N⁰ d'ordre : 1171

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

par

Miloud BENLARBI

Régularité des solutions de systèmes différentiables non linéaires

Soutenue le 27 septembre 1993 devant la Commission d'Examen :

Président : G. COEURÉ, Université de Lille
Rapporteurs : J. BAIR, Université de Liège
S. NICAISE, Université de Valenciennes
Examinateurs : Ph. ANTOINE, Université de Lille
M. MBEKHTA, Université de Lille

SOMMAIRE

A ma femme

et à mes enfants

Monsieur le Professeur Philippe ANTOINE m'a confié ce sujet de recherche. Ses qualités pédagogiques m'ont profondément marqué. Ses suggestions, ses conseils et ses critiques m'ont permis de mener à bien ce travail. Je tiens à le remercier et à lui exprimer ma profonde reconnaissance.

Je remercie Monsieur le Professeur Gérard CŒURÉ d'avoir bien voulu présider le jury de cette thèse ainsi que Messieurs les Professeurs Jacques BAIR et Serge NICAISE qui m'ont fait l'honneur de juger ce travail. Les remarques de Monsieur le Professeur Jacques BAIR m'ont été constructives. Je l'en remercie vivement.

Je remercie également Monsieur le Professeur Mostafa MBEKHTA pour les discussions chaleureuses que j'ai eues avec lui et d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je remercie aussi Raymonde BÉRAT et Claudine EVRARD qui ont dactylographié cette thèse avec célérité, soin et compétence ainsi que tout le personnel de l'imprimerie de l'U.F.R. qui en a assuré le tirage.

Je ne saurai oublier dans mes remerciements toutes les personnes qui m'ont sincèrement apporté à un moment ou à un autre leur sympathie ou leur amitié.

Enfin, j'adresse mes tendres excuses à ma femme et à mes fils pour les avoir frustrés du temps réservé à la vie en famille.

INTRODUCTION

En programmation mathématique, motivée par les applications en optimisation, l'étude des systèmes différentiables non linéaires permet de résoudre efficacement de nombreux problèmes majeurs. Notre propos est d'étudier la régularité des solutions de tels systèmes.

Soient F et G deux espaces de Banach, U un ouvert de F, f une application de U dans G, B un convexe fermé de F tel que $B \cap U$ ne soit pas vide, K un cône convexe fermé non vide, de G et b un point de $B \cap U$.

Michel [1] a considéré le système des inégalités suivant :

$$(M) \qquad f(y) \in z + K, \quad y \in B$$

et a montré que si f est strictement différentiable au point b et si l'hypothèse suivante est vérifiée

(H.M) l'adhérence de l'ensemble $A = Df(b)[B_F(b;1) \cap B - b] + K$ est un voisinage de 0 dans G

alors, pour tout voisinage V de b, il existe un voisinage W de $f(b)$ tel que le système (M) ait une solution dans V quelque soit z de W.

Robinson [2] a reformulé l'hypothèse de Michel sous la forme équivalente

$$(H.R) \qquad 0 \in \operatorname{int}[f(b) + Df(b)(B - b) + K]$$

puis, pour le système des inégalités perturbé

$$(Rx) \qquad f(x, y) \in z + K, \quad y \in B$$

tel que pour une valeur donnée a du paramètre x le système (Ra) vérifie la condition (H.R), il a donné un contrôle sur la taille des solutions de (Rx) pour x voisin de a.

Quant à Penot [3], il étudie le système plus général

$$(P) \qquad f(y) \in z + C, \quad y \in B$$

où C est un convexe de G vérifiant $C - K \subset C$.

Il interprète la condition de régularité de Robinson en termes d'une condition de transversalité de l'application f au point b sur C :

$$(H.P) \qquad Df(b)(T_b B) - T_{f(b)}C = G$$

et montre que les deux conditions (H.R) et (H.P) sont équivalentes dans le cas où l'un des deux convexes B ou C est d'intérieur non vide.

Enfin, Zouaki [4] a repris l'étude du système des inégalités perturbé (Rx) dans le cas particulier où $B = b + H$ avec H un cône convexe fermé et d'intérieur relatif non vide [cf. Annexe 1] et il a prouvé que si le système (Ra) vérifie la condition de transversalité (H.P) qui s'écrit sous la forme :

$$(H.P) \qquad D_2 f(a,b) \cdot H - K = G$$

il existe alors une application θ continue, définie sur un voisinage Ω de $(a, f(a,b))$ à valeurs dans F, telle que, $\theta(x,z)$ soit solution de (Rx) pour tout (x,z) dans Ω.

Dans un premier temps, nous montrons qu'on peut construire une application θ lipschitzienne (resp. lipschitzienne et admettant des dérivées directionnelles) telle que pour tout (x,z) dans Ω, $\theta(x,z)$ soit solution du système (Rx) avec $B = F$, si on suppose que le système linéarisé au point b de (Ra) suivant :

$$(R'a) \qquad D_2 f(a,b)(y) \in z + K, \quad y \in F\,.$$

admet une solution possédant les mêmes propriétés de régularité.

Nous donnons au paragraphe I.1 une condition de régularité portant sur $D_2 f(a,b)$ qui assure l'existence d'une solution lipschitzienne (resp. lipschitzienne et admettant des dérivées directionnelles) pour le système $(R'a)$. Cette condition de régularité sera aussitôt vérifiée sur trois exemples.

Dans un deuxième temps, nous montrons que ce premier résultat s'étend au système suivant qui généralise les précédents :

$$(Sx) \qquad f(x,y) \in z + C, \quad y \in B$$

où B et C sont deux convexes d'intérieur relatif non vide.

Et plus généralement encore, étant donnée une fonction multivoque Γ définie au voisinage du point (a,b) à valeurs dans G, on supose qu'il existe un cône convexe fermé K dans G tel qu'il soit contenu dans $\Gamma(x,y)$ pour tout (x,y) d'un voisinage du point (a,b) et tel que le système des inégalités (Rx) associé à ce cône ait une solution θ, il est alors évident que θ est une solution du système.

$$(\Sigma x) \qquad\qquad f(x,y) \in z + \Gamma(x,y), \quad y \in B$$

Nous montrons au chapitre II que la construction d'un tel cône est possible si la fonction multivoque Γ possède une propriété de semi-continuité inférieure au point (a,b) et si le système linéarisé $(R'a)$ associé au cône $T_{f(a,b)}\Gamma(a,b)$ ait une solution lipschitzienne (resp. lipschitzienne et admettant des dérivées directionnelles). Quoiqu'utile cette première extension du résultat précédent ne s'applique pas aux fonctions multivoques à graphe convexe qui en général ne vérifient pas la propriété de semi-continuité inférieure. Nous établissons alors un second résultat pour de telles fonctions multivoques et plus spécialement pour les processus convexes.

Nous consacrons enfin l'Annexe 2 à l'étude de cette propriété de semi-continuité inférieure pour les fonctions multivoques qui fait intervenir l'intérieur relatif d'un convexe. Au préalable, nous établissons dans l'Annexe 1 quelques résultats concernant l'intérieur relatif d'un convexe dans un espace de Banach.

Ce travail est réparti en deux chapitres (I et II) et deux Annexes (1 et 2). La notation proposition I.1.3, par exemple, renvoie à la proposition 3 du paragraphe I.1 et la proposition 1.3 à la proposition 3 de l'Annexe 1.

On désignera par $B_X(x_0,\varepsilon)$ la boule fermée de centre x_0 et de rayon ε dans l'espace normé X, $B_Q(x_0;\varepsilon)$ l'intersection de cette boule avec une partie Q de X et $\mathcal{V}_X(x_0)$ l'ensemble des voisinages du point x_0 dans X.

Chapitre I

REGULARITE DES SOLUTIONS DE SYSTEMES DIFFERENTIABLES NON LINEAIRES.

Introduction.

Soient E, F et G, trois espaces de Banach, U un ouvert de $E \times F$, f une appliction de U dans G différentiable au voisinage d'un point (a, b) de U et B (resp. C) un convexe fermé de F (resp. de G) tel que b soit dans B (resp. $f(a, b)$ soit dans C). On considère le système perturbé

$$(Sx) \qquad f(x, y) \in z + C, \quad y \in B$$

On dit que le système (Sx) admet une solution localement au point b si pour tout voisinage V de b dans F, il existe un voisinage Ω de $(a, f(a, b))$ dans $E \times G$ et une application θ de Ω dans F telle que :

1) $\forall (x, z) \in \Omega, \quad \theta(x, z) \in V \cap B.$

2) $\forall (x, z) \in \Omega, \quad f(x, \theta(x, z)) \in z + C.$

On appelle système linéarisé au point b du système (Sa) associé à une valeur donnée a de x le système

$$(S'a) \qquad D_2 f(a, b)(y) \in z + T_{f(a,b)}C, \quad y \in T_b B$$

où $T_b B$ désigne le cône contingent au point b de la partie B en sens de Bouligand, c'est-à-dire l'ensemble des éléments v de F vérifiant

$$\forall \alpha > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists u \in B_F(v; \alpha), \exists \lambda \in]0, \varepsilon], b + \lambda u \in B$$

qui coïncide puisque B est convexe avec l'adhérence de l'ensemble $\bigcup_{\lambda > 0} \frac{1}{\lambda}(B - b)$ dans l'espace F.

Nous allons montrer que la régularité (caractère lipschitzien et existence des dérivées directionnelles) des solutions du système $(S'a)$ passe aux solutions du système (Sx) lui-même pour x voisin du point a. Nous commençons d'abord par établir ce résultat dans le cas où $B = F$ et $C = K$. L'étude du système (Sx) dans son cadre le plus général en résultera.

La démonstration s'inspire de celle du théorème de submersion de Antoine [5] qui correspond au cas $K = \{0\}$. Nous remarquons que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

i) le système

$$(Rx) \qquad f(x,y) \in z + K, \quad y \in F$$

admet une solution localement au point b.

ii) la fonction multivoque $y \mapsto f(x,y) - K$ est localement surjective au point b.

Et nous démontrerons alors que la surjectivité de la fonction multivoque

$$y \mapsto D_2 f(a,b)y - K$$

entraîne celle de la fonction multivoque

$$y \mapsto f(x,y) - K$$

Ceci nous conduit ainsi à étudier l'existence et la régularité du système linéarisé $(R'a)$.

I.1. Condition de régularité pour le système linéarisé :

Soient F et G deux espaces de Banach, u une application linéaire continue de F dans G, K un cône non vide de G et b un point de F. On considère le système linéaire suivant :

$$(L) \qquad u(y) \in z + K, \quad y \in F$$

Pour un tel système nous avons le théorème suivant d'existence de solutions et de leurs régularités :

Théorème I.1.1. *(Condition de régularité).*
Une C.N.S pour que le système (L) ait une solution (resp. une solution continue) (resp. une solution lipschitzienne) (resp. une solution lipschitzienne et admettant des dérivées directionnelles) localement au point b et qu'il existe une application (resp. une application continue) (resp. une application lipschitzienne) (resp. une appliction lipschitzienne et admettant des dérivées directionnelles) (v,w) de G dans $F \times K$, positivement homogène telle que :

1) $\forall z \in G, \quad z = u \circ v(z) - w(z)$

2) $\exists A > 0, \forall z \in G, \quad \|v(z)\| \leq A \cdot \|z\|$ *et* $\|w(z)\| \leq A \cdot \|z\|$.

Démonstration :

Condition nécessaire : Supposons que (L) ait une solution localement au point b.

En particulier, pour $V = B_F(b;1)$ il existe un nombre positif ρ et une application v de $B_G(u(b);\rho)$ dans F telle que :

1) $\forall z \in B_G(u(b);\rho), \quad v(z) \in B_F(b;1)$

2) $\forall z \in B_G(u(b);\rho), \quad u \circ v(z) \in z + K$

Soit Z un élément non nul de G. L'élément $z = \frac{\rho}{\|Z\|} \cdot Z + u(b)$ étant dans la boule $B_G(u(b);\rho)$ on en déduit que $v(z)$ est dans la boule $B_F(b;1)$, $w(z) = u \circ v(z) - z$ est dans le cône K et qu'on a

$$z = u \circ v(z) - w(z)$$

Soit

$$Z = u[\frac{\|Z\|}{\rho} \cdot v(\frac{\rho}{\|Z\|} \cdot Z + u(b)) - \frac{\|Z\|}{\rho} \cdot b] - \frac{\|Z\|}{\rho} w(\frac{\rho}{\|Z\|} \cdot Z + u(b)) \tag{1.1}$$

Posons pour tout Z dans G,

$$(\bar{v}(Z, \bar{w}(Z)) = \frac{\|Z\|}{\rho}(v(\frac{\rho}{\|Z\|} \cdot Z + u(b)) - b, \quad w(\frac{\rho}{\|Z\|} \cdot Z + u(b)) \text{ si } \; Z \neq 0$$

$$(\bar{v}(0), \bar{w}(0)) = (0,0)$$

On voit facilement que $(\bar{v}, \bar{w})$ est une application de G dans $F \times K$, positivement homogène et qu'on a

$$\forall Z \in G, \; \|\bar{v}(Z)\| \leq \frac{1}{\rho} \cdot \|Z\| \text{ et } \|\bar{w}(Z)\| \leq (1 + \frac{1}{\rho} \cdot \|u\|) \cdot \|Z\| \tag{1.2}$$

En prenant $A = \max(\frac{1}{\rho}, 1 + \frac{1}{\rho} \cdot \|u\|)$, il résulte de (1.1) et (1.2) que $(\bar{v}, \bar{w})$ est l'application recherchée. Il est clair que si l'application v est continue il en est de même pour l'application $(\bar{v}, \bar{w})$. Supposons maintenant que l'application v est lipschitzienne de rapport k et montrons que l'application $\bar{v}$ est lipschitzienne de rapport $(\frac{1}{\rho} + 2k)$. On a

$$\forall (Z, Z_0) \in (G \setminus 0)^2, \; \bar{v}(Z) - \bar{v}(Z_0) = \frac{1}{\rho}(\|Z\| - \|Z_0\|)(v(\frac{\rho}{\|Z\|} \cdot Z + u(b)) - b)$$
$$+ \frac{\|Z_0\|}{\rho} \cdot (v\frac{\rho}{\|Z\|} \cdot Z + u(b)) - v(\frac{\rho}{\|Z_0\|} \cdot Z_0 + u(b)))$$

Donc

$$\forall (Z, Z_0) \in (G \setminus \{0\})^2,$$

$$\begin{aligned} \|\bar{v}(Z) - \bar{v}(Z_0)\| &\leq \frac{1}{\rho}\|Z - Z_0\| + \frac{\|Z_0\|}{\rho} \cdot k \cdot \|\frac{\rho}{\|Z\|} \cdot Z - \frac{\rho}{\|Z_0\|} \cdot Z_0\| \\ &\leq \frac{1}{\rho}\|Z - Z_0\| + k \cdot \|\frac{\|Z_0\|}{\|Z\|} \cdot Z - Z_0\| \end{aligned}$$

Or

$$\frac{\|Z_0\|}{\|Z\|} \cdot Z - Z_0 = \frac{\|Z_0\|}{\|Z\|} \cdot (Z - Z_0) + \frac{Z_0}{\|Z\|}(\|Z_0\| - \|Z\|)$$

ou encore

$$\|\frac{\|Z_0\|}{\|Z\|} \cdot Z - Z_0\| \leq 2 \cdot \frac{\|Z_0\|}{\|Z\|} \cdot \|Z - Z_0\| \, .$$

Soit enfin

$$\forall (Z, Z_0) \in (G \setminus \{0\})^2, \quad \|\bar{v}(Z) - \bar{v}(Z_0)\| \leq (\frac{1}{\rho} + 2k \cdot \frac{\|Z_0\|}{\|Z\|}) \cdot \|Z - Z_0|$$

Ou bien $\|Z_0\| \leq \|Z\|$ alors $\|\bar{v}(Z) - \bar{v}(Z_0)\| \leq (\frac{1}{\rho} + 2k) \cdot \|Z - Z_0\|$.

Ou bien $\|Z\| \leq \|Z_0\|$ et alors $\|\bar{v}(Z_0) - \bar{v}(Z)\| \leq (\frac{1}{\rho} + 2k) \cdot \|Z_0 - Z\|$.

Ce qui montre que l'application $\bar{v}$ est lipschitzienne de rapport $(\frac{1}{\rho} + 2k)$. On en déduit d'après (1.1) que l'application $\bar{w}$ est lipschitzienne de rapport $1 + (\frac{1}{\rho} + 2k) \cdot \|u\|$.

Enfin, si on suppose de plus que l'application v admet des dérivées directionnelles en un point Z_0 de G alors l'application $(\bar{v}, \bar{w})$ admet des dérivées directionnelles au point Z_0. En effet, on distingue deux cas :

1) Si $Z_0 = 0$ on a alors par définition d'une dérivée directionnelle.

$$\bar{v}'(0, X) = \lim_{\lambda \mapsto 0^+} \frac{1}{\lambda}(\bar{v}(\lambda X) - \bar{v}(0)) = \bar{v}(X)$$

Cette limite existe quel que soit X élément de G.

2) Si $Z_0 \neq 0$, on considère les applications

$$h : G \setminus \{0\} \mapsto G \setminus \{0\}, \quad Z \mapsto \frac{\rho}{\|Z\|} \cdot Z + u(b)$$

$$N : G \mapsto \mathbf{R}_+, \quad Z \mapsto \|Z\|$$

On peut vérifier que

$$\forall X \in G, h'(Z_0; X) = \frac{\rho}{\|Z_0\|^2} \cdot (\|Z_0\| \cdot X - N'(Z_0; X) \cdot Z_0)$$

et que

$$\forall X \in G, \quad (v \circ h)'(Z_0; X) = v'(h(Z_0); h'(Z_0; X))$$

On en déduit que l'application $\bar{v}$ admet des dérivées directionnelles au point Z_0. L'existence des dérivées directionnelles pour l'application $\bar{w}$ au point Z_0 résulte d'après (1.1).

Condition suffisante : Soit V un voisinage du point b dans F, il existe un nombre positif ρ tel que la boule $B_F(b;\rho)$ soit contenue dans V. Fixons une application (v, w) vérifiant les conditions du théorème I.1.1, il vient que

$$\forall z \in G, \quad z - u(b) = u \circ v(z - u(b)) - w(z - u(b))$$

ou encore

$$\forall z \in G, \quad z = u(v(z - u(b)) + b) - w(z - u(b))$$

En prenant $\Omega = B_G(u(b); \rho/A)$ on voit que l'application $\bar{v}$ définie sur Ω par :
$\forall z \in \Omega,\ \bar{v}(z) = v(z - u(b)) + b$
vérifie

1) $\forall z \in \Omega,\ \bar{v}(z) \in B_F(b;\rho)$

2) $\forall z \in \Omega,\ u \circ \bar{v}(z) \in z + K$

On vérifie aisément que si (v, w) est une application continue (resp. lipschitzienne) (resp. lipschitzienne et admettant des dérivées directionnelles) alors l'application $\bar{v}$ possède les mêmes propriétés. ■

Définition I.1.2. *Soient F et G deux espaces de Banach, u une application linéaire continue de F dans G et K un cône non vide de G. On appelle K-sélection bornée de u, une application (v, w) de G dans $F \times K$, positivement homogène telle que :*

1) $\forall z \in G, \quad z = u \circ v(z) - w(z)$

2) $\exists A > 0, \forall z \in G, \quad \|v(z)\| \leq A \cdot \|z\| \quad \text{et} \quad \|w(z)\| \leq A \cdot \|z\|$

Une K-sélection bornée (v, w) de u sera dite une K-sélection continue (resp. une K-sélection lipschitzienne) (resp. une K-sélection régulièrement dérivable) si l'application v est continue (resp. lipschitzienne) (resp. lipschitzienne et admettant des dérivées directionnelles).

Une K-sélection bornée (v, w) de u sera dite à valeurs dans un cône H de F si l'application v prend ses valeurs dans le cône H.

Lorsque K est réduit à $\{0\}$, on retrouve la définition d'une sélection au sens de Michael [6].

La proposition suivante montre qu'il suffit d'étudier les K-sélections lipschitziennes (resp. régulièrement dérivables).

Proposition I.1.3. *Les notations étant celles de la définition I.1.2, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) u admet une K-sélection lipschitzienne (resp. régulièrement dérivable) à valeurs dans H.

b) l'application (u, id_F) de F dans $G \times F$ admet une $K \times H$-selection lipschitzienne (resp. régulièrement dérivable).

Démonstration :

$a) \Rightarrow b)$

Soit (v, w) une K-sélection lipschitzienne (resp. régulièrement dérivable) de u et à valeurs dans H. On considère les applications suivantes :

$$V : G \times F \mapsto F, (z, y) \mapsto -y + v(z - uy)$$

$$W_1 : G \times F \mapsto K, (z, y) \mapsto w(z - uy)$$

$$W_2 : G \times F \mapsto H, (z, y) \mapsto v(z - uy)$$

On voit facilement que l'application $(V, (W_1, W_2))$ définie de $G \times F$ dans $F \times (K \times H)$ est une $K \times H$-sélection lipschitzienne (resp. régulièrement dérivable) de l'application (u, id_F).

$b) \Rightarrow a)$

Soit $(V, (W_1, W_2))$ une $K \times H$-sélection lipschitzienne (resp. régulièrement dérivable) de l'application (u, id_F). On considère les applications suivantes :

$$v : G \mapsto H, z \mapsto V(z, 0)$$

$$w : G \mapsto K, z \mapsto W_1(z, 0)$$

On vérifie aisément que l'application (v, w) définie de G dans $H \times K$ est une K-sélection lipschitzienne (resp. régulièrement dérivable) de l'application u et à valeurs dans le cône H. ■

La construction d'une K-sélection régulièrement dérivable d'une application linéaire continue u est possible si on suppose que le cône K est convexe et vérifie la propriété suivante :

Définition : *Soient G un espace de Banach et C un convexe non vide de G. On appelle enveloppe affine fermée de C et on note* [C], *le plus petit sous-espace affine fermé contenant C.*

On dira que C est d'intérieur relatif non vide de G si l'intérieur $\omega(C)$ de C dans [C] *est non vide* [cf. Annexe 1].

En effet, Zouaki [4] en supposant que K est un cône convexe fermé d'intérieur relatif non vide, a montré qu'une condition nécessaire et suffisante pour que u admette une K-sélection continue et que l'une des deux conditions suivantes soit vérifiée :

1. $\mathrm{Im}u - K = G$

2. $\mathrm{Im}u \cap \omega(K) \neq \emptyset$ et $\mathrm{Im}u + [K] = G$

Il construit la K-sélection continue de u sous la forme $(v_0 + v_1 \circ w_0, -w_1 \circ w_0)$ où

- (v_0, w_0) est une sélection continue, au sens de Michael [6], de l'application linéaire continue $\bar{u} : F \times [K] \mapsto G$, $(y, z) \mapsto u(y) + z$

- (v_1, w_1) est une K-sélection régulièrement dérivable de l'application linéaire continue $u_1 : F \mapsto [K]$, $y \mapsto u(y)$, qu'il construit explicitement.

Une condition suffisante pour que la K-sélection construite par Zouaki soit régulièrement dérivable est que l'application $\bar{u}$ admette une sélection linéaire continue c'est-à-dire une section. En particulier, on a :

Proposition I.1.4 : *Soit K un cône connexe fermé de G d'intérieur relatif non vide. Une application linéaire continue u de F dans G admet une K-sélection régulièrement dérivable si* $\mathrm{Im}u - K = G$ *et si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

1) G est de dimension finie.

2) $[K]$ est de codimension finie.

3) u admet une quasi-section (i.e. une application linéaire continue s de G dans F telle que $u \circ s \circ u = u$) et Imu *est de codimension finie.*

Démonstration :

L'hypothèse $\mathrm{Im}u - K = G$ entraîne que $\mathrm{Im}u + [K] = G$, donc l'application linéaire continue $\bar{u} : F \times [K] \mapsto G$, $(y, z) \mapsto u(y) + z$ est surjective.

1. Si G est de dimension finie, il est clair que u admet une section.

2. Supposons que la condition (2) soit vérifiée. On pose $G_1 = G/[K]$ et on considère χ la surjection canonique de G sur G_1. Alors l'application $\chi \circ u$ est surjective : tout élément z_1 de G_1 est l'image par χ d'un élément z de G. Il existe donc y dans F et z_0 dans $[K]$ tels que $z = u(y) + z_0$. D'où

$$z_1 = \chi(z) = \chi(u(y) + z_0) = \chi \circ u(y) + \chi(z_0) = \chi \circ u(y)$$

Comme G_1 est de dimension finie, l'application $\chi \circ u$ admet alors une section σ de G_1 dans F et on a

$$\chi \circ u \circ \sigma \circ \chi = \chi$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\forall z \in G, \quad \chi(1_G - u\sigma\chi)(z) &= \chi(z - u\sigma\chi(z)) \\ &= \chi(z) - \chi u\sigma\chi(z) = \chi(z) - \chi(z) = 0\ .\end{aligned}$$

donc l'élément $(1_G - u\sigma\chi)(z)$ appartient à $[K]$ et, par suite, l'application $(1_G - u\sigma\chi)$ se factorise en une application linéaire continue v_0 de G dans $[K]$ et de l'injection canonique j de $[K]$ dans G. D'où

$$\forall z \in G, (1_G - u\sigma\chi)(z) = j \circ v_0(z)$$
$$\forall z \in G, z = u\sigma\chi(z) + j \circ v_0(z)$$

ce qui exprime que l'application $G \mapsto F \times [K]$, $z \mapsto (\sigma\chi(z), v_0(z))$ est une section de l'application $\bar{u}$.

3. Supposons que la condition (3) soit vérifiée et considérons π la surjection canonique de G sur coker$u$. Alors, $\pi_{|[K]}$ la restriction de π à $[K]$ est surjective : tout élément Z de coker$u$ est l'image par π d'un élément z de G. Il existe donc y dans F et z_0 dans $[K]$ tels que $z = u(y) + z_0$. D'où

$$Z = \pi(z) = \pi(u(y) + z_0) = \pi(u(y)) + \pi(z_0) = \pi(z_0) = \pi_{|[K]}(z_0)\ .$$

Comme coker$u$ est de dimension finie, l'application $\pi_{|[K]}$ admet une section δ de coker$u$ dans $[K]$ et on a

$$\begin{aligned}\forall z \in G, \pi(-\delta\pi(z) + z) &= -\pi\delta\pi(z) + \pi(z) = -\pi_{|[K]}\delta(\pi(z)) + \pi(z) \\ &= -\pi(z) + \pi(z) = 0\end{aligned}$$

donc l'élément $(-\delta\pi z + z)$ appartient à Imu et comme par hypothèse u admet une quasi-section s, on a

$$\forall z \in G, -\delta\pi z + z = u \circ s(-\delta\pi z + z)$$

ou encore

$$\forall z \in G, z = u \circ s(-\delta\pi z + z) + \delta\pi z\ .$$

Ce qui exprime que l'application $G \mapsto F \times [K]$, $z \mapsto (s(-s\pi z + z), \delta\pi z)$ est une section de l'application $\bar{u}$. ∎

Exemple 1 : Si G est de dimension finie et si K est un cône convexe, alors K est d'intérieur relatif non vide. Il suffit donc que K soit fermé et que Im$u - K = G$ pour que u admette une K-sélection régulièrement dérivable.

Exemple 2 : Si K est un cône polyédral, alors K est un cône convexe fermé d'intérieur relatif non vide et la condition (2) est vérifiée : il suffit donc encore que Imu $- K = G$ pour que u admette une K-sélection régulièrement dérivable.

Exemple 3 :Si u est l'application associée à une équation d'évolution linéaire :

$$W^{1,\infty}(I, \mathbf{R}^p) \times L^\infty(I, \mathbf{R}^q) \mapsto \mathbf{R}^r \times L^\infty(I, \mathbf{R}^p)$$

$$(X, Y) \mapsto (\alpha X(0) + \beta X(1), X' - aX - bY)$$

avec $I = [0,1]$, $(\alpha, \beta) \in L(\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^r)$, $a \in L^\infty(I, L(\mathbf{R}^p, \mathbf{R}^p))$ et $b \in L^\infty(I, L(\mathbf{R}^q, \mathbf{R}^p))$

alors, u vérifie la condition (3) : il suffit donc que K soit un cône convexe fermé d'intérieur relatif non vide et que Im$u - K = G$ pour que u admette une K-sélection régulièrement dérivable.

Les exemples 1 et 2 sont immédiats, nous donnons la démonstration de l'exemple 3.

Démonstration :

On considère les deux applications suivantes :

$$u_0 : W^{1,\infty}(I, \mathbf{R}^p) \times L^\infty(I, \mathbf{R}^q) \mapsto R^r, \quad (X, Y) \mapsto \alpha X(0) + \beta X(1)$$
$$u_1 : W^{1,\infty}(I, \mathbf{R}^p) \times L^\infty(I, \mathbf{R}^q) \mapsto L^\infty(I, \mathbf{R}^p), \quad (X, Y) \mapsto X' - aX - bY\ .$$

On voit que $u = (u_0, u_1)$. La condition (3) de la proposition I.1.4 résultera immédiatement des deux lemmes suivants :

Lemme 1. *Toute application linéaire continue u_0 d'un espace de Banach E dans $\mathbf{R}^r$ admet une quasi-section.*

Démonstration :

On choisit $\{e_1, \cdots, e_n\}$ une base orthonormée de $\mathrm{Im} u_0$ que l'on complète en une base orthonormée $\{e_1, \cdots, e_n, e_{n+1}, \cdots, e_r\}$ de $\mathbf{R}^r$. Soient $x_1, \cdots, x_n$ des éléments de E tels que $u_0(x_i) = e_i$ pour $i \in \{1, \cdots, n\}$.

On pose

$$\forall \lambda \in \mathbf{R}^r, \quad s_0(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i .$$

Alors s_0 est une application linéaire continue de $\mathbf{R}^r$ dans E et on a

$$\forall x \in E, u_0 s_0 u_0(x) = u_0 s_0 (\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i) = u_0 (\sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i u_0(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$$

donc s_0 est une quasi-section de u_0.

lemme 2 : *Soient E et F deux espaces de Banach et $u = (u_0, u_1)$ une application linéaire continue de E dans $\mathbf{R}^r \times F$. Si u_1 admet une section alors u admet une quasi-section et* Imu *est de codimension inférieure ou égale à r.*

Démonstration :

Soit (λ, y) un élément de $\mathbf{R}^r \times F$. On cherche à résoudre dans E le système

$$\begin{cases} u_0(x) = \lambda & (1) \\ u_1(x) = y & (2) \end{cases}$$

Soit s_1 une section de u_1. La solution générale de l'équation (2) est de la forme

$$x = s_1 y + z \quad \text{avec} \quad z \in \ker u_1$$

ou comme $\ker u_1 = \mathrm{Im}(1_E - s_1 u_1)$, $x = s_1 y + (1_E - s_1 u_1) X$ avec $X \in E$.

En substituant x par son expression dans l'équation (1), on obtient

$$\lambda - u_0 s_1 y = u_0 (1_E - s_1 u_1) X .$$

Ce qui exprime que $(\lambda - u_0 s_1 y)$ est un élément de $\mathrm{Im} u_0 (1_E - s_1 u_1)$. L'application $u_0(1_E - s_1 u_1)$ est définie de E à valeurs dans $\mathbf{R}^r$, son image est donc caractérisée par l'annulation de n-formes linéaires linéairement indépendantes $\xi_1, \cdots, \xi_n$ où $n \leq r$. On en déduit que le système initial a une solution si et seulement si

$$\forall k \in \{1, \cdots, n\}, \quad \xi_k(\lambda - u_0 s_1 y) = 0 .$$

Donc la codimension de Imu est égale à n. D'autre part, d'après le lemme 1 précédent, l'application $u_0(1_E - s_1 u_1)$ admet une quasi-section s_0 de $\mathbf{R}^r$ dans E. Posons alors

$$\forall (\lambda, y) \in \mathbf{R}^r \times F, \quad s(\lambda, y) = s_1 y + (1_E - s_1 u_1) s_0 (\lambda - u_0 s_1 y) .$$

Ainsi s est une aplication linéaire continue de $\mathbf{R}^r \times F$ dans E et on a

$$\begin{aligned} \forall x \in E, \quad usu(x) &= us(u_0(x), u_1(x)) \\ &= us_1 u_1(x) + (1_E - s_1 u_1) s_0 (u_0(x) - u_0 s_1 u_1(x)) \end{aligned}$$

Comme s_0 est une quasi-section de $u_0(1_E - s_1 u_1)$, on a

$$\begin{aligned} \forall x \in E, \quad & u_0[s_1 u_1(x) + (1_E - s_1 u_1) s_0 (u_0(x) - u_0 s_1 u_1(x))] \\ &= u_0 s_1 u_1(x) + u_0 (1_E - s_1 u_1) s_0 u_0 (1_E - s_1 u_1)(x) \\ &= u_0 s_1 u_1(x) + u_0(x) - u_0 s_1 u_1(x) \\ &= u_0(x) \end{aligned}$$

Par ailleurs, $\ker u_1 = \mathrm{Im}(1_E - s_1 u_1)$ donc

$$\begin{aligned} \forall x \in E, \quad & u_1[s_1 u_1(x) + (1_E - s_1 u_1) s_0 (u_0(x) - u_0 s_1 u_1(x))] \\ &= u_1 s_1 u_1(x) + u_1 (1_E - s_1 u_1) s_0 (u_0(x) - u_0 s_1 u_1(x)) \\ &= u_1(x) \end{aligned}$$

Ce qui montre que s est une quasi-section de u.

Il suffit, d'après le lemme 2, de vérifier que u_1 admet une section. Pour cela, on considère R la résolvante de l'équation différentielle $X' = aX$ et on définit l'application s_1 par :

$$\forall h \in L^\infty([0,1], \mathbf{R}^p), \quad s_1(h) = (\int_0^{\cdot} R(\cdot, z) h(z) dz, 0)$$

Alors, s_1 est une section de u_1. ∎

I.2. Régularité des solutions du système des inégalités :

En considérant un cône convexe fermé K au lieu d'un convexe C dans le système (Sx) et en prenant $B = F$, on obtient le système des inégalités perturbé suivant :

$$(Rx) \qquad\qquad f(x,y) \in z + K, \quad y \in F$$

Nous démontrons dans le théorème suivant qu'on peut construire une solution $y = \theta(x,z)$ lipschitzienne (resp. lipschitzienne et admettant des dérivées directionnelles) pour un tel système si on suppose que le système linéarisé

$$(R'a) \qquad\qquad D_2 f(a,b)(y) \in z + K, \quad y \in F$$

admet une solution possédant les mêmes propriétés.

Théorème I.2.1. : *(Théorème de submersion modulo un cône.)*

Soient E, F et G trois espaces de Banach, U un ouvert de $E \times F$, f une application de U dans G, (a,b) un point de U et K un cône convexe fermé non vide de G. On suppose que :

i) f est de classe C^1 et sa différentielle est lipschitzienne au voisinage du point (a,b)

ii) $D_2 f(a,b)$ admet une K-sélection lipschitzienne.

Il existe alors un voisinage Ω de $(a, f(a,b)) = (a,c)$ et une application lipschitzienne θ de Ω dans F telle que :

1) $\theta(a,c) = b$

2) $\forall (z,z) \in \Omega,\ f(x,\theta(x,z)) \in z + K$.

Si de plus, $D_2 f(a,b)$ admet une K-sélection régulièrement dérivable (v,w), on peut imposer à θ d'admettre des dérivées directionnelles en tout point de Ω et de vérifier :

3) $\forall (X,Z) \in E \times G,\ \theta'((a,c);(X,Z)) = v(D_1 f(a,b)X - Z)$

4) $\exists k > 0,\ \forall (x,z) \in \Omega,\ \forall (X,Z) \in E \times G,\ \|\theta'((x,z);(X,Z))\| \leq k \cdot \|(X,Z)\|$.

La démonstration du théorème I.2.1 repose sur le théorème de fonctions implicites suivant :

Proposition I.2.2. : *Les hypothèses étant celles du théorème I.2.1, il existe un voisinage V de a et une application lipschitzienne ψ de V dans F telle que :*

1) $\psi(a) = b$

2) $\forall x \in V,\ f(x, \psi, (x) \in f(a, b) + K$

Si, de plus, $D_2 f(a, b)$ admet une K-sélection régulièrement dérivable (v, w), on peut imposer à ψ d'admettre des dérivées directionnelles en tout point de V et de vérifier :

3) $\forall X \in E,\ \psi'(a; X) = v \circ D_1 f(a, b) X$

4) $\exists k > 0,\ \forall x \in V,\ \forall X \in E,\ \|\psi'(x; X)\| \leq k \cdot \|X\|.$

Démonstration de la proposition I.2.2. :

La démonstration se décompose en trois étapes :

1ère étape : Cette première partie de la démonstration s'inspire de celle du corollaire I.2. de Zouaki [4].

Soient (v, w) une K-sélection lipschitzienne de $D_2 f(a, b)$ de rapport A et S la valeur de la somme $\sum_0^\infty \frac{k}{2^k}$. U étant un ouvert de $E \times F$, f étant de classe C^1 et sa différentielle étant lipschitzienne au voisinage du point (a, b), il existe $r > 0$ et $s > 0$ tels que :

$$\forall x \in B_E(a; r), \quad \|f(x, b) - f(a, b)\| \leq \frac{s}{2A} \tag{2.1}$$

$$Df \quad \text{soit lipschitzienne de rapport} \quad B \quad \text{sur} \quad B_E(a; r) \times B_F(b; s) \tag{2.2}$$

$$AB(r + s) \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad ABSs \leq \frac{1}{3} \tag{2.3}$$

On définit la suite de fonctions $(\psi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sur la boule $B_E(a; r)$ à valeurs dans F, par les relations de récurrence suivantes :

$$\psi_0 = b$$

$$\forall x \in B_E(a; r), \quad \psi_1(x) = b + v(-f(x, b) + f(a, b))$$

$$\begin{aligned} \forall x \in B_E(a; r), \quad \forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \psi_{n+1}(x) = \psi_n(x) + v[&-f(x, \psi_n(x)) + f(x, \psi_{n-1}(x)) \\ &+ D_2 f(a, b)(\psi_n(x) - \psi_{n-1}(x))] \end{aligned}$$

On va montrer que la suite $(\psi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ possède les propriétés suivantes :

i) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, ψ_n est bien définie et à valeurs dans la boule $B_F(b; s)$

ii) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\psi_n(a) = b$

iii) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $x \in B_E(a;r)$

$$f(x, \psi_{n-1}(x)) + D_2 f(a,b)(\psi_n(x) - \psi_{n-1}(x)) \in f(a,b) + K$$

iv) ψ_n converge uniformément sur la boule $B_E(a;r)$ vers une application (continue) ψ telle que :

1) $\psi(a) = b$

2) $\forall x \in B_E(a;r)$, $f(x, \psi(x)) \in f(a,b) + K$.

i) Pour $n = 0$, $\psi_0 = b$ donc ψ_0 est bien définie et à valeurs dans $B_F(b;s)$.

Pour $n = 1$, on a

$$\forall x \in B_E(a;r), \quad \psi_1(x) = b + v(-f(x,b) + f(a,b))$$

donc ψ_1 est bien définie et, de plus, on a d'après (2.1)

$$\forall x \in B_E(a;r), \quad \|\psi_1(x) - b\| \leq A \cdot \|f(x,b) - f(a,b)\| \leq A \cdot \frac{s}{2A} = \frac{s}{2}$$

ψ_1 est donc à valeurs dans la boule $B_F(b, s)$.

Supposons que pour tout entier $k \leq n$, ψ_k soit définie et à valeurs dans $B_F(b;s)$ et montrons qu'il en est de même pour ψ_{n+1}

Pour tout $k \leq n$, on définit l'application h_k par :

$\forall x \in B_E(a;r)$,
$h_k(x) = -f(x, \psi_k(x)) + f(x, \psi_{k-1}(x)) + D_2 f(a,b)(\psi_k(x) - \psi_{k-1}(x))$.

Il vient que

$$\forall x \in B_E(a;r), \quad \forall k \leq n, \quad \psi_{k+1}(x) = \psi_k(x) + v \circ h_k(x) \tag{2.4}$$

On a

$$h_k(x) = \int_0^1 \left(D_2 f(x, \tau\psi_k(x) + (1-\tau)\psi_{k-1}(x)) - D_2 f(a,b)\right) \cdot (\psi_k(x) - \psi_{k-1}(x)) d\tau \ .$$

Comme $s \in B_E(a;r)$ et, par hypothèse de récurrence,

$$(1-\tau)\psi_{k-1}(x) + \tau\psi_k(x) \in B_F(b;s) \ ,$$

il résulte d'après (2.2) que

$$\begin{aligned}
&\|D_2 f(x, \tau\psi_k(x) + (1-\tau)\psi_{k-1}(x)) - D_2 f(a,b)\| \\
&\leq B(\|x-a\| + \|\tau\psi_k(x) + (1-\tau)\psi_{k-1}(x) - b\|) \\
&\leq B(r+s)\,.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\forall x \in B_E(a;r),\ \forall k \leq n,\ \|\psi_{k+1}(x) - \psi_k(x)\| &\leq A \cdot \|h_k(x)\| \\
&\leq A \cdot B(r+s)\|\psi_k(x) - \psi_{k-1}(x)\|\,.
\end{aligned}$$

On en déduit d'après (2.3) que

$$\forall x \in B_E(a;r),\ \forall k \leq n,\ \|\psi_{k+1}(x) - \psi_k(x)\| \leq \frac{1}{2}\|\psi_k(x) - \psi_{k-1}(x)\|$$

et par itération, on a

$$\forall x \in B_E(a;r),\ \forall k \leq n,\ \|\psi_{k+1}(x) - \psi_k(x)\| \leq (\frac{1}{2})^{k+1}s \qquad (2.5)\,.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\forall x \in B_E(a;r),\ \|\psi_{n+1}(x) - b\| &= \|\sum_{k=0}^{n}\psi_{k+1}(x) - \psi_k(x)\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n}\|\psi_{k+1}(x) - \psi_k(x)\| \\
&\leq s \cdot \sum_{k=0}^{n}(\frac{1}{2}^{k+1} \leq s
\end{aligned}$$

ψ_{n+1} est donc bien définie et à valeurs dans $B_F(b;s)$.

ii) se montre facilement par réccurence.

iii) Pour $n = 1$, on a

$$f(x,b) + D_2 f(a,b)(\psi_1(x) - b) = f(x,b) + D_2 f(a,b) \circ v(-f(x,b) + f(a,b))$$

(v,w) étant une K-sélection bornée de $D_2 f(a,b)$, on a, par définition

$$-f(x,b) + f(a,b) = D_2 f(a,b) \circ v(-f(x,b) + f(a,b)) - w(-f(x,b) + f(a,b))$$

Donc

$$f(x,b) + D_2 f(a,b)(\psi_1(x) - b) = f(a,b) + w(-f(x,b) + f(a,b) \in f(a,b) + K$$

Ce qui montre que la propriété est vraie pour $n = 1$.

Supposons que pour tout entier $k \leq n$, la propriété soit vraie. On a

$$\begin{aligned} f(x, \psi_k(x) + D_2 f(a,b)(\psi_{k+1}(x) - \psi_k(x)) &= f(x, \psi_k(x)) + D_2 f(a,b) \circ v \circ h_k(x) \\ &= f(x, \psi_k(x)) + h_k(x) + w \circ h_k(x) \\ &= f(x, \psi_{k-1}(x)) + D_2 f(a,b)(\psi_k(x) - \psi_{k-1}(x)) + \omega \circ h_k(x) \end{aligned}$$

Comme $\omega \circ h_k(x) \in K$ et par hypothèse de récurrence,

$$f(x, \psi_{k-1}(x)) + D_2 f(a,b)(\psi_k(x) - \psi_{k-1}(x)) \in f(a,b) + K$$

Alors

$$f(x, \psi_k(x)) + D_2 f(a,b)(\psi_{k+1}(x) - \psi_k(x)) \in f(a,b) + K + K = f(a,b) + K$$

la propriété est donc vraie pour $(n+1)$.

iv) D'après (2.5), la série de terme général $(\psi_{n+1} - \psi_n)$ est normalement convergente sur la boule $B_E(a;r)$, donc la suite $(\psi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément sur la boule $B_E(a;r)$ vers une application (continue) ψ et en faisant tendre n vers l'infini dans ii) et iii), on obtient :

(1) $\psi(a) = b$

(2) $\forall x \in B_E(a;r)$, $f(x, (\psi(x)) \in f(a,b) + K$.

2ème étape : Caractère lipschitizien des applications ψ_n et ψ.

On pose :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \theta_n = \psi_n - \psi_{n-1} \ .$$

Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'application ψ_n (resp. θ_n) est lipschitzienne.

Pour $n = 1$, on a

$$\begin{aligned} \forall x \in B_E(a;r), \quad \psi_1(x) &= b + v(f(a,b) - f(x,b)) \\ \theta_1(x) &= v(f(a,b) - f(x,b)) \end{aligned}$$

le caractère lipschitzien de ψ_1 (resp. de θ_1) résulte de celui des applications v et f.

Supposons que pour tout $k \leq n$, l'application ψ_k (resp. θ_k) soit lipschitzienne de rapport α_k (resp. β_k). On a

$$\forall (x,y) \in B_E(a;r), \quad \theta_{n+1}(x) - \theta_{n+1}(y) = v \circ h_n(x) - v \circ h_n(y)$$

$$\forall (x,y) \in B_E(a;r), \quad \|\theta_{n+1}(x) - \theta_{n+1}(y)\| \leq A \cdot \|h_n(x) - h_n(y)\|$$

D'autre part, la formule de Taylor d'ordre 1 pour f donne
$\forall (x,y) \in B_E(a;r)$,

$$\|h_n(x) - h_n(y)\| \leq \sup_{0\leq\tau\leq 1} \|D_1 f(\chi_{n-1}(\tau)) - D_1 f(\chi_n(\tau))\| \cdot \|x-y\|$$
$$+ \sup_{0\leq\tau\leq 1} \|D_2 f(\chi_{n-1}(\tau)) - D_2 f(\chi_n(\tau))\| \cdot \|\psi_n(x) - \psi_n(y)\|$$
$$+ \sup_{0\leq\tau\leq 1} \|D_2 f(\chi_{n-1}(\tau)) - D_2 f(a,b)\| \cdot \|\theta_n(x) - \theta_n(y)\|$$

où on a posé $\chi_k(\tau) = (\tau x + (1-\tau)y,\ \tau\psi_k(x) + (1-\tau)\psi_k(y))$ pour $k \in \{n-1, n\}$.

Par construction de l'application ψ_k (resp. θ_k), pour tout $x \in B_E(a;r)$, l'élément $\psi_k(x)$ (resp. $\theta_k(x)$) est dans la boule $B_F(b;s)$ (resp. $B_F(0,\frac{s}{2^n})$), on en déduit d'après (2.2) que :

$$\begin{aligned}\|D_1 f(\chi_{n-1}(\tau) - D_1 f(\chi_n(\tau))\| &\leq B\|\tau\theta_n(x) + (1-\tau)\theta_n(y)\|\\ &\leq B(\tau\|\theta_n(x)\| + (1-\tau)\|\theta_n(y)\|)\\ &\leq B\cdot\frac{s}{2^n}\end{aligned}$$

$$\|D_2 f(\chi_{n-1}(\tau)) - D_2 f(\chi_n(\tau))\| \leq B\cdot\|\tau\theta_n(x) + (1-\tau)\theta_n(y)\| \leq B\cdot\frac{s}{2^n}$$

$$\begin{aligned}&\|D_2 f(\chi_{n-1}(\tau)) - D_2 f(a,b)\|\\ &\qquad\leq B(\|\tau x + (1-y) - a\| + \|\tau\psi_{n-1}(x) + (1-\tau)\psi_{n-1}(y) - b\|\\ &\qquad\leq B(r+s)\,.\end{aligned}$$

Cela étant, on a

$$\begin{aligned}&\forall (x,y) \in B_E(a,r),\\ &\quad\|h_n(x) - h_n(y)\| \leq\\ &\qquad B\Big(\frac{s}{2^n}\|x-y\| + \frac{s}{2^n}\|\psi_n(x) - \psi_n(y)\| + (r+s)\|\theta_n(x) - \theta_n(y)\|\Big)\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, ψ_n (resp. θ_n) est lipschitzienne de rapport α_n (resp. β_n), il en résulte que

$$\forall (x,y) \in B_E(a;r), \quad \|h_n(x) - h_n(y) \leq B[\frac{s}{2^n}(1+\alpha_n) + (r+s)\beta_n]\cdot\|x-y\| \quad (2.6)$$

Soit

$$\forall (x,y) \in B_E(a;r), \quad \|\theta_{n+1}(x) - \theta_{n+1}(y)\| \leq A\cdot B[\frac{s}{2^n}(1+\alpha_n) + (r+s)\beta_n]\cdot\|x-y\|$$

Ce qui montre que θ_{n+1} est lipschitzienne et de rapport

$$\beta_{n+1} = AB\frac{s}{2^n}(1+\alpha_n) + AB(r+s)\beta_n \tag{2.7}$$

Comme $\psi_{n+1} = \theta_{n+1} + \psi_n$, alors ψ_{n+1} est lipschitzienne et de rapport

$$\alpha_{n+1} = \beta_{n+1} + \alpha_n = \sum_0^n \beta_{k+1} \tag{2.8}$$

D'autre part, étant donné que $\psi_0 = b$, on peut choisir $\alpha_0 = 0$ et $\beta_1 = \alpha_1$. Alors pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\alpha_n \leq 3\alpha_1 + 1$.

Pour $n = 1$, $\alpha_1 \leq 3\alpha_1 + 1$

Supposons que pour tout $k \leq n$, l'inégalité soit vraie. D'après (2.3) et (2.7), on a

$$\beta_{k+1} \leq AB\frac{1}{2^k}(3\alpha_1 + 2) + \frac{1}{2}\beta_k \, .$$

Par itération, on obtient :

$$\forall k \leq n, \quad \beta_{k+1} \leq ABs(3\alpha_1 + 2)\cdot\frac{k}{2^k} + \frac{1}{2^k}\cdot\beta_1$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} = \sum_{k=0}^n \beta_{k+1} &\leq ABs(3\alpha_1+2)\cdot\sum_{k=0}^n \frac{k}{2^k} + \beta_1\cdot\sum_{k=0}^n\frac{1}{2^k} \\ &\leq ABs\cdot S(3\alpha_1+2) + 2\beta_1 \leq \alpha_1 + \frac{2}{3} + 2\beta_1 \leq 3\alpha_1 + 1 \, . \end{aligned}$$

Ce qui montre que l'inégalité de récurrence est vraie pour $(n+1)$ et, par conséquent, la limite ψ des applications ψ_n est lipschitzienne sur $B_E(a;r)$ et de rapport $k = 3\alpha_1 + 1$.

3ème étape : Si, de plus, l'application v admet des dérivées directionnelles alors on peut imposer à ψ d'admettre des dérivées directionnelles en tout point de $B_E(a;r)$ et de vérifier les propriétés suivantes :

(3) $\forall X \in E, \quad \psi'(a;X) = v \circ D_1 f(a,b)X$;

(4) $\exists k > 0, \forall x \in B_E(a,r), \forall X \in E, \|\psi'(x;X)\| \leq k\|X\|$.

On commence par montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, ψ_n admet des dérivées directionnelles en tout point de $B_E(a,r)$.

Pour $n = 1$, on a :

$$\forall x \in B_E(a;r), \quad \psi_1(x) = b + v(f(a,b) - f(x,b))$$

l'application v est supposé lipschitzienne et admettant des dérivées directionnelles et f est de classe C^1 au voisinage du point (a,b), on peut donc dériver leur composé et, par suite, ψ_1 admet des dérivées directionelles en tout point de $B_E(a;r)$.

Supposons que pour tout $k \leq n$, l'aplication ψ_k admet des dérivées directionnelles en tout point de $B_E(a;r)$. L'existence des dérivées directionnelles pour ψ_{n+1} résulte, d'après (2.4) et de la définition de h_k de celle des applications v, f, ψ_{n-1} et ψ_n. On en déduit que

$$\forall x \in B_E(a;r), \quad \forall X \in E, \quad \psi'_{n+1}(x;X) - \psi'_n(x;X) = v'(h_n(x); h'_n(x;X))$$

et comme v est lipschitzienne de rapport A, on a :

$$\forall x \in B_E(a;r), \quad \forall X \in E, \quad \|\psi'_{n+1}(x;X) - \psi'_n(x;X)\| \leq A \cdot \|h'_n(x;X)\|$$

En utilisant (2.6), on obtient

$$\forall x \in B_E(a;r), \forall X \in E,$$
$$\|\psi'_{n+1}(x;X) - \psi'_n(x;X)\| \leq AB[\frac{s}{2^n}(1+\alpha_n) + (r+s)\beta_n] \cdot \|X\| .$$

Soit enfin

$$\forall x \in B_E(a;r), \forall X \in E,$$
$$\|\psi'_{n+1}(x;X) - \psi'_n(x;X)\| \leq (AB\frac{1}{2^n}(3\alpha_1 + 2) + \frac{1}{2^n}\beta_1) \cdot \|X\| .$$

la série de fonctions $\sum_{n=0}^{\infty}(\psi'_{n+1} - \psi'_n)$ converge normalement sur le produit de la boule $B_E(a;r)$ avec chaque partie bornée de E. Donc la suite $(\psi'_n)_{n\in\mathbf{N}}$ des dérivées directionnelles converge uniformément sur le produit de la boule $B_E(a;r)$ avec chaque partie bornée de E et il en résulte d'après le théorème de la convergence uniforme que la limite ψ admet des dérivées directionnelles sur la boule $B_E(a;r)$.

Il est clair que d'après (2.4), on a :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \forall X \in E, \quad \psi'_{n+1}(a;X) = \psi'_1(a;X)$$

Par passage à la limite, on obtient

(3) $\forall X \in E$, $\psi'(a;X) = \psi_1'(a;X) = v \circ D_1 f(a,b)X$.

Comme l'application ψ est k-lipschitzienne sur $B_E(a;r)$, on a alors

(4) $\forall x \in B_E(a;r)$, $\forall X \in E$, $\|\psi'(x;X)\| \leq k \cdot \|X\|$

Ceci démontre la proposition 1.2.2. ∎

Démonstration du théorème I.2.1 :

On considère l'application

$$\bar{f} : (E \times G) \times F \mapsto G \times F, \quad ((x,z),y) \mapsto (f(x,y) - z, y)$$

Cette application est définie, de classe C^1 et sa différentielle est lipschitzienne au voisinage du point $((a,c),b)$. Il résulte de la proposition I.1.3 que $D_2\bar{f}((a,c),b) = (D_2 f(a,b), 1_F)$ admet une $K \times F$-sélection lipschitzienne (resp. régulièrement dérivable) si $D_2 f(a,b)$ admet une K-sélection lipschitzienne (resp. régulièrement dérivable). On peut donc appliquer la proposition I.2.2. précédente à $\bar{f}$: il existe un voisinage Ω de (a,c) dans $E \times G$ et une application lipschitzienne θ de Ω dans F telle que :

1) $\theta(a,c) = b$

2) $\forall (x,z) \in \Omega$, $\bar{f}((x,z), \theta(x,z)) \in \bar{f}((a,c),b) + K \times F$

La relation (2) se traduit ainsi :

$$\forall (x,z) \in \Omega, \quad f(x, \theta(x,z)) \in z + K .$$

Si, enfin, la K-sélection de $D_2 f(a,b)$ est régulièrement dérivable, on peut imposer à θ d'admettre des dérivées directionnelles en tout point de Ω et de vérifier:

3)
$$\begin{aligned}\forall (X,Z) \in E \times G, \theta'((a,c);(X;Z)) &= v \circ D_1\bar{f}((a,c),b)(X,Z) \\ &= v(D_1 f(a,b)X - Z)\end{aligned}$$

4) $\exists k > 0$, $\forall (x,z) \in \Omega$, $\forall (X,Z) \in E \times G$, $\|\theta'((x,z);(X;Z))\| \leq k \cdot \|(X,Z)\|$ ∎

I.3. Régularité des solutions du système sans contraintes :

Dans cette seconde étape, nous allons montrer qu'on peut étendre le résultat précédent au système (Sx) avec $B = F$ et C un convexe fermé d'intérieur relatif non vide si la condition de régularité est vérifiée pour le système linéarisé

$(S'a)$ $$D_2 f(a,b)(y) \in z + T_{f(a,b)}C, \quad y \in F$$

Théorème I.3.1. : *(Théorème de submersion modulo un convexe)*

Soient E, F et G trois espaces de Banach, U un ouvert de $E \times F$, f une application de U dans G, C un convexe fermé d'intérieur relatif non vide de G et (a, b) un point de $U \cap f^{-1}(C)$. On suppose que :

i) f est de classe C^1 et sa différentielle est lipschitzienne au voisinage du point (a, b).

ii) $D_2 f(a, b)$ admet une $T_{f(a,b)}C$- sélection lipschitzienne (resp. régulièrement dérivable).

Il existe alors un voisinage Ω de $(a, f(a, b)) = (a, c)$ et une application lipschitzienne (resp. régulièrement dérivable) θ de Ω dans F telle que :

1) $\theta(a, c) = b$

2) $\forall(x, z) \in \Omega,\ f(x, \theta(x, z)) \in z + C - f(a, b)$.

Démonstration :

a) Lemme I.3.2 : *(Lemme de transversalité sur un convexe)*

Soient F et G deux espaces de Banach, u une application linéaire continue de F dans G, C un convexe fermé d'intérieur relatif non vide de G et e un point de C. Si u admet une T_eC-sélection lipschitzienne (resp. régulièrement dérivable), alors, il existe un cône convexe fermé d'intérieur relatif non vide K de G et un nombre positif ε tels que :

i) u admet une K-sélection lipschitzienne (resp. régulièrement dérivable)

ii) $e + B_K(0; \varepsilon) \subset \omega(C)$

Démonstration :

u admettant une T_eC-sélection lipschitzienne (resp.régulièrement dérivable), on a en particulier

$$\mathrm{Im} u \cap \omega(T_eC) \neq \emptyset \ .$$

En appliquant le corollaire I.13 avec $L = F$, on en déduit que

$$(e + \mathrm{Im} u) \cap \omega(C) \neq \emptyset \ .$$

Si $e \in \omega(C)$ alors $T_eC = [C] - e$ et on choisira donc $K = [C] - e$.

Si $e \notin \omega(C)$, on fixe alors un élément x_1 dans F tel que $e + u(x_1)$ soit dans $\omega(C)$. Comme $u(x_1)$ ne peut être nul, il existe donc un nombre positif ρ tel que

$$u(x_1) > \rho \quad \text{et} \quad B_{[C]}(u(x_1);\rho) \subset C\,.$$

Posons $K = \mathbf{R}_+ \cdot B_{[C]}(u(x_1);\rho)$. On voit que K est un cône convexe d'intérieur relatif non vide de G. Montrons qu'il est fermé. Soit $(Z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de K tendant vers Z. Si Z est l'élément nul, alors Z appartient à K, sinon on pose

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad Z_n = \lambda_n y_n \quad \text{avec} \quad \lambda_n \in B_{[C]}(u(x_1);\rho)$$

Il vient que

$$\forall n \in \mathbf{N}, R_1 \leq \|y_n\| \leq R_2 \quad \text{où} \quad R_1 = \|u(x_1)\| - \rho \quad \text{et} \quad R_2 = \|u(x_1)\| + \rho\,.$$

Par ailleurs, la suite $(Z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ étant convergente vers $Z \neq 0$,

$$\exists m > 0, \quad \exists M > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbf{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad 0 < m \leq \|Z_n\| \leq M$$

Soit

$$\forall n \geq n_0, \quad \frac{m}{\|y_n\|} \leq \lambda_n \leq \frac{M}{\|y_n\|}$$

Ce qui exprime que la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$ prend ses valeurs dans un compact de $\mathbf{R}_+$, on peut en extraire une sous-suite $(\lambda_{n'})_{n'\in\mathbf{N}}$ convergente vers λ. Il en résulte que la suite $y_{n'} = \frac{1}{\lambda_{n'}} \cdot Z_{n'}$ converge vers $y = \frac{1}{\lambda} \cdot Z$ dans la boule fermée $B_{[C]}(u(x_1);\rho)$ et par suite l'élément $Z = \lambda \cdot y$ est dans le cône K. Ceci prouve que K est fermé.

Etant donné que

$$\forall y \in B_{[C]}(u(x_1);\rho), \quad R_1 \leq \|y\|$$

On choisit un nombre positif ε tel que $\varepsilon \leq R_1$ et on considère un élément non nul Z de K. Il est de la forme $Z = \lambda \cdot y$ avec $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$ et $y \in B_{[C]}(u(x_1);\rho)$. On en déduit que si Z est dans $B_K(0,\varepsilon)$ alors $\lambda = \frac{\|Z\|}{\|y\|} \leq \frac{\|\varepsilon\|}{\|y\|} \leq \frac{\varepsilon}{R_1} \leq 1$ et il résultera de la proposition 1.3 que l'élément $e + Z = e + \lambda y = (1-\lambda)e + \lambda(e+y)$ est dans $\omega(C)$ car C est convexe, e est dans C et $(e+y)$ est dans $\omega(C)$.

Soit enfin,

$$\forall Z \in B_K(0;\varepsilon), \quad e + Z \in \omega(C)\,.$$

D'autre part, posons $G_0 = [C] - e$ et considérons y dans $G_0 \setminus \{-e\}$. L'élément $u(x_1) + \frac{\rho}{\|y+e\|} \cdot (y+e)$ est alors dans la boule $B_{[C]}(u(x_1);\rho)$ et par suite l'élément $\frac{\|u+e\|}{\rho} \cdot u(x_1) + y + e$ est dans le cône K. Posons,

$$\forall y \in G_0, \quad v_1(y) = \frac{\|u+e\|}{\rho} \cdot x_1 \quad \text{et} \quad w_1(y) = \frac{\|u+e\|}{\rho} \cdot u(x_1) - y + e\ .$$

On voit que (v_1, w_1) est une application régulièrement dérivable définie de G_0 dans $F \times K$ et qu'on a :

$$\forall y \in G_0, \quad y = u \circ v_1(y) - \omega_1(y) + e\ .$$

Soit (v_2, w_2) une T_eC-sélection lipschitzienne (resp.régulièrement dérivable) de u et posons

$$\forall y \in G, \quad v(y) = v_2(y) - v_1 \circ w_2(y) \quad \text{et} \quad w(y) = -w_1 \circ w_2(y) + e\ .$$

On vérifie facilement que (v, w) est une K-sélection lipschitzienne (resp. régulièrement dérivable) de u. Ceci démontre le lemme I.3.2. ∎

b) Démonstration du Théorème I.3.1. :

$D_2 f(a,b)$ admettant une $T_{f(a,b)}C$-sélection lipschitzienne (resp. régulièrement dérivable), il existe d'après le lemme I.3.2 un cône convexe fermé d'intérieur relatif non vide K de G et un nombre positif ε tels que :

i) $D_2 f(a,b)$ admet une K-sélection lipschitzienne (resp. régulièrement dérivable).

ii) $f(a,b) + B_K(0;\varepsilon) \subset w(C)$.

On applique le théorème I.2.1 à l'application f relativement au cône K : il existe un voisinage Ω_1 de (a,c) et une application lipschitzienne (resp. régulièrement dérivable) θ de Ω_1 dans F telle que :

1) $\theta(a,c) = b$

2) $\forall (x,z) \in \Omega_1,\ f(x, \theta(x,z)) \in z + K$.

Les applications f et θ étant continues, il existe un voisinage Ω_2 de (a,c) dans $E \times G$ tel que :

$$\forall (x,z) \in \Omega_2, \quad f(x, \theta(x,z)) - z \in B_G(0;\varepsilon)\ .$$

On en déduit que

$$\forall (x,z) \in \Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2, \quad f(x,\theta(x,z)) - z \in B_K(0;\varepsilon) \subset C - f(a,b)\ . \qquad ∎$$

I.4. Régularité des solutions du système avec contraintes :

En posant $g(y) = f(a,y)$ pour une valeur donnée a du paramètre x et en considérant un cône convexe fermé K dans le système (Sx), on obtient le système des inégalités suivant

$$(M) \qquad g(y) \in z + K, \quad y \in B$$

Sous l'hypothèse
(H.M) l'adhérence de l'ensemble $Dg(b)[B_F(b;1) \cap B - b] + K$ est un voisinage de 0 dans G
qui assure l'existence d'une K-sélection continue pour l'application $Dg(b)$, Michel [1] a montré l'existence de solutions pour le système (M). Robinson [2] en donnant une condition de régularité équivalente

$$(H.R) \qquad 0 \in \text{int}[g(b) + Dg(b)(B-b) + K]$$

parvient à préciser ce résultat pour le système des inégalités perturbé

$$(Rx) \qquad f(x,y) \in z + K, \quad y \in B$$

tel que, le système (Ra) vérifie la condition (H.R) et il a ajouté un contrôle sur la taille des solutions de (Rx) pour x voisin de a.

Penot [3] a repris l'étude du système (M) sous la forme plus générale

$$(P) \qquad g(y) \in z + C, \quad y \in B$$

où C est un convexe de G vérifiant $C - K \subset C$.

Il a reformulé la condition de régularité de Robinson en termes d'une condition de transversalité de l'application g au point b sur le convexe C sous la forme :

$$(H.P) \qquad Dg(b)(T_bB) - T_{g(b)}C = G\ .$$

et a montré que les deux conditions (H.R) et (H.P) sont équivalentes dans le cas où l'un des deux convexes B ou C est d'intérieur non vide. Sa condition de transversalité (H.P) assure l'existence d'une $T_{g(b)}C$-sélection continue à valeurs dans T_bB pour l'application $Dg(b)$ et lui permet de donner un contrôle sur la taille des solutions du système (P). Enfin, Zouaki [4] a étudié le système des inégalités perturbé (Rx) dans le cas particulier où $B = b + H$ avec H un cône convexe fermé d'intérieur relatif non vide de F et a montré que si la condition de transversalité (H.P) qui s'écrit sous la forme :

$$(H.P) \qquad D_2 f(a,b)(H) - K = G$$

est vérifiée, il existe alors une application continue θ, définie sur un voisinage Ω de $(a, f(a,b))$ à valeurs dans F, telle que, $\theta(x,z)$ soit solution de (Rx) pour tout (x,z) dans Ω. Sa démonstration repose sur la construction d'une K-sélection continue à valeurs dans H de l'application $D_2 f(a,b)$. Nous nous proposons d'étendre ce résultat au système (Sx) et nous démontrons par application de nos résultats précédents que si $D_2 f(a,b)$ admet une $T_{f(a,b)}C$-sélection lipschitzienne (resp. régulièrement dérivable) à valeurs dans $T_b B$ alors l'application θ vérifie les mêmes propriétés et que $\theta(x,z)$ est solution de (Sx) pour tout (x,z) dans Ω.

Théorème I.4.1. : *(Théorème de transversalité).*
Soient E, F et G trois espaces de Banach, U un ouvert de $E \times F$, f une application de U dans G, B (resp. C) un convexe fermé d'intérieur relatif non vide de F (resp. de G) et (a,b) un point de U tel que b soit dans B et $f(a,b)$ dans C. On suppose que :

i) f est de classe C^1 et sa différentielle et lipschitzienne au voisinage du point (a,b).

ii) $D_2 f(a,b)$ admet une $T_{f(a,b)}C$-sélection lipschitzienne (resp.régulièrement dérivable) à valeurs dans $T_b B$.

Il existe alors un voisinage Ω de $(a, f(a,b)) = (a,c)$ et une application lipschitzienne (resp.régulièrement dérivable) θ de Ω dans F telle que :

1) $\theta(a,c) = b$ et $\forall (x,z) \in \Omega,\ \theta(x,z) \in B$

2) $\forall (x,z) \in \Omega,\ f(x, \theta(x,z)) \in z + C - f(a,b)$.

Démonstration :

On considère l'application

$$h : E \times F \mapsto G \times F, \quad (x,y) \mapsto (f(x,y), y)$$

Cette application est définie, de classe C^1 et sa différentielle est lipschitzienne au voisinage du point (a,b). Il résulte de l'hypothèse ii) et de la proposition I.1.3 que $D_2h(a,b) = (D_2f(a,b), 1_F)$ admet une $T_{h(a,b)}C \times B$-sélection lipschitzienne (resp. régulièrement dérivable). On peut donc appliquer le théorème I.3.1 à h relativement au convexe $C \times B$: il existe un voisinage $\bar{\Omega}$ de $(a,\bar{c}) = (a, h(a,b))$ dans $E \times (G \times F)$ et une application lipschitzienne (resp.régulièrement dérivable) $\bar{\theta}$ de $\bar{\Omega}$ dans F telle que :

1) $\bar{\theta}(a,\bar{c}) = b$

2) $\forall (x,z,y) \in \bar{\Omega}, \quad h(x, \bar{\theta}(x,z,y)) \in (z,y) - h(a,b) + C \times B$

La relation 2) se traduit ainsi

$$\begin{cases} \forall (x,z,y) \in \bar{\Omega}, & \bar{\theta}(x,z,y) \in y - b + B \\ \forall (x,z,y) \in \bar{\Omega}, & f(x, \theta(x,z,y)) \in z - f(a,b) + C \end{cases}$$

On écrit $\bar{\Omega} = \Omega \times V$ où Ω est un voisinage de $(a, f(a,b))$ dans $E \times G$ et V un voisinage de b dans F et on définit l'application θ sur Ω par :

$$\forall (x,z) \in \Omega, \quad \theta(x,z) = \bar{\theta}(x,z,b)$$

Alors θ est une application lipschitzienne (resp. régulièrement dérivable) de Ω dans F telle que :

1) $\theta(a,c) = b$ et $\forall (x,z) \in \Omega, \quad \theta(x,z) \in B$

2) $\forall (x,z) \in \Omega, \quad f(x, \theta(x,z)) \in z + C - f(a,b)$. ∎

Chapitre II

THEOREMES DE SUBMERSIONS POUR DES FONCTIONS MULTIVOQUES.

Soient E, F et G trois espaces de Banach, U un ouvert de $E \times F$, f une application de U dans G, Γ une fonction multivoque de U dans G et B un convexe fermé de F. Nous allons appliquer les résultats obtenus au chapitre I à l'étude de la régularité des solutions du système suivant qui généralise les précédents :

$$(\Sigma x) \qquad f(x,y) \in z + \Gamma(x,y), \quad y \in B$$

dans deux cas : le premier pour les fonctions multivoques vérifiant une propriété de semi-continuité inférieure et le second pour les fonctions multivoques à graphe convexe. Il suffit d'étudier la régularité des solutions du système (Σx) dans le cas où $B = F$, le cas général en résultera comme précédemment.

II.1. Théorème de submersion pour les fonctions multivoques inf-continues :

Etant donné E, F et G trois espaces de Banach, U un ouvert de $E \times F$, f une application de U dans G, Γ une fonction multivoque de U dans G et (a, b) un point de U, on considère le système perturbé suivant :

$$(\Sigma x) \qquad f(x,y) \in z + \Gamma(x,y), \quad y \in F$$

Sous les hypothèses suivantes :

α) f est de classe C^1 et sa différentielle est lipschitzienne au voisinage du point (a, b).

β) il existe un cône convexe fermé K non vide de G tel que :

$\beta - 1$) $D_2 f(a, b)$ admet une K-sélection lipschitzienne (resp.régulièrement dérivable).

$\beta - 2$) Il existe un voisinage U' de (a, b) dans $E \times F$ et un nombre positif ε tels que :

$$\forall (x,y) \in U', \quad B_K(0;\varepsilon) \subset \Gamma(x,y)$$

Il existe un voisinage Ω de $(a, f(a, b)) = (a, c)$ dans $E \times G$ et une application lipschitzienne (resp. régulièrement dérivable) θ de Ω dans F telle que :

1) $\theta(a,c) = b$

2) $\forall (x,z) \in \Omega,\ f(x,\theta(x,z)) \in z + \Gamma(x,\theta(x,z))$ c'est-à-dire que

$$\forall (x,z) \in \Omega, \quad \theta(x,z) \quad \text{est solution de} \quad (\Sigma x)\ .$$

En effet, appliquons le théorème I.2.1. à la restriction de f à U' relativement au cône K : il existe un voisinage Ω_1 de (a,c) dans $E \times G$ et une application lipschitzienne (resp. régulièrement dérivable) θ de Ω_1 dans F telle que :

1) $\theta(a,c) = b$

2) $\forall (x,z) \in \Omega_1,\ f(x,\theta(x,z)) \in z + K$

les applications f et θ étant continues, il existe un voisinage Ω_2 de (a,c) dans $E \times G$ tel que :

$\forall (x,z) \in \Omega_2, f(x,\theta(x,z)) - z \in B_G(0;\varepsilon)$

On en déduit que :

$\forall (x,z) \in \Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2, \quad f(x,\theta(x,z)) - z \in B_K(0;\varepsilon) \subset \Gamma(x,\theta(x,z))$ ∎

Dans ce qui suit nous nous proposons de donner des conditions sous lesquelles l'hypothèse β) sera vérifiée :

1) Une condition de régularité pour le système linéarisé

$$(R'a) \qquad D_2 f(a,b)(y) \in z + T_{f(a,b)}\Gamma(a,b), \quad y \in F$$

assurant l'existence d'un cône convexe fermé d'intérieur relatif non vide K de G qui soit inclus dans $\Gamma(a,b)$ et tel que le système linéarisé $(R'a)$ associé à ce cône ait une solution lipschitzienne (resp. régulièrement dérivable).

2) Une condition de semi-continuité inférieure au point (a,b) pour la fonction multivoque Γ assurant l'existence d'un voisinage U' du point (a,b) dans $E \times F$ et d'un nombre positif ε tels que pour tout (x,y) dans U' la trace de K sur la boule $B_G(0;\varepsilon)$ soit contenue dans $\Gamma(x,y)$.

Définition : *Soient X et Y deux espaces de Banach, Ω un ouvert de X, Γ une fonction multivoque de Ω dans Y et x_0 un point de Ω. On dit que Γ est inf-continue au point x_0 si :*

1) $\Gamma(x_0)$ est un convexe d'intérieur relatif non vide de Y.

2) $\forall y_0 \in \omega(\Gamma(x_0)),\ \exists U \in \mathcal{V}_X(x_0),\ \exists V \in \mathcal{V}_{[\Gamma(x_0)]}(y_0),\ \forall x \in U,\ V \subset \Gamma(x).$

Par exemple, les fonctions multivoques constantes et les fonctions multivoques à valeurs convexes et à graphe ouvert sont inf-continues en tout point de leur domaine de définition [cf. Annexe 2].

Cela étant, on peut énoncer :

Théorème II.1.1. *Soient E, F et G trois espaces de Banach, U un ouvert de $E \times F$, f une application de U dans G, Γ une fonction multivoque de U dans G et (a, b) un point de U tel que $f(ab)$ soit dans $\overline{\Gamma(a,b)}$. On suppose que :*

i) f est de classe C^1 et sa différentielle est lipschitzienne au voisinage du point (a, b).

ii) $\overline{\Gamma(a,b)}$ est compact.

iii) Γ est inf-continue au point (a, b).

iv) $D_2 f(a, b)$ admet une $T_{f(a,b}\Gamma(a, b)$-sélection lipschitzienne (resp. régulièrement dérivable)

Il existe alors un voisinage Ω de $(a, f(a, b)) = (a, c)$ dans $E \times G$ et une application lipschitzienne (resp. régulièrement dérivable) θ de Ω dans F telle que :

1) $\theta(a, c) = b$

2) $\forall (x, z) \in \Omega,\ f(x, \theta(x, z)) \in z + \Gamma(x, \theta(x, z)) - f(a, b).$

Démonstration :

Il suffit là de montrer que les conditions $\beta - 1)$ et $\beta - 2)$ précédentes sont vérifiées pour la fonction multivoque :

$$U \mapsto G, \quad (x, y) \mapsto \Gamma(x, y) - f(a, b)\ .$$

On applique le lemme I.3.2. de transversalité sur un convexe avec $u = D_2 f(a, b)$, $C = \overline{\Gamma(a,b)}$ et $e = f(a, b)$: il existe un cône convexe fermé d'intérieur relatif non vide K de G et un nombre positif ε tels que :

i) $D_2 f(a, b)$ admet une K-sélection lipschitzienne (resp. régulièrement dérivable).

ii) $f(a, b) + B_K(0; \varepsilon) \subset \omega((\overline{\Gamma(a,b)})) = \omega(\Gamma(a, b))$

l'ensemble $f(a,b) + B_K(0;\varepsilon)$ étant fermé, il est donc compact d'après l'hypothèse ii). Il résulte de la proposition 2.8 appliquée à $A = f(a,b) + B_K(0;\varepsilon)$ que $\exists \Omega' \in \mathcal{V}_{E\times F}((a,b))$, $\forall (x,y) \in \Omega'$, $f(a,b) + B_K(0;\varepsilon) \subset \Gamma(x,y)$. ■

En prenant dans le théroème II.1.1. une fonction multivoque constante, on peut s'affranchir de l'hypothèse de compacité faite sur $\overline{\Gamma(a,b))}$ et on retrouve le théorème I.3.1. précédent.

Ce résultat quoiqu'utile ne s'applique pas aux fonctions multivoques à graphe convexe. En effet, une fonction multivoque dont le graphe est un convexe d'intérieur relatif non vide n'est pas en général inf-continue sur son domaine de définition comme le montre l'exemple suivant :

Exemple : Si Γ_0 est la fonction multivoque définie de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^2$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \Gamma_0(x) = [-1,+1] \times \{x\}$$

alors le graphe de Γ_0 est un convexe d'intérieur relatif non vide mais Γ_0 n'est pas inf-continue en 0.

En effet, le graphe de Γ_0 est l'ensemble

$$\text{graph}(\Gamma_0) = \Big\{\{x\} \times [-1,+1] \times \{x\}, \quad x \in \mathbf{R}\Big\}$$

$$\omega(\text{graph}(\Gamma_0)) = \Big\{\{x\} \times]-1,+1[\times \{x\}, \quad x \in \mathbf{R}\Big\}$$

qui est non vide.

D'autre part, pour $y_0 = (\frac{1}{2}, 0)$ élément de $\omega(\Gamma_0(0)) =]-1,+1[\times \{0\}$ on a $\forall \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x_0 = \frac{\varepsilon}{2} \in]-\varepsilon, +\varepsilon[$ tel que $]\frac{1}{2} - \eta, \frac{1}{2} + \eta[\times \{0\} \not\subset [-1,+1] \times \{\varepsilon/2\} = \Gamma_0(x_0)$. Ceci montre que Γ_0 n'est pas inf-continue en 0.

II.2. Théorème de submersion pour les fonctions multivoques à graphe convexe.

Nous rappelons la définition classique suivante :

Définition : *Soient X et Y deux espaces de Banach, une fonction multivoque Γ de X dans Y est appelée processus si son graphe est un cône dans $X \times Y$. On dit que la fonction multivoque Γ est un processus convexe fermé si son graphe est un cône convexe fermé de $X \times Y$.*

Un processus Γ de X dans Y est caractérisé par :

1) $\forall \lambda > 0, \quad \forall x_1 \in X, \quad \forall x_2 \in X, \Gamma(x_1) + \Gamma(x_2) \subset \Gamma(x_1 + x_2)$

Ce processus est convexe si de plus

2) $\forall \lambda > 0, \forall x \in X, \quad \Gamma(\lambda x) = \lambda \Gamma(x).$

Pour un processus convexe Γ, le théorème I.2.1. donne le résultat suivant :

Théorème II.2.1. : *Soient E, F et G trois espaces de Banach, U un ouvert de $E \times F$, f une application de U dans G, (a, b) un point de U et Γ un processus convexe fermé de Ω dans G. Soit Λ le graphe de Γ et supposons que :*

i) f est de classe C^1 et sa différentielle est lipschitzienne au voisinage du point (a, b).

ii) l'application $(D_2 f(a, b), 1_F, 0_E)$ de F dans $G \times F \times E$ admet une Λ-sélection lipchitzienne (resp. régulièrement dérivable).

Il existe, alors, un voisinage Ω de $(a, f(a, b)) = (a, c)$ dans $E \times G$ et une application lipchitzienne (resp. régulièrement dérivable) θ de Ω dans F telle que :

1) $\theta(a, c) = b$

2) $\forall (x, z) \in \Omega,\ f(x, \theta(x, z)) \in z + \Gamma(x - a, \theta(x, z) - b)$

Démonstration :

On considère l'application

$$g : E \times F \mapsto G \times F \times E, \quad (x, y) \mapsto (f(x, y), y - b, x - a)$$

Cette application est définie, de classe C^1 et sa différentielle st lipschitzienne au voisinage du point (a, b). De plus, $D_2 g(a, b) = (D_2 f(a, b), 1_F, 0_E)$ admet une Λ-sélection lipchitzienne (resp. régulièrement dérivable). On peut donc appliquer le theorème I.2.1 à l'application g relativement au cône Λ : il existe un voisinage Ω_1 de $(a, c_1) = (a, g(a, b))$ dans $E \times G \times F \times E$ et une application lipchitzienne (resp. régulièremnt dérivable) θ_1 de Ω_1 dans F telle que :

1) $\theta_1(a, c_1) = b$

2) $\forall (x, z, t, u) \in \Omega_1,\ g(x, \theta_1(x, z, t, u)) \in (z, t, u) + \Lambda$

On écrit Ω_1 sous la forme $\Omega_1 = \Omega \times V \times W$ avec Ω un voisinage de (a, c), V un voisinage de 0 et W un voisinage de 0 dans $E \times G$, F et E respectivement et on définit l'application θ sur Ω par :

$$\forall (x,z) \in \Omega, \quad \theta(x,z) = \theta_1(x,z,0,0)$$

On voit facilement que θ ainsi définie est une application lipchitzienne (resp. régulièrement dérivable) sur Ω et à valeurs dans F et que :

1) $\theta(a,c) = \theta_1(a,c_1) = b$

2) $\forall (x,z) \in \Omega$, $g(x,\theta_1(x,z,0,0)) \in (z,0,0) + \Lambda$

la relation 2) se traduit ainsi

2) $\forall (x,z) \in \Omega$, $f(x,\theta(x,z)) \in z + \Gamma(x-a,\theta(x,z)-b)$. ∎

Remarque 1 : Si 0 appartient à $\Gamma(a,b)$ alors la relation 2) de ce théorème s'écrit sous la forme

$$\forall (x,z) \in \Omega, \quad f(x,\theta(x,z)) \in z + \Gamma(x,\theta(x,z)) .$$

Remarque 2 : La condition ii) du théorème II.2.1, peut être remplacée par une autre condition équivalente plus facile à vérifier dans la pratique. C'est l'objet de la proposition suivante :

Proposition II.2.2. : *Soient E, F et G trois espaces de Banach, U un ouvert de $E \times F$,u une application linéaire continue de F dans G et Γ un processus de U dans G de graphe Λ. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) l'application $(u, 1_F, 0_E)$ de F dans $G \times F \times E$ admet une Λ-sélection lipchitzienne (resp. régulièrement dérivable).

ii) Il existe une application $(\bar{v},\bar{w})$ de $G\times E$ dans $F\times G$, positivement homogène et lipchitzienne (resp. régulièrement dérivable) telle que :

$$\forall (z,x) \in G \times E, z = u \circ \bar{v}(z,x) - \bar{w}(z,x) \quad \text{et} \quad (x,\bar{v}(z,x),\bar{w}(z,x)) \in \Lambda .$$

Démonstration :

i) $\Rightarrow$ ii)

Soit $V,(W_1,W_2,W_3))$ une Λ-sélection lipchitzienne (resp. régulièrement dérivable) de l'application $(u,1_F,0_E)$. On a

$$\begin{aligned} \forall (z,y,x) \in G \times F \times E, x &= -W_1(z,y,x) \\ y &= V(z,y,x) - W_2(z,y,x) \\ z &= u \circ V(z,y,x) - W_3(z,y,x) \end{aligned}$$

et $(W_1(z,y,x),\ W_2(z,y,x),\ W_3(z,y,x)) \in \Lambda$.
En particulier,

$$\forall (z,x) \in G \times E, \quad V(z,0,x) = W_2(z,0,x) \quad \text{et} \quad z = u \circ V(z,,0,x) - W_3(z,0,x)$$

la condition ii) est vérifiée en posant

$$\forall (z,x) \in G \times E, \quad \bar{v}(z,x) = V(z,0,x) \quad \text{et} \quad \bar{w}(z,x) = W_3(z,0,x)$$

ii) $\Rightarrow$ i)

Soit $(\bar{v}, \bar{w})$ une application de $G \times E$ dans $F \times G$ vérifiant la condition ii). On considère les applications suivantes :

$$V : G \times F \times E \mapsto F,(z,y,x) \mapsto y + \bar{v}(z - u(y), x)$$
$$W_1 : G \times F \times E \mapsto E,(z,y,x) \mapsto x$$
$$W_2 : G \times F \times E \mapsto F,(z,y,x) \mapsto \bar{v}(z - u(y), x)$$
$$W_3 : G \times F \times E \mapsto G,(z,y,x) \mapsto \bar{w}(z - u(y), x)$$

On vérifie aisément que l'application $(V, (W_1, W_2, W_3))$ définie de $G \times F \times E$ dans $F \times \Lambda$ est une Λ-sélection lipchitzienne (resp. régulièrement dérivable) de l'application $(u, 1_F, 0_E)$. ∎

Dans le cas particulier où $\Lambda = E \times F \times K$ avec K un cône non vide de G, la condition (ii) de la proposition II.2.2. est équivalente à la condition suivante :

iii) u admet une K-sélection lipchitzienne (resp. régulièrement dérivable).

En effet, soit $(\bar{v}, \bar{w})$ une application de $G \times E$ dans $F \times G$ vérifiant la condition (ii). On considère les applications suivantes :

$$v : G \mapsto F, z \mapsto \bar{v}(z,0)$$
$$w : G \mapsto K, z \mapsto \bar{w}(z,0)$$

On voit que l'application (v, w) définie de G dans $F \times K$ est une K-sélection lipchitzienne (resp. régulièrement dérivable) de u.

Inversement, soient (v, w) une K-sélection lipchitzienne (resp. régulièrement dérivable) de u et p la projection de $G \times E$ sur G. On pose

$$\forall (z,x) \in G \times E, \quad \bar{v}(z,x) = v \circ p(z,x) \quad \text{et} \quad \bar{w}(z,x) = w \circ p(z,x)$$

l'application $(\bar{v}, \bar{w})$ définie de $G \times E$ dans $F \times G$ vérifie la condition (ii) ∎

En suivant une démarche similaire à la démonstration du théorème II.2.1., on peut donner un résultat analogue pour une fonction multivoque à graphe convexe.

Théorème II.2.3 : *Soient E, F et G trois espaces de Banach, U un ouvert de $E \times F$, f une application de U dans G, Γ une fonction multivoque de U dans G à graphe convexe fermé d'intérieur relatif non vide Λ de $E \times F \times G$ et (a, b) un point de U tel que $(a, b, f(a, b))$ soit dans Λ. On suppose que :*

i) f est de classe C^1 et sa différentielle est lipschitzienne au voisinage du point (a, b).

ii) l'application $(D_2 f(a, b), 1_F, 0_E)$ admet une $T_{(a,b,f(a,b))}\Lambda$-sélection lipchitzienne (resp. régulièrement dérivable).

Il existe, alors, un voisinage Ω de $(a, f(a, b)) = (a, c)$ et une application θ lipchitzienne (resp. régulièrement dérivable) de Ω dans F telle que :

1) $\theta(a, c) = b$

2) $\forall (x, z) \in \Omega,\ f(x, \theta(x, z)) \in z + \Gamma(x, \theta(x, z)) - f(a, b)$.

Annexe 1

INTERIEUR RELATIF D'UN CONNEXE

Certains résultats dont nous aurons besoin sont démontrés par Rockafellar [7] dans le cas des espaces de dimension finie et s'étendent tout naturellement à un espace de Banach quelconque. Par contre, nous donnons à l'usage des analystes, une démonstration autonome pour d'autres résultats où nous aurons à établir dans chaque cas que l'intérieur relatif du convexe considéré est non vide, ce qui est toujours vérifié dans un espace de dimension finie. Ces résultats peuvent découler d'énoncés plus larges valables dans tout espace vectoriel de dimension quelconque [8].

Définition 1.1. *Soient X un espace de Banach, C un convexe non vide de X. On appelle enveloppe affine fermée de C et on note $[C]$ le plus petit sous espace affine fermé contenant C.*

On dira que C est d'intérieur relatif non vide de X si l'intérieur $w(C)$ de C dans $[C]$ est non vide.

Proposition 1.2. : *S'il existe un sous-espace affine fermé X_0 contenant C tel que l'intérieur C_0 de C dans X_0 soit non vide, alors C est d'intérieur relatif non vide. De plus, X_0 et C_0 coïncident respectivement avec $[C]$ et $w(C)$.*

Démonstration :

Soit X_0 un sous-espace affine fermé contenant C tel que l'intérieur C_0 de C dans X_0 soit non vide, on a alors

$$C_0 \subset C \subset [C] \subset X_0 \,.$$

L'intérieur du sous-espace affine $[C]$ dans X_0 est donc non vide. Ceci entraine que [C] coïncide avec X_0 et par suite C est d'intérieur relatif non vide de X et on a $w(C) = C_0$. ■

Exemples :

1) Si M est un sous-espace affine fermé de X, alors M est d'intérieur relatif non vide et $w(M) = M$.

2) Si X est un espace de dimension finie, alors tout convexe non vide est d'intérieur relatif non vide ([4],[7]).

Ce résultat n'est pas vrai dans le cas où l'espace X est de dimension infinie ([4]).

Un ensemble convexe possède les propriétés fondamentales suivantes :

Proposition 1.3. : [7] *Soient X un espace de Banach et C un convexe de X. Si $w(C)$ est non vide alors*

a) $\forall \lambda \in [0,1[,\ \forall x \in w(C),\ \forall y \in \bar{C},\ (1-\lambda)x + \lambda y \in w(C)$.

b) $\overline{w(C)} = \bar{C}$

c) $w(\bar{C}) = w(C)$.

Corollaire 1.4. : [7] *Soient X un espace de Banach, C_1 et C_2 deux convexes d'intérieur relatif non vide de X. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $\bar{C}_1 = \bar{C}_2$

b) $w(C_1) = w(C_2)$

Corollaire 1.5. : [7] *Soient X un espace de Banach et C un convexe de X. Si $w(C)$ est non vide, tout ouvert de X rencontrant $\bar{C}$, rencontre aussi $w(C)$.*

Il est parfois plus pratique d'utiliser la caractérisation suivante de l'intérieur relatif d'un convexe :

Proposition 1.6 : [7] *Soient X un espace de Banach, C un convexe de X et x_0 un point de X. Si $w(C)$ est non vide, pour que x_0 soit dans $w(C)$ il faut et il suffit que :*

$$\forall x \in C, \quad \exists \mu > 1, \quad (1-(\mu)x + \mu x_0 \in C$$

.

Nous effectuons les deux opérations classiques (intersection et produit cartésien) sur les ensembles convexes d'intérieur relatif non vide et nous donnons les hypothèses sous lesquelles l'ensemble convexe obtenu est d'intérieur relatif non vide.

Proposition 1.7. : *(Intersection)*

Soient X un espace de Banach, C_1 et C_2 deux convexes de X tels que $\omega(C_1) \cap \omega(C_2)$ soit non vide, alors $C_1 \cap C_2$ est un convexe d'intérieur relatif non vide et on a :

a) $\overline{C_1 \cap C_2} = \bar{C}_1 \cap \bar{C}_2$

b) $\omega(C_1 \cap C_2) = \omega(C_1) \cap \omega(C_2)$

Démonstration :

a) Fixons un élément x_0 dans $\omega(C_1) \cap \omega(C_2)$ et considérons un élément x dans $\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2$. Il résulte de la proposition 1.3. que

$$\forall \lambda \in]0,1], \quad (1-\lambda)x + \lambda x_0 \in \omega(C_1) \cap \omega(C_2)$$

Par passage à la limite, on obtient

$$x = \lim_{\lambda \mapsto 0} (1-\lambda)x + \lambda x_0 \in \overline{\omega(C_1) \cap \omega(C_2)}$$

On en déduit que

$$\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2 \subset \overline{\omega(C_1) \cap \omega(C_2)} \subset \overline{C_1 \cap C_2} \subset \bar{C}_1 \cap \bar{C}_2$$

D'où

$$\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2 = \overline{C_1 \cap C_2} = \overline{\omega(C_1) \cap \omega(C_2)}$$

b) les intérieurs $\omega(C_1)$ et $\omega(C_2)$ étant non vides, il existe deux nombres positifs ρ_1 et ρ_2 tels que

$$B_{[C_1]}(x_0; \rho_1) \subset C_1 \subset [C_1] \quad \text{et} \quad B_{[C_2]}(x_0; \rho_2) \subset C_2 \subset [C_2]$$

En posant $\rho = \min(\rho_1, \rho_2)$, on voit que :

$$B_{[C_1] \cap [C_2]}(x_0; \rho) \subset C_1 \cap C_2 \subset [C_1] \cap [C_2]$$

Donc l'intérieur de $C_1 \cap C_2$ dans le sous-espace affine fermé $[C_1] \cap [C_2]$ est non vide et il résulte de la proposition 1.2 que $C_1 \cap C_2$ est d'intérieur relatif non vide et on a

$$\omega(C_1) \cap \omega(C_2) \subset \omega(C_1 \cap C_2)$$

D'autre part, $C_1 \cap C_2$ et $\omega(C_1) \cap \omega(C_2)$ étant deux convexes d'intérieur relatif non vide de X vérifiant

$$\overline{C_1 \cap C_2} = \overline{\omega(C_1) \cap \omega(C_2)}$$

Il résulte du corollaire 1.4 que

$$\omega(C_1 \cap C_2) = \omega(\omega(C_1) \cap \omega(C_2))$$

D'où

$$\omega(C_1 \cap C_2) \subset \omega(C_1) \cap \omega(C_2)$$

Ceci démontre b). ■

Dans le cas particulier où l'un des deux convexes de la proposition 1.7 est un sous-espace affine, cette proposition donne le résultat suivant :

Corollaire 1.8. *Soient X un espace de Banach, C un convexe de X et M un sous-espace affine fermé dans X. Si $M \cap \omega(C)$ est non vide alors $\omega(M \cap C) = M \cap \omega(C)$.*

Proposition 1.9. : *(Produit cartésien)*

Soient X_1 et X_2 deux espace de Banach et C_1, C_2 deux convexes d'intérieur relatif non vide de X_1 et X_2 respectivement. Alors $C_1 \times C_2$ est un convexe d'intérieur relatif non vide de $X_1 \times X_2$ et on a $\omega(C_1 \times C_2) = \omega(C_1) \times \omega(C_2)$.

Démonstration :

Il est clair que $C_1 \times C_2$ est convexe.

Soit (x_1, x_2) un élément de $\omega(C_1) \times \omega(C_2)$, il existe donc deux nombres positifs ρ_1 et ρ_2 tels que

$$B_{[C_1]}(x_1; \rho_1) \subset C_1 \subset [C_1] \quad \text{et} \quad B_{[C_2]}(x_2; \rho_2) \subset C_2 \subset [C_2]$$

En posant $\rho = \min(\rho_1, \rho_2)$, il vient que

$$B_{[C_1]\times[C_2]}((x_1, x_2); \rho) \subset B_{[C_1]}(x_1; \rho_1) \times B_{[C_2]}(x_2; \rho_2) \subset C_1 \times C_2 \subset [C_1] \times [C_2]$$

donc l'intérieur de $C_1 \times C_2$ dans le sous-espace affine fermé $[C_1] \times [C_2]$ est non vide et il résulte de la proposition 1.2 que $C_1 \times C_2$ est d'intérieur relatif non vide de $X_1 \times X_2$ et qu'on a

$$\omega(C_1) \times \omega(C_2) \subset \omega(C_1 \times C_2)\,.$$

Pour montrer l'inclusion inverse, on considère un élément (z_1, z_2) dans $\omega(C_1 \times C_2)$. Pour tout élément (x_1, x_2) dans $C_1 \times C_2$, il existe d'après la proposition 1.6 un nombre $\mu > 1$ tel que

$$(1-\mu)(x_1, x_2) + \mu(z_1, z_2) \in C_1 \times C_2$$

c'est-à-dire que

$$((1-\mu)x_1 + \mu z_1, \quad (1-\mu)x_2 + \mu z_2) \in C_1 \times C_2$$

Soit

$$(1-\mu)x_1 + \mu z_1 \in C_1 \quad \text{et} \quad (1-\mu)x_2 + \mu z_2 \in C_2$$

D'où

$$(z_1, z_2) \in \omega(C_1) \times \omega(C_2) .$$

■

la non vacuité de l'intérieur relatif d'un convexe se conserve également par l'image réciproque d'une application affine continue et on peut énoncer :

Proposition 1.10 : *Soient X et Y deux espace de Banach, C un convexe de Y et u une application affine continue de X dans Y telle que* $\mathrm{Im} u \cap \omega(C)$ *soit non vide. Alors, $u^{-1}(C)$ est un convexe d'intérieur relatif nn vide de X et on a*

$$\omega(u^{-1}(C)) = u^{-1}(\omega(C)) .$$

Démonstration :

u étant une application affine, il en résulte que $u^{-1}(C)$ est convexe. D'autre part, en posant $\omega(C) = \Omega \cap [C]$ où Ω est un ouvert de Y on a

$$u^{-1}(\omega(C)) = u^{-1}(\Omega) \cap u^{-1}([C])$$

qui est un ouvert non vide dans le sous-espace affine fermé $X_0 = u^{-1}([C])$ et qui vérifie

$$u^{-1}(\omega(C)) \subset u^{-1}(C) \subset X_0$$

donc l'intérieur de $u^{-1}(C)$ dans X_0 est non vide et il résulte de la proposition 1.2 que $u^{-1}(C)$ est d'intérieur relatif non vide de X et qu'on a

$$u^{-1}(\omega(C)) \subset (u^{-1}(C)) .$$

Pour montrer l'inclusion inverse, considérons un élément x dans $\omega(u^{-1}(C))$. Pour y élément dans $\mathrm{Im} u \cap C$ on fixe x_0 dans $u^{-1}(C)$ tel que $y = u(x_0)$. Il existe d'après la proposition 1.6 un nombre $\mu > 1$ tel que

$$(1-\mu)x_0 + \mu x \in u^{-1}(C)$$

ou encore comme u est affine

$$(1-\mu)y + \mu u(x) \in C$$

Ce qui montre, d'après la proposition 1.6 toujours, que $u(x)$ est dans $\omega(\mathrm{Im}u \cap C)$. Or $\mathrm{Im}u$ est un sous-espace affine fermé rencontrant $\omega(C)$ par hypothèse, il résulte donc du corollaire 1.8 que $\omega(\mathrm{Im}u \cap C) = \mathrm{Im}u \cap \omega(C)$ et par suite $u(x)$ appartient à $\mathrm{Im}u \cap \omega(C)$. D'où l'inclusion

$$\omega(u^{-1}(C)) \subset u^{-1}(\omega(C)) .$$

■

En particulier, si u est une translation, la proposition 1.10 donne :

Corollaire 1.11. *Soient X un espace de Banach, C un convexe de X et e un point de X. Si $\omega(C)$ est non vide alors $(C - e)$ est un convexe d'intérieur relatif non vide et $\omega(C - e) = \omega(C) - e$.*

■ Il suffit d'appliquer la proposition 1.10 à l'application affine continue u :

$$X \mapsto X, \quad x \mapsto x + e .$$

■

Enfin, on peut exprimer l'intérieur relatif du cône tangent à une partie convexe en fonction de l'intérieur relatif de cette partie et plus précisément on a :

Proposition 1.12. *Soient X un espace de Banach, C un convexe d'intérieur relatif non vide de X et e un point de $\bar{C}$. Alors, le cône tangent T_eC est d'intérieur relatif non vide dans X et on a :*

$$\omega(T_eC) = \bigcup_{h>0} \frac{1}{h}(\omega(C) - e) .$$

Démonstration :

Comme C est convexe, on a évidemment

$$(C - e) \subset T_eC \subset [C] - e$$

Il résulte du corollaire 1.11 que l'intérieur $\omega(C - e)$ est non vide dans le sous-espace vectoriel fermé $X_0 = [C] - e$ et que $\omega(C - e) = \omega(C) - e$. On en déduit de la proposition 4.1.7 [9] que :

$$\omega(T_eC) = \omega(T_0(C - e)) = \bigcup_{h>0} \frac{1}{h}(\omega(C - e)) = \bigcup_{h>0} \frac{1}{h}(\omega(C) - e) .$$

Cela étant on a :

Corollaire 1.13. : *Soient X et Y deux espaces de Banach, u une application linéaire de X dans Y, C (resp. L) un convexe d'intérieur relatif non vide de Y (resp. un cône non vide de X) et e un point de $\bar{C}$. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $u(L) \cap \omega(T_e C) \neq \emptyset$

b) $(e + u(L)) \cap \omega(C) \neq \emptyset$

Démonstration :

Supposons que $u(L) \cap \omega(T_e C)$ soit non vide et fixons un élément x_1 dans L tel que $u(x_1)$ soit dans $\omega(T_e C)$. Il existe donc un nombre positif h tel que $e + h \cdot u(x_1)$ soit dans $\omega(C)$. L'application u étant linéaire et L un cône, l'élément $e+h{\cdot}u(x_1) = e+u(h{\cdot}x_1)$ appartient à $(e+u(L))\cap\omega(C)$ et par suite $(e+u(L))\cap\omega(C)$ est non vide.

Réciproquement, supposons que $(e + u(L)) \cap \omega(C)$ soit non vide et fixons un élément x_1 dans L tel que $e + u(x_1)$ soit dans $\omega(C)$. Il résulte de la proposition 1.12 que

$$u(x_1) \in \omega(C) - e \subset \omega(T_e C)$$

donc $u(L) \cap \omega(T_e C)$ est non vide. ∎

Annexe 2

SEMI-CONTINUITÉ INFÉRIEURE POUR LES FONCTIONS MULTIVOQUES

Rappelons la définition donnée incidemment au paragraphe II.1.

Définition 2.1. : *Soient X et Y deux espaces de Banach, Ω un ouvert de X, Γ une fonction multivoque de Ω dans Y et x_0 un point de Ω. On dit que Γ est inf-continue au point x_0 si :*

1) $\Gamma(x_0)$ *est un convexe d'intérieur relatif non vide de* Y.

2) $\forall y_0 \in \omega(\Gamma(x_0)), \exists U \in \mathcal{V}_X(x_0), \exists V \in \mathcal{V}_{[\Gamma(x_0)]}(y_0), \forall x \in U, \quad V \subset \Gamma(x)$.

Exemple 1 : (Fonction multivoque étagée inf-continue)

Soient X et Y deux espaces de Banach. Si $(A_i)_{i\in I}$ est une partition localement finie de U un ouvert de X et si $(C_i)_{i\in I}$ est une famille de convexes d'intérieur relatif non vide de Y vérifiant la condition

$$\forall (i,j) \in I^2, \quad (A_i \cap \bar{A}_j \neq \emptyset) \Rightarrow (C_i \subset C_j)$$

Alors la fonction multivoque Γ définie de U dans Y par :

$$\forall i \in I, \quad \forall x \in A_i, \quad \Gamma(x) = C_i$$

est inf-continue en tout point de U.

En effet, soit x_0 dans X, il existe un voisinage U de x_0 dans X tel que l'ensemble $J = \{i \in I / U \cap A_i \neq \emptyset\}$ soit fini. On considère l'ensemble $J_0 = \{i \in J / x_0 \in \bar{A}_i\}$ et J^* son complémentaire dans J. Alors J^* est un ensemble fini. On voit que $U_0 = U \cap [\cap_{i\in J^*} U_i]$ est un voisinage de x_0 dans X et que $J_0 = \{i \in I / A_i \cap U_0 \neq \emptyset\}$. On en déduit que

$$\forall x \in U_0, \quad \exists i \in J_0, \quad x \in A_i \quad \text{et} \quad \Gamma(x) = C_i\,.$$

En particulier pour x_0

$$\exists i_0 \in J_0, \quad x_0 \in A_{i_0}$$

Or

$$\forall i \in J_0, \quad i \neq i_0, \quad A_{i_0} \cap \bar{A}_i \neq \emptyset$$

Donc

$$\forall i \in J_0, \quad i \neq i_0, \quad C_{i_0} \subset C_i$$

Soit enfin

$$\forall y_0 \in \omega(\Gamma(x_0)) = \omega(C_{i_0}), \quad \forall x \in U_0, \quad \omega(C_{i_0}) \subset \Gamma(x) .$$

■

En particulier, la fonction multivoque constante Γ définie sur U par : $\forall x \in U, \quad \Gamma(x) = C$ où C est un convexe d'intérieur relatif non vide de Y est inf-continue en tout point de U.

Exemple 2 : La fonction multivoque Γ définie de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^2$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \Gamma(x) = [-1, +1] \times [-x, +x]$$

est inf-continue en 0.
En effet, on a $\Gamma(0) = [-1, +1] \times \{0\}$, $[\Gamma(0)] = \mathbf{R} \times \{0\}$ et $\omega(\Gamma(0) =]-1, +1[\times \{0\}$.
Par ailleurs

$$\forall y_0 \in \omega(\Gamma(0), \quad \exists V = \omega(\Gamma(0)) \in \mathcal{V}_{[\Gamma(0)]}(Y), \quad V \subset \Gamma(0)$$

D'où

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall x \in]-\varepsilon, +\varepsilon[, \ V \subset \Gamma(0) \subset [-1, +1] \times [-x, +x] = \Gamma(x) .$$

On signale dans cet exemple que l'intérieur de $\Gamma(0)$ dans $\mathbf{R}^2$ est vide.

Exemple 3 : Les notations étant celles de la définition 2.1. Soit Y_0 un sous-espace affine fermé dans Y et supposons que :

1) Pour tout $x \in \Omega$, $\Gamma(x)$ est convexe dans Y_0.

2) le graphe de Γ est ouvert non vide dans $X \times Y_0$.

Alors, la fonction multivoque Γ est inf-continue en tout point de Ω.

En effet, soit x_0 dans Ω, pour tout y_0 dans $\Gamma(x_0)$, l'élément (x_0, y_0) est dans le graphe de Γ qui est ouvert ;

$$\exists U \in \mathcal{V}_X(x_0), \quad \exists V \in \mathcal{V}_{Y_0}(y_0), \quad \forall x \in U, \quad \forall y \in V, \quad y \in \Gamma(x) .$$

■

On peut à partir de fonctions multivoques inf-continues construire d'autres fonctions multivoques inf-continues en effectuant les opérations classiques sur les ensembles qui conservent la convexité. C'est l'objet des propositions suivantes :

Proposition 2.2. : *(Intersection)*

Soient X et Y deux espaces de Banach, Ω un ouvert de X, Γ_1 et Γ_2 deux fonctions multivoques de Ω dans Y et x_0 un point de Ω. On suppose que :

1) Γ_1 et Γ_2 sont inf-continues en x_0.

2) $\omega(\Gamma_1(x_0)) \cap \omega(\Gamma_2(x_0)) \neq \emptyset$

Alors, la fonction multivoque Γ définie sur Ω par :

$$\forall x \in \Omega, \quad \Gamma(x) = \Gamma_1(x) \cap \Gamma_2(x)$$

est inf-continue en x_0.

Démonstration :

Par hypothèse, $\omega(\Gamma_1(x_0)) \cap \omega(\Gamma_2(x_0))$ est non vide, il résulte donc de la proposition 1.7 que $\Gamma(x_0)$ est un convexe d'intérieur relatif non vide de Y et que

$$\omega(\Gamma(x_0)) = \omega(\Gamma_1(x_0)) \cap \omega(\Gamma_2(x_0)) .$$

Pour tout y_0 dans $\omega(\Gamma(x_0))$, on a donc

$$\exists \Omega_1' \in \mathcal{V}_X(x_0), \exists W_1 \in \mathcal{V}_{[\Gamma_1(x_0)]}(y_0), \quad \forall x \in \Omega_1', \quad W_1 \subset \Gamma_1(x)$$

et

$$\exists \Omega_2' \in \mathcal{V}_X(x_0), \exists W_2 \in \mathcal{V}_{[\Gamma_2(x_0)]}(y_0), \quad \forall x \in \Omega_2', \quad W_2 \subset \Gamma_2(x)$$

En écrivant $W_1 = \mathcal{U}_1 \cap [\Gamma_1(x_0)]$ et $W_2 = \mathcal{U}_2 \cap [\Gamma_2(x_0)]$ où $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ sont deux voisinages de y_0 dans Y, on voit que $W = W_1 \cap W_2$ est un voisinage de y_0 dans $[\Gamma_1(x_0)] \cap [\Gamma_2(x_0)]$.

Posons enfin $\Omega' = \Omega_1' \cap \Omega_2'$, il vient que :

$$\forall x \in \Omega', \quad W \subset \Gamma(x) .$$

∎

Proposition 2.3 : *(Produit cartésien)*

Soient X, Y et Z des espaces de Banach, Ω un ouvert de X, Γ_1 et Γ_2 deux fonctions multivoques de Ω dans Y et Z respectivement et x_0 un point de Ω. On suppose que :

1) Γ_1 et Γ_2 sont inf-continues en x_0

Alors, la fonction multivoque Γ définie de Ω dans $Y \times Z$ par :

$$\forall x \in \Omega, \quad \Gamma(x) = \Gamma_1(x) \times \Gamma_2(x)$$

est inf-continue en x_0.

Démonstration :

Il résulte de la proposition 1.9 que $\Gamma(x_0)$ est un convexe d'intérieur relatif non vide de $Y \times Z$ et que $\omega(\Gamma(x_0)) = \omega(\Gamma_1(x_0)) \times \omega(\Gamma_2(x_0))$.
Pour tout (y_1, y_2) dans $\omega(\Gamma(x_0))$,

$$\exists \Omega_1' \in \mathcal{V}_X(x_0), \exists W_1 \in \mathcal{V}_{[\Gamma_1(x_0)]}(y_1), \quad \forall x \in \Omega_1', \quad W_1 \subset \Gamma_1(x)$$

et

$$\exists \Omega_2' \in \mathcal{V}_X(x_0), \exists W_2 \in \mathcal{V}_{[\Gamma_2(x_0)]}(y_2), \quad \forall x \in \Omega_2', \quad W_2 \subset \Gamma_2(x)$$

Posant $\Omega' = \Omega_1' \cap \Omega_2'$ et $W = W_1 \times W_2$, il vient que

$$\Omega' \in \mathcal{V}_X(x_0), \quad W \in \mathcal{V}_{[\Gamma_1(x_0)] \times [\Gamma_2(x_0)]}((y_1, y_2)) \quad \text{et} \quad \forall x \in \Omega', \quad W \subset \Gamma(x)\,.$$

∎

On peut composer à droite une fonction multivoque inf-continue et une application continue et on obtient :

Proposition 2.4. : *Soient X, Y et Z des espaces de Banach, Ω un ouvert de X, Γ_0 une fonction multivoque de Y dans Z, f une application de Ω dans Y et x_0 un point de Ω.*

On suppose que :

1) f est continue au point x_0

2) Γ_0 est inf-continue en $f(x_0)$.

Alors, la fonction multivoque Γ définie sur Ω par :

$\forall x \in \Omega$, $\Gamma(x) = \Gamma_0(f(x))$ *est inf-continue en* x_0

Démonstration :

1) $\Gamma(x_0)$ est par hypothèse un convexe d'intérieur relatif non vide de Z.

2) Pour tout z_0 dans $\omega(\Gamma_0(f(x_0)))$,

$$\exists V \in \mathcal{V}_Y(f(x_0)), \quad \exists W \in \mathcal{V}_{[\Gamma_0(f(x_0))]}(z_0), \quad \forall y \in V, \quad W \subset \Gamma_0(y)\,.$$

L'application f étant continue au point x_0,

$$\exists \Omega' \in \mathcal{V}_X(x_0), \quad \forall x \in \Omega', \quad f(x) \in V$$

Soit

$$\forall x \in \Omega', \quad W \subset \Gamma_0(f(x)) = \Gamma(x)\,.$$

■

La propriété de semi-continuité inférieur se conserve également par l'image réciproque d'une application affine continue et on a le résultat suivant :

Proposition 2.5 : *Soient X, Y et Z trois espace de Banach, Ω un ouvert de X, H une fonction multivoque de Ω dans Z et θ une application de $\Omega \times Y$ dans Z. Soit x_0 un point de Ω et supposons que :*

1) H est inf-continue en x_0.

2) Il existe y_0 dans Y tel que $\theta(x_0, y_0) \in \omega(H(x_0))$.

3) l'application $\theta_{x_0} : Y \mapsto Z$, $y \mapsto \theta(x_0, y)$ est affine.

4) θ est continue en tout point de $\{x_0\} \times Y$.

Alors, la fonction multivoque Γ définie sur Ω par :

$$\forall x \in \Omega, \quad \Gamma(x) = \{y \in Y / \theta(x, y) \in H(x)\}$$

est inf-continue en x_0.

Démonstration :

Par hypothèse, $H(x_0)$ est un convexe d'intérieur relatif non vide de Z et θ_{x_0} est une application affine continue de Y dans Z telle que $\theta_{x_0}^{-1}(\omega(H(x_0)))$ soit non vide, il résulte donc de la proposition 1.10 que $\Gamma(x_0) = \theta_{x_0}^{-1}(H(x_0))$ est un convexe d'intérieur reltif non vide de Y et que $\omega(\Gamma(x_0)) = \theta_{x_0}^{-1}\omega(H(x_0))$.

Pour tout y_0 dans $\omega(\Gamma(x_0))$, l'élément $\theta(x_0, y_0)$ est dans $\omega(H(x_0))$. Par ailleurs, la fonction multivoque H étant inf-continue au point x_0,

$$\exists V \in \mathcal{V}_{[H(x_0)]}(\theta(x_0, y_0)), \quad \exists \Omega'_1 \in \mathcal{V}_X(x_0), \quad \forall x \in \Omega'_1, \quad V \subset H(x) .$$

et de même l'application θ étant continue au point (x_0, y_0),

$$\exists W' \in \mathcal{V}_Y(y_0), \quad \exists \Omega'_2 \in \mathcal{V}_X(x_0), \quad \forall x \in \Omega'_2, \ \forall y \in W', \ \theta(x, y) \in V .$$

Posons $\Omega' = \Omega'_1 \cap \Omega'_2$ et $W = W' \cap [\theta_{x_0}^{-1}(H(x_0))]$, il vient que

$$\forall x \in \Omega', \quad \forall y \in W, \quad \theta(x, y) \in H(x)$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in \Omega', \quad W \subset \Gamma(x) .$$

■

En combinant les propositions 2.2 et 2.5, on obtient :

Proposition 2.6. : *Soient X, Y et Z trois espaces de Banach, Ω un ouvert de X, Q et H deux fonctions multivoques de Ω dans Y et Z respectivement et θ une application définie sur $\Omega \times Y$ et à valeurs dans Z. Soit x_0 un point de Ω et supposons que :*

1) Q et H sont inf-continues en x_0.

2) Il existe y_0 dans $\omega(Q(x_0))$ tel que $\theta(x_0, y_0) \in \omega(H(x_0))$.

3) l'application $\theta_{x_0} : Y \mapsto Z$, $y \mapsto \theta(x_0, y)$ est affine continue.

4) θ est continue en tout point de $\{x_0\} \times \omega(Q(x_0))$.

Alors, la fonction multivoque Γ définie sur Ω par :

$$\forall x \in \Omega, \quad \Gamma(x) = \{y \in Q(x), \quad \theta(x, y) \in H(x)\}$$

est inf-continue en x_0.

On peut facilement vérifier les hypothèses de la proposition 2.5 dans le cas simple suivant :

Corollaire 2.7. : *(cône linéarisant)*

Soient X, Y et Z trois espaces de Banach, Ω un ouvert de X, H une fonction multivoque de Ω dans Z et f une application de $\Omega \times Y$ dans Z. Soit (x_0, y_0) un point de $\Omega \times Y$ et supposons que :

1) H est inf-continue en x_0.

2) $D_2 f(x_0, y_0)$ existe

3) Il existe $y_1 \in Y$ tel que $f(x_0, y_0) + D_2 f(x_0, y_0)(y_1 - y_0) \in \omega(H(x_0))$.

Alors, la fonction multivoque Γ' définie sur Ω par :

$$\forall x \in \Omega, \quad \Gamma'(x) = \{y \in Y / f(x, y_0) + D_2 f(x_0, y_0)(y - y_0) \in H(x)\}$$

est inf-continue en x_0.

Il suffit d'appliquer la proposition 2.5 à l'application θ définie sur $\Omega \times Y$ par :

$$\forall (x, y) \in \Omega \times Y, \quad \theta(x, y) = f(x, y_0) + D_2 f(x_0, y_0)(y - y_0) .$$

$\Gamma'(x)$ est appelé cône linéarisant de l'ensemble $\Gamma(x) = \{y \in Y / f(x, y) \in H(x)\}$.

Enfin, la notion de semi-continuité inférieure possède la propriété suivante :

Proposition 2.8. : *Soient X et Y deux espaces de Banach, Ω un ouvert de X, Γ une fonction multivoque de Ω dans Y, x_0 un point de Ω et A une partie de Y. On suppose que :*

1) Γ est inf-continue en x_0

2) A est un compact de $[\Gamma(x_0)]$ tel que $A \subset \omega(\Gamma(x_0))$.

Il existe alors un voisinage Ω' du point x_0 dans X tel que

$$\forall x \in \Omega', \quad A \subset \Gamma(x) .$$

Démonstration :

Soit $(W_y)_{y \in A}$ un recouvrement ouvert de A dans $[\Gamma(x_0)]$, on a alors

$$A \subset \bigcup_{y \in A} W_y \subset \Gamma(x_0)$$

Il existe donc un recouvrement fini $(W_i)_{i\in I}$ de A dans $[\Gamma(x_0)]$ tel que

$$A \subset \bigcup_{i\in I} W_i \subset \Gamma(x_0)$$

Pour tout z dans A, il existe i dans I et Ω_i dans $\mathcal{V}_X(x_0)$ tels que

$$\forall x \in \Omega_i, \quad z \in W_i \subset K(x)\,.$$

Posons $\Omega' = \cap_{i\in I}\Omega_i$, il vient que

$$\forall x \in \Omega', \quad \forall i \in I, \quad W_i \subset \Gamma(x)$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in \Omega', \quad A \subset \bigcup_{i\in I} W_i \subset \Gamma(x)\,.$$

■

Remarque 2.9 : Si Γ est la fonction multivoque constante, on peut s'affranchir de l'hypothèse de compacité faite sur A.

Au terme de cette annexe, nous rappelons les deux notions de semi-continuité classiques pour une fonction multivoque suivantes :

Définition : ([9], [10]) *les notations étant celles de la définition 2.1.*

1) Γ est dite semi-continue inférieurement (s.c.i) au point x_0 si et seulement si

$\forall\ V$ *ouvert dans* Y, $\Gamma(x_0) \cap V \neq \emptyset$, $\exists U \in \mathcal{V}_X(x_0)$, $\forall x \in U$, $\Gamma(x) \cap V \neq \emptyset$

2) Γ est dite semi-continue supérieurement (s.c.s) au point x_0 si et seulement si

$\forall\ V$ *ouvert dans* Y, $\Gamma(x_0) \subset V$, $\exists U \in \mathcal{V}_X(x_0)$, $\forall x \in U$, $\Gamma(x) \subset V$

et nous les comparons avec l'inf-continuité.

Proposition 2.10. : *Les notations étant celles de la définition 2.1.*

1) Si Γ est inf-continue en x_0 alors Γ est s.c.i. en x_0.
La réciproque est fausse.

2) En général une fonction multivoque inf-continue en x_0 n'est pas s.c.s en x_0 et réciproquement.

Démonstration :

1) Soit V un ouvert de Y tel que $V \cap \Gamma(x_0)$ soit non vide. $\Gamma(x_0)$ étant convexe d'intérieur relatif non vide, il résulte du corollaire 1.5 que $V \cap \omega(\Gamma(x_0))$ est non vide.

Soit y_0 dans $V \cap \omega(\Gamma(x_0))$, il existe d'après l'inf-continuité de Γ au point x_0 un voisinage U de x_0 dans X tel que :

$$\forall x \in U, \quad y_0 \in \omega(\Gamma(x)) .$$

D'où

$$\forall x \in U, \quad V \cap \Gamma(x) \neq \emptyset .$$

Ceci montre que Γ est s.c.i au point x_0.
La réciproque est fausse comme le montre l'exemple suivant :

Soit la fonction Γ_0 définie de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^2$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \Gamma_0(x) = [-1,+1] \times \{x\}$$

On sait déjà (cf. paragraphe II.1) que Γ_0 n'est pas inf-continue en 0. Montrons que Γ_0 est s.c.i. en 0 : soit V un ouvert de $\mathbf{R}^2$ tel que $V \cap [-1,+1] \times \{0\} \neq \emptyset$.

Fixons t_0 dans l'intervalle $[-1,+1]$ tel que $(t_0, 0)$ soit dans V. Il existe donc un nombre positif ε tel que le produit cartésien $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\times] - \varepsilon, +\varepsilon[$ soit contenu dans V. En particulier, pour tout x dans $]-\varepsilon, +\varepsilon[$, l'ensemble $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\times\{x\}$ est contenu dans V et par suite

$$\Gamma_0(x) \cap V = ([-1,+1] \times \{x\}) \cap V \neq \emptyset .$$

2) On considère les deux fonctions multivoques Γ_1 et Γ_2 définies de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ par :

$$\Gamma_1(x) = \begin{cases} [-1,+1] & \text{si} \quad x = 0 \\ [-2,+2] & \text{si} \quad x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Gamma_2(x) = \begin{cases} [-2,+2] & \text{si} \quad x = 0 \\ [-1,+1] & \text{si} \quad x \neq 0 \end{cases}$$

On voit aisément que Γ_1 est inf-continue en 0 mais n'est pas s.c.s. en 0 et que Γ_2 est s.c.s. en 0 mais n'est pas s.c.i en 0 donc Γ_2 n'est pas inf-continue en 0.

RÉFÉRENCES

[1] Ph. MICHEL : Problèmes des inégalités. Application à la programmation différentielle dans les espaces de Banach, *C.R.Acad. Sc. Paris, t. 275, Série A, 1972, p. 345-348.*

[2] S.M. ROBINSON : Stability theory for systems of inegalities, part. II : Differentiable non linear systems, *SIAM J. Nam. Anal. 13, 1976, p. 497-513*

[3] J.P. PENOT : Regularity conditions in mathematical programming, *Mathematical Programming Studies, 19, 1982, p. 167-199.*

[4] H. ZOUAKI : Un théorème de submersion pour une classe de fonctions multivoques. Application à la détermination de cônes tangents, *Thèse, université de Lille Flandres Artois, 1989.*

[5] Ph. ANTOINE : Détermination explicite du cône tangent d'une surface de niveau. Application *Pub. IRMA-Lille, Vol. 3, Fasc. 5, 1981.*

[6] E. MICHAEL : Continuous selections, *1.* Ann. of *Math. 63, 1956, p. 361-382.*

[7] R.T. ROCKAFELLAR : Convex Analysis, *Princeton University Press, 1970.*

[8] J. BAIR et R. FOURNEAU : Etude géométrique des espaces vectoriels, une introduction, *Lectures Notes in Mathematics, n° 489, Springer-Verlag (1975).*

[9] J.P. AUBIN et I. EKELAND : Non linear Analysis, *Wiley Interscience, 1984.*

[10] C. BERGE : Espaces topologiques, fonctions multivoques, *Dunod, Paris, 1959.*

Résumé

Soient E, F et G trois espaces de Banach, f une application d'un ouvert U de $E \times F$ dans G, différentiable en un point (a, b) de U, B et C deux convexes fermés de F et de G respectivement. On considère le système perturbé :

(1) $$f(x, y) \in z + C, y \in B$$

Sous des hypothèses de régularité appropriées faisant intervenir la possibilité de résoudre régulièrement le système linéarisé, on montre l'existence d'une solution $y = \theta(x, z)$ localement lipschitzienne (éventuellement admettant des dérivées directionnelles) pour le système (1). Ce résultat permet d'étudier la régularité des solutions du système plus général :

(2) $$f(x, y) \in z + \Gamma(x, y), y \in B$$

Dans le cas où Γ est une fonction multivoque vérifiant une certaine propriété de semi-continuité inférieure ou Γ est une fonction multivoque à graphe convexe.

Mots clés : Cône convexe, application lipschitzienne, dérivée directionnelle, submersion, fonction multivoque.