

N° D'ORDRE: 1243

50376
1994
15

THESE

présentée à

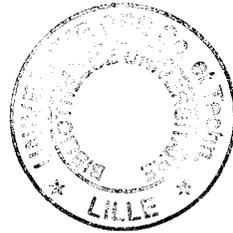
**L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES
DE LILLE**

pour obtenir le titre de

DOCTEUR EN MECANIQUE

par

CHARKI Zakaria



sujet de la thèse :

**Analyse Théorique du Problème de la Convection
de Bénard Profonde**

Soutenue le 25 Janvier 1994 devant la Commission composée de

Mr A. DYMENT : Professeur à l'U.S.T.L.;

Président

Mr S. NICAISE : Professeur à l'Université de Valenciennes;

Rapporteur

Mr E. SANCHEZ-PALENCIA : Directeur de Recherches

Rapporteur

C.N.R.S. à l'Université de PARIS VI ;

Mr G. TOURNEMINE : Professeur à l'Université de Rennes I.

Rapporteur

Mr G. COEURE : Professeur à l'U.S.T.L.;

Membre

Mr V. THILLIEZ : Chargé de Recherches C.N.R.S. à l'U.S.T.L.;

Membre

Mr R. Kh. ZEYTOUNIAN : Professeur à l'U.S.T.L.

Membre

SCD LILLE 1



D 030 258885 8

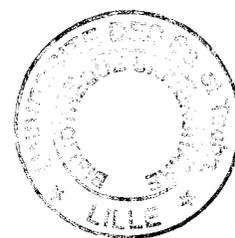
50376
1994
15

Je dédie cette thèse

A ma mère qui a toujours respecté, encouragé et facilité ma vocation.

A mon père qui, j'en suis certain, comprend ma passion.

A Youssef, Houda et Myriam qui m'ont toujours soutenu et encouragé.



A tous mes amis.

REMERCIEMENTS

Mes remerciements vont tout particulièrement à

Monsieur le Professeur A. DYMENT

Professeur à l'Université des Sciences et Technologies de Lille.

Vous me faites aujourd'hui l'honneur de présider cette thèse. Veuillez croire à l'expression de ma haute considération.

A mon Maître, Monsieur le Professeur R. KH. ZEYTOUNIAN

Professeur à l'Université des Sciences et Technologies de Lille,
Lauréat de l'Académie des Sciences.

La confiance que vous m'avez témoignée en me confiant ce sujet qui vous est cher m'a profondément touché.

Outre une initiation très privilégiée à diverses techniques mathématiques, ces années passées auprès de vous ont été très enrichissantes et fructueuses et m'auront appris qu'il était possible de concilier rigueur, enthousiasme et humanité. Soyez remercié ici pour votre compréhension et votre patience durant la longue période qu'a duré ma maladie et qui a sérieusement retardé la soutenance de cette thèse.

Je vous prie de bien vouloir accepter ce travail en témoignage de ma sincère reconnaissance, de mon profond respect et de mon amitié.

A Monsieur le Professeur E. SANCHEZ-PALENCIA

Professeur à l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI),
Membre correspondant de l'Académie des Sciences.

Vous me faites un grand honneur en vous intéressant à mon travail et en acceptant de le juger.

Veillez trouver ici l'expression de ma profonde gratitude et de mon profond respect.

A Monsieur le Professeur G. TOURNEMINE

Professeur à l'Université de Rennes I.

J'ai été très sensible à la spontanéité avec laquelle vous avez accepté de juger cette thèse.

Recevez ici l'assurance de mes sincères remerciements et de ma profonde considération.

A Monsieur le Professeur S. NICAISE

Professeur à l'Université de Valenciennes et du Hainaut Cambresis.

Je vous remercie de la bienveillance et de la gentillesse que vous m'avez toujours témoignées.

Vous me faites un grand honneur en acceptant de juger cette thèse.

Veillez trouver ici l'expression de ma profonde gratitude.

A Monsieur le Professeur G. COEURE,

Professeur à l'Université des Sciences et Technologies de Lille.

Tout au long de cette thèse, votre soutien et votre amitié ne m'ont jamais fait défaut.

Soyez certain de ma profonde reconnaissance et de mon profond respect.

A Monsieur V. THILLIEZ

Chargé de Recherches C.N.R.S. au Laboratoire de Géométrie,
Analyse et Topologie de Lille.

Pour vos conseils éclairés et précieux, pour votre aide efficace et soutenue, pour la gentillesse avec laquelle spontanément vous m'avez guidé pour les questions ayant trait à l'analyse fonctionnelle, ainsi que pour la relecture des premières versions de ce mémoire, je tiens particulièrement à vous remercier.

Sans votre expérience et vos conseils, ce travail ne serait pas tel qu'il est.

Soyez certain, Cher Vincent, de ma profonde reconnaissance et de ma très sincère amitié.

NOTATIONS

NOTATIONS

$(x_1, x_2, x_3) \equiv (x, y, z) \quad (z \in]0, 1[)$: coordonnées d'un point de l'espace affine euclidien E^3 relativement au repère orthonormé $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \equiv (0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{e})$,

$t \in [0, T[$ (T éventuellement $= +\infty$) : le temps,

(p, ρ, ϑ) : pression, masse volumique et perturbation de la température,

$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \equiv (u, v, w)$: champ des vitesses,

\vec{g} : champ de la pesanteur,

T_0 : température de référence,

$\tilde{\Delta}T_0$: différence de température entre les parois supérieure et inférieure,

$R_a \equiv R$: nombre de Rayleigh,

$Pr \equiv \sigma$: nombre de Prandtl,

$\delta_0 \equiv \delta \in [0, 1]$: paramètre de profondeur,

$\chi(z) \equiv \chi = 1 + \delta (1 - z)$.

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

$$D(\vec{u}) = \frac{1}{2} \left[\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T \right] \quad : \text{ tenseur taux de déformation}$$

(T ~ transposé),

$$\psi(x,z,t) \quad : \text{ fonction de courant.}$$

$$\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1} \times]0,1[, \quad n = 2 \text{ ou } 3 \quad : \text{ ouvert connexe;}$$

$$\partial\Omega \quad : \text{ frontière de } \Omega \text{ lorsque } \Omega \text{ est borné;}$$

$$\mathcal{D}(\Omega) \quad : \text{ espace des fonctions indéfiniment différentiables et à support compact dans } \Omega;$$

$$L^p(\Omega), \quad p \in [1, \infty[\quad : \text{ espace des fonctions de puissance } p^{\text{ième}} \text{ sommable sur } \Omega \text{ pour la mesure } dx.dy.dz;$$

$$L^{\infty}(\Omega) = \left\{ f \text{ mesurable sur } \Omega \text{ et } \exists C \mid |f| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega \right\};$$

$$D^{\alpha} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \alpha = \left\{ \alpha_1, \dots, \alpha_n \right\}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

Espaces de Sobolev

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ f \mid D^\alpha f \in L^p(\Omega), \quad |\alpha| \leq m \right\};$$

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \text{adhérence de } \mathcal{D}(\Omega) \text{ dans } W^{m,p}(\Omega);$$

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega), \quad H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega) \text{ pour } m \geq 0;$$

$$H^{-m}(\Omega) = \text{dual de } H_0^m(\Omega) = W^{-m,2}(\Omega);$$

$$X = X^n \text{ et } X' = \text{dual de } X \text{ (} X \text{ étant un espace fonctionnel donné);}$$

$$L^p(0,T;X) = \left\{ f \mid f \text{ mesurable de }]0,T[\longrightarrow X \text{ et}$$

$$\left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p dt \right)^{1/p} < \infty \quad \text{si } p \in [1, \infty[,$$

$$\left. \begin{array}{l} \sup_{t \in]0,T[} \text{ess } \|f(t)\|_X \leq \infty \\ \text{si } p = \infty \end{array} \right\},$$

X étant un espace de Banach.

Espaces liés aux champ de vecteurs solénoïdaux

$$W = \left\{ \vec{u} \in \left[\mathcal{D}(\Omega) \right]^n \mid \text{div } \vec{u} = 0 \right\},$$

$$H = \text{adhérence de } W \text{ dans } \mathbb{L}^2(\Omega),$$

$V =$ adhérence de W dans $H_0^1(\Omega)$,

$\mathcal{H} = H \times L^2(\Omega)$, $\mathcal{V} = V \times H_0^1(\Omega)$.

$|\cdot|$: norme dans $L^2(\Omega)$, $\mathbb{L}^2(\Omega)$, H ou \mathcal{H} ;

$|\cdot|_p$, $1 \leq p \leq \infty$: norme dans $L^p(\Omega)$ ou $\mathbb{L}^p(\Omega)$;

$\|\cdot\|_m$: norme dans $H^m(\Omega)$, $\mathbb{H}^m(\Omega)$, $H_0^m(\Omega)$
ou $\mathbb{H}_0^m(\Omega)$;

$\|\cdot\| \equiv \|\cdot\|_1$: norme dans $H_0^1(\Omega)$, $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$, V ou \mathcal{V} ;

(\cdot, \cdot) : produit scalaire dans $L^2(\Omega)$, $\mathbb{L}^2(\Omega)$,
 H ou \mathcal{H} ;

$((\cdot, \cdot))_m$: produit scalaire dans $H^m(\Omega)$, $\mathbb{H}^m(\Omega)$,
 $H_0^m(\Omega)$ ou $\mathbb{H}_0^m(\Omega)$;

$((\cdot, \cdot))$: produit scalaire dans $H^1(\Omega)$, $\mathbb{H}^1(\Omega)$,
 $H_0^1(\Omega)$, $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$, V ou \mathcal{V} ;

$(\cdot, \cdot)_X$: produit scalaire dans X ou \mathcal{X} ;

$\|\cdot\|_X$: norme dans X ou \mathcal{X} ;

RESUME

RESUME

Le modèle le plus usité pour analyser l'instabilité thermique dans une couche horizontale de fluide pesant, placée dans le champ de gravité, est celui de Rayleigh-Bénard. Néanmoins, ce modèle semble inadapté lorsque la couche fluide est profonde et il est nécessaire d'avoir recours aux équations de la convection profonde de Bénard. Nous étudierons le phénomène convectif dans le cadre de ces dernières.

L'analyse de la stabilité linéaire de ces équations ainsi que celle de deux systèmes dynamiques finis issus de celles-ci sont abordées. Nous obtenons également un nouveau système de Lorenz et l'équation de Landau-Ginzburg pour ces équations.

Pour les équations de la convection profonde stationnaires et instationnaires linéaires dans un domaine borné, nous démontrons divers théorèmes d'existence et d'unicité de solutions.

MOTS CLES

Attracteur; bifurcation; convection profonde; existence; unicité; stabilité; forme normale; Lorenz profond, Equation de Landau-Ginzburg.

ABSTRACT

The thermal instability of a horizontal deep layer of fluid is analyzed within the deep Bénard convection equations first derived by R. Zeytounian.

A linear stability theory for these equations is carried. The study of two finite dynamical systems is also accomplished. A new Lorenz system containing a new term is obtained and the Landau-Ginzburg equation is derived. Existence and uniqueness theorems for solutions of the linear steady or unsteady deep Bénard problems are proved.

KEY WORDS :

Attractor; bifurcation; deep convection; existence; uniqueness; stability; normal form; Lorenz deep system; Landau-Ginzburg equation.

SOMMAIRE

SOMMAIRE

REMERCIEMENTS	i
NOTATIONS	v
RESUME	ix
ABSTRACT	x
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1: PROBLEME PHYSIQUE ET PRESENTATION DU MODELE DE LA CONVECTION PROFONDE DE BENARD	8
1. Modes de transport de la chaleur	8
2. Historique	10
3. Instabilité convective: raisonnements heuristiques	11
4. Modélisation	16
5. Cadre fonctionnel	33
CHAPITRE 2: THEORIE LINEAIRE	51
1. Problème linéaire instationnaire	51
2. Problème linéaire stationnaire	58
3. Problème spectral	60
4. Quelques solutions approchées du problème (3.3)	72
CHAPITRE 3 : ANALYSE NON LINEAIRE : ETUDE DE QUELQUES SYSTEMES DYNAMIQUES	88
1. Système de Lorenz : cas libre-libre	88
2. Système de Howard-Krishnamurti profond : cas libre-libre	107
CONCLUSION	113
BIBLIOGRAPHIE	116

ANNEXE

**THE BENARD PROBLEM FOR DEEP CONVECTION :
DERIVATION OF THE LANDAU-GINZBURG EQUATION** 127

**THE BENARD PROBLEM FOR DEEP CONVECTION :
LORENZ DEEP SYSTEM** 146

INTRODUCTION

INTRODUCTION

Les équations aux dérivées partielles jouent un rôle fondamental dans la modélisation des phénomènes naturels : on les rencontre dans chaque branche scientifique. Par conséquent, l'étude de leurs solutions éventuelles occupe une place prédominante en mathématiques.

Si, à l'heure actuelle, on maîtrise assez bien les équations aux dérivées partielles linéaires, il en est tout autrement pour les problèmes non linéaires. Or, il est devenu impérieux de s'attaquer à ces derniers puisque ceux-ci gouvernent beaucoup de systèmes chaotiques. *Un système est dit chaotique si la connaissance de son état pendant un temps aussi long qu'on le désire, ne permet pas pour autant de prévoir ce que sera son évolution ultérieure; en d'autres termes, l'imprédictibilité est l'aspect déterminant du chaos.* Il peut alors paraître paradoxal que de telles équations déterministes gouvernent des systèmes chaotiques. Il n'en est rien, car l'apparence chaotique de ces phénomènes a fait place maintenant à une unification conceptuelle inattendue avec les notions de bifurcations, d'attracteurs étranges, etc... . *Rappelons qu'un attracteur étrange est un objet mathématique, abstrait, qui, d'après D. Ruelle [108], peut être vu comme une infinité de feuilletts ou d'anneaux étirés et repliés sur eux-mêmes.* La caractéristique visuelle la plus frappante de ces attracteurs est leur structure *fractale* (pour une introduction à ces théories cf. par exemple [5]-[22]-[55]-[77]).

Pour s'attaquer à une équation aux dérivées partielles, faute d'en trouver une solution analytique explicite, on se pose en général un ensemble de questions :

(1) Existence : La question d'existence d'au moins une solution se pose naturellement à quiconque souhaite étudier une équation aux dérivées partielles.

(2) Unicité : Une fois la question d'existence résolue, il est naturel de considérer le problème de l'unicité des solutions.

(3) Stabilité (en un sens à préciser) : Ayant établi l'existence et l'unicité (ou la non unicité) des solutions d'une équation aux dérivées partielles, il importe de savoir si cette (ces) solution(s) est (sont) stable(s).

Rappelons qu'un problème est dit *bien posé* (au sens de Hadamard) si

- (i) il possède une solution;
- (ii) cette solution est unique;
- (iii) la solution dépend continûment des données (en un sens à préciser).

Dans le cas contraire, le problème est dit *mal posé*.

Les écoulements fluides rencontrés dans la nature sont en général turbulents et la caractéristique de ces écoulements est leur imprédictibilité; aussi est-il nécessaire d'abandonner la démarche précédente pour suivre une nouvelle stratégie. C'est dans cet esprit que diverses approches ont été développées.

C'est ainsi qu'a été introduite par Kolmogorov (1941) [69]-[70], Oboukhov (1941), Onsager (1945), Heisenberg et Von Weizsäcker (1948) la théorie statistique de la turbulence développée (*forte*) dans le cas des équations de Navier (*pour les écoulements incompressibles visqueux*). J. Leray [81] a justifié ce point de vue par la perte de l'unicité et de la stabilité des solutions pour les nombres de Reynolds très grands et pour de grandes valeurs du temps.

En fait, J. Leray [82]-[83] suggère que l'apparition de singularités en temps fini i.e. l'existence d'un temps t tel que :

$$\int_{\Omega} |\text{rot } \vec{u}(x,t)|^2 dx = +\infty, \quad (\vec{u} \text{ désignant la vitesse}),$$

serait à l'origine de la turbulence. Or cette conjecture n'a été, à ce jour, ni confirmée ni infirmée. Au contraire, lorsque le domaine Ω occupé par le fluide est bidimensionnel, C. Foias et G. Prodi [39] ont montré que tel n'était pas le cas.

Ce n'est que récemment que B. Mandelbrot [88] a suggéré que l'ensemble

$$\Sigma(t) = \left\{ x \in \Omega : |\text{rot } \vec{u}(x,t)| = \infty \right\} \quad \text{était fractal.}$$

Une autre hypothèse avancée est que la turbulence serait statistiquement homogène (i.e. invariante par translation), isotrope (i.e. invariante par rotation) et auto-similaire (*en Anglais : self-similar*). Mais les expériences effectuées en soufflerie par Batchelor et Townsend (1949) contredisent cette hypothèse. En effet, ces expériences montrent que le taux de dissipation ϵ n'est pas réparti de façon dense dans l'espace; ceci a conduit B. Mandelbrot [89] à supposer que la dimension du support ("*carrier*" selon la terminologie utilisée dans [89]) est fractal. *Cette approche statistique ne sera pas adoptée dans cette thèse.*

Se pose également la question centrale de la genèse de la turbulence et de la phase de transition du laminaire au turbulent. Là, une approche radicalement différente, en termes de systèmes dynamiques finis ou infinis, s'appuyant sur les idées de H. Poincaré, les travaux de S. Smale [116] et stimulée par les travaux de E. N. Lorenz, s'impose.

Selon L. Landau [76] et E. Hopf [57], la turbulence serait le régime atteint après une cascade infinie de bifurcations. On peut objecter à cette hypothèse d'être quelque peu trop linéaire (*car elle néglige les différentes interactions qu'il peut y avoir entre les différents modes*) et de ne pas être

en accord avec diverses expériences. Ce scénario a été corrigé par S. Newhouse, D. Ruelle et F. Takens [109]-[110]; ces auteurs ont proposé une alternative sérieuse à la conjecture de Landau-Hopf en suggérant un scénario ne mettant en jeu qu'un nombre fini et petit de bifurcations avant l'apparition du chaos temporel (*ou turbulence faible cf. [96]*) qui précède la turbulence. Il semble alors que l'apparition du chaos (temporel) corresponde à l'apparition d'attracteurs étranges.

D'autres scénarios ont été depuis proposés comme modes d'apparition du chaos :

*** le scénario de Feigenbaum de dédoublements des périodes [36];**

*** intermittence temporelle [6]-[103].**

Ces divers scénarios ont été observés expérimentalement pour les systèmes *confinés*. Néanmoins, prédire l'évolution d'un système demeure une chose compliquée; en témoigne le fait que d'une expérience à l'autre, les expérimentateurs sont incapables de prédire le type de scénario qui sera observé. Toutefois, une fois que le système s'engage dans un scénario, il le suit étape par étape.

En géométrie étendue (*non confinée*), l'approche en termes de systèmes dynamiques n'est plus adaptée à cause de la perte de cohérence spatiale, apparemment irréversible, qui caractérise la turbulence faible [90].

Dans ce type de systèmes hors d'équilibre, on observe des structures spatiales macroscopiques, appelées *structures dissipatives [100] (synergetics [54], self-organization [71])*. D'un point de vue thermodynamique, il n'y a *a priori* aucune raison d'avoir une énergie libre pour ces systèmes dont le minimum engendrerait la structure (*pattern*) qui sera observée. Ces systèmes sont gouvernés par des équations aux dérivées partielles non linéaires et le nombre d'informations qu'on peut tirer de celles-ci par une analyse théorique reste limité. En général, ces systèmes comportent une contrainte extérieure que l'on peut modifier à souhait, représentée par un paramètre de contrôle qu'on notera ici par R ; en augmentant la valeur de ce paramètre, on éloigne le système de l'équilibre.

Très près de l'équilibre, les termes non linéaires peuvent être négligés dans les équations modèles, ce qui permet de détecter le seuil R_c d'apparition des instabilités dans le système, ainsi que leur nombre d'onde k_c et/ou leur pulsation ω_c . Au voisinage de $R = R_c$, la dynamique du système se laisse en général décrire par une équation d'amplitude [105].

Plus loin de l'équilibre, les termes non linéaires ne sont plus négligeables et, au delà d'un certain seuil R_1 , le système peut bifurquer vers d'autres états ayant leur propre groupe de symétries et ainsi de suite jusqu'à l'apparition du chaos *spatio-temporel* (ou *turbulence de phase* d'après [74]) i.e. la destruction des structures. A chaque étape, l'état qui résulte d'une bifurcation devient instable vis à vis de nouveaux modes compliquant ainsi la dynamique globale du système. Remarquons qu'à chaque bifurcation correspond une perte de prédictibilité car plusieurs états sont équivalents relativement aux nouvelles symétries du système; d'où l'importance de la variable de phase qui permet de spécifier lequel de ces états sera choisi par le système. Cette variable est en général gouvernée par une équation de phase; ce type d'équations a été introduit dans [23]-[72]-[73]-[104].

Remarquons qu'il est extrêmement difficile d'étudier numériquement certains phénomènes en géométrie étendue. Ceci a conduit divers auteurs à introduire des modèles phénoménologiques (plus simples à étudier, cf. [49]-[54]-[119]) possédant certaines propriétés (cf. [90, p.252]).

D'un point de vue expérimental, l'expérience recherchée pour analyser la transition vers le chaos spatio-temporel est celle qui

- * admet une très grande extension;
- * possède un paramètre de contrôle R que l'on peut faire varier;
- * donne naissance à des structures dissipatives.

Heureusement, une telle situation peut être approchée dans différentes expériences; citons à titre d'exemple :

- * le phénomène de Rayleigh-Bénard (cf. Chapitre 1);
- * la convection de Bénard-Marangoni (cf. [90]);
- * la convection dans les mélanges binaires (cf. [79]);
- * la convection thermique dans les cristaux liquides nématiques (cf. [90]);
- * les instabilités électrohydrodynamiques dans les cristaux liquides nématiques (cf. [28]);
- * les écoulements de Couette-Taylor (cf. [26]);
- * les ondes paramétriques (cf. [87]);
- * les systèmes de réaction-diffusion (cf. [97]) et pour la réaction de Belousov-Zhabotinsky, cf. [107]-[129];
- * les structures de solidification (cf. [126]).

Il convient de remarquer que le phénomène de Rayleigh-Bénard ne fait intervenir aucun mouvement mécanique entretenu de l'extérieur, ce qui en fait un candidat de choix pour les expérimentateurs (*pour une description des différents scénarios de transition vers le chaos de ce phénomène cf. [35]-[45]-[46]-[60]*).

D'un point de vue théorique, le modèle de Rayleigh-Bénard résulte de l'approximation d'Oberbeck-Boussinesq qui implique, implicitement, que la couche de fluide est peu profonde, et, par conséquent, exclut beaucoup d'écoulements géophysiques. Ceci a conduit R. Zeytounian à proposer des équations modèles (*les équations de la convection profonde de Bénard*) régissant l'instabilité convective dans les couches très profondes de fluide.

Dans ce modèle, apparaissent d'une part un paramètre lié à la profondeur de la couche fluide (*appelé dans la suite paramètre de profondeur : il est nul dans le modèle "classique" de Rayleigh-Bénard*), et d'autre part, un couplage entre ce paramètre et les termes de dissipation visqueuse qui ne sont plus alors négligeables.

Paradoxalement, ce modèle a connu un retentissement limité dans la communauté scientifique, à en juger par le peu de travaux qui lui ont été consacrés : à la connaissance de l'auteur, hormis

* la thèse de Doctorat de M. ERRAFIY (*effectuée sous la direction de R. ZEYTOUNIAN*) où il a été principalement question de l'analyse numérique de divers systèmes dynamiques finis obtenus à partir des équations de la convection profonde par la technique de Galerkin,

*l'article de F. FRANCHI & B. STRAUGHAN [40] traitant, à l'aide d'une méthode énergétique, de la stabilité non linéaire des équations de la convection profonde,

il n'y a eu aucune autre étude de ces équations.

L'objet même de cette thèse est l'analyse théorique du modèle de la convection profonde en prenant ce qui a été dit ci-dessus comme fil conducteur. C'est ainsi qu'au Chapitre 1, nous introduisons le phénomène convectif et rappelons les équations de la convection profonde; nous y obtenons également les conditions aux limites dans les cas d'une surface libre déformable et de parois mauvaises conductrices de chaleur. Ce chapitre contient également le cadre fonctionnel utilisé.

Le Chapitre 2 est consacré au problème linéaire associé aux équations de la convection profonde, il constitue en fait un complément à l'étude linéaire effectuée dans [31, Chap. 2]. Les résultats d'existence, d'unicité et de régularité des solutions pour les équations linéaires stationnaires et instationnaires y sont établis. Le problème spectral est ensuite analysé.

Les différentes bifurcations ainsi que l'étude de l'attracteur du système de Lorenz "profond" sont analysées au Chapitre 3. La stabilité des cellules convectives longues aux nombres de Prandtl très petits est également étudiée dans ce chapitre.

Nous avons regroupé, en annexe de ce mémoire, deux projets d'articles acceptés pour publication. Les thèmes qui y sont abordés sont principalement l'obtention d'un système de Lorenz nouveau dans le cas de parois rigides ou rigide-libre et l'obtention de l'équation de Landau-Ginzburg pour les équations de la convection profonde bidimensionnelles.

CHAPITRE I

CHAPITRE 1

<p style="text-align: center;">PROBLEME PHYSIQUE ET PRESENTATION</p> <p style="text-align: center;">DU MODELE DE LA CONVECTION PROFONDE DE</p> <p style="text-align: center;">BENARD</p>

Dans ce chapitre, nous expliquerons au § 1, d'un point de vue physique, la conduction et la convection dans les fluides, deux phénomènes rencontrés fréquemment dans la suite. Au § 2, nous donnerons un historique des premières études scientifiques réalisées sur le problème de la convection. Divers raisonnements heuristiques expliquant l'instabilité convective seront présentés au § 3. Le § 4 sera consacré à la présentation du modèle de la convection profonde ainsi qu'à sa comparaison avec le modèle classique connu sous le nom de modèle de Rayleigh-Bénard, puis on donnera des exemples de convection en géophysique ainsi qu'en astrophysique. Le cadre fonctionnel sera présenté au § 5.

1. Modes de transport de la chaleur

En Physique, on distingue trois modes principaux de transmission de la chaleur : la conduction, la convection et le rayonnement. Pour ce dernier mode, cf. par exemple [80, § 25]-[124, § 58].

1.1.La conduction dans les fluides [86, Chap.6]-[101 ,Chap. 3]

On suppose que le fluide est constitué de molécules. Partant de cette hypothèse, on peut légitimement dire que la différence entre un gaz et un liquide réside dans la présence de forces de Van-der-Waals dans les liquides, c'est à dire d'interactions dipôle-dipôle induites; l'interprétation physique de la conduction à l'échelle microscopique devient alors similaire dans le cas d'un gaz ou d'un liquide. Afin de mieux illustrer notre propos, nous prenons l'exemple d'un gaz.

Les molécules du gaz admettent différentes vitesses. On sait que la distribution des vitesses dépend de la température, d'après la loi de Maxwell; on en déduit que chaque molécule admet une énergie cinétique qui dépend de la température. Comme les molécules sont animées d'un mouvement aléatoire, elles rentrent en collision; en supposant que le choc soit élastique, il en découle que lors de la collision, il y a échange d'énergie et de quantité de mouvement, ce qui, à l'échelle microscopique, permet d'expliquer la conduction. Notons que, dans la conduction, la quantité de mouvement moyenne échangée est nulle.

1.2.La convection

La convection est la réponse d'une couche de fluide dilatable présentant une stratification de densité, potentiellement instable, dans le champ de gravité [90], (cas d'un fluide lourd surmontant du fluide léger). Cette stratification est obtenue en chauffant la couche fluide par le bas; la dilatation thermique induisant généralement une diminution de la densité. Le fluide se trouve alors soumis à deux tendances antagonistes; d'une part, le fluide situé en bas, plus chaud, moins dense, tend à s'élever; d'autre part, le fluide situé à la partie supérieure, plus froid et donc plus dense tend à descendre. Néanmoins, tant que le gradient vertical de température appliqué à la couche fluide reste faible, aucun mouvement de fluide n'a lieu, à cause de la friction (effets visqueux) et de la diffusion de la chaleur. On voit donc que la convection est un mode de transport de la chaleur par mouvement de la matière avec la quantité de chaleur qu'elle contient. Dans ce mode, l'énergie

interne est transportée comme tendent à le confirmer diverses expériences, cf. [42].

2. Historique

En 1855, James Thomson écrivit une note intitulée : " *On certain curious motions observable at the surfaces of wine and other alcoholic liquors* "; il y reporta l'existence d'écoulements "convectifs" et "volatils" (*en Anglais (evaporative)*) qu'il attribua aux variations locales de la tension superficielle à l'interface air-liquide. En 1822, il décrivant déjà le mode de "convection" dans un tube d'eau savonneuse dans une lettre intitulée : " *On a changing tessellated structure in certain liquids* ". Des phénomènes similaires étaient connus de Vanley et Weber vers 1850 et décrits par E. H. Weber (1855) et A. Guébard (1897).

Ce n'est qu'en 1900 que H. Bénard [4] a réalisé la première expérience sérieuse du phénomène. Bénard a travaillé avec une couche de fluide d'une profondeur de 1 mm, i.e. un rapport d'aspect très petit. La couche fluide était limitée en bas par une paroi rigide et par l'air libre en haut. Bénard observa que le développement de l'écoulement avait lieu en deux phases :

(i) Lors de la première phase, lorsque le gradient vertical de température devenait suffisamment grand, un mouvement aléatoire prenait naissance au sein du fluide. Quelques instants plus tard, apparaissaient des cellules semi-régulières, polygonales ayant 4 à 7 côtés.

(ii) Durant la seconde phase, les cellules devenaient régulières, hexagonales^(*) et s'alignaient. On appelle aujourd'hui ces cellules : *des cellules de Bénard ou des cellules convectives*.

(*) *Ce sont les effets de tension superficielle à l'interface air-liquide qui sont à l'origine des cellules hexagonales.*

Lord Rayleigh (1916) fut le premier à étudier théoriquement le problème des cellules de Bénard. En fait, Lord Rayleigh avait redécouvert la théorie de M. V. Lomonossov et Hadley expliquant la circulation atmosphérique et qui remonte au XVIII^{ème} siècle.

Pour plus de détail, le lecteur est prié de se référer à M. Velarde [125].

3.Instabilité convective : raisonnements heuristiques

3.1.Exemple

Considérons un récipient rempli d'eau que l'on met sur le feu. Au début, la chaleur se propage par conduction, la température T de l'eau au fond du récipient s'élève, le gradient de température vertical augmente et le flux de chaleur à évacuer augmente également. Dès que la conduction ne suffit plus à évacuer le flux de chaleur, la convection prend le relais; l'eau chaude du fond, plus légère, monte, relâche sa chaleur à la surface, se refroidit, devient plus dense et redescend. Il s'établit donc une circulation organisée d'eau (cellules convectives) qui transporte la chaleur, la libère et retourne se recharger en chaleur. Néanmoins, près du fond du récipient et à la surface de l'eau, deux couches limites thermiques subsistent, la chaleur continue à y être transmise par conduction.

Dans cet exemple, la force motrice de la convection est la force d'Archimède qui s'exerce sur un petit volume de fluide dont la densité a diminué par suite de la dilatation thermique et qui tend à monter.

3.2.Analyse qualitative

On considère une couche de fluide dilatable, d'épaisseur d , comprise entre deux parois horizontales, chauffée par le bas. La paroi inférieure est maintenue à une température constante $T_0 + \tilde{\Delta}T_0$, $\tilde{\Delta}T_0 > 0$; inversement, la paroi supérieure est maintenue à la température constante T_0 (voir fig.1). Le

fluide est placé dans le champ de gravité terrestre \vec{g} .

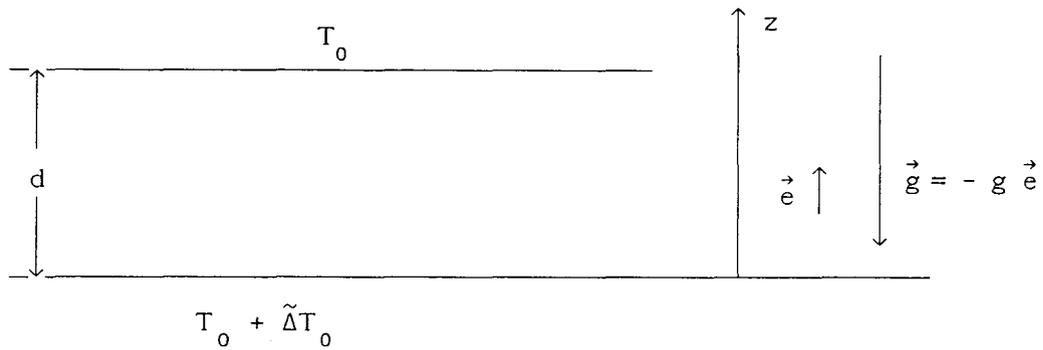


fig.1 : Schéma de principe d'une expérience de convection.

Notons que le module du gradient vertical de température est

$$(3.1) \quad \left| \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{\text{global}} = \frac{\tilde{\Delta} T_0}{d} .$$

3.2.1. Analyse par le biais des gradients de température adiabatiques [21]

Suite à une fluctuation de température par rapport à la température d'équilibre, on suppose qu'un petit volume de fluide s'élève d'une distance $\tilde{\delta}r$, assez rapidement pour ne pas échanger de chaleur par conduction avec son voisinage. En montant il se décomprime adiabatiquement et sa température va s'abaisser d'une quantité $\tilde{\delta}T$ donnée par la relation

$$(3.2) \quad \tilde{\delta}T = \left| \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{\text{ad.}} \right| \cdot \tilde{\delta}r ,$$

où $\left| \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{\text{ad.}} \right|$ désigne le module du gradient de température adiabatique vertical et

$$\left| \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{\text{ad.}} \right| = \frac{g \beta_0 T}{C_p} ,$$

β_0 étant le coefficient de dilatation thermique, C_p la chaleur spécifique à pression constante.

Deux cas peuvent alors se présenter :

(α) Cas sous-adiabatique, i.e. $\left| \frac{\partial T}{\partial z} \right| \leq \left| \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{\text{ad.}} \right| .$

Le petit volume déplacé de $\tilde{\delta}r$ se trouve alors plus froid que son environnement, donc plus dense et replonge aussitôt vers le fond. La fluctuation est alors annihilée et la convection ne peut démarrer. La chaleur est évacuée par conduction, le fluide est donc stable.

(β) Cas superadiabatique, i.e. $\left| \frac{\partial T}{\partial z} \right| \geq \left| \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{\text{ad.}} \right| .$

Contrairement au cas précédent, le fluide se trouve plus chaud que son voisinage; il continuera donc à monter grâce à la force d'Archimède. La convection démarre et le fluide est instable.

Remarque 3.1.- *La condition de superadiabaticité est nécessaire mais non suffisante pour le démarrage de la convection.*

3.2.2. Analyse dans le cas d'effets visqueux prépondérants [53]

Pour simplifier le raisonnement, on suppose que le petit volume fluide est sphérique, de rayon r_0 . Suite à la fluctuation de température, la particule fluide se trouve animée d'une vitesse v . Introduisons le temps caractéristique τ donné par l'expression

$$(3.3) \quad \tau = \frac{A r_0^2}{K},$$

où A est une constante géométrique, K est la diffusivité de la chaleur.

Dans l'intervalle de temps τ , la particule s'est déplacée de

$$(3.4)_1 \quad \tilde{\delta z} = v \cdot \tau.$$

Les variations de température et de densité qu'elle a subi sont données respectivement par les relations

$$(3.4)_2 \quad \tilde{\delta T} = \frac{\partial T}{\partial z} \cdot \tilde{\delta z} = \frac{A v r_0^2}{K} \frac{\tilde{\Delta T}_0}{d};$$

et

$$(3.4)_3 \quad \tilde{\delta \rho} = -\rho_0 \beta_0 \tilde{\delta T} = -A \rho_0 \beta_0 v \frac{r_0^2}{K} \frac{\tilde{\Delta T}_0}{d};$$

où ρ est la densité moyenne du fluide, $\rho_0 = \rho(T_0)$.

La particule est donc soumise à :

* la force d'Archimède

$$(3.5)_1 \quad F_A = -\frac{4}{3} \pi r_0^3 \tilde{\delta \rho} g = \frac{4}{3} \pi A \rho_0 \beta_0 g v \frac{r_0^5}{K} \frac{\tilde{\Delta T}_0}{d};$$

et à

* la force de freinage visqueux

$$(3.5)_2 \quad F_v = -6 \pi \mu r_0 v ;$$

où μ désigne la viscosité dynamique.

Le critère d'instabilité s'écrit : $|F_A| > |F_v|$; d'où :

$$(3.6) \quad \frac{4}{3} \pi A \rho_0 \beta_0 g v \frac{r_0^5}{K} \frac{\tilde{\Delta}T_0}{d} > 6 \pi \mu r_0 v .$$

Choisissons $r_0 = \frac{d}{2}$; de (3.6), nous déduisons

$$(3.7) \quad R_a = \frac{\beta_0 g \tilde{\Delta}T_0 d^3}{\nu K} > \frac{72}{A} = R_{ac} ;$$

où $\nu = \frac{\mu}{\rho_0}$ est la viscosité cinématique et R_a n'est autre que le nombre de Rayleigh qui exprime le rapport de la force d'Archimède F_A (force motrice de la convection) aux forces de viscosité F_v qui gênent la convection.

Introduisons comme dans [90, Chap.3] les temps caractéristiques

$$(3.8)_1 \quad \tau_v = \frac{d^2}{\nu} \quad , \quad \tau_A^2 = \frac{d}{\beta_0 g \tilde{\Delta}T_0} \quad , \quad \tau_\vartheta = \frac{d^2}{K} .$$

On obtient alors

$$(3.8)_2 \quad R_a = \frac{\tau_v \tau_\vartheta}{\tau_A^2} .$$

On distingue ensuite deux cas :

$$(\alpha) \quad R_a \ll 1 , \text{ i.e. } \tau_A \gg \tau_v \tau_\vartheta .$$

La couche fluide reste au repos, car la diffusion thermique amortit les fluctuations.

$$(\beta) R_a \gg 1, \text{ i.e. } \tau_A \ll \tau_v \tau_\theta.$$

Dans ce cas, la poussée d'Archimède réussit à démarrer la convection; le fluide chaud ascendant en provenance des couches inférieures renforce la perturbation. Le processus peut ensuite s'auto-entretenir si la diffusion de la chaleur et le freinage visqueux ne l'arrêtent pas.

4. Modélisation

4.1. Cas de la convection profonde [131]-[132, Chap.17]

Un fluide dilatable chauffé par le bas occupe le domaine Ω_t compris entre deux parois horizontales (voir fig.1 ci-dessus). Plaçons-nous dans l'espace

affine euclidien $E^3 = (0, \mathbb{R}^3)$, muni de la base canonique $\left\{ \vec{e}_m \right\}_{m=1}^3 = \left\{ \vec{i}, \vec{j}, \vec{e} \right\}$ où \vec{e} désigne le vecteur unitaire parallèle à la verticale ascendante. Si $\vec{x} \in E^3$,

on écrira $\vec{x} = x_m \vec{e}_m$ (où nous avons utilisé la convention de sommation sur l'indice répété).

Etape 1. Modèle exact.

Lorsqu'on néglige le rayonnement et qu'on adopte la loi de Fourier pour le vecteur courant de chaleur \vec{q} , l'écoulement du fluide supposé visqueux est régi par les équations de Navier-Stokes (cf. par ex. [29])

$$(4.1)_1 \quad \frac{D}{D t} \text{Log } \rho + \text{div } \vec{u} = 0 ;$$

$$(4.1)_2 \quad \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} + \nabla p - \rho \vec{g} \cdot \vec{e} = \nabla(\lambda \operatorname{div} \vec{u}) + 2 \operatorname{div} \left[\mu D(\vec{u}) \right];$$

$$(4.1)_3 \quad \rho C(T) \frac{DT}{Dt} + p \operatorname{div} \vec{u} = \operatorname{div} (k \nabla T) + \lambda (\operatorname{div} \vec{u})^2 + 2 \mu D(\vec{u}):D(\vec{u});$$

dans $\Omega_t \times]0, T_1[$, $T_1 > 0$.

Où

$t \in]0, T_1[$, $\vec{x} \in \Omega_t$ et t désigne le temps;

$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla$, $\nabla = \frac{\partial}{\partial x_j} \vec{e}_j$ est l'opérateur nabla;

$\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ est le champ des vitesses;

$\rho = \rho(\vec{x}, t)$ est la masse volumique;

$p = p(\vec{x}, t)$ est le champ des pressions;

λ, μ sont les coefficients de viscosité dynamique, $\lambda > 0$ et $\mu > 0$;

$D(\vec{u})$ est le tenseur taux de déformation; $D(\vec{u}) = \frac{1}{2} \left[\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^{\text{tr}} \right]$;

$T = T(\vec{x}, t)$ est le champ des températures;

$C(T)$ désigne la chaleur spécifique du liquide;

$k > 0$ est le coefficient de conduction thermique.

Remarquons que le second principe de la thermodynamique est identiquement satisfait puisque $k, \lambda, \mu > 0$.

Si on suppose que la couche fluide est confinée entre deux parois rigides, horizontales, imperméables, constituées d'un matériau parfaitement conducteur de la chaleur, les conditions aux limites s'écrivent

$$(4.2)_1 \quad \vec{u} = \vec{0} \quad \text{sur} \quad x_3 = 0 \quad \text{et} \quad x_3 = d;$$

$$(4.2)_2 \quad T = T_0 + \tilde{\Delta}T_0 \quad \text{sur } x_3 = 0, \quad T = T_0 \quad \text{sur } x_3 = d.$$

On supposera, dans la suite, que ρ , C , λ , μ et k sont fonctions de la température T seulement. Posons

$$(4.3) \quad \rho_0 = \rho(T_0), \quad C_0 = C(T_0), \quad \lambda_0 = \lambda(T_0), \quad \mu_0 = \mu(T_0), \quad k_0 = k(T_0).$$

Etape 2 : Adimensionnalisation du système (4.1)-(4.2)

Le système (4.1)-(4.2) est difficile à résoudre, il est préférable de travailler avec des grandeurs sans dimensions; à cet effet, posons

$$(4.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{C} = \frac{C}{C_0}, \quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_0}, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0}, \quad \bar{k} = \frac{k}{k_0}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}, \\ \bar{x}_j = \frac{x_j}{d}, \quad \bar{u}_j = \frac{u_j}{v_0}, \quad \bar{T} = \frac{T}{\tilde{\Delta}T_0}, \quad \bar{t} = \frac{t}{d^2} \frac{v_0}{\nu_0}, \quad \bar{p} = \frac{p}{\rho_0 g d}. \end{array} \right.$$

Le système (4.1)-(4.2) devient :

$$(4.5)_1 \quad \frac{D}{D} \text{Log } \bar{\rho} + \overline{\text{div}} \vec{u} = 0;$$

$$(4.5)_2 \quad \bar{\rho} \frac{D\vec{u}}{D\bar{t}} + \frac{1}{\sigma_0} \bar{\nu} \bar{p} + \frac{1}{\sigma_0} \bar{\rho} \vec{e} = \frac{\lambda_0}{\mu_0} \bar{\nu} (\bar{\lambda} \overline{\text{div}} \vec{u}) + 2 \overline{\text{div}} \left[\bar{\mu} \overline{D}(\vec{u}) \right];$$

$$(4.5)_3 \quad \bar{\rho} \bar{C}(\bar{T}) \frac{D\bar{T}}{D\bar{t}} + B_0 \bar{p} \overline{\text{div}} \vec{u} = \frac{1}{Pr} \overline{\text{div}} (\bar{k} \bar{\nu} \bar{T}) + \frac{\lambda_0}{\mu_0} \eta_0 \bar{\lambda} \left[(\overline{\text{div}} \vec{u})^2 \right] + 2 \eta_0 \bar{\mu} \overline{D}(\vec{u}) : \overline{D}(\vec{u});$$

$$(4.5)_4 \quad \vec{u} = \vec{0} \quad \text{sur } \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_3 = 1;$$

$$(4.5)_5 \quad \bar{T} = 1 + \tau_0 \quad \text{sur } \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{T} = \tau_0 \quad \text{sur } \bar{x}_3 = 1;$$

où

$$(4.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\rho} = \bar{\rho}(\bar{T}), \quad \bar{\lambda} = \bar{\lambda}(\bar{T}), \quad \bar{\mu} = \bar{\mu}(\bar{T}), \quad \bar{k} = \bar{k}(\bar{T}), \\ \frac{D}{D \bar{t}} = \frac{\partial}{\partial \bar{t}} + \vec{u} \cdot \bar{\nabla}, \quad \bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} \vec{e}_j, \\ \bar{D}(\vec{u}) = \frac{1}{2} \left[\bar{\nabla} \vec{u} + (\bar{\nabla} \vec{u})^{\text{tr}} \right]. \end{array} \right.$$

Cinq nombres sans dimensions apparaissent dans le système (4.5), à savoir

$$(4.7)_1 \quad \sigma_0 = \frac{(\nu_0 / d)^2}{g \cdot d}, \quad \eta_0 = \frac{(\nu_0 / d)^2}{C_0 \tilde{\Delta} T_0}, \quad B_0 = \frac{\eta_0}{\sigma_0},$$

$$(4.7)_2 \quad \text{Pr} = \frac{\mu_0 C_0}{k_0}, \quad \tau_0 = \frac{T_0}{\tilde{\Delta} T_0}.$$

Le paramètre Pr est le nombre de Prandtl, tandis que B_0 désigne le nombre de Boussinesq.

En l'absence de mouvement, i.e. $\vec{u} = \vec{0}$, la solution de base du système (4.5) est

$$(4.8)_1 \quad \vec{u} = \vec{0}, \quad \bar{T} = \tau_0;$$

étant donné que $\bar{\rho} = 1$, de (4.5)₂, on déduit

$$(4.8)_2 \quad \bar{p} = 1 - \bar{x}_3 .$$

Lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$, posons

$$(4.8)_3 \quad \bar{T} = \tau_0 + \vartheta , \quad \bar{p} = 1 - \bar{x}_3 + A_0 \sigma_0 \pi ,$$

avec $A_0 = \frac{1}{\sigma_0} \frac{\Delta p_0}{g \rho_0 d}$, Δp_0 représentant la fluctuation caractéristique de

la pression correspondant à la fluctuation de température $\tilde{\Delta T}_0$. A ce stade, on a toute latitude de choisir A_0 ; par conséquent, on prendra

$$(4.9) \quad A_0 \equiv 1 ; \text{ d'où } \Delta p_0 = \sigma_0 g \rho_0 d = \rho_0 \left(\frac{v_0}{d} \right)^2 .$$

Posons

$$(4.10)_1 \quad \beta_0 = - \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho}{dT} \Big|_{T = \tau_0} ,$$

β_0 est le coefficient de dilatation volumique du fluide;

$$(4.10)_2 \quad \varepsilon_0 = \beta_0 \tilde{\Delta T}_0 ,$$

et supposons que

$$(4.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_0 \ll 1 \\ \Sigma \rho \equiv \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\beta_0^2} \frac{d\beta}{dT} \Big|_{T = \tau_0} - 1 \right] \text{ reste borné lorsque } \varepsilon_0 \longrightarrow 0. \end{array} \right.$$

Développons en série de Taylor les variables $\bar{\rho}$, $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$, \bar{k} et \bar{C} au

voisinage de $T = T_0$, on obtient

$$(4.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\rho} = 1 - \varepsilon_0 \omega, \quad \bar{\lambda} = 1 - \varepsilon_0 \phi, \quad \bar{\mu} = 1 - \varepsilon_0 \psi, \\ \bar{k} = 1 - \varepsilon_0 \chi, \quad \bar{C} = 1 - \varepsilon_0 \Gamma. \end{array} \right.$$

avec

$$(4.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega = \vartheta + \sum_{\rho} \varepsilon_0 \vartheta^2 + o(\varepsilon_0), \\ \phi = \frac{\Lambda_0}{\beta_0} \left(\vartheta + \sum_{\lambda} \varepsilon_0 \vartheta^2 + o(\varepsilon_0) \right), \\ \psi = \frac{M_0}{\beta_0} \left(\vartheta + \sum_{\mu} \varepsilon_0 \vartheta^2 + o(\varepsilon_0) \right), \\ \chi = \frac{K_0}{\beta_0} \left(\vartheta + \sum_{k} \varepsilon_0 \vartheta^2 + o(\varepsilon_0) \right), \\ \Gamma = \frac{N_0}{\beta_0} \left(\vartheta + \sum_{c} \varepsilon_0 \vartheta^2 + o(\varepsilon_0) \right). \end{array} \right.$$

Λ_0 , M_0 , K_0 et N_0 sont des grandeurs analogues à β_0 ; Σ_{λ} , Σ_{μ} , Σ_k , Σ_c sont des expressions similaires à Σ_{ρ} ; on suppose, en outre, qu'elles demeurent bornées lorsque $\varepsilon_0 \longrightarrow 0$.

Etape 3 : Equations dominantes

D'après ce qui précède, nous obtenons pour \vec{u} , ϑ , π les équations dominantes suivantes :

$$(4.14)_1 \quad \overline{\text{div}} \vec{u} = \varepsilon_0 \frac{D \vartheta}{D t} + o(\varepsilon_0);$$

$$(4.14)_2 \quad (1 - \varepsilon_0 \vartheta) \frac{D \vec{u}}{D \bar{t}} + A_0 \bar{\nabla} \pi - Gr \vartheta \vec{e} = \bar{\Delta} \vec{u} + \\ + \varepsilon_0 \left\{ \left(1 + \frac{\lambda_0}{\mu_0} \right) \bar{\nabla} \left(\frac{D \vartheta}{D \bar{t}} \right) - \frac{M_0}{\beta_0} 2 \overline{\text{div}} (\vartheta \bar{D}(\vec{u})) \right\} + o(\varepsilon_0);$$

$$(4.14)_3 \quad \left[1 - \left(1 + \frac{N_0}{\beta_0} \right) \varepsilon_0 \vartheta \right] \frac{D \vartheta}{D \bar{t}} + \\ + \varepsilon_0 \left[B_0 (1 - \bar{x}_3) + \eta_0 A_0 \pi \right] \frac{D \vartheta}{D \bar{t}} = \frac{1}{Pr} \bar{\Delta} \vartheta + 2 \eta_0 \bar{D}(\vec{u}) : \bar{D}(\vec{u}) + \\ - \varepsilon_0 \left\{ \frac{K_0}{\beta_0} \frac{1}{Pr} \overline{\text{div}} (\vartheta \bar{\nabla} \vartheta) + 2 \eta_0 \frac{M_0}{\beta_0} \vartheta \bar{D}(\vec{u}) : \bar{D}(\vec{u}) \right\} + o(\varepsilon_0);$$

$$(4.14)_4 \quad \vec{u} = \vec{0} \quad \text{sur} \quad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_3 = 1;$$

$$(4.14)_5 \quad \vartheta = 1 \quad \text{sur} \quad \bar{x}_3 = 0, \quad \vartheta = 0 \quad \text{sur} \quad \bar{x}_3 = 1;$$

$$\text{avec } \bar{\Delta} = \overline{\text{div}} \bar{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial^2 \bar{x}_j}.$$

Remarquons qu'au niveau du système (4.14) apparaît le nombre de Grashof Gr défini par

$$(4.15)_1 \quad Gr = \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0} = \frac{g \beta_0 \tilde{\Delta} T_0 d^3}{\nu_0^2}.$$

A partir du nombre de Grashof, on peut construire le nombre de Rayleigh R_a par l'expression suivante

$$(4.15)_2 \quad R_a = \text{Pr Gr} = \frac{g \beta_0 \tilde{\Delta T}_0 d^3}{\nu_0 K_0} ; K_0 = \frac{k_0}{C_0 \rho_0} .$$

Au niveau du système (4.14)_{1,2,3}, lorsque $\varepsilon_0 \longrightarrow 0$, le principe de moindre dégénérescence implique le choix suivant :

$$(4.16) \quad \text{Gr} = O(1), \text{ i.e. } \sigma_0 \ll 1.$$

Pour le nombre de Boussinesq B_0 , nous sommes amenés à distinguer deux cas :

$$(\alpha) \quad \eta_0 \ll 1 \Rightarrow B_0 = O(1).$$

Ce choix conduit aux équations classiques de Rayleigh-Bénard [16]-[27]. Dans ce cas, la hauteur de la couche fluide est

$$(4.17)_1 \quad d = d_1 \simeq \frac{C_0 \tilde{\Delta T}_0}{g}, \quad (\text{d'après } (4.7)_1).$$

$$(\beta) \quad \eta_0 = O(1) \Rightarrow B_0 \gg 1.$$

Supposons que

$$(4.17)_2 \quad \varepsilon_0 B_0 = \delta_0 = O(1);$$

ce cas étant le plus significatif. Il est immédiat de conclure que la distance entre les deux parois est

$$(4.17)_3 \quad d = d_2 \simeq \delta_0 \frac{d_1}{\varepsilon_0} ;$$

lorsque $\varepsilon_0 \longrightarrow 0$, $d_2 \longrightarrow \infty$. D'où l'appellation cas profond, par opposition au cas (α) appelé le cas peu profond.

Plaçons-nous dans le cas (β) avec l'hypothèse $(4.17)_2$, le passage à la limite

$\varepsilon_0 \longrightarrow 0$, à \bar{x} , t fixés, $A_0 \equiv 1$, les autres paramètres étant supposés de l'ordre de l'unité,

conduit au système d'équations suivant, appelé équations de la convection profonde

$$(4.18)_1 \quad \overline{\text{div}} \vec{u} = 0 ;$$

$$(4.18)_2 \quad \frac{D \vec{u}}{D \bar{t}} + \nabla \pi = \bar{\Delta} \vec{u} + Gr \vartheta \vec{e} ;$$

$$(4.18)_3 \quad \left[1 + \delta_0 (1 - \bar{x}_3) \right] \frac{D \vartheta}{D \bar{t}} = \frac{1}{Pr} \bar{\Delta} \vartheta + 2 \eta_0 \bar{D}(\vec{u}) : \bar{D}(\vec{u}) ;$$

$$(4.18)_4 \quad \vec{u} = \vec{0} \text{ sur } \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_3 = 1 ;$$

$$(4.18)_5 \quad \vartheta = 0 \text{ sur } \bar{x}_3 = 1, \quad \vartheta = 1 \text{ sur } \bar{x}_3 = 0.$$

Il est préférable de travailler avec des conditions aux limites homogènes; à cette fin, posons

$$(4.19) \quad \begin{cases} \theta = R_a (\bar{x}_3 - 1 + \vartheta), \quad \Pi = Pr (Gr \bar{x}_3 (\frac{\bar{x}_3}{2} - 1) + \pi), \\ \bar{t} = Pr \tau, \quad \vec{u} = \frac{1}{Pr} \vec{v}. \end{cases}$$

Après suppression des barres au dessus des opérateurs et de \bar{x}_3 , le système (4.18) devient

$$(4.20)_1 \quad \text{div} \vec{v} = 0 ;$$

$$(4.20)_2 \quad \frac{1}{Pr} \frac{D \vec{v}}{D \tau} + \nabla \Pi - \theta \vec{e} = \Delta \vec{v} ;$$

$$(4.20)_3 \quad \left[1 + \delta_0 (1-x_3) \right] \left[\frac{D \theta}{D \tau} - R_a \vec{v} \cdot \vec{e} \right] = \Delta \theta + 2\delta_0 D(\vec{v}):D(\vec{v}) ;$$

$$(4.20)_4 \quad \vec{v} = \vec{0} , \theta = 0 \quad \text{sur } x_3 = 0 , x_3 = 1.$$

Remarque 4.1.- Lorsque $\delta_0 \longrightarrow 0$, au niveau du système (4.20), on retrouve le modèle classique de Rayleigh-Bénard.

4.2. Cas du modèle classique de la convection

Au § 4.1, nous avons vu que le modèle classique pouvait être retrouvé à partir du système (4.1) avec $\eta_0 \ll 1$. En effet, dans la littérature (cf. par exemple [27, Chap.2, § 72, p.35]) diverses simplifications sont effectuées sur le système (4.1), notamment à l'aide des approximations d'Oberbeck (1879)-Boussinesq (1903), que nous rappelons ici par commodité [48]-[65, § 54]-[93] :

(i) l'écoulement est presque incompressible. La compressibilité du fluide est négligée excepté dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement au niveau du couplage avec la pesanteur;

(ii) les variations de la masse volumique sont fonctions de la température T (et de la concentration c) et non de la pression p ;

(iii) $|\nabla \vec{u}| \ll 1$, ce qui permet de négliger le terme de dissipation visqueuse au niveau du système (4.1);

(iv) les paramètres μ , k , c_v ou C sont constants;

(v) la loi d'état $\rho = \rho(T,c)$ est linéarisée.

Remarque 4.2.-

(α) Les hypothèses (iv)-(v) ne sont plus valables si la loi d'état est nonlinéaire (par exemple l'eau au voisinage de 4° C).

(β) Lorsque le nombre de Mach est sensiblement différent de zéro, l'indépendance de ρ en p n'est plus valable.

(γ) Lorsque les forces volumiques sont centrifuges et non de pesanteur, le terme de dissipation visqueuse devient important, ce qui invalide le point (iii).

le modèle classique ignore les effets liés à la profondeur du fluide, donc les problèmes de convection dans les couches profondes de fluide; par conséquent, il semble être mal adapté pour l'étude de nombreux problèmes de convection en géophysique, astrophysique ou océanographie.

4.3.Exemples de problèmes de convection dans la nature

Pour ne pas déborder du cadre de cette thèse, nous nous contenterons de citer quelques exemples d'instabilités convectives dans la nature, le lecteur intéressé pourra consulter les références données ci-après

(1) Explication des phénomènes de condensation et d'ébullition; dans ce cas, il faudrait tenir compte des quantités de chaleur latente.

(2) Circulation atmosphérique dans la terre et certaines planètes du système solaire [14]-[34]; dans ce cas, il faudrait tenir compte entre autres de la compressibilité du ou des gaz les constituant.

(3) Océans, cf.[14, Vol.1]-[63]; dans ce cas, il faudrait tenir compte de la salinité de l'eau.

(4) Pollutions thermiques dues aux eaux chaudes jetées dans les lacs et l'océan.

(5) Transfert de chaleur océans-atmosphère; climat.

(6) Soleil et Etoiles; dans le cas du Soleil, il existe une zone convective profonde de $1,5 \cdot 10^5$ Km [102, p.605]. Signalons également l'existence d'étoiles purement convectives dites de Hayashi [102, p.810].

(7) Géophysique interne. Dans ce cas, la convection a lieu dans le noyau et les manteaux supérieur et inférieur [21]. Auquel cas il faudrait tenir compte du champ magnétique.

Au vu des exemples précédents, on voit que certains problèmes font intervenir des frontières libres (océan, soleil), d'autres des frontières mauvaises conductrices de la chaleur (noyau terrestre par exemple).

4.4. Autres conditions aux limites

4.4.1. Conditions thermiques réalistes

Il faut dans ce cas traduire la continuité de la température et du flux de chaleur à l'interface entre le fluide et la paroi.

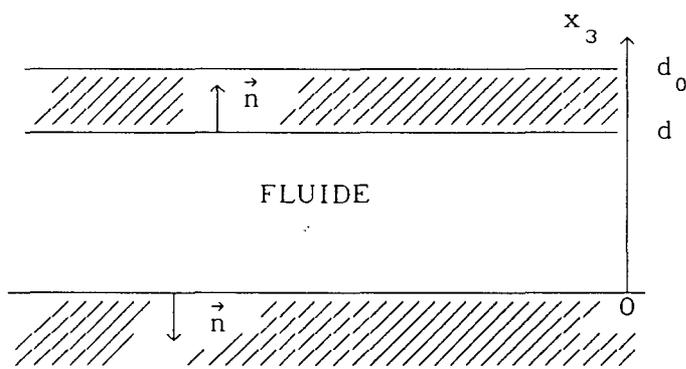


fig. 2 : Modèle de conditions aux limites thermiques.

D'où, sur la paroi supérieure

$$(4.21)_1 \quad T = T' \quad \text{sur } x_3 = d, \quad [65, \S 55];$$

$$(4.21)_2 \quad k \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} = k' \frac{\partial T'}{\partial \vec{n}} \quad \text{sur } x_3 = d, \quad \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \equiv \frac{\partial}{\partial x_3};$$

où \vec{n} est la normale extérieure à la paroi (voir fig.2), les variables primées désignant les quantités relatives à la paroi.

En principe, on peut éliminer T' de (4.21), en résolvant l'équation de Fourier pour la paroi

$$(4.22)_1 \quad \partial_t T' = \frac{k'}{c'} \Delta T',$$

$$(4.22)_2 \quad T' = \tilde{T}'_0 \quad \text{sur } x_3 = d_0, \quad \text{avec (4.21)}.$$

Supposons que

$$(4.23)_1 \quad T'(x_3 = 0) - T'(x_3 = d) = \tilde{\Delta T}'_0(x_\perp, t),$$

$$(4.23)_2 \quad T'(x_3 = d) = T_0(x_\perp, t), \quad x_\perp = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2.$$

Posons

$$(4.24) \quad \bar{k} = \frac{k}{k_0}, \quad \bar{k}' = \frac{k'}{k_0}, \quad \bar{T} = \frac{T}{\tilde{\Delta T}'_0}, \quad \bar{T}' = \frac{T'}{\tilde{\Delta T}'_0},$$

avec $k_0 = k(T_0) = k(T_0(x_\perp, t))$.

Les conditions aux limites (4.21) deviennent

$$(4.25)_1 \quad \bar{T} = \bar{T}' \quad \text{sur } \bar{x}_3 = 1 ,$$

$$(4.25)_2 \quad \bar{k} \frac{\partial \bar{T}}{\partial n} = \bar{k}' \frac{\partial \bar{T}'}{\partial n} \quad \text{sur } \bar{x}_3 = 1 .$$

Au repos, la solution de base du système (4.5) est

$$(4.26)_1 \quad \vec{u} = \vec{0}, \quad \bar{T} = \bar{T}_0(x_{\perp}, t), \quad \bar{\rho} = 1, \quad \bar{p} = 1 - \bar{x}_3 ,$$

à condition que

$$(4.26)_2 \quad \overline{\text{div}}(\bar{k} \nabla \bar{T}_0) = 0 \quad \text{dans } \bar{\Omega}_t .$$

L'on est alors conduit au système (4.18)_{1,2,3} en posant

$$\bar{T} = \tau_0 + \vartheta, \quad \tau_0 = \bar{T}_0 = \frac{T_0(x_{\perp}, t)}{\tilde{\Delta} T_0(x_{\perp}, t)} . \quad (4.25) \text{ devient}$$

$$(4.27)_1 \quad \vartheta = 0 \quad \text{sur } \bar{x}_3 = 1 ;$$

compte tenu de (4.12), on obtient

$$(4.27)_2 \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial n} = \bar{k}' \frac{\partial \bar{T}'}{\partial n} + O(\varepsilon_0) .$$

Enfin, après passage à la limite et compte tenu de (4.19), il vient

$$(4.28)_1 \quad \theta = 0 \quad \text{sur } \bar{x}_3 = 1 ,$$

$$(4.28)_2 \quad \frac{\partial \theta}{\partial n} = R_a(\bar{k}' \frac{\partial \bar{T}'}{\partial n} + 1) \quad \text{sur } \bar{x}_3 = 1 .$$

On obtient une relation analogue en $\bar{x}_3 = 0$.

Lorsque la paroi est constituée d'un matériau parfaitement isolant, nous avons $k' \ll k$; d'où

$$(4.29)_1 \quad \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \text{ sur } x_3 = 0, x_3 = d,$$

et la condition (4.28)₂ devient

$$(4.29)_2 \quad \frac{\partial \theta}{\partial n} = R_a.$$

4.4.2. Cas d'une paroi libre

Lorsque la paroi est libre, il nous faut traduire la continuité des composantes de la vitesse à l'interface et celle de la contrainte tangentielle et normale dans le plan de l'interface. Si on néglige les effets de la tension superficielle et que l'on suppose que l'interface reste plat, on obtient [132, pp. 316-318]

$$(4.30)_1 \quad v_3 = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_3} = \frac{\partial v_2}{\partial x_3} = 0 \quad \text{sur la paroi,}$$

$$(4.30)_2 \quad \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} = 0 \quad \text{sur la paroi.}$$

Dans le cas général, on écrit :

$$(4.31) \quad -p n_m + \left\{ \mu \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_m} \right) + \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{mj} \right\} n_j = -p_0 n_m,$$

où (δ_{mj}) est le tenseur de Kronecker, et p_0 est un champ de pression donné; par exemple, p_0 est la pression atmosphérique dans le cas de l'océan.

Posons

$$(4.32)_1 \quad \bar{p}_0 = \frac{p_0}{\rho_0 g d}$$

La condition (4.31), devient après substitution de (4.4)-(4.32)₁

$$(4.32)_2 \quad -\bar{p} n_m + \sigma_0 \left\{ \bar{\mu} \left(\frac{\partial \bar{u}_m}{\partial \bar{x}_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{x}_m} \right) + \frac{\lambda_0}{\mu_0} \bar{\lambda} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial \bar{x}_k} \delta_{mj} \right\} n_j = -\bar{p}_0 n_m;$$

où σ_0 est donné par la relation (4.7)₁.

Compte tenu de (4.8)₃-(4.12), avec $A_0 \equiv 1$, nous obtenons

$$(4.32)_3 \quad -\sigma_0 \pi n_m + \sigma_0 \left\{ (1 - \varepsilon_0 \psi) \left(\frac{\partial \bar{u}_m}{\partial \bar{x}_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{x}_m} \right) + \frac{\lambda_0}{\mu_0} (1 - \varepsilon_0 \phi) \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial \bar{x}_k} \delta_{mj} \right\} n_j = -\bar{p}_0 n_m + (1 - \bar{x}_3) n_m.$$

Après passage à la limite $\varepsilon_0 \longrightarrow 0$ dans (4.32)₃, si $-\bar{p}_0 n_m + (1 - \bar{x}_3) n_m = 0$, nous déduisons de (4.19)-(4.18)₁

$$(4.33) \quad - \left(\Pi - R_a \bar{x}_3 \left(\frac{\bar{x}_3}{2} - 1 \right) \right) n_m + \left(\frac{\partial v_m}{\partial \bar{x}_j} + \frac{\partial v_j}{\partial \bar{x}_m} \right) n_j = 0.$$

4.5. Modèle de la convection profonde bidimensionnelle

Dans certains problèmes de convection (cf. Chapitre 3), les coordonnées \bar{x}_1 et \bar{x}_2 jouent le même rôle et sont indiscernables, aussi est-il légitime de se ramener au problème de la convection dans un domaine bidimensionnel. A cet effet et pour alléger les notations, posons

$$(4.34)_1 \quad \bar{x}_1 = x, \quad \bar{x}_2 = y, \quad \bar{x}_3 = z, \quad \vec{v} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{e}, \quad \Pi = p, \quad \theta = T, \quad \tau = t;$$

$$(4.34)_2 \quad v \equiv 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} \equiv 0, \quad \delta_0 \equiv \delta, \quad R_a \equiv R, \quad Pr = \sigma, \quad \chi(z) = 1 + \delta(1 - z).$$

L'équation de continuité s'écrit alors

$$(4.35) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

L'équation (4.35) permet l'introduction de la fonction de courant $\psi(x, z, t)$ définie par

$$(4.36) \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Après élimination du terme ∇p dans (4.20); (4.34) et (4.36) permettent de ramener le système (4.20)_{1,2,3} au système suivant (cf. [132])

$$(4.37)_1 \quad \frac{1}{\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \right] \Delta_{\perp} \psi + \frac{\partial T}{\partial x} = \Delta_{\perp}^2 \psi;$$

$$(4.37)_2 \quad \chi(z) \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \right] T + R \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\} = \Delta_{\perp} T + \\ + \delta \left[4 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)^2 \right];$$

$$\text{avec } \Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Au système (4.37), nous associons les conditions aux limites suivantes

$$(4.38)_1 \quad T = 0, \text{ sur } z = 0, z = 1 ;$$

$$(4.38)_2 \quad \psi = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 ; \quad \text{si la paroi en } z = 0 \text{ ou } z = 1 \text{ est rigide;}$$

$$(4.38)_3 \quad \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \quad \text{si la paroi en } z = 0 \text{ ou } z = 1 \text{ est libre.}$$

5. Cadre fonctionnel

5.1. Notations

5.1.1. Notations élémentaires

On désigne par $x = (x_1, \dots, x_n)$, $n = 2$ ou $n = 3$, le point $x \in E^n$.
L'opérateur différentiel $\frac{\partial}{\partial x_k} \equiv \partial_k$, $1 \leq k \leq n$, sera noté D_k et, si $j = (j_1, \dots, j_n)$ est un multi-indice, D^j désignera l'opérateur différentiel

$$D^j = D_1^{j_1} \dots D_n^{j_n} = \frac{\partial^{[j]}}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}},$$

d'ordre $[j] = j_1 + \dots + j_n$.

Lorsque $j_k = 0$, $D_k^{j_k}$ représente l'identité.

Si X est une partie de \mathbb{R}^n , on notera $C(X)$ l'espace des fonctions continues sur X . Lorsque Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n , $C^k(\Omega)$, $k \geq 0$, représentera l'espace des fonctions k fois continûment différentiables sur Ω ($C^0(\Omega) \equiv C(\Omega)$)

et $C_0(\Omega)$ désignera l'espace des fonctions continues à support compact dans Ω .

Les espaces qui suivent sont définis par (cf. par exemple [1])

$$C_0^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_0(\Omega), \quad C_0^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_0(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega).$$

Si Ω est un ouvert quelconque de \mathbb{R}^n et $1 \leq p < \infty$, on appelle $L^p(\Omega)$ l'espace des fonctions de puissance $p^{\text{ième}}$ intégrable au sens de Lebesgue sur Ω pour la mesure $dx = dx_1 \dots dx_n$. C'est un espace de Banach pour la norme

$$|f|_p \equiv \|f\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{1/p}.$$

Lorsque $p = 2$, $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x) \cdot \overline{g(x)} dx,$$

où la barre dénote le complexe conjugué; la norme correspondante étant alors notée $|\cdot|$,

$$|f| = \|f\|_{L^2(\Omega)} = \left\{ (f, f) \right\}^{1/2}.$$

Pour $p = \infty$, on définit

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} ; f \text{ mesurable et } \exists C > 0 : |f| \leq C \text{ p.p sur } \Omega \right\};$$

c'est également un espace de Banach pour la norme

$$|f|_\infty = \|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess } |f(x)| = \text{Inf } \left\{ C : |f| \leq C \text{ p.p sur } \Omega \right\}.$$

5.1.2. Espaces de Sobolev

Soit Ω un ouvert quelconque de \mathbb{R}^n de frontière $\partial\Omega$. L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est l'espace des fonctions u dans $L^2(\Omega)$ qui admettent des dérivées au sens des distributions $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ dans $L^2(\Omega)$, $j = 1, \dots, n$. $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(f, g)_{H^1(\Omega)} = (f, g) + \sum_{j=1}^n (D_j f, D_j g),$$

et la norme associée

$$\|f\|_{H^1(\Omega)} = \left[(f, f)_{H^1(\Omega)} \right]^{1/2}.$$

On appelle $H_0^1(\Omega)$ l'adhérence dans $H^1(\Omega)$ des fonctions $C_0^\infty(\Omega)$. Si Ω est borné dans une direction, l'inégalité de Poincaré [44] entraîne que

$$((f, g)) = \sum_{j=1}^n (D_j f, D_j g),$$

est un produit scalaire hilbertien sur $H_0^1(\Omega)$, et que la norme associée

$$\|f\| = \left[((f, f)) \right]^{1/2},$$

est équivalente à la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ induite par $H^1(\Omega)$.

On dénote par $H^{-1}(\Omega)$ le dual de $H_0^1(\Omega)$, $H^{-1}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ est un espace de distributions et $L^2(\Omega)$ s'identifie à un sous-espace dense dans $H^{-1}(\Omega)$.

$$H^{-1}(\Omega) = \left\{ u : u = \sum_{|\alpha| \leq 1} D^\alpha g_\alpha, g_\alpha \in L^2(\Omega) \right\}, \text{ [85, p.78],}$$

où, bien entendu, $D^\alpha g_\alpha$ est comprise au sens des distributions. $H^{-1}(\Omega)$ est un

espace de Banach pour la norme (cf.[7])

$$\|f\|_* = \|f\|_{H^{-1}} = \sup_{\substack{f \in H_0^1(\Omega) \\ \|f\| = 1}} \sum_{|\alpha| \leq 1} \int_{\Omega} (-1)^{|\alpha|} g_{\alpha} \overline{D^{\alpha} f} \, dx .$$

Si $1 \leq p \leq \infty$ et $m \in \mathbb{N}^*$, l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ est l'espace des fonctions f dans $L^p(\Omega)$ dont les dérivées au sens des distributions $D^j u$ appartiennent à $L^p(\Omega)$, pour $|j| \leq m$. Lorsqu'il est muni de la norme

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|j| \leq m} \|D^j f\|_{L^p(\Omega)} ,$$

l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach.

Lorsque $p = 2$, on pose $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$; on munit $H^m(\Omega)$ du produit scalaire et de la norme

$$((f,g))_m = (f,g)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|j| \leq m} (D^j f, D^j g) ,$$

$$\|f\|_m = \|f\|_{H^m(\Omega)} = \left[((f,f))_m \right]^{1/2} ,$$

qui en font un espace de Hilbert.

Pour les définitions et les propriétés des espaces de Sobolev, le lecteur peut se référer à [1]/[8]/[85]/[92]/[98] et pour les distributions voir [112]/[123].

5.1.3. Espaces de fonctions à valeurs vectorielles.

Soit $T \in \mathbb{R}_*^+$ un réel quelconque et X un espace de Banach ou de Hilbert. On note par $C^k([0, T]; X)$ l'espace des fonctions de $[0, T]$ dans X qui sont k fois continûment différentiables. $C^k([0, T]; X)$ est un espace de Banach pour la norme

$$\|u\|_{C^k([0, T]; X)} = \sum_{[j] \leq k} \sup_{t \in [0, T]} \|D^j u(t)\|_X.$$

$L^p(0, T; X)$ désigne l'espace des (classes de) fonctions L^p intégrables de $]0, T[\longrightarrow X$. C'est un espace de Banach d'après [12] pour la norme

$$\|f\|_{L^p(0, T; X)} = \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p dt \right)^{1/p}, \text{ si } p \in [1, \infty[$$

$$\|f\|_{L^\infty(0, T; X)} = \sup_{t \in]0, T[} \text{ess } \|f(t)\|_X.$$

Remarque 5.1.- Si X est un espace de Banach (ou de Hilbert) on convient de noter X^n par \mathcal{X} . $\|\cdot\|_X$ (ou $(\cdot, \cdot)_X$) désignera indifféremment la norme dans X ou \mathcal{X} (ou le produit scalaire dans X ou \mathcal{X}).

5.1.4. Espaces liés aux champs de vecteurs solénoïdaux.

Afin de donner une formulation variationnelle générale des équations de la convection profonde, il est judicieux de réécrire celles-ci sous la forme suivante

$$(5.1)_1 \quad \operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[= Q ;$$

$$(5.1)_2 \quad \partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \sigma \nabla p - \sigma \vartheta \vec{e} - \sigma \Delta \vec{u} = \vec{f}(x, t) \quad \text{dans } Q;$$

$$(5.1)_3 \quad \partial_t \vartheta + \vec{u} \cdot \nabla \vartheta - R \vec{u} \cdot \vec{e} - \frac{\Delta \vartheta}{\chi(z)} - \frac{2 \delta}{\chi(z)} D(\vec{u}) : D(\vec{u}) = s(x, t) \quad \text{dans } Q;$$

$$(5.1)_4 \quad \vec{u}(x, t) = \vec{0} \quad , \quad \vartheta(x, t) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[;$$

$$(5.1)_5 \quad \vec{u}(x, 0) = \vec{u}_0(x) \quad , \quad \vartheta(x, 0) = \vartheta_0(x) \quad \text{sur } \Omega;$$

où l'on a supposé que le fluide remplissait le domaine Ω de frontière $\partial\Omega$. Nous avons également introduit par commodité une densité volumique du champ de forces extérieures $\vec{f}(x, t)$ (autre que le champ de gravité) et une densité volumique du taux de chaleur reçue $s(x, t)$ correctement adimensionnées. Les deux quantités \vec{f} et s sont supposées connues. Ω est bien sûr défini par

$$\Omega \subset \left\{ x = (x_{\perp}, z) \in \mathbb{R}^n, \quad n = 2 \text{ ou } n = 3, \text{ et } x_{\perp} \in \mathcal{D}, \quad z \in]0, 1[\right\},$$

où $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{n-1}$.

On supposera que Ω est un ouvert connexe et borné de \mathbb{R}^n , $n = 2$ ou $n = 3$, de frontière $\partial\Omega$.

Il importe de tenir compte de la condition d'incompressibilité. A cet effet, on introduit l'espace (voir [84])

$$W = \left\{ \vec{u} \in \left[\mathcal{D}(\Omega) \right]^n : \operatorname{div} \vec{u} = 0 \right\}.$$

On définit ensuite (voir [120])

$$H = \text{adhérence de } W \text{ dans } \mathbb{L}^2(\Omega),$$

$$V = \text{adhérence de } W \text{ dans } \mathbb{H}_0^1(\Omega),$$

$$\mathcal{H} = H \times L^2(\Omega) ,$$

$$\mathcal{V} = V \times H_0^1(\Omega) .$$

Les espaces H , V , \mathcal{H} et \mathcal{V} sont respectivement munis des produits scalaires

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \vec{v} \, dx ,$$

$$((\vec{u}, \vec{v})) = \int_{\Omega} \nabla \vec{u} \cdot \nabla \vec{v} \, dx ,$$

$$(\varphi, \psi) = \int_{\Omega} (\vec{u} \cdot \vec{v} + \vartheta \eta) \, dx ,$$

$$((\varphi, \psi)) = \int_{\Omega} (\nabla \vec{u} \cdot \nabla \vec{v} + \nabla \vartheta \cdot \nabla \eta) \, dx ,$$

avec $\varphi = (\vec{u} , \vartheta)$, $\psi = (\vec{v} , \eta)$.

Nous notons

$$|\vec{u}| = \left[(\vec{u}, \vec{u}) \right]^{1/2} , \quad \|\vec{u}\| = \left[((\vec{u}, \vec{u})) \right]^{1/2} ,$$

$$|\varphi| = \left[(\varphi, \varphi) \right]^{1/2} , \quad \|\varphi\| = \left[((\varphi, \varphi)) \right]^{1/2} ,$$

les normes respectives sur H , V , \mathcal{H} et \mathcal{V} .

Du lemme de Rellich [1], nous déduisons que

$$V \subset H, \mathcal{V} \subset \mathcal{H} ,$$

avec injections denses et compactes. D'autre part, le théorème de représentation de Riesz [130] permet d'identifier H à son dual H' , et \mathcal{H} à \mathcal{H}' .

Nous obtenons alors les triplets de Gelfand suivants

$$V \subset H \equiv H' \subset V', \quad V \subset \mathcal{H} \equiv \mathcal{H}' \subset V',$$

avec injections denses et continues.

5.2. Equations abstraites linéaires.

(i) Opérateur de Stokes [120]

Considérons la forme bilinéaire $a_0(\dots)$ définie par

$$(5.2)_1 \quad a_0(\vec{u}, \vec{v}) = ((\vec{u}, \vec{v})) , \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in V .$$

Il est aisé de voir que a_0 est symétrique, continue sur $V \times V$ et V -coercive. D'après le théorème de Lax-Milgram [130], il lui est associé un opérateur autoadjoint, continu A_0 de V dans V' :

$$(5.2)_2 \quad \langle A_0 \vec{u}, \vec{v} \rangle_{V, V'} = a_0(\vec{u}, \vec{v}) , \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in V ;$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V, V'}$ dénote le produit scalaire dans la dualité V, V' .

Si $\partial\Omega \in C^2$ alors $A_0 \in \mathcal{L}(V, V') \cap \mathcal{L}(D(A_0), H)$, $D(A_0) = H^2(\Omega) \cap V$ (d'après le théorème de régularité de Cattabriga [127]). D'autre part, le théorème de décomposition de Hodge [13]-[75] implique l'existence d'une projection orthogonale P dans $L^2(\Omega)$ sur H . D'où

$$(5.2)_3 \quad \begin{cases} D(A_0) = H^2(\Omega) \cap V , \\ A_0 \vec{u} = -P \Delta \vec{u} , \quad \forall \vec{u} \in D(A_0). \end{cases}$$

Notons que $\exists \alpha, \beta > 0$, $\alpha = \alpha(\Omega)$, $\beta = \beta(\Omega)$:

$$(5.2)_4 \quad \alpha \|\vec{u}\|_2 \leq |A_0 \vec{u}| \leq \beta \|\vec{u}\|_2 .$$

L'opérateur inverse de A_0 , A_0^{-1} , est un opérateur continu de H sur $D(A_0)$; il peut alors être regardé comme un opérateur compact de H dans H au vu de la compacité de l'injection de V dans H . Il existe donc une base $\left\{ \vec{u}_m \right\}_{m=1}^{\infty}$ orthonormale dans H telle que

$$(5.2)_5 \quad A_0 \vec{u}_m = \lambda_m \vec{u}_m \quad \text{et} \quad 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m \leq \dots$$

(ii) Opérateur de Laplace - Δ

Si $\partial\Omega \in C^2$ (ou même Ω convexe [51]), on introduit l'opérateur non borné autoadjoint $\tilde{A}_1 : D(\tilde{A}_1) \subset L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ défini par

$$(5.3)_1 \quad \begin{cases} D(\tilde{A}_1) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \\ \tilde{A}_1 \vartheta = -\Delta \vartheta. \end{cases}$$

$$(5.3)_2 \quad \langle \tilde{A}_1 \vartheta, \eta \rangle_{H_0^1, H^{-1}} = ((\vartheta, \eta)) \quad , \quad \forall \vartheta, \eta \in H_0^1(\Omega).$$

(iii) Opérateur - $\frac{\Delta \vartheta}{\chi(z)}$

Soit $a_1(.,.)$ la forme bilinéaire définie par

$$(5.4)_1 \quad a_1(\vartheta, \eta) = \left(\vartheta, \frac{\eta}{\chi(z)} \right) \quad , \quad \forall \vartheta, \eta \in H_0^1(\Omega).$$

Il est clair que a_1 n'est pas symétrique lorsque $\delta \neq 0$. Nous avons le

Lemme 5.1.- Soit a_1 la forme bilinéaire définie par (5.4)₁, si Ω est borné alors

(α) a_1 est une forme bilinéaire continue sur $[H_0^1(\Omega)]^2$

(β) Etant donné $\delta \in]0,1[$, si

$$(H.1) \quad |\Omega| < \omega_n \left(\frac{1}{\delta^2 (1+\delta)} \right)^{n/2},$$

alors $\exists k > 0$:

$$(5.4)_2 \quad a_1(\vartheta, \vartheta) \geq k \|\vartheta\|^2.$$

Où $|\Omega|$ dénote la mesure de Ω , $\Omega \subset \mathbb{R}^n$; ω_n est le volume de la boule unité

dans \mathbb{R}^n et $\omega_n = \frac{2 \pi^{n/2}}{n \Gamma(\frac{n}{2})}$; $\Gamma(\cdot)$ dénote la fonction Gamma et

$$(5.4)_3 \quad k = \frac{1}{1+\delta} - \delta \left(\frac{1}{\omega_n} |\Omega| \right)^{2/n}.$$

Du Lemme 5.1, nous déduisons que a_1 est $H_0^1(\Omega)$ -coercive si $|\Omega|$ satisfait à l'hypothèse (H.1), $\delta \neq 0$. Si $\delta = 0$, nous retrouvons le cas (ii), auquel cas, on vérifie sans peine que a_1 est $H_0^1(\Omega)$ -coercive.

Preuve.-

(α) a_1 est continue sur $[H_0^1(\Omega)]^2$

Notons que

$$\begin{aligned} a_1(\vartheta, \eta) &= \left(\vartheta, \frac{\eta}{\chi} \right) = \left(\nabla \vartheta, \frac{\nabla \eta}{\chi} \right) + \left(\nabla \vartheta, \eta \nabla \left(\frac{1}{\chi} \right) \right) = \\ &= \left(\nabla \vartheta, \frac{\nabla \eta}{\chi} \right) + \left(\nabla \vartheta, \frac{\delta \eta \vec{e}}{\chi^2} \right). \end{aligned}$$

Or $\chi(z) \neq 0$ et $\chi(z)$ est une fonction bornée; en vertu des inégalités de Cauchy-Schwarz et de Poincaré, nous déduisons :

$$(5.4) \quad \exists c_1(\Omega, \delta) > 0 \quad : a_1(\vartheta, \eta) \leq c_1 \|\vartheta\| \cdot \|\eta\| .$$

(β) a_1 est $H_0^1(\Omega)$ -coercive

Lorsque $\eta = \vartheta$, il vient

$$a_1(\vartheta, \vartheta) = \left(\nabla \vartheta, \frac{\nabla \vartheta}{\chi} \right) + \left(\nabla \vartheta, \frac{\delta \vartheta \vec{e}}{\chi^2} \right).$$

Après intégration par parties, nous obtenons

$$a_1(\vartheta, \vartheta) = \left(\nabla \vartheta, \frac{\nabla \vartheta}{\chi} \right) - \left(\vartheta, \frac{\delta^2 \vartheta}{\chi^3} \right).$$

Or $z \in]0, 1[$; d'où

$$a_1(\vartheta, \vartheta) \geq \frac{1}{1+\delta} \|\vartheta\|^2 - \delta^2 |\vartheta|^2.$$

Ω étant par hypothèse borné, nous avons l'inégalité de Poincaré [44, p. 157]

$$(5.4)_5 \quad |\vartheta|^2 \leq \left(\frac{1}{\omega_n} |\Omega| \right)^{2/n} \|\vartheta\|^2 .$$

On en déduit alors

$$a_1(\vartheta, \vartheta) \geq \left[\frac{1}{1+\delta} - \delta^2 \left(\frac{1}{\omega_n} |\Omega| \right)^{2/n} \right] \|\vartheta\|^2 = k \|\vartheta\|^2.$$

La condition (H.1) assure que $k > 0$. \square

Pour être complet, nous donnons ci-après, la borne supérieure de $|\Omega|$ pour $n = 2$ et $n = 3$

$$(i) \ n = 2 \Rightarrow \Gamma(1) = 1 \ [30, \text{ p. } 209] \Rightarrow \omega_2 = \pi \Rightarrow |\Omega| < \pi \left(\frac{1}{\delta^2 (1+\delta)} \right).$$

$$(ii) \ n = 3 \Rightarrow \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\pi^{1/2}}{2} \Rightarrow \omega_3 = \frac{4}{3} \pi \Rightarrow |\Omega| < \frac{4}{3} \pi \left(\frac{1}{\delta^2 (1+\delta)} \right)^{3/2}.$$

Remarque 5.2.- La "meilleure constante" de Poincaré est bien sûr reliée à la première valeur propre μ_1 de l'opérateur \tilde{A}_1 . Dans la suite,

(H.2) Le domaine Ω sera choisi de sorte que l'opérateur $-\frac{\Delta}{\chi(z)}$ soit $H_0^1(\Omega)$ -coercif.

Supposons que Ω ait été choisi satisfaisant à l'hypothèse (H.2), d'après le théorème de Lax-Milgram, à la forme bilinéaire a_1 est associé un opérateur linéaire continu A_1 de $H_0^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$ et

$$(5.4)_6 \quad \langle A_1 \vartheta, \eta \rangle_{H_0^1, H^{-1}} = a_1(\vartheta, \eta) \quad , \quad \forall \vartheta, \eta \in H_0^1(\Omega).$$

Si $\partial\Omega \in C^2$, alors, d'après les résultats de régularité des opérateurs elliptiques [2], il vient

$$\begin{cases} D(A_1) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \\ A_1 \vartheta = -\frac{\Delta \vartheta}{\chi}. \end{cases}$$

De la même manière que pour l'opérateur de Stokes, les opérateurs A_1^{-1} et \tilde{A}_1^{-1} sont compacts et il existe une base $\left\{ \vartheta_m \right\}_{m=1}^{\infty}$ orthonormale dans $L^2(\Omega)$ telle que

$$(5.4)_7 \quad \tilde{A}_1 \vartheta_m = \mu_m \vartheta_m, \quad 0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_m \leq \dots$$

Avec ces notations, le problème linéaire associé au système (5.1) s'écrit sous la forme opérationnelle

$$(5.5)_1 \quad \frac{1}{\sigma} \frac{d \vec{u}}{d t} - \vartheta \vec{e} + A_0 \vec{u} = P\vec{f}/\sigma;$$

$$(5.5)_2 \quad \frac{d \vartheta}{d t} - R \vec{u} \cdot \vec{e} + A_1 \vartheta = s;$$

$$(5.5)_3 \quad \vec{u}(0) = \vec{u}_0, \quad \vartheta(0) = \vartheta_0.$$

De manière équivalente, le système (5.5) peut s'écrire

$$(5.6)_1 \quad \frac{d \varphi}{d t} + A \varphi + M \varphi = F;$$

$$(5.6)_2 \quad \varphi(0) = \varphi_0;$$

avec $\varphi = (\vec{u}, \vartheta)$, $A \varphi = (\sigma A_0 \vec{u}, A_1 \vartheta)$, $M \varphi = -(\sigma \vartheta \vec{e}, R \vec{u} \cdot \vec{e})$, $F = (P\vec{f}, s)$.

L'équation stationnaire s'écrit dans le cas linéaire

$$(5.7) \quad A \varphi + M \varphi = F.$$

5.4. Problèmes non linéaires

Pour tenir compte des nonlinéarités présentes dans le système (5.1),

introduisons les formes trilineaires suivantes

$$(5.8)_1 \quad b_0(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = ((\vec{u} \cdot \nabla) \vec{v}, \vec{w}) \quad , \quad \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V \quad ;$$

$$(5.8)_2 \quad b_1(\vec{u}, \vartheta, \eta) = (\vec{u} \cdot \nabla \vartheta, \eta) \quad \forall \vec{u} \in V, \forall \vartheta, \eta \in H_0^1(\Omega) \quad ;$$

$$(5.8)_3 \quad b_3(\vec{u}, \vec{v}, \eta) = \left(-\frac{2}{\chi} \delta D(\vec{u}) : D(\vec{v}), \eta \right) \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in V \quad , \\ \forall \eta \in Y \equiv H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \quad ;$$

$$(5.8)_4 \quad \tilde{b}_1(\vec{u}, \vartheta, \eta) = (\chi \vec{u} \cdot \nabla \vartheta, \eta), \quad \forall \vec{u} \in V, \forall \vartheta, \eta \in H_0^1(\Omega) \quad ;$$

$$(5.8)_5 \quad \tilde{b}_3(\vec{u}, \vec{v}, \eta) = -2 \delta (D(\vec{u}) : D(\vec{v}), \eta), \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in V \quad , \\ \forall \eta \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \quad .$$

Ces formes trilineaires sont continues (chacune sur son domaine de définition) et jouissent de certaines propriétés qui seront rappelées ultérieurement. Notons par

$B_0 \in \mathcal{L}(V \times V, V')$, B_1 (\tilde{B}_1) $\in \mathcal{L}(V \times H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$, B_3 (\tilde{B}_3) $\in \mathcal{L}(V \times V, Y')$, les opérateurs bilinéaires définis par

$$\langle B_0(\vec{u}, \vec{v}), \vec{w} \rangle = b_0(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \quad , \quad \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V;$$

$$\langle B_1(\vec{u}, \vartheta), \eta \rangle = b_1(\vec{u}, \vartheta, \eta) \quad , \quad \langle \tilde{B}_1(\vec{u}, \vartheta), \eta \rangle = \tilde{b}_1(\vec{u}, \vartheta, \eta) \quad ; \quad \forall \vec{u} \in V \quad , \\ \forall \vartheta, \eta \in H_0^1(\Omega) \quad ;$$

$$\langle B_3(\vec{u}, \vec{v}), \eta \rangle = b_3(\vec{u}, \vec{v}, \eta) \quad , \quad \langle \tilde{B}_3(\vec{u}, \vec{v}), \eta \rangle = \tilde{b}_3(\vec{u}, \vec{v}, \eta) \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in V \quad , \\ \forall \eta \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \quad .$$

Avec ces notations, le système (5.1) devient

$$(5.9)_1 \quad \frac{d \vec{u}}{d t} + \sigma A_0 \vec{u} - \sigma \vartheta \vec{e} + B_0(\vec{u}, \vec{u}) = P \vec{f} \quad ;$$

$$(5.9)_2 \quad \frac{d \vartheta}{d t} + A_1 \vartheta - R \vec{u} \cdot \vec{e} + B_1(\vec{u}, \vartheta) + B_3(\vec{u}, \vec{u}) = s \quad ;$$

$$(5.9)_3 \quad \vec{u}(0) = \vec{u}_0, \quad \vartheta(0) = \vartheta_0.$$

En posant $\varphi = (\vec{u}, \vartheta)$, $B(\varphi) = (B_0(\vec{u}, \vec{u}), B_1(\vec{u}, \vartheta) + B_3(\vec{u}, \vec{u}))$, le système (5.9) s'écrit

$$(5.10)_1 \quad \frac{d\varphi}{dt} + A\varphi + M\varphi + B(\varphi) = F;$$

$$(5.10)_2 \quad \varphi(0) = \varphi_0.$$

Dans le cas stationnaire, l'équation (5.10) devient

$$(5.11) \quad A\varphi + M\varphi + B(\varphi) = F.$$

5.4. Cas d'autres conditions aux limites.

5.4.1. Cas d'une cellule rectangulaire.

Si $n = 2$, on pose $\Omega =]0, L_1[\times]0, l[$, et si $n = 3$, $\Omega =]0, L_1[\times]0, L_2[\times]0, l[$.

On peut se ramener à ce cas, lorsque la couche fluide admet une extension horizontale infinie. On suppose alors que

$$\varphi(x + L_j \vec{e}_j, t) = \varphi(x, t), \quad j = 1, \dots, n-1.$$

$$p(x + L_j \vec{e}_j, t) = p(x, t)$$

i.e. φ et p sont périodiques dans la direction $x_\perp = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2$.

On introduit alors les espaces [38]

$$H = \left\{ \vec{u} \in \mathbb{L}^2(\Omega) : \operatorname{div} \vec{u} = 0, u_n|_{z=0} = 0 = u_n|_{z=1} \text{ et } \vec{u}(x + L_j \vec{e}_j, t) = \vec{u}(x, t) \right\};$$

$$V_1 = \left\{ f \in H^1(\Omega) : f|_{z=0} = 0 = f|_{z=1} \text{ et } f(x + L_j \vec{e}_j, t) = f(x, t) \right\};$$

$$V = \left\{ \vec{u} \in V_1 : \operatorname{div} \vec{u} = 0 \right\}$$

$$\mathcal{H} = H \times L^2(\Omega); \quad \mathcal{V} = V \times V_1.$$

Avec ces notations, on définit les opérateurs B_j (\tilde{B}_j) ($j = 0, 1, 3$) et les opérateurs non bornés A_0 , A_1 , \tilde{A}_1 comme précédemment avec

$$D(A_0) = H^2(\Omega) \cap V, \quad D(A_1) = D(\tilde{A}_1) = H^2(\Omega) \cap V_1 \text{ (cf. [38])};$$

5.4.2. Cas d'une paroi rigide en $z = 0$ et libre en $z = 1$

Les conditions aux limites pour ϑ sont inchangées. En ce qui concerne \vec{u} , il faut introduire les espaces suivants (cf. [38])

$$H = \left\{ \vec{u} \in \mathbb{L}^2(\Omega) : \operatorname{div} \vec{u} = 0 \text{ et } u_n|_{z=0} = u_n|_{z=1} = 0, \vec{u}(x + L_j \vec{e}_j, t) = \vec{u}(x, t) \right\}$$

$$V = \left\{ \vec{u} \in H^1(\Omega) : \operatorname{div} \vec{u} = 0, \vec{u} = \vec{0} \text{ sur } z = 0, u_n|_{z=1} = 0, \vec{u}(x + L_j \vec{e}_j, t) = \vec{u}(x, t) \right\}.$$

$$D(A_0) = \left\{ \vec{u} \in H^2(\Omega) \cap V, \frac{\partial u_j}{\partial z} = 0 \text{ sur } z = 1, 1 \leq j \leq n-1 \right\} .$$

Remarque 5.3.- Dans toute la suite, on supposera implicitement, lorsque cela s'avérera nécessaire, que

- (i) le modèle de la convection profonde est exact;
- (ii) l'hypothèse (H.2) est satisfaite.

5.5. Propriétés des formes trilinéaires

Dans ce qui suit, nous donnerons quelques propriétés des formes trilinéaires définies précédemment. Commençons par rappeler, à toutes fins utiles, les relations d'orthogonalité dont jouissent les formes trilinéaires b_0 et b_1 , à savoir

$$(5.12) \quad b_0(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -b_0(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}) \quad \text{et} \quad b_1(\vec{u}, \vartheta, \eta) = -b_1(\vec{u}, \eta, \vartheta) ,$$

$$\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V, \forall \vartheta, \eta \in H_0^1(\Omega).$$

D'où

$$(5.13) \quad b_0(\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}) = 0 \quad \text{et} \quad b_1(\vec{u}, \vartheta, \vartheta) = 0, \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \forall \vartheta \in H_0^1(\Omega).$$

De la même manière que dans [121, p.12], il est aisé de démontrer le

Lemme 5.2.- Les formes trilinéaires b_0, b_1 (et \tilde{b}_1), b_3 (et \tilde{b}_3) sont définies et continues respectivement sur

$$(i) \quad H^m_1(\Omega) \times H^{m_2+1}(\Omega) \times H^m_3(\Omega) \quad (\text{pour } b_0);$$

$$(ii) \mathbb{H}^{m_1}(\Omega) \times \mathbb{H}^{m_2+1}(\Omega) \times \mathbb{H}^{m_3}(\Omega) \quad (\text{pour } b_1 \text{ et } \tilde{b}_1);$$

$$(iii) \mathbb{H}^{m_1+1}(\Omega) \times \mathbb{H}^{m_2+1}(\Omega) \times \mathbb{H}^{m_3}(\Omega) \quad (\text{pour } b_3 \text{ et } \tilde{b}_3).$$

Où

$$(5.14)_1 \quad m_1 + m_2 + m_3 \geq \frac{n}{2} \quad \text{si } m_i \neq \frac{n}{2}, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$(5.14)_2 \quad m_1 + m_2 + m_3 > \frac{n}{2} \quad \text{si l'un des } m_i = \frac{n}{2}.$$

Dans les chapitres suivants, on se consacre à l'analyse des équations de la convection profonde de Bénard dans le cadre qui vient d'être mis en place.

CHAPITRE II

THEORIE LINEAIRE

L'analyse du problème linéaire revêt un caractère important dans toute étude de stabilité, aussi allons-nous consacrer ce chapitre à l'étude des équations linéaires instationnaires et stationnaires de la convection profonde. Ce chapitre est organisé comme suit. Au § 1, nous étudions l'existence et l'unicité de solutions faibles et fortes pour le problème linéaire instationnaire. Le § 2 sera consacré à l'étude de l'existence et de l'unicité de solutions faibles et fortes pour le problème linéaire stationnaire. Le problème spectral sera analysé au § 3. Nous donnerons enfin quelques solutions approchées du problème linéaire stationnaire au § 4; nous y étudierons également leur convergence.

1. Problème linéaire instationnaire

On considère dans $Q = \Omega \times]0, T[$, $T \in \mathbb{R}_*^+$, le problème linéaire instationnaire suivant (L.I) : Trouver \vec{u} , ϑ , p solutions de

$$(L.I)_1 \quad \partial_t \vec{u} + \sigma \nabla p - \sigma \vartheta \vec{e} - \sigma \Delta \vec{u} = \vec{f} \quad \text{sur } Q;$$

$$\begin{array}{ll}
\text{(L.I)}_2 & \partial_t \vartheta - R \vec{u} \cdot \vec{e} - \frac{\Delta \vartheta}{\chi(z)} = s \quad \text{sur } Q; \\
\text{(L.I)}_3 & \operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad \text{sur } Q; \\
\text{(L.I)}_4 & \vec{u} = \vec{0}, \quad \vartheta = 0 \quad \text{sur } \Sigma; \\
\text{(L.I)}_5 & \vec{u}(x,0) = \vec{u}_0, \quad \vartheta(x,0) = \vartheta_0 \quad \text{dans } \Omega.
\end{array}$$

Ici $\Sigma = \partial\Omega \times]0, T[$. Nous avons vu au Chapitre 1 que le problème (L.I) pouvait s'écrire sous la forme opérationnelle suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi' + A \varphi + M \varphi = F; \\ \varphi(0) = \varphi_0. \end{array} \right.$$

1.1. Existence et unicité de solutions faibles

Introduisons le

Problème 1.1. :

Soient

$$(1.1) \quad F \in L^2(0, T; V'), \quad \varphi_0 \in \mathcal{H}$$

donnés.

On cherche

$$(1.2) \quad \varphi \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T, \mathcal{H})$$

tel que

$$(1.3)_1 \quad \varphi' + A \varphi + M \varphi = F ;$$

$$(1.3)_2 \quad \varphi(0) = \varphi_0.$$

Remarque 1.1.- L'équation $(1.3)_1$ est écrite au sens des distributions sur $]0, T[$ à valeurs dans V' . La condition initiale $(1.3)_2$ a bien un sens ici. En effet, $-A \varphi - M \varphi + F \in L^2(0, T; V')$, i.e. $\varphi' \in L^2(0, T; V')$. On en déduit alors que $\varphi \in C([0, T]; V')$.

Nous avons alors le résultat d'existence et d'unicité suivant

Théorème 1.1 - Le problème 1.1 possède une solution unique. En outre, $\varphi \in C([0, T]; \mathcal{H})$.

Ce théorème se démontre de la même manière que dans [120, Chap. 3, theorem 1.1, p.254] en utilisant la technique de Faedo-Galerkin. La seule modification à apporter se situe au niveau des estimations a priori. En effet, soit φ_m une solution approchée du problème (1.3). En prenant le produit scalaire dans \mathcal{H} de (1.3) avec φ_m , on obtient (après application des inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young)

$$(1.4) \quad e^{\nu t} \left[\frac{d}{dt} \left(e^{-\nu t} |\varphi_m|^2 \right) \right] + K \|\varphi_m\|^2 \leq \frac{\|F\|_*^2}{K}.$$

Ici, $\nu = R + \sigma$, $K = \min(\sigma, k)$, et $k > 0$ est donné au [Chap. 1, Lemme 5.1].

Remarquons que l'on peut se passer de l'hypothèse (H.2) du Chapitre 1. En effet, si on prend le produit scalaire dans \mathcal{H} de $(1.3)_1$ avec $\varphi_m = (\vec{u}_m, \vartheta_m)$, il vient

$$\begin{aligned} (\vec{u}_m', \vec{u}_m) + \sigma \|\vec{u}_m\|^2 + (\vartheta_m', \vartheta_m) + (A_1 \vartheta_m, \vartheta_m) &= (F, \varphi_m) + \\ + \sigma (\vartheta_m \vec{e}, \vec{u}_m) + R (\vec{u}_m, \vec{e}, \vartheta_m). \end{aligned}$$

Or $(g', g) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |g|^2$, et

$$(A_1 \vartheta, \vartheta) \geq \frac{1}{1+\delta} \|\vartheta\|^2 - \delta^2 |\vartheta|^2 \quad (\text{cf. [Chap.1, § 5]}).$$

On obtient alors (après utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\vec{u}_m|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\vartheta_m|^2 + \sigma \|\vec{u}_m\|^2 + \frac{1}{1+\delta} \|\vartheta_m\|^2 - \delta^2 |\vartheta_m|^2 \leq \\ & \leq \|F\|_* \|\varphi_m\| + (R+\sigma) |\vec{u}_m| |\vartheta_m|. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Young, nous avons

$$\|F\|_* \|\varphi_m\| \leq \frac{1}{2\varepsilon_1} \|F\|_*^2 + \frac{\varepsilon_1}{2} \|\varphi_m\|^2;$$

$$|\vec{u}_m| |\vartheta_m| \leq \frac{1}{2} \left[|\vec{u}_m|^2 + |\vartheta_m|^2 \right] = \frac{1}{2} |\varphi_m|^2 \quad (\varepsilon_1 > 0).$$

D'où, si on prend $\varepsilon_1 = \min(\sigma, \frac{1}{1+\delta})$, $\nu_1 = 2\delta^2 + R + \sigma$, il vient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\varphi_m|^2 + \frac{\varepsilon_1}{2} \|\varphi_m\|^2 \leq \frac{1}{2\varepsilon_1} \|F\|_*^2 + \frac{\nu_1}{2} |\varphi_m|^2.$$

En remarquant que $\frac{d}{dt} f - a f = e^{at} \frac{d}{dt} (e^{-at} f)$, on obtient la relation (1.4) avec $\nu = \nu_1$ et $K = \varepsilon_1$.

De l'inégalité (1.4), on déduit pour $t \in [0, T]$

$$(1.5)_1 \quad |\varphi_m(t)|^2 \leq \left[|\varphi_0|^2 + \int_0^T \frac{\|F(s)\|^2}{K} ds \right] e^{\nu T};$$

$$(1.5)_2 \quad \int_0^T \|\varphi_m(s)\|^2 ds \leq \frac{1}{K} \left(|\varphi_0|^2 + \int_0^T \frac{\|F(s)\|^2}{K} ds \right) e^{\nu T}.$$

Le passage à la limite ne pose aucun problème ici.

Pour montrer l'unicité de la solution, il suffit de considérer deux solutions faibles $\varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t)$ de (1.3). Posons $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, il est alors aisé de voir que $\varphi \in L^2(0,T;V)$, $\varphi' \in L^2(0,T;V')$ et φ est solution de l'équation

$$(1.6) \quad \frac{d}{dt} \varphi + A \varphi + M \varphi = 0, \quad \varphi(0) = 0.$$

Or

$$\left\langle \frac{d}{dt} \varphi, \varphi \right\rangle_{V, V'} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\varphi|^2, \text{ en vertu d'un résultat contenu}$$

dans [120, Chap.3, Lemmas 1.2-1.3, pp.260-261].

En prenant le crochet de dualité V, V' de (1.6) avec φ , il vient

$$(1.7) \quad \frac{d}{dt} |\varphi|^2 + 2K \|\varphi\|^2 \leq 2\nu |\varphi|^2.$$

Soit

$$(1.8) \quad |\varphi(t)| = 0, \quad t \in [0, T] \quad \square$$

Remarque 1.2.- En utilisant le même argument que dans [120, proposition 1.1, p.266], on montre qu'il existe une distribution $p \in \mathcal{D}'(Q)$, $Q = \Omega \times]0, T[$, telle que la fonction $\varphi = (\vec{u}, \vartheta)$ obtenue au théorème 1.1 et p satisfont à l'équation $(L.I)_1$ au sens des distributions dans Q .

1.2.Existence de solutions fortes

Enonçons le

Théorème 1.2.- On suppose que F et φ_0 sont données, avec

$$(1.9) \quad F \in L^\infty(0, T; \mathcal{H}), \quad \varphi_0 \in V.$$

Alors, il existe une unique solution forte du problème (1.3) telle que

$$(1.10) \quad \varphi \in L^2(0, T; D(A)), \quad \varphi' \in L^2(0, T; \mathcal{H}), \quad \varphi \in C([0, T]; V).$$

Idée de démonstration.-

Soit $\varphi_m = (\vec{u}_m, \vartheta_m)$ une solution approchée de (1.3). Prenons le produit scalaire dans \mathcal{H} de (1.3) (écrite pour φ_m) avec $(A_0 \vec{u}_m, \tilde{A}_1 \vartheta_m) = \tilde{A} \varphi_m$, il vient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\varphi_m\|^2 + K_1 |\tilde{A} \varphi_m|^2 \leq |(M \varphi_m, \tilde{A} \varphi_m)| + |(F, \tilde{A} \varphi_m)|,$$

$$K_1 = \min \left(\sigma, \frac{1}{1+\delta} \right).$$

Par application des inégalités de Cauchy-Schwarz, de Young et de Poincaré, on trouve finalement

$$(1.11) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\varphi_m\|^2 + \frac{K_1}{2} |\tilde{A} \varphi_m|^2 \leq \frac{|F|^2}{K_1} + \frac{K_2^2}{K_1} \|\varphi_m\|^2,$$

$$K_2 = \max(R, \sigma).$$

Posons

$$(1.12) \quad C = \frac{2}{K_1} \max \left(\|F\|_{L^\infty(0,T;\mathcal{H})}^2, K_2^2 \right).$$

De (1.11), nous obtenons

$$(1.13) \quad \frac{d}{dt} \|\varphi_m\|^2 \leq C \left(1 + \|\varphi_m\|^2 \right).$$

Si nous notons

$$(1.14)_1 \quad y = \|\varphi_m\|^2, \quad a = b = C,$$

l'inégalité (1.13) s'écrit

$$(1.14)_2 \quad \frac{dy}{dt} \leq a + b y.$$

A l'aide du lemme de Gronwall [121, p.18], on obtient

$$y(t) \leq y(0) \exp \left(\int_0^t C \, d\tau \right) + \int_0^t C \exp \left(\int_s^t C \, d\tau \right) \, ds, \text{ soit}$$

$$(1.15) \quad \|\varphi_m(t)\|^2 \leq \|\varphi_m(0)\|^2 \exp(C t) + C \int_0^t \exp[C(t-s)] ds.$$

Or $\|\varphi_m(0)\| \leq \|\varphi_0\|$ (par construction). De (1.15), on déduit alors

$$(1.16)_1 \quad \exists C_1 > 0 : \sup_{t \in [0, T]} \|\varphi(t)\|^2 \leq C_1.$$

Par retour à (1.11) et compte tenu de (1.16)₁, il est aisé d'établir que

$$(1.16)_2 \quad \exists C_2 > 0 : \int_0^T |\tilde{A} \varphi_m|^2 dt \leq C_2 \Leftrightarrow$$

$$(1.16)_3 \quad \exists C'_2 > 0 : \int_0^T |A \varphi_m|^2 dt \leq C'_2.$$

Le reste de la démonstration est identique à celle se trouvant dans [121, Theorem 3.2, pp.22-25] et par conséquent est omis. □

2. Problème linéaire stationnaire

2.1. Existence et unicité de solutions faibles

Afin de traiter les équations stationnaires linéaires, nous introduisons le

Problème 2.1 :

Soient $\vec{f}(x)$ et $s(x)$ donnés vérifiant

$$(2.1) \quad \vec{f} \in H^{-1}(\Omega), s \in H^{-1}(\Omega).$$

Trouver $(\vec{u}, \vartheta, p) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ tels que

(2.2) ₁	$-\Delta \vec{u} - \vartheta \vec{e} + \nabla p = \vec{f}$	dans Ω ;
(2.2) ₂	$-\Delta \vartheta - R \chi \vec{u} \cdot \vec{e} = s$	dans Ω ;
(2.2) ₃	$\operatorname{div} \vec{u} = 0$	dans Ω ;
(2.2) ₄	$\vec{u} = 0, \vartheta = 0$	sur $\partial\Omega$;

Il est commode d'écrire le système (2.2) sous forme opérationnelle. Pour cela, nous utilisons l'opérateur non borné $\tilde{A}_1 \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$ défini au Chapitre 1. Il est alors aisé de voir que le système (2.2) s'écrit

$$(2.3) \quad \tilde{A} \varphi + \tilde{M} \varphi = F ;$$

où $\tilde{A} \varphi = (A_0 \vec{u}, \tilde{A}_1 \vartheta)$, $\tilde{M} \varphi = -(\vartheta \vec{e}, R \chi \vec{u} \cdot \vec{e})$ et $F = (P\vec{f}, s)$.

Le problème 2.1 devient alors équivalent à trouver $(\vec{u}, \vartheta) \in V$ vérifiant (2.3). L'existence de $p \in L^2(\Omega)$ telle que (2.2)₁ soit vérifiée est une conséquence d'un résultat contenu dans [120, propositions 1.1 & 1.2, p.14].

Comme conséquence du théorème de Lax-Milgram, nous avons le

Théorème 2.1.- *Sous l'hypothèse $\tilde{A} + \tilde{M}$ est V -coercif, le problème (2.3) admet, $\forall F \in V'$, une solution unique $\varphi = (\vec{u}, \vartheta) \in V$.*

Remarque 2.1.- *Nous donnerons au § 3 une condition nécessaire pour que l'opérateur $\tilde{A} + \tilde{M}$ soit V -coercif.*

2.2.Régularité de la solution

Nous nous contenterons ici de donner la

Proposition 2.1.- *Supposons que $\partial\Omega \in C^2$ et*

$$(2.4) \quad (\vec{f}, s) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) .$$

Alors, toute solution (\vec{u}, ϑ, p) de (2.2) vérifie

$$(2.5) \quad \vec{u} \in H^2(\Omega) , \vartheta \in H^2(\Omega) , p \in H^1(\Omega) .$$

Preuve.-

$$* \vartheta \in H_0^1(\Omega) \text{ et } \vec{f} \in L^2(\Omega) \Rightarrow -\Delta \vec{u} + \nabla p \in L^2(\Omega) \Rightarrow \vec{u} \in H^2(\Omega) \text{ et } p \in H^1(\Omega).$$

$$* \text{ De (2.2)}_2, \text{ nous déduisons également que } -\Delta \vartheta \in L^2(\Omega) \Rightarrow \vartheta \in H^2(\Omega). \quad \square$$

Remarque 2.2.- *Si on suppose que Ω est de classe C^{m+2} et si $(\vec{f}, s) \in H^m(\Omega) \times H^m(\Omega)$, il est aisé d'établir que $\varphi \in H^{m+2}(\Omega) \times H^{m+2}(\Omega)$, $p \in H^{m+1}(\Omega)$.*

3.Problème spectral

3.1.Preliminaires

Remarque 3.1.- *Dans toute la suite de ce chapitre, nous poserons $(\vec{f}, s) = (\vec{0}, 0)$ et supposerons (sauf mention contraire) que le domaine admet une extension horizontale infinie, i.e. $\Omega = \mathbb{R}^2 \times]0, 1[$ et que les solutions sont périodiques dans les directions horizontales.*

L'analyse qui suivra va nous permettre de caractériser théoriquement le

seuil d'apparition des mouvements convectifs au sein du fluide. A cet effet, plaçons-nous dans le cas où Ω est une cellule convective. En prenant $\vec{e} \cdot \text{rot rot}$ (L.I)₁ et compte tenu de (L.I)₃, nous obtenons le système suivant

$$(3.1)_1 \quad \left(D^2 - a^2 \right)^2 V + \lambda a T + \mu \left(D^2 - a^2 \right) V = 0 \quad \text{dans }]0,1[;$$

$$(3.1)_2 \quad a \lambda \chi V - \left(D^2 - a^2 \right) T - \mu \sigma \chi T = 0 \quad \text{dans }]0,1[;$$

$$(3.1)_3 \quad T = 0, V = 0 \quad \text{en } z = 0, z = 1; \text{ et}$$

$$(3.1)_4 \quad \text{si la paroi en } b \in \{0,1\} \text{ est libre : } D^2 V(b) = 0;$$

$$(3.1)_5 \quad \text{si la paroi en } b \in \{0,1\} \text{ est rigide : } DV(b) = 0.$$

Ici, $\lambda = \sqrt{R}$, $D = \frac{d}{dz}$, $\tilde{\varphi} = (w, \vartheta)$ ($w = \vec{u} \cdot \vec{e}$) a été développée en série de Fourier comme suit

$$(3.2)_1 \quad \tilde{\varphi} = \sum_{m, n = -\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}_{mn}(z) \exp \left[i \left(m \alpha x + n \beta y \right) \right] \exp (-\mu t \sigma);$$

$$(3.2)_2 \quad a^2 = m^2 \alpha^2 + n^2 \beta^2, (m, n) \in \mathbb{Z}^*, a \neq 0;$$

$$(3.2)_3 \quad T = -\vartheta_{mn}, V = \frac{W_{mn}(z)}{a}, \mu \in \mathbb{C}.$$

Comme il est prouvé dans [17], le principe d'échange des stabilités est vérifié pour δ petit, ce qui permet de conclure (lorsque δ est petit) à l'absence d'instabilités oscillatoires lors de la première bifurcation. Signalons qu'Errafiy [31] a démontré la validité du principe d'échange des stabilités pour le problème de la convection profonde (cas libre-libre et rigide-rigide) à l'aide du critère de Routh-Hurwitz.

Pour étudier la stabilité de la solution issue de la première

bifurcation, il est donc légitime de poser $\mu = 0$ dans (3.1); on est alors conduit au système stationnaire suivant

$$(3.3)_1 \quad \left(D^2 - a^2 \right)^2 V + \lambda a T = 0 \quad \text{dans }]0,1[;$$

$$(3.3)_2 \quad a \lambda \chi V - \left(D^2 - a^2 \right) T = 0 \quad \text{dans }]0,1[;$$

muni des conditions aux limites (3.1)_{3,4/5}.

3.2. Formulation variationnelle

Commençons par chercher le problème adjoint à (3.3)-(3.1)_{3,4/5}. A cet effet, prenons le produit scalaire dans $L^2(0,1) \times L^2(0,1)$ de (3.3) avec (V', T') , il est aisé de constater que le problème adjoint à (3.3)-(3.1)_{3,4/5} s'écrit

$$(3.4)_1 \quad \left(D^2 - a^2 \right)^2 V' + \lambda a \chi T' = 0 \quad \text{dans }]0,1[;$$

$$(3.4)_2 \quad a \lambda V' - \left(D^2 - a^2 \right) T' = 0 \quad \text{dans }]0,1[;$$

avec (3.1)_{3,4/5}.

On en déduit que le problème (3.3) n'est pas auto-adjoint, aussi allons-nous avoir recours à une formulation variationnelle adjointe pour pouvoir déterminer la valeur propre critique λ_c de λ pour laquelle une solution stationnaire non triviale bifurquera de l'état de repos. Pour alléger les notations, posons

$$(3.5) \quad s = a \lambda, \quad L = \text{diag} \left(\left(D^2 - a^2 \right)^2, - \left(D^2 - a^2 \right) \right),$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \chi & 0 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} V \\ T \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} V' \\ T' \end{pmatrix}.$$

Avec ces notations, le problème (3.3) s'écrit

$$(3.6) \quad L u + s B u = 0, \quad u \text{ vérifiant les conditions aux limites } (3.1)_{3,4/5}.$$

De même, il est aisé de constater que v satisfait à l'équation

$$(3.7) \quad L v + s B^t v = 0 \quad (t \equiv \text{transposé}),$$

à laquelle sont associées les conditions aux limites $(3.1)_{3,4/5}$.

Introduisons la fonctionnelle

$$(3.8) \quad I(u,v) = - \frac{(v, Lu)}{(v, Bu)} = s, \quad u, v \in D(L^{1/2}).$$

Ici, $(.,.)$ désigne le produit scalaire usuel dans $L^2(0,1)$. Considérons alors le

Principe variationnel adjoint [16]-[37]

Minimiser la fonctionnelle I sur $D(L^{1/2})$.

Il est aisé de déduire que les équations (3.6) et (3.7) sont les équations d'Euler du problème de minimisation. En effet, l'annulation de la première variation de s fournit les équations (3.6) et (3.7). D'autre part, puisque ces équations n'admettent pas de solutions "explicites", posons

$$(3.9) \quad u = \sum_j c_j u_j ; \quad v = \sum_j d_j v_j ,$$

où $c_j, d_j \in \mathbb{R}$; $\{u_j\}, \{v_j\} \in C^4([0,1]) \times C^2([0,1])$, et u_j, v_j vérifient les conditions aux limites.

Introduisons (3.9) dans (3.8), il vient en vertu du principe variationnel

$$(3.10)_1 \quad \frac{\partial s}{\partial d_k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_j c_j (v_{j,k} L u_j + s B u_j) = 0 ;$$

$$(3.10)_2 \quad \frac{\partial s}{\partial c_k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_j d_j (u_{j,k} L v_j + s B^t v_j) = 0 .$$

Ainsi, si les solutions du système (3.10)₁ sont non triviales, alors les solutions de (3.10)₂ le sont également. Puisque les u_m et v_j satisfont aux mêmes conditions aux limites, on peut prendre $u_m = v_m \forall m$. Utiliser la méthode de Galerkin pour déterminer le seuil de convection revient alors à utiliser le principe variationnel adjoint et inversement. Pour des raisons techniques, posons

$$(3.11) \quad \hat{\vartheta}' = -a \lambda T' , \quad \hat{\vartheta} = -\lambda a T , \quad \mu = a^2 \lambda^2 = R a^2 ;$$

les systèmes (3.3) et (3.4) s'écrivent avec ces nouvelles inconnues

$$(3.12)_1 \quad \left(D^2 - a^2 \right)^2 V = \hat{\vartheta}, \quad \text{dans }]0,1[;$$

$$(3.12)_2 \quad \left(D^2 - a^2 \right) \hat{\vartheta} = -\mu \chi V, \quad \text{dans }]0,1[;$$

et

$$(3.13)_1 \quad \left(D^2 - a^2 \right)^2 V' = \chi \hat{\vartheta}', \quad \text{dans }]0,1[;$$

$$(3.13)_2 \quad \left(D^2 - a^2 \right) \hat{\vartheta}' = -\mu V', \quad \text{dans }]0,1[;$$

$V, V', \hat{\vartheta}$ et $\hat{\vartheta}'$ vérifiant les conditions aux limites (3.1)_{3,4/5}.

Soient (v_j, T_j) (resp. (v'_k, T'_k)) les fonctions propres de (3.12) (resp. (3.13)) correspondant à la valeur propre μ_j (resp. μ_k). Il est aisé d'établir que (cf. [16, Appendix IV, Eq. (37)])

$$(3.14) \quad \mu_j = \frac{(\nabla T_j, \nabla T'_j) + a^2 (T_j, T'_j)}{\left(\left(D^2 - a^2 \right) v_j, \left(D^2 - a^2 \right) v'_j \right)} = a^2 R_j.$$

Dans tous les cas de conditions aux limites (3.1)_{3,4/5}, on peut prendre

$$(3.15)_1 \quad T_j = \sum_n A_n^{(j)} \sin(n\pi z), \quad v_j = \sum_n A_n^{(j)} u_n,$$

$$(3.15)_2 \quad T'_j = \sum_n B_n^{(j)} \sin(n\pi z), \quad v'_j = \sum_n B_n^{(j)} u'_n,$$

d'où

$$(3.16) \quad \mu_j = \frac{1}{2} \frac{\sum_m A_m^{(j)} B_m^{(j)} (m^2 \pi^2 + a^2)}{\sum_n \sum_m A_m^{(j)} B_n^{(j)} \left(\left(D^2 - a^2 \right) u_m, \left(D^2 - a^2 \right) u'_n \right)}$$

Cherchons le minimum de $\mu_j = \mu_j(A_m^{(j)}, B_n^{(j)})$; à cet effet, introduisons la quantité

$$(3.17) \quad \mathcal{J} = \frac{1}{2 \mu_j} \sum_m A_m^{(j)} B_m^{(j)} (m^2 \pi^2 + a^2) - \sum_m \sum_n A_m^{(j)} B_n^{(j)} (m|n);$$

avec $(m|n) = \left(\left(D^2 - a^2 \right) u_m, \left(D^2 - a^2 \right) u'_n \right)$.

μ_j est alors un multiplicateur de Lagrange et \mathcal{J} atteint son extremum si

$$(3.18) \quad \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial A_m^{(j)}} = \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial B_n^{(j)}} = 0, \quad m, n = 1, \dots;$$

ce qui conduit à l'équation séculaire suivante

$$(3.19) \quad \det \left(\frac{1}{2 \mu_j} \left(n^2 \pi^2 + a^2 \right) \delta_{mn} - (m|n) \right) = 0.$$

Notons que compte tenu de (3.13)₁

$$(3.20) \quad (m|n) = \left(u_m, \left(D^2 - a^2 \right)^2 u'_n \right) = (u_m, \chi \sin(n\pi z)),$$

ce qui simplifie énormément les calculs pour déterminer le nombre de Rayleigh

critique R_c dans les cas de conditions aux limites rigide-rigide et rigide-libre.

3.3. Convection profonde dans une boîte

Pour plus de généralité, intéressons-nous au cas où le domaine Ω est une boîte convective (i.e $\Omega =]-1/2 h_1, 1/2 h_1[\times]-1/2 h_2, 1/2 h_2[\times]0, 1[$). Posons pour plus de commodité

$$(3.21) \quad \vec{u} = \frac{\vec{v}}{\lambda}, \quad \lambda = \sqrt{R}, \quad \lambda \neq 0;$$

le système (2.2) devient alors

$$(3.22)_1 \quad -\Delta \vec{v} - \lambda \vartheta \vec{e} + \lambda \nabla p = \vec{0} \quad \text{dans } \Omega;$$

$$(3.22)_2 \quad -\Delta \vartheta - \lambda \chi \vec{v} \cdot \vec{e} = 0 \quad \text{dans } \Omega;$$

$$(3.22)_3 \quad \text{div } \vec{v} = 0 \quad \text{dans } \Omega;$$

$$(3.22)_4 \quad \vec{v} = \vec{0}, \quad \vartheta = 0 \quad \text{sur } |x| = \frac{1}{2} h_1, |y| = \frac{1}{2} h_2, z = 0, z = 1.$$

En prenant le produit scalaire de (3.22)_{1,2} avec (\vec{v}, ϑ) dans $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, on obtient

$$(3.23) \quad \lambda = \frac{\|\vec{v}\|^2 + \|\vartheta\|^2}{((1+\chi) \vec{v} \cdot \vec{e}, \vartheta)}.$$

D'où la première valeur propre critique λ_c est donnée par la relation

$$(3.24) \quad \lambda_c = \min_{\vec{v}, \vartheta} \lambda.$$

A partir de (3.23), notons que $\lambda = \sqrt{R} > 0 \Rightarrow ((1+\chi \vec{v} \cdot \vec{e}, \vartheta) > 0$. D'où si $\lambda < \lambda_c$ (i.e. $R < R_c$) l'opérateur $\tilde{A} + \tilde{M}$ (cf.(2.3)) est V -coercif.

La valeur de λ_c ne peut être obtenue ici que par une méthode numérique.

Soient $\left\{ \vec{v}_n \right\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\left\{ \vartheta_n \right\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\left\{ p_n \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ des suites d'éléments de $[C^2(\bar{\Omega})]^3$, $C^2(\bar{\Omega})$ et $C^1(\bar{\Omega})$ respectivement. En outre, nous choisirons \vec{v}_n satisfaisant à $\text{div } \vec{v}_n = 0$ dans Ω , ce qui implique que la dérivée normale de la composante normale à la frontière est nulle, i.e.

$$\frac{\partial v_n^j}{\partial x_j} = 0 \quad \text{sur la frontière } x_j, \quad j = 1, 2, 3$$

Posons

$$(3.25) \quad \vec{v} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \vec{v}_n, \quad \vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \vartheta_n, \quad p = \sum_{n=1}^{\infty} e_n p_n.$$

En substituant (3.25) dans (3.22) et en prenant le produit scalaire dans $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ de l'équation résultante avec (\vec{v}_j, ϑ_j) , il vient

$$(3.26)_1 \quad \sum_{k=1}^N d_k (\nabla \vartheta_k, \nabla \vartheta_j) - c_k \lambda (\chi \vec{v}_k \cdot \vec{e}, \vartheta_j) = 0;$$

$$(3.26)_2 \quad \sum_{k=1}^N -d_k \lambda (\vartheta_k \vec{e}, \vec{v}_j) + c_k (\nabla \vec{v}_k, \nabla \vec{v}_j) = 0.$$

Le système (3.26), peut s'écrire de manière équivalente

$$(3.27) \quad \begin{pmatrix} U & \lambda V \\ \lambda W & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_k \\ c_k \end{pmatrix} = 0 = M \begin{pmatrix} d_k \\ c_k \end{pmatrix};$$

avec

$$U = - (\nabla \vartheta_k, \nabla \vartheta_j), \quad Z = - (\nabla \vec{v}_k, \nabla \vec{v}_j),$$

$$V = (\chi \vec{v}_k \cdot \vec{e}, \vartheta_j), \quad W = (\vartheta_k, \vec{v}_j \cdot \vec{e}).$$

L'existence d'une solution non triviale pour le système (3.27) est assurée lorsque $\det M = 0 = U Z - \lambda^2 V W$. On en déduit alors $\lambda_c = \inf_{\vartheta_j, \vec{v}_k} \lambda :$

$$U Z - \lambda^2 V W = 0.$$

Des simplifications sont possibles pour le choix des \vec{v}_j, ϑ_j . En effet, en théorie linéaire, seul le nombre d'onde "a" joue un rôle dans la détermination de R_c (ou λ_c) lorsque le domaine a une extension horizontale infinie, ceci ne permet pas de distinguer clairement la dépendance en x et y des solutions. On peut donc pour simplifier supposer que la convection naît sous forme de rouleaux dans la boîte (cf. [24]).

3.4.Cas d'une cellule convective

Ayant défini le seuil critique de R_c dans les sous-paragraphes précédents, montrons maintenant que les valeurs propres de (3.20) sont des points de bifurcation, mais au préalable remarquons qu'il est aisé d'obtenir les relations (3.23)-(3.24) dans le cas où Ω est une cellule convective. Il en découle que l'unique solution du problème (3.22) lorsque $R < R_c$ est $(\vec{v}, \vartheta) = 0$, $p = \text{const.}$, i.e. lorsque $R < R_c$, seule la conduction sert à transporter la chaleur. Pour des raisons pratiques, il est préférable de considérer le problème adjoint à (3.22) qui s'écrit

$$\begin{aligned}
(3.28)_1 \quad & -\Delta \vec{u} - \lambda \chi T \vec{e} + \lambda \nabla q = \vec{0} && \text{dans } \Omega; \\
(3.28)_2 \quad & -\Delta T - \lambda \vec{u} \cdot \vec{e} = 0 && \text{dans } \Omega; \\
(3.28)_3 \quad & \operatorname{div} \vec{u} = 0 && \text{dans } \Omega; \\
(3.28)_4 \quad & \vec{u} = \vec{0}, T = 0 && \text{sur } z = 0, z = 1.
\end{aligned}$$

Où Ω désigne une cellule convective et q la pression. En prenant $\vec{e} \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot}(3.28)_1$, compte tenu de $(3.28)_3$ et après élimination de $\vec{u} \cdot \vec{e}$, il est aisé d'obtenir l'équation

$$\begin{aligned}
(3.29)_1 \quad & \Delta^3 T = R \chi \Delta_{\perp} T && \text{dans } \Omega; \quad \Delta_{\perp} = \partial_x^2 + \partial_y^2; \\
(3.29)_2 \quad & T = 0, \Delta T = 0, \partial_z \Delta T = 0 && \text{sur } z = 0, z = 1.
\end{aligned}$$

Or, dans ce cas de conditions aux limites, $w = \vec{u} \cdot \vec{e}$ est une fonction paire en x et y (cf. [61]), d'où T est également paire en x et y et l'on peut poser

$$(3.30) \quad T = f(z) \cos(n_1 k_1 x) \cos(n_2 k_2 y).$$

Il vient alors, d'après (3.29), le problème aux valeurs propres suivant

$$\begin{aligned}
(3.31)_1 \quad & \left(D^2 - a^2 \right)^3 f = -R \chi a^2 f && \text{dans }]0,1[, D = \frac{d}{dz}; \\
(3.31)_2 \quad & f = 0, \left(D^2 - a^2 \right) f = 0, D \left(D^2 - a^2 \right) f = 0 && \text{sur } z = 0, z = 1.
\end{aligned}$$

$$\text{Ici } a^2 = n_1^2 k_1^2 + n_2^2 k_2^2, n_1, n_2 \in \mathbb{N}.$$

De la même manière que dans [62] et en utilisant des résultats contenus dans [66], on montre que (3.28) (ou (3.31)) admet une suite de valeurs propres

$$(3.32) \quad 0 < R_1(a) < R_2(a) < \dots < R_n(a) < \dots ;$$

et que pour presque tout (k_1, k_2) ces valeurs propres sont simples. Ce qui signifie que chaque valeur propre $R_j(a)$ constitue un point de bifurcation. Ces résultats sont obtenus plus simplement dans le cas de conditions de surfaces libres. En effet, au lieu des conditions aux limites (3.29)₂, il faut écrire

$$(3.33) \quad T = 0, \quad \Delta T = 0, \quad \partial_z^2 \Delta T = 0 \quad \text{sur } z = 0, z = 1.$$

Or, dans une cellule convective, par hypothèse, T est périodique, nous pouvons alors poser

$$(3.34) \quad T = \sum_{k,m,n} a_{kmn} \cos\left(\frac{k\pi x}{\alpha}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{\beta}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{\gamma}\right),$$

$$a_{kmn} \in \mathbb{R}; \quad k, m, n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{n}{\gamma} \in \mathbb{N}.$$

Introduisons (3.34) dans (3.29)₁, il en résulte

$$(3.35) \quad R_{kmn} = \pi^4 \left(\frac{k^2}{\alpha^2} + \frac{m^2}{\beta^2} + \frac{n^2}{\gamma^2} \right)^3 \cdot \left(\frac{k^2}{\alpha^2} + \frac{m^2}{\beta^2} \right)^{-1} \cdot \frac{\left(\sin\left(\frac{n\pi z}{\gamma}\right), \sin\left(\frac{n\pi z}{\gamma}\right) \right)}{\left(\chi \sin\left(\frac{n\pi z}{\gamma}\right), \sin\left(\frac{n\pi z}{\gamma}\right) \right)} ;$$

où $(.,.) \equiv (.,.)_{L^2(0,1)}$. On en déduit

$$(3.36) \quad R_{kmn} = \pi^4 \left(\frac{k^2}{\alpha^2} + \frac{m^2}{\beta^2} + \frac{n^2}{\gamma^2} \right)^3 \cdot \left(\frac{k^2}{\alpha^2} + \frac{m^2}{\beta^2} \right)^{-1} \cdot \left(1 + \frac{\delta}{2} \right)^{-1}.$$

Remarquons que $R_{kmn} \geq R_c = \frac{27}{4} \pi^4 \left(1 + \frac{\delta}{2} \right)$ (cf. § 4.1, Eq.(4.4)); on déduit alors que la solution donnée par la relation (3.34) n'a aucune chance d'exister si $R < R_c$. Un raisonnement simple montre une fois de plus que pour presque tout γ les valeurs propres R_{kmn} sont simples et sont ainsi des points de bifurcation. Dans le paragraphe qui suit, nous donnerons quelques fonctions tests permettant de déterminer la valeur de R_c pour différents cas de conditions aux limites.

4. Quelques solutions approchées du problème (3.3)

Nous allons donner dans ce qui suit quelques solutions approchées des problèmes (3.3) ou (3.4) pouvant servir soit à des fins numériques, soit pour effectuer des calculs explicites des coefficients des systèmes dynamiques ou des formes normales.

4.1. Conditions de surface libre

Dans ce cas, le système (3.3) est muni des conditions aux limites

(3.1)_{3,4}; ces conditions sont satisfaites identiquement par une superposition de modes de Fourier de la forme

$$(4.1) \quad (V_n, T_n) \sin(n\pi z).$$

Après substitution de (4.1) dans (3.3), nous obtenons pour le mode n

$$(4.2)_1 \quad \alpha_n^2 V_n + a \lambda T_n = 0 ;$$

$$(4.2)_2 \quad \alpha_n T_n + a \lambda \left(1 + \frac{\delta}{2} \right) V_n = 0.$$

Ici, $\alpha_n = (a^2 + n^2 \pi^2)$.

La condition de résolubilité du système (4.2) conduit à

$$(4.3) \quad \lambda_n^2 = R_n(a) = \frac{\alpha_n^3}{a^2 \left(1 + \frac{\delta}{2} \right)} .$$

Le seuil d'instabilité est donné par le minimum de la courbe de stabilité marginale (cf. fig.1) qui correspond à $n = 1$.

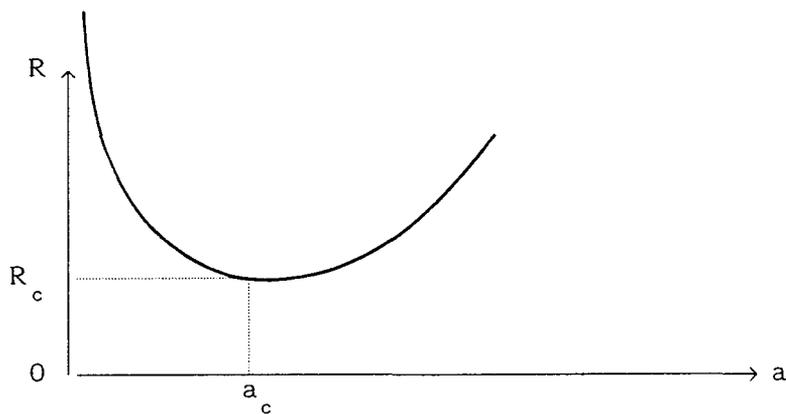


fig.1 : courbe de stabilité marginale.

Un calcul simple conduit à

$$(4.4) \quad a_c = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad , \quad R_c = \frac{27 \pi^4}{4 \left(1 + \frac{\delta}{2}\right)} .$$

Il est aisé de constater que lorsque $R < R_c$ (resp. $R > R_c$) l'état conducteur est linéairement stable (resp. instable) (cf. [132, p.337]).

4.2. Conditions aux limites rigide-libre

Notons que les conditions aux limites s'écrivent ici

$$(4.5)_1 \quad T(0) = V(0) = D^2V(0) = 0;$$

$$(4.5)_2 \quad T(1) = V(1) = DV(1) = 0.$$

Un premier choix consiste à poser (cf. [32])

$$(4.6)_1 \quad T = \sum_{n \geq 1} B_n \sin(n\pi z),$$

$$(4.6)_2 \quad V = \sum_n A_n \left\{ \left[a_n + b_n (z - 1/2) \right] \operatorname{ch} \left[a(z - 1/2) \right] + \left[c_n + d_n (z - 1/2) \right] + \sin(n\pi z) \right\};$$

où

$$A_n, B_n \in \mathbb{R}, \quad a_n = -n\pi \frac{\operatorname{sh}^3(a/2)}{\operatorname{sh}(a) \operatorname{ch}(a) - a} ; \quad b_n = 2 a_n \operatorname{coth}^2(a/2);$$

$$c_n = -a_n \coth^3(a/2) ; \quad d_n = -2 a_n \coth(a/2).$$

L'obtention d'une solution plus simple que la solution (4.6)₂ (pour effectuer les calculs) est possible. A cet effet, posons

$$V = \sum_n A_n v_n \quad (\text{où } v_n \text{ est à choisir});$$

nous pouvons alors prendre v_n solution de l'équation suivante

$$(4.7)_1 \quad D^4 v_n + \alpha (D^2 - a^2) v_n = 0 ; \quad v_n \text{ satisfaisant à (4.5).}$$

En outre, nous pouvons toujours normaliser les v_n comme suit

$$(4.7)_2 \quad \left(- (D^2 - a^2)v_n, v_m \right) = \delta_{mn} .$$

Il est aisé d'établir que

$$(4.8)_1 \quad v_n = \frac{\text{sh}(\gamma_n z)}{\text{sh}(\gamma_n)} - \frac{\sin(\tau_n z)}{\sin(\tau_n)} ;$$

avec

$$(4.8)_2 \quad \gamma_n^2 = \frac{1}{2} \left(-\alpha + \left(\alpha^2 + 4 \alpha a^2 \right)^{1/2} \right);$$

$$(4.8)_3 \quad \tau_n^2 = \frac{1}{2} \left(\alpha + \left(\alpha^2 + 4 \alpha a^2 \right)^{1/2} \right);$$

$$(4.8)_4 \quad \frac{\text{th}(\gamma_n)}{\gamma_n} = \frac{\text{tg}(\tau_n)}{\tau_n} .$$

Cette méthode est une variante de [16, Appendix V]. Pour T on prend la représentation (4.6)₁.

4.3. Conditions de surfaces rigides

Ce cas a fait l'objet de nombreuses études : on le rencontre dans le problème de Couette-Taylor. Les conditions aux limites s'écrivent ici :

$$(4.9) \quad V(0) = V(1) = DV(0) = DV(1) = 0 , T(0) = T(1) = 0 .$$

Posons

$$(4.10) \quad V = \sum_j A_j v_j , T = \sum_j B_j T_j .$$

On peut prendre comme dans [32]

$$(4.11)_1 \quad v_n = \left[a_n + b_n(z - 1/2) \right] \text{ch} \left(a(z - 1/2) \right) + \left[c_n + d_n(z - 1/2) \right] \text{sh} \left(a(z - 1/2) \right) + \sin(n\pi z);$$

$$(4.11)_2 \quad T_n = \alpha_n \sin(n\pi z) , \alpha_n = n^2 \pi^2 + a^2 ,$$

et

$$2 a_n = n \pi \frac{(-1)^n - 1}{\text{sh}(a) + a} \text{sh}\left(\frac{a}{2}\right), \quad b_n = -n \pi \frac{(-1)^n + 1}{\text{sh}(a) - a} \text{sh}\left(\frac{a}{2}\right),$$

$$2 c_n = n \pi \frac{(-1)^n + 1}{\text{sh}(a) - a} \text{ch}\left(\frac{a}{2}\right), \quad d_n = -n \pi \frac{(-1)^n - 1}{\text{sh}(a) + a} \text{ch}\left(\frac{a}{2}\right).$$

Etant étendu que a est choisi de sorte que $\text{sh}(a) \neq \pm a$. D'autres choix sont possibles, nous en donnerons quelques exemples ci-dessous (sans être exhaustif).

On peut choisir également les bases suivantes

$$(4.12) \quad v_j = \sin(\pi z) \sin\left[(2j-1)\pi z\right], \quad T_j = \sin\left[(2j-1)\pi z\right];$$

(cf. [50]); ou prendre

$$(4.13) \quad v_j = \cos\left[(j-1)\pi z\right] - \cos\left[(j+1)\pi z\right], \quad T_j = \sin(j\pi z).$$

Maintenant, effectuons le changement de variable suivant

$$(4.14) \quad \xi = 1 - z, \quad \tilde{\vartheta}' = -a \lambda T',$$

dans (3.4). Par suite, on obtient le système

$$(4.15)_1 \quad \left(D_\xi^2 - a^2\right)^2 V' = (1 + \delta \xi) \tilde{\vartheta}', \quad \xi \in]0,1[;$$

$$(4.15)_2 \quad \left(D_\xi^2 - a^2\right) \tilde{\vartheta}' = -a^2 R V', \quad \xi \in]0,1[;$$

V' et $\tilde{\vartheta}'$ satisfont à (4.9).

En comparant le système (4.15) avec [16, Chap.7, Eqs.(201)-(202)], on

constate qu'ils sont identiques (δ est "équivalent" à α et R est "équivalent" au nombre de Taylor). Il est alors immédiat d'obtenir

$$(4.16) \quad R_c = \frac{1}{1 + \frac{\delta}{2}} \frac{\left(\pi^2 + a^2 \right)^3}{a^2 \left\{ \frac{1 - 16 a \pi^2 \operatorname{ch}^2(a/2)}{(\pi^2 + a^2)^2 (\operatorname{sh}(a) + a)} \right\}} ;$$

cf. [16, Chap.7, Eq.(215)].

Pour

$$(4.17)_1 \quad a = a_c = 3.12 \quad \text{nous avons} \quad R_c = \frac{1}{1+(\delta/2)} \quad 1715.$$

En troisième approximation, cf. [16, Chap.2, Table IV, p.58], pour $a = a_c = 3.117$, on obtient

$$(4.17)_2 \quad R_c = 1707,775 \left(1 + \frac{\delta}{2} \right)^{-1} .$$

(On pourra comparer cette valeur avec la valeur obtenue par Errafiy [31, Chap.3, Eq. (3.64)] : $R_c = 1707.9 \left(1 + \frac{\delta}{2} \right)^{-1}$ pour $a_c = 3.117$).

Compte tenu de la symétrie des conditions aux limites, il est pratique de poser

$$(4.18) \quad \xi = Z + 1/2 \Rightarrow D_\xi^2 = D_Z^2 = D^2, \quad T = - a^2 R \tilde{\vartheta} ,$$

situant ainsi l'origine à mi-hauteur de la couche fluide.

Le problème adjoint à (4.15) s'écrit

$$(4.19)_1 \quad \left(D^2 - a^2 \right)^2 V = T \quad \text{dans }]-1/2, 1/2[;$$

$$(4.19)_2 \quad \left(D^2 - a^2 \right) T = - a^2 R V f(Z) \quad \text{dans }]-1/2, 1/2[;$$

avec $f(Z) = 1 + (\delta/2) + \delta Z$; V et T vérifiant (4.9) en $-1/2$ et $1/2$.

On peut alors choisir comme base dans $L^2(-1/2, 1/2)$ les fonctions propres de l'équation [16, Appendix V] :

$$(4.20)_{1a} \quad D^4 F = \alpha^4 F, \quad \text{dans }]-1/2, 1/2[;$$

$$(4.20)_{1b} \quad F = 0, \quad DF = 0 \quad \text{en } Z = \mp 1/2.$$

Les fonctions propres F se décomposent en deux groupes :

(i) les fonctions paires

$$(4.20)_2 \quad C_m = \frac{\text{ch}(\lambda_m Z)}{\text{ch}\left(\frac{\lambda_m}{2}\right)} - \frac{\cos(\lambda_m Z)}{\cos\left(\frac{\lambda_m}{2}\right)}, \text{ et}$$

(ii) les fonctions impaires

$$(4.20)_3 \quad S_m = \frac{\text{sh}(\mu_m Z)}{\text{sh}\left(\frac{\mu_m}{2}\right)} - \frac{\sin(\mu_m Z)}{\sin\left(\frac{\mu_m}{2}\right)}.$$

Où λ_m et μ_m sont solutions de

$$(4.21) \quad \operatorname{th}\left(\frac{1}{2} \lambda\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2} \lambda\right) = 0, \quad \operatorname{coth}\left(\frac{1}{2} \mu\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2} \mu\right) = 0.$$

Il est immédiat de vérifier que

$$(4.22) \quad (C_n, C_m) = \delta_{nm}, \quad (C_n, S_m) = 0, \quad (S_n, S_m) = \delta_{nm},$$

où $(.,.) \equiv (.,.)_{L^2(-1/2, 1/2)}$.

On prend alors

$$(4.23) \quad T = \sum_n a_n \cos(n\pi Z), \quad V = \sum_n b_n C_n + d_n S_n.$$

Pour effectuer certains calculs, il est plus intéressant de travailler avec des polynômes orthogonaux. A cet effet, cherchons des polynômes vérifiant

$$(4.24) \quad \int_{-1/2}^{1/2} \left(DF_m \cdot DF_n + a^2 F_m \cdot F_n \right) dz = \delta_{nm}.$$

Il est alors aisé d'obtenir (cf. [106])

$$(4.25)_1 \quad T_j = \left(Z^2 - 1/4 \right)^j, \quad T = \sum_j a_j T_j, \quad a_j \in \mathbb{R};$$

$$(4.25)_2 \quad V_j = \left(Z^2 - 1/4 \right)^{j+1}, \quad V = \sum_j b_j V_j, \quad b_j \in \mathbb{R}.$$

L'avantage des polynômes T_j, V_j devient évident si l'on constate que

$$(4.26) \quad \xi(m,n) = \left(Z^m, \left(Z^2 - 1/4 \right)^n \right)_{L^2(-1/2,1/2)}$$

satisfait à une relation de récurrence simple, à savoir

$$(4.27)_1 \quad \xi(m,n) = -n \frac{\xi(m,n-1)}{2(2n+m+1)} ;$$

$$(4.27)_2 \quad \xi(m,0) = \begin{cases} 0 & \text{si } m \text{ est impair,} \\ (m+1)^{-1} \left(\frac{1}{2} \right)^m & \text{pour } m \text{ pair.} \end{cases}$$

Les polynômes T_j et V_j donnés en (4.25) sont invariants sous l'action de la symétrie $Z \longrightarrow -Z$. Or le problème (4.19) n'est pas invariant sous l'action de cette symétrie, aussi est-il judicieux de poser

$$(4.28) \quad W_1 = \left(Z^2 - 1/4 \right)^2, \quad W_j = \left(Z^2 - 1/4 \right)^2 Z^{j-1}, \quad T_j = \left(Z^2 - 1/4 \right) Z^{j-1}.$$

Remarque 4.1.- L'omission des termes non symétriques, induit pour tous les cas de conditions aux limites étudiés ici une symétrie cachée qui peut se retrouver dans le problème non linéaire lors de la recherche de la forme normale.

En éliminant T dans (3.3), il vient

$$(4.29)_1 \quad \left(D^2 - a^2 \right)^3 V = -R a^2 \chi V \quad \text{dans }]0,1[;$$

$$(4.29)_2 \quad V(h) = D^2 V(h) = D^4 V(h) = 0 \quad \text{si la paroi en } h \text{ est libre;}$$

$$(4.29)_3 \quad V(h) = DV(h) = \left(D^2 - a^2 \right)^2 V(h) = 0 \quad \text{si la paroi en } h \text{ est rigide;}$$

$h = 0$ ou $h = 1$.

On constate aisément que le problème (4.29) est autoadjoint dans le cas de conditions aux limites libres. Il ne l'est pas dans les autres cas. Sa résolution dans le cas libre-libre ne pose aucun problème; en effet, on prend

$$(4.30) \quad V = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \sin(j\pi z), \quad a_j \in \mathbb{R}.$$

Dans les autres cas, on pose

$$(4.31) \quad V = \sum_j a_j z^j \Rightarrow D^n V = \sum_{j \geq n} \frac{j!}{(j-n)!} a_j z^{j-n}.$$

En introduisant (4.31) dans (4.29)₁, on obtient

$$(4.32) \quad \sum_{m \geq 0} \frac{(m+6)!}{m!} a_{m+6} z^m - 3 a^2 \sum_{m \geq 0} \frac{(m+4)!}{m!} a_{m+4} z^m +$$

$$+ 3 a^4 \sum_{m \geq 0} \frac{(m+2)!}{m!} a_{m+2} z^m - a^6 \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m + \tilde{\alpha}_1 \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m +$$

$$- \tilde{\alpha}_2 \sum_{m=1}^{\infty} a_{m-1} z^m = 0;$$

avec $\tilde{\alpha}_1 = R a^2 (1+\delta)$, $\tilde{\alpha}_2 = R a^2 \delta$.

Les coefficients a_j sont déterminés par les conditions aux limites (4.29)_{2,3} selon le cas considéré.

Posons maintenant

$$(4.33) \quad \Lambda = R a^2 (1+\delta), \quad \Omega = - R a^2 \delta,$$

l'équation (4.29)₁ s'écrit donc

$$(4.34) \quad \left(D^2 - a^2 \right)^3 V = - \left[\Lambda + \Omega z \right] V.$$

Or (4.34) a été étudiée dans [118] avec $\tilde{\Lambda} = \Lambda - a^6$. On peut donc poser

$$(4.35) \quad V = \sum_{n=0}^5 a_n F_n(z), \quad F_n(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j^{(n)} z^j, \quad n = 0, 1, \dots, 5.$$

Il est aisé de déduire que

$$(4.36)_1 \quad b_j^{(n)} = \frac{1}{j!} \left\{ 3 a^2 (j-2)! b_{j-2}^{(n)} - 3 a^4 (j-4)! b_{j-4}^{(n)} + \right. \\ \left. - \left(\tilde{\Lambda} b_{j-6}^{(n)} + \Omega b_{j-7}^{(n)} \right) (j-6)! \right\},$$

$$(4.36)_2 \quad b_{-1}^{(n)} = 0, \quad b_j^{(n)} = \delta_{jn} \quad (0 \leq n \leq 5).$$

Les coefficients a_n sont déterminés à partir des conditions aux limites. Par exemple, lorsque la paroi en $z = 0$ est rigide, on obtient

$$(4.37) \quad a_0 = a_1 = 0.$$

4.4. Solutions approchées dans le cas $\delta \ll 1$

Dans de nombreux problèmes rencontrés en géophysique ou dans l'industrie, le paramètre de profondeur $\delta \ll 1$; d'où l'intérêt de ce cas. Pour des raisons techniques, posons

$$(4.38) \quad Z = (1/2) - z \Rightarrow D_z^2 = D^2, \quad \varepsilon = \frac{\delta}{1+(\delta/2)}, \quad \mu = a^2 R \left(1 + \frac{\delta}{2}\right).$$

Substituant (4.38) dans (4.29)₁, il résulte (pour le cas rigide-rigide)

$$(4.39)_1 \quad \left(D^2 - a^2\right)^3 V = -\mu (1 + \varepsilon Z) V \quad \text{dans }]-1/2, 1/2[;$$

$$(4.39)_2 \quad V = DV = \left(D^2 - a^2\right) V = 0 \quad \text{en } Z = \mp \frac{1}{2};$$

Or, ici, par hypothèse $\delta \ll 1$ (i.e. $\varepsilon \ll 1$), nous pouvons donc chercher V et μ sous la forme d'un développement en série entière en ε . Ainsi, nous poserons

$$(4.40)_1 \quad V = V_{(0)} + \varepsilon V_{(1)} + \varepsilon^2 V_{(2)} + o(\varepsilon^2),$$

$$(4.40)_2 \quad \mu = \mu_0 + \varepsilon \mu_1 + \varepsilon^2 \mu_2 + o(\varepsilon^2).$$

En introduisant (4.40) dans (4.39), il est aisé d'obtenir (cf. [16, § 71, pp.310-312] ou [31, Chap.3, § 6])

$$(4.41) \quad \mu = \mu_0 \left\{ 1 - \varepsilon^2 \frac{\mu_0}{\mu_1 - \mu_0} \left[(0|Z|1).(1|Z|0) \right] \right\};$$

avec

$$(k|Z|j) = \int_{-1/2}^{1/2} W_k \cdot Z \cdot \vartheta_j \, dZ,$$

$$W_k = \left(D^2 - a^2 \right) \vartheta_k \quad \text{et} \quad \left(D^2 - a^2 \right) \vartheta_k = - a^2 R_k \vartheta_k ,$$

les ϑ_k satisfont à (4.39)₂ .

Un simple calcul permet d'obtenir la valeur suivante pour R_c

$$(4.42) \quad R_c = \frac{1707,9}{1 + \frac{\delta}{2}} \left[1 - 7,61 \cdot 10^{-3} \varepsilon^2 \right], \quad (\text{pour } a_c = 3,117).$$

Lorsque $\delta = 0$, l'équation (4.29)₁ s'écrit

$$(4.43) \quad \left(D^2 - a^2 \right)^3 V = - R a^2 V \quad \text{dans }]0,1[;$$

V satisfaisant aux conditions aux limites (4.29)_{2,3} .

Les solutions de (4.43) sont données par (cf. [16, Chap.2, § 15])

$$(4.44) \quad V(z) = \sum_{n=1}^3 A_n \operatorname{ch}(q_n z),$$

avec pour le

(i) cas rigide-rigide

$$a_c = 3,117; \quad R_c = 1707,762,$$

$$q_1 = i \, 3,974; \quad q_2 = 5,195 - i \, 2,126; \quad q_3 = q_2^* ,$$

$$A_1 = 1; \quad A_2 = - 3,076 \cdot 10^{-2} + i \, 5,194 \cdot 10^{-2} ; \quad A_3 = A_2^* ;$$

(ii) cas libre-libre

$$R_c = \frac{27}{4} \pi^4, \quad a_c = \frac{\pi}{\sqrt{2}}, \quad q_1 = i \pi, \quad A_1 = 1, \quad A_2 = A_3 = 0.$$

La solution (4.44) ne contient que les solutions paires dans le cas rigide-rigide, les solutions impaires dans ce cas sont données par

$$(4.45) \quad V = \sin(q_0 z) - 0,017 \operatorname{sh}(q_1 z) \cos(q_2 z) + 0,003 \operatorname{ch}(q_1 z) \sin(q_2 z),$$

avec $q_0 = 7,138 ; q_1 = 9,111 ; q_2 = 3,789.$

En comparant les valeurs de R_c obtenues respectivement pour les solutions paires et impaires, il s'avère que le premier R_c atteint correspond aux solutions paires (cf. [16, Chap.2, Table I, p.38]); dans ce cas, la solution impaire correspondante s'écrit

$$(4.46) \quad V = \sin(q_0 z) - 0,045 \operatorname{sh}(q_1 z) \cdot \cos(q_2 z) + 0,012 \operatorname{ch}(q_1 z) \cdot \sin(q_2 z),$$

avec $q_0 = 7,257; q_1 = 7,371; q_2 = 3,664.$

4.5. Convergence de la méthode de Galerkin

Tout au long du § 4, nous avons donné quelques solutions approchées permettant la détermination du nombre de Rayleigh critique R_c . La question de la convergence des R_c (calculés à partir des solutions approchées) vers les R_c exacts s'impose. Pour répondre à cette question, rappelons le

Théorème 4.1. [94, Sec.52] - *On considère l'équation*

$$(4.47) \quad A w - \lambda K w = 0;$$

où λ est un paramètre, A et K sont des opérateurs linéaires de domaines respectifs $D(A)$ et $D(K)$ denses dans un espace de Hilbert H (le produit scalaire dans H est noté par (\cdot, \cdot)). En outre, on suppose que $D(A) \subset D(K)$. Si

(i) L'opérateur A est défini positif (i.e. $(Au, u) > 0$, $\forall u \neq 0$) et autoadjoint,

et si

(ii) l'opérateur $A^{-1}K$ peut être prolongé en un opérateur compact dans $H_0 = D(A^{1/2})$.

Alors

la valeur approchée de λ déterminée par la technique de Galerkin converge vers la valeur exacte de λ .

Par retour au système (3.3), il est aisé de le réécrire sous la forme (4.47) avec

$$A = \text{diag} \left(\left(D^2 - a^2 \right)^2, - \left(D^2 - a^2 \right) \right),$$

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ -a\chi & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et } w = \begin{pmatrix} V \\ T \end{pmatrix}.$$

On vérifie ensuite sans peine que les hypothèses du théorème 4.1. sont satisfaites (cf. [25]), d'où la conclusion. \square

Ayant complété dans ce chapitre l'étude de la stabilité linéaire réalisée dans [31] et [32], il nous reste à effectuer une analyse non linéaire des équations de la convection profonde. Ce problème fera l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE III

<p style="text-align: center;">ANALYSE NON LINEAIRE :</p> <p style="text-align: center;">ETUDE DE QUELQUES SYSTEMES DYNAMIQUES</p>
--

Au Chapitre 2, nous avons mis en évidence et caractérisé les points de bifurcation du problème linéaire associé aux équations de la convection profonde. Dans ce chapitre, notre intérêt se portera sur l'étude de la stabilité non linéaire de certains systèmes dynamiques obtenus à partir des équations de la convection profonde bidimensionnelle instationnaires. Au § 1, en effectuant une troncature très sévère, on obtient le système de Lorenz "profond", dans le cas de conditions aux limites libre-libre; les bifurcations ainsi que l'existence d'un attracteur pour ce système sont également analysées. Ensuite, au § 2, nous obtenons un système dynamique à six modes analogue au système de Howard & Krishnamurti; sous les hypothèses de cellules longues et du nombre de Prandtl petit devant 1, ce système est ramené à un système canonique à trois équations identique au système étudié par Hughes & Proctor.

1. Système de Lorenz : Cas Libre-Libre

1.1. Obtention du système de Lorenz

Pour simplifier, supposons que des rouleaux convectifs parallèles prennent naissance au delà de $R = R_c$. Il en résulte que le vecteur vitesse est perpendiculaire à l'axe des rouleaux. Cette hypothèse introduit une invariance du système par translation le long de la direction de l'axe des

rouleaux. Ceci nous permet de nous placer dans le cadre des équations de la convection profonde bidimensionnelle. Considérons alors le système (4.37)-(4.38)_{1,3} du Chapitre 1

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \right] \Delta \psi + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \Delta^2 \psi \quad \text{dans } \Omega; \\
 (S) \quad & \chi(z) \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \right] \vartheta + R \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\} = \Delta \vartheta + \\
 & + \delta \left[4 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)^2 \right] \quad \text{dans } \Omega; \\
 & \psi = 0, \vartheta = 0, \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{sur } z = 0, z = 1.
 \end{aligned}$$

Les conditions de périodicité dans la direction horizontale suggèrent de poser

$$(1.1)_1 \quad \phi = \frac{\psi}{\sigma} = \sum_{i,j} A_{ij}(t) \sin(j\pi z) \sin(iox);$$

$$(1.1)_2 \quad T = \frac{\vartheta}{R} = \sum_{i,j} B_{ij}(t) \sin(j\pi z) \cos(iox);$$

avec $t = \sigma \tau$, q étant le nombre d'onde horizontal.

L'introduction de ces relations dans le système (S), suivie de la technique de Galerkin, nous permet d'obtenir un système différentiel infini. Pour pouvoir l'étudier, on est obligé de le tronquer (*le choix des différentes troncatures a été étudié dans [31]*). On prendra ici

$$(1.2)_1 \quad \phi = A_{11}(t) \sin(\pi z) \sin(qx),$$

$$(1.2)_2 \quad T = B_{11}(t) \sin(\pi z) \cos(qx) + B_{02}(t) \sin(2\pi z).$$

On obtient alors le système de Lorenz (cf. [132, p.366])

$$(1.3)_1 \quad \sigma \frac{d X}{d \tau} = -\sigma X - R Y,$$

$$(1.3)_2 \quad \sigma \frac{d Y}{d \tau} = -\mu Y - a \sigma X - \sigma X Z,$$

$$(1.3)_3 \quad \sigma \frac{d Z}{d \tau} = -b \mu Z + \sigma X Y,$$

avec $\tau = (\pi^2 + q^2) t$, $X = \frac{\pi q}{\sqrt{2} (\pi^2 + q^2)} A_{11}$,

$$Y = \frac{\pi q^2}{\sqrt{2} (\pi^2 + q^2)} B_{11}, \quad Z = \frac{\pi q^2}{(\pi^2 + q^2)} B_{02},$$

$$a = \frac{q^2}{(\pi^2 + q^2)^3}, \quad b = \frac{4\pi^2}{(\pi^2 + q^2)}, \quad \mu = \frac{1}{1 + \frac{\delta}{2}}.$$

1.2. Quelques préliminaires théoriques [41]/[111]

Considérons pour plus de généralité le système d'évolution suivant

$$(1.4) \quad \dot{u} = X(\lambda, u),$$

avec $\lambda \in \Lambda = \mathbb{R}^1$ un paramètre réel, $u \in \mathcal{B} = \mathbb{R}^n$ et $X : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs de classe C^∞ (dans le cas où X est un opérateur aux dérivées partielles, \mathcal{B} est un espace de Banach adéquat, on exigera également que la solution u soit assez régulière).

Soit $u = u_0$, un point fixe de (1.4), i.e.

$$(1.5)_1 \quad X(\lambda, u_0) = 0, \quad \forall \lambda \in \Lambda,$$

et soit $L(\lambda)$ l'opérateur linéaire défini par

$$(1.5)_2 \quad L(\lambda) = D_u X(\lambda, u_0).$$

On suppose que, pour $\lambda < \lambda_0$, le spectre de $L(\lambda)$ est situé à gauche du demi-plan complexe; tandis que, pour $\lambda = \lambda_0$, un ensemble fini de valeurs propres $s_j(\lambda)$, $j = 1, \dots, k$, traverse l'axe imaginaire avec

$$(1.6) \quad \operatorname{Re}(s_j(\lambda_0)) = 0, \quad \left. \frac{d \operatorname{Re}(s_j(\lambda))}{d \lambda} \right|_{\lambda = \lambda_0} > 0, \quad j = 1, \dots, k;$$

le reste du spectre étant à une distance finie de l'axe imaginaire. Ces valeurs propres critiques sont supposées simples ou ayant les mêmes multiplicités algébriques et géométriques. Dans le cas d'une équation aux dérivées partielles, on exige que les valeurs propres critiques soient en nombre fini et l'opérateur $L(\lambda_0)$ est supposé de Fredholm d'indice 0.

Considérons maintenant le système

$$(1.7) \quad \dot{u} = X(\lambda, u), \quad \dot{\lambda} = 0.$$

Appliquons le théorème de la variété centrale [15]/[18]/[52]/[128] au point $\lambda = \lambda_0$, alors on en déduit l'existence d'une variété linéaire $E = \operatorname{Crit}(\mathcal{L}_0)$ ($\operatorname{Crit}(\mathcal{L}_0)$ étant la variété correspondant aux valeurs propres de \mathcal{L}_0 ayant une partie réelle nulle et $\mathcal{L}_0 = L(\lambda_0) \otimes 0$) et une variété centrale locale W , tangente à E en (λ_0, u_0) telle que : les solutions de (1.4) au

voisinage de (λ_0, u_0) soient dans W . Il est évident que $E = \Lambda \otimes \text{Crit}(L(\lambda_0)) \cong \Lambda \otimes V$. L'espace de Banach \mathcal{B} peut alors être décomposé comme suit $\mathcal{B} = V \otimes V^\perp$. La variété W peut être écrite localement comme le graphe d'une application

$$h : \Lambda \otimes V \longrightarrow V^\perp$$

$$W = \left\{ (\lambda, v, w) \in \Lambda \otimes V \otimes V^\perp \mid w = h(\lambda, v) \right\}.$$

Puisque la variété centrale W est une variété invariante sous l'action du flot (ou coulée), on peut considérer la restriction de (1.7) à W ; en outre, W est localement isomorphe à $\Lambda \otimes V$, on peut alors projeter cette restriction sur $E = \Lambda \otimes V$ et on écrit

$$(1.8)_1 \quad \dot{v} = F(\lambda, v);$$

$$(1.8)_2 \quad \dot{\lambda} = 0.$$

L'équation $(1.8)_1$ est l'équation de bifurcation de (1.4).

1.3. Formes normales du système (1.3)

Par retour au système (1.3), il est clair que le point $F_0 = (0,0,0)$ est un point fixe du système (1.3) et que le linéarisé du champ de vecteurs au point F_0 est

$$(1.9) \quad L(R) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{R}{\sigma} & 0 \\ -a & -\frac{\mu}{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{b\mu}{\sigma} \end{pmatrix}.$$

Il est immédiat de constater que l'axe Z est une variété stable pour tout

$R > 0$, on peut donc le négliger et s'intéresser à la sous-matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & -\frac{R}{\sigma} \\ -a & -\frac{\mu}{\sigma} \end{pmatrix} = \tilde{A}. \text{ Le polynôme caractéristique de } \tilde{A} \text{ s'écrit}$$

$$(1.10) \quad P(s) = s^2 + s \left(1 + \frac{\mu}{\sigma} \right) + \frac{\mu}{\sigma} - \frac{a R}{\sigma} = 0.$$

Notons que $s = 0$ est une solution de (1.10) si $\mu = a R$. Il est également aisé de constater que le système (1.3) est invariant sous l'action de la symétrie $S : [X \longrightarrow -X, Y \longrightarrow -Y, Z \longrightarrow Z]$. Au point $R = R_c$, se produit une bifurcation fourche (*pitchfork*) et la solution F_0 bifurque. En utilisant la technique de la variété centrale et de la forme normale (cf. par exemple [122]), il a été possible d'obtenir l'équation d'amplitude suivante (*pour les détails des calculs cf. [132, pp. 592-599]*)

$$(1.11) \quad \frac{d A}{d \tau} = \frac{a}{\sigma \left(1 + \frac{\mu}{\sigma} \right)} \left(R - \frac{\mu}{a} \right) A - \frac{\mu}{a^2 b \sigma \left(1 + \frac{\mu}{\sigma} \right)} A^3 + O(A^5).$$

Ici A est une amplitude. Le coefficient devant A^3 étant négatif, on en déduit que la bifurcation est surcritique. Le diagramme de bifurcation correspondant à (1.11) est

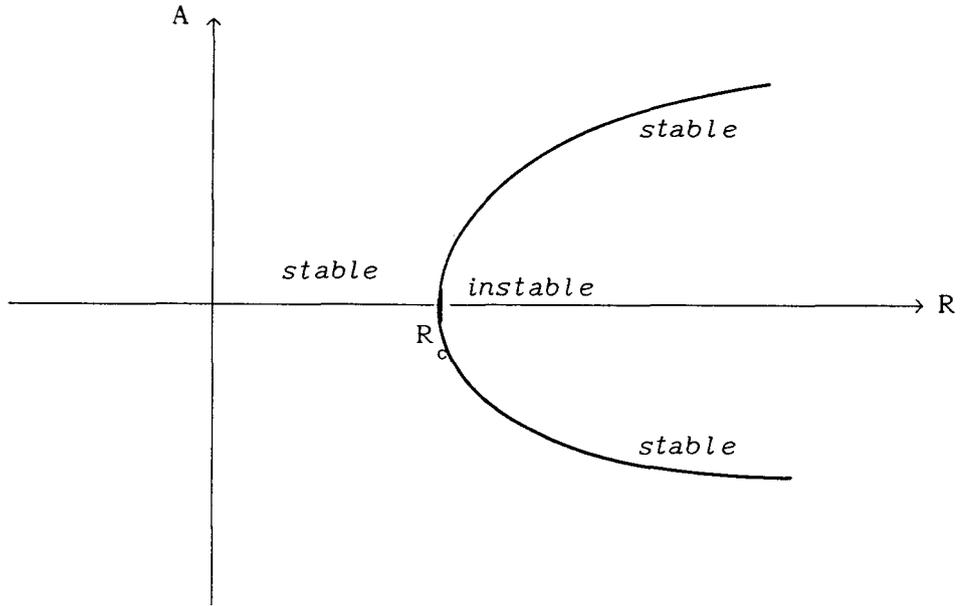


fig.1 : diagramme de bifurcation au voisinage de R_c .

Remarquons que si $\sigma < 0$ (ce cas n'a aucune réalité physique en mécanique des fluides, mais peut néanmoins se rencontrer en physique des lasers [68, p.277], σ ne désignant plus alors le nombre de Prandtl), et $\frac{\mu}{\sigma} = -1$, $\frac{a R}{\sigma} = -1$, alors nous obtenons un point de bifurcation de codimension 2 (car $s^2 = 0$); ce cas est très intéressant mathématiquement. Auquel cas, et sans entrer dans les détails, nous obtenons le développement suivant de la variété centrale (cf. [52, p.131])

$$(1.12)_1 \quad w^{(2)} = - \frac{1}{a b} u^2 + \frac{1}{a b^2} (b + 2) u.v - \frac{1}{b^3 a} (2 + b) v^2 + \text{h.o.t.};$$

$$X = \frac{R}{\sigma} u, \quad Y = v - u, \quad w = Z,$$

et le système essentiel

$$(1.12)_2 \quad \dot{u} = -v ;$$

$$(1.12)_3 \quad \dot{v} = - \left(\frac{a R}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma} \right) u - \left(\frac{\mu}{\sigma} + 1 \right) v + \frac{R}{\sigma a b} u^3 + \\ - \frac{R}{\sigma} \frac{(b+2)}{a b^2} u^2 v + \frac{R}{\sigma} \frac{(b+2)}{a b^3} u v^2 + O(\zeta^4);$$

$$\zeta = (u, v, 1 + \frac{a R}{\sigma}, \frac{\mu}{\sigma} + 1), \quad \dot{x} = \frac{d x}{d \tau} .$$

Le théorème de la forme normale appliqué au voisinage de $\zeta = 0$ nous permet de négliger le terme $u v^2$ (cf. [52, p.362], ce qui conduit à la forme normale suivante

$$(1.12)_4 \quad x' = y, \quad x' = \frac{d x}{d t}, \quad \frac{d}{d \tau} = - \frac{b}{(b+2)} \frac{d}{d t},$$

$$(1.12)_5 \quad y' = \mu_1 x + \mu_2 y + x^3 - x^2 y,$$

$$\mu_1 = \left(\frac{a R}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma} \right) \frac{(b+2)^2}{b^2}, \quad \mu_2 = \left(\frac{\mu}{\sigma} + 1 \right) \frac{(b+2)}{b};$$

$$u = \frac{b}{(b+2)} \gamma x, \quad v = \frac{b^2}{(b+2)^2} \gamma y, \quad \gamma = \left(- \frac{\sigma a b}{R} \right)^{1/2}.$$

Le système (1.12)_{4,5} a fait l'objet de nombreuses études (cf. par exemple [3]-[52]). Notons enfin que l'on peut analytiquement montrer l'existence du chaos dans le système (1.3) lorsque $\sigma < 0$ (cf. [68]). *Dans toute la suite, σ*

sera supposé strictement positif.

1.4. Etude de stabilité par les fonctions de Lyapunov

Un certain nombre de propriétés peut être déduit à partir des fonctions de Lyapunov. Pour la construction de ces fonctions (cf. par exemple [78]). Commençons par constater que (1.10) admet une solution négative et une autre donnée par

$$(1.13) \quad s_1 = \frac{-\left(1 + \frac{\mu}{\sigma}\right) + \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \Delta = \left(1 - \frac{\mu}{\sigma}\right)^2 + \frac{4 a R}{\sigma} > 0.$$

Lorsque $R \longrightarrow \infty$, $s_1 > 0$. La fonction de Lyapunov associée au système (1.3) s'écrit alors

$$(1.14) \quad V(\vec{x}) = X^2 - Y^2 - Z^2$$

et l'origine est instable. Pour montrer comme dans [117] qu'il existe un ellipsoïde E dans \mathbb{R}^3 dans lequel toutes les trajectoires finissent par entrer sans en sortir aux temps ultérieurs, la fonction de Lyapunov précédente n'est pas appropriée, aussi procéderons-nous au changement de variable suivant

$$(1.15) \quad \frac{d}{d\tau} = \frac{1}{\sigma} \frac{d}{dT}, \quad X = \frac{1}{\sigma} x, \quad Y = -\frac{1}{R} y, \quad Z = -\frac{1}{R} z.$$

En insérant les relations (1.15) dans (1.3) on obtient

$$(1.16)_1 \quad \frac{d x}{d T} = \sigma (y - x),$$

$$(1.16)_2 \quad \frac{d y}{d T} = r x - x z - \mu y, \quad r = a R,$$

$$(1.16)_3 \quad \frac{d z}{d T} = x y - b \mu z.$$

Cherchons les fonctions de Lyapunov pour le système (1.16). A cet effet, posons

$$(1.17)_1 \quad V = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma (z - \omega)^2; \quad \text{d'où}$$

$$(1.17)_2 \quad \frac{1}{2} \frac{d V}{d T} = -\alpha \sigma x^2 - \beta y^2 \mu - \gamma b \mu z^2 + x y (\sigma \alpha + \beta r + \gamma \omega) + x y z (\gamma - \beta) + \gamma \omega b \mu z.$$

Or, $\frac{d V}{d T}$ doit être négative ou nulle, d'où on doit prendre

$$(1.18) \quad \gamma = \beta, \quad \alpha \sigma + \beta r - \gamma \omega = 0.$$

Si on pose

$$\omega = 2 r, \quad \alpha = r \Rightarrow \beta = \gamma = \sigma,$$

alors V s'écrit

$$(1.19)_1 \quad V = r x^2 + \sigma y^2 + \sigma (z - 2r)^2.$$

notons que $V(\vec{0}) = 0$, $V > 0$ pour $\vec{x} \neq \vec{0}$ et

$$(1.19)_2 \quad \frac{1}{2} \frac{dV}{dT} = -\sigma \left\{ r x^2 + \mu y^2 + b \mu z^2 - 2 r b \mu z \right\}.$$

On montre sans peine comme dans [117, Appendix C] que toutes les trajectoires finissent par entrer dans un ellipsoïde E tel que $V \leq c + \varepsilon$ (avec $c = \max_D V$, D étant la région où $\frac{dV}{dT} \geq 0$, $\varepsilon \geq 0$ est petit) et que toutes les trajectoires se situent dans la région $z \geq 0$ et sont attirées par un ensemble borné de volume 0 (*les détails des démonstrations étant identiques à [117] ont été volontairement omis*).

1.5. Etude de la bifurcation de Hopf

Lorsque $a R - \mu > 0$, le système (1.3) admet d'autres points fixes, à savoir

$$(1.20) \quad X_e = -\frac{R}{\sigma} Y_e, \quad Z_e = -\frac{R}{b\mu} Y_e^2, \quad Y_e = \frac{\varepsilon_1}{R} \left((a R - \mu) b \mu \right)^{1/2},$$

$\varepsilon_1 = \mp 1$. Ces points seront notés C_1 et C_{-1} .

La symétrie $S : [X \longrightarrow -X, Y \longrightarrow -Y, Z \longrightarrow Z]$ laissant invariant le champ de vecteurs, nous allons prendre $\varepsilon_1 = 1$. Le linéarisé du champ de vecteurs au point $\vec{x}_e = (X_e, Y_e, Z_e)$ s'écrit alors

$$(1.21) \quad L(R) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{R}{\sigma} & 0 \\ -\frac{\mu}{R} & -\frac{\mu}{\sigma} & \frac{1}{\sigma} \sqrt{\zeta} \\ \frac{1}{R} \sqrt{\zeta} & -\frac{1}{\sigma} \sqrt{\zeta} & -\frac{b\mu}{\sigma} \end{pmatrix} ;$$

$$\zeta = b \mu (a R - \mu).$$

Le polynôme caractéristique de (1.21) est

$$(1.22) \quad P(s) = s^3 + s^2 \left(1 + \frac{\mu}{\sigma} + \frac{b \mu}{\sigma} \right) + s \frac{\mu}{\sigma} b \left(1 + \frac{a R}{\sigma} \right) + 2 b \frac{\mu}{\sigma^2} (a R - \mu) = 0.$$

Factorisons $P(s)$ sous la forme



$$(1.23) \quad P(s) = (s - \alpha) (s - \bar{\alpha}) (s - \beta) = 0, \quad \alpha = \alpha_1 + i \alpha_2,$$

il en résulte que

$$(1.24)_1 \quad 1 + \frac{\mu}{\sigma} + b \frac{\mu}{\sigma} = - (2 \alpha_1 + \beta),$$

$$(1.24)_2 \quad \mu \frac{b}{\sigma} \left(1 + a \frac{R}{\sigma} \right) = |\alpha|^2 + 2 \alpha_1 \beta,$$

$$(1.24)_3 \quad 2 b \frac{\mu}{\sigma^2} (a R - \mu) = - |\alpha|^2 \beta.$$

L'existence d'une valeur propre de la forme $\mp i \omega$, $\omega \in \mathbb{R}$, i.e. $\alpha_1 = 0$,

est garantie si

$$(1.25) \quad R_0 = -\frac{\sigma}{a} \frac{\left(1 + 3 \frac{\mu}{\sigma} + b \frac{\mu}{\sigma}\right)}{\left(-1 + \frac{\mu}{\sigma} + b \frac{\mu}{\sigma}\right)} \rightarrow$$

$$a R_0 - \mu > 0 \quad \text{pour} \quad -1 + \frac{\mu}{\sigma} + b \frac{\mu}{\sigma} < 0.$$

De (1.24), on déduit que

$$(1.26)_1 \quad \beta = -\left(1 + \frac{\mu}{\sigma} + b \frac{\mu}{\sigma} + 2 \alpha_1\right) \quad \text{et}$$

$$(1.26)_2 \quad \mu \frac{b}{\sigma} \left(1 + \frac{a R}{\sigma}\right) \beta = -2 b \frac{\mu}{\sigma^2} (a R - \mu) + 2 \alpha_1 \beta^2.$$

En dérivant ces deux relations par rapport à R au point $R = R_0$, compte tenu de (1.25), on obtient

$$(1.27) \quad \left. \frac{d \alpha_1}{d R} \right|_{R = R_0} = - \frac{\left[-1 + \frac{\mu}{\sigma} + b \frac{\mu}{\sigma}\right] \mu b a}{2 \left(\mu \frac{b}{\sigma} \left(1 + a \frac{R_0}{\sigma}\right) + \left(1 + \frac{\mu}{\sigma} + b \frac{\mu}{\sigma}\right)^2\right) \sigma^2} > 0$$

D'où la valeur propre α traverse l'axe imaginaire pur avec une vitesse non nulle, ainsi une bifurcation de Hopf se produit au point $R = R_0$. Un calcul simple permet de donner la valeur de α_2

$$(1.28) \quad \alpha_2 = \left(b \frac{\mu}{\sigma} \frac{2 \left(1 + \frac{\mu}{\sigma} \right)}{\left(1 - \frac{\mu}{\sigma} - b \frac{\mu}{\sigma} \right)} \right)^{1/2}.$$

1.6. Attracteur de Lorenz profond

L'étude des attracteurs a suscité un grand intérêt chez les théoriciens, tant ces objets sont géométriquement complexes. Beaucoup d'auteurs s'accordent pour définir couramment les attracteurs comme suit :

Soient X un champ de vecteurs, $\left\{ \phi_t \right\}_{t \in \mathbb{R}}$ le flot (ou coulée) associé à X . Un ensemble compact A invariant sous l'action du flot (i.e $\phi_t(A) = A$, $\forall t$) est un attracteur, s'il existe un voisinage V de A tel que

$$\bigcap_{t \geq 0} \phi_t(V) = A.$$

Ensuite, au gré des auteurs, d'autres propriétés restrictives sont rajoutées à la définition. La situation est plus confuse en ce qui concerne la définition des attracteurs étranges (cf. [6]/[43]/[95]/[109]). Dans ce sous paragraphe, nous adoptons principalement la théorie développée dans [19], car elle permet d'obtenir des résultats intéressants pour les applications.

Posons $z = r + \sigma - Z$ dans (1.16), il vient

$$(1.29)_1 \quad \frac{d x}{d t} = \sigma(y - x), \quad t = T,$$

$$(1.29)_2 \quad \frac{d y}{d t} = -\sigma x + x Z - \mu y,$$

$$(1.29)_3 \quad \frac{d Z}{d t} = -x y + b \mu (r + \sigma) - b \mu Z.$$

Soit $H = \mathbb{R}^3$ et $u = (x, y, Z)^{tr}$ (tr ~ transposé); il est aisé d'obtenir, à partir de (1.29), la relation

$$(1.30) \quad \frac{d}{2 dt} |u|^2 + \sigma x^2 + \mu y^2 + b \mu Z^2 = b \mu (r + \sigma) Z,$$

$$\text{avec } |u|^2 = x^2 + y^2 + Z^2.$$

Tout au long de cette étude, on supposera que $b\mu - 1 > 0$; par application de l'inégalité de Young, nous avons alors

$$b \mu (r + \sigma) Z \leq (b \mu - 1) Z^2 + \frac{(b\mu)^2}{4(b\mu - 1)} (r + \sigma)^2.$$

D'où

$$(1.31) \quad \frac{d}{dt} |u|^2 + 2L |u|^2 \leq \frac{(b \mu)^2}{2(b\mu - 1)} (r + \sigma)^2,$$

$$L = \min(\sigma, \mu, 1) = \min(\sigma, \mu).$$

De (1.31), nous déduisons que

$$(1.32)_1 \quad |u(t)|^2 \leq |u(0)|^2 \exp(-2Lt) + \frac{(b \mu)^2 (r + \sigma)^2}{4L (b\mu - 1)} \left(1 - \exp(-2Lt)\right);$$

d'où

$$(1.32)_2 \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} |u(t)| \leq \frac{b \mu (r + \sigma)}{2 \sqrt{L(b\mu - 1)}} = \rho_0 .$$

Par conséquent, il existe un ensemble absorbant; en l'occurrence, toute boule $B(0, \rho)$ centrée en 0 de rayon $\rho > \rho_0$. En effet, si \mathcal{B}_0 est un ensemble borné de H , $\mathcal{B}_0 \subset B(0, R)$, alors $S(t) \mathcal{B}_0 \subset B(0, \rho)$ pour $t > t(\mathcal{B}_0)$, avec $t(\mathcal{B}_0) =$

$$= \frac{1}{2L} \ln \left(\frac{R^2}{\rho^2 - \rho_0^2} \right);$$

$\left\{ S(t) \right\}_{t \geq 0}$ étant le semigroupe défini par :

$$S(t) u_0 \longrightarrow u(t) \in H,$$

$u_0 = (x_0, y_0, Z_0) \in H$ désignant la condition initiale associée à (1.29).

D'après un théorème de [19], on déduit l'existence d'un attracteur maximal borné inclus dans $B(0, \rho_0)$.

De l'analyse effectuée aux § 1.3-1.5, nous concluons

(i) Pour $R < R_c$, l'origine est un point fixe stable. Lorsque $t \rightarrow \infty$, toutes les orbites tendent vers 0. L'attracteur maximal se réduit à ce point.

(ii) Lorsque $R_c < R < R_0$, l'origine est instable. Par contre, les solutions non triviales C_1 et C_{-1} sont stables et les orbites convergent vers l'un de ces points. L'attracteur maximal se compose de C_1 , C_{-1} et de la variété instable associée à l'origine.

(iii) Lorsque $R > R_0$, les trois points fixes 0, C_1 et C_{-1} sont instables et les trajectoires sont attirées par un attracteur étrange (cf. les travaux numériques réalisés dans [31, Chap.4]-[33]).

Caractérisons l'attracteur maximal du système de Lorenz profond; à cet effet, on considère le linéarisé du champ de vecteurs défini par (1.29) et les problèmes aux valeurs initiales qui lui sont associés, soit

$$(1.33) \quad \vec{U}'_j = \mathcal{A}(\vec{u}) \vec{U}_j, \quad \vec{U}_j(0) = \xi_j \in H = \mathbb{R}^3, \quad j = 1, 2, 3;$$

avec

$$\mathcal{A}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ -\sigma + Z & -\mu & x \\ -y & -x & -b\mu \end{pmatrix}.$$

De toute évidence $\text{Tr}(\mathcal{A}(\vec{u})) = -\sigma - \mu - b\mu < 0$, on en déduit que le système (1.19) est dissipatif. Afin de déterminer la dimension de l'attracteur, on s'intéresse à l'évolution des éléments de volume $\vec{V} = \vec{U}_1 \wedge \vec{U}_2$ et $\vec{U}_1 \wedge \vec{U}_2 \wedge \vec{U}_3$. A cet effet, introduisons $Q_2(\vec{U}_1, \vec{U}_2)$ le projecteur orthogonal dans \mathbb{R}^3 sur le sous espace engendré par $\vec{U}_1(t)$ et $\vec{U}_2(t)$. Un calcul analogue à celui effectué dans [20] montre d'une part que $\exists t_1 = t_1(\varepsilon)$, ε étant arbitrairement petit, tel que pour t grand, $t \geq t_1(\varepsilon)$

$$(1.34)_1 \quad \text{Tr}(\mathcal{A}(\vec{u})Q_2) < -\sigma - \mu - b\mu + m + \frac{1}{2} \rho_0, \quad \text{d'où}$$

$$(1.34)_2 \quad |\vec{U}_1(t) \wedge \vec{U}_2(t)| \leq |\xi_1 \wedge \xi_2| \exp\left((k_2 + \varepsilon)t\right),$$

avec $|\cdot| = \|\cdot\|_{H \wedge H}$, $m = \max(\sigma, \mu, b\mu)$ et

$k_2 = -\sigma - \mu - b\mu + m + \frac{1}{2}\rho_0$; et d'autre part, que

$$(1.34)_3 \quad |\vec{U}_1(t) \wedge \vec{U}_2(t) \wedge \vec{U}_3(t)| = |\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_3| \exp\left(-(\sigma + \mu + b\mu)t\right);$$

ici, $|\cdot| = \|\cdot\|_{H \wedge H \wedge H}$.

On obtient alors

$$\omega_3 = \sup_{\substack{\xi_i \in H \\ |\xi_i| \leq 1 \\ i = 1, 2, 3}} |\vec{U}_1 \wedge \vec{U}_2 \wedge \vec{U}_3| \leq \exp\left[-(\sigma + \mu + b\mu)t\right],$$

$$\bar{\omega}_3(t) = \sup_{u_0 \in X} \omega_3 = \exp\left[-(\sigma + \mu + b\mu)t\right]$$

($H \supset X$ étant un ensemble fonctionnel invariant, i.e. $S(t)X = X, \forall t$), donc :

$$\Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\bar{\omega}_3(t)\right]^{1/t} = \exp\left[-(\sigma + \mu + b\mu)\right],$$

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = -(\sigma + \mu + b\mu).$$

Où, les Λ_j et $\mu_j = \log(\Lambda_j)$ sont respectivement les nombres de Lyapunov uniformes et les exposants de Lyapunov uniformes de l'attracteur de Lorenz profond (cf. [19] pour leur définition).

Lorsque $t \rightarrow \infty$, on obtient également

$$\Lambda_1 \Lambda_2 \leq \exp(k_2) \quad \text{et} \quad \mu_1 + \mu_2 \leq k_2 .$$

Après un simple calcul technique (cf. [20]) on en déduit que la dimension de Hausdorff de l'attracteur de Lorenz profond $d_{H-L}(\mathcal{A})$ satisfait

$$(1.35)_1 \quad d_{H-L}(\mathcal{A}) \leq 2 + \frac{k_2 + \varepsilon}{k_2 + \sigma + \mu + b\mu + \varepsilon} .$$

Puisque $\varepsilon > 0$ est arbitrairement petit, il vient

$$(1.35)_2 \quad d_{H-L}(\mathcal{A}) \leq 2 + \frac{k_2}{k_2 + \sigma + \mu + b\mu} .$$

Nous avons montré le

Théorème 3.1.- *Sous les hypothèses $b\mu > 1$, $\sigma > 0$, $r > 0$, la dimension de Hausdorff de l'attracteur de Lorenz est borné par*

$$d_{H-L}(\mathcal{A}) \leq 2 + \frac{k_2}{k_2 + \sigma + \mu + b\mu} .$$

1.7. Compléments

Pour des raisons pratiques, posons

$$(1.36) \quad x = \mu X, \quad y = \mu Y, \quad z = \mu Z, \quad \frac{d}{d T} = \mu \frac{d}{d t}.$$

En insérant les relations (1.36) dans (1.16), il vient le système suivant

$$(1.37)_1 \quad \frac{d X}{d t} = \frac{\sigma}{\mu} (Y - X), \quad \sigma_1 = \frac{\sigma}{\mu},$$

$$(1.37)_2 \quad \frac{d Y}{d t} = \frac{r}{\mu} X - X Z - Y, \quad r_1 = \frac{r}{\mu}$$

$$(1.37)_3 \quad \frac{d Z}{d t} = X Y - b Z.$$

Ce dernier système est identique au système classique de Lorenz. En effectuant des calculs identiques à ceux réalisés dans [91, Chap.4, p.144-146] pour $\sigma_1 = 10$, $b = \frac{8}{3}$, il est immédiat que la bifurcation de Hopf qui se produit lorsque R passe par R_0 est sous critique, i.e. les orbites sont instables. Avant de clore cette étude du système de Lorenz profond, remarquons que tout ce qui a été dit (ou sera dit) sur le système de Lorenz est (et sera) valable pour le système de Lorenz profond.

2.Système de Howard-Krishnamurti profond : cas libre-libre

Commençons par obtenir un système dynamique à six amplitudes analogue à celui établi dans [58]. Pour ramener les parois en 0 et π , posons

$$(2.1) \quad \bar{x} = \pi x, \quad \bar{z} = \pi z, \quad \pi^2 \tau = t, \quad \vartheta = \pi^3 T.$$

Avec ces nouvelles variables, le système (S) s'écrit après suppression des barres

$$(2.2)_1 \quad \frac{1}{\sigma} \left[\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + J(\Delta \psi, \psi) \right] + \frac{\partial T}{\partial x} = \Delta^2 \psi ;$$

$$(2.2)_2 \quad \tilde{\chi}(z) \left\{ \left[\frac{\partial T}{\partial t} + J(T, \psi) \right] + r \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\} = \Delta T + \\ + \tilde{\delta} \left[4 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)^2 \right];$$

$$(2.2)_3 \quad \psi = 0 , \quad \partial_z^2 \psi = 0 , \quad T = 0 \quad \text{sur } z = 0 , \quad z = \pi ;$$

$$r = \frac{R}{\pi^4} , \quad \tilde{\delta} = \frac{\delta}{\pi} , \quad \tilde{\chi}(\bar{z}) = 1 + \tilde{\delta} (\pi - \bar{z}) ,$$

$$J(f, g) = \partial_x f \cdot \partial_z g - \partial_z f \cdot \partial_x g , \quad \Delta = \partial_x^2 + \partial_z^2 , \quad (x, z) \equiv (\bar{x}, \bar{z}).$$

Posons comme dans [58]

$$(2.3)_1 \quad \psi = A(t) \sin(\alpha x) \sin(z) + B(t) \cos(\alpha x) \sin(2z) + C(t) \sin(z);$$

$$(2.3)_2 \quad T = D(t) \cos(\alpha x) \sin(z) + E(t) \sin(\alpha x) \sin(2z) + F(t) \sin(2z).$$

En insérant (2.3) dans (2.2), après utilisation de la technique de Galerkin, on obtient le système suivant

$$(2.4)_1 \quad \frac{d A}{d t} + \sigma D \frac{\alpha}{(1 + \alpha^2)} - \frac{\alpha}{2} B C \frac{(\alpha^2 + 3)}{(1 + \alpha^2)} + \sigma A (1 + \alpha^2) = 0;$$

$$(2.4)_2 \quad \frac{d B}{d t} + \sigma (\alpha^2 + 4) B - \sigma E \frac{\alpha}{(\alpha^2 + 4)} + A C \frac{\alpha^3}{2 (4 + \alpha^2)} = 0;$$

$$(2.4)_3 \quad \frac{d C}{d t} + \sigma C + \frac{3}{4} \alpha A B = 0;$$

$$(2.4)_4 \quad \frac{d D}{d t} + r \alpha A + \frac{\alpha}{2} C E + \alpha A F + D \frac{(1 + \alpha^2)}{\lambda_1} = 0;$$

$$(2.4)_5 \quad \frac{d E}{d t} - r \alpha B - \frac{\alpha}{2} C D + E \frac{(4 + \alpha^2)}{\lambda_1} = 0;$$

$$(2.4)_6 \quad \frac{d F}{d t} - \frac{\alpha}{2} A D + F \frac{4}{\lambda_1} = 0; \quad \lambda_1 = 1 + \frac{\delta}{2} .$$

Il est aisé de constater que $(A,B,C,D,E,F) = 0$ est un point fixe de (2.4), stable lorsque

$$r < r_c = \frac{(1 + \alpha^2)^3}{\alpha^2 \lambda_1} .$$

Pour simplifier le système (2.4), plaçons-nous dans le cas

$$(2.5)_1 \quad \alpha^2 \gg 1, \text{ (c'est à dire le cas de cellules longues),}$$

et r légèrement surcritique. On peut donc poser

$$(2.5)_2 \quad r = r_c + \mu \alpha^2, \mu = O(1) \Rightarrow r = \left[\alpha^4 + 3 \alpha^2 + O(1) \right] \varepsilon, \varepsilon = \frac{1}{\lambda_1} .$$

Si on suppose que $\sigma \ll 1$, alors les modes A, B, C, D et E évolueront sur une échelle de temps $O(\sigma^{-1})$. Une simple analyse des différents ordres de grandeurs conduit à

$$(2.6)_1 \quad A = O(\sigma \alpha^{-1}), B = O(\sigma \alpha^{-1}), C = O(\sigma \alpha^{-1}) \quad (\text{d'après } (2.4)_{1,2,3}), \text{ et}$$

$$(2.6)_2 \quad D = O(r_c A \alpha^{-1}) = O(\alpha^2 \sigma), E = O(\alpha^2 \sigma), F = O(\alpha AD) = O(\alpha^2 \sigma^2),$$

(d'après $(2.4)_{4,5,6}$).

Puisque $\sigma \ll 1$, l'équation $(2.4)_4$ permet d'écrire

$$(2.6)_3 \quad D \varepsilon (1 + \alpha^2) = - (r_c + \mu \alpha^2) \alpha A + \text{termes d'ordre inférieur.}$$

On peut donc remplacer D en fonction de A. De même, on peut remplacer E en fonction de B. Partant de ces considérations, aux ordres les plus significatifs, le système $(2.4)_{1,2,3}$ s'écrit

$$(2.7)_1 \quad \frac{d A}{d t} = \sigma \frac{\mu}{\varepsilon} A + \frac{\alpha}{2} B C;$$

$$(2.7)_2 \quad \frac{d B}{d t} = - \sigma \left(9 - \frac{\mu}{\varepsilon} \right) B - \frac{\alpha}{2} A C;$$

$$(2.7)_3 \quad \frac{d C}{d t} = - \sigma C - \frac{3}{4} \alpha A B.$$

Pour ramener le système (2.7) à une forme adéquate, on pose

$$(2.8)_1 \quad \frac{d}{d t} = \sigma \frac{d}{d \tau}, \quad A = 2 \left(\frac{2}{3} \right)^{1/2} \frac{\sigma}{\alpha} X,$$

$$(2.8)_2 \quad B = 2 \left(\frac{2}{3} \right)^{1/2} \frac{\sigma}{\alpha} Y, \quad C = -2 \frac{\sigma}{\alpha} Z.$$

En substituant (2.8) dans (2.7), il vient

$$(2.9)_1 \quad \dot{X} = -\frac{\mu}{\varepsilon} X - Y Z,$$

$$(2.9)_2 \quad \dot{Y} = -\left(9 - \frac{\mu}{\varepsilon}\right) Y + X Z,$$

$$(2.9)_3 \quad \dot{Z} = -Z + X Y,$$

avec $\dot{X} = \frac{dX}{d\tau}$, $\mu_1 = \frac{\mu}{\varepsilon}$, $\lambda = \left(9 - \frac{\mu}{\varepsilon}\right) > 0$.

Ce dernier système n'est autre que celui étudié dans [59]. Les points fixes de (2.9) sont

$$(0,0,0), \left(\lambda^{1/2}, \mu_1^{1/2}, (\mu_1 \lambda)^{1/2} \right), \left(\lambda^{1/2}, -(\mu_1)^{1/2}, -(\mu_1 \lambda)^{1/2} \right), \\ \left(-(\lambda)^{1/2}, (\mu_1)^{1/2}, -(\mu_1 \lambda)^{1/2} \right) \text{ et } \left(-(\lambda)^{1/2}, -(\mu_1)^{1/2}, (\lambda \mu_1)^{1/2} \right).$$

Le système (2.9) est également invariant sous l'action de la symétrie $S : [X \longrightarrow -X, Y \longrightarrow -Y, Z \longrightarrow Z]$. Il est aisé d'établir que l'origine est instable (car $\mu_1, \lambda > 0$). Pour les autres points d'équilibre, la relation de dispersion s'écrit

$$(2.10) \quad s^3 + (1 + \lambda - \mu_1) s^2 + 4 \mu_1 \lambda = 0.$$

Deux solutions de cette équation s_1 et s_2 sont telles que $\text{Re}(s_j) > 0$ ($j = 1, 2$) (cf. par exemple [67, Chap.3, § 10.2] pour le détail des calculs); ce qui signifie que les points fixes non triviaux sont toujours instables. Rappelons enfin que le système (2.9) a été étudié numériquement dans [59]-[67].

Si cette analyse qualitative a permis de dégager un certain nombre de propriétés des solutions des systèmes dynamiques étudiés ci-dessus, on ne saurait extrapoler ces propriétés aux équations de la convection profonde. En effet, il faudrait un nombre de modes de Fourier élevé pour pouvoir approcher le comportement de la solution exacte; ce qui est techniquement impossible en dépit des récents progrès réalisés dans le domaine du matériel informatique. Pour sortir de cette impasse, la technique des échelles multiples^(*) permet de ramener le système (S) à une équation d'amplitude mimant le comportement de la solution exacte au voisinage d'un point singulier. L'obtention d'une telle équation pour le système (S) constituera la matière de l'un des projets d'articles qui suivent.

() D'autres techniques conduisent au même résultat (par exemple les méthodes de singularité développées dans [47] et les techniques de la variété centrale et de la forme normale.*

CONCLUSION

CONCLUSION

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été consacrés exclusivement à l'analyse théorique des équations de la convection profonde de Bénard, équations obtenues par R. K. Zeytounian. Ils constituent un prolongement de la thèse de M. Errafiy [31].

Nous avons ainsi défini un cadre fonctionnel adéquat pour étudier ces équations et donné de nouvelles conditions aux limites dans les cas de parois mauvaises conductrices de la chaleur ou de surfaces libres déformables.

Une démonstration de la validité du principe d'échange des stabilités dans tous les cas de conditions aux limites ainsi qu'une formulation variationnelle du problème linéaire (*non autoadjoint*) associé aux équations de la convection profonde de Bénard ont été données. Diverses solutions (*plus maniabiles que celles trouvées dans [31]*) du problème linéaire stationnaire ont été obtenues dans les cas de conditions aux limites rigide-rigide ou rigide-libre. Nous avons également démontré que le nombre de Rayleigh critique R_c (*obtenu par application de la technique de Galerkin*) convergait vers le nombre de Rayleigh critique exact.

Dans le cas de conditions aux limites rigide-libre, un nouveau système de Lorenz (*comportant un nouveau terme lié au paramètre de profondeur δ*) a été obtenu. Nous avons également obtenu, dans le cas de conditions aux limites libre-libre, l'équation de Landau-Ginzburg sans aucune hypothèse sur le paramètre de profondeur δ . Il s'avère que ce paramètre n'introduit dans ce cas aucun comportement nouveau.

Des théorèmes d'existence, d'unicité et de régularité des solutions des équations de la convection profonde stationnaires et instationnaires, linéaires ont été démontrés.

Un ensemble de travaux concernant l'existence et l'unicité des solutions fortes des équations de la convection profonde de Bénard non linéaires stationnaires ou instationnaires ont été obtenus. De même, divers résultats ayant trait à la stabilité non linéaire des équations de la convection de Bénard profonde ont été obtenus. *Ces travaux, étant soumis pour publication, ne figurent pas dans ce mémoire.*

S'agissant des travaux en cours (*non présentés dans ce mémoire*), l'auteur a entrepris les études suivantes :

* *l'obtention de l'équation de Newell, Whitehead & Segel [99]–[113] et de celle de Siggia & Zippelius [115] pour les équations de la convection profonde tridimensionnelles dans le cas de conditions aux limites libre-libre (calculs en cours);*

* *l'obtention d'une équation à deux amplitudes pour les équations de la convection profonde bidimensionnelles et tridimensionnelles dans les cas de parois mauvaises conductrices de la chaleur rigides ou libres [64]; (calculs en cours de vérification);*

* *existence de solutions faibles pour le problème non linéaire stationnaire (sans aucune hypothèse sur $\sup_{x \in \Omega} \vartheta$) en combinant des méthodes utilisées dans [9]–[10] (en cours);*

* *existence de solutions faibles et d'attracteurs maximaux pour les équations non linéaires instationnaires. On utilise des techniques semblables à celles introduites dans [11] (en cours);*

* *existence de solutions pour le problème non linéaire instationnaire dans les espaces introduits dans [114] (en cours);*

* *existence d'attracteurs globaux pour les équations non linéaires instationnaires en utilisant la méthode introduite dans [56] (en cours);*

* *existence de solutions pour le problème non linéaire instationnaire dans le cas d'une paroi libre déformable et variable avec le temps.*

Après achèvement des travaux en cours, et en ce qui concerne les prolongements de ces travaux, nous pensons qu'il serait particulièrement intéressant

** d'utiliser des simulations numériques pour mettre en évidence l'éventuel rôle joué par le paramètre de profondeur δ au niveau de la transition vers le chaos et de la caractérisation des attracteurs;*

** d'étudier théoriquement et numériquement le système de Lorenz obtenu en Annexe dans le cas de conditions aux limites rigide-libre ou rigide-rigide; on pourra alors constater l'influence des parois et du paramètre de profondeur δ sur les comportements des solutions (sachant cependant que la troncature effectuée est extrêmement sévère);*

** de rechercher les variétés inertielles (même approximatives) contenant l'attracteur global;*

** d'étudier expérimentalement le phénomène de la convection dans des couches fluide très profondes et de confronter les résultats théoriques aux résultats expérimentaux.*

Ces études nous semblent primordiales pour compléter, d'une part, l'analyse théorique des équations de la convection profonde et d'autre part, pour mieux cerner le rôle joué par le paramètre de profondeur introduit par R. K. Zeytounian dans l'apparition d'attracteurs étranges et dans leur caractérisation. Seul un coin du voile sera alors levé et beaucoup de phénomènes resteront encore inexpliqués !

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. Adams : *Sobolev Spaces*, Academic Press (1975).
- [2] S. Agmon, A. Douglis & L. Nirenberg : *Estimates Near the Boundary for Solutions of Elliptic Partial Differential Equations Satisfying General Boundary Value Conditions*, I, *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol.12, (1959), pp.623-727. II, *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol.17, (1964), pp.35-92.
- [3] V. I. Arnold : *Chapitres Supplémentaires de la Théorie des Equations Différentielles Ordinaires*, MIR (1980).
- [4] H. Bénard : *Les Tourbillons Cellulaires dans une Nappe Liquide*, *Rev. Générale Sci. Pures Appl.*, Vol.11, (1900), pp.1261-1309.
- [5] P. Bergé & Y. Pomeau : *La Turbulence*, *La Recherche*, N° 110, (1980), pp.422-433.
- [6] P. Bergé, Y. Pomeau & C. Vidal : *L'Ordre dans le Chaos*, Hermann (1984).
- [7] M. S. Berger : *Nonlinearity and Functional Analysis*, Academic Press (1977).
- [8] J. Bergh & J. Löfström : *Interpolation Spaces. An Introduction*, Springer Verlag (1976).
- [9] L. Boccardo, F. Murat & J.-P. Puel : L^∞ Estimate for some Nonlinear Elliptic Partial Differential Equations and Application to an Existence Result, *SIAM J. Math. Anal.*, Vol.23, (1992), pp.326-333.
- [10] L. Boccardo & T. Gallouet : Strongly Nonlinear Elliptic Equations Having Natural Growth Terms and L^1 Data, *Nonlinear Analysis, T. M. A.*, Vol.19,

(1992), pp.573-579.

[11] L. Boccardo & T. Gallouet : Non-linear Elliptic and Parabolic Equations Involving Measure Data, *J. Funct. Anal.*, Vol.87, (1989), pp.149-169.

[12] N. Bourbaki : *Intégration*, Chap. 1 - 4, Hermann (1966).

[13] J. Bourguignon & H. Brézis : *Remarks on the Euler Equations*, *J. Funct. Anal.*, Vol.15, (1974), pp.341-363.

[14] Bureau des Longitudes : Vol.1, *La Terre, Les Eaux, L'atmosphère*, Gauthiers-Villars (1977). Vol.2, *Les Etoiles, Le Système Solaire*, Gauthiers-Villars (1979).

[15] J. Carr : *Applications of Centre Manifold Theory*, Springer Verlag (1981).

[16] S. Chandrasekhar : *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Clarendon Press (1961).

[17] Z. Charki : *Principe d'échange des stabilités pour le problème de la convection profonde*, PUB IRMA Lille, Vol.23, n°XII, (1991).

[18] S. N. Chow & J. K. Hale : *Methods of Bifurcation Theory*, Springer Verlag (1990).

[19] P. Constantin, C. Foias & R. Temam : *Attractors Representing Turbulent Flows*, Preprint : Université d'Orsay.

[20] P. Constantin, C. Foias, O. Manley & R. Temam : *Determining Modes and Fractal Dimension of Turbulent Flows*, *J. Fluid Mech.*, Vol.150, (1985), pp.427-440.

[21] J. Coulomb & G. Jobert : *Traité de Géophysique Interne*, Tome 1 : *Sismologie et Pesanteur*, Masson et Cie (1973). Tome 2 : *Magnétisme et Géodynamique*, Masson et Cie (1976).

[22] V. Croquette : *Déterminisme et Chaos*, *Pour la Science*, (Décembre 1982), pp.62-77.

- [23] M. Cross & A. Newell : *Convection patterns in Large Aspect Ratio Systems*, Physica 10D, (1984), pp.299-328.
- [24] S. H. Davis : *Convection in a Box : Linear Theory*, J. Fluid Mech, Vol.30, (1967), pp.465-478.
- [25] R. C. DiPrima & R. Sani : *The Convergence of the Galerkin Method for the Taylor-Dean Stability Problem*, Quart. Appl. Math., Vol.23, (1965), pp.183-187.
- [26] R. DiPrima & H. Swinney : *Instabilities and Transition in Flow Between Concentric Rotating Cylinders*, Eds : J. Gollub & H. Swinney, (1981), (cf. référence [42] ci-après).
- [27] P. G Drazin & W. H Reid : *Hydrodynamic Stability*, Cambridge University Press (1981).
- [28] E. Dubois-Violette, G. Durand, E. Guyon, P. Manneville & P. Pieranski : *Instabilities in Nematic Liquid Crystals*, Ed. : L. Liebert, Solid State Phys. Suppl., Vol.14, (1978).
- [29] G. Duvaut : *Mécanique des Milieux Continus*, Masson et Cie (1990).
- [30] H. Dwight : *Tables of Integrals and Other Mathematical Data*, MacMillan (1957).
- [31] M. ERRAFIY : *Transition Vers le Chaos Dans le Problème de Bénard Profond*, Thèse U.S.T.L. (1991).
- [32] M. Errafiy & R. K. Zeytounian : *The Bénard Problem for Deep Convection : Linear Theory*, Int. J. Engng. Sci., Vol.29, n°5, (1991), pp.625-635.
- [33] M. Errafiy & R. K. Zeytounian : *The Bénard Problem for Deep Convection : Routes to Chaos*, Int. J. Engng. Sci., Vol.29, n°11, (1991), pp.1363-1373.
- [34] S. Eskinazi : *Fluid Mechanics and Thermodynamics of our Environment*, Academic Press (1975).

- [35] S. Fauve : *Transition vers la Turbulence des Ecoulements Convectifs*, J. Méc. Théor. Appl. Numéro Spécial, (1984), pp.45-76.
- [36] M. Feigenbaum : *Qualitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations*, J. Stat. Phys., Vol.19, (1978), pp.25-52; et Vol.21, (1979), pp.669-706.
- [37] B. Finlayson : *Convective Instability of Ferromagnetic Fluids*, J. Fluid Mech., Vol.40, (1970), pp.753-767.
- [38] C. Foias, O. Manley & R. Temam : *Attractors for the Bénard Problem. Existence and Physical Bounds on their Fractal Dimension*, Nonlinear Analysis, T.M.A., Vol.II, (1987), pp.939-967.
- [39] C. Foias & G. Prodi : *Sur le Comportement Global des Solutions Non Stationnaires des Equations de Navier-Stokes en Dimension 2*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol.39, (1967), pp.1-34.
- [40] F. Franchi & B. Straughan : *A Nonlinear Energy Stability Analysis of a Model for Deep Convection*, Int. J. Engng. Sci., Vol.30, (1992), pp.739-745.
- [41] G. Gaeta : *Bifurcation Theory and Nonlinear symmetries*, Nonlinear Analysis, T.M.A, Vol.17, (1991), pp.825-831.
- [42] E. N. Ganič, J. P. Hartnett & W. M. Rohsenow : *Handbook of Heat Transfer Fundamentals*, Mc Graw Hill (1985).
- [43] J. M. Ghidaglia & J. C. Saut : *Equations aux Dérivées Partielles Non linéaires Dissipatives et Systèmes Dynamiques*, Hermann (1988).
- [44] D. Gilbarg & N. Trudinger : *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer Verlag (1977).
- [45] J. Gollub & S. Benson : *Many Routes to Turbulent Convection*, J. Fluid Mech., Vol.100, (1980), pp.449-470.
- [46] J. Gollub & H. Swinney : *Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence*, Springer Verlag, (1981).

- [47] M. Golubitsky, I. Stewart & D. Schaeffer : *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, Vol.2, Springer Verlag (1985).
- [48] D. Gray & A. Giorgini : *The Validity of the Boussinesq Approximation for Liquids and Gases*, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol.19, (1976), pp.545-551.
- [49] H. Greenside & M. Cross : *Stability Analysis of Two-dimensional Models of Three-dimensional Convection*, Phys. Rev. A, Vol.31, (1985), pp.2492-2501.
- [50] P. M. Gresho & R. L. Sani : *The Effects of Gravity Modulation on the Stability of a Heated Fluid Layer*, J. Fluid Mech., Vol.40, (1970), pp. 783-806.
- [51] P. Grisvard : *Elliptic Problems in Non Smooth Domains*, Pitman (1985).
- [52] J. Guckenheimer & P. Holmes : *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Springer Verlag (1990).
- [53] E. Guyon, J. P. Hulin & L. Petit : *Hydrodynamique Physique*, Inter Editions/Editions du CNRS (1991).
- [54] H. Haken : *Advanced Synergetics*, Springer Verlag, ((1987).
- [55] H. Haken & A. Wunderlin : *Le Chaos Déterministe*, La Recherche, N° 225, (1990), pp.1248-1255.
- [56] G. Hetzer & P. Schmidt : A Global Attractor and Stationary Solutions for a Reaction-Diffusion System Arising From Climate Modeling, *Nonlinear Analysis, T.M.A*, Vol.14, (1990), pp.915-926.
- [57] E. Hopf : *A Mathematical Example Displaying Features of Turbulence*, Comm. Pure Appl. Math., Vol.1, (1948), pp.303-322.
- [58] L. Howard & R. Krishnamurti : *Large Scale Flow in Turbulent Convection : A Mathematical model*, J. Fluid Mech., Vol.170, pp.385-410.
- [59] D. Hughes & M. Proctor : *A Low Order Model of the Shear Instability of*

- Convection : Chaos and the Effect of Noise*, Nonlinearity, Vol.3, (1990), pp.127-153.
- [60] G. Iooss : *Modélisation de La Transition vers la Turbulence*, Séminaire Bourbaki, n°607, (1982/83).
- [61] V. Iudovich : *On the Origin of Convection*, P. M. M., Vol.30, n°6, (1966), pp.1000-1005.
- [62] V. Iudovich : *Secondary Flows and Fluid Instability Between Rotating Cylinders*, P. M. M. , Vol.30, n°4, (1966), pp.688-698.
- [63] A. Ivanoff : *Introduction à l'Océanographie*, tome 1, Vuibert (1972).
Tome 2, Vuibert (1975)
- [64] D. Jenkins & M. Proctor : *The Transition From Roll to Square-cell Solutions in Rayleigh-Bénard Convection*, *J. Fluid Mech.*, Vol.139, (1984), pp.461-471.
- [65] D. Joseph : *Stability of Fluid Motions*, Vol.2, Springer Verlag (1976).
- [66] S. Karlin : *Total Positivity and Applications*, Stanford Univ. Press (1968).
- [67] R. KHIRI : *Ondes, Tourbillons et Chaos dans les Ecoulements Isochores*, Thèse U.S.T.L. (1992).
- [68] E. Knobloch, M. Proctor & N. Weiss : *Heteroclinic Bifurcations in a Simple model of Double-diffusive Convection*, *J. Fluid Mech.*, Vol.239, (1992), pp.273-292.
- [69] A. Kolmogorov : *The Local Structure of Turbulence in Incompressible Viscous Fluid for Very Large Reynolds Numbers*, *Proc. R. Soc. Lond. A*, Vol.434, (1991), pp.9-13.
- [70] A. Kolmogorov : *A Refinement of Previous Hypotheses Concerning the Local Structure of Turbulence in a Viscous Incompressible Fluid at High Reynolds Numbers*, *J. Fluid Mech.*, Vol.13, (1962), pp.82-85.

- [71] V. Krinsky : *Self-Organization Autowaves and Structures Far from Equilibrium*, Springer Verlag (1984).
- [72] Y. Kuramoto : *Phase Dynamics of Weakly Unstable Periodic Structures*, Prog. Theor. Phys., Vol.71, (1984), pp.1182-1196.
- [73] Y. Kuramoto : *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence*, Springer Verlag (1984).
- [74] Y. Kuramoto & T. Tsuzuki : *Persistent Propagation of Concentration Waves in Dissipative Media Far from Thermal Equilibrium*, Prog. Theor. Phys., Vol.55, (1976), pp.356-369.
- [75] O. Ladyzhenskaya : *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*, Gordon & Breach (1969).
- [76] L. Landau & E. Lifshitz : *Fluid Mechanics*, Pergamon Press (1959).
- [77] La Recherche : *La Science du Désordre*, numéro spécial, N°.232, (1991).
- [78] J. La Salle & S. Lefschetz : *Stability by Liapunov's Direct Method with Applications*, Academic Press (1961).
- [79] J. Legros & J. Platten : *Convection in Liquids*, Springer Verlag (1984).
- [80] M. Léontovitch : *Introduction à la Thermodynamique Physique et Statistique*, Mir (1986).
- [81] J. Leray : *Etudes de Diverses Equations Intégrales Non Linéaires et de Quelques Problèmes que Pose l'Hydrodynamique*, J. Math. Pures et Appl., Vol.12, (1933), pp.1-82.
- [82] J. Leray : *Essai sur les Mouvements Plans d'un Liquide Visqueux que Limitent des Parois*, J. Math. Pures et Appl., Vol.13, (1934), pp.331-418.
- [83] J. Leray : *Essai sur le Mouvement d'un Liquide Visqueux Emplissant l'Espace*, Acta Math., Vol.63, (1934), pp.193-248.

- [84] J. L. Lions : *Quelques résultats d'Existence dans les Equations aux Dérivées Partielles Non Linéaires*, Bull. Soc. Math. France, Vol.87, (1959), pp.245-273.
- [85] J. L. Lions & E. Magenes : *Problèmes aux Limites Non Homogènes*, Vol.1, Dunod (1968).
- [86] M. Lovell, A. Avery, M. Vernon : *Physical Properties of Materials*, Van Nostrand Reinhold (1981).
- [87] V. L'vov & L. Prozorova : *Spin Waves above Threshold of Parametric Excitations*, dans : *Spin Waves & Magnetic Excitations*, Eds. : A. Borovik-Romanov & S. Sinha, North-Holland (1988).
- [88] B. Mandelbrot : *Fractals : Form, Chance and Dimension*, Freeman, (1977).
- [89] B. Mandelbrot : *Intermittent Turbulence in Self-similar Cascades : Divergence of High Moments and Dimension of the Carrier*, J. Fluid Mech., Vol.62, (1974), pp.331-358.
- [90] P. Manneville : *Structures Dissipatives, Chaos et Turbulence*, Collection Aléa Saclay (1991).
- [91] J. E Marsden & M. Mc Cracken : *The Hopf Bifurcation and its Applications*, Springer Verlag (1976).
- [92] V. Maz'ja : *Sobolev Spaces*, Springer Verlag (1985).
- [93] J. M. Mihaljan : *A Rigorous Exposition of the Boussinesq Approximations Applicable to a Thin Layer of Fluid*, Astrophys. J., Vol.136, (1962), pp. 1126 -1133.
- [94] S. Mikhlín : *Direct Methods of Mathematical Physics*, GTTI, (1950).
- [95] J. Milnor : *On the Concept of Attractor*, Comm. Math. Phys., Vol.99, (1985), pp.177-195.

- [96] A. Monin : *On the Nature of Turbulence*, Sov. Phys. Usp., Vol.21, (1978), pp.429-442.
- [97] J. Murray : *Mathematical Biology*, Springer Verlag (1989).
- [98] J. Nečas : *Les Méthodes Directes en Théorie des Equations Elliptiques*, Masson et Cie. (1967).
- [99] A. Newell & J. Whitehead : *Finite Bandwidth, Finite Amplitude Convection*, *J. Fluid Mech.*, Vol.38, (1969), pp.279-303.
- [100] G. Nicolis & I. Prigogine : *Self-organization in Nonequilibrium Systems, from Dissipative Structures to Order through Fluctuations*, Wiley & Sons (1977).
- [101] K. Pascoe : *An Introduction to the Properties of Engineering Materials*, Van Nostrand Reinhold (1982).
- [102] J. C. Pecker : *Astronomie Flammarion*, Flammarion (1985).
- [103] Y. Pomeau & P. Manneville : *Intermittent Transition to Turbulence in Dissipative Dynamical Systems*, *Comm. Math. Phys.*, Vol.74, (1980), pp.189-197.
- [104] Y. Pomeau & P. Manneville : *Stability and Fluctuations of a Spatially Periodic Convective Flow*, *J. Phys. Lett.*, Vol.40, (1979), L-609-L-612.
- [105] V. Privman, P. Hohenberg & A. Aharony : *Universal Critical-point Amplitude Relations*, dans *Phase Transitions and Critical Phenomena*, Eds. : C. Domb & J. Lebowitz, academic Press (1991).
- [106] D. S. Roja & B.A. Finlayson : *The Effects of Property Variations on the Convective Instability of Gases*, *AIChE Journal*, Vol.16, n°5, (1970), pp.876-877.
- [107] J. Ross, K. Hunt & P. Hunt : *Thermodynamics Far from Equilibrium : Reactions with Multiple Stationary States*, *J. Chem. Phys.*, Vol.88, (1988), pp.2719-2729.

- [108] D. Ruelle : *Les Attracteurs Etranges*, La Recherche, N°108, (1980), pp.132-144.
- [109] D. Ruelle & F. Takens : *On the Nature of Turbulence*, Comm. Math. Phys., Vol.20, (1971), pp.167-192.
- [110] D. Ruelle, S. Newhouse & F. Takens : *Occurrence of Strange Axiom A Attractors Near Quasi-periodic Flows on T^m* , $m \geq 3$, Comm. Math. Phys., Vol.64, (1978), pp.35-40.
- [111] D. Ruelle : *Bifurcation in the Presence of a Symmetry Group*, Arch. Rat. Mech. & Anal., Vol.51, (1973), pp.136-152.
- [112] L. Schwartz : *Théorie des Distributions*, Hermann (1973).
- [113] L. Segel : *Distant Side-walls Cause Slow Amplitude Modulation of Cellular Convection*, *J. Fluid Mech.*, Vol.38, (1969), pp.203-223.
- [114] M. Shinbrot : *Lectures on Fluid Mechanics*, Gordon & Breach (1973).
- [115] E. Siggia & A. Zippelius : *Stability of Finite-amplitude Convection*, *Phys. Fluids*, Vol.26, (1983), pp.2905-2915.
- [116] S. Smale : *Differential Dynamical Systems*, Bull. A. M. S., Vol.73, (1967), pp.747-817.
- [117] C. Sparrow : *The Lorenz Equations : Bifurcations, Chaos and Strange Attractors*, Springer Verlag (1982).
- [118] E. M. Sparrow, R. J. Goldstein & V. K. Jonsson : *Thermal Instability in a Horizontal Fluid Layer : Effect of Boundary Conditions and Non-linear Temperature Profile*, *J. Fluid Mech.*, Vol.18, (1964), pp.513-528.
- [119] J. Swift & P. Hohenberg : *Hydrodynamic Fluctuations at the Convective Instability*, *Phys. Rev. A*, Vol.15, (1977), pp.319-328.
- [120] R. Temam : *Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis*,

North-Holland, (1979).

[121] R. Temam : *Navier-Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis*, CBMS-NSF, (1983).

[122] O. Thual : *Generic Instabilities and Non Linear Dynamics*, Course given at Les Houches Summer school Astrophysical and geophysical dynamics (1988).

[123] F. Trèves : *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*, Academic Press (1967).

[124] A. Vassiliev : *Introduction à la Physique Statistique*, Mir (1985).

[125] M. G. Velarde : *Hydrodynamic Instabilities (in Isotropic Fluids)*, dans *Dynamique des Fluides*. Eds. : R. Balian & J. Peube, Gordon & Breach (1977), pp.469-527.

[126] T. Vicsek : *Fractal Growth Phenomena*, World Scientific (1989).

[127] I. Vorovich & V. Yudovich : *Stationary Flows of Incompressible Viscous Fluids*, Math. Sb., Vol.53, (1961), pp.393-428.

[128] S. Wiggins : *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer Verlag (1990).

[129] A. Winfree : *Rotating Chemical Reactions*, Sci. Am., Vol.230, (June 1974), p.82.

[130] K. Yosida : *Functional Analysis*, Springer Verlag (1965).

[131] R. K. Zeytounian : *The Bénard Problem for Deep Convection : Rigorous Derivation of Approximate Equations*, Int. J. Engng. Sci., Vol.27, n°11, (1989), pp.1361-1366.

[132] R. K. Zeytounian : *Mécanique des Fluides Fondamentale*, Springer Verlag, (1991).

ANNEXE

The Bénard Problem for Deep Convection : Derivation of the Landau-Ginzburg Equation

Z. CHARKI & R. Kh. ZEYTOUNIAN

Université des Sciences et Techniques de Lille,
U.F.R de Mathématiques Pures et Appliquées,
Département de Mécanique. Bâtiment M3. URA CNRS 1441,
59655 Villeneuve d'Ascq cédex,
France.

(Communicated by G. A. MAUGIN)

à paraître dans Int. J. Engng. Sci.

Abstract.- In this paper, the Landau-Ginzburg equation is derived for the two-dimensional deep Bénard convection equations with stress free boundaries.

1.Introduction

Convection is known to occur in many physical problems. The most often used model to describe this instability is the Rayleigh-Bénard model (see [2] or [8]). These equations, as is well known, are obtained by using the Oberbeck-Boussinesq approximations [15]. Observe at this stage that these approximations are valid for a shallow layer of fluid [17], [23].

However, in many geophysical situations, the fluid's layer is deep and one then needs another model to analyse the convective instability. In this connexion, R. Zeytounian [23] derived a set of equations, namely the deep Bénard equations, governing the thermal instability in deep layers of fluid (*for the assumptions and the details of the derivation of this model, see [23] or [24]*).

The deep Bénard model contains a new dimensionless parameter called the depth's parameter; this parameter in turn implies that the viscous dissipation term in the conservation of energy equation is no more negligible.

In the vicinity of the threshold of convection, it is commonly known that the dynamics can be described by means of an amplitude equation; such an equation has not yet been derived for the deep Bénard problem. It is the purpose of this paper to fill this gap.

To reach this aim, we will recall, in Section 2, the deep Bénard convection equations together with some elements of the linear stability theory needed in the sequel. Section 3 is devoted to the derivation of the Landau-Ginzburg equation for the two-dimensional deep Bénard convection equations with stress-free boundaries; a multiple-scales perturbation method will be used to compute the coefficients in this amplitude equation. This Section ends with some remarks on the obtained amplitude equation.

2. Formulation of the problem

Consider a horizontal deep layer of a heavy homogeneous and viscous fluid heated from below. For technical convenience, assume that the fluid is located between two 'free' perfect conductors of heat boundaries. Let \mathbf{e} and z denote respectively the unit vector pointing upward and the vertical coordinate. Let x, y indicate the horizontal directions and set $\mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}$; then, in Cartesian coordinates, the motion of the fluid is governed by the following dimensionless deep Bénard equations (see [23]) :

$$(2.1a) \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \times [0,1];$$

$$(2.1b) \quad \frac{1}{\sigma} \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] + \nabla \Pi - \vartheta \mathbf{e} - \Delta \mathbf{u} = 0, \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \times [0,1];$$

$$(2.1c) \quad \chi(z) \left[\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \vartheta - R \mathbf{u} \cdot \mathbf{e} \right] - \Delta \vartheta +$$

$$- 2 \delta \mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\mathbf{u}) = 0, \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \times [0,1];$$

with the boundary conditions :

$$(2.1d) \quad w = 0, \vartheta = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0, \quad \text{on } z = 0, 1.$$

Here $R > 0$ is the Rayleigh number, $\sigma > 0$ is the Prandtl number, while $\delta \in [0,1]$ is the depth's parameter and $\chi(z) = 1 + \delta(1 - z)$. \mathbf{u} , ϑ and Π indicate respectively the fluid velocity, the temperature and the pressure perturbations. $\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right]$ is the rate of deformation tensor.

Note that when $\delta \longrightarrow 0$, one obtains the "classical" Rayleigh-Bénard equations [2].

To carry a linear stability analysis of the deep Bénard equations, one has to ignore the nonlinear terms in Eqs.(2.1); in doing so, we obtain the following linear system

$$(2.2a) \quad \text{div } \mathbf{u} = 0;$$

$$(2.2b) \quad \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \Pi - \vartheta \mathbf{e} - \Delta \mathbf{u} = 0;$$

$$(2.2c) \quad \chi \left[\frac{\partial \vartheta}{\partial t} - R w \right] - \Delta \vartheta = 0;$$

together with the boundary conditions (2.1d).

To eliminate the term $\nabla \Pi$ from Eq.(2.2b), let us take $\mathbf{e} \cdot \text{curl}(\text{curl}(2.2b))$; then, after some standard manipulations and thanks to Eq.(2.2a), we get two equations for w and ϑ :

$$(2.3a) \quad \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \Delta w}{\partial t} - \Delta_{\perp} \vartheta = \Delta^2 w;$$

$$(2.3b) \quad \chi \left[\frac{\partial \vartheta}{\partial t} - R w \right] - \Delta \vartheta = 0;$$

with boundary conditions (2.1d) and $\Delta_{\perp} = \Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

By eliminating ϑ from Eqs.(2.3), we easily get the following single equation for w

$$(2.4) \quad \left[\chi \frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right] \left[\frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right] \Delta w = R \chi \Delta_{\perp} w.$$

We will be mainly concerned with the stability of roll-like solutions; hence, we can set

$$(2.5a) \quad \vartheta(x,y,z,t) = \theta(z) f(x,y) \exp(st), \quad s \in \mathbb{C};$$

$$(2.5b) \quad w(x,y,z,t) = W(z) f(x,y) \exp(st);$$

where the function f satisfies to the following Helmholtz equation

$$(2.5c) \quad \Delta_{\perp} f + k^2 f = 0, \quad k \equiv \|\mathbf{k}\| \in \mathbb{R}^+ \text{ and } \mathbf{k} = (k_x, k_y).$$

Substituting the relation (2.5b) into (2.4), we get the following ordinary differential equation (with respect to z) for $W(z)$:

$$(2.6a) \quad \left[\chi s - D^2 + k^2 \right] \left[\frac{s}{\sigma} - D^2 + k^2 \right] \left(D^2 - k^2 \right) W = \\ = - R \chi k^2 W,$$

with

$$(2.6b) \quad W = 0, \quad D^2 W = 0, \quad D^4 W = 0, \quad \text{on } z = 0, 1,$$

where $D = \frac{d}{dz}$.

As shown in [10], the principle of exchange of stabilities holds for the deep Bénard convection problem, we can then set $s \equiv 0$ in Eq.(2.6a). This will

yield the following differential equation for W :

$$(2.7) \quad \left(D^2 - k^2 \right)^3 W = - R \chi k^2 W;$$

together with boundary conditions (2.6b). For convenience, we will set in what follows

$$(2.8a) \quad \mathcal{L}(k) \equiv \mathcal{L} = \left(D^2 - k^2 \right) \quad \text{and} \quad \mathcal{L}(k_c) \equiv \mathcal{L}_c;$$

$$(2.8c) \quad \mathcal{M}(k) \equiv \mathcal{M} = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right) \quad \text{and} \quad \mathcal{M}(k_c) \equiv \mathcal{M}_c;$$

$$(2.8c) \quad J(f, g) = \partial_x f \partial_z g - \partial_z f \partial_x g.$$

It should be noted that the equation (2.7) with (2.6b) define a self-adjoint problem. As is easily seen, the eigenfunctions of Eq.(2.7) take the form

$$(2.9) \quad W_j = \sin(j\pi z), \quad j \in \mathbb{N}^*;$$

which implies that the corresponding eigenvalue R_j is given by

$$(2.10) \quad R_j = \frac{(j^2 \pi^2 + k^2)^3}{k^2 \left(1 + \frac{\delta}{2} \right)}.$$

Again, as shown in [10], the critical Rayleigh number R_c is obtained for $j = 1$ and $k = k_c = \pi / \sqrt{2}$. We then have

$$(2.11) \quad R_c = \frac{27 \pi^4}{4 \left(1 + \frac{\delta}{2} \right)}.$$

Assume that, at the onset of convection, a pattern of straight rolls with

wavevectors centered around k_c , i.e. $k - k_c = O(\varepsilon)$ (where $\varepsilon \ll 1$), originates; then after expanding R_j , $j = 1$, as a Taylor series near $k = k_c$, we get

$$(2.12) \quad R \equiv R_1 = R_c + r \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \text{ where } r = \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 R}{dk^2} \right|_{k = k_c} = O(1).$$

Arguing as in [4], [18] and [20], we find that the appropriate scaling for t , x and y are

$$(2.13) \quad \tau = \varepsilon^2 t, \quad \xi = \varepsilon x \quad \text{and} \quad \eta = \varepsilon^{1/2} y.$$

Let us now give a useful result needed in the sequel

Remark 1.- Assume that W is a function of z only and W is a solution of Eq.(2.7). Then by taking the derivative of Eq.(2.7) with respect to k^2 at $k^2 = k_c^2$, one finds that W satisfies to

$$(2.14) \quad 3 \mathcal{L}_c^2 W - R_c \chi W = 0, \quad \text{in } [0,1]. \square$$

In what follows, we wish to investigate the nonlinear stability problem of an ideal pattern of straight rolls parallel to the y direction; hence we can simplify Eqs.(2.1) by considering the two-dimensional deep Bénard problem. This is done by introducing the stream function $\psi(x,z,t)$. Thus we have the following problem for ψ and ϑ (see [24]) :

$$(2.15a) \quad \frac{1}{\sigma} \left[\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + J(\Delta \psi, \psi) \right] + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \Delta^2 \psi ;$$

$$(2.15b) \quad \chi(z) \left\{ \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + J(\vartheta, \psi) + R \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\} = \Delta \vartheta + \\ + \delta \left[4 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)^2 \right];$$

$$(2.15c) \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, \quad \vartheta = 0.$$

$$\text{Here } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

3. Derivation of the Landau-Ginzburg equation for the problem (2.15)

To solve Eqs.(2.15), we expand $(\psi, \vartheta) = \mathcal{U}$ in powers of the small parameter ε as

$$(3.1) \quad \mathcal{U}(x, z, t) = \varepsilon \mathcal{U}_1(x, z, \tau, \xi) + \varepsilon^2 \mathcal{U}_2(x, z, \tau, \xi) + \varepsilon^3 \mathcal{U}_3(x, z, \tau, \xi) + O(\varepsilon^4).$$

From relations (2.13), we infer that

$$(3.2a) \quad \frac{\partial}{\partial x} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau}.$$

Hence

$$(3.2b) \quad \Delta \longrightarrow \Delta + 2 \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x \partial \xi} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}, \text{ and}$$

$$(3.2c) \quad \begin{aligned} \Delta^2 &\longrightarrow \Delta^2 + 4 \varepsilon \left(\frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial \xi} + \frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial x \partial \xi} \right) + \\ &+ \varepsilon^2 \left(6 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial \xi^2} \right) + O(\varepsilon^3) = \\ &= \Delta^2 + 4 \varepsilon \mathcal{J} + \varepsilon^2 \mathcal{N} + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Upon substitution of the relations (2.12)-(3.1)-(3.2) into Eq.(2.15), we find a set of equations where ε appears a small parameter. At the leading order $O(\varepsilon)$, we get a set of linear equations for ψ_1 and ϑ_1 . If we set

$$(3.3) \quad (\psi_1, \vartheta_1) = \mathcal{R}e \left\{ \left(\psi_1^{(1)}(z, \tau, \xi), \vartheta_1^{(1)}(z, \tau, \xi) \right) \exp(i k_c x) \right\},$$

then $\psi_1^{(1)}$ and $\vartheta_1^{(1)}$ are found to satisfy to the following set of equations

$$(3.4a) \quad M_c^2 \psi_1^{(1)} - i k_c \vartheta_1^{(1)} = 0$$

$$(3.4b) \quad M_c \vartheta_1^{(1)} - R_c \chi i k_c \psi_1^{(1)} = 0,$$

where $\psi_1^{(1,1)}$ and $\vartheta_1^{(1,1)}$ satisfy the boundary conditions (2.15c).

The adjoint problem to (3.4) is

$$(3.5a) \quad M_c^2 \psi^+ + R_c \chi i k_c \vartheta^+ = 0$$

$$(3.5b) \quad M_c \vartheta^+ + i k_c \psi^+ = 0,$$

$$(3.5c) \quad \psi^+ = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial z^2} = 0, \quad \vartheta^+ = 0 \quad \text{on } z = 0, 1.$$

Hence problem (3.4) is **not** self adjoint. Equations (3.4) and (3.5) admit the following solutions

$$(3.6a) \quad (\psi_1^{(1)}, \vartheta_1^{(1)}) = A(\tau, \xi) \left(1, \frac{1}{i k_c} \mathcal{L}_c^2 \right) F(z);$$

$$(3.6b) \quad (\psi^+, \vartheta^+) = B(\tau, \xi) \left(\frac{i}{k_c} \mathcal{L}_c, 1 \right) F(z);$$

where $A(\tau, \xi), B(\tau, \xi) \in \mathbb{C}$, $F(z) \in \mathbb{R}$ and

$$(3.7a) \quad \mathcal{L}_c^3 F + R_c k_c^2 \chi(z) F(z) = 0, \quad \text{in } [0,1];$$

$$(3.7b) \quad F = 0, D^2 F = 0 \text{ and } D^4 F = 0, \quad \text{on } z = 0, 1.$$

We are interested in looking for the limiting behaviour of the amplitude of the threshold solution $A(\tau, \xi)$, assumed to vary only with the slow space and time scales introduced in (2.13). To do so, we have to solve Eqs.(2.15) for higher orders in ε up to order $O(\varepsilon^3)$. At order $O(\varepsilon)$, we find

$$(3.8a) \quad \Delta^2 \psi_2 - \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x} = \frac{1}{\sigma} J(\Delta \psi_1, \psi_1) + \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \xi} - 4 \mathcal{J} \psi_1;$$

$$(3.8b) \quad \Delta \vartheta_2 - R_c \chi \frac{\partial \psi_2}{\partial x} = \chi J(\vartheta_1, \psi_1) + R_c \chi \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} - 2 \frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial x \partial \xi} +$$

$$- \delta \left\{ 4 \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial z} \right)^2 + \left[\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} \right]^2 \right\};$$

$$(3.8c) \quad \vartheta_2 = 0, \psi_2 = 0, \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} = 0 \text{ on } z = 0, 1.$$

If we take into consideration the solutions (3.6), Eqs.(3.8) become

$$(3.9a) \quad \Delta^2 \psi_2 - \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x} = \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \xi} - 4 \mathcal{J} \psi_1 + F_2 \left(\exp(\pm 2 i k_c x) \right);$$

$$\begin{aligned}
(3.9b) \quad \Delta \vartheta_2 - R_c \chi \frac{\partial \psi_2}{\partial x} &= \chi \left\{ -\frac{|A|^2}{2} D(F \mathcal{L}_c^2 F) + \right. \\
&+ R_c \left. \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} \right\} - 2 \frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial x \partial \xi} - \delta \left\{ 2 k_c^2 |A|^2 (DF)^2 + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{2} |A|^2 \left(k_c^2 F + D^2 F \right)^2 \right\} + G_2 \left(\exp(\pm 2 i k_c x) \right);
\end{aligned}$$

and ψ_2 and ϑ_2 satisfy to the boundary conditions (3.8c); F_2 and G_2 are functions depending on the Fourier mode $\exp(\pm 2 i k_c x)$.

Solutions to Eqs.(3.9) will be asked to have the following form

$$(3.10) \quad \mathcal{U}_2(x, z, \tau, \xi) = \mathcal{U}_2^{(0)}(z, \tau, \xi) + \mathcal{U}_2^{(1)}(x, z, \tau, \xi) .$$

We thus find that $\mathcal{U}_2^{(0)}$ satisfies to

$$(3.11a) \quad \frac{\partial^4 \psi_2^{(0)}}{\partial z^4} = 0;$$

$$\begin{aligned}
(3.11b) \quad \frac{\partial^2 \vartheta_2^{(0)}}{\partial z^2} &= \chi \frac{|A|^2}{2} D(F \mathcal{L}_c^2 F) - \delta \left\{ 2 k_c^2 |A|^2 (DF)^2 + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{2} |A|^2 \left(k_c^2 F + D^2 F \right)^2 \right\} = |A|^2 M_2(z);
\end{aligned}$$

$\psi_2^{(0)}$ and $\vartheta_2^{(0)}$ are subject to the boundary conditions (3.8c).

As is easily seen, Eqs.(3.11) admit the following solution

$$(3.12a) \quad \psi_2^{(0)} = 0;$$

$$(3.12b) \quad \vartheta_2^{(0)} = |A|^2 T_2^{(0)}(z),$$

where

$$(3.12c) \quad D^2 T_2^{(0)}(z) = M_2(z) \text{ and}$$

$$(3.12d) \quad T_2^{(0)}(z) = 0, \text{ on } z = 0, 1.$$

Now, let us find $U_2^{(1)}$; to this end, set

$$(3.13) \quad U_2^{(1)} = \text{Re} \left\{ \left(\psi_2^{(1)}(z, \tau, \xi), \vartheta_2^{(1)}(z, \tau, \xi) \right) \exp(i k_c x) \right\};$$

a straightforward calculation gives

$$(3.14a) \quad \begin{aligned} M_c^2 \psi_2^{(1)} - i k_c \vartheta_2^{(1)} &= \frac{\partial A}{\partial \xi} \left\{ \frac{1}{i k_c} \mathcal{L}_c^2 F - 4 i k_c \mathcal{L}_c F \right\} = \\ &= \frac{\partial A}{\partial \xi} S_2; \end{aligned}$$

$$(3.14b) \quad \begin{aligned} M_c \vartheta_2^{(1)} - i k_c R_c \chi \psi_2^{(1)} &= \frac{\partial A}{\partial \xi} \left\{ R_c \chi F - 2 \mathcal{L}_c^2 F \right\} = \\ &= \frac{\partial A}{\partial \xi} V_2; \end{aligned}$$

$$(3.14c) \quad \vartheta_2^{(1)} = 0, \quad \psi_2^{(1)} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi_2^{(1)}}{\partial z^2} = 0 \quad \text{on } z = 0, 1.$$

We would like to invert these equations to find $\psi_2^{(1)}, \vartheta_2^{(1)}$. In order to do this, the R.H.S. of Eqs.(3.14) must be orthogonal to (ψ^+, ϑ^+) by virtue of the Fredholm alternative theorem [22]. Taking the inner product of the R.H.S. of (3.14) with (ψ^+, ϑ^+) in $L^2(0,1) \times L^2(0,1)$, we obtain, if $B \neq 0$ and

$$\frac{\partial A}{\partial \xi} \neq 0,$$

$$\frac{\langle S_2, \psi^+ \rangle + \langle V_2, \vartheta^+ \rangle}{\frac{\partial A}{\partial \xi} B^*} = \int_0^1 \left[\frac{1}{i k_c} \mathcal{L}_c^2 F - 4 i k_c \mathcal{L}_c F \right] \frac{1}{i k_c} \mathcal{L}_c F dz +$$

$$+ \int_0^1 \left[R_c \chi F - 2 \mathcal{L}_c^2 F \right] F dz,$$

where $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f \cdot g^* dz$, (g^* denotes the complex conjugate of g). This

expression must vanish; integration by parts then yields

$$\frac{\langle S_2, \psi^+ \rangle + \langle V_2, \vartheta^+ \rangle}{\frac{\partial A}{\partial \xi} B^*} = \int_0^1 \left\{ - \frac{\mathcal{L}_c^3 F}{k_c^2} - 4 \mathcal{L}_c^2 F + R_c \chi F - 2 \mathcal{L}_c^2 F \right\} F dz$$

Observe that :

$$- \frac{\mathcal{L}_c^3 F}{k_c^2} - 6 \mathcal{L}_c^2 F + R_c \chi F = 0$$

(by virtue of (3.7) and (2.14)).

Hence, the solvability condition is identically satisfied. Note that if we had set $F = W_1$, this condition would not be satisfied.

An easy computation shows that

$$(3.15a) \quad \psi_2^{(1)} = \frac{\partial A}{\partial \xi} F(z),$$

$$(3.15b) \quad \vartheta_2^{(1)} = \frac{\partial A}{\partial \xi} \frac{1}{i k_c} \left[\mathcal{L}_c^2 F(z) - S_2(z) \right].$$

Finally, at order $O(\varepsilon^3)$, we obtain the following system for ψ_3 and ϑ_3 :

$$(3.16a) \quad \Delta^2 \psi_3 - \frac{\partial \vartheta_3}{\partial x} = \frac{1}{\sigma} \left\{ \frac{\partial \Delta \psi_1}{\partial \tau} + J\left(\Delta \psi_2 + 2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial \xi}, \psi_1\right) + \right. \\ \left. + J(\Delta \psi_1, \psi_2) + \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial \Delta \psi_1}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} \frac{\partial \Delta \psi_1}{\partial z} \right\} + \\ + \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \xi} - 4 \mathcal{F} \psi_2 - \mathcal{N} \psi_1 ;$$

$$(3.16b) \quad \Delta \vartheta_3 - R_c \chi \frac{\partial \psi_3}{\partial x} = \chi \left\{ \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \tau} + J(\vartheta_2, \psi_1) + J(\vartheta_1, \psi_2) + \right. \\ \left. + \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial z} + R_c \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi} + r \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right\} + \\ - 2 \frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial x \partial \xi} - \frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial \xi^2} - \delta \left\{ 8 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial z} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial z} + \right. \\ \left. + 2 \left[\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} \right] \left[\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial \xi} \right] \right\} ;$$

with

$$(3.16c) \quad \psi_3 = 0, \vartheta_3 = 0 \text{ and } \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z^2} = 0 \quad \text{on } z = 0, 1.$$

Again and as for order $O(\varepsilon^2)$, the R.H.S. of (3.16) will give rise to

terms independent of x and terms containing $\exp(\pm 2 i k_c x)$; these terms will not be dealt with in the sequel, since they are useless for our purpose. So, let us set

$$(3.17) \quad u_3 = u_3^{(0)}(z, \tau, \xi) + u_3^{(1)}(x, z, \tau, \xi) + u_3^{(2)}(x, z, \tau, \xi);$$

where

$$u_3^{(1)}(x, z, \tau, \xi) = \text{Re} \left\{ \left[\psi_3^{(1)}(z, \tau, \xi), \vartheta_3^{(1)}(z, \tau, \xi) \right] \exp(i k_c x) \right\},$$

$$u_3^{(2)}(x, z, \tau, \xi) = \tilde{u}_3^{(2)} \exp(\pm 2 i k_c x), \quad u_3^{(0)} \text{ is independent of } x.$$

For $u_3^{(1)}$, we have the following equations

$$(3.18a) \quad \mathcal{L}_c^2 \psi_3^{(1)} - i k_c \vartheta_3^{(1)} = S_3;$$

$$(3.18b) \quad \mathcal{L}_c \vartheta_3^{(1)} - R_c \chi i k_c \psi_3^{(1)} = V_3;$$

where

$$(3.19a) \quad S_3 = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial A}{\partial \tau} \mathcal{L}_c F + \frac{1}{i k_c} \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} \left[\mathcal{L}_c^2 F - S_2 \right] +$$

$$- \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} \mathcal{L}_c F (4 i k_c + 2) + 4 k_c^2 \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} F;$$

$$(3.19b) \quad V_3 = \chi \left\{ \frac{1}{i k_c} \frac{\partial A}{\partial \tau} \mathcal{L}_c^2 F - i k_c |A|^2 A F \cdot DT_2^{(0)} + \right.$$

$$\left. + R_c \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} F + r i k_c A F \right\} - 2 \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} \left[\mathcal{L}_c^2 F - S_2 \right] - \frac{1}{i k_c} \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} \mathcal{L}_c^2 F;$$

by virtue of (3.6), (3.12) and (3.15).

The Fredholm alternative, yields, when applied to Eqs.(3.18)

$$\langle S_3, \psi^+ \rangle + \langle V_3, \vartheta^+ \rangle = 0 ; \text{ i.e.}$$

$$(3.20) \quad a_1 \frac{\partial A}{\partial t} + a_2 A + a_3 |A|^2 A + a_4 \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} = 0,$$

where

$$(3.21a) \quad a_1 = \int_0^1 \left[\frac{1}{i k_c} \left(\frac{1}{\sigma} + \chi \right) \mathcal{L}_c^2 F \right] F dz ,$$

$$(3.21b) \quad a_2 = \int_0^1 r i k_c \chi F^2 dz = r a_2' ,$$

$$(3.21c) \quad a_3 = - \int_0^1 i k_c \chi F^2 \cdot DT_2^{(0)} dz,$$

$$(3.21d) \quad a_4 = \int_0^1 \left\{ - \frac{\mathcal{L}_c^3 F}{k_c^2} + \frac{\mathcal{L}_c^3 F}{i k_c^3} + \mathcal{L}_c^2 F \left(\frac{3}{i k_c} - 6 \right) + \right. \\ \left. + R_c \chi F - 12 i k_c \mathcal{L}_c F \right\} F dz.$$

Observe that the coefficient a_4 can be further simplified if we use the equations (3.7)-(2.14); after some standard manipulation, we obtain

$$(3.21e) \quad a_4 = \int_0^1 \left(-12 i k_c \mathcal{L}_c F \right) F dz.$$

As is easily seen, the coefficients a_i , $i = 1, \dots, 4$, will depend on the depth's parameter δ and can be determined, for each value of the parameter δ , by a numerical method.

Eq.(3.20) can be written equivalently

$$(3.22) \quad \frac{\partial A}{\partial \tau} = \lambda \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + r \sigma_1 A - \beta |A|^2 A,$$

where

$$\lambda = -\frac{a_4}{a_1}, \quad \sigma_1 = -\frac{a_2'}{a_1}, \quad \beta = \frac{a_3}{a_1}.$$

For our purpose, we need only know the sign of the coefficients in (3.22); to that effect, observe that the coefficients a_i are imaginary and

$$\mathcal{I}m(a_1) < 0 \quad (\text{by virtue of (2.14)}), \quad \mathcal{I}m(a_2') > 0, \quad \mathcal{I}m(a_4) > 0.$$

The sign of coefficient a_3 is not accessible simply, so let $F = \sin(\pi z)$, this will enable us to find $T_2^{(0)}$ from Eq.(3.12c,d); we thus obtain

$$\mathcal{I}m(a_3) = -\frac{k_c}{2} \left\{ -\frac{3}{8} \delta^2 k_c^2 + \frac{q^2}{8} \left(1 + \delta + \delta^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{15}{8\pi^2} \right] \right) \right\} < 0,$$

where $q = \pi^2 + k_c^2$.

Hence, $\lambda > 0$, $\beta > 0$, and $\sigma_1 > 0$. If we let

$$(3.23a) \quad A = \left(\frac{\sigma_1}{\beta} \right)^{1/2} Z, \quad \frac{\partial}{\partial \tau} = \sigma_1 \frac{\partial}{\partial T},$$

$$(3.23b) \quad \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} = \frac{\sigma_1}{\lambda} \frac{\partial^2}{\partial X^2},$$

then Eq.(3.22) becomes

$$(3.24) \quad \frac{\partial Z}{\partial T} = \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} + r Z - |Z|^2 Z.$$

There is a lot of literature devoted to the analysis of the Landau-Ginzburg equation : a stability analysis of this equation was accomplished in [3], [7], [9]; the Landau-Ginzburg equation was also analysed numerically in [13], [14], [16]; the question of existence of a maximal attractor for this equation and its characterization was dealt with in [1], [5], [6], [11]. All these known results for the Landau-Ginzburg equation apply as such to Eq.(3.24), sometimes only slight modifications, such as a change of variables, are necessary.

In the hope of obtaining other amplitude equations than the known ones for the Rayleigh-Bénard equations, the authors have undertaken the derivation of such equations for the deep Bénard equations (2.1) using the same arguments as in [12], [19], [21].

References

- [1] M. Bartuccelli, P. Constantin, C. Doering, J. Gibbon & M. Gisselält, *Physica* **44D**, 421-444 (1990).
- [2] S. Chandrasekhar : *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Clarendon Press (1961).
- [3] P. Couillet & S. Fauve, *Phys. Rev. Letters* **55**(26), 2857-2859 (1985).
- [4] P. Couillet & P. Huerre, *Physica* **23D**, 27-44 (1986).
- [5] A. Doelman, *Nonlinearity* **4**, 231-250 (1991).
- [6] C. Doering, J. Gibbon, D. Holm & B. Nicolaenko, *Nonlinearity* **1**, 279-309 (1988).
- [7] R. Di Prima & J. Stuart, *Proc. Roy. Soc. London A* **362**, 27-41 (1978).
- [8] P. Drazin & W. Reid : *Hydrodynamic Stability*. Cambridge University Press (1981).
- [9] W. Eckhaus & G. Iooss : *Non classical bifurcations I, strong pattern selection or rejection*. Preprint NR 477, University of Utrecht. July 1987.
- [10] M. Errafiy & R. Zeytounian, *Int. J. Engng Sci.* **29**(5), 625-635 (1991).
- [11] J. Ghidaglia & B. Heron, *Physica* **28D**, 282-304 (1987).
- [12] P. Hall & I. Walton, *J. Fluid Mech.* **90**, 377-395 (1979).
- [13] P. Huerre : "*Instabilités hydrodynamiques non linéaires et chaos déterministe*" in *Equations aux Dérivées Partielles Non Linéaires Dissipatives et Systèmes Dynamiques*, edited by J. M. Ghidaglia & J. C. Saut, Hermann (1988).
- [14] P. Huerre, H. Moon & L. Redekopp, *Phys. Rev. Letters* **49**(7), 458-460 (1982).
- [15] D. Joseph : *Stability of Fluid Motions*, Vol.II. Springer-Verlag (1976).
- [16] L. Keefe, *Stud. Appl. Math.* **73**, 91-153 (1985).
- [17] J. Mihaljan, *Astrophys. J.* **136**, 1126-1133 (1962).
- [18] A. Newell & J. Whitehead, *J. Fluid Mech.* **38**, 279-303 (1969).
- [19] M. Proctor, *J. Fluid Mech.* **113**, 469-485 (1981).
- [20] L. Segel, *J. Fluid Mech.* **38**, 203-224 (1969).

- [21] D. Siggia & A. Zippelius, *Phys. Fluids* 26(10), 2905-2915 (1983).
- [22] V. Trénoquine : *Analyse Fonctionnelle*. Mir (1985).
- [23] R. Zeytounian, *Int. J. Engng Sci.* 27(11), 1361-1366 (1989).
- [24] R. Zeytounian : *Mécanique des Fluides Fondamentale*. Springer-Verlag (1991).

**The Bénard Problem for Deep Convection :
Lorenz Deep System**

Z. CHARKI & R. Kh. ZEYTOUNIAN

Université des Sciences et Techniques de Lille,
U.F.R de Mathématiques Pures et Appliquées,
Département de Mécanique. Bâtiment M3. URA CNRS 1441,
59655 Villeneuve d'Ascq cédex,
France.

(Communicated by G. A. MAUGIN)

à paraître dans Int. J. Engng. Sci

Abstract.-In this paper, a new Lorenz system is derived from the two-dimensional unsteady deep Bénard convection equations with top and bottom rigid boundaries or with top free and bottom rigid boundaries. Under suitable assumptions on the horizontal wavenumber, the normal form for this system is also obtained near the first critical Rayleigh number when the fluid is bounded below by a rigid boundary and a stress-free boundary above.

1.Introduction

In [6], R. Zeytounian derived a dimensionless system of equations governing the motion of a heavy homogeneous and viscous fluid heated from below when the depth of the fluid's layer is important . For simplicity, assume that at the onset of convection, parallel convective rolls originate. Hence the velocity vectorfield becomes perpendicular to the rolls axis and the three-dimensional equations are invariant under the action of translations along the rolls axis. From the above argument, we see that it is sufficient to consider the two-dimensional deep Bénard equations. In such a case, we have for the stream function $\psi(t,x,z)$ and the disturbance of temperature $\vartheta(t,x,z)$ the following system of equations

$$\frac{1}{\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \right] \Delta \psi + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \Delta^2 \psi; \quad (1.1a)$$

$$\chi(z) \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \right] \vartheta + R \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\} = \Delta \vartheta + \delta \left[4 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)^2 \right]; \quad (1.1b)$$

where $\sigma > 0$ is the Prandtl number, $R \geq 0$ is the Rayleigh number, $\delta \in [0,1]$ is the new depth parameter according to Zeytounian [6], $z \in (0,1)$ is the vertical coordinate while x denotes the horizontal coordinate and $\chi(z) = 1 + \delta(1 - z)$.

Here $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. As usual in convection problems, we shall supplement

Eqs.(1.1) with the following boundary conditions

$$\psi = 0, \frac{\partial^\alpha \psi}{\partial z^\alpha} = 0, \vartheta = 0 \quad \text{on } z = 0; \quad (1.2a)$$

$$\psi = 0, \frac{\partial^\beta \psi}{\partial z^\beta} = 0, \vartheta = 0 \quad \text{on } z = 1; \quad (1.2b)$$

with $\alpha, \beta = 1$ or 2 according to the nature of the boundary.

In the next sections, we will derive an abstract and exact Lorenz system for both the rigid-rigid and the rigid-free boundary cases. This system is different from the classical Lorenz system (see e.g [4]). Unfortunately it is not possible to make explicit all the coefficients in this new system. Hence, in Section 4, we will obtain an "approximate" Lorenz system for the rigid-free case using approximate solutions to the linearized equations. For this system and under some suitable assumptions on the horizontal wavenumber, we will derive the normal form near the onset of convection.

2.Determination of the basic expansions

Periodicity conditions in the horizontal coordinate x suggests to seek the solutions to the system (1.1)-(1.2) as Fourier series of the following form

$$\psi = \sum_{i,j=1} A_{ij}(t) W_i(z) \sin(jkx), \quad (2.1a)$$

$$\vartheta = \sum_{i=1, j=0} B_{ij}(t) T_i(z) \cos(jkx); \quad (2.1b)$$

and W_i and T_i are subject to the boundary conditions (1.2).

Observe that $(\psi, \vartheta) = (0, 0)$ is a solution of problem (1.1)-(1.2). Ignoring the nonlinear terms in (1.1)-(1.2), then in the steady case, we get the following linear equations

$$\Delta^2 \psi = \frac{\partial \vartheta}{\partial x}, \quad \Delta \vartheta = R \chi \partial_x \psi, \quad \text{together with (1.2)}. \quad (2.2)$$

Solutions of the Eqs.(2.2)-(1.2) will be sought in the form (2.1). Upon substitution of the series (2.1) in (2.2), we easily get for $j \neq 0$ the following differential system

$$A_{ij} L_j^2 W_i = -j k B_{ij} T_i; \quad (2.3a)$$

$$R \chi j k A_{ij} W_i = B_{ij} L_j T_i; \quad (2.3b)$$

$$W_i = D^\alpha W_i = T_i = 0 \quad \text{on } z = 0; \quad (2.3c)$$

$$W_i = D^\beta W_i = T_i = 0 \quad \text{on } z = 1; \quad (2.3d)$$

$$L_j = D^2 - j^2 k^2, \quad D = \frac{d}{dz}.$$

For practical reasons, let

$$A_{ij} W_i = -\frac{j k}{m_j^2} \hat{W}_i, \quad B_{ij} T_i = \vartheta_i, \quad m_j = j^2 k^2 + \pi^2. \quad (2.4)$$

With this notation, Eqs.(2.3) become

$$m_j^2 \vartheta_i = L_j^2 \hat{W}_i, \quad \chi \hat{W}_i = - \frac{m_j^2}{j^2 k^2 R} L_j \vartheta_i, \quad R \neq 0; \quad (2.5a)$$

$$\hat{W}_i = D^\alpha \hat{W}_i = \vartheta_i = 0 \quad \text{on } z = 0; \quad (2.5b)$$

$$\hat{W}_i = D^\beta \hat{W}_i = \vartheta_i = 0 \quad \text{on } z = 1. \quad (2.5c)$$

Note that the Eqs.(2.3) or (2.5) do not have simple explicit solutions. Before we close this section, let us fix some notations needed in the sequel. The scalar product and the norm in $L^2(0,1)$ will be denoted respectively by

$$(f,g) = \int_0^1 f(z).g(z) dz, \quad |f| = (f,f)^{1/2}.$$

Since $\chi(z)$ is positive, one can also endow $L^2(0,1)$ with the following inner product and norm

$$(f,g)_\chi = \int_0^1 \chi(z) f(z).g(z) dz, \quad |f|_\chi = (f,f)_\chi^{1/2}$$

3.Derivation of the abstract Lorenz system

To obtain the abstract Lorenz system, let us set

$$\psi = A(t) W_1(z) \sin(kx); \quad (3.1a)$$

$$\vartheta = B(t) \vartheta_1(z) \cos(kx) + C(t) T_2(z); \quad (3.1b)$$

where $W_1 \equiv \hat{W}_1$ and ϑ_1 are solutions of Eqs.(2.5) for $j = 1$. $T_2(z)$ being any smooth function of z (say $T_2 \in C^2([0,1])$) subject to the boundary conditions $T_2 = 0$ on $z = 0$ and $z = 1$. The term $T_2(z)$ is necessary, according to [1], to take into account part of the nonlinearities in (1.1).

Substituting the relations (3.1) into (1.1), we get the following system

$$\frac{1}{\sigma} \frac{d A}{d t} L_1 W_1 - B k \vartheta_1 = A L_1^2 W_1 ; \quad (3.2a)$$

$$\chi \left\{ \frac{d B}{d t} \vartheta_1 - k A C W_1 D T_2 + R A k W_1 \right\} = B L_1 \vartheta_1 ; \quad (3.2b)$$

$$\chi \left\{ \frac{d C}{d t} T_2 - \frac{1}{2} A B k D(W_1 \vartheta_1) \right\} = C D^2 T_2 + \delta A^2 \left\{ 2 k^2 (D W_1)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(D^2 W_1 + k^2 W_1 \right)^2 \right\}. \quad (3.2c)$$

Taking the scalar products in $L^2(0,1)$ of (3.2a) with W_1 , of (3.2b) with ϑ_1 and of (3.2c) with T_2 , integrating by parts and using the Eqs.(2.5), one easily obtains the following abstract Lorenz system

$$- \frac{1}{\sigma} \frac{d A}{d t} \|W_1\|_1^2 - B \frac{k}{m} \|W_1\|_2^2 = A \|W_1\|_2^2 ; \quad (3.3a)$$

$$\frac{d B}{d t} |\vartheta_1|_\chi^2 - k A C \left(\chi W_1 D T_2, \vartheta_1 \right) + \frac{m^2}{k} A \|\vartheta_1\|_1^2 = - B \|\vartheta_1\|_1^2, \quad (3.3b)$$

$$\frac{d C}{d t} |T_2|_\chi^2 - A B \frac{k}{2} \left(\chi D(W_1 \vartheta_1), T_2 \right) = - C(t) |D T_2|^2 + \delta A^2(\phi, T_2), \quad (3.3c)$$

where $\|f\|_1^2 = \int_0^1 \left((Df)^2 + k^2 f^2 \right) dz$,

$\|f\|_2^2 = \int_0^1 \left((D^2 f)^2 + 2 k^2 (Df)^2 + k^4 f^2 \right) dz$ and

$$\phi = 2 k^2 (D W_1)^2 + \frac{1}{2} \left(D^2 W_1 + k^2 W_1 \right)^2, \quad (m = m_1 \text{ see (2.4)}) .$$

Note that if $(\phi, T_2) \neq 0$, then we have a new Lorenz system containing the term A^2 . This term is absent in the Lorenz system derived in [7; Chap.17] for the deep Bénard convection with stress-free boundaries.

4.The deep Lorenz system in the rigid-free boundary conditions case

Not knowing exactly W_1 and ϑ_1 in (3.1), let us simplify the problem by setting

$$\psi = A(t) W(z) \sin(kx), \quad (4.1a)$$

$$\vartheta = B(t) \sin(\pi z) \cos(kx) + C(t) \sin(2\pi z), \quad (4.1b)$$

where $W(z)$ is given by (see [2] or [7, p.349])

$$W = \left[A_1 + B_1 \left(z - \frac{1}{2} \right) \right] \operatorname{ch} \left(k \left(z - \frac{1}{2} \right) \right) + \sin(\pi z) + \quad (4.2)$$

$$+ \left[A_2 + B_2 \left(z - \frac{1}{2} \right) \right] \operatorname{sh} \left(k \left(z - \frac{1}{2} \right) \right), \text{ and}$$

$$A_1 = -\pi \operatorname{sh}^3 \left(\frac{k}{2} \right) \frac{1}{\operatorname{sh}(k) \operatorname{ch}(k) - k}, \quad B_1 = 2 A_1 \operatorname{coth}^2 \left(\frac{k}{2} \right),$$

$$A_2 = -A_1 \operatorname{coth}^3 \left(\frac{k}{2} \right), \quad B_2 = -2 A_1 \operatorname{coth} \left(\frac{k}{2} \right), \quad k \in \mathbb{R}^+ : \operatorname{sh}(2k) \neq 2k.$$

Note that W does not satisfy Eq.(2.3b).

The substitution of the expansions (4.1), for ψ and ϑ , into the full nonlinear equations (1.1) leads to the following differential system

$$\frac{1}{\sigma} \frac{dA}{dt} L_1 W - B k \sin(\pi z) = A L_1^2 W; \quad (4.3a)$$

$$\chi \left[\frac{dB}{dt} \sin(\pi z) - A C k 2 \pi W \cos(2\pi z) + R A k W \right] = -B m \sin(\pi z); \quad (4.3b)$$

$$\chi \left[\frac{dC}{dt} \sin(2\pi z) - A B \frac{k}{2} (DW) \sin(\pi z) - A B \frac{k}{2} \pi W \cos(\pi z) \right] = \quad (4.3c)$$

$$= -4 \pi^2 C \sin(2\pi z) + \delta \left\{ 2 A^2 k^2 (DW)^2 + \frac{A^2}{2} (D^2 W + k^2 W)^2 \right\}.$$

Taking the inner products in $L^2(0,1)$ of (4.3a) with $\sin(\pi z)$, of (4.3b) with $\sin(\pi z)$ and of (4.3c) with $\sin(2\pi z)$ yields after some lengthy

calculations the following Lorenz system

$$\frac{1}{\sigma} \frac{d A}{d t} \beta_0 - B k = A m^2, \quad (4.4a)$$

$$\lambda \frac{d B}{d t} - 2 \pi k A C (\tilde{b}_3 - \hat{b}_1) + 2 R A k \hat{b}_1 = -B m; \quad (4.4b)$$

$$\lambda \frac{d C}{d t} + A B \frac{k}{2} \left\{ \lambda \left[\beta_1^{(1,1)} + \beta_1^{(1,3)} \right] - \delta \left[\beta_2^{(1,1)} + \beta_2^{(1,3)} \right] + \right. \\ \left. - \pi \left(\lambda + \tilde{b}_1 + \tilde{b}_3 \right) \right\} = -4 \pi^2 C + 2 \delta A^2 \tilde{\phi}; \quad (4.4c)$$

where the various coefficients are given in the appendix. As is easily seen it is highly unlikely that $\tilde{\phi}$ be identically zero $\forall k \neq 0$.

Now let us give the normal form for the system (4.4). First, observe that $X_f \equiv (A_f, B_f, C_f) = (0, 0, 0)$ is a fixed point of Eqs.(4.4) and that Eqs.(4.4) are invariant under the action of the symmetry $S : [A \longrightarrow -A, B \longrightarrow -B, C \longrightarrow C]$. Next, note that the Jacobian derivative at X_f is the matrix

$$L = \begin{pmatrix} \sigma \frac{m^2}{\beta_0} & \sigma \frac{k}{\beta_0} & 0 \\ -2 R \hat{b}_1 \frac{k}{\lambda} & -\frac{m}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & -\pi^2 \frac{4}{\lambda} \end{pmatrix}; \quad (4.5)$$

where we have assumed that k has been chosen so that $\beta_0 \neq 0$ and $\hat{b}_1 > 0$. It is then easily seen that $\Psi = (1, -\frac{m^2}{k}, 0) \in \text{Ker}(L)$ and $S \Psi = -\Psi$. Since the critical Rayleigh number R_c is obtained by setting $\det(L) = 0$, a straightforward calculation leads to

$$R_c = \min_k \frac{m^3}{2 k^2 \hat{b}_1} = R(k_c). \quad (4.6)$$

In what follows, we will assume that there exists k_c such that

$$\beta_0(k_c) \neq 0, \hat{b}_1(k_c) > 0 \text{ and } \sigma \frac{\left(m(k_c)\right)^2}{\beta_0} - \frac{m(k_c)}{\lambda} < 0. \quad (4.7)$$

Now, for $R = R_c$ (i.e $k = k_c$), the eigenvalues of L are $s_1 = 0$,

$$s_2 = -4\pi^2/\lambda \text{ and } s_3 = \sigma \frac{\left(m(k_c)\right)^2}{\beta_0} - \frac{m(k_c)}{\lambda} \text{ (} s_3 < 0 \text{ by virtue of (4.7)).}$$

From the theory of normal forms (see e.g [3]-[5]) we obtain the following normal form for the system

$$\frac{dZ}{dt} = \mu Z - \alpha Z^3 + O(Z^5) \text{ with } \mu = O(R - R_c); \quad (4.8)$$

where we have put $X = (A,B,C) = Z(t) \Psi + Y$ and Y belongs to the stable eigenspace. The fluid flow is obviously stable when $R < R_c$.

Due to the complexity of the coefficients in (4.4), it is extremely difficult to carry further an analytical analysis of the equations without the help of a software of symbolic calculations. Work is being done to compute the coefficients in (3.3) using other appropriate expressions of W in (4.1) such as trigonometric series or orthogonal polynomials. The next step will be then to seek chaotic behavior of the system using a numerical scheme.

References

- [1] P. Bergé, Y. Pomeau & C. Vidal : *L'ordre dans le chaos*. Hermann (1988).
- [2] M. Errafiy & R. Zeytounian, *Int. J. Engng. Sci.* 29(5), 625-635 (1991).
- [3] J. Guckenheimer & P. Holmes : *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag (1983).
- [4] E. Lorenz, *J. Atmos. Sci.*, 20, 130-141 (1963).
- [5] O. Thual : *Generic Instabilities and Non linear Dynamics*. Course given at les Houches Summer School, July 1987.
- [6] R. Zeytounian, *Int. J. Engng. Sci.* 27(11), 1361-1366 (1989).
- [7] R. Zeytounian : *Mécanique des Fluides Fondamentale*. Springer-Verlag (1991).

Appendix

Coefficients in (4.4)

$$\beta_0 = 8 \pi \frac{k}{m} B_2 \operatorname{ch}\left(\frac{k}{2}\right) - m, \quad (1)$$

$$m = \pi^2 + k^2; \lambda = 1 + \frac{\delta}{2}, \quad (2)$$

$$\hat{b}_j = \frac{1}{2} \lambda \delta_{1j} + \tilde{b}_j, \quad \tilde{b}_j = (-1)^p \left[\lambda \alpha_{1(i)}^{(j)} - \delta \alpha_{2(i)}^{(j)} \right], \quad j = 2p + 1, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{1(i)}^{(j)} = & 2 A_1 \sin\left(\frac{j\pi}{2}\right) \left\{ \frac{j\pi}{m_{ij}} \operatorname{ch}\left(\frac{ik}{2}\right) - \operatorname{coth}\left(\frac{k}{2}\right) \frac{j\pi}{m_{ij}} \operatorname{sh}\left(\frac{ik}{2}\right) + \right. \\ & \left. + 4 \operatorname{coth}\left(\frac{k}{2}\right) i k j \frac{\pi}{m_{ij}^2} \operatorname{ch}\left(\frac{ik}{2}\right) \right\}, \end{aligned} \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{2(i)}^{(j)} = & A_1 \operatorname{coth}^2\left(\frac{k}{2}\right) \sin\left(\frac{j\pi}{2}\right) \left\{ \frac{j\pi}{m_{ij}} \operatorname{ch}\left(\frac{ik}{2}\right) - 8 i j \frac{\pi k}{m_{ij}^2} \operatorname{sh}\left(\frac{ik}{2}\right) + \right. \\ & \left. + 8 \frac{j\pi}{m_{ij}^3} \operatorname{ch}\left(\frac{ik}{2}\right) (2 i^2 k^2 - l_{ij}) - \frac{j\pi}{m_{ij}} \operatorname{coth}\left(\frac{k}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{ik}{2}\right) + \right. \\ & \left. + 4 i j \frac{k\pi}{m_{ij}^2} \operatorname{coth}\left(\frac{k}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{ik}{2}\right) \right\}; \end{aligned} \quad (4b)$$

$$m_{ij} = j^2 \pi^2 + i^2 k^2, \quad m = m_{11} = \pi^2 + k^2; \quad l_{ij} = j^2 \pi^2 - i^2 k^2; \quad (5)$$

$$\beta_1^{(1,j)} = -4 A_1 \frac{k}{m_{ij}} \operatorname{coth}\left(\frac{k}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{k}{2}\right) \sin\left(\frac{j\pi}{2}\right) \left\{ 1 + \frac{1}{m_{ij}} (j^2 \pi^2 - k^2) \right\}, \quad (6a)$$

$$\begin{aligned}
\beta_2^{(i,j)} &= \sin\left(\frac{j\pi}{2}\right) \left\{ a_1 \frac{i k}{m_{ij}} \operatorname{sh}\left(\frac{i k}{2}\right) + 2 \frac{a_1}{m_{ij}^2} \operatorname{ch}\left(\frac{i k}{2}\right) \left[j^2 \pi^2 - i^2 k^2 \right] + \right. \\
&+ b_2 \frac{i k}{2 m_{ij}} \operatorname{ch}\left(\frac{i k}{2}\right) + b_2 \frac{2 l_{ij}}{m_{ij}^2} \operatorname{sh}\left(\frac{i k}{2}\right) + \\
&\left. - 4 b_2 \frac{i k}{m_{ij}^3} \operatorname{ch}\left(\frac{i k}{2}\right) \left(3 j^2 \pi^2 - i^2 k^2 \right) \right\} \quad (6b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi} &= - 4 k^2 \left\{ \left(a_1 b_1 + a_2 b_2 \right) 2 \frac{\pi}{m_{22}} - 16 \pi \frac{k}{m_{22}^2} b_1 b_2 \right\} \operatorname{ch}(k) + \\
&- 4 k^2 \operatorname{sh}(k) \left\{ - 16 \pi \frac{k}{m_{22}^2} \left(a_1 b_1 + a_2 b_2 \right) + 4 a_1 a_2 \frac{\pi}{m_{22}} + b_1 b_2 \frac{\pi}{m_{22}} + \right. \\
&- 8 \frac{\pi}{m_{22}^3} \left(4 \pi^2 - 12 k^2 \right) b_1 b_2 \left. \right\} + \operatorname{ch}\left(\frac{k}{2}\right) \left\{ \frac{a_1}{m_{13}} \left(10 \pi^2 k^2 + 2 k^4 \right) + \right. \\
&\frac{a_1}{m} \left(6 \pi^2 k^2 - 2 k^4 \right) \left. \right\} + \operatorname{sh}\left(\frac{k}{2}\right) \left\{ \frac{b_2}{m} \left(3 \pi^2 k^2 - k^4 \right) + \right. \\
&+ \frac{b_2}{m_{13}} \left(5 \pi^2 k^2 + k^4 \right) \left. \right\} + \operatorname{ch}\left(\frac{k}{2}\right) \left\{ 2 b_2 \frac{k}{m^2} \left(- 6 \pi^2 k^2 + \pi^4 + k^4 \right) + \right. \\
&- 2 b_2 \frac{k}{m_{13}^2} \left(2 \pi^2 k^2 + k^4 + 9 \pi^4 \right) \left. \right\} ; \quad (7)
\end{aligned}$$

$$a_1 = B_1 + k A_2 = A_1 \operatorname{coth}^2\left(\frac{k}{2}\right) \left(2 - k \operatorname{coth}\left(\frac{k}{2}\right) \right); \quad (8a)$$

$$a_2 = B_2 + k A_1 = A_1 \left(k - 2 \operatorname{coth}\left(\frac{k}{2}\right) \right); \quad (8b)$$

$$b_1 = k B_2 = - 2 A_1 k \operatorname{coth}\left(\frac{k}{2}\right) ; b_2 = k B_1 = 2 k A_1 \operatorname{coth}^2\left(\frac{k}{2}\right). \quad (9)$$