

50376
1994
141

N° d'ordre: 1314

50376
1994
141



THÈSE

présentée à

l'Université des Sciences et Technologies de Lille

par

Mohammed SRITI

pour obtenir le grade de

Docteur en MÉCANIQUE

Comportement statique et dynamique des Joints Labyrinthe

soutenue le 25 Mai 1994

Membres de Jury :

Président : M. Caignaert, Professeur, E.N.S.A.M, Lille

Rapporteurs : M. Chauvin, Professeur, Université de Paris VI

: M. Bonis, Professeur, Université de Compiègne

Membres : M. Micheau, Professeur, Université de Lille I

: M. Pugno, Ingénieur, Thermodyn, Creusot

Laboratoire de Mécanique de Lille

Avant-propos

Ce travail a été réalisé au Laboratoire de Mécanique de Lille (L.M.L) en collaboration avec les industriels du pôle FIRTECH "MEMTA" (Mécanique et Energétique des Machines Tournantes et Alternatives).

En premier lieu, je tiens à adresser mes plus sincères remerciements à Monsieur le Professeur Micheau pour ses aides constants qui m'a apporté le long de cette étude ainsi les conseils éclairants qu'il m'a prodigués ont été pour moi une source permanente d'encouragement, m'ont permis de mener à bien la tâche qui m'était confiée.

Je sais gré à Monsieur Caignaert, Professeur à l'E.N.S.A.M (Lille), d'avoir accepté d'examiner cette thèse et de présider le jury.

Je tiens à remercier également Monsieur Chauvin, Professeur à l'Université de Paris VI, ainsi Monsieur Bonis, Professeur à l'Université de Compiègne.

Je voudrais aussi exprimer mes profondes remerciements à monsieur Pignet, Chef du département Recherches et Développement à TERMODYN (FRAMATOME, Creusot), pour sa participation au jury qui m'a beaucoup touché.

Enfin, je ne saurais oublier mes parents, ma femme, mes frères et soeurs et tous ceux qui me sont chers, qui ont porté beaucoup d'espoir et grande patience et pour m'avoir aidé et encouragé. c'est à eux que je dédie cet ouvrage.

RESUME

Les joints labyrinthe sont des dispositifs utilisés dans les machines tournantes (turbines, pompes, compresseurs, ...), pour assurer l'étanchéité à la traversée de carters par des arbres tournants. Ils ont un comportement semblable à celui de paliers hydrodynamiques et leur présence peut modifier de façon sensible les caractéristiques dynamiques des lignes d'arbre. L'objet primordial de ce travail était de développer une méthode permettant de déterminer les comportements statiques et dynamiques de ces joints. Pour cela, on a réalisé:

1- Deux modèles de calcul global à partir du modèle de Childs et Scharrer, l'un valable dans le cas compressible l'autre dans le cas incompressible. Le comportement statique est obtenu en résolvant les équations de bilan de masse et de quantité de mouvement à l'échelle du joint, les informations à l'échelle plus fine étant fournies par des corrélations et l'excentricité étant supposée nulle. Le comportement dynamique est obtenu par résolution de ces équations linéarisées, l'excentricité, supposée petite, variant sinusoïdalement.

2- Des calculs locaux à l'aide d'un code de calcul résolvant les équations de N-S en 3-D axisymétrique pour obtenir les corrélations locales nécessaires pour alimenter les modèles globaux.

3- Des essais expérimentaux en incompressible permettant de valider la méthodologie retenue.

La comparaison entre les résultats expérimentaux et les résultats de modélisation permettent d'affirmer la validité de cette méthodologie.

MOTS-CLETS

Ecoulement en rotation, Fluide compressible ou incompressible, Joint labyrinthe, Système rotor-stator, Raideur-amortissement, Méthode numérique de type Euler-Lagrange, Eléments finis, Mesures expérimentales.

ABSTRACT

Labyrinth Seals are mechanisms which are used in rotating machinery (turbines, pumps, compressors, ...) to secure the water proofness between housing and rotating shafts. They have close behaviour to that of hydrodynamical bearing and their presence can improve sensibly the dynamical characteristics of shafts.

The essential aim of this work was to develop a method permeting to determine the statical and dynamical behaviour of labyrinth seals. For that, we realised:

- 1- Two global computational models using Childs and Scharrer model, first one being useful for compressible studies and the second one for incompressible cases. The statical behaviour is obtained solving continuity an momentum equations in global scale. Informations concerning finest scales are obtained by empirical correlations, considering zero value for excentricity. The dynamical behaviour is obtained solving these linearised equations, supposing small excentricity, with a sinusoidal variation.
- 2- Local computations by a a computer code that solves tridimensional axisymmetric N-S equations to obtain local correlations which are necessary to modify our global models
- 3- Experimental studies in incompressible flow which permitted us to validatethis method.

The comparison between experimental and numerical results comfirmed the validation of methodology.

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE 0: INTRODUCTION	6
1. DBJECTIFS DU TRAVAIL.....	6
2. ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE.....	7
3. PLAN DU MEMOIRE.....	9
CHAPITRE I: MODELES GLOBAUX	11
1. INTRODUCTION.....	11
2. METHODE DE RESOLUTION.....	12
2.1 HYPOTHESES.....	12
2.2 EQUATIONS DE BASE.....	14
2.2.1 EQUATION DE CONTINUITE.....	14
2.2.2 EQUATION DE QUANTITE DE MOUVEMENT.....	14
2.2.3 EQUATION D'ETAT.....	19
2.2.4 EQUATION DU DEBIT DE FUITE.....	20
2.3 LINEARISATION.....	24
2.3.1 SOLUTION D'ORDRE ZERO.....	24
2.3.2 SOLUTION DU PREMIER ORDRE.....	25
2.3.3 CALCUL DES FORCES DE PRESSION.....	28
2.4 CALCUL DES COEFFICIENTS DYNAMIQUES.....	28
2.5. CONDITIONS AUX LIMITES.....	33
3. CAS INCOMPRESSIBLE.....	33
3.1 EQUATIONS DE CONSERVATION.....	34
3.2 LINEARISATION.....	35
4. ORGANIGRAMME.....	36
5. APPLICATIONS.....	38
5.1 TYPES DE JOINTS LABYRINTHE PRIS EN CONSIDERATION.....	40
5.2 VALIDATION DES PROGRAMMES.....	42
5.2.1 MODELE COMPRESSIBLE.....	42
5.2.2 MODELE INCOMPRESSIBLE.....	43
6. CONCLUSION.....	46

1. INTRODUCTION.....	94
2. ETUDE PARAMETRIQUE.....	95
3 COMPARAISON ENTRE ANCIENS ET NOUVEAUX RESULTATS: CONCLUSION.....	99

CHAPITRE V: ETUDE EXPERIMENTALE..... 101

1. INTRODUCTION.....	101
2. DESCRIPTION DE LA MACHINE D'ESSAIS.....	101
2.1 BROCHE TOURNANTE ET JOINT LABYRINTHE: PRINCIPE DE BASE.....	102
2.2 PORTE-STATOR ET DISPOSITIF DE MISE EN CHARGE.....	105
2.3 DISPOSITIF HYDRAULIQUE.....	106
2.4 DISPOSITIF DE MESURE.....	107
3. MODELE DE JOINT LABYRINTHE.....	111
4. CHOIX DU LUBRIFIANT.....	113
5. CALCUL LOCAL.....	115
6. MESURES ET COMPARAISON AVEC RESULTATS DU CALCUL GLOBAL.....	119
6.1 ASPECT STATIQUE.....	119
6.2 ASPECT DYNAMIQUE.....	120
7. CONCLUSION.....	130

CHAPITRE VI: CONCLUSION GENERALE..... 131

ANNEXES..... 134

ANNEXE 1.....	134
ANNEXE 2.....	141
ANNEXE 3.....	146
ANNEXE 4.....	148
ANNEXE 5 : APPLICATIONS INDUSTRIELLES.....	149
5.1 GECALSTHOM.....	149
5.2 TURBOMECA.....	152
5.3 THERMODYN.....	155

REFERENCES..... 156

PRINCIPALES NOTATIONS

- A : Surface de la chambre
 C_r : jeu radial
 C_f : coefficient de perte de charge
 C_{xx} : coefficient d'amortissement direct
 C_{xy} : coefficient d'amortissement croisé
 D : distance équivalente entre deux dents
 D_h : diamètre hydraulique
 E_e : énergie d'admission
 F_x, F_y : composantes de la force de pression
 F_r, F_t : forces radiale et tangentielle
 H : épaisseur du film
 H_d : hauteur des dents
 K_{xx} : coefficient de raideur direct
 K_{xy} : coefficient de raideur croisé
 N_d : nombre de dents
 $N_c = N_d - 1$: nombre de chambres dans le joint
 \dot{m} : débit masse par unité de longueur
 P : pression
 q : débit masse
 R : rayon d'arbre (rotor)
 R_c : constante des gaz parfaits
 Re : nombre de Reynolds
 S : épaisseur des dents
 T_a : nombre de Taylor
 T : température
 W_m : vitesse moyenne tangentielle
 W_a : vitesse de rotation d'arbre ($W_a = \omega R$)
 e : excentricité
 $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$: vecteurs unitaires en coordonnées cylindriques
 x, y, z : coordonnées cartésiennes
 r, θ, z : coordonnées cylindriques
 u, v, w : composantes de la vitesse axiale, radiale et tangentielle

t : temps
 Δt : pas de temps
 ω : vitesse angulaire
 Ω : fréquence de rotation
 ρ : masse volumique
 ε : excentricité relative ($=e/cr$)
 $\pi = 3.14159$
 γ : coefficient spécifique d'un gaz
 μ : viscosité dynamique
 ν : viscosité cinématique
 μ_t, ν_t : viscosité turbulente
 $\vec{\sigma}, \sigma_{ij}$: tenseur des contraintes
 $\vec{\tau}, \tau_{ij}$: tenseur des contraintes visqueuses
 $\vec{\varepsilon}, \varepsilon_{ij}$: tenseur de déformation
 $\frac{\delta}{\delta t}$: dérivée temporelle
 $\frac{\delta}{\delta x_i}$: dérivées spatiales
 $\left(\frac{D}{Dt}\right)_U \rightarrow$: dérivée en suivant l'élément de volume (formalisme A.L.E)
 (*) : forme adimensionnelle

Indices:

o : grandeurs à l'état concentrique
 l : grandeurs du premier ordre
 r : relatif au rotor
 s : relatif au stator
 e : entrée
 i, j : pointeurs de repérage

CHAPITRE.0
INTRODUCTION

1. Objectifs du travail:

Les joints labyrinthe sont des dispositifs utilisés dans les machines qui servent à limiter les fuites à la traversée d'un carter par un arbre tournant tout en évitant un frottement important aux vitesses de rotation élevées. Un joint labyrinthe est constitué de léchettes (ou dents), formant une succession de chambres (ou cavités), soit sur le carter soit sur l'arbre.

En général, les joints labyrinthe sont utilisés dans les turbines, les pompes et les compresseurs. Il existe plusieurs types de joints labyrinthe correspondant à des conditions de fonctionnement spécifiques (par exemple fig.I.11 p.41).

Ces dispositifs, qui, de plus, se comportent comme des paliers, peuvent modifier les caractéristiques dynamiques de la ligne d'arbre dans laquelle ils sont intégrés. Il apparaît ainsi important d'un point de vue industriel de déterminer leur comportement statique (débit-différence de pression) et dynamique (coefficients de raideur et d'amortissement).

En général, les joints labyrinthe sont utilisés dans les turbines, les pompes et les compresseurs. Il existe plusieurs types de joints labyrinthe correspondant à des conditions de fonctionnement spécifiques.

Depuis les années soixante-dix, plusieurs auteurs ont mené des recherches théoriques et expérimentales pour tenter de donner des prédictions sur le comportement dynamique des joints labyrinthe. Deux types d'études théoriques ont été effectués, des études globales et des études locales:

- Les études théoriques globales reposent d'une façon simplifiée sur la prise en compte de la conservation du débit, de la conservation de la quantité de mouvement axiale tout à travers le joint labyrinthe d'une part et de la conservation de la quantité de mouvement circonférentielle par chambre d'autre part.
- Les études théoriques locales qui sont basées sur des calculs 3-D axisymétriques, la résolution des équations de Navier-Stokes permettant de déterminer la structure fine

de l'écoulement dans les joints labyrinthe. Actuellement, le calcul 3-D sur l'ensemble d'un joint labyrinthe n'est pas encore à la portée des ordinateurs, par conséquent, on se limite à un calcul dans une ou deux chambres.

La liaison études locales-études globales reste en général à faire. Aussi le travail présenté a été effectué dans le but de mieux maîtriser les écoulements dans les joints labyrinthe et de déterminer leurs caractéristiques statiques et dynamiques. Il s'appuie d'une part sur le développement d'outils numériques intégrant dans les calculs globaux des résultats de calculs locaux et d'autre part sur le développement d'un banc d'essais de joints labyrinthe (fluide incompressible) permettant de valider la méthodologie proposée.

Cette étude a été réalisée dans le cadre du pôle Firtech M.E.M.T.A (Mécanique et Energétique des Machines Tournantes et Alternatives).

2. Etude bibliographique:

Dans l'étude bibliographique qui suit, nous faisons une synthèse des travaux effectués sur le problème considéré.

Alfred (1965) [1] fut un des premiers à s'intéresser à la dynamique de lignes d'arbres équipés de joints labyrinthe et en particulier dans le cas d'un compresseur axial. Il a réalisé un modèle de joint labyrinthe constitué d'une chambre unique, donnant la force d'excitation s'exerçant sur le rotor. Il a montré que cette excitation est due à la variation de la pression statique le long de la circonférence liée entre autres à l'excentricité du rotor par rapport au stator. Puis, ce problème a fait l'objet de plusieurs investigations en prenant une dimension globale. C'est en 1972 que Kostyuk [2] a formulé un modèle théorique négligeant la variation en temps de la surface de la chambre dans la direction circonférentielle, les résultats obtenus sont parfaitement contradictoires avec les mesures. En 1980, Vance et Murphy [3] ont essayé d'améliorer les travaux d'Alfred, en introduisant un modèle donnant l'expression du débit de fuite au niveau de la zone de rétrécissement (au droit des

dents). Par la suite et dans la même année, Iwatsubo [4,5] a repris le modèle de Kostyuk en tenant compte de la dépendance de la surface de la chambre avec le temps.

Cependant la mauvaise concordance entre mesures et calculs a conduit rapidement à développer des recherches expérimentales pour faire évoluer les approches théoriques. De 1978 à 1980, Benkert et Wachter [6,7,8,9] se sont investis dans cette voie, en fournissant des résultats très concrets concernant les coefficients directs et croisés de raideur sur différents types de joints labyrinthe. En plus, ils ont mis en évidence l'importance de la vitesse tangentielle initiale à l'entrée du joint, sur les efforts exercés sur le rotor. Dans la même période, Boyman (1979) [10] a mis en oeuvre un modèle de joint labyrinthe agrandi en similitude de Reynolds [11] et de Taylor [12], comportant 4 chambres identiques. La technique d'anémométrie à film chaud a été utilisée pour mesurer les composantes axiale et tangentielle de la vitesse à l'intérieur d'une chambre. Un an plus tard, Stoff [13,14] a travaillé sur le même modèle à l'aide d'un anémomètre laser. Les résultats obtenus sont parfaitement identiques à ceux obtenus par Boyman. En parallèle et pour la première fois, Stoff a effectué un calcul local sur une chambre unique en utilisant un programme de calcul par différences finies pour des écoulements incompressibles et axisymétriques avec un modèle de turbulence $k-\epsilon$. Les confrontations entre résultats numériques et expérimentaux sont satisfaisantes.

Dès 1980, Wyssmann et Jenny [15,16,17,18] ont essayé de développer un modèle global en se basant sur un calcul local. Tout d'abord, ils ont effectué une série de calculs axisymétriques sur un motif (une ou deux chambres) de certains types de joints labyrinthe, pour déterminer une structure générale de l'écoulement et en tirer des corrélations qui puissent être intégrées dans le modèle global. Cette démarche leur a permis de distinguer deux zones d'écoulement dans une chambre. Ce phénomène a incité Wyssmann et Jenny à prendre deux volumes de contrôle par chambre. L'analyse du problème consiste à écrire les équations de conservation pour chaque volume de contrôle et de faire un couplage entre les deux.

En 1983, Childs et Sharrer [19] ont mené une étude portant sur un joint lisse. A partir de 1986, ils se sont intéressés au problème de l'amélioration du modèle d'Iwatsubo en introduisant de plus la variation de la surface dans la direction circonférentielle [20]. En même temps, ils ont validé expérimentalement ce modèle théorique dans le cas de joints labyrinthe à dents triangulaires portées par le rotor

ou par le stator [21,22,23]. Le même modèle théorique a été utilisé par Kirk [24,25] pour donner des prédictions sur le mécanisme d'instabilité dans des compresseurs centrifuges. D'autres auteurs se sont investis dans le calcul local pour des écoulements compressibles: nous citons les travaux de Rhode [26,27] sur un joint labyrinthe à dents rectangulaires et ceux de Wittig [28] sur un joint labyrinthe étagé.

Néanmoins, les résultats théoriques fournis par les modèles globaux avec leurs hypothèses et les mesures expérimentales sur les coefficients dynamiques de raideur et d'amortissement restent relativement en désaccord.

Dans la présente étude, nous avons choisi dans une première étape:

- d'adopter comme modèle global, le modèle de Childs et Scharrer. Deux programmes de calcul l'un valable en compressible l'autre en incompressible ont été réalisés.
- d'étudier les hypothèses faites en faisant des calculs locaux en stationnaire pour certains types de joints labyrinthe à l'aide d'un programme de résolution des équations de Navier-Stokes en 3-D axisymétrique, d'abord en incompressible puis, après modifications du programme, en compressible.

Très rapidement, on en est arrivé à la conclusion suivante: le modèle de Childs doit donner des résultats satisfaisants à condition que la corrélation donnant le débit au droit des dents en fonction de la pression des chambres soit "exacte". A partir de là, nous avons défini un programme de travail. Pour un joint donné:

- 1- détermination pour la forme géométrique des dents choisies de corrélations valables fournissant le débit au droit d'une dent dans la plage d'utilisation du joint considéré.
- 2- détermination des performances d'un joint labyrinthe étudié en utilisant cette corrélation pour le calcul global.
- 3- vérification des résultats théoriques obtenus sur une maquette d'essais.

3. Plan du mémoire:

Il découle directement de la synthèse de ce qui précède:

Le chapitre (I) est consacré à deux modèles de calcul global dans les joints labyrinthe, réalisés en se basant sur le modèle de Childs et Sharrer: l'un valable dans le cas compressible, l'autre valable dans le cas incompressible. Ces modèles permettent de décrire le comportement de l'écoulement dans un joint labyrinthe à excentricité nulle, puis de déterminer les coefficients de raideur et d'amortissement.

Dans le chapitre (II) nous faisons une présentation générale du code 3-D axisymétrique pour des écoulements compressibles sans transfert de chaleur, réalisé par extrapolation du code incompressible existant. Cette présentation est suivie par des tests de validation.

Le chapitre (III) est consacré à la détermination de la structure des écoulements compressible et incompressible dans divers types de joints labyrinthe et à l'étude de la validité des hypothèses mises en oeuvre dans les modèles globaux.

Dans le chapitre (IV), on étudie plus particulièrement la dépendance du débit au droit des dents en fonction du nombre de Reynolds ainsi que des paramètres géométriques du labyrinthe. Les résultats obtenus fournissent des corrélations qui peuvent être intégrées dans les modèles globaux.

Le chapitre (V) est consacré à la description de la machine d'essais et la comparaison des résultats entre mesure et calcul dans le cas incompressible.

Ce mémoire s'achève par une conclusion générale soulignant les principaux enseignements retenus, ainsi que les difficultés de mise en oeuvre de l'installation expérimentale.

CHAPITRE.I
MODELES GLOBAUX

1. Introduction:

Il s'agit d'étudier des écoulements instationnaires de fluides compressibles ou incompressibles dans les joints labyrinthe, en tenant compte de la variation de la surface suivant la direction circonférentielle due à l'excentricité du rotor par rapport au stator. L'écoulement dans la direction circonférentielle est supposé pleinement turbulent, les contraintes turbulentes de frottement sont déterminées par un modèle de Blasius [30], pour un tuyau lisse et annulaire. L'écriture des équations de conservation telles que, l'équation de la continuité, l'équation de la quantité de mouvement dans la direction circonférentielle et l'équation du débit de fuite axiale, liée à la conservation de la quantité de mouvement axiale, permet moyennant certaines hypothèses de donner une solution approchée du problème posé. Ces équations sont linéarisées en fonction de l'excentricité relative ($\varepsilon=e/Cr$) qui résulte de l'écartement du rotor par rapport à sa position initiale. On note que les axes du rotor et du stator sont supposés parallèles et que le centre du rotor décrit une trajectoire elliptique d'amplitudes a et b . Le problème comprend alors deux parties: une solution d'ordre zéro et une solution du premier ordre.

- La solution d'ordre zéro permet de déterminer les distributions de pressions moyennes et de vitesses circonférentielles moyennes, dans les chambres du joint labyrinthe ainsi que le débit masse, correspondant à l'état concentrique du rotor.

- La solution du premier ordre fournit les valeurs des grandeurs fluctuantes de pressions moyennes et de vitesses circonférentielles moyennes. La résolution nécessite de chercher des solutions du type $f(\vec{x})e^{i(\omega t + \varphi)}$ [20], ce qui permet d'aboutir à un système linéaire. Ensuite, les efforts agissant sur le rotor sont déterminés par intégration du champ de pression le long de la circonférence et le long de la longueur du joint labyrinthe. Finalement, nous en déduisons les coefficients dynamiques de raideur et d'amortissement.

Deux programmes de calculs ont été réalisés, l'un dans le cas compressible l'autre dans le cas incompressible. Ils diffèrent essentiellement quant aux expressions donnant le débit axial en fonction de la différence de pression de part et d'autre des lèchettes (ou dents).

2. Méthode de résolution:

2.1 Hypothèses:

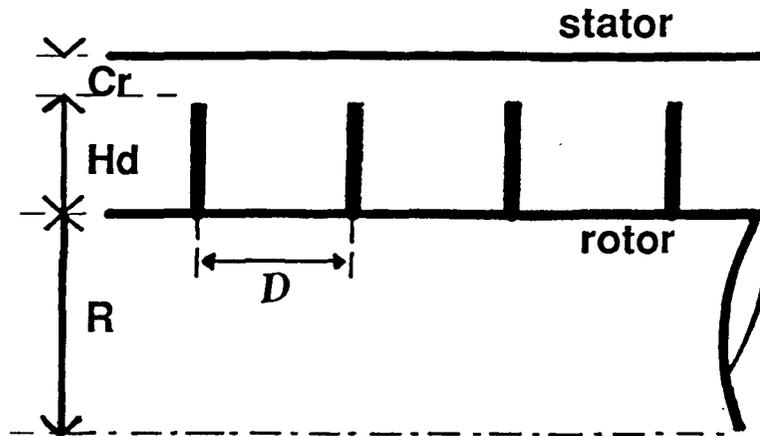


Fig.I.1: Modèle de joint labyrinthe

Comme on l'a déjà dit, les joints labyrinthe sont des dispositifs ayant des formes diverses plus ou moins compliquées. Dans l'optique de mener une étude globale sur ces dispositifs, Iwatsubo [4,5] a proposé un modèle défini par des grandeurs géométriques présentées sur la figure I.1. Pour résoudre le problème posé, on fait les hypothèses suivantes:

- Le gaz est supposé idéal.
- La variation de pression axiale dans les chambres est négligeable devant la variation de pression au droit des dents.
- La fréquence de résonance acoustique dans une cavité est plus élevée que celle due à la vitesse de rotation.
- Les forces de pesanteur sont négligeables.
- L'excentricité du rotor par rapport au stator est faible devant le jeu radial ($e < Cr$).
- L'écoulement dans les chambres est essentiellement circonférentiel.
- Au droit des dents l'écoulement est essentiellement axial.
- Dans le calcul des contraintes de frottement, seule la vitesse tangentielle est prise en compte.
- Les pertes de pression se font uniquement au droit des dents.
- La température est supposée constante.

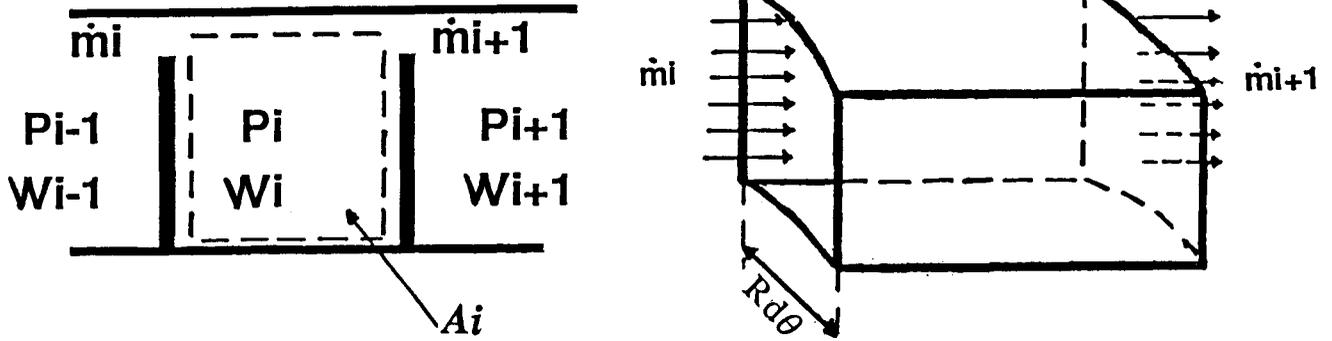


Fig.I.2: Volume de contrôle

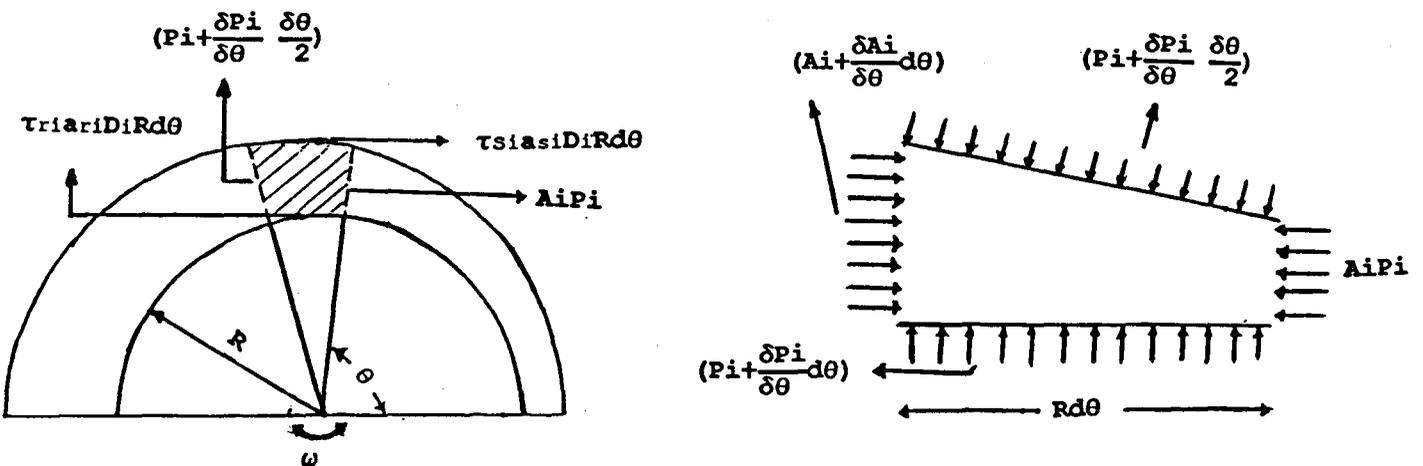


Fig.I.3: Efforts sur le volume de contrôle

2.2 Equations de base:

Les figures I.2 et I.3 montrent les volumes de contrôles dans le plan et dans l'espace.

Les équations fondamentales sont écrites en coordonnées cylindriques en négligeant dans les chambres les variations de la vitesse et de la pression et de dans les directions axiale et radiale devant celles dans la direction circonférentielle. Dans ce modèle, la section de la cavité de contrôle est variable en temps et en espace, ce qui n'était pas le cas dans la théorie d'Iwatsubo [4,5].

2.1.1 Equation de continuité:

En se basant sur le volume de contrôle montré dans la figure I.2, l'équation de la conservation de la masse pour chaque volume "i" s'écrit:

$$\frac{\delta(\rho_i A_i)}{\delta t} + \frac{1}{R} \frac{\delta(\rho_i A_i W_i)}{\delta \theta} + \dot{m}_{i+1} - \dot{m}_i = 0 \quad (\text{I.1})$$

où A_i , est la surface de la cavité de contrôle définie par:

$$A_i = (H_{d_i} + H_i + H_{d_{i+1}} + H_{i+1}) D_i / 2$$

avec H_i , le jeu radial local.

2.2.2 Equation de la quantité de mouvement:

Cette équation est obtenue en utilisant le schéma proposé dans la figure I.3, qui

montre les efforts de pression et les contraintes de cisaillement agissant sur la cavité de contrôle.

$$\begin{aligned} \frac{\delta(\rho_i A_i W_i)}{\delta t} + \frac{2}{R} \rho_i A_i W_i \frac{\delta W_i}{\delta \theta} + \rho_i W_i \frac{\delta A_i}{R \delta \theta} + W_i^2 A_i \frac{\delta \rho_i}{R \delta \theta} + m_{i+1} W_i - m_i W_i \\ = \frac{A_i}{R} \frac{\delta P_i}{\delta \theta} + \tau_{r i} a_{r i} D_i - \tau_{s i} a_{s i} D_i \end{aligned} \quad (I.2)$$

a_r et a_s sont des grandeurs adimensionnelles qui représentent le rapport du contour mouillé sur la longueur équivalente de la cavité, respectivement pour le rotor et le stator.

- Si les dents sont portées par le rotor, on a:

$$a_r = (2.Hd_i + D_i)/D_i \quad ; \quad a_s = 1$$

- Si les dents sont portées par le stator, on a:

$$a_r = 1 \quad ; \quad a_s = (2.Hd_i + D_i)/D_i$$

*** Contraintes de frottement:**

Pour un conduit de diamètre hydraulique D_h , la contrainte de frottement à la paroi est déterminée par Blasius [30] et s'écrit de la manière suivante:

$$\tau = \frac{1}{2} \rho W_m^2 C_f = \frac{1}{2} \rho W_m^2 \nu_0 \left(\frac{W_m D_h}{\nu} \right)^{m_0} \quad (I.3)$$

W_m est la vitesse moyenne sur une section droite du conduit, C_f est le coefficient de frottement appelé aussi coefficient de perte de charge. Il dépend du

nombre de Reynolds ($Re = W_m D_h / \nu$) et de la rugosité de la paroi. Dans ce travail, on s'intéresse essentiellement aux écoulements dans des conduits lisses. Les constantes empiriques m_0 et n_0 sont déterminées par Yamada [31] pour un écoulement turbulent à travers un conduit lisse de surface annulaire: $m_0 = -0.25$, $n_0 = 0.079$.

Pour donner une signification plus précise aux constantes m_0 et n_0 , considérons un conduit de longueur l et de diamètre D_h . Si nous connaissons la différence de pression ΔP entre deux points distincts du conduit, le coefficient de frottement unitaire f_u est obtenu de la façon suivante:

$$f_u = \Delta P / \left(\frac{1}{D_h} \frac{1}{2} \rho W_m^2 \right) \quad (\text{I.4})$$

L'application du principe fondamental de la dynamique, permet d'écrire l'égalité entre la différence des efforts de pression et la résultante des forces de frottement à la paroi. On a alors:

$$\Delta P \pi D_h^2 / 4 = \tau \pi l D_h \quad (\text{I.5})$$

En exprimant ΔP en fonction du coefficient de perte de charge unitaire f_u et la contrainte de frottement τ en fonction du coefficient de perte de charge C_f , on obtient:

$$f_u = 4C_f \quad (\text{I.6})$$

Pour tenter de déterminer le coefficient de frottement unitaire, Darcy et Nikuradse [32] ont représenté sur une échelle logarithmique le diagramme donnant f_u en fonction de Re (fig.I.4).

a- Pour un nombre de Reynolds $Re < 2000$, le régime est purement laminaire et le coefficient de frottement unitaire est donné par la droite de Poiseuille.

$$f_u = 64/Re \quad (I.7)$$

b- Pour des conduits lisses et un nombre de Reynolds $2000 < Re < 10^5$, on utilise la droite de Blasius:

$$f_u = 0.316 Re^{-0.25} \quad (I.8)$$

c- Pour des conduits lisses et des nombres de Reynolds $Re > 10^5$, le coefficient de frottement unitaire est donné à l'aide d'une formule due à Von Karman et Nikuradse [33].

$$\frac{1}{\sqrt{f_u}} = 2 \log(\sqrt{f_u} Re) - 0.8 \quad (I.9)$$

Dans la suite de ce travail, on se limite aux deux premiers cas d'écoulement, c'est-à-dire pour des nombres de Reynolds $Re < 10^5$. Le coefficient de frottement C_f peut s'écrire de la façon suivante:

$$C_f = n_0 Re^{m_0} \quad (I.10)$$

Le nombre de Reynolds utilisé, diffère selon la vitesse moyenne associée aux contraintes de frottement relatives au rotor et au stator:

$$\text{- pour le rotor: } Re = \frac{(R \cdot \omega - W) Dh}{\nu} \quad (I.11)$$

$$\text{- pour le stator: } Re = \frac{W \cdot Dh}{\nu} \quad (I.12)$$

Les paramètres m_0 et n_0 dépendent de la nature de l'écoulement:

$$\text{- régime laminaire: } Re < 2000 \quad ; \quad n_0 = 0.004 \quad , \quad m_0 = -1$$

$$\text{- régime turbulent lisse: } Re \geq 2000 \quad ; \quad n_0 = 0.079 \quad , \quad m_0 = -0.25$$

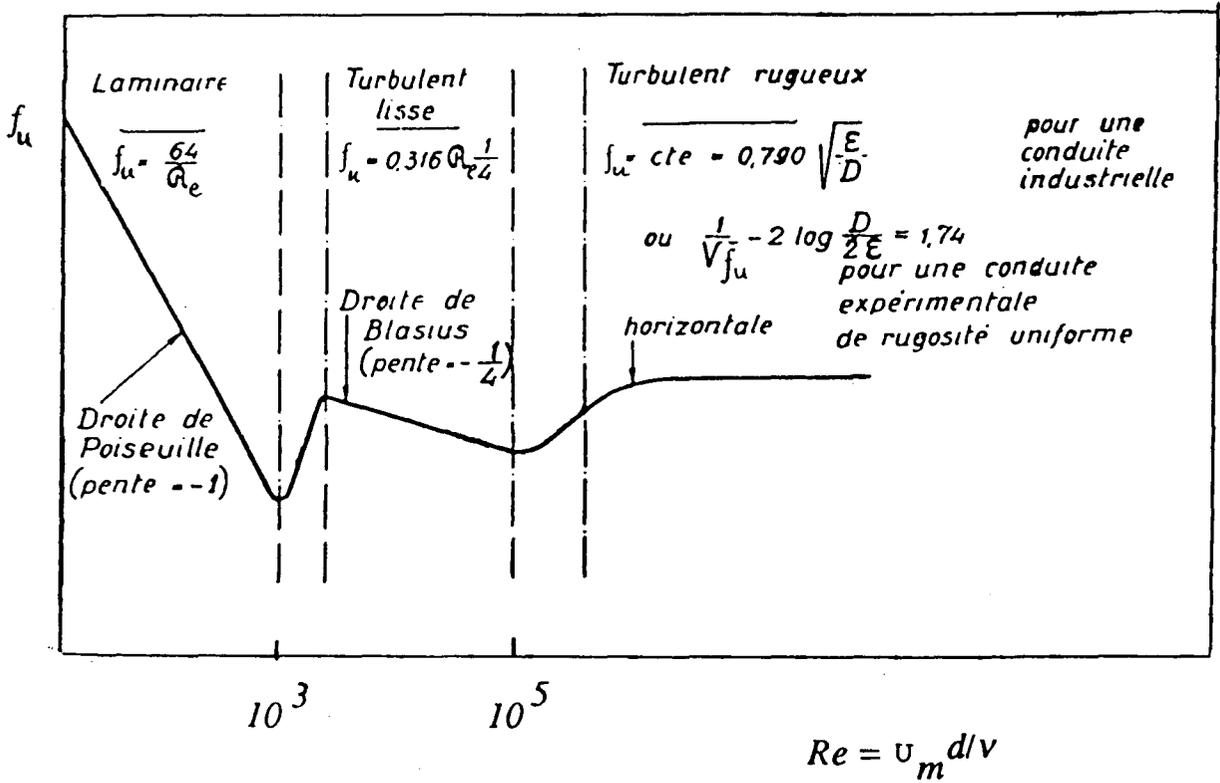


Fig.1.4: Diagramme de Nikuradse

L'application du modèle de Blasius dans notre cas de joint labyrinthe pour une cavité donnée, permet d'établir les expressions des contraintes de frottement respectivement pour le rotor et pour le stator de la façon suivante:

$$\tau_{ri} = \frac{\rho_i}{2} (R.\omega - W_i) n_o \left[|R.\omega - W_i| \cdot \frac{D_{hi}}{\nu_i} \right]^{m_o} \cdot \text{sgn}(R.\omega - W_i) \quad (\text{I.13})$$

$$\tau_{si} = \frac{\rho_i}{2} W_i^2 n_o \left[|W_i| \cdot \frac{D_{hi}}{\nu_i} \right]^{m_o} \cdot \text{sgn}(W_i) \quad (\text{I.14})$$

où D_{hi} , est le diamètre hydraulique défini par:

$$D_{hi} = \frac{2(H_i + H_{d_i})D_i}{(H_i + H_{d_i} + D_i)} \quad (\text{I.15})$$

* Remarque:

En multipliant l'équation de continuité (I.1) par la vitesse tangentielle W_i , puis, si on retranche l'équation résultante de l'équation de quantité de mouvement (I.2), on obtient:

$$\rho_i A_i \frac{\delta W_i}{\delta t} + \rho_i A_i W_i \frac{1}{R} \frac{\delta W_i}{\delta \theta} + m_i (W_i - W_{i-1}) = - \frac{A_i}{R} \frac{\delta P_i}{\delta \theta} \quad (\text{I.16})$$

$$- \tau_{si} a_{si} D_i + \tau_{ri} a_{ri} D_i$$

2.2.3 Equation d'état:

L'équation d'état utilisée est celle d'un gaz idéal, elle s'écrit pour la ième chambre:

$$P_i = \rho_i R_c T \quad (\text{I.17})$$

2.2.4 Equation du débit de fuite au droit des dents:

Dans le cas général, un joint labyrinthe est utilisé pour limiter une fuite entre des enceintes dont les pressions sont différentes. Dans la perspective de l'évaluation du débit de fuite dans les joints labyrinthe, de nombreux travaux théoriques et expérimentaux ont été effectués [34,35,36,37]. Cependant, il existe plusieurs joints labyrinthe de formes différentes, d'où la difficulté du problème. Si nous supposons que dans un joint labyrinthe (fig.I.5), il se produit une série de laminages adiabatiques successifs, que la vitesse axiale est presque négligeable dans les chambres annulaires 0, 1, 2, ..., 5, les différents points représentatifs de l'état du fluide au niveau des chambres se trouvent sur une isenthalpe H_i (fig.I.5). Suivant l'approximation de Barré-Saint-Venant, on peut admettre qu'il se produit une détente isentropique locale au droit des dents. Les points 1', 2', ..., 5', représentant l'état du fluide à la sortie des jeux, sont donc sur une même courbe de Fanno. L'évolution dans les chambres est isobare et correspond à la dissipation sous forme de tourbillons de l'énergie cinétique des jets à la sortie des jeux. Par contre, l'écoulement est supposé globalement isotherme dans l'ensemble du joint labyrinthe.

Pour estimer le débit masse qui traverse au droit d'une dent, Childs a utilisé le modèle de Neumann [38] qui correspond à ce schéma général (Annexe 1). Le débit masse s'écrit finalement:

$$Q_i = \eta_i \mu A_c \sqrt{\frac{P_{i-1}^2 - P_i^2}{R_c T}} \quad (\text{I.18})$$

$\eta = A/A_c$, est le rapport des sections (fig.I.6), appelé coefficient de contraction, évalué par Chapylgin [39,40] de la façon suivante:

$$\eta_i = \pi / (\pi + 2 - 5S_i + 2S_i^2) \quad \text{avec} \quad S_i = \left(\frac{P_{i-1}}{P_i} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \quad (\text{I.19})$$

μ est un coefficient semi-empirique, il dépend essentiellement du nombre de dents dans le joint labyrinthe et du facteur j , de récupération de l'énergie cinétique.

$$\mu = \sqrt{\frac{Nd}{(1-j)Nd+j}} \quad ; \quad j = 1 - \frac{1}{(1+16.6Cr/D)^2} \quad (\text{I.20})$$

"j" étant déterminé expérimentalement par Egli [41], en fonction du jeu radial et de la largeur équivalente des chambres. La figure I.7 montre le diagramme d'Egli, qui représente le coefficient μ en fonction du nombre de dents (Nd) et du rapport Cr/D. Pour la dernière chambre et pour un joint labyrinthe à dents sur rotor et stator, l'énergie cinétique disparaît complètement dans une chambre de longueur infinie, donc, le facteur j prend la valeur zéro, c'est-à-dire $\mu_0=1$.

Le débit masse par unité de section est donné par l'égalité suivante:

$$\frac{\dot{m}_i}{H_i} = \frac{q_i}{A_c} = \mu \eta_i \sqrt{\frac{P_{i-1}^2 - P_i^2}{R_c T}} \quad (\text{I.21})$$

on obtient finalement le débit masse par unité de longueur:

$$\dot{m}_i = \mu \eta_i H_i \sqrt{\frac{P_{i-1}^2 - P_i^2}{R_c T}} \quad (\text{I.22})$$

Il est bien évident que parmi les corrélations utilisées dans le modèle de Childs celle-ci (I,22), qui est tout à fait fondamentale, est en même temps la plus discutable compte-tenu des hypothèses qui en sont à la base.

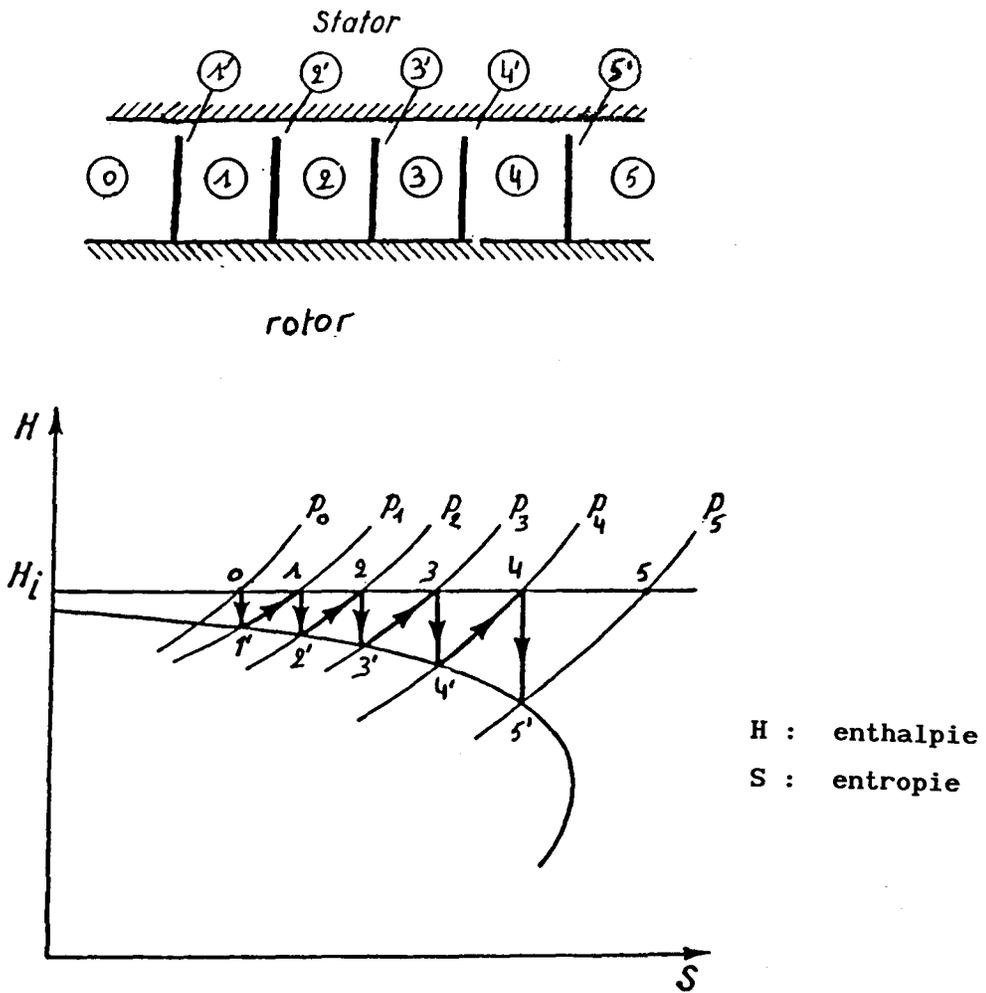


Fig.I.5: Evolution isenthalpique dans un joint labyrinthe

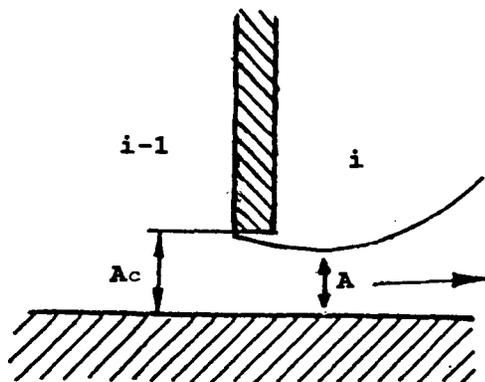
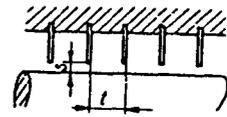
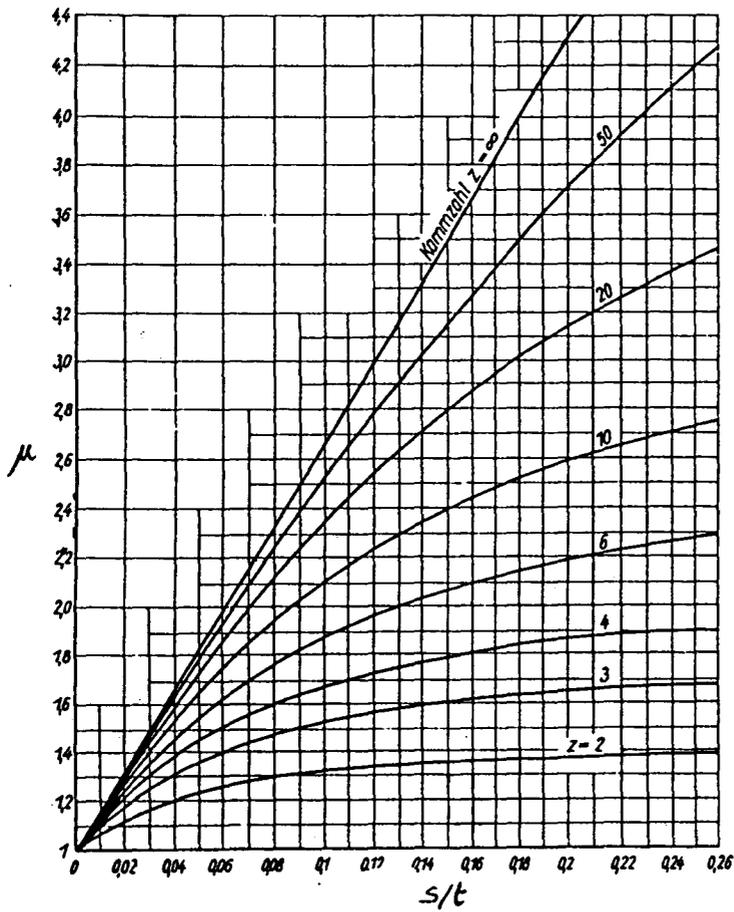


Fig.I.6: Expansion singulière (ième dent)



$$\mu = \sqrt{\frac{z}{(1-j)z + j}}$$

$$j = 1 - \frac{1}{\left(1 + 16,6 \frac{z^2}{l}\right)^2}$$

$S = Cr$
 $t = D$
 $Z = Nd$

Fig.I.7: Diagramme d'Egli



2.3 Linéarisation:

Pour des petits déplacements du rotor par rapport à sa position centrée, une méthode de linéarisation est appliquée (méthode des petites perturbations).

L'analyse de la perturbation par rapport à une excentricité relative de référence ($\varepsilon=e/Cr$) des différentes variables dans le système d'équations (I.1), (I.16) et (I.22), est développée comme ci-dessous:

$$\begin{aligned} P_i &= P_{oi} + \varepsilon P_{1i}(t,\theta) & ; & & H_i &= C_{ri} + \varepsilon H_{1i}(t,\theta) \\ W_i &= W_{oi} + \varepsilon W_{1i}(t,\theta) & ; & & A_i &= A_{oi} + \varepsilon D_i H_{1i}(t,\theta) \end{aligned} \quad (I.23)$$

Les équations d'ordre zéro stationnaires fournissent le débit masse de fuite, les distributions de pression et de vitesse circonférentielle dans chaque cavité à l'état concentrique du rotor. Les équations du premier ordre fournissent les perturbations de pression et de vitesse circonférentielle correspondant au déplacement relatif du rotor par rapport au stator. Ces résultats sont valables seulement pour des petits mouvements du rotor autour de sa position initiale, c'est-à-dire pour des excentricités faibles par rapport au jeu radial ($e < Cr$).

2.3.1 Solution d'ordre zéro ou solution stationnaire:

L'équation d'ordre zéro pour le débit de fuite est:

$$\dot{m}_{oi} = \dot{m}_o = \mu \eta_{oi} C_{ri} \sqrt{\frac{P_{oi}^2 - P_{io}^2}{RcT}} \quad (I.24)$$

Si on connaît les pressions en amont (P_e) et en aval (P_s) du joint, l'équation (I.24) permet de déterminer à la fois le débit masse \dot{m}_o et la distribution des

pressions P_{oi} dans les chambres du joint labyrinthe. La masse volumique est déterminée à partir de l'équation d'état (I.17).

L'équation de la quantité de mouvement d'ordre zéro est:

$$\rho_{oi}(W_{oi} - W_{oi-1}) = \tau_{roi} a_{ri} D_i - \tau_{soi} a_{si} D_i \quad (I.25)$$

$$i = 1, 2, \dots, N_c$$

Connaissant la vitesse tangentielle initiale, la distribution des vitesses tangentielles est déterminée à partir de l'équation de la quantité de mouvement (I.25) en utilisant une méthode de Newton.

2.3.2 Solution du premier ordre:

Les équations du premier ordre (I.26) et (I.27) respectivement pour la continuité et la quantité de mouvement fournissent les valeurs des fluctuations de pression et de vitesse circumférentielle.

$$G_{1i} \frac{\delta P_{1i}}{\delta t} + G_{1i} \frac{W_{oi}}{R} \frac{\delta P_{1i}}{\delta \theta} + G_{1i} \frac{P_{oi}}{R} \frac{\delta W_{1i}}{\delta \theta} + G_{3i} P_{1i} + G_{4i} P_{1i-1} \quad (I.26)$$

$$+ G_{5i} P_{1i+1} = -G_{6i} H_1 - G_{2i} \frac{\delta H_1}{\delta t} - G_{2i} \frac{W_{oi} \delta H_1}{R \delta \theta}$$

$$X_{1i} \frac{\delta W_{1i}}{\delta t} + X_{1i} \frac{W_{oi}}{R} \frac{\delta W_{1i}}{\delta \theta} + \frac{A_{oi}}{R} \frac{\delta P_{1i}}{\delta \theta} + X_{2i} W_{1i} - \rho_{oi} W_{1i-1} + X_{3i} P_{1i} \quad (I.27)$$

$$+ X_{4i} P_{1i-1} = X_{5i} H_1$$

G_i et X_i sont des coefficients dépendant des grandeurs physiques calculées à

l'état concentrique ($\varepsilon=0$), et sont définis dans l'annexe.2. Si nous supposons maintenant, que le rotor décrit une trajectoire elliptique autour de sa position initiale, le terme fluctuant de l'épaisseur du film est une fonction harmonique [20] de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \varepsilon H_1 &= -a \cos(\omega t) \cdot \cos \theta - b \sin(\omega t) \cdot \sin \theta \\ &= -\frac{a}{2} \left[\cos(\theta + \omega t) + \cos(\theta - \omega t) \right] - \frac{b}{2} \left[\cos(\theta - \omega t) - \cos(\theta + \omega t) \right] \end{aligned} \quad (\text{I.28})$$

Les paramètres dimensionnels a et b , représentent les amplitudes de la fonction harmonique. Ils sont définis de la façon suivante:

$$a = \alpha C_r \quad ; \quad b = \beta C_r \quad \text{avec} \quad 0 < \alpha, \beta \leq 1 \quad (\text{I.29})$$

De même, nous cherchons des fluctuations de pression et de vitesse de la même forme:

$$P_{1i} = P_{c1}^+ \cos(\theta + \omega t) + P_{s1}^+ \sin(\theta + \omega t) + P_{c1}^- \cos(\theta - \omega t) + P_{s1}^- \sin(\theta - \omega t) \quad (\text{I.30})$$

$$W_{1i} = W_{c1}^+ \cos(\theta + \omega t) + W_{s1}^+ \sin(\theta + \omega t) + W_{c1}^- \cos(\theta - \omega t) + W_{s1}^- \sin(\theta - \omega t) \quad (\text{I.31})$$

Par substitution des équations (I.28), (I.30) et (I.31) dans les équations (I.25) et (I.26), puis par regroupement des termes en sinus et en cosinus (voir annexe.2), et après identification, on élimine le temps t et l'angle θ . On obtient alors un système de 8 équations pour chaque cavité "i". Si maintenant, on considère un joint labyrinthe d'un nombre de cavités égal à N_c ($N_c = N_d - 1$), le système résultant contient $8N_c$ équations que l'on peut écrire sous forme matricielle suivante:

$$AX = B = \frac{a}{2} B_1 + \frac{b}{2} B_2 \quad (\text{I.32})$$

2.3.3 Calcul des forces de pression:

Une fois obtenues les valeurs des fluctuations de pression dans les chambres du joint, nous pouvons calculer les composantes F_x et F_y (fig.I.8, p.29) de la résultante des forces de pression sur le rotor, en intégrant la fluctuation de pression le long de la circonférence et le long de la longueur du joint. Les composantes F_x et F_y s'écrivent:

$$F_x = -R\varepsilon \sum_{i=1}^{N_c} \int_0^{2\pi} P_{1i} D_i \cos\theta \, d\theta \quad (\text{I.36})$$

$$F_y = R\varepsilon \sum_{i=1}^{N_c} \int_0^{2\pi} P_{1i} D_i \sin\theta \, d\theta \quad (\text{I.37})$$

Si nous reportons l'expression de la fluctuation de pression donnée par la relation (I.30) dans les équations (I.36) et (I.37), après intégration le long de la circonférence, les composantes F_x et F_y deviennent:

$$F_x = -\varepsilon\pi R \sum_{i=1}^{N_c} D_i \left[(P_{s_i}^+ - P_{s_i}^-) \sin(\omega t) + (P_{c_i}^+ + P_{c_i}^-) \cos(\omega t) \right] \quad (\text{I.38})$$

$$F_y = \varepsilon\pi R \sum_{i=1}^{N_c} D_i \left[(P_{c_i}^+ + P_{c_i}^-) \cos(\omega t) + (P_{s_i}^+ - P_{s_i}^-) \sin(\omega t) \right] \quad (\text{I.39})$$

2.4 Calcul des coefficients dynamiques:

L'étude dynamique a pour but de déterminer les coefficients dynamiques de raideur et d'amortissement, qui permettent d'établir le comportement d'un joint labyrinthe et d'en déduire les conditions de stabilité du rotor.

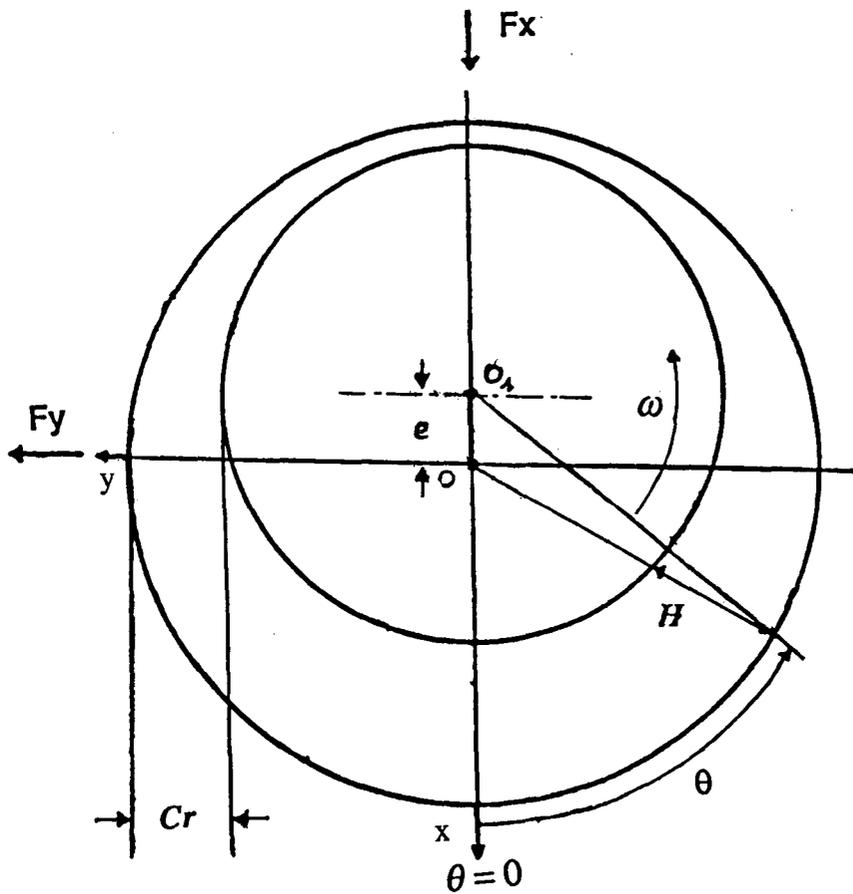


Fig.I.8: Section droite d'un joint labyrinthe

- F_x : force suivant la direction x
- F_y : force suivant la direction y
- Cr : jeu radial
- e : excentricité du rotor par rapport au stator
- H : épaisseur du film
- o : centre du stator fixe
- o_1 : centre du rotor
- ox, oy : directions de référence



Dans le repère rapporté à un repère orthonormé fixe $oxyz$ (oz étant l'axe de la machine), les coefficients dynamiques pour un joint labyrinthe, sont définis par la relation matricielle suivante:

$$-\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} \\ C_{yx} & C_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.40})$$

(x,y) et (\dot{x},\dot{y}) définissent respectivement le déplacement et la vitesse de déplacement du rotor par rapport à sa position initiale, (F_x,F_y) représentent les composantes de la force agissant sur le rotor, et $(K_{xx},K_{yy},K_{xy},K_{yx})$ et $(C_{xx},C_{yy},C_{xy},C_{yx})$ sont respectivement les coefficients dynamiques directs et croisés de raideur et d'amortissement. Suivant la description de Childs et Scharrer pour des applications aux petits mouvements du centre de rotor par rapport au stator [20,21,22], l'équation (I.40) peut s'écrire comme ci-dessous:

$$-\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K & k \\ -k & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C & c \\ -c & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.41})$$

Les composantes du déplacement et de la vitesse de déplacement du centre du rotor s'écrivent ci-dessous:

$$\begin{aligned} x &= a \cos(\omega t) & ; & & \dot{x} &= -a\omega \sin(\omega t) \\ y &= b \sin(\omega t) & ; & & \dot{y} &= b\omega \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (\text{I.42})$$

a et b représentent les amplitudes de la trajectoire elliptique.

Après la substitution de (I.42) dans le système (I.41), nous obtenons les égalités suivantes:

$$F_x = -K\cos(\omega t) - k\sin(\omega t) + C\omega\sin(\omega t) - c\omega\cos(\omega t)$$

$$F_y = k\cos(\omega t) - K\sin(\omega t) - c\omega\sin(\omega t) - C\omega\cos(\omega t) \quad (\text{I.43})$$

En regroupons les termes en sinus et en cosinus dans les expressions (I.38) et (I.39), les composantes F_x et F_y deviennent:

$$F_x = F_{xc}\cos(\omega t) + F_{xs}\sin(\omega t)$$

$$F_y = F_{yc}\cos(\omega t) + F_{ys}\sin(\omega t) \quad (\text{I.44})$$

Après identification, on a:

$$F_{xc} = -(Ka + c\omega) \quad ; \quad F_{xs} = C\omega - kb$$

$$F_{yc} = ka - C\omega \quad ; \quad F_{ys} = -(Kb + c\omega) \quad (\text{I.45})$$

Une seule des composantes F_x ou F_y suffira pour calculer les coefficients dynamiques; nous choisissons la composante F_x pour la suite du calcul. L'identification des termes en $\sin(\omega t)$ et $\cos(\omega t)$ entre les équations (I.29) et (I.37), permet d'écrire les expressions de F_{xc} et F_{xs} de la façon suivante:

$$F_{xc} = -\pi R \cdot \sum_{i=1}^{N_c} D_i \left[a(F_{aci}^+ + F_{aci}^-) + b(F_{bci}^+ + F_{bci}^-) \right] \quad (\text{I.46})$$

$$F_{xs} = \pi R \cdot \sum_{i=1}^{N_c} D_i \left[a(F_{asi}^+ - F_{asi}^-) + b(F_{bsi}^+ - F_{bsi}^-) \right] \quad (\text{I.47})$$

Finalement, après identification entre les équations (I.34) et (I.35), on déduit les coefficients dynamiques de raideur et d'amortissement donnés par les expressions suivantes:

$$K = \pi R \sum_{i=1}^{N_c} (F_{a\,ci}^+ + F_{a\,ci}^-) D_i \quad ; \quad k = \pi R \sum_{i=1}^{N_c} (F_{b\,si}^+ - F_{b\,si}^-) D_i \quad (\text{I.48})$$

$$C = \frac{\pi R}{\omega} \sum_{i=1}^{N_c} (F_{a\,si}^+ - F_{a\,si}^-) D_i \quad ; \quad c = \frac{\pi R}{\omega} \sum_{i=1}^{N_c} (F_{b\,ci}^+ + F_{b\,ci}^-) D_i$$

* Remarque:

On peut constater facilement que cette méthode nécessite la décomposition du système linéaire (I.33) en deux systèmes équivalents:

$$A X_1 = \frac{a}{2} B_1 \quad ; \quad A X_2 = \frac{b}{2} B_2 \quad (\text{I.49})$$

avec $X = X_1 + X_2$

En réalité, ceci revient à résoudre deux systèmes linéaires distincts. Ceci met en évidence comme on pouvait s'y attendre que les coefficients dynamiques sont indépendants des paramètres a, b et donc de ϵ .

2.5 Conditions aux limites:

Une fois que les paramètres géométriques du joint sont définis. Il reste ensuite à prendre en compte des conditions aux limites ce qui nécessite un traitement particulier des équations de conservation formulées précédemment. (Il faut bien sûr définir les conditions physiques de calcul telles que la température et la viscosité du fluide). A l'entrée du joint, on se donne la pression d'alimentation (P_e), ainsi que la vitesse tangentielle. Cette dernière étape constitue une difficulté énorme, car il est très difficile d'évaluer cette vitesse qui varie suivant la nature de la machine. Dans le cas pratique, Wyssmann [18] a utilisé un tube de pitot pour mesurer la vitesse tangentielle initiale au front du premier labyrinthe (dent). Il a montré que cette dernière est de l'ordre de 0.75 fois la vitesse de rotation. Dans le cas théorique, Kirk [24,25], s'est basé sur l'étude de Jimbo [41] effectuée sur les compresseurs centrifuges, donnant une vitesse moyenne tangentielle au front de la première dent de l'ordre de 0.565 fois la vitesse d'arbre. A la sortie du joint labyrinthe, on fixe uniquement la pression (P_s).

3. Cas incompressible:

Dans le cas d'écoulements incompressibles, la masse volumique étant supposée constante, l'équation d'état n'apparaît pas dans le système d'équations, ce qui aboutit à une simplification du problème. Ici, l'équation du débit de fuite est déterminée à partir de la formulation de Bernoulli généralisée et de la conservation de la masse, dans la direction axiale, de part et d'autre d'une dent. Le processus de résolution du problème est identique à celui décrit précédemment. La solution d'ordre zéro fournira les mêmes équations qu'en cas compressible. Par contre, dans la solution du premier ordre, les coefficients G et X correspondant respectivement aux équations de la continuité et de la quantité de mouvement sont moins complexes.

3.1 Equations de conservation:

Les équations de la continuité et de la quantité de mouvement s'écrivent respectivement:

$$\rho \frac{\delta A_i}{\delta t} + \frac{\rho \delta(A_i W_i)}{R \delta \theta} + \dot{m}_{i+1} - \dot{m}_i = 0 \quad (\text{I.50})$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\delta(A_i W_i)}{\delta t} + \frac{2}{R} \rho A_i W_i \frac{\delta W_i}{\delta \theta} + \frac{\rho}{R} W_i^2 \frac{\delta A_i}{\delta \theta} + W_i \dot{m}_{i+1} - W_{i-1} \dot{m}_i \\ = - \frac{A_i \delta P_i}{R \delta \theta} + \tau_{r i a r i} D_i - \tau_{s i a s i} D_i \end{aligned} \quad (\text{I.51})$$

De la même façon que dans le cas compressible, multiplions l'équation (I.50) par la vitesse circonférentielle W_i , puis, retranchons la de l'équation (I.51). Nous obtenons l'équation (I.52).

$$\rho A_i \frac{\delta W_i}{\delta t} + \frac{\rho}{R} A_i W_i \frac{\delta W_i}{\delta \theta} + \dot{m}_i (W_i - W_{i-1}) = \frac{A_i}{R} \frac{\delta P_i}{\delta \theta} - \tau_{s i a s i} D_i + \tau_{r i a r i} D_i \quad (\text{I.52})$$

Les contraintes de frottement déterminées par le modèle de Blasius sont restées inchangées. L'expression du débit de fuite est déterminée à partir de la formulation de Bernoulli d'une part et de la conservation de la masse d'autre part, en supposant que la récupération d'énergie cinétique est nulle.

$$\dot{m}_i = H_i \eta \sqrt{2\rho(P_{i-1} - P_i)} \quad ; \quad \eta = \frac{\pi}{\pi + 2} \quad (\text{I.53})$$

où η est le coefficient de contraction évalué par Chaplygin [39] pour un écoulement incompressible et on suppose de plus que $j=0$.

3.2 Linéarisation:

Suivant la même démarche que dans le cas précédent, on décompose chaque grandeur variable en une grandeur moyenne plus une grandeur fluctuante par rapport à l'excentricité relative ($\varepsilon = e/C_r \ll 1$). Les équations d'ordre zéro en ε restent inchangées. Dans la solution du premier ordre, seule l'équation de la continuité a été modifiée et devient:

$$G_{1i} \frac{1}{R} \frac{\delta W_{1i}}{\delta \theta} + G_{3i} P_{1i} + G_{4i} P_{1i-1} + G_{5i} P_{1i+1} \quad (\text{I.54})$$

$$= -G_{6i} H_1 - G_{2i} \frac{\delta H_1}{\delta t} - G_{2i} \frac{W_{0i}}{R} \frac{\delta H_1}{\delta \theta}$$

Les coefficients G et X respectivement présents dans les équations de la continuité et de la quantité de mouvement ont des formes moins compliquées que dans le cas compressible (voir **annexe.2**). En utilisant les mêmes démarches, après séparation des variables, on arrive à un système linéaire identique à celui trouvé dans la partie compressible, sauf dans la sous matrice $[A_1^2]$, les éléments de la diagonale a_{11} , a_{22} , a_{33} et a_{44} étant nuls. Les expressions des éléments des sous matrices et des vecteurs colonnes B et C sont détaillées dans l'annexe.2. Finalement, la mise en place d'une étude dynamique aboutit aux mêmes relations donnant les efforts exercés sur le rotor et les coefficients dynamiques de raideur et d'amortissement.

Par ailleurs, les conditions aux limites sont similaires au cas compressible à l'exception de la température qui ne figure pas dans ce modèle. Connaissant la masse volumique et la viscosité du fluide, on fixe la pression et la vitesse tangentielle à l'entrée, puis, la pression à la sortie.

4. Organigramme:

Nous avons développé deux programmes de calcul, l'un pour des écoulements compressibles de gaz idéal l'autre pour des écoulements incompressibles. Dans les deux cas, le principe de résolution se fait en deux temps (voir fig.I.9):

- Dans un premier temps, nous résolvons les équations d'ordre zéro par une méthode itérative. On commence par calculer les différentes grandeurs géométriques du joint labyrinthe. Les pressions à l'entrée et à la sortie étant fixées, on initialise les pressions dans les chambres d'une façon linéaire et les vitesses circonférentielles à la moitié de la vitesse de rotation du rotor. A chaque itération, nous calculons les N_d ($N_d = N_c + 1$) débits masse, puis, nous prenons la moyenne du débit minimal et du débit maximal pour calculer la répartition des pressions dans les chambres, jusqu'à ce qu'on obtienne le même débit à travers les léschettes. Au cours du passage d'une itération à l'autre, nous pratiquons une relaxation sur les pressions. Le calcul des vitesses circonférentielles se fait aussi à l'aide de l'équation d'ordre zéro de la quantité de mouvement, par une méthode itérative avec relaxation, en utilisant une méthode de point fixe.

- Dans un deuxième temps, nous résolvons les équations du premier ordre, ce qui consiste à résoudre un système linéaire $A\mathbb{X} = \mathbb{B}$, où A est une matrice d'assemblage tridiagonale par bloc de rang 8, en utilisant une méthode directe qui repose sur la triangularisation de la matrice. La surdiagonale comporte $(N_c - 1)$ blocs de rang 8. Pour résoudre ce système, nous sommes amenés à inverser une matrice d'ordre 8 pour chaque itération au nombre de N_c . Une fois calculé le vecteur solution \mathbb{X} donnant les fluctuations de pression et de vitesse circonférentielle, nous calculons les deux composantes de la résultante des forces de pression (F_x, F_y) qui agissent sur le rotor, en intégrant la fluctuation de pression le long de la circonférence et le long du joint labyrinthe. Finalement, nous en déduisons les coefficients de raideur (K, k) et d'amortissement (C, c) .

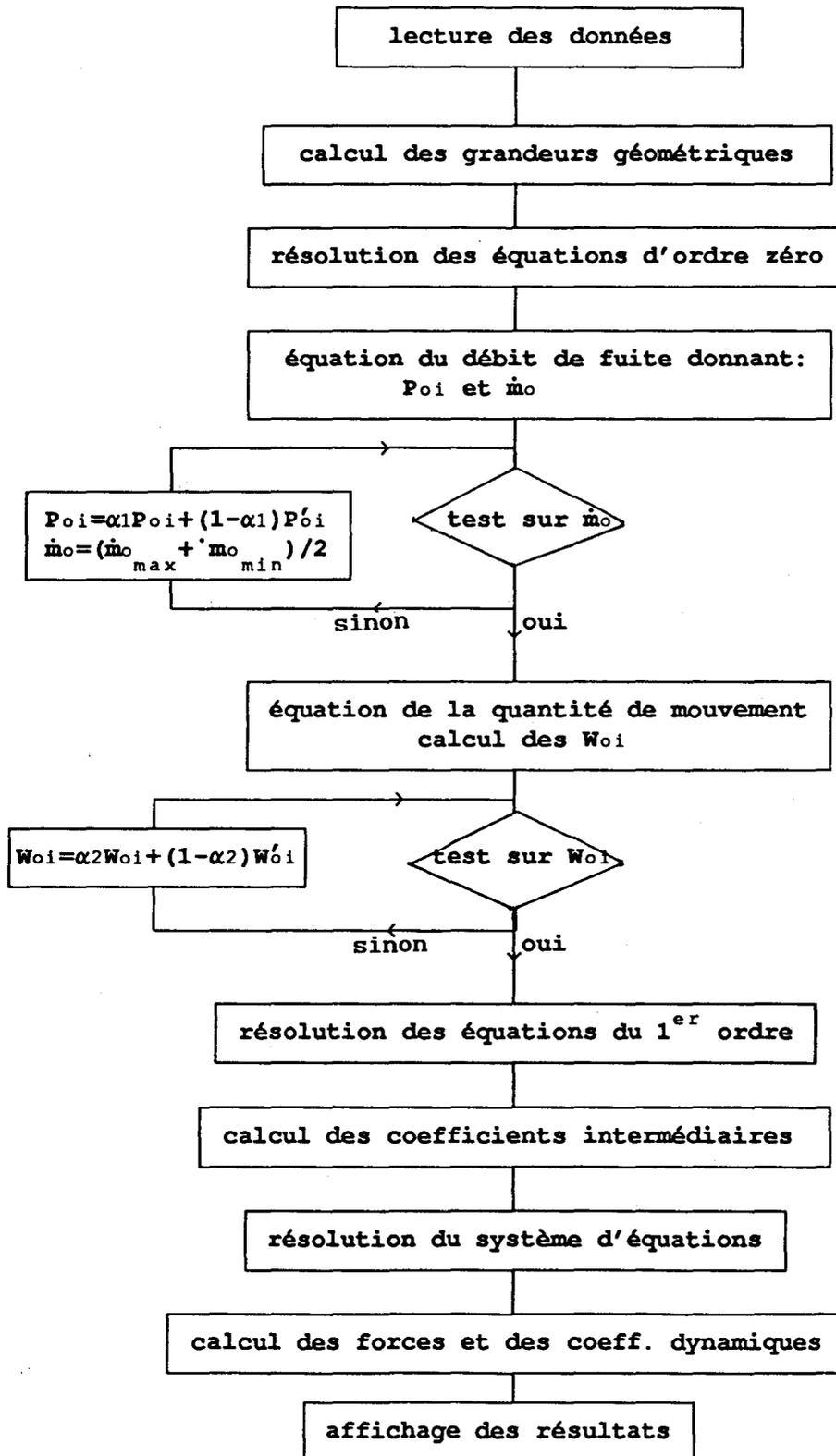


Fig.I.9: Organigramme

5. Applications:

Le but des applications effectuées étant de déterminer les coefficients dynamiques de raideur (K, k) et d'amortissement (C, c) et non des trajectoires d'arbre, dans l'ensemble de ces applications, nous avons considéré que le centre du rotor décrit un orbite circulaire autour de sa position initiale. Les amplitudes a et b sont égales. Les composantes radiale et tangentielle de la résultante des forces développées dans l'équation (I.42) sont illustrées dans la figure I.10 et définies par:

$$F_r = -(K + c\omega)a \quad ; \quad F_t = (k - C\omega)a \quad (\text{I.55})$$

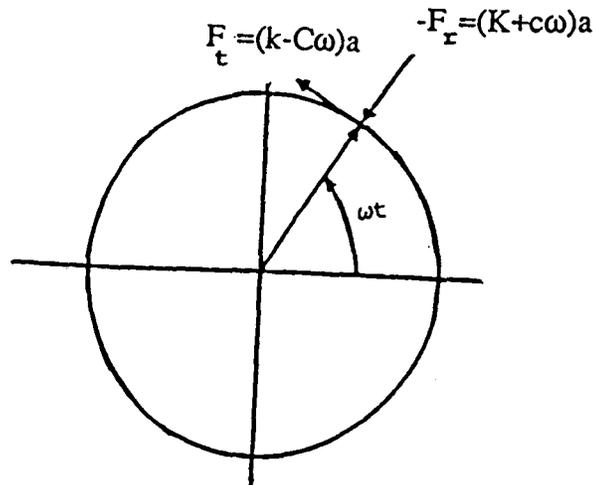


Fig II.10: Efforts sur rotor

Du point de vue stabilité, la figure I.10 montre que la force tangentielle F_t peut être à l'origine de l'instabilité du rotor alors que la force radiale F_r joue un rôle important dans sa stabilité. D'une façon générale, le coefficient de raideur direct (K) est négatif et il a une influence positive sur la stabilité du rotor, le coefficient de raideur croisé (k) tend à déstabiliser le rotor. Il peut être négatif

ou positif suivant la différence des vitesses tangentielles entre l'entrée et la sortie du joint labyrinthe. Dans la pratique, on utilise soit un système de freinage soit on impose une vitesse tangentielle initiale opposée au sens de la rotation d'arbre, pour éliminer ou réduire l'effet du coefficient croisé (k). Le coefficient direct d'amortissement joue un rôle important sur la stabilité du rotor, par contre, le coefficient croisé d'amortissement (c) n'a pas d'effet majeur sur cette stabilité. Pour résumer, la stabilité ou l'instabilité du rotor dépend essentiellement des coefficients (k) et (C).

Pour cerner davantage ce phénomène, Childs et Dara [22,23] ont défini un paramètre adimensionnel appelé taux d'instabilité donné par:

$$f = \frac{k}{C \cdot \Omega} \quad (\text{I.56})$$

Ω est la fréquence de rotation de la machine, k/C est le rapport donné par l'influence d'instabilité du coefficient croisé de raideur sur l'influence de stabilité du coefficient direct d'amortissement. Une valeur minimale de (f) est souhaitable pour assurer la stabilité du rotor.

Pour corréler les résultats, nous avons introduit un paramètre sous forme adimensionnel (E_o^*), qui représente l'énergie cinétique d'admission sur la différence totale de pression. Ce paramètre est définie par Benckert et Wachter [7,8,9] comme suit:

$$E_o^* = \frac{0.5 \rho_e W_e^2}{\Delta P_t} ; \quad \Delta P_t = (P_e - P_s) + 0.5 \rho_e U_e^2 \quad (\text{I.57})$$

P_e et P_s sont respectivement les pressions à l'entrée et à la sortie du joint, ρ_e est la masse volumique à l'entrée et U_e est la vitesse axiale débitante.

En plus, Benckert et Wachter ont défini des expressions des coefficients dynamiques adimensionnels de la manière suivante:

$$K^* = \frac{KC_r}{RDN_c (P_e - P_s)} \quad ; \quad k^* = \frac{kC_r}{RDN_c (P_e - P_s)}$$

(I.58)

$$C^* = \frac{CC_r}{RDN_c (P_e - P_s)} \quad ; \quad c^* = \frac{cC_r}{RDN_c (P_e - P_s)}$$

5.1 Types de joints labyrinthe pris en considération:

Pour notre part, nous nous sommes penchés sur l'étude des joints labyrinthe rainurés qui sont regroupés sur la figure I.11 afin de:

- a- valider les programmes de calcul,
- b- faire une première évaluation de la validité des hypothèses du modèle de Childs.

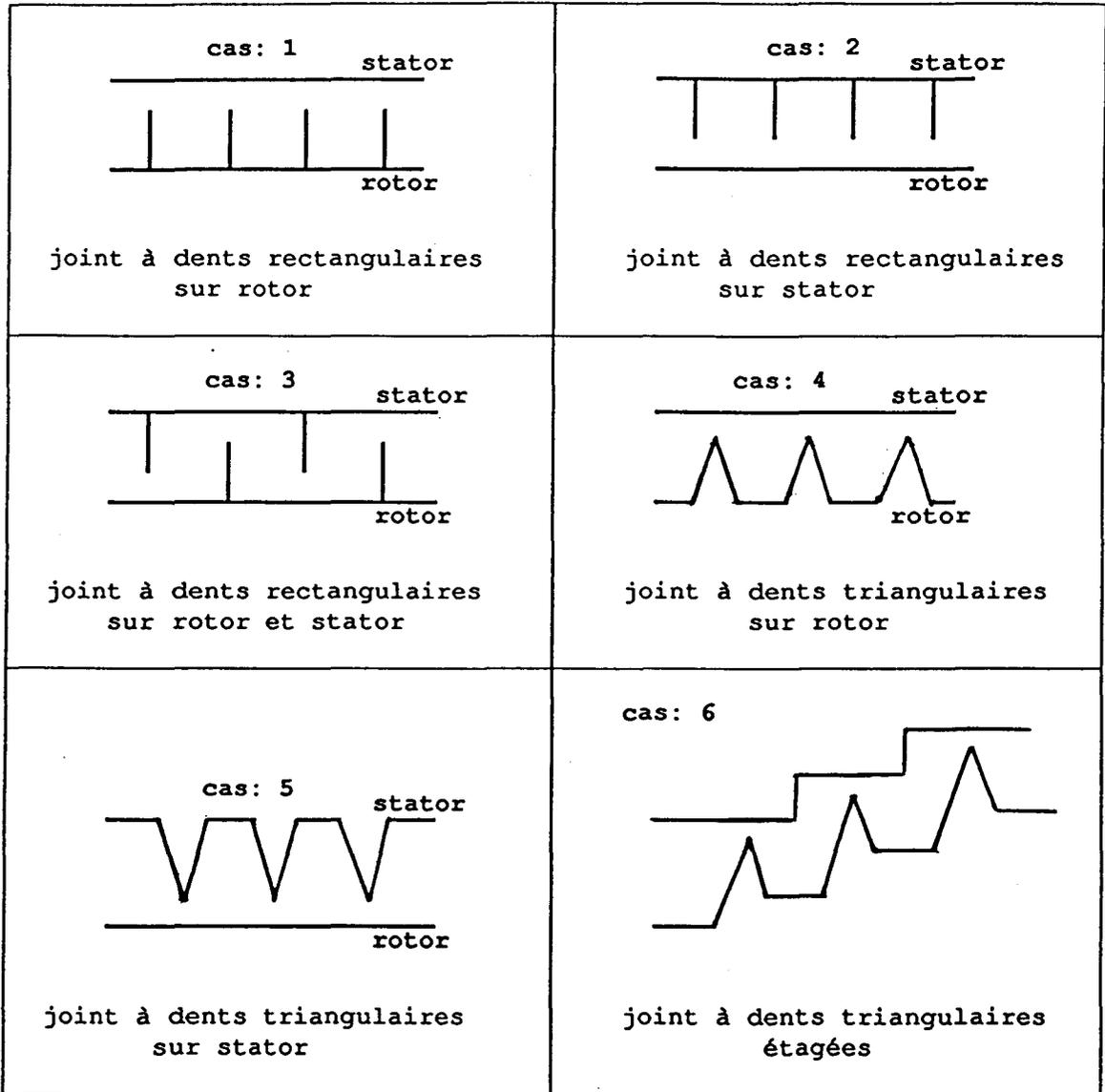


Fig.I .11: Types de joints labyrinthe (exemples)



5.2 Validation des programmes:

5.2.1 Modèle compressible:

La mise en oeuvre du modèle de Childs (modèle compressible) compte tenu des modifications apportées dans certains coefficients par rapport à l'article disponible, nécessitent de passer par une étape de validation. Une comparaison des résultats obtenus [44,45] avec ceux de Childs [20] et les mesures de Benckert et Wachter [7,8,9] est donc présentée. Il faut noter que dans la partie compressible, les calculs sont effectués à température ambiante ($T_a=300^\circ\text{K}$), le fluide considéré étant de l'air.

Les résultats présentés concernent un joint labyrinthe à dents sur le stator (cas 2, fig.I.11), avec vitesse tangentielle initiale, sans vitesse de rotation, à des conditions initiales et géométriques suivantes: $P_e=1,96\text{bar}$, $P_s=1,01\text{bar}$, $R=150\text{mm}$, $D=8\text{mm}$, $H_d=5,5\text{mm}$, $C_r=0,5\text{mm}$. Les figures I.12 et I.13 illustrent le coefficient de raideur croisé (k^*) en fonction de l'énergie d'admission (E_e^*) respectivement pour des nombres de dents 13 et 8. Ces figures montrent que (k^*) croît linéairement avec (E_e^*) (ou vitesse tangentielle initiale), en plus, le coefficient (k^*) croît aussi quand le nombre de dents augmente. Les résultats issus de notre calcul sont plus proches des mesures que les résultats de calcul de Childs.

Pour un même type de joint labyrinthe (cas 2, fig.I.11), avec vitesse tangentielle et sans vitesse de rotation, nous montrons l'influence des grandeurs géométriques et de la différence de pression sur le coefficient croisé de raideur. Les résultats sont regroupés dans le tableau I.1. Nous constatons que le coefficient de raideur croisé est très sensible aux grandeurs géométriques définissant le joint labyrinthe ainsi qu'au gradient de pression imposé.

Dans le tableau I.2, nous comparons les résultats de calcul et de mesure, pour un joint labyrinthe à dents sur rotor et stator, avec à la fois la vitesse tangentielle initiale et la vitesse de rotation. Ce tableau montre les effets de la vitesse tangentielle initiale, la vitesse de rotation et le gradient de pression sur le coefficient de raideur croisé. D'une façon générale, le coefficient de raideur croisé croît quand ces grandeurs physiques croient. Par ailleurs, on constate que nos

croît quand ces grandeurs physiques croient. Par ailleurs, on constate que nos résultats sont en bon accord avec les mesures de Benckert et Wachter, contrairement à ceux obtenus par Childs.

L'écart qui existe entre notre calcul et celui de Childs s'explique probablement par le cumul des erreurs de calcul des coefficients géométriques, des grandeurs physiques d'ordre zéro (débit, pression, vitesse circumférentielle), ainsi que par les rectifications apportées aux coefficients G_i et X_i dans les équations du premier ordre.

5.2.2 modèle incompressible

Dans la littérature, l'étude théorique globale pour des écoulements incompressibles dans les joints labyrinthe est totalement absente. Pourtant, de nombreuses applications industrielles utilisent des fluides purement incompressibles (eau, huile, ...). Pour valider le modèle incompressible, nous nous sommes servis du modèle compressible en comparant les résultats de calcul pour des pressions d'entrée assez faibles, dans le cas d'un joint labyrinthe à dents sur stator (cas 2, fig.I.11), avec une vitesse de rotation nulle [44]. Les conditions de fonctionnement et les grandeurs géométriques sont les suivantes:

$$W_{in}=37,1\text{m/s}, P_s=0,943\text{bar}, R=150\text{mm}, D=5\text{mm}, H_d=2,5\text{mm}, C_r=0,25\text{mm}, N_d=18$$

Le tableau I.3 permet de comparer les coefficients direct et croisé de raideur entre le cas compressible et le cas incompressible. On constate que les coefficients de raideur augmentent en valeur absolue avec la différence de pression de part et d'autre du joint. Ce tableau permet de constater aussi que les résultats obtenus deviennent presque identiques à de faibles rapports de pression. Dans la plupart des cas, le coefficient direct de raideur est négatif, alors que le coefficient croisé est du signe de la différence des vitesses tangentielles entre l'entrée et la sortie du joint.

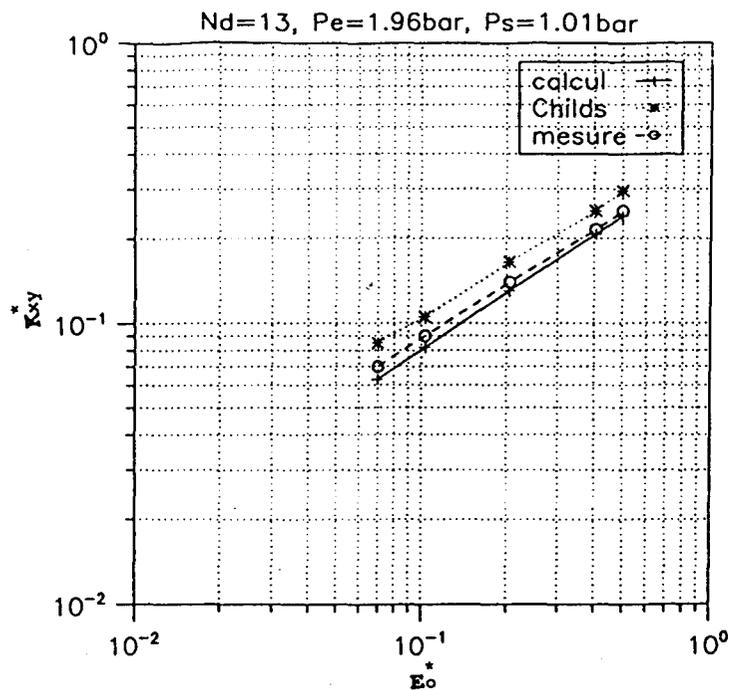


Fig.I.12: Comparaison de K_{xx}^* entre mesure et calcul

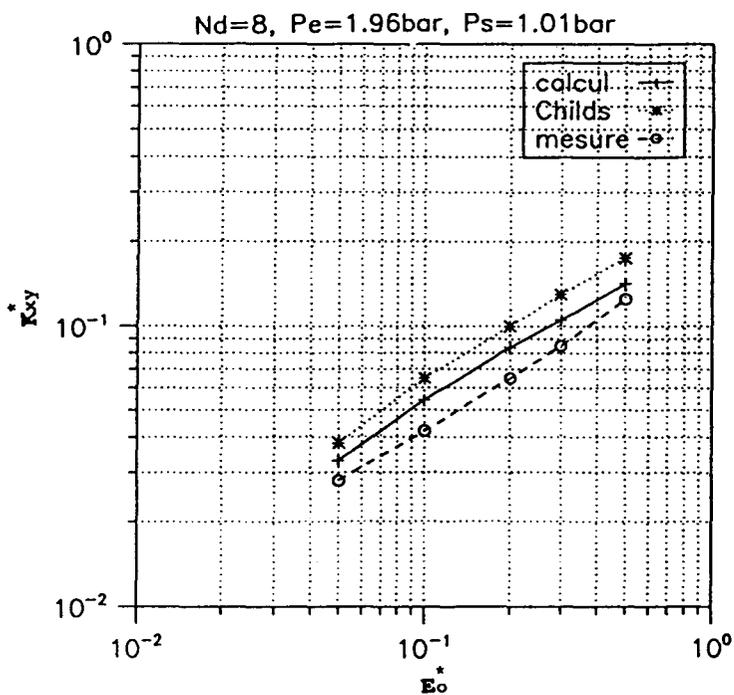


Fig.I.13: Comparaison de K_{xx}^* entre mesure et calcul



E_e^*	Nd	R (mm)	D (mm)	Hd (mm)	Cr (mm)	Pe (bar)	K_{xy}_{mes} (N/mm)	K_{xy}_{Chi} (N/mm)	K_{xy}_{cal} (N/mm)
0.023	18	150	5	2.5	0.25	2.947	257	233	235
0.024	18	150	5	2.5	0.25	1.430	75	69	67
0.038	18	150	5	6	0.25	2.947	157	142	147
0.018	18	150	5	6	0.25	1.430	27	26	27
0.04	18	75	5	6	0.58	1.925	29	20	21
0.04	18	75	5	6	0.58	2.418	41	28	30
0.04	9	75	10	6	0.58	1.925	29	16	19
0.04	9	75	10	6	0.58	2.418	41	23	25

Tableau I.1: comparaison entre calcul et mesure pour un joint à dents sur stator (cas 2), $\omega=0$ tr/min

R=150mm, D=4mm, Hd=5.5mm, Cr=0.5mm, Ps=0.943bar

Nd	Win (m/s)	ω tr/min	Pe/Ps	$K_{xy}_{mes.}$ (N/m)	$K_{xy}_{Chi.}$ (N/m)	$K_{xy}_{cal.}$ (N/m)
18	43.2	9550	1.51	1.97E+5	0.19E+5	1.00E+5
24	40.0	9550	1.51	2.89E+5	0.38E+5	1.90E+5
24	66.1	9485	1.79	2.63E+5	0.31E+5	2.73E+5
24	47.1	9550	1.51	2.95E+5	0.44E+5	2.00E+5

Tableau I.2: Comparaison entre calcul et mesure pour un joint à dents sur rotor et stator (cas 3)

Pe/Ps	cas compressible		cas incompressible	
	Kxx (N/mm)	Kxy (N/mm)	Kxx (N/mm)	Kxy (N/mm)
2.120	-4.5	103	-4.7	89
1.70	-2.7	79	-3.2	76
1.51	-1.9	67	-2.4	67
1.39	-1.3	58	-1.7	60
1.27	-0.8	48	-1.0	52
1.17	-0.2	37	-0.3	41

Tableau I.3: comparaison des coefficients dynamiques entre les modèles compressible et incompressible (joint cas 2)

6. Conclusion:

Dans ce chapitre, nous avons présenté les équations gouvernant les écoulements compressibles et incompressibles dans les joints labyrinthe en se basant sur le modèle de Childs et Scharrer. Deux modèles de calcul global ont été développés: l'un pour le cas compressible l'autre pour le cas incompressible.

En un premier temps, nous avons validé le modèle compressible en comparant les résultats de calcul à ceux obtenus par Childs d'une part et aux mesures de Benckert et Wachter d'autre part, dans deux types de joints labyrinthe, l'un à dents sur rotor avec vitesse tangentielle initiale et sans vitesse de rotation, l'autre à dents sur rotor et stator avec à la fois vitesse tangentielle initiale et vitesse de rotation. Les comparaisons ont été effectuées uniquement sur le coefficient croisé de raideur. Ces comparaisons ont mis en évidence une nette amélioration des résultats par rapport à ceux obtenus par Childs: à vitesse de rotation nulle les résultats sont équivalents (raideurs très faibles de l'ordre de 10^2N/m), par contre à vitesse de rotation non nulle les valeurs que nous avons obtenues sont du même ordre de grandeur (de l'ordre de 10^5N/m) que les valeurs expérimentales alors que celles fournies par Childs sont dix fois plus faibles. Ceci est dû vraisemblablement aux corrections apportées au calcul de certains coefficients mais les hypothèses restent identiques à celles effectuées par Childs.

La validation formelle du modèle incompressible a été faite à partir d'une comparaison avec le modèle compressible, pour de faibles différences de pression de part et d'autre du joint labyrinthe.

Par ailleurs, les tests effectués dans les cas compressible et incompressible ont permis de montrer la sensibilité des coefficients de raideur à la vitesse tangentielle initiale, à la vitesse de rotation, à la différence de pression ainsi à la géométrie du joint labyrinthe (R , D , H_d , Cr) [44,45].

CHAPITRE.II

PRESENTATION DU CODE 3D AXISYMETRIQUE

1. Introduction:

Les écoulements dans les joints labyrinthe présentent une certaine complexité notamment en raison de leur caractère tridimensionnel comme on l'a vu. Il est tout à fait possible de se ramener à un problème bidimensionnel moyennant certaines hypothèses et l'utilisation de corrélations semi-empiriques. Nous nous proposons de vérifier la validité des hypothèses du modèle de Childs et d'affiner certaines corrélations utilisées, par l'intermédiaire d'une étude numérique. Différents programmes de résolution numérique des équations de la mécanique des fluides permettent de simuler des écoulements tridimensionnels pour des configurations axisymétriques. Les codes de calcul disponibles dans le commerce sont utilisables mais présentent des inconvénients car, il est difficile de les connaître finement, les programmes sources ne sont pas accessibles et donc l'extension de leur champ d'application est quasi-impossible.

Nous nous étions fixés comme premier objectif de travailler sur le code "Flotran" [46], valable dans le cas d'écoulements 2-D ou 3-D. Flotran est basé sur l'utilisation d'une formulation faible dite de "Galerkin", la discrétisation étant du type éléments finis avec des éléments du même ordre pour la vitesse et la pression [47-51]. La linéarisation est effectuée suivant la formulation "SIMPLE" [52]. Flotran est utilisé parallèlement au logiciel "Ansys" [53] qui permet la construction du maillage, la prise en compte des conditions aux limites ainsi que l'exploitation des résultats sous forme graphique. Flotran traite des écoulements:

- laminaires ou turbulents dans le cas de fluide compressible ou incompressible,
- 2-D axisymétrique ou 3-D avec des conditions aux limites diverses,
- avec ou sans transfert thermique.

Nous avons rencontré un problème majeur, à savoir l'impossibilité d'utiliser Flotran, pour la version dont nous disposions, dans le cas des écoulements turbulents à paroi mobile.

Finalement, comme nous disposons dans le laboratoire d'un code 3-D axisymétrique valable pour des écoulements incompressibles, nous avons:

a- validé ce code pour des configurations géométriques semblables à celles rencontrées dans les joints labyrinthe à partir de résultats d'autres auteurs.

b- créé une version compressible de ce code.

2. Validation du code 3D axisymétrique: Version incompressible

Avant de passer à la modélisation de configurations industrielles spécifiques, et de créer une version compressible, il nous a paru nécessaire de tester et valider la performance du code en version incompressible en comparant les résultats obtenus aux calculs et aux mesures d'autres auteurs que nous possédons.

En effet, l'analyse d'écoulements axisymétriques dans un joint labyrinthe a fait l'objet de nombreux travaux de recherche. Sur le plan numérique, nous citons par ordre chronologique les travaux de Boyman [10] et Stoff [13,14], Wayssmann [15-18], Rhode et Demko [26,27], mais la plupart des résultats sont trop pauvres pour que nous puissions faire des comparaisons. Par ailleurs, nous retenons les travaux (calculs et mesures) de Boyman et Stoff pour un écoulement incompressible sur un modèle de joint labyrinthe (fig.II.1).

2.1 Modèle de Boyman et Stoff:

Dans ce cas, nous disposons comme éléments de comparaison, des mesures et les calculs de Boyman et Stoff pour un écoulement turbulent et axisymétrique.

L'échelle réelle des joints labyrinthe dans les turbomachines est trop petite pour réaliser des mesures expérimentales locales. Pour cette raison, Boyman et Stoff ont conçu un modèle agrandi en similitude de Reynolds [11] et de Taylor [12]. Le

ont conçu un modèle agrandi en similitude de Reynolds [11] et de Taylor [12]. Le modèle agrandi (fig.II.1) comporte quatre chambres annulaires identiques, portées sur l'arbre (rotor) qui tourne autour de son axe dans un cylindre lisse (stator) avec une excentricité nulle.

Nous sommes dans le cas d'un écoulement turbulent axisymétrique de fluide incompressible. Le calcul a été effectué sur une seule chambre dont le maillage est suffisamment fin à proximité des parois pour évaluer une précision pariétale, le nombre de points est de 41x49. Les conditions de fonctionnement sont les suivantes:

- le rotor tourne à $\omega = 2,26$ rad/s
- la vitesse axiale débitante est $U_e = 0,036W_a$ (soit 0,1m/s).
- le fluide considéré est l'eau, ses caractéristiques physiques étant les suivantes:

$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3, \quad \nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

Le nombre de Reynolds (Re) et le nombre de Taylor (Ta) associés à cette configuration sont définies par:

$$Re_{\text{rayon}} = \frac{W_a R}{\nu} \approx 3 \cdot 10^5 \quad ; \quad Re_{\text{cavité}} = \frac{W_a d}{\nu} \approx 3 \cdot 10^4$$

$$Ta = \frac{W_a R}{\nu} \sqrt{d/R} \approx 1.8 \cdot 10^4$$

R représente le rayon intérieur de l'arbre, d est l'espacement entre l'arbre et le stator (fig.II.1), W_a est la vitesse de rotation de l'arbre ($W_a = \omega R$),.

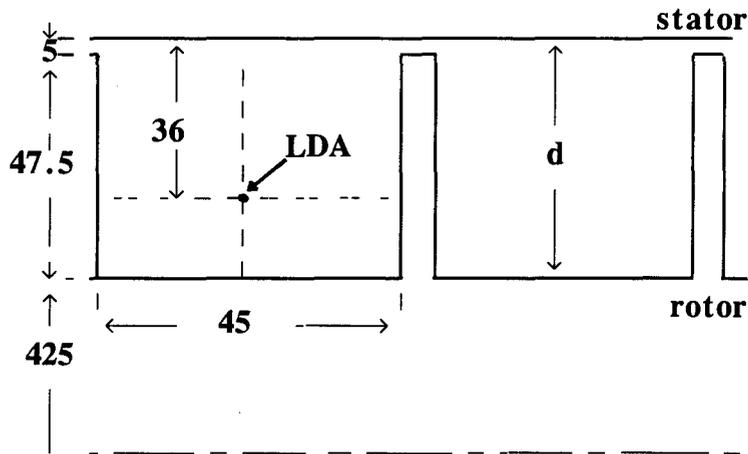


Fig.II.1: Modèle de Boyman et Stoff (dimensions en mm)

L'étude expérimentale menée par Boyman et Stoff présente des résultats de mesures de vitesses moyennes (composantes tangentielle et axiale) dans une chambre du joint labyrinthe à des positions bien déterminées, obtenus à l'aide d'un anémomètre à film chaud et d'un anémomètre laser doppler (LDA) (fig.II.1). Parallèlement, pour caractériser l'écoulement turbulent et axisymétrique de fluide incompressible, Stoff a utilisé un programme de calcul basé sur la méthode des différences finies avec un modèle de turbulence $k-\epsilon$. Le calcul a été effectué sur l'une des quatre cavités du modèle agrandi pour une grille de 33×33 .

2.2 Comparaison avec les résultats de Boyman et Stoff:

2.2.1 champ de vitesse:

Stoff a effectué un calcul d'écoulement stationnaire, axisymétrique et incompressible dans une chambre (fig.II.1), en essayant de simuler le comportement de l'écoulement en fonction du rapport U/W , c'est-à-dire, en fonction de l'influence plus

ou moins grande, soit de la vitesse axiale U , soit de la vitesse circonférentielle W . Il a mis en évidence trois régimes distincts suivant la structure de l'écoulement à l'intérieur de la chambre (**fig.II.2**).

Nous nous sommes attachés à retrouver ces trois cas d'écoulements. Le maillage a été effectué en utilisant le mailleur du code "ANSYS" et le modèle de turbulence utilisé est du type longueur de mélange (ceci a été plus largement développé dans le cadre de la réalisation de la version compressible). La figure **II.4** montre une concordance satisfaisante avec la figure **II.3** obtenue par Stoff dans le cas (b). D'une façon générale, on constate que l'on retrouve bien les trois régimes d'écoulements prévus par Stoff (**fig. II.4, II.5 et II.6**).

2.2.2 Vitesse circonférentielle:

Les profils de la vitesse circonférentielle obtenus sont similaires aux valeurs expérimentales de Boyman et Stoff respectivement dans le plan radial à la position médiane et dans le plan axial à $r=0,441\text{m}$ (**fig.II.7 et II.8**). Les mesures ont montré que la vitesse moyenne circonférentielle est environ 0,65 fois la vitesse de l'arbre. L'écart entre notre calcul et les mesures n'excède pas 6% d'erreur au lieu de 10% obtenu par le calcul de Stoff.

3.2.3 Vitesse axiale:

La représentation du profil de la vitesse axiale dans un plan méridien au milieu de la cavité, fait apparaître un changement de signe de la vitesse. Elle est de signe positif et maximal au niveau haut de la cavité et de signe négatif et minimal dans la partie basse où les mesures et les calculs sont en désaccord (**fig.II.9**). Stoff [13] indique que ce désaccord est essentiellement dû aux conditions expérimentales qui ne sont pas favorables à la mesure en direction axiale [13].

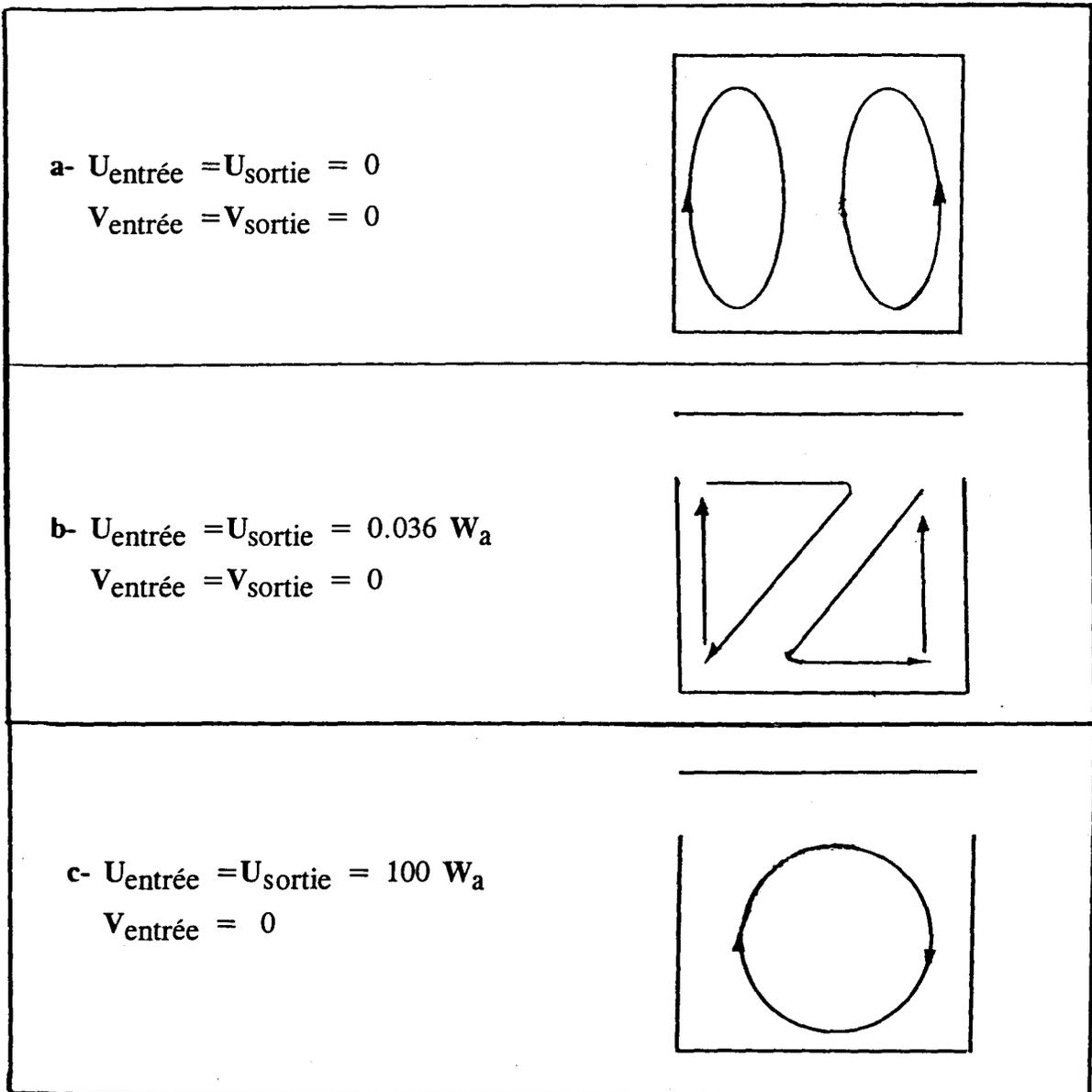


Fig.II.2. Régimes d'écoulements

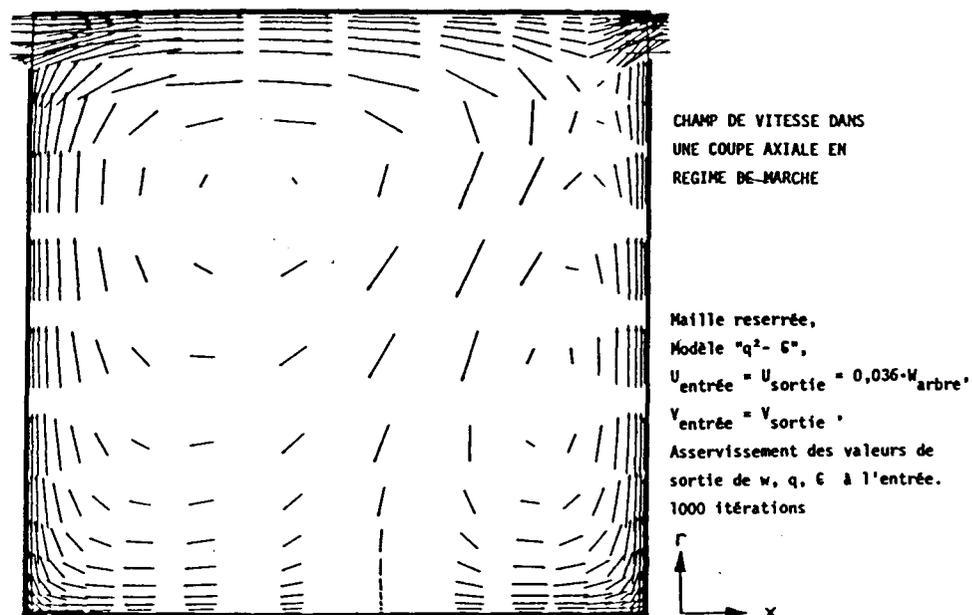


Fig.II.3: Calcul de Stoff (régime b)

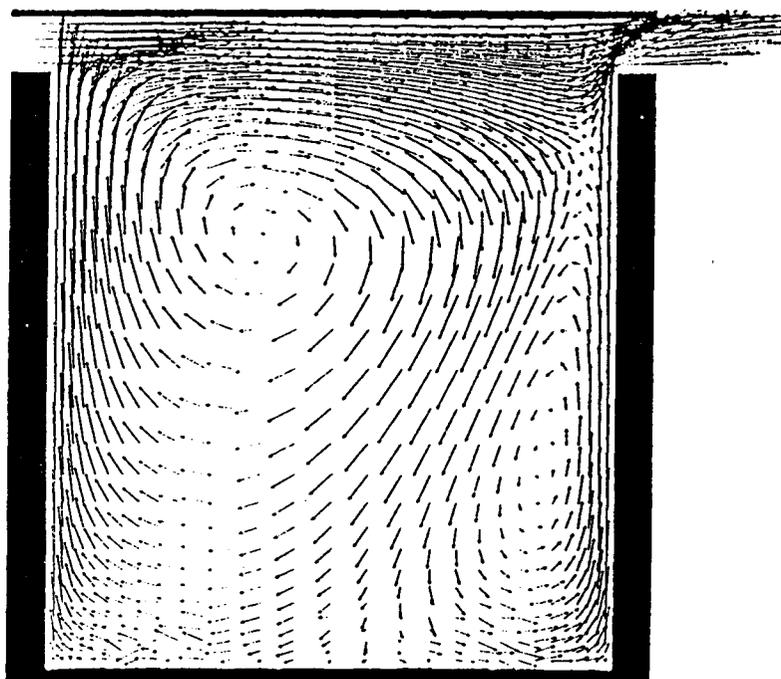


Fig.II.4: Calcul axisymétrique (régime b)

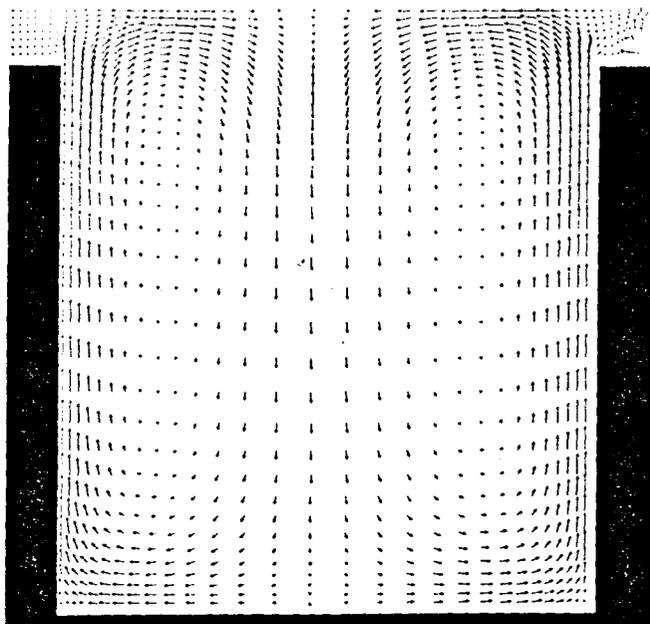


Fig.II.5: Régime (a) d'écoulement

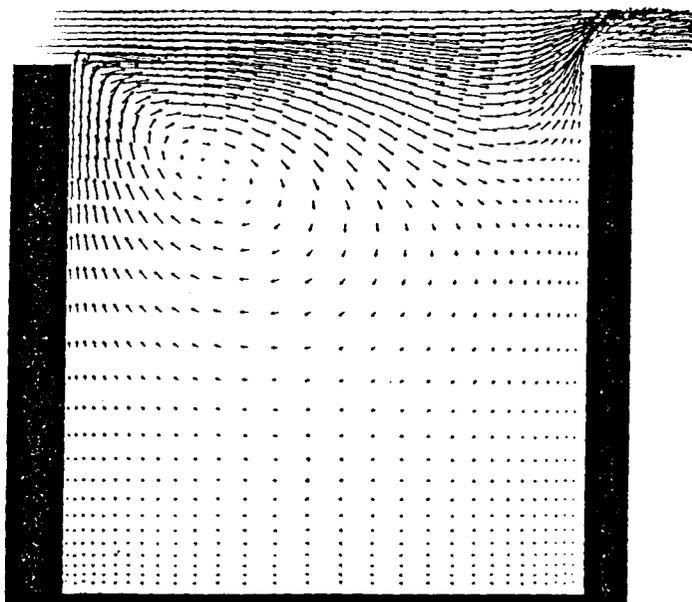


Fig.II.6: Régime (c) d'écoulement



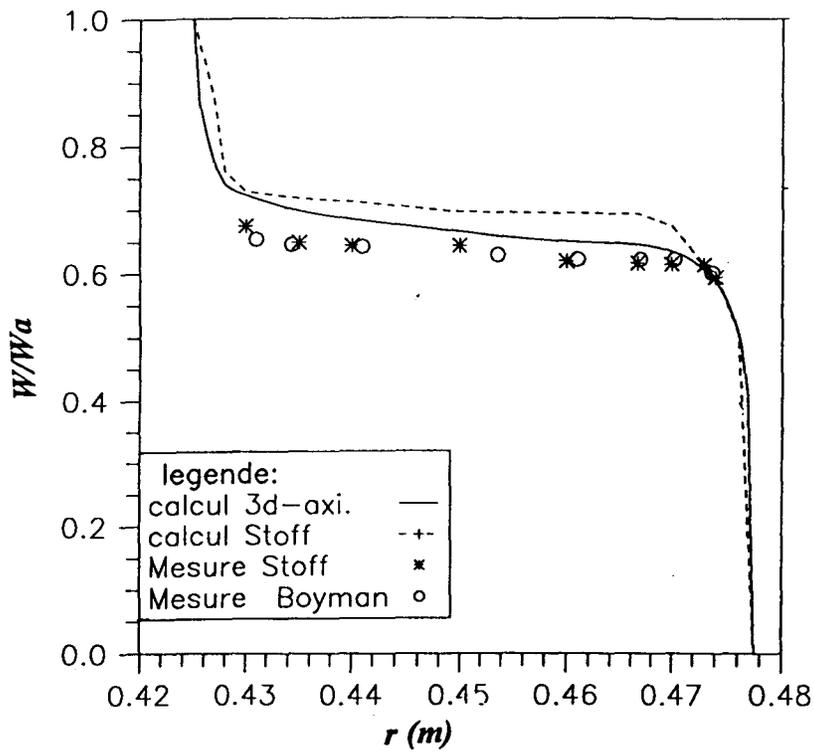


Fig.II.7: Comparaison des profils de la vitesse circonférentielle (plan radial)

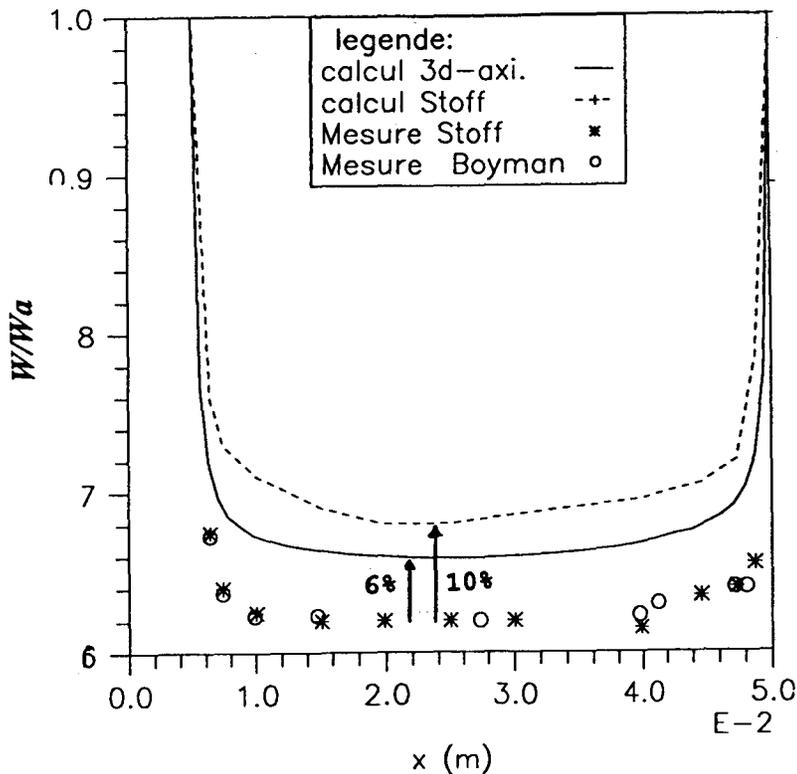


Fig.II.8: Comparaison des profils de la vitesse circonférentielle (plan axial)

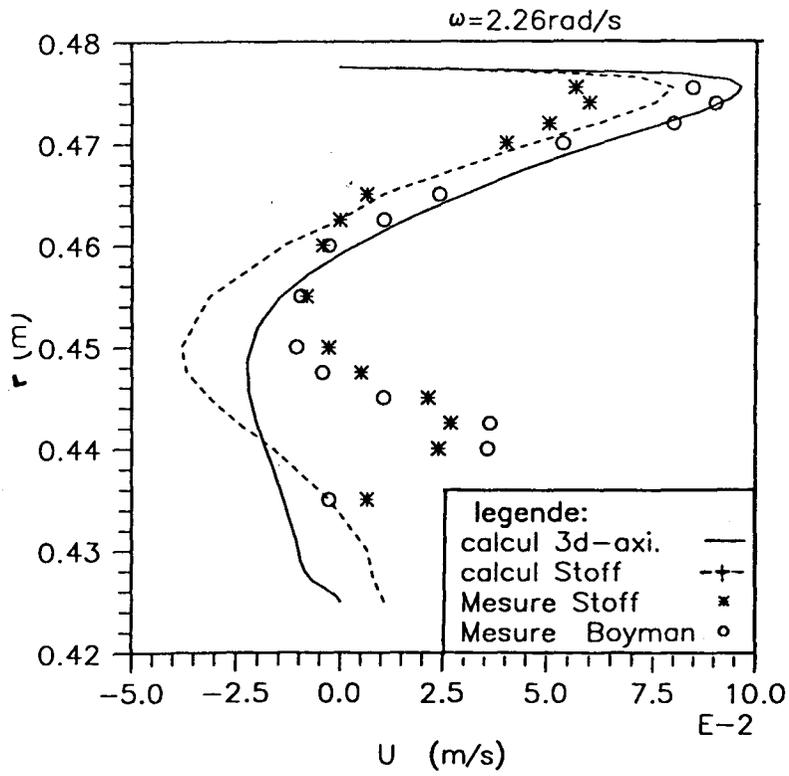


Fig.II.9: Comparaison des profils de la vitesse axiale (plan radial)



3. Formulation mathématique dans le cas compressible:

La méthode de résolution des équations de Navier-Stokes proposée est de type Euler-Lagrange, appelée formulation A.L.E (Arbitrary Lagrangian Eulerian). Un des points importants dans le choix de cette formulation est la relation entre les variables caractérisant l'écoulement et le repère lié à l'observateur. Les deux points de vue traditionnels sont d'une part la description Lagrangienne dans laquelle le repère suit les particules fluides dans leur mouvement, et d'autre part la description Eulérienne où les particules restent fixes dans l'espace.

3.1 Equations de base:

En tenant compte des hypothèses classiques précédemment citées, les équations qui régissent l'écoulement du fluide considéré sont l'équation de continuité, les équations de quantité de mouvement et l'équation d'état pour les gaz parfaits.

La résolution numérique de ces équations , consiste à évaluer les variables indépendantes, ρ , u , p , et T à l'instant t_{n+1} ($t_n + \Delta t$) connaissant leurs valeurs à l'instant t_n . Cette résolution nécessite une double discrétisation en espace et en temps.

Les deux premières équations écrites sous forme intégrale, sur un volume V quelconque limité par une surface S dont la vitesse en chaque point est \vec{u} , sont:

$$\left[\frac{D}{Dt} \right]_{\vec{U}} \int_V \rho dV - \int_S \rho (\vec{U} - \vec{u}) \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (\text{II.1})$$

$$\left[\frac{D}{Dt} \right]_{\vec{U}} \int_V \rho \vec{u} dV - \int_S \rho \vec{u} (\vec{U} - \vec{u}) \cdot \vec{n} dS = \int_V \text{div} \vec{\sigma} dV \quad (\text{II.2})$$

Le tenseur des contraintes $\vec{\sigma}$ traduisant l'effet des forces de pression et de celles dues aux frottements visqueux, s'écrit de la forme suivante:

$$\text{div}\vec{\sigma} = -\text{grad}P + \text{div}\vec{\tau}$$

$$\text{avec } \vec{\tau} = \mu(\text{grad}\vec{u} + (\text{grad}\vec{u})^T) + \lambda\text{div}\vec{u} \quad ; \quad \lambda = -\frac{2}{3}\mu$$

soit en notation d'Einstein:

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \tau_{ij} = -P\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\delta u_i}{\delta x_j} + \frac{\delta u_j}{\delta x_i}\right) - \frac{2}{3}\mu\frac{\delta u_i}{\delta x_i}\delta_{ij}$$

avec $\left[\frac{D}{Dt}\right]_{\vec{U}}$, la dérivée suivant l'élément de contrôle et \vec{U} , la vitesse arbitraire de déplacement du domaine d'étude.

A ces équations, s'ajoute l'équation d'état pour les gaz parfaits.

$$P = \rho R_c T \tag{II.3}$$

$$T = T_0 = \text{constante}, \quad \frac{dp}{d\rho} = R_c T_0 = c_0^2$$

Pour compléter ce système d'équations, il faudrait normalement écrire la conservation de l'énergie. Dans le cas de nombreux joints labyrinthe les surfaces d'échanges entre le fluide et la structure étant très importante, on peut supposer que l'écoulement est isotherme, c'est l'hypothèse que nous avons faite.

3.1.1 Discrétisation temporelle-Formulation A.L.E

Dans la formulation mixte "eulérienne-lagrangienne", les éléments se déplacent avec une vitesse arbitraire dite vitesse de "grille", ce qui offre la capacité supplémentaire de traiter des problèmes dans lesquels les domaines sont déformables. Cette formulation est basée sur la décomposition suivant une méthode à deux demi-pas fractionnaires de l'opérateur différentiel $\left[\frac{D}{Dt}\right]_{\vec{U}}$.

* 1er demi-pas:

$$\left[\frac{D}{Dt}\right]_{\vec{u}} \int_V \rho dV = 0 \quad (\text{II.4})$$

$$\left[\frac{D}{Dt}\right]_{\vec{u}} \int_V \rho \vec{u} dV = \int_V \text{div} \vec{\sigma} dV \quad (\text{II.5})$$

Au cours de ce premier demi-pas, on introduit la dérivée $\left[\frac{d}{dt}\right]_{\vec{u}}$ en suivant la particule fluide dans son mouvement avec sa vitesse \vec{u} , cette étape prend en compte des termes sources (diffusion, forces de pression), c'est la phase Lagrangienne.

* 2ème demi-pas:

$$\left(\left[\frac{D}{Dt}\right]_{\vec{U}} - \left[\frac{D}{Dt}\right]_{\vec{u}}\right) \int_V \rho dV - \int_S \rho (\vec{U} - \vec{u}) \vec{n} dS = 0 \quad (\text{II.6})$$

$$\left(\left[\frac{D}{Dt}\right]_{\vec{U}} - \left[\frac{D}{Dt}\right]_{\vec{u}}\right) \int_V \rho \vec{u} dV - \int_S \rho \vec{u} (\vec{U} - \vec{u}) \vec{n} dS = 0 \quad (\text{II.7})$$

Cette étape correspond à la prise en compte des termes convectifs, en suivant le domaine dans son déplacement avec la vitesse \vec{U} , c'est la phase d'interpolation.

Dans la suite de ce travail, on s'intéresse uniquement aux problèmes dans lesquels les domaines d'étude sont fixes ($\vec{U} = \vec{0}$).

si on pose:

$$\left[\frac{D}{Dt} \right]_{\vec{u}} = \frac{d}{dt} \quad ; \quad \left(\frac{D}{Dt} \right)_{\vec{u}} \left[\frac{D}{Dt} \right]_{\vec{u}} = \frac{D}{Dt}$$

Le système d'équations à résoudre devient:

* 1er demi-pas:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0 \quad (\text{II.8})$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{u} dV = - \int_V g \vec{r} \text{ad} P dV + \int_V \text{div} \vec{\tau} dV \quad (\text{II.9})$$

$$P = \rho R_c T. \quad (\text{II.10})$$

* 2ème demi-pas:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho dV + \int_S \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (\text{II.11})$$

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \vec{u} dV - \int_S \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS = 0 \quad (\text{II.12})$$

■ Discrétisation temporelle:

La discrétisation temporelle est de type différences finies, les dérivées temporelles $\left(\frac{d}{dt} \right)$ sont approximées au premier ordre. Connaissant les grandeurs variables

à l'instant t (t_n), l'objectif est de les déterminer à l'instant $t+\Delta t$ (ou t_{n+1}).

Dans cette première phase, le calcul est effectué en semi-implicite entre les instants t_n et t_{n+1} , en passant par une étape intermédiaire définie par $\vec{x}_1 = \vec{x}_n + \Delta t \vec{u}_n$, liant les points du volume V_1 aux points du volume V_n .

$$\frac{1}{\Delta t} \left[\int_{V_1} \rho_1 dV - \int_{V_n} \rho_n dV \right] = 0 \quad (\text{II.13})$$

$$\frac{1}{\Delta t} \left[\int_{V_1} \rho_1 \vec{u}_1 dV - \int_{V_n} \rho_n \vec{u}_n dV \right] = - \int_{V_1} \vec{\nabla} P_1 dV + \int_{V_n} \text{div} \vec{\tau}_n dV \quad (\text{II.14})$$

$$P_1 = \rho_1 R_c T_0 \quad (\text{II.15})$$

Dans la deuxième phase, les équations (II.11) et (II.12) s'écrivent d'une façon explicite. Les points du volume V_{n+1} sont liés aux points du volume V_n par $\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n - \Delta t \vec{u}_1$. Les domaines d'étude étant supposés fixes, on peut écrire:

$$V_{n+1} = V_n \quad \text{et} \quad S_{n+1} = S_n$$

$$\frac{1}{\Delta t} \left[\int_{V_n} \rho_{n+1} dV - \int_{V_1} \rho_1 dV \right] + \int_{S_1} \rho_1 \vec{u}_1 \vec{n} dS = 0 \quad (\text{II.16})$$

$$\frac{1}{\Delta t} \left[\int_{V_n} \rho_{n+1} \vec{u}_{n+1} dV - \int_{V_1} \rho_1 \vec{u}_1 dV \right] + \int_{S_1} \rho_1 \vec{u}_1 (\vec{u}_1 \vec{n}) dS = 0 \quad (\text{II.17})$$

3.1.2 Discrétisation spatiale:

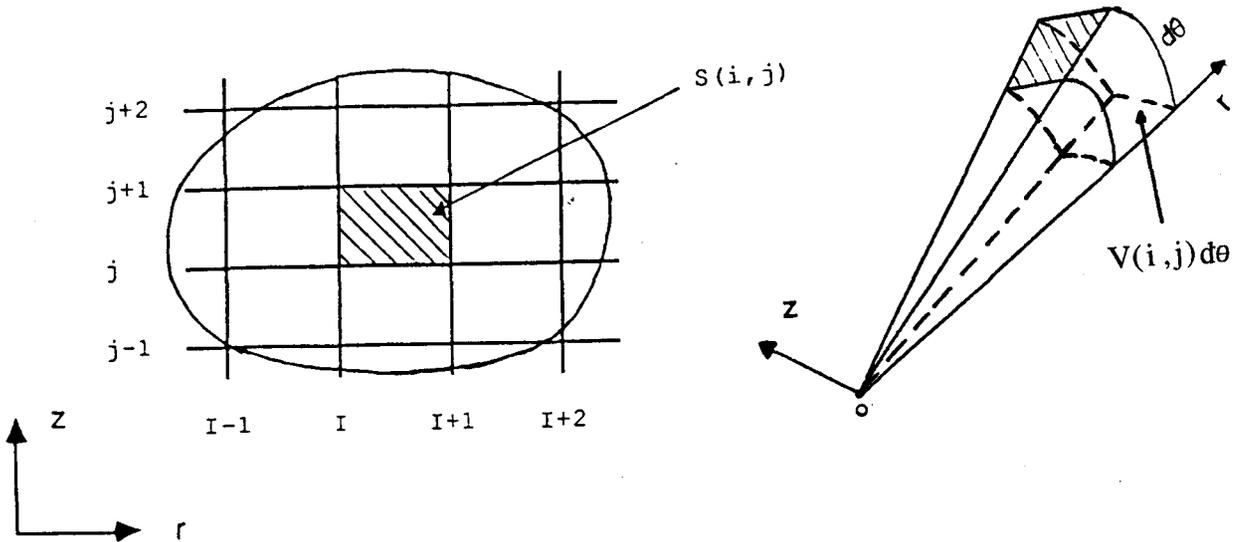


Fig.II.10: Discrétisation spatiale

La discrétisation spatiale est de type éléments finis, ces éléments sont des quadrilatères engendrés par rotation autour de l'axe Oz. Dans le plan (rOz), le domaine de calcul est constitué par un recouvrement régulier de quadrilatères (mailles) à quatre noeuds, repérés par des indices (i,j) et de surface S(i,j) (fig.II.10).

Les variables vectorielles $\vec{\phi}$ sont approximées par des fonctions de pondération ou d'interpolation N_i bilinéaires.

$$N_1=(1-\xi)(1-\eta) \quad ; \quad N_2=\xi(1-\eta) \quad ; \quad N_3=\eta\xi \quad ; \quad N_4=(1-\xi)\eta$$

$$\vec{\phi} = \sum_{i=1}^4 N_i \vec{\phi}_i = N_1 \vec{\phi}_1 + N_2 \vec{\phi}_2 + N_3 \vec{\phi}_3 + N_4 \vec{\phi}_4 \tag{II.18}$$

Les indices 1 à 4 correspondant respectivement à (i+1,j), (i+1,j+1), (i,j+1) et (i,j) comme l'indique la figure II.11.

Les variables scalaires (pression, masse volumique, viscosité et tenseur des contraintes) sont supposées constantes sur chaque maille.

$S(i,j)$ et $\gamma(i,j)$ sont respectivement la surface et le contour d'une maille. $S'(i,j)$ et $\gamma'(i,j)$ correspondent respectivement à la surface et au contour d'une maille entourant un noeud (fig.II.12).

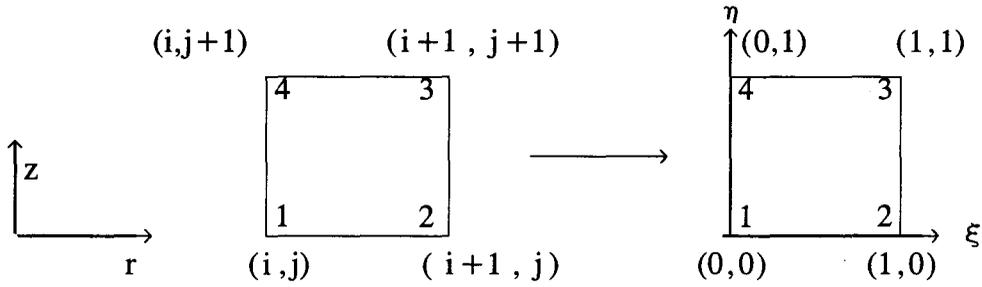


Figure . II.11

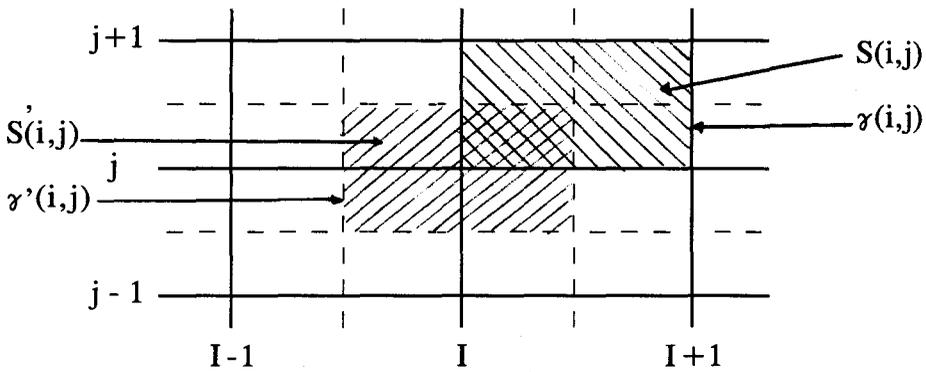


Figure.II.12

Dans le cas des configurations purement eulériennes ($\vec{U}=\vec{0}$), le système final comporte cinq équations à résoudre.

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{V_n} (\rho_l - \rho_n) dV - \int_{V_n} \rho_l d\vec{\gamma} v u dV = 0 \quad (\text{II.19})$$

$$P_l = \rho_l R_c T_o \quad (\text{II.20})$$

$$\frac{1}{\Delta t} \left[\int_{V_n} \rho_l \vec{u} dV - \int_{V_n} \rho_n \vec{u} dV \right] = - \int_{V_n} \vec{\nabla} P_l dV + \int_{V_n} \text{div} \vec{\tau}_n dV \quad (\text{II.21})$$

$$\frac{1}{\Delta t} \left[\int_{V_n} \rho_{n+1} dV - \int_{V_1} \rho_l dV \right] + \int_{S_1} \rho_l \vec{u} \vec{n} dS = 0 \quad (\text{II.22})$$

$$\frac{1}{\Delta t} \left[\int_{V_n} \rho_{n+1} \vec{u}_{n+1} dV - \int_{V_1} \rho_l \vec{u} dV \right] + \int_{S_1} \rho_l \vec{u} (\vec{u} \vec{n}) dS = 0 \quad (\text{II.23})$$

a- Equation de continuité:

Dans la suite de cette étude, on traite uniquement le cas d'écoulements axisymétriques, les équations étant exprimées en coordonnées cylindriques. Il en résulte que $\frac{\delta}{\delta \theta} = 0$. En considérant le cas explicite pour la masse volumique (ρ constant par maille de volume $V(i,j)$), l'équation de continuité s'écrit du fait que ρ est constant par maille de volume $V(i,j)$:

$$\frac{\rho_l - \rho_n}{\Delta t} \int_{V(i,j)} dV + \rho_n \int_{V(i,j)} \text{div} \vec{u}_l dV = 0 \quad (\text{II.24})$$

$V(i,j)$ est le volume de la maille calculé à "de" près (fig.II.10). Compte-tenu de l'équation d'état, on aboutit à la relation suivante:

$$\frac{(P_1 - P_n)V_n}{c_0^2 \Delta t} + \rho_n \int_{V(i,j)} \text{div} \vec{u} dV = 0 \quad (\text{II.25})$$

$$\int_V \text{div} \vec{u} dV = \int_V \left(\frac{\delta u}{\delta r} + \frac{u}{r} + \frac{\delta v}{\delta z} \right) r dr dz$$

Il est à noter qu'en raison de l'hypothèse d'axisymétrie, la vitesse circumférentielle w n'intervient pas dans l'équation de la continuité.

Après la substitution de la pression et l'évaluation de l'intégrale précédente sur chaque maille (i,j) , on aboutit à une relation faisant intervenir les coefficients géométriques qui correspondent aux quatres noeuds de la maille et que l'on notera $cu(i,j,k)$ et $cv(i,j,k)$, (pour $k=1$ à 4).

$$\frac{(P_1 - P_n)V_n}{c_0^2 \Delta t} + \rho_n F_{i,j} (cu, cv, \vec{u}) = 0 \quad (\text{II.26})$$

a- Equations de quantité de mouvement:

- phase explicite:

L'équation (II.26) devient, pour les surfaces $S'(i,j)$ entourant les noeuds, dont le contour est $\gamma'(i,j)$:

$$\frac{1}{\Delta t} \left[\int_{S(i,j)} \rho_i \vec{u} dS - \int_{S(i,j)} \rho_n \vec{u} dS \right] = - \int_{S(i,j)} \vec{\nabla} P_1 dS + \int_{S(i,j)} \text{div} \vec{\tau}_n dS \quad (\text{II.27})$$

La projection de cette équation dans les trois directions (r, θ, z) donne:

$$r: \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{S^{(i,j)}} \rho_l u_l dS - \int_{S^{(i,j)}} \rho_n u_l dS \right] = - \int_{S^{(i,j)}} \left(\frac{\delta P}{\delta r} + \frac{1}{r} \frac{\delta}{\delta r} (r \tau_{rr}) - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\delta \tau_{rz}}{\delta z} \right) dS \quad (\text{II.28})$$

$$z: \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{S^{(i,j)}} \rho_l v_l dS - \int_{S^{(i,j)}} \rho_n v_l dS \right] = - \int_{S^{(i,j)}} \left(\frac{\delta P}{\delta z} + \frac{1}{r} \frac{\delta}{\delta r} (r \tau_{rz}) + \frac{\delta \tau_{zz}}{\delta z} \right) dS \quad (\text{II.29})$$

$$\theta: \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{S^{(i,j)}} \rho_l w_l dS - \int_{S^{(i,j)}} \rho_n w_l dS \right] = \int_{S^{(i,j)}} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\delta (r^2 \tau_{r\theta})}{\delta r} + \frac{\delta \tau_{\theta z}}{\delta z} \right) dS \quad (\text{II.30})$$

Les différentes composantes du tenseur des contraintes visqueuses τ_{ij} sont calculées en faisant les moyennes des composantes du tenseur du taux de déformation ϵ_{ij} , la viscosité étant constante par maille, on note:

$$\tau_{rr} = \frac{1}{S} \int_S 2\mu \frac{\delta u}{\delta r} r dr dz \quad \frac{2}{3} \mu D \quad ; \quad \tau_{zz} = \frac{1}{S} \int_S 2\mu \frac{\delta v}{\delta r} r dr dz \quad \frac{2}{3} \mu D$$

$$\tau_{\theta\theta} = \frac{1}{S} \int_S 2\mu \frac{u}{r} r dr dz \quad \frac{2}{3} \mu D \quad ; \quad \tau_{rz} = \frac{1}{S} \int_S \mu \left(\frac{\delta v}{\delta r} - \frac{\delta u}{\delta z} \right) r dr dz$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{S} \int_S \mu \left(\frac{\delta w}{\delta r} - \frac{w}{r} \right) r dr dz \quad ; \quad \tau_{\theta z} = \frac{1}{S} \int_S 2\mu \frac{\delta w}{\delta z} r dr dz$$

$$\text{avec:} \quad D = \frac{1}{S} \int_S \left(\frac{\delta u}{\delta r} + \frac{u}{r} + \frac{\delta v}{\delta z} \right) r dr dz$$

Les intégrales des termes de pression et des termes visqueux font intervenir respectivement les coefficients géométriques (c_x, c_y) et (c_u, c_v) .

Afin de calculer les intégrales des vitesses en évitant la résolution d'un système matriciel faisant intervenir les vitesses de tous les noeuds environnant la surface S' , la vitesse \vec{u} est supposée constante sur $S'(i,j)$ et égale à la vitesse au noeud central $\vec{u}(i,j)$. On aboutit finalement à une relation de la forme:

$$\frac{1}{\Delta t} \left[\int_{S^{(i,j)}} \rho_{n+1} \vec{u}_{n+1} dS - \int_{S^{(i,j)}} \rho_i \vec{u}_i dS \right] + \int_{\gamma^{(i,j)}} \rho_i \vec{u}_i (\vec{u}_i \vec{n}) d\gamma = 0 \quad (\text{II.36})$$

Pour les intégrales des vitesses sur (S'), l'approximation des vitesses est constante, et l'équation (II.36) devient:

$$\frac{1}{\Delta t} \left[\vec{u}_{n+1} \int_{S^{(i,j)}} \rho_{n+1} dS - \vec{u}_i \int_{S^{(i,j)}} \rho_i dS \right] + \int_{\gamma^{(i,j)}} \rho_i \vec{u}_i (\vec{u}_i \vec{n}) d\gamma = 0 \quad (\text{II.37})$$

En ce qui concerne l'intégrale des termes convectifs dans l'équation (II.37), le contour γ est décomposé en 8 segments γ_i de normale \vec{n}_i (fig.II.15). Pour chaque noeud (i,j), l'intégrale $\int_{\gamma^{(i,j)}} \rho_i \vec{u}_i (\vec{u}_i \vec{n}) d\gamma$ est approximée par:

$$\sum_{i=1}^8 \rho_i \vec{u}_i \int_{\gamma_i} \vec{u}_i \vec{n}_i d\gamma_i - \rho_i \gamma' w_i^2 \vec{e}_r + \rho_i \gamma' u_i w_i \vec{e}_\theta \quad (\text{II.38})$$

où \vec{u}_i sont des constantes sur chaque segment γ_i dont la valeur est obtenue par une technique de type différence-amont qui dépend du signe des flux $\int_{\gamma_i} \vec{u}_i \vec{n}_i d\gamma_i$, on obtient finalement, une relation de la forme:

$$\vec{u}_{n+1}(i,j) = H_{i,j}(cx,cy,\vec{u}_i,M_i,M_{n+1},\Delta t,\rho_i,\rho_{n+1}) \quad (\text{II.39})$$

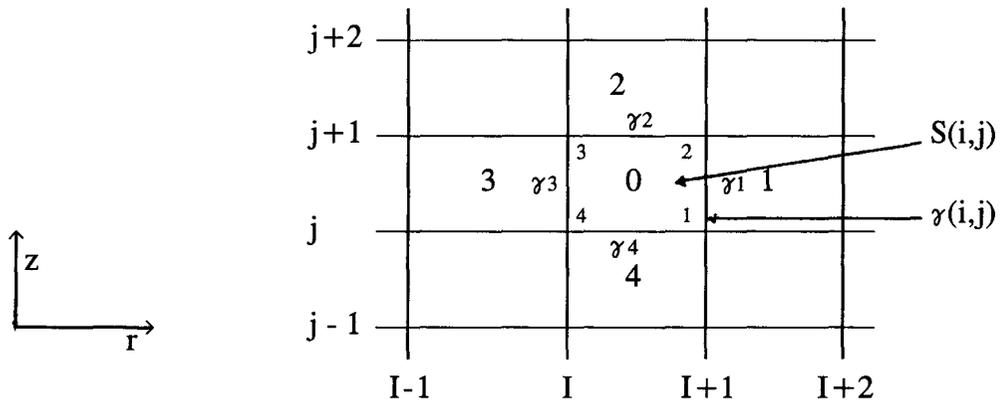


Figure.II.14

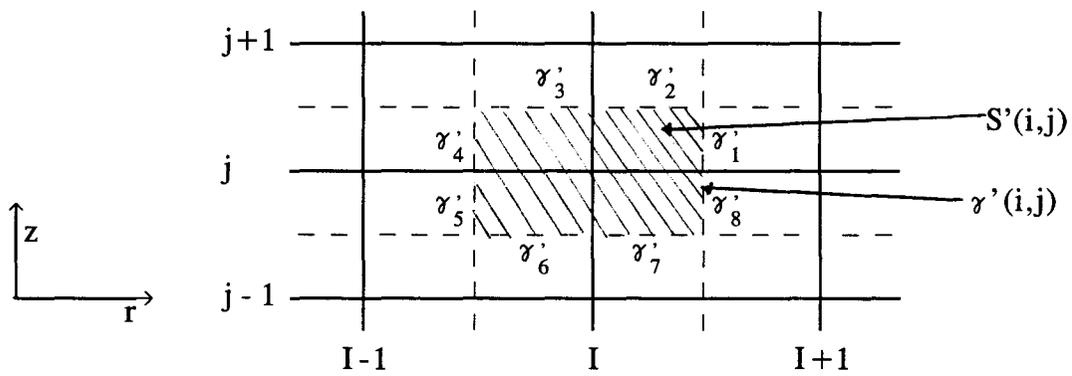


Figure.II.15

3.2 Remarque:

La masse volumique étant supposée constante, le problème est plus simple que le cas d'un fluide compressible. L'équation de conservation de la masse est de la forme suivante:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{u} dV = 0 \quad (\text{II.40})$$

La masse volumique est constante. Le système (II.33) devient:

$$\left[C_p \right] \left\{ P_i - P_n \right\} = \left\{ S_m \right\} \quad (\text{II.41})$$

Dans ce cas, le calcul des coefficients de la matrice de pression est effectué une seule fois, ce qui diminue notablement le coût de calcul.

Le code a été utilisé en régime laminaire comme en régime turbulent sans difficultés dans plusieurs cas de figures, et notamment dans le canal et la marche [54], les paliers hydrostatiques [55] et des écoulements entre disques avec rotation [56].

3.3 Maillage et conditions aux limites:

3.3.1 Maillage:

Le maillage d'un domaine physique est réalisé à l'aide du logiciel graphique "Ansys" ce qui permet d'obtenir un maillage orthogonal (ou non orthogonal) avec un raffinement automatique dans une zone bien déterminée (voisinage de la paroi). En raison de l'hypothèse d'axisymétrie, le maillage du domaine de calcul se limite au plan méridien et pour des commodités de discrétisation, une première maille d'épaisseur nulle est prise en compte dans la direction radiale, ce qui impose que l'axe de symétrie correspond à la seconde colonne. Sur cet axe, la vitesse radiale est nulle. Pour satisfaire cette condition, on impose dans la phase Lagrangienne que la vitesse radiale suivant r est nulle pour les noeuds 1 et 4 de chaque maille.

3.3.2 Conditions aux limites:

Pour résoudre un système d'équations en mécanique des fluides, il faut bien sûr définir les conditions initiales et aux conditions aux limites du problème posé. D'une manière générale, ces conditions sont très difficiles à obtenir expérimentalement lorsque l'on veut corréler le calcul par des mesures sur des configurations industrielles. Le choix se résume ici à deux types de conditions à l'entrée suivant l'étude de Dutoya [57]: soit on se donne le débit en imposant un champ de vitesse avec les conditions de Dirichlet sur la vitesse tangentielle initiale soit on fixe la pression statique. Le dernier choix est retenu dans le cas industriel, car seule la pression est connue. Sur la frontière solide, on impose une condition de non glissement. A la sortie, on se fixe la pression.

2.4 Critère de stabilité:

La résolution du système d'équations (II.19 à II.23) ne présente pas de difficultés. Mais deux contributions sont calculées de façon explicite: la contribution des termes visqueux et celle des termes de convection. Ceci conduit pour

garantir la stabilité à l'existence de deux pas de temps limites, notés respectivement dt_v et dt_c . Le pas de temps utilisé est calculé de la manière suivante:

$$dt = \alpha_0 * \min(dt_v, dt_c) , \text{ où } \alpha_0 \text{ est fixé arbitrairement tel que } 0 < \alpha_0 < 1.$$

3.5 Modèle de turbulence:

Le caractère turbulent d'un écoulement de fluide apparaît au-delà d'une valeur critique d'un nombre de Reynolds. Les grandeurs physiques caractérisant l'écoulement varient d'une façon aléatoire en fonction d'espace et du temps, chaque grandeur se décompose en une valeur moyenne plus une fluctuation.

Les équations de l'écoulement turbulent moyen possèdent la même structure que celles de l'écoulement laminaire, à l'exception des termes fluctuants qui apparaissent dans les équations de la quantité de mouvement. Ces termes forment le tenseur symétrique des contraintes turbulentes (ou tenseur de Reynolds) qui se traduit par l'influence des fluctuations de vitesse sur l'écoulement moyen [59]. La fermeture du système d'équations passe par la modélisation du tenseur de Reynolds ($\overline{\rho u_i u_j}$).

$$\overline{\rho u_i u_j} = -\mu_t \left(\frac{\delta u_i}{\delta x_j} + \frac{\delta u_j}{\delta x_i} \right) + \frac{2}{3} \mu_t \frac{\delta u_i}{\delta x_i} \delta_{ij} - \frac{2}{3} k \quad (\text{II.42})$$

avec $k = \frac{1}{2} \sum_i \overline{\rho u_i^2}$ (énergie cinétique turbulente)

Dans le cas des écoulements incompressibles, le terme décrivant la compressibilité du fluide est supposé nul, de plus on néglige le terme lié à l'énergie cinétique turbulente devant le terme de pression.

$$\overline{\rho u_i u_j} = -\mu_t \left(\frac{\delta u_i}{\delta x_j} + \frac{\delta u_j}{\delta x_i} \right) \quad (\text{II.43})$$

La viscosité effective est composée alors de la viscosité moléculaire (μ) et de la viscosité turbulente (μ_t).

$$\mu_{\text{eff}} = \mu_t + \mu \quad (\text{II.44})$$

Il est donc nécessaire, pour effectuer des tests turbulents de déterminer la viscosité turbulente μ_t . Dans un joint labyrinthe les écoulements sont fortement cisailés. Notre choix s'est porté sur un modèle algébrique simple obtenu par généralisation à un écoulement 3-D du modèle proposé par Prandtl en 1925 pour un écoulement plan [60], en posant:

$$\nu_t = l^2 \left| \frac{\delta u}{\delta y} \right| \quad (\text{II.45})$$

avec: $\nu_t = \mu_t / \rho$: viscosité turbulente
 l : longueur de mélange
 $\frac{\delta u}{\delta y}$: terme de cisaillement

Prandtl a remarqué que la longueur de mélange l représente une longueur statistique de parcours des nuages turbulents dans la direction transversale à la couche de cisaillement et elle est proportionnelle à la distance à la paroi dans le cas d'une couche limite pariétale en excluant la sous couche visqueuse. Escudier (1966) a affiné cette relation en affectant une valeur constante à la longueur de mélange dans la zone où la variation de vitesse est faible. Pour prendre en compte la sous-couche visqueuse attenante à la paroi, la relation utilisée est celle de Van-Driest (1956) [61]:

$$l = ky \left[1 - e^{-\frac{y^+}{a}} \right] \quad ; \quad a = y \frac{(\tau_s \rho)^{1/2}}{\mu} \quad (\text{II.46})$$

avec y la distance à la paroi, τ_s la contrainte de frottement pariétale, et les constantes empiriques $k=0.41$ et $a=26.0$.

La détermination de τ_s et l se fait de manière explicite en temps, et les variables sont considérées constantes par maille. Le calcul de ν_t fait intervenir les différentes composantes du tenseur de déformation $\vec{\varepsilon}$, $|\frac{\delta u}{\delta y}|$ est remplacé par $\|\vec{\varepsilon}\|$.

$$\nu_t = l^2 \|\vec{\varepsilon}\| \quad (\text{II.47})$$

On peut noter que pour le cas d'écoulement axisymétrique, la contrainte de cisaillement pariétale s'écrit:

$$\|\vec{\varepsilon}\| = \left[2(\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{tt}^2) + 4(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{xt}^2 + \varepsilon_{yt}^2) \right]^{1/2} \quad (\text{II.48})$$

Le modèle de longueur de mélange est un modèle simple, sans équation différentielle à résoudre, valable pour un choix approprié de l'expression de l , il donne des prédictions réalistes du comportement général des écoulements turbulents dans le cas où l'écoulement est fortement confiné.

3.6 Validation de la version compressible:

La validation de l'écriture du code a été faite par comparaison des résultats obtenus avec la version incompressible pour des configurations d'écoulements identiques.

Les résultats étant très voisins, on peut donc considérer que la version compressible du code est opérationnelle.

4. Conclusion:

La version incompressible du code de calcul permettant la résolution des équations de Navier-Stokes pour des écoulements 3-D axisymétriques a été validée pour des configurations du même type que celles rencontrées dans les joints labyrinthe par comparaison avec les résultats de Boyman et Stoff. Au vu des résultats satisfaisants obtenus, la version compressible du code a été créée, version qui a été validée par comparaison avec la version incompressible pour les configurations d'écoulements identiques.

Par ailleurs, il est important de parler de la convergence des différentes grandeurs physiques caractérisant l'écoulement. D'une façon générale, la pression et les composantes axiale et radiale de la vitesse, convergent plus vite (≈ 3000 itérations) alors que la vitesse circumférentielle continue à évoluer très lentement à l'intérieur des chambres. En effet, pour obtenir une bonne représentation du profil de la vitesse circumférentielle, il faut environ 15000 itérations sur une station IBM RISC/6000. En réalité, dans ce code, la programmation n'est pas optimisée pour le temps de calcul, mais plutôt pour faciliter l'adaptation rapide à différentes situations physiques possibles.

CHAPITRE.III

CALCUL LOCAL AXISYMETRIQUE

1. Introduction:

Dans les turbomachines, il existe plusieurs types de joints labyrinthe dont la géométrie et les conditions de fonctionnement sont différentes.

Pour notre part, toujours dans l'idée d'étudier la validité des hypothèses du modèle de Childs, nous nous sommes penchés sur l'étude des deux grandes catégories de joints labyrinthe:

- à dents portées par le rotor,
- à dents portées par le stator.

Pour les joints de la première catégorie, les vitesses circonférentielles créées par entraînement visqueux dans les chambres sont importantes et c'est pour cette catégorie de joints que les effets liés à la rotation doivent être les plus sensibles. Nous avons déterminé les caractéristiques de l'écoulement pour deux joints (le premier à dents rectangulaires, le deuxième à dents triangulaires) (fig.III.1 et III.2, p.81). Ces deux joints, **pour le modèle de Childs, seraient modélisés géométriquement de la même façon** (fig.III.11, p.87); l'épaisseur des dents est supposée nulle, on ne tient compte de la variabilité de la forme des dents qu'à travers la surface de contact utilisée pour le calcul des contraintes de cisaillement. Cette première étude a été effectuée en compressible, le modèle global ayant été initialement créé dans ce contexte.

Dans la deuxième catégorie nous n'avons traité que le cas d'un seul joint mais l'examen des résultats obtenus suffit pour confirmer les conclusions de l'étude faite pour les joints de la première catégorie. L'étude a été effectuée en incompressible, les temps de calcul étant moins élevés, ce qui est justifié par le fait que les hypothèses utilisées en compressible isotherme et en incompressible sont identiques, la seule différence étant que finalement la grandeur $(P_{i-1} + P_i)/(R_c T)$ qui correspond en fait à 2ρ moyen au droit des dents est remplacée par 2ρ dans la corrélation débit-pression.

Pour les différents joints, les conditions de fonctionnement "nominales" sont les suivantes:

- $U_e=10$ m/s : vitesse axiale à l'entrée
- $P_s=10^5$ Pasc. : pression de sortie
- $\omega=10^3$ rad/s : vitesse de rotation

2. Première catégorie de joints: (joints à dents sur le rotor)

Dans l'optique de déterminer le comportement de l'écoulement local dans les joints labyrinthe, nous avons modélisé deux types de joints comportant trois chambres identiques séparées par des dents équidistantes portées par le rotor. Le premier est à dents rectangulaires (fig.III.1) et le second à dents triangulaires avec un angle d'ouverture de 28° (fig.III.2).

Le maillage des domaines d'étude a été effectué à l'aide du logiciel "ANSYS" [53]. Pour les deux cas de figures, le nombre de cellules est de 3200, elles sont serrées au voisinage de la paroi et desserrées ailleurs. Les cellules pariétales ont pour largeur $1/70$ de la largeur globale de la chambre. En plus, il est à noter que le maillage est orthogonal dans le cas du joint à dents rectangulaires et non-orthogonal dans le cas du joint à dents triangulaires (fig.III.3 et III.4).

2.1 résultats de calcul et évaluation qualitative des hypothèses du modèle global:

* Champ de vitesse:

Les figures III.5 et III.6 montrent la structure des champs de vitesse pour le joint1 (joint à dents rectangulaires) et le joint2 (joint à dents triangulaires) obtenus à l'état stationnaire sur le pas de temps. Dans les deux cas tests et pour chaque cavité, on distingue deux zones de recirculation: l'une de grande taille située en amont dans la partie supérieure de la cavité, l'autre de petite taille se trouve à droite au coin bas de la cavité. Ces zones tourbillonnaires sont de sens opposés et

leurs noyaux se trouvent sur la même diagonale de la cavité. Ceci est cohérent avec un calcul effectué par Dutoya [61] dans une cavité rectangulaire en rotation qui montre l'existence des deux structures tourbillonnaires. Par ailleurs, la structure de "jet" au droit des dents apparaît clairement.

*** vitesse circonférentielle:**

Les figures III.7 et III.8 montrent les profils des vitesses circonférentielles tracés dans des plans radial (au milieu d'une chambre) et axial (à $r=0.039m$) respectivement pour le joint1 et le joint2. La comparaison des profils des vitesses circonférentielles des deux types de joints pour une chambre donnée présente un écart inférieur à 2% en outre, on constate que la vitesse moyenne circonférentielle est comprise entre 0.6 à 0.7 fois la vitesse de l'arbre. L'hypothèse d'une vitesse circonférentielle uniforme dans les chambres hors les couches limites sur les parois et hors le "jet" au droit des dents, faite dans le modèle global, est justifiée.

*** pression:**

La figure III.9 représente les profils de pression pour les deux types de joints labyrinthe. Ces profils de pression ont été obtenus en faisant une moyenne de la pression dans chaque plan radial de manière à être cohérent avec la notion de pression de chambre introduite dans le modèle global. Ceci explique la brusque chute de pression constatée à la sortie des dents qui correspond en fait à l'augmentation brutale de la vitesse circonférentielle qui passe de 0 à environ $0.6W_a$ (fig.III.7 et III.8) et masque la remontée de pression due à la récupération de l'énergie cinétique du jet. A l'entrée des dents la chute de pression due à la mise en vitesse du jet est masquée par la diminution de la vitesse circonférentielle. Ceci est confirmé sur la figure III.10 où les profils de pression présentés correspondent à une moyenne de pression effectuée sur la hauteur des dents.

Bien que les allures des deux courbes (fig.III.9 et III.10) soient très différentes, l'écart de pression amont-aval reste le même ce qui correspond au fait que l'évolution des profils de vitesse circonférentielle en aval et en amont d'une dent est assez "symétrique"

Finalement, l'hypothèse de Childs supposant des pressions de chambre uniformes et que le débit "axial" au droit d'une dent peut être calculé uniquement en fonction de ces pressions comme pour un écoulement sans rotation est approximativement justifiée, mais il est tout à fait clair que c'est sûrement le point délicat de ce modèle global.

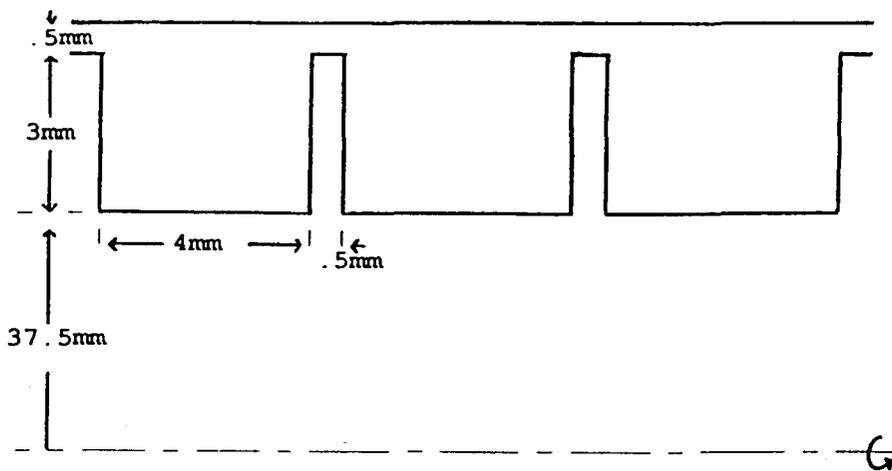


Fig.III.1: joint labyrinthe à dents rectangulaires=joint1

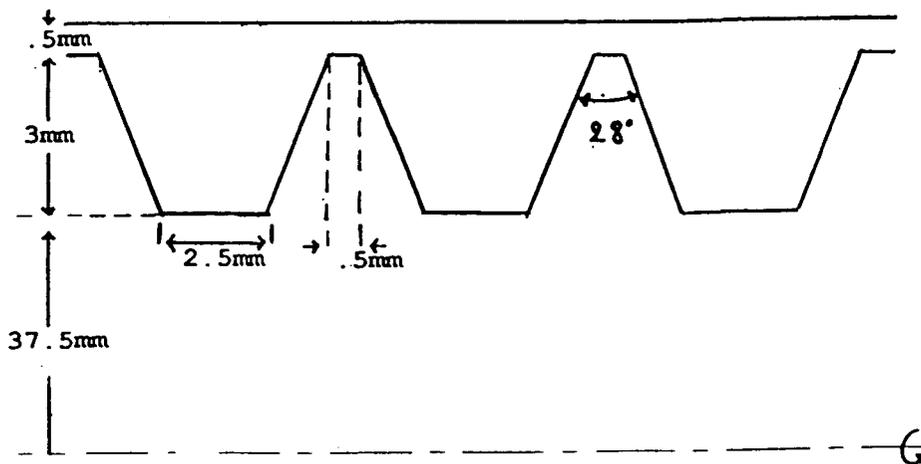


Fig.III.2: joint labyrinthe à dents rectangulaires=joint2

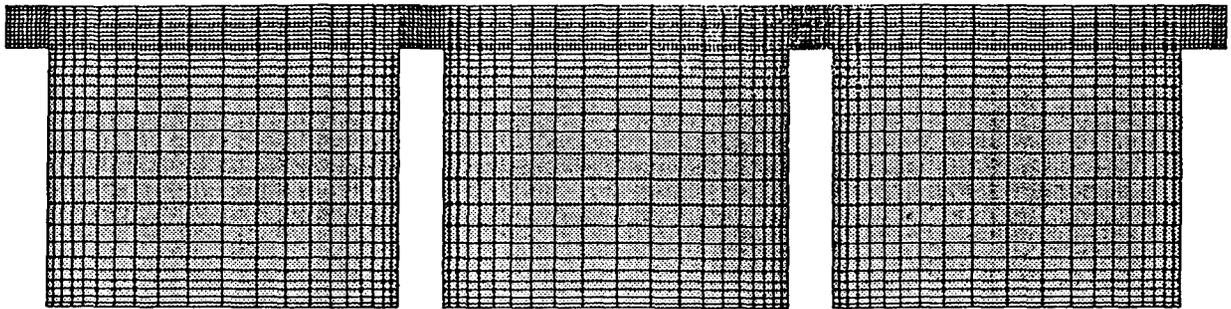


Fig.III.3: Maillage du joint1

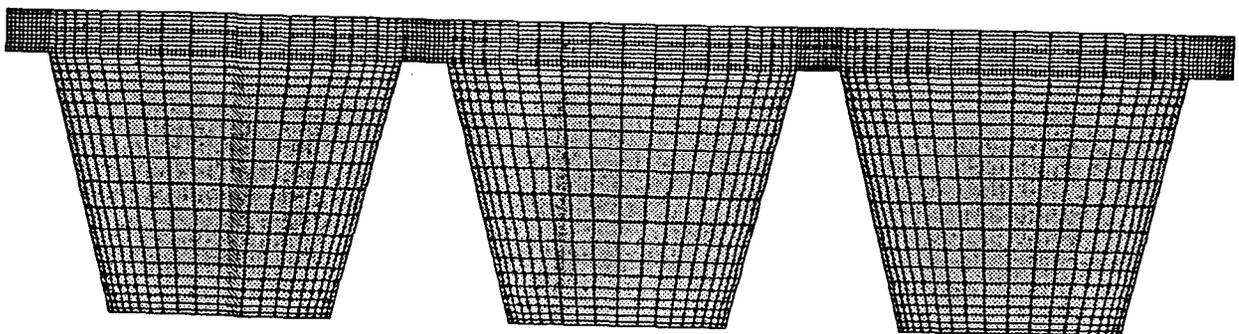


Fig.III.4: Maillage du joint2

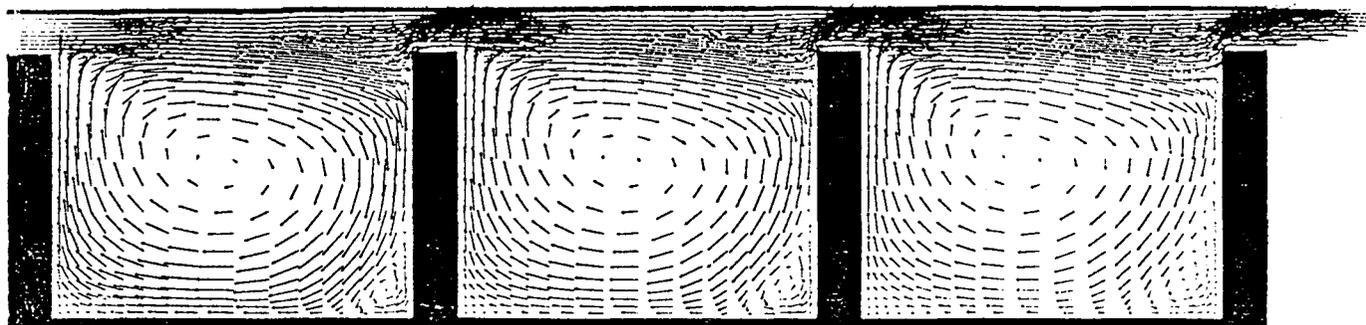


fig.III.5: Champ de vitesse dans le joint1

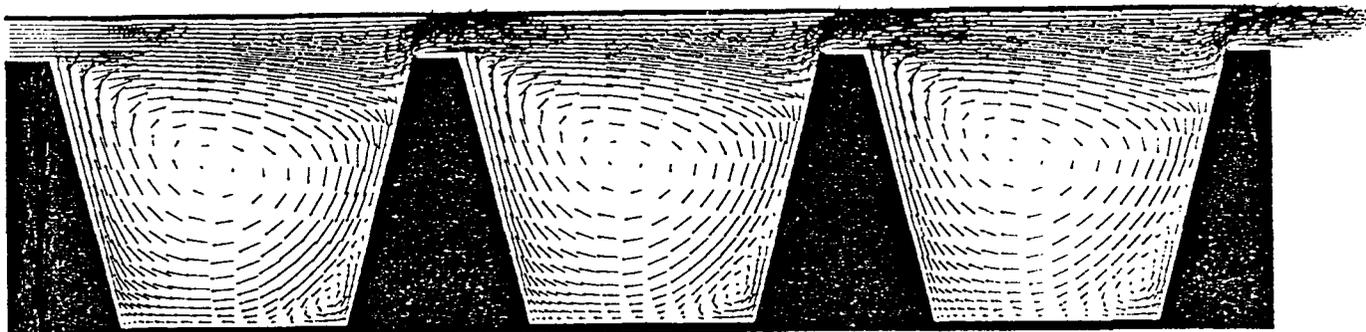


fig.III.6: Champ de vitesse dans le joint2



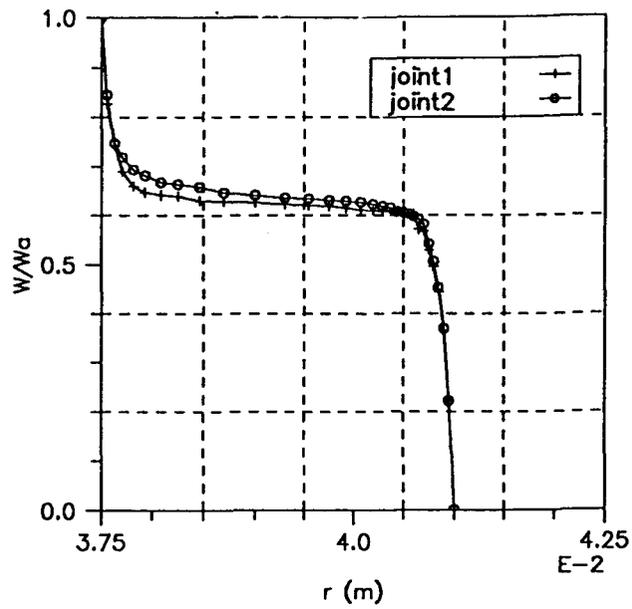


Fig.III.7: Comparaison des profils de vitesse circonférentielle entre joint1 et joint2 en plan radial (au milieu d'une chambre)

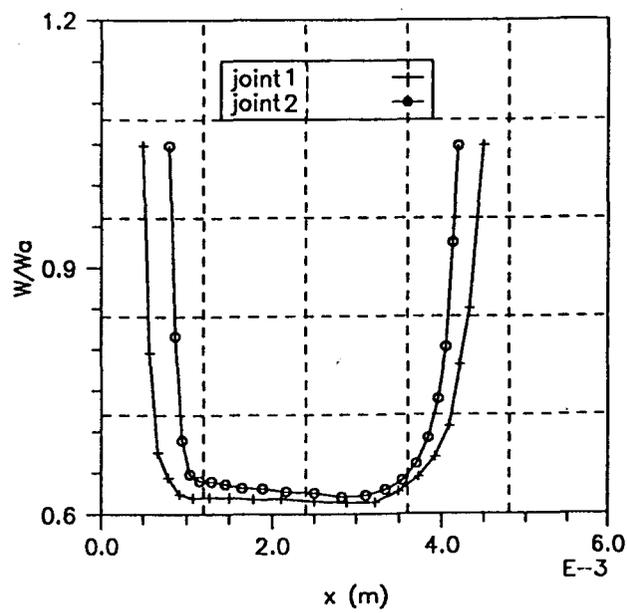


Fig.III.8: Comparaison des profils de vitesse circonférentielle entre joint1 et joint2 en plan axial (à $r=0.039$ m)

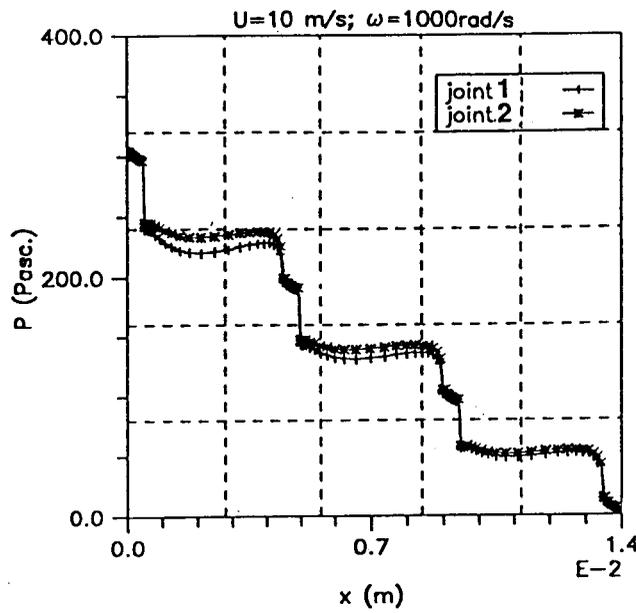


Fig.III.9: Comparaison des profils de pression entre joint1 et joint2 (moyenne dans chaque plan radial)

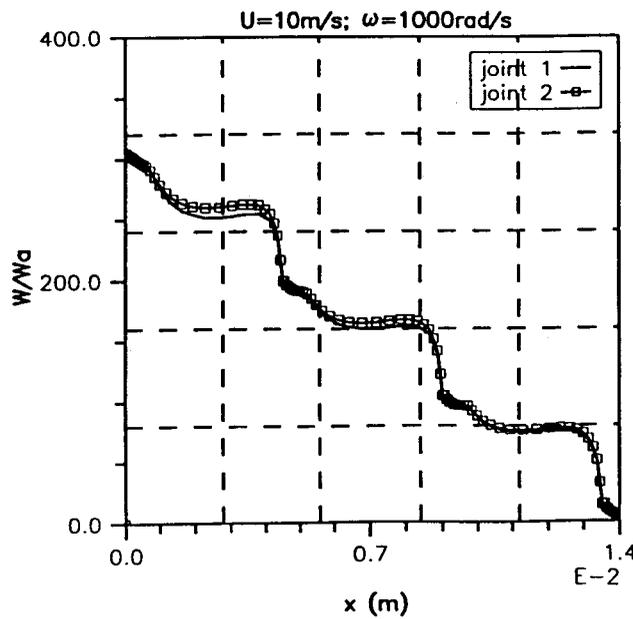


Fig.III.10: Comparaison des profils de pression entre joint1 et joint2 (moyenne à hauteur des dents)

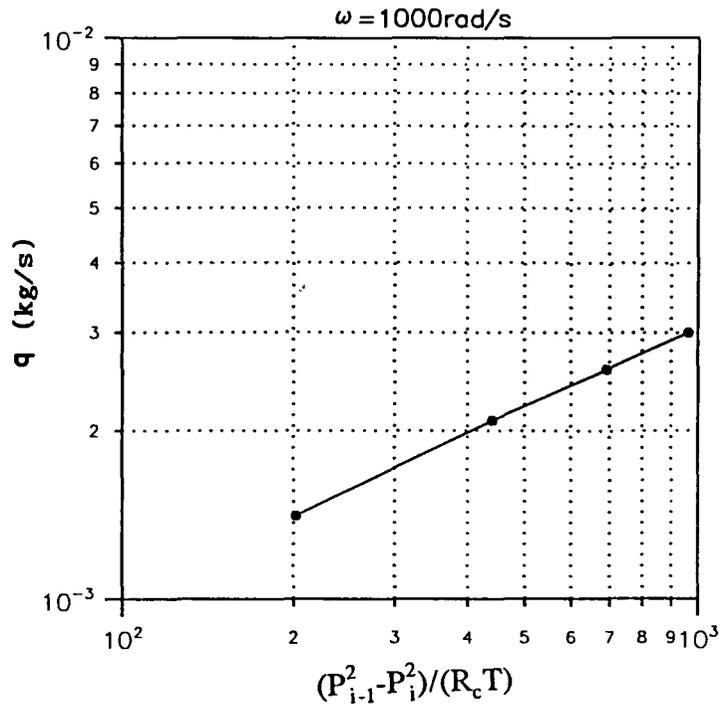


Fig.III.12: Débit en fonction de $(P_{i-1}^2 - P_i^2)/(R_c T)$

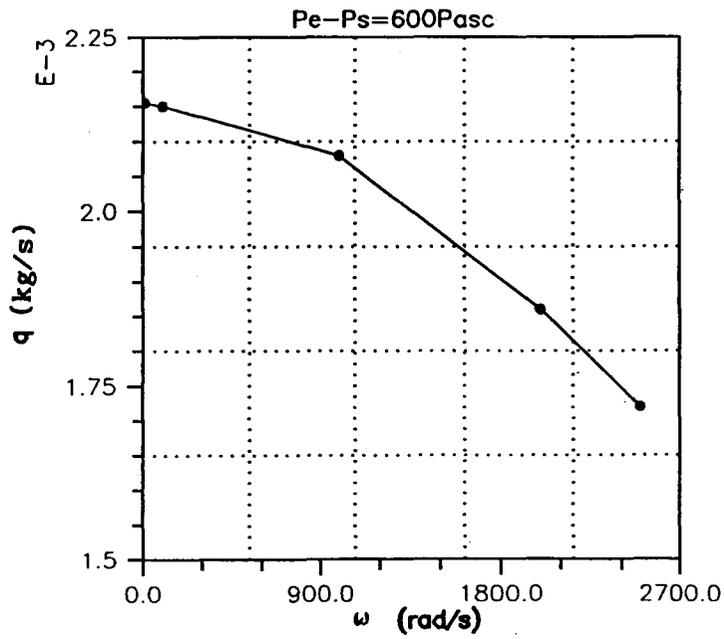
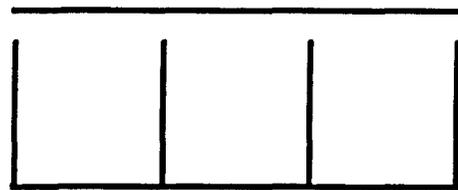


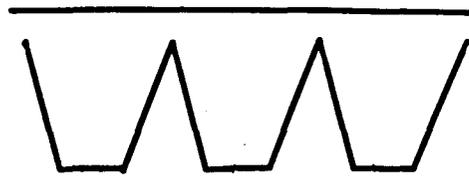
Fig.III.13: Débit en fonction de la vitesse de rotation

2.2 comparaison quantitative:

Dans le modèle global, les configurations réelles montrées dans les figures III.1 et III.2, sont modélisées de la façon suivante:



joint1



joint2

Fig.III.11: Modélisation globale du joint1 et du joint2

Dans cette modélisation globale qui consiste à négliger l'épaisseur des dents, deux géométries différentes telles celles choisies ne diffèrent que par la surface mouillée prise pour calculer les frottements dans les chambres. Les grandeurs adimensionnelles a_r et a_s décrivant la surface mouillée, définies dans le chapitre (I) (paragraphe 2.2.2), deviennent:

- pour le joint1: $a_r=2.50$; $a_s=1$
- pour le joint2: $a_r=2.17$; $a_s=1$

* vitesse moyenne circonférentielle:

Sur le tableau III.1 est faite la comparaison des vitesses moyennes circonférentielles dans les chambres centrales respectivement pour le joint1 et le joint2 avec les vitesses qui seraient données par le modèle global. L'erreur est faible, ceci tendrait à faire croire que l'évaluation des hypothèses sur le frottement aux parois est satisfaisante ce qui se vérifie sur les résultats donnés sur le tableau III.2.

	calcul local	modèle global	erreurs
joint1	22.8 (m/s)	22.0 (m/s)	3 %
joint2	22.6 (m/s)	21.9 (m/s)	3 %

Tableau III.1: Comparaison des vitesses moyennes circonférentielles (chambre centrale)

$$\pi_r = \tau_r a_r D \quad ; \quad \pi_s = \tau_s a_s D$$

joints	calcul local		modèle global	
	π_r (N/m)	π_s (N/m)	π_r (N/m)	π_s (N/m)
joint1	1.49 10^{-2}	1.48 10^{-2}	1.32 10^{-2}	1.29 10^{-2}
joint2	1.35 10^{-2}	1.48 10^{-2}	1.25 10^{-2}	1.31 10^{-2}

Tableau.III.2: comparaison des contraintes de frottement (chambre centrale)

* débit:

Pour une vitesse de rotation donnée, comme le prévoit la corrélation utilisée dans

le modèle global, le débit est effectivement proportionnel à $\sqrt{\frac{P_{i-1}^2 - P_i^2}{R_c T}}$, P_{i-1} et P_i étant les "pressions de chambre" en amont et en aval d'une dent, T la température du fluide dans le joint (fig.III.12).

Par contre, comme on pouvait s'y attendre conformément aux remarques du paragraphe 2.1, le débit varie avec la vitesse de rotation (fig.III.13) ce qui n'est pas pris en compte par le modèle global.

3. Deuxième catégorie de joints (joints à dents sur le stator):

Comme on l'a déjà dit, pour des raisons d'économie de temps de calcul, l'étude de cette catégorie de joints a été faite en "incompressible". Le joint étudié et le maillage effectué sont donnés dans les figures III.14 et III.15.

Les résultats fig.III.16 à III.19 sont tout à fait cohérents avec ceux obtenus pour la première catégorie de joints. On voit comme on pouvait le prévoir que l'influence de la vitesse circonférentielle sur les profils de pression "moyenne" est beaucoup plus faible. La vitesse moyenne circonférentielle dans une chambre étant d'environ 0.3Wa au lieu de 0.6Wa.

On peut en conclure que l'approximation du modèle global pour le calcul des débits est sûrement plus satisfaisante pour des joints labyrinthe à dents sur le stator que pour des joints labyrinthe à dents sur le rotor.

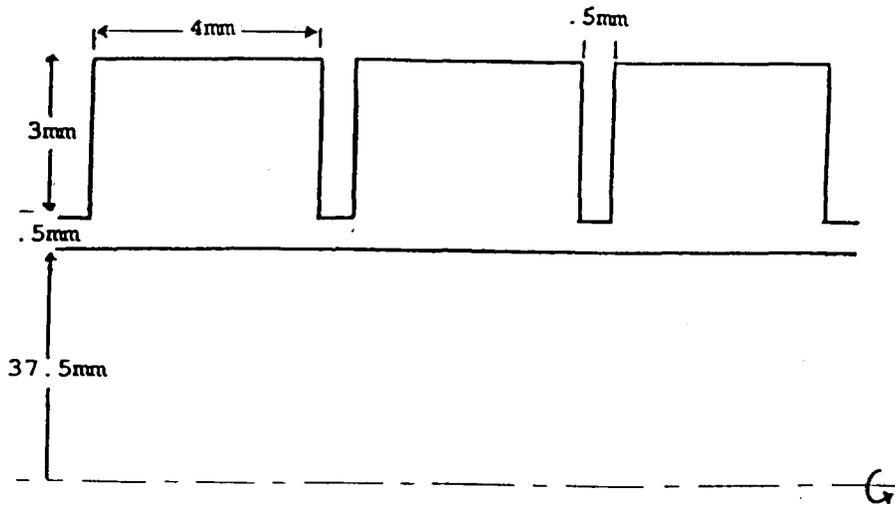


Fig.III.14: Joint à dents rectangulaires sur le stator=joint3

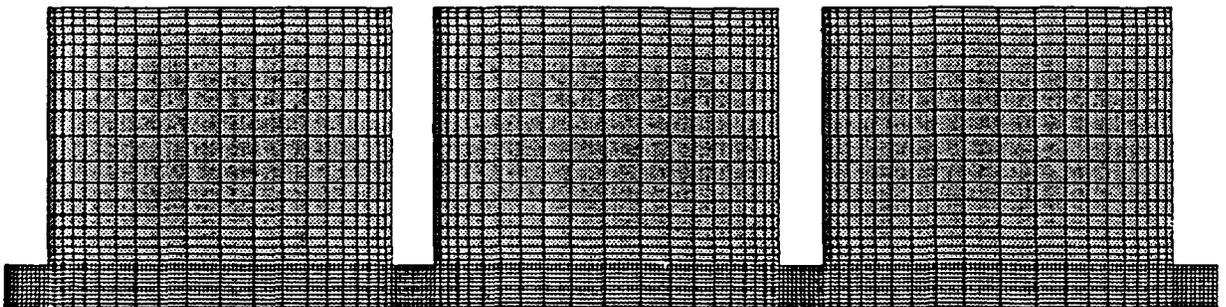


Fig.III.15: Maillage du joint3



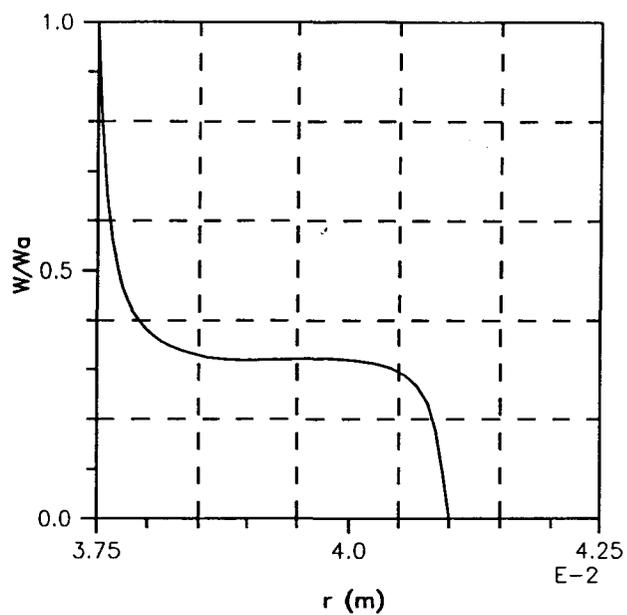


Fig.III.16: Profil de vitesse circonférentielle en plan radial (milieu d'une chambre)

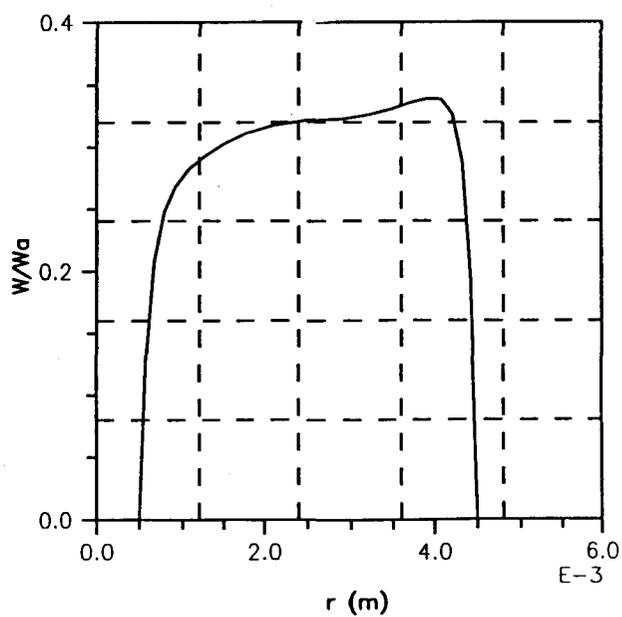


Fig.III.17: Profil de vitesse circonférentielle en plan axial (à $r=0.039$ m)

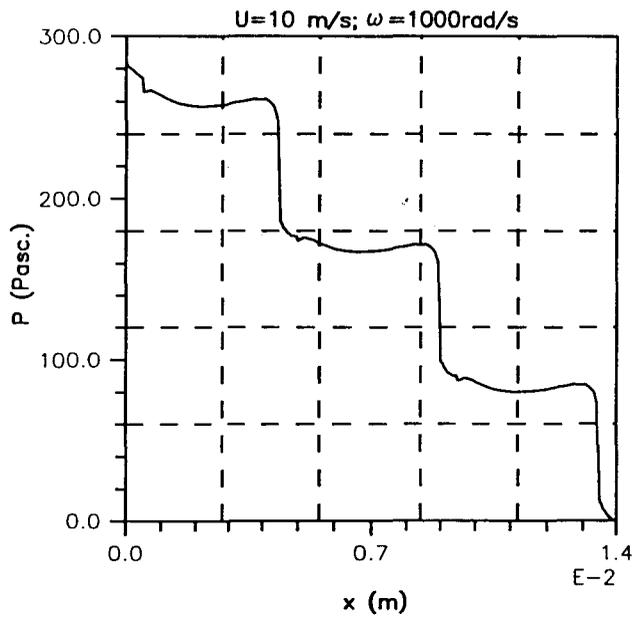


fig.III.18: Profil de pression en plan axial
(moyenne dans chaque plan radial)

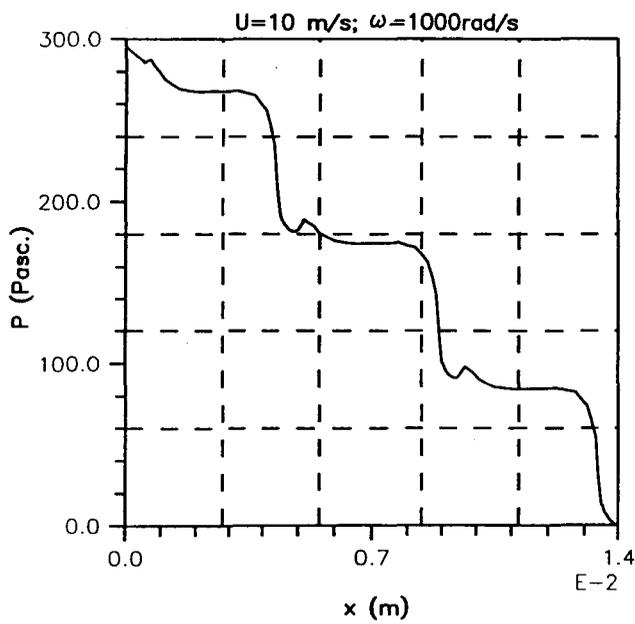


Fig.III.19: Profil de pression en plan axial
(moyenne à hauteur des dents)



4. Conclusion:

Les tests effectués dans ce chapitre pour des écoulements sur deux catégories de joints labyrinthe ont permis de tirer les conclusions suivantes:

- Le calcul axisymétrique (à excentricité nulle) sur les deux joints de la première catégorie a montré que la forme géométrique n'a pas "beaucoup" d'influence sur les différentes grandeurs physiques caractérisant l'écoulement, encore que les deux cas traités ne soient que peu différents géométriquement.

- Les comparaisons avec le modèle global ont montré que les hypothèses faites par Childs pour déterminer l'écoulement dans les cavités, sont d'une façon générale admissibles, sauf celle donnant la corrélation débit axial (ou débit de fuite) en fonction des pressions de "chambre", corrélation qui doit vraisemblablement donner néanmoins des résultats plus satisfaisants pour les joints à dents sur le stator.

- Le débit est très dépendant de la vitesse de rotation, aux vitesses de rotation élevées.

Les chapitres (IV) et (V) suivants ont pour but de montrer l'intérêt qu'il y'a pour déterminer les caractéristiques statiques et dynamiques d'un joint labyrinthe à utiliser, le modèle global dans lequel la corrélation débit-pression "exacte" est fournie par un modèle local.

CHAPITRE.IV

NOUVELLES CORRELATIONS

1. Introduction:

Comme nous l'avons montré au chapitre précédent, le modèle global est justifié à condition de disposer d'une "bonne" corrélation reliant le débit au droit des dents aux "pressions dans les chambres", corrélation tenant compte de l'effet de la vitesse de rotation et de la géométrie du labyrinthe.

A titre d'exemple, on construit une telle corrélation pour un type de joints labyrinthe: joints à dents rectangulaires, à partir de modélisations locales en faisant varier les paramètres Re_{Cr} ($P_{i-1}-P_i$), Cr/D , Cr/Hd et Cr/S et dans le cas compressible.

2. Calcul paramétrique:

* Pression:

la figure IV.1 qui représente le débit masse en fonction de la différence des carrés de pression de deux chambres contigues dans une échelle logarithmique, montre une droite de pente 1/2.

* vitesse de rotation: ($Re_{Cr} = \frac{\omega R \cdot Cr}{\nu}$, nombre de Reynolds)

La figure IV.2 montre que le débit varie avec la vitesse de rotation et que l'on peut distinguer deux régions différentes:

- $Re_{Cr} \leq 1250$, la courbe est une droite de pente presque nulle.
- $Re_{Cr} > 1250$, la courbe est une droite de pente -0.22.

* Cr/D

La figure IV.3 montre que le débit augmente linéairement avec le rapport Cr/D, ceci souligne l'importance de la largeur équivalente sur le débit masse.

* Cr/Hd

La figure IV.4 montre la variation du débit en fonction du rapport Cr/Hd. On constate que le débit évolue mais en fait dans une marge inférieure à 10% pour des variations de Cr/Hd d'un facteur 2. On est aussi amené à négliger l'influence de Cr/Hd.

* Cr/S

La figure IV.5 montre que la variation du débit en fonction du rapport Cr/S peut aussi être négligée.

* Bilan:

Finalement, cette étude paramétrique a permis d'établir l'expression du débit de fuite suivante:

$$\dot{m} = \lambda \left(1,57 \frac{Cr_i}{D_i} + 1 \right) H_i \sqrt{\frac{P_{i-1}^2 - P_i^2}{R_c T}} \quad (\text{IV.1})$$

$$\text{- si } Re_{Cr} \leq 1250 \quad ; \quad \lambda = 0,8 Re_{Cr}^{0,014}$$

$$\text{- si } Re_{Cr} > 1250 \quad ; \quad \lambda = 3,65 Re_{Cr}^{0,22}$$

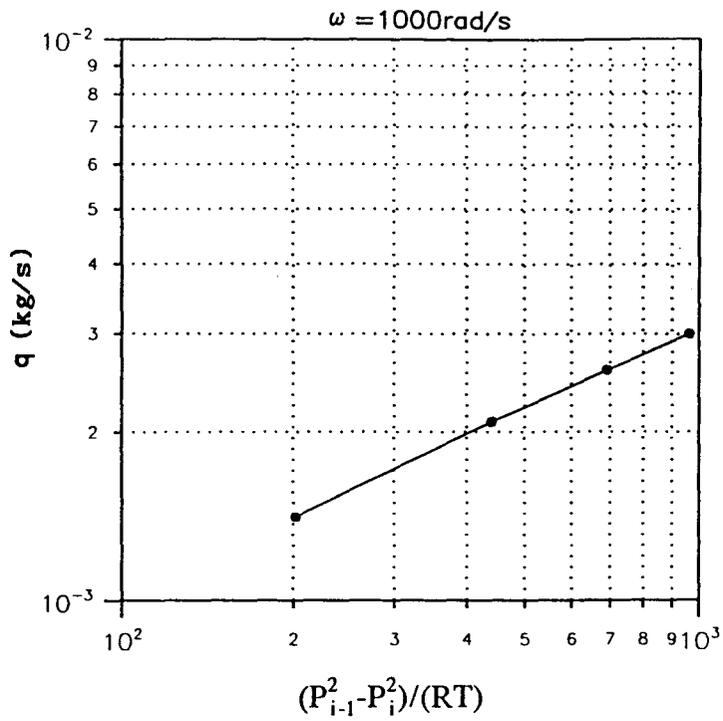


Fig.IV.1: Débit en fonction de $P_{i-1}^2 - P_i^2 / (RT)$

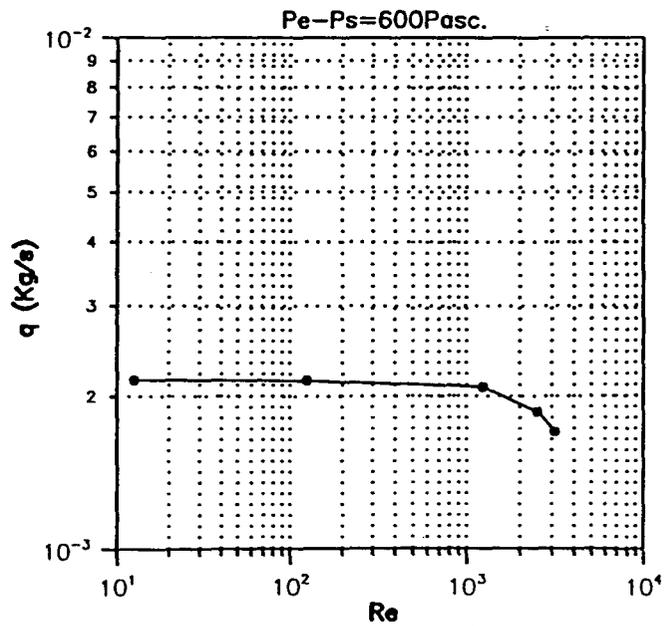


Fig.IV.2: Débit en fonction du nombre de Reynolds

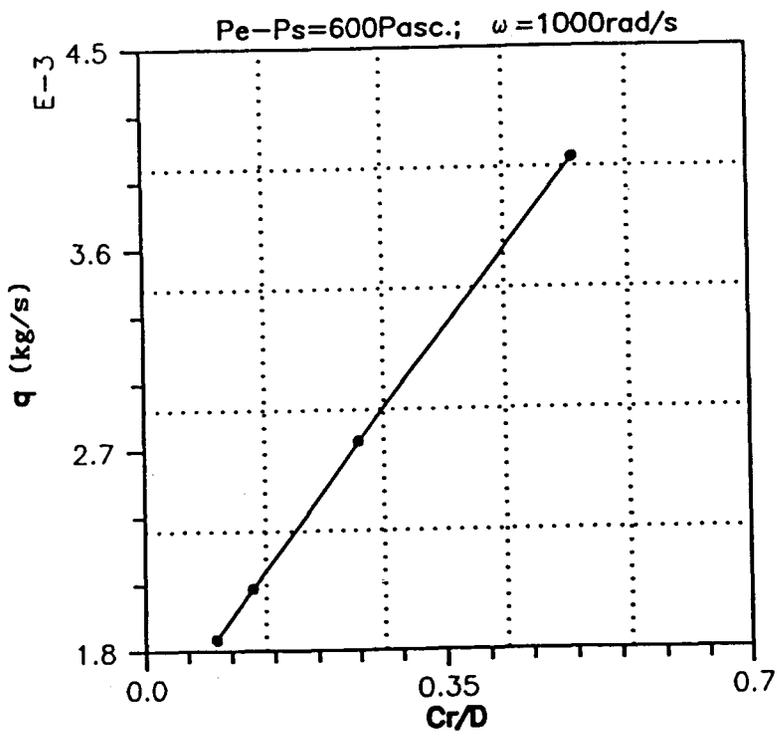


Fig.IV.3: Débit en fonction de Cr/D

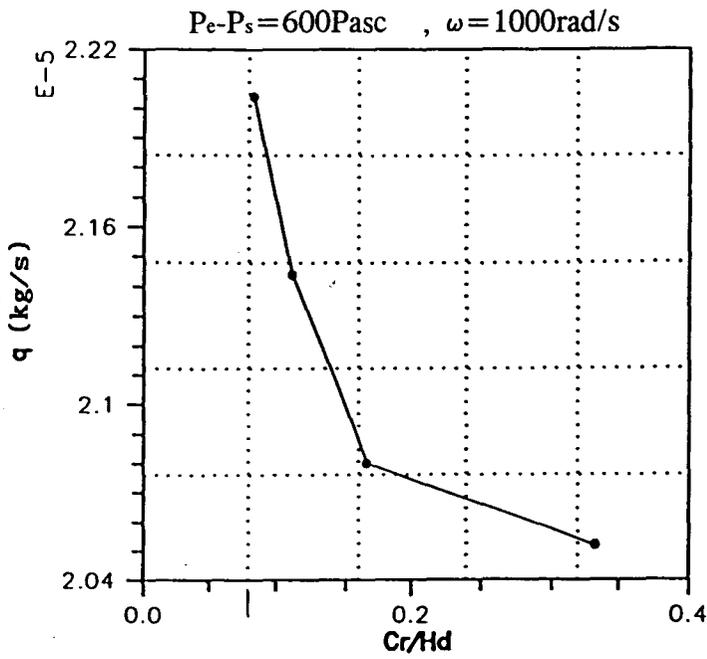


Fig.IV.4: Débit en fonction de Cr/Hd

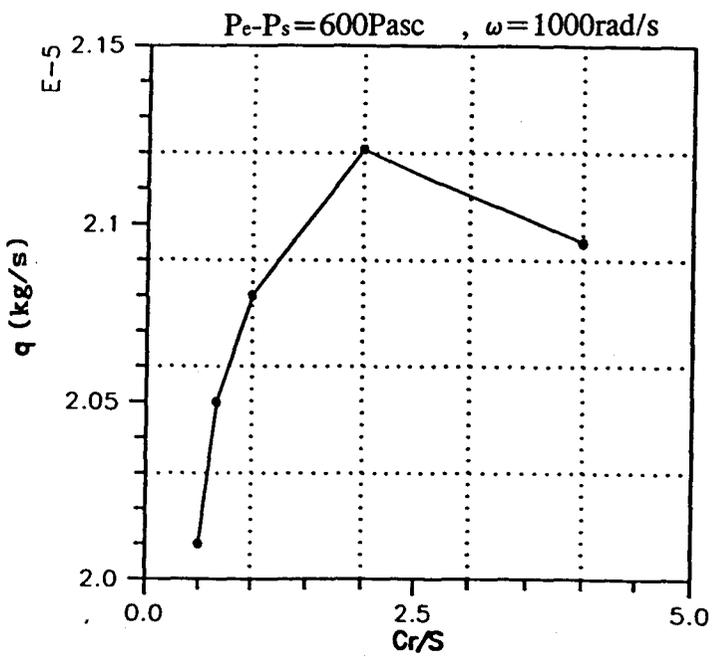


Fig.IV.5: Débit en fonction de Cr/S



3. Comparaison entre anciens et nouveaux résultats et conclusion:

L'intégration de l'expression du débit de fuite (IV.1) dans le modèle global, conduit à une modification des coefficients G et X dans les équations du premier ordre respectivement de la continuité et de la quantité de mouvement, notamment, dans le cas compressible (voir annexe.4). Les éléments des sous-matrices restent inchangés.

Suite à ces modifications apportées, il paraît ainsi nécessaire de faire un bilan comparatif entre les anciens et les nouveaux résultats. Pour cela, nous reprenons les exemples évoqués dans le chapitre (I).

Avec les mêmes conditions de fonctionnement présentées dans le tableau I.1 (chapitre I) où la vitesse de rotation est supposée nulle, le tableau IV.1 montre que les anciens et les nouveaux résultats sont identiques. Par contre, dans le cas où la vitesse de rotation est prise en compte (Tableau IV.2), on constate clairement que l'écart entre les anciens et les nouveaux résultats est très important. Par ailleurs, ces nouveaux résultats présentent un accord excellent avec les mesures de Benkert et Wachter sauf pour le cas où la vitesse à l'entrée Win est de 66,1m/s. Mais dans ce cas il semble bien que ce soit le résultat expérimental non cohérent avec les autres qui doit être mis en doute.



Pe=0,943 bar , $\omega=0$, T=300 K

E_e^*	Nd	R (mm)	D (mm)	Hd (mm)	Cr (mm)	Pe (bar)	K_{xy}_{mes} (N/mm)	K_{xy}_{anc} (N/mm)	K_{xy}_{nv} (N/mm)
0.023	18	150	5	2.5	0.25	2.947	257	233	233
0.024	18	150	5	2.5	0.25	1.430	75	67	69
0.038	18	150	5	6	0.25	2.947	157	147	143
0.018	18	150	5	6	0.25	1.430	27	27	27
0.04	18	75	5	6	0.58	1.925	29	21	18
0.04	18	75	5	6	0.58	2.418	41	30	27
0.04	9	75	10	6	0.58	1.925	29	19	17
0.04	9	75	10	6	0.58	2.418	41	25	24

Tableau IV.1: comparaison entre anciens et nouveaux résultats
joint à dents sur stator (cas 2 fig.I.11)

R=150mm, D=4mm, Hd=5.5mm, Cr=0.5mm, Ps=0.943bar

Nd	Win (m/s)	ω tr/min	Pe/Ps	$K_{xy}_{mes.}$ (N/m)	$K_{xy}_{anc.}$ (N/m)	K_{xy}_{nv} (N/m)
18	43.2	9550	1.51	1.97E+5	1.00E+5	1.96E+5
24	40.0	9550	1.51	2.89E+5	1.90E+5	2.85E+5
24	66.1	9485	1.79	2.63E+5	2.73E+5	3.30E+5
24	47.1	9550	1.51	2.95E+5	2.00E+5	2.90E+5

Tableau IV.2: Comparaison entre anciens et nouveaux résultats
joint à dents sur rotor et stator (cas 3 fig.I.11)

CHAPITRE.V
ETUDE EXPERIMENTALE

1. Introduction:

Dans ce chapitre on se fixe un objectif principal qui consiste à contrôler la validité du modèle théorique général proposé par comparaison de résultats expérimentaux et de résultats de simulation dans le cas incompressible.

Pour réaliser cet objectif, nous avons été amené à transformer un banc d'essais de paliers hydrostatiques existant au sein du Laboratoire de Mécanique de Lille [62], en banc d'essais de joints labyrinthe en remplaçant les dispositifs de mise en charge et de suspension. L'expérimentation a été réalisée avec un joint labyrinthe à dents rectangulaires portées par le stator. Nous ne donnerons pas une description détaillée de la machine d'essai, nous nous limiterons en nous basant sur les principes qui ont amené à sa réalisation, à faire la description des organes importants qui la composent. Nous parlerons ensuite des différents dispositifs de mesures utilisés, des précisions de mesure et finalement de la comparaison des résultats expérimentaux obtenus et des résultats de modélisation.

2. Description de la machine d'essai:

Comme on l'a déjà dit, la machine d'essais de joints labyrinthe est réalisée par transformation d'une machine d'essais de paliers hydrostatiques implantée à l'E.U.D.I.L au sein du Laboratoire de Mécanique de Lille. Elle est finalement composée de quatre ensembles: la broche tournante et le joint labyrinthe, le dispositif hydraulique d'alimentation, le porte stator et le dispositif de mise en charge.

2.1 Broche tournante et joint labyrinthe: Principe de base

Nous parlerons tout d'abord, des principes de base retenus pour sa réalisation. Deux arrangements de base peuvent être retenus pour une telle machine [63]:

- * Un premier où l'ensemble stator-porte stator est libre alors que le rotor est fixe par rapport au bâti.
- * Un deuxième qui correspond au fonctionnement habituel des machines tournantes où le rotor est libre alors que le stator est fixe, toujours par rapport au bâti.

Seul le déplacement relatif rotor-stator (**fig.V.1**) intervient dans le fonctionnement du joint. Des considérations pratiques amènent à préférer le premier arrangement. En effet, il présente certains avantages tels que:

- L'utilisation d'un seul arbre pour différents modèles de joints labyrinthe.
- Une facilité de détermination des efforts statiques et dynamiques, les efforts sont en effet appliqués sur le stator.
- Une dynamique de la ligne d'arbre théoriquement maîtrisée.

Il apparaît clairement que, pour l'arrangement retenu, l'axe de rotation du rotor doit être un repère privilégié de la machine.

Le banc d'essai est ainsi formé essentiellement d'un rotor et d'un stator. Le reste comporte le bâti, le moteur électrique et les accessoires des mesures.

Du côté arrière du banc d'essais, une poulie reçoit la courroie de transmission qui permet d'entraîner le rotor à partir d'un moteur électrique à vitesse variable de 0 à 3000tr/min. En avant du banc d'essais, est aménagé le dispositif qui supporte le stator et permet la mise en charge (**fig.V.2**). Le stator est monté sur le rotor, l'ensemble rotor-stator forme le joint labyrinthe.

Pour des raisons de réalisation mécanique évidentes, le joint labyrinthe est en fait composé de deux joints labyrinthe alimentés symétriquement à partir d'une chambre centrale (**fig.V.5**).

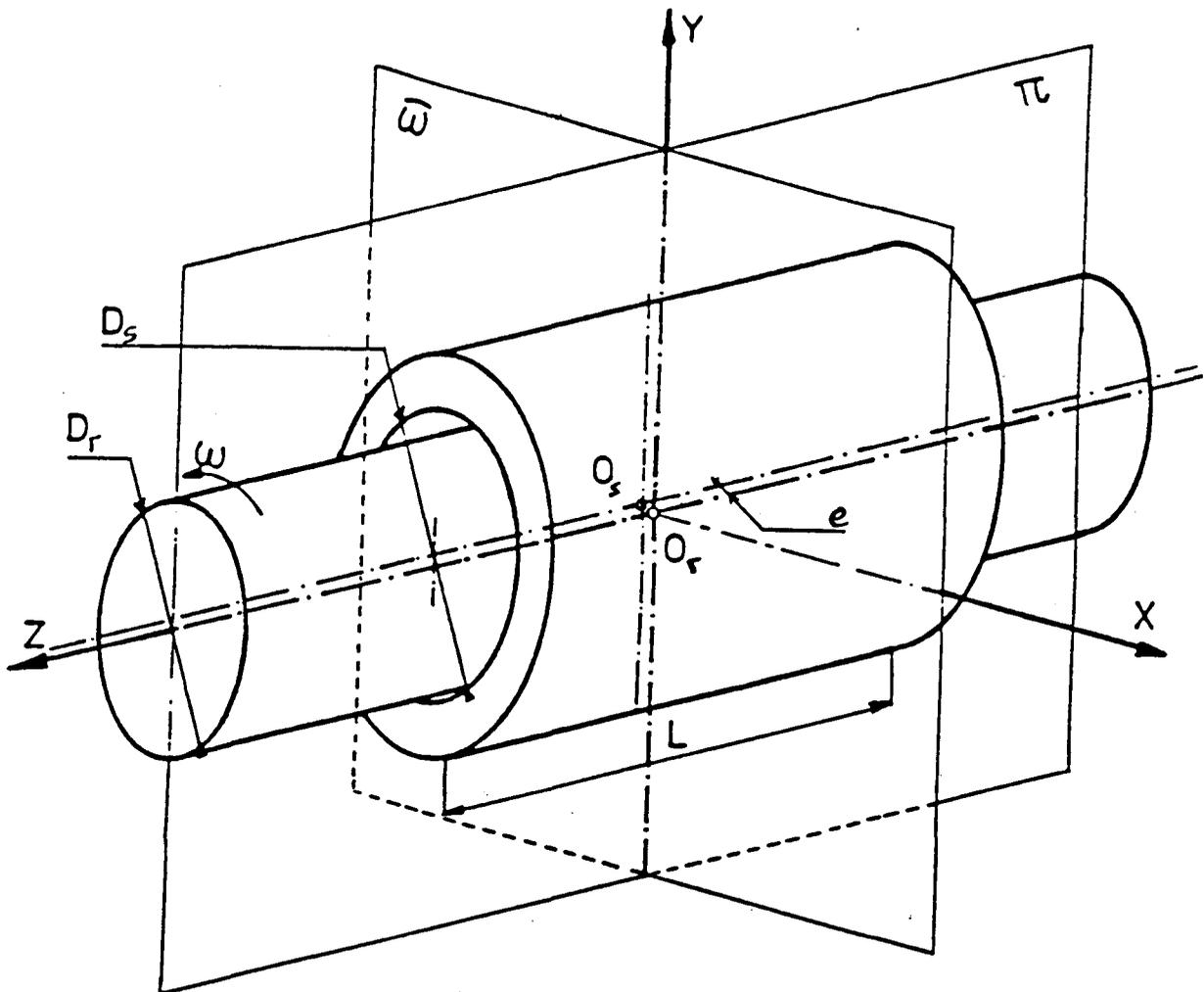


Fig.V.1: Schéma de principe

- Dr : diamètre du rotor
- Ds : diamètre intérieur du stator
- Or : centre du rotor
- Os : centre du stator
- e : excentricité
- ω : plan radial
- π : plan axial

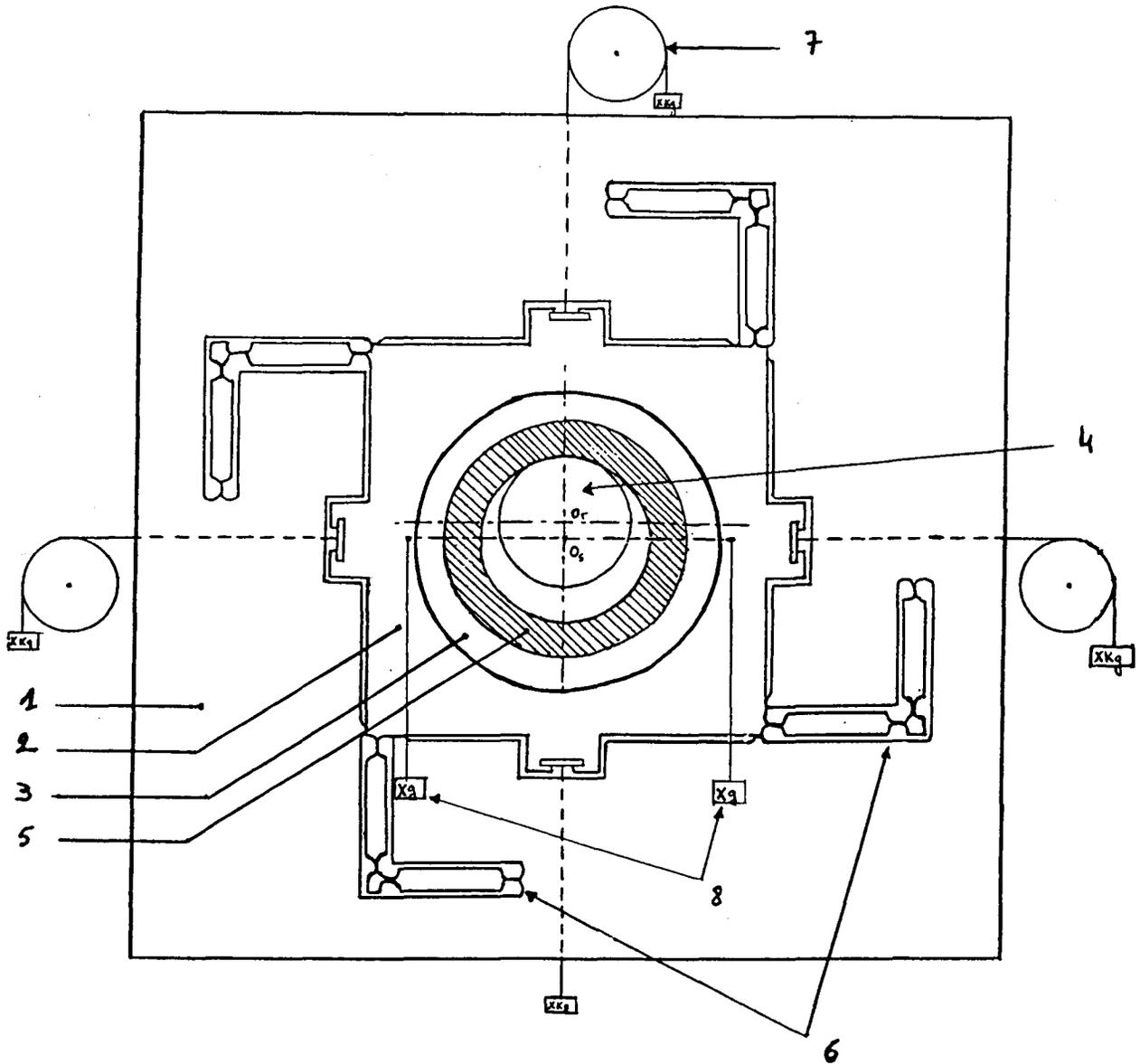


Fig.V.2: Dispositif de mesure

- 1- cadre fixe
- 2- cadre mobile
- 3- porte stator
- 4- rotor

- 5- stator
- 6- lames
- 7- poulies de chargement
- 8- compensation du couple



2.2 Porte stator et dispositif de mise en charge:

Les études théoriques ont permis de déterminer les conditions de fonctionnement des joints labyrinthe et de prévoir des modifications du dispositif de mise en charge, car la machine avait été conçue pour des essais de paliers hydrostatiques (les efforts pouvant être supportés par les paliers sont très supérieurs à ceux pouvant être supportés par les joints labyrinthe). Le nouveau dispositif de mise en charge et du support du stator réalisé (fig.V.2) est composé essentiellement:

- d'un cadre rigide fixé en trois points réglables sur le bâti,
- d'un cadre mobile,
- d'un stator et porte-stator facilement interchangeables,
- des servitudes hydrauliques pour l'alimentation en huile du joint labyrinthe,
- et d'une transmission par fil des efforts créés à l'aide de poids marqués.

En réalité, les cadres rigide et mobile sont en fait un seul ensemble, la mobilité relative des deux cadres est assurée par 4 paires de lames déformables. Les amplitudes des déplacements de ce cadre sont limitées par des butées mécaniques protégeant la fragilité des lames. Le dispositif de mise en charge a été conçu de façon à répondre à certaines conditions cinématiques et dynamiques de la machine:

- * le stator doit pouvoir se déplacer librement dans le plan ($\bar{\omega}$) (fig.V.1). Deux degrés de liberté en translation doivent être assurés pour l'ensemble stator et porte-stator,
- * la rotation du stator autour de l'axe du rotor due au couple de frottement exercé par le fluide sur le stator doit être possible, mais elle est limitée si nécessaire par l'application d'un couple inverse,
- * enfin, le système permettant de répondre aux deux contraintes cinématiques, doit permettre un auto-alignement du stator sur le rotor, et aussi permettre d'appliquer une charge radiale de direction variable passant rigoureusement par l'axe du rotor.

En dehors du fait que le cadre mobile soit suspendu par les lames élastiques, il est aussi suspendu "involontairement" par les tuyaux d'alimentation en fluide du joint labyrinthe, ce qui comme nous le verrons par la suite a posé de délicats problèmes.

2.3 Dispositif hydraulique:

Le dispositif hydraulique est constitué d'un circuit principal et d'un circuit secondaire:

- Le circuit principal correspond à l'alimentation en huile du joint labyrinthe par deux conduites parfaitement identiques et symétriques, actionnées par une seule vanne. Il est équipé d'un moteur hydraulique de puissance 7,5KW à 1500 tr/min et d'une pompe à piston à débit variable. Le débit varie de 0 à 20l/min et la pression nominale est de 200bar. L'huile s'écoule dans un bac de récupération, puis, est canalisée vers le groupe secondaire de transvasement.
- Le circuit secondaire est constitué d'un moteur électrique de puissance 1,1KW à 1500trs/mn, d'une pompe à engrenages et d'un système d'asservissement de la pompe (débit égal à 27l/min à 1500tr/min) en fonction du niveau d'huile dans le réservoir. Ce système d'asservissement a l'avantage de permettre à la fois un fonctionnement sur de courtes périodes pour le circuit secondaire et en continu pour le circuit principal.

2.4 Dispositif de mesure:

Nous devons mesurer dans cette étude expérimentale, les grandeurs caractéristiques de fonctionnement suivantes:

- la vitesse de rotation du rotor,
- la force statique appliquée au stator,
- le champ de pression dans le joint labyrinthe,
- le débit de fuite d'huile,
- et finalement, l'excentricité relative du rotor.

a- vitesse de rotation:

Pour mesurer la vitesse de rotation du rotor, nous disposons d'un capteur électromagnétique qui reçoit des impulsions à partir d'un disque solidaire de l'arbre et se trouve dans son champ de détection. Le signal de sortie du capteur est transmis à un fréquencemètre-tachymètre qui donne directement la valeur de la vitesse de rotation. Un variateur permet de sélectionner la vitesse de rotation entre 0 et 3000tr/min à ± 5 tr/min.

b- charge statique:

La mesure de la charge statique appliquée au stator se fait par l'intermédiaire du système de chargement présenté précédemment avec des masses marquées.

c- excentricité:

La mesure de la position du rotor par rapport au stator qui est fixe permet de déterminer l'excentricité relative ($\epsilon=e/Cr$) ainsi que l'angle de calage. Pour connaître la position du stator par rapport au rotor, quatre comparateurs E_{x1} , E_{y1} , E_{x2} et E_{y2} gradués au 1/100 de mm ($10\mu\text{m}$) sont embarqués sur ce dispositif et sont placés respectivement à $\pi/6$, $\pi/2+\pi/6$, $\pi+\pi/6$ et $3\pi/2$ (voir fig.V.3). Ces capteurs permettent d'évaluer des distances à $2\mu\text{m}$ près. Ce choix d'emplacement est la conséquence de l'encombrement des accessoires de fonctionnement de la machine. Le schéma montré dans la figure V.4, résume d'une façon générale le positionnement d'un point M du stator lié au repère y_{Orx} . Dans le triangle (Or,M,Os) , on peut écrire les égalités suivantes:

$$\frac{R+\delta_0-\delta^*}{\sin(\pi/2-(\theta+\varphi+\epsilon))} = \frac{e}{\sin(\epsilon)} = \frac{R}{\sin(\pi/2+\theta+\varphi)} \quad (\text{V.1})$$

δ_0 est le jeu radial à excentricité nulle

Si ε est très petit, les approximations faites permettent d'obtenir la relation suivante:

$$\delta^* - \delta_0 = e \sin(\varphi + \theta) = e \cos(\varphi) \sin(\theta) + e \sin(\varphi) \cos(\theta) \quad (\text{V.2})$$

avec $x_0 = e \sin(\varphi)$; $y_0 = e \cos(\varphi)$

$$\delta = \delta^* - \delta_0 = y_0 \sin(\theta) + x_0 \cos(\theta)$$

Donc, pour $\theta = \pi/6$, $\delta = E_{x1} = \frac{1}{2}(x_0\sqrt{3} + y_0)$ (1)

$\theta = \pi/2 + \pi/6$, $\delta = E_{y1} = \frac{1}{2}(y_0\sqrt{3} - x_0)$ (2)

$\theta = \pi + \pi/6$, $\delta = E_{x2} = -\frac{1}{2}(x_0\sqrt{3} + y_0)$ (3)

$\theta = 3\pi/2$, $\delta = E_{y2} = -y_0$ (4)

Finalement, on obtient:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = -\frac{2\sqrt{3}}{3} (E_{x2} - E_{y2}/2) \\ x_0 = -\frac{1}{2}(\sqrt{3} E_{x1} + E_{y1}) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} y_0 = \frac{1}{2}(\sqrt{3} E_{y1} + E_{x1}) \\ y_0 = -E_{y2} \end{array} \right. \quad (\text{V.3})$$

En réalité, deux de ces quatre capteurs suffiront pour connaître les déplacements x_0 et y_0 , les autres serviront pour la vérification des mesures. De nombreuses mesures effectuées ont permis de vérifier que les valeurs de x_0 et y_0 sont finalement connues avec une précision du même ordre de grandeur que les δ c'est à dire à $2\mu\text{m}$ près et donc, dans les plages de mesure considérées, à environ 10%.

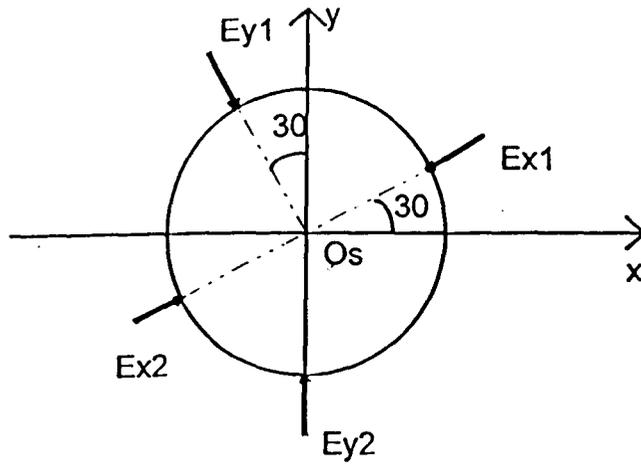


Fig. V.3 : Emplacement des capteurs de déplacement

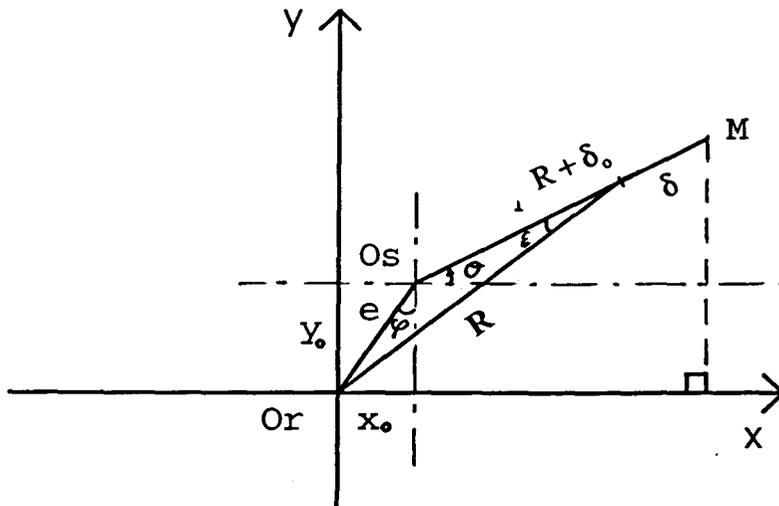


Fig. V.4: Déplacement du stator/rotor

- M** : point lié au stator
- Or** : centre du rotor
- Os** : centre du stator
- R** : rayon du rotor
- e** : excentricité
- x_o, y_o** : déplacements du centre du stator en x et en y

d- mesure du champ de pression:

La machine doit permettre d'expérimenter plusieurs joints labyrinthe, il n'est pas envisageable de fixer de tels capteurs sur le rotor et d'effectuer un démontage après chaque essai. Pour cela, les capteurs de pression sont montés collés dans les logements du rotor prévus à leur effet, des capteurs miniatures qui ont été choisis en raison des faibles encombrements pour éliminer les phénomènes d'inertie. La pression dans le joint est mesurée par l'intermédiaire de trois capteurs embarqués dans le rotor suivant une génératrice. Ce principe de montage constitue un problème pour connecter les capteurs aux instruments de mesure puisque le rotor est animé d'un mouvement de rotation. Un collecteur tournant permet de récupérer les signaux des pressions de sortie des capteurs dont la lecture est effectuée par des amplificateur-afficheurs digitaux. L'étendue de mesure des capteurs varie de 0 à 200 bar ± 1 bar, ces capteurs étant initialement prévus pour la mesure des pressions dans les paliers hydrostatiques.

Le premier capteur coïncide avec la chambre d'alimentation en huile, le second et le troisième sont positionnés dans le joint, respectivement à 11mm et à 31mm du premier.

e- mesure du débit:

Le débit d'alimentation en huile est mesuré à l'amont de la vanne du circuit principal. Le système de mesure utilisé est un mesureur à turbine. Les signaux provenant du capteur monté sur le mesureur sont mis en forme par un amplificateur d'impulsions, ils passent ensuite dans un convertisseur qui les transforme en un signal de sortie proportionnel à la fréquence de ces impulsions. La mesure s'effectue sur un indicateur gradué en pourcentage, l'étendue de mesure est de 0 à 20 l/min avec une précision de 5%.

f- mesure du couple de frottement:

Comme on l'a dit (paragraphe 2.2), il a été prévu une compensation du couple de frottement. Mais compte tenu des raideurs parasites, elles aussi évoquées au paragraphe 2.2, on ne peut penser mesurer le couple de frottement.

3. Modèle de joint labyrinthe:

L'objectif de cette réalisation expérimentale, est d'effectuer des essais sur un joint labyrinthe à dents sur le stator.

Nous avons réalisé un joint labyrinthe comportant 2x12 chambres identiques formées par des dents rectangulaires, l'ensemble présente une symétrie par rapport à une chambre d'alimentation située au milieu du stator et dans laquelle débouchent deux conduites d'huile disposées symétriquement. La figure V.5 montre le joint labyrinthe dans sa coupe transversale, les dimensions géométriques du labyrinthe sont détaillées dans la figure V.6.

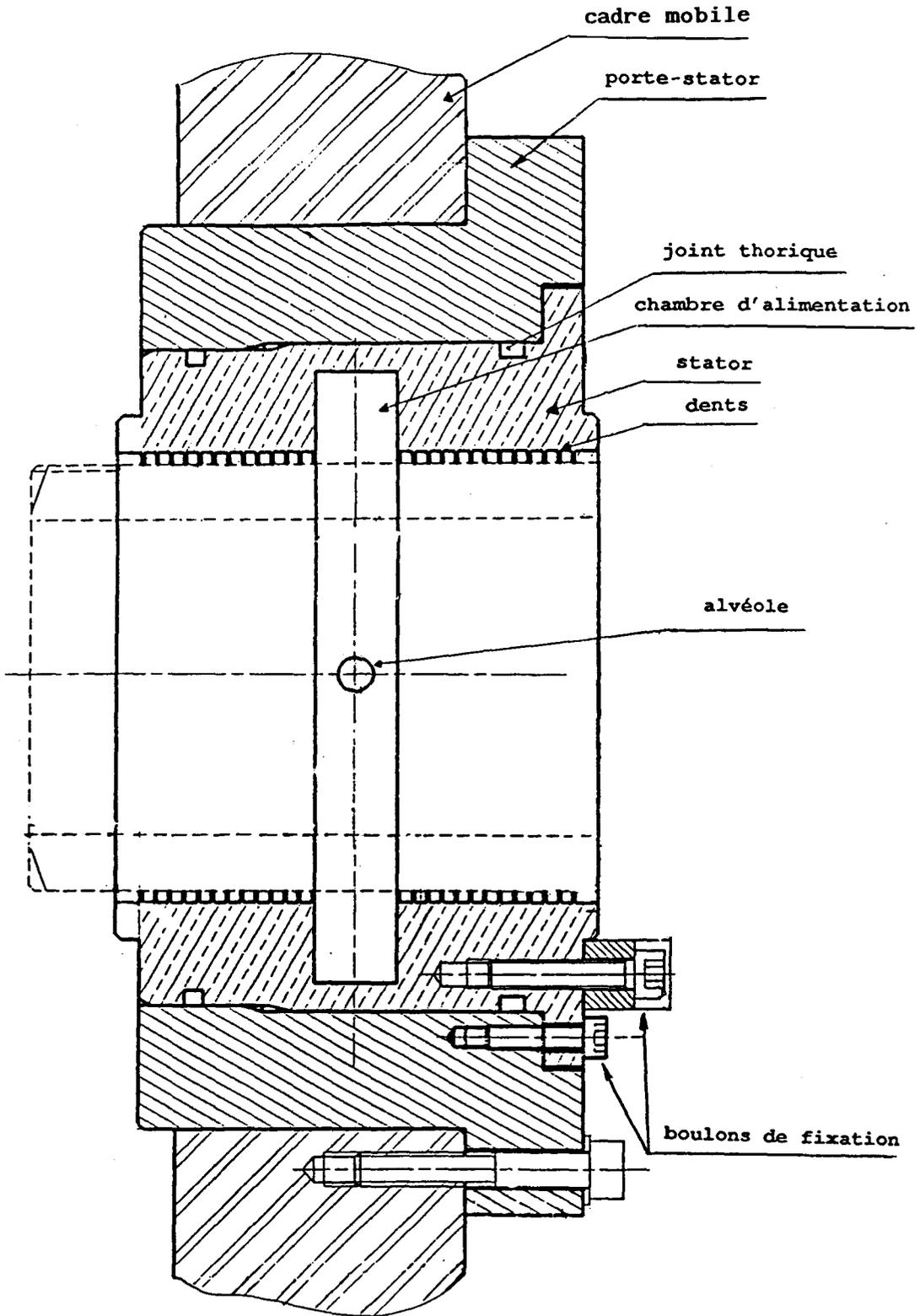


Fig.V.5: Coupe transversale du joint labyrinthe

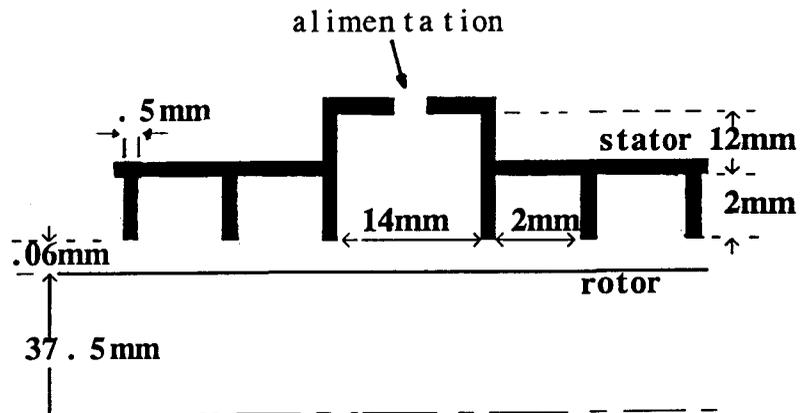


Fig.V.6: Modèle de joint labyrinthe

4. Choix du Lubrifiant:

Comme fluide lubrifiant, nous avons utilisé pour tous les essais l'huile dénommée "Shell Tellus T15" dont la variation de la viscosité en fonction de la température est donnée par la figure V.7. En effet, cette huile a l'avantage d'avoir une viscosité faible qui variait peu dans la gamme de températures où nous travaillons (à 20°C, $\nu=28$ cst, $\rho=840\text{kg/m}^3$). L'huile s'écoulait ainsi très bien d'où un débit de fuite important participant au refroidissement du joint en présence de vitesse de rotation.

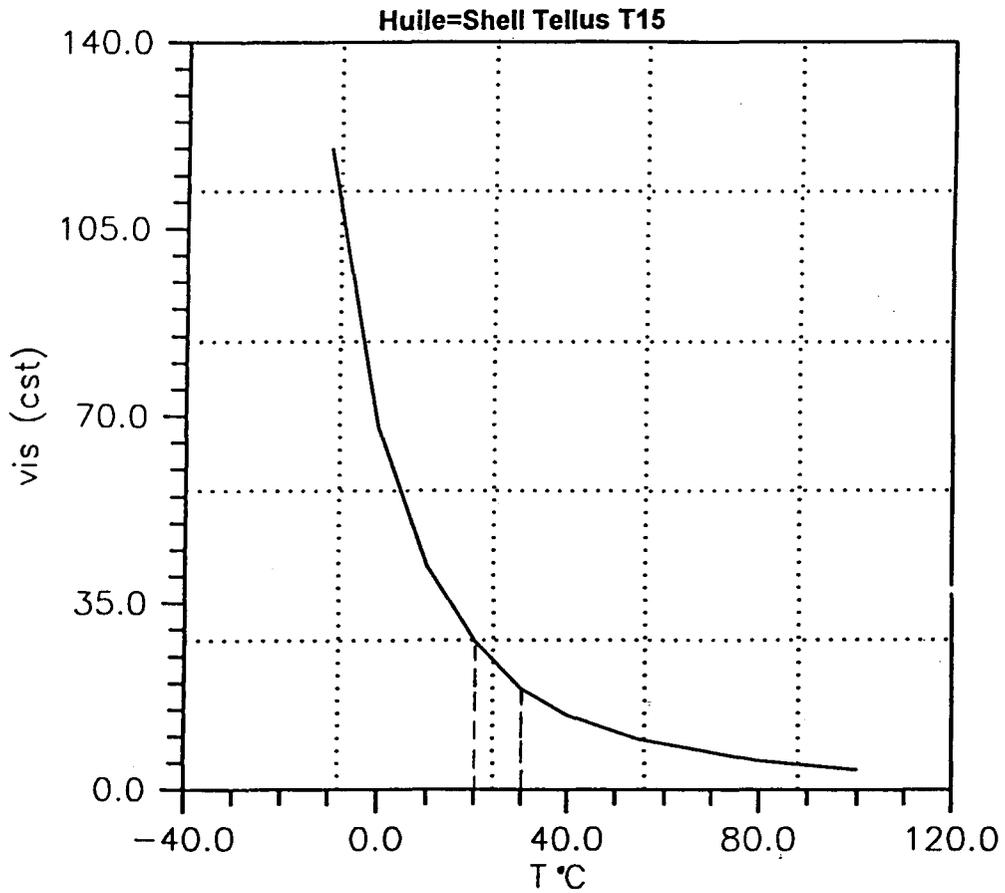


Fig.V.7: Diagramme viscosité-température à pression atmosphérique

$1 \text{ cst} = 10^{-6} \text{ Poiseuille}$

5. Calcul local:

Dans le joint labyrinthe correspondant à l'expérimentation, l'écoulement est laminaire. Conformément à la méthodologie précédemment définie, nous avons effectué des calculs locaux sur un motif de joint labyrinthe constitué de trois chambres identiques pour évaluer l'évolution du débit par rapport à la vitesse de rotation, la différence de pression et la viscosité liée à la température du fluide. Le calcul a été effectué sur une configuration contenant un maillage de 38x103 points. Le fluide considéré est bien sûr celui utilisé dans l'expérimentation dont la masse volumique varie avec la température suivant la relation suivante:

$$\rho = \rho_{20} \left[1 - \alpha (T_{20} - T) \right] \quad (\text{V.4})$$

ρ_{20} est la masse volumique à $T_{20} = 20^\circ\text{C}$

α représente le coefficient de dilatation ($= 75 \cdot 10^{-5}$)

Pour corréler les résultats de calcul, un paramètre adimensionnel Cf a été défini tel que:

$$\text{Cf} = \frac{\Delta P_d}{\frac{1}{2\rho} (q/S)^2} \quad (\text{V.5})$$

ΔP_d : différence de pression de part et d'autre d'une dent.

q : débit masse

S : section droite au jeu

Pour une différence de pression $P_e - P_s = 5$ bar et une température de 20°C , les calculs pour des vitesses de rotation 0, 1000, 2000 et 3000 tr/min ont montré que le débit est indépendant de la vitesse de rotation. Le profil de pression (fig.V.8) reste aussi inchangé vis à vis de la vitesse de rotation.

Pe-Ps bar	T °C	ν cst	q kg/s	Cf	Re=U.Cr/ν
2	20	28	.131E-1	106	2.4
5	20	28	.320E-1	43.3	5.8
7	20	28	.442E-1	32.2	8.0
5	15	34	.267E-1	63.0	3.9
5	25	23	.383E-1	30.4	8.4
5	30	20	.433E-1	24.0	11.1

Tablau V.1

Ensuite, nous avons suivi l'évolution du débit par rapport à la variation de la différence de pression entre l'entrée et la sortie du joint et à la viscosité du lubrifiant qui est directement liée à la température. Les résultats de calcul sont regroupés dans le tableau V.1. Pour mieux cerner ces résultats, nous avons représenté en échelle logarithmique Cf en fonction du nombre de Reynolds associé à la vitesse axiale moyenne et au jeu radial ($Re = U.Cr/\nu$) (fig.V.9). La courbe obtenue est une droite de pente -1. Ce résultat permet finalement d'établir l'expression du débit masse suivante:

$$q = 2\pi R C r \sqrt{2\rho \Delta P_d \lambda_f R_e} \quad ; \quad \lambda_f = 0.004 \quad (\text{V.6})$$

λ_f : coefficient de perte de charge

Pour la ième dent d'un joint labyrinthe, le débit masse par unité de longueur s'écrit ainsi:

$$\dot{m}_i = \frac{q_i}{2\pi R} = H_i \sqrt{2\rho(\Delta P_d)_i \lambda (R_e)_i} \quad (\text{V.7})$$

$(\Delta P_d)_i = P_{i-1} - P_i$, est la différence de pression entre les chambres i-1 et i

$(R_e)_i = H_i U_i / \nu = \dot{m}_i / \mu$, est le nombre de Reynolds local

l'expression (V.7) devient:

$$\dot{m}_i = H_i^2 (P_{i-1} - P_i) \frac{2\lambda}{\nu} \quad (\text{V.8})$$

L'équation (V.8) sera donc utilisée dans le calcul global en prenant $m_0 = -1$ et $n_0 = 0.004$ dans l'expression (I.53).

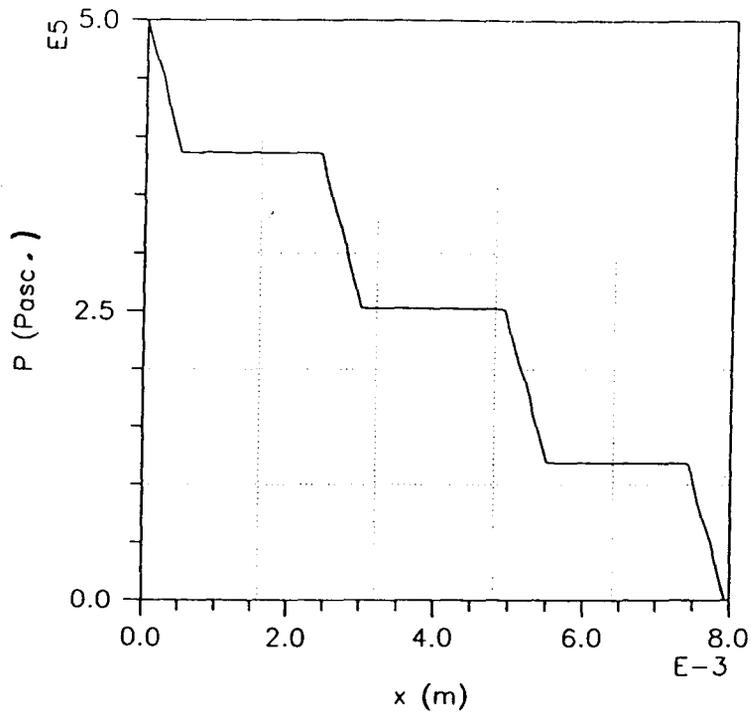


Fig.V. 8 : Profil de pression

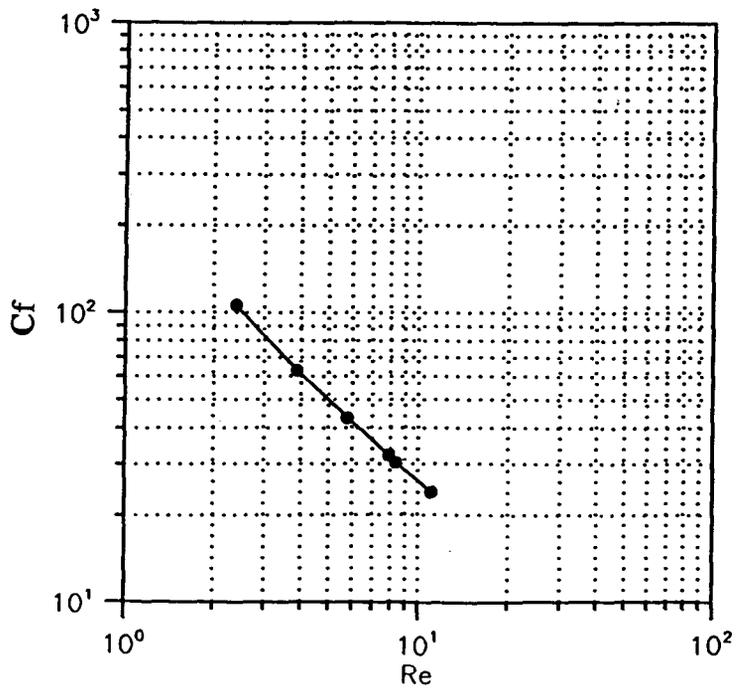


Fig.V. 9 : Cf en fonction du nombre de Reynolds ($Re=U.Cr/\nu$)

6. Mesures expérimentales et comparaison avec les résultats du calcul global:

6.1 aspect statique:

La machine d'essais offre la possibilité de faire varier la pression d'alimentation, l'excentricité et la vitesse de rotation d'arbre. Pour établir les courbes expérimentales, les mesures ont été relevées en régime permanent et après une stabilisation de la température du lubrifiant, les essais ont été répétés plusieurs fois pour la même courbe de mesure.

Dans cette partie, on s'intéresse uniquement au cas statique du problème (excentricité nulle). Ces résultats expérimentaux seront directement comparés avec les résultats de calcul obtenu avec le programme global dans lequel a été introduite la corrélation (V.8).

Les figures V.10 et V.11 représentent l'évolution du débit en fonction de la pression d'alimentation, respectivement à des températures de 20°C et de 28°C. On constate que le débit augmente avec l'accroissement de la température qui se traduit par une diminution à la fois de la viscosité et de la densité du lubrifiant.

Le débit mesuré est en bon accord avec celui calculé.

Pour une vitesse de rotation nulle et une température de 25°C, à des pressions d'alimentation respectivement de 10 bar et 20 bar, les mesures expérimentales confirment la linéarité du champ de pression le long du joint labyrinthe (fig.V.12 et V.13).

Pour une pression d'alimentation égale à 20 bar, nous avons examiné la sensibilité du débit par rapport à la variation de la vitesse de rotation. La figure V.14 montre que le débit reste constant à faible vitesse de rotation, puis, augmente légèrement à partir de 500 tr/min. Cette augmentation est due tout simplement à l'effet de la vitesse de rotation sur l'échauffement d'huile. Cependant, les résultats théoriques et expérimentaux sont en bon accord une fois faite la correction sur la

température de l'huile.

6.2 aspect dynamique:

Compte-tenu des caractéristiques du banc d'essais, on ne pouvait qu'espérer atteindre les coefficients de raideur à travers des mesures quasi-statiques. Il est bien évident que la première étape devait consister prioritairement en la mesure des coefficients de raideur parasites, à excentricité nulle, dûs d'une part à la raideur des lames de suspension d'autre part à la raideur des tuyaux d'alimentation en huile, raideur de beaucoup la plus importante.

Le calcul des valeurs des coefficients de raideur du joint labyrinthe étudié fait à l'aide du modèle global dans lequel a été introduite la corrélation (V.8) (tableau.V.2), montre que les coefficients de raideur croisés sont cent fois inférieurs aux coefficients de raideur directs et que les coefficients de raideur de façon générale décroissent très rapidement avec la vitesse de rotation. Les mesures des raideurs parasites ont donc été faites à vitesse de rotation nulle, le joint étant alimenté normalement.

Dans un premier stade, l'alimentation du joint était faite par l'intermédiaire de tuyaux en acier. Nous avons fait une première série de mesures qui ont montré que la raideur due aux tuyaux était dix à cent fois supérieure à la raideur recherchée. Alors, nous avons été amené à remplacer ces tuyaux par des tuyaux souples, et nous avons refait les expériences, en commençant par chercher la matrice de rigidité parasites. Pour cela, nous avons mesuré la charge en fonction des déplacements correspondants (tableau V.3). Les figures V.15 et V.16 sont obtenues respectivement pour des charges appliquées en x et en y, pour une pression d'alimentation égale à 10 bar.

Ces résultats ont été corrélés "au mieux" par des droites à partir desquelles les valeurs moyennes suivantes ont été déterminées:

a- charge en x: pour $F_x=4.2$ N, $F_y=0$ N ; on a: $E_x=30$ μm , $E_y=-0.8$ μm

b- charge en y: pour $F_y=2.45$ N, $F_x=0$ N ; on a: $E_x=2.4$ μm , $E_y=22$ μm

La résolution d'un système à quatre équations fournit la matrice de rigidité:

$$\begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.112 & 0.008 \\ -0.015 & 0.140 \end{bmatrix} 10^6 (\text{N/m})$$

Ce résultat permet de constater que les coefficients croisés parasites sont dix fois plus faibles que les coefficients directs et que les coefficients directs parasites sont encore du même ordre de grandeur que les coefficients à mesurer du joint labyrinthe pour des vitesses de rotation supérieures à 500 tr/min (Tableau V.2) (les valeurs indiquées correspondent à la moitié de celles pour le joint complet constitué de deux demi-joints symétriques (fig.V.5)). Par ailleurs, les coefficients croisés du joint comme on l'a déjà évoqué, sont cent fois plus faibles que les coefficients directs. Ces constatations nous obligent à remarquer qu'on ne peut espérer atteindre les coefficients directs de raideur du joint pour des vitesses supérieures à 500tr/min.

La précision sur les coefficients directs de raideur parasite peut être évaluée à 5% puisqu'ils peuvent être considérés comme obtenus en tant que moyenne de quatre mesures précises à 10% (erreur sur les chargements négligeables, erreur sur les déplacements de 10%, paragraphe 2.4).

L'expérience montre que lorsqu'on met l'arbre en rotation, le couple produit induit un déplacement négatif en y, heureusement faible, ce qui en fait, est lié à la réaction des tuyaux d'alimentation du joint. Par ailleurs, l'arbre a un faux rond ($\approx 5\mu\text{m}$, au niveau des capteurs de déplacement).

Finalement, ne souhaitant pas faire une mesure du couple, on a adopté la procédure suivante:

1- Après avoir centré l'arbre, on met les capteurs à zéro pour la position moyenne lorsque l'arbre tourne lentement ($\approx 10\text{tr/min}$).

2- A une vitesse de rotation donnée, le déplacement induit par le couple est compensé par une charge en y, puis, on poursuit normalement les mesures en chargeant le joint suivant y. Après, une fois l'arbre arrêté, on observe un retour normal à la position initiale, les charges étant enlevées ce qui permet de penser qu'il n'y a pas de frottements parasites importants.

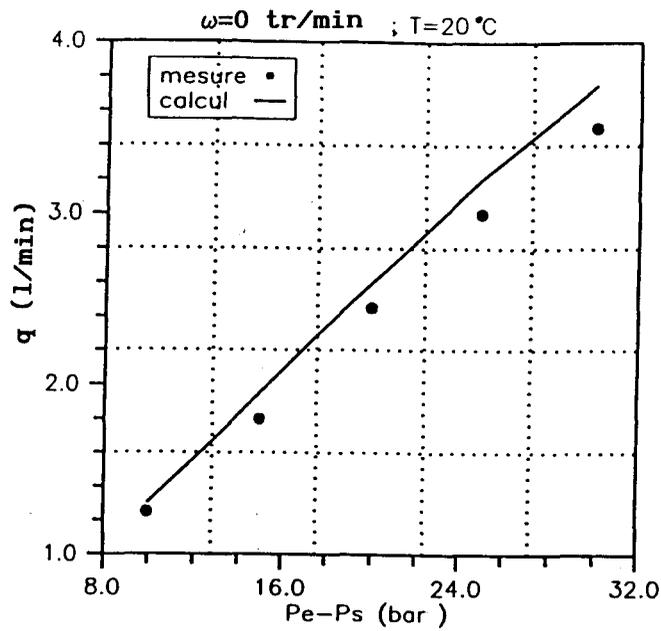
Pour une pression d'alimentation fixée à 10 bar, on mesure le déplacement en y en fonction de la charge appliquée. Cette expérimentation est réalisée pour des vitesses de rotation différentes (1000 et 1500tr/min) dont les mesures brutes correspondantes sont regroupées dans le tableau V.4. Puis, l'utilisation des relations (V.3) permette d'obtenir les points expérimentaux montrés dans la figure V.17. On constate que le joint devient de plus en plus raide quand la vitesse de rotation augmente.

Pour une vitesse de rotation donnée, les résultats expérimentaux sont correctement corrélés par une droite dont la pente fournit un coefficient de raideur global égal à la somme des coefficients de raideur direct du joint labyrinthe et du coefficient de raideur parasite direct suivant y.

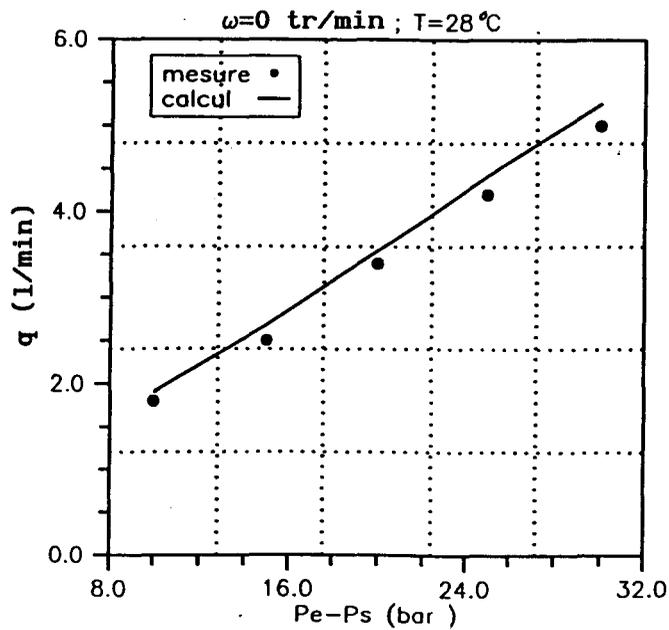
Tout calcul fait on trouve un coefficient de raideur direct pour un demi joint labyrinthe de $0.28 \cdot 10^5 \text{ N/m}$ à 1000 tr/min et de $0.7 \cdot 10^5 \text{ N/m}$ à 1500 tr/min.

Compte tenu de la précision de 5% annoncée précédemment, précision vraisemblablement optimiste quand l'arbre est en rotation, la précision finalement obtenue sur ces valeurs est de l'ordre de 30%.

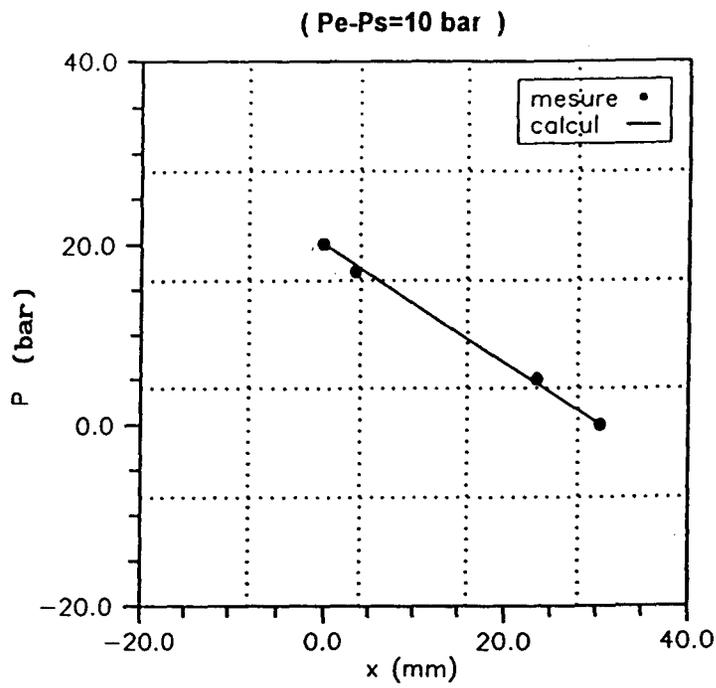
La comparaison avec les résultats théoriques (tableau V.2), effectuée dans la figure V.18, peut ainsi être considérée comme tout à fait satisfaisante.



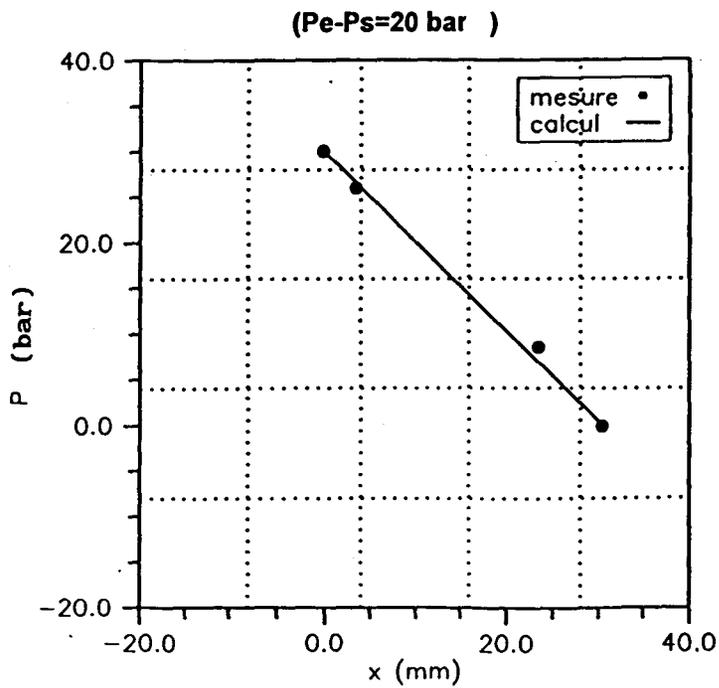
**Fig.V.10: Débit en fonction de la pression d'alimentation à 20°C
comparaison entre mesure et calcul**



**Fig.V.11: Débit en fonction de la pression d'alimentation à 28°C
comparaison entre mesure et calcul**

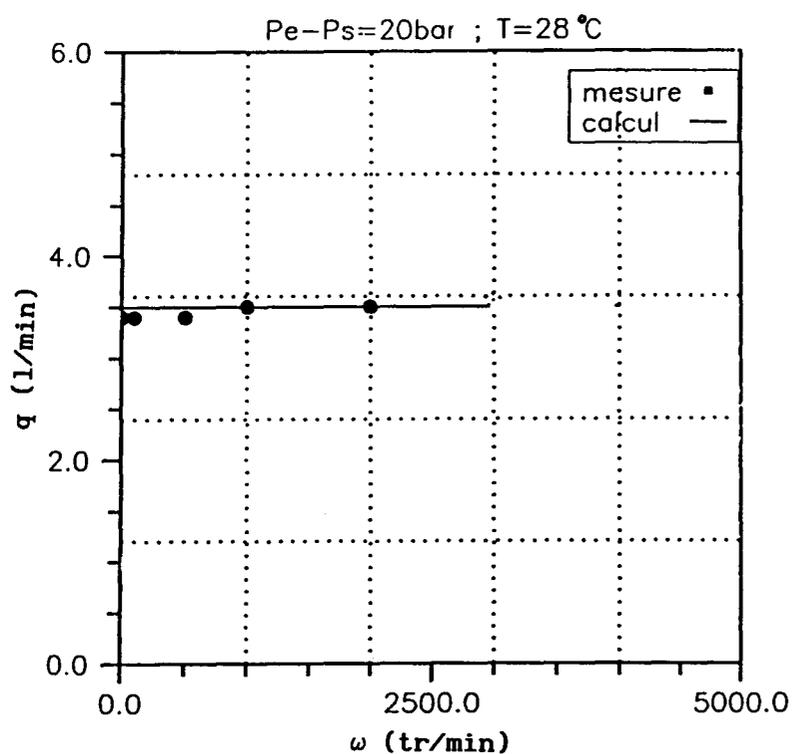


**Fig.V.12: Répartition de pression le long du joint
comparaison entre mesure et calcul**



**Fig.V.13: Répartition de pression le long du joint
comparaison entre mesure et calcul**





**Fig.V.14: Débit en fonction de la vitesse de rotation
comparaison entre mesure et calcul**

(Handwritten mark)

		T=20°c		T=25°c		T=30°c	
Pe-Ps bar	ω tr/min	Kxx (N/m)	Kxy (N/m)	Kxx (N/m)	Kxy (N/m)	Kxx (N/m)	Kxy (N/m)
10	10	-.16E+2	.27E+1	-.16E+2	.17E+2	-.21E+2	.18E+2
	500	-.57E+4	.55E+1	-.57E+4	.16E+2	-.57E+4	.30E+2
	1000	-.23E+5	.54E+2	-.23E+5	.81E+2	-.23E+5	.12E+3
	1500	-.51E+5	.18E+3	-.51E+5	.24E+3	-.51E+5	.33E+3
	2000	-.91E+5	.44E+3	-.91E+5	.55E+3	-.91E+5	.71E+3
20	10	-.20E+2	.25E+2	-.20E+2	.26E+2	-.20E+2	.30E+2
	500	-.57E+4	.33E+2	-.57E+4	.48E+2	-.57E+4	.70E+2
	1000	-.23E+5	.11E+3	-.23E+5	.15E+3	-.23E+5	.20E+3
	1500	-.51E+5	.24E+3	-.52E+5	.34E+3	-.51E+5	.44E+3
	2000	-.92E+5	.55E+3	-.91E+5	.67E+3	-.91E+5	.85E+3

Tableau V.2: Résultats théoriques de Kxx et Kxy

	F (N)	Ex1 (μm)	Ex2 (μm)	Ey1 (μm)	Ey2 (μm)
charge en x	1.08	3	-4	10	-9
	2.45	8	-11	22	-20
	3.53	11	-12	30	-28
	4.61	15	-15	40	-37
charge en y	1.08	7	-7	0	5
	2.45	16	-16	0	11
	3.53	21	-22	0	14
	4.61	28	-28	0	18

Tableau V.3: déplacements bruts en fonction de la charge appliquée

ω (tr/min)	F (N)	Ex1 (μm)	Ex2 (μm)	Ey1 (μm)	Ey2 (μm)
1000	1.08	10	-10	4	3
	2.45	20	-20	11	0
	3.53	28	-28	16	-2
	4.91	35	-35	22	-6
1500	1.08	10	-10	4	4
	2.45	18	-18	9	1
	3.53	25	-25	13	-1
	4.91	30	-30	18	-3

Tableau V.4: Déplacements en fonction de la charge appliquée
à 1000 et 1500 tr/min

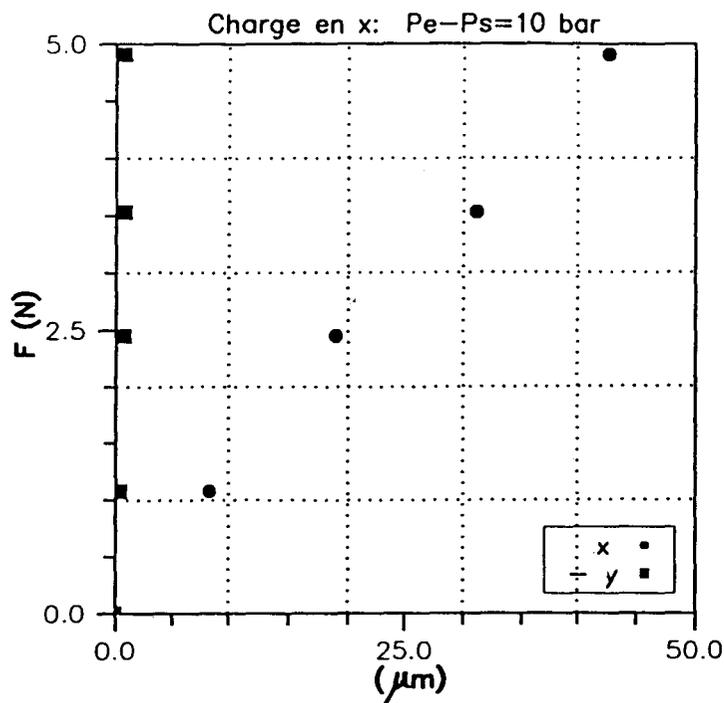


Fig.V.15: Charge appliquée en x

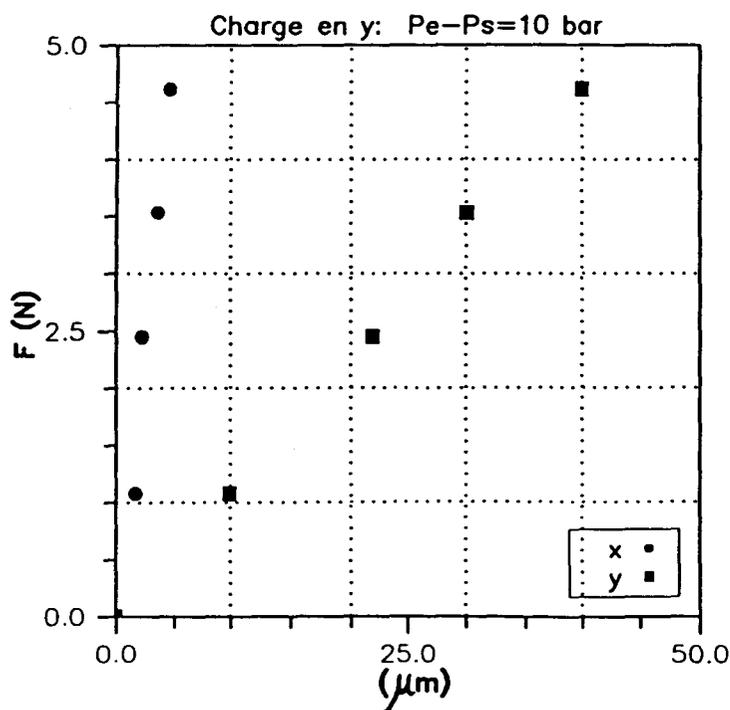


Fig.V.16: Charge appliquée en y

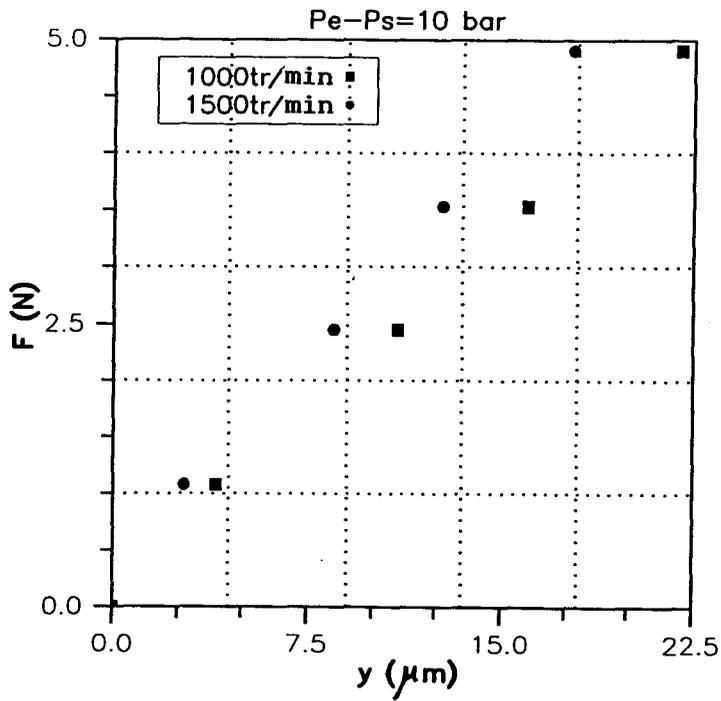


Fig.V.17: Charge en fonction du déplacement avec effet de la vitesse de rotation

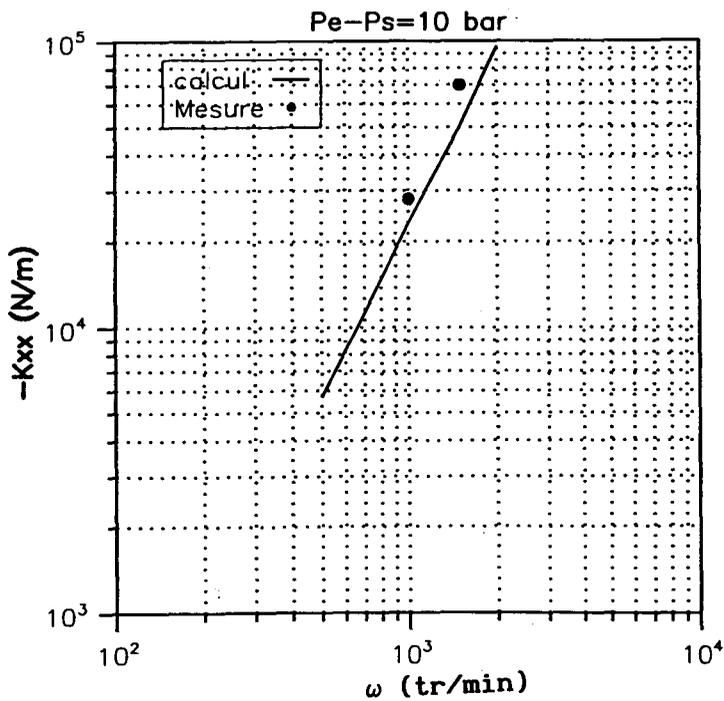


Fig.V.18: Comparaison entre mesure et calcul de K_{xx}



7. Conclusion:

Malgré les difficultés d'expérimentation que nous avons rencontrées, il a été possible d'atteindre l'un des buts assignés aux expériences, c'est-à-dire la validation au moins partielle de la méthodologie de la détermination des caractéristiques statiques et dynamiques d'un joint labyrinthe.

La première série d'essais concernait l'aspect statique de l'expérience, l'excentricité étant supposée nulle. L'expérience a confirmé la cohérence entre les résultats expérimentaux pour le débit de fuite et la répartition de pression le long du joint avec les résultats du calcul global dans lequel a été introduite la corrélation donnant le débit en fonction des pressions de chambre obtenues à l'aide des modélisations locales.

La deuxième série d'expérience a été consacré à l'aspect de la détermination des coefficients de raideur du joint. Dans cette partie, nous avons visé seulement le coefficient de raideur direct, car les rigidités parasites n'ont pas permis la vérification des coefficients croisés de raideur et l'installation d'essais "quasi-statique" ne permettait pas de mesurer les coefficients d'amortissement.

Malgré la précision des moyens de mesures que nous avons utilisés, la bonne concordance des résultats nous a convaincu de la qualité de la modélisation du moins en ce qui concerne les coefficients de raideur qui en fait, directs ou croisés, sont calculés à partir du même champ de pression.

CONCLUSION GENERALE

VI. Conclusion générale:

Ce travail a été consacré à l'étude du comportement des joints labyrinthe. Nous avons mis en oeuvre des moyens numériques et expérimentaux.

∴

A partir d'un modèle de Childs et Scharrer, nous avons, après avoir corrigé les expressions d'un certain nombre de relations, réalisé deux programmes de calcul global permettant la détermination des caractéristiques statiques et dynamiques de joints labyrinthe:

- l'un supposant l'écoulement compressible.
- l'autre supposant l'écoulement incompressible.

∴

Pour valider les hypothèses du modèle de Childs nous avons, à partir d'un programme de calcul 3-D axisymétrique pour des écoulements incompressibles, créé un nouveau programme supposant l'écoulement compressible et isotherme.

La validation de ces programmes a été faite sur un modèle de Boyman et Stoff pour lequel nous disposons des résultats de mesure et de calcul.

Nous avons ensuite traité deux catégories de joints labyrinthe: la première à dents sur le rotor, la seconde à dents sur le stator. Pour les deux catégories de joints, le calcul 3-D axisymétrique (excentricité nulle) a été effectué sur un motif de joint comportant trois chambres identiques.

Dans la première catégorie, nous avons étudié deux types de joints labyrinthe: l'un à dents rectangulaires l'autre à dents triangulaires. L'étude a été faite en compressible, régime pour lequel le modèle de Childs a été initialement créé.

Dans la deuxième catégorie nous avons étudié un seul joint à dents rectangulaires, le calcul a été effectué en incompressible pour éviter un temps de calcul élevé.

Cette étude a permis de dégager les conclusions suivantes:

- L'influence de la forme des dents sur les différentes grandeurs physiques caractérisant l'écoulement est globalement faible, au moins pour les joints considérés.
- Les hypothèses faites par Childs pour déterminer l'écoulement dans les cavités sont d'une façon générale justifiées, notamment, l'hypothèse de type monodimensionnel (grandeurs ne variant que circonférentiellement, uniformes à excentricité nulle). Par contre, les coefficients entrant dans les corrélations fournissant le débit de fuite en fonction des pressions de chambre ne présentent vraiment qu'une première approximation, vraisemblablement meilleure du reste, pour les joints à dents sur le stator.

Par exemple le débit dépend considérablement de la vitesse de rotation, aux vitesses de rotation élevées ce qui n'est pas pris en compte par le modèle de Childs.

∴

Compte-tenu des résultats obtenus, nous nous sommes engagés dans une étude paramétrique dans le but d'obtenir cette corrélation débit-pression, dans le cas compressible, sur un type de joint labyrinthe à dents rectangulaires portées par le rotor, en faisant varier les paramètres Re , $(P_{i-1}-P_i)$, Cr/D , Cr/Hd et Cr/S . Nous en avons déduit les conclusions suivantes:

- Le débit est effectivement proportionnel à $\sqrt{\frac{P_{i-1}^2 - P_i^2}{ReT}}$.
- Le débit est sensiblement proportionnel au rapport Cr/D .
- L'écoulement présente deux régimes suivant la valeur du nombre de Reynolds (Re) associé à la vitesse de rotation: le premier correspond à $Re \leq 1250$, où le débit est indépendant de la vitesse de rotation, le second correspond à $Re > 1250$, où le débit dépend considérablement de la vitesse de rotation.

Il est résulté de cette étude paramétrique une nouvelle corrélation donnant le débit en fonction des pressions de chambre, du nombre de Reynolds et du rapport Cr/D , qui a été par la suite intégrée dans le modèle global. Finalement, la comparaison entre les anciens et les nouveaux résultats a marqué une amélioration sensible des résultats, notamment, dans le cas où la vitesse de rotation est non nulle.

∴

Toujours suivant la même démarche, nous nous sommes intéressés ensuite à la détermination des caractéristiques d'un joint labyrinthe en écoulement incompressible tant du point de vue expérimental que du point de vue de la modélisation.

D'un point de vue expérimental, la réalisation du banc d'essais a présenté des difficultés multiples (non coaxialité initiale du système rotor-stator, rigidité parasite des tuyaux, faux rond de l'arbre). Finalement, on est arrivé à surmonter ces délicats problèmes et à atteindre au moins partiellement l'objectif assigné à cette expérimentation.

On a mesuré principalement, le débit de fuite en fonction de la pression d'alimentation et le coefficient de raideur direct en fonction de la vitesse de rotation.

La comparaison entre les résultats expérimentaux et les résultats de calcul obtenus à partir du modèle global, où a été implantée une corrélation débit-pression obtenue à l'aide d'une modélisation locale, est très satisfaisante.

∴

Bien que la comparaison expérience-modélisation effectuée soit partielle, ces résultats joints à ceux obtenus pour l'étude similaire effectuée en compressible permettent de proposer, pour déterminer les caractéristiques d'un joint quelconque, la méthodologie suivante:

1- déterminer pour le ou les motifs constituant ce joint la corrélation "débit au droit des dents-pressions de chambre" pour la plage d'utilisation du joint à l'aide d'un programme de calcul 3-D axisymétrique (calcul local sur 3 dents à excentricité nulle).

2- utiliser cette corrélation dans un programme de calcul global réalisé suivant le modèle de Childs.

∴

Par ailleurs, le programme de calcul global que nous avons écrit a été fourni à deux constructeurs GECALSTHOM et THERMODYN et des résultats de calcul sur différents types de joints labyrinthe, réalisés pour divers constructeurs (GECALSTHOM, THERMODYN et TURBOMECA) sont fournis dans l'annexe 5.

ANNEXES

Annexe 1

Calcul des coefficients du débit: μ , η

(Dans cette annexe le nombre de dents N_d est appelé N)

Pour un écoulement isentropique, le débit masse sous forme adimensionnelle à travers une tuyère est:

$\bar{q} = \frac{q}{q_c}$, q_c est le débit masse critique tel que:

$$q_c = A \sqrt{\gamma \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} P_0 \rho_0}$$

D'après la formulation de Barré-Saint-Venant, nous avons:

$$\bar{q} = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \left[\varepsilon^{2/\gamma} - \varepsilon^{(\gamma+1)/\gamma} \right]} ; \quad \varepsilon = \frac{P}{P_0} \quad (1)$$

où P_0 est la pression amont dans le réservoir.

La courbe donnant le débit en fonction du rapport des pressions (ε) est représentée dans la figure 1.

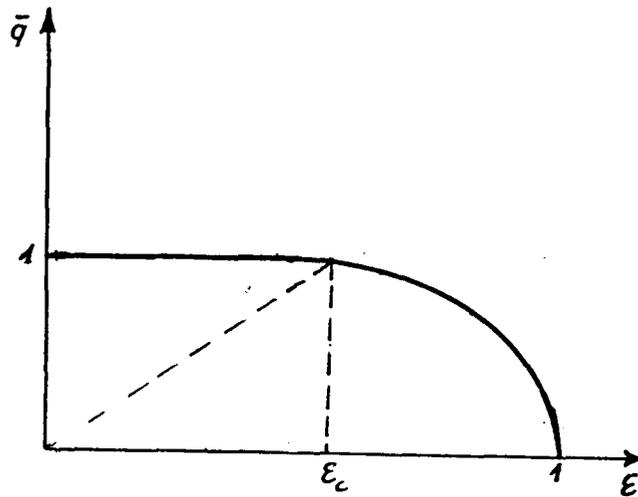


Figure.1

La figure 1 montre que le débit donné par l'équation (1) peut être approximé par une équation elliptique suivante:

$$\bar{q}^2 + \left(\frac{\epsilon - \epsilon_c}{1 - \epsilon_c} \right)^2 = 1 \quad ; \quad \epsilon_c = \frac{P_c}{P_o} = 0.528 \quad (2)$$

Dans le cas du joint labyrinthe (fig.I.6) présentant une succession des chambres, l'équation (2) devient pour la ième fente (dent), comme le montre la figure 2:

$$\left(\frac{\bar{q}}{\epsilon_{i-1}} \right)^2 + \left(\frac{\epsilon_i - \epsilon_{i-1} \epsilon_c}{\epsilon_{i-1} - \epsilon_{i-1} \epsilon_c} \right)^2 = 1 \quad (3)$$

On supposant l'écoulement dans le joint globalement isotherme, on a alors:

$$\frac{P_o}{\rho_o} = \frac{P_{i-1}}{\rho_{i-1}} \quad \text{et} \quad \frac{q_i}{q_{ci}} = \frac{q}{q_{ci}} = \frac{q}{q_c \epsilon_{i-1}} = \frac{\bar{q}}{\epsilon_{i-1}} \quad ; \quad q_{ci} = \epsilon_{i-1} q_c$$

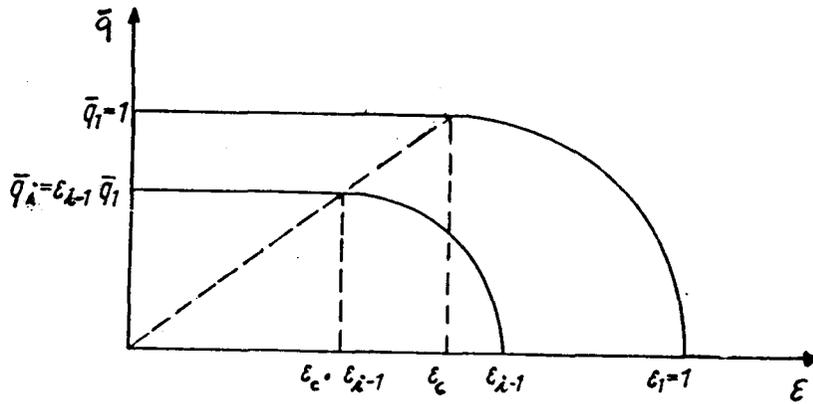


Figure.2

L'équation (3) peut s'écrire sous la forme suivante:

$$(1-\epsilon_c)^2 \bar{q}^2 = (1-\epsilon_c)(\epsilon_{i-1}^2 - \epsilon_i^2) - \epsilon_c (\epsilon_{i-1} - \epsilon_i)^2 \quad (4)$$

i variant de 1 à N

Si on somme l'équation (4) de 1 à N , on trouve:

$$N(1-\epsilon_c)^2 \bar{q}^2 = (1-\epsilon_c)(1-\epsilon_N^2) - \epsilon_c \sum_{i=1}^N (\epsilon_{i-1} - \epsilon_i)^2 \quad (5)$$

Dans le cas où N est arbitraire, le dernier terme du second membre est approximé de la façon suivante:

$$\sum_{i=1}^N (\epsilon_{i-1} - \epsilon_i)^2 = \frac{(1-\epsilon_N)^2}{N} \quad (6)$$

Donc le débit \bar{q} s'écrit:

$$\bar{q} = \sqrt{\frac{1-\varepsilon_N^2}{(1-\varepsilon_c)N} - \frac{\varepsilon_c(1-\varepsilon_N)^2}{(1-\varepsilon_c)^2 N^2}} \quad (7)$$

Si on néglige le dernier terme du second membre, pour des très grands nombres de dents, l'équation (7) devient:

$$\bar{q} = \sqrt{\frac{1-\varepsilon_N^2}{(1-\varepsilon_c)N}} \quad (8)$$

Si on suppose maintenant que la pression à la sortie des fentes P_i' est différente de la pression dans les chambres P_i (figure 3).

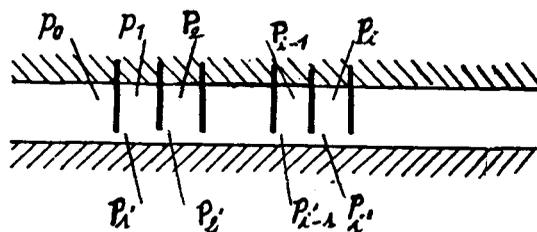


Figure 3

Outre la relation (4) qui est toujours valable entre P_{i-1} et P_i' , il faut prendre en compte la récupération de l'énergie cinétique entre P_i et P_i' . On obtient l'équation (9) similaire à (4), pour la ième chambre.

$$j(1-\varepsilon_c)^2 \bar{q}^2 = (1-\varepsilon_c)(\varepsilon_i^2 - \varepsilon_i'^2) - \varepsilon_c(\varepsilon_i - \varepsilon_i')^2 \quad (9)$$

Pour le débit à travers la ième fente, on obtient comme pour (4) l'équation (10) suivante:

$$(1-\varepsilon_c)^2 \bar{q}^2 = (1-\varepsilon_c)(\varepsilon_i^2 - \varepsilon_{i-1}^2) - \varepsilon_c(\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1})^2 \quad ; \quad \varepsilon_i' = \frac{P_i'}{P_0} \quad (10)$$

A partir des considérations précédentes (N grand), on néglige par la suite les derniers termes du second membre des équations (9) et (10). Pour déterminer le débit \bar{q} , on somme l'équation (9) de $i=1$ à $N-1$ (nombre de chambres), et on suppose que j est constant, car ce paramètre ne dépend que de la géométrie du labyrinthe. Par ailleurs, on somme comme précédemment l'équation (10) de 1 à N (nombre de fentes).

Les équations (9) sommées donnent (11):

$$j(1-\varepsilon_c)^2 \bar{q}^2(N-1) = (1-\varepsilon_c) \sum_{i=1}^{N-1} (\varepsilon_i^2 - \varepsilon_i'^2) \quad (11)$$

Les équations (10) sommées donnent (12):

$$(1-\varepsilon_c)^2 \bar{q}^2 N = (1-\varepsilon_c) \sum_{i=1}^N (\varepsilon_i^2 - \varepsilon_{i-1}^2) \quad (12)$$

Si maintenant, on soustrait de (12) l'équation (11), et si on cherche \bar{q} , on trouve:

$$\bar{q} = \sqrt{\frac{1 - \varepsilon N^2}{(1 - \varepsilon c)((1 - j)N + j)}} \quad (13)$$

Admettant bien sûr que $P_N' = P_N$

On trouve ainsi l'expression (14) qui donne le coefficient μ :

$$\mu = \sqrt{\frac{N}{(1 - j)N + j}} \quad (14)$$

Si on fait tendre N vers l'infini, on obtient (15):

$$\mu = \sqrt{\frac{1}{(1 - j)}} \quad (15)$$

Lorsque N est très grand, l'étude expérimentale effectuée par Egli [41], a montré que μ est en réalité une fonction linéaire de la géométrie du joint labyrinthe (Cr/D), on a:

$$\mu = 1 + m \frac{Cr}{D} \quad (16)$$

Entre (15) et (16), on en déduit le paramètre j :

$$j = 1 - 1 \frac{1}{(1 + m \frac{Cr}{D})^2} \quad \text{avec} \quad m = 16.6 \quad (17)$$

$$\text{Or,} \quad q = \bar{q} \cdot q_c \quad (18)$$

$$\text{d'où } q = A\mu\eta\sqrt{\frac{P_o^2 - P_N^2}{NRT_o}} \quad (19)$$

$$\text{avec } \eta = \sqrt{\gamma \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \frac{1}{1-\epsilon_c}} \quad ; \text{ pour } \gamma=1.4, \text{ alors } \epsilon_c=0.528 \text{ et } \eta=0.9$$

ce coefficient a été écarté par Childs en faveur d'un coefficient de contraction modélisé par Chaplygin [39,40] comme suit:

$$\eta = \frac{\pi}{\pi + 2 - 5S_i + 2S_i^2} \quad ; \text{ avec } S_i = \left(\frac{P_{i-1}}{P_i} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \quad (20)$$

Annexe 2

a- cas compressible

*- Définition des coefficients G et X:

Les coefficients G_i et X_i , correspondant respectivement aux équations de premier ordre de continuité et de quantité de mouvement, sont définis par:

$$G_{1i} = \frac{A_{oi}}{RT} \quad ; \quad G_{2i} = \frac{P_{oi} D_i}{RT}$$

$$G_{3i} = \frac{\dot{m}_o P_{oi} (P_{oi-1}^2 - P_{oi+1}^2)}{(P_{oi-1}^2 - P_{oi}^2)(P_{oi}^2 - P_{oi+1}^2)} + \frac{\dot{m}_o \eta_{oi+1}}{\pi} (5 - 4S_{oi+1}) \left(\frac{P_{oi}}{P_{oi+1}} \right)^{\frac{(\gamma-1)\gamma}{\gamma-1}}$$

$$+ \frac{\dot{m}_o \eta_{oi}}{\pi} (5 - 4S_{oi}) \left(\frac{P_{oi-1}}{P_{oi}} \right)^{\frac{(\gamma-1)\gamma}{\gamma-1}}$$

$$G_{4i} = \frac{\dot{m}_o P_{oi-1}}{(P_{oi-1}^2 - P_{oi}^2)} + \frac{\dot{m}_o \eta_{oi}}{\pi} (4S_{oi} - 5) \left(\frac{P_{oi-1}}{P_{oi}} \right)^{\frac{(\gamma-1)\gamma}{\gamma-1}}$$

$$G_{5i} = \frac{\dot{m}_o \eta_{oi+1}}{\pi} (4S_{oi+1} - 5) \left(\frac{P_{oi}}{P_{oi+1}} \right)^{\frac{(\gamma-1)\gamma}{\gamma-1}} - \frac{\dot{m}_o P_{oi+1}}{(P_{oi}^2 - P_{oi+1}^2)}$$

$$G_{6i} = \frac{\dot{m}_o (C_{ri} - C_{ri+1})}{C_{ri} C_{ri+1}}$$

$$X_{1i} = \frac{P_{oi} A_{oi}}{RcT} \quad ; \quad X_{2i} = \dot{m}_o + \frac{\tau_{roi} a_{ri} (2+m_s) D_i}{R\omega - W_{oi}} + \frac{\tau_{soi} a_{si} (2+m_r) D_i}{W_{oi}}$$

$$X_{3i} = \frac{\tau_{soi} a_{si} D_i}{P_{oi}} - \frac{\tau_{roi} a_{ri} D_i}{P_{oi}} - \dot{m}_o (W_{oi} - W_{oi-1}) - \frac{\eta_{oi}}{\pi} (5 - 4S_{oi}) \left(\frac{P_{oi-1}}{P_{oi}} \right)^{\frac{(\gamma-1)\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\frac{\gamma-1}{\gamma P_{oi}} - \frac{\dot{m}_o P_{oi} (W_{oi} - W_{oi-1})}{(P_{oi-1}^2 - P_{oi}^2)}$$

$$X_{4i} = \text{fno}(W_{oi} - W_{oi-1}) \left[\frac{\eta_{oi}(5-4S_{oi})}{\pi} \left(\frac{P_{oi-1}}{P_{oi}} \right)^{\frac{(\gamma-1)/\gamma}{\gamma P_{oi-1}}} + \frac{P_{oi-1}}{(P_{oi-1}^2 - P_{oi}^2)} \right]$$

$$X_{5i} = (\tau_{roi} \alpha_{ri} m_r - \tau_{si} \alpha_{si} m_s) \frac{D_{ho} \cdot D_i}{2(Cr_i + Hd_i)^2} - \frac{\text{fno}(W_{oi} - W_{oi-1})}{Cr_i}$$

*- Définition des éléments des sous matrices [A] et des vecteurs B et C:

- Matrice [A¹]

$$a_{12} = a_{21} = a_{34} = a_{43} = G_{4i}$$

$$a_{52} = a_{61} = a_{74} = a_{83} = X_{4i}$$

$$a_{56} = a_{65} = a_{78} = a_{87} = -\text{fno}$$

Le reste des éléments de la matrice vaut zéro.

- Matrice [A²]

$$a_{11} = G_{1i}(\omega + \frac{W_{oi}}{R}) ; a_{22} = -a_{11} ; a_{33} = G_{1i}(\frac{W_{oi}}{R} - \omega) ; a_{44} = -a_{33}$$

$$a_{12} = a_{21} = a_{34} = a_{43} = G_{3i} ; a_{52} = a_{61} = a_{74} = a_{83} = X_{3i}$$

$$a_{51} = a_{73} = \frac{A_{oi}}{R} ; a_{62} = a_{84} = -\frac{A_{oi}}{R}$$

$$a_{55} = X_{1i}(\omega + \frac{W_{oi}}{R}) ; a_{66} = -a_{55}$$

$$a_{77} = X_{1i}(\frac{W_{oi}}{R} - \omega) ; a_{88} = -a_{77}$$

$$a_{56} = a_{65} = a_{78} = a_{87} = X_{2i} ; a_{15} = a_{37} = G_{1i} \frac{P_{oi}}{R}$$

$$a_{26} = a_{48} = -G_{1i} \frac{P_{oi}}{R}$$

Le reste des éléments de la matrice vaut zéro.

- Matrice $[A^3]$

$$a_{12} = a_{21} = a_{34} = a_{43} = G_{5i}$$

Le reste des éléments de la matrice vaut zéro.

- Vecteurs colonnes B et C:

$$(B^1) = \frac{1}{2} (G_{6i}, -G_{2i}(\frac{W_{oi}}{R} + \omega), G_{6i}, G_{2i}(\omega - \frac{W_{oi}}{R}), -X_{5i}, 0, -X_{5i}, 0)^T$$

$$(B^2) = \frac{1}{2} (-G_{6i}, G_{2i}(\frac{W_{oi}}{R} + \omega), G_{6i}, G_{2i}(\omega - \frac{W_{oi}}{R}), X_{5i}, 0, -X_{5i}, 0)^T$$

*- Séparation et identification des équations de la continuité et de la quantité de mouvement:

- Continuité:

$$\begin{aligned} \cos(\theta + \omega t): G_{1i}(\omega + \frac{W_{oi}}{R})P_{si}^+ + G_{1i} \frac{P_{oi}}{R} W_{si}^+ + G_{3i} P_{ci}^+ + G_{4i} P_{ci-1}^+ \\ + G_{5i} P_{ci+1}^+ = G_{6i} \frac{(a-b)}{2\varepsilon} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(\theta + \omega t): -G_{1i}(\omega + \frac{W_{oi}}{R})P_{ci}^+ - G_{1i} \frac{P_{oi}}{R} V_{ci}^+ + G_{3i} P_{si}^+ + G_{4i} P_{si-1}^+ \\ + G_{5i} P_{si+1}^+ = G_{2i}(\omega + \frac{W_{oi}}{R}) \frac{(b-a)}{2\varepsilon} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\theta-\omega t): G_{1i}\left(\frac{W_{oi}}{R}-\omega\right)P_{si}^- + G_{1i}\frac{P_{oi}}{R}W_{si}^- + G_{3i}P_{ci}^- + G_{4i}P_{ci-1}^- \\ + G_{5i}P_{ci+1}^- = G_{6i}\frac{(a+b)}{2\varepsilon} \\ \sin(\theta-\omega t): G_{1i}\left(\omega-\frac{W_{oi}}{R}\right)P_{ci}^- - G_{1i}\frac{P_{oi}}{R}W_{ci}^- + G_{4i}P_{si-1}^- + G_{5i}P_{si+1}^- \\ + G_{3i}P_{si}^- = G_{2i}\left(\omega-\frac{W_{oi}}{R}\right)\frac{(a+b)}{2\varepsilon} \end{aligned}$$

- Quantité de mouvement

$$\begin{aligned} \cos(\theta+\omega t): X_{1i}\left(\omega+\frac{W_{oi}}{R}\right)W_{si}^+ + \frac{A_{oi}}{R}P_{si}^+ + X_{2i}W_{ci}^+ - m_oW_{ci-1}^+ + X_{3i}P_{ci}^+ \\ + X_{4i}P_{ci-1}^+ = -X_{5i}\frac{(a-b)}{2\varepsilon} \\ \sin(\theta+\omega t): -X_{1i}\left(\omega+\frac{W_{oi}}{R}\right)W_{ci}^+ - \frac{A_{oi}}{R}P_{ci}^+ + X_{2i}W_{si}^+ - m_oW_{si-1}^+ + X_{3i}P_{si}^+ \\ + X_{4i}P_{si-1}^+ = 0 \\ \cos(\theta-\omega t): X_{1i}\left(\frac{W_{oi}}{R}-\omega\right)W_{si}^- + \frac{A_{oi}}{R}P_{si}^- + X_{2i}W_{ci}^- - m_oW_{ci-1}^- + X_{3i}P_{ci}^- \\ + X_{4i}P_{ci-1}^- = -X_{5i}\frac{(a+b)}{2\varepsilon} \\ \sin(\theta-\omega t): X_{1i}\left(\omega-\frac{W_{oi}}{R}\right)W_{ci}^- - \frac{A_{oi}}{R}P_{ci}^- + X_{2i}W_{si}^- - m_oW_{si-1}^- + X_{3i}P_{si}^- \\ + X_{4i}P_{si-1}^- = 0 \end{aligned}$$

b- Cas incompressible:

*- Définition des coefficients G et X:

Les coefficients G_i et X_i , correspondant respectivement aux équations de premier ordre de continuité et de quantité de mouvement sont définis par:

* Coefficients G:

$$G_{1i} = \rho A_{oi} \quad ; \quad G_{2i} = \rho D_i$$

$$G_{3i} = \frac{\dot{m}_o(P_{oi-1} - P_{oi+1})}{2(P_{oi-1} - P_{oi})(P_{oi} - P_{oi+1})} \quad ; \quad G_{4i} = \frac{\dot{m}_o}{2(P_{oi-1} - P_{oi})}$$

$$G_{5i} = \frac{\dot{m}_o}{(P_{oi} - P_{oi+1})} \quad ; \quad G_{6i} = \frac{\dot{m}_o(C_{ri} - C_{ri+1})}{C_{ri}C_{ri+1}}$$

*** Coefficients X:**

$$X_{1i} = \rho A_{oi} \quad ; \quad X_{2i} = \dot{m}_o + \frac{\tau_{roi} a_{ri}(2+ms)D_i}{R\omega - W_{oi}} + \frac{\tau_{soi} a_{si}(2+mr)D_i}{W_{oi}}$$

$$X_{3i} = -\frac{\dot{m}_o(W_{oi} - W_{oi-1})}{2(P_{oi-1} - P_{oi})} \quad ; \quad X_{4i} = -X_{3i}$$

$$X_{5i} = (\tau_{roi} a_{ri} m_r - \tau_{soi} a_{si} m_s) \frac{D_{ho} D_i}{2(C_{ri} + H_{di})^2} - \frac{\dot{m}_o(W_{oi} - W_{oi-1})}{C_{ri}}$$

*** éléments des sous matrices [A]:**

Les éléments des matrices $[A^1]$ et $[A^3]$ sont inchangés. Par contre dans la matrice $[A^2]$, les éléments a_{11} , a_{22} , a_{33} et a_{44} sont nuls, $a_{15} = a_{37} = G_{1i}/R$ et $a_{26} = a_{48} = -G_{1i}/R$.

Annexe 4

* coefficients G :

$$G_{1i} = \frac{A_{oi}}{RT} \quad ; \quad G_{2i} = \frac{P_{oi} D_i}{RT}$$

$$G_{3i} = \frac{\dot{m}_o P_{oi} (P_{oi-1}^2 - P_{oi+1}^2)}{(P_{oi-1}^2 - P_{oi}^2)(P_{oi}^2 - P_{oi+1}^2)} \quad ; \quad G_{4i} = \frac{\dot{m}_o P_{oi-1}}{(P_{oi-1}^2 - P_{oi}^2)}$$

$$G_{5i} = - \frac{\dot{m}_o P_{oi+1}}{(P_{oi}^2 - P_{oi+1}^2)} \quad ; \quad G_{6i} = \frac{\dot{m}_o (C_{ri} - C_{ri+1})}{C_{ri} C_{ri+1}}$$

* coefficients X :

$$X_{1i} = \frac{P_{oi} A_{oi}}{R_c T} \quad ; \quad X_{2i} = \dot{m}_o + \frac{\tau_{roi} a_{ri} (2 + m_s) D_i}{R\omega - W_{oi}} + \frac{\tau_{soi} a_{si} (2 + m_r) D_i}{W_{oi}}$$

$$X_{3i} = \frac{\tau_{soi} a_{si} D_i}{P_{oi}} - \frac{\tau_{roi} a_{ri} D_i}{P_{oi}} - \frac{\dot{m}_o P_{oi} (W_o - W_{oi-1})}{(P_{oi-1}^2 - P_{oi}^2)}$$

$$X_{4i} = \dot{m}_o (W_{oi} - W_{oi-1}) \frac{P_{oi-1}}{(P_{oi-1}^2 - P_{oi}^2)}$$

$$X_{5i} = (\tau_{roi} a_{ri} m_r - \tau_{si} a_{si} m_s) \frac{D_{ho} D_i}{2(C_{ri} + H_{di})^2} - \frac{\dot{m}_o (W_{oi} - W_{oi-1})}{C_{ri}}$$

Annexe 5: Applications industrielles:

Nous présentons dans ce paragraphe quelques résultats relatifs à des exemples industriels proposés par GECALSTHOM, TURBOMECA et THERMODYN. Ces exemples de joints labyrinthe sont effectivement présents sur des turbomachines à basses et à hautes pressions. Les configurations géométriques sont plus ou moins compliquées. Les calculs ont été effectués en utilisant la corrélation fournissant le débit au droit des dents obtenu dans l'étude paramétrique effectuée au chapitre (IV). Ce n'est qu'une première approximation. Pour chaque joint, il faudrait déterminer par un calcul local la corrélation correspondant aux géométries réelles.

5.1 GECALSTHOM:

Il existe plusieurs configurations correspondant aux différents types de joints labyrinthe, mais on se limite à deux cas de figures dont les conditions de fonctionnement sont différentes.

exemple n° 1:

Le joint labyrinthe traité est utilisé dans une turbine à vapeur présentant des lèchettes installées sur le stator et des tablettes sur le rotor (fig.1). Dans cet exemple, la vitesse tangentielle initiale est supposée nulle. Le tableau V.1 montre l'effet du jeu radial sur les coefficients dynamiques de raideur et d'amortissement,

exemple n°2:

Le joint labyrinthe, utilisé dans une turbine à vapeur, porte des lèchettes sur le stator au nombre de 6 (fig.2). Pour une vitesse de rotation fixée à 16000tr/min, les conditions de fonctionnement sont variables en pression et vitesse tangentielle initiale. Le tableau 2 montre que les coefficients dynamiques (raideur et amortissement) croissent en valeurs absolues avec l'accroissement de la vitesse tangentielle initiale.

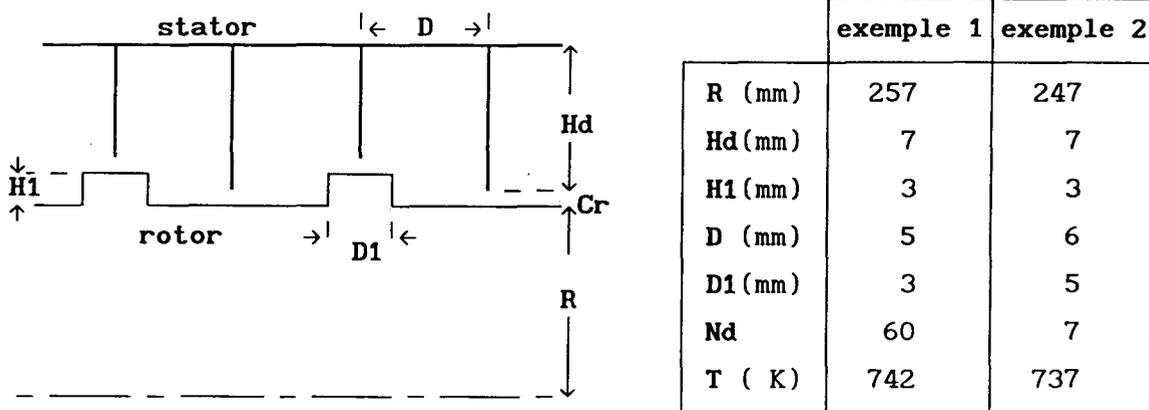


Figure 1: Modèle de joint labyrinthe

 $\omega=3600$ tr/min

exemples	Cr mm	Pe bar	Ps bar	Kxx N/m	Kxy N/m	Cxx N.S/m	Cxy N.S/m
1	.5	77.8	5	-.10E+8	-.36E+7	.96E+4	.21E+5
	.4	77.8	5	-.11E+8	-.31E+7	.92E+4	.24E+5
	.3	77.8	5	-.12E+8	-.25E+7	.89E+4	.27E+4
2	.4	66.95	57.7	-.57E+6	-.12E+7	.25E+4	.18E+4
	.5	66.95	57.7	-.38E+6	-.84E+6	.24E+4	.12E+4
	.4	66.95	50	-.54E+6	-.14E+6	.28E+4	.15E+4

Tableau 1: Effets de pression et du jeu radial sur les coefficients dynamiques

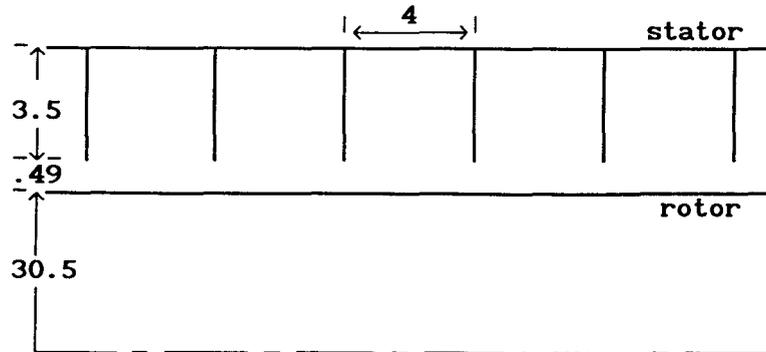


Figure 2: Modèle de joint labyrinthe (dimensions en mm)

 $\omega = 16000 \text{ tr/min}$

Win m/s	T K	Pe bar	Ps bar	Kxx N/m	Kxy N/m	Cxx N.S/m	Cxy N.S/m
124.4	561.5	8.09	2.22	-.24E+5	.3E+5	9	12
90.8	590.7	8.06	2.31	-.15E+5	.3E+5	4	8
93.3	589.6	8.49	2.41	-.16E+5	.4E+5	4	9
96.4	594.3	9.05	2.62	-.18E+5	.6E+5	4	10
77.2	610.8	9.61	2.94	-.14E+5	.1E+5	3	8
84.3	621.8	10.22	3.65	-.17E+5	.3E+5	4	9
83.9	629.2	10.85	4.17	-.17E+5	.4E+5	4	10

Tableau 2: Effets de vitesse tangentielle et de pression sur les coefficients dynamiques

5.2 TURBOMECA:

Ici, les joints labyrinthe équipent des compresseurs à basses pressions. Le fluide considéré est l'air avec une vitesse tangentielle initiale nulle.

exemple n° 1:

Il s'agit de trois sortes de joints labyrinthe qui diffèrent par le nombre de dents et la largeur équivalente des chambres. Les dents sont triangulaires portées par le rotor de diamètre 82,21mm et du jeu radial 0,125mm (fig.3). Le tableau 3 regroupe les résultats de calcul sur les coefficients dynamiques pour une température égale à 500 °K et une vitesse de rotation égale à 10000tr/min. D'une façon générale, les coefficients dynamiques (raideur et amortissement) augmentent en valeurs absolues avec à la fois le rapport des pressions et le nombre de dents.

exemple n° 2:

Dans ce cas, le joint labyrinthe a une forme étagée, les dents ayant une géométrie semblable à celle du joint précédent et étant portées par le rotor (fig.4). Pour une vitesse de rotation égale à 35000tr/min et une température égale à 600K, le tableau 4 montre que les coefficients dynamiques augmentent en valeur absolue avec le nombre de dents et la valeur du saut.

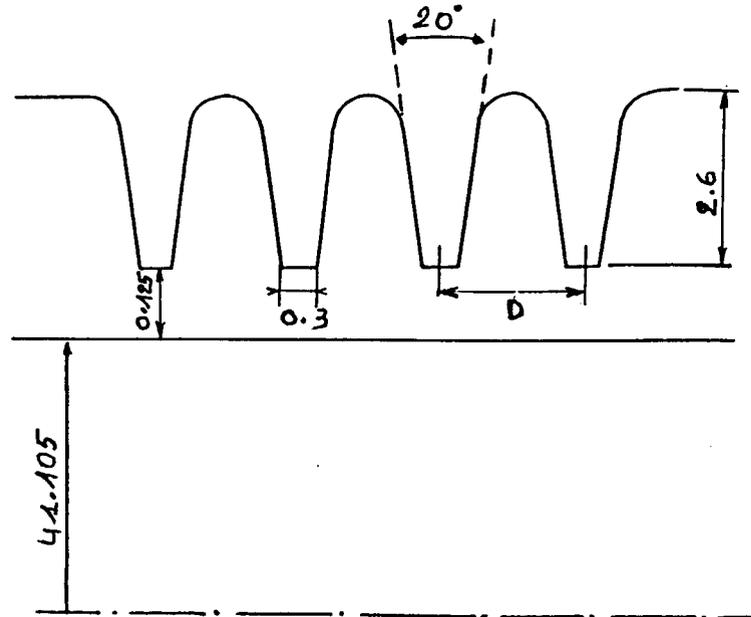


Figure 3: Modèle de joint labyrinthe (dimensions en mm)

Nd	ω tr/min	Pe bar	Ps bar	q Kg/s	Kxx N/m	Kxy N/m	Cxx N.S/m	Cxy N.S/m
10	35000	1.2	0.8	.60E-2	-.21E+5	-.17E+4	2.3	4.5
10	35000	5.0	3.5	.24E-1	-.84E+5	-.81E+4	8.2	16
10	35000	13.0	7.0	.74E-1	-.19E+6	-.39E+5	17	31
10	40000	13.0	7.0	.74E-1	-.27E+6	-.32E+5	22	41
6	35000	1.2	0.8	.71E-2	-.91E+4	-.30E+4	1.6	1.7
6	35000	5.0	3.5	.28E-1	-.37E+5	-.10E+5	6.0	6.0

Tableau 3: Effets du nombre de dents de vitesse de rotation sur les coefficients dynamiques

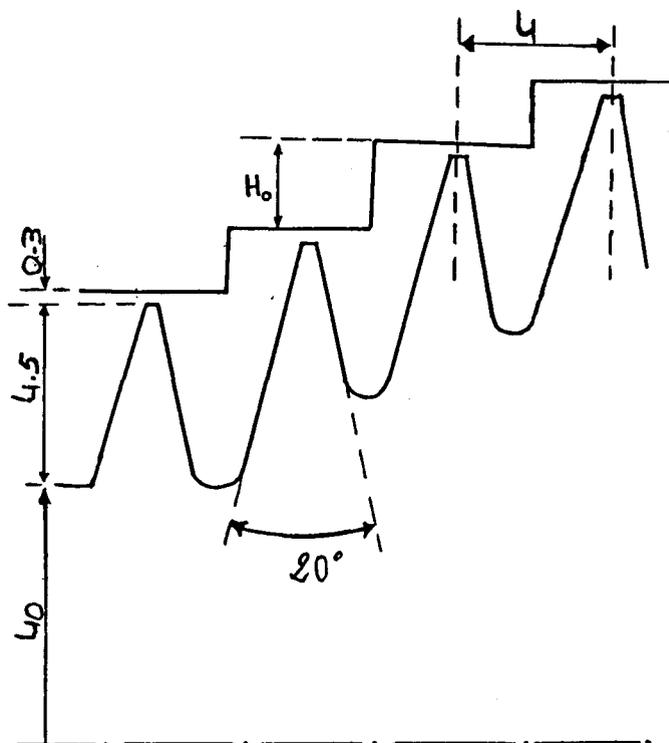


Figure 4: Modèle de joint labyrinthe étagé (dimensions en mm)

Nd	H ₀ mm	P _e bar	P _s bar	q Kg/s	K _{xx} N/m	K _{xy} N/m	C _{xx} N.S/m	C _{xy} N.S/m
10	1.5	1.2	0.8	.60E-2	-.27E+5	-.23E+2	3.4	5.8
10	1.5	5.0	3.5	.24E-1	-.11E+6	-.38E+4	12 0	22
10	1.5	13.0	7.0	.74E-1	-.25E+6	-.43E+5	22	42
6	1.5	1.2	0.8	.70E-2	-10E+5	-.32E+4	1.9	2.0
6	2	1.2	0.8	.70E-2	-.11E+5	-.33E+4	2.0	2.1
6	2	5.0	3.5	.46E-1	-44E+5	-.12E+5	7.3	7.6

Tableau 4 : Effet de H1 et de Nd sur les coefficients dynamiques



5.3 THERMODYN:

Le joint labyrinthe est utilisé dans un compresseur centrifuge à haute pression, les dents sont triangulaires (angle d'ouverture=20°) portées par le stator, présentant trois étages de dents de rayons différents; le jeu radial est de 0.17mm (fig.5). Le fluide utilisé est l'azote de masse molaire 28g, la vitesse tangentielle à l'entrée du joint est 0,2 fois la vitesse de l'arbre. Le tableau 5 illustre deux exemples ayant des conditions de fonctionnement différentes. Les coefficients dynamiques correspondant au premier exemple sont nettement supérieurs à ceux du second exemple (différence de pression et vitesse de rotation moins importantes), mais d'une façon générale, ils sont du même ordre de grandeur.

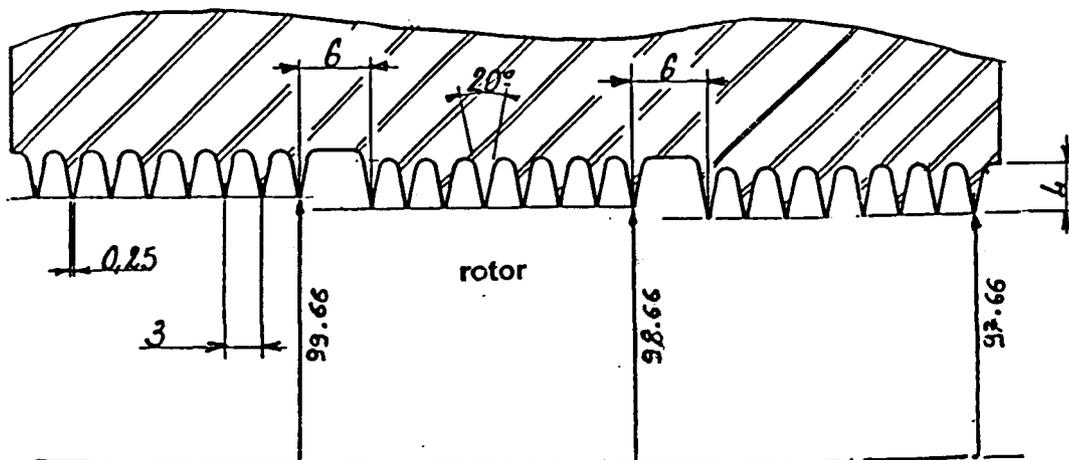


Fig.V.5: Modèle de joint labyrinthe (dimensions en mm)

T K	Pe bar	Ps bar	ω tr/min	Kxx N/S	Kxy N/S	Cxx N.S/m	Cxy N.S/m
435	551.4	265.8	10157	-.26E+8	.27E+7	.77E+4	.15E+5
392.5	364.4	198.9	9100	-.15E+8	.16E+7	.53E+4	.99E+4

Tableau 5

REFERENCES

- [1] Alfrod J.S., "Protecting Turbomachinery From Self-Excited Wirl", ASME Journal of Engineering for Power, Vol.38, 1965, PP. 333-344.
- [2] Vance J. M., and Murphy, B.T., "Labyrinth Seal Effects of Rotor Whirl Stability", Inst. of Mechanical Engineer, 1980, pp.369-373.
- [3] Kostyuk A.G., "A Theoretical Analysis of the Aerodynamic Forces in the Labyrinth Glands of Turbomachines", Teploenergetica, 1972, pp.39-44.
- [4] Iwatsubo T., "Evaluation of instability Forces of Labyrinth Seals in Turbines or Compressors", NASA CP 2133 Proceedings of Workshop at Texas A&M University 12-14 May 1980, entitled Rotordynamic Instability Problems in high Performance Turbomachinery, pp. 139-167.
- [5] Iwatsubo T., "Evaluation of Instability Forces on the Labyrinth Seals in Turbines or Compressors", NASA CP 2133 Proceedings of a Workshop at Texas A&M University 10-12 May 1982, entitled Rotordynamic Instability in High Performance Turbomachinery, pp.139-167.
- [6] Benkert H., and Wachter J., "Querkräfte aus Spaltdichtungen-Eine Mögliche Ursache für die Laufunruhe von Turbomaschinen", Atomkernenergie, Vol.32, 1978, Lfg.4, pp.239-246.
- [7] Benkert H., and Wachter J., Studies on Vibrations Stimulated by Lateral Forces in Sealing Gaps. AGARD-CP-237, 1978, pp. 9.1-9.11.
- [8] Benkert H., and Wachter J., "Flow Induced Coefficients of Labyrinth Seals of Applications in Rotordynamic", NACA CP 2133 Proceedings of a Workshop held at Texas A&M University 12-14 May 1980, Entitled Rotordynamic Instability Problems of High Performance Turbomachinery, pp.189-212.
- [9] Benkert H., "Stromungsbedint Federkennwerte in Labyrinth Dichtungen", Doctorat Dissertation, University of Stuttgart, 1980.
- [10] Boyman T., "Transport Phenomena in Labyrinth Seals of Turbomachines", AGAR CPP 237, Seal Technology in Gas Turbine Engines, London, April 6-7, 1978.

-
- [11] Reynolds W.C., "Computation of Turbulent Flows", *Ann. Rev. Fluid Mech.* (1976), 183-208.
- [12] Taylor C., and Hood P., "A numerical Solution of the Navier-Stokes Equations Using the Element Technical", *Computers and Fluids* (1973), Vol.1, 73-100.
- [13] Stoff H., "Calcul et Mesure de la Turbulence d'un Ecoulement Incompressible dans le Labyrinthe entre un Arbre en Rotation et un Cylindre Stationnaire" These N°342 (1979), Ecole Polytechnique Federal de Lausanne (Suisse).
- [14] Stoff H., 1980, "Incompressible Flow in a Labyrinth Seal", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.100, pp. 817-829.
- [15] Jenny R. and Wyssmann H., "Labyrinths as a cause of self-excited Rotor Oscillations in Centrifugal Compressors", *Zulser Technical Review*, 1980, Vol.4, PP. 149-157.
- [16] Jenny R., "Labyrinth as a cause of Self-excited Rotor Oscillations in Centrifugal Compressors", *Sulzer Technical Review*, n°4, 1980, pp. 140-156.
- [17] Wyssmann H., and Jenny R., "Lateral Vibration Reduction in High Pressure Centrifugal Compressors", *Proceedings of the 9th Turbomachinery Symposium*, Texas A and M University, 1980, pp.45-56.
- [18] Wyssmann H., and Jenny R., "Prediction of Stiffness and Damping Coefficients for Centrifugal Compressor Labyrinth Seals", *Journal of Engineering Gas Turbines and Power*, Vol.106, 1984, pp.920-926.
- [19] Childs D.W., "Dynamic Analysis of Turbulent Annular Seals Based on Hirs", Texas A&M University, *Journal of Lubrication Technology*, Vol.105, 1983, pp. 429-436.
- [20] Childs D.W., and Scharrer J. K. "An Iwatsubo-Based Solution for Labyrinth Seals", *ASME Trans. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, Vol.108, 1986, pp. 325-332.

- [21] Childs D.W., and Scharrer J., "Experimental Rotordynamic Coefficients Results for Teeth on Stator Labyrinth Gas Seals", ASME Trans. Journal of Engineering for Gas Turbine and Power, Vol.108, 1986, pp.599-604.
- [22] Childs D.W., and Scharrer J., "Theory Versus Experiment for the Rotordynamic Coefficient of Labyrinth Gas Seals, Part II-A Comparison to Experiment", ASME Journal of Vibration, Acoustic, Stress, and Reliability in Design, Vol.110, 1988, pp.281-287.
- [23] Dara W., and Childs D.W., "Rotordynamic Coefficients and Leakage Test Results for Interlock and Tooth on Stator Labyrinth Seals", Presented at The Gas Turbine and the Aeroengine Congress, Amsterdam, the Netherlands June 6-9, 1988.
- [24] Kirk R. G., "Evaluation of Aerodynamic Instability Mechanism for Centrifugal Compressors, Part I", Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design. ASME, 1988, Vol.110, pp. 201-206.
- [25] Kirk R. G., "Evaluation of Aerodynamic Instability Mechanisms for Centrifugal Compressors, Part II", Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in design. ASME, 1988, Vol.110, pp.207-212.
- [26] Rhode D.L., and Sobolik S.R., " Simulation of Subsonic Flow Through a Generic Labyrinth Seal", ASME Trans. of Engineering for Gas Turbine and Power, Vol.108, 1985, pp.674-680.
- [27] Demko J. A., Morrison G. L. and Rhode D. L., "The Prediction and measurement of Incompressible Flow in a Labyrinth Seal", Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 1989, Vol.111, pp. 697-702.
- [28] Wittig S., "Heat Transfer in Stepped Labyrinth Seals", Journal of Engineering for Gas Turbines and Power. ASME, 1988, Vol. 110, pp. 63-69.
- [29] AMSDEN A. et al./Kiva-II, "A Computer Program for Chemically Reactive Flows with Sprays", Los Alamos National Laboratory Report LA11560, May 1989.
- [30] Blasius H., "Forschungarb", ING.-Wes., N°131, 1913.

-
- [31] Yamada Y., " Trans. Japan Soc. Mechanical Engineers", Vol.27, n°180, 1961, p. 1267.
- [32] Candel S., " Mécaniques des Fluides", Dunod Université, 1990.
- [33] Ouziaux R., et Perrier J., "Mécanique des Fluides appliquée" Dunod Université, 1978.
- [34] Hodkinson B., "Estimation of the Leakage through a Labyrinth Gland", Mechanical Engineering, 1939, Vol.142, pp.459-467
- [35] Vermes G., "A Fluid Mechanics Approach to the Labyrinth Seal Leakage Problem", Journal of Engineering for Power, ASME, 1961, pp. 161-169.
- [36] Weheaba A. M., Mobarak T. et Sabri, O. M., "Experimental Study of the Air Flow through Labyrinth Seal", Mechanical Power Engineering, pp. 519-523.
- [37] John E.A.J., "Gas Dynamics, Wiley, 1979.
- [38] Neumann K., "Zur Frage der Verwendeg von Durchblickdichtungen im Dampfturbinenbau", Maschinenbautechnik, Vol.13, 1964, N°4.
- [39] Chaplygin S. A., "Gas Jets", Scientific Memoirs, Moscow Univ. 1962; Tans. as NACA TM 1063, 1944, Also in Collected Work, Vol.II Gostekhizdat, Moscow, 1948.
- [40] Gurevich M., "The Theory of Jets in a Ideal Fluid, Pergamon Press, 1966, pp. 319-323.
- [41] Egli A., "The leakage of Steam Through Labyrinth Glands", Trans. ASME, Vol..57, 1935, pp.115-122.
- [42] Kirk G., "A Method for Calculating Labyrinth Seal Inlet Swirl Velocity", Rotating Machinery Dynamics, ASME, New York, Vol. 2, pp. 345-350.
- [43] Jimbo H., "Investigation of the Interaction of Windage and Leakage Phenomena in a Centrifugal Compressor", ASME annual Meeting, New York, NY. July, 1956, pp.47-

56.

- [44] Sriti M., "Simulation numérique d'écoulements turbulents dans les joints labyrinth", Communication de 11ème Congrès Français de Mécanique, LilleI, 1993, Vol. 5, pp. 241-244
- [45] Sriti M. et Micheau P., "Comportement des Joints Labyrinthe dans les Turbomachines", 1er Congrès de Génie des Procédés, COMAGEP, Mai 1994, Marrakech, Maroc.
- [46] Flotran User's Manual, "Logiciel de calcul de la mécanique des fluides" Copyright 1992, Compuflo, Inc., Toll Free, 1-800-548-6806 (U.S. & Canada).
- [47] Rice J.G., Rita J., Kim D., and Michael D.N., Flotran User's Manuel, " Navier-Stokes Computation of a Typical High-Lift Airfoil System", Compuflo, Inc., Charlottesville, Virginia 22901-8611 USA, 1992.
- [48] Rice J.G., and Schnipke R.J., "A Monotone Streamline Upwind Finite Element Method for Convection Dominated Flows", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1985, pp.168-182.
- [49] Rice J.G., and Rita J., "An Equal-Order Velocity-Pressure Formulation That Does Exhibit Spurious Pressure Modes", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 58 (1986) 135-149.
- [50] Rita J., and Schnipke R.J., "A Finite Element Method for Free and Forced Convection Heat Transfert", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.24, 1987, pp. 117-128.
- [51] Rita J., and Schnipke P.D., "A fluid Flow and Heat Transfert Analysis for Evaluating the Effectiveness of an IC Package Heat Sink", Reprinted with Permission from proceedings of the Fifth Annual IEEE Semiconductor Thermal and Temperature Measurement Symposium, San Diego, California, Feb. 7-9, 1989, pp.81-87.
- [52] Patankar S.V., " Numerical heat Transfert and Fluid Flow", McGraw-Hill, New York, 1980.

- [53] Ansys User's Manual, " Logiciel de calcul de structure", Swanson Analysis System, Inc., As an Unpublished Work (U.S).
- [54] Feidt A., "Quelques résultats sur une méthode numérique de résolution du type Euler-Lagrange, pour les équations de Navier-Stokes". Thèse de Doctorat de Mécanique, Univ. de Lille, 1990
- [55] Boutaleb S. A., "Paliers hydrostatiques en régime turbulent, Modélisation de l'écoulement à la jonction des chambres et des portées".Thèse de doctorat de mécanique, Univ. de Lille, 1987.
- [56] Debuchy R., "Ecoulement turbulent avec aspiration radiale entre un disque fixe et un disque en rotation". Thèse de Doctorat de Mécanique, Univ. de Lille, 1993.
- [57] Dutoya, "Simulation numérique des écoulements dans les cavités inter-disques. Présentation et discussion de la méthode de calcul utilisée dans le code Icare", ONERA, RT n°11 /3469 EY, (1985).
- [58] Boussinesq J. "Théorie de l'écoulement tourbillonnaire et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes à grande section" I-II Gauthier-Villars, Paris, 1897.
- [59] Prandtl L., "Uber die Ausgebildete Turbulenz", Z. Angew Math. Mech. Vol. 5, 1925.
- [60] Van Driest, "On Turbulence Flow near Wall", J. of Aero Science, Vol. 23, 1956.
- [61] Dutoya D. et Michard P. J, "Une Méthode de Volume finis de Type Implicite pour le Calcul des Ecoulements Elliptiques", Recherche Aérospatiale, N°:1980-2, pp.123-129.
- [62] Debailleux C., "Etude du comportement d'un palier hydrostatique", Thèse de 3ème cycle, 1977, Université des Sciences et Technologies de Lille.
- [63] Belfales L., "Modélisation numérique des guidages radiaux à lubrifications fluides, applications aux paliers Polygon", Thèse de doctorat, Tome 2, Faculté Polytechnique de Mons, 1985.