot m tel que $\varphi(m)$ n'est pas fortement connexe pour $\bar{\gamma}$ alors $\vec{\varphi}(m^*)$ n'est pas un langage régulier (Proposition 2.5.5) .

Pour montrer qu'elles sont suffisantes nous exhibons une transduction rationnelle.

Le transducteur

Nous allons définir une transduction à l'aide d'un bimorphisme, pour cela nous utilisons un nouvel alphabet et une substitution qui nous permet de distinguer la première et la dernière de chaque mot de $\vec{\varphi}(x)$ pour toute lettre x de A .

Soit B_ψ l'alphabet suivant

$$B_\psi = \bigcup_{a \in A} \{a_{l,n} \mid 0 < n \leq \mathrm{Card}(\vec{\varphi}(a)) \text{ et } 0 < l < |\varphi(a)|\}$$

Soit $\psi : A^* \mapsto 2^{B_\psi^*}$ la substitution suivante :

$$\psi(a) = \begin{cases} \{a_{1,1}\} \text{ si } |\varphi(a)| = 1 \\ \bigcup\limits_{0<n\leq \mathrm{Card}(\vec{\varphi}(a))} \{a_{n,1}a_{n,2}\dots a_{n,|\varphi(a)|}\} \text{ si } |\varphi(a)| > 1 \\ \{\varepsilon\} \text{ si } \varphi(a) = \varepsilon \end{cases}$$

Par définition il existe une bijection pour chaque lettre a de A entre $\psi(a)$ et $\vec{\varphi}(a)$: nous associons $a_{n,1}a_{n,2}\dots a_{n,|\varphi(a)|}$ avec le $n^{\text{ème}}$ élément, dans l'ordre lexicographique, de $\vec{\varphi}(a)$.

Le morphisme $\Pi_B : (A + B_\psi)^* \mapsto B^*$ efface les lettres de A et transforme une lettre de B_ψ en une lettre de B en tenant compte de la bijection entre $\psi(a)$ et $\vec{\varphi}(a)$:

$$\Pi_B(x) = \begin{cases} \varepsilon \text{ si } x \in A \\ b \text{ si } x = a_{n,k} \text{ où } b \text{ est la } k^{\text{ème}} \text{ lettre du } n^{\text{ème}} \text{ élèment} \\ \qquad \text{dans l'ordre lexicographique de } \vec{\varphi}(a) \end{cases}$$

Nous définissons aussi le morphisme $\Pi_A : (A + B_\psi)^* \mapsto a^*$ qui efface les lettres de B_ψ :

$$\Pi_A(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in A \\ \varepsilon & \text{si } x \in B_\psi \end{cases}$$

Le transducteur que nous allons utiliser va travailler sur des mots de $(A + B_\psi)^*$ et plus précisément avec le langage

$$L = f_\lambda\left(\left(\bigcup_{a\in A} a\psi(a)\right)^*\right)$$

où f_λ est la fonction de semi-commutation associée à la semi-commutation $(A \cup B_\psi, \lambda)$:

$$\begin{aligned} \lambda \;=\; & \{(a_{n,k}, b_{n',k'}) \in B_\psi \times B_\psi \mid (\Pi_B(a_{n,k}), \Pi_B(b_{n',k'})) \in \gamma\} - \{(a^1_{n,k}, b_{n',|\varphi(b)|}) \in B_\psi \times B_\psi\} \\ & + A \times B_\psi - \{(a, a_{n,|\varphi(a)|}) \in A \times B_\psi\} \\ & + B_\psi \times A - \{(a_{n,1}, a) \in B_\psi \times A\} \end{aligned}$$

En fait la semi-commutation $(A \cup B_\psi, \lambda)$

- simule f_γ sur B_ψ^* sauf qu'une première lettre d'un $\psi(a)$ ne peut commuter (vers la droite) avec la dernière lettre d'un $\psi(b)$.
- interdit toute commutation d'un couple de lettres de $A \times A$.
- empêche toute lettre a de A de commuter vers la droite avec la dernière lettre de tout mot de $\psi(a)$ et vers la gauche avec la première lettre de tout mot de $\psi(a)$ rendant ainsi fortement connexe pour $\bar{\lambda}$ le mot $a\psi(a)$ et par conséquent le langage L est régulier.

Nous pouvons définir le transducteur sur lequel se fonde notre preuve :

$$\tau = \Pi_B \circ (\cap L) \circ \Pi_A^{-1}$$

A propos de numérotation

Pour faire des preuves (assez !) précises nous allons utiliser une numérotation qui marque la position de chaque lettre du mot de départ.

Soit A_N l'alphabet numéroté $\{a_i \mid a \in A, i \in \mathbb{N}\}$.

Soit B_{ψ_N} l'alphabet numéroté $\{x_i \mid x \in B_\psi, i \in \mathbb{N}\}$.

Soit φ_N le morphisme $\varphi_N : A_N \mapsto B_N$ tel que

$$\varphi_N(a_i) = y_{1_j} \dots y_{k_j} \text{ avec } \varphi(a) = y_1 \dots y_k$$

Soit ψ_N la substitution $\psi_N : A_N \mapsto B_{\psi_N}$ telle que

$$\psi_N(a_j) = \{x_{n,1_j} \dots x_{n,|\varphi(a)|_j} \mid x_{n,1} \dots x_{n,|\varphi(a)|} \in \psi(a)\}$$

Nous noterons (A_N, θ_N) la version numérotée de (A, θ):

$$\theta_N = \{(x_i, y_j) \in A_N \times A_N \mid (x, y) \in \theta\}$$

De façon similaire nous définissons $(A_N \cup B_{\psi_N}, \lambda_N)$ comme la version numérotée de $(A \cup B_\psi, \lambda)$ et (B_N, γ_N) celle de (B, γ) .

Nous appellerons num le fonction de numérotation suivante :

$$\mathrm{num}(\varepsilon) = \varepsilon$$

$$\mathrm{num}(mx) = \mathrm{num}(m)x_{|mx|} \quad \forall x \in A, \forall m \in A^*$$

Nous noterons den le morphisme effaçant la numérotation défini par
den : $(A_N \cup B_{\psi_N})^* \mapsto (A \cup B_\psi)^*$ et $\mathrm{den}(x_i) = x$

Enfin nous noterons den_B le morphisme $\mathrm{den}_B : (A_N \cup B_{\psi_N})^* \mapsto B^*$ défini par
$\mathrm{den}_B(x) = \Pi_B \circ \mathrm{den}(x)$.

La puissance de τ

Définition 5.3.2 *Soient u un mot de A^* et w un mot de B^* tel que $w \in \vec{\varphi}(u)$. Le couple (u, w) satisfait la condition C si et seulement si les images de deux lettres n'ont pas complètement commuté dans w par rapport à $\varphi(u)$ i.e.*
Il existe un mot w' de B_N^* tel que $w' \in \vec{\varphi}_N(\mathrm{num}(u))$, $\mathrm{den}(w') = w$ et pour tout couple de lettres x_i, y_j de $\mathrm{alph}(\mathrm{num}(u))$ avec $i < j$ nous avons $\Pi_{\varphi_N(x_i y_j)}(w') \notin \mathrm{alph}(\varphi_N(y_j))^* \mathrm{alph}(\varphi_N(x_i))^*$.

Lemme 5.3.3 *Soient u un mot de A^* et w un mot de B^* tel que $w \in \bar{\varphi}(u)$. Si le couple (u, w) satisfait la condition C alors w appartient à $\tau(u)$.*

preuve : Supposons qu'il existe un couple de mots (u, w) de $A^* \times B^*$ tel que $w \in \bar{\varphi}(u)$, le couple (u, w) satisfait la condition C et w n'appartient pas à $\tau(u)$.

Posons $u_N = \text{num}(u) = y_0 \dots y_n$.

Puisque $\varphi(u) \xrightarrow[\gamma]{*} w$ il existe des mots $w_0, w_1, \dots w_p$ de B_N^* tels que :

1. $\varphi_N(u_N) = w_0$ et $\text{den}_B(w_p) = w$
2. $w_0 \xrightarrow[\gamma_N]{*} w_1 \xrightarrow[\gamma'_N]{} w_2 \cdots \xrightarrow[\gamma'_N]{} w_p$ avec $d(w_i, w_p) > d(w_{i+1}, w_p)$ pour tout $i < p$
3. aucune dérivation inter-image de lettres n'a été effectuée de w_0 à w_1 i.e.
$$w_1 \in f_{\gamma_N}(\varphi_N(y_0)) f_{\gamma_N}(\varphi_N(y_1)) \dots f_{\gamma_N}(\varphi_N(y_n))$$
4. pour toute lettre y_j de $\text{alph}(u_N)$ les lettres de $\varphi_n(y_j)$ sont bien ordonnées les unes par rapport aux autres dès w_1 i.e. pour tout $j \leq N$ nous avons $\Pi_{\varphi_N(y_i)}(w_1) = \Pi_{\varphi_N(y_i)}(w_p)$

Clairement, d'après la définition de w_1 , nous avons $\text{den}(w_1) \in \psi(u)$. Nous allons montrer que la propriété $C(u, w)$ n'est pas vérifiée.

Comme $\text{den}_B(w_1)$ est dans $\psi(u)$, il existe un mot v_1 de $(A_N \cup B_{\psi_N})^*$ appartenant à $y_0\psi_N(y_0) \dots y_n\psi_N(y_n)$ et tel que $\text{den}_B(w_1) = \text{den}_B(v_1)$. Puisque w n'appartient pas à $\tau(u)$, il existe un plus petit indice i tel que $\text{den}_B(w_i)$ n'appartienne pas à $\tau(u)$ et, ainsi, il existe un plus petit indice α tel que $\text{den}_B(w_\alpha) \notin \text{den}_B(f_{\lambda_N}(w_1))$.

Il existe un mot $v_{\alpha-1}$ tel que $v_{\alpha-1} \in f_{\lambda_N}(v_1)$ avec $\text{den}_B(v_{\alpha-1}) = \text{den}_B(w_{\alpha-1})$. Par définition des w_k , il existe deux lettres de B_N z_1, z_2 telles que $w_{\alpha-1} = m_1 z_1 z_2 m_2 \xrightarrow[\gamma_N]{} m_1 z_2 z_1 m_2 = w_\alpha$.

Cela signifie qu'il existe des mots m'_1, m', m'_2 de $(A_N \cup B_{\psi_N})^*$ tels que $v_{\alpha-1} = m'_1 a_{r,s_k} m' b_{p,q_l} m'_2$ avec $\text{den}_B(m'_1) = \text{den}_B(m_1)$, $\text{den}_B(a_{r,s_k}) = \text{den}_B(z_1)$, $\text{den}_B(m') = \varepsilon$, $\text{den}_B(b_{p,q_l}) = \text{den}_B(z_2)$ et $\text{den}_B(m'_2) = \text{den}_B(m_2)$.

Comme $\text{den}_B(m') = \varepsilon$, m' doit être un mot de A_N^* ; puisque $\text{den}_B(w_\alpha) \notin \text{den}_B(f_{\lambda_N}(w_1))$, le mot $\text{den}_B(z_2 z_1)$ ne doit pas appartenir à $\text{den}_B(f_{\lambda_N}(a_{r,s_k} m' b_{p,q_l}))$.

Considérons le mot m' :

- Soit $m' = \varepsilon$, cela signifie que le couple (a_{r,s_k}, b_{p,q_l}) n'appartient pas à λ_N . Mais comme $(\text{den}_B(a_{r,s_k}), \text{den}_B(b_{p,q_l}))$ appartient à γ cela entraîne $s = 1$ et $q = |\varphi(b)|$.
- Soit $m' \neq \varepsilon$, s'il existe des mots m''_1 et m''_2 de A_N^* tels que $m''_1 a_{r,s_k} b_{p,q_l} m''_2$ appartienne à $f_{\lambda_N}(a_{r,s_k} m' b_{p,q_l})$ alors nous retrouvons le cas $m' = \varepsilon$ et ainsi $s = 1$ et $q = |\varphi(b)|$.
Dans tous les autres cas, il existe un chemin dans $\bar{\lambda}$ de a_{r,s_k} à b_{p,q_l} dans $a_{r,s_k} m' b_{p,q_l}$:
$$a_{r,s_k} \xrightarrow{\bar{\lambda}_N} y_h \xrightarrow{\bar{\lambda}_N} y_{h'} \xrightarrow{\bar{\lambda}_N} b_{p,q_l} \quad \text{ou} \quad a_{r,s_k} \xrightarrow{\bar{\lambda}_N} y_h \xrightarrow{\bar{\lambda}_N} b_{p,q_l}$$

La définition de $(A_N \cup B_{\psi_N}, \lambda_N)$ nous impose à nouveau $s = 1$ et $q = |\varphi(b)|$.

Ainsi nous avons $s = 1$ et $q = |\varphi(b)|$, autrement dit, d'après le point (4), pour atteindre w_α à partir de $w_{\alpha-1}$ il faut faire commuter, vers la droite, la première lettre de $\mathrm{alph}(\varphi_N(a_k))$ apparaissant dans $w_{\alpha-1}$ avec la dernière de $\mathrm{alph}(\varphi_N(b_l))$ apparaissant dans $w_{\alpha-1}$.
Enfin, d'après le point (2), nous avons $d(w_i, w_p) > d(w_{i+1}, w_p)$ pour tout $i < p$ ce qui entraîne $\Pi_{\varphi_N(a_k b_l)}(w_p) \in f_\gamma(\varphi_N(b_k))\, f_\gamma(\varphi_N(a_l))$ et aussi $l < k$.
Ainsi la condition $C(u, w)$ n'est pas vérifiée. □

Dans cette partie nous avons vu que si l'équation $\vec{\varphi} = \tau$ est vérifiée alors φ est fortement connexe sur les lettres et pour toutes lettres x, y de A^* non-effacées par φ nous avons $\varphi(x) \times \varphi(y) \not\subset \gamma$. Il est facile de voir que cette dernière condition impose à tout couple de mots (u, w) , tel que $w \in \vec{\varphi}(u)$, de vérifier la condition C . Ainsi, lorsque les deux conditions nécessaires sont satisfaites, la transduction rationnelle τ que nous avons construite donne une solution de la première équation $\vec{\varphi} = \tau$.

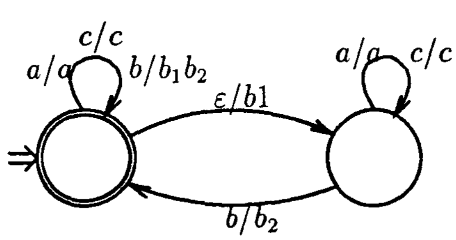
5.3.2 Deuxième équation : $\vec{\varphi} = \tau \circ f_\theta$

Nous avons vu que notre première équation concernait un nombre très restreint de fonctions de semi-commutation. L'introduction de la fonction de semi-commutation f_θ devant la transduction va nous apporter un peu plus de liberté, par exemple la condition $\varphi(x) \times \varphi(y) \not\subset \gamma$ n'est plus nécessaire : prenons $(A, \theta) = (B, \gamma)$ avec $\theta \neq \emptyset$; si φ est le morphisme identité, il existe une transduction τ telle que $\vec{\varphi} = \tau \circ f_\theta$: il suffit de poser $\tau = \varphi$.

Exemple 5.3.4 *Prenons $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b_1, b_2, c\}$, $\varphi(a) = a, \varphi(b) = b_1 b_2, \varphi(c) = c$ et les semi-commutations définies par leur graphe de non-commutation :*

$$\begin{array}{ccccc} a & \longrightarrow & b & \longrightarrow & c \\ & & & & \\ \bar{\theta} & & & & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cccccc} a & \longrightarrow & b_2 & \longrightarrow & c & \\ & & \updownarrow & & & \\ & & b_1 & & & \bar{\gamma} \end{array}$$

Voici la transduction τ



Nous avons $\vec{\varphi} = \tau \circ f_\theta$.

Conditions nécessaires

Deux nouvelles conditions nécessaires vont apparaître : la première oblige $\vec{\varphi}$ d'être *aussi puissante* que la fonction $\vec{\varphi}\circ f_\theta$; la seconde plus technique provient du caractère rationnel des transductions : parfois f_θ n'est pas *assez puissante* pour $\vec{\varphi}$, nous retrouvons alors, sous une forme cachée, la condition $\varphi(x) \times \varphi(y) \not\subset \gamma$.

φ doit être continu

Définition 5.3.5 *Soient (A,θ) et (B,γ) deux semi-commutations et un morphisme $\varphi : A^* \mapsto B^*$. Le morphisme φ est continu si et seulement si pour tout couple de lettres (a,b) de θ nous avons $\varphi(ba) \in \vec{\varphi}(ab)$.*

$$ab \xrightarrow[\theta]{} ba \Rightarrow \varphi(ab) \xrightarrow[\gamma]{*} \varphi(ba)$$

Montrons que cette condition est nécessaire :

Fait 5.3.6 *Soient (A,θ) et (B,γ) deux semi-commutations et un morphisme $\varphi : A^* \mapsto B^*$. Si le morphisme φ n'est pas continu alors il n'existe pas de transduction rationnelle τ telle que $\vec{\varphi} = \tau\circ f_\theta$.*

preuve : Supposons que φ ne soit pas continu : il existe un couple lettres (a,b) de $A \times A$ tel que : $ab \xrightarrow[\theta]{} ba$ et $\varphi(ba) \notin \vec{\varphi}(ab)$. Puisque $\vec{\varphi} = \tau\circ f_\theta$ nous avons $\varphi(ba) \in \tau\circ f_\theta(ba)$; d'autre part comme $ab \xrightarrow[\theta]{} ba$ nous avons $\tau\circ f_\theta(ba) \subset \tau\circ f_\theta(ab)$ ainsi $\vec{\varphi}(ba) \subset \vec{\varphi}(ab)$ d'où $\varphi(ba) \in \vec{\varphi}(ab)$. □

Si nous considérons les morphismes de semi-traces nous obtenons :

Proposition 5.3.7 *Soient $\mathbb{M}(A,\theta)$ et $\mathbb{M}(B,\gamma)$ deux monoïdes de semi-traces. Un morphisme $\varphi : A^* \mapsto B^*$ est un morphisme de semi-traces si et seulement si φ est continu.*

preuve : Si φ est continu alors nous avons pour toute trace $[\varphi([t_1t_2\rangle_\theta)\rangle_\gamma = [\varphi([t_1\rangle_\theta)\rangle_\gamma[\varphi([t_2\rangle_\theta)\rangle_\gamma$.

Supposons que φ ne soit pas continu : il existe un couple lettres (a,b) de $A \times A$ tel que : $ab \xrightarrow[\theta]{} ba$ et $\varphi(ba) \notin \vec{\varphi}(ab)$. Clairement $[\varphi([ab\rangle_\theta)\rangle_\gamma \neq [\varphi([a\rangle_\theta)\rangle_\gamma[\varphi([b\rangle_\theta)\rangle_\gamma$. □

Cette dernière propriété valorise l'étude des morphismes continus, dans un paragraphe suivant nous donnerons une caractérisation des morphismes continus fortement connexes sur les lettres.

φ doit être local

Pour illustrer la notion de morphisme local, nous donnons deux exemples. Le premier exemple concerne deux commutations partielles, le second est plus spécifique aux semi-commutations :

Exemple 5.3.8 *Soient (A,θ) avec $A = \{a,b,c\}$ et $\theta = \{(a,c),(c,a)\}$,*
(B,γ) avec $B = \{a,b_1,b_2,c\}$ et $\gamma = \{(a,c),(c,a),(a,b_1),(b_1,a),(b_2,c),(c,b_2)\}$
et $\varphi : A^* \mapsto B^*$ $\varphi(a) = a$ $\varphi(b) = b_1b_2$ $\varphi(c) = c$

Remarquons que φ est continu et fortement connexe sur les lettres.
Le mot abc est rigide *pour $\bar{\theta}$: nous avons $f_\theta(abc) = \{abc\}$ d'autre part nous avons*

$$\varphi(abc) = ab_1b_2c \xrightarrow[\gamma]{2} b_1acb_2 \xrightarrow[\gamma]{} b_1cab_2$$

Supposons qu'il existe une transduction rationnelle τ telle que $\vec{\varphi} = \tau \circ f_\theta$; puisque abc est rigide pour θ nous devons avoir $b_1cab_2 \in \tau(abc)$, et en général pour tous les entiers p, q : $b_1c^qa^pb_2 \in \tau(a^pbc^q)$. Clairement nous avons $\tau(a^pbc^q) \cap b_1c^*a^*b_2 = b_1c^qa^pb_2$.

Remarquons que $(\cap b_1c^*a^*b_2)\circ\tau$ est aussi une transduction rationnelle définie par son graphe $\{(a^pbc^q, b_1c^qa^pb_2) \mid p,q \in \mathbb{N}\}$. Cependant $\{(a^pbc^q, b_1c^qa^pb_2) \mid p,q \in \mathbb{N}\}$ n'est pas une partie rationnelle de $A^* \times B^*$, ainsi il n'existe pas de transduction rationnelle τ telle que $\vec{\varphi} = \tau \circ f_\theta$.

Exemple 5.3.9 *Soit (A,θ) avec $A = \{a,b,c\}$, $\theta = \{(a,c),(a,b)\}$,*
(B,γ) avec $B = \{a,b_1,b_2,c\}$ et $\gamma = \{(a,c),(a,b_1),(b_1,a),(a,b_2),(b_2,c)\}$
et $\varphi : A^* \mapsto B^*$ $\varphi(a) = a$ $\varphi(b) = b_1b_2$ $\varphi(c) = c$

Remarquons que φ est continu et fortement connexe sur les lettres.
Contrairement à l'exemple précédent le abc n'est plus rigide pour θ : $f_\theta(abc) = \{abc\ ,\ bac\ ,\ bca\}$.
Cependant nous avons

$$\varphi(abc) = ab_1b_2c \xrightarrow[\gamma]{2} b_1acb_2 \xrightarrow[\gamma]{} b_1cab_2$$

mais b_1cab_2 n'appartient ni à $\vec{\varphi}(bac)$, ni à $\vec{\varphi}(bca)$: le couple (b_2,a) n'est pas dans γ .

Ainsi, comme dans l'exemple précédent, nous avons $b_1cab_2 \in \tau(abc)$, et en général pour tous les entiers p,q : $b_1c^qa^pb_2 \in \tau(a^pbc^q)$. La transduction $(\cap b_1c^*a^*b_2)\circ\tau$ est définie par son graphe $\{(a^pbc^q, b_1c^qa^pb_2) \mid p,q \in \mathbb{N}\}$, ce n'est pas une transduction rationnelle. Il n'existe pas de transduction rationnelle τ telle que $\vec{\varphi} = \tau \circ f_\theta$.

Nous distinguons la condition nécessaire pour le cas partiel de celle pour le cas semi-commutation, cette dernière étant plus complexe.

Définition 5.3.10 *Soit (A,θ) une semi-commutation. Un mot m de A^* est rigide pour θ si et seulement si $f_\theta(m) = \{m\}$.*

Définition 5.3.11 *Soient (A,θ) et (B,γ) deux commutations partielles et un morphisme $\varphi : A^* \mapsto B^*$. Le morphisme φ est rigide si et seulement si pour tout mot $m = x_1 \dots x_n$ de A^* rigide il existe un sous-mot de $\varphi(m)$ $x'_1 \dots x'_n$ rigide pour γ tel que $x'_1 \in \mathrm{alph}(\varphi(x_1))$ et $x'_n \in \mathrm{alph}(\varphi(x_n))$.*

Fait 5.3.12 *Soient (A,θ) et (B,γ) deux commutations partielles et un morphisme $\varphi : A^* \mapsto B^*$. Si le morphisme φ n'est pas rigide alors il n'existe pas de transduction rationnelle τ telle que $\vec{\varphi} = \tau \circ f_\theta$.*

La preuve de ce fait est une simple généralisation de l'exemple 5.3.8, c'est aussi un cas particulier de la preuve du lemme suivant.

Nous définissons maintenant les morphismes locaux : intuitivement φ sera local si et seulement si pour tout couple de mots (m,v), tel que $v \in \vec{\varphi}(m)$, il existe un mot de $f_\theta(m)$ assez proche de v pour que f_γ n'ait pas besoin de faire commuter de gros blocs (les images de deux lettres) pour atteindre v .

Définition 5.3.13 *Soient (A,θ) et (B,γ) deux semi-commutations et un morphisme φ : $A^* \mapsto B^*$. Le morphisme φ est local si et seulement si pour tout mot $m = x_1 \dots x_n$ de A^* et pour tout mot v de $\vec{\varphi}(m)$ tel que*

- $\varphi(x_1) \neq \varepsilon$ *et* $\varphi(x_n) \neq \varepsilon$
- $\mathrm{alph}(\varphi(x_1)) \cap \mathrm{alph}(\varphi(x_n)) = \emptyset$
- $\Pi_{\varphi(x_1 x_n)}(v) \in \mathrm{alph}(\varphi(x_n))^* \mathrm{alph}(\varphi(x_1))^*$

il existe un mot w de A^* tel que $m \xrightarrow[\theta]{+} w$ et $v \in \vec{\varphi}(w)$.

Remarque : Soient (A,θ) avec $\theta = \emptyset$ et (A,γ) avec $\gamma = \{(a,b)\}$, le morphisme identité $\varphi : A^* \mapsto A^*$ n'est pas local : $ba \in \vec{\varphi}(ab)$ mais ab est un mot rigide pour θ . En fait la classe des morphismes locaux est strictement incluse dans la classe des morphismes préservant les dépendances (les deux exemples de morphismes non locaux proposés ci-dessus préservent les dépendances).

En fait nous n'allons pas montrer tout de suite que le morphisme doit être local. Nous allons montrer que si cette propriété n'est pas vérifiée pour certains mots, alors il n'existe pas de transduction rationnelle τ telle que $\vec{\varphi} = \tau \circ f_\theta$. La caractérisation des morphismes locaux établira l'équivalence entre les morphismes locaux et l'absence de mots de l'espèce.

Lemme 5.3.14 *Soient (A,θ) et (B,γ) deux semi-commutations et un morphisme $\varphi : A^* \mapsto B^*$. Il n'existe pas de transduction rationnelle τ telle que $\vec{\varphi} = \tau \circ f_\theta$ si il existe deux mots w de A^* et v de $\vec{\varphi}(u)$ tels que*

1. *w est un mot de permutation.*
2. $\varphi(z_0) \neq \varepsilon$, $\varphi(z_n) \neq \varepsilon$ *et* $\mathrm{alph}(\varphi(z_0)) \cap \mathrm{alph}(\varphi(z_n)) = \emptyset$.
3. *Pour tout indice i de $[0, i-1]$ le couple (z_i, z_{i+1}) est dans $\bar{\theta} \cup \bar{\theta}^{-1}$ et de plus si $(z_i, z_{i+1}) \in \theta$ alors il existe deux lettres $\alpha \in \mathrm{alph}(z_i)$ et $\beta \in \mathrm{alph}(z_{i+1})$ telles que :*
   - *α n'apparaît que dans $\varphi(z_i)$ i.e. $\Pi_\alpha(\varphi(w)) = \Pi_\alpha(\varphi(z_i))$.*
   - *β n'apparaît que dans $\varphi(z_{i+1})$ i.e. $\Pi_\beta(\varphi(w)) = \Pi_\beta(\varphi(z_{i+1}))$.*
   - $\Pi_{\alpha\beta}(v) \notin f_\gamma \circ \Pi_{\alpha\beta} \circ \varphi(z_{i+1} z_i)$.
4. $v = v_1 \varphi(z_n) \varphi(z_0) v_2$ *avec* $\mathrm{alph}(\varphi(z_0)) \times \mathrm{alph}(v_1) \subset \gamma$ *et* $\mathrm{alph}(v_2) \times \mathrm{alph}(\varphi(z_n)) \subset \gamma$.

preuve : Remarquons que pour tous entiers p et q nous avons

$$\varphi(z_0^p z_0 \dots z_n z_n^q) \xrightarrow[\gamma]{+} v_1 \varphi(z_n)^{q+1} \varphi(z_0)^{p+1} v_2$$

De plus, directement grâce au point (3), pour tout mot w' tel que $z_0^p z_0 \dots z_n z_n^q \xrightarrow[\theta]{+} w'$ nous avons $v_1\varphi(z_n)^{q+1}\varphi(z_0)^{p+1}v_2 \notin \vec{\varphi}(w')$.

Maintenant supposons qu'il existe une transduction rationnelle τ telle que $\vec{\varphi} = \tau \circ f_\theta$ alors nous avons

$$\tau(z_0^p z_0 \dots z_n z_n^q) \cap v_1\varphi(z_n)^+\varphi(z_0)^+v_2 = v_1\varphi(z_n)^{q+1}\varphi(z_0)^{p+1}v_2$$

Puisque $\varphi(z_0) \neq \varepsilon$, $\varphi(z_n) \neq \varepsilon$ et $\mathrm{alph}(\varphi(z_0)) \neq \mathrm{alph}(\varphi(z_n))$ nous avons une contradiction : $\{(z_0^p z_0 \dots z_n z_n^q, v_1\varphi(z_n)^{q+1}\varphi(z_0)^{p+1}v_2) \mid (p,q) \in \mathbb{N}^2\}$ n'est pas une partie rationnelle de $A^* \times B^*$; ainsi $(\cap v_1\varphi(z_n)^+\varphi(z_0)^+v_2)\circ\tau$ n'est pas une transduction rationnelle. □

Morphismes continus

Nous avons vu qu'un morphisme est continu si et seulement si $ab \xrightarrow[\theta]{} ba \Rightarrow \varphi(ab) \xrightarrow[\gamma]{*} \varphi(ba)$. Pour caractériser les morphismes continus et fortement connexes sur les lettres nous allons résoudre l'inclusion $f_\gamma(vu) \subset f_\gamma(uv)$. En fait cette étude est une généralisation du travail de C. Duboc à propos de l'équation à deux inconnues $uv \equiv vu$ sur les traces, présenté dans [Dub86], voici ce résultat sous sa forme générale :

Théorème 5.3.15 ([Dub86]) *Soient (A,θ) une commutation partielle, et $E = E'$ une équation à deux inconnues u et v de $\mathbb{M}(A,\theta)$.*

> *Si $E = E'$ n'est pas équilibrée, alors les traces x et y de $\mathbb{M}(A,\theta)$ satisfont l'équation si et seulement si il existe une trace t de $\mathbb{M}(A,\theta)$ et deux entiers α et β de $\mathbb{N}$ tels que : $x = t^\alpha$, $y = t^\beta$ et $\alpha(|E|_u - |E'|_u) = \beta(|E|_v - |E'|_v)$.*
>
> *Si $E = E'$ est équilibrée, alors les traces x et y de $\mathbb{M}(A,\theta)$ satisfont l'équation si et seulement si pour toutes composantes connexes C de x et C' de y dépendantes, on a les assertions suivantes :*
>
> - $C = C'$
> - *il existe une trace t de $\mathbb{M}(C,\theta)$ et deux entiers α et β de $\mathbb{N}$ tels que : $\Pi_C(x) = t^\alpha$ et $\Pi_C(y) = t^\beta$.*

Nous nous intéressons à l'équation $uv \equiv vu$, le théorème précédent a pour conséquence (dans nos mots) :

Corollaire 5.3.16 ([Dub86]) *Soient (A,θ) une commutation partielle et u et v deux mots de A^* . L'équation $f_\theta(uv) = f_\theta(vu)$ est vérifiée si et seulement si pour toute composante fortement connexe C de $(\mathrm{alph}(u),\bar\theta)$ et C' de $(\mathrm{alph}(v),\bar\theta)$ telles que $C \times C'$ n'est pas inclus dans θ nous avons :*

- *soit* $\mathrm{alph}(u) \times \mathrm{alph}(v) \subset \theta$
- *soit il existe deux entiers α et β et un mot t de A^* tels que*

$$f_\theta(u) = f_\theta(t^\alpha) \quad \text{et} \quad f_\theta(v) = f_\theta(t^\beta)$$

En fait la version semi-commutation de ce corollaire a exactement le même énoncé : soient (A,θ) une semi-commutation et $\theta_s = \theta \cap \theta^{-1}$. Le Lemme 2.4.13 nous affirme que $f_\theta(x) = f_\theta(y)$ si et seulement si $f_{\theta_s}(x) = f_{\theta_s}(y)$. Ainsi $f_\theta(uv) = f_\theta(vu)$ est équivalent à $f_{\theta_s}(uv) = f_{\theta_s}(vu)$. Nous retrouvons la condition nécessaire du cas partiel, condition clairement suffisante.

Maintenant si nous considérons l'inclusion $f_\theta(vu) \subset f_\theta(uv)$, le corollaire devient trivialement faux : prenons $A = \{a,b\}$ et $\theta = \{(a,b)\}$, posons $u = a$ et $v = b$ nous avons $f_\theta(vu) \subset f_\theta(uv)$.

Ici nous nous limitons au cas u et v fortement connexes pour $\bar{\theta}$. Tout d'abord nous présentons un lemme obtenu par Y. Roos :

Lemme 5.3.17 ([Roo89]) *Soient (A,θ) une semi-commutation et u un mot de A^* fortement connexe pour $\bar{\theta}$.*
Pour tout facteur m de $f_\theta(u^*)$ tel qu'il existe une lettre y qui vérifie $|m|_y > 2|u|_y{*}\mathrm{Card}(\mathrm{alph}(u))$, nous avons pour tout x de $\mathrm{alph}(u)$ $|m|_x \geq 1$.

Proposition 5.3.18 *Soient (A,θ) une semi-commutation et deux mots de A^* , u et v fortement connexes pour $\bar{\theta}$. L'inclusion $f_\theta(vu) \subset f_\theta(uv)$ est vérifiée si et seulement si :*

- *soit* $\mathrm{alph}(u) \times \mathrm{alph}(v) \subset \theta$.
- *soit il existe deux entiers α et β et un mot t de A^* tels que*

$$f_\theta(u) = f_\theta(t^\alpha) \quad et \quad f_\theta(v) = f_\theta(t^\beta)$$

preuve : Seul le cas $\mathrm{alph}(u) \times \mathrm{alph}(v) \not\subset \theta$ est à établir.

Puisque $\mathrm{alph}(u) \times \mathrm{alph}(v) \not\subset \theta$ il existe une lettre a de $\mathrm{alph}(u)$ et une lettre b de $\mathrm{alph}(v)$ telles que (a,b) soit dans $\bar{\theta}$. Si nous avons $\mathrm{alph}(u) \cap \mathrm{alph}(v) = \emptyset$ alors nous devons avoir $\Pi_{ab}(uv) = a^i b^j$ et $\Pi_{ab}(vu) = b^j a^i$: ceci est en contradiction avec le Lemme de Projection.

Puisqu'il existe au moins une lettre a commune à u et v , il existe deux entiers strictement positifs p et q tels que $|u^p|_a = |v^q|_a$.

Comme $uv \xrightarrow[\theta]{*} vu$ nous obtenons $u^p v^q \xrightarrow[\theta]{*} v^q u^p$, et de plus le Lemme de Levi nous apprend qu'il existe des mots u_1, u_2, v_1, v_2 tels que : $u^p \xrightarrow[\theta]{*} u_1 u_2$, $v^q \xrightarrow[\theta]{*} v_1 v_2$, $u_2 v_1 \xrightarrow[\theta]{*} v_1 u_2$, $u_1 v_1 \xrightarrow[\theta]{*} v^q$ et $u_2 v_2 \xrightarrow[\theta]{*} u^p$.

Puisque $|u^p|_a = |v^q|_a$ nous devons avoir $|u_2 v_1|_a = 0$. Supposons que $u_2 \neq \varepsilon$:

Nous avons $u_2 v_1 \xrightarrow[\theta]{*} v_1 u_2$ et $u_2 v_2 \xrightarrow[\theta]{*} u^p$ ceci signifie qu'il existe une lettre b de $\mathrm{alph}(u_2)$ telle que $|u^p|_b > |v^q|_b$. Posons $N = |u_2|_b = |u^p|_b - |v^q|_b$.

Maintenant pour tout k de $\mathbb{N}$ nous avons $u^{pk} v^{qk} \xrightarrow[\theta]{*} v^{qk} u^{pk}$ et il existe des mots $u_{1_k}, u_{2_k}, v_{1_k}, v_{2_k}$ tels que : $u^{pk} \xrightarrow[\theta]{*} u_{1_k} u_{2_k}$, $v^{qk} \xrightarrow[\theta]{*} v_{1_k} v_{2_k}$, $u_{2_k} v_{1_k} \xrightarrow[\theta]{*} v_{1_k} u_{2_k}$, $u_{1_k} v_{1_k} \xrightarrow[\theta]{*} v^{qk}$ et $u_{2_k} v_{2_k} \xrightarrow[\theta]{*} u^{pk}$.

Clairement nous devons avoir $|u_{2_k} v_{1_k}|_a = 0$ ainsi que $|u_{2_k}|_b = k.N$.

En prenant k supérieur à $2|u|_b * \mathrm{Card}(\mathrm{alph}(u))$ nous obtenons une contradiction avec le Lemme 5.3.17 : u est fortement connexe pour $\bar{\theta}$, $u^{pk} \xrightarrow[\theta]{*} u_{1_k}u_{2_k}$ avec $|u_{2_k}|_b > 2|u|_b * \mathrm{Card}(\mathrm{alph}(u))$ et $|u_{2_k}|_a = 0$.

Ainsi $u_2 = \varepsilon$ et de façon symétrique nous devons avoir $v_1 = \varepsilon$.

C'est pourquoi nous avons $u^p \xrightarrow[\theta]{*} v^q$ et $v^q \xrightarrow[\theta]{*} u^p$ d'où $uv \xrightarrow[\theta\cap\theta^{-1}]{*} vu$. Maintenant nous pouvons considérer l'équation sur les traces $f_{\theta\cap\theta^{-1}}(uv) = f_{\theta\cap\theta^{-1}}(vu)$ et le résultat découle du Corollaire 5.3.16. □

Il est facile maintenant de caractériser les morphismes continus fortement connexes sur les lettres :

Corollaire 5.3.19 *Soient (A,θ) et (B,γ) deux semi-commutations et un morphisme φ : $A^* \mapsto B^*$ fortement connexe sur les lettres. Le morphisme φ est continu si et seulement si pour tout couple (a,b) de θ nous avons :*

- *soit* $\mathrm{alph}(\varphi(a)) \times \mathrm{alph}(\varphi(b)) \subset \gamma$.
- *soit il existe un mot t de B^* et deux entiers α et β strictement positifs tels que*

$$\vec{\varphi}(a) = f_\gamma(t^\alpha) \quad et \quad \vec{\varphi}(b) = f_\gamma(t^\beta)$$

Morphismes continus et locaux

Dans cette partie nous réutilisons la substitution ψ et la semi-commutation λ définies pour l'équation $\vec{\varphi} = \tau$: nous allons montrer que si le morphisme φ est fortement connexe sur les lettres, continu et local alors nous avons $\vec{\varphi} = \Pi_B \circ f_\lambda \circ \psi \circ f_\theta$. Il est intéressant de passer par f_λ car, comme nous l'avons vu, cette semi-commutation peut être réalisée par une transduction τ' . Ainsi lorsque l'égalité $\vec{\varphi} = \Pi_B \circ f_\lambda \circ \psi \circ f_\theta$ est vérifiée, en posant $\tau = \Pi_B \circ \tau' \circ \psi$ nous donnons une solution de l'équation $\vec{\varphi} = \tau \circ f_\theta$.

D'autre part au lieu de travailler d'un côté sur B et de l'autre sur B_ψ nous allons raisonner des deux côtés sur B_ψ : il suffit de simuler γ sur B_ψ .

Nous (re)définissons d'abord (B_ψ, λ)

$$\begin{aligned}\lambda &= \{(a_{n,k}, b_{n',k'}) \in B_\psi \times B_\psi \mid (\Pi_B(a_{n,k}), \Pi_B(b_{n',k'})) \in \gamma\} \\ &\quad -\{(a^1_{n,k}, b_{n',|\varphi(b)|}) \in B_\psi \times B_\psi\} \\ &\quad -\{(a_{n,k}, a_{n,k+1}) \in B_\psi \times B_\psi\}\end{aligned}$$

Remarquons qu'ici l'ordre des lettres d'un $\psi(x)$ pour une lettre x ne pas être changé par λ .

Voici la semi-commutation qui simule γ sur B_ψ :

$$\gamma' = \{(a_{n,k}, b_{n',k'}) \in B_\psi \times B_\psi \mid (\Pi_B(a_{n,k}), \Pi_B(b_{n',k'})) \in \gamma\} - \{(a_{n,k}, a_{n,k+1}) \in B_\psi \times B_\psi\}$$

Fait 5.3.20 $\vec{\varphi} = \Pi_B \circ f_{\gamma'} \circ \psi$.

preuve : Il suffit de se rappeler de la démonstration du Lemme 5.3.3 :

Soient u un mot de A^* et w un mot de $\vec{\varphi}(u)$. Posons $u_N = \text{num}(u)$. Puisque $\varphi(u) \xrightarrow[\gamma]{*} w$ il existe des mots $w_0, w_1, \ldots w_p$ de B_N^* tels que :

- $\varphi_N(u_N) = w_0$ et $\text{den}_B(w_p) = w$
- $w_0 \xrightarrow[\gamma_N]{*} w_1 \xrightarrow[\gamma_N]{} w_2 \cdots \xrightarrow[\gamma_N]{} w_p$ avec $d(w_i, w_p) > d(w_{i+1}, w_p)$ pour tout $i < p$
- aucune dérivation inter-image de lettres n'a été effectuée de w_0 à w_1 i.e.

$$w_1 \in f_{\gamma_N}(\varphi_N(y_0)) f_{\gamma_N}(\varphi_N(y_1)) \ldots f_{\gamma_N}(\varphi_N(y_n))$$

- pour toute lettre y_j de $\text{alph}(u_N)$ les lettres de $\varphi_n(y_j)$ sont bien ordonnées les unes par rapport aux autres dès w_1 i.e. pour tout $j \leq N$ nous avons $\Pi_{\varphi_N(y_i)}(w_1) = \Pi_{\varphi_N(y_i)}(w_p)$

Il est bien clair que $\text{den}_B(w_1)$ appartient à $\text{den}_B(\psi_N(u_N))$, pour montrer que w_p appartient à $f_{\gamma'_N} \circ \psi_N(u_N)$ il suffit de suivre la dérivation pas à pas. □

Fait 5.3.21 *Soient $u = z_0 \ldots z_n$ un mot de A_N^* et w un mot de $B_{\psi_N}^*$ tels que $w \in f_{\gamma'_N} \circ \psi_N \circ f_\theta(u)$. Si pour tous les indices i et j avec $i < j$ nous avons $\Pi_{\psi_N(z_i z_j)}(v) \notin \text{alph}(\psi_N(z_j))^* \text{alph}(\psi_N(z_i))^*$ alors w appartient à $f_{\lambda_N} \circ \psi_N(u)$*

Si le couple (u, w) satisfait la condition C alors w appartient à $f_\lambda \circ \psi(u)$.

preuve : Nous retrouvons la condition C du Lemme 5.3.3, la preuve est contenue dans la démonstration de ce lemme.

Le cas $\text{alph}(\varphi(x)) \times \text{alph}(\varphi(y)) \not\subset \gamma \Rightarrow (x, y) \in \bar{\theta}$

Maintenant il faut résoudre l'équation $f_{\gamma'} \circ \psi \circ f_\theta = f_\lambda \circ \psi \circ f_\theta$. Dans un premier temps nous allons nous aider d'une hypothèse permettant de numéroter les mots en toute quiétude : nous traitons le cas " si $\text{alph}(\varphi(x)) \times \text{alph}(\varphi(y)) \not\subset \gamma$ alors $(x, y) \in \bar{\theta}$ ". Grâce à cette hypothèse nous avons :

Fait 5.3.22 *Si pour toutes lettres x, y de A^* telles que $\text{alph}(\varphi(x)) \times \text{alph}(\varphi(y)) \not\subset \gamma$ nous avons $(x, y) \in \bar{\theta}$ alors pour tous mots w_N de A_N^* et v de $B_{\psi_N}^*$ tels que $v_N \in f_{\gamma'} \circ \psi \circ f_\theta(w_N)$, s'il existe $u_N \in f_\lambda \circ \psi \circ f_\theta(w_N)$ avec $\Pi_B(u) = \Pi_B(v)$ alors nous devons avoir $u_N = v_N$.*

preuve : Posons $w_N = \text{num}(w)$ d'après le Lemme de numérotation il existe $v_N \in f_{\gamma'_N} \circ \psi_N \circ f_{\theta_N}(w_N)$ et $u_N \in f_{\lambda_N} \circ \psi_N \circ f_{\theta_N}(w_N)$ tels que $\text{den}_B(u_N) = \text{den}_B(v_N) = \Pi_B(v)$. Supposons que u_N soit différent de v_N , supposons qu'une $i^{\text{ème}}$ lettre diffère i.e. $u = u' a_{n,l_p} u''$ et $v = v' b_{n',l'_q} v''$ avec $|u'| = |v'|$.

Comme $\text{den}_B(u) = \text{den}_B(v)$ nous avons $\text{den}_B(a_{n,l_p}) = \text{den}_B(b_{n',l'_q})$ avec $a_{n,l_p} \neq b_{n',l'_q}$ (la restriction de den_B à B_{ψ_N} est un morphisme alphabétique). Cette dernière égalité entraîne que $(a_{n,l}, b_{n',l'}) \in \bar{\gamma}' \cap \bar{\gamma}'^{-1}$ et aussi $(a, b) \in \bar{\theta} \cap \bar{\theta}^{-1}$.

Si $p \neq q$ alors nous avons une contradiction : $(a_p, b_q) \in \bar{\theta}_N \cap \bar{\theta}_N^{-1}$ et $(a_{n,l}, b_{n',l'}) \in \bar{\gamma}'_N \cap \bar{\gamma}'^{-1}_N$.

Maintenant comme $p = q$, d'après la définition de ψ on a une bijection entre $\{\psi(x)\}$ et $\{\bar{\varphi}(x)\}$ pour toute lettre x de A ; ainsi si $m \in \psi(x)$ et $m' \in \psi(x)$ $\Pi_B(m) = \Pi_B(m')$ implique $m = m'$. D'après les définitions des semi-commutations γ' et λ nous devons avoir pour toute lettre x et pour tout m de $\psi(x)$, $f_\lambda(m) = f_{\gamma'}(m) = m$. Si $a_{n,l} \neq a_{n',l'}$ nous devons avoir $u = u_1 a_{n,s_p} u_2$ et $v = v_1 a_{n',s'_p} v_2$ avec $|u_1| = |v_1|$ et $\Pi_B(a_{n,s}) \neq \Pi_B(a_{n',s'})$ et ainsi $\Pi_B(u) \neq \Pi_B(v)$. □

Maintenant nous supposons que l'équation $f_{\gamma'} \circ \psi \circ f_\theta = f_\lambda \circ \psi \circ f_\theta$ n'est pas vérifiée. Nous allons chercher les mots m de A^* et v de B_ψ^* les plus simples possible tels que $v \in f_{\gamma'} \circ \psi \circ f_\theta(m)$ et $v \notin f_\lambda \circ \psi \circ f_\theta(m)$:

Lemme 5.3.23 *Si $f_{\gamma'} \circ \psi \circ f_\theta \neq f_\lambda \circ \psi \circ f_\theta$ alors il existe un mot $m = z_0 \dots z_n$ de A_N^* et un mot v de $B_{\psi_N}^*$ tels que :*

1. *$v \in f_{\gamma'_N} \circ \psi_N \circ f_{\theta_N}(m)$*
2. *$v \notin f_{\lambda_N} \circ \psi_N \circ f_{\theta_N}(m)$*
3. *m est de longueur minimal i.e.*
$$\forall m' \in A^* |m'| < |m| \quad f_{\gamma'} \circ \psi \circ f_\theta(m') = f_\lambda \circ \psi \circ f_\theta(m')$$
4. *Il existe un mot $v' \in f_{\lambda_N} \circ \psi_N(m)$ tel que $v' \xrightarrow[\gamma'_N]{} v$.*
5. *Les images de z_0 et de z_n ont commuté dans v i.e.*
$$\Pi_{\psi_N(z_0 z_n)} \in \mathrm{alph}(\psi_N(z_n))^* \mathrm{alph}(\psi_N(z_0))^*$$
6. *Si $\{z_j, z_k\}$ est différent de $\{z_0, z_n\}$ alors les images de z_j et de z_k sont mélangées dans v i.e. si $\psi_N(z_j) \neq \varepsilon$ et $\psi_N(z_k) \neq \varepsilon$ alors*
$$\Pi_{\psi_N(z_j z_k)} \notin \mathrm{alph}(\psi_N(z_j))^* \mathrm{alph}(\psi_N(z_k))^*$$
7. *Pour tout j différent de 0 nous avons*
$$\mathrm{alph}(\mathrm{den}_B(\psi_N(z_0))) \not\subset \mathrm{alph}(\mathrm{den}_B(\psi_N(z_j)))$$
8. *Pour tout j différent de n nous avons*
$$\mathrm{alph}(\mathrm{den}_B(\psi_N(z_n))) \not\subset \mathrm{alph}(\mathrm{den}_B(\psi_N(z_j)))$$
9. *Si m se décompose en $m = m_1 z_j m_2$ avec $m_1 \neq \varepsilon$ et $\mathrm{alph}(m_1) \times \{z_i\} \subset \theta_N$ alors $v \notin f_{\gamma'_N} \circ \psi_N \circ f_{\theta_N}(z_j m_1 m_2)$.*
10. *Si m se décompose en $m = m_1 z_j m_2$ avec $m_2 \neq \varepsilon$ et $\{z_i\} \times \mathrm{alph}(m_2) \subset \theta_N$ alors $v \notin f_{\gamma'_N} \circ \psi_N \circ f_{\theta_N}(m_1 m_2 z_j)$.*

preuve :

Si $f_{\gamma'}\circ\psi\circ f_\theta \neq f_\lambda\circ\psi\circ f_\theta$ alors clairement il existe deux mots tels que m de A_N^* et v de $B_{\psi_N}^*$ (1), (2) et (3) .

Pour le point (4) il suffit de décrire une transformation de m en v ; nous avons $v \in f_{\gamma'_N}\circ\psi_N\circ f_{\theta_N}(m)$ d'où l'existence d'un mot m' dans $f_{\theta_N}(m)$ tel que :

$$\psi_N(m') = v_0 \xrightarrow[\gamma'_N]{} v_1 \xrightarrow[\gamma'_N]{} \cdots \xrightarrow[\gamma'_N]{} v_{k-1} \xrightarrow[\gamma'_N]{} v_k = v$$

Clairement $\psi(m') \in f_{\lambda_N}\circ\psi_N\circ f_{\theta_N}(m)$ et comme (2) il existe un indice i tel que $v_i \in f_{\lambda_N}\circ\psi_N f_{\theta_N}(m')$ et $v_{i+1} \notin f_{\lambda_N}\circ\psi_N f_{\theta_N}(m')$.
Comme $v_i \in f_{\lambda_N}\circ\psi_N f_{\theta_N}(m')$ il existe un mot m'' dans $f_{\theta_N}(m')$ tel que $v_i \in f_{\lambda_N}\circ\psi_N(m'')$.
Il suffit de redéfinir m en m'' , v en v_{i+1} et v' en v pour obtenir (4).
Nous noterons v_0 le mot de $\psi(m)$ tel que $v_i \in f_{\lambda_N}(v_0)$.

A partir de (4) il est facile de voir que

$$v' = u_1 a_{n,1_p} b_{n,|\varphi(b)|_q} u_2 \xrightarrow[\gamma'_N]{} u_1 b_{n,|\varphi(b)|_q} a_{n,1_p} u_2$$

i.e. les images de a_p et de b_q ont commuté dans v et comme $v' \in f_{\lambda_N}\circ\psi_N(m)$ seules ces deux images de lettres ont commuté complètement i.e.
si $\{z_j, z_k\}$ est différent de $\{a_p, b_q\}$ et $\psi_N(z_j) \neq \varepsilon$ et $\psi_N(z_k) \neq \varepsilon$ alors

$$\Pi_{\psi_N(z_j z_k)}(v) \notin \mathrm{alph}(\psi_N(z_k))^*\mathrm{alph}(\psi_N(z_j))^* \quad \text{pour } j < k \ .$$

Pour clarifier la preuve nous noterons $Z_i = \Pi_{\psi_N(z_i)}(v)$ $(= \Pi_{\psi_N(z_i)}(v_0)$) .

Nous allons montrer que $p = 0$ et $q = n$, c'est à dire le point (5) :
supposons que l'image de z_0 n'ait pas complètement commutée avec l'image d'un z_k , i.e pour tout k nous avons $\Pi_{Z_0 Z_k} \neq Z_k Z_0$.
Cette hypothèse et le Fait 5.3.21 impliquent $Z_0\Pi_{Z_1\ldots Z_n}(v) \xrightarrow[\lambda_N]{*} v$. Comme m est de longueur minimale nous devons avoir $Z_1 \ldots Z_n \xrightarrow[\lambda_N]{*} \Pi_{Z_1\ldots Z_n}(v)$ nous obtenons une contradiction : $Z_0\Pi_{Z_1\ldots Z_n}(v) \xrightarrow[\lambda_N]{*} v$ et ainsi $v_0 \xrightarrow[\lambda_N]{*} v$. C'est pourquoi $p = 0$.

De manière symétrique nous trouvons $q = n$, le point (5) est ainsi démontré.

Pour le point (6) nous avons déjà vu que si $\{z_j, z_k\}$ est différent de $\{z_0, z_n\}$ et $Z_j \neq \varepsilon$ et $Z_k \neq \varepsilon$ alors $\Pi_{Z_j Z_k}(v) \neq Z_k Z_j$ pour $j < k$. Il nous reste le cas $k < j$:
nous avons $\Pi_{Z_0 Z_k}(v) \neq Z_k Z_0$ pour tout k avec $0 < k < n$ et $Z_k \neq \varepsilon$, ainsi la première lettre de Z_0 est avant la dernière lettre de Z_k dans v .
De même, la dernière lettre de Z_n est après la première lettre de Z_k dans v .
Comme la première lettre de Z_0 est après la dernière lettre de Z_n , il s'en suit : la première lettre de tout Z_k est avant la dernière lettre de Z_n qui se trouve avant la première lettre de Z_0 qui elle même est avant la dernière lettre de Z_k dans v .

De là pour tout $\{z_j, z_k\}$ différent de $\{z_0, z_n\}$ et tel que $Z_j \neq \varepsilon$ et $Z_k \neq \varepsilon$: $\Pi_{Z_j Z_k}(v) \neq Z_j Z_k$

Pour le point (7), il suffit de remarquer que la première lettre d'un Z_k avec $k \neq 0$ doit commuter avec le mot Z_0 ; de même pour le point (8) toute dernière lettre de Z_k avec $k \neq n$ doit commuter avec le mot Z_n .

Il reste à montrer les points (9) et (10) : supposons que m se décompose en $m = m_1 z_j m_2$ avec $m_1 \neq \varepsilon$ et $\text{alph}(m_1) \times \{z_i\} \subset \theta_N$.
D'après le point (6) nous savons que Z_j ne commute complètement avec aucun Z_k . Il est alors impossible d'avoir $v \in f_{\gamma'_N} \circ \psi_N \circ f_{\theta_N}(z_j m_1 m_2)$: si m est un mot de longueur minimale le point (5) doit toujours être respecté.

De façon symétrique nous obtenons le point (10) . □

Malheureusement ce lemme n'est pas assez précis, il nous faut montrer :

Lemme 5.3.24 *Si $f_{\gamma'} \circ \psi \circ f_\theta \neq f_\lambda \circ \psi \circ f_\theta$ alors il existe un mot $m = z_0 \dots z_n$ de A_N^* et un mot v de $B_{\psi_N}^*$ vérifiant les points (1-10) du lemme précédent et tels que :*

a. $\text{den}(m)$ *est un mot de permutation et pour toutes lettres différentes x et y de m nous avons* $\text{alph} \circ \varphi \circ \text{den}(x) \not\subset \text{alph} \circ \varphi \circ \text{den}(y)$ *lorsque* $\psi_N(x) \neq \varepsilon$.

b. $\psi_N(z_0) \neq \varepsilon$ *et* $\psi_N(z_0) \neq \varepsilon$

c. pour tout indice i (z_i, z_{i+1}) appartient à $\bar{\theta}_N \cup \bar{\theta}_N^{-1}$, de plus si (z_i, z_{i+1}) appartient à θ_N alors il existe une lettre $\alpha \in B$ de $\varphi(\text{den}_B(z_i))$ et une lettre $\beta \in B$ de $\varphi(\text{den}_B(z_{i+1}))$ telles que

- $\Pi_\alpha \circ \varphi \circ \text{den}(m) = \Pi_\alpha \circ \varphi \circ \text{den}(z_i)$
- $\Pi_\beta \circ \varphi \circ \text{den}(m) = \Pi_\beta \circ \varphi \circ \text{den}(z_{i+1})$
- $\Pi_{\alpha\beta} \circ \text{den}(v) \notin f_\gamma \Pi_{\alpha\beta} \circ \varphi \circ \text{den}(m)$

d. $v \in v_1 \psi_N(z_n) \psi_N(z_0) v_2$ *avec* $\text{alph}(\psi_N(z_0)) \times \text{alph}(v_1) \subset \gamma'_N$ *et* $\text{alph}(v_2) \times \text{alph}(\psi_N(z_n)) \subset \gamma'_N$.

preuve :

Posons $Z_i = \Pi_{\psi_N(z_i)}(v)$

Tout d'abord nous allons montrer le point (4) :

D'après les points (5) et (6) du Lemme 5.3.23 nous avons $\Pi_{Z_0 Z_n}(v) = Z_n Z_0$, par contre pour tout $\{z_j, z_k\}$ différent de $\{z_0, z_n\}$ avec $Z_j \neq \varepsilon$ et $Z_k \neq \varepsilon$ nous avons $\Pi_{Z_j Z_k}(v) \neq Z_j Z_k$. Ainsi

$$v_0 \xrightarrow[\lambda_N]{*} Z_0 \Pi_{Z_1 \dots Z_{n-1}}(v) Z_n$$

Puisque $\Pi_{Z_0 Z_n}(v) = Z_n Z_0$ il existe de décomposition de $\Pi_{Z_1 \dots Z_{n-1}}(v) = w_1 w_2$ telle que $\text{alph}(Z_0) \times \text{alph}(w_1) \subset \lambda$ et $\text{alph}(w_2) \times \text{alph}(Z_n) \subset \lambda$ avec

$$Z_0 w_1 w_2 Z_n \xrightarrow[\lambda_N]{*} w_1 Z_0 Z_n(v) w_2 \xrightarrow[\gamma'_N]{*} w_1 Z_n Z_0 w_2 \xrightarrow[\lambda_N]{*} v$$

Maintenant, supposons que le mot $w_1 Z_n Z_0 w_2$ appartienne à $f_{\lambda_N} \circ \psi_N \circ f_{\theta_N}(m)$; comme $w_1 Z_n Z_0 w_2 \xrightarrow[\lambda_N]{*} v$ nous aboutissons à une contradiction : $v \in f_{\lambda_N} \circ \psi_N \circ f_{\theta_N}(m)$.

Nous allons maintenant raisonner par récurrence pour construire un mot respectant les points (a,b,c,d) :

Voici notre hypothèse de construction pour un sous mot wz_i de m :

1. wz_i contient z_0
2. Aucune lettre de wz_i n'est effacée par ψ_N
3. $\mathrm{alph}(\mathrm{den}_B(\psi_N(x)))$ est différent de $\mathrm{alph}(\mathrm{den}_B(\psi_N(y)))$ pour toutes lettres différentes x et y de $\mathrm{alph}(wz_i)$ et non-effacées.
4. Si $w \neq \varepsilon$ alors $\mathrm{alph}(w) \times alph(z_{i+1} \dots z_n) \subset \theta_N$
5. Pour toute lettre x de $\mathrm{alph}(w)$ alors $\Pi_{\psi_N(xz_j)}(v) \in f_{\gamma'_N} \circ \psi(z_j x)$ si $j > i$
6. Si $wz_i = w_1 z_j z_k w_2$ alors $(z_j, z_k) \in \bar{\theta}_N \cup \bar{\theta}_N^{-1}$, de plus si (z_i, z_{i+1}) appartient à θ_N alors il existe une lettre $\alpha \in B^*$ de $\varphi(\mathrm{den}_B(z_j))$ et une lettre $\beta \in B^*$ de $\varphi(\mathrm{den}_B(z_k))$ telles que
   - $\Pi_\alpha \circ \varphi \circ \mathrm{den}(w_1 z_k \dots z_n) = \varepsilon$
   - $\Pi_\beta \circ \varphi \circ \mathrm{den}(w_1 z_j z_{k+1} \dots z_n) = \varepsilon$
   - $\Pi_{\alpha\beta} \circ \mathrm{den}(v) \notin f_\gamma \Pi_{\alpha\beta} \circ \varphi \circ \mathrm{den}(z_k z_j)$

Pour $|wz_i| = 1$ nous prenons $wz_i = z_0$.

Supposons que nous avons construit un sous-mot wz_i vérifiant les points (1-6) . Si $z_i = z_n$ alors nous avons le résultat.

Autrement considérons l le plus grand indice tel que $(z_i, z_l) \in \bar{\theta}_N$ ou $\Pi_{Z_i Z_l}(v) \notin f_{\gamma'_N}(Z_l Z_i)$. La lettre z_l existe toujours d'après les points $(9-10)$ du Lemme 5.3.23 . Nous avons à traiter deux cas :

<u>Le cas $Z_l \neq \varepsilon$:</u> Souvenons nous que nous travaillons toujours sous l'hypothèse : $\mathrm{alph}(\psi_N(x)) \times \mathrm{alph}(\psi_N(y)) \not\subset \gamma'_N \Rightarrow (x,y) \in \bar{\theta}$

Nous allons montrer que si $Z_l \neq \varepsilon$ alors le mot $wz_i z_l$ respecte les propriétés (1-6) :

Les points (1) et (2) sont respectés et les points (4) et (5) sont des conséquences directes de la définition de z_l . Pour le point (3) remarquons que, par construction de wz_i , nous savons que $\mathrm{alph}(\mathrm{den}_B(\psi_N(w))) \cap \mathrm{alph}(\mathrm{den}_B(Z_l)) = \emptyset$.

Maintenant supposons que $\mathrm{alph}(\mathrm{den}_B(Z_i)) \subset \mathrm{alph}(\mathrm{den}_B(Z_l))$. D'après le point (7) du Lemme 5.3.23 nous avons $z_i \neq z_0$ et donc $wz_i = w' z_h z_i$ avec $h \neq 0$, de plus :

- Soit (z_h, z_i) est dans $\bar{\theta}_N$ alors nous obtenons une contradiction avec l'hypothèse (4) de construction de wz_i : nous avons $\mathrm{alph}(\mathrm{den}_B(Z_h)) \times \mathrm{alph}(\mathrm{den}_B(Z_i)) \not\subset \gamma'_N$ et ainsi $\mathrm{alph}(\mathrm{den}_B(Z_h)) \times \mathrm{alph}(\mathrm{den}_B(Z_l)) \not\subset \gamma'_N$ d'où (z_h, z_l) est dans $\bar{\theta}_N$.

- Soit (z_h, z_i) est dans $\theta_N \cap \bar{\theta}_N^{-1}$. D'après l'hypothèse (6), il existe une lettre $\beta \in B$ de $\varphi(\mathrm{den}_B(z_i))$ telle que $\Pi_\beta \circ \varphi \circ \mathrm{den}(w' z_h z_{i+1} \ldots z_n) = \varepsilon$. Mais $j > i$ et nous avons aussi $\beta \in \varphi \circ \mathrm{den}(z_l)$ d'où une contradiction.

Nous avons montré :

1. $w z_i z_l$ contient z_0
2. Aucune lettre de $w z_i z_l$ n'est effacée par ψ_N
3. $\forall x, y \in \mathrm{alph}(w z_i z_l) x \neq y \Rightarrow \mathrm{alph}(\mathrm{den}_B(\psi_N(x))) \neq \mathrm{alph}(\mathrm{den}_B(\psi_N(y)))$
4. $\mathrm{alph}(w z_i) \times alph(z_{l+1} \ldots z_n) \subset \theta_N$
5. $\forall x \in \mathrm{alph}(w z_i)$ si $k > i$ alors $\Pi_{\psi_N(x z_k)}(v) \in f_{\gamma'_N} \circ \psi(z_k x)$

Il reste à démontrer le point (6). Si (z_i, z_l) appartient à $\bar{\theta}_N$ alors le point (6) est respecté. Considérons le cas (z_i, z_l) appartient à $\theta_N \cap \bar{\theta}_N^{-1}$:

Comme $\Pi_{Z_i Z_l}(v) \in f_{\gamma'_N}(Z_l Z_i)$ et d'après le Lemme de Projection il existe une lettre $\alpha \in B$ de $\varphi(\mathrm{den}(z_i))$ et une lettre $\beta \in B$ de $\varphi(\mathrm{den}(z_l))$ telles que $\Pi_{\alpha\beta} \circ \mathrm{den}(v) \notin f_\gamma \Pi_{\alpha\beta} \circ \varphi \circ \mathrm{den}(z_i z_l)$. Comme (z_i, z_l) appartient à θ_N nous avons $\mathrm{alph}(\mathrm{den}_B(Z_i)) \cap \mathrm{alph}(\mathrm{den}_B(Z_l)) = \emptyset$.

Supposons que $\Pi_\alpha \circ \varphi \circ \mathrm{den}(w z_l \ldots z_n) \neq \varepsilon$:
D'après la définition de z_l et comme (z_i, z_l) appartient à θ_N nous avons $\Pi_\alpha \circ \varphi \circ \mathrm{den}(z_j \ldots z_n) = \varepsilon$. Maintenant s'il existe une lettre z_h de w telle que $\alpha \in \mathrm{alph} \circ\, \varphi \circ \mathrm{den}(z_h)$ nous allons montrer $\Pi_{Z_h Z_l}(v) \notin f_{\gamma'_N}(Z_l Z_h)$:

Nous avons $\Pi_{\alpha\beta} \circ \mathrm{den}(v) \notin f_\gamma \circ \Pi_{\alpha\beta} \circ \varphi \circ \mathrm{den}(z_i z_h)$ ceci entraîne $(\alpha, \beta) \in \bar{\gamma}^{-1}$ et l'existence de deux lettres $a \in \mathrm{alph}(Z_i)$ et $b \in \mathrm{alph}(Z_l)$ telles que $\Pi_{ab}(v) = ab$ et $\alpha = \mathrm{den}_B(a)$ et $\beta = \mathrm{den}_B(b)$; de même il existe une lettre a' de $\mathrm{alph}(Z_h)$ avec $\alpha = \mathrm{den}_B(a')$ et $\Pi_{a'a}(v) = a'a$ (puisque z_h est avant z_i dans m et (a, a') ne commutent pas par γ') .

Ainsi $\Pi_{a'b}(v) = a'b$ avec $(a', b) \in \gamma'^{-1}_N$ d'où $\Pi_{Z_h Z_j}(v) \notin f_{\gamma'_N}(Z_j Z_h)$.

De façon symétrique nous pouvons obtenir $\Pi_\beta \circ \varphi \circ \mathrm{den}(w z_i z_{j+1} \ldots z_n) = \varepsilon$.

Remarquons que le mot obtenu par cette construction satisfait les points (a,b,c,d) de notre lemme, notamment le point (3) indique que la version dénumérotée du mot construit est un mot de permutation.

<u>Le cas $Z_l = \varepsilon$:</u>

Remarquons que nous avons $l \neq n$. Supposons qu'il n'existe pas de sous-mot $a_0 a_1 \ldots a_k$ de $z_0 \ldots z_n$ tel que

- $a_0 = z_i$ et $a_1 = z_l$
- $\psi_N(a_1 \ldots a_{k-1}) = \varepsilon$ et $\psi_N(a_k) \neq \varepsilon$

- $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ est un chemin de $\bar{\theta}_N$
- $\mathrm{den}(a_p) \neq \mathrm{den}(a_q)$ pour tout indice p et q

Puisque $Z_n \neq \varepsilon$, cela veut dire qu'il existe une lettre z_j telle que $Z_j = \varepsilon$ et $\{z_j\} \times \mathrm{alph}(z_{j+1} \ldots z_n) \subset \theta_N$. Ainsi nous avons $v \in f_{\gamma'_N} \circ \psi_N \circ f_{\theta_N}(z_0 \ldots z_{j-1} z_{j+1} \ldots z_n z_j)$ ceci contredit le point (10) du Lemme 5.3.23.

D'après l'hypothèse de construction, la définition de z_l et comme $l < k$ nous avons $(z_i, z_k) \in \theta_N$. Le mot $a_0 \ldots a_k$ respecte les points (a,b,c,d) du lemme. □

Le cas général

Maintenant nous levons l'hypothèse $\mathrm{alph}(\varphi(x)) \times \mathrm{alph}(\varphi(y)) \not\subset \gamma \Rightarrow (x, y) \in \bar{\theta}$:

Lemme 5.3.25 *Si $f_{\gamma'} \circ \psi \circ f_\theta \neq f_\lambda \circ \psi \circ f_\theta$ alors il existe un mot $m = x_0 \ldots x_n$ de A^* et un mot v de B^*_ψ tels que $v \in f_{\gamma'} \circ \psi \circ f_\theta(m)$, $v \notin f_\lambda \circ \psi \circ f_\theta(m)$ et avec*

a. m est un mot de permutation.

b. $\psi(x_0) \neq \varepsilon$ et $\psi(x_n) \neq \varepsilon$

c. pour tout indice i (x_i, x_{i+1}) appartient à $\bar{\theta}_N \cup \bar{\theta}_N^{-1}$, de plus si (x_i, x_{i+1}) appartient à θ alors il existe une lettre $\alpha \in B$ de $\varphi(x_i)$ et une lettre $\beta \in B$ de $\varphi(x_{i+1})$ telles que

- $\Pi_\alpha \circ \varphi(m) = \Pi_\alpha \circ \varphi(x_i)$
- $\Pi_\beta \circ \varphi(m) = \Pi_\beta \circ \varphi(x_{i+1})$
- $\Pi_{\alpha\beta}(v) \notin f_\gamma \Pi_{\alpha\beta} \circ \varphi(m)$

d. $v \in v_1 \psi(x_n) \psi(x_0) v_2$ avec $\mathrm{alph}(\psi(x_0)) \times \mathrm{alph}(v_1) \subset \gamma'$ et $\mathrm{alph}(v_2) \times \mathrm{alph}(\psi(x_n)) \subset \gamma'$.

preuve : Supposons qu'il existe un mot un mot $m = z_0 \ldots z_n$ de A^*_N et un mot v de $B^*_{\psi_N}$ tels que $v \in f_{\gamma'_N} \circ \psi_N \circ f_{\theta_N}(m)$, $v \notin f_{\lambda_N} \circ \psi_N \circ f_{\theta_N}(m)$.

Comme dans le Lemme 5.3.23 nous pouvons choisir m de longueur minimale et tel qu'il existe un mot $v' \in f_{\lambda_N} \circ \psi_N(m)$ tel que $v' \xrightarrow[\gamma'_N]{} v$.

Posons $\Pi_{\psi_N(z_i)}(v) = Z_i$.

Nous savons qu'il existe exactement deux lettres z_i et z_j dont les images ont commuté dans v i.e. $\Pi_{Z_i Z_j}(v) = Z_j Z_i$ (pour $i < j$) , et pour tous les autres couples (z_k, z_l) avec $k < l$ nous avons $\Pi_{Z_l Z_k}(v) \neq Z_l Z_k$.

Posons $\theta_C = \theta - \{(x, y) \in A \times A \mid \mathrm{alph} \circ \varphi(x) \times \mathrm{alph} \circ \varphi(y) \not\subset \gamma\}$. Notons θ_{C_N} la version numérotée de θ_C .

Supposons qu'il existe un mot m' de A^*_N tel que $m' \in f_{\theta_{C_N}}(z_i \ldots z_j)$ et $\mathrm{den}_B \circ \Pi_{\psi_N(m')}(v) \in f_\lambda \circ \psi \circ \mathrm{den}(m')$.

Comme nous avons utilisé θ_{C_N} pour obtenir m' et que $\mathrm{alph}(\varphi(x)) \times \mathrm{alph}(\varphi(y)) \not\subset \gamma \Rightarrow (x,y) \in \bar{\theta}_C$, nous obtenons, grâce au Fait 5.3.22, $\Pi_{\psi_N(m')}(v) \in f_{\lambda_N} \circ \psi_N \circ (m')$.

Appelons $m_1 = y_0 \ldots y_n$ le mot $\Pi_{z_0 \ldots z_{i-1}}(m) m' \Pi_{z_{i+1} \ldots z_n}(m)$.

Remarquons que nous avons alors pour tout $k > l$

$$\Pi_{\psi_N(y_l z_k)}(m_1) \notin \mathrm{alph}(\psi_N(y_l))^* \mathrm{alph}(\psi_N(y_k))^*$$

Et ainsi nous aboutissons à une contradiction : $v \in f_{\lambda_N} \circ \psi_N(m_1)$.

Ainsi il existe un mot $m = z_0 \ldots z_n$ de A_N^* et un mot v de $B_{\psi_N}^*$ tels que $v \in f_{\gamma'_N} \circ \psi_N \circ f_{\theta_{C_N}}(m)$, $v \notin f_{\lambda_N} \circ \psi_N \circ f_{\theta_{C_N}}(m)$. Rappelons que θ_C vérifit $\mathrm{alph}(\varphi(x)) \times \mathrm{alph}(\varphi(y)) \not\subset \gamma \Rightarrow (x,y) \in \bar{\theta}_C$.

Grâce au Lemme 5.3.24, nous savons qu'il existe deux mots w de A_N^* et u de $B_{\psi_N}^*$ vérifiant les points (a,b,c,d) en version numérotée et utilisant θ_{C_N} à la place de θ . Clairement les points (a,b,d) sont conservés en effaçant la numérotation.

Pour le point (c) il nous faut vérifier que pour tout couple (z_i, z_{i+1}) de $\bar{\theta}_{C_N} \cup \bar{\theta}_{C_N}^{-1}$, le couple $(\mathrm{den}(z_i), \mathrm{den}(z_{i+1}))$ appartient $\bar{\theta} \cup \bar{\theta}^{-1}$:

Supposons que (z_i, z_{i+1}) soit dans $\bar{\theta}_{C_N} \cup \bar{\theta}_{C_N}^{-1}$.
Si $Z_i = \varepsilon$ ou $Z_{i+1} = \varepsilon$ alors, par définition de θ_C , $(\mathrm{den}(z_i), \mathrm{den}(z_{i+1}))$ est dans $\bar{\theta} \cup \bar{\theta}^{-1}$.

Le cas $Z_i \neq \varepsilon$ et $Z_{i+1} \neq \varepsilon$:
Si (z_i, z_{i+1}) appartient à $\bar{\theta}_{C_N}$ (resp. à $\bar{\theta}_{C_N}^{-1}$) alors $\mathrm{alph} \circ \mathrm{den}_B(Z_i) \times \mathrm{alph} \circ \mathrm{den}(Z_{i+1}) \not\subset \gamma$ (resp. γ^{-1}) .

Supposons que le couple $(\mathrm{den}(z_i), \mathrm{den}(z_{i+1}))$ soit dans θ (resp. dans θ^{-1}).
Le morphisme φ est supposé continu, ceci impose $\mathrm{alph} \circ \mathrm{den}_B(Z_i) = \mathrm{alph} \circ \mathrm{den}(Z_{i+1})$.
Mais le point (a) du Lemme 5.3.24 nous indique que pour toutes lettres différentes x et y de w nous avons $\mathrm{alph} \circ \varphi \circ \mathrm{den}(x) \neq \mathrm{alph} \circ \varphi \circ \mathrm{den}(y)$ lorsque $\psi_N(x) \neq \varepsilon$. □

caractérisation des morphismes continus locaux

Retournons sur les alphabet A et B, du lemme précédent découle :

Proposition 5.3.26 *Soient (A,θ) et (B,γ) deux semi-commutations et un morphisme continu $\varphi : A^* \mapsto B^*$. Le morphisme φ est local si et seulement si il n'existe pas de mot permutation $w = x_0 \ldots x_n$ de A^* et de mot v de $\bar{\varphi}(w)$ tels que*

1. $\varphi(x_0) \neq \varepsilon$, $\varphi(x_n) \neq \varepsilon$ *et* $\mathrm{alph}(\varphi(x_0)) \cap \mathrm{alph}(\varphi(x_n)) = \emptyset$.
2. *Pour tout indice i de $[0, i-1]$ le couple (x_i, x_{i+1}) est dans $\bar{\theta} \cup \bar{\theta}^{-1}$ et de plus si $(x_i, x_{i+1}) \in \theta$ alors il existe deux lettres $\alpha \in \mathrm{alph}(x_i)$ et $\beta \in \mathrm{alph}(x_{i+1})$ telles que :*
   - *α n'apparaît que dans $\varphi(x_i)$ i.e.* $\Pi_\alpha(\varphi(w)) = \Pi_\alpha(\varphi(x_i))$.
   - *β n'apparaît que dans $\varphi(x_{i+1})$ i.e.* $\Pi_\beta(\varphi(w)) = \Pi_\beta(\varphi(x_{i+1}))$.
   - $\Pi_{\alpha\beta}(v) \notin f_\gamma \circ \Pi_{\alpha\beta} \circ \varphi(x_{i+1} x_i)$.
3. $v = v_1 \varphi(x_n) \varphi(x_0) v_2$ *avec* $\mathrm{alph}(\varphi(x_0)) \times \mathrm{alph}(v_1) \subset \gamma$ *et* $\mathrm{alph}(v_2) \times \mathrm{alph}(\varphi(x_n)) \subset \gamma$.

Pour les commutations partielles nous obtenons :

Corollaire 5.3.27 *Soient* (A, θ) *et* (B, γ) *deux commutations partielle et un morphisme* φ : $A^* \mapsto B^*$. *Le morphisme* φ *est local si et seulement si* φ *est rigide.*

Résolution de la deuxième équation

Théorème 5.3.28 *Soient* (A, θ) *et* (B, γ) *deux semi-commutations et un morphisme* φ : $A^* \mapsto B^*$. *Il existe une transduction rationnelle* τ *telle que* $\vec{\varphi} = \tau \circ f_\theta$ *si et seulement si le morphisme* φ *est fortement connexe sur les lettres, continu et local.*

preuve : Nous savons que φ doit être fortement connexe sur les lettres (Fait 5.2.1), continu (Fait 5.3.6) et local (Lemme 5.3.14) .

Si le morphisme est continu et local nous avons montré l'égalité $\vec{\varphi} = \Pi_B \circ f_\lambda \circ \psi \circ f_\theta$. La Proposition 5.3.1 nous indique que la fonction de semi-commutation f_λ peut être réalisée par une transduction rationnelle τ' . En posant $\tau = \Pi_B \circ \tau' \circ \psi$ nous donnons ainsi une solution de l'équation $\vec{\varphi} = \tau \circ f_\theta$. □

Dans le cadre des commutations partielles nous obtenons :

Corollaire 5.3.29 *Soient* (A, θ) *et* (B, γ) *deux commutations partielles et un morphisme* $\varphi : A^* \mapsto B^*$. *Il existe une transduction rationnelle* τ *telle que* $\vec{\varphi} = \tau \circ f_\theta$ *si et seulement si le morphisme* φ *est fortement connexe sur les lettres, continu et rigide.*

5.4 Application

5.4.1 Décider $f_\gamma(u^*)$ est Algébrique

Le Théorème 2.5.5 nous assure, pour une semi-commutation (B, γ) et un mot u de B^* donné, que le langage $f_\gamma(u^*)$ est reconnaissable si et seulement si u est un mot fortement connexe pour $\bar{\gamma}$. Une question se pose alors naturellement : pouvons nous aussi décider du caractère algébrique d'un langage de type $f_\gamma(u^*)$? Une réponse positive à cette interrogation a été apportée par M.Clerbout et Y.Roos dans [CR90] et [Roo89] :

Proposition 5.4.1 ([CR90]) *Soient* (B, γ) *une semi-commutation et* u *un mot de* B^* . *Le langage* $f_\gamma(u^*)$ *est algébrique si et seulement si le graphe* $(\mathrm{alph}(u), \bar{\gamma})$ *possède au plus deux composantes fortement connexes.*

Nous donnons dans cette section une preuve plus simple de cette proposition, nous allons utiliser notre résultat à propos de l'équation $\vec{\varphi} = \tau \circ f_\gamma$. Avant tout vérifions que la condition proposée est bien nécessaire :

Fait 5.4.2 ([CR90]) *Soient* (B, γ) *une semi-commutation et* u *un mot de* B^* , *si le graphe* $(\mathrm{alph}(u), \bar{\gamma})$ *possède plus deux composantes fortement connexes alors le langage* $f_\gamma(u^*)$ *n'est* *pas algébrique.*

preuve : Soient $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ l'ensemble des composantes fortement connexes de $(\text{alph}(u), \bar{\gamma})$. Clairement il existe une composante B_i telle que $B_i \times (B \setminus B_i) \subset \gamma$. De même il existe une autre composante fortement connexe B_j telle que $(B \setminus B_j) \times B_j \subset \gamma$. Posons $u_1 = \Pi_{B_i}(u), u_2 = \Pi_{B_j}(u), u_3 = \Pi_{B\setminus(B_i \cup B_j)}(u)$, nous avons $u \xrightarrow[\gamma]{*} u_2u_3u_1$ avec $u_1u_3u_2 \xrightarrow[\gamma]{+} u_2u_3u_1$. Ainsi $f_\theta(u^*) \cap u_2^*u_3^*u_1^* = \{u_2^n u_3^n u_1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, ce langage n'est pas algébrique. □

Bien sûr, si $(\text{alph}(u), \bar{\gamma})$ ne comporte qu'une composante fortement connexe nous savons (Théorème 2.5.5) que le langage $f_\gamma(u^*)$ est reconnaissable. Il nous reste à traiter le cas "$(\text{alph}(u), \bar{\gamma})$ contient exactement deux composantes fortement connexes". Nous noterons m la projection de u sur une composante fortement connexe de u et w celle sur l'autre.
Grâce au Lemme de Numérotation nous pouvons supposer que u est un mot de permutation : dénuméroter le mot u se fait à l'aide d'un morphisme, la famille des langages algébriques est close par morphismes. Nous allons examiner deux cas, commençons par le plus simple :

Le cas $f_\gamma(u) = f_\gamma(mw)$

Soit l'alphabet $A = \{a, b\}$. Nous allons utiliser le morphisme $\varphi : A^* \mapsto B^*$ défini par :

$$\varphi(a) = m \quad et \quad \varphi(b) = w$$

Nous définissons la semi-commutation (A, θ) par

(a, b) appartient à θ si $\text{alph}(m) \times \text{alph}(w) \subset \gamma$

(b, a) appartient à θ si $\text{alph}(w) \times \text{alph}(m) \subset \gamma$

Remarquons que nous avons $f_\gamma(u^*) = f_\gamma((mw)^*) = f_\gamma \circ \varphi((ab)^*) = \bar{\varphi}((ab)^*)$.
D'autre part le morphisme φ est fortement connexe sur les lettres et, de par la définition de θ, continu et local. C'est pourquoi il existe une transduction rationnelle τ telle que $\bar{\varphi} = \tau \circ f_\theta$. Pour prouver l'algébricité du langage $\bar{\varphi}((ab)^*)$, il suffit de montrer que le langage $f_\theta((ab)^*)$ est algébrique :

$$\text{Il est connu que } f_\theta((ab)^*) = \begin{cases} D_1^*(a,b) \text{ si } (a,b) \in \theta \cap \theta^{-1} \\ D_1'^*(a,b) \text{ si } (b,a) \in \theta \cap \bar{\theta}^{-1} \\ (D_1'^*(b,a) + ab)^* \text{ si } (a,b) \in \theta \cap \bar{\theta}^{-1} \end{cases}$$

Ainsi lorsque $f_\gamma(u) = f_\gamma(mw)$, le langage $f_\gamma(u^*)$ est algébrique.

Le cas $f_\gamma(u) \neq f_\gamma(mw)$

Posons $u \xrightarrow[\gamma]{*} mw$ avec $wm \xrightarrow[\gamma]{+} mw$. Remarquons que nous n'avons ni $\text{alph}(m) \times \text{alph}(w) \subset \gamma \cap \gamma^{-1}$, ni $u \xrightarrow[\gamma\cap\gamma^{-1}]{*} mw$, ni $u \xrightarrow[\gamma\cap\gamma^{-1}]{*} wm$.

Il est impossible d'utiliser directement la construction précédente : nous n'avons ni $f_\gamma(u^*) = f_\gamma((mw)^*)$, ni $f_\gamma(u^*) = f_\gamma((wm)^*)$. Nous allons contourner cette difficulté en utilisant plus de lettres que dans l'alphabet A :

Posons $A_{1,2} = \{a_1, a_2, b_1, b_2\}$ et $B_{1,2} = B_1 \cup B_2$ où $B_i = \{x_i \mid x \in B\}$.

Nous appellerons $\Pi_B : B_{1,2}^* \mapsto B^*$ le morphisme défini par $\Pi_B(x_i) = x, \forall x \in B_{1,2}$.

Soit $\varphi : A_{1,2}^* \mapsto B_{1,2}^*$ le morphisme défini par $\varphi(a_i) = m_i$ et $\varphi(b_i) = w_i$, où $m_i \in B_i^*$, $\Pi_B(m_i) = m$ et aussi $w_i \in B_i^*$, $\Pi_B(w_i) = w$.

Soit la semi-commutation $(B_{1,2}, \lambda)$ avec

$$\lambda = \{(x_i, y_j) \in B_{1,2} \times B_{1,2} \mid (x,y) \in \gamma\} \cup \{(x_i, y_i) \in \mathrm{alph}(m_i) \times \mathrm{alph}(w_i) \mid \Pi_{xy}(u) = yx\}$$

Nous allons montrer que $f_\gamma(u^*) = \Pi_B \circ f_\lambda \circ \varphi((a_1b_1a_2b_2)^*(\varepsilon + a_1b_1))$.

Soit alt : $B^* \mapsto 2^{B_{1,2}^*}$ la transduction suivante :

$$\mathrm{alt}(\varepsilon) = \varepsilon$$

$$\mathrm{alt}(vx) = \mathrm{alt}(v)x_i \text{ avec } \left| \begin{array}{l} i = 1 \text{ si } |v|_x = 2p \\ i = 2 \text{ si } |v|_x = 2p+1 \end{array} \right. \quad \forall v \in B^* \forall x \in B \ .$$

Notons u_i le mot de B_i^* tel que $\Pi_B(u_i) = u$.

Soit la semi-commutation $(B_{1,2}, \gamma_{1,2})$ avec $\gamma_{1,2} = \{(x_i, y_j) \in B_{1,2} \times B_{1,2} \mid (x,y) \in \gamma\}$. Grâce au Lemme de Numérotation nous avons : $\Pi_B \circ f_{\gamma_{1,2}} \circ \mathrm{alt}(u^*) = f_\gamma(u^*)$.

En premier montrons que $f_{\gamma_{1,2}} \circ \mathrm{alt}(u^*) \subset f_\lambda \circ \varphi((a_1b_1a_2b_2)^*(\varepsilon + a_1b_1))$:
Par définition de φ , nous avons $\varphi((a_1b_1a_2b_2)^*(\varepsilon + a_1b_1)) = (m_1w_1m_2w_2)^*(\varepsilon + m_1w_1)$; par définition de $(B_{1,2}, \lambda)$ nous avons $m_iw_i \xrightarrow[\lambda\cap\lambda^{-1}]{*} u_i$; ainsi $f_\lambda \circ \varphi((a_1b_1a_2b_2)^*(\varepsilon + a_1b_1)) = f_\lambda(u_1u_2)^*(\varepsilon + u_1))$.

Comme $\gamma_{1,2}$ est inclus dans λ nous avons

$$f_{\gamma_{1,2}} \circ \mathrm{alt}(u^*) \subset f_\lambda \circ \varphi((a_1b_1a_2b_2)^*(\varepsilon + a_1b_1))$$

Supposons maintenant qu'il existe un mot v de $f_\lambda \circ \varphi((a_1b_1a_2b_2)^*(\varepsilon + a_1b_1))$ qui n'appartienne pas à $f_{\gamma_{1,2}} \circ \mathrm{alt}(u^*)$.

Nous avons $v \in f_\lambda((u_1u_2)^*(\varepsilon + u_1))$, par numérotation nous obtenons $\mathrm{num}(v) \in \mathrm{num} \circ f_\lambda((u_1u_2)^*(\varepsilon + u_1))$ et $\mathrm{num}(v) \notin \mathrm{num} \circ f_{\gamma_{1,2}} \circ \mathrm{alt}(u^*)$. Notons v_N le mot $\mathrm{num}(v)$.

Ainsi il existe un mot t de $\mathrm{num} \circ \mathrm{alt}(u^*)$ tel que $t \xrightarrow[\lambda_N]{*} v_N$ et $v_N \notin f_{\gamma_{1,2_N}}(t)$. D'après le Lemme de Projection, il existe un couple de lettres (x_{i_p}, y_{j_q}) de $\mathrm{alph}(v_N)$ tel que :

1. $\Pi_{x_{i_p} y_{j_q}}(t) = x_{i_p} y_{j_q}$
2. $\Pi_{x_{i_p} y_{j_q}}(v_N) = y_{j_q} x_{i_p}$

3. $(x_{i_p}, y_{j_q}) \in \lambda_N \cap \bar{\gamma}_{1,2_N}$

Il est facile de voir que, d'après le point (3) et les définitions de λ et de $\gamma_{1,2_N}$, nous avons $i = j$.

Si $p = q$ nous obtenons directement une contradiction : d'après le point (1) $\Pi_{xy}(u) = xy$ (u est un mot de permutation) et par le point (3) (x, y) appartient à $\bar{\gamma}$; la définition de λ impose alors $(x, y) \in \bar{\lambda}$ et ainsi $(x_{i_p}, y_{j_q}) \in \bar{\lambda}_N$.

Maintenant si $p \neq q$ nous devons avoir $p < q$. Puisque $i = j$ et $p < q$ et d'après la définition de alt, il existe une lettre y_{k_l} avec $k = |i-2|+1$ et $p \leq l \leq q$ telle que $\Pi_{x_{i_p} y_{k_l} y_{i_q}}(t) = x_{i_p} y_{k_l} y_{i_q}$. Comme $(x, y) \in \bar{\gamma}$ nous devons avoir $(x_i, y_k) \in \bar{\lambda}$, par définition nous avons aussi $(y_k, y_i) \in \bar{\lambda}$, nous aboutissons à une contradiction : $\Pi_{x_{i_p} y_{k_l} y_{i_q}}(t) = x_{i_p} y_{k_l} y_{i_q} = \Pi_{x_{i_p} y_{k_l} y_{i_q}}(v)$. Ainsi

$$f_{\gamma_{1,2}} \circ \mathrm{alt}(u^*) = f_\lambda \circ \varphi((a_1 b_1 a_2 b_2)^*(\varepsilon + a_1 b_1))$$

Nous avons montré $f_\gamma(u^*) = \Pi_B \circ f_\lambda \circ \varphi((a_1 b_1 a_2 b_2)^*(\varepsilon + a_1 b_1))$.

Reprenons l'alphabet A et définissons la semi-commutation (A, θ) par $\theta = \{(b, a)\}$, posons $\theta_{1,2} = \{(b_1, a_1) , (b_1, a_2) , (b_2, a_1) , (b_2, a_2)\}$.
Clairement nous avons $\mathrm{alt} \circ f_\theta((ab)^*) = f_{\theta_{1,2}}((a_1 b_1 a_2 b_2)^*(\varepsilon + a_1 b_1))$.

Comme $f_\theta((ab)^*) = D_1'^*(a, b)$ est un langage algébrique, le langage $f_{\theta_{1,2}}((a_1 b_1 a_2 b_2)^*(\varepsilon + a_1 b_1))$ l'est aussi.

Maintenant montrons que $\varphi : A_{1,2} \mapsto B_{1,2}$ est continu, fortement connexe sur les lettres et local :

- Fortement connexe sur les lettres : les mots m et w sont fortement connexes pour $\bar{\gamma}$, d'après la définition de λ, m_i et w_i sont aussi fortement connexes pour $\bar{\lambda}$.
- Continu : pour $\theta_{1,2}$ nous avons seulement les règles de la forme $b_i a_i \xrightarrow[\theta_{1,2}]{} a_i b_i$, comme $mw \xrightarrow[\gamma]{+} wm$ nous avons $m_i w_j \xrightarrow[\gamma]{+} w_j m_i$ et ainsi $\varphi(b_i a_i) \xrightarrow[\gamma_{1,2}]{} \varphi(a_i b_i)$.
- Local : supposons que $\mathrm{alph}(m_i) \times \mathrm{alph}(w_j) \subset \lambda$:
  nous savons que $\mathrm{alph}(m) \times \mathrm{alph}(w) \not\subset \gamma^{-1}$ ainsi $\mathrm{alph}(m_i) \times \mathrm{alph}(w_j) \not\subset \lambda$ lorsque $i \neq j$. Reste le cas $\mathrm{alph}(m_i) \times \mathrm{alph}(w_i) \subset \lambda$: par définition de λ , nous devons avoir $\Pi_{xy}(u) = yx$ pour tout $(x, y) \in \bar{\gamma}^{-1} \cap \mathrm{alph}(m) \times \mathrm{alph}(w)$. Si $\mathrm{alph}(m_i) \times \mathrm{alph}(w_i) \subset \lambda$ nous avons $u \xrightarrow[\gamma \cap \gamma^{-1}]{*} wm$ ce qui est en contradiction avec notre hypothèse.
  Ainsi φ est local sur les mots de deux lettres de $A_{1,2}^*$. Un mot de plus de deux lettres contient forcément un a_i et a_j ou un b_i et b_j . Or pour tout x de $\mathrm{alph}(m_i)$ (resp. w_i) nous avons $m_j x \notin f_{\gamma_{1,2}}(x m_j)$ (resp. w_j) il apparaît clairement que φ est local.

Ainsi il existe une transduction rationnelle τ telle que $f_\lambda \circ \varphi = \vec{\varphi} = \tau \circ f_{\theta_{1,2}}$ d'où $\Pi_B \circ \vec{\varphi} = \Pi_B \circ \tau \circ f_{\theta_{1,2}}$. C'est pourquoi

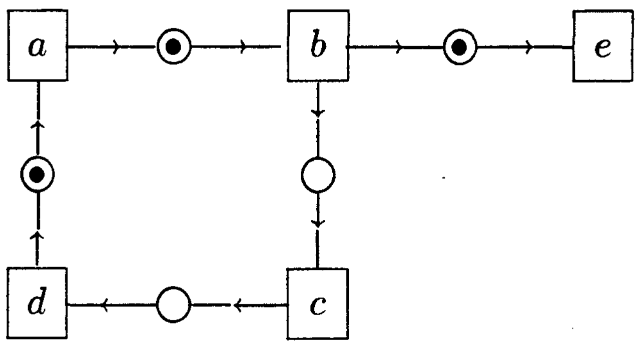
$$f_\gamma(u^*) = \Pi_B \circ \vec{\varphi}((a_1 b_1 a_2 b_2)^*(\varepsilon + a_1 b_1)) = \Pi_B \circ \tau \circ f_{\theta_{1,2}}((a_1 b_1 a_2 b_2)^*(\varepsilon + a_1 b_1))$$

Le langage $f_{\theta_{1,2}}((a_1 b_1 a_2 b_2)^*(\varepsilon + a_1 b_1))$ est algébrique, $f_\gamma(u^*)$ l'est aussi.

Le langage $f_\theta(u^*)$ et les réseaux de Petri

Nous allons associer à chaque semi-commutation un réseau de Petri, et à l'aide du mot u , définir le marquage initial du réseau.

Exemple 5.4.3



Réseau de Petri associé au mot $u = ebacd$ et à la semi-commutation (A, θ) :

$$\begin{array}{ccccc} a & \longrightarrow & b & \longrightarrow & e \\ \uparrow & & \downarrow & & \\ d & \longleftarrow & c & & \end{array} \qquad (A, \bar{\theta})$$

Proposition 5.4.4 *Soient (A, θ) une semi-commutation et u un mot de permutation sur A^* . Il existe un réseau de Petri admettant comme langage l'ensemble des facteurs gauches de $f_\theta(u^*)$.*

preuve : En premier lieu nous allons décrire le réseau de Petri P associé à la semi-commutation et au mot u :

- alph(u) est l'ensemble des transitions .
- A tout couple (x, y) de $\bar{\theta}$ est associée de façon bijective une place, notée p_{xy} , en entrée de la transition y et en sortie de x .

Le marquage initial, noté M , du réseau P est défini comme suit : une place p_{xy} est initialement vide si $\Pi_{xy}(u) = xy$, sinon elle contient une marque.

Montrons que $L(P, M)$ contient $\mathrm{FG}(f_\theta(u^*))$:
Soit v un mot de $\mathrm{FG}(f_\theta(u^*))$. Supposons que v n'appartienne pas à $L(P, M)$. Le mot v s'écrit alors $v_1 y v_2$ avec $M(v_1)M'$ et non $M'(y\rangle$. Ceci signifie qu'il existe une place p_{xy} telle que $M'(p_{xy}) = 0$ et ainsi (x, y) appartient à $\bar{\theta}$.

- Si p_{xy} est initialement vide, nous devons avoir $|v_1|_x = |v_1|_y$.
  Par hypothèse v appartient à $\mathrm{FG}(f_\theta(u^*))$ et de plus $\Pi_{xy}(u) = xy$. Nous avons $\Pi_{xy}\mathrm{FG}(f_\theta(u^*)) \subset f_\theta((xy)^*x^*)$ et, par conséquent, $\Pi_{xy}(v) \in \mathrm{FG}(D_1'^*(x, y))$. Mais comme $|v_1|_x = |v_1|_y$ nous avons $\Pi_{xy}(v_1 y) \notin \mathrm{FG}(D_1'^*(x, y))$ et ainsi v n'appartient pas à $\mathrm{FG}(f_\theta(u^*))$.

- Si p_{xy} contient initialement une marque, nous devons avoir $|v_1|_x = |v_1|_y - 1$.
  Le mot $\Pi_{xy}(v)$ doit appartenir à $f_\theta((yx)^*(x^* + yx^*)) = \mathrm{FG}((D_1'^*(x,y) + yx)^*)$. Comme $|v_1|_x = |v_1|_y - 1$ nous avons $\Pi_{xy}(v_1) \in f_\theta((yx)^*y) = f_\theta((yx)^*)y$. Mais $\Pi xy(v_1)y$ n'appartient pas à $\mathrm{FG}((D_1'^*(x,y) + yx)^*)$.

Ainsi $L(P,M)$ contient $\mathrm{FG}(f_\theta(u^*))$.

Montrons que $L(P,M)$ contient $\mathrm{FG}(f_\theta(u^*))$:
Soit v un mot de $L(P,M)$. Supposons que v n'appartienne pas à $\mathrm{FG}(f_\theta(u^*))$. Le mot v s'écrit alors v_1yv_2 avec v_1 appartenant à $\mathrm{FG}(f_\theta(u^*))$ et v_1y n'y appartenant pas. D'après le Lemme de Projection il existe une lettre x telle que $v_1y \notin \Pi_{xy}((\mathrm{FG}(f_\theta(u^*)))$ mais par contre $v_1x \in \Pi_{xy}((\mathrm{FG}(f_\theta(u^*)))$, ainsi x et y ne commutent pas.

- Soit x apparaît dans u avant y :
  Comme $\Pi_{xy}(v_1y) \notin \mathrm{FG}(f_\theta((xy)^*))$ et $\Pi_{xy}(v_1) \in \mathrm{FG}(f_\theta((xy)^*))$ nous devons avoir $|v_1|_x = |v_1|_y$; par construction nous avons $M(p_{xy}) = 0$, comme $|v_1|_x = |v_1|_y$ nous avons $M(v_1\rangle M'$ avec $M'(p_{xy}) = 0$, d'où $v_1y \notin L(P,M)$.

- Soit y apparaît dans u avant x :
  Comme $\Pi_{xy}(v_1y) \notin \mathrm{FG}(f_\theta((yx)^*))$ et $\Pi_{xy}(v_1) \in \mathrm{FG}(f_\theta((xy)^*))$ nous devons avoir $|v_1|_x = |v_1|_y - 1$. Par construction nous avons $M(p_{xy}) = 1$, comme $|v_1|_x = |v_1|_y - 1$ nous avons $M(v_1\rangle M'$ avec $M'(p_{xy}) = 0$, d'où $v_1y \notin L(P,M)$.

Le réseau de Petri P a bien pour langage l'ensemble des facteurs gauche de $f_\theta(u^*)$. □

Remarque : Si le mot u est fortement connexe pour $\bar\theta$ toutes les places du réseaux sont bornées. Si le mot u est connexe pour $\bar\theta$ alors en imposant un marquage final égal au marquage initial, le réseau reconnaît exactement le langage $f_\theta(u^*)$.

Si u n'est pas un mot de permutation il n'existe pas toujours de réseau de Petri reconnaissant l'ensemble des facteurs gauche de $f_\theta(u^*)$, par exemple pour $\theta = \emptyset$ et $u = abbab$.

5.4.2 Morphismes algébriquement compatibles

Cette section s'adresse aux commutations partielles, tout d'abord définissons la notion de morphisme algébriquement compatible :

Définition 5.4.5 *Soient (A,θ) et (B,γ) deux commutations partielles et un morphisme φ : $A^* \mapsto B^*$. Le morphisme φ est Alg-compatible si et seulement si pour tout langage algébrique L θ-clos de A^* le langage $\vec\varphi(L)$ est algébrique.*

Le cas non connexe

Nous nous intéressons ici aux morphismes non connexes[1] sur les lettres. La proposition suivante donne la solution pour un alphabet B de deux lettres :

Proposition 5.4.6 ([Lat79]) *Soient l'alphabet $B = \{a.b\}$ et (B,γ) une commutation partielle. Si L est un langage algébrique alors $f_\gamma(L)$ est aussi algébrique.*

De cette proposition et du Corollaire 5.3.29 découle :

Proposition 5.4.7 *Soient (A,θ) et (B,γ) deux commutations partielles et un morphisme $\varphi : A^* \mapsto B^*$. S'il existe deux mots m et w connexes pour $\bar{\gamma}$ tels que pour tout $x \in A$ nous ayons $\vec{\varphi}(x) \subset f_\gamma(t_1^* t_2^*)$ alors φ est Alg-compatible.*

preuve : Posons $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$; pour tout a_i nous avons $\vec{\varphi}(x) = f_\gamma(m^{\alpha_i} w^{\beta_i})$.

Soit l'alphabet $X = \{x, y\}$, et le morphisme $\psi : A^* \mapsto X^*$ défini par $\psi(a_i) = x^{\alpha_i} y^{\beta_i}$ pour tout $a_i \in A$.

Soit (A,λ) la commutation partielle défini par $\lambda = \{(x,y),(y,x)\}$ si $\mathrm{alph}(w) \times \mathrm{alph}(m) \subset \gamma$, $\lambda = \emptyset$ sinon.

Maintenant définissons le morphisme $\delta : X^* \mapsto B^*$ par $\delta(x) = m$ et $\delta(y) = w$.

De façon évidente nous avons pour tout mot u de A^* $\vec{\varphi}(u) = f_\gamma \circ \delta \circ \psi(u)$.

Clairement le morphisme δ est connexe, continu et rigide. Il existe une transduction τ telle que $f_\gamma \circ \delta = \tau \circ f_\lambda$.

D'après la Proposition 5.4.6, pour tout langage algébrique L de A^* le langage $f_\lambda \circ \psi(L)$ est algébrique. Ainsi, le langage $\tau \circ f_\lambda \circ \psi(L) = \vec{\varphi}(L)$ est aussi algébrique. □

Lorsque le morphisme n'est pas connexe cette condition suffisante devient nécessaire :

Proposition 5.4.8 *Soient (A,θ) et (B,γ) deux commutations partielles et un morphisme $\varphi : A^* \mapsto B^*$. Si φ n'est pas connexe sur les lettres alors φ est Alg-compatible si et seulement si il existe deux mots t_1 et t_2 connexes pour $\bar{\gamma}$ tels que pour tout $x \in A$ nous ayons $\vec{\varphi}(x) \subset f_\gamma(t_1^* t_2^*)$.*

preuve : Il existe une lettre x de A^* telle que $\varphi(x)$ n'est pas connexe pour $\bar{\gamma}$. Si $(\mathrm{alph}\varphi(x), \bar{\gamma})$ comporte plus de trois composantes connexes nous savons que $\vec{\varphi}(x^*)$ n'est pas algébrique.

Autrement il existe une lettre y telle que, pour tout mot t_1 et t_2 de B^* , nous n'avons jamais $\vec{\varphi}(x) \in f_\gamma(t_1^* t_2^*)$ et $\vec{\varphi}(y) \in f_\gamma(t_1^* t_2^*)$.

Soient m et w les deux mots de A^* tels que $\varphi(x) \xrightarrow[\gamma]{*} mw$ et $wm \xrightarrow[\gamma]{*} mw$. Posons $u = \varphi(y)$.

Le langage $L = f_\theta(\{y^n x^n \mid n \in \mathbb{N}\})$ est un langage algébrique quel que soit θ .

[1] rappelons que connexe équivaut à fortement connexe pour les commutations partielles

Clairement si

$$\mathrm{alph}(u) \cap \mathrm{alph}(mw) = \emptyset$$

$$\text{ou } \mathrm{alph}(u) \not\subset \mathrm{alph}(mw)$$

$$\text{ou } \mathrm{alph}(m) \not\subset \mathrm{alph}(u) \text{ et } \mathrm{alph}(m) \cap \mathrm{alph}(u) \neq \emptyset$$

$$\text{ou } \mathrm{alph}(w) \not\subset \mathrm{alph}(u) \text{ et } \mathrm{alph}(w) \cap \mathrm{alph}(u) \neq \emptyset$$

nous avons $\vec{\varphi}(L) \cap u^*m^*w^* = \{u^n m^n w^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, ce langage n'est pas algébrique.

Il nous reste les cas $\mathrm{alph}(u) = \mathrm{alph}(mw)$, $\mathrm{alph}(u) = \mathrm{alph}(m)$ et $\mathrm{alph}(u) = \mathrm{alph}(w)$.

Commençons par le cas $\mathrm{alph}(u) = \mathrm{alph}(m)$ (ou $\mathrm{alph}(u) = \mathrm{alph}(w)$) : nous savons que m est connexe pour $\bar{\gamma}$, de plus nous ne pouvons pas avoir $f_\gamma(um) = f_\gamma(mu)$: d'après le Corollaire 5.3.16 il est nécessaire d'avoir un mot t et deux entiers α et β tels que $f_\gamma(u) = f_\gamma(t^\alpha)$ et $f_\gamma(m) = f_\gamma(t^\beta)$.

D'après le Lemme de Projection il existe un couple de lettres (a, b) de $(\mathrm{alph}(m), \bar{\gamma})$, $\Pi_{ab}(um) \neq \Pi_{ab}(mu)$ remarquons alors que $\{\Pi_{ab}(u), \Pi_{ab}(m)\}$ est un code .

Calculons $\Pi_{abw}(\vec{\varphi}\circ f_\theta(L)) \cap (\Pi_{ab}(u))^*(\Pi_{ab}(m))^*w^*$: clairement $\Pi_{ab}(\vec{\varphi}\circ f_\theta(L)) \subset (\Pi_{ab}(u) + \Pi_{ab}(m))^*$. Comme $\{\Pi_{ab}(u), \Pi_{ab}(m)\}$ est un code il existe une factorisation unique dans $\{\Pi_{ab}(u), \Pi_{ab}(m)\}$ de $\Pi_{ab}(\vec{\varphi}\circ f_\theta(L))$ ainsi

$$\Pi_{ab}(\vec{\varphi}\circ f_\theta(L)) \cap (\Pi_{ab}(u))^*(\Pi_{ab}(m))^*) = \{\Pi_{ab}(u)^n \Pi_{ab}(m)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Maintenant, comme $\mathrm{alph}(w) \cap \mathrm{alph}(mu) = \emptyset$ et $w \neq \varepsilon$ nous obtenons

$$\Pi_{abw}(\circ\vec{\varphi}\circ f_\theta(L)) \cap (\Pi_{ab}(u))^*(\Pi_{ab}(m))^*w^* = \{\Pi_{ab}(u)^n \Pi_{ab}(m)^n w^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

ce langage n'est pas algébrique.

Si nous avons $\mathrm{alph}(u) = \mathrm{alph}(mw)$, nous savons que nous ne pouvons pas avoir à la fois $f_\gamma(um) = f_\gamma(mu)$ et $f_\gamma(uw) = f_\gamma(wu)$. D'une manière similaire au cas précédent nous obtenons : il existe un couple de lettres (a, b) de $(\mathrm{alph}(m) \cap \mathrm{alph}(u), \bar{\gamma})$ ou de $(\mathrm{alph}(w) \cap \mathrm{alph}(u), \bar{\gamma})$ tel que :

$$\Pi_{ab}(\vec{\varphi}\circ f_\theta(L)) \cap (\Pi_{ab}(u))^*(\Pi_{ab}(m))^*) = \{\Pi_{ab}(u)^n \Pi_{ab}(m)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

ou bien

$$\Pi_{ab}(\vec{\varphi}\circ f_\theta(L)) \cap (\Pi_{ab}(u))^*(\Pi_{ab}(w))^*) = \{\Pi_{ab}(u)^n \Pi_{ab}(w)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

facilement nous obtenons

$$\Pi_{abw}(\circ\vec{\varphi}\circ f_\theta(L)) \cap (\Pi_{abw}(u))^*(\Pi_{ab}(m))^*w^* = \{\Pi_{abw}(u)^n \Pi_{ab}(m)^n w^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Ce langage n'est pas algébrique. □

Le cas connexe et continu

Proposition 5.4.9 *Soient (A,θ) et (B,γ) deux commutations partielles et un morphisme $\varphi : A^* \mapsto B^*$. Si φ est connexe sur les lettres et continu alors φ est Alg-compatible si et seulement si*

- *Soit il existe deux mots t_1 et t_2 connexes pour $\bar{\gamma}$ tels que pour tout $x \in A$ nous ayons $\vec{\varphi}(x) \subset f_\gamma(t_1^* t_2^*)$.*
- *Soit le morphisme est local.*

preuve : Si le morphisme φ est local, alors il existe une transduction rationnelle τ telle que $\vec{\varphi} = \tau \circ f_\theta$ et ainsi φ est Alg-compatible.

Si il existe deux mots t_1 et t_2 connexes pour $\bar{\gamma}$ tels que pour tout $x \in A$ nous ayons $\vec{\varphi}(x) \subset f_\gamma(t_1^* t_2^*)$ alors le morphisme est Alg-compatible.

Supposons que le morphisme ne soit pas local et qu'il n'existe pas deux mots t_1 et t_2 connexes pour $\bar{\gamma}$ tels que pour tout $x \in A$ nous ayons $\vec{\varphi}(x) \subset f_\gamma(t_1^* t_2^*)$.

Comme le morphisme φ n'est pas local, il existe un mot de permutation rigide pour θ $m = x_1 \ldots x_n$ tel qu'il n'existe pas de sous-mot de $\varphi(m)$ $x'_1 \ldots x'_n$, avec $x'_1 \in \mathrm{alph}(\varphi(x_1))$ et $x'_n \in \mathrm{alph}(\varphi(x_n))$, rigide pour γ . Il existe alors un mot $v = v_1 \varphi(x_n) \varphi(x_1) v_2$ avec $\mathrm{alph}(\varphi(x_1)) \times \mathrm{alph}(v_1) \subset \gamma$ et $\mathrm{alph}(v_2) \times \mathrm{alph}(\varphi(x_n)) \subset \gamma$.

Le cas $n = 2$ ou $\varphi(x_2 \ldots x_{n-1}) = \varepsilon$: par hypothèse il existe une lettre y telle qu'il n'existe pas deux mots t_1 et t_2 tels que

- Soit $\vec{\varphi}(x_1) \subset f_\gamma(t_1^* t_2^*)$ et $\vec{\varphi}(y) \subset f_\gamma(t_1^* t_2^*)$.
- Soit $\vec{\varphi}(x_n) \subset f_\gamma(t_1^* t_2^*)$ et $\vec{\varphi}(y) \subset f_\gamma(t_1^* t_2^*)$.

Définissons le morphisme $\psi : X^* \mapsto B^*$ avec $X = \{x, y\}$, $\psi(x) = \varphi(x_0 \ldots x_n)$ et $\psi(y) = \varphi(y)$.

Pour tout mot $u \in y^n(x_0 \ldots x_n)^n$ nous avons $f_\gamma \circ \psi(y^n x^n) = \vec{\varphi} \circ f_\theta(u)$: φ est continu, nous avons donc $\vec{\varphi} = \vec{\varphi} \circ f_\theta$.

Comme $\psi(y)$ n'est pas connexe et d'après les hypothèses sur y , la Proposition 5.4.7 nous dit que ψ n'est pas Alg-compatible et notamment le langage $f_\gamma \circ \psi(\{y^n x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas algébrique.

Maintenant il nous faut montrer que le langage $f_\theta(\{y^n(x_0 \ldots x_n)^n \mid n \in \mathbb{N}\})$ est algébrique. Si $\{y\} \times \{x_0 \ldots x_n\} \subset \theta$ $f_\theta(\{y^n(x_0 \ldots x_n)^n \mid n \in \mathbb{N}\}) = \{y^n ⧢ (x_0 \ldots x_n)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ sinon il existe m_1 et m_2 tels que $x_0 \ldots x_n = m_1 x_i m_2$ avec $\{y\} \times \mathrm{alph}(m_1) \subset \theta$ et $(y, x_i) \notin \theta$ et alors $f_\theta(\{y^n(x_0 \ldots x_n)^n \mid n \in \mathbb{N}\}) = \varepsilon + \{(y^n ⧢ m_1) x_i m_2 (x_0 \ldots x_n)^{n-1} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

Ainsi le cas $n = 2$ ou $\varphi(x_2 \ldots x_{n-1}) = \varepsilon$ est résolu.

Supposons $n > 2$ et $\varphi(x_i) \neq \varepsilon$ alors le langage $L = x_2^p x_1^{p-1} x_1 \ldots x_n x_n^{q-1} x_{n-1}^q$ est algébrique et θ-clos.

Comme $\varphi(x_i) \neq \varepsilon$ et $(x_1, x_2) \in \bar{\theta}$, il existe un couple de lettres (a, b) dans $\text{alph}(\varphi(x_2)) \times \text{alph}(\varphi(x_1)) \cap \bar{\gamma}$. D'après le Lemme 5.3.24 nous avons $\varphi(x_2) \not\subset \varphi(x_1)$ et d'autre part $\varphi(x_i)$ est connexe nous pouvons prendre a dans $\text{alph}(x_2) \setminus \text{alph}(x_1)$.

De même pour (x_{n-1}, x_n) il existe un couple $(c, d) \in (\text{alph}(x_{n-1}) \setminus \text{alph}(x_n)) \cap \bar{\gamma}$.

Le mot $abcd$ est du reste un mot de permutation : $v = v_1 \varphi(x_n) \varphi(x_0) v_2$ avec $\text{alph}(\varphi(z_0)) \times \text{alph}(v_1) \subset \gamma$ et $\text{alph}(v_2) \times \text{alph}(\varphi(z_n)) \subset \gamma$.

Calculons $\vec{\varphi}(L) \cap \varphi(x_2)^* v_1 (\varphi(x_n)\varphi(x_0))^* v_2 \varphi(x_{n-1})$: soit m un mot de cette intersection : $m = \varphi(x_2)^p v_1 (\varphi(x_n)\varphi(x_0))^q v_2 \varphi(x_{n-1})^r$

Puisque $(a, b) \in \bar{\theta}$ nous devons avoir $|v_1|_a = 0$ et ainsi $p = q$ de façon symétrique nous devons avoir $q = r$ ainsi

$$\vec{\varphi}(L) \cap \varphi(x_2)^* v_1 (\varphi(x_n)\varphi(x_0))^* v_2 \varphi(x_{n-1}) = \{\varphi(x_2)^p v_1 (\varphi(x_n)\varphi(x_0))^p v_2 \varphi(x_{n-1})^p \mid p \in \mathbb{N}^*\}$$

Ce langage n'est pas algébrique. □

5.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons mis en avant l'interêt pratique des morphismes : spécifier le parallélisme a des niveaux d'abstraction différents. Cette approche rend possible une analyse descendante des problèmes (morphisme continu), elle permet aussi de mieux exprimer le parallélisme des programmes à mémoire partagée, programmes où deux actions peuvent commuter sans pour autant pouvoir être exécutées en parallèle.

Dans une première partie, nous avons défini les morphismes préservant les dépendances ; ces morphismes sont toujours Reg-compatibles. Pour étendre ce résultat à une plus grande classe de morphismes nous avons eu recours à une décomposition des morphismes ce qui nous a permis d'utiliser la caractérisation des semi-commutations Reg-compatible du chapitre précédent. Ainsi nous avons obtenu une condition suffisante pour qu'un morphisme soit Reg-compatible et une condition nécessaire et suffisante pour les morphismes non-effaçants et disjoints.

Ensuite, nous avons abordé le problème de la simulation d'un morphisme pour semi-commutations par une transduction rationnelle. Nous avons résolu deux équations : si la première équation n'appréhende qu'un nombre restreint de morphismes pour semi-commutations, la seconde caractérise les morphismes continus (les morphismes des monoïdes de semi-traces) réalisables par transduction rationnelle.

Grâce à cette deuxième équation nous avons donné une preuve plus simple pour le problème $f_\theta(u^*) \in \text{Alg}(A^*)$, nous avons aussi caractérisé les morphismes continus pour les commutations partielles Alg-compatibles. Pour étendre ce dernier résultat au cas général nous proposons l'étude d'une troisième équation :

$$\bar{\varphi} \circ f_\theta = \tau \circ f_\theta$$

Si cette troisième équation permet de caractériser les morphismes Alg-compatibles dans le cadre des commutations partielles, un problème se posera alors naturellement : résoudre ce problème dans le cadre des semi-commutations !

Références

[AH89] I.J. Aalbersberg and H.J. Hoogeboom. Characterizations of the decidability of some problems for regular trace languages. *Mathematical Systems Theory*, 22:1–19, 1989.

[AK79] A.V. Anisimov and D. Knuth. Inhomogeneous sorting. *Internat. J. Comput. Sci.*, 8:255–260, 1979.

[AN82] A. Arnold and M. Nivat. Comportement de processus. In *Les Mathématiques de l'informatique*, pages 35 – 68, Paris, 1982. Colloque AFCET.

[AR88] I.J. Aalbersberg and G. Rozenberg. Theory of traces. *Theoretical Computer Science*, 60:1–82, 1988.

[Ber66] A.J. Bernstein. Analysis of programs for parallel processing. *IEEE Trans. Comp. EC-15*, 5:757–762, 1966.

[CF69] P. Cartier and D. Foata. *Problèmes combinatoires de commutation et réarrangements.* Lecture Notes in Computer Science. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1969.

[CG90] M. Clerbout and D. Gonzalez. Decomposition of semi commutations. In B. Rovan, editor, *Proceedings of the 15th Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS'90), Banská Bystrica (Czechoslovakia) 1990*, number 452 in Lecture Notes in Computer Science, pages 209–216, 1990. Extended version: *Atomic semi-commutations*, to appear in TCS.

[CG93] C. Choffrut and L. Guerra. On the logical definability of some rational trace languages. In *Proceedings of the 10th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS'93)*, Lecture Notes in Computer Science, pages 494–504. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1993.

[CGL+92] M. Clerbout, D. Gonzalez, M. Latteux, E. Ochmanski, Y. Roos, and P.A. Wacrenier. Recognizable morphisms on semi commutations. Technical report i.t. 238, Université des Sciences et Technologies de Lille, 1992.

[CL85] M. Clerbout and M. Latteux. Partial commutations and faithful rational transductions. *Theoretical Computer Science*, 35:241–254, 1985.

[CL87] M. Clerbout and M. Latteux. Semi-Commutations. *Information and Computation*, 73:59–74, 1987.

[Cle84] M. Clerbout. *Commutations Partielles et Familles de Langages.* Thèse, Université des Sciences et Technologies de Lille, 1984.

[CLRZ92] M. Clerbout, M. Latteux, Y. Roos, and W. Zielonka. Semi-commutations and rational expressions. In W. Kuich, editor, *Proceedings of the 19th International Colloquium on Automata Languages and Programming (ICALP'92), Vienna (Austria) 1992*, number 623 in Lecture Notes in Computer Science, pages 113–125. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1992.

[CP85] R. Cori and D. Perrin. Automates et commutations partielles. *R.A.I.R.O.-Informatique Théorique et Applications*, 19:21–32, 1985.

[CR90] M. Clerbout and Y. Roos. Semi-commutations and algebraic languages. In C. Choffrut et al., editors, *Proceedings of the 7th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS'90), Rouen (France) 1990*, number 415 in Lecture Notes in Computer Science, pages 82–93. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1990.

[DE92] Volker Diekert and Werner Ebinger, editors. Proceedings ASMICS Workshop Infinite Traces, Tübingen. Bericht 4/92, Universität Stuttgart, Fakultät Informatik, 1992.

[Die90] V. Diekert. *Combinatorics on Traces.* Number 454 in Lecture Notes in Computer Science. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1990.

[Die93] V. Diekert. Möbius functions and confluent semi-commutations. *Theoretical Computer Science*, 108, 1993. To appear.

[DK93a] G. Duchamp and D. Krob. The free partially commutative lie algebra : bases and ranks. *Advances in Maths.*, 1993.

[DK93b] G. Duchamp and D. Krob. Free partially commutative structures. *Journal of Algebra*, 1993.

[DOR91] V. Diekert, E. Ochmanski, and K. Reinhardt. On confluent semi-commutation systems – decidability and complexity results. In J. Leach Albert et al., editors, *Proceedings of the 18th International Colloquium on Automata Languages and Programming (ICALP'91), Madrid (Spain) 1991*, number 510 in Lecture Notes in Computer Science, pages 229–241. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1991. An extended version to appear in Information and Computation.

[DS84] R. De Simone. Langages infinitaires et produit de mixage. *Theoretical Computer Science*, 31:83–100, 1984.

[Dub86] C. Duboc. Commutations dans les monoides libres: un cadre théorique pour l'étude du parallélisme. Thèse, Faculté des Sciences de l'Université de Rouen, 1986.

[DV89] V. Diekert and W. Vogler. On the synchronization of traces. *Mathematical Systems Theory*, 22:161–175, 1989. A preliminary extended abstract appeared at MFCS 88, Lecture Notes in Computer Science 324 (1988) 271-279.

[Fli74] M. Fliess. Matrices de Hankel. *J. Math. Pures et Appl.*, 53:197–224, 1974.

[FR82] M.P. Flé and G. Roucairol. On the serializability of iterated transactions. In *Proceedings ACM SIGACT-SIGOPS, Symposium on Principles of Distr. Comp., Ottawa (Canada) 1982*, pages 194–200, 1982.

[FR85] M.P. Flé and G. Roucairol. Fair serializability of iterated transactions using fifo-nets. In G. Rozenberg, editor, *Advances in Petri Nets*, number 188 in Lecture Notes in Computer Science, pages 154–168. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1985.

[Gon93] D. Gonzalez. *Décomposition de Semi-Commutations.* Thèse, Université des Sciences et Technologies de Lille, 1993.

[GOPR92] P. Gastin, E. Ochmanski, A. Petit, and B. Rozoy. Decidability of the star problem in $a^* \times \{b\}^*$. *Information Processing Letters*, 44:65–77, 1992.

[GRS91] Giovanna Guaiana, Antonio Restivo, and Sergio Salemi. On aperiodic trace languages. In Choffrut C. et al., editors, *Proceedings of the 8th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS'91), Hamburg 1991*, number 480 in Lecture Notes in Computer Science, pages 76–88. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1991.

[Has91] K. Hashigushi. Recognizable closures and submonoids of free partially commutative monoids. *Theoretical Computer Science*, 86:233–241, 1991.

[HK89] D. V. Hung and E. Knuth. Semi-commutations and Petri-nets. *Theoretical Computer Science*, 34:67–81, 1989.

[JM90] R. Janicki and T. Müldner. Transformation of sequential specifications into concurrent specifications by synchronization guards. *Theoretical Computer Science*, 77:97–129, 1990.

[Kos82] S.R. Kosaraju. Decidability of reachability in vector addition systems. In *Proceedings of the 14th Annual Symposium on Theory of Computing*, pages 267 – 281, 1982.

[Lal79] G. Lallement. *Semigroups and Combinatorial Applications.* John Wiley & Sons, New York, 1979.

[Lal91] P. Lalonde. Empilement de lyndon et base d'algèbres de lie. In M. Delest, G. Jacob, and P. Leroux, editors, *Actes du Colloque "Séries formelles et combinatoire algébrique"*, pages 275–286, 1991.

[Lat79] M. Latteux. Cônes rationnels commutatifs. *Journal of Computer and System Sciences*, 18:307–333, 1979.

[Lat92] M. Latteux. Some results on semi-commutations. In M. Ito, editor, *Proc. of the International Colloquium on Words, Languages and Combinatorics (Kyoto 1990).* World Scientific, Singapore, 1992. Appeared also as Technical Report I.T 201 Université de Lille.

[Lot83] M. Lothaire. *Combinatorics on words.* Addison Wesley, 1983.

[LTS79] P.E. Lauer, P.R. Torrigiani, and M.W. Shields. COSY: A system specification language based on paths and processes. *Acta Informatica*, 12:109–158, 1979.

[May84] E. Mayr. An algorithm for the general Petri net reachability problem. *SIAM Journal of Computing*, 13:441–459, 1984.

[Maz77] A. Mazurkiewicz. Concurrent program schemes and their interpretations. DAIMI Rep. PB 78, Aarhus University, Aarhus, 1977.

[Maz87] A. Mazurkiewicz. Trace theory. In W. Brauer et al., editors, *Petri Nets, Applications and Relationship to other Models of Concurrency*, number 255 in Lecture Notes in Computer Science, pages 279–324. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1987.

[Mét86a] Y. Métivier. On recognizable subsets of free partially commutative monoids. In L. Kott, editor, *Proceedings of the 13th International Colloquium on Automata Languages and Programming (ICALP'86), Rennes (France) 1986*, number 226 in Lecture Notes in Computer Science, pages 254–264. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1986.

[Mét86b] Y. Métivier. Semi-commutation dans le monoide libre. Rapport interne, LABRI, Université de Bordeaux I, 1986.

[Mét86c] Y. Métivier. Une condition suffisante de reconnaissabilité dans un monoïde partiellement commutatif. *R.A.I.R.O.-Informatique Théorique et Applications*, 20:121–127, 1986.

[Mét87] Y. Métivier. Contribution à l'étude des monoides de commutations. Thèse d'etat, Université de Bordeaux I, 1987.

[MO87] Y. Métivier and E. Ochmanski. On lexicographic semi-commutations. *Information Processing Letters*, 26:55–59, 1987.

[Niv68] M. Nivat. Transductions des langages de chomsky. *Annuaire de l'Institut Fourier*, 18:339–456, 1968.

[NO88] P. Narendran and F. Otto. Preperfectness is undecidable for Thue systems containing only length-reducing rules and a single commutation rule. *Information Processing Letters*, 29:125–130, 1988.

[Och85] E. Ochmanski. Regular behaviour of concurrent systems. *Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science (EATCS)*, 27:56–67, Oct 1985.

[Och89a] E. Ochmanski. Semi-commutations for Place/Transition Systems. *Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science (EATCS)*, 38:191–198, 1989.

[Och89b] E. Ochmanski. (title). In B. Monien et al., editors, *Proceedings of the 6th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS'89), Paderborn (FRG) 1989*, number 349 in Lecture Notes in Computer Science. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1989.

[Och90] E. Ochmanski. Semi-Commutation and Petri Nets. In V. Diekert, editor, *Proceedings of the ASMICS workshop Free Partially Commutative Monoids, Kochel am See 1989*, Report TUM-I9002, Technical University of Munich, pages 151–166, 1990.

[Och91] E. Ochmanski. Concurrency and trace language. Post graduate lecture, Université des Sciences et Technologies de Lille, 1991.

[Och92] E. Ochmanski. Modelling concurrency with semi-commutations. In I. M. Havel and V. Koubek, editors, *Proceedings of the 17th Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS'92), Prague, (Czechoslovakia), 1992*, number 629 in Lecture Notes in Computer Science, pages 412–420. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1992.

[Ott87] F. Otto. Finite canonical rewriting systems for congruences generated by concurrency relations. *Mathematical Systems Theory*, 20:253–260, 1987.

[Ott89] F. Otto. On deciding confluence of finite string rewriting systems modulo partial commutativity. *Theoretical Computer Science*, 67:19–36, 1989.

[OW93] E. Ochmanski and P.A. Wacrenier. On regular compatibility of semi-commutations. In A. Lingas, editor, *Proceedings of the 20th International Colloquium on Automata Languages and Programming (ICALP'93), Lund (Sweden) 1992*, Lecture Notes in Computer Science. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1993.

[Per89] D. Perrin. Partial commutations. In *Proceedings of the 16th International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP'89), Stresa (Italy) 1989*, number 372 in Lecture Notes in Computer Science, pages 637–651. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1989.

[Pet81] G.L. Peterson. Myths about the mutual exclusion problem. *Information Processing Letters*, 12:115–116, 1981.

[Pig92] G. Pighizzini. Synthesis of nondeterministic asynchronous automata. In Volker Diekert and Werner Ebinger, editors, *Proceedings ASMICS Workshop Infinite Traces, Tübingen*, pages 5–28. Universität Stuttgart, Fakultät Informatik, 1992.

[Rei92] K. Reinhardt. On the synchronization of semi-traces. unpublished manuscript, 1992.

[Roo89] Y. Roos. *Contribution à l'Etude des Fonctions de Commutation Partielle.* Thèse, Université des Sciences et Technologies de Lille, 1989.

[RW91] Y. Roos and P.A. Wacrenier. Composition of two semi commutations. In A. Tarlecki, editor, *Proceedings of the 16th Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS'91), Kazimierz Dolny (Poland) 1991*, number 520 in Lecture Notes in Computer Science, pages 406–414. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1991. Also available as Report I.T. 193, University of Lille (France).

[Sak92] J. Sakarovitch. The "last" decision problem. In I. Simon, editor, *Proceedings of LATIN'92*, number 583 in Lecture Notes in Computer Science, pages 460–473. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1992.

[Tho90] Wolfgang Thomas. On logical definability of trace languages. In V. Diekert, editor, *Proceedings of a workshop of the ESPRIT Basic Research Action No 3166: Algebraic and Syntactic Methods in Computer Science (ASMICS), Kochel am See, Bavaria, FRG (1989)*, Report TUM-I9002, Technical University of Munich, pages 172–182, 1990.

[WDO92] C. Wrathall, V. Diekert, and F. Otto. One-rule trace-rewriting systems and confluence. In I. M. Havel and V. Koubek, editors, *Proceedings of the 17th Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS'92), Prague, (Czechoslovakia), 1992*, number 629 in Lecture Notes in Computer Science, pages 511–521. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1992.

[Zie87] W. Zielonka. Notes on finite asynchronous automata. *R.A.I.R.O.-Informatique Théorique et Applications*, 21:99–135, 1987.