

50376
1994
119

N°1286

CC 0gen 20 10 16 33

50376
1994
119

THÈSE

présentée à

L'Université des Sciences et Technologies de Lille

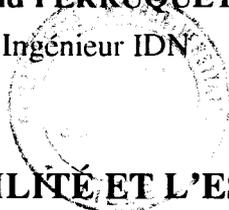
pour obtenir le grade de

Docteur en Productique: Automatique et Informatique Industrielle

par

Wilfrid PERRUQUETTI

Ingénieur IDN



SUR LA STABILITÉ ET L'ESTIMATION DES COMPORTEMENTS NON LINÉAIRES NON STATIONNAIRES PERTURBÉS.

Travail préparé au:

Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle de Lille (LAIL URA-CNRS D1440), Ecole Centrale de Lille, Villeneuve d'Ascq, France.

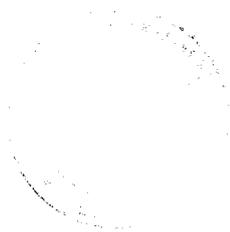
Président: P. BORNE (Professeur, LAIL-EC Lille)

Rapporteurs: Lj.T. GRUJIĆ (Professeur, ENIBe Belfort)
C. BURGAT (Professeur, LAAS Toulouse)

Examineurs: P. BORNE (Professeur, LAIL-EC Lille)
J.P. RICHARD (Professeur, LAIL-EC Lille)
M. STAROSWIECKI (Professeur, Lille I)

Soutenue le 25 février 1994

Directeur de thèse: J.P. RICHARD (Professeur, LAIL-EC Lille)



à Valérie

AVANT-PROPOS

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle de Lille de l'École Centrale de Lille (Unité de Recherche Associée au C.N.R.S. D-1440), sous la direction de Monsieur Jean-Pierre RICHARD, Professeur des Universités à l'École Centrale de Lille.

Nous lui en sommes particulièrement reconnaissants. Que ce soit par son enseignement, par son enthousiasme lors de multiples et fructueuses discussions, par sa gentillesse, sa grandeur d'âme et son humanisme: il a toujours été un soutien sans mesure. Nous tenons à le remercier cordialement non seulement pour ce formidable soutien mais aussi pour son accueil chaleureux et la confiance qu'il nous a témoignée.

Qu'il nous soit ensuite permis de remercier très vivement, Monsieur le Professeur Pierre BORNE, Directeur Scientifique de l'École Centrale de Lille, Vice-Président d'I.E.E./S.M.C et de l'I.M.A.C.S., pour son amitié, son intérêt pour nos recherches et sa disponibilité malgré ses lourdes charges. Nous sommes très touchés par l'honneur qu'il nous fait en acceptant d'être Président de notre jury de Thèse.

Nous tenons également à assurer toute notre reconnaissance au Professeur Lj.T. GRUJIC, de renommée internationale notamment pour ses travaux concernant les diverses Stabilités. Nous sommes profondément touchés par le double honneur qu'il nous fait en acceptant d'être d'une part membre de notre jury de Thèse et d'autre part d'être Rapporteur sur ce mémoire. Nous tenons à le remercier chaleureusement non

Avant-Propos

seulement pour son soutien mais aussi pour sa gentillesse et la confiance qu'il nous a témoignée au cours de son séjour au sein de notre laboratoire, ainsi que pour les conseils qu'il nous a prodigués notamment pour une publication co-signée.

Nous tenons également à remercier le Professeur C. BURGAT, dont un des centres d'intérêt est la "commande saturée". Nous sommes particulièrement sensible au double honneur qu'il nous fait en acceptant d'être d'une part membre de notre jury de Thèse et d'autre part d'être Rapporteur sur ce mémoire. Nous tenons à le remercier chaleureusement.

Enfin qu'il nous soit permis de remercier le Professeur M. STAROSWIECKI, Directeur-Adjoint de notre laboratoire, pour l'honneur qu'il nous fait en acceptant d'être membre de notre jury de Thèse.

D'autre part, nous remercions l'ensemble du personnel du L.A.I.L. pour l'ambiance cordiale et chaleureuse qu'il entretient au sein du laboratoire ainsi que pour le soutien qu'il a manifesté et manifeste à mon égard. En particulier, Monsieur F. Rottela et Monsieur M. Dambrine avec qui nous avons échangés de fructueuses discussions sur divers aspects de l'Automatique.

Enfin, que soit remercié, "Max" de l'imprimerie de l'école Centrale de Lille, pour sa gentillesse et la qualité des reprographies de ce mémoire ainsi que des autres travaux effectués au cours de ces deux années de thèse.

Table des matières

INTRODUCTION GÉNÉRALE	21
CHAPITRE 1 : NOTIONS GÉNÉRALES	29
Introduction	29
1 Rappels sur les Equations Différentielles	32
1.1 Solution, Mouvement et Orbite	32
1.2 Flots et Systèmes Dynamiques	35
1.3 Classification des Systèmes Dynamiques	41
1.3.1 Cas Linéaire	41
1.3.1.1 Cas Linéaire Autonome Homogène	41
1.3.1.2 Cas Linéaire Non Autonome Homogène	41
1.3.1.3 Cas Linéaire Non Homogène	42
1.3.2 Cas Non Linéaire Autonome	42
1.3.3 Cas Non Linéaire Non Autonome Périodique	44
1.4 Définition des Notations Utilisées l, g, f	44
2 Caractérisation d'Ensembles	45
2.1 Points d'Équilibre	45
2.2 Solutions Périodiques et Orbites Fermées	47
2.3 Invariances	48
2.4 Ensembles Limites	51

Table des matières

3 Stabilités	53
3.1 Attractivité et Répulsivité	54
3.1.1 Attractivité d'une Solution et Domaine Associé	54
3.1.2 Attractivités d'un Ensemble et Domaines Associés	56
3.1.3 Répulsivités et Domaines Associés	61
3.2 Stabilité au Sens de Liapounov	62
3.2.1 Stabilité d'une Solution et Domaine Associé (au Sens de Liapounov)	62
3.2.2 Stabilités d'un Ensemble et Domaines Associés (au Sens de Liapounov)	64
3.3 Stabilités Asymptotiques et Domaines Associés	67
3.4 Stabilités Exponentielles et Domaines Associés	68
3.5 Stabilités Pratiques	70
3.5.1 Stabilité Pratique	70
3.5.2 Contraction Pratique avec Temps d'Établissement	71
3.5.3 Stabilité Pratique avec Temps d'Établissement	72
3.6 Stabilité Structurelle	73
3.6.1 Distance au sens C^1	73
3.6.2 Equivalence	74
3.6.3 Stabilité Structurelle	74
Conclusion	75

CHAPITRE 2: SYSTÈMES NON LINÉAIRES AUTONOMES	79
Introduction	79
1 Méthodes d'Études Locales	81
Introduction	81
1.1 Théorème de Stabilité Structurelle et Conséquences	81
1.2 Structure Locale du Flot au Voisinage d'un Point d'Équilibre	84
1.2.1 Point Hyperbolique	84
1.2.2 Point Non Hyperbolique ou Dégénéré	87
1.3 Structure Locale du Flot au Voisinage d'une Orbite Fermée	90
1.3.1 Section de Poincaré	90
1.3.2 Application de Poincaré et Conséquences	91
Conclusion	93
2 Méthodes d'Études Globales	94
Introduction	94
2.1 Méthodes basées sur la Seconde Méthode de Liapounov	94
Introduction	94
2.1.1 Conditions Nécessaires et Suffisantes: Méthodes de Zubov et Grujić	96
2.1.1.1 Théorème de Zubov	96
2.1.1.2 Théorème de Grujić	97

Table des matières

2.1.1.3 Méthodes Déduites	99
2.1.2 Méthodes de La Salle	102
2.1.2.1 Enoncé et Principe	102
2.1.2.2 Méthodes Déduites	103
Conclusion	105
2.2 Caractérisation Topologique du Domaine de Stabilité Asymptotique	106
2.3 Autres Méthodes	112
Conclusion	113
<u>CHAPITRE 3: SYSTÈMES DE COMPARAISON ET NORMES VECTORIELLES</u>	117
Introduction	117
1 Systèmes de Comparaison	118
1.1 Dérivées de DINI	118
1.2 Inégalités Différentielles et Quasi-Monotonicité	119
1.3 Définitions: Majorants Direct ou Rétrograde, Global ou Local	120
2 Normes et Fonctions de Liapounov Vectorielles	123
2.1 Définitions	123
2.2 Lemmes de Majorations	124
2.2.1 Lemme de Majoration Globale	125

Table des matières

2.2.2 Lemmes de Majorations Locales	127
2.2.3 Remarques sur ces Lemmes	133
2.3 Détermination Pratique d'un Système Majorant	134
2.3.1 Construction Théorique	134
2.3.2 Majorants Constants et Matrices Metzleriennes	136
2.3.3 Applications aux Normes Usuelles	137
2.3.4 Exemples de Déterminations Pratiques	138
2.3.4.1 Exemple avec Paramétrisation de la Décomposition	138
2.3.4.2 Exemples de Calculs pour des Systèmes Non Linéaires Non Autonomes	141
2.4 Extension aux Systèmes régis par des Inégalités Différentielles	145
2.4.1 Remarque Générale sur la Majoration	145
2.4.2 Majorations par des Systèmes Autonomes	146
2.4.2.1 Constructions	146
2.4.2.2 Lemmes de Majorations	149
2.4.3 Exemples de Détermination Pratique	152
Conclusion	156

Table des matières

CHAPITRE 4: ESTIMATION DES ATTRACTEURS ET DES DOMAINES ASSOCIÉS	159
Introduction	159
1 Construction de Systèmes Majorants Découplés	160
2 Systèmes de Comparaison Linéaires	162
2.1 Résultats Généraux	162
2.2 Application des Résultats Précédents: Méthodes d'Optimisation	172
2.2.1 Ensembles Globalement Attractifs: Optimisation par Intersections	172
2.2.2 Ensembles Localement Attractifs: Optimisation par Itérations	179
Conclusion sur les Systèmes de Comparaison Linéaires	186
3 Systèmes de Comparaisons Non Linéaires Autonomes	187
Introduction	187
3.1 Résultats Généraux	188
3.1.1 Notations	188
3.1.2 Attractivité-Stabilité	190
3.1.3 Répulsivité	194
3.2 Exemples d'Applications	196
Conclusion sur les Systèmes de Comparaison Non Linéaires Autonomes	204
Conclusion	205

Table des matières

CHAPITRE 5: STABILITÉ PRATIQUE ET COMMANDE SOUS CONTRAINTES	209
Introduction	209
1 Stabilité Pratique	210
Introduction	210
1.1 Résultats Généraux	212
1.2 Exemple d'Application	214
Conclusion	220
2 Commande sous Contraintes	221
Introduction	221
2.1 Formulation des Problèmes	222
2.2 Stabilisation Pratique	223
2.3 Résultats Généraux	224
2.4 Méthodologie	229
2.5 Exemples	230
Conclusion	235
Conclusion	237

Table des matières

CONCLUSION GÉNÉRALE	241
NOTATIONS	247
BIBLIOGRAPHIE	251
INDEX	269

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Petit Historique:

La notion de système intervient dans pratiquement tous les domaines scientifiques: un **système dynamique** est un ensemble “d’objets” en relation, évoluant dans le temps et échangeant matière, énergie et information avec son environnement. Les influences de l’environnement sur le système sont souvent perçues comme des perturbations que le système devra compenser selon sa finalité.

Pour comprendre et analyser ces systèmes évoluant avec le temps (ou systèmes dynamiques), on a d’abord formulé des lois qualitatives exprimant ces variations de quantités ; puis on les a modélisées au moyen d’outils mathématiques. C’est ainsi que I. Newton (1642-1727) comprit qu’une clef des “lois naturelles” était l’étude des équations différentielles (ou récurrentes), ce qu’il exprima par la pensée suivante:

“Data aequatione quocunque fluentes quantitates involvente fluxiones invenire et vice versa” qui se traduit par “résoudre les équations dont les variations des variables qui interviennent, dépendent d’elles mêmes”.

Depuis cette période, nombre de scientifiques tels L. Euler, L. Lagrange, P.S. Laplace et C.F. Gauss concentrèrent leurs efforts sur l’étude “quantitative” des équations différentielles, par la mise en oeuvre de méthodes d’intégration, d’approximation et de perturbations.

Il fallut attendre J. Liouville (1809-1882) pour comprendre qu’il était impossible d’intégrer “explicitement” certaines équations. C’est ainsi que les scientifiques de la fin

Introduction Générale

du 19^{ème} siècle s'intéressèrent à des méthodes d'étude "qualitatives" des équations différentielles, consistant à déduire des informations sur le comportement des solutions d'une équation différentielle à partir de celle-ci sans pour autant la résoudre. Avec ces méthodes, une notion fondamentale, issue du domaine de la mécanique céleste, était mise en avant: la stabilité des systèmes régis par des équations différentielles non linéaires. Les deux précurseurs furent H. Poincaré (1854-1912) avec son mémoire "Sur les Courbes Définies par les Équations Différentielles" [POINCARÉ 1885] et A.M. Liapounov (1857-1918) avec son mémoire "Sur le Problème Général de la Stabilité du Mouvement" [LIAPOUNOV 1892].

Depuis les années 1940, ce problème est devenu plus crucial avec l'apparition de régulations automatiques plus complexes et des variantes de ce problème ont été introduites.

Positionnement des travaux:

Notre objectif est d'une part, de développer des méthodes, qualitatives ou quantitatives, d'analyse de la **stabilité** c'est à dire d'obtenir:

- des conditions de stabilité locale ou globale,
- une localisation des comportements asymptotiques (points d'équilibre, cycles-limites, ensembles attractifs...),
- une localisation de leurs domaines d'attraction (conditions initiales assurant la convergence vers un ensemble attractif),
- une étude de la stabilité pratique (notamment sur un intervalle de temps donné),

D'autre part nous verrons qu'il est possible de mettre en oeuvre ces méthodes pour obtenir des **lois de commande stabilisantes**:

- satisfaisant des contraintes d'état et de commande,
- respectant un taux de convergence exponentielle,
- robustes par rapport à une méconnaissance du processus modélisé.

Notre travail se caractérise principalement par l'utilisation des normes vectorielles, qui font partie de la classe générale des fonctions vectorielles de Liapounov. Nous les avons développées de façon à permettre l'étude de systèmes comportant des paramètres reflétant des imprécisions de modélisation. C'est là l'originalité majeure de notre travail qui tient à la classe de modèles considérés. Dans le cas d'équations différentielles ordinaires, ceci se traduit sous la forme:

Introduction Générale

$$\frac{dx}{dt} = e(t, x, d, c), x(t) \text{ vecteur état à l'instant } t, d \text{ perturbation, } c \text{ commande,}$$

alors même que:

- 1) le champ e n'est pas nécessairement continu en (t, x) , pourvu que la solution $x(t)$ soit continue en t ,
- 2) d n'est pas nécessairement connue ou continue, pourvu que son domaine d'évolution soit connu,
- 3) la solution nominale (non perturbée) n'est pas nécessairement calculable,
- 4) le champ e est susceptible d'être de type intervalle:
 $e_1(t, x) \leq e(t, x, d, c) \leq e_2(t, x)$.

Une telle approche présente à notre avis deux avantages majeurs: sa généralité, et sa simplicité de mise en oeuvre:

Généralité, d'une part, puisque d'autres méthodes, éventuellement plus fines, nécessitent des hypothèses de modélisation plus restrictives:

- les méthodes "géométriques et algébriques" de commande non linéaire (voir tome 3 [FOSSARD 93]) nécessitent des champs de vecteurs non seulement continus, mais généralement analytiques et non perturbés, et souvent stationnaires,
- les méthodes basées sur des simulations numériques demandent de connaître les lois d'évolution des paramètres, et excluent donc par exemple toute description de type "intervalle".

Notre approche se situe comme une alternative intéressante lorsque ces méthodes ne s'appliquent pas, et conduit à des conditions de stabilisation "robustes" par rapport aux erreurs de modélisation.

Simplicité de mise en oeuvre, d'autre part, puisque les travaux concernant les fonctions vectorielles de Liapounov générales [MATROSOV 62, 68a, 68b, 69a, 69b, 71] restent, du fait de leur généralité, souvent très lourds à mettre en oeuvre: les normes vectorielles constituent un choix particulier qui conduit à des résultats faciles à calculer, et qui restent relativement généraux.

Présentation du mémoire:

Le *premier chapitre* revient sur les notions qualitatives que nous étudierons plus en détail au cours de ce mémoire. Ainsi dans un premier temps nous allons définir à quel type de **systèmes dynamiques** (processus évoluant au cours du temps) nous nous

Introduction Générale

intéressons, puis les notions liées à la **stabilité asymptotique d'ensemble**, généralisant la première formulation de A.M. Liapounov (voir [LIAPOUNOV 1892] p.540 et 577 correspondant au cas particulier où l'ensemble étudié est un point d'équilibre ou une trajectoire) et celles liées à la **stabilité pratique**, formulées de façon précise pour la première fois par J.P. La Salle et S. Lefschetz (voir [LASALLE 61] p.121-125). Il est important de noter que les définitions présentées dans ce premier chapitre sont parfois des généralisations de définitions antérieures, ou bien des définitions originales cohérentes avec les précédentes.

Le *second chapitre* rappelle des résultats intéressants concernant les **systèmes non linéaires autonomes** (ou stationnaires, ou indépendants du temps). Ce rappel est doublement motivé: d'une part il peut servir de support pédagogique, et d'autre part les résultats originaux présentés par la suite sont largement interconnectés avec ceux de ce chapitre puisque certaines techniques de majorations qui seront présentées permettent de ramener l'étude d'un système complexe à celle d'un système non linéaire autonome.

C'est dans le *troisième chapitre* que nous exposerons les principaux outils autorisant justement cette simplification d'étude: ce sont les **normes vectorielles**, cas particulièrement intéressant de fonctions vectorielles de Liapounov, qui permettent de construire des **systèmes majorants**. Ces systèmes peuvent avoir des domaines de validité limités, ce qui nous conduira à énoncer des **lemmes de majoration à validités locales** (dans l'espace d'état ou/et dans le temps). Cet ensemble de lemmes servira de base pour énoncer les principaux théorèmes de ce mémoire dans les chapitres quatre et cinq.

Le *quatrième chapitre* est l'application de ces résultats du chapitre trois concernant les systèmes majorants à l'étude de la **stabilité asymptotique d'ensembles**: cette étude mettra en évidence des résultats simples permettant d'obtenir des ensembles possédant une certaine propriété qualitative (comme la stabilité ou l'attractivité) et leurs domaines associés. En particulier, pour cela nous utiliserons d'une part des **systèmes majorants linéaires autonomes**, et d'autre part des **systèmes majorants non linéaires autonomes** dont les résultats du chapitre deux facilitent l'étude.

Le *cinquième chapitre*, dans une première section, applique les résultats du chapitre trois concernant les **systèmes majorants linéaires à validité locale temporelle** à l'étude de la **stabilité pratique**. Cette étude permettra de mettre en évidence des résultats simples pour la résolution de certains types de problèmes concernant la stabilité

Introduction Générale

pratique et notamment de donner des conditions sur des ensembles afin qu'un système donné soit stable pratiquement. Enfin, une seconde section utilise les **systèmes majorants non linéaires autonomes** afin d'obtenir des conditions suffisantes assurant la **stabilisation** d'un système tout en respectant des **contraintes sur l'état et sur la commande** .

Nous voulons enfin informer le lecteur que les bases mathématiques du troisième chapitre permettent de justifier les résultats des chapitres suivants. Cependant ces derniers sont utilisables tels quels et la mise en oeuvre pratique des résultats qui y sont présentés est relativement simple à réaliser.

CHAPITRE 1: NOTIONS GÉNÉRALES

Introduction

Dans notre étude nous allons considérer de façon générale des **processus continus**: c'est-à-dire des systèmes évoluant avec le temps dont les variables intervenant dans leurs descriptions (ici au moyen de systèmes d'équations différentielles (E.D)), prennent des valeurs parfaitement définies et ce de façon continue.

Nous utiliserons un modèle mathématique du processus continu étudié de la forme:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = e(t, x, d, c), \\ y = s(t, x, d, c), \end{cases} \quad t \in \mathcal{T}, x \in \mathcal{E}. \quad (1.1)$$

Forme dans laquelle:

- $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}$, est l'intervalle de temps sur lequel le système (1.1) est défini. Si $\mathcal{T} = \mathbb{R}$, le système considéré est **bilatéral**: c'est-à-dire que la variable temporelle (t) pourra décrire la droite réelle toute entière.

- $t \in \mathcal{T}$, représente la **variable temporelle**.
- $t_0 \in \mathcal{T}$ est l'**instant initial** (qui peut être fixe).
- $\mathcal{T}_e = [t_0, t_0 + \tau[$, c'est l'intervalle de temps sur lequel on étudie le système démarrant à l'instant initial t_0 .

- τ est la durée pendant laquelle on étudie l'évolution du système. Elle peut être finie ($\tau \in \mathbb{R}$ et $\tau > 0$) ou infinie ($\tau = +\infty$) selon le type d'étude choisi, mais de façon pratique

Chapitre 1

un système physique a toujours une durée de fonctionnement finie. Cependant on peut dans certains cas, bilatéraliser le système ($t \in \mathbb{R}$).

- $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^n$, est l'**espace d'état**. En pratique l'espace d'état peut être borné: il reflète les caractéristiques physiques du système étudié notamment la bornitude de ses performances. De plus, il peut être un ensemble géométrique complexe. De façon générale, l'espace d'état est une variété. Lorsque le vecteur d'état s'exprime à l'aide d'une variable et de ses dérivées successives l'espace d'état s'appelle aussi espace de phase. Cependant, certains auteurs ([ARNOLD 88] p.11) emploient indifféremment les deux dénominations.

- $x \in \mathcal{E}$ représente le **vecteur d'état** (ou de phase par abus de langage) construit à partir de variables dont l'évolution régit celle du processus. $x(t)$ le vecteur d'état instantané à l'instant $t \in \mathcal{T}$.

- $\mathcal{E}_D \subset \mathbb{R}^o$, l'**espace des perturbations admissibles**.

- $d \in \mathcal{E}_D$, (d pour "disturbances"), représente le **vecteur des perturbations** ; pour un système physique, d peut représenter: des perturbations, des paramètres traduisant une méconnaissance du système, ou un vecteur composé des précités.

- $c \in \mathbb{R}^l$ représente le **vecteur de commande** qui permet d'agir sur l'état, donc sur l'évolution du processus.

- $y \in \mathbb{R}^m$ représente le **vecteur de sortie**.

- e est une **fonction d'évolution**.

- s est une **fonction de sortie**.

On considérera, qu'après injection de la commande de rétroaction: $c = c(t, x)$, on obtient l'équation différentielle (E.D) suivante:

$$\frac{dx}{dt} = e_2(t, x, d), t \in \mathcal{T}, x \in \mathcal{E}, d \in \mathcal{E}_D. \quad (SP) (1.2)$$

Lorsque la perturbation d est identiquement nulle ou bien une fonction parfaitement connue sous forme explicite $d = d(t, x)$, on a affaire à une E.D non perturbée:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), t \in \mathcal{T}, x \in \mathcal{E}. \quad (S) (1.3)$$

Ce premier chapitre présente les principales notions concernant tout aussi bien le système perturbé (SP) (1.2) que le système non perturbé (S) (1.3). Après un bref rappel sur les E.D (Section 1), on abordera des notions permettant de caractériser certains

Notions Générales

ensembles vis-à-vis du comportement du système étudié (Section 2) et enfin un aperçu des notions “qualitatives” relatives au comportement du système sera donné (Section 3).

1 Rappels sur les Equations Différentielles

L'étude qualitative des équations différentielles est une des branches mathématiques les plus importantes et les plus étudiées au cours de ce siècle, notamment depuis les travaux de H. Poincaré et A. Liapounov. Ainsi dans cette partie, on rappellera le minimum de notions nécessaires à la description des systèmes dynamiques principalement les notions de **mouvement**, d'**orbite** et de **flot** (Section 1.1), puis nous préciserons la notion de **système dynamique** (Section 1.2). Le lecteur pourra trouver plus de détails et d'informations dans [BHATIA 70, ROUCHE 73a, LASALLE 76, HIRSH 74, REINHARD 82, GUCKENHEIMER 83, ARNOLD 88, GRUJIĆ 93].

1.1 Solution, Mouvement et Orbite

Tout d'abord, il est important de noter que l'on souhaite étudier des processus continus. Donc on désire des **solutions continues** par rapport au temps, pour l'E.D régissant l'évolution du processus. D'autre part, le problème dit de Cauchy:

“existe-t-il une fonction $\Phi: I \subset \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{E} \subset \mathbb{R}^n$,
 $t \rightarrow \Phi(t)$,

solution de (S) (1.3) satisfaisant à la condition initiale suivante: $\Phi(t_0) = x_0$?”

n'a pas forcément de solution et parfois, peut en avoir plusieurs.

Ainsi, il se pose le problème de définir une solution et de donner des conditions concluantes sur le problème de Cauchy. Les définitions suivantes sont communément acceptées (voir [ROUCHE 73a, REINHARD 82, ARNOLD 88, GRUJIĆ 93]).

Les deux définitions suivantes sont inspirées de [ROUCHE 73a] p.72:

Définition 1.1

On appelle **solution** de (S) (1.3) passant par x_0 à t_0 toute fonction Φ dérivable (par rapport à t) définie sur un intervalle non vide ($I \subset \mathcal{T}$) contenant t_0 :

$\Phi: I \subset \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{E}$,
 $t \rightarrow \Phi(t; t_0, x_0)$,

telle que $\Phi(t_0; t_0, x_0) = x_0$ et telle que $\frac{d\Phi(t; t_0, x_0)}{dt} = f(t, \Phi(t; t_0, x_0))$.

On la note plus simplement $\Phi(t)$.

Définition 1.2

Cette solution peut être représentée dans deux espaces:

- soit dans l'espace d'état étendu (t, x) ou **espace de mouvement**, dans ce cas, on parle de **mouvement** que l'on notera $\underline{x}(t; t_0, x_0)$,
- soit dans l'**espace d'état** (x) , dans ce cas, on parle d'**orbite**.

Remarques:

- 1) Une orbite est l'image d'un mouvement dans l'espace de phase.
- 2) Certains auteurs ([ROUCHE 73a, HIRSH 74, REINHARD 82, ARNOLD 88]) emploient le mot "trajectoire" lorsqu'ils parlent de mouvement. Cependant, on a choisi le mot mouvement car il contient la notion fondamentale d'évolution par rapport au temps.
- 3) Si on considère l'E.D perturbée (SP) (1.2) pour une perturbation donnée, on définit de façon analogue les notions ci-dessus définies.

Définition 1.3

On appelle **portrait de phase** l'ensemble de toutes les orbites munies de leurs sens de parcours temporel.

Remarque:

Cette notion n'a de réelle signification que pour des systèmes autonomes (c'est-à-dire la partie droite de l'E.D associée ne comporte pas sous forme explicite la variable temporelle: $f(t, x) = f(x)$).

Définition 1.4 (voir [ROUCHE 73a] p.82)

La solution Φ_1 définie sur I_1 est un **prolongement** de la solution Φ_2 définie sur I_2 si:

$$I_2 \subsetneq I_1, \text{ et } \forall t \in I_2 \text{ on a } \Phi_1(t) = \Phi_2(t).$$

Définition 1.5 (voir [ROUCHE 73a] p.82)

On appelle **solution maximale** de (S) (1.3) toute solution qui n'admet pas de prolongement.

Le théorème suivant nous donne une condition théorique nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit solution au problème de Cauchy de (S) (1.3):

Théorème 1.1 (voir [ROUCHE 73a] p.80)

Pour qu'une fonction $\Phi: I \subset \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{E}$, soit une solution du problème de Cauchy:

$$\Phi(t_0) = x_0, t_0 \in I, x_0 \in \mathcal{E},$$

il faut et il suffit qu'elle soit continue et que:

$$\forall t \in I, \Phi(t) = \Phi(t_0) + \int_{t_0}^t f(\tau, \Phi(\tau)) d\tau.$$

Cependant, ce théorème ne nous donne pas de critère "utilisable" permettant de conclure sur la solvabilité du problème de Cauchy. Pour cela les mathématiciens ont introduit la notion de fonction Lipschitzienne:

Définition 1.6

f est dite **localement Lipschitzienne** si pour tout (t_0, x_0) de $\mathcal{T} \times \mathcal{E}$ il existe un voisinage de ce point pour lequel la distance séparant les images de deux de ces points est $k(t_0, x_0)$ fois plus petite que la distance séparant leurs antécédents, $k(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+$.

Remarque:

f est dite **uniformément localement Lipschitzienne** si elle est localement Lipschitzienne et si $k(x_0)$ est indépendant de t_0 .

Définition 1.7

f est dite **uniformément k-Lipschitzienne** (ou Lipschitzienne de rapport k) si:

$$\forall t \in \mathcal{T}, x_1 \in \mathcal{E}, x_2 \in \mathcal{E}, \text{ on a } |f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq k |x_1 - x_2|.$$

Remarque:

Toute fonction $C^1(\mathcal{T} \times \mathcal{E})$ est localement Lipschitzienne. De plus, si $\mathcal{T} \times \mathcal{E}$ est compact (fermé et borné) elle est uniformément k -Lipschitzienne (voir [REINHARD 82] p.27).

On peut alors énoncer une condition suffisante pour l'existence et l'unicité des solutions de (S) (1.3).

Notions Générales

Définition 1.8 (voir [ROUCHE 73a] p.82)

Soit $\Phi(t; t_0, x_0)$ une solution définie sur $I =]\alpha, \omega[$, on appelle **bout droit** de Φ le couple (lorsqu'il existe):

$$(\omega, \lim_{i \rightarrow +\infty} \Phi(t_i; t_0, x_0) = b), \text{ avec } \lim_{i \rightarrow +\infty} t_i = \omega.$$

De même on définit un **bout gauche** en remplaçant ω par α , dans l'expression ci-dessus.

Théorème 1.2 (voir [ROUCHE 73a] p.83)

Soit $f: \mathcal{T} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$(t, x) \rightarrow f(t, x),$$

où $\mathcal{T} \times \mathcal{E}$ est un ouvert de $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, une application uniformément localement Lipschitzienne et continue. A tout point (t_0, x_0) de $\mathcal{T} \times \mathcal{E}$ est associée une et une seule solution maximale $\Phi: I \subset \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{E}$ de l'E.D (S) (1.3), solution telle que $\Phi(t_0) = x_0$. Les bouts de cette solution, quand ils existent, sont inclus dans la frontière de $\mathcal{T} \times \mathcal{E}$.

1.2 Flots et Systèmes Dynamiques

Hypothèses:

Par la suite on supposera que le champ de vecteur f de l'E.D (S) (1.3) vérifie les hypothèses du Théorème 1.2. On notera $\Phi(t; t_0, x_0)$ la solution maximale de l'E.D (S) (1.3) vérifiant la condition initiale $\Phi(t_0; t_0, x_0) = x_0$:

$$\begin{aligned} \Phi: I \subset \mathcal{T} &\rightarrow \mathcal{E}, \\ t &\rightarrow \Phi(t; t_0, x_0). \end{aligned}$$

On peut remarquer que I dépend en général de (t_0, x_0) , ce que l'on rappellera par la notation suivante: $I(t_0, x_0) =]\alpha(t_0, x_0), \omega(t_0, x_0)[$.

De plus on posera:

$$I(x_0) = \bigcap_{t_0 \in \mathcal{T}} I(t_0, x_0) =]\alpha(x_0), \omega(x_0)[, \text{ s'il n'est pas vide. On peut le définir comme}$$

suit:

$$I(x_0) =]\text{Max}_{t_0 \in \mathcal{T}} \{ \alpha(t_0, x_0) \}, \text{ Min}_{t_0 \in \mathcal{T}} \{ \omega(t_0, x_0) \} [,$$

Chapitre 1

$$I = \bigcap_{x_0 \in \mathcal{E}} I(x_0) =]\alpha, \omega[.$$

Si on considère l'application qui à toute condition initiale associe sa solution maximale à l'instant t , d'après les hypothèses de travail c'est une **bijection** notée:

$$\begin{aligned} \Phi_f^t: \mathcal{T} \times \mathcal{E} &\rightarrow \mathcal{E}, \\ (t_0, x_0) &\rightarrow \Phi(t; t_0, x_0). \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient la définition suivante qui est une extension de définitions précédentes (voir [ARNOLD 88] p.55 et 92, [HIRSH 74] p.175):

Définition 1.9

Si le champ de vecteur f de l'E.D (S) (1.3) permet de générer des solutions maximales uniques pour tout (t_0, x_0) de $\mathcal{T} \times \mathcal{E}$, définies sur $I = \mathcal{T} = \mathbb{R}$ (respectivement sur un intervalle non borné de \mathbb{R} , sur un intervalle borné de \mathbb{R}) alors l'application génératrice Φ_f^t est appelée un **flot** (respectivement un **semi-flot**, un **flot local**).

Remarques:

- 1) D'après les hypothèses, Φ_f^t est bijective, donc on a au moins un flot local.
- 2) Si $I = \mathbb{R}$, Φ_f^t est un flot. On peut même dire que:

$$\Phi_f^t \text{ est un flot} \Leftrightarrow I(t_0, x_0) = I(x_0) = I = \mathbb{R}.$$

- 3) La justification du choix de la notation Φ_f^t deviendra évidente lorsqu'on calculera (voir 1.3.1) le flot d'une E.D linéaire autonome homogène: $\dot{x} = l(x) = A x$, $\Phi_t^t = e^{At}$.

Exemples

1) Système de Volterra Lotka : Pour illustrer les définitions qui précèdent on va s'intéresser à un modèle simple de lutte de deux espèces, dû à Volterra et Lotka et issu du domaine de l'écologie.

Soit un volume d'eau infini (mer Adriatique par exemple), peuplé par deux espèces: l'une carnivore (C) dévorant l'autre herbivore (H). Notons x et y le nombre d'individus respectivement de l'espèce (H) et (C). Si l'espèce (H) peuplait seule la mer: elle se développerait de façon exponentielle, si l'on fait l'hypothèse que la mer est infinie et que cette espèce peut trouver dans celle-ci toute la nourriture nécessaire à son développement. Donc dans ce cas, la vitesse de variation de l'espèce (H) serait:

$$\frac{dx}{dt} = a x, \text{ avec } a \text{ qui est un réel positif.}$$

Notions Générales

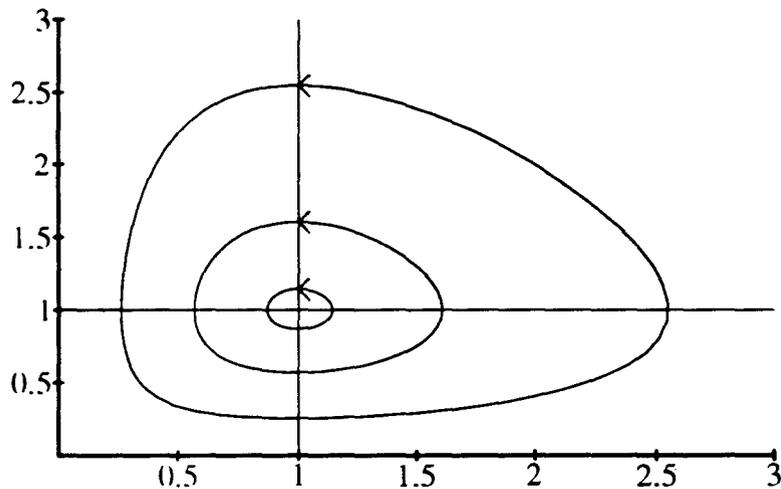
Par contre, l'espèce (C) ne peut assurer seule ni son développement ni même sa survie, donc sa vitesse de variation serait:

$$\frac{dy}{dt} = -b y, \text{ avec } b \text{ qui est un réel positif.}$$

Cependant, lorsque les deux espèces cohabitent, les carnivores dévorent les individus de l'espèce (H): c'est leur fonction naturelle. Donc, si on fait l'hypothèse qu'à chaque rencontre d'un carnivore avec un herbivore, ce dernier est dévoré et que le nombre de rencontres est proportionnel aux deux espèces, on peut conclure que les vitesses de variation des deux espèces sont régies par le système différentiel:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a x - c xy, \\ \frac{dy}{dt} = -b y + d xy, \end{cases} \text{ avec } a, b, c, d \text{ qui sont des réels positifs.}$$

Dans ce cas les variables d'état s'introduisent de façon naturelle: x, y . On peut a priori supposer que l'espace d'état est ici le quart de plan \mathbb{R}_+^2 . Dans ce cas on peut mettre en oeuvre les outils de "la théorie quantitative des équations différentielles" et intégrer ce système en séparant les variables ; on obtient donc $H(x, y) = [a \ln(y) - c y] + [b \ln(x) - d x]$, qui est une fonction constante le long des solutions. On montre ainsi que pour toute condition initiale strictement incluse dans le quart de plan positif, les orbites du système sont fermées. De plus $I(t_0, x_0) = I(x_0) = I \in \mathbb{R}$, on a ici un flot dont le portrait de phase est représenté Figure 1.1.



-Figure 1.1: Système de Volterra Lotka ($a = b = c = d = 1$)-

2) Soit le modèle mathématique suivant:

$$\frac{dx}{dt} = -x^3, \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}. \tag{1.4}$$

Chapitre 1

Pour tout (t_0, x_0) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, l'application bijective suivante:

$$\Phi_f^t: \mathbb{R} \times \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$(t_0, x_0) \rightarrow \Phi(t; t_0, x_0) = x_0 (1 + 2 \frac{x_0^2}{x_0^2} (t - t_0))^{-\frac{1}{2}},$$

permet de générer des solutions maximales sur $I(t_0, x_0) =]t_0 - \frac{1}{2 x_0^2}, +\infty[$. On a donc un semi-flot.

Pour définir un système dynamique $(\mathcal{T} \times \mathcal{E}, f)$ il nous faut:

- une **variété** \mathcal{E} qui représente l'espace d'état,
- un **champ de vecteur** f défini sur $\mathcal{T} \times \mathcal{E}$ engendrant une application qui génère les solutions de l'équation différentielle associée au système (S) (1.3) noté Φ_f^t .

Remarque:

La notion de variété est importante dans le domaine de l'automatique puisque tout système physique est amené à évoluer dans un espace d'état admissible qui est en général un "sous-ensemble" de \mathbb{R}^n (voir l'exemple 1 illustrant la notion de variété et son utilité pour lequel la variété sur laquelle on travaille est un cylindre). Par exemple cette notion apparaît de façon naturelle dans les problèmes sous contraintes de mécanique ou d'électricité. De plus il existe des systèmes dont le comportement à long terme se réduit à l'étude d'ensembles limites (voir ci-après l'exemple 2 qui comporte un cycle limite), ainsi la notion de variété s'introduit naturellement.

Exemples illustrant la notion de variété et son utilité

1) Soit un système physique caractérisé par deux variables d'état (angle θ , vitesse angulaire $\frac{d\theta}{dt} = \omega$). On peut par exemple choisir comme variété un cylindre infini (mais ce n'est pas forcément la seule possibilité ni la meilleure). C'est le cas par exemple pour un pendule régi par le système différentiel suivant:

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = \omega, \\ \frac{d\omega}{dt} = f(\theta, \omega) \end{cases}$$

2) Soit le système:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 1-x_1^2-x_2^2 & -1 \\ 1 & 1-x_1^2-x_2^2 \end{bmatrix} x, t \in \mathbb{R}, x \in \mathcal{E}. \quad (1.5)$$

Notions Générales

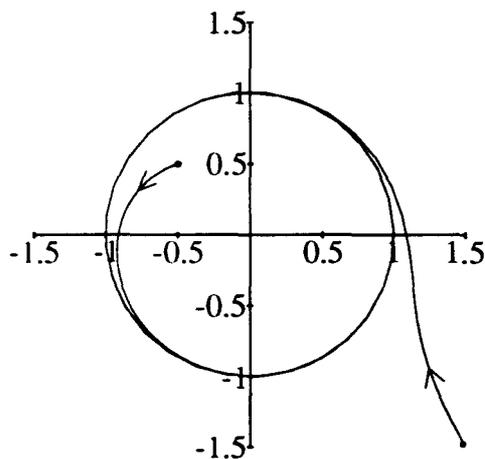
a) Si on prend: $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$.

En utilisant un système de coordonnées polaires, on peut montrer que toute solution maximale de (1.5) (définie pour $t \in \mathbb{R}$) passant à $t = 0$ par un point du plan autre que l'origine converge vers le cercle unité (voir Figure 1.2): on dit que le cercle unité est un cycle limite asymptotiquement stable (cf. Section 3.1.1). Ainsi on peut préciser l'étude de ce système dynamique sur \mathbb{R}^2 , par une étude de ce système sur une variété de dimension 1 (le cercle unité).

b) Si on prend: $\mathcal{E} =$ le cercle unité.

On constate alors que le système évolue à "vitesse angulaire constante" unitaire.

Donc, on peut dans certains cas préciser le comportement d'un système en étudiant son évolution sur une variété de dimension inférieure (ici le cercle est de dimension 1).



-Figure 1.2: Portrait de phase du système (1.5)-

Définition 1.10

(S) (1.3) définit un **système dynamique local** (respectivement **semi-dynamique, dynamique**) si Φ_f^t existe de façon unique et est un flot local (respectivement semi-flot, un flot).

Exemples

- 1) On a vu que le système de Volterra Lotka définit un système dynamique ($I = \mathbb{R}$).
- 2) Le modèle mathématique (1.4) définit un système semi-dynamique.

Remarques:

- 1) Si f vérifie les hypothèses, Φ_f^t est unique.

Chapitre 1

2) On peut noter que la définition précédente est équivalente à la forme suivante généralisant celles que l'on trouve dans les livres de Bhatia et Szegö (voir [BHATIA 70] p.5), de La Salle (voir [LASALLE 76] p.28) et de Grujić, Borne, Gentina, Richard (voir [GRUJIĆ 93]):

(S) (1.3) définit un **système dynamique local** si les solutions possèdent les propriétés suivantes:

P1 Existence: Chaque solution $\Phi(t; t_0, x_0)$ de (S) (1.3) possède pour chaque (t_0, x_0) un intervalle maximal de définition $I(t_0, x_0)$ et vérifie $\Phi(t_0; t_0, x_0) = x_0$.

P2 Unicité et Propriété de semi groupe:

$\forall t_1 \in I(t_0, x_0)$ et $\forall t_2 \in I(t_1, \Phi(t_1; t_0, x_0))$, on a $t_1 + t_2 \in I(t_0, x_0)$ et $\Phi(t_2; t_1, \Phi(t_1; t_0, x_0)) = \Phi(t_1 + t_2; t_0, x_0)$.

P3 Continuité: Φ est continue par rapport à chacune des trois variables.

2) Jusque alors, nous avons "imbriqué" les différentes notions pour arriver à la notion de système dynamique. Pour cela nous avons considéré que notre processus régis par l'E.D (S) (1.3). En fait la théorie des systèmes dynamiques englobe des processus régis par exemple par des équations aux dérivées partielles ou par des systèmes intégral-différentiels retardés etc... Ainsi on définit un système dynamique abstrait comme suit (voir [HARAUX 91] p.10):

Un système dynamique sur \mathcal{E} est une famille $\{\Phi^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ d'applications sur \mathcal{E} (espace métrique complet) telle que:

P1: pour tout x_0 de \mathcal{E} , $\Phi^t(x_0)$ est une application de \mathcal{E} dans \mathcal{E} , continue en t .

P2: Φ^0 est l'identité et pour tout réels t et s , $\Phi^t \circ \Phi^s = \Phi^{t+s}$.

P3: pour tout réel t , Φ^t est une application continue de \mathcal{E} dans \mathcal{E} .

1.3 Classification des Systèmes Dynamiques

On classera ici les systèmes dynamiques selon leur degré de complexité:

1.3.1 Cas Linéaire

1.3.1.1 Cas Linéaire Autonome Homogène

Si on considère un champ de vecteur linéaire autonome $l(x) = A x$, l'équation différentielle associée au système dynamique correspondant s'écrit:

$$\frac{dx}{dt} = l(x) = A x, t \in \mathcal{T}, x \in \mathcal{E}, \quad (SLA) (1.6)$$

Si l'on connaît les solutions de (1.6) pour un instant initial t_0 , on aura toutes les autres par translation temporelle. Ainsi, il suffit de connaître les solutions pour par exemple $t_0 = 0$ (si $t_0 \in \mathcal{T}$). On ne considérera que le flot suivant:

$$\begin{aligned} \Phi_t^l: \mathcal{E} &\rightarrow \mathcal{E}, \\ x_0 &\rightarrow \Phi_t^l(x_0) = \Phi(t; 0, x_0). \end{aligned}$$

On sait que Φ_t^l est un opérateur linéaire dont la matrice associée est e^{At} .

De plus, on connaît de façon exacte le comportement des solutions de (1.6).

Si $\mathcal{T} = \mathbb{R}$ et $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$ les solutions maximales sont définies sur \mathbb{R} entier et selon une classification des valeurs propres on en déduit le portrait de phase (on trouvera dans [ARNOLD 88] une étude et une classification complète).

1.3.1.2 Cas Linéaire Non Autonome Homogène

Si on considère un champ de vecteur linéaire $l_1(x) = A(t) x$, l'équation différentielle associée au système dynamique correspondant s'écrit:

$$\frac{dx}{dt} = l_1(x) = A(t) x, t \in \mathcal{T}, x \in \mathcal{E},$$

$$\begin{aligned} \Phi_{t_1}^l: \mathcal{T} \times \mathcal{E} &\rightarrow \mathcal{E}, \\ (t_0, x_0) &\rightarrow \Phi_{t_1}^l(t_0, x_0) = \Phi(t; t_0, x_0). \end{aligned}$$

Chapitre 1

Dans ce cas, $\Phi_{t_1}^I$ est un opérateur linéaire. La matrice associée s'appelle la **matrice de transition**.

Si de plus $A(t)$ est T -périodique la matrice de transition de l'instant $t_0 = 0$ à l'instant T , s'appelle la **matrice de monodromie** (voir [RABENASOLO 92]). On peut alors classifier les différents comportements des solutions à partir des valeurs propres de la matrice de monodromie (appelés **multiplieurs caractéristiques**) et éventuellement se ramener au cas a) (**Théorie de Floquet**).

1.3.1.3 Cas Linéaire Non Homogène

Si on considère un champ de vecteur linéaire non homogène $l_2(x) = A(t)x + b(t)$, l'équation différentielle associée au système dynamique correspondant s'écrit:

$$\frac{dx}{dt} = l_2(x) = A(t)x + b(t), t \in \mathcal{T}, x \in \mathcal{E},$$

$$\begin{aligned} \Phi_{l_2}^I: \mathcal{T} \times \mathcal{E} &\rightarrow \mathcal{E}, \\ (t_0, x_0) &\rightarrow \Phi_{l_2}^I(t_0, x_0) = \Phi(t; t_0, x_0). \end{aligned}$$

Dans ce cas, on peut se ramener au cas des sections 1.3.1.1 et 1.3.1.2 (cf. [ROUCHE 73a]).

1.3.2 Cas Non Linéaire Autonome

Si on considère un champ de vecteur purement non linéaire autonome (indépendant du temps) $g(x)$, l'équation différentielle associée au système dynamique s'écrit:

$$\frac{dx}{dt} = g(x), t \in \mathcal{T}, x \in \mathcal{E}. \quad (SNLA) (1.7)$$

Si l'on connaît les solutions de (1.7) pour un instant initial t_0 , on aura toutes les autres par translation temporelle. Ainsi, il suffit de connaître les solutions pour par exemple $t_0 = 0$ (si $t_0 \in \mathcal{T}$). On ne considérera que le flot suivant:

$$\begin{aligned} \Phi_g^I: \mathcal{E} &\rightarrow \mathcal{E}, \\ x_0 &\rightarrow \Phi_g^I(x_0) = x(t; 0, x_0). \end{aligned}$$

Notions Générales

Dans le cas où le champ de vecteur purement non linéaire autonome g est de classe C^k (respectivement C^∞ , analytique), le flot associé Φ_g^t est un difféomorphisme local de classe C^k (respectivement C^∞ , analytique) pour tout instant t où il est défini. En particulier, si le flot Φ_g^t est défini pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors il définit un groupe à un paramètre de difféomorphismes locaux de classe C^k (respectivement C^∞ , analytique) (voir [ARNOLD 88] p.55 à 63):

$$t \rightarrow \Phi_g^t \text{ est de classe } C^k \text{ (resp. } C^\infty, \text{ analytique),} \quad (1.8)$$

$$\Phi_g^t \circ \Phi_g^s = \Phi_g^{t+s} \text{ et } \Phi_g^0 = \text{Id.} \quad (1.9)$$

De plus on peut noter la dualité entre le flot associé à g pour le paramètre t et le flot associé à $-g$ pour le paramètre $-t$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall x_0 \in \mathcal{E} \text{ on a: } \Phi_g^t(x_0) = \Phi_{-g}^{-t}(x_0). \quad (1.10)$$

Ainsi on peut remarquer que l'on a la propriété suivante:

$$\forall t \in \mathbb{R} \text{ on a: } \Phi_g^t \circ \Phi_g^{-t} = \Phi_g^{-t} \circ \Phi_g^t = \Phi_g^0 = \text{Id.} \quad (1.11)$$

Donc d'après (1.10) et (1.11), on déduit que:

$$\forall t \in \mathbb{R} \text{ on a: } (\Phi_g^t)^{-1} = \Phi_g^{-t} = \Phi_{-g}^t. \quad (1.12)$$

Cette dualité caractérisée par (1.10) est très importante puisqu'elle permet de transposer certains résultats. En particulier, si on connaît le portrait de phase du système dynamique (1.7) pour les temps positifs, son dual pour les temps négatifs s'obtient tout simplement en renversant le sens de parcours des orbites. Cette propriété est en particulier utilisée dans la "méthode du renversement des trajectoires" ("trajectory-reversing method") permettant en dimension deux (et trois) de déterminer de façon exacte la "plupart" des portraits de phase au moyen de l'étude qualitative du champ de vecteur non linéaire et de simulations (voir Chapitre 2 Section 2.2).

1.3.3 Cas Non Linéaire Non Autonome Périodique

Définition 1.11

Un champ de vecteur $f(t, x)$ non linéaire non autonome est **T-périodique** si:

- i) $\frac{dx}{dt} = f(t, x), x \in \mathcal{E}, t \in \mathcal{T},$
- ii) $\mathcal{T} = \mathbb{R},$
- iii) $f(t + T, x) = f(t, x),$ pour tout t et pour tout $x \in \mathcal{E}.$

Si l'on connaît les solutions pour un intervalle de longueur T , on aura toutes les autres par translation temporelle.

1.4 Définition des Notations Utilisées l, g, f

Par la suite on conservera les notations suivantes:

- l correspond à un champ de vecteur linéaire autonome: $l(x) = A x,$
- g correspond à un champ de vecteur non linéaire autonome: $g(x),$
- f correspond à un champ de vecteur non linéaire non autonome: $f(t, x).$

2 Caractérisation d'Ensembles

Avec l'étude qualitative des systèmes dynamiques, on a essayé de comprendre puis de **classer certains comportements** pour permettre une étude groupée. Ainsi, on a été amené à introduire des notions de plus en plus pointues et spécifiques pour qualifier certains types de comportements similaires.

Les **points d'équilibre** (Section 2.1) et les **orbites fermées** (Section 2.2) ont toujours été un point important dans l'étude des équations différentielles. Des caractérisations plus générales ont également permis de mettre en évidence le rôle fondamental que jouent certains ensembles, en particulier à travers les notions d'**invariance** (Section 2.3) et d'**ensembles limites** (Section 2.4).

On rappelle que:

$$\Phi: I(t_0, x_0) \subset \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{E}, \text{ avec } I(t_0, x_0) =]\alpha(t_0, x_0), \omega(t_0, x_0)[, \\ t \rightarrow \Phi(t; t_0, x_0),$$

est la solution maximale de l'E.D (S) (1.3), telle que $\Phi(t_0; t_0, x_0) = x_0$.

2.1 Points d'Equilibre

Pour certains états initiaux le système reste "gelé", c'est-à-dire qu'il n'évolue plus et l'état reste figé à la valeur initiale considérée: on parlera alors de **points d'équilibre**. Dans un premier temps on va énoncer la définition d'un point d'équilibre dans le cas le plus général d'un système du type (S) (1.3).

Définition 1.12 [GRUJIĆ 87] p.13

x_e est un **point d'équilibre** sur \mathcal{T}_i (intervalle d'instant initiaux) pour le système (S) (1.3) si:

$$\forall t_0 \in \mathcal{T}_i, \text{ les solutions } \Phi(t; t_0, x_e) \text{ de (S) (1.3) sont définies sur } \mathcal{T}_0 = [t_0, +\infty[\\ \text{et vérifient } \Phi(t; t_0, x_e) = x_e, \forall t \in \mathcal{T}_0. \quad (1.13)$$

Remarque:

On peut obtenir une définition dans laquelle les solutions ne sont définies que sur un intervalle borné.

Théorème 1.3 [GRUJIĆ 87] p.13

x_e est un **point d'équilibre** sur \mathcal{T}_i pour le système (S) (1.3) associé au champ de vecteur $f(t, x)$ si et seulement si:

1) $\forall t_0 \in \mathcal{T}_i$, (S) (1.3) admet une unique solution définie sur $\mathcal{T}_0 = [t_0, +\infty[$ au problème de Cauchy, (1.14 a)

2) $f(t, x_e) = 0, \forall t \in \mathcal{T}_0, \forall t_0 \in \mathcal{T}_i$. (1.14 b)

Remarques:

1) La condition (1.14 b) du théorème 1.3 n'implique pas forcément que l'état du système reste figé à la valeur initiale x_e . En effet, soit le modèle mathématique suivant:

$$\frac{dx}{dt} = -x^{\frac{2}{3}}, t \in \mathbb{R}, x \in \mathcal{E},$$

pour $\mathcal{E} =]0, +\infty[$ on a bien un système dynamique local (solution unique). Mais, pour $\mathcal{E} = \mathbb{R}$, cela n'est plus le cas et en particulier l'origine vérifie bien la condition 1.14 b) du théorème 1.3, cependant il existe des solutions $\Phi(t; t_0, 0)$ qui quittent l'origine.

2) On peut noter que si l'état du système coïncide avec un point d'équilibre à un certain moment, dans ce cas le processus se trouvera gelé et s'il n'est pas perturbé son état n'évoluera plus. Dans la pratique il est rare, voire impossible, de ne pas tenir compte de ces perturbations (bruits, baisse de tension, etc...), d'où l'importance de l'étude de l'influence des perturbations: c'est la question de la stabilité.

Définition 1.13

Dans la littérature, on classe les points d'équilibre de (SNLA) (1.7), en deux catégories:

-les **points hyperboliques** (ou **non dégénérés**): ce sont les points d'équilibres pour lesquels la Jacobienne correspondante ne comporte aucune valeur propre à partie réelle nulle.

-les **points non hyperboliques**: ce sont les points d'équilibres pour lesquels la Jacobienne correspondante possède au moins une valeur propre à partie réelle nulle.

Remarque:

Cette distinction est très importante puisque pour tout point hyperbolique on peut connaître localement le comportement des solutions alors que ce n'est pas forcément le cas pour les points non hyperboliques (voir Chapitre 2 Section 1.2). En particulier les

points non hyperboliques jouent un rôle très important dans la théorie des bifurcations (voir [GUCKENHEIMER 83] et [ARNOLD 80]), ainsi qu'en stabilité structurelle (cf. Chapitre 1 Section 3.6).

2.2 Solutions Périodiques et Orbites Fermées

Avec les études de systèmes plans (espace de phase de dimension 2) notamment par H. Poincaré [POINCARÉ 1885] et L. Markus [MARKUS 54], on a mis en évidence un comportement particulier les **orbites fermées** qui sont une extension des points fixes dans le sens où elles caractérisent un comportement rémanent: si on laisse évoluer un système à partir d'une condition initiale appartenant à cette orbite, dans ce cas le système continuera à évoluer sur cette orbite au cours du temps.

Les définitions suivantes sont inspirées de [ROUCHE 73a] p.87-88, [ROUCHE 73b] p.8, [HALE 91] p.113-117.

Définition 1.14

La solution $\Phi(t ; t_0, x_0)$ est **T-périodique** (périodique de période T), si $I(t_0, x_0) = \mathbb{R}$ et s'il existe un réel positif λ , tel que pour tout réel t on ait $\Phi(t + \lambda ; t_0, x_0) = \Phi(t ; t_0, x_0)$. Le plus petit réel positif λ noté T s'appelle la **période** de la solution.

Définition 1.15

γ est une **orbite fermée** pour le système (S) (1.3) associé au champ de vecteur $f(t, x)$ si γ est une courbe de Jordan, c'est-à-dire homéomorphe à un cercle.

Remarque:

Toute orbite image d'une solution T-périodique non triviale (non identique à un point d'équilibre) est une orbite fermée.

Exemple

Si on reprend le système de Volterra Lotka de l'exemple de la section 1.1: on a vu que, pour toute condition initiale strictement incluse dans le quart de plan positif, les orbites du système sont fermées (cf. Figure 1.1).

Lemme 1.1 (voir [HALE 91] p.114)

Une solution $\Phi(t ; t_0, x_0)$ d'une équation non linéaire non autonome T-périodique est T-périodique si et seulement si $\Phi(t_0 + T ; t_0, x_0) = x_0$.

Théorème 1.4 (voir [HALE 91] p.116)

Si une solution $\Phi(t; t_0, x_0)$ d'une équation non linéaire non autonome T-périodique est bornée pour $t \geq t_0$, alors il existe une solution T-périodique $\pi(t)$ telle que:

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \Phi(t + iT; t_0, x_0) = \pi(t), \quad t_0 \leq t \leq t_0 + T,$$

cette convergence étant monotone et uniforme. De même, si une solution $\Phi(t; t_0, x_0)$ d'une équation non linéaire non autonome T-périodique est bornée pour $t \leq t_0$, alors il existe une solution T-périodique $\Pi(t)$ telle que

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \Phi(t - iT; t_0, x_0) = \Pi(t), \quad t_0 \leq t \leq t_0 + T,$$

cette convergence étant monotone et uniforme.

2.3 Invariances

Cette notion d'**invariance** d'un ensemble est une extension de la notion d'orbites fermées, dans le sens où si on laisse évoluer un système à partir d'une condition initiale appartenant à cet ensemble, le système continuera à évoluer sur cet ensemble pendant un intervalle de temps donné. Les différentes nuances d'invariances portent sur le choix de l'intervalle de temps.

Définition 1.16 (Figure 1.3)

Un ensemble compact non vide $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ est **I-invariant** (respectivement ω , α -invariant) par le flot local Φ_f^t si:

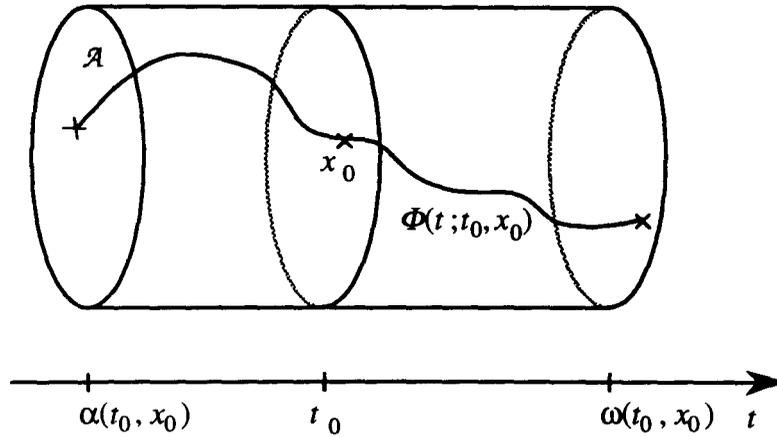
$$\forall x_0 \in \mathcal{A}, \forall t_0 \in \mathcal{I}, \forall t \in I(t_0, x_0), \text{ (respectivement } [t_0, \omega(t_0, x_0)[, \\]\alpha(t_0, x_0), t_0]) \text{ on a } \Phi_f^t(t_0, x_0) \in \mathcal{A}. \quad (1.15)$$

Définition 1.17

Un ensemble compact non vide $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ est **invariant** (respectivement **positivement, négativement invariant**) par le flot Φ_f^t si:

$$\forall x_0 \in \mathcal{A}, \forall t_0 \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R} \text{ (respectivement } \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-) ; \Phi_f^t(t_0, x_0) \in \mathcal{A}. \quad (1.16)$$

Notions Générales



-Figure 1.3: Invariance d'un ensemble \mathcal{A} -

Remarques:

- 1) Dans la définition 1.17 on suppose que Φ_f^t est un flot, donc que $\mathcal{T} = I = \mathbb{R}$, donc pour tout x_0 de \mathcal{A} on a $I(x_0) = \mathbb{R}$.
- 2) Toute solution maximale de (SNLA) (1.7) est I -invariante.
- 3) Il est important de noter que les points d'équilibre (Section 2.1), les orbites fermées (Section 2.2) et de façon plus générale certains attracteurs (Section 3.1) sont des cas particuliers d'ensembles invariants.

Exemples

1) Si on reprend le système défini par (1.5) de l'exemple 1 de la Section 1.2: la fermeture du disque unité (le disque unité et sa frontière: le cercle unité) est un ensemble positivement invariant mais seul le cercle unité et l'origine sont invariants (c'est-à-dire positivement et négativement invariant), voir figure correspondante (Figure 1.2).

2) Système de Van Der Pol:

On considère un système électrique (R, L, C) en triangle. On note i_X et v_X respectivement le courant et la tension dans la branche comportant l'élément X. On suppose que les éléments L et C sont parfaitement linéaires et que l'élément résistif R obéit à la loi d'Ohm généralisée ($f(i_R) = v_R$). Les lois de Kirchhoff permettent de réduire l'étude des différentes variables d'état à l'étude du système différentiel suivant:

$$\begin{aligned} L \frac{di_L}{dt} &= v_L = v_C - f(i_L), \\ C \frac{dv_C}{dt} &= i_C = -i_L. \end{aligned}$$

Si on pose $x_1 = i_L$ et $x_2 = v_C$, on obtient pour $L = 1$ et $C = 1$ le système différentiel suivant:

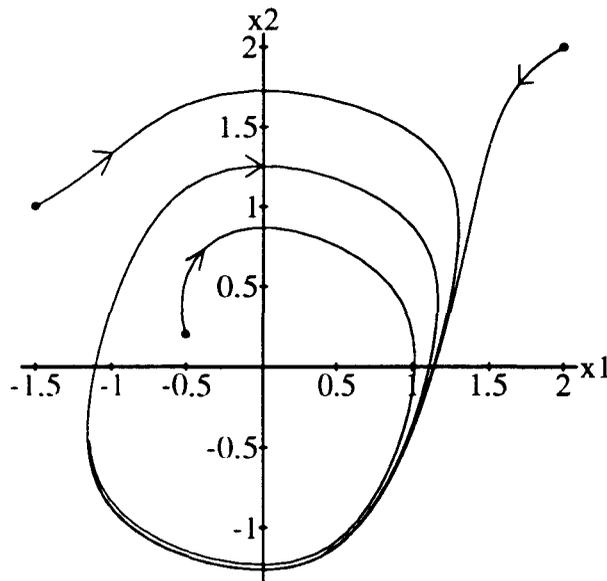
Chapitre 1

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_2 - f(x_1), \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1.\end{aligned}$$

Ce système différentiel provient d'une équation dite de Liénard. Si dans l'équation de Liénard, on considère le cas particulier où $f(x_1) = (x_1^3 - x_1)$, on abouti à l'équation de Van Der Pol où x représente le vecteur état:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} (1-x_1^2) & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x. \quad (1.17)$$

On montre qu'il existe une unique solution périodique non triviale γ de l'équation (1.17) et que toute solution (différente d'un point d'équilibre) tend vers cette solution γ et ce à la façon d'une spirale convergente (cf. [HIRSCH 74] p.211-227). Ainsi, il apparaît que tout ensemble image par la restriction du flot associé aux temps négatifs (on renverse le temps) de cette solution est positivement invariante. Il en est de même pour la région du plan délimitée par cette solution. En effet, si on part de l'origine on y reste, sinon on approche de façon asymptotique cette solution périodique. Le portrait de phase de ce système est illustré Figure 1.4.



-Figure 1.4: Portrait de phase du système de Van Der Pol-

Pour les systèmes dynamiques, donc ayant des solutions définies sur \mathbb{R} entier, cette notion d'**invariance** (respectivement positive ou négative) nécessite une étude de comportement sur un **intervalle de temps non-borné**. Or, dans la pratique on ne considère l'évolution d'un système que pour des intervalles de temps bornés. Ainsi nous

avons introduit la notion d'**invariance sur un intervalle de temps borné** (intervalle sur lequel on désire étudier un système), $\mathcal{T}_e = [t_0, t_0 + \tau[$.

Définition 1.18 (voir [PERRUQUETTI et al. 94b])

Un ensemble compact non vide $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ est \mathcal{T}_e -**invariant** par le flot Φ_f^t si:

$$\forall x_0 \in \mathcal{A}, \forall t \in \mathcal{T}_e, \text{ on a: } \Phi_f^t(t_0, x_0) \in \mathcal{A} \quad (1.18)$$

Remarques:

1) Dans la définition 1.18 on suppose que Φ_f^t est un flot ($\mathcal{T} = I = \mathbb{R}$), donc pour tout x_0 de \mathcal{A} on a $I(x_0) = \mathbb{R}$.

2) Cette définition est cohérente avec la définition 1.16, il suffit de remplacer t_0 et τ par les valeurs adéquates pour retrouver les notions d'invariance (respectivement positive ou négative). La différence fondamentale entre les deux définitions 1.18 et 1.16 réside dans la liberté du choix de \mathcal{T}_e pour 1.18.

2.4 Ensembles Limites

L'étude d'un système amène à s'intéresser au comportement de ce système après dissipation du "régime transitoire". Ainsi, des notions plus précises ont été introduites pour "capter" les informations pertinentes et rémanentes après dissipation d'un éventuel phénomène transitoire. C'est le rôle des **ensembles limites**.

Définition 1.19

L'**ensemble ω -limite** par rapport à une condition initiale (t_0, x_0) noté $\Omega_f(t_0, x_0)$ est défini par:

$$\Omega_f(t_0, x_0) = \{y \in \mathcal{E}: \text{il existe une suite } \{t_i\} \text{ dans } I(t_0, x_0) \text{ telle que:} \\ \lim_{i \rightarrow +\infty} t_i = \omega(t_0, x_0) \text{ et } \lim_{i \rightarrow +\infty} \Phi(t_i; t_0, x_0) = y\}. \quad (1.19)$$

Définition 1.20

L'**ensemble α -limite** par rapport à une condition initiale (t_0, x_0) noté $A_f(t_0, x_0)$ est défini par:

$$A_f(t_0, x_0) = \{y \in \mathcal{E}: \text{il existe une suite } \{t_i\} \text{ dans } I(t_0, x_0) \text{ telle que:} \\ \lim_{i \rightarrow +\infty} t_i = \alpha(t_0, x_0) \text{ et } \lim_{i \rightarrow +\infty} \Phi(t_i; t_0, x_0) = y\}. \quad (1.20)$$

Chapitre 1

Remarques:

1) Pour un système dynamique ($I(t_0, x_0) = I(x_0) = I = \mathbb{R}$, ici $\omega = \alpha = +\infty$), l'ensemble ω -limite est aussi appelé l'**ensemble limite positif**, parfois noté $\Lambda_f^+(t_0, x_0)$. De même, l'ensemble α -limite est aussi appelé l'**ensemble limite négatif**, parfois noté $\Lambda_f^-(t_0, x_0)$, voir par exemple [BHATIA 70] p.19.

2) $\Omega_f(t_0, x_0)$ et $A_f(t_0, x_0)$ ont d'abord été introduites par G.D. Birkhoff ([BIRKHOFF 27] p.197-198).

3) Il est important de noter que, pour un système dynamique associé à un champ de vecteur non linéaire autonome g , on a la relation suivante (d'après (1.10)):

$$\Lambda_{-g}^-(t_0, x_0) = \Lambda_{-g}^-(x_0) = \Lambda_g^+(x_0) = \Lambda_g^+(t_0, x_0). \quad (1.21)$$

Cette propriété permet de relier les notions d'attracteur et de répulseur (cf. Section 3.1). De plus, on peut noter que les ensembles ω ou α -limite sont, dans ce cas, indépendants de l'instant initial.

3) Ces notions permettent de mettre en évidence des phénomènes attractifs au moyen de $\Omega_f(t_0, x_0)$, ou répulsifs au moyen de $A_f(t_0, x_0)$ (cf. Section 3.1).

Exemples

1) Si on reprend le système défini par (1.5) de l'exemple 1 de la Section 1.2 dont le portrait de phase est la Figure 1.2, on constate que (ici on a affaire à un système dynamique $I = \mathbb{R}$):

- pour tout point x_0 hors du disque ouvert unité, on a $\Omega_f(x_0) = \text{cercle unité}$ et $A_f(x_0)$ est vide,
- pour tout point x_0 du disque ouvert unité autre que l'origine, on a $\Omega_f(x_0) = \text{cercle unité}$ et $A_f(x_0) = (0, 0)$.
- pour tout point x_0 du cercle unité on a $\Omega_f(x_0) = A_f(x_0) = \text{cercle unité}$.
- pour l'origine, on a $\Omega_f(0) = A_f(0) = 0$.

2) On obtient des conclusions semblables aux précédentes en reprenant le système de Van Der Pol (1.17) Figure 1.4, avec γ jouant le même rôle que le cercle unité dans l'exemple précédent.

3 Stabilités

De façon générale, les différentes propriétés relatives à la **stabilité** traduisent des **propriétés qualitatives**.

De nombreux types de stabilité ont été définis: stabilité au sens de Liapounov (Section 3.2), stabilité au sens de Lagrange (voir [LASALLE 61] p.108-120, [HAHN 67] p.222, [BHATIA 70] p.41-42), stabilité entrée-sortie [MICHEL 77], stabilité pratique (Section 3.5), stabilité structurelle (Section 3.6), etc...

Cependant, elles ont pour but de traduire le **caractère rémanent d'un objet étudié** (vecteur état ou sortie, ensemble, mouvement, structure de portrait de phase, etc...) à avoir un comportement **proche** de celui d'un **objet de référence** (ce qui nécessite un outil de mesure) au cours de son évolution sur un **intervalle de temps**, et ce sous certaines **conditions prédéfinies**.

Par exemple, en ce qui concerne la **stabilité au sens de Liapounov**:

objet étudié: mouvement perturbé,

distance: distance euclidienne,

objet de référence: mouvement non perturbé,

intervalle de temps: $\mathcal{T}_0 = [t_0, +\infty[$,

condition: elle porte sur la distance séparant les conditions initiales de chaque mouvement.

Cette notion fut développée simultanément par A.M. Liapounov et H. Poincaré vers la fin du 19^{ème} siècle. Elle traduit la tendance d'un système à ne pas s'éloigner d'un mouvement initial après une faible perturbation.

Avec les recherches du début du 20^{ème} siècle concernant l'étude des systèmes dynamiques, on s'intéressa non plus à la stabilité d'un état (point d'équilibre) ou d'un ensemble d'états (attracteurs) mais à la stabilité des portraits de phase par rapport à de faibles déformations locales du champ de vecteur: c'est ce que l'on nomme la **stabilité structurelle**: elle traduit une certaine "robustesse" du système étudié. Les premiers travaux sont dus à A. Andronov et L. Pontriaguine au cours de la première moitié de ce siècle.

Pour la **stabilité structurelle** (cf. Section 3.6):

Chapitre 1

objet étudié: portrait de phase relatif à un champ perturbé g_1 ,

distance: la "proximité" est induite par une relation d'équivalence,

objet de référence: portrait de phase relatif à un champ g_2 ,

intervalle de temps: $]-\infty, +\infty[$,

condition: elle porte sur une distance définie sur l'espace des champs de vecteur. Par exemple si on travaille sur l'espace des champs de vecteur de classe $C^k(S)$, $S \subset \mathbb{R}^n$, on prendra comme distance séparant deux champs de vecteur de classe C^k g_1 et g_2 :

$$\text{Max} \left\{ \left\{ \text{Sup}_{x \in S} \left| \frac{\partial^j g_1}{(\partial x_i)^j} - \frac{\partial^j g_2}{(\partial x_i)^j} \right| : i = 1, 2, \dots, n \right\} : j = 0, 1, 2, \dots, k \right\}.$$

Pour l'étude de synthèse de loi de commande de processus ces deux types de stabilité peuvent assurer la convergence de l'état sous certaines conditions initiales (stabilité au sens de Liapounov) et sous certaines conditions de variation des paramètres de définition du modèle du processus (stabilité structurelle).

3.1 Attractivité et Répulsivité

Ces notions furent pressenties dès les premiers travaux. En particulier la notion d'**attractivité** fut implicitement introduite par A.M. Liapounov par le biais de la notion de **stabilité asymptotique**. Cependant, comme nous le verrons par la suite, ces deux notions doivent être dissociées, bien que dans certains cas on ne puisse avoir l'une sans l'autre (cf. Chapitre 2 Section 2.1). Dans cette section on considérera des **systèmes dynamiques** ($I = \mathbb{R}$). Cependant, les définitions proposées restent valables pour des systèmes dynamiques locaux. De plus, on introduit les notations \mathcal{T}_0 désignant l'intervalle $[t_0, +\infty[$ et \mathcal{T}_i un intervalle d'instants initiaux $\{t_0\}$.

3.1.1 Attractivité d'une Solution et Domaine Associé.

Les définitions suivantes sont inspirées de [REINHARD 82] p.129.

Définition 1.21 (cf. Figure 1.5)

La solution $\Phi(t; t_0, x_0)$ du système (S) (1.3) est **attractive** si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \text{ vérifiant } |x - x_0| < \eta, \exists T(x, \varepsilon) > 0 \text{ tel que:}$$

$$|\Phi(t; t_0, x) - \Phi(t; t_0, x_0)| < \varepsilon \text{ pour } t > t_0 + T(x, \varepsilon). \quad (1.22)$$

Notions Générales

Remarques:

1) La définition précédente, peut être formulée en termes de limite comme suit:

La solution $\Phi(t; t_0, x_0)$ est attractive si:

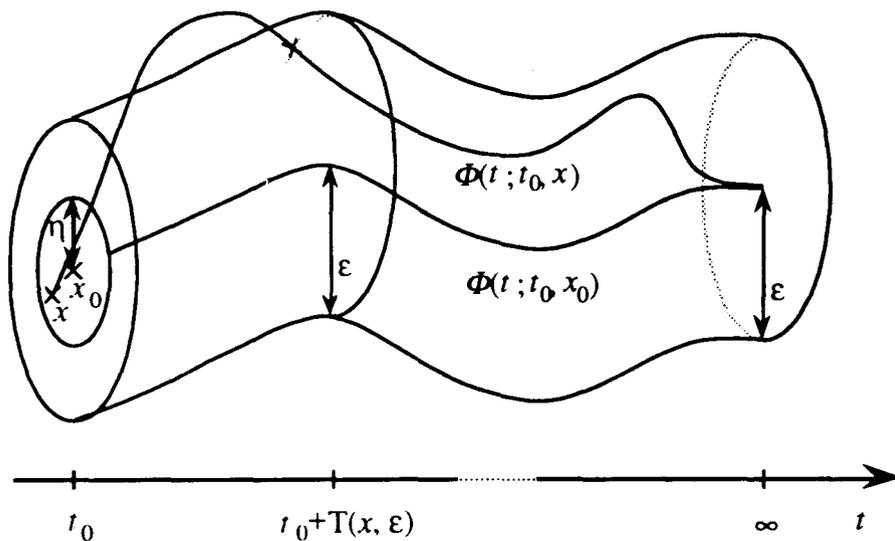
$$\exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \text{ vérifiant } |x - x_0| < \eta \text{ on ait:}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |\Phi(t; t_0, x) - \Phi(t; t_0, x_0)| = 0.$$

Elle peut être formulée de façon plus générale en utilisant la notion de voisinage:

La solution $\Phi(t; t_0, x_0)$ est attractive si pour tout voisinage \mathcal{U} de la solution $\Phi(t; t_0, x_0)$, il existe un voisinage \mathcal{V} de x_0 tel que pour toutes conditions initiales x de \mathcal{V} il existe un temps $T(x, \mathcal{U})$ au bout duquel les solutions $\Phi(t; t_0, x)$ évoluent dans le premier voisinage \mathcal{U} sans en sortir (voir Figure 1.5).

2) Il serait utile d'un point de vue pratique de connaître le plus grand de ces voisinages \mathcal{U} . Ce qui nous amène à définir la notion de domaine d'attraction de la solution $\Phi(t; t_0, x_0)$.



- Figure 1.5: Attractivité d'une Solution $\Phi(t; t_0, x_0)$ -

Définitions 1.22 (cf. Figure 1.5)

$\mathcal{D}_a(\Phi(t ; t_0, x_0))$ est le **domaine d'attraction de la solution** $\Phi(t ; t_0, x_0)$ si:

- i) $\mathcal{D}_a(\Phi(t ; t_0, x_0))$ est un voisinage de x_0 ,
- ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists$ un instant $T(x, \varepsilon) > 0$ si et seulement si $x \in \mathcal{D}_a(\Phi(t ; t_0, x_0))$; tel que l'on ait: $|\Phi(t ; t_0, x) - \Phi(t ; t_0, x_0)| < \varepsilon$ pour $t > t_0 + T(x, \varepsilon)$. (1.23)

Remarque:

$\mathcal{D}_a(\Phi(t ; t_0, x_0))$ c'est le plus grand des voisinages \mathcal{U} de la définition formulée en termes de voisinage dans le premier point de la remarque précédente.

3.1.2 Attractivités d'un Ensemble et Domaines Associés

Dans les définitions qui suivent, \mathcal{A} peut être l'un des éléments suivants: un équilibre x_e , une orbite fermée γ ou un ensemble non vide fermé \mathcal{A} . Ces définitions sont des extensions de celles figurant dans [GRUJIĆ 75, 86, 93]. Les définitions de [GRUJIĆ 75] concernent les points d'équilibres pour les systèmes régis par (S) (1.3) et celles de [GRUJIĆ 86, 93] concernent les ensembles pour les systèmes régis par (SNLA) (1.7).

Définitions 1.23 (cf. Figure 1.6)

1) \mathcal{A} est **attractif par rapport à** \mathcal{T}_i si:

$$\begin{aligned} &\forall t_0 \in \mathcal{T}_i, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta(t_0) > 0 \text{ tel que:} \\ &\forall x_0 \text{ vérifiant } \rho(x_0 ; \mathcal{A}) < \eta(t_0), \exists T(t_0, x_0, \varepsilon) > 0 \text{ tel que l'on ait:} \\ &\rho(\Phi(t ; t_0, x_0) ; \mathcal{A}) < \varepsilon \text{ pour } t > t_0 + T(t_0, x_0, \varepsilon). \end{aligned} \quad (1.24)$$

2) \mathcal{A} est **attractif** s'il est attractif par rapport à $\mathcal{T}_i = \mathbb{R}$.

3) \mathcal{A} est **uniformément attractif par rapport à** \mathcal{T}_i s'il vérifie la version modifiée de 1) dans laquelle $\eta(t_0)$ ne dépend plus de t_0 ($\eta(t_0) = \eta$) et $T(t_0, x_0, \varepsilon)$ ne dépend plus que de η et de ε (donc il est indépendant de t_0 et de x_0).

4) \mathcal{A} est **uniformément attractif** s'il est uniformément attractif par rapport à $\mathcal{T}_i = \mathbb{R}$.

Remarques:

1) Le point 1) de la définition 1.23 peut être formulée en terme de limite comme suit:

Notions Générales

\mathcal{A} est attractif par rapport à \mathcal{T}_i si:

$$\begin{aligned} &\forall t_0 \in \mathcal{T}_i, \exists \eta(t_0) > 0 \text{ tel que } \forall x_0 \text{ vérifiant } \rho(x_0; \mathcal{A}) < \eta(t_0) \text{ on ait:} \\ &\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(\Phi(t; t_0, x_0); \mathcal{A}) = 0. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Si la convergence utilisée dans (1.25) est uniforme par rapport à t_0 et x_0 alors \mathcal{A} est uniformément attractif par rapport à \mathcal{T}_i . Ainsi, pour \mathcal{A} fermé, le point 1) de la définition 1.23 revient à dire que $\forall t_0 \in \mathcal{T}_i$, il existe un voisinage $\mathcal{V}(t_0)$ de \mathcal{A} , tel que: $\forall x_0 \in \mathcal{V}(t_0)$, on ait $\Omega_f(t_0, x_0) \subset \mathcal{A}$, on retrouve des versions semblables dans [BHATIA 70] p.56-57.

Si maintenant ce voisinage ne dépend plus de t_0 et que la convergence utilisée pour définir $\Omega_f(t_0, x_0)$ (cf. Section 2.4) est uniforme par rapport à t_0 et à x_0 , alors on obtient les points 3) et 4) de la définition 1.23 concernant l'attractivité uniforme (cf. [BHATIA 70] p.56-57).

2) Les définitions précédentes peuvent se formuler de façon plus générale en termes de voisinages. Ainsi, Le point 1) de la définition 1.23, signifie que pour tout $t_0 \in \mathcal{T}_i$ et tout voisinage \mathcal{U} de \mathcal{A} , il existe un voisinage $\mathcal{V}(t_0)$ de \mathcal{A} tel que pour toute trajectoire issue de ce voisinage $\mathcal{V}(t_0)$ à l'instant t_0 il existe un temps $T(t_0, x_0, \mathcal{U}) > 0$ tel que la trajectoire évolue dans \mathcal{U} sans en sortir à partir de l'instant $t_0 + T(t_0, x_0, \mathcal{U})$ (voir Figure 1.6).

3) Cependant, si on se fixe t_0 , il serait utile de connaître le plus grand de ces voisinages $\mathcal{V}(t_0)$. Ainsi, on définit les notions des domaines d'attractions comme suit:

Définitions 1.24 (cf. Figure 1.6)

1) $\mathcal{D}_a(t_0, \mathcal{A})$ est le **domaine d'attraction par rapport à t_0** de \mathcal{A} si:

- i) $\mathcal{D}_a(t_0, \mathcal{A})$ est un voisinage de \mathcal{A} .
- ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists T(t_0, x_0, \varepsilon) > 0$ si et seulement si $x_0 \in \mathcal{D}_a(t_0, \mathcal{A})$, tel que l'on ait: $\rho(\Phi(t; t_0, x_0); \mathcal{A}) < \varepsilon$ pour $t > t_0 + T(t_0, x_0, \varepsilon)$, (1.26)

2) $\mathcal{D}_a(\mathcal{T}_i, \mathcal{A})$ est le **domaine d'attraction par rapport à \mathcal{T}_i** de \mathcal{A} si:

- i) $\forall t_0 \in \mathcal{T}_i, \mathcal{D}_a(t_0, \mathcal{A})$ existe,
- ii) $\mathcal{D}_a(\mathcal{T}_i, \mathcal{A}) = \bigcap_{t_0 \in \mathcal{T}_i} \mathcal{D}_a(t_0, \mathcal{A})$. (1.27)

3) $\mathcal{D}_a(\mathcal{A})$ est le **domaine d'attraction** de \mathcal{A} si:

$$\mathcal{D}_a(\mathcal{A}) = \mathcal{D}_a(\mathcal{T}_i = \mathbb{R}, \mathcal{A}). \quad (1.28)$$

3) $\mathcal{D}_{au}(\mathcal{T}_i, \mathcal{A})$ est le **domaine d'attraction uniforme par rapport à \mathcal{T}_i** de \mathcal{A} si:

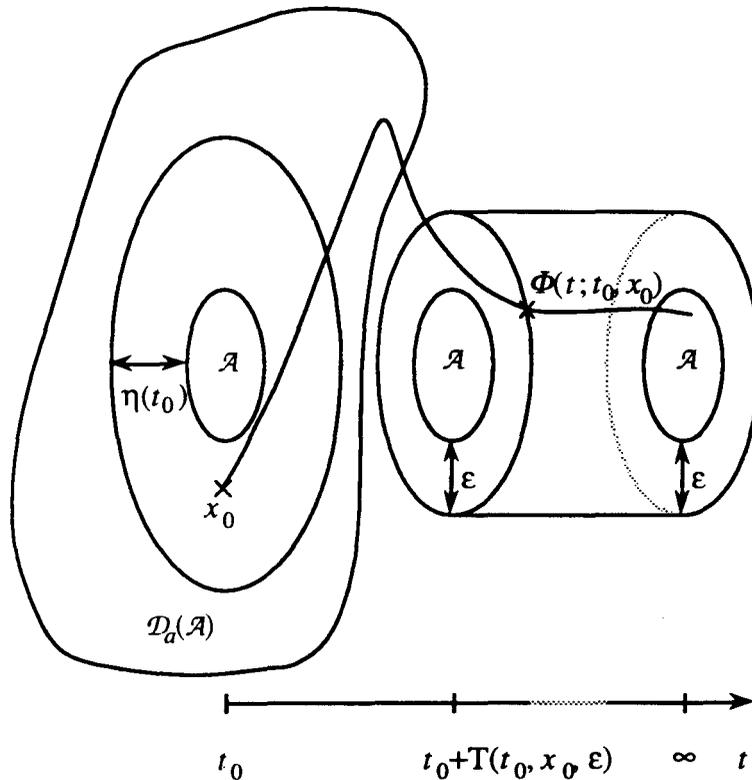
i) $\mathcal{D}_{au}(\mathcal{T}_i, \mathcal{A})$ est un voisinage de \mathcal{A} .

ii) $\forall t_0 \in \mathcal{T}_i, \forall \varepsilon > 0, \exists T(\varepsilon) > 0$ si et seulement si $x_0 \in \mathcal{D}_{au}(\mathcal{T}_i, \mathcal{A})$, tel que l'on ait: $\rho(\Phi(t; t_0, x_0); \mathcal{A}) < \varepsilon$ pour $t > t_0 + T(\varepsilon)$, (1.29)

4) $\mathcal{D}_{au}(\mathcal{A})$ est le **domaine d'attraction uniforme** de \mathcal{A} si:

$$\mathcal{D}_{au}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}_{au}(\mathcal{T}_i = \mathbb{R}, \mathcal{A}). \quad (1.30)$$

5) En particulier, et schématiquement si $\mathcal{D}_{(.)}(\cdot, \mathcal{A}) = \mathcal{E}$, alors \mathcal{A} est **globalement** (\cdot) , dans le cas contraire \mathcal{A} est **localement** (\cdot) , où $(\cdot) = \{\text{attractif par rapport à } \mathcal{T}_i, \text{ attractif, uniformément attractif par rapport à } \mathcal{T}_i, \text{ uniformément attractif}\}$.



-Figure 1.6: Attractivité d'un ensemble \mathcal{A} , de domaine d'attraction $\mathcal{D}_a(\mathcal{A})$ -

Notions Générales

Remarque:

Si on regarde la définition de l'attractivité par rapport à \mathcal{T}_i de \mathcal{A} en termes de voisinages donnée au point 2) de la remarque précédente, on peut alors construire le domaine d'attraction associé:

- en se fixant t_0 , on cherche le plus grand des voisinages $\mathcal{V}(t_0)$, on le note $\mathcal{D}_a(t_0, \mathcal{A})$,
- si on fait varier t_0 dans l'intervalle \mathcal{T}_i on obtient alors $\mathcal{D}_a(\mathcal{T}_i, \mathcal{A}) = \bigcap_{t_0 \in \mathcal{T}_i} \mathcal{D}_a(t_0, \mathcal{A})$.

On peut procéder de même pour les autres définitions.

Remarques Générales:

1) On dit parfois que \mathcal{A} est un attracteur, cependant la notion d'attracteur est une notion beaucoup plus fine que celle d'attractivité (voir [GUCKENHEIMER 83] p. 256).

2) La notion d'attractivité définie comme ci-dessus n'est pas la plus fine. En effet, si un système comporte par exemple trois "cycles limites" emboîtés, dont deux attractifs, alors l'ensemble compact délimité par le plus grand des "cycles limites" est attractif. Cependant, dans ce cas, on masque l'attractivité de l'autre cycle limite. Ainsi, il a été introduit des notions plus précises: celle d'ensemble minimal (voir [BHATIA 70] p.36) invariant attractif, ou celle d'ensemble indécomposable attractif (voir [GUCKENHEIMER 83] p.237).

3) Pour obtenir des informations plus fines, on peut définir le plus petit attracteur associé à un ensemble fermé simplement connexe \mathcal{X} pour (SNLA) (1.7), qui de plus est positivement invariant, par: $\mathcal{A} = \bigcap_{t \geq 0} \Phi_f^t(\mathcal{X})$. Dans ce cas le domaine d'attraction correspondant sera défini par: $\mathcal{D}_a(\mathcal{A}) = \bigcup_{t \leq 0} \Phi_f^t(\mathcal{X})$.

4) Lorsqu'une orbite fermée est attractive, on l'appelle aussi **cycle limite** (voir [HIRSH 74] p.250), ou parfois un **ω -cycle limite**, ou encore **cycle ω -limite** (voir [HIRSH 74] p.250).

Exemples

1) Si on étudie de près le système défini par (1.5) de l'exemple 1 de la Section 1.2: on conclut que le disque unité est globalement uniformément attractif.

Cependant, il est à noter que si on part de l'origine, on y reste: c'est un point d'équilibre. Ainsi, on constate que le cercle unité est attractif (c'est un cycle ω -limite) mais pas globalement à cause de l'origine.

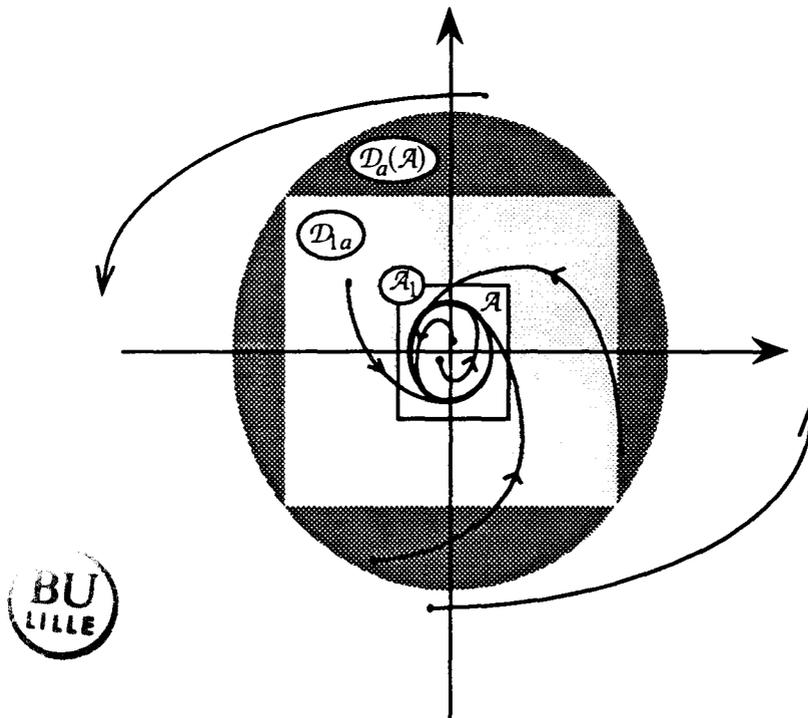
2) De même pour le système défini par (1.17) on obtient des résultats similaires à ceux de l'exemple précédent en remplaçant le cercle unité par son homologue: le cycle limite de Van Der Pol γ .

De façon pratique, il est important d'estimer, à défaut de connaître, les différents **domaines d'attraction** de \mathcal{A} ainsi que l'attracteur \mathcal{A} . Chaque type de domaine caractérise un comportement particulier. Par la suite nous utiliserons la terminologie suivante:

Définition 1.25: Estimations Relatives à l'Attractivité (cf. Figure 1.7)

La paire $(\mathcal{D}_{1(\cdot)}, \mathcal{A}_1)$ est une **estimation** de $(\mathcal{D}_{(\cdot)}(\cdot, \mathcal{A}), \mathcal{A})$ où \mathcal{A} est attractif selon l'une des définitions 1.24 et $\mathcal{D}_{(\cdot)}(\cdot, \mathcal{A})$ est son domaine d'attraction si:

- i) $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{D}_{1(\cdot)} \subset \mathcal{D}_{(\cdot)}(\cdot, \mathcal{A})$,
- ii) $\mathcal{D}_{1(\cdot)}$ est positivement invariant, avec $(\cdot) = \{\text{attractif par rapport à } \mathcal{T}_i, \text{ attractif, uniformément attractif par rapport à } \mathcal{T}_i, \text{ uniformément attractif}\}$. (1.31)



-Figure 1.7: $(\mathcal{D}_{1a}, \mathcal{A}_1)$ Paire Estimation de $(\mathcal{D}_a(\mathcal{A}), \mathcal{A})$ -

3.1.3 Répulsivités et Domaines Associés.

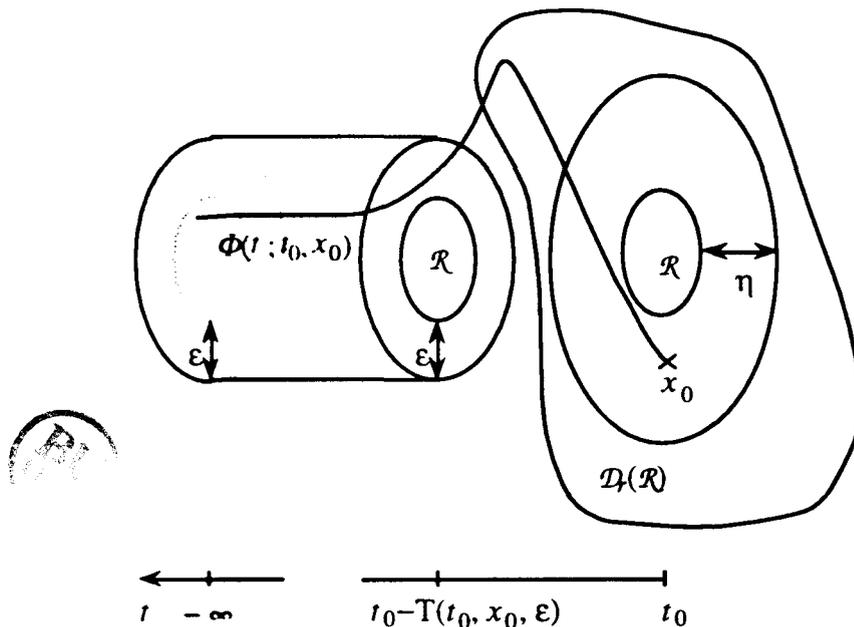
De façon analogue, on définit les notions duales en inversant le temps. On obtient:

Définition 1.26 (cf. Figure 1.8)

\mathcal{R} est **répulsif par rapport à \mathcal{T}_i** si:

$$\begin{aligned} &\forall t_0 \in \mathcal{T}_i, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta(t_0) > 0 \text{ tel que:} \\ &\forall x_0 \text{ vérifiant } \rho(x_0; \mathcal{R}) < \eta(t_0), \exists T(t_0, x_0, \varepsilon) > 0 \text{ tel que l'on ait:} \\ &\rho(\Phi(t; t_0, x_0); \mathcal{R}) < \varepsilon \text{ pour } t < t_0 - T(t_0, x_0, \varepsilon). \end{aligned} \quad (1.32)$$

On notera $\mathcal{D}_r(\mathcal{R})$ son **domaine de répulsion par rapport à \mathcal{T}_i** de \mathcal{R} .



-Figure 1.8: Répulsivité d'un ensemble \mathcal{R} , de domaine de répulsion $\mathcal{D}_r(\mathcal{R})$ -

Remarques:

1) On définit de même les notions de **répulsivité**, **répulsivité uniforme par rapport à \mathcal{T}_i** et **répulsivité uniforme**.

2) Si un système défini par (SNLA) (1.7) ($\dot{x} = g(x)$) possédant un attracteur \mathcal{A} de région d'attraction $\mathcal{D}_a(\mathcal{A})$ alors le système dual obtenu en renversant les temps ($t \rightarrow -t$), c'est-à-dire ($\dot{x} = -g(x)$), possède un répulseur $\mathcal{R} = \mathcal{A}$ de région de répulsion $\mathcal{D}_r(\mathcal{R}) = \mathcal{D}_a(\mathcal{A})$.

3.2 Stabilité au Sens de Liapounov

On sait que sous certaines conditions (f uniformément k -Lipschitzienne) les solutions maximales de l'E.D $\Phi(t ; t_0, x_0)$ sont continues par rapport aux trois variables t, t_0, x_0 . Donc, si on prend deux solutions $\Phi_1(t ; t_0, x_{01})$ et $\Phi_2(t ; t_0, x_{02})$ avec x_{01} et x_{02} proches, la continuité implique que ces deux solutions sont proches sur un intervalle de temps (t_0, t) sans aucune indication sur la taille de cet intervalle. Ainsi, pour obtenir une proximité de ces deux solutions sur un intervalle de temps plus grand, on introduit la notion de **stabilité au sens de Liapounov à t_0** . Dans cette section on considérera des **systèmes dynamiques** ($I = \mathbb{R}$). De plus, on notera $\mathcal{T}_0 = [t_0, +\infty[$ et \mathcal{T}_i un intervalle d'instant initial t_0 .

3.2.1 Stabilité d'une Solution et Domaine Associé (au Sens de Liapounov)

La définition suivante est inspirée de ([REINHARD 82] p.189):

Définitions 1.27 (cf. Figure 1.9)

1) La solution $\Phi(t ; t_0, x_0)$ du système (S) (1.3) est **stable au sens de Liapounov à t_0** si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(t_0, \varepsilon) > 0 \text{ tel que pour tout } x \text{ vérifiant: } |x - x_0| < \eta(t_0, \varepsilon) \text{ on ait:}$$

$$|\Phi(t ; t_0, x) - \Phi(t ; t_0, x_0)| < \varepsilon, \forall t \in \mathcal{T}_0. \quad (1.33)$$

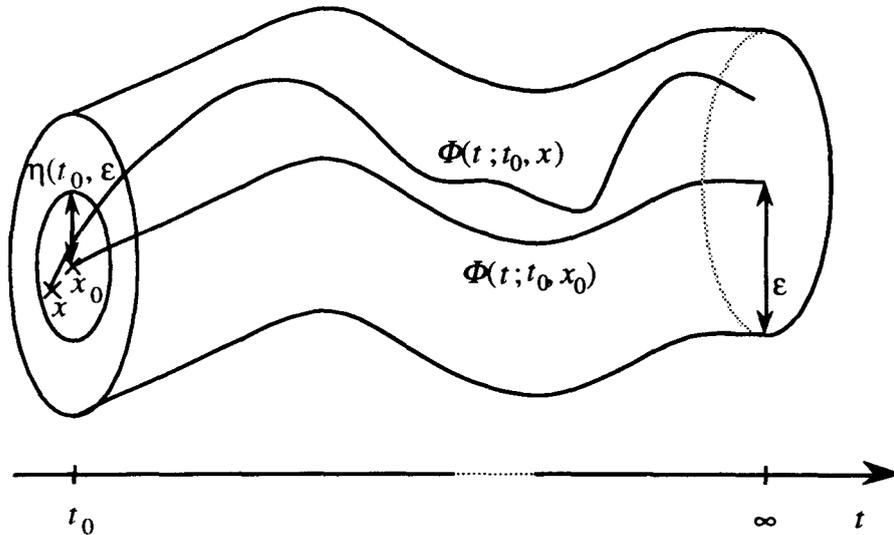
2) Dans le cas contraire, $\Phi(t ; t_0, x_0)$ est **instable à t_0** .

Remarque:

La définition précédente peut être formulée de façon plus générale en termes de voisinages:

La solution $\Phi(t ; t_0, x_0)$ du système (S) (1.3) est stable au sens de Liapounov à t_0 si pour tout voisinage \mathcal{U} de la solution $\Phi(t ; t_0, x_0)$, il existe un voisinage $\mathcal{V}(t_0, \mathcal{U})$ de x_0 tel que toute trajectoire issue de ce voisinage $\mathcal{V}(t_0, \mathcal{U})$ à l'instant t_0 évolue dans le premier voisinage \mathcal{U} sans en sortir (voir Figure 1.9).

Cependant, pour chaque voisinage \mathcal{U} il serait utile de connaître le plus grand de ces voisinages $\mathcal{V}(t_0, \mathcal{U})$. Ainsi, on définit la notion de domaine de stabilité.



-Figure 1.9: Stabilité de la solution $\Phi(t; t_0, x_0)$ -

Définitions 1.28

$\mathcal{D}_s(t_0, \Phi(t; t_0, x_0))$ est le **domaine de stabilité au sens de Liapounov à t_0 de la solution $\Phi(t; t_0, x_0)$** si:

- i) $\mathcal{D}_s(t_0, \Phi(t; t_0, x_0))$ est un voisinage de x_0 à t_0 ,
- ii) $\forall \epsilon > 0$, on a $|\Phi(t; t_0, x) - \Phi(t; t_0, x_0)| < \epsilon, \forall t \in \mathcal{T}_0$ si et seulement si $x \in \mathcal{D}_s(\epsilon, t_0, \Phi(t; t_0, x_0))$,
- iii) $\mathcal{D}_s(t_0, \Phi(t; t_0, x_0)) = \bigcup_{\epsilon > 0} \mathcal{D}_s(\epsilon, t_0, \Phi(t; t_0, x_0))$. (1.34)

Remarque:

Si on regarde la définition de la stabilité au sens de Liapounov d'une solution en termes de voisinages donnée dans la remarque précédente, on peut alors construire le domaine stabilité associé:

- en se fixant \mathcal{U} , on cherche le plus grand des voisinages $\mathcal{V}(t_0, \mathcal{U})$, on le note $\mathcal{D}_s(\mathcal{U}, t_0, \Phi(t; t_0, x_0))$,

- si on fait varier \mathcal{U} , on obtient alors:

$$\mathcal{D}_s(t_0, \Phi(t; t_0, x_0)) = \bigcup_{\mathcal{U}} \mathcal{D}_s(\mathcal{U}, t_0, \Phi(t; t_0, x_0)).$$

3.2.2 Stabilités d'un Ensemble et Domaines Associés (au Sens de Liapounov)

Dans les définitions qui suivent, \mathcal{A} peut être l'un des éléments suivants: un équilibre x_e , une orbite fermée γ ou un ensemble non vide borné \mathcal{A} . Ces définitions sont inspirées de [GRUJIĆ 75, 86, 93].

Définitions 1.29 (Figure 1.10)

1) \mathcal{A} est **stable au sens de Liapounov par rapport à \mathcal{T}_i** si:

$$\begin{aligned} &\forall t_0 \in \mathcal{T}_i, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta(t_0, \varepsilon) > 0 \text{ tel que:} \\ &\forall x_0 \text{ vérifiant } \rho(x_0; \mathcal{A}) < \eta(t_0, \varepsilon) \Rightarrow \rho(\Phi(t; t_0, x_0); \mathcal{A}) < \varepsilon, \forall t \in \mathcal{T}_0. \end{aligned} \quad (1.35)$$

2) \mathcal{A} est **stable au sens de Liapounov** s'il est stable au sens de Liapounov par rapport à $\mathcal{T}_i = \mathbb{R}$.

3) \mathcal{A} est **uniformément stable au sens de Liapounov par rapport à \mathcal{T}_i** s'il vérifie la version modifiée de 1) dans laquelle $\eta(t_0, \varepsilon)$ ne dépend plus que de ε , c'est-à-dire $\eta(\varepsilon)$.

4) \mathcal{A} est **uniformément stable au sens de Liapounov** s'il est uniformément stable au sens de Liapounov par rapport à $\mathcal{T}_i = \mathbb{R}$.

5) Dans le cas contraire, \mathcal{A} est **instable**.

Remarques:

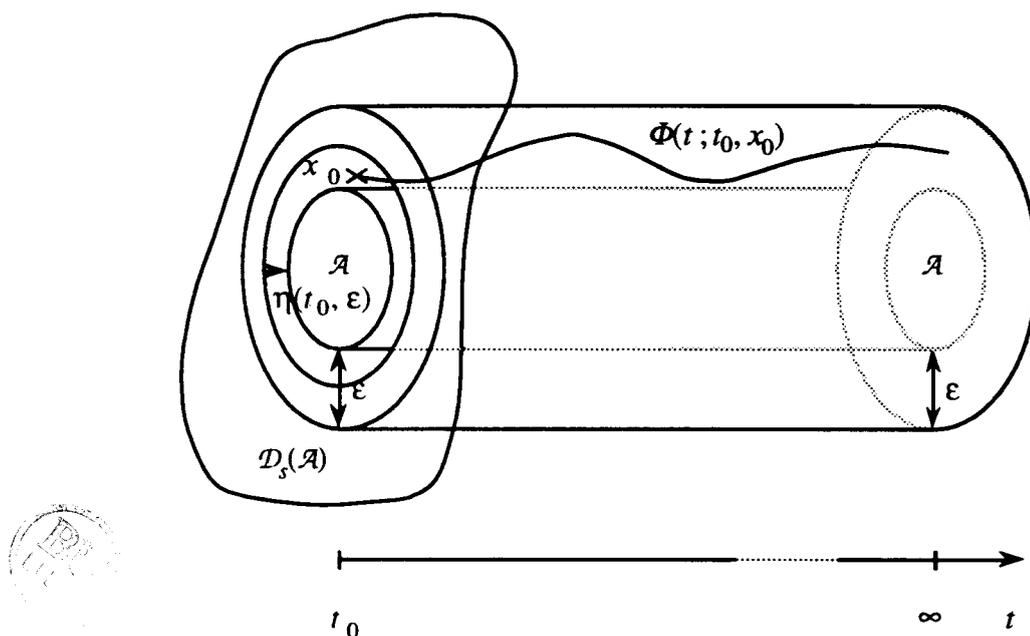
1) Pour \mathcal{A} vérifiant le point 1) de la définition 1.29, on construit $v = \inf_{t_0 \in \mathcal{T}_i} \{ \sup_{\varepsilon > 0} \eta(t_0, \varepsilon) \}$. Si v existe et est strictement positif alors il ne dépend plus de t_0 , on vérifie les hypothèses du point 3) de la définition 1.29 donc \mathcal{A} est uniformément stable au sens de Liapounov par rapport à \mathcal{T}_i . Ainsi, la définition de la stabilité uniforme par rapport à \mathcal{T}_i pour un point d'équilibre que l'on trouve dans [GRUJIĆ 75] est équivalente à celle donnée.

2) Les définitions précédentes peuvent se formuler en termes de voisinages. Ainsi, point 1) de la définition 1.29, signifie que pour tout $t_0 \in \mathcal{T}_i$ et pour tout voisinage \mathcal{U} de \mathcal{A} , il existe un voisinage $\mathcal{V}(t_0, \mathcal{U})$ de \mathcal{A} tel que toute trajectoire issue de ce voisinage $\mathcal{V}(t_0, \mathcal{U})$ à l'instant t_0 évolue dans le premier voisinage \mathcal{U} sans en sortir (voir Figure 1.10).

Notions Générales

Cependant, si on se fixe t_0 , pour chaque voisinage \mathcal{U} , il serait utile de connaître le plus grand de ces voisinages $\mathcal{V}(t_0, \mathcal{U})$ que l'on notera $\mathcal{D}_s(t_0, \mathcal{U}, \mathcal{A})$: ce qui nous conduit à la notion de domaine de stabilité (définition 1.30).

3) Pour les systèmes Non Linéaires Autonomes (champ de vecteur g), les points 1 et 2 de la définition 1.29 sont identiques et reviennent à dire que pour tout voisinage de \mathcal{A} il existe un voisinage de \mathcal{A} (inclus dans le premier) positivement invariant (voir [BHATIA 70] p.58).



-Figure 1.10: Stabilité d'un ensemble \mathcal{A} , de domaine de stabilité $\mathcal{D}_s(\mathcal{A})$ -

Définitions 1.30 (Figure 1.10)

1) $\mathcal{D}_s(t_0, \mathcal{A})$ est le **domaine de stabilité au sens de Liapounov par rapport à t_0** de \mathcal{A} si:

- i) $\forall \epsilon > 0$, $\mathcal{D}_s(\epsilon, t_0, \mathcal{A})$ est un voisinage de \mathcal{A} ,
- ii) $\rho(\Phi(t; t_0, x_0); \mathcal{A}) < \epsilon, \forall t \in \mathcal{T}_0$ si et seulement si $x_0 \in \mathcal{D}_s(\epsilon, t_0, \mathcal{A})$,
- iii) $\mathcal{D}_s(t_0, \mathcal{A}) = \bigcup_{\epsilon > 0} \mathcal{D}_s(\epsilon, t_0, \mathcal{A})$. (1.36)

2) $\mathcal{D}_s(\mathcal{T}_i, \mathcal{A})$ est le **domaine de stabilité au sens de Liapounov par rapport à \mathcal{T}_i** de \mathcal{A} si:

- i) $\forall t_0 \in \mathcal{T}_i$, $\mathcal{D}_s(t_0, \mathcal{A})$ existe,
- ii) $\mathcal{D}_s(\mathcal{T}_i, \mathcal{A}) = \bigcap_{t_0 \in \mathcal{T}_i} \mathcal{D}_s(t_0, \mathcal{A})$. (1.37)

Chapitre 1

3) $\mathcal{D}_s(\mathcal{A})$ est le **domaine de stabilité au sens de Liapounov** de \mathcal{A} si:

$$\mathcal{D}_s(\mathcal{A}) = \mathcal{D}_s(\mathcal{T}_i = \mathbb{R}, \mathcal{A}). \quad (1.38)$$

4) $\mathcal{D}_{su}(\mathcal{T}_i, \mathcal{A})$ est le **domaine de stabilité uniforme au sens de Liapounov par rapport à \mathcal{T}_i** de \mathcal{A} si:

- i) $\mathcal{D}_{su}(\mathcal{T}_i, \mathcal{A})$ est un voisinage de \mathcal{A} .
- ii) $\forall \varepsilon > 0, \rho(\Phi(t; t_0, x_0); \mathcal{A}) < \varepsilon, \forall t \in \mathcal{T}_0, \forall t_0 \in \mathcal{T}_i$, si et seulement si $x_0 \in \mathcal{D}_{su}(\mathcal{T}_i, \mathcal{A})$. (1.39)

5) $\mathcal{D}_{su}(\mathcal{A})$ est le **domaine de stabilité uniforme au sens de Liapounov** de \mathcal{A} si:

$$\mathcal{D}_{su}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}_{su}(\mathcal{T}_i = \mathbb{R}, \mathcal{A}). \quad (1.40)$$

6) En particulier, et schématiquement si $\mathcal{D}_{(.)}(\cdot, \mathcal{A}) = \mathcal{E}$, alors \mathcal{A} est **globalement** (\cdot) , dans le cas contraire \mathcal{A} est **localement** (\cdot) , où $(\cdot) = \{\text{stable au sens de Liapounov par rapport à } \mathcal{T}_i, \text{ stable au sens de Liapounov, uniformément stable au sens de Liapounov par rapport à } \mathcal{T}_i, \text{ uniformément stable au sens de Liapounov}\}$.

Remarques:

- 1) Le point 2) de la remarque précédente nous conduit à la construction suivante:
 - si pour chaque \mathcal{U} , on construit l'union de ces $\mathcal{D}_s(t_0, \mathcal{U}, \mathcal{A})$ on obtient le domaine de stabilité au sens de Liapounov par rapport à t_0 de \mathcal{A} noté: $\mathcal{D}_s(t_0, \mathcal{A}) = \bigcup_{\mathcal{U}} \mathcal{D}_s(t_0, \mathcal{U}, \mathcal{A})$,
 - si on fait varier t_0 dans l'intervalle \mathcal{T}_i , on obtient le domaine de stabilité au sens de Liapounov par rapport à \mathcal{T}_i de \mathcal{A} noté $\mathcal{D}_s(\mathcal{T}_i, \mathcal{A})$.

De même, pour les autres définitions on construit les domaines correspondants de façon similaire.

2) N. Rouche et J. Mawhin (voir [ROUCHE 73b] p.4-7), généralisent cette notion de stabilité au sens de Liapounov pour des systèmes dynamiques locaux: l'intervalle de définition des solutions est borné.

Comme dans le cas de l'attractivité, nous introduisons ici la définition suivante:

Définition 1.31: Estimations Relatives à la Stabilité

La paire $(\mathcal{D}_{1(\cdot)}, \mathcal{A}_1)$ est une **estimation** de $(\mathcal{D}_{(\cdot)}(\cdot, \mathcal{A}), \mathcal{A})$, où \mathcal{A} est stable selon l'une des définitions 1.30 et $\mathcal{D}_{(\cdot)}(\cdot, \mathcal{A})$ est son domaine de stabilité correspondant, si:

- i) $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{D}_{1(\cdot)} \subset \mathcal{D}_{(\cdot)}(\cdot, \mathcal{A})$,
- ii) $\mathcal{D}_{1(\cdot)}$ est un domaine positivement invariant où $(\cdot) = \{\text{stabilité au sens de Liapounov par rapport à } \mathcal{T}_i, \text{ stabilité au sens de Liapounov, stabilité uniforme au sens de Liapounov par rapport à } \mathcal{T}_i, \text{ stabilité uniforme au sens de Liapounov}\}$. (1.41)

3.3 Stabilités Asymptotiques et Domaines Associés

Cette notion est la combinaison des deux notions précédentes: l'attractivité et la stabilité. Ainsi, dans cette section on considérera des **systèmes dynamiques** ($I = \mathbb{R}$) et on conservera les notations précédentes: \mathcal{T}_0 et \mathcal{T}_i .

Dans les définitions suivantes, \mathcal{A} peut être l'un des éléments suivants: un équilibre x_e , une solution $\Phi(t; t_0, x_0)$, une orbite fermée γ , un ensemble compact (fermé borné) \mathcal{A} .

Définitions 1.32

1) \mathcal{A} est **asymptotiquement stable par rapport à \mathcal{T}_i** s'il est à la fois stable au sens de Liapounov par rapport à \mathcal{T}_i et attractif par rapport à \mathcal{T}_i . Dans ce cas on définit le **domaine de stabilité asymptotique par rapport à \mathcal{T}_i** noté $\mathcal{D}_{sa}(\mathcal{T}_i, \mathcal{A})$ comme suit:

$$\mathcal{D}_{sa}(\mathcal{T}_i, \mathcal{A}) = \mathcal{D}_s(\mathcal{T}_i, \mathcal{A}) \cap \mathcal{D}_a(\mathcal{T}_i, \mathcal{A}).$$

2) \mathcal{A} est **asymptotiquement stable** s'il est à la fois stable au sens de Liapounov et attractif. Dans ce cas on définit le **domaine de stabilité asymptotique** noté $\mathcal{D}_{sa}(\mathcal{A})$ comme suit:

$$\mathcal{D}_{sa}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}_s(\mathcal{A}) \cap \mathcal{D}_a(\mathcal{A}).$$

3) \mathcal{A} est **uniformément asymptotiquement stable par rapport à \mathcal{T}_i** s'il est à la fois uniformément stable au sens de Liapounov par rapport à \mathcal{T}_i et uniformément attractif par rapport à \mathcal{T}_i . Dans ce cas on définit le **domaine de stabilité asymptotique uniforme par rapport à \mathcal{T}_i** noté $\mathcal{D}_{sau}(\mathcal{T}_i, \mathcal{A})$ comme suit:

$$\mathcal{D}_{sau}(\mathcal{T}_i, \mathcal{A}) = \mathcal{D}_{su}(\mathcal{T}_i, \mathcal{A}) \cap \mathcal{D}_{au}(\mathcal{T}_i, \mathcal{A}).$$

4) Un ensemble \mathcal{A} est **uniformément asymptotiquement stable** s'il est à la fois uniformément stable au sens de Liapounov et uniformément attractif. Dans ce cas on définit le **domaine de stabilité asymptotique uniforme** noté $\mathcal{D}_{sau}(\mathcal{A})$ comme suit:

$$\mathcal{D}_{sau}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}_{su}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{D}_{au}(\mathcal{A}).$$

5) Si schématiquement $\mathcal{D}_{(.)}(\cdot, \mathcal{A}) = \mathcal{E}$, alors \mathcal{A} est **globalement** (\cdot) , dans le cas contraire \mathcal{A} est **localement** (\cdot) , où $(\cdot) = \{\text{asymptotiquement stable par rapport à } \mathcal{T}_i, \text{ asymptotiquement stable, uniformément asymptotiquement stable par rapport à } \mathcal{T}_i, \text{ uniformément asymptotiquement stable}\}$.

Définition 1.33: Estimations Relatives à la Stabilité Asymptotique

La paire $(\mathcal{D}_{1(.)}, \mathcal{A}_1)$ est une **estimation** de $(\mathcal{D}_{(.)}(\cdot, \mathcal{A}), \mathcal{A})$, où \mathcal{A} est asymptotiquement stable selon l'une des définitions 1.32 et $\mathcal{D}_{(.)}(\cdot, \mathcal{A})$ est son domaine de stabilité asymptotique correspondant, si:

- i) $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{D}_{1(.)} \subset \mathcal{D}_{(.)}(\cdot, \mathcal{A})$,
- ii) $\mathcal{D}_{1(.)}$ est un domaine positivement invariant, où $(\cdot) = \{\text{stabilité asymptotique par rapport à } \mathcal{T}_i, \text{ stabilité asymptotique, stabilité asymptotique uniforme par rapport à } \mathcal{T}_i, \text{ stabilité asymptotique uniforme}\}$. (1.42)

3.4 Stabilités Exponentielles et Domaines Associés

La stabilité asymptotique au sens de Liapounov assure la convergence vers \mathcal{A} , mais elle ne donne aucune indication sur la rapidité de cette convergence. Ainsi, notamment du point de vue pratique il est nécessaire d'estimer, à défaut de connaître, cette **rapidité**. C'est dans cette optique que la notion de **stabilité exponentielle** a été introduite (voir [HAHN 63] p.85, [HAHN 67] p.113, [GRUJIĆ 93]).

Dans cette section, \mathcal{A} peut être l'un des éléments suivants: un équilibre x_e , une orbite fermée γ , un ensemble non vide borné \mathcal{A} . Les définitions qui suivent sont des généralisations dans le sens où elles concernent non plus des points d'équilibres mais des ensembles et sont formulées pour des systèmes non autonomes.

Définitions 1.34

1) \mathcal{A} est **exponentiellement stable par rapport à \mathcal{T}_i** si:

$\forall t_0 \in \mathcal{T}_i, \exists \eta(t_0) > 0$ et deux réels: $\beta(\eta) > 0$ et $\alpha(\eta) \geq 1$ tels que pour toute condition initiale x_0 vérifiant $\rho(x_0; \mathcal{A}) < \eta(t_0)$ on ait:

$$\rho(\Phi(t; t_0, x_0); \mathcal{A}) \leq \alpha(\eta) \rho(x_0; \mathcal{A}) \exp(-\beta(\eta)(t - t_0)), \forall t \in \mathcal{T}_0, \quad (1.43)$$

où β est le **taux de décroissance exponentielle**.

2) \mathcal{A} est **exponentiellement stable** s'il est exponentiellement stable par rapport à $\mathcal{T}_i = \mathbb{R}$.

3) \mathcal{A} est **uniformément exponentiellement stable par rapport à \mathcal{T}_i** s'il vérifie la version modifiée de 1) dans laquelle $\eta(t_0)$ ne dépend plus de t_0 et $\alpha(\eta)$ et $\beta(\eta)$ ne dépendent plus que de η .

4) \mathcal{A} est **uniformément exponentiellement stable** s'il est uniformément exponentiellement stable par rapport à $\mathcal{T}_i = \mathbb{R}$.

Remarque:

Les définitions précédentes peuvent se formuler en termes de voisinages.

Cependant, si on se fixe t_0 , il serait utile de connaître le plus grand des voisinages assurant la convergence exponentielle.

Définitions 1.35

1) $\mathcal{D}_e(t_0, \alpha, \beta, \mathcal{A})$ est le **domaine de stabilité exponentielle par rapport à t_0** de \mathcal{A} si:

i) $\mathcal{D}_e(t_0, \alpha, \beta, \mathcal{A})$ est un voisinage de \mathcal{A} ,

ii) $\exists \beta > 0$ et $\alpha \geq 1$ tels que:

$$\rho(\Phi(t; t_0, x_0); \mathcal{A}) \leq \alpha \rho(x_0; \mathcal{A}) \exp(-\beta(t - t_0)),$$

$$\forall t \in \mathcal{T}_0 \text{ si et seulement si } x_0 \in \mathcal{D}_e(t_0, \alpha, \beta, \mathcal{A}).$$

(1.44)

2) $\mathcal{D}_e(\mathcal{T}_i, \alpha, \beta, \mathcal{A})$ est le **domaine de stabilité exponentielle par rapport à \mathcal{T}_i** de \mathcal{A} si:

i) $\forall t_0 \in \mathcal{T}_i, \mathcal{D}_e(t_0, \alpha, \beta, \mathcal{A})$ existe,

Chapitre 1

$$\begin{aligned}
 & \text{ii) } \bigcap_{t_0 \in \mathcal{T}_i} \mathcal{D}_e(t_0, \alpha, \beta, \mathcal{A}) \text{ est un voisinage de } \mathcal{A}, \\
 & \text{iii) } \mathcal{D}_e(\mathcal{T}_i, \alpha, \beta, \mathcal{A}) = \bigcap_{t_0 \in \mathcal{T}_i} \mathcal{D}_e(t_0, \alpha, \beta, \mathcal{A}). \tag{1.45}
 \end{aligned}$$

3) $\mathcal{D}_e(\alpha, \beta, \mathcal{A})$ est le **domaine de stabilité exponentielle** de \mathcal{A} si:

$$\mathcal{D}_e(\alpha, \beta, \mathcal{A}) = \mathcal{D}_e(\mathcal{T}_i = \mathbb{R}, \alpha, \beta, \mathcal{A}). \tag{1.46}$$

4) $\mathcal{D}_{eu}(\mathcal{T}_i, \alpha, \beta, \mathcal{A})$ est le **domaine de stabilité exponentielle uniforme par rapport à \mathcal{T}_i** de \mathcal{A} si:

$$\begin{aligned}
 & \text{i) } \mathcal{D}_{eu}(\mathcal{T}_i, \alpha, \beta, \mathcal{A}) \text{ est un voisinage de } \mathcal{A}, \\
 & \text{ii) } \forall t_0 \in \mathcal{T}_i, \exists \beta > 0 \text{ et } \alpha \geq 1 \text{ tels que:} \\
 & \rho(\Phi(t; t_0, x_0); \mathcal{A}) \leq \alpha \rho(x_0; \mathcal{A}) \exp(-\beta(t - t_0)), \forall t \in \mathcal{T}_0, \\
 & \text{si et seulement si } x_0 \in \mathcal{D}_{eu}(\mathcal{T}_i, \alpha, \beta, \mathcal{A}). \tag{1.47}
 \end{aligned}$$

5) $\mathcal{D}_{eu}(\alpha, \beta, \mathcal{A})$ est le **domaine de stabilité exponentielle uniforme** de \mathcal{A} si:

$$\mathcal{D}_{eu}(\alpha, \beta, \mathcal{A}) = \mathcal{D}_{eu}(\mathcal{T}_i = \mathbb{R}, \alpha, \beta, \mathcal{A}). \tag{1.48}$$

6) Si schématiquement $\mathcal{D}_{(\cdot)}(\cdot, \mathcal{A}) = \mathcal{E}$, alors \mathcal{A} est **globalement** (\cdot) , dans le cas contraire \mathcal{A} est **localement** (\cdot) , où $(\cdot) = \{\text{exponentiellement stable par rapport à } \mathcal{T}_i, \text{ exponentiellement stable, uniformément exponentiellement stable par rapport à } \mathcal{T}_i, \text{ uniformément exponentiellement stable}\}$.

3.5 Stabilité Pratique

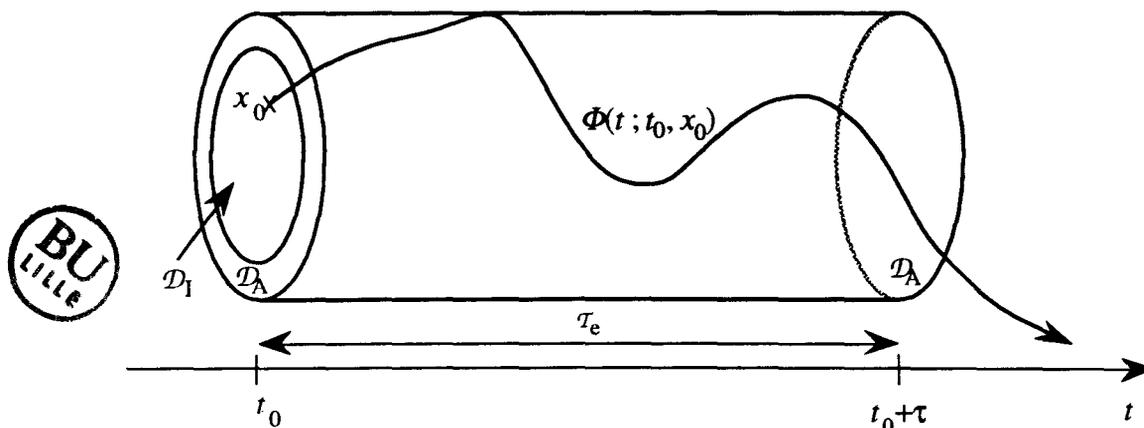
En pratique, pour l'ingénieur par exemple, les processus étudiés ont une durée de fonctionnement finie τ , ainsi il apparaît nécessaire de préciser le comportement d'un système sur un intervalle de temps d'étude fini, $\mathcal{T}_e = [t_0, t_0 + \tau[$. C'est le rôle de la **stabilité pratique** (voir [LASALLE 61] p.121-125, [HAHN 67] p.278, [MICHEL 77] p.64). Les définitions suivantes sont inspirées de [GRUJIC 73a, 73b, 93].

3.5.1 Stabilité Pratique

En particulier, il est intéressant de savoir si un système partant à l'instant initial t_0 d'une condition initiale x_0 située dans un domaine admissible d'état initial (\mathcal{D}_i) évoluera dans un domaine d'état admissible (\mathcal{D}_A) pendant l'intervalle \mathcal{T}_e : c'est ce que la notion de **stabilité pratique** exprime.

Définition 1.36 (cf. Figure 1.11) (voir [PERRUQUETTI et al. 94b, GRUJIĆ 93])
 (SP) (1.2) est **pratiquement stable** par rapport à $\{t_0, \mathcal{T}_e, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_A, \mathcal{E}_D\}$ si:

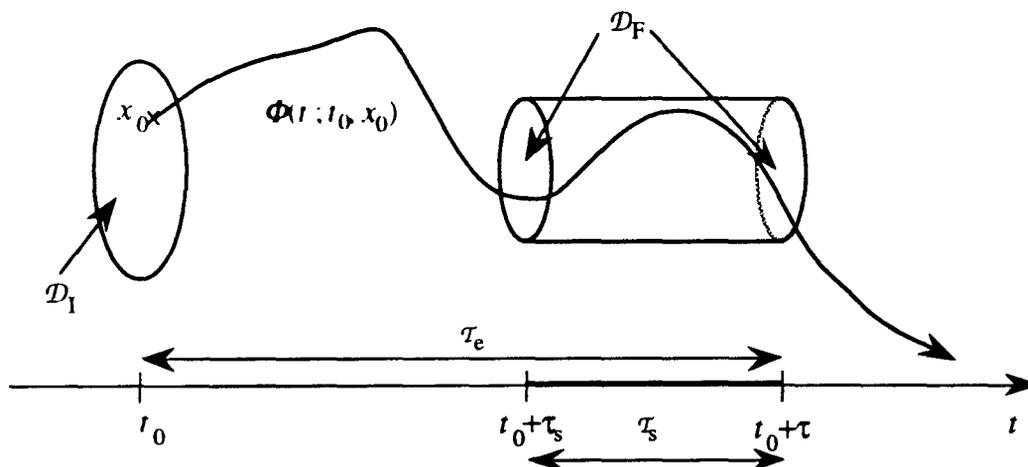
$$\forall d \in \mathcal{E}_D, [x_0 \in \mathcal{D}_1] \Rightarrow [\Phi(t; t_0, x_0) \in \mathcal{D}_A, \forall t \in \mathcal{T}_e]. \quad (1.49)$$



-Figure 1.11: Stabilité Pratique-

3.5.2 Contraction Pratique avec Temps d'Établissement

De même, il est intéressant de savoir si un système partant à l'instant initial t_0 d'une condition initiale x_0 située dans un domaine admissible d'état initial (\mathcal{D}_I) atteindra sa cible, à savoir un domaine d'état final (\mathcal{D}_F) après un temps d'établissement τ_s et continuera d'y évoluer pendant l'intervalle \mathcal{T}_s ($\mathcal{T}_s = [t_0 + \tau_s, t_0 + \tau[$): c'est ce que la notion de **contraction pratique avec le temps d'établissement τ_s** exprime.



-Figure 1.12: Contraction Pratique avec Temps d'Établissement-

Définition 1.37 (Figure 1.12) (voir [PERRUQUETTI et al. 94b, GRUJIĆ 93])

(SP) (1.2) est **pratiquement contractant avec le temps d'établissement** τ_s par rapport à $\{t_0, \mathcal{T}_s, \mathcal{D}_I, \mathcal{D}_F, \mathcal{E}_D\}$ si:

$$\forall d \in \mathcal{E}_D, [x_0 \in \mathcal{D}_I] \Rightarrow [\Phi(t; t_0, x_0) \in \mathcal{D}_F, \forall t \in \mathcal{T}_s]. \quad (1.50)$$

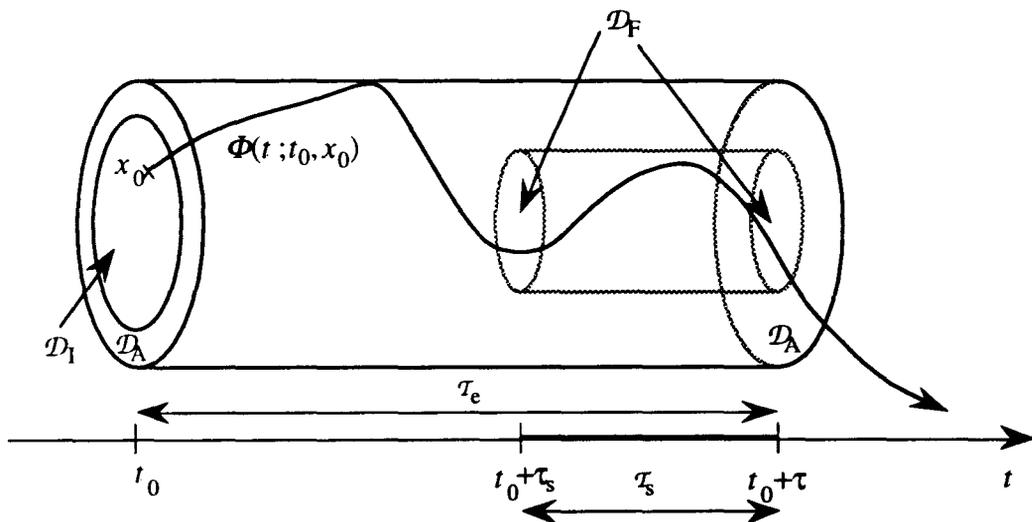
3.5.3 Stabilité Pratique avec Temps d'Établissement

La combinaison des deux définitions précédentes fait apparaître la notion de **stabilité pratique avec temps d'établissement**. Elle reflète l'importance pratique de caractériser un certain type de comportement du système sur un intervalle de temps (qui peut être borné): le système, après avoir démarré dans un domaine admissible d'état initial (\mathcal{D}_I), atteint un domaine d'état final (\mathcal{D}_F) après un temps d'établissement, sans sortir d'un domaine d'état admissible (\mathcal{D}_A) pendant cette opération.

Définition 1.38 (Figure 1.13) (voir [PERRUQUETTI et al. 94b, GRUJIĆ 93])

(SP) (1.2) est **pratiquement stable avec le temps d'établissement** τ_s par rapport à $\{t_0, \mathcal{T}, \mathcal{T}_s, \mathcal{D}_I, \mathcal{D}_A, \mathcal{D}_F, \mathcal{E}_D\}$ si:

(SP) (1.2) est **stable pratiquement** par rapport à $\{t_0, \mathcal{T}, \mathcal{D}_I, \mathcal{D}_A, \mathcal{E}_D\}$ et **contractant pratiquement avec le temps d'établissement** τ_s par rapport à $\{t_0, \mathcal{T}_s, \mathcal{D}_I, \mathcal{D}_F, \mathcal{E}_D\}$.



-Figure 1.13: Stabilité pratique avec Temps d'Établissement-



3.6 Stabilité Structurelle

La modélisation est une étape délicate, elle conduit souvent à des modèles mathématiques entachés d'erreurs et d'imprécisions. Ainsi, pour un système réel modélisé par l'E.D (1.51), il est naturel de se poser la question: "pour quels domaines de fonctions $d(x)$ les solutions de (1.52) et celles de (1.51) se ressemblent-elles?".

$$\frac{dx}{dt} = g_1(x), x \in \mathcal{E}, \quad (1.51)$$

$$\frac{dx}{dt} = g_2(x, d), x \in \mathcal{E}. \quad (1.52)$$

On devine que pour des champs de vecteur "proches", suffisamment réguliers et sous certaines conditions, les solutions se "ressembleront". Ainsi, pour étudier la propriété qualitative décrite ci-dessus (**Stabilité Structurelle**), il a été introduit la notion de **distance au sens C^1** permettant de caractériser la "proximité de deux champs de vecteur" ainsi que la notion d'**équivalence topologique** permettant de caractériser la "ressemblance des solutions".

Cette propriété de stabilité structurelle est ce qui intéresse l'automaticien sous le nom de "**robustesse**".

Le lecteur pourra trouver plus de détails dans [ARNOLD 80] p.91-140, [GUCKENHEIMER 83] p.38-42, [HIRSCH 74] p. 305-318, [REINHARD 82] p.93-101. Les définitions suivantes sont inspirées des références citées ci-dessus.

3.6.1 Distance au sens C^1

Définition 1.39

Pour deux champs de vecteur g_1 et g_2 de classe $C^1(\mathcal{E})$ on définit la **distance au sens C^1 sur S** ($S \subset \mathcal{E}$) séparant les deux champs par:

$$\rho_{1,S}(g_1 ; g_2) = \text{Max} \left\{ \left\{ \text{Sup}_{x \in S} \left| \frac{\partial^j g_1}{(\partial x_i)^j} - \frac{\partial^j g_2}{(\partial x_i)^j} \right| : i = 1, 2, \dots, n \right\} : j = 0, 1 \right\}.$$

Définition 1.40

Pour un champ de vecteur g de classe $C^1(\mathcal{E})$ on définit un **ε -voisinage de g au sens C^1 sur S** comme étant l'ensemble des champs de vecteur g_1 de classe $C^1(\mathcal{E})$ vérifiant $\rho_{1,S}(g_1 ; g) < \varepsilon$.

3.6.2 Equivalence

Définition 1.41

h établit une **correspondance dans** S , $S \subset \mathcal{E}$, entre les solutions de (1.52) et de (1.51) si:

$$\forall x_0 \in S, \text{ on a } h[\Phi_{g_2}'(x_0)] = \Phi_{g_1}'[h(x_0)], \text{ pour tout } t.$$

Définition 1.42

Les systèmes (1.52) et (1.51) sont **topologiquement** (respectivement **différentiablement, linéairement**) **équivalents dans** S s'il existe h continue (respectivement différentiable, linéaire) d'inverse continue (respectivement différentiable, linéaire) qui établie une correspondance dans S entre les solutions de (1.51) et celles de (1.50).

Remarque:

$[h \text{ linéaire}] \Rightarrow [h \text{ différentiable}] \Rightarrow [h \text{ continue}]$, ainsi la notion d'équivalence topologique est la plus "faible":

$$[\text{équivalence linéaire}] \Rightarrow [\text{équivalence différentielle}] \Rightarrow [\text{équivalence topologique}].$$

3.6.3 Stabilité Structurelle

Définition 1.43

Le système (1.51) est **structurellement stable dans** S s'il existe un ε -voisinage de $g_1(x)$ au sens C^1 sur S tel que pour tout champ $g_2(x)$ de ce voisinage, le système associé à $g_2(x)$ et (1.51) sont topologiquement équivalents.

Conclusion

Ce premier chapitre définit le cadre de travail de ce mémoire. Nous avons notamment précisé certaines notions qualitatives relatives aux comportements de solutions d'E.D. Il est à noter que beaucoup de ces définitions n'existaient pas dans la littérature pour traiter les modèles ou les propriétés que nous présentons. Nous avons donc concilié:

- un souci de cohérence par rapport aux autres définitions existantes,
- un souci de généralité (notamment par l'extension à des notions relatives aux comportements des solutions d'équations perturbés par rapport à des ensembles).

Par la suite des outils seront développés afin de statuer sur ces diverses propriétés, en particulier, des conditions suffisantes seront obtenues relativement à:

- la stabilité simple, ou uniforme, ou exponentielle, ou pratique,
- l'attractivité simple, ou uniforme,
- l'estimation des domaines correspondants.

CHAPITRE 2: SYSTÈMES NON LINÉAIRES AUTONOMES

Introduction

L'étude rigoureuse de la propriété de stabilité, considérée pour des systèmes non linéaires, date de la fin du 19^{ème} siècle: elle fût menée dans le cadre des systèmes régis par des E.D non linéaires autonomes. Comme on l'a vu dans le chapitre 1 (Section 3), la notion de stabilité traduit la capacité d'un système régi par une E.D à ne pas trop s'écarter d'une certaine position après avoir été faiblement écarté de sa position initiale d'équilibre. Les premiers travaux de cette époque [ROUTH 1877, THOMSON 1879, JOUKOVSKY 1882] ne renaient des E.D que leur approximation linéaire du premier ordre sans aucune démonstration de validité. Il fallu attendre les travaux simultanés de H. Poincaré [POINCARÉ 1885] et A.M. Liapounov [LIAPOUNOV 1892, 1966] pour justifier et étendre les propriétés locales déduites du modèle linéarisé. La mise en oeuvre de la "première méthode de Liapounov" s'avère souvent assez simple et rapide, mais ne donne aucun renseignement quantitatif sur le domaine des valeurs initiales de l'espace assurant la convergence vers l'équilibre étudié. Cette lacune fut contournée par l'introduction des célèbres "fonctions de Liapounov", analogues à des distances entre l'état du système le long de sa trajectoire et le point d'équilibre étudié: c'est la **seconde méthode de Liapounov** (ou méthode directe).

Ainsi, dans une première partie nous survolerons les **méthodes d'études locales** (Section 1), puis nous aborderons les **méthodes d'études globales** (Section 2).

Les résultats concernent des **systèmes dynamiques** (donc $I = \mathbb{R}$) **non linéaires autonomes**: cette classe de systèmes joue en effet un rôle très important dans notre étude, puisque nous verrons aux troisième et quatrième chapitres que l'on peut dans

Chapitre 2

certains cas, au moyen de systèmes de majoration (Chapitre 3), ramener l'étude de systèmes complexes à l'étude de systèmes purement non linéaires (Chapitre 4 Section 3).

Les notations du chapitre 1 restent valables, et notamment g désignera un champ de vecteur non linéaire autonome et l désignera un champ de vecteur linéaire autonome. En particulier, on s'intéressera à l'E.D. non linéaire autonome:

$$\frac{dx}{dt} = g(x), \quad (SNLA) (2.1)$$

et à l'E.D. linéaire autonome suivante:

$$\frac{dx}{dt} = l(x) = A x, \quad (SL) (2.2)$$

définissant toutes deux des **systèmes dynamiques** (les solutions sont définies sur \mathbb{R}).

1 Méthodes d'Études Locales

Introduction

Les méthodes d'études locales sont basées sur un résultat fondamental de stabilité structurelle qui permet de ramener l'étude locale de (SNLA) (2.1) (donc dans un voisinage) à celle d'un système du type (SL) (2.2) (Section 1.1).

Ainsi, on peut étudier le comportement local des solutions de (SNLA) (2.1) au voisinage d'éléments dits "critiques":

- points d'équilibres (Section 1.2),
- orbites fermées (Section 1.3).

1.1 Théorème de Stabilité Structurelle et Conséquences

En étudiant (SL) (2.2), on est amené à classer les valeurs propres de A en trois catégories ($\sigma(A)$ est le spectre de A):

$$\sigma_s(A) = \{\lambda \in \sigma(A) : \text{Re}(\lambda) < 0\}, \quad (2.3)$$

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \sigma(A) : \text{Re}(\lambda) = 0\}, \quad (2.4)$$

$$\sigma_i(A) = \{\lambda \in \sigma(A) : \text{Re}(\lambda) > 0\}. \quad (2.5)$$

De même on classe les vecteurs propres en trois catégories:

- ceux associés aux valeurs propres de $\sigma_s(A)$, engendrant le sous-espace stable $\mathcal{E}_s(A)$ de dimension n_s ,

- ceux associés aux valeurs propres de $\sigma_c(A)$, engendrant le sous-espace centre $\mathcal{E}_c(A)$ de dimension n_c ,

- ceux associés aux valeurs propres de $\sigma_i(A)$, engendrant le sous-espace instable $\mathcal{E}_i(A)$ de dimension n_i .

On a les relations suivantes:

$$n_s + n_c + n_i = n = \dim(\mathcal{E}), \quad (2.6)$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_s(A) \oplus \mathcal{E}_c(A) \oplus \mathcal{E}_i(A). \quad (2.7)$$

Définition 2.1

A est asymptotiquement stable si:

$$\sigma(A) = \sigma_s(A). \quad (2.8)$$

Définition 2.2

A est **hyperbolique** si:

$$\sigma_c(A) = \emptyset. \quad (2.9)$$

Théorème 2.1

Si:

- 1) A est hyperbolique,
- 2) le système dynamique (SL) (2.2) est défini sur $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$,

alors (SL) (2.2) est structurellement stable.

Dans ce cas on dit aussi que A est **structurellement stable**:

$$[A \text{ est hyperbolique}] \Leftrightarrow [A \text{ est structurellement stable}].$$

En effet, soit un champ $[A x + \varepsilon g_1(x)]$ situé dans un ε -voisinage de $[A x]$ au sens C^1 sur S (voir Chapitre 1 Section 3.6.1). On définit, alors le système perturbé suivant:

$$\frac{dx}{dt} = A x + \varepsilon g_1(x). \quad (2.10)$$

Puisque A est inversible, on en déduit à l'aide du théorème de la fonction implicite que (2.5) possède un unique point d'équilibre x_ε proche de l'origine pour ε suffisamment petit et le système linéarisé du système perturbé (2.5) au voisinage de ce point d'équilibre s'écrit:

$$\frac{dx}{dt} = (A + \varepsilon Dg_1(x_\varepsilon)) x, \quad (2.11)$$

où D est l'opérateur de différentiation par rapport à x.

Le système linéarisé (2.11) a ses valeurs propres qui varient continûment avec ε . Si ε reste petit par rapport à l'amplitude des parties réelles des valeurs propres de A alors les valeurs propres du système linéarisé ne pourront couper l'axe des imaginaires. Donc le système a un point fixe unique dont les espaces propres associés et les variétés invariantes associées sont de même dimension que ceux du système non perturbé linéaire (2.2). De plus elles sont localement proches (à ε près) de la position des variétés du système non perturbé, il en est de même pour la courbure.

Remarque:

On a des résultats analogues pour les systèmes discrets. De plus, tout champ de vecteur possédant un point d'équilibre ou une orbite fermée non hyperbolique ne peut être structurellement stable.

La conséquence immédiate du théorème 2.1 est la suivante ([REINHARD 82] p.99):

Théorème 2.2

Si:

- 1) le système dynamique (SNLA) (2.1) est défini sur $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$,
- 2) g est de classe $C^1(\mathbb{R}^n)$,
- 3) (SNLA) (2.1) possède un point d'équilibre hyperbolique x_e ,

alors il existe un voisinage \mathcal{V} de x_e tel que (SNLA) (2.1) soit structurellement stable dans \mathcal{V} .

Remarque:

L'hypothèse 1) du théorème précédent est essentielle comme le montre l'exemple suivant:

Exemple de flot bidimensionnel structurellement instable:

Soit le système différentiel défini sur le tore $T^2 = [0, 2\pi[\times [0, 2\pi[$, (dont une représentation grossière est un pneu):

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= a, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= b. \end{aligned} \tag{2.12}$$

cas 1:

Si $\frac{a}{b}$ est rationnel on a une famille continue d'orbites périodiques sur T^2 .

cas 2:

Si $\frac{a}{b}$ est irrationnel on obtient des orbites non périodiques denses dans T^2 .

Or, les rationnels et les irrationnels sont denses dans \mathbb{R} : on peut donc approcher un irrationnel par un rationnel et vice versa. Par conséquent, chacun des deux différents cas peut être approché de façon arbitraire par l'autre. Ce qui prouve que le système (2.12) est structurellement instable pour toutes les valeurs de a et de b .

1.2 Structure Locale du Flot au Voisinage d'un point d'équilibre

Dans le premier chapitre (Section 2.1), nous avons vu que l'on classait les points d'équilibre de (SNLA) (2.1) en deux catégories:

- les **points hyperboliques**,
- les **points non-hyperboliques ou dégénérés**.

Ainsi, on va énoncer pour ces deux classes de points d'équilibre, des résultats permettant d'éclaircir le comportement local des solutions de (SNLA) (2.1). On peut remarquer que l'étude de (SNLA) (2.1) au voisinage d'un point d'équilibre x_e se ramène, par changement de coordonnées $y = x - x_e$, à l'étude de:

$$\frac{dy}{dt} = g(y),$$

dont un point d'équilibre est l'origine ($y = 0$).

1.2.1 Point Hyperbolique

L'étude locale du comportement des solutions de (SNLA) (2.1) montre que l'on peut toujours statuer dans le cas d'un **point hyperbolique**. Ainsi, on a les résultats suivants qui précisent ceux obtenus par A.M. Liapounov (voir [GUCKENHEIMER 83] p.13):

Théorème 2.3 (HARTMAN-GROBMAN 1964)

Si la Jacobienne au point d'équilibre x_e ($Dg(x_e)$) n'a pas de valeur propre purement imaginaire ou nulle, alors il existe un homéomorphisme h défini dans un voisinage \mathcal{U} de x_e , envoyant localement les orbites du flot linéaire de (SL) (2.2) (avec $A = Dg(x_e)$) vers celles du flot non linéaire Φ_g^t de (SNLA) (2.1). De plus h préserve le sens de parcours des orbites et peut être choisi pour préserver la paramétrisation du temps (Figure 2.1).

A partir du voisinage \mathcal{U} où h est défini, on construit les **variétés locales stable et instable**:

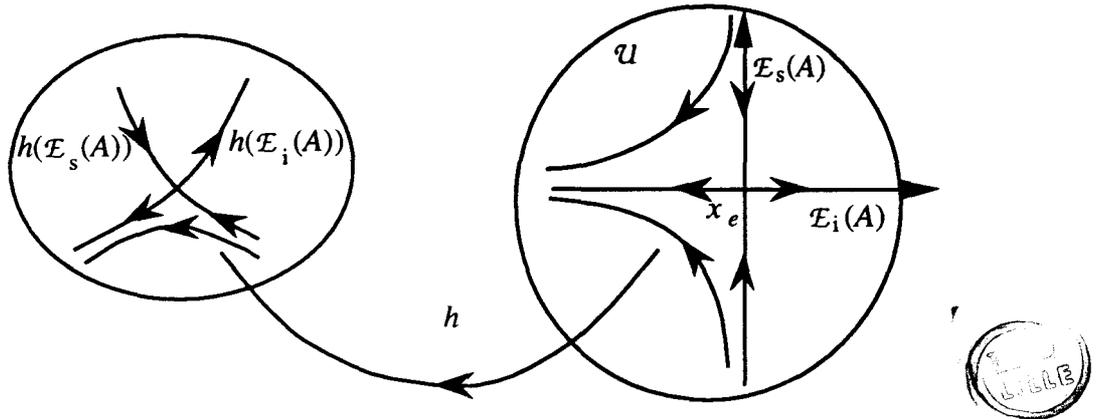
$$W_s^{\text{loc}}(x_e) = \{x \in \mathcal{U} : \lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi_g^t(x) = x_e \text{ et } \Phi_g^t(x) \in \mathcal{U}, \forall t \geq 0\}, \quad (2.13)$$

$$W_i^{\text{loc}}(x_e) = \{x \in \mathcal{U} : \lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi_g^t(x) = x_e \text{ et } \Phi_g^t(x) \in \mathcal{U}, \forall t \leq 0\}, \quad (2.14)$$

à partir desquelles on construit les **variétés stable et instable** (relatives à x_e):

$$W_s(x_e) = \bigcup_{t \leq 0} \Phi_g^t(W_s^{\text{loc}}(x_e)), \quad (2.15)$$

$$W_i(x_e) = \bigcup_{t \geq 0} \Phi_g^t(W_i^{\text{loc}}(x_e)). \quad (2.16)$$



-Figure 2.1: Structure locale au voisinage d'un point hyperbolique-

Remarques:

1) Ces notions de variétés stable et instable exhibent donc des solutions de (SNLA) (2.1) qui sont respectivement “contractantes” et “dilatantes”. Nous verrons qu’elles vont permettre de caractériser et simuler le domaine d’attraction d’un point d’équilibre ou d’un cycle limite par la méthode du “renversement des trajectoires” (voir Section 2.2).

2) Pour les systèmes plans, les variétés stable et instable étaient connues de H. Poincaré sous le nom de “séparatrices”.

3) Les variétés $W_s(x_e)$, $W_i(x_e)$ sont les images par h des sous espaces correspondants:

$$W_s(x_e) = h[E_s(Dg(x_e))], \quad W_i(x_e) = h[E_i(Dg(x_e))].$$

Théorème 2.4 (dit de la Variété Stable)

Si (SNLA) (2.1) a un point d’équilibre hyperbolique x_e , alors il existe $W_s^{\text{loc}}(x_e)$ et $W_i^{\text{loc}}(x_e)$ de mêmes dimension n_s et n_i que celles des espaces $E_s(Dg(x_e))$ et $E_i(Dg(x_e))$ du système linéarisé (SL) (2.2) (avec $A = Dg(x_e)$) et tangentes à $E_s(Dg(x_e))$ et à $E_i(Dg(x_e))$ en x_e . De plus $W_s^{\text{loc}}(x_e)$ et $W_i^{\text{loc}}(x_e)$ sont des variétés aussi régulières que g (de même classe que g).

Exemple:

Soit le système différentiel:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x, \\ \frac{dy}{dt} &= -y + x^2, \text{ avec } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

(2.17) possède un unique point d'équilibre $x_e = (0, 0)$ dont la Jacobienne est $Dg(x_e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

On en déduit les expressions des sous-espaces stable et instable associés:

$$\mathcal{E}_s(Dg(x_e)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\} \text{ associé à la valeur propre } -1,$$

$$\mathcal{E}_i(Dg(x_e)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\} \text{ associé à la valeur propre } +1.$$

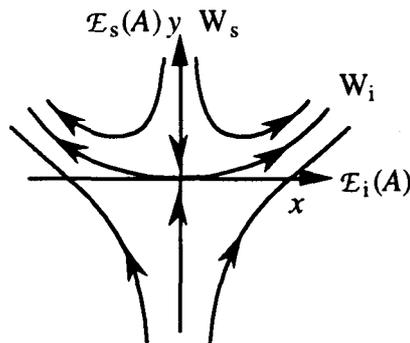
Pour cet exemple, les orbites sont des courbes de la forme: $y(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{a}{x}$.

D'après le théorème 2.4, on peut affirmer que $W_i^{loc}(0)$ est tangente à $\mathcal{E}_i(Dg(0))$ et qu'elle peut être représentée comme un graphe $y = h(x)$ avec $h(0) = 0$ et $\frac{dh}{dx}(0) = 0$ (tangente à $\mathcal{E}_i(Dg(0)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$).

On en déduit que $a = 0$ d'où: $W_i^{loc}(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{x^2}{3}\}$.

De plus on remarque que si $x_0 = 0$ alors $x(t) = 0$ donc: $W_s^{loc}(0) = \mathcal{E}_s(Dg(x_e))$.

On a donc, localement:



-Figure 2.2: Structure à l'origine du système (2.17)-

Remarque:

Notons toutefois que cet exemple est particulier puisqu'on peut calculer de façon explicite les solutions, ce qui a permis d'explicitier $W_i^{loc}(0)$ et $W_s^{loc}(0)$.

1.2.2 Point Non Hyperbolique ou Dégénéré

Dans le cas de **points non hyperboliques** ou **dégénérés**, il a été montré le résultat suivant nous assurant l'existence de variétés particulières invariantes (voir [GUCKENHEIMER 83] p.127). Cependant de façon pratique, il est délicat d'exhiber ces variétés, même de façon numérique, ce qui ne nous permet pas de statuer dans ce cas critique sur le comportement des solutions.

Théorème 2.5 (dit de la Variété Centre: KALLEY 1967)

Soit g un champ de vecteur de classe $C^r(\mathbb{R}^n)$, admettant un point d'équilibre x_e . Soit $A = Dg(x_e)$.

Alors il existe:

- 1) $W_s(x_e)$, $W_i(x_e)$ des variétés invariantes stable et instable de classe C^r tangentes à $\mathcal{E}_s(Dg(x_e))$, $\mathcal{E}_i(Dg(x_e))$ au point d'équilibre,
- 2) $W_c(x_e)$, une **variété centre** de classe C^{r-1} tangente à $\mathcal{E}_c(Dg(x_e))$ au point d'équilibre.

Les variétés $W_s(x_e)$, $W_i(x_e)$, $W_c(x_e)$, sont toutes invariantes par le flot Φ_g^t et de même dimension que les sous-espaces correspondants. Les variétés stable et instable sont uniques alors que $W_c(x_e)$ ne l'est pas forcément.

Remarque:

La détermination d'une variété centre est difficile et souvent le seul recours est de faire un développement en série de TAYLOR de $W_c(x_e)$ au voisinage du point dégénéré: cette méthode est connue depuis fort longtemps puisque, A.M. Liapounov l'a utilisée pour étudier "les cas critiques" [LIAPOUNOV 1966].

Pour des raisons de simplification, on effectue un changement de coordonnées sur le système initial (2.1) pour se ramener au cas où le point d'équilibre est l'origine. On va regarder ce qui se passe dans le cas le plus intéressant, c'est-à-dire $W_i(0)$ vide. Le théorème de la variété centre nous dit que le système initial (2.1) est topologiquement équivalent à:

$$\begin{aligned} \frac{dx_c}{dt} &= B x_c + g_1(x), \\ \frac{dx_s}{dt} &= C x_s + g_2(x). \end{aligned} \tag{2.18}$$

Chapitre 2

avec B qui est une matrice de dimension n_c correspondante à $\mathcal{E}_c(Dg(0))$ qui a donc toutes ses valeurs propres à partie réelle nulle et C qui est une matrice de dimension n_s correspondante à $\mathcal{E}_s(Dg(0))$ qui est donc asymptotiquement stable.

On veut exprimer $W_c(0)$ sous la forme d'une hypersurface. De plus on sait que $W_c(0)$ est tangent à $\mathcal{E}_c(Dg(0))$, donc localement on a :

$$W_c(0) = \{(x_c, x_s) \in \mathbb{R}^{n_c} \times \mathbb{R}^{n_s} : x_s = h(x_c)\}, h(0) = 0 \text{ et } Dh(0) = 0. \quad (2.19)$$

On étudie la projection du champ de vecteur de $x_s = h(x_c)$ sur $\mathcal{E}_c(Dg(0))$:

$$\frac{dx_c}{dt} = B x_c + g_1(x_c, h(x_c)). \quad (2.20)$$

Ce qui nous conduit au théorème suivant ([GUCKENHEIMER 83] p.131) :

Théorème 2.6 (HENRY et CARR 1981)

Si :

- 1) $W_c(0)$ est vide,
- 2) l'équilibre $x_{ec} = 0$ de (2.20) est localement asymptotiquement stable (resp. instable),

alors l'équilibre x_e de (SNLA) (2.1) est de même nature.

La résolution de (2.20) étant en général impossible, on peut approximer h par une série de TAYLOR.

On a :

$$\frac{dx_s}{dt} = Dh(x_c) \frac{dx_c}{dt}, \quad (2.21)$$

donc :

$$C x_s + g_2(x_c, h(x_c)) = Dh(x_c) [B x_c + g_1(x_c, h(x_c))], h(0) = 0 \text{ et } Dh(0) = 0. \quad (2.22)$$

Le théorème suivant ([GUCKENHEIMER 83] p.131) permet d'approximer h , ce qui permet d'étudier la stabilité locale de l'équilibre $x_{ec} = 0$:

Théorème 2.7 (HENRY et CARR 1981)

S'il existe $\zeta: \mathbb{R}^{n_c} \rightarrow \mathbb{R}^{n_c}$ avec $\zeta(0) = 0$ et $D\zeta(0) = 0$ telle que:

$$D\zeta(x_c) [B x_c + g_1(x_c, \zeta(x_c))] - C \zeta(x_c) - g_2(x_c, \zeta(x_c)) = o(|x|^r), \quad (2.23)$$

pour $r > 1$, lorsque $|x| \rightarrow 0$,

alors $h(x_c) = \zeta(x_c) + o(|x|^r)$, lorsque $|x| \rightarrow 0$.

Remarque:

Cette technique permet, dans beaucoup de cas, de conclure sur la stabilité asymptotique de l'équilibre dégénéré.

Exemples:

1) Soit le système différentiel:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x^2 + x y, \\ \frac{dy}{dt} &= -y + x^2, \text{ avec } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

L'origine est un point d'équilibre dont les valeurs propres associées à la Jacobienne sont -1 et 0 . On cherche un développement à l'ordre 3 ($h(x) = a x^2 + b x^3 + o(|x|^3)$), puisque $h(0) = Dh(0) = 0$ vérifiant (2.23):

$$[2ax + 3bx^2 + o(|x|^2)] [-x^2 + (ax^3 + bx^4 + o(|x|^4))] = [(1-a)x^2 - bx^3 + o(|x|^3)],$$

en égalant les termes de même degrés on obtient $a = 1, b = 2$, soit: $h(x) = x^2 + 2x^3 + o(|x|^3)$.

L'origine est instable, cependant un voisinage de l'origine dans le demi plan (x positif) est positivement invariant et d'après le théorème de la variété centre toute solution issue de celui-ci converge de façon asymptotique vers l'origine. Cette propriété sera utilisée en application dans le Chapitre 4 Section 2.

2) Soit le système différentiel:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x y, \\ \frac{dy}{dt} &= -y - x^2, \text{ avec } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

L'origine est un point d'équilibre dont les valeurs propres associées à la Jacobienne sont -1 et 0 . En cherchant un développement à l'ordre 3 vérifiant (2.23) on trouve:

$$h(x) = -x^2 + o(|x|^3).$$

Le théorème 2.6 nous permet d'affirmer que l'origine est asymptotiquement stable.

1.3 Structure Locale du Flot au Voisinage d'une Orbite Fermée

Pour étudier la structure locale d'une **orbite fermée** (voir Chapitre 1 Section 2.2) on introduit la notion de **Section de Poincaré** (Section 1.3.1) qui nous permet de définir une **application dite de Poincaré** (Section 1.3.2). Cette application, permet alors de ramener l'étude locale d'une orbite fermée, pour un système dynamique continu, à l'étude locale d'un point fixe pour un système dynamique discret. Cet outil théorique n'est utilisable de façon pratique qu'à l'aide d'algorithmes numériques. Cependant les résultats de la Section 2.2.3 font appel implicitement à ces techniques.

Ainsi nous allons définir rapidement ce procédé en nous inspirant des ouvrages [HIRSCH 74] p.243 et 281-285 et de [GUCKENHEIMER 83] p.23-27.

1.3.1 Section de Poincaré

Supposons que le système dynamique (SNLA) (2.1) possède une orbite fermée γ et soit x_γ un point de cette orbite.

Définition 2.3 (Figure 2.3)

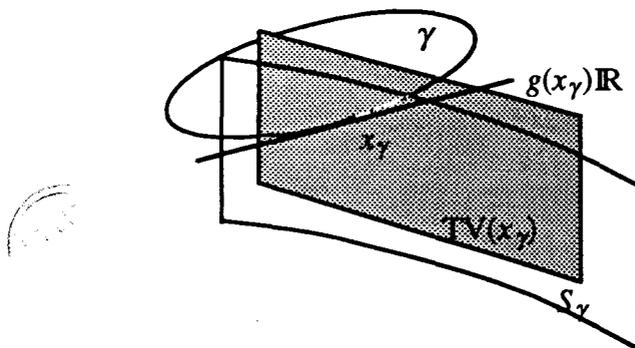
S_γ est une **section locale de Poincaré** en x_γ de (SNLA) (2.1) si:

- i) S_γ est un ouvert d'une sous variété V de \mathcal{E} de dimension $n - 1$ contenant x_γ ,
- ii) l'espace tangent à V en x_γ ($TV(x_\gamma)$) et $g(x_\gamma) \mathbb{R}$ sont en somme directe:

$$\mathbb{R}^n = TV(x_\gamma) \oplus g(x_\gamma) \mathbb{R}. \quad (2.25)$$

Remarque:

La condition (2.25) exprime la transversalité de S_γ et du champ de vecteur $g(x)$ de (SNLA) (2.1) en x_γ ($g(x_\gamma) \mathbb{R}$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $g(x_\gamma)$).



-Figure 2.3: Section de Poincaré-

1.3.2 Application de Poincaré et Conséquences

Soit S_γ une section locale de Poincaré en x_γ de (SNLA) (2.1). Puisque $x_\gamma \in \gamma$, on a , $\Phi(T ; 0, x_\gamma) = x_\gamma$ en notant T la période de γ (voir Chapitre 1 Section 2.2).

Si on considère un point x_0 suffisamment proche de x_γ , intuitivement on peut penser qu'il va exister un instant $T(x_0)$ proche de T au bout duquel $\Phi(T(x_0) ; 0, x_0) \in S_\gamma$

Considérons maintenant $\mathcal{V}(x_\gamma)$ un voisinage de x_γ et construisons l'application:

$$\begin{aligned} P: \mathcal{V}(x_\gamma) \cap S_\gamma &\rightarrow S_\gamma \\ x_0 &\rightarrow P(x_0) = \Phi(T(x_0) ; 0, x_0). \end{aligned} \quad (2.26)$$

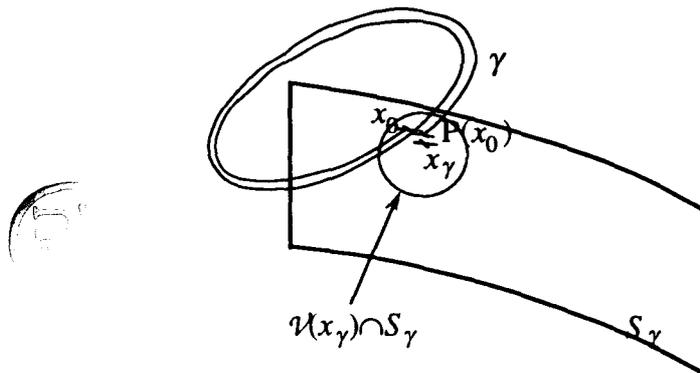
Sous certaines conditions (par exemple g de classe $C^1(\mathbb{R}^n)$) il existe $\mathcal{V}(x_\gamma)$ et une application unique:

$$\begin{aligned} T: \mathcal{V}(x_\gamma) &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x_0 &\rightarrow T(x_0), \end{aligned} \quad (2.27)$$

tels que $\forall x_0 \in \mathcal{V}(x_\gamma)$ on ait $\Phi(T(x_0) ; 0, x_0) \in S_\gamma$ et $T(x_\gamma) = T$.

Définition 2.4 (Figure 2.4)

L'application P est appelée **application de Poincaré** ou du **premier retour**.



-Figure 2.4: Application de Poincaré-

Remarques:

- 1) P engendre un système dynamique discret et possède un point fixe x_γ ($P(x_\gamma) = x_\gamma$).
- 2) Cette application ramène l'étude des solutions au voisinage d'une orbite fermée d'un système dynamique continu défini sur une variété \mathcal{E} de dimension n à l'étude des solutions au voisinage d'un point fixe d'un système dynamique discret défini sur une variété de dimension $n - 1$: $x_{k+1} = P(x_k) = P^k(x_0)$.

3) P ne dépend ni de x_γ de ni de S_γ

4) Dans la plupart des cas, l'application P ne peut être obtenue de façon explicite que si les solutions de (SNLA) (2.1) peuvent être explicitées: ceci limite l'intérêt pratique de l'application P .

5) Le comportement local des solutions du système dynamique discret au voisinage du point fixe x_γ permet d'en déduire le comportement des solutions du système dynamique continu (SNLA) (2.1) au voisinage de γ . De plus, il existe une grande similitude entre le comportement local des solutions du système dynamique discret au voisinage du point fixe et le comportement local des solutions du système dynamique continu au voisinage du point d'équilibre. En particulier, pour étudier:

$$x_{k+1} = A x_k,$$

on classe les valeurs propres de A en trois catégories:

$$\sigma_s(A) = \{ \lambda \in \sigma(A) \text{ on a: } |\lambda| < 1 \},$$

$$\sigma_c(A) = \{ \lambda \in \sigma(A) \text{ on a: } |\lambda| = 1 \},$$

$$\sigma_i(A) = \{ \lambda \in \sigma(A) \text{ on a: } |\lambda| > 1 \}.$$

On obtient alors des résultats similaires à ceux développés aux Sections 1.1 et 1.2, ce qui nous permet d'en déduire la structure locale du flot au voisinage d'une orbite fermée γ .

Conclusion

Ces méthodes locales sont relativement faciles d'application puisqu'elles nécessitent peu de calculs (valeurs propres et vecteurs propres de Jacobiennes) pour connaître la structure locale des solutions de (SNLA) (2.1) au voisinage de points d'équilibre ou d'orbites fermées.

Cependant la lacune majeure des celles-ci est de ne pas "chiffrer" ces voisinages et donc les domaines de validité de telles méthodes. Nous verrons que ces méthodes combinées à d'autres résultats sont très utiles pour obtenir de façon numérique la frontière du domaine d'attraction (Section 2.2) .

Il est à noter que le problème de la résolution systématique des cas critiques (points non hyperboliques: cf. Section 1.2.2) n'est, à ce jour, toujours pas résolu ; même si les théorèmes 2.5 à 2.6 apportent une réponse partielle amorcée par A.M. Liapounov [LIAPOUNOV 1966]. Ce problème est la clef de la théorie des bifurcations ([ARNOLD 80, [BERGE 84, GUCKENHEIMER 83, HIRSCH 74, REINHARD 82]), consistant à étudier les changements structurels des solutions lors de variation de paramètres au voisinage de valeurs critiques.

2 Méthodes d'Études Globales

Introduction

Depuis une trentaine d'années de larges efforts concernant l'estimation des comportements ont été déployés dans divers domaines tels que les systèmes électriques (voir [HIRSH 74] chapitre 10, [RIBBENS-PAVELLA 85], [KAKIMOTO 80], [WILLEMS 71]), les turbulences au sein d'écoulements fluides [BERGE 84], les réactions chimiques (voir [COPE 80], [NOLDUS 74]), l'écologie (voir [ARNOLD 88] p.23 et 41 à 44, et [BOJADZIEV 87]), la météorologie (voir le modèle de Lorentz [GUCKENHEIMER 83] p.92-102), etc...

Les principales méthodes d'étude des comportements des solutions peuvent être réparties en deux catégories:

- celles utilisant la théorie de Liapounov (seconde méthode) (Section 2.1),
- et les autres (Section 2.2), principalement des méthodes utilisant des simulations numériques de solutions (Section 2.2.2).

2.1 Méthodes basées sur la seconde méthode de Liapounov

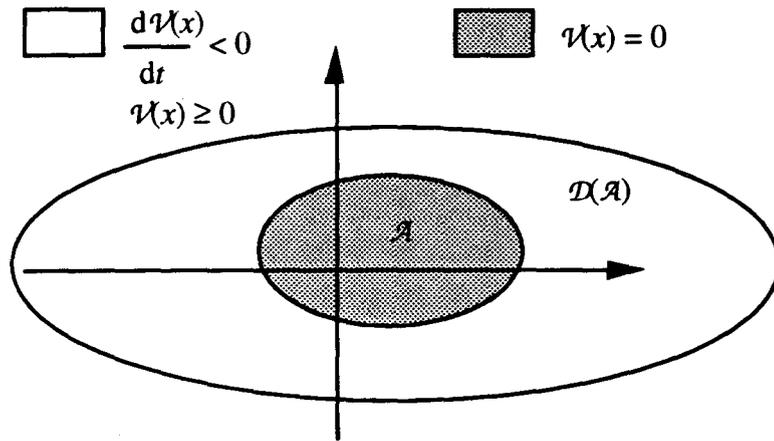
Introduction

Ces méthodes basées sur la **seconde méthode** (ou **méthode directe**) de A.M. **Liapounov**, permettent d'estimer certains attracteurs stables ainsi que leurs domaines de stabilité asymptotique pour (*SNLA*) (2.1). On peut ainsi localiser le comportement des solutions pour certaines conditions initiales et obtenir une "ébauche" du portrait de phase.

De façon générale le problème de la détermination du domaine de stabilité asymptotique d'un ensemble \mathcal{A} consiste à trouver une fonction de Liapounov ($\mathcal{V}(x)$) s'annulant sur \mathcal{A} et dont la dérivée le long des solutions est négative à l'intérieur d'un certain voisinage de \mathcal{A} et non négative à l'extérieur (cf. Figure 2.5). On peut donc aborder le problème de deux façons:

- soit on se donne une fonction de Liapounov s'annulant sur \mathcal{A} et on cherche dans quel domaine elle est décroît,
- soit on se donne une expression de la dérivée et on cherche alors la fonction de Liapounov correspondante.

La première approche est plus souvent utilisée conjointement avec le principe d'invariance de J.P. La Salle, alors que la seconde correspond plus à l'état d'esprit des méthodes de V.I. Zubov.



-Figure 2.5: Principe de la seconde méthode de Liapounov-

Ainsi, on soulignera quelques procédures basées sur les travaux de V.I. Zubov et de Lj. T. Grujić (Section 2.1.1) et de J.P. La Salle (Section 2.1.2).

Mais avant tout, précisons que dans la littérature on confond domaine d'attraction et domaine de stabilité asymptotique (cf. Chapitre 1 Section 3). En fait, Lj. T. Grujić ([GRUJIC 90, 93]) a montré que si (SNLA) (2.1) est un système dynamique et si \mathcal{A} est un ensemble attractif alors il est aussi asymptotiquement stable et on a les relations: $\mathcal{D}_a(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{D}_s(\mathcal{A})$ et $\mathcal{D}_{sa}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}_a(\mathcal{A})$. Ainsi, dans cette partie on utilisera sans distinction domaine d'attraction (D.A) et domaine de stabilité asymptotique (D.S.A).

2.1.1 Conditions Nécessaires et Suffisantes: Méthodes de Zubov et de Grujić

Dans les années soixante, les travaux de V.I. Zubov ([ZUBOV 57, HAHN 63, 67]) mirent en évidence les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un certain domaine \mathcal{D} soit le D.S.A d'un point d'équilibre de (2.1). Dans un premier temps on rappellera succinctement les résultats de V.I. Zubov (Section 2.1.1.1), puis ceux de Lj. T. Grujić (Section 2.1.1.2), et on décrira enfin certaines méthodes développées sur ces bases.

2.1.1.1 Théorème de Zubov

Théorème 2.8 [ZUBOV 57]

Soit (SNLA) (2.1) définissant un système dynamique pour lequel l'origine ($x = 0$) est un point d'équilibre.

Pour qu'un domaine \mathcal{D} contenant un voisinage de l'origine soit son D.S.A relativement à (SNLA) (2.1) ($\mathcal{D}_{sa}(0)$), il faut et il suffit qu'il existe deux fonctions $\Psi(x)$ et $\mathcal{V}(x)$ vérifiant les propriétés suivantes:

1) $\Psi(x)$ est continue définie positive sur \mathcal{E} , $\mathcal{V}(x)$ est continue définie positive sur \mathcal{D} ,
 $\lim_{|x| \rightarrow 0} \mathcal{V}(x) = 0$, $\lim_{|x| \rightarrow 0} \Psi(x) = 0$ et vérifient:

$$\frac{d\mathcal{V}(x)}{dt} = [\text{Grad}\mathcal{V}(x)]^T g(x) = -\Psi(x)(1 - \mathcal{V}(x)). \quad (2.28)$$

2) Si $y \in \partial\mathcal{D}$ et $y \neq 0$ ou si $|y| \rightarrow +\infty$ alors:

$$\lim_{x \rightarrow y} \mathcal{V}(x) = 1. \quad (2.29)$$

Remarques:

1) Il est important de noter que si on pose:

$$\mathcal{W}(x) = -\text{Ln}(1 - \mathcal{V}(x)), \quad (2.30)$$

le problème précédent se ramène à la résolution de:

$$\frac{d\mathcal{W}(x)}{dt} = [\text{Grad}\mathcal{W}(x)]^T g(x) = -\Psi(x). \quad (2.31)$$

Dans ce cas la frontière du D.S.A de l'origine est déterminée par la famille de courbes définies par:

$$\mathcal{W}(x) = +\infty. \quad (2.32)$$

2) Cette méthode peut aussi permettre de déterminer un ensemble asymptotiquement stable et son D.S.A associé (voir exemple 1 et [ZUBOV 57] p.49). Il est à noter que l'on peut aussi utiliser ces résultats de façon générale pour déterminer les ensembles invariants de systèmes dynamiques plus généraux (voir [HAHN 63] p.75-78, [ZUBOV 57]).

3) Les difficultés majeures (et souvent incontournables) de cette méthode résident d'une part dans le choix de $\Psi(x)$ et d'autre part dans la résolution de l'équation aux dérivées partielles (2.27). La première peut être contournée par les résultats de Lj. T. Grujić.

4) On peut, pour des cas simples et un choix astucieux de $\Psi(x)$, déterminer de façon exacte le D.S.A d'un point d'équilibre (voir exemple 2).

Exemples:

1) Pour le système (1.4) (Chapitre 1 Section 1.2), on choisit $\Psi(x) = 2(x_1^2 + x_2^2)$. On peut alors montrer par une forme adaptée du théorème 2.8 que le cercle unité est un attracteur globalement asymptotiquement stable, puisqu'en changeant t en $-t$ (c'est-à-dire $g(x)$ devient $-g(x)$), on montre que l'origine est localement asymptotiquement stable et que son D.S.A est l'intérieur du cercle unité.

2) Soit le système défini par (2.33) (voir [HAHN 63] p.79):

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -1+2x_1x_2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x. \quad (2.33)$$

Pour $\Psi(x) = 2(x_1^2 + x_2^2)$, et (2.31) peut être résolue et on trouve:

$$\mathcal{W}(x) = +x_2^2 + \frac{x_1^2}{(1 - x_1 x_2)}. \quad (2.34)$$

ainsi la frontière du D.S.A de l'origine est déterminée par la famille de courbes définies par $\mathcal{W}(x) = +\infty$, soit $x_1 x_2 = 1$.

2.1.1.2 Théorème de Grujić

Lj. T. Grujić donne dans [90, 91a, 91b, 91c] les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un domaine \mathcal{D} soit le D.S.A de l'origine ($\mathcal{D}_{sa}(0)$). La démonstration de ce résultat met en évidence une construction originale et directe sous forme d'algorithme d'une fonction candidate à Liapounov. Pour cela il introduit $\mathcal{P}(\rho, g)$ la famille de toute les fonctions $\Psi(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes:

P1: $\Psi(x)$ est différentiable et définie positive sur $\overline{\mathcal{B}}_\rho$ avec:

$$\mathcal{B}_\rho = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \rho\} \subseteq \mathbb{R}^n,$$

P2: Il existe $\mu(\rho, g)$ tel qu'il existe une solution $\mathcal{W}(x)$ de l'équation aux dérivées partielles (2.35), avec (2.35 a) prise le long des trajectoires de (SNLA) (2.1):

$$\frac{d\mathcal{W}(x)}{dt} = [\text{Grad}\mathcal{W}(x)]^T g(x) = -\Psi(x), \quad (2.35 \text{ a})$$

$$\mathcal{W}(0) = 0, \quad (2.35 \text{ b})$$

définie sur $\bar{\mathcal{B}}_\mu$.

Théorème 2.9 [GRUJIĆ 90, 91a, 91b, 91c]

Soit (SNLA) (2.1) définissant un système dynamique sur \mathbb{R}^n .

Pour qu'un domaine \mathcal{D} soit le D.S.A de l'origine relativement à (SNLA) (2.1) ($\mathcal{D}_{sa}(0)$), il faut et il suffit que:

- 1) \mathcal{D} soit une voisinage connexe ouvert de l'origine,
- 2) $g(x) = 0$ pour $x \in \mathcal{D}$ si et seulement si $x = 0$,

3) Pour un ρ arbitraire strictement positif tel que $\bar{\mathcal{B}}_\rho \subset \mathcal{D}$ et pour une fonction arbitraire $\Psi_{loc} \in \mathcal{P}(\rho, g)$ les équations (2.36) avec (2.36 a) déterminée le long des trajectoires du système (SNLA) (2.1):

$$\frac{d\mathcal{W}(x)}{dt} = [\text{Grad}\mathcal{W}(x)]^T g(x) = -\Psi(x), \quad (2.36 \text{ a})$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \Psi_{loc}(x), & \text{si } x \in \bar{\mathcal{B}}_\rho \\ \rho^{-1} |x| \Psi_{loc}(\rho x |x|^{-1}), & \text{si } x \in (\mathbb{R}^n - \mathcal{B}_\rho) \end{cases}, \quad (2.36 \text{ b})$$

$$\mathcal{W}(0) = 0, \quad (2.36 \text{ c})$$

admettent une unique solution $\mathcal{W}(x)$ vérifiant les propriétés suivantes:

P1: $\mathcal{W}(x)$ est définie positive sur \mathcal{D} et différentiable sur $(\mathcal{D} - \partial\mathcal{B}_\rho)$,

P2: si $\partial\mathcal{D} \neq \emptyset$ alors:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \partial\mathcal{D} \\ x \in \mathcal{D}}} \mathcal{W}(x) = +\infty. \quad (2.37)$$

Remarque:

La grande différence avec les résultats précédents est que dans la méthode de V.I. Zubov, si une fonction $\Psi(x)$ (et $\mathcal{W}(x)$) ne donne pas de résultats, on doit en essayer une autre. Par contre, avec ce résultat de Lj. T. Grujić, d'un point de vue mathématique, si une fonction Ψ_{loc} ne convient pas, aucune autre ne conviendra. Par contre la résolution de (2.36) sera peut être facilitée, d'un point de vue calculatoire, par un choix particulier de Ψ_{loc} . Le problème théorique de la stabilité est donc ramené au traitement mathématique de (2.36), sans que le choix de Ψ_{loc} n'influe plus.

2.1.1.3 Méthodes Déduites

V.I. Zubov, constatant la difficulté de résoudre (2.28) (ou (2.31)), proposa une méthode utilisant un développement en série de $\mathcal{V}(x)$ et permettant d'obtenir une solution approchée du D.S.A de l'origine. Si l'origine de (SNLA) (2.1) est asymptotiquement stable alors les solutions de (2.28) peuvent se mettre sous la forme (2.38):

$$\mathcal{V}(x) = \sum_{i=2}^{+\infty} \mathcal{V}_i(x), \tag{2.38}$$

où les $\mathcal{V}_i(x)$ sont des fonctions homogènes de degrés i .

Dans ce cas, pour toute troncature $\hat{\mathcal{V}}(x)$ de $\mathcal{V}(x)$ à l'ordre i quelconque, le D.S.A de l'origine est comprise entre les surfaces définies par (2.39) et (2.40):

$$\hat{\mathcal{V}}_m(x) = \min_{\hat{\mathcal{V}}=0} \hat{\mathcal{V}}, \tag{2.39}$$

$$\hat{\mathcal{V}}_M(x) = \text{Max}_{\hat{\mathcal{V}}=0} \hat{\mathcal{V}}, \tag{2.40}$$

Cette méthode fût utilisée par S.G. Margolis et W.G. Vogt [MARGOLIS 63] pour les systèmes dynamiques de dimension deux, tout en précisant l'existence de résultats pour les systèmes d'ordre n et en soulignant la difficulté de mise en oeuvre de la méthode d'approximation dans ce cas. Il est à noter que la convergence vers le D.S.A réel n'est pas uniforme et que $\Psi(x)$ affecte les résultats (voir [HEWIT 67, 69a]).

Une autre approche consiste à utiliser (2.31) et (2.32), ce qui conduisit A. Vannelli et M. Vidyasagar [VANNELLI 85] à introduire la notion de fonction de Liapounov maximale (c'est une fonction de Liapounov sous forme rationnelle $\mathcal{W}(x) = -\frac{N(x)}{D(x)}$, ainsi la frontière du D.S.A est caractérisée par $D(x) = 0$). Ils proposèrent un algorithme

original pour déterminer $\mathcal{W}(x)$ de façon récursive en utilisant des développements en séries.

D'autres méthodes (voir [KORMANIK 72] et [BANSAL 74]) utilisent les séries de Lie pour déterminer le D.S.A pour les systèmes régis par (SNLA) (2.1). Les séries de Lie sont des séries solutions d'E.D dont les coefficients sont déduits de relations algébriques récursives. Ainsi, on introduit l'opérateur linéaire suivant:

$$OL = g(x) \frac{\partial}{\partial x} - \Psi(x) \frac{\partial}{\partial \mathcal{W}}. \quad (2.41)$$

Ce qui nous permet d'écrire les solutions de (2.31) et (2.1) sous les formes:

$$\mathcal{W}(\Phi'_g(x_0)) = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(t OL)^i}{i!} \right) \mathcal{W}(x_0), \quad (2.42)$$

$$\Phi'_g(x_0) = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(t OL)^i}{i!} \right) x_0. \quad (2.43)$$

Ainsi, on peut déterminer numériquement le D.S.A par des calculs récursifs en partant de conditions initiales convenables (par exemple proches de l'équilibre) et en renversant le temps: c'est-à-dire que l'on calcule (2.42) et (2.43) aux instants successifs $-k \Delta t$ (k entier naturel) jusqu'à ce que $\mathcal{W}(\Phi_g^{-k\Delta t}(x_0))$ devienne très grand ($+\infty$). Dans [KORMANIK 72] et [BANSAL 74], les auteurs signalent en outre des méthodes de décision permettant d'estimer correctement le D.S.A réel.

Enfin, on peut noter dans [MIYAGI 80] une méthode originale de résolution de (2.31) pour déterminer (2.32). Cette méthode utilise la méthode de Lagrange-Charpit consistant à écrire (2.31) sous la forme:

$$\begin{aligned} [\text{Grad } \mathcal{W}(x)] &= P, \\ F(x, \mathcal{W}, P) &= P^T g(x) + \Psi(x) = 0, \end{aligned} \quad (2.44)$$

puis de déterminer son équation "caractéristique":

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial F}{\partial P_1}} = \dots = \frac{dx_n}{\frac{\partial F}{\partial P_n}} = \frac{d\mathcal{W}}{\sum_{i=1}^n P_i \frac{\partial F}{\partial P_i}} = \frac{-dP_1}{\frac{\partial F}{\partial x_1} + P_1 \frac{\partial F}{\partial \mathcal{W}}} = \dots = \frac{-dP_n}{\frac{\partial F}{\partial x_n} + P_n \frac{\partial F}{\partial \mathcal{W}}}, \quad (2.45)$$

conduisant à la résolution d'un système de n équations. Ainsi, cela permet d'obtenir les dérivées partielles de $\mathcal{W}(x)$ en fonction des variables x_i et de \mathcal{W} , ce qui permet dans certains cas (c'est-à-dire lorsque le système est solvable) d'en déduire $\mathcal{W}(x)$.

Dans les méthodes précédentes, on se donnait une expression de la dérivée de la fonction de Liapounov le long des solutions, on obtient alors une équation aux dérivées partielles que l'on cherche à intégrer. C'est le même procédé que G.P. Szegö utilise dans [SZEGÖ 63] et [BHATIA 70] p.163 avec une forme généralisée de (2.28) qui est:

$$\frac{d\mathcal{V}(x)}{dt} = [\text{Grad } \mathcal{V}(x)]^T g(x) = -\theta(x) \beta(\mathcal{V}(x)). \quad (2.46)$$

Sous réserve d'existence de l'intégrale:

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\mathcal{V}}{\beta(\mathcal{V})}. \quad (2.47)$$

Ce dernier procédé conduit en pratique à des calculs complexes.

2.1.2 Méthodes de La Salle

2.1.2.1 Enoncé et Principe

Dans les années soixante-dix J.P. La Salle [LASALLE 61, 67, 76] généralisa la seconde méthode de Liapounov que l'on rencontrait auparavant sous diverses formes moins élaborées: c'est le célèbre principe d'invariance de J.P. La Salle qui permet de caractériser une estimation du D.S.A d'un ensemble. Nous donnons ici une version améliorée (voir [BHATIA 70] p. 66):

Théorème 2.10 (Principe d'invariance de J.P. La Salle)

Un ensemble compact \mathcal{A} est asymptotiquement stable pour le système (SNLA) (2.1) si et seulement si il existe une fonction $\mathcal{V}(x)$ continue définie sur un voisinage \mathcal{U} de \mathcal{A} à valeurs réelles telle que:

$$\mathcal{V}(x) = 0 \text{ pour } x \in \mathcal{A} \text{ et } \mathcal{V}(x) > 0 \text{ si } x \in (\mathcal{U} - \mathcal{A}), \tag{2.48}$$

$$\mathcal{V}(\Phi_g^t(x_0)) < \mathcal{V}(x_0) \text{ pour } x_0 \in (\mathcal{U} - \mathcal{A}), t > 0 \text{ et } \Phi_g^t(x_0) \in \mathcal{U}. \tag{2.49}$$

Remarques

1) On peut noter que la relation (2.49) signifie que la fonction de Liapounov \mathcal{V} est strictement décroissante le long des trajectoires.

2) Ce théorème ne nous donne qu'une estimation du D.S.A alors que le résultat de Zubov nous donne le D.S.A exact (lorsque (2.28) est solvable).

3) Ce principe peut être généralisé pour d'autre type de systèmes [LASALLE 76].

4) D'après (2.48) et (2.49), on en déduit une condition suffisante pour qu'un domaine soit une sous-estimation du D.S.A d'un ensemble compact \mathcal{A} stable asymptotiquement pour le système (SNLA) (2.1) il suffit de construire une fonction de Liapounov (définie positive) s'annulant sur \mathcal{A} , de déterminer les points autres que ceux de \mathcal{A} définis par:

$$\frac{d\mathcal{V}(x)}{dt} = [\text{Grad } \mathcal{V}(x)]^T g(x) = 0, \tag{2.50}$$

puis de déterminer la constante c tel que l'ensemble:

$$\mathcal{D}_1(\mathcal{A}) = \{x \text{ tels que } \mathcal{V}(x) = c\}, \tag{2.51}$$

tangente la courbe caractérisée par (2.50). Une sous-estimation du D.S.A de \mathcal{A} est donnée par (2.51).

2.1.2.2 Méthodes Dédites

Les différentes méthodes consistent le plus souvent à optimiser l'estimation du D.S.A pour un type de fonction de Liapounov donné.

Ainsi, E.J. Davison et E.M. Kurak [DAVISON 71] proposent une méthode cherchant à maximiser l'espace associé à une fonction de Liapounov quadratique définie par:

$$\mathcal{V}(x) = x^T A x = c, \quad (2.52)$$

où A est une matrice symétrique définie positive.

De plus:

$$\frac{d\mathcal{V}(x)}{dt} = [\text{Grad } \mathcal{V}(x)]^T g(x) = 2[A x]^T g(x) = 2g(x)^T [A x], \quad (2.53)$$

donc en posant $B = \frac{A}{c}$, le problème revient à chercher B symétrique qui maximise l'espace contenu dans la surface définie par l'analogie de (2.52): $x^T B x = 1$, variant comme l'inverse de la racine carré du produit des valeurs propres de B . Cette recherche de B , minimisant donc:

$$\prod_{i=1}^n \{ \lambda_i(B) \} \quad (2.54)$$

doit se faire sous les contraintes assurant:

1) que B est bien définie positive:

$$\text{Min}_{i=1, \dots, n} \{ \lambda_i(B) \} > 0, \quad (2.55)$$

2) que la variation de la fonction de Liapounov est décroissante le long des trajectoires à l'intérieur de l'estimation du D.S.A:

$$g(x)^T [B x] < 0, \forall x \in \mathcal{D}_1(\mathcal{A}) = \{x \text{ tels que } \mathcal{V}(x) = x^T B x = 1\}. \quad (2.56)$$

Cette méthode optimale pour les fonctions quadratiques peut être implantée sur un système numérique mais le problème de la minimisation devient de plus en plus coûteux en temps de calcul avec l'augmentation de la dimension du système étudié.

D'autres procédures de construction de fonctions de Liapounov sont utilisées comme la méthode du gradient variable consistant à se fixer une forme de fonction de Liapounov à coefficients indéterminés non linéaires [HANG 70] ou la méthode de G.P. Szegö [HEWIT 69]. Ces méthodes n'ont été appliquées qu'à des systèmes d'ordre deux.

On peut noter un algorithme original basé sur la détermination d'une valeur de niveau critique qui permet de réactualiser la fonction de Liapounov (voir [CHIANG 89]). Ainsi, partant d'une fonction de Liapounov (globale ou locale), on construit une suite de fonctions de Liapounov à laquelle correspond une suite croissante d'estimation du D.S.A: donc à chaque itération on améliore l'estimation. La détermination de la valeur de niveau critique repose sur une considération topologique de la D.S.A (partiellement déduite des résultats de N.P. Erugin [ERUGIN 51a, 51b]):

Théorème 2.11 [CHIANG 89]

Soit le système dynamique non linéaire régi par (SNLA) (2.1) possédant une fonction de Liapounov et un point d'équilibre x_s asymptotiquement stable dont le D.S.A n'est pas dense dans \mathbb{R}^n ,

alors il existe un point de la frontière du D.S.A minimisant la fonction de Liapounov sur la frontière du D.S.A, de plus ce point doit être un point instable dont une partie de sa variété instable (cf. Section 1.2) converge vers x_s .

Ainsi la détermination de la valeur du niveau critique s'effectue en déterminant tous les points d'équilibres et en regardant les valeurs correspondantes de la fonction de Liapounov. On construit alors la suite de fonctions de Liapounov suivante:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V}_1(x) &= \mathcal{U}(x + d_1 g(x)), \\
 \mathcal{V}_2(x) &= \mathcal{V}_1(x + d_2 g(x)), \\
 &\dots\dots\dots \\
 \mathcal{V}_n(x) &= \mathcal{V}_{n-1}(x + d_n g(x)).
 \end{aligned}
 \tag{2.57}$$

Les constantes d_i étant ajustées à chaque pas.

Conclusion

Dans cette section 2.1, nous avons présenté les principales méthodes basées sur la seconde méthode de Liapounov. Celles-ci, contrairement à celles présentées dans la section 1, permettent de donner une évaluation du D.S.A, pouvant être exacte dans certains cas (voir Section 2.1.1). Les algorithmes liés à ces méthodes sont souvent complexes, cependant ils ont l'avantage d'exister et d'être utilisables pour les systèmes d'ordre élevé ainsi que pour d'autres classes de systèmes dynamiques.

Le problème de la détermination exacte du D.S.A d'un point d'équilibre asymptotiquement stable n'est pas résolu de façon systématique. Cependant Lj.T. Grujić a montré que ce problème se ramène à la résolution d'une équation aux dérivées partielles du type (2.36) (voir Section 2.1.1.2 et [GRUJIĆ 90, 91b, 91c]).

2.2 Caractérisation Topologique du Domaine de Stabilité Asymptotique

Dans cette section, on rappellera divers résultats permettant de caractériser la frontière du D.S.A d'un ensemble \mathcal{A} asymptotiquement stable ($\partial \mathcal{D}_{sa}(\mathcal{A})$). Ces renseignements agrémentés de quelques simulations numériques permettent d'obtenir une représentation de $\partial \mathcal{D}_{sa}(\mathcal{A})$. En particulier, on développera la **méthode dite de renversement des trajectoires** qui permet en dimension deux et trois pour des systèmes régis par (SNLA) (2.1) d'obtenir de façon graphique le portrait de phase.

La connaissance des propriétés topologiques de $\partial \mathcal{D}_{sa}(\mathcal{A})$ s'affina au cours du temps. En particulier, on a montré le résultat suivant ([HAHN 67] p.160, [BHATIA 70] p.60 et [GRUJIĆ 93]) que N.P. Erugin [ERUGIN 51a, 51b] démontra initialement dans le cas où \mathcal{A} est un point d'équilibre:

Théorème 2.12 [GRUJIĆ 93]

Si le système dynamique régi par (SNLA) (2.1) admet un ensemble \mathcal{A} asymptotiquement stable, alors $\mathcal{D}_{sa}(\mathcal{A})$ est un ensemble ouvert invariant, dont la frontière est formée de solutions maximales entières.

Ce résultat conduisit R. Genesio [GENESIO 84, 85] à une méthode de détermination du $\mathcal{D}_{sa}(0)$ (\mathcal{A} est ici l'origine) à partir du résultat suivant:

Théorème 2.13 [GENESIO 84, 85]

$\mathcal{D}_{sa}(0)$ peut être approché de façon arbitraire au moyen d'une suite convergente de domaines simplement connexes. Ces derniers sont les images successives à différents instants d'une estimation initiale de $\mathcal{D}_{sa}(0)$ générées par intégration en renversant le temps (donc en considérant le champ de vecteur $-g$).

Un autre résultat de N.P. Erugin [ERUGIN 51a, 51b], a été généralisé par Lj.T. Grujić [GRUJIĆ 93]:

Théorème 2.14 [GRUJIĆ 93]

Si le système dynamique régi par (SNLA) (2.1) admet un ensemble \mathcal{A} asymptotiquement stable, alors tout point d'équilibre sur la frontière de $\mathcal{D}_{sa}(\mathcal{A})$ est un point d'équilibre instable.

Ceci conduisit J. Texter [TEXTER 74], pour les systèmes plan, à l'application suivante:

on commence par déterminer un point du D.S.A puis on génère un segment de la frontière du D.S.A par une simulation numérique. Cette méthode est utilisée pour l'étude des systèmes électriques de puissance (voir [YEE 75]).

Ce principe repris dans [CHIANG 88] et couplé au théorème suivant caractérisent de façon plus précise la frontière du D.S.A d'un équilibre asymptotiquement stable:

Théorème 2.15 [CHIANG 88]

Si le champ de vecteur g du système dynamique régi par l'E.D (SNLA) (2.1) vérifie les conditions suivantes:

- 1) tous les éléments critiques (les points d'équilibres et les orbites fermées) de la frontière du D.S.A sont hyperboliques,
- 2) les variétés stables et instables (cf. Section 1.2.1 et 1.3) des éléments critiques de la frontière du D.S.A ne peuvent être sécants en x que de façon transverse (pas de tangence),
- 3) toute solution sur la frontière du D.S.A converge vers un des éléments critiques lorsque t tend vers $+\infty$,

alors la frontière du D.S.A est formée des variétés stables des éléments critiques se trouvant sur cette même frontière.

Ce théorème a conduit les auteurs à proposer un algorithme. De cet algorithme, on en déduit la généralisation suivante permettant d'obtenir, dans beaucoup de cas, le portrait de phase de (SNLA) (2.1):

Algorithme utilisant le principe de renversement des trajectoires

- 1) Déterminer tous les points d'équilibres.
- 2) Déterminer leurs Jacobiennes et leurs vecteurs propres associés.
- 3) Vérifier que tous les points d'équilibres sont de type hyperbolique.
- 4) Pour chaque point hyperbolique (x_h) déterminer les variétés stables et (ou) instables qui sont tangentes aux vecteurs propres correspondants.
 - 4.1) Variété stable associée à un vecteur propre stable (v_s):
 - 4.1.1) on se donne ϵ petit (10^{-6}),
 - 4.1.2) on considère les points ($x_h \pm \epsilon.v_s$),

4.1.3) on vérifie qu'en partant de ces conditions initiales on converge bien vers x_h , sinon on repart au point 4.1.1 et on prend ε plus petit,

4.1.4) on renverse le temps (c'est-à-dire que l'on considère $-g(x)$) et on simule les solutions pour les conditions initiales définies en 4.1.3: on obtient alors la variété stable associée au vecteur propre stable v_s .

4.2) Variété instable associée à un vecteur propre instable:

la procédure est analogue à 4.1, on s'inspire de la dualité caractérisée par la relation (1.10) du chapitre 1 et la remarque la concernant (Chapitre 1 p.43).

5) Si on détecte une incompatibilité de comportement: Compléter par des simulations à l'intérieur du partitionnement obtenu pour détecter les cycles limites et utiliser les points 1) à 4) pour déterminer de façon analogue les variétés correspondantes, puis conclure avec le Théorème 2.14.

Remarques:

1) Le Théorème de Hartman et Grobman sur les variétés stables et instables (voir Section 1.2.1), assure dans ce cas l'existence et l'unicité des variétés stables et instables permettant de déterminer le comportement des solutions de (SNLA) (2.1) au voisinage du point hyperbolique considéré.

2) Pour obtenir un portrait de phase exact il faut faire très attention au sens des flèches matérialisant l'évolution temporelle et aux simulations (problèmes numériques). De plus une bonne connaissance des techniques des systèmes dynamiques non linéaires (Forme Normale: voir [GUCKENHEIMER 83] p.138-145 ou [ARNOLD 80] p.174-209 et Théorème de la variété centre (voir Section 1.2.2)), permet de déterminer, en dimension deux, presque tous les portraits de phases en utilisant un minimum de simulations.

Avantages:

Cette méthode permet:

- de déterminer de façon exacte le portrait de phase,
- une étude systématique qui à l'aide d'un programme nécessite un temps de calcul et de simulation réduit.

Inconvénients:

Cette méthode ne s'applique qu'à une classe de systèmes dynamiques très réduite (système non linéaire autonome dont les éléments critiques sont hyperboliques). De plus, pour les systèmes réels, il se pose le problème des perturbations qui peuvent modifier

notamment le comportement des solutions de (SNLA) (2.1), cependant pour les systèmes de type hyperboliques les théorèmes de stabilité structurelle assurent une déformation “continue” du portrait de phase pour de “petites déformations”. Le problème majeur reste la quantification de ces perturbations admissibles ne modifiant que substantiellement le portrait de phases pour un système donné.

Exemples d'illustration de la méthode de renversement de trajectoires :

1) Considérons le système défini par:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -2 & x_1 \\ x_2 & -1 \end{bmatrix} x. \quad (2.58)$$

Pas 1 à 3:

A l'aide d'un programme, on peut facilement obtenir les informations suivantes:

1^{er} point d'équilibre: (1, 2)

valeur propre $-\sqrt{2}$ et vecteur propre associé $[-\frac{1}{\sqrt{2}} \ 1]^T$

valeur propre $\sqrt{2}$ et vecteur propre associé $[\frac{1}{\sqrt{2}} \ 1]^T$

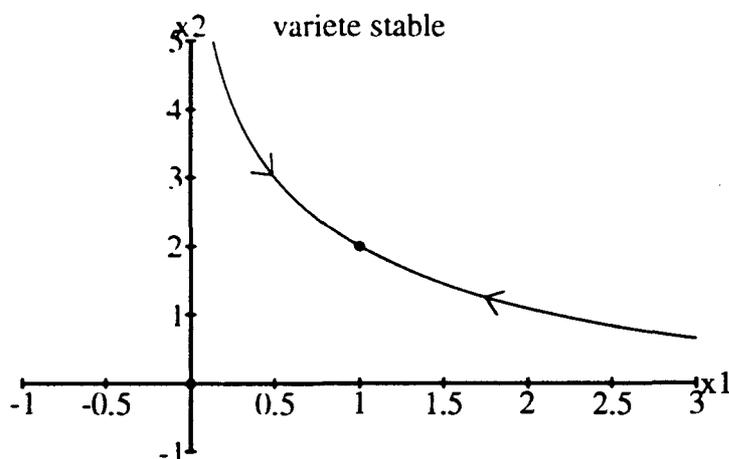
2^{ème} point d'équilibre: (0, 0)

valeur propre -2 et vecteur propre associé $[1, 0]^T$

valeur propre -1 et vecteur propre associé $[0, 1]^T$

Pas 4 à 5:

On construit la variété stable associée à la valeur propre stable $-\sqrt{2}$ du premier point d'équilibre. Pour cela on effectue deux simulations. Dans la figure 2.6 représentant le portrait de phase, le domaine de stabilité asymptotique de l'origine est délimité à droite par la variété stable.



-Figure 2.6: Ébauche du portrait de phase de (2.58)-

Chapitre 2

2) Considérons le système défini par:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -2+10^{-2}x_2 & 0.9+8 \cdot 10^{-7}x_2^3 \\ 0.5 & 1-x_2^2 \end{bmatrix} x. \quad (2.59)$$

Pas 1 à 3:

A l'aide d'un programme, on peut facilement obtenir les informations suivantes:

1^{er} point d'équilibre: (0, 0)

valeur propre -2.14 et vecteur propre associé $[-0.987, 0.157]^T$

valeur propre 1.14 et vecteur propre associé $[-0.277, -0.968]^T$

2^{ème} point d'équilibre: $(-0.495, -1.106)$

valeur propre -1.595 et vecteur propre associé $[0.906, 0.421]^T$

valeur propre -3.087 et vecteur propre associé $[-0.661, 0.795]^T$

3^{ème} point d'équilibre: $(0.501, 1.107)$

valeur propre -1.577 et vecteur propre associé $[0.910, 0.413]^T$

valeur propre -3.089 et vecteur propre associé $[-0.657, 0.799]^T$

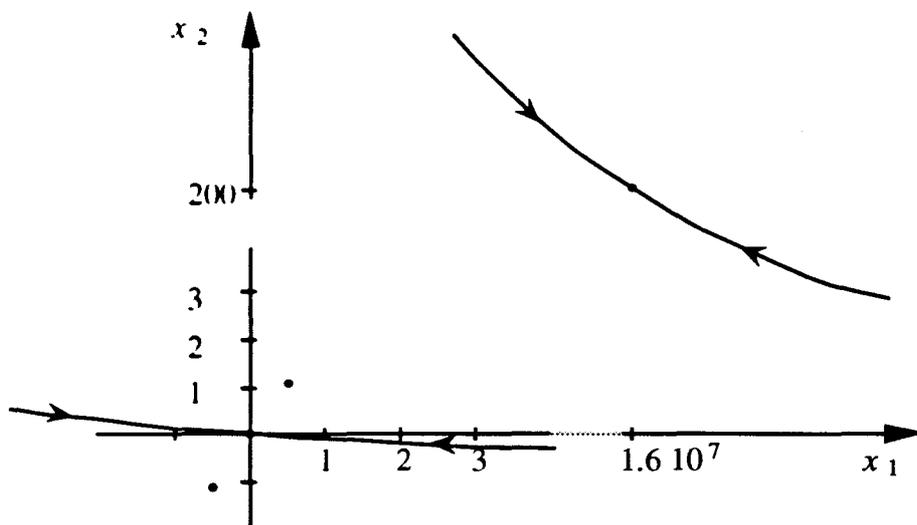
4^{ème} point d'équilibre: $(1.599 \cdot 10^7, 199.99)$

valeur propre 0.666 et vecteur propre associé $[1, 4 \cdot 10^{-5}]^T$

valeur propre -119988 et vecteur propre associé $[-1.333, 0.999]^T$

Pas 4 à 5:

On construit les variétés stables associées au premier et quatrième points d'équilibre. Pour cela on effectue quatre simulations. Dans la figure 2.7 représentant le portrait de phase, les domaines de stabilité asymptotique des 2^{ème} et 3^{ème} points d'équilibre sont délimités par les deux courbes de cette figure.



-Figure 2.7: Ébauche du portrait de phase de (2.59)-

Systèmes Non Linéaires Autonomes

3) Considérons le système défini par:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} x_1 (x_2 - 1) (x_1 - 2) \\ x_2 (x_1 - 1) (x_2 - 2) \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

Pas 1 à 3:

En observant le système (2.60), on peut facilement obtenir les informations suivantes:

1^{er} point d'équilibre: (0, 0)

valeur propre 2 et vecteur propre associé $[0, 1]^T$

valeur propre 2 et vecteur propre associé $[1, 0]^T$

2^{ème} point d'équilibre: (1, 1)

valeur propre -1 et vecteur propre associé $[1, 1]^T$

valeur propre 1 et vecteur propre associé $[-1, 1]^T$

3^{ème} point d'équilibre: (2, 2)

valeur propre 2 et vecteur propre associé $[0, 1]^T$

valeur propre 2 et vecteur propre associé $[1, 0]^T$

4^{ème} point d'équilibre: (0, 2)

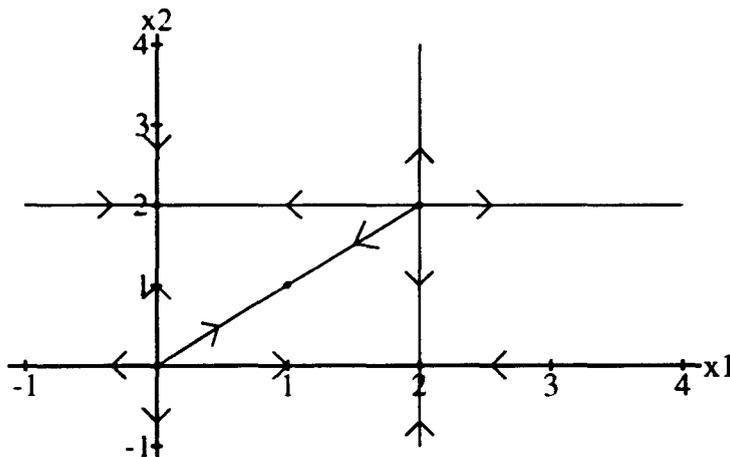
valeur propre -2 et vecteur propre associé $[0, 1]^T$

valeur propre -2 et vecteur propre associé $[1, 0]^T$

5^{ème} point d'équilibre: (2, 0)

valeur propre -2 et vecteur propre associé $[0, 1]^T$

valeur propre -2 et vecteur propre associé $[1, 0]^T$



-Figure 2.8: Ébauche du portrait de phase de (2.60)-

Pas 4 à 5:

On sait que la variété stable associée au deuxième point d'équilibre est une courbe unique tangente au vecteur propre $[1, 1]^T$ associé à la valeur propre stable -1 . Or, en permutant les indices 1 et 2 on s'aperçoit que

Chapitre 2

le système est symétrique. Donc cette variété est S : le segment de droite reliant le premier et quatrième point d'équilibre. La figure 2.8 représente une ébauche du portrait de phase du système (2.60), les domaines de stabilité asymptotique des 4^{ème} et 5^{ème} points d'équilibre sont délimités respectivement par la demi-droite issue de l'origine pointant vers le bas, S , la demi-droite issue de $(2, 2)$ pointant à droite et par la demi-droite issue de l'origine pointant à gauche, S , la demi-droite issue de $(2, 2)$ pointant vers le haut. Les solutions démarrants dans les quarts de plan inférieur gauche et supérieur droit sont divergentes.

2.3 Autres Méthodes

Il existe une multitude de méthodes, cependant elles ne s'appliquent en général qu'à des systèmes du second ordre.

En particulier Lj. B. Jocić utilise, pour les systèmes d'ordre deux régis par (SNLA) (2.1), une analogie entre la D.S.A et le puits d'un fluide incompressible. Ce qui le conduit au théorème suivant [JOCIĆ 82]:

Théorème 2.16 [JOCIĆ 82]

Si $\text{Div}(g) < 0$ pour tout x de $\mathcal{D}_1(x_e)$, un domaine ouvert connexe ne contenant que x_e comme point d'équilibre asymptotiquement stable, alors $\mathcal{D}_1(x_e)$ est une estimation du D.S.A de x_e , pour (SNLA) (2.1).

On trouvera de même un résultat analogue dans [INFANTE 64].

Une autre méthode, basée sur la linéarisation de Carleman [LAPORO 78], augmente considérablement l'ordre du système étudié. Elle conduit à des algorithmes complexes nécessitant de gros calculs numériques et exprimant les solutions de (SNLA) (2.1) sous forme de série de Volterra.

Conclusion

A travers les différentes méthodes présentées dans ce chapitre on s'aperçoit que pour des systèmes de dimension inférieure ou égale à trois il est plus rapide et plus précis d'utiliser l'algorithme présenté en section 2.3 pour déterminer le portrait de phase et à plus forte raison un D.S.A. Cet algorithme est basé sur des résultats concernant la caractérisation topologique du D.S.A: ainsi un nombre très réduit de simulations est nécessaire.

Par contre pour des systèmes d'ordre plus élevé, il est préférable d'utiliser les méthodes basées sur le principe d'invariance de La Salle notamment l'algorithme de Davison et Kurak si notre souci est la rapidité de convergence. Par contre, si l'on désire une meilleure estimation il est alors préférable d'utiliser les méthodes basées sur les résultats de Zubov ou de Grujić.

CHAPITRE 3: SYSTÈMES DE COMPARAISONS, NORMES VECTORIELLES.

Introduction

Depuis des siècles, “la science trouve facile de suivre René Descartes: diviser la difficulté pour en comprendre plus facilement les parties constituantes” (Benoît Mandelbrot dans la préface de [STEWART 89] p.11). Cette démarche a notamment été utilisée pour l’étude locale des systèmes non linéaires autonomes (voir Chapitre 2 Section 1): on ramène cette étude à celle d’un système linéaire constant (plus simple).

Ainsi, en ce qui nous concerne dans notre étude, on désire obtenir un système plus simple, pour déduire de celui-ci des informations pertinentes concernant un système initial complexe. Ces informations sont pour nous la nature du comportement des solutions relativement aux notions définies Chapitre 1 Section 3 (Stabilité et Attractivité).

Il ressort trois besoins de cette démarche:

- 1) définir la notion de “comparaison” relativement à notre objectif (Section 1),
- 2) définir les outils permettant d’obtenir ces systèmes dits de comparaison plus simples (Section 2),
- 3) et énoncer les résultats validant leurs rôles (Section 2).

Il est important de noter que les résultats obtenus servant de base pour les résultats des chapitres suivants sont pour la plupart originaux, notamment ceux à validité locale.

1 Systèmes de Comparaisons

Les **systèmes de comparaisons** ont une longue histoire originaire des mathématiques et des travaux de T. Wazewski [WAZEWSKI 50]. Le principal objectif était alors de majorer (respectivement minorer) le comportement d'un système défini par une inégalité différentielle par le comportement d'un système différentiel (Section 1.2).

Pour nous, notre objectif est d'inférer sur une propriété qualitative d'un système initial complexe à partir de l'étude de cette propriété pour un autre système plus simple. Cette remarque nous permet de donner une définition générale (que nous approfondirons) en Section 1.3.

Mais avant tout rappelons quelques résultats sur les dérivées de DINI.

1.1 Dérivées de DINI

Certaines fonctions peuvent présenter des "discontinuités de leurs dérivées", par exemple $f(t) = |t|$ en zéro. Ainsi pour généraliser la définition usuelle de la dérivée, on introduit les **dérivées de DINI** (voir [LAKSHMIKANTHAM 69] p.7) et notamment:

$$D_r^+ f(t) = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{f(t + \theta) - f(t)}{\theta},$$

$$D_r^- f(t) = \lim_{\theta \rightarrow 0^-} \frac{f(t + \theta) - f(t)}{\theta}.$$

Ainsi pour $f(t) = |t|$, on en déduit $D_r^+ f(0) = 1$ et $D_r^- f(0) = -1$.

Ces notions sont primordiales pour les normes. Par la suite on considère la dérivée temporelle de DINI à droite puisque c'est elle qui indique la tendance de l'évolution.

Lemme 3.1

Soient deux fonctions $v(t)$ et $h(t, v(t))$ à valeurs réelles définies toutes deux sur un intervalle temporel commun $[t_0, t_0 + a)$ et telles que $D_t^+ v(t) \leq h(t, v(t))$ sur $[t_0, t_0 + a)$ alors $D_t^- v(t) \leq h(t, v(t))$ sur $[t_0, t_0 + a)$.

Preuve:

Posons $f(t) = v(t) - \int_{t_0}^t h(\tau, v(\tau)) d\tau$, donc $D_t^+ f(t) \leq 0$, sur $[t_0, t_0 + a)$. Donc d'après

le lemme de Zygmund (voir [LAKSHMIKANTHAM 69] p.7), on en déduit que $f(t)$ est non croissante ou encore que $D_t^- f(t) \leq 0$, c'est-à-dire que $D_t^- v(t) \leq h(t, v(t))$.

1.2 Inégalités Différentielles et Quasi-Monotonie

Soit le système:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n. \quad (S) \quad (3.1)$$

On supposera que le système considéré (S) admet une solution maximale unique au problème de Cauchy, définie sur $I(t_0, x_0)$.

On notera ici S un ensemble connexe, $S \subset \mathbb{R}^n$.

Soit $v \in C(I(t_0, x_0); S)$ une fonction dont la dérivée temporelle à droite $D_t^+ v(t)$ existe sur $I(t_0, x_0)$ et vérifie l'**inégalité différentielle** suivante:

$$D_t^+ v(t) \leq \bar{f}(t, v), t \in I(t_0, x_0), v \in S, \quad (3.2)$$

respectivement:

$$D_t^+ v(t) \geq \underline{f}(t, v), t \in I(t_0, x_0), v \in S. \quad (3.3)$$

Définitions 3.1 (voir [PERRUQUETTI 93b])

i) $f(t, v)$ est **localement quasi-monotone non-décroissante en v par rapport à S** si:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \text{ et } (x, y) \in S \times S, \text{ tels que: } x_i = y_i \text{ et } x_j \leq y_j \text{ (} j \neq i \text{), l'inégalité } f_i(t, x) \leq f_i(t, y) \text{ est vérifiée } \forall t \in I(t_0, x_0). \quad (3.4)$$

ii) Lorsque $S = \mathbb{R}^n$, $f(t, v)$ est **quasi-monotone non-décroissante en v** .

On obtient de même la notion duale de fonction quasi-monotone non-croissante:

Définitions 3.2

i) $f(t, v)$ est **localement quasi-monotone non-croissante en v par rapport à S** si:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \text{ et } (x, y) \in S \times S, \text{ tels que: } x_i = y_i \text{ et } x_j \leq y_j \text{ (} j \neq i \text{), l'inégalité } f_i(t, x) \geq f_i(t, y) \text{ est vérifiée } \forall t \in I(t_0, x_0). \quad (3.5)$$

ii) Lorsque $S = \mathbb{R}^n$, $f(t, v)$ est **quasi-monotone non-croissante en v** .

Par exemple, la fonction $f(t, v) = \begin{bmatrix} h_1(v_1) + a_1 \\ +a_2 \quad h_2(v_2) \end{bmatrix} v$, avec a_1 et a_2 des constantes réelles positives et les fonctions h_1 et h_2 qui ne dépendent respectivement que de v_1 et de v_2 , est quasi-monotone non-décroissante en v . Alors que si l'une des constantes a_1 ou a_2 est négative cela n'est plus le cas. Par contre si les deux constantes a_1 et a_2 sont négatives alors $f(t, v)$ est quasi-monotone non-croissante en v .

En outre, il existe des critères plus simples permettant de tester la quasi-monotonie d'une fonction, par exemple on a les résultats suivants:

- i) si $\frac{\partial f_i(t, v)}{\partial v_j} \geq 0, \forall j \neq i$, alors $f(t, v)$ est quasi-monotone non-décroissante en v ,
- ii) si $\frac{\partial f_i(t, v)}{\partial v_j} \leq 0, \forall j \neq i$, alors $f(t, v)$ est quasi-monotone non-croissante en v .

Il existe alors un résultat classique permettant de comparer au sens des inégalités la solution au problème de Cauchy définie sur $I(t_0, x_0)$ et les fonctions $v(t)$ vérifiant (3.2) ou (3.3) sous certaines conditions (voir [LAKSHMIKANTHAM 69] p.21-31, [MICHEL 77] p.59).

Cependant, la résolution de (S) (3.1) ou même sa simulation est souvent un problème difficile. De plus il est parfois difficile de déduire directement des informations qualitatives. Pour palier à ce manque, on peut utiliser les Fonctions de Liapounov Vectorielles (Section 2.4).

1.3 Définitions: Majorants Direct ou Rétrograde, Global ou Local

Soit S un sous-ensemble connexe de \mathbb{R}^n , et $\mathcal{T} = (\alpha, \omega)$ avec α et β finis ou non.

Nous proposons les définitions suivantes:

Définition 3.3

Un système (MD) est un **système majorant direct** (\mathcal{T}, S) -local d'un système (Z) si:

- i) leurs solutions respectives $\underline{md}(t; t_0, md_0)$ et $\underline{z}(t; t_0, z_0)$ sont continues par rapport au temps et définies sur un intervalle contenant \mathcal{T} ,
- ii) S est \mathcal{T} -invariant par les flots associés aux deux systèmes,
- iii) $\underline{md}(t; t_0, md_0) \geq \underline{z}(t; t_0, z_0)$, pour tout $(md_0, z_0) \in S \times S$ vérifiant $md_0 \geq z_0$, pour tout $t_0 \in \mathcal{T}$ et tout $t \in [t_0, \omega]$.

Définition 3.4

Un système (MR) est un **système majorant rétrograde** (\mathcal{T}, S) -local d'un système (Z) si:

- i) leurs solutions respectives $\underline{mr}(t; t_0, mr_0)$ et $\underline{z}(t; t_0, z_0)$ sont continues par rapport au temps et définies sur un intervalle contenant \mathcal{T} ,
- ii) S est \mathcal{T} -invariant par les flots associés aux deux systèmes,
- iii) $\underline{mr}(t; t_0, mr_0) \geq \underline{z}(t; t_0, z_0)$, pour tout $(mr_0, z_0) \in S \times S$ vérifiant $mr_0 \geq z_0$, pour tout $t_0 \in \mathcal{T}$ et tout $t \in [\alpha, t_0]$.

Remarques:

- 1) Par la suite, on omettra "direct" s'il n'y a pas de confusion possible.
- 2) La notion de majoration rétrograde servira notamment à l'étude de la notion de répulsivité d'ensemble introduite Chapitre 1 Section 3.1.3, suivant le principe du renversement de trajectoires explicité Chapitre 2 Section 2.2.

Définition 3.5

Dans les définitions précédentes:

- $\mathcal{T} = \mathbb{R}$ le système sera dit (S) -local,
- $S = \mathbb{R}^n$, il sera dit (\mathcal{T}) -local,
- $\mathcal{T} = \mathbb{R}$ et $S = \mathbb{R}^n$ il sera dit **global**.

Notation: Par la suite toute fonction ou matrice sur-lignée sera relative à une majoration alors que toute variable sous-lignée sera relative à une majoration rétrograde.

Chapitre 3

La notion de **système de comparaison** [HABETS 75] est plus large que celle de système majorant ainsi définie, puisque d'une part les ordres des deux systèmes comparés peuvent être différents et d'autre par le fait de comparer nécessite un "instrument de mesure" qui sera ici une propriété qualitative. Nous adopterons donc la définition 3.6 avec les conventions suivantes:

Soit (S) d'état $x \in \mathbb{R}^n$ et deux ensembles $X \subset \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{D}_X \subset \mathbb{R}^n$,
soit (C) d'état $z \in \mathbb{R}^k$ et deux ensembles $Z \subset \mathbb{R}^k$ et $\mathcal{D}_Z \subset \mathbb{R}^k$.

La notation $P_{sa}(C, Z, \mathcal{D}_Z) \Rightarrow P_{sa}(S, X, \mathcal{D}_X)$ signifie:

- 1) $P_{sa}(C, Z, \mathcal{D}_Z) = [Z \text{ est asymptotiquement stable relativement au système } (C) \text{ et } \mathcal{D}_Z \text{ est une estimation de son D.S.A.}]$,
- 2) $P_{sa}(S, X, \mathcal{D}_X) = [X \text{ est asymptotiquement stable relativement au système } (S) \text{ et } \mathcal{D}_X \text{ est une estimation de son D.S.A.}]$,
- 3) la stabilité asymptotique de Z relativement au système (C) implique celle de X relativement au système (S) et \mathcal{D}_X est déduit de \mathcal{D}_Z .

De façon plus générale $P_{(.)}(C, Z, \mathcal{D}_Z) \Rightarrow P_{(.)}(S, X, \mathcal{D}_X)$, où $(.)$ est l'une des notions qui nous intéressent (Chapitre 1, Section 3) signifie les trois points précédents dans lesquels la notion de stabilité asymptotique est remplacée par la notion qui nous intéresse.

Définition 3.6

Un système (C, Z, \mathcal{D}_Z) est un **système de comparaison** d'un système (S, X, \mathcal{D}_X) **relativement à la propriété** $P_{(.)}$, si: $P_{(.)}(C, Z, \mathcal{D}_Z) \Rightarrow P_{(.)}(S, X, \mathcal{D}_X)$, où $(.)$ est l'une des notions qui nous intéressent (Chapitre 1, Section 3).

2 Normes et Fonctions de Liapounov Vectorielles

Les **Fonctions Vectorielles de Liapounov (F.V.L)**, introduites par R. Bellman [BELLMAN 50], sont utilisées pour l'analyse des systèmes complexes de grandes dimensions par le biais de la seconde méthode de Liapounov ([MATROSOV 62, 68a, 68b, 69a, 69b, 71, BITSORIS 78, 83, GRUJIĆ 77, 78], [LAKSHMIKANTHAM 69] p.21-31, [MICHEL 77] p.60). On ne donnera pas ici de définition (voir [BELLMAN 50], [BITSORIS 78] p.41-46 ou bien la définition 3.5 où il faut remplacer "norme" par "fonction définie positive").

Ce rappel est motivé par la classe particulière de F.V.L qui nous intéresse ici: les **Normes Vectorielles (N.V)**. Cependant, les résultats qui suivent sont applicables aux F.V.L sauf mention explicite.

Initialement introduites pour l'étude de la convergence des récurrences linéaires en analyse numérique par F. Robert, les N.V sont des outils mathématiques permettant de définir des systèmes de comparaison relatifs aux différents types de stabilités et d'attractivités. Cette utilisation spécifique des N.V est issue des travaux de P. Borne et J.C. Gentina [GENTINA 72, 76, BORNE 74, 90a, 90b, GRUJIĆ 77, 78].

2.1 Définitions

Soit \mathcal{E}_n un espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{E}_{n_1}, \mathcal{E}_{n_2}, \dots, \mathcal{E}_{n_k}$ des sous-espaces vectoriels de \mathcal{E}_n , engendrant \mathcal{E}_n :

$$\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_{n_1} \cup \mathcal{E}_{n_2} \cup \dots \cup \mathcal{E}_{n_k}. \quad (3.6)$$

Soit x un vecteur de \mathcal{E}_n et x_i sa projection dans \mathcal{E}_{n_i} associé à l'opérateur de projection P_i défini de \mathcal{E}_n dans \mathcal{E}_{n_i} par:

$$x_i = P_i x, x \in \mathcal{E}_n, x_i \in \mathcal{E}_{n_i} (\forall i = 1, 2, \dots, k \leq n). \quad (3.7)$$

Définition 3.7 (voir [BORNE 76, 90a, GRUJIĆ 77])

Si $p_i(x_i)$ est une norme scalaire du vecteur x_i de \mathcal{E}_{n_i} alors le vecteur $p(x) = [p_1(x_1), \dots, p_k(x_k)]^T$ de dimension k et de composante $p_i(x_i)$ est une **Norme Vectorielle** du vecteur x défini par:

$$p: \mathcal{E}_n \rightarrow \mathcal{E}_k$$

Chapitre 3

$$x \rightarrow p(x) = [p_1(x), \dots, p_k(x)]^T,$$

avec $p_i(x) = p_i(P_i x) = p_i(x_i)$. (3.8)

Propriétés

La N.V précédemment définie possède des propriétés analogues à la norme scalaire d'un vecteur. En particulier, si on note y un autre vecteur de \mathcal{E}_n , avec $y_i = P_i y$, on a:

$$P1) p_i(x_i) \geq 0, \forall x_i \in \mathcal{E}_{n_i}, (\forall i = 1, 2, \dots, k),$$

$$P2) p_i(x_i) = 0 \Leftrightarrow x_i = 0, (\forall i = 1, 2, \dots, k),$$

$$P3) p_i(x_i + y_i) \leq p_i(x_i) + p_i(y_i), \forall x_i \in \mathcal{E}_{n_i}, \forall y_i \in \mathcal{E}_{n_i}, (\forall i = 1, 2, \dots, k),$$

$$P4) p_i(\alpha x_i) = |\alpha| p_i(x_i), \alpha \in \mathbb{R}.$$

Définitions 3.8

i) Si $(k - 1)$ des sous-espaces \mathcal{E}_{n_i} ne sont pas suffisants pour définir \mathcal{E}_n tout entier, la N.V est dite **surjective**.

ii) La N.V p est dite **régulière** si \mathcal{E}_n est en somme directe des \mathcal{E}_{n_i} :

$$\mathcal{E}_{n_1} \oplus \mathcal{E}_{n_2} \oplus \dots \oplus \mathcal{E}_{n_{k-1}} \oplus \mathcal{E}_{n_k} = \mathcal{E}_n. \quad (3.9)$$

Par la suite, les N.V utilisées seront régulières.

2.2 Lemmes de Majorations

Soit le système:

$$\frac{dx}{dt} = e_2(t, x, d), t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n, d \in \mathcal{E}_D. \quad (3.10)$$

On supposera que le système considéré (3.10) (ou (S) (3.1)) admet une solution maximale unique au problème de Cauchy, définie sur \mathbb{R} .

2.2.1 Lemme de Majoration Globale

Rappelons que toute fonction ou matrice sur-lignée sera relative à une majoration alors que toute variable sous-lignée sera relative à une majoration rétrograde.

On notera $v(x)$ et $p(x)$ respectivement une F.V.L et une N.V.

Supposons qu'il existe une fonction $\bar{h}(t, x, v(x))$ continue par rapport à chacune de ses composantes vérifiant:

$$D_t^+ v(x) \leq \bar{h}(t, x, v(x)), \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n, v(x) \in \mathbb{R}^k. \quad (3.11)$$

On définit alors les systèmes:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = e_2(t, x, d) \\ D_t^+ v(x) \leq \bar{h}(t, x, v(x)) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n, v(x) \in \mathbb{R}^k, d \in \mathcal{E}_D, \quad (3.12)$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = e_2(t, x, d) \\ \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{h}(t, x, \bar{v}) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n, \bar{v} \in \mathbb{R}^k, d \in \mathcal{E}_D. \quad (3.13)$$

G. S. Bitsoris [BITSORIS 78] a énoncé le résultat suivant basé sur les résultats de T. Wazewski [WAZEWSKI 50] et de V.M. Matrosov [MATROSOV 68, 71]:

Théorème 3.1 (Bitsoris)

Le système (3.13) est un **système majorant global** de (3.12) si et seulement si la fonction $\bar{h}(t, x, v(x))$ est quasi-monotone non-décroissante en v .

Il est important de noter que si on remplace \leq par \geq dans (3.11) et (3.12), alors on obtient le résultat suivant:

Théorème 3.2

Le système (3.13) est un **système majorant rétrograde global** de (3.12) si et seulement si la fonction $\bar{h}(t, x, v(x))$ est quasi-monotone non-croissante en v .

Remarque:

Dans [MATROSOV 62], Matrosov énonçait un résultat similaire (condition suffisante) où la fonction h ne dépend que de t et de $v(t, x)$. Puis il généralisa ce résultat à $D_t^+ v(t, x) \leq \bar{h}(t, x, v(t, x))$ ([MATROSOV 68, 71]).

A la même période Borne et Gentina ([BORNE 74, 76, GENTINA 72, 76, GRUJIC 77, 78]) obtenaient des résultats similaires en utilisant les N.V où la fonction h était de la forme: $h(t, x, p(x)) = \bar{M}(t, x) p(x)$. On peut vérifier que lorsque $\bar{M}(t, x)$ est à éléments hors diagonaux positifs la fonction h est quasi-monotone non-décroissante en p . Si on ajoute un vecteur $\bar{q}(t, x)$ positif à $\bar{M}(t, x) p(x)$, comme proposé dans [BORNE 90, 92b, PERRUQUETTI 93a], on déduit du théorème 3.1 le résultat suivant:

Lemme 3.2 (Lemme de Majoration Global)

Soient:

- 1) le système (3.10),
- 2) $p(x)$ une N.V régulière vérifiant:

$$D_t^+ p(x) \leq \bar{M}(t, x) p(x) + \bar{q}(t, x), t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n, p(x) \in \mathbb{R}^k, \quad (3.14)$$

où x est la solution définie sur \mathbb{R} et continue par rapport au temps de (3.9) passant par x_0 à t_0 , $\bar{M}(t, x) \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ et $\bar{q}(t, x) \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ tels que les éléments hors diagonaux de $\bar{M}(t, x)$ et les éléments de $\bar{q}(t, x)$ soient positifs pour tout couple $(t, x) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k)$.

Alors le système (3.15):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = e_2(t, x, d) \\ \frac{dz}{dt} = \bar{M}(t, x) z + \bar{q}(t, x) \end{cases}, t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^k, d \in \mathcal{E}_D, \quad (3.15)$$

est un système majorant global de (3.15):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = e_2(t, x, d) \\ D_t^+ p(x) \leq \bar{M}(t, x) p(x) + \bar{q}(t, x) \end{cases}, t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n, p(x) \in \mathbb{R}^k, \quad (3.16)$$

En particulier, si $z_0 \geq p(x_0)$ alors on a $z(t) \geq p(x(t; t_0, x_0))$, pour tout $t \geq t_0$.

Corollaire 3.1

Si on remplace \leq par \geq dans (3.14) et (3.16), alors on obtient un résultat similaire concernant les systèmes majorants rétrogrades. La condition est alors:

$\underline{M}(t, x) \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ et $\underline{q}(t, x) \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ tels que les éléments hors diagonaux de $\underline{M}(t, x)$ et les éléments de $\underline{q}(t, x)$ soient négatifs pour tout $(t, x) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$.

2.2.2 Lemmes de Majorations Locales

Par la suite nous allons affiner ces résultats dans les cas de systèmes majorants (respectivement majorants rétrogrades) locaux.

Soit $\mathcal{T}_e \subset \mathcal{T}$ et $S \subset \mathcal{E} \subset \mathbb{R}^n$, on pose:

$$\begin{aligned} \bar{M}: \mathcal{T}_e \times S &\rightarrow \mathbb{R}^{k \times k}, \bar{M} = [\bar{\mu}_{ij}], \\ \bar{q}: \mathcal{T}_e \times S &\rightarrow \mathbb{R}^k, \bar{q} = [\bar{\theta}_i]. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Lemme 3.3 [PERRUQUETTI et al. 94b]

(Lemme de Majoration (\mathcal{T}, S) -Local)

Soient:

1) $p(x)$ une N.V régulière vérifiant (3.19 b),

2) les systèmes:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= e_2(t, x, d), t \in \mathcal{T}, x \in \mathcal{E}, d \in \mathcal{E}_D, \end{aligned} \right. \tag{3.18 a}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \bar{M}(t, x) z + \bar{q}(t, x), t \in \mathcal{T}_e, x \in S, z \in \mathbb{R}^k, \end{aligned} \right. \tag{3.18 b}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= e_2(t, x, d), t \in \mathcal{T}, x \in \mathcal{E}, d \in \mathcal{E}_D, \end{aligned} \right. \tag{3.19 a}$$

$$\left\{ \begin{aligned} D_t^+ p(x) &\leq \bar{M}(t, x) p(x) + \bar{q}(t, x), t \in \mathcal{T}_e, x \in S, p(x) \in \mathbb{R}^k, \end{aligned} \right. \tag{3.19 b}$$

avec:

- \mathcal{E} connexe ouvert de \mathbb{R}^n : espace d'état,

- S connexe ouvert, $S \subset \mathcal{E}$,

- $\mathcal{T}_e \subset \mathcal{T}$,

- $\bar{M}(t, x) \in C(\mathcal{T}_e \times S)$ et $\bar{q}(t, x) \in C(\mathcal{T}_e \times S)$ tels que les éléments hors diagonaux

de $\bar{M}(t, x)$ et les éléments de $\bar{q}(t, x)$ sont positifs pour tout $(t, x) \in (\mathcal{T}_e \times S)$,

- (3.18 a) (\equiv (3.19 a)) admet pour tout $(t_0, x_0) \in (\mathcal{T} \times \mathcal{E})$ une solution maximale unique passant par x_0 à t_0 , définie sur $I(t_0, x_0)$ et continue par rapport au temps,

3) $\bar{X}_c \subset S, \bar{X}_c = \{x \in \mathbb{R}^n : p(x) \leq c, c > 0, c \in \mathbb{R}^k\},$

4) \mathcal{T}_0 l'ensemble des instants $t \in (I(t_0, x_0) \cap \mathcal{T}_e)$ pour lesquels $\underline{z} \in \bar{Z}_c$, avec \underline{z} solution de (3.18) et :

$\bar{Z}_c = \{z \in \mathbb{R}_+^k : z \leq c, c > 0, c \in \mathbb{R}^k\}.$

Alors:

1) \mathcal{T}_0 est un ensemble compact contenant un intervalle du type $\mathcal{T}_1 = [t_0, t_1]$, avec $t_0 < t_1 \leq \tau_e$,

2) toute solution $\underline{z}(t; t_0, z_0; x)$ démarrant de $z_0 \in \mathbb{R}_+^k$ reste dans \mathbb{R}_+^k tant que $t \in \mathcal{T}_1$,

3) le système (3.18) est un **système majorant** $(\mathcal{T}_1, X_c \times Z_c)$ -local de (3.19),

4) pour tout intervalle de temps $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$, tel que l'ensemble \bar{Z}_c soit \mathcal{T}_2 -invariant par le système (3.18 b), l'ensemble \bar{X}_c est \mathcal{T}_2 -invariant par le système (3.18 a).

Preuve:

Soit p une N.V régulière, vérifiant (3.19 b) pour $\bar{M}(t, x) \in C(\mathcal{T}_e \times S)$ et $\bar{q}(t, x) \in C(\mathcal{T}_e \times S)$, tels que les éléments hors diagonaux de $\bar{M}(t, x)$ et les éléments de $\bar{q}(t, x)$ soient positifs pour tout $(t, x) \in (\mathcal{T}_e \times S)$.

Preuve du point 1):

Par hypothèse de travail, les solutions $\underline{x}(t; t_0, x_0; d)$ du système (3.18 a) sont continues par rapport à $t \in \mathcal{T}$, $\bar{M}(t, x) \in C(\mathcal{T}_e \times S)$ et $\bar{q}(t, x) \in C(\mathcal{T}_e \times S)$ et le système (3.18 b) est linéaire (en z), donc les solutions de (3.18 b) sont aussi continues par rapport à $t \in \mathcal{T}_e$. De plus, si on se fixe t_0, z_0, x_0 et d , d'après le Théorème 1.2 il existe une unique solution maximale.

Ainsi, par définition de \mathcal{T}_0 et continuité par rapport à $t \in \mathcal{T}_e$ des solutions de (3.18 b) $\underline{z}(t; t_0, z_0; x)$; \mathcal{T}_0 est un ensemble compact du type: $\mathcal{T}_0 = [t_0, t_1] \cup [t_2, t_3] \cup \dots$ et il contient un intervalle $\mathcal{T}_1 = [t_0, t_1]$, avec $t_0 < t_1 \leq \tau_e$.

Ceci prouve le premier point du Lemme 3.3. Pour démontrer les points suivants, on introduit le système majoré:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = e_2(t, x, d), t \in \mathcal{T}, x \in \mathcal{E}, d \in \mathcal{E}_D, \\ \frac{dz^n}{dt} = \bar{M}(t, x) z^n + \bar{q}(t, x) + \varepsilon^n, t \in \mathcal{T}_e, x \in \mathcal{S}, z^n \in \mathbb{R}^k, \end{cases} \quad (3.20 \text{ a})$$

où ε^n est un vecteur strictement positif et $z_0^n = z^n(t_0) = p(x_0) + \varepsilon^n$, que l'on fera tendre uniformément vers zéro pour obtenir certaines démonstrations.

Un raisonnement similaire montre que $z^n(t)$ est continue par rapport à t . De plus \mathcal{T}_0^n est un ensemble compact contenant un intervalle du type $\mathcal{T}_1^n = [t_0, t_1^n]$, avec $t_0 < t_1^n \leq \tau_e$.

Sur cet intervalle \mathcal{T}_1^n les systèmes (3.18), (3.19) et (3.20) sont valides.

Preuve du point 2):

Soit $z_0 \in \mathbb{R}_+^k$ et $z_0^n = z^n(t_0) = z_0 + \varepsilon^n$. Dans le point 1), on a prouvé que, sous les hypothèses faites, $z^n(t)$ est une fonction continue par rapport à $t \in \mathcal{T}_e$.

On démontrera le point 2) par l'absurde:

Supposons que la solution $z^n(t)$ ne reste pas dans \mathbb{R}_+^k de façon stricte, il existe $T > t_0$, et un indice $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ tels que:

$$z_i^n(T) = 0 \text{ et } z^n(T) \geq 0. \quad (3.21)$$

Soit t_c le plus petit T (on a $t_c > t_0$ puisque z_0^n est strictement positif), on a alors:

$$z_i^n(t_c) = 0 \text{ et } z^n(t_c) \geq 0, \quad (3.22)$$

$$z_j^n(t) > 0, \text{ pour } t \in [t_0, t_c] \text{ et tout } j. \quad (3.23)$$

Par définition on a:

$$\left[\frac{dz_i^n(t)}{dt} \right] (t_c) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{z_i^n(t_c + \theta) - z_i^n(t_c)}{\theta}. \quad (3.24)$$

(3.22), (3.23) et (3.24) montrent en faisant tendre θ vers 0 par valeurs inférieures que:

$$\left[\frac{dz_i^n(t)}{dt} \right] (t_c) < 0. \quad (3.25)$$

Chapitre 3

Or d'après (3.20 b), on a:

$$\left[\frac{dz_i^n(t)}{dt} \right]_{(t_c)} = \sum_{i \neq j} \bar{\mu}_{ij}(\cdot) z_j^n(t_c) + \bar{\theta}_i(\cdot) + \varepsilon^n > 0. \quad (3.26)$$

Il y a donc contradiction entre (3.25) et (3.26), donc:

$$z^n(t) > 0 \text{ pour tout } t \in [t_0, t_1^n]. \quad (3.27)$$

En choisissant ε^n de façon convenable ($\varepsilon^n \rightarrow 0$ de façon uniforme), $z^n(t) \rightarrow z(t)$.

La relation (3.27) devient alors:

$$z(t) \geq 0 \text{ pour tout } t \in [t_0, t_1]. \quad (3.28)$$

Ceci prouve le second point du Lemme 3.3.

Preuve du point 3):

Soit $p(x_0) \in \mathbb{R}_+^k$ et $z_0^n = z^n(t_0) = z_0 + \varepsilon^n$, avec $z_0 \geq p(x_0)$. Dans le point 1), on a prouvé que, sous les hypothèses faites, $z^n(t)$ est une fonction continue par rapport à $t \in \mathcal{T}_\varepsilon$.

Comme pour le point 2), on procède par l'absurde:

Supposons que la solution $z^n(t)$ ne reste pas plus grande que $p(x(t))$ de façon stricte sur l'intervalle \mathcal{T}_1^n , il existe alors $T > t_0$, et un indice $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ tels que:

$$z_i^n(T) = p_i(x(T)) \text{ et } z^n(T) \geq p(x(T)). \quad (3.29)$$

Soit t_c le plus petit T (on a $t_c > t_0$ puisque z_0^n est strictement plus grand que $p(x_0)$), on a alors:

$$z_i^n(t_c) = p_i(x(t_c)) \text{ et } z^n(t_c) \geq p(x(t_c)), \quad (3.30)$$

$$z_j^n(t) > p_j(x(t)), \text{ pour } t \in [t_0, t_c[\text{ et tout } j. \quad (3.31)$$

(3.24), (3.30) et (3.31) montrent en faisant tendre θ vers 0 par valeurs inférieures que:

$$\left[\frac{dz_i^n(t)}{dt} \right] (t_c) < [D_i^- p(x)](t_c). \quad (3.32)$$

Or, d'après (3.19 b), on a:

$$D_i^+ p_i(x) \leq \sum_{j=1}^k \bar{\mu}_{ij}(\cdot) p_j(x) + \bar{\theta}_i(t, x), \text{ pour } t \in \mathcal{T}_e. \quad (3.33)$$

En utilisant le Lemme 3.1, on en déduit donc:

$$D_i^- p_i(x) \leq \sum_j \bar{\mu}_{ij}(\cdot) p_j(x) + \bar{\theta}_i(t, x), \text{ pour } t \in \mathcal{T}_e. \quad (3.34)$$

En écrivant (3.34) à l'instant t_c que l'on combine à (3.20 b), (3.30) et (3.31):

$$[D_i^- p_i(x)](t_c) < \left[\frac{dz_i^n(t)}{dt} \right] (t_c). \quad (3.35)$$

Il y a donc contradiction entre (3.31) et (3.33), donc:

$$z^n(t) > p(x(t)) \text{ pour tout } t \in [t_0, t_1^n]. \quad (3.36)$$

En choisissant ε^n de façon convenable ($\varepsilon^n \rightarrow 0$ de façon uniforme, $z^n(t) \rightarrow z(t)$), la relation (3.36) devient alors:

$$z(t) \geq p(x(t)) \text{ pour tout } t \in [t_0, t_1]. \quad (3.37)$$

Ceci prouve le troisième point du Lemme 3.3.

Preuve du point 4):

L'inégalité (3.37) montre que:

$$\forall x_0 \in \bar{X}_c, \underline{x}(t; t_0, x_0; d) \in \bar{X}_{z(t)}, \forall t \in \mathcal{T}_1. \quad (3.38)$$

Soit \bar{Z}_c un ensemble \mathcal{T}_2 -invariant ($\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$) pour le système (3.18 b), alors :

Chapitre 3

$$\forall z_0 \in \bar{Z}_c, \underline{z}(t; t_0, z_0; x) \in \bar{Z}_c, \forall t \in \mathcal{T}_2. \quad (3.39)$$

Donc (3.38) et (3.39) montrent que:

$$\forall x_0 \in \bar{X}_c, \underline{x}(t; t_0, x_0; d) \in \bar{X}_{z(t)}, \bar{X}_{z(t)} \subset \bar{X}_c, \forall t \in \mathcal{T}_2. \quad (3.40)$$

Ce qui exprime la \mathcal{T}_2 -invariance de \bar{X}_c pour le système (3.18 a).

Ceci prouve le quatrième point du Lemme 3.3.

De ce lemme on peut en déduire le résultat à validité temporelle locale suivant:

Lemme 3.4 [PERRUQUETTI et al. 94b]

(Lemme de Majoration (\mathcal{T})-local)

Soient:

- 1) $p(x)$ une N.V régulière vérifiant (3.42 b),
- 2) les systèmes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = e_2(t, x, d), t \in \mathcal{T}, x \in \mathbb{R}^n, d \in \mathcal{E}_D, \end{array} \right. \quad (3.41 \text{ a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dz}{dt} = \bar{M}(t, x) z + \bar{q}(t, x), t \in \mathcal{T}_e, x \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^k, \end{array} \right. \quad (3.41 \text{ b})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = e_2(t, x, d), t \in \mathcal{T}, x \in \mathbb{R}^n, d \in \mathcal{E}_D, \end{array} \right. \quad (3.42 \text{ a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D_t^+ p(x) \leq \bar{M}(t, x) p(x) + \bar{q}(t, x), t \in \mathcal{T}_e, x \in \mathbb{R}^n, p(x) \in \mathbb{R}^k, \end{array} \right. \quad (3.42 \text{ b})$$

avec:

- \mathbb{R}^n : espace d'état,
- $\mathcal{T}_e \subset \mathcal{T}$,
- $\bar{M}(t, x) \in C(\mathcal{T}_e \times \mathbb{R}^n)$ et $\bar{q}(t, x) \in C(\mathcal{T}_e \times \mathbb{R}^n)$ tels que les éléments hors diagonaux de $\bar{M}(t, x)$ et les éléments de $\bar{q}(t, x)$ soient positifs pour tout couple $(t, x) \in (\mathcal{T}_e \times \mathbb{R}^n)$,
- (3.41 a) (\equiv (3.42 a)) admet pour tout $(t_0, x_0) \in (\mathcal{T} \times \mathbb{R}^n)$ une solution maximale unique passant par x_0 à t_0 , définie sur $I(t_0, x_0)$ et continue par rapport au temps,

- 3) les ensembles \bar{X}_c et \bar{Z}_c définis par: $\bar{X}_c = \{x \in \mathbb{R}^n: p(x) \leq c, c > 0, c \in \mathbb{R}^k\}$ et $\bar{Z}_c = \{z \in \mathbb{R}_+^k: z \leq c, c > 0, c \in \mathbb{R}^k\}$.

Alors:

- 1) toute solution $\underline{z}(t; t_0, z_0; x)$ démarrant de $z_0 \in \mathbb{R}_+^k$ reste dans \mathbb{R}_+^k tant que $t \in \mathcal{T}_e$,
- 2) le système (3.41) est un système majorant (\mathcal{T}_e)-local de (3.42),
- 3) pour tout intervalle de temps $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_e$, tel que l'ensemble \bar{Z}_c soit \mathcal{T}_2 -invariant par le système (3.41 b), l'ensemble \bar{X}_c est \mathcal{T}_2 -invariant par le système (3.41 a).

Preuve:

La formulation du lemme 3.4 exprime les hypothèses du lemme 3.3 dans le cas particulier où $S = \mathcal{E} = \mathbb{R}^n$. Il suffit de remarquer que dans ce cas on a: $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_e$. Donc les points 1, 2, 3 du lemme 3.4 sont prouvés par les points 2, 3, 4 du lemme 3.3.

2.2.3 Remarques sur ces Lemmes

On peut déduire des lemmes précédents des résultats similaires pour les majorations rétrogrades. Pour cela le symbole \leq doit être remplacé par \geq dans respectivement (3.16), (3.19), (3.41) et les éléments hors diagonaux des matrices et les éléments des vecteurs intervenant dans ces relations doivent être négatifs.

D'autre part, ces lemmes à validités locales sont utiles, notamment pour les résultats du chapitre 5 concernant la stabilité pratique qui feront intervenir un comportement sur un domaine de temps borné.

De plus, l'utilisation de N.V conduit à des systèmes vérifiant (voir Section 2.3):

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \bar{M}(t, x) \text{ telle que } \bar{\mu}_{ij} \geq 0, \forall i \neq j = 1, 2, \dots, k. \\ \text{(respectivement } \underline{M} \text{ telle que } \underline{\mu}_{ij} \leq 0, \forall i \neq j = 1, 2, \dots, k.) \\ 2) \bar{q}(t, x) \geq 0. \\ \text{(respectivement } \underline{q} \leq 0.) \end{array} \right. \quad (3.43)$$

Les N.V conduisent donc à des matrices $\bar{M}(t, x)$ et des vecteurs $\bar{q}(t, x)$ vérifiant par construction les points 2) des lemmes (3.2), (3.3) et (3.4). Il apparaît ainsi, que les N.V sont des outils "naturels" pour la construction de systèmes majorants.

2.3 Détermination Pratique d'un Système de Majoration

Puisque pour les lemmes précités (3.2, 3.3 et 3.4), les systèmes décrits valables lorsque x appartient à S (pouvant être l'espace d'état tout entier \mathbb{R}^n), dans la suite des calculs on prendra en compte le fait que x appartienne à S .

2.3.1 Construction Théorique

On considère le système:

$$\frac{dx}{dt} = e_2(t, x, d), t \in \mathcal{T}, x \in S, d \in \mathcal{E}_D, \quad (3.44)$$

et on décompose $e_2(t, x, d)$ sous la forme:

$$e_2(t, x, d) = A(t, x, d) x + b(t, x, d), t \in \mathcal{T}, x \in S, d \in \mathcal{E}_D, \quad (3.45)$$

avec A et b bornés et possédant les mêmes propriétés de régularité que e_2 (c'est-à-dire de même classe).

En définissant pour tout i et j de $\{1, 2, \dots, k\}$ les quantités suivantes:

$$b_i(t, x, d) = P_i b(t, x, d), t \in \mathcal{T}, x \in S, d \in \mathcal{E}_D, \\ \bar{\theta}_i(t, x) = \text{Sup}_{d \in \mathcal{E}_D} \left\{ |[D_{x_i}^+ p_i(x_i)]^T b_i(t, x, d)| \right\}, (\forall i = 1, 2, \dots, k), \quad (3.46)$$

$$\underline{\theta}_i(t, x) = \text{Inf}_{d \in \mathcal{E}_D} \left\{ -|[D_{x_i}^+ p_i(x_i)]^T b_i(t, x, d)| \right\}, (\forall i = 1, 2, \dots, k), \quad (3.47)$$

$$A_{ij}(t, x, d) = P_i A(t, x, d) P_j, (\forall i, j = 1, 2, \dots, k), \quad (3.48)$$

$$m_{ij}(t, x, y, d) = \frac{[D_{y_i}^+ p_i(y_i)]^T A_{ij}(t, x, d) y_j}{p_j(y_j)}, \quad (3.49)$$

$$\bar{\mu}_{ij}(t, x) = \text{Sup}_{\substack{y \in S \\ d \in \mathcal{E}_D}} m_{ij}(t, x, y, d), (\forall i, j = 1, 2, \dots, k), \quad (3.50)$$

$$\underline{\mu}_{ij}(t, x) = \text{Inf}_{\substack{y \in S \\ d \in \mathcal{E}_D}} m_{ij}(t, x, y, d), (\forall i, j = 1, 2, \dots, k), \quad (3.51)$$

où $D_{x_i}^+$ est l'opérateur de différentiation à droite: $D_{x_i}^+ p_i(x_i)$ est donc le gradient à droite de $p_i(x_i)$ par rapport à la variable x_i (voir Notations).

On a les résultats suivants:

Théorème 3.3 (Détermination Pratique de Système Majorant)

1) Si la paire suivante est bornée et vérifie:

$$\bar{M}(t, x) = [\bar{\mu}_{ij}(t, x)], \bar{\mu}_{ij}: \mathcal{T} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}, \bar{M}(t, x) \in C(\mathcal{T} \times \mathcal{S}), \quad (3.52)$$

$$\bar{q}(t, x) = [\bar{\theta}_i(t, x)], \bar{\theta}_i: \mathcal{T} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}_+, \bar{q}(t, x) \in C(\mathcal{T} \times \mathcal{S}), \quad (3.53)$$

alors, le système (3.18) défini pour cette paire (3.52) (3.53) est un **système majorant** $(\mathcal{T}_1, \mathcal{X}_c \times \mathcal{Z}_c)$ -local de (3.19).

2) Si la paire constante suivante est bornée:

$$\bar{M} = [\bar{\mu}_{ij}], \bar{\mu}_{ij} = \sup_{\substack{y \in \mathcal{S} \\ t \in \mathcal{T}}} \bar{\mu}_{ij}(t, y), (\forall i, j = 1, 2, \dots, k), \quad (3.54)$$

$$\bar{q} = [\bar{\theta}_i], \bar{\theta}_i = \sup_{\substack{y \in \mathcal{S} \\ t \in \mathcal{T}}} \bar{\theta}_i(t, y), (\forall i = 1, 2, \dots, k), \quad (3.55)$$

alors, le système (3.18) défini pour cette paire (3.54) (3.55) est un **système majorant** $(\mathcal{T}_1, \mathcal{X}_c \times \mathcal{Z}_c)$ -local de (3.19).

De plus si \bar{M} est asymptotiquement stable et si c (intervenant dans la définition du domaine \mathcal{X}_c) vérifie $-\bar{M} c > \bar{q}$ alors: $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_e$.

3) Toute paire bornée $(\bar{M}^*(.), \bar{q}^*(.))$ vérifiant, pour tout (t, x) dans $\mathcal{T} \times \mathcal{S}$:

$$\bar{M}^*(.) \geq \bar{M}(t, x), \bar{M}^*(.) \in C(\mathcal{T} \times \mathcal{S}), \quad (3.56)$$

$$\bar{q}^*(.) \geq \bar{q}(t, x), \bar{q}^*(.) \in C(\mathcal{T} \times \mathcal{S}), \quad (3.57)$$

avec $(.) = (t)$, ou (x) , ou (t, x) , alors le système (3.18) défini pour cette paire (3.56) (3.57) est un **système majorant** $(\mathcal{T}_1, \mathcal{X}_c \times \mathcal{Z}_c)$ -local de (3.19).

Par exemple $(\bar{M}^*(.), \bar{q}^*(.))$, peut être le Sup de $(\bar{M}(t, x), \bar{q}(t, x))$ sur \mathcal{T} ou \mathcal{S} .

4) Soit deux ensembles connexes \mathcal{X}_{c1} et \mathcal{X}_{c2} tels que $\mathcal{X}_{c1} \subset \mathcal{X}_{c2} \subset \mathcal{S}$ et la paire $(\bar{M}(t, x), \bar{q}(t, x))$ vérifiant les hypothèses de la propriété 1). Si:

- pour tout x de \mathcal{X}_{c1} on a pour tout t de \mathcal{T} : $\bar{M}(t, x) \leq \bar{M}_1$ et $\bar{q}(t, x) \leq \bar{q}_1$,

- pour tout x de $X_{c_2} - X_{c_1}$ on a pour tout t de \mathcal{T} : $\bar{M}(t, x) \leq \bar{M}_2$ et $\bar{q}(t, x) \leq \bar{q}_2$,

alors la paire:

$$\bar{M}(\cdot) = \text{Max} \{ \bar{M}_1, \bar{M}_2 \} \text{ (élément par élément),} \quad (3.58)$$

$$\bar{q}(\cdot) = \text{Max} \{ \bar{q}_1, \bar{q}_2 \} \text{ (élément par élément),} \quad (3.59)$$

définit un **système majorant** $(\mathcal{T}_2, X_{c_2} \times Z_{c_2})$ -local.

Preuve:

Les hypothèses du Lemme 3.3 étant vérifiées, il suffit de l'appliquer dans chacun des cas rencontrés.

Remarques:

- 1) On a des résultats analogues pour les majorations rétrogrades.
- 2) En général, les conditions de régularité sur $A(t, x, d)$ et $b(t, x, d)$ assurant la continuité des solutions $x(t)$ de (3.18 a), engendrent les mêmes propriétés pour le système défini par $(\bar{M}(\cdot), \bar{q}(\cdot))$, excepté à l'origine. Ces propriétés entraînent la continuité des solutions $z(t)$ de (3.18 b).

2.3.2 Majorants Constants et Matrices Metzleriennes

Le but des méthodes de majoration est de simplifier les composantes qui auraient rendu l'étude de la stabilité difficile voire impossible. Ainsi, il est préférable d'effectuer une majoration suffisante pour obtenir un système majorant assez simple pour permettre de conclure sur la propriété étudiée. Le cas le plus simple est bien sûr celui défini en (3.54) et (3.55), où \bar{M} et \bar{q} sont constants ou bien plus généralement définis par:

$$\bar{M} > \left\{ \begin{array}{l} \bar{M}(x) \\ \bar{M}(t) \end{array} \right\} > \bar{M}(t, x), \quad \bar{q} > \left\{ \begin{array}{l} \bar{q}(x) \\ \bar{q}(t) \end{array} \right\} > \bar{q}(t, x). \quad (3.60)$$

La paire (\bar{M}, \bar{q}) obtenue, vérifie:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \bar{M} \text{ telle que } \bar{\mu}_{ij} \geq 0, \forall i \neq j = 1, 2, \dots, k. \\ 2) \bar{q} \geq 0. \end{array} \right. \quad (3.61)$$

De plus, si \bar{M} est asymptotiquement stable, \bar{M} est dite une “- M matrice” ou “opposée d’une matrice de Metzler” (c’est-à-dire $\bar{\mu}_{ij} \geq 0, \forall i \neq j = 1, 2, \dots, k$ et $\text{Re}(\lambda(\bar{M})) < 0$). Elle présente alors des propriétés intéressantes (voir [FIEDLER 62]).

2.3.3 Applications aux Normes Usuelles

Si on choisit la N.V $p(x) = [|x_1| \dots |x_n|]^T$, alors on associe à la matrice $A(t, x, d)$ et au vecteur $b(t, x, d)$ relatifs à la décomposition (3.45), respectivement la matrice $\bar{M}(t, x)$ et le vecteur $\bar{q}(t, x)$ définis par:

$$\begin{aligned} \bar{M}(t, x) &= \text{Sup}_{d \in \mathcal{E}_D} \left[\begin{array}{ccc|ccc} & & & | \cdot | & | \cdot | & | \cdot | \\ & & & | \cdot | & & | \cdot | \\ & & & | \cdot | & | \cdot | & | \cdot | \end{array} \right], \text{ (élément par élément)} \\ \bar{q}(t, x) &= \text{Sup}_{d \in \mathcal{E}_D} \left[\begin{array}{c} | \cdot | \\ | \cdot | \\ | \cdot | \end{array} \right], \text{ (élément par élément).} \end{aligned} \quad (3.62)$$

Les éléments de \bar{q} et les éléments hors-diagonaux de \bar{M} sont remplacés par leurs valeurs absolues, puis par leurs Sup sur \mathcal{E}_D . Les éléments diagonaux de \bar{M} sont directement remplacés par leurs Sup sur \mathcal{E}_D .

Si on choisit une décomposition de l’espace d’état conduisant à une décomposition de la matrice $A(t, x, d)$ en blocs $A_{ij}(t, x, d)$: on note L_i et C_j les ensembles d’indices des lignes et des colonnes.

Dans ce cas si $p_i(x) = p_i(x_i)$ est la norme euclidienne de x_i ($p_i(x_i) = \sqrt{x_i^T x_i}$), alors on associe à la matrice $A(t, x, d)$ et au vecteur $b(t, x, d)$ relatifs à la décomposition (3.45), respectivement la matrice $\bar{M}(t, x)$ et le vecteur $\bar{q}(t, x)$ définis par leurs composantes respectives $\bar{\mu}_{ij}(t, x)$ et $\bar{\theta}_i(t, x)$:

Chapitre 3

$$\begin{aligned}\bar{\mu}_{ii}(t, x) &= \text{Sup}_{d \in \mathcal{E}_D} \text{Max}_{s \in L_i} \left[a_{ss} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{l \in L_i \\ l \neq s}} |a_{sl} + a_{ls}| \right], \\ \bar{\mu}_{ij}(t, x) &= \frac{1}{2} \text{Sup}_{d \in \mathcal{E}_D} \left[\left[\text{Max}_{s \in L_i} \sum_{l \in C_j} |a_{sl}| \right] + \left[\text{Max}_{l \in L_j} \sum_{s \in C_i} |a_{ls}| \right] \right], \\ (\forall i, j = 1, 2, \dots, k),\end{aligned}\tag{3.63}$$

$$\bar{\theta}_i(t, x) = \sqrt{\sum_{s \in L_i} s} \text{Sup}_{d \in \mathcal{E}_D} \left[\sum_{s \in L_i} |b_s| \right], (\forall i = 1, 2, \dots, k).\tag{3.64}$$

De même si $p_i(x) = p_i(x_i)$ est la norme infinie ($p_i(x_i) = \text{Max}_{s \in L_i} |x_s|$) alors on associe à la matrice $A(t, x, d)$ et au vecteur $b(t, x, d)$ relatifs à la décomposition (3.45), respectivement la matrice $\bar{M}(t, x)$ et le vecteur $\bar{q}(t, x)$ définis par leurs composantes respectives $\bar{\mu}_{ij}(t, x)$ et $\bar{\theta}_i(t, x)$:

$$\begin{aligned}\bar{\mu}_{ii}(t, x) &= \text{Sup}_{d \in \mathcal{E}_D} \text{Max}_{s \in L_i} \left[a_{ss} + \sum_{\substack{l \in L_i \\ l \neq s}} |a_{sl}| \right], \\ \bar{\mu}_{ij}(t, x) &= \text{Sup}_{d \in \mathcal{E}_D} \left[\text{Max}_{s \in L_i} \sum_{l \in C_j} |a_{sl}| \right], \\ (\forall i, j = 1, 2, \dots, k),\end{aligned}\tag{3.65}$$

$$\bar{\theta}_i(t, x) = \text{Sup}_{d \in \mathcal{E}_D} \left[\sum_{s \in L_i} |b_s| \right], (\forall i = 1, 2, \dots, k).\tag{3.66}$$

2.3.4 Exemples de Déterminations Pratiques

La paramétrisation introduite dans les exemples suivants nous permettra dans le chapitre 4 d'optimiser la décomposition (3.45). Ceci afin de faire apparaître des termes constants dans le système majorant associé, conduisant ainsi à une utilisation simple du système majorant et à la possibilité d'optimiser la taille des divers ensembles recherchés.

2.3.4.1 Exemple avec Paramétrisation de la Décomposition

Considérons le système dynamique défini par:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 1-x_1^2-x_2^2 & 0.1 \\ 0.5 & 1-x_1^2-x_2^2 \end{bmatrix} x + d(t, x), \quad (3.67)$$

\mathcal{E}_D étant l'ensemble des fonctions $d(t, x)$ vérifiant:

$$\begin{aligned} d(t, x) &= [\delta_1(t, x) x_2, \delta_2(t, x) x_1]^T, \\ |\delta_1(t, x)| &\leq 0.9, \delta_1(t, x) \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2), \\ |\delta_2(t, x)| &\leq 0.5, \delta_2(t, x) \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2). \end{aligned}$$

On choisit d'utiliser la N.V suivante:

$$p(x) = [|x_1|, |x_2|]^T. \quad (3.68)$$

Soit c un vecteur strictement positif de \mathbb{R}^2 :

$$c = [(\chi_1, \chi_2)]^T. \quad (3.69)$$

On considère l'ensemble paramétré $\mathcal{X}_c \subset \mathbb{R}^2$ défini par:

$$\mathcal{X}_c = \{x \in \mathbb{R}^2: p(x) < c\}. \quad (3.70)$$

L'utilisation de cette paramétrisation conduira à des méthodes d'optimisations traitées dans le chapitre 4.

On s'intéresse à la représentation suivante:

$$\frac{dx}{dt} = A_1(t, x, d) x + b_1(t, x, d), \text{ pour } x \in \bar{\mathcal{X}}_c, \quad (3.71)$$

$$\frac{dx}{dt} = A_2(t, x, d) x + b_2(t, x, d), \text{ pour } x \in \mathbb{R}^n - \bar{\mathcal{X}}_c. \quad (3.72)$$

avec:

$$A_1(t, x, d) = \begin{bmatrix} 1-\chi_1^2-\chi_2^2 & 0.1+\delta_1(t, x) \\ 0.5+\delta_2(t, x) & 1-\chi_1^2-\chi_2^2 \end{bmatrix}, \quad (3.73)$$

$$b_1(t, x, d) = \begin{bmatrix} x_1 (\chi_1^2 - x_1^2 + \chi_2^2 - x_2^2) \\ x_2 (\chi_1^2 - x_1^2 + \chi_2^2 - x_2^2) \end{bmatrix}, \quad (3.74)$$

Chapitre 3

$$A_2(t, x, d) = \begin{bmatrix} 1-x_1^2-x_2^2 & 0.1+\delta_1(t, x) \\ 0.5+\delta_2(t, x) & 1-x_1^2-x_2^2 \end{bmatrix}, \quad (3.75)$$

$$b_2(t, x, d) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.76)$$

La paire constante $(\bar{M}_1(c), \bar{q}_1(c))$, permet de majorer $(\bar{M}(t, x), \bar{q}(t, x))$ sur \mathcal{X}_c , avec:

$$\bar{M}_1(c) = \begin{bmatrix} 1-\chi_1^2-\chi_2^2 & 1 \\ 1 & 1-\chi_1^2-\chi_2^2 \end{bmatrix}, \quad (3.77)$$

$$\bar{q}_1(c) = \frac{2(\chi_1^2+\chi_2^2)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.78)$$

La paire constante $(\bar{M}_2(c), \bar{q}_2(c))$, permet de majorer $(\bar{M}(t, x), \bar{q}(t, x))$ sur $(\mathbb{R}^2-\mathcal{X}_c)$, avec:

$$\bar{M}_2(c) = \begin{bmatrix} 1-\chi_1^2-\chi_2^2 & 1 \\ 1 & 1-\chi_1^2-\chi_2^2 \end{bmatrix}, \quad (3.79)$$

$$\bar{q}_2(c) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.80)$$

Ainsi, la paire $(\bar{M}(c), \bar{q}(c))$ permet de définir un système majorant global du système initial (3.63) (Point 4 du Théorème 3.3), avec:

$$\bar{M}(c) = \begin{bmatrix} 1-\chi_1^2-\chi_2^2 & 1 \\ 1 & 1-\chi_1^2-\chi_2^2 \end{bmatrix}, \quad (3.81)$$

$$\bar{q}(c) = \frac{2(\chi_1^2+\chi_2^2)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.82)$$

On verra, dans l'exemple 1 de la Section 1.2.1 du Chapitre 4, les conclusions que l'on peut obtenir concernant le système initial.

2.3.4.2 Exemples de Calculs pour des Systèmes Non Linéaires Non Autonomes

Exemple 1:

Considérons le système dynamique défini par:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -1.5 & 0.9+0.1 d(t) \\ -0.5 & 1-x_2^2 \end{bmatrix} x, d(t) \in \mathcal{E}_D, \quad (3.83)$$

\mathcal{E}_D étant l'ensemble des fonctions $d(t)$ vérifiant: $d(t) \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$, $|d(t)| \leq 1$.

On choisit d'utiliser la N.V suivante:

$$p(x) = [|x_1|, |x_2|]^T. \quad (3.84)$$

On reprend la démarche de l'exemple précédent, avec:

$$A_1(t, x, d) = \begin{bmatrix} -1.5 & 0.9+0.1 d(t) \\ -0.5 & 1-x_2^2 \end{bmatrix}, \quad (3.85)$$

$$b_1(t, x, d) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 (x_2^2 - x_2^2) \end{bmatrix}, \quad (3.86)$$

$$A_2(t, x, d) = \begin{bmatrix} -1.5 & 0.9+0.1 d(t) \\ -0.5 & 1-x_2^2 \end{bmatrix}, \quad (3.87)$$

$$b_2(t, x, d) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.88)$$

La paire constante $(\bar{M}_1(c), \bar{q}_1(c))$, permet de majorer $(\bar{M}(t, x), \bar{q}(t, x))$ sur \mathcal{X}_c , avec:

$$\bar{M}_1(c) = \begin{bmatrix} -1.5 & 1 \\ 0.5 & 1-x_2^2 \end{bmatrix}, \quad (3.89)$$

$$\bar{q}_1(c) = \frac{2x_2^3}{3\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.90)$$

La paire constante $(\bar{M}_2(c), \bar{q}_2(c))$, permet de majorer $(\bar{M}(t, x), \bar{q}(t, x))$ sur $(\mathbb{R}^2 - \mathcal{X}_c)$, avec:

Chapitre 3

$$\bar{M}_2(c) = \begin{bmatrix} -1.5 & 1 \\ 0.5 & 1-\chi_2^2 \end{bmatrix}, \quad (3.91)$$

$$\bar{q}_2(c) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.92)$$

Ainsi, la paire $(\bar{M}(c), \bar{q}(c))$ permet de définir un système majorant global du système initial (3.83) (Point 4 du Théorème 3.3), avec:

$$\bar{M}(c) = \begin{bmatrix} -1.5 & 1 \\ 0.5 & 1-\chi_2^2 \end{bmatrix}, \quad (3.93)$$

$$\bar{q}(c) = \frac{2\chi_2^3}{3\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.94)$$

On verra, dans l'exemple 2 de la Section 1.2.1 du Chapitre 4, les conclusions que l'on peut obtenir concernant le système initial.

Exemple 2:

Considérons le système dynamique défini par:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -2+10^{-2}|x_2| & 0.9 \cos t + 8 \cdot 10^{-7}|x_2^3| \\ -0.5 \sin t & 1-x_2^2 \end{bmatrix} x, x \in \mathbb{R}^2. \quad (3.95)$$

On choisit d'utiliser la N.V suivante:

$$p(x) = [|x_1|, |x_2|]^T. \quad (3.96)$$

Soit $c_2 = [\infty, \chi_2]^T$ un vecteur strictement positif de \mathbb{R}^2 et $X_{c_2} \subset \mathbb{R}^2$ le domaine paramétré défini par:

$$X_{c_2} = \{x \in \mathbb{R}^2: p(x) < c_2, c_2 > 0, c_2 \in \mathbb{R}^2\}. \quad (3.97)$$

On introduit X_{c_2} afin de pouvoir obtenir un système majorant $(X_{c_2} \times Z_{c_2})$ -local du système initial.

Soit $c_1 = [\infty, \chi_1]^T$ un vecteur strictement positif de \mathbb{R}^2 et $X_{c_1} \subset X_{c_2}$ (c'est-à-dire $c_2 > c_1$):

Normes Vectorielles et Systèmes de Comparaisons

$$\mathcal{X}_{c_1} = \{x \in \mathbb{R}^2: p(x) < c_1, c_1 > 0, c_1 \in \mathbb{R}^2\}. \quad (3.98)$$

On s'intéresse à la représentation suivante:

$$\frac{dx}{dt} = A_1(t, x, d) x + b_1(t, x, d), \text{ pour } x \in \bar{\mathcal{X}}_{c_1}, \quad (3.99)$$

$$\frac{dx}{dt} = A_2(t, x, d) x + b_2(t, x, d), \text{ pour } x \in (\mathcal{X}_{c_2} - \bar{\mathcal{X}}_{c_1}). \quad (3.100)$$

avec:

$$A_1(t, x, d) = \begin{bmatrix} -2+10^{-2}|x_2| & 0.9 \cos t + 8 \cdot 10^{-7}|x_2^3| \\ -0.5 \sin t & 1-\chi_1^2 \end{bmatrix}, \quad (3.101)$$

$$b_1(t, x, d) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 (c_1^2 - x_2^2) \end{bmatrix}, \quad (3.102)$$

$$A_2(t, x, d) = \begin{bmatrix} -2+10^{-2}|x_2| & 0.9 \cos t + 8 \cdot 10^{-7}|x_2^3| \\ -0.5 \sin t & 1-x_2^2 \end{bmatrix}, \quad (3.103)$$

$$b_2(t, x, d) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.104)$$

La paire constante $(\bar{M}_1(c_1), \bar{q}_1(c_1))$, permet de majorer $(\bar{M}(t, x), \bar{q}(t, x))$ sur $\bar{\mathcal{X}}_{c_1}$, avec:

$$\bar{M}_1(c_1) = \begin{bmatrix} -2+10^{-2}\chi_1 & 0.9+8 \cdot 10^{-7}\chi_1^3 \\ 0.5 & 1-\chi_1^2 \end{bmatrix}, \quad (3.105)$$

$$\bar{q}_1(c_1) = \frac{2\chi_1^3}{3\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.106)$$

La paire constante $(\bar{M}_2(c_2, c_1), \bar{q}_2(c_2, c_1))$, permet de majorer $(\bar{M}(t, x), \bar{q}(t, x))$ sur $(\mathcal{X}_{c_2} - \bar{\mathcal{X}}_{c_1})$, avec:

$$\bar{M}_2(c_2, c_1) = \begin{bmatrix} -2+10^{-2}\chi_2 & 0.9+8 \cdot 10^{-7}\chi_2^3 \\ 0.5 & 1-\chi_1^2 \end{bmatrix}, \quad (3.107)$$

$$\bar{q}_2(c_2, c_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.108)$$

Chapitre 3

Ainsi, la paire $(\bar{M}(c_2, c_1), \bar{q}(c_2, c_1))$ permet de définir un système majorant $(\mathcal{T}_2, \mathcal{X}_{c_2} \times \mathcal{Z}_{c_2})$ -local du système initial (3.95) (Point 4 du Théorème 3.3), avec:

$$\bar{M}(c_2, c_1) = \begin{bmatrix} -2+10^{-2}\chi_2 & 0.9+8 \cdot 10^{-7}\chi_2^3 \\ 0.5 & 1-\chi_1^2 \end{bmatrix}, \quad (3.109)$$

$$\bar{q}(c_2, c_1) = \frac{2\chi_1^3}{3\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.110)$$

De plus si $\bar{M}(c_2, c_1)$ est stable et c_2 est tel que $-\bar{M}(c_2, c_1) \chi_2 > \bar{q}(c_2, c_1)$ alors cette même paire $(\bar{M}(c_2, c_1), \bar{q}(c_2, c_1))$ permet de définir un système majorant $(\mathcal{X}_{c_2} \times \mathcal{Z}_{c_2})$ -local du système initial.

On verra, dans l'exemple de la Section 1.2.2 du Chapitre 4, les conclusions que l'on peut obtenir concernant le système initial.

2.4 Extensions aux Systèmes régis par des Inégalités Différentielles

Considérons le système décrit par:

$$\underline{f}(t, x) \leq \frac{dx}{dt} \leq \bar{f}(t, x), t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n, \quad (3.111)$$

avec $\underline{x}(t; t_0, x_0)$ continue (et dérivable) par rapport à la variable temporelle t .

Cette représentation permet de modéliser des processus comportant des paramètres incertains conduisant à des dynamiques d'état mal définies. Elle inclue aussi des modèles de processus régis par des E.D comportant des commandes ou des perturbations inconnues mais bornées (voir par exemple le système (3.135)). Dans ce cas l'hypothèse de continuité de $\underline{x}(t; t_0, x_0)$ n'est pas restrictive, puisque dans la plupart des cas l'existence du système physique induit cette propriété.

Le cas particulier où $\underline{f}(t, x) = \bar{f}(t, x)$ revient au cas classique des E.D.

2.4.1 Remarque Générale sur la Majoration

Nous avons vu, dans la section 1.1, que lorsque $\underline{f}(t, y)$ et $\bar{f}(t, y)$ sont quasi-monotones en y , le comportement de l'état vérifiant (3.111) peut être "encadré" par les comportements des deux systèmes (3.112) et (3.113):

$$\frac{dy}{dt} = \underline{f}(t, y), t \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^n, \quad (3.112)$$

$$\frac{dy}{dt} = \bar{f}(t, y), t \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^n. \quad (3.113)$$

Trois remarques peuvent être faites:

1) La résolution de (3.112) ou (3.113) est souvent un problème difficile lorsque la dimension de la variable d'état est plus grande que 1.

2) Il est parfois difficile de déduire directement des informations qualitatives sur l'évolution de l'état à partir de (3.112) ou (3.113).

3) Lorsque $\underline{f}(t, y)$ et $\bar{f}(t, y)$ ne vérifient pas les propriétés de la définition 3.1, il n'y a pas de conclusion directe possible.

2.4.2 Majorations par des Systèmes Autonomes

Compte tenu de ces remarques, il apparaît utile de construire une nouvelle variable $\tilde{x} = [x, p(x)]^T$ (où $p(x)$ est une N.V) permettant d'obtenir des informations relatives au comportement de x (voir Section 2 Chapitre 4) par un principe de comparaison. Ces informations seront déduites d'un système de majoration (ou de majoration rétrograde) dont on va expliquer ici la construction.

2.4.2.1 Constructions

Considérons le système suivant:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) = A(t, x) x + b(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n, \quad (3.114)$$

et $p(x)$ une N.V (régulière) de dimension k .

On reprend les définitions de la section 2.3, et notamment pour tout i et j de $\{1, \dots, k\}$:

$$x \in \mathbb{R}^n \text{ et } y \in \mathbb{R}^n, x_i = P_i x, y_i = P_i y. \quad (3.115)$$

$$b_i(t, x) = P_i b(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n,$$

$$\bar{\theta}_i^f(x) = \sup_{t \in \mathbb{R}} |[D_{x_i}^+ p_i(x_i)]^T b_i(t, x)|, \quad (\forall i = 1, \dots, k), \quad (3.116)$$

$$\bar{q}^f(x) = [\bar{\theta}_i^f(x)]^T. \quad (3.117)$$

$$\underline{\theta}_i^f(x) = \inf_{t \in \mathbb{R}} -|[D_{x_i}^+ p_i(x_i)]^T b_i(t, x)|, \quad (\forall i = 1, \dots, k), \quad (3.118)$$

$$\underline{q}^f(x) = [\underline{\theta}_i^f(x)]^T. \quad (3.119)$$

$$A_{ij}(t, x) = P_i A(t, x) P_j, \quad (\forall i, j = 1, \dots, k),$$

$$m_{ij}^f(t, x, y) = \frac{[D_{y_i}^+ p_i(y_i)]^T A_{ij}(t, x) y_j}{p_j(y_j)}. \quad (3.120)$$

$$\bar{\mu}_{ij}^f(x) = \sup_{\substack{y \in \mathbb{R}^n \\ t \in \mathbb{R}}} m_{ij}^f(t, x, y), \quad (\forall i, j = 1, \dots, k), \quad (3.121)$$

$$\bar{M}^f(x) = [\bar{\mu}_{ij}^f(x)]. \quad (3.122)$$

$$\underline{\mu}_{ij}^f(x) = \inf_{\substack{y \in \mathbb{R}^n \\ t \in \mathbb{R}}} m_{ij}^f(t, x, y), \quad (\forall i, j = 1, \dots, k), \quad (3.123)$$

$$\underline{M}^f(x) = [\underline{\mu}_{ij}^f(x)]. \quad (3.124)$$

On suppose que les termes définis ci-dessus ont un sens.

La N.V $p(x)$ vérifie le lemme suivant:

Lemme 3.5 [PERRUQUETTI 93b]

Pour toute solution x de (3.114) continue sur I , la N.V associée vérifie:

$$\underline{M}^f(x) p(x) + \underline{q}^f(x) \leq D_i^+ p(x) \leq \bar{M}^f(x) p(x) + \bar{q}^f(x), \quad (3.125)$$

où $\bar{M}^f(x)$, $\bar{q}^f(x)$, $\underline{M}^f(x)$ et $\underline{q}^f(x)$ sont définis respectivement par (3.122), (3.117), (3.124), (3.119).

Ce lemme sera utilisé d'une part pour démontrer le lemme 3.6 et d'autre part pour construire des **systèmes majorants autonomes** dans la section 2 du chapitre 4.

Preuve:

Soit i un indice quelconque de $\{1, \dots, k\}$, on a:

$$D_i^+ p_i(x) = [D_{x_i}^+ p_i(x)]^T P_i (A(t, x) x + b(t, x)),$$

qui se réécrit sous la forme:

$$D_i^+ p_i(x) = \sum_{j=1}^k [D_{x_i}^+ p_i(x)]^T P_i A(t, x) P_j x_j + [D_{x_i}^+ p_i(x)]^T b_i(t, x). \quad (3.126)$$

Or, lorsque les quantités (3.116) et (3.117) ont un sens, on a:

$$\underline{\theta}_i^f(x) \leq [D_{x_i}^+ p_i(x)]^T b_i(t, x) \leq \bar{\theta}_i^f(x). \quad (3.127)$$

De plus, on a:

$$[D_{x_i}^+ p_i(x)]^T P_i A(t, x) P_j x_j = \frac{[D_{x_i}^+ p_i(x)]^T A_{ij}(t, x) x_j}{p_j(x_j)} p_j(x_j).$$

Donc, lorsque les quantités (3.121) et (3.123) ont un sens, on a:

Chapitre 3

$$\underline{\mu}_{ij}^f(x) p_j(x_j) \leq [D_x^+ p_i(x)]^T P_i A(t, x) P_j x_j \leq \bar{\mu}_{ij}^f(x) p_j(x_j). \quad (3.128)$$

Les relations (3.126), (3.127) et (3.128) prouvent le lemme 3.4.

On peut alors appliquer ce résultat au système (3.111) en utilisant la notation suivante:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \text{avec } \underline{f}(t, x) \leq f(t, x) \leq \bar{f}(t, x). \quad (3.129)$$

On considère, comme en (3.113), les décompositions suivantes:

$$\underline{f}(t, x) = \underline{A}(t, x) x + \underline{b}(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (3.130)$$

$$\bar{f}(t, x) = \bar{A}(t, x) x + \bar{b}(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.131)$$

Lemme 3.6 [PERRUQUETTI 93b]

Soient les décompositions de $\underline{f}(t, x)$ (3.130) et $\bar{f}(t, x)$ (3.131) telles que:

$$\underline{A}(t, x) x \leq \bar{A}(t, x) x, \quad \underline{b}(t, x) \leq \bar{b}(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (3.132)$$

Soit $\underline{M}(x)$, $\underline{q}(x)$, $\bar{M}(x)$ et $\bar{q}(x)$ définis par:

$$\bar{q}(x) = [\sup_{\underline{b} \leq b \leq \bar{b}} (\bar{\theta}_i^f(x))], \quad (3.133)$$

$$\bar{M}(x) = [\sup_{\underline{A} \leq A \leq \bar{A}} (\bar{\mu}_{ij}^f(x))], \quad (3.134)$$

$$\underline{q}(x) = [\inf_{\underline{b} \leq b \leq \bar{b}} (\underline{\theta}_i^f(x))], \quad (3.135)$$

$$\underline{M}(x) = [\inf_{\underline{A} \leq A \leq \bar{A}} (\underline{\mu}_{ij}^f(x))], \quad (3.136)$$

Alors, pour toute solution x continue par rapport au temps vérifiant l'inégalité (3.111), la N.V associée vérifie:

$$\underline{M}(x) p(x) + \underline{q}(x) \leq D_i^+ p(x) \leq \bar{M}(x) p(x) + \bar{q}(x). \quad (3.137)$$

Preuve:

Si x est une fonction continue et dérivable par rapport au temps vérifiant l'inégalité différentielle (3.111), elle vérifie (3.129), où f est une fonction inconnue.

Soit i un indice quelconque de $\{1, \dots, k\}$, en utilisant (3.114) on obtient:

$$D_i^+ p_i(x) = \sum_{j=1}^k [D_{x_j}^+ p_i(x)]^T P_i A(t, x) P_j x_j + [D_{x_j}^+ p_i(x)]^T b_i(t, x). \quad (3.138)$$

Le choix de f et les relations (3.129) à (3.132) impliquent:

$$\begin{aligned} \underline{A}_{ij}(t, x) \leq A_{ij}(t, x) \leq \bar{A}_{ij}(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n, \\ \underline{b}_i(t, x) \leq b_i(t, x) \leq \bar{b}_i(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (3.139)$$

(3.139), (3.129) et les relations (3.133) à (3.135) conduisent à (3.137).

Remarques:

- 1) On peut obtenir des résultats similaires pour des inégalités à validité locale.
- 2) Pour les N.V usuelles (voir Section 2.3.3), les relations (3.133) à (3.136) se simplifient, et on peut expliciter les différents termes relatifs à $f(t, x)$ en fonction des termes correspondants relatifs à $\underline{f}(t, x)$ et à $\bar{f}(t, x)$.

2.4.2.2 Lemmes de Majorations

Les résultats précédents (Section 2.4.2.1) montrent comment encadrer les variations de la dérivée à droite temporelle de la variable $p(x)$. Ainsi l'utilisation des lemmes précédents (Lemmes 2.5 et 2.6) permet de majorer $p(x)$. Cependant, il est évident que dans ce cas les systèmes ainsi obtenus sont fortement couplés à la variable d'état initiale x . Donc, de façon pratique, on ne pourra obtenir un encadrement de $p(x)$ que si on connaît x . Ce cercle vicieux peut être "brisé" en ré-écrivant (3.137):

$$\underline{M}(x) p(x) + \underline{q}(x) \leq D_i^+ p(x) \leq \bar{M}(x) p(x) + \bar{q}(x),$$

de façon à ne faire intervenir que la variable $p(x)$, ce qui nous donne:

Chapitre 3

$$\underline{g}(p(x)) \leq D_t^+ p(x) \leq \bar{g}(p(x)). \quad (3.140)$$

Ceci est notamment possible lorsqu'on prend $p(x) = [|x_1| \dots |x_n|]^T$. Cette formalisation est possible avec l'utilisation de N.V, alors qu'avec l'utilisation de F.V.L elle apparaît plus délicate.

Considérons les systèmes:

$$\frac{dz}{dt} = \bar{g}(z), t \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}^k, \quad (3.141)$$

$$\frac{dz}{dt} = \underline{g}(z), t \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}^k. \quad (3.142)$$

Les lemmes suivants permettent de majorer le comportement de $p(x)$. Ainsi, en les combinant avec ceux du chapitre 2 concernant les systèmes non linéaires autonomes, nous établirons dans la section 2 du chapitre 4 des résultats statuant sur le comportement du système initial.

Lemme 3.7 (Lemme de Majoration Autonome) [PERRUQUETTI 93b]

Soient:

1) $\bar{g}(z) \in C^1(S, \mathbb{R}^k)$ une fonction localement quasi-monotone non-décroissante en z par rapport à S .

2) $\mathcal{U} \subset S$, un ensemble positivement invariant relativement à (3.141).

3) y une fonction continue par rapport au temps vérifiant:

$$D_t^+ y \leq \bar{g}(y), t \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^k. \quad (3.143)$$

4) $\bar{g}(0) \geq 0$.

Alors:

1) Pour tout point $z_0 \in \mathcal{U}$, $\underline{z}(t; t_0, z_0)$ la solution de (3.141) passant par z_0 à t_0 est unique (continue par rapport au temps) et définie pour tout instant $t \in \mathbb{R}$,

2) $\{y \in \mathbb{R}^k : 0 \leq y\}$ est positivement invariant relativement à (3.143).

3) Pour tout y_0 vérifiant l'inégalité $y_0 \leq z_0$, avec $z_0 \in \mathcal{U}$, l'inégalité:

$\underline{y}(t; t_0, y_0) \leq \underline{z}(t; t_0, z_0)$, est vérifiée pour tout instant $t \geq t_0$.

4) \mathcal{U} est positivement invariant relativement à (3.143).

Preuve:

Elle est basée en partie sur des résultats classiques:

- 1) Voir [HIRSCH 74] p.172.
- 2) La preuve de ce point peut être construite sous une forme similaire à celle du point 2) du Lemme 3.3, en utilisant la condition 4) du lemme 3.7 en remplacement de la condition 2) du Lemme 3.3.
- 3) Voir [LAKSHMIKANTHAM 69] p.59 combiné avec le point 1),
- 4) Ce dernier point résulte directement de la positive invariance de \mathcal{U} par rapport à (3.141).

Remarques:

- 1) Il est important de noter que la partie droite de l'inégalité (3.140): $\bar{g}(p(x))$ est similaire à celle de (3.143) et on peut poser $y = p(x)$.
- 2) Si à l'aide d'une F.V.L on peut construire une inégalité du type (3.143) où la fonction obtenue vérifie les différents points du lemme 3.7, alors on pourra obtenir des conclusions semblables.

Lemme 3.8 [PERRUQUETTI 93b]

(Lemme de Majoration Rétrograde Autonome)

Soient:

- 1) $\underline{g}(z) \in C^1(\mathcal{S}, \mathbb{R}^k)$ une fonction localement quasi-monotone non-croissante en z par rapport à \mathcal{S} .
- 2) $\mathcal{U} \subset \mathcal{S}$, un ensemble négativement invariant relativement à (3.142).
- 3) y une fonction continue par rapport au temps vérifiant:

$$\underline{g}(y) \leq D_t^+ y, \quad t \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}^k, \quad (3.144)$$

- 4) $\bar{g}(0) \leq 0$.

Alors:

- 1) Pour tout point $z_0 \in \mathcal{U}$, $\underline{z}(t; t_0, z_0)$ la solution de (3.142) passant par z_0 à t_0 est unique (continue par rapport au temps) et définie pour tout instant $t \in \mathbb{R}$,
- 2) $\{y \in \mathbb{R}^k : 0 \leq y\}$ est négativement invariant relativement à (3.144).
- 3) Pour tout y_0 vérifiant l'inégalité $y_0 \leq z_0$, avec $z_0 \in \mathcal{U}$, l'inégalité: $\underline{y}(t; t_0, y_0) \leq \underline{z}(t; t_0, z_0)$, est vérifiée pour tout instant $t \leq t_0$.
- 4) \mathcal{U} est négativement invariant relativement à (3.144).

2.4.3 Exemples de Détermination Pratique

Exemple 1:

Soit le système défini par:

$$\underline{f}(t, x) \leq \frac{dx}{dt} \leq \bar{f}(t, x), t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^3, \quad (3.145)$$

avec $\underline{x}(t; t_0, x_0)$ continue par rapport au temps t et:

$$\underline{f}(t, x) = f(t, x) - 0.5 |d(t)|, \bar{f}(t, x) = f(t, x) + |d(t)|, -1 \leq d_i(t) \leq 1, \quad (3.146)$$

avec:

$$f(t, x) = \begin{bmatrix} -2-10^{-2} \cos t x_2 & 0.9 \sin t & 8 \cdot 10^{-7} x_2^3 \\ 0.5 \sin t & 1-x_2^2-x_3^2-3|x_2 x_3| & \cos t x_2 x_3 \\ 0.5 & \sin t x_2 x_3 & 1-x_2^2-x_3^2-3|x_2 x_3| \end{bmatrix} x. \quad (3.147)$$

Soit $p(x)$ la N.V définie par:

$$p(x) = \begin{bmatrix} |x_1| \\ |x_2| + |x_3| \end{bmatrix}, \quad (3.148)$$

on obtient alors:

$$\bar{q}(x) = [1 \ 2]^T. \quad (3.149)$$

$$\bar{\mu}_{11}(x) = \text{Sup}_{t \in \mathbb{R}} (-2-10^{-2} \cos t x_2),$$

$$\bar{\mu}_{11}(x) \leq -2+10^{-2} |x_2| \leq -2+10^{-2} p_2(x),$$

$$\bar{\mu}_{12}(x) = \text{Sup}_{t \in \mathbb{R}} (\text{Max}(0.9 |\sin t|, 8 \cdot 10^{-7} |x_2^3|)),$$

$$\bar{\mu}_{12}(x) \leq 0.9+8 \cdot 10^{-7} p_2^3(x).$$

$$\bar{\mu}_{21}(x) = \text{Sup}_{t \in \mathbb{R}} (0.5 |\sin t|+0.5) = 1,$$

Normes Vectorielles et Systèmes de Comparaisons

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_{22}(x) &= \sup_{t \in \mathbb{R}} (\text{Max}(1-x_2^2-x_3^2-3|x_2x_3|+|\sin t x_2 x_3|, 1-x_2^2-x_3^2- \\ &3|x_2x_3|+|\cos t x_2 x_3|)), \\ \bar{\mu}_{22}(x) &\leq 1-p_2^2(x), \end{aligned}$$

on prendra alors:

$$\bar{M}(x) = \begin{bmatrix} -2+10^{-2} p_2(x) & 0.9+8 \cdot 10^{-7} p_2^3(x) \\ 1 & 1-p_2^2(x) \end{bmatrix}. \quad (3.150)$$

En effectuant une "minoration" (afin d'obtenir un majorant rétrograde) on obtient:

$$\underline{q}(x) = -[1 \ 2]^T. \quad (3.151)$$

$$\begin{aligned} \underline{\mu}_{11}(x) &= \inf_{t \in \mathbb{R}} (-2-10^{-2} \cos t x_2), \\ \underline{\mu}_{11}(x) &\geq -2-10^{-2} |x_2| \geq -2-10^{-2} p_2(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\mu}_{12}(x) &= \inf_{t \in \mathbb{R}} (-\text{Max}(0.9 |\sin t|, 8 \cdot 10^{-7} |x_2^3|)), \\ \underline{\mu}_{12}(x) &\geq -0.9-8 \cdot 10^{-7} p_2^3(x), \end{aligned}$$

$$\underline{\mu}_{21}(x) = \inf_{t \in \mathbb{R}} (-0.5 |\sin t| - 0.5) = -1,$$

$$\begin{aligned} \underline{\mu}_{22}(x) &= \inf_{t \in \mathbb{R}} (\text{Min}(1-x_2^2-x_3^2-3|x_2x_3|+|\sin t x_2 x_3|, 1-x_2^2-x_3^2- \\ &3|x_2x_3|+|\cos t x_2 x_3|)), \\ \underline{\mu}_{22}(x) &= 1-x_2^2-x_3^2-(3-\frac{\sqrt{2}}{2})|x_2x_3| \geq 1-1.2 p_2^2(x), \end{aligned}$$

on prendra alors:

$$\underline{M}(x) = \begin{bmatrix} -2-10^{-2} p_2(x) & -0.9-8 \cdot 10^{-7} p_2^3(x) \\ -1 & 1-1.2 p_2^2(x) \end{bmatrix}. \quad (3.152)$$

D'où l'inégalité suivante:

Chapitre 3

$$D_t^+ p(x) \leq \begin{bmatrix} -2+10^{-2} p_2(x) & 0.9+8 \cdot 10^{-7} p_2^3(x) \\ 1 & 1-p_2^2(x) \end{bmatrix} p(x) + [1 \ 2]^T \text{ et} \\ \begin{bmatrix} -2-10^{-2} p_2(x) & -0.9-8 \cdot 10^{-7} p_2^3(x) \\ -1 & 1-1.2 p_2^2(x) \end{bmatrix} p(x) - [1 \ 2]^T \leq D_t^+ p(x), \\ t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^3, p(x) \in \mathbb{R}^2. \quad (3.153)$$

Nous verrons, dans l'exemple 4 de la Section 2.2 du Chapitre 4 les conclusions que l'on peut obtenir concernant le système initial. Cependant les lemmes 3.7 et 3.8 permettent de majorer le comportement temporel de $p(x)$.

Exemple 2:

Reprenons le système (3.95):

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -2+10^{-2}|x_2| & 0.9 \cos t + 8 \cdot 10^{-7}|x_2^3| \\ -0.5 \sin t & 1-x_2^2 \end{bmatrix} x, x \in \mathbb{R}^2. \quad (3.154)$$

On choisit d'utiliser la N.V suivante:

$$p(x) = [|x_1|, |x_2|]^T. \quad (3.155)$$

On obtient alors:

$$\begin{bmatrix} -2-10^{-2} p_2(x) & -0.9-8 \cdot 10^{-7} p_2^3(x) \\ -0.5 & 1-p_2^2(x) \end{bmatrix} p(x) \leq D_t^+ p(x), \\ D_t^+ p(x) \leq \begin{bmatrix} -2+10^{-2} p_2(x) & 0.9+8 \cdot 10^{-7} p_2^3(x) \\ 0.5 & 1-p_2^2(x) \end{bmatrix} p(x), \\ t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^2, p(x) \in \mathbb{R}^2. \quad (3.156)$$

Les lemmes 3.7 et 3.8 permettent de majorer le comportement temporel de $p(x)$.

De plus, nous verrons, dans l'exemple 2 de la Section 2.2 du Chapitre 4 les conclusions que l'on peut obtenir concernant le système initial.

Exemple 3:

Considérons le système:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -|x_1| + x_2 & 0 \\ \cos t x_1 & -2 + \sin t \end{bmatrix} x, x \in \mathbb{R}^2. \quad (3.157)$$

On choisit d'utiliser la N.V suivante:

$$p(x) = [|x_1|, |x_2|]^T. \quad (3.158)$$

On obtient alors:

$$D_t^+ p(x) \leq \begin{bmatrix} -p_1(x) + p_2(x) & 0 \\ p_1(x) & -1 \end{bmatrix} p(x), t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^2, p(x) \in \mathbb{R}^2. \quad (3.159)$$

On verra, dans l'exemple 3 de la Section 2.2 du Chapitre 4 les conclusions que l'on peut obtenir concernant le système initial.

Chapitre 3

Conclusion

Les définitions et les lemmes figurant dans ce chapitre constituent une base rigoureuse pour bâtir les résultats des chapitres suivants. Nous avons notamment défini:

- 1) les notions de systèmes majorant (direct) et majorant rétrograde,
- 2) la notion de système de comparaison,
- 3) les notions de système majorant (respectivement majorant rétrograde) $(\mathcal{T}, \mathcal{S})$ -local.

Les lemmes (3.3) et (3.4) valident l'introduction de ces notions en permettant de conclure sur des majorations (respectivement majorations rétrogrades) à validités locales. Les différents lemmes et leurs domaines de validités sont récapitulés dans le tableau suivant:

$\mathcal{T} \setminus \mathcal{S}$	\mathbb{R}^n	\mathcal{S}
\mathbb{R}	Lemme 3.2	-
\mathcal{T}	Lemme 3.4	Lemme 3.3

Enfin nous avons mis en évidence des méthodes pratiques de détermination de ces systèmes par l'intermédiaire des N.V. Il est à noter que de telles méthodes n'existent quasiment pas pour les F.V.L, tout au moins de façon aussi systématique.

CHAPITRE 4: ATTRACTEURS ET DOMAINES ASSOCIÉS VIA LES NORMES VECTORIELLES

Introduction

Ce quatrième chapitre a pour objectif de produire des méthodes de mise en évidence des **comportements asymptotiques** (attractivité ou stabilité), et d'**estimation des domaines** correspondants (au sens défini Section 3 Chapitre 1). Les lemmes de comparaison mis en place dans le chapitre 3, fondés sur la notion de N.V et de système majorant, constituent une base de référence pour ce chapitre.

La Section 1 développera des résultats utilisant les **majorants linéaires** alors que dans la Section 2 les résultats concernent l'utilisation de **systèmes majorants non linéaires**. En particulier, l'intérêt de la Section 3 réside dans le fait que l'on puisse mettre en oeuvre des méthodes simples et puissantes vues au chapitre 2 et relatives aux systèmes non linéaires autonomes. On pourra ainsi améliorer les résultats de la Section 1 puisque lors du processus de majoration, la perte d'information sur le système initial est moindre que celle engendrée en construisant un système majorant linéaire.

1 Construction de Systèmes de Majoration Découplés

On considère dans ce chapitre un système de départ perturbé (SP):

$$\frac{dx}{dt} = e_2(t, x, d), \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathcal{E}, d \in \mathcal{E}_D. \quad (SP) \quad (4.1)$$

On supposera que ce système (SP) (4.1) admet une solution maximale unique au problème de Cauchy $x(t_0) = x_0$, définie sur $[t_0, +\infty[\subset I(t_0, x_0)$. On notera S un connexe ouvert $S \subset \mathcal{E}$.

Une N.V $p(x)$ permet de construire un système (4.2) respectivement majorant de (4.3) et majorant rétrograde de (4.4):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = e_2(t, x, d), \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathcal{E}, d \in \mathcal{E}_D, & (4.2 \text{ a}) \\ \frac{dz}{dt} = M(t, x) z + q(t, x), \quad t \in \mathcal{T}_e, x \in S, z \in \mathbb{R}^k, & (4.2 \text{ b}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = e_2(t, x, d), \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathcal{E}, d \in \mathcal{E}_D, & (4.3 \text{ a}) \\ D_t^+ p(x) \leq \bar{M}(t, x) p(x) + \bar{q}(t, x), \quad t \in \mathcal{T}_e, x \in S, p(x) \in \mathbb{R}^k, & (4.3 \text{ b}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = e_2(t, x, d), \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathcal{E}, d \in \mathcal{E}_D, & (4.4 \text{ a}) \\ \underline{M}(t, x) p(x) + \underline{q}(t, x) \leq D_t^+ p(x), \quad t \in \mathcal{T}_e, x \in S, p(x) \in \mathbb{R}^k, & (4.4 \text{ b}) \end{cases}$$

avec:

- \mathcal{E} connexe ouvert de \mathbb{R}^n , espace d'état,
- $S \subset \mathcal{E}$,
- $\mathcal{T}_e \subset \mathbb{R}$,
- $\bar{M}(t, x) \in C(\mathcal{T}_e \times S)$ et $\bar{q}(t, x) \in C(\mathcal{T}_e \times S)$ tels que les éléments hors diagonaux de $\bar{M}(t, x)$ et les éléments de $\bar{q}(t, x)$ soient positifs pour tout $(t, x) \in (\mathcal{T}_e \times S)$,
- $\underline{M}(t, x) \in C(\mathcal{T}_e \times S)$ et $\underline{q}(t, x) \in C(\mathcal{T}_e \times S)$ tels que les éléments hors diagonaux de $\underline{M}(t, x)$ et les éléments de $\underline{q}(t, x)$ soient négatifs pour tout $(t, x) \in (\mathcal{T}_e \times S)$,

• (4.2 a) (\equiv (4.3 a) \equiv (4.4 a)) admet pour tout $(t_0, x_0) \in (\mathbb{R} \times \mathcal{E})$ une solution maximale unique passant par x_0 à t_0 , définie sur $I(t_0, x_0)$ et continue par rapport au temps.

On désire récupérer des informations concernant l'évolution de x à l'aide de $p(x)$ qui est majoré par z , or l'évolution de z est couplée à celle de x par l'intermédiaire de l'équation (4.2 b). De tels systèmes de majorations (4.2) permettront d'étudier le comportement de (SP) (4.1) à la condition que le système défini par (4.2), déduit de (4.3), soit découplé. Ce qui signifie que les variables x et z intervenant dans (4.2) permettent d'obtenir deux systèmes distincts (4.2 a) et (4.2 b) que l'on peut étudier séparément: les variables x et z n'interagissent plus. Donc quatre possibilités nous sont offertes pour obtenir un système (4.2) utilisable:

1) \bar{M} et \bar{q} sont constants,

2) on utilise une norme adéquate pour ré-écrire le système (4.3 b) en ne faisant intervenir que la variable $p(x)$, dans ce cas le système (4.2 a) ne fait intervenir que la variable z ,

3) $\bar{M}(t)$ et $\bar{q}(t)$ ne dépendent que du temps,

4) on combine les trois possibilités précédentes.

Il est certain que le cas le plus facile à traiter est le cas 1). En effet, les solutions du système (4.2 b) sont alors facilement calculables à partir d'une simple exponentielle de matrice et d'un vecteur. De même, les résultats exposés au second chapitre concernant les systèmes non linéaires autonomes font que le cas 2) est assez facile à traiter. Par contre le cas 3) n'est pas facile en général, mais sous certaines conditions particulières il peut se simplifier (par exemple dans le cas périodique voir [RABENASOLO 93]). Enfin, il est à noter que Borne, Gentina et Grujić ([GENTINA 72, 76, BORNE 74, GRUJIĆ 76]) ont obtenu un résultat statuant sur la stabilité de l'origine relativement au système (4.1) sous des conditions particulières ($\bar{q} = 0$). Dans ce cas, la matrice \bar{M} peut dépendre de (t, x) , mais ses coefficients non constants doivent être isolées dans une seule ligne ou une seule colonne.

2 Systèmes de Comparaison Linéaires

Dans le cas où (\bar{M}, \bar{q}) est une paire constante, on découple (4.2 a) et (4.2 b), donc les variables x et z :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = e_2(t, x, d), t \in \mathbb{R}, x \in \mathcal{E}, d \in \mathcal{E}_D, & (4.5 \text{ a}) \\ \frac{dz}{dt} = \bar{M} z + \bar{q}, t \in \mathcal{T}_e, z \in \mathbb{R}^k. & (4.5 \text{ b}) \end{cases}$$

Les solutions de (4.5 b) sont alors facilement calculables, ce qui permet d'obtenir des informations sur le comportement des solutions du système initial (SP) (4.1). Bien sûr, le domaine de validité de la majoration, s'il est limité, induira certaines conditions supplémentaires.

Dans un premier temps (Section 2.1), on s'attachera à énoncer les résultats dans ce cas particulier. Ces résultats serviront dans la Section 2.2, avec en particulier une recherche d'algorithmes d'optimisation visant:

- 1) à réduire l'estimation des ensembles possédant certaines propriétés (attractivité, stabilité, etc...)
- 2) à augmenter celle des domaines associés à ces propriétés.

2.1 Résultats Généraux

Le système (4.5) présente des propriétés d'invariance particulièrement intéressantes induisant des propriétés similaires pour le système initial (SP) (4.1) que nous allons énoncer dans le lemme suivant:

Lemme 4.1 [PERRUQUETTI et al. 94b] (Lemme d'Invariance)

Soient:

1) une N.V telle que la paire constante (\bar{M}, \bar{q}) intervenant dans les relations (4.5 b) et (4.3 b), où \bar{M} est l'opposée d'une M-matrice et \bar{q} est un vecteur positif, permette au système (4.5) d'être un système majorant $(\mathcal{T}, \mathcal{S} \times \mathcal{S}_2)$ -local linéaire autonome du système (4.3).

2) $\bar{\mathcal{X}}_c = \{x \in \mathbb{R}^n: p(x) \leq c, c \in \mathbb{R}_+^k, -\bar{M} c > \bar{q}\}$.

Alors:

- 1) il existe bien de tels ensembles $\bar{\mathcal{X}}_c$ avec $c \neq 0$,
- 2) tout ensemble $\bar{\mathcal{X}}_c \subset \mathcal{S}$, est \mathcal{T} -invariant par le système (SP) (4.1),
- 3) toute union ou intersection (finies) de tels ensembles $\bar{\mathcal{X}}_c$ est \mathcal{T} -invariante par le système (SP) (4.1).

Preuve:

1) \bar{M} est l'opposée d'une M-matrice et donc [FIEDLER 62] vérifie:

Il existe un vecteur $u \geq 0$ tel que $\bar{M} u < 0$, et

\bar{M}^{-1} existe et $-\bar{M}^{-1} \geq 0$.

Soit u ce vecteur. Posons $c = -\alpha \bar{M}^{-1} \bar{q} + u$, avec $\alpha > 1$, on a donc $c \geq 0$.

$\bar{M} u < 0$, et $\alpha > 1$, implique $-\bar{M} c = \alpha \bar{q} - \bar{M} u > \bar{q}$.

Ceci prouve le premier point du Lemme 4.1.

2) Soit $a = -\bar{M} c > \bar{q}$, avec $c = [\chi_1, \dots, \chi_k]^T$ et $a = [\alpha_1, \dots, \alpha_k]^T$.

Soit un point de la frontière de $\bar{\mathcal{X}}_c$ ($x \in \partial \bar{\mathcal{X}}_c$), alors il existe $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ tel que:

$$p(x) = \begin{bmatrix} p_1(x) \leq \chi_1 \\ \dots \\ p_i(x) = \chi_i \\ \dots \\ p_k(x) \leq \chi_k \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Puisque \bar{M} est l'opposée d'une M-matrice, on a:

$$\bar{\mu}_{ij} \geq 0, \quad \forall i \neq j \in \{1, 2, \dots, k\}, \quad (4.7)$$

et comme $x \in \bar{\mathcal{X}}_c \subset \mathcal{S}$, on a:

$$D_t^+ p_i(x) \leq \bar{\mu}_{ii} p_i(x) + \sum_{j \neq i} \bar{\mu}_{ij} p_j(x) + \bar{\theta}_i \leq \bar{\mu}_{ii} \chi_i + \sum_{j \neq i} \bar{\mu}_{ij} \chi_j + \bar{\theta}_i, \quad (4.8)$$

et par définition du vecteur a on a:

$$D_t^+ p_i(x) \leq -\alpha_i + \bar{\theta}_i < 0. \quad (4.9)$$

Toute orbite passant par x est donc entrante dans \bar{X}_c , et $\bar{X}_c \subset S$ est \mathcal{T} -invariant par le système (SP) (4.1).

Ceci prouve le second point du Lemme 4.1.

3) Ce dernier point est évident.

Lorsque pour $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$, on a pu obtenir un système majorant global, on a le résultat suivant:

**Théorème 4.1 [BORNE et al. 90a, 90b, 92b]
(Majorant Linéaire Global)**

Soit une N.V $p(x)$ (régulière) telle que la paire constante (\bar{M}, \bar{q}) intervenant dans les relations (4.5 b) et (4.3 b), où \bar{M} est l'opposée d'une M -matrice et \bar{q} est un vecteur positif, permette au système (4.5) d'être un système majorant global linéaire autonome du système (4.3).

Alors:

1) (SP) (4.1) possède un ensemble globalement uniformément asymptotiquement stable défini par:

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^n: p(x) \leq -\bar{M}^{-1} \bar{q}\}. \quad (4.10)$$

2) De plus, \mathcal{A} est globalement uniformément exponentiellement stable de taux de décroissance exponentielle β , où $-\beta < 0$ est la plus grande valeur propre de \bar{M} .

Preuve:

Ce résultat apparaît comme un cas particulier du théorème 4.2 avec $S = \mathbb{R}^n$ que nous proposerons au paragraphe suivant.

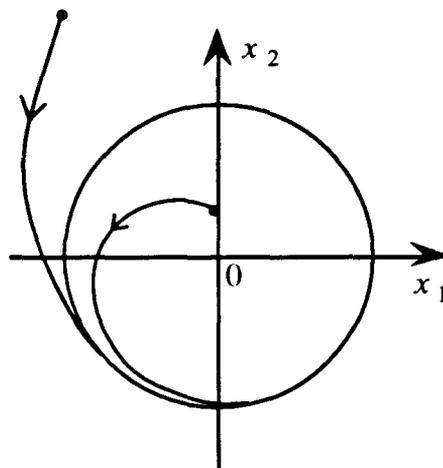
Remarques:

1) Le théorème 4.1 est une version plus affinée de celles données dans [BORNE et al. 90a, 90b, 92b] dans le sens où on y précise l'exponentialité uniforme et la rapidité de convergence vers \mathcal{A} .

2) Comme pour le théorème 4.2, on peut donner du théorème 4.1 une version similaire à celle concernant la répulsivité et l'instabilité.

3) Ce théorème constitue un résultat fondamental dans le sens où il correspond au cas le plus simple. Si \bar{q} est le vecteur nul, \mathcal{A} est l'origine ; dans le cas contraire, \mathcal{A} contient l'origine et il est une estimation d'un attracteur éventuellement plus petit (au sens des inclusions). Ceci montre que le choix du vecteur \bar{q} , dans la décomposition (4.3 b), peut être interprété comme un changement d'origine afin de placer la nouvelle origine de l'espace d'état à l'intérieur d'une éventuelle zone d'attraction. Ceci se traduit par le fait que \bar{M} sera stable.

4) Un cas classique est décrit figure 4.1: l'origine est répulsive dans un de ses voisinages et un autre de ses voisinages (celui-ci plus grand) est globalement attractif. C'est par exemple le cas pour un système autonome non linéaire possédant un unique cycle ω -limite. Dans ce cas on peut à l'aide du théorème précédent estimer ce cycle ω -limite. De plus, le domaine d'attraction est l'espace d'état entier privé d'une certaine région de l'intérieur du cercle. En effet une propriété topologique implique qu'il existe à l'intérieur soit un point d'équilibre soit un autre cycle limite.



-Figure 4.1: Cas classique-

Si pour \mathcal{E} un connexe de \mathbb{R}^n , on a pu obtenir un système majorant à validité locale, on a le résultat suivant (voir aussi [BORNE, RICHARD, RADHY, PERRUQUETTI 92]):

Théorème 4.2 [PERRUQUETTI et al. 93a] (Majorant Linéaire Local)

Soient:

1) une N.V $p(x)$ (régulière) telle que la paire constante (\bar{M}, \bar{q}) intervenant dans les relations (4.5 b) et (4.3 b), où \bar{M} est l'opposée d'une M-matrice et \bar{q} est un vecteur positif, permette au système (4.5) d'être un système majorant $(\mathcal{S} \times \mathcal{S}_z)$ -local linéaire autonome du système (4.3).

2) \mathcal{A} l'ensemble défini par:

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : p(x) \leq -\bar{M}^{-1} \bar{q}\}, \quad (4.11)$$

et supposons que $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}$ et que $-\bar{M}^{-1} \bar{q} \in \mathcal{S}_z$.

3) $\mathcal{D}_d(\mathcal{A})$ tout ensemble $(\mathcal{D}_d(\mathcal{A}) \subset \mathcal{S}, \{z \in \mathbb{R}_+^k : z < -\bar{M}^{-1} d\} \not\subset \mathcal{S}_z)$, du type suivant:

$$\mathcal{D}_d(\mathcal{A}) = \{x \in \mathbb{R}^n : p(x) \leq -\bar{M}^{-1} d\}, \quad (4.12)$$

où $d = [\delta_1, \dots, \delta_k]^T$ est un vecteur constant positif, plus grand que \bar{q} (élément par élément).

Alors:

1) \mathcal{A} est localement uniformément asymptotiquement stable pour (SP) (4.1),
 2) \mathcal{A} est localement uniformément exponentiellement stable pour (SP) (4.1) de taux de décroissance exponentielle β , où $-\beta < 0$ est la plus grande valeur propre de \bar{M} ,

3) $\mathcal{D}_d(\mathcal{A})$ est un ensemble positivement invariant et c'est une (sous-)estimation du $\mathcal{D}_{sau}(\mathcal{A})$ ainsi que du $\mathcal{D}_{eu}(\mathcal{A})$,

4) toute union finie de tels domaines $\mathcal{D}_d(\mathcal{A})$ (pour différentes valeurs de d) est une sous-estimation du $\mathcal{D}_{sau}(\mathcal{A})$ ainsi que du $\mathcal{D}_{eu}(\mathcal{A})$.

Preuve:

1) Par définition $\mathcal{D}_d(\mathcal{A})$ est un voisinage \mathcal{A} de puisque $d \geq \bar{q}$: $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}_d(\mathcal{A})$.

2) Positive invariance de $\mathcal{D}_d(\mathcal{A})$:

Posons $c = -\bar{M}^{-1}d$. Il suffit alors d'appliquer le Lemme 4.1.

3) d'après les hypothèses faites:

Pour tout x_0 de $\mathcal{D}_d(\mathcal{A})$, et tout z_0 de $\{z \in \mathbb{R}^k : z \leq -\bar{M}^{-1}d\}$ vérifiant $z_0 \geq p(x_0)$ alors on a:

$$z(t) \geq p(\underline{x}(t; t_0, x_0)), \text{ pour tout } t \geq t_0. \quad (4.13)$$

Or la solution de (4.5 b) passant par z_0 est:

$$z(t) = \text{Exp}(\bar{M}(t - t_0)) [z_0 + \bar{M}^{-1} \bar{q}] - \bar{M}^{-1} \bar{q}. \quad (4.14)$$

3.1) Attractivité uniforme:

Le point d'équilibre de (4.5 b) ($z_e = -\bar{M}^{-1} \bar{q}$) est uniformément attractif:

$$\begin{aligned} & \forall t_0 \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta_1 > 0 \text{ tel que:} \\ & \forall z_0 \text{ vérifiant } \rho(z_0; z_e) < \eta_1, \exists T(\varepsilon) > 0 \text{ tel que l'on ait: } \rho(\underline{z}(t; t_0, z_0); z_e) < \varepsilon \\ & \text{pour } t > t_0 + T(\varepsilon). \end{aligned} \quad (4.15)$$

On pose $Z_{z_e} = \{z \in \mathbb{R}_+^k : z \leq z_e\}$.

Donc si on prend un η_2 plus petit que η_1 alors pour tout x_0 tel que: $\rho(p(x_0); Z_{z_e}) < \eta_2$, on peut trouver un z_0 plus grand que $p(x_0)$ mais vérifiant $\rho(z_0; z_e) < \eta_1$ ce qui permet d'avoir compte tenu de (4.13) et (4.15):

$$\rho(p(\underline{x}(t; t_0, x_0)); Z_{z_e}) < \varepsilon \text{ pour } t > t_0 + T(\varepsilon). \quad (4.16)$$

Ce qui prouve l'attractivité de \mathcal{A} . Il est facile de vérifier que $\mathcal{D}_d(\mathcal{A}) \subset \mathcal{D}_{au}(\mathcal{A})$, ceci avec le point 2) prouve que $\mathcal{D}_d(\mathcal{A})$ est une (sous-)estimation $\mathcal{D}_{au}(\mathcal{A})$.

3.2) Stabilité uniforme au sens de Liapounov:

On procède comme au point 3.1).

3.3) Stabilité exponentielle uniforme de \mathcal{A} :

Chapitre 4

Le point d'équilibre de (4.2 b) ($z_e = -\bar{M}^{-1} \bar{q}$) est uniformément exponentiellement stable de taux de décroissance exponentielle β (propriété des opposées de M-matrices):

$$\begin{aligned} & \forall t_0 \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0 \text{ et deux réels } \beta > 0 \text{ et } \alpha > 1 \text{ tels que:} \\ & \forall z_0 \text{ vérifiant } \rho(z_0; z_e) < \eta, \text{ on ait:} \\ & \rho(\underline{z}(t; t_0, z_0); z_e) < \alpha \rho(z_0; z_e) \exp(\beta(t - t_0)) \text{ pour } t \geq t_0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Donc, si on prend $z_0 = p(x_0)$ alors pour tout x_0 tel que $\rho(p(x_0); Z_{z_e}) < \eta$, on a compte tenu de (4.13) et (4.17):

$$\rho(p(\underline{x}(t; t_0, x_0)); Z_{z_e}) < \alpha \rho(p(x_0); Z_{z_e}) \exp(\beta(t - t_0)) \text{ pour } t \geq t_0. \quad (4.18)$$

Ce qui prouve la stabilité exponentielle uniforme de \mathcal{A} . Il est facile de vérifier que $\mathcal{D}_d(\mathcal{A}) \subset \mathcal{D}_{eu}(\mathcal{A})$, ceci avec le point 2) prouve que $\mathcal{D}_d(\mathcal{A})$ est une (sous-)estimation $\mathcal{D}_{eu}(\mathcal{A})$.

4) Toute union finie d'ensembles positivement invariants est un ensemble positivement invariant: ce qui prouve le quatrième point.

Remarque:

Il existe un résultat plus ancien [BORNE 90a, 90b], où l'évaluation de l'estimation du domaine se fait sous la forme plus contraignante suivante:

$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{x \in \mathbb{R}^n: u^T p(x) \leq \text{constante}\} \subset S$, où u est le "vecteur de plus grande importance".

Nous verrons dans l'exemple de la section 1.2.2 que le théorème 4.2 donne de meilleurs résultats pour l'estimation du domaine.

Application au cas particulier d'un point d'équilibre

Le résultat précédent peut être appliqué dans un cas particulier important: l'attracteur est réduit à un point d'équilibre. Dans ce cas, ce point est en général calculable et le champ de vecteur de (SP) (4.1) s'écrit $e_2(t, x, d) = A(t, x, d) (x - x_e)$. On ramènera ici l'équilibre à $x_e = 0$ par changement d'origine. Le système est ainsi représenté sous la forme suivante:

$$\frac{dx}{dt} = A(t, x, d) x, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathcal{E}, \quad d \in \mathcal{E}_D. \quad (4.19)$$

On peut alors obtenir des systèmes majorants pour lesquels le vecteur q est nul (voir décomposition (3.44) Section 2.3 Chapitre 3). Ceci nous conduit aux résultats suivants:

Théorème 4.3 [PERRUQUETTI et al. 93a]

Soient:

1) une N.V $p(x)$ (régulière) telle que la paire constante $(\bar{M}, \bar{q} = 0)$ intervenant dans les relations (4.5 b) et (4.3 b), où \bar{M} est l'opposée d'une M-matrice, permette au système (4.2) d'être un système majorant $(S \times S_2)$ -local linéaire autonome du système (4.3), avec S et S_2 des voisinages de leurs origines respectives,

2) $\mathcal{D}_d(0)$ tout ensemble $(\mathcal{D}_d(0) \subset S, \{z \in \mathbb{R}_+^k : z < -\bar{M}^{-1} d\} \not\subset S_2)$, du type suivant:

$$\mathcal{D}_d(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : p(x) \leq -\bar{M}^{-1} d\}, \quad (4.20)$$

où $d = [\delta_1, \dots, \delta_k]^T$ est un vecteur constant strictement positif.

Alors:

1) l'équilibre $x = 0$ de (SP) (4.1) est localement uniformément asymptotiquement stable et localement exponentiellement uniformément stable, de taux de décroissance exponentielle β , où $-\beta < 0$ est la plus grande valeur propre de \bar{M} ,

2) $\mathcal{D}_d(0)$ est un ensemble positivement invariant et c'est une (sous-)estimation du $\mathcal{D}_{sau}(0)$ et du $\mathcal{D}_{eu}(0)$,

3) toute union de tels domaines $\mathcal{D}_d(0)$ (pour différentes valeurs de d) est une (sous-)estimation du $\mathcal{D}_{sau}(0)$ et du $\mathcal{D}_{eu}(0)$.

4) Si $S = \mathbb{R}^n$ et $S_2 = \mathbb{R}^k$ alors $\mathcal{D}_d(0) = \mathbb{R}^n$ donc l'équilibre $x = 0$ de (SP) (4.1) est globalement uniformément asymptotiquement stable et globalement exponentiellement uniformément stable.

Si on revient au cas général, on peut transposer les deux théorèmes 4.1 et 4.2 dans le cas où l'on peut obtenir un majorant rétrograde, ce qui nous permet de conclure à l'existence et à l'expression d'ensemble globalement répulsif (Théorème 4.4) ou localement répulsif (Théorème 4.5):

Théorème 4.4

Soit une N.V $p(x)$ (régulière) telle que la paire constante $(\underline{M}, \underline{q})$ intervenant dans les relations (4.5 b) et (4.4 b), où \underline{M} est une M-matrice et \underline{q} est un vecteur négatif, permette au système (4.5) d'être un système majorant rétrograde global linéaire autonome de (4.4).

Alors (SP) (4.1) possède un ensemble globalement répulsif défini par:

$$\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R}^n : p(x) \leq -\underline{M}^{-1} \underline{q}\}. \quad (4.21)$$

Preuve:

Il suffit d'appliquer le théorème 4.5 suivant pour $S = \mathbb{R}^n$.

Théorème 4.5

Soient:

1) une N.V $p(x)$ (régulière) telle que la paire constante $(\underline{M}, \underline{q})$ intervenant dans les relations (4.2 b) et (4.4 b), où \underline{M} soit une M-matrice et \underline{q} est un vecteur négatif, permette au système (4.2) d'être un système majorant rétrograde $(S \times S_2)$ -local linéaire autonome du système (4.4).

2) \mathcal{R} l'ensemble défini par:

$$\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R}^n : p(x) \leq -\underline{M}^{-1} \underline{q}\}, \quad (4.22)$$

supposons que $\mathcal{R} \subset S$ et que $-\underline{M}^{-1} \underline{q} \in S_2$.

3) $\mathcal{D}_d(\mathcal{R}), \mathcal{D}_d(\mathcal{R}) \subset S, \{z \in \mathbb{R}_+^k : z < -\underline{M}^{-1} d\} \not\subset S_2$, tout ensemble défini par:

$$\mathcal{D}_d(\mathcal{R}) = \{x \in \mathbb{R}^n : p(x) \leq -\underline{M}^{-1} d\}, \quad (4.23)$$

où $d = [\delta_1, \dots, \delta_k]^T$ est un vecteur constant positif, plus grand que \underline{q} (élément par élément)

Alors:

- 1) \mathcal{R} est localement répulsif pour (SP) (4.1),
- 2) $\mathcal{D}_d(\mathcal{R})$ est un ensemble négativement invariant et c'est une (sous-)estimation du domaine répulsivité de \mathcal{R}

3) toute union de tels domaines $\mathcal{D}_d(\mathcal{R})$ (pour différentes valeurs de d) est une (sous-)estimation du domaine de répulsivité de \mathcal{R} .

Preuve:

Par définition un système majorant rétrograde est un système majorant lorsque la variable temporelle parcourt l'axe réel en sens inverse (t devient $-t$). Ainsi la preuve est basée sur les 2 points suivants:

1) En appliquant le théorème 4.2, on en déduit que \mathcal{R} est localement attractif par rapport à $\underline{x}(-t; t_0, x_0)$ (solution de (SP) (4.1)) pour $t \geq t_0$. Donc (cf. Chapitre 1 Section 3.13 Définition 1.27) \mathcal{R} est localement répulsif.

2) Le théorème 4.2 montre que $\mathcal{D}_d(\mathcal{R})$ est un ensemble négativement invariant et c'est une (sous-)estimation du domaine de répulsivité de \mathcal{R} . De plus il est trivial que toute union d'ensembles négativement invariants est un ensemble négativement invariant. Ce qui prouve les points 3) et 4) du théorème 4.5.

2.2 Méthodes d'Optimisation

Dans cette partie on se propose d'appliquer les résultats de la Section 2.1 pour étudier les ensembles attractifs et estimer le domaine d'attraction dans le cas d'un ensemble localement attractif. On considérera ici le cas $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$, cependant les méthodes présentées dans cette section peuvent être adaptées facilement si \mathcal{E} est un connexe de \mathbb{R}^n .

De façon à améliorer la qualité des "estimations" obtenues précédemment, les trois points suivant peuvent être relevés:

1) le premier est que la décomposition (3.44) ($\dot{x} = A(t, x, d)x + b(t, x, d)$, $t \in \mathcal{T}$, $x \in \mathcal{S}$, $d \in \mathcal{E}_D$), jusqu'à présent obtenue de façon euristique, peut être optimisée,

2) le deuxième est que l'intersection (respectivement l'union) de différents ensembles attractifs (respectivement de domaines d'attraction) est encore un ensemble attractif (respectivement un domaine d'attraction) mais meilleur (voir figure 4.2).

3) enfin si on a montré que toute trajectoire initialisée dans un domaine \mathcal{X}_{c1} converge vers un ensemble attractif \mathcal{X}_{c2} ($\mathcal{X}_{c2} \subset \mathcal{X}_{c1}$), on peut ensuite étudier le comportement des trajectoires initialisées dans \mathcal{X}_{c2} , convergeant alors vers \mathcal{X}_{c3} ($\mathcal{X}_{c3} \subset \mathcal{X}_{c2} \subset \mathcal{X}_{c1}$). On peut ainsi procéder par itérations pour améliorer l'estimation des attracteurs.

Une première étude (Section 2.2.1) concerne les ensembles globalement attractifs et utilise les deux premiers points. Une deuxième (Section 2.2.2) concerne les ensembles localement attractifs et met en jeu les trois points.

2.2.1 Ensemble Globalement Attractif: Optimisation par Intersections

Soit c un vecteur strictement positif de \mathbb{R}^k (avec éventuellement des composantes infinies) et $\mathcal{X}_c \subset \mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{X}_c = \{x \in \mathbb{R}^n : p(x) < c, c > 0, c \in \mathbb{R}^k\}. \quad (4.24)$$

Décomposons le champ de vecteur $e_2(t, x, d)$ de (SP) (4.1) sous les formes:

$$e_2(t, x, d) = A_1(t, x, d)x + b_1(t, x, d), \text{ pour } x \in \bar{\mathcal{X}}_c, \quad (4.25)$$

$$e_2(t, x, d) = A_2(t, x, d)x + b_2(t, x, d), \text{ pour } x \in \mathbb{R}^n - \mathcal{X}_c. \quad (4.26)$$

La décomposition (4.25) permet de majorer $(\bar{M}(t, x), \bar{q}(t, x))$ sur $\bar{\mathcal{X}}_c$, par la paire constante $(\bar{M}_1(c), \bar{q}_1(c))$, avec:

$$\bar{M}_1(c) = [(\bar{\mu}_1)_{ij}(c)], \bar{q}_1(c) = [(\bar{\theta}_1)_i(c)], \quad (4.27)$$

et de majorer $(\bar{M}(t, x), \bar{q}(t, x))$ sur $(\mathbb{R}^n - \mathcal{X}_c)$, par la paire constante $(\bar{M}_2(c), \bar{q}_2(c))$, avec:

$$\bar{M}_2(c) = [(\bar{\mu}_2)_{ij}(c)], \bar{q}_2(c) = [(\bar{\theta}_2)_i(c)]. \quad (4.28)$$

Par exemple, dans le cas classique de la figure 4.1 (cycle limite classique), une décomposition simple et puissante apparaît comme étant la suivante:

$$e_2(t, x, d) = A(t, x, d) x,$$

pour $x \in \bar{\mathcal{X}}_c$:

$$A_1(t, x, d) = A(t, x = c, d), b_1(t, x, d) = [A(t, x, d) - A(t, x = c, d)] x, \quad (4.29)$$

pour $x \in \mathbb{R}^n - \bar{\mathcal{X}}_c$:

$$A_2(t, x, d) = A(t, x, d), b_2(t, x, d) = 0. \quad (4.30)$$

A partir de cette décomposition, on procède à une première majoration par rapport au temps (relativement à la norme vectorielle $p(x)$), puis à une seconde, par rapport à $x \in \bar{\mathcal{X}}_c$ d'une part et à $x \in \mathbb{R}^n - \bar{\mathcal{X}}_c$ d'autre part, ce qui nous conduit à l'obtention des deux paires.

À partir de (4.27) et (4.28), un système majorant global de (4.3) est obtenu à l'aide de la paire $(\bar{M}(c), \bar{q}(c))$ (Point 4 Théorème 3.3), où:

$$\bar{M}(c) = [\text{Max}((\bar{\mu}_1)_{ij}(c); (\bar{\mu}_2)_{ij}(c))], \bar{q}(c) = [\text{Max}((\bar{\theta}_1)_i(c); (\bar{\theta}_2)_i(c))]. \quad (4.31)$$

A l'aide des conditions de Kotelianski, on calcule alors l'ensemble des valeurs du paramètre c pour que $\bar{M}(c)$ soit une matrice asymptotiquement stable (ou de Hurwitz):

$$\mathcal{D}_{\text{Stab}(c)} = \{c \in \mathbb{R}_+^k : \bar{M}(c) \text{ soit asymptotiquement stable}\}. \quad (4.32)$$

Donc, pour $c \in \mathcal{D}_{\text{Stab}(c)}$, la matrice $\bar{M}(c)$ est régulière, ainsi on peut calculer le vecteur $-\bar{M}^{-1}(c) \bar{q}(c)$. On peut donc minimiser $-\bar{M}^{-1}(c) \bar{q}(c)$ élément par élément sous

Chapitre 4

la contrainte $c \in \mathcal{D}_{\text{Stab}(c)}$. Pour résoudre ce problème, on peut utiliser différentes méthodes, en particulier le principe de Lagrange [ALEXEEV 87].

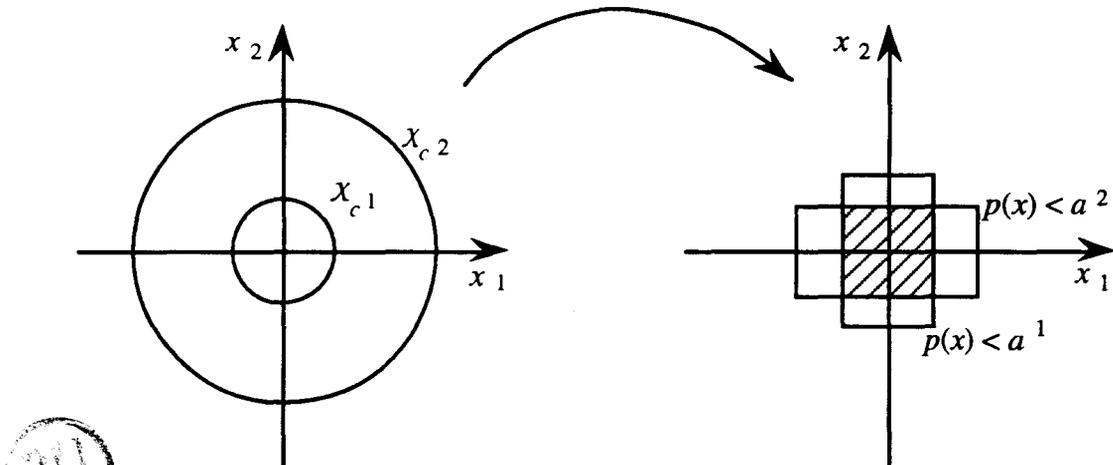
On obtient alors un nombre fini (k au maximum) de vecteurs $\{c^j\}$, chacun d'eux minimisent une ou plusieurs composantes du vecteur $-\bar{M}^{-1}(c) \bar{q}(c)$. Pour chaque vecteur c^j , le Théorème 4.1 nous permet de dire que le système (SP) (4.1) possède un ensemble globalement asymptotiquement stable défini par:

$$\mathcal{A}(c^j) = \{x \in \mathbb{R}^n : p(x) \leq a^j = -\bar{M}^{-1}(c^j) \bar{q}(c^j)\}. \quad (4.33)$$

L'intersection de ces ensembles globalement asymptotiquement stables est donnée par:

$$\mathcal{A} = \bigcap_{j=1}^k \mathcal{A}(c^j) = \{x \in \mathbb{R}^n : p(x) \leq a\}, \quad (4.34)$$

où a est le vecteur obtenu en prenant pour chaque composante α_i la plus petite des composantes correspondantes des vecteurs a^j ($\text{Min}_{1 \leq j \leq k} (\alpha_i^j)$). On obtient un ensemble non vide par définition des $\mathcal{A}(c^j)$. De plus il est facile de vérifier que cet ensemble est globalement attractif et globalement stable. La figure suivante illustre ce principe:



-Figure 4.2: Optimisation par intersection-

Cette méthode est décrite dans [BORNE, RICHARD, RADHY, PERRUQUETTI 92] et [PERRUQUETTI et al. 93a].

Remarque pratique:

Pour obtenir le vecteur a , on minimise le vecteur $-\bar{M}^{-1}(c^j) \bar{q}(c^j)$ composante à composante, alors a est constitué de ces composantes minimales obtenues.

Exemples d'application:

1) Reprenons le système dynamique (3.66) du chapitre 3 défini par:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 1-x_1^2-x_2^2 & 0.1 \\ 0.5 & 1-x_1^2-x_2^2 \end{bmatrix} x + d(t, x), \quad (4.35)$$

avec \mathcal{E}_D qui est l'ensemble des fonctions $d(t, x)$ vérifiant:

$$\begin{aligned} d(t, x) &= [\delta_1(t, x) x_2, \delta_2(t, x) x_1]^T, \\ |\delta_1(t, x)| &\leq 0.9, \delta_1(t, x) \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2), \\ |\delta_2(t, x)| &\leq 0.5, \delta_2(t, x) \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2). \end{aligned} \quad (4.36)$$

On a déterminé pour la N.V suivante:

$$p(x) = [|x_1|, |x_2|]^T, \quad (4.37)$$

un système majorant global à partir de $(c = [\chi_1, \chi_2]^T)$:

$$\bar{M}(c) = \begin{bmatrix} 1-\chi_1^2-\chi_2^2 & 1 \\ 1 & 1-\chi_1^2-\chi_2^2 \end{bmatrix}, \quad (4.38)$$

$$\bar{q}(c) = \frac{2(\chi_1^2+\chi_2^2)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.39)$$

En appliquant le critère de Kotelianski à l'étude de la stabilité de $\bar{M}(c)$ on obtient les conditions suivantes sur c :

$$1-\chi_1^2-\chi_2^2 < 0 \text{ et } \det \bar{M}(c) = (1-\chi_1^2-\chi_2^2)^2 - 1 > 0, \quad (4.40)$$

correspondant à l'ensemble des vecteurs c "admissibles" suivant:

Chapitre 4

$$\mathcal{D}_{\text{Stab}(c)} = \{c \in \mathbb{R}_+^2 : (\chi_1^2 + \chi_2^2) > 2\}, \quad (4.41)$$

et pour $c \in \mathcal{D}_{\text{Stab}(c)}$ on a:

$$-\bar{M}^{-1}(c) \bar{q}(c) = \frac{2(\chi_1^2 + \chi_2^2)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3}((\chi_1^2 + \chi_2^2) - 2)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.42)$$

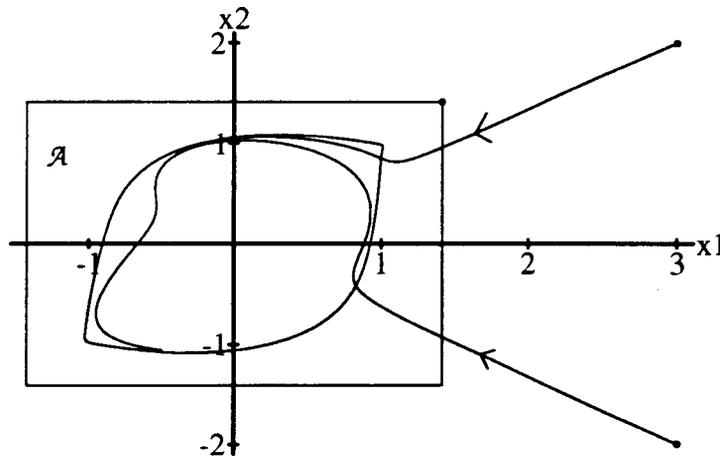
On peut donc minimiser le vecteur $-\bar{M}^{-1}(c) \bar{q}(c)$ élément par élément (ici les deux composantes sont égales) sous la contrainte $c \in \mathcal{D}_{\text{Stab}(c)}$. Le minimum de (4.42) sous la contrainte (4.41) est obtenu pour $(\chi_1^2 + \chi_2^2) = 6$.

On en conclut que l'ensemble \mathcal{A} représenté figure 4.3, est globalement attractif et globalement exponentiellement stable de taux de décroissance exponentielle $\beta = 4$:

$$\mathcal{A} = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : p(x) \leq \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}. \quad (4.43)$$

Les simulations représentées figure 4.3 concernent les valeurs numériques suivantes:

$\delta_1(t, x) = 0.9 \cos t$, $\delta_2(t, x) = 0.5 \frac{t^2}{1+t^2}$, $x_{01} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $x_{02} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $t_0 = 0$. Mais les conclusions concernant \mathcal{A} restent valables pour toute perturbation $d(t, x)$ vérifiant (4.36).



-Figure 4.3: Simulation et Ensemble Attractif-

2) Reprenons le système dynamique (3.83) du chapitre 3 défini par:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -1.5 & 0.9 + 0.1 d(t) \\ -0.5 & 1 - x_2^2 \end{bmatrix} x, d(t) \in \mathcal{E}_D. \quad (4.44)$$

\mathcal{E}_D étant l'ensemble des fonctions $d(t)$ vérifiant: $d(t) \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$, $|d(t)| \leq 1$.

On a déterminé pour la N.V suivante:

$$p(x) = [|x_1|, |x_2|]^T, \quad (4.45)$$

un système majorant global à partir de $(c = [+∞, \chi_2]^T)$:

$$\bar{M}(c) = \begin{bmatrix} -1.5 & 1 \\ 0.5 & 1 - \chi_2^2 \end{bmatrix}, \bar{q}(c) = \frac{2\chi_2^3}{3\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.46)$$

En appliquant le critère de Kotlianski à l'étude de la stabilité de $\bar{M}(c)$ on obtient la condition suivante sur c :

$$\det \bar{M}(c) = -1.5 (1 - \chi_2^2) - 0.5 > 0. \quad (4.47)$$

$$\mathcal{D}_{\text{Stab}(c)} = \{c \in \mathbb{R}_+^2: \chi_2^2 > \frac{4}{3}\}, \quad (4.48)$$

et pour $c \in \mathcal{D}_{\text{Stab}(c)}$ on a:

$$- \bar{M}^{-1}(c) \bar{q}(c) = \frac{\chi_2^3}{\sqrt{3} (1.5\chi_2^2 - 2)} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.49)$$

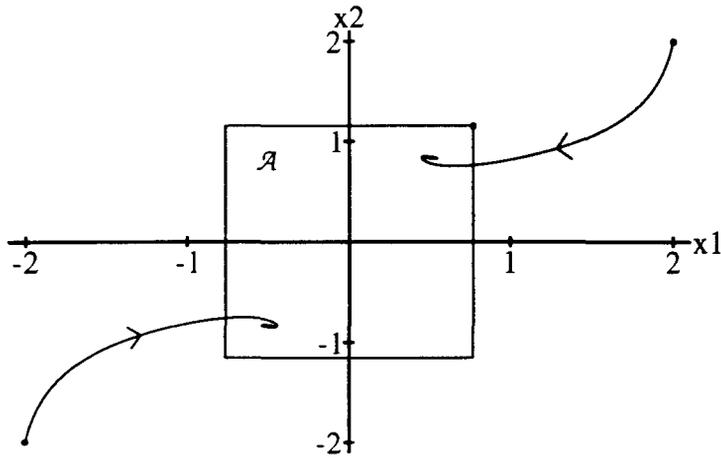
On peut donc minimiser le vecteur $- \bar{M}^{-1}(c) \bar{q}(c)$ élément par élément sous la contrainte $c \in \mathcal{D}_{\text{Stab}(c)}$. Le minimum de (4.49) sous la contrainte (4.48) est obtenu pour $\chi_2 = 2$.

On en conclut que l'ensemble \mathcal{A} représenté figure 4.4, est globalement attractif et globalement exponentiellement stable de taux de décroissance exponentielle $\beta = 0.23$:

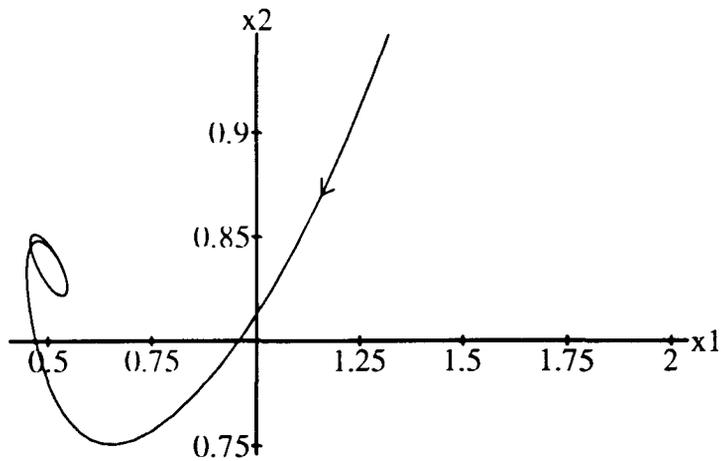
Chapitre 4

$$\mathcal{A} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : p(x) \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}. \quad (4.50)$$

Pour pouvoir simuler cet exemple, on a choisi $d(t) = \cos t$, mais \mathcal{A} reste bien sur attractif pour toute perturbation $d(t) \in \mathcal{E}_D$. Les simulations représentées figure 4.4 concernent les valeurs numériques suivantes: $x_{01} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $x_{02} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$, $t_0 = 0$. La figure 4.5 est un agrandissement de la première simulation montrant un des deux cycles limite.



-Figure 4.4: Simulations et Ensemble Attractif-



-Figure 4.5: Agrandissement de la Première Simulation-

2.2.2 Ensemble Localement Attractif: Optimisation par Itérations

Dans le cas d'un ensemble attractif non global, la démarche précédente reste valable.

Cependant une complexité supplémentaire vient du fait que l'expression du majorant (linéaire autonome) sera alors fortement conditionnée par le choix de son domaine de validité: si ce domaine est trop large, le majorant sera instable. Il est alors utile de combiner le théorème précédent 4.2 à un algorithme d'itération basé sur le troisième point relevé au début de cette section 2.2. Cet algorithme procède de deux objectifs:

1) diminuer la taille de l'ensemble attractif (on procédera alors par intersections et itérations),

2) augmenter celle de l'estimation de son domaine d'attraction (on procédera par unions et itérations).

Soient c_1 et c_2 deux vecteurs strictement positif de \mathbb{R}^k (avec éventuellement des composantes infinies) définissant les domaines paramétrés $\mathcal{X}_{c_1} \subset \mathcal{X}_{c_2} \subset \mathbb{R}^n$ (c'est-à-dire $c_1 < c_2$) définis par:

$$\mathcal{X}_{c_1} = \{x \in \mathbb{R}^n : p(x) < c_1, c_1 > 0, c_1 \in \mathbb{R}^k\}, \quad (4.51)$$

$$\mathcal{X}_{c_2} = \{x \in \mathbb{R}^n : p(x) < c_2, c_2 > 0, c_2 \in \mathbb{R}^k\}. \quad (4.52)$$

On introduit \mathcal{X}_{c_2} afin de pouvoir obtenir un système majorant $(\mathcal{X}_{c_2} \times \mathcal{Z}_{c_2})$ -local du système initial. On reprend la démarche de la Section 2.2.1 en remplaçant \mathbb{R}^n par \mathcal{X}_{c_2} ce qui nous donne:

On décompose le champ de vecteur $e_2(t, x, d)$ de (SP) (4.1) sous les formes:

$$e_2(t, x, d) = A_1(t, x, d) x + b_1(t, x, d), \text{ pour } x \in \bar{\mathcal{X}}_{c_1}, \quad (4.53)$$

$$e_2(t, x, d) = A_2(t, x, d) x + b_2(t, x, d), \text{ pour } x \in \bar{\mathcal{X}}_{c_2} - \mathcal{X}_{c_1}. \quad (4.54)$$

Chacune de ces deux décompositions conduit à une paire majorante constante $(\bar{M}_1(c_1), \bar{q}_1(c_1))$ et $(\bar{M}_2(c_2, c_1), \bar{q}_2(c_2, c_1))$, avec:

$$\bar{M}_1(c_1) = [(\bar{\mu}_1)_{ij}(c_1)], \bar{q}_1(c_1) = [(\bar{\theta}_1)_i(c_1)], \text{ pour } x \in \bar{\mathcal{X}}_{c_1}, \quad (4.55)$$

$$\bar{M}_2(c_2, c_1) = [(\bar{\mu}_2)_{ij}(c_2, c_1)], \bar{q}_2(c_2, c_1) = [(\bar{\theta}_2)_i(c_2, c_1)], \text{ sur } (\bar{\mathcal{X}}_{c_2} - \mathcal{X}_{c_1}). \quad (4.56)$$

Chapitre 4

Ces deux paires conduisent alors à un système majorant $(\mathcal{X}_{c2} \times \mathcal{Z}_{c2})$ -local défini par la paire $(\bar{M}(c2, c1), \bar{q}(c2, c1))$ (à condition que $\bar{M}(c2, c1)$ soit stable):

$$\bar{M}(c2, c1) = [\text{Max}((\bar{\mu}_1)_{ij}(c1) ; (\bar{\mu}_2)_{ij}(c2, c1))], \quad (4.57)$$

$$\bar{q}(c2, c1) = [\text{Max}((\bar{\theta}_1)_i(c1) ; (\bar{\theta}_2)_i(c2, c1))], \text{ pour } x \in \bar{\mathcal{X}}_{c2}. \quad (4.58)$$

A l'aide des conditions de Kotlianski, on calcule alors l'ensemble des valeurs des paramètres $c2$ et $c1$ pour que $\bar{M}(c2, c1)$ soit une matrice asymptotiquement stable (ou de Hurwitz):

$$\mathcal{D}_{\text{Stab}(c2, c1)} = \{(c2, c1) \in \mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}_+^k : \bar{M}(c2, c1) \text{ soit asymptotiquement stable}\}. \quad (4.59)$$

L'algorithme suivant (voir [BORNE, RICHARD, RADHY, PERRUQUETTI 92] et [PERRUQUETTI et al. 93a]) est alors une adaptation de la démarche précédente (voir Section 1.2.1):

Pas 1: Premier ensemble de travail

Soit $c2(i \text{ max})$ un vecteur situé sur une frontière de $\mathcal{D}_{\text{Stab}(c2, c1)}$ c'est-à-dire dont une (ou plusieurs) de ses composantes sont maximales:

$$c2(i \text{ max}) = \begin{bmatrix} c2_1 \\ \dots \\ c2_{i \text{ max}} \\ \dots \\ c2_k \end{bmatrix},$$

$$c2_{i \text{ max}} = \underset{(c2, c1) \in \mathcal{D}_{\text{Stab}(c2, c1)}}{\text{Max}} \{c2_i\}.$$

Pas 2: Système majorant

Un système majorant $(\mathcal{X}_{c2(i \text{ max})} \times \mathcal{Z}_{c2(i \text{ max})})$ -local est défini à l'aide de la paire $(\bar{M}(c2(i \text{ max}), c1), \bar{q}(c2(i \text{ max}), c1))$.

Pas 3: Optimisation par intersections

Par la démarche de la Section 2.2.1 on calcule l'ensemble des vecteurs $c1$ optimaux minimisant une ou plusieurs composantes du vecteur définissant l'ensemble attractif

– $\bar{M}^{-1}(c2(i \max), c1) \bar{q}(c2(i \max), c1)$.

On obtient après intersections:

$$\mathcal{X}_{a_0} = \{x \in \mathbb{R}^n: p(x) \leq a_0\}, \quad (4.60)$$

où a_0 est le vecteur constitué des composantes minimum du vecteur:

– $\bar{M}^{-1}(c2(i \max), c1) \bar{q}(c2(i \max), c1)$ lorsque $c1$ parcourt $\mathcal{D}_{\text{Stab}(c2(i \max), c1)}$.

Pas 4: Itération

Par construction $a_0 \leq c2(i \max)$, on définit un système majorant $(\mathcal{X}_{a_0} \times \mathcal{Z}_{a_0})$ -local à l'aide de la paire $(\bar{M}(a, c1), \bar{q}(a, c1))$. On boucle sur le pas 3 jusqu'à ce que deux vecteurs consécutifs a_i et a_{i+1} soient suffisamment proches. On arrête alors l'itération: l'ensemble attractif \mathcal{A}_{i+1} dépend de $c2(i \max)$ et on le notera $\mathcal{A}[c2(i \max)]$.

Pas 5: Estimation de son Domaine de Stabilité Asymptotique

Comme dans les hypothèses du théorème 4.2, on cherche un ensemble $\mathcal{D}_d(\mathcal{A}[c2(i \max)])$ (ou une union d'ensembles de ce type) contenu dans $\mathcal{X}_{c2(i \max)}$. Alors cet ensemble est une (sous-)estimation du domaine de stabilité asymptotique de $\mathcal{A}[c2(i \max)]$.

Pas 6: Changement d'ensemble de travail

S'il existe d'autres valeurs $c2(i \max)$ vérifiant la condition du pas 1, on recommence et on calcule les ensembles $\mathcal{A}[c2(i \max)]$ et $\mathcal{D}_d(\mathcal{A}[c2(i \max)])$ correspondants (pas 1 à 5).

Pas 7: Conclusion

Soient $\mathcal{D} = \bigcup_{i \max} \mathcal{D}_d(\mathcal{A}[c2(i \max)])$ et $\mathcal{A} = \bigcup_{i \max} \mathcal{A}[c2(i \max)]$, alors toute trajectoire issue de \mathcal{D} converge dans \mathcal{A} .

Chapitre 4

Exemple d'application:

Reprenons le système dynamique (3.95) du chapitre 3 défini par:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -2+10^{-2}|x_2| & 0.9 \cos t + 8 \cdot 10^{-7}|x_2^3| \\ -0.5 \sin t & 1-x_2^2 \end{bmatrix} x, x \in \mathbb{R}^2. \quad (4.61)$$

Soit la N.V suivante:

$$p(x) = [|x_1|, |x_2|]^T. \quad (4.62)$$

Soient $c_1 = [\infty, \chi_1]^T$ et $c_2 = [\infty, \chi_2]^T$ deux vecteurs strictement positif de \mathbb{R}^2 définissant les domaines paramétrés $\mathcal{X}_{c_1} \subset \mathcal{X}_{c_2} \subset \mathbb{R}^2$ (c'est-à-dire $c_1 < c_2$) définis par:

$$\mathcal{X}_{c_1} = \{x \in \mathbb{R}^2: p(x) < c_1, c_1 > 0, c_1 \in \mathbb{R}^2\}, \quad (4.63)$$

$$\mathcal{X}_{c_2} = \{x \in \mathbb{R}^2: p(x) < c_2, c_2 > 0, c_2 \in \mathbb{R}^2\}. \quad (4.64)$$

Dans le chapitre 3 on a montré que, la paire $(\bar{M}(c_2, c_1), \bar{q}(c_2, c_1))$ permet de définir un système majorant $(\mathcal{X}_{c_2} \times \mathcal{Z}_{c_2})$ -local (à condition que $\bar{M}(c_2, c_1)$ soit stable et que \mathcal{X}_{c_2} soit positivement invariant) du système initial (4.61), avec:

$$\bar{M}(c_2, c_1) = \begin{bmatrix} -2+10^{-2}\chi_2 & 0.9+8 \cdot 10^{-7}\chi_2^3 \\ 0.5 & 1-\chi_1^2 \end{bmatrix}, \quad (4.65)$$

$$\bar{q}(c_2, c_1) = \frac{2\chi_1^3}{3\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.66)$$

Posons:

$$f_1 = -2+10^{-2}\chi_2, \quad (4.67)$$

$$f_2 = 0.5 (0.9+8 \cdot 10^{-7}\chi_2^3). \quad (4.68)$$

(Pour la suite, il est important de noter que f_1 et f_2 ne dépendent que de χ_2 .)

En appliquant le critère de Kotelianski à l'étude de la stabilité de $\bar{M}(c_2, c_1)$ on obtient les conditions suivantes sur c_2, c_1 :

$$f_1 < 0, \quad (4.69)$$

$$\det \bar{M}(c_2, c_1) = f_1 (1 - \chi_1^2) - f_2 > 0. \quad (4.70)$$

Ainsi, ces conditions de stabilité de $\bar{M}(c_2, c_1)$ sont données par l'ensemble suivant:

$$\mathcal{D}_{\text{Stab}(c_2, c_1)} = \left\{ (c_2, c_1) \in \mathbb{R}_+^2 : 0 < \chi_2 < 200 \text{ et } \chi_1 > \sqrt{1 - \frac{f_2}{f_1}} \right\}, \quad (4.71)$$

et pour $(c_2, c_1) \in \mathcal{D}_{\text{Stab}(c_2, c_1)}$ on a:

$$- \bar{M}^{-1}(c_2, c_1) \bar{q}(c_2, c_1) = \frac{2 \chi_1^3}{3 \sqrt{3} (f_1 (1 - \chi_1^2) - f_2)} \begin{bmatrix} 2 f_2 \\ -f_1 \end{bmatrix}. \quad (4.72)$$

On peut donc minimiser le vecteur $-\bar{M}^{-1}(c_2, c_1) \bar{q}(c_2, c_1)$ élément par élément sous la contrainte $c_1 \in \mathcal{D}_{\text{Stab}(c_2, c_1)}$. Ce minimum est obtenu pour $\chi_{1\text{opt}} = \sqrt{3 \left(1 - \frac{f_2}{f_1}\right)}$, on a alors:

$$- \bar{M}^{-1}(c_2, c_{1\text{opt}}) \bar{q}(c_2, c_{1\text{opt}}) = \frac{\sqrt{1 - \frac{f_2}{f_1}}}{-f_1} \begin{bmatrix} 2 f_2 \\ -f_1 \end{bmatrix}. \quad (4.73)$$

Algorithme:

Pas 1:

$$\chi_2 = 199.$$

Pas 2 à 3:

$$f_1 = -0.01, f_2 = 3.60, \chi_{1\text{opt}} = 32.92,$$

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} -0.01 & 7.20 \\ 0.5 & -1082.67 \end{bmatrix}, \bar{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 13730.77 \end{bmatrix}, \bar{M}^{-1} = \begin{bmatrix} -149.86 & -0.99 \\ -0.07 & -0.001 \end{bmatrix},$$

$$a_0 = \begin{bmatrix} 13692.76 \\ 19.00 \end{bmatrix},$$

$$\chi_{a_0} = \{x \in \mathbb{R}^2 : p(x) \leq a_0\}.$$

Pas 4:

Ensemble de travail \mathcal{X}_{a_0} :

$$f_1 = -1.809, f_2 = 0.453, \chi_{1\text{opt}} = 1.93,$$

$$a_1 = \begin{bmatrix} 0.559 \\ 1.118 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{X}_{a_1} = \{x \in \mathbb{R}^2: p(x) \leq a_1\}.$$

Ensemble de travail \mathcal{X}_{a_1} :

$$f_1 = -1.809, f_2 = 0.45, \chi_{1\text{opt}} = 1.92,$$

$$a_2 = \begin{bmatrix} 0.501 \\ 1.107 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{X}_{a_2} = \{x \in \mathbb{R}^2: p(x) \leq a_2\}.$$

Pas 5:

Si on choisit $d = \begin{bmatrix} 2600 \\ 13800 \end{bmatrix} > q$, alors:

$$\mathcal{D}_d(\mathcal{A}) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2: p(x) \leq \begin{bmatrix} 403401 \\ 199 \end{bmatrix} \right\}.$$

Pas 6:

Il n'existe pas d'autre ω_2 vérifiant le pas 1.

Pas 7: Conclusion

Soient:

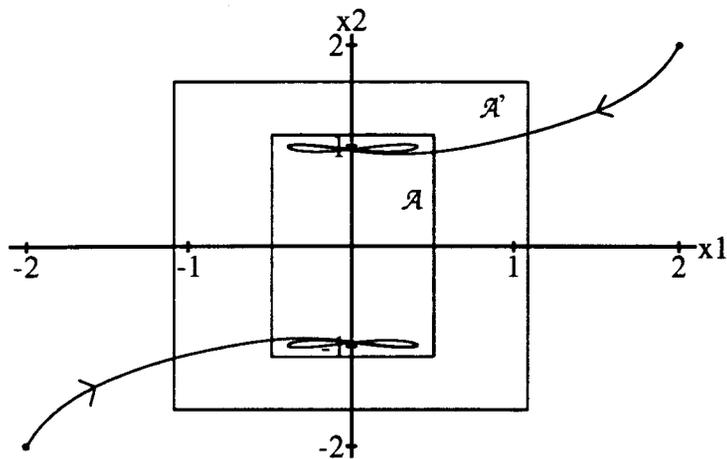
$$\mathcal{D}_d(\mathcal{A}) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2: p(x) \leq \begin{bmatrix} 403401 \\ 199 \end{bmatrix} \right\},$$

$$\mathcal{A} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2: p(x) \leq \begin{bmatrix} 0.501 \\ 1.107 \end{bmatrix} \right\}.$$

On en conclut que l'ensemble \mathcal{A} représenté Figure 4.6, est un ensemble localement asymptotiquement stable dont $\mathcal{D}_d(\mathcal{A})$ est une estimation de son domaine de stabilité asymptotique. Les figures 4.6 et 4.7 illustrent le résultat final et montrent une comparaison avec des résultats antérieurs [BORNE 90a, 90b] qui sont:

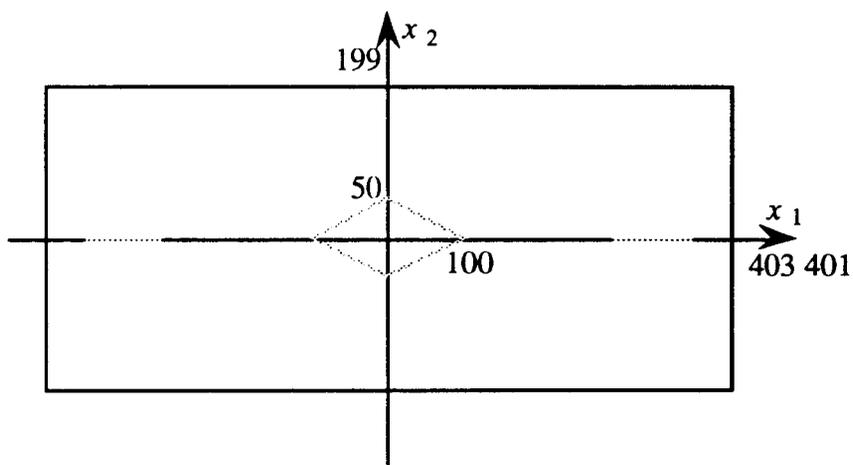
$$\mathcal{D}'_d(\mathcal{A}') = \{x \in \mathbb{R}^2: |x_1| + 2|x_2| \leq 100\},$$

$$\mathcal{A}' = \left\{x \in \mathbb{R}^2: p(x) \leq \begin{bmatrix} 1.089 \\ 1.634 \end{bmatrix}\right\}.$$



-Figure 4.6: Simulation et Ensemble Attractif-

La figure suivante compare $\mathcal{D}_d(\mathcal{A})$ (rectangle en traits pleins) avec $\mathcal{D}'_d(\mathcal{A}')$ (losange en traits pointillés) [BORNE 90a, 90b]:



-Figure 4.7: Comparaison de $\mathcal{D}_d(\mathcal{A})$ avec $\mathcal{D}'_d(\mathcal{A}')$ -

On constate donc une nette amélioration apportée par cet algorithme.

Conclusion sur les Systèmes de Comparaison Linéaires

Les différents résultats de cette section peuvent être résumés en énonçant la propriété suivante:

“Lorsque la paire constante (\bar{M}, \bar{q}) vérifie certaines conditions alors (4.5 b, $z_e, \mathcal{D}(z_e)$) est un système de comparaison de (4.1, $\mathcal{A}, \mathcal{D}_d(\mathcal{A})$) relativement à la propriété réalisée par z_e . De même, si la paire constante $(\underline{M}, \underline{q})$ vérifie certaines conditions alors (4.5 b, $z_e, \mathcal{D}(z_e)$) est un système de comparaison de (4.1, $\mathcal{R}, \mathcal{D}_d(\mathcal{R})$) relativement à la propriété de répulsivité.”

L’avantage de la construction d’une paire majorante constante réside dans la particularité des solutions du système majorant associé, qui conduit à des résultats puissants concernant le système initial. Ceci apparaît dans le théorème 4.2 (et à ses variantes 4.1, 4.3, 4.4 et 4.5).

Cependant, pour obtenir cette paire constante on est en général amené à effectuer une majoration importante, ce qui conduit à une perte d’information.

Les méthodes d’optimisation mises en place dans la section 1.2 permettent de minimiser cette perte et conduisent à une décomposition et une paire majorante optimales: le critère minimisé est ici la taille de l’ensemble \mathcal{A} possédant les propriétés annoncées par le Théorème 4.2.

Cependant, si on désire réduire encore cette perte d’information sur le système initial, on peut penser que l’utilisation d’un système non linéaire autonome, permettra de diminuer la taille de l’ensemble \mathcal{A} et d’augmenter la taille de l’estimation du domaine $\mathcal{D}_{(\cdot)}(\mathcal{A})$. C’est ce que nous nous proposons d’aborder dans la section suivante.

3 Systèmes de Comparaisons Non Linéaires Autonomes

Introduction

Dans la section 2 de ce chapitre, nous avons présenté quatre possibilités de découplage des équations du système majorant (4.2 a) et (4.2 b):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = e_2(t, x, d), t \in \mathbb{R}, x \in \mathcal{E}, d \in \mathcal{E}_D, & (4.2 \text{ a}) \\ \frac{dz}{dt} = M(t, x) z + q(t, x), t \in \mathcal{T}_e, x \in \mathcal{S}, z \in \mathbb{R}^k. & (4.2 \text{ b}) \end{cases}$$

La section précédente a étudié en détail le cas linéaire autonome ($M = \text{cte}$, $q = \text{cte}$), celle-ci s'intéresse au cas non linéaire autonome (4.74) (ou (4.75)):

$$\frac{dz}{dt} = \bar{M}(z) z + \bar{q}(z) = \bar{g}(z), z \in \mathbb{R}^k, \quad (4.74)$$

ou

$$\frac{dz}{dt} = \underline{M}(z) z + \underline{q}(z) = \underline{g}(z), z \in \mathbb{R}^k. \quad (4.75)$$

La principale difficulté rencontrée dans l'obtention d'un tel système majorant est que l'équation de base (4.2 b) contient explicitement le vecteur x , que l'on souhaite remplacer par z .

Ceci se résoud par deux biais:

1) le choix d'une N.V adaptée (par exemple $p(x) = |x|$, voir Section 2.4 Chapitre 3) conduisant à transformer (4.3 b) (ou (4.4 b)):

$$D_t^+ p(x) \leq \bar{M}(t, x) p(x) + \bar{q}(t, x), t \in \mathcal{T}_e, x \in \mathcal{S}, p(x) \in \mathbb{R}^k, \quad (4.3 \text{ b})$$

ou

$$\underline{M}(t, x) p(x) + \underline{q}(t, x) \leq D_t^+ p(x), t \in \mathcal{T}_e, x \in \mathcal{S}, p(x) \in \mathbb{R}^k, \quad (4.4 \text{ b})$$

en (4.76) (ou (4.77)):

$$D_t^+ p(x) \leq \bar{M}(p(x)) p(x) + \bar{q}(p(x)) = \bar{g}(p(x)), p(x) \in \mathbb{R}^k, \quad (4.76)$$

ou

$$\underline{g}(p(x)) = \underline{M}(p(x)) p(x) + \underline{q}(p(x)) \leq D_t^+ p(x), p(x) \in \mathbb{R}^k. \quad (4.77)$$

Chapitre 4

2) l'utilisation du Lemme (3.7) (ou 3.8) comprenant des hypothèses de quasi-monotonie (semblables à celle de T. Wazewski [WAZEWSKI 50]) permettant sous certaines conditions à z solution de (4.74) (ou de 4.75) de majorer $p(x)$ vérifiant (4.76) (ou 4.77).

À partir de (4.74) (ou de (4.75)), les différentes méthodes présentées dans le chapitre 2 permettent d'obtenir des conclusions sur le comportement des solutions de (4.2 b) et donc du système initial (SP) (4.1). La section 3.1 présente les résultats généraux relatifs à cette démarche, qui seront illustrés de divers exemples dans la Section 3.2.

3.1 Résultats Généraux

3.1.1 Notations

Supposons que la N.V régulière $p(x)$ permette à partir du système initial (SP) (4.1) d'obtenir l'encadrement suivant de la dérivée temporelle à droite de $p(x)$ (voir les méthodes présentées au Chapitre 3, notamment Section 2.4):

$$\underline{g}(p(x)) \leq D^+ p(x) \leq \bar{g}(p(x)), t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n, p(x) \in \mathbb{R}^k. \quad (4.78)$$

En considérant les systèmes:

$$\frac{dz_g}{dt} = \underline{g}(z_g), t \in \mathbb{R}, z_g \in \mathbb{R}^k, \quad (4.79)$$

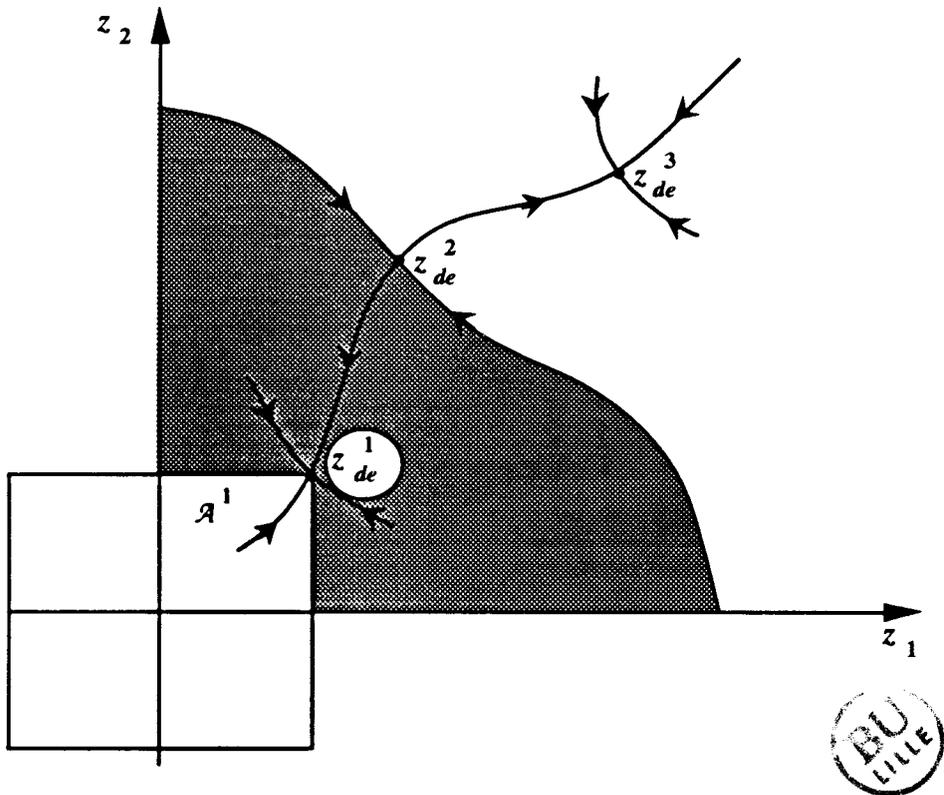
$$\frac{dz_d}{dt} = \bar{g}(z_d), t \in \mathbb{R}, z_d \in \mathbb{R}^k, \quad (4.80)$$

nous avons établi les Lemmes 3.7 et 3.8 permettant de majorer le comportement de $p(x)$ où x est la solution du système (SP) (4.1).

En suivant les conventions prises au chapitre 3 Section 1.3 ("Par la suite toute fonction ou matrice sur-lignée sera relative à une majoration alors que toute variable sous-lignée sera relative à une majoration rétrograde."), la variable z intervenant dans l'équation (4.79) devrait être sous-lignée (puisqu'elle est relative à une majoration rétrograde). Ainsi pour ne pas la confondre avec le mouvement z , on note z_g ("g" pour "gauche" correspondant au sens rétrograde) la variable relative à (4.79) et z_d ("d" pour "droite" correspondant au sens direct) celle relative (4.80).

Soient (voir Figure 4.8):

- 1) S_z un ensemble connexe de \mathbb{R}^k ,
- 2) $\{z_{ge}^i\}$ et $\{z_{de}^i\}$ les suites de points d'équilibre positifs des systèmes (4.79) et (4.80),
- 3) $\mathcal{A}^i = \{x \in \mathbb{R}^n : p(x) \leq z_{de}^i\}$,
 $\mathcal{D}_{(.)}(z_{de}^i)$ le domaine qualitatif (vide ou non) associé à z_{de}^i , où $(.)$ peut être (a) attractivité, (s) stabilité ou (sa) stabilité asymptotique,
 $\mathcal{D}_{(.)}(\mathcal{A}^i) = \{x \in \mathbb{R}^n : p(x) \in \mathcal{D}_{(.)}(z_{de}^i)\}$,
- 4) $\mathcal{R}^i = \{x \in \mathbb{R}^n : p(x) \leq z_{ge}^i\}$,
 $\mathcal{D}_r(z_{ge}^i)$ le domaine de répulsion (vide ou non) associé à z_{ge}^i ,
 $\mathcal{D}_r(\mathcal{R}^i) = \{x \in \mathbb{R}^n : p(x) \in \mathcal{D}_r(z_{ge}^i)\}$.



-Figure 4.8: Notations et Principe-

3.1.2 Attractivité-Stabilité

En étudiant la partie droite de (4.78) on déduit le résultat suivant:

Théorème 4.6 [PERRUQUETTI 93b] (Stabilité asymptotique)

Supposons que:

- 1) $\bar{g}(z) \in C^1(S_z, \mathbb{R}^k)$ est localement quasi-monotone non-décroissante en z par rapport à S_z ,
- 2) $\mathcal{D}_a(z_{de}^i) \neq \emptyset$, le domaine d'attractivité de z_{de}^i ,
- 3) $\{z \in \mathbb{R}_+^k : z < z_{de}^i\} \not\subseteq \mathcal{D}_a(z_{de}^i)$,
- 4) $\mathcal{D}_a(z_{de}^i) \subset S_z$.

Alors:

- 1) \mathcal{A}^i est localement asymptotiquement stable pour le système initial (SP) (4.1),
- 2) $\mathcal{D}_a(\mathcal{A}^i)$ est une estimation de son domaine de stabilité asymptotique.

Preuve:

1) Pour tout z_{de}^i , \mathcal{A}^i est un ensemble compact.

2) Supposons que $\mathcal{D}_a(z_{de}^i) \neq \emptyset$. En se référant à [GRUJIĆ 90, 93] les hypothèses faites sur $\bar{g}(z)$ impliquent: $\mathcal{D}_{sa}(z_{de}^i) = \mathcal{D}_a(z_{de}^i)$.

3) Attractivité:

L'hypothèse 3) et le fait que $\mathcal{D}_a(z_{de}^i)$ soit un ouvert montrent qu'il existe un voisinage de $\{z \in \mathbb{R}_+^k : z \leq z_{de}^i\}$ contenu dans $\mathcal{D}_a(z_{de}^i)$, ce qui prouve que $\mathcal{D}_a(\mathcal{A}^i)$ est un voisinage de \mathcal{A}^i .

Soit $x_0 \in \mathcal{D}_a(\mathcal{A}^i)$, alors $p(x_0) \in \mathcal{D}_a(z_{de}^i)$. z_{de}^i est attractif, il existe un instant $T > 0$ tel que (ρ étant la distance euclidienne):

$$\rho(\underline{z}_d(t; t_0, p(x_0)); z_{de}^i) < \varepsilon, \forall t > t_0 + T. \tag{4.81}$$

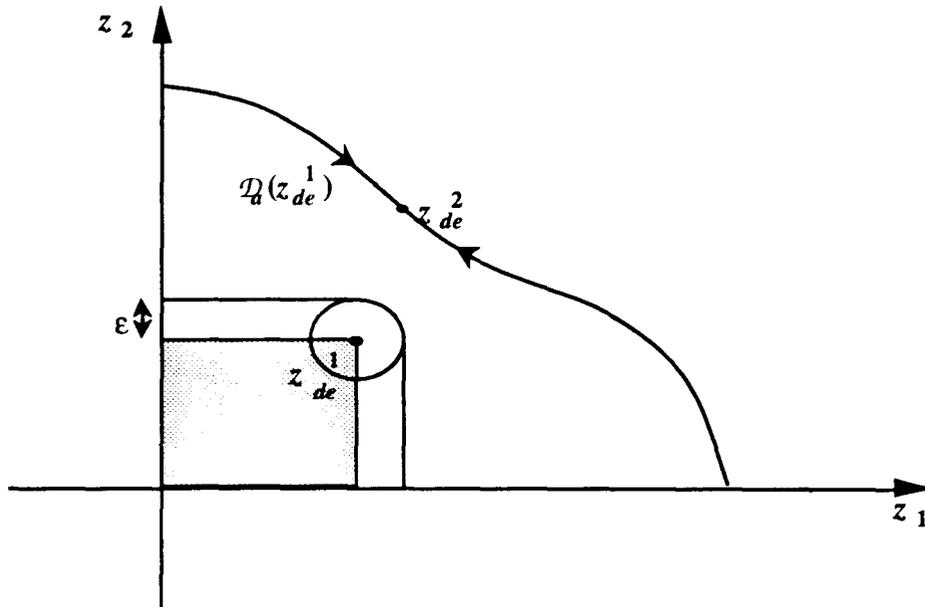
$\mathcal{D}_a(z_{de}^i) \subset S_z$ est invariant et le Lemme 3.7 implique que $\mathcal{D}_a(\mathcal{A}^i)$ est invariant et que:

$$0 \leq p[\underline{x}(t; t_0, x_0)] \leq \underline{z}_d(t; t_0, p(x_0)), \forall t \geq t_0. \tag{4.82}$$

Les relations (4.81) et (4.82) montrent que (voir Figure 4.9):

$$\rho(p[\underline{x}(t; t_0, x_0)] ; \{z \in \mathbb{R}_+^k : z \leq z_{de}^i\}) < \varepsilon, \forall t > t_0 + T. \quad (4.83)$$

En conclusion \mathcal{A}^i est un ensemble attractif et $\mathcal{D}_a(\mathcal{A}^i)$ est une estimation de son domaine d'attraction.



-Figure 4.9: Illustration de (4.83)-



4) Stabilité:

On applique le théorème suivant (Théorème 4.7).

Théorème 4.7 [PERRUQUETTI 93b] (Stabilité)

Supposons que:

- 1) $\bar{g}(z) \in C^1(S_z, \mathbb{R}^k)$ est localement quasi-monotone non-décroissante en z par rapport à S_z ,
- 2) $\mathcal{D}_s(z_{de}^i) \neq \emptyset$, le domaine de stabilité de z_{de}^i ,
- 3) $\{z \in \mathbb{R}_+^k : z < z_{de}^i\} \not\subset \mathcal{D}_s(z_{de}^i)$,
- 4) $\mathcal{D}_s(z_{de}^i) \subset S_z$.

Alors:

- 1) \mathcal{A}^i est localement stable pour le système initial (SP) (4.1),
- 2) $\mathcal{D}_s(\mathcal{A}^i)$ est une estimation de son domaine de stabilité.

Preuve:

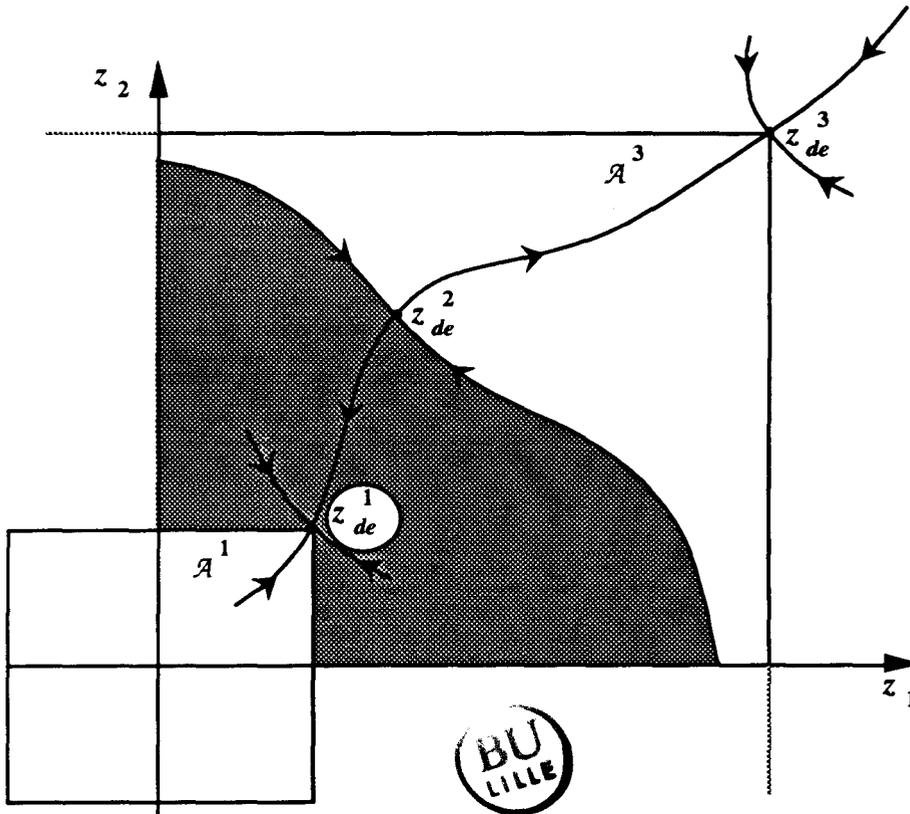
- 1) Pour tout z_{de}^i , \mathcal{A}^i est un ensemble compact.
 - 2) Stabilité: Supposons que $\mathcal{D}_s(z_{de}^i) \neq \emptyset$ (c'est-à-dire z_{de}^i est stable).
- Soit $x_0 \in \mathcal{D}_s(\mathcal{A}^i)$, alors $p(x_0) \in \mathcal{D}_s(z_{de}^i)$. Or, puisque z_{de}^i est stable:

$$\rho(\underline{z}_d(t; t_0, p(x_0)); z_{de}^i) < \varepsilon, \forall t \geq t_0. \quad (4.84)$$

Un raisonnement similaire à celui développé au point 3) de la preuve du théorème 4.6 montre que \mathcal{A}^i est stable et $\mathcal{D}_s(\mathcal{A}^i)$ est une estimation de son domaine de stabilité.

Remarques:

- 1) Si on trouve plusieurs points z_{de}^i (soit attractif soit stable), dans ce cas en utilisant ces théorèmes (4.6 et 4.7), on peut obtenir des conclusions similaires sur des ensembles \mathcal{A}^i emboîtés. Cette situation est illustrée sur la figure suivante (Figure 4.10):



-Figure 4.10: Cas de plusieurs Ensembles Emboîtés-

2) On peut obtenir d'autres variantes de ces théorèmes (4.6 et 4.7) si on remplace l'hypothèse 2) par 2'):

2') $\mathcal{D}_{(.)}(z_{de}^i) \neq \emptyset$, où $(.) = \{\text{attractivité uniforme, stabilité uniforme, stabilité exponentielle, stabilité exponentielle uniforme}\}$.

Dans ce cas \mathcal{A} est $(.)$ et $\mathcal{D}_{(.)}(\mathcal{A}^i)$ est une estimation du domaine correspondant.

3) Dans le cas particulier où $\bar{g}(z) = \bar{M} z + \bar{q}$, avec \bar{M} qui est une matrice constante opposée d'une M-matrice et \bar{q} un vecteur positif et quelques hypothèses supplémentaires, on retrouve le Théorème 4.2.

En appliquant les théorèmes précédents (4.6 et 4.7) dans le cas où la propriété vérifiée par z_{de}^i est globale ($S_z = \mathbb{R}^k$), on obtient:

Théorème 4.8 [PERRUQUETTI 93b]

Supposons que:

- 1) $\bar{g}(z) \in C^1(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ est quasi-monotone non-décroissante en z .
- 2) z_{de}^i est globalement attractif (respectivement stable).

Alors \mathcal{A}^i est globalement asymptotiquement stable (respectivement stable) pour le système initial (SP) (4.1).

Remarque:

Dans le cas particulier où $\bar{g}(z) = \bar{M} z + \bar{q}$, avec \bar{M} qui est une matrice constante opposée d'une M-matrice et \bar{q} un vecteur positif, on retrouve le Théorème 4.1.

3.1.3 Répulsivité

En étudiant la partie gauche de (4.78), on déduit les deux résultats (Théorème 4.9 et 4.10):

Théorème 4.9 [PERRUQUETTI 93b]

Supposons que:

- 1) $\underline{g}(z) \in C^1(S_z, \mathbb{R}^k)$ est localement quasi-monotone non-croissante en z par rapport à S_z ,
- 2) $\mathcal{D}_r(z_{ge}^i) \neq \emptyset$, le domaine de répulsivité de z_{ge}^i ,
- 3) $\{z \in \mathbb{R}_+^k : z < z_{ge}^i\} \not\subseteq \mathcal{D}_r(z_{ge}^i)$,
- 4) $\mathcal{D}_r(z_{ge}^i) \subset S_z$.

Alors:

- 1) \mathcal{R}^i est localement répulsif pour le système initial (SP) (4.1),
- 2) $\mathcal{D}_r(\mathcal{R}^i)$ est une estimation de son domaine de répulsivité.

Preuve:

Supposons que les hypothèses 1 à 4 soient vérifiées.

La condition 2) implique que z_{ge}^i est localement répulsif (pour $\underline{z}_g(t; t_0, z_{g0})$) donc par définition, z_{ge}^i est localement attractif pour $\underline{z}_g(-t; t_0, z_{g0})$. Comme $\underline{z}_g(t; t_0, z_{g0})$ est la solution de l'E.D autonome (4.79) il en résulte que $\underline{z}_g(-t; t_0, z_{g0})$ est la solution de (4.85) passant par z_{g0} à l'instant t_0 :

$$\frac{dz_g}{dt} = -\underline{g}(z_g), t \in \mathbb{R}, z_t \in \mathbb{R}^k. \quad (4.85)$$

En inversant le sens temporel dans (4.78), on obtient:

$$D_t^+ p(x) \leq -g_t(p(x)). \quad (4.86)$$

Ainsi les conditions 1) à 4) et (4.86) vérifient les hypothèses du Théorème 4.6, donc \mathcal{R}^i est localement attractif pour le système initial (SP) (4.1) (en renversant le temps donc relativement à $\underline{x}(-t; t_0, x_0)$), et $\mathcal{D}_r(\mathcal{R}^i)$ est une estimation de son domaine d'attraction (relativement à $\underline{x}(-t; t_0, x_0)$). Donc \mathcal{R}^i est localement répulsif pour le système initial

(SP) (4.1) (relativement à $\underline{x}(t ; t_0, x_0)$), et $\mathcal{D}_r(\mathcal{R}^i)$ une estimation de son domaine de répulsion (relativement à $\underline{x}(t ; t_0, x_0)$).

Théorème 4.10 [PERRUQUETTI 93b]

Supposons que:

- 1) $\underline{g}(z) \in C^1(\mathcal{S}_z, \mathbb{R}^k)$ est localement quasi-monotone non-décroissante en z par rapport à \mathcal{S}_z ,
- 2) z_{ge}^i est instable.

Alors \mathcal{R}^i est instable pour le système initial (SP) (4.1).

Remarque:

Il est important de noter que l'utilisation de N.V conduit toujours (en pratique) à l'obtention d'une fonction $\underline{g}(z) \in C^1(\mathcal{S}_z, \mathbb{R}^k)$ localement quasi-monotone non-croissante en z par rapport à \mathcal{S}_z (donc vérifiant l'hypothèse 1) du théorème 4.9). Donc l'application de ce théorème est à envisager avec des F.V.L. Ainsi, dans la preuve, $v(x)$ désigne un F.V.L satisfaisant les hypothèses du théorème.

Preuve:

Suppose que z_{ge}^i est instable, alors:

$\forall \eta > 0, \exists t_0 \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \exists z_0, \exists T \geq t_0$ tels que:

$$\rho(z_0 ; z_{ge}^i) < \eta \text{ et } \rho(\underline{z}_g(T ; t_0, z_0) ; z_{ge}^i) \geq \varepsilon.$$

Alors en utilisant une version modifiée du Lemme 3.7 et en choisissant x_0 tel que $v(x_0) = z_0$, on montre l'instabilité de \mathcal{R}^i pour le mouvement $\underline{x}(t ; t_0, x_0)$.

3.2 Exemples d'Applications

1) Reprenons le système dynamique (3.83) (Section 2.3 Chapitre 3) défini par:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -1.5 & 0.9 + 0.1 d(t) \\ -0.5 & 1 - x_2^2 \end{bmatrix} x, d(t) \in \mathcal{E}_D. \quad (4.87)$$

\mathcal{E}_D étant l'ensemble des fonctions $d(t)$ vérifiant: $d(t) \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$, $|d(t)| \leq 1$.

On a montré pour la N.V suivante:

$$p(x) = [|x_1|, |x_2|]^T, \quad (4.88)$$

que l'ensemble \mathcal{A} représenté Figure 4.4, est globalement uniformément stable et globalement exponentiellement stable de taux de décroissance exponentielle $\beta = 0.23$:

$$\mathcal{A} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : p(x) \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}. \quad (4.89)$$

Si on utilise des majorants non linéaires, pour la même norme définie par (4.88) on obtient:

$$\frac{dz_d}{dt} = \begin{bmatrix} -1.5 & 1 \\ 0.5 & 1 - z_{d2}^2 \end{bmatrix} z_d, t \in \mathbb{R}, z_d \in \mathbb{R}^2. \quad (4.90)$$

La fonction ainsi définie est (globalement) quasi-monotone non décroissante, et l'étude de (4.90) montre que $z_{de} = \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable. Cette étude conduit donc aux mêmes conclusions que celles obtenues avec des majorants linéaires autonomes (Section 1.2.1). De même, l'étude de la partie gauche de (4.78) ne nous donne pas plus de renseignement.

Dans ce cas l'utilisation d'un système majorant non linéaire n'a pas amélioré les résultats obtenus en Section 1.2.1, cependant il est à noter que l'obtention de ces résultats est plus rapide et plus facile.

2) Reprenons le système dynamique (3.95) (Section 2.3 Chapitre 3) défini par:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -2+10^{-2}|x_2| & 0.9 \cos t + 8 \cdot 10^{-7}|x_2^3| \\ -0.5 \sin t & 1-x_1^2 \end{bmatrix} x, x \in \mathbb{R}^2. \quad (4.91)$$

On a montré pour la N.V suivante:

$$p(x) = [|x_1|, |x_2|]^T, \quad (4.92)$$

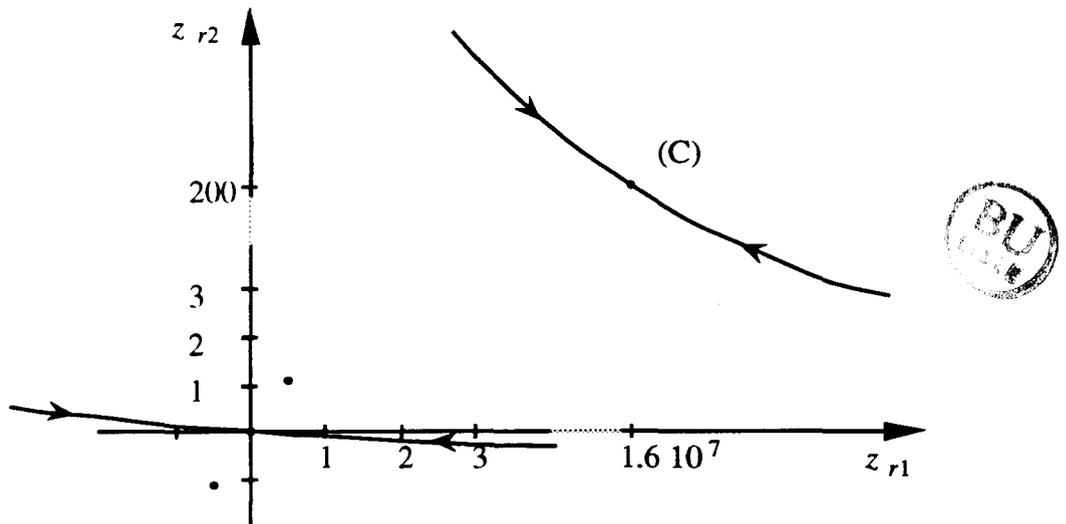
que l'ensemble \mathcal{A} représenté Figure 4.6, est localement uniformément stable et que $\mathcal{D}_d(\mathcal{A})$ représenté Figure 4.7 est une estimation de son domaine de stabilité asymptotique uniforme (voir exemple 2 Section 1.2.1):

$$\mathcal{D}_d(\mathcal{A}) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : p(x) \leq \begin{bmatrix} 403401 \\ 199 \end{bmatrix} \right\}, \quad (4.93)$$

$$\mathcal{A} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : p(x) \leq \begin{bmatrix} 0.501 \\ 1.107 \end{bmatrix} \right\}. \quad (4.94)$$

Si on utilise un majorant non linéaire, pour la même norme définie par (4.92) on obtient (voir exemple 2 Section 2.4 Chapitre 4):

$$\frac{dz_d}{dt} = \begin{bmatrix} -2+10^{-2}z_{d2} & 0.9 + 8 \cdot 10^{-7}z_{d2}^3 \\ 0.5 & 1-z_{d2}^2 \end{bmatrix} z_d, t \in \mathbb{R}, z_d \in \mathbb{R}^2. \quad (4.95)$$



-Figure 4.11: Ebauche du Portrait de Phase de (4.95)-

Chapitre 4

Il est facile de vérifier que la fonction ainsi définie est (globalement) quasi-monotone non décroissante et l'étude de (4.95) menée dans l'exemple 2) de la Section 2.2 du Chapitre 2 montre que $z_{de} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.107 \end{bmatrix}$ est un point d'équilibre localement asymptotiquement stable dont le domaine de stabilité asymptotique est délimité par les deux courbes de la figure 4.11.

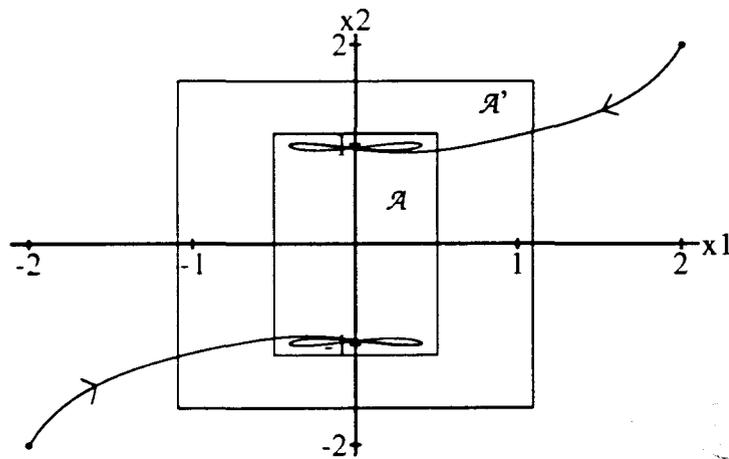
A l'aide du théorème 4.6 on conclut que:

$$\mathcal{D}_{sa}(\mathcal{A}) = \{x \in \mathbb{R}^2: p(x) \text{ majoré par la courbe (C)}\}, \quad (4.96)$$

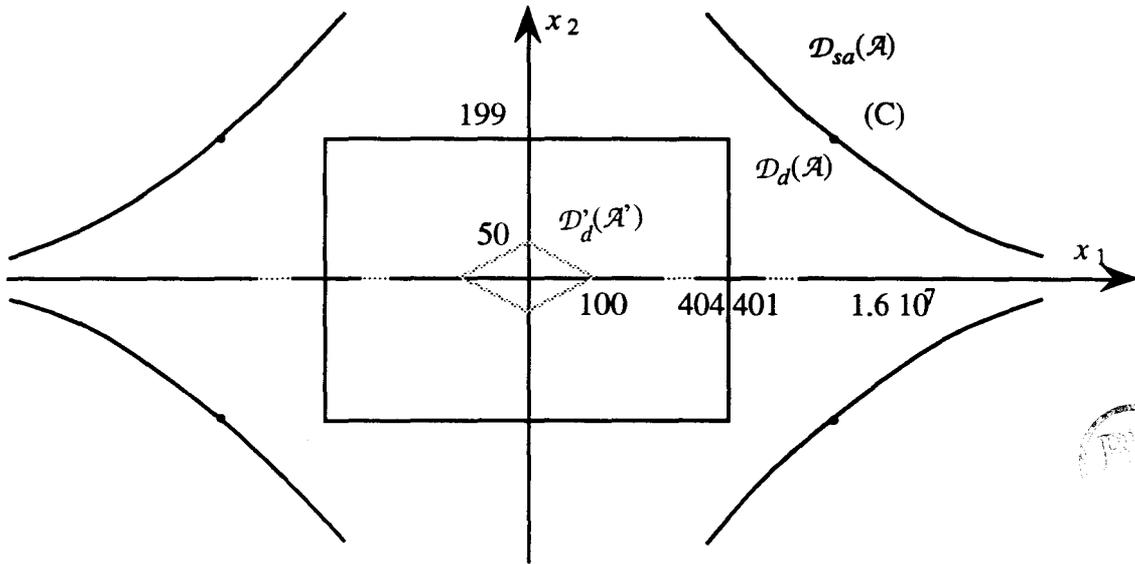
$$\mathcal{A} = \left\{x \in \mathbb{R}^2: p(x) \leq \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.107 \end{bmatrix}\right\}. \quad (4.97)$$

La figure 4.12 montre deux simulations et l'ensemble \mathcal{A} .

Dans ce cas l'utilisation d'un système majorant non linéaire donne le même ensemble localement asymptotiquement stable \mathcal{A} , mais améliore nettement les résultats obtenus en Section 1.2.1 concernant l'estimation du domaine de stabilité asymptotique de \mathcal{A} . La figure 4.13 compare $\mathcal{D}_{sa}(\mathcal{A})$ (4.96) (délimité par les courbes en traits pleins) obtenu à l'aide de majorant non linéaire, $\mathcal{D}_d(\mathcal{A})$ (rectangle en traits pleins) obtenu à l'aide de majorant linéaire et d'un processus d'optimisation (Section 1.2.2), et enfin $\mathcal{D}'_d(\mathcal{A})$ (losange en traits pointillés) obtenu à l'aide de majorant linéaire dans [BORNE 90a, 90b].



-Figure 4.12: Simulations et Ensemble \mathcal{A} -



-Figure 4.13:

Comparaison des trois estimations du domaine de stabilité asymptotique-

3) Reprenons le système (3.157) (Section 2.4 Chapitre 3) décrit par:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -|x_1| + x_2 & 0 \\ \cos t x_1 & -2 + \sin t \end{bmatrix} x, x \in \mathbb{R}^2. \quad (4.98)$$

On vu que pour la N.V suivante (Section 2.4 Chapitre 3):

$$p(x) = [|x_1|, |x_2|]^T, \quad (4.99)$$

on avait:

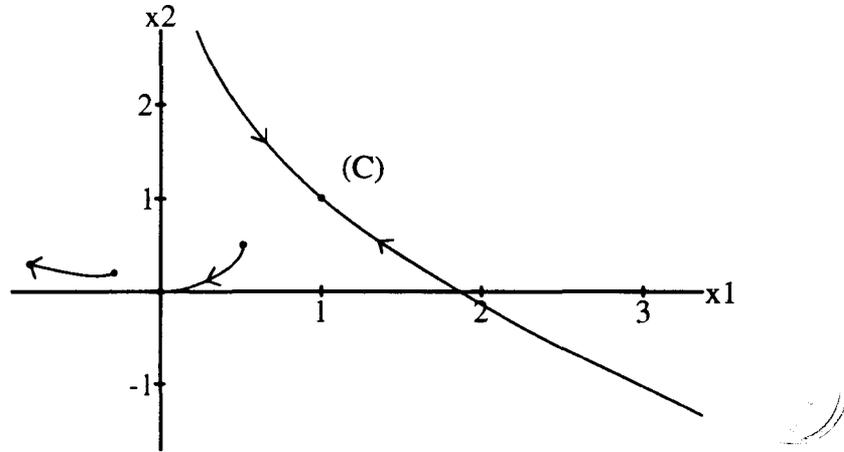
$$D_t^+ p(x) \leq \begin{bmatrix} -p_1(x) + p_2(x) & 0 \\ p_1(x) & -1 \end{bmatrix} p(x), t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^2, p(x) \in \mathbb{R}^2. \quad (4.100)$$

Donc:

$$\frac{dz_d}{dt} = \begin{bmatrix} -z_{d1} + z_{d2} & 0 \\ z_{d1} & -1 \end{bmatrix} z_d, t \in \mathbb{R}, z_d \in \mathbb{R}^2. \quad (4.101)$$

Chapitre 4

L'étude de (4.101) menée dans l'exemple 1) de la Section 1.2.2 du Chapitre 2, à l'aide du théorème de la Variété Centre (Théorème 2.5), nous montre que l'origine $z_{de} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ n'est pas un point d'équilibre localement asymptotiquement stable, cependant il existe un domaine du demi plan positif où toute solution issue de celui-ci converge de façon asymptotique vers l'origine. Ce domaine est délimité par la variété stable associée à l'équilibre $z_{de} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$: courbe (C) représentée figure 4.14.



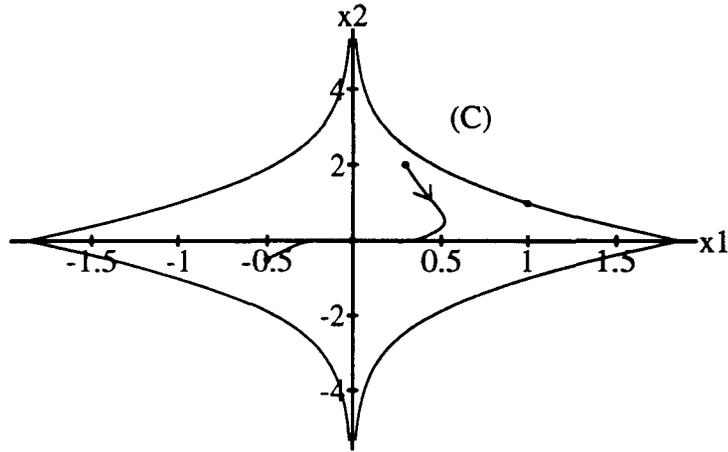
-Figure 4.14: Ebauche du Portrait de Phase de (4.101)-

La fonction $\bar{g}(z_d)$ est bien quasi-monotone non-décroissante en z_d , et à l'aide d'une variante du théorème 4.6, on conclut que l'origine est localement asymptotiquement stable avec:

$$\mathcal{D}_{sa}(\mathcal{A}) = \{x \in \mathbb{R}^2: p(x) \text{ majoré par la courbe (C)}\}, \quad (4.102)$$

$$\mathcal{A} = \left\{x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}. \quad (4.103)$$

Dans ce cas l'utilisation d'un système majorant non linéaire permet de conclure sur la stabilité asymptotique de l'origine, ce que l'utilisation d'un système majorant linéaire n'aurait pas permise (Figure 4.15).



-Figure 4.15: Simulations de (4.98) et Résultats-

4) Reprenons le système (3.145) (Section 2.4 Chapitre 3) décrit par:

$$f(t, x) - 0.5 |d(t)| \leq \frac{dx}{dt} \leq f(t, x) + |d(t)|, t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^3, \quad (4.104)$$

avec $\underline{x}(t; t_0, x_0)$ continue par rapport au temps,

$$f(t, x) = \begin{bmatrix} -2 - 10^{-2} x_2 \cos t & 0.9 \sin t & 8 \cdot 10^{-7} x_2^3 \\ 0.5 \sin t & h(x) & \cos t x_2 x_3 \\ 0.5 & x_2 x_3 \sin t & h(x) \end{bmatrix} x,$$

$$h(x) = 1 - x_2^2 - x_3^2 - 3|x_2 x_3|, |d_i(t)| \leq 1.$$

Soit $p(x)$ la N.V régulière définie par:

$$p(x) = \begin{bmatrix} |x_1| \\ |x_2| + |x_3| \end{bmatrix}. \quad (4.105)$$

On a montré (Section 2.4 Chapitre 3) que l'on avait:

$$\bar{q}(x)(x) = [1 \ 2]^T, \quad (4.106)$$

$$\bar{M}(x) = \begin{bmatrix} -2 - 10^{-2} p_2(x) & 0.9 + 8 \cdot 10^{-7} p_2^3(x) \\ 1 & 1 - p_2^2(x) \end{bmatrix}, \quad (4.107)$$

donc, compte tenu des notations:

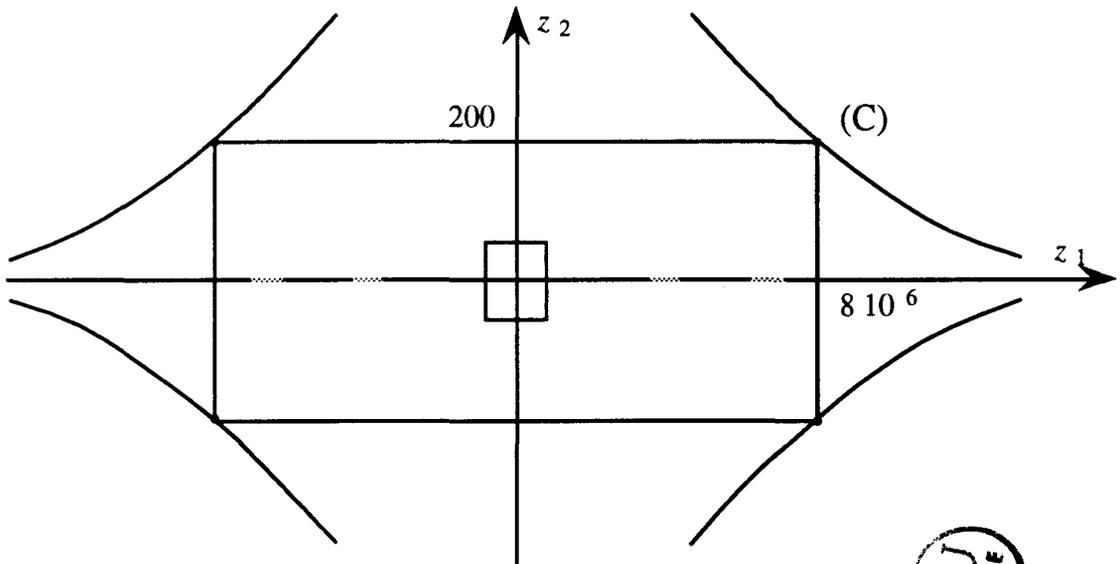
$$\bar{g}(z_d) = \begin{bmatrix} -2+10^{-2} z_{d2} & 0.9+8 \cdot 10^{-7} z_{d2}^3 \\ 1 & 1-z_{d2}^2 \end{bmatrix} z_d + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}, z_d \in \mathbb{R}^2. \quad (4.108)$$

$\bar{g}(z_d) \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ est quasi-monotone non-décroissante en z_d et l'étude de (4.108) combinée au théorème 4.6 montre que:

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : p(x) \leq [1.28, 1.71]^T\}, \quad (4.109)$$

est localement asymptotiquement stable. Une estimation de son domaine de stabilité asymptotique est donnée par:

$$\mathcal{D}_{sa}(\mathcal{A}) = \{x \in \mathbb{R}^n : p(x) \leq \text{courbe (C) (Figure 4.16)}\}. \quad (4.110)$$



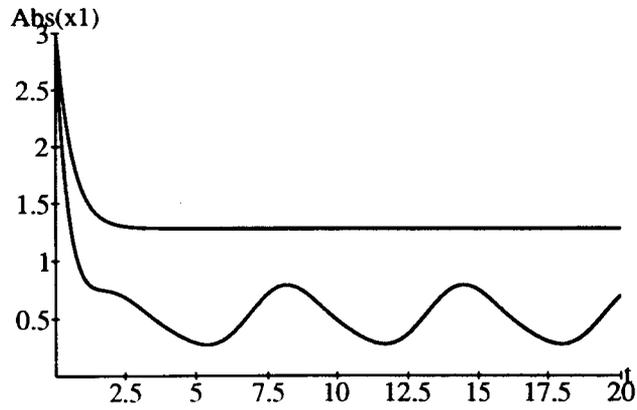
-Figure 4.16: Estimation de $\mathcal{D}_{sa}(\mathcal{A})$ -



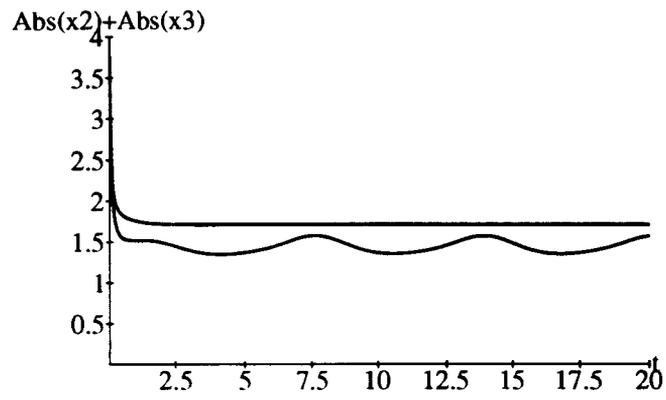
Les figures 4.17, 4.18, 4.19 sont obtenues pour le système particulier suivant:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) + \left(\frac{e^t}{1+e^t}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ avec } x_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{ et } t_0 = 0. \quad (4.111)$$

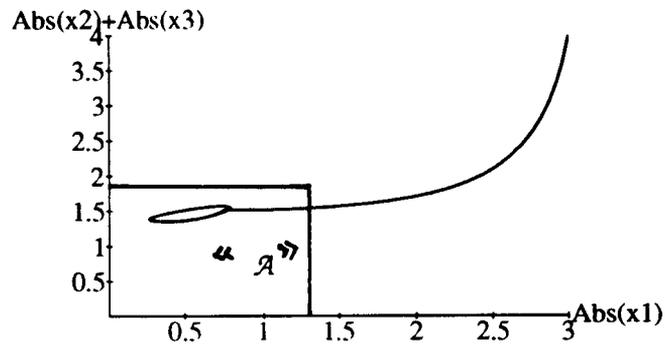
Attracteurs et Domaines Associés via les Normes Vectorielles



-Figure 4.17: $|x_1(t)|$ et $z_{r1}(t)$ -



-Figure 4.18: $|x_2(t)|+|x_3(t)|$ et $z_{d2}(t)$ -



-Figure 4.19: Projection de l'Evolution de la Phase-

Conclusion sur les Systèmes de Comparaison Non Linéaires Autonomes

Les différents résultats de cette section peuvent être résumés en énonçant la propriété suivante:

“Lorsque $\bar{g}(z_d)$ est localement quasi-monotone non-décroissante en z_d alors (4.2, z_{de}^i , $\mathcal{D}_{(\cdot)}(z_{de}^i)$) est un système de comparaison de (4.3, \mathcal{A}^i , $\mathcal{D}_{(\cdot)}(\mathcal{A}^i)$) relativement à la propriété réalisée par z_{de}^i . De même, si $\underline{g}(z_g)$ est localement quasi-monotone non-croissante en z_g alors (4.2, z_{ge}^i , $\mathcal{D}_r(z_{ge}^i)$) est un système de comparaison de (4.4, \mathcal{R}^i , $\mathcal{D}_r(\mathcal{R}^i)$) relativement à la propriété de répulsivité.”

De plus, l'utilisation, lorsqu'elle est possible, de majorants non linéaires autonomes permet une nette amélioration des résultats obtenus par des majorants linéaires autonomes. Il est important de noter qu'avec des majorants non linéaires autonomes les résultats s'obtiennent facilement puisqu'il suffit d'étudier des points d'équilibres, en particulier à l'aide des méthodes décrites au chapitre 2.

Conclusion

L'utilisation de **système majorant linéaire autonome** ($g(z) = Mz + q$) présente l'avantage de la simplicité. Pour affiner les résultats on peut procéder par optimisation de la décomposition (M, q) et/ou par itération. Les majorants obtenus vérifient systématiquement les hypothèses de quasi monotonie.

L'utilisation des **majorants non linéaires autonomes**, sous réserve que les hypothèses de quasi monotonie soient vérifiées, conduit à des estimations souvent plus précises. Les résultats s'obtiennent alors en étudiant les points d'équilibre (s'ils existent) à l'aide des méthodes décrites au second chapitre. Il est possible que la fonction obtenue ($g(z)$) ne soit pas quasi monotone non décroissante: on peut cependant dans ce cas isoler les termes posant des problèmes et les majorer (ce qui est toujours possible puisqu'ils sont décroissants) par des constantes. Ceci revient à "mixer" les deux approches (linéaire et non linéaire).

Parallèlement, une étude analogue peut être menée sur les **systèmes majorants rétrogrades**.

Enfin, on peut noter que ces résultats sont généralisables aux **Fonctions Vectorielles de Liapounov** et qu'il est tout à fait envisageable, lorsqu'on utilise (4.2 b) sous sa forme non linéaire autonome, de remplacer les points d'équilibres par des ensembles et d'en déduire des résultats similaires.

CHAPITRE 5 : STABILITÉ PRATIQUE ET COMMANDE SOUS CONTRAINTES

Introduction

L'utilisation de N.V afin d'obtenir divers types de systèmes majorants (Chapitre 3) nous a permis d'étudier certaines propriétés qualitatives comme par exemple la stabilité asymptotique d'ensembles (Chapitre 4).

Dans la première section, cet outil va nous permettre d'étudier une autre propriété qualitative: la **stabilité pratique** (pour la définition voir Chapitre 1 Section 3.5). Cette propriété sera abordée à l'aide de **systèmes majorants linéaires à validité temporelle locale**.

Enfin dans la seconde section, nous aborderons le problème de la **commande sous contraintes**. Comme nous le verrons, le problème formulé sous une certaine forme revient à étudier une autre propriété qualitative: l'**invariance d'ensembles**. Dans cette dernière section les **majorants** sont des **systèmes non linéaires autonomes**, dont on trouvera au Chapitre 2 une étude, permettra la formulation de réponses au problèmes envisagés, sous forme de conditions suffisantes.

1 Stabilité Pratique

Introduction

Comme on l'a vu Section 3.5 Chapitre 1, la question de la **stabilité pratique** du système:

$$\frac{dx}{dt} = e_2(t, x, d), \quad t \in \mathcal{T}, x \in \mathcal{E}, d \in \mathcal{E}_D, \quad (SP) (5.1)$$

consiste à étudier la proximité entre l'état effectif du système et un objectif défini par un sous ensemble de l'état. D'un point de vue pratique, cette proximité n'est à considérer que pendant un intervalle de temps, souvent fini, et qui fera partie des données du problème. Dans ce domaine d'importants résultats ont été obtenus par Weiss et Infante [WEISS 67a] et Weiss [WEISS 67b]. Lj.T. Grujić [GRUJIĆ 73a, 73b] a obtenu des conditions de stabilité pratique absolue: c'est-à-dire indépendantes de la forme effective des caractéristiques non linéaires.

Dans ces études, comme dans la notre, on suppose que le système considéré (SP) (5.1) admet une solution maximale unique au problème de Cauchy $x(t_0) = x_0$, définie sur $[t_0, \omega) \subset I(t_0, x_0)$. On notera S un ensemble connexe ouvert $S \subset \mathcal{E}$.

Ici encore nos résultats reposent sur l'utilisation des **normes vectorielles**, mais on emploiera des **systèmes majorants à validité locale temporelle** (voir Chapitre 3):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = e_2(t, x, d), \quad t \in \mathcal{T}, x \in \mathcal{E}, d \in \mathcal{E}_D, & (5.2 \text{ a}) \\ \frac{dz}{dt} = \bar{M}(t, x) z + \bar{q}(t, x), \quad t \in \mathcal{T}_e, x \in S, z \in \mathbb{R}^k, & (5.2 \text{ b}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = e_2(t, x, d), \quad t \in \mathcal{T}, x \in \mathcal{E}, d \in \mathcal{E}_D, & (5.3 \text{ a}) \\ D_t^+ p(x) \leq \bar{M}(t, x) p(x) + \bar{q}(t, x), \quad t \in \mathcal{T}_e, x \in S, p(x) \in \mathbb{R}^k, & (5.3 \text{ b}) \end{cases}$$

avec:

- $\mathcal{T}_e \subset \mathbb{R}$, un intervalle prédéterminé sur lequel on désire étudier certaines propriétés de (5.1),
- \mathcal{E} est un ensemble connexe ouvert de \mathbb{R}^n , espace d'état,

Stabilité Pratique et Commande sous Contraintes

- $S \subset \mathcal{E}$,
- $\bar{M}(t, x) \in C(\mathcal{T}_e \times S)$ et $\bar{q}(t, x) \in C(\mathcal{T}_e \times S)$ tels que les éléments hors diagonaux de $\bar{M}(t, x)$ et les éléments de $\bar{q}(t, x)$ soient positifs pour tout $(t, x) \in (\mathcal{T}_e \times S)$,
- (5.2 a) (\equiv (5.3 a)) admet pour tout $(t_0, x_0) \in (\mathbb{R} \times \mathcal{E})$ une solution maximale unique passant par x_0 à t_0 , définie sur $I(t_0, x_0)$ et continue par rapport au temps.

Dans cette section, on utilisera des systèmes majorants avec des paires (\bar{M}, \bar{q}) constantes, dont les trois principaux avantages (déjà remarqués dans le chapitre 4) sont de conduire à un découplage du système majorant, d'assurer la quasi-monotonicité de la fonction obtenue, et de donner des majorants dont la solution explicite est connue.

Dans la première section (Section 1.1), nous développerons deux principaux résultats pour des ensembles particuliers possédant des propriétés relatives à la stabilité pratique.

Un exemple servira d'illustration dans la section 1.2.

1.1 Résultats Généraux

Les résultats suivants ont été soumis à une revue internationale pour publication [PERRUQUETTI et al. 94b], ils permettent d'obtenir des résultats pratiques très simples et cependant significatifs (comme le montre l'exemple traité):

Théorème 5.1 (Majorant (\mathcal{T})-local) [PERRUQUETTI et al. 94b]

Soient:

1) $\mathcal{T}_1 = [t_0, t_0 + \tau_1]$,

2) τ_s , le temps d'établissement, $\tau_s \in]0, \tau_1[$,

3) une N.V $p(x)$ (régulière) telle que la paire constante (\bar{M}, \bar{q}) intervenant dans les relations (5.2 b) et (5.3 b), où \bar{M} est l'opposée d'une M-matrice et \bar{q} est un vecteur positif, permette au système (5.2) d'être un système majorant (\mathcal{T}_1)-local linéaire autonome du système (5.3).

4) les domaines ouverts suivants:

$$\mathcal{D}_I = \{x \in \mathbb{R}^n: p(x) < p_I, p_I \in \mathbb{R}_+^k, p_I \neq 0\}, (I = \text{initial}), \quad (5.4)$$

$$\mathcal{D}_A = \{x \in \mathbb{R}^n: p(x) < p_A, p_A \in \mathbb{R}_+^k, -\bar{M} p_A > \bar{q}\}, (A = \text{admissible}), \quad (5.5)$$

$$\mathcal{D}_F = \{x \in \mathbb{R}^n: p(x) < p_F, p_F \in \mathbb{R}_+^k, -\bar{M} p_F > \bar{q}\}, (F = \text{final}). \quad (5.6)$$

Alors le système (SP) (5.1) est pratiquement stable avec le temps d'établissement τ_s par rapport à $\{t_0, \mathcal{T}, \mathcal{T}_s, \mathcal{D}_I, \mathcal{D}_A, \mathcal{D}_F, \mathcal{E}_D\}$ à condition que p_I vérifie les relations suivantes:

$$p_I \leq p_A, \quad (5.7)$$

$$p_A \geq p_F \geq e^{\bar{M} \tau_s} [p_I + \bar{M}^{-1} \bar{q}] - \bar{M}^{-1} \bar{q}. \quad (5.8)$$

Preuve:

Il suffit d'appliquer le théorème 5.2 suivant dans le cas où $\mathcal{S} = \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{S}_z = \mathbb{R}^k$.

Remarque:

La finesse du résultat est liée au calcul de la paire (\bar{M}, \bar{q}) ; en effet, une majoration trop importante induit une perte d'information en conséquence. Ainsi, tout comme au

chapitre 4, les méthodes d'optimisation sont à envisager, comme nous le verrons sur l'exemple traité.

De façon plus générale nous avons obtenu le résultat suivant:

Théorème 5.2 (Majorant $(\mathcal{T}, \mathcal{S})$ -local) [PERRUQUETTI et al. 94b]

Soient:

- 1) $\mathcal{T}_1 = [t_0, t_0 + \tau_1]$,
- 2) τ_s , le temps d'établissement, $\tau_s \in]0, \tau_1[$,

3) une N.V $p(x)$ (régulière) telle que la paire constante (\bar{M}, \bar{q}) intervenant dans les relations (5.2 b) et (5.3 b), où \bar{M} est l'opposée d'une M-matrice et \bar{q} est un vecteur positif, permette au système (5.2) d'être un système majorant $(\mathcal{T}_1, \mathcal{S} \times \mathcal{S}_2)$ -local linéaire autonome du système (5.3).

4) les domaines suivants:

$$\mathcal{D}_I = \{x \in \mathbb{R}^n: p(x) < p_I, p_I \in \mathbb{R}_+^k, p_I \neq 0\}, \quad (5.9)$$

$$\mathcal{D}_A = \{x \in \mathbb{R}^n: p(x) < p_A, p_A \in \mathbb{R}_+^k, -\bar{M} p_A > \bar{q}\}, \mathcal{D}_A \subset \mathcal{S}, \quad (5.10)$$

$$\mathcal{D}_F = \{x \in \mathbb{R}^n: p(x) < p_F, p_F \in \mathbb{R}_+^k, -\bar{M} p_F > \bar{q}\}, \mathcal{D}_F \subset \mathcal{S}. \quad (5.11)$$

Alors le système (SP) (5.1) est pratiquement stable avec le temps d'établissement τ_s par rapport à $\{t_0, \mathcal{T}, \mathcal{T}_s, \mathcal{D}_I, \mathcal{D}_A, \mathcal{D}_F, \mathcal{E}_D\}$ à condition que p_I vérifie les relations suivantes:

$$p_I \leq p_A, \quad (5.12)$$

$$p_A \geq p_F \geq e^{\bar{M} \tau_s} [p_I + \bar{M}^{-1} \bar{q}] - \bar{M}^{-1} \bar{q}. \quad (5.13)$$

Preuve:

D'après l'hypothèse 3) on a

$$\underline{z}(t; t_0, z_0; x) \geq p[\underline{x}(t; t_0, x_0; d)], \forall t \in \mathcal{T}_1, \forall (x \times z) \in (\mathcal{S} \times \mathcal{S}_2), \quad (5.14)$$

où $z(t) = \underline{z}(t; t_0, z_0; x)$ est la solution de (5.2 b) :

$$z(t) = e^{\bar{M}(t-t_0)} [z_0 + \bar{M}^{-1} \bar{q}] - \bar{M}^{-1} \bar{q}. \quad (5.15)$$

1) Stabilité Pratique par rapport à $\{t_0, \mathcal{T}, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_A, \mathcal{E}_D\}$:

Soit $x_0 \in \mathcal{D}_1$ et $d \in \mathcal{E}_D$, alors $p(x_0) \leq p_1 \leq p_A$, donc $x_0 \in \mathcal{D}_A$.

Par définition de \mathcal{D}_A (5.10) et en vertu du Lemme 4.1 (Chapitre 4), on conclut que \mathcal{D}_A est \mathcal{T} -invariant pour le système (SP) (5.1), donc $\underline{x}(t; t_0, x_0; d) \in \mathcal{D}_A, \forall t \in \mathcal{T}$.

2) Contraction Pratique avec le Temps d'Établissement τ_s par rapport à $\{t_0, \mathcal{T}_s, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_F, \mathcal{E}_D\}$:

Soit $x_0 \in \mathcal{D}_1$ et $d \in \mathcal{E}_D$, alors $p(x_0) \leq p_1$, et (5.14) implique que:

$$\underline{x}(t_0 + \tau_s; t_0, x_0; d) \in \bar{\mathcal{X}}_{z(t_0 + \tau_s)}.$$

Puisque $p_F \geq e^{\bar{M} \tau_s} [p_1 + \bar{M}^{-1} \bar{q}] - \bar{M}^{-1} \bar{q}$, alors $\bar{\mathcal{X}}_{z(t_0 + \tau_s)} \subset \mathcal{D}_F$, et donc $\underline{x}(t_0 + \tau_s; t_0, x_0; d) \in \mathcal{D}_F$.

Par définition de \mathcal{D}_F (5.11) et en vertu du Lemme 4.1 (Chapitre 4), on conclut que \mathcal{D}_F est \mathcal{T}_s -invariant pour le système (SP) (5.1), donc $\underline{x}(t; t_0, x_0; d) \in \mathcal{D}_F, \forall t \in \mathcal{T}_s$.

1.2 Exemple d'Application

Considérons le système décrit par:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) = \begin{bmatrix} 1-x_1^2-x_2^2 & t^2 \\ 0.5 & 1-x_1^2-x_2^2 \end{bmatrix} x + i, \quad (5.16)$$

où $i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \zeta(t) x_1 \end{bmatrix}$, et ζ est une fonction continue par rapport au temps t , vérifiant $|\zeta(t)| \leq 1$.

Soit $p(x)$ la N.V régulière suivante:

$$p(x) = [|x_1| \quad |x_2|]^T. \quad (5.17)$$

Soit c le vecteur paramètre défini par:

$$c = [|\chi_1| \quad |\chi_2|]^T, \text{ avec } \chi_1 \in \mathbb{R}_+ \text{ et } \chi_2 \in \mathbb{R}_+, \quad (5.18)$$

On considère l'ensemble connexe paramètre \mathcal{X}_c défini par:

$$\mathcal{X}_c = \{x \in \mathbb{R}^2: p(x) < c\}. \quad (5.19)$$

En reprenant la décomposition introduite au chapitre 3 de $f(t, x)$:

$$\begin{cases} f(t, x) = A_1(t, x) x + b_1(t, x), \text{ pour } x \in \bar{\mathcal{X}}_c, \\ f(t, x) = A_2(t, x) x + b_2(t, x), \text{ pour } x \in \mathbb{R}^2 - \bar{\mathcal{X}}_c, \end{cases} \quad (5.20)$$

avec :

$$\begin{cases} A_1(t, x) = \begin{bmatrix} 1-\chi_1^2-\chi_2^2 & t^2 \\ 0.5(1+\zeta(t)) & 1-\chi_1^2-\chi_2^2 \end{bmatrix}, \\ b_1(t, x) = \begin{bmatrix} x_1(\chi_1^2-x_1^2+\chi_2^2-x_2^2) \\ x_2(\chi_1^2-x_1^2+\chi_2^2-x_2^2) \end{bmatrix}, \\ A_2(t, x) = \begin{bmatrix} 1-x_1^2-x_2^2 & t^2 \\ 0.5(1+\zeta(t)) & 1-x_1^2-x_2^2 \end{bmatrix}, b_2(t, x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (5.21)$$

En utilisant la propriété 4 Section 2.3 Chapitre 3, la paire $(\bar{M}(c), \bar{q}(c))$ définie par la relation (5.22) permet de définir un système majorant $[0, \tau]$ -local du système initial (5.16).

$$\begin{cases} \bar{M}(c) = \begin{bmatrix} 1-\chi_1^2-\chi_2^2 & \tau^2 \\ 1 & 1-\chi_1^2-\chi_2^2 \end{bmatrix}, \\ \bar{q}(c) = \frac{2(\chi_1^2+\chi_2^2)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}, \forall t \in [0, \tau], \forall c \in \mathcal{D}_{\text{Stab}(c)}, \quad (5.22)$$

avec $\mathcal{D}_{\text{Stab}(c)} = \{c \in \mathbb{R}_+^2: \bar{M}(c) \text{ est de Hurwitz}\}$. En utilisant le critère de Kotélianski, on obtient:

$$\mathcal{D}_{\text{Stab}(c)} = \{c \in \mathbb{R}_+^2: (\chi_1^2+\chi_2^2) > (1+\tau)\}, \quad (5.23)$$

Chapitre 5

1) Premier Problème :

Dans un premier temps on va chercher \mathcal{D}_I , pour τ_s , \mathcal{D}_A et \mathcal{D}_F donnés pour que le système initial soit pratiquement stable avec le temps d'établissement τ_s par rapport à $\{t_0, \mathcal{T}, \mathcal{T}_s, \mathcal{D}_I, \mathcal{D}_A, \mathcal{D}_F\}$.

Soient τ , τ_s , \mathcal{D}_A et \mathcal{D}_F : Trouver \mathcal{D}_I .

On se donne les valeurs numériques suivantes:

$$\begin{cases} t_0 = 0, \text{ instant initial donné, } \tau = 1 \text{ s, } \mathcal{T} = [0, 1[, \\ \tau_s = 0.5 \text{ s, temps d'établissement du système, } \mathcal{T}_s = [0.5, 1[, \\ \mathcal{D}_A = \mathbb{R}^2, \mathcal{D}_F = \{x \in \mathbb{R}^2: p(x) \leq p_F, p_F = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\}. \end{cases} \quad (5.24)$$

En utilisant le Lemme de comparaison 3.3 (Chapitre 3 Section 2.2: Cas (\mathcal{T})-local), on conclut dans un premier temps que la paire $(\bar{M}(c), \bar{q}(c))$, avec $c \in \mathcal{D}_{\text{Stab}(c)}$, permet de définir un système majorant du système initial (5.16).

Le théorème 5.1, permet de conclure que le système (5.16) est pratiquement stable avec le temps d'établissement τ_s , à condition que:

$$c \in \mathbb{R}_+^2: (\chi_1^2 + \chi_2^2) > (1 + \tau), \quad (5.25)$$

$$-\bar{M}(c) p_F > \bar{q}(c), \quad (5.26)$$

$$p_I \leq p_A, \quad (5.27)$$

$$p_A \geq p_F \geq e^{\bar{M}(c) \tau_s} [p_I + \bar{M}^{-1}(c) \bar{q}(c)] - \bar{M}^{-1}(c) \bar{q}(c). \quad (5.28)$$

En posant $\chi^2 = (\chi_1^2 + \chi_2^2)$ et remplaçant les variables par leurs valeurs numériques, les conditions (5.25) à (5.28) deviennent:

$$\chi \in \mathbb{R}_+: \chi^2 > 2, \quad (5.29)$$

$$-\bar{M}(c) 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} > \bar{q}(c), \quad (5.30)$$

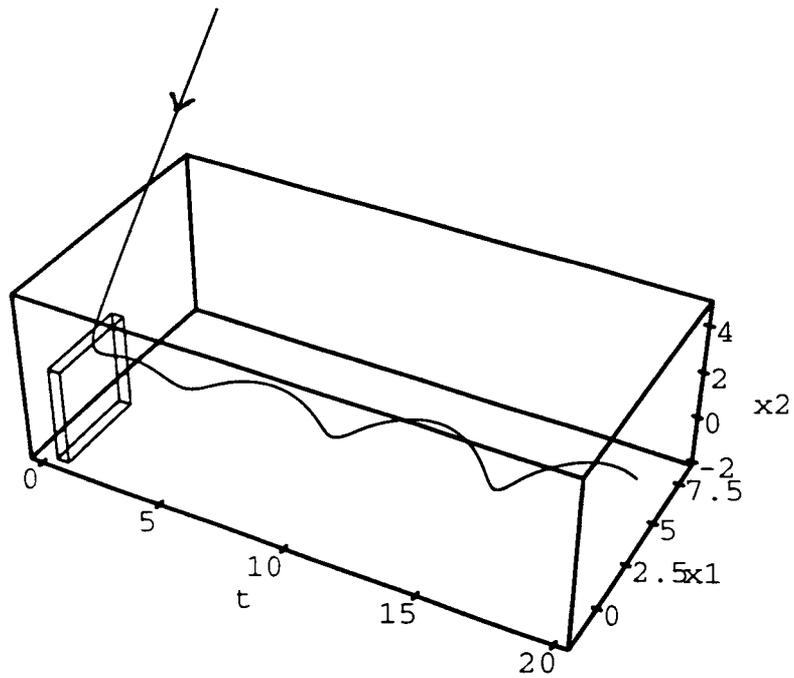
$$\begin{bmatrix} \frac{(e+1)}{2} & \frac{(e-1)}{2} \\ \frac{(e-1)}{2} & \frac{(e+1)}{2} \end{bmatrix} p_I \leq \left(2 e^{\frac{\chi^2}{2}} + \frac{2\chi^3 (e - e^{\frac{\chi^2}{2}})}{3\sqrt{3} (\chi^2 - 2)} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5.31)$$

Stabilité Pratique et Commande sous Contraintes

Donc si on désire maximiser la partie droite de (5.31) sous les contraintes (5.29) et (5.30), on obtient $\chi = 4.512$, et alors on cherche p_1 tel que:

$$\begin{bmatrix} 1.86 & 0.86 \\ 0.86 & 1.86 \end{bmatrix} p_1 \leq 1958.4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5.32)$$

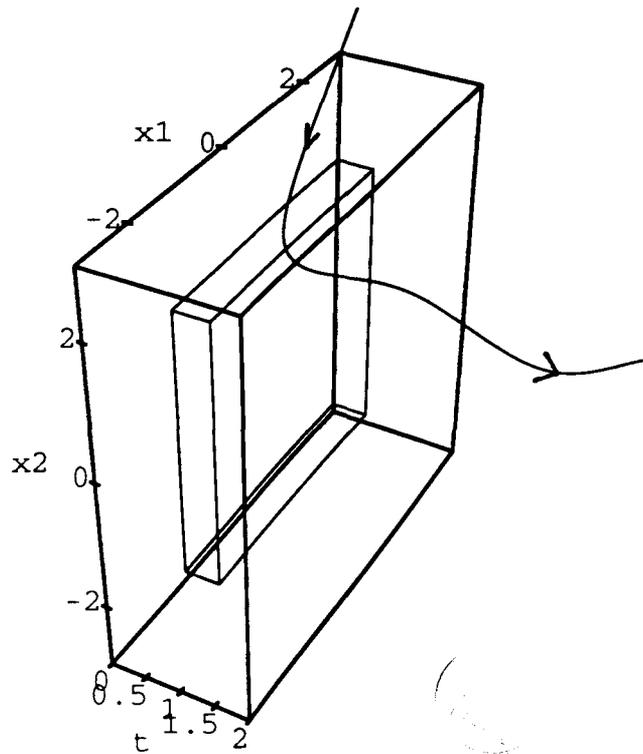
Dans ce cas, une bonne solution est $p_1 = 720.4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.



-Figure 5.1: Simulation et Ensemble \mathcal{D}_F -

Une simulation de (5.16) avec la condition initiale $x_0 = 720 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_0 \in \mathcal{D}_1$, et avec $\zeta(t) = \cos(t)$, montre que le système (5.16) converge rapidement vers \mathcal{D}_F , et reste dans \mathcal{D}_F pour $t \in \mathcal{T}_s$, $\mathcal{T}_s = [0.5 \text{ s}, 1 \text{ s}]$. Mais ensuite il commence à diverger (sous l'effet du coefficient t^2). La figure 5.2 est un agrandissement de la figure 5.1, et la figure 5.3 est une projection de la figure 5.1 dans le plan de phase (x_1, x_2) .

Chapitre 5



-Figure 5.2: Agrandissement de la figure 5.1-

Pour cette simulation, x reste dans \mathcal{D}_F pour $t \in [0.08 \text{ s}, 4.8 \text{ s}[$. En fait, notre approche utilise les N.V et le principe de comparaison conduisant à une majoration du comportement du système initial, et donc, à une perte d'informations. Cependant, cette méthode est "robuste", puisqu'elle permet une certaine méconnaissance du système initial (ici on a un coefficient $\zeta(t)$ connu par ses seules bornes).

2) Deuxième Problème:

Un autre problème consiste à chercher le plus petit domaine \mathcal{D}_F et, ensuite, le plus grand domaine correspondant \mathcal{D}_I , pour un domaine donné \mathcal{D}_A , de telle façon que le système initial (5.16) soit pratiquement stable avec un temps d'établissement donné τ_s par rapport à $\{t_0, \mathcal{T}, \mathcal{T}_s, \mathcal{D}_I, \mathcal{D}_A, \mathcal{D}_F\}$.

Soient $\tau, \tau_s, \mathcal{D}_A$: Trouver le plus petit \mathcal{D}_F , puis le plus grand \mathcal{D}_I .

On se donne les valeurs numériques suivantes:

$$\begin{cases} t_0 = 0, \text{ instant initial donné, } \tau = 1 \text{ s, } \mathcal{T} = [0, 1[, \\ \tau_s = 0.5 \text{ s, temps d'établissement du système, } \mathcal{T}_s = [0.5, 1[, \\ \mathcal{D}_A = \mathbb{R}^2, \mathcal{D}_F = \{x \in \mathbb{R}^2: p(x) \leq p_F\}. \end{cases} \quad (5.33)$$

Comme dans le problème 1), en posant $\chi^2 = (\chi_1^2 + \chi_2^2)$ et en remplaçant les variables par leurs valeurs numériques, on peut affirmer que le système (5.16) est pratiquement stable avec un temps d'établissement donné τ_s par rapport à $\{t_0, \mathcal{T}, \mathcal{T}_s, \mathcal{D}_I, \mathcal{D}_A, \mathcal{D}_F\}$, si les conditions suivantes sont vérifiées:

$$\chi \in \mathbb{R}_+: \chi^2 > 2, \quad (5.34)$$

$$-\bar{M}(c) p_F > \bar{q}(c), \quad (5.35)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{(e+1)}{2} & \frac{(e-1)}{2} \\ \frac{(e-1)}{2} & \frac{(e+1)}{2} \end{bmatrix} p_I \leq e^{(\chi^2/2)} p_F + \frac{2 \chi^3 (e - e^{(\chi^2/2)})}{3 \sqrt{3} (\chi^2 - 2)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5.36)$$

Dans un premier temps on désire trouver le plus petit p_F vérifiant (5.36) sous la contrainte (5.345) (qui assure que la paire $(\bar{M}(c), \bar{q}(c))$ permet de définir un système majorant à validité locale pour le système initial (5.16)).

On trouve $\chi = \sqrt{6}$, et $p_F = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

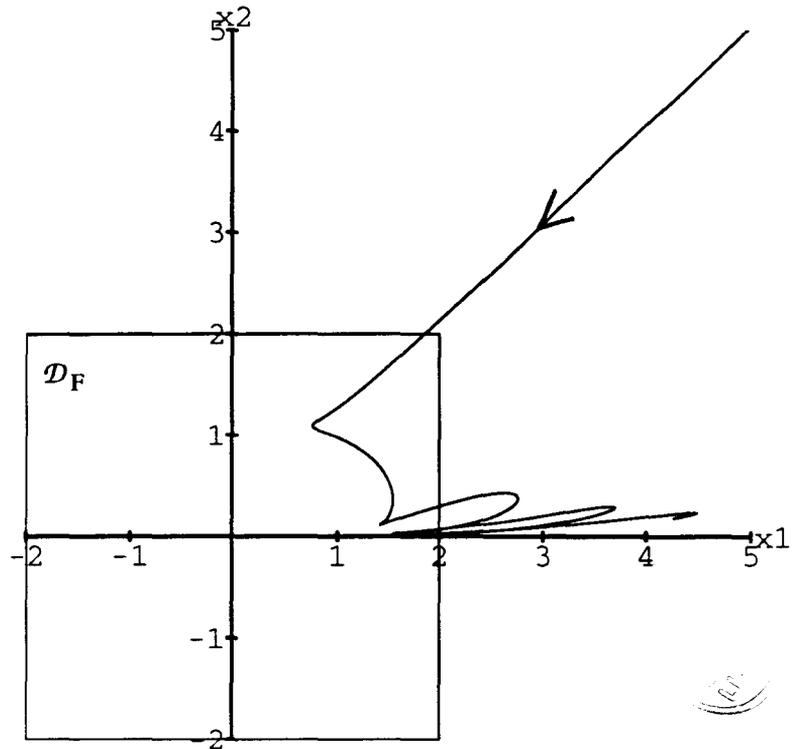
Il reste à trouver le plus grand p_I tel que:

$$\begin{bmatrix} 1.86 & 0.86 \\ 0.86 & 1.86 \end{bmatrix} p_I \leq 3.84 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5.37)$$

Une solution possible est $p_I = p_F$.

Remarque:

On peut noter que, dans cet exemple, le système se met à diverger si on le laisse évoluer indéfiniment. De plus, si on remplace le terme en " t^2 " par l'unité, l'origine n'est pas asymptotiquement stable: ce qui explique que la valeur de p_F ne puisse pas descendre en dessous d'une certaine valeur quantifiant l'attractivité d'un ensemble.



-Figure 5.3: Projection de la figure 5.1 dans le plan de phase-

Conclusion

L'utilisation de N.V pour l'étude de problèmes liés à la stabilité pratique montre les avantages suivants:

- 1) la construction de majorants est non seulement systématique mais aussi très simple,
- 2) les conclusions liées à ces majorants permettent d'obtenir des relations entre les domaines \mathcal{D}_I , \mathcal{D}_A , \mathcal{D}_F ,
- 3) les propriétés obtenues sont alors robustes vis à vis de perturbations sur le modèle.

2 Commande sous Contraintes

Introduction

Pour calculer un régulateur, une méthode consiste à linéariser le système au “voisinage” d’un point de fonctionnement. De récents progrès concernant la géométrie différentielle induisent de nouvelles techniques [FOSSARD 93].

Qu’en est-il du problème plus général de la détermination d’un régulateur pour les systèmes comportant des limitations?

D’un point de vue pratique, les systèmes réels (c’est-à-dire les systèmes “élaborés” soit par l’“Homme” soit par la “Nature”) doivent fonctionner en respectant des conditions de “bornitudes” sur l’état mais aussi sur la commande.

D’une part, en ce qui concerne les systèmes linéaires avec retour d’état linéaire, le problème de la stabilisation sous contraintes d’état ou/et de commande est quasiment résolu [BITSORIS 83, 88, BORNE 92, BURGAT 93, TARBOURIECH 93, VASSILAKI 88, 90]. D’autre part, ce problème reste ouvert, pour des systèmes plus généraux de la forme:

$$\frac{dx}{dt} = e(t, x, d, c = K x), \quad (S) \quad (5.38)$$

où:

- x est contraint à rester dans l’ensemble \mathcal{E}_{CE} , l’ensemble des contraintes sur l’état.

- $\underline{x}(t ; t_0, x_0 ; d ; K)$ est le mouvement du système (en raccourci $\underline{x}(t)$).

- $\mathcal{E}_D \subset \mathbb{R}^p$, l’espace des perturbations admissibles.

- $d \in \mathcal{E}_D$, (d pour “disturbances”), représente le vecteur des perturbations ; pour un système physique, d peut représenter: des perturbations, des paramètres traduisant une méconnaissance du système, ou un vecteur composé des précités.

- c est le commande linéaire par retour d’état, $c = K x$, $K \in \mathbb{R}^{p \times n}$,

- c est contraint à rester dans l’ensemble \mathcal{E}_{CC} , l’ensemble des contraintes sur la commande.

Pour le système (S) (5.38), N.E. RADHY et al. [RADHY 90, 91, 92] a partiellement résolu ce problème en employant les N.V et un lemme de majoration: une commande linéaire par retour d’état est obtenue à l’aide d’une procédure d’optimisation.

Chapitre 5

Dans cette section, une approche similaire est développée. La différence fondamentale est que nous utiliserons ici des systèmes majorants non linéaires autonomes, alors que dans [RADHY 90, 91, 92] ce sont des systèmes majorants linéaires qui ont été employés. Dans une première section nous allons spécifier une Formulation des Problèmes (Section 2.1), puis nous définirons précisément ce que nous entendons par Stabilisation Pratique (Section 2.2). Enfin l'utilisation de systèmes majorants permet d'obtenir des Résultats Généraux (Section 2.3) conduisant à la définition d'une Méthodologie (Section 2.4) pour ce type de problème. Finalement deux Exemples (Section 2.5) illustreront la méthode proposée.

2.1 Formulation des Problèmes

On suppose que $\{f, \mathcal{E}_D, \mathcal{E}_{CE}, \mathcal{E}_{CC}\}$ vérifient les conditions adéquates pour que:

$\forall d \in \mathcal{S}_D, \forall t_0 \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathcal{E}_{CC}$ et $\forall x_0 \in \mathcal{E}_{CE}$, la solution $\underline{x}(t)$ de (S) (5.38) existe, est unique et continue par rapport au temps $t, t \in [t_0, +\infty[$.

De plus, comme nous venons de le signaler, le système (S) (5.38) est soumis à des contraintes sur l'état et sur la commande relativement à deux N.V $p_1(x)$ et $p_2(c)$:

1) x est contraint à rester dans \mathcal{E}_{CE} :

$$\mathcal{E}_{CE} = \{x \in \mathbb{R}^n : p_1(x) \leq ce\}, \quad (CE) \quad (5.39)$$

2) c est contraint à rester dans \mathcal{E}_{CC} :

$$\mathcal{E}_{CC} = \{c \in \mathbb{R}^m : p_2(c) \leq cc\}. \quad (CC) \quad (5.40)$$

En pratique, dans la plupart des cas, les deux N.V $p_1(x)$ et $p_2(c)$ sont respectivement: $p_1(x) = |x|$ et $p_2(c) = |c|$.

Ici, le choix particulier de la commande (linéaire par retour d'état) permet une reformulation de (CC) (5.40) sous la forme d'une contrainte sur la **matrice de gain** K :

$$\mathcal{E}_{CK} = \{K \in \mathbb{R}^{m \times n} : p_2(K x) \leq cc\}, \quad (5.41)$$

ou, de façon équivalente, sous la forme d'une contrainte sur le vecteur d'état x :

$$\mathcal{E}_{CE}(K) = \{x \in \mathbb{R}^n : p_2(K x) \leq cc\}. \quad (CEK) \quad (5.42)$$

Ainsi le problème peut être formulé comme suit:

Problème 1

Pour des ensembles donnés \mathcal{A} (cible finale), \mathcal{E}_{CE} and $\mathcal{E}_{CE}(K)$, trouver le gain K tel que:

$$\forall d \in \mathcal{S}_D, \forall t_0 \in \mathbb{R}, \forall x_0 \in (\mathcal{E}_{CE} \cap \mathcal{E}_{CE}(K)):$$

P1) $\underline{x}(t; t_0, x_0; d; K) \in (\mathcal{E}_{CE} \cap \mathcal{E}_{CE}(K))$, pour tout $t \in [t_0, +\infty[$,

P2) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(\mathcal{A}; \underline{x}(t; t_0, x_0; d; K)) = 0$, où ρ est la distance Euclidienne.

Lorsque ce problème ne peut être résolu, il est alors raisonnable d'essayer de résoudre un sous-problème similaire:

Problème 2

Pour des ensembles donnés \mathcal{A} , \mathcal{E}_{CE} and $\mathcal{E}_{CE}(K)$, trouver le gain K et deux ensembles \mathcal{D}_∞ et \mathcal{D}_1 vérifiant:

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}_\infty \subseteq \mathcal{D}_1 \subseteq (\mathcal{E}_{CE} \cap \mathcal{E}_{CE}(K)), \text{ tels que:}$$

$$\forall d \in \mathcal{S}_D, \forall t_0 \in \mathbb{R}, \forall x_0 \in \mathcal{D}_1:$$

SP1) $\underline{x}(t; t_0, x_0; d; K) \in \mathcal{D}_1$, pour tout $t \in [t_0, +\infty[$,

SP3) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(\mathcal{D}_\infty; \underline{x}(t; t_0, x_0; d; K)) = 0$.

\mathcal{D}_∞ joue le rôle de \mathcal{A} et \mathcal{D}_1 celui de $\mathcal{E}_{CE} \cap \mathcal{E}_{CE}(K)$.

2.2 Stabilisation Pratique

Comme mentionné ci-dessus, du point de vue de l'ingénieur, il est intéressant pour un système donné (\mathcal{S}) (5.38) de déterminer un gain K assurant que si l'état initial appartient à un ensemble prédéfini \mathcal{E}_{CE} , alors l'état appartient à cet ensemble pour tout $t \in [t_0, +\infty[$, et converge "asymptotiquement" vers un ensemble cible final \mathcal{A} . Cette opération devant se dérouler en respectant les contraintes sur la commande. Ce problème nous conduit tout naturellement à la définition de la Stabilisation Pratique.

Définition 5.1 [PERRUQUETTI 94a]

(\mathcal{S}) (1) est **stabilisable pratiquement** par rapport à $\{\mathcal{A}, K, \mathcal{E}_{CE}, \mathcal{E}_{CE}(K), \mathcal{E}_D\}$ si:

1) $(\mathcal{E}_{CE} \cap \mathcal{E}_{CE}(K))$ est positivement invariant par rapport à $\{(\mathcal{S}) (5.38), \mathcal{E}_D\}$,

Chapitre 5

$$2) \forall d \in \mathcal{S}_D, \forall t_0 \in \mathbb{R}, \forall x_0 \in (\mathcal{E}_{CE} \cap \mathcal{E}_{CE}(K)), \lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(\underline{x}(t; t_0, x_0; d; K)) = 0.$$

2.3 Résultats Généraux

Réécrivons le système (S) (5.38), pour $c = Kx$, comme suit:

$$\frac{dx}{dt} = A(t, x, d, K)x + b(t, x, d, K), \quad (5.43)$$

avec $t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n, d \in \mathcal{E}_D$.

Comme nous venons de le voir, les deux contraintes (CE) (5.39) et (CC) (5.40) peuvent être réduite à une seule contrainte sur l'état ($\mathcal{E}_{CE} \cap \mathcal{E}_{CE}(K)$). Par la suite on suppose que $(\mathcal{E}_{CE} \cap \mathcal{E}_{CE}(K)) = \mathcal{E}_{CE}$ et ainsi on considère la N.V (régulière) de dimension k :

$$p(x) = p_1(x).$$

Cependant, les résultats suivants peuvent être appliqués, avec précaution, en remarquant que:

$$(\mathcal{E}_{CE} \cap \mathcal{E}_{CE}(K)) = \{x \in \mathbb{R}^n : \hat{p}(x) = \begin{bmatrix} p_1(x) \\ \dots \\ p_2(x) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} ce \\ \dots \\ cc \end{bmatrix}\}. \quad (5.44)$$

Dans ce cas $\hat{p}(x)$ est l'agrégation de deux N.V qui peut être une N.V non régulière. Cependant le lemme d'invariance (Lemme 5.2) reste valable avec précaution.

Soit S un sous-ensemble de \mathbb{R}^k . Au chapitre 3, nous avons signalé la construction d'une matrice et d'un vecteur notés respectivement $M^K(x)$ et $q^K(x)$ tels que:

$$D_t^+ p(x) \leq M^K(x) p(x) + q^K(x). \quad (5.45)$$

Le "K" en exposant rappelle que les termes dépendent du gain K .

Nous avons noté, dans ce chapitre 3, qu'il est possible de réécrire la partie droite de (5.45) comme une fonction de $p(x)$ (par exemple $p(x) = |x|$): $g^K(p(x))$, ou tel que:

$$M^K(x) p(x) + q^K(x) \leq g^K(p(x)), p(x) \in S.$$

Considérons le système d'inégalité différentielle suivante:

$$D_i^+ p(x) \leq g^K(p(x)), p(x) \in S, \quad (SID) \quad (5.46)$$

le long des solutions de (S) (5.38), auquel on associe le système suivant:

$$\frac{dz}{dt} = g^K(z), z \in S. \quad (SM) \quad (5.47)$$

Nous avons vu (Chapitre 3) que si g^K est quasi-monotone non décroissante alors les solutions de (SM) (5.47) majorent celles de (SID) (5.46) (sous certaines conditions). À propos de systèmes majorants, dans la littérature, certains auteurs utilisent les “fonctions quasi-monotones” [BITSORIS 78, 83, LAKSHMIKANTHAM 69, MATROSOV 62, MICHEL 77, PERRUQUETTI 93b] alors que d’autres utilisent les “opposées de M-matrices” [BITSORIS 78, BORNE 90, 92a, 92b, RADHY 90]. En fait ces deux notions sont très étroitement liées comme le montre le lemme suivant (Lemme 5.1) qui nous servira par la suite.

Lemme 5.1 [PERRUQUETTI 94a]

Supposons que:

- 1) la N.V conduisant à (SID) (5.46) est telle que $g^K \in C^1(S, \mathbb{R}^k)$ soit localement quasi-monotone non-décroissante par rapport à S ,
- 2) (SM) (5.47) admet un point d'équilibre positif z_ζ , qui est asymptotiquement stable avec $\mathcal{D}_{sa}(z_\zeta) \neq \emptyset$ vérifiant: $\mathcal{D}_{sa}(z_\zeta) \subset S$,

Alors:

- 1) la Jacobienne A de g^K en z_ζ est une matrice à éléments hors diagonaux positifs,
- 2) si de plus z_ζ est hyperbolique, alors A est l'opposée d'une “M-matrice”.

Preuve:

Dans un premier temps il est facile de vérifier qu'un changement de coordonnées ramenant l'équilibre à l'origine conserve les hypothèses 1) et 2).

Posons $z_\zeta = 0$.

- 1) H: Soit A la Jacobienne de g^K en $z_\zeta = 0$, alors $a_j \geq 0, \forall j \neq i$.

Raisonnons par l'absurde. Supposons que (H est fausse): il existerait une paire d'indice (i, j) tels que $a_{ij} < 0$. Dans ce cas soit $\varepsilon > 0$ (arbitrairement petit) et soit

Chapitre 5

$e = \varepsilon [0 \dots 1 \dots 0]^T$ (avec un "1" à la $j^{\text{ème}}$ place), l'hypothèse 1) du lemme montre que:
 $\forall j \neq i, g_i^K(e) \geq 0$ (par construction de g^K on a: $g^K(0) \geq 0$ (voir Chapitre 3)).

Or $g^K \in C^1(S, \mathbb{R}^k)$, donc en utilisant un développement en série de TAYLOR:

$\exists \delta > 0$ tel que: $\forall \varepsilon$ tel que $\delta > \varepsilon > 0$, $\text{signe}(g_i^K(e)) = \text{signe}(q_j) = +1$

La contradiction montre que l'hypothèse de départ (H est fausse) est fausse, donc:

A: $q_j \geq 0, \forall j \neq i$.

2) Si de plus, z_ε hyperbolique, alors A est une matrice asymptotiquement stable: c'est donc l'opposée d'une "M-matrice".

Pour en revenir à nos deux problèmes, il est important d'obtenir des conditions suffisantes (sur K) assurant l'invariance positive de $(\mathcal{E}_{CE} \cap \mathcal{E}_{CE}(K))$ par rapport à $\{(S) (5.38), \mathcal{E}_D\}$. C'est ce que le lemme suivant propose. Il utilise notamment le lemme précédent (Lemme 5.1) pour montrer l'existence sous certaines conditions d'ensembles invariants.

Lemme 5.2 [PERRUQUETTI 94a]

Supposons que:

1) la N.V conduisant à (SID) (5.46) est telle que $g^K \in C^1(S, \mathbb{R}^k)$ soit localement quasi-monotone non-décroissante par rapport à S ,

2) (SM) (5.47) admet un point d'équilibre positif z_ε , qui est asymptotiquement stable avec $\mathcal{D}_{sa}(z_\varepsilon) \neq \emptyset$ vérifiant: $\{z \in \mathbb{R}_+^k : z \leq z_\varepsilon\} \not\subset \mathcal{D}_{sa}(z_\varepsilon) \subset S$,

3) $\mathcal{X}_c = \{x \in \mathbb{R}^n : p(x) < c, c > z_\varepsilon : g^K(c) < 0\}$, avec $\{z \in \mathbb{R}_+^k : z \leq c\} \subset \mathcal{D}_{as}(z_\varepsilon)$.

Alors:

1) si de plus z_ε est hyperbolique, de tels \mathcal{X}_c existent (i.e $\exists c > z_\varepsilon : g^K(c) < 0$),

2) tout $\bar{\mathcal{X}}_c$ est positivement invariant par rapport à $\{(S) (5.38), \mathcal{E}_D\}$,

3) toute intersection finie ou union finie de tels $\bar{\mathcal{X}}_c$ est positivement invariante par rapport à $\{(S) (5.38), \mathcal{E}_D\}$.

Preuve:

1) On peut supposer, sans perte de généralité, que $z_\varepsilon = 0$ (voir Lemme 5.1).

Soit A la Jacobienne de g^K en $z_\varepsilon = 0$. D'après les hypothèses faites et en vertu du Lemme 5.1, A est l'opposée d'une "M-matrice". Donc il existe un vecteur $u > 0$ tel que

Stabilité Pratique et Commande sous Contraintes

$A u < 0$ [FIEDLER 62]. Soit $\varepsilon > 0$ (arbitrairement petit) et $c = \varepsilon u$. $g^K \in C^1(S, \mathbb{R}^k)$, donc en utilisant un développement en série de TAYLOR, il existe $\delta > 0$ tel que:

$$\forall \delta > \varepsilon > 0 \text{ on ait: } \text{sign}(g_i^K(c)) = -1 \ (\forall i).$$

Ceci prouve le premier point du lemme.

2) Soit $x \in \partial \bar{\mathcal{X}}_c$, alors $\exists i \in \{1, 2, \dots, k\}$ tel que:

$$p(x) = \begin{bmatrix} p_1(x) \leq \chi_1 \\ \dots \\ p_i(x) = \chi_i \\ \dots \\ p_k(x) \leq \chi_k \end{bmatrix}, \text{ avec } c = \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \dots \\ \chi_i \\ \dots \\ \chi_k \end{bmatrix}.$$

Or $x \in \bar{\mathcal{X}}_c$ et $(\{z \in \mathbb{R}_+^k : z \leq c\} \subset \mathcal{D}_{as}(z_\varphi) \subset S)$ donc:

$$D_t^+ p_i(x) \leq g_i^K(x) \leq g_i^K(c) < 0 \text{ (Hypothèse 1) du lemme).}$$

Ceci prouve le second point du lemme.

3) Trivial.

Une fois ce lemme donnant des conditions d'invariance démontré, nous pouvons l'appliquer à notre problème. On obtient alors le théorème suivant (Théorème 5.3):

Théorème 5.3 [PERRUQUETTI 94a]

Supposons qu'il existe \hat{K} tel que:

1) la N.V conduisant à (SID) (5.46) est telle que $g^K \in C^1(S, \mathbb{R}^k)$ soit localement quasi-monotone non-décroissante par rapport à S ,

2) (SM) (5.47) admet un point d'équilibre positif z_φ , qui est asymptotiquement stable avec $\mathcal{D}_{as}(z_\varphi) \neq \emptyset$ vérifiant: $\{z \in \mathbb{R}_+^k : z \leq z_\varphi\} \subsetneq \mathcal{D}_{as}(z_\varphi) \subset S$

3) $(\mathcal{E}_{CE} \cap \mathcal{E}_{CE}(K)) = \mathcal{E}_{CE}$,

4) $ce > z_\varphi$ tel que $\{z \in \mathbb{R}_+^k : z \leq ce\} \subset \mathcal{D}_{sa}(z_\varphi)$ et $g^K(ce) < 0$.

Alors (S) (5.38) est **stabilisable pratiquement** par rapport à $\{\mathcal{A}, \hat{K}, \mathcal{E}_{CE}, \mathcal{E}_{CE}(K), \mathcal{E}_D\}$, avec: $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : p(x) \leq z_\varphi\}$.

Chapitre 5

Preuve:

Les quatre conditions de ce théorème impliquent, en vertu du Lemme 5.2, que $(\mathcal{E}_{CE} \cap \mathcal{E}_{CE}(K)) = \mathcal{E}_{CE}$, est positivement invariant par rapport à $\{(S) (5.38), \mathcal{E}_D\}$. De plus les conditions 1), 2) et 4) impliquent que \mathcal{A} est (localement) asymptotiquement stable (voir Chapitre 4 Section 3.1.2 Théorème 4.6) donc:

$$\forall d \in \mathcal{E}_D, \forall t_0 \in \mathbb{R}, \forall x_0 \in \mathcal{E}_{CE}, \lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(\mathcal{A}; \underline{x}(t; t_0, x_0; d; \hat{K})) = 0 \text{ (ce qui peut être prouvé en utilisant directement le Lemme 3.7).}$$

Remarques:

1) Nous avons expliqué au Chapitre 2 les principales méthodes pour étudier de tels systèmes non linéaires autonomes (SID) (5.46).

2) Les conditions 2), 3) et 4) sont des conditions géométriques faciles à vérifier, alors que la condition 1) peut être testée en utilisant la remarque du Chapitre 3 Section 1.2 page 120 concernant la quasi-monotonie.

3) Ce résultat nous permet de résoudre soit le Problème 1 soit le Problème 2. Si on ne peut pas résoudre le Problème 1 en utilisant le Théorème 5.3, alors on peut modifier le théorème (avec peu d'effort) afin de résoudre le Problème 2.

4) Nous avons vu dans les chapitres 3 et 4 des techniques permettant d'obtenir g^K sous la forme particulière suivante:

$$g^K = M z + q, \text{ où } M \text{ est l'opposée d'une "M-matrice" et } q \text{ est un vecteur positif.}$$

Ainsi, à partir du théorème 5.3, on peut en déduire le résultat suivant:

Corollaire 5.1 [PERRUQUETTI 94a]

Supposons qu'il existe \hat{K} telle que:

1) la N.V conduisant à (SID) (5.46) est telle que $g^K = M z + q$, où M est l'opposée d'une "M-matrice" et q est un vecteur positif,

2) $(\mathcal{E}_{CE} \cap \mathcal{E}_{CE}(K)) = \mathcal{E}_{CE}$.

3) ce est tel que $\{z \in \mathbb{R}_+^k : z \leq ce\} \subset S$ et $-M ce > q$.

Alors (S) (5.38) est stabilisable pratiquement par rapport à $\{\mathcal{A}, \hat{K}, \mathcal{E}_{CE}, \mathcal{E}_{CE}(K), \mathcal{E}_D\}$, avec: $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : p(x) \leq -M^{-1} q\}$.

Preuve:

Les conditions du Théorème 5.3 sont vérifiées dans le cas particulier ci-dessus mentionné.

Remarque:

Ce résultat a été utilisé de façon implicite dans [BORNE 92, RADHY 90, 91, 92].

2.4 Méthodologie

L'algorithme suivant permet d'obtenir, pour un système donné (S) (5.38) avec des ensembles donnés \mathcal{E}_{CE} , \mathcal{E}_{CC} , \mathcal{E}_D , une matrice de gain K minimisant un ensemble \mathcal{A} (ou minimisant \mathcal{D}_∞ et maximisant \mathcal{D}_1) répondant au Problème 1 (ou au Problème 2):

Pas 1:

Choisir une N.V $p(x)$ adéquate et utiliser les résultats du Chapitre 3 afin d'obtenir un système d'inégalité différentielle (SID) (5.46):

$$D_t^+ p(x) \leq g^K(p(x)), p(x) \in \mathcal{S}. \quad (SID) (5.46)$$

Pas 2:

Tester la quasi-monotonie de $g^K \in C^1(\mathcal{S}, \mathbb{R}^k)$.

Pas 3:

Chercher les points d'équilibre positifs z_e de (SM) (5.47) (ces points dépendent de K):

$$\frac{dz}{dt} = g^K(z), z \in \mathcal{S}. \quad (SM) (5.47)$$

En utilisant le critère de Kotlianski pour tester la stabilité asymptotique locale des points obtenus, on obtient des conditions sur K .

i) De plus, on obtient d'autres conditions sur K assurant l'invariance positive de $\mathcal{E}_{CE} \cap \mathcal{E}_{CE}(K)$. Sous ces conditions, minimiser la surface $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : p(x) \leq z_e\}$.

ii) Si i) n'est pas possible, cherche le plus grand \mathcal{D}_1 positivement invariant inclus dans $\mathcal{E}_{CE} \cap \mathcal{E}_{CE}(K)$ tel que i) est possible.

Pas 4:

Vérifier si toutes les conditions du Théorème 5.3 sont vérifiées et conclure.

2.5 Exemples

1) Soit le système perturbé suivant:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 1+|x_2| & 2\sin t \\ \sin t & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} k & x_1 \\ 0 \end{bmatrix} + d(t), \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^2, \quad (5.48)$$

admettant des solutions continues (par rapport à t) $\underline{x}(t; t_0, x_0)$, $|d_i(t)| \leq \delta$, et les ensembles de contraintes suivants:

$$\mathcal{E}_{CE} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \leq 1 \text{ et } |x_2| \leq 1\}, \quad (5.49)$$

$$\mathcal{E}_{CC} = \{c = k x_1 : |c| \leq 10\}. \quad (5.50)$$

Pas 1:

Soit la N.V $p(x)$ définie par:

$$p(x) = \begin{bmatrix} |x_1| \\ |x_2| \end{bmatrix}. \quad (5.51)$$

On obtient:

$D_t^+ p(x) \leq g^K(p(x))$, $p(x) \in \mathbb{R}^2$, avec:

$$g^K(z) = \begin{bmatrix} 1+k+z_2 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} \delta \\ \delta \end{bmatrix}. \quad (5.52)$$

Pas 2:

$g^K(z) \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ est quasi-monotone non-décroissante.

Pas 3:

Invariance de \mathcal{E}_{CE} :

$$k+4+\delta < 0, \quad (\delta \text{ est très petit}), \quad (5.53)$$

qui implique l'invariance de $\mathcal{E}_{CE} \cap \mathcal{E}_{CE}(K)$ si:

$$|k| \leq 10. \quad (5.54)$$

L'étude de $\frac{dz}{dt} = g^K(z)$ montre que le point d'équilibre est donné par (en négligeant les termes en δ d'ordre plus grand que deux):

$$z_1 = \frac{-2}{2+k} \delta, \quad (5.55)$$

$$z_2 = \frac{k}{2(2+k)} \delta, \quad (5.56)$$

avec $k < -2$, ce point est positif.

De plus ce point est (globalement) asymptotiquement stable si:

$$k+2 < 0, \text{ (en négligeant les termes en } \delta \text{)}. \quad (5.57)$$

En minimisant la cible finale pour $k = -10$, les conditions (5.53), (5.54) et (5.57) sont vérifiées.

Pas 4:

Les conditions du Théorème 5.3 étant vérifiées, on conclut que (5.48) est stabilisable pratiquement par rapport à $\{\mathcal{A}, -10, \mathcal{E}_{CE}, \mathcal{E}_{CE}(K), \mathcal{E}_D\}$, avec:

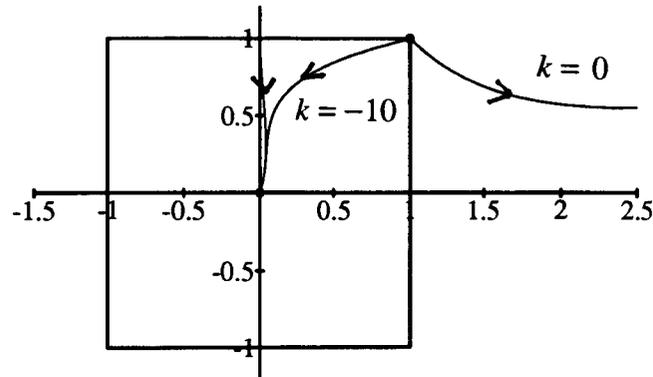
$$\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^2 : p(x) \leq \delta \left[\frac{1}{4}, \frac{5}{8} \right]^T\}. \quad (5.58)$$

Si on utilise un système majorant linéaire comme proposé dans [RADHY 90, 91], on trouve une cible finale dix fois plus grande définie par:

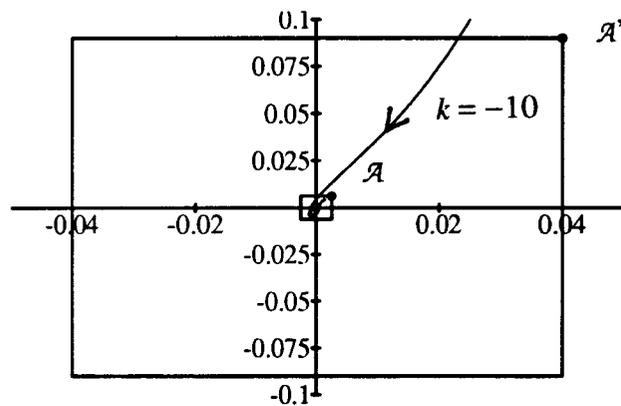
$$\mathcal{A}' = \{x \in \mathbb{R}^2 : p(x) \leq \delta [4, 9]^T\}. \quad (5.59)$$

Les simulations suivantes ont été obtenues avec les valeurs particulières suivantes: $d_1(t) = d_2(t) = 10^{-2} \cos(t)$. La figure 5.3 montre que pour $k = 0$, le système diverge, alors que pour $k = -10$, le système "converge asymptotiquement" vers la cible \mathcal{A} , en respectant les contraintes sur l'état et sur la commande. La Figure 5.4 compare la cible obtenue avec la méthode présentée et celle obtenue à l'aide des méthodes proposées dans [RADHY 90, 91].

Chapitre 5



-Figure 5.3: Stabilisation Pratique de (5.48)-



-Figure 5.4: Comparaison avec la méthode proposée dans [RADHY 90, 91]-

Remarques:

- 1) S'il n'y a pas de perturbation l'état converge vers l'origine.
- 2) La taille de la cible finale est directement liée à celle de la perturbation (δ).
- 3) Si on prédéfinit une cible plus petite que celle obtenue, alors on ne peut pas conclure.

D'autre part si on contraint la commande à une valeur plus petite, on peut utiliser un raisonnement similaire. Par exemple si on se donne les ensembles de contraintes suivants:

$$\mathcal{E}_{CE} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \leq 1 \text{ et } |x_2| \leq 1\}, \quad (5.60)$$

$$\mathcal{E}_{CC} = \{c = k x_1 : |c| \leq 3\}. \quad (5.61)$$

Ce qui nous conduit à:

$$\mathcal{E}_{CE} \cap \mathcal{E}_{CE}(K) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} |x_1| \leq \text{Min}(1 ; \frac{3}{|k|}) \\ |x_2| \leq 1 \end{array} \right\}, \quad (5.62)$$

Ce qui nous conduit à distinguer deux cas: $|k| \leq 3$ et $|k| \geq 3$. Dans le premier cas, il n'y a pas de solution au Problème 1. Dans le dernier, on obtient:

Pas 3:

Invariance de $\mathcal{E}_{CE} \cap \mathcal{E}_{CE}(K)$:

$$(k+2) \frac{3}{|k|} + 2 + \delta < 0, \quad (5.63)$$

$$\frac{3}{|k|} - 2 + \delta < 0. \quad (5.64)$$

L'étude de $\frac{dz}{dt} = g^K(z)$ montre que pour $k < -2$, il existe un unique point positif (globalement) asymptotiquement stable donné par (5.55) et (5.56) (en négligeant les termes en δ d'ordre plus grand que deux). En prenant $k = -10$, les conditions (5.63), (5.64) et (5.57) sont satisfaites. Si on voulait minimiser la cible finale, il faudrait prendre un gain infini et dans ce cas il se pose de nombreux problèmes, notamment la taille de $\mathcal{E}_{CE} \cap \mathcal{E}_{CE}(K)$ diminuerait (elle varie en $\frac{1}{k}$).

Pas 4:

Les conditions du Théorème 5.3 étant vérifiées, on conclut que (5.48) est stabilisable pratiquement par rapport à $\{\mathcal{A}, -10, \mathcal{E}_{CE}, \mathcal{E}_{CE}(K), \mathcal{E}_D\}$, avec:

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^2 : p(x) \leq \delta \left[\frac{1}{4}, \frac{5}{8} \right]^T\}. \quad (5.65)$$

On peut noter que dans ce cas:

$$\mathcal{E}_{CE} \cap \mathcal{E}_{CE}(K) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \leq \frac{3}{10} \text{ et } |x_2| \leq 1\}. \quad (5.66)$$

2) Soit le système perturbé suivant:

Chapitre 5

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -4+d(t) & 3 \\ 2 & -3+x_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2+x_2 \\ 3 \end{bmatrix} (k_1 x_1 + k_2 x_2), t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^2, \quad (5.67)$$

admettant des solutions continues (par rapport à t) $\underline{x}(t; t_0, x_0)$, $|d(t)| \leq 1$, et l'ensemble de contraintes sur l'état suivant:

$$\mathcal{E}_{CE} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \leq 1 \text{ et } |x_2| \leq 1\}. \quad (5.68)$$

Pas 1:

Soit la N.V $p(x)$ définie par:

$$p(x) = \begin{bmatrix} |x_1| \\ |x_2| \end{bmatrix}. \quad (5.69)$$

On obtient:

$$D_t^+ p(x) \leq g^K(p(x)), p(x) \in \mathbb{R}^2, \text{ avec:} \\ g^K(z) = \begin{bmatrix} -3+2k_1+|k_1|z_2 & |3+2k_2|+|k_2|z_2 \\ |2+3k_1| & -3+3k_2+z_2 \end{bmatrix} z. \quad (5.70)$$

Pas 2:

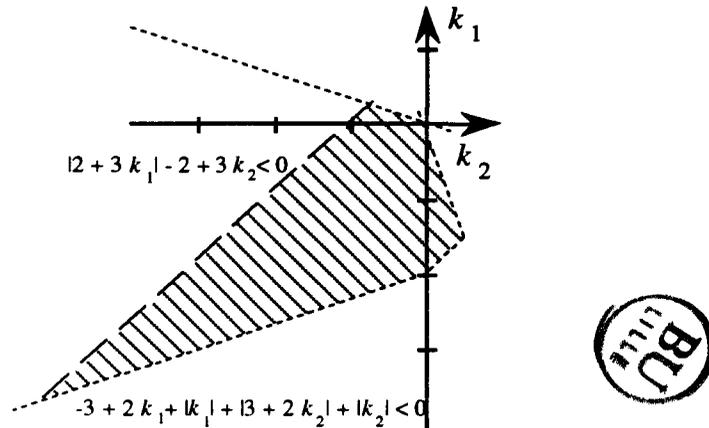
$g^K(z) \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ est quasi-monotone non-décroissante.

Pas 3:

Invariance de \mathcal{E}_{CE} :

$$\begin{aligned} -3 + 2 k_1 + |k_1| + |3 + 2 k_2| + |k_2| &< 0, \\ |2 + 3 k_1| - 2 + 3 k_2 &< 0. \end{aligned} \quad (5.71)$$

Cette condition géométrique est représentée par la Figure 5.5 suivante:



-Figure 5.5: Condition géométrique (5.71)-

L'étude de $\frac{dz}{dt} = g^K(z)$ montre que l'origine est un point d'équilibre. De plus si on choisit $k_1 = -2$ et $k_2 = -2$ tels que (5.71) soit vérifiée, l'origine est (globalement) asymptotiquement stable.

Pas 4:

Les conditions du Théorème 5.3 étant vérifiées, on conclut que (5.67) est **stabilisable pratiquement** par rapport à $\{\mathcal{A}, \{k_1 = -2, k_2 = -2\}, \mathcal{E}_{CE}, \mathcal{E}_D\}$, avec:

$$\mathcal{A} = \{x = 0\}. \tag{5.72}$$

Conclusion

L'utilisation de N.V et de **systèmes majorants non linéaires autonomes** pour résoudre les problèmes de **stabilisation sous-contraintes** montre les avantages suivants:

- 1) les N.V interviennent souvent dans la définition de nombreuses contraintes (état ou commande),
- 2) les réponses aux problèmes ainsi formulés en termes d'invariance sont calculables facilement: on doit vérifier quelques conditions géométriques.

Cependant on peut noter que les systèmes majorants non linéaires autonomes ne donnent pas de renseignement sur les "dynamiques" du système: le système converge en combien de temps ou avec quel taux de décroissance? On peut noter qu'il est possible, en simulant le système majorant d'obtenir ces informations.

Chapitre 5

De plus, si on utilise des systèmes majorants linéaires autonomes, comme proposé dans [RADHY 90, 91], ces informations sont accessibles. Dans ce cas, cela induit une perte d'information supplémentaire sur le système initial ce qui explique les différences de taille obtenues entre (5.58) et (5.59) du premier exemple. Une astuce consiste alors à étudier le problème d'une part à l'aide de systèmes majorants linéaires autonomes pour obtenir un ensemble et un taux de convergence, puis d'utiliser un système non linéaire autonome pour obtenir un autre ensemble plus petit. En recoupant ainsi les informations on peut affiner les conclusions.

Conclusion

Dans un premier temps, à l'aide de **systèmes majorants linéaires à validité temporelle locale**, nous avons obtenu des conditions suffisantes assurant la **stabilité pratique** de systèmes non linéaires non autonomes perturbés. Ces conditions nous donnent des relations entre les différents domaines et sont relativement simples à tester. De plus elles présentent un caractère robuste vis à vis des perturbations sur le modèle initial.

Enfin, à l'aide de **systèmes majorants non linéaires autonomes**, nous avons obtenu des conditions suffisantes relatives au problème de la **commande sous contraintes**. Ces conditions mettent en évidence une autre propriété: l'**invariance d'ensembles**. De plus le lemme 5.1, faisant un lien entre l'utilisation de fonctions quasi-monotones non-décroissantes et les opposées de M-matrices, nous ouvre un nouveau champ d'application. En particulier, il nous permettra d'obtenir une version intéressante du Critère de Borne et Gentina, ainsi que d'autres résultats.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Position des Problèmes:

La complexité des phénomènes à étudier demande des modèles mathématiques en général non linéaires, non stationnaires, perturbés et/ou reflétant une méconnaissance du système modélisé. Notre contribution dans ce domaine s'est portée sur la *caractérisation* et l'*estimation* des comportements de tels systèmes à l'aide de méthodes qui, à l'instar de la classique méthode directe de Liapounov, ne nécessitent pas la connaissance des solutions explicites du système, et restent valables malgré cette méconnaissance du modèle.

Dans ce mémoire, les termes "caractérisation" et "estimation" ont été pris dans le sens suivant:

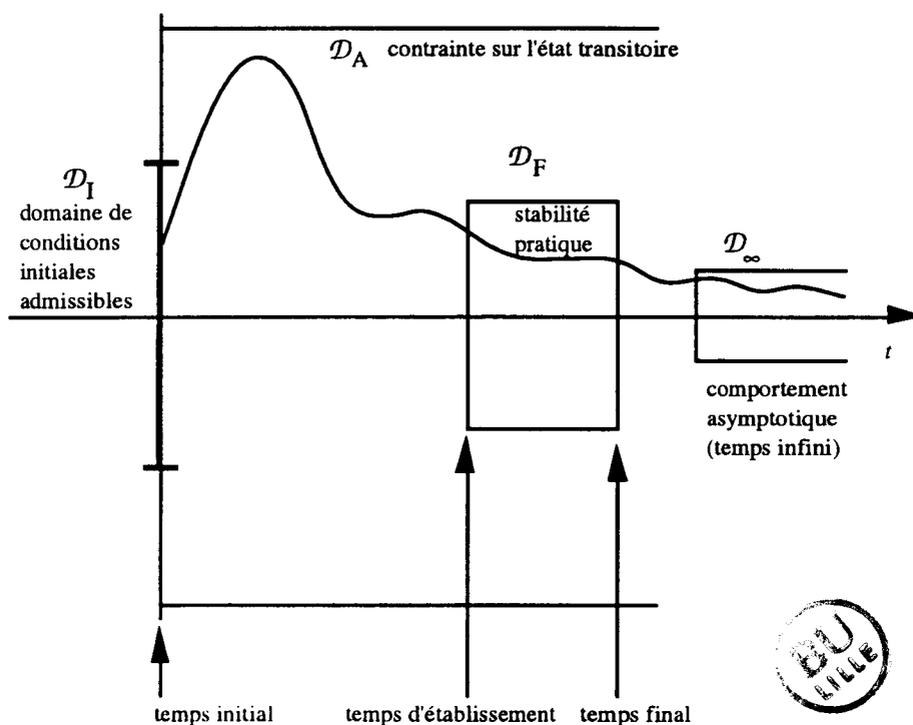
caractérisation: peut-on montrer que tel ou tel point ou ensemble est stable, attractif, asymptotiquement stable, ...?

estimation: ce mot a été pris au sens de "localisation topologique" de la trajectoire dans l'espace d'état, c'est-à-dire (voir Figure A):

- i) des comportements asymptotiques: où se situe l'état $x(t)$ quand le temps devient indéfiniment grand?
- ii) des comportements transitoires: peut-on garantir le respect de certaines contraintes sur l'état, l'invariance positive de certains domaines, la stabilité pratique?

Conclusion Générale

iii) des états initiaux et des perturbations admissibles: quelles conditions initiales et quelles amplitudes de perturbations $d(t)$ (problème de la robustesse) permettent de garantir les comportements i) et ii)?



-Figure A: différentes localisations des comportements-
Problème de l'estimation = trouver \mathcal{D}_I , \mathcal{D}_A , \mathcal{D}_F , \mathcal{D}_∞ ...

Avant de répondre précisément à ces questions, il nous fallu les formuler de façon mathématique. C'est ce que nous avons fait dans le premier chapitre en définissant précisément certaines notions qualitatives concernant les ensembles, comme par exemple l'attractivité, la stabilité, la stabilité pratique. Il est à noter que nous avons contribué à élargir certaines de ces définitions soit parce qu'elles n'existaient pas pour les classes de systèmes que nous avons étudiées (modèles perturbés non autonomes par exemple), soit parce que les comportements limites qu'elles traduisaient étaient jusque-là restreints à des points d'équilibre.

En ce qui concerne l'étude des propriétés ainsi précisées, la stratégie que nous avons retenue a été de ramener les problèmes envisagés concernant des systèmes "complexes" à leurs analogues concernant des systèmes plus simples (par exemple linéaire constant ou

Conclusion Générale

non linéaire autonome): ceci nous a conduit à définir et préciser au chapitre 3 les notions suivantes:

- 1) les notions de système majorant local ou global, direct ou rétrograde,
- 2) la notion de système de comparaison.

Ces notions sont validées par des lemmes originaux (voir Chapitre 3) qui ont servi de base pour la suite, mais qui peuvent être utilisés dans tout autre problème faisant intervenir des majorations.

Sur ces bases générales, les chapitres quatre et cinq apportent des réponses originales aux questions posées concernant la caractérisation et l'estimation:

1) la construction d'un système majorant linéaire constant conduit à un système de comparaison relativement aux propriétés de stabilité exponentielle uniforme (Chapitre 4) et de stabilité pratique (Chapitre 5).

2) de même la construction d'un système majorant non linéaire autonome produit un système de comparaison relativement aux propriétés d'attractivité et de stabilité (Chapitre 4).

Par exemple, si le système majorant possède un point d'équilibre z_e asymptotiquement stable, alors le système initial possédera lui aussi cette propriété relativement à un ensemble \mathcal{A} déduit de z_e . De plus le domaine de stabilité asymptotique de \mathcal{A} sera déduit de celui de z_e .

Toutefois, l'utilisation d'un système majorant non linéaire autonome donne, lorsqu'elle est possible, de bien meilleures estimations que celle d'un système majorant linéaire constant.

Toutes les réponses données s'expriment sous forme de conditions suffisantes. En effet, la "généralité" des modèles étudiés ne permet pas d'obtenir des conditions également nécessaires à l'aide de systèmes majorants. C'est là le revers de l'utilisation de tels systèmes qui, s'ils simplifient l'étude, conduisent également à une perte d'information sur le comportement réel. Les majorations nécessitent donc un compromis entre la "complexité" du système initial et la "simplicité" du système majorant. Ainsi, afin de tirer un meilleur profit de ces résultats nous avons développé des méthodes d'optimisation concernant l'obtention des systèmes majorants linéaires constants (Chapitre 4).

Conclusion Générale

Perspectives et extensions:

Cette étude peut conduire à plusieurs extensions ou applications notamment concernant les quatre directions suivantes:

1) Poursuivre le développement théorique en remarquant que les résultats concernant les systèmes majorants non linéaires autonomes peuvent être généralisés à l'aide de Fonctions Vectorielles de Liapounov.

De même, nous pouvons envisager d'étendre nos résultats relatifs aux systèmes majorants non linéaires autonomes, en étudiant non plus des points d'équilibres mais des ensembles ou trajectoires ; ce qui nous conduirait à des conclusions similaires pour le système initial.

2) Le lien établi entre les fonctions quasi-monotones non décroissantes et les opposées de M-matrices, nous ouvre un nouveau champ d'application (Chapitre 5).

3) Les résultats proposés ici sont en cours d'extension pour des systèmes à retard (voir [DAMBRINE 93a, 93b, 93c]).

4) Ces résultats peuvent trouver des applications directes dans divers domaines: une application à la commande booléenne en électronique de puissance est en cours d'étude (voir [ABADIE 93]), nous pensons également tester nos résultats sur des systèmes à comportements chaotiques (voir [GUCKENHEIMER 83, MAHOUT 93]).

Notations

NOTATIONS

- \mathbb{R} l'ensemble des réels:
 \mathbb{R}_+ l'ensemble des réels positifs ou nul.
 \mathbb{R}_- l'ensemble des réels négatifs ou nul.
 \mathbb{R}^n l'espace vectoriel de dimension n construit sur le corps des réel.
- $\text{Re}(\lambda)$ la partie réelle du complexe λ .
 $\text{Im}(\lambda)$ la partie imaginaire du complexe λ .
- $\sigma(A)$ le spectre de la matrice A (ensemble de ses valeurs propres):
 $\sigma^s(A) = \{\lambda \in \sigma(A) \text{ on a : } \text{Re}(\lambda) < 0\}$.
 $\sigma^c(A) = \{\lambda \in \sigma(A) \text{ on a : } \text{Re}(\lambda) = 0\}$.
 $\sigma^i(A) = \{\lambda \in \sigma(A) \text{ on a : } \text{Re}(\lambda) > 0\}$.
- $\mathcal{C}^k(S)$ l'ensemble des fonctions telles que les k différentielles successives existent et soient continues, cette propriété pouvant être réduite sur un ensemble S .
- $|a|$ Pour $a = [\alpha_1, \dots, \alpha_l]^T \in \mathbb{R}^l$, $|a| = [|\alpha_1|, \dots, |\alpha_l|]^T$.
- $a < b$, Pour a et $b \in \mathbb{R}^l$, $a < b$ représente l'inégalité élément à élément.
- $D_t^+ p_i(x)$ la dérivée temporelle à droite (ou dérivée de Dini). Pour la norme vectorielle suivante $p(x) = [p_1(x_1), \dots, p_k(x_k)]^T$ on a:

$$D_t^+ p_i(x) = D_t^+ p_i(x_i) = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{p_i[x_i(t + \theta)] - p_i[x_i(t)]}{\theta} \right\}.$$
- $D_{x_i}^+ p_i(x)$ représente le ième élément du gradient à droite de $p_i(x)$. Pour $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, on a:
 $x_i = [x_{i,1}, \dots, x_{i,n_i}]^T$, $D_{x_i}^+ p_i(x_i) = [D_{x_{i,1}}^+ p_i(x_i), \dots, D_{x_{i,n_i}}^+ p_i(x_i)]^T$,

$$D_{x_{ij}}^+ p_i(x_i) = \lim_{\substack{\theta \rightarrow 0^+ \\ |\Delta x_i| \rightarrow 0}} \left\{ \frac{p_i[x_i + I_{i,j+1} \Delta x_i] - p_i[x_i + I_{i,j} \Delta x_i]}{\Delta x_i} \right\}$$

$$\Delta x_i = x_i(t) - x_i(t + \theta),$$

$$I_{i,j} = \text{Diag} \{(1 - \delta_{1j}), \dots, (1 - \delta_{jj}), 0, \dots, 0\}, I_{i,j} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}, \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}.$$

Notations

$\bar{(\cdot)}$, $\overset{\circ}{(\cdot)}$, $\partial (\cdot)$

représentent respectivement la fermeture, l'intérieur et la frontière de l'ensemble (\cdot) . Par exemple:

Si $\mathcal{X}_c = \{x \in \mathbb{R}^n : p(x) \leq c\}$, avec $c > 0$, $c \in \mathbb{R}^k$, on a:

$\bar{\mathcal{X}}_c = \{x \in \mathbb{R}^n : p(x) \leq c\}$, avec $c > 0$, $c \in \mathbb{R}^k$, la fermeture de \mathcal{X}_c .

$\overset{\circ}{\mathcal{X}}_c = \{x \in \mathbb{R}^n : p(x) < c\}$, avec $c > 0$, $c \in \mathbb{R}^k$, l'intérieur de \mathcal{X}_c .

$\partial \bar{\mathcal{X}}_c = \{x \in \mathbb{R}^n : p(x) \leq c \text{ et } \exists i : p_i(x) = c_i\}$, avec $c > 0$, $c \in \mathbb{R}^k$, la frontière de $\bar{\mathcal{X}}_c$ et de \mathcal{X}_c .

Bibliographie

ALEXEEV V., GALEEV E., TIKHOMIROV V. 1987

“Recueil de Problèmes d’Optimisation”, Ed. MIR, Moscou, (1987), p.13-21.

ARNOLD V.I. 1980

“Chapitres Supplémentaires à la Théorie des Equations Différentielles Ordinaires”, Ed. MIR, Moscou, (1980).

ARNOLD V.I. 1988

“Equations Différentielles Ordinaires”, 4^{ème} édition traduit du russe, Ed. MIR, Moscou, (1988).

BANSAL R.K., SUBRAMANIAN R. 1974

“Stability Analysis of Power Systems using Lie Series and Pattern-Recognition Techniques”, Proc. IEE, Vol. 121 (July 1974) No. 7, p.623-629.

BELLMAN R. 1962

“Vector Lyapunov Functions”, J. SIAM Control, ser A, Vol. 1 (1962) No. 1, p.31-34.

BENZAOUIA A., BURGAT C. 1988

“Regulator Problem for Linear Discret-Time Systems with Non-Symmetrical Constrained Control”. Int. J. Control, Vol.48 (1988) No.6, p.2441-2451.

BERGE P., POMEAU Y., VIDAL CH. 1984

“L’Ordre dans le Chaos (vers une approche déterministe de la turbulence)”, Ed. Hermann (1984).

BHATIA N.P., SZEGÖ G.P. 1967

“An Extension Theorem for Asymptotic Stability and its Application to a Control Problem”, Differential Equations and Dynamical Systems, J.K. Hale, J.P. LaSalle, Academic Press New York London (1967), p.147-153.

BHATIA N.P. , SZEGÖ G.P. 1970

“Stability Theory of Dynamical Systems”, Springer Verlag Berlin (1970).

Bibliographie

BHATIA N.P., LAZER A.C., SZEGÖ G.P. 1967

“On Global Weak Attractors in Dynamical Systems”, *Differential Equations and Dynamical Systems*, J.K. Hale, J.P. LaSalle, Academic Press New York London (1967), p.375-379.

BIRKHOFF G.D. 1927

“Dynamical Systems”, *Amer. Math. Soc. Colloq. IX* (1927).

BITSORIS G. 1978

“Principe de Comparaison et Stabilité de Systèmes Complexes”, Thèse d'état N°818, Université Paul Sabatier Toulouse (1978).

BITSORIS G. 1983

“Stability Analysis of Non Linear Dynamical Systems”, *Int. J. Control*, Vol. **38** (1983) No. 3, p.699-711.

BITSORIS G. 1988

“Positive Invariance Polyhedral Sets of Discret-Time Linear Systems”, *Int. J. Control*, Vol. **47** (1988) No. 6, p.1713-1726.

BOJADZIEV G.N. 1987

“Behavioural Strategy of some Resource Consumption Models subject to Disturbances”, 10th World Congress on Auto. Control, Vol. **5** (preprints), Ed. R. Isermann, I.F.A.C., Munich, Federal Rep. of Germany, July 27-31, (1987), p.192-196.

BORNE P., GENTINA J.C. 1974

“On the Stability of Large Non-Linear Systems”, Joint Automatic Control Conference, Austin, Texas, (1974).

BORNE P. 1976

“Contribution à l'Etude des Systèmes Discrets Non-Linéaires de Grande Dimension. Application aux Systèmes Interconnectés”, Thèse d'état, Université de Lille, (1976)

BORNE P., RICHARD J.P., TAHIRI M. 1990

“Estimation of Attractive Domains for Locally Stable or Unstable Systems”, *Syst. Anal. Model. Simul.*, Akademie-Verlag Berlin, Vol. **7** (1990) No. 8, p.595-610.

Bibliographie

BORNE P., RICHARD J.P. 1990

“Local and Global Stability of Attractors by Use of Vector Norms”, The Lyapunov Functions Method and Applications, J.C. Baltzer AG, Scient. Pub. Co (IMACS 1990), p.53-62.

BORNE P. , RADHY N.E. 1992

“On some recent results in the field of Constrained Dynamical Systems”, Computational Systems Analysis, Ed. A. Sydow, Elsevier Science Publishers B.V. (North-Holland), (1992), p.29-38.

BORNE P., RICHARD J.P., RADHY N.E., PERRUQUETTI W. 1992

“Estimation of Attractors and Stability Region for Nonlinear Dynamical Systems : Improved Results”, Hand Book on Computational Systems Analysis, Elsevier Science Publishers, Sydow ed., (1992).

BURGAT C., TARBOURIECH S., KLAÏ M. 1993

“An Algorithm for Estimating the Stability Domain of Linear Discret-Time Systems with Saturations”, IEEE/SMC'93, IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics, Le Touquet-France, October 17-20, Vol. 1 (1993), p.319-324.

BURNAND G., SARLOS G. 1968

“Determination of the Domain of Stability”, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol 23 (1968), p.714-722.

CHIANG H. D., HIRSCH M.W., WU F.F. 1988

“Stability Regions Of Nonlinear Autonomous Dynamical Systems”, IEEE Trans. Auto. Control. , Vol. 33 (Jan. 1988) No. 1, p.16-27.

CHIANG H.D., THORP J.S. 1989

“Stability Regions of Nonlinear Dynamical Systems : A Constructive Methodology”, IEEE Trans. Auto. Control, Vol. 34 (Dec. 1989) No. 12, p.1229-1241.

COPE D. 1980

“Stability of Limit Cycle Solutions of Reaction-Diffusion Equations”, SIAM J. Appl. Math. , Vol. 38 (Juin 1980) No. 3, p.457-479.

Bibliographie

DAMBRINE M., RICHARD J.P. 1993

“Stability Analysis of Time-Delay Systems”, *Dynamic Systems and Applications*, Vol. 2 (1993), p. 405-414.

DAMBRINE M., RICHARD J.P. 1993

“Estimation of Stability Domains of Nonlinear Differential-Difference Equations”, *IEEE/SMC'93, IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, Le Touquet-France, October 17-20, Vol. 1 (1993), p.307-310.

DAMBRINE M., RICHARD J.P. 1993

“Étude de la Stabilité des Systèmes à Retards par la Méthode des Normes Vectorielles”, *Groupe de Travail “Méthodes Algébriques et Géométriques”*, Paris, 18 Novembre 1993.

DAVISON E.J., KURAK E.M. 1971

“A Computational Method for Determining Quadratic Lyapunov Functions for Non-Linear Systems”, *Automatica*, Pergamon Press, Vol. 7 (1971), p.627-636.

DJORDJEVIC M.Z. 1986

“Stability Analysis of Nonlinear Systems by Matrix Lyapunov Method”, *Proceedings IMACS-IFACS, Modelling and Simulation for Control of Lumped and Distributed Parameter Systems*, I.D.N 59 650 Villeneuve d'ASCQ (France), (3-6 Juin 1986), p.209-212.

FIEDLER M., PTAK V. 1962

“On Matrices with Non-positive Off-diagonal Elements and Positive Principal Minors”, *Czech. Nat. J.*, Vol. 12 (1962) No. 87, p.382-400.

FOSSARD A.J., NORMAND-CYROT D. 1993

“Commande”, tome 3, *Ouvrage Collectif Réalisé dans le cadre du Groupe Non Linéaire DRET/AFCEC*, ed. MASSON, Paris, (1993).

GENESIO R., VICINO A. 1984

“New Techniques for Constructing Asymptotic Stability Regions for Nonlinear Systems”, *IEEE Trans. Circuits and Sys.*, Vol. CAS-31 (June 1984) No. 6, p.574-581.

Bibliographie

GENESIO R., TARTAGLIA M., VICINO A. 1985

“On Estimation of Asymptotic Stability Regions : State of Art and New Proposals”,
IEEE Trans. Auto. Control, Vol. **AC-30** (Au. 1985) No. 8, p.747-755.

GENTINA J.C., BORNE P., LAURENT F. 1972

“Stabilité des Systèmes Continus Non Linéaires de Grande Dimension”,
R.A.I.R.O.(Aôut 1972-J-3), p.69-77.

GENTINA J.C. 1976

“Contribution à l’Analyse et à la Synthèse des Sytsèmes Continus Non-Linéaires de Grande Dimension.”, Thèse d’état, Université de Lille, (1976)

GRUJIĆ LJ.T. 1973

“Practical Stability with the Settling Time”, Teoretski Prilog Automatica, Zagreb, T. 7
(1973), p.6-10.

GRUJIĆ LJ.T. 1973

“On Practical Stability”, Int. J. Control, Vol. **17** (1973) No. 4, p.881-887.

GRUJIĆ LJ.T. 1975

“Novel Development of Lyapunov Stability of Motion”, Int. J. Control, Vol. **22**
(1975) No. 4, p.525-549.

GRUJIĆ LJ.T., GENTINA J.C., BORNE P. 1977

“General Aggregation of Large-Scale Systems by Vector Lyapunov Functions and Vector Norms”, Int. J. Control, Vol. **24** (1977) No. 4, p.529-550.

GRUJIĆ LJ.T., GENTINA J.C., BORNE P., BURGAT C., BERNUSSOU J. 1978

“Sur la Stabilité des Systèmes de Grande Dimension, Fonctions de Lyapunov Vectorielles”, R.A.I.R.O Aut./Sys. Analysis and Control, Vol. **12** (1978) No. 4, p.319-348.

GRUJIĆ LJ.T. 1986

“Stability Domains of General and Large Scale Systems”, Proceedings IMACS-IFACS, Modelling and Simulation for Control of Lumped and Distributed Parameter Systems, I.D.N 59 650 Villeneuve d’ASCQ (France), (3-6 Juin 1986), p.267-272.

Bibliographie

GRUJIĆ LJ.T., MARTYNYUK A.A., RIBBENS-PAVELLA M. 1987

“Large Scale Systems Stability under Structural and Singular Perturbations”, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Ed. M. Thoma and A. Wyner, Springer-Verlag, Berlin, (1987).

GRUJIĆ LJ.T. 1988

“On Large-Scale Systems Stability”, Proceedings of 12th IMACS World Congress, (1988), p.224-229

GRUJIĆ LJ.T. 1990

“Solutions to Lyapounov Stability Problems: Nonlinear Systems with Globally Differentiable Motions”, The Lyapunov functions method and applications, Ed. P. BORNE and V. MAZTROSOV, J.C. Baltzer AG, Scientific publishing Co. IMACS, (1990), p.19-27.

GRUJIĆ LJ.T. 1991

“On New Approaches to Large-Scale Systems Stability Analysis”, Proceedings of 13th IMACS World Congress on Computation and Applied Mathematics, (July 22-26 1991), Trinity College Dublin, p.1250-1251.

GRUJIĆ LJ.T. 1991

“Solutions to Lyapounov Stability Problems: Nonlinear Systems with Differentiable Motions”, Proceedings of 13th IMACS World Congress on Computation and Applied Mathematics, (July 22-26 1991), Trinity College Dublin , p.1228-1231.

GRUJIĆ LJ.T. 1991

“The Necessary and Sufficient Conditions for the Exact Construction of a Lyapunov Function and Asymptotic Stability Domain”, Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control, Brighton, England, Vol. 3 (11-13 dec.1991), p.2885-2888.

GRUJIĆ LJ.T., NOVAKOVIC Z.R. 1991

“Robot Control : Tracking with the required Settling Time”, Journal of Intelligent and Robotic Systems, Vol. 4 (1991), p.255-265.

Bibliographie

- GRUJIĆ L.J.T., BORNE P., GENTINA J.C., RICHARD J.P. 1993
“Stability Domains : Time-Invariant Continuous-Time Systems”, manuscrit du livre du même nom en préparation.
- GUCKENHEIMER J., HOLMES P. 1983
“Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields”, Springer Verlag (1983).
- HABETS P., PEIFFER K. 1975
“Attractivity Concepts and Vector Lyapunov Functions”, Non Linear Vibration Problem (Zagadnienia Drgan Nieliniowych), p.35-52.
- HAHN W. 1963
“Theory and Application of Liapunov’s Direct Method”, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., (1963).
- HAHN W. 1967
“Stability of Motion”, Springer-Verlag N.Y. , (1967).
- HALE J., KOÇAK H. 1991
“Dynamics and Bifurcations”, Text in Applied Mathematics 3, Springer-Verlag N.Y. , (1991).
- HANG C.C., CHANG J.A. 1970
“An Algorithm for Constructing Lyapunov Functions Based on the Variable Gradient”, IEEE Trans. on Automatic Control, (Au. 1970), p.510-512.
- HARAUX A. 1991
“Systèmes Dynamiques Dissipatifs et Applications”, RMA 17, Collection Recherches en Mathématiques Appliquées sous la direction de P.G. CIARLET et J.L. LIONS, Ed. MASSON, (1991).
- HEWIT J.R., STOREY C. 1967
“Optimization of the Zubov and Ingwerson Methods for Constructing Lyapunov Functions”, Electron. Lett., Vol. 3 (May 1967), p.211-213.

Bibliographie

HEWIT J.R., STOREY C. 1969

“Comparison of Numerical Methods in Stability Analysis”, *Int. J. Control*, Vol. **10** (1969), p.687-701.

HEWIT J.R., STOREY C. 1969

“Numerical Application of Szego’s Method for Constructing Lyapunov Functions”, *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. **AC-14** (Fe. 1969), p.106-107.

HIRSCH M.W., SMALE S. 1974

“Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra”, Academic Press, (1974).

INFANTE E.F., CLARK L.G. 1964

“A Method for the Determination of the Domain of Stability of Second-order Non Linear Autonomous System”,

JOCIĆ L.J.B. 1981

“On the Attractivity of Imbedded Systems”, *Automatica*, Pergamon Press, Vol. **17** (1981) No. 6, p.853-860.

JOCIĆ L.J.B. 1982

“Planar Regions of Attraction”, *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. **AC-27** (Juin 1982) No. 3, p.708-710.

JOUKOVSKI M.

“De la Stabilité du Mouvement”, *Mémoires Scientifiques de l’Université de Moscou*, Section Physico-Mathématiques, 4ème cahier, (1882).

KAKIMOTO N., OHSAWA Y., HAYASHI M. 1980

“Transient Stability Analysis of Multimachine Power Systems with Field Flux Decays via Lyapunov’s Direct Method”, *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, Vol. **PAS-99** (Sep./Oct. 1980) No. 5, p.1819-1827.

KORMANIK J., LI C.C. 1972

“Decision Surface Estimate of Nonlinear System Stability Domain by Lie Series Method”, *IEEE Trans. Auto. Control*, Vol. **AC-17** (Oct. 1972), p.666-669.

Bibliographie

LAKSHMIKANTHAM V., LEELA S. 1969

“Differential and Integral Inequalities”, Vol.1, Academic Press, New York (1969).

LASALLE J.P., LEFSCHETZ S. 1961

“Stability by Liapunov’s Direct Method with Applications”, Academic Press (1961).

LASALLE J.P. 1967

“An Invariance Principle in Theory of Stability”, Differential Equations and Dynamical Systems, J.K. Hale, J.P. LaSalle, Academic Press New York London (1967), p.277-286.

LASALLE J.P. 1976

“The Stability of Dynamical Systems”, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pennsylvania 19103, (1976).

LEFSCHETZ S. 1967

“Geometric Differential Equations : Recent Past and Proximate Future”, Differential Equations and Dynamical Systems, J.K. Hale, J.P. LaSalle, Academic Press New York London (1967), p.1-14.

LIAPOUNOV A.M. 1892

“Stability of Motion: General Problem”, Int. J. Control, Vol. **55** (March 1992) No. 3, Lyapunov Centenary Issue, p. 520-790.

LIAPOUNOV A.M., PLISS V.A., BASSOV V.P. 1966

“Stability of Motion”, Academic Press, New York, (1966).

LOPARO K.A., BLANKENSHIP G.L. 1978

“Estimating the Domain of Attraction of Nonlinear Feedback Systems”, IEEE Trans. Auto. Control, Vol. **AC-23** (Aug. 1978) No. 4, p.602-608.

MAHOUT V., LOPEZ P., CARCASSES J.P., MIRA C. 1993

“Complex Behaviors of a two Revolute Joints Robot: Harmonic, Subharmonic, Higher Harmonic, Fractional Harmonic , Chaotic Responses”, IEEE/SMC’93, IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics, Le Touquet-France, October 17-20, Vol. **5** (1993), p.325-330.

Bibliographie

MARGOLIS S.G., VOGT W.G. 1963

“Control Engineering Applications of V.I. Zubov’s Construction Procedure for Lyapunov Functions”, IEEE Trans. Auto. Control, Vol. AC-8 (Apr. 1963), p.104-113.

MARKUS L. 1954

“Global Structure of Ordinary Differential Equations in the Plan”, Trans. Amer. Soc., Vol. 76 (1954), p.127-148.

MATROSOV V.M. 1962

“On the Theory of Stability of Motion”, P.M.M Vol. 26 (1962), p.992-1002, (traduit du russe).

MATROSOV V.M. 1968

“Principe de Comparaison et Fonction Vectorielle de Liapounov I”, Diff Uraun., Vol. 4 (1968) No. 8, p.1374-1386, (en russe).

MATROSOV V.M. 1968

“Principe de Comparaison et Fonction Vectorielle de Liapounov II”, Diff Uraun., Vol. 4 (1968) No. 10, p.1739-1752, (en russe).

MATROSOV V.M. 1969

“Principe de Comparaison et Fonction Vectorielle de Liapounov III”, Diff Uraun., Vol. 5 (1969) No. 7, p.1171-1185, (en russe).

MATROSOV V.M. 1969

“Principe de Comparaison et Fonction Vectorielle de Liapounov IV”, Diff Uraun., Vol. 5 (1969) No. 12, p.2129-2143, (en russe).

MATROSOV V.M. 1971

“Vector Lyapunov Functions in the Analysis of Nonlinear Interconnected System”, Symp. Math. Academic Press, New York, Vol. 6 (1971), p.209-242.

MICHEL A.N., MILLER R.K. 1977

“Qualitative Analysis of Large Scale Dynamical Systems”, Academic Press, New York (1977).

Bibliographie

MIYAGI H., TANIGUCHI T. 1980

“Application of Lagrange-Charpit Method to Analyse the Power System’s Stability”,
Int. J. Control, Vol. **30** (1980) No. 2, P.371-379.

NOLDUS E.J. 1977

“A New Frequency Domain Approach to Certain Transient Stability Problems in Power
Systems Analysis”, Int. J. Control, Vol. **26** (1977) No. 1, p.33-55.

NOLDUS E., SPRIET J., VERRIEST E., VAN CAUWENBERGHE A. 1974

“A New Liapunov Technique for Stability Analysis of Chemical Reactors”,
Automatica, Vol. **10** (1974), p.675-680.

PAI M.A., NARAYANA C.L. 1976

“Finite Regions of Attraction for Multinonlinear Systems and its Application to the
Power System Stability Problem”, IEEE Trans. Auto. Control, Vol. **AC-21** (Oct.
1976), p.716-721.

PERRUQUETTI W., RICHARD J.P. 1992

“Estimation of Behaviours via Non Linear Overvaluing Systems”, Proceeding of the
2nd Beijing Int. Conf. on System Simulation and Scientific Computing, October 20-
23, Vol. **2**, p.774-778.

PERRUQUETTI W., RICHARD J.P., BORNE P. 1993

“Estimation of Non Linear Time Varying Behaviours Using Vector Norms”, SAMS,
Vol. **11** (1993), p.167-184.

PERRUQUETTI W., RICHARD J.P. 1993

“Stability Domains for Differential Inequalities Systems”, IEEE/SMC’93, IEEE
International Conference on Systems, Man and Cybernetics, Le Touquet-France,
October 17-20, Vol. **1** (1993), p.325-330.

PERRUQUETTI W., RICHARD J.P. 1994

“Norm-Constrained Practical Stabilization of Dynamical Systsems.”, à paraitre, 33ème
I.E.E.E.-C.D.C., Orlando (Floride-USA), Decembre 1994.

Bibliographie

- PERRUQUETTI W., RICHARD J.P., GRUJIĆ LJ.T. AND BORNE P. 1994
"On Practical Stability with the Settling Time via Vector Norms", soumis à Int. J. Control.
- POINCARÉ H. 1885
"Mémoire sur les Courbes Définies par une Équation Différentielle", Journal de Math. Vol. 7 (1881) p.375-422, Vol. 8 (1882) p.251-296, Vol. 1 (1885) p.167-244, Vol. 2 (1886) p.151-217.
- RABENASOLO A.B. 1992
"Analyse et Commande des Systèmes Linéaires à Coefficients Périodiques", Thèse de 3ème cycle N°993, Université des Sciences et Technologies de Lille, (1992).
- RADHY N.E., BORNE P., RICHARD J.P. 1990
"Regulation of Nonlinear Time-Varying Continuous Systems with Constrained State", The Lyapunov functions method and applications, Ed. P. BORNE and V. MATROSOV, J.C. Baltzer AG, Scientific publishing Co. IMACS, (1990), p.81-88.
- RADHY N.E., BORNE P. 1991
"Vector Norm Approach of the Regulation of Locally Unstable Systems Subject to Constraints", Proc. of the 13th IMACS World Congress, Vol.3 (june 1991), Dublin (Ireland), p.1234-1235.
- RADHY N.E., BORNE P. 1992
"Design of Linear Feedback Law for Nonlinear Constrained Systems: Application to induction motors models", Proc. of the 2nd BEIJING International Conference on System Simulation and Scientific Computing, Vol.2 (october 1992), p.769-773.
- REINHARD H. 1982
"Equations Différentielles, Fondements et Applications", Gauthier-Villars, ed. Bordas, Paris, (1982).
- RIBBENS-PAVELLA M., EVANS F.J. 1985
"Direct Method for Studying Dynamics of Large-Scale Electric Power Systems - A Survey", Automatica, Vol. 21 (1985) No. 1, p.1-21.

Bibliographie

RICHARD J.P., BORNE P., GENTINA J.C. 1988

“Estimation of Stability Domains by Use of Vector Norms”, North-Holland, Information and Decision Technologies, Vol. **14** (1988), p.241-255.

ROUCHE N., MAWHIN J. 1973

“Equations Différentielles Ordinaires, Tome 1 : Théorie Générale”, Masson et Cie, Paris, (1973).

ROUCHE N., MAWHIN J. 1973

“Equations Différentielles Ordinaires, Tome 2 : Stabilité et Solutions Périodiques.”, Masson et Cie, Paris, (1973).

ROUTH 1877

“A treatise on Stability of a Given State Motion”, (1877).

STEWART I. 1989

“Dieu joue-t-il aux dés? Les Mathématiques du Chaos”, Nouvelle Bibliothèque Scientifique, Flammarion, (1992).

TARBOURIECH S., BURGAT C. 1993

“(A,B)-Stabilizability Conditions with respect to Certain Lyapunov Functions”, IEEE/SMC'93, IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics, Le Touquet-France, October 17-20, Vol. **1** (1993), p.311-318.

SZEGO G.P. 1963

“On a New Partial Differential Equation for the Stability Analysis of Time Invariant Control Systems”. S.I.A.M J. Control, Vol. **1** (1963), p.63-75.

TEXTER J. 1974

“Numerical Algorithm for Implementing Zubov's Construction in Two-Dimensional Systems”, IEEE Trans. Auto. Control, Vol. **AC-19** (Feb. 1974), p.62-64.

THOMSON, TAIT 1879

“Treatise on Natural Philosophy”, Vol.1, Part I., (1879).

Bibliographie

VANNELLI A., VIDYASAGAR M. 1985

“Maximal Lyapunov Functions and Domains of Attraction for Autonomous Nonlinear Systems”, *Automatica*, Vol. **21** (1985) No. 1, p.69-80.

VASSILAKI M., HENNET J.C., BITSORIS G. 1988

“Feedback Control of Linear Discret-Time Systems under State and Control Constraints”, *Int. J. Control*, Vol.**47** (1988) No.6, p.1727-1735.

VASSILAKI M. 1990

“Application to the Method of Lyapunov Functions to the Design of Constrained Regulator”, *The Lyapunov functions method and applications*, Ed. P. BORNE and V. MATROSOV, J.C. Baltzer AG, Scientific publishing Co. IMACS, (1990), p.97-102

WAZEWSKI T. 1950

“Systèmes des Equations et des Inégalités Différentielles Ordinaires aux Seconds Membres Monotones et leurs Applications”, *Ann. Soc. Polon. Math.*, Vol. **23** (1950), p.112-166.

WEISS L. 1967

“Converse Theorems for Finite Time Stability”, *Proceedings of the First Asilomar Conference on Circuits and Systems*, Asilomar, California, November 1-3, 1005-1014.

WEISS L., INFANTE E.F. 1967

“Finite Time Stability Under Perturbing Forces and on Product Spaces”, *I.E.E.E. Trans. Auto. Control*, Vol. **AC-12** No. 1, 54-59.

WEISSENBERGER S. 1968

“Application of Results From the Absolute Stability Problem to the Computation of Finite Stability Domains”, *IEEE Trans. Auto. Control*, Vol. **AC-13** (Feb. 1968), p.124-125.

WEISSENBERGER S. 1969

“Comments on “Application of Results From the Absolute Stability Problem to the Computation of Finite Stability Domains””, *IEEE Trans. Auto. Control*, Vol. **AC-14** (1969), p.109.

Bibliographie

WILLEMS J.L. 1971

“Direct Methods For Transient Stability Studies in Power System Analysis”, IEEE Trans. Auto. Control, Vol. **AC-16** (Aug. 1971) No. 4, p.332-341.

YEE H. 1975

“Region of Transient Stability Analysis in State Space for Synchronous Generator””, Proc. Inst. Elec. Ing., Vol. **122** (July 1975), p.739-744.

ZUBOV V.I 1957

“Methods of A.M. Lyapunov and their Application”, AEC-Tr-4439, Traduit d’une publication de la maison d’édition de l’université de Leningrad (1957), United States Atomic Energy Commission (1961)

Index

A

Application de Poincaré (ou du premier retour)	90, 91
Attractif (ensemble)	56
Attractif (ensemble globalement/locallement)	57
Attractif (ensemble uniformément)	56
Attractif par rapport \mathcal{T}_i (ensemble)	56
Attractif par rapport \mathcal{T}_i (ensemble uniformément)	56
Attractive (solution)	54
Attractivité	54

B

Bilatéral	29
Bitsoris G.S	125
Borne P.	126
Bout droit	35
Bout gauche	35

C

Champ de vecteur	38
Commande linéaire par retour d'état	221
Commande sous contraintes	209, 221
Comportements asymptotiques	159
(système pratiquement) Contractant avec le temps d'établissement (par rapport à ...)	72
Contraction pratique avec temps d'établissement	71
Correspondance	74
Cycle limite	59
(ω -)Cycle limite	59
Cycle ω -limite	59

D

Dérivées de DINI	118
Distance au sens \mathcal{C}^1	73

Index

Domaine d'attraction	57
Domaine d'attraction d'une solution	56
Domaine d'attraction par rapport à t_0	57
Domaine d'attraction par rapport à \mathcal{T}_i	57
Domaine d'attraction uniforme	57
Domaine d'attraction uniforme par rapport à \mathcal{T}_i	57
Domaine de répulsion par rapport à \mathcal{T}_i	61
Domaine de stabilité asymptotique	67
Domaine de stabilité asymptotique par rapport à \mathcal{T}_i	67
Domaine de stabilité asymptotique uniforme	68
Domaine de stabilité asymptotique uniforme par rapport à \mathcal{T}_i	67
Domaine de stabilité au sens de Liapounov à t_0 d'une solution	62
Domaine de stabilité au sens de Liapounov (d'un ensemble)	66
Domaine de stabilité au sens de Liapounov par rapport à t_0 (d'un ensemble)	65
Domaine de stabilité au sens de Liapounov par rapport à \mathcal{T}_i (d'un ensemble)	65
Domaine de stabilité exponentielle	70
Domaine de stabilité exponentielle par rapport à t_0	69
Domaine de stabilité exponentielle par rapport à \mathcal{T}_i	69
Domaine de stabilité exponentielle uniforme par rapport à \mathcal{T}_i	70
Domaine de stabilité exponentielle uniforme	70
Domaine de stabilité uniforme au sens de Liapounov (d'un ensemble)	66
Domaine de stabilité uniforme au sens de Liapounov par rapport à \mathcal{T}_i (d'un ensemble)	66

E

Élément critique	81
Ensemble des contraintes sur l'état	221
Ensemble des contraintes sur la commande	221
Ensemble α -limite	51
Ensemble limite	45, 51
Ensemble limite positif	52
Ensemble limite négatif	52
Ensemble ω -limite	51
(différentiablement) Équivalent	74
(linéairement) Équivalent	74
(topologiquement) Équivalent	74
Espace d'état	30, 33

Index

Espace de mouvement	33
Espace des perturbations admissibles	30
Estimation	60, 67, 68, 159

F

Floquet (Théorie de Floquet)	42
Flot	32, 36
(Semi-)Flot	36
Flot local	36
Fonction de sortie	30
Fonction d'évolution	30
Fonction Vectorielle de Liapounov	123

G

Gentina J.C.	126
Grujić Lj.T.	45, 95, 97, 98, 105

H

Hyperbolique (matrice)	82
Hyperbolique (point)	46, 84

I

Inégalité différentielle	119
Instable (solution)	62
Instable (ensemble)	64
Instant initial	29
Invariance	45, 48, 50, 209
Invariance sur un intervalle de temps borné	51
(I -)Invariant	48
(\mathcal{T}_e -)Invariant	48
(ω -)Invariant	48
(α -)Invariant	48
Invariant	48

Index

Invariant (positivement)	48
Invariant (négativement)	48

J, K

L

La Salle J.P.	24, 94, 102
Lefshetz S.	24
Lemme de majoration global (Lemme 3.2)	126
Lemme de majoration $(\mathcal{T}, \mathcal{S})$ -local (Lemme 3.3)	127
Lemme de majoration (\mathcal{T}) -local (Lemme 3.4)	132
Lemmes de majoration à validités locales	24
Lemme de majoration autonome	150, 151
Lemme d'invariance (Lemmes 4.1 et 5.2)	162, 226
Liapounov A.M.	22, 24, 32, 62, 79
Liouville J.	21
Lipschitzienne (localement)	34
Lipschitzienne (uniformément localement)	34
(uniformément k-)Lipschitzienne	34

M

Matrice de transition	42
Matrice de monodromie	42
Matrosov V.M.	126
(seconde) Méthode de Liapounov	79
Méthode de reversement des trajectoires	106
Méthode d'étude locales	79
Méthode d'étude globales	79
Mouvement	32, 33
Multiplieurs caractéristiques	42

N

Newton I.	21
Norme vectorielle	24, 123, 210

Index

O

Orbite	32, 33
Orbite fermée	45, 47, 90

P

Période	47
Périodique (Champ de vecteur T-périodique)	44
Périodique (Solution T-périodique)	47
Poincaré H.	22, 24, 32, 79
Point d'équilibre	45, 46
Point hyperbolique (ou non dégénéré)	46, 84
Point non hyperbolique (ou dégénéré)	46, 87
Portrait de phase	33
Processus continu	29
Prolongement	33

Q

Quasi-monotonie (non-décroissante - non-croissante - locale)	119, 120
--	----------

R

Rapidité	68
Répulsif (ensemble - par rapport à \mathcal{T}_i)	61
Répulsivité	61
Répulsivité uniforme	61
Robustesse	73

S

Section de Poincaré	90
Section locale de Poincaré	90
Solution (continue)	33
Solution maximale	33

Index

Stabilisation pratique	223
Stabilisation sous contraintes	235
Stabilité	22, 53
Stabilité asymptotique (par rapport à \mathcal{T}_i)	54, 67, 68
Stabilité asymptotique de solution	22
Stabilité asymptotique d'ensemble	24
Stabilité au sens de Liapounov (par rapport à \mathcal{T}_i)	53, 62, 64, 66
Stabilité exponentielle (par rapport à \mathcal{T}_i)	68, 69
Stabilité pratique	24, 70, 71, 209, 210
Stabilité pratique avec temps d'établissement	71, 72
Stabilité structurelle	53, 73, 74
(matrice asymptotiquement) Stable	81
(matrice structurellement) Stable	82
Système de comparaison	118, 122
Système dynamique	21, 23, 32, 39
Système dynamique local	39, 40
Système dynamique non linéaire autonome	79
Système majorant (direct/rétrograde - $(\mathcal{T}, \mathcal{S})$ -local)	24, 121, 122, 125, 126, 127, 128, 132, 209, 210
Système majorant linéaire autonome	24, 159
Système majorant non linéaire autonome	24, 147, 150, 151, 159
Système majorant linéaire à validité locale temporelle	24
Système semi-dynamique	39

T

Taux de décroissance exponentielle	69
Théorème de Bhatia (ou Principe d'invariance de La Salle: Théorème 2.10)	102
Théorème de Bitsoris (Système majorant global: Théorème 3.1 et 3.2)	125
Théorème de Borne (Système majorant linéaire global: Théorème 4.1)	164
Théorème de Chiang I (Théorème 2.11)	104
Théorème de Chiang II (Théorème 2.15)	107
Théorème de Grujić (Théorèmes 1.3 et 2.9)	46, 98
Théorème de Hartman et Grobman (Théorème 2.3)	84
Théorème de Henry et Carr (Théorème 2.6 et 2.7)	88, 89
Théorème (Système majorant linéaire local: Théorème 4.2)	166
Théorème (Stabilisation pratique: Théorèmes 5.3 et Corollaire 5.1)	227, 228

Index

Théorème (Stabilité asymptotique: Théorèmes 4.6 et 4.8)	190, 193
Théorème (Stabilité: Théorème 4.7)	191
Théorème (Stabilité Pratique: Théorèmes 5.1 et 5.2)	212, 213
Théorème (Répulsivité: Théorèmes 4.9 et 4.10)	194, 195
Théorème de la variété centre ou de Kalley (Théorème 2.5)	87
Théorème de la variété stable (Théorème 2.4)	85
Théorème de Zubov (Théorème 2.8)	96
Théorème sur la Détermination Pratique de Système Majorant (Théorème 3.3)	135
Théorèmes sur les ensembles répulsifs (Théorèmes 4.4, 4.5)	135

U

V

Variable temporelle	29
Variété	38
Variété locale stable	84
Variété locale instable	84
Variété stable	85
Variété instable	85
Variété centre	87
Vecteur de commande	30
Vecteur de sortie	30
Vecteur d'état	30
Vecteur des perturbations	30
(ϵ -)Voisinage au sens C^1	73

W

Wazewski T.	118
-------------	-----

X, Y

Z

Zubov V.I.	94, 95, 96, 99
------------	----------------