

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE

Discipline : Lasers, Molécules, Rayonnement Atmosphérique

par

Serge BIELAWSKI

INSTABILITES ET CHAOS DANS UN LASER A FIBRE DOPEE Nd³⁺

Soutenue le 17 Février 1993 devant la commission d'examen

Président :	M.	B. MACKÉ	Professeur, USTL
Rapporteurs :	Mme.	M. LE BERRE	Directeur de recherches, CNRS Paris VII
	M.	F. STOECKEL	Professeur, Université de Grenoble
Directeur du travail :	MM.	P. GLORIEUX	Professeur, USTL
Examineurs :	MM.	D. DEROZIER	Maître de conférences, USTL
		M. MONERIE	Ingénieur en chef, CNET Lannion
		P. NIAY	Professeur, USTL



Introduction	1
1° partie : Etude résolue en polarisation de la dynamique du laser	
1.1. Comportement en régime stationnaire et en présence de modulation	8
1.1.1. Dispositif expérimental.....	8
1.1.2. Etude résolue en polarisation des états stationnaires	11
1.1.3. Etude résolue en polarisation de la réponse transitoire du laser.	14
1.1.3.A. Fréquences propres associées aux états stationnaires.....	14
1.1.3.B. Amortissement des oscillations de relaxation dans le cas symétrique.....	16
1.1.4. Réponse du laser à une forte modulation de la puissance de pompe.....	18
1.1.4.A. Régimes dynamiques observés.....	18
1.1.4.B. Phénomènes d'antiphase	21
1.1.4.C. Caractérisation des attracteurs chaotiques.....	22
1.2. Modélisation du laser	25
1.2.1. Mise au point du modèle.....	27
1.2.2. Analyse de stabilité et détermination des paramètres	31
1.2.2.A. Cas symétrique.....	31
1.2.2.B. Cas non-symétrique sans émission spontanée	35
1.2.2.C. Cas non-symétrique avec émission spontanée.	40
1.2.2.D. Détermination des paramètres.....	41
1.2.3. Simulations numériques en régime non-linéaire	44
1.3. Une situation particulière	
le régime d'oscillations spontanées.	48
1.3.1. Régimes dynamiques observés.	48
1.3.2. Causes possibles de l'instabilité.....	50
2° partie : Stabilisation et caractérisation d'états instables	53
2.1. Stabilisation et caractérisation d'états stationnaires instables	56
2.1.1. Méthodes de stabilisation.....	57
2.1.1.A. Dynamique locale du système avec contre-réaction.....	57

2.1.1.B. Stabilisation d'un col.....	58
2.1.1.C. Stabilisation d'un foyer instable.....	61
2.1.1.D. Un cas simple le laser à pertes non linéaires.....	66
2.1.1.E. Remarque sur la condition initiale.....	67
2.1.2. Résultats expérimentaux.....	69
2.1.2.A. Choix de la contre-réaction.....	69
2.1.2.B. Stabilisation du laser à fibre.....	70
2.1.2.C. Etude de l'état stationnaire.....	72
2.1.2.D. Trajectoires hétéroclines.....	74
2.2. Stabilisation et caractérisation d'orbites périodiques instables	77
2.2.1. Orbites instables et chaos.....	78
2.2.1.A. Stabilité d'une orbite périodique.....	78
2.2.1.B. Quelques propriétés des attracteurs chaotiques	79
2.2.2. Les méthodes de Ott, Grebogi et Yorke et de Dressler et Nitsche.....	83
2.2.2.A. La méthode de Ott, Grebogi et Yorke le contrôle du chaos.....	83
2.2.2.B. La méthode de Dressler et Nitsche utilisation de la technique des retards.....	88
2.2.3. Méthode utilisée.....	91
2.2.3.A. Détermination automatique du point fixe.....	91
2.2.3.B. Utilisation d'une correction impulsionnelle.....	96
2.2.4. Résultats expérimentaux.....	98
2.2.4.A. Dispositif expérimental.....	98
2.2.4.B. Contrôle du chaos dans le laser à fibre.....	99
2.2.4.C. Suivi et étude d'orbites périodiques.....	101
2.2.4.D. Orbites situées à la frontière du bassin d'attraction.....	102
Conclusion	105
Références bibliographiques	109
Bibliographie	115
Annexe A : Dynamique du laser oscillant à 1.065 μm (Etude de l'intensité totale)	
Annexe B : Alternate time scale in multimode lasers	

Introduction

Le regain d'intérêt auquel on assiste depuis une vingtaine d'années pour l'étude de certains phénomènes irréguliers et instables s'est accompagné d'une rupture épistémologique profonde.

Avant cette rupture, l'explication de l'irrégularité des systèmes (déterministes) dits *turbulents* ou *chaotiques* était généralement celle donnée par Landau [Landau, 1944] : la turbulence apparaît progressivement lorsqu'un système subit une série infinie de bifurcations donnant successivement naissance à de nouvelles fréquences incommensurables entre elles. La turbulence était donc attribuée à l'existence d'un nombre infini de degrés de libertés, et l'imprédictibilité de l'évolution d'un système était liée à notre incapacité à connaître ses nombreuses variables à un instant donné.

La rupture s'est amorcée lorsque l'on s'est aperçu que des systèmes physiques déterministes à petit nombre de degrés de libertés pouvaient présenter des comportements chaotiques, si leur dynamique était régie par des équation non-linéaires [Ruelle & Takens, 1971; Lorentz, 1963]. La dynamique non-linéaire est alors devenue progressivement un domaine scientifique à part entière dont les objets d'études sont empruntés non seulement à la physique, mais à de nombreux autres domaines comme la chimie [Argoul *et al.*, 1987], la biologie [Olsen & Degn, 1985], la météorologie [Lorentz, 1963], l'économie [Chen, 1988]...

On connaît à présent bon nombre de propriétés universelles relatives à ces systèmes dynamiques [Cvitanović, 1984]. Ces propriétés concernent les régimes chaotiques pris individuellement, comme les structures géométriques ou topologiques des attracteurs qui leur sont associés. Elles concernent également la succession des régimes dynamiques menant au chaos. Ainsi, malgré la diversité des systèmes chaotiques, seul un nombre limité de "scénarios de transitions" vers le chaos est généralement observé : la route vers le chaos par la quasipériodicité [Ruelle & Takens, 1971], la cascade sous-harmonique [Feigenbaum, 1978] et les intermittences [Pomeau & Manneville, 1980].

Une intense activité scientifique est orientée à présent vers les systèmes à grand nombre de degrés de liberté, dont la dynamique est beaucoup moins bien comprise.

La complexité de ces systèmes peut être due à la présence de variables spatiales dans leur évolution, comme en mécanique des fluides ou en optique (oscillateurs à photoréfractifs et lasers multimodes transverses), ils possèdent alors une infinité continue de variables dynamiques et sont alors décrits par des équations aux dérivées partielles.

Certains systèmes peuvent aussi être décrits par un nombre de variables important mais fini, c'est le cas des systèmes oscillateurs couplés, mais également de certains systèmes spatiotemporels dont l'évolution peut se ramener à celle d'un nombre réduit de degrés de liberté "effectifs". Les études expérimentales et numériques de tels systèmes ont révélé une grande diversité de comportements [Kaneko, 1989]. Ils peuvent en effet présenter aussi bien des comportements turbulents, que des comportements collectifs ou partiellement ordonnés, comme le *clustering*, des états d'antiphase et des phénomènes de "*winner-takes-all*" [Otsuka, 1991].

La plupart des lasers à fibre appartiennent à cette dernière catégorie. Généralement, les fibres utilisées comme milieu amplificateur sont monomodes et fixent la structure spatiale transverse du champ laser. Cependant, lorsque la cavité ne contient pas d'éléments sélectifs en fréquence, de nombreux modes longitudinaux possèdent une fréquence se trouvant dans la courbe de gain du milieu amplificateur (typiquement de l'ordre de 10^4 à 10^6). On obtient alors une émission laser fortement multimode révélant l'existence d'un nombre élevé de variables dynamiques (fig. I.1).

La première partie de cette thèse est consacrée à une étude expérimentale de la dynamique du laser fibre basée sur une analyse temporelle de l'intensité et de l'état de polarisation du rayonnement émis, aussi bien en régime stationnaire qu'en présence d'une modulation de la puissance de pompe. Notre premier but sera de dégager des propriétés dynamiques pouvant s'interpréter de manière simple. Ces interprétations conduiront alors à l'élaboration d'un modèle phénoménologique, dont les prévisions seront ensuite confrontées aux résultats expérimentaux. Nous terminerons en décrivant une situation particulière pour laquelle le laser fonctionne dans un régime d'oscillations spontanées.

Alors que la première partie concerne essentiellement les régimes dynamiques stables du laser, la deuxième partie de cette thèse est consacrée à la mise en œuvre de méthodes d'analyse des états instables (points fixes et orbites périodiques instables).

Une idée largement répandue est l'impossibilité d'accéder à ces états instables, excepté lorsqu'ils sont contenus dans un attracteur du système, ou – exceptionnellement – lors d'expériences en régime transitoire. Cette affirmation est justifiée en ce qui concerne les méthodes expérimentales "classiques" comme celles utilisées dans la première partie de cette thèse. On entend par "méthodes classiques" celles consistant à analyser l'évolution d'un système en maintenant

fixes les valeurs des paramètres de contrôle, ou en les soumettant à des perturbations. Les premières permettent d'accéder aux attracteurs du système et éventuellement aux orbites périodiques instables qu'ils contiennent. Les secondes permettent d'explorer d'autres régions de l'espace des phases, et parfois des points fixes ou des orbites périodiques instables [Papoff *et al.*, 1988; Samson *et al.*, 1992]. Toutefois, il est difficile de prédire les perturbations requises pour accéder à ces états instables.

Afin d'effectuer une étude plus systématique des états instables, il est nécessaire d'utiliser une approche différente. La solution qui sera adoptée dans la deuxième partie consiste à appliquer à un paramètre de contrôle des perturbations dépendant des variables dynamiques. On obtient alors un système avec réaction (*feedback*), comme ceux rencontrés dans le domaine des systèmes asservis [Mira, 1990], et qui constituent des objets d'étude privilégiés de la dynamique non-linéaire [Mees, 1986].

L'originalité du travail présenté dans la cette partie réside dans son objectif qui est d'obtenir des informations sur le système sans contre-réaction. Pour ce qui concerne la stabilisation et la caractérisation d'états stationnaires instables, nous transformerons une technique, déjà appliquée à la stabilisation de la branche instable des cycles de bistabilité [Zimmermann *et al.*, 1984; Kramer & Ross, 1985; Macke *et al.*, 1992]. Nous mettrons également au point une méthode de caractérisation d'états périodiques instables, en modifiant la procédure initialement mise au point par Ott, Grebogi et Yorke dans le but de supprimer les régimes chaotiques [Ott *et al.*, 1990]. L'efficacité de ces méthodes sera testée dans le cas d'un laser à fibre dopée au Néodyme oscillant spontanément.

1° partie:

Etude résolue en polarisation
de la dynamique du laser

En l'absence d'éléments sélectifs en polarisation à l'intérieur de la cavité, les différents modes longitudinaux sont caractérisés non seulement par leurs fréquences d'oscillation mais également par leur état de polarisation.

La considération de la polarisation dans les lasers n'est pas récente et ce sujet a été largement étudié. De nombreux travaux ont été réalisés sur les lasers à gaz [De Lang, 1967; Lenstra, 1980], les lasers à colorant [Reyzer & Casperson, 1980a, 1980b], et les lasers à solide comme les lasers LNP [Chinin & Hong, 1975, Otsuka *et al.*, 1977]. Dans le cas du laser à fibre au néodyme, la symétrie des sites dans lesquels sont placés les ions actifs Nd^{3+} est faible. Par conséquent, on s'attend à rencontrer une dépendance des sections efficaces d'émission induite et d'absorption d'un ion, avec la polarisation de l'onde et l'orientation du site.

Bien que les sites soient répartis de manière isotrope dans la silice, cette propriété se manifeste à l'échelle macroscopique par un phénomène de *hole-burning* de polarisation [Hall *et al.*, 1983], et une dépendance du gain non-saturé avec les états de polarisation du champ laser et du champ de pompe [Lin *et al.*, 1989]. Ce dernier effet se rencontre également dans d'autres lasers comme les lasers à colorant [Reyzer & Casperson, 1980b].

En règle générale, dans un domaine de longueur d'onde donné, il existe deux états propres orthogonaux de polarisation [Jones, 1941; Tarassov, 1985] c'est-à-dire des états de polarisation (en général elliptiques) qui sont conservés après un aller-retour dans la cavité. L'observation simultanée des intensités émises selon ces deux états propres permettra d'évaluer l'importance de la nature vectorielle des champs sur la dynamique du laser à fibre.

Dans un premier temps, nous effectuerons une analyse résolue en polarisation de la dynamique linéaire et non-linéaire du laser. Nous commencerons par caractériser les états stationnaires, puis la dynamique du laser dans leur voisinage à partir de sa réponse transitoire.

Ensuite, nous étudierons la réponse non-linéaire du laser lorsqu'il est soumis à une forte modulation de la puissance de pompe. Afin de mettre en évidence les phénomènes physiques gouvernant la dynamique du laser, les résultats expérimentaux obtenus seront comparés à ceux d'un modèle aussi simple que possible.

Nous terminerons par l'étude d'une situation particulière dans laquelle l'intensité de sortie présente des oscillations spontanées.

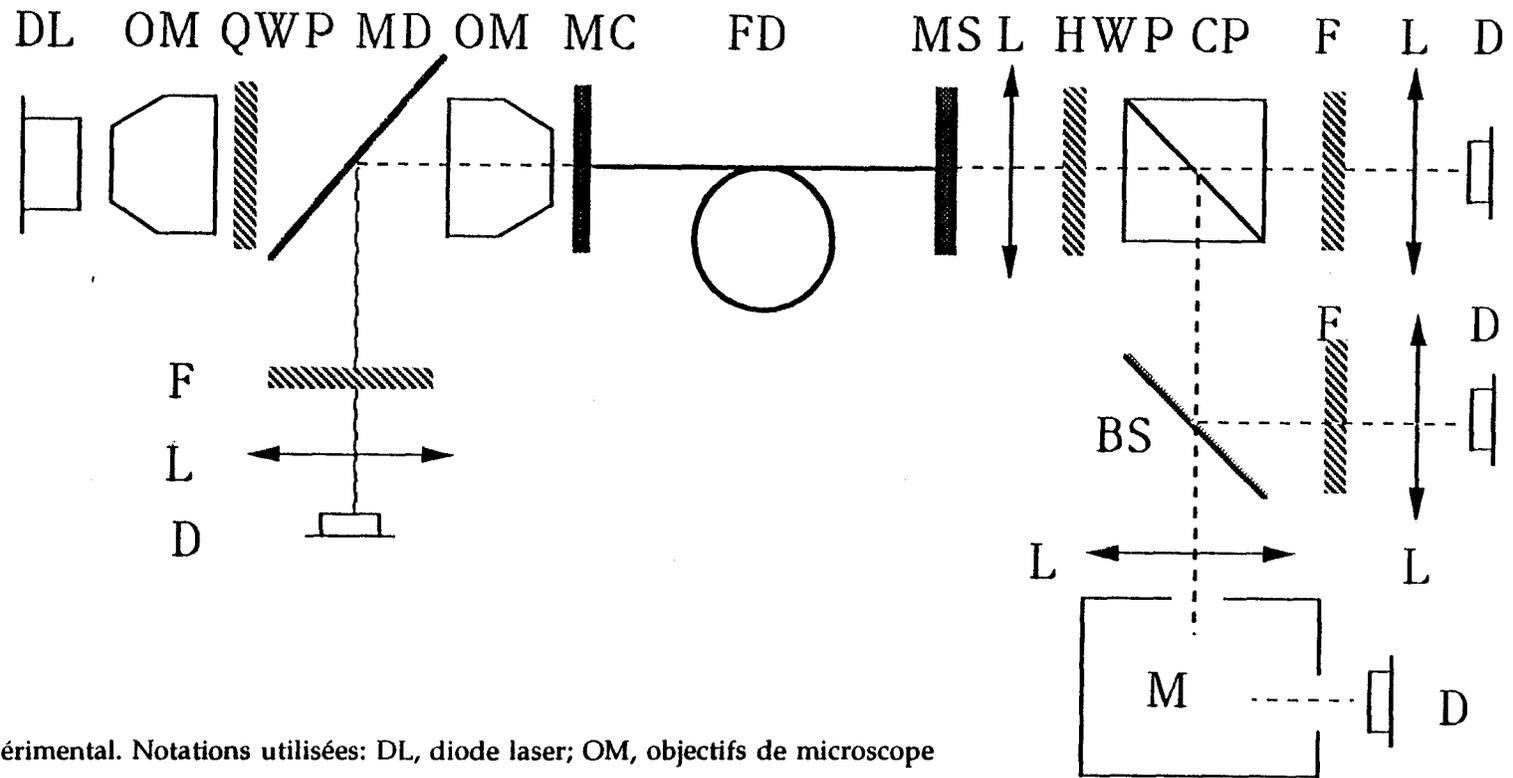


Fig. 1.1. Dispositif expérimental. Notations utilisées: DL, diode laser; OM, objectifs de microscope (NG 10); QWP, lame quart d'onde; (820 nm); MD, miroir dichroïque (R_{\max} à 1080 nm, T_{\max} à 820 nm); MC, miroir $R > 99.5\%$ à 1080 nm, T_{\max} à 820 nm; FD, fibre dopée au néodyme; MS, miroir de sortie ($R = 95\%$ à 1080 nm, T_{\max} à 820 nm); L, lentille de collimation ou de focalisation; HWP, lame demi-onde (1080 nm); CP, cube polariseur; F, filtre passe-bande (1060-1100 nm); BS, lame séparatrice ($T = 70\%$, $R = 30\%$); M, monochromateur (Jobin-Yvon HR 640); D, photodiodes au silicium.

1.1. Comportement en régime stationnaire et en présence de modulation

1.1.1. Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est représenté sur la figure 1.1. Il comporte le laser à fibre avec son système de pompage, et le système d'analyse des caractéristiques du rayonnement émis (intensité, état de polarisation et spectre).

Le milieu actif du laser est constitué par 5 m d'une fibre en silice dopée au Néodyme (300 ppm) qui nous a été fournie par M. Monerie du C.N.E.T. Lannion. Le cœur de la fibre possède un diamètre de $5.8 \mu\text{m}$ et la longueur d'onde de coupure pour le fonctionnement monomode est de $1 \mu\text{m}$. On obtient donc une propagation monomode à la longueur d'onde laser ($1.08 \mu\text{m}$), mais les modes LP_{01} et LP_{11} peuvent se propager à la longueur d'onde de pompe (environ 820 nm). L'excitation du mode LP_{11} diminue l'efficacité du pompage étant donné le faible recouvrement entre ce mode et le mode lasant [Digonnet *et al.*, 1985]. Cependant, la dynamique d'un tel laser monomode transverse ne doit pas être affectée qualitativement par la structure de l'onde de pompe [Lugiato *et al.*, 1988].

La cavité laser est fermée par deux miroirs dichroïques M_1 et M_2 transparents à la longueur de d'onde de pompe et de coefficients de réflexion $R_1 \geq 99.5 \%$ et $R_2 = 95 \%$ autour de $1.08 \mu\text{m}$. Les miroirs sont plaqués directement sur les extrémités de la fibre.

Afin de réduire les pertes de la cavité et d'améliorer le couplage entre le rayonnement de pompe et la fibre, on peut appliquer un liquide adaptateur d'indice sur l'extrémités de la fibre. Cependant, il peut être également intéressant de mettre directement en contact la fibre et le miroir M_2 sans appliquer de liquide. L'espace entre le miroir et la fibre forme alors une cavité Fabry-Pérot dont l'épaisseur peut être ajustée, ce qui permet l'accord du laser dans un large domaine de longueur d'onde (plus de 40 nm) autour de $1.09 \mu\text{m}$. Ce phénomène est couramment rencontré dans les lasers à fibre [J. Berton, 1989].

Le laser de pompe est une diode laser monomode transverse (RTC, CQL 44) émettant un rayonnement linéairement polarisé à 820 nm. Le faisceau émis est collimaté et focalisé sur le cœur de la fibre au moyen de deux objectifs de microscope (de grossissement 10 et d'ouverture numérique 0.25).

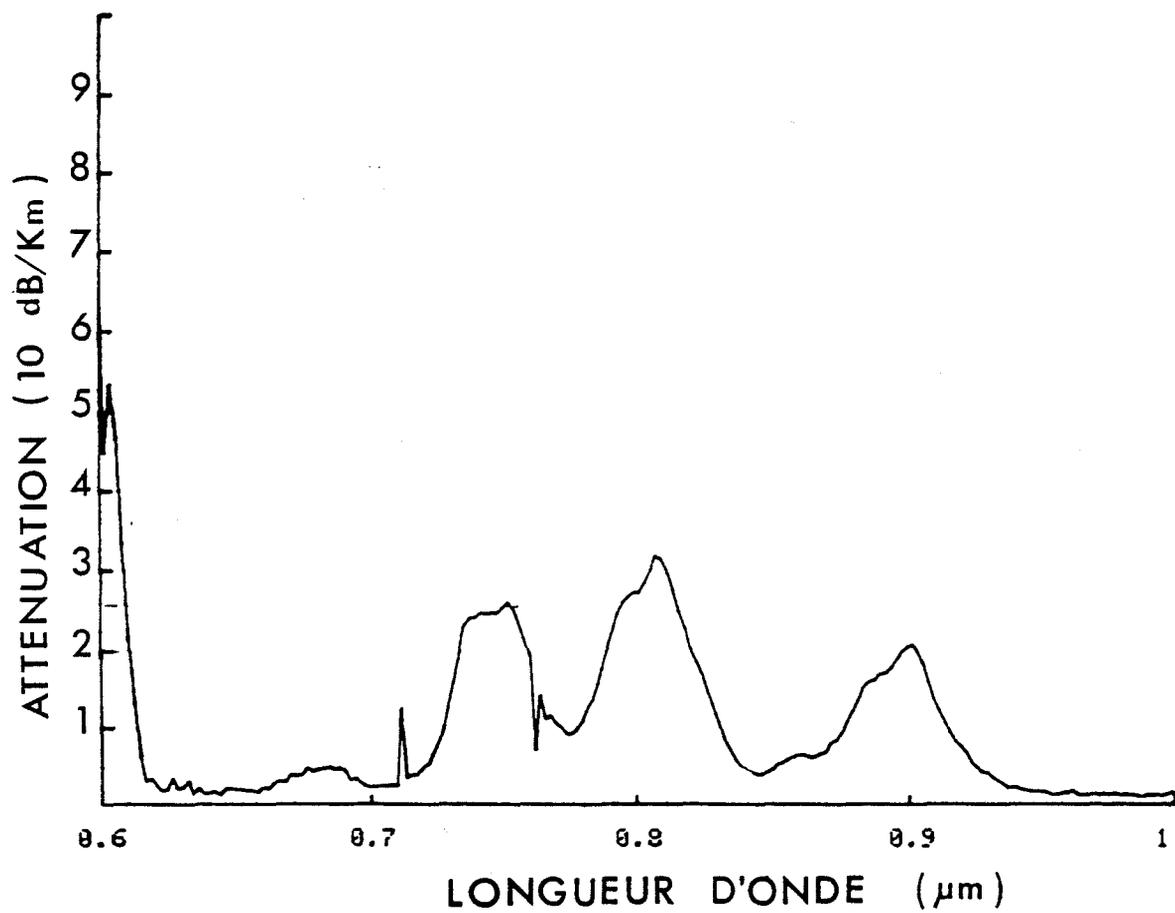


Fig. 1.2. Courbe d'atténuation spectrale de la fibre dopée au néodyme (CNET Lannion).

La puissance injectée dans le coeur de la fibre peut être estimée à partir du coefficient d'absorption de la fibre à 820 nm, et de la puissance de pompe en sortie de fibre. Le coefficient d'absorption peut être évalué en mesurant la puissance de sortie pour plusieurs longueurs de fibre, ou d'après la courbe d'atténuation spectrale donnée par le C.N.E.T. (fig. 1.2). On trouve un coefficient d'absorption de l'ordre de 0.33 m^{-1} . Toutes les puissances de pompe mentionnées dans la suite seront celles estimées par cette procédure.

Le dispositif d'alimentation de la diode laser possède deux entrées permettant une modulation du courant de diode (bande passante de 0 à 1 MHz) qui se superpose à une composante ajustable. Un dispositif de protection limite l'intensité du courant de diode laser à 100 mA, ce qui correspond à une puissance maximale en sortie de diode de 35 mW et une puissance injectée dans la fibre de 8 mW environ.

Les résultats expérimentaux dépendent des pertes du laser, c'est pourquoi nous avons réalisé des expériences préalables pour différentes valeurs du coefficient de réflexion du miroir de sortie ($R_2 = 99.5 \%$, 95% et 80%). Toutefois, les différences observées sont essentiellement quantitatives.

Avec un miroir M_2 de coefficient de réflexion $R_2 = 95\%$, le seuil est typiquement de l'ordre de 2 mW, ce qui permet d'atteindre des paramètres de pompe de l'ordre de 4 (le paramètre de pompe est défini comme la puissance de pompe divisée par sa valeur au seuil d'émission laser). Dans cette situation, la puissance émise peut atteindre le milliwatt.

Avec un miroir hautement réfléchissant ($R_2 = 99.5 \%$), le seuil devient inférieur au milliwatt mais la puissance de sortie chute à quelques dizaines de microwatt. Bien que le paramètre de pompe puisse alors atteindre des valeurs plus importantes que dans la situation précédente, on n'observe pas de phénomènes qualitativement nouveaux. En fait, la plus grande richesse de phénomènes s'observe en orientant les miroirs de façon à augmenter les pertes. On retrouve alors les mêmes phénomènes que dans le cas où l'on utilise un miroir M_2 de coefficient de réflexion $R_2 = 95 \%$.

Pour un taux de pertes élevé ($R_2 = 80 \%$), les puissances de pompe disponibles ne permettent pas d'obtenir des comportements dynamiques aussi riches que dans les situations précédentes.

Par conséquent, tous les résultats qui seront présentés par la suite correspondront aux expériences effectuées avec un miroir M_2 de coefficient de réflexion $R_2 = 95 \%$, cette situation représentant un bon compromis entre la richesse des phénomènes observés et le rapport signal sur bruit.

Le rayonnement émis par le laser est séparé par un cube polariseur en deux composantes polarisées orthogonalement. La direction d'analyse est choisie en orientant une lame demi-onde placée devant le polariseur. Les puissances des deux faisceaux sont mesurées par des photodiodes au silicium après un filtrage du rayonnement de pompe résiduel à 820 nm. Les systèmes de détection utilisés possèdent une réponse en fréquence quasiment constante de 0 à 1 MHz. La calibration relative des deux détecteurs s'obtient en comparant les intensités détectées pour deux orientations de la lame demi-onde différentes de $\pi/4$.

Une lame séparatrice placée après le polariseur renvoie une partie du rayonnement vers un monochromateur (Jobin-Yvon, HR 640), afin d'effectuer une analyse spectrale. Les spectres sont alors détectés par une barrette CCD (de 1024 pixels).

Un séparateur de faisceaux transparent à 820 nm et de coefficient de réflexion $R > 99.5\%$ à 1.08 μm , placé entre les deux objectifs de microscope renvoie le rayonnement émis par l'autre extrémité du laser sur un détecteur. Ceci permet de mesurer l'intensité totale émise par le laser, et d'atténuer un éventuel retour par réflexion sur la diode laser du rayonnement à 1.08 μm .

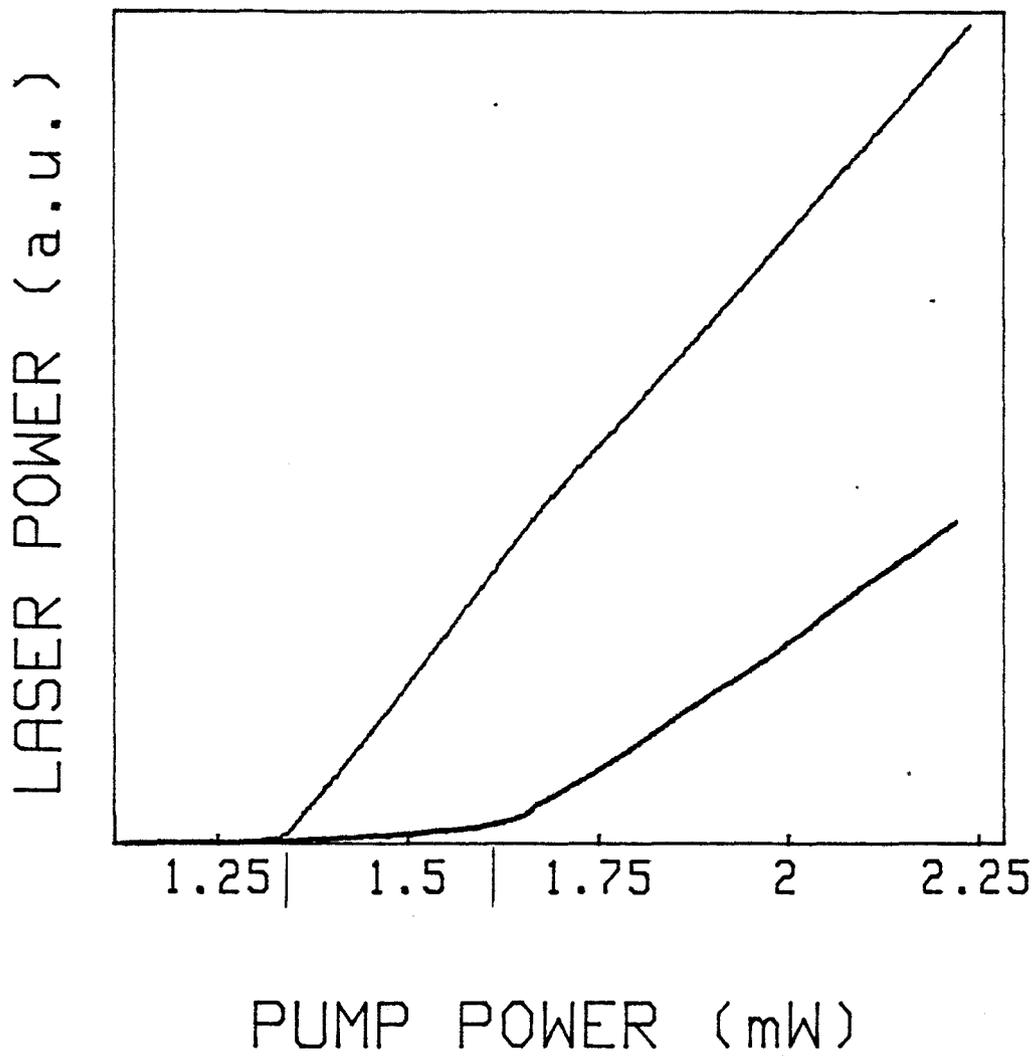


Fig. 1.3. Puissances I_1 et I_2 détectées selon les deux directions propres de polarisation de la cavité en fonction de la puissance de pompe injectée. Entre les deux seuils P_{th1} et P_{th2} , la polarisation du rayonnement est linéaire. Au delà du second seuil, l'émission s'effectue selon les deux directions de polarisation.

1.1.2. Etude résolue en polarisation des états stationnaires

Au delà du seuil, l'observation résolue en polarisation et en longueur d'onde du rayonnement émis pour différentes puissances de pompe P révèle différents régimes de fonctionnement du laser.

Entre le seuil du laser P_{th1} et un second seuil P_{th2} , la polarisation du rayonnement émis est linéaire (fig. 1.3). Ceci indique que les deux états propres de polarisation de la cavité sont polarisés linéairement (au moins pour ces valeurs de la puissance de pompe). Sur la figure 1.3, une faible intensité (environ 5% de l'intensité totale) est détectée sur l'autre polarisation car la lame demi-onde placée devant le cube polariseur n'est pas rigoureusement achromatique. La même expérience réalisée en remplaçant le cube polariseur et la lame demi-onde par un polariseur orientable révèle que la polarisation est parfaitement linéaire, l'intensité détectée selon la direction perpendiculaire étant dans ces conditions inférieure à 0.5 %. Par la suite nous affecterons l'indice 1 (resp. 2) aux grandeurs relatives à la direction de polarisation qui vient d'être mise en évidence (direction "1") (resp. à la direction orthogonale : direction "2").

Entre les deux seuils P_{th1} et P_{th2} , l'intensité I_1 émise par le laser augmente linéairement avec la puissance de pompe (fig. 1.3) et le spectre s'élargit progressivement (fig. 1.4a à 1.4c). Il faut également noter que la direction de polarisation du rayonnement est la même pour tous les modes du laser (le spectre observé selon la direction 2 est représenté sur la figure 1.4d). On en déduit que dans le domaine spectral correspondant à l'émission du laser, les états propres de polarisation de la cavité ne dépendent pas de la longueur d'onde de façon mesurable.

La direction de polarisation change avec l'état de torsion et de courbure de la fibre. Par contre, elle semble indépendante de la puissance, de l'état de polarisation de la pompe ainsi que de l'orientation des miroirs. Ceci indique que les directions de polarisation sont imposées par la biréfringence de la fibre, comme attendu si l'on suppose que l'anisotropie de pertes par réflexion sur les miroirs, et celle du gain restent faibles.

Lorsque la puissance de pompe dépasse la valeur P_{th2} , le laser émet aussi un rayonnement d'intensité I_2 selon la direction de polarisation orthogonale à la précédente. Le spectre émis selon cette direction est plus étroit que celui émis selon l'autre polarisation, et sa largeur croît avec la puissance de pompe (fig. 1.5).

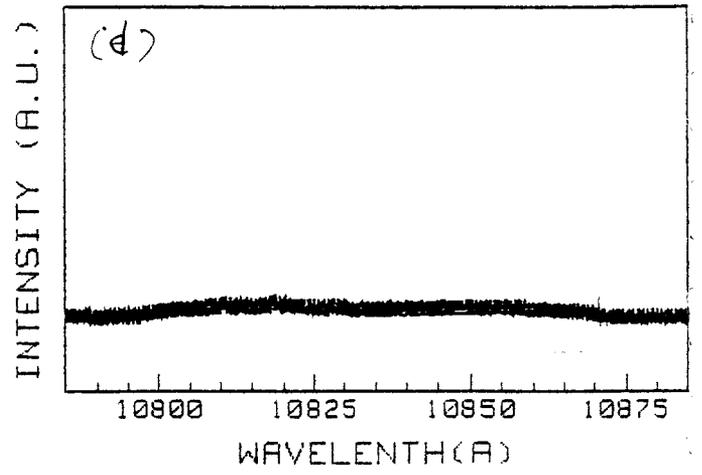
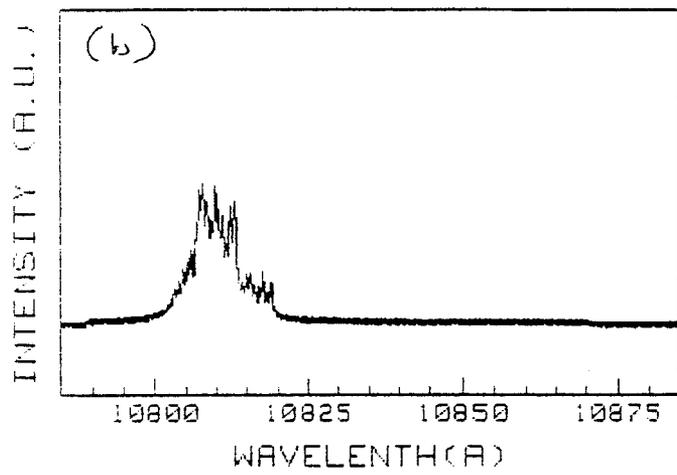
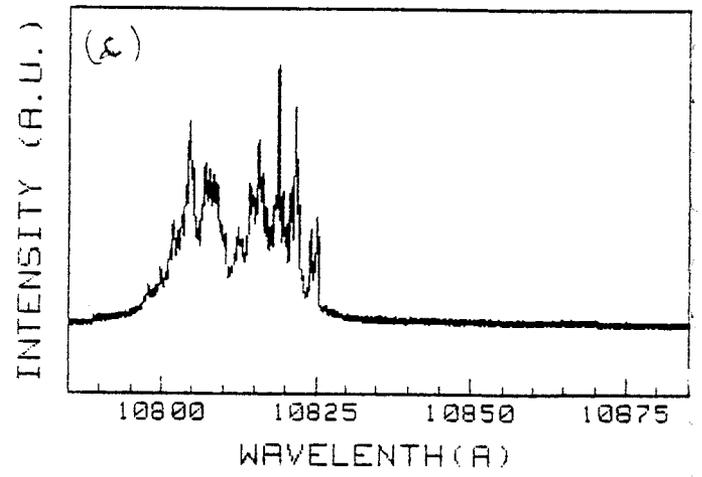
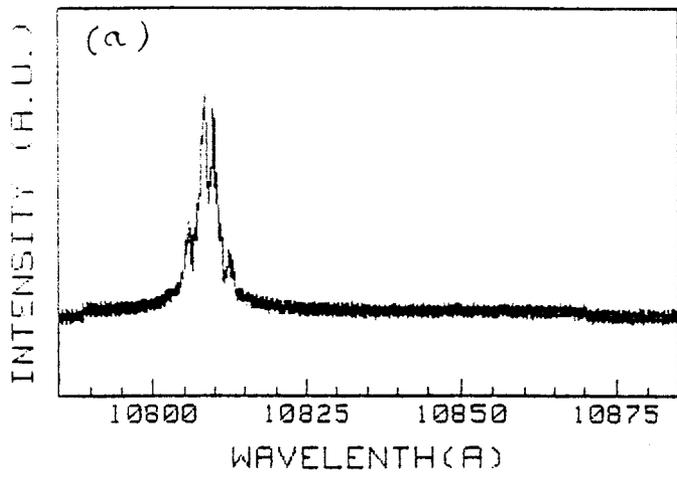


Fig. 1.4 Spectre émis par le laser selon la direction 1 entre les deux seuils. (a) $P \approx P_{th1} = 2.1$ mW; (b) $P = 2.75$ mW; $P = 3.1$ mW; (d) spectre mesuré selon la direction 2.

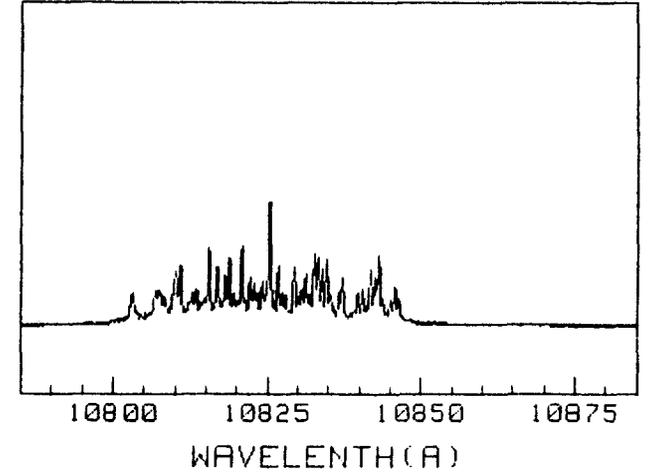
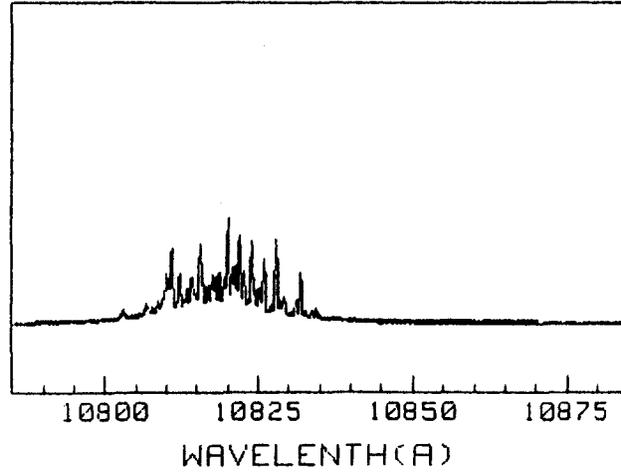
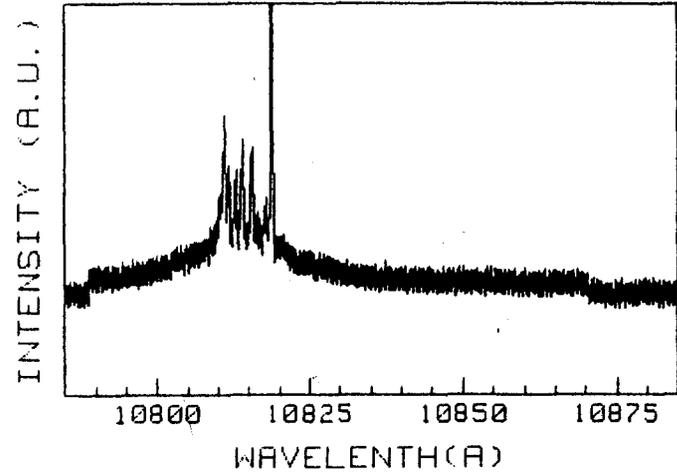
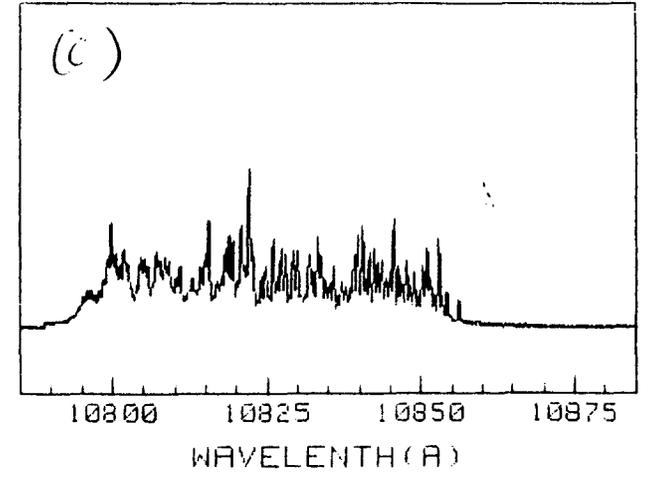
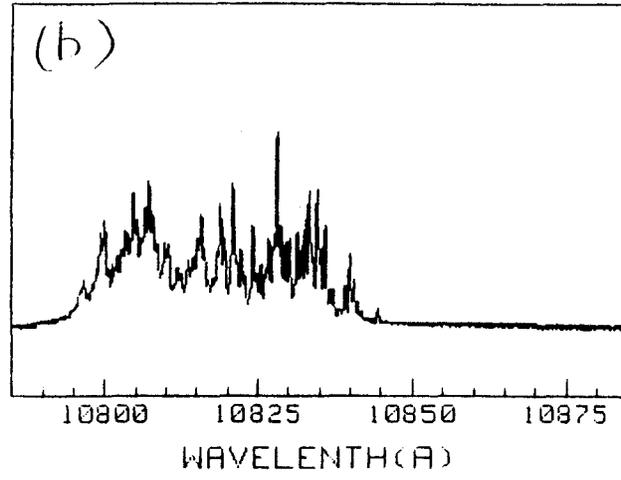
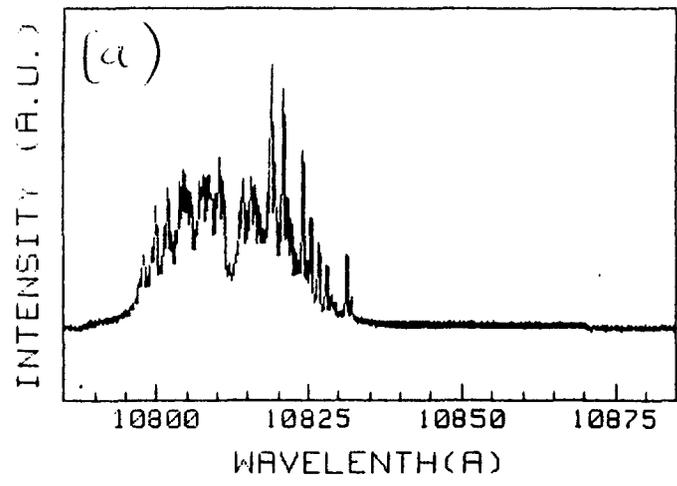


Fig. 1.5. Spectres émis selon la direction 1 (courbes supérieures) et la direction 2 (courbes inférieures) au delà du second seuil. (a) $P \approx P_{th2} = 3,2$ mW; (b) $P = 4$ mW; (c) $P = 7.5$ mW.

Il faut noter qu'au delà du second seuil, l'expérience réalisée ne permet pas de montrer que les états propres de polarisation sont identiques à ceux observés précédemment. Pour en avoir confirmation, il faudrait effectuer une analyse résolue en polarisation de chacun des modes du laser, ce qui n'a pu être réalisé étant donné la valeur extrêmement faible de l'intervalle spectral libre de la cavité (20 MHz) et la résolution du monochromateur (de l'ordre de 10 GHz). Cependant, on peut admettre que les directions de polarisation ne changent pas avec la puissance de pompe si on considère que la biréfringence de la fibre fixe les états propres de polarisation et n'est modifiée ni par le champ laser, ni par le champ de pompe. Par la suite, nous considérerons que les états propres de polarisation de la fibre sont ceux déterminés entre les deux seuils.

L'apparition de l'intensité I_2 s'accompagne d'un changement de pente de la caractéristique reliant la puissance de pompe à l'intensité I_1 suivant la première direction de polarisation (fig. 1.3). Cependant, les variations de I_1 et I_2 restent linéaires dans les deux domaines $P_{th1} < P < P_{th2}$ et $P > P_{th2}$. La différence de pente pour I_1 dans ces deux domaines peut s'expliquer par un processus de compétition. En effet, les différents modes partagent – au moins en partie – la même inversion de population, par conséquent il est naturel que l'apparition de l'intensité I_2 s'accompagne d'une réduction du gain pour les modes associés à l'intensité I_1 .

Les valeurs des seuils P_{th1} et P_{th2} dépendent de la torsion et de la courbure de la fibre, et la valeur P_{th2}/P_{th1} varie typiquement entre 1 et 1.2. En particulier, les deux seuils peuvent être rendus égaux en ajustant convenablement la torsion de la fibre. Cette situation particulière sera exploitée dans la suite, cependant, excepté lorsque ce sera précisé les expériences seront effectuées dans la situation générique $P_{th2} > P_{th1}$.

Au delà du second seuil, Lin *et al.* [Lin *et al.*, 1989] on montré que le rapport entre les pentes des droites $I_1(P)$ et $I_2(P)$ dépend de l'état de polarisation de l'onde de pompe. En particulier, une rotation de $\pi/2$ de la direction de polarisation de la pompe entraîne un échange entre les pentes des deux droites. Ceci indique une anisotropie de pompage du milieu amplificateur.

En résumé, l'émission du rayonnement laser peut s'effectuer selon un seul état propre de polarisation de la cavité (entre le seuil du laser P_{th1} et un deuxième seuil P_{th2}), ou simultanément selon les deux états propres (au delà du deuxième seuil). Les expériences effectuées révèlent également que ces états

propres sont linéaires, ne dépendent pas de manière observable de la longueur d'onde d'émission, et sont fixés uniquement par la biréfringence de la cavité.

L'existence de deux seuils met en évidence une disymétrie entre les deux ensemble de modes associés aux deux états propres de polarisation, et cette disymétrie dépend de l'état de polarisation de la pompe.

De plus, la nature de la dépendance des intensités I_1 et I_2 en fonction de la puissance de pompe ainsi que l'existence des deux seuils peuvent s'expliquer en assimilant le laser à fibre à un ensemble de deux sous-systèmes en compétition, associés à chacun des deux états propres de polarisation.

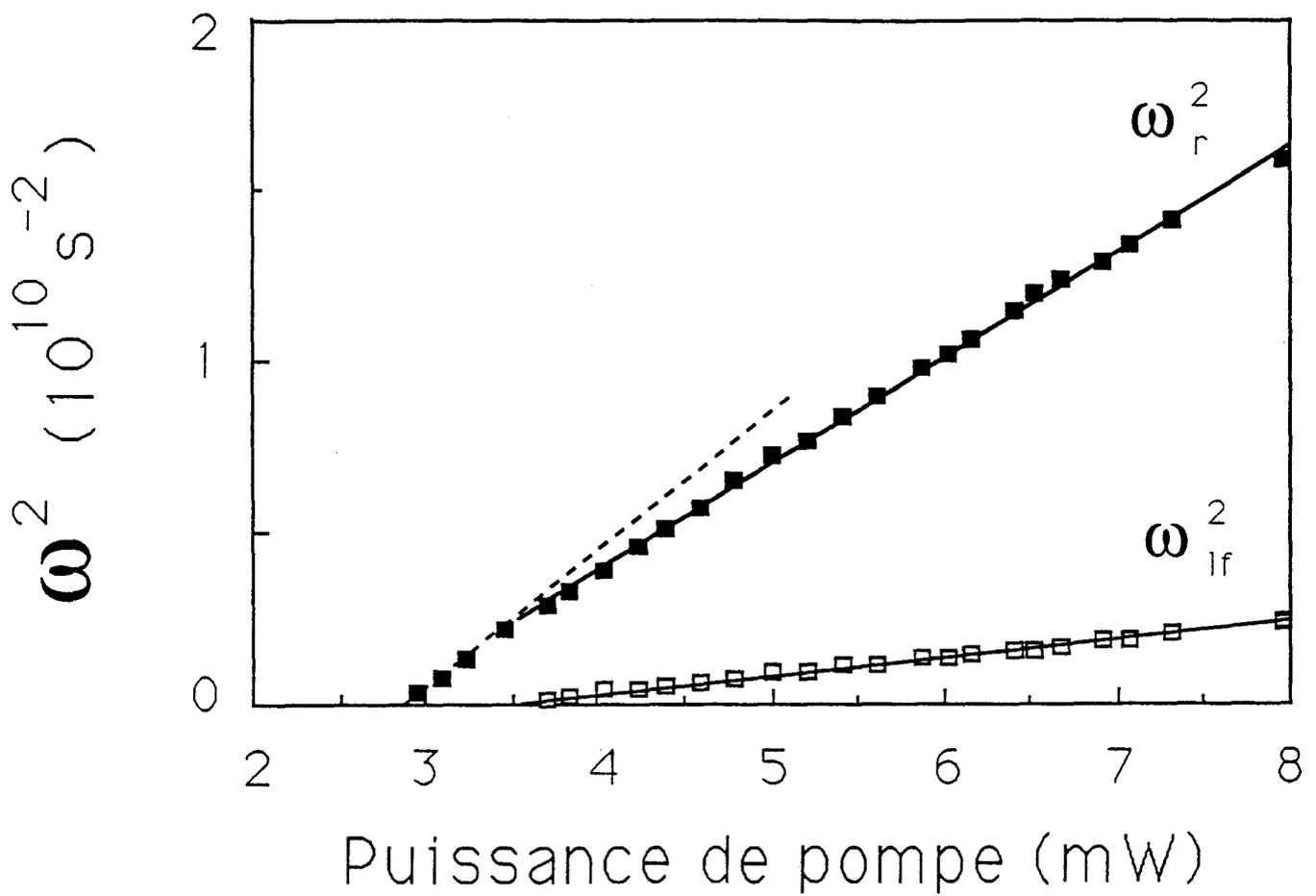


Fig. 1.6. Dépendance des carrés de la fréquence de relaxation ω_r et de la fréquence basse ω_{lf} du laser en fonction de la puissance de pompe P . Les deux droites sont les régressions linéaires sur les valeurs de ω_r^2 et ω_{lf}^2 (au-delà du second seuil). Les valeurs de la puissance de pompe aux deux seuils sont $P_{th1} = 2.8$ mW et $P_{th2} = 3.5$ mW.

1.1.3. Etude résolue en polarisation de la réponse transitoire du laser.

Nous allons à présent étudier la dynamique du laser au voisinage des états stationnaires que nous venons de caractériser. Pour ce faire, nous allons perturber la puissance de pompe, puis observer l'évolution des intensités émises selon les deux directions de polarisation lors du retour à l'équilibre. La perturbation appliquée est un créneau dont l'amplitude est choisie suffisamment faible pour que la dynamique du laser reste essentiellement linéaire. Plus précisément, la puissance de pompe reste constamment au dessus du seuil, et on s'arrange pour obtenir une réponse d'amplitude faible (de l'ordre de 5 à 10 % de la puissance moyenne). Par conséquent, les résultats obtenus dans ces conditions pourront être comparés directement aux résultats d'analyse de stabilité linéaire réalisées sur des modèles, afin d'en tester la validité ou d'en déterminer les différents paramètres.

1.1.3.A. FREQUENCES PROPRES ASSOCIEES AUX ETATS STATIONNAIRES

Entre les deux seuils (pour $P_{th1} < P \leq P_{th2}$), la réponse $I_1(t)$ à une petite perturbation de la puissance de pompe est une simple oscillation amortie. L'ajustement entre une sinusoïde exponentiellement amortie et le signal transitoire permet de mesurer la fréquence correspondante. Cette fréquence correspond à la fréquence de relaxation classique des lasers de classe B [Mc Cumber, 1966] et varie typiquement entre 0 et 20 kHz. Par la suite, nous nommerons ces oscillations "oscillations de relaxation" et les pulsations correspondantes seront notées ω_r . On constate que la dépendance du carré de ω_r avec la puissance de pompe (fig. 1.6) est linéaire comme dans le cas des lasers monomodes de classe B, bien que laser à fibre soit fortement multimode. Cet effet est caractéristique d'un comportement collectif des nombreux modes du laser [Mandel *et al.*, 1992].

Au delà du second seuil (c'est-à-dire pour $P > P_{th2}$), les réponses transitoires $I_1(t)$ et $I_2(t)$ sont constituées de la superposition de deux oscillations amorties avec des fréquences et des coefficients d'amortissement différents (les amplitudes relatives des deux oscillations dépendent de la durée de l'impulsion). En ajustant sur les signaux une combinaison linéaire de deux sinusoïdes

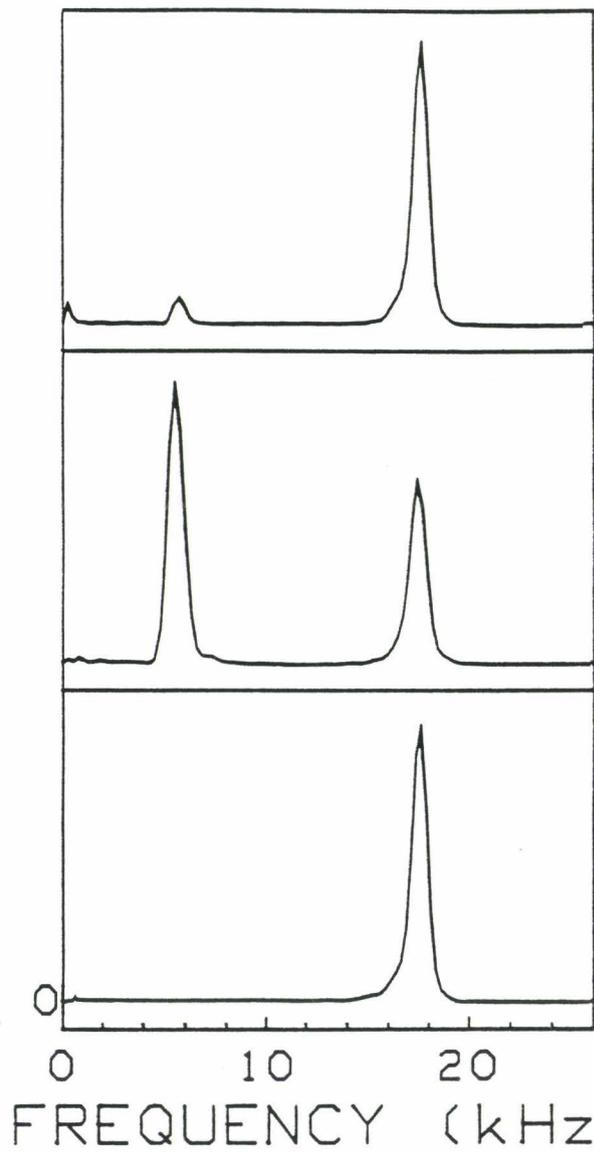
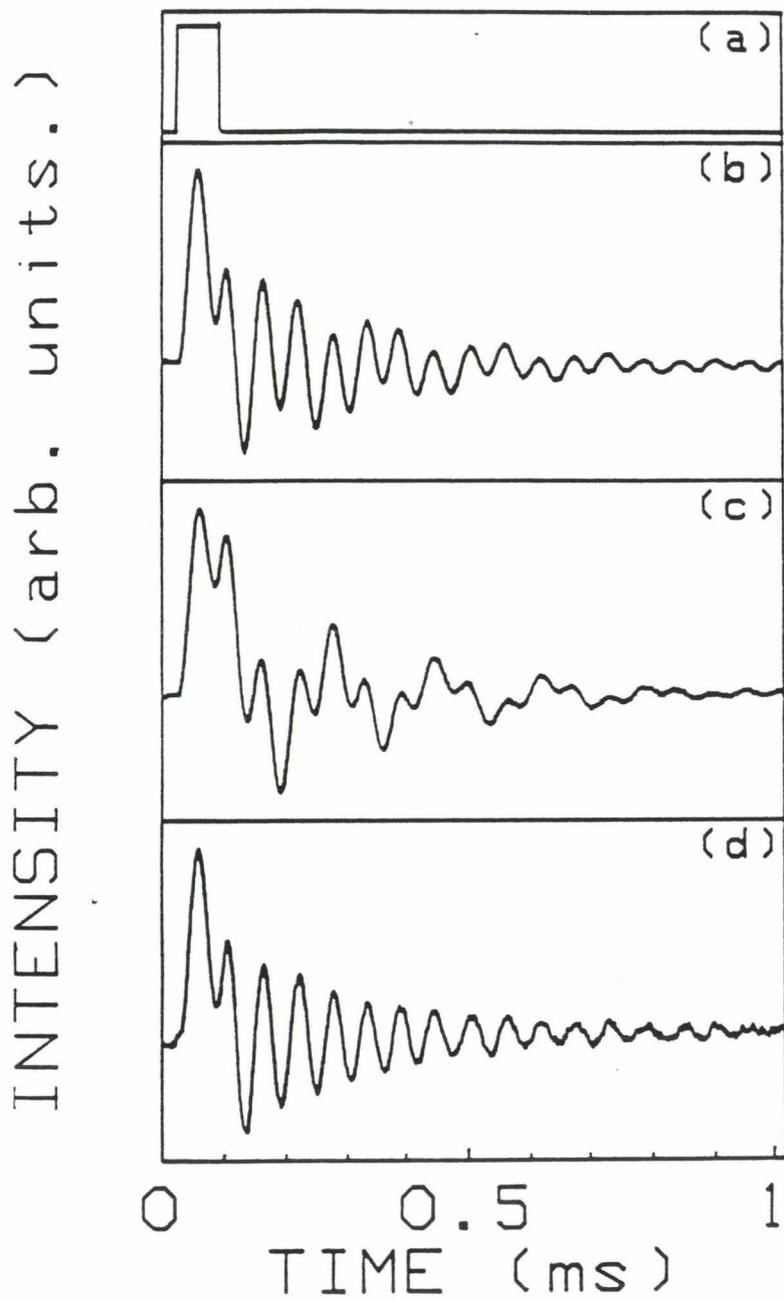


Fig. 1.7. Réponse transitoire du laser après une petite perturbation de la puissance de pompe. (a), perturbation; (b) et (c), intensités $I_1(t)$ et $I_2(t)$ détectées selon les deux directions propres de polarisation de la cavité; (d) intensité totale.

Fig. 1.8. Spectres en puissance des signaux (b) à (d) de la figure 1.7.

amorties de manière exponentielle, on peut mesurer avec précision les fréquences, les amortissements et les phases relatives des oscillations observées sur I_1 et I_2 . Lorsque la puissance de pompe tend vers P_{th2} , la fréquence la plus élevée tend vers celle des oscillations observées juste au dessous du second seuil. Cette fréquence correspond aux oscillations de relaxation du laser. La deuxième fréquence du système est 0 à 0.4 fois plus faible que la fréquence de relaxation ω_r , elle sera par la suite nommée "basse fréquence" et notée ω_{lf} (*low frequency*).

Les oscillations à la fréquence de relaxation ω_r et à la basse fréquence ω_{lf} n'affectent pas les variables I_1 , I_2 et l'intensité totale I de la même manière. Ceci est clairement visible sur la figure 1.7 sur laquelle est représentée la perturbation de la puissance de pompe (fig. 1.7a), la réponse du laser selon les deux directions de polarisation (fig. 1.7b et 1.7c) et l'évolution de l'intensité totale (fig. 1.7d). Les oscillations à la fréquence de relaxation ω_r sont en phase alors que les oscillations à la fréquence basse ω_{lf} sont en opposition de phase. Comme les oscillations à la fréquence ω_{lf} possèdent quasiment la même amplitude, elles interfèrent destructivement et l'intensité totale ne présente qu'une oscillation amortie à la fréquence de relaxation. Les spectres des signaux correspondants représentés sur la figure 1.8. révèlent clairement la présence des deux fréquences propres sur les signaux $I_1(t)$ et $I_2(t)$, mais seule la fréquence de relaxation ω_r est visible sur le spectre de l'intensité totale.

L'étude de l'évolution en fonction du paramètre de pompe des valeurs des fréquences propres ω_r , ω_{lf} et des amortissements correspondants apportent des renseignements qualitatifs et quantitatifs sur la dynamique du laser. Les évolutions des carrés des fréquences propres sont représentés sur la figure 1.6. On constate qu'au delà du second seuil, ω_r^2 varie linéairement avec la puissance de pompe. Il est remarquable que cette loi linéaire typique des lasers monomodes de classe B [Mc Cumber, 1966] soit encore vérifiée dans un régime où le laser se comporte comme un ensemble de deux sous-systèmes couplés. Cependant, cette loi n'est vérifiée que sur les intervalles $P_{th1} < P < P_{th2}$ et $P > P_{th2}$ séparément, les pentes dans ces deux intervalles étant légèrement différentes (fig. 1.6). De plus, comme pour la fréquence de relaxation, le carré de la basse fréquence ω_{lf} dépend linéairement de la puissance de pompe (fig. 1.6).

Il faut noter que dans la situation symétrique ($P_{th1} = P_{th2}$) L'application d'une petite perturbation, quelle que soit sa durée, ne met en évidence que la fréquence de relaxation ω_r . Cependant pour une puissance de pompe donnée,

lorsque les deux seuils se rapprochent progressivement, l'amplitude des oscillations à la fréquence basse diminue mais les ordres de grandeur de la fréquence et de l'amortissement sont conservés. Ceci suggère que dans le cas symétrique, le système possède encore deux fréquences propres ω_r et ω_{lf} , mais que l'état initial obtenu après la petite perturbation de la puissance de pompe ne permet pas l'oscillation à fréquence basse. Le type de perturbation qu'il est nécessaire d'appliquer pour la mettre en évidence sera décrite au § 1.2.2.A

1.1.3.B. AMORTISSEMENT DES OSCILLATIONS DE RELAXATION DANS LE CAS SYMETRIQUE

Bien que la fréquence de relaxation dépende de la puissance de pompe suivant la loi prédite par les modèles de lasers monomodes de classe B, il n'en est pas de même pour le coefficient d'amortissement Γ_r des oscillations de relaxation.

Ce modèle (voir par exemple [Matorin, 1984; Tarassov, 1985]) prévoit théoriquement deux types de régime transitoire différents selon le paramètre de pompe $A = P/P_{th1}$. Au delà d'un seuil A_ω extrêmement proche du seuil du laser ($A = 1$), le retour vers l'état stationnaire s'effectue par une oscillation amortie, dont l'amortissement Γ_r dépend linéairement du paramètre de pompe ($\Gamma_r = A/2\tau_f$ avec τ_f le temps de relaxation de l'inversion de population).

Entre le seuil du laser et A_ω , le retour vers l'état stationnaire est une superposition de deux exponentielles décroissantes. Un des deux coefficients d'amortissement décroît rapidement vers zéro quand le laser s'approche du seuil. Le passage par zéro correspond au ralentissement critique qui accompagne la bifurcation transcritique associée au seuil. Cependant il est important de noter que cette décroissance vers zéro s'effectue dans un domaine de valeurs de A trop restreint pour pouvoir être observée expérimentalement : $1 < A < A_\omega = 1 + \tau_c/4\tau_f$, avec τ_c le temps de vie des photons dans la cavité; τ_c/τ_f est de l'ordre de 10^{-3} pour le laser à fibre.

Par conséquent, le modèle de laser monomode à deux niveaux de classe prévoit que l'étude expérimentale des transitoires mette en évidence une oscillation de relaxation dont l'amortissement $\Gamma_r(A)$ semble rigoureusement linéaire et paraît tendre vers $1/2\tau_f$ en $A = 1$.

Dans le cas du laser à fibre, on n'observe ni la linéarité de $\Gamma_r(A)$, ni l'apparente convergence de Γ_r vers la valeur $1/2\tau_f$. Au contraire on observe un accroissement très important de la dissipation quand on s'approche du seuil (fig. 1.9). L'existence de ce phénomène peut être lié au fait que le seuil du laser ne correspond plus à la bifurcation habituelle. En fait, il faut remarquer que la présence d'émission spontanée dans un milieu laser supprime la nature critique du seuil. Dans le cas des lasers non-guidés comme les lasers CO_2 , cet effet est en général trop faible pour pouvoir être observé. Par contre, dans notre cas, le guidage de l'onde dans la fibre accroît de manière considérable la quantité de photons émis par émission spontanée qui sont réinjectés dans les modes lasants. Il est donc naturel d'observer une influence non négligeable de l'émission spontanée sur le comportement dynamique du laser comme c'est le cas pour les lasers à semi-conducteurs [Hori *et al.*, 1988; Chen *et al.*, 1985] ou les laser Co:MgF_2 [Schneiderova & Maly, 1990]. Nous verrons par la suite que la présence d'émission spontanée peut effectivement expliquer le comportement de $\Gamma_r(A)$ au voisinage du seuil (§ 1.2.2A).

En conclusion, les expériences effectuées en régime stationnaire et transitoire mettent en évidence un certain nombre de propriétés dynamiques du laser à fibre dont il sera nécessaire de tenir compte lors de sa modélisation.

La dynamique locale au voisinage des états stationnaires a mis en évidence deux fréquences propres ω_r et ω_{lf} , par conséquent l'espace des phases dans lequel évolue l'état du laser possède au moins quatre dimensions. Ceci entraîne qu'un modèle reproduisant les phénomènes observés jusqu'à présent, devra comporter quatre variables dynamiques au minimum.

En régime symétrique, la dépendance de la fréquence de relaxation ω_r avec le paramètre de pompe correspond aux prévisions du modèle de laser monomode de classe B à deux niveaux. Cependant, il n'en est pas de même pour le coefficient d'amortissement. Le modèle devra donc comporter des termes qui augmentent la dissipation au voisinage du seuil, comme ceux dus à la présence d'émission spontanée.

De plus, les comportements observés jusqu'à présent, en particulier la présence de deux seuils et l'apparition d'une fréquence basse, suggèrent que la dynamique linéaire du laser (c'est-à-dire au voisinage des états stationnaires) fait intervenir essentiellement l'interaction de deux sous-systèmes en compétition. Un tel effet de compétition peut d'ailleurs être facilement expliqué par le fait que les deux systèmes partagent en partie la même inversion de population.

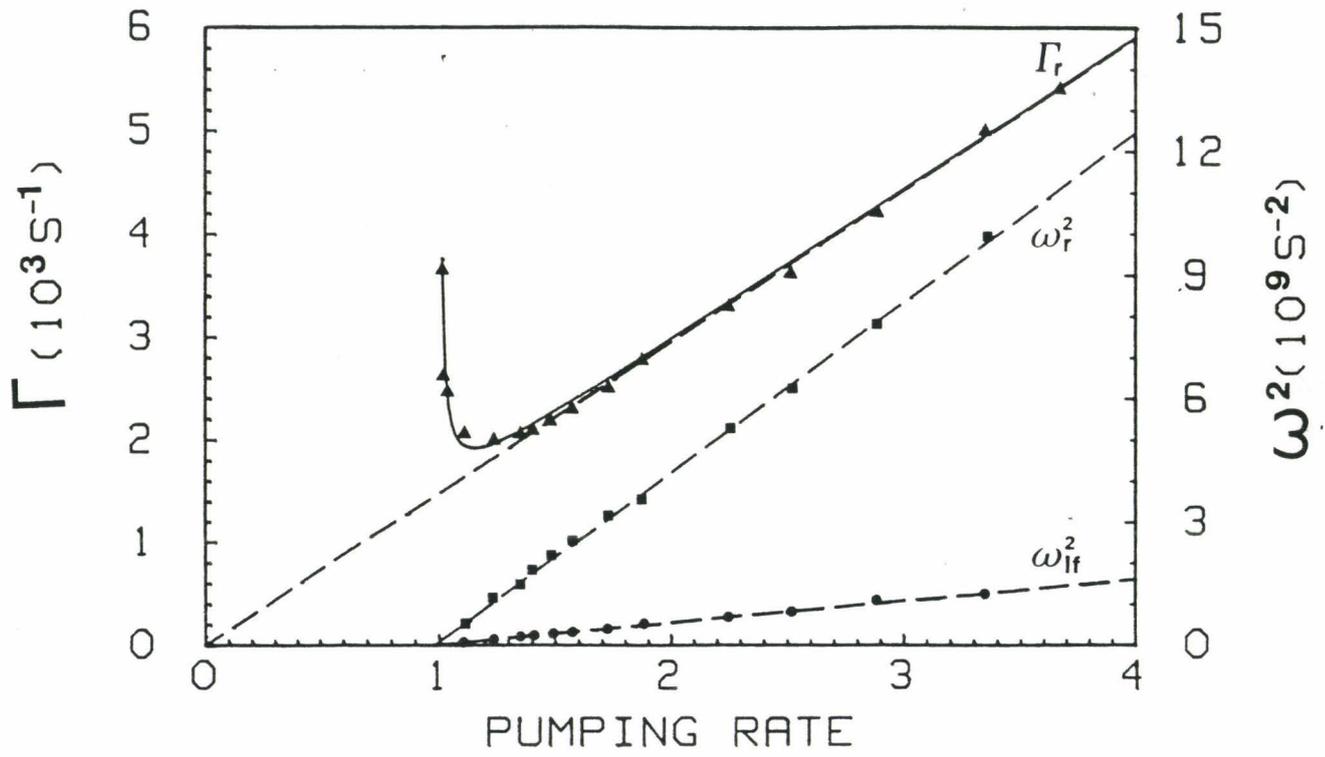


Fig. 1.9. Amortissement Γ_r et carrés des fréquences propres ω_r et ω_{if} dans la situation symétrique ($P_{th1} = P_{th2}$).

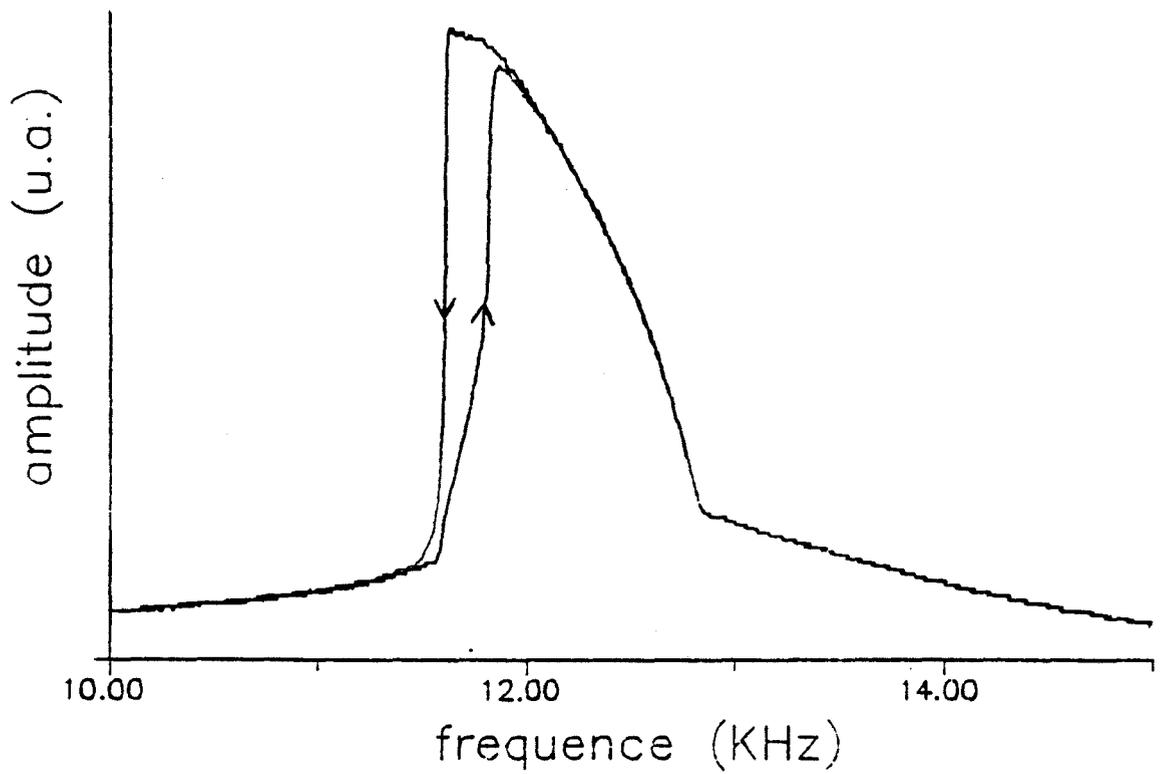


Fig. 1.10. Courbe de résonance du laser soumis à une forte modulation sinusoïdale de la puissance de pompe. Le paramètre de pompe moyen est de $A = 2.5.5$ et l'amplitude de modulation de 16 %.

1.1.4. Réponse du laser à une forte modulation de la puissance de pompe.

Les régimes transitoires du laser à fibre mettent en évidence deux fréquences propres ω_r et ω_{lf} . C'est au voisinage de ces fréquences, ou de leurs harmoniques et sous harmoniques qu'une modulation sinusoïdale peut engendrer des effets non-linéaires importants, même pour de faibles amplitudes de modulation.

Les premières expériences de dynamique non-linéaires sur un laser à fibre dopée au Néodyme soumis à une modulation de la puissance de pompe concernent l'évolution de l'intensité totale. Elles ont été réalisées par Phillips *et al.* [Phillips *et al.*, 1987] et par Derozier *et al.* [Derozier *et al.*, 1991]. Le premier résultat concerne la résonance qui apparaît lorsque la puissance de pompe est modulée au voisinage de la fréquence de relaxation ω_r du laser. Lorsque l'amplitude de modulation augmente, la réponse non-linéaire du laser entraîne une déformation des courbes de résonance et un déplacement de la fréquence de résonance vers les basses fréquences. Lorsque l'amplitude de modulation devient suffisamment importante, la courbe de résonance présente une discontinuité associée à un effet d'hystérésis (fig. 1.10). Ces expériences ont également mis en évidence une cascade de doublements de période conduisant au chaos.

Dans cette partie, nous allons étudier la réponse du laser soumis à une modulation dont la fréquence est voisine de la fréquence de résonance, et dont l'amplitude est suffisamment faible pour que pour la puissance de pompe instantanée soit toujours supérieure aux seuils P_{th1} et P_{th2} .

Dans un premier temps nous décrirons les bifurcations apparaissant dans le laser lorsque la fréquence de modulation est balayée au voisinage de la fréquence de résonance. Ensuite nous observerons simultanément les intensités détectées selon les deux directions de polarisation. La dernière étape consistera en une caractérisation qualitative des attracteurs chaotiques au moyen de leurs sections de Poincaré.

1.1.4.A. REGIMES DYNAMIQUES OBSERVES

Les comportements dynamiques du laser dépendent de plusieurs paramètres. Les paramètres parfaitement maîtrisables sont ceux relatifs à la modulation: l'amplitude r , la fréquence de modulation ω et le paramètre de

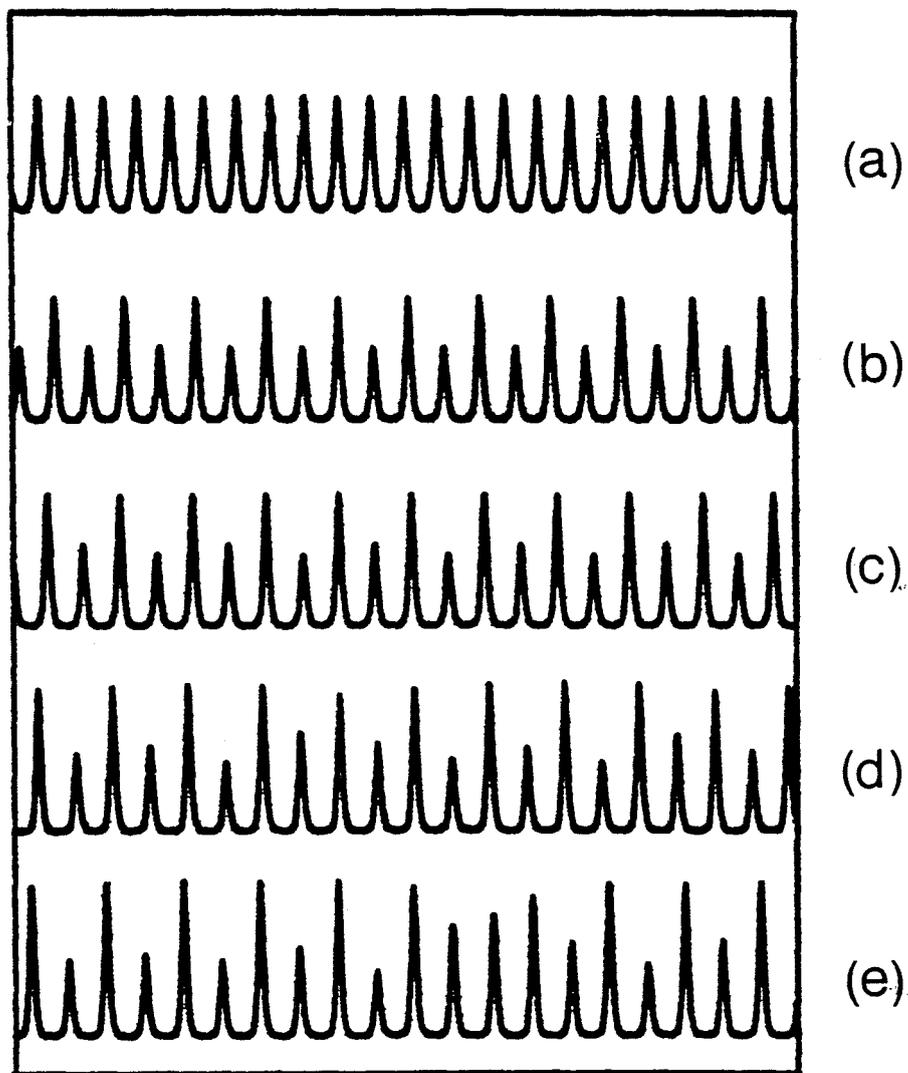


Fig. 1.11. Différents régimes observés sur l'intensité $I_1(t)$ lorsque la fréquence de modulation décroît; (a), régime T; (b), régime 2T; (c), régime 4T; (d), régime chaotique 2C; (e), régime chaotique C.

pompe moyen A (le paramètre de pompe instantané s'écrit alors : $A(t)=A(1+r\cos\omega t)$).

Les résultats qui seront présentés sont ceux pour lesquels les phénomènes observés sont les plus riches. Les valeurs correspondantes des paramètres sont $A = 2.6$ et $r = 0.16$. La fréquence ω sera notre paramètre de contrôle lors des études à paramètres balayés et variera typiquement de 12 à 20 kHz, c'est-à-dire de part et d'autre de la fréquence résonance, voisine de 15 kHz.

D'autres paramètres sont difficilement quantifiables à ce stade mais jouent un rôle important dans la dynamique du laser. Il s'agit des pertes de la cavité et de la biréfringence de la fibre. Ces deux paramètres sont ajustés en modifiant les réglages des miroirs et la torsion de la fibre.

Lorsque la fréquence de la modulation est beaucoup plus élevée que fréquence de résonance, on observe une réponse du laser à la même période que la modulation (T). Les signaux observés se présentent sous la formes de pics (fig. 1.11) dont l'amplitude augmente et la largeur diminue lorsque la fréquence de modulation décroît et s'approche de la fréquence de résonance. Lorsque la fréquence atteint une valeur critique, on observe une bifurcation sous sous-harmonique, le régime de période T donne naissance à un régime de période double (fig. 1.11). Ensuite, on observe différentes successions de bifurcations.

La décroissance de la fréquence de modulation fait apparaître une cascade de doublements de période. On observe la succession de régimes de période $2T$, $4T$, $8T$... (fig. 1.11). Cette cascade sous-harmonique est un scénario classique de transition vers le chaos [Bergé *et al.*, 1984], et présente des caractéristiques universelles [Cvitanović, 1984].

Au delà du point d'accumulation de la cascade sous-harmonique, on observe l'apparition successive des différents régimes chaotiques correspondant à la cascade inverse. Les signaux correspondant à ces différents régimes, nommés " $2^m C$ ", possèdent une allure caractéristique, ils peuvent être comparés à des signaux périodiques de période $2^m T$ "bruyants". Ces régimes apparaissent dans l'ordre ... $4C$, $2C$, C (fig. 1.11). L'apparition de régimes chaotiques après une cascade de doublements de période est également rencontrée dans d'autres systèmes comme les lasers CO_2 monomodes modulés [Midavaine *et al.*, 1985; Dangoisse *et al.*, 1987]. Toutefois, il faut noter que le chaos apparaît ici pour une amplitude de modulation beaucoup plus faible que dans les lasers monomodes soumis à une modulation de la puissance de pompe. En effet, dans ces derniers il est généralement nécessaire d'appliquer une modulation telle que le paramètre

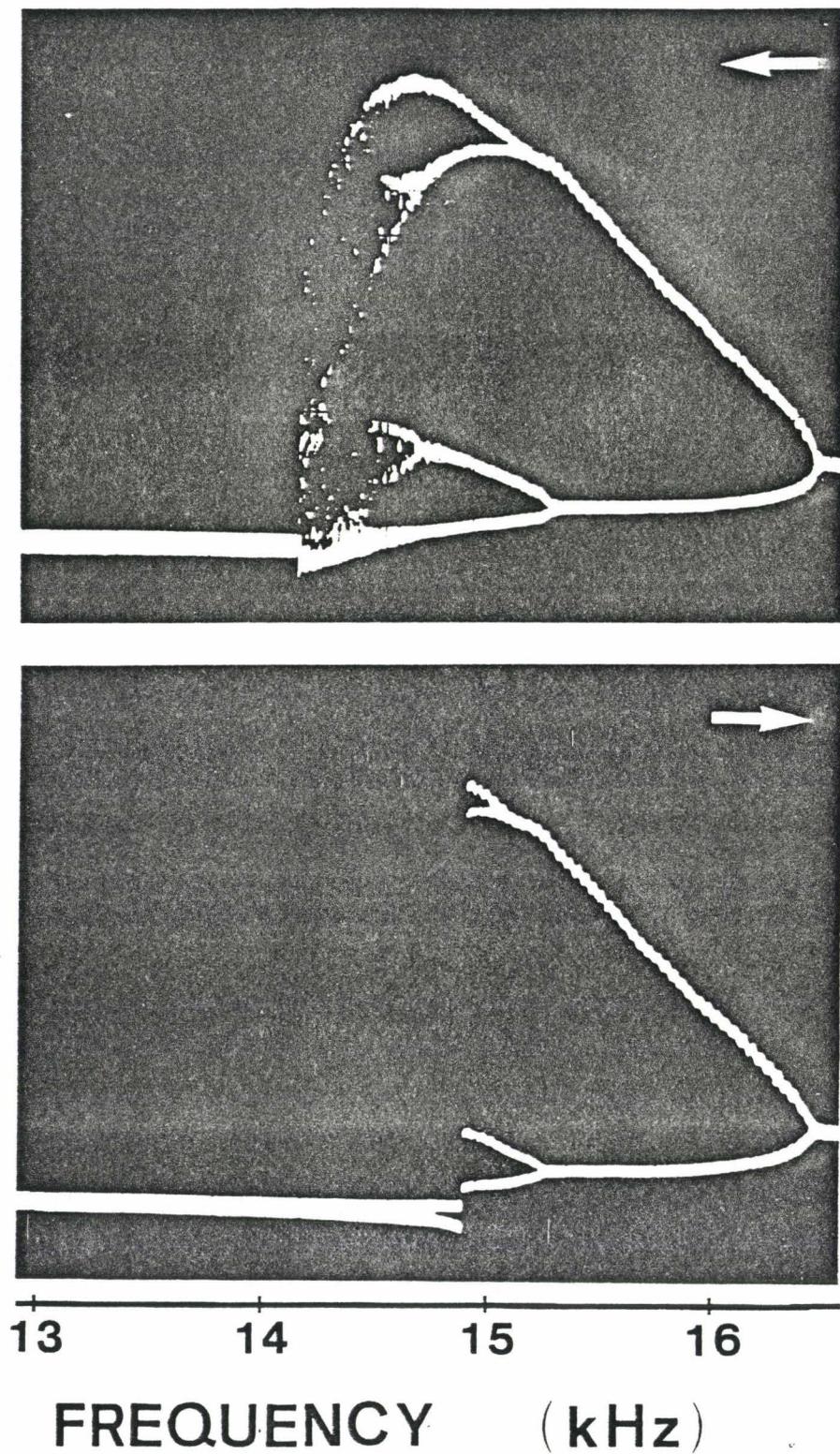


Fig. 1.12. Diagrammes de bifurcations du laser oscillant à $1.08 \mu\text{m}$ en fonction de la fréquence de modulation. Le diagramme supérieur est obtenu en balayant la fréquence dans le sens décroissant, et le diagramme inférieur dans le sens croissant.

de pompe passe alternativement de part et d'autre du seuil [Chen *et al.*, 1985; Glova *et al.*, 1986].

Pour une valeur critique de la fréquence de modulation, le régime chaotique disparaît brutalement pour donner un régime de période $2T$. Cette transition s'accompagne d'un effet d'hystérésis: la transition $2T$ -chaos observée en augmentant la fréquence de modulation se produisant pour une fréquence plus élevée.

L'évolution des différents régimes du laser avec un paramètre de contrôle (ici la fréquence de modulation) peut être représentée sur un diagramme de bifurcations. Le diagramme est obtenu directement sur un oscilloscope [Hennequin, 1986] en échantillonnant le signal $I_1(t)$ (ou $I_2(t)$) à chaque période de modulation et en représentant les valeurs échantillonnées en fonction du paramètre de contrôle. Le résultat de l'échantillonnage est une valeur unique si le régime est T -périodique, m valeurs différentes si le régime est mT -périodique, et une suite irrégulière de valeurs si le régime est chaotique.

Expérimentalement, le diagramme est obtenu de la manière suivante. Le signal TTL du générateur servant à la modulation déclenche un générateur d'impulsions qui délivre une impulsion retardée d'une durée ajustable. Celle-ci déclenche un échantillonneur dont la sortie est reliée à une entrée de l'oscilloscope. La fréquence de modulation est balayée lentement (typiquement 2 s pour un balayage de 4 KHz) de façon à éviter l'apparition d'effets dynamiques liés au balayage [Kapral *et al.*, 1985].

Le diagramme de bifurcations obtenu à fréquence décroissante (fig. 1.12a) met clairement en évidence la cascade de doublements de période menant au chaos, ainsi que la cascade inverse. L'observation de la transition chaos- $2T$ aux fréquences basses pour différents délais d'échantillonnage montre qu'il n'y a pas de continuité entre l'attracteur chaotique le cycle limite de période $2T$. Il s'agit donc d'une crise de frontière [Grebogi *et al.*, 1982].

Le phénomène de bistabilité généralisée qui lui est associé est bien visible lorsque l'on compare les diagrammes obtenus en balayant la fréquence dans les deux sens (fig. 1.12a et 1.12b). Entre 14.2 et 14.9 KHz, l'attracteur chaotique et cycle limite coexistent, le régime effectivement observé dépendant de l'histoire du système.

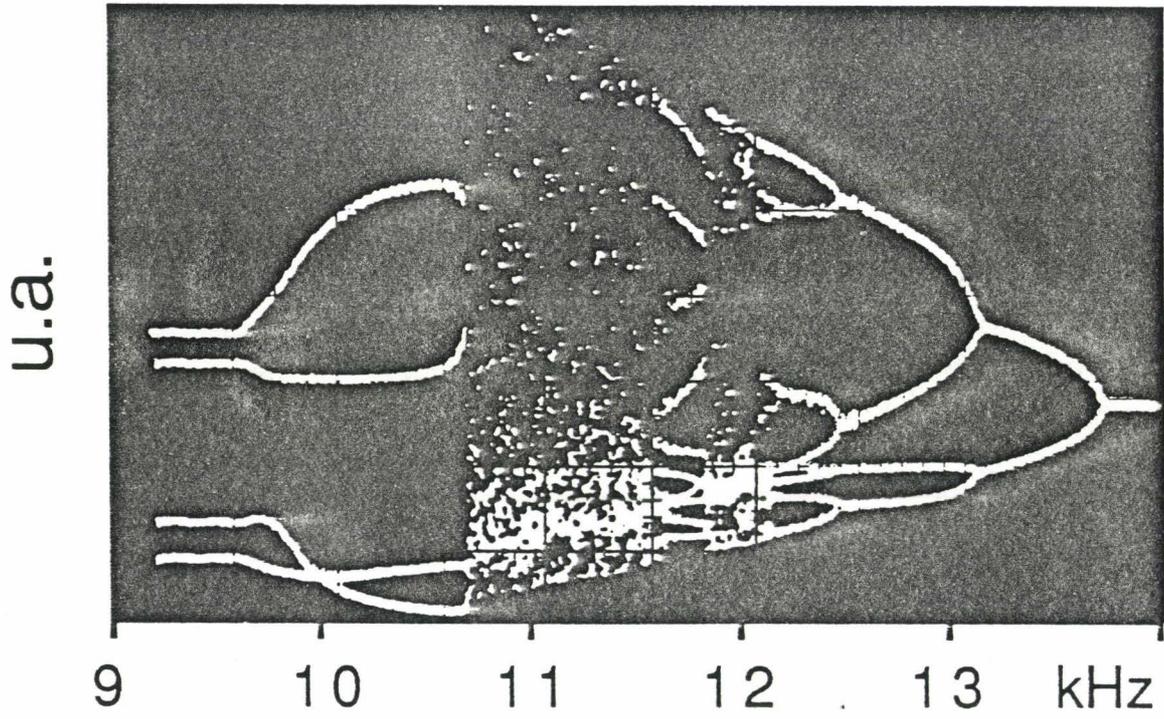


Fig. 1.13. Diagramme de bifurcations du laser oscillant à $1.065 \mu\text{m}$ obtenu en balayant la fréquence de modulation dans le sens décroissant. La variable mesurée est l'intensité totale.

REMARQUES:

Pour d'autres réglages de la cavité ou des valeurs différentes de l'amplitude de modulation, les résultats sont généralement différents. L'apparition du chaos se produit plus près de la crise de frontière, le domaine d'existence des régimes chaotiques s'en trouve par conséquent réduit et peut même disparaître.

Il est important de remarquer que les expériences décrites sont effectuées lorsque le laser oscille au voisinage du maximum de la courbe de gain ($\lambda = 1.08 \mu\text{m}$). Le fonctionnement à une longueur d'onde se trouvant dans une aile de la raie de fluorescence, par exemple vers $1.065 \mu\text{m}$ est également possible. Dans ce cas, les phénomènes observés sont identiques excepté la transition vers le régime 2T qui devient une transition vers un régime de période 4T [Derozier *et al.*, 1991] (annexe A). Cette situation étant un cas extrême pour lequel le gain et les pertes du laser varient fortement avec la longueur d'onde, nous nous placerons par la suite uniquement dans la situation d'une émission à $1.08 \mu\text{m}$.

Les diagrammes de bifurcations font parfois apparaître des fenêtres périodiques dont le domaine d'existence est relativement restreint et dépend des réglages de la cavité. On rencontre également ces fenêtres dans d'autres lasers comme les lasers CO_2 modulés [Dangoisse *et al.*, 1987]. La fenêtre la plus fréquente dans le cas du laser à fibre est la fenêtre 10T. Il a été possible de l'observer dans la situation d'une émission à $1.08 \mu\text{m}$ comme dans celle d'une émission à $1.065 \mu\text{m}$ (fig. 1.13).

1.1.4.B. PHENOMENES D'ANTIPHASE

Comme en régime transitoire (§ 1.1.3.), l'observation simultanée des intensités émises selon les deux directions de polarisation apporte des informations supplémentaires sur la dynamique du laser.

Lorsque le régime est T-périodique, les deux intensités évoluent en phase (fig. 14a). Par contre, les régimes de période plus élevée sont caractérisés par un comportement d'antiphase. Dans le cas d'un signal de période 2T (fig. 14b), le pic d'amplitude maximale sur une polarisation correspond à un pic d'amplitude minimale sur l'autre polarisation. Ce phénomène d'antiphase est également

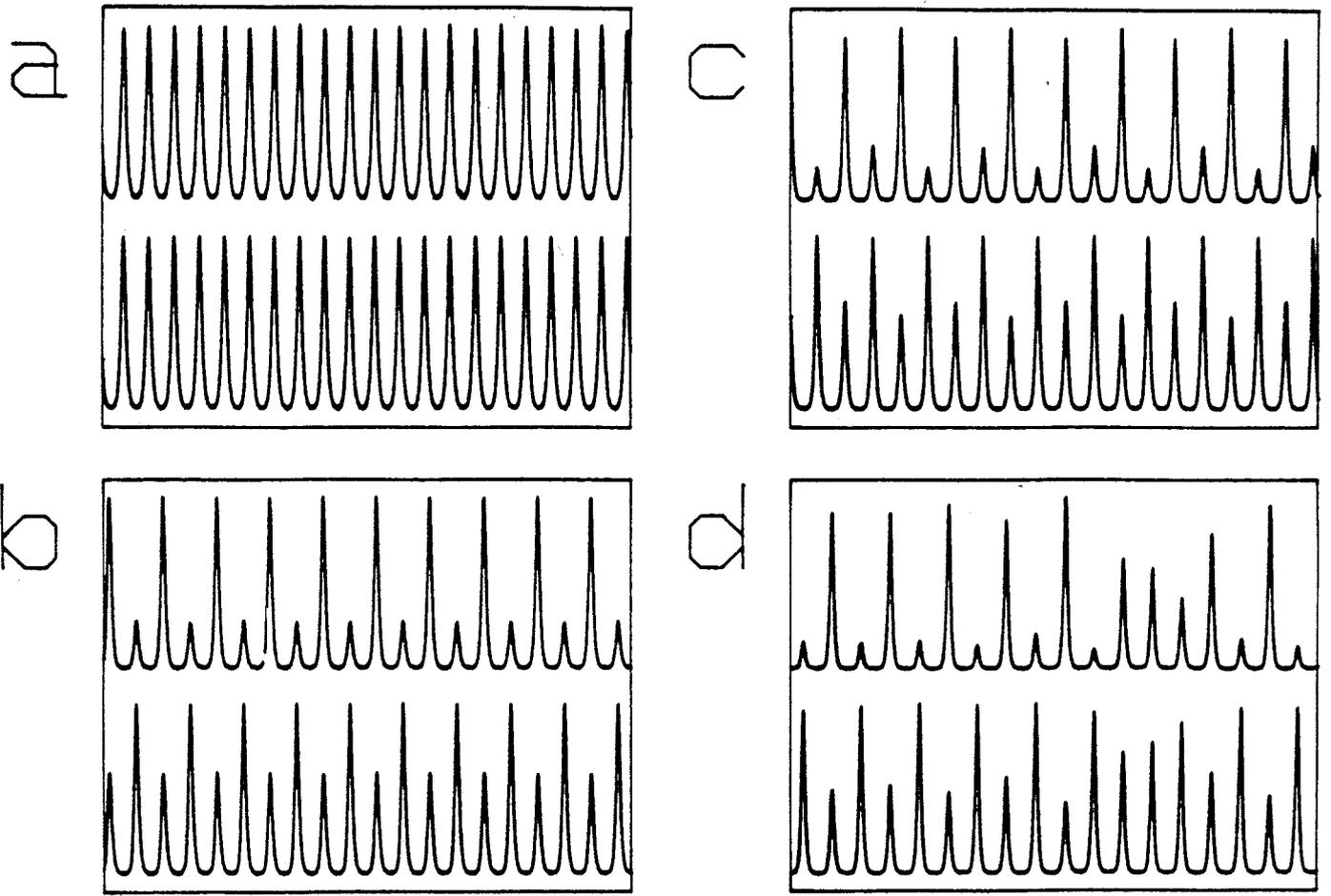


Fig. 1.14. Mise en évidence du comportement d'antiphase par une observation simultanée des signaux $l_1(t)$ (courbes inférieures) et $l_2(t)$ (courbes supérieures). (a), (b), et (c), régimes de périodes T , $2T$ et $4T$, (d) régime chaotique de type C.

observé pour les autres régimes dynamiques qui viennent d'être présentés comme les régimes 4T-périodique et chaotique représentés sur les figures 1.14c et 1.14d). De tels effets d'antiphase sont typiques des systèmes couplés et ont déjà été rencontrés dans d'autres lasers multimodes [Wiesenfeld *et al.*, 1990; Otsuka, 1991].

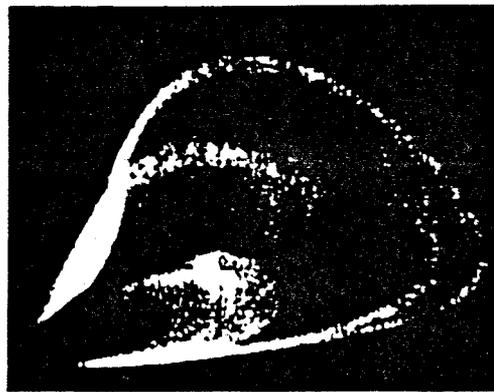
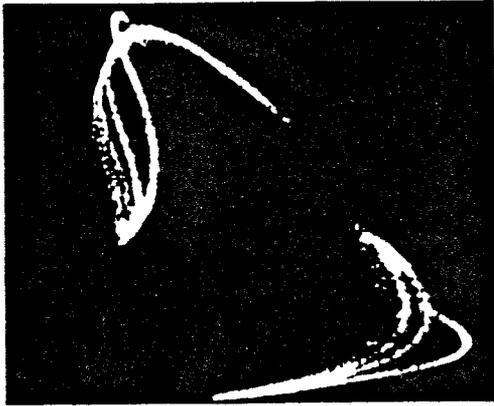
1.1.4.C. CARACTERISATION DES ATTRACTEURS CHAOTIQUES

Le but de cette étude est de disposer d'un point de comparaison entre les résultats expérimentaux en régime chaotique et les modèles de laser qui seront proposés par la suite. Il existe de nombreuses techniques permettant de caractériser les attracteurs chaotiques (voir par exemple [Tufillaro *et al.*, 1992]). Dans cette étude préliminaire, nous nous limiterons à une reconstruction de leurs sections de Poincaré.

De manière générale, dans un espace de dimension d , une section de Poincaré est constituée d'une coupe transverse de l'attracteur par une surface (de dimension $d-1$), en ne tenant compte des intersections que pour un sens de passage donné. Dans le cas du laser à fibre, le nombre de degrés de libertés effectifs est au moins égal à 5 (quatre variables imposées par l'existence de deux fréquences propres, la cinquième est la phase de la modulation). Une section de Poincaré sera donc de dimension au moins égale à 4.

La caractérisation la plus simple d'une telle section de Poincaré est sans doute la projection de celle-ci sur une surface à deux dimensions. Or, ayant accès aux trois variables dynamiques I_1 , I_2 , et φ nous pouvons effectuer cette projection sans même avoir recours à la reconstruction de l'attracteur par la méthode des retards [Takens, 1981]. Il suffit de définir le plan de section par $\varphi(t_n) = \text{constante}$ et de prendre les couples $(I_{1n}, I_{2n}) = (I_1(t_n), I_2(t_n))$. De plus, ces projections peuvent être observées en temps réel sur l'écran d'un oscilloscope. Il suffit d'échantillonner I_1 et I_2 à chaque période de modulation. La phase correspondant à l'instant d'échantillonnage est choisie de manière à obtenir des sections révélant clairement la structure interne de l'attracteur. Cette situation correspond typiquement à un échantillonnage pris au voisinage des maxima de I_1 et I_2 .

Sur la figure 1.15 sont représentées les sections de Poincaré des attracteurs correspondant à divers régimes de la cascade inverse : un régime 2C (a), un régime C juste après la transition 2C-C (b), un régime C juste avant la crise de



12

11

Fig. 1.15. Projections des sections de Poincaré des attracteurs chaotiques. (a), attracteur de type 2C; (b) attracteur de type C juste après la transition 2C-C. (c) attracteur de type C juste avant la crise de frontière.

frontière (c). Comme attendu, les sections de Poincaré des régimes 2C sont constituées de deux régions visitées périodiquement et ces deux régions fusionnent à la fin de la cascade inverse. Les sections de Poincaré révèlent nettement une structure feuilletée typique des attracteurs étranges associés aux régimes chaotiques. La dimension de ces sections de Poincaré est entière dans les directions des feuillets et fractale dans les directions transverses [Grassberger, 1986; Ruelle, 1989].

En résumé, malgré la nature fortement multimode du laser, les comportements dynamiques observés se sont avérés relativement simples et typiques des systèmes à petit nombre de degrés de liberté.

Les expériences effectuées en régime stationnaire et transitoire ont révélé un comportement collectif des modes associés à chaque direction de polarisation. De plus, en régime non-linéaire, l'observation de signaux en antiphase confirme cette hypothèse. Le comportement dynamique des deux groupes (ou *clusters*) de modes présente des points communs avec des systèmes de deux lasers couplés [Zenchenko *et al.*, 1990] et des lasers bimodes [Bakaev *et al.*, 1988]. Nous sommes donc amenés à émettre l'hypothèse que le laser à fibre se comporte comme un ensemble de deux lasers couplés ou comme un laser bimode.

Les observations des régimes chaotiques ne permettent pas encore de confirmer ou d'infirmer cette hypothèse. Le scénario de transition vers le chaos (la cascade sous-harmonique) et l'allure simple des sections de Poincaré permet seulement de conclure que les instabilités observées sont typiques des systèmes à faible nombre de degré de liberté. Les résultats obtenus en régime non-linéaire et en particulier les sections de Poincaré nous serviront de critère d'acceptation ou de rejet du modèle de laser à fibre qui sera proposé par la suite.

1.2. Modélisation du laser

Le nombre de variables dynamiques et de paramètres définissant l'état laser à fibre est extrêmement important étant donné sa nature fortement multimode et le nombre élevé de transitions mises en jeu dans l'effet laser. Ceci rend difficile l'approche théorique consistant à déduire le comportement dynamique du laser des propriétés physiques de la cavité et du milieu amplificateur.

Jusqu'à présent, la plupart des modèles de lasers à fibre ont été établis de façon à rendre compte des propriétés des états stationnaires, le but final étant d'optimiser les performances de ce type de laser. Ces modèles sont basés sur l'approximation des *rate-equations* et permettent d'évaluer l'importance d'effets spatiaux comme le recouvrement de l'onde de pompe et de l'onde laser [Digonnet & Gaeta, 1985] ou la distribution transverse du dopant [Armitage, 1988; Fleming *et al.*, 1991]; d'autres mécanismes ont également été modélisés comme la saturation de l'intensité de sortie [Quimby, 1990], et les problèmes d'absorption d'états excités [Laming *et al.*, 1988; Risk, 1988; Digonnet, 1990].

La première comparaison entre les prévisions d'un modèle de laser et les résultats obtenus en régime dynamique a été réalisée par Hanna *et al.* [Hanna *et al.*, 1988]. Ces résultats concernent la dynamique linéaire au voisinage des états stationnaires. Ils ont montré que la dépendance de la fréquence de relaxation ω_r était en accord avec les prédictions du modèle de laser monomode de classe B à deux niveaux [Mc Cumber, 1966]. Plus récemment, Le Flohic *et al.* [Le Flohic *et al.*, 1991; Le Flohic, 1991] ont étudié le démarrage d'un laser à fibre dopée au Néodyme au voisinage du seuil et comparé leurs résultats à un modèle de laser multimode de classe B. Ils ont ainsi mis en évidence l'influence de l'émission spontanée dans la dynamique du laser, ainsi que l'influence de la largeur homogène des transitions sur la nature des oscillations de relaxation.

La modélisation des lasers présentant des oscillations spontanées comme les lasers à l'Erbium été également entreprise. Plusieurs causes possibles des instabilités ont été analysées comme la présence d'absorption par des états excités, l'absorption saturée du rayonnement laser ainsi que la dynamique des polarisations atomiques [Lacot, 1992].

L'approche présentée ici s'appuyera sur les résultats expérimentaux concernant la polarisation pour lesquels on peut donner une interprétation en terme de couplage entre deux sous-systèmes. Nous établirons dans un premier temps un modèle simple contenant un minimum de paramètres et de variables

dynamiques. Ensuite, nous déterminerons les états stationnaires du modèle et leur stabilité. La comparaison de ces résultats avec ceux obtenus lors des expériences en régime transitoire nous permettra de déterminer les paramètres du modèle. Nous pourrons alors effectuer un test du modèle en comparant les comportements calculés en régime non-linéaire (en présence de modulation) et les résultats expérimentaux correspondants.

1.2.1. Mise au point du modèle

Malgré la nature fortement multimode du laser, les résultats expérimentaux obtenus en régimes stationnaire et transitoire ainsi que le phénomène d'antiphase observé en régime non-linéaire suggèrent que le laser se comporte essentiellement comme un système de deux lasers, chaque laser étant associé à un état propre de polarisation. Par conséquent, nous n'allons pas tenir compte des nombreux modes longitudinaux. Nous considérerons que le laser est constitué de deux sous-systèmes couplés, chacun d'entre eux correspondant à l'ensemble (ou *cluster*) des modes longitudinaux oscillant selon chaque état propre de polarisation.

Le temps de relaxation des polarisations atomiques étant beaucoup plus court (de l'ordre de la picoseconde) que le temps de vie des photons dans la cavité (de l'ordre de la microseconde) et les durées de vie des niveaux impliqués dans l'effet laser (de 10^{-3} à 10^{-6} s), les polarisations peuvent être éliminées adiabatiquement. La dynamique du laser est alors déterminée par un système de *rate-equations*, dont les variables sont les intensités des différents modes et les populations des différents niveaux.

Les temps de relaxation des différents niveaux impliqués dans la dynamique sont très différents. Seul le niveau supérieur de la transition laser possède une durée de vie suffisamment importante pour intervenir dans la dynamique ($\tau_f = 470 \mu\text{s}$ [Poole *et al.*, 1986]). En effet, les niveaux supérieurs intervenant dans l'absorption de la puissance de pompe et les niveaux inférieurs de la transition laser ont une durée de vie extrêmement courte (de l'ordre de la nanoseconde [Cruz, 1990]), et les populations correspondantes pourront être négligées et éliminées des équations. De plus, nous ne tiendrons pas compte du fait que le niveau supérieur $^4F_{3/2}$ de la transition laser est formé de deux sous-niveaux, nous l'assimilerons à un seul niveau comme dans le cas du modèle de le Flohic *et al.* [Le Flohic *et al.*, 1991]. Cette approximation est justifiée par le fait qu'à la température ambiante, la distribution des populations dans les sous-niveaux atteint la distribution de Maxwell-Boltzmann de manière extrêmement rapide.

Par conséquent, la seule population impliquée dans la dynamique du laser est celle du niveau supérieur de la transition laser. Celle du niveau fondamental n'intervient que dans le processus d'absorption du rayonnement de pompe.

Les échelles de temps mises en jeu et les résultats expérimentaux nous amènent à construire un modèle de laser constitué de deux sous-systèmes associés aux deux *clusters* de modes oscillant selon chaque direction propres de polarisation. Chaque sous-système sera décrit par un modèle de laser classe B à deux variables dynamiques : l'intensité émise selon une direction de polarisation et l'inversion de population associée. C'est le modèle le plus simple pouvant rendre compte *a priori* du comportement du laser en régime transitoire et stationnaire. La possibilité de décrire le laser par des modèles plus complets sera discutée par la suite. Nous allons à présent recenser les différents phénomènes physiques et les différents paramètres devant être pris en compte dans la dynamique du laser.

L'émission spontanée doit être prise en compte pour deux raisons. La première est due à des considérations sur la géométrie de la cavité. Etant donné l'importante ouverture numérique de la fibre, les photons émis par émission spontanée ont une probabilité importante d'être guidés dans le coeur de la fibre. Par conséquent, une partie non-négligeable de ces photons est réinjectée dans les modes lasants et doivent influencer la dynamique du laser. Ceci est typique des lasers dont le rayonnement est confiné [Yokoyama & Brorson, 1989], comme les lasers à semi-conducteurs [Cassidy, 1991, Hori *et al.*, 1988] et les lasers *microdroplet* [Lin & Hsieh, 1991].

La deuxième raison vient de l'observation expérimentale de l'amortissement des oscillations de relaxation Γ_r au voisinage du seuil et rapportée dans le § 1.1.3. L'introduction de l'émission spontanée peut justement rendre compte de l'augmentation de Γ_r observée comme nous allons le voir.

La dissymétrie observée entre les deux sous-systèmes peut être attribuée à aux anisotropies de gain et de pertes présentes dans la cavité.

Les termes de pompage doivent être pris différents pour les deux sous-systèmes, car la position relative des deux seuils P_{th2}/P_{th1} dépend de la direction de polarisation du rayonnement de pompe (§ 1.1.2). On peut expliquer qualitativement ce phénomène. Bien que les ions Nd^{3+} soient répartis de manière isotrope dans la fibre, leurs sites possèdent une faible symétrie. Par conséquent la section efficace d'absorption ou d'émission induite d'un ion dépend de l'orientation relative de son site et du champ considéré [Hall *et al.*, 1983]. Pour une polarisation donnée du rayonnement de pompe, chaque ion subit un pompage différent. De plus, on observe un phénomène similaire pour l'émission induite: selon leur orientation, les ions interagissent différemment

avec un champ laser. Le gain non-saturé dépend donc des états de polarisation de la pompe et du champ laser. Un tel phénomène se rencontre également dans d'autres lasers comme les lasers à colorant [Reyzer *et al.*, 1980a, 1980b].

Les pertes seront prises égales pour les deux états propres de polarisation. Les pertes par courbure sont la cause principale des pertes anisotropes mais sont très faibles dans notre cas. Les pertes localisées aux extrémités de la fibre peuvent être considérées comme isotropes étant donné l'angle faible entre l'axe de la fibre et les normales au miroir et à la surface de la fibre. Nous pourrions donc considérer que toutes les anisotropies sont prises en compte par l'anisotropie de pompage.

Chaque système est décrit par un modèle de laser monomode de classe B. Les variables dynamiques sont l'intensité de chaque mode m_i et l'inversion de population d_i correspondant à chaque sous-système. L'intensité m_1 (resp. m_2) d'un mode est amplifiée par l'intermédiaire de sa propre inversion de population d_1 (resp. d_2), mais aussi dans une moindre mesure par l'inversion de population de l'autre mode d_2 (resp. d_1).

L'intensité de chaque mode m_1 (resp. m_2) provoque la saturation de l'inversion de population correspondante d_1 (resp. d_2), et elle provoque aussi celle de d_2 (resp. d_1) par saturation croisée. Pour des raisons de simplification, les deux coefficients de saturation croisée seront choisis égaux. Les équations régissant la dynamique d'un tel laser s'écrivent sous la forme suivante:

$$\begin{cases} \dot{m}_i = (d_i + \beta d_j - 1) m_i + a (d_i + \beta d_j) \\ \dot{d}_i = \gamma [d_i^0(\tau) - (1 + m_i + \beta m_j) d_i] \end{cases} \quad (1.1)$$

avec $i = 1, 2$ et $j = 3-i$

Les points représentent les dérivées par rapport au temps réduit $\tau = t/\tau_c$, avec τ_c le temps de vie des photons dans la cavité, $d_i^0(\tau)$ est le paramètre de pompe du sous-système i ($d_i^0(\tau) = d_i^0(1 + r \cos \Omega\tau)$ si la puissance de pompe est modulée sinusoïdalement). Chaque situation expérimentale correspond à une valeur fixe de $\alpha = d_2^0/d_1^0$ qui définit l'asymétrie du système. Sans perte de généralité, nous imposerons $\alpha \leq 1$, ce qui revient à attribuer l'indice 1 au sous-système dont le pompage est le plus important. γ est le taux de relaxation normalisé de l'inversion de population: $\gamma = (\tau_c/\tau_f)$ avec τ_f le temps de relaxation de l'inversion de population. β est le paramètre de saturation croisée ($\beta \leq 1$).

La normalisation des variables m_i et d_i a été choisie en considérant le cas extrême d'une absence de couplage ($\beta = 0$) et d'émission spontanée ($a = 0$). Dans ces conditions, l'équation (1.1) décrit l'évolution de deux lasers monomodes indépendants, et la normalisation adoptée revient à imposer :

- $d_i^0 = 1$ au seuil du laser i
- et ($d_i = 1, m_i = d_i^0 - 1$) pour la solution stationnaire stable du laser i au-delà du seuil.

Cette normalisation est classique dans le cas des lasers monomodes de classe B, voir par exemple [Tarassov, 1985].

On suppose que l'émission spontanée dans le mode 1 (resp. 2) est proportionnelle au gain du mode correspondant $d_1 + \beta d_2$ (resp. $d_2 + \beta d_1$). Le coefficient d'émission spontanée a dépend de la probabilité qu'un photon soit émis spontanément dans un des modes participant à l'effet laser. Par conséquent, la valeur de a doit dépendre de l'ouverture numérique de la fibre [Le Flohic *et al.*, 1991] et des caractéristiques spectrales de l'émission.

Ce modèle possède des points communs avec ceux décrivant les systèmes de lasers couplés [Zenchenko *et al.*, 1989], et avec certains modèles de lasers multimode de classe B [Baer, 1986; Kazuhito *et al.*, 1991; Le Flohic *et al.*, 1991; Kurochkin *et al.*, 1993]. En particulier, on retrouve dans ces derniers modèles les termes de saturation croisée et la décomposition de l'inversion de population en autant de variables qu'il y a de modes impliqués dans la dynamique.

Il faut également noter que le comportement observé expérimentalement est également typique des lasers bimodes décrits par des modèles plus complets tenant compte de manière explicite du phénomène de *hole-burning* spatial [Tang *et al.*, 1963; Victorov *et al.*, 1991]. Cependant, nous avons préféré utiliser dans un premier temps un modèle simple, contenant un minimum de variables dynamiques (quatre) et de paramètres ajustables (α, β, γ, a).

1.2.2. Analyse de stabilité et détermination des paramètres

Le cas asymétrique ($\alpha < 1$) avec émission spontanée, qui est la situation générique, conduit à des calculs analytiques lourds, et ceci masque certaines propriétés simples du modèle. C'est pourquoi nous commencerons par étudier le cas du laser symétrique avec émission spontanée, puis le cas non-symétrique sans émission spontanée, ce qui nous permettra de mettre en évidence l'influence de chacun des effets.

Le premier cas nous permettra d'analyser les effets dus à l'émission spontanée, et de déterminer l'ordre de grandeur du coefficient a . Le coefficient d'émission spontanée étant relativement faible, le cas asymétrique pourra être traité en développant les états stationnaires et les valeurs propres en série de puissance de a . Les résultats du cas asymétrique sans émission spontanée correspondront donc au développement à l'ordre 0 en a . Le développement à l'ordre 1 permettra de connaître quelles grandeurs sont modifiées de manière observable par l'émission spontanée. Les différents résultats nous permettront également de déduire les paramètres α , β et γ des résultats expérimentaux.

1.2.2.A. CAS SYMETRIQUE

Nous allons commencer par analyser le cas symétrique pour lequel les états propres de polarisation ont le même gain non-saturé ($\alpha = 1$). Dans ce cas, on peut aisément déterminer les solutions stationnaires et leur stabilité. Les résultats de l'analyse de stabilité linéaire pourront directement être comparés aux résultats expérimentaux obtenus en régime transitoire.

Un examen de l'équation (1.1) permet de déterminer le seuil du laser. Celui-ci est atteint lorsque les gains non-saturés (c'est-à-dire les gains $(d_i + \beta d_j)$ obtenus en imposant $m_i = 0$ et $\dot{d}_i = 0$) compensent les pertes de la cavité (qui sont égales à 1). Le seuil est donc défini par $d_1^0 = 1/(1+\beta)$, et on en déduit le paramètre de pompe $A = (1+\beta)d_1^0$.

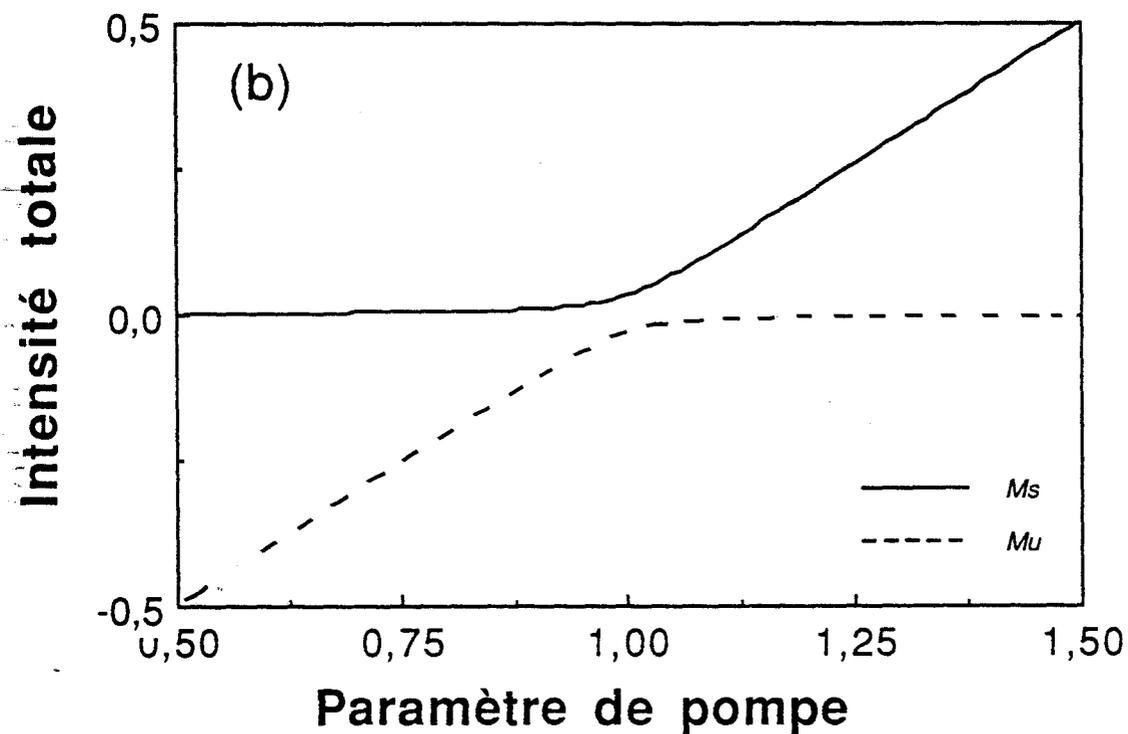
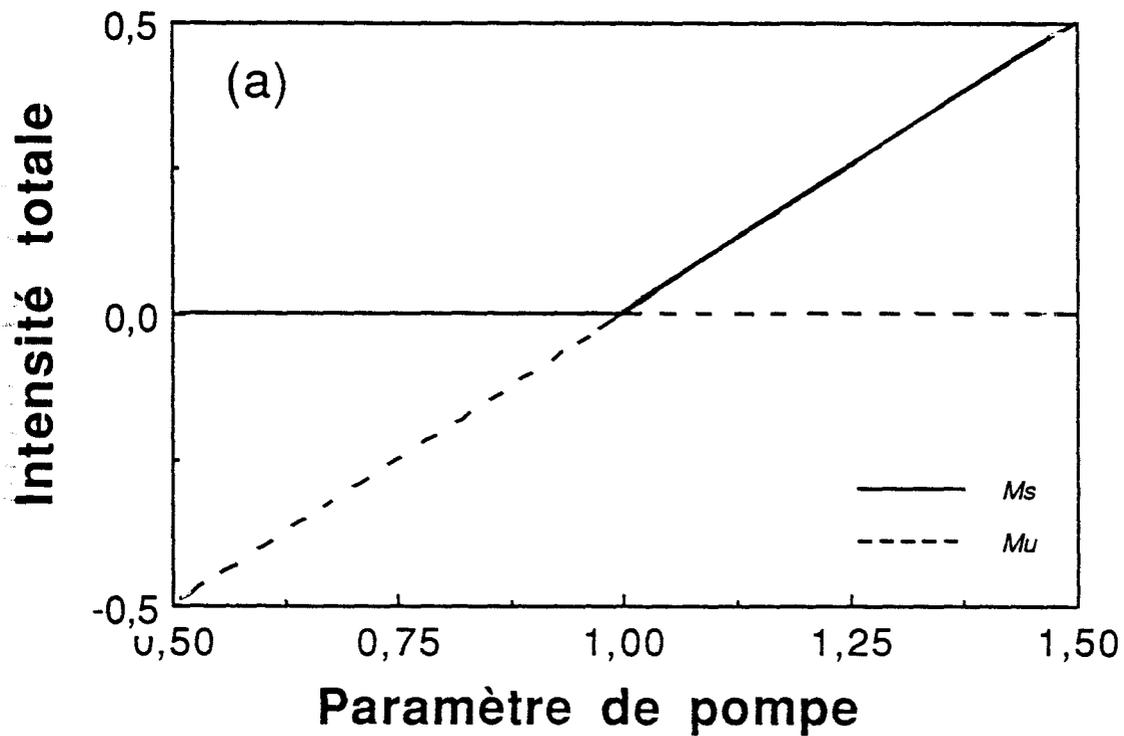


Fig. 1.16. (a), en l'absence d'émission spontanée, le seuil du laser correspond à un échange de stabilité entre les solutions $M = 0$ et $M \neq 0$ (bifurcation transcritique). M_s : solution stable, M_u : solution instable (non-physique pour $A < 0$). (on ignore ici les solutions telles que $\mu \neq 0$). (b) en présence d'émission spontanée ($a = 10^{-3}$), le seuil correspond à une bifurcation imparfaite. M_s est la solution (1.3) et M_u est la solution non-physique telle que $\mu = 0$.

La symétrie du système suggère d'effectuer le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} M = (1+\beta)\frac{(m_1+m_2)}{2} \\ \mu = (1+\beta)\frac{(m_1-m_2)}{2} \\ D = (1+\beta)\frac{(d_1+d_2)}{2} \\ \delta = (1+\beta)\frac{(d_1-d_2)}{2} \end{cases} \quad (1.2)$$

Les valeurs stationnaires $M_s, D_s, \mu_s, \delta_s$ des variables s'obtiennent en résolvant l'équation : $\dot{M} = 0, \dot{D} = 0, \dot{\mu} = 0, \dot{\delta} = 0$. La seule solution physiquement acceptable est celle correspondant à une intensité totale positive :

$$\begin{cases} M_s = \frac{1}{2} [A-1 + \sqrt{(A-1)^2 + 4A\varepsilon}] \\ D_s = 1 - \frac{1}{2(1-\varepsilon)} [-(A-1+2\varepsilon) + \sqrt{(A-1)^2 + 4A\varepsilon}] \\ \mu_s = 0 \\ \delta_s = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

avec $\varepsilon = (1 + \beta)a$

L'émission spontanée supprime la discontinuité entre les régimes lasant et non lasant. L'introduction du terme a transforme la bifurcation transcritique correspondant au seuil pour $a = 0$ (fig. 1.16a) en une bifurcation imparfaite [Manneville, 1991] pour a petit mais différent de 0 (fig. 1.16b).

La stabilité de la solution stationnaire (1.3) est déterminée par une analyse de stabilité linéaire classique: l'équation (1.1) est du type $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$ avec $\mathbf{X} = (M, D, \mu, \delta)$, la solution stationnaire $\mathbf{X}_s = (M_s, D_s, \mu_s, \delta_s)$ est donc stable si toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne de \mathbf{F} en \mathbf{X}_s sont de partie réelle négative, et instable dans le cas contraire. Une valeur propre nulle correspond à un point de bifurcation, pour lequel les solutions ou leur stabilité changent qualitativement.

Les valeurs propres de λ donnent également des informations quantitatives sur la dynamique locale autour de l'état stationnaire. Les parties imaginaires des valeurs propres sont égales aux fréquences de relaxation

observées lors du retour à l'équilibre, et les parties réelles correspondent à l'amortissement des transitoires. Ces résultats pourront être comparés directement aux résultats des expériences en régime transitoire du § 1.1.3.

La symétrie du système nous permet de réaliser l'analyse de stabilité linéaire de manière exacte. Les valeurs propres sont toujours de partie réelle négative, par conséquent la solution stationnaire M_s est toujours stable, mais la nature des valeurs propres change avec le paramètre de pompe.

a et γ étant des paramètres très petits (nous verrons qu'ils sont typiquement de l'ordre de 10^{-4} et 10^{-3} respectivement), les changements s'effectuent pour des paramètres de pompe très proches de $A = 1$. L'écart entre ces seuils est inobservable en pratique. Entre $A = 0$ et un premier seuil $A_1 \approx 1$ les quatre valeurs propres sont réelles et négatives.

Après un seuil A_2 (extrêmement proche de A_1 et de 1). Les quatre valeurs propres sont complexes et possèdent les mêmes parties réelles :

$$\begin{aligned}\Lambda_{\pm} &= -\frac{1}{2}[1-D_s+\gamma(1+M_s)] \pm i\sqrt{\gamma[D_s(M_s+\varepsilon)+(1-D_s)(1+M_s)] - [1-D_s+\gamma(1+M_s)]^2/4} \\ \lambda_{\pm} &= -\frac{1}{2}[1-D_s+\gamma(1+M_s)] \pm i\sqrt{\gamma[c^2D_s(M_s+\varepsilon)+(1-D_s)(1+M_s)] - [1-D_s+\gamma(1+M_s)]^2/4}\end{aligned}\quad (1.4)$$

avec $c = (1 - \beta) / (1 + \beta)$.

Etant donné l'ordre de grandeur des paramètres a et γ , au delà du seuil A_2 , les parties imaginaires de Λ_{\pm} et λ_{\pm} peuvent être approximées par :

$$\omega_r = \sqrt{\gamma(A-1)} \quad (1.5a)$$

$$\text{et } \omega_{lf} = c \omega_r \quad (\omega_{lf} < \omega_r \text{ puisque } \beta < 1). \quad (1.5b)$$

Les carrés de la fréquence de relaxation ω_r et de la fréquence basse ω_{lf} dépendent linéairement du paramètre de pompe, ce qui est compatible avec les résultats expérimentaux du § 1.1.3.

Les vecteurs propres correspondants sont dans les plans ($\mu = 0$, $\delta = 0$) pour Λ_{\pm} et ($M = 0$, $D = 0$) pour λ_{\pm} . Par conséquent les transitoires obtenus à partir d'une condition initiale voisine de l'état stationnaire seront constituée de la superposition d'une oscillation à la fréquence ω_r en phase selon les deux polarisations, et d'une oscillation à ω_{lf} en opposition de phase.

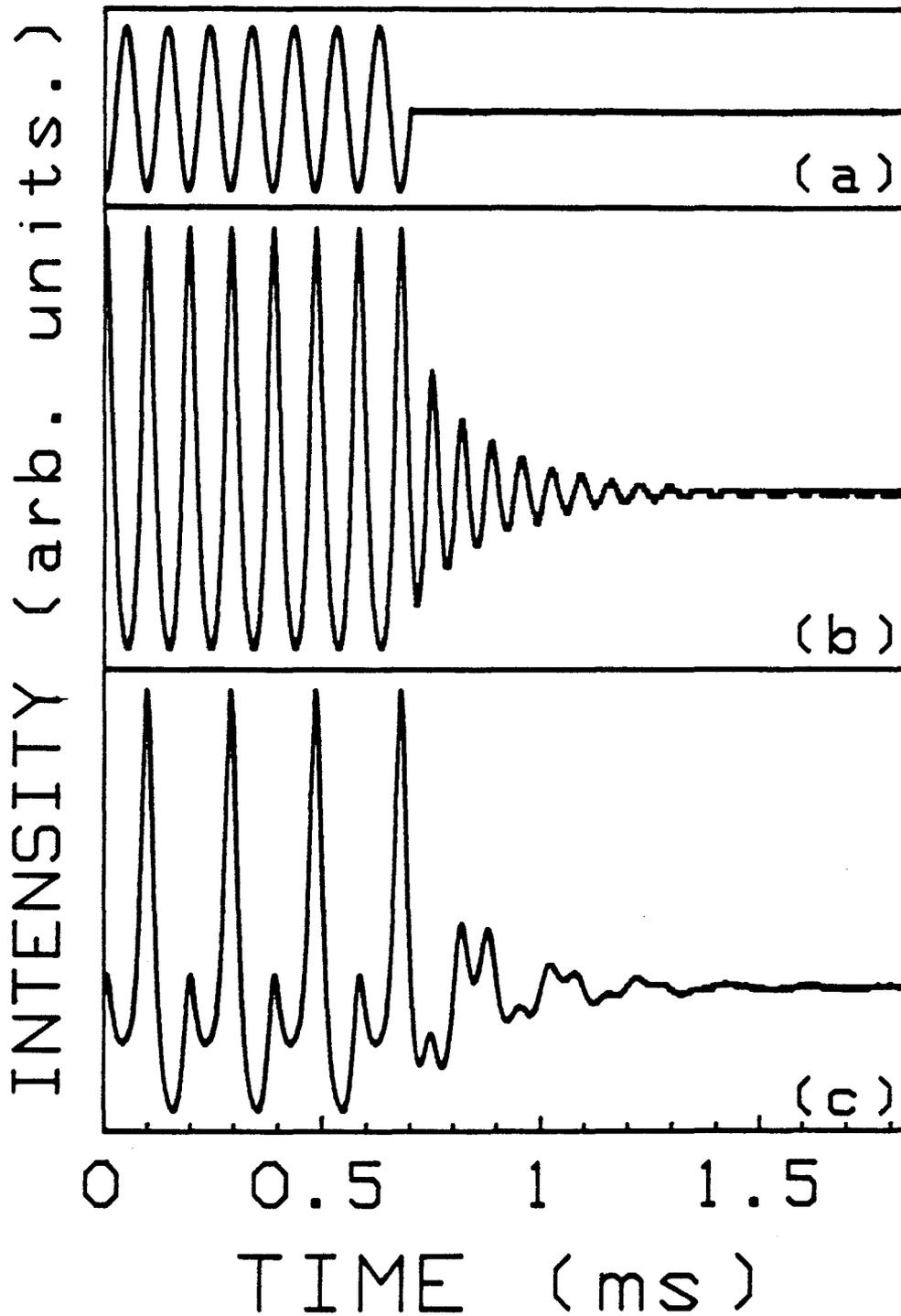


Fig. 1.17. Réponse transitoire du laser dans la situation symétrique. (a) puissance de pompe, (b) réponse du laser après une modulation sinusoïdale amenant le système dans un état symétrique (régime T-périodique), (c) après une modulation amenant le système dans un état asymétrique (régime 2T-périodique). Les intensités sont détectées selon la direction XX.

Le fait de mesurer uniquement l'intensité totale M_s conduit à effectuer deux observations. D'une part, en régime transitoire, la fréquence basse ω_{lf} n'apparaît pas dans l'évolution de l'intensité totale. D'autre part, la dépendance de M_s et des parties réelles et imaginaires des valeurs propres est en accord parfait avec les prédictions du modèle de laser monomode à 2 niveaux avec émission spontanée [Yokoyama & Brorson, 1989]

$$\begin{aligned} \dot{M} &= (D - 1) M + \varepsilon D \\ \dot{D} &= \gamma [A - (1 + M)D] \end{aligned} \quad (1.6)$$

La symétrie du système est à l'origine d'un phénomène particulier observé lors des expériences en régime transitoire au § 1.1.3.B. A partir de l'état stationnaire, une petite variation de la puissance de pompe amène forcément le système dans un état symétrique ($\mu = 0, \delta = 0$). Par conséquent, les transitoires obtenus après la perturbation s'effectuent dans ce plan et la fréquence basse n'apparaît pas dans l'évolution du système.

Une perturbation de puissance de pompe ne pourra exciter le laser de manière asymétrique que si elle est importante. En effet, elle doit être en mesure d'engendrer des effets non-linéaires, comme par exemple les régimes $2T$ -périodiques associés à un comportement d'antiphase. Sur la figure 1.17 est représentée la réponse du laser lorsqu'une modulation périodique est établie pendant une durée importante de façon à atteindre un attracteur périodique, puis supprimée afin d'observer le retour vers l'état stationnaire. Les conditions expérimentales sont identiques dans les deux cas exceptée l'amplitude de modulation, légèrement inférieure (fig. 1.17a), et légèrement supérieure (fig. 1.17b) au seuil de bifurcation T - $2T$. Dans le premier cas, le régime est de période T et la condition initiale est symétrique, on observe alors uniquement des oscillations à la fréquence ω_r . Dans le second cas le régime est de période $2T$, la condition initiale est asymétrique et le transitoire est une superposition d'oscillations aux fréquences ω_r et ω_{lf} .

1.2.2.B. CAS NON-SYMETRIQUE SANS EMISSION SPONTANEE

L'analyse des états stationnaires et de leur stabilité dans la situation $a = 0$ permet d'obtenir des résultats analytiques simples. Ces résultats peuvent être considérés comme le développement limité à l'ordre 0 des états stationnaires et des valeurs propres associées en fonction du paramètre a .

En général, l'analyse de stabilité nécessite la diagonalisation de matrices 4×4 , mais le paramètre γ étant petit, il est possible d'effectuer un développement en série de $\gamma^{1/2}$. Cette procédure est classique dans l'analyse de stabilité des lasers de classe B.

Solutions stationnaires

Les solutions stationnaires correspondant à $a = 0$ seront notées $m_i^{(0)}$ et $d_i^{(0)}$ car elles peuvent être considérées comme un développement des solutions à l'ordre 0 en a . Elles s'obtiennent en résolvant l'équation (1.1) avec $\dot{m}_i = 0$, $\dot{d}_i = 0$ et $a = 0$. Il existe trois types de solutions :

$$(1) \text{ la solution triviale : } m_i^{(0)} = 0 \text{ et } d_i^{(0)} = d_i^0 \quad (1.7)$$

(2) Les solutions monomodes :

$$\begin{cases} m_1^{(0)} = \frac{1}{2\beta} \left\{ \beta(d_1^0 + d_2^0) - (1 + \beta) + \sqrt{[\beta(d_1^0 + d_2^0) - (1 + \beta)]^2 + 4\beta(d_1^0 + \beta d_2^0 - 1)} \right\} \\ m_2^{(0)} = 0 \\ d_1^{(0)} = \frac{d_1^0}{1 + m_1^{(0)}} \\ d_2^{(0)} = \frac{d_2^0}{1 + \beta m_1^{(0)}} \end{cases} \quad (1.8)$$

ainsi que la solution obtenue par une permutation des indices 1 et 2.

La solution correspondant à $m_2^{(0)} = 0$ est physiquement acceptable lorsque $m_1^{(0)} > 0$. Ceci est réalisé lorsque le laser est au delà du premier seuil :

$$d_1^0 > \frac{1}{1 + \alpha \beta}$$

De même, la solution correspondant à $m_1^{(0)} = 0$ est acceptable lorsque

$$d_2^o > \frac{1}{(1 + \alpha\beta)}.$$

La dépendance de $m_1^{(o)}$ avec le paramètre de pompe n'est pas rigoureusement linéaire, mais étant donné les valeurs typiques des paramètres, l'intensité émise selon le mode 1 peut être approximée par :

$$m_1^{(o)} = \frac{1 + \alpha\beta}{1 + \alpha\beta^2} (A - 1) + O((A - 1)^2) \quad (1.9)$$

(3) La solution bimode :

$$\begin{cases} m_1^{(o)} = \frac{1}{1 - \beta^2} [(1 + \beta)(d_1^o - \beta d_2^o) - (1 - \beta)] \\ m_2^{(o)} = \frac{1}{1 - \beta^2} [(1 + \beta)(d_2^o - \beta d_1^o) - (1 - \beta)] \\ d_i^{(o)} = \frac{1}{1 + \beta} \end{cases} \quad (1.10)$$

Cette solution est physiquement acceptable lorsque $m_1^{(o)} > 0$ et $m_2^{(o)} > 0$, c'est-à-dire lorsque le laser se trouve au delà du second seuil :

$$d_1^o > \frac{1 - \beta}{(1 + \beta)(\alpha - \beta)}$$

Les deux intensités augmentent linéairement avec le paramètre de pompe, ceci correspond aux résultats obtenus en régime stationnaire au § 1.1.2.

Analyse de stabilité linéaire des états stationnaires

Comme précédemment, la stabilité de chaque point fixe $\mathbf{X}^{(o)} = (m_1^{(o)}, d_1^{(o)}, m_2^{(o)}, d_2^{(o)})$ est déterminée par la nature des valeurs propres de la matrice jacobienne $\lambda(\mathbf{X}^{(o)})$ du flot (1.1) en $\mathbf{X}^{(o)}$. Les valeurs propres de $\lambda(\mathbf{X}^{(o)})$ sont données par l'équation caractéristique :

$$|\lambda(\mathbf{X}^{(o)}) - \lambda \mathbf{I}| = 0 \quad (1.11)$$

(\mathbf{I} est la matrice identité)

qui est une équation du 4^o degré du type

$$\lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0 \quad (1.12)$$

Pour déterminer la stabilité du point fixe, il n'est pas nécessaire de calculer les solutions de cette équation. Une solution stationnaire est stable si et seulement si les racines de l'équation (1.12) sont toutes de partie réelle négatives, c'est-à-dire lorsque le polynôme figurant dans l'équation (1.12) satisfait le critère de Routh-Hurwitz [Haken, 1977]. Ce critère s'écrit ici:

$$a_1, \dots, a_4 > 0$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} > 0 \quad (1.13)$$

Déterminer la stabilité d'une solution stationnaire $X^{(0)}$ est donc considérablement plus simple que calculer les valeurs propres de $\lambda(X^{(0)})$. Cependant, il est quand-même utile de calculer ces dernières – au moins de manière approchée – car elles déterminent l'évolution du laser en régime transitoire. Etant donné l'ordre de grandeur de γ (10^{-4} - 10^{-3}), une excellente approximation des valeurs propres peut être déterminée en effectuant un développement limité des solutions de (1.11) à l'ordre 2 en $\gamma^{1/2}$.

(1) Analyse de stabilité de la solution triviale

Dans ce cas, les valeurs propres peuvent être facilement calculées de manière exacte :

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -\gamma \\ \lambda_3 &= -[1 - (d_1^0 + \beta d_2^0)] \\ \lambda_4 &= -[1 - (d_2^0 + \beta d_1^0)] \end{aligned} \quad (1.14)$$

La solution triviale ($m_1 = 0, m_2 = 0$) est donc stable uniquement quand le laser est sous le premier seuil : $d_1^0 < 1 / (1 + \alpha \beta)$.

(2) Analyse de stabilité de la solution monomode.

Etant donné que $\alpha < 1$, la solution correspondant à ($m_1^{(0)} = 0, m_2^{(0)} > 0$) est toujours instable. La première valeur propre correspondant à la solution ($m_2^{(0)} = 0, m_1^{(0)} > 0$) est :

$$\lambda_1 = - [1 - (d_2^0 + \beta d_1^0) - 1] \quad (1.15)$$

Elle est négative uniquement si le laser se trouve au dessous du second seuil :

$$d_1^0 < \frac{(1 - \beta)}{(1 + \beta)(\alpha - \beta)}$$

Les trois autres valeurs propres sont solutions de :

$$\begin{aligned} \lambda^3 + \gamma \left[\frac{d_1^0}{d_1(0)} + \frac{d_2^0}{d_2(0)} \right] \lambda^2 + \left[\gamma^2 \frac{d_1^0 d_2^0}{d_1(0) d_2(0)} + \gamma m_1(0) (d_1(0) + \beta^2 d_2(0)) \right] \lambda \\ + \gamma^2 m_1(0) \left[\frac{d_1(0)}{d_2(0)} d_2^0 + \beta^2 \frac{d_1(0)}{d_2(0)} d_1^0 \right] = 0 \end{aligned} \quad (1.16)$$

Le critère de Routh-Hurwitz appliqué à cette équation montre que ses solutions sont de partie réelle négative uniquement si le laser est au-delà du premier seuil. La solution monomode sera donc stable entre les deux seuils uniquement.

Les trois valeurs propres solutions de (1.16) peuvent être développées en série de puissances de $\gamma^{1/2}$:

$$\lambda_2 = - \frac{\frac{d_1(0)}{d_2(0)} d_2^0 + \frac{d_2(0)}{d_1(0)} d_1^0}{d_1(0) + \beta^2 d_2(0)} \gamma + O((\gamma^{1/2})^3) \quad (1.17)$$

et $\lambda_{\pm} = \Gamma \pm i\omega$

avec $\Gamma = - \left(\frac{\gamma}{2} \right) \frac{d_1^0 + \beta^2 d_2^0}{d_1(0) + \beta^2 d_2(0)} + O((\gamma^{1/2})^4)$ et $\omega = \gamma^{1/2} \sqrt{A-1} + O[(\gamma^{1/2})^3]$

Cette dépendance linéaire de ω^2 avec le paramètre de pompe A coïncide avec les prédictions des modèles de lasers monomode à 2 niveaux de classe B [Mc Cumber, 1966], et elle est observée expérimentalement (§ 1.1.3.A). Cependant, il n'en n'est pas de même pour la dépendance de Γ . Ceci n'est pas surprenant étant donné que le régime monomode est observé uniquement entre les deux seuils, c'est-à-dire dans une zone où l'émission spontanée n'est pas négligeable par rapport à l'émission induite.

(3) Analyse de stabilité de la solution bimode.

Les valeurs propres associées à la solution bimode sont solutions de :

$$\lambda^4 + \gamma(1+\beta)(d_1^0+d_2^0)\lambda^3 + \left[\gamma^2 d_1^0 d_2^0 (1+\beta^2) + \frac{\gamma}{1+\beta} (1+\beta^2)(m_1^{(0)}+m_2^{(0)}) \right] \lambda^2 + \gamma^2 [m_1^{(0)}(d_2^0 + \beta^2 d_1^0) + m_2^{(0)}(d_1^0 + \beta^2 d_2^0)] \lambda + \gamma^2 m_1^{(0)} m_2^{(0)} (1-\beta^2) = 0 \quad (1.18)$$

Ces valeurs propres sont de partie réelle négative uniquement si le laser est au-delà du second seuil. A l'ordre 2 en $\gamma^{1/2}$, elles toutes complexes et s'écrivent :

$$\lambda_{k\pm} = \Gamma_k \pm i\omega_k \quad (1.19)$$

avec $k = 1, 2$

$$\Gamma_k = -\frac{1}{4}(1+\beta) \left[d_1^0 + d_2^0 - (-1)^k \frac{(1+\beta)(d_1^0 - d_2^0)^2}{\sqrt{(m_1^{(0)} - m_2^{(0)})^2 + \frac{16\beta^2 m_1^{(0)} m_2^{(0)}}{(1+\beta)^2}}} \right] \gamma + O((\gamma^{1/2})^4)$$

et

$$\omega_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1+\beta^2}{1+\beta} (m_1^{(0)} + m_2^{(0)}) - (-1)^k \sqrt{(m_1^{(0)} - m_2^{(0)})^2 + \frac{16\beta^2 m_1^{(0)} m_2^{(0)}}{(1+\beta)^2}} \right]^{\frac{1}{2}} \sqrt{\gamma} + O((\gamma^{1/2})^3)$$

Dans le cas d'une faible asymétrie comme c'est le cas dans nos expériences (nous verrons que α est typiquement de l'ordre de 0.8 à 1), et lorsque le laser est suffisamment loin du second seuil, le carré des fréquences haute et basse ω_1^2 et ω_2^2 varient à peu près linéairement avec le paramètre de pompe. De plus, les fréquences vérifient des lois d'échelle qui sont typiques d'une classe entière de lasers à deux modes, couplés par une saturation croisée (voir annexe B) :

- ω_1^2 est proportionnel à $(A - 1)$
- et ω_2^2 est proportionnel à $(A - A')$ avec A' la valeur du second seuil.

1.2.2.C. CAS NON-SYMETRIQUE AVEC EMISSION SPONTANEE.

Dans la situation $a > 0$, les calculs analytiques des états stationnaires et des valeurs propres sont relativement lourds, aussi est il préférable dans le cas général de les calculer numériquement. Cependant, il est possible de développer les états stationnaires et les valeurs propres associées en série de puissances de a . De plus, a étant du même ordre de grandeur que γ (nous verrons que γ est de l'ordre de 10^{-3} et a est toujours inférieur à γ) il est intéressant de poser $a = \eta\gamma$ et de développer les valeurs propres à l'ordre 2 en $\gamma^{1/2}$. On obtiendra alors l'influence de l'émission spontanée sur les fréquences propres et leurs amortissements (nous nous intéresserons au cas d'un fonctionnement au-delà du second seuil).

· L'émission spontanée n'a aucun effet au premier ordre sur les fréquences propres:

$$\omega_{1,2} = \omega_{1,2}(a=0) + O[(\gamma^{1/2})^3] \quad (1.20)$$

avec $\omega_{1,2}(a=0)$ les fréquences propres correspondant à $a=0$ (relation 1.19). Ceci explique l'accord entre les dépendances de $\omega_{1,2}^2(a=0)$ avec le paramètre de pompe et les dépendances de ω_r^2 et ω_{lf}^2 observée expérimentalement.

· Par contre, l'émission spontanée a un effet au premier ordre sur les parties réelles des valeurs propres:

$$\begin{aligned} \text{Re}(\lambda_{1,2}) &= \text{Re}(\lambda_{1,2}(a=0)) \\ &- \left[\left(\frac{1}{m_1(0)} + \frac{1}{m_2(0)} \right) \pm \frac{1-\beta}{S} (m_1(0) - m_2(0)) \left(\frac{1}{m_1(0)} - \frac{1}{m_2(0)} \right) \right] \frac{\eta\gamma}{4} + O(\gamma^{1/2}) \end{aligned} \quad (1.21)$$

avec $\text{Re}[\lambda_{1,2}(a=0)]$ et $m_i^{(0)}$ les parties réelles des quatre valeurs propres et les valeurs stationnaires de m_i correspondant au cas $a=0$ déterminées précédemment en régime bimode (relations 1.19 et 1.10) et

$$S = \sqrt{(m_1(0) - m_2(0))^2 + \frac{16\beta^2 m_1(0)m_2(0)}{(1+\beta)^2}}$$

Le point important est le fait que l'émission spontanée diminue les parties réelles des valeurs propres (et augmente par conséquent les coefficients d'amortissement correspondant aux oscillations aux fréquences propres $\omega_{1,2}$). Cet effet devient négligeable aux puissances de pompe élevées à cause des termes en $1/m_i^{(0)}$ et du terme S . On en déduit que l'expression de $\Gamma_{1,2} (a = 0)$ correspond au comportement asymptotique de l'amortissement pour des puissances de pompe importantes.

1.2.2.D. DETERMINATION DES PARAMETRES

Les paramètres à déterminer sont d'une part les paramètres adimensionnels du modèle:

- la dissymétrie α
- le paramètre de saturation croisée β
- le coefficient d'émission spontanée a
- le coefficient de relaxation réduit de l'inversion de population γ ,

et d'autre part les paramètres permettant le passage des grandeurs réduites aux mesures effectuées expérimentalement:

- la puissance de seuil P_{th1}
- le temps de vie des photons dans la cavité (en fait nous déterminerons $1/\tau_c\tau_f$).

La détermination des paramètres s'effectue en deux temps, car les différentes mesures ne demandent pas les mêmes précautions expérimentales, surtout en ce qui concerne la protection du laser des fluctuations de l'environnement.

Les amortissements des transitoires présentent une grande sensibilité à cet environnement ainsi qu'aux conditions de couplage, étant donné que les mesures utiles correspondent au voisinage du seuil. De plus, pour faciliter l'exploitation des résultats, nous avons préféré nous placer dans la situation symétrique.

On réalise dans un premier temps l'ajustement des fréquences ω_r et ω_f obtenues expérimentalement et numériquement à partir du modèle (partie imaginaire de l'équation 1.4) afin d'obtenir une valeur précise du seuil, ceci permet également de vérifier que les deux seuils sont effectivement identiques. On détermine ensuite le coefficient a et le temps de fluorescence en ajustant les

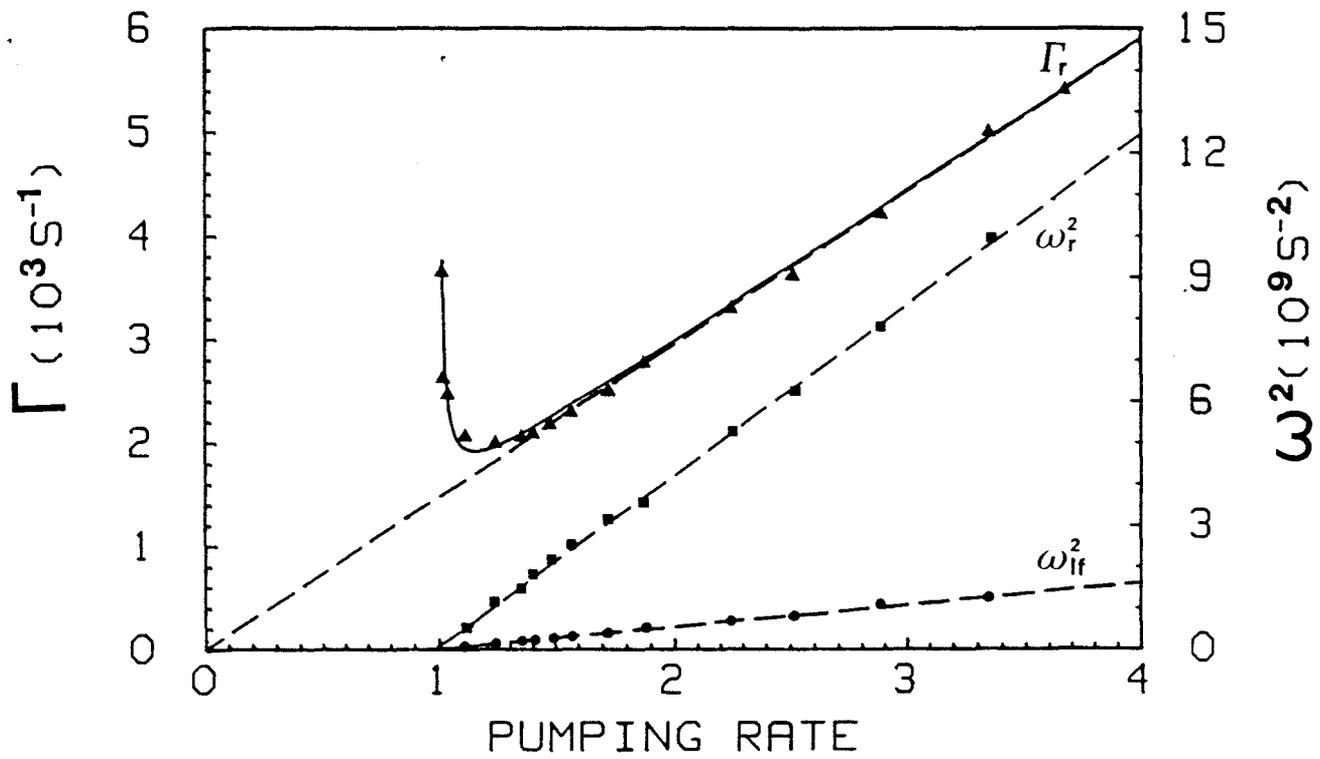


Fig. 1.18. Situation symétrique: carrés des fréquences ω_r et ω_{if} , et amortissement Γ_r en fonction de la puissance de pompe. La courbe continue est l'ajustement de Γ_r avec la partie réelle de la relation (1.4) (moindre carré). Cet ajustement permet une mesure de a ($2.8 \cdot 10^{-4}$) et τ_f ($350 \mu\text{s}$). Les droites en pointillés sont l'asymptote de Γ_r et les régressions linéaires sur $\omega_{r,if}$.

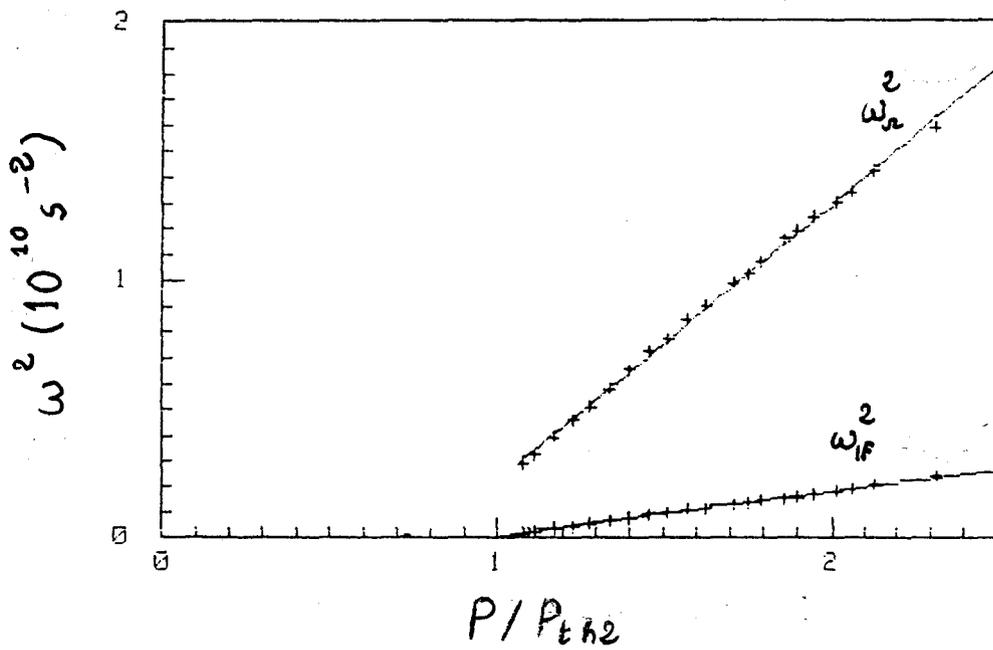


Fig. 1.19. Ajustement des fréquences ω_r et ω_f avec les parties imaginaires des relations (1.19). De cet ajustement on déduit les valeurs de α (0.86), β (0.43), $1/\tau_c\tau_f$ ($8.75 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$).

coefficients d'amortissement obtenus à partir du modèle (partie réelle de la relation 1.4) et les valeurs expérimentales.

Sur la figure 1.18 est présenté un résultat typique obtenu à partir d'une situation pour laquelle on observe les régimes dynamiques décrits au § 1.1.4. L'accord entre résultats expérimentaux et prédictions du modèle est relativement bon en ce qui concerne la forme des courbes obtenues. Les écarts peuvent être attribués à la dépendance du coefficient d'émission spontanée a avec le nombre de modes lasants, donc avec le taux de pompage.

Nous avons obtenu des durées de vie τ_f de l'ordre de 350 à 420 μs , proches de la valeur mesurée de manière différentes dans d'autre fibres (470 μs dans la référence [Poole *et al.*, 1986]). Les valeurs de a sont également variables et sont de l'ordre de 10^{-4} . La valeur déterminée à partir des résultats présentés sur la figure 1.18 donne ainsi $a = 2.8 \cdot 10^{-4}$.

La détermination des fréquences propres ω_r et ω_{lf} ne présente aucun problème et les valeurs obtenues sont très peu sensibles à l'environnement du laser. Les paramètres P_{th1} , α , β et $1/\tau_c\tau_f$ sont déterminés par une méthode de moindre carrés appliquée simultanément aux fréquences ω_{lf} et ω_r , les poids attribués aux mesures de ω_{lf} et ω_r sont tous identiques. Un exemple d'ajustement ainsi effectué est présenté sur la figure 1.19. Il faut remarquer que le calcul numérique des valeurs propres et l'utilisation de l'approximation (1.19) conduisent à des résultats identiques.

En effectuant des mesures pour différents réglages de la cavité, nous avons remarqué que le coefficient de saturation croisée change assez peu avec les conditions expérimentales. Les valeurs que nous avons mesurées sont toutes comprises entre 0.42 et 0.45.

Le coefficient caractérisant la dissymétrie α varie entre 0.80 et 1 selon la torsion de la fibre. $\gamma = \tau_c/\tau_f$ dépend des pertes de la cavité et varie donc dans un domaine important. Dans la situation du § 1.1.4, il est égal à $0.67 \cdot 10^{-3}$. (En fait, l'ajustement permet de déterminer $1/\tau_c\tau_f$, on déduit alors la valeur de γ de ce résultat et de la valeur de τ_f déterminée expérimentalement à partir de Γ_r).

En conclusion, les états stationnaires du modèle et leur stabilité sont compatibles avec les résultats expérimentaux obtenus en régime stationnaire et transitoire. En particulier, on observe en plus de la fréquence de relaxation classique une fréquence basse associée à un comportement d'antiphase.

L'introduction de termes d'émission spontanée dans le modèle permet de retrouver la dépendance de l'amortissement des oscillations de relaxation avec le paramètre de pompe. Ceci indique que cette dépendance est probablement due à l'influence de l'émission spontanée.

Les ajustements des résultats du modèle avec ceux obtenus expérimentalement ont permis de mesurer les divers paramètres. Il est donc à présent possible d'effectuer des simulations numériques à partir du modèle d'évaluer son caractère prédictif.

Il faut également remarquer que l'apparition d'une fréquence basse et les comportements d'antiphase sont des phénomènes dont la généralité dépasse le cadre de la dynamique des lasers à fibre, comme l'a révélé l'étude de plusieurs lasers bimodes: le modèle de Tang, Stadz et De Mars [Tang *et al.*, 1963], le laser $\text{LiNdP}_4\text{O}_{12}$ [Otsuka, 1982], le laser CO_2 bimode [Bakaev *et al.*, 1988], les systèmes de deux lasers YAG couplés [Zenchenko *et al.*, 1989]. En fait, ces phénomènes résultent de manière générale d'un couplage de deux modes par saturation croisée.

De plus, nous avons remarqué que les dépendances des carrés de la fréquence de relaxation et de la fréquence basse avec $(A-1)$ et $(A-A')$ dans le cas faiblement dissymétrique était approximativement linéaire. Cette loi d'échelle semble également être une propriété générale des lasers à deux modes, en particulier on retrouve la même loi dans le modèle de Tang, Stadz et De Mars. Ces résultats sortant du cadre de l'étude du laser à fibre, ils sont présentés dans l'annexe B.

1.2.3. Simulations numériques en régime non-linéaire

L'intégration numérique des équations du modèle a été entreprise pour différentes valeurs des paramètres. Nous avons obtenu un accord entre les résultats numériques et expérimentaux lorsque les paramètres sont choisis proches des valeurs déterminées à partir des expériences en régime linéaire. Dans la suite, les résultats présentés seront ceux obtenus à partir des valeurs de paramètres donnant le meilleur accord avec les résultats obtenus en régime non-linéaire au § 1.1.4:

$$A = 2.8, \quad r = 0.16, \quad \alpha = 0.86, \quad \beta = 0.43 \quad \text{et} \quad a = 1.8 \cdot 10^{-4}$$

alors que dans la situation expérimentale du § 1.1.4, les valeurs déduites des mesures effectuées sur la puissance de diode et des résultats en régime linéaire sont :

$$A = 2.6, \quad r = 0.16, \quad \alpha = 0.86, \quad \beta = 0.43 \quad \text{et} \quad a = 2.8 \cdot 10^{-4}$$

La valeur de γ est de $0.67 \cdot 10^{-3}$.

L'intégration a été effectuée au moyen de la procédure de Burlirsch-Stoer [Press *et al.*, 1986]. L'observation des signaux simulés montre que les régimes asymptotiques sont atteints en général après une centaine de périodes de modulation lorsque la condition initiale est prise voisine des états stationnaires du laser sans modulation.

Les évolutions temporelles des intensités émises selon les deux polarisations (m_1 et m_2) possèdent la même allure que les signaux expérimentaux. Les signaux obtenus se présentent sous la forme d'une succession de pics en phase pour le régime T (fig. 1.20a) et en antiphase pour les régimes de périodicité plus élevée et les régimes chaotiques (fig. 1.20b à d). De plus le chaos apparaît pour des valeurs de l'amplitude de modulation comparables aux valeurs expérimentales.

Les diagrammes de bifurcations obtenus sur les simulations numériques en balayant la fréquence de modulation présentent la même allure que ceux obtenus expérimentalement. Le diagramme de la figure 1.21 est obtenu en

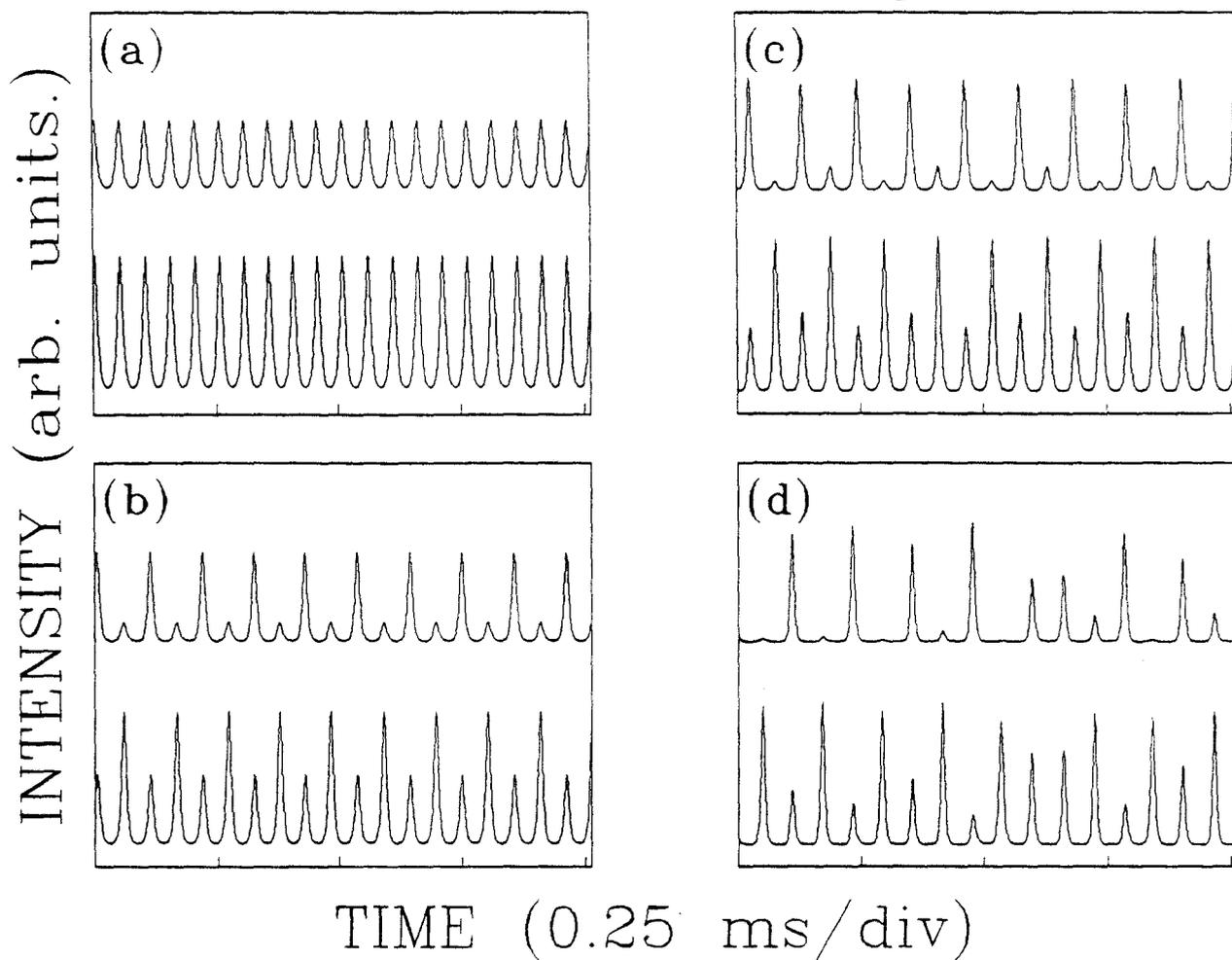


Fig. 1.20. Résultats de l'intégration numérique de l'équation (1.1) correspondant aux résultats expérimentaux de la figure 1.14. Les courbes inférieures et supérieures représentent les évolutions de $m_1(t)$ et $m_2(t)$. (a), (b) et (c) régimes de période T, 2T et 4T; (d) régime chaotique de type C.

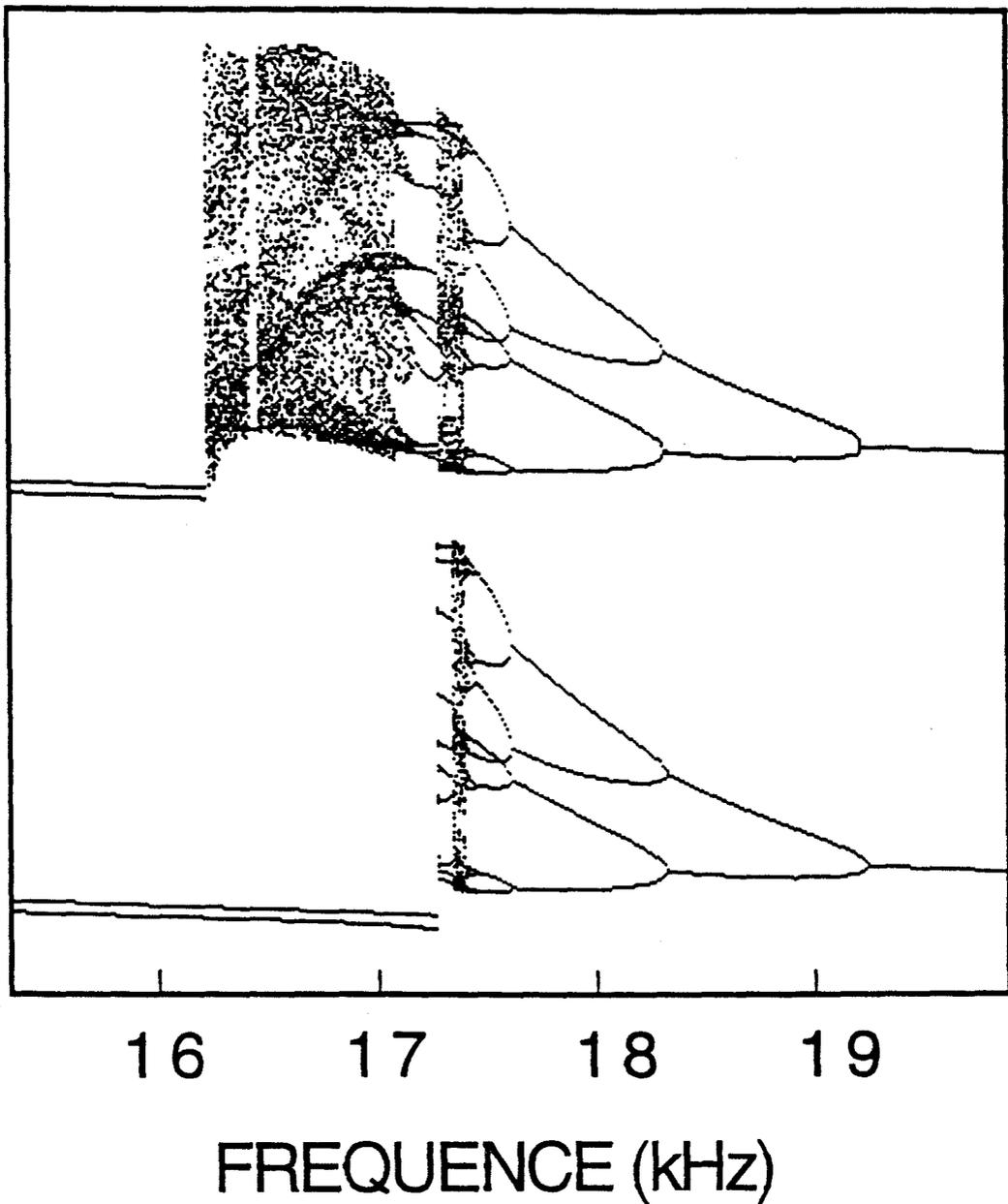
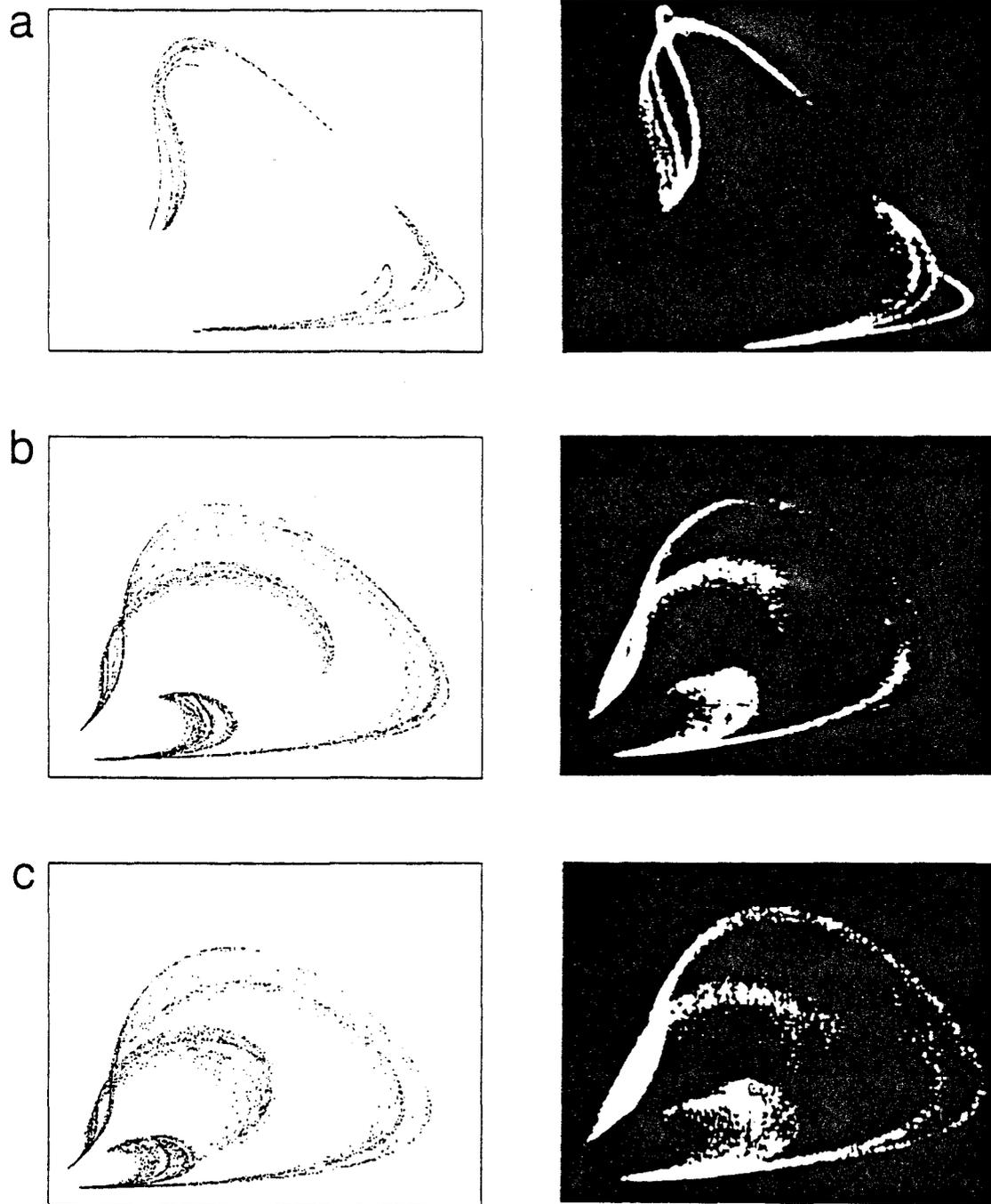


Fig. 1.21. Diagrammes de bifurcations obtenus à partir de l'intégration du système (1.1), et correspondant aux résultats expérimentaux de la figure (1.12). Le diagramme supérieur est obtenu en balayant la fréquence dans le sens décroissant, et le diagramme inférieur dans le sens croissant.



12

11

Fig. 1.22. Projections des sections de Poincaré des attracteurs de différents régimes de la cascade inverse. A gauche: résultats numériques, à droite: résultats expérimentaux (figure 1.15) rappelés ici pour comparaison. (a) régime 2C, (b) régime C juste après la transition 2C-C, (c) régime C juste avant la crise de frontière.

calculant les régimes asymptotiques correspondant à 200 valeurs de la fréquence de modulation. Les conditions initiales introduites pour la p -ième valeur du paramètre ω_p sont les résultats du calcul effectué pour la valeur précédente du paramètre ω_{p-1} (m_1, m_2, d_1, d_2 et la phase de la modulation $\omega_{p-1}t$).

On retrouve les principales caractéristiques des diagrammes observés expérimentalement. Le chaos apparaît par une cascade de doublement de période aux fréquences élevées et disparaît par une crise de frontière aux fréquences basses. La crise est également associée à la bistabilité 2T-chaos. Selon les valeurs des paramètres, on peut observer des fenêtres périodiques de période $10T$ comme celles observées expérimentalement (le domaine d'existence de cette fenêtre est très faible aussi bien expérimentalement que numériquement).

Pour des valeurs différentes du paramètre α , on observe une réduction de la zone chaotique. Ce phénomène est en accord avec les observations effectuées expérimentalement en faisant varier la torsion de la fibre.

Le coefficient d'émission spontanée a est un paramètre relativement critique. En particulier, malgré sa valeur faible ($1.8 \cdot 10^{-4}$) il ne peut être négligé. L'intégration des équations pour une valeur faible, voire nulle, conduit à des désaccords avec l'expérience tant au niveau de la forme des signaux qu'au niveau des régimes observés. Une augmentation de a provoque au contraire une réduction de la zone chaotique, un phénomène déjà rencontré dans les lasers monomodes avec émission spontanée [Hori *et al.*, 1988]].

La caractérisation des attracteurs chaotiques au moyen de sections de Poincaré a été effectuée à différents endroits de la cascade inverse. La comparaison des projections de ces sections obtenues numériquement et expérimentalement (au § 1.1.3) est présentée sur la figure 1.22. On constate un accord excellent entre les prévisions du modèle et les résultats expérimentaux, puisque la structure des attracteurs est la même dans les deux cas.

Les désaccords entre les simulations numériques et l'expérience sont essentiellement quantitatifs. Les valeurs de A et a doivent être choisies légèrement différentes de celles calculées à partir des résultats expérimentaux. Ces petits désaccords révèlent les limites du modèle dues aux approximations sévères qui ont été effectuées. En particulier, les effets de la nature multimode du champ laser a été négligé. De plus, l'inversion de population a été simplement divisée en deux parties, alors que l'interaction de deux modes de même polarisation dans une cavité Fabry-Pérot met en jeu 3 termes pour l'inversion de population en

présence de *hole-burning* spatial [Tang *et al.*, 1963]. L'interaction de deux modes de polarisation différente met en jeu un effet supplémentaire de *hole-burning* de polarisation [Reyzer & Casperson, 1980 (a) et (b); Hall *et al.*, 1983].

Les désaccords entre les résultats expérimentaux et numériques sont relativement peu importants. Ceci peut paraître surprenant étant donné l'apparente complexité de ce laser fortement multimode. La raison pour laquelle chaque ensemble de modes se comporte comme un mode unique n'est pas encore parfaitement comprise actuellement et mérite un intérêt particulier.

Ce comportement collectif de *clustering* est caractéristique des systèmes globalement couplés. Par exemple, il peut apparaître spontanément dans les systèmes de suites logistiques globalement couplées, lorsque les couplages entre les divers oscillateurs sont identiques [Kaneko, 1989]. De plus, dans ces derniers systèmes, un état caractérisé par deux *clusters* peut être modélisé par un système de deux suites logistiques couplées; ce comportement présente une analogie avec celui constaté dans le laser à fibre.

Cependant, bien que cette analogie de comportement puisse expliquer la présence d'effets collectifs, elle n'explique pas l'association des deux *clusters* aux deux états de polarisation. Ce dernier phénomène est lié aux dissymétries du laser à fibre qui sont de deux types. Le premier est celui provoqué par la sélectivité du pompage. Le deuxième type de dissymétrie réside dans la différence entre l'interaction de deux modes longitudinaux de même polarisation, et l'interaction de deux modes de polarisation différente.

Une différence importante concerne les paramètres de saturation croisée. L'interaction entre deux modes de même polarisation met en jeu un phénomène de *hole-burning* spatial. La saturation croisée qui en résulte provoque un couplage important des deux modes, responsable en particulier de l'apparition d'une fréquence basse (voir annexe B).

L'interaction entre deux modes de polarisation différente met en jeu un phénomène de *hole-burning* spatial mais également un phénomène de *hole-burning* de polarisation. Ce dernier a pour effet de diminuer la saturation croisée entre deux modes de polarisation différente.

Si cette différence est responsable des effets collectifs observés, ceci pourrait être mis en évidence en intégrant numériquement un modèle de laser multimode qui tienne compte de ces deux types d'interaction. La première étape dans l'établissement d'un tel modèle est la mise au point d'un modèle de laser

comportant deux modes de polarisations différentes et tenant compte des propriétés physiques du milieu amplificateur.

Cependant, il ne faut pas écarter *a priori* certaines autres hypothèses comme l'existence d'effets non-linéaires d'ordre plus élevé (par exemple un couplage entre les phases des différents modes [Brunner *et al.*, 1985]). Il est également possible qu'une dynamique spectrale existe tout en restant inobservable lors de l'observation de l'intensité totale émise selon chaque polarisation.

1.3. Une situation particulière : le régime d'oscillations spontanées.

Lors de nos expériences sur la dynamique du laser à fibre, et pour des réglages particuliers de la cavité, il a été observé des oscillations spontanées de l'intensité laser. L'origine de cette instabilité n'est pas encore connue et nous ne disposons actuellement que d'un ensemble de résultats expérimentaux. L'étude du laser dans cette situation est essentielle pour plusieurs raisons.

D'abord, il est intéressant d'étudier les instabilités apparaissant dans le laser, car elles donnent naissance à des comportements d'antiphase et des régimes chaotiques comparables à ceux du laser modulé.

Ensuite, il est nécessaire de définir des critères fixant les limites du modèle établi au § 1.2. En effet, en l'absence de modulation, ce dernier ne permet d'obtenir que des régimes stationnaires. Il est donc évident que la situation dans laquelle on observe des oscillations spontanées se trouve hors du domaine de validité du modèle. De plus il doit exister des situations intermédiaires pour lesquelles la puissance de pompe (ou d'autres paramètres liés à l'origine de l'instabilité) est insuffisante pour mener à une instabilité, mais suffisante pour que certaines prévisions du modèle établi précédemment soient mises en défaut.

Enfin, l'étude des instabilités est nécessaire si l'on désire comprendre leur origine physique, afin d'en tenir compte dans un modèle de laser plus complet, ou afin de les éviter dans les applications pratiques des lasers à fibre, ou au contraire afin de les reproduire.

1.3.1. Régimes dynamiques observés.

Lorsque la puissance de pompe croît à partir de zéro, on observe d'abord un comportement stationnaire semblable à celui observé dans la situation classique du § 1.1.2. On observe les deux seuils P_{th1} et P_{th2} correspondant à l'apparition d'un rayonnement selon chaque direction de polarisation. Comme au § 1.1.3, la réponse à une perturbation révèle deux fréquences caractéristiques ω_r et ω_f associées à des oscillations en phase et en antiphase respectivement.

Ensuite, à partir d'un certain seuil, variable selon la situation expérimentale, on assiste à une bifurcation de Hopf: la solution stationnaire

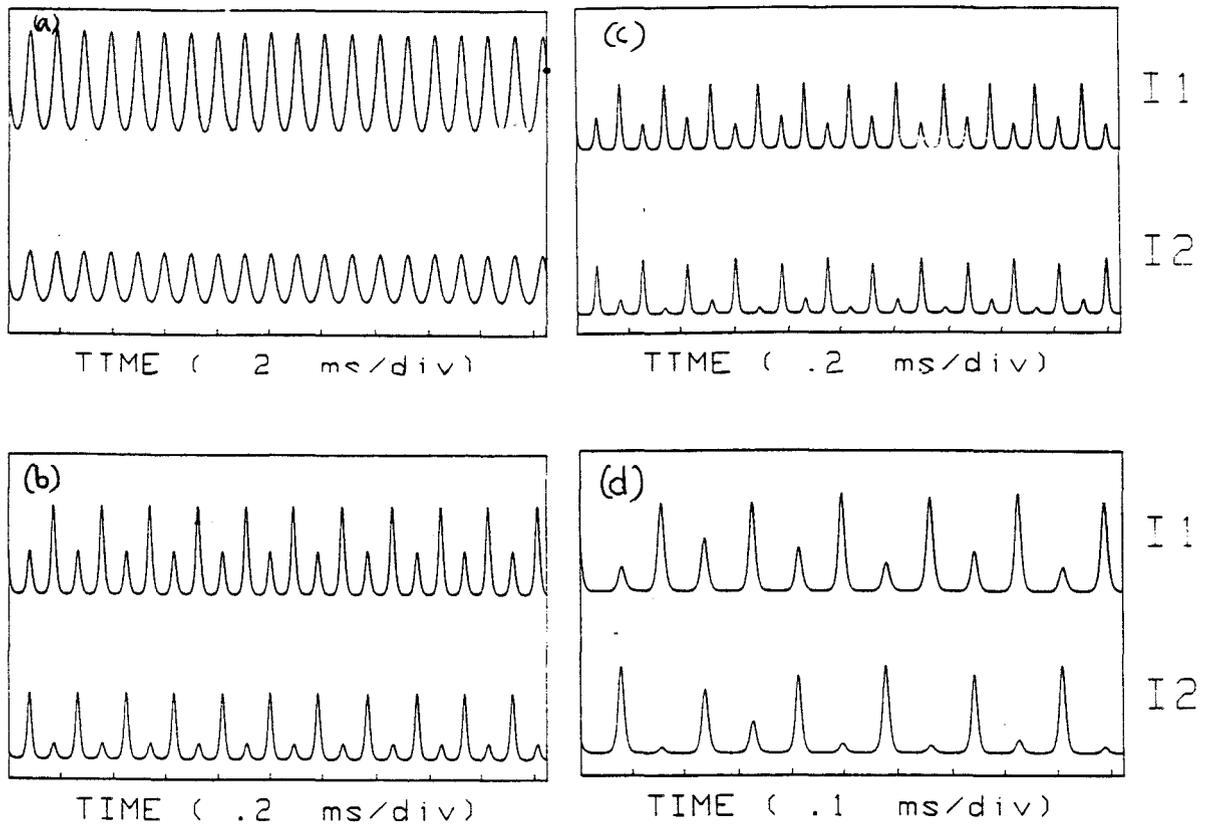


Fig. 1.23. Signaux $I_1(t)$ et $I_2(t)$ (courbes supérieures et inférieures) émis selon les deux directions de polarisation lorsque le laser fonctionne en régime d'oscillations spontanées (cas d'une cascade de doublements de période). (a), (b), et (c), régime de période T , $2T$ et $4T$; (d) régime chaotique de type $2C$.

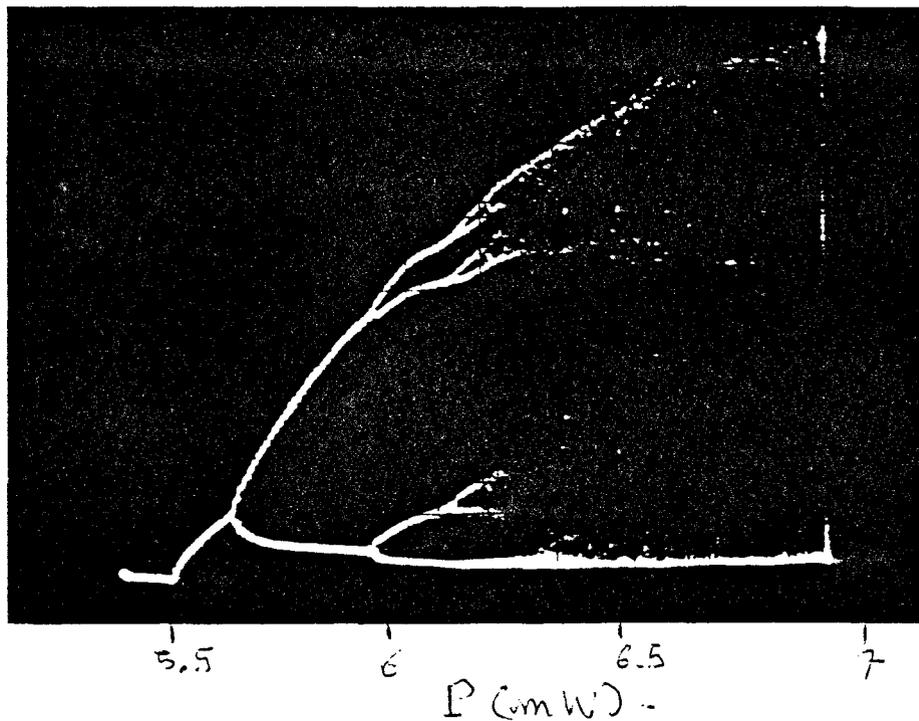


Fig. 1.24. Diagramme de bifurcations en fonction de la puissance de pompe. La variable mesurée est I_1 .

donne naissance à une solution périodique à la fréquence des oscillations de relaxation ω_r en phase selon les deux polarisations (fig. 1.23a).

Lorsque la puissance de pompe augmente encore, on peut observer une cascade de doublements de période menant au chaos. Les régimes périodiques et chaotiques présentent des caractéristiques semblables à ceux obtenus en modulant le laser, en particulier les phénomènes d'antiphase (fig. 1.23b à d).

En modifiant la torsion de la fibre, on peut changer le scénario de transition vers le chaos, on passe en général d'une cascade de doublements de période à une route vers le chaos par la quasipériodicité. Un diagramme de bifurcations correspondant à la transition vers le chaos par la cascade sous-harmonique est représenté sur la figures 1.24. L'échantillonnage permettant l'obtention de ce type de diagramme est effectué au voisinage des maxima (le plan de section est défini par $I_1(t_n - \tau) = a$ et $I_1(t_n)$ croissant, a et τ étant des paramètres ajustables). Il faut remarquer que l'échantillonnage peut avoir lieu uniquement lorsque le signal possède une amplitude suffisante. C'est pourquoi les régimes stationnaires et la bifurcation de Hopf n'apparaissent pas dans ce diagramme.

Pour d'autres réglages de la cavité, on n'observe qu'une partie des régimes qui viennent d'être décrits. Le balayage de la puissance de pompe ne fait apparaître qu'une partie de la cascade sous-harmonique, ou une cascade de doublements de période complète suivie d'une cascade inverse incomplète.

Il faut également noter que pour des puissances de pompe élevées (voisines de la puissance maximale disponible : 8 mW), on peut observer un régime de période $3T$ apparaissant par bifurcation noeud-col (fig. 1.25). On assiste dans ce cas à un effet de bistabilité entre l'attracteur chaotique et le régime $3T$. L'attracteur atteint en augmentant progressivement la puissance de pompe est toujours l'attracteur chaotique. Pour atteindre l'attracteur $3T$ -périodique, il faut placer l'état du système dans son bassin d'attraction. Ceci est facilement réalisé en perturbant le laser au moyen d'une variation brutale de la puissance de pompe, ou d'une perturbation mécanique de la cavité.

Comme dans le cas du laser modulé, les attracteurs chaotiques peuvent être caractérisés par leurs sections de Poincaré. Des projections de ces sections sont facilement obtenues en échantillonnant les intensités émises selon les deux polarisations chaque fois que le signal $I_1(t)$ passe au voisinage d'un maximum. Les sections correspondant à des régimes $4C$, $2C$ et C sont représentés sur la figure 1.26. La forme simple de ces sections et les transitions vers le chaos par des

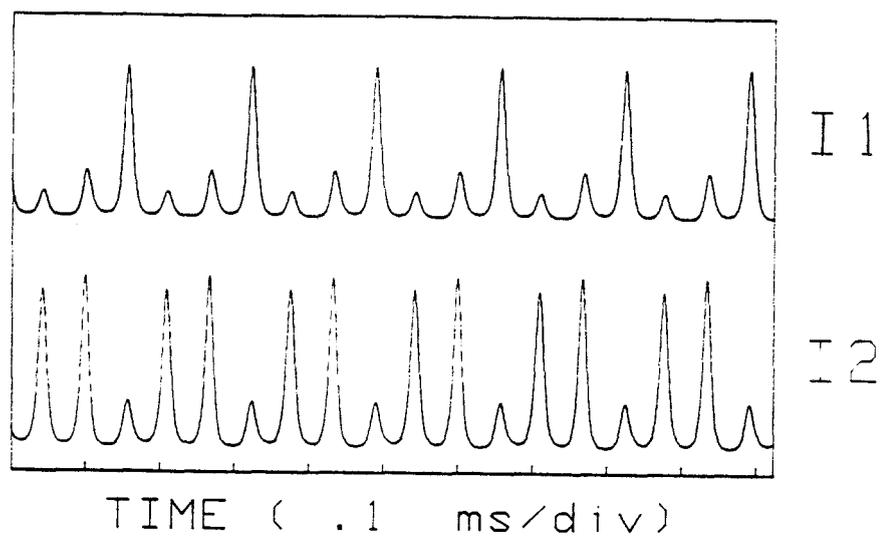


Fig. 1.25. Signaux correspondant au régime 3T.

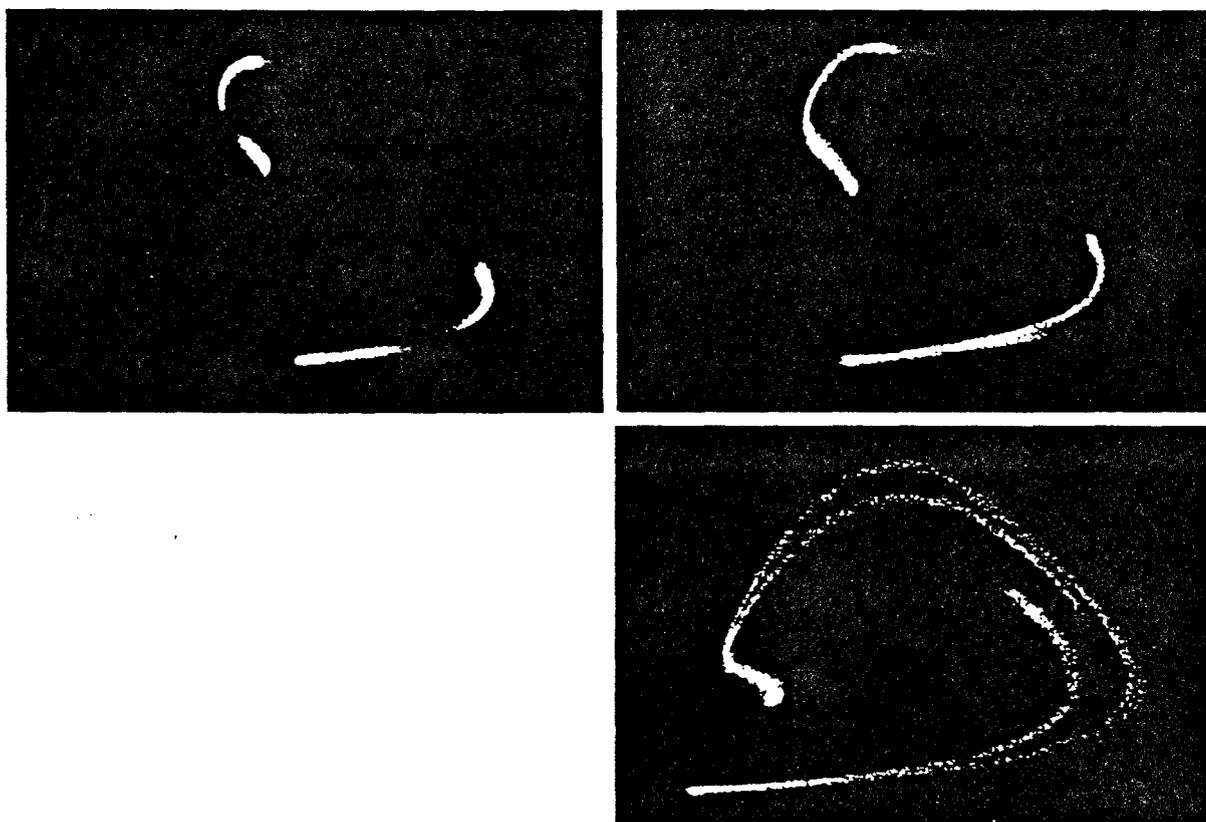


Fig. 1.26. Projections des sections de Poincaré des attracteurs chaotiques correspondant à différents régimes de la cascade inverse. Les figures (a), (b) et (c) correspondent à des régimes 4C, 2C et C respectivement.

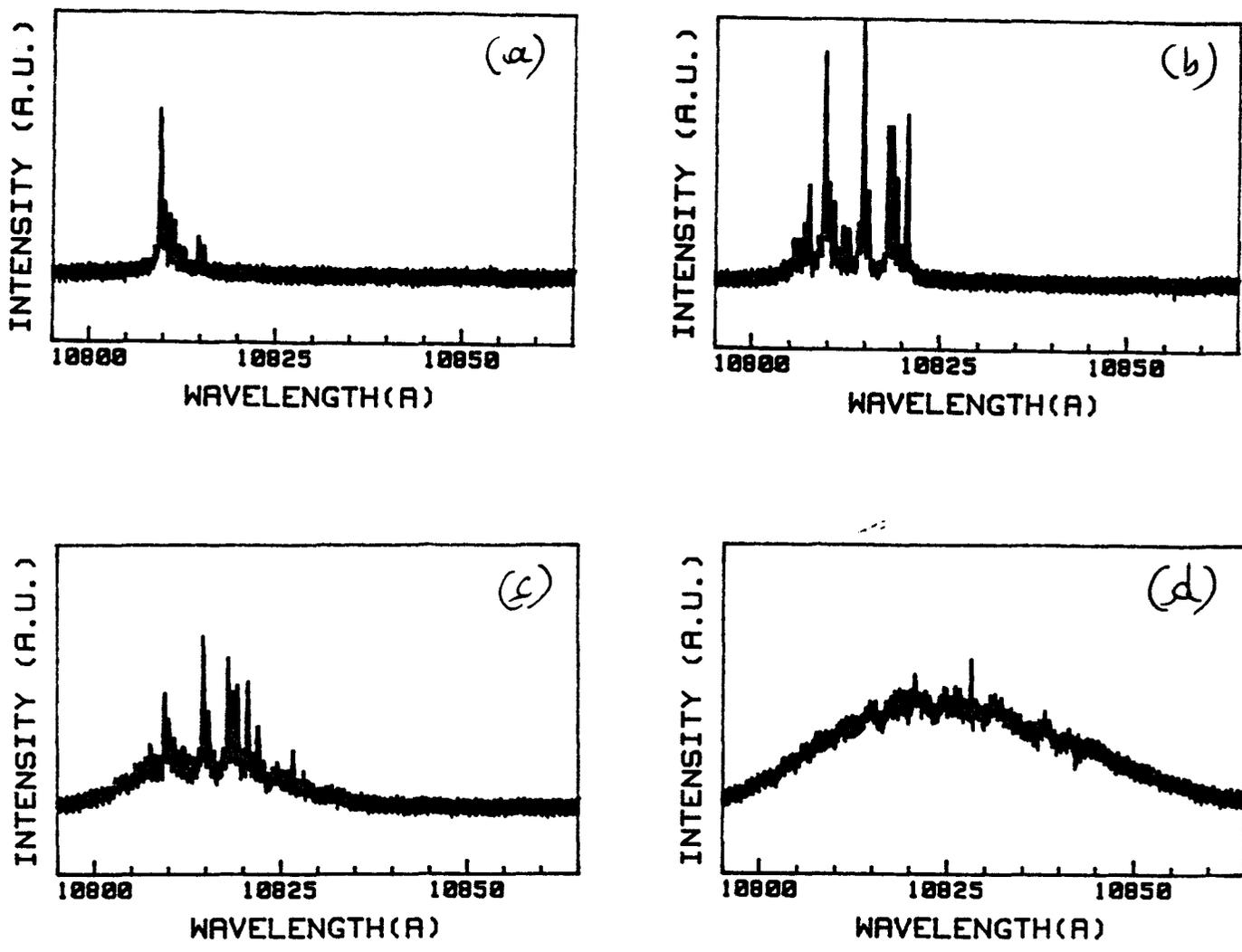


Fig. 1.27. Spectre du rayonnement émis par le laser pour des puissances de pompe de $P = XX$ mW (voisinage du seuil) (a), $P = XX$ mW (voisinage de la bifurcation de Hopf) (b), $P = XX$ mW (c) et $P = 7$ mW (d).

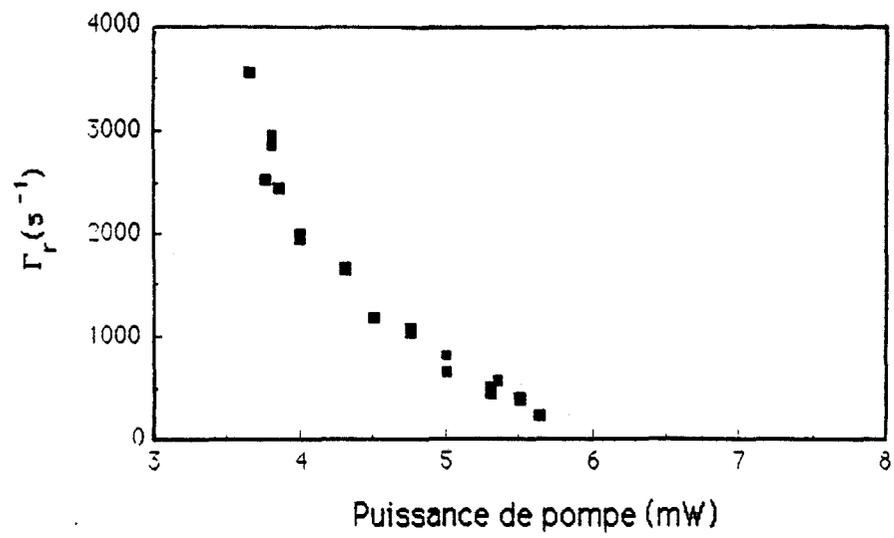


Fig. 1.28. Amortissement de oscillations de relaxation en fonction de la puissance de pompe. $P_{th1} = 3,5$ mW, $P_H = 5,8$ mW.

cascades de doublement de période suggèrent que le nombre de degrés de liberté effectifs mis en jeu dans les instabilités reste faible, comme dans le cas du laser stable modulé.

Le spectre du laser change qualitativement lorsque l'on passe d'un régime stationnaire à un régime d'oscillations spontanées. Etant donné que le type de détecteur utilisé dans cette analyse (une barrette de 1024 photodétecteurs CCD) possède une durée d'acquisition importante (1 ms) devant les temps caractéristiques associés à l'instabilité (70 μ s pour la période de l'orbite T), on observe un spectre moyenné dans le temps.

Lorsque le seuil d'instabilité est dépassé, on observe le passage progressif d'un spectre constitué de pics espacés (fig. 1.27a et b) à un spectre lisse (fig. 1.27c et d). Ceci suggère que l'instabilité est liée à des effets multimodes. L'étude simultanée de la dépendance temporelle de plusieurs composantes spectrales est actuellement en cours et devrait révéler le type dynamique qui entre en jeu.

La bifurcation de Hopf observée correspond à un changement de stabilité de la solution stationnaire, donc à un passage par zéro du coefficient d'amortissement Γ_r des oscillations de relaxation (fig. 1.28). Par conséquent, dernier ne suit plus la loi (1.4) établie au cours de la modélisation et observée expérimentalement dans la plupart des cas (§ 1.1.3). Au lieu d'une décroissance rapide de Γ_r puis d'une croissance lente avec la puissance de pompe, on observe une décroissance monotone jusqu'à zéro.

De plus, ce désaccord est parfaitement visible lorsque la puissance de pompe est inférieure au seuil de bifurcation de Hopf puisqu'il concerne les états stationnaires stables. Il en est de même lorsque les réglages de la cavité sont voisins de ceux correspondant à l'instabilité.

Ceci nous permet de fixer une limite de validité du modèle établi précédemment. Nous considérerons que celui-ci n'est plus valable lorsque la dépendance avec le paramètre de pompe du coefficient d'amortissement s'écarte de manière sensible de celle donnée par la relation (1.4).

1.3.2. Causes possibles de l'instabilité

L'origine physique des instabilités n'est actuellement pas encore connue, et on ne peut qu'émettre des hypothèses. Quelques expériences simples

permettant d'ores et déjà d'infirmier certaines d'entre elles. Le fait que la puissance de pompe reste stationnaire montre que les oscillations ne sont pas causées par une instabilité de la diode laser. L'hypothèse d'un retour du rayonnement laser par réflexion sur les éléments optiques du système de détection doit également être rejetée. En effet, la modification du dispositif n'a aucune influence sur les comportements dynamiques observés.

L'instabilité a donc pour origine des phénomènes localisés entre la diode laser et la face arrière du miroir de sortie.

Une hypothèse possible est un retour du rayonnement par réflexion sur les faces arrière des miroirs, sur les objectif de microscope ou sur la diode laser.

Une autre hypothèse est la présence de non-linéarités autres que la saturation des populations, par exemple des pertes variant avec la puissance laser. La présence de ce type de pertes est en effet responsable des instabilités observées dans certains lasers comme les laser avec absorbant saturable [Kurochkin *et al.*, 1993], les lasers à verre dopé au Néodyme [Khanin, 1988], et des lasers CO₂ monomodes dont les pertes par diffraction varient avec l'intensité [Tredicce, 1986; Lippi, 1986]. On peut également émettre l'hypothèse que l'instabilité est due à la nature multimode du laser et dépend par exemple de la répartition en fréquence des pertes.

Les différents régimes observés présentent des points communs avec ceux observés dans le cas du laser stable modulé. En particulier, on peut observer dans les deux cas des phénomènes d'antiphase et une cascade de doublements de période menant au chaos. L'origine des instabilités reste à définir, cependant il semble qu'elles soient liées aux propriétés spectrales du laser donc à des effets multimodes.

Les résultats expérimentaux qui viennent d'être présentés concernent les régimes dynamiques stables du laser. Dans la deuxième partie, nous verrons comment obtenir des résultats complémentaires en stabilisant et en caractérisant les états instables du laser, comme par exemple l'état stationnaire instable qui apparaît après la bifurcation de Hopf.

En conclusion, malgré les les expériences effectuées en régime stationnaire, et en présence de modulation ont révélé un comportement dominé par des effets de polarisation. En effet, la plupart des phénomènes observés peuvent être reproduits par un modèle phénoménologique de laser à deux modes avec émission spontanée, sans qu'il soit nécessaire de faire intervenir le caractère multimode de l'émission.

En particulier, on retrouve en régime stationnaire l'existence de deux seuils qui correspondent à l'apparition d'un rayonnement selon chacune des deux directions de polarisation. En régime transitoire, on observe, en plus de la fréquence de relaxation classique des lasers de classe B, une fréquence basse associée à une oscillation en opposition de phase des intensités émises selon les deux polarisations.

La généralité des phénomènes observés dépasse le cadre du laser à fibre. Les phénomènes d'antiphase, la présence d'une fréquence basse et sa dépendance avec le paramètre de pompe se retrouvent dans de nombreux lasers à deux modes dont les modes sont couplés par une saturation croisée (annexe B).

En régime non-linéaire, le modèle simple de laser bimode qui a été établi reproduit correctement les différents comportement du laser à fibre. En particulier, on retrouve l'apparition d'une cascade de doublements de période menant au chaos pour des valeurs de paramètres comparables à celles de l'expérience. Le modèle permet de retrouver les signaux en antiphase et des attracteurs chaotiques possédant la même structure que ceux observés expérimentalement.

Il existe des réglages particuliers de la cavité pour lesquels on observe une oscillation de intensité de sortie. Dans cette situation, les régimes dynamiques présentent des points communs avec ceux observés en présence de modulation, comme les comportements d'antiphase et les régimes chaotiques. Cependant, le modèle établi au § 1.2 ne peut conduire à de telles instabilités. La modélisation du laser et la détermination de l'origine physique des oscillations spontanées reste donc un problème ouvert.

2° partie

Stabilisation et caractérisation d'états instables

Dans la partie consacrée à l'étude du comportement dynamique du laser, nous avons mis en évidence la déstabilisation de différents régimes. Les bifurcations correspondantes mettent en jeu des attracteurs mais également des états instables, stationnaires ou périodiques. En particulier, les doublements de période successifs observés dans le laser modulé ou oscillant spontanément donnent naissance à des orbites instables de période $2^n T$. Dans le laser modulé, l'orbite $2T$ de la branche inférieure du cycle d'hystérésis se déstabilise par bifurcation noeud-col, ce qui implique que cette orbite coexiste avec une orbite instable. Lorsque le laser présente des oscillations spontanées, nous avons également observé une bifurcation noeud-col donnant naissance à une orbite $3T$ et une déstabilisation de l'état stationnaire par bifurcation de Hopf. Il existe donc parallèlement aux attracteurs un point fixe instable et un grand nombre d'orbites instables qu'il est intéressant d'étudier.

La connaissance des états instables apporte des informations supplémentaires sur la dynamique d'un système. En effet, les attracteurs chaotiques peuvent être classés en fonction de l'organisation topologique des orbites périodiques instables qu'ils contiennent [Mindlin *et al.*, 1990, 1992; Tufillaro *et al.*, 1991, 1992; Papoff *et al.*, 1992; Lefranc & Glorieux, 1992]. Certaines orbites se trouvent à la frontière du bassin d'attraction des attracteurs chaotiques et jouent un rôle fondamental dans l'apparition des crises [Grebogi *et al.*, 1982, 1983].

Expérimentalement, les orbites instables contenues dans les attracteurs chaotiques peuvent être localisées par la technique des *close-returns* [Auerbach *et al.*, 1987] (nécessitant l'observation d'une seule variable dynamique). Par contre, la détermination d'états instables situés en dehors du voisinage de tout attracteur est impossible par la simple observation des régimes asymptotiques. L'étude de régimes transitoires a mis en évidence des cycles instables dans certains systèmes comme les lasers CO_2 modulés [Papoff *et al.*, 1988; Samson *et al.*, 1992]. L'application d'une modulation périodique peut également donner naissance à des régimes périodiques [Lima *et al.*, 1990; Azevedo *et al.*, 1991; Braiman *et al.*, 1991; Braun *et al.*, 1992] ou stationnaires [Arnold, 1976; Landau & Lifchitz, 1982] voisins des états instables du système. Cependant, excepté dans quelques cas particuliers comme la stabilisation de l'état stationnaire instable du pendule par une modulation paramétrique [Arnold, 1976; Landau & Lifchitz, 1982], les trajectoires obtenues par application d'une modulation, ne coïncident pas exactement avec celles correspondant aux états instables du système non modulé.

La stabilisation d'un état périodique peut s'effectuer sans cet inconvénient et de manière plus systématique par une méthode de contre-réaction. L'idée fondamentale a été introduite par Ott, Grebogi et Yorke (O.G.Y.) [Ott *et al.*, 1990]. Leur méthode permet de stabiliser toute orbite instable contenue dans un attracteur chaotique sans qu'il soit nécessaire de connaître les équations du système. La méthode O.G.Y. ainsi que celles qui vont être décrites par la suite, présentent également un intérêt pratique évident puisqu'elles permettent de transformer un régime chaotique en un régime périodique ou stationnaire par application de petites perturbations sur un paramètre de contrôle.

Dans un premier temps, nous décrirons la méthode de stabilisation de points fixes instables qui sera appliquée à l'étude du laser à fibre oscillant spontanément. Ensuite, la méthode O.G.Y. sera modifiée afin de rendre possible la stabilisation et l'étude des orbites instables situées aussi bien dans un attracteur chaotique qu'au dehors. Cette méthode sera également appliquée au laser à fibre.

2.1. Stabilisation et caractérisation d'états stationnaires instables

Un système dynamique peut être stabilisé par application d'une contre-réaction sur un paramètre de contrôle. Ce type de stabilisation est courant dans les systèmes asservis [Mira, 1990]. Cependant, notre objectif étant de caractériser un état stationnaire instable, certaines précautions concernant le choix de la méthode doivent être prises afin de s'assurer que l'état stabilisé coïncide avec l'état stationnaire à étudier. En particulier sont écartées les méthodes conduisant après stabilisation à des variations de l'état du système autour du point fixe causées, non par le bruit, mais par le principe de stabilisation [Singer *et al.*, 1991].

Dans un premier temps, nous décrivons une méthode permettant de stabiliser un point fixe instable, sans considérer un système physique particulier. Nous rappellerons comment il est possible de stabiliser par application d'une contre-réaction un point fixe de type col. Ce type de point fixe est rencontré par exemple en bistabilité [Zimmermann *et al.*, 1984]. Ensuite nous modifierons cette méthode afin de l'étendre au cas des foyers instables.

Ce type dernier type de point fixe apparaît dans les nombreux systèmes se déstabilisant par bifurcation de Hopf, comme les lasers avec absorbant saturable [Lefranc *et al.*, 1991], les lasers doublés intracavité [Baer, 1986; James *et al.*, 1990] et certains lasers à fibre [Allain *et al.*, 1989, 1990; Lacot *et al.*, 1991] comme celui utilisé dans nos expériences. Nous déterminerons alors le type de contre-réaction adapté à la stabilisation des lasers décrits par un modèle de laser monomode à deux niveaux de classe B dont les pertes varient rapidement avec l'intensité. Ces pertes peuvent être dues par exemple à la présence d'un absorbant saturable rapide.

Nous entreprendrons ensuite la stabilisation et l'étude expérimentale du point fixe instable apparaissant dans notre laser à fibre au Néodyme en régime d'oscillations spontanées.

2.1.1. Méthodes de stabilisation

2.1.1.A. DYNAMIQUE LOCALE DU SYSTEME AVEC CONTRE-REACTION

Les méthodes de stabilisation que nous allons décrire ne nécessitent pas la connaissance des équations du système. Nous supposons simplement que celles-ci dépendent d'un paramètre de contrôle μ sur lequel il est possible d'agir, soit: $\dot{X} = F(X, \mu)$ avec X le vecteur décrivant l'état du système dans un espace des phases de dimension finie d , et F le champ de vecteurs déterminant l'évolution du système. Pour une certaine valeur μ_0 du paramètre de contrôle, nous supposons l'existence d'un point fixe instable $X_F : F(X_F, \mu_0) = 0$, que l'on se propose de stabiliser.

La méthode générale consiste à appliquer au paramètre de contrôle μ une correction $p(t)$ autour de la valeur μ_0 . Cette correction $p(t)$ peut dépendre de l'état du système $X(t)$ au même instant t , mais peut également dépendre des valeurs de X aux instants précédents [Zimmermann *et al.*, 1984] ou des valeurs précédentes de la correction [Gills *et al.*, 1992]. Lorsque le paramètre de contrôle varie, on suppose que l'équation du nouveau système dynamique devient

$$\dot{X} = F(X, \mu_0 + p(t)) \quad (2.1)$$

(Ceci impose que les équations du système ne dépendent explicitement que de la valeur $p(t)$ mais pas de ses dérivées ou de ses valeurs antérieures, ce qui est généralement le cas).

Nous devons adapter la contre-réaction de façon à ce que le point fixe X_F reste un point fixe du système avec contre-réaction (2.1). La valeur de la correction $p(t)$ après stabilisation constitue un critère permettant de vérifier si cette condition est réalisée. Si $p(t)$ s'annule, le point fixe stabilisé est forcément un point fixe du système sans contre-réaction (2.1). Par contre, si $p(t) \neq 0$, deux cas sont possibles. L'état du système peut coïncider avec un point fixe du système (2.1), toutefois cette situation est exceptionnelle car elle impose l'existence d'un point X_F qui soit un point fixe du système (2.1) pour deux valeurs différentes du paramètre de contrôle. En général, si $p(t) \neq 0$, l'état stabilisé ne coïncide pas avec un point fixe du système pour la valeur μ_0 du paramètre de contrôle mais pour une autre valeur μ_0' . Nous imposerons donc

Il faut de plus choisir une relation entre $p(t)$ et les variables dynamiques du système telle que le point fixe X_F devienne stable. L'analyse de stabilité

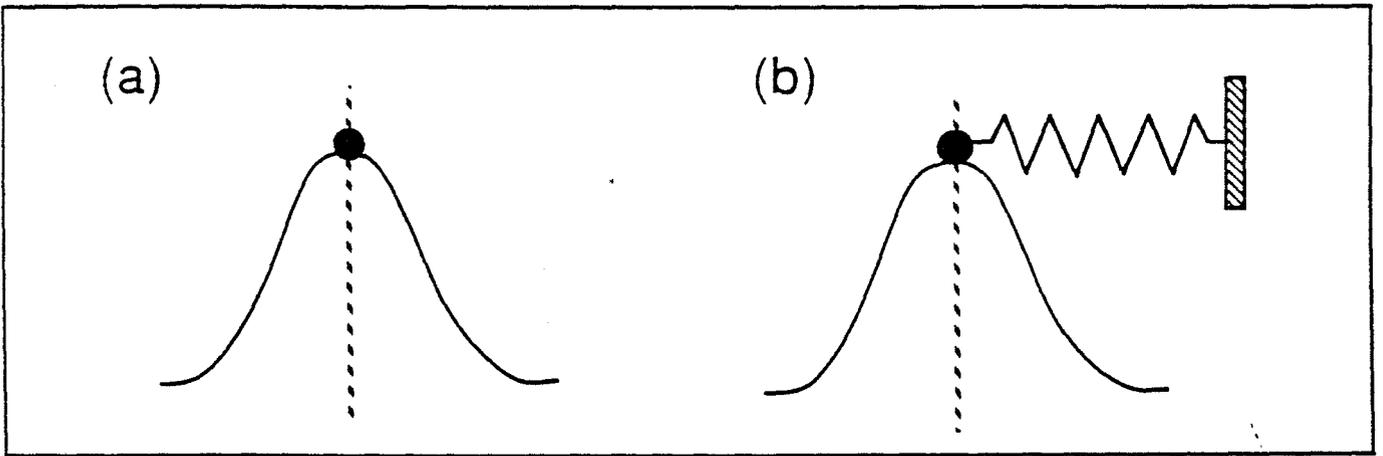


Fig. 2.1. Illustration du principe de stabilisation d'un point fixe de type col, dans le cas d'un système à une dimension. (a) système initial, (b) système avec contre-réaction.

linéaire du système (2.1) nécessite l'étude de la dynamique locale autour du point fixe. Les équations linéarisées correspondantes sont de la forme:

$$\dot{\xi}(t) = \lambda \xi + p(t) h \quad (2.2)$$

où:

- $\xi(t) = X(t) - X_F$
- λ est la matrice jacobienne de F en $X = X_F$ pour $\mu = \mu_0$
- h est relié à la variation de la position du point fixe $X_F(\mu)$ avec le paramètre de contrôle:

$$h = \left(\frac{\partial F}{\partial \mu} \right)_{X=X_F, \mu=\mu_0} = \lambda \frac{dX_F}{d\mu} (\mu = \mu_0) \quad (2.3)$$

Plusieurs cas peuvent se présenter selon la nature des valeurs propres de λ . Nous éliminons les cas non génériques pour lesquels λ possède des valeurs propres nulles (point de bifurcation en $\mu = \mu_0$). Nous considérerons les cas où toutes les valeurs propres sont de partie réelle négative excepté une seule, réelle et positive (point de type col), ou deux, complexe-conjuguées (point de type foyer instable).

2.1.1.B. STABILISATION D'UN COL

Ce genre de point fixe provient généralement de la déstabilisation d'un point fixe stable par bifurcation noeud-col (cas du phénomène de bistabilité) ou par bifurcation transcritique (cas du seuil d'oscillation laser lorsque l'émission spontanée est négligée).

Avant de décrire la méthode utilisée pour stabiliser un col dans le cas général, nous allons illustrer le principe de stabilisation dans le cas très simple d'un système unidimensionnel : $\dot{X} = F(X, \mu)$. L'évolution du système est équivalente à celle d'une particule de masse unité dans un potentiel $V(X, \mu)$ dont dérive $F(X, \mu)$, et soumise à des forces de frottement intenses f . L'équation du mouvement de la particule s'écrit:

$$\frac{d^2X}{dt^2} = -f \frac{dX}{dt} - \frac{\partial V}{\partial X}(X, \mu) \quad (2.4)$$

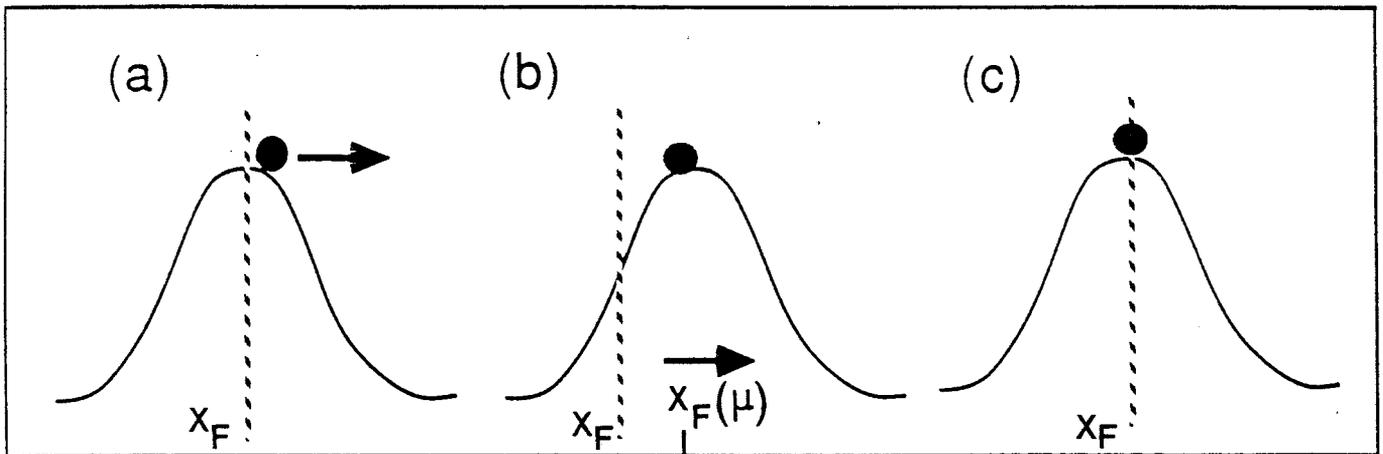


Fig. 2.2. Interprétation en terme de déplacement du point fixe. (a) système initial possédant un point fixe en $X_F = X_F(\mu_0)$, (b) la contre-réaction déplace le point fixe de manière à ce que la position du système se trouve toujours entre X_F et $X_F(\mu)$, (c) lorsque $t \rightarrow \infty$, $X(t) \rightarrow X_F(\mu_0)$.

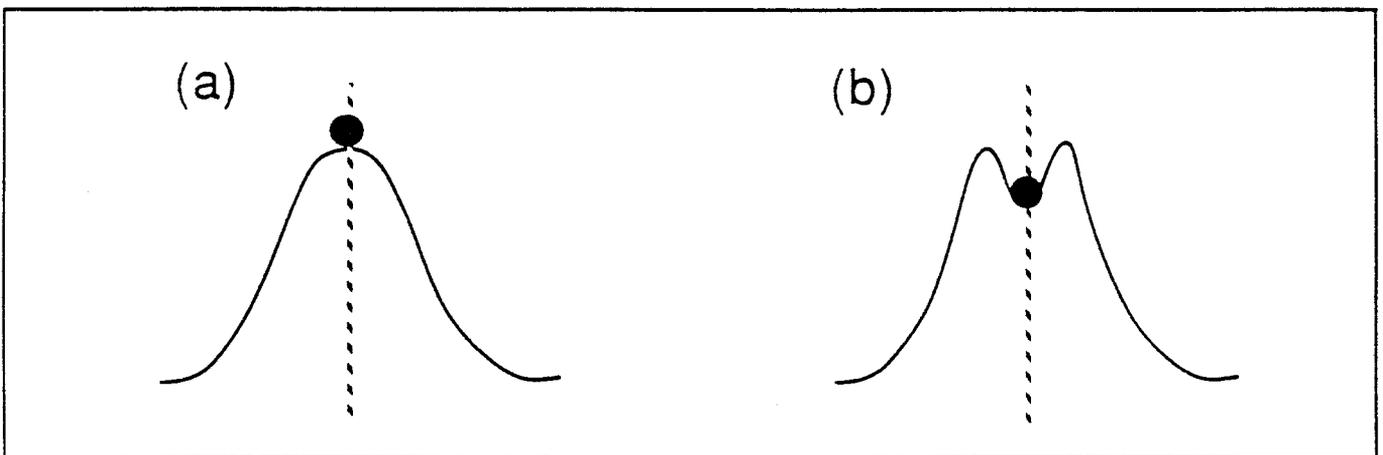


Fig. 2.3. Interprétation consistant à considérer la transformation du système initial instable (a) en un nouveau système formé du système initial et de la contre-réaction (b).

dans le cas $f \gg \frac{\partial V}{\partial X}$, elle devient:

$$\dot{X} = -\frac{\partial V}{\partial X}(X, \mu_0) \quad (2.5)$$

où \dot{X} est la dérivé de X par rapport au temps normalisé $\tau = ft$

Au voisinage du point fixe instable X_F , le potentiel $V(X, \mu_0)$ présente un maximum (fig. 2.1a). L'idée la plus simple est d'appliquer une correction au paramètre de contrôle μ du type $\mu(t) = \mu_0 + p(t)$ avec $p(t) = \alpha(X - X_F)$ pour stabiliser le point fixe instable. La stabilité du système avec contre-réaction (2.2) s'étudie en considérant la dynamique locale autour de X_F . La perturbation restant petite lorsque X est voisin de X_F , sa présence équivaut à introduire un terme supplémentaire dans (2.5) :

$$\dot{X} = -\frac{\partial V}{\partial X}(X, \mu_0) + \alpha h(X - X_F) \quad (2.6)$$

L'analyse de stabilité linéaire requiert également la linéarisation du terme $(\partial V/\partial X)$, cependant cette forme de l'équation d'évolution peut déjà donner lieu à une interprétation du terme supplémentaire $\alpha h(X - X_F)$. Si $\alpha h < 0$, ce terme $\alpha h(X - X_F)$ correspond à une force de rappel élastique de raideur $K = -\alpha h$. Par conséquent on conçoit bien qu'il soit possible de stabiliser le point fixe X_F si la raideur K est suffisamment importante (fig. 2.1b).

Plus précisément, la linéarisation complète de (2.6) donne la condition de stabilité suivante:

$$K = -\alpha h \geq -\frac{\partial^2 V}{\partial X^2}(X, \mu_0)$$

REMARQUE:

L'interprétation en terme de force de rappel n'est pas la seule possible. En particulier, on peut donner une interprétation dérivée de celle donnée pour la stabilisation d'orbites instables [Ott *et al.*, 1990]. Elle consiste à considérer le déplacement du point fixe avec le paramètre de contrôle. De ce point de vue, l'objectif de la correction est de déplacer le point fixe $X_F(\mu)$ de façon à repousser constamment la particule vers le point fixe X_F (correspondant à $\mu = \mu_0$) (fig. 2.2). On peut également considérer que nous avons transformé le système initial (sans contre-réaction, fig. 2.3a) en un système différent (le système avec contre-réaction) possédant un point fixe stable en $X = X_F$ (fig. 2.3b).

Dans le cas général d'une évolution dans un espace de dimension $d \geq 1$, nous allons utiliser la base des vecteurs propres de λ pour analyser la stabilité du point fixe. Les vecteurs propres associées aux valeurs propres instable λ_u et stables λ_{si} seront notés respectivement \mathbf{e}_u et \mathbf{e}_{si} .

La stratégie consiste à mesurer la projection du vecteur $\mathbf{X}(t)$ décrivant l'état du système sur le vecteur \mathbf{e}_u , et à appliquer la contre-réaction suivante :

$$p(t) = \alpha (\mathbf{e}_u \cdot \boldsymbol{\xi}(t)) \quad (2.7)$$

L'équation du système avec contre-réaction s'écrit alors

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, \mu_0 + \alpha(\mathbf{e}_u \cdot \boldsymbol{\xi})) \quad (2.8)$$

La stabilité du point fixe du système avec contre-réaction est déterminée en linéarisant l'équation (2.8) au voisinage de \mathbf{X}_F :

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\xi}} &= \lambda \boldsymbol{\xi} + \alpha(\mathbf{e}_u \cdot \boldsymbol{\xi}) \mathbf{h} \\ &= \Lambda(\alpha) \boldsymbol{\xi} \end{aligned} \quad (2.9)$$

avec $\Lambda(\alpha) = \lambda + \alpha(\mathbf{h}' \cdot \mathbf{e}_u)$

et \mathbf{h}' le vecteur contravariant associé à \mathbf{h} .

La stabilisation de \mathbf{X}_F est réalisée si toutes les valeurs propres de $\Lambda(\alpha)$ sont de partie réelle négative. Le fait que la contre-réaction $\alpha(\mathbf{e}_u \cdot \boldsymbol{\xi})$ ne dépende pas des composantes de $\boldsymbol{\xi}$ selon les directions stables entraîne que les valeurs propres stables λ_{si} de λ sont encore des valeurs propres de $\Lambda(\alpha)$. Le problème se réduit donc à l'étude du signe de l'unique valeur propre $\Lambda_u(\alpha)$ de $\Lambda(\alpha)$ affectée par la contre-réaction:

$$\Lambda_u(\alpha) = (\lambda_u + \alpha h_u) \quad \text{avec } h_u = \mathbf{e}_u \cdot \mathbf{h} \quad (2.10)$$

Le point fixe est stable lorsque la valeur propre $\Lambda_u(\alpha)$ est négative. Par conséquent, la condition de stabilité du point fixe \mathbf{X}_F du système avec contre-réaction s'écrit: $\alpha h_u < -\lambda_u$.

La stabilisation du point fixe \mathbf{X}_F est donc toujours possible si les deux conditions suivantes sont réalisées. La première condition nécessaire est la

possibilité d'agir sur un paramètre de contrôle adapté (tel que h_u est non nul), c'est-à-dire tel qu'une modification du paramètre entraîne un déplacement du point fixe dans une direction possédant une composante non-nulle selon la direction instable. Il faut remarquer le caractère très peu restrictif de cette condition qui implique que la stabilisation est génériquement possible.

Il faut également appliquer une contre-réaction adaptée, ceci suppose que l'on soit capable de mesurer certaines caractéristiques du système. Si on peut déterminer la composante instable ($e_u \cdot \xi$) de l'écart entre la position du système dans l'espace des phases et celle du point fixe, on peut alors stabiliser le point fixe en appliquant une contre-réaction proportionnelle à cette valeur.

La possibilité de stabiliser des points fixes de type col a été démontrée expérimentalement dans le cas du point fixe instable apparaissant dans un bistable chimique [Zimmermann et al., 1984; Kramer & Ross, 1985] et un bistable optique [Mackee et al., 1992].

2.1.1.C. STABILISATION D'UN FOYER INSTABLE

Ce type de point fixe est caractérisé par une paire de valeurs propres $\lambda_{u\pm}$ complexes conjuguées et de partie réelle positive. On rencontre les foyers instables dans les nombreux systèmes se déstabilisant par bifurcation de Hopf. En particulier, dans l'approximation semi-classique, un foyer instable apparaît au seuil d'oscillation laser lorsque l'on néglige l'émission spontanée.

Le sous espace propre P_u qui est associé aux valeurs propres instables possède deux dimensions. Nous supposons qu'il est possible de projeter le vecteur représentant l'état du système X sur un vecteur e_1 appartenant à ce plan. La base dans laquelle nous travaillerons sera $(e_1, e_2, \dots, e_{s_i})$ où e_2 est un autre vecteur du plan P_u . Les vecteurs e_{s_i} sont, comme précédemment, les vecteurs propres correspondant aux valeurs propres stables λ_{s_i} et appartiennent à l'espace orthogonal à P_u .

La méthode décrite précédemment consistant à appliquer une correction proportionnelle à $e_1 \cdot \xi$ (avec $\xi = (X - X_F)$) ne permet pas la stabilisation du point fixe dans tous les cas. En particulier, cette méthode s'est révélée parfaitement inefficace dans le cas de notre laser à fibre. La stabilisation du point fixe requiert donc une contre-réaction d'un type différent. Plusieurs stratégies sont possibles comme l'introduction d'un retard dans la contre-réaction. Nous avons choisi d'appliquer une combinaison linéaire de $e_1 \cdot \xi$ et de sa dérivée, l'avantage de cette solution apparaîtra clairement lors de son application aux laser instables.

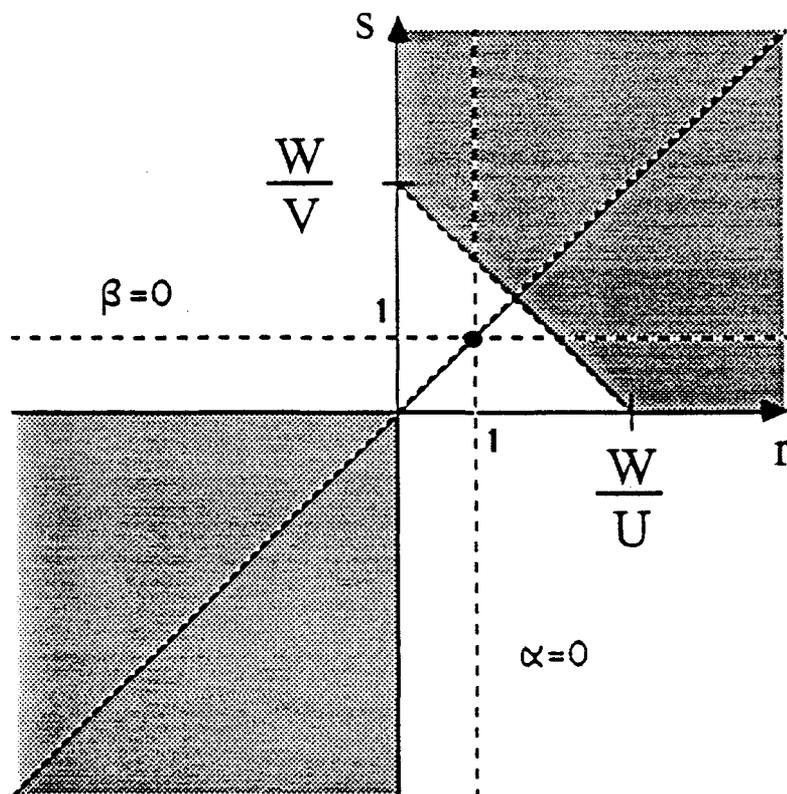


Fig. 2.4. Domaine de valeurs de (r, s) assurant la stabilisation dans le cas $A \neq 0$, $h_1 \neq 0$ et $V > 0$.

L'efficacité de cette méthode peut être testée *a priori* en effectuant l'analyse de stabilité du système linéarisé :

$$\dot{\xi} = \lambda \xi + (\alpha e_1 \cdot \xi + \beta e_1 \cdot \dot{\xi}) h \quad (2.11)$$

Dans un premier temps, nous allons déterminer l'ensemble des valeurs de α et β qui permettent la stabilisation du point fixe. Ensuite, nous considérerons des valeurs de α et β présentant un intérêt particulier. Nous déterminerons celles permettant une interprétation simple du mécanisme de stabilisation. Ensuite, nous traiterons les cas extrêmes d'une stabilisation par une correction proportionnelle à $e_1 \cdot \xi$ ou à sa dérivée.

• *Détermination du domaine de paramètres (α , β) assurant la stabilisation:*

Comme dans le cas de la stabilisation d'un col instable, la correction ne dépend pas de l'évolution du système selon les directions stables, et les valeurs propres stables λ_{si} sont encore des valeurs propres du système (2.11). L'analyse de stabilité linéaire du point fixe se réduit donc à celle du système suivant :

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \lambda_{11} \xi_1 + \lambda_{12} \xi_2 + h_1 (\alpha \xi_1 + \beta \dot{\xi}_1) \\ \dot{\xi}_2 &= \lambda_{21} \xi_1 + \lambda_{22} \xi_2 + h_2 (\alpha \xi_1 + \beta \dot{\xi}_1) \end{aligned} \quad (2.12)$$

où $\xi_i = e_i \cdot \xi$, $h_i = e_i \cdot h$ et λ_{ij} sont les éléments de la matrice λ dans la base $(e_1, e_2, \dots, e_{si} \dots)$.

Le point fixe étant un foyer instable, la matrice λ vérifie les inégalités suivantes: $T > 0$, $D > 0$ et $T^2 < 4D$

$$\text{avec: } T = \lambda_{11} + \lambda_{22}, \quad D = \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{vmatrix}, \quad A = \begin{vmatrix} \lambda_{11} & h_1 \\ \lambda_{21} & h_2 \end{vmatrix}$$

avec ces notations, l'équation caractéristique du système (2.12) s'écrit:

$$(1 - h_1 \beta) \lambda^2 - [T + h_1 \alpha + A \beta] \lambda + (D - AD) = 0 \quad (2.13)$$

• lorsque $A \neq 0$ et $h_i \neq 0$:

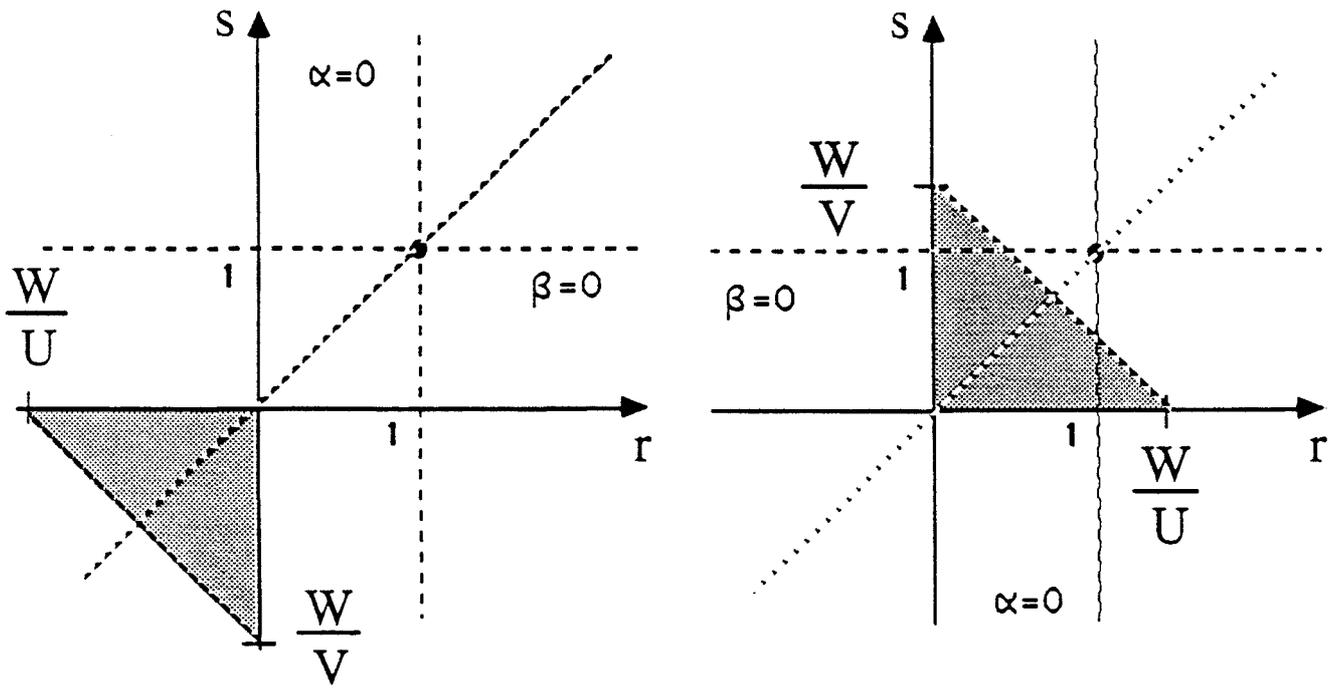


Fig. 2.5. Domaine de valeurs de (r, s) assurant la stabilisation dans le cas $A \neq 0, h_1 \neq 0$ et $V < 0$.

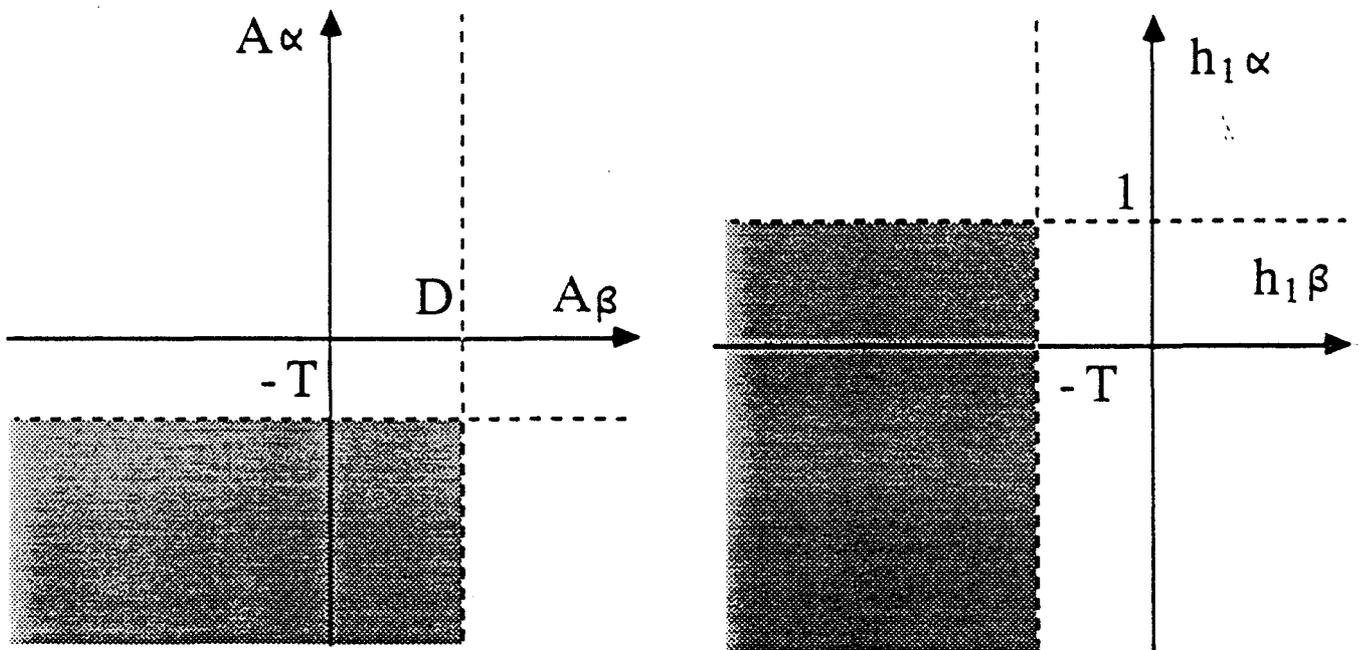


Fig. 2.6. Domaine de valeurs de (α, β) assurant la stabilisation dans les cas $h_1 = 0$ (a) et $A = 0$ (b).

il est judicieux de poser:

$$\begin{aligned} r &= 1 - \frac{A}{D} \alpha & U &= \frac{h_1 D}{A} \\ s &= 1 - h_1 \beta & V &= \frac{A}{h_1} \end{aligned} \quad (2.14)$$

et $W = U + V + T$

L'équation caractéristique s'écrit alors :

$$s \lambda^2 + [Ur + Vs - W] \lambda + r = 0 \quad (2.15)$$

Le point fixe est stable uniquement si les parties réelles des deux solutions de cette équation sont négatives. Il suffit que r , $[Ur + Vs - W]$ et s soient de même signes. Le domaine de valeurs dans lequel r et s (i.e., α et β) doivent être choisis, dépend qualitativement des signes de V et W :

(1) Si $V > 0$, alors U et W sont également positifs. Le domaine de stabilité du système avec contre-réaction est représenté sur la figure 2.4.

(2) Si $V < 0$, deux cas peuvent se présenter selon le signe de W (fig. 2.5a et 2.5b).

• le cas $h_1 = 0$ est traité en étudiant le domaine de valeurs de $(A\alpha, A\beta)$ correspondant à la stabilisation (fig. 2.6a).

• Dans le cas $A = 0$, le domaine de stabilité du point fixe est celui représenté sur la figure 2.6b.

La stabilisation d'un foyer instable (pour lequel toutes les valeurs propres sont de partie réelle positive excepté deux, complexes-conjuguées) est donc toujours possible si les deux conditions suivantes sont réunies.

Il est nécessaire – comme dans le cas de la stabilisation d'un col – d'avoir accès à un paramètre de contrôle adapté. Une modification du paramètre doit induire un déplacement du point fixe ayant une composante non nulle selon les directions instables (h_1 et h_2 ne doivent pas être simultanément nuls).

Lorsque ceci est réalisé, la stabilisation est toujours possible si l'on est de plus capable de mesurer une variable indépendante de l'évolution selon les directions stables (et qui dépend de l'évolution selon les directions instables).

· *Interprétation:*

On peut donner une interprétation simple du mécanisme de stabilisation d'un foyer instable en considérant le système (2.12) comme un oscillateur forcé d'équation :

$$\ddot{\xi}_1 - T \dot{\xi}_1 + \omega_0^2 \xi_1 = Ap + h_1 \dot{p} \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = D \quad (2.16)$$

L'application d'une modulation sinusoïdale au paramètre p à la fréquence de résonance ω_0 de l'oscillateur provoque une oscillation de la variable observée ξ_1 déphasée d'un retard φ tel que:

$$\tan \varphi = \frac{A}{\omega_0 h_1} \quad (2.17)$$

En plus de la réponse du système à la modulation, l'instabilité du système fait naître une oscillation exponentiellement croissante à la fréquence

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - T^2/4} \quad \text{proche de} \quad \omega_0 \quad \text{si} \quad T \ll \omega_0. \quad (2.18)$$

Pour stabiliser le système, on peut choisir α et β de façon à ce qu'une oscillation de ξ_1 à la fréquence ω_0 induise une $p(t)$ déphasée de φ en avance par rapport à ξ_1 . Intuitivement, ceci revient à forcer le système à réagir en opposition de phase avec ses propres oscillations. Cette situation correspond au choix suivant de α et β :

$$h_1 \beta = \frac{A}{D} \alpha \quad (2.19)$$

Ceci revient à prendre $r = s$ lorsque $h_1 \neq 0$ et $A \neq 0$, i.e, choisir un point de la première bissectrice dans les figures 2.4, 2.5a et 2.5b. Lorsque $A = 0$, le déphasage correspondant est nul et $\beta = 0$ (fig. 2.6b) ; lorsque $h_1 = 0$, le déphasage φ est égal à $\pi/2$ et on choisit $\alpha = 0$ (fig. 2.6a). On vérifie donc que cette stratégie conduit effectivement à la stabilisation du point fixe dans tous les cas.

· *Cas particuliers* $\alpha = 0$ et $\beta = 0$:

Les situations correspondant à $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$ présentent des avantages particuliers étant donné la facilité avec laquelle elles peuvent être mises en oeuvre. Elles conduisent à une réduction du nombre de paramètres à ajuster, ceci est intéressant lorsqu'on désire rechercher les paramètres de la contre-réaction de manière empirique, sans calcul préliminaire.

De ce point de vue, il est également intéressant de remarquer que la situation $\alpha = 0$ est préférable à la situation $\beta = 0$. En effet, la dernière correspond à l'application d'une correction dépendant de l'écart entre la position \mathbf{X} et celle du point fixe \mathbf{X}_F et nécessite de ce fait la connaissance de \mathbf{X}_F ; par contre, la situation $\beta = 0$ correspond à l'application de la dérivée de $\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{X}_F)$ et ne dépend donc pas de \mathbf{X}_F .

L'examen des diagrammes représentant la stabilité du point fixe (fig. 2.4, 2.5 ou 2.6 selon la situation) permet de conclure immédiatement quant à l'efficacité d'une contre-réaction telle que $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$. Il suffit de vérifier si les droites correspondant à $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$ traversent le domaine de stabilité :

– Une correction proportionnelle à ξ_1 ($\beta = 0$) est efficace dans les cas suivants:

- $A/h_1 > 0$
- $A = 0$
- $A/h_1 < 0$ et $-AT/h_1 < D$

– Une correction proportionnelle à $\dot{\xi}_1$ ($\alpha = 0$) est efficace dans les cas suivants:

- $A/h_1 > 0$
- $h_1 = 0$
- $A/h_1 < 0$ et $-AT/h_1 > D$

– Une correction proportionnelle à une combinaison linéaire de ξ_1 et $\dot{\xi}_1$ ($\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$) n'est nécessaire que dans le cas où on a simultanément*

- $A/h_1 < 0$ (cas de la figure 2.5)

et $T^2 > D$, $T^2 < -TA/h_1 < D$. Cette situation ne peut se présenter que lorsque le taux de divergence T est comparable à la fréquence de l'instabilité $\omega_0 = \sqrt{D - T^2/4}$, ceci peut survenir lorsque le système se trouve loin d'une bifurcation de Hopf.

* Ces valeurs définissent les positions relatives du point de coordonnées (1,1) et du domaine de stabilité dans la figure 2.5. Une stabilisation par ξ_1 ou $\dot{\xi}_1$ est impossible si $1 > W/U$ et $1 > W/V$.

En conclusion, il est génériquement possible de stabiliser un foyer instable par application d'une contre-réaction sur un paramètre de contrôle. Une stratégie efficace consiste à appliquer une correction égale à une combinaison linéaire d'une variable dynamique ξ_1 et de sa dérivée, $\dot{\xi}_1$ ne dépendant que de l'évolution du système selon les directions instables.

De plus, il existe un large domaine de combinaisons linéaires permettant la stabilisation. En particulier, une contre-réaction proportionnelle à ξ_1 ou à sa dérivée est généralement efficace (excepté lorsque le taux de divergence associé à l'instabilité est comparable à la fréquence de l'instabilité).

2.1.1.D. UN CAS SIMPLE: LE LASER A PERTES NON LINEAIRES

La méthode de stabilisation des foyers instables doit être applicable aux nombreux lasers se déstabilisant par bifurcation de Hopf (dont notre laser à fibre). Aussi est-il intéressant d'analyser le cas de la stabilisation d'un système laser particulier possédant un caractère relativement générique: le laser de classe B à deux niveaux dont les pertes varient instantanément avec l'intensité. De telles pertes peuvent être dues à la présence d'un absorbant saturable rapide [Kurochkin *et al.*, 1993], ou des effets de diffraction dépendant de l'intensité [Lippi *et al.*, 1986]. Les équations de ces systèmes sont de la forme [Tredicce *et al.*, 1986].

$$\begin{aligned} \dot{I} &= f_I(I, D) \\ \dot{D} &= f_D(I, D, A) \end{aligned} \quad (2.20)$$

avec I l'intensité du laser, D l'inversion de population et A le taux de pompage du laser. On suppose qu'au-delà (ou en deçà) d'un seuil A_H , le système possède un foyer instable $X_F = (I_F, D_F)$.

On suppose que le paramètre sur lequel on peut agir est le paramètre de pompe A . Or, celui-ci est absent dans l'équation d'évolution de l'intensité, ceci entraîne que le système se trouve dans la situation " $h_1 = 0$ " décrite précédemment (fig. 2.6a).

Une correction proportionnelle à $I - I_F$ (i.e., telle que $\beta = 0$) est donc inefficace. Il convient d'utiliser une correction proportionnelle à la dérivée de l'intensité $p(t) = \beta \dot{I}$. On remarque que la condition sur β est très peu restrictive puisqu'elle est du type $\beta > \beta_c$ si $\lambda_{12} h_2 < 0$ et $\beta < \beta_c$ si $\lambda_{12} h_2 > 0$ avec

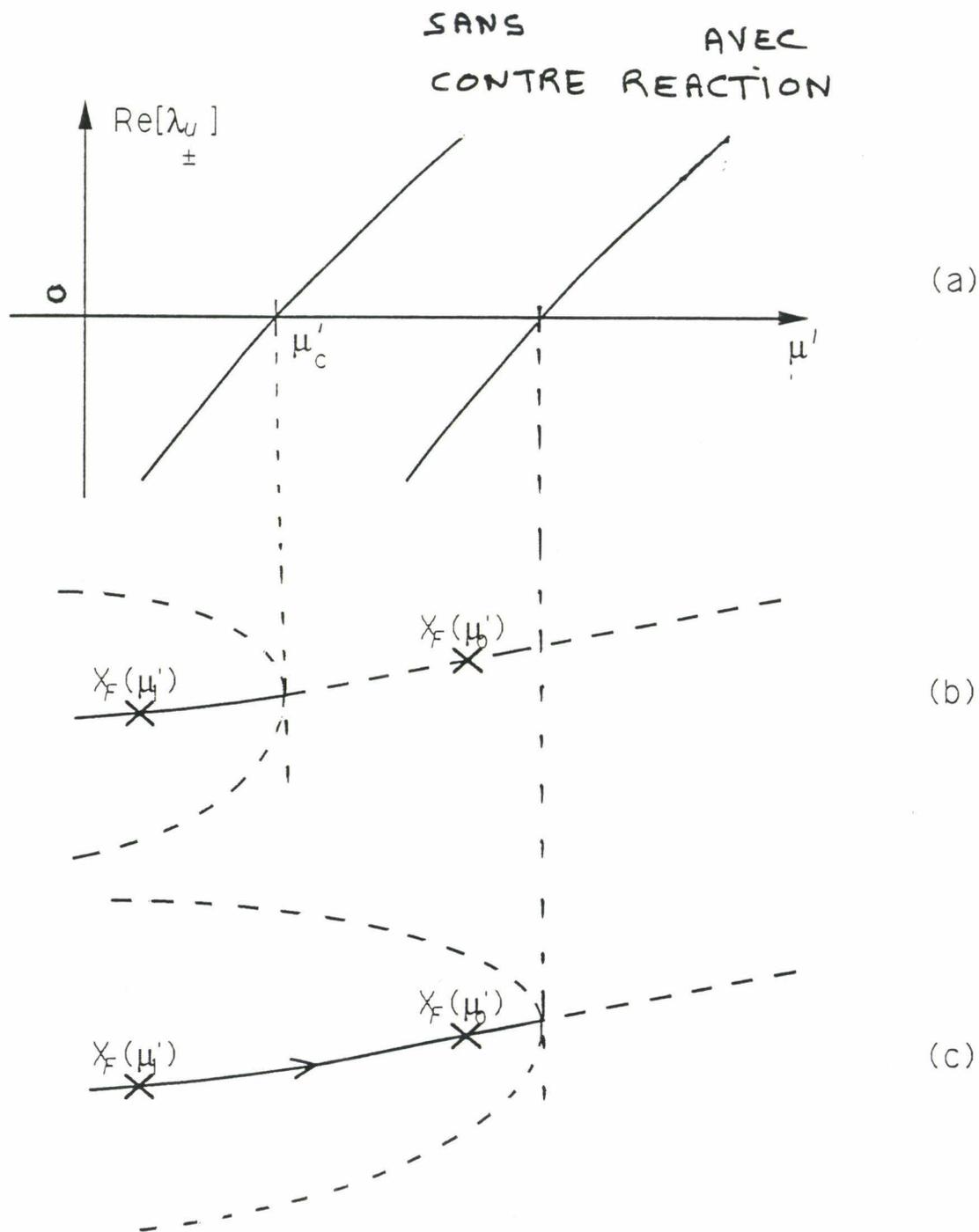


Fig. 8.

Fig. 2.8. Stabilisation d'un point fixe instable au voisinage d'une bifurcation de Hopf sous-critique.

(a) évolution de la partie réelle de la valeur propre liée à la bifurcation mettant en évidence le déplacement du point de bifurcation lors de l'application de la contre-réaction. (b) système initial.

Le point fixe que l'on désire stabiliser est $X_F(\mu'_0)$ et le point de départ est $X_F(\mu'_1)$.

La stratégie employée est la suivante: On part de la situation $\mu' = \mu'_1$ (b), on applique ensuite la contre-réaction (c), on balaye ensuite lentement le paramètre de contrôle jusqu'en μ'_0 (c).

$$\beta_c = \frac{\lambda_{11} + \lambda_{22}}{h_2 \lambda_{12}} \quad (2.21)$$

$$\lambda_{11} = \left(\frac{\partial f_I}{\partial I} \right)_D \quad \lambda_{22} = \left(\frac{\partial f_D}{\partial D} \right)_I \quad \text{et} \quad \lambda_{12} = \left(\frac{\partial f_I}{\partial D} \right)_I$$

(Les dérivées étant prises en $X = X_F$)

Expérimentalement, cette condition correspond au simple dépassement d'un seuil pour le gain du montage, et au choix d'un signe adéquat pour le gain. La stabilisation est donc rendue particulièrement facile puisqu'elle ne nécessite ni la connaissance de la dynamique locale autour du point fixe X_F , ni même la connaissance de X_F . La stabilisation doit pouvoir s'effectuer empiriquement en fixant un gain β arbitrairement grand. De plus, une fois stabilisé le point fixe peut être facilement suivi lorsque des paramètres de contrôle sont balayés.

2.1.1.E. REMARQUE SUR LA CONDITION INITIALE

Jusqu'à présent, nous avons établi des conditions permettant la stabilisation d'un état stationnaire. Toutefois, la stabilisation du système nécessite de plus une condition initiale qui se trouve dans le bassin d'attraction du point fixe stabilisé. Il peut arriver qu'à l'instant où la contre-réaction est appliquée, le point de l'attracteur sur lequel se trouve l'état du système est dans le bassin d'attraction du point fixe stabilisé. Dans ce cas, la stabilisation du système sur le point fixe est évidente.

Dans le cas contraire, il est nécessaire d'amener l'état du système dans le bassin d'attraction du point fixe. Une stratégie possible consiste à balayer un paramètre de contrôle μ' entre une valeur μ_1' pour laquelle l'état du système se trouve sur le point fixe stabilisé, et la valeur désirée μ_0' . Cette stratégie sera efficace si on ne rencontre aucune bifurcation du point fixe instable entre μ_1' et μ_0' (exceptée éventuellement une bifurcation de Hopf ou transcritique donnant naissance au point fixe instable à partir d'un point fixe stable). Deux situations peuvent alors se présenter:

- La contre-réaction stabilise la branche instable entre les valeurs μ_1' et μ_0' . Il suffit alors de balayer le paramètre de contrôle entre μ_1' et μ_0' , sans modifier la contre-réaction.

Ceci est réalisable en particulier au voisinage d'une bifurcation de Hopf ou transcritique. En effet, la partie réelle de la valeur propre λ_μ responsable de la

bifurcation passe par zéro au point de bifurcation μ'_c , et génériquement, sa dérivée en ce point n'est pas nulle. Par conséquent, l'application d'une contre-réaction telle que α et β soient convenablement choisis et restent faibles va déplacer le point de bifurcation de façon à étendre le domaine de stabilité du point fixe (fig. 2.8).

La stabilisation peut s'effectuer en partant du point fixe stable $X_F(\mu_1')$ avant la bifurcation, en appliquant la contre-réaction, puis en balayant le paramètre de contrôle jusqu'en μ_0' .

Dans les autres cas, on peut stabiliser chaque point de la branche instable entre μ_1' et μ_0' , mais on ne peut stabiliser la branche entière pour un ensemble de paramètres fixé ($\alpha, \beta, \epsilon_u, \dots$) du dispositif de contre-réaction. Il est alors nécessaire de modifier les paramètres de la contre-réaction au cours du balayage de $\mu' = \mu_1'$ à μ_0' . Les valeurs correctes des paramètres de la contre-réaction peuvent être déterminées automatiquement. Il suffit de les ajuster de façon à ce que le bruit présent dans le système soit constamment réduit au minimum [Gills *et al.*, 1992].

En conclusion, la stabilisation des états stationnaires de type col ou foyer instable peut être assurée par une contre-réaction sur un paramètre de contrôle. Cependant, la stabilisation d'un foyer instable peut demander une correction d'un type différent de celle utilisée classiquement pour la stabilisation des points de type col. Il est donc possible de stabiliser par cette technique des lasers instables comme certains lasers à fibre ou les lasers avec absorbant saturable.

Le choix convenable des paramètres de la contre-réaction peut s'effectuer de plusieurs manières. On peut les calculer en fonction des propriétés du point fixe. Par exemple, dans le cas des lasers se déstabilisant par bifurcation de Hopf, on peut déduire les caractéristiques approximatives du point fixe de celles du point fixe stable existant avant la bifurcation, par une simple extrapolation. Il doit ainsi être possible de stabiliser le point fixe instable dans un certain voisinage de la bifurcation.

Par contre, loin d'une bifurcation, il n'est pas évident d'accéder aux propriétés d'un point fixe instable. Cependant, s'il est possible de stabiliser le point fixe pour un ensemble donné de valeurs des paramètres (par exemple au voisinage d'une bifurcation), il est possible de stabiliser la branche instable qui passe par ce point. Il suffit de balayer un paramètre de contrôle et éventuellement d'ajuster les paramètres de la contre-réaction au cours du balayage.

Cependant, le résultat obtenu en considérant le modèle simple d'un laser monomode à deux niveaux dont les pertes varient avec l'intensité suggère que

dans de nombreux cas, on pourra s'affranchir de la détermination des propriétés du point fixe (comme les directions propres, nécessitant habituellement une reconstruction de la dynamique dans un espace de plongement).

De plus, la mesure d'une grandeur ξ_1 ne dépendant pas de l'évolution du système selon les directions stables est une condition suffisante mais non nécessaire. Lorsque la contre-réaction comporte une contribution selon les directions stables, l'application de la correction va changer la valeur propre instable et peut donc encore stabiliser le point fixe dans certain cas. Il faut que l'application de la contre-réaction ne change pas le signe des valeurs propres stables. Ceci sera possible en particulier dans le voisinage d'une bifurcation transcritique ou de Hopf.

2.1.2. Résultats expérimentaux

Nous avons remarqué que l'état stationnaire du laser oscillant spontanément se déstabilise par bifurcation de Hopf. Ceci assure l'existence d'un foyer instable au-delà de la bifurcation. Nous allons utiliser les résultats obtenus précédemment pour stabiliser ce foyer instable par application d'une contre-réaction sur la puissance de pompe du laser.

Une étude préliminaire de la dynamique au voisinage de la bifurcation nous permettra de déterminer le type de contre-réaction adéquat. Ensuite, nous entreprendrons l'étude de quelques propriétés dynamiques du laser inaccessibles jusqu'ici. En particulier, nous verrons que les renseignements qui peuvent être obtenus ne se limitent pas aux propriétés du point fixe mais concernent également des propriétés plus globales du système comme la trajectoire correspondant à une orbite instable.

2.1.2.A. CHOIX DE LA CONTRE-REACTION

· *Choix de la variable à utiliser (ξ_1) :*

Dans le cas du laser à fibre, il est possible de déterminer les propriétés du foyer instable juste après la bifurcation (directions propres) à partir des résultats obtenus dans la première partie. L'espace de plongement utilisé est (I_1, I_1, I_2, I_2) .

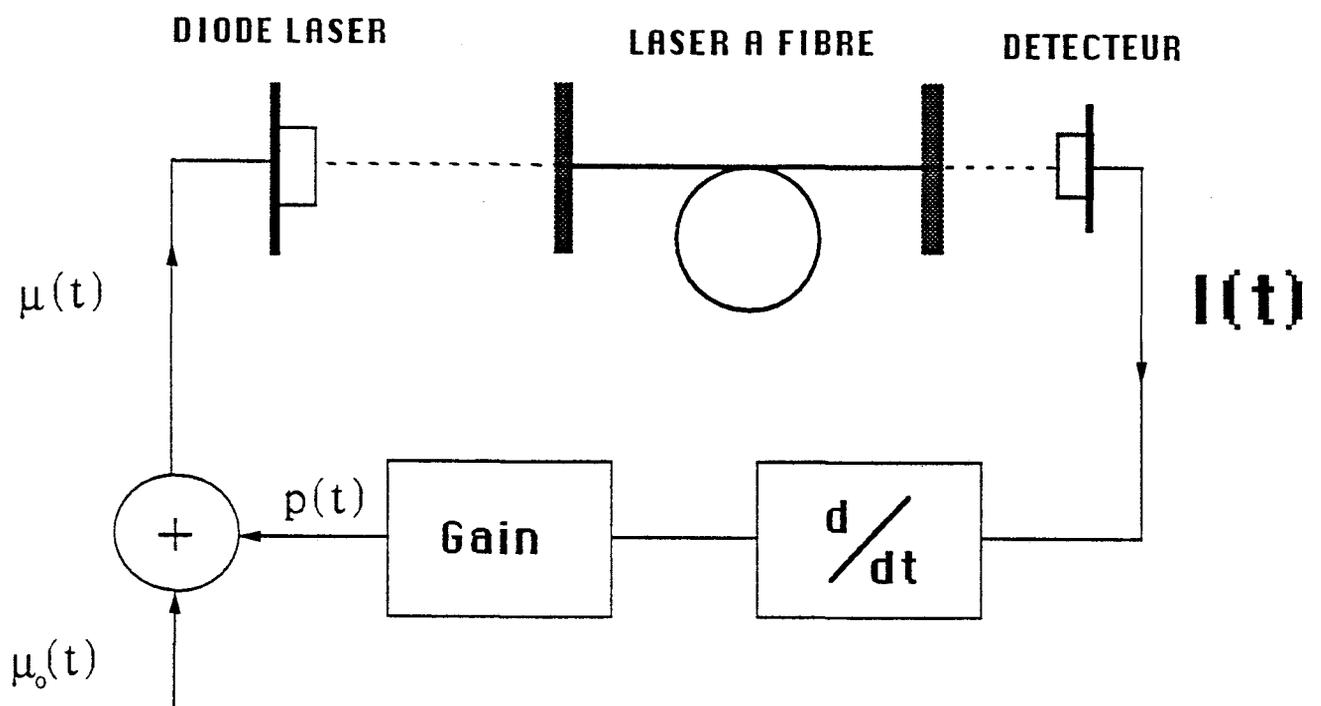


Fig. 2.9. Dispositif expérimental utilisé pour la stabilisation du foyer instable du laser à fibre. Le signal détecté passe par un dérivateur et un amplificateur à gain variable avant d'être ajouté au courant constant injecté dans la diode laser.

Nous avons vu dans le § 1.1.3 que la solution périodique à la fréquence ω_r apparaissant juste après la bifurcation de Hopf était caractérisée par une oscillation en phase selon les deux polarisations. Juste après la bifurcation, le plan P_u associé aux valeurs propres instables est donc défini approximativement par $(I_1 - I_2) = 0$ et $(\dot{I}_1 - \dot{I}_2) = 0$

D'autre part, l'étude de la réponse du laser après une perturbation de la puissance de pompe (§ 1.1.3 et 1.3) a mis en évidence une paire de valeurs propres stables de parties imaginaires ω_{lf} , correspondant à une oscillation en antiphase selon les deux polarisations. Juste avant la bifurcation, le plan P_s associé aux valeurs propres stables est donc défini par $(I_1 + I_2) = 0$ et $(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) = \text{constante}$. Par continuité, on en déduit que P_s est le plan associé aux valeurs propres stables du foyer instable (au voisinage de la bifurcation).

Il apparaît donc que l'intensité totale $I = (I_1 + I_2)$ ne contient pratiquement pas de contribution selon les directions stables. Par conséquent nous choisirons une contre-réaction dépendant uniquement de l'intensité totale $I = I_1 + I_2$ et de sa dérivée \dot{I} .

Influence du paramètre de contrôle (h) et choix de la combinaison linéaire

Il nous reste à déterminer la réponse du laser à une petite perturbation de la puissance de pompe, c'est-à-dire les valeurs de h_1 et h_2 définies précédemment. Nous pouvons la déduire de la réponse du laser à une petite modulation sinusoïdale juste avant la bifurcation de Hopf.

A la résonance, la réponse $I(t)$ est déphasée de $\pi/2$ en retard par rapport à la modulation. Ceci indique que nous sommes dans le cas " $h_1 = 0$ " (fig. 2.6a) (au moins dans un certain voisinage de la bifurcation), comme dans le cas du modèle simple présenté précédemment (§ 2.1.1.D).

Il est convenable donc d'utiliser une contre-réaction proportionnelle à la dérivée de l'intensité totale du laser. La puissance de pompe $P(t)$ prend alors la forme $P(t) = P_0 + p(t)$ avec $p(t) = \beta \dot{I}$, où P_0 est la puissance pour laquelle on désire stabiliser le point fixe.

2.1.2.B. STABILISATION DU LASER A FIBRE

La contre-réaction du type $p(t) = \beta \dot{I}$ peut être assurée par un dispositif particulièrement simple. Le signal détecté en sortie du laser est appliqué à un amplificateur à gain variable après inversion et dérivation (fig. 2.9). La correction ainsi obtenue est superposée au courant constant injecté dans la diode laser. Les

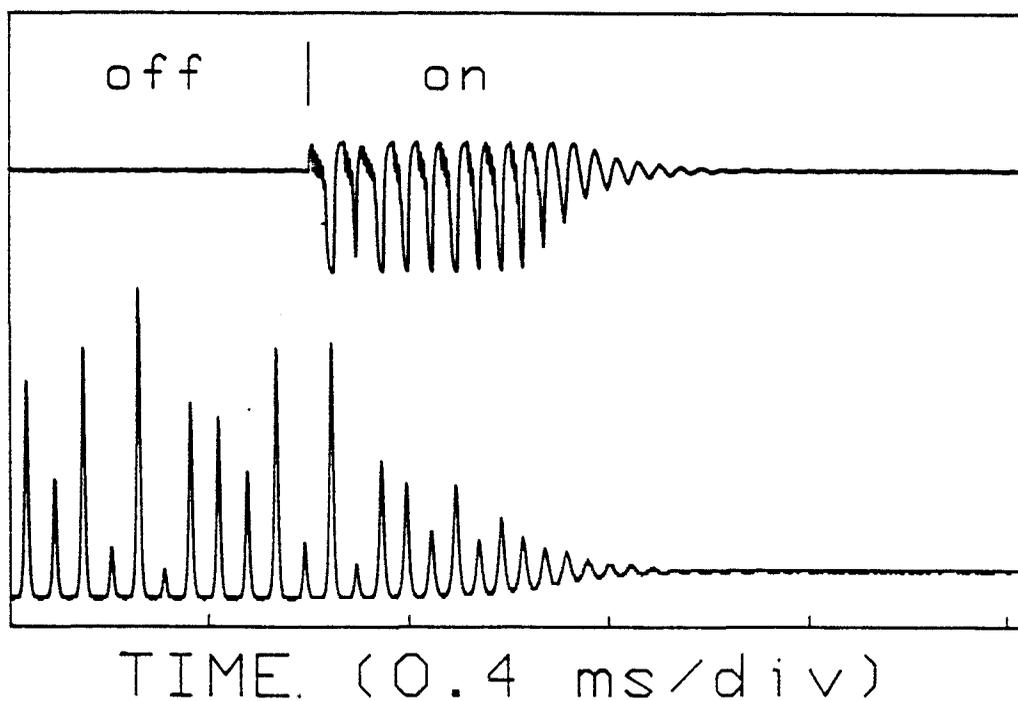


Fig. 2.10. Transitoire typique observé après application de la contre-réaction lorsque le laser se trouve initialement dans un régime chaotique. (a) puissance de pompe (dont les valeurs sont limitées par l'électronique). L'amplitude maximale représente 10% de la puissance de pompe moyenne (6.7 mW). (b) évolution de la puissance de sortie $I_2(t)$ du laser. Lorsque le laser est stabilisé, la correction tend vers zéro.

valeurs de la correction sont limitées en amplitude à $\pm 0,6$ mW par le circuit électronique de contre-réaction, soit typiquement 10 % de la puissance de pompe totale qui est limitée à 6 mW par le dispositif de protection de la diode laser (ces valeurs sont celles qui correspondent à une estimation des puissances injectées dans le coeur de la fibre et non aux puissances émises par la diode laser (voir § 1.1.1)).

La stabilisation de l'état stationnaire instable a été obtenue pour n'importe quelle situation expérimentale excepté pour des puissances de pompe proches de la valeur maximale, car les corrections positives du courant injecté sont alors limitées par le dispositif de protection de la diode laser. Pour obtenir la stabilisation, il suffit d'augmenter le gain β du dispositif jusqu'à une valeur de seuil β_c qui dépend de la puissance de pompe et des réglages de la cavité.

La valeur du gain β n'est pas un paramètre critique. elle peut être augmentée jusqu'à la valeur maximale du dispositif (plus de 10 fois la valeur du seuil β_c) sans compromettre la stabilisation. C'est d'ailleurs cette valeur maximale qui sera choisie en pratique. Le fait que l'augmentation progressive du gain permette la stabilisation du laser en partant de n'importe quelle situation montre que le système subit une bifurcation déstabilisant ou supprimant les attracteurs périodiques et chaotiques.

Lorsque que le système (sans contre-réaction) se trouve initialement dans un régime périodique ou chaotique, l'application soudaine de la correction stabilise également le foyer instable dans tous les cas. Un transitoire typique obtenu après application de la correction est représenté sur la figure 2.10. Lorsque le laser est stabilisé, la correction est nulle en valeur moyenne. Elle ne présente que des petites fluctuations (typiquement moins de 1 % de la puissance moyenne) dues aux bruits techniques présents dans le laser et l'électronique. Nous pouvons en conclure que l'état du système (c'est-à-dire l'ensemble de ses variables dynamiques : intensité de chaque mode, inversions de population) est identique à celui de l'état stationnaire instable du système sans contre-réaction. Seule sa stabilité est changée.

La méthode mise au point suppose que nous pouvons mesurer une variable dynamique ne dépendant pas de l'évolution du système selon les directions stables du point fixe.

Nous pouvons tester de manière simple, la robustesse du système stabilisé vis-à-vis d'une erreur sur la mesure de la projection, i.e., vis-à-vis de l'introduction de composantes stables dans ξ_1 . Il suffit de faire fonctionner le

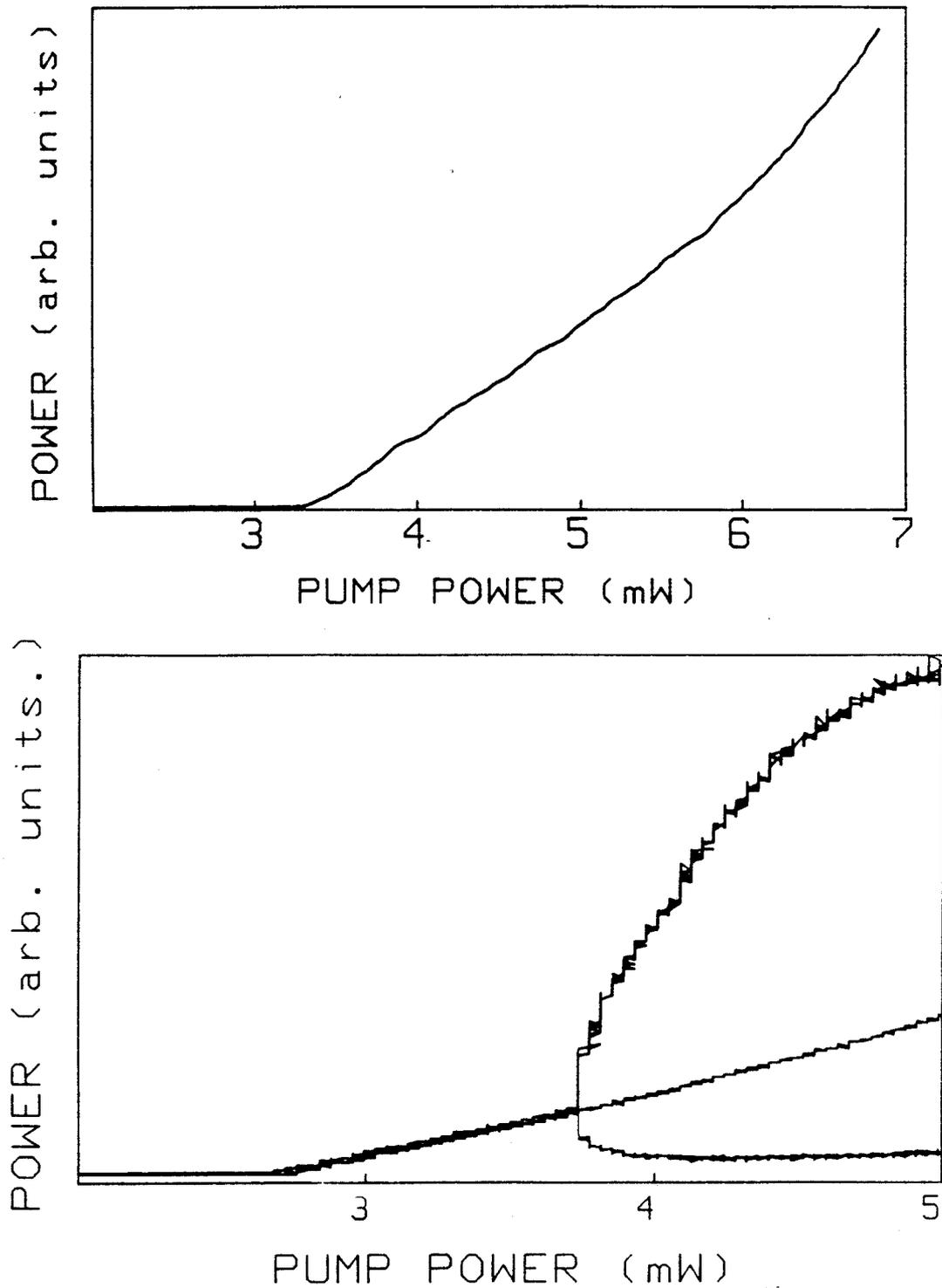


Fig. 2.11. (a) Puissance de sortie du laser stabilisé en fonction de la puissance de pompe P_0 . (b) superposition de l'intensité I_1 de l'état stationnaire stabilisé, et des valeurs minimales et maximales de $I_1(t)$ mesurées lorsque la correction n'est pas appliquée.

dispositif contre-réaction en plaçant un polariseur devant le détecteur, l'intensité détectée est alors $\xi_1 = xI_1 + yI_2$ avec x et y positifs, ceci revient à superposer une composante stable ($I_1 - I_2$) à la composante instable $I = I_1 + I_2$. Le système fait preuve d'une robustesse remarquable puisque les résultats présentés précédemment sont valables pour toutes les orientations du polariseur, même dans les cas extrêmes où l'on détecte I_1 ou I_2 .

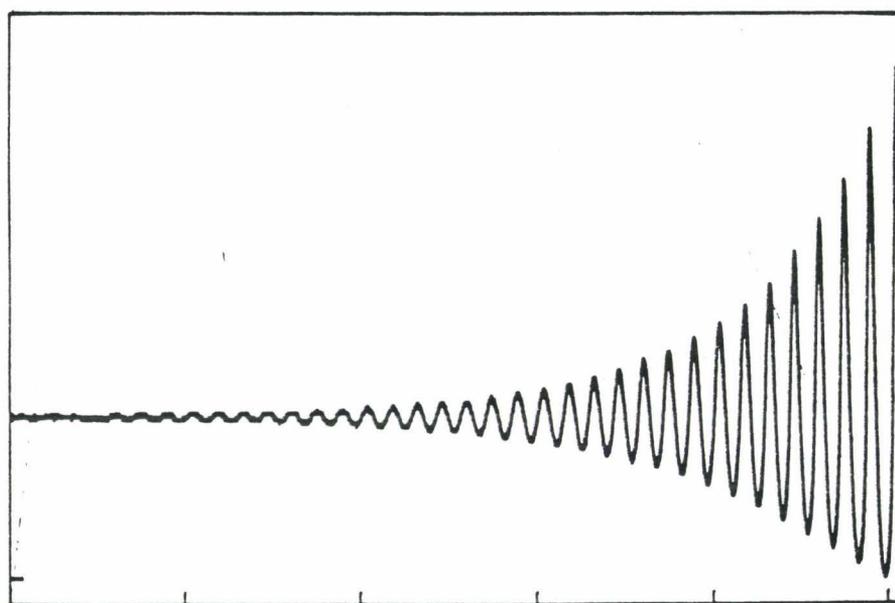
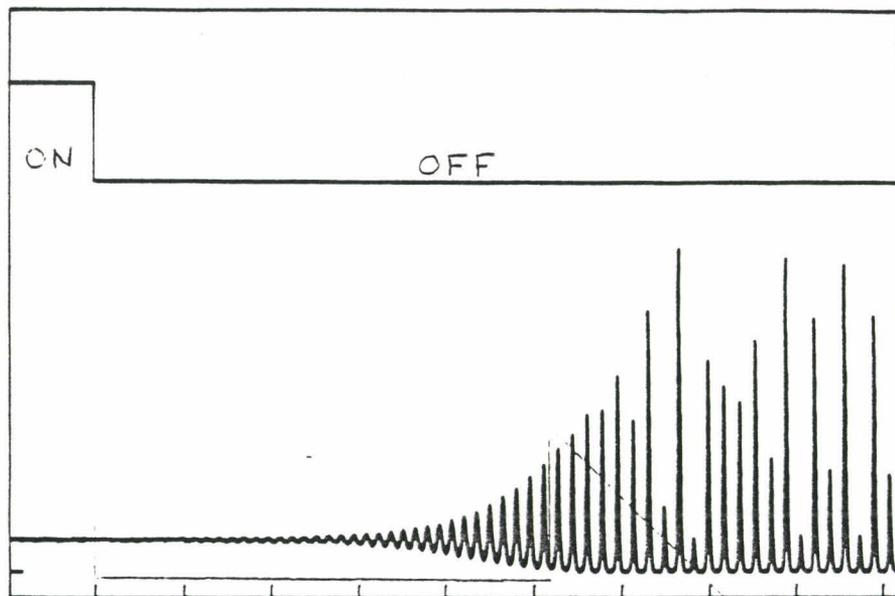
Par nature, un dérivateur introduit un bruit important. Cependant, dans notre cas, le bruit observé sur l'intensité de sortie reste comparable à celui observé sur l'état stationnaire du laser stable. Ceci s'explique par le fait que le laser avec contre-réaction se comporte comme un filtre passe-bande à bande étroite centrée sur une fréquence voisine de celle de l'instabilité, le spectre du bruit créé par le dérivateur étant concentré sur des fréquences élevées par rapport à celle de l'instabilité.

Toutefois, dans les applications où la réduction du bruit est un des objectifs principaux, le dérivateur peut être remplacé par un dispositif utilisant des retards variables, par exemple effectuant une opération du type $p(t) = \beta [I(t-\tau) - I_F]$ ou $p(t) = \beta [I(t-\tau) + I(t)]$. Dans ce cas, il faut vérifier que les retards sont suffisamment faibles afin d'éviter une instabilité liée à la présence d'une réaction retardée [Zimmermann *et al.*, 1984; Mees, 1986].

2.1.2.C. ETUDE DE L'ETAT STATIONNAIRE

Le fait que la position du point fixe X_F n'apparaisse pas explicitement dans le calcul analogique de la correction permet de stabiliser l'état stationnaire tout en balayant lentement un paramètre de contrôle, sans qu'il soit nécessaire de connaître la position du point fixe *a priori*. Par conséquent, nous pouvons facilement accéder aux propriétés de l'état stationnaire et à leur dépendance avec la puissance de pompe.

Le résultat obtenu de la manière la plus directe est la dépendance de la puissance totale émise par le laser stabilisé en fonction de la puissance de pompe. Les courbes obtenues sont d'allure approximativement linéaire, excepté pour les puissances de pompe élevées. L'exemple typique présenté sur la figure 2.11a correspond à une situation pour laquelle le diagramme de bifurcations du laser sans contre-réaction est semblable à celui présenté sur la figure 1.24. La figure 2.11b représente l'intensité correspondant à l'état stationnaire au voisinage de la



0.4 ms/div

Fig. 2.12. (a) Régime transitoire observé lorsque la correction est supprimée, (b) agrandissement de la partie de la courbe (a) située entre les deux flèches.

bifurcation de Hopf, ainsi que les valeurs maximales et minimales de l'intensité du laser non stabilisé.

La méthode de stabilisation permet également de préciser la dynamique locale autour du point fixe X_F . Ceci devrait permettre de tester la validité des modèles théoriques de lasers instables qui pourront être mis au point par la suite. En effet, les mesures ainsi effectuées peuvent être comparées directement à des résultats d'analyse de stabilité linéaire.

Entre le seuil du laser et la bifurcation de Hopf, le laser est stable et une perturbation de la puissance de pompe est suivie d'oscillations amorties. D'autre part, au delà de la bifurcation de Hopf, la suppression de la contre-réaction est suivie d'une croissance exponentielle des oscillations de relaxation (fig. 2.12), le coefficient d'amortissement et la fréquence des oscillations correspondent aux parties réelles et imaginaires des valeurs propres $\lambda_{u\pm}$ liées à l'instabilité.

La dépendance de $\text{Re} [\lambda_{u\pm}]$ avec la puissance de pompe est représentée figure 2.13b. Comme attendu, la bifurcation de Hopf s'accompagne d'un changement de signe de la partie réelle de $\lambda_{u\pm}$. Le carré de la fréquence de relaxation $\omega_r^2 = \text{Im}^2(\lambda_u)$ (fig. 2.13a) présente une dépendance linéaire avec la puissance de pompe, tant que celle-ci reste faible.

L'étude des régimes d'oscillations spontanées (§ 1.3) a révélé un changement progressif du spectre du laser lorsque la puissance augmente au-delà de la bifurcation de Hopf. Le spectre passe d'une structure formée de pics à une structure "lisse" (fig. 2.14a).

Or, le point fixe stabilisé coïncide avec le foyer instable du laser sans contre-réaction : les différentes variables dynamiques caractérisant les deux points fixes sont identiques. Ceci est vrai pour les variables prises en compte jusqu'à présent (les intensités émises selon les deux états propres de polarisation), mais également pour les variables associées à chacun des nombreux modes du laser (intensités, termes d'inversion de population...).

L'étude du spectre du laser stabilisé précise donc la position du foyer instable dans l'espace des phases du laser, en peut donner théoriquement accès aux l'intensité des différents modes, et pratiquement au "spectre de l'état stationnaire stabilisé" (fig. 2.14a).

La différence entre la structure du spectre de l'état stationnaire instable (fig. 2.14b) et celle du spectre observé lorsque la contre-réaction est coupée (fig. 2.14a) amène un certain nombre de questions. La première concerne évidemment l'évolution temporelle des intensités des différents modes lorsque

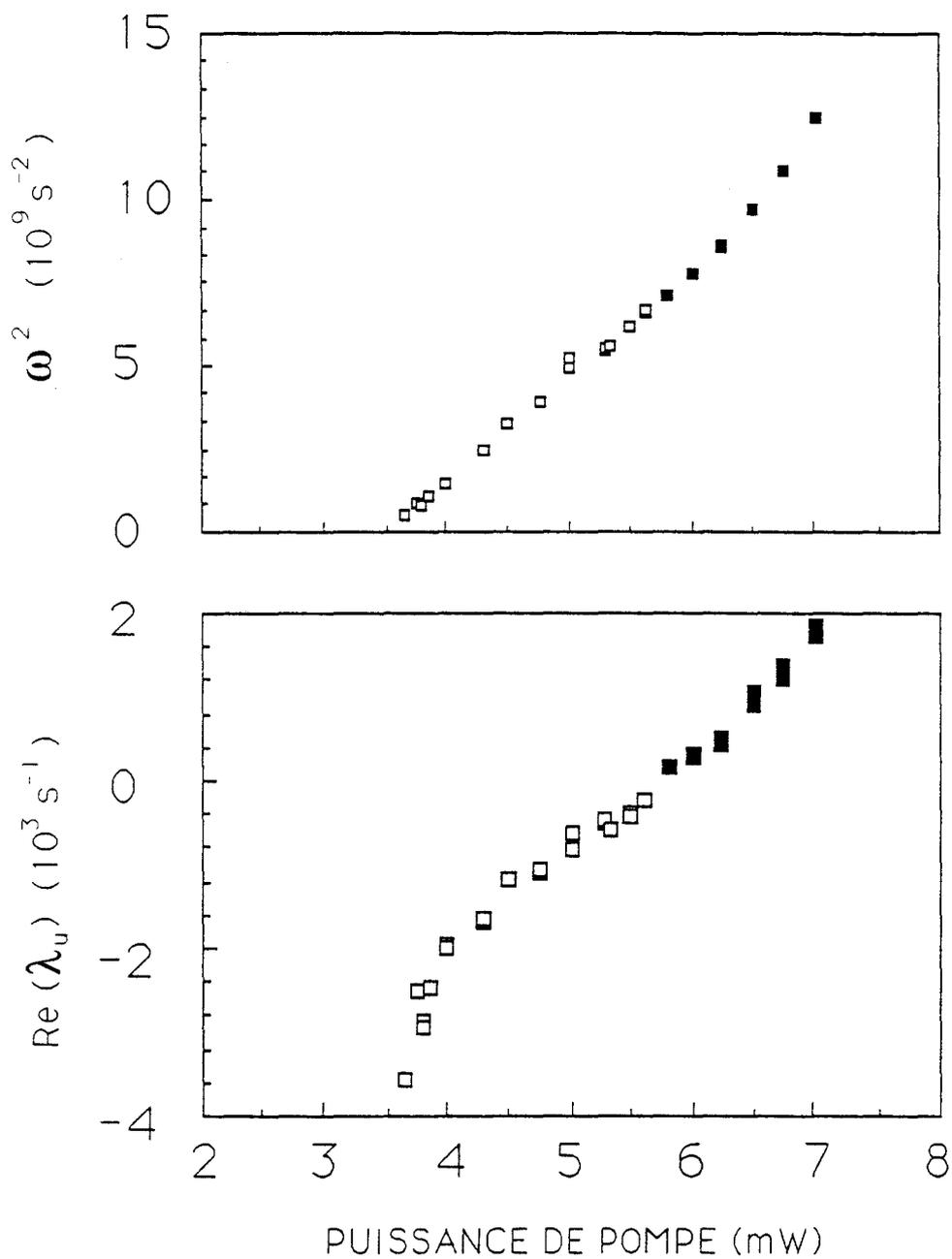


Fig. 2.13. (a) Evolution des carrés des fréquences associées aux transitoires en fonction de la puissance de pompe, (b) évolution du coefficient de croissance exponentielle. XX Les carrés pleins correspondent aux mesures effectuée après la bifurcation de Hopf ($P_H = 5.4 \text{ mW}$).

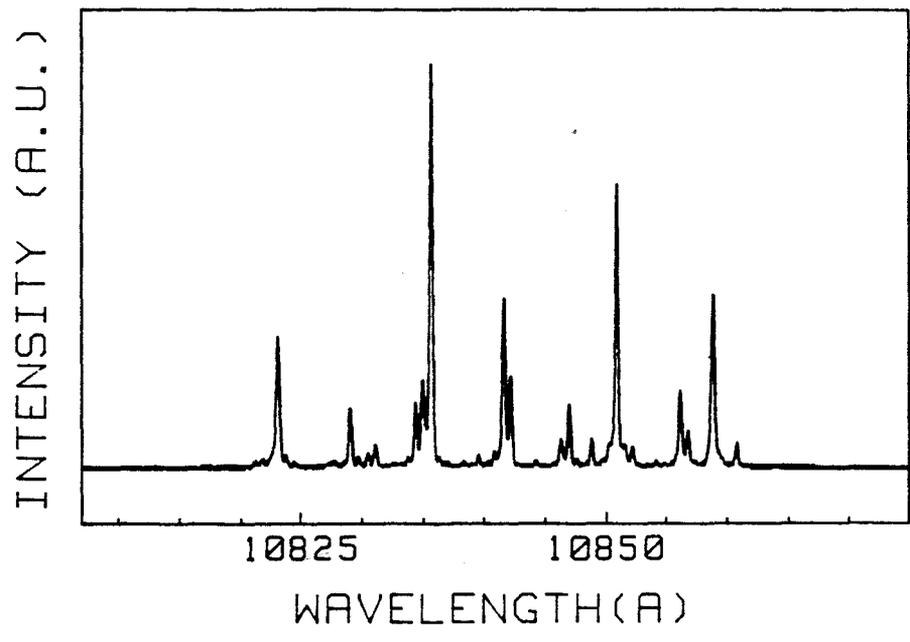
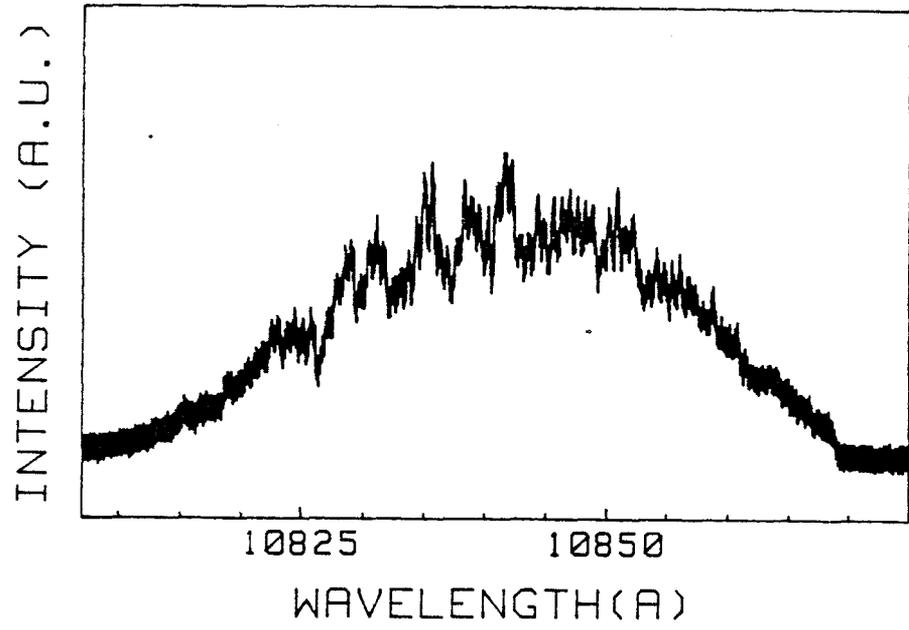


Fig. 2.14. (a) Spectre (intégré dans le temps) du laser oscillant spontanément, (b) spectre du laser stabilisé.

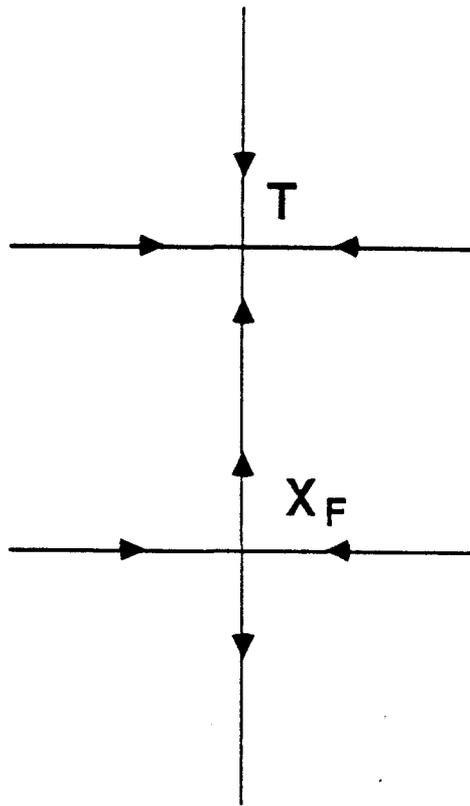


Fig. 2.15. Représentation schématique des variétés invariantes du point fixe et du cycle T -périodique stable entre la bifurcation de Hopf et la première bifurcation sous-harmonique. La variété instable du point fixe est contenue dans la variété stable du cycle limite.

le laser se trouve sur un attracteur périodique ou chaotique (la dynamique "spectrotemporelle" du laser) . On peut également se demander de quelle manière l'état stationnaire se déstabilise, c'est-à-dire de quelle manière le spectre évolue lorsque le laser commence à quitter l'état stationnaire instable. *A priori*, il peut exister plusieurs types d'instabilité. Par exemple, les différents modes peuvent présenter des oscillations exponentiellement croissantes en phase, les pics observés sur le spectre de la figure 2.14b peuvent évoluer en antiphase avec les modes situés entre les pics, on peut également émettre l'hypothèse d'un déplacement de l'ensemble de la structure comme dans le cas de certains lasers à colorant [Baev *et al.*, 1992] mais avec une variation de l'intensité totale. Des études résolues à la fois en temps et en longueur d'onde sont actuellement en cours pour répondre à ces questions.

2.1.2.D. TRAJECTOIRES HETEROCLINES

Dans les expériences effectuées en régime transitoires, l'orbite reliant le point fixe instable à l'attracteur explore parfois des régions particulièrement intéressantes de l'espace des phases. Ainsi comme on vient de le voir, au début du transitoire le mouvement s'effectue sur la variété instable du point fixe X_F . Cette variété est tangente en X_F au plan P_u associé aux valeurs propres instables.

Entre la bifurcation de Hopf et la première bifurcation sous-harmonique, l'attracteur est "T - périodique " et sa variété stable contient la variété instable du point fixe. Le mouvement s'effectue donc entièrement sur cette variété. Nous représenterons les trajectoires de manière symbolique dans un plan où chaque variété (à une ou deux dimensions) est représentée par une courbe (fig. 2.15).

Après le premier doublement de période, l'attracteur de période T devient instable. L'observation des transitoires issus du point fixe instable montre que l'orbite passe dans le voisinage du cycle instable avant de tendre vers l'attracteur du système de période 2T (fig. 2.16). On en déduit que la variété instable du point fixe reste contenue dans la variété stable du cycle T et que la variété instable du cycle T est contenue dans une variété stable de l'attracteur 2T périodique (fig. 2.17).

Pour un transitoire donné, le temps passé au voisinage de l'orbite périodique instable dépend d'une part de l'écart entre la condition initiale et le

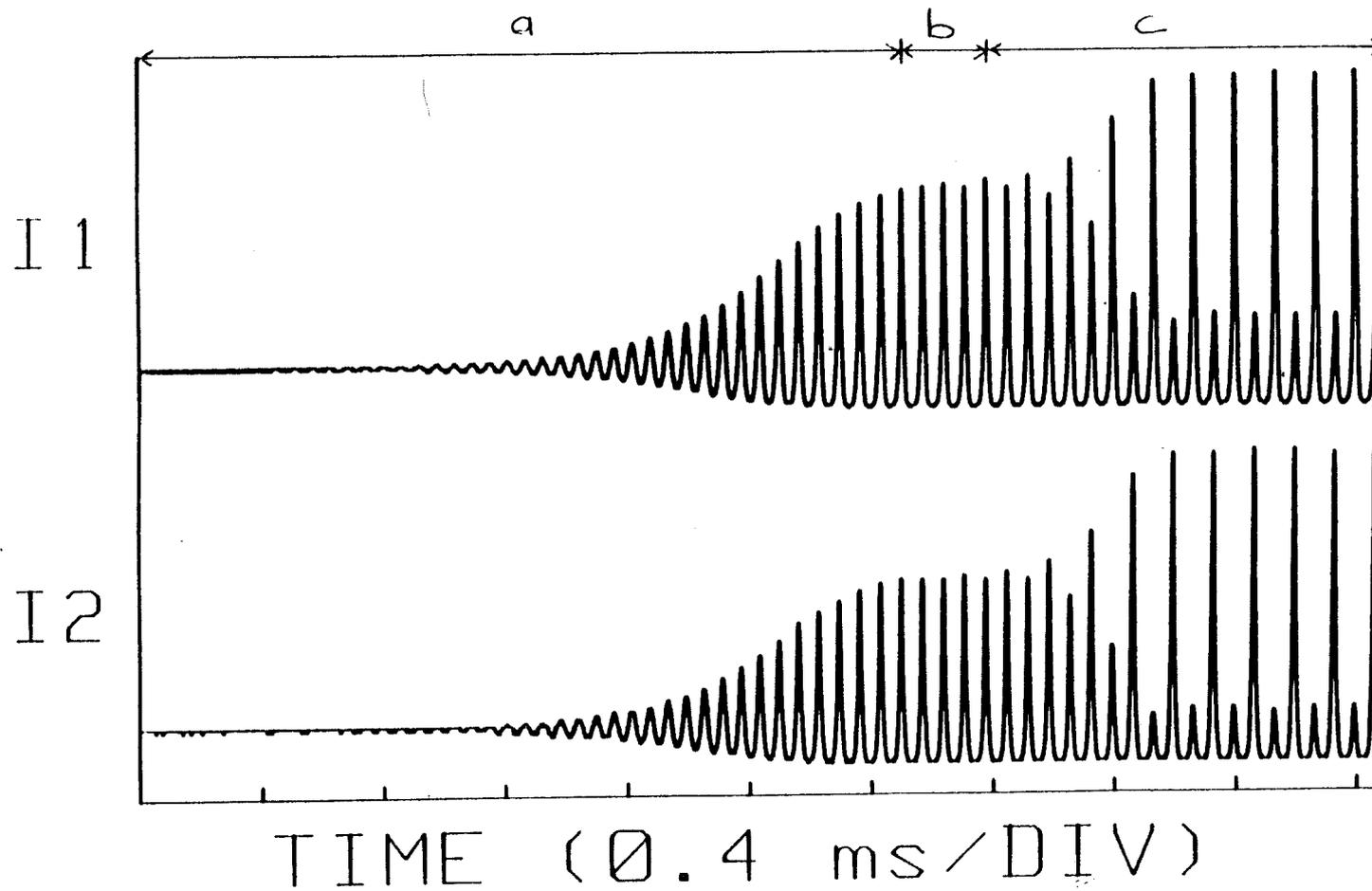


Fig. 2.16. Transitoire observé après suppression de la correction dans un domaine de paramètres pour lequel l'orbite $2T$ -périodique est stable. La trajectoire passe dans le voisinage de l'orbite T -périodique instable avant de tendre asymptotiquement vers le cycle $2T$. Les courbes (a) et (b) représentent les évolutions de $I_1(t)$ et $I_2(t)$ respectivement.

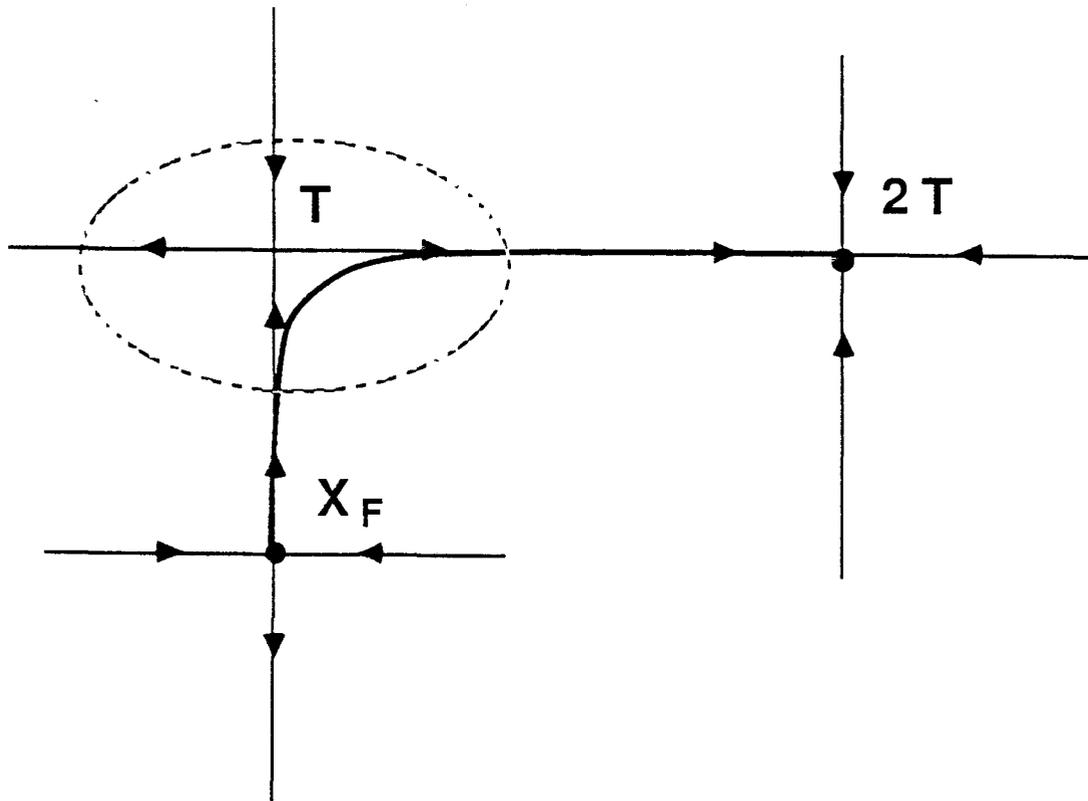


Fig. 2.17. Représentation symbolique de la trajectoire correspondant aux signaux de la figure 2.16. La variété instable du point fixe est contenue dans la variété stable de l'orbite T instable, et la variété instable de l'orbite T est contenue dans la variété stable du cycle limite $2T$. La trajectoire issue de X_F peut passer arbitrairement près de l'orbite T .

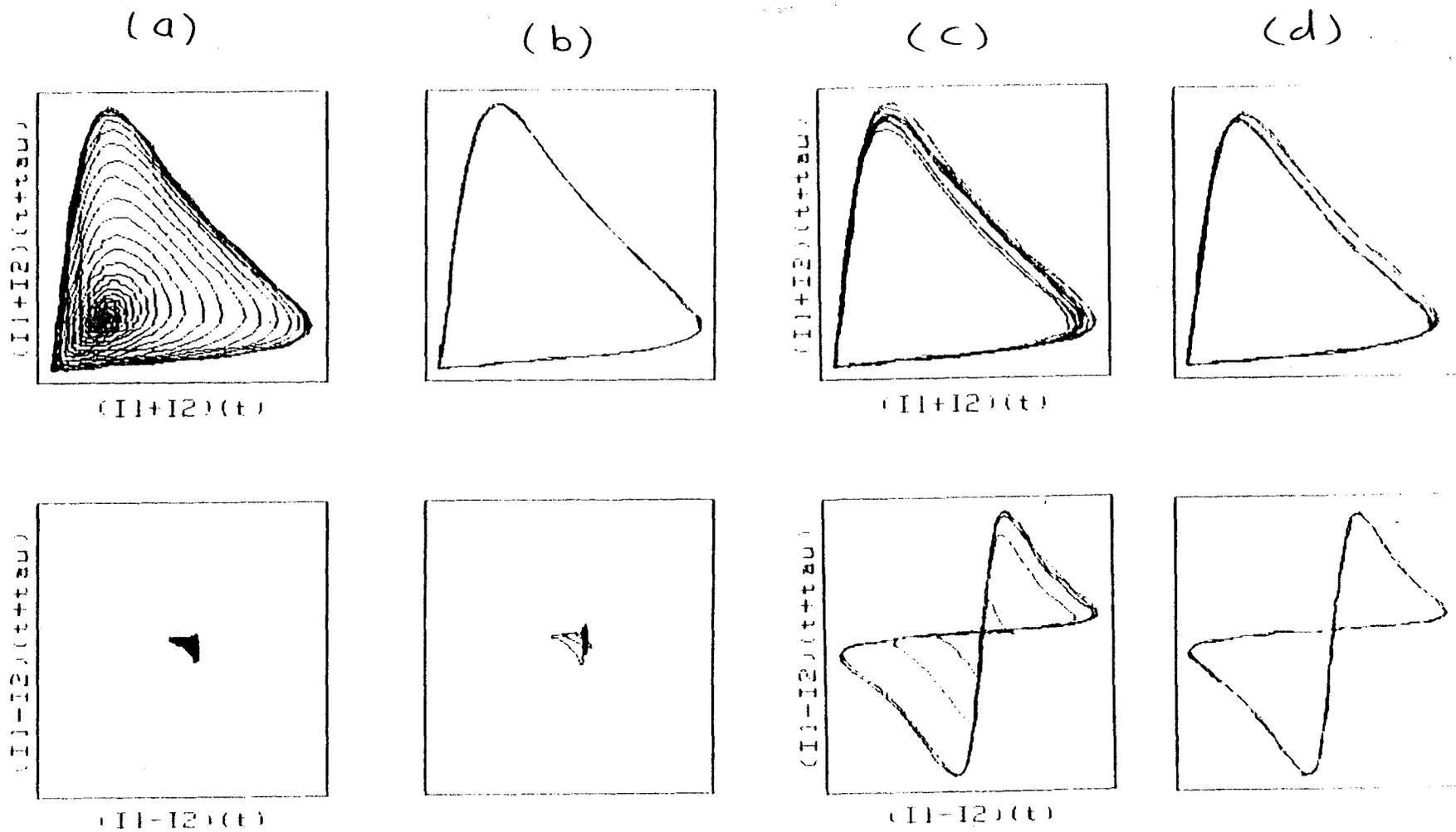


Fig. 2.18. Reconstruction de la trajectoire correspondant au transitoire de la figure 2.16; (a) évolution entre le point fixe et l'orbite T, (b) orbite T, (c) évolution entre l'orbite T et le cycle limite 2T, (d) cycle limite 2T.

point fixe, et d'autre part du bruit affectant l'évolution du système pendant le transitoire.

Les conditions initiales étant distribuées aléatoirement autour du point fixe, elles donnent naissance à des transitoires pouvant passer arbitrairement près de l'orbite périodique. Par conséquent, le temps passé au voisinage de l'orbite fluctue fortement d'un transitoire à l'autre et peut devenir arbitrairement grand. Ce phénomène est bien vérifié expérimentalement : le nombre d'oscillations au voisinage de l'orbite T-périodique fluctue fortement d'un transitoire à l'autre.

On peut reconstruire les trajectoires correspondant à ces transitoires dans un espace à 4 dimensions en appliquant la technique des retards [Takens, 1981] appliquée aux deux variables accessibles du système I_1 et I_2 . En tenant compte des conclusions tirées de l'analyse au voisinage de la bifurcation de Hopf, nous allons utiliser les coordonnées suivantes :

$$[(I_1+I_2)(t) , (I_1+I_2)(t-\tau) , (I_1-I_2)(t) , (I_1-I_2)(t-\tau)]$$

La trajectoire correspondant à la partie (b) du transitoire nous permet de localiser précisément le cycle instable. Les variétés stable et instable qui lui sont associées sont déterminées en reconstruisant les trajectoires correspondant aux parties (a) et (c) du transitoire (trajectoires hétéroclines).

Il est judicieux de projeter les trajectoires reconstruites sur les plans définis par $[(I_1-I_2)(t) = 0, (I_1-I_2)(t-\tau) = 0]$, et $[(I_1+I_2)(t) = 0, (I_1+I_2)(t-\tau) = 0]$.

La trajectoire reliant le point fixe instable X_F et le cycle instable est représentée sur la figure 2.18a. L'absence d'évolution des coordonnées $(I_1-I_2)(t)$ et $(I_1-I_2)(t-\tau)$ montre que la variété stable du cycle T (la variété instable du point fixe) est confondue avec le plan P_+ : $[(I_1-I_2)(t) = 0, (I_1-I_2)(t-\tau) = 0]$.

Le cycle instable est représenté sur la figure 2.18b, il est contenu dans le plan P_+ .

L'observation de la trajectoire reliant les cycles T et 2T (fig. 2.18c) met en évidence une évolution des quatre variables dynamiques du système, mais les projections des trajectoires correspondant au transitoire, au cycle T et au cycle 2T sur le plan P_+ sont quasiment confondues.

En conclusion, la stabilisation d'un foyer instable est possible au moyen d'une technique de contre-réaction dérivée de celle utilisée pour la stabilisation de points de type col en bistabilité. L'application de cette technique à un laser à fibre oscillant spontanément a révélé une grande efficacité, et ceci est d'autant plus remarquable que le dispositif de contre-réaction est très simple, il se réduit en effet à un simple dérivateur.

Etant donné que l'état obtenu après stabilisation coïncide avec le point fixe instable du système sans contre-réaction, deux types d'informations ont été obtenus par cette technique. Le premier concerne les propriétés du point fixe, en particulier sa position dans l'espace des phases (intensité totale, spectre émis par le laser) et les valeurs propres qui lui sont associées.

Ensuite, nous avons remarqué que le point fixe instable constitue une condition initiale originale et permet d'accéder à des propriétés du système dynamique autres que la dynamique locale autour du point fixe. En particulier, les transitoires issus du point fixe nous ont permis de localiser une orbite instable et d'explorer ses variétés invariantes.

La stabilisation de foyers instables peut être étendue à d'autres systèmes dynamiques en particulier les lasers à fibre fonctionnant en régime d'oscillations spontanées [Allain *et al.*, 1989, 1990; Lacot *et al.*, 1991]. Le succès de la stabilisation pourrait permettre d'une part d'améliorer les performances de ce type de laser dans les applications où un comportement stationnaire est préférable, comme par exemple en spectroscopie. D'autre part, on peut envisager l'utilisation de la stabilisation comme un outil d'analyse du comportement dynamique de certains lasers (comme les lasers à fibre qui viennent d'être mentionnés). Ceci devrait procurer un nouveau test pour les modèles de lasers instables, et pourrait permettre d'améliorer la compréhension de l'origine des instabilités.

2.2. Stabilisation et caractérisation d'orbites périodiques instables

La stabilisation d'une orbite périodique apparaît *a priori* plus complexe que la stabilisation d'un état stationnaire instable, surtout si l'on exige que l'orbite stabilisée coïncide avec une orbite périodique instable du système sans contre-réaction. Cependant, si l'on se place dans une section de Poincaré, l'étude de la stabilité d'une orbite périodique se ramène à celle d'un point fixe, et sa stabilisation s'en trouve considérablement simplifiée. En adoptant cette stratégie, Ott, Grebogi et Yorke [Ott *et al.*, 1990] ont montré récemment qu'il était possible de stabiliser les orbites périodiques instables contenues dans un attracteur chaotique en appliquant des perturbations extrêmement faibles à un paramètre de contrôle. La méthode de contrôle de Ott, Grebogi et Yorke (O.G.Y.) sera à la base de celles qui vont être mises au point dans cette partie, car elle permet de stabiliser des trajectoires qui coïncident exactement avec les orbites périodiques instables contenues dans l'attracteur, contrairement aux méthodes précédemment utilisées pour supprimer les régimes chaotiques comme les techniques de modulation périodique [Lima & Pettini, 1990].

Nous allons montrer que la méthode O.G.Y., initialement mise au point afin de réaliser le "contrôle du chaos", peut être modifiée de façon à permettre l'étude expérimentale d'orbites instables.

Dans un premier temps nous rappellerons les principaux éléments de dynamique non-linéaire sur lesquels sont basées les méthodes de stabilisation des orbites instables contenues dans les attracteurs chaotiques. Ensuite, nous décrirons la méthode de contrôle du chaos de Ott, Grebogi et Yorke, utilisant une contre-réaction calculée à partir d'un vecteur caractérisant l'état du système. Dans la plupart des cas, les variables dynamiques du système ne sont pas toutes accessibles expérimentalement. Toutefois, ceci ne restreint pas la généralité de la méthode O.G.Y. étant donné qu'il est presque toujours possible de reconstruire la dynamique du système à partir d'une seule variable dynamique [Takens, 1981]. Cependant, certaines précautions doivent être prises dans le cas où le contrôle du chaos est effectué en utilisant des vecteurs reconstruits par la méthode des retards. Nous décrirons la modification apportée par Dressler et Nitsche [Dressler & Nitsche, 1992] à la méthode O.G.Y. dans le cas où ce type de reconstruction est utilisé.

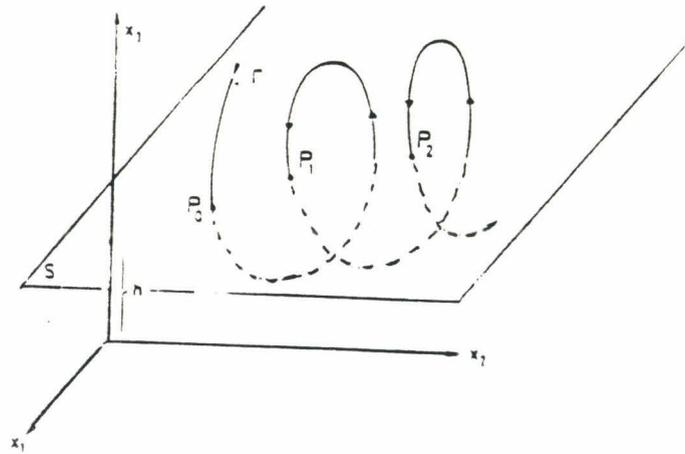


Fig. 2.19. Principe de la section de Poincaré. La trajectoire Γ coupe la surface S en des points successifs P_0, P_1, \dots . Les intersections prises en compte sont celles qui correspondent à un même sens d'orientation de l'intersection de la trajectoire avec le plan.

Nous avons apporté deux modifications à la méthode O.G.Y. La première permet de suivre des orbites instables lorsqu'un paramètre de contrôle est balayé. La deuxième concerne la dépendance temporelle des perturbations envoyées au système. L'intérêt de cette dernière modification est double. D'une part, elle permet d'éviter les problèmes causés par l'utilisation éventuelle de la méthode des retards, et constitue de ce fait une alternative à la méthode de Dressler et Nitsche. D'autre part, cette modification permettra d'augmenter l'efficacité des corrections appliquées au paramètre de contrôle, ce qui conduira à une simplification du dispositif expérimental.

Nous présenterons alors les résultats expérimentaux obtenus dans le cas du laser à fibre oscillant spontanément. Nous montrerons en particulier qu'il est possible de déterminer les bifurcations d'où proviennent les orbites instables contenues dans l'attracteur. Dans certains cas, la stabilisation d'orbites instables permettra également d'obtenir des informations sur la frontière du bassin d'attraction d'attracteurs chaotiques.

2.2.1. Orbites instables et chaos

2.2.1.A. STABILITE D'UNE ORBITE PERIODIQUE

L'analyse de stabilité d'une orbite périodique s'effectue en considérant l'évolution à long terme des trajectoires partant de son voisinage et nécessite généralement une section de Poincaré. Celle-ci est réalisée en en considérant les intersections successives de la trajectoire avec une surface pour un sens de passage donné (fig. 2.19). On entend par "surface" une variété dont la dimension est inférieure d'une unité à celle de l'espace des phases d , et on impose à la surface de section de couper les trajectoires de manière transverses. On passe ainsi d'un système différentiel du type $\dot{X}(t) = F(X, t, \mu)$ à une suite de vecteurs de \mathbb{R}^{d-1} .

Considérons une intersection X_F de l'orbite avec le plan de section. une trajectoire initiée dans le voisinage de l'orbite périodique va traverser la surface de section dans le voisinage de X_F en une suite de points $X_{n+1} = f(X_n)$, l'application f étant l'*application de premier retour* de l'orbite périodique. La stabilité du point fixe est déterminée par la dynamique linéarisée autour du point fixe. Au voisinage de X_F , on peut écrire: $X_{n+1} = \lambda X_n$ avec λ la matrice jacobienne de f en X_F (matrice de Floquet).

Fig. XX2.20. Variété stable (s) et instable (u) du point fixe X_F . E_s et E_u sont respectivement les sous-espaces stable et instable du point fixe, tangents aux variétés (s) et (u) en X_F . Une condition initiale X_n sur (s) donne naissance à une suite d'itérés sur (s) qui tend vers X_F , tandis qu'une condition initiale X_n' sur (u) donne une suite d'itérés sur (u) qui s'éloigne de X_F .

La stabilité est déterminée par l'évolution à long terme des points X_n , donc par les valeurs propres de λ (multiplicateurs de Floquet), ces multiplicateurs sont indépendants de la surface de section considérée. L'orbite est stable si les multiplicateurs de Floquet sont de module inférieur à l'unité et instable dans le cas contraire. Si une valeur propre traverse le cercle unité, on assiste à une bifurcation du cycle limite. Rappelons que le passage d'un multiplicateur de Floquet par la valeur -1 correspond à une bifurcation sous-harmonique, le passage par la valeur $+1$ à une bifurcation noeud-col ou transcritique, et le passage de deux multiplicateurs complexes-conjugués à une bifurcation de Hopf du cycle limite (voir par exemple [Manneville, 1991]).

Une caractéristique importante du point fixe X_F est l'ensemble des vecteurs propres de la matrice de Floquet qui lui est associé. Les vecteurs propres associés aux valeurs propres stables engendrent un sous-espace appelé sous-espace stable. De la même manière les vecteurs propres associés aux valeurs propres instables engendrent le sous-espace instable. Au voisinage du point fixe, ces sous-espaces sont invariants. Une condition initiale prise dans le sous-espace stable va donner une suite de points qui restent dans ce sous-espace et qui tendent vers le point fixe, et une condition initiale prise dans le sous-espace instable va donner une trajectoire s'éloignant du point fixe.

Les ensembles invariants ne sont pas définis uniquement au voisinage du point fixe. Il existe une variété stable et une variété instable qui sont tangentes aux sous-espaces stable et instable respectivement, et ces variétés sont uniques. La variété stable du point fixe est l'ensemble des points donnant naissance à une orbite qui tend vers X_F lorsque $t \rightarrow +\infty$. La variété instable est l'ensemble des points donnant naissance à une orbite qui tend vers X_F lorsque $t \rightarrow -\infty$ (fig. 2.20).

2.2.1.B. QUELQUES PROPRIETES DES ATTRACTEURS CHAOTIQUES

Les méthodes de contrôle du chaos sont basées sur l'existence d'un certain nombre de propriétés des attracteurs chaotiques qu'il est nécessaire de rappeler. En particulier nous rappellerons le lien existant entre attracteurs et orbites périodiques instables, car celui-ci est à la base de la méthode du contrôle du chaos par la méthode O.G.Y. Ensuite, nous illustrerons ensuite la manière dont ces orbites apparaissent dans un cas simple relativement générique, celui de la suite logistique.

Attracteurs

Pour qu'un ensemble A soit un attracteur, on demande généralement qu'il possède les propriétés suivantes (voir par exemple [Manneville, 1991])

- Il doit constituer une partie attractive:
 - Il doit être invariant sous l'action du flot.
 - Toute trajectoire initiée dans le voisinage de A tend vers A .
- Pour qu'une partie attractive soit un attracteur, il faut de plus qu'elle soit indécomposable. On montre que l'indécomposabilité est assurée si une condition initiale prise sur A visite le voisinage de tous ses points (l'attracteur est une orbite dense).

Cette dernière propriété est fondamentale pour le contrôle du chaos, comme nous le verrons par la suite.

Attracteurs chaotiques

Un attracteur est chaotique s'il présente une sensibilité aux conditions initiales. Cette propriété correspond au fait que deux conditions initiales infiniment proches prises au voisinage d'un point de l'attracteur donnent en général des trajectoires qui, à long terme vont s'écarter l'une de l'autre de manière exponentielle. Plus précisément, on définit en chaque point de l'attracteur des directions stables et instables. Si l'écart entre les deux conditions initiales est selon une direction instable, les trajectoires s'écartent exponentiellement. Si l'écart est selon une direction stable, les trajectoires se rapprochent de manière exponentielle. Les différentes directions correspondant aux divergences et convergences exponentielles sont associées à des exposants caractéristiques (exposants de Lyapunov) (voir par exemple [Tufillaro *et al.*, 1992]).

Propriétés géométriques

Les attracteurs chaotiques sont des attracteurs étranges, caractérisés par une dimension non-entière (fractale). Il est important de remarquer qu'il est possible de définir des dimensions partielles [Ruelle, 1989; Grassberger, 1986] qui sont les dimensions dans les différentes directions stables et instables. En particulier, on peut montrer que les dimensions prises dans les directions instables sont entières. Ceci a une conséquence sur l'aspect des attracteurs chaotiques caractérisés par un seul exposant caractéristique positif, ils présentent un aspect "feuilleté". Une section de Poincaré de ces attracteurs se présente sous la forme d'une courbe infiniment repliée (voir les projections des sections de Poincaré obtenues expérimentalement et numériquement au § 1.1.4.C et § 1.2.3).

Localement, la tangente à ces courbes est la direction instable, et les directions associées à la structure fractale sont des directions stables.

Chaos et orbites instables

La deuxième propriété fondamentale que nous utiliserons concerne la présence d'orbites instables dans les attracteurs chaotiques, elle a fait l'objet d'une démonstration dans le cas de systèmes structurellement stables. Un système est structurellement stable lorsque les propriétés qualitatives de la dynamique ne subissent pas de changement sous l'action de petites perturbations du système. Il est structurellement instable lorsqu'il se trouve en un point de bifurcation.

Il a été démontré qu'un attracteur (non réduit à un point fixe) est structurellement stable si et seulement si [Ruelle, 1989] il possède les deux propriétés suivantes:

- l'attracteur est *hyperbolique* : l'attracteur est hyperbolique lorsque ses variétés stables et instables ne se coupent que de manière transverse, voir par exemple [Tufillaro *et al.*, 1992].
- Il passe une orbite périodique dans le voisinage de chaque point de l'attracteur, en d'autres termes, l'ensemble des orbites périodiques est dense dans l'attracteur.

En ce qui concerne les attracteurs périodiques, cette dernière propriété est vérifiée de manière triviale. Dans le cas des attracteurs chaotiques, ceci implique l'existence d'une infinité d'orbites périodiques instables plongées dans l'attracteur. Cette propriété est à la base de la méthode O.G.Y. dont l'objectif sera précisément de stabiliser une de ces orbites instables par une technique de contre-réaction.

REMARQUE:

Il faut cependant remarquer que l'hyperbolicité n'est généralement pas rencontrée dans les attracteurs chaotiques des systèmes dynamiques, qu'ils soient expérimentaux ou définis par des systèmes d'équations différentielles. La présence d'un ensemble d'orbites instables dense dans les attracteurs chaotiques est une conjecture non rigoureusement démontrée, mais qui est bien vérifiée expérimentalement (la comparaison entre un attracteur chaotique et l'ensemble d'orbites instables qui en est extraite est particulièrement frappante dans le cas de certains attracteurs comme celui du laser CO₂ modulé [Lefranc & Glorieux, 1992] présenté sur la figure 2.21).

Fig 21

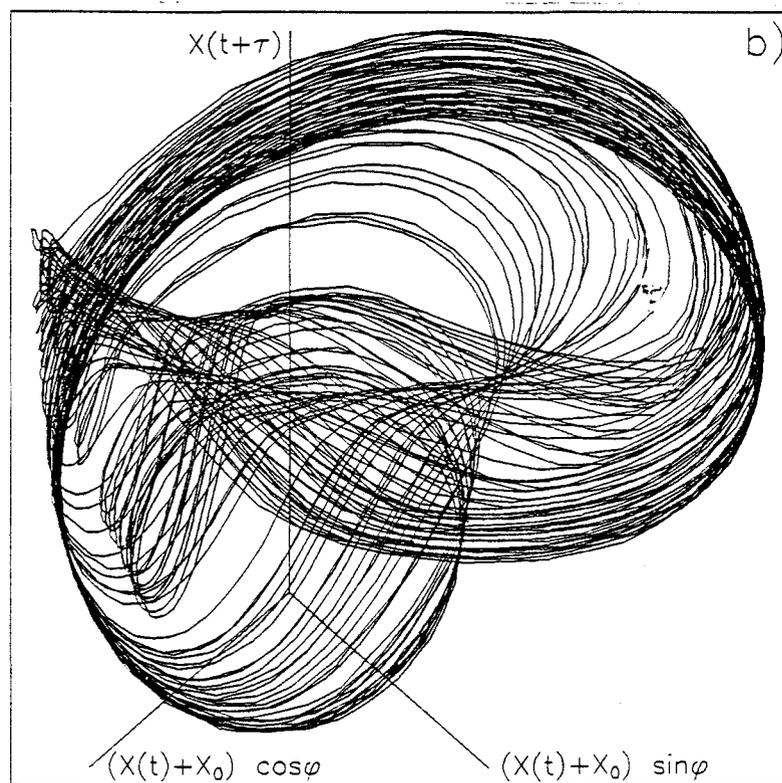
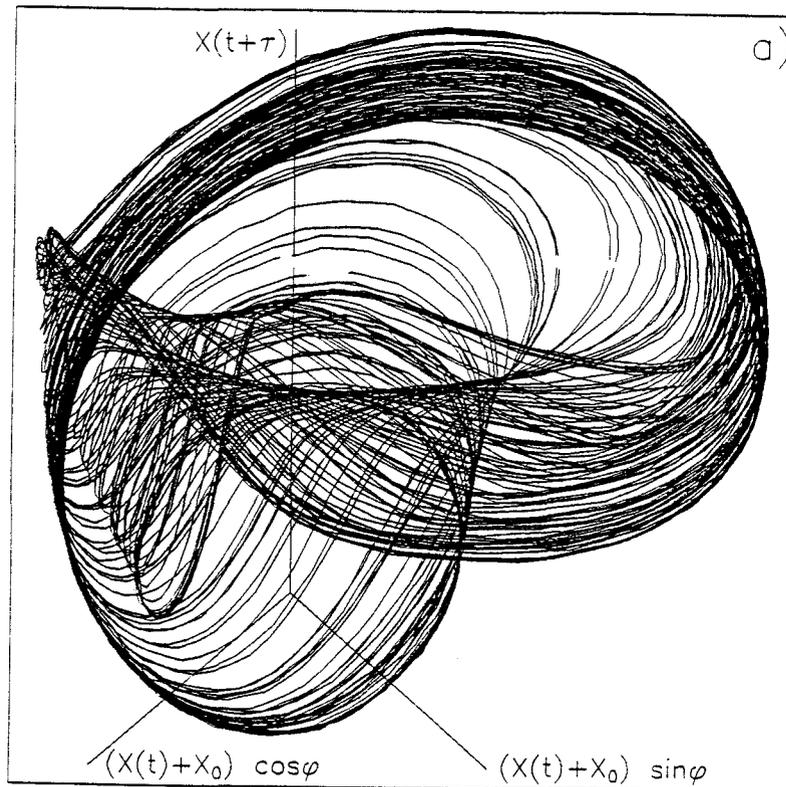


Fig. 2.21. Attracteur chaotique d'un laser CO₂ modulé intracavité (a), et orbites instables appartenant à l'attracteur (b), d'après [Lefranc et Glorieux, 1992].

Les orbites instables contenues dans un attracteur chaotique peuvent être mises en évidence par la simple observation d'un signal chaotique. Le passage au voisinage d'une orbite instable se traduit par un signal se reproduisant périodiquement pendant un nombre plus ou moins important de périodes. Par exemple, la figure 2.22 qui représente un signal chaotique de type "C" émis par le laser à fibre oscillant spontanément met clairement en évidence le passage de la trajectoire au voisinage d'une orbite de T-périodique. Ce type d'observation a été à l'origine d'une technique de détection systématique des orbites périodiques à partir de données expérimentales, la technique des *close-returns* [D. Auerbach, 1987].

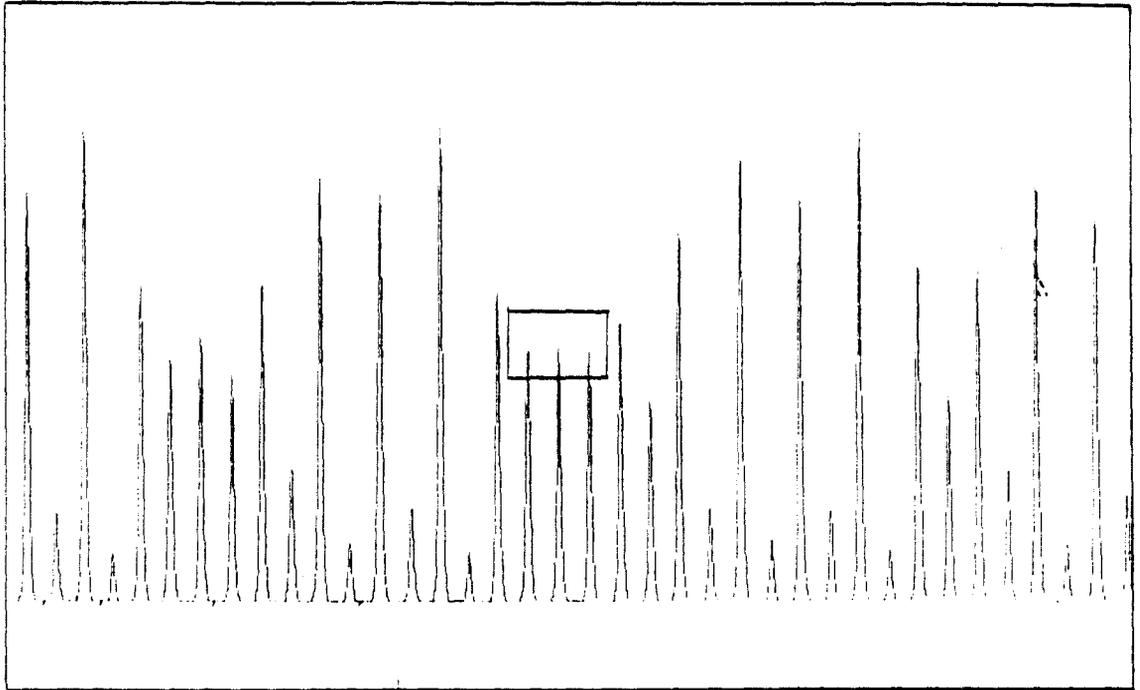
En se plaçant dans une section de Poincaré, on peut également déterminer les directions stables et instables de ces orbites périodiques en analysant la dynamique locale dans leur voisinage. Ces directions stables et instables correspondent à celles associées à l'attracteur chaotique. Par conséquent, on s'attend à ce que la (ou les) direction instable d'une orbite périodique soit tangente au feuillet passant par l'orbite.

Exemples de formation des orbites périodiques instables

Lorsque l'on étudie la formation d'un attracteur chaotique en balayant un paramètre de contrôle, on constate que sa complexité augmente de manière progressive, et ceci est lié à l'apparition d'orbites périodiques instables dans l'attracteur. Il est alors intéressant de rappeler comment les cycles instables apparaissent dans le cas de la suite logistique car il s'agit d'un système présentant une analogie avec le comportement du laser à fibre en ce qui concerne la transition vers le chaos par une cascade sous-harmonique. Schématiquement, on observe deux types d'orbites périodiques.

- A chaque bifurcation sous-harmonique, une orbite stable de période $2^n T$ se déstabilise pour donner naissance à une orbite stable de période $2^{n+1} T$, l'orbite $2^n T$ continuant d'exister sous une forme instable. Dans la région chaotique, toutes les orbites instables de période $2^n T$ existent et entrent successivement dans l'attracteur dans l'ordre ... $2^n T$, $2^{n-1} T$, ..., $4T$, $2T$, T . Ces orbites instables sont associées à la cascade inverse (fig. 2.23).

- Le diagramme de bifurcations de la suite logistique comporte une infinité de fenêtres périodiques. Chacune d'elles correspond à l'apparition simultanée d'une orbite stable et d'une orbite instable par bifurcation tangente. L'orbite stable se déstabilise par doublements de période d'une manière similaire à celle de l'orbite T-périodique pour donner un attracteur chaotique. L'orbite



TEMPS (0,8 ms / div)

Fig. 2.22. Passage au voisinage d'une orbite instable T-périodique dans le laser à fibre oscillant spontanément (régime C).

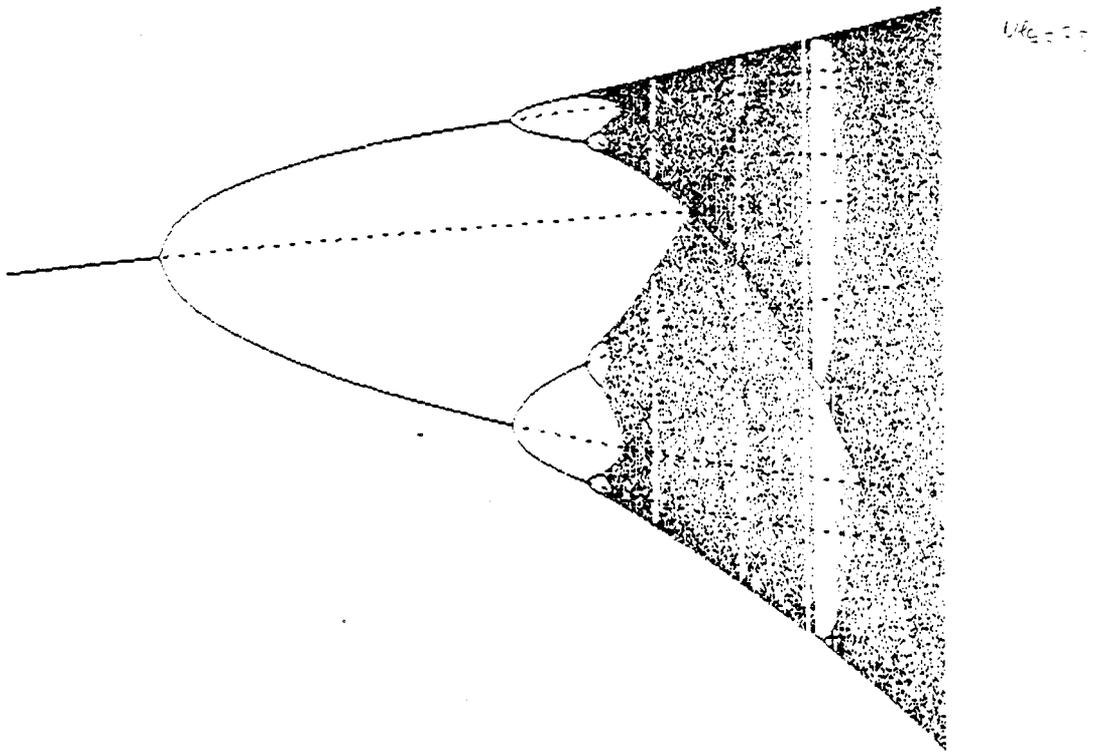


Fig. 2.23. Apparition d'orbites périodiques instables de période 2^m (traits pointillés) dans la suite logistique $x_{n+1} = \alpha x_n (1 - x_n)$. Chaque orbite instable de période 2^m apparaissant par doublement de période (pour la valeur α_m du paramètre α) entre dans l'attracteur chaotique lors de la transition $2^{m+1} - 2^m$ (lorsque $\alpha = \bar{\alpha}_m$).

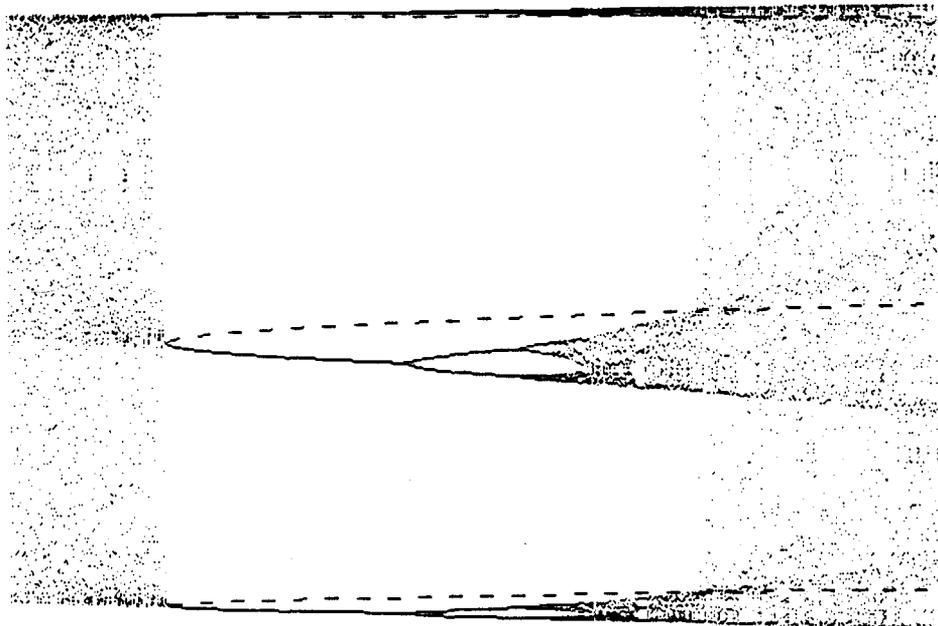


Fig. 2.24. Apparition d'orbites instables après une bifurcation tangente dans la suite logistique : exemple de la fenêtre 3T. L'orbite périodique 3T stable subit une cascade de doublements de période menant au chaos, et l'orbite 3T instable atteint l'attracteur en α^* , ou se produit une crise intérieure.

instable atteint ensuite cet attracteur chaotique (fig. 2.24) pour donner une crise intérieure [Grebogi *et al.*, 1982].

2.2.2. Les méthodes de Ott, Grebogi et Yorke et de Dressler et Nitsche

2.2.2.A. LA METHODE DE OTT, GREBOGI ET YORKE: LE CONTROLE DU CHAOS

Ott, Grebogi et Yorke [Ott *et al.*, 1990] ont proposé une procédure permettant le contrôle du chaos en stabilisant les orbites périodiques instables contenues dans un attracteur chaotique. Cette méthode, basée sur l'application d'une contre-réaction sur un paramètre de contrôle, se distingue des techniques de contrôle antérieures par plusieurs particularités. La plus intéressante dans notre cas est le fait que la trajectoire stabilisée est identique à celle d'une orbite instable du système sans contre-réaction. Ceci est assuré, comme dans le cas de la stabilisation d'un point fixe (§ 2.1), par le fait que la correction s'annule lorsque la trajectoire tend vers l'orbite stabilisée. Cependant, cette méthode présente aussi d'autres particularités qui permettent une implémentation expérimentale particulièrement aisée.

La méthode O.G.Y. ne nécessite pas la connaissance des équations du système et s'applique théoriquement à toute orbite instable contenue dans un attracteur. Les données nécessaires à la détermination de la contre-réaction peuvent toutes être déterminées à partir l'étude de signaux expérimentaux. Ceci distingue la méthode O.G.Y. d'autres méthodes nécessitant au préalable soit la connaissance des équations du système, soit la reconstruction de ces équations à partir de données expérimentales [Breedon & Hübler, 1990].

La deuxième particularité concerne l'amplitude des perturbations appliquées au système. Dans le cas de la méthode O.G.Y., on suppose que les perturbations appliquées au système sont limitées à une certaine valeur p^* . La transition entre un régime chaotique et le régime périodique désiré peut s'effectuer quelle que soit la valeur maximale autorisée p^* , elle peut être arbitrairement petite (en l'absence de bruit dans le système). De ce point de vue, ce type de contrôle est différent de ceux habituellement utilisés pour supprimer les comportements chaotiques, comme l'application d'une modulation périodique. En effet, avec ce dernier type de contrôle il est nécessaire d'appliquer une amplitude de modulation non négligeable [Lima & Pettini, 1990]. De plus,

lorsque le système est stabilisé, il est évidemment nécessaire de continuer à appliquer une modulation possédant une amplitude finie.

Considérons un système dynamique quelconque décrit par une équation d'évolution du type $X(t) = F(X(t), \mu(t))$. Dans un but de clarté, nous nous limitons à un espace des phases à trois dimensions, mais la méthode peut être étendue au cas d'un espace de dimension finie d quelconque. Nous supposons que le paramètre de contrôle μ sur lequel nous allons agir peut être ajusté à volonté dans un petit domaine autour d'une valeur μ_0 pour laquelle le système est chaotique: $\mu_0 - p^* < \mu < \mu_0 + p^*$.

Dans un premier temps, nous allons recenser les propriétés de l'orbite instable qui interviennent dans la détermination de la correction à appliquer. Ensuite il nous faudra déterminer la dynamique locale du système avec contre-réaction, nous pourrons alors en déduire un type de correction permettant la stabilisation de l'orbite instable.

· Etude expérimentale d'une orbite instable

La première étape consiste à effectuer une section de Poincaré de l'attracteur et à étudier la dynamique du système au voisinage d'une orbite instable. Les orbites instables contenues dans l'attracteur peuvent facilement être repérées en utilisant la technique des *close-return*. L'orbite instable que l'on désire stabiliser traverse périodiquement le plan de section en un point X_F . La dynamique locale autour du point fixe X_F de l'application de Poincaré peut être étudiée à partir des suites d'itérés X_n passant dans le voisinage de X_F . On en déduit facilement les multiplicateurs de Floquet instable λ_u et stable λ_s de l'orbite ($|\lambda_u| > 1 > |\lambda_s|$) ainsi que les directions instable e_u et stable e_s correspondantes [Auerbach *et al.*, 1987]. L'influence d'une petite variation du paramètre de contrôle sur la dynamique du système au voisinage de X_F peut également être déterminée expérimentalement. Il suffit pour cela d'étudier l'évolution de la position du point fixe lorsque la valeur du paramètre de contrôle est modifiée d'une petite quantité \bar{p} , on en déduit le vecteur:

$$g = \frac{dX_F(\mu)}{d\mu} (\mu=\mu_0) \approx \frac{X_F(\mu_0 + \bar{p}) - X_F(\mu_0)}{\bar{p}} \quad (2.22)$$

· Dynamique du système avec contre-réaction

La connaissance de X_F , g , e_u et e_s suffit à déterminer une correction qui stabilise le point fixe. Dans un premier temps, on n'applique aucune perturbation au système et on attend que la trajectoire passe dans le voisinage de l'orbite

instable. Ceci se réalisera forcément puisque l'orbite correspondant à l'attracteur visite le voisinage de tous ses points, comme nous l'avons remarqué au § 2.2.1.

A partir de cet instant, les perturbations appliquées au paramètre de contrôle seront constantes entre deux intersections n et $n+1$ et égales à μ_n . Les modifications du paramètre de contrôle provoquent un déplacement du point fixe X_F . Etant donné que ces modifications $p_n = \mu_n - \mu_0$ sont faibles et que les itérés X_n sont voisins de X_F , la dynamique du système perturbé peut être linéarisée autour du nouveau point fixe $X_F(\mu_n)$:

$$X_{n+1} - X_F(\mu_n) = \lambda [X_n - X_F(\mu_n)] \quad (2.23)$$

avec
$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_u & 0 \\ 0 & \lambda_s \end{pmatrix} \quad \text{dans la base } (e_u, e_s)$$

Les déplacements du point fixe étant faibles, on peut écrire:

$$\xi_{n+1} = \lambda (\xi_n - p_n g) + p_n g \quad (2.24a)$$

ou
$$\xi_{n+1} = \lambda \xi_n + p_n h \quad (2.24b)$$

avec $\xi_n = X_n - X_F$ et $h = (1-\lambda)g$,

Les deux écritures équivalentes (2.24a) et (2.24b) correspondent à deux points de vue déjà mentionnés dans le cas de la stabilisation de points fixes instables (§ 2.1.1.B). La forme (2.24a) est liée à une interprétation de l'effet de la correction en terme de déplacement du point fixe, tandis que la forme (2.24b) est plutôt liée à une interprétation en terme perturbation causée par la correction p_n .

Détermination de la correction à appliquer

A présent, il nous faut calculer la perturbation qui nous permettra de stabiliser le point fixe. La perturbation p_n est calculée en fonction de l'état du système ξ_n à l'instant t_n : $p_n = f(\xi_n)$, et nous imposons au système avec contre-réaction de posséder un point fixe en $\xi_F = 0$, ceci est réalisé si la correction p_n s'annule quand $\xi_n = 0$. Le point fixe du système avec contre-réaction sera stable si le système linéarisé suivant possède un point fixe stable en $\xi_F = 0$

$$\begin{aligned} \xi_{n+1} &= \lambda \xi_n + p_n h \\ p_n &= f(\xi_n) \end{aligned} \quad (2.25)$$

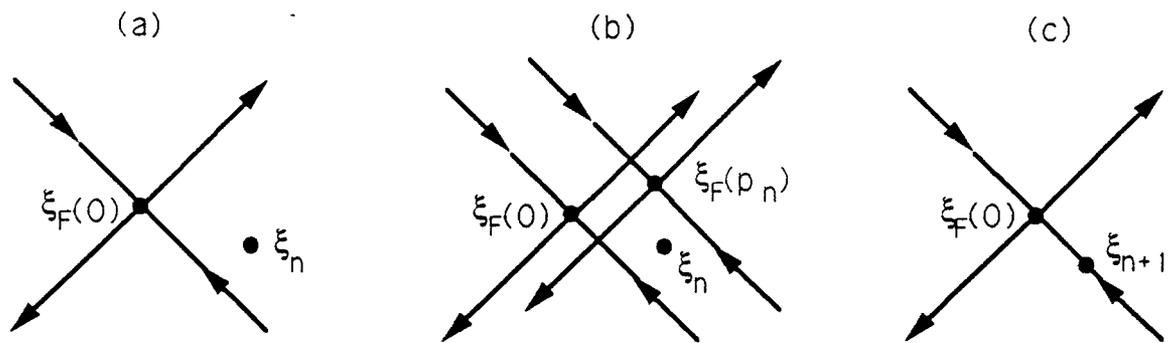


Fig. 2.25. Illustration de la méthode OGY : (a), l'itéré ξ_n se trouve dans le voisinage du point fixe ξ_F , la correction est alors appliquée au paramètre de contrôle (b), déplaçant le point fixe dans la direction g . La correction est choisie de façon à ce que le point suivant ξ_{n+1} se trouve sur la variété instable du point fixe ξ_F (c).

On peut appliquer une correction telle que le point ξ_{n+1} se trouve sur la variété stable du point fixe $\xi_F = 0$ (fig. 2.25). Dans ce cas, les points suivants $\xi_{n+2} \dots$ vont tendre vers le point fixe ξ_F de façon exponentielle. La valeur correspondante de la correction est :

$$p_n = (\lambda_u/h_u)(\mathbf{e}_u \cdot \xi_n) \quad (2.26)$$

avec $h_u = \mathbf{e}_u \cdot \mathbf{h}$

Il faut également remarquer que cette valeur particulière de la contre-réaction est associée à une convergence extrêmement rapide selon la direction initialement instable puisque la valeur propre qui lui est associée est nulle, le point fixe est *superstable* [Wolf, 1986] dans cette direction.

En fait, ce type de convergence n'est pas nécessaire à la stabilisation, il suffit que les multiplicateurs de Floquet de l'orbite possède tous un module inférieur à l'unité. Une correction du type $p_n = \alpha(\mathbf{e}_u \cdot \xi_n)$ stabilisera l'orbite instable si le point fixe $\xi_F = 0$ du système suivant est stable,

$$\xi_{n+1} = \lambda \xi_n + \alpha(\mathbf{e}_u \cdot \xi_n) \mathbf{h} \quad (2.27)$$

Ce système peut s'écrire:

$$\xi_{n+1} = \Lambda(\alpha) \xi_n \quad (2.28)$$

avec

$$\Lambda(\alpha) = \begin{pmatrix} \lambda_u + \alpha h_u & 0 \\ \alpha h_s & \lambda_s \end{pmatrix}$$

X_F est donc stable si les valeurs propres de $\Lambda(\alpha)$ sont de module inférieur à 1, c'est-à-dire si:

$$-(1+\lambda_u) < \alpha h_u < 1-\lambda_u$$

Par conséquent, il est toujours possible de déterminer une correction stabilisant le système si $h_u \neq 0$, autrement dit si une modification du paramètre de contrôle induit un déplacement de X_F ayant une composante non-nulle selon la direction instable.

Jusqu'à présent, nous avons considéré que la contre-réaction était calculée à partir de la composante instable $\mathbf{e}_u \cdot (X_n - X_F)$ de l'écart entre les itérés et la position du point fixe. Cependant, les valeurs propres du système avec contre-

réaction ont toutes un module différent de l'unité. Ceci implique que l'état du système stabilisé est robuste lorsque des paramètres varient, en particulier ceux liés à la contre-réaction (e_u, e_s, X_F, α).

Plus précisément, il est possible d'introduire une composante stable de ξ_n dans le calcul de p_n (on applique alors une correction $p_n = \alpha e_u \cdot \xi_n + \alpha_s e_s \cdot \xi_n$) sans altérer la stabilisation du point fixe, ni sa position. La robustesse du système stabilisé face à l'introduction de la composante stable sera d'autant plus importante que le système sera dissipatif selon les directions stables, il en sera de même lorsque l'effet de la correction sera de déplacer le point fixe essentiellement selon la direction instable. Il doit donc être possible dans certains cas ($|\lambda_s| \gg |\lambda_u|$ et/ou $|h_u| \gg |e_s \cdot h_s|$) de stabiliser le point fixe sans effectuer une mesure précise de la composante instable, simplement en utilisant dans le calcul de la correction la valeur d'une variable quelconque $z_n - z_F$ au lieu de $e_u \cdot (X_n - X_F)$.

Il faut cependant noter que la robustesse de l'état stabilisé face à une erreur sur X_F concerne uniquement sa nature (stationnaire) et sa stabilité, mais pas sa position. Ce dernier point pourra poser un problème lorsque la méthode O.G.Y. sera utilisée afin d'observer des orbites instables tout en balayant un paramètre de contrôle, comme nous le verrons par la suite.

La méthode O.G.Y. a été appliquée à divers systèmes expérimentaux et d'abord à un ruban magnéto-élastique forcé périodiquement [Ditto *et al.*, 1990]. Ce système très dissipatif a présenté une grande robustesse vis à vis d'erreurs sur la détermination des directions propres du point fixe. Il en a été de même dans le cas d'un résonateur à diode [Hunt, 1991]. La méthode O.G.Y. a également été appliquée avec succès dans le cas de systèmes autonomes en chimie [Peng *et al.*, 1991] et en optique [Roy *et al.*, 1992].

La portée de la méthode O.G.Y. ne se restreint pas à la stabilisation d'orbites périodiques instables. Cette méthode peut être adaptée de façon à atteindre très rapidement une région donnée de l'attracteur [Shinbrot *et al.*, 1990a, b, c]. Une méthode analogue permet la génération de régimes apériodiques à partir d'un système chaotique [Mehta & Henderson 1991]. Enfin, il faut noter que la méthode O.G.Y. s'étend naturellement aux systèmes dynamiques de dimension supérieure à trois [Auerbach *et al.*, 1992; Kosterlich *et al.*, 1992].

2.2.2.B. LA METHODE DE DRESSLER ET NITSCHKE: UTILISATION DE LA TECHNIQUE DES RETARDS

La méthode O.G.Y. nécessite la connaissance d'un vecteur $X(t)$ caractérisant l'état du système. Toutefois, les véritables variables d'un système dynamique ne sont généralement pas toutes accessibles. Par exemple, dans le cas des lasers, l'inversion de population ou la polarisation du milieu ne peuvent généralement être mesurées. Comme indiqué précédemment, on contourne habituellement cet écueil en reconstruisant les trajectoires par la méthode des retards. Cependant, la méthode O.G.Y. peut s'avérer inefficace si on utilise la trajectoire reconstruite sans précaution particulière.

La méthode des retards consiste à choisir une dimension de plongement d_e et à construire un vecteur dont les coordonnées sont des fonctions d'une variable du système z à différents instants [Takens, 1981]. Pratiquement, on choisit généralement un retard τ de façon à construire le vecteur:

$$Y(t) = [z(t), z(t-\tau), \dots, z(t-(d_e-1)\tau)] \quad (2.29)$$

On peut montrer que si la dimension de plongement est suffisante et le retard τ convenablement choisi, il existe une relation bijective entre le vecteur reconstruit $Y(t)$ et le vecteur $X(t)$ décrivant l'état du système dans l'espace des phases [Takens, 1981]. La dimension de plongement d_e doit être suffisante pour que les propriétés topologiques des trajectoires soient conservées dans l'espace reconstruit. La dimension de plongement minimale dépend de la région de l'espace des phases que l'on désire reconstruire. Si l'on désire reconstruire un attracteur chaotique de dimension fractale d_f , une dimension de plongement de $d_e = 2d_f + 1$ est génériquement suffisante.

La relation entre les trajectoires de l'espace des phases et les trajectoires reconstruites dépend d'une part du retard τ et de la dimension de plongement d_e , mais également des équations du système. Par conséquent, la bijection Φ reliant le vecteur de l'espace des phases $X(t)$ au vecteur reconstruit $Y(t)$ dépend du paramètre de contrôle μ sur lequel les corrections sont appliquées:

$$Y(t) = \Phi_{\mu-\mu_0} [X(t)] \quad (2.30)$$

La section de Poincaré requise par la méthode O.G.Y. peut s'effectuer dans l'espace de plongement par exemple en choisissant la suite des vecteurs $Y(t_n)$ telle

qu'une des composantes des $Y(t_n)$ soit égale à une constante, nous prendrons $[Y(t_n)]_1 = z(t_n) = c$. On suppose en outre que toutes les coordonnées de chaque vecteur $Y(t_n)$ sont mesurées entre les instants t_{n-1} et t_n , ce qui implique que le retard satisfasse la condition $(d-1)\tau < t_n - t_{n-1}$.

Les points $Y(t_n)$ de la section de Poincaré reconstruite sont reliés aux vecteurs $X(t_n)$ de l'espace des phases par la relation :

$$X(t_n) = \Phi_{p_{n-1}}^{-1} [c, z(t_n - \tau), \dots, z(t_n - (d-1)\tau)] \quad (2.31)$$

on en déduit facilement la forme générale de l'application de premier retour dans l'espace reconstruit (c'est-à-dire la relation entre deux itérés successifs)

$$\xi_{n+1} = P(\xi_n, p_{n-1}, p_n) \quad (2.32)$$

où $\xi_n = Y_n - Y_F$. Y_n est le vecteur de dimension $(d_e - 1)$ représentant la position de l'itéré $Y(t_n)$ dans la surface de section, et Y_F est un point fixe associé à l'orbite périodique considérée. Le point essentiel est la présence de la valeur du paramètre de contrôle à l'instant t_{n-1} dans l'application de Poincaré (2.32). Ceci provient du fait que la position de la surface de section à l'instant t_n dépend du paramètre de contrôle à l'instant t_{n-1} . Par conséquent, le système linéarisé que nous devons considérer est à présent :

$$\xi_{n+1} = \lambda \xi_n + p_n h + p_{n-1} l \quad (2.33)$$

avec λ la matrice de Floquet de l'orbite,

$$h = \left(\frac{\partial P}{\partial p_n} \right)_{\xi, p_{n-1}} (\xi=0, p_{n-1}=0, p_n=0)$$

$$\text{et } l = \left(\frac{\partial P}{\partial p_{n-1}} \right)_{\xi, p_n} (\xi=0, p_{n-1}=0, p_n=0)$$

alors que le système obtenu en utilisant les coordonnées du système dans l'espace des phases (relation 2.24B) était du type :

$$\xi_{n+1} = \lambda \xi_n + p_n h \quad (2.34)$$

L'application de la formule de contrôle de O.G.Y. (2.26) dans le cas d'une trajectoire reconstruite peut être inefficace dans certains cas. La stratégie

consistant à appliquer une correction telle que ξ_{n+1} se trouve sur la direction stable du système sans contre-réaction ne conduit pas systématiquement à la stabilisation. Ceci provient du fait que l'évolution du système avec contre-réaction s'effectue dans un espace de dimension supérieure à celui de ξ_n .

La dimension de l'espace dans lequel évolue un système dynamique est le nombre de conditions initiales nécessaire pour déterminer l'évolution future du système. Dans le cas de la méthode O.G.Y., le système avec contre-réaction était décrit par une équation du type:

$$\begin{aligned}\xi_{n+1} &= \lambda \xi_n + p_n \mathbf{h} \\ p_n &= \alpha(\mathbf{e}_u \cdot \xi_n)\end{aligned}\tag{2.35}$$

La connaissance de ξ_n permet de déterminer sans ambiguïté l'évolution ultérieure ξ_{n+1} , ξ_{n+2} , ... le nombre de variables dynamiques du système est donc inchangé par l'application de la contre-réaction.

Par contre, dans le cas de la relation (2.33), si on applique une correction p_n dépendant de ξ_n , ou de ξ_n et p_{n-1} ($p_n = f(\xi_n, p_{n-1})$), il est nécessaire de connaître ξ_n et p_{n-1} pour déterminer l'évolution future du système, c'est-à-dire les valeurs suivantes de: (ξ_{n+1}, p_n) , (ξ_{n+2}, p_{n+1}) ..., la dimension est donc augmentée d'une unité.

Dressler et Nitsche [Dressler & Nitsche, 1992] ont proposé une formule de contrôle utilisant la donnée (ξ_n, p_{n-1}) pour stabiliser le point fixe:

$$p_n = - \frac{\lambda_u^2}{\lambda_u \mathbf{e}_u \cdot \mathbf{h} + \mathbf{e}_u \cdot \mathbf{l}} \mathbf{e}_u \cdot \xi - \frac{\lambda_u \mathbf{e}_u \cdot \mathbf{l}}{\lambda_u \mathbf{e}_u \cdot \mathbf{h} + \mathbf{e}_u \cdot \mathbf{l}} p_{n-1}\tag{2.36}$$

La modification de Dressler et Nitsche donne un caractère très général à la méthode O.G.Y. car elle permet théoriquement la stabilisation de n'importe quel système chaotique (excepté quelques cas non génériques) en observant une variable unique du système. Cependant, nous verrons que le problème causé par la technique des retards peut également être résolu de manière différente, par l'utilisation d'une correction impulsionnelle.

2.2.3. Méthode utilisée

Les techniques de stabilisation peuvent être mises à profit pour étudier des orbites instables. Ces techniques ne présentent pas un grand intérêt en ce qui concerne l'étude des orbites plongées dans les attracteurs chaotiques, puisque ces orbites peuvent être aisément déterminées et caractérisées par la technique des *close-return*. Par contre, moyennant quelques modifications, elles peuvent devenir un outil particulièrement intéressant pour l'étude d'orbites situées en dehors des attracteurs chaotiques.

Nous allons modifier la méthode O.G.Y. de façon à permettre la stabilisation d'orbites instables lorsqu'elles sont contenues dans un attracteur, puis à les suivre lorsque des paramètres de contrôle évoluent dans un certain domaine. Il sera alors possible de les observer dans des domaines de paramètres pour lesquels elles se trouvent en dehors de l'attracteur chaotique.

La deuxième modification qui sera apportée à la méthode O.G.Y. réside dans l'application d'une correction qui dépend du temps entre deux passages à travers le plan de section de Poincaré.

2.2.3.A. DETERMINATION AUTOMATIQUE DU POINT FIXE

Lorsque des paramètres de contrôle varient, les propriétés des orbites instables (position du point fixe de l'application de Poincaré, multiplicateurs de Floquet et directions propres) changent également. On peut donc penser *a priori* que la stabilisation d'une orbite instable dans cette situation nécessite de déterminer ces grandeurs en permanence. Cependant, la méthode O.G.Y. est robuste vis à vis d'erreurs sur la détermination des directions propres et des multiplicateurs de Floquet. Par conséquent, s'il est possible de transformer cette méthode de façon à la rendre robuste face à une modification de la position du point fixe, on peut alors suivre une orbite dans un certain domaine de paramètres.

L'idée principale est d'appliquer une contre-réaction ne dépendant pas de manière explicite de la position du point fixe. Une procédure facilement applicable expérimentalement est l'application d'une contre-réaction dépendant

de $(X_n - X_{n-1})$ au lieu de $\xi_n = X_n - X_F^*$.

Les résultats obtenus précédemment ont montré que l'application d'une correction indépendante des composantes du vecteur d'état selon les directions stables du point fixe $(e_u \cdot \xi_n)$ était particulièrement efficace, car dans ce cas seule la valeur propre instable était modifiée par l'application de la contre-réaction.

Compte tenu de cette constatation, on peut se demander s'il est possible de stabiliser le système en appliquant une contre-réaction proportionnelle à $e_u \cdot (X_n - X_{n-1})$. Dans ce cas, le point X_F reste un point fixe du système avec contre-réaction (puisque la correction s'annule lorsque $X_n = X_F$), et ceci quelle que soit sa position. Seule sa stabilité est modifiée et dépend de la dynamique locale autour du point fixe X_F du système avec contre-réaction:

$$\begin{aligned}\xi_{n+1} &= \lambda \xi_n + p_n h \\ p_n &= \alpha(\xi_n^u - \xi_{n-1}^u)\end{aligned}\tag{2.37}$$

avec $\xi_n^u = e_u \cdot \xi_n$

La correction n'est appliquée que si la distance $|\xi_n - \xi_{n-1}|$ entre deux points successifs est inférieure à une petite valeur ε , ce qui correspond au passage de la trajectoire au voisinage d'une orbite instable. (On suppose que l'intersection de l'orbite que l'on désire stabiliser avec la section de Poincaré est réduite à un point unique).

Comme dans le cas de la méthode O.G.Y., le fait que la correction ne dépende que des composantes instables de ξ_n entraîne que les valeurs propres stables ne sont pas modifiées par l'application de la contre-réaction. L'analyse de stabilité du point fixe se réduit donc à celle du système:

$$\begin{aligned}\xi_{n+1}^u &= \lambda_u \xi_n^u + p_n h_u \\ p_n &= \alpha(\xi_n^u - \xi_{n-1}^u)\end{aligned}\tag{2.38}$$

avec $h_u = e_u \cdot h$ (on suppose $h_u \neq 0$)

* En fait il est également possible de calculer une correction à partir de $X_n - X_F$ si l'on ajoute une deuxième boucle de contre-réaction agissant sur X_F de façon à ce que la valeur moyenne de la correction tende vers zéro [Caroll *et al.*, 1992].

Ce système peut être mis sous la forme matricielle suivante:

$$\mathbf{Z}_{n+1} = \mathbf{M} \mathbf{Z}_n \quad (2.39)$$

$$\text{avec } \mathbf{Z}_n = \begin{pmatrix} \xi_n^u \\ p_n \end{pmatrix} \quad \text{et } \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \lambda_u & h_u \\ \alpha(\lambda_u - 1) & \alpha\lambda_u \end{pmatrix}$$

Le point fixe $\mathbf{Z}_F = 0$ est stable uniquement si les valeurs propres de la matrice \mathbf{M} sont de module inférieur à l'unité. L'étude des valeurs propres de \mathbf{M} en fonction de α et λ_u montre qu'il existe des valeurs de α stabilisant le point fixe si $-3 < \lambda_u < -1$. Ces valeurs sont telles que:

$$\frac{-1-\lambda_u}{2(1-\lambda_u)} < \alpha h_u < \frac{1}{(1-\lambda_u)}$$

Par contre, si $\lambda_u > 1$ ou $\lambda_u < -3$, il est impossible de stabiliser le point fixe par ce type de contrôle.

Dans cette situation, l'inefficacité de la méthode peut s'expliquer qualitativement si l'on remarque que la procédure de contrôle utilisée présente un point commun avec méthode O.G.Y. dans le cas de l'utilisation de la méthode des retards. En effet, le nombre de variables décrivant la dynamique du système est augmenté d'une unité. Ceci apparaît clairement dans la relation (2.39), la connaissance de ξ_n ne suffit pas pour prévoir l'évolution future du système. Il est nécessaire de connaître une autre variable comme p_n ou ξ_{n-1}^u . L'inefficacité de la méthode pour certaines valeurs de λ_u a donc une origine semblable à celle mise en évidence au § 2.2.2.B dans le cas de l'utilisation de la technique des retards.

Afin de résoudre ce problème, il est utile de considérer d'un autre point de vue le lien entre la procédure de contrôle (2.37) et la méthode O.G.Y. dans le cas de l'utilisation de la méthode des retards. Dans les deux cas, la mesure à partir de laquelle est calculée la correction $[\Phi_{p_{n-1}}^{-1}(\mathbf{X}(t_n)) \text{ et } (\xi_n^u - \xi_n^u)]$ n'est pas reliée de manière univoque à la composante ξ_n^u de la position dans l'espace des phases. Plus précisément, dans le premier cas, le vecteur reconstruit était relié à l'état du système dans l'espace des phases, mais également à la valeur précédente du paramètre de contrôle. Dans le deuxième cas, la donnée de $(\xi_n^u - \xi_{n-1}^u)$ ne permet pas de déterminer ξ_n^u si l'on ne connaît pas une variable supplémentaire comme

p_{n-1} . Dans les deux cas, le problème provient de la dépendance de la grandeur mesurée avec le paramètre de contrôle, et du fait que ce dernier soit activé pendant la mesure.

Afin de rendre efficace la procédure de contrôle quel que soit le multiplicateur de Floquet λ_u , on peut envisager deux types de transformation. La première est semblable à celle préconisée par Dressler et Nitsche [Dressler & Nitsche, 1992]. La composante instable ξ_n^u peut être déterminée à partir de $(\xi_n^u - \xi_{n-1}^u)$ et de la valeur de la correction entre t_{n-1} et t_n . On peut alors appliquer la méthode O.G.Y. en utilisant la valeur de ξ_n^u ainsi calculée. En particulier, il existe une correction p_n qui stabilise le système en envoyant le point suivant ξ_{n+1} sur la variété stable du point fixe:

$$p_n = \frac{\lambda_u}{h_u} \xi_n = \alpha(\xi_n^u - \xi_{n-1}^u) + \beta p_{n-1} \quad (2.40)$$

avec
$$\beta = \frac{\lambda_u}{\lambda_u - 1} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{\lambda_u}{h_u} \beta$$

Cette solution présente l'inconvénient de nécessiter la mémorisation de p_{n-1} , ce qui complique le dispositif de contrôle s'il est complètement analogique. De plus, dans le cas où l'on désire rechercher les différents paramètres du dispositif de stabilisation de manière empirique (sans déterminer $\lambda_u, e_u \dots$), il est préférable de restreindre le nombre de paramètres de la contre-réaction. C'est pourquoi nous avons opté pour une méthode différente.

Nous allons effectuer la mesure servant au calcul de la correction pendant que le système ne subit pas de perturbations. Ceci s'effectue simplement en appliquant la correction une période sur deux:

$$\begin{aligned} \xi_{n+1} &= \lambda \xi_n + p_n h \\ p_{2n} &= \alpha(\xi_{2n}^u - \xi_{2n-1}^u) \\ p_{2n+1} &= 0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

Pour déterminer la stabilité du point fixe, il suffit de considérer l'évolution des itérés impairs:

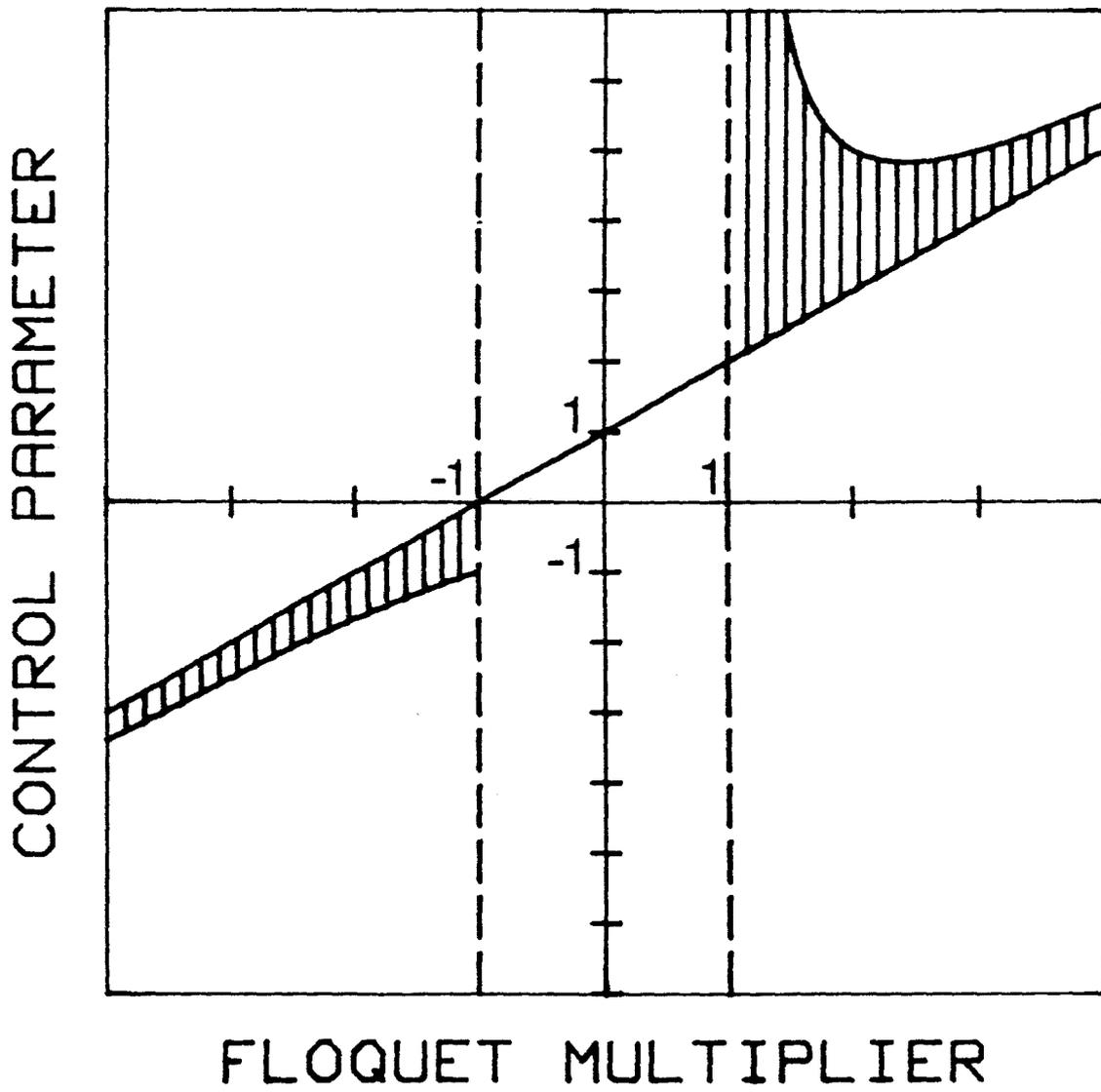


Fig. 2.26. Domaine de valeurs de αh_{u1} assurant la stabilisation en fonction du multiplicateur de Floquet λ_u .

$$\xi_{2n+1}^u = [\lambda_u^2 - (\lambda_u - 1)^2 \alpha h_u] \xi_{2n-1}^u \quad (2.42)$$

car les itérés pairs s'en déduisent directement: $\xi_{2n}^u = \lambda_u \xi_{2n-1}^u$. Il est toujours possible de trouver des valeurs de α qui stabilisent le point fixe, ces valeurs sont les suivantes:

$$\frac{\lambda_u^2 - 1}{(\lambda_u - 1)^2} < \alpha h_u < \frac{\lambda_u^2 + 1}{(\lambda_u - 1)^2}$$

Pour une orbite instable donnée, la valeur de α peut varier dans un certain domaine, et inversement, une valeur donnée de α permet d'assurer la stabilisation dans un certain domaine de valeurs de λ_u . Les valeurs de λ_u correspondantes sont représentées en fonction de α sur la figure 2.26.

Le passage de la trajectoire au voisinage de l'orbite instable est détecté par le système de contre-réaction sans qu'il soit nécessaire de connaître la position du point fixe qui lui est associé dans la section de Poincaré. Ceci représente un avantage important si on désire rechercher les paramètres de la contre-réaction de manière empirique, sans étude préalable de l'orbite.

Cette façon particulière de détecter l'orbite instable peut donner lieu à un phénomène particulier. Le système de contre-réaction ne fait pas la différence entre l'orbite périodique que l'on désire stabiliser et les autres orbites périodiques qui coupent également la section de Poincaré en un seul point. Le passage de la trajectoire au voisinage de ces dernières va déclencher l'application d'une correction. En général, les paramètres de la contre-réaction ne permettent pas la stabilisation de ces orbites et la trajectoire va s'en éloigner. La correction étant supposée faible, la trajectoire se trouve encore dans le voisinage de l'attracteur. Elle évoluera ensuite asymptotiquement vers l'attracteur jusqu'au moment où elle entrera dans le voisinage de l'orbite pour laquelle les paramètres sont adaptés.

Cependant, il n'est pas exclu qu'un jeu de paramètres puisse permettre la stabilisation de plusieurs orbites instables. L'orbite sur laquelle on stabilise le système dépendrait alors des conditions initiales. Ce phénomène n'a jamais été rencontré au cours de nos expériences sur la stabilisation du laser à fibre mais pourrait l'être dans d'autres systèmes dynamiques.

Il est donc théoriquement possible de transformer la méthode O.G.Y. de façon à la rendre robuste lorsque les propriétés de l'orbite instable (matrice de Floquet et position du point fixe) changent. La formule de contrôle obtenue (2.41) présente deux avantages importants. La recherche empirique des paramètres de la contre-réaction est facilitée par la détermination automatique du point fixe, et une orbite instable peut être suivie lorsque des paramètres de contrôle varient dans un certain domaine. L'application d'une correction une période sur deux entraîne une plus grande sensibilité du système de stabilisation au bruit et aux erreurs de détermination des paramètres de la contre-réaction. La stabilisation d'orbites très instables ou de grande périodicité sera donc moins facile qu'en utilisant la méthode O.G.Y.

Nous avons supposé implicitement que nous avons accès à un vecteur $X(t)$ relié de manière bijective à l'état du système dans l'espace des phases, et que la relation entre ces deux vecteurs ne dépendait pas des corrections appliquées au système. Un vecteur reconstruit par la méthode des retards pourra cependant être utilisé si on utilise une correction dépendant du temps entre deux passages par le plan de section.

2.2.3.B. UTILISATION D'UNE CORRECTION IMPULSIONNELLE

Jusqu'à présent, nous avons considéré des corrections constantes entre deux intersections de la trajectoire avec la section de Poincaré ($p(t)=p_n$ pour $t \in]t_n, t_{n+1}]$). Mais l'utilisation d'une correction dépendant du temps est également possible et cette solution présente de réels avantages. Nous supposons ici que la correction est du type:

$$p(t) = p_n u(t) \quad \text{pour } t \in]t_n, t_{n+1}] \quad (2.43)$$

Le premier avantage concerne l'utilisation éventuelle de la technique des retards. Le problème engendré par l'utilisation de vecteurs reconstruits est dû au fait que les points de la section de Poincaré dépendent de la valeur du paramètre de contrôle (voir § 2.2.2.B, relation 2.30). Le vecteur servant à calculer la correction $Y(t_n) = [c, z(t_n-\tau), \dots, z(t_n-(d-1)\tau)]$ est relié au vecteur de l'espace des phases $X(t_n)$ par une bijection dépendant des valeurs du paramètre de contrôle $p(t)$ entre $t_n-(d-1)\tau$ et t_n . Le problème est donc lié au fait que le paramètre de contrôle est activé pendant la mesure des coordonnées.

Une solution différente de celle de Dressler et Nitsche peut donc être utilisée pour résoudre le problème. Il suffit d'appliquer une correction entre les instants t_{n-1} et $t_{n-(d-1)\tau}$ puis d'annuler la correction $p(t)$ entre $t_{n-(d-1)\tau}$ et t_n . La mesure s'effectue alors pendant une période où le paramètre de contrôle μ possède une valeur bien définie (μ_0). La relation (2.31) devient dans ce cas:

$$X(t_n) = \Phi_{\mu=\mu_0}^{-1} [Y(t_n)] \quad (2.44)$$

et un vecteur reconstruit peut être utilisé sans problème dans la formule de contrôle de O.G.Y. (2.26) ou celles permettant le suivi d'orbites périodiques (2.40) et (2.41). Dans ces formules, il suffit de remplacer les *valeurs* du paramètre de contrôle par l'*amplitude* des impulsions.

Le choix d'une forme particulière pour la correction peut améliorer l'efficacité du contrôle. Ceci provient du fait que différentes formes de correction auront une réponse h différente aussi bien au niveau de l'amplitude $|h|$ que de la direction $h/|h|$.

D'une part, on perçoit immédiatement l'intérêt d'une telle correction en ce qui concerne les systèmes "pathologiques", pour lesquels la réponse h s'effectue essentiellement dans les directions stables quand la correction est constante entre deux instants de passage par le plan de section.

D'autre part, en choisissant une forme d'impulsion telle que la réponse selon les directions stables est faible, la technique de stabilisation utilisée sera également plus robuste à une incertitude sur la direction de la mesure. On pourra alors dans certains cas (comme dans les expériences qui vont suivre) éviter la mesure de la composante instable du vecteur d'état, et de ce fait la reconstruction de la dynamique par la technique des retards.

Il est également intéressant de noter que l'application d'une succession d'impulsions dont les amplitudes sont contrôlables séparément pourrait permettre une stratégie de contrôle différente, voisine de celle présentée par Auerbach *et al.* [Auerbach *et al.*, 1992], permettant d'appliquer une contre-réaction dépendant une variable quelconque du système au lieu de la composante instable du vecteur d'état. En effet, les amplitudes des impulsions représenteraient alors des paramètres de contrôle différents associé à des réponses différentes h_1, h_2, \dots , et la recherche de la composante instable du vecteur d'état serait remplacée par un choix adéquat des différentes amplitudes p_{1n}, p_{2n}, \dots de façon à ce que la réponse globale s'effectue dans la direction instable de l'orbite.

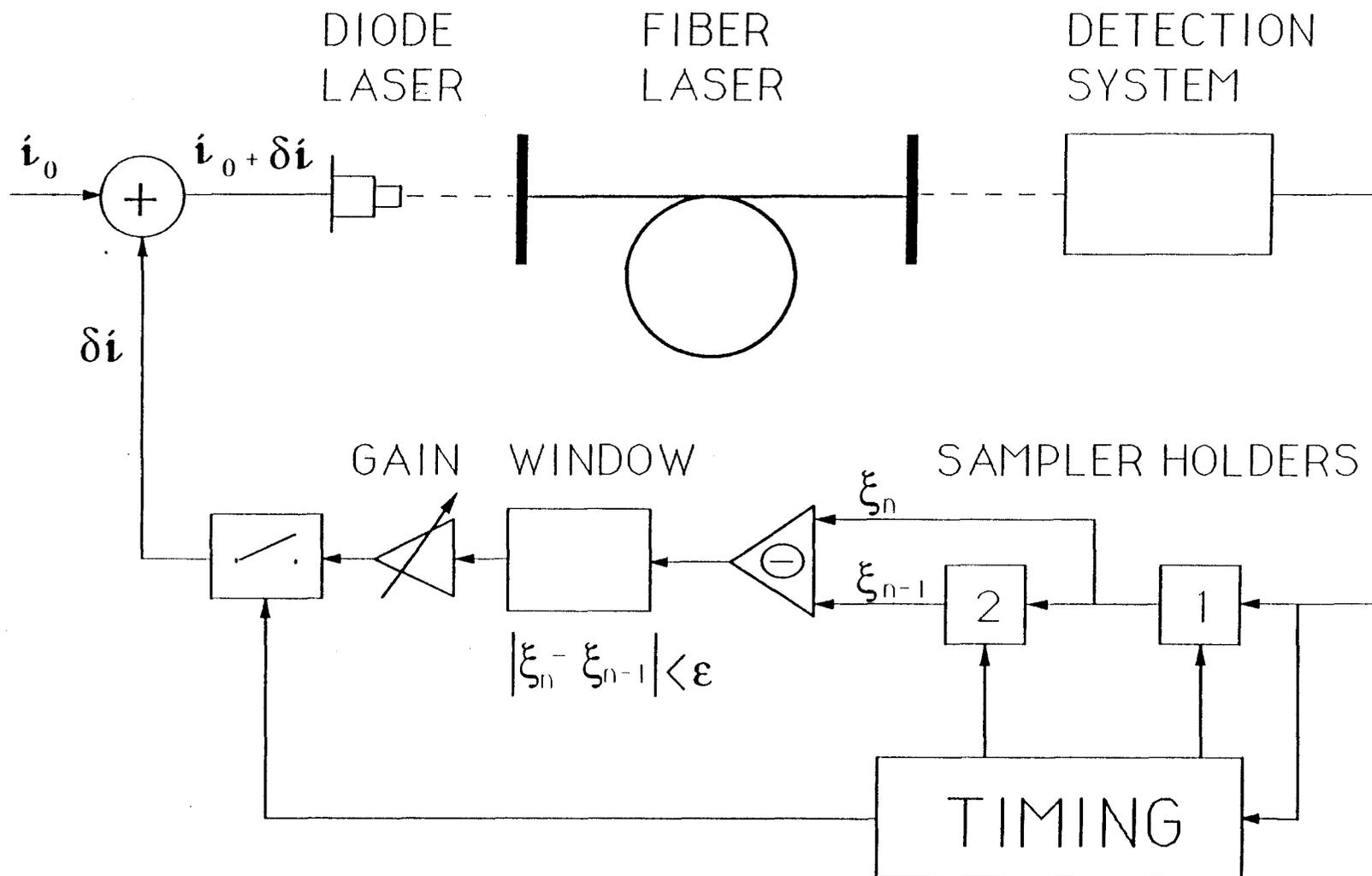


Fig. 2.27. Dispositif expérimental pour la stabilisation d'orbites périodiques instables dans le laser à fibre.

De la même manière, l'accès à plusieurs paramètres de contrôle doit permettre la stabilisation d'orbites possédant plusieurs directions instables.

2.2.4. Résultats expérimentaux

2.2.4.A. DISPOSITIF EXPERIMENTAL

La contre-réaction impulsionnelle appliquée sur le courant de diode laser est fournie par un dispositif entièrement analogique. La variable dynamique utilisée est l'intensité émise par le laser selon une des deux polarisations (I_1 ou I_2). La mesure de la composante instable pourrait être effectuée en utilisant la méthode des retards appliquée à $I_1(t)$ ou $I_2(t)$, mais l'application d'une correction dépendant uniquement de I_1 ou I_2 s'est avérée suffisante. Le dispositif de contre-réaction (fig. 2.27) est composé de deux parties* correspondant à deux fonctions distinctes.

La première partie effectue une section de Poincaré de la trajectoire telle que l'intersection du plan de section avec l'orbite instable considérée se réduise à un point unique. Chaque orbite instable correspond à un signal comportant un certain nombre m de pics par période (orbites mT -périodiques), la durée séparant deux pics étant à peu près identique pour toutes les orbites observées. Les impulsions permettant l'échantillonnage des valeurs $I_1(t_n)$ (ou $I_2(t_n)$) sont obtenues de la manière suivante. On déclenche une impulsion chaque fois que le signal est proche de sa valeur maximale (en détectant le passage de la dérivée de $(I_1(t) + I_2(t))$ par une valeur proche de zéro, et par valeurs décroissantes). Cette impulsion subit un retard τ_a ajustable, permettant de choisir la position du plan de Poincaré (voir § 1.3.1). Afin d'obtenir une impulsion unique par période, la suite d'impulsions est divisée par m lorsque l'on désire stabiliser une orbite de période mT .

La seconde partie du dispositif crée le signal de correction $p(t)$ à partir des informations obtenues dans la section de Poincaré. Les impulsions délivrées aux instants t_n par le circuit précédent déclenchent deux échantillonneurs montés en cascade de façon à obtenir à chaque instant $t \in]t_n, t_{n+1}[$ les valeurs $I_{1n} = I_1(t_n)$ et $I_{1n-1} = I_1(t_{n-1})$.

* Le schéma électronique complet du prototype est décrit ailleurs [Szwaj, 1992]

Si la valeur absolue de cette différence est supérieure à une petite valeur ε , la correction $p(t)$ est forcée à zéro. Le cas contraire correspond au passage possible de la trajectoire au voisinage d'une orbite périodique de période mT . Dans ce cas, on génère une impulsion rectangulaire de durée $\Delta\tau_c$ retardée de τ_c par rapport à t_n et possédant une amplitude p_n proportionnelle à $(I_{1n} - I_{1n-1})$. Cette impulsion est envoyée une période sur deux à l'entrée de modulation de la diode laser.

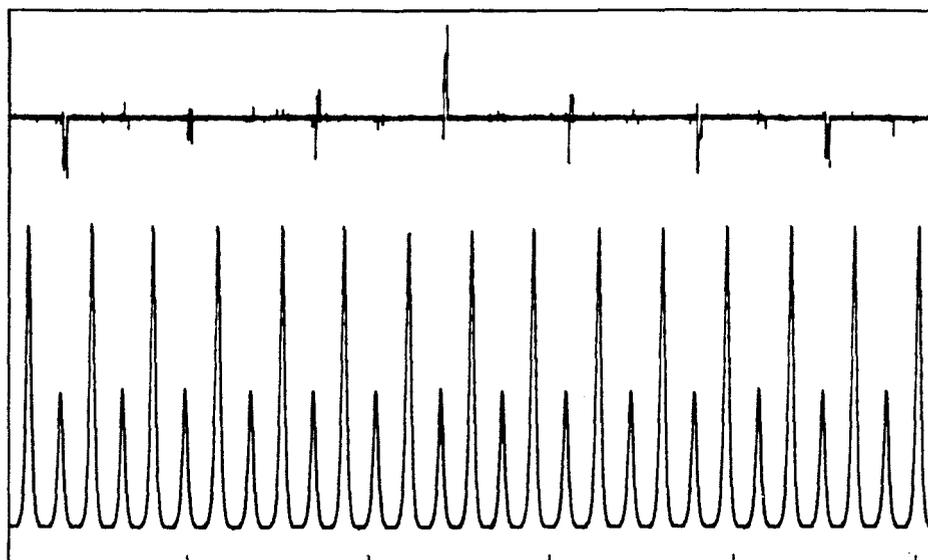
Le dispositif comporte donc 5 paramètres ajustables: le délai τ_a précédant l'acquisition des valeurs I_{1n} (ou I_{2n}) (position du plan de section), le retard τ_c et la durée $\Delta\tau_c$ de l'impulsion de correction, le gain α du système et la largeur ε de la fenêtre fixant la valeur maximale de la correction (p^*).

2.2.4.B. CONTROLE DU CHAOS DANS LE LASER A FIBRE

Les propriétés d'une orbite instable plongée dans l'attracteur et sa dépendance avec le paramètre de contrôle peuvent être déterminées en observant l'évolution d'une section de Poincaré en fonction d'un paramètre de contrôle [Auerbach *et al.*, 1987; Ott *et al.*, 1990]. Cette approche n'est toutefois pas nécessaire car les échelles de temps mises en jeu dans le laser à fibre sont très courtes devant la durée d'une expérience. Ceci permet une recherche empirique des valeurs adéquates des paramètres .

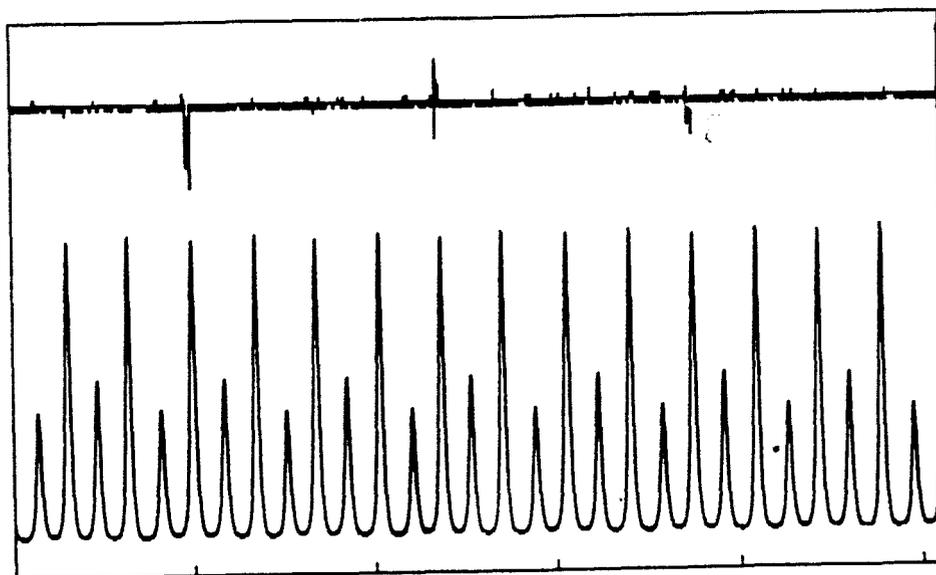
La première condition qui s'est avérée nécessaire lors de toutes nos expériences concerne le retard τ_a déterminant la position du plan de section. Celui-ci doit être choisi de façon à obtenir un diagramme de premier retour approximativement unidimensionnel. On peut donner une interprétation simple de ce phénomène. Comme nous l'avons vu précédemment (§ 2.2.1), au voisinage d'une orbite instable, l'un attracteur est de dimension égale à 1 dans la direction instable et fractale dans les direction stables. L'observation d'un diagramme de premier retour d'allure unidimensionnelle correspond à deux possibilités.

- Soit la structure fractale n'est pas résolue lors de l'observation et correspond certainement à une valeur propre stable très grande, comme dans le cas des expériences décrites dans les références [Ditto *et al.*, 1990; Hunt, 1991; Peng *et al.*, 1991].
- Soit on observe une variable ne dépendant pas de l'évolution du système selon les directions stables associées à la structure fractale, ce qui correspond à notre



TIME (0.4 ms/div)

Fig. 2.28. Stabilisation d'une orbite 2T instable : (a) puissance de pompe normalisée par rapport à sa valeur moyenne (les trois pics constituent la correction, les autres fluctuations sont des bruits techniques). (b) Signal de sortie du laser $I_1(t)$ stabilisé sur l'orbite 2T.



TIME (0.4 ms/div)

Fig. 2.29. Stabilisation d'une orbite 4T instable. (a) puissance de pompe normalisée par rapport à sa valeur moyenne. (b) Signal de sortie du laser $I_1(t)$ stabilisé.

situation puisque la structure fractale est résolue pour d'autres positions du plan de section.

Ceci explique pourquoi l'observation d'un diagramme de premier retour d'allure unidimensionnelle est plus favorable à la stabilisation d'une orbite périodique instable.

La durée entre l'instant d'échantillonnage et le début de la correction n'est pas un paramètre critique. Elle est fixée à sa valeur minimale ($\tau_c \approx 10 \mu s$) correspondant à la durée d'échantillonnage ($5 \mu s$ par échantillonneur). La durée optimale de $\Delta\tau_c$ est de l'ordre de 10 à 30 μs .

La recherche des paramètres $\Delta\tau_c$ et du gain α s'effectue de la manière suivante. Dans un premier temps, on choisit une valeur très petite pour ε , de façon à pouvoir visualiser un changement de la dynamique autour de l'orbite instable. Lorsque les paramètres α et $\Delta\tau_c$ s'approchent des valeurs correctes, on observe une augmentation de la densité de points au voisinage d'une intersection du diagramme de premier retour avec la première bissectrice. La largeur de la fenêtre ε doit ensuite être augmentée de façon à ce que le bruit du système ne cause pas de variations de $(I_{1n} - I_{1n-1})$ supérieures à ε .

Les signaux correspondant à une orbite 2T et une orbite 4T sont représentés sur les figures 2.28 et 2.29. La correction appliquée au système (a) est très faible (de l'ordre de 1 %), et la succession des valeurs p_n est distribuée de façon irrégulière. En particulier, on ne retrouve pas la périodicité de l'orbite stabilisée dans p_n . L'amplitude des corrections p_n a en fait le même ordre de grandeur lorsque le laser se trouve dans un régime 2T ou 4T stable et qu'on n'applique pas les corrections p_n à la puissance de pompe. On peut alors considérer que la correction appliquée au laser est nulle au bruit près. On en déduit que les orbites stabilisées sont identiques aux orbites instables existant dans le laser sans contre-réaction.

Une simple observation des diagrammes de premier retour permet de vérifier que l'orbite instable stabilisée est contenue dans l'attracteur chaotique. Il suffit de vérifier que le point correspondant à l'orbite stabilisée se trouve sur le diagramme de premier retour de l'attracteur chaotique (fig. 2.30).

Le dispositif est conçu de manière à pouvoir supprimer ou appliquer instantanément la contre-réaction. On peut ainsi observer le transitoire précédant la stabilisation de l'orbite. Rappelons que tant que la trajectoire n'atteint pas le voisinage de l'orbite instable, la correction est maintenue à zéro et le système

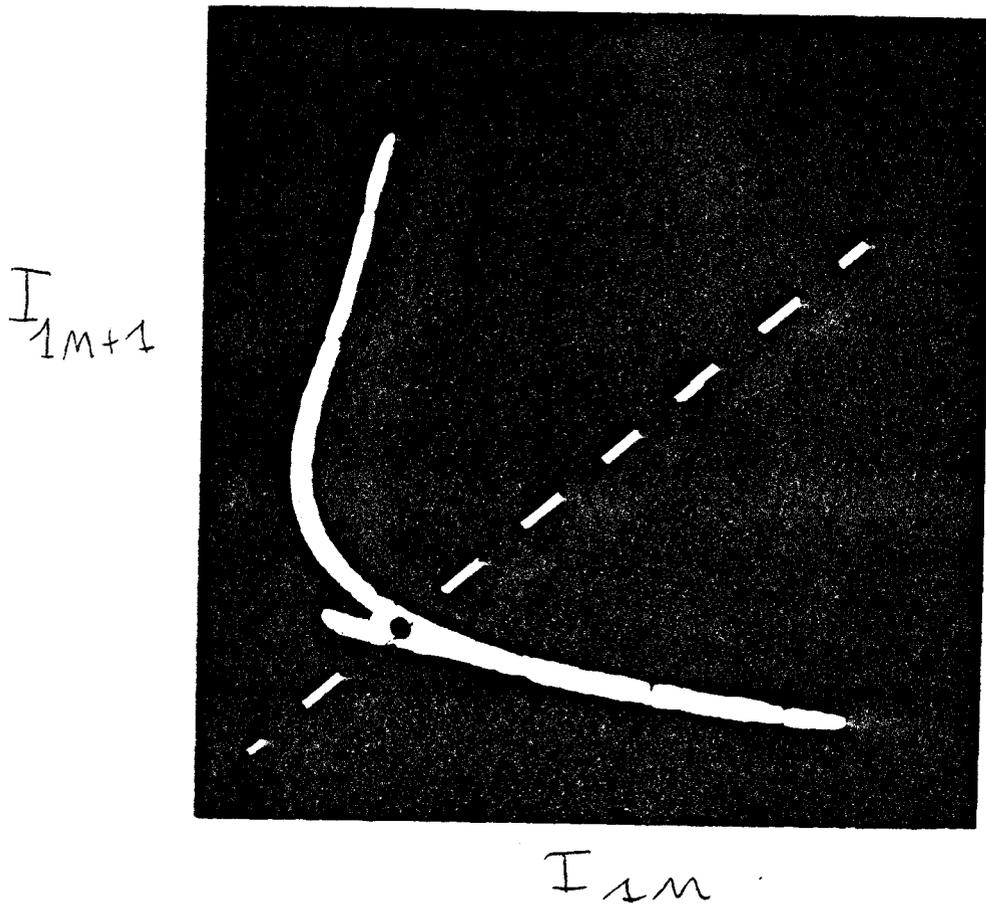
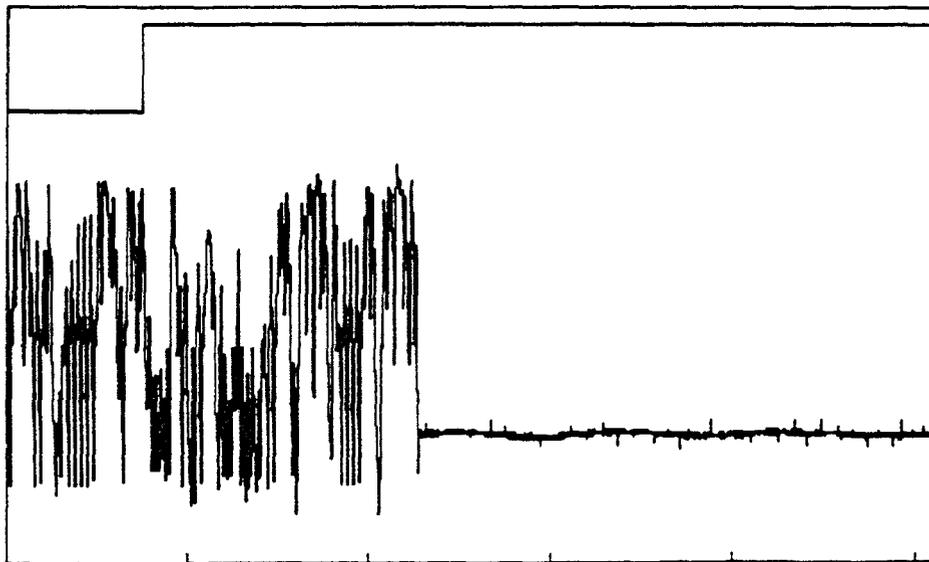


Fig. 2.30. Super position du diagramme de premier retour de l'attracteur chaotique et du diagramme correspondant à l'orbite stabilisée (point noir). Le trait pointillé représente la première bissectrice.



TIME (20 ms/div)

Fig. 2.31. Transitoire typique précédant la stabilisation (évolution des valeurs échantillonnées I_{1n}).

reste chaotique. La durée séparant l'activation du dispositif et le passage de la trajectoire au voisinage de l'orbite dépend des conditions initiales et de la largeur de la fenêtre ε . On observe typiquement un transitoire chaotique (fig. 2.31) dont la durée varie fortement d'une expérience à l'autre. La probabilité d'observer un transitoire de durée τ décroît avec τ (théoriquement de manière exponentielle [Ott *et al.*, 1990; Grebogi *et al.*, 1986]).

Alors que la stabilisation des orbites 2T et 4T a été relativement aisée à obtenir, celle de l'orbite T s'est avérée impossible, même en utilisant une combinaison linéaire de I_{1n} et I_{2n} de façon à mesurer la composante instable des itérés (I_{1n}, I_{2n}) . Ceci peut paraître paradoxal puisque l'observation des signaux chaotiques (figure 2.22) et des transitoires provenant du point fixe (voir § 2.1.2.D) montre que cette orbite existe effectivement à partir de la bifurcation T-2T et se trouve dans l'attracteur après la transition 2C-C. De plus les ordres de grandeur des multiplicateurs de Floquet correspondant aux directions instables associées aux orbites T et 2T sont comparables.

La différence essentielle entre les orbites T et 2T et qui explique ce résultat réside en fait dans les directions h associées à une modification du paramètre de pompe. Dans le cas de l'orbite T, la direction instable se trouve approximativement dans le plan défini par $I_1 + I_2 = 0$ (voir § 2.1.2.D.). Or, une modification du paramètre de pompe déforme l'orbite T mais l'évolution de la variable $(I_1 + I_2)(t)$ correspondant à l'orbite n'est quasiment pas modifiée. Par conséquent, quel que soit le plan de section, la composante h_u sera négligeable devant les autres composantes. Nous nous trouvons alors approximativement dans le cas " $h_u = 0$ " déjà discuté pour la stabilisation des orbites par les différentes techniques, et pour lequel la stabilisation est impossible. On pourrait stabiliser l'orbite T si l'on avait accès à un paramètre de contrôle agissant de manière dissymétrique sur les deux sous-systèmes constituant le laser à fibre, par exemple en agissant sur la polarisation du faisceau de pompe ou en modulant les pertes de la cavité de manière anisotrope.

2.2.4.C. SUIVI ET ETUDE D'ORBITES PERIODIQUES

La contre-réaction ne dépendant pas explicitement de la position du point fixe X_F , on peut facilement suivre une orbite périodique lorsqu'un paramètre de contrôle varie. Ceci permet de suivre des orbites lorsqu'elles sont contenues dans

SAMPLED VALUE (arb. units.)

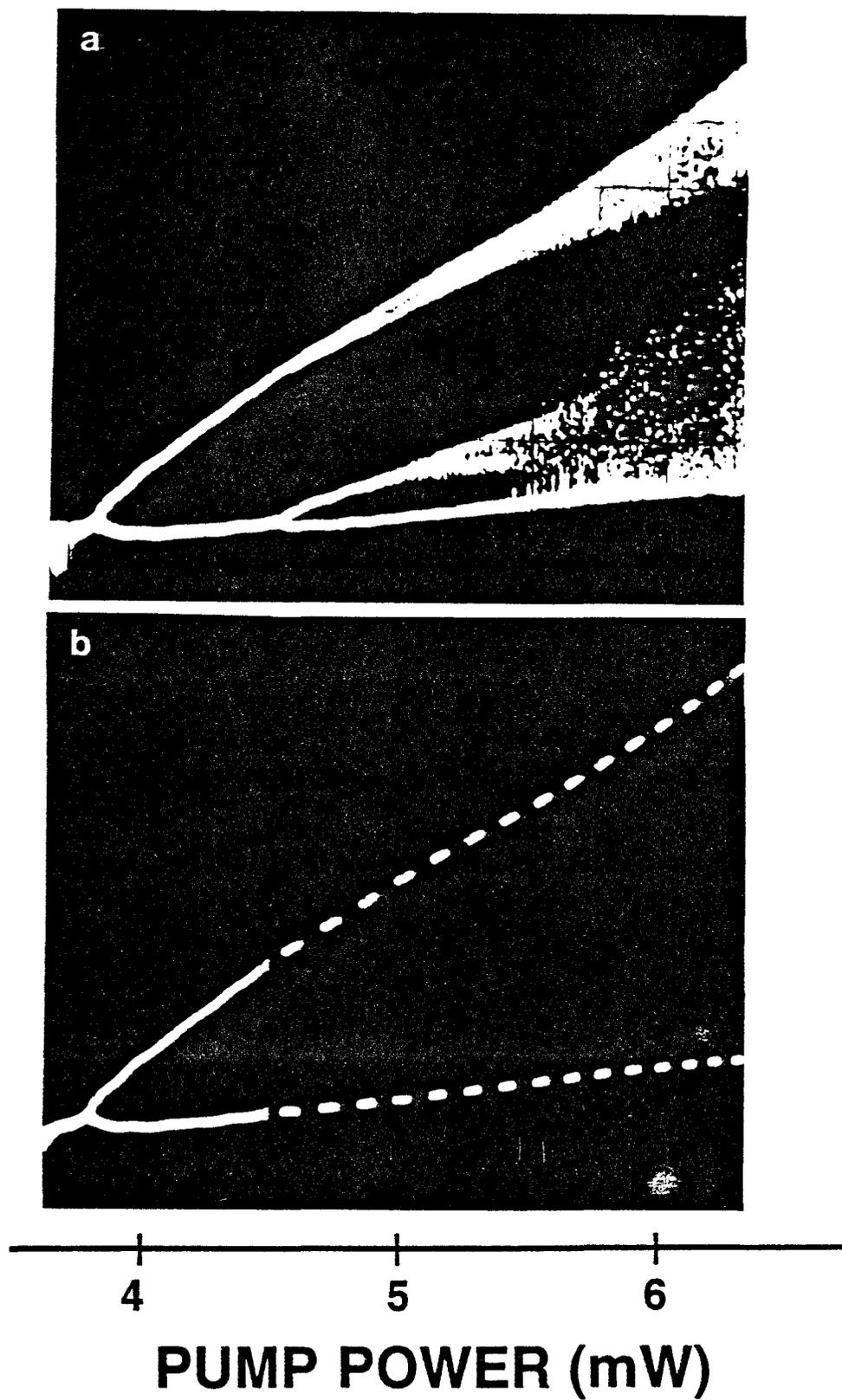


Fig. 2.32. Diagrammes de bifurcations sans (a) et avec (b) contre-réaction. La courbe en pointillés correspond à l'orbite 2T instable. L'orbite 2T se déstabilise pour une puissance de pompe de $P = 4.4$ mW et entre dans l'attracteur chaotique pour $P > 5.6$ mW.

l'attracteur, mais aussi lorsqu'elles se trouvent en dehors de l'attracteur, comme nous allons le voir maintenant.

Par exemple, les orbites 2T et 4T que nous avons stabilisées ne sont présentes dans l'attracteur qu'à partir des transitions C_8-C_4 et C_4-C_2 respectivement de la cascade inverse. Cette observation suggère que ces orbites instables proviennent de la déstabilisation des cycles limites 2T et 4T de la cascade sous-harmonique. Nous allons montrer que cette hypothèse est vérifiée dans le cas du laser à fibre.

Dans un premier temps, on stabilise l'orbite 2T dans un domaine de paramètres où elle est contenue dans l'attracteur en suivant la procédure décrite précédemment. Ensuite on diminue progressivement la puissance de pompe. Ainsi, on peut stabiliser l'orbite dans un domaine de paramètres où elle ne se trouve plus dans l'attracteur chaotique. Durant la variation du paramètre de pompe, la correction p_n est constamment irrégulière et de moyenne nulle. Ceci assure que l'orbite stabilisée est identique à l'orbite 2T instable. On peut alors tracer la branche instable de l'orbite 2T dans le diagramme de bifurcation du laser (fig. 2.32b). L'orbite 2T est stabilisée pour une puissance de pompe injectée de $P = 5.6$ mW. On suit ensuite cette orbite jusqu'à la bifurcation 2T - 4T ($P = 4.4$ mW). Le diagramme de bifurcation du laser sans contre-réaction est représenté sur la figure 2.32a. Il faut également remarquer que ce diagramme de bifurcations de la solution instable peut également être obtenu en baissant le paramètre de pompe dans le sens inverse, en partant de l'orbite 2T stable.

Les propriétés d'orbites instables (période, multiplicateurs de Floquet...) peuvent être déterminées dans des domaines de paramètres jusqu'ici inaccessibles. Par exemple, en stabilisant une orbite instable et en observant ensuite la divergence de la trajectoire lorsque l'on supprime la contre-réaction (fig. 2.33), il est possible de mesurer le multiplicateur de Floquet instable de l'orbite. L'évolution du multiplicateur de Floquet λ_u de l'orbite 2T avec la puissance de pompe est représentée sur la figure 2.34. λ_u peut être mesuré jusqu'à la bifurcation 2T-4T, où il tend vers la valeur (-1), confirmant le fait que l'orbite 2T stabilisée provient de la déstabilisation de l'orbite 2T stable par bifurcation sous-harmonique.

2.2.4.D. ORBITES SITUÉES A LA FRONTIÈRE DU BASSIN D'ATTRACTION.

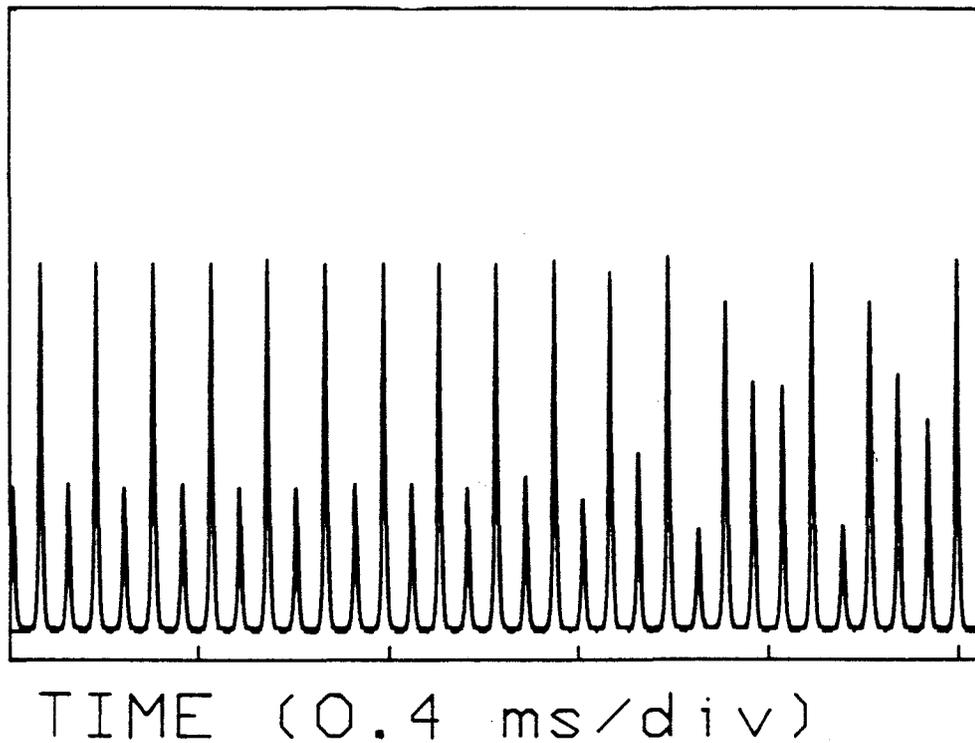


Fig. 2.33. Transitoire observé après suppression de la correction, et permettant la mesure du coefficient de Floquet instable de l'orbite périodique instable.

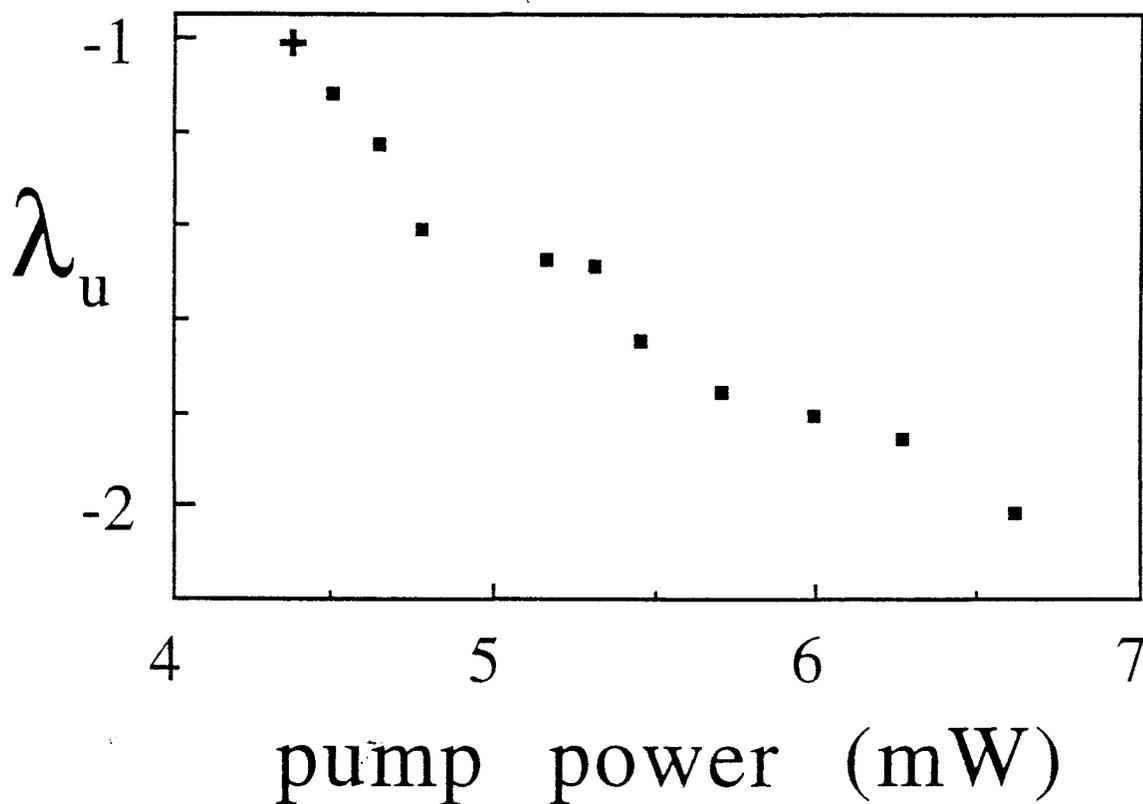
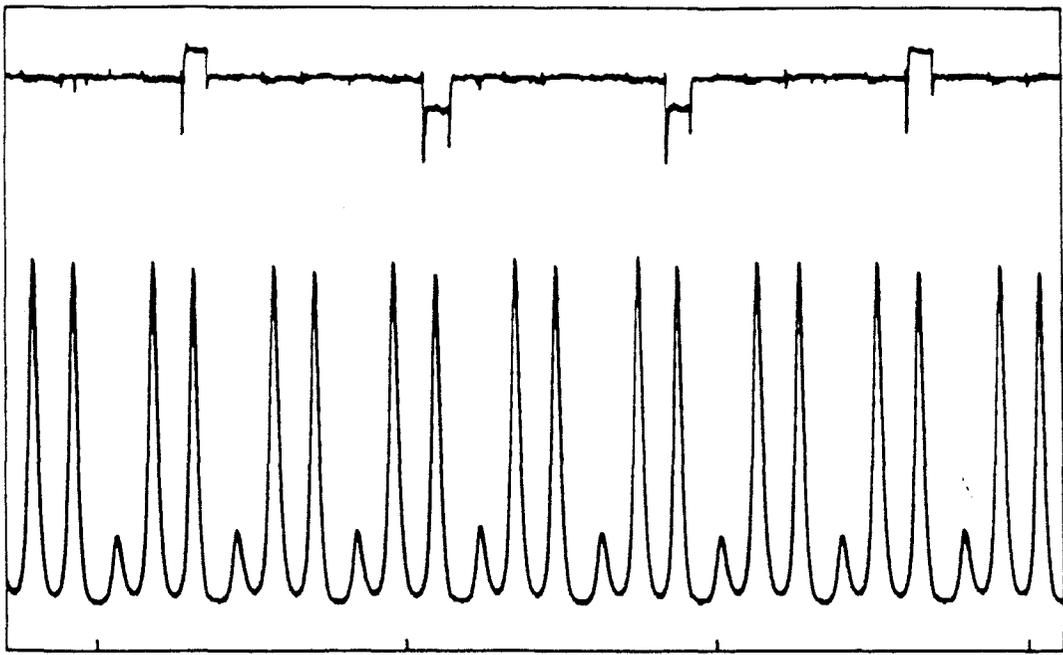


Fig. 2.34. Dépendance du multiplicateur de Floquet instable λ_u en fonction de la puissance de pompe. La croix symbolise la bifurcation T-2T qui se produit pour $P = 4.4$ mW. L'orbite 2T-périodique entre dans l'attracteur chaotique pour $P > 5.6$ mW.

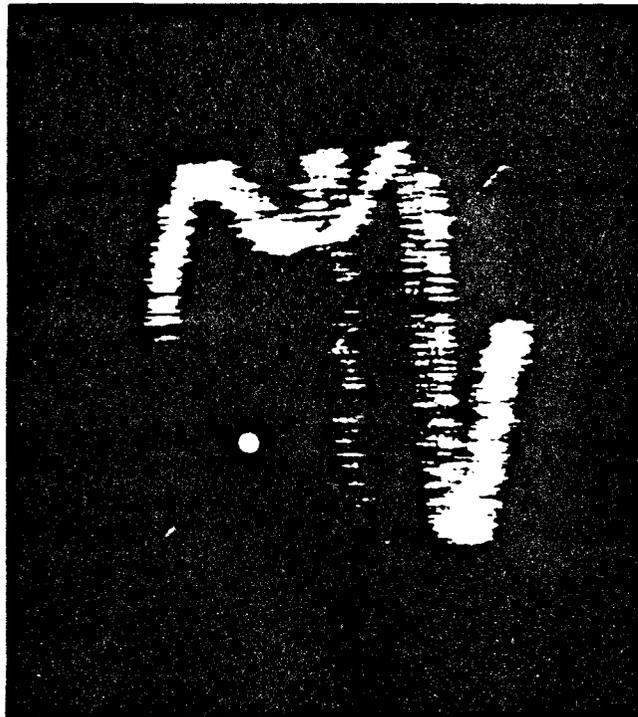
Fig 35



TIME (0.4 ms/div)

Fig. 2.35. Stabilisation de l'orbite 3T instable apparaissant par bifurcation nœud-col : (a) correction appliquée à la puissance de pompe, (b) intensité $I_2(t)$.

$I_{1(n+1)}$ (arb. units.)



I_{1n} (arb. units.)

Fig. 2.36. Superposition du diagramme de premier retour de l'orbite 3T (point brillant) et de l'attracteur chaotique.

En régime d'oscillations spontanées, le laser peut présenter un phénomène de bistabilité 3T-Chaos (voir § 1.3.1). Le régime 3T stable apparaît en même temps qu'une orbite 3T instable par bifurcation noeud-col. Cette orbite instable est située sur la frontière séparant les bassins d'attraction des attracteurs chaotique et 3T-périodique [Grebogi *et al.*, 1983, 1986].

Le système se stabilise sur l'orbite 3T instable si les deux conditions suivantes sont remplies. L'orbite doit être rendue stable, ceci est réalisé en choisissant des valeurs de paramètres adéquates pour la contre-réaction. Il faut également que la trajectoire visite le voisinage de l'orbite instable. Ceci revient à placer l'état du système dans le bassin d'attraction de l'orbite stabilisée. Alors que cette dernière condition est forcément remplie lorsque l'orbite instable est plongée dans un attracteur chaotique ou lorsqu'elle est déjà stabilisée pour une voisine du paramètre de contrôle, il est autrement dans cette nouvelle situation. A partir de l'attracteur chaotique, il est possible de visiter le voisinage de l'orbite périodique en réalisant une perturbation du paramètre de pompe ou une perturbation mécanique de la cavité.

La recherche des paramètres de la contre-réaction est compliquée par le fait que le voisinage de l'orbite périodique n'est pas visité par la trajectoire. Nous avons dû rechercher empiriquement ces paramètres, par conséquent la suppression d'un paramètre (la position du point fixe) a constitué un avantage important.

Le signal correspondant à l'orbite ainsi stabilisée est représenté sur la figure 2.35. Il est important de remarquer que l'amplitude de la correction et son irrégularité permet d'affirmer comme dans le cas des orbites 2T ou 4T (§ 2.2.4.B) que l'orbite stabilisée coïncide effectivement avec l'orbite instable de période 3T.

De plus, il est aisé de vérifier que l'orbite stabilisée n'est pas contenue dans l'attracteur en superposant les diagrammes de premier retour de l'attracteur chaotique et de l'orbite 3T (fig. 2.36). Le point correspondant à l'orbite est situé à l'extérieur de la région chaotique, contrairement au cas de l'orbite 2T considérée au § 2.2.4.B par exemple (fig.30).

Nous avons donc montré que la méthode de contrôle du chaos de Ott, Grebogi et Yorke peut être modifiée de façon à étendre son domaine d'application à des orbites instables qui ne sont contenues dans aucun attracteur. Ceci permet en particulier de localiser les bifurcations d'où proviennent les orbites périodiques appartenant à un attracteur chaotique.

La méthode s'est avérée également efficace pour la stabilisation d'orbites périodiques ne rencontrant pas d'attracteur chaotique pour les valeurs accessibles des paramètres de contrôle. Ceci devrait permettre d'obtenir des informations sur la frontière du bassin d'attraction des attracteurs chaotiques qui sont généralement difficile à obtenir.

Il faut également noter que le contrôle des orbites de période $2T$ et $4T$ a pu être réalisé dans le cas du laser soumis à une modulation périodique (situation du § 1.1.4), et a donné des résultats extrêmement similaires tant au niveau des conditions nécessaires à la stabilisation, qu'au niveau de la forme des signaux obtenus. Dans cette situation, la section de Poincaré est plus simple à réaliser puisqu'il suffit d'échantillonner le signal à chaque période de modulation. Cependant, la stabilisation de la branche instable $2T$ (resp. $4T$) entre la transition $4C-2C$ (resp. $8C-4C$) et la bifurcation $2T-4T$ (resp. $4T-8T$) nécessite un ajustement de l'instant d'échantillonnage au cours du balayage.

Conclusion



Le comportement dynamique du laser à fibre dopée au néodyme a été analysé dans diverses conditions (en régime stationnaire, transitoire, en présence de modulation et en régime d'oscillations spontanées).

Dans la première partie, les études effectuées ont mis en évidence l'importance fondamentale des effets de polarisation dans la dynamique du laser. Elles ont révélé des phénomènes qui sont inobservables par une simple analyse de l'intensité totale, en particulier l'existence de deux seuils et d'une fréquence basse associée à un comportement d'antiphase.

Les phénomènes observés sont reproduits par un modèle simple de laser à deux modes couplés par une saturation croisée, tenant compte de l'émission spontanée. L'accord entre les résultats du modèle et ceux des expériences est surprenant étant donné le caractère fortement multimode de l'émission. Ceci révèle un comportement collectif des nombreux modes associés à chaque état de polarisation.

L'existence d'effets collectifs n'exclut cependant pas une dynamique complexe des différents modes du laser. L'observation de l'intensité totale émise selon chaque direction de polarisation peut masquer une dynamique "spectrotemporelle" existant à l'intérieur de chaque ensemble (ou *cluster*) de modes.

Il faut également noter que la généralité de certains phénomènes s'est avérée dépasser le cadre de l'étude du laser à fibre, comme l'a montré l'étude comparée de la dynamique de divers lasers (annexe B). La fréquence basse et la loi d'échelle qui la caractérise sont des phénomènes généraux communs aux lasers à deux modes couplés par une saturation croisée.

Dans la deuxième partie, nous avons montré que certaines méthodes de stabilisation par contre-réaction pouvaient être transformées en des outils de caractérisation des systèmes dynamiques, en donnant accès à leurs solutions instables. L'efficacité de ces méthodes provient en grande partie de leur aptitude à suivre ces solutions instables lorsqu'un paramètre de contrôle est balayé.

L'application de ces méthodes au laser à fibre oscillant spontanément a permis d'obtenir la stabilisation et la caractérisation de son état stationnaire et d'orbites périodiques instables. Les informations obtenues concernent la localisation des solutions instables, la dynamique locale dans leur voisinage, et la détermination des bifurcations d'où elles proviennent. Nous avons également noté que la stabilisation d'un état instable permet d'obtenir une condition initiale inhabituelle, pouvant donner naissance à une trajectoire visitant des régions particulièrement intéressantes de l'espace des phases.

En ce qui concerne le travail effectué dans la première partie, plusieurs extensions sont actuellement envisagées.

Il serait intéressant d'approfondir l'études des régimes chaotiques déjà décrits. En particulier une caractérisation des attracteurs chaotiques par leurs propriétés topologiques [Mindlin *et al.*, 1990; Tufillaro *et al.*, 1992] sera entreprise afin d'accéder au type de "gabarit" (ou *template*) qui leur est associé. On devrait ainsi disposer d'un point de comparaison particulièrement pertinent entre les résultats du modèle et les résultats expérimentaux.

La nature exacte des effets collectifs restant à déterminer, une étude résolue en longueur d'onde de la dynamique du laser est actuellement entreprise. Elle devrait révéler l'existence ou l'absence d'une dynamique spectrotemporelle à l'intérieur des *clusters* associés aux deux états propres de polarisation.

Il est également envisagé d'étendre ce type d'étude à des lasers à fibre de caractéristiques différentes. On s'attend en particulier à observer dans les lasers à fibre dont le milieu actif est refroidi, une dynamique spectrotemporelle liée à une diminution du couplage entre modes [Le Flohic *et al.*, 1991]. Il serait également intéressant de comparer le comportement dynamique des lasers fortement multimodes à ceux dont le nombre de modes est très réduit par la présence de réflecteurs très sélectifs [Douay *et al.*, 1992].

On peut apporter des améliorations aux méthodes mises au point dans la deuxième partie, surtout en ce qui concerne les études dans lesquelles un paramètre de contrôle est balayé. Lors de nos expériences, la stabilisation a pu s'effectuer dans un large domaine en maintenant une contre-réaction dont les paramètres étaient fixés. Cependant, les valeurs optimales de ces dernières varient au cours du balayage, et dans certains systèmes il peut être indispensable de les adapter en permanence. Ceci peut s'effectuer de manière automatique en les ajustant de façon à obtenir constamment un niveau de bruit minimal [Gills *et al.*, 1992].

Les méthodes de stabilisation présentent un caractère général, et il est *a priori* possible de les exploiter dans de nombreuses situations. En particulier, la stabilisation des orbites situées à la frontière du bassin d'attraction doit permettre d'analyser de manière nouvelle les crises, correspondant à la rencontre d'un attracteur et d'une orbite périodique instable [Grebogi *et al.*, 1982, 1986]. Il doit être également possible de stabiliser les orbites périodiques situées dans les "répulseurs étranges" et les "semi-attracteurs" (les analogues instables des

attracteurs étranges), et qui également lors des phénomènes de crise [Kantz & Grassberger, 1985].

Une autre orientation particulièrement intéressante des travaux sur le contrôle des systèmes dynamiques concerne l'extension des méthodes présentées ici aux systèmes spatio-temporels. Pour les systèmes fortement confinés, présentant un petit nombre de degrés de liberté effectifs, le problème n'est pas fondamentalement différent. Par contre, lorsque le confinement devient faible, la stabilisation d'états instables devient un problème d'une complexité redoutable : le "contrôle de la turbulence" reste un problème ouvert.



Références bibliographiques

- Armitage J. R., *Appl. Opt.* **27**, 4831 (1988)
- Allain J.Y., M. Monerie and H. Poignant, *Electron. Lett.* **25** 1082 (1989)
- Allain J.Y., M. Monerie and H. Poignant, *Electron. Lett.* **26**, 166 (1990)
- Arnold V. , *Méthodes mathématiques de la mécanique classique* (M.I.R., Moscou, 1976)
- Argoul F., A. Arneodo, P. Richetti, J. C. Roux and H. L. Swinney, *Accounts of Chem. Research* **20**, 436 (1987)
- Auerbach D., P. Cvitanovic, J. P. Eckmann, G. Gunaratne and I. Procaccia, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 2387 (1987)
- Auerbach D., C. Grebogi, E. Ott and J.A. Yorke, submitted to *Physica D*
- Azevedo T. and S. Rezende, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 1342 (1991)
- Baer T., *J. Opt. Soc. Am.* **B3**, 1175 (1986)
- Baev V. M., J. Eschner, J. Sierks, A. Weiler and P.E. Toschek, *Opt. Commun.* **94**, 436 (1992)
- Bakaev D. S., V. M. Ermachenko, V. Yu. Kurochkin, V. N. Petrovskii, E. D. Protsenko, A. N. Rurukin and R. A. Shananin, *Kvantovaya Elektron. (Moscow)* **15**, 37 (1988) [*Sov. J. Quantum Electron.* **18**, 20 (1988)]
- Barnes W. L., P. P. Markel and J. E. Townsend, *Opt. Commun.* **82**, 282 (1991)
- Bergé P., Y. Pomeau, C. Vidal, *l'ordre dans le chaos* (Hermann, Paris, 1984)
- Braiman Y. and I. Goldhirsch, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2545 (1991)
- Braun T. and J. A. Lisbôa, submitted to *Phys. Lett.*
- Breeden J. L. and A. Hübler, *Phys. Rev.* **A42**, 5817 (1990)
- Brunner W., R. Fischer and H. Paul, *J. Opt. Soc. Am* **B2**, 202 (1985)
- Caroll T. L. , I. B. Schwartz, I. Triandaf and L. Pecora, *Phys. Rev.* **A46**, 6189 (1992)
- Cassidy D. T., *J. Opt. Soc. Am.* **B8**, 747 (1991)

- Chen P., *Sys. Dyn. Rev.* **4**, 81 (1988)
- Chen Y. C., H.G. Winful and J. M. Liu, *Appl. Phys. Lett.* **47**, 208 (1985)
- Chinin S. R. and H. Y. P. Hong, *Opt. commun.* **15**, 345 (1975)
- Cruz J., G. Giuliani and H. M. van Driel, *Opt. Lett.* **15**, 282 (1990)
- Cvitanović P., *Universality in Chaos* (Adam Hilger, Bristol, 1984)
- Dangoisse D., P. Glorieux and D. Hennequin, *Phys. Rev.* **A36**, 4775 (1987)
- Derozier D., S. Bielawski and P. Glorieux, *Opt. Commun.* **83**, 97(1991)
- De Lang H., *Philips Res. Rep. Suppl.* **8** (1967)
- Digonnet M. J. F., *I.E.E.E. J. of Quant. Electron.* **QE-26**, 1788 (1990)
- Digonnet M. J. F. and C.J. Gaeta, *Appl. Opt.* **24**, 333 (1985)
- Ditto W. L., S. N. Rauseo and M. L. Spano, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 3211 (1990)
- Douay M., T. Feng, P. Bernage, P. Niay, E. Delevaque and T. Georges, *IEEE Photon. Technol. Lett.* **4**, 844 (1992)
- Dressler U. and G. Nitsche, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 1 (1992)
- Fleming S. C., T. J. Whitley and C. A. Millar, *Opt. Commun.* **83**, 154 (1991)
- Gills Z., C. Iwata, R. Roy, I. B. Schwartz and I. Triandaf, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 3169 (1992)
- Glova A. F., S. N. Kozlov, V. V. Likhanskii and V. P. Yartsev, *Kvantovaya Elektron. (Moscow)* **17**, 894 (1990) [*Sov. J. Quantum Electron.* **20**, 817 (1990)]
- Grassberger, *Chaos*, (ed. A. V. Holden, Manchester univ. press, 1986), 291
- Grebogi C., E. Ott and J. A. Yorke, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1507 (1982)
- Grebogi C., E. Ott and J. A. Yorke, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 935 (1983)
- Grebogi C., E. Ott and J. A. Yorke, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1284 (1986)
- Grossmann S. and S. Thomae, *Z. Naturforsch.* **32**, 1353 (1977)
- Hadley P. and M. R. Beasley *Appl. Phys. Lett.* **50**, 621 (1987)
- Haken H., *Synergetics, an introduction* (2nd ed. Springer-Verlag, Berlin, 1977)
- Hall D. W. and M. J. Weber, *Appl. Phys. Lett.* **42**, 157 (1983)
- Hall D. W., R. A. Haas, W. F. Krupke and M. J. Weber, *I.E.E.E. J. Quant. Electr.* **QE-19**, 1704 (1983)

- Hanna D. C., R. G. Smart, R. J. Suni, A. I. Fergusson, and M. W. Phillips, *Opt. Commun.* **68**, 128 (1988)
- Hennequin D., Thèse de Doctorat, Université de Lille I (1986)
- Holden A. V., *Chaos* (Manchester univ. press, 1986)
- Hori Y., H. Serizawa and H. Sato, *J. Opt. Soc. Am.* **B5**, 1129 (1988)
- Hunt E. R., *Phys. Rev. Lett.* **67**, 1953 (1991)
- Jones R. C., *J. Opt. Soc. Am.*, **31**, 488 (1941)
- Kaneko K., *Phys. Rev. Lett.* **63**, 219 (1989)
- Kaneko K., *Physica* **41D**, 137 (1990)
- Kantz H. and P. Grassberger, *Physica* **19D**, 75 (1985)
- Kazuhito K., M. Tachikawa, T. Tohei, F-L Hong and T. Shimizu, *Phys. Rev.* **A43**, 1498 (1991)
- Kapral R. and P. Mandel, *Phys. Rev.* **A32**, 1076 (1985).
- Kosterlich E., C. Grebogi, E. Ott and J.A. Yorke, Preprint (1992)
- Kramer J. and J. Ross, *J. Chem. Phys.* **83**, 6234 (1985)
- Kurochkin V. Yu., A. N. Rurukin, V. N. Petrovsky, E. D. Protsenko, V. M. Yermachenko and A. M. Golovchenko, *Opt. Commun.* **95**, 165 (1993)
- Lacot E., F. Stoekel and M. Chenevier, *J. Physique* **1**, colloque C7, 357 (1991)
- Laming R.I., S.B. Poole, and E.J. Tarbox, *Opt. lett.* **13**, 1084 (1988)
- Landau L. D., *Akad. Nauk. Doklady* **44**, 339 (1944) [English trans. in Hao B.-L. *Chaos II*, World scientific, London 1990]
- Landau L. and E. Lifchitz, *Physique théorique* (M.I.R., Moscou 1982)
- Le Flohic M., P. L. François, J. Y. Allain, F. Sanchez and G. M. Stephan, *I.E.E.E. J. Quant. Electron.* **QE-27**, 1910 (1991)
- Le Flohic M., Thèse de Doctorat, Université de Rennes I (1991)
- Lefranc M., D. Hennequin and D. Dangoisse, *J. Opt. Soc. Am.* **B8**, 239 (1991)
- Lefranc M. and P. Glorieux, Submitted to *Int. J. Bifurcation and Chaos*.
- Lenstra D., *Phys. Rep.* **59**, 299 (1980)
- Lima R. and M. Pettini, *Phys. Rev.* **A41**, 726 (1990)

- Lin K.-H. and W.-F. Hsieh, *Opt. Lett.* **16**, 1608 (1991)
- Lin J. T., W. A. Gambling and D.N. Payne, *CLEO 89*, 401 (1989)
- Lippi G. L., N. B. Abraham, J. R. Tredicce, L. M. Narducci, G. P. Puccioni and F. T. Arecchi, *Optical Chaos*, (ed. by J. Chrostowski and N. Abraham) *Proc. SPIE* **667**, 41 (1986)
- Lorentz E. N., *J. Atm. Science*, **20**, 130 (1963)
- Lugiato L. A., F. Prati, L. M. Narducci, P. Ru, J. R. Tredicce, and D. K. Bandy, *Phys. Rev. A*, **37**, 3847 (1988)
- Macke B., J. Zemmouri and N. E. Fettouhi, submitted to *Phys. Rev. A*.
- Mandel P., M. Georgiou and K. Otsuka, *Phys. Rev. A*, to be published
- Manneville P., *Structures dissipatives, chaos et turbulence* (Aléa Saclay, 1991)
- Matorin I. I., A. S. Pikovskii and Ya. I. Khanin, *Kvantovaya Elektron.* (Moscow) **11**, 2096 (1984) [*Sov. J. Quantum Electron.* **14**, 1401 (1985)]
- Mees, *Chaos*, (ed. A. V. Holden, Manchester univ. press, 1986), 99
- McCumber D. E., *Phys. Rev.* **141**, 306 (1966)
- McDonald S. W., C. Grebogi, E. Ott and J. A. Yorke, *Physica* **17D**, 125 (1985)
- Mehta N. J. and R. M Henderson, *Phys. Rev. A* **44**, 4861 (1991)
- Midavaine T., D. Dangoisse and P. Glorieux, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 1989 (1985)
- Mindlin G. B., X. J. Hou, H. G. Solari and R. Gilmore and N. B. Tufillaro, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2350 (1990)
- Mindlin G. B., H. G. Solari, N. A. Natiello, R. Gilmore and X. J. Hou, *J. Nonlinear Sci.* **1**, 147 (1992)
- Mira C., *Systèmes asservis non-linéaires* (Hermès, Paris 1990)
- Otsuka K., *Appl. Opt.* **21**, 744 (1982)
- Otsuka K., *Phys. Rev. Lett.* **65**, 329 (1990)
- Otsuka K., *Phys. Rev. Lett.* **67**, 1090 (1991)
- Otsuka K., K. Kubodera and J. Nakano, *IEEE J. Quantum electron.* **QE13**, 398 (1977)
- Otsuka K., P. Mandel, S. Bielawski, D. Derozier and P. Glorieux, *Phys. Rev. A* **46**, 1692 (1992)

- Ott E., C. Grebogi and J. A. Yorke, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1196 (1990)
- Papoff F., D. Dangoisse, E. Poite-Hanoteau and P. Glorieux, *Opt. Commun.* **67**, 358 (1988)
- Papoff F., A. Fioretti, E. Arimondo, G.B. Mindlin, H. Solari and R. Gilmore, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 1128 (1992)
- Peng B., V. Petrov and K. Showalter, *J. Phys. Chem.* **95**, 4957 (1991)
- Phillips M. W., H. Gong, A. I. Ferguson, and D. C. Hanna, *Opt. Commun.* **61**, 215 (1987)
- Pomeau Y. and P. Manneville, *Commun. Math.*, **74**, 189 (1980)
- Press W. H., B. P. Flannery, S. A. Teukolsky and W. T. Wetterling, *Numerical recipes, the art of scientific computing* (Cambridge Univ. Press, 1986)
- Quimby R.S., *Appl. Opt.* **29**, 1268 (1990)
- Reyzer K. C. and L. W. Casperson, *J. Appl. Phys.* **51**, 6075 (1980a)
- Reyzer K. C. and L. W. Casperson, *J. Appl. Phys.* **51**, 6083 (1980b)
- Risk W.P., *J. Opt. Soc. Am.* **B5**, 1412 (1988)
- Roy R., T.W. Murphy Jr., T.D. Maier, Z. Gills and E.R. Hunt, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 1259 (1992)
- Ruelle D. and F. Takens, *Commun. Math. Phys.* **20**, 167; **23**, 343 (1971)
- Ruelle D., *Chaotic Evolution and Strange attractors* (Cambridge univ. press, 1989)
- Samson A. M., S. I. Turovets, V. N. Chizhevskii and V. V. Churakov, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **101**, 1177 (1992) [*Sov. Phys. JETP.* **74**, 628 (1992)]
- Schneiderova M. and P. Maly, *Phys. Rev.* **A41**, 6522 (1990)
- Shinbrot T., E. Ott, C. Grebogi and J. Yorke, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 3215 (1990)
- Shinbrot T., E. Ott, C. Grebogi and J. Yorke, *Phys. Rev. A.* **45**, 4165 (1992)
- Shinbrot T., W. L. Ditto, C. Grebogi, E. Ott, M. L. Spano and J. Yorke, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 2863 (1992)
- Singer J., Y. Z. Wang and H. H. Bau, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 1123 (1991)
- Szwaj C., mémoire de D.E.A. "Lasers, molécules, rayonnement atmosphérique", Université de Lille I (1992)

- Takens F., Lect. Notes in Mathematics 898 (Springer, Berlin, 1981) p. 366
- Tang C. L., H. Statz, G. De Mars, J. Appl. Phys. 34, 2289 (1963)
- Tarassov L., *Physique des processus dans les générateurs de rayonnement optique cohérent* (M.I.R., Moscou, 1985)
- Tredicce J. R., H. Sadiky, L. M. Narducci and D. K. Bandy, *Optical Chaos*, (ed. by J. Chrostowski and N. Abraham) Proc. SPIE 667, 36 (1986)
- Tufillaro N. B., R. Holtzner, L. Flepp, E. Brun, M. Finardi and R. Badii, Phys. Rev. A44, 4786 (1991)
- Tufillaro N. B., T. Abott and J. Reilly, *An experimental approach to nonlinear dynamics and chaos* (Addison-Wesley studies in nonlinearity, New York, 1992)
- Victorov E. A., I. B. Vitrischak, G. E. Novikov, O. A. Orlov, A. A. Mak, V. A. Sokoilov, V. I. Ustyugov and M. M. Khaleev, Proceedings on Nonlinear Dynamics of Optical Systems, N. B. Abraham et al. eds. (Opt. Soc. Am. Washington DC, USA, 1991), Vol. 7, p. 410
- Wolf, *Chaos*, (ed. A. V. Holden, Manchester univ. press, 1986), 273
- Wiesenfeld K., C. Bracikowski, G. James and R. Roy, Phys. Rev. Lett. 65, 1749 (1990)
- Yokoyama H. and D. Brorson, J. Appl. Phys. 66, 4801 (1989)
- Zenchenko S. A., S. V. Leshkevich, A. I. Portnyagin, S. P. Puchek and A. E. Filippov, Kvantovaya Elektron. (Moscow) 17, 841 [Sov. J. Quantum Electron., 20, 760 (1990)]
- Zimmermann E. C., M. Schell and J. Ross, J. Chem. Phys. 81, 1327 (1984).

Bibliographie

- D. Derozier, S. Bielawski and P. Glorieux, "Dynamical behavior of a doped fiber laser under pump modulation", *Opt. Commun.* **83**, 97 (1991).
- K. Otsuka, P. Mandel, S. Bielawski, D. Derozier and P. Glorieux, "Alternate time-scale in multi-mode lasers", *Phys. Rev.* **A46**, 1692 (1992).
- S. Bielawski, D. Derozier and P. Glorieux, "Antiphase dynamics and polarization effects in the Nd-doped fiber laser", *Phys. Rev.* **A46**, 2811 (1992).
- S. Bielawski, M. Bouazaoui, D. Derozier and P. Glorieux, "Stabilization and characterization of unstable steady states in a laser", *Phys. Rev. A* (à paraître).
- S. Bielawski, D. Derozier and P. Glorieux, "Experimental characterization of unstable periodic orbits by controlling chaos", *Phys. Rev. A* (à paraître).



Dynamical behavior of a doped fiber laser under pump modulation

D. Derozier, S. Bielawski and P. Glorieux

Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne, associé au C.N.R.S., Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres-Artois, F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France

Received 20 November 1990

The dynamics of a doped fiber laser have been examined under various conditions of pump modulation. A global description of its evolution towards chaos is provided by the comparison of bifurcation diagrams obtained at various amplitudes and frequencies of the pump modulation. In spite of the large number of longitudinal modes which oscillate, the fiber laser exhibits a behaviour which is very similar to that of the monomode CO_2 laser with modulated parameters.

In lasers, chaos may appear either spontaneously or when they are subjected to an injected signal or to modulation of some suitable control parameter [1]. The latter situation has been widely explored in the case of the CO_2 laser with modulated losses or frequency, a system which displays a wide variety of nonlinear dynamical effects such as generalized bistability, crises in the chaotic attractors, etc. [2].

The fiber laser has also been considered from the point of view of nonlinear dynamics. For instance, the measurement of the damping and of the frequency of the relaxation oscillations induced by pump power switching leads to the determination of the cavity losses [3] and of the population inversion relaxation time. A period-doubling route to chaos was also observed under sinusoidal pump modulation [4].

In this paper, we provide a more extensive description of the different dynamical regimes and of the route to chaos of a doped fiber laser under pump modulation. In particular, the simultaneous exploration of the amplitude and the frequency of the pump modulation provides a global description of the transition to chaos.

To investigate this question, we have built a diode-pumped fiber laser. The active medium is a 5 m-long silica fiber doped with 300 ppm Nd^{3+} . The core diameter is 5.8 μm and the fiber is single-mode at the lasing operating wavelength ($\lambda = 1.08 \mu\text{m}$) but the

two transverse modes LP_{01} and LP_{11} may propagate at the pump wavelength. The laser cavity is limited by two mirrors with reflection coefficients $R_1, R_2 \geq 99.5\%$ at $\lambda = 1.08 \mu\text{m}$ which are butt-coupled to the fiber. The front mirror is transparent for the pump radiation. The fiber is pumped by a single-mode laser diode (RTC Philips CQL44) and the pump radiation is focused into the fiber through two $\times 10$ microscopic objectives. As the absorption coefficient is 0.33 m^{-1} at the pump wavelength (820 nm), the pump is strongly depleted along the fiber. A bandpass ($\Delta\lambda = 1 \text{ nm}$) may be placed in front of the detector which monitors the fiber laser output. It blocks off the stray pump power and ensures a partial wavelength selection in the relatively wide spectrum emitted by the laser when it is pumped far above threshold. In typical conditions, the laser oscillates on many longitudinal modes and on a single transverse mode.

In typical operating conditions, the pump diode delivers up to 35 mW of which 8 mW are coupled into the fiber. The laser threshold is usually 2 mW but may be much lower than 1 mW depending of the mirror settings. Although the use of high reflectivity mirrors reduces the output power to about 50 μW , this situation is favorable for laser dynamics experiments since pump parameters up to 4 may be reached with standard pump diodes. Let's recall that the pump parameter is the ratio of the pump power

to the threshold pump power. If an 80% reflectivity mirror is used instead of the highly reflecting one, the threshold increases to 3 mW (respectively 5.5 mW) with (respectively without) an index matching liquid between the fiber and the mirror.

As the relaxation of the population inversion of the Nd^{3+} ions in silica is slow (470 μs) [5] and the photon lifetime in this cavity as long, the relaxation frequency of the laser lies in the 10 kHz range and pump modulation is easily achieved by varying the current injected in the pump laser diode. In these experiments and contrary to previous work by Phillips et al., the instantaneous pump power remains always above thresholds [4]. It is convenient to introduce the modulation amplitude which can be defined as the ratio of the amplitude of the modulated power to the average pump power.

Fig. 1 illustrates the evolution of the response of the laser as the frequency of the modulation is swept near the relaxation oscillation resonance of the laser system while the modulation amplitude is kept constant. The laser output intensity follows the modulation far from resonance. When approaching the

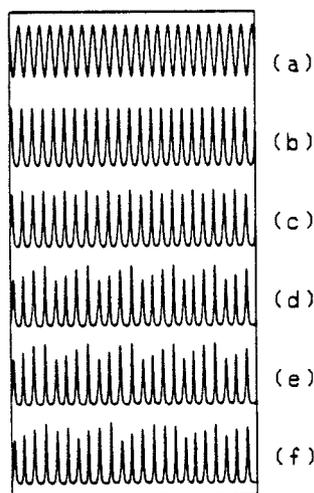


Fig. 1. Response of the fiber laser to periodic pump modulation for different modulation frequencies. To exhibit more clearly the period-doubling features, the signals have been processed to take care of the difference in the modulation frequency f . The time scale is in units of T , (a) pump modulation reference, (b) T -periodic response $f=14$ kHz, (c) $2T$ response $f=13.1$ kHz, (d) $4T$ periodic response $f=12.6$ kHz, (e) $8T$ periodic response $f=12.45$, (f) chaotic response $f=11.5$ kHz. Pump parameter $A=2.5$. Modulation amplitude 0.5 peak to peak.

resonance, the system undergoes a cascade of period-doubling bifurcations. The response of the laser varies in a $T, 2T, 4T, \dots$ sequence and eventually it loses any regularity. Periods up to $16T$ were observed indicating an excellent stability of the laser parameters. The occurrence of an erratic regime after a succession of such period-doublings is a strong indication of deterministic chaos. If the modulation is further varied above the chaotic region, another series of periodic regimes $4T, 2T, \dots$ is observed. This situation is different from the "remerging Feigenbaum trees" that were also obtained in the CO_2 laser with modulated parameters [6] since there is here a strong discontinuity between the chaotic regime and these periodic responses as will be more clearly seen on the bifurcation diagrams.

The evolution of the laser dynamics reported in

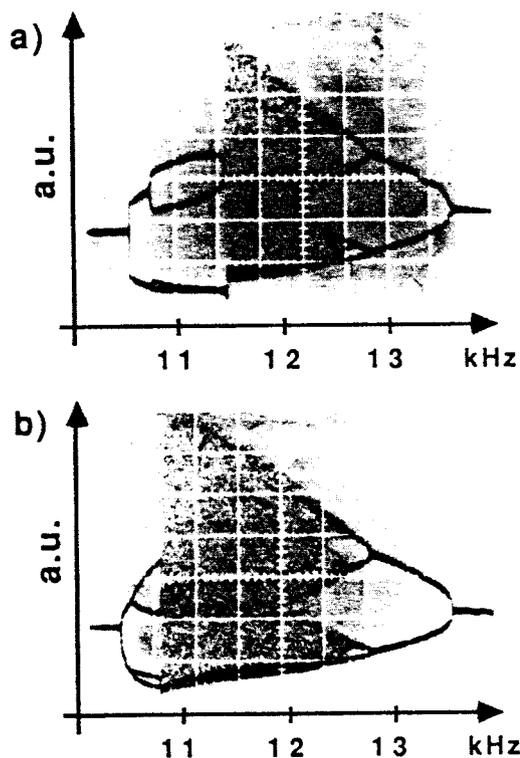


Fig. 2. Experimental bifurcation diagrams of the fiber laser under pump modulation for (a) increasing and (b) decreasing modulation frequencies. Note the generalized bistability between a chaotic regime and a $4T$ limit cycle between 10.85 kHz and 11.4 kHz.

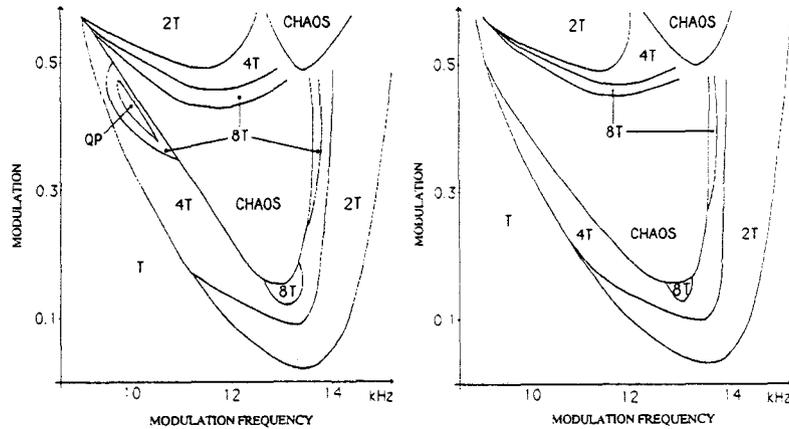


Fig. 3. Dynamics of the fiber laser in the parameter space related to the amplitude and the frequency of the pump modulation. The generalized bistability occurs for approximately 10–12 kHz and modulation indices 0.15 to 0.5.

the series of recordings of fig. 1 can be synthesized in a single bifurcation diagram using periodic sampling of the laser output synchronously with the modulation. Let's recall that with this technique, the sampling unit delivers a single valued output when the response of the system is T -periodic and n different values when its period is nT . Regimes synchronous to the modulation appears as a limited series of points while quasiperiodic or chaotic responses give scatters of points.

Fig. 2 shows two examples of a bifurcation diagram obtained by this technique when the modulation frequency is swept from low to high frequencies

(fig. 2a) and vice versa (fig. 2b) around the relaxation resonance while the modulation amplitude is kept constant. Off-resonant modulation induces there a periodic response and the chaotic domain essentially appears between 10.85 and 12.4 kHz. A clear period-doubling cascade appears on the high frequency side, T -periodic at 14 kHz, $2T$ from 13.6 to 12.8 kHz, $4T$ -periodic between 12.5 and 12.4 kHz, ... In the conditions of fig. 2a (resp. b), the region of chaotic behavior is interrupted at 11.4 kHz (resp. 10.85 kHz) by a $4T$ -periodic response. As there is no continuity between the branches of the chaotic region and those of the $4T$ -periodic one, we can conclude that in that domain, the chaotic attractor disappears through a boundary crisis. This means that, as the control parameter is varied, the attractor expands and reaches the boundary of its basin of attraction. As the control parameter is further varied, the chaotic attractor disappears and the system precipitates towards another attractor, e.g. a limit cycle. A boundary crisis is usually accompanied by generalized bistability – here between 10.85 kHz and 11.4 kHz since before the chaotic attractor disappears in the crisis, it coexists with some other stationary regime of the system.

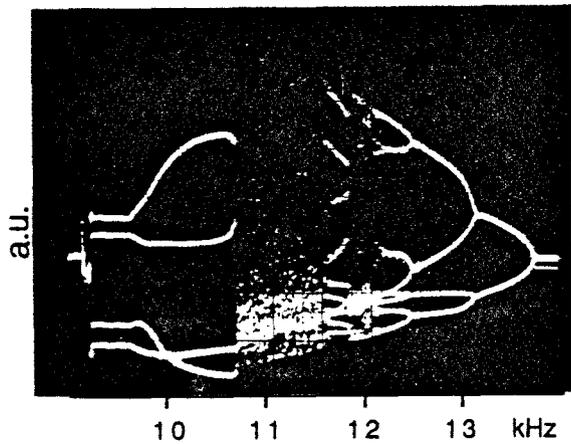


Fig. 4. Same as fig. 2a for different cavity losses. Note the presence of a 10 T regime between 11.5 and 11.75 kHz.

Fig. 3 reports in a parameter space, the dynamical regimes observed through bifurcation diagrams similar to those of fig. 2 for different modulation amplitudes. Fig. 3a (resp. b) reports the results obtained with increasing (resp. decreasing) modulation frequency. Generalized bistability occurs on the low

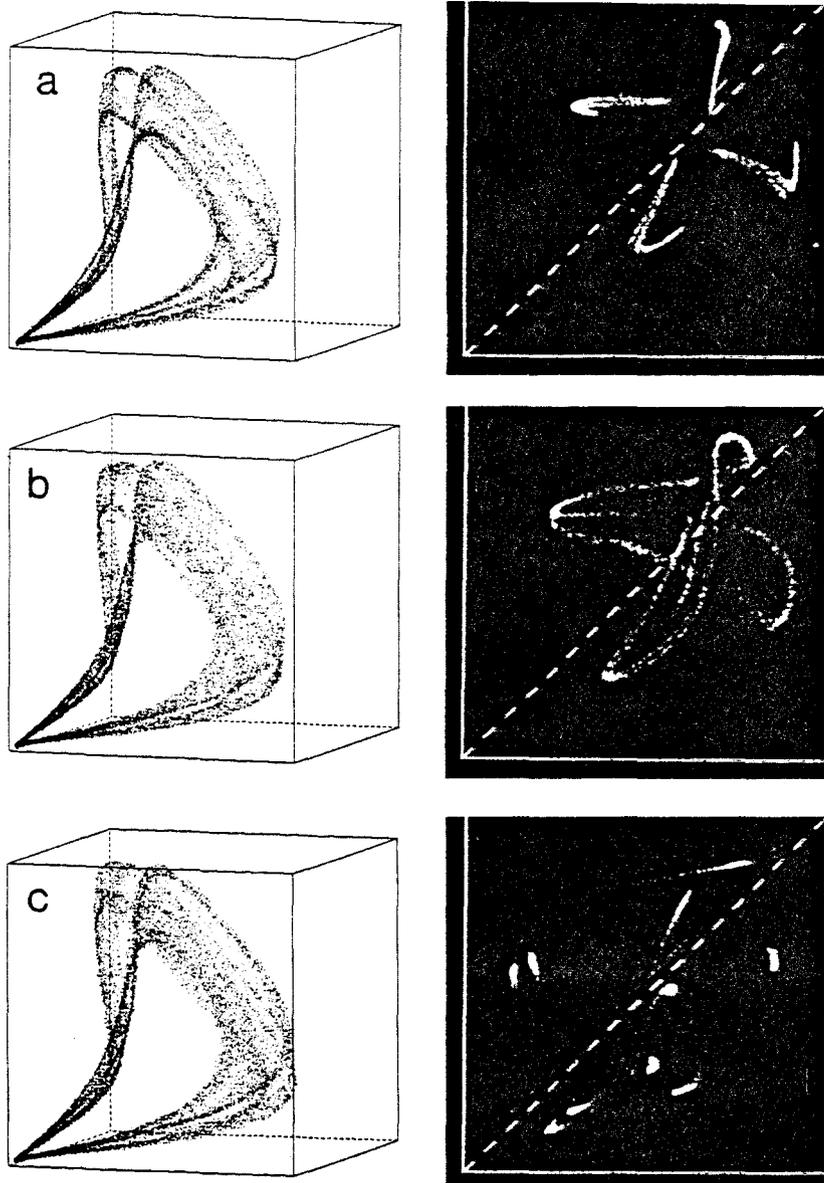


Fig. 5. Attractors reconstructed using the time delay method (left) and corresponding return maps obtained by the double sampling technique (right) for different chaotic regimes (a) C_4 and (b) C_2 inside the inverse cascade, (c) and (d) after the inverse cascade before and after the crisis.

frequency side of the resonance i.e. approximately 10–12 kHz and for modulation indices of 0.3 to 0.5. There, the laser may be either chaotic when the frequency is decreased or $4T$, $8T$ and quasiperiodic for increasing frequencies. It should be mentioned that

the $4T$ regions may correspond to two different periodic regimes: that arising from period-doubling of the $2T$ regime and another $4T$ limit cycle with completely different sampled values. Depending on the way which is used to travel in the parameter space,

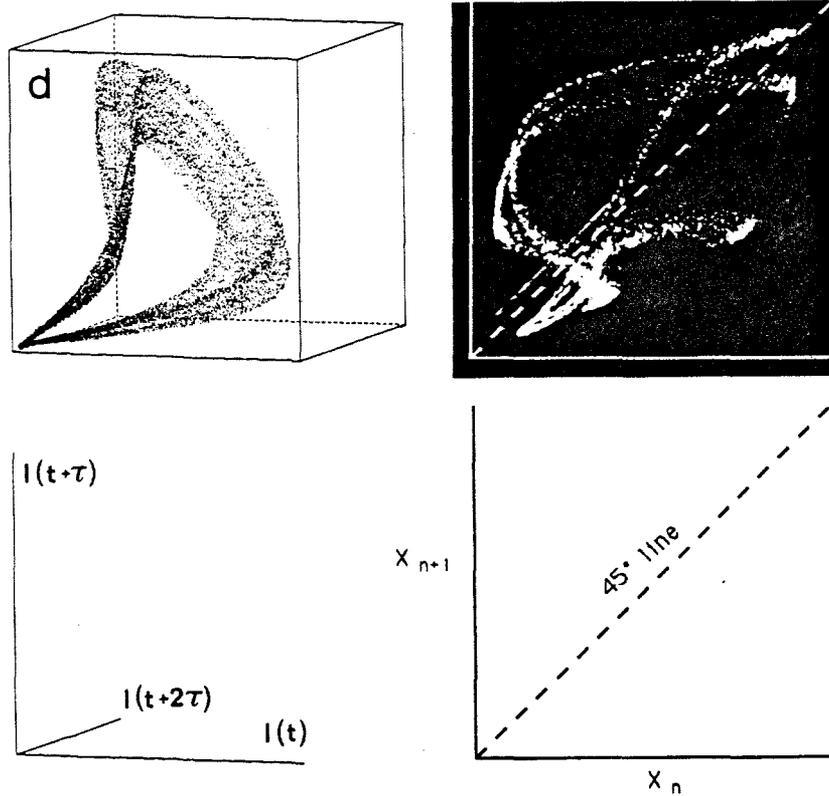


Fig. 5. Continued.

the transition between these two regimes may be either continuous or discontinuous. Similar behavior was observed in the simulations of the CO₂ laser with modulated parameter and indicates the presence of a cusp catastrophe [2]. Note also that the shape of the bifurcations is slightly dependent on the sign of the frequency sweep. This is the standard deformation of the bifurcation induced by a sweep of the control parameters [2,7]. When dynamically deformed the bifurcations are sharper (resp. softer) when the period doubles (resp. halves).

When the butt-coupling of the fiber to the mirror is changed, different bifurcation diagrams can be observed involving many kinds of periodic regimes e.g. $3T$, $5T$, ... appearing through boundary crises inside the chaotic domain. Period-doubling bifurcations have also been observed for these regimes. Bifurcation diagrams with a rich structure are then observed and fig. 4 gives an example of one such diagram in

which a $10T$ regime appears inside the chaotic region. This $10T$ periodic cycle emerges from chaos with no such clear discontinuity as that observed in the CO₂ laser with modulated parameters [6], its period doubles at 13.6 kHz on fig. 4 and chaos is observed as previously when the modulation frequency is increased.

To investigate whether the chaotic regimes on both sides of the $10T$ region are related or not, we have used two methods: the reconstruction of the attractors and return maps. The attractors may be reconstructed using the time delay technique: by plotting in a pseudo phase space the time delayed values of a single variable e.g. the intensity $I(t)$, one obtains a representation $(I(t), I(t+\tau), I(t+2\tau), \dots)$ which is topologically equivalent to the attractor in the real phase space. The observation of these reconstructed attractors do not indicate any strong difference between the chaotic attractors before and after the cri-

sis. Return maps have been drawn to obtain a simpler description of the attractors. For this purpose, we have used the same double sampling technique as in the modulated laser with saturable absorber [8]. The first return map is readily obtained on an oscilloscope in the *XY* mode fed with the output of two cascaded samplers. The corresponding patterns are shown on fig. 5 in which both the attractor projection and the return maps have been reported in different dynamical situations: the attractors and maps inside the inverse cascade C4 and C2 are given for comparison (fig. 5a and b) together with those of chaos just before the crisis (fig. 5c) and in the second chaotic region (fig. 5d). As expected, the return maps for the C2 and C4 regimes appear as concentrations of 2 and 4 regions of dots while they span a wide region of the plane beyond the end of the inverse cascade. On both sides of the crisis, the attractors are of course qualitatively different but the return map as the reconstructed attractor after the crisis shares many common points with that of the first attractor. This indicates that some common properties are preserved as for instance the shape of a part of the basin of attraction.

To summarize, the observation of onset of chaos in a fiber laser indicates the coexistence of different dynamical regimes. Chaos occurs through period-doubling cascades in a way similar to what was observed in CO₂ lasers with modulated parameters in

spite of the multimode operation of the fiber laser. The same remark applies to the chaos which has recently been observed in a free-electron laser with modulated gain since this highly multimode laser also evolves towards chaos through a period-doubling cascade [9].

References

- [1] Special issues of *J. Opt. Soc. Am.* 2 (1985), and 5 (1988).
- [2] D. Dangoisse, P. Glorieux and D. Hennequin, *Phys. Rev. A* 36 (1987) 4775.
F.T. Arecchi, R. Meucci, G.P. Puccioni and J.R. Tredicce, *Phys. Rev. Lett.* 49 (1982) 1217;
R. Meucci, A. Poggi, F.T. Arecchi and J.R. Tredicce, *Optics comm.* 65 (1988) 151.
- [3] D.C. Hanna, R.G. Smart, R.J. Suni, A.I. Ferguson and M.W. Phillips, *Optics Comm.* 68 (1988) 128.
- [4] M.W. Phillips, H. Gong, A.I. Ferguson and D.C. Hanna, *Optics Comm.* 61 (1987) 215.
- [5] S.B. Poole, D.N. Payne, R.J. Mears, M.E. Fermann and R.I. Laming, *IEEE J. Lightw. Techn.* LT-4 (1986) 870.
- [6] T. Midavaine, D. Dangoisse and P. Glorieux, *Phys. Rev. Lett.* 55 (1985) 1989;
J. Legrand, C. Lepers and P. Glorieux, *Phys. Rev. A*, to be published.
- [7] R. Kapral and P. Mandel, *Phys. Rev. A* 32 (1985) 1076;
R. Mannella, F. Moss and P.V.E. McClintock, *Phys. Lett. A* 144 (1986) 68.
- [8] D. Dangoisse, P. Glorieux and D. Hennequin, *Phys. Rev. A* 42 (1990) 1551.
- [9] M. Billardon, *Phys. Rev. Lett.* 65 (1990) 713.

Alternate time scale in multimode lasers

Kenju Otsuka

NTT Basic Research Laboratories, Musashino-shi, Tokyo 180, Japan

Paul Mandel

Université Libre de Bruxelles, Campus Plaine, Code Postal 231, 1050 Bruxelles, Belgium

S. Bielawski, D. Derozier, and P. Glorieux

Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne, Université de Lille I, F-59655 Villeneuve d'Ascq, CEDEX, France

(Received 28 October 1991)

We analyze the intensity fluctuation of multimode lasers by extending the linear-response theory of McCumber for single-mode lasers. In the two-mode case, we prove analytically that the rate equations allow for an additional dynamical oscillation frequency associated with the antiphase motion. This explains the self-organized collective behavior of two-mode lasers, i.e., that the total output behaves just like a single-mode laser. The linear stability predicts the scaling law for this time scale, which results quite generally through cross-saturation dynamics of population inversion. Experimental results in two different laser systems confirm these predictions.

PACS number(s): 42.55.Rz, 42.50.Fx

It has been known that multimode lasers exhibit complicated behaviors from the early dates of experimental observation. Complex multimode laser dynamics have recently been revisited as an intriguing subject for the study of nonlinear dynamics in optical systems. The issue of intensity fluctuation in the output of lasers has a long history. McCumber predicted a noise peak in power spectra corresponding to relaxation oscillations in single-mode class-B lasers, in which polarization dynamics can be adiabatically eliminated, on the basis of linear-response theory in 1966 [1]. On the other hand, Tang, Statz, and deMars pointed out self-organized *collective behavior* in transient oscillations of two-mode lasers, which implies that the total output behaves just like a single-mode laser. In short, they showed that the intensities of the individual modes show irregular spiking but the total output intensity could still exhibit a regular damped relaxation oscillation much like that of the single-mode laser on the basis of numerical simulations in 1963 [2]. They found that in some parameter regions that the relaxation oscillations in the two modes tend to oscillate in opposite phase—the maxima of one mode tend to coincide with the minima of the other. However, this does not insure the collective behavior and its physical interpretation is still an open question. Recently, similar collective behaviors have been observed in intracavity second-harmonic generation in multimode lasers [3] and in deeply modulated multimode lasers [4] even in pulsating regimes. This collective behavior is considered to be basic to the understanding of complex dynamics in multimode lasers. The purpose of this Brief Report is twofold: to extend the McCumber theory to multimode lasers for predicting time scales of intensity fluctuations and to identify the mechanism responsible for the collective behavior in multimode lasers. We report on two models and corresponding experiments that support the

theoretical predictions.

We begin by studying the Tang, Statz, and deMars equations [2] for a two-mode laser, including the cross-saturation effect due to spatial hole burning. The rate equations are

$$\begin{aligned}\frac{dn_0}{dt} &= w - n_0 - I_1(2n_0 - n_1)/2 - \gamma I_2(2n_0 - n_2)/2, \\ \frac{dn_1}{dt} &= n_0 I_1 - n_1(1 + I_1 + \gamma I_2), \\ \frac{dn_2}{dt} &= \gamma n_0 I_2 - n_2(1 + I_1 + \gamma I_2), \\ \frac{dI_1}{dt} &= \kappa I_1[(2n_0 - n_1)/2 - 1], \\ \frac{dI_2}{dt} &= \kappa I_2[\gamma(2n_0 - n_1)/2 - 1].\end{aligned}\quad (1)$$

I_j is the average photon number in mode j and n_0 the space average of the population inversion, while n_j is defined as

$$n_j = (2/L) \int_0^L n(x, t) \cos(2k_j x) dx,$$

where k_j is the wave number of mode j and L is the length of the laser cavity, which is filled with the active medium. Thus, the dynamics of n_1 and n_2 explicitly takes into account the grating effects of standing-mode patterns in the cavity. The optical pump parameter w is scaled to the first laser threshold, γ is the gain ratio of the two modes, and κ is the relative photon lifetime. Time and κ are scaled to the population lifetime.

The crucial role in the dynamics that we shall analyze is played by the ratio $\beta_{1,2}$ of the cross-saturation parameter over the self-saturation parameter. In our model,

these coefficients are pump-dependent functions, which results from the fact that the spatial hole depth changes with pump intensity. They decrease with an increase of the pump and approach $\beta_1 = \gamma/2$ and $\beta_2 = \frac{1}{2}$ in the limit of $w \gg 1$. For ordinary solid-state lasers, κ ranges between 10^3 and 10^6 . The main point is that whatever precise value of κ is imposed by experimental considerations, it can be used as a large parameter in terms of which asymptotic analyses can be performed.

Equations (1) have three steady-state solutions: (i) the nonlasing solution ($I_1 = I_2 = 0$); (ii) the single-mode solution ($I_1 \neq 0, I_2 = 0$), which bifurcates from the nonlasing mode at the laser first threshold $w_{th} = 1$; and (iii) the two-mode solution, in which both I_1 and I_2 have nonzero steady solutions. This two-mode solution exists for

$$w \geq w_c = (2\gamma^2 - 4\gamma + 1) / [\gamma(1 - 2\gamma)],$$

if and only if $\gamma \geq \frac{1}{2}$.

A linear stability analysis of the trivial solution indicates that it is stable for $w < 1$. The single-mode solution is stable for $1 < w < w_c$. For large values of κ , the relaxation towards the steady state is characterized by damped oscillations. The oscillation frequency ω_R , in the time scale t , was first derived by McCumber [1] and is given by

$$\omega_R^2 = \kappa \Omega_R^2 = \kappa I_1 (3n_0/2 - n_1) = \kappa I_1 (4 - n_0)/2 \propto \kappa(w - 1).$$

(2)

Linear stability of the two-mode solution above w_c is easily analyzed in the limit $\kappa \gg 1$. It yields five roots. Four roots scale like $\kappa^{1/2}$. To dominant order in κ , they are imaginary and define two dynamical frequencies, ω_R and ω_L , given by

$$\omega_R^2 = \kappa I_1 (4 - n_0)/2,$$

$$\Omega_L^2 = \frac{I_1 I_2}{\Omega_R^2} \varphi(\gamma, n_0) < \Omega_R^2, \quad (3)$$

$$\omega_L^2 = \kappa \Omega_L^2,$$

$$\varphi(\gamma, n_0) = -(\gamma - 1)^2 + \gamma n_0 (1 + \gamma - 3\gamma n_0/4). \quad (4)$$

From this result, the following scaling laws are derived:

$$\omega_R^2 \propto \kappa(w - w_{th}), \quad \omega_L^2 \propto \kappa(w - w_c). \quad (5)$$

After analyzing two other models from two-mode lasers [5], we found that relation (3), and therefore scaling laws (5), hold quite generally and that only the function φ , which is an $O(1)$ function, is model dependent. The fifth root of the linear stability analysis is an $O(1)$ real decay rate.

To understand the relation between the relaxation oscillation and the low-frequency motions in an exaggerated scale, we first show large signal transient behaviors. The temporal evolutions of the modal and the total intensities obtained by integrating Eqs. (1) are shown in Fig. 1. In this figure, the faster oscillation component corresponds to ω_R and the slow oscillation component, which is evident for I_2 and is also indicated by a dashed curve for I_1 , corresponds to ω_L . The low-frequency motions

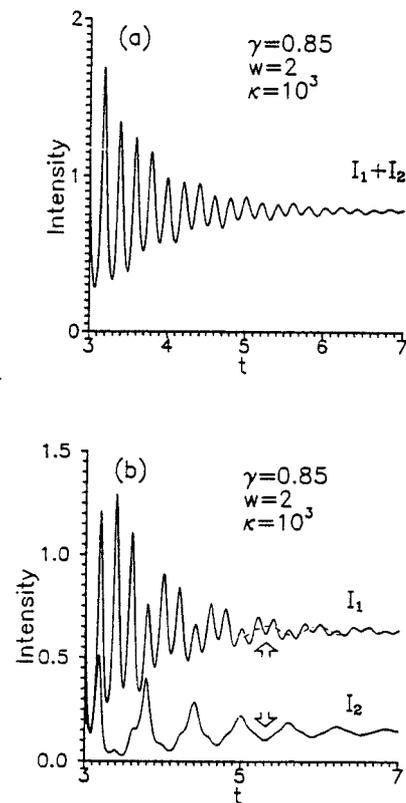


FIG. 1. Transient behavior of the intensities of a two-mode laser: (a) total intensity and (b) partial intensities.

have opposite phases for the two modes. Therefore, this motion can be referred to as the antiphase motion. This is the origin of the total intensity in Fig. 1(a), showing a regular relaxation oscillation, i.e., *collective behavior*. Therefore, we can easily expect that the total output possesses only a single power spectrum peak at ω_R , while the modal output shows an additional peak at ω_L , as shown in Fig. 2.

To confirm the existence of two intrinsic frequencies of intensity fluctuations derived from the linear stability analysis, we show the measured noise power spectra of a continuously oscillating two-mode $\text{LiNdP}_4\text{O}_{12}$ (LNP)

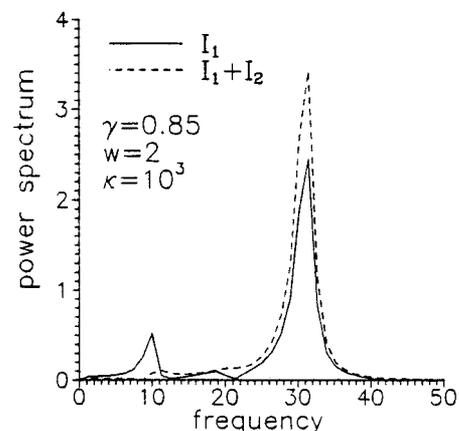


FIG. 2. Power spectra of the strong mode I_1 and the total intensity, which correspond to Fig. 1.

laser, whose dynamics are governed by Eqs. (1) [6]. The result is shown in Fig. 3, where these noises appear through a small pump fluctuation. It is apparent that the total output shows a single ω_R peak, while the modal output exhibits additional ω_L peaks. This implies that the antiphase characteristics exist even in the vicinity of stationary states.

Next, let us consider another laser system, i.e., a Nd^{3+} -doped optical fiber laser (OFL) pumped by a diode laser. When operated well above threshold, such a laser is highly multimode. In spite of that, the dynamical behavior of the OFL presents some extremely simple collective features. When the pump power is increased from zero, the laser exhibits a first threshold above which laser radiation is emitted in a linear polarization state in a wavelength band that broadens as the pump is increased. Above a second threshold, radiation is also emitted in the orthogonal polarization, first in a narrow wavelength region, and at higher pump power, in a wider range up to 50 cm^{-1} . The relative position of the two thresholds can be adjusted by rotating the pump polarization or changing the stress applied to the fiber. These two linear polar-

ization states are the eigenstates of the polarization for the cavity in the presence of the small stress-induced birefringence due to bending of the 5-m-long fiber.

The response of this laser to pump modulation has been investigated in both the sinusoidal and the square pulse regimes. The output intensity is analyzed simultaneously in both of the linear polarization states discussed above and the total intensity has also been recorded. The response to small sinusoidal modulation exhibits two resonances, a strong one at the frequency ω_R of the usual relaxation oscillations and a weaker one at a low frequency ω_L which is not related in a simple way to ω_R . The low-frequency ω_L varies with the stress-induced birefringence, but it exists even in the degenerate situation in which both thresholds coincide.

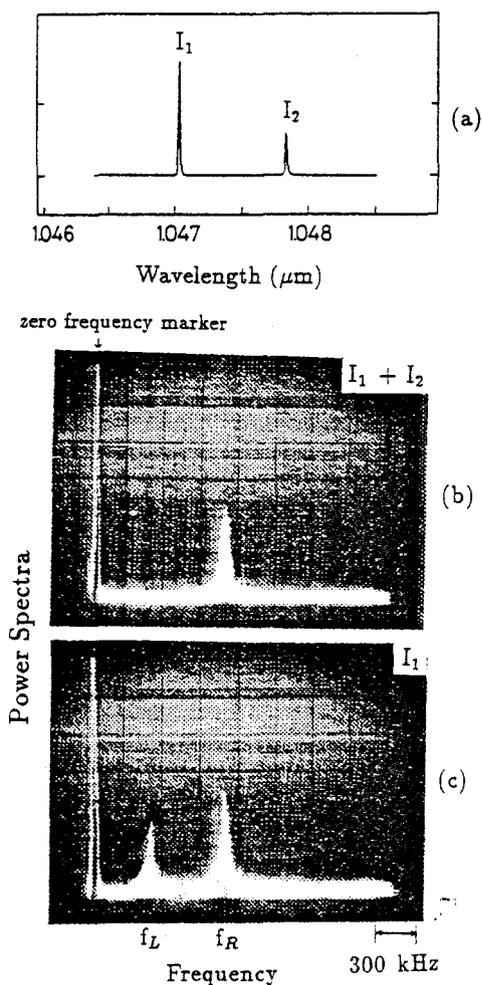


FIG. 3. (a) Oscillation mode spectrum of a 300- μm -thick LNP laser pumped by an Ar laser; (b) noise power spectrum for the total intensity; (c) noise power spectrum for I_1 . $\omega = 7.5$ and $\kappa = 10^5$.

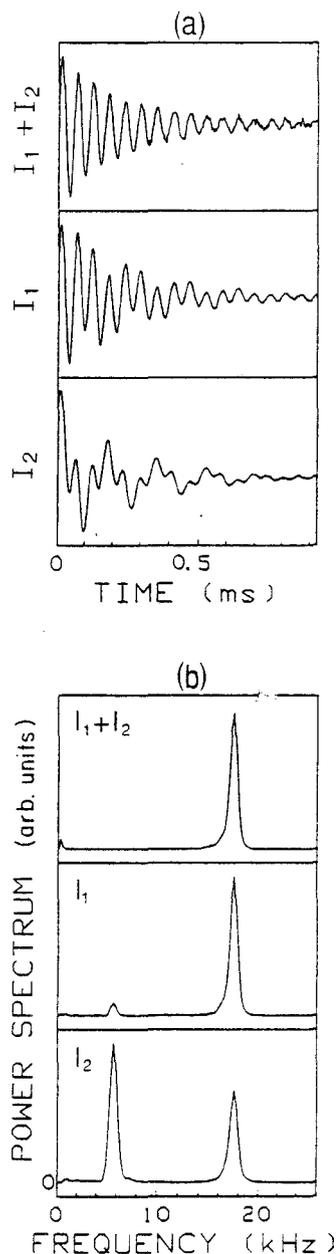


FIG. 4. Experimental recordings of the response of the OFL to pulse excitation; (a) refers to the intensities and (b) refers to the corresponding power spectra.

The dynamical properties of the two modes are more clearly visible when the transient response of the laser to a pulsed perturbation of the steady state is observed. Qualitatively different signals are obtained depending on the observed quantities. The intensities I_1 and I_2 along both linear polarization axes exhibit simultaneously slow and fast relaxation oscillations, while the total intensity, which is recorded on an independent detector, shows only the fast frequency component. As the total intensity is just the sum of I_1 and I_2 , this indicates that the low-frequency components of I_1 and I_2 destructively interfere and consequently are in antiphase. Such a behavior is illustrated in Fig. 4(a) where the OFL measured intensities I_1 , I_2 , and $I_1 + I_2$ have been plotted. Correspondingly, in Fig. 4(b) we have plotted the power spectra of I_1 , I_2 , and $I_1 + I_2$. There is no evidence of a low-frequency oscillation in the power spectrum of the total intensity, while the polarization selected intensity displays such a component near 6 kHz.

The relation between ω_R^2 and ω_L^2 versus the pump intensity is shown in Fig. 5. As for monomode lasers, the frequency of the relaxation oscillations tends to zero as the first threshold is approached. The low-frequency oscillation exists only above the second threshold, i.e., where both polarization clusters are oscillating. Figure 5 illustrates the excellent agreement with the proposed scaling law over the entire attainable range of experimental parameters.

The double resonance to weak modulations and the transient behavior featuring antiphase motions, together with the scaling law shown above, imply that, surprisingly, hundreds of modes form clusters in two subsets, one associated with each polarization direction, and each cluster may be described as one mode. (A similar clustering of many oscillating modes was reported for dual-polarization LNP lasers, in which each polarization behaves like a single-mode FM laser [7].)

To confirm this fact, numerical simulations were also undertaken on a model designed to describe the OFL as a system of two lasers sharing the same cavity and coupled by cross-saturation terms:

$$\begin{aligned} \frac{dn_j}{dt} &= w_j - (1 + I_j + \beta I_{3-j})n_j, \\ \frac{dI_j}{dt} &= \kappa[(n_j + \beta n_{3-j} - 1)I_j + a(n_j + \beta n_{3-j})], \\ & j = 1 \text{ or } 2 \quad (6) \end{aligned}$$

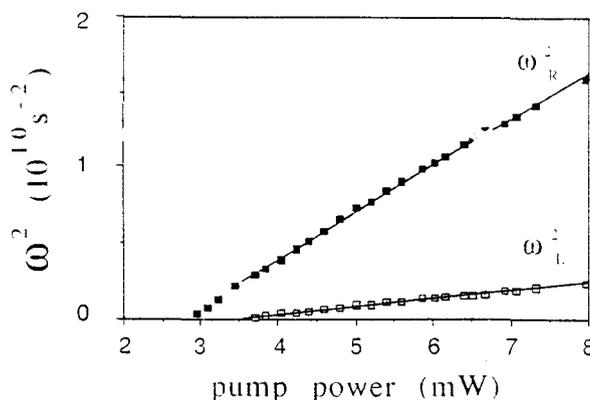


FIG. 5. Dependence of the oscillation frequencies of the system vs the pump power. The first threshold is at 3 mW and the threshold for bimode operation at 3.5 mW. Here, oscillation frequencies ω_R and ω_L are measured frequencies.

where β is the cross-saturation parameter and a is associated with spontaneous emission. Other notations are the same as Eq. (1). This model has common features with the two-mode model given by Eqs. (1) and with the experiment, namely, a low-frequency relaxation oscillation with the scaling law (5) and antiphase behavior for the low-frequency response to pulsed perturbation of the steady state in the region of bimode oscillation.

In conclusion, an additional time-scale intensity fluctuation in two-mode lasers has been predicted analytically. This time scale, featuring antiphase motion, is shown to appear quite generally through the cross-saturation dynamics of population inversion. The scaling law and antiphase motion, which is the origin of the self-organized collective behavior, have been confirmed in two different laser systems. The theoretical analysis has been extended to the N -mode problem and a detailed presentation of this generalization is included in Ref. [8].

K. Otsuka is indebted to the Interuniversity attraction pole program of the Belgian government for supporting him in Brussels where most of this research was carried out. P. Mandel acknowledges partial support of the Fonds National de la Recherche Scientifique. The Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne is "associé au CNRS."

- [1] D. E. McCumber, Phys. Rev. **141**, 306 (1966).
 [2] C. L. Tang, H. Statz, and G. deMars, J. Appl. Phys. **34**, 2289 (1963).
 [3] K. Wiesenfeld, C. Bracicowski, G. James, and R. Roy, Phys. Rev. Lett. **65**, 1749 (1990).
 [4] K. Otsuka, Phys. Rev. Lett. **67**, 1090 (1991).

- [5] K. Otsuka and J.-L. Chern, Phys. Rev. A **45**, 5052 (1992), and the model described by Eq. (6) later.
 [6] K. Otsuka, Appl. Opt. **21**, 744 (1982).
 [7] K. Otsuka, K. Kubodera, and J. Nakano, IEEE J. Quantum Electron. **13**, 398 (1977).
 [8] P. Mandel, M. Georgiou, and K. Otsuka (unpublished).