N° d'ordre : 1228

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

présentée par

Abdelghani EL MAZOUNI

Quotient de la variété des points infiniment voisins sous l'action de PGL(3)

Soutenue le 16 décembre 1993 devant la Commission d'Examen :

Président : L. GRUSON, Professeur, Université de Lille I

Rapporteurs : C. PESKINE, Professeur, Université de Paris VI

A. HIRSCHOWITZ, Professeur, Université de Nice

Membres : J. D'ALMEIDA, Professeur, Université de Lille I

A. TREIBICH, Professeur, Université d'Artois

N° d'ordre : 1228

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

présentée par

Abdelghani EL MAZOUNI

Quotient de la variété des points infiniment voisins sous l'action de PGL(3)

Soutenue le 16 décembre 1993 devant la Commission d'Examen :

Président : L. GRUSON, Professeur, Université de Lille I
Rapporteurs : C. PESKINE, Professeur, Université de Paris VI
A. HIRSCHOWITZ, Professeur, Université de Nice
Membres : J. D'ALMEIDA, Professeur, Université de Lille I
A. TREIBICH, Professeur, Université d'Artois

Quotient de la variété des points infiniment voisins d'ordre 9 sous l'action de PGL_3

Table des matières

Introduction

Il s'agit de comprendre la thèse de G.H. Halphen, Sur les invariants différentiels, 1878, [4]. Dans un travail de 1873, c.f. la thèse de Belghiti et l'article de Colley et Kennedy, [2], Halphen décrit (essentiellement) la variété des points infiniment voisins d'ordre n de points du plan projectif, $\mathbb{P}$, qu'on note S_n dans la suite. C'est une compactification du sous-schéma S_n^0 du schéma de Hilbert de $\mathbb{P}$ paramétrant les points épais d'ordre n sur une courbe lisse de $\mathbb{P}$. Il s'agit ici de décrire un quotient convenable de S_n sous l'action du groupe $G = PGL(3, \mathbb{C})$ des automorphismes de $\mathbb{P}$.

On décrit un "bon quotient" d'un ouvert G-stable de S_9^0, explicité au §5, sous G, c'est une surface projective, rationnelle, à singularités isolées et rationnelles, dont le groupe des classes de diviseurs de Weil est de rang 2 (N.B. "Geometric invariant theory " ne semble pas s'appliquer directement ici, c.f. §2).

On montre auparavant que le corps des fonctions rationnelles G-invariantes sur S_n est une extension transcendante pure de $\mathbb{C}$.

1 Action de G sur S_n

1.1 Soient V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 3, $\mathbb{P} = P(V^\vee) = Proj\ Sym\ V$, $G = PGL(V^\vee)$ le groupe des automorphismes de $\mathbb{P}$.

Rappelons ([1], [2]) la définition de la variété S_n des points infiniment voisins d'ordre n de points de $\mathbb{P}$: par récurrence sur n, on pose $S_1 = \mathbb{P}$, $S_{n+1} = Proj_{S_n} Sym E_n$, où E_n est le quotient de rang 2 de $\Omega^1_{S_n}$ défini par le "carré cocartésien" :

$$\begin{array}{ccc} p^*\Omega^1_{S_{n-1}} & \longrightarrow & \Omega^1_{S_n} \\ \vdots & & \\ p^*(E_{n-1}) & & \\ \vdots & & \\ \mathcal{O}_{S_n}(1) & \longrightarrow & E_n \end{array}$$

($p : S_n \to S_{n-1}$ désigne provisoirement la projection et $\mathcal{O}_{S_n}(1)$ désigne le quotient tautologique de $p^*(E_{n-1})$).
Les points de S_n correspondent aux "points infiniment voisins d'ordre n" de $\mathbb{P}$.

Le groupe G opère sur S_n ([2]), on a une G-linéarisation naturelle de E_n (par exemple en remarquant, avec les notations de [1], que E_n est le fibré conormal à $s(S_n)$ dans X_n et que G opère sur ces variétés).

On note S_n^0 l'ouvert G-stable de S_n formé des points infiniment voisins sur un germe de courbe lisse de $\mathbb{P}$, qui est isomorphe au sous-schéma de $Hilb(\mathbb{P})$ formé des points épais d'ordre n sur une courbe lisse [1].

1.2 Définition d'une carte locale de S_n^0

On choisit une base de V, i.e. une identification de $\mathbb{P}$ au "complété projectif" du plan affine $\mathbb{C}^2$. On définit une immersion ouverte de $\mathbb{C}^{n+1}$ dans S_n^0, le point $(x, a_0, \ldots, a_{n-1})$ est transformé en le point (x, a_0) épaissi n fois sur la courbe lisse de $\mathbb{C}^2$ d'équation :

$$Y = a_0 + a_1(X - x) + \ldots + a_{n-1}(X - x)^{n-1}.$$

L'image de cette immersion est formée de points épais "à distance finie" et de direction tangentielle "non verticale".
Les images de cet ouvert par action des éléments de G recouvrent S_n^0.

1.3 Pour $d \geq 1$, définissons une hypersurface W_d de S_n ($n = C^2_{d+2}$), le d-ième wronskien. Le d-ième plongement de Véronèse de $\mathbb{P}$ dans $\mathbb{P}_{n-1}$ induit un plongement de S_n^0 dans le schéma de Hilbert de points épais d'ordre n sur une courbe lisse de $\mathbb{P}_{d-1}$. La condition d'être situé dans un hyperplan définit une hypersurface de ce dernier schéma. Le d-ième wronskien est l'adhérence dans S_n de l'image réciproque dans S_n^0 de cette hypersurface. Son équation dans la carte locale de 1.2 est le déterminant à C^2_{d+1} lignes et colonnes obtenu comme suit : soit $y = \sum_{i \geq 2} a_i x^i$ le développement de Taylor d'un germe de courbe en $(0,0)$ à tangente horizontale paramétrée par l'abcisse. Ecrivons le développemet de Taylor de y^k sous la forme $\sum_{i\geq 2} a_i^k x^i$. On a :

$$W_d = \begin{vmatrix} a_{d+1} & a_{d+2} & \cdots & \cdots & a_{n-1} \\ a_d & a_{d+1} & \cdots & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & \cdots & a_{n-d} \\ a_d^2 & a_{d+1}^2 & \cdots & \cdots & a_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_2^2 & a_3^2 & \cdots & \cdots & a_{n-d+1}^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{d+1}^d & a_{d+2}^d & \cdots & \cdots & a_{n-1}^d \end{vmatrix}$$

Exemple : On pose $U = W_1 = a_2$

$$W_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_4 & a_5 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & a_2^2 & 2a_2a_3 \end{vmatrix} = UV, \quad ou \quad V = \begin{vmatrix} a_3 & a_4 & a_5 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & a_2 & 2a_3 \end{vmatrix}$$

Remarque : Plus généralement si $m \geq C_{d+2}^2$, on peut considérer la matrice :

$$\begin{pmatrix} a_{d+1} & a_{d+2} & \cdots & \cdots & a_{m-1} \\ a_d & a_{d+1} & \cdots & \cdots & a_{m-2} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & \cdots & a_{m-d} \\ a_{d+2}^2 & a_{d+3}^2 & \cdots & \cdots & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_3^2 & a_4^2 & \cdots & \cdots & a_{m-d+1}^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{d+1}^d & a_{d+2}^d & \cdots & \cdots & a_{m-1}^d \end{pmatrix}$$

la sous-variété de S_m^0 définie par les mineurs maximaux de cette matrice est le lieu des points épais d'ordre m sur une courbe de degré d. Elle est invariante par G et on la note $W_{d,m}$.

Exemple : $W_{1,m}$, $m \geq 3$ est définie par l'idéal $(a_2, \ldots, a_{m-1})$.

$W_{2,9}$ est définie par les mineurs maximaux de :

$$\begin{pmatrix} a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\ 0 & a_2^2 & 2a_2a_3 & 2a_2a_4 + a_3^2 & 2a_2a_5 + 2a_3a_4 & 2a_2a_6 + 2a_3a_5 + a_4^2 \end{pmatrix}$$

1.4 Soit S_n^{00} $(n \geq 6)$ l'ouvert de S_n^0 défini par l'inéquation $UV \neq 0$.

Théorème 1.1 - *(i) S_7^{00} est le quotient de G par un sous-groupe γ d'ordre 3.*

(ii) Pour $n \geq 8$, S_n^{00} est G-isomorphe au fibré vectoriel de rang $n-7$ sur S_7^{00}, quotient de $G \times \mathbb{C}^{n-7}$ (où l'action de G sur le second facteur est triviale) par l'action (à droite) de γ définie sur le second facteur par la matrice diagonale

$$(\chi, 1, \chi^2, \chi, 1, \ldots)$$

(où χ est un caractère non trivial de γ).

Démonstration - Soit X l'hypersurface G-invariante de S_8^{00}, lieu du noeud d'une cubique nodale variable de $\mathbb{P}$, épaissi 8 fois sur une des branches. Son équation Δ dans les coordonnées ci-dessus est obtenue en éliminant les coefficients de l'équation de la cubique,

$$y(ax+by) + cx^3 + dx^2y + exy^2 + fy^3$$

dans le système qui traduit la nullité du développement limité d'ordre 8 résultant de la substitution

$$y = a_2x^2 + \ldots + a_7x^7$$

dans cette équation. On trouve

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ -a_2^2 & 0 & a_3^2 & 2a_3a_4 & 2a_3a_5 + a_4^2 \\ 0 & a_2^2 & 2a_2a_3 & 2a_2a_4 + a_3^2 & 2a_2a_5 + 2a_3a_4 \\ 0 & 0 & a_2^2 & 3a_2a_3 & 3a_2a_4 + 3a_3^2 \end{vmatrix}$$

C'est un polynôme de degré 1 en a_7 de coefficient dominant U^4V ; on en déduit d'abord que tout point de S_7^{00} est sur une branche nodale de cubique. Le groupe G agit transitivement sur ces branches, fixons l'une d'elles, par exemple la branche infinie parabolique de la cubique $y = x^2 - x^{-1}$ du plan affine $\mathbb{C}^2$, et notons m le point base de S_7^{00} correspondant. Le stabilisateur γ de m dans G est d'ordre 3, il agit linéairement sur $\mathbb{C}^2$ par la matrice diagonale (χ, χ^2) où χ est un caractère non trivial de γ, et dans la carte locale ci-dessus par la matrice diagonale

$$(\chi, \chi^2, \ldots, \chi^{2-i} \ldots).$$

On obtient donc (i).

D'après [2], le quotient E_n de $\Omega^1_{S_n}$ factorise $\Omega^1_{S_n/S_{n-1}}$. Ce dernier définit l'hypersurface Z_{n+1} de S_{n+1}, "nouvelle composante" de $Y_{n+1} = S_{n+1} - S_{n+1}^0$ (les autres constituent l'image réciproque de Y_n par la projection).

D'autre part, on a une suite exacte :

$$0 \to \mathscr{O}_{S_n}[Z_n] \to E_n \to \Omega^1_{S_n/S_{n-1}} \to 0$$

qu'on restreint à S_n^0 :

$$0 \to \mathscr{O}_{S_n^0} \to (E_n)_{|S_0^n} \to \Omega^1_{S_n^0/S_{n-1}^0} \to 0 \quad (1)$$

Comme S_{n+1}^0 est le complémentaire, dans l'image réciproque de S_n^0 dans S_{n+1}, du fermé défini par le quotient $\Omega^1_{S_n^0/S_{n-1}^0}$ de $(E_n)_{|S_0^n}$, il s'identifie au fibré en droites affines sur S_n^0, torseur sous le fibré tangent relatif $T_{S_n^0/S_{n-1}^0}$ défini par l'élément de $H^1(T_{S_n^0/S_{n-1}^0})$ déduit de (1).

Posons $S_n' = G \times_{S_7^{00}} S_n$, on va montrer par récurrence sur $n \geq 8$ que S_n' est G-isomorphe au fibré trivial $G \times \mathbb{C}^{n-7}$.

Pour $n = 8$, on remarque que E_7 et $\Omega^1_{S_7/S_6}$ sont des quotients G-équivariants de $\Omega^1_{S_7}$. Leurs images réciproques sur G sont donc des fibrés G-équivariants du fibré trivial de fibre $(Sl(V^\vee))^\vee$ (dual de l'algèbre de Lie de G) ils sont eux-mêmes triviaux. Remarquons d'ailleurs que l'hypersurface X fournit un scindage naturel de l'image réciproque de la suite (1) sur G pour $n = 7$. Soit A l'anneau des sections de $\mathscr{O}_G$ (faisceau structural de G). On vient de voir que l'anneau des sections globales de S_8' est $A[\xi]$, où ξ est une indéterminée invariante par G. L'image réciproque X' de X dans S_8' définit un idéal I de $A[\xi]$ tel que $A \xrightarrow{\sim} A[\xi]/I$ (localement, I est engendré par un polynôme unitaire de degré 1). Quitte à remplacer ξ par $\xi - a$, $a \in A$, on peut donc supposer que ξ est un générateur de I, ce qui le caractérise (à homothétie près). On pose alors $\xi = i_8$.

Supposons maintenant $n > 8$: tout revient à construire une section G-invariante de l'image réciproque de E_{n-1}, E_{n-1}' sur S_{n-1}' qui scinde la suite exacte (1). Il suffit pour cela de prendre l'image dans E_{n-1}' de di_{n-1} où i_{n-1} est le dernier générateur construit de l'anneau des sections globales de S_{n-1}'.

Identifions S_n' et $G \times \mathbb{C}^{n-7}$; alors S_n^{00} est le quotient de S_n' par γ opérant (à droite) par :

$$S_n' \times \gamma \to S_n'$$
$$((g, v), h) \mapsto (gh, \rho(h)v)$$

où ρ est une représentation de γ dans $\mathbb{C}^{n-7}$.

Pour identifier ρ, utilisons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (g,v) & \mapsto & (h^{-1}gh, \rho(h)v) \\ S_n' & \longrightarrow & S_n' \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_n^{00} & \longrightarrow & S_n^{00} \\ x & \mapsto & h^{-1}x \end{array}$$

Soit p un point de S_n^{00} fixé par l'action (à gauche) de γ, par exemple le point $(0,0)$ de $\mathbb{C}^2$ épaissi sur $y = x^2 + x^5$, et soit T l'espace tangent en p à S_n^{00}. On a une suite exacte :

$$0 \to \mathbb{C}^{n-7} \to T \to T' \to 0$$

où T' est l'espace tangent à S_7^{00} en l'image de p. On voit alors que $\rho(h)$ est la restriction à $\mathbb{C}^{n-7}$ de la dérivée en p de $x \mapsto h^{-1}x$. Celle-ci a été identifiée plus haut conformément à l'énoncé du théorème.

2 L'anneau bigradué de Halphen

On se propose d'expliciter l'anneau des fonctions G-invariantes sur S_n^{00} dans la carte locale de 1.2 (identifiée au spectre de $\mathbb{C}[x, a_0, \ldots, a_{n-1}]$).
Commençons par identifier $Pic(S_n^0)$.
On note A_n l'anneau $\mathbb{C}[t]/(t^n)$, V_n le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $V \otimes_{\mathbb{C}} A_n^\vee$, G' le groupe algébrique produit semi-direct de G_1' et G_2' où G_1' est le groupe des automorphismes de la $\mathbb{C}$-algèbre A_n (il opère à droite sur A_n ou sur $V_1^\vee$ par composition de développements limités lorsqu'on identifie ses éléments aux développements limités sans terme constant et de terme linéaire non nul), G_2' est le groupe multiplicatif A_n^* de A_n, sur lequel G_1' agit par composition. Alors G' agit (à droite) sur $V_n^\vee$ par :

$$V_n^\vee \times G' \to V_n^\vee$$

$$(v, (\varphi, u)) \mapsto u.(v \circ \varphi)$$

cette action commute avec l'action évidente de $SL(V^\vee)$.

Soit U_n l'ouvert de l'espace affine $V_n^\vee$ formé des $v = v_0 + v_1 t + \ldots + v_{n-1}t^{n-1}$ tels que $v_0 \wedge v_1 \neq 0$. On a un morphisme $\Pi_n : U_n \to S_n^0$ qui transforme v en le point épais $t = 0$ sur la courbe de $\mathbb{P}$ de représentation paramétrique $t \mapsto v(t)$.

Proposition 2.1 - Π_n *est une fibration principale (au sens de la topologie de Zariski) de groupe structural* G'.

La démonstration est directe. Si l'on remarque qu'une section de Π_n au dessus de la carte locale de 1.2 existe : elle est définie dans U_n par l'idéal des coefficients de $x - t$ et $z - 1$ (x, y, z désignent les trois fonctions coordonnées sur $V^\vee$).

Corollaire 2.1 - $Pic(S_0^n)$ *est naturellement isomorphe au groupe des caractères* $\chi(G')$ *de* G' *(i.e.* $\chi(G_1') \times \chi(G_2') = \mathbb{Z}^2$*).*

Cela résulte de [5], p.32, compte tenu du fait que $H^0(U_n, \mathscr{O}_{U_n}^*) = \mathbb{C}^*$ et $H^1(U_n, \mathscr{O}_{U_n}^*) = \{1\}$ (correspondant au fait que U_n est un ouvert de $\mathbb{C}^{3n}$ dont le fermé complémentaire est de codimension 2).

Introduisons maintenant les invariants différentiels d'Halphen : Les invariants d'ordre $< n$ sont les polynômes $P \in \mathbb{C}[x, a_0, \ldots, a_{n-1}]$ qui définissent une hypersurface dont l'adhérence dans S_n est G-invariante.

Proposition 2.2 - *Soit* P *un invariant différentiel d'ordre* $< n$.
1) P *est indépendant des variables* (x, a_0, a_1).

2) p est bihomogène pour les graduations suivantes de $\mathbb{C}[x, a_0, \ldots, a_{n-1}]$:

(degré) : x est de degré 0, les a_i sont de degré 1

(poids) : x est de poids 0, a_i est de poids i.

3) Le $\mathscr{O}_{S_n^0}$-module inversible dont une section est l'adhérence de l'hypersurface d'équation P est $\mathscr{O}_{S_n^0}(d+p, 3d)$.

On ne recopiera pas ici la démonstration d'Halphen ([4], III, Th. I-IV).

Notons $\mathscr{H}_n$ le sous-anneau, bigradué par (degré, poids), de $\mathbb{C}[x, a_0, \ldots, a_{n-1}]$ formé des invariants différentiels d'ordre $< n$ et $\mathscr{H}$ la réunion des $\mathscr{H}_n$. Nous appellerons $\mathscr{H}$ "l'anneau bigradué d'Halphen".

Les bidegrés de U, V, Δ dans $\mathscr{H}$ sont respectivement $(1,2)$, $(3,9)$, $(8,24)$. La proposition 2.2 montre que l'anneau $A^G(S_n^{00})$ des fonctions régulières G-invariantes sur S_n^{00} est la partie homogène de bidegré $(0,0)$ de $\mathscr{H}_n[U^{-1}V^{-1}]$. Explicitons maintenant le théorème 1.1 dans ces notations :

Soit d la dérivation de l'anneau $\mathbb{C}[x, a_0, \ldots, a_i, \ldots]$ définie par $dx = 1$ et $da_i = (i+1)a_{i+1}$.

Lemme 2.1 - *1) L'application d envoie $(\mathscr{H}_n[U^{-1}V^{-1}])_{00}$ dans $(\mathscr{H}_{n+1}[U^{-1}V^{-1}])_{01}$.*
2) Soit C le modèle lisse d'une courbe à branches lisses de $\mathbb{P}$. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (\mathscr{H}_n[U^{-1}V^{-1}])_{00} & \longrightarrow & (\mathscr{H}_{n+1}[U^{-1}V^{-1}])_{01} \\ \downarrow & & \downarrow \\ K(C) & \longrightarrow & \Omega^1_{K(C)/\mathbb{C}} \end{array}$$

où les colonnes sont les restrictions à C ($K(C)$ désigne le corps des fractions rationnelles sur C).

Démonstration - 1) résulte d'une remarque d'Halphen : si A et B sont deux invariants différentiels de même bidegré (d,p) et d'ordre $< n$, $AdB - BdA$ est un invariant différentiel d'ordre $< n+1$, définissant l'hypersurface S_{n+1}^0 formée de points épais p tels qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que le développement limité de $A + \lambda B$ en p (qui existe à l'ordre 1 en la variable t) soit nul.
2) la deuxième assertion est claire, une fois remarqué que la restriction à C d'un élément de $(\mathscr{H}_k[U^{-1}V^{-1}])_{0l}$ est naturellement une section de $\omega^{\otimes l}$, ce qui est une version de [4], III, Th. IV.

Proposition 2.3 - *L'anneau $A(G)$ des fonctions régulières sur G est isomorphe à $A(S_7^{00})[\sqrt[3]{V}]$.*

Démonstration - On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} A(S_7^{00}) & \longrightarrow & A(S_8^{00}) & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ A(G) & \longrightarrow & A(S_8') & \longrightarrow & A(S_8')/(i_8) \end{array}$$

et on a vu que $i_8^3 \in A(S_8^{00})$. Il s'identifie donc à $\lambda\frac{\Delta^3}{V^8}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, puisque i_8 et Δ ont les mêmes zéros et que $\frac{\Delta^3}{V^8}$ est une fonction G-invariante sur S_8^{00}.

Corollaire 2.2 - *Dans* $\mathbb{C}[x, a_0, \ldots, a_i, \ldots][U^{-1}V^{-1}][v]$, *($v$ est défini par $v^3 = VU^{-3}$ et muni du bidegré $(0,1)$), posons $i_8 = \frac{\Delta}{U^8V^8}$, $i_{k+1} = \frac{di_k}{v}$, alors $(\mathscr{H}_k[U^{-1}V^{-1}])_{00}$ est le sous-anneau de l'anneau $\mathbb{C}[i_8, \ldots, i_h, \ldots]$ formé des éléments invariants par l'automorphisme :*

$$v \mapsto wv, \quad (w^3 = 1).$$

On souhaite construire un quotient projectif d'un ouvert G-stable de S_n. Pour cela, "Geometric invariant theory" préscrit la recherche d'un module inversible, ample et G-équivariant sur S_n vis-à-vis duquel l'ouvert des points semi-stables soit non vide. Montrons que c'est impossible : en effet, si C est le modèle lisse d'une courbe à branches lisses de $\mathbb{P}$, le morphisme de C dans $\mathbb{P}$ se relève naturellement à S_n^0 et la restriction à C de $\mathscr{O}_{S_n^0}(a,b)$ est $\omega_C^{\otimes a}(b)$. Si C est une droite de $\mathbb{P}$, c'est donc $\mathscr{O}_{\mathbb{P}_1}(b-2a)$. En particulier, si I est un invariant de bidegré (d,p), il définit une section de $\mathscr{O}_{S_n^0}(d+p, 3d)$ dont le nombre d'intersection avec l (droite) est $d - 2p < 0$ (en fait on a toujours $p \geq 2d$). A fortiori, il n'existe pas de section invariante non nulle d'un faisceau ample sur S_n (car celle-ci devrait couper positivement le relèvement naturel de L).

3 Quotient de S_8 sous G

Commençons par décrire $\mathscr{H}_8$:

Proposition 3.1

$$\mathscr{H}_8 = \mathbb{C}[U, V, \Delta, H]/(2^8\Delta^3 - 3^3V^8 - U^4H)$$

le bidegré de H étant $(20, 64)$.

Démonstration - Remarquons d'abord que $\mathscr{H}_8$ est factoriel et que $(\mathscr{H}_8[U^{-1}V^{-1}])_{00} = \mathbb{C}[\frac{\Delta^3}{V^8}]$. Cherchons les éléments premiers de $\mathscr{H}_8$: ce sont U, V, Δ et $a\Delta^3 + bV^8$ débarrassés éventuellement d'un facteur puissance de U (en effet, quitte à multiplier par un monome $U^aV^b\Delta^c$, on peut ramener tout élément premier bihomogène en bidegré $(0,0)$ dans $\mathscr{H}_8[U^{-1}V^{-1}]$, et les éléments de $\mathbb{C}[\frac{\Delta^3}{V^8}]$ sont linéaires).

Il existe au plus une valeur de (a,b) (dans $\mathbb{P}_1$!) telle que U divise $a\Delta^3 + bV^8$. Prenons la courbe particulière $y = x^3$, on a $V = 2$ et $\Delta = 3$, donc il s'agit nécessairement de la combinaison $2^8\Delta^3 - 3^3V^8$. On ne répètera pas la vérification faite par Halphen du fait que l'exposant de U dans cette combinaison est 4.

Explicitons maintenant différemment le morphisme de S_8^{00} dans $\mathbb{A}_1$ déduit de l'inclusion :

$$\mathbb{C}[\frac{\Delta^3}{V^8}] \hookrightarrow \mathbb{C}[x, a_0, \dots, a_7][U^{-1}V^{-1}].$$

Avec les notations du théorème 1.1, à un point m de S_8^{00} de projection m' dans S_7^{00}, est associé un quotient de rang 1 de la fibre de E_7 en m', donc par l'intermédiaire du revêtement

$$G \to S_7^{00}$$

$$g \mapsto g.m',$$

une droite de l'algèbre de Lie $Sl(V^\vee)$.

Proposition 3.2 - *Il existe un élément de cette droite dont le polynôme caractéristique est*

$$\lambda^3 - 28\Delta\lambda + 10V^4$$

(évalué en m supposé dans la carte de 1.2).

Démonstration - Notons A un élément non nul quelconque de la droite ci-dessus et montrons d'abord que m est sur le germe de courbe paramétrée

$$t \mapsto e^{At}m_0$$

où m_0 est la projection de m dans $\mathbb{P}$ (et où t est voisin de 0). Pour cela remarquons que l'orbite de m sous G est une hypersurface dont l'équation (dans la carte locale de 1.2) peut être interprétée (au voisinage de m) comme une équation différentielle d'ordre 7 en y vue comme fonction de x, dont les courbes intégrales sont G-invariantes. On écrit le système différentiel d'ordre 1 associé à cette équation d'ordre 7 :

$$\left\{ \begin{array}{r} \frac{da_0}{dx} = a_1 \\ \vdots \\ \frac{da_5}{dx} = 6a_6 \\ \frac{da_6}{dx} = f(x, a_0, \dots, a_6) \end{array} \right.$$

Ecrivons le champ de vecteurs correspondant, $(1, a_1, \dots, a_6, f(x, a_0, \dots, a_6))$ dans un petit ouvert de la carte locale de 1.2 de S_7^0. Il est (à homothétie près) G-invariant "en germe", donc multiple d'une fonction par un champ G-invariant correspondant à un élément de $SL(V)$ qui, par construction, est sur la droite définie dans l'énoncé. L'assertion en résulte aussitôt.

Soient e_0, e_1, e_2 les valeurs propres de A, pour $\lambda = \frac{e_0-e_1}{e_0-e_2}$, la courbe $y = x^\lambda$ est une solution de l'équation différentielle précédente. On calcule les valeurs de V et de Δ sur cette courbe :

$$V = \left(\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}\right)^3 \frac{(\lambda-2)(\lambda+1)(2\lambda-1)}{2\times 3^3\times 5}x^{3\lambda-9}$$

$$\Delta = \frac{1}{2^{12}\times 3^7\times 5^2\times 7}(\lambda(\lambda-1))^8[(\lambda-2)(\lambda+1)(2\lambda-1)]^2(1-\lambda+\lambda^2)x^{8\lambda-24}.$$

La proposition en résulte.

Pour "compactifier" ce morphisme, considérons le sous-anneau $\mathbb{Z}$-gradué de $\mathscr{H}_8$ formé des éléments de bidegré $(d, 3d)$ $(d \in \mathbb{Z})$, i.e. $\mathbb{C}[V, \Delta]$ avec $deg(V) = 3$, $deg(\Delta) = 8$. Son spectre homogène est $\mathbb{P}_1$. Les fonctions V, Δ sont des sections de $\mathscr{O}_{S_n^0}(12, 9)$ respectivement $\mathscr{O}_{S_n^0}(32, 24)$. L'ensemble de leurs zéros communs est un fermé G-invariant de S_n^0 de codimension 2.

Lemme 3.1 - *Dans la carte locale de 1.2, ce fermé a deux composantes irréductibles définies par les mineurs maximaux de matrices wronskiennes :* (a_2, a_3) *et*

$$W_{27}\begin{pmatrix} a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 0 & a_2^2 & 2a_2a_3 & 2a_2a_4 + a_3^2 \end{pmatrix}$$

Démonstration - Soit en effet $(x, a_0, \ldots, a_7)$ un point de la carte locale annulant V et Δ. S'il ne vérifie pas $a_3 = 0$, il existe une conique contenant l'image de ce point dans S_6. Si on écrit cette conique sous la forme $y = x^2$ (après changement de la carte locale), on obtient un point tel que $a_3 = a_4 = a_5 = 0$. Alors $\Delta = 0 \Leftrightarrow a_6 = 0$ ce qui signifie que la conique contient la projection du point dans S_7.

Soit S_8^{000} l'ouvert G-stable de S_8^0 complémentaire de ce fermé (il contient S_8^{00}. Les sections V et Δ définissent un morphisme de S_8^{000} dans $\mathbb{P}_1$ qui prolonge le morphisme précédent de S_8^{00} dans $\mathbb{A}_1$ et qui contracte les G-orbites. Le seul point de $\mathbb{P}_1$ dont la fibre contient plus d'une orbite est $(H = 0)$ avec 3 orbites :

- point courant d'une cubique cuspidale,
- point d'inflexion non sur une cubique cuspidale,
- point d'inflexion d'une cubique cuspidale.

On remarque que la 3-ième orbite est fermée et contenue dans l'adhérence des deux orbites. De plus, $\mathbb{P}_1$ est un bon quotient de S_8^{000} sous G d'après le lemme suivant :

Lemme 3.2 - *Soient G un groupe linéaire sur $\mathbb{C}$, $f : X \to Y$ un morphisme de variétés algébriques normales sur $\mathbb{C}$, σ une action de G sur X telle que f contracte les fibres de σ. Supposons que F induise une bijection de l'ensemble des orbites fermées de X sous G avec Y, et que toutes les composantes irréductibles des fibres de f aient même dimension. Alors Y est un bon quotient de X sous G.*

(c.f. [5], proposition 0.2, dont la démonstration s'adapte ici).

4 Etude birationnelle du quotient de S_9 sous G

La correspondance d'incidence entre S_9 et la "cubique universelle" de $\mathbb{P}$ (graphe de la correspondance d'incidence entre $\mathbb{P}$ et $\mathbb{P}(Sym_3 V)$) est birationnelle, plus précisément tout point de S_9^0 tel que $UV\Delta \neq 0$ est sur une unique branche lisse de cubique. Cela résulte du fait que le coefficient de a_9 dans le wronskien W_3 est $-U\Delta$.
On veut expliciter le quotient sous G de cette correspondance.

Tout d'abord, avec les notations du théorème 1.1, on a :

$$(\mathscr{H}_9[U^{-1}V^{-1}])_{00} = \mathbb{C}[i_8^3, i_9]$$

où $i_8^3 = \frac{\Delta^3}{V^8}$ et $i_9 = \frac{U^4T}{3V^4}$, avec $T = \frac{3Vd\Delta - 8\Delta dV}{U^3}$ (qui est un invariant différentiel d'ordre 8 et de bidegré $(8, 28)$).

Soit C une cubique lisse de $\mathbb{P}$ représentée paramétriquement sous la forme standard de Weierstrass :

$$u \mapsto (\mathfrak{p}u, \mathfrak{p}'u, 1)$$

($u \in \mathbb{C}/\Omega$, Ω réseau de $\mathbb{C}$).

Lemme 4.1 - *L'évaluation sur C de $\frac{V}{U^3}$, respectivement $\frac{\Delta}{U^8}$, est la section $\frac{\sigma 2w}{\sigma^4 w}du^{\otimes 3}$ de $\omega_C^{\otimes 3}$, respectivement $\frac{\sigma 3w}{\sigma^9 w}du^{\otimes 8}$ de $\omega_C^{\otimes 8}$ (où l'on note w la variable "jacobienne" $3u$).*

Remarque - L'addition d'un tiers de période à u est un automorphisme de C qui se prolonge à $\mathbb{P}$, donc les invariants différentiels sont "naturellement" des fonctions de w.
On remarque que les points de C tels que $V = 0$ (respectivement $\Delta = 0$) sont les points d'ordre 6 (respectivement d'ordre 9) pour la loi du groupe de C (après exclusion des points d'inflexion qui sont les zéros de U). Le reste suit.

On en déduit que le restriction de i_8^3 à C est $X = \frac{(\mathfrak{p}w - \mathfrak{p}2w)^3}{\mathfrak{p}'^2 2w}$ d'après les formules classiques.
On a d'autre part :

$$\frac{U^4T}{3V^4} = \frac{U}{3V^4}(3Vd\Delta - 8\Delta dV)$$

$$\frac{U^4T}{3V^4} = \frac{U\Delta}{3V^3}(\frac{3d\Delta}{\Delta} - \frac{8dV}{V})$$

$$\frac{U^4T}{3V^4} = \frac{\sigma 3w \sigma^3 w}{\sigma^3 2w}(9\zeta 3w - 16\zeta 2w + 5\zeta w).$$

On calcule cette fonction en l'évaluant en $w = \frac{\omega}{4}$ où ω est une période non divisible par 2. On trouve -1, d'où :

$$\frac{U^4T}{3V^4} = 8Y - 1$$

avec $Y = \frac{\mathfrak{p}'2w}{\mathfrak{p}'w}$ sur C.

On renvoie à [3] pour l'expression des "fonctions elliptiques homogènes de degré 0" fondamentales, $\frac{g_2}{\mathsf{p}^2 u}$ et $\frac{g_3}{\mathsf{p}^3 u}$, en fonction de X, Y. En particulier on a :

$$j = \frac{(g_2/\mathsf{p}^2u)^3}{(g_2/\mathsf{p}^2u)^3 - 27(g_3/\mathsf{p}^3u)^2}$$

$$j = (\frac{-1}{27})\frac{(16X^2+8X(Y+1)(Y-2)+(Y+1)^4)^3}{X^3[(8Y-1)^3+(32X+8Y^2-20Y-1)^2]}.$$

5 Etude birégulière du quotient de S_9^0 sous G

On ignore si $\mathscr{H}_n$ est une $\mathbb{C}$-algèbre de type fini pour $n \geq 10$. Grâce à des relations de divisibilité remarquées par Halphen pour $\mathscr{H}_9$, on va montrer que $\mathscr{H}_9$ est de type fini. Ces relations de divisibilité sont :

- U divise $V^4T - \frac{H}{6}$, le quotient est noté T_1 et est de bidegré $(19, 62)$.
- V^2 divise $U^4T^2 + 9H$ le quotient G est de bidegré $(14, 46)$. (c.f. [4], pages 234 et 236).

Halphen montre également (pp. 238-239) que l'inclusion $\mathbb{C}[U, V, \Delta, H, T, T_1, G] \subset \mathscr{H}_9$ devient un isomorphisme après localisation par U^{-1} ou V^{-1}.

Il en résulte que pour k assez grand, $(U,V)^k\mathscr{H}_9 \subset \mathbb{C}[U, V, \Delta, H, T, T_1, G]$ comme (U, V) est une suite régulière (au sens gradué) dans la clôture intégrale du deuxième anneau ($\mathbb{C}[U, V, \Delta, H, T, T_1, G]$) celle-ci est égale à $\mathscr{H}_9$ qui est donc de type fini.

Introduisons maintenant un sous-anneau $\mathbb{Z}$-gradué de $\mathscr{H}_9$. Parmi les invariants différentiels de bidegré $(5k, 16k)$ $(k \in \mathbb{Z})$ figurent :

$$\begin{cases} a = H & (k=4) \\ b = GU & (k=3) \\ c = TU^2 & (k=2) \\ d = TUV^2 & (k=3) \\ e = TV^2 & (k=4) \\ f = T_1V^2 & (k=5) \end{cases}$$

Ces générateurs annulent les 2-mineurs de la matrice 2×4 :

$$M = \begin{pmatrix} b & c & d & e - a/6 \\ c^2 + 9a & d & e & f \end{pmatrix}$$

(la seconde ligne est le produit de la première par $\frac{V^2}{U}$.

Lemme 5.1 - *Dans l'anneau des polynômes (non gradués) $\mathbb{C}[a, b, c, d, e, f]$, les 2-mineurs de la matrice précédente définissent un idéal de hauteur 3. Le quotient est intégralement clos.*

Démonstration - L'idéal des 2-mineurs de

$$\begin{pmatrix} c & d & e - a/6 \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

est de hauteur 2 et le quotient est un anneau de Cohen-Macaulay régulier hors de $a = c = d = e = f = 0$. Le rapport des deux lignes est une fonction rationnelle indépendante de b, sur cette variété. La fonction rationnelle $\frac{b}{c^2+9a}$ en est donc différente d'où la première assertion du lemme.

Le lieu singulier est contenu dans la réunion du lieu où cette fonction rationnelle n'est pas définie (qui est de codimension ≥ 2) et du point $a = c = d = e = f = 0$. La deuxième assertion s'en déduit par un critère célèbre :

(intégralement clos) $\Leftrightarrow$ (R_1) et (S_2)

(R_1) : codimension du lieu singulier ≥ 2

(S_2) : Cohen-Macaulay en profondeur ≤ 2.

Soit $R \subset \mathscr{H}_9$ l'anneau $\mathbb{Z}$-gradué précédent (en fait c'est le sous-anneau de $\mathscr{H}_9$ formé des éléments de bidegré $(5k, 16k)$, $k \in \mathbb{Z}$, mais cela ne nous servira pas). On peut poser $S = ProjR$. Soit S_9^{000} l'ouvert de S_9 où les sections a, b, c, d, e, f de $\mathscr{O}_{S_9^0}(21k, 15k)$, $k = 4, 3, 2, 3, 4, 5$ ne s'annulent pas simultanément.

Lemme 5.2 - *Le fermé complémentaire de S_9^{000} a trois composantes irréductibles :*
1) $a_2 = a_3 = 0$
2) $rang(W_{3,9}) \leq 2$ (points épais sur une conique)
3) $V \neq 0$, $H = 0 = T$ (points épais sur une cubique cuspidale).

Démonstration - On montre d'abord que H s'annule sur $a_2 = a_3 = 0$ (développement limité de U, V, et Δ sur une courbe $y = x^4 + O(x^5)$ au voisinage de $x = 0$) donc toutes les sections a, b, c, d, e, f s'y annulent. Hors de ce lieu, on a nécessairement $T = 0$ (car $TU^2 = 0 = TV^4$) donc le point est épais sur une courbe $y = x^\lambda$, comme $H = 0$ on a nécessairement $\lambda = 2$ ou 3, d'où les deux dernières composantes de l'énoncé.

On dispose maintenant d'un morphisme

$$\varphi : S_9^{000} \to S$$

qui contracte les orbites.

Pour vérifier que c'est un bon quotient, il faut montrer que φ est équidimensionnel et établit une bijection entre les points de S et les orbites fermées de S_9^{000}, et ceci hors de S_9^{00} où c'est clair. Le fermé $S_9^{000} - S_9^{00}$ est réunion de deux hypersurfaces disjointes, $U = 0$ et $V = 0$.

Une "forme normale" de points de la première hypersurface est $y = x^3 + ax^7 + bx^8$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$. En effet l'image d'un tel point dans S_7 coïncide avec l'image d'un point d'inflexion de la cubique cuspidale dont on peut choisir une équation de la forme $y = x^3$. On peut y remplacer (a, b) par $(a\alpha^4, b\alpha^5)$.

De même on peut écrire une forme normale d'un point vérifiant $V = 0$. On peut en effet supposer que sa projection sur S_6 est sur la conique $y = x^2$. Le point est alors sur une courbe $y = x^2 + ax^6 + bx^7 + cx^8$.

Bibliographie

[1] : M. Belghiti, Variété de points infiniment voisins d'ordre n des points du plan, C.R.A.S. tome 314, Série I, pp. 541-545, (1992).
[2] : S. Colley & G. Kennedy, Triple and quadruple contact of plane curves, in Enumerative algebraic geometry, Kleiman & Thorup eds, pp. 31-60, Contemporary mathematics 123, A.M.S. (1991).
[3] : L. Gruson, Un aperçu des travaux mathématiques de G.H. Halphen, in Complex projective geometry, Ellingsrud,... eds, pp. 189-198, Lecture notes series 179, Cambridge university press (1992).
[4] : G.H. Halphen, Sur les invariants différentiels, 1878, in Oeuvres complètes de G.H. Halphen, tome II, Gauthier-Villars
[5] : D. Mumford & J. Fogarty, Geometric invariant theory, (second edition), Ergebnisse... 34, Springer (1982).