

N° d'ordre : 1.055

50376
1993
49

50376
1993
49

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE

Spécialité : GENIE ELECTRIQUE

par

Daniel ROGER

Agrégé

LA MACHINE ASYNCHRONE DOUBLE ETOILE REGIMES TRANSITOIRES ALIMENTATION A FREQUENCE VARIABLE



Soutenue le 27 Janvier 1993 devant la Commission d'Examen

H. BUYSE

C. SOL

F. NOTELET

J. BONAL

J.F. BRUDNY

G. SEGUIER

Président

Rapporteur

Rapporteur

Directeur du Travail

Examineur

Examineur

Examineur

Ces travaux de recherche ont été effectués au sein du Laboratoire d'Electrotechnique et d'Electronique de Puissance de l'Université des Sciences et Technologies de Lille dirigé par Monsieur le Professeur C. ROMBAUT à qui nous témoignons notre reconnaissance.

Nous exprimons nos sincères remerciements à monsieur G. SEGUIER Professeur Emérite, encore très récemment directeur de ce laboratoire, pour son accueil et ses nombreux conseils tout au long de nos travaux.

La direction de ce travail à été assurée par Messieurs F. NOTELET et J.F. BRUDNY, Professeurs à l'Université d'Artois, qui nous ont proposé ce sujet et avec qui nous avons eu beaucoup de plaisir à travailler. Nous tenons à leur exprimer notre profonde reconnaissance.

La présidence du jury, assurée par Monsieur H. BUYSE; Professeur à l'Université Catholique de Louvain nous honore beaucoup. Qu'il trouve ici l'expression de notre gratitude pour l'interêt qu'il a accordé à nos travaux.

Nos plus vifs remerciements s'adressent également à Monsieur le Professeur C. SOL, titulaire de la chaire d'électrotechnique du Conservatoire National des Arts et Métiers de Paris, qui a bien voulu rapporter sur notre travail.

Nous sommes très honorés de la présence dans ce jury de Monsieur J. BONAL, Directeur scientifique de la société Jeumont Schneider Industrie, pour avoir accepté d'examiner notre travail.

Nous remercions également tous les chercheurs et collègues du laboratoire et tout particulièrement Messieurs Ph. DELARUE et J.L. KOTNY.

Nous exprimons notre gratitude à l'ensemble du personnel administratif et technique du service et notamment à Monsieur J.J. FRANCHAUD auprès duquel nous avons toujours trouvé une aide efficace lors de nos expérimentations.

SOMMAIRE

INTRODUCTION	4
EQUATIONS ELECTRIQUES DE LA MACHINE	7
I 1 Description	7
I 2 Angles naturels de la machine, notations	8
I 3 Hypothèses simplificatrices	9
I 4 Inductances de la machine	10
I 4 1 Inductances statoriques	11
I 4 2 Inductances rotoriques	12
I 4 3 Inductances mutuelles entre phases statoriques et rotoriques	12
I 5 Equations des tensions	13
I 6 Equations des flux	14
I 7 Couple électromagnétique	16
II EQUATIONS MODIFIEES	18
II 1 Présentation du vecteur complexe	18
II 2 Changements de repères	21
II 3 Equations vectorielles de la machine	23
II 3 1 Equation des tensions dans les repères naturels	23
II 3 2 Vecteurs espaces flux	23
II 3 3 Courant magnétisant	24
II 4 Repère commun fixe	26
II 5 Repère commun tournant à la vitesse de synchronisme	28
II 6 Couple électromagnétique	29
II 7 Comparaison avec les transformations usuelles	31
II 7 1 Comparaison avec la transformation de KU	31
II 7 2 Comparaison avec la transformation de PARK	32

III REGIMES TRANSITOIRES	34
III 1 Cas de l'alimentation en tension	34
III 1 1 Procédé de résolution des équations	35
III 1 2 Utilisation de la transformation de Laplace	36
III 1 3 Résolution des équations opérationnelles	37
III 1 4 Régime libre	39
III 1 5 Régime forcé	40
III 1 6 Expression des vecteurs espaces	41
III 1 7 Courants réels - Couple	42
III 1 8 Paramètres de la machine expérimentale	46
III 1 9 Résultats expérimentaux	49
III 1 9 1 Premier essai: mise sous tension	50
III 1 9 2 Second essai: court-circuit	56
III 1 10 Comparaison des régimes transitoires des machines double étoile et simple étoile équivalente	56
III 1 10 1 Paramètres de la machine simple étoile équivalente	50
III 1 10 2 Vérification expérimentale des nouveaux paramètres	62
III 1 10 3 Comparaison des régimes transitoires	62
III 2 Cas de l'alimentation en courant	65
III 2 1 Définition des formes d'ondes des courants statoriques	66
III 2 2 Programme de simulation numérique	68
III 2 3 Résultats	74
III 2 3 1 Expérimentation	74
III 2 3 2 Résultats de la simulation	75
IV REGIME PERMANENT DE LA MACHINE ALIMENTEE PAR DES CONVERTISSEURS STATIQUES DE TENSION OU DE COURANT	79
IV 1 Régime permanent sinusoïdal	79
IV 1 1 Schéma équivalent	
IV 1 2 Couple électromagnétique produit par les fondamentaux	82
IV 1 2 1 Cas d'une alimentation en courant	83

IV 1 2 2 Cas d'une alimentation en tension	85
IV 2 Régime permanent non sinusoïdal	85
IV 2 1 Cas de l'alimentation en courant	86
IV 2 1 1 Vecteurs espaces courants	86
IV 2 1 2 Couples produits par les courants harmoniques	89
IV 2 2 Cas de l'alimentation en tension	97
IV 3 Comparaison des couples harmoniques produits par les machines double étoile et simple étoile alimentées en courant	102
IV 3 1 Machine simple étoile	102
IV 3 2 Machine double étoile	105
IV 3 3 Relevés expérimentaux	105
IV 3 2 1 Dispositif expérimental	106
IV 3 2 2 Vibrations de la machine simple étoile	111
IV 3 2 3 Vibrations de la machine double étoile	112
CONCLUSION	115
Annexe A : Simulation numérique globale de la machine alimentée en tension	117
Annexe B : Onduleur MLI de courant	119
Annexe C : Schéma d'enroulement	134
Bibliographie	135

INTRODUCTION

L'idée de multiplier le nombre de phases statoriques des machines asynchrones est née du développement des convertisseurs de l'électronique de puissance. Ceci permet d'augmenter considérablement la puissance des machines utilisées en fréquence variable tout en gardant une taille raisonnable pour les onduleurs.

R. PALANIAPPAN, J. VITHAYATHIL et S. K. DATTA [1] ont étudié l'association en parallèle de deux onduleurs de courant à 120° dont les commandes sont décalées de 30° pour alimenter une machine asynchrone simple étoile. Ils ont montré que cette technique améliorerait considérablement la forme d'onde des courants statoriques.

R. H. NELSON et P. C. KRAUSE [2] ont développé une méthode générale d'analyse des machines asynchrones multiphasées avec un déplacement angulaire quelconque entre les primaires. Après avoir mis en équation dans le cas général ils ont donné des résultats, obtenus par simulation, montrant le comportement de la machine double étoile alimentée par deux onduleurs de tension à 120° pour diverses valeurs de l'angle séparant les deux primaires.

Une approche différente a été utilisée par T. M. JAHNS [3]. Il a montré l'amélioration de la fiabilité obtenue lorsque la machine asynchrone multiphasée était alimentée par autant de convertisseurs indépendants que de phases. Il a étudié le fonctionnement dégradé qui survient quand un convertisseur était en panne.

Un modèle à deux axes de la machine asynchrone double étoile a été établi par T. A. LIPO [4] en 1980. Ce modèle se traduit par un schéma équivalent monophasé qui prend en compte le couplage supplémentaire entre les phases statoriques provoqué par les flux de fuites dans les encoches. Plus tard, avec L. H. WALKER [5], il a développé son étude à l'ensemble constitué de la machine asynchrone double étoile et des deux onduleurs de courant à thyristors l'alimentant. Les auteurs ont conclu que cet ensemble était plus performant que la machine simple étoile associée au même type d'onduleur particulièrement pour les vitesses élevées.

E. A. KLINGSHIRN [6] [7] a développé une autre approche de la machine multiphasée. Il a utilisé les composantes symétriques pour déterminer des schémas équivalents différents pour chaque rang harmonique.

Les problèmes des couples harmoniques ont été abordés par K. GOPAKUMAR, S. SATHIAKUMAR, S. K. BISWAS et J. VITHAYATHIL [8]. Ils ont montré que le bobinage double étoile permet de réduire les couples harmoniques en raisonnant sur la forme d'onde des forces magnéto motrices. Après avoir comparé les contraintes en tension sur les thyristors et les diodes de l'onduleur, ils ont donné une méthode pour modifier les connexions internes d'une machine simple étoile de façon à la transformer en double étoile.

En 1984, M. A. ABBAS, R. CHRISTEN et T. M. JAHNS [9] ont étudié le régime permanent de la machine double étoile alimentée par deux onduleurs de tension à transistors à 120° . Ils ont conclu que les harmoniques de tension de rangs 5 et 7 ne produisent pas de f.m.m. mais provoquent des courants harmoniques importants dans les stators.

Un an plus tard, E. A. KLINGSHIRN [10] a mis au point un filtre d'harmoniques basé sur une méthode d'opposition pour éliminer les courants harmoniques de rangs 5 et 7.

G. GIERSE et W. SCHUERMANN [11] ont proposé un mode de commande MLI original des onduleurs de tension connectés à la machine double étoile par l'intermédiaire du filtre d'harmoniques de E. A. KLINGSHIRN.

Une application totalement différente est proposée par D. LEVY [12]. Il a connecté en parallèle deux machines asynchrones ordinaires montées sur le même arbre et fonctionnant en génératrices pour des petites unités hydro-électriques. Il a montré comment régler la puissance transmise au réseau en agissant sur l'écart angulaire des deux stators.

Compte tenu de ces travaux il nous a semblé intéressant de développer l'étude analytique des régimes transitoires de la machine asynchrone double étoile de façon à pouvoir les comparer à ceux de la machine simple étoile établis par F. NOTELET [13]. L'étude bibliographique a montré que l'aspect quantitatif des choses manquait en ce qui concerne les couples harmoniques. Nous avons donc adopté une démarche plus quantitative en adaptant la théorie du vecteur espace à la machine double étoile. Cette façon de procéder permet de calculer l'amplitude et la phase à l'origine de chacun des couples harmoniques à partir des spectres des courants statoriques.

Dans un premier temps, les équations différentielles régissant le fonctionnement de la machine asynchrone double étoile seront établies moyennant les hypothèses simplificatrices utilisées habituellement pour les machines électriques [14]. On calculera ensuite la valeur instantanée du couple électromagnétique en fonction des courants circulant dans les enroulements.

Le second chapitre appliquera la théorie du vecteur espace à la machine double étoile. Plusieurs expressions du couple électromagnétique instantané seront établies en fonction des vecteurs espaces flux et courants. Enfin cette théorie sera comparée aux transformations de PARK et de KU.

Le chapitre 3 détaillera les régimes transitoires de la machine alimentée en tension puis en courant. La résolution sera menée analytiquement pour l'alimentation en tension de façon à comparer les résultats à ceux de F. NOTELET [13] établis pour la machine simple étoile. Le comportement transitoire de la machine double étoile alimentée en courant sera obtenu par simulation numérique.

Les couples harmoniques, en régime permanent, seront étudiés quantitativement dans la quatrième partie. Le schéma équivalent monophasé, valable en régime permanent sinusoïdal et établi d'après la théorie du vecteur espace, permettra le calcul des couples harmoniques en fonction des courants statoriques. Les vérifications expérimentales porteront sur l'étude comparative des vibrations provoquées par les couples harmoniques des machines simple et double étoile.

La première annexe traitera de la simulation numérique globale de la machine alimentée en tension en considérant les hypothèses du calcul analytique.

La seconde annexe expliquera la technique MLI développée et mise au point pour réaliser l'onduleur de courant capable de synthétiser les formes d'onde des courants utilisées lors de l'étude expérimentale.

I EQUATIONS ELECTRIQUES DE LA MACHINE

I 1 Description

La machine asynchrone double étoile se compose d'un stator portant deux bobinages triphasés identiques mais décalés formant les deux primaires. Le rotor, qui peut être bobiné ou à cage d'écureuil, forme le secondaire.

Chaque phase est représentée par l'enroulement diamétral équivalent comportant N^s spires pour le stator et N^r spires pour le rotor.

La figure 1-1 donne la position des 9 bobines diamétrales équivalentes d'une machine bipolaire double étoile.

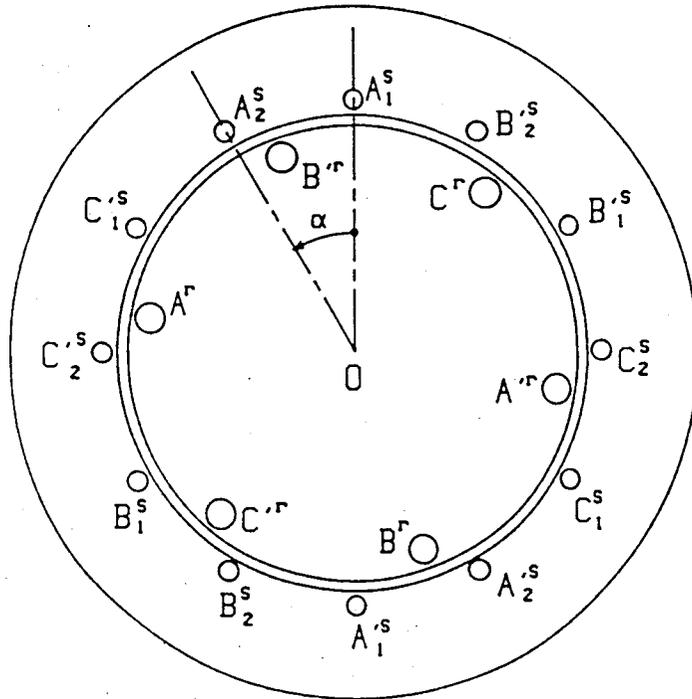


Fig. 1-1

Machine double étoile à bobinage diamétral

Les 3 bobines formées par les faisceaux A₁^s A₁^r, B₁^s B₁^r et C₁^s C₁^r constituent l'enroulement triphasé appelé "stator 1". Les autres faisceaux statoriques forment le "stator 2". Les 2 enroulements statoriques triphasés sont décalés spatialement de l'angle α .

Pour simplifier les diverses relations, l'étude théorique est menée sur une machine bipolaire à rotor bobiné triphasé. Les

résultats sont facilement transposables en divisant les vitesses et en multipliant les couples par le nombre de paires de pôles p .

I 2 Angles naturels de la machine, notations.

Un système d'axes perpendiculaires (D et Q) est associé à chaque enroulement triphasé. Les axes des phases A des divers enroulements constituent les axes directs (D).

La figure 1-2 illustre ce repérage en adoptant comme sens positif le sens trigonométrique. Sur cette figure sont également précisées les principales notations utilisées qui sont:

- α : décalage angulaire entre les axes D_1^s et D_2^s des 2 primaires.
- θ_1, θ_2 : angles qui permettent de repérer la position du rotor par rapport aux axes directs des stators 1 et 2.
- $\lambda_1^s, \lambda_2^s, \lambda^r$: Position angulaire d'un point M quelconque de l'entrefer par rapport au repère du stator 1, du stator 2 ou du rotor.

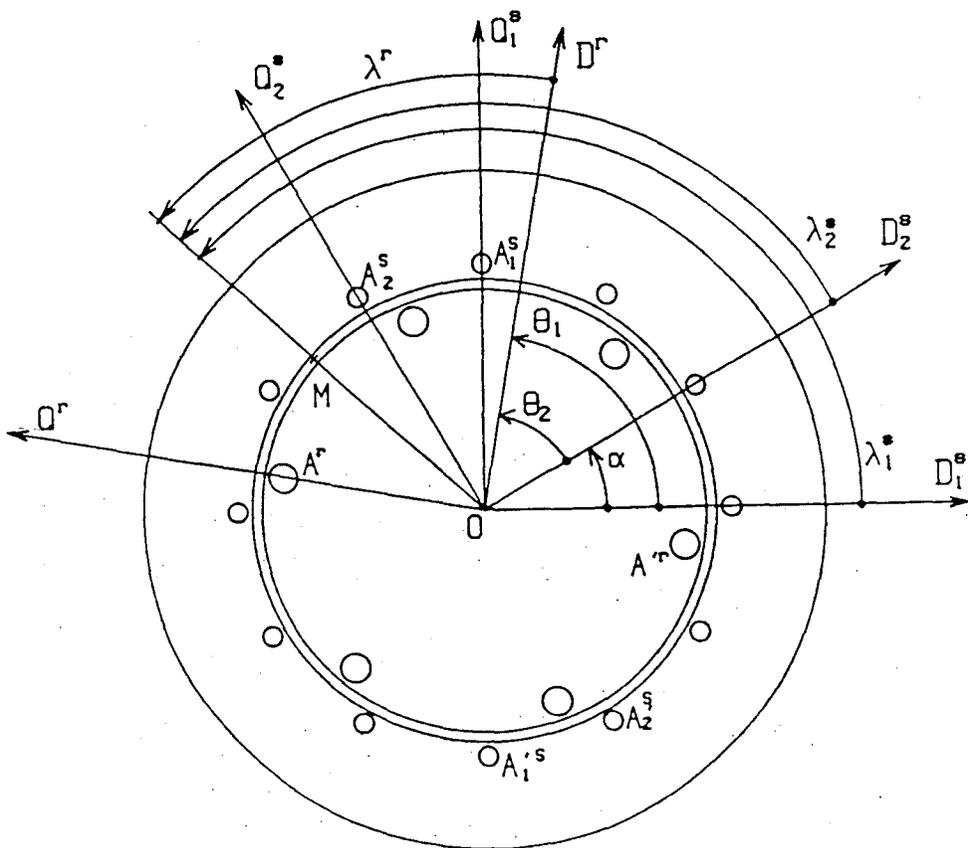


Fig. 1-2
Angles naturels de la machine

Par ailleurs on notera:

- e: l'épaisseur de l'entrefer,
- μ_0 : la perméabilité magnétique de l'entrefer ($\mu_0=4\pi 10^{-7}$ SI)
- l: la longueur, supposée identique, des armatures primaire et secondaire,
- D: le diamètre moyen au niveau de l'entrefer.

I 3 Hypothèses simplificatrices.

La machine est supposée "linéaire" c'est-à-dire que la saturation et les effets d'hystérésis du circuit magnétique sont négligés ainsi que les phénomènes provoquant des variations de la résistance et des inductances des enroulements (température, fréquence).

Les pertes dans le fer ne sont pas prises en compte, la perméabilité du circuit magnétique est supposée infinie.

On admet que la force magnétomotrice produite par chaque enroulement est à répartition spatiale sinusoidale. Cette hypothèse revient à ne considérer que le fondamental de cette onde de f.m.m. créée le long de l'entrefer (figure 1-3).

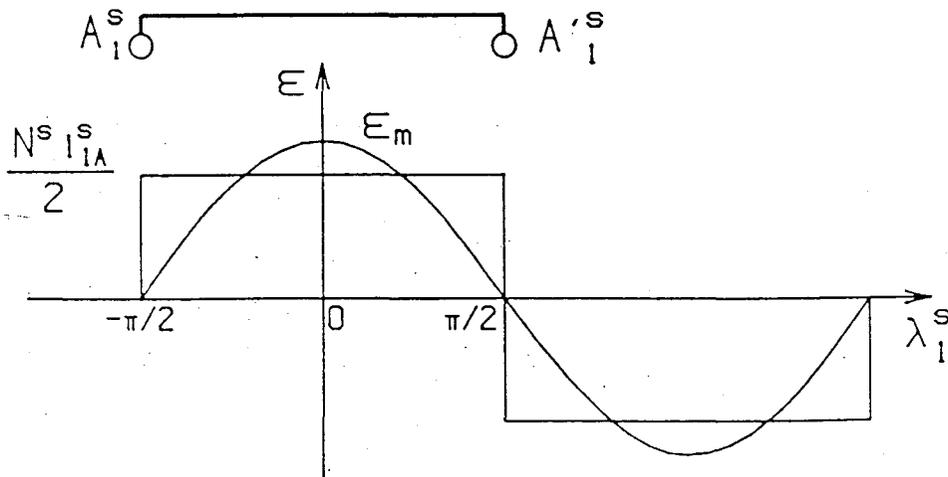


Fig. 1-3

F.m.m. produite par un enroulement

La f.m.m. créée par la bobine diamétrale $A_1^s A_1'^s$, parcourue par le courant i_{1A}^s , est un créneau d'amplitude $\frac{N^s i_{1A}^s}{2}$. L'amplitude du

fondamental vaut:

$$\epsilon_m = \frac{4 N^s i_1 A}{\pi 2} \quad (1-1)$$

On suppose que l'entrefer est d'épaisseur constante; l'effet d'ouverture des encoches est donc négligé.

Les deux enroulements statoriques, couplés en étoile, sont alimentés chacun par 3 fils; les neutres ne sont pas connectés. Il n'y a donc pas de composante homopolaire de courant.

La vitesse du rotor est supposée constante ce qui revient à supposer que les constantes de temps électriques sont beaucoup plus petites que les constantes de temps mécaniques.

I 4 Inductances de la machine [15].

Pour définir les inductances principales et mutuelles de la machine, seul le flux utile qui correspond aux lignes de champ qui traversent l'entrefer, est pris en compte. Considérons deux bobines d'ouverture diamétrale décalées d'un angle x quelconque. La première bobine, de N_1 spires, est parcourue par le courant i_1 . La seconde bobine est constituée de N_2 spires. La fig.1-4 montre la f.m.m. créée par la première bobine conformément aux hypothèses énoncées précédemment.

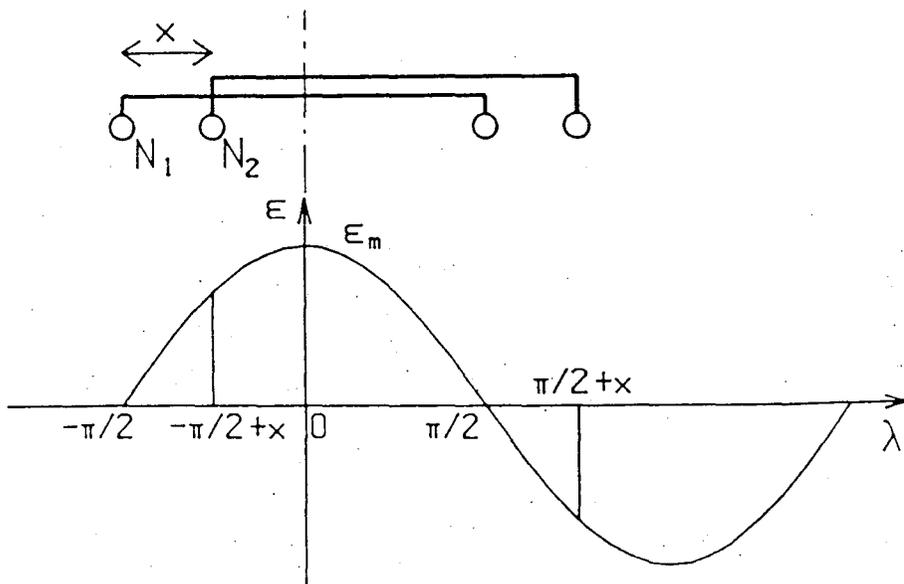


Fig. 1-4

Le flux total ψ_1 embrassé par la première bobine permet de

définir l'inductance principale de cette bobine.

$$\psi_1 = N_1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mu_0 D l}{2e} \frac{4}{\pi} \frac{N_1}{2} i_1 \cos \lambda \, d\lambda \quad (1-2)$$

$$\psi_1 = N_1^2 \frac{\mu_0 D l}{2e} \frac{4}{\pi} i_1 \quad (1-3)$$

L'inductance principale de cette bobine vaut donc:

$$L_p = \frac{2 N_1^2 \mu_0 D l}{\pi e} \quad (1-4)$$

Le flux total ψ_2 embrassant la deuxième bobine permet de calculer l'inductance mutuelle M_{12} entre les deux enroulements.

$$\psi_2 = N_2 \int_{-\frac{\pi}{2}+x}^{\frac{\pi}{2}+x} \frac{\mu_0 D l}{2e} \frac{4}{\pi} \frac{N_1}{2} i_1 \cos \lambda \, d\lambda \quad (1-5)$$

$$M_{12} = \frac{2 N_1 N_2 \mu_0 D l}{\pi e} \cos x \quad (1-6)$$

Les expressions (1-4) et (1-6) permettent la détermination des inductances principales et mutuelles de la machine.

I 4 1 Inductances statoriques

a) Inductance principale de chaque phase statorique L_p^s

La relation (1-4) où l'on fait $N_1 = N^s$ donne

$$L_p^s = \frac{2 N^{s2} \mu_0 D l}{\pi e} \quad (1-7)$$

b) Inductance mutuelle entre phases d'une même étoile M^s

La relation (1-6) où l'on fait $N_1 = N_2 = N^s$ et $x = \pm 2\pi/3$ donne

$$M^s = -\frac{N^{s2} \mu_0 D l}{\pi e} \quad (1-8)$$

Compte tenu de (1-7) on a aussi

$$M^s = -L_p^s/2 \quad (1-9)$$

c) Inductances mutuelles entre phases des deux étoiles

Les 9 inductances mutuelles qui expriment le couplage entre les

deux primaires peuvent être regroupées dans la matrice $[M_{ss}]$

$$[M_{ss}] = \begin{bmatrix} M_{A_1 A_2} & M_{A_1 B_2} & M_{A_1 C_2} \\ M_{B_1 A_2} & M_{B_1 B_2} & M_{B_1 C_2} \\ M_{C_1 A_2} & M_{C_1 B_2} & M_{C_1 C_2} \end{bmatrix} \quad (1-10)$$

En prenant $N_1=N_2=N^s$, $x=\alpha$ ou $x=\alpha \pm 2\pi/3$ ou $x=\alpha \pm 4\pi/3$, l'application des relations précédentes conduit à

$$[M_{ss}] = L_p^s \begin{bmatrix} \cos \alpha & \cos(\alpha+2\pi/3) & \cos(\alpha+4\pi/3) \\ \cos(\alpha-2\pi/3) & \cos \alpha & \cos(\alpha+2\pi/3) \\ \cos(\alpha-4\pi/3) & \cos(\alpha-2\pi/3) & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (1-11)$$

Une écriture plus condensée est obtenue en développant les cosinus sous forme exponentielle et en introduisant l'opérateur $a=e^{j2\pi/3}$. j est le nombre imaginaire tel que $j^2=-1$.

$$[M_{ss}] = \frac{L_p^s}{2} \left\{ e^{j\alpha} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ a^2 & 1 & a \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix} + e^{-j\alpha} \begin{bmatrix} 1 & a^2 & a \\ a & 1 & a^2 \\ a^2 & a & 1 \end{bmatrix} \right\} \quad (1-12)$$

1 4 2 Inductances rotoriques

a) Inductance principale de chaque phase rotorique L_p^r

La relation (1-4) où l'on fait $N_1=N^r$ donne

$$L_p^r = \frac{2N^{r2} \mu_0 D l}{\pi e} \quad (1-13)$$

b) Inductance mutuelle entre phases rotoriques M^r

La relation (1-6) où l'on fait $N_1=N_2=N^r$ et $x=\pm 2\pi/3$ donne

$$M^r = -\frac{N^{r2} \mu_0 D l}{\pi e} \quad (1-14)$$

Compte tenu de (1-13) on a aussi

$$M^r = -L_p^r / 2 \quad (1-15)$$

1 4 3 Inductances mutuelles entre phases statoriques et rotoriques

Lorsque l'axe d'une phase statorique et d'une phase rotorique sont confondus l'inductance mutuelle M entre celles-ci est maximale. La relation (1-6) où l'on fait $N_1=N^s$, $N_2=N^r$ et $x=0$ donne

$$M = \frac{2N^s N^r \mu_0 D l}{\pi e} \quad (1-16)$$

On a aussi

$$M = L_p^s \frac{N^r}{N^s} = L_p^r \frac{N^s}{N^r} \quad (1-17)$$

La position du rotor par rapport au stator 1 étant caractérisée par l'angle θ_1 , les neuf coefficients d'inductance mutuelle exprimant le couplage entre enroulements peuvent être regroupés dans la matrice $[M_{sr}(\theta_1)]$

$$[M_{sr}(\theta_1)] = M \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \cos(\theta_1 + 2\pi/3) & \cos(\theta_1 + 4\pi/3) \\ \cos(\theta_1 - 2\pi/3) & \cos \theta_1 & \cos(\theta_1 + 2\pi/3) \\ \cos(\theta_1 - 4\pi/3) & \cos(\theta_1 - 2\pi/3) & \cos \theta_1 \end{bmatrix} \quad (1-18)$$

ou

$$[M_{sr}(\theta_1)] = \frac{M}{2} \left\{ e^{j\theta_1} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ a^2 & 1 & a \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix} + e^{-j\theta_1} \begin{bmatrix} 1 & a^2 & a \\ a & 1 & a^2 \\ a^2 & a & 1 \end{bmatrix} \right\} \quad (1-19)$$

Les relations traduisant les liens magnétiques entre le second primaire et le rotor sont regroupées dans la matrice $[M_{sr}(\theta_2)]$ obtenue en substituant θ_2 à θ_1 dans les relation (1-18) ou (1-19).

I 5 Equations des tensions

La loi d'Ohm combinée à la loi de Lentz permet d'écrire la relation suivante:

$$[v] = [R][i] + \frac{d[\psi]}{dt} \quad (1-20)$$

$[v]$ est un vecteur formé des 9 tensions simples qui apparaissent aux bornes des 9 enroulements de la machine. Le rotor étant en court circuit, il vient:

$$[v] = \begin{bmatrix} v_{1A}^s & v_{1B}^s & v_{1C}^s & v_{2A}^s & v_{2B}^s & v_{2C}^s & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_t \quad (1-21)$$

$[i]$ est le vecteur formé par les 9 courants circulant dans les enroulements:

$$[i] = \begin{bmatrix} i_{1A}^s & i_{1B}^s & i_{1C}^s & i_{2A}^s & i_{2B}^s & i_{2C}^s & i_A^r & i_B^r & i_C^r \end{bmatrix}_t \quad (1-22)$$

$[\psi]$ est le vecteur formé par les flux totaux embrassés par les 9 enroulements en tenant compte des flux de fuites:

$$[\psi] = \begin{bmatrix} \psi_{1A}^s & \psi_{1B}^s & \psi_{1C}^s & \psi_{2A}^s & \psi_{2B}^s & \psi_{2C}^s & \psi_A^r & \psi_B^r & \psi_C^r \end{bmatrix}_t \quad (1-23)$$

$[R]$ est une matrice diagonale dont les éléments sont les

résistances des 9 enroulements.

$$[R] = \begin{bmatrix} R^s & & & & & & & & \\ & R^s & & & & & & & \\ & & R^s & & & & & & \\ & & & R^s & & & & & \\ & & & & R^s & & & & \\ & & & & & R^s & & & \\ & & & & & & R^r & & \\ & & 0 & & & & & R^r & \\ & & & & & & & & R^r \end{bmatrix} \quad (1-24)$$

Pour simplifier l'écriture les vecteurs tensions, courants et flux, définis précédemment, sont décomposés en 3 vecteurs de 3 éléments. Chaque nouveau vecteur caractérise un enroulement triphasé. Cette décomposition est possible car la matrice [R] est diagonale.

$$\begin{cases} [v_1^s] = [R^s][i_1^s] + \frac{d[\psi_1^s]}{dt} \\ [v_2^s] = [R^s][i_2^s] + \frac{d[\psi_2^s]}{dt} \\ [0] = [R^r][i^r] + \frac{d[\psi^r]}{dt} \end{cases} \quad (1-25)$$

avec

$$[v_1^s] = \begin{bmatrix} v_{1A}^s \\ v_{1B}^s \\ v_{1C}^s \end{bmatrix}, \quad [v_2^s] = \begin{bmatrix} v_{2A}^s \\ v_{2B}^s \\ v_{2C}^s \end{bmatrix}, \quad [i_1^s] = \begin{bmatrix} i_{1A}^s \\ i_{1B}^s \\ i_{1C}^s \end{bmatrix}, \quad [i_2^s] = \begin{bmatrix} i_{2A}^s \\ i_{2B}^s \\ i_{2C}^s \end{bmatrix}, \quad [i^r] = \begin{bmatrix} i_A^r \\ i_B^r \\ i_C^r \end{bmatrix},$$

$$[\psi_1^s] = \begin{bmatrix} \psi_{1A}^s \\ \psi_{1B}^s \\ \psi_{1C}^s \end{bmatrix}, \quad [\psi_2^s] = \begin{bmatrix} \psi_{2A}^s \\ \psi_{2B}^s \\ \psi_{2C}^s \end{bmatrix}, \quad [\psi^r] = \begin{bmatrix} \psi_A^r \\ \psi_B^r \\ \psi_C^r \end{bmatrix}$$

I 6 Equations des flux

Le flux total embrassé par une bobine diamétrale est obtenu par l'addition de l'effet du courant dans la bobine considérée et de l'effet des courants circulant dans les autres bobines. Cette addition peut être exprimée sous forme matricielle. Pour le premier

primaire on obtient:

$$[\psi^s] = \begin{bmatrix} \psi_{1A}^s \\ \psi_{1B}^s \\ \psi_{1C}^s \end{bmatrix} = [L_s] \begin{bmatrix} i_{1A}^s \\ i_{1B}^s \\ i_{1C}^s \end{bmatrix} + [M_{ss}] \begin{bmatrix} i_{2A}^s \\ i_{2B}^s \\ i_{2C}^s \end{bmatrix} + [M_{sr}(\theta_1)] \begin{bmatrix} i_A^r \\ i_B^r \\ i_C^r \end{bmatrix} \quad (1-26)$$

Dans cette équation La matrice $[L_s]$ regroupe les inductances propres L^s et mutuelles M^s d'un enroulement triphasé. $L^s = L_p^s + l^s$, l^s étant l'inductance de fuites d'une bobine statorique.

$$[L_s] = \begin{bmatrix} L^s & M^s & M^s \\ M^s & L^s & M^s \\ M^s & M^s & L^s \end{bmatrix} \quad (1-27)$$

Comme la somme des 3 courants dans chaque bobinage triphasé est obligatoirement nulle, le premier produit matriciel de la relation (1-26) peut être développé de la façon suivante:

$$\begin{bmatrix} L^s & M^s & M^s \\ M^s & L^s & M^s \\ M^s & M^s & L^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{1A}^s \\ i_{1B}^s \\ i_{1C}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l^s + L_p^s & -\frac{1}{2}L_p^s & -\frac{1}{2}L_p^s \\ -\frac{1}{2}L_p^s & l^s + L_p^s & -\frac{1}{2}L_p^s \\ -\frac{1}{2}L_p^s & -\frac{1}{2}L_p^s & l^s + L_p^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{1A}^s \\ i_{1B}^s \\ -(i_{1A}^s + i_{1B}^s) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} L^s & M^s & M^s \\ M^s & L^s & M^s \\ M^s & M^s & L^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{1A}^s \\ i_{1B}^s \\ i_{1C}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l^s + \frac{3}{2}L_p^s & 0 & 0 \\ 0 & l^s + \frac{3}{2}L_p^s & 0 \\ 0 & 0 & l^s + \frac{3}{2}L_p^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{1A}^s \\ i_{1B}^s \\ i_{1C}^s \end{bmatrix} \quad (1-28)$$

La quantité $\frac{3}{2}L_p^s$ est l'inductance cyclique principale d'un stator notée \mathcal{L}_p^s . $\mathcal{L}^s = l^s + \mathcal{L}_p^s$ est l'inductance cyclique propre.

Résumons les équations des flux des 3 bobinages triphasés de la machine.

Stator 1:

$$\begin{bmatrix} \psi_{1A}^s \\ \psi_{1B}^s \\ \psi_{1C}^s \end{bmatrix} = \mathcal{L}^s \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{1A}^s \\ i_{1B}^s \\ i_{1C}^s \end{bmatrix} + [M_{ss}] \begin{bmatrix} i_{2A}^s \\ i_{2B}^s \\ i_{2C}^s \end{bmatrix} + [M_{sr}(\theta_1)] \begin{bmatrix} i_A^r \\ i_B^r \\ i_C^r \end{bmatrix} \quad (1-29)$$

Stator 2:

Les 2 stators étant de construction identique, l'inductance

cyclique est la même et la relation liant le flux de la deuxième étoile au courant dans la première est exprimée par la matrice $[M_{ss}]$ transposée.

$$\begin{bmatrix} \psi_{2A}^s \\ \psi_{2B}^s \\ \psi_{2C}^s \end{bmatrix} = \mathcal{L}^s \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{2A}^s \\ i_{2B}^s \\ i_{2C}^s \end{bmatrix} + [M_{ss}]_t \begin{bmatrix} i_{1A}^s \\ i_{1B}^s \\ i_{1C}^s \end{bmatrix} + [M_{sr}(\theta_2)] \begin{bmatrix} i_A^r \\ i_B^r \\ i_C^r \end{bmatrix} \quad (1-30)$$

Rotor:

L'enroulement rotorique triphasé possède une inductance cyclique définie exactement comme pour un stator. Les matrices liant les flux rotoriques aux courants statoriques sont les transposées des matrices correspondantes.

$$\begin{bmatrix} \psi_A^r \\ \psi_B^r \\ \psi_C^r \end{bmatrix} = \mathcal{L}^r \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_A^r \\ i_B^r \\ i_C^r \end{bmatrix} + [M_{sr}(\theta_1)]_t \begin{bmatrix} i_{1A}^s \\ i_{1B}^s \\ i_{1C}^s \end{bmatrix} + [M_{sr}(\theta_2)]_t \begin{bmatrix} i_{2A}^s \\ i_{2B}^s \\ i_{2C}^s \end{bmatrix} \quad (1-31)$$

avec $\mathcal{L}^r = l^r + \mathcal{L}_p^r$, $\mathcal{L}_p^r = \frac{3}{2} L_p^r$

\mathcal{L}^r : inductance cyclique propre

l^r : inductance de fuites

\mathcal{L}_p^r : inductance cyclique principale du rotor

I 7 Couple électromagnétique

La relation générale donnant le couple électromagnétique instantané d'une machine électrique est basée sur le principe de la conservation de l'énergie [16]. Le couple est exprimé par la relation suivante:

$$\Gamma_e = \frac{1}{2} [i]_t \left\{ \frac{d[L]}{d\theta_q} \right\} [i] \quad (1-32)$$

Le vecteur $[i]$ est défini par la relation (1-22).

θ_q est un angle repérant la position du rotor par rapport au stator. Dans notre cas $\theta_q = \theta_1$ ou θ_2 selon le stator considéré. Mais

comme $\theta_1 = \theta_2 + \alpha$, $\frac{d[L]}{d\theta_1} = \frac{d[L]}{d\theta_2}$ car α est un angle constant.

Toutes les inductances propres et mutuelles de la machine sont incluses dans la matrice $[L]$ qui vérifie la relation

$$[\psi] = [L][i] \quad (1-33)$$

La matrice L est l'association des 9 matrices 3×3 décrites dans le

paragraphe I 4.

$$[L] = \begin{bmatrix} [L_s] & [M_{ss}] & [M_{sr}(\theta_1)] \\ [M_{ss}]_t & [L_s] & [M_{sr}(\theta_2)] \\ [M_{sr}(\theta_1)]_t & [M_{sr}(\theta_2)]_t & [L_r] \end{bmatrix} \quad (1-34)$$

L'entrefer étant supposé d'épaisseur constante, les matrices liant les flux aux courants des enroulements mécaniquement solidaires sont constantes, leurs dérivées sont nulles.

$$\frac{d[L]}{d\theta_q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{d[M_{sr}(\theta_1)]}{d\theta_1} \\ 0 & 0 & \frac{d[M_{sr}(\theta_2)]}{d\theta_2} \\ \frac{d[M_{sr}(\theta_1)]_t}{d\theta_1} & \frac{d[M_{sr}(\theta_2)]_t}{d\theta_2} & 0 \end{bmatrix} \quad (1-35)$$

La relation (1-32) peut être développée de la façon suivante:

$$\Gamma_e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} [i_1^s]_t & [i_2^s]_t & [i^r]_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d[M_{sr}(\theta_1)]}{d\theta_1} [i^r] \\ \frac{d[M_{sr}(\theta_2)]}{d\theta_2} [i^r] \\ \frac{d[M_{sr}(\theta_1)]_t}{d\theta_1} [i_1^s] + \frac{d[M_{sr}(\theta_2)]_t}{d\theta_2} [i_2^s] \end{bmatrix}$$

Ce qui donne:

$$\Gamma_e = \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} & [i_1^s]_t \frac{d[M_{sr}(\theta_1)]}{d\theta_1} [i^r] + [i_2^s]_t \frac{d[M_{sr}(\theta_2)]}{d\theta_2} [i^r] \\ & [i^r]_t \frac{d[M_{sr}(\theta_1)]_t}{d\theta_1} [i_1^s] + [i^r]_t \frac{d[M_{sr}(\theta_2)]_t}{d\theta_2} [i_2^s] \end{aligned} \right\} \quad (1-36)$$

Comme le résultat de ces produits matriciels est un nombre réel, il est possible de transposer les produits de la deuxième ligne. Ceci permet d'inverser l'ordre de ces produits. Les 2 lignes de la relation (1-36) sont identiques.

$$\Gamma_e = [i_1^s]_t \frac{d[M_{sr}(\theta_1)]}{d\theta_1} [i^r] + [i_2^s]_t \frac{d[M_{sr}(\theta_2)]}{d\theta_2} [i^r] \quad (1-37)$$

Le couple n'intervient pas dans le système d'équations différentielles régissant le fonctionnement de la machine. Le couple n'est donc pas une variable d'état. Le vecteur formé des 9 courants exprime, à chaque instant, l'état de la machine et permet le calcul des autres grandeurs.

II EQUATIONS MODIFIEES DE LA MACHINE

Nous allons, pour simplifier le système initial d'équations, utiliser la transformation à un axe [16] qui introduit la notion de vecteur complexe encore appelé vecteur espace. Après avoir rappelé la signification du vecteur "espace" nous montrerons comment se modifie le système initial d'équations.

II 1 Présentation du vecteur complexe [17][18][19]

La notion de vecteur "complexe" découle de l'expression analytique de la f.m.m. produite par un enroulement triphasé à un instant donné. Soient i_A^s , i_B^s et i_C^s les courants qui circulent dans les 3 phases du stator 1 à l'instant considéré. La f.m.m. qu'ils produisent au point M de l'entrefer, repéré par l'angle λ^s (figure 1-2), est donnée par la relation suivante:

$$\varepsilon^s(\lambda^s, t) = \frac{4}{\pi} \frac{N^s}{2} \left[i_A^s \cos \lambda^s + i_B^s \cos(\lambda^s - \frac{2\pi}{3}) + i_C^s \cos(\lambda^s - \frac{4\pi}{3}) \right] \quad (2-1)$$

En remplaçant les cosinus par leurs valeurs complexes cette expression devient:

$$\varepsilon^s(\lambda^s, t) = \frac{4}{\pi} \frac{N^s}{2} \left[i_A^s \frac{1}{2} (e^{j\lambda^s} + e^{-j\lambda^s}) + i_B^s \frac{1}{2} (e^{j(\lambda^s - 2\pi/3)} + e^{-j(\lambda^s - 2\pi/3)}) + i_C^s \frac{1}{2} (e^{j(\lambda^s - 4\pi/3)} + e^{-j(\lambda^s - 4\pi/3)}) \right] \quad (2-2)$$

ou encore

$$\varepsilon^s(\lambda^s, t) = \frac{4}{\pi} \frac{N^s}{2} \frac{1}{2} \left[e^{j\lambda^s} (i_A^s + a^2 i_B^s + a i_C^s) + e^{-j\lambda^s} (i_A^s + a i_B^s + a^2 i_C^s) \right] \quad (2-3)$$

Le premier terme de la somme est la quantité conjuguée du second, il est donc possible d'écrire plus simplement

$$\varepsilon^s(\lambda^s, t) = \frac{4}{\pi} \frac{N^s}{2} \mathcal{R} \left[(i_A^s + a i_B^s + a^2 i_C^s) e^{-j\lambda^s} \right] \quad (2-4)$$

Cette écriture permet de séparer la variable temporelle t de la variable spatiale λ^s .

En introduisant la variable complexe

$$\bar{i}^s = \frac{2}{3} (i_A^s + a i_B^s + a^2 i_C^s) \quad (2-5)$$

qui représente l'état électrique du stator 1 à un instant donné t il vient:

$$\varepsilon^s(\lambda^s, t) = \frac{4}{\pi} \frac{N^s}{2} \frac{3}{2} \mathcal{R} \left[\bar{i}^s e^{-j\lambda^s} \right] \quad (2-6)$$

Le vecteur image de cette variable complexe qui permet de calculer la f.m.m. en tout point de l'entrefer est appelée vecteur espace courant statorique.

La variable complexe \bar{i}_1^s peut être représentée par son module et son argument:

$$\bar{i}_1^s = |\bar{i}_1^s| e^{j \text{Arg}(\bar{i}_1^s)} \quad (2-7)$$

La relation (2-6) peut alors s'écrire

$$e_i^s(\lambda_1^s, t) = \frac{3}{\pi} N^s \mathcal{R} \left[|\bar{i}_1^s| e^{j \text{Arg}(\bar{i}_1^s)} \cdot e^{-j \lambda_1^s} \right] \quad (2-8)$$

ou encore

$$e_i^s(\lambda_1^s, t) = \frac{3}{\pi} N^s \mathcal{R} \left[|\bar{i}_1^s| e^{j [\text{Arg}(\bar{i}_1^s) - \lambda_1^s]} \right] \quad (2-9)$$

Le diagramme vectoriel qui illustre les relations précédentes est donné à la figure 2-1.

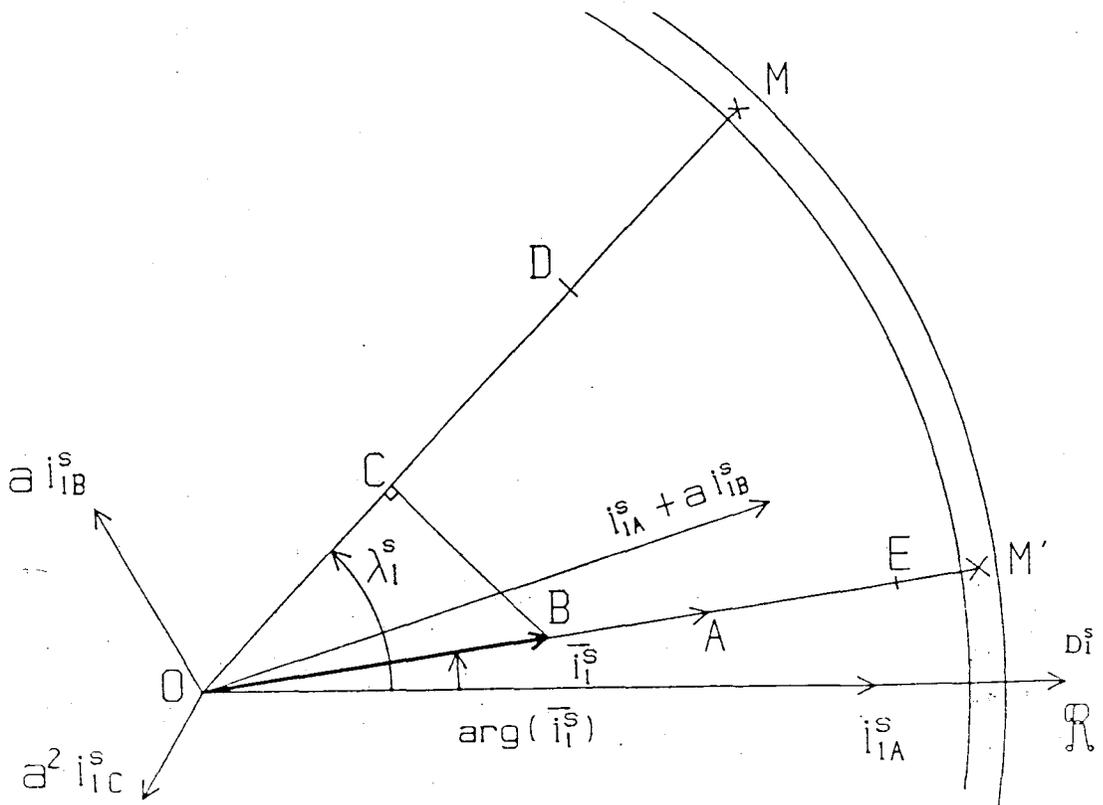


Fig. 2-1

Sur ce diagramme on a, à un instant donné t:

$$\overline{OA} = i_{1A}^s + a i_{1B}^s + a^2 i_{1C}^s ; \quad \overline{OB} = \frac{2}{3} \bar{i}_1^s$$

Pour un point M donné de l'entrefer et en confondant l'axe réel du plan complexe et l'axe naturel D_i^s de la phase A, il vient:

$$\overline{OC} = |\overline{ii^s}| \cos[\text{Arg}(\overline{ii^s}) - \lambda_i^s] \quad \text{et} \quad \overline{OD} = \frac{3}{\pi} N^s \overline{OC} = \varepsilon_i^s(\lambda_i^s, t)$$

Au même instant t le maximum de ε_i^s sera en un point M' de l'entrefer caractérisé par un angle $\lambda_i^s = \text{Arg}(\overline{ii^s})$ et vaudra

$$\varepsilon_{i_m}^s = \frac{3}{\pi} N^s |\overline{ii^s}| = \frac{3}{\pi} N^s \overline{OB} = \overline{OE}$$

Physiquement le vecteur espace courant statorique représente donc, par son module, la valeur instantanée du maximum de la f.m.m. d'entrefer à la constante $3N^s/\pi$ près et, par sa direction, la position de ce maximum par rapport à l'axe de référence D_i^s .

Le coefficient $\frac{2}{3}$, introduit pour définir $\overline{ii^s}$, permet un retour simple aux variables réelles. En effet, à partir de la relation (2-5), on obtient:

$$\left. \begin{aligned} \overline{ii^s}_A = \mathcal{R}(\overline{ii^s}) &= \frac{1}{2} (\overline{ii^s} + \overline{ii^s}^*) \\ \overline{ii^s}_B = \mathcal{R}(a^2 \overline{ii^s}) &= \frac{1}{2} (a^2 \overline{ii^s} + a \overline{ii^s}^*) \\ \overline{ii^s}_C = \mathcal{R}(a \overline{ii^s}) &= \frac{1}{2} (a \overline{ii^s} + a^2 \overline{ii^s}^*) \end{aligned} \right\} \quad (2-10)$$

Pour la suite des calculs nous supposerons toujours que le plan complexe est confondu avec les axes D et Q du repère considéré. Les notions de "vecteur espace" et de "vecteur image d'un nombre complexe" seront confondues.

Les autres grandeurs physiques triphasées sont représentées par des vecteurs espaces définis de la même façon bien que ceux-ci n'aient pas toujours une signification physique comme pour le vecteur espace courant.

On pose, par exemple pour le stator 1:

$$\overline{vi^s}_1 = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1A}^s \\ v_{1B}^s \\ v_{1C}^s \end{bmatrix} \quad (2-11)$$

$$\overline{\psi i^s}_1 = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{1A}^s \\ \psi_{1B}^s \\ \psi_{1C}^s \end{bmatrix} \quad (2-12)$$

On a des relations semblables pour le stator 2 et pour le rotor.

II 2 Changements de repères

Pour faciliter la résolution il convient d'exprimer les vecteurs espaces relatifs à chaque enroulement dans un repère commun (D_c, Q_c) . La figure 2-2 nous donne les relations entre les différents angles de la machine. θ , α_1 et α_2 repèrent la position du rotor et des stators 1 et 2 par rapport au repère commun.

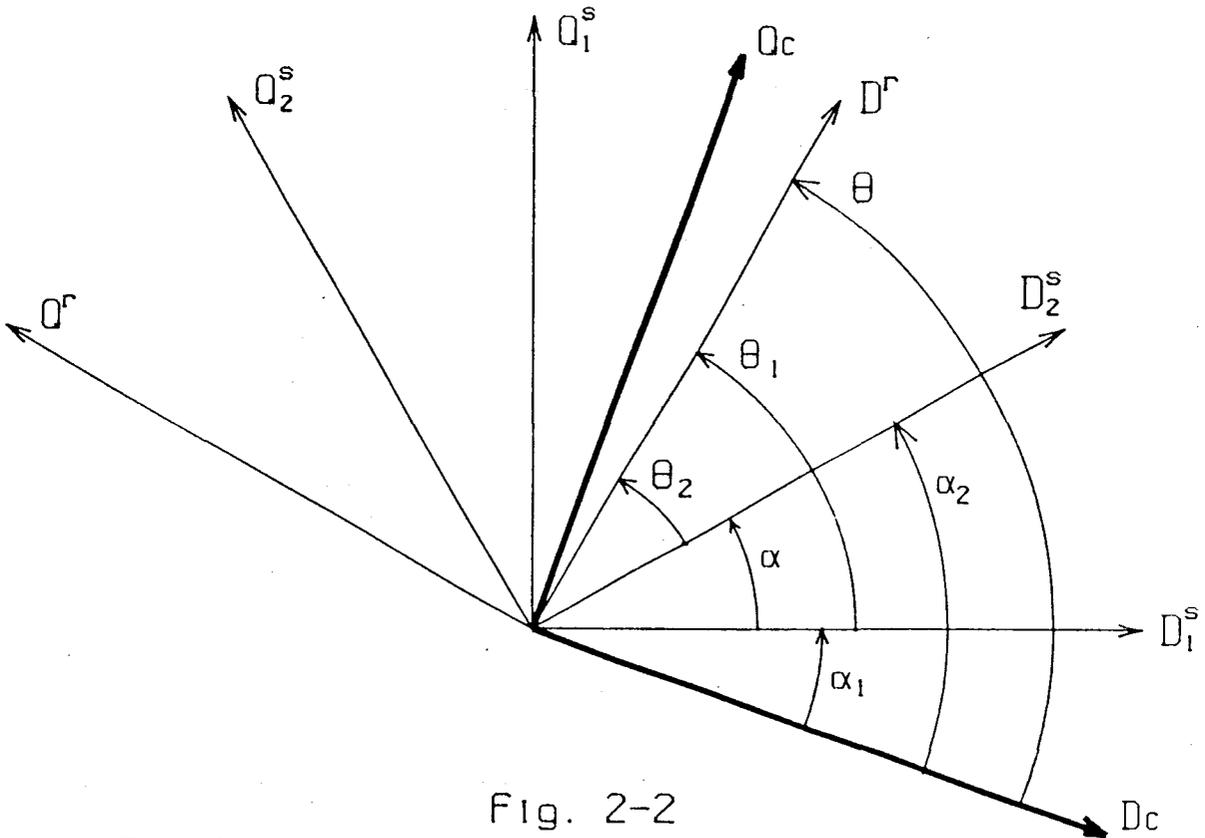


Fig. 2-2
Position des repères naturels
par rapport au repère commun

On en déduit les relations suivantes entre les angles:

$$\theta = \theta_1 + \alpha_1 \quad (2-13)$$

$$\theta = \theta_2 + \alpha_2 \quad (2-14)$$

$$\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 \quad (2-15)$$

Tous les vecteurs espaces peuvent être exprimés dans 4 repères différents, il convient de préciser les notations.

Prenons le cas du vecteur espace représentant les courants dans le stator 1. Il est noté \bar{i}_1^s quand il est exprimé dans son repère naturel (D_1^s, Q_1^s) , $\bar{i}_1^{s(2)}$ dans le repère lié au stator 2 (D_2^s, Q_2^s) ,

$\bar{i}_1^s(c)$ dans le repère commun (D_c, Q_c) et $\bar{i}_1^s(r)$ dans le repère lié au rotor (D^r, Q^r) .

Le vecteur espace \bar{i}_2^s est repéré dans son repère naturel (D_2^s, Q_2^s) , il s'écrit $\bar{i}_2^s(1)$, $\bar{i}_2^s(c)$ et $\bar{i}_2^s(r)$ quand il est référencé respectivement aux repères (D_1^s, Q_1^s) , (D_c, Q_c) et (D^r, Q^r) .

Les autres grandeurs électriques ou magnétiques statoriques suivent le même système de notations. En ce qui concerne les grandeurs rotoriques, le vecteur espace \bar{i}^r est exprimé dans son repère naturel (D^r, Q^r) , $\bar{i}^r(1)$ désigne le même vecteur dans (D_1^s, Q_1^s) , $\bar{i}^r(2)$ dans (D_2^s, Q_2^s) et $\bar{i}^r(c)$ dans (D_c, Q_c) .

Chaque vecteur espace peut être défini par ses coordonnées polaires. La figure 2-3 précise les relations qui interviennent dans les quatre expressions différentes de la même grandeur physique.

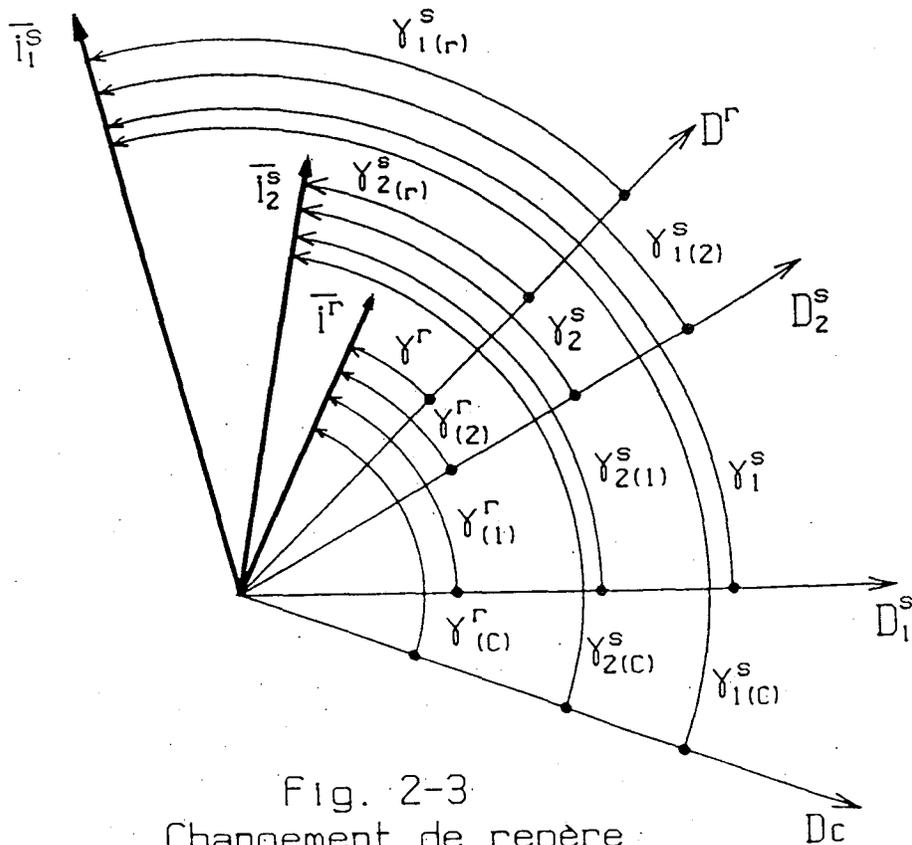


Fig. 2-3
Changement de repère

Les relations entre les angles sont les suivantes:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1^s(2) &= \gamma_1^s - \alpha, & \gamma_1^s(c) &= \gamma_1^s + \alpha_1, & \gamma_1^s(r) &= \gamma_1^s - \theta_1 \\ \gamma_2^s(1) &= \gamma_2^s + \alpha, & \gamma_2^s(c) &= \gamma_2^s + \alpha_2, & \gamma_2^s(r) &= \gamma_2^s - \theta_2 \\ \gamma^r(1) &= \gamma^r + \theta_1, & \gamma^r(c) &= \gamma^r + \theta, & \gamma^r(2) &= \gamma^r + \theta_2 \end{aligned} \right\} \quad (2-16)$$

Les relations entre les vecteurs espaces courants en sont déduites:

$$\left. \begin{aligned} \bar{i}_1^s &= |\bar{i}_1^s| e^{j\gamma_1^s}, & \bar{i}_1^s(2) &= \bar{i}_1^s e^{-j\alpha}, & \bar{i}_1^s(c) &= \bar{i}_1^s e^{j\alpha_1}, & \bar{i}_1^s(r) &= \bar{i}_1^s e^{-j\theta_1} \\ \bar{i}_2^s &= |\bar{i}_2^s| e^{j\gamma_2^s}, & \bar{i}_2^s(1) &= \bar{i}_2^s e^{j\alpha}, & \bar{i}_2^s(c) &= \bar{i}_2^s e^{j\alpha_2}, & \bar{i}_2^s(r) &= \bar{i}_2^s e^{-j\theta_2} \\ \bar{i}^r &= |\bar{i}^r| e^{j\gamma^r}, & \bar{i}^r(1) &= \bar{i}^r e^{j\theta_1}, & \bar{i}^r(c) &= \bar{i}^r e^{j\theta}, & \bar{i}^r(2) &= \bar{i}^r e^{j\theta_2} \end{aligned} \right\} \quad (2-17)$$

On a des relations semblables pour les autres grandeurs (tensions, flux).

II 3 Equations vectorielles de la machine

II 3 1 Equations des tensions dans les repères naturels

En prémultipliant les 2 membres des équations du système (1-25) par la matrice $\frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \end{bmatrix}$, compte tenu de la définition du vecteur espace, nous obtenons:

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{v}_1^s &= R^s \bar{i}_1^s + \frac{d\bar{\psi}_1^s}{dt} \\ \bar{v}_2^s &= R^s \bar{i}_2^s + \frac{d\bar{\psi}_2^s}{dt} \\ 0 &= R^r \bar{i}^r + \frac{d\bar{\psi}^r}{dt} \end{aligned} \right. \quad (2-18)$$

II 3 2 Vecteurs espaces flux

En procédant de même pour l'équation matricielle de flux (1-29) il vient:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_1^s &= \mathcal{L}^s \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{1A}^s \\ i_{1B}^s \\ i_{1C}^s \end{bmatrix} + \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \end{bmatrix} [M_{ss}] \begin{bmatrix} i_{2A}^s \\ i_{2B}^s \\ i_{2C}^s \end{bmatrix} \\ &+ \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \end{bmatrix} [M_{sr}(\theta_1)] \begin{bmatrix} i_A^r \\ i_B^r \\ i_C^r \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-19)$$

Les matrices $[M_{ss}]$ et $[M_{sr}(\theta_1)]$ sont remplacées par leurs expressions exponentielles définies par les relations (1-13) et (1-15). En effectuant les produits matriciels on aboutit à l'expression suivante:

$$\bar{\psi}_1^s = \mathcal{L}^s \bar{i}_1^s + \frac{3}{2} \mathcal{L}_p^s \bar{i}_2^s e^{j\alpha} + \frac{3}{2} \bar{M} i_r e^{j\theta_1} \quad (2-20)$$

où chaque vecteur espace est défini dans son repère naturel. Comme pour l'inductance cyclique principale d'un stator $\mathcal{L}_p^s = \frac{3}{2} \mathcal{L}_p^s$, il est possible d'introduire la notion d'inductance mutuelle cyclique M entre un stator et le rotor.

$$M = \frac{3}{2} M \quad (2-21)$$

Le vecteur espace $\bar{\psi}_1^s$ s'écrit donc:

$$\bar{\psi}_1^s = \mathcal{L}^s \bar{i}_1^s + \mathcal{L}_p^s \bar{i}_2^s e^{j\alpha} + \bar{M} i_r e^{j\theta_1} \quad (2-22)$$

Les vecteurs espaces des flux du stator 2 et du rotor sont obtenus par un calcul analogue à partir des relations (1-30) et (1-31)

$$\bar{\psi}_2^s = \mathcal{L}^s \bar{i}_2^s + \mathcal{L}_p^s \bar{i}_1^s e^{-j\alpha} + \bar{M} i_r e^{j\theta_2} \quad (2-23)$$

$$\bar{\psi}^r = \mathcal{L}^r \bar{i}^r + \bar{M} i_s e^{-j\theta_1} + \bar{M} i_2^s e^{-j\theta_2} \quad (2-24)$$

chaque vecteur espace étant défini dans son repère naturel.

La résolution d'un système d'équations n'est aisée que si toutes les variables sont définies dans un repère commun. En multipliant les 2 membres de l'équation (2-22) par $e^{j\alpha_1}$, ceux de (2-23) par $e^{j\alpha_2}$ et ceux de (2-24) par $e^{j\theta}$, il vient:

$$\bar{\psi}_1^s e^{j\alpha_1} = \mathcal{L}^s \bar{i}_1^s e^{j\alpha_1} + \mathcal{L}_p^s \bar{i}_2^s e^{j(\alpha+\alpha_1)} + \bar{M} i_r e^{j(\theta_1+\alpha_1)} \quad (2-25)$$

$$\bar{\psi}_2^s e^{j\alpha_2} = \mathcal{L}^s \bar{i}_2^s e^{j\alpha_2} + \mathcal{L}_p^s \bar{i}_1^s e^{j(\alpha_2-\alpha)} + \bar{M} i_r e^{j(\theta_2+\alpha_2)} \quad (2-26)$$

$$\bar{\psi}^r e^{j\theta} = \mathcal{L}^r \bar{i}^r e^{j\theta} + \bar{M} i_s e^{j(\theta-\theta_1)} + \bar{M} i_2^s e^{j(\theta-\theta_2)} \quad (2-27)$$

Les relations entre les angles établies en (2-13), (2-14), (2-15) et (2-16) ainsi que les différentes expressions des vecteurs espaces selon le repère choisi (2-17) autorisent une écriture plus condensée des équations précédentes.

$$\left. \begin{aligned} \bar{\psi}_1^s(c) &= \mathcal{L}^s \bar{i}_1^s(c) + \mathcal{L}_p^s \bar{i}_2^s(c) + M \bar{i}^r(c) \\ \bar{\psi}_2^s(c) &= \mathcal{L}^s \bar{i}_2^s(c) + \mathcal{L}_p^s \bar{i}_1^s(c) + M \bar{i}^r(c) \\ \bar{\psi}^r(c) &= \mathcal{L}^r \bar{i}^r(c) + M \bar{i}_1^s(c) + M \bar{i}_2^s(c) \end{aligned} \right\} \quad (2-28)$$

II 3 3 Courant magnétisant

Il est intéressant de disposer d'une variable qui reflète l'état magnétique de la machine. La f.m.m. créée par le stator 1 à un instant t donné et en un point M de l'entrefer caractérisé par l'angle λ_1^s est donnée par: (relation (2-6))

$$\varepsilon_1^s(\lambda_1^s, t) = \frac{3N^s}{\pi} \mathcal{R}(\bar{i}_1^s e^{-j\lambda_1^s})$$

Les f.m.m. générées par le stator 2 et par le rotor au même instant et au même point de l'entrefer s'expriment de façon analogue:

$$\varepsilon_2^s(\lambda_2^s, t) = \frac{3N^s}{\pi} \mathcal{R}(\bar{i}_2^s e^{-j\lambda_2^s}) \quad (2-29)$$

$$\varepsilon^r(\lambda^r, t) = \frac{3N^r}{\pi} \mathcal{R}(\bar{i}^r e^{-j\lambda^r}) \quad (2-30)$$

La force magnétomotrice résultante au point M de l'entrefer est la somme de ces 3 actions. Pour utiliser les relations précédentes, il convient d'exprimer les vecteurs espaces dans le repère commun (D_c, Q_c) . Soit λ_c l'angle qui donne la position du point M par rapport à D_c . On en déduit les relations suivantes entre λ_c et les autres angles:

$$\lambda_c = \lambda_1^s + \alpha_1 = \lambda_2^s + \alpha_2 = \lambda^r + \theta \quad (2-31)$$

de sorte que les relations (2-6), (2-29) et (2-30), exprimées dans le repère commun, deviennent:

$$\varepsilon_1^s(\lambda_c, t) = \frac{3N^s}{\pi} \mathcal{R}(\bar{i}_1^s(c) e^{-j\lambda_c}) \quad (2-32)$$

$$\varepsilon_2^s(\lambda_c, t) = \frac{3N^s}{\pi} \mathcal{R}(\bar{i}_2^s(c) e^{-j\lambda_c}) \quad (2-33)$$

$$\varepsilon^r(\lambda_c, t) = \frac{3N^r}{\pi} \mathcal{R}(\bar{i}^r(c) e^{-j\lambda_c}) \quad (2-34)$$

La f.m.m. résultante vaut donc:

$$\varepsilon(\lambda_c, t) = \frac{3}{\pi} \mathcal{R}[(N^s \bar{i}_1^s(c) + N^s \bar{i}_2^s(c) + N^r \bar{i}^r(c)) e^{-j\lambda_c}] \quad (2-35)$$

soit:

$$\varepsilon(\lambda_c, t) = \frac{3N^s}{\pi} \mathcal{R}[(\bar{i}_1^s(c) + \bar{i}_2^s(c) + \frac{N^r}{N^s} \bar{i}^r(c)) e^{-j\lambda_c}] \quad (2-36)$$

On appelle vecteur espace courant magnétisant de la machine la quantité:

$$\bar{i}_m^r(c) = \bar{i}_1^s(c) + \bar{i}_2^s(c) + \frac{N^r}{N^s} \bar{i}_r^r(c) \quad (2-37)$$

Il résulte que:

$$\varepsilon(\lambda c, t) = \frac{3N^s}{\pi} \mathcal{R}(\bar{i}_m^r(c) e^{-j\lambda c}) \quad (2-38)$$

Nous verrons, au chapitre 4, que le vecteur espace courant magnétisant correspond bien au courant magnétisant défini habituellement en régime permanent sinusoïdal.

II 4 Repère commun fixe

Le passage aux équations des tensions nous oblige à préciser la position du repère commun (D_c, Q_c) car il faut dériver les flux par rapport au temps. En supposant le repère commun immobile par rapport au stator, les angles α_1 et α_2 sont constants et θ est une fonction linéaire du temps car la vitesse du rotor $\omega' = \frac{d\theta}{dt}$, comptée positivement dans le sens trigonométrique, est supposée constante.

$$\theta = \omega' t + \theta_{1_0} + \alpha_1 \quad (2-39)$$

où θ_{1_0} est l'angle déterminé par les axes D^s et D^r à l'instant $t=0$. Les dérivées des flux ont pour expression:

$$\frac{d\bar{\psi}_1^s}{dt} = \frac{d\bar{\psi}_1^s(c)}{dt} \quad (2-40)$$

$$\frac{d\bar{\psi}_2^s}{dt} = \frac{d\bar{\psi}_2^s(c)}{dt} \quad (2-41)$$

$$\frac{d\bar{\psi}^r}{dt} = \left[\frac{d\bar{\psi}^r(c)}{dt} - j \frac{d\theta}{dt} \bar{\psi}^r(c) \right] e^{-j\theta} \quad (2-42)$$

Pour exprimer les équations des tensions, établies précédemment (2-18), dans le repère commun (D_c, Q_c) il faut multiplier les 2 membres de la première équation par $e^{j\alpha_1}$, ceux de la deuxième par $e^{j\alpha_2}$ et ceux de la troisième par $e^{j\theta}$, on obtient:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{v}_1^s(c) = R^s \bar{i}_1^s(c) + \frac{d\bar{\psi}_1^s(c)}{dt} \\ \bar{v}_2^s(c) = R^s \bar{i}_2^s(c) + \frac{d\bar{\psi}_2^s(c)}{dt} \\ 0 = R^r \bar{i}_r^r(c) + \frac{d\bar{\psi}^r(c)}{dt} - j\omega' \bar{\psi}^r(c) \end{array} \right. \quad (2-43)$$

Il reste à exprimer les vecteurs espaces $\bar{v}_1^s(c)$ et $\bar{v}_2^s(c)$ déduits des tensions qui existent aux bornes des enroulements des 2 primaires de la machine. La même démarche s'impose: calculer les vecteurs espaces dans leurs repères naturels puis les ramener dans le repère commun. Supposons la machine alimentée par 2 systèmes triphasés équilibrés. Les valeurs efficaces des tensions fonctions sinusoidales du temps sont V_1 pour le premier système, V_2 pour le second. La pulsation ω est identique; β_1 et β_2 précisent les phases à l'origine.

$$\left. \begin{aligned} v_{1A}^s &= V_1 \sqrt{2} \cos(\omega t + \beta_1) \\ v_{1B}^s &= V_1 \sqrt{2} \cos\left(\omega t + \beta_1 - \frac{2\pi}{3}\right) \\ v_{1C}^s &= V_1 \sqrt{2} \cos\left(\omega t + \beta_1 - \frac{4\pi}{3}\right) \end{aligned} \right\} \quad (2-44)$$

$$\left. \begin{aligned} v_{2A}^s &= V_2 \sqrt{2} \cos(\omega t - \alpha + \beta_2) \\ v_{2B}^s &= V_2 \sqrt{2} \cos\left(\omega t - \alpha + \beta_2 - \frac{2\pi}{3}\right) \\ v_{2C}^s &= V_2 \sqrt{2} \cos\left(\omega t - \alpha + \beta_2 - \frac{4\pi}{3}\right) \end{aligned} \right\} \quad (2-45)$$

Cette écriture permettra de définir facilement le régime équilibré total ($V_1=V_2$, $\beta_1=\beta_2$). Les vecteurs espaces correspondants, exprimés dans leurs repères naturels, sont obtenus en appliquant la définition donnée par la relation (2-5).

$$\bar{v}_1^s = V_1 \sqrt{2} e^{j(\omega t + \beta_1)} \quad (2-46)$$

$$\bar{v}_2^s = V_2 \sqrt{2} e^{j(\omega t - \alpha + \beta_2)} \quad (2-47)$$

Dans le repère commun ces vecteurs deviennent:

$$\bar{v}_1^s(c) = V_1 \sqrt{2} e^{j(\omega t + \beta_1 + \alpha_1)} \quad (2-48)$$

$$\bar{v}_2^s(c) = V_2 \sqrt{2} e^{j(\omega t - \alpha + \beta_2 + \alpha_2)} \quad (2-49)$$

Si le repère commun est confondu avec le repère naturel de la première étoile, $\alpha_1=0$ et $\alpha_2=\alpha$, les relations précédentes s'écrivent:

$$\bar{v}_1^s(c) = V_1 \sqrt{2} e^{j(\omega t + \beta_1)} \quad (2-50)$$

$$\bar{v}_2^s(c) = V_2 \sqrt{2} e^{j(\omega t + \beta_2)} \quad (2-51)$$

Il sera montré par la suite que ce choix est le plus adapté pour le calcul du couple.

II 5 Repère commun tournant à la vitesse de synchronisme

Si le repère commun tourne à la vitesse synchrone les angles α_1 et α_2 ont alors pour expression:

$$\alpha_1 = -\omega t \quad (2-52)$$

$$\alpha_2 = -\omega t + \alpha \quad (2-53)$$

Les dérivées des flux s'expriment donc différemment:

$$\frac{d\bar{\psi}_1^s}{dt} = \frac{d\bar{\psi}_1^s(c)}{dt} e^{j\omega t} + j\omega e^{j\omega t} \bar{\psi}_1^s(c) \quad (2-54)$$

$$\frac{d\bar{\psi}_2^s}{dt} = \frac{d\bar{\psi}_2^s(c)}{dt} e^{j(\omega t - \alpha)} + j\omega e^{j(\omega t - \alpha)} \bar{\psi}_2^s(c) \quad (2-55)$$

En faisant intervenir la vitesse angulaire du rotor ω' et θ_{1_0} sa position initiale par rapport à l'axe D_1^s , il vient:

$$\theta - \alpha_1 = \omega' t + \theta_{1_0} \quad (2-56)$$

En introduisant le glissement g défini de façon classique, on obtient:

$$\theta = -(\omega - \omega') t + \theta_{1_0} = -g\omega t + \theta_{1_0} \quad (2-57)$$

La dérivée du vecteur espace représentant le flux rotorique a donc pour expression:

$$\frac{d\bar{\psi}^r}{dt} = \frac{d\bar{\psi}^r(c)}{dt} e^{j(g\omega t - \theta_{1_0})} + jg\omega e^{j(g\omega t - \theta_{1_0})} \bar{\psi}^r(c) \quad (2-58)$$

Dans ces conditions le système d'équations (2-18) devient:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{v}_1^s(c) = R^s \bar{i}_1^s(c) + \frac{d\bar{\psi}_1^s(c)}{dt} + j\omega \bar{\psi}_1^s(c) \\ \bar{v}_2^s(c) = R^s \bar{i}_2^s(c) + \frac{d\bar{\psi}_2^s(c)}{dt} + j\omega \bar{\psi}_2^s(c) \\ 0 = R^r \bar{i}^r(c) + \frac{d\bar{\psi}^r(c)}{dt} + jg\omega \bar{\psi}^r(c) \end{array} \right. \quad (2-59)$$

Les vecteurs espaces tensions sont obtenus à partir des relations (2-48) et (2-49) en remplaçant α_1 et α_2 par leurs nouvelles valeurs.

$$\bar{v}_1^s(c) = V_1 \sqrt{2} e^{j\beta_1} \quad (2-60)$$

$$\bar{v}_2^s(c) = V_2 \sqrt{2} e^{j\beta_2} \quad (2-61)$$

Cette représentation de la machine double étoile conduit à un système de 3 équations différentielles du premier ordre à 3 variables complexes. Comme les seconds membres sont des constantes

la résolution de ce système s'en trouve facilitée

II 6 Couple électromagnétique

Le couple électromagnétique peut s'exprimer simplement en fonction des vecteurs espaces. Il suffit de remplacer les courants réels de l'expression (1-37) par des expressions issues des vecteurs espaces. Pour mettre en évidence le résultat du couplage magnétique entre le rotor et chaque stator, on considère les composantes Γ_1 et Γ_2 relatives respectivement au stator 1 et au stator 2.

$$\Gamma_e = \Gamma_1 + \Gamma_2 \quad (2-62)$$

En ce qui concerne Γ_1 , il vient:

$$\Gamma_1 = \frac{1}{2} \left\{ [1 \ a^2 \ a] \bar{i}_1^s + [1 \ a \ a^2] \bar{i}_1^{s*} \right\} \cdot \frac{M}{2} \left\{ j e^{j\theta_1} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ a^2 & 1 & a \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix} - j e^{-j\theta_1} \begin{bmatrix} 1 & a^2 & a \\ a & 1 & a^2 \\ a^2 & a & 1 \end{bmatrix} \right\} \cdot \frac{1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{bmatrix} \bar{i}_r + \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{bmatrix} \bar{i}_r^* \right\} \quad (2-63)$$

expression qui, après calculs, peut encore s'écrire:

$$\Gamma_1 = j \frac{3}{4} M \left(\bar{i}_1^{s*} \bar{i}_r e^{j\theta_1} - \bar{i}_1^s \bar{i}_r^* e^{-j\theta_1} \right) \quad (2-64)$$

Dans cette relation les vecteurs espaces sont représentés dans leurs repères naturels, exprimons les dans le repère commun. Comme

$$\bar{i}_1^s = \bar{i}_1^s(c) e^{-j\alpha_1} \quad (2-65)$$

$$\bar{i}_r = \bar{i}_r(c) e^{-j(\theta_1 + \alpha_1)} \quad (2-66)$$

on obtient:

$$\Gamma_1 = j \frac{3}{4} M \left(\bar{i}_1^s(c)^* \bar{i}_r(c) - \bar{i}_1^s(c) \bar{i}_r(c)^* \right) \quad (2-67)$$

En séparant les parties réelles et imaginaires des nombres complexes il vient:

$$\Gamma_1 = -\frac{3}{2} M \left(\mathcal{R}(\bar{i}_1^s(c)) \mathcal{J}(\bar{i}_r(c)) - \mathcal{R}(\bar{i}_r(c)) \mathcal{J}(\bar{i}_1^s(c)) \right) \quad (2-68)$$

Rappelons que les parties réelles et imaginaires des quantités complexes $\bar{i}_1^s(c)$ et $\bar{i}_r(c)$ sont aussi les coordonnées des vecteurs espaces correspondants. Il apparaît alors, dans l'expression précédente, la forme cartésienne du produit vectoriel de $\bar{i}_1^s(c)$ par

$\bar{i}_r(c)$ d'où:

$$\vec{\Gamma}_1 = -\frac{3}{2} M(\bar{i}_1^s(c)) \wedge \bar{i}_r(c) \quad (2-69)$$

Mathématiquement le couple est un ensemble de vecteurs de résultante générale nulle; c'est donc une grandeur vectorielle. Dans le cas des machines tournantes le couple est en fait le moment, par rapport à l'axe de rotation, du couple au sens mathématique du terme. Ce moment est une grandeur algébrique. Dans la suite du texte nous considérerons la valeur algébrique du produit vectoriel de la relation précédente qui sera notée:

$$\Gamma_1 = -\frac{3}{2} M(\bar{i}_1^s(c)) \wedge \bar{i}_r(c)$$

Le couplage magnétique entre le rotor et la deuxième étoile statorique se traduit, au niveau du couple, de façon analogue:

$$\Gamma_2 = -\frac{3}{2} M(\bar{i}_2^s(c)) \wedge \bar{i}_r(c) \quad (2-70)$$

Le couple électromagnétique de la machine est la somme des deux contributions:

$$\Gamma_e = -\frac{3}{2} M[(\bar{i}_1^s(c) + \bar{i}_2^s(c)) \wedge \bar{i}_r(c)] \quad (2-71)$$

L'interprétation physique est plus facile si le couple est exprimé en fonction d'un flux et d'un courant. La troisième équation du système (2-28) permet d'exprimer la quantité $M(\bar{i}_1^s(c) + \bar{i}_2^s(c))$ en fonction du flux rotorique.

$$M(\bar{i}_1^s(c) + \bar{i}_2^s(c)) = \bar{\psi}_r(c) - \mathcal{L}^r \bar{i}_r(c) \quad (2-72)$$

La substitution de cette quantité dans (2-71) donne:

$$\Gamma_e = -\frac{3}{2} \bar{\psi}_r(c) \wedge \bar{i}_r(c) \quad (2-73)$$

En exprimant le courant rotorique en fonction des grandeurs statoriques on peut obtenir d'autres expressions du couple. En effet, le système (2-28) donne:

$$\bar{i}_r(c) = \frac{1}{M} \left[\bar{\psi}_1^s(c) - \mathcal{L}^s \bar{i}_1^s(c) - \mathcal{L}_p^s \bar{i}_2^s(c) \right] \quad (2-74)$$

$$\bar{i}_r(c) = \frac{1}{M} \left[\bar{\psi}_2^s(c) - \mathcal{L}^s \bar{i}_2^s(c) - \mathcal{L}_p^s \bar{i}_1^s(c) \right] \quad (2-75)$$

La substitution de $\bar{i}_r(c)$ dans (2-71) donne:

$$\Gamma_e = -\frac{3}{2} \left[\bar{i}_1^s(c) \wedge \bar{\psi}_1^s(c) + \bar{i}_2^s(c) \wedge \bar{\psi}_2^s(c) \right] \quad (2-76)$$

Les 2 premières lignes du système (2-28) peuvent être écrites en

faisant apparaître le flux magnétisant. L'inductance mutuelle cyclique peut s'exprimer en fonction de l'inductance cyclique principale d'un stator:

$$M = \frac{N^r}{N^s} \mathcal{L}_p^s \quad (2-77)$$

Il en résulte que:

$$\bar{\psi}_1^s(c) = l^s \bar{i}_1^s(c) + \mathcal{L}_p^s (\bar{i}_1^s(c) + \bar{i}_2^s(c)) + \frac{N^r}{N^s} \bar{i}_r(c) \quad (2-78)$$

$$\bar{\psi}_2^s(c) = l^s \bar{i}_2^s(c) + \mathcal{L}_p^s (\bar{i}_1^s(c) + \bar{i}_2^s(c)) + \frac{N^r}{N^s} \bar{i}_r(c) \quad (2-79)$$

ce qui permet de faire intervenir le vecteur espace courant magnétisant défini par la relation (2-37). L'état magnétique de la machine peut être représenté par le vecteur espace flux magnétisant

$$\bar{\psi}^m(c) = \mathcal{L}_p^s \bar{i}^m(c) \quad (2-80)$$

Les flux statoriques peuvent s'exprimer en fonction de $\bar{\psi}^m(c)$ par les relations suivantes:

$$\bar{\psi}_1^s(c) = l^s \bar{i}_1^s(c) + \bar{\psi}^m(c) \quad (2-81)$$

$$\bar{\psi}_2^s(c) = l^s \bar{i}_2^s(c) + \bar{\psi}^m(c) \quad (2-82)$$

En substituant dans (2-76) les flux statoriques par leurs expressions qui viennent d'être établies on obtient:

$$\Gamma_e = -\frac{3}{2} (\bar{i}_1^s(c) + \bar{i}_2^s(c)) \wedge \bar{\psi}^m(c) \quad (2-83)$$

ou, compte tenu de (2-80):

$$\Gamma_e = -\frac{3}{2} \mathcal{L}_p^s \bar{i}^m(c) \wedge (\bar{i}_1^s(c) + \bar{i}_2^s(c)) \quad (2-85)$$

II 7 Comparaison avec les transformations usuelles

II 7 1 Comparaison avec la transformation de KU

La transformation de KU, pour un angle λ quelconque est définie par la matrice $[K(\lambda)]$

$$[K(\lambda)] = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & e^{j\lambda} & e^{-j\lambda} \\ 1 & a^2 e^{j\lambda} & a e^{-j\lambda} \\ 1 & a e^{j\lambda} & a^2 e^{-j\lambda} \end{bmatrix} \quad (2-86)$$

Les composantes de KU i_{10}^s , i_{1r}^s et i_{1b}^s sont calculées à partir des

courants réels i_{iA}^s , i_{iB}^s et i_{iC}^s par l'intermédiaire de la matrice $[K(\lambda)]^{-1}$:

$$\begin{bmatrix} i_{i0}^s \\ i_{if}^s \\ i_{ib}^s \end{bmatrix} = [K(\lambda)]^{-1} \begin{bmatrix} i_{iA}^s \\ i_{iB}^s \\ i_{iC}^s \end{bmatrix} \quad (2-87)$$

$$\text{avec } [K(\lambda)]^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e^{-j\lambda} & ae^{-j\lambda} & a^2e^{-j\lambda} \\ e^{j\lambda} & a^2e^{j\lambda} & ae^{j\lambda} \end{bmatrix}$$

Dans le cas d'une alimentation trois fils, la somme des courants est obligatoirement nulle, la composante i_{i0}^s l'est donc également. Comme les composantes i_{if}^s et i_{ib}^s sont des quantités complexes conjuguées, la composante i_{if}^s seule suffit pour représenter l'ensemble des trois courants réels. Le développement de la relation (2-87) donne:

$$i_{if}^s = \frac{1}{\sqrt{3}} [i_{iA}^s e^{-j\lambda} + a i_{iB}^s e^{-j\lambda} + a^2 i_{iC}^s e^{-j\lambda}] \quad (2-88)$$

ou

$$i_{if}^s = \frac{1}{\sqrt{3}} [i_{iA}^s + a i_{iB}^s + a^2 i_{iC}^s] e^{-j\lambda} \quad (2-89)$$

Dans cette expression on retrouve le vecteur espace courant statorique défini par la relation (2-5). La relation (2-89) peut donc s'écrire:

$$i_{if}^s = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{3}{2} \bar{i}_i^s e^{-j\lambda} \quad (2-90)$$

La composante forward de KU i_{if}^s est donc, à la constante $\frac{\sqrt{3}}{2}$ près, le vecteur espace courant statorique exprimé dans un repère décalé de l'angle λ par rapport à l'axe de la phase A du stator 1.

II 7 2 Comparaison avec la transformation de PARK

Park a défini une tranformation à deux axes D et Q à partir de la matrice réelle $[P(\lambda)]$ telle que:

$$[P(\lambda)] = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & \cos\lambda & -\sin\lambda \\ 1/\sqrt{2} & \cos(\lambda-2\pi/3) & -\sin(\lambda-2\pi/3) \\ 1/\sqrt{2} & \cos(\lambda-4\pi/3) & -\sin(\lambda-4\pi/3) \end{bmatrix} \quad (2-91)$$

Les composantes de Park i^s_{i0} , i^s_{id} et i^s_{iq} sont calculées à partir des courants circulant réellement dans les enroulements i^s_{iA} , i^s_{iB} et i^s_{iC} .

$$\begin{bmatrix} i^s_{i0} \\ i^s_{id} \\ i^s_{iq} \end{bmatrix} = [P(\lambda)]^{-1} \begin{bmatrix} i^s_{iA} \\ i^s_{iB} \\ i^s_{iC} \end{bmatrix} \quad (2-92)$$

avec $[P(\lambda)]^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ \cos\lambda & \cos(\lambda-2\pi/3) & \cos(\lambda-4\pi/3) \\ -\sin\lambda & -\sin(\lambda-2\pi/3) & -\sin(\lambda-4\pi/3) \end{bmatrix}$

Dans le cas d'une alimentation trois fils la composante homopolaire i^s_{i0} est nulle, les composantes i^s_{id} et i^s_{iq} valent respectivement:

$$i^s_{id} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[i^s_{iA} \cos\lambda + i^s_{iB} \cos(\lambda-2\pi/3) + i^s_{iC} \cos(\lambda-4\pi/3) \right] \quad (2-93)$$

$$i^s_{iq} = -\sqrt{\frac{2}{3}} \left[i^s_{iA} \sin\lambda + i^s_{iB} \sin(\lambda-2\pi/3) + i^s_{iC} \sin(\lambda-4\pi/3) \right] \quad (2-94)$$

La quantité complexe $i^s_{id} + j i^s_{iq}$ peut être calculée en fonction des courants réels:

$$i^s_{id} + j i^s_{iq} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[i^s_{iA} [\cos\lambda - j \sin\lambda] + i^s_{iB} [\cos(\lambda-2\pi/3) - j \sin(\lambda-2\pi/3)] + i^s_{iC} [\cos(\lambda-4\pi/3) - j \sin(\lambda-4\pi/3)] \right] \quad (2-95)$$

En remplaçant les fonctions trigonométriques par leurs expressions exponentielles on obtient:

$$i^s_{id} + j i^s_{iq} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[i^s_{iA} + a i^s_{iB} + a^2 i^s_{iC} \right] e^{-j\lambda} \quad (2-96)$$

Si les axes D et Q sont confondus avec les axes réel et imaginaire du plan complexe, le vecteur dont les coordonnées sont i^s_{id} et i^s_{iq} peut être associé au nombre complexe $i^s_{id} + j i^s_{iq}$ qui est en fait la composante forward de K_u . Cette quantité correspond, à la constante $\sqrt{3}/2$ près, au vecteur espace courant statorique $\bar{i}^s_{i(c)}$ exprimé dans un repère décalé de l'angle λ par rapport à l'axe de la phase A du stator 1.

III REGIMES TRANSITOIRES

La résolution des équations transformées permet de déterminer les régimes transitoires et permanents des vecteurs espaces exprimés dans le repère commun. Les expressions des courants réels et du couple de la machine peuvent alors s'en déduire. Pour résoudre le système d'équations il faut connaître le type d'alimentation des primaires.

Nous limiterons l'étude au cas d'une alimentation triphasée sinusoïdale équilibrée sur chaque primaire. Les amplitudes et les phases à l'origine des 2 systèmes peuvent être quelconques. Le cas des onduleurs peut être étudié en considérant chaque harmonique séparément.

III 1 Cas de l'alimentation en tension

La résolution est menée sur le système d'équations obtenu en choisissant un repère commun tournant à la vitesse de synchronisme. En remplaçant les vecteurs espaces flux $\bar{\psi}_1^s(c)$, $\bar{\psi}_2^s(c)$ et $\bar{\psi}^r(c)$ du système (2-59) par leurs expressions issues de (2-28), on obtient le système de 3 équations différentielles à 3 inconnues à résoudre:

$$\begin{aligned} \bar{v}_1^s(c) = & (R^s + j\omega\mathcal{L}^s) \bar{i}_1^s(c) + j\omega\mathcal{L}_p^s \bar{i}_2^s(c) + j\omega M \bar{i}^r(c) \\ & + \mathcal{L}^s \frac{d\bar{i}_1^s(c)}{dt} + \mathcal{L}_p^s \frac{d\bar{i}_2^s(c)}{dt} + M \frac{d\bar{i}^r(c)}{dt} \end{aligned} \quad (3-1)$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_2^s(c) = & (R^s + j\omega\mathcal{L}^s) \bar{i}_2^s(c) + j\omega\mathcal{L}_p^s \bar{i}_1^s(c) + j\omega M \bar{i}^r(c) \\ & + \mathcal{L}^s \frac{d\bar{i}_2^s(c)}{dt} + \mathcal{L}_p^s \frac{d\bar{i}_1^s(c)}{dt} + M \frac{d\bar{i}^r(c)}{dt} \end{aligned} \quad (3-2)$$

$$\begin{aligned} 0 = & (R^r + jg\omega\mathcal{L}^r) \bar{i}^r(c) + jg\omega M \bar{i}_1^s(c) + jg\omega M \bar{i}_2^s(c) \\ & + \mathcal{L}^r \frac{d\bar{i}^r(c)}{dt} + M \frac{d\bar{i}_1^s(c)}{dt} + M \frac{d\bar{i}_2^s(c)}{dt} \end{aligned} \quad (3-3)$$

Le régime transitoire que nous nous proposons d'étudier est celui qui résulte d'une brusque variation des tensions d'alimentation de la machine. La mise sous tension, avec des conditions initiales quelconques, est un cas particulier important. La tension d'alimentation est supposée varier très rapidement à l'instant $t=0$.

III 1 1 Procédé de résolution des équations

La symétrie des équations (3-1) et (3-2) est remarquable. Cette propriété permet de remplacer le système de 3 équations à 3 inconnues par un système de 2 équations à 2 inconnues auquel s'ajoute une équation indépendante. La soustraction des relations (3-1) et (3-2) élimine la variable $\bar{i}^r(c)$:

$$\begin{aligned} \bar{v}_1^s(c) - \bar{v}_2^s(c) = (R^s + j\omega\mathcal{L}^s) (\bar{i}_1^s(c) - \bar{i}_2^s(c)) - j\omega\mathcal{L}_p^s (\bar{i}_1^s(c) - \bar{i}_2^s(c)) \\ + \mathcal{L}^s \frac{d(\bar{i}_1^s(c) - \bar{i}_2^s(c))}{dt} - \mathcal{L}_p^s \frac{d(\bar{i}_1^s(c) - \bar{i}_2^s(c))}{dt} \end{aligned} \quad (3-4)$$

L'addition des relations (3-1) et (3-2) conduit à:

$$\begin{aligned} \bar{v}_1^s(c) + \bar{v}_2^s(c) = (R^s + j\omega\mathcal{L}^s) (\bar{i}_1^s(c) + \bar{i}_2^s(c)) + j\omega\mathcal{L}_p^s (\bar{i}_1^s(c) + \bar{i}_2^s(c)) + 2j\omega M \bar{i}^r(c) \\ + \mathcal{L}^s \frac{d(\bar{i}_1^s(c) + \bar{i}_2^s(c))}{dt} + \mathcal{L}_p^s \frac{d(\bar{i}_1^s(c) + \bar{i}_2^s(c))}{dt} + 2M \frac{d\bar{i}^r(c)}{dt} \end{aligned} \quad (3-5)$$

Appelons \bar{x} la somme des 2 vecteurs espaces courants statoriques et \bar{y} leur différence. Les équations (3-3) et (3-5) forment un système de 2 équations à 2 inconnues \bar{x} et $\bar{i}^r(c)$. La relation (3-4) permet la détermination séparée de \bar{y} .

$$\begin{cases} \bar{v}_1^s(c) + \bar{v}_2^s(c) = [R^s + j\omega(\mathcal{L}_p^s + \mathcal{L}^s)] \bar{x} + 2j\omega M \bar{i}^r(c) + (\mathcal{L}_p^s + \mathcal{L}^s) \frac{d\bar{x}}{dt} + 2M \frac{d\bar{i}^r(c)}{dt} \\ 0 = jg\omega M \bar{x} + (R^r + jg\omega\mathcal{L}^r) \bar{i}^r(c) + M \frac{d\bar{x}}{dt} + \mathcal{L}^r \frac{d\bar{i}^r(c)}{dt} \end{cases} \quad (3-6)$$

$$\bar{v}_1^s(c) - \bar{v}_2^s(c) = [R^s + j\omega(\mathcal{L}^s - \mathcal{L}_p^s)] \bar{y} + (\mathcal{L}^s - \mathcal{L}_p^s) \frac{d\bar{y}}{dt} \quad (3-7)$$

La quantité $\mathcal{L}^s - \mathcal{L}_p^s$ n'est autre que l'inductance de fuite l^s d'un primaire. Les vecteurs espaces tensions, exprimés dans le repère commun tournant à la vitesse de synchronisme sont constants, ils sont donnés par (2-60) et (2-61).

Posons:

$$\mathcal{L}^x = \mathcal{L}_p^s + \mathcal{L}^s = 2\mathcal{L}_p^s + l^s \quad (3-8)$$

$$\bar{e}^+ = \bar{v}_1^s(c) + \bar{v}_2^s(c) = \sqrt{2} [V_1 e^{j\beta_1} + V_2 e^{j\beta_2}] \quad (3-9)$$

$$\bar{e}^- = \bar{v}_1^s(c) - \bar{v}_2^s(c) = \sqrt{2} [V_1 e^{j\beta_1} - V_2 e^{j\beta_2}] \quad (3-10)$$

Le système (3-6) et l'équation (3-7) deviennent:

$$\begin{bmatrix} \bar{e}^+ \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^s + j\omega \mathcal{L}^x & 2j\omega M \\ jg\omega M & R^r + jg\omega \mathcal{L}^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{i}^r(c) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{L}^x & 2M \\ M & \mathcal{L}^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\bar{x}}{dt} \\ \frac{d\bar{i}^r(c)}{dt} \end{bmatrix} \quad (3-11)$$

$$\bar{e}^- = (R^s + j\omega l^s) \bar{y} + l^s \frac{d\bar{y}}{dt} \quad (3-12)$$

III 1 2 Utilisation de la transformation de Laplace

Les variables opérationnelles correspondantes aux variables temporelles sont les suivantes:

$$\bar{x}(t) \longrightarrow X(\rho)$$

$$\bar{y}(t) \longrightarrow Y(\rho)$$

$$\bar{i}^r(c)(t) \longrightarrow I^r(\rho)$$

Le théorème de la dérivée permet d'exprimer les dérivées temporelles dans le domaine de Laplace.

$$\frac{d\bar{x}}{dt} \longrightarrow \rho X(\rho) - \bar{x}_0$$

$$\frac{d\bar{y}}{dt} \longrightarrow \rho Y(\rho) - \bar{y}_0$$

$$\frac{d\bar{i}^r(c)}{dt} \longrightarrow \rho I^r(\rho) - \bar{i}^r(c)_0$$

Les quantités \bar{x}_0 , \bar{y}_0 et $\bar{i}^r(c)_0$ sont les valeurs initiales des variables temporelles.

Les vecteurs espaces \bar{e}^+ et \bar{e}^- subissent une discontinuité d'amplitude \bar{E}^+ et \bar{E}^- à l'instant $t=0$ leur transformation de Laplace est donc la suivante:

$$\bar{e}^+ = \bar{E}^+ \gamma(t) \longrightarrow \frac{\bar{E}^+}{\rho}$$

$$\bar{e}^- = \bar{E}^- \gamma(t) \longrightarrow \frac{\bar{E}^-}{\rho}$$

où $\gamma(t)$ n'est autre que l'échelon unité.

Les vecteurs images des nombres complexes \bar{E}^+ et \bar{E}^- peuvent être considérés comme des vecteurs espaces tensions, ils prennent en

compte les amplitudes et les phases à l'origine des deux systèmes triphasés d'alimentation.

La transformation de Laplace appliquée à l'équation matricielle (3-11) conduit à :

$$\begin{bmatrix} \bar{E}^+/\rho \\ 0 \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} X \\ I^r \end{bmatrix} - [B] \begin{bmatrix} \bar{x}_0 \\ \bar{i}^r(c)_0 \end{bmatrix} \quad (3-13)$$

avec $[A] = \begin{bmatrix} R^s + \mathcal{L}^x(\rho + j\omega) & 2M(\rho + j\omega) \\ M(\rho + j\omega) & R^r + \mathcal{L}^r(\rho + j\omega) \end{bmatrix}$ et $[B] = \begin{bmatrix} \mathcal{L}^x & 2M \\ M & \mathcal{L}^r \end{bmatrix}$.

La transformation de Laplace appliquée à l'équation (3-12) donne :

$$\frac{\bar{E}^-}{\rho} = (R^s + j\omega l^s) Y + l^s (\rho Y - \bar{Y}_0) \quad (3-14)$$

III 1 3 Résolution des équations opérationnelles

La résolution des équations opérationnelles (3-13) et (3-14) permet de déterminer les transformées de Laplace des fonctions recherchées :

$$\begin{bmatrix} X \\ I^r \end{bmatrix} = [A]^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \bar{E}^+/\rho \\ 0 \end{bmatrix} + [B] \begin{bmatrix} \bar{x}_0 \\ \bar{i}^r(c)_0 \end{bmatrix} \right\} \quad (3-15)$$

$$Y = \frac{1}{R^s + l^s(\rho + j\omega)} \left(\frac{\bar{E}^-}{\rho} + l^s \bar{Y}_0 \right) \quad (3-16)$$

Dans ces équations apparaissent nettement le régime libre et le régime forcé. Le régime libre (indice L) traduit l'influence des conditions initiales tandis que le régime forcé (indice F) ne dépend que des sollicitations extérieures \bar{E}^+ et \bar{E}^- .

Posons :

$$\left. \begin{aligned} X &= X_F + X_L \\ Y &= Y_F + Y_L \\ I^r &= I_F^r + I_L^r \end{aligned} \right\} \quad (3-17)$$

Les expressions des régimes libres et forcés se déduisent des relations :

$$\begin{bmatrix} X_F \\ I_F^r \end{bmatrix} = [A]^{-1} \begin{bmatrix} \bar{E}^+/\rho \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3-18)$$

$$\begin{bmatrix} X_L \\ I_L^r \end{bmatrix} = [A]^{-1} [B] \begin{bmatrix} \bar{X}_0 \\ \bar{i}^r(c)_0 \end{bmatrix} \quad (3-19)$$

$$Y_F = \frac{\bar{E}^-}{\rho [R^s + l^s (\rho + j\omega)]} \quad (3-20)$$

$$Y_L = \frac{\bar{Y}_0}{\frac{R^s}{1^s} + \rho + j\omega} \quad (3-21)$$

Pour inverser la matrice [A] il est nécessaire de calculer son déterminant D.

$$D = [R^s + \mathcal{L}^x (\rho + j\omega)] [R^r + \mathcal{L}^r (\rho + jg\omega)] - 2M^2 (\rho + j\omega) (\rho + jg\omega) \quad (3-22)$$

En développant et en ordonnant D selon les puissances décroissantes de ρ on obtient:

$$D = \rho^2 (\mathcal{L}^r \mathcal{L}^x - 2M^2) + \rho [R^s \mathcal{L}^r + R^r \mathcal{L}^x + j\omega (1+g) (\mathcal{L}^r \mathcal{L}^x - 2M^2)] + R^s R^r + jg\omega R^r \mathcal{L}^r + j\omega R^r \mathcal{L}^x - g\omega^2 (\mathcal{L}^r \mathcal{L}^x - 2M^2) \quad (3-23)$$

Le discriminant Δ du polynôme (3-23) est de la forme

$$\Delta = a + jb \quad (3-24)$$

avec

$$a = (R^s \mathcal{L}^r - R^r \mathcal{L}^x)^2 + 8M^2 R^s R^r - \omega'^2 (\mathcal{L}^r \mathcal{L}^x - 2M^2)^2$$

$$b = 2\omega' (R^s \mathcal{L}^r - R^r \mathcal{L}^x) (\mathcal{L}^r \mathcal{L}^x - 2M^2)$$

La racine carrée du discriminant Δ est obtenue en posant $\sqrt{\Delta} = P + jQ$.

avec

$$P = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{b}{2P}$$

Les racines du polynôme (3-23) ont donc pour expression:

$$\left. \begin{matrix} C_1 \\ C_2 \end{matrix} \right\} = \frac{R^s \mathcal{L}^r + R^r \mathcal{L}^x + j\omega (1+g) (\mathcal{L}^r \mathcal{L}^x - 2M^2) \pm (P + jQ)}{2 (\mathcal{L}^r \mathcal{L}^x - 2M^2)} \quad (3-25)$$

d'ou la forme factorisée du déterminant:

$$D = (\mathcal{L}^r \mathcal{L}^x - 2M^2) (\rho - C_1) (\rho - C_2) \quad (3-26)$$

Les constantes C_1 et C_2 sont les valeurs de ρ qui annulent D. Elles contiennent les constantes de temps et les pseudo-pulsations naturelles du système de deux équations différentielles (3-6). Il convient d'introduire une troisième constante complexe relative à l'équation différentielle indépendante (3-7). Cette constante s'identifie à la valeur de ρ qui annule le dénominateur de

l'équation opérationnelle (3-16) soit:

$$C_3 = -\frac{R^s}{1^s} - j\omega \quad (3-27)$$

Finalement l'expression de $[A]^{-1}$ s'écrit:

$$[A]^{-1} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} R^r + \mathcal{L}^r [\rho + j(\omega - \omega')] & -2M(\rho + j\omega) \\ -M[\rho + j(\omega - \omega')] & R^s + \mathcal{L}^x (\rho + j\omega) \end{bmatrix} \quad (3-28)$$

III 1 4 Régime libre

Le régime libre est obtenu en développant la relation matricielle (3-19). Compte tenu de (3-28) il vient:

$$X_L = \frac{1}{\mathcal{L}^r \mathcal{L}^x - 2M^2} \left[\bar{x}_0 \frac{A_L \rho + B_L}{(\rho - C_1)(\rho - C_2)} + \bar{i}_{r(c)0} \frac{C_L}{(\rho - C_1)(\rho - C_2)} \right] \quad (3-29)$$

$$I_L^r = \frac{1}{\mathcal{L}^r \mathcal{L}^x - 2M^2} \left[\bar{x}_0 \frac{D_L}{(\rho - C_1)(\rho - C_2)} + \bar{i}_{r(c)0} \frac{A_L \rho + E_L}{(\rho - C_1)(\rho - C_2)} \right] \quad (3-30)$$

avec $A_L = \mathcal{L}^r \mathcal{L}^x - 2M^2$, $B_L = \mathcal{L}^x R^r + j[\omega(\mathcal{L}^r \mathcal{L}^x - 2M^2) - \mathcal{L}^r \mathcal{L}^x \omega']$, $C_L = 2M(R^r - j\mathcal{L}^r \omega')$,

$D_L = M(R^s + j\mathcal{L}^x \omega')$ et $E_L = \mathcal{L}^r R^r + j[\omega(\mathcal{L}^r \mathcal{L}^x - 2M^2) + 2M^2 \omega']$.

Pour revenir dans le domaine des fonctions temporelles il faut décomposer les fractions rationnelles contenues dans les expressions précédentes en éléments simples. Le résultat final de cette décomposition est le suivant:

$$X_L = \frac{1}{\mathcal{L}^r \mathcal{L}^x - 2M^2} \left\{ \bar{x}_0 \left[\frac{A_L C_1 + B_L}{C_1 - C_2} \frac{1}{\rho - C_1} + \frac{A_L C_2 + B_L}{C_2 - C_1} \frac{1}{\rho - C_2} \right] + \bar{i}_{r(c)0} \left[\frac{C_L}{C_1 - C_2} \frac{1}{\rho - C_1} + \frac{C_L}{C_2 - C_1} \frac{1}{\rho - C_2} \right] \right\} \quad (3-31)$$

$$I_L^r = \frac{1}{\mathcal{L}^r \mathcal{L}^x - 2M^2} \left\{ \bar{x}_0 \left[\frac{D_L}{C_1 - C_2} \frac{1}{\rho - C_1} + \frac{D_L}{C_2 - C_1} \frac{1}{\rho - C_2} \right] + \bar{i}_{r(c)0} \left[\frac{A_L C_1 + E_L}{C_1 - C_2} \frac{1}{\rho - C_1} + \frac{A_L C_2 + E_L}{C_2 - C_1} \frac{1}{\rho - C_2} \right] \right\} \quad (3-32)$$

On en déduit alors les fonctions temporelles qui traduisent le régime libre

$$\bar{x}_L(t) = \frac{1}{\mathcal{L}^r \mathcal{L}^x - 2M^2} \left\{ \bar{x}_0 \left[\frac{A_L C_1 + B_L}{C_1 - C_2} e^{C_1 t} + \frac{A_L C_2 + B_L}{C_2 - C_1} e^{C_2 t} \right] + \bar{i}_{(c)0} \left[\frac{C_L}{C_1 - C_2} e^{C_1 t} + \frac{C_L}{C_2 - C_1} e^{C_2 t} \right] \right\} \quad (3-33)$$

$$\bar{i}_{(c)L}^r = \frac{1}{\mathcal{L}^r \mathcal{L}^x - 2M^2} \left\{ \bar{x}_0 \left[\frac{D_L}{C_1 - C_2} e^{C_1 t} + \frac{D_L}{C_2 - C_1} e^{C_2 t} \right] + \bar{i}_{(c)0} \left[\frac{A_L C_1 + E_L}{C_1 - C_2} e^{C_1 t} + \frac{A_L C_2 + E_L}{C_2 - C_1} e^{C_2 t} \right] \right\} \quad (3-34)$$

$$\bar{y}_L(t) = \bar{y}_0 e^{C_3 t} \quad (3-35)$$

III 1 5 Régime forcé

Le régime forcé s'obtient de la même façon à partir des relations (3-18) et (3-20). Les expressions sont un peu plus simples parce que le rotor est en court circuit.

$$X_F = \frac{\bar{E}^+}{\mathcal{L}^r \mathcal{L}^x - 2M^2} \frac{\rho \mathcal{L}^r + R^r + j \mathcal{L}^r (\omega - \omega')}{\rho (\rho - C_1) (\rho - C_2)} \quad (3-36)$$

$$I_F^r = \frac{-M \bar{E}^+}{\mathcal{L}^r \mathcal{L}^x - 2M^2} \frac{\rho + j^r (\omega - \omega')}{\rho (\rho - C_1) (\rho - C_2)} \quad (3-37)$$

La décomposition des fractions en éléments simples conduit aux expressions suivantes:

$$X_F = \frac{\bar{E}^+}{\mathcal{L}^r \mathcal{L}^x - 2M^2} \left\{ \frac{R^r + j \mathcal{L}^r (\omega - \omega')}{C_1 C_2} \frac{1}{\rho} + \frac{\mathcal{L}^r C_1 + R^r + j \mathcal{L}^r (\omega - \omega')}{C_1 (C_1 - C_2)} \frac{1}{\rho - C_1} + \frac{\mathcal{L}^r C_2 + R^r + j \mathcal{L}^r (\omega - \omega')}{C_2 (C_2 - C_1)} \frac{1}{\rho - C_2} \right\} \quad (3-38)$$

$$I_F^r = \frac{-M \bar{E}^+}{\mathcal{L}^r \mathcal{L}^x - 2M^2} \left\{ \frac{j (\omega - \omega')}{C_1 C_2} \frac{1}{\rho} + \frac{C_1 + j (\omega - \omega')}{C_1 (C_1 - C_2)} \frac{1}{\rho - C_1} + \frac{C_2 + j (\omega - \omega')}{C_2 (C_2 - C_1)} \frac{1}{\rho - C_2} \right\} \quad (3-39)$$

$$Y_F = \frac{\bar{E}^-}{R^s + j\omega l^s} \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p - C_3} \right] \quad (3-40)$$

D'où les fonctions temporelles:

$$\bar{x}_F(t) = \frac{\bar{E}^+}{\mathcal{L}^r \mathcal{L}^x - 2M^2} \left\{ \frac{R^r + j\mathcal{L}^r(\omega - \omega')}{C_1 C_2} + \frac{\mathcal{L}^r C_1 + R^r + j\mathcal{L}^r(\omega - \omega')}{C_1(C_1 - C_2)} e^{C_1 t} + \frac{\mathcal{L}^r C_2 + R^r + j\mathcal{L}^r(\omega - \omega')}{C_2(C_2 - C_1)} e^{C_2 t} \right\} \quad (3-41)$$

$$\bar{i}_{(c)F} = \frac{-M\bar{E}^+}{\mathcal{L}^r \mathcal{L}^x - 2M^2} \left\{ \frac{j(\omega - \omega')}{C_1 C_2} + \frac{C_1 + j(\omega - \omega')}{C_1(C_1 - C_2)} e^{C_1 t} + \frac{C_2 + j(\omega - \omega')}{C_2(C_2 - C_1)} e^{C_2 t} \right\} \quad (3-42)$$

$$\bar{y}_F = \frac{\bar{E}^-}{R^s + j\omega l^s} (1 - e^{C_3 t}) \quad (3-43)$$

III 1 6 Expressions des vecteurs espaces

La réponse temporelle est la somme des expressions des régimes libres et forcés. Pour résumer ces calculs nous adopterons une écriture plus condensée qui permet d'exploiter les résultats:

$$\bar{x} = X_1 e^{C_1 t} + X_2 e^{C_2 t} + X_3 \quad (3-44)$$

$$\bar{y} = Y_3 e^{C_3 t} + Y_4 \quad (3-45)$$

$$\bar{i}'_{(c)} = I_1^r e^{C_1 t} + I_2^r e^{C_2 t} + I_3^r \quad (3-46)$$

Les nombres complexes X_1 , X_2 , X_3 , Y_3 , Y_4 , I_1^r , I_2^r et I_3^r sont indépendants du temps; ils prennent en compte les conditions initiales et l'échelon de tension appliqué à la machine:

$$X_1 = \frac{A_L C_1 + B_L}{C_1 - C_2} \frac{\bar{x}_0}{A_L} + \frac{C_L}{C_1 - C_2} \frac{\bar{i}'_{(c)0}}{A_L} + \frac{\mathcal{L}^r C_1 + R^r + j\mathcal{L}^r(\omega - \omega')}{C_1(C_1 - C_2)} \frac{\bar{E}^+}{A_L} \quad (3-47)$$

$$X_2 = \frac{A_L C_2 + B_L}{C_2 - C_1} \frac{\bar{x}_0}{A_L} + \frac{C_L}{C_2 - C_1} \frac{\bar{i}'_{(c)0}}{A_L} + \frac{\mathcal{L}^r C_2 + R^r + j\mathcal{L}^r(\omega - \omega')}{C_2(C_2 - C_1)} \frac{\bar{E}^+}{A_L} \quad (3-48)$$

$$X_3 = \frac{R^r + j\mathcal{L}^r(\omega - \omega')}{C_1 C_2} \frac{\bar{E}^+}{A_L} \quad (3-49)$$

$$Y_3 = \bar{y}_0 + \frac{\bar{E}^-}{C_3 l^s} \quad (3-50)$$

$$Y_4 = -\frac{\bar{E}^-}{C_3 l^s} \quad (3-51)$$

$$I_1^r = \frac{D_L}{C_1 - C_2} \frac{\bar{x}_0}{A_L} + \frac{A_L C_1 + E_L}{C_1 - C_2} \frac{\bar{i}_{(c)0}^r}{A_L} + \frac{C_1 + j(\omega - \omega')}{C_1(C_1 - C_2)} \frac{-M\bar{E}^+}{A_L} \quad (3-52)$$

$$I_2^r = \frac{D_L}{C_2 - C_1} \frac{\bar{x}_0}{A_L} + \frac{A_L C_1 + E_L}{C_2 - C_1} \frac{\bar{i}_{(c)0}^r}{A_L} + \frac{C_1 + j(\omega - \omega')}{C_2(C_2 - C_1)} \frac{-M\bar{E}^+}{A_L} \quad (3-53)$$

$$I_3^r = \frac{jM(\omega - \omega')}{C_1 C_2} \frac{-\bar{E}^+}{A_L} \quad (3-54)$$

Les vecteurs espaces courants statoriques se déduisent de \bar{x} et \bar{y} :

$$\bar{i}_{1(c)}^s = \frac{\bar{x} + \bar{y}}{2} \quad (3-55)$$

$$\bar{i}_{2(c)}^s = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{2} \quad (3-56)$$

III 1 7 Courants réels - Couple

La démarche utilisée pour revenir aux courants réels consiste, dans un premier temps, à exprimer chaque vecteur espace dans son repère naturel en utilisant les relations (2-17). Le courant réel dans la phase A est la projection du vecteur espace sur l'axe D de son repère naturel. Les autres courants sont obtenus de la même façon après avoir fait tourner le vecteur espace de $2\pi/3$ ou $4\pi/3$. Ces projections sont résumées par la relation (2-10).

Pour le stator 1, $\bar{i}_1^s = \bar{i}_{1(c)}^s e^{-j\alpha_1}$ avec $\alpha_1 = -\omega t$ (relation (2-52)). On obtient donc:

$$\bar{i}_1^s = \bar{i}_{1(c)}^s e^{j\omega t} \quad (3-57)$$

ou

$$\bar{i}_1^s = \frac{1}{2} [X_{1e}^{(C_1 + j\omega)t} + X_{2e}^{(C_2 + j\omega)t} + X_{3e}^{j\omega t} + Y_{3e}^{(C_3 + j\omega)t} + Y_{4e}^{j\omega t}] \quad (3-58)$$

Les courants réels sont obtenus en appliquant directement les relations (2-10).

$$i_{1A}^s = \frac{1}{2} [R[X_{1e}^{(C_1 + j\omega)t}] + R[X_{2e}^{(C_2 + j\omega)t}] + R[X_{3e}^{j\omega t}] + R[Y_{3e}^{(C_3 + j\omega)t}] + R[Y_{4e}^{j\omega t}]] \quad (3-59)$$

Compte tenu de (3-27), le nombre complexe $C_3 + j\omega$ est réduit à sa

partie réelle $-R^s/l^s$. La relation (3-59) peut être développée de la façon suivante:

$$i_{1A}^s = \frac{1}{2} \left[|X_1| e^{\mathcal{R}(C_1)t} \cos\{ [J(C_1) + \omega]t + \arg(X_1) \} \right. \\ \left. + |X_2| e^{\mathcal{R}(C_2)t} \cos\{ [J(C_2) + \omega]t + \arg(X_2) \} + |X_3| \cos\{ \omega t + \arg(X_3) \} \right. \\ \left. + |Y_3| e^{-R^s t / l^s} \cos\{ \arg(Y_3) \} + |Y_4| \cos\{ \omega t + \arg(Y_4) \} \right] \quad (3-60)$$

Les courants dans les phases B et C s'obtiennent en utilisant la même procédure.

$$i_{1B}^s = \frac{1}{2} \left[|X_1| e^{\mathcal{R}(C_1)t} \cos\{ [J(C_1) + \omega]t + \arg(X_1) - 2\pi/3 \} \right. \\ \left. + |X_2| e^{\mathcal{R}(C_2)t} \cos\{ [J(C_2) + \omega]t + \arg(X_2) - 2\pi/3 \} \right. \\ \left. + |X_3| \cos\{ \omega t + \arg(X_3) - 2\pi/3 \} \right. \\ \left. + |Y_3| e^{-R^s t / l^s} \cos\{ \arg(Y_3) - 2\pi/3 \} \right. \\ \left. + |Y_4| \cos\{ \omega t + \arg(Y_4) - 2\pi/3 \} \right] \quad (3-61)$$

$$i_{1C}^s = \frac{1}{2} \left[|X_1| e^{\mathcal{R}(C_1)t} \cos\{ [J(C_1) + \omega]t + \arg(X_1) - 4\pi/3 \} \right. \\ \left. + |X_2| e^{\mathcal{R}(C_2)t} \cos\{ [J(C_2) + \omega]t + \arg(X_2) - 4\pi/3 \} \right. \\ \left. + |X_3| \cos\{ \omega t + \arg(X_3) - 4\pi/3 \} \right. \\ \left. + |Y_3| e^{-R^s t / l^s} \cos\{ \arg(Y_3) - 4\pi/3 \} \right. \\ \left. + |Y_4| \cos\{ \omega t + \arg(Y_4) - 4\pi/3 \} \right] \quad (3-62)$$

Pour le stator 2, $\bar{i}_2^s = \bar{i}_2^s(c) e^{-j\alpha_2}$ avec $\alpha_2 = -\omega t + \alpha$ (relation (2-53)). Les calculs conduisent aux relations suivantes:

$$i_{2A}^s = \frac{1}{2} \left[|X_1| e^{\mathcal{R}(C_1)t} \cos\{ [J(C_1) + \omega]t + \arg(X_1) - \alpha \} \right. \\ \left. + |X_2| e^{\mathcal{R}(C_2)t} \cos\{ [J(C_2) + \omega]t + \arg(X_2) - \alpha \} + |X_3| \cos\{ \omega t + \arg(X_3) - \alpha \} \right. \\ \left. - |Y_3| e^{-R^s t / l^s} \cos\{ \arg(Y_3) - \alpha \} - |Y_4| \cos\{ \omega t + \arg(Y_4) - \alpha \} \right] \quad (3-63)$$

$$i_{2B}^s = \frac{1}{2} \left[|X_1| e^{\mathcal{R}(C_1)t} \cos\{ [J(C_1) + \omega]t + \arg(X_1) - \alpha - 2\pi/3 \} \right. \\ \left. + |X_2| e^{\mathcal{R}(C_2)t} \cos\{ [J(C_2) + \omega]t + \arg(X_2) - \alpha - 2\pi/3 \} \right. \\ \left. + |X_3| \cos\{ \omega t + \arg(X_3) - \alpha - 2\pi/3 \} \right. \\ \left. - |Y_3| e^{-R^s t / l^s} \cos\{ \arg(Y_3) - \alpha - 2\pi/3 \} \right. \\ \left. - |Y_4| \cos\{ \omega t + \arg(Y_4) - \alpha - 2\pi/3 \} \right] \quad (3-64)$$

$$\begin{aligned}
i_{2c}^s = \frac{1}{2} [& |X_1| e^{\mathcal{R}(C_1)t} \cos\{ [J(C_1) + \omega]t + \arg(X_1) - \alpha - 4\pi/3 \} \\
& + |X_2| e^{\mathcal{R}(C_2)t} \cos\{ [J(C_2) + \omega]t + \arg(X_2) - \alpha - 4\pi/3 \} \\
& + |X_3| \cos\{ \omega t + \arg(X_3) - \alpha - 4\pi/3 \} \\
& - |Y_3| e^{-R^s t / l^s} \cos\{ \arg(Y_3) - \alpha - 4\pi/3 \} \\
& - |Y_4| \cos\{ \omega t + \arg(Y_4) - \alpha - 4\pi/3 \}] \quad (3-65)
\end{aligned}$$

Pour le rotor, $\bar{i}_r = \bar{i}_{r(c)} e^{-j\theta}$ avec $\theta = -(\omega - \omega')t + \theta_{1_0}$

Le résultat des calculs donne les relations suivantes:

$$\begin{aligned}
i_A^r = & |I_1^r| e^{\mathcal{R}(C_1)t} \cos\{ [J(C_1) + \omega - \omega']t + \arg(I_1^r) - \theta_{1_0} \} \\
& + |I_2^r| e^{\mathcal{R}(C_2)t} \cos\{ [J(C_2) + \omega - \omega']t + \arg(I_2^r) - \theta_{1_0} \} \\
& + |I_3^r| \cos\{ (\omega - \omega')t + \arg(I_3^r) - \theta_{1_0} \} \quad (3-66)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i_B^r = & |I_1^r| e^{\mathcal{R}(C_1)t} \cos\{ [J(C_1) + \omega - \omega']t + \arg(I_1^r) - \theta_{1_0} - 2\pi/3 \} \\
& + |I_2^r| e^{\mathcal{R}(C_2)t} \cos\{ [J(C_2) + \omega - \omega']t + \arg(I_2^r) - \theta_{1_0} - 2\pi/3 \} \\
& + |I_3^r| \cos\{ (\omega - \omega')t + \arg(I_3^r) - \theta_{1_0} - 2\pi/3 \} \quad (3-67)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i_C^r = & |I_1^r| e^{\mathcal{R}(C_1)t} \cos\{ [J(C_1) + \omega - \omega']t + \arg(I_1^r) - \theta_{1_0} - 4\pi/3 \} \\
& + |I_2^r| e^{\mathcal{R}(C_2)t} \cos\{ [J(C_2) + \omega - \omega']t + \arg(I_2^r) - \theta_{1_0} - 4\pi/3 \} \\
& + |I_3^r| \cos\{ (\omega - \omega')t + \arg(I_3^r) - \theta_{1_0} - 4\pi/3 \} \quad (3-68)
\end{aligned}$$

Il est possible d'observer dans ces relations les contributions des régimes permanents et transitoires de la machine. Le régime permanent est obtenu quand le temps t est suffisamment grand pour que les fonctions exponentielles soient négligeables car la partie réelle des constantes C_1 et C_2 est négative.

On obtient:

$$\begin{aligned}
i_{1A}^s = & \frac{1}{2} [|X_3| \cos\{ \omega t + \arg(X_3) \} + |Y_4| \cos\{ \omega t + \arg(Y_4) \}] \\
i_{2A}^s = & \frac{1}{2} [|X_3| \cos\{ \omega t + \arg(X_3) - \alpha \} - |Y_4| \cos\{ \omega t + \arg(Y_4) - \alpha \}] \\
i_A^r = & |I_3^r| \cos\{ (\omega - \omega')t + \arg(I_3^r) - \theta_{1_0} \}
\end{aligned}$$

Les expressions des courants permanents dans les phases B et C sont identiques aux déphasages $2\pi/3$ et $4\pi/3$ près.

Le régime transitoire est exprimé par deux termes pseudo-périodiques de constantes de temps $-1/R(C_1)$ et $-1/R(C_2)$ et de

pseudo-pulsations $J(C_1)+\omega$ et $J(C_2)+\omega$ pour les courants statoriques, $J(C_1)+\omega-\omega'$ et $J(C_2)+\omega-\omega'$ pour les courants rotoriques. Un terme apériodique supplémentaire, de constante de temps l^s/R^s de faible valeur, apparaît dans les expressions des courants primaires et ne concerne pas les courants secondaires.

La relation (3-25) montre que les parties réelles des constantes complexes C_1 et C_2 ne dépendent pas de la fréquence. Les constantes de temps des régimes transitoires sont donc indépendantes du rang de l'harmonique, dans le cas d'une alimentation non sinusoidale. Les pseudo-pulsations $J(C_1)+\omega$ et $J(C_2)+\omega$ au stator et $J(C_1)+\omega-\omega'$ et $J(C_2)+\omega-\omega'$ au rotor sont elles aussi indépendantes de la fréquence d'alimentation. Ces grandeurs ne dépendent que des paramètres de la machine et de la vitesse angulaire du rotor ω' .

Dans le cas d'une alimentation totalement équilibrée, où les valeurs efficaces des tensions V_1 et V_2 ainsi que les phases à l'origine β_1 et β_2 sont égales, la relation (3-10) montre que la quantité \bar{e} est nulle ainsi que le nombre complexe \bar{E} correspondant. Pour les stators, les relations (3-50) et (3-51) donnent $Y_3=0$ et $Y_4=0$. Il en résulte l'élimination d'un terme du régime permanent et du terme apériodique du régime transitoire. En ce qui concerne le rotor les expressions restent identiques.

La mise en oeuvre de ces relations nécessite de nombreuses opérations dans le corps des complexes. Pour éviter la séparation des parties réelles et imaginaires des constantes $X_1, X_2, X_3, Y_3, Y_4, I_1^r, I_2^r$ et I_3^r , un module informatique de traitement des opérations de base sur les nombres complexes a été écrit en turbo pascal. Ce module permet d'effectuer l'application numérique des relations précédentes.

Le couple peut être calculé directement à partir des vecteurs espaces courants par la relation suivante issue de l'équation (2-67):

$$\Gamma_e = j \frac{3}{4} M \left[(\bar{i}_1^s(c)^* + \bar{i}_2^s(c)^*) \bar{i}_r(c) - (\bar{i}_1^s(c) + \bar{i}_2^s(c)) \bar{i}_r(c)^* \right] \quad (3-69)$$

III 1 8 Paramètres de la machine expérimentale

La machine expérimentale est tétrapolaire de puissance nominale 20 kW. Les 6 bobines statoriques sont placées dans 48 encoches, les 2 étoiles statoriques sont décalées de 2 encoches ce qui correspond à un angle électrique $\alpha=\pi/6$. Le schéma d'enroulement est donné à l'annexe C.

- Résistance d'une bobine statorique

Ce paramètre est mesuré directement en courant continu à température ambiante. L'essai a été conduit en faisant passer un courant de 10A dans la stator. Le résultat est $R^s=0,40\Omega$.

- Inductance cyclique statorique

Cette valeur est déduite du bilan des puissances actives et réactives quand le rotor est entraîné à la vitesse de synchronisme par une machine auxiliaire. Le stator 1 est alimenté par un système triphasé équilibré, le stator 2 et le rotor sont ouverts. Les résultats sont les suivants:

Tension simple appliquée à l'étoile 1:	$V_i^s=80$ V
Courant en ligne:	$I_i^s=3,12$ A
Puissance active:	$P=60$ W
Puissance apparente:	$S=749$ VA
Puissance réactive:	$Q=746,4$ VAR
Pertes Joules:	$3R^s I_i^{s^2}=11,7$ W
pertes fer:	$P_f=48,3$ W
Inductance cyclique:	$\mathcal{L}^s \approx \frac{3V_i^{s^2}}{Q\omega}=81,9$ mH

- Inductance mutuelle cyclique entre le rotor et un stator

Ce paramètre est déduit d'un essai à l'arrêt, le stator 2 et le rotor sont ouverts. Le stator 1 est alimenté par un système triphasé équilibré de tensions à 50 Hz. Les résultats sont les suivants:

Tension composée aux bornes du stator 1:	$U_1^s = 141,5 \text{ V}$
Tension entre 2 phases rotoriques:	$U^r = 46,75 \text{ V}$
Rapport de transformation:	$m = \frac{N^s U_1^s}{N^r U^r} = 3,027$
Courant absorbé par le stator 1:	$I_1^s = 3,27 \text{ A}$
Puissance active:	$P = 121,25 \text{ W}$
Pertes Joules:	$3R^s I_1^s{}^2 = 12,8 \text{ W}$
pertes fer:	$P_f = 108,4 \text{ W}$
Puissance apparente:	$S = 801,4 \text{ VA}$
Puissance réactive:	$Q = 792,2 \text{ VAR}$
Inductance mutuelle cyclique:	$M = \frac{V^r}{\omega I_1^s} = 26,3 \text{ mH}$

Ces mesures permettent également de déterminer l'inductance cyclique statorique: $\mathcal{L}^s \approx 80,5 \text{ mH}$. Cette valeur légèrement différente de celle déterminée précédemment s'explique par les courants circulant dans le fer du rotor. Les conditions de l'essai précédent sont plus proches des conditions d'exploitation réelles de la machine asynchrone aussi nous adoptons pour \mathcal{L}^s la valeur de 82 mH.

- Inductance de fuites statorique

Le stator 2 est en court circuit, le rotor est ouvert, le stator 1 est alimenté par un système triphasé équilibré de faibles tensions à 50Hz. Par conséquent le courant magnétisant est négligeable.

Tension simple alimentant le stator 1:	$V_1^s = 9,5 \text{ V}$
Courant dans le stator 1:	$I_1^s = 9,15 \text{ A}$
Puissance active:	$P = 230 \text{ W}$
Puissance apparente:	$S = 261 \text{ VA}$
Puissance réactive:	$Q = 123 \text{ VAR}$
Inductance vue du stator 1:	$2l^s = \frac{Q}{3I_1^s{}^2 \omega} = 1,56 \text{ mH}$
Inductance de fuites statorique:	$l^s = 0,78 \text{ mH}$

Nous pouvons en déduire la valeur de l'inductance cyclique principale d'un stator:

$$\mathcal{L}_p^s = \mathcal{L}^s - l^s = 81,2 \text{ mH}$$

- Paramètres rotoriques

L'inductance cyclique principale du rotor est déduite des essais

précédents: $\mathcal{L}_p^r = \frac{M^2}{\mathcal{L}_p^s} = 8,52 \text{mH}$.

La résistance et l'inductance de fuites d'une phase rotorique sont déduites d'un essai en court circuit rotor bloqué. Le stator 2 est ouvert, le stator 1 est alimenté par un système triphasé équilibré de faible tension.

Tension simple alimentant le stator 1:	$V_i^s = 32,5 \text{V}$
Courant dans le stator 1:	$I_i^s = 18,42 \text{A}$
Courant dans le rotor:	$I^r = 51,7 \text{A}$
Puissance active:	$P = 1172 \text{W}$
Puissance réactive:	$Q = 1362 \text{VAR}$
Pertes Joules rotoriques:	$P_{JR} = P - 3R^s I_i^{s^2} = 768,9 \text{W}$
Résistance apparente d'une phase rotorique:	$R^r = \frac{P_{JR}}{3I^{r^2}} = 0,096 \Omega$
Inductance totale de fuites vue du stator:	$N = \frac{Q}{3I^{s^2} \omega} = 4,26 \text{mH}$
Inductance de fuites du rotor vue du stator:	$l_s^r = N - l^s = 3,48 \text{mH}$
Inductance de fuites rotorique:	$l^r = \frac{l_s^r}{m^2} = 0,379 \text{mH}$
Inductance cyclique rotorique:	$\mathcal{L}^r = \mathcal{L}_p^r + l^r = 8,9 \text{mH}$

- Paramètres utiles

Résumons les paramètres utiles à l'application numérique des résultats:

$R^s = 0,40 \Omega$; $\mathcal{L}^s = 82 \text{mH}$; $l^s = 0,78 \text{mH}$; $\mathcal{L}_p^s = 81,2 \text{mH}$; $\mathcal{L}^x = 163,2 \text{mH}$;
 $M = 26,3 \text{mH}$, $R^r = 0,096 \Omega$, $\mathcal{L}^r = 8,9 \text{mH}$.

III 1 9 Résultats expérimentaux

Pour vérifier expérimentalement les résultats théoriques précédents, la machine est alimentée par un transformateur triphasé doté de 2 secondaires dont les nombres de spires sont dans le rapport $\sqrt{3}$. Le premier secondaire, couplé en étoile, alimente le stator 1. L'autre couplé en triangle, alimente le stator 2. La figure 3-1 montre les connexions des enroulements du transformateur expérimental et le diagramme de Fresnel associé.

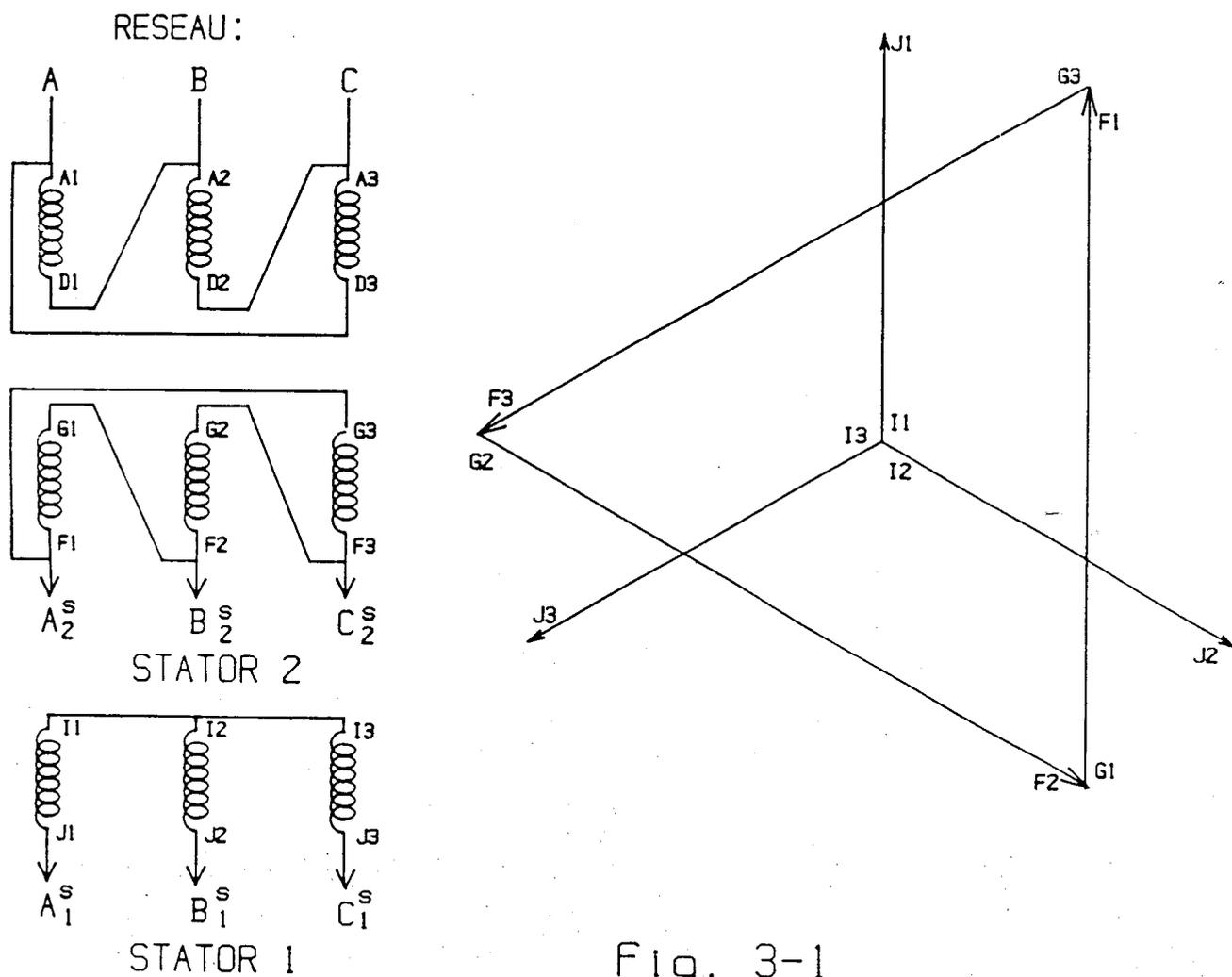


Fig. 3-1

Le moteur asynchrone sera donc bien alimenté par deux systèmes triphasés équilibrés de même séquence et déphasés de $\pi/6$. Les valeurs efficaces des tensions simples sont de 83 V pour l'étoile 1 et 84 V pour l'étoile 2 quand le primaire est connecté au réseau

380V. La puissance nominale du transformateur vaut 15kVA. Les tensions relativement faibles évitent les problèmes de saturation du circuit magnétique.

III 1 9 1 Premier essai: mise sous tension

Le rotor étant en rotation, cet essai consiste à connecter simultanément les 6 phases statoriques au transformateur d'alimentation. Pour cela la machine est amenée à une vitesse de rotation proche de sa valeur nominale, les connexions statoriques sont alors ouvertes pendant un temps suffisant pour que les courants rotoriques s'annulent puis refermées de façon à enregistrer le régime transitoire des courants avec des valeurs initiales nulles. L'inertie des masses tournantes est suffisante pour que la variation de vitesse soit négligeable. Le schéma du montage expérimental est donné à la figure 3-2 où la connexion simultanée des 6 fils est réalisée avec 2 contacteurs triphasés dont les bobines de commande sont montées en série. L'ouverture d'un contact auxiliaire, fermé au repos, provoque le déclenchement des oscilloscopes légèrement avant l'instant de fermeture des pôles principaux qui est considéré comme l'instant $t=0$.

La commande des contacteurs est manuelle, la phase à l'origine des tensions du réseau et la position mécanique du rotor sont donc quelconques.

La phase initiale β_1 est relevée sur l'oscillogramme de la tension v_{1A} tandis que la position initiale du rotor θ_{10}/p est mesurée à l'oscilloscope par l'intermédiaire du signal issu d'un capteur optique fournissant une impulsion au passage d'une bande réfléchissante collée sur l'arbre.

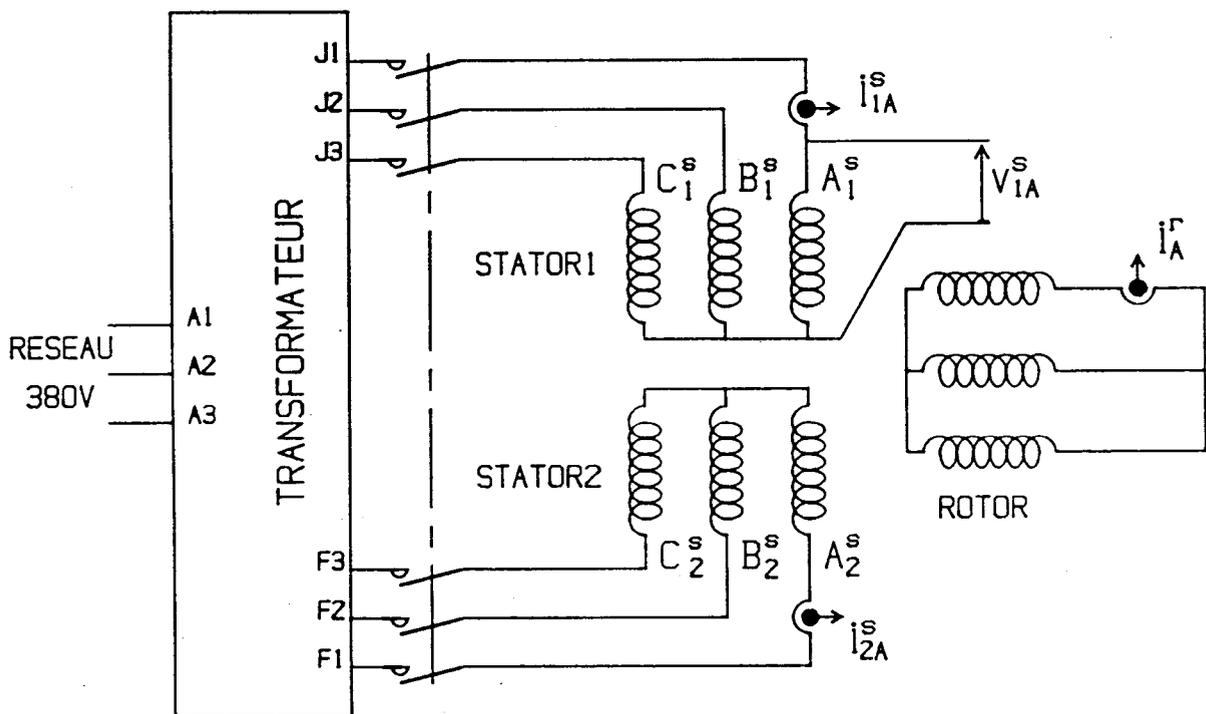


fig. 3-2

Montage expérimental

Sur la figure 3-3 les oscillogrammes a et c donnent les relevés expérimentaux de la tension simple v_{1A}^s et des courants i_{1A}^s , i_{2A}^s et i_A^r . Lors de cet essai les tensions simples appliquées au stators 1 et 2 valent respectivement $V_1=82,5V$ et $V_2=83,7V$. L'angle β_1 caractérisant la valeur initiale des tensions est relevé sur la

figure 3-3a il vaut 30° . L'angle β_2 est identique puisque le déphasage α entre les deux systèmes de tensions statoriques est imposé par le couplage des secondaires du transformateur d'alimentation. La position initiale θ_{10} de la phase A du rotor par rapport à la phase A du stator 1 est égale à -105° . La vitesse est de 1338 tr/mn ce qui correspond à $\omega'=280,2$ rd/s.

La connaissance de la vitesse et des paramètres de la machine autorise le calcul des constantes de temps et des pseudo-pulsations intervenant lors de cet essai.

$$\frac{-1}{\mathcal{R}(C_1)} = 32,3 \text{ ms};$$

$$J(C_1) + \omega = 27,6 \text{ rd/s}; \quad J(C_1) + \omega - \omega' = -252,6 \text{ rd/s};$$

$$\frac{-1}{\mathcal{R}(C_2)} = 4,08 \text{ ms};$$

$$J(C_2) + \omega = 252,3 \text{ rd/s}; \quad J(C_2) + \omega - \omega' = -27,9 \text{ rd/s};$$

$$\frac{1^s}{R^s} = 1,95 \text{ ms}.$$

Les figures 3-3b et 3-3d montrent les courbes théoriques correspondantes tracées respectivement à partir des relations (3-60), (3-63) et (3-66). La courbe de la figure 3-3e représente le régime transitoire du couple électromagnétique dans les mêmes conditions, elle résulte de l'application numérique de la relation (3-69).

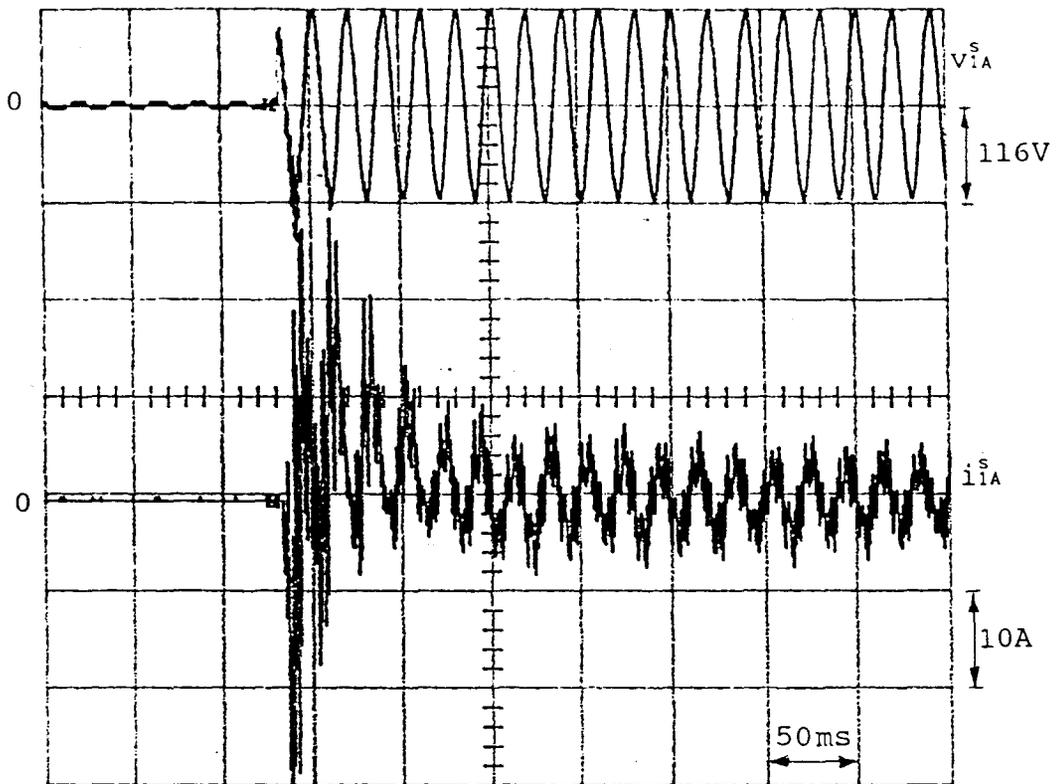


fig. 3-3a

Relevés expérimentaux de v_{iA}^s et i_{iA}^s

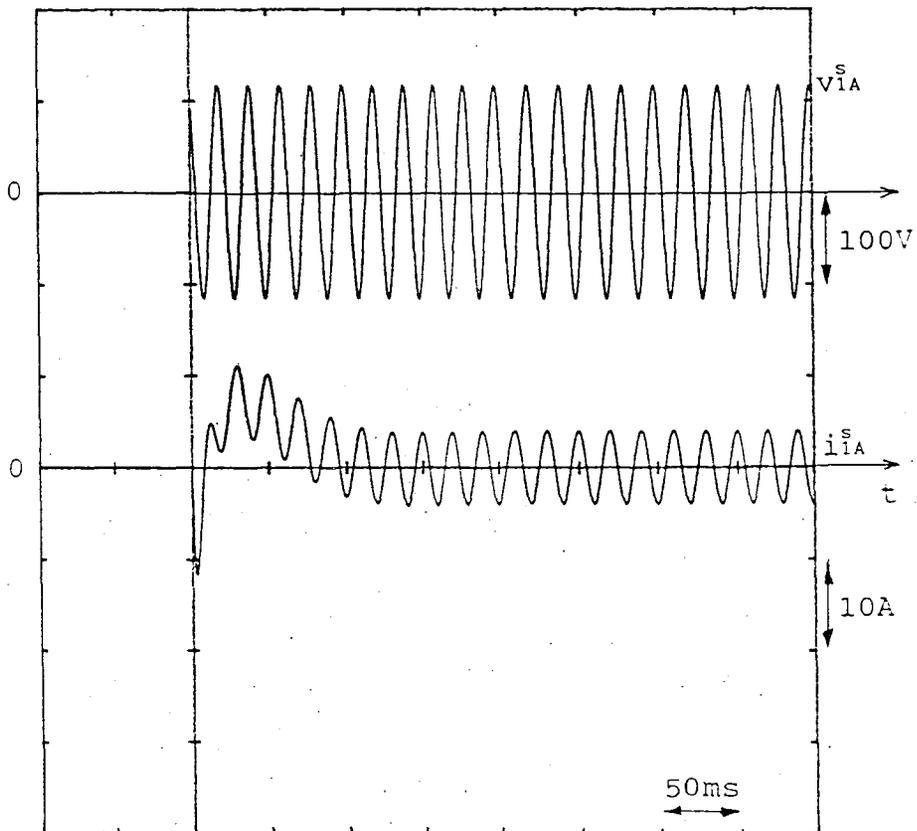


fig. 3-3b

Application numérique de la relation donnant i_{iA}^s

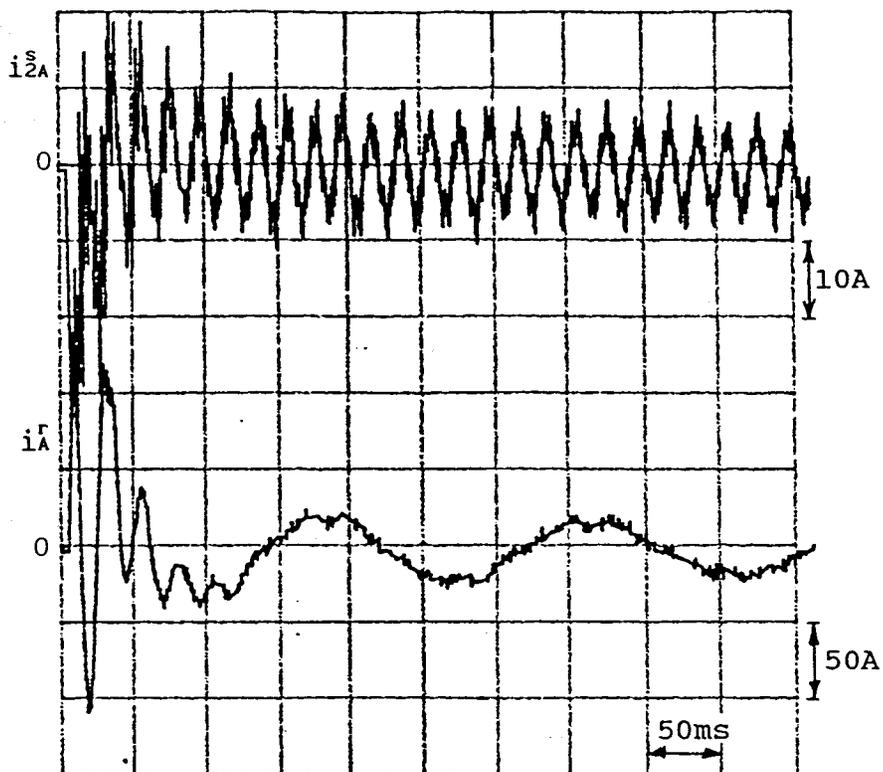


fig. 3-3c

Relevés expérimentaux des courants i_{2A}^s et i_A^r

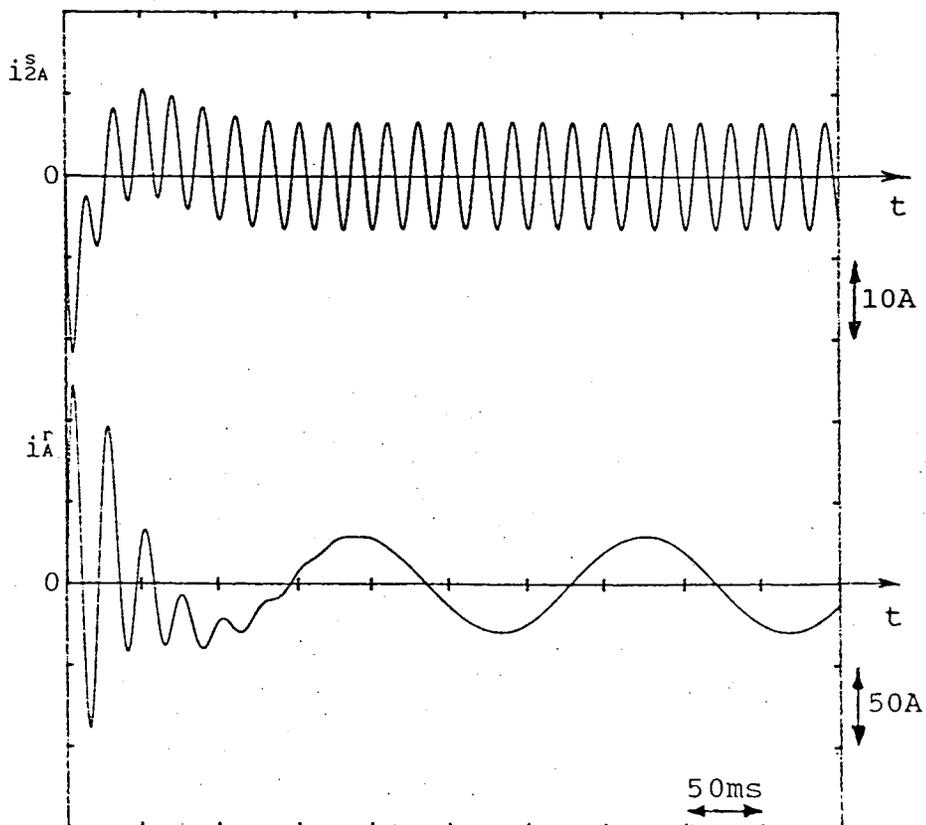


fig. 3-3d

Application numérique des relations donnant i_{2A}^s et i_A^r

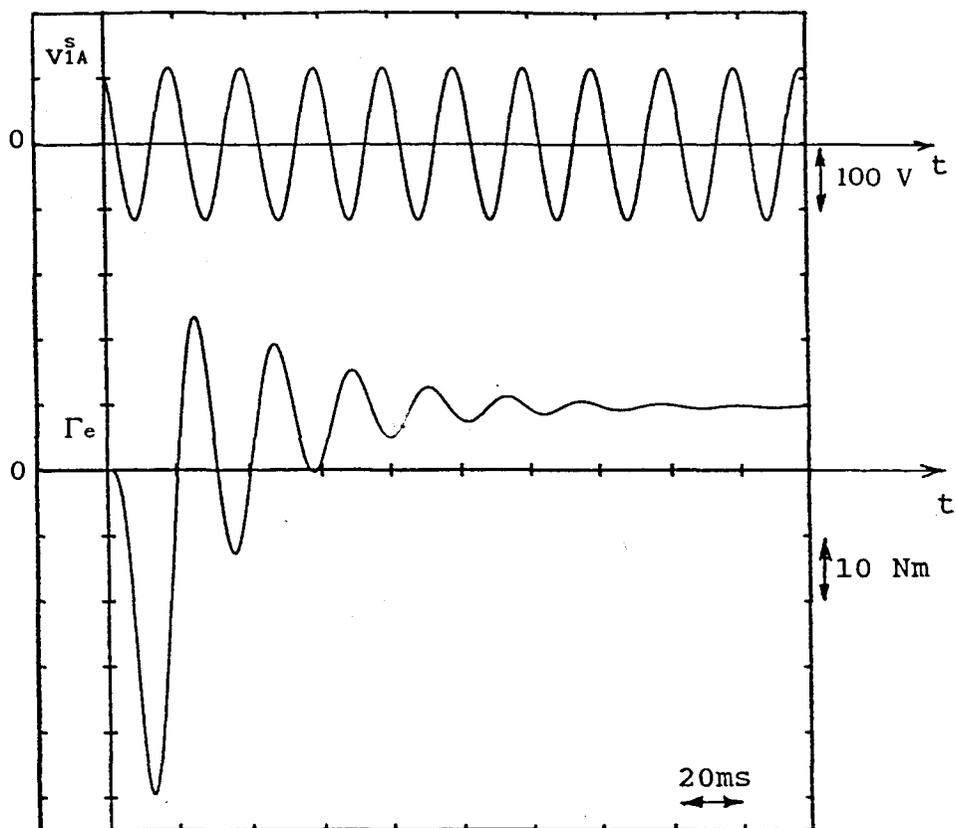


fig. 3-3e
couple électromagnétique

Sur les relevés expérimentaux nous constatons un phénomène à haute fréquence et d'amplitude relativement importante qui vient se superposer au régime transitoire étudié. Ce phénomène est provoqué par les encoches du circuit magnétique. En réalité l'épaisseur de l'entrefer n'est pas constante mais dépend de la position du rotor par rapport au stator. J.F. BRUDNY a montré que le principal phénomène lié à l'encochage se situe à une fréquence égale au produit du plus petit multiple commun des nombres d'encoches statoriques et rotoriques par pôle par la fréquence de rotation $f_r = \omega' / 2\pi$ [20]. En ce qui concerne la machine expérimentale, dotée de 48 encoches statoriques et de 36 encoches rotoriques, cette fréquence vaut $36 f_r$ soit 798 Hz. Ce phénomène d'encochage a été négligé dans les hypothèses initiales.

Nous constatons une bonne concordance des courbes théoriques et des phénomènes relativement lents des relevés expérimentaux.

En ce qui concerne le couple électromagnétique, le régime transitoire est fortement oscillatoire avec une pointe négative très importante d'amplitude cinq fois plus forte que le couple atteint en régime permanent. Ce comportement transitoire est analogue à

celui de la machine simple étoile mis en évidence par F. NOTELET [13]. D'autre part, l'étude théorique montre que, comme pour la machine asynchrone simple étoile, le régime transitoire du couple ne dépend ni des angles initiaux des systèmes de tension β_1 et β_2 ni de la position du rotor θ_{10} à l'instant $t=0$.

III 1 9 2 Second essai: court-circuit

Cet essai met en oeuvre un régime transitoire avec des conditions initiales non nulles. Les deux étoiles statoriques sont brutalement mises en court-circuit quand la machine a atteint un régime permanent. Pour éviter d'endommager le transformateur d'alimentation, trois résistances de $2,2\Omega$ sont insérées dans les fils d'alimentation. Le court-circuit est réalisé par deux contacteurs triphasés, à commande unique, connectés aux bornes des stators comme le montre le schéma du dispositif expérimental de la figure 3-4.

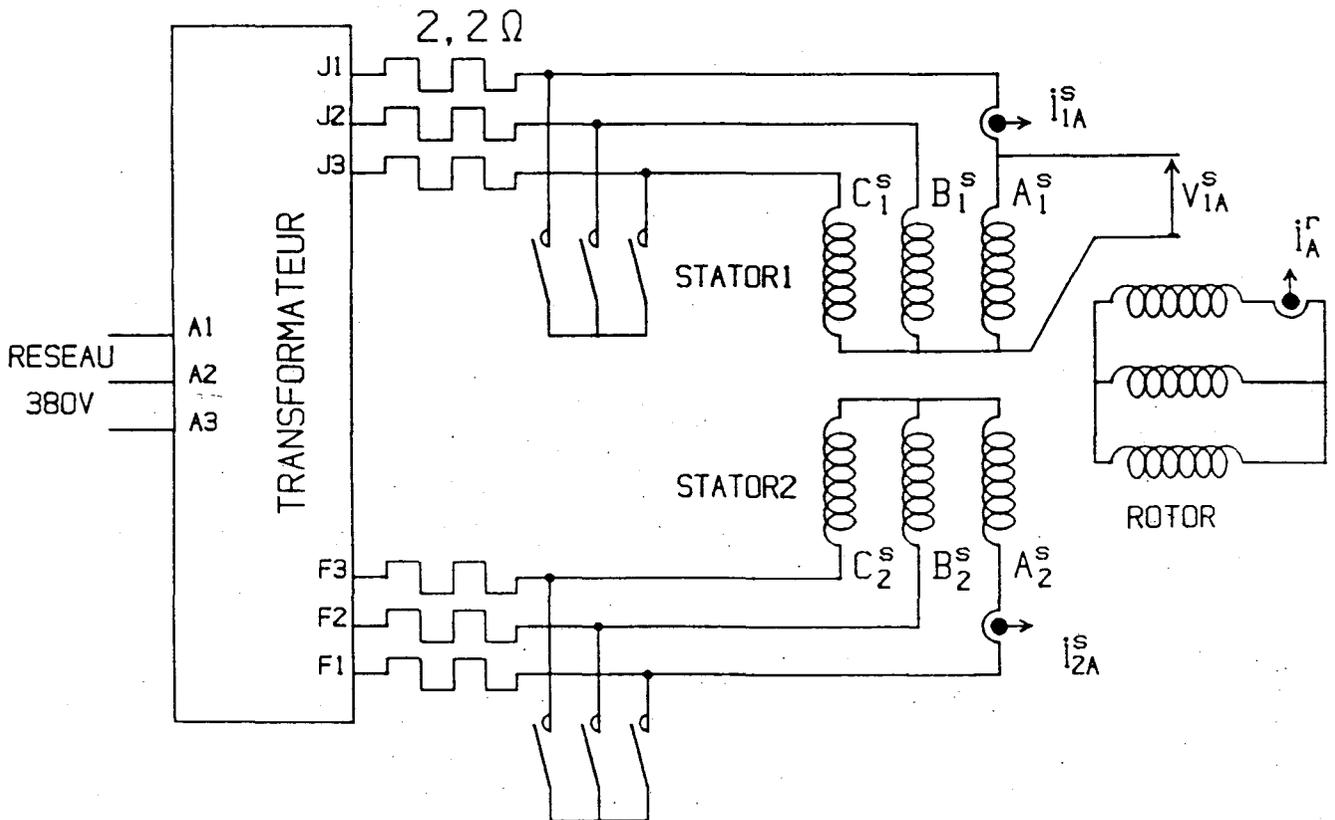


fig. 3-4

Montage expérimental

Cet essai permet d'enregistrer le régime libre de la machine. Les figures 3-5a et 3-5c montrent les enregistrements expérimentaux de la tension v_{iA}^s et des courants i_{iA}^s , i_{2A}^s et i_A^r . Les résultats théoriques correspondants et le couple électromagnétique sont donnés par les figures 3-5b, 3-5d et 3-5e.

On prend comme origine des temps l'instant de fermeture des pôles principaux des contacteurs. Les angles initiaux des systèmes de tensions sont relevés sur l'enregistrement expérimental de la tension v_{iA}^s , la position initiale θ_{10} du rotor est déterminée comme dans l'essai précédent. Les valeurs numériques de ces paramètres sont

$$\beta_1 = \beta_2 = 180^\circ, \theta_{10} = 45^\circ.$$

Pour obtenir une bonne précision, les courants initiaux et les vecteurs espaces correspondants sont calculés à partir des valeurs efficaces des tensions secondaires du transformateur en utilisant les termes relatifs au régime permanent des relations théoriques et en incluant la résistance de protection de $2,2\Omega$ dans le paramètre R^s .

Lors de cet essai le transformateur fournissait 70 V sur son premier secondaire et 71 V sur l'autre ce qui donne, compte tenu des angles β_1 , β_2 et θ_{10} , à l'instant $t=0$

$$i_{iA_0}^s = +3,347A, \quad i_{2A_0}^s = +2,135A, \quad i_{A_0}^r = +2,462A$$

Les constantes de temps et les pseudo-pulsations caractérisant le régime transitoire particulier de cet essai sont calculées à partir de la vitesse de rotation et des paramètres généraux de la machine. Durant cet essai le rotor tournait à 1330 tr/mn ce qui correspond à $\omega' = 278,5$ rd/s.

$$\frac{-1}{R(C_1)} = 32,6 \text{ ms};$$

$$J(C_1) + \omega = 27,8 \text{ rd/s}; \quad J(C_1) + \omega - \omega' = -250,7 \text{ rd/s};$$

$$\frac{-1}{R(C_2)} = 4,08 \text{ ms};$$

$$J(C_2) + \omega = 250,8 \text{ rd/s}; \quad J(C_2) + \omega - \omega' = -27,7 \text{ rd/s};$$

La troisième constante de temps R^s/l^s est évidemment inchangée.

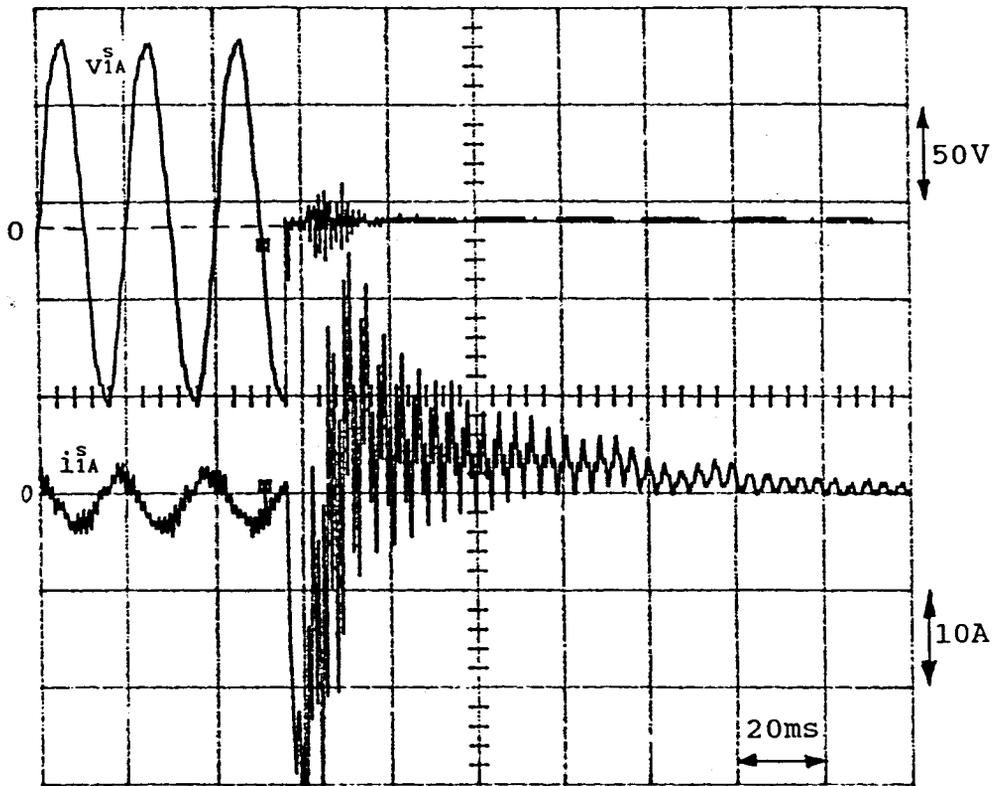


fig. 3-5a

Relevés expérimentaux de v_{iA}^s et i_{iA}^s

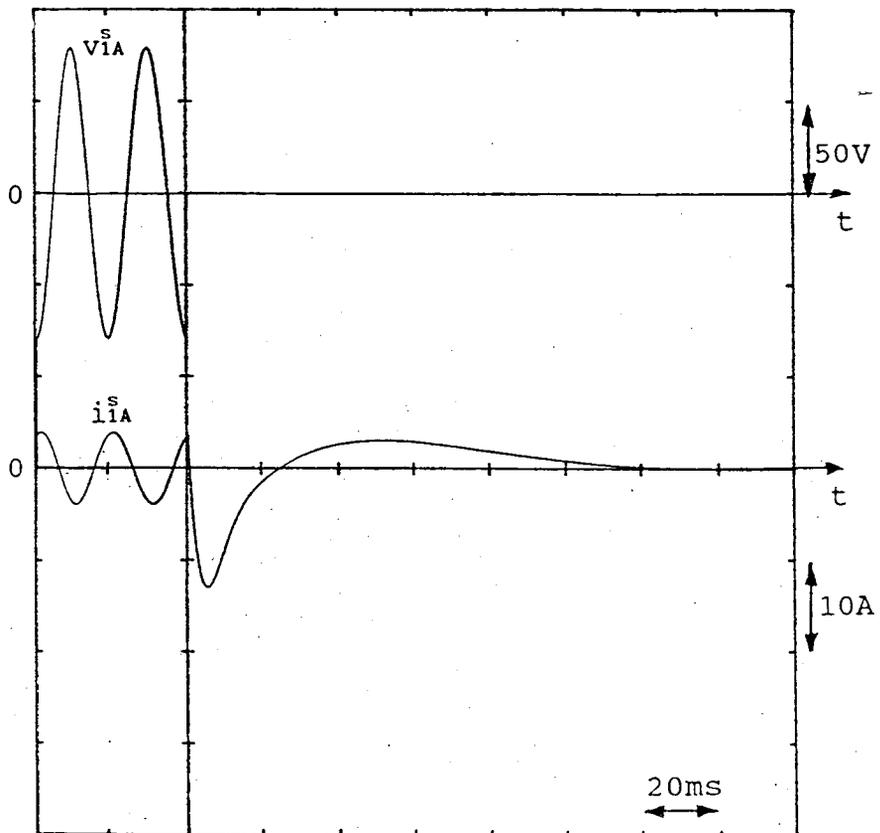


fig. 3-5b

Application numérique de la relation donnant i_{iA}^s

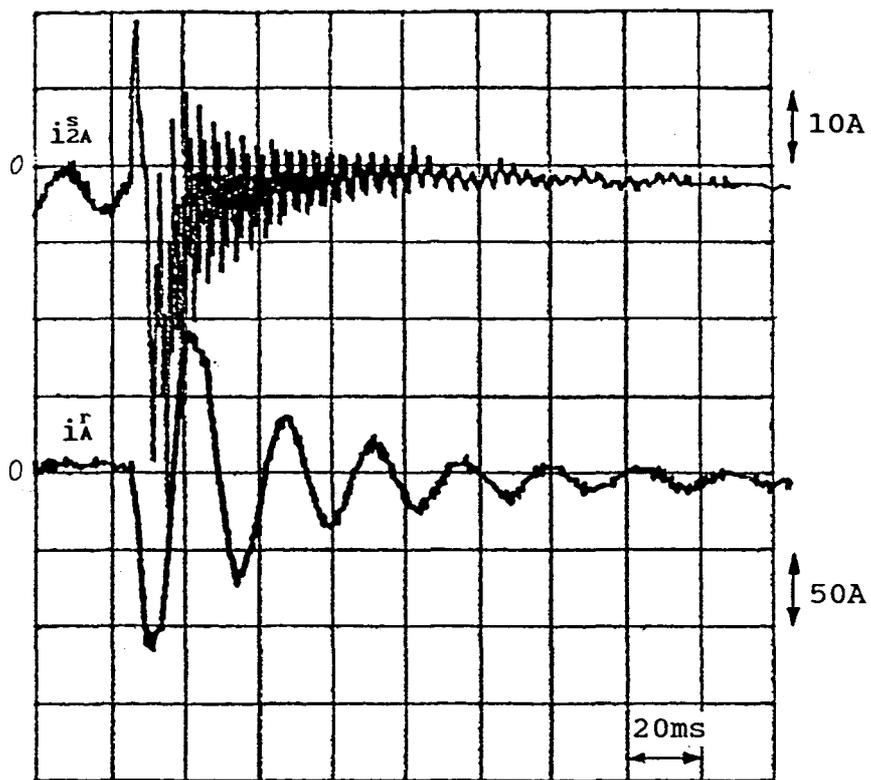


fig. 3-5c

Relevés expérimentaux de i_{2A}^s et i_A^r

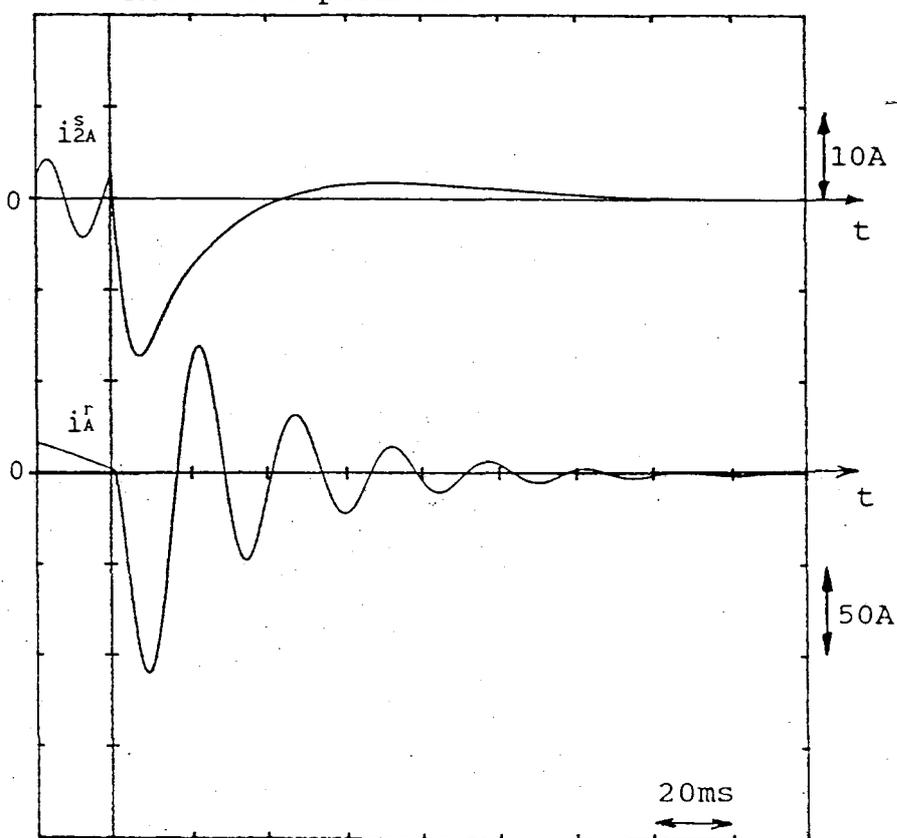


fig. 3-5d

Application numérique des relations donnant i_{2A}^s et i_A^r

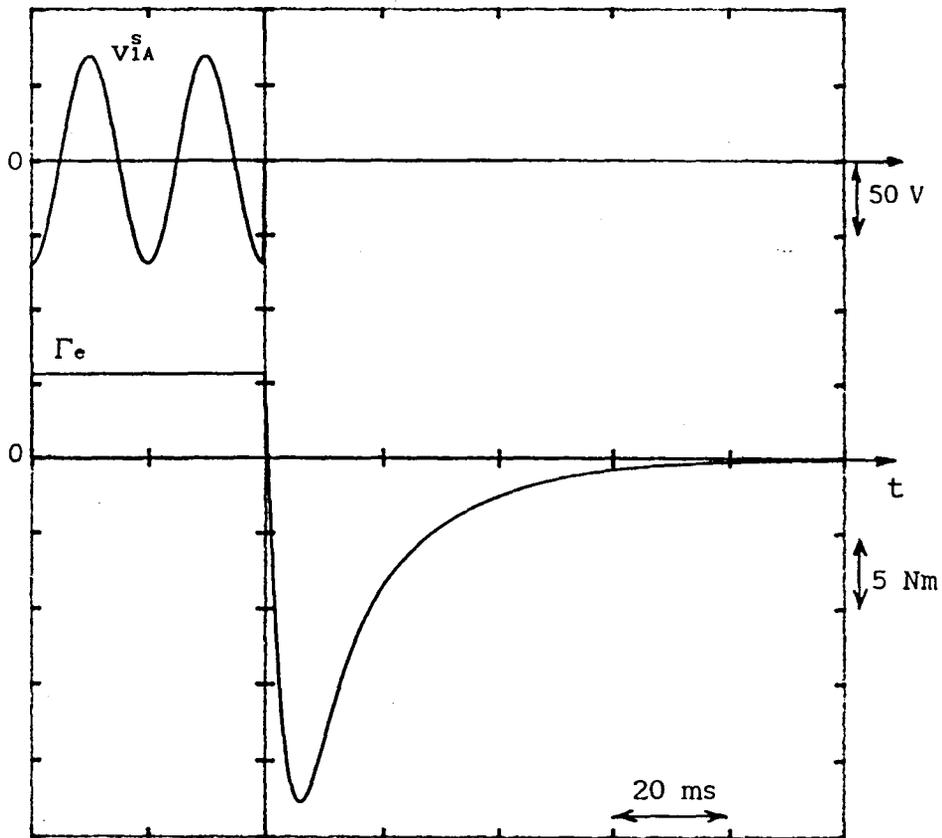


fig. 3-5e
couple électromagnétique

On observe une bonne concordance des courbes théoriques et les phénomènes relativement lents des relevés expérimentaux. Il apparaît nettement que le régime libre du couple est aperiodique.

III 1 10 Comparaison des régimes transitoires des machines double étoile et simple étoile équivalente

III 1 10 1 Paramètres de la machine simple étoile équivalente

Le stator simple étoile équivalent peut être défini comme ayant le même cuivre et le même fer. Dans ce cas une phase du stator équivalent est réalisée par la connexion en série des deux bobines statoriques décalées de l'angle α . En supposant une répartition sinusoidale le long de l'entrefer, la figure 3-6 montre la f.m.m. produite par une telle association ou chaque bobine de N_1 spires est parcourue par le courant i_1 .

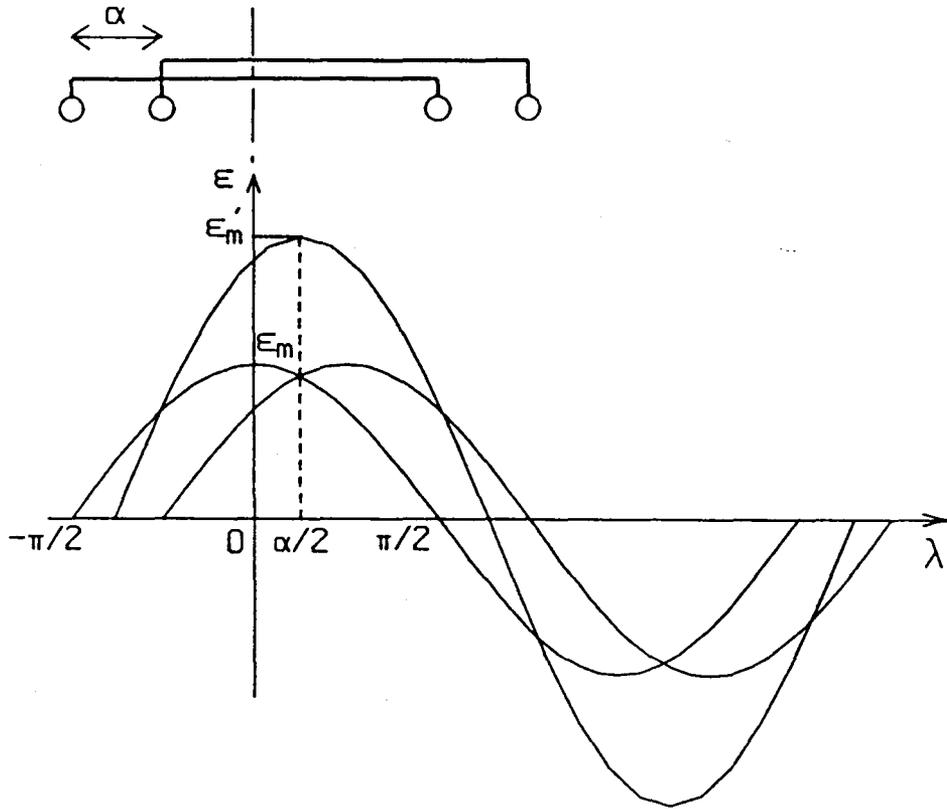


Fig. 3-6

F.m.m. de l'enroulement équivalent

La phase statorique équivalente est donc une bobine diamétrale dont l'axe est décalé dans le sens positif de l'angle $\alpha/2$ par rapport à la phase correspondante du stator 1.

La résistance R'^s de cette phase équivalente vaut donc:

$$R'^s = 2R^s \quad (3-70)$$

L'inductance principale des deux bobines montées en série L'_p^s peut être calculée à partir de l'inductance principale de chacune des bobines et de l'inductance mutuelle liant les 2 bobines.

Comme les nombres de spires sont égaux et compte tenu de la relation (1-6), il vient:

$$L'_p^s = 2L_p^s(1 + \cos\alpha) \quad (3-71)$$

L'inductance cyclique principale \mathcal{L}'_p^s correspondante vaut donc:

$$\mathcal{L}'_p^s = \frac{3}{2} L_p^s \quad (3-72)$$

Elle peut être exprimée en fonction de l'inductance cyclique d'un

stator de la machine double étoile:

$$\mathcal{L}'_p^s = 2\mathcal{L}_p^s(1 + \cos\alpha) \quad (3-73)$$

Si on considère que les flux de fuites sont indépendants, l'inductance de fuites des deux bobines connectées en série l'^s est égale à la somme des inductances de fuites de chaque bobine.

$$l'^s = 2l^s \quad (3-74)$$

L'inductance cyclique du stator équivalent \mathcal{L}'^s est obtenue en ajoutant l'inductance de fuites à l'inductance cyclique principale:

$$\mathcal{L}'^s = \mathcal{L}'_p^s + l'^s \quad (3-75)$$

Le rotor étant inchangé, les paramètres R'^r, \mathcal{L}'_p^r et l'^r sont identiques à ceux de la machine double étoile.

L'inductance mutuelle cyclique M' exprimant le couplage magnétique entre le rotor et le stator équivalent peut être déterminée par la relation:

$$M'^2 = \mathcal{L}'_p^r \cdot \mathcal{L}'_p^s \quad (3-76)$$

soit:

$$M'^2 = \mathcal{L}_p^r \cdot \mathcal{L}_p^s \cdot 2(1 + \cos\alpha) \quad (3-77)$$

Ce paramètre peut être exprimé en fonction de son homologue pour la machine double étoile:

$$M' = M \cdot \sqrt{2(1 + \cos\alpha)} \quad (3-78)$$

III 1 10 2 Vérification expérimentale des nouveaux paramètres

Après avoir connecté en série les phases respectives des 2 étoiles, il est possible de mesurer les paramètres de la machine simple étoile ainsi constituée par les méthodes classiques à 50Hz. Les résultats sont les suivants:

$$R'^s = 0.8 \Omega; \quad \mathcal{L}'^s = 299 \text{ mH}; \quad M' = 50,8 \text{ mH};$$

On en déduit la valeur de l'inductance cyclique principale

$$\mathcal{L}'_p^s = \mathcal{L}'^s - l'^s = 297,4 \text{ mH}$$

Le rapport $\mathcal{L}'_p^s / \mathcal{L}_p^s$ expérimental vaut 3,66 au lieu du nombre $2 + \sqrt{3}$ obtenu par la relation (3-73) pour $\alpha = \pi/6$.

Le rapport M'/M expérimental vaut 1,95 au lieu du nombre 1,9318 obtenu par la relation (3-78) pour $\alpha = \pi/6$.

Nous constatons la bonne concordance des résultats expérimentaux et théoriques.

III 1 10 3 Comparaison des régimes transitoires

Les régimes transitoires de la machine asynchrone simple étoile ont été étudiés en détail par F. NOTELET [13]. Après les transformations mathématiques nécessaires, il définit les constantes complexes C'_1 et C'_2 qui contiennent les constantes de temps et les pseudo-pulsations caractérisant le régime libre donc l'ensemble des régimes transitoires de la machine. Ces constantes sont les racines de l'équation caractéristique du système d'équations différentielles régissant le fonctionnement de la machine asynchrone simple étoile. Comme les hypothèses concernant la modélisation de la machine sont identiques, ces constantes peuvent être comparées aux constantes C_1 et C_2 définies par la relation (3-25).

En utilisant les notations définies au paragraphe III 1 10 1, les expressions de ces constantes qui sont en fait les racines de l'équation caractéristique de la machine simple étoile sont les suivantes:

$$\left. \begin{matrix} C'_1 \\ C'_2 \end{matrix} \right\} = - \frac{R'^s \varphi'^r + R'^r \varphi'^s + j(2\omega - \omega') (\varphi'^r \varphi'^s - M'^2) \pm (P' + jQ')}{2(\varphi'^r \varphi'^s - M'^2)} \quad (3-79)$$

avec:

$$P' = \frac{\sqrt{a' + \sqrt{a'^2 + b'^2}}}{2}; \quad Q' = \frac{b'}{2P'};$$

et

$$a' = (R'^s \varphi'^r - R'^r \varphi'^s)^2 + 4M'^2 R'^s R'^r - \omega'^2 (\varphi'^r \varphi'^s - M'^2)^2$$

$$b' = 2\omega' (R'^s \varphi'^r - R'^r \varphi'^s) (\varphi'^r \varphi'^s - M'^2)$$

Les tableaux 3-1 à 3-5 permettent de comparer C'_1 à C_1 et C'_2 à C_2 . Ils donnent les rapports $\mathcal{R}(C'_1)/\mathcal{R}(C_1)$, $J(C'_1)/J(C_1)$, $\mathcal{R}(C'_2)/\mathcal{R}(C_2)$ et $J(C'_2)/J(C_2)$ pour diverses valeurs de la fréquence statorique f et de la vitesse angulaire de l'arbre ω' .

$f = 10\text{Hz}$

ω'/ω	$\mathcal{R}(C'_1)/\mathcal{R}(C_1)$	$J(C'_1)/J(C_1)$	$\mathcal{R}(C'_2)/\mathcal{R}(C_2)$	$J(C'_2)/J(C_2)$
0.00	1.050950	1.000000	0.842582	1.000000
0.10	1.052856	0.999159	0.842552	1.000899
0.20	1.058329	0.998299	0.842459	1.001958
0.30	1.066709	0.997434	0.842305	1.003211
0.40	1.077099	0.996576	0.842089	1.004711
0.50	1.088568	0.995742	0.841813	1.006540
0.60	1.100305	0.994949	0.841477	1.008830
0.70	1.111698	0.994214	0.841081	1.011820
0.80	1.122335	0.993559	0.840627	1.015978
0.90	1.131979	0.993004	0.840116	1.022365
1.00	1.140520	0.992575	0.839550	1.034022

tableau 3-1

f= 20Hz

ω'/ω	$\mathcal{R}(C'1)/\mathcal{R}(C1)$	$J(C'1)/J(C1)$	$\mathcal{R}(C'2)/\mathcal{R}(C2)$	$J(C'2)/J(C2)$
0.00	1.050950	1.000000	0.842582	1.000000
0.10	1.058329	0.999166	0.842459	1.000892
0.20	1.077099	0.998353	0.842089	1.001896
0.30	1.100305	0.997621	0.841477	1.002980
0.40	1.122335	0.997031	0.840627	1.004096
0.50	1.140520	0.996653	0.839550	1.005169
0.60	1.154249	0.996562	0.838258	1.006072
0.70	1.163809	0.996836	0.836772	1.006583
0.80	1.169709	0.997554	0.835118	1.006265
0.90	1.172414	0.998787	0.833330	1.004102
1.00	1.172279	1.000595	0.831452	0.996966

tableau 3-2

f= 30Hz

ω'/ω	$\mathcal{R}(C'1)/\mathcal{R}(C1)$	$J(C'1)/J(C1)$	$\mathcal{R}(C'2)/\mathcal{R}(C2)$	$J(C'2)/J(C2)$
0.00	1.050950	1.000000	0.842582	1.000000
0.10	1.066709	0.999177	0.842305	1.000880
0.20	1.100305	0.998444	0.841477	1.001793
0.30	1.131979	0.997934	0.840116	1.002591
0.40	1.154249	0.997795	0.838258	1.003055
0.50	1.167185	0.998180	0.835964	1.002835
0.60	1.172414	0.999237	0.833330	1.001371
0.70	1.171232	1.001077	0.830495	0.997690
0.80	1.164485	1.003737	0.827641	0.989901
0.90	1.152874	1.007142	0.824969	0.973419
1.00	1.137241	1.011090	0.822676	0.931750

tableau 3-3

f= 40Hz

ω'/ω	$\mathcal{R}(C'1)/\mathcal{R}(C1)$	$J(C'1)/J(C1)$	$\mathcal{R}(C'2)/\mathcal{R}(C2)$	$J(C'2)/J(C2)$
0.00	1.050950	1.000000	0.842582	1.000000
0.10	1.077099	0.999192	0.842089	1.000864
0.20	1.122335	0.998571	0.840627	1.001647
0.30	1.154249	0.998377	0.838258	1.002041
0.40	1.169709	0.998867	0.835118	1.001579
0.50	1.172279	1.000271	0.831452	0.999573
0.60	1.164485	1.002707	0.827641	0.995021
0.70	1.148061	1.006071	0.824154	0.986420
0.80	1.125116	1.009989	0.821432	0.970993
0.90	1.098475	1.013924	0.819721	0.941192
1.00	1.071113	1.017378	0.819016	0.861555

tableau 3-4

f= 50Hz

ω'/ω	$\mathcal{R}(C'1)/\mathcal{R}(C1)$	$J(C'1)/J(C1)$	$\mathcal{R}(C'2)/\mathcal{R}(C2)$	$J(C'2)/J(C2)$
0.00	1.050950	1.000000	0.842582	1.000000
0.10	1.088568	0.999212	0.841813	1.000842
0.20	1.140520	0.998736	0.839550	1.001458
0.30	1.167185	0.998948	0.835964	1.001327
0.40	1.172279	1.000213	0.831452	0.999701
0.50	1.161118	1.002719	0.826719	0.995642
0.60	1.137241	1.006248	0.822676	0.988171
0.70	1.105313	1.010125	0.820050	0.976203
0.80	1.071113	1.013562	0.819016	0.957292
0.90	1.039333	1.016082	0.819234	0.922080
1.00	1.012286	1.017618	0.820192	0.811999

tableau 3-5

Ces tableaux montrent que les constantes de temps et les pseudo-pulsations de la machine simple étoile équivalente sont proches de celles de la machine double étoile. Les écarts maximaux sont de 17% pour $\mathcal{R}(C'_1)/\mathcal{R}(C_1)$; 1,8% pour $J(C'_1)/J(C_1)$; 19% pour $\mathcal{R}(C'_2)/\mathcal{R}(C_2)$; et 19% pour $J(C'_2)/J(C_2)$.

En acceptant une approximation des paramètres de la machine simple étoile équivalente, on aboutit à l'identité des expressions mathématiques de C'_1 et C_1 d'une part et de celles de C'_2 et C_2 d'autre part. Cette approximation consiste à assimiler le nombre $1+\cos\alpha$ à la valeur 2. Ceci conduit à une erreur de 6,7% pour $\alpha=\pi/6$.

Il est donc possible de conclure que les régimes transitoires de la machine double étoile, alimentée par deux systèmes équilibrés de tensions déphasés de α , ont une amplitude et une durée sensiblement égales à ceux de la machine simple étoile équivalente alimentée par des tensions équilibrées. Cependant, une constante de temps supplémentaire de faible valeur, définie au paragraphe III 1 3, apparaît si $V_1 \neq V_2$ et/ou $\beta_1 \neq \beta_2$.

III 2 Cas de l'alimentation en courant

La machine double étoile, quand elle est de forte puissance, est généralement alimentée par deux onduleurs de courant à 120° décalés de 30° . La machine étant supposée linéaire l'étude peut être menée en considérant chaque harmonique séparément comme pour le cas de l'alimentation en tension.

Pour définir les régimes transitoires précédents nous avons considéré une variation brutale des tensions d'alimentation de la machine et calculé la réponse du système à cet échelon de tension. Etant donné la nature inductive de la machine asynchrone il n'est pas envisageable de lui imposer des discontinuités des courants statoriques. Rappelons que l'état électrique et magnétique de la machine est défini par ses courants et que, mathématiquement, les variables d'état d'un système sont des fonctions continues.

Les hypothèses définissant le régime transitoire de la machine alimentée en tension ne sont donc plus applicables. Il faut donc définir le régime transitoire de la machine alimentée en courant comme étant le résultat de la variation des amplitudes des courants statoriques pendant un temps court mais non nul Δt et connaître la loi les régissant pendant ce temps.

Le calcul analytique, déjà lourd dans le cas de l'alimentation en tension en considérant un échelon, n'est donc pas l'outil idéal pour résoudre ce problème; la simulation numérique globale est mieux adaptée.

III 2 1 Définition des formes d'ondes des courants statoriques

Les courants dans chaque phase, en régime permanent avant et après la perturbation, sont en phase mais leur amplitude doit passer de I_{1m_0} à I_{1m_1} pour la première étoile et de I_{2m_0} à I_{2m_1} pour la seconde.

Par exemple, pour la première étoile l'expression du courant évoluera de $I_{1m_0} \cos(\omega t + \beta_1)$ à $I_{1m_1} \cos(\omega t + \beta_1)$

β_1 étant la phase initiale.

A l'instant $t=0$ le courant a pour valeur $I_{1m_0} \cos \beta_1$. On lui impose alors une variation linéaire pendant un intervalle de temps Δt , pour lui permettre d'atteindre la valeur $I_{1m_1} \cos(\omega \Delta t + \beta_1)$. La loi d'évolution du courant i_{1A}^s pendant Δt est donc

$$i_{1A}^s = \left[I_{1m_1} \cos(\omega \Delta t + \beta_1) - I_{1m_0} \cos \beta_1 \right] \frac{t}{\Delta t} + I_{1m_0} \cos \beta_1$$

de même

$$i_{1B}^s = \left[I_{1m_1} \cos\left(\omega \Delta t + \beta_1 - \frac{2\pi}{3}\right) - I_{1m_0} \cos\left(\beta_1 - \frac{2\pi}{3}\right) \right] \frac{t}{\Delta t} + I_{1m_0} \cos\left(\beta_1 - \frac{2\pi}{3}\right)$$

et $i_{1C}^s = -(i_{1A}^s + i_{1B}^s)$

Avec une phase initiale β_2 , on aura, pour la deuxième étoile

$$\left. \begin{aligned} i_{2A}^s &= \left[I_{2m_1} \cos\left(\omega \Delta t + \beta_2 - \frac{\pi}{6}\right) - I_{2m_0} \cos\left(\beta_2 - \frac{\pi}{6}\right) \right] \frac{t}{\Delta t} + I_{2m_0} \cos\left(\beta_2 - \frac{\pi}{6}\right) \\ i_{2B}^s &= \left[I_{2m_1} \cos\left(\omega \Delta t + \beta_2 - \frac{5\pi}{6}\right) - I_{2m_0} \cos\left(\beta_2 - \frac{5\pi}{6}\right) \right] \frac{t}{\Delta t} + I_{2m_0} \cos\left(\beta_2 - \frac{5\pi}{6}\right) \\ i_{2C}^s &= -(i_{2A}^s + i_{2B}^s) \end{aligned} \right\} (3-81)$$

Entre $t=0$ et Δt les dérivées sont constantes et valent:

$$\left. \begin{aligned} \frac{di_{1A}^s}{dt} &= \frac{I_{1m_1} \cos(\omega \Delta t + \beta_1) - I_{1m_0} \cos \beta_1}{\Delta t} \\ \frac{di_{1B}^s}{dt} &= \frac{I_{1m_1} \cos\left(\omega \Delta t + \beta_1 - \frac{2\pi}{3}\right) - I_{1m_0} \cos\left(\beta_1 - \frac{2\pi}{3}\right)}{\Delta t} \\ \frac{di_{1C}^s}{dt} &= -\left(\frac{di_{1A}^s}{dt} + \frac{di_{1B}^s}{dt}\right) \end{aligned} \right\} (3-82)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{di_{2A}^s}{dt} &= \frac{I_{2m_1} \cos(\omega \Delta t + \beta_2 - \frac{\pi}{6}) - I_{2m_0} \cos(\beta_2 - \frac{\pi}{6})}{\Delta t} \\
 \frac{di_{2B}^s}{dt} &= \frac{I_{2m_1} \cos(\omega \Delta t + \beta_2 - \frac{5\pi}{6}) - I_{2m_0} \cos(\beta_2 - \frac{5\pi}{6})}{\Delta t} \\
 \frac{di_{2C}^s}{dt} &= -\left(\frac{di_{2A}^s}{dt} + \frac{di_{2B}^s}{dt}\right)
 \end{aligned} \right\} (3-83)$$

La figure 3-7 représente les courants i_{1A}^s , i_{1B}^s , i_{2A}^s et i_{2B}^s ainsi définis pour une fréquence de 50Hz, $\Delta t = 1\text{ms}$, $I_{1m_0} = I_{2m_0} = 1,4\text{ A}$, $I_{1m_1} = I_{2m_1} = 2,8\text{ A}$ et $\beta_1 = \beta_2 = -\pi/2$.

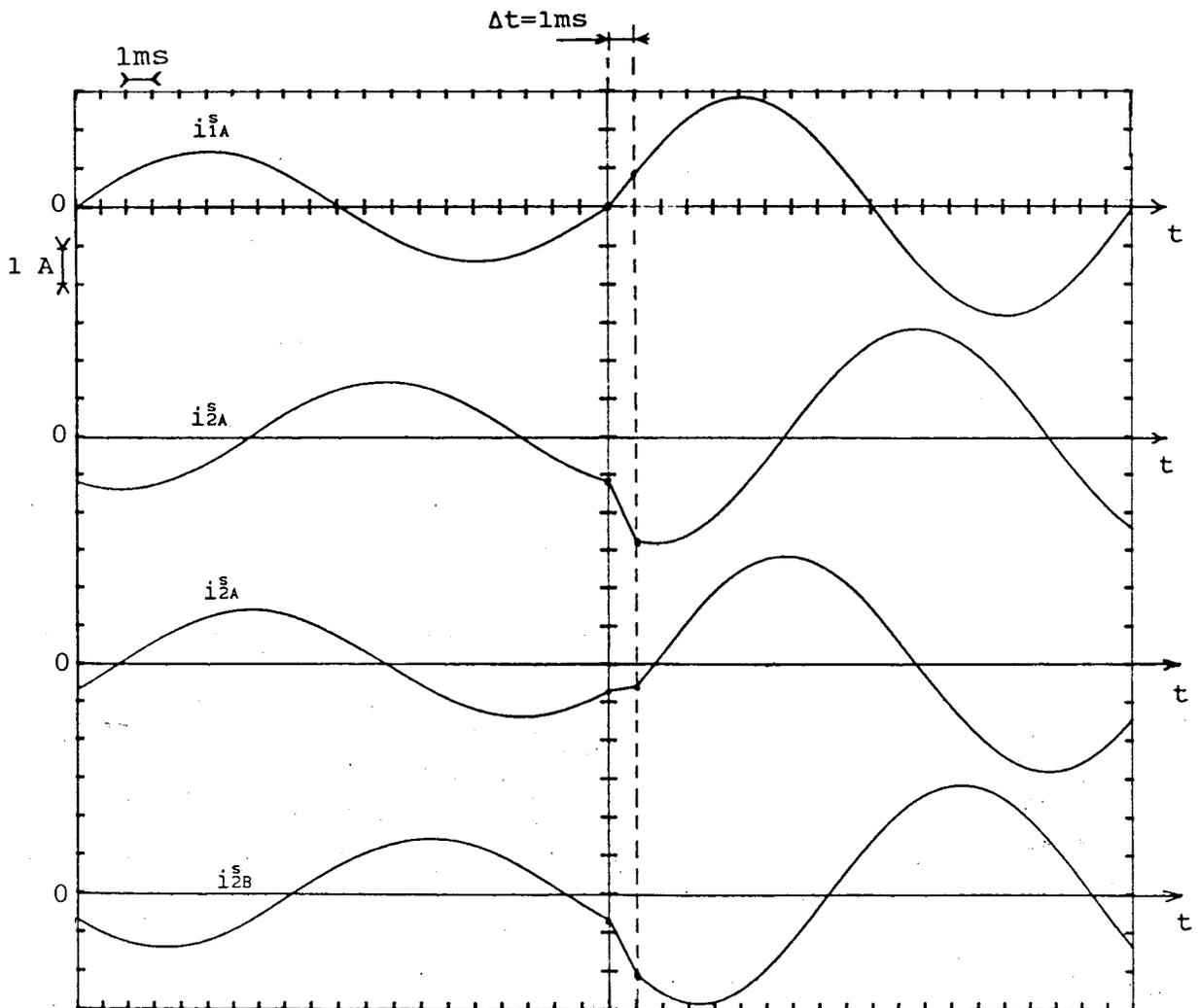


fig. 3-7

On peut observer la continuité des courants statoriques ainsi définis.

III 2 2 Programme de simulation numérique

La simulation numérique permet d'avoir une approche globale du fonctionnement de la machine. Elle donne les résultats des équations différentielles directement sans aucune transformation mathématique. Elle ne permet donc pas la séparation des régimes permanents et transitoires, et ne donne aucune information sur les constantes de temps et les pseudo-pulsations.

La méthode d'Euler du premier ordre a été choisie pour sa simplicité. Cet algorithme permet de réduire au minimum la longueur et la complexité de la boucle de calcul au détriment de la précision; il faut donc compenser par le choix d'un pas de calcul très petit.

Comme la caractéristique $B(H)$ du circuit magnétique est supposée linéaire, l'état de la machine est caractérisé, à tout instant, par les courants statoriques et rotoriques. Dans le cas d'une alimentation à trois fils par enroulement triphasé, la somme des trois courants est nulle. Ceci ramène à deux le nombre des variables nécessaires à la détermination de l'état d'un enroulement triphasé. Il faut donc 6 courants pour caractériser complètement l'état électrique de la machine double étoile. Cette écriture nécessite de développer les équations des tensions écrites aux paragraphes I 5 et I 6.

Pour la première étoile, les relations (1-25) et (1-26) donnent:

$$\begin{aligned} [v_1^s] = & [R^s][i_1^s] + L^s \frac{d[i_1^s]}{dt} + [M_{ss}] \frac{d[i_2^s]}{dt} \\ & + \frac{d[M_{sr}(\theta_1)]}{dt} [i^r] + [M_{sr}(\theta_1)] \frac{d[i^r]}{dt} \end{aligned} \quad (3-84)$$

Pour la seconde étoile:

$$\begin{aligned} [v_2^s] = & [R^s][i_2^s] + L^s \frac{d[i_2^s]}{dt} + [M_{ss}]_t \frac{d[i_1^s]}{dt} \\ & + \frac{d[M_{sr}(\theta_2)]}{dt} [i^r] + [M_{sr}(\theta_2)] \frac{d[i^r]}{dt} \end{aligned} \quad (3-85)$$

Pour le rotor:

$$\begin{aligned}
 [0] = [R^r][i^r] + \mathcal{L}^r \frac{d[i^r]}{dt} + \frac{d[M_{sr}(\theta_1)]_t}{dt} [i_1^s] + [M_{sr}(\theta_1)]_t \frac{d[i_1^s]}{dt} \\
 + \frac{d[M_{sr}(\theta_2)]_t}{dt} [i_2^s] + [M_{sr}(\theta_2)]_t \frac{d[i_2^s]}{dt}
 \end{aligned} \quad (3-86)$$

En posant

$$[M_{sr}(\theta_1)] = \begin{bmatrix} MA_{1A} & MA_{1B} & MA_{1C} \\ MB_{1A} & MB_{1B} & MB_{1C} \\ MC_{1A} & MC_{1B} & MC_{1C} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [M_{sr}(\theta_2)] = \begin{bmatrix} MA_{2A} & MA_{2B} & MA_{2C} \\ MB_{2A} & MB_{2B} & MB_{2C} \\ MC_{2A} & MC_{2B} & MC_{2C} \end{bmatrix}$$

Le développement des relations matricielles précédentes conduit à un système de 9 équations différentielles à 9 inconnues.

Pour le stator 1:

$$\begin{aligned}
 v_{1A}^s = R^s i_{1A}^s + \mathcal{L}^s \frac{di_{1A}^s}{dt} \\
 + L_p^s \cos \alpha \frac{di_{2A}^s}{dt} + L_p^s \cos(\alpha + 2\pi/3) \frac{di_{2B}^s}{dt} + L_p^s \cos(\alpha + 4\pi/3) \frac{di_{2C}^s}{dt} \\
 + \frac{dMA_{1A}}{dt} i_A^r + \frac{dMA_{1B}}{dt} i_B^r + \frac{dMA_{1C}}{dt} i_C^r + MA_{1A} \frac{di_A^r}{dt} + MA_{1B} \frac{di_B^r}{dt} + MA_{1C} \frac{di_C^r}{dt}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_{1B}^s = R^s i_{1B}^s + \mathcal{L}^s \frac{di_{1B}^s}{dt} \\
 + L_p^s \cos(\alpha - 2\pi/3) \frac{di_{2A}^s}{dt} + L_p^s \cos \alpha \frac{di_{2B}^s}{dt} + L_p^s \cos(\alpha + 2\pi/3) \frac{di_{2C}^s}{dt} \\
 + \frac{dMB_{1A}}{dt} i_A^r + \frac{dMB_{1B}}{dt} i_B^r + \frac{dMB_{1C}}{dt} i_C^r + MB_{1A} \frac{di_A^r}{dt} + MB_{1B} \frac{di_B^r}{dt} + MB_{1C} \frac{di_C^r}{dt}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_{1C}^s = R^s i_{1C}^s + \mathcal{L}^s \frac{di_{1C}^s}{dt} \\
 + L_p^s \cos(\alpha - 4\pi/3) \frac{di_{2A}^s}{dt} + L_p^s \cos(\alpha - 2\pi/3) \frac{di_{2B}^s}{dt} + L_p^s \cos(\alpha) \frac{di_{2C}^s}{dt} \\
 + \frac{dMC_{1A}}{dt} i_A^r + \frac{dMC_{1B}}{dt} i_B^r + \frac{dMC_{1C}}{dt} i_C^r + MC_{1A} \frac{di_A^r}{dt} + MC_{1B} \frac{di_B^r}{dt} + MC_{1C} \frac{di_C^r}{dt}
 \end{aligned}$$

Pour le stator 2:

$$v_{2A}^s = R^s i_{2A}^s + \mathcal{L}^s \frac{di_{2A}^s}{dt} + L_p^s \cos \alpha \frac{di_{1A}^s}{dt} + L_p^s \cos(\alpha - 2\pi/3) \frac{di_{1B}^s}{dt} + L_p^s \cos(\alpha - 4\pi/3) \frac{di_{1C}^s}{dt} + \frac{dM_{A2A}}{dt} i_{1A}^r + \frac{dM_{A2B}}{dt} i_{1B}^r + \frac{dM_{A2C}}{dt} i_{1C}^r + M_{A2A} \frac{di_{1A}^r}{dt} + M_{A2B} \frac{di_{1B}^r}{dt} + M_{A2C} \frac{di_{1C}^r}{dt}$$

$$v_{2B}^s = R^s i_{2B}^s + \mathcal{L}^s \frac{di_{2B}^s}{dt} + L_p^s \cos(\alpha + 2\pi/3) \frac{di_{1A}^s}{dt} + L_p^s \cos \alpha \frac{di_{1B}^s}{dt} + L_p^s \cos(\alpha - 2\pi/3) \frac{di_{1C}^s}{dt} + \frac{dM_{B2A}}{dt} i_{1A}^r + \frac{dM_{B2B}}{dt} i_{1B}^r + \frac{dM_{B2C}}{dt} i_{1C}^r + M_{B2A} \frac{di_{1A}^r}{dt} + M_{B2B} \frac{di_{1B}^r}{dt} + M_{B2C} \frac{di_{1C}^r}{dt}$$

$$v_{2C}^s = R^s i_{2C}^s + \mathcal{L}^s \frac{di_{2C}^s}{dt} + L_p^s \cos(\alpha + 4\pi/3) \frac{di_{1A}^s}{dt} + L_p^s \cos(\alpha + 2\pi/3) \frac{di_{1B}^s}{dt} + L_p^s \cos \alpha \frac{di_{1C}^s}{dt} + \frac{dM_{C2A}}{dt} i_{1A}^r + \frac{dM_{C2B}}{dt} i_{1B}^r + \frac{dM_{C2C}}{dt} i_{1C}^r + M_{C2A} \frac{di_{1A}^r}{dt} + M_{C2B} \frac{di_{1B}^r}{dt} + M_{C2C} \frac{di_{1C}^r}{dt}$$

Pour le rotor:

$$0 = R^r i_{1A}^r + \mathcal{L}^r \frac{di_{1A}^r}{dt} + \frac{dM_{A1A}}{dt} i_{1A}^s + \frac{dM_{B1A}}{dt} i_{1B}^s + \frac{dM_{C1A}}{dt} i_{1C}^s + M_{A1A} \frac{di_{1A}^s}{dt} + M_{B1A} \frac{di_{1B}^s}{dt} + M_{C1A} \frac{di_{1C}^s}{dt} + \frac{dM_{A2A}}{dt} i_{2A}^s + \frac{dM_{B2A}}{dt} i_{2B}^s + \frac{dM_{C2A}}{dt} i_{2C}^s + M_{A2A} \frac{di_{2A}^s}{dt} + M_{B2A} \frac{di_{2B}^s}{dt} + M_{C2A} \frac{di_{2C}^s}{dt}$$

$$0 = R^r i_{1B}^r + \mathcal{L}^r \frac{di_{1B}^r}{dt} + \frac{dM_{A1B}}{dt} i_{1A}^s + \frac{dM_{B1B}}{dt} i_{1B}^s + \frac{dM_{C1B}}{dt} i_{1C}^s + M_{A1B} \frac{di_{1A}^s}{dt} + M_{B1B} \frac{di_{1B}^s}{dt} + M_{C1B} \frac{di_{1C}^s}{dt} + \frac{dM_{A2B}}{dt} i_{2A}^s + \frac{dM_{B2B}}{dt} i_{2B}^s + \frac{dM_{C2B}}{dt} i_{2C}^s + M_{A2B} \frac{di_{2A}^s}{dt} + M_{B2B} \frac{di_{2B}^s}{dt} + M_{C2B} \frac{di_{2C}^s}{dt}$$

$$0 = R^r i_c^r + \mathcal{L}^r \frac{di_c^r}{dt}$$

$$+ \frac{dM_{A1C}}{dt} i_{iA}^s + \frac{dM_{B1C}}{dt} i_{iB}^s + \frac{dM_{C1C}}{dt} i_{iC}^s + M_{A1C} \frac{di_{iA}^s}{dt} + M_{B1C} \frac{di_{iB}^s}{dt} + M_{C1C} \frac{di_{iC}^s}{dt}$$

$$+ \frac{dM_{A2C}}{dt} i_{i2A}^s + \frac{dM_{B2C}}{dt} i_{i2B}^s + \frac{dM_{C2C}}{dt} i_{i2C}^s + M_{A2C} \frac{di_{i2A}^s}{dt} + M_{B2C} \frac{di_{i2B}^s}{dt} + M_{C2C} \frac{di_{i2C}^s}{dt}$$

En remplaçant tous les courants d'indice "c" par l'opposé de la somme des deux autres, la troisième équation de chaque système triphasé est alors inutile. Il en résulte un système de 6 équations différentielles à 6 inconnues.

Pour le stator 1:

$$v_{iA}^s = R^s i_{iA}^s + \frac{d(M_{A1A} - M_{A1C})}{dt} i_A^r + \frac{d(M_{A1B} - M_{A1C})}{dt} i_B^r + \mathcal{L}^s \frac{di_{iA}^s}{dt}$$

$$+ L_p^s [\cos \alpha - \cos(\alpha + 4\pi/3)] \frac{di_{i2A}^s}{dt} + L_p^s [\cos(\alpha + 2\pi/3) - \cos(\alpha + 4\pi/3)] \frac{di_{i2B}^s}{dt}$$

$$+ (M_{A1A} - M_{A1C}) \frac{di_A^r}{dt} + (M_{A1B} - M_{A1C}) \frac{di_B^r}{dt} \quad (3-87)$$

$$v_{iB}^s = R^s i_{iB}^s + \frac{d(M_{B1A} - M_{B1C})}{dt} i_A^r + \frac{d(M_{B1B} - M_{B1C})}{dt} i_B^r + \mathcal{L}^s \frac{di_{iB}^s}{dt}$$

$$+ L_p^s [\cos(\alpha - 2\pi/3) - \cos(\alpha + 2\pi/3)] \frac{di_{i2A}^s}{dt} + L_p^s [\cos \alpha - \cos(\alpha + 2\pi/3)] \frac{di_{i2B}^s}{dt}$$

$$+ (M_{B1A} - M_{B1C}) \frac{di_A^r}{dt} + (M_{B1B} - M_{B1C}) \frac{di_B^r}{dt} \quad (3-88)$$

Pour le stator 2:

$$v_{i2A}^s = R^s i_{i2A}^s + \frac{d(M_{A2A} - M_{A2C})}{dt} i_A^r + \frac{d(M_{A2B} - M_{A2C})}{dt} i_B^r + \mathcal{L}^s \frac{di_{i2A}^s}{dt}$$

$$+ L_p^s [\cos \alpha - \cos(\alpha - 4\pi/3)] \frac{di_{iA}^s}{dt} + L_p^s [\cos(\alpha - 2\pi/3) - \cos(\alpha - 4\pi/3)] \frac{di_{iB}^s}{dt}$$

$$+ (M_{A2A} - M_{A2C}) \frac{di_A^r}{dt} + (M_{A2B} - M_{A2C}) \frac{di_B^r}{dt} \quad (3-89)$$

$$v_{i2B}^s = R^s i_{i2B}^s + \frac{d(M_{B2A} - M_{B2C})}{dt} i_A^r + \frac{d(M_{B2B} - M_{B2C})}{dt} i_B^r + \mathcal{L}^s \frac{di_{i2B}^s}{dt}$$

$$+ L_p^s [\cos(\alpha + 2\pi/3) - \cos(\alpha - 2\pi/3)] \frac{di_{iA}^s}{dt} + L_p^s [\cos \alpha - \cos(\alpha + 2\pi/3)] \frac{di_{iB}^s}{dt}$$

$$+ (M_{B2A} - M_{B2C}) \frac{di_A^r}{dt} + (M_{B2B} - M_{B2C}) \frac{di_B^r}{dt} \quad (3-90)$$

Pour le rotor:

$$\begin{aligned}
 0 = & R^r i_A^r + \mathcal{L}^r \frac{di_A^r}{dt} \\
 & + \frac{d(MA_{1A}-MC_{1A})}{dt} i_{1A}^s + \frac{d(MB_{1A}-MC_{1A})}{dt} i_{1B}^s \\
 & + \frac{d(MA_{2A}-MC_{2A})}{dt} i_{2A}^s + \frac{d(MB_{2A}-MC_{2A})}{dt} i_{2B}^s \\
 & + (MA_{1A}-MC_{1A}) \frac{di_{1A}^s}{dt} + (MB_{1A}-MC_{1A}) \frac{di_{1A}^s}{dt} \\
 & + (MA_{2A}-MC_{2A}) \frac{di_{2A}^s}{dt} + (MB_{2A}-MC_{2A}) \frac{di_{2A}^s}{dt}
 \end{aligned} \tag{3-91}$$

$$\begin{aligned}
 0 = & R^r i_B^r + \mathcal{L}^r \frac{di_B^r}{dt} \\
 & + \frac{d(MA_{1B}-MC_{1B})}{dt} i_{1A}^s + \frac{d(MB_{1B}-MC_{1B})}{dt} i_{1B}^s \\
 & + \frac{d(MA_{2B}-MC_{2B})}{dt} i_{2A}^s + \frac{d(MB_{2B}-MC_{2B})}{dt} i_{2B}^s \\
 & + (MA_{1B}-MC_{1B}) \frac{di_{1A}^s}{dt} + (MB_{1B}-MC_{1B}) \frac{di_{1A}^s}{dt} \\
 & + (MA_{2B}-MC_{2B}) \frac{di_{2A}^s}{dt} + (MB_{2B}-MC_{2B}) \frac{di_{2A}^s}{dt}
 \end{aligned} \tag{3-92}$$

Les expressions (3-87) à (3-92) constituent le système de six équations différentielles à simuler. Une grande partie des coefficients de ces équations dépendent de la position mécanique du rotor qui est une fonction linéaire du temps car la vitesse est supposée constante.

Dans le cas de l'alimentation en courant 4 des 6 variables d'état sont imposées par les sources extérieures. La simulation se limite donc à la résolution numérique des équations rotoriques (3-91) et (3-92).

En simulation, le calcul d'une dérivée est délicat. Il est souvent source d'instabilité de la boucle de calcul car les erreurs d'arrondis sont importantes [21]. Dans notre cas les courants statoriques sont imposés par le montage extérieur, on peut donc considérer que leurs dérivées font partie des données d'entrée du programme au même titre que les courants.

En posant $[i^s] = \begin{bmatrix} i_{1A}^s \\ i_{1B}^s \\ i_{2A}^s \\ i_{2B}^s \end{bmatrix}$ et $[x] = \begin{bmatrix} i_A^r \\ i_B^r \end{bmatrix}$

les équations rotoriques peuvent être écrites sous la forme matricielle suivante:

$$0 = \frac{d[M_1(t)]}{dt} [i^s] + [M_1(t)] \frac{d[i^s]}{dt} + R^r [x] + \mathcal{L}^r \frac{d[x]}{dt} \quad (3-93)$$

où la matrice $[M_1]$ regroupe les coefficients des équations rotoriques.

$$[M_1] = \begin{bmatrix} (M_{A1A} - M_{C1A}) & (M_{B1A} - M_{C1A}) & (M_{A2A} - M_{C2A}) & (M_{B2A} - M_{C2A}) \\ (M_{A1B} - M_{C1B}) & (M_{B1B} - M_{C1B}) & (M_{A2B} - M_{C2B}) & (M_{B2B} - M_{C2B}) \end{bmatrix}$$

Cette équation doit être mise sous une forme propice à l'application de la méthode d'Euler:

$$\frac{d[x]}{dt} = \frac{1}{\mathcal{L}^r} \left\{ \frac{d[M_1(t)]}{dt} [i^s] + [M_1(t)] \frac{d[i^s]}{dt} + R^r [x] \right\} \quad (3-94)$$

ou, en appelant δt le pas de calcul:

$$\delta [x] = \frac{1}{\mathcal{L}^r} \left\{ \frac{d[M_1(t)]}{dt} [i^s] + [M_1(t)] \frac{d[i^s]}{dt} + R^r [x_2] \right\} \cdot \delta t \quad (3-95)$$

Le pas de calcul δt doit être suffisamment petit pour que la quantité $\delta [x]$, calculée à chaque itération, apporte un accroissement très faible au vecteur d'état $[x]$. Il faut donc le diminuer fortement entre $t=0$ et $t=\Delta t$ car cet intervalle de temps correspond à des variations rapides des courants. Le programme de simulation fonctionne avec $\delta t = 1 \mu s$ entre 0 et Δt et $100 \mu s$ pour $t < 0$ et $t > \Delta t$.

III 2 3 Résultats

Pour utiliser le programme de simulation il faut connaître les conditions exactes de l'essai expérimental correspondant. Il convient donc de présenter d'abord les résultats expérimentaux.

III 2 3 1 Expérimentation

Pour cet essai, la machine est alimentée par deux onduleurs de courant dont la structure et le fonctionnement sont décrits à l'annexe B.

A l'instant $t=0$, on impose la variation linéaire définie au paragraphe III 2 1 aux courants statoriques pendant $\Delta t=0,5$ ms. L'amplitude des sinusoides passe de $I_{1m_0}=I_{2m_0}=1,2$ A à $I_{1m_1}=I_{2m_1}=2,8$ A. Cette variation est programmée pour se produire à l'instant du passage par zéro du courant i_{IA}^s ce qui correspond à $\beta_1=\beta_2=-\pi/2$. La fréquence est fixée à 41 Hz.

Le régime transitoire est relevé quand la machine tourne suffisamment vite pour pouvoir négliger les variations de sa vitesse pendant la durée de l'enregistrement. La figure 3-8 représente le schéma du dispositif expérimental.

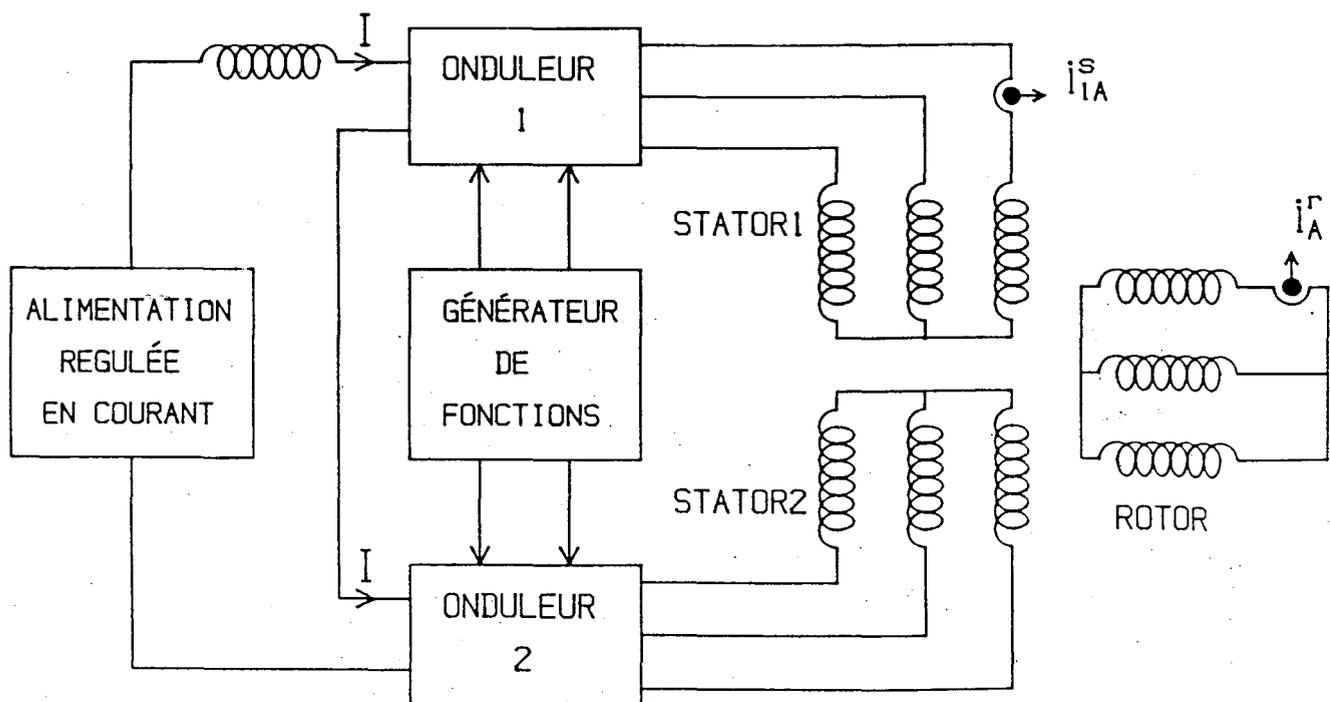


Fig. 3-8

La position mécanique du rotor θ_{10}/p est déterminée à partir de l'information binaire donnée par un capteur optique. Des filtres passe bas permettent d'éliminer les phénomènes haute fréquence produits par l'encochage de la machine et le découpage MLI des onduleurs. La figure 3-9 donne les enregistrements des courants i_{1A}^s et i_{1A}^r pour une vitesse de 985 tr/mn et un angle initial θ_{10}/p de 27° .

III 2 3 2 Résultats de la simulation

Les courants obtenus par simulation, en utilisant les paramètres généraux de la machine et les conditions particulières de l'essai précédent sont représentés par la figure 3-10.

Les différences entre les résultats expérimentaux et simulés s'expliquent, d'une part, par le fait que le courant continu d'entrée des onduleurs n'est pas rigoureusement constant ce qui explique les variations de l'amplitude du courant i_{1A}^s au début du régime transitoire. D'autre part, l'enregistrement de i_{1A}^r montre que la fréquence rotorique a diminué légèrement ce qui prouve que la vitesse n'est pas rigoureusement constante. Mis à part ces faibles écarts on observe néanmoins la bonne concordance des résultats expérimentaux et simulés.

Les variations rapides des courants statoriques provoquent des variations rapides des courants rotoriques; le régime permanent du courant rotorique semble être atteint très peu de temps après la "discontinuité".

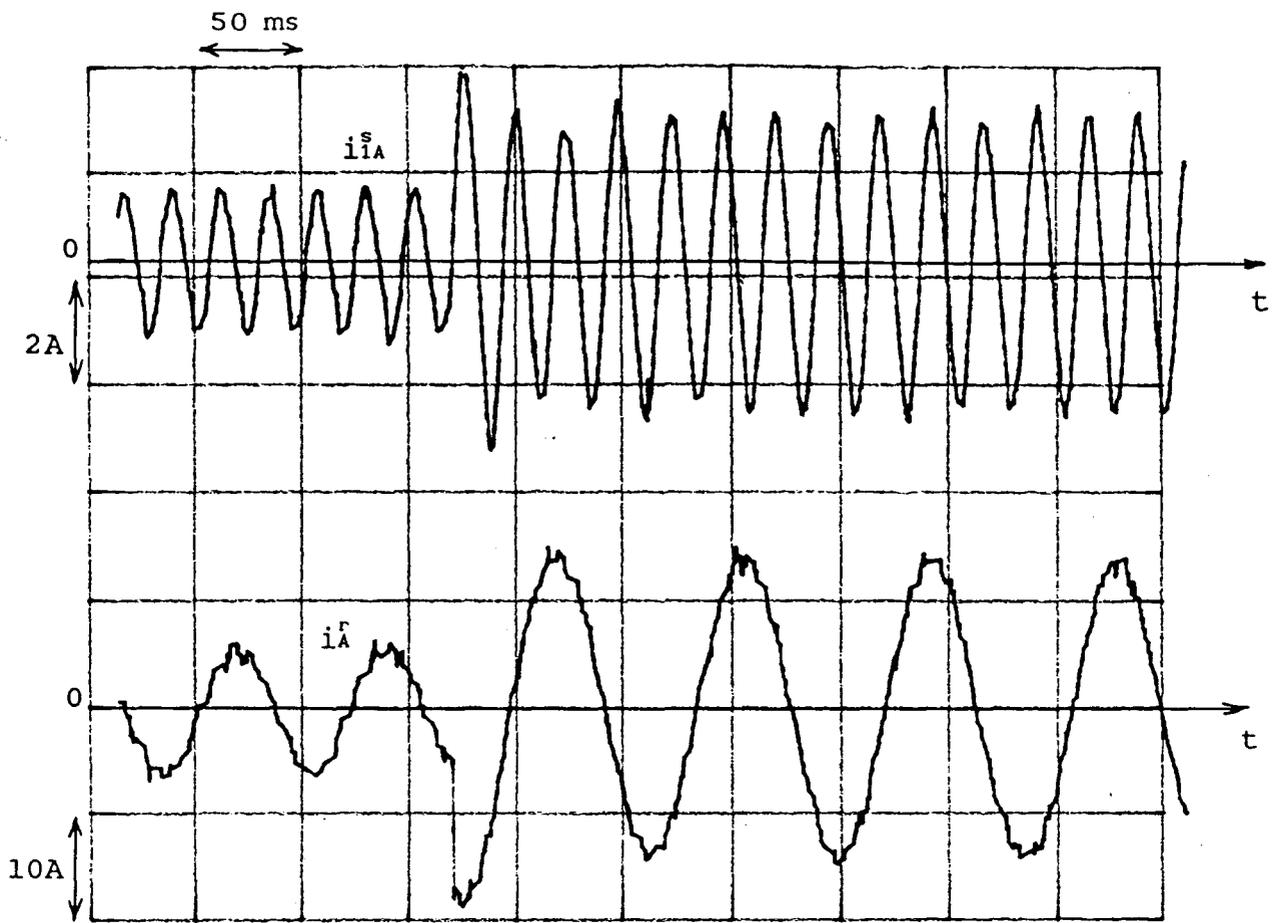


fig. 3-9

Relevés expérimentaux de i_A^s et i_A^r

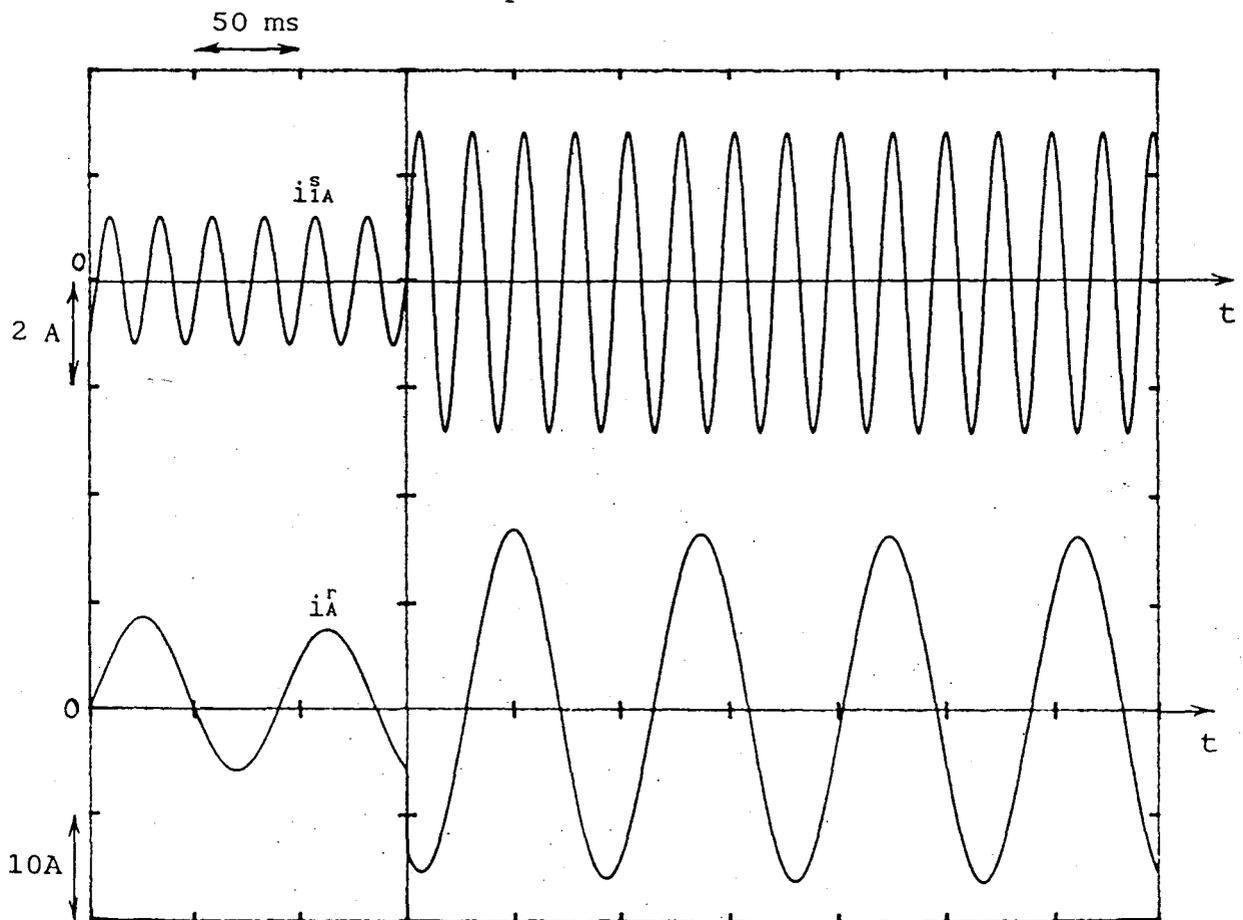


fig. 3-10

Résultats de la simulation donnant i_A^s et i_A^r

La figure 3-11 représente le couple électromagnétique calculé en appliquant la relation (1-35) aux courants simulés.

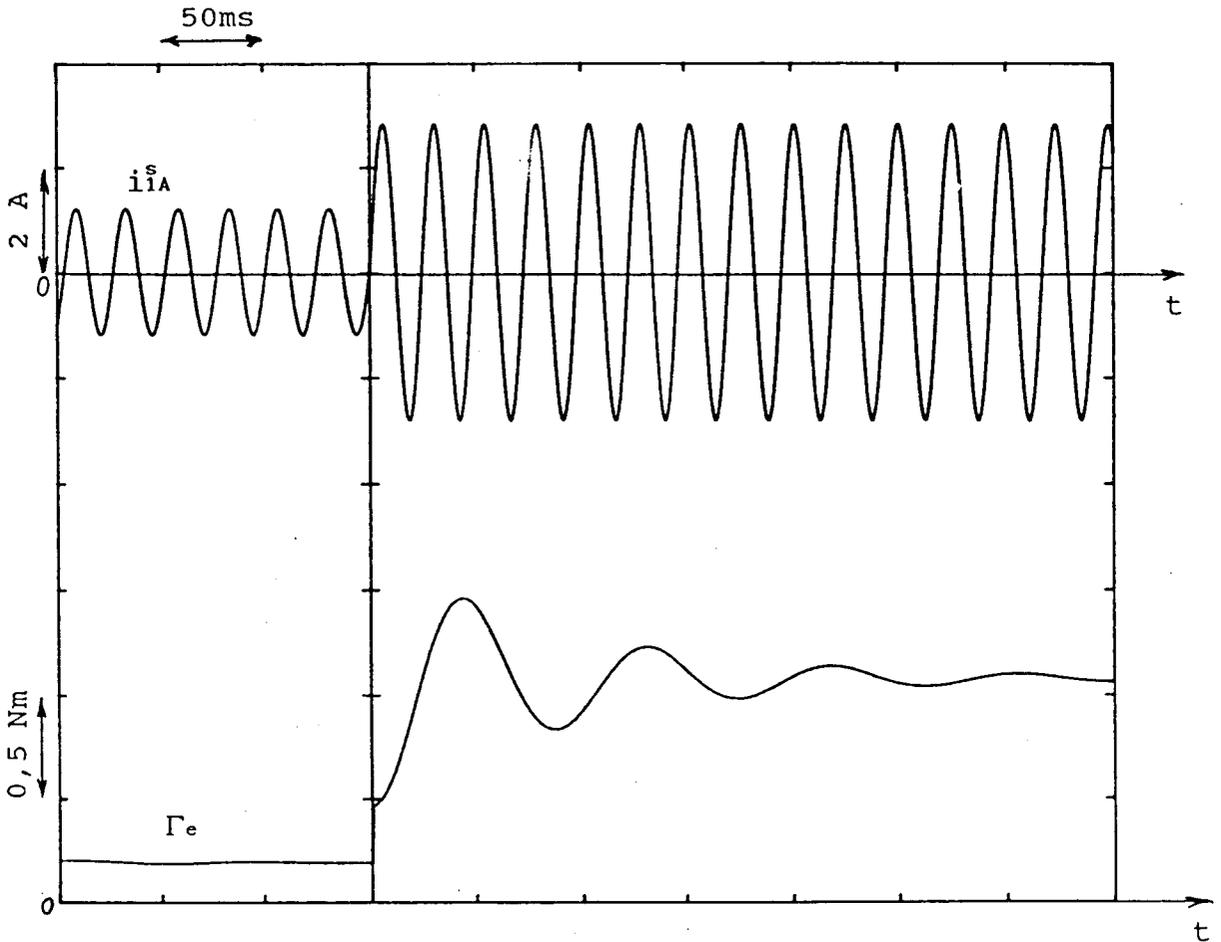


fig. 3-11
Couple électromagnétique

On observe que le régime transitoire, peu apparent sur les courants, provoque des variations de couple importantes. Ce phénomène a également été mis en évidence par F. NOTELET [13] pour la machine simple étoile. Le régime transitoire n'est donc pas limité à l'intervalle de temps Δt .

D'autre part, l'observation de la courbe du couple au voisinage de $t=0$ montre une variation rapide de celui-ci provoquée par la variation rapide des courants. La figure 3-12 qui est un agrandissement de la figure précédente au voisinage de $t=0$, permet d'observer ce phénomène.

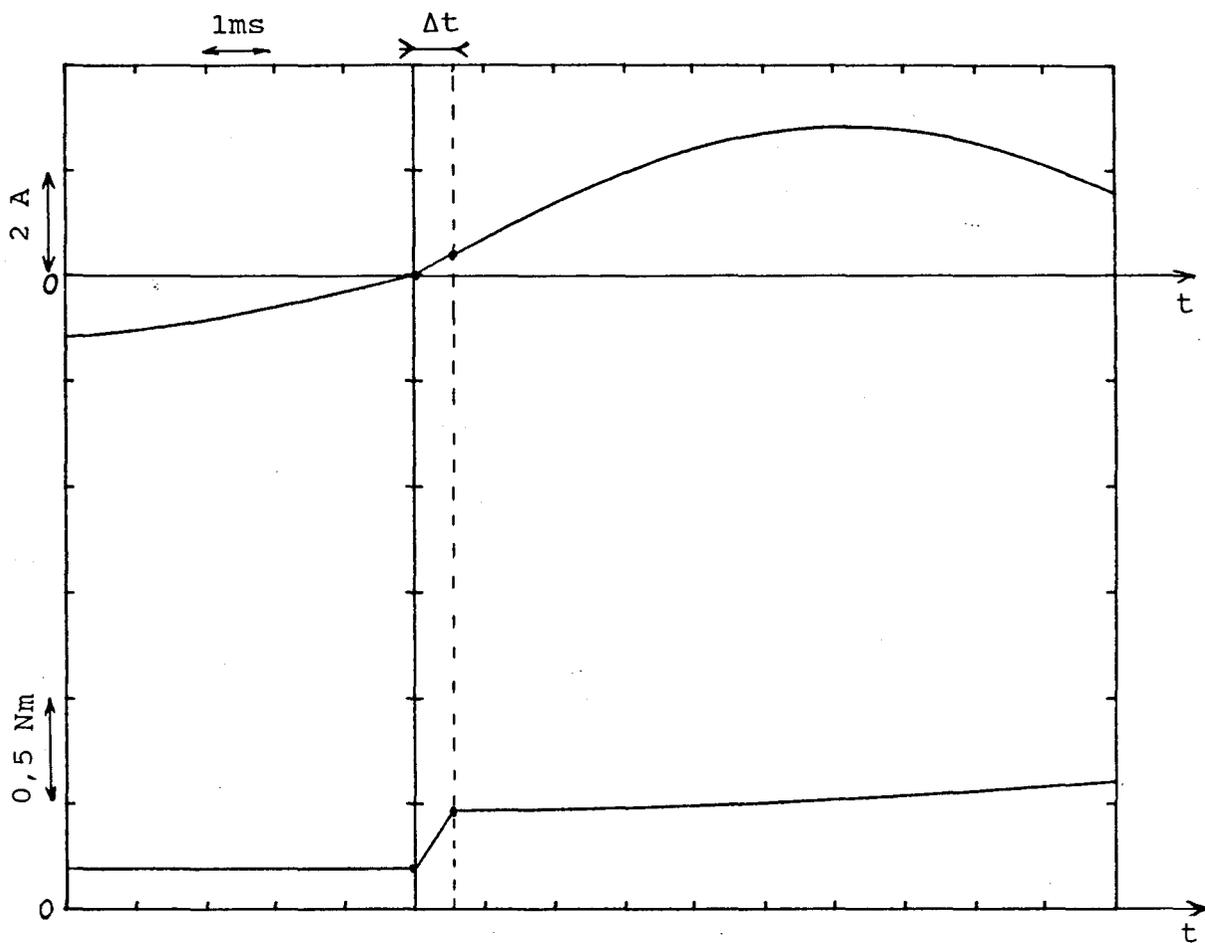


fig. 3-12

IV REGIME PERMANENT DE LA MACHINE ALIMENTEE PAR DES CONVERTISSEURS STATIQUES DE TENSION OU DE COURANT

La machine étant supposée linéaire, le principe de superposition est applicable. La réponse de la machine à une sollicitation non sinusoïdale est donc la somme des réponses à chaque harmonique de la tension ou du courant imposé par la source. Dans un premier temps nous établirons un schéma équivalent, valable uniquement en régime permanent sinusoïdal équilibré, qui nous donne une interprétation physique des phénomènes. Une méthode de calcul du couple moyen et des couples harmoniques sera ensuite développée. Elle est applicable à toute forme d'onde décomposable en série de Fourier. Par souci de clarté elle est exposée dans le cadre d'une alimentation par des onduleurs de tension ou de courant à 120°.

IV 1 Régime permanent sinusoïdal

IV 1 1 Schéma équivalent

Par définition le régime permanent est atteint quand le fonctionnement de la machine s'est stabilisé. Les termes exponentiels des expressions décrivant le régime transitoire tendent vers zéro et les modules des vecteurs espaces vers des constantes. Rappelons que ces vecteurs espaces sont exprimés dans un repère commun tournant à la vitesse de synchronisme. Les courants réels sont donc tous sinusoïdaux et peuvent être représentés par des vecteurs de Fresnel classiques. Cette formulation conduit à un schéma équivalent valable uniquement en régime permanent sinusoïdal.

Les constatations précédentes autorisent la simplification des équations des tensions (3-1), (3-2) et (3-3).

$$\bar{v}_1^s(c) = (R^s + j\omega L^s) \bar{i}_1^s(c) + j\omega L_p^s \bar{i}_2^s(c) + j\omega M \bar{i}_1^r(c) \quad (4-1)$$

$$\bar{v}_2^s(c) = (R^s + j\omega L^s) \bar{i}_2^s(c) + j\omega L_p^s \bar{i}_1^s(c) + j\omega M \bar{i}_1^r(c) \quad (4-2)$$

$$0 = (R^r + jg\omega L^r) \bar{i}_1^r(c) + jg\omega M \bar{i}_1^s(c) + jg\omega M \bar{i}_2^s(c) \quad (4-3)$$

En remplaçant L^s par $L_p^s + 1^s$ et L^r par $L_p^r + 1^r$ dans ces expressions, on obtient:

$$\bar{v}_1^s(c) = (R^s + j\omega 1^s) \bar{i}_1^s(c) + j\omega [L_p^s (\bar{i}_1^s(c) + \bar{i}_2^s(c)) + M \bar{i}_1^r(c)] \quad (4-4)$$

$$\bar{v}_2^s(c) = (R^s + j\omega l^s) \bar{i}_2^s(c) + j\omega \left[\mathcal{L}_p^s (\bar{i}_1^s(c) + \bar{i}_2^s(c)) + M \bar{i}_r(c) \right] \quad (4-5)$$

$$\bar{0} = (R^r + jg\omega l^r) \bar{i}_r(c) + jg\omega \left[M (\bar{i}_1^s(c) + \bar{i}_2^s(c)) + \mathcal{L}_p^r \bar{i}_r(c) \right] \quad (4-6)$$

M et \mathcal{L}_p^r peuvent s'exprimer en fonction de l'inductance cyclique principale du stator \mathcal{L}_p^s :

$$M = \frac{\mathcal{L}_p^s N^r}{N^s} ; \quad \mathcal{L}_p^r = \frac{\mathcal{L}_p^s N^{r2}}{N^{s2}}$$

Les équations de tension s'écrivent alors:

$$\bar{v}_1^s(c) = (R^s + j\omega l^s) \bar{i}_1^s(c) + j\omega \mathcal{L}_p^s \left[\bar{i}_1^s(c) + \bar{i}_2^s(c) + \frac{N^r}{N^s} \bar{i}_r(c) \right] \quad (4-7)$$

$$\bar{v}_2^s(c) = (R^s + j\omega l^s) \bar{i}_2^s(c) + j\omega \mathcal{L}_p^s \left[\bar{i}_1^s(c) + \bar{i}_2^s(c) + \frac{N^r}{N^s} \bar{i}_r(c) \right] \quad (4-8)$$

$$\bar{0} = (R^r + jg\omega l^r) \bar{i}_r(c) + jg\omega \mathcal{L}_p^s \left[\frac{N^r}{N^s} (\bar{i}_1^s(c) + \bar{i}_2^s(c)) + \frac{N^{r2}}{N^{s2}} \bar{i}_r(c) \right] \quad (4-9)$$

Le vecteur espace courant magnétisant, défini au paragraphe II 3 3, apparaît dans ces équations. La relation (4-9) peut s'écrire différemment de façon à introduire les grandeurs rotoriques ramenées au stator:

$$\bar{0} = (R^r + jg\omega l^r) \frac{N^{s2}}{N^{r2}} \frac{N^r}{N^s} \bar{i}_r(c) + jg\omega \mathcal{L}_p^s \bar{i}_r^m(c) \quad (4-10)$$

Appelons R_s^r et l_s^r la résistance et l'inductance de fuites rotorique ramenée au stator et $\bar{i}_s^r(c)$ le courant rotorique ramené au stator. Ces grandeurs peuvent s'exprimer en fonction des grandeurs réelles:

$$R_s^r = \frac{N^{s2}}{N^{r2}} R^r \quad (4-11)$$

$$l_s^r = \frac{N^{s2}}{N^{r2}} l^r \quad (4-12)$$

$$\bar{i}_s^r(c) = \frac{N^r}{N^s} \bar{i}_r(c) \quad (4-13)$$

Les relations (4-7) à (4-9) deviennent:

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_1^s &= (R^s + j\omega l^s) \bar{i}_1^s + j\omega \mathcal{L}_p^s \bar{i}^m \\ \bar{v}_2^s &= (R^s + j\omega l^s) \bar{i}_2^s + j\omega \mathcal{L}_p^s \bar{i}^m \\ \bar{0} &= \left(\frac{R_s^r}{g} + j\omega l_s^r \right) \bar{i}_s^r + j\omega \mathcal{L}_p^s \bar{i}^m \end{aligned} \right\} \quad (4-14)$$

Ces équations ne permettent pas de définir un schéma équivalent car les variables mises en jeu sont des vecteurs espaces exprimés dans le repère commun tournant à la vitesse de synchronisme et non des grandeurs complexes classiques issues des diagrammes de Fresnel. Pour revenir à ces grandeurs il faut exprimer les vecteurs espaces dans un repère commun fixe de façon à ce qu'ils décrivent des cercles centrés sur l'origine du repère choisi comme des vecteurs de Fresnel. En choisissant le repère naturel de l'étoile 1 nous obtenons un ensemble de variables permettant d'obtenir le schéma équivalent de la machine asynchrone double étoile vue du premier stator. Ce changement de repère est obtenu en multipliant les deux membres de la première équation du système (4-14) par $e^{-j\alpha_1}$, ceux de la seconde par $e^{-j\alpha_2}$ et ceux de la troisième par $e^{-j\theta}$ d'après les relations établies en (2-17). On rappelle que dans ce changement de variables, les angles α_1 et α_2 valent respectivement ωt et $\omega t + \alpha$. Après simplification, le système précédent exprimé dans le repère naturel de l'étoile 1 s'écrit:

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_1^s &= (R^s + j\omega l^s) \bar{i}_1^s + j\omega \mathcal{L}_p^s \bar{i}^m \\ \bar{v}_2^s e^{j\alpha} &= (R^s + j\omega l^s) \bar{i}_2^s e^{j\alpha} + j\omega \mathcal{L}_p^s \bar{i}^m \\ \bar{0} &= \left(\frac{R_s^r}{g} + j\omega l_s^r \right) \bar{i}_s^r + j\omega \mathcal{L}_p^s \bar{i}^m \end{aligned} \right\} \quad (4-15)$$

Nous pouvons à présent faire correspondre des vecteurs de Fresnel aux vecteurs espaces figurant dans les relations précédentes. En notant \bar{V}_1^s , \bar{V}_2^s , \bar{I}_1^s , \bar{I}_2^s , \bar{I}_s^r et \bar{I}^m les grandeurs complexes associées aux vecteurs de Fresnel il vient:

$$\left. \begin{aligned} \bar{V}_1^s &= (R^s + j\omega l^s) \bar{I}_1^s + j\omega \mathcal{L}_p^s \bar{I}^m \\ \bar{V}_2^s e^{j\alpha} &= (R^s + j\omega l^s) \bar{I}_2^s e^{j\alpha} + j\omega \mathcal{L}_p^s \bar{I}^m \\ \bar{0} &= \left(\frac{R_s^r}{g} + j\omega l_s^r \right) \bar{I}_s^r + j\omega \mathcal{L}_p^s \bar{I}^m \end{aligned} \right\} \quad (4-16)$$

Ces équations conduisent au schéma monophasé équivalent de la machine vue du stator 1 donné à la figure 4-1.

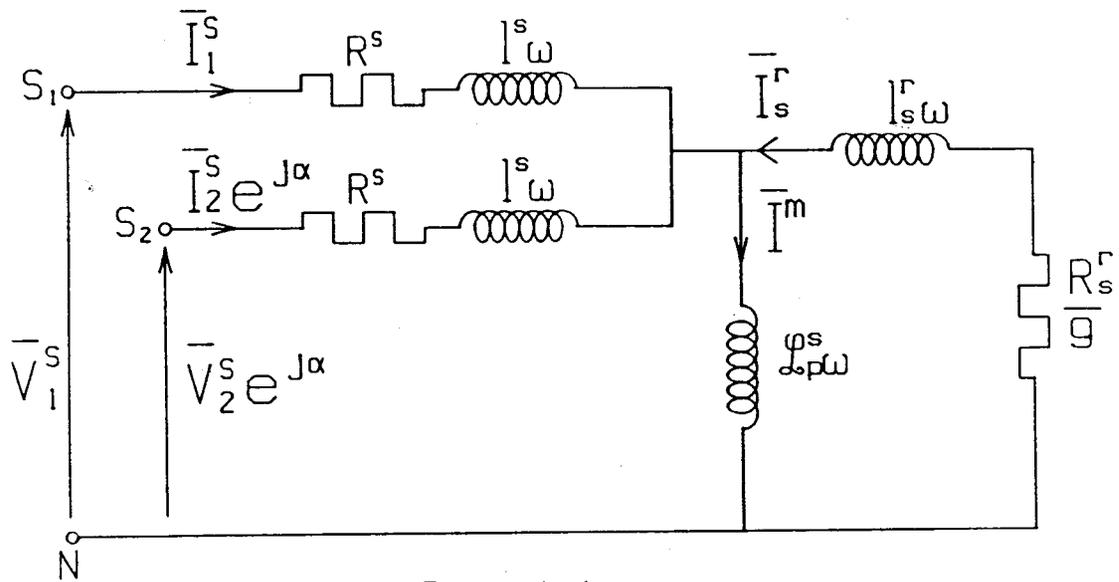


Fig. 4-1

Schéma équivalent en sinusoïdal

Cela correspond au schéma monophasé équivalent d'un transformateur triphasé à deux primaires, dont le secondaire en court-circuit serait "ramené" au primaire. La seule particularité est que la résistance secondaire "ramenée" est, comme pour une machine classique, fonction du glissement donc de la vitesse de rotation de l'arbre.

IV 1 2 Couple électromagnétique produit par les fondamentaux

Les diverses expressions du couple électromagnétique en fonction des vecteurs espaces ont été établies au paragraphe II 8. On ajoute un indice ₁ pour indiquer qu'il s'agit ici des courants fondamentaux.

En choisissant le repère naturel de l'étoile 1 (D_1^s, Q_1^s) comme repère commun, le couple électromagnétique moyen Γ_{e0} peut être calculé par la relation suivante:

$$\Gamma_{e0} = \frac{3}{2} \ell_p^s \bar{i}_{(1)1}^m \wedge (\bar{i}_{11}^s + \bar{i}_{21}^s e^{j\alpha}) \quad (4-17)$$

où les vecteurs espaces se déduisent directement du schéma monophasé équivalent.

Le courant magnétisant s'exprime par:

$$\bar{I}^m = (\bar{I}_1^s + \bar{I}_2^s e^{j\alpha}) \frac{R_s^r/g + j l_s^r \omega}{R_s^r/g + j (\mathcal{L}_p^s + l_s^r) \omega} \quad (4-18)$$

En séparant les parties réelles et imaginaires on obtient:

$$\bar{I}^m = (\bar{I}_1^s + \bar{I}_2^s e^{j\alpha}) \frac{R_s^{r2} + l_s^r (\mathcal{L}_p^s + l_s^r) (g\omega)^2 - j R_s^r \mathcal{L}_p^s g\omega}{R_s^{r2} + [(\mathcal{L}_p^s + l_s^r) g\omega]^2} \quad (4-19)$$

IV 1 2 1 Cas d'une alimentation en courant

Dans le cas d'une source totalement équilibrée, les fondamentaux des courants d'alimentation forment 2 systèmes triphasés équilibrés de même séquence et de même valeur efficace I_1 . Le système d'alimentation de la seconde étoile est en retard de l'angle α . Les expressions des vecteurs espaces courants statoriques sont les suivantes:

$$\bar{i}_{11}^s = I_1 \sqrt{2} e^{j\omega t} \quad (4-20)$$

$$\bar{i}_{2(1)}^s = I_1 \sqrt{2} e^{j(\omega t - \alpha)} \quad (4-21)$$

Le courant magnétisant est calculé à partir de la relation (4-18). En notant I_1^m la valeur efficace de son fondamental et δ sa phase, on obtient:

$$\bar{i}_{(1)}^m = I_1^m \sqrt{2} e^{j(\omega t + \delta)} \quad (4-22)$$

avec:

$$I_1^m = 2I_1 \frac{\sqrt{[R_s^{r2} + l_s^r (\mathcal{L}_p^s + l_s^r) (g\omega)^2]^2 + [R_s^r \mathcal{L}_p^s g\omega]^2}}{R_s^{r2} + [(\mathcal{L}_p^s + l_s^r) g\omega]^2} \quad (4-23)$$

et:

$$\delta = -\text{Arctg} \frac{R_s^r \mathcal{L}_p^s g\omega}{R_s^{r2} + l_s^r (\mathcal{L}_p^s + l_s^r) (g\omega)^2} \quad (4-24)$$

La figure 4-2 représente les vecteurs espaces courants à l'instant $t=0$.

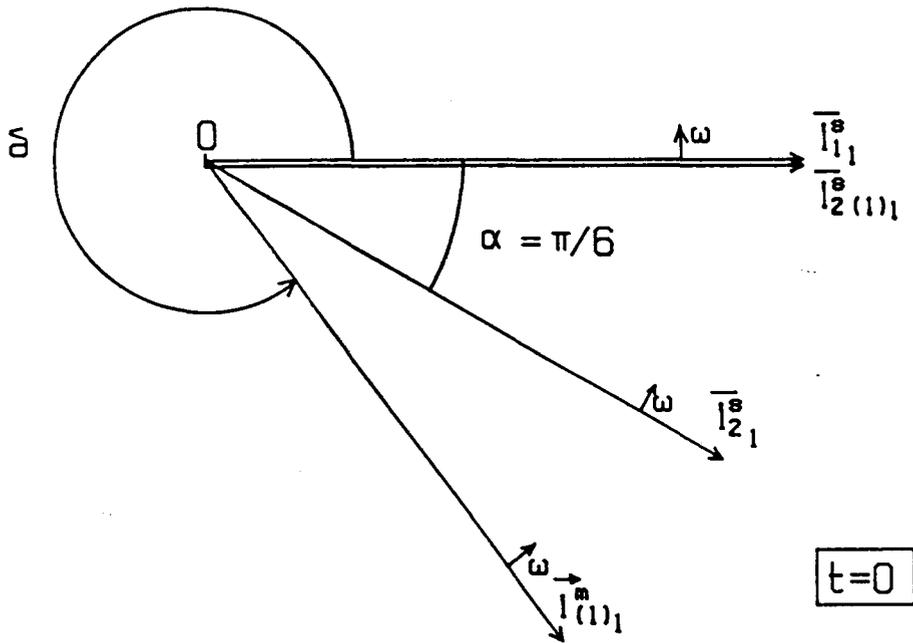


Fig. 4-2

Le couple électromagnétique est donné par le produit vectoriel de la relation (4-17); il peut être écrit de la façon suivante:

$$\Gamma_{e_0} = \frac{3}{2} \mathcal{L}_p^s \cdot \sqrt{2} I_1^m \cdot 2\sqrt{2} I_1 \cdot \sin(2\pi - \delta) \quad (4-25)$$

A glissement donné l'expression (4-24) montre que l'angle δ est constant. Tous les vecteurs tournent dans le même sens à la même vitesse ω . Le couple électromagnétique est donc constant.

A partir des relations (4-23) à (4-25) nous obtenons l'expression analytique du couple suivante:

$$\Gamma_{e_0} = 12 I_1^2 \frac{g R_s^r \mathcal{L}_p^{s^2} \omega}{R_s^{r^2} + \left[g \omega (\mathcal{L}_p^s + l_r^r) \right]^2} \quad (4-26)$$

Le même résultat peut être obtenu plus simplement par un bilan des puissances au niveau du schéma équivalent. Mais cette méthode n'est pas généralisable au calcul des couples harmoniques.

La valeur efficace du courant rotorique ramené au stator $I_{s_1}^r$ est déterminée à partir des courants statoriques imposés par la source.

$$I_{s_1}^r = 2 I_1 \frac{\mathcal{L}_p^s \omega}{\sqrt{\left[(\mathcal{L}_p^s + l_r^r) \omega \right]^2 + \left[\frac{R_s^r}{g} \right]^2}} \quad (4-27)$$

La puissance transmise au rotor en est déduite ainsi que le couple

électromagnétique.

$$\Gamma_{e0} = \frac{3R_s^r I_{s1}^r{}^2}{g\omega} \quad (4-28)$$

Après avoir remplacé I_{s1}^r par l'expression (4-27) nous retrouvons exactement l'expression (4-26).

V 1 2 2 Cas d'une alimentation en tension

Les fondamentaux forment deux systèmes triphasés équilibrés de même valeur efficace. Les tensions alimentant le second stator sont retardées de l'angle α .

Les 2 vecteurs de Fresnel \bar{V}_{11}^s et $\bar{V}_{21}^s e^{j\alpha}$ sont confondus et les points S_1 et S_2 du schéma équivalent de la figure 4-1 sont équipotentiels. Nous retrouvons alors le schéma équivalent de la machine simple étoile comme le montre la figure 4-3. En ce qui concerne les fondamentaux, le régime permanent de la machine double étoile est identique à celui de la machine asynchrone ordinaire.

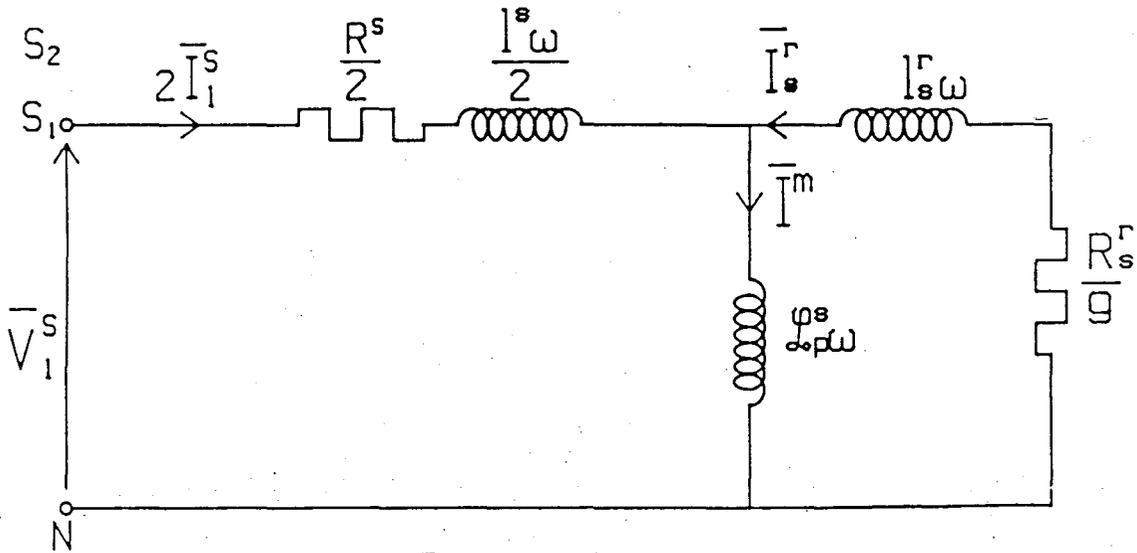


Fig. 4-3

Schéma équivalent en sinusoïdal
totalement équilibré

IV 2 Régime permanent non sinusoïdal

Cette étude est menée dans le cas particulier où l'angle α représentant le décalage des deux étoiles statoriques vaut $\pi/6$.

IV 2 1 Cas de l'alimentation en courant

IV 2 1 1 Vecteurs espaces représentant les courants produits par les onduleurs

Supposons la machine alimentée par 2 onduleurs de courant à 120° connectés en série, comme le montre la figure 3-8 p 74, et dont les commandes sont décalées de $\pi/6$. La forme d'onde du courant imposée par l'onduleur dans la phase A de la première étoile est donnée par la figure 4-4 où I est le courant circulant dans le lien continu d'entrée des deux onduleurs.

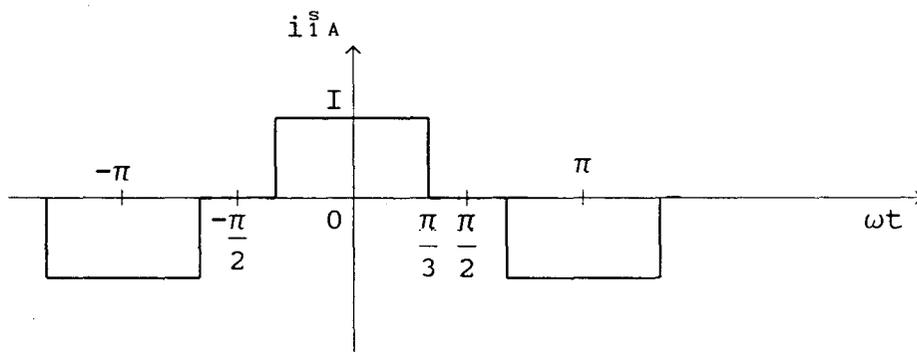


fig. 4-4

Courant imposé par l'onduleur

La décomposition en série de Fourier de cette onde donne:

$$i_sA = I \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \left[\cos\omega t - \frac{1}{5} \cos 5\omega t + \frac{1}{7} \cos 7\omega t - \frac{1}{11} \cos 11\omega t + \frac{1}{13} \cos 13\omega t - \dots \right] \quad (4-29)$$

La valeur efficace du fondamental vaut $I_1 = I \frac{\sqrt{6}}{\pi}$. Cette relation peut encore s'écrire de façon plus générale de la manière suivante:

$$i_sA = I_1 \sqrt{2} \left\{ \sum_{k_d=0}^{\infty} \frac{1}{6k_d+1} \cos(6k_d+1)\omega t - \sum_{k_i=1}^{\infty} \frac{1}{6k_i-1} \cos(6k_i-1)\omega t \right\} \quad (4-30)$$

où k_d et k_i sont des entiers.

Les courants dans les phases B et C sont retardés de $2\pi/3$ et de $4\pi/3$; leurs expressions sont obtenues en remplaçant respectivement

ωt par $(\omega t - 2\pi/3)$ et $(\omega t - 4\pi/3)$. Après simplifications on obtient:

$$i_{iB}^s = I_1 \sqrt{2} \left\{ \sum_{k_d=0}^{\infty} \frac{1}{6k_d+1} \cos[(6k_d+1)\omega t - 2\pi/3] - \sum_{k_i=1}^{\infty} \frac{1}{6k_i-1} \cos[(6k_i-1)\omega t + 2\pi/3] \right\} \quad (4-31)$$

$$i_{iC}^s = I_1 \sqrt{2} \left\{ \sum_{k_d=0}^{\infty} \frac{1}{6k_d+1} \cos[(6k_d+1)\omega t - 4\pi/3] - \sum_{k_i=1}^{\infty} \frac{1}{6k_i-1} \cos[(6k_i-1)\omega t + 4\pi/3] \right\} \quad (4-32)$$

Il apparaît que les termes de rang $6k_d+1$ forment des systèmes triphasés de séquence directe alors que ceux de rang $6k_i-1$ ont une séquence inverse. En adoptant une écriture matricielle, les 3 relations précédentes deviennent:

$$\begin{bmatrix} i_{iA}^s \\ i_{iB}^s \\ i_{iC}^s \end{bmatrix} = I_1 \sqrt{2} \left\{ \sum_{k_d=0}^{\infty} \frac{1}{6k_d+1} \begin{bmatrix} \cos(6k_d+1)\omega t \\ \cos[(6k_d+1)\omega t - 2\pi/3] \\ \cos[(6k_d+1)\omega t - 4\pi/3] \end{bmatrix} - \sum_{k_i=1}^{\infty} \frac{1}{6k_i-1} \begin{bmatrix} \cos(6k_i-1)\omega t \\ \cos[(6k_i-1)\omega t + 2\pi/3] \\ \cos[(6k_i-1)\omega t + 4\pi/3] \end{bmatrix} \right\} \quad (4-33)$$

En remplaçant les cosinus par leurs expressions exponentielles, il vient:

$$\begin{bmatrix} i_{iA}^s \\ i_{iB}^s \\ i_{iC}^s \end{bmatrix} = I_1 \sqrt{2} \left\{ \sum_{k_d=0}^{\infty} \frac{1}{6k_d+1} \frac{1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{bmatrix} e^{j(6k_d+1)\omega t} + \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{bmatrix} e^{-j(6k_d+1)\omega t} \right\} - \sum_{k_i=1}^{\infty} \frac{1}{6k_i-1} \frac{1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{bmatrix} e^{j(6k_i-1)\omega t} + \begin{bmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{bmatrix} e^{-j(6k_i-1)\omega t} \right\} \right\} \quad (4-34)$$

Le vecteur espace correspondant est obtenu en prémultipliant les 2 membres de cette relation par la quantité $\frac{2}{3}[1 \text{ a } a^2]$.

$$\bar{i}_1^s = I_1 \sqrt{2} \left\{ \sum_{k_d=0}^{\infty} \frac{1}{6k_d+1} e^{j(6k_d+1)\omega t} - \sum_{k_i=1}^{\infty} \frac{1}{6k_i-1} e^{-j(6k_i-1)\omega t} \right\} \quad (4-35)$$

La représentation graphique des vecteurs est facilitée en remplaçant le signe - de l'expression précédente par $e^{j\pi}$:

$$\bar{i}_1^s = I_1 \sqrt{2} \left\{ \sum_{k_d=0}^{\infty} \frac{1}{6k_d+1} e^{j(6k_d+1)\omega t} + \sum_{k_i=1}^{\infty} \frac{1}{6k_i-1} e^{-j[(6k_i-1)\omega t - \pi]} \right\} \quad (4-36)$$

Cette relation montre que \bar{i}_1^s résulte de la somme de deux ensembles de vecteurs espaces l'un constitué de vecteurs tournant dans le sens trigonométrique à la vitesse $(6k_d+1)\omega$ et l'autre tournant en sens inverse à la vitesse $(6k_i-1)\omega$.

La seconde étoile est alimentée par des signaux identiques mais retardés de l'angle α . Le vecteur espace correspondant est obtenu en substituant $(\omega t - \alpha)$ à ωt dans l'expression précédente. Il vient:

$$\bar{i}_2^s = I_1 \sqrt{2} \left\{ \sum_{k_d=0}^{\infty} \frac{1}{6k_d+1} e^{j[(6k_d+1)\omega t - (6k_d+1)\alpha]} + \sum_{k_i=1}^{\infty} \frac{1}{6k_i-1} e^{-j[(6k_i-1)\omega t - (6k_i-1)\alpha - \pi]} \right\} \quad (4-37)$$

Les valeurs figurant dans le tableau 4-1 résultent de l'application numérique des relations (4-36) et (4-37). Ces valeurs permettent de tracer les vecteurs espaces \bar{i}_1^s , \bar{i}_2^s et $\bar{i}_2^s(t) = \bar{i}_2^s e^{j\alpha}$, correspondant aux premiers rangs harmoniques et à l'instant $t=0$. La première colonne est le rang de l'harmonique de courant considéré, la deuxième donne la valeur efficace de l'harmonique. Pour tracer le vecteur espace il faut considérer la valeur crête. Les autres colonnes sont les arguments donc la position des vecteurs espaces par rapport à l'axe réel à l'instant $t=0$. La séquence permet de connaître le sens de rotation du vecteur espace, Dir (direct) Inv (inverse). La séquence directe correspond au sens trigonométrique.

Rang	Valeur efficace	$\arg(\bar{i}_1^s)$	$\arg(\bar{i}_2^s)$	$\arg(\bar{i}_2^{s(1)})$	séquence
1 ($k_d=0$)	$I_1=I\sqrt{6}/\pi$	0	$-\pi/6$	0	Dir
5 ($k_i=1$)	$I_5=I_1/5$	π	$-\pi/6$	0	Inv
7 ($k_d=1$)	$I_7=I_1/7$	0	$-7\pi/6$	π	Dir
11 ($k_i=2$)	$I_{11}=I_1/11$	π	$5\pi/6$	π	Inv
13 ($k_d=2$)	$I_{13}=I_1/13$	0	$-\pi/6$	0	Dir
17 ($k_i=3$)	$I_{17}=I_1/17$	π	$-\pi/6$	0	Inv
19 ($k_d=3$)	$I_{19}=I_1/19$	0	$5\pi/6$	π	Dir
23 ($k_i=4$)	$I_{23}=I_1/23$	π	$5\pi/6$	π	Inv
25 ($k_d=4$)	$I_{25}=I_1/25$	0	$-\pi/6$	0	Dir
29 ($k_i=5$)	$I_{29}=I_1/29$	π	$-\pi/6$	0	Inv
31 ($k_d=5$)	$I_{31}=I_1/31$	0	$5\pi/6$	π	Dir

tableau 4-1

IV 2 1 2 Couples produits par les courants harmoniques

Le couple électromagnétique dépend de la somme $\bar{i}_1^s + \bar{i}_2^{s(1)}$. Le tableau précédent montre que pour les harmoniques de rang 5, 7, 17, 19, 29, 31, ... les vecteurs espaces \bar{i}_1^s et $\bar{i}_2^{s(1)}$ sont égaux et opposés ils ne produisent donc aucun couple électromagnétique. Dans le cas général on obtient:

$$\bar{i}_1^s + \bar{i}_2^{s(1)} = I_1 \sqrt{2} \left\{ \begin{aligned} & \sum_{k_d=0}^{\infty} \frac{1}{12k_d+1} e^{j(12k_d+1)\omega t} \\ & + \sum_{k_i=1}^{\infty} \frac{1}{12k_i-1} e^{-j[(12k_i-1)\omega t - \pi]} \end{aligned} \right\} \quad (4-38)$$

Le premier courant harmonique produisant un couple est de rang 11. La valeur efficace du courant magnétisant correspondant peut être calculée à partir de la relation (4-23) à condition de connaître le glissement g_{11} relatif à l'harmonique. Comme le système triphasé de rang 11 est de séquence inverse, g_{11} a pour expression:

$$g_{11} = \frac{-11\omega - \omega'}{-11\omega} \quad (4-39)$$

Ce glissement peut être exprimé en fonction du glissement g_1 relatif au fondamental:

$$g_{11} = \frac{12-g_1}{11} \quad (4-40)$$

Il est possible de généraliser cette relation en appelant g_n le glissement relatif à l'harmonique de rang n :

$$g_n = \frac{n^\pm(1-g_1)}{n} \quad (4-41)$$

Le signe + correspond aux systèmes de séquence inverse, le signe - aux systèmes de séquence directe. Cette relation montre que le glissement relatif à un harmonique est d'autant plus proche de 1 que le rang est élevé.

La figure 4-5 est obtenue à partir de la relation (4-23), elle permet de comparer la valeur efficace de l'harmonique 11 du courant magnétisant à celle de son fondamental. Le rapport I_{11}^m/I_1^m est tracé en fonction de la fréquence de l'onduleur pour diverses valeurs du glissement g_1 . Les paramètres sont ceux de la machine expérimentale donnés dans le paragraphe 3-18.

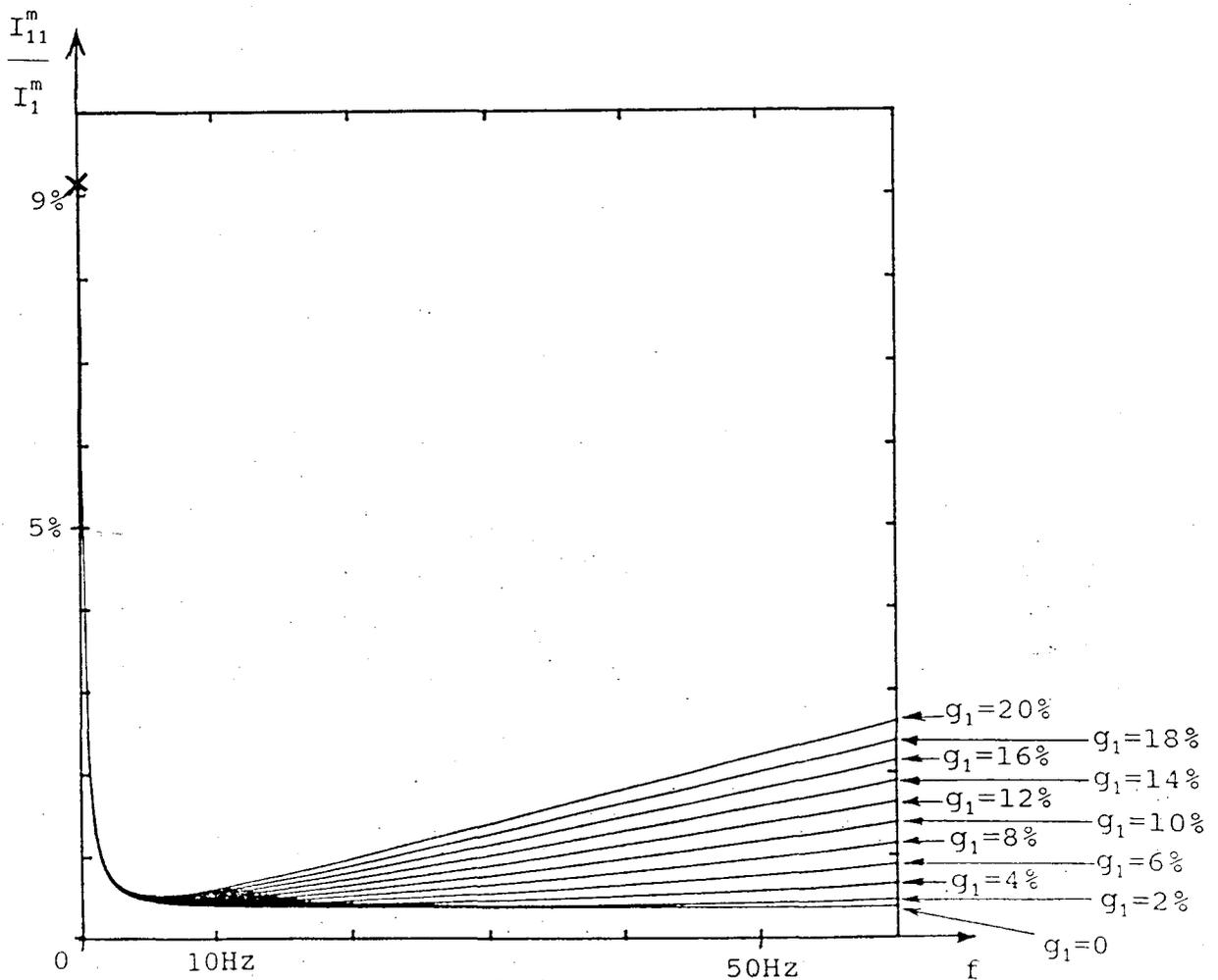


fig. 4-5

Rapport I_{11}^m/I_1^m en fonction de la fréquence

Cette figure montre que, dès que la fréquence statorique dépasse quelques hertz le courant magnétisant harmonique de rang 11 est inférieur à 3% du fondamental.

Le fait que le contenu harmonique du courant magnétisant soit négligeable et que le glissement relatif à un harmonique soit très proche de 1 conduit au schéma équivalent simplifié de la figure 4-6 valable pour les harmoniques.

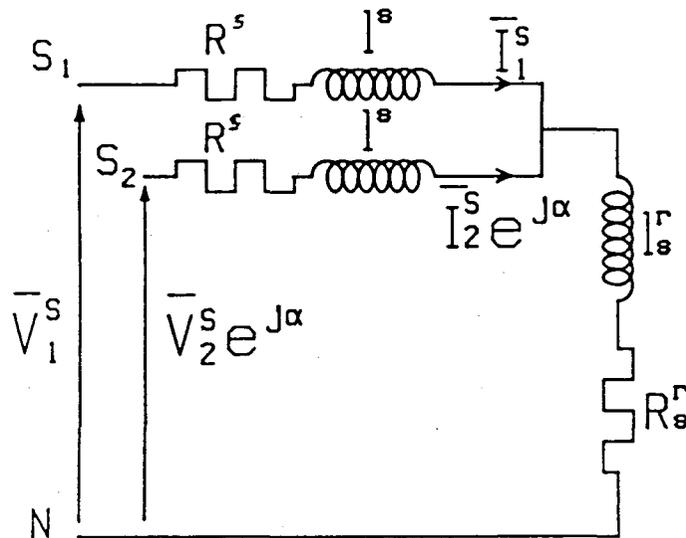


Fig. 4-6

Schéma équivalent pour les harmoniques

On peut également dire que les couples harmoniques sont produits essentiellement par l'interaction des harmoniques des courants statoriques avec le courant magnétisant fondamental.

La figure 4-7 illustre le principe de calcul du rang, de l'amplitude et de la phase de l'harmonique de couple produit par les courants primaires de rang 11. Les vecteurs espaces courants statoriques et magnétisant sont représentés à l'instant $t=0$. L'indice ajouté aux vecteurs espaces indique le rang de l'harmonique.

\bar{i}_{11}^m tourne dans le sens positif à la vitesse ω car la séquence du fondamental est directe tandis que le vecteur $\bar{i}_{11}^s + \bar{i}_{(1)11}^s$, de séquence inverse, tourne dans le sens négatif à la vitesse 11ω ; la phase à l'instant $t=0$ vaut π .

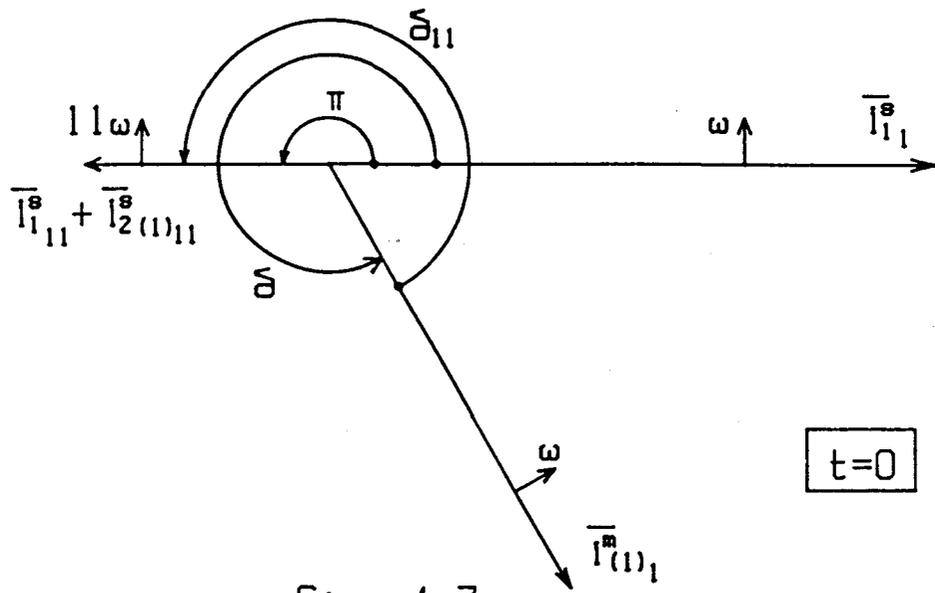


Fig. 4-7

Le couple Γ_{11} résultant de cette combinaison est donné par la relation suivante:

$$\Gamma_{11} = \frac{3}{2} \mathcal{L}_p^s \cdot \bar{i}_{(1)1}^m \wedge (\bar{i}_{11}^s + \bar{i}_{2(1)11}^s) \quad (4-42)$$

Le produit vectoriel peut être exprimé en fonction des modules des vecteurs et de l'angle δ_{11} qu'ils déterminent. La figure 4-7 montre que cet angle vaut:

$$\delta_{11} = -12\omega t + \pi + (2\pi - \delta) \quad (4-43)$$

L'expression du couple produit par cette combinaison est:

$$\frac{3}{2} \mathcal{L}_p^s \cdot I_1^m \sqrt{2} \cdot 2I_{11} \sqrt{2} \cdot \sin(12\omega t + \delta) \quad (4-44)$$

L'harmonique de courant de rang 11 contribue donc à la composante de couple de rang 12.

La figure 4-8 montre l'influence de l'harmonique de courant de rang 13 sur le couple. Le vecteur espace courant magnétisant est le même tandis que le vecteur espace représentant la somme $\bar{i}_{13}^s + \bar{i}_{2(1)13}^s$ tourne dans le sens positif à la vitesse 13ω ; sa phase à l'instant $t=0$ est nulle.

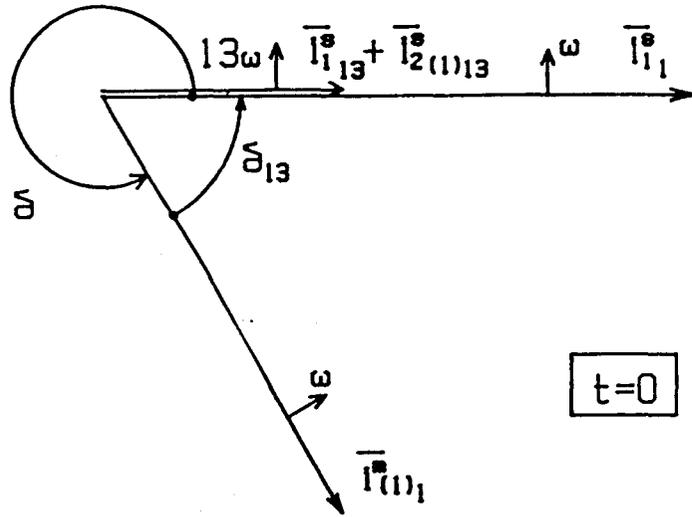


Fig. 4-8

Cette figure montre que l'angle déterminé par les 2 vecteurs vaut:

$$\delta_{13} = 12\omega t + 2\pi - \delta \quad (4-45)$$

Le couple résultant de cette combinaison est:

$$\frac{3}{2} \mathcal{L}_p^s \cdot I_1^m \sqrt{2} \cdot 2 I_{13} \sqrt{2} \cdot \sin(12\omega t - \delta) \quad (4-46)$$

L'harmonique de courant de rang 13 contribue aussi à la composante de couple de rang 12. La somme de ces 2 contributions donne:

$$\Gamma_{12} = 6 \mathcal{L}_p^s I_1^m [I_{11} \sin(12\omega t + \delta) + I_{13} \sin(12\omega t - \delta)] \quad (4-47)$$

En développant les sinus de cette relation on obtient:

$$\Gamma_{12} = 6 \mathcal{L}_p^s I_1^m [(I_{11} + I_{13}) \cos \delta \sin 12\omega t + (I_{11} - I_{13}) \sin \delta \cos 12\omega t] \quad (4-48)$$

Pour tracer l'harmonique de couple il est préférable de connaître son module et son argument, on pose:

$$\Gamma_{12} = |\Gamma_{12}| \sin(12\omega t + \varphi_{12}) \quad (4-49)$$

En identifiant avec la relation (4-48), on obtient:

$$|\Gamma_{12}| = 6 \mathcal{L}_p^s I_1^m \sqrt{I_{11}^2 + I_{13}^2 + 2 I_{11} I_{13} \cos 2\delta} \quad (4-50)$$

$$\text{tg} \varphi_{12} = \frac{I_{11} - I_{13}}{I_{11} + I_{13}} \cdot \text{tg} \delta \quad (4-51)$$

Les courants I_{11} et I_{13} peuvent être exprimés en fonction de la valeur efficace du fondamental I_1 . L'harmonique de couple de rang 12 est alors défini par les relations suivantes:

$$|\Gamma_{12}| = 6 \mathcal{L}_p^s I_1^m I_1 \sqrt{\left(\frac{1}{11}\right)^2 + \left(\frac{1}{13}\right)^2 + \frac{2}{11 \times 13} \cos 2\delta} \quad (4-52)$$

$$\operatorname{tg}\varphi_{12} = \frac{1}{12} \operatorname{tg}\delta$$

(4-53)

La figure 4-9 résulte de l'application numérique de la relation (4-52). Elle représente le module de l'harmonique de couple de rang 12 en fonction de la fréquence de l'onduleur pour diverses valeurs du glissement relatif au fondamental g_1 et pour un courant fondamental $I_1=10$ A.

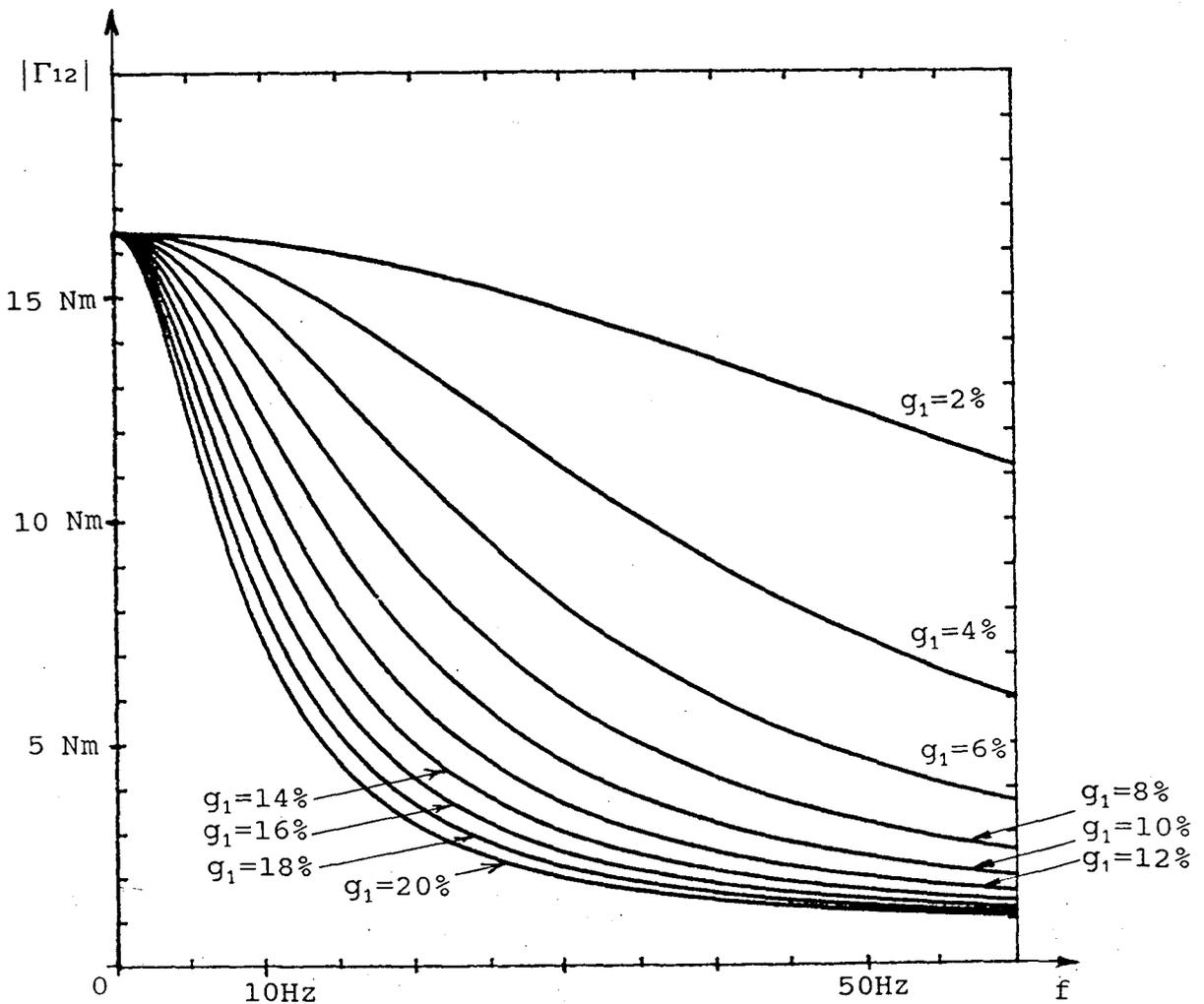


fig. 4-9

Amplitude du couple harmonique de rang 12 pour $I_1=10$ A

On peut remarquer que les valeurs des amplitudes des couples harmoniques les plus fortes sont obtenues pour les basses fréquences et pour les faibles valeurs du glissement g_1 . Ces valeurs sont à comparer au couple moyen Γ_{e0} , produit par les fondamentaux dans les mêmes conditions, donné à la figure 4-10.

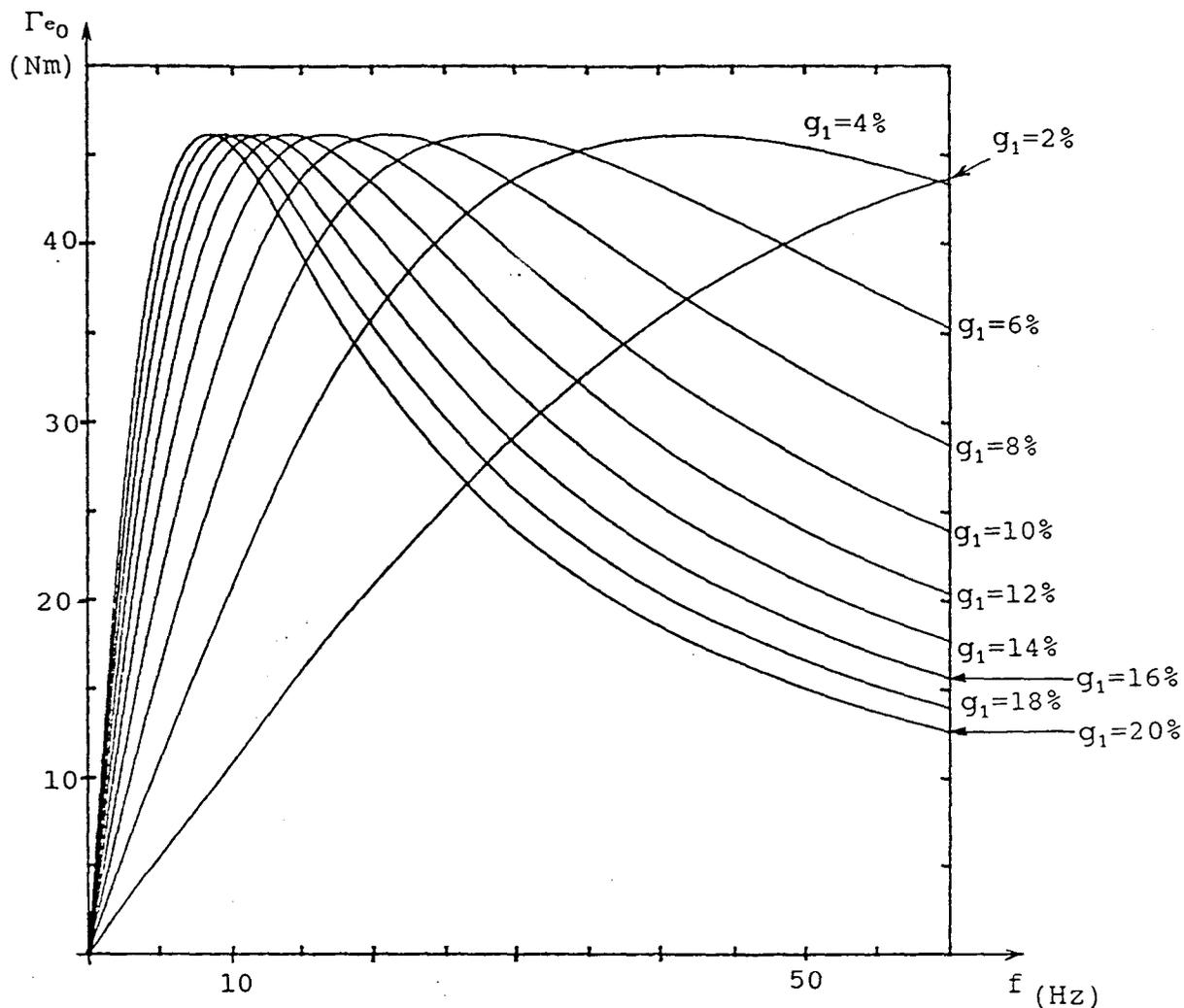


fig. 4-10
Couple moyen pour $I_1=10$ A

Etant donné que, pour un glissement raisonnable, le couple moyen est faible aux basses fréquences, les perturbations provoquées par les couples harmoniques seront d'autant plus importantes que la fréquence est basse. La figure 4-11 illustre ce phénomène en donnant le rapport $|\Gamma_{12}|/\Gamma_{e0}$ en fonction de la fréquence dans les mêmes conditions.

On peut constater que la valeur relative de l'harmonique 12 est très importante pour les fréquences inférieures à 15 à 20 Hz

La figure 4-12 donne l'argument ϕ_{12} de l'harmonique 12 du couple en fonction des mêmes grandeurs. Cet argument est calculé avec la relation (4-53).

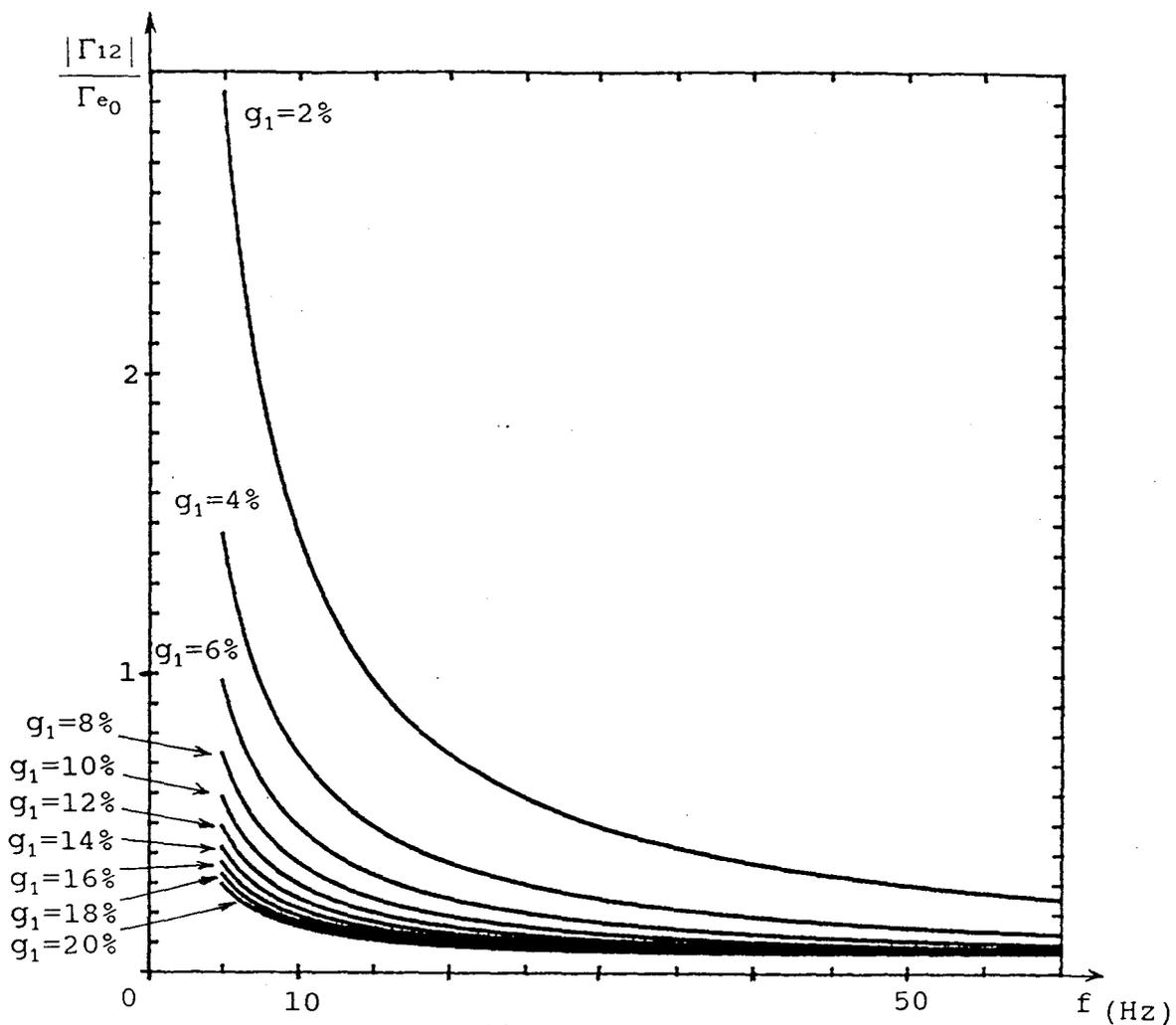


fig. 4-11

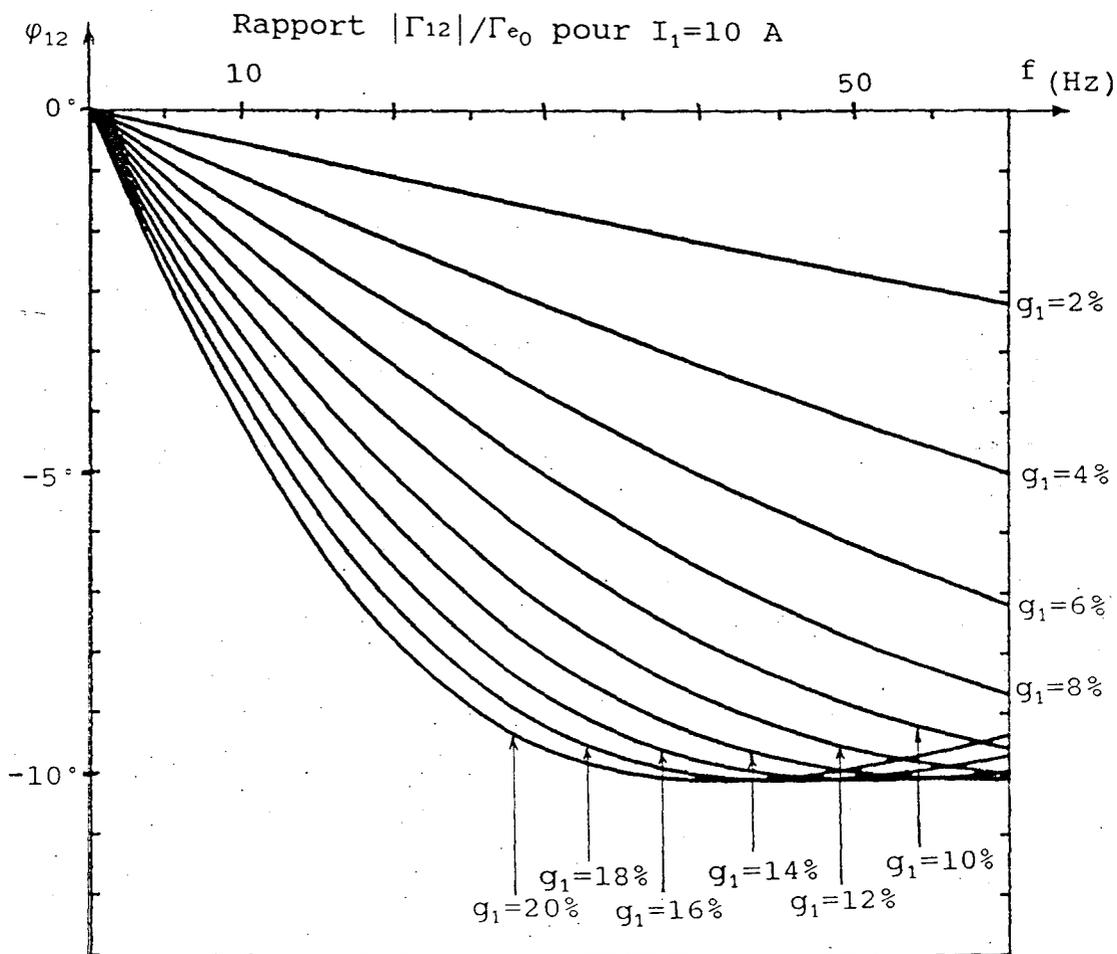


fig. 4-12

Phase du couple harmonique de rang 12

La méthode de calcul est généralisable. En effet le tableau 4-1 montre que, pour les harmoniques de courant de rang $12k_i-1$, l'argument du vecteur espace $\overline{i}_1^s + \overline{i}_2^s(1)$ vaut π . La construction graphique est semblable à celle de la figure 4-7; seul le module du vecteur $\overline{i}_1^s + \overline{i}_2^s(1)$ diffère. De même le cas des harmoniques de courant de rang $12k_d+1$ est semblable à celui de l'harmonique 13. Les relations (4-52) et (4-53) sont donc généralisables. Elles conduisent à:

$$|\Gamma_n| = 6 \mathcal{L}_p^s I_1^m I_1 \sqrt{\left(\frac{1}{12k_i-1}\right)^2 + \left(\frac{1}{12k_d+1}\right)^2 + \frac{2}{(12k_i-1)(12k_d+1)} \cos 2\delta} \quad (4-54)$$

et

$$\text{tg} \varphi_n = \frac{1}{n} \cdot \text{tg} \delta \quad (4-55)$$

avec $n=12k_i-1=12k_d+1$.

L'argument des couples harmoniques tend vers 0 quand le rang s'élève.

IV 2 2 Cas de l'alimentation en tension

Lorsque la machine est alimentée par deux onduleurs de tension, les courants statoriques résultent des tensions imposées aux primaires. Ces courants peuvent être calculés en utilisant le schéma équivalent monophasé de la figure 4-1. Les couples harmoniques se déduisent des courants statoriques et du fondamental du courant magnétisant comme précédemment. La forme d'onde de la tension simple imposée par le premier onduleur aux bornes de la phase A est donnée par la figure 4-13 où la tension continue d'entrée de l'onduleur est notée E.

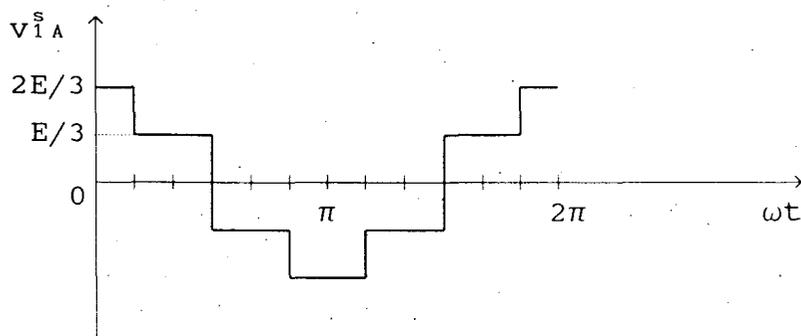


fig. 4-13

La décomposition en série de Fourier de cette onde donne:

$$\bar{v}_{1A}^s = \frac{2E}{\pi} \left[\cos \omega t + \frac{1}{5} \cos 5\omega t - \frac{1}{7} \cos 7\omega t - \frac{1}{11} \cos 11\omega t + \frac{1}{13} \cos 13\omega t + \dots \right] \quad (4-56)$$

Le vecteur espace correspondant au système triphasé de tensions appliqué au premier stator, compte tenu de la séquence des systèmes harmoniques, peut être exprimé par la série suivante:

$$\bar{v}_1^s = \frac{2E}{\pi} \left[e^{j\omega t} + \frac{1}{5} e^{-j5\omega t} - \frac{1}{7} e^{j7\omega t} - \frac{1}{11} e^{-j11\omega t} + \frac{1}{13} e^{j13\omega t} + \dots \right] \quad (4-57)$$

La seconde étoile est alimentée par un deuxième onduleur triphasé dont les commandes sont retardées de $\alpha = \pi/6$ par rapport à celles du premier. Le vecteur espace correspondant est obtenu en substituant $(\omega t - \pi/6)$ à ωt .

$$\bar{v}_2^s = \frac{2E}{\pi} \left[e^{j(\omega t - \pi/6)} + \frac{1}{5} e^{-j5(\omega t - \pi/6)} - \frac{1}{7} e^{j7(\omega t - \pi/6)} - \frac{1}{11} e^{-j11(\omega t - \pi/6)} + \frac{1}{13} e^{j13(\omega t - \pi/6)} + \dots \right] \quad (4-58)$$

Pour utiliser le schéma monophasé équivalent il faut exprimer les vecteurs espaces dans le repère lié à l'étoile 1; Pour $\alpha = \pi/6$, il vient:

$$\bar{v}_{2(1)}^s = \bar{v}_2^s e^{j\alpha} = \frac{2E}{\pi} \left[e^{j\omega t} + \frac{1}{5} e^{-j(5\omega t - \pi)} - \frac{1}{7} e^{j(7\omega t - \pi)} - \frac{1}{11} e^{-j11\omega t} + \frac{1}{13} e^{j13\omega t} + \dots \right] \quad (4-59)$$

Les relations précédentes montrent que, en ce qui concerne les harmonique 5 et 7, les vecteurs espaces tension appliqués à chacun des primaires sont égaux et opposés. Les valeurs efficaces I_5 et I_7 des courants harmoniques de rang 5 et 7 peuvent être calculées avec le schéma équivalent de la figure 4-1. En appelant V_5 et V_7 les valeurs efficaces des tensions harmoniques de rang 5 et 7, on obtient:

$$I_5 = \frac{2V_5}{\sqrt{(2R^s)^2 + (2l^s \cdot 5\omega)^2}} \quad (4-60)$$

et

$$I_7 = \frac{2V_7}{\sqrt{(2R^s)^2 + (2l^s \cdot 7\omega)^2}} \quad (5-61)$$

Ces courants sont très importants, surtout pour les fréquences basses, car ils ne sont limités que par la résistance des enroulements statoriques et l'inductance de fuites entre les 2 primaires fortement couplés.

La figure 4-14 donne les valeurs efficaces de ces courants en fonction de la fréquence de l'onduleur en supposant la machine alimentée de façon à maintenir le rapport V_1/f constant et correspondant au fonctionnement nominal. V_1 est la valeur efficace du fondamental de la tension.

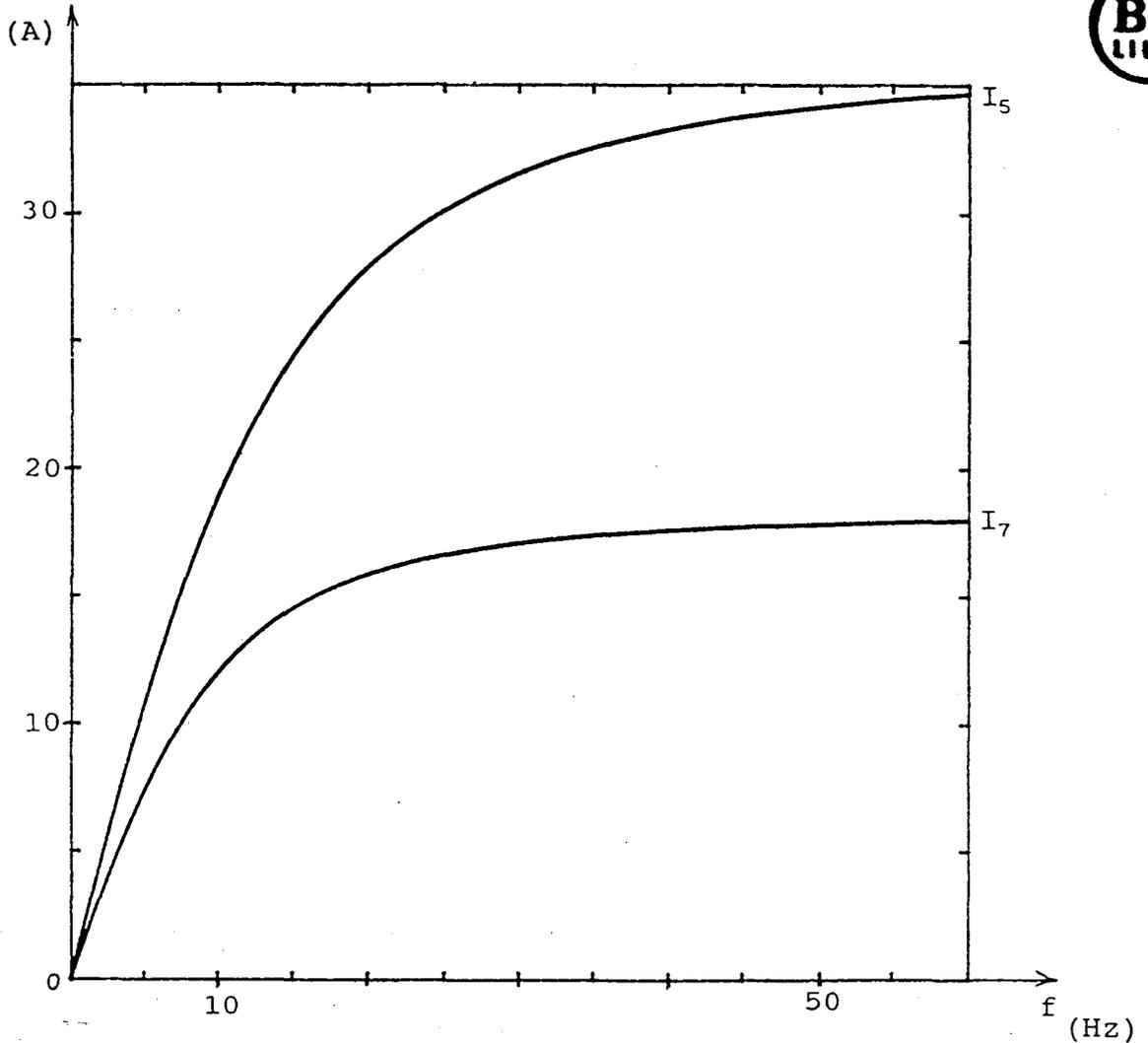


fig. 4-14

Valeur efficace des courants harmoniques 5 et 7

pour $\frac{V_1}{f} = 4,4 \text{ V/Hz}$

Le schéma équivalent monophasé de la figure 4-3 permet de calculer le courant statorique fondamental:

$$\bar{I}_{i1}^s = \bar{V}_{i1}^s \frac{R_s^r + j(\mathcal{L}_p^s + l_s^r)g_1\omega}{\left(\frac{R^s}{2} + j\frac{l^s}{2}\omega\right) [R_s^r + j(\mathcal{L}_p^s + l_s^r)g_1\omega] + j\mathcal{L}_p^s(R_s^r + j l_s^r g_1\omega)} \quad (4-62)$$

La valeur efficace de ce courant vaut:

$$I_1 = \frac{V_1 \cdot \sqrt{R_s^r + [(\mathcal{L}_p^s + l_s^r) g_1 \omega]^2}}{\sqrt{\left[\frac{R^s R_s^r}{2} - \frac{l^s}{2} (\mathcal{L}_p^s + l_s^r) g_1 \omega^2 - \mathcal{L}_p^s l_s^r g_1 \omega^2 \right]^2 + \left[\frac{R^s}{2} (\mathcal{L}_p^s + l_s^r) g_1 + \frac{l^s R_s^r}{2} + \mathcal{L}_p^s R_s^r \right]^2 \cdot \omega^2}}$$

Les figures 4-16 et 4-17 représentent respectivement les rapports I_5/I_1 et I_7/I_1 dans le cas d'une alimentation par un onduleur de tension à 120° fonctionnant à V_1/f constant.

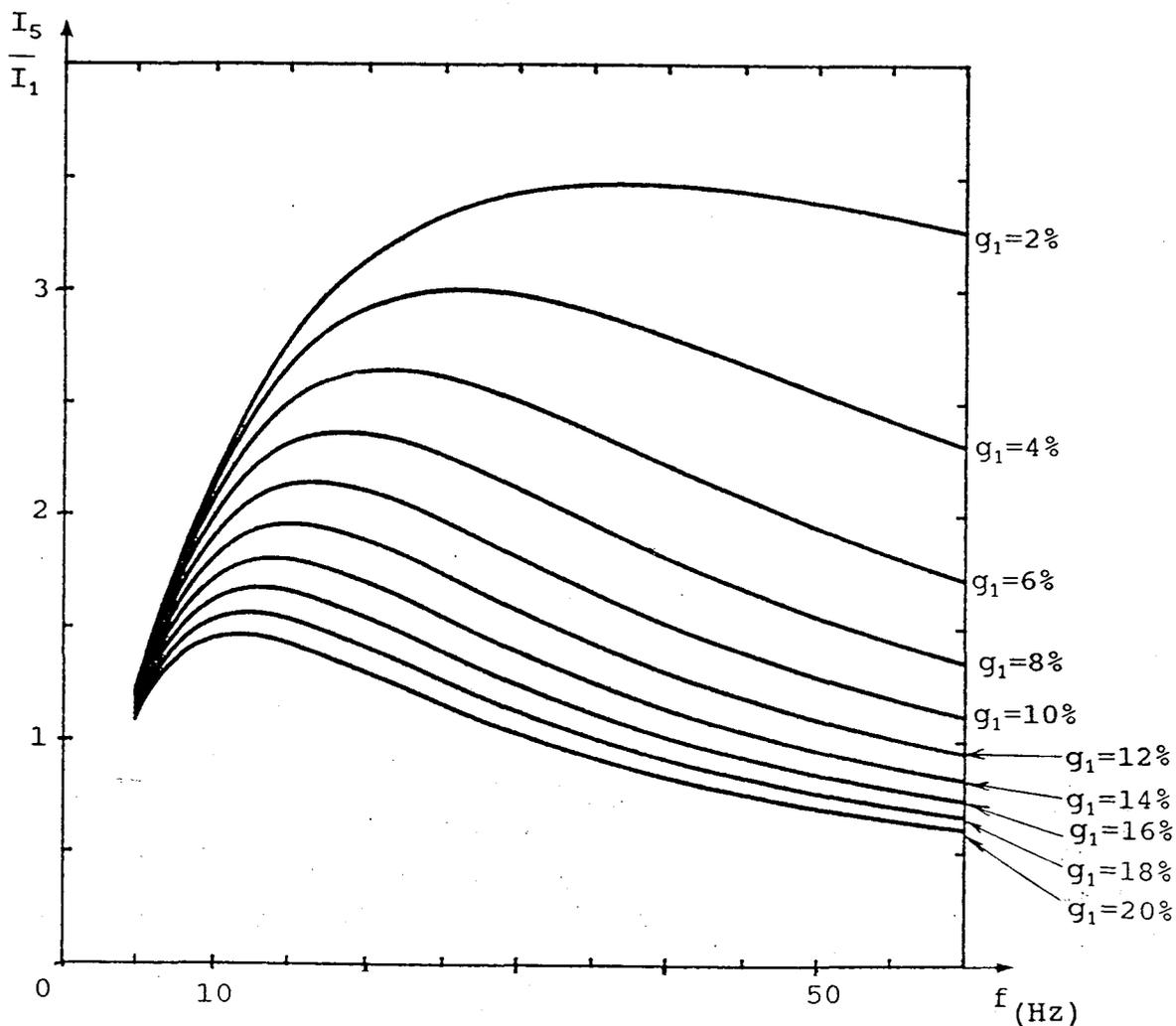


fig. 4-15
 Rapport $\frac{I_5}{I_1}$ pour $\frac{V_1}{f} = 4,4$ V/Hz

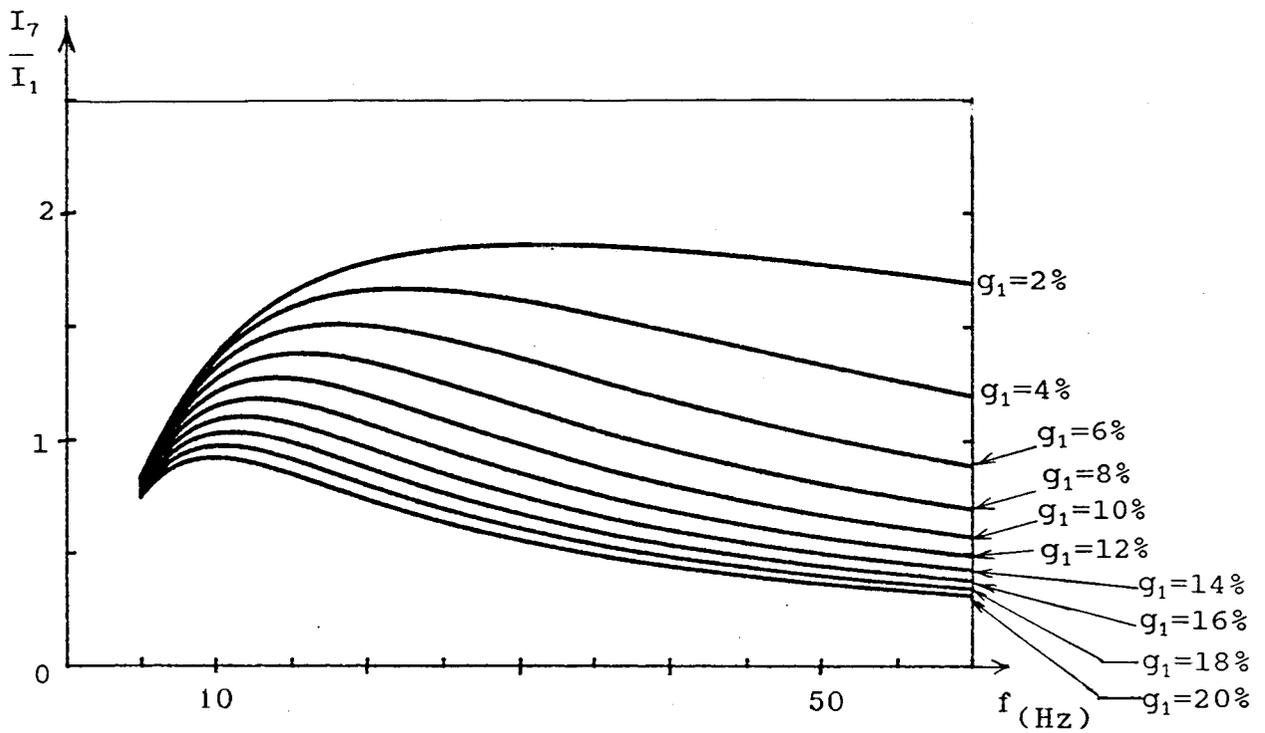


fig. 4-16

Rapport $\frac{I_7}{I_1}$ pour $\frac{V_1}{f} = 4,4$ V/Hz

Ces figures montrent que, dans tous les cas, la valeur efficace des harmoniques 5 et 7 de courant est déraisonnable et conduit à des pertes Joules statoriques prohibitives.

La machine asynchrone double étoile ne doit pas être alimentée directement par deux onduleurs de tension à 120° ou par des sources de tension dont les harmoniques 5 et 7 ne sont pas éliminés. Ces résultats sont en accord avec des travaux antérieurs [9] [10].

IV 3 Comparaison des couples harmoniques produits par les machines double étoile et simple étoile alimentées en courant

IV 3 1 Machine simple étoile

Il est possible de calculer les couples harmoniques produits par la machine asynchrone simple étoile en appliquant la méthode du paragraphe IV 2 1 2. qui est basée sur le schéma équivalent monophasé. Comme le stator est unique, les effets des courants harmoniques de rang 5, 7, 17, 19, 29, 31, ... sur le couple ne s'annulent pas.

Si on néglige les harmoniques du courant magnétisant, la contribution de l'harmonique de courant de rang 5 peut se calculer par une méthode analogue à celle exposée précédemment pour le rang 11 car les séquences et les phases à l'origine sont les mêmes. La figure donnant la position des vecteurs espaces courant à l'instant $t=0$ est analogue à la figure 4-7.

En notant Γ'_5 la contribution du courant harmonique de rang 5 sur le couple, I_1^m la valeur efficace du courant magnétisant fondamental, δ' son déphasage par rapport au courant statorique fondamental et \mathcal{L}'_p^s l'inductance cyclique principale du stator de la machine simple étoile équivalente, on obtient:

$$\Gamma'_5 = \frac{3}{2} \mathcal{L}'_p^s \cdot I_1^m \sqrt{2} \cdot I_5 \sqrt{2} \cdot \sin(6\omega t + \delta') \quad (4-63)$$

En ce qui concerne la contribution de l'harmonique de courant de rang 7, le diagramme est analogue à celui de la figure 4-8. On en déduit:

$$\Gamma'_7 = \frac{3}{2} \mathcal{L}'_p^s \cdot I_1^m \sqrt{2} \cdot I_7 \sqrt{2} \cdot \sin(6\omega t - \delta') \quad (4-64)$$

La somme de ces deux termes forme l'harmonique de couple de rang 6.

$$\Gamma'_6 = 3\mathcal{L}'_p^s I_1^m [I_5 \sin(6\omega t + \delta') + I_7 \sin(6\omega t - \delta')] \quad (4-65)$$

Le module $|\Gamma'_6|$ et l'argument φ'_6 de cette grandeur ont pour expression:

$$|\Gamma'_6| = 3\mathcal{L}'_p^s I_1^m \sqrt{I_5^2 + I_7^2 + 2I_5 I_7 \cos 2\delta'} \quad (4-66)$$

$$\operatorname{tg} \varphi'_6 = \frac{I_5 - I_7}{I_5 + I_7} \operatorname{tg} \delta' \quad (4-67)$$

Il est possible de généraliser ces expressions au calcul des autres couples harmoniques en appelant n' le rang de l'harmonique de

couple considéré ($n'=6ki=6ka$) et en exprimant les valeurs efficaces des courants harmoniques statoriques par rapport à celle du fondamental I_1 .

$$|\Gamma'_n| = 3\mathcal{L}'_p I_1^m I_1 \sqrt{\left(\frac{1}{6ki-1}\right)^2 + \left(\frac{1}{6ka+1}\right)^2 + \frac{2}{(6ki-1)(6ka+1)} \cos 2\delta'} \quad (4-68)$$

$$\text{tg}\varphi_{n'} = \frac{1}{n'} \text{tg}\delta' \quad (4-69)$$

Pour calculer le courant magnétisant on utilise le schéma équivalent monophasé usuel rappelé à la figure 4-17 où g_1 est le glissement relatif au fondamental.

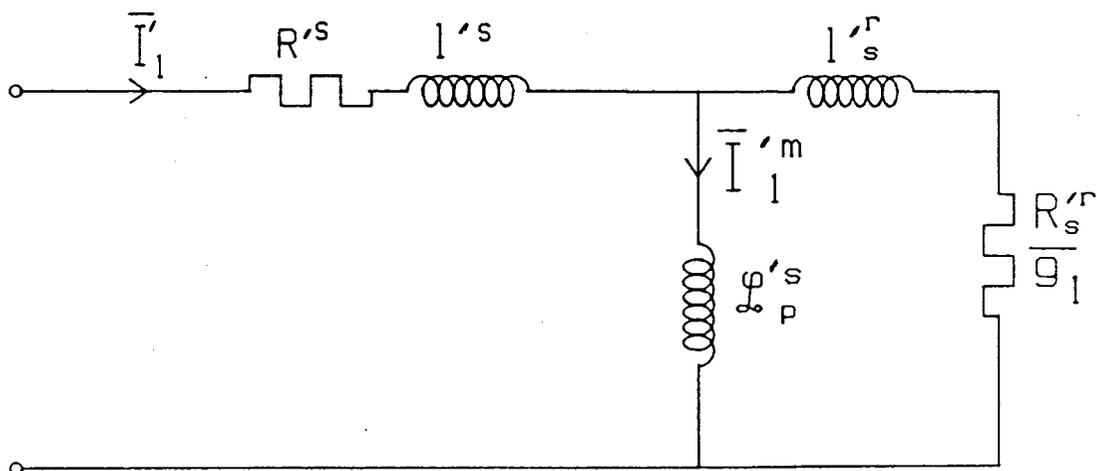


Fig. 4-17

on obtient:

$$I_1^m = I_1 \frac{\sqrt{[R'_s{}^2 + l'^r(\mathcal{L}'_p + l'^r)(g_1\omega)^2]^2 + [R'_s l'_p g_1\omega]^2}}{R'_s{}^2 + [(\mathcal{L}'_p + l'^r)g_1\omega]^2} \quad (4-70)$$

et:

$$\delta' = -\text{Arctg} \frac{R'_s l'_p g_1\omega}{R'_s{}^2 + l'^r(\mathcal{L}'_p + l'^r)(g_1\omega)^2} \quad (4-71)$$

Les paramètres de la machine simple étoile équivalente ont été déterminés au paragraphe III 1 10 1. Pour compléter le schéma équivalent précédent il faut déterminer le rapport de

transformation m' de cette machine.

$$m' = \sqrt{\frac{\mathcal{L}'_p^s}{\mathcal{L}_p^r}} = \sqrt{\frac{\mathcal{L}_p^s \cdot 2(1+\cos\alpha)}{\mathcal{L}_p^r}} = m\sqrt{2(1+\cos\alpha)}$$

Ceci autorise le calcul des grandeurs rotoriques ramenées au stator $R'_s = m'^2 R^r$ et $l'_s = m'^2 l^r$. Pour la machine expérimentale les éléments du schéma équivalent valent : $\mathcal{L}'_p^s = 299$ mH; $m' = 5,96$; $R'_s = 3,41$ Ω ; $l'_s = 13,46$ mH; $R^s = 0,8$ Ω ; $l^s = 1,56$ mH.

La figure 4-18 représente le spectre de couple obtenu par la relation (4-68) quand la machine asynchrone simple étoile est alimentée par un onduleur de courant à 120° fonctionnant à 15Hz, le courant continu d'entrée de l'onduleur valant 8 A et le rotor étant à l'arrêt. Dans ces conditions, la valeur efficace du courant statorique fondamental vaut 6,24 A, celle du courant magnétisant 0,77 A et l'angle $\delta'_1 = -63^\circ$. Ces valeurs numériques correspondent aux conditions expérimentales décrites au paragraphe suivant.

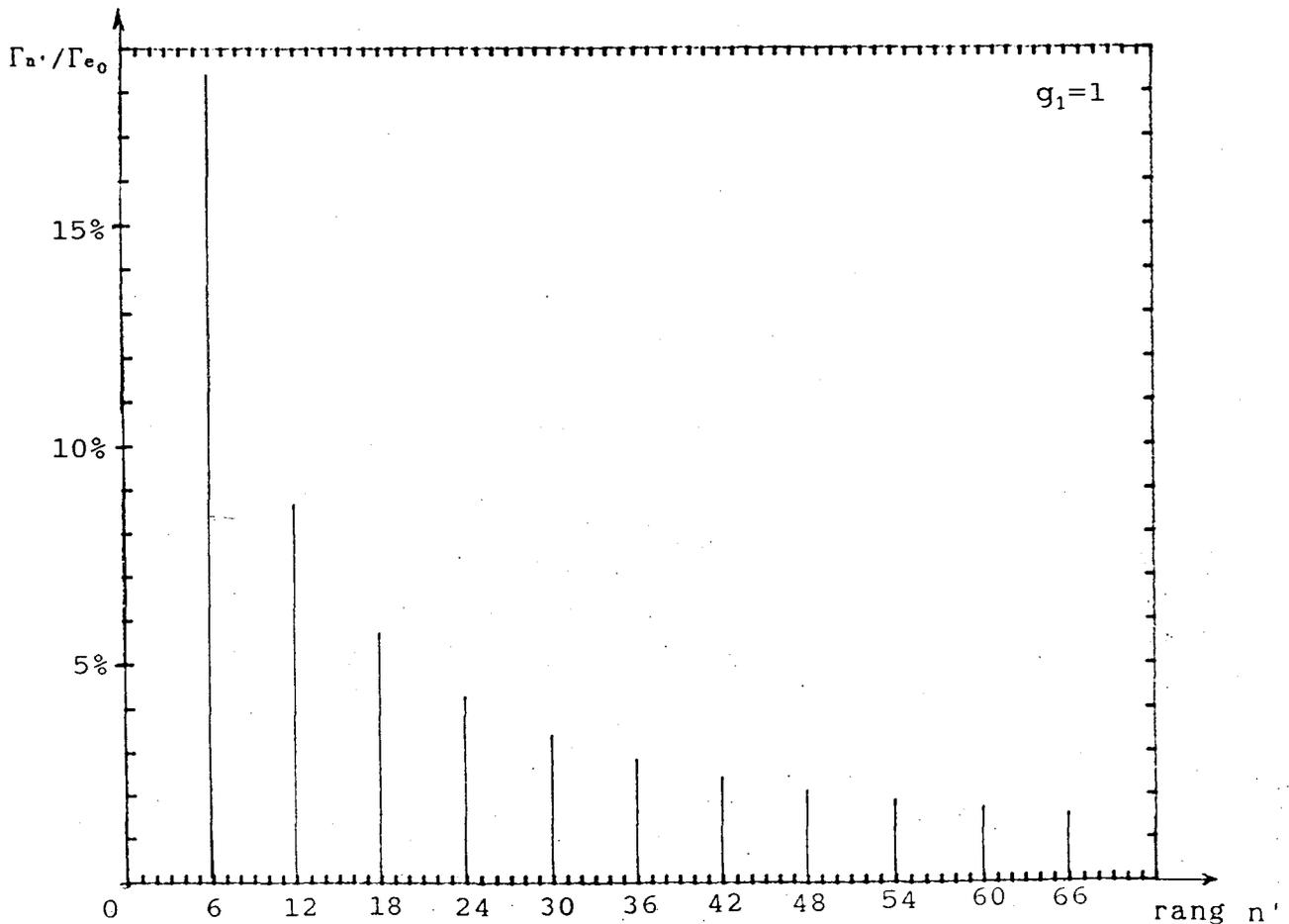


fig. 4-18

Spectre de couple de la machine simple étoile

IV 3 2 Machine double étoile

La figure 4-19 est obtenue dans les mêmes conditions pour la machine double étoile alimentée par deux onduleurs de courant à 120° fournissant des ondes identiques mais décalées de 30° .

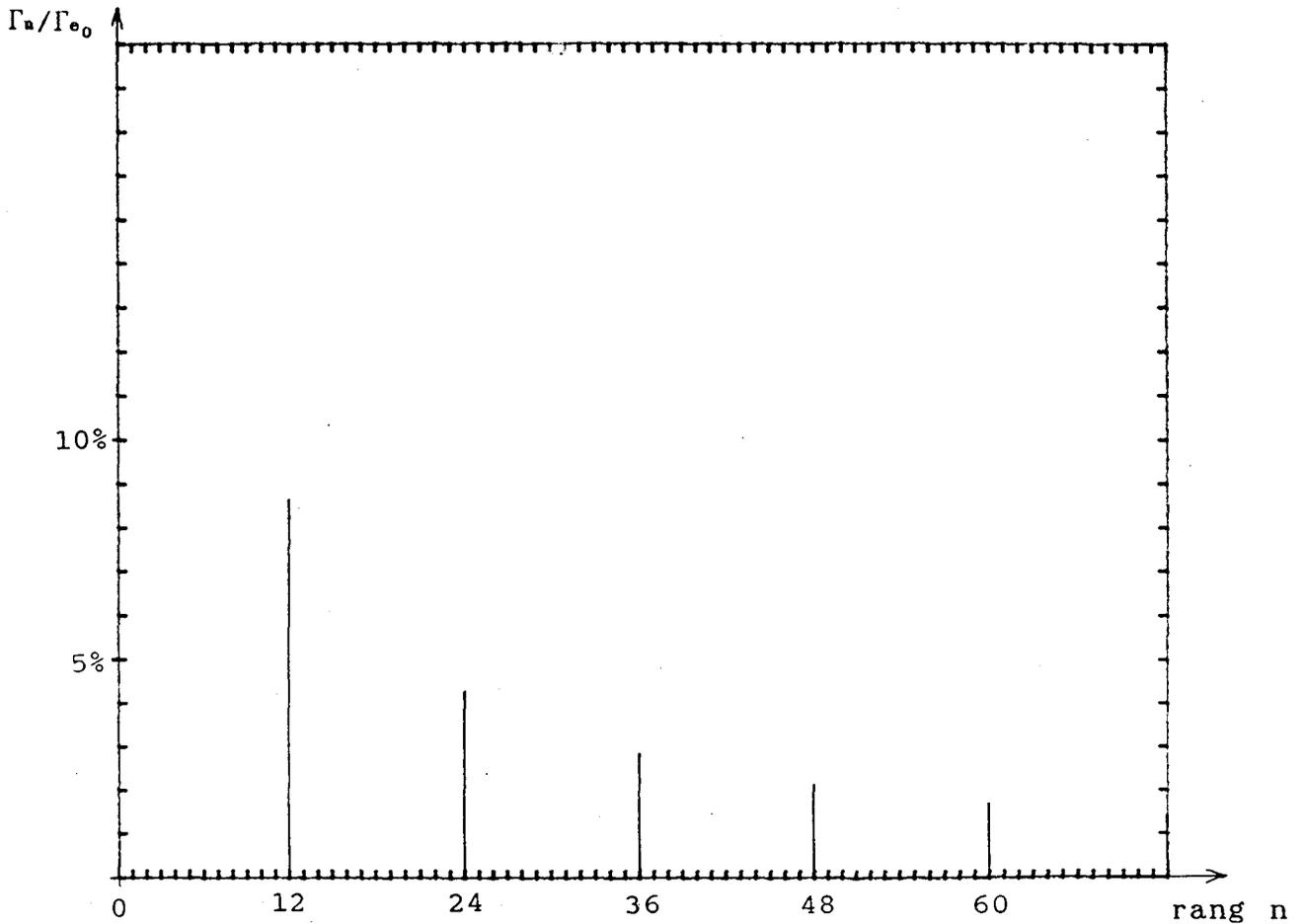


fig. 4-19

Spectre de couple de la machine double étoile

Cette étude comparative montre que, pour la machine double étoile, les harmoniques de couple de rangs 6, 18, 30, 42... ont disparu alors que ceux de rangs 12, 24, 36, 48... gardent la même valeur.

IV 3 3 Relevés expérimentaux

Il est très difficile, donc coûteux, de mesurer un couple dynamique au delà d'une certaine fréquence. En fait, ce ne sont pas les couples harmoniques eux-mêmes qui sont gênants mais les

vibrations mécaniques qu'ils provoquent. L'étude expérimentale sera menée sur les vibrations générées par les couples harmoniques. Elle consiste à comparer les vibrations produites par la machine double étoile à celles provoquées par la machine simple étoile équivalente dans les mêmes conditions d'environnement et d'alimentation.

Comme les champs tournants harmoniques ont une vitesse relative par rapport au rotor très grande, il a été décidé de mesurer les vibrations du rotor maintenu à l'arrêt par un système mécanique suffisamment souple pour amortir le moins possible les vibrations du rotor.

IV 3 2 1 Dispositif expérimental

Les vibrations du rotor sont mesurées par un accéléromètre piezzo-électrique fixé sur le plateau d'accouplement monté rigidement sur l'arbre de la machine comme le montre la figure 4-20.

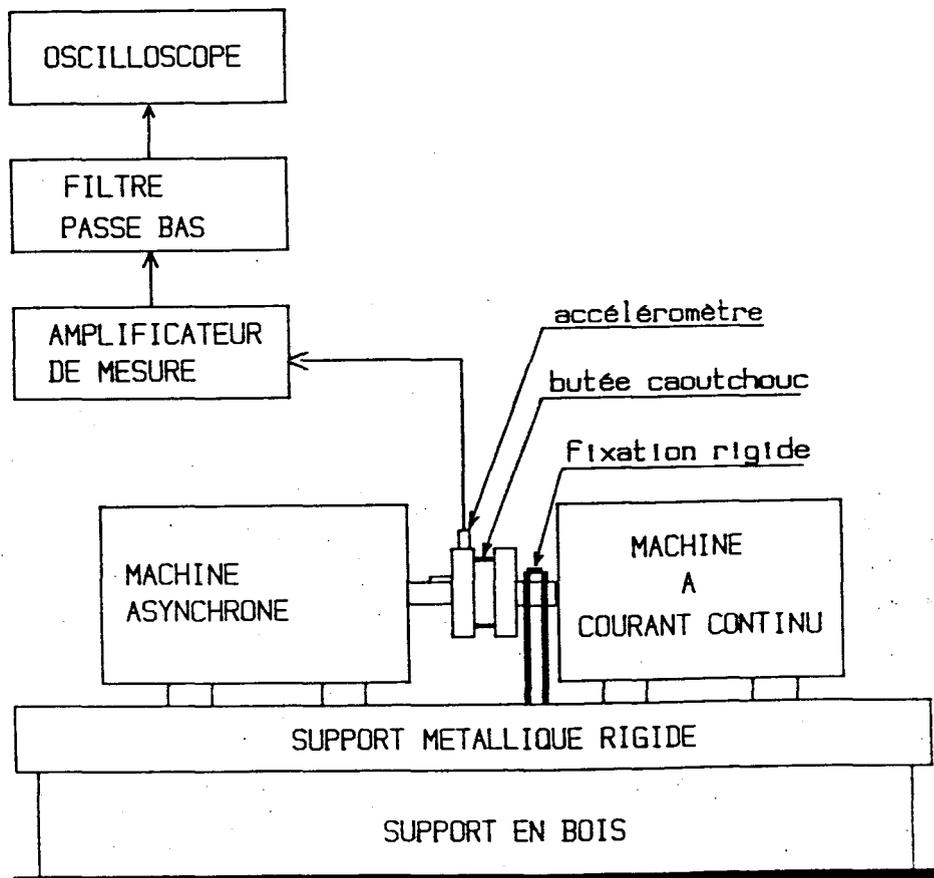


Fig. 4-20
dispositif expérimental

L'autre plateau d'accouplement est bloqué en rotation de façon à maintenir le rotor à l'arrêt. Les tampons amortisseurs en caoutchouc séparant les deux parties de l'accouplement sont comprimés par le couple moyen. Sous l'action des variations du couple, leur élasticité autorise un léger déplacement du rotor qui est fonction des couples harmoniques. Ce dispositif permet donc la mesure des vibrations provoquées par les couples harmoniques.

L'accéléromètre est fixé sur la partie accessible de plus grand diamètre de façon à le soumettre aux vibrations de plus grandes amplitudes. Pour avoir la possibilité de comparer les mesures, les positions du rotor et de l'accéléromètre ne doivent pas changer. Seul le couplage électrique des enroulements de la machine est modifié. La chaîne de mesure est constituée de l'accéléromètre connecté à son amplificateur de mesure par un câble blindé d'une longueur aussi faible que possible de façon à capter le minimum de parasites rayonnés par les onduleurs. Malgré cette précaution l'expérience a montré que le signal de sortie de l'amplificateur comporte des composantes à la fréquence de découpage des onduleurs MLI, 28 kHz, d'une amplitude comparable au signal basse fréquence utile. Il a donc été nécessaire d'introduire un filtre passe bas du premier ordre, réglé à 2 kHz, au seul endroit accessible de la chaîne de mesure: la sortie de l'amplificateur. Les vibrations très basses fréquences, provoquées par l'environnement, sont éliminées par le filtre passe haut, interne à l'amplificateur, dont la fréquence de coupure vaut 22,4 Hz.

a) La résonance mécanique

Avant d'effectuer les mesures proprement dites il faut évaluer la fréquence de résonance du système mécanique formé par le plateau d'accouplement, l'arbre et le rotor. En fait cet ensemble forme un pendule de torsion dont les paramètres principaux sont, d'une part, les moments d'inertie du rotor et du plateau d'accouplements et, d'autre part, l'élasticité de l'arbre. La figure 4-21 est l'enregistrement résultant d'un choc tangentiel au niveau de la clavette assurant la liaison mécanique entre l'arbre et l'accouplement.

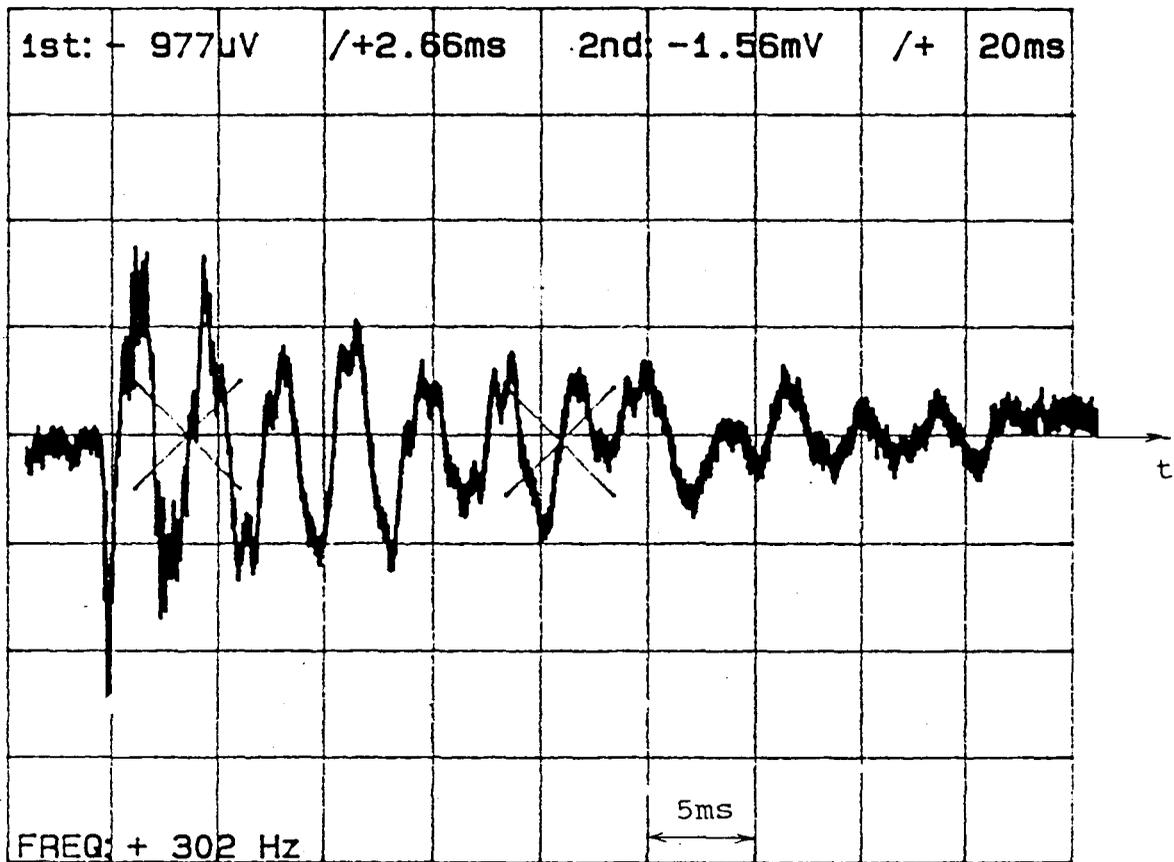


fig.4-21

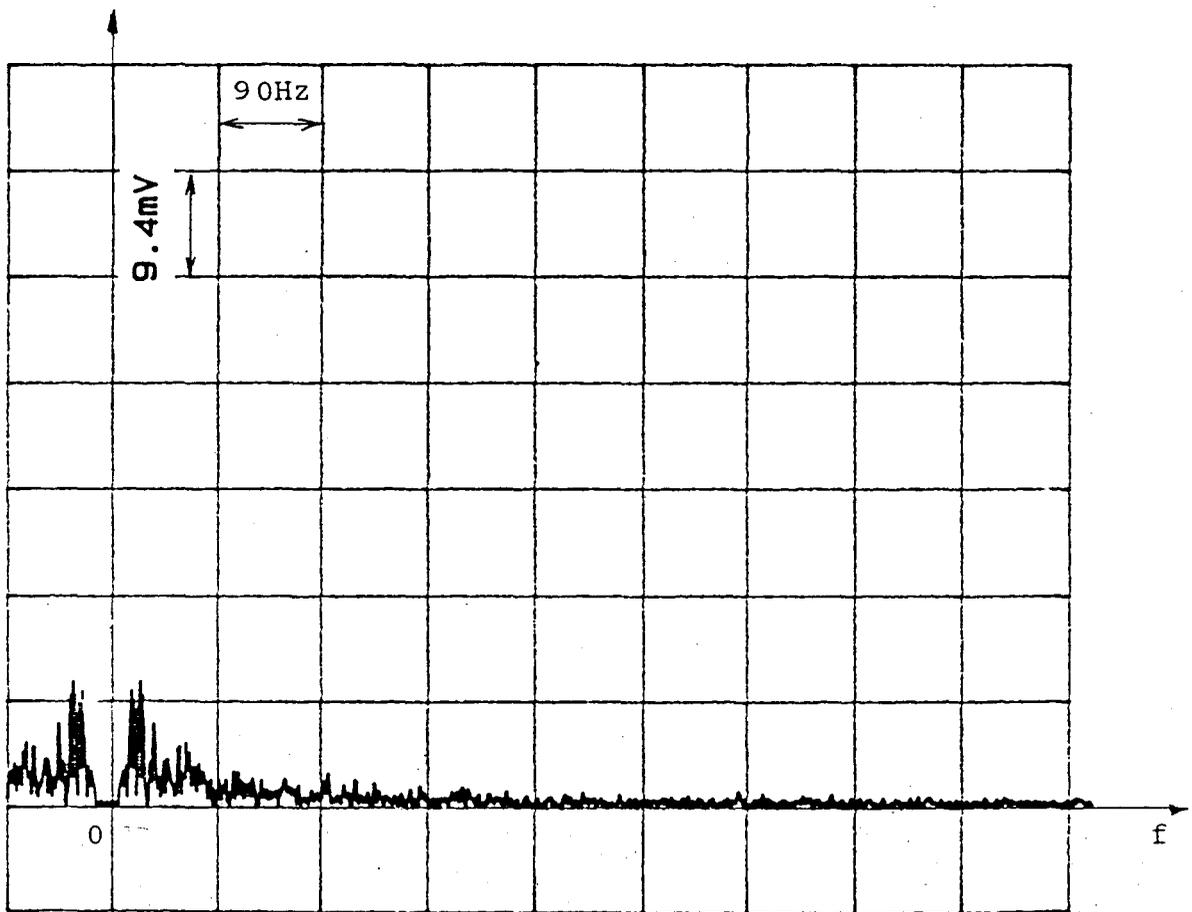
Essai de choc

Cet essai montre que la fréquence naturelle du système mécanique formé par le rotor, l'arbre et le plateau d'accouplement est voisine de 300 Hz. On peut donc considérer que, pour des fréquences inférieures à 300 Hz, cet ensemble est rigide et transmet les vibrations.

Pour l'essai proprement dit, la fréquence des onduleurs est choisie en fonction de ce phénomène: les principaux couples harmoniques doivent avoir une fréquence nettement différente de la fréquence naturelle du système mécanique. Les essais seront effectués à 15 Hz de façon à ce que les fréquences des harmoniques 6 et 12, valant respectivement 90 Hz et 180 Hz, soient nettement inférieures à la fréquence naturelle du système mécanique.

b) Le bruit de fond de la chaîne de mesure

La machine n'étant pas isolée mécaniquement du bâtiment, on mesure en permanence des vibrations aléatoires d'amplitude relativement stable en l'absence d'alimentation de la machine. La figure 4-22 est le résultat de l'analyse spectrale du bruit de fond obtenu quand les divers appareils environnant, strictement indispensables à l'essai, fonctionnent (alimentation de puissance, ventilateurs des appareils de mesure et de refroidissement des onduleurs...).



REG1 is result of FOURIER TRANSFORM function.92-11-16
VER: + 9.4mV HOR: +89.9 Hz 18: 24: 26

fig. 4-22

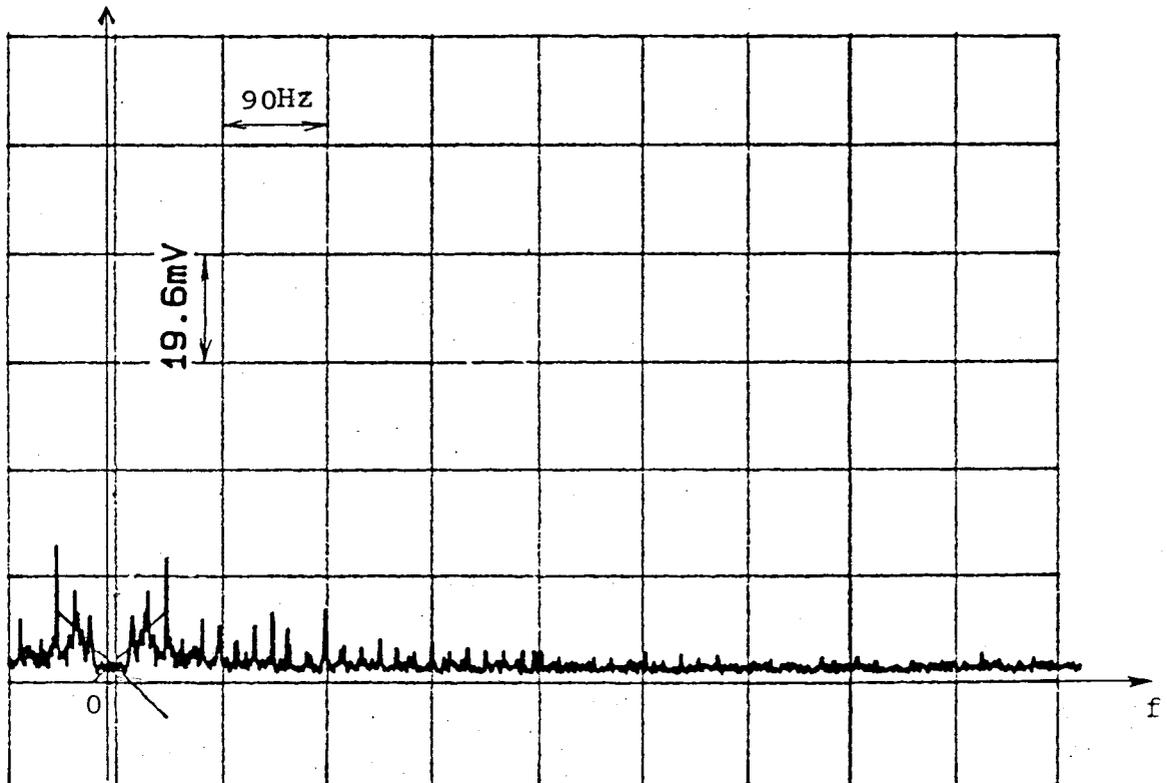
Bruit de fond de la chaîne de mesure dû à l'environnement

On observe un ensemble de raies d'amplitude voisine de 10 mV pour des fréquences inférieures à 50 Hz environ.

c) L'essai en sinusoïdal

Cet essai a pour but d'observer les vibrations provoquées par des phénomènes différents de celui que nous étudions. Y. GUEGAN a montré l'existence de couples harmoniques de rang 6, 12, 18... provoqués par la répartition non sinusoïdale de la f.m.m. le long de l'entrefer [22]. Ces couples harmoniques existent même si les courants statoriques et rotoriques sont sinusoïdaux.

D'après les hypothèses de départ, si la machine est alimentée en sinusoïdal, ces couples harmoniques sont négligés. La figure 4-23 est l'analyse spectrale des vibrations produites par la machine simple étoile connectée à un onduleur MLI fournissant un système triphasé équilibré de courants sinusoïdaux de fréquence 15 Hz et de valeur efficace 5,5 A.



REG1 is result of FOURIER TRANSFORM function.92-11-16

VER: +19.6mV

HOR: +89.9 Hz

18: 38: 01

fig. 4-23

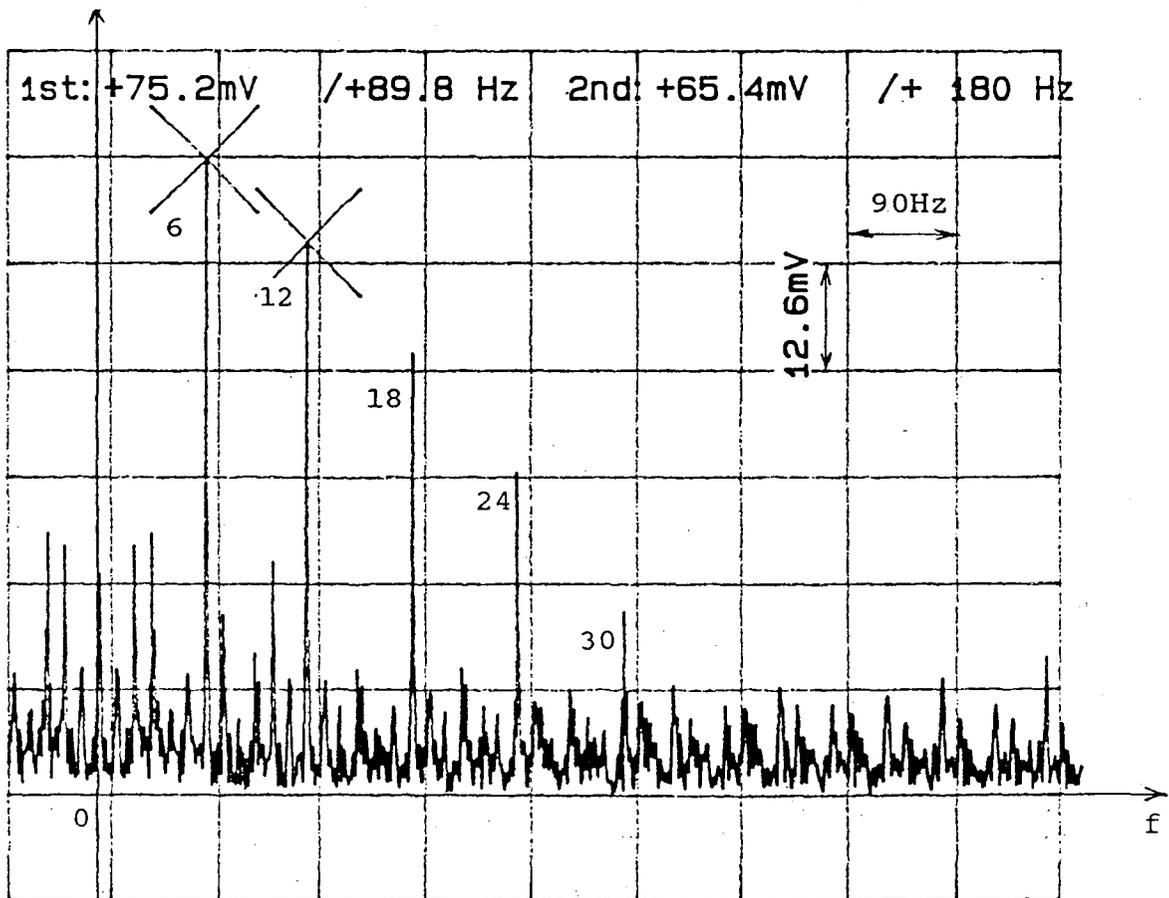
Machine simple étoile alimentée en sinusoïdal

Nous constatons l'existence d'un ensemble de raies dont la valeur est inférieure à 23 mV.

Ces essais permettent de définir un niveau au-dessous duquel les mesures ne sont pas significatives pour les phénomènes que nous voulons observer. Ce niveau est voisin de 20 mV.

IV 3 2 2 Vibrations de la machine simple étoile

La figure 4-24 est le résultat de l'analyse spectrale des vibrations produites par la machine simple étoile alimentée par des créneaux de courant à 120° d'amplitude $I'=8$ A.



REG1 is result of FOURIER TRANSFORM function.92-11-16
 VER: +12.6mV HOR: +89.9 Hz 15: 34: 51

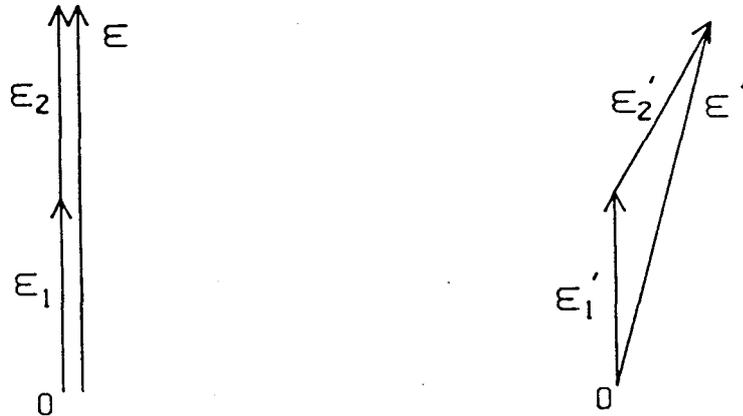
fig. 4-24

Vibrations de la machine simple étoile
 alimentée par un onduleur de courant à 120°

Nous observons des raies à 90, 180, 270 et 360 hertz ce qui correspond aux couples harmoniques de rang 6, 12, 18 et 24. Il ne faut pas comparer les amplitudes de ces raies entre-elles car la transmittance du système mécanique est fonction de la fréquence.

IV 3 2 3 Vibrations de la machine double étoile

Pour pouvoir comparer les mesures faites sur la machine double étoile aux relevés précédents il faut que, dans les deux essais, les f.m.m. résultantes ε et ε' soient identiques. Considérons les fondamentaux. Pour la machine double étoile, les f.m.m. ε_1 et ε_2 créées par les deux primaires décalés de $\pi/6$ et alimentés par des systèmes de courants déphasés de $\pi/6$ sont en phase comme le montre la figure 4-25a. Le cas de la machine simple étoile équivalente est différent car c'est le même courant qui circule dans les deux enroulements décalés de $\pi/6$. Les f.m.m. sont donc déphasées de $\pi/6$ comme le montre la figure 4-25b.



a : machine double étoile

b : machine simple étoile
équivalente

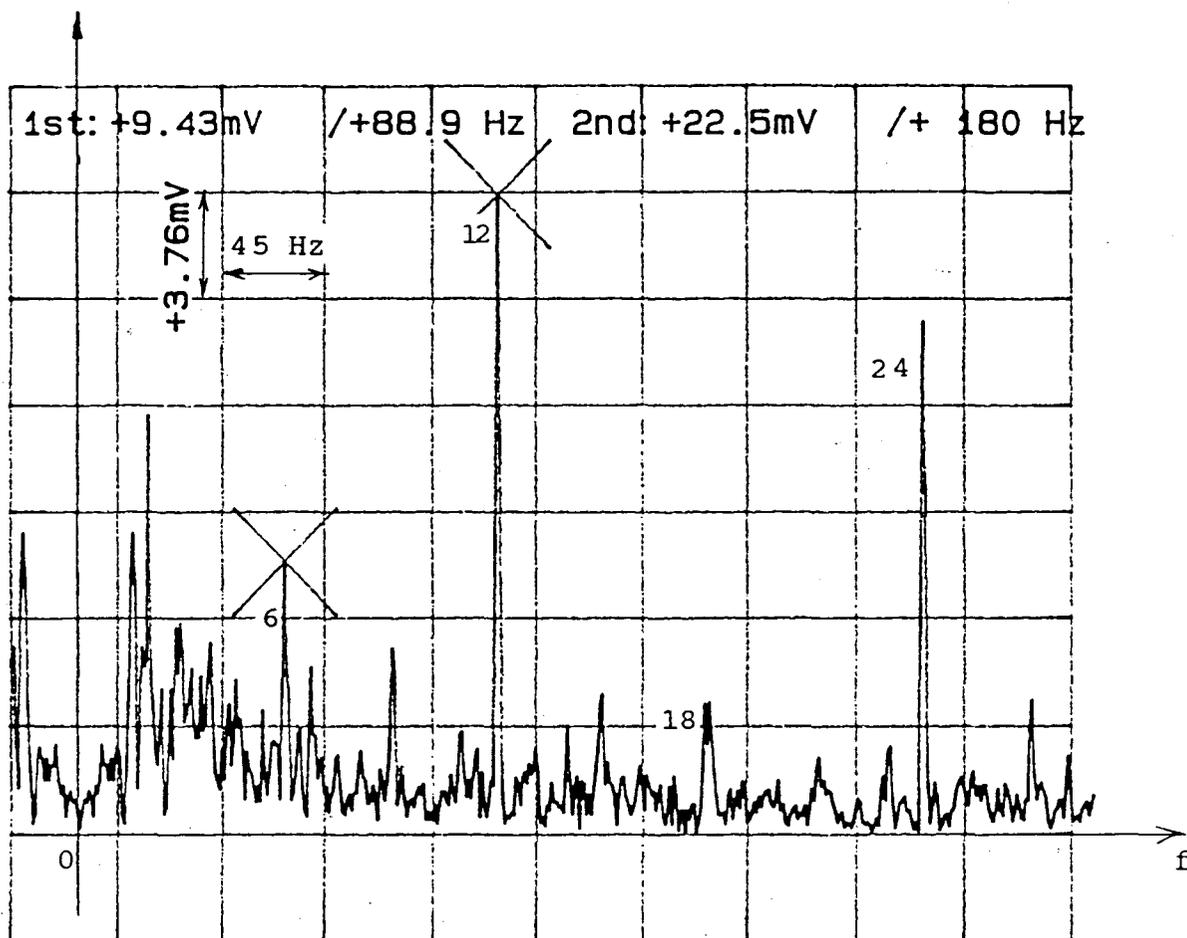
$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2\varepsilon_1$$

$$\varepsilon' = \varepsilon_1' \sqrt{3}$$

fig. 4-25

Il faut choisir le courant d'alimentation de la machine double étoile de façon à avoir $\varepsilon = \varepsilon'$ ce qui donne $\varepsilon_1 = \varepsilon' \sqrt{3}/2$ donc $I = I' \sqrt{3}/2$. Il faut donc faire cet essai avec des créneaux de courant d'amplitude $I = 6,93$ A.

Le résultat de l'analyse spectrale des vibrations produites par la machine double étoile alimentée par deux onduleurs de courant à 120° décalés de 30° est donné à la figure 4-26.



REG1 is result of FOURIER TRANSFORM function.92-11-16
 VER: +3.76mV HOR: + 45 Hz 14: 44: 44

fig. 4-26

Vibrations de la machine double étoile alimentée
 par deux onduleurs de courant à 120° décalés de 30°

Pour cette mesure il a été nécessaire de réduire la sensibilité de l'amplificateur en passant du calibre 10 mV au calibre 30 mV pour éviter les problèmes de saturation de l'amplificateur de mesure dus aux parasites hautes fréquences rayonnés par les onduleurs et captés par le câble reliant l'accéléromètre à l'amplificateur. Il faut donc multiplier par 3 les amplitudes de la figure 4-26 avant de les comparer aux résultats précédents.

On peut observer que la raie située à 90 Hz, correspondant au couple harmonique de rang 6, a été fortement réduite: elle passe de 75,2 mV à 28 mV. Au contraire la raie située à 180 Hz garde une valeur sensiblement constante en ne passant que de 67,5 mV à 65,4 mV. En ce qui concerne les fréquences plus élevées on constate l'existence d'une raie à 360 Hz correspondant au couple harmonique

de rang 24 alors que la raie correspondant à l'harmonique 18 est noyée dans le bruit de fond du système de mesure.

Pour expliquer la vibration résiduelle correspondant à l'harmonique 6 du couple, il faut revenir sur l'étude théorique de la machine simple étoile faite par J.M.D. MURPHY et F.G. TURNBULL [23] où ils tiennent compte de la localisation des conducteurs dans les encoches. Le flux magnétisant réel n'est pas sinusoïdal; les harmoniques 5 et 7 du flux magnétisant se combinent avec les courants statoriques fondamentaux pour produire un couple harmonique de rang 6. L'utilisation d'un stator double étoile élimine uniquement la contribution la plus importante au couple harmonique de rang 6 c'est-à-dire la combinaison des courants statoriques de rang 5 et 7 avec le flux magnétisant fondamental.

Ces relevés montrent que le principal avantage de la machine double étoile est de réduire fortement le premier, et le plus important, couple harmonique de fréquence $6f$ qui pourrait générer des vibrations importantes. Il suffirait pour cela que l'un ou l'autre des éléments du système électromécanique complet présente une fréquence propre voisine de $6f$.

CONCLUSION

Dans la première partie, après avoir défini toutes les inductances principales et mutuelles, les équations différentielles régissant le fonctionnement de la machine asynchrone double étoile ont été écrites en utilisant les hypothèses simplificatrices classiques: linéarité du circuit magnétique, répartition spatiale sinusoidale des f.m.m. le long de l'entrefer, vitesse de rotation constante. Le couple électromagnétique instantané a été ensuite exprimé en fonction des neuf courants qui circulent dans les enroulements de la machine. Le système d'équations différentielles obtenu n'a pas pu être résolu directement car il comporte de nombreux coefficients fonctions sinusoidales du temps.

La seconde partie a adapté la théorie du vecteur espace aux équations de la machine double étoile. Après avoir défini les différents repères dans lesquels s'expriment ces vecteurs espaces on a obtenu un système de trois équations différentielles à coefficients constants que l'on peut résoudre analytiquement. La formulation du problème avec le vecteur espace a permis une écriture synthétique de l'expression du couple électromagnétique facilement utilisable pour déterminer les couples harmoniques. A la fin de ce chapitre nous avons comparé les équations obtenues par la théorie du vecteur espace à celles déduites des méthodes de KU et de PARK. Cela nous a permis de conclure que ces trois transformations étaient identiques à la présentation près.

L'étude des régimes transitoires a été traitée dans la troisième partie en considérant une alimentation sinusoidale en tension puis en courant. En ce qui concerne l'alimentation en tension les expressions analytiques ont montré que le comportement transitoire de la machine double étoile était quasiment identique à celui de la machine simple étoile équivalente

Le problème du régime transitoire de la machine alimentée en courant s'est avéré plus délicat car les courants statoriques sont des variables d'état. On ne peut donc pas étudier la réponse à un échelon comme dans le cas de l'alimentation en tension. La définition même du régime transitoire est à reformuler. Cette étude a été abordée sous la forme d'une simulation numérique globale dont les résultats ont été comparés aux courants réellement obtenus

quand la machine était soumise à une variation rapide de ses courants statoriques.

La quatrième partie a quantifié les couples harmoniques obtenus en régime permanent lorsque la machine est alimentée par deux onduleurs de courant à 120° dont les commandes sont décalées de 30° . La méthode du vecteur espace a permis d'établir un schéma équivalent monophasé, valable en régime permanent sinusoïdal, et de définir un moyen simple de calcul de l'amplitude et de la phase à l'origine de chaque couple harmonique.

L'étude comparative des spectres de couple des machines simple étoile et double étoile a montré que les raies de rangs 6, 18, 30..., qui existent sur la première machine sont éliminées sur la seconde. Les vérifications expérimentales ont été menées en faisant la comparaison des vibrations provoquées par les couples harmoniques. On a constaté que la raie de rang 6 n'était pas totalement éliminée mais fortement réduite. Les explications de ce phénomène ont été données en considérant les harmoniques de flux produits par la répartition réelle des f.m.m.

Pour mener à bien les essais il a été nécessaire de construire un onduleur MLI de courant capable de synthétiser les formes d'ondes exigées. Une technique MLI originale détaillée dans l'annexe B a été développée.

Ces travaux qui ont déjà fait l'objet d'une publication [24], peuvent donner lieu à plusieurs voies de recherche. L'une d'elle qui consiste à étudier un moyen actif de réduction des vibrations résiduelles de rang 6 f sur une machine synchrone double étoile à aimants permanents est actuellement à l'étude dans le cadre d'une collaboration avec la société J.S.I.

ANNEXE A
SIMULATION NUMERIQUE GLOBALE DE
LA MACHINE ALIMENTEE EN TENSION

La simulation numérique permet d'avoir une approche globale du fonctionnement de la machine. Elle donne les résultats des équations différentielles directement sans aucune transformation mathématique. Elle permet de valider les résultats analytiques en prenant en compte les mêmes hypothèses.

Ce programme de simulation reprend les équations (3-87) à (3-92) établies au paragraphe III 2 2 pour la simulation de la machine alimentée en courant. Dans le cas de l'alimentation en tension il faut calculer les 6 courants à partir des tensions. En adoptant une écriture matricielle, ces 6 équations s'écrivent:

$$[u(t)] = [MR(t)][x_1] + [ML(t)] \frac{d[x_1]}{dt} \quad (A-1)$$

Les vecteurs $[u(t)]$ et $[x_1]$ sont formés respectivement des 6 tensions et des 6 courant utiles:

$$[u(t)] = \begin{bmatrix} v_{1A}^s \\ v_{1B}^s \\ v_{2A}^s \\ v_{2B}^s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [x_1] = \begin{bmatrix} i_{1A}^s \\ i_{1B}^s \\ i_{2A}^s \\ i_{2B}^s \\ i_A^r \\ i_B^r \end{bmatrix}$$

La matrice $[MR(t)]$, dont les éléments sont homogènes à des résistances, ainsi que la matrice $[ML(t)]$, dont les éléments sont homogènes à des inductances, regroupent les coefficients des équations différentielles (3-87) à (3-92).

$$[MR(t)] = \begin{bmatrix} R^s & 0 & 0 & 0 & \frac{d(MA_{1A}-MA_{1C})}{dt} & \frac{d(MA_{1B}-MA_{1C})}{dt} \\ 0 & R^s & 0 & 0 & \frac{d(MB_{1A}-MB_{1C})}{dt} & \frac{d(MB_{1B}-MB_{1C})}{dt} \\ 0 & 0 & R^s & 0 & \frac{d(MA_{2A}-MA_{2C})}{dt} & \frac{d(MA_{2B}-MA_{2C})}{dt} \\ 0 & 0 & 0 & R^s & \frac{d(MB_{2A}-MB_{2C})}{dt} & \frac{d(MB_{2B}-MB_{2C})}{dt} \\ \frac{d(MA_{1A}-MC_{1A})}{dt} & \frac{d(MB_{1A}-MC_{1A})}{dt} & \frac{d(MA_{2A}-MC_{2A})}{dt} & \frac{d(MB_{2A}-MC_{2A})}{dt} & R^r & 0 \\ \frac{d(MA_{1B}-MC_{1B})}{dt} & \frac{d(MB_{1B}-MC_{1B})}{dt} & \frac{d(MA_{2B}-MC_{2B})}{dt} & \frac{d(MB_{2B}-MC_{2B})}{dt} & 0 & R^r \end{bmatrix}$$

[ML(t)]=

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}^s & 0 & L_p^s \sqrt{3} \sin(\alpha+2\pi/3) & -L_p^s \sqrt{3} \sin\alpha & (MA_{1A}-MA_{1C}) & (MA_{1B}-MA_{1C}) \\ 0 & \mathcal{L}^s & L_p^s \sqrt{3} \sin\alpha & L_p^s \sqrt{3} \sin(\alpha+\pi/3) & (MB_{1A}-MB_{1C}) & (MB_{1B}-MB_{1C}) \\ -L_p^s \sqrt{3} \sin(\alpha-2\pi/3) & L_p^s \sqrt{3} \sin\alpha & \mathcal{L}^s & 0 & (MA_{2A}-MA_{2C}) & (MA_{2B}-MA_{2C}) \\ -L_p^s \sqrt{3} \sin\alpha & L_p^s \sqrt{3} \sin(\alpha+\pi/3) & 0 & \mathcal{L}^s & (MB_{2A}-MB_{2C}) & (MB_{2B}-MB_{2C}) \\ (MA_{1A}-MC_{1A}) & (MB_{1A}-MC_{1A}) & (MA_{2A}-MC_{2A}) & (MB_{2A}-MC_{2A}) & \mathcal{L}^r & 0 \\ (MA_{1B}-MC_{1B}) & (MB_{1B}-MC_{1B}) & (MA_{2B}-MC_{2B}) & (MB_{2B}-MC_{2B}) & 0 & \mathcal{L}^r \end{bmatrix}$$

Pour appliquer l'algorithme d'Euler il est nécessaire de modifier la présentation de l'équation matricielle (A-1):

$$\frac{d[x_1]}{dt} = [ML(t)]^{-1} \{ [u(t)] - [MR(t)] [x_1] \} \quad (A-1)$$

Rappelons que la méthode d'Euler, au premier ordre, consiste à assimiler la différentielle dt à une grandeur discrète δt , appelée "pas de calcul" et à calculer l'accroissement $\delta[x_1]$ correspondant.

$$\delta[x_1] = [ML(t)]^{-1} \{ [u(t)] - [MR(t)] [x_1] \} \cdot \delta t \quad (A-2)$$

La fonction $[x_1]$ est ensuite construite à partir de sa valeur initiale $[x_{10}]$ et des accroissements successifs $\delta[x_1]$. A chaque pas de calcul il faut donc actualiser les coefficients des matrices et inverser la matrice $[ML(t)]$.

Le pas de calcul δt doit être beaucoup plus petit que la plus petite constante de temps $\frac{L^s}{R^s} = 1,95 \text{ ms}$ du système à simuler. Le programme a été écrit en turbo pascal en utilisant la bibliothèque relative au calcul matriciel [25].

Les simulations ont été faites avec un pas de calcul de $10\mu\text{s}$ et donnent des résultats identiques à ceux des calculs analytiques présentés au paragraphe III 191 et III 192 concernant les régimes transitoires de la machine alimentée par des tensions sinusoïdales.

ANNEXE B

ONDULEUR M.L.I. DE COURANT

Les vérifications expérimentales ont nécessité deux types d'alimentation en courant: une alimentation équilibrée sinusoïdale pour observer le régime transitoire et une alimentation par des créneaux à 120° pour le régime permanent. La bibliographie a montré que, actuellement, la MLI était principalement utilisée pour synthétiser des courants sinusoïdaux. Avec les techniques classiques de modulation, basées sur les symétries des fonctions sinusoïdales [26][27][28][29], il est impossible de changer la forme d'onde du courant de sortie. Certains auteurs proposent des techniques numériques complexes basées sur la notion de vecteur espace [30][31]. Il a semblé intéressant de développer une nouvelle technique MLI, adaptée aux onduleurs de courant et capable de synthétiser des formes d'ondes quelconques [32].

B 1 Principe

Les formes d'ondes des six courants statoriques de la machine sont définies par six fonctions analogiques de consignes C_{1A} , C_{1B} , C_{1C} , C_{2A} , C_{2B} et C_{2C} fournies par un générateur de fonctions construit autour d'un micro-ordinateur. Cette solution permet de définir et de modifier facilement les signaux de consigne.

L'alimentation de la machine double étoile nécessite deux onduleurs identiques alimentés par le même courant continu I fourni par une source extérieure comme le montre la figure B1.

La technique MLI utilisée par chacun des onduleurs est telle que:

$$\left. \begin{aligned} i_A &= k \cdot I \cdot C_A \\ i_B &= k \cdot I \cdot C_B \\ i_C &= k \cdot I \cdot C_C \end{aligned} \right\} \quad (B-1)$$

où k est une constante. Les indices s , 1 et 2 sont omis car les deux onduleurs sont identiques.

Comme les courants de chaque stator, les signaux de consigne doivent vérifier l'égalité

$$C_A + C_B + C_C = 0 \quad (B-2)$$

Chaque système triphasé est donc défini par deux signaux de consigne indépendants C_A et C_B , le troisième signal est une

combinaison linéaire des deux autres:

$$C_c = -(C_A + C_B)$$

(B-4)

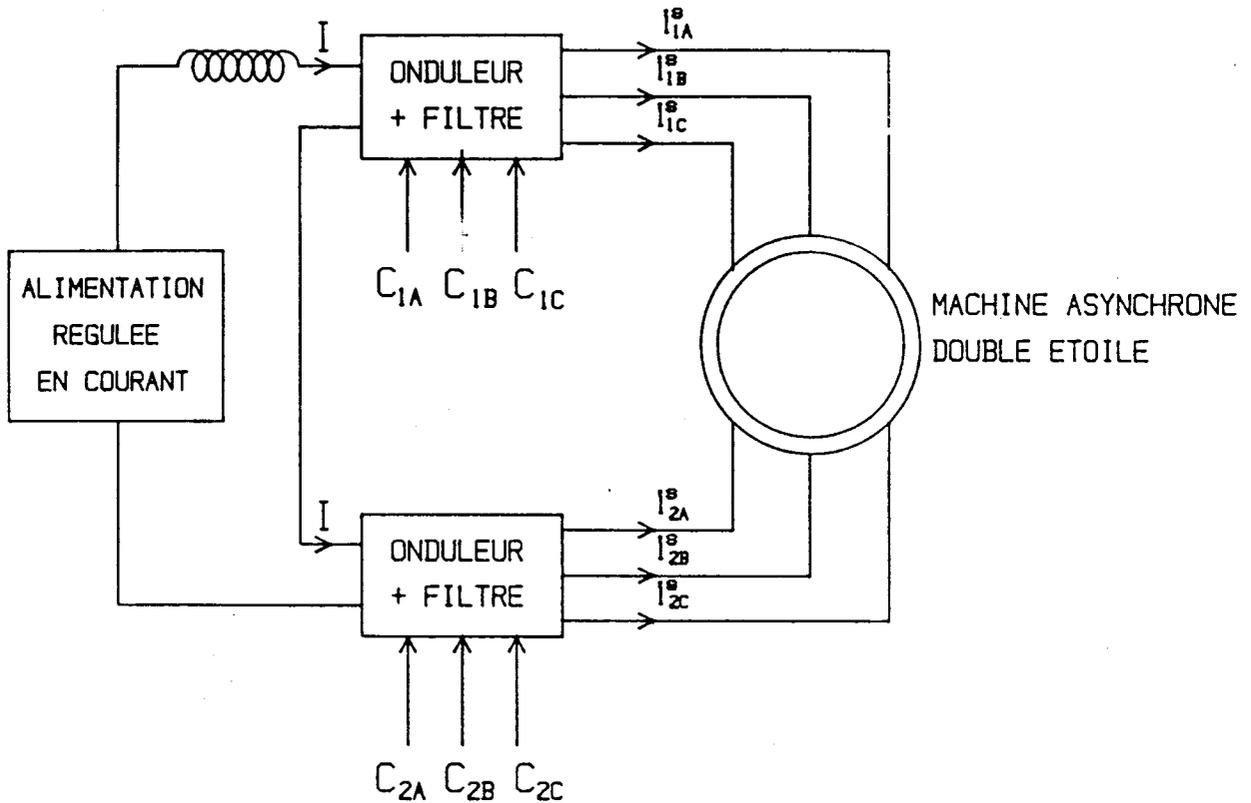


Fig. B1

Machine alimentée par deux onduleurs de courant

B 2 Circuit de puissance

La figure B2 représente le circuit de puissance de l'ensemble constitué par l'onduleur et son filtre de sortie. Le courant continu d'entrée, supposé parfaitement lissé, est symbolisé par un générateur de courant.

Les interrupteurs doivent être unidirectionnels en courant et bidirectionnels en tension, commandés à l'ouverture comme à la fermeture. Ils sont réalisés par un IGBT connecté en série avec une diode rapide. Cette structure impose deux contraintes:

- ne pas ouvrir la source de courant,
- ne pas court-circuiter les sources de tension que forment les condensateurs du filtre de sortie.

Pour respecter ces contraintes il faut, à tout instant, fermer un et un seul interrupteur A ou B ou C, et un et un seul interrupteur A' ou B' ou C'.

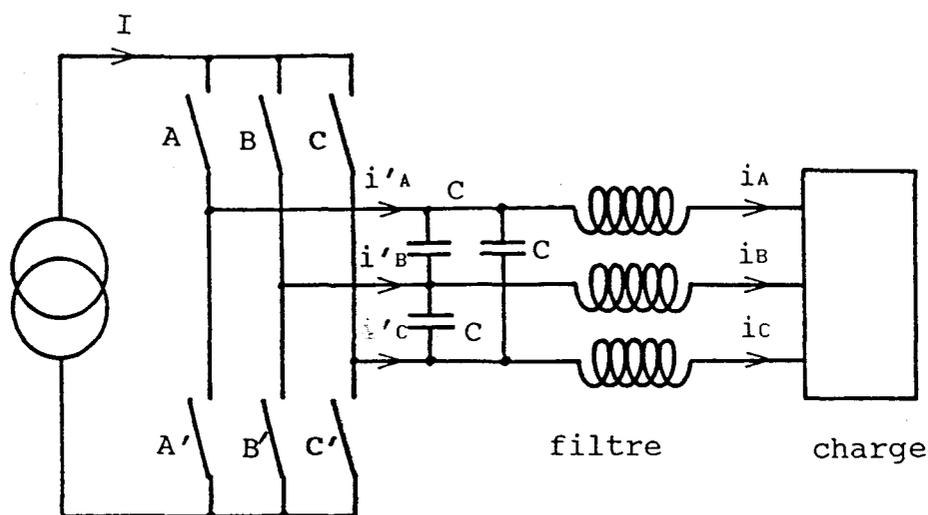


fig. B2
Circuit de puissance

B 3 Technique MLI

B 3 1 Définition des échelles des temps

La fréquence du découpage f_{MLI} et la fréquence naturelle du filtre de sortie f_0 sont fixées en fonction de la fréquence maximale des signaux de consigne f_c . Il faut que la fréquence de découpage soit beaucoup plus élevée que la fréquence naturelle du filtre de sortie, elle même beaucoup plus élevée que la fréquence maximale du signal de consigne comme le montre la figure B3.

$$f_c \ll f_0 \ll f_{MLI} \quad (B-5)$$

Dans ces conditions le courant dans la charge est très proche de la valeur moyenne, mesurée sur une période du signal de découpage, du courant de sortie de l'onduleur.

Lorsque l'on se place sur une échelle des temps de l'ordre de grandeur de la période du signal MLI, on peut considérer que le signal de consigne est constant. Sur une échelle des temps de l'ordre de grandeur de la période du signal de consigne, on peut considérer que le courant de sortie est parfaitement lissé par le filtre. Sa valeur instantanée est alors égale à la valeur moyenne, mesurée sur une période du signal MLI, du courant de sortie de l'onduleur [33].

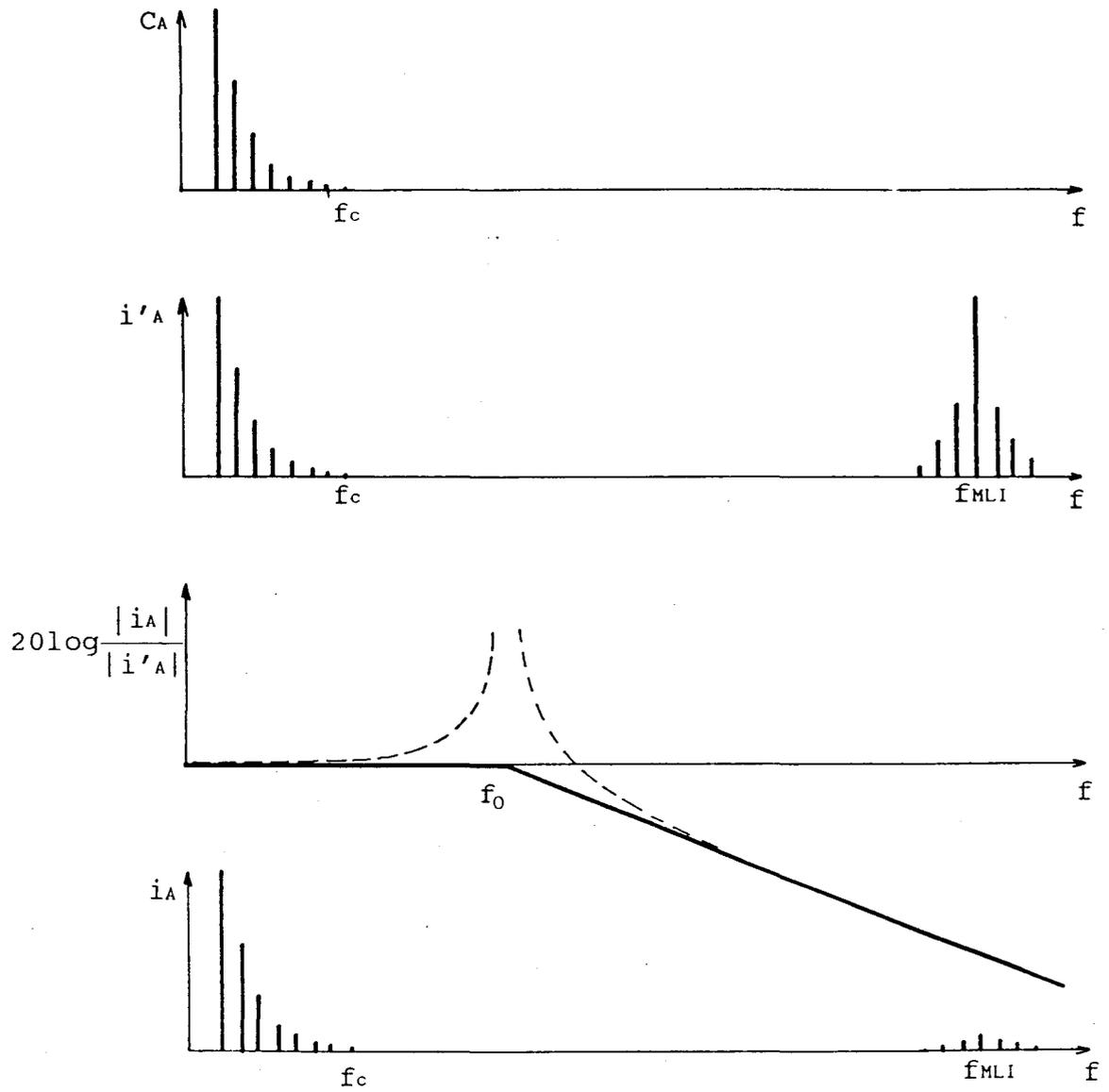


fig. B3

La figure B4 donne le schéma fonctionnel de l'ensemble du montage.

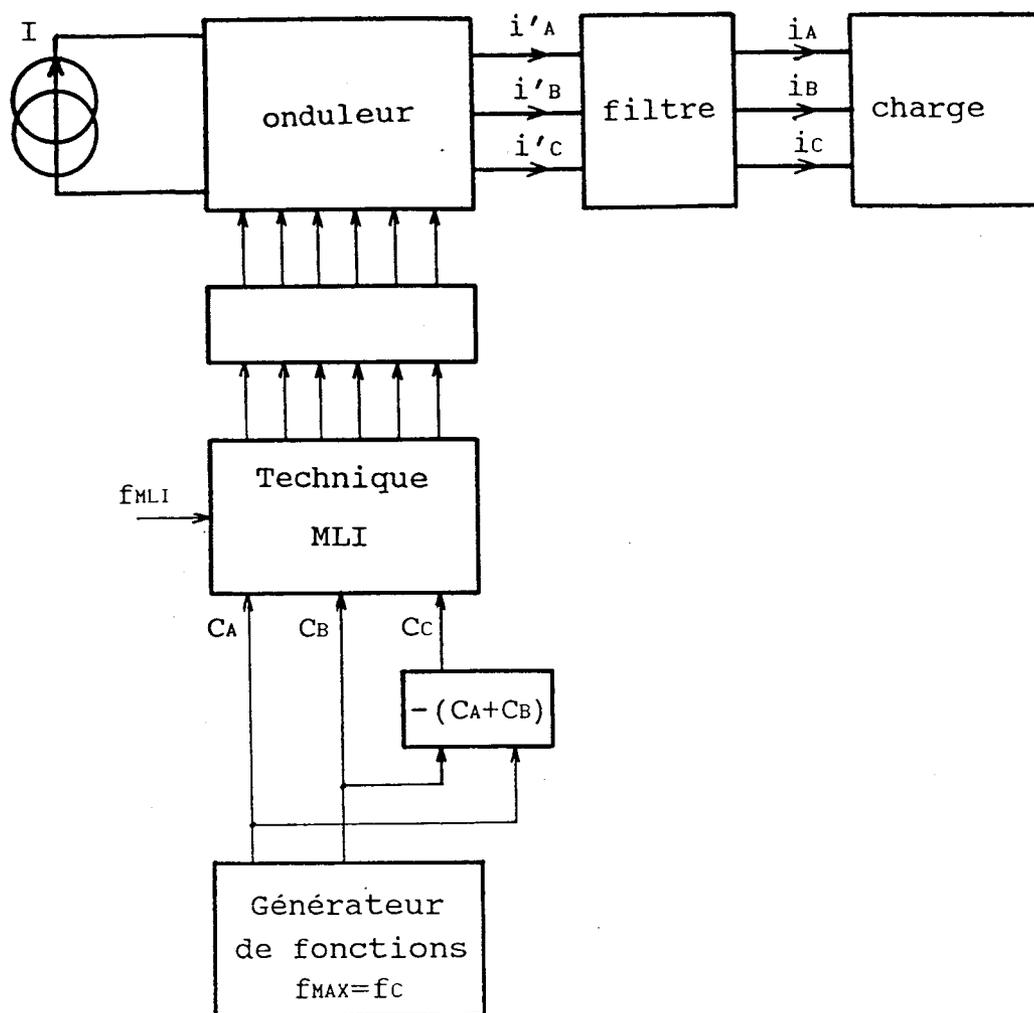


fig. B4

La technique MLI consiste à traiter séparément les cas où la consigne est positive et ceux où elle est négative.

B 3 2 Explication par un exemple

Plaçons nous sur l'échelle des temps de l'ordre de grandeur de la période du signal de consigne et considérons le cas où C_A est positive. La figure B2 montre que pour synthétiser un courant i'_A de valeur moyenne positive l'interrupteur A doit être commandé par un signal rectangulaire M_A de rapport cyclique δ_A tel que:

$$\delta_A = k |C_A| \quad (B-6)$$

dans ce cas le courant de sortie vaut:

$$i_A = i'_{A_{\text{moy}}} = k I C_A \quad (\text{B-7})$$

Ceci est vrai à condition de maintenir l'interrupteur A' ouvert. Pendant ce temps, une des deux autres consignes est obligatoirement négative. Traitons par exemple le cas où C_B est négative. Le courant i'_B de valeur moyenne négative doit être synthétisé par l'interrupteur B' commandé par le signal rectangulaire M_B de rapport cyclique δ_B tel que:

$$\delta_B = k |C_B| \quad (\text{B-8})$$

dans ce cas le courant de sortie vaut:

$$i_B = i'_{B_{\text{moy}}} = -k I |C_B| = k I C_B \quad (\text{B-9})$$

l'interrupteur B doit rester ouvert.

Il est maintenant nécessaire d'appliquer les règles de commutation de l'onduleur de courant définies à la fin du paragraphe précédent en revenant sur l'échelle des temps de l'ordre de grandeur de la période de découpage.

Considérons des variables binaires qui portent les mêmes noms que les interrupteurs et qui reflètent leurs états respectifs. Pour les interrupteurs du haut (A, B et C) nous avons défini $A = M_A$ et $B = 0$ l'interrupteur C doit obligatoirement prendre la valeur $\overline{M_A}$ de façon à ne jamais ouvrir la source de courant. Le raisonnement est le même pour les interrupteurs du bas (A', B' et C') : $A' = 0$ et $B' = M_B$ $\Rightarrow C' = \overline{M_B}$.

Cet exemple montre comment synthétiser les courants $i_A > 0$ et $i_B < 0$. Le courant i_C qui vaut $-(i_A + i_B)$ est forcément en accord avec la consigne C_C qui suit la même règle.

B 3 3 Généralisation

Pour décrire le fonctionnement complet il faut rassembler tous les cas possibles dans une table de vérité et définir les signaux de commande des six interrupteurs pour chaque cas. Les trois variables binaires S_A , S_B et S_C représentent les signes respectifs des consignes C_A , C_B et C_C . Elles prennent la valeur 1 quand la consigne correspondante est positive. Le nombre de cas possibles vaut donc $2^3 = 8$. L'exemple du paragraphe précédent montre que les 3 courants sont synthétisés à partir de 2 consignes C_A et C_B . La consigne C_C n'intervient pas. Il correspond donc à 2 cas possibles représentés par la première ligne d'adresse 1 0 x, x valant 0 ou 1, de la table de vérité de la figure B5. La commande M_C est définie

comme les signaux M_A et M_B , son rapport cyclique δ_c est tel que:

$$\delta_c = k |C_c| \quad (B-10)$$

S_A	S_B	S_C	A	B	C	A'	B'	C'
1	0	x	M_A	0	$\overline{M_A}$	0	M_B	$\overline{M_B}$
x	1	0	$\overline{M_B}$	M_B	0	$\overline{M_C}$	0	M_C
0	x	1	0	$\overline{M_C}$	M_C	M_A	$\overline{M_A}$	0
0	0	0	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	0	0	1	0	0

x = état indifférent

fig. B5

La deuxième et la troisième ligne de la table de vérité sont obtenues par un raisonnement analogue à celui de l'exemple. La ligne x 1 0 traite le cas $C_B > 0$ et $C_C < 0$, la ligne 0 x 1 le cas $C_A < 0$ et $C_C > 0$.

Le cas $S_A = S_B = S_C = 0$ correspond aux 3 consignes nulles donc au court-circuit de la source de courant d'entrée par un bras de l'onduleur. Le cas $S_A = S_B = S_C = 1$ est théoriquement impossible car $C_A + C_B + C_C = 0$, il est cependant prudent de prévoir une commande compatible avec la sécurité du montage.

Les règles de commutations des interrupteurs de l'onduleur de courant sont intégrées dans la table de vérité qui est réalisée par des circuits intégrés logiques. Ceci donne plus de liberté pour les signaux de consigne: aucune hypothèse autre que $C_A + C_B + C_C = 0$ n'a été formulée. Cette technique MLI permet donc de synthétiser des courants de formes quelconques.

B 4 Dimensionnement du filtre de sortie

L'inductance du filtre est en fait comprise dans la machine alimentée par l'onduleur.

Dans le cas d'une machine simple étoile, il faut considérer le schéma monophasé équivalent. Aux fréquences élevées les résistances sont négligeables devant les réactances. Le courant magnétisant est aussi négligeable. Le schéma équivalent de la machine est donc

réduit à la somme des inductances de fuites ramenées au primaire notée l .

Lorsque les condensateurs sont couplés en triangle comme le montre la figure B2, il faut considérer le condensateur, de valeur triple, de l'étoile équivalente. Le schéma équivalent de la figure B6 est déduit des ces simplifications. \bar{I}'_A est la valeur efficace de la raie de courant à la fréquence f proche de f_{MLI} . I_A est la quantité correspondante après filtrage.

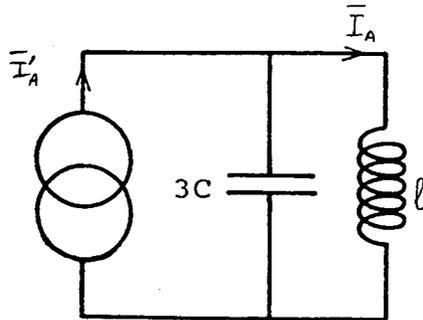


fig. B6

Machine simple étoile, schéma équivalent en haute fréquence

L'analyse de ce schéma permet de déterminer la fréquence naturelle du filtre f_0 .

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{l \cdot 3C}} \quad (B-11)$$

Dans le cas de la machine double étoile alimentée par deux onduleurs identiques il faut considérer le schéma équivalent défini au paragraphe 4-1. Comme la fréquence de découpage est élevée on peut négliger les résistances devant les réactances. La figure B7 représente le schéma équivalent du filtre formé par la machine et les condensateurs placés en sortie de l'onduleur. Il est possible d'utiliser le principe de superposition et d'analyser le schéma en ne considérant que les effets produits par un seul onduleur. La valeur efficace de la raie de courant, à la fréquence f proche de f_{MLI} , fournie par l'onduleur est notée \bar{I}'_{1A} . Elle est associée au nombre complexe \bar{I}'_{1A} nécessaire à l'analyse du schéma équivalent. Les autres grandeurs sont définies de la même façon.

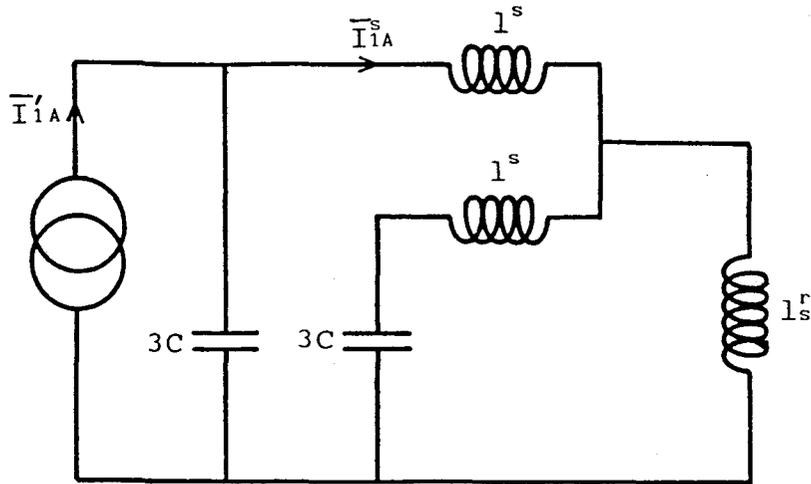


fig. B7

Machine double étoile, schéma équivalent en haute fréquence

L'analyse du schéma précédent permet de calculer la transmittance complexe du filtre définie par le rapport $\bar{I}_{1A}^s / \bar{I}'_{1A}$:

$$\frac{\bar{I}_{1A}^s}{\bar{I}'_{1A}} = \frac{1 - (l_s^r + l_s^s) \cdot 3C \cdot \omega^2}{1 - (l_s^r + l_s^s) \cdot 6C \cdot \omega^2 + l_s^s (2l_s^r + l_s^s) (3C)^2 \omega^4} \quad (\text{B-12})$$

Les fréquences naturelles de ce filtre sont données par les racines du dénominateur de l'expression précédente, on obtient:

$$f_1 = \frac{1}{2\pi \sqrt{l_s^s \cdot 3C}} \quad (\text{B-13})$$

$$f_2 = \frac{1}{2\pi \sqrt{(2l_s^r + l_s^s) \cdot 3C}} \quad (\text{B-14})$$

La transmittance du filtre peut alors s'écrire:

$$\frac{\bar{I}_{1A}^s}{\bar{I}'_{1A}} = \frac{1 - (l_s^r + l_s^s) \cdot 3C \cdot \omega^2}{l_s^s (2l_s^r + l_s^s) (3C)^2 \cdot (\omega^2 - \omega_1^2) (\omega^2 - \omega_2^2)} \quad (\text{B-15})$$

avec $\omega_1 = 2\pi f_1$ et $\omega_2 = 2\pi f_2$.

Comme la fréquence de découpage est très supérieure aux fréquences naturelles, l'expression précédente peut être simplifiée:

$$\frac{\bar{I}_{1A}^s}{\bar{I}'_{1A}} = \frac{-(l_s^r + l_s^s)}{l_s^s (2l_s^r + l_s^s) \cdot 3C \cdot \omega^2} \quad (\text{B-16})$$

Avec $C=0,22\mu F$, $l^s=0,78mH$ et $l_s^r=3,48mH$ on obtient $f_1=7,02kHz$ et $f_2=2,23kHz$. L'atténuation apportée par le filtre, pour la fréquence de découpage fixée à $28kHz$, vaut:

$$\left| \frac{\bar{I}_{iA}^s}{\bar{I}'_{1A}} \right| = 0,034$$

B 5 Réalisation du circuit de commande

Les signaux S_A , S_B et S_C sont obtenus directement à partir des consignes C_A , C_B et C_C par l'intermédiaire de trois comparateurs dont les seuils sont fixés à zéro.

Pour fabriquer les signaux M_A , M_B et M_C on compare les valeurs absolues des trois consignes, obtenues par trois redresseurs double alternance sans seuil, au signal haute fréquence de forme d'onde triangulaire défini à la figure B8. Le point le plus positif du triangle doit être légèrement supérieur à la valeur maximale, en valeur absolue, des signaux de consigne. La fréquence de ce signal triangulaire fixe la fréquence de découpage f_{MLI} .

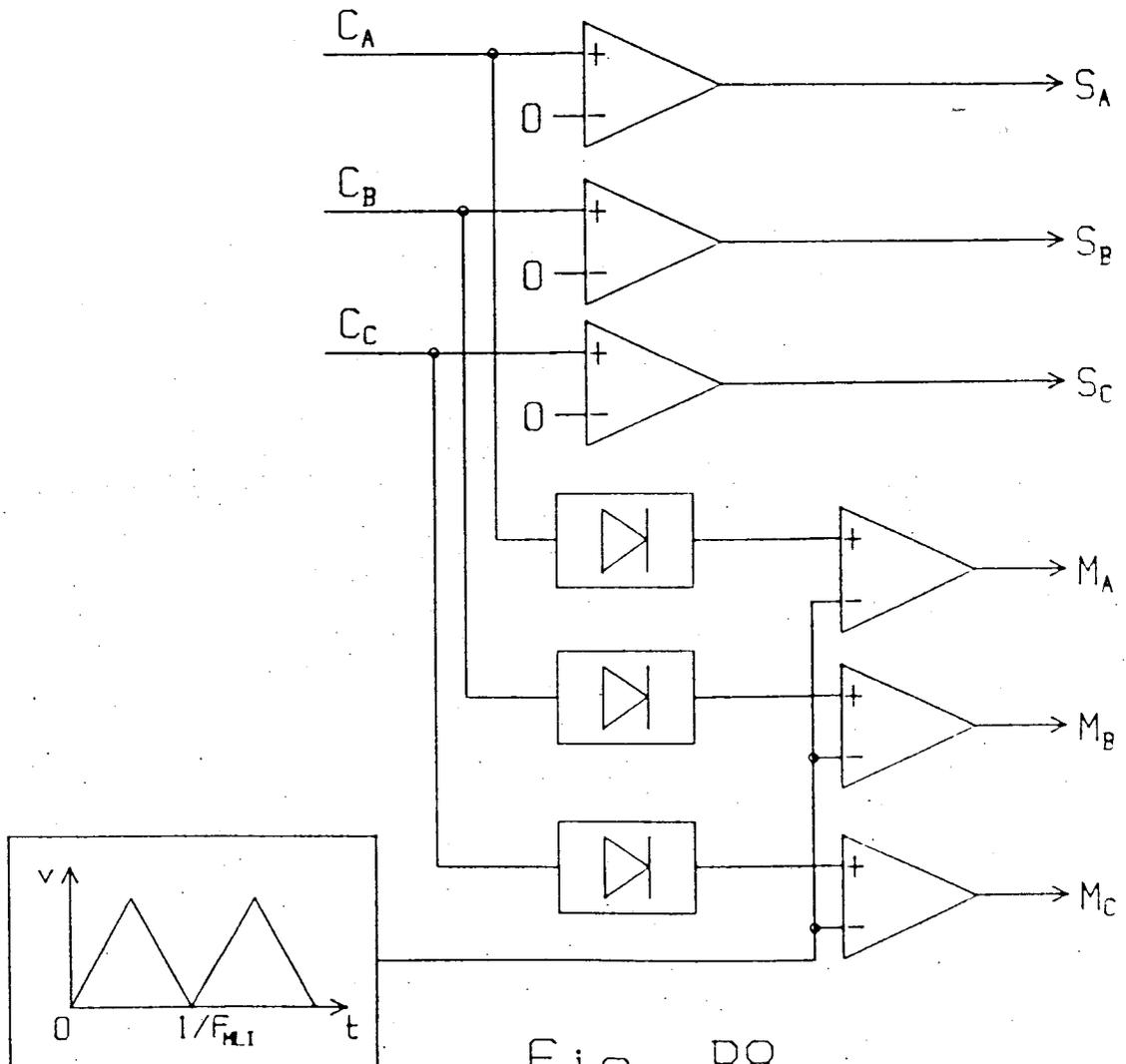


Fig. B8

La table de vérité de la figure B5 est matérialisée par des fonctions logiques combinatoires en technologie TTL-LS. Elle montre que l'interrupteur A par exemple n'est pas toujours commandé par le même signal logique. Le signal de commande dépend de la combinaison des variables S_A S_B S_C qui définissent une ligne de la table de vérité. Il est tout indiqué d'utiliser un multiplexeur $8 \rightarrow 1$ dont les adresses sont définies par S_A , S_B et S_C . La figure B9 rappelle le fonctionnement d'un tel dispositif.

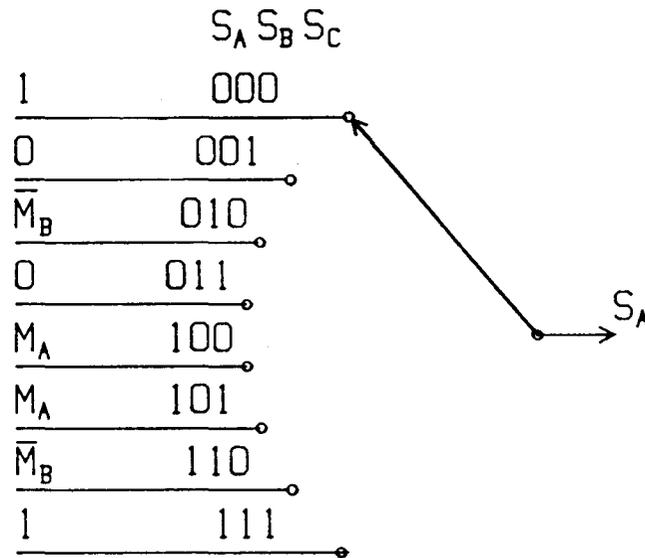


Fig. B9

Les commandes des autres interrupteurs sont réalisées de façon analogue en respectant les colonnes de la table de vérité.

B 6 Générateur de fonctions

Pour faire fonctionner l'ensemble il faut créer deux signaux de consigne indépendants par primaire et de forme quelconque facilement définissable. L'emploi d'un micro-ordinateur associé à quatre convertisseurs numériques analogiques était donc tout indiqué.

La mise au point d'un tel générateur a posé le problème du fonctionnement d'un micro-ordinateur de construction ordinaire dans le milieu parasité de l'électronique de puissance. Il a été nécessaire d'isoler toutes les lignes logiques entrant ou sortant de la carte de liaison, implantée dans le micro-ordinateur, au moyen de photo-coupleurs.

B 7 Essais de L'onduleur

La figure B10 illustre le fonctionnement des deux onduleurs connectés à la machine double étoile. Les conditions de l'essai sont les suivantes: $C=0,22\mu F$, rotor à l'arrêt, valeur du courant dans le lien continu d'entrée de l'onduleur: 2A. Cette figure montre respectivement le signal de consigne C_A , le courant découpé i'_A et le courant statorique i^s_A . On peut observer l'efficacité du filtrage.

L'analyse spectrale des courants précédents est donnée par la figure B11. La figure B11a correspond au courant découpé i'_A . On observe la raie principale à la fréquence de consigne 48,8Hz; sa valeur efficace vaut 1,45A. Le système de modulation produit un ensemble de raies autour de 28kHz, fréquence de découpage, ainsi qu'au voisinage du double de cette fréquence. Ce résultat donne des indications concernant le dimensionnement du filtre: il faut placer sa fréquence naturelle assez loin de ces fréquences pour éviter les résonances. La figure B11b est le résultat de l'analyse spectrale du courant statorique i^s_A , elle montre l'efficacité du filtrage.

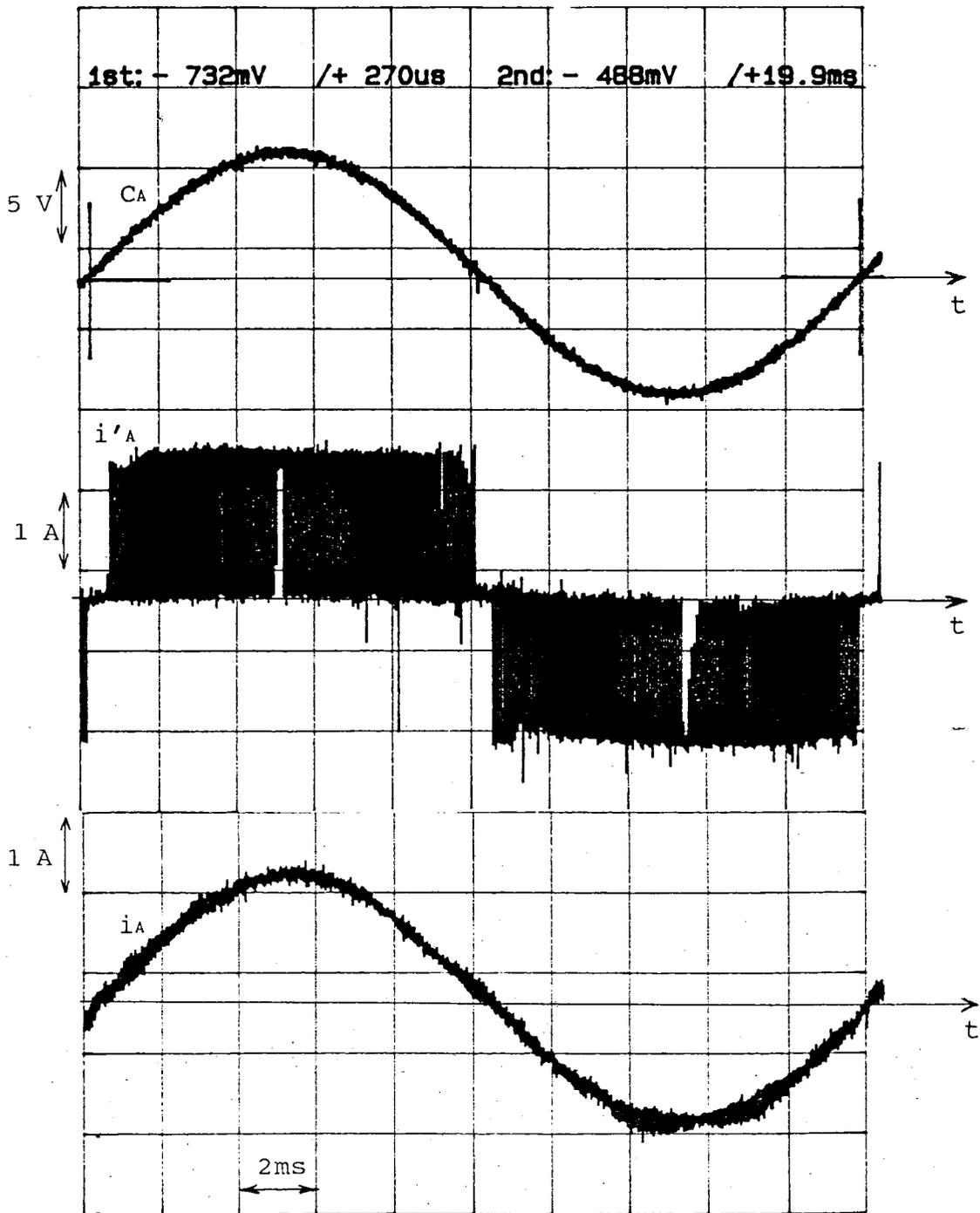
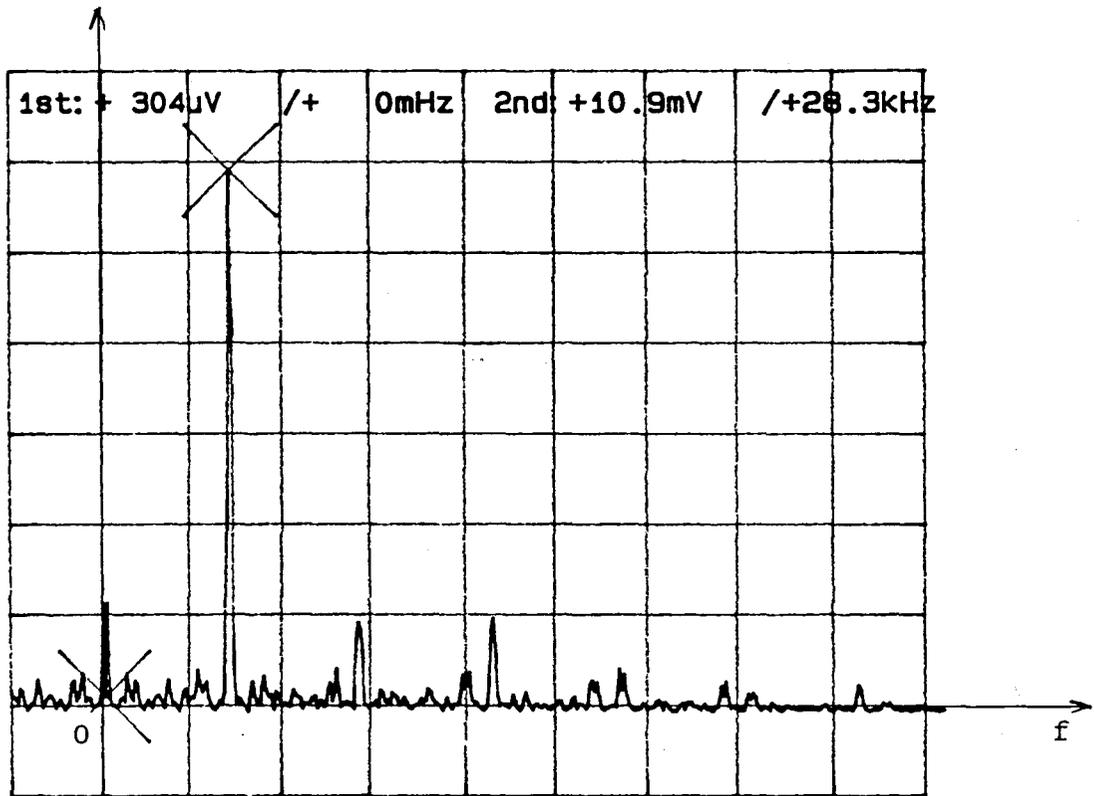
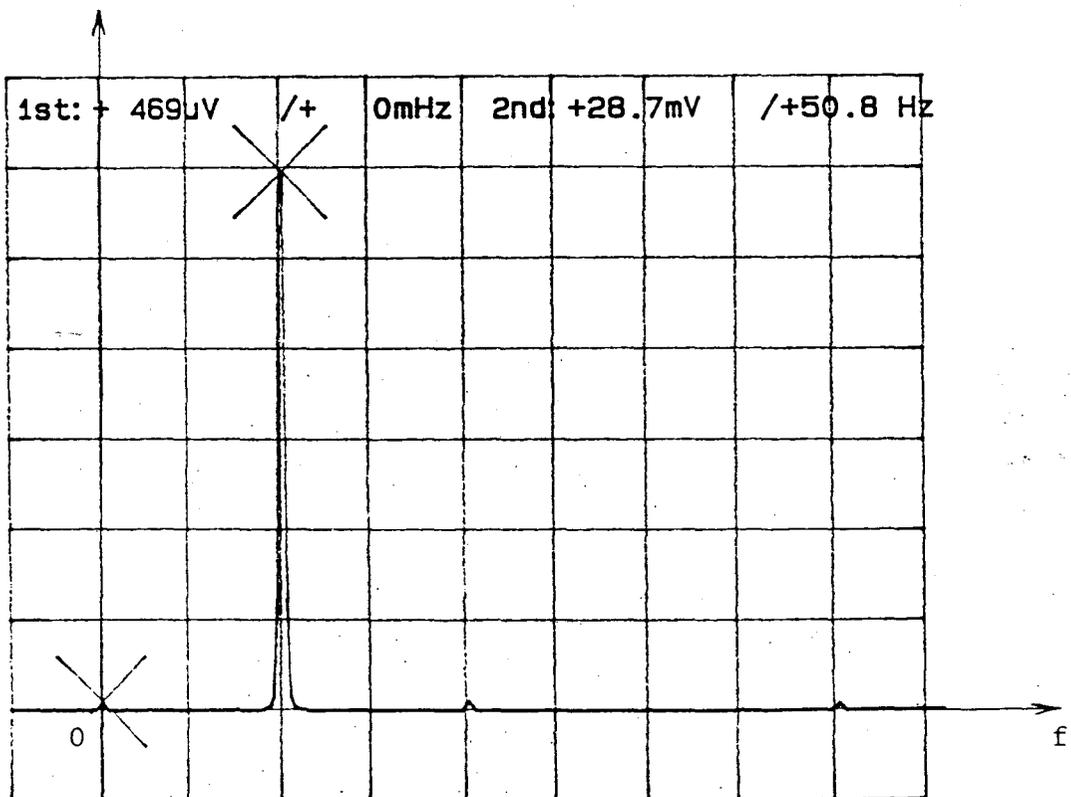


fig. B10



REG1 is result of FOURIER TRANSFORM function.92-11-10
 VER: +1.83mV HOR: + 20kHz 15: 17: 01

figure B11a



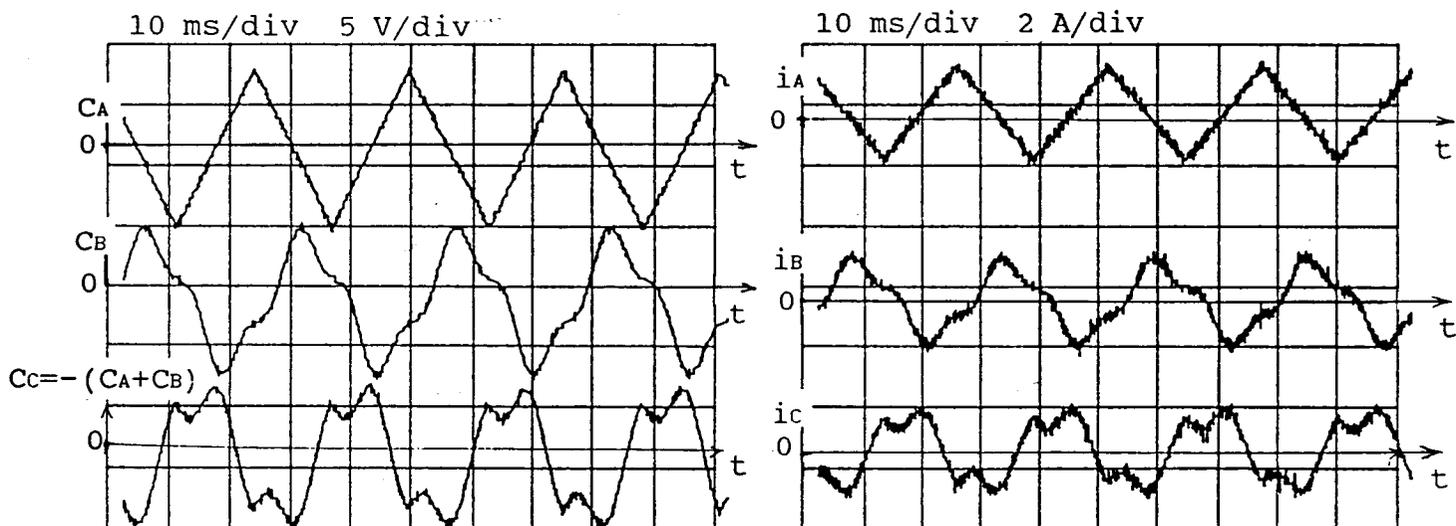
REG1 is result of FOURIER TRANSFORM function.89-03-24
 VER: + 4.8mV HOR: + 25 Hz 09: 25: 16

figure B11b

La figure B12 résulte d'un essai en triphasé non sinusoïdal et non équilibré. Elle permet de comparer les formes des 3 courants synthétisés à celles des 3 signaux de consigne correspondants. Pour cet essai C_A est un triangle d'amplitude C_m , C_B suit l'expression:

$$C_B = 0,8C_m \cdot \sin 2\pi f t + 0,2C_m \cdot \sin 6\pi f t$$

f étant la fréquence du fondamental.



a: Signaux de consigne

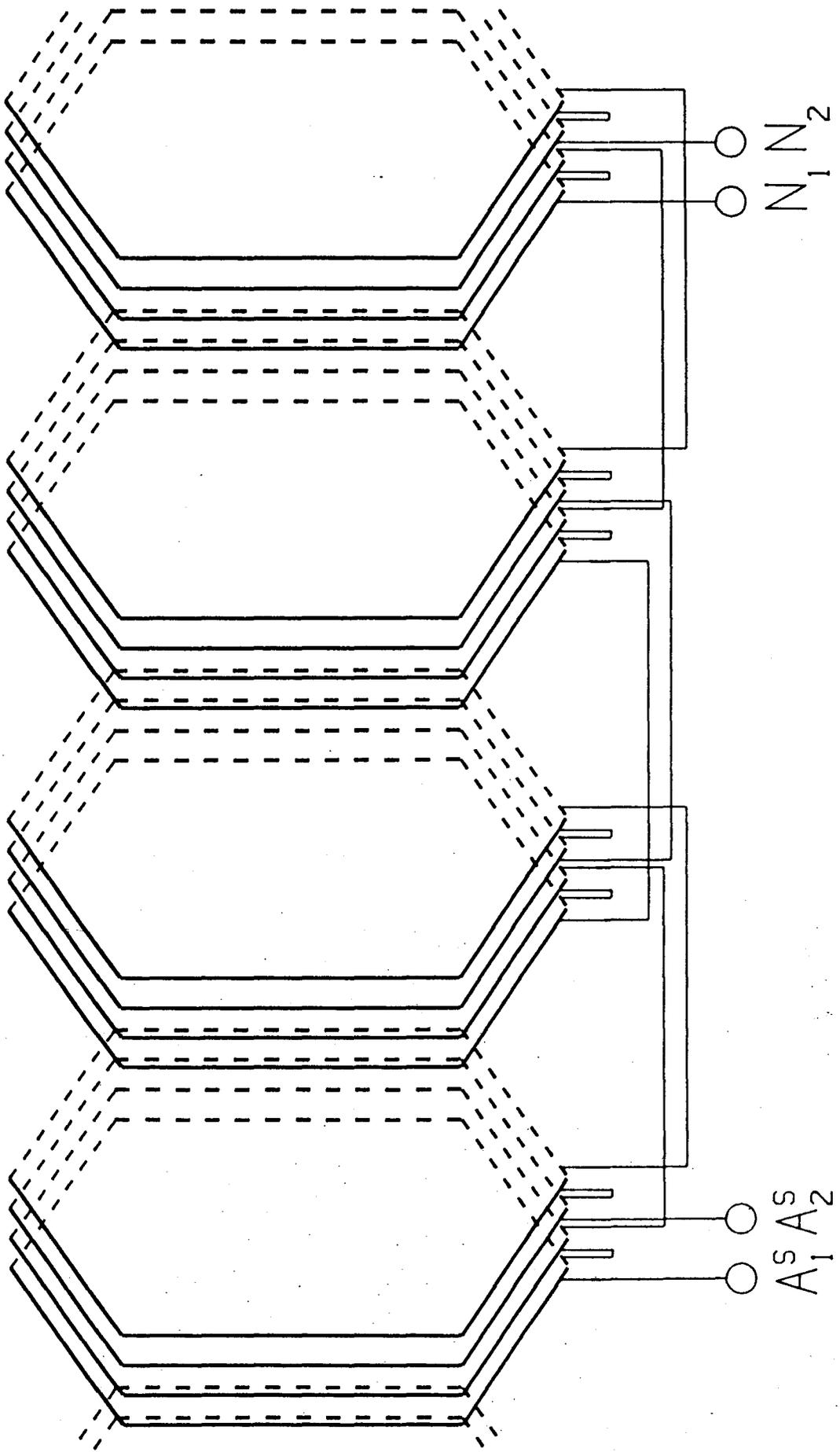
b: Courants réels

fig B12

Essai en triphasé non sinusoïdal et non équilibré.

On constate la bonne concordance entre la forme des signaux de consigne (figure B12a) et celle des courants réels (figure B12b). Cet essai a été réalisé sur une charge R L.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48



— DESSUS D'ENCOCHE

- - - - FOND D'ENCOCHE

ANNEXE C

BOBINAGE DES PHASES A1 ET A2

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. PALANIAPPAN, J. VITHAYATHIL and S. K. DATTA
"Principle of a dual current source converter for AC motor drives"
IEEE transactions on Industry Applications, vol. IA-15, N°4, july/august 1979, pp 445-452.
- [2] R. H. NELSON and P. C. KRAUSE
"Induction machine analysis for arbitrary displacement between multiple winding set"
IEEE transactions on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-93, May/June 1974, pp 851-848.
- [3] T. M. JAHNS
"Improved reliability in solid-state AC drives by means of multiple independant phase-drive unit"
IEEE transactions on Industry Applications, vol. IA-16, N°3, May/June 1980, pp 321-331.
- [4] T. A. LIPO
"A d-q model for six phase induction machines"
Intrenational Conf. Elec. machines, Athens, September 15-17, 1980, pp 860-867.
- [5] T. A. LIPO and L. H. WALKER
"Design and control techniques for extending high frequency operations for a CSI induction motor drive"
IEEE transactions on Industry Applications, vol. IA-19, N°5, September/october 1983, pp 744-753.
- [6] E. A. KLINGSHIRN
"High phase order induction motor - part 1 - description and theoretical considerations"
IEEE transactions on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-102, N°1, January 1983, pp 47-53.

- [7] E. A. KLINGSHIRN
"High phase order induction motor - part 2 - Experimental results"
IEEE transactions on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-102, N°1, January 1983, pp 54-59.
- [8] K. GOPAKUMAR, S.SATHIAKUMAR, S. SK BISWAS and J. VITHAYATHIL
"Modified current source inverter fed induction motor drive with reduced torque pulsations"
IEE Proceedings, Vol. 131, Pt B, N°4, July 1984, pp 159-164.
- [9] M. A. ABBAS, R. CHRISTEN and T. M. JAHNS
"Six-phase source inverter driven induction motor"
IEEE transactions on Industry Applications, vol. IA-20, N°5, September/october 1984, pp 1251-1259.
- [10] E. A. KLINGSHIRN
"Harmonic filters for six-phase and other multiphase motors on voltage source inverters"
IEEE transactions on Industry Applications, vol. IA-21, N°4, May/June 1985, pp 588-594.
- [11] G. GIERSE and W. SCHUERMANN
"Microprocessor control for two magnetically coupled three-phase PWM inverters "
IEEE transactions on Power Electronics, vol. PE-1, N°3, July 1986, pp141-147.
- [12] D. LEVY
"Analysis of a double-stator machine used for a variable speed/constant frequency small scale hydro/wind power generator"
Electric Power Systems Research, N°11, 1986, pp 205-223.
- [13] F. NOTELET
" Régimes transitoires des courants et du couple du moteur asynchrone triphasé "
Thèse d'Etat N°327, LILLE, 1975.

- [14] G. SEGUIER, F. NOTELET
"Electrotechnique industrielle"
Technique et Documentation, PARIS, 1987.
- [15] J. LESENNE, F. NOTELET, G. SEGUIER
"Introduction à l'électrotechnique approfondie"
Technique et Documentation, PARIS, 1981.
- [16] J. CHATELAIN
"Machines électriques", tome 1
Presses polytechniques Romandes, DUNOD, 1983.
- [17] W. LEONHARD
"Control of electrical drives"
Electric Energy Systems and Engineering series
Springer-Verlag, BERLIN, NEW-YORK, TOKYO, 1985.
- [18] P. VAS
"Vector control of AC machines"
Oxford Science Publications, 1990.
- [19] D. NAUNIN
"The calculation of the dynamic behavior of electric
machines by space pahsors"
Electr. Mach. Electromech. USA, 1979, vol.4, N°1, pp 33-45.
- [20] J. F. BRUDNY
"Etude quantitative des harmoniques du couple du moteur
asynchrone triphasé d'induction"
Thèse d'habilitation N° H29, LILLE, 1991.
- [21] P. PELLETIER
"Techniques numériques appliquées au calcul scientifique"
MASSON, PARIS, 1971.
- [22] Y. GUEGAN
"Les harmoniques du couple du moteur asynchrone polyphasé"
Thèse N° 120, LILLE, 1971.

- [23] J. M. D. MURPHY, F. G. TURNBULL
"power electronic control of AC motors"
Pergamon Press, 1988.
- [24] D. ROGER, J. F. BRUDNY, F. NOTELET
"Electrical drives using double-star induction machine"
SPEEDAM, Positano (ITALY), May 1992, pp 11-16.
- [25] BORLAND
"Turbo Pascal numerical tool box"
Borland International, USA, 1987.
- [26] J. C. CAMBRONNE
"Moteur asynchrone alimenté par un onduleur de courant à
MLI"
Thèse N°656, LILLE, 1990.
- [27] C. NAMURUDI, P. SEN
"Optimal Pulse Width Modulation for Current Source
Inverters"
IEEE transactions on Industry Applications, vol. IA-22, N°6
Nov./Dec. 1986, pp 1052-1071.
- [28] M. HOMBU, S. UEDA, A. UEDA
"A Current source GTO Inverter with sinusoidal Inputs and
Outputs"
IEEE transactions on Industry Applications, vol. IA23, n°2
March/April 1987, pp 247-255.
- [29] P. ZIOGAS, S. MANANUAS, E. WIECHMANN
"Application of current source inverters in UPS systems",
IEEE transactions on Industry Applications, vol. IA20, n°4
July 1984, pp 742-752.
- [30] G. AMLER:
"A new method for current source inverters with self-
extinction devices, combining low distortion of voltage and
current with fast dynamic response"
EPE, vol. 3 p 211-216, FIRENZE Italy 1991.

- [31] G. LEDWICH:
"Current Source Inverter Modulation"
IEEE transactions on Power Electronics, vol. PE-6, N°4
Oct 1986, pp 618-623.
- [32] Ph. DELARUE, D.ROGER, J.L. KOTNY
"A new P.W.M. technique for three-phase current source
inverter"
Article proposé à la conference E.P.E. qui se déroulera à
BRIGHTON du 13 au 16 septembre 1993.
- [33] G. SEGUIER, F.LABRIQUE
"La conversion continu alternatif"
Technique et Documentation PARIS 1986.

