

50376  
1994  
117

CCOgen 20101632

50376  
1994  
117

N° d'ordre: 1211

## THESE DE DOCTORAT

Présentée à

**L'UNIVERSITE DES SCIENCES & TECHNOLOGIES DE  
LILLE**

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR EN MECANIQUE

Par  
EN-NEFKHAOUI HAKIM



**SIMULATION NUMERIQUE D'UN ECOULEMENT VISQUEUX  
INCOMPRESSIBLE DANS UNE GEOMETRIE COMPLEXE PAR LA  
METHODE DES MATRICES D'INTERPOLATION.**

Soutenue le 7 Mars 1994 devant la commission d'Examen:

Président:

Mr P. MICHEAU, Professeur et Directeur du L.M.L à l'U.S.T. de LILLE.

Rapporteurs:

MM.

M. LESIEUR, Professeur à LEGI/IMG de GRENOBLE;

O. DAUBE, Chargé de Recherche C.N.R.S Doc. D'Etat IMSI- ORSAY.

Examineurs:

MM.

K. D. NGUYEN, Professeur à l'Université de CAEN;

P. A. BOIS, Professeur à l'U.S.T. de LILLE.

## REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier Monsieur K.D. NGUYEN, Professeur à l'université de Caen, qui a dirigé et suivi ce travail dans son évolution avec beaucoup d'attention. Qu'il trouve ici l'expression de toute ma gratitude.

Je remercie Messieurs M. LESIEUR, Professeur à LEGI/IMG de Grenoble, et O. DAUBE, Chargé de recherche C.N.R.S Docteur d'Etat à l' IMSI-ORSAY, qui m'ont fait l'honneur de s'intéresser à mon travail et ont accepté de le juger.

Je remercie Monsieur P. MICHEAU, Professeur à l'université de LILLE qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse, et Monsieur P.A. BOIS, Professeur à l'université de LILLE, pour avoir accepté de faire partie du jury. Qu'il me soit permis de leur exprimer ma profonde gratitude.

Enfin, je voudrais dédier ce travail à ma famille pour sa confiance et son encouragement durant la réalisation de ce travail.

## RESUME

La méthode des matrices d'interpolation (MMI) a été proposée pour la première fois par Koshizuka *et al* (1988) comme une méthode de différences finis (MDF). La MMI se révèle intéressante par sa simplicité dans la formulation et par son codage des problèmes de la dynamique des fluides dans un système de coordonnées généralisées.

A l'origine Koshizuka *et al*, utilisaient une fonction d'approximation du second ordre pour approximer n'importe quelle variable. La MMI classique (Koshizuka *et al*) a été testé sur deux problèmes de repère. Les résultats obtenus, montrent que, dans le cas d'un espacement non-régulier des points, ou dans le cas d'un système de coordonnées non-orthogonal, la fonction d'approximation proposée par Koshizuka *et al*, induit d'importantes erreurs de troncature. L'objectif de notre travail consiste: i) à étudier l'importance des erreurs de troncature, dûes à l'utilisation de la MMI classique. ii) de proposer une autre fonction d'approximation afin d'améliorer cette méthode. iii) de proposer un algorithme de résolution des équations de Navier-Stokes pour un écoulement bi-dimensionnel incompressible laminaire ou turbulent. L'algorithme utilisé ici est basé sur la méthode S.M.A.C (Simplified-Marker-And-Cell), et modifié pour être stable dans une configuration non-décalée. iv) de présenter des cas-tests académiques (écoulement en aval d'une marche descendante, écoulement dans une cavité inclinée, écoulement instationnaire autour d'un cylindre circulaire ... etc) pour démontrer la fiabilité et la stabilité de la méthode proposée.

## ABSTRACT

The Interpolating Matrix Method (IMM) is first proposed by Koshizuka and *al* (1988) as a finite difference method (FDM). The IMM is revealed interesting by its simplicity to formulate and to code flow problems in a generalized curvilinear coordinate system.

In the original IMM, Koshizuka and *al* used a 2nd-order parabolic function to approximate any variable. The classical IMM (Koshizuka and *al*) is tested on two Benchmark problems. The results from both of these tests show that, in the case of the unqual spacing of the grid lines or for a non-orthogonal coordinate system, the approximating function proposed by Koshizuka and *al* produces an important truncation error. The aim of this work is: i) to study truncation numerical errors that result from using the classical IMM. ii) to propose another approximating function for improving the classical IMM. iii) to propose solution algorithms for two dimensionnel incompressible, laminar or turbulent Navier-Stokes equations. The algorithm used here is based on the SMAC method and modified to be stable in the non-staggered configuration. iv) to present (flow over a backward facing step, flow in a skewed driven cavity, unsteady flow past a circular cylinder ... etc) to demonstrate the utility and stability of the proposed method.

# Table des matières

Notations .....	1
Introduction .....	3
<b>I. Aperçu sur quelques méthodes numériques pour la résolution des équations aux dérivées partielles.</b> .....	<b>6</b>
I.1. Méthodes de différences finies. ....	6
I.1.1. Cas d'une frontière régulière. ....	6
I.1.2. Cas d'une frontière curviligne. ....	10
I.2. Formulation variationnelle. ....	15
I.2.1. Problème de Dirichlet. ....	15
I.3. Méthodes des éléments finis. ....	18
I.3.1. Éléments finis curvilignes isoparamétriques du second ordre. ....	19
I.3.2. Mise en oeuvre de la méthode. ....	21
I.4. Conclusion. ....	23
<b>II. Description de la méthode des matrices d'interpolations.</b> .....	<b>25</b>
II.1. Description de la MMI. ....	25
II.1.1. Forme primitive de la MMI. ....	25
II.1.2. Principales caractéristiques. ....	28
II.2. Introduction d'une transformation des coordonnées. ....	30
II.2.1. Cas général. ....	30
II.2.2. Cas bidimensionnel. ....	32
II.2.3. Etude de l'erreur de troncature. ....	42

II.3. Conclusion. ....	45
III. Méthodes numériques de résolution. ....	46
III.1. Méthodes numériques de résolution. ....	46
III.1.1. Introduction. ....	46
III.1.2. Modèle de base: Equations de Navier-Stokes. ....	47
III.1.3. Méthode SMAC ordinaire. ....	48
III.1.4. Méthode SMAC modifiée. ....	50
III.2. Traitement des termes de convection. ....	53
III.3. Discrétisation spatiale. ....	54
III.4. Conditions aux limites. ....	55
III.5. Traitement numérique des conditions aux limites. ....	57
III.6. Conclusion. ....	59
IV. Tests de validation en laminaire. ....	61
IV.1. Ecoulement visqueux dans un canal. ....	61
IV.2. Marche descendante. ....	72
IV.3. Ecoulement dans une cavité inclinée. ....	87
IV.4. Ecoulement instationnaire autour d'un cylindre. ....	93
V. Modélisation des écoulements turbulents. ....	114
V.1. Introduction. ....	114
V.2. Modèles statistiques en un point. ....	116
V.2.1. Modèles de fermeture au premier ordre. ....	116
V.2.2. Modèles de fermeture au second ordre. ....	119
V.3. Simulation Directe. ....	123
V.3.1. Fermeture en deux points et modélisation sous-maille. ....	125
V.4. Cas-tests turbulents. ....	127
V.4.1. Ecoulement de Poiseuille. ....	127
V.4.2. Ecoulement de Couette pur. ....	127
V.4.3. Marche descendante. ....	133
VI. Conclusion. ....	140

<b>VII. Annexes.</b> .....	<b>142</b>
ANNEXE A: Méthodes itératives. ....	143
ANNEXE B: Résolution de l'équation de Poisson. ....	146
ANNEXE C: Transformation du Laplacien. ....	148
ANNEXE D: Modèles à deux équations de transport. ....	151
<b>Références.</b> .....	<b>153</b>

## NOTATIONS

$x_i, (i = 1, 2, 3)$	<i>coordonnées du système physique.</i>
$\xi_i, (i = 1, 2, 3)$	<i>coordonnées du système de transformation.</i>
$t$	<i>temps.</i>
$\Delta t$	<i>pas du temps.</i>
$u_i$	<i>composante de la vitesse instantanée dans la direction <math>i</math>.</i>
$\bar{u}_i$	<i>composante de la vitesse moyenne dans la direction <math>i</math>.</i>
$u'_i$	<i>composante de la vitesse fluctuante dans la direction <math>i</math>.</i>
$p$	<i>pression instantanée.</i>
$\bar{p}$	<i>pression moyenne.</i>
$p'$	<i>fluctuation de la pression.</i>
$\overline{u_i u_j}$	<i>tenseur de Reynolds.</i>
$k = \frac{1}{2} \overline{u_i u_i}$	<i>énergie cinétique de la turbulence.</i>
$\varepsilon = \nu \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)}$	<i>taux de dissipation de <math>k</math>.</i>
$l$	<i>échelle de longueur des grosses structures.</i>
$l_m$	<i>longueur de mélange.</i>
$C_\mu, C_{\varepsilon 1}, C_{\varepsilon 2}, \sigma_\varepsilon, \sigma_k$	<i>constantes dans les modèles <math>k - \varepsilon</math>.</i>
$E, D, f_1, f_2, f_\mu$	<i>termes et fonctions d'amortissements dans les modèles <math>k - \varepsilon</math>.</i>
$u_\tau$	<i>vitesse de frottement.</i>
$m$	<i>masse.</i>
$\rho$	<i>masse volumique.</i>

$\mu$	<i>viscosité dynamique.</i>
$\mu_t$	<i>viscosité turbulente dynamique.</i>
$\nu$	<i>viscosité cinématique.</i>
$\nu_t$	<i>viscosité turbulente cinématique.</i>
$y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu}$	<i>distance adimensionnée.</i>
$Re_t = \frac{k^2}{\nu \varepsilon}$	<i>nombre de Reynolds de la turbulence.</i>
$\delta_{ij}$	<i>symbole de Kronecker.</i>
$\sigma$	<i>tenseur des contraintes.</i>
$\tau$	<i>tenseur des contraintes visqueuses.</i>
$\Omega$	<i>sous-ensemble de <math>R^2</math>.</i>
$\Gamma$	<i>frontière de <math>\Omega</math>.</i>
$\bar{\Omega}$	<i>adhérence (fermeture) de <math>\Omega</math>.</i>
$e$	<i>fonction exponentielle.</i>
$MI, MI_\xi$	<i>matrices d'interpolation dans les <math>x_i</math> et <math>\xi_i</math> respectivement.</i>
$T_{(\xi,x)}$	<i>matrice de transformation des coordonnées.</i>
$v^t$	<i>transposée de <math>v</math>.</i>
$A^{-1}$	<i>inverse de la matrice <math>A</math>.</i>
$\psi_\alpha$	<i>dérivée de <math>\psi</math> par rapport à la variable <math>\alpha</math>.</i>

## INTRODUCTION

En Mécanique des fluides, tout écoulement est régi par un système d'équations généralement appelées équations de Navier-Stokes. Ces équations font intervenir un certain nombre de variables telles que: la vitesse, la pression, la température ... etc.

Une fois données des conditions aux limites suffisantes pour définir un problème de mécanique des fluides, ces équations permettent théoriquement de le traiter et d'en rechercher la ou les solutions. Malheureusement, on ne sait pas résoudre ces équations dans le cas le plus général. Des difficultés mathématiques considérables apparaissent généralement et, sauf quand on a affaire à des écoulements géométriquement simples, on ne sait pas trouver de solution analytique. C'est pourquoi, on fait appel aux méthodes numériques pour déterminer une approximation de la solution.

Dans cette perspective et dans le cadre de la modélisation des écoulements de fluides à géométrie complexe, nous nous proposons de présenter la méthode des matrices d'interpolation. Cette méthode de type différences finies a été proposée pour la première fois en 1988 par Koshizuka *et al* /1/.

Le travail présenté ici consiste:

- 1- à présenter les éléments de base de la méthode des matrices d'interpolation.
- 2- à apporter des améliorations sur la méthode; en introduisant des modifications sur la fonction d'approximation proposée par Koshizuka *et al*.
- 3- à proposer une méthode numérique de résolution des équations de Navier-Stokes pour des écoulements bidimensionnels, visqueux, incompressibles laminaires ou turbulents.
- 4- La mise en oeuvre numérique de la méthode proposée.

5- de vérifier la précision, la stabilité et la fiabilité de la méthode à travers des cas-tests.

6- de préciser les avantages et les inconvénients de la méthode numérique proposée.

× En pratique, les problèmes rencontrés, qu'il s'agisse de fluides industriels ou géophysiques, sont formulés sur des domaines à géométrie complexe et sont en général difficiles à approcher par les méthodes de différences finies classiques (Taylor & Peyret (1983) /2/). Pour traiter ce genre de problèmes, plusieurs approches ont été développées, nous citerons à titre d'exemple:

i) la méthode A.L.E (Arbitrary-Lagrangian-Eulerian) développée dans les laboratoires de Los Alamos (Amsden *et al* (1974) /3/), combinée avec la méthode des éléments finis. Cette méthode est de type cellule dont la discrétisation temporelle est basée sur le concept des méthodes à pas fractionnaires et la discrétisation spatiale se fait par une méthode des volumes finis, considérée comme un cas particulier des méthodes des éléments finis.

ii) la méthode des maillages adaptatifs (Boundary-Fitted Grid Generation Method), développée par Thompson *et al* (1982) /4/. Cette méthode est basée sur l'introduction d'une transformation entre l'espace physique en un espace de coordonnées curvilignes. Les équations de base sont directement transformées en termes de coordonnées curvilignes comme variables indépendantes et la discrétisation se fait d'une manière classique par une méthode de différences finies. ×

Dans le premier chapitre de ce travail, nous rappelons premièrement les éléments de base des méthodes de différences finies classiques dans le cas d'un domaine à frontières régulières. Pour les domaines à frontières curvilignes, nous présentons une description des techniques de génération des systèmes. Dans la deuxième partie et après un rappel des méthodes d'approximations variationnelles (Fletcher (1988) /5/). Nous décrivons brièvement, la méthode des éléments finis curvilignes isoparamétriques du second ordre.

Notre objectif est d'essayer de dégager les principales caractéristiques de chacune de ces deux méthodes.

Au deuxième chapitre, nous décrivons les aspects mathématiques de base de la méthode des matrices d'interpolation. Ce chapitre est divisé en deux parties: la première sera consacrée à l'analyse mathématique de la méthode, sous sa forme primitive en tant que méthode d'approximation. Dans la seconde partie de ce chapitre, et après une étude de la méthode proposée par Koshizuka *et al*, nous proposons d'introduire des améliorations sur la fonction de transformation des coordonnées proposée par ces derniers.

Au troisième chapitre, Nous proposons une méthode de résolution des équations pour un écoulement bi-dimensionnel incompressible et visqueux. L'algorithme de résolution est basé sur la méthode S.M.A.C (Simplified-Marker-And-Cell) (1970) /6/ et modifiée pour être stable dans une configuration non-décalée (non-staggered grid).

Dans la dernière partie de ce travail, nous présentons des exemples d'application qui ont été effectués sur des cas-tests numériques. Ces cas-tests sont vérifiés par des écoulements laminaires et turbulents.

Pour les écoulements turbulents et devant la multiplicité des modèles, nous avons adopté deux modèles de turbulence de type  $(k, \varepsilon)$ : modèle de Chien (1982) /7/ et un modèle proposé par Kourta & Ha Minh (1991) /8/. La raison de ce choix est justifié par la facilité de mise en oeuvre numérique des modèles à deux équations de transport.

Les résultats obtenus sont satisfaisants et nous permettent d'implanter la méthode proposée dans un code de calcul.

## CHAPITRE I

### APERCU SUR QUELQUES METHODES NUMERIQUES POUR LA RESOLUTION DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

De nombreux problèmes de la Physique sont régis par un système d'équations aux dérivées partielles (EDP) (Ecoulement d'un fluide, propagation des ondes, transfert de la chaleur ... etc). Ces équations font intervenir un certain nombre de variables (vitesse, pression, température ... etc).

Naturellement, la résolution analytique (ou exacte) de tels problèmes est généralement impossible. C'est pourquoi, d'une manière générale, le problème de départ est approché par un problème discret formulé sur un espace de dimension finie, ce qui conduit à la résolution d'un système linéaire (Fig 1.1).

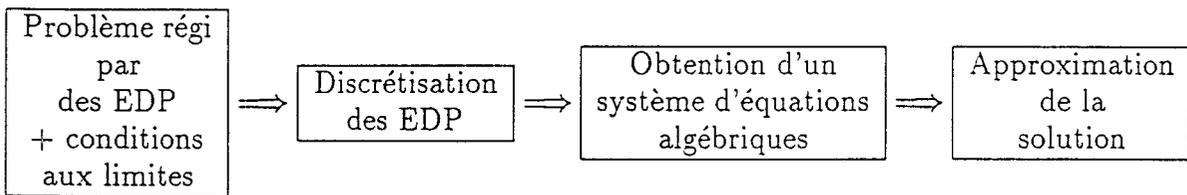


Fig 1.1 Procédure de la résolution numérique.

Diverses méthodes d'approximations ont été successivement utilisées pour résoudre de tels problèmes. Dans ce premier chapitre, nous souhaitons rappeler les éléments de base de quelques techniques numériques utilisées pour la résolution des EDP.

### I.1 METHODES DE DIFFERENCES FINIES

#### I.1.1 CAS D'UNE FRONTIERE REGULIERE

La méthode de différences finies (MDF) est l'une des méthodes adaptées à la résolution des EDP. Elle s'applique aux problèmes stationnaires ou d'évolution.

La mise en oeuvre de cette méthode utilise la formulation différentielle du problème à résoudre et elle consiste à remplacer chacun des opérateurs différentiels par un quotient aux différences appropriés.

Pour la simplicité de l'exposé, nous allons étudier les éléments de base de la MDF à travers le problème de Dirichlet suivant. Trouver une fonction  $\varphi(x, y)$  telle que:

$$\begin{cases} \Delta\varphi + f = 0 & \text{sur } \Omega \\ \varphi|_{\Gamma} = 0 & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

où  $\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$

$\Omega$  est un sous-ensemble de  $\mathbf{R}^2$  et  $\Gamma = \partial\Omega$  sa frontière.

### I.1.1.1 DISCRETISATION PAR UNE MDF

Pour résoudre numériquement le problème (1), on commence par établir un maillage (ou réseau) constitué d'un nombre fini de points  $M_{i,j}$  de  $\Omega$  appelés "noeuds du maillage". On désigne respectivement par  $N$  et  $M$  deux entiers  $\geq 0$  et par  $h = \frac{1}{N+1}$  et  $k = \frac{1}{M+1}$  deux paramètres de discrétisation destinés à tendre vers zéro (Fig 1.2).

On note par  $\Omega_h^k$  l'ensemble des noeuds du maillage et par  $\Gamma_h^k$  celui des points qui sont à l'intersection de  $\Gamma$  et d'une ligne horizontale ou/et verticale du maillage. Sauf cas particulier, il n'y'a aucune raison pour que les points de  $\Gamma_h^k$  soient des points de  $\Omega_h^k$ .

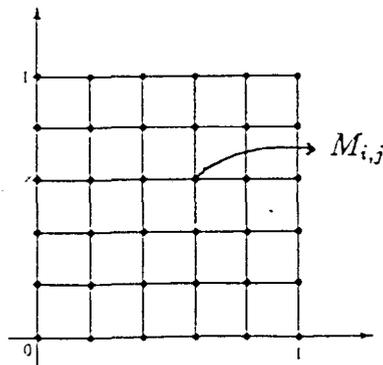


Fig 1.2 Maillage en MDF ( $\bullet$  points de  $\Omega_h^k$ .)

Le problème discret associé à (1) et au maillage choisi, consiste à trouver une fonction  $\varphi_h^k$  définie sur  $\Omega_h^k \cup \Gamma_h^k$  telle que:

$$\begin{cases} \Delta_h^k \varphi_h^k + f_h^k = 0 & \text{sur } \Omega_h^k \\ \varphi_h^k |_{\Gamma_h^k} = 0 & \text{sur } \Gamma_h^k \end{cases} \quad (2)$$

où  $\Delta_h^k$  est une approximation de l'opérateur différentiel  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ .

### I.1.1.2 APPROXIMATION DES DERIVEES

Soit  $\varphi(x, y)$  une fonction à deux variables indépendantes que nous supposons suffisamment différentiable. Si nous écrivons son développement de Taylor en un point  $M(x + h, y + k)$ , nous avons:

$$\begin{aligned} \varphi(x + h, y + k) &= \varphi(x, y) + h \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) + k \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, y) + hk \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x, y) \\ &+ \frac{k^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x, y) + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{(n-1)} \varphi(x, y) + E_n \end{aligned} \quad (3)$$

avec:

$$\begin{cases} E_n = \frac{1}{n!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{(n)} \varphi(x + \xi h, y + \eta k) \\ 0 < \xi < 1, 0 < \eta < 1 \end{cases} \quad (4)$$

Les deux principes de base de la MDF, sont alors:

- i) effectuer une troncature dans le développement de Taylor à partir d'un certain rang dans lequel  $E_n$  est "petit" (ce rang représente l'ordre de la méthode).
- ii) écrire que (1) est satisfait en tous les points  $M_{i,j}$  du maillage, le terme  $\Delta \varphi$  étant approché conformément à (i) par des quotients aux différences.

Si on désigne par  $(i, j)$  un point  $M_{i,j}$  du maillage (Fig 1.3). On obtient alors les approximations suivantes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} |_{i,j} &= (\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i-1,j})/2h \quad \text{erreur en } O(h^2) \quad (\text{schéma centré}) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} |_{i,j} &= (\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j})/h \quad \text{erreur en } O(h) \quad (\text{schéma progressive}) \quad (5) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} |_{i,j} &= (\varphi_{i,j} - \varphi_{i-1,j})/h \quad \text{erreur en } O(h) \quad (\text{schéma régressive}) \end{aligned}$$

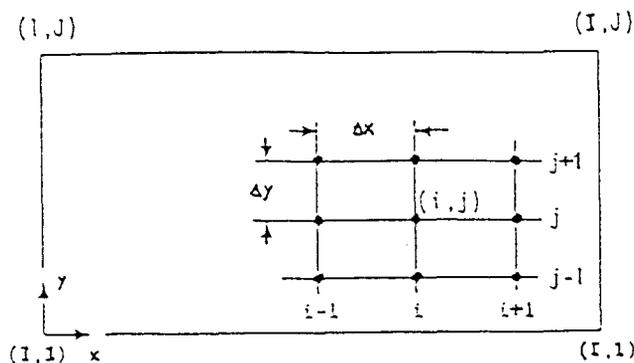


Fig 1.3 Le point  $(i, j)$  et ses 4 points voisins.

De même nous obtenons:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} |_{i,j} = (\varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j})/h^2 \quad (\text{schéma de Cranck - Nicholson}) \quad (6)$$

On définira de la même façon des approximations de  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} |_{i,j}$  et  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} |_{i,j}$ , nous obtenons alors:

$$\Delta_h^k \varphi |_{i,j} = (\varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j})/h^2 + (\varphi_{i,j+1} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j-1})/k^2 \quad (7)$$

Avec la prise en compte de la condition au limite  $\varphi_h^k |_{\Gamma_h^k} = 0$ , le problème discret (2) s'écrit sous la forme matricielle suivante:

$$M_h^k \varphi_h^k = f_h^k \quad (8)$$

où  $\varphi_h^k$  vecteur de composantes  $(\varphi(M_{i,j}))_{i,j}$ .

Cette matrice est tridiagonale par blocs et elle est régulière. Pour la résolution du système (8), on utilise généralement des méthodes itératives (Jacobi, Gauss-Seidel, Relaxation ... etc). Naturellement, il s'agit là des principes de base des méthodes de différences finies qui peuvent être utilisées dans des cas beaucoup plus généraux, qu'il s'agisse de la dimension de l'espace  $\Omega$  ou de l'ordre de dérivation. Pour les détails on peut consulter l'ouvrage de Forsythe & Wasow (1960) /9/.

### I.1.1.3 ETUDE DE LA CONVERGENCE

L'étude de la convergence de la solution approchée vers la solution exacte est un problème délicat; il faut tout d'abord établir les propriétés de consistance et de stabilité. Ces études n'ont rien de systématique; elles sont étroitement liées aux données du problème et la méthode de différences finies choisie. A ce propos on peut consulter les travaux de: Collatz (1960) /10/, Forsythe & Wasow /9/ et Mikhlin & Smolitsky (1967) /11/.

### I.1.2 CAS D'UNE FRONTIERE CURVILIGNE

En général, les problèmes intéressants de la mécanique des fluides sont formulés sur des domaines à géométrie complexe (notamment les frontières).

Avec l'utilisation d'une grille de calcul cartésienne, les frontières du domaine ne peuvent coïncider avec aucune ligne de coordonnées. Les frontières courbes sont seulement approximées en forme d'escaliers (Fig 1.4). Cela d'une part, déforme les frontières du domaine et donc induit une influence sur le phénomène physique à étudier (représentation des conditions aux limites) et d'autre part, risque de fournir des résultats erronés au voisinage des frontières, à moins que la grille de calcul soit localement raffinée, mais dans ce cas le calcul devient très coûteux.

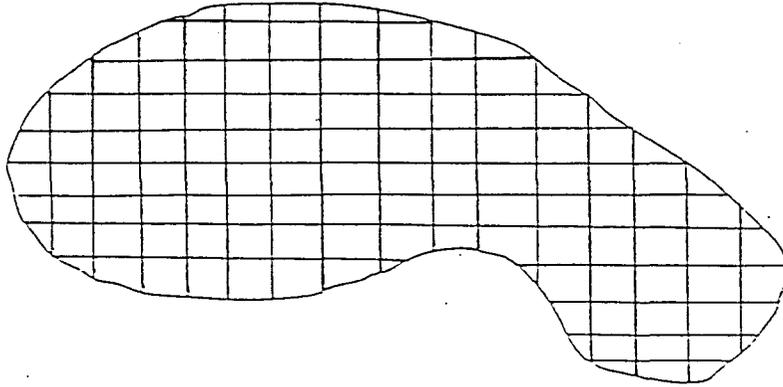


Fig 1.4 Cas d'une frontière curviligne

Pour une meilleure résolution de ce genre de problèmes, il faut en général une discrétisation qui possède une adaptation avec la géométrie et spécialement avec les frontières (pour une représentation correcte des conditions aux limites). Pour construire une telle adaptation, plusieurs approches ont été proposés, nous citerons en particulier ceux de Gough *et al* (1975) /12/, Yanenko *et al* (1979) /13/, Schönauer *et al* (1980) /14/ et Dwyer *et al* (1980) /15/.

A partir de ces nécessités, les techniques de génération des systèmes interviennent pour une organisation de la discrétisation sur une région arbitraire. Le système de coordonnées générées couvre la région de façon à ce que:

- i) Tout bord de la région coïncide avec une ligne curviligne (surface en dimension trois) du système, ceci constitue le point fondamental d'un tel système.
- ii) La distribution des lignes peut se concentrer dans les régions de fortes variations de la solution et s'adapter pour les résoudre.

Leurs concept de base consiste alors à introduire une transformation de l'espace physique  $(x, y, z)$  en un système de coordonnées généralisées  $(\xi, \eta, \zeta)$  (Fig 1.5) de

telle sorte que les frontières courbes coïncident parfaitement avec les lignes de coordonnées. On peut classer les procédures de transformations de façon générale en deux types (Thompson *et al*) /4/:

- 1- Les systèmes obtenus comme solutions numériques d'EDP (Moretti (1976) /16/, Chu (1971) /17/, Thompson *et al* /4/ et Eiseman (1980) /18/).
- 2- Les systèmes obtenus par des interpolations algébriques (Daly (1975) /19/, Viviani & Ghazzi (1976) /20/ et Gibeling *et al* (1977) /21/).

Dans le premier type les EDP peuvent être elliptiques, paraboliques ou hyperboliques et on peut inclure dans ce type les représentations conformes et quasi-conformes qui sont des cas spéciaux de génération des coordonnées curvilignes orthogonales en résolvant des problèmes aux limites elliptiques. Elles sont restreintes au cas plan et moins flexibles dans l'espacement des lignes de coordonnées.

A signaler à titre de comparaison, que dans la génération des systèmes de coordonnées curvilignes par des EDP de type elliptique, la spécification et la donnée de tous les segments qui forment le bord de la région s'impose. Par contre si on génère le système par des EDP de type parabolique ou hyperbolique, la spécification du bord tout entier n'est pas nécessaire (Thompson *et al*) /4/.

Dans le deuxième type, la transformation peut s'obtenir directement d'une façon analytique par des procédures algébriques; en faisant des interpolations à partir des valeurs au bord ou en plus aux valeurs de certaines dérivées au bord et même ailleurs pour déterminer les coefficients constants qui interviennent dans la fonction d'interpolation. Cette fonction permet d'exprimer les valeurs des coordonnées cartésiennes en fonction des coordonnées curvilignes. Comme exemple les plus courants de procédures algébriques de génération des systèmes de coordonnées, il y'a les interpolations mono-directionnelles (genre Lagrange, Hermite, les fonctions splines), et les interpolations multi-directionnelles.

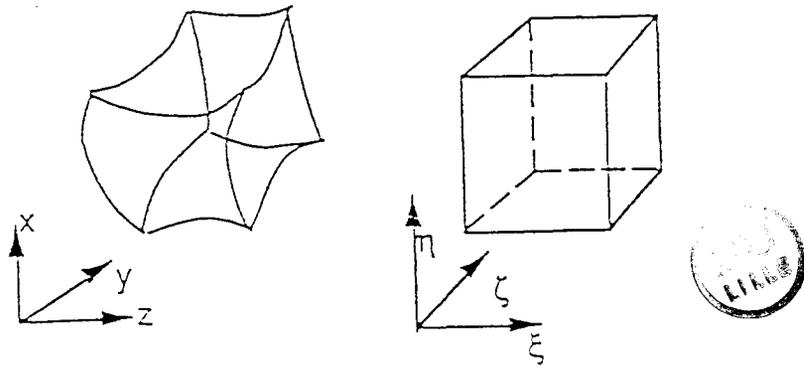


Fig 1.4 Transformation de l'espace physique  $(x, y, z)$  en un espace de coordonnées généralisées  $(\xi, \eta, \zeta)$ .

La transformation des équations de base peut se classer en deux catégories: transformations directe et indirecte.

### 1- TRANSFORMATION DIRECTE

Cet approche consiste à transformer directement les équations de base en termes des coordonnées généralisées  $(\xi, \eta, \zeta)$ , comme variables indépendantes et la discrétisation de ces équations se fait d'une manière classique par une méthode de différences finies dans cet espace. Dans cet approche, le choix de bases locales est nécessaire afin d'exprimer les vecteurs et les tenseurs métriques. A ce propos, on peut citer les travaux de: Moretti & Salas (1969) /22/, Tannehill *et al* (1975) /23/ qui utilisent comme base locale un système de coordonnées polaires. Peyret & Viviand (1973) /24/ et Weilmuenster & Graves (1981) /25/ qui utilisent un système de coordonnées paraboliques et Victoria & Widhopf (1973) /26/ qui utilisent un système de coordonnées sphériques.

## 2- TRANSFORMATION INDIRECTE

Dans le second approche, les équations de base ne sont pas directement transformées; la transformation de l'espace physique  $(x, y, z)$  en celui de coordonnées généralisées  $(\xi, \eta, \zeta)$ , se fait uniquement au moment de la discrétisation à l'aide des approximations des dérivées partielles comme suit (plusieurs méthodes d'approximations peuvent être utilisée: différences finies (Viviand & Veuillet (1978) /27/, Le Balleur *et al* (1980) /28/), volumes finis (Deiwert (1975) /29/) ou par éléments finis (Baker (1978) /30/, Cook & Blanchard (1979) /31/)):

$$\begin{pmatrix} \Phi \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \end{pmatrix} = [ MI ]_{3 \times 3} \begin{pmatrix} \Phi_{-1} \\ \Phi_0 \\ \Phi_{+1} \end{pmatrix} \quad (9)$$

où  $\Phi$  désigne la valeur d'une grandeur scalaire, les indices 0, -1, +1 indiquent le point de calcul et ses deux points voisins amont et aval respectivement.  $MI$  est la matrice d'interpolation qui permet de transformer localement l'espace physique en celui de coordonnées généralisées. L'équation (9) présente le principe de la méthode des matrices d'interpolation que nous allons décrire dans le chapitre II.

## I.2 FORMULATION VARIATIONNELLE

La formulation différentielle du problème (1) s'avère souvent insuffisante pour la prise en compte des problèmes mécaniques ou physiques généraux. D'où l'idée d'utiliser la formulation faible et de lui associer une famille de problèmes discrets pour lesquels les quotients aux différences sont compatibles avec une formulation variationnelle. Ce type de méthode est qualifié de méthodes d'approximations variationnelles de différences finies. Nous allons étudier les éléments de base de ces méthodes à travers le problème de Dirichlet (1).

### I.2.1. PROBLEME DE DIRICHLET

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $R^n$  de frontière  $\Gamma$   $C^1$  par morceaux; on considère le problème de Dirichlet (1): étant donné une fonction  $f \in L^2(\Omega)$ , trouver une fonction  $u$  définie dans  $\Omega$  et solution de:

$$-\Delta u = f \quad \text{sur } \Omega \quad (10)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad (11)$$

Supposons la solution  $u$  de (10-11) suffisamment régulière, par exemple  $u$  appartient à l'espace de Sobolev  $H^2(\Omega)$ . Alors en multipliant les deux membres de l'équation (10) par une "fonction test"  $v \in H_0^1(\Omega)$  et en intégrant sur  $\Omega$ , on a:

$$-\int_{\Omega} (\Delta u) v dx = \int_{\Omega} f v dx$$

En utilisant la formule de Green et en tenant compte du fait que  $v_{\Gamma} = 0$  on obtient:

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} f v dx \quad (12)$$

D'autre part, (11) et que  $H_0^1(\Omega)$  représente le noyau de l'application trace sur  $\Gamma$  de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Gamma)$  (i.e  $H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega); v|_{\Gamma} = 0\}$ ) entraînent que  $u \in H_0^1(\Omega)$ . Ceci

étant, on remplace le problème (10-11) par le suivant: Etant donné une fonction  $f \in L^2(\Omega)$ , trouver une fonction  $u \in H_0^1(\Omega)$  vérifiant (12). C'est la formulation variationnelle du problème de Dirichlet (10-11).

On vient de voir que toute solution  $u$  suffisamment régulière de (10-11) est solution du problème précédent. Réciproquement, une solution  $u$  de  $H_0^1(\Omega)$  est solution de (12) si et seulement si:

$$\forall \varphi \in D(\Omega), \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} f \varphi dx \quad (13)$$

puisque par définition  $H_0^1(\Omega)$  est l'adhérence de  $D(\Omega)$  (espace des fonctions indéfiniment différentiables sur  $\Omega$  et à support compact dans  $\Omega$ ) dans  $H^1(\Omega)$ . Par conséquent, si  $u$  vérifie (12), alors (10) est vérifié au sens des distributions sur  $\Omega$  et comme  $f$  est donnée dans  $L^2(\Omega)$ , (10) est vérifié dans  $L^2(\Omega)$ , donc presque partout sur  $\Omega$ . Enfin l'appartenance de  $u$  à  $H_0^1(\Omega)$  implique (11) au sens de trace sur  $\Gamma$ .

Posons:

$$V = H_0^1(\Omega) \text{ muni de la norme } \|v\| = \|v\|_{1,\Omega} = (\|v\|_{0,\Omega}^2 + |v|_{1,\Omega}^2)^{1/2},$$

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx, \quad (14)$$

$$L(v) = \int_{\Omega} f v dx.$$

Il est évident que la forme bilinéaire  $a(.,.)$ , respectivement la forme linéaire  $L(.)$ , est continue sur  $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ , respectivement sur  $H_0^1(\Omega)$ . De plus puisque la forme bilinéaire  $a(.,.)$  est  $H_0^1(\Omega)$  elliptique et d'après le lemme de Lax-Milgram, il existe une fonction  $u \in H_0^1(\Omega)$  et une seule vérifiant (13). Puisque  $a(.,.)$  est symétrique, on montre que cette fonction  $u$  minimise la fonctionnelle quadratique:

$$J(v) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx - \int_{\Omega} f v dx \quad (15)$$

Lorsque la forme bilinéaire  $a(.,.)$  est symétrique, le problème (13) correspond donc à un problème de minimisation d'une fonctionnelle quadratique sur un espace de Hilbert  $V$ , ce qui n'est autre que la formulation abstraite d'un certain nombre de problèmes de calcul des variations. Ceci explique pourquoi le problème (13) est appelé problème variationnel.

Terminons ce paragraphe par l'étude de la méthode de Galerkin. Cette méthode peut être considérée comme le précurseur de la méthode des éléments finis. On suppose ici que  $V$  est espace de Hilbert séparable (ceci n'est pas restrictif, puisque tout sous-espace fermé  $V$  de  $H^1(\Omega)$  est séparable). De plus, on sait que tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne (l'espace vectoriel engendré par les combinaisons linéaires de cette base est dense dans  $V$ ).

Etant donné une base hilbertienne de  $V$ , la méthode de Galerkin consiste à chercher l'élément  $u_m$  de  $V_m$  solution de:

$$\forall v \in V_m, \quad a(u_m, v) = L(v), \quad (16)$$

ou, de façon équivalente, tel que

$$J(u_m) = \inf_{v \in V_m} J(v) \quad (17)$$

où  $V_m$  est le sous-espace de  $V$  engendré par les  $m$  premiers éléments de la base hilbertienne. Lorsqu'en outre la forme bilinéaire  $a(.,.)$  est symétrique, la solution  $u_m$  de (16) est caractérisée comme étant la solution du problème de minimisation de la fonctionnelle  $J$ . Dans ce cas particulier,  $u_m$  est généralement appelée l'approximation de Ritz-Galerkin de  $u$  dans  $V_m$ .

Montrons enfin, que la résolution du problème (16), revient encore à résoudre un système linéaire: soit  $(w_i)_{i=1}^m$  une base de l'espace  $V_m$ . Ecrivait

$$u_m = \sum_{i=1}^m \xi_i w_i \quad (18)$$

le vecteur  $u = (\xi_i)_{i=1}^m$  apparaît comme la solution du système linéaire suivant:

$$Au = b, \text{ où } A = (a(w_j, w_i)), b = (L(w_i))$$

### I.3 METHODES DES ELEMENTS FINIS

La méthode des éléments finis (MEF) est apparue dans les années 1950-1955 pour la résolution des problèmes posés en mécanique des milieux continus déformables.

A compter de 1965 l'audience de la méthode s'accroît largement, en particulier avec la publication en 1967 du livre de Zienkiewicz /32/. C'est alors que commence à se développer l'analyse mathématique de la méthode (Zlámal (1968) /33/).

Le fondement en est la méthode de Galerkin, décrite en I.2.

Pour résoudre, par les éléments finis, une EDP, dans un domaine  $\Omega$ , on la transforme tout d'abord en une forme intégrale  $I$  discrétisée du type Galerkin. Le domaine  $\Omega$  est décomposé en éléments  $\Omega_e$ , où l'intégrale  $I_e$ , discrétisée, est exprimée sous forme matricielle, ces formes élémentaires sont ensuite assemblées en une matrice globale qui donne un système qu'on résout en tenant compte des conditions aux limites.

La méthode des éléments finis est donc basée sur l'application systématique des formulations intégrales. Elle correspond, en effet, au choix des fonctions d'approximation qui sont des fonctions polynômiales par morceau et qui assurent la continuité de la fonction inconnue et sa dérivabilité par morceau. Le degré des fonctions polynômiales choisies caractérise l'ordre de la méthode, donc les particularités de sa mise en oeuvre. L'objectif de ce paragraphe consiste à exposer d'une manière brève, la méthode des éléments finis curvilignes isoparamétriques du second ordre. Nous dégagerons par la suite les principales avantages et inconvénients de cette méthode.

Pour construire des éléments finis courbes, il est commode d'approcher le côté curviligne de chaque élément par un arc paramétré à l'aide de fonctions polynômiales. Ceci revient à associer à chacun des éléments curvilignes, un élément curviligne

approché, ce qui conduit à approcher le domaine initial  $\Omega$  par un domaine  $\Omega_h$ . Il existe au moins deux types de méthodes pour construire une telle approximation:

- a) les méthodes du type isoparamétrique décrites par Zienkiewicz. Dans ces méthodes, la fonction de transformation est construite de manière intrinsèque, c'est à dire indépendamment d'une représentation paramétrique donnée de la frontière  $\Gamma$ .
- b) les méthodes introduites par Zlámal /33/. Dans ces méthodes la fonction de transformation est construite indépendamment de tout choix préalable d'un élément fini. Mais cette transformation ainsi construite, dépend en général de la représentation paramétrique de la frontière  $\Gamma$ .

Ces deux types de méthodes sont en concurrence pour la construction de sous-espaces d'éléments finis inclus dans  $H^1(\Omega)$ .

Dans ce qui suit, nous choisissons l'étude des éléments finis curvilignes isoparamétriques du second ordre.

### I.3.1 ELEMENTS FINIS CURVILIGNES ISOPARAMETRIQUES DU SECOND ORDRE

Les éléments finis du second ordre, s'ils sont plus complexes que les éléments finis du premier ordre (voir Zienkiewicz), permettent de réduire, lors du découpage, le nombre des éléments, donc le volume des données. En outre, la notion d'élément curviligne du second ordre permet de traiter des problèmes dans lesquels la géométrie est définie à l'aide de courbes du second ordre, ce qui est souvent le cas.

Le principe fondamental de la méthode des éléments finis curvilignes isoparamétriques du second ordre consiste, à partir d'un élément de référence (Zienkiewicz /32/) défini dans le plan  $(\xi, \eta)$ , à approcher les coordonnées dans

le plan cartésien  $(x, y)$  d'un point d'un élément quelconque à partir des coordonnées  $x_k, y_k$  des sommets,  $k$  variant de 1 à  $NS$  (où  $NS$  désigne le nombre de sommets), de cet élément et des fonctions de forme associées à l'élément de référence.

Soit  $N_1(\xi, \eta), N_2(\xi, \eta), \dots, N_n(\xi, \eta)$  les fonctions de forme de cet élément de référence,  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  les valeurs de la fonction inconnue aux sommets de coordonnées  $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$  de l'élément réel. On peut à l'aide de ces données, calculer les coordonnées  $x, y$  et la valeur de  $\varphi$  de la fonction inconnue en un point quelconque de l'élément:

$$x = \sum_{k=1}^{NS} x_k N_k(\xi, \eta) \quad (19)$$

$$y = \sum_{k=1}^{NS} y_k N_k(\xi, \eta) \quad (20)$$

$$\varphi = \sum_{k=1}^{NS} \varphi_k N_k(\xi, \eta) \quad (21)$$

On voit que  $x, y$  et  $\varphi$  sont des fonctions explicites de  $\xi$  et  $\eta$  et donc que  $\varphi$  est une fonction implicite de  $x, y$ . Nous allons illustrer l'application de cette méthode au traitement du problème (1).

L'application de la méthode de Galerkin (qui coïncide avec la formulation de Ritz (Raviart (1975) /34/), donne:

$$I = \int \int_{\Omega} (\Delta \varphi + f) N_j dx dy = 0 \quad (22)$$

Après intégration par parties, on obtient alors:

$$I = - \int \int_{\Omega} \left( \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dx dy + \int \int_{\Omega} N_j f dx dy = 0 \quad (23)$$

En introduisant l'expression de  $\varphi$  dans (23) on obtient:

$$\sum_k \int \int_{\Omega} \left( \frac{\partial N_k}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_k}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy = \int \int_{\Omega} N_j f dx dy \quad (24)$$

### I.3.2. MISE EN OEUVRE DE LA METHODE

#### I.3.2.1 CALCUL DES TERMES DE LA MATRICE

Si on considère un découpage, on va devoir, pour chaque couple de noeuds  $i$  et  $j$ , calculer les contributions de chacun des éléments associés à ces noeuds. Pour un élément donné dont les sommets locaux  $\lambda$  et  $\mu$  correspondent aux noeuds  $i$  et  $j$ , on devra calculer  $M_{\lambda\mu}^{(e)}$  sur l'élément (e) en question. L'évaluation de  $M_{\lambda\mu}^{(e)}$  s'écrit:

$$M_{\lambda\mu}^{(e)} = \int \int_{\Omega_e} \left( \frac{\partial N_{\lambda}^{(e)}}{\partial x} \frac{\partial N_{\mu}^{(e)}}{\partial x} + \frac{\partial N_{\lambda}^{(e)}}{\partial y} \frac{\partial N_{\mu}^{(e)}}{\partial y} \right) dx dy \quad (25)$$

où  $N_{\lambda}^{(e)}$  et  $N_{\mu}^{(e)}$  sont la restriction des fonctions  $N_j$ , définies par morceaux sur tout le domaine. Si l'on définit une transformation géométrique qui, à partir d'un élément de référence (carré, triangle équilatéral) /35/, permet de générer automatiquement n'importe lequel des éléments quadrangulaires ou triangulaires du découpage (Fig 1.7). On peut alors effectuer un changement de coordonnées dans le calcul du terme  $M_{\lambda\mu}^{(e)}$  qui devient:

$$M_{\lambda\mu}^{(e)} = \int \int_Y \left( \frac{\partial N_{\lambda}^{(e)}}{\partial x} \frac{\partial N_{\mu}^{(e)}}{\partial x} + \frac{\partial N_{\lambda}^{(e)}}{\partial y} \frac{\partial N_{\mu}^{(e)}}{\partial y} \right) \det(J(\xi, \eta)) d\xi d\eta \quad (26)$$

où:

- $\det(J(\xi, \eta))$  déterminant du jacobien de la transformation des coordonnées.
- $Y$  domaine de l'élément de référence (carré, triangle équilatéral).

Le calcul de l'intégrale double de (26), est calculée par la méthode de quadrature de Gauss, qui consiste à remplacer cet intégrale par une somme finie

pondérée. Pour les détails de calcul et les coordonnées des points d'intégration de Gauss sur un élément de référence donné sont donnés dans /35/.

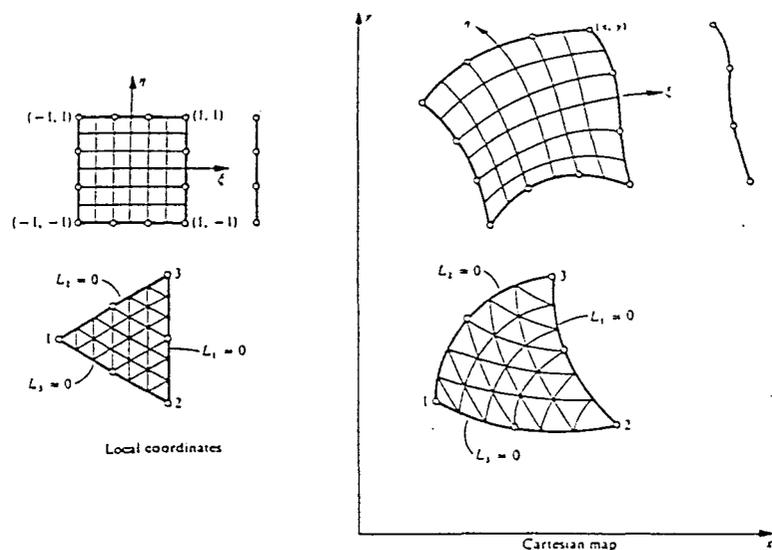


Fig 1.7 Transformation de quelques éléments en dimension 2.

(a) Élément de référence (b) Élément curviligne.

Après le calcul des éléments des matrices élémentaires  $M^{(e)}$  de chaque élément, on constitue par la suite, la matrice globale  $M$  (assemblage). Le problème (1) se ramène à la résolution d'un système linéaire suivant:

$$M\vec{\varphi} = \vec{F} \tag{27}$$

où  $\vec{\varphi}$  vecteur dont les composantes sont les valeurs de  $\varphi$  aux noeuds du maillage, et  $\vec{F}$  est le second membre.

### 1.3.2.2 INFLUENCE DE LA LARGEUR DE BANDE D'UNE MATRICE

La méthode des éléments finis aboutit à la résolution d'importants systèmes d'équations linéaires.

La largeur de bande de la matrice du système final dépend essentiellement des dimensions de la matrice de chaque élément et du système de numérotation imposé pour les noeuds du maillage. Une mauvaise numérotation des noeuds rend la bande de cette matrice plus épaisse, ce qui augmente le temps de calcul. Un contrôle optimal de numérotation s'impose. S'il est possible de réduire la largeur de la bande, on réduit en même temps le temps de résolution et la place occupée dans la mémoire.

Une des méthodes consiste à adopter une subdivision systématique et un système approprié de numérotation des noeuds. Si ces numéros forment la base de la numérotation des déplacements nodaux, la largeur de bande de la matrice générale dépend de la plus grande différence entre deux numéros des noeuds externes pour un seul élément.

Soit  $D$  la différence maximale constatée pour tous les éléments de l'assemblage. La demi-largeur de bande  $B$  est alors donnée par:

$$B = (1 + D)f$$

avec  $f$  nombre de degrés de liberté à chaque noeud. Cette équation montre que le système de numérotation doit minimaliser  $D$ . Elle fait aussi ressortir l'importance d'une variation aussi faible que possible des numéros des noeuds d'élément à élément.

#### I.4 CONCLUSION

Dans ce premier chapitre, nous avons étudié deux types de méthodes pour résoudre des EDP: celles aux différences finies (MDF) et celles des éléments finis (MEF). On note au passage que toutes deux s'appliquent à la résolution des équations différentielles avec conditions aux limites, qui sont des cas particuliers, à une dimension d'EDP. A partir de cette étude, nous avons pu dégager les points essentiels suivants:

- Un avantage essentiel de la MEF, et qui pour certains problèmes lui assure la suprématie sur les MDF, est la souplesse considérable dans le choix du maillage:

on peut, choisir de façon quasiment arbitraire, la position et le nombre de noeuds et donc le nombre, la forme, et la répartition des domaines élémentaires. Avec l'utilisation d'une MEF, tout contour pouvant être approché d'aussi près que l'on le veut par une ligne polygonale (éléments finis du premier ordre) ou par une courbe du second ordre (éléments finis curvilignes isoparamétriques du second ordre).

- En revanche, la matrice, représentative de la discrétisation en éléments finis du domaine d'étude, comporte de nombreux éléments nuls (matrice creuse). La numérotation des noeuds du domaine influe sur la répartition des éléments non nuls à l'intérieur de cette matrice et une numérotation adaptée permet de regrouper les éléments non nuls autour de la diagonale principale. On cherche donc des méthodes pour minimiser, lors de la numérotation, l'écart des numéros de deux sommets adjacents au sein d'un même élément. Ce qui a pour inconvénient d'augmenter le temps de calcul et la place mémoire.
- Les maillages classiques utilisés en différences finies ont souvent le défaut de décrire imparfaitement les frontières du domaine d'étude. Les frontières courbes sont seulement approximées par des lignes polygonales, ceci d'une part, déforme la nature de la frontière et d'autre part, induit une influence sur le caractère physique du problème à étudier (mauvaise représentation des conditions aux limites). Pour surmonter ce problème, les techniques de génération des maillages interviennent pour une organisation de la discrétisation sur une région arbitraire de telle sorte que:
  - i) tout bord de la région coïncide parfaitement avec une ligne curviligne.
  - ii) la distribution des lignes peut se concentrer dans les régions de fortes variations de la solution.

Compte tenu de ces remarques, nous allons présenter la méthode des matrices d'interpolation.

## CHAPITRE II

DESCRIPTIONS DE LA METHODE DES MATRICES D'INTERPOLATION
--

L'objectif de ce deuxième chapitre, est de décrire les aspects mathématiques de base de la méthode des matrices d'interpolation (MMI). Ce chapitre est divisé en deux parties:

La première est consacrée à l'analyse mathématique de la MMI en tant que méthode d'approximation. Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous introduisons dans la MMI, la transformation isoparamétrique. Cette technique largement utilisée dans les méthodes des éléments finis (MEF), va nous permettre de simplifier l'analyse des problèmes formulés sur des domaines à géométrie complexe.

### II.1 DESCRIPTION DE LA MMI

#### II.1.1 FORME PRIMITIVE DE LA MMI

Soient  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbf{R}^m$  ( $m = 2, 3$ ), de frontière  $\Gamma$ , supposé un domaine physique défini dans un système de coordonnées cartésiennes et  $\Psi$  une fonction suffisamment différentiable sur  $\bar{\Omega}$ .

Soit  $P$  un point quelconque de  $\Omega$  et soient  $NP_1, NP_2, \dots, NP_n$  ses  $n$  points voisins (on suppose que  $\Omega$  est discrétisé en un nombre fini de points) (Fig 2.1).

On suppose de plus que  $\Psi$  peut être approximée dans un voisinage du point  $P$  par l'expression polynômiale suivante:

$$\Psi(x) = \sum_{k=0}^n C_k^P \cdot P_k(x) \quad (28)$$

où  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ , ( $n > m$ ), les coordonnées d'un point de  $\Omega$ ,  $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$  des fonctions polynômiales connues et  $\{C_0^P, C_1^P, \dots, C_n^P\}$  sont les paramètres de l'approximation.

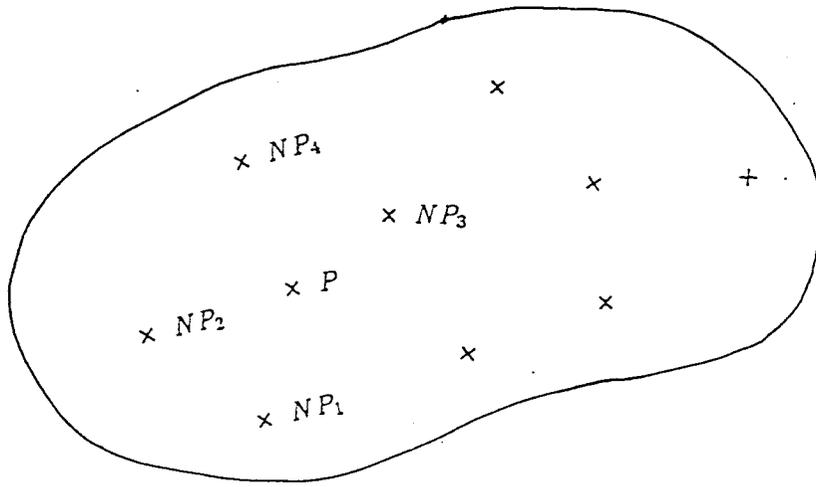


Fig 2.1. Domaine  $\Omega$  discrétisé  
d'une manière arbitraire.

Dans le but de déterminer les coefficients  $C_k^P, k = 0, \dots, n$  de l'équation (28) nous avons besoin de  $(n + 1)$  relations indépendantes. Pour cela et à partir des  $(n + 1)$  points de la discrétisation y compris le point  $P$ , nous obtenons le système linéaire suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_0^P \cdot P_0(x^0) + C_1^P \cdot P_1(x^0) + \dots + C_n^P \cdot P_n(x^0) = \Psi(x^0) \\ C_0^P \cdot P_0(x^1) + C_1^P \cdot P_1(x^1) + \dots + C_n^P \cdot P_n(x^1) = \Psi(x^1) \\ \dots \\ C_0^P \cdot P_0(x^n) + C_1^P \cdot P_1(x^n) + \dots + C_n^P \cdot P_n(x^n) = \Psi(x^n) \end{array} \right. \quad (29)$$

où les  $x^i = (x_1^i, x_2^i, \dots, x_m^i)$ , pour  $i = 0, \dots, n$  sont les coordonnées des points  $P, NP_1, \dots, NP_n$  respectivement.

Le système (29) peut se mettre sous la forme condensée suivante:

$$\Psi(P) = A(P) \cdot C(P) \quad (30)$$

où:

$$\Psi(P) = \begin{pmatrix} \Psi(x^0) \\ \Psi(x^1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \Psi(x^n) \end{pmatrix} ; \quad C(P) = \begin{pmatrix} C_0^P \\ C_1^P \\ \vdots \\ \vdots \\ C_n^P \end{pmatrix}$$

et

$$A(P) = \begin{pmatrix} P_0(x^0) & P_1(x^0) & \dots & \dots & \dots & P_n(x^0) \\ P_0(x^1) & P_1(x^1) & \dots & \dots & \dots & P_n(x^1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_0(x^n) & P_1(x^n) & \dots & \dots & \dots & P_n(x^n) \end{pmatrix}$$

Nous supposons que les points  $P, NP_1, \dots, NP_n$  sont tous distincts. Evaluons la matrice inverse de  $A(P)$ , on obtient alors:

$$C(P) = A^{-1}(P) \cdot \Psi(P) \quad (31)$$

En différenciant la fonction d'approximation de (28) dans le voisinage du point  $P$ , on obtient pour tout  $j$  variant de 1 à  $m$  et  $\alpha = 1, 2$ :

$$\frac{\partial^\alpha \Psi}{\partial x_j^\alpha} = \sum_{k=0}^n C_k^P \frac{\partial^\alpha P_k}{\partial x_j^\alpha} \quad (32)$$

La substitution des coordonnées du point  $P$  dans l'expression (32) fournit alors:

$$D(P) = M \cdot C(P) \quad (33)$$

où:

$$(D(P))^t = (\Psi(P), \frac{\partial \Psi}{\partial x_1}(P), \dots, \frac{\partial \Psi}{\partial x_m}(P), \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2}(P), \dots, \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_m^2}(P), \dots)$$

et  $M$  est la matrice composée des valeurs de  $P_k$  ainsi que des valeurs des dérivées  $\frac{\partial^\alpha P_k}{\partial x_j^\alpha}$ , pour  $k$  variant de 0 à  $n$  et  $j$  variant de 1 à  $m$  respectivement.

En combinant les équations (31) et (33), nous obtenons:

$$D(P) = MI(P) \cdot \Psi(P) \quad (34)$$

avec

$$MI(P) = M \cdot A^{-1}(P) \quad (35)$$

L'équation (34) représente les formes aux différences des opérateurs différentiels de  $\Psi$  au point  $P$ . Les coefficients de ces formes aux différences sont rangés dans un tableau  $MI(P)$  défini comme étant une matrice d'interpolation au point  $P$ , qui dépend des coordonnées du point  $P$ , ainsi que des coordonnées de ces  $n$  points voisins.

Les matrices  $MI(P)$  de tous les points de la discrétisation peuvent être évaluées lorsque le polynôme d'approximation et les coordonnées des points de la discrétisation sont données.

### II.1.2 PRINCIPALES CARACTERISTIQUES

- Dans la MMI, gardons le nombre de points voisins constant, par la même procédure décrite en II.1.1, nous pouvons construire différentes formes aux différences.
- Les coefficients des formes aux différences sont individuellement évalués et stockés comme une matrice d'interpolation. De ce fait, les équations de base sont systématiquement transformées en celles aux différences, il suffit pour cela d'appliquer (34), cela facilite l'écriture et la lecture des programmes.

- La relation (34) lie le point de calcul uniquement à  $n$  points voisins, ceci nous permet d'une part de contrôler la matrice des équations algébriques et d'autre part nous offrir la possibilité d'utiliser des méthodes classiques telles que l'ADI (Alternating Direction Implicit Methods), SOR (Successive Over Relaxation Method) et d'autres (Roache (1982) /36/).

Comme on l'a signalé dans le chapitre I, l'utilisation d'une grille cartésienne a l'inconvénient de décrire imparfaitement les frontières du domaine, notamment pour les problèmes formulés sur des géométries complexes, ce qui est souvent le cas. Cela nous incite à introduire une technique de transformation des coordonnées dans la MMI.

## II.2 INTRODUCTION D'UNE TRANSFORMATION DES COORDONNEES

### II.2.1 CAS GENERAL

La technique de transformation des coordonnées peut être introduite dans la MMI. Cette technique est largement utilisée dans les MEF, où l'on distingue les méthodes de type isoparamétrique décrites par Zienkiewicz (1977) /32/ et étudiées théoriquement par Raviart (1975) /34/. Pour ces méthodes, la fonction de transformation des coordonnées est construite de manière intrinsèque (indépendamment d'une représentation paramétrique donnée de la frontière  $\Gamma$ ). L'idée de base de cette transformation se résume ainsi:

Les fonctions de transformation des coordonnées sont identiques aux fonctions d'approximations. Ceci implique, que les noeuds géométriques soient confondus avec les noeuds d'interpolations.

Notons par  $x(x_i)$  et  $\xi(\xi_i)$  les coordonnées dans le système physique et le système de transformation respectivement. On suppose que la fonction  $\Psi$  est approximée dans l'espace  $\xi(\xi_i)$  par l'expression polynômiale suivante:

$$\Psi(\xi) = \sum_{k=0}^n C_k^P \cdot P_k(\xi) \quad (36)$$

L'introduction de la transformation isoparamétrique, nous permet d'écrire:

$$x_i(\xi) = \sum_{k=0}^n C_k^{x_i} \cdot P_k(\xi) \quad (37)$$

Il est essentiel, que le système de transformation soit donné en tout point de la maille, ceci entraîne que, les points voisins d'un point de calcul ont un certain arrangement bien fixe. Par la même procédure décrite dans le paragraphe II.1.1, on obtient dans l'espace  $\xi(\xi_i)$ :

$$D_\xi(P) = MI_\xi \cdot \Psi(P) \quad (38)$$

où  $D_\xi(P)$  est un vecteur dont les composantes sont les valeurs des dérivées de  $\Psi$  au point  $P$  et  $MI_\xi$  est une matrice d'interpolation au point  $P$  dans le système  $\xi(\xi_i)$ .

Dans le but de déterminer la matrice d'interpolation dans le système  $x(x_i)$ , il est nécessaire d'introduire la matrice de transformation des coordonnées notée  $T_{(\xi,x)}$ . Cette matrice est formée par les coefficients, qui permettent le passage des opérations de dérivation entre les systèmes  $x(x_i)$  et  $\xi(\xi_i)$ , on aura alors:

$$D(P) = T_{(\xi,x)}(P).D_{\xi}(P) \quad (39)$$

En combinant les équations (38) et (39) on obtient:

$$D(P) = MI(P).\Psi(P) \quad (40)$$

où:

$$MI(P) = T_{(\xi,x)}(P).MI_{\xi} \quad (41)$$

La matrice  $MI(P)$  ainsi obtenue, est une matrice d'interpolation au point P dans le système  $x(x_i)$ . On peut remarquer que, cette matrice réalise la transformation locale entre les coordonnées des deux systèmes et fournit une approximation des opérateurs différentiels de  $\Psi$  au point de calcul P.

## II.2.2 CAS BIDIMENSIONNEL

### II.2.2.1 METHODE DE KOSHIZUKA *et al* (1988)

Soient les variables indépendantes  $(x, y)$  et  $(\xi, \eta)$  définies dans le plan physique et le plan de transformation respectivement.

Auparavant *koshizuka et al* /1/ utilisaient une fonction d'approximation de la forme suivante:

$$\Psi(\xi, \eta) - \Psi_0 = C_1\xi + C_2\eta + C_3\xi^2 + C_4\eta^2 \quad (42)$$

où  $\Psi_0$  est la valeur de  $\Psi$  au point de calcul  $P$  et les  $C_i$  sont les paramètres d'approximation.

La transformation des coordonnées se fait de telle sorte que le point  $P$  et ses quatre points voisins  $NP_1, NP_2, NP_3$  et  $NP_4$  soient disposés comme dans la figure 2.2. Les coefficients  $C_i$  pour  $i = 1, \dots, 4$  s'obtiennent en substituant les coordonnées des quatre points voisins de  $P$  dans l'expression (42).

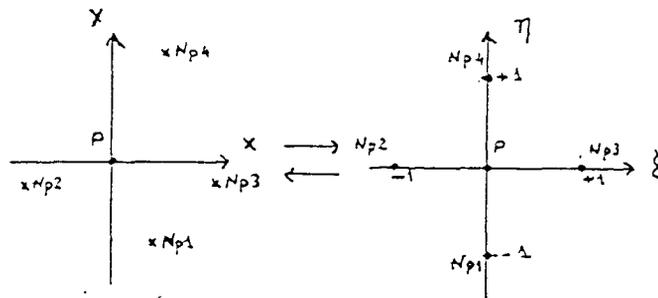


Fig 2.2 Transformation des coordonnées utilisée

par Koshizuka *et al*.

Les dérivées de  $\Psi$  au point  $P$  par rapport à  $\xi$  et  $\eta$ , s'obtiennent en dérivant l'expression de  $\Psi$  dans (42) et en évaluant ces dérivées au point  $P$ , nous obtenons

ainsi:

$$\begin{pmatrix} \Psi_\xi \\ \Psi_\eta \\ \Psi_{\xi\xi} \\ \Psi_{\eta\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 - \Psi_0 \\ \Psi_2 - \Psi_0 \\ \Psi_3 - \Psi_0 \\ \Psi_4 - \Psi_0 \end{pmatrix} \quad (43)$$

La matrice de l'équation (43) représente la forme normale aux différences. Elle peut s'obtenir, en écrivant le développement de Taylor de la fonction  $\Psi$  autour du point de calcul  $P$ .

L'expression de la matrice d'interpolation au point  $P$  dans le plan  $(x, y)$ , est donnée par ( pour les détails de calcul voir Koshizuka /1/):

$$\begin{pmatrix} \Psi_x \\ \Psi_y \\ \Psi_{xx} \\ \Psi_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x & 0 & 0 \\ \xi_y & \eta_y & 0 & 0 \\ \xi_{xx} & \eta_{xx} & \xi_x^2 & \eta_x^2 \\ \xi_{yy} & \eta_{yy} & \xi_y^2 & \eta_y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_\xi \\ \Psi_\eta \\ \Psi_{\xi\xi} \\ \Psi_{\eta\eta} \end{pmatrix} \quad (44)$$

Il suffit alors d'effectuer le produit des deux matrices des équations (43) et (44) pour obtenir l'expression de la matrice d'interpolation au point  $P$  dans le plan  $(x, y)$ :

$$\begin{pmatrix} \Psi_x \\ \Psi_y \\ \Psi_{xx} \\ \Psi_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\eta_x}{2} & -\frac{\xi_x}{2} & \frac{\xi_x}{2} & \frac{\eta_x}{2} \\ -\frac{\eta_y}{2} & -\frac{\xi_y}{2} & \frac{\xi_y}{2} & \frac{\eta_y}{2} \\ -\frac{\eta_{xx}}{2} + \eta_x^2 & -\frac{\xi_{xx}}{2} + \xi_x^2 & \frac{\xi_{xx}}{2} + \xi_x^2 & \frac{\eta_{xx}}{2} + \eta_x^2 \\ -\frac{\eta_{yy}}{2} + \eta_y^2 & -\frac{\xi_{yy}}{2} + \xi_y^2 & \frac{\xi_{yy}}{2} + \xi_y^2 & \frac{\eta_{yy}}{2} + \eta_y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 - \Psi_0 \\ \Psi_2 - \Psi_0 \\ \Psi_3 - \Psi_0 \\ \Psi_4 - \Psi_0 \end{pmatrix} \quad (45)$$

Qui peut se mettre sous la forme condensée suivante:

$$D(P) = MI(P) \cdot \Phi(P)$$

où  $MI(P)$  est la matrice d'interpolation au point  $P$  dans le plan  $(x, y)$  et  $\Phi(P)$  est le vecteur de composantes  $\Psi(NP_i) - \Psi(P)$  pour  $i = 1, \dots, 4$ .

Laissons-nous examiner les formes aux différences obtenues par Koshizuka *et al.* Pour cela, nous allons commencer par établir les formules de transformation des opérateurs de dérivation entre les plans  $(x, y)$  et  $(\xi, \eta)$ .

### II.2.2.2 TRANSFORMATION DES OPERATEURS DE DERIVATION

Dans ce paragraphe, on suppose que tous les calculs ont un sens.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \xi_y \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta}\end{aligned}$$

Que l'on écrit sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (46)$$

La matrice définie dans l'équation (46), représente la matrice Jacobienne de la transformation des coordonnées.

En dérivant la relation (46) par rapport à  $x$  et  $y$  respectivement, nous obtenons les relations suivantes:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \xi_{xx} \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_{xx} \frac{\partial}{\partial \eta} + \xi_x^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \eta_x^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 2 \cdot \xi_x \eta_x \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \quad (47)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \xi_{yy} \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_{yy} \frac{\partial}{\partial \eta} + \xi_y^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \eta_y^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 2 \cdot \xi_y \eta_y \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \quad (48)$$

En regroupant les équations obtenues, comme dans (39) on obtient alors:

$$\begin{pmatrix} \Psi_x \\ \Psi_y \\ \Psi_{xx} \\ \Psi_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x & 0 & 0 & 0 \\ \xi_y & \eta_y & 0 & 0 & 0 \\ \xi_{xx} & \eta_{xx} & \xi_x^2 & \eta_x^2 & 2\xi_x \eta_x \\ \xi_{yy} & \eta_{yy} & \xi_y^2 & \eta_y^2 & 2\xi_y \eta_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_\xi \\ \Psi_\eta \\ \Psi_{\xi\xi} \\ \Psi_{\eta\eta} \\ \Psi_{\xi\eta} \end{pmatrix} \quad (49)$$

La matrice de l'équation (49) n'est autre que la matrice  $T_{(\xi,x)}(P)$  de l'équation (39). En combinant les équations (43) et (49) et après quelques arrangements on obtient:

$$\begin{pmatrix} \Psi_x \\ \Psi_y \\ \Psi_{xx} \\ \Psi_{yy} \end{pmatrix} = [MI] \begin{pmatrix} \Psi_1 - \Psi_0 \\ \Psi_2 - \Psi_0 \\ \Psi_3 - \Psi_0 \\ \Psi_4 - \Psi_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.\xi_x\eta_x\Psi_{\xi\eta} \\ 2.\xi_y\eta_y\Psi_{\xi\eta} \end{pmatrix} \quad (50)$$

### REMARQUE

Un premier point de différence entre les relations (44) et (50) est la présence du terme  $\Psi_{\xi\eta}$  dans (50). Par contre dans (44) ce terme est ignoré, ceci est correct si le système des coordonnées est orthogonal. Comme nous allons le voir, ce terme joue un grand rôle si le système de coordonnées s'écarte de l'orthogonalité et son absence induit de grandes erreurs.

Compte tenu de cette remarque et tout en conservant l'originalité de la méthode (5 points en 2D), nous allons pouvoir introduire des modifications sur la fonction d'approximation (42) proposée par Koshizuka.

### II.2.2.3 METHODE MMI AMELIOREE

Dans le but d'améliorer la méthode proposée par Koshizuka, nous allons étendre le développement (42) de la fonction  $\Psi$ .

La transformation des coordonnées se fait de telle sorte que le point  $P$  et ses quatre points voisins  $NP_1$ ,  $NP_2$ ,  $NP_3$  et  $NP_4$  forment une grille rectangulaire dans le plan de transformation  $(\xi, \eta)$  (Fig 2.4). Fletcher (vol. 2 pp. 58) /5/ suggère que pour obtenir un meilleur contrôle de la distribution du jacobien de la transformation, il est préférable d'utiliser une grille rectangulaire, mais non-uniforme dans le plan  $(\xi, \eta)$  où  $r_\xi$  et  $r_\eta$  représentent les rapports entre deux pas d'espaces successifs dans les directions  $\xi$  et  $\eta$  respectivement.

La fonction d'approximation est donnée dans le plan  $(\xi, \eta)$  par:

$$\Psi(\xi, \eta) - \Psi_0 = C_1 \cdot \xi + C_2 \cdot \eta + C_3 \cdot \xi^2 + C_4 \cdot \eta^2 + R_\Psi \quad (51)$$

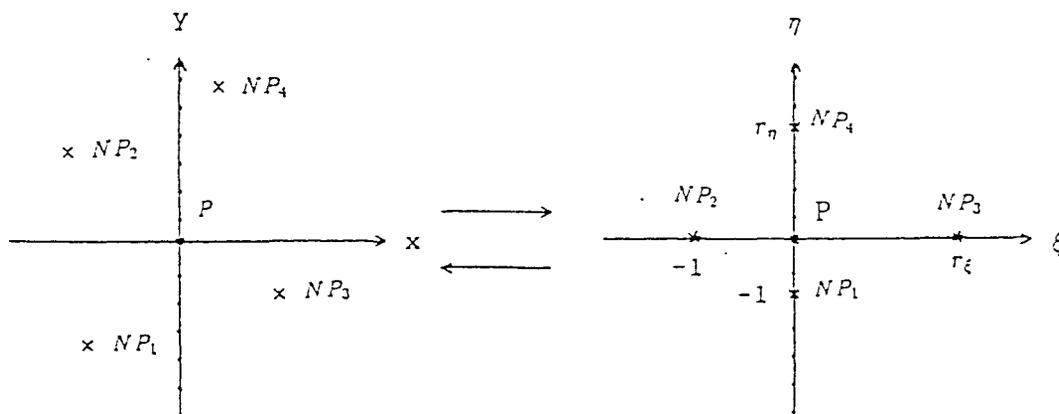


Fig 2.4 Transformation des coordonnées entre les plans:

$(x, y)$  Plan physique et  $(\xi, \eta)$  Plan transformé.

$\Psi_0$  représente la valeur de  $\Psi$  au point  $P$  et  $R_\Psi$  est une estimation des erreurs de troncature avec  $R_\Psi(0,0) = 0$  (il est clair que  $R_\Psi = 0$  dans le cas d'une grille orthogonale). La transformation des coordonnées est telle que dans le plan  $(\xi, \eta)$ , les points  $NP_1$  et  $NP_2$ , ont pour coordonnées  $(0, -1)$  et  $(-1, 0)$

respectivement, pour une grille non-uniforme, les coordonnées des points  $NP_3$  et  $NP_4$  sont  $(r_\xi, 0)$  et  $(0, r_\eta)$ . Les coefficients de l'équation (51), s'obtiennent en remplaçant les coordonnées des quatre points voisins de  $P$  dans la relation (51).

Les dérivées de  $\Psi$  au point  $P$  par rapport à  $\xi$  et  $\eta$  s'obtiennent en dérivant  $\Psi$  dans l'équation (51) et en évaluant ces dérivées au point  $P$ , on obtient alors:

$$\begin{pmatrix} \Psi_\xi \\ \Psi_\eta \\ \Psi_{\xi\xi} \\ \Psi_{\eta\eta} \\ \Psi_{\xi\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{r_\xi}{1+r_\xi} & \frac{1}{r_\xi(1+r_\xi)} & 0 & 0 \\ -\frac{r_\eta}{1+r_\eta} & 0 & 0 & \frac{1}{r_\eta(1+r_\eta)} & 0 \\ 0 & \frac{2}{1+r_\xi} & \frac{2}{r_\xi(1+r_\xi)} & 0 & 0 \\ \frac{2}{1+r_\eta} & 0 & 0 & \frac{2}{r_\eta(1+r_\eta)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 - \Psi_0 \\ \Psi_2 - \Psi_0 \\ \Psi_3 - \Psi_0 \\ \Psi_4 - \Psi_0 \\ R_{\Psi_{\xi\eta}} \end{pmatrix} \quad (52)$$

Pour déterminer les coefficients de la matrice d'interpolation au point  $P$  dans le plan  $(x, y)$ , il suffit d'appliquer les formules de transformation des opérateurs de dérivation entre les plans  $(x, y)$  et  $(\xi, \eta)$ . On obtient alors:

$$\begin{pmatrix} \Psi_x \\ \Psi_y \\ \Psi_{xx} \\ \Psi_{yy} \end{pmatrix} = [MI] \begin{pmatrix} \Psi_1 - \Psi_0 \\ \Psi_2 - \Psi_0 \\ \Psi_3 - \Psi_0 \\ \Psi_4 - \Psi_0 \end{pmatrix} + \vec{\Psi}_{\xi\eta} \quad (53)$$

où  $MI$ , une matrice d'interpolation au point  $P$  qui permet de réaliser localement la transformation des coordonnées et d'approximer les valeurs des dérivées de  $\Psi$  au point  $P$ . Le terme  $\vec{\Psi}_{\xi\eta}$  est calculée d'une manière explicite ( voir Nguyen & En-Nefkhaoui (1993) /37/ et Annexe C ).

On note que la relation (53) lie le point  $P$  uniquement aux quatre points voisins. Les expressions de  $MI$  et de  $\vec{\Psi}_{\xi\eta}$  sont données par:

Si on pose:

$$\begin{aligned} \gamma_1^\xi &= \frac{r_\xi}{1+r_\xi} & \gamma_2^\xi &= \frac{1}{r_\xi(1+r_\xi)} \\ \gamma_1^\eta &= \frac{r_\eta}{1+r_\eta} & \gamma_2^\eta &= \frac{1}{r_\eta(1+r_\eta)} \end{aligned}$$

on obtient alors pour la matrice d'interpolation  $[MI]$  la forme suivante:

$$\begin{pmatrix} -\gamma_1^\eta \eta_x & -\gamma_1^\xi \xi_x & \gamma_2^\xi \xi_x & \gamma_2^\eta \eta_x \\ -\gamma_1^\eta \eta_y & -\gamma_1^\xi \xi_y & \gamma_2^\xi \xi_y & \gamma_2^\eta \eta_y \\ -\gamma_1^\eta \eta_{xx} + \frac{2}{1+r_\eta} \eta_x^2 & -\gamma_1^\xi \xi_{xx} + \frac{2}{1+r_\xi} \xi_x^2 & \gamma_2^\xi \xi_{xx} + 2\gamma_2^\xi \xi_x^2 & \gamma_2^\eta \eta_{xx} + 2\gamma_2^\eta \eta_x^2 \\ -\gamma_1^\eta \eta_{xy} + \frac{2}{1+r_\eta} \eta_x \eta_y & -\gamma_1^\xi \xi_{xy} + \frac{2}{1+r_\xi} \xi_x \xi_y & \gamma_2^\xi \xi_{xy} + 2\gamma_2^\xi \xi_x \xi_y & \gamma_2^\eta \eta_{xy} + 2\gamma_2^\eta \eta_x \eta_y \end{pmatrix}$$

et:

$$\vec{\Psi}_{\xi\eta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\xi_x \eta_x \Psi_{\xi\eta} \\ 2\xi_y \eta_y \Psi_{\xi\eta} \end{pmatrix}$$

La transformation isoparamétrique, nous permet de déterminer l'expression des coefficients de la matrice  $MI$ . En effet, les dérivées de  $x$  (resp. de  $y$ ) par rapport à  $\xi$  et  $\eta$ , s'obtiennent de la même façon que dans l'équation (52). Il suffit alors de remplacer  $\Psi$  par  $x$  (resp. par  $y$ ) dans (52).

$$\begin{pmatrix} x_\xi \\ x_\eta \\ x_{\xi\xi} \\ x_{\eta\eta} \\ x_{\xi\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{r_\xi}{1+r_\xi} & \frac{1}{r_\xi(1+r_\xi)} & 0 & 0 \\ -\frac{r_\eta}{1+r_\eta} & 0 & 0 & \frac{1}{r_\eta(1+r_\eta)} & 0 \\ 0 & \frac{2}{1+r_\xi} & \frac{2}{r_\xi(1+r_\xi)} & 0 & 0 \\ \frac{2}{1+r_\eta} & 0 & 0 & \frac{2}{r_\eta(1+r_\eta)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ x_2 - x_0 \\ x_3 - x_0 \\ x_4 - x_0 \\ R_{x_{\xi\eta}} \end{pmatrix} \quad (54)$$

La même procédure de calcul est effectuée pour la variable  $y$  et les coefficients de la matrice  $T_{(\xi,x)}(P)$  sont donnés par:

• EXPRESSIONS DE  $\xi_x$ ,  $\eta_x$ ,  $\xi_y$  ET  $\eta_y$

Notons par  $J = x_\xi \cdot y_\eta - x_\eta \cdot y_\xi$  le Jacobien de la matrice de transformation des coordonnées (on suppose que la transformation inverse existe). on a alors:

$$\begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{pmatrix} = \frac{1}{J} \cdot \begin{pmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{pmatrix}^{-1} \quad (55)$$

ce qui donne alors:

$$\begin{cases} \xi_x = \frac{1}{J} y_\eta \\ \eta_x = -\frac{1}{J} y_\xi \\ \xi_y = -\frac{1}{J} x_\eta \\ \eta_y = \frac{1}{J} x_\xi \end{cases} \quad (56)$$

• EXPRESSIONS DE  $\xi_{xx}$ ,  $\xi_{yy}$ ,  $\eta_{xx}$  ET  $\eta_{yy}$

Pour pouvoir donner les expressions de  $\xi_{xx}$ ,  $\xi_{yy}$ ,  $\eta_{xx}$  et  $\eta_{yy}$ , effectuons les dérivations des expressions présentes dans le système (56) par rapport à  $x$  et  $y$  respectivement. On obtient alors:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_{xx} = \frac{1}{j^3}(-x_{\xi\xi}y_{\eta}^3 - x_{\eta\eta}y_{\xi}^2y_{\eta} + y_{\xi\xi}x_{\eta}y_{\eta}^2 + y_{\eta\eta}x_{\eta}y_{\xi}^2 + \\ \quad 2y_{\xi}y_{\eta}^2x_{\xi\eta} - 2x_{\eta}y_{\xi}y_{\eta}y_{\xi\eta}) \\ \xi_{yy} = \frac{1}{j^3}(-x_{\xi\xi}x_{\eta}^2y_{\eta} - x_{\eta\eta}x_{\xi}^2y_{\eta} + y_{\xi\xi}x_{\eta}^3 + y_{\eta\eta}x_{\xi}^2x_{\eta} + \\ \quad 2x_{\xi}x_{\eta}y_{\eta}x_{\xi\eta} - 2x_{\xi}x_{\eta}^2y_{\xi\eta}) \\ \eta_{xx} = \frac{1}{j^3}(x_{\xi\xi}y_{\xi}y_{\eta}^2 + x_{\eta\eta}y_{\xi}^3 - y_{\xi\xi}x_{\xi}y_{\eta}^2 - y_{\eta\eta}x_{\xi}y_{\xi}^2 - \\ \quad 2y_{\xi}^2y_{\eta}x_{\xi\eta} + 2x_{\xi}y_{\xi}y_{\eta}y_{\xi\eta}) \\ \eta_{yy} = \frac{1}{j^3}(x_{\xi\xi}y_{\xi}x_{\eta}^2 + x_{\eta\eta}x_{\xi}^2y_{\xi} - y_{\xi\xi}x_{\xi}x_{\eta}^2 - y_{\eta\eta}x_{\xi}^3 - \\ \quad 2x_{\xi}x_{\eta}y_{\xi}x_{\xi\eta} + 2x_{\eta}x_{\xi}^2y_{\xi\eta}) \end{array} \right. \quad (57)$$

Il suffit alors d'effectuer le produit des deux matrices des équations (52) et (53) pour obtenir l'expression des coefficients de la matrice d'interpolation  $MI$  au point  $P$ .

#### II.2.2.4 TESTS DE COMPARAISON

Pour illustrer l'importance des modifications apportées sur la fonction de transformation, nous avons effectué deux tests de repère:

Le premier test consiste à approximer la dérivée première de la fonction:

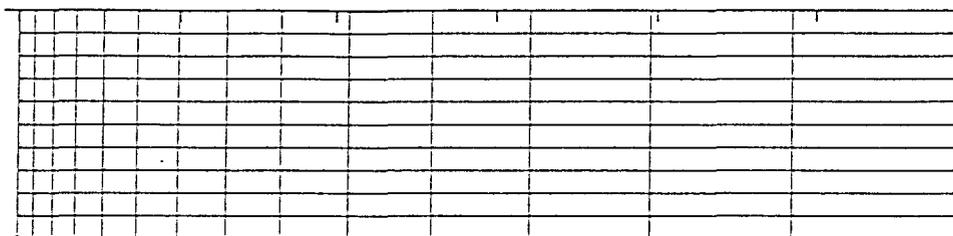
$$\Psi(x, y) = x^2 + y^2, \text{ soit } \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \Psi_y = 2.y.$$

en faisant varier le rapport entre deux pas successifs d'espace.

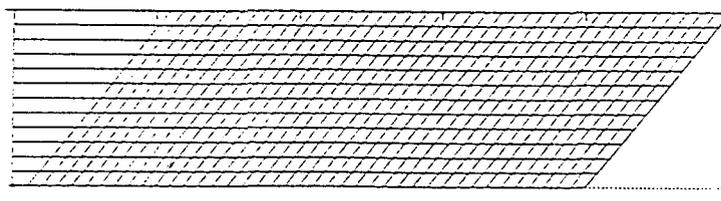
Le second test consiste à approximer le Laplacien de la fonction:

$$\Psi(x, y) = e^{(0.5\pi x)}. \cos(0.5\pi y), \text{ soit } \Delta \Psi = 0.$$

en faisant varier l'angle d'inclinaison entre deux lignes de coordonnées.



(a)



(b)

Fig 2.3 Maillages utilisés pour les tests

(a) maillage à pas variable (rapport de pas compris entre 0.5 et 2).

(b) maillage incliné d'un angle compris entre 30° et 90°.



Le tableau II.1 ci-dessous regroupe les résultats numériques obtenus par la méthode de Koshizuka et ceux obtenus par la méthode MMI modifiée. Comme on le remarque, la MMI classique proposée par Koshizuka, induit d'importants erreurs, lorsque le maillage est non régulier ou non-orthogonal.

$$\Psi(x, y) = x^2 + y^2, \text{ soit } \Psi_y = 2.y.$$

$r_y$	$\max \left  \frac{\Psi_{y_{ex}} - \Psi_{y(42)}}{\Psi_{y_{ex}}} \right $	$\max \left  \frac{\Psi_{y_{ex}} - \Psi_{y(51)}}{\Psi_{y_{ex}}} \right $
0.5	0.170	0.000
0.9	0.026	0.000
1.2	0.045	0.000
1.5	0.100	0.000
1.7	0.144	0.000
1.9	0.213	0.000
2.0	0.250	0.000

$$\Psi(x, y) = e^{(0.5\pi x)} \cdot \cos(0.5\pi y), \Delta \Psi_{ex} = 0.$$

$\theta$	$\max  \Delta \Psi_{(42)} $	$\max  \Delta \Psi_{(51)} $
30°	15.44	0.78.10 <sup>-06</sup>
45°	5.060	0.90.10 <sup>-07</sup>
60°	1.720	0.11.10 <sup>-06</sup>
70°	0.710	0.95.10 <sup>-07</sup>
80°	0.045	0.82.10 <sup>-07</sup>
90°	0.80.10 <sup>-07</sup>	0.80.10 <sup>-07</sup>

Tableau II.1 Comparaison des résultats obtenus par Koshizuka *et al*  
et par la MMI améliorée proposée.

## II.2.3 ETUDE DE L'ERREUR DE TRONCATURE

Tous les calculs vont être effectués dans le plan  $(\xi, \eta)$ . Dans la région transformée, le maillage est rectangulaire et la géométrie est formée d'un ensemble de cellules rectangulaires, ce qui facilite le traitement des équations de base.

### II.2.3.1 EXPRESSION DE L'ERREUR DE TRONCATURE POUR LA DERIVEE PREMIERE.

l'expression de la dérivée première  $\Psi_y$  est donnée par:

$$\Psi_\xi = x_\xi \Psi_x + y_\xi \Psi_y \quad (58)$$

$$\Psi_\eta = x_\eta \Psi_x + y_\eta \Psi_y \quad (59)$$

$$\Psi_y = \frac{1}{J} [x_\xi \Psi_\eta - x_\eta \Psi_\xi] \quad (60)$$

où  $J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$  le Jacobien de la transformation.

L'utilisation de la MMI améliorée, pour la discrétisation de l'équation (60) donne:

$$\Psi_y = \frac{1}{J} \left[ x_\xi \cdot \frac{\frac{(\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j})}{r_\eta} + r_\eta (\Psi_{i,j} - \Psi_{i,j-1})}{1+r_\eta} - x_\eta \cdot \frac{\frac{(\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i,j})}{r_\xi} + r_\xi (\Psi_{i,j} - \Psi_{i-1,j})}{1+r_\xi} \right] + E_y$$

où  $E_y$  est l'erreur de troncature commise. A l'aide d'un développement de Taylor on obtient:

$$E_y = \frac{1}{6J} [r_\eta x_\xi \Psi_{\eta\eta\eta} - r_\xi x_\eta \Psi_{\xi\xi\xi}] + \text{termes de plus haut degré}$$

$E_y$  peut se mettre sous la forme suivante:

$$E_y = E_{y_1} + E_{y_2} + E_{y_3}.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{y_1} = \frac{1}{6J}[(r_\eta x_\xi x_{\eta\eta\eta} - r_\xi x_\eta x_{\xi\xi\xi})\Psi_x + (r_\eta x_\xi y_{\eta\eta\eta} - r_\xi x_\eta y_{\xi\xi\xi})\Psi_y] \\ E_{y_2} = \frac{1}{2J}[(r_\eta x_\xi x_\eta x_{\eta\eta} - r_\xi x_\xi x_\eta x_{\xi\xi})\Psi_{xx} + (r_\eta(x_\xi x_\eta y_{\eta\eta} + x_\xi y_\eta x_{\eta\eta}) \\ \quad - r_\xi(x_\xi x_\eta y_{\xi\xi} + x_\eta y_\xi x_{\xi\xi}))\Psi_{xy} + (r_\eta x_\xi y_\eta y_{\eta\eta} - r_\xi x_\eta y_\xi y_{\xi\xi})\Psi_{yy}] \\ E_{y_3} = \frac{1}{6J}[(r_\eta x_\xi x_\eta^3 - r_\xi x_\eta x_\xi^3)\Psi_{xxx} + 3(r_\eta x_\xi y_\eta x_\eta^2 - r_\xi x_\eta y_\xi x_\xi^2)\Psi_{xxy} \\ \quad + 3(r_\eta x_\xi x_\eta y_\eta^2 - r_\xi x_\xi x_\eta y_\xi^2)\Psi_{xyy} + (r_\eta x_\xi y_\eta^3 - r_\xi x_\eta y_\xi^3)\Psi_{yyy}] \end{array} \right.$$

### 1- Erreur due à l'espacement irrégulier des points

Thompson *et al* (1982) /4/ ont montré que l'évaluation de l'erreur de troncature commise dans le plan physique  $(x, y)$  est beaucoup plus difficile à évaluer; cette erreur dépend non seulement de l'espacement irrégulier des points de la grille, mais aussi de l'écart à l'orthogonalité. Ces effets peuvent être illustrés dans le cas mono-dimensionnel (Fig 2.5), en effet:

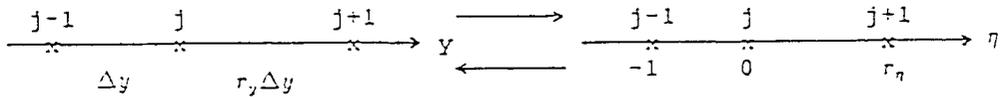


Fig 2.5 Transformation entre le domaine physique  $y$  et le domaine de calcul  $\eta$  (cas mono-dimensionnel).

Dans ce cas, on obtient, donc:

$$E_y = -\frac{r_n}{6} y_\eta^2 \Psi_{yyy} - \frac{r_n}{2} y_{\eta\eta} \Psi_{yy}$$

où:

$$y_\eta \simeq \frac{\left(\frac{y_{j+1}-y_j}{r_n}\right) + r_\eta(y_j - y_{j-1})}{(1 + r_\eta)} = \frac{1}{1 + r_\eta} \left(\frac{r_y}{r_n} + r_\eta\right) \Delta y \quad (61)$$

$$y_{\eta\eta} \simeq \frac{2\left(\frac{y_{j+1}-y_j}{r_\eta} - (y_j - y_{j-1})\right)}{(1 + r_\eta)} = \frac{2}{1 + r_\eta} \left(\frac{r_y}{r_\eta} - 1\right) \Delta y \quad (62)$$

a) Méthode de Koshizuka

Dans ce cas  $r_\eta = 1$ . Le premier terme est dû à l'espacement entre les deux points  $j - 1$  et  $j + 1$ . Le second terme apparaît du fait de l'irrégularité dans l'espacement des points et introduit une diffusion numérique. Ce second terme ainsi que son correspondant  $\frac{1}{3}y_{\eta\eta}\Psi_{yyy}$  interviennent dans l'erreur de troncature de  $\Psi_{yy}$  et ont été donnés par De Rivas (1972) /38/.

L'expression de  $\Psi_y$  est du second ordre si et seulement si  $y_{\eta\eta} \simeq y_\eta^2$  ( d'après les expressions de  $y_\eta$  et  $y_{\eta\eta}$ ), donc l'espacement entre les points de la grille ne doit pas changer trop rapidement. Forester (1981) /39/ suggère que le rapport entre deux pas d'espace successifs ne doit pas dépasser 2 (voir aussi Fletcher (1988) /5/).

b) Méthode MMI modifiée

Dans ce cas le rapport  $\frac{r_y}{r_\eta} = 1$ , ce qui entraîne  $y_{\eta\eta} = 0$ . La méthode MMI modifiée est du second ordre quelque soit le rapport de pas.

2- Erreur due à la non-orthogonalité.

Si le système est non-orthogonal, l'erreur de troncature  $E_y$  prend la forme suivante:

$$E_y = -\frac{r_\eta}{6}y_\eta^2\Psi_{yyy} - \frac{r_\eta}{2}y_{\eta\eta}\Psi_{yy} - \frac{r_\eta}{2}(\cot\theta)^2y_{\eta\eta}\Psi_{xx} - (\cot\theta)y_{\eta\eta}\Psi_{xy}$$

où  $\theta$  est l'angle d'intersection entre deux lignes de coordonnées suivant les deux directions. ( on note ici que  $\cot\theta = \frac{x_\eta}{y_\eta} = \frac{x_{\eta\eta}}{y_{\eta\eta}}$  ). Pour une précision du second ordre, et compte tenu des relations (61) et (62), il est nécessaire que:

$$y_{\eta\eta}\cot\theta \simeq y_\eta^2$$

Cette expression de l'erreur de troncature dans le cas mono-dimensionnel, coïncide parfaitement avec les résultats obtenus par Thompson *et al* /4/. Forester /39/ montre que l'angle d'intersection ne doit pas être inférieur à 45°.

### II.3 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons exposé les éléments de base de la méthode des matrices d'interpolation (MMI). Cette méthode a été proposée comme une nouvelle méthode de différences finies (MDF), elle se révèle intéressante d'une part, par sa simplicité dans la formulation et d'autre part, par son codage par rapport aux MDF en coordonnées généralisées.

La technique de transformation des coordonnées peut être introduite dans la MMI, cela permet de traiter les problèmes à géométrie complexe et d'éviter le problème inhérent des MDF: les maillages classiques en différences finies ont souvent le défaut de décrire imparfaitement les frontières du domaine.

Deux tests de repère ont été effectués. Ces tests montrent l'incapacité de la MMI classique (Koshizuka *et al*), à prendre en compte la non-uniformité ou la non-orthogonalité du maillage. Cela, nous a incité à introduire des modifications sur la fonction d'approximation utilisée par Koshizuka *et al*. Ces tests de repère et l'étude de l'erreur de troncature (néanmoins dans le cas mono-dimensionnel) montrent, l'importance de ces modifications.

L'avantage de la MMI par rapport aux méthodes des éléments finis (MEF) vient du fait qu'avec la MMI, le nombre de points nodals utilisé dans le système des équations algébriques reste constant. Cela nous permet de contrôler la matrice des équations algébriques et nous offre la possibilité d'utiliser des méthodes itératives classiques telles que l'ADI, SOR ou d'autres. Les méthodes itératives sont très attractives, car à l'inverse des méthodes directes, elles n'exigent ni stockage d'éléments ni l'inversion d'une matrice, donc le coût de calcul est moins élevé par rapport aux MEF et des MDF.

## CHAPITRE III

METHODES NUMERIQUES DE RESOLUTION
--------------------------------------

### III.1 METHODES NUMERIQUES DE RESOLUTION

#### III.1.1 INTRODUCTION

Dans la plupart des cas, la résolution par la voie analytique des équations de Navier-Stokes est impossible et il faut utiliser des méthodes numériques ou des approximations spécifiques.

Pour le calcul des écoulements incompressibles, nous avons deux possibilités de formulation.

- 1) Formulation des variables primitives  $\vec{U} = (u, v), p$ .
- 2) Formulation fonctions courant-vorticité.

La première formulation offre une facilité pour un passage d'un problème bi-dimensionnel en un problème tri-dimensionnel. Mais la difficulté principale rencontrée lors de l'utilisation de cette formulation est liée au traitement des conditions aux limites pour la pression. La formulation fonctions courant-vorticité pose un problème difficile à résoudre; celui de la détermination des conditions aux limites pour la fonction de vorticité. Un autre inconvénient de cette formulation est dû au fait que la pression ne peut être directement obtenue, il nous faut des calculs supplémentaires pour la déterminer.

Les méthodes numériques applicables aux équations de Navier-Stokes écrites sous forme de variables primitives, ont fait l'objet de développements intensifs au cours des 20 dernières années (Roache /36/, Richtmeyer /40/, Peyret & Taylor /2/, Fletcher /5/ ... etc).

La résolution numérique de ces équations, consiste à évaluer les variables indépendantes  $u$ ,  $v$ ,  $p$ , à l'instant  $t_{n+1} = (n + 1)\Delta t$  connaissant leurs valeurs à l'instant  $t_n = n\Delta t$ . Cette résolution doit être faite pour chaque point du maillage; elle nécessite donc une double discrétisation en espace et en temps.

Dans ce chapitre, nous proposons d'examiner la méthode S.M.A.C (Simplified-Marker-And-Cell) ordinaire (1970) /6/. Nous proposons par la suite une méthode de résolution des équations de Navier-Stokes écrites sous forme de variables primitives. L'algorithme de la méthode numérique proposée est basé sur la méthode S.M.A.C ordinaire, et modifiée pour être stable dans une configuration non-décalée (Non-staggered Grid).

### III.1.2 MODELE DE BASE: EQUATIONS DE NAVIER-STOKES

Avec les hypothèses d'un milieu homogène, isotrope et pour un écoulement isotherme, laminaire, les équations de conservation de la masse (continuité) et de conservation de la quantité de mouvement fournissent le modèle de base de Navier-Stokes.

- La première équation (de continuité), exige la conservation de la masse de la particule fluide et permet d'établir une relation entre certaines caractéristiques du fluide et ses mouvements, indépendamment des causes qui les produisent.
- La seconde équation (la conservation de la quantité de mouvement), permet d'établir des relations entre les caractéristiques du fluide, celles de ses mouvements et les causes qui les produisent (forces).

Pour un fluide incompressible ( $\rho(x, y, t) = \text{constante}$ ) et en absence des forces de gravité, les équations de Navier-Stokes instantanées dans le cas d'un écoulement bi-dimensionnel, s'écrivent:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (63)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (64)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (65)$$

Avec  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  est la viscosité cinématique du fluide.

Les équations de Navier-Stokes (+ les conditions aux limites), dans le cas d'un écoulement laminaire, forment un système fermé, c'est à dire que nous disposons d'autant d'équations que d'inconnues.

### III.1.3 METHODE S.M.A.C ORDINAIRE

La méthode S.M.A.C a été proposée par Amsden & Harlow (1970) /6/. Sa procédure de résolution est basée sur les méthodes à pas fractionnaires de Marchouk (1980) /41/. Dans le premier pas et après une discrétisation temporelle des équations (64-65), on calcule la valeur provisionnelle de la vitesse par:

$$U_i^* = U_i^n - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial x_i} + \Delta t(\text{convection})^n + \Delta t(\text{diffusion})^n \quad (66)$$

Notons que le second membre de l'équation (66) est évalué au pas de temps  $n$ .

Dans le second pas, on procède à une correction de la pression et de la vitesse  $U_i^*$ . En considérant les deux équations suivantes:

$$U_i^{n+1} = U_i^* - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^c}{\partial x_i} \quad (67)$$

$$\frac{\partial U_i^{n+1}}{\partial x_i} = 0 \quad (68)$$

où  $p^c$  est une correction de la pression. Ces deux équations peuvent être combinées et on obtient ainsi l'équation de Poisson pour  $p^c$ :

$$\frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial^2 p^c}{\partial x_i^2} = \frac{\partial U_i^*}{\partial x_i} \quad (69)$$

$$p^{n+1} = p^n + p^c \quad (70)$$

### REMARQUE

L'utilisation d'un schéma centré du 2<sup>ème</sup> ordre pour la discrétisation de l'équation (69) dans le cas mono-dimensionnel, présente une relation entre les valeurs  $U_{i-1}^*$  et  $U_{i+1}^*$  soit:

$$\frac{\Delta t}{\rho} \frac{p_{i+1}^c - 2p_i^c + p_{i-1}^c}{\Delta x^2} = \frac{U_{i+1}^* - U_{i-1}^*}{2\Delta x}$$

donc à partir de (66) qui fait intervenir le terme  $-\frac{\partial p}{\partial x}$ , présente une relation entre les valeurs  $p_{i-2}^n, p_i^n$  et  $p_{i+2}^n$  soit:

$$U_i^* = U_i^n - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{p_{i+1}^n - p_{i-1}^n}{2\Delta x} - \Delta t \cdot U_i^n \cdot \frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2\Delta x} + \nu \Delta t \cdot \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

Cela, comme Patankar (1980) /42/, l'a mentionné provoque des oscillations dans la résolution de l'équation de Poisson et par suite produit un champ de pression et de vitesse complètement irréaliste. Pour remédier à ce problème, on a les possibilités suivantes:

- i) Soit l'utilisation d'une grille de calcul décalée, où les variables sont disposées comme dans la figure 3.1 ci-dessous.

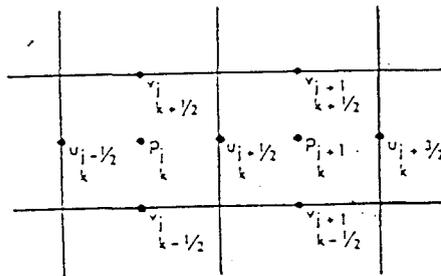


Fig 3.1. Grille de calcul décalée

- ii) Soit de modifier l'algorithme de résolution précédent: En éliminant les termes de pression présents dans l'équation de quantité de mouvement. Un exemple d'application de cette technique est donné par Kim *et al* (1987) /43/ et J. Rutledge & C.A. Sleicher (1993) /44/.

### III.1.4 METHODE S.M.A.C MODIFIEE

L'utilisation d'une grille décalée (Fig. 3.1), présente l'avantage de ne rien imposer pour la pression sur les frontières du domaine. Cependant, elle présente un désavantage pour la vitesse, où seulement l'une des composantes de la vitesse est définie sur chaque face de la frontière (Fig. 3.1). Donc il est nécessaire d'employer un schéma aux différences décentré au voisinage des frontières (Peyret & Taylor /2/ pp. 155-156).

Nous avons donc opté pour le second choix: la modification de la méthode S.M.A.C ordinaire et l'utilisation d'une grille non-décalée. En s'inspirant de la méthode de la projection proposée indépendamment par Chorin (1968) /45/ et par Temam (1969) /46/. La procédure de résolution proposée ici repose sur les deux étapes suivantes:

#### 1- Etape de convection-diffusion:

Dans cette étape, et après une discrétisation temporelle, on calcule explicitement la valeur provisionnelle de la vitesse  $U_i^*$  en excluant le gradient de pression présent dans (64- 65). On obtient:

$$\frac{U_i^* - U_i^n}{\Delta t} + (convection)^n + (diffusion)^n = 0 \quad (71)$$

Notons que les termes de convection et de diffusion présents dans (71) sont prises au pas de temps  $n$ .

## 2- Etape de correction:

Dans cette deuxième étape, on procède à une correction de la pression et de la valeur de  $U_i^*$ , en utilisant les deux équations suivantes:

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^*}{\Delta t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} = 0 \quad (72)$$

$$\frac{\partial U_i^{n+1}}{\partial x_i} = 0 \quad (73)$$

En prenant par la suite la divergence de l'équation (72) et en utilisant l'équation (73) qui n'est autre que la forme implicite de l'équation de continuité, on obtient l'équation de Poisson:

$$\frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_i^2} = \frac{\rho}{\Delta t} \frac{\partial U_i^*}{\partial x_i} \quad (74)$$

Qui peut se mettre sous la forme:

$$\frac{\partial^2 p^c}{\partial x_i^2} = -\frac{\partial^2 p^n}{\partial x_i^2} + \frac{\rho}{\Delta t} \frac{\partial U_i^*}{\partial x_i} \quad (75)$$

avec

$$p^{n+1} = p^n + p^c \quad (76)$$

où  $p^c$  est une correction de la pression.

L'équation (75) après discrétisation par la MMI, lie le point de calcul uniquement à quatre points voisins (cas bi-dimensionnel) et peut être résolue par une méthode telle que l'ADI ou SOR. Une fois obtenue la valeur de  $p^{n+1}$ , on procède à une correction de la vitesse à l'aide de l'équation suivante:

$$U_i^{n+1} = U_i^* - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} \quad (77)$$

Les conditions aux limites pour la pression sont obtenues, en projetant l'équation (72) suivant la normale extérieure  $N$  à la frontière. Nous obtenons la condition de Neumann:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial N}\right)_\Gamma^{n+1} = -\frac{1}{\Delta t}(U_\Gamma^{n+1} - U_\Gamma^*) \cdot N$$

Remarquons que dans ce cas la résolution de l'équation de Poisson (74) présente seulement une relation entre les valeurs  $p_{i+1}^n$ ,  $p_i^n$  et  $p_{i-1}^n$ .

## III.2 TRAITEMENT DES TERMES DE CONVECTION

### III.2.1 CAS MONO-DIMENSIONNEL

Le processus de convection présent dans l'équation de quantité de mouvement et les équations de transport (modélisation des écoulements turbulents chapitre V) est traité par un schéma de Leith (1965) (Roache /36/). Cette méthode a été introduite par Noh & Protter (1963) /47/ dans sa version mono-dimensionnelle. Considérons le problème de convection suivant ( $u$  est constant):

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + u \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (78)$$

La méthode de Leith est basée sur le développement de Taylor à l'ordre 3:

$$\psi_i^{n+1} = \psi_i^n + \Delta t \frac{\partial \psi_i^n}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 \psi_i^n}{\partial t^2} + O(\Delta t^3) \quad (79)$$

En utilisant:  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$  on obtient:

$$\psi_i^{n+1} = \psi_i^n - u \Delta t \frac{\partial \psi_i^n}{\partial x} + \frac{u^2 \Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 \psi_i^n}{\partial x^2} + O(\Delta t^3, \Delta x^2) \quad (80)$$

L'utilisation d'un schéma centré du 2<sup>ème</sup> ordre et après une analyse de stabilité de Von Neumann, on montre que ce schéma est stable si la condition (CFL)  $C = u \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$  est satisfaite (où  $C$  est le nombre de courant).

Pour l'évaluation des erreurs de phase et de dispersion de ce schéma, on peut consulter Fromm (1968) /48/ pour les détails.

### III.2.2 CAS BI-DIMENSIONNEL

Un point essentiel de la méthode de Leith est son adaptation au cas bi-dimensionnel. Considérons l'équation de convection pure suivante:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + u \frac{\partial \psi}{\partial x} + v \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$$

Leith (Roache) /36/ propose une extension du schéma (80) dans le cas bi-dimensionnel.

$$\begin{aligned} \psi_{i,j}^{n+1} = & \psi_{i,j}^n - \frac{1}{2}C_x(\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i-1,j}^n) + \frac{1}{2}C_x^2(\psi_{i+1,j}^n - 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i-1,j}^n) \\ & - \frac{1}{2}C_y(\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j-1}^n) + \frac{1}{2}C_y^2(\psi_{i,j+1}^n - 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i,j-1}^n) \end{aligned} \quad (81)$$

Qu'on peut écrire sous la forme suivante:

$$\psi_{i,j}^{n+1} = \psi_{i,j}^n - \frac{1}{2}C_x\delta_x(\psi) + \frac{1}{2}C_x^2\delta_x^2(\psi) - \frac{1}{2}C_y\delta_y(\psi) + \frac{1}{2}C_y^2\delta_y^2(\psi) \quad (82)$$

Ce schéma, est stable (Leith 1965), si les conditions,  $C_x = u\frac{\Delta t}{\Delta x}$ ,  $C_y = v\frac{\Delta t}{\Delta y} \leq 1$  sont satisfaites.

Nous avons adopté le schéma de Leith (Eq. 81) pour le traitement des termes de convection présents dans les équations de quantité de mouvement et de transport.

### III.3 DISCRETISATION SPATIALE

La discrétisation des équations (71-77) est faite par la méthode des matrices d'interpolation (chapitre II, paragraphe II.2.2). Après le calcul des coefficients notés  $coeff(i, j, k)$  des matrices d'interpolation en tout point du maillage, où les indices  $i, j, k$  désignent respectivement le numéro du point voisin, l'opérateur de dérivation ( $1 \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x}, 2 \longrightarrow \frac{\partial}{\partial y}, 3 \longrightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}, 4 \longrightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ) et le numéro du point de calcul.

La discrétisation des équations (71-77) se fait donc d'une manière systématique, ce qui facilite l'écriture et la lecture du programme. A titre d'exemple nous présentons la discrétisation des termes de convection de l'équation de quantité de mouvement (64):

$$U_i^{n+1} = U_i^n - (u\Delta t) \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_i^n - (v\Delta t) \left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_i^n + \frac{(u\Delta t)^2}{2} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|_i^n + \frac{(v\Delta t)^2}{2} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right|_i^n \quad (83)$$

L'utilisation de la MMI fournit la discrétisation suivante:

$$\begin{aligned}
& UN(IJ) = U(IJ) \\
& \& -DT* U(IJ) * ( \\
& \& \quad coeff(1, 1, IJ) * (U(neigh(1, IJ)) - U(IJ)) \\
& \& + \quad coeff(2, 1, IJ) * (U(neigh(2, IJ)) - U(IJ)) \\
& \& + \quad coeff(3, 1, IJ) * (U(neigh(3, IJ)) - U(IJ)) \\
& \& + \quad coeff(4, 1, IJ) * (U(neigh(4, IJ)) - U(IJ)) \\
& \& -DT* V(IJ) * ( \\
& \& \quad coeff(1, 2, IJ) * (U(neigh(1, IJ)) - U(IJ)) \\
& \& + \quad coeff(2, 2, IJ) * (U(neigh(2, IJ)) - U(IJ)) \\
& \& + \quad coeff(3, 2, IJ) * (U(neigh(3, IJ)) - U(IJ)) \\
& \& + \quad coeff(4, 2, IJ) * (U(neigh(4, IJ)) - U(IJ))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& UN(IJ) = UN(IJ) \\
& \& +DT* U(IJ) * DT * U(IJ)/2.0 * ( \\
& \& \quad coeff(1, 3, IJ) * (U(neigh(1, IJ)) - U(IJ)) \\
& \& + \quad coeff(2, 3, IJ) * (U(neigh(2, IJ)) - U(IJ)) \\
& \& + \quad coeff(3, 3, IJ) * (U(neigh(3, IJ)) - U(IJ)) \\
& \& + \quad coeff(4, 3, IJ) * (U(neigh(4, IJ)) - U(IJ)) \\
& \& +DT* V(IJ) * DT * V(IJ)/2.0 * ( \\
& \& \quad coeff(1, 4, IJ) * (U(neigh(1, IJ)) - U(IJ)) \\
& \& + \quad coeff(2, 4, IJ) * (U(neigh(2, IJ)) - U(IJ)) \\
& \& + \quad coeff(3, 4, IJ) * (U(neigh(3, IJ)) - U(IJ)) \\
& \& + \quad coeff(4, 4, IJ) * (U(neigh(4, IJ)) - U(IJ))
\end{aligned}$$

où  $neigh(i, IJ)$  représente un tableau dont les éléments sont les numéros des 4 points voisins du point de calcul  $IJ$ .

### III.4 CONDITIONS AUX LIMITES

Les conditions aux limites sont d'un grand intérêt, car elles exigent un traitement particulier pour chaque point frontière du domaine d'étude.

Il existe deux catégories de conditions aux limites:

- Les conditions aux limites physiques: sont généralement dictées par la physique du problème (présence de paroi solide).
- Les conditions aux limites imposées sur les frontières où les caractéristiques de l'écoulement ne sont pas connues a priori; par exemple: entrée, sortie.

## 1- PAROIS

Dans le cas des écoulements visqueux, les conditions aux limites physiques sur les parois sont les suivantes:

- Condition de non-glissement (adhérence): toutes les composantes du vecteur vitesse sont prises égales à celles de la vitesse de la paroi:

$$\vec{U}|_r = \vec{U}_{paroi}$$

où  $\vec{U}_{paroi}$  vitesse de déplacement de la paroi. Elles sont prises nulles dans le cas particulier où la paroi est immobile.

## 2- SORTIE

A la sortie, on impose la pression, la composante tangentielle de la vitesse est nulle.

Pour les autres grandeurs scalaires  $\Phi$ , on utilise une condition de type Neumann ( $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$ ). Ces conditions sont basées sur l'hypothèse de l'écoulement établi.

## 3- ENTREE

Les conditions aux limites à l'entrée: La composante tangentielle de la vitesse est nulle.

- Si la condition de Dirichlet est imposée pour la pression, dans ce cas la valeur de la composante normale de la vitesse est calculée à partir de la condition de Neumann.
- Si on impose le profil de vitesse à l'entrée. La condition suivante  $\frac{\partial^2 v}{\partial n^2} = 0$  est utilisée pour le calcul de la pression. Cette condition annule la divergence de la vitesse, ce qui satisfait bien l'équation de continuité.

## 4- SYMETRIE

Les conditions classiques imposées sur l'axe de symétrie de l'écoulement sont:

- La composante tangentielle de la vitesse est nulle.
- Les dérivées normales de toutes les autres grandeurs scalaires sont nulles.

### III.5 TRAITEMENT NUMERIQUE DES CONDITIONS AUX LIMITES

Le traitement numérique des conditions aux limites par la MMI, exige un calcul de points fictifs sur les frontières du domaine de l'écoulement. On insère par la suite, un plan auxiliaire  $(\alpha, \beta)$ , entre les plans  $(x, y)$  et  $(\xi, \eta)$  pour calculer les coordonnées de ces points fictifs.

#### III.5.1 PAROIS:

Pour les points, situés sur les frontières parois, un système de coordonnées auxiliaires  $(\alpha, \beta)$  est inséré entre les deux systèmes  $(x, y)$  et  $(\xi, \eta)$  (Fig 3.2). Comme, les conditions aux limites pour la vitesse sur les parois, sont données en tant que composantes tangentielle et normale, le système  $(\alpha, \beta)$  est introduit pour calculer de telles composantes.

Le système  $(x, y)$  subit une rotation, telle que la composante de la vitesse suivant la direction  $\beta$  soit égale à zéro.

Trois points voisins  $NP_2(\alpha_2, \beta_2)$ ,  $NP_3(\alpha_3, \beta_3)$  et  $NP_4(\alpha_4, \beta_4)$  ( $(\alpha_i, \beta_i)$  sont les coordonnées du point  $NP_i$  dans le système  $(\alpha, \beta)$ ) sont localisés. Le point  $NP_1(\alpha_1, \beta_1)$  est considéré comme un point fictif. Le système  $(\alpha, \beta)$  est défini de telle façon que la composante  $\beta_2$  soit égale à  $\beta_3$ . Les coordonnées du point fictif  $NP_1$  sont données par:

$$\alpha_1 = \alpha_4$$

$$\beta_1 = -\beta_4$$

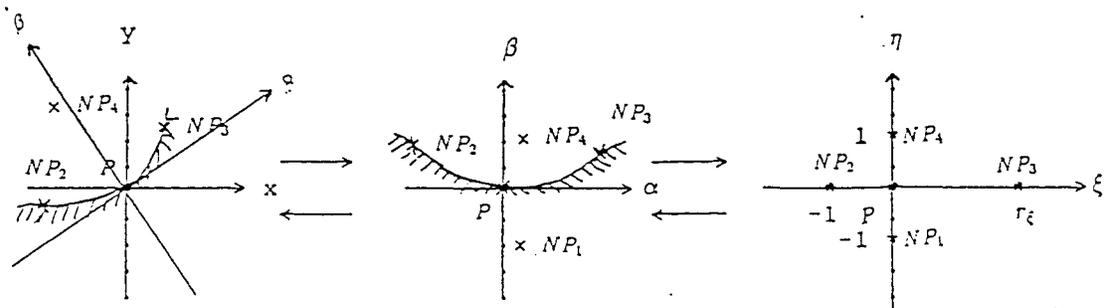


Fig 3.2 Insertion d'un système de coordonnées auxiliaires  $(\alpha, \beta)$   
entre les plans  $(x, y)$  et  $(\xi, \eta)$

Dans ce cas, la composante normale de la vitesse  $u_\beta$  est égale à zéro (le plan auxiliaire  $(\alpha, \beta)$  est défini de cette façon). Pour la composante tangentielle de la vitesse  $u_\alpha$  est égale à la vitesse de la paroi nous adoptons donc la condition d'adhérence ( $u_\alpha = u_p$  où  $u_p$  est la vitesse de la paroi).

### III.5.2 ENTREE-SORTIE:

Trois points voisins  $NP_1, NP_4$  et  $NP_3$  sont localisés. Le point  $NP_2$  est considéré comme un point fictif. Les coordonnées de ce point sont données par:

$$\alpha_2 = -\alpha_3$$

$$\beta_2 = \beta_3$$

Suivant que la condition de Dirichlet est sélectionnée pour la vitesse ou la pression, la procédure de résolution suit les étapes suivantes:

- Condition de Dirichlet est imposée pour la vitesse

- i) La valeur intermédiaire  $U_{paroi}^*$  est calculée en utilisant la condition de Neumann  $\frac{\partial U}{\partial n} = 0$ .
- ii) Dans l'équation de Poisson, on impose  $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$  sur toutes les frontières du domaine.
- iii) La valeur de  $p_{paroi}^{n+1}$  est calculée en utilisant l'équation (77) et  $\frac{\partial^2 p}{\partial n^2} = 0$ .

- Condition de Dirichlet est imposée pour la pression

- i) La valeur intermédiaire  $U_{paroi}^*$  est calculée en utilisant la condition de Neumann  $\frac{\partial U}{\partial n} = 0$ .
- ii) Dans l'équation de Poisson, les conditions de Dirichlet sont imposées.
- iii) La valeur de  $U_{paroi}^{n+1}$  est calculée en utilisant l'équation (77) et  $\frac{\partial^2 p}{\partial n^2} = 0$ .

### III.5.3 SYMETRIE

Trois points  $NP_1$ ,  $NP_2$  et  $NP_3$  sont localisés. Le point  $NP_4$  est considéré dans ce cas comme un point fictif. Les coordonnées de ce point sont données par:

$$\begin{aligned}\alpha_4 &= \alpha_1 \\ \beta_4 &= -\beta_1\end{aligned}$$

Dans ce cas, la composante normale de la vitesse est prise égale à zéro. Pour les autres grandeurs scalaires, la condition de Neumann est sélectionnée.

### III.6 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons proposé, une méthode numérique de résolution des équations de Navier-Stokes pour un écoulement bi-dimensionnel, incompressible et visqueux. L'algorithme de résolution de la méthode proposée est basé sur le principe de la méthode S.M.A.C et modifié pour être stable dans une configuration non-décalée.

Nous nous sommes concentré par la suite sur le traitement des termes de convection présents dans les équations de quantité de mouvement et de trans-

port. Pour cela, nous avons adopté le schéma de Leith. Ce schéma est stable, si le critère de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) est satisfait. Ce schéma, bien entendu, favorise l'utilisation de la MMI.

## CHAPITRE IV

### TESTS DE VALIDATION EN LAMINAIRE

Nous avons, dans un premier temps, effectué tous nos tests de validation en laminaire. La principale raison de ce choix est d'éviter que des erreurs dues aux différents schémas numériques, ne soient attribués aux modèles de turbulence.

Les tests de validation portent sur les capacités de la méthode:

- à atteindre un état stationnaire (régime établi).
- à donner un bon profil de vitesse (vérification de l'équation de conservation de la quantité de mouvement).
- à donner une bonne répartition de la pression (vérification de la résolution de l'équation de Poisson).
- s'assurer de la convergence de la méthode (calcul de l'écart-type [Root-Meaning-Square (rms)] de la vitesse:

$$\| U_{calculée} - U_{exacte} \|_{rms} = \sqrt{\frac{(U_{calculée} - U_{exacte})^2}{n_x \times n_y}}.$$

#### IV.1 ECOULEMENT VISQUEUX DANS UN CANAL.

La première configuration testée et la plus simple est le canal de largeur infinie. L'analyse de ce type de problème est fondamental en mécanique des fluides. On considère alors, l'écoulement établi d'un fluide incompressible entre deux plaques planes de largeur infinie (Fig 4.1).

##### ECOULEMENT PLAN DE POISEUILLE

Les deux parois sont au repos, donc  $u = 0$  pour  $y = 0$  et  $y = h$  (où  $h$  est la hauteur du canal. Cet écoulement fournit la solution analytique suivante:

$$u = -\frac{1}{2\mu} \frac{\Delta p}{\Delta x} (hy - y^2) \quad (84)$$

La répartition des vitesses est parabolique.

a) Principales caractéristiques

- Ecoulement visqueux dans un canal.
- Fluide: Air
- Régime laminaire
- Masse volumique:  $1.166 \text{ kg/m}^3$
- Viscosité moléculaire:  $1.56 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$

b) Géométrie

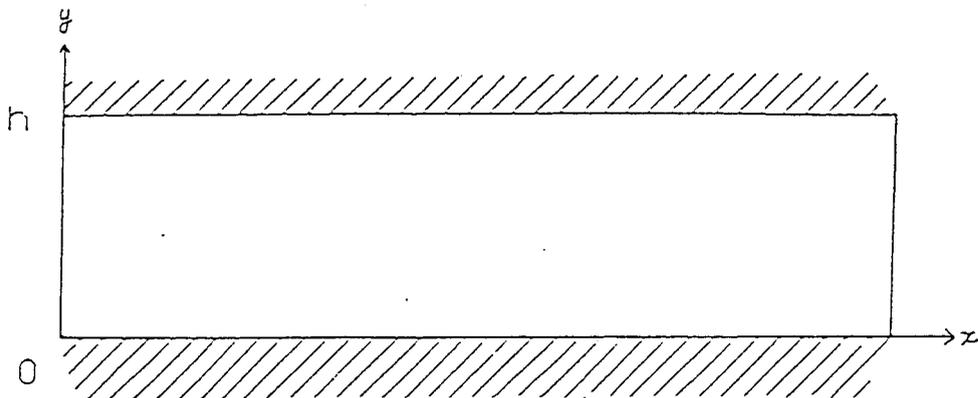


Fig 4.1 Configuration Géométrique du canal.

c) Conditions aux limites

- Parois solides (condition de non-glissement):  $u = v = 0$ .
- Entrée: Pression constante ou profil uniforme de la vitesse.
- Sortie: Pression constante.

d) Maillages

Les calculs ont été effectués avec des maillages variés et ceci afin de mettre en évidence l'influence de l'existence ou non de mailles "déformées" (non

rectangulaires), ainsi que le bénéfice apporté par les améliorations sur la MMI. trois maillages sont présentés sur la figure (4.2).

e) Résultats:

La figure (4.3) présente le RMS de la vitesse (maillage 1).

La figure (4.4) présente le profil de vitesse obtenu par la MMI et comparé à celui obtenu par la relation (84).

La figure (4.5) présente la répartition de la pression pour l'écoulement de Poiseuille.

La figure (4.6) présente le RMS de la vitesse (maillage 2).

La figure (4.7) présente le profil de vitesse obtenu par la MMI et comparé à celui obtenu par la relation (84).

La figure (4.8) présente les RMS de la vitesse ( maillage 3) obtenus par la MMI modifiée et celle de Koshizuka.

La figure (4.9) présente les profils de la vitesse obtenus par la MMI modifiée et celle de Koshizuka en comparaison avec la solution fournie par la relation (84).

La figure (4.10) présente le champ de vitesse obtenu par la MMI modifiée.

La figure (4.11) présente le champ de vitesse obtenu par la MMI modifiée (condition à l'entrée: profil uniforme de la vitesse).

f) Discussion

Le but des tests ci-dessus est de montrer que la MMI est capable de prédire l'écoulement dans un canal et de bien mettre en évidence les améliorations apportées à la MMI. Ce problème simple et fondamental est intéressant pour toute méthode numérique d'une part, il fournit une solution analytique et d'autre part, nous permet de vérifier la résolution de l'équation de Poisson pour la pression.

Les tests effectués montrent la parfaite coïncidence entre les résultats numériques obtenus par la MMI modifiée et ceux obtenus analytiquement.

le cas test effectué avec le maillage 3 montre, l'incapacité de la méthode de Koshizuka à simuler correctement un tel écoulement, lorsque les cellules de la maille de calcul ne sont pas rectangulaires et peut générer de grandes erreurs (de l'ordre de 50 %) (écart-type (rms) Fig 4.8), par contre il montre l'importance des modifications introduites dans la MMI.

L'examen des RMS montre que la convergence de la méthode est assurée au bout de 600 itérations dans le cas d'un maillage régulier (maillage 1). Ce RMS augmente, si les cellules de la maille de calcul sont déformées (7000 itérations dans le cas du maillage 3).

ÉCOULEMENT VISQUEUX DANS UN CANAL

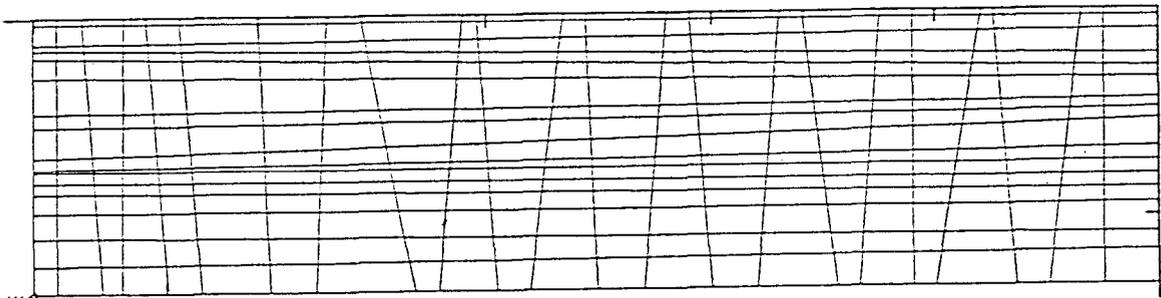
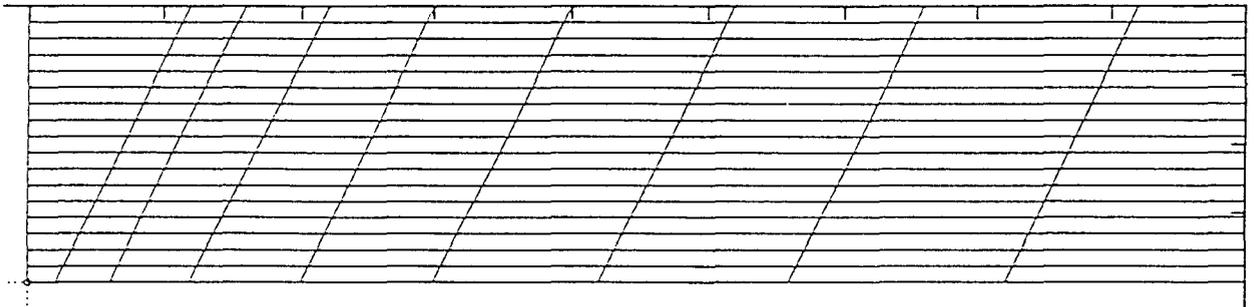
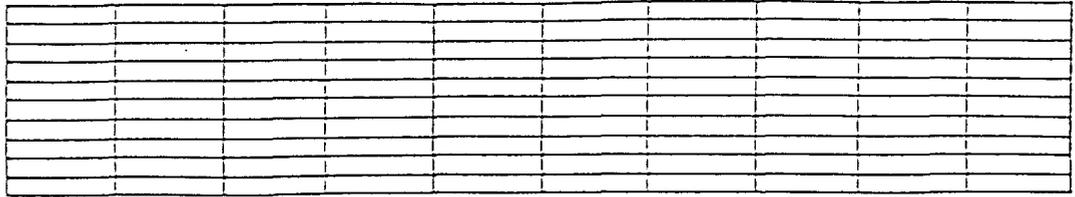


Fig 4.2 Maillages pour le canal bidimensionnel.

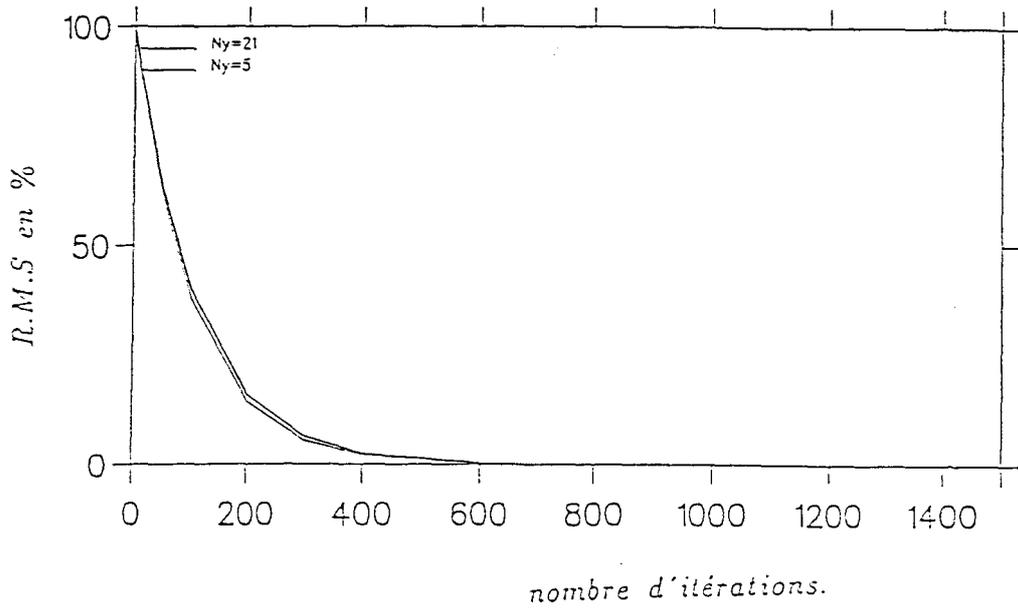


Fig 4.3 RMS de la vitesse (maillage 1).

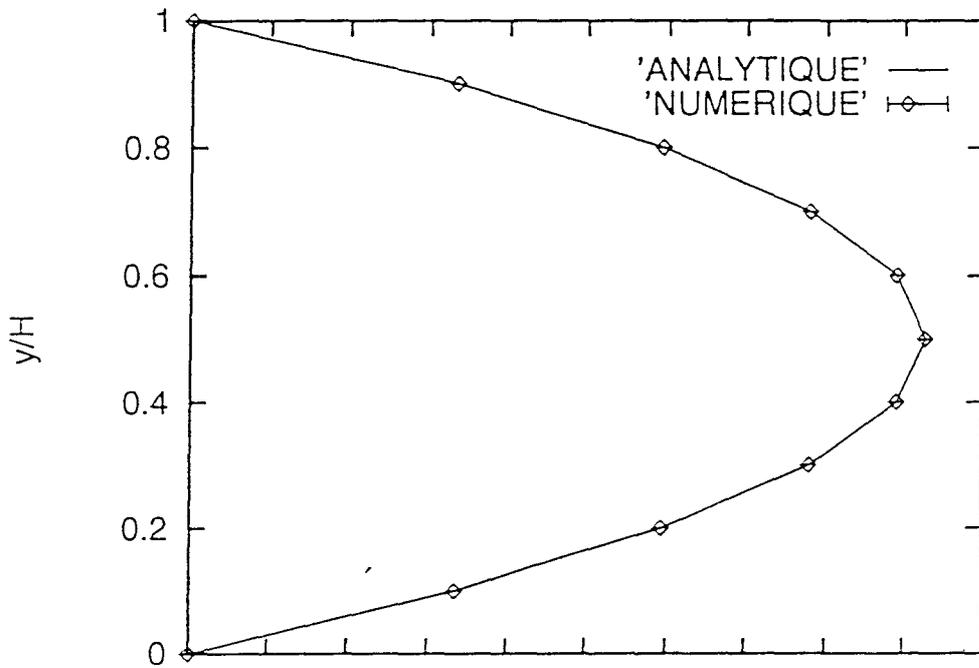


Fig 4.4 Profil de la vitesse (maillage 1).

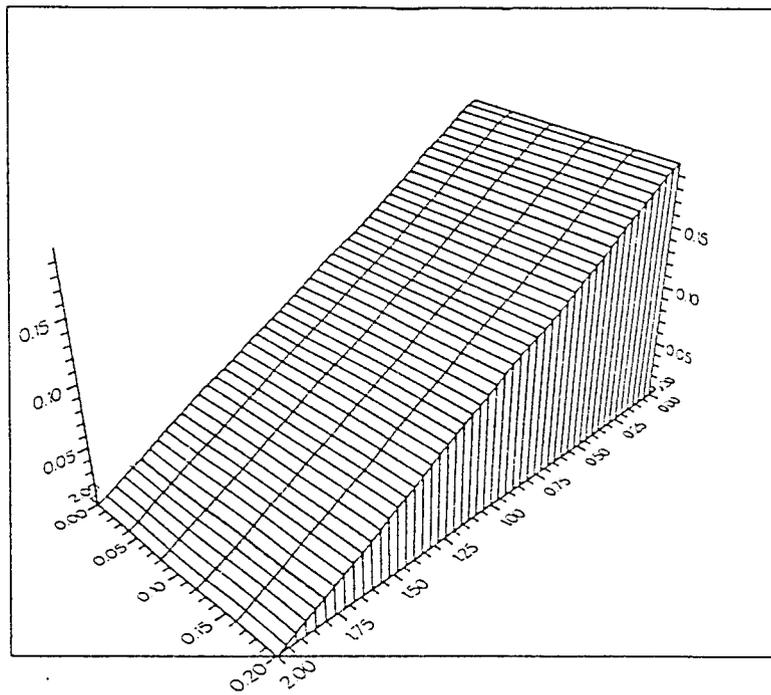


Fig 4.5 Répartition de la pression (maillage 1).



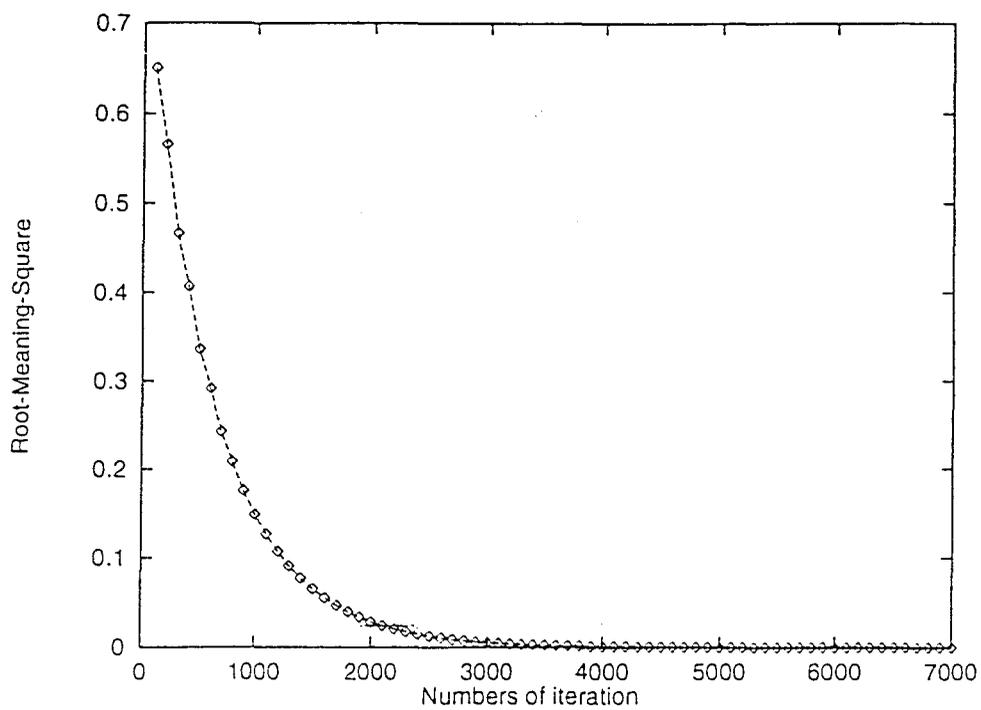


Fig 4.6 RMS de la vitesse (maillage 2).

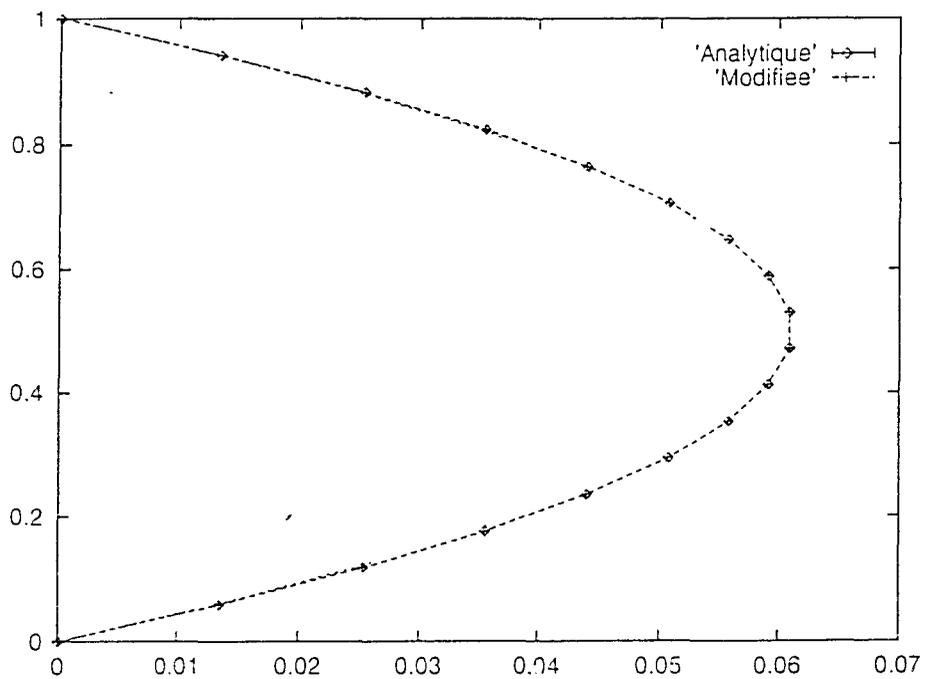


Fig 4.7 Profil de la vitesse (maillage 2).



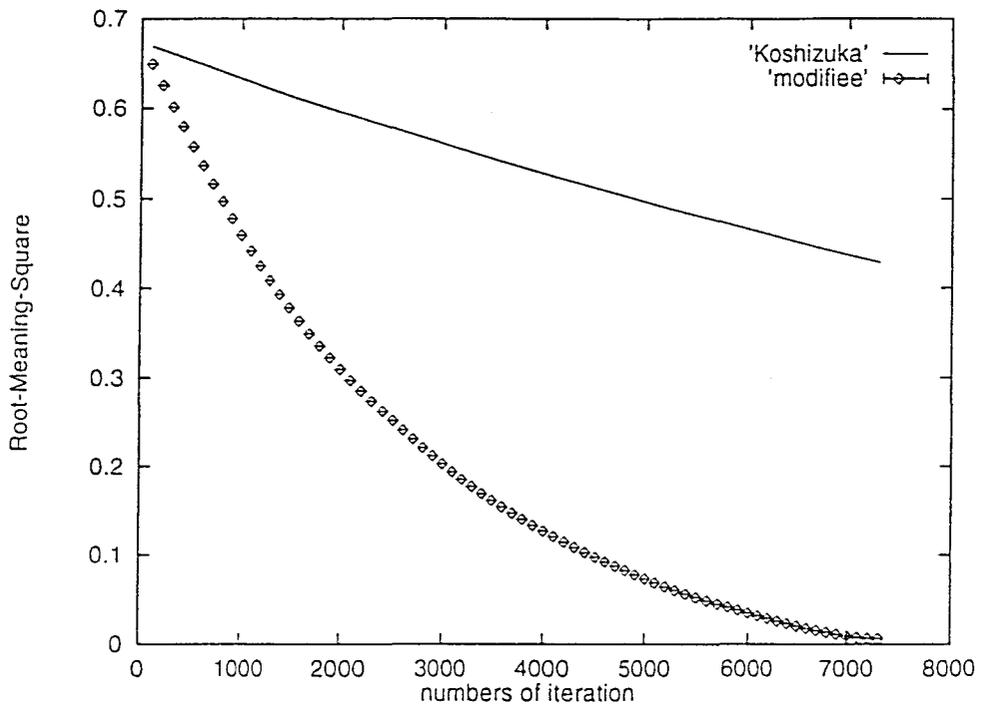


Fig 4.8 RMS de la vitesse (maillage 3).

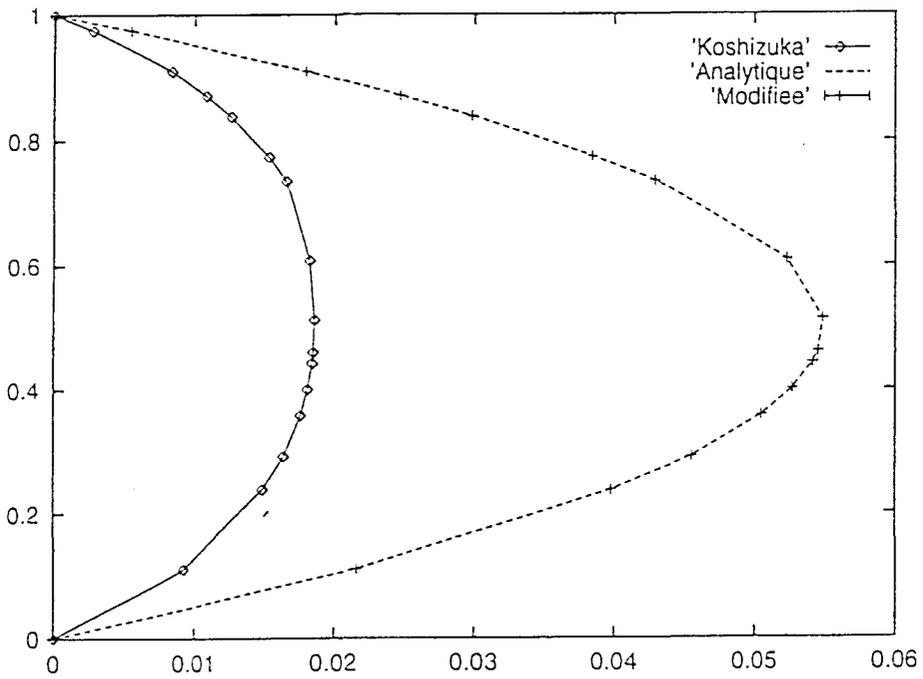


Fig 4.9 Profils de la vitesse (maillage 3).



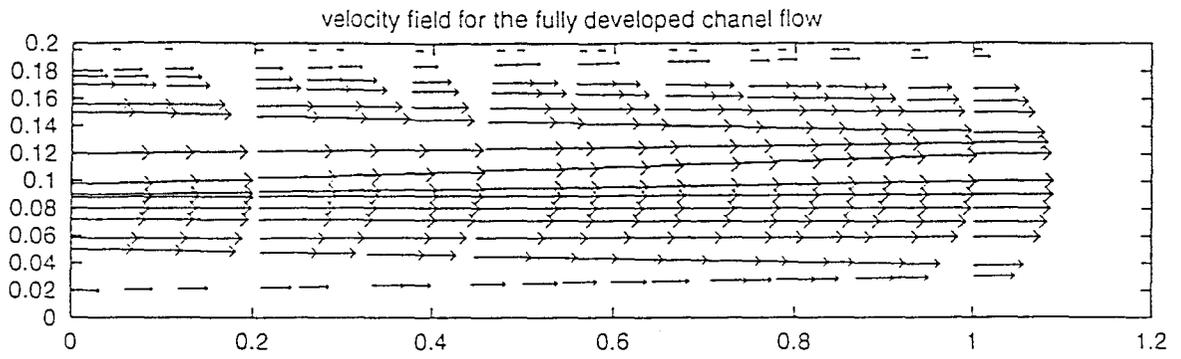


Fig 4.10 Champ de vitesse (maillage 3).

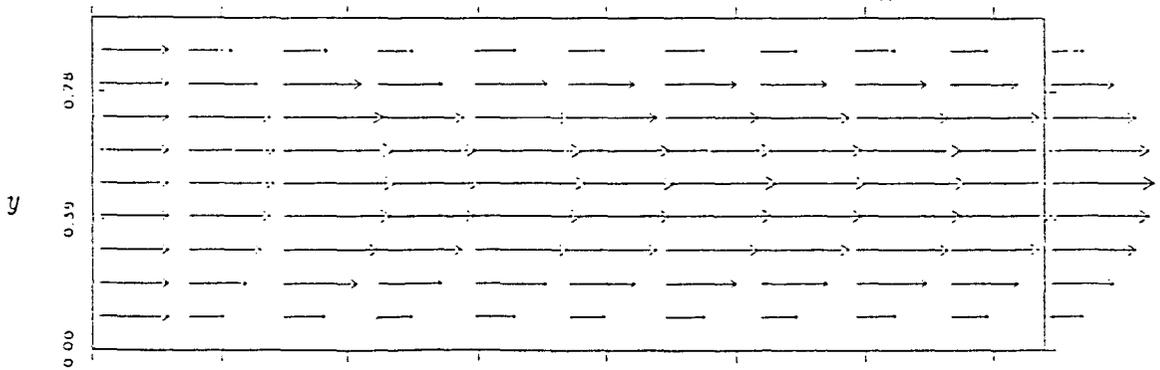


Fig 4.11 Evolution du profil de la vitesse  
(profil uniforme à l'entrée).

## IV.2 MARCHE DESCENDANTE

La deuxième configuration testée est l'écoulement en aval d'une marche descendante (Fig 4.12). L'analyse de cet écoulement est un test important qui permet de montrer l'aptitude de la méthode à simuler correctement une zone de recirculation. Ce type d'écoulement a fait l'objet de plusieurs investigations autant sur le plan numérique qu'expérimental. Ceci est dû essentiellement au fait que, même si la configuration géométrique est simple, l'écoulement met en jeu des caractéristiques très compliquées et ses applications industrielles sont nombreuses (diffuseur, brûleur ... etc).

La hauteur de la marche testée est notée  $h$ . La zone amont a une dimension transversale de  $2h$  et la zone aval de  $H = 3h$  (ce qui fournit un rapport  $\frac{H}{H-h} = 1.5$ ). La largeur de la zone amont est de  $10h$  et celle de la zone aval est de  $30h$ .

Le nombre de Reynolds associé à cette configuration est noté  $Re = \frac{U_{max} \cdot (H-h)}{\nu}$  avec  $U_{max}$  la vitesse maximale dans la zone amont.

En aval de la marche, du fait de l'élargissement brusque, il se produit un décollement de l'écoulement et une zone de recirculation. Le test effectué sur cet écoulement est la mesure de la longueur de recollement. Cette longueur notée ici  $X_r$  peut, entre autre en ce qui concerne la simulation numérique, être déterminée par l'emplacement où la composante longitudinale de la vitesse à la paroi change de signe.

### a) Principales caractéristiques

- Ecoulement visqueux derrière une marche.
- Fluide: Eau
- Régime laminaire.
- Masse volumique:  $1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ .
- Viscosité moléculaire:  $1.0 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ .
- Pas du temps  $\Delta t = 0.0018\text{s}$ .
- Nombre de points: 1533 noeuds.

- Nombre de Reynolds: 150. 200. 300. 500. 750. 1000.

b) Géométrie

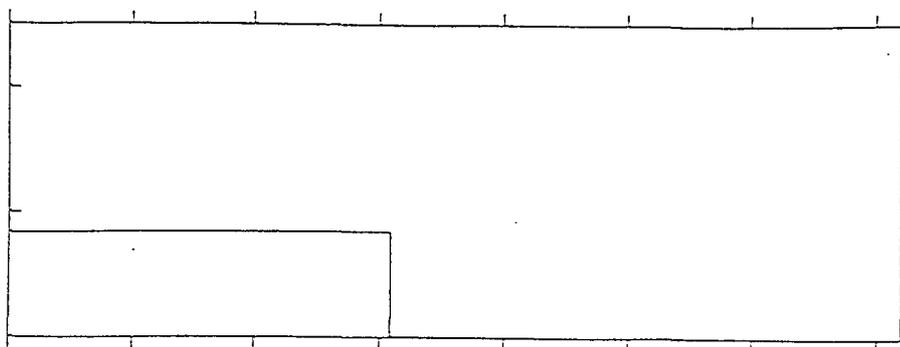


Fig 4.12 Configuration géométrique de la marche descendante.

c) Maillage

Dans ce cas de figure, le calcul a été effectué avec un maillage généré par un programme personnel basé sur la technique numérique de génération des maillages B.H. Gilding (1988) /49/, et comporte 1533 noeuds ( $73 \times 21$ ). Le raffinement au voisinage de la marche est obtenu à l'aide de cellules non-orthogonales dont l'angle d'inclinaison  $\theta$  est compris entre  $74^\circ$  et  $85^\circ$ . Un agrandissement de la partie non-orthogonale est présenté dans la figure (4.13).

d) Conditions aux limites

Parois solides ( Condition d'adhérence ):  $u = v = 0$ .

Sortie:  $p = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ .

Entrée: profil de vitesse parabolique (obtenu à partir de la relation (84)).

e) Résultats:

Nous présentons sur la figure (4.14) l'évolution de la longueur de recollement en fonction du nombre de Reynolds  $Re$  en comparaison avec les valeurs numériques obtenues par T. Ikohagi *et al* (Différences finies 1991) /50/, par Thomas *et al* (éléments finis 1981) /51/ et les valeurs expérimentales obtenues par D.J. Atkins *et al* (1980) /52/ et J.L. Kueny *et al* (1984) /53/.

La figure (4.15) présente le champ de vitesse obtenu par la MMI pour un nombre de Reynolds  $Re = 150$ .

La figure (4.16) présente la répartition de la pression ( $Re = 150$ ).

La figure (4.17) présente le champ de la fonction de vorticité obtenue par la MMI correspondant à un nombre de Reynolds  $Re = 150$ .

Les figures (4.18-4.19) présentent les champs de vitesse et des lignes de courant obtenus par la MMI pour un nombre de Reynolds  $Re = 200$ .

Les figures (4.20-4.21) présentent les champs des lignes de courant et de la fonction de vorticité obtenus par la MMI pour le nombre de Reynolds  $Re = 300$ .

La figure (4.22) présente le champ de vitesse obtenu par la MMI pour un nombre de Reynolds  $Re = 750$ ., sur lequel on voit nettement la zone de recirculation en aval de la marche qui se développe.

La figure (4.23) présente le champ de vitesse obtenu par la MMI pour un nombre de Reynolds  $Re = 1000$ ..

f) Discussion

- Les calculs ont été réalisés pour différents nombres de Reynolds  $Re$ . Ghoniem & Cagnon (1987) /54/ ont montré l'importance du choix correct d'un profil de vitesse à l'entrée, pour pouvoir obtenir les bonnes longueurs de recollement, ce qui nous a motivé ici d'imposer un profil parabolique obtenu analytiquement.
- La comparaison des longueurs de recollement obtenues par la MMI avec

les résultats obtenus par les précédents auteurs permet de mettre en évidence l'aptitude de la MMI à simuler correctement une zone de recirculation.

- L'examen de la répartition de la pression (Fig 4.16) montre l'importance des modifications introduites dans la méthode SMAC ordinaire et permettent par la suite, de supprimer les oscillations qui surgissaient lors de la résolution de l'équation de Poisson pour la pression.

En conclusion, les tests de validation concernant l'écoulement derrière une marche montrent que la méthode proposée est capable de prédire ce type d'écoulement avec une assez bonne précision.

MARCHE DESCENDANTE

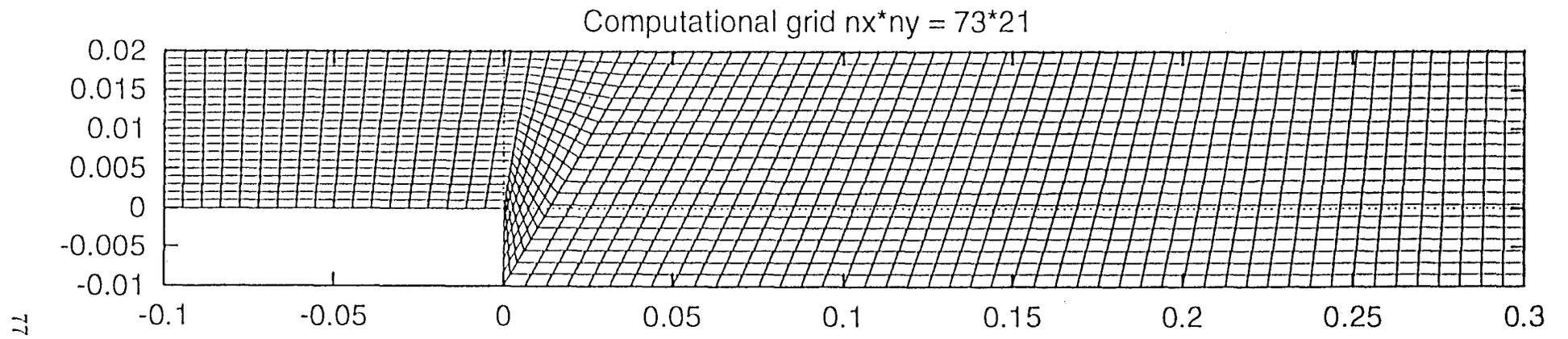


Fig. 4.13. Domaine de calcul de la marche descendante.

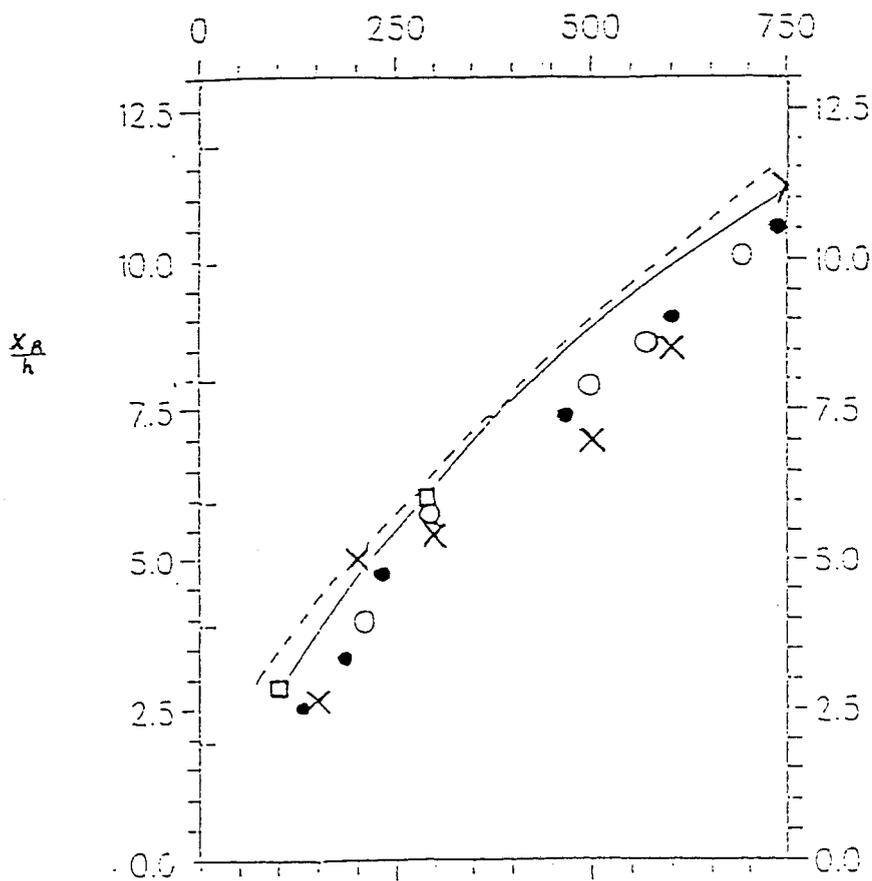


Fig 4.14 Evolution de la longueur de recollement en fonction du nombre de Reynolds  $Re$

$$\left(\frac{H}{H-h} = 1.5\right).$$

○ • mesures.    - - Thomasetal  
 × MMI        ——— Ikohagietal

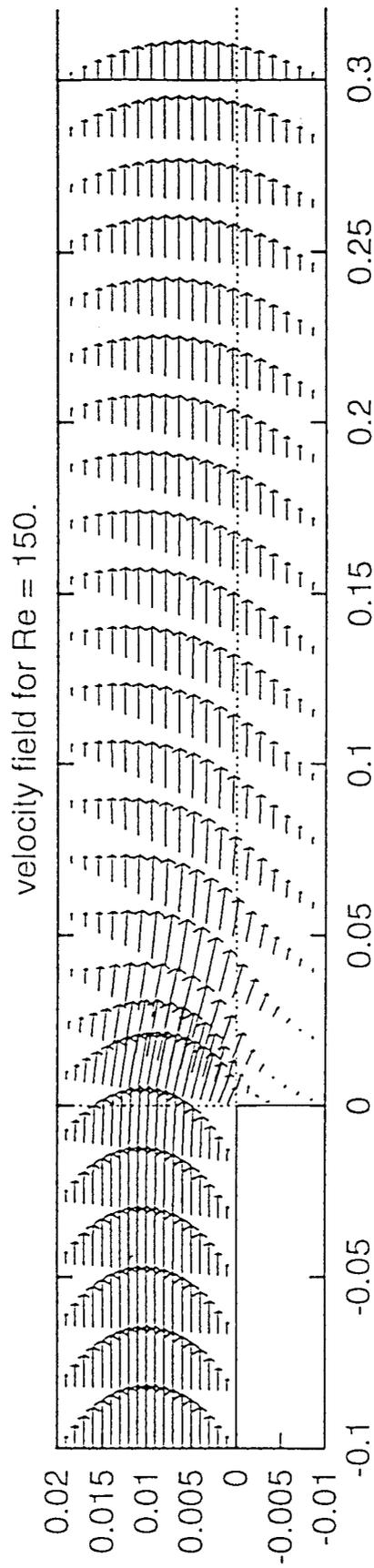


Fig. 4.15. Champ de vitesse d'un écoulement en aval  
d'une marche descendante  $Re = 150$ .



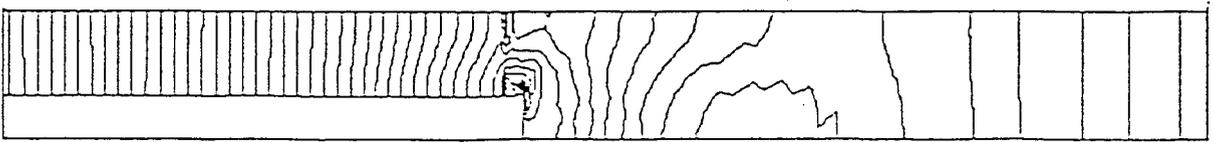


Fig 4.16 Répartition du champ de la pression ( $Re = 150$ ).



Fig 4.17 Champ de la fonction de vorticité ( $Re = 150$ ).



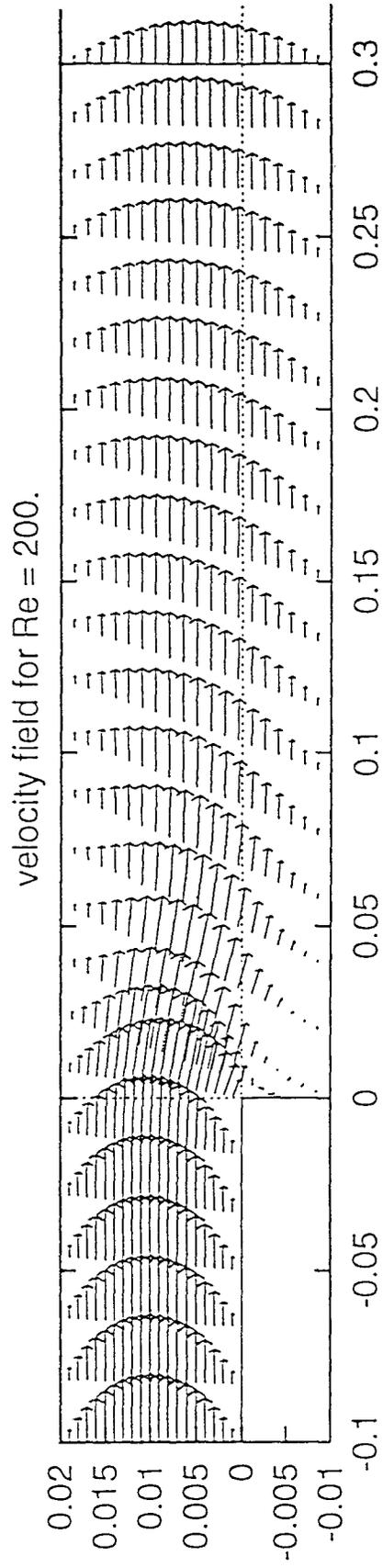


Fig. 4.18. Champ de vitesse d'un écoulement en aval  
d'une marche descendante  $Re = 200$ .



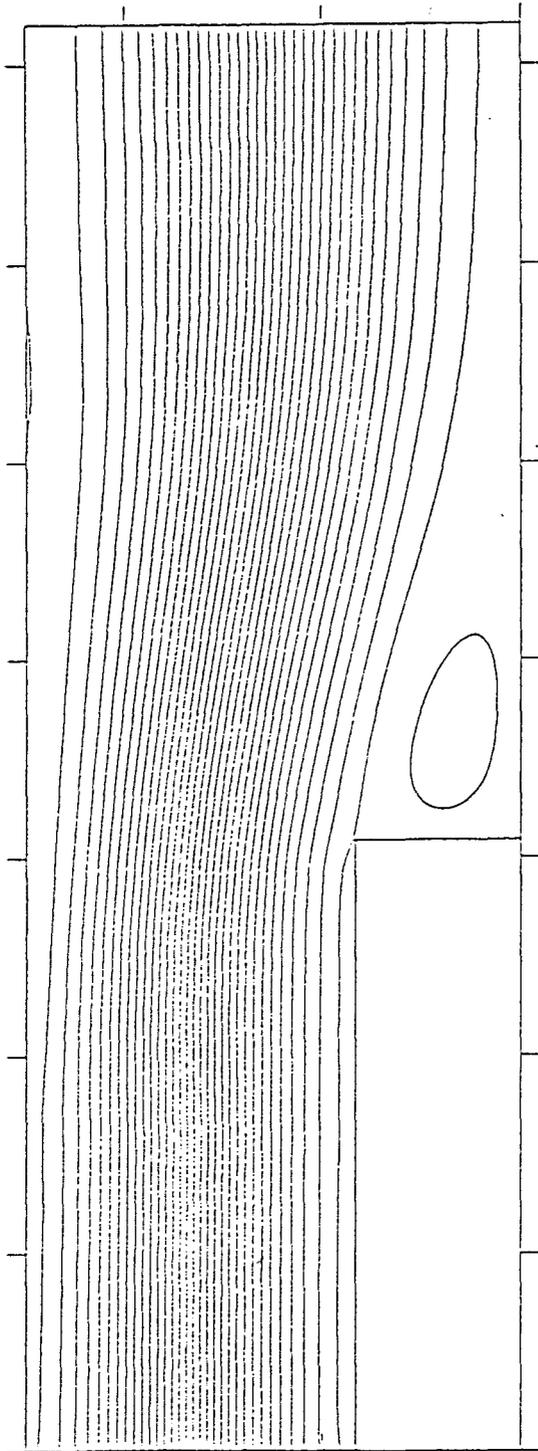


Fig. 4.19. Lignes de courant d'un écoulement en aval  
d'une marche descendante  $Re = 200$ .



STREAMLINES MAP.

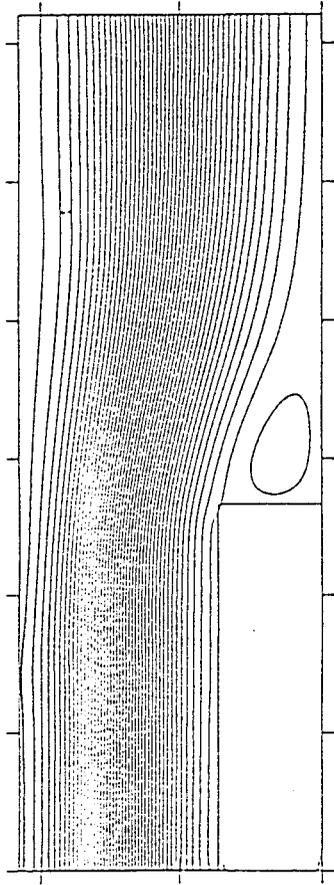


Fig. 4.20. Lignes de courant d'un écoulement en aval  
d'une marche descendante  $Re = 300$ .

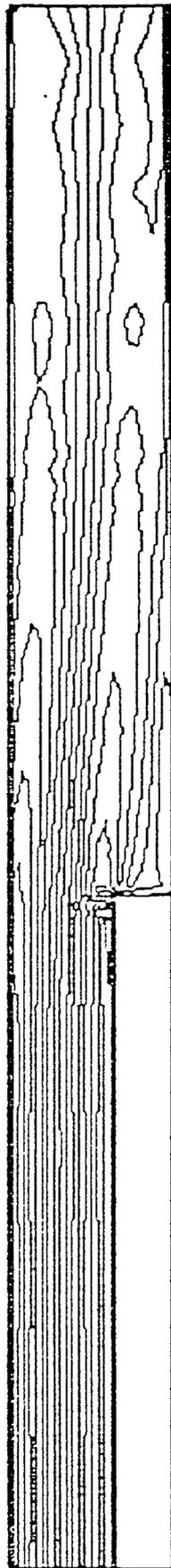


Fig. 4.21. Iso-lignes de la vorticité d'un écoulement en aval  
d'une marche descendante  $Re = 300$ .

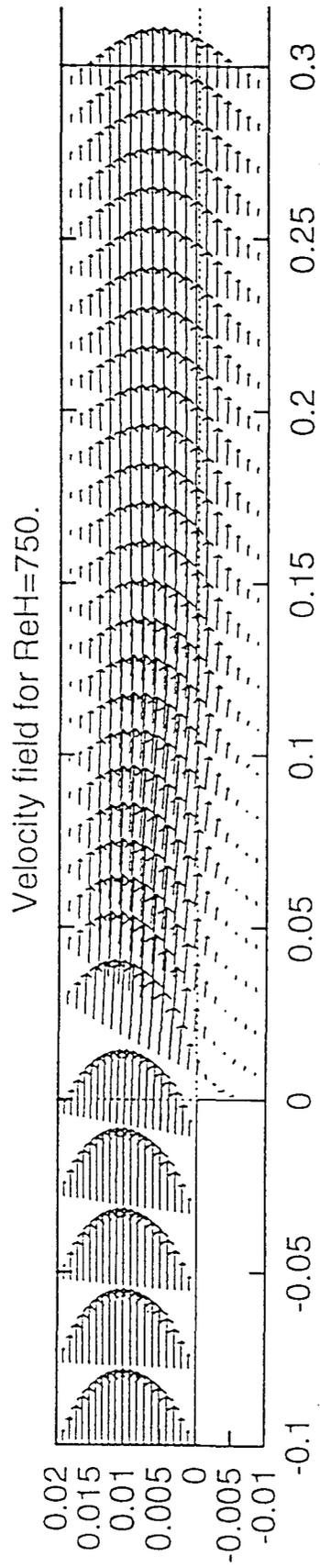


Fig. 4.22. Champ de vitesse d'un écoulement en aval  
d'une marche descendante  $Re = 750$ .



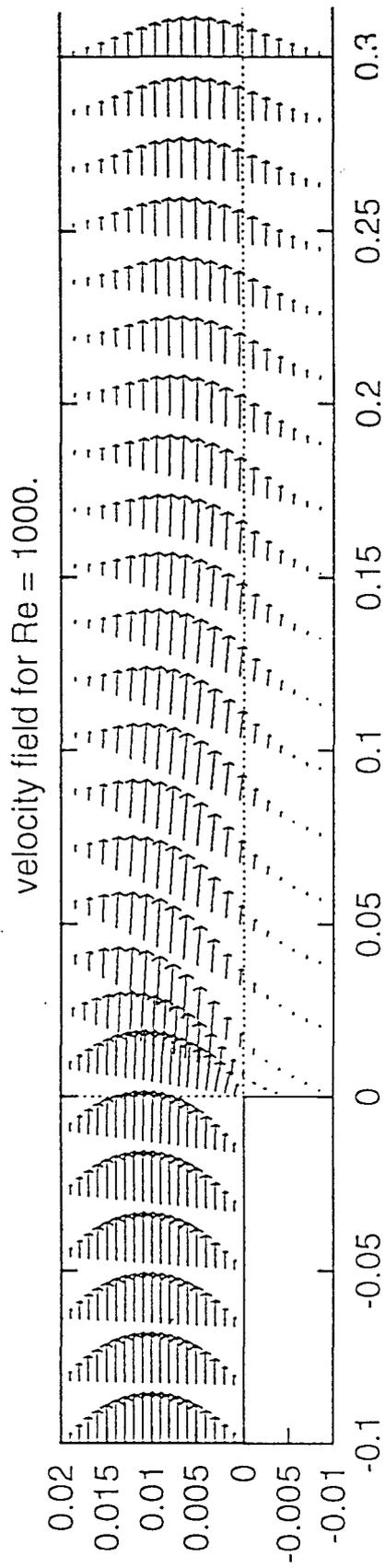


Fig. 4.23. Champ de vitesse d'un écoulement en aval  
d'une marche descendante  $Re = 1000$ .



### IV.3. ÉCOULEMENT DANS UNE CAVITÉ INCLINÉE

La troisième configuration testée est l'écoulement dans une cavité inclinée (Fig. 4.24). Ce problème de repère (Benchmark problems) a été récemment proposé par Demerdzic *et al* (1992) /55/, afin de comparer les différentes méthodes de discrétisation dans une grille non-orthogonale. Une étude récente a été menée par Oosterlee *et al* (1993) /56/. Dans leur travail, Oosterlee *et al*, ont adopté une méthode de volumes finis dans un système de coordonnées curvilignes, et les équations algébriques obtenues ont été résolues par une méthode multi-grille. Les résultats obtenus par ces derniers, sont en bon accord avec ceux obtenus par Demerdzic *et al*. Les difficultés que présentent ce cas test, est la présence de points de discontinuités; la vitesse de l'écoulement subit des discontinuités aux points *A* et *B* de la cavité (Peyret & Taylor /2/ pp. 199), de plus le choix d'un angle d'inclinaison égal à  $45^\circ$ , qui représente la limite fixée par Forester pour avoir une précision du second ordre, nous permettra à nouveau, de tester la capacité de convergence des deux MMI proposées (Koshizuka et modifiée) dans une grille non-orthogonale.

Nous proposons alors d'étudier cet écoulement à l'aide des deux MMI proposées. Les résultats obtenus seront comparés avec ceux de la référence /56/.

a) Géométrie:

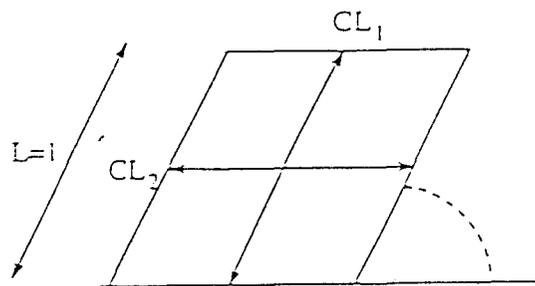


Fig. 4.24 Géométrie de l'écoulement dans une cavité inclinée.

b) Principales caractéristiques:

- Écoulement stationnaire dans une cavité inclinée.
- Fluide: Eau
- Régime laminaire.
- Masse volumique:  $1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ .
- Viscosité moléculaire:  $1.0 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ .
- Nombre de points: 4096 noeuds ( $64 \times 64$ ).
- Angle d'inclinaison:  $\theta = 45^\circ$ .
- Nombre de Reynolds:  $Re = \frac{u_0 \cdot L}{\nu} = 1000$ .

c) Conditions aux limites:

Parois solides  $u = v = 0$ .

Surface libre ( $AB$ ): vitesse  $u_0 = \text{cste}$ ,  $v = 0$ .

d) Résultats et discussion:

Les calculs ont été effectués avec un nombre de Reynolds  $Re = 1000$ ., le nombre de points de discrétisation est de 4096 ( $64 \times 64$ ) et l'angle d'inclinaison de la cavité est de  $45^\circ$ . Le test effectué sur cette géométrie consiste, à comparer les profils des composantes  $u$  et  $v$  de la vitesse suivant les directions  $CL_1$  et  $CL_2$  (voir Fig. 4.24).

- La figure 4.25 présente le champ de vitesse obtenu par la MMI. Sur cette figure, on peut voir nettement deux zones de recirculation qui se développent.
- Les figures (4.26-4.27) présentent les profils des composantes  $u$  et  $v$  de la vitesse suivant les lignes  $CL_1$  et  $CL_2$ . Les profils obtenus par la MMI sont comparés avec ceux obtenus par C.W. Oosterlee *et al* (1993) /56/. Nous remarquons la parfaite coïncidence entre les deux résultats. Nous avons ensuite, utilisé la méthode classique de Koshizuka *et al* /1/ pour analyser cet écoulement. La convergence vers la solution n'a pas été atteinte.

En conclusion, le test de validation concernant un écoulement dans une cavité inclinée, montre:

- i) que la MMI proposée est capable d'analyser correctement un écoulement dans une grille non-orthogonale.
- ii) L'importance des modifications introduites sur la fonction d'approximation proposée par Koshizuka. L'absence de ces modifications entraîne d'importantes erreurs, lorsque la maille de calcul s'éloignent de l'orthogonalité, ou risque de ne pas fournir de solution comme dans le cas de cet écoulement.

ECOULEMENT DANS UNE CAVITE INCLINEE

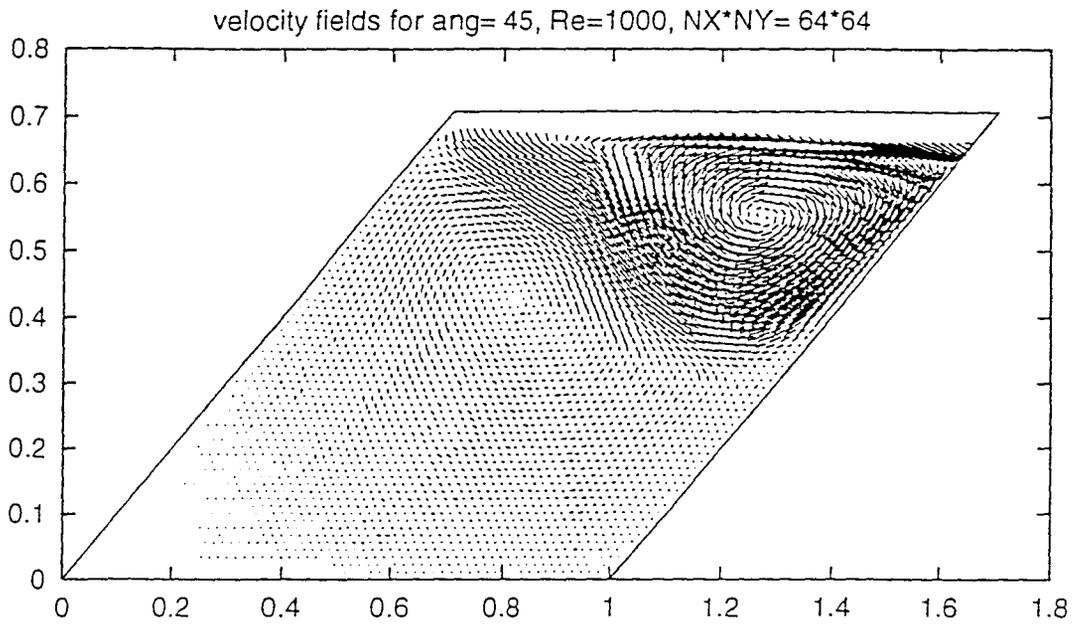


Fig. 4.25 Champ de vitesse obtenu par la MMI  
 ( $\theta = 45^\circ$ ,  $Re = 1000$ .)

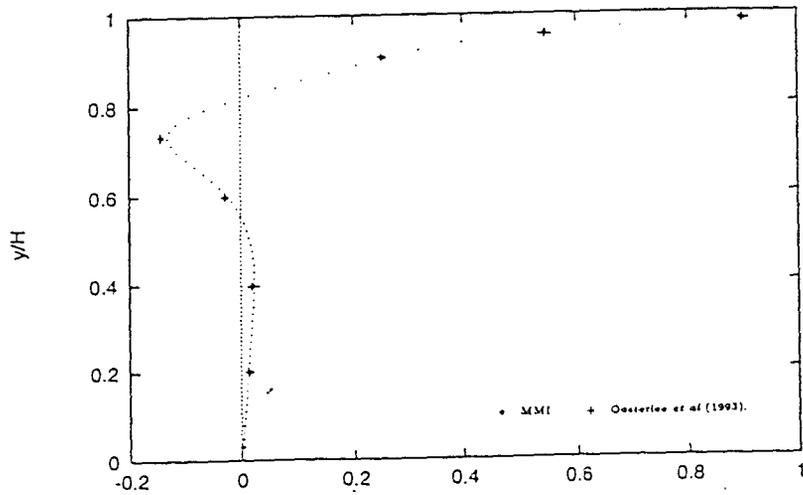


Fig. 4.26 Profil de la composante  $u$  de la vitesse.  
 ( $\theta = 45^\circ$ ,  $Re = 1000$ .)

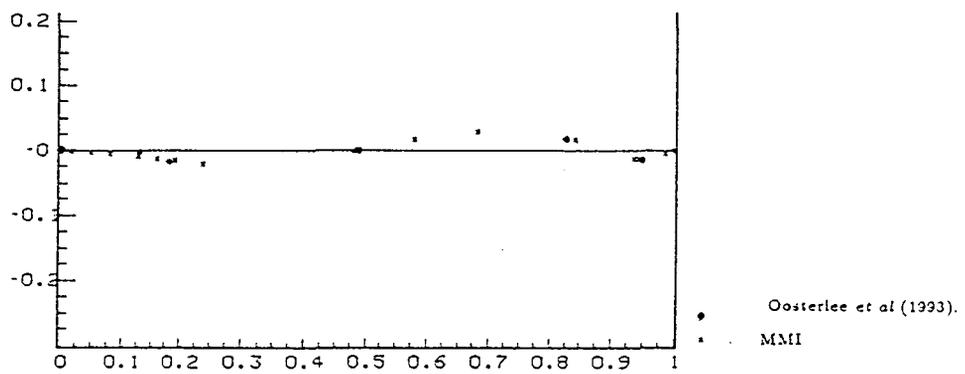


Fig. 4.27 Profil de la composante  $v$  de la vitesse.  
 ( $\theta = 45^\circ$ ,  $Re = 1000$ ).



#### IV.4 ÉCOULEMENT INSTATIONNAIRE AUTOUR D'UN CYLINDRE

La quatrième configuration géométrique testée, est un cylindre circulaire (Fig 4.28) de diamètre  $d$ , placé dans un écoulement de vitesse uniforme  $U_\infty$ , vitesse perpendiculaire à l'axe du cylindre. Cet écoulement est un problème fondamental pour toute méthode numérique d'une part, par ses caractéristiques physiques mises en jeu et d'autre part, par ses applications industrielles. Cet écoulement a fait l'objet de beaucoup de travaux tant sur le plan numérique (O. Daube & Ta Phuoc Loc (1978) /57/, M. Braza P. Chassaing & H. Ha Minh (1986) /58/, G. Alfonsi & A. Giorgini (1991) /59/, G. Ren & T. Utnes (1993) /60/) qu'expérimental (R. Bouard & M. Coutanceau (1980) /61/, C.H.K. Williamson (1989) /62/ ... etc). L'étude du sillage d'un cylindre circulaire à travers les nombreuses expériences qui lui ont été consacrées, a permis de mettre en évidence l'existence de différents "régimes", ceux-ci sont rappelés sur le tableau (IV.4) ci-dessous. Ces résultats sont classés en fonction du nombre de Reynolds global basé sur le diamètre  $d$  du cylindre  $Re_d = \frac{U_\infty d}{\nu}$ . Une étude détaillée de cet écoulement est donnée par Tritton (1977) /63/.

Dès que le nombre de Reynolds  $Re_d$  dépasse l'unité, un décollement se produit à l'arrière du corps, donnant naissance à deux tourbillons cylindriques d'axes parallèles à celui du cylindre et de structure laminaire. Ces tourbillons augmentent de volume et s'allongent quand le nombre de Reynolds croît.

A partir d'une valeur de  $Re_d$  voisine de 50., les tourbillons, tout en conservant une structure laminaire, se déplacent alternativement d'un côté et de l'autre, constituant ainsi une allée de tourbillons alternés. Il y'a ainsi passage d'un régime stationnaire (tourbillons attachés) à un régime instationnaire (tourbillons détachés), mais périodique. L'étude expérimentale des tourbillons alternés a été faite par Bénard, mais Von Karman a pu retrouver une partie de leurs propriétés (d'où le nom de tourbillons de Von Karman). La fréquence  $f$  de détachement des tourbillons est mise sous la forme adimensionnelle par l'intermédiaire du nombre de Strouhal:  $S_r = \frac{f d}{U_\infty}$ .

Dans le domaine des tourbillons alternés, du fait de la périodicité du phénomène dissymétrique, la force résultante qui agit sur le cylindre n'est plus parallèle à  $U_\infty$ ; il existe une portance alternativement dirigée dans un sens et dans l'autre, la fréquence du changement de sens étant égale à  $f$ .

La structure laminaire des tourbillons alternés se maintient jusqu'à un nombre de Reynolds voisin de 5000.

$Re_d$	DENOMINATION	PROPRIETES
$Re_d < 1.$	Rampant	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Pas de décollement</li> <li>- Ecoulement symétrique</li> </ul>
$1 < Re_d < 40.$	Régime laminaire décollé	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Décollement avec deux rouleaux contrarotatifs captifs</li> <li>- Stable</li> <li>- Ecoulement symétrique</li> </ul>
$40 < Re_d < 300.$	Régime laminaire instationnaire	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Apparition des allées de Von Karman</li> <li>- Instationnaire</li> <li>- Transition dans l'allée pour <math>Re_d &gt; 150.</math> (Roshko 1954)</li> </ul>
$300 < Re_d < 200.000.$	Régime subcritique	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Allée tourbillonnaire de nature turbulente</li> <li>- Couche limite laminaire avant décollement</li> <li>- Existence d'un régime pseudo-périodique</li> </ul>
$Re_d > 200.000.$	Régime trans et supercritique	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Transition de la couche limite sur le cylindre avant décollement</li> <li>- Aspect chaotique de l'écoulement plus prononcé</li> <li>- Modification de la position de décollement et la valeur de la trainée</li> </ul>

Tableau IV.4 Principales caractéristiques de l'écoulement autour d'un cylindre circulaire.

L'objectif de ce cas test est de montrer l'aptitude de la MMI à simuler correctement des écoulements présentant un obstacle (notamment un cylindre circulaire), et d'essayer de retrouver certaines de ces caractéristiques globales mises en jeu (caractère périodique de l'écoulement, valeur moyenne du nombre de Strouhal, allées de Von Karman).

a) Principales caractéristiques

- Ecoulement instationnaire autour d'un cylindre.
- Fluide: Eau
- Régime laminaire.
- Masse volumique:  $1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ .
- Viscosité moléculaire:  $1.0 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ .
- Pas du temps  $\Delta t = 0.001\text{s}$ .
- Nombre de points: 5162, 9256 noeuds.
- Nombre de Reynolds:  $Re_d = 175$ .

b) Géométrie et conditions aux limites

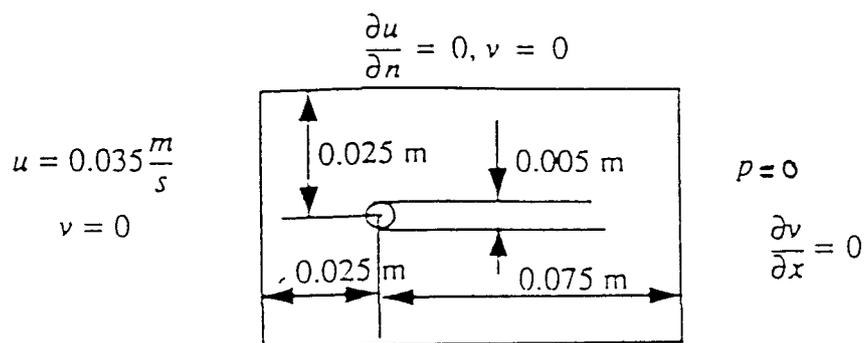


Fig 4.28 Configuration géométrique et conditions aux limites de l'écoulement autour d'un cylindre.

### c) Maillages

Les calculs ont été effectués avec deux maillages qui présentent un raffinement autour du cylindre obtenu à l'aide de cellules non-orthogonales et comportent 5162 et 9256 noeuds respectivement et ceci afin de mettre en évidence l'influence du maillage. Un agrandissement du maillage (5162 noeuds) est présenté sur la figure (4.29).

### d) Résultats et discussion:

- Dans un premier temps, tous nos calculs ont été effectués avec le maillage comportant 5162 noeuds. Ce maillage présente le même raffinement que la maille de calcul de Ren & Utnes en aval du cylindre et ceci dans le but de comparer nos résultats avec ceux obtenus par Ren & Utnes /60/. Ces derniers, ont adopté une méthode des éléments finis pour résoudre les équations de Navier-Stokes. Dans leur cas, le raffinement autour du cylindre est obtenu à l'aide d'éléments triangulaires.
- Les figures (4.30-4.31) présentent les champs de vitesse aux instants  $t = 0.08$  s et  $t = 0.8$  s, obtenus par la MMI et par Ren & Utnes respectivement. Sur ces figures, on peut voir nettement deux tourbillons symétriques d'axe parallèle à celui du cylindre. Ce phénomène est en bon accord avec les résultats expérimentaux, comme il a été signalé dans /60/. A partir de l'instant  $t = 4.0$  s, la symétrie de l'écoulement disparaît et les tourbillons se détachent du cylindre, donnant naissance, ainsi à une allée de tourbillons (non-alternés) (Fig. 4.32).
- Les figures (4.36-4.37) présentent les champs de vitesse obtenus par la MMI aux instants  $t = 0.08, 0.4, 0.6, 0.8$  s respectivement (cas du maillage comportant 9256 noeuds, soit à peu près le double du nombre de points utilisés dans le premier test). Sur ces figures, on peut voir nettement le développement de deux tourbillons symétriques d'axe parallèle à celui du cylindre. A partir de  $t = 0.4$  s, ces tourbillons augmentent de volume et s'allongent suivant la direction  $x$ , comme le montre la figure (4.37).

- A partir de l'instant  $t = 3.0$  s (cas du maillage comportant 9256 noeuds), la symétrie de l'écoulement disparaît et les tourbillons se détachent du cylindre, constituant ainsi une allée de tourbillons alternés (Fig. 4.38-4.39). Notons que dans le cas du maillage comportant 5162 noeuds, ce phénomène n'a pas été capté. Ceci peut être illustré, lorsqu'on représente les champs de la fonction de vorticité (Fig. 4.41-4.42), où on peut voir nettement les allées de Von Karman qui se développent en aval du cylindre (On note ici, l'absence des allées de Von Karman, dans le cas du maillage comportant 5162 noeuds (Fig. 4.35) ainsi que dans les résultats obtenus par Ren & Utnes /60/).
- La figure (4.43), présente les variations de la vitesse en fonction du temps pour deux points situés dans le sillage. L'évolution de la vitesse (Fig. 4.43), montre que le caractère périodique de l'écoulement est bien prédit dans ce cas. La valeur obtenue pour le nombre de Strouhal est de  $S_r = 0.189$ . C.H.K Williamson /62/ rapporte cette valeur à 0.1902 pour  $Re_d = 175$ .

En conclusion, les tests de validation concernant l'écoulement autour d'un cylindre montrent:

- i) l'importance dans le choix d'un maillage raffiné au voisinage du cylindre. L'utilisation d'un maillage grossier ne peut mettre en évidence certaines caractéristiques mises en jeu par cet écoulement (cas, par exemple, de l'apparition des allées de Von Karman).
- ii) Les résultats obtenus par la MMI, confrontés aux résultats expérimentaux de Williamson (1989) /62/ ainsi qu'aux résultats numériques de Ren & Utnes (Eléments finis 1993) /60/, montrent que la MMI modifiée est capable de prédire correctement ce type d'écoulements avec une assez bonne précision.

ÉCOULEMENT INSTATIONNAIRE AUTOUR  
D'UN CYLINDRE

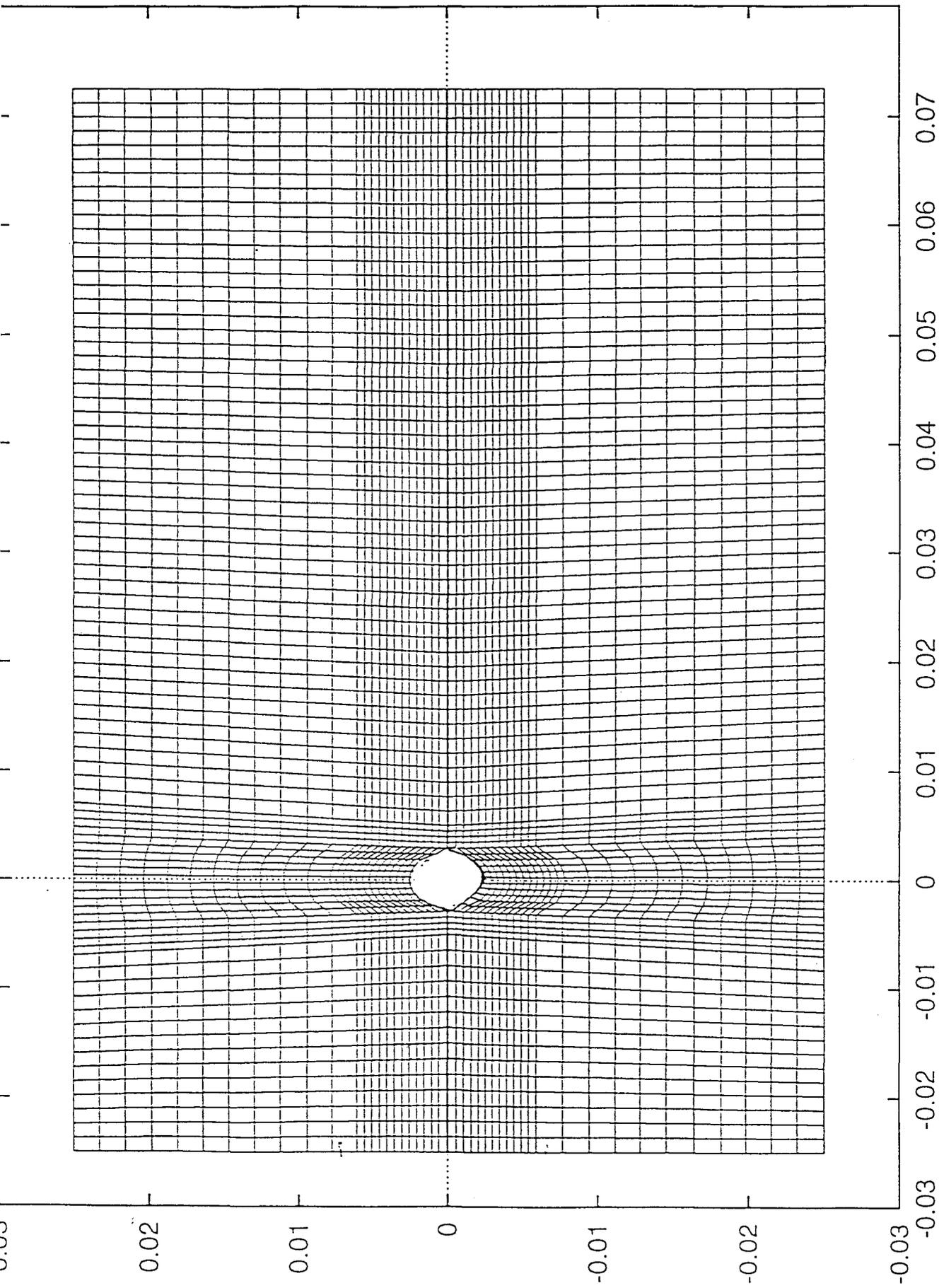
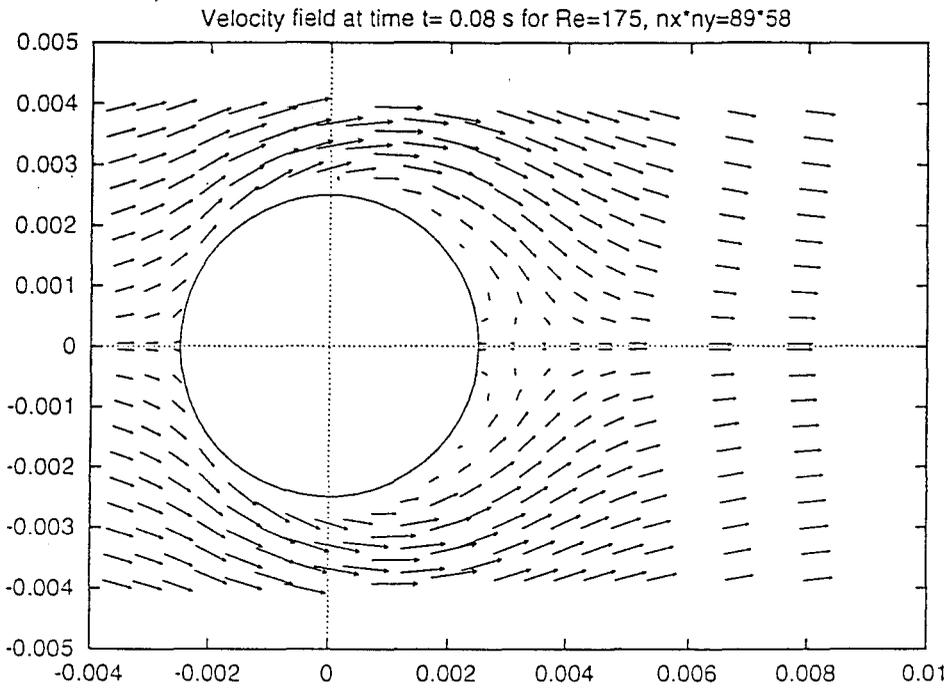
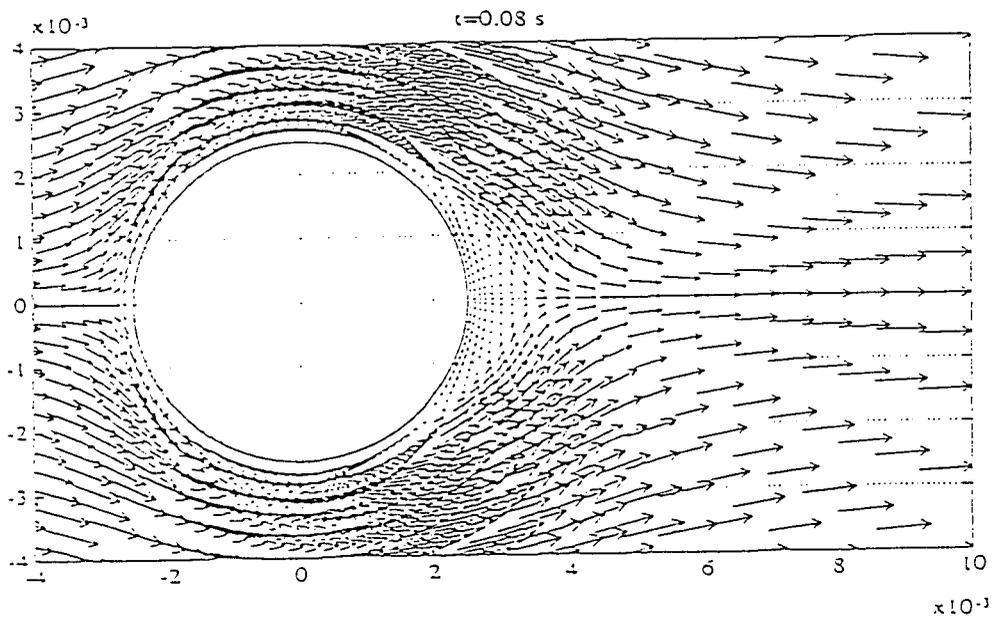


Fig. 4.29. Domaine de calcul de l'écoulement autour d'un cylindre (5162 noeuds).



(a)



(b)

Fig 4.30 Champs de vitesse à l'instant  $t = 0.08$  s

(a) MMI

(b) Ren & Utnes (1993 éléments finis).



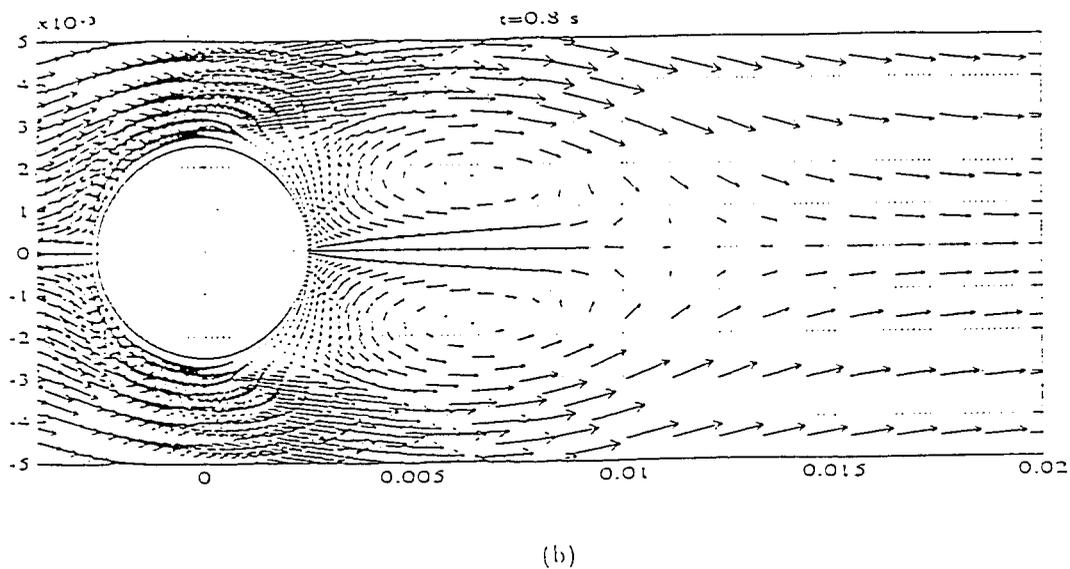
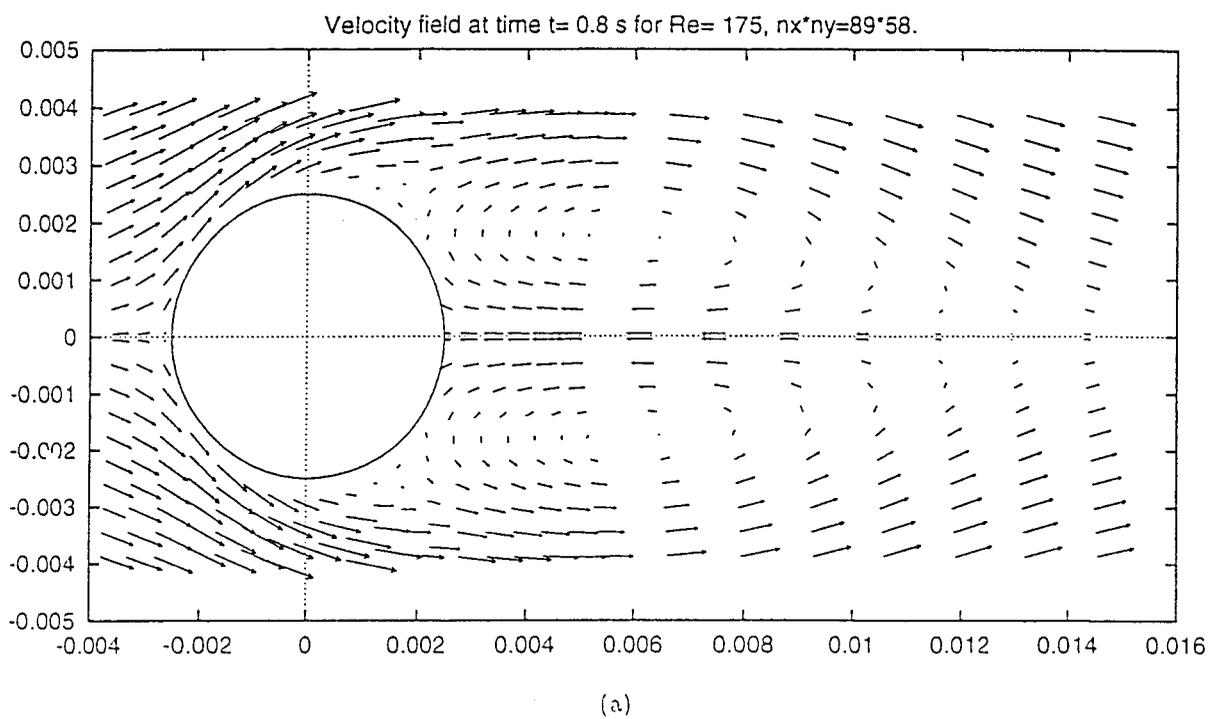
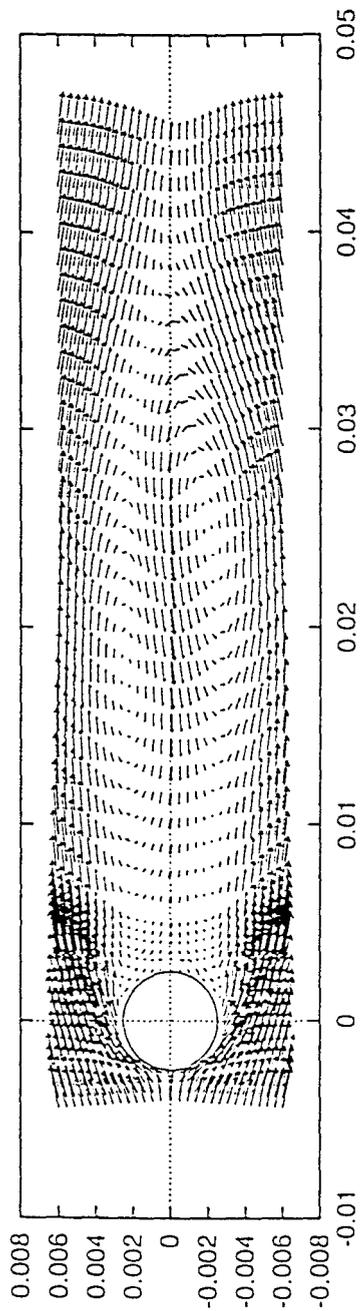
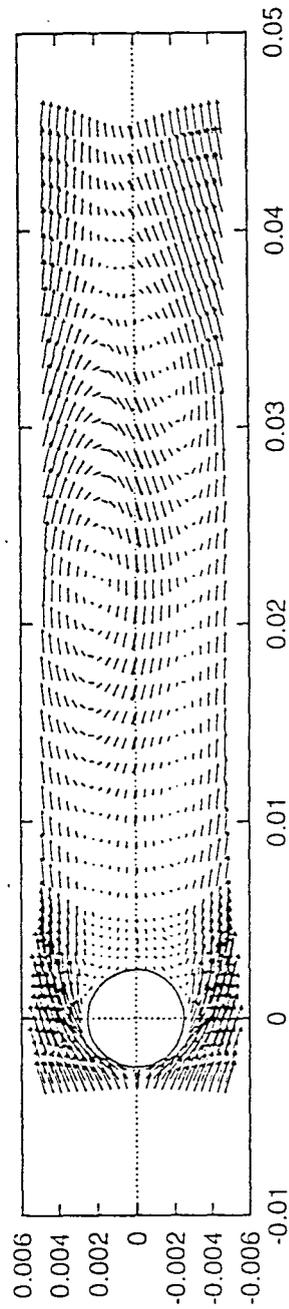


Fig 4.31 Champs de vitesse à l'instant  $t = 0.8$  s  
 (a) MMI      (b) Ren & Utnes (1993 éléments finis).



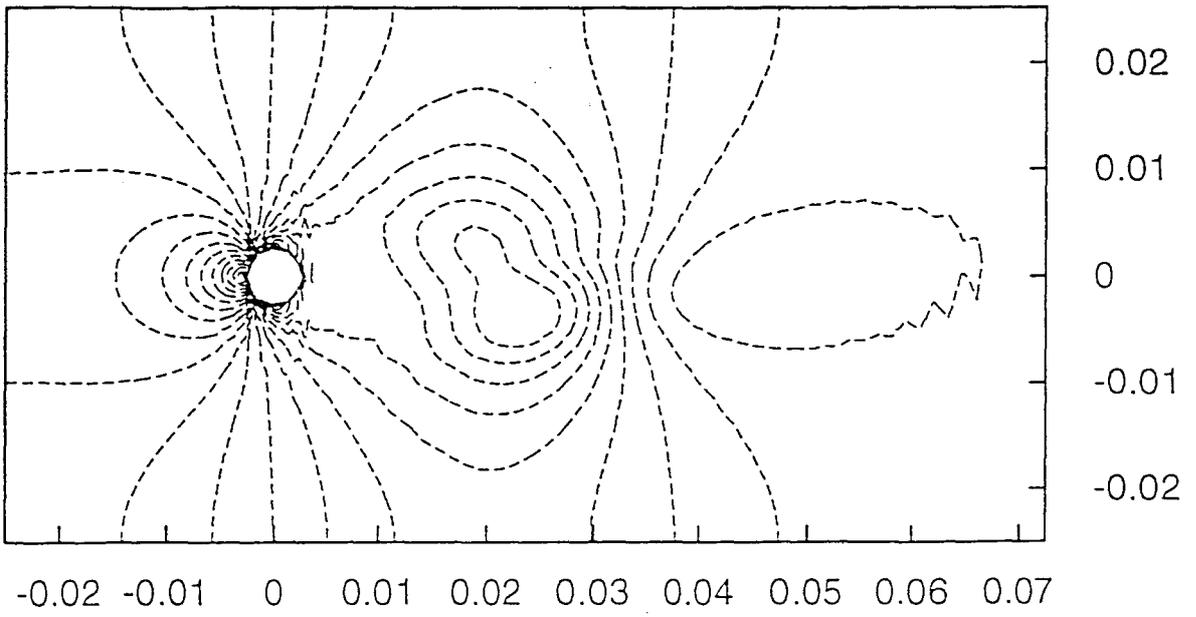
(a)



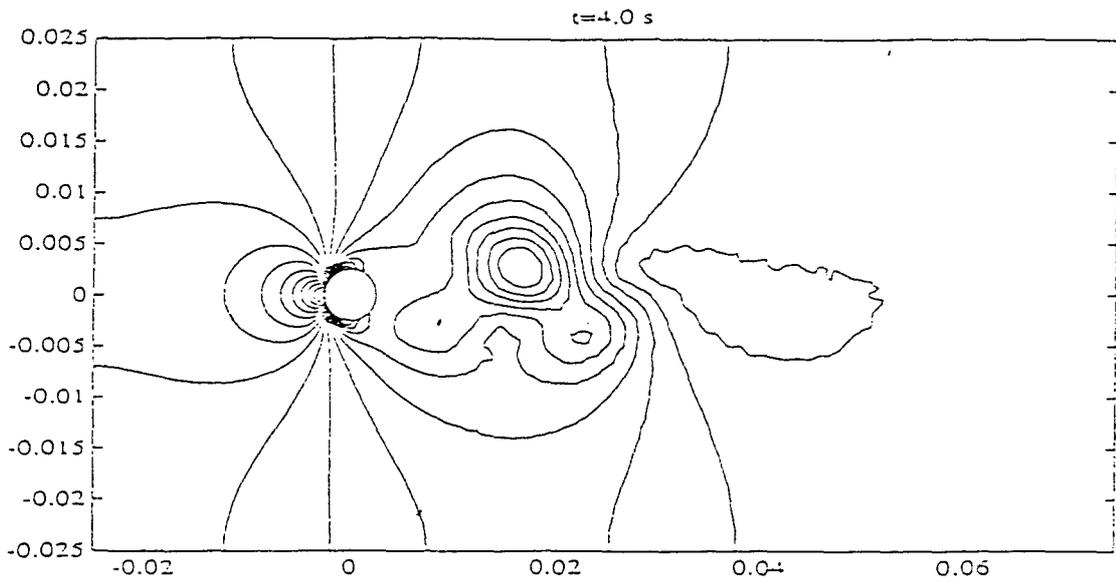
(b)

Fig. 4.32. Champs de vitesse d'un écoulement autour d'un cylindre (a)  $t = 4.0$  s (b)  $t = 4.4$  s.





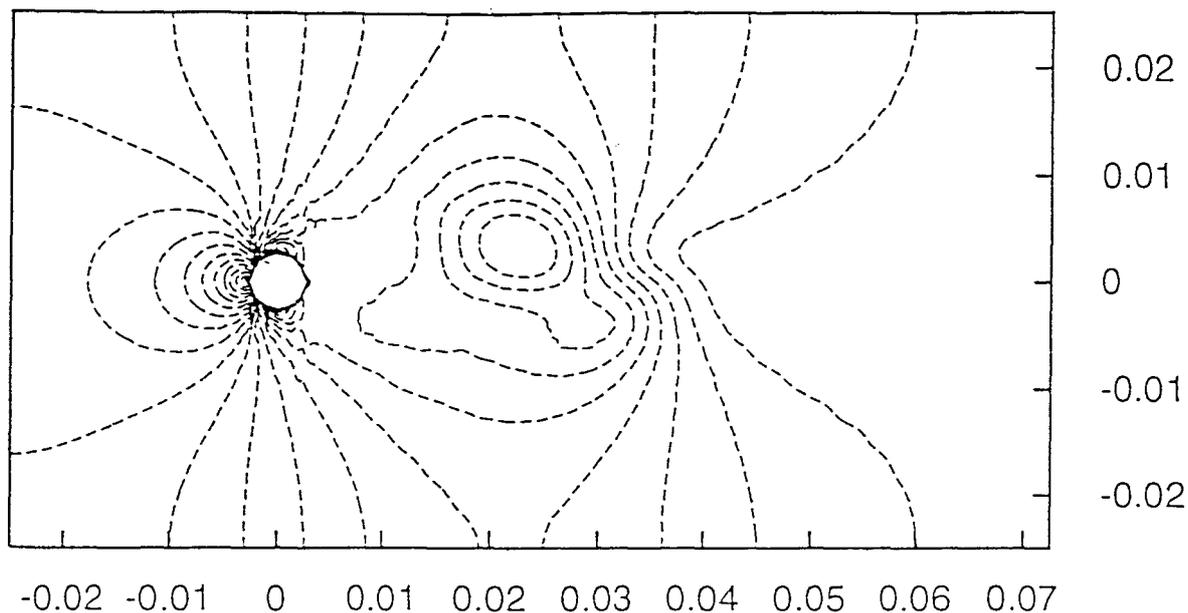
(a)



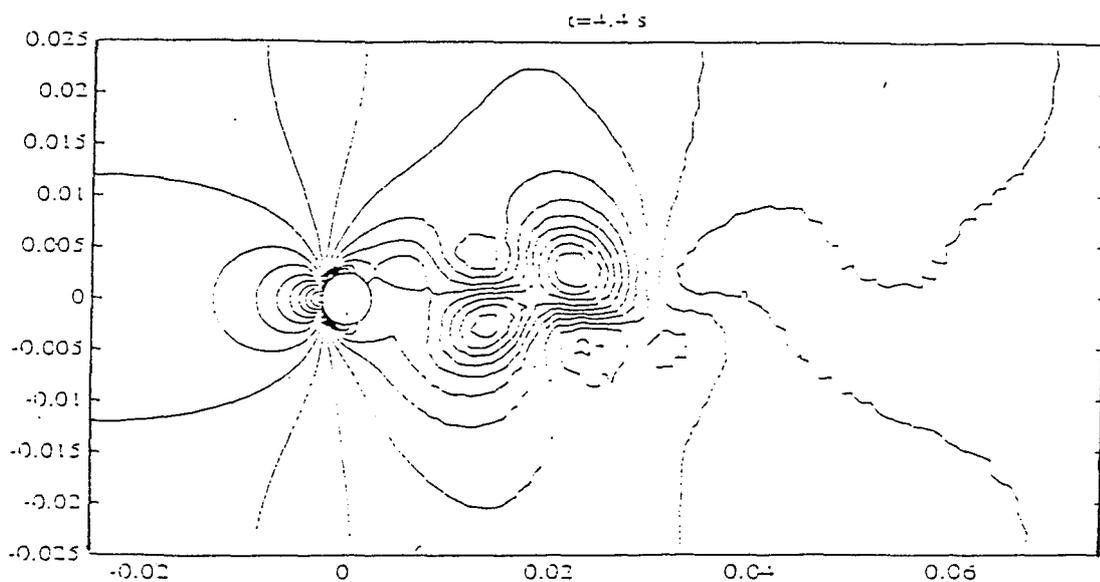
(b)

Fig 4.33 Champs de pression à l'instant  $t = 4.0$  s  
 (a) MMI (b) Ren & Utnes (1993 éléments finis).





(a)

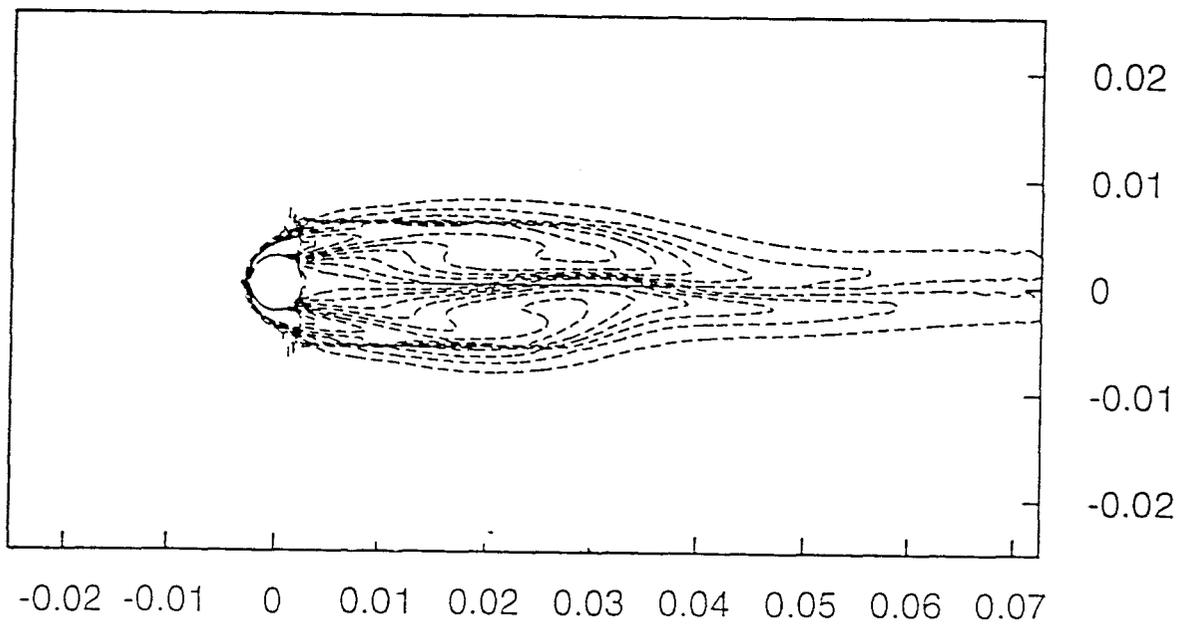


(b)

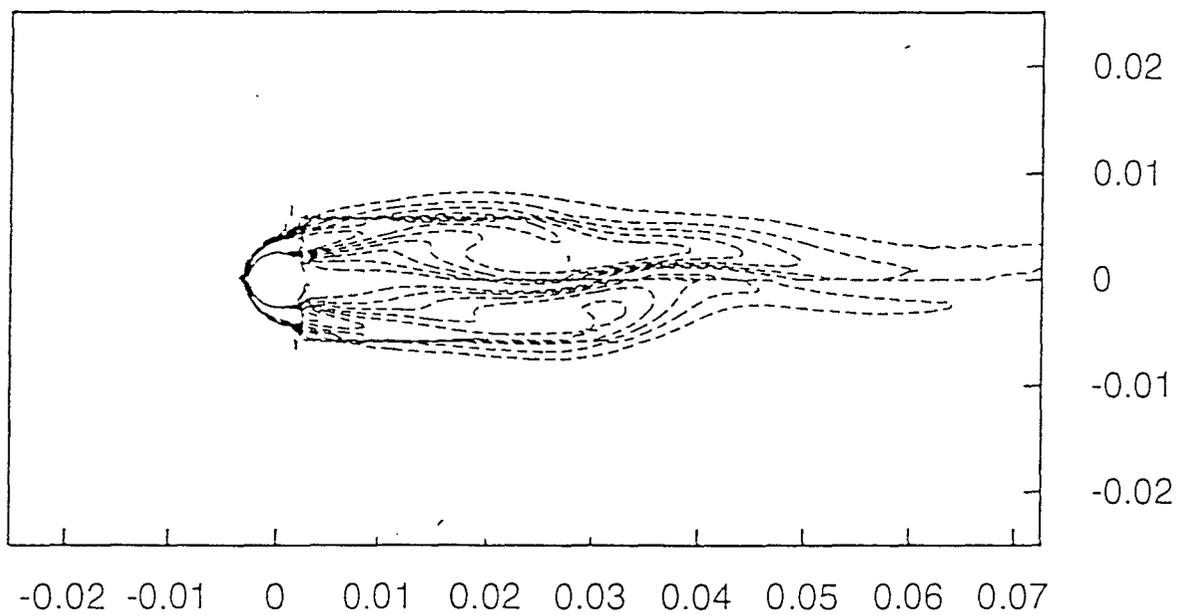
Fig 4.34 Champs de pression à l'instant  $t = 4.4$  s

(a) MMI      (b) Ren & Utnes (1993 éléments finis).





(a)

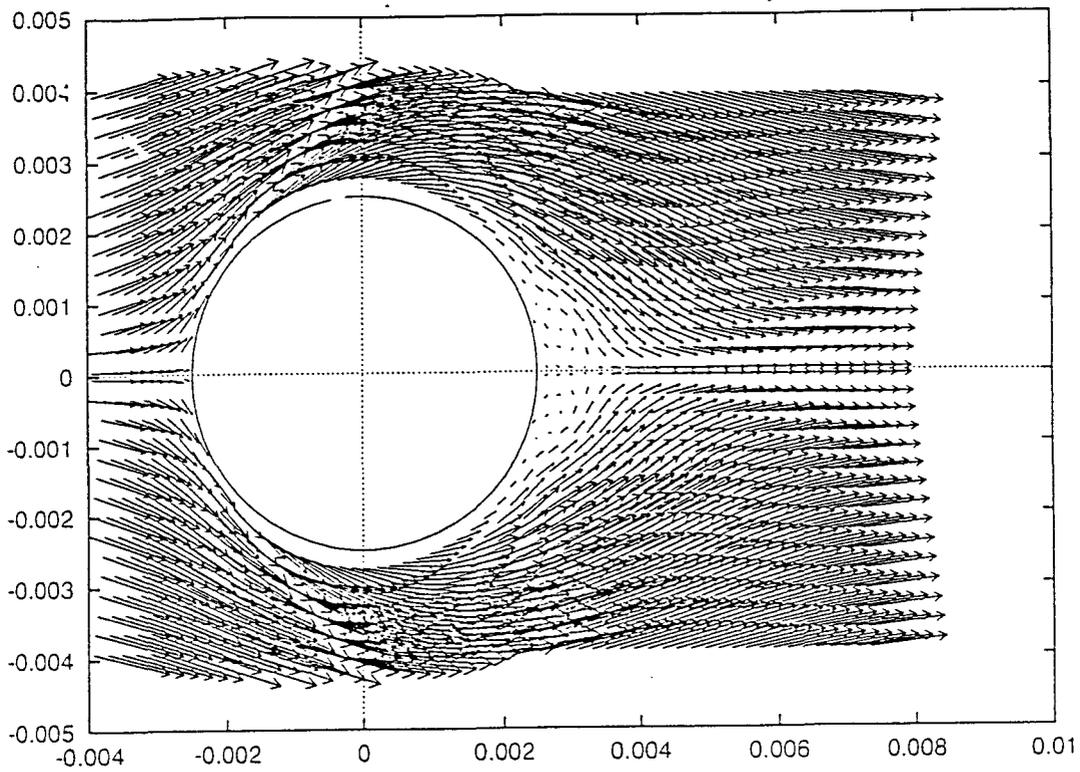


(b)

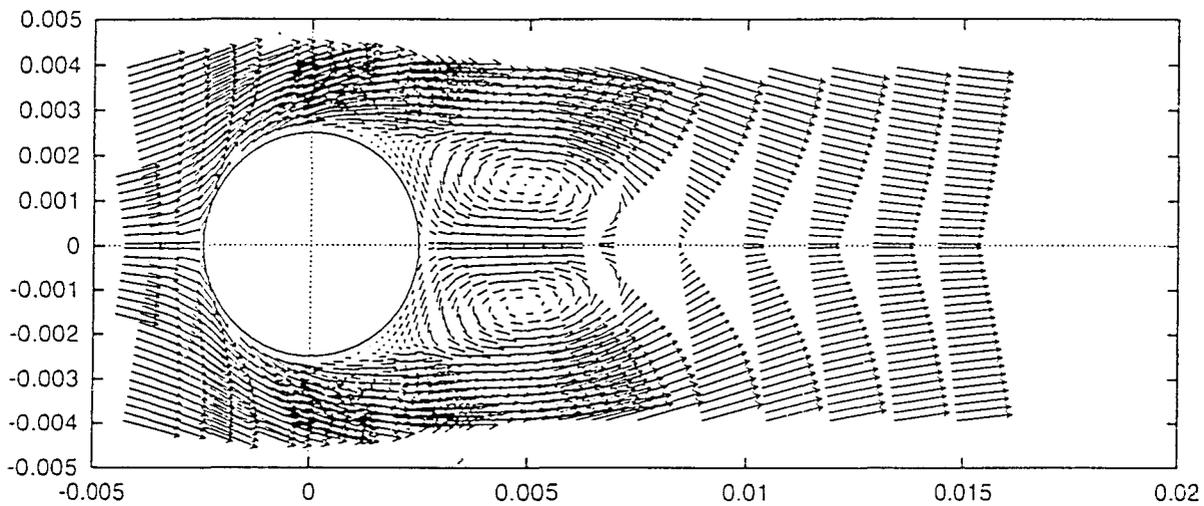
Fig 4.35 Champs de la fonction de vorticité (MMI, 5162 noeuds)..

(a)  $t = 1.0$  s

(b)  $t = 1.4$  s.



(a)  $t = 0.08 \text{ s}$



(b)  $t = 0.4 \text{ s}$

Fig 4.36 Champs de vitesse (9256 noeuds).

(a)  $t = 0.08 \text{ s}$       (b)  $t = 0.4 \text{ s}$ .

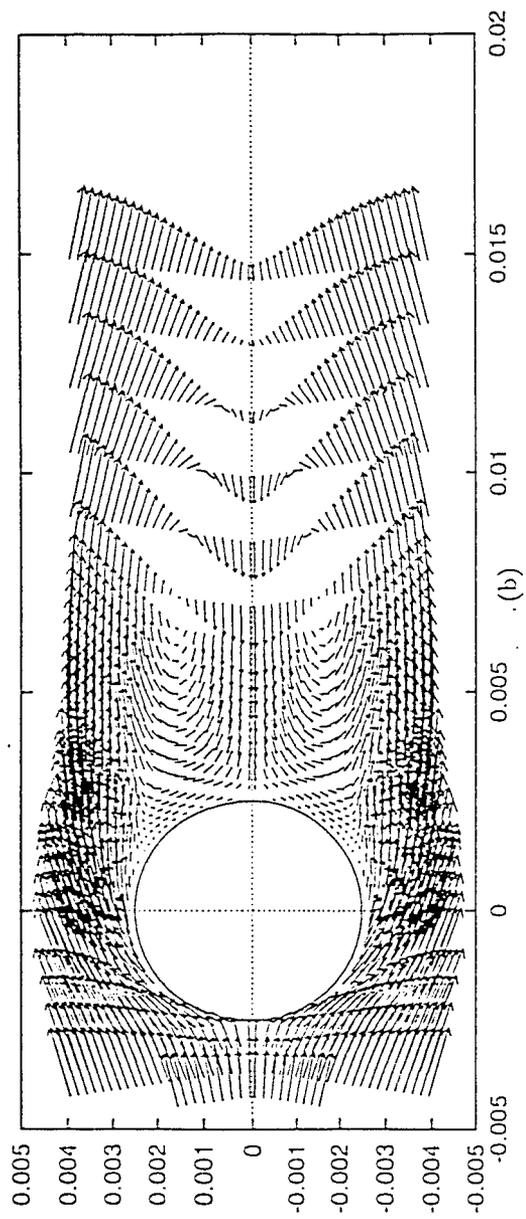
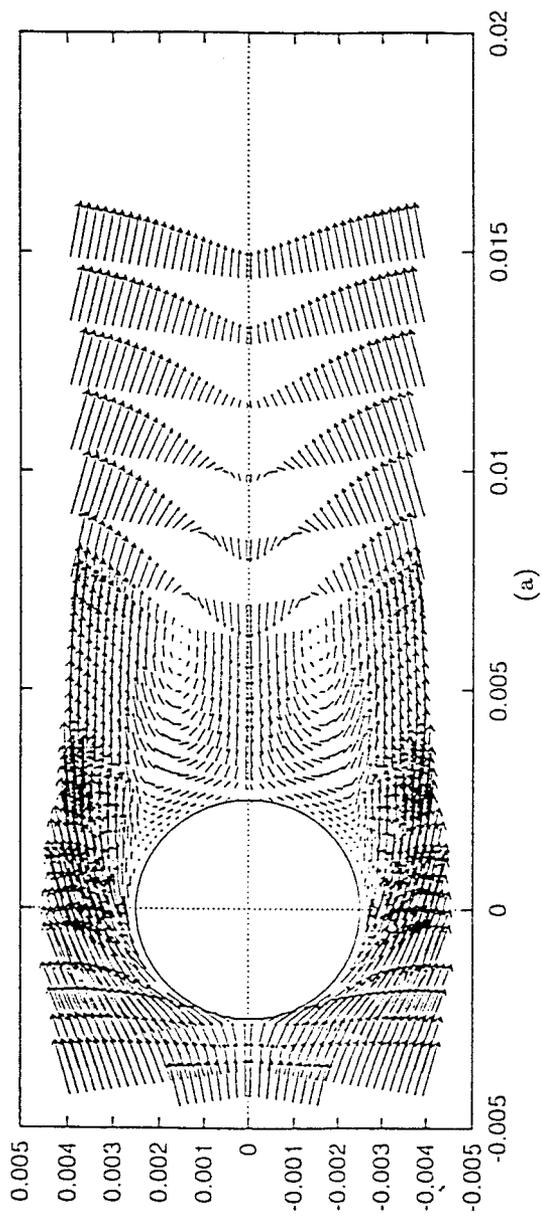


Fig. 4.37. Champs de vitesse d'un écoulement autour d'un cylindre (a)  $t = 0.6$  s (b)  $t = 0.8$  s.

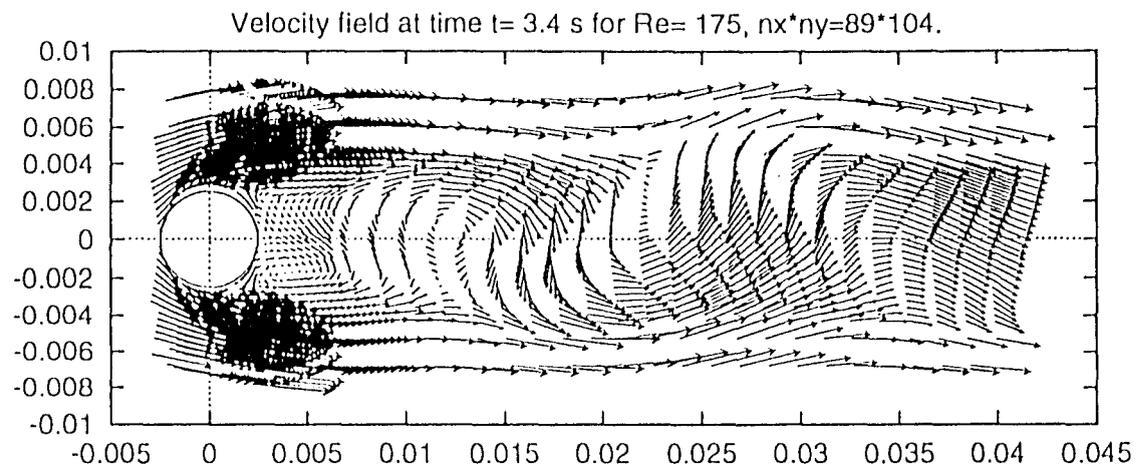
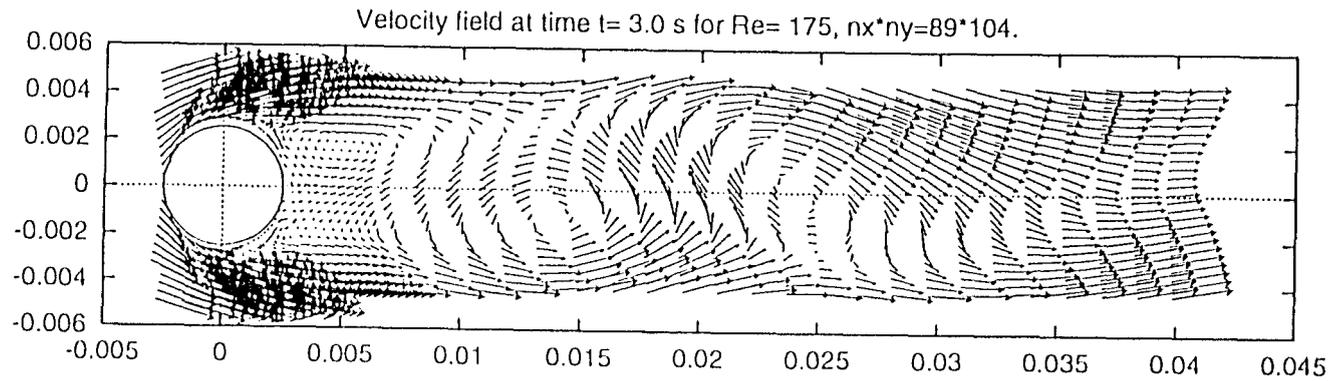


Fig. 4.38. Champs de vitesse d'un écoulement autour  
d'un cylindre (a)  $t = 3.0$  s (b)  $t = 3.4$  s.

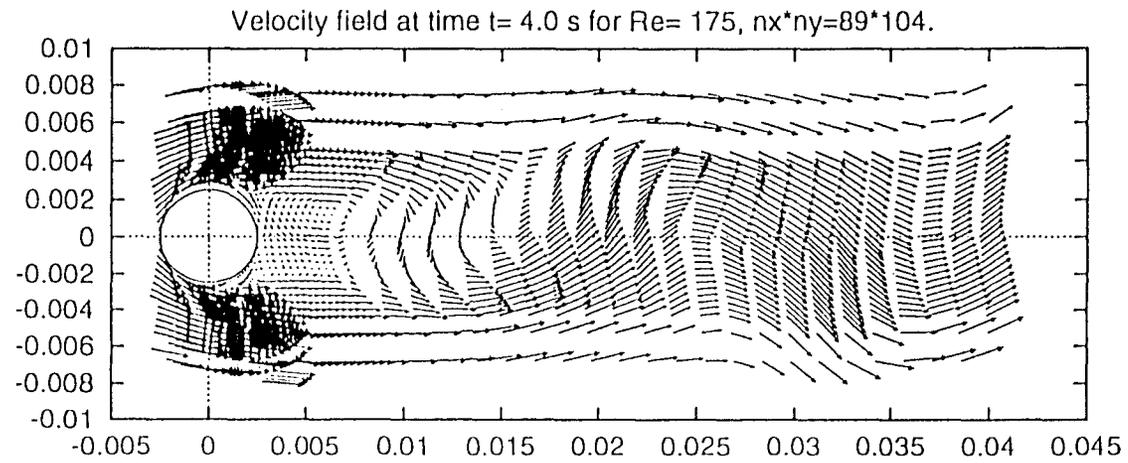
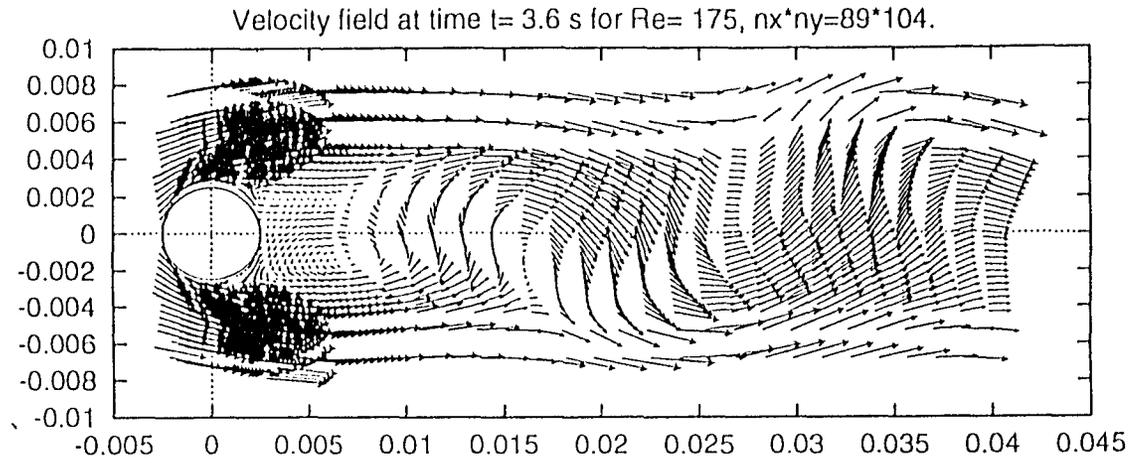
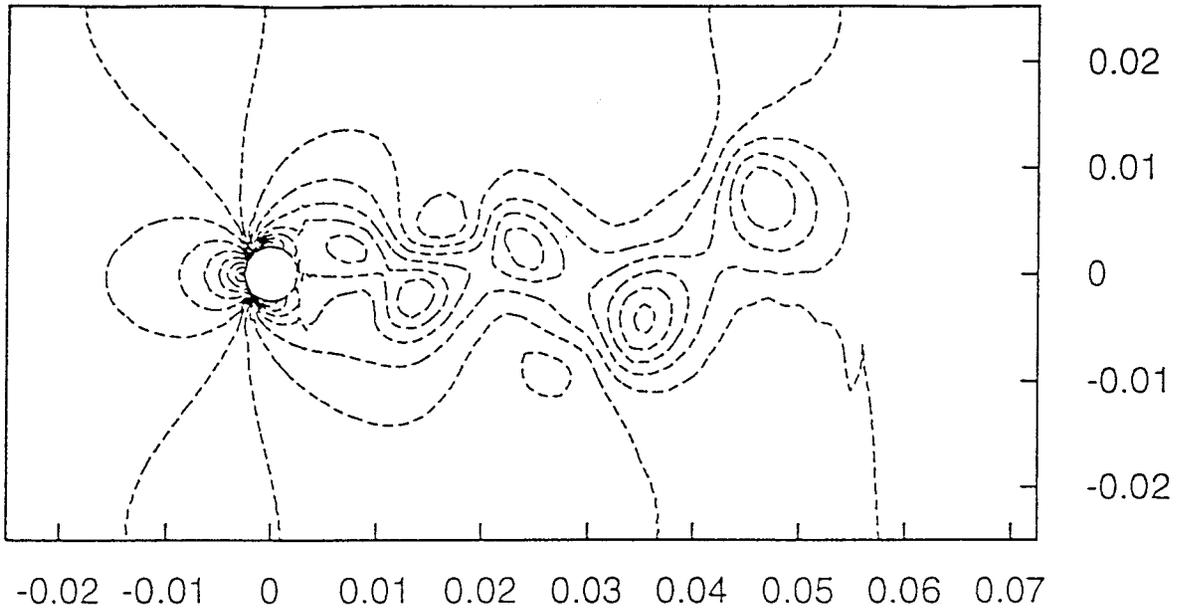
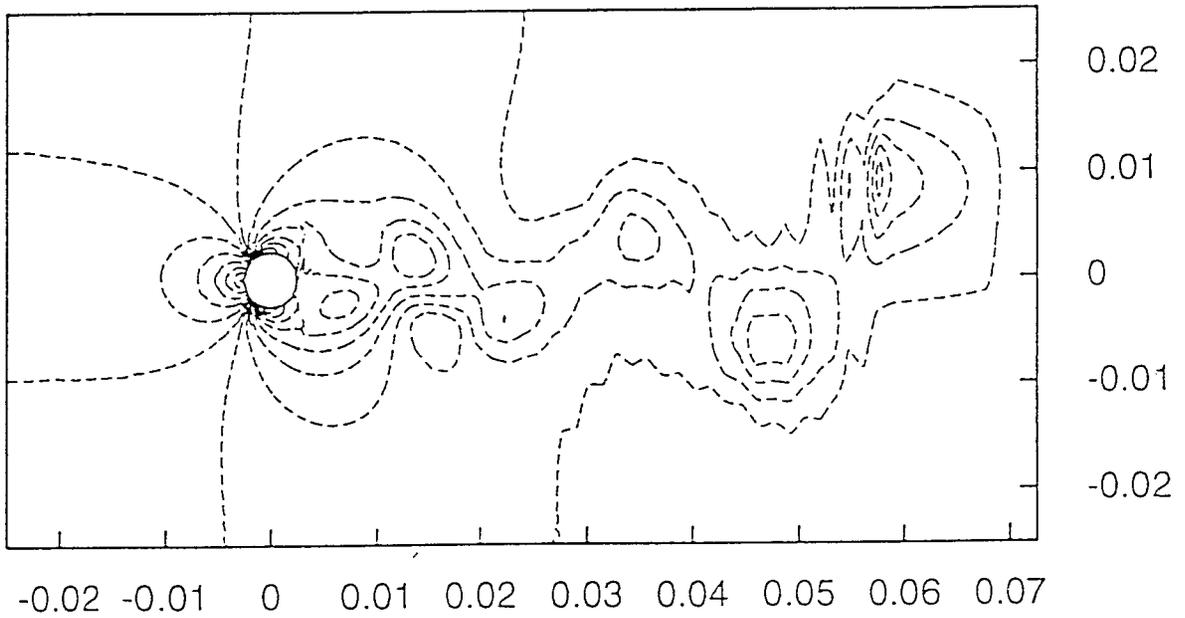


Fig. 4.39. Champs de vitesse d'un écoulement autour  
d'un cylindre (a)  $t = 3.6$  s (b)  $t = 4.0$  s.





(a)  $t = 4.0$  s

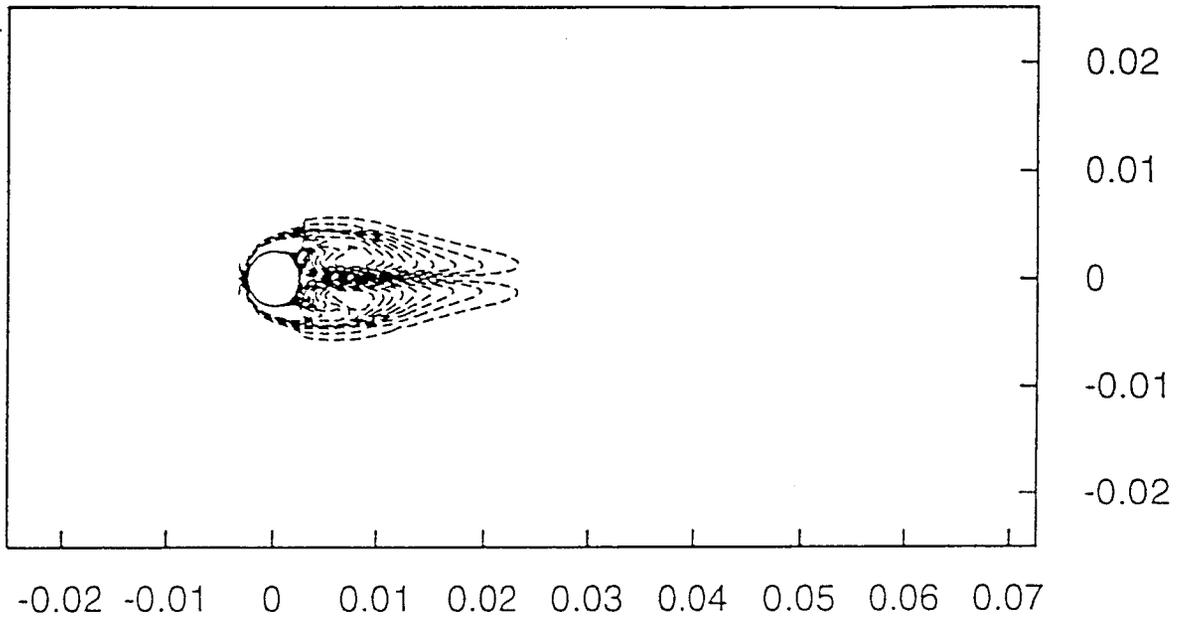


(b)  $t = 4.4$  s.

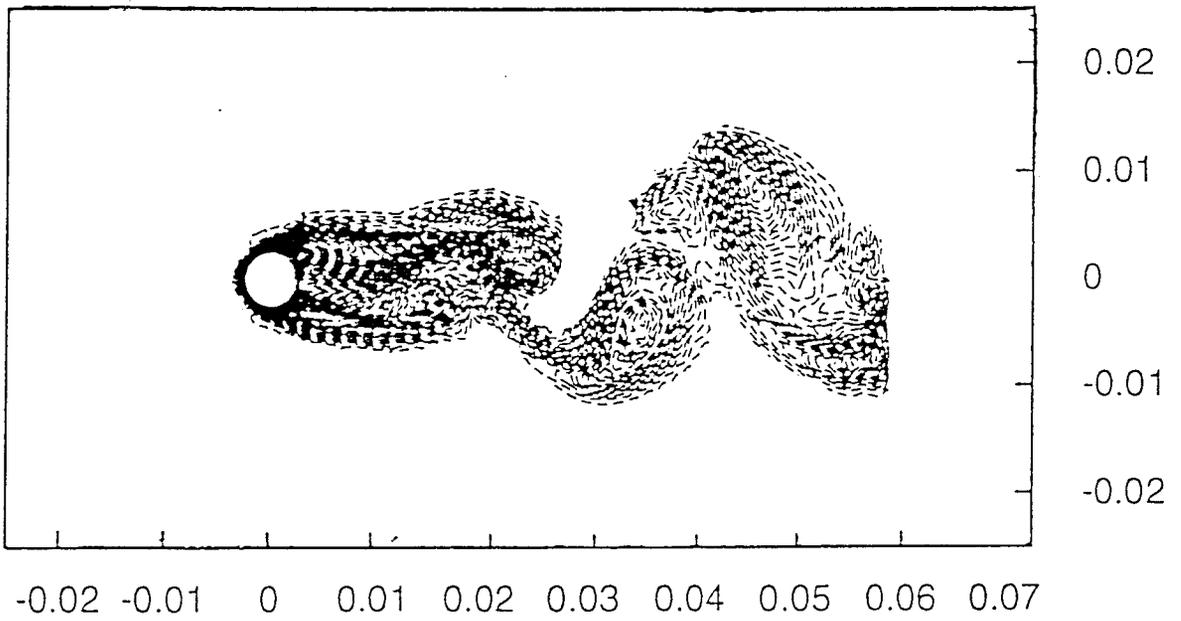
Fig 4.40 Champs de pression (9256 noeuds)

(a)  $t = 4.0$  s

(b)  $t = 4.4$  s.



(a)  $t = 0.8 \text{ s}$



(b)  $t = 4.0 \text{ s}$

Fig 4.41 Champs de la fonction de vorticité (9256 noeuds)

(a)  $t = 0.8 \text{ s}$

(b)  $t = 4.0 \text{ s}$

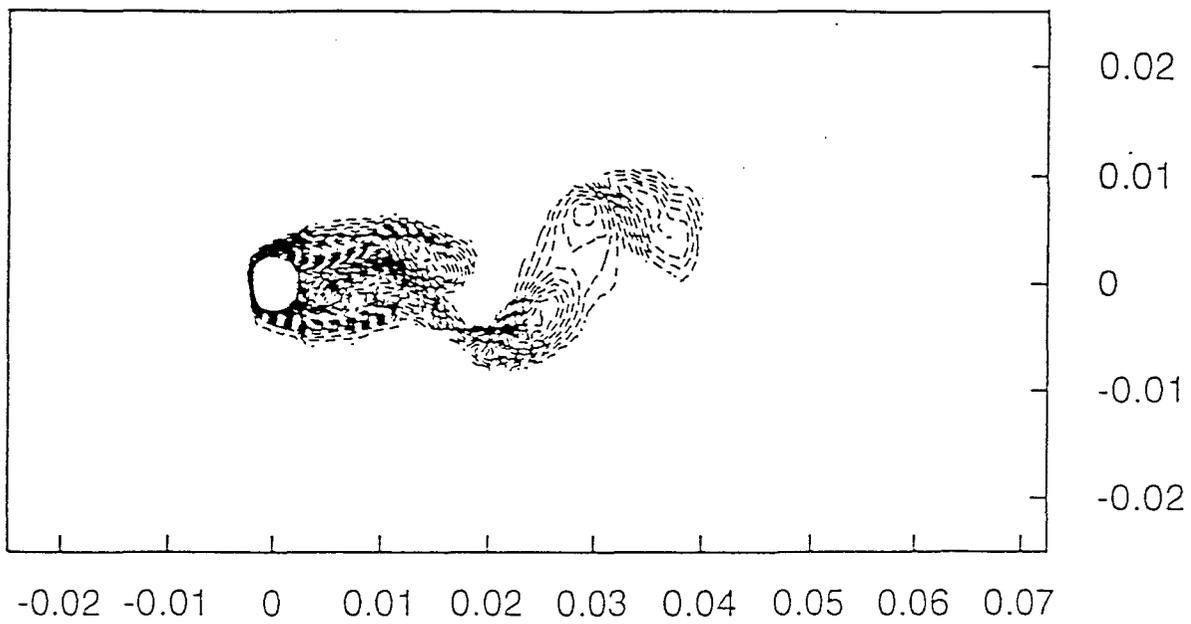
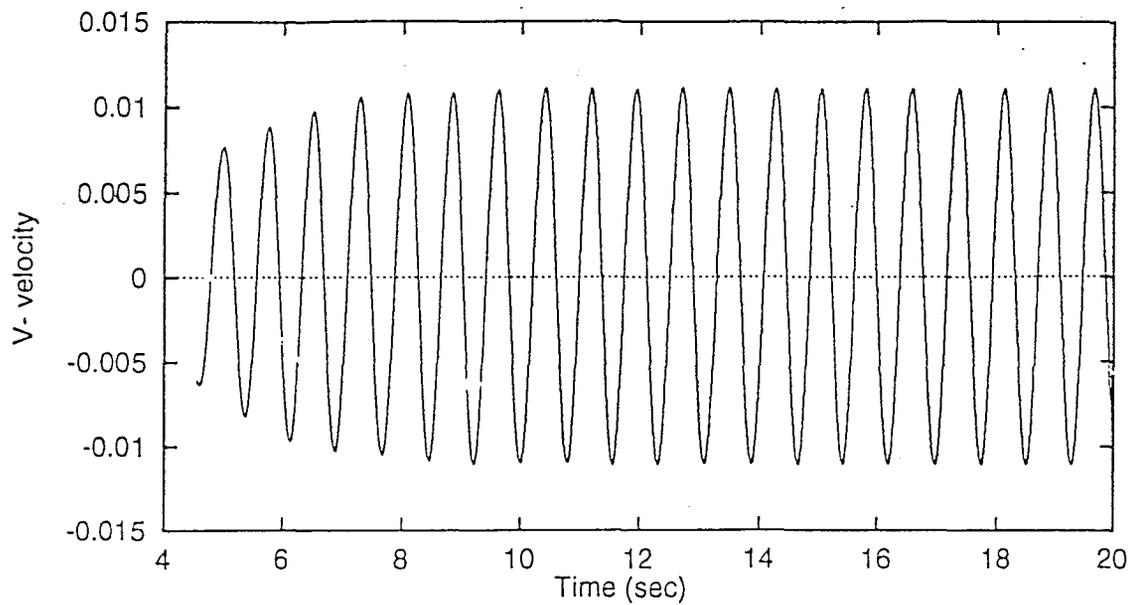
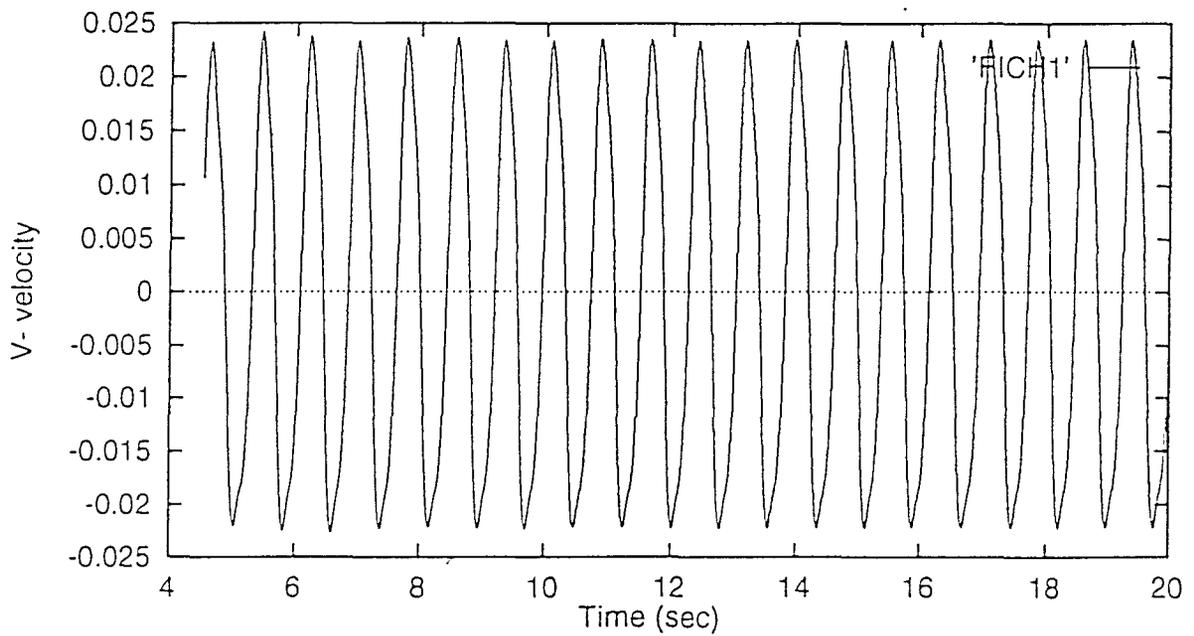


Fig. 4.42 Champ de la fonction de vorticité  
  l'instant  $t = 6.85$  s.



(a)  $\frac{\xi}{\delta} = 1.092$



(b)  $\frac{\xi}{\delta} = 4.668$

Fig 4.43 Variations de la vitesse en fonction du temps ( $S_r = 0.189$ )

(a)  $\frac{\xi}{\delta} = 1.092$

(b)  $\frac{\xi}{\delta} = 4.668$



## CHAPITRE V

MODELISATION DES ECOULEMENTS TURBULENTS
--

### V.1. INTRODUCTION

Manifestement, la turbulence est un phénomène physique important qui intervient dans grand nombre d'écoulements d'un grand intérêt technologique et pratique ( fluide tournant dans un réacteur, jet qui s'échappe d'un turbo-réacteur, ... etc).

En effet, un siècle est déjà passé depuis que O. Reynolds (1894) et Boussinesq (1877), ont fondé les premières bases de calcul de la turbulence en fluides. Les variations "irrégulières" des grandeurs physiques observées par les deux précédents auteurs les ont conduit à introduire le caractère aléatoire dans le traitement des écoulements turbulents. Cette démarche, a une conséquence: le recours à un traitement statistique de la turbulence pour résoudre des problèmes pratiques.

L'idée de base dans la modélisation de la turbulence à partir des grandeurs statistiques définies en un point est d'utiliser en chaque point des grandeurs moyennes non fluctuantes définies de façon conventionnelle à partir des grandeurs instantanées fluctuantes. On peut ainsi, établir un système d'équations moyennées qui font apparaitre des contraintes turbulentes (Contraintes de Reynolds), qui représentent les transferts associés aux fluctuations. Le problème central de la détermination des écoulements turbulents consiste en la modélisation de ces contraintes. Ce problème est généralement désigné sous le nom de problème de fermeture.

Il est maintenant admis que presque tous les écoulements turbulents contiennent simultanément des caractères organisés et aléatoires. Les proportions de leurs présence dépendent principalement des configurations géométriques du do-

maine d'écoulement, du nombre de Reynolds, des conditions initiales et des conditions aux limites. De ce fait, à l'heure actuelle, personne ne pense sérieusement qu'il est possible de proposer un modèle de turbulence, à schémas de fermeture en un point, suffisamment universel pour décrire tous les écoulements turbulents complexes à caractère industriel.

Les écoulements instationnaires sont caractérisés par une forte présence des structures ordonnées. Bien souvent, la présence de ces structures dans des écoulements à caractère industriel est la cause des imperfections au niveau des prédéterminations numériques par modélisation statistique. Des voies intermédiaires ont été élaborées pour combler cette lacune en particulier par la simulation des grandes échelles (L.E.S Large Eddy Simulation) accompagnées d'une modélisation de Sous-Maille (Sub-Grid Modelling). Les travaux réalisés par les centres de recherche tels que l'I.M.G. (1991), O.N.E.R.A. (1987) ... etc ont conduit à de bons résultats dans des configurations plus au moins académiques.

L'objectif de ce chapitre, consiste à faire le point sur des modèles déjà existants, non pas dans le but de comparer les mérites respectifs de chacun, mais de montrer, que nous disposons à l'heure actuelle d'une collection assez variée de modèles de turbulence pour simuler numériquement des écoulements turbulents. Ces modèles peuvent fournir des résultats satisfaisants dans certains cas. Ils peuvent aussi, s'avérer insuffisants dans d'autres cas, et ceci s'explique soit par certaines limitations dues à des hypothèses faites sur certains modèles (modèles à concept de viscosité turbulente), ou par la complexité de la structure mathématique des équations obtenues (modèles de transport des contraintes de Reynolds), ou par la lourdeur et le coût des calculs (Simulation directe).

Dans ce chapitre, nous allons tenté de prédire deux types d'écoulements: écoulement dans un canal (écoulement de Poiseuille, écoulement de Couette Pur) et l'écoulement en aval d'une marche descendante.

## V.2. MODELES STATISTIQUES EN UN POINT

Depuis une vingtaine d'années, divers modèles statistiques de la turbulence ont été développés. Ces modèles, basés sur des schémas de fermeture dits à un point, parce que les différentes corrélations et grandeurs moyennes ont été reliées entre elles par des valeurs exprimées aux mêmes points dans l'espace et aux mêmes instants.

Malgré la diversité des modèles en un point, on peut les regrouper en deux grandes classes:

- i) Ceux qui s'appuient sur le concept de la viscosité turbulente (hypothèse de Boussinesq).
- ii) Ceux qui déterminent les moments d'ordre deux, à partir des équations aux dérivées partielles (équations de transport) exprimant leur bilan et leur évolution dans l'espace et dans le temps.

Entre les deux classes précédentes, il convient d'en ajouter une troisième, qu'on peut désigner par A.S.M (Modèles algébriques pour les contraintes turbulentes), dans laquelle une anisotropie des contraintes de Reynolds peut être prise en compte sans recourir aux équations de transport à résoudre.

### V.2.1. Modèles de fermeture au premier ordre

La première classe des modèles est basée sur une analogie formelle avec la loi linéaire du comportement newtonien:

$$\overline{u'_i u'_k} = \frac{2}{3} \delta_{ik} k - 2\nu_t S_{ij} \quad (85)$$

où  $k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}$  est l'énergie cinétique turbulente et  $S_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right]$  est le tenseur des déformations moyennes.

Dans cette loi de comportement (85), la viscosité turbulente  $\nu_t$ , qui n'est plus une propriété intrinsèque du fluide mais une propriété de l'état local de la turbulence, doit être exprimée en fonction d'une échelle de longueur et une échelle de

vitesse, toutes les deux caractéristiques des structures turbulentes qui contrôlent les mécanismes de transfert au sein de l'écoulement. C'est précisément la façon, dont il faut exprimer ces deux échelles, qui fait la distinction entre les différents modèles de cette classe à concept de viscosité turbulente.

Parmi les modèles basés sur le concept de viscosité turbulente, à deux équations de transport d'échelles, le modèle  $(k, \varepsilon)$  développé à l'origine par Jones & Launder (1973) /64/. Il existe cependant de nombreux autres modèles à deux échelles, de la même famille que le modèle  $(k, \varepsilon)$ . Dans cette catégorie de modèle, la première échelle est toujours issue, sans exception, de l'énergie cinétique de la turbulence  $k$ . Ce choix est dû essentiellement à la facilité d'obtention d'une équation de transport de cette quantité, à partir de la manipulation des équations de Navier-Stokes. Dans le modèle de Jones & Launder, la deuxième échelle caractéristique choisie a été la partie isotrope du taux de dissipation de l'énergie cinétique de la turbulence  $\varepsilon$ , qui combiné avec  $k$ , fournit les échelles temporelles et spatiales de la turbulence. Autres deuxièmes échelles ont été proposées: Soit le produit  $k.L$  comme dans le modèle de Rotta (1951), soit le carré du rotationnel fluctuant  $\omega^2$  de Wilcox-Rubesin (1980), soit de l'échelle temporelle  $\frac{k}{\varepsilon}$  comme dans le modèle de Speziale *et al* (1982).

Bien que dans de nombreux cas d'écoulements (écoulements bi-dimensionnels cisailés minces, couches limites attachées, écoulements en conduite avec gradients de pression modérés ou faibles, avec ou sans aspiration, quelques écoulements à recirculation) les modèles à deux équations avec concept de viscosité turbulente, aient fourni des résultats satisfaisants, il convient de ne pas oublier les points suivants (Ha Minh /65/):

- L'utilisation du concept d'une viscosité turbulente isotrope a un avantage sur le plan numérique: elle a permis au modèle d'être incorporé dans tout code de résolution des équations de Navier-Stokes.
- Les modélisations fondées sur l'hypothèse de viscosité turbulente sont souvent contestées à cause de l'hypothèse d'isotropie de la viscosité. Cette

hypothèse peut conduire à des résultats incorrects, par exemple en amont des obstacles (cas d'un écoulement autour d'un cylindre). Une autre faiblesse du concept de viscosité turbulente est la représentation des trois contraintes turbulentes normales par leur demi-somme (énergie cinétique turbulente) ce qui revient à admettre que l'évolution de ces trois composantes se fait de la même façon. De ce fait, dans des écoulements où ces trois contraintes normales varient de façon différentes (zones internes près des parois, canaux courbes, chocs, zones à recirculations, canaux dissymétriques ...), les modèles à concept de viscosité, ne sont pas toujours satisfaisants.

Les modèles à deux équations de transport ont fait l'objet de très nombreuses applications, même en situations complexes. Rodi (1984) /66/ a présenté et discuté les résultats de calcul dans des configurations telles que: couche limite de paroi avec ou sans gradients de pression, parois courbes, canaux plans ou axisymétriques de révolution, écoulements cisailés libres, avec ou sans convection naturelle, écoulements décollés.

Les comparaisons faites entre les expériences et les prédictions des modèles de Chien /7/, de Launder & Sharma (1974) /67/ et de Lam & Bremhorst (1981) /68/ montrent que les trois modèles prédisent correctement le profil de vitesse d'un écoulement de Poiseuille. Les modèles de Chien et de Launder & Sharma présentent des profils de  $u^+$  similaires, qui sont en accord avec les mesures expérimentales de El Telbany & Reynolds (1980) /69/. Par contre le modèle de Lam & Bremhorst prédit une zone de transition importante. Les trois modèles sur-évaluent la viscosité turbulente dans la partie centrale de l'écoulement. Les prédictions de l'énergie cinétique de la turbulence obtenues par les trois modèles pour un écoulement de Poiseuille réalisé par Clark (1968) /70/ montrent la même évolution de  $k$  dans la partie centrale de l'écoulement, et qu'elle est supérieure en niveau aux mesures expérimentales. Dans les zones pariétales, le modèle de Chien donne la meilleure estimation de l'énergie turbulente, tandis que le modèle de Launder & Sharma sous-estime le pic pariétal de  $k$ .

Pour les prédictions d'un écoulement de Couette Pur. Les trois modèles donnent des profils de vitesse très similaires, mais Launder & Sharma et Chien semblent en meilleur accord avec l'expérience. Les trois modèles donnent des profils de  $\nu_t$  relativement semblables. Ils ne reproduisent pas le plateau de viscosité turbulente dans la partie centrale de l'écoulement. La meilleure évolution est donnée par le modèle de Launder & Sharma. L'énergie cinétique de la turbulence est d'une manière générale assez mal estimée. Launder & Sharma ne prédisent pas de pic pariétaux de  $k$ , tandis que les deux autres modèles donnent des profils relativement corrects dans les zones pariétales. Par contre, ces trois modèles surestiment le niveau d'énergie turbulente dans la partie centrale de l'écoulement.

### V.2.2. Modèles de fermeture au second ordre

La première cause apparente, pouvant expliquer ces mauvais résultats, est la relation (85). Celle-ci impose à la viscosité turbulente de s'annuler en même temps que le gradient de vitesse, ce qui a été infirmé par les essais de El Telbany & Reynolds. Pour s'affranchir de cette hypothèse. Une alternative à cette loi de comportement (85) de type gradient consiste à considérer des équations de transport et de bilan relatives à chacun des moments d'ordre deux, représentant des flux turbulents, d'où le nom de modélisation au second ordre. Ils nécessitent dans le cas le plus général la résolution de sept équations de transport pour les six contraintes de Reynolds et le taux de dissipation  $\varepsilon$ . L'anisotropie du tenseur de Reynolds à proximité des parois peut ainsi être prise en compte. Afin d'éliminer les approximations liées à l'hypothèse précédente, on peut essayer d'évaluer directement les composantes du tenseur de Reynolds. On déduit l'équation gouvernant les contraintes de Reynolds et après modélisation prend une forme générale ( pour les écoulements incompressibles, et en absence des effets de rotation) suivante:

$$\frac{\partial(\overline{u_i u_j})}{\partial t} + \overline{U_k} \frac{\partial(\overline{u_i u_j})}{\partial x_k} = -[\overline{u_j u_k} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} + \overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_k}] + \frac{\partial}{\partial x_k} [C_{s \varepsilon}^1 \overline{u_k u_l} \frac{\partial}{\partial x_l} \overline{u_i u_l}]$$

$$\begin{aligned}
& -\alpha[P_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}P_{kk}] - \beta[Q_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}P_{kk}] - \gamma k[\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i}] \\
& - C_2 \frac{\varepsilon}{k} [\overline{u_i u_j} - \frac{\delta_{ij}}{3} \overline{u_k u_k}] - \frac{2}{3} \varepsilon [(1 - f_s) \delta_{ij} + \frac{\overline{u_i u_j}}{\frac{2}{3}k} f_s] \\
& + [C_3 \frac{\varepsilon}{k} (\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k) + C_4 (P_{ij} - D_{ij}) + C_5 k \overline{S_{ij}}] \frac{k^{2/3}}{\varepsilon y} \tag{86} \\
& \alpha = -\frac{C_1 + 8}{11}, \beta = -\frac{8C_1 - 2}{11}, \gamma = -\frac{30C_1 - 2}{55} \\
& P_{ij} = -(\overline{u_i u_k} \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_k} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k}), Q_{ij} = -(\overline{u_i u_k} \frac{\partial \bar{U}_k}{\partial x_j} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial \bar{U}_k}{\partial x_i}) \\
& P_{kk} = \overline{u_m u_l} \frac{\partial \bar{U}_m}{\partial x_l}
\end{aligned}$$

On constate alors que, comme pour les modèles à deux équations à concept de viscosité turbulente, il est nécessaire de déterminer une échelle temporelle de retournement de la turbulence par une équation de transport du taux de dissipation de l'énergie cinétique du mouvement fluctuant.

Une tentative de calculer les écoulements de Poiseuille et de Couette avec ou sans gradients de pression à l'aide d'un modèle de transport des contraintes de Reynolds (en adoptant les modèles de SO & Yoo (1986) /71/ et de Jones & Musonge (1988) /72/). On a abouti à la conclusion que ce dernier n'apporte que peu d'améliorations aux résultats obtenus avec les modèles  $(k, \varepsilon)$ .

Il en résulte que la médiocre prédiction des résultats d'El Telbany & Reynolds pour les écoulements de type Poiseuille ne semble pas être liée à l'hypothèse précédente. En effet, les modèles aux tensions de Reynolds ne sont pas basés sur cette hypothèse, ils ont cependant abouti aux mêmes écarts que les fermetures au premier ordre, notamment pour les profils de vitesse moyenne dans les zones de gradient de vitesse nul. On pense alors que cette discordance est plutôt liée au non-établissement de l'écoulement dans la section de mesure. De plus, le saut d'énergie turbulente mis en évidence par El Telbany & Reynolds lors du passage d'un écoulement du type Couette à un écoulement de type Poiseuille n'est pas non plus confirmé par les fermetures au second ordre.

Bien que la modélisation au second ordre soit développée depuis une quinzaine d'années, elle n'a pas été souvent appliquée aux écoulements turbulents complexes, là où elle trouve sa raison d'être. Car, la complexité numérique de résolution fait que la modélisation au second ordre n'est appliquée qu'aux écoulements cisailés minces, là où les configurations sont simples et ont permis aux modèles à concept de viscosité turbulente d'être souvent suffisants. En fait, si la modélisation au second ordre n'est pas souvent appliquée aux configurations d'écoulements complexes, ce n'est pas principalement à cause du coût élevé des calculs, mais à cause d'une part, de la structure mathématique complexe des équations à résoudre et d'autre part, elle nécessite un grand nombre de constantes lors de la modélisation des termes inconnus et il n'y a pas assez d'expériences disponibles pour une évaluation de ces constantes. Une autre conséquence de ces constantes est le manque de généralité de la modélisation, puisqu'elles sont calibrées sur des écoulements spécifiques. En soulignant, l'avantage des modèles à concept de viscosité turbulente: le renforcement des termes linéaires dans les équations convection-diffusion. Il est alors facile de respecter des nombres de Reynolds locaux peu élevés. Cet avantage disparaît ici: les contraintes de Reynolds n'agissent que comme des termes sources, et l'équation de quantité de mouvement a une nature hyperbolique de type Euler.

Parmi les constantes empiriques apparues dans les modèles à concept de viscosité turbulente et à deux échelles, la constante  $C_\mu$  est probablement celle qui est mise en cause. Cette valeur de  $C_\mu$  a été déterminée à partir des mesures expérimentales de  $k$  dans les zones pariétales et sous hypothèse d'équilibre entre la production et la dissipation de  $k$  (production  $\simeq$  dissipation) on admet généralement une valeur de 0.09 pour cette constante. Ha Minh (1993) /65/ pense que la valeur numérique de cette constante doit être révisée: il a remarqué que dans les écoulements à fortes recirculations, les résultats expérimentaux ont montré que la constante  $C_\mu < 0.025$  dans ces zones, où les contraintes de ci-

saillement turbulentes sont anormalement faibles par rapport aux contraintes normales de Reynolds.

Dans le cas de la marche descendante, à grands nombres de Reynolds, la plupart des calculs effectués avec les modèles  $(k, \varepsilon)$  classiques, ont conduit à une longueur de recollement faible par rapport à la valeur expérimentale. Une analyse du phénomène physique considéré montre une nature très particulière de la turbulence dans la zone de recirculation, où la contrainte turbulente de cisaillement est anormalement faible par rapport au niveau des contraintes normales dont la somme a été prise pour déterminer la diffusivité turbulente  $\sim (\frac{k^2}{\varepsilon})$ . La nature de la turbulence dans cette zone est en fait la conséquence des structures organisées issues d'une instabilité de type Kelvin-Helmholtz dans la couche de cisaillement prenant naissance au droit de la marche, et dont les caractéristiques dépendent de celles de la couche limite au point de décollement (Ha Minh /65/). Kourta & Ha Minh /8/ ont ainsi proposé une autre approche, la modélisation semi-déterministe. Cette démarche consiste à adopter une décomposition de toute grandeur physique instantanée en une moyenne d'ensemble et une partie incohérente (les modèles  $(k, \varepsilon)$  classiques ne peuvent faire la distinction entre les structures turbulentes (incohérentes) et cohérentes et par suite produisent une grande intensité turbulente et spécialement juste en aval de la marche). La moyenne d'ensemble est, fonction de l'espace et du temps, contient la moyenne temporelle et la partie instationnaire cohérente: elle sera déterminée directement par la résolution des équations de Navier-Stokes moyennées. Par contre les effets de la partie incohérente seront pris en compte par la résolution des équations de fermeture de la manière des modèles statistiques de la turbulence classique (notamment avec un modèle de Jones & Launder). Dans leur étude, Kourta & Ha Minh différentes réalisations de la contrainte turbulente ont été testées pour calibrer leur modèle. Ces derniers auteurs, ont constaté que lorsqu'ils réduisent la contrainte turbulente de cisaillement de 50 % de sa valeur, ils obtiennent une longueur de recollement de 5.7 et avec 20 % de réduction,

ils obtiennent une valeur moyenne de 7.87, laquelle est en bon accord avec les résultats expérimentaux ( Kim *et al* (1978) /73/ donne une valeur de  $7 \pm 1$  à cette longueur).

### V.3. SIMULATION DIRECTE

Une autre méthode pour calculer les écoulements turbulents consiste à résoudre directement les équations de Navier-Stokes instationnaires. Une simulation numérique directe doit prendre en compte toutes les échelles du mouvement, des plus grandes, déterminées par les frontières physiques du problème, jusqu'aux plus petites, les échelles dissipatives de Kolmogorov (voir M. Lesieur (1990) /74/). Elle permet cependant, de calculer les valeurs instantanées de la pression et de la vitesse en tout point d'un maillage tridimensionnel et en fonction du temps. La seule connaissance des conditions aux limites et initiales suffit pour résoudre le problème. Il est alors possible de calculer des grandeurs inaccessibles à l'expérience telles que les corrélations pression-vitesse ou les corrélations triples de vitesses qui apparaissent dans les équations de transport des contraintes de Reynolds et dans l'équation pour le taux de dissipation isotrope  $\varepsilon$ , utilisées dans les modélisations de fermeture au second ordre.

La puissance actuelle des calculateurs ne permet pas de simuler les écoulements à nombre de Reynolds  $Re_{max}$  supérieur à environ 20.000 pour des écoulements présentant des symétries (écoulements de Poiseuille ou de Couette pur), ou à 10.000 pour des écoulements asymétriques (écoulements de Couette-Poiseuille). On démontre (voir Tennekes & Lumely (1972) /75/) que le rapport entre les échelles les plus grandes et les petites est proportionnel à  $Re_l^{\frac{3}{4}}$ . On en conclut que le nombre de points qu'il faut utiliser pour réaliser une simulation numérique directe d'un écoulement turbulent tridimensionnel est proportionnel à  $Re_l^{\frac{9}{4}}$ . Afin d'illustrer cette remarque, prenons les exemples suivants:

Dang & Deschamps (1988) /76/ ont calculé un écoulement de Poiseuille pur

à l'aide d'un schéma aux différences finies d'ordre 4 en espace et d'ordre 2 en temps. Ils ont utilisé 21.060 points de discrétisation pour un écoulement dont le nombre de Reynolds  $Re_{max}$  était de 4.000. Dang & Deschamps ont également montré que leurs calculs de la plupart des termes des équations de transport pour les différentes contraintes de Reynolds (moments d'ordre 2), étaient très semblables à ceux obtenus par Kim *et al* (1987) /43/ par une méthode spectrale. Des écarts ne commencent à apparaître que pour les moments d'ordre supérieur tels que le terme de diffusion turbulente (corrélation triple de vitesse). Kim *et al* avaient eu recours à environ 4.000.000 de points de discrétisation pour simuler un écoulement de Poiseuille pur dont le nombre de Reynolds  $Re_{max}$  était de 6600. Le nombre de points de maillage était donc 100 fois plus élevé que celui de Dang & Deschamps.

Un écoulement de Couette pur a été étudié par Lee & Kim (1991) /77/ pour un nombre de Reynolds  $Re_\tau$ , basé sur la vitesse débitante et la hauteur du canal de 6000. La méthode est celle employée par Kim *et al* pour un nombre de points d'environ 3.000.000. Le profil de la vitesse moyenne simulé est en bon accord avec celui mesuré par El Telbany & Reynolds pour un nombre de Reynolds notablement plus élevé de 28.500. Par contre il est relativement différent de celui mesuré par Reichardt (1959) /78/ à un nombre de Reynolds de 2900.

Des travaux importants ont été développés plus récemment par simulation directe dans le cadre des écoulements turbulents en présence de parois. Par exemple, Kim *et al* (1987) et Rutledge & Sleicher (1993) /44/ ont étudié un écoulement turbulent dans un canal plan, obtenant des résultats prometteurs dans le cadre de la transition vers la turbulence. Normand & Lesieur (1990) /79/ ont développé une étude sur une couche limite compressible en montrant des structures cohérentes caractéristiques de cet écoulement. Cependant, tous les efforts dans ce sens sont limités à des valeurs du nombre de Reynolds faibles.

En raison des tailles et des coûts de calcul prohibitifs, la simulation directe est particulièrement utilisée pour générer des données utiles à tester des modèles de fermeture de la turbulence. Pour des écoulements complexes ou des dimensions géométriques importantes, il n'est pas possible de mailler aussi finement et l'on doit faire appel à la méthode de la simulation des grandes échelles.

### V.3.1 La fermeture en deux points et la modélisation sous-maille

Les méthodes de fermeture en un point ne font intervenir que les quantités prises au même point. Or la turbulence est, par nature, dépendante de son histoire spatio-temporelle. Pour prendre en compte le comportement non-local de la turbulence, il faut utiliser des corrélations en deux points, selon l'espace et le temps (voir M. Lesieur (1990)).

La simulation des grandes échelles (Large eddy simulation) a été proposée par Smagorinsky (1963) /80/. Elle implique l'utilisation d'une nouvelle génération de modèles de la turbulence: la modélisation sous-mailles (Sub Grid Scale Modelling), qui consiste à résoudre explicitement toutes les instabilités de taille plus grande que la taille du maillage, de façon à prendre en compte la non-homogénéité de l'écoulement, et à modéliser l'action des petites structures (les échelles sous-maille) sur celle-ci (voir Clark *et al* (1979) /81/, M. Lesieur (1991) /82/). On applique en tout point du champ de vitesse un filtre de largeur directement liée à la taille des mailles, filtre qui définit un champ filtré  $\bar{u}_i$  de large échelle. le champ de vitesse se décompose alors en ce champ filtré et un champ d'échelles de sous-mailles  $u'_i$  qui sont la représentation des fluctuations du champ réel par rapport aux valeurs filtrées.

Des études ont été développées pour étudier des écoulements plus complexes. Moin *et al* (1978) /83/ ont calculé un écoulement turbulent dans un canal rectangulaire. Le modèle sous-maille de Smagorinsky a été utilisé, sauf à proximité des parois, où une approximation fondée sur le concept de

longueur de mélange a été utilisée. Moin & Kim (1985) /84/ présentent une investigation numérique très complète d'un écoulement turbulent dans un canal, à l'aide de la simulation des grandes échelles, avec un maillage de  $63 \times 64 \times 128$  noeuds. Le nombre de Reynolds basé sur la largeur du canal est de 13.800. Le modèle sous-maille utilisé, dû à Schumann (1975) /85/, est une variante du modèle de Smagorinsky. Les résultats obtenus représentent bien la région centrale de l'écoulement par rapport aux expériences. Dans la région proche des parois, les résultats sont moins représentatifs, l'intensité turbulente calculée étant supérieure aux valeurs expérimentales.

Récemment, Silveira Neto (1991) /86/, a présenté une étude statistique et topologique d'un écoulement turbulent complexe en aval d'une marche descendante. Son étude a été réalisée au moyen des techniques de simulation directe et de simulation des grandes échelles. La simulation directe a été utilisée pour montrer l'influence d'une stratification stable sur la couche de mélange. Les écoulements tri-dimensionnels ont été étudiés à l'aide de la simulation des grandes échelles. Le modèle sous-maille utilisé repose sur est une adaptation locale dans l'espace physique du concept de viscosité turbulente dans l'espace de Fourier (Métais & Lesieur (1991) /87/). Les résultats obtenus, montrent la capacité de la méthode à simuler des écoulements présentant des caractéristiques proches de celles des écoulements industriels.

En conclusion, nous dirons que nous disposons actuellement d'un nombre assez varié de modèles pour simuler numériquement les écoulements turbulents. La modélisation de la turbulence ne pourrait être réalisée que grâce à une forte collaboration entre des expériences fines, des travaux de la simulation directe, par exemple ceux de Rida & Dang (1991) /88/, et des efforts en modélisation, aussi bien avec le concept de viscosité turbulente qu'avec des schémas de fermeture au second ordre.

## V.4. CAS-TESTS TURBULENTS

### V.4.1. ÉCOULEMENT DANS UN CANAL

#### a) Écoulement de Poiseuille

La figure (5.1), présente le profil de l'énergie cinétique turbulente calculé par la MMI (modèle de Chien), et comparé avec les études expérimentales de Clark /70/ ainsi qu'avec les résultats numériques obtenus par le modèle de Launder & Sharma /67/. Nous constatons que les résultats obtenus, montrent la même évolution de l'énergie cinétique  $k$  dans la partie centrale de l'écoulement.

Dans les zones pariétales, le modèle de Chien adopté par la MMI et le modèle de Launder & Sharma sous-estiment le pic pariétal de l'énergie cinétique turbulente  $k$ .

Sur la figure (5.2), nous avons présenté, les prédictions de la viscosité turbulente  $\nu_t$ , obtenues par Chien et par les mesures expérimentales d'El Telbany & Reynolds /69/. On constate la parfaite coïncidence entre les résultats obtenus par la MMI (modèle de Chien) et les résultats fournis par Chien /7/. Par contre ces deux modèles sur-évaluent la valeur de  $\nu_t$  au centre de l'écoulement. Une nette diminution de la viscosité turbulente  $\nu_t$  observée par les mesures d'El Telbany & Reynolds n'a pas été détectée par le modèle de Chien.

#### b) Écoulement de Couette Pur

La figure (5.3) présente les profils de la vitesse d'un écoulement de Couette pur, obtenus par la MMI (modèle de Chien), par les mesures réalisées par Reichardt /78/, par celles de Robertson & Johnson (1970) /89/ et celles fournies par El Telbany & Reynolds /69/. Ces résultats fournissent la même évolution de la vitesse.

La figure (5.4) donne les prédictions de l'énergie cinétique turbulente  $k$  obtenues par la MMI, par Chien et par El Telbany & Reynolds. On remarque, la parfaite coïncidence entre les valeurs obtenues par la MMI et celles de Chien. Par

contre, ces deux modèles sur-estiment le niveau de  $k$  dans la partie centrale de l'écoulement. Cette surestimation est due à la constante  $C_\mu$ , car au centre de l'écoulement nous avons un équilibre entre les termes de production et de dissipation de l'équation de transport pour  $k$ , elle se réduit:

$$\nu_t \left( \frac{dU}{dy} \right)^2 = \varepsilon \quad \frac{k}{u_\tau^2} = \frac{1}{\sqrt{C_\mu}} = 3.3$$

Cette valeur de  $C_\mu$  a été déterminée à partir des mesures expérimentales de  $k$  dans les zones pariétales où il y'a un équilibre relatif entre la production et la dissipation de  $k$ , mais à partir des mesures d'El Telbany & Reynolds, on trouve que  $\frac{k}{u_\tau^2}$  est environ de 2.6 au centre d'un écoulement de Couette Pur. A notre avis, la valeur de  $C_\mu$  doit être révisée, si on veut superposer les prédictions et les mesures de  $k$  dans la partie centrale de l'écoulement.

La figure (5.5) présente les prédictions de la viscosité turbulente  $\nu_t$  obtenues par la MMI, par le modèle de Lam & Bremhorst /68/ et les mesures expérimentales d'El Telbany & Reynolds. Les modèles utilisés par la MMI et par Lam & Bremhorst, ne reproduisent pas le plateau de la viscosité turbulente dans la partie centrale de l'écoulement, mais cette mésestimation n'a qu'une faible influence sur la prédiction du profil de la vitesse (Fig. 5.3). La meilleure évaluation de  $\nu_t$  est donnée par le modèle de Chien utilisé par la MMI.

ÉCOULEMENTS TURBULENTS DANS UN CANAL

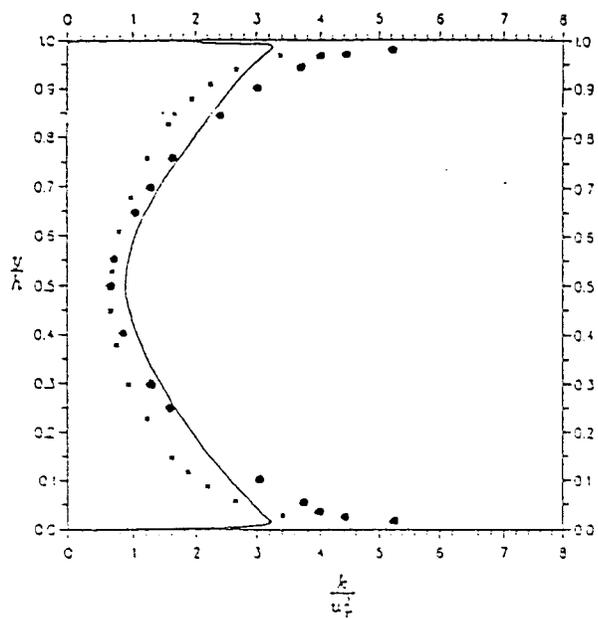


Fig 5.1 Profil de l'énergie cinétique turbulente.

\* MMI. • CLARK. — Launder & Sharma.

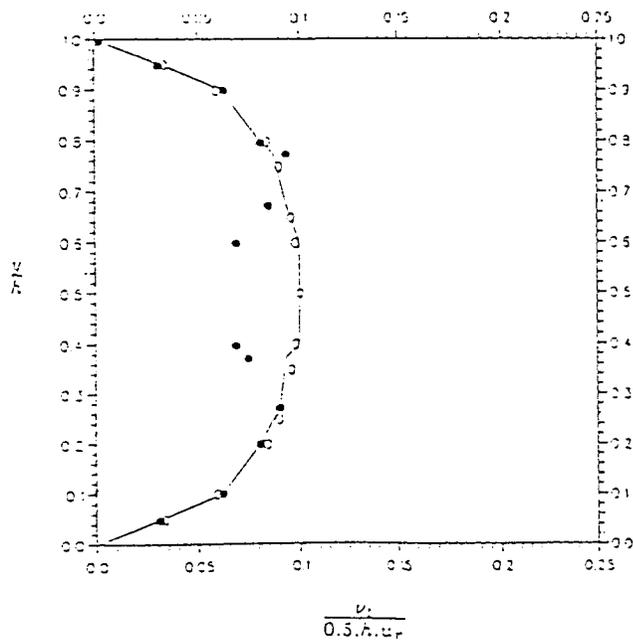


Fig 5.2 Profil de la viscosité turbulente.

o MMI. — CHIEN. \* El Telbany & Reynolds.

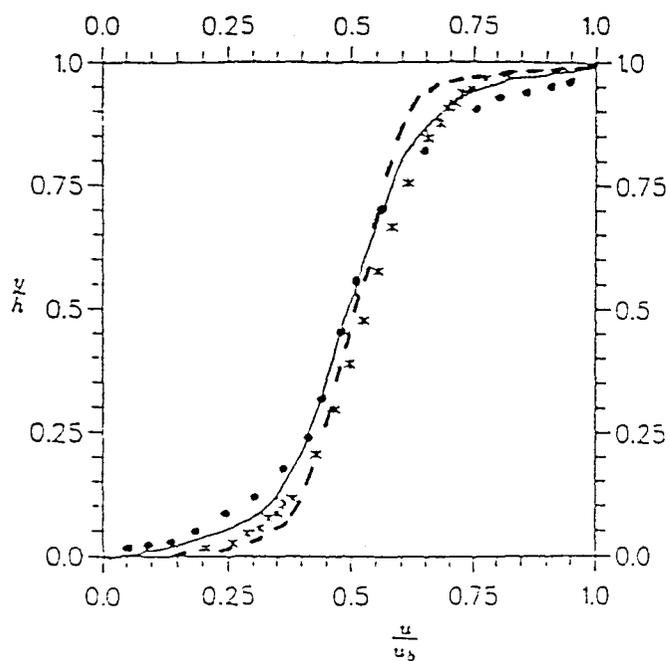


Fig 5.3 Profil de la vitesse.

- \* MMI. - - - Robertson & Johnson.
- Reichardt — El Telbany & Reynolds.

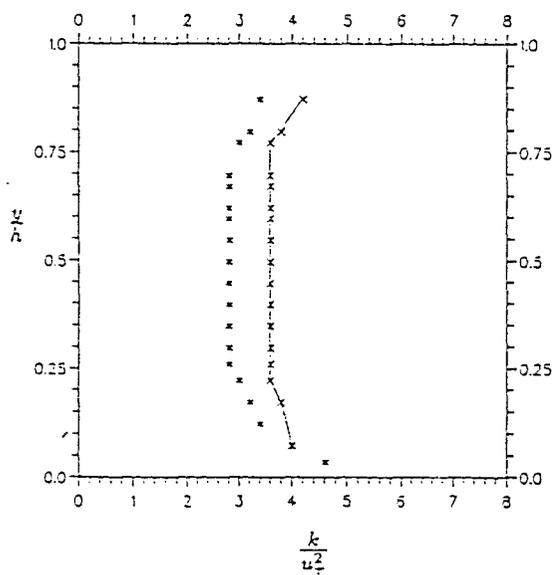


Fig 5.4 Profil de l'énergie cinétique turbulente.

- × MMI. - - - CHIEN. \* El Telbany & Reynolds.

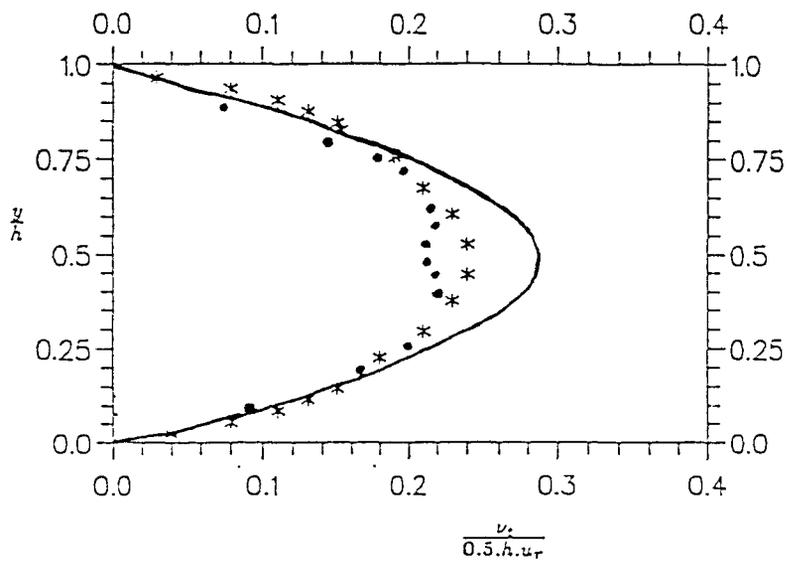


Fig 5.5 Profil de la viscosité turbulente.

\* MMI. — Lam & Bremhorst.

• El Telbany & Reynolds.

#### V.4.2. MARCHE DESCENDANTE

La marche descendante a été choisie comme géométrie pour ce deuxième cas test. Cet écoulement présente des caractéristiques proches de celles des écoulements industriels.

Les écoulements turbulents les plus simples peuvent être classés, selon leur nature, dans l'une des deux catégories suivantes: les écoulements turbulents cisailés libres (mélange des courants de fluides de vitesses différentes) et les écoulements cisailés autour d'un obstacle ou proche d'une paroi (couche limite, écoulement dans un canal, ... etc). Généralement un écoulement turbulent complexe se présente comme une combinaison des deux catégories décrites.

L'écoulement en aval d'une marche descendante est un exemple complexe combinant les deux types de turbulence dans une géométrie simple. Sa dynamique est le résultat de l'interaction des instabilités caractéristiques des écoulements cisailés libres et des écoulements pariétaux. Cette géométrie est un cas test les plus répandus dans le domaine des recherches fondamentales de la dynamique des fluides, expérimentales (Kim *et al* (1978), Eaton & Johnston (1981) /90/... etc) et numériques (Kourta & Ha Minh (modèle  $(k, \varepsilon)$  de Jones avec modification de la valeur de  $C_\mu$ ) (1991) /8/, Silveira Neto *et al* (1993) (Simulation des grandes échelles) /91/, Farhanieh *et al* (R.S.M) (1993) /92/, ... etc). Il s'agit d'une géométrie intéressante puisqu'elle génère des écoulements instables, présentant des régions bien individualisées qui interagissent, dont la prédiction constitue un test rigoureux pour une méthode de calcul numérique.

Pour l'écoulement en aval d'une marche descendante, le critère de comparaison de la performance des modèles de turbulence porte sur la longueur de recollement  $X_R$ . Rodi (1984), citant les expériences de Kim *et al* (1978), rappellent que pour le cas d'écoulements turbulents, la longueur de recollement est de  $7 \pm 1$ . Nous proposons alors d'étudier cet écoulement à l'aide de la MMI modifiée.

##### a) Résultats et discussion

Dans un premier temps, nous avons adopté le modèle de Chien /7/ pour simuler l'écoulement en aval d'une marche.

Les figures (5.6-5.7), présentent le champs de vitesse et le profil de la composante  $u$  de la vitesse obtenus par la MMI. La valeur de la longueur de recollement obtenue avec ce modèle est de  $6h$ , (où  $h$  est la hauteur de la marche) qui est inférieure de 25 % par rapport à la valeur expérimentale. En réduisant de 25 % la valeur standard de  $C_\mu$  (les résultats expérimentaux montrent que la valeur de  $C_\mu$  est inférieure à 0.025 dans les zones de fortes recirculations (Kourta & Ha Minh /8/) dans la zone de recirculation, nous obtenons une longueur de recollement de  $7.77h$  (Fig. 5.8-5.9), qui est en bon accord avec la valeur expérimentale. Ceci justifie que la sous-estimation de la longueur de recollement obtenue avec le modèle de Chien, est dûe essentiellement à ce modèle de turbulence adopté par la MMI.

Le tableau V.4 ci-dessous, donne les prédictions de cette longueur obtenues par d'autres auteurs. Nous remarquons, que la meilleure estimation de la longueur de recollement est donnée par la méthode de simulation des grandes échelles (L.E.S /91/). Cependant, la valeur obtenue par la MMI, dans le cas où la valeur de  $C_\mu$ , réduite de 25 %, corrobore celles obtenue par Kourta & Ha Minh /8/ et par Farhanieh *et al* /92/.

Référence	$\frac{\lambda_R}{h}$
Kourta & Ha Minh (1991)	7.87
Neto <i>et al</i> (1993)	8.1
Farhanieh <i>et al</i> (1993)	7.908

Tableau V.4 Prédications de la longueur de recollement  
données par d'autres auteurs.

MARCHE DESCENDANTE

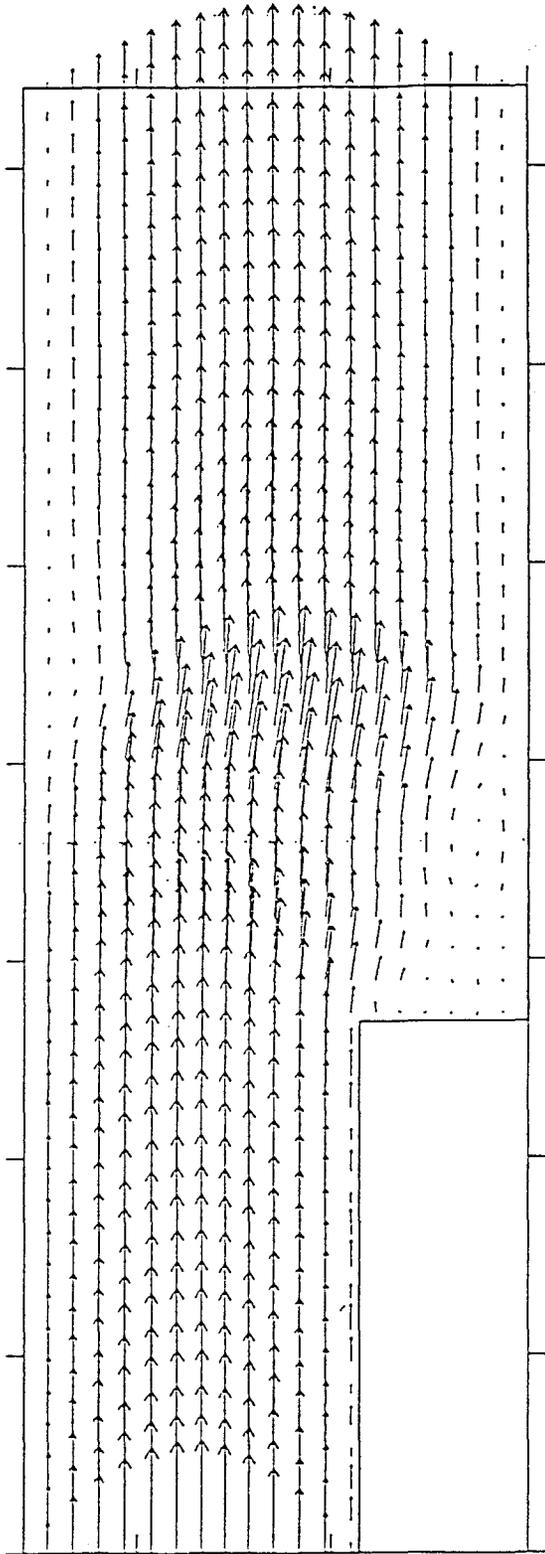


Fig. 5.6. Champ de vitesse d'un écoulement en aval  
d'une marche descendante (Modèle de Chien (1982)).



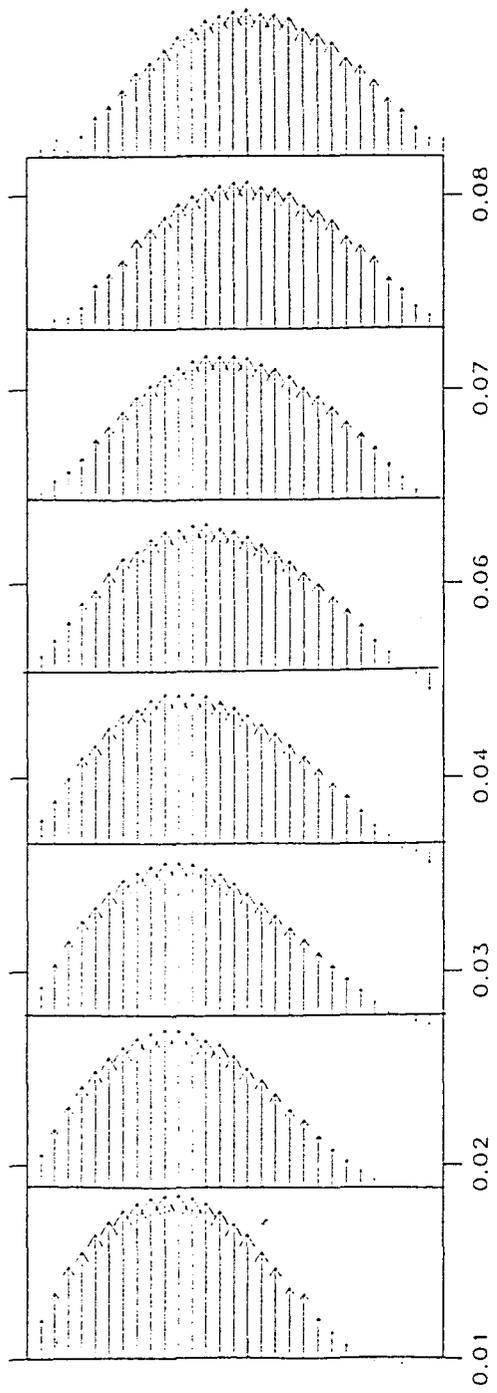


Fig. 5.7. Profil de la composante  $u$  de la vitesse d'un écoulement en aval d'une marche descendante (Modèle de Chien (1982)).



velocity field for  $Re = 6000$ .

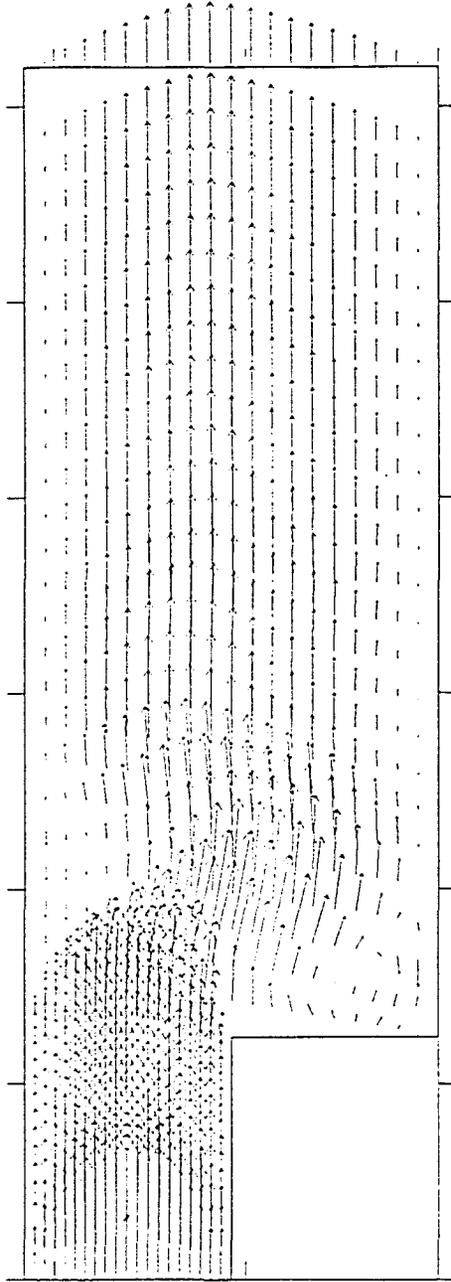


Fig. 5.8. Champ de vitesse d'un écoulement en aval  
d'une marche descendante (Modèle de Kourta & Ha Minh (1991)).

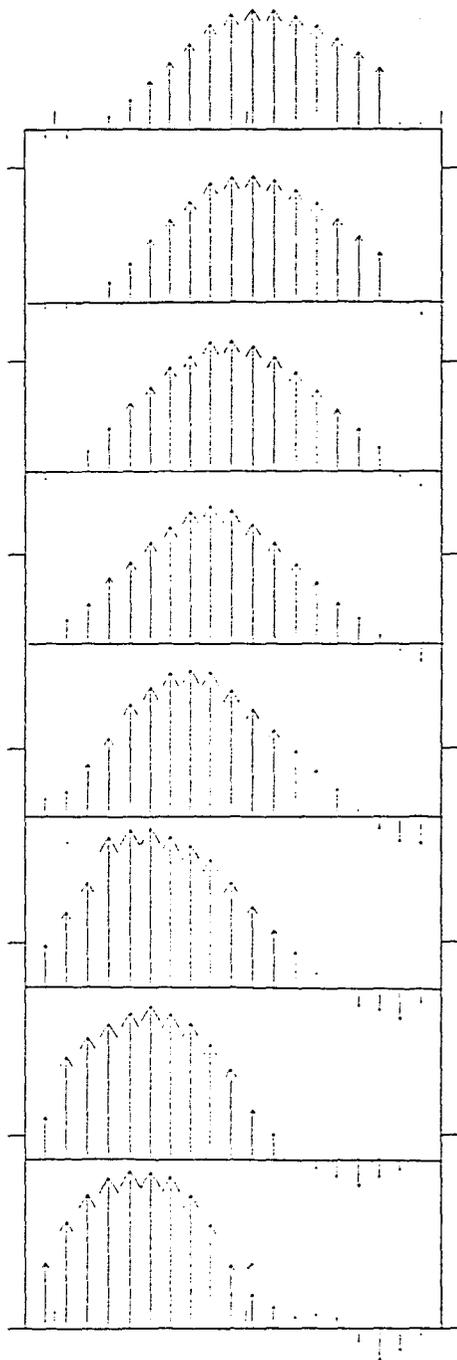


Fig. 5.9. Profil de la composante  $u$  de la vitesse d'un écoulement en aval d'une marche descendante (Modèle de Kourta & Ha Minh (1991)).



## CHAPITRE VI

### CONCLUSION

Dans ce travail de thèse présenté ici, nous avons premièrement commencé par présenter les éléments mathématiques de base de la Méthode des Matrices d'Interpolation (MMI) sous sa forme primitive. A partir de cette analyse, nous avons dégagé les principales caractéristiques de la MMI. Cette méthode se révèle intéressante par sa simplicité dans la formulation et le codage par rapport aux méthodes des différences finies classiques (MDF) ou volumes finis en coordonnées généralisées. L'avantage de la MMI par rapport aux méthodes des éléments finis (MEF) vient du fait qu'avec la MMI, la matrice du système des équations algébriques reste toujours en cinq diagonales (cas bidimensionnel). Cela nous permet, d'une part, de contrôler la matrice de ce système, et d'autre part, d'utiliser des méthodes itératives classiques pour la résolution d'un tel système. Le coût de calcul est donc moins élevé par rapport aux MEF et MDF. Bien que la MMI a été présentée pour le cas bidimensionnel, l'extension de la méthode au cas tri-dimensionnel est possible.

De manière à simplifier l'analyse des problèmes à géométrie complexe, nous avons introduit dans la MMI la technique de transformation des coordonnées (transformation isoparamétrique). L'utilisation d'une telle transformation nous a permis d'aligner les lignes de coordonnées avec les frontières du domaine physique à étudié et a offert à la MMI la possibilité de manipuler avec souplesse le problème des maillages.

Ensuite, nous avons passé en revue les équations de Navier-Stokes pour un écoulement incompressible visqueux et nous avons proposé une méthode numérique de résolution de ces équations. Les termes de convection présents dans ces équations sont traités par un schéma de Leith. Ce schéma, favorise, bien entendu, l'utilisation de la MMI. Cependant, ce schéma risque de fournir des

valeurs négatives aux endroits où les gradients des grandeurs physiques sont forts et par suite entraîne des oscillations numériques. Cette difficulté mérite une étude très approfondie afin de développer une technique appropriée à la MMI, traitant les termes de convection.

Enfin, nous avons effectué des cas-tests laminaires et turbulents. Les résultats obtenus des cas tests effectués sur les écoulements, en aval d'une marche descendante, dans une cavité inclinée et autour d'un cylindre, confirment la fiabilité et la convergence de la méthode MMI proposée.

ANNEXES

## ANNEXE A

### METHODES ITERATIVES

Etant donné une matrice inversible  $A$  et un vecteur  $b$ , on souhaite calculer la solution du système linéaire:

$$Au = b \quad (87)$$

Les méthodes que nous allons décrire sont des cas particuliers de la méthode suivante: supposons que l'on puisse écrire la matrice inversible  $A$  sous la forme d'une décomposition:

$$A = M - N \quad (88)$$

où  $M$  est une matrice inversible et "facile à inverser" c'est-à-dire pratiquement diagonale ou triangulaire. On a donc les équivalences:

$$Au = b \iff Mu = Nu + b \iff u = M^{-1}Nu + M^{-1}b \quad (89)$$

La dernière équation étant de la forme  $u = Bu + c$ , on lui associe la méthode itérative:

$$u_{k+1} = M^{-1}Nu_k + M^{-1}b \quad k \geq 0 \quad (90)$$

#### 1- Méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel

Dans ces cas, la décomposition (88) de la matrice  $A = (a_{ij})$  est telle que:

$$(M)_{ij} = a_{ij} \text{ ou } 0 \text{ selon } (i, j) \quad (91)$$

##### a- Méthode de Jacobi

On suppose que  $a_{ii} \neq 0$ ,  $1 \leq i \leq n$  et posons  $A = D - E - F$ .

Les lettres  $D$ ,  $E$ ,  $F$  désignent des matrices d'ordre  $n$  vérifiant respectivement:

$$(D)_{ij} = a_{ij}\delta_{ij}$$

$$(-E)_{ij} = a_{ij} \text{ si } i > j, 0 \text{ autrement.}$$

$(-F)_{ij} = a_{ij}$  si  $i < j$ , 0 autrement.

On écrit donc les équivalences:

$$Au = b \iff Du = (E + F)u + b \iff u = D^{-1}(E + F)u + D^{-1}b \quad (92)$$

Ce qui conduit à la méthode itérative de Jacobi:

$$u_{k+1} = D^{-1}(E + F)u_k + D^{-1}b \quad k \geq 0 \quad (93)$$

La matrice de cette méthode itérative est par conséquent:

$$J = D^{-1}(E + F) = I - D^{-1}A \quad (94)$$

Pour calculer une composante quelconque  $u_i^{k+1}$  du vecteur  $u_{k+1}$ , on utilise donc  $(n - 1)$  des composantes du vecteur  $u_k$ , qu'il faut garder en mémoire pendant tout le calcul du vecteur  $u_{k+1}$ . Autrement dit, une itération de la méthode immobilise  $2n$  mémoires,  $n$  mémoires pour les  $n$  composantes de  $u_k$  et  $n$  mémoires pour les  $n$  composantes de  $u_{k+1}$ .

#### b- Méthode de Gauss-Seidel

La méthode de Jacobi peut être améliorée, en utilisant mieux les quantités déjà calculées. Ainsi, pour calculer la composante  $u_i^{k+1}$  du vecteur  $u_{k+1}$ , pourquoi ne pas utiliser les nouvelles valeurs  $u_1^{k+1}, u_2^{k+1}, \dots, u_{i-1}^{k+1}$  plutôt que les anciennes valeurs  $u_1^k, u_2^k, \dots, u_{i-1}^k$ ? Cette remarque conduit à remplacer la méthode de Jacobi par la méthode de Gauss-Seidel:

$$u_{k+1} = (D - E)^{-1}Fu_k + (D - E)^{-1}b \quad (95)$$

La matrice de cette méthode itérative:

$$L_1 = (D - E)^{-1}F \quad (96)$$

Un avantage de cette méthode par rapport à la méthode de Jacobi, réside dans le fait: une itération de la méthode de Gauss-Seidel immobilise seulement  $n$  mémoires, au lieu de  $2n$  mémoires pour la méthode de Jacobi. C'est un avantage, en particulier, pour les grands systèmes.

## 2- Méthode de relaxation

Si la méthode de Gauss-Seidel converge, on peut songer à introduire un paramètre réel  $\omega \neq 0$ , de telle façon que le système linéaire associé à la méthode de Gauss-Seidel soit remplacé par:

$$\left\{\frac{D}{\omega} - E\right\}u_{k+1} = \text{Fonction}(u_k, \omega) \quad (97)$$

On obtiendra ainsi une méthode itérative qui converge déjà pour  $\omega = 1$ . La décomposition  $A = M - N$  correspondant au choix  $M = \frac{D}{\omega} - E$  étant:

$$A = \left\{\frac{D}{\omega} - E\right\} - \left\{\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right\} \quad (98)$$

Une itération de la méthode itérative associée à cette décomposition s'écrit:

$$\left\{\frac{D}{\omega} - E\right\}u_{k+1} = \left\{\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right\}u_k + b \quad k \geq 0 \quad (99)$$

La matrice de cette méthode itérative est:

$$L_\omega = (D - \omega E)^{-1}\{(1 - \omega)D + \omega F\} \quad (100)$$

Si la matrice  $A$  est hermitienne définie positive, la méthode de relaxation converge si  $0 < \omega < 2$ .

## ANNEXE B

### RESOLUTION DE L'EQUATION DE POISSON

Considérons l'équation de Poisson:

$$\Delta^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \zeta \quad (101)$$

où  $\zeta$  est le terme source.

La forme discrétisée de (101) par un schéma aux différences peut s'écrire sous la forme suivante:

$$a_{ij}\psi_{i+1,j} + b_{ij}\psi_{i-1,j} + c_{ij}\psi_{i,j+1} + d_{ij}\psi_{i,j-1} + e_{ij}\psi_{i,j} = \zeta_{ij} \quad (102)$$

avec  $e_{ij} < 0$ .

#### 1- Méthodes de Richardson et Liebman

Résoudre (101) par une méthode itérative revient à résoudre le problème d'évolution suivant (Frankel, 1950) /36/:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \Delta^2 \psi - \zeta \quad (103)$$

Si on utilise un schéma aux différences du premier ordre par rapport au temps, on obtient la forme discrétisée suivante:

$$\frac{\psi_{i,j}^{k+1} - \psi_{i,j}^k}{\Delta t} = a_{ij}\psi_{i+1,j}^k + b_{ij}\psi_{i-1,j}^k + c_{ij}\psi_{i,j+1}^k + d_{ij}\psi_{i,j-1}^k + e_{ij}\psi_{i,j}^k - \zeta_{ij} \quad (104)$$

que l'on peut mettre sous la forme suivante:

$$\psi_{i,j}^{k+1} = (1 + \Delta t e_{ij})\psi_{i,j}^k + \Delta t (a_{ij}\psi_{i+1,j}^k + b_{ij}\psi_{i-1,j}^k + c_{ij}\psi_{i,j+1}^k + d_{ij}\psi_{i,j-1}^k - \zeta_{ij}) \quad (105)$$

La condition de stabilité de l'équation (101) ou de (105) est (voir Roache /36/)  $\Delta t \leq -\frac{1}{e_{ij}}$ . On prend la valeur la plus maximale possible, ce qui correspond à  $\Delta t = -\frac{1}{e_{ij}}$ , on obtient alors:

$$\psi_{i,j}^{k+1} = -\frac{1}{e_{ij}}(a_{ij}\psi_{i+1,j}^k + b_{ij}\psi_{i-1,j}^k + c_{ij}\psi_{i,j+1}^k + d_{ij}\psi_{i,j-1}^k - \zeta_{ij}) \quad (106)$$

Ce qui correspond à la méthode de Richardson (Jacobi).

Si dans la méthode de Richardson, au lieu d'utiliser les valeurs  $\psi_{i-1,j}^k$  et  $\psi_{i,j-1}^k$ , utilisons les nouvelles valeurs  $\psi_{i-1,j}^{k+1}$  et  $\psi_{i,j-1}^{k+1}$ , nous obtenons la méthode de Liebman (Gauss-Seidel):

$$\psi_{i,j}^{k+1} = -\frac{1}{e_{ij}}(a_{ij}\psi_{i+1,j}^k + b_{ij}\psi_{i-1,j}^{k+1} + c_{ij}\psi_{i,j+1}^k + d_{ij}\psi_{i,j-1}^{k+1} - \zeta_{ij}) \quad (107)$$

## 2- Méthode de sur-relaxation successive

Ajoutons à l'équation (107)  $\psi_{i,j}^k - \psi_{i,j}^{k+1} = 0$ , nous obtenons alors:

$$\psi_{i,j}^{k+1} = \psi_{i,j}^k - \frac{1}{e_{ij}}(a_{ij}\psi_{i+1,j}^k + b_{ij}\psi_{i-1,j}^{k+1} + c_{ij}\psi_{i,j+1}^k + d_{ij}\psi_{i,j-1}^{k+1} + e_{ij}\psi_{i,j}^k - \zeta_{ij}) \quad (108)$$

En utilisant une sur-relaxation du terme entre crochets (résiduel de la méthode), pour accélérer la convergence, on obtient la méthode SOR:

$$\psi_{i,j}^{k+1} = \psi_{i,j}^k - \frac{\omega}{e_{ij}}(a_{ij}\psi_{i+1,j}^k + b_{ij}\psi_{i-1,j}^{k+1} + c_{ij}\psi_{i,j+1}^k + d_{ij}\psi_{i,j-1}^{k+1} + e_{ij}\psi_{i,j}^k - \zeta_{ij}) \quad (109)$$

Pour la convergence de la méthode, le paramètre de relaxation  $\omega$  doit être compris entre 1 et 2.

ANNEXE C

TRANSFORMATION DU LAPLACIEN

Soit  $f = f(x, y)$  une fonction à deux variables on a:

$$\begin{aligned} f_x &= f_\xi \xi_x + f_\eta \eta_x \\ \implies f_{xx} &= f_{\xi\xi} \xi_{xx} + f_{\eta\eta} \eta_{xx} + f_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + f_{\eta\xi} \eta_x \xi_x \end{aligned}$$

or:

$$f_{\xi x} = (f_x)_\xi = f_{\xi\xi} \xi_x + f_{\eta\xi} \eta_x + f_{\xi\eta} \xi_x + f_{\eta\eta} \eta_x$$

et comme:

$$\xi_{x\xi} = (\xi_x)_\xi = \xi_{xx} x_\xi + \xi_{xy} y_\xi$$

et:

$$\eta_{x\xi} = (\eta_x)_\xi = \eta_{xx} x_\xi + \eta_{xy} y_\xi$$

Ce qui nous permet de déterminer  $f_{\xi x}$  et on aura aussi  $f_{\eta x}$ :

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \frac{(y_\eta^2 f_{\xi\xi} - 2y_\xi y_\eta f_{\xi\eta} + y_\xi^2 f_{\eta\eta})}{J^2} \\ &\quad + [(y_\eta^2 y_{\xi\xi} - 2y_\xi y_\eta y_{\xi\eta} + y_\xi^2 y_{\eta\eta})(x_\eta f_\xi - x_\xi f_\eta) + \\ &\quad (y_\eta^2 x_{\xi\xi} - 2y_\xi y_\eta x_{\xi\eta} + y_\xi^2 x_{\eta\eta})(y_\xi f_\eta - y_\eta f_{xi})] / J^3 \end{aligned}$$

L'expression de  $f_{yy}$  se déduit à partir de celle de  $f_{xx}$ ; il suffit de changer dans la formule ci-dessus  $x$  en  $y$ .

Dans le but de faire des simplifications dans les écritures, on introduit les nouvelles variables suivantes:

$$\begin{aligned} \alpha &= x_\eta^2 + y_\eta^2 \\ \beta &= x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma &= x_\xi^2 + y_\xi^2 \\ DX &= \alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} \\ DY &= \alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} \\ \sigma &= \frac{(y_\xi DX - x_\xi DY)}{J} \\ \tau &= \frac{(x_\eta DY - y_\eta DX)}{J} \\ &\implies \Delta f = f_{xx} + f_{yy} \end{aligned}$$

devient alors:

$$\Delta f = (\alpha f_{\xi\xi} - 2\beta f_{\xi\eta} + \gamma f_{\eta\eta} + \sigma f_\eta + \tau f_\xi) / J^2$$

Estimation des dérivées croisées  $(\cdot)_{\xi\eta}$

Nous nous plaçons dans le cas de la figure 6.1. Désignons par  $P$  un point de calcul et soit  $NP_1, NP_2, \dots, NP_8$  les 8 points voisins de  $P$ .

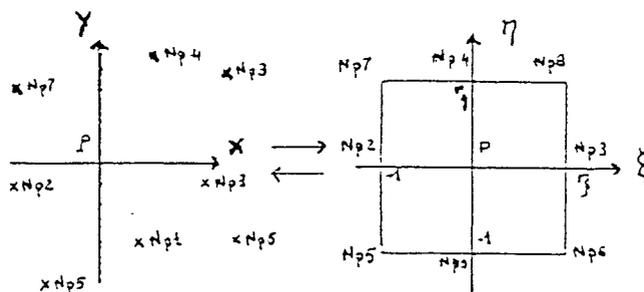


Fig 6.1 Transformation des coordonnées.

Par un développement de Taylor nous obtenons l'estimation suivante:

$$\frac{\partial^2 \phi_P}{\partial \eta \partial \xi} = \frac{\partial \phi_P}{\partial \eta} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \right) = -\frac{r_\xi}{1+r_\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} (\phi_2 - \phi_0) + \frac{1}{r_\xi(1+r_\xi)} \frac{\partial}{\partial \eta} (\phi_3 - \phi_0)$$

En utilisant les approximations de la dérivée par rapport à  $\eta$ , on obtient alors:

$$\frac{\partial \phi_3}{\partial \eta} = -\frac{r_\eta}{1+r_\eta}(\phi_6 - \phi_0) + \frac{1}{r_\eta(1+r_\eta)}(\phi_8 - \phi_0)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} = -\frac{r_\eta}{1+r_\eta}(\phi_5 - \phi_0) + \frac{1}{r_\eta(1+r_\eta)}(\phi_7 - \phi_0)$$

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial \eta} = -\frac{r_\eta}{1+r_\eta}(\phi_1 - \phi_0) + \frac{1}{r_\eta(1+r_\eta)}(\phi_4 - \phi_0)$$

En rapportant les expressions ci-dessus dans l'expression de  $\frac{\partial^2 \phi_P}{\partial \eta \partial \xi}$ , on obtient après quelques arrangements:

$$\frac{\partial^2 \phi_P}{\partial \eta \partial \xi} = \frac{1}{r_\xi(1+r_\xi)} \left( -\frac{r_\eta}{1+r_\eta}(\phi_6 - \phi_1) + \frac{1}{r_\eta(1+r_\eta)}(\phi_8 - \phi_4) \right)$$

$$- \frac{r_\xi}{1+r_\xi} \left( -\frac{r_\eta}{1+r_\eta}(\phi_5 - \phi_1) + \frac{1}{r_\eta(1+r_\eta)}(\phi_7 - \phi_4) \right)$$

## ANNEXE D

### MODELES A DEUX EQUATIONS DE TRANSPORT ( $k - \varepsilon$ )

#### 1- EQUATIONS DE TRANSPORT POUR $k$ & $\varepsilon$

Dans ce cas la longueur caractéristique de la turbulence est reliée à l'énergie cinétique de la turbulence  $k$  et à son taux de dissipation  $\varepsilon$ . La viscosité turbulente est donnée par:

$$\nu_t = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (110)$$

$k$  et  $\varepsilon$  sont obtenues à partir des équations de transport suivantes:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} [\nu_k \frac{\partial k}{\partial x_j}] + \nu_t \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \varepsilon + D \quad (111)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} [\nu_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}] + C_{\varepsilon 1} f_1 \frac{\varepsilon}{k} \nu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \\ &- C_{\varepsilon 2} f_2 \frac{\varepsilon^2}{k} + E \end{aligned} \quad (112)$$

avec:

$$\nu_k = \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \quad \nu_\varepsilon = \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}$$

#### 2- CONSTANTES EMPIRIQUES ET FONCTIONS

##### D'AMORTISSEMENTS DANS LES MODELES ( $k - \varepsilon$ )

Nous regroupons dans les tableaux ci-dessous les principales constantes empiriques ainsi que les fonctions d'amortissements recommandées par certains auteurs.

Modèle	$\varepsilon_{\text{paroi}}$	$C_\mu$	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$	$\sigma_k$	$\sigma_\varepsilon$
Standard (St)	Loi de paroi	0.09	1.44	1.92	1.0	1.3
Jones-Launder (JL)	0.	0.09	1.45	2.0	1.0	1.3
Chien (Ch)	0.	0.09	1.35	1.8	1.0	1.3
Lam-Bremhorst (LB)	$\nu \frac{\partial^2 k}{\partial y^2}$	0.09	1.44	1.92	1.0	1.3

Constantes Empiriques recommandées par les auteurs.

$f_\mu$	$f_1$	$f_2$	$D$	$\bar{E}$
1.0	1.0	1.0	0.0	0.0
$\exp\left(\frac{-2.5}{1+\frac{R_t}{30}}\right)$	1.0	1.- $0.3\exp(-R_t^2)$	$-2.\nu\left(\frac{\partial\sqrt{k}}{\partial y}\right)^2$	$2.\nu\nu_t\left(\frac{\partial^2\bar{U}}{\partial y^2}\right)^2$
1.- $\exp(-0.0115.R_t)$	1.0	1.- $0.22\exp\left(-\left(\frac{R_t}{6}\right)^2\right)$	$-2.\nu\frac{k}{y^2}$	$-2.\nu\frac{\varepsilon}{y^2}$ $\exp(-0.5.R_\tau)$
$1. - \exp(-0.0165.R_k)^2$ $\left(1 + \frac{20.5}{R_\tau}\right)$	$1 + \left(\frac{0.05}{f_\mu}\right)^2$	1.- $\exp(-R_t^2)$	0.0	0.0

Fonctions d'amortissements recommandées par les auteurs.

## REFERENCES

1. S. Koshizuka, Y. Oka, S. Kondo & Y. Togo,- Interpolationing Matrix Method: A Finite Difference Method For Arbitrary Arrangement Of Mesh Points -, J. of Comp. Phys., Vol. 75, 444-468, (1988).
2. R. Peyret & T.D. Taylor,- Computational Methods For Fluid Flow -, Springer-Verlag, New York, (1983).
3. C.W. Hirt, A.A. Amsden & J.L. Cook,- An Arbitrary Lagrangian- Eulerian Computing Method For All Flow Speeds -, J. of Comp. Phys., Vol. 14, pp. 227-253, (1974).
4. J.F. Thompson, Z.U.A. Warsi & C.W. Mastin,- Boundary-Fitted Coordinate Systems For Numerical Solution Of Partial Differential Equations -, J. of Comp. Phys., Vol. 47, pp. 1-108, (1982).
5. C.A.J. Fletcher,- Computational Techniques For Fluid Dynamics -, Springer-Verlag, New York, Vol. 2, (1988).
6. A.A. Amsden & F.H. Harlow,- The SMAC Method: A Numerical Technique for Calculating Incompressible Fluid Flows -, Los Alamos Laboratory, LA-4370, (1970).
7. K.Y. Chien,- Predictions of channel and boundary layer Flows with a low Reynolds-number turbulence model -, AIAA Journal, Vol. 20, No. 1, pp. 33-38, (1982).
8. A. Kourta & H. Ha Minh,- Modified turbulence model to predict unsteady separated flows -, 7th Int. Conf. on Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flows, Stanford, California, USA, July 15-19, (1991).
9. G.E. Forsythe & W.R. Wasow,- Finite difference Methods for partial differential equations -, Wiley, New York, (1960).
10. L. Collatz,- The numerical treatment of differential equations -, Springer-Verlag, Berlin, (1960).
11. S.G. Mikhlin & K.L. Smolitsky,- Approximate Methods for solution of Differential and Integral Equations -, American Elsevier, New York, (1967).
12. D.O. Gough, E.A. Spiegel & J. Toomre, Lecture Notes in Physics, Vol. 35, pp. 191-196, Springer-Verlag, New York, (1975).

13. N.N. Yanenko, V.D. Lisseikin & V.M. Kovenja, *Lecture Notes in Physics*, Vol. 91, pp. 48-61, Springer-Verlag, New York, (1979).
14. W. Schönauer, G. Glotz & K. Raith,- The solution of laminar boundary layer equations by variable self-adaptive difference methods -, In: *Recent Advances in Numerical Methods in Fluids*, C. Taylor and K. Morgan, Eds. Vol. 1, pp. 81-118, Pineridge, Swansea, U.K., (1980).
15. H.A. Dwyer, R.J. Kee & B.R. Sanders, *AIAA J.* 10, 1205-1212, (1980).
16. G. Moretti,- Conformal mappings for computations of steady, three dimensional, supersonic flows -, In: *Numerical/Laboratory Computer Methods in Fluid Mechanics*, A.A. Pouring and V.I. Shah, Eds., pp. 13-28, ASME, New York, (1976).
17. W.H. Chu, *J. Comput. Phys.* 8, 392-408, (1971).
18. P.R. Eiseman,- Coordinate Generation With Precise Controls over Mesh Properties -, *ICASE Rept. No. 80-30*, (1980).
19. B.J. Daly,- A Numerical study of pulsatile flow through constricted Arteries -, *Lecture Notes in Physics*, Vol. 35, 117, (1975).
20. H. Viviand & W. Ghazzi, *Lecture Notes in Physics*, Vol. 59, pp. 434-439, Springer-Verlag, New York, (1976).
21. H.J. Gibeling, S.J. Shamroth & P.R. Eiseman,- Analysis of Strong-Interaction Dynamic stall of helicopter Rotor Blades -, R77-912030-17, United Tech. Research Center, East Hartford, conn., (1977).
22. G. Moretti & M.D. Salas, *AIAA Paper No. 69-139*, (1969).
23. J.C. tannehill, T.L. Holst & J.V. Rakich, *AIAA Paper No. 75-154*, (1975).
24. R. Peyret & H. Viviand, *Lecture Notes in Physics*, Vol. 19, pp. 222-229, Springer-Verlag, New York, (1973).
25. K.J. Weilmuenster & Jr. Graves, R.A. *AIAA J.* 19, 1089-1090, (1981).
26. K.J. Victoria & G.F. Widhoff, *Lecture Notes in Physics*, Vol. 19, pp. 254-267, Springer-Verlag, New York, (1973).
27. H. Viviand & J.P. Veuillet,- Méthodes pseudo-Instationnaires pour le calcul d'écoulements transsoniques -, *Publication ONERA No. 1978-4*, (1978).

28. J.C. La Balleur, R. Peyret & H. Viviand, *Comput. Fluids* 8, pp. 1-30, (1980).
29. G.S. Deiwert, *AIAA J.* 13, pp. 1354-1359, (1975).
30. A.J. Baker,- Finite Element Analysis of Turbulent Flows -, In: *Proceedings of the 1st International conference on Numerical Methods in laminar and Turbulent Flow*, pp. 203-229, Pentech Press, Swansea, (1978).
31. C.H. Cook & D.K. Blanchard, *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 14, pp. 271-286, (1979).
32. O.C. Zienkiewicz,- *The Finite Element Method* -, 3rd ed., Mc Graw-Hill, UK, (1977).
33. M. Zlámal,- *On the Finite Element Method* -, *Numer. Math.*; Vol. 12, pp. 394-409, (1968).
34. P.A. Raviart,-*Cours de l'université Paris VI*, (1975).
35. G. Datt & G. Touzot,- *Une présentation de la méthode des éléments finis* -, *Collection Université de Compiègne, Maloine SA.*, (1982).
36. P.J. Roache ,- *Computational Fluid Dynamics* -, *Hermosa Publishers, New-Mexico*, (1982).
37. K.D. Nguyen & H. En-Nefkhaoui,- *Numerical Simulation of Viscous Flows in Complex Geometries by The Interpolating Matrix Method* -, *Proceedings of JSCFD, 5th International Symposium On Computational Fluid Dynamics*, Vol. II, 351-356, Sendai, (1993).
38. E.K. De Rivas, *J. Comput. Phys.*, Vol. 10, 202, (1972).
39. C.K. Forester,- *Body-Fitted 3-D Full- Potential Flow Analysis of Complex Ducts and Inlets* -, *AIAA-81-0002, AIAA 19th Aerospace Sciences Meeting, St. Louis, MO.*, (1981).
40. R.D. Richtmyer,- *A survey of Difference Methods for Non-steady Fluid Dynamics* -, *NCAR Technical Note 63-2, Boulder, Colorado*.
41. G. Marchouk,- *Méthodes de Calcul Numériques* -, *Ed. Mir, Moscou*, (1980).
42. S.V. Patankar,- *Numerical Heat Transfert and Fluid Flow* -, *Hemisphere Publishing Coperation, Washington D.C.*, (1980).
43. J. Kim, P. Moin & R. Moser,- *Turbulence statistics in fully developed channel at low Reynolds number* -, *J. Fluid Mech.*, Vol. 177, pp. 133-166, (1987).
44. J. Rutledge & C. A. Sleicher,- *Direct simulation of turbulent flow and heat transfer in a*

- channel. Part I: Smooth walls -, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 16, pp. 1051-1078, (1993).
45. A.J. Chorin,- A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems -, *J. of Compt. Phys.*, Vol. 2, pp. 12-26, (1967).
  46. R. Temam,- On An Approximate Solution of the Navier-Stokes Equations by the Method of Fractional Steps: Part 1 -, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 32, No. 2, pp. 135-153, (1969).
  47. W.F. Noh & M.H. Protter,- Difference Methods and Equations of Hydrodynamics -, *J. of Math. and Mech.*, Vol. 12, No. 2, pp. 149-191, (1963).
  48. J.E. Fromm,- A Method for Reducing Dispersion in Convective Difference Schemes -, *J. of Comp. Phys.*, Vol. 3, pp. 176-189, (1968).
  49. B.H. Gilding,- A Numerical Grid generation Techniques -, *Computers & Fluids*, Vol. 16, No. 1, pp. 47-58, (1988).
  50. T. Itohagi & B.R. Shin,- Finite-Difference schemes for steady incompressible Navier-Stokes equations in general curvilinear coordinates -, *Computers & Fluids*, Vol. 19, No. 3/4, pp. 479-488, (1991).
  51. C.E. Thomas, K. Morgan & C. Taylor,- A finite element analysis of flow over a backward facing step -, *Computers & Fluids*, Vol. 9, 265, (1981).
  52. D.J. Atkins, S.J. Maskall & M.A. Patrick,- Numerical prediction of Separated flows -, *Int. Journ. Num. Meth. in Eng.*, (1980).
  53. J.L. Kueny & G. Binder,- Viscous flow over backward facing step -, In *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, Vol. 9, pp. 32, Vieweg, Braunschweig, (1984).
  54. A.F. Ghoniem & Y. Cagnom,- Vortex Simulation of Laminar Recirculating Flow -, *J. of Comp. Phys.*, Vol. 68, (1987).
  55. I. Demerdzic, Z. Lilek & M. Peric,- Fluid flow and heat transfer test problems for non-orthogonal grids: bench-mark solutions -, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 15, pp. 329-354, (1992).
  56. C.W. Oosterlee, P. Wesseling, A. Segal & E. Brakkee,- Benchmark solutions for the incompressible Navier-Stokes equations in general co-ordinates on staggered grids -, *Int.*

- J. numer. methods fluids, Vol. 17, pp. 301-321, (1993).
57. O. Daube & Ta Phuoc Loc, J. Méc., 17, 651, (1978).
  58. M. Braza, P. Chassaing & H. Ha Minh,- Numerical study and physical analysis of the pressure and velocity fields in the near wake of a circular cylinder -, J. Fluid Mech, Vol. 165, pp. 79-130, (1986).
  59. G. Alfonsi & A. Giorgini,- Nonlinear perturbation of the vortex shedding from a circular cylinder -, J. Fluid Mech., Vol. 222, pp. 267-291, (1991).
  60. G. Ren & T. Utnes,- A finite element solution of the time-dependent incompressible Navier-Stokes equations using a modified velocity correction method -, Int. J. Numer. Methods Fluids, Vol. 17, pp. 349-364, (1993).
  61. R. Bouard & M. Coutanceau, J. Fluid Mech., 79, 231., (1977).
  62. C.H.K. Williamson,- Oblique and parallel modes of vortex shedding in the wake of a circular cylinder at low Reynolds numbers -, J. Fluid Mech., Vol. 206, pp. 579-627, (1989).
  63. D.J. Tritton,- Experiments on the flow past a circular cylinder at low Reynolds numbers -, J. of Fluid Mechanics, Vol. 6, 547, (1959).
  64. W.P. Jones & B.E. Launder,- The prediction of laminarization with a Two- Model of turbulence -, Int. Heat Mass Transferts, No. 5, pp. 301-314, (1973).
  65. Ha Minh Hieu,- Modélisation de la turbulence: Ses aspects physiques et son impact sur la simulation numérique des écoulements réels -, 11<sup>e</sup> Congrès Français de Mécanique, Lille-Villeneuve d'Ascq, (6-10 Sept. 1993).
  66. W. Rodi,- Examples of turbulence Model Applications -, Turbulence models and their applications. CEA-EDF-INRIA Ecole d'été d'analyse numérique. Eyrolles, (1984).
  67. B.E. Launder & B.I. Sharma,- Application of the Energy-Dissipation model of turbulence to the calculation near spinning disc -, Letters in Heat and Mass transfer, Vol. 1, pp. 131-138, (1974).
  68. C.K.G. Lam & K.A. Bremhorst,- Modified form of the  $k - \varepsilon$  model for predicting wall turbulence -, J. of Fluids Engineering, Vol. 103, pp. 456-460, (1981).

69. M.M.M. El Telbany & W.C. Reynolds,- Velocity distributions in plane turbulent channel Flows -, J. of Fluid Mech., Vol. 100, No. 1, pp. 1-29, (1980).
70. J.A. Clark,- A study of Incompressible turbulent Boundary Layer in channel flow -, J. of Basic Engineering, ASME, Vol. 90, pp. 455-468, (1968).
71. R.M.C. So & G.J. Yoo,- Low Reynolds number modeling of turbulent flows with or without wall transpiration -, AIAA J., Vol. 25, No. 12, pp. 1556-1564, (1987).
72. W.P. Jones & P. Musonge,- Closure of the Reynolds-stress and scalar flux equation -, The Phys. of Fluids, Vol. 31, No. 12, pp. 3589-3604, (1988).
73. J. Kim, S. Kline & J. Johnston,- Investigation of separation and Reattachment of a turbulent shear Layer, flow over a backward facing Step -, Report MD. 37, Mech. Eng. Stanford University, (1978).
74. M. Lesieur,- Turbulence in fluids -, revised edition, Kluwer Publishers, (1990).
75. H. Tennekes & J.L. Lumely,- A first course in turbulence -, The MIT Press, Massachusetts, (1972).
76. K.T. Dang & V. Deschamps,- Simulations numériques d'écoulements turbulents de canal plan. AGARD, Paper reprinted from Conference Proceedings No. 438, 27-1 to 27-16, (1988).
77. M.J. Lee & J. Kim,- The structure of turbulence in a simulated plane Couette flow -, 8th Symp. on Turbulent Shear Flows, Technical Univ. of Munich, Sept. 9-11, part 5-3, (1991).
78. H. Reichardt,- Gesetzmäßigkeiten der geradlinigen turbulenten Couetteströmung -, Mitteilungen aus dem, Max Planck Institut für Strömungsfoorschung and der Aerodynamischen Versuchsanstalt, Goettingen, No. 22, (1959).
79. X. Normand & M. Lesieur,- Numerical experiments on transition in the compressible boundary layer over an insulated flat plate -, submitted to the Theor. and Comput. Fluid Dynamics, (1990).
80. J. Smagorinsky,- General circulation experiment with the primitive equations, I. The basic experiment -, Monthly Weather Review, 91, pp. 99-164, (1963).

81. A. Clark,- Evaluation of Subgrid-Scale Models using an Accurately Simulated Turbulent flow -, J. Fluid Mech., Vol. 91, (1979).
82. M. Lesieur, O. Métais, X. Normand & A.S. Neto,- Spectral LES of turbulent-shear flows -, Proc. of the Int. Workshop: "large-eddy simulations, where do-it ?", Saint-Petersbourg, Florida, december 19-21, (1991).
83. P. Moin, W.C. Reynolds & J.H. Ferziger,- Large eddy simulation of incompressible turbulent channel flow -, Dept. Mech. Engng., Stanford Univ. Rep. TF-12, (1978).
84. P. Moin & J. Kim,- The structure of the vorticity field in turbulent channel flow, part 1. Analysis of instantaneous fields and statistical correlations -, J. Fluid. Mech., Vol. 155, pp. 441-464, (1985).
85. U. Schumann,- Subgrid scale model for finit difference simulation of turbulent flows in plane channels end annuli -, J. Comput. Phys., Vol. 18, pp. 376-404, (1975).
86. A. Silveira Neto,- Simulation numérique des grandes échelles d'un écoulement turbulent décollé en aval d'une marche -, Thèse de doctorat, Inst. National Poly. de Grenoble, (Juin 1991).
87. O. Métais & M. Lesieur,- Spectral large-eddy simulation of isotropic and stably-stratified turbulence -, submitted to J. Fluid. Mech., (1991).
88. S. Rida & T.K. dang,- Direct Simulation of turbulent Pulsed Plane Channel Flows -, 8th Symposium on T.S.F., Munich, Sept. 9-11, (1991).
89. J.M. Robertson & F. Johnson,- Turbulence structure in plane Couette flow -, J. of Eng. Mech. Division, Vol. 96 EM6, pp. 1171-1182, (1970).
90. J.K. Eaton & J.P. Johnston,- Backward-facing step flow -, Summary, Stanford Conf. on Complex Turbulent Flows, I, pp. 275-283, (1981).
91. A. Silveira Neto, D. Grand, O. Métais & M. Lesieur,- A numerical investigation of the coherent vortices in turbulence behind a backward-facing step -, J. Fluid Mech., Vol. 256, pp. 1-25, (1993).
92. B. Farhanieh, L. Davidson & B. Sundén,- Employment of second- moment closure for calculation of turbulent recirculating flows in complex geometries with collocated variable arrangement -, Int. J. Numer. Methods in Fluids, Vol. 16, pp. 525-544, (1993).