

USTL

50376
1994
183

LABORATOIRE D'ANALYSE NUMERIQUE ET
D'OPTIMISATION



50376
1994
183

n° d'ordre : 1336

THESE

Nouveau régime

présentée à
l'Université des Sciences et Technologies de Lille

pour obtenir le titre de

DOCTEUR en MATHÉMATIQUES
par

Carole BAHEUX

ALGORITHMES D'IMPLEMENTATION DE LA METHODE DE LANCZOS

soutenue le 1er juillet 1994 devant la commission d'examen

Membres du jury

Président :	J. Van Iseghem
Rapporteurs :	A. Draux
	F. Robert
Membres :	C. Brezinski
	H. Sadok



20 1 23 1

DOYENS HONORAIRES DE L'ANCIENNE FACULTE DES SCIENCES

M. H. LEFEBVRE, M. PARREAU

**PROFESSEURS HONORAIRES DES ANCIENNES FACULTES DE DROIT
ET SCIENCES ECONOMIQUES, DES SCIENCES ET DES LETTRES**

MM. ARNOULT, BONTE, BROCHARD, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, DECUYPER, DEHEUVELS, DEHORS, DION, FAUVEL, FLEURY, GERMAIN, GLACET, GONTIER, KOURGANOFF, LAMOTTE, LASSERRE, LELONG, LHOMME, LIEBAERT, MARTINOT-LAGARDE, MAZET, MICHEL, PEREZ, ROIG, ROSEAU, ROUELLE, SCHILTZ, SAVARD, ZAMANSKI, Mes BEAUJEU, LELONG.

PROFESSEUR EMERITE

M. A. LEBRUN

ANCIENS PRESIDENTS DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

MM. M. PARREAU, J. LOMBARD, M. MIGEON, J. CORTOIS, A. DUBRULLE

PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

M. P. LOUIS

PROFESSEURS - CLASSE EXCEPTIONNELLE

M. CHAMLEY Hervé
M. CONSTANT Eugène
M. ESCAIG Bertrand
M. FOURET René
M. GABILLARD Robert
M. LABLACHE COMBIER Alain
M. LOMBARD Jacques
M. MACKE Bruno

Géotechnique
Electronique
Physique du solide
Physique du solide
Electronique
Chimie
Sociologie
Physique moléculaire et rayonnements atmosphériques

M. MIGEON Michel
M. MONTREUIL Jean
M. PARREAU Michel
M. TRIDOT Gabriel

EUDIL
Biochimie
Analyse
Chimie appliquée

PROFESSEURS - 1ère CLASSE

M. BACCHUS Pierre
M. BIAYS Pierre
M. BILLARD Jean
M. BOILLY Bénoni
M. BONNELLE Jean Pierre
M. BOSCOQ Denis
M. BOUGHON Pierre
M. BOURIQUET Robert
M. BRASSELET Jean Paul
M. BREZINSKI Claude
M. BRIDOUX Michel
M. BRUYELLE Pierre
M. CARREZ Christian
M. CELET Paul
M. COEURE Gérard
M. CORDONNIER Vincent
M. CROSNIER Yves
Mme DACHARRY Monique
M. DAUCHET Max
M. DEBOURSE Jean Pierre
M. DEBRABANT Pierre
M. DECLERCQ Roger
M. DEGAUQUE Pierre
M. DESCHEPPER Joseph
Mme DESSAUX Odile
M. DHAINAUT André
Mme DHAINAUT Nicole
M. DJAFARI Rouhani
M. DORMARD Serge
M. DOUKHAN Jean Claude
M. DUBRULLE Alain
M. DUPOUY Jean Paul
M. DYMENT Arthur
M. FOCT Jacques Jacques
M. FOUQUART Yves
M. FOURNET Bernard
M. FRONTIER Serge
M. GLORIEUX Pierre
M. GOSSELIN Gabriel
M. GOUDMAND Pierre
M. GRANELLE Jean Jacques
M. GRUSON Laurent
M. GUILBAULT Pierre
M. GUILLAUME Jean
M. HECTOR Joseph
M. HENRY Jean Pierre
M. HERMAN Maurice
M. LACOSTE Louis
M. LANGRAND Claude

Astronomie
Géographie
Physique du Solide
Biologie
Chimie-Physique
Probabilités
Algèbre
Biologie Végétale
Géométrie et topologie
Analyse numérique
Chimie Physique
Géographie
Informatique
Géologie générale
Analyse
Informatique
Electronique
Géographie
Informatique
Gestion des entreprises
Géologie appliquée
Sciences de gestion
Electronique
Sciences de gestion
Spectroscopie de la réactivité chimique
Biologie animale
Biologie animale
Physique
Sciences Economiques
Physique du solide
Spectroscopie hertzienne
Biologie
Mécanique
Métallurgie
Optique atmosphérique
Biochimie structurale
Ecologie numérique
Physique moléculaire et rayonnements atmosphériques
Sociologie
Chimie-Physique
Sciences Economiques
Algèbre
Physiologie animale
Microbiologie
Géométrie
Génie mécanique
Physique spatiale
Biologie Végétale
Probabilités et statistiques

M. LATTEUX Michel
 M. LAVEINE Jean Pierre
 Mme LECLERCQ Ginette
 M. LEHMANN Daniel
 Mme LENOBLE Jacqueline
 M. LEROY Jean Marie
 M. LHENAFF René
 M. LHOMME Jean
 M. LOUAGE Francis
 M. LOUCHEUX Claude
 M. LUCQUIN Michel
 M. MAILLET Pierre
 M. MAROUF Nadir
 M. MICHEAU Pierre
 M. PAQUET Jacques
 M. PASZKOWSKI Stéfan
 M. PETIT Francis
 M. PORCHET Maurice
 M. POUZET Pierre
 M. POVY Lucien
 M. PROUVOST Jean
 M. RACZY Ladislav
 M. RAMAN Jean Pierre
 M. SALMER Georges
 M. SCHAMPS Joël
 Mme SCHWARZBACH Yvette
 M. SEGUIER Guy
 M. SIMON Michel
 M. SLIWA Henri
 M. SOMME Jean
 Melle SPIK Geneviève
 M. STANKIEWICZ François
 M. THIEBAULT François
 M. THOMAS Jean Claude
 M. THUMERELLE Pierre
 M. TILLIEU Jacques
 M. TOULOTTE Jean Marc
 M. TREANTON Jean René
 M. TURRELL Georges
 M. VANECCLOO Nicolas
 M. VAST Pierre
 M. VERBERT André
 M. VERNET Philippe
 M. VIDAL Pierre
 M. WALLART Francis
 M. WEINSTEIN Olivier
 M. ZEYTOUNIAN Radyadour

Informatique
 Paléontologie
 Catalyse
 Géométrie
 Physique atomique et moléculaire
 Spectrochimie
 Géographie
 Chimie organique biologique
 Electronique
 Chimie-Physique
 Chimie physique
 Sciences Economiques
 Sociologie
 Mécanique des fluides
 Géologie générale
 Mathématiques
 Chimie organique
 Biologie animale
 Modélisation - calcul scientifique
 Automatique
 Minéralogie
 Electronique
 Sciences de gestion
 Electronique
 Spectroscopie moléculaire
 Géométrie
 Electrotechnique
 Sociologie
 Chimie organique
 Géographie
 Biochimie
 Sciences Economiques
 Sciences de la Terre
 Géométrie - Topologie
 Démographie - Géographie humaine
 Physique théorique
 Automatique
 Sociologie du travail
 Spectrochimie infrarouge et raman
 Sciences Economiques
 Chimie inorganique
 Biochimie
 Génétique
 Automatique
 Spectrochimie infrarouge et raman
 Analyse économique de la recherche et développement
 Mécanique

PROFESSEURS - 2ème CLASSE

M. ABRAHAM Francis
M. ALLAMANDO Etienne
M. ANDRIES Jean Claude
M. ANTOINE Philippe
M. BALL Steven
M. BART André
M. BASSERY Louis
Mme BATTIAU Yvonne
M. BAUSIERE Robert
M. BEGUIN Paul
M. BELLET Jean
M. BERNAGE Pascal
M. BERTHOUD Arnaud
M. BERTRAND Hugues
M. BERZIN Robert
M. BISKUPSKI Gérard
M. BKOUCHE Rudolphe
M. BODARD Marcel
M. BOHIN Jean Pierre
M. BOIS Pierre
M. BOISSIER Daniel
M. BOIVIN Jean Claude
M. BOUCHER Daniel
M. BOUQUELET Stéphane
M. BOUQUIN Henri
M. BROCARD Jacques
Mme BROUSMICHE Claudine
M. BUISINE Daniel
M. CAPURON Alfred
M. CARRE François
M. CATTEAU Jean Pierre
M. CAYATTE Jean Louis
M. CHAPOTON Alain
M. CHARET Pierre
M. CHIVE Maurice
M. COMYN Gérard
Mme CONSTANT Monique
M. COQUERY Jean Marie
M. CORLAT Benjamin
Mme CORSIN Paule
M. CORTOIS Jean
M. COUTURIER Daniel
M. CRAMPON Norbert
M. CURGY Jean Jacques
M. DANGOISSE Didier
M. DE PARIS Jean Claude
M. DECOSTER Didier
M. DEJAEGER Roger
M. DELAHAYE Jean Paul
M. DELORME Pierre
M. DELORME Robert
M. DEMUNTER Paul
Mme DEMUYNCK Claire
M. DENEL Jacques
M. DEPREZ Gilbert

Composants électroniques
Biologie des organismes
Analyse
Génétique
Biologie animale
Génie des procédés et réactions chimiques
Géographie
Systèmes électroniques
Mécanique
Physique atomique et moléculaire
Physique atomique, moléculaire et du rayonnement
Sciences Economiques
Sciences Economiques
Analyse
Physique de l'état condensé et cristallographie
Algèbre
Biologie végétale
Biochimie métabolique et cellulaire
Mécanique
Génie civil
Spectrochimie
Physique
Biologie appliquée aux enzymes
Gestion
Chimie
Paléontologie
Mécanique
Biologie animale
Géographie humaine
Chimie organique
Sciences Economiques
Electronique
Biochimie structurale
Composants électroniques optiques
Informatique théorique
Composants électroniques et optiques
Psychophysiologie
Sciences Economiques
Paléontologie
Physique nucléaire et corpusculaire
Chimie organique
Tectonique géodynamique
Biologie
Physique théorique
Analyse
Composants électroniques et optiques
Electrochimie et Cinétique
Informatique
Physiologie animale
Sciences Economiques
Sociologie
Physique atomique, moléculaire et du rayonnement
Informatique
Physique du solide - cristallographie

M. DERIEUX Jean Claude
 M. DERYCKE Alain
 M. DESCAMPS Marc
 M. DEVRAINNE Pierre
 M. DEWAILLY Jean Michel
 M. DHAMELINCOURT Paul
 M. DI PERSIO Jean
 M. DUBAR Claude
 M. DUBOIS Henri
 M. DUBOIS Jean Jacques
 M. DUBUS Jean Paul
 M. DUPONT Christophe
 M. DUTHOIT Bruno
 Mme DUVAL Anne
 Mme EVRARD Micheline
 M. FAKIR Sabah
 M. FARVACQUE Jean Louis
 M. FAUQUEMBERGUE Renaud
 M. FELIX Yves
 M. FERRIERE Jacky
 M. FISCHER Jean Claude
 M. FONTAINE Hubert
 M. FORSE Michel
 M. GADREY Jean
 M. GAMBLIN André
 M. GOBLOT Rémi
 M. GOURIEROUX Christian
 M. GREGORY Pierre
 M. GREMY Jean Paul
 M. GREVET Patrice
 M. GRIMBLOT Jean
 M. GUELTON Michel
 M. GUICHAOUA André
 M. HAIMAN Georges
 M. HOUDART René
 M. HUEBSCHMANN Johannes
 M. HUTTNER Marc
 M. ISAERT Noël
 M. JACOB Gérard
 M. JACOB Pierre
 M. JEAN Raymond
 M. JOFFRE Patrick
 M. JOURNAL Gérard
 M. KOENIG Gérard
 M. KOSTRUBIEC Benjamin
 M. KREMBEL Jean
 Mme KRIFA Hadjila
 M. LANGEVIN Michel
 M. LASSALLE Bernard
 M. LE MEHAUTE Alain
 M. LEBFEVRE Yannic
 M. LECLERCQ Lucien
 M. LEFEBVRE Jacques
 M. LEFEBVRE Marc
 M. LEFEBVRE Christian
 Mlle LEGRAND Denise
 M. LEGRAND Michel
 M. LEGRAND Pierre
 Mme LEGRAND Solange
 Mme LEHMANN Josiane
 M. LEMAIRE Jean

Microbiologie
 Informatique
 Physique de l'état condensé et cristallographie
 Chimie minérale
 Géographie humaine
 Chimie physique
 Physique de l'état condensé et cristallographie
 Sociologie démographique
 Spectroscopie hertzienne
 Géographie
 Spectrométrie des solides
 Vie de la firme
 Génie civil
 Algèbre
 Génie des procédés et réactions chimiques
 Algèbre
 Physique de l'état condensé et cristallographie
 Composants électroniques
 Mathématiques
 Tectonique - Géodynamique
 Chimie organique, minérale et analytique
 Dynamique des cristaux
 Sociologie
 Sciences économiques
 Géographie urbaine, industrielle et démographie
 Algèbre
 Probabilités et statistiques
 I.A.E.
 Sociologie
 Sciences Economiques
 Chimie organique
 Chimie physique
 Sociologie
 Modélisation, calcul scientifique, statistiques
 Physique atomique
 Mathématiques
 Algèbre
 Physique de l'état condensé et cristallographie
 Informatique
 Probabilités et statistiques
 Biologie des populations végétales
 Vie de la firme
 Spectroscopie hertzienne
 Sciences de gestion
 Géographie
 Biochimie
 Sciences Economiques
 Algèbre
 Embryologie et biologie de la différenciation
 Modélisation, calcul scientifique, statistiques
 Physique atomique, moléculaire et du rayonnement
 Chimie physique
 Physique
 Composants électroniques et optiques
 Pétrologie
 Algèbre
 Astronomie - Météorologie
 Chimie
 Algèbre
 Analyse
 Spectroscopie hertzienne

M. LE MAROIS Henri
 M. LEMOINE Yves
 M. LESCURE François
 M. LESENNE Jacques
 M. LOCQUENEUX Robert
 Mme LOPES Maria
 M. LOSFELD Joseph
 M. LOUAGE Francis
 M. MAHIEU François
 M. MAHIEU Jean Marie
 M. MAIZIERES Christian
 M. MANSY Jean Louis
 M. MAURISSON Patrick
 M. MERIAUX Michel
 M. MERLIN Jean Claude
 M. MESMACQUE Gérard
 M. MESSELYN Jean
 M. MOCHE Raymond
 M. MONTEL Marc
 M. MORCELLET Michel
 M. MORE Marcel
 M. MORTREUX André
 Mme MOUNIER Yvonne
 M. NIAY Pierre
 M. NICOLE Jacques
 M. NOTELET Francis
 M. PALAVIT Gérard
 M. PARSY Fernand
 M. PECQUE Marcel
 M. PERROT Pierre
 M. PERTUZON Emile
 M. PETIT Daniel
 M. PLIHON Dominique
 M. PONSOLLE Louis
 M. POSTAIRE Jack
 M. RAMBOUR Serge
 M. RENARD Jean Pierre
 M. RENARD Philippe
 M. RICHARD Alain
 M. RIETSCH François
 M. ROBINET Jean Claude
 M. ROGALSKI Marc
 M. ROLLAND Paul
 M. ROLLET Philippe
 Mme ROUSSEL Isabelle
 M. ROUSSIGNOL Michel
 M. ROY Jean Claude
 M. SALERNO François
 M. SANCHOLLE Michel
 Mme SANDIG Anna Margarete
 M. SAWERYSYN Jean Pierre
 M. STAROSWIECKI Marcel
 M. STEEN Jean Pierre
 Mme STELLMACHER Irène
 M. STERBOUL François
 M. TAILLIEZ Roger
 M. TANRE Daniel
 M. THERY Pierre
 Mme TJOTTA Jacqueline
 M. TOURSEL Bernard
 M. TREANTON Jean René

Vie de la firme
 Biologie et physiologie végétales
 Algèbre
 Systèmes électroniques
 Physique théorique
 Mathématiques
 Informatique
 Electronique
 Sciences économiques
 Optique - Physique atomique
 Automatique
 Géologie
 Sciences Economiques
 EUDIL
 Chimie
 Génie mécanique
 Physique atomique et moléculaire
 Modélisation, calcul scientifique, statistiques
 Physique du solide
 Chimie organique
 Physique de l'état condensé et cristallographie
 Chimie organique
 Physiologie des structures contractiles
 Physique atomique, moléculaire et du rayonnement
 Spectrochimie
 Systèmes électroniques
 Génie chimique
 Mécanique
 Chimie organique
 Chimie appliquée
 Physiologie animale
 Biologie des populations et écosystèmes
 Sciences Economiques
 Chimie physique
 Informatique industrielle
 Biologie
 Géographie humaine
 Sciences de gestion
 Biologie animale
 Physique des polymères
 EUDIL
 Analyse
 Composants électroniques et optiques
 Sciences Economiques
 Géographie physique
 Modélisation, calcul scientifique, statistiques
 Psychophysiologie
 Sciences de gestion
 Biologie et physiologie végétales

 Chimie physique
 Informatique
 Informatique
 Astronomie - Météorologie
 Informatique
 Génie alimentaire
 Géométrie - Topologie
 Systèmes électroniques
 Mathématiques
 Informatique
 Sociologie du travail

M. TUREL Georges
M. VANDIJK Hendrik
Mme VAN ISEGHEM Jeanine
M. VANDORPE Bernard
M. VASSEUR Christian
M. VASSEUR Jacques
Mme VIANO Marie Claude
M. WACRENIER Jean Marie
M. WARTEL Michel
M. WATERLOT Michel
M. WEICHERT Dieter
M. WERNER Georges
M. WIGNACOURT Jean Pierre
M. WOZNIAK Michel
Mme ZINN JUSTIN Nicole

Spectrochimie infrarouge et raman

Modélisation, calcul scientifique, statistiques
Chimie minérale
Automatique
Biologie

Electronique
Chimie inorganique
géologie générale
Génie mécanique
Informatique théorique

Spectrochimie
Algèbre

TABLE DES MATIERES

Première Partie : Les divers algorithmes

1. Introduction et généralités	3
1.1. Introduction.....	4
1.2. Le pourquoi des relations de récurrence	7
 2. Les relations A_i et B_j.....	9
2.1. Les relations A_i	10
2.1.1. Relation A_1	10
2.1.2. Relation A_2	14
2.1.3. Relation A_3	16
2.1.4. Relation A_4	17
2.1.5. Relation A_5	20
2.1.6. Relation A_6	23
2.1.7. Relation A_7	27
2.1.8. Relation A_8	29
2.1.9. Relation A_9	31
2.1.10. Relation A_{10}	32
2.2. Les relations B_j	34
2.2.1. Relation B_1	34
2.2.2. Relation B_2	38
2.2.3. Relation B_3	40
2.2.4. Relation B_4	41
2.2.5. Relation B_5	43
2.2.6. Relation B_6	47
2.2.7. Relation B_7	50
2.2.8. Relation B_8	52
2.2.9. Relation B_9	55
2.2.10. Relation B_{10}	56
2.3. Conclusion.....	59
 3. Les différentes méthodes A_i / B_j	61
3.1. Méthode A_4	62
3.2. Méthode A_8 / B_1	65
3.3. Méthode A_8 / B_5	77
3.4. Méthode A_8 / B_6	85
3.5. Méthode A_8 / B_8	89
3.6. Méthode A_8 / B_{10}	96
3.7. Méthode A_5 / B_1	100
3.8. Méthode A_5 / B_5	112
3.9. Méthode A_5 / B_6	118
3.10. Méthode A_5 / B_8	122
3.11. Méthode A_5 / B_{10}	126
3.12. Méthode A_1 / B_1	130
3.13. Méthode A_1 / B_5	141
3.14. Méthode A_1 / B_6	151

3.15. Méthode A1 / B8.....	159
3.16. Méthode A1 / B10.....	167

4. Résultats numériques pour les méthodes Ai / Bj.....	175
--	-----

Deuxième partie : Cas de la rupture

5. Les relations Ai et Bj dans le cas de la rupture.....	193
5.1. Relation du type A8	194
5.2. Relation du type B10.....	198
5.3. Relation du type B6.....	200
5.4. Relation du type B8.....	207
5.5. Relation du type A5	210
5.6. Relation du type B5.....	213
5.7. Relation du type A1	218
5.8. Relation du type A4	222
5.9. Conclusion.....	228

6. Méthodes Ai / Bj dans le cas de la rupture.....	231
6.1. Méthode du type A8 / B6	232
6.2. Méthode du type A8 / B10	238
6.3. Méthode du type A8 / B8	243
6.4. Méthode du type A8 / B5	248
6.5. Méthode du type A5 / B5	255
6.6. Méthode du type A5 / B10	262
6.7. Méthode du type A5 / B6	267
6.8. Méthode du type A5 / B8	272

7. Résultats numériques.....	277
------------------------------	-----

Conclusion.....	281
-----------------	-----

Références	285
------------------	-----

On sait depuis longtemps que ce sont les polynômes orthogonaux qui sont sous-jacents à la résolution des systèmes linéaires par la méthode de Lanczos.

Trois méthodes sont connues : Lanczos/Orthomin, Lanczos/Orthores et Lanczos/Orthodir.

Pour Lanczos/Orthomin, on exprime le polynôme orthogonal P_k en fonction de P_{k-1} et de $P_{k-1}^{(1)}$ (polynôme orthogonal adjacent, voir définition plus loin) et on exprime $P_k^{(1)}$ en fonction de $P_{k-1}^{(1)}$ et de P_k .

Pour Lanczos/Orthodir, on exprime le polynôme orthogonal P_k en fonction de P_{k-1} et de $P_{k-1}^{(1)}$ et on exprime $P_k^{(1)}$ en fonction de $P_{k-1}^{(1)}$ et de $P_{k-2}^{(1)}$.

Pour Lanczos/Orthores, on exprime le polynôme orthogonal P_k en fonction de P_{k-1} et de P_{k-2} .

On remarque donc, que dans les trois cas connus, P_k et $P_k^{(1)}$ s'expriment chacun par une relation de récurrence à trois termes.

Les idées directrices de cette thèse sont basées sur :

- ◆ l'étude systématique des relations de récurrence pour P_k , et pour $P_k^{(1)}$, que l'on exprime à chaque fois par une relation de récurrence à trois termes.
- ◆ l'étude des algorithmes qui utilisent les relations précédentes.

Dans la première partie, on s'intéresse aux divers algorithmes.

◇ Le chapitre 1 rappelle les notations et définit les familles adjacentes de polynômes orthogonaux formels $\{ P_k \}$ et $\{ P_k^{(1)} \}$. De plus, dans ce chapitre, nous définissons :

- ◆ les formules A_i , qui expriment P_k en fonction de P_{k-1} et/ou P_{k-2} et/ou $P_k^{(1)}$ et/ou $P_{k-1}^{(1)}$ et/ou $P_{k-2}^{(1)}$.
- ◆ les formules B_j , qui expriment $P_k^{(1)}$ en fonction de $P_{k-1}^{(1)}$ et/ou $P_{k-2}^{(1)}$ et/ou P_k et/ou P_{k-1} et/ou P_{k-2} .

◇ Le chapitre 2 présente toutes les relations possibles et surtout toutes les relations exploitables pour la suite.

On retrouve

- ◆ la relation B_6 qui est utilisée dans la méthode Lanczos/Orthodir.
- ◆ la relation A_8 qui est utilisée dans la méthode Lanczos/Orthodir et Lanczos/Orthomin.
- ◆ la relation A_4 qui est utilisée dans la méthode Lanczos/Orthores.

◇ Le chapitre 3 présente toutes les méthodes possibles et leurs algorithmes.

Sachant que le BCG (Bi Conjugate Gradient)[10] nécessite seulement deux multiplications matrice-vecteur, les algorithmes nécessitant au moins quatre multiplications matrice-vecteur ne seront pas exploités pour les résultats numériques.

◇ Le chapitre 4 présente sous forme de graphiques, les résultats pour les algorithmes nécessitant deux ou trois multiplications matrice-vecteur dans le cas des matrices représentant la discrétisation 5-points de

l'opérateur $-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial}{\partial x}$ sur un rectangle.

La deuxième partie étudie le cas de la rupture des algorithmes qui se produit quand il y a une division par zéro.

◇ Le chapitre 5 met en évidence les différentes relations.

On étudiera uniquement les relations possibles du chapitre 2. On trouve de manière classique les relations du type A_8 et du type B_{10} et on les utilise pour en trouver d'autres dans le cas de la rupture.

◇ Le chapitre 6 présente des méthodes du type A_i / B_j et surtout les algorithmes correspondants, dans le cas de la rupture.

On retrouve les algorithmes MRZ, BMRZ et SMRZ qui ont été définis dans [5].

◇ Le chapitre 7 met en évidence sur un exemple numérique les méthodes précédentes dans le cas de la rupture et surtout les différents sauts possibles.

1. INTRODUCTION ET GENERALITES

Le chapitre 1 rappelle les notations et définit les familles adjacentes de polynômes orthogonaux formels $\{P_k\}$ et $\{P_k^{(1)}\}$. On remarque que, dans les trois cas connus (Lanczos/Orthomin, Lanczos/Orthores et Lanczos/Orthodir), P_k et $P_k^{(1)}$ s'expriment chacun par une relation de récurrence à trois termes.

Pour ces raisons, nous définissons les formules A_i qui expriment P_k et les formules B_j qui expriment $P_k^{(1)}$. Chaque polynôme P_k (ou $P_k^{(1)}$) sera calculé par une combinaison polynomiale de deux polynômes adjacents.

1.1. Introduction

Nous considérons un système de n équations linéaires à n inconnues

$$A x = b \quad (1.1)$$

où $A \in C^{n \times n}$, $b \in C^n$ et $x \in C^n$.

Soient x_0 et y deux vecteurs arbitraires de C^n , $y \neq 0$, et soit (x_k) une suite de vecteurs définie par :

$$x_k - x_0 \in K_k(A, r_0) \quad (1.2)$$

$$\text{et } r_k = b - A x_k \perp K_k(A^*, y). \quad (1.3)$$

où $K_k(A, r) = \text{Span}(r, A r, \dots, A^{k-1} r)$ et où A^* est la transposée conjuguée de A .

De (1.2), $x_k - x_0$ peut être mis sous la forme

$$x_k - x_0 = -\alpha_1 r_0 - \dots - \alpha_k A^{k-1} r_0 \quad (1.4)$$

et par suite, en multipliant par A de chaque côté, et en soustrayant b on a :

$$(A x_k - b) - (A x_0 - b) = -\alpha_1 A r_0 - \dots - \alpha_k A^k r_0.$$

$$\text{D'où} \quad r_k = r_0 + \alpha_1 A r_0 + \dots + \alpha_k A^k r_0. \quad (1.5)$$

La condition d'orthogonalité (1.3) peut s'écrire

$$(A^{*i} y, r_k) = 0 \text{ pour } i = 0, \dots, k-1 \quad (1.6)$$

et avec (1.5), nous obtenons le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} \alpha_1 (y, A r_0) + \dots + \alpha_k (y, A^k r_0) = - (y, r_0) \\ \vdots \\ \alpha_1 (A^{*k-1} y, A r_0) + \dots + \alpha_k (A^{*k-1} y, A^k r_0) = - (A^{*k-1} y, r_0). \end{cases} \quad (1.7)$$

Si le déterminant de ce système est différent de zéro, alors x_k existe et les formules (1.4) et (1.5) déterminent x_k et r_k de façon unique.

Bien sûr, résoudre (1.7) directement n'est pas intéressant et nous allons montrer maintenant comment résoudre ce système récursivement en incrémentant la valeur de k .

$$\text{Soit } P_k(\xi) = 1 + \alpha_1 \xi + \dots + \alpha_k \xi^k \quad (1.8) \text{ alors (1.5) implique : } r_k = P_k(A) r_0. \quad (1.9)$$

$$\text{De plus si nous posons } \forall i \quad c_i = (A^{*i} y, r_0) = (y, A^i r_0) \quad (1.10)$$

et si nous définissons la fonctionnelle linéaire c sur l'espace des polynômes complexes par

$$c(\xi^i) = c_i \text{ pour } i = 0, 1, \dots \quad (1.11)$$

alors le système (1.7) peut s'écrire sous la forme :

$$c(\xi^i P_k(\xi)) = 0 \text{ pour } i = 0, \dots, k-1. \quad (1.12)$$

Ces conditions montrent que P_k est le polynôme de degré au plus k de la famille des polynômes orthogonaux formels par rapport à la fonctionnelle linéaire c , voir Brezinski [2].

Ces polynômes sont normalisés par la condition $P_k(0) = 1$ et P_k existe et est unique si et seulement si le déterminant de Hankel

$$H_k^{(1)} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_k \\ c_2 & c_3 & \cdots & c_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_k & c_{k+1} & \cdots & c_{2k-1} \end{vmatrix}$$

est différent de zéro.

En effet les conditions (1.12) et $P_k(0) = 1$ donnent la formule de P_k avec les déterminants, qui est :

$$P_k(\xi) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \xi & \cdots & \xi^k \\ c_0 & c_1 & \cdots & c_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k-1} & c_k & \cdots & c_{2k-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & \cdots & c_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_k & \cdots & c_{2k-1} \end{vmatrix}}. \quad (1.14)$$

Nous supposons dans les chapitres 2, 3 et 4 que $\forall k, H_k^{(1)} \neq 0$.

Si, pour quelque k , $H_k^{(1)} = 0$, alors P_k n'existe pas et nous étudierons ce cas dans le chapitre 5.

Une méthode de type Lanczos consiste à calculer P_k récursivement, puis r_k et finalement x_k avec $r_k = b - Ax_k$, sans, bien sûr, inverser A . Une telle méthode donne la solution exacte du système (1.1) en au plus n étapes, voir [8].

Considérons maintenant les polynômes unitaires $P_k^{(1)}$ définis par :

$$P_k^{(1)}(\xi) = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_k & c_{k+1} & \cdots & c_{2k} \\ 1 & \xi & \cdots & \xi^k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & \cdots & c_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_k & \cdots & c_{2k-1} \end{vmatrix}}. \quad (1.15)$$

Si nous définissons la fonctionnelle linéaire $c^{(1)}$ par

$$c^{(1)}(\xi^i) = c(\xi^{i+1}) = c_{i+1} \text{ pour } i = 0, 1, \dots$$

alors la relation (1.15) donne :

$$c^{(1)}(\xi^i P_k^{(1)}(\xi)) = 0 \text{ pour } i = 0, \dots, k-1. \quad (1.16)$$

ce qui montre que les polynômes $\{ P_k^{(1)} \}$ forment une famille de polynômes orthogonaux formels par rapport à $c^{(1)}$.

$\{ P_k \}$ et $\{ P_k^{(1)} \}$ sont appelées familles adjacentes de polynômes orthogonaux formels.

De la même manière que le vecteur r_k est défini par $r_k = P_k(A) r_0$, on pose $z_k = P_k^{(1)}(A) r_0$.

1.2. Le pourquoi des relations de récurrence

Notre but est, dans un premier temps, d'exprimer P_k par une combinaison polynomiale de deux polynômes adjacents. Les formules obtenues seront notées A_j .

Dans un deuxième temps, nous allons exprimer $P_k^{(1)}$ par une combinaison polynomiale de deux polynômes adjacents. Les formules obtenues seront notées B_j .

Les différentes formules possibles sont donc les suivantes :

$A_1 : P_k \leftarrow P_{k-2}, P_{k-2}^{(1)}$	$B_1 : P_k^{(1)} \leftarrow P_{k-2}, P_{k-2}^{(1)}$
$A_2 : P_k \leftarrow P_{k-2}, P_{k-1}^{(1)}$	$B_2 : P_k^{(1)} \leftarrow P_{k-2}, P_{k-1}^{(1)}$
$A_3 : P_k \leftarrow P_{k-2}, P_k^{(1)}$	$B_3 : P_k^{(1)} \leftarrow P_{k-2}, P_k$
$A_4 : P_k \leftarrow P_{k-2}, P_{k-1}$	$B_4 : P_k^{(1)} \leftarrow P_{k-2}, P_{k-1}$
$A_5 : P_k \leftarrow P_{k-2}^{(1)}, P_{k-1}$	$B_5 : P_k^{(1)} \leftarrow P_{k-2}^{(1)}, P_{k-1}$
$A_6 : P_k \leftarrow P_{k-2}^{(1)}, P_{k-1}^{(1)}$	$B_6 : P_k^{(1)} \leftarrow P_{k-2}^{(1)}, P_{k-1}^{(1)}$
$A_7 : P_k \leftarrow P_{k-2}^{(1)}, P_k^{(1)}$	$B_7 : P_k^{(1)} \leftarrow P_{k-2}^{(1)}, P_k$
$A_8 : P_k \leftarrow P_{k-1}, P_{k-1}^{(1)}$	$B_8 : P_k^{(1)} \leftarrow P_{k-1}, P_{k-1}^{(1)}$
$A_9 : P_k \leftarrow P_{k-1}, P_k^{(1)}$	$B_9 : P_k^{(1)} \leftarrow P_{k-1}, P_k$
$A_{10} : P_k \leftarrow P_{k-1}^{(1)}, P_{k-1}^{(1)}$	$B_{10} : P_k^{(1)} \leftarrow P_{k-1}^{(1)}, P_k$

où la notation $a \leftarrow b, c$ signifie que $a = b * \text{polynôme} + c * \text{polynôme}$.

Dans un troisième temps, nous allons "combiner" ces formules pour obtenir de nouveaux algorithmes de la forme A_i / B_j , puis nous étudierons les cas de la rupture pour ces algorithmes.

Une étude rapide montre que l'on ne peut pas utiliser :

A_3 / B_3	car	$\begin{array}{l} P_k \leftarrow P_{k-2}, P_k^{(1)} \\ P_k^{(1)} \leftarrow P_{k-2}, P_k \end{array}$	$\begin{array}{l} A_3 \\ B_3 \end{array}$
A_7 / B_7	car	$\begin{array}{l} P_k \leftarrow P_{k-2}^{(1)}, P_k^{(1)} \\ P_k^{(1)} \leftarrow P_{k-2}^{(1)}, P_k \end{array}$	$\begin{array}{l} A_7 \\ B_7 \end{array}$

$$A_9 / B_9 \quad \text{car} \quad \begin{array}{l} P_k \leftarrow P_{k-1}, P_k^{(1)} \\ P_k^{(1)} \leftarrow P_{k-1}, P_k \end{array} \quad \begin{array}{l} A_9 \\ B_9 \end{array}$$

$$A_{10} / B_{10} \quad \text{car} \quad \begin{array}{l} P_k \leftarrow P_{k-1}^{(1)}, P_k^{(1)} \\ P_k^{(1)} \leftarrow P_{k-1}^{(1)}, P_k \end{array} \quad \begin{array}{l} A_{10} \\ B_{10} \end{array}$$

Une méthode pour trouver ces relations A_i et B_j consiste à :

- comparer les degrés

- utiliser les relations d'orthogonalité qui sont :

$$c(\xi^i P_k(\xi)) = 0 \text{ pour } i = 0, \dots, k-1 \quad (2.1)$$

$$c^{(1)}(\xi^i P_k^{(1)}(\xi)) = 0 \text{ pour } i = 0, \dots, k-1 \quad (2.2)$$

- utiliser le fait que :

$$c^{(1)}(\xi^i P_k(\xi)) = c(\xi^{i+1} P_k(\xi)) \text{ pour } i = 0, \dots, k-1. \quad (2.3)$$

Nous supposerons dans les trois chapitres suivants que les P_k sont exactement de degré k . Par suite $c^{(0)}$ est définie.

Soit U_i un polynôme unitaire de degré exactement i . Alors les conditions d'orthogonalité (2.1) et (2.2) deviennent :

$$c(U_i(\xi) P_k(\xi)) = 0 \text{ pour } i = 0, \dots, k-1 \quad (2.4)$$

$$c^{(1)}(U_i(\xi) P_k^{(1)}(\xi)) = 0 \text{ pour } i = 0, \dots, k-1. \quad (2.5)$$

2. LES RELATIONS A_i ET B_j

Le chapitre 2 présente toutes les relations possibles et surtout toutes les relations exploitables pour la suite.

Une méthode pour trouver ces relations A_i et B_j consiste à :

- comparer les degrés des différents polynômes
- utiliser les conditions d'orthogonalité qui ont été définies dans le premier chapitre
- utiliser le fait que : $c^{(1)}(\xi^i P_k(\xi)) = c(\xi^{i+1} P_k(\xi))$ pour $i = 0, 1, \dots$.

En supposant que P_k est exactement de degré k et en notant U_i un polynôme unitaire de degré exactement i , les conditions d'orthogonalité sont :

$$c(U_i(\xi) P_k(\xi)) = 0 \text{ pour } i = 0, \dots, k-1$$

$$c^{(1)}(U_i(\xi) P_k^{(1)}(\xi)) = 0 \text{ pour } i = 0, \dots, k-1.$$

On retrouve ♦ la relation B_6 qui est utilisée dans la méthode Lanczos/Orthodir

♦ la relation A_8 qui est utilisée dans la méthode Lanczos/Orthodir et Lanczos/Orthomin

♦ la relation A_4 qui est utilisée dans la méthode Lanczos/Orthores.

On va démontrer que les relations $A_1, A_4, A_5, A_6, A_8, A_{10}$ et $B_1, B_5, B_6, B_8, B_{10}$ existent mais que seules les relations A_1, A_4, A_5, A_8 , et $B_1, B_5, B_6, B_8, B_{10}$ sont exploitables pour la suite.

2.1. Les relations A_i

2.1.1. Relation A_1

On cherche la relation A_1 c'est à dire $P_k \leftarrow P_{k-2}, P_{k-2}^{(1)}$ pour $k \geq 2$.

Comme le degré des polynômes $P_k, P_{k-2}, P_{k-2}^{(1)}$ est respectivement $k, k-2$ et $k-2$, on a à déterminer les constantes $A_k, B_k, C_k, D_k, E_k, F_k$ telles que :

$$P_k(\xi) = (A_k \xi^2 + B_k \xi + C_k) P_{k-2}(\xi) + (D_k \xi^2 + E_k \xi + F_k) P_{k-2}^{(1)}(\xi).$$

Comme $\forall k, P_k(0) = 1$ on a : $\forall k, 1 = C_k + F_k P_{k-2}^{(1)}(0)$.

Soit U_i un polynôme unitaire de degré exactement i .

$$\text{Alors } \forall i = 0, \dots, k-1 \quad c(U_i(\xi) P_k(\xi)) = 0. \quad (2.4)$$

Or

$$\begin{aligned} c(U_i(\xi) P_k(\xi)) &= A_k c(\xi^2 U_i(\xi) P_{k-2}(\xi)) + B_k c(\xi U_i(\xi) P_{k-2}(\xi)) + C_k c(U_i(\xi) P_{k-2}(\xi)) \\ &\quad + D_k c(\xi^2 U_i(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) + E_k c(\xi U_i(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) + F_k c(U_i(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)). \end{aligned}$$

Par suite, en appliquant (2.3) et (2.4), on a la relation (2.A.1) : pour $i = 0, \dots, k-1$

$$\begin{aligned} A_k c(\xi^2 U_i(\xi) P_{k-2}(\xi)) + B_k c(\xi U_i(\xi) P_{k-2}(\xi)) + C_k c(U_i(\xi) P_{k-2}(\xi)) \\ + D_k c^{(1)}(\xi U_i(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) + E_k c^{(1)}(U_i(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) + F_k c(U_i(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\diamond \text{ Pour } i = 0 \text{ on a : } F_k c(U_0(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) = 0.$$

Comme $c(U_0(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) \neq 0$ on a : $\forall k, F_k = 0$. Par suite $\forall k, C_k = 1$.

$\diamond$ Pour $i = 1, \dots, k-5$ la relation (2.A.1) est toujours vraie.

$$\diamond \text{ Pour } i = k-4 \text{ on a : } A_k c(\xi^2 U_{k-4}(\xi) P_{k-2}(\xi)) = 0.$$

Comme $c(\xi^2 U_{k-4}(\xi) P_{k-2}(\xi)) \neq 0$ on a : $A_k = 0$.

$$\diamond \text{ Pour } i = k-3 \text{ on a : } B_k c(\xi U_{k-3} P_{k-2}) + D_k c^{(1)}(\xi U_{k-3} P_{k-2}^{(1)}) = 0.$$

$\diamond$ Pour $i = k-2$ on a :

$$B_k c(\xi U_{k-2} P_{k-2}) + c(U_{k-2} P_{k-2}) + D_k c^{(1)}(\xi U_{k-2} P_{k-2}^{(1)}) + E_k c^{(1)}(U_{k-2} P_{k-2}^{(1)}) = 0.$$

$\diamond$ Pour $i = k-1$ on a :

$$B_k c(\xi U_{k-1} P_{k-2}) + c(U_{k-1} P_{k-2}) + D_k c^{(1)}(\xi U_{k-1} P_{k-2}^{(1)}) + E_k c^{(1)}(U_{k-1} P_{k-2}^{(1)}) = 0.$$

Par conséquent la relation A_1 est :

$$P_k(\xi) = (B_k \xi + 1) P_{k-2}(\xi) + \xi (D_k \xi + E_k) P_{k-2}^{(1)}(\xi) \text{ avec}$$

$$\begin{cases} B_k c(\xi U_{k-3} P_{k-2}) + D_k c^{(1)}(\xi U_{k-3} P_{k-2}^{(1)}) = 0 \\ B_k c(\xi U_{k-2} P_{k-2}) + D_k c^{(1)}(\xi U_{k-2} P_{k-2}^{(1)}) + E_k c^{(1)}(U_{k-2} P_{k-2}^{(1)}) = -c(U_{k-2} P_{k-2}) \\ B_k c(\xi U_{k-1} P_{k-2}) + D_k c^{(1)}(\xi U_{k-1} P_{k-2}^{(1)}) + E_k c^{(1)}(U_{k-1} P_{k-2}^{(1)}) = -c(U_{k-1} P_{k-2}). \end{cases}$$

Réolvons le système précédent.

Le déterminant de ce système est Δ_k :

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} c(\xi U_{k-3} P_{k-2}) & c^{(1)}(\xi U_{k-3} P_{k-2}^{(1)}) & 0 \\ c(\xi U_{k-2} P_{k-2}) & c^{(1)}(\xi U_{k-2} P_{k-2}^{(1)}) & c^{(1)}(U_{k-2} P_{k-2}^{(1)}) \\ c(\xi U_{k-1} P_{k-2}) & c^{(1)}(\xi U_{k-1} P_{k-2}^{(1)}) & c^{(1)}(U_{k-1} P_{k-2}^{(1)}) \end{vmatrix}$$

Par suite on a :

$$\Delta_k = c(\xi U_{k-3} P_{k-2}) \left[c^{(1)}(\xi U_{k-2} P_{k-2}^{(1)}) c^{(1)}(U_{k-1} P_{k-2}^{(1)}) - c^{(1)}(\xi U_{k-1} P_{k-2}^{(1)}) c^{(1)}(U_{k-2} P_{k-2}^{(1)}) \right] \\ - c^{(1)}(\xi U_{k-3} P_{k-2}^{(1)}) \left[c(\xi U_{k-2} P_{k-2}) c^{(1)}(U_{k-1} P_{k-2}^{(1)}) - c(\xi U_{k-1} P_{k-2}) c^{(1)}(U_{k-2} P_{k-2}^{(1)}) \right].$$

Donc si $\Delta_k \neq 0$, on trouve B_k , D_k et E_k de manière unique. On a :

$$B_k = \frac{\begin{vmatrix} 0 & c^{(1)}(\xi U_{k-3} P_{k-2}^{(1)}) & 0 \\ -c(U_{k-2} P_{k-2}) & c^{(1)}(\xi U_{k-2} P_{k-2}^{(1)}) & c^{(1)}(U_{k-2} P_{k-2}^{(1)}) \\ c(U_{k-1} P_{k-2}) & c^{(1)}(\xi U_{k-1} P_{k-2}^{(1)}) & c^{(1)}(U_{k-1} P_{k-2}^{(1)}) \end{vmatrix}}{\Delta_k}$$

D'où

$$B_k = \frac{c^{(1)}(\xi U_{k-3} P_{k-2}^{(1)}) \left[c(U_{k-2} P_{k-2}) c^{(1)}(U_{k-1} P_{k-2}^{(1)}) - c(U_{k-1} P_{k-2}) c^{(1)}(U_{k-2} P_{k-2}^{(1)}) \right]}{\Delta_k}$$

$$D_k = -B_k \frac{c(\xi U_{k-3} P_{k-2})}{c^{(1)}(\xi U_{k-3} P_{k-2}^{(1)})}$$

$$E_k = \frac{-c(U_{k-2} P_{k-2}) - B_k c(\xi U_{k-2} P_{k-2}) - D_k c^{(1)}(\xi U_{k-2} P_{k-2}^{(1)})}{c^{(1)}(U_{k-2} P_{k-2}^{(1)})}.$$

Nous allons prendre pour U_i différents polynômes de degré i .

1^{er} cas: $U_i(\xi) = \xi^i$.

Alors

$$\Delta_k = c(\xi^{k-2} P_{k-2}) \left[c(\xi^k P_{k-2}^{(1)})^2 - c(\xi^{k+1} P_{k-2}^{(1)}) c(\xi^{k-1} P_{k-2}^{(1)}) \right] \\ - c(\xi^{k-1} P_{k-2}^{(1)}) \left[c(\xi^{k-1} P_{k-2}) c(\xi^k P_{k-2}^{(1)}) - c(\xi^k P_{k-2}) c(\xi^{k-1} P_{k-2}^{(1)}) \right].$$

Si $\Delta_k \neq 0$ on a :

$$B_k = \frac{c(\xi^{k-1} P_{k-2}^{(1)}) \left[c(\xi^{k-2} P_{k-2}) c(\xi^k P_{k-2}^{(1)}) - c(\xi^{k-1} P_{k-2}) c(\xi^{k-1} P_{k-2}^{(1)}) \right]}{\Delta_k}$$

$$D_k = -B_k \frac{c(\xi^{k-2} P_{k-2}(\xi))}{c(\xi^{k-1} P_{k-2}^{(1)}(\xi))}$$

$$E_k = \frac{-c(\xi^{k-2} P_{k-2}(\xi)) - B_k c(\xi^{k-1} P_{k-2}(\xi)) - D_k c(\xi^k P_{k-2}^{(1)}(\xi))}{c(\xi^{k-1} P_{k-2}^{(1)}(\xi))}$$

et $P_k(\xi) = (B_k \xi + 1) P_{k-2}(\xi) + \xi (D_k \xi + E_k) P_{k-2}^{(1)}(\xi).$

2^e cas: $U_i(\xi) = P_i(\xi).$

Alors

$$\Delta_k = c(\xi P_{k-3} P_{k-2}) \left[c^{(1)}(\xi P_{k-2} P_{k-2}^{(1)}) c^{(1)}(P_{k-1} P_{k-2}^{(1)}) - c^{(1)}(\xi P_{k-1} P_{k-2}^{(1)}) c^{(1)}(P_{k-2} P_{k-2}^{(1)}) \right] \\ - c^{(1)}(\xi P_{k-3} P_{k-2}^{(1)}) \left[c(\xi P_{k-2}^2) c^{(1)}(P_{k-1} P_{k-2}^{(1)}) - c(\xi P_{k-1} P_{k-2}) c^{(1)}(P_{k-2} P_{k-2}^{(1)}) \right].$$

Si $\Delta_k \neq 0$ on a, comme $c(P_{k-1}(\xi) P_{k-2}(\xi)) = 0$,

$$B_k = \frac{c^{(1)}(\xi P_{k-3}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) c(P_{k-2}^2(\xi)) c^{(1)}(P_{k-1}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi))}{\Delta_k}$$

$$D_k = -B_k \frac{c(\xi P_{k-3}(\xi) P_{k-2}(\xi))}{c^{(1)}(\xi P_{k-1}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi))}$$

$$E_k = \frac{-B_k c(\xi P_{k-1}(\xi) P_{k-2}(\xi)) - D_k c^{(1)}(\xi P_{k-1}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi))}{c^{(1)}(P_{k-1}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi))}$$

et $P_k(\xi) = (B_k \xi + 1) P_{k-2}(\xi) + \xi (D_k \xi + E_k) P_{k-2}^{(1)}(\xi).$

3^e cas: $U_i(\xi) = P_i^{(1)}(\xi).$

Comme $c^{(1)}(P_{k-1}^{(1)}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) = 0$ et $c(\xi P_{k-1}^{(1)}(\xi) P_{k-2}(\xi)) = c^{(1)}(P_{k-1}^{(1)}(\xi) P_{k-2}(\xi)) = 0$ on a alors :

$$\Delta_k = -c(\xi P_{k-3}^{(1)}(\xi) P_{k-2}(\xi)) c^{(1)}(\xi P_{k-1}^{(1)}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) c^{(1)}(P_{k-2}^{(1)2}(\xi)).$$

Si $\Delta_k \neq 0$ on a :

$$B_k = \frac{-c^{(1)}(\xi P_{k-3}^{(1)} P_{k-2}^{(1)}) c(P_{k-1}^{(1)} P_{k-2}) c^{(1)}(P_{k-2}^{(1)2})}{\Delta_k} = \frac{c(P_{k-1}^{(1)} P_{k-2}) c^{(1)}(\xi P_{k-3}^{(1)} P_{k-2}^{(1)})}{c(\xi P_{k-3}^{(1)} P_{k-2}) c^{(1)}(\xi P_{k-1}^{(1)} P_{k-2}^{(1)})}$$

$$D_k = -B_k \frac{c(\xi P_{k-3}^{(1)}(\xi) P_{k-2}(\xi))}{c^{(1)}(\xi P_{k-3}^{(1)}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi))} = -\frac{c(P_{k-1}^{(1)}(\xi) P_{k-2}(\xi))}{c^{(1)}(\xi P_{k-1}^{(1)}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi))}$$

$$E_k = \frac{-c(P_{k-2}^{(1)}(\xi) P_{k-2}(\xi)) - B_k c(\xi P_{k-2}^{(1)}(\xi) P_{k-2}(\xi)) - D_k c^{(1)}(\xi P_{k-2}^{(1)2}(\xi))}{c^{(1)}(P_{k-2}^{(1)2}(\xi))}$$

et $P_k(\xi) = (B_k \xi + 1) P_{k-2}(\xi) + \xi (D_k \xi + E_k) P_{k-2}^{(1)}(\xi).$

2.1.2. Relation A_2

On cherche la relation A_2 c'est à dire $P_k \leftarrow P_{k-2}, P_{k-1}^{(1)}$ pour $k \geq 2$.

Comme le degré des polynômes $P_k, P_{k-2}, P_{k-1}^{(1)}$ est respectivement $k, k-2$ et $k-1$, on a à déterminer les constantes A_k, B_k, C_k, D_k, E_k telles que :

$$P_k(\xi) = (A_k \xi^2 + B_k \xi + C_k) P_{k-2}(\xi) + (D_k \xi + E_k) P_{k-1}^{(1)}(\xi).$$

Comme $\forall k, P_k(0) = 1$ on a : $\forall k, 1 = C_k + E_k P_{k-2}^{(1)}(0)$.

Soit U_i un polynôme unitaire de degré exactement i .

Alors $\forall i = 0, \dots, k-1 \quad c(U_i(\xi) P_k(\xi)) = 0.$ (2.4)

Or

$$\begin{aligned} c(U_i(\xi) P_k(\xi)) &= A_k c(\xi^2 U_i(\xi) P_{k-2}(\xi)) + B_k c(\xi U_i(\xi) P_{k-2}(\xi)) + C_k c(U_i(\xi) P_{k-2}(\xi)) \\ &\quad + D_k c(\xi U_i(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)) + E_k c(U_i(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)). \end{aligned}$$

Par suite, en appliquant (2.3) et (2.4), on a la relation (2.A.2) : pour $i = 0, \dots, k-1$

$$\begin{aligned} A_k c(\xi^2 U_i(\xi) P_{k-2}(\xi)) + B_k c(\xi U_i(\xi) P_{k-2}(\xi)) + C_k c(U_i(\xi) P_{k-2}(\xi)) \\ + D_k c^{(1)}(U_i(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)) + E_k c(U_i(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)) = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent :

◇ Pour $i = 0$ on a : $E_k c(U_0(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)) = 0$ pour $k \geq 5$.

Comme $c(U_0(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)) \neq 0$ on a : $\forall k \geq 5 \quad E_k = 0$. Par suite $\forall k \geq 5, C_k = 1$.

Pour déterminer les autres constantes, on suppose que $k \geq 5$.

◇ Pour $i = 1, \dots, k-5$ la relation (2.A.2) est toujours vraie.

◇ Pour $i = k-4$ on a : $A_k c(\xi^2 U_{k-4}(\xi) P_{k-2}(\xi)) = 0$.

Comme $c(\xi^2 U_{k-4}(\xi) P_{k-2}(\xi)) \neq 0$ on a : $A_k = 0$.

◇ Pour $i = k-3$ on a : $B_k c(\xi U_{k-3}(\xi) P_{k-2}(\xi)) = 0$.

Comme $c(\xi U_{k-3}(\xi) P_{k-2}(\xi)) \neq 0$ on a : $B_k = 0$.

◇ Pour $i = k-2$ on a : $c(U_{k-2}(\xi) P_{k-2}(\xi)) = 0$ ce qui est faux.

Par conséquent une relation de la forme A_2 n'existe pas pour $k \geq 5$.

2.1.3. Relation A_3

On cherche la relation A_3 c'est à dire $P_k \leftarrow P_{k-2}, P_k^{(1)}$ pour $k \geq 2$.

Comme le degré des polynômes $P_k, P_{k-2}, P_k^{(1)}$ est respectivement $k, k-2$ et k , on a à déterminer les constantes A_k, B_k, C_k, D_k telles que :

$$P_k(\xi) = (A_k \xi^2 + B_k \xi + C_k) P_{k-2}(\xi) + D_k P_k^{(1)}(\xi).$$

Comme $\forall k, P_k(0) = 1$ on a : $\forall k, 1 = C_k + D_k P_k^{(1)}(0)$.

Soit U_i un polynôme unitaire de degré exactement i .

Alors $\forall i = 0, \dots, k-1, c(U_i(\xi) P_k(\xi)) = 0$. (2.4)

Or

$$c(U_i(\xi) P_k(\xi)) = A_k c(\xi^2 U_i(\xi) P_{k-2}(\xi)) + B_k c(\xi U_i(\xi) P_{k-2}(\xi)) + C_k c(U_i(\xi) P_{k-2}(\xi)) + D_k c(U_i(\xi) P_k^{(1)}(\xi)).$$

Par suite, en appliquant (2.3) et (2.4), on a la relation (2.A.3) : pour $i = 0, \dots, k-1$

$$A_k c(\xi^2 U_i(\xi) P_{k-2}(\xi)) + B_k c(\xi U_i(\xi) P_{k-2}(\xi)) + C_k c(U_i(\xi) P_{k-2}(\xi)) + D_k c(U_i(\xi) P_k^{(1)}(\xi)) = 0.$$

Par conséquent :

$$\diamond \text{ Pour } i = 0 \text{ on a : } D_k c(U_0(\xi) P_k^{(1)}(\xi)) = 0 \text{ pour } k \geq 5.$$

Comme $c(U_0(\xi) P_k^{(1)}(\xi)) \neq 0$ on a : $\forall k \geq 5, D_k = 0$. Par suite $\forall k \geq 5, C_k = 1$.

On suppose pour la suite que $k \geq 5$.

$$\diamond \text{ Pour } i = 1, \dots, k-5 \text{ la relation (2.A.3) est toujours vraie.}$$

$$\diamond \text{ Pour } i = k-4 \text{ on a : } A_k c(\xi^2 U_{k-4}(\xi) P_{k-2}(\xi)) = 0.$$

Comme $c(\xi^2 U_{k-4}(\xi) P_{k-2}(\xi)) \neq 0$ on a : $A_k = 0$.

$$\diamond \text{ Pour } i = k-3 \text{ on a : } B_k c(\xi U_{k-3}(\xi) P_{k-2}(\xi)) = 0.$$

Comme $c(\xi U_{k-3}(\xi) P_{k-2}(\xi)) \neq 0$ on a : $B_k = 0$.

On aurait alors $P_k(\xi) = P_{k-2}(\xi)$, ce qui est faux car un polynôme de degré k ne peut pas être égal à un polynôme de degré $k-2$.

Par conséquent une relation de la forme A_3 n'existe pas pour $k \geq 5$.

2.1.4. Relation A_4

On cherche la relation A_4 c'est à dire $P_k \leftarrow P_{k-2}, P_{k-1}$ pour $k \geq 2$.

On remarque que c'est la relation Δ du (QD) algorithme pour les polynômes orthogonaux P_k .

Comme le degré des polynômes P_k, P_{k-2}, P_{k-1} est respectivement $k, k-2$ et $k-1$, on a à déterminer les constantes A_k, B_k, C_k, D_k, E_k telles que :

$$P_k(\xi) = A_k \left[(\xi + B_k) P_{k-1}(\xi) + (C_k \xi^2 + D_k \xi + E_k) P_{k-2}(\xi) \right].$$

Comme $\forall k \quad P_k(0) = 1$ on a : $\forall k, \quad 1 = A_k(B_k + E_k)$.

Soit U_i un polynôme unitaire de degré exactement i .

$$\text{Alors } \forall i = 0, \dots, k-1 \quad c(U_i(\xi) P_k(\xi)) = 0. \quad (2.4)$$

Or

$$c(U_i P_k) = A_k \left[c(\xi U_i P_{k-1}) + B_k c(U_i P_{k-1}) + C_k c(\xi^2 U_i P_{k-2}) + D_k c(\xi U_i P_{k-2}) + E_k c(U_i P_{k-2}) \right].$$

Par suite, en appliquant (2.4), on a la relation (2.A.4) : pour $i = 0, \dots, k-1$

$$c(\xi U_i P_{k-1}) + B_k c(U_i P_{k-1}) + C_k c(\xi^2 U_i P_{k-2}) + D_k c(\xi U_i P_{k-2}) + E_k c(U_i P_{k-2}) = 0.$$

Par conséquent, en supposant $k \geq 5$,

◇ Pour $i = 0, \dots, k-5$ la relation (2.A.4) est toujours vraie.

◇ Pour $i = k-4$ on a : $C_k c(\xi^2 U_{k-4}(\xi) P_{k-2}(\xi)) = 0$.

Comme $c(\xi^2 U_{k-4}(\xi) P_{k-2}(\xi)) \neq 0$ on a : $C_k = 0$.

◇ Pour $i = k-3$ on a : $D_k c(\xi U_{k-3}(\xi) P_{k-2}(\xi)) = 0$.

Comme $c(\xi U_{k-3}(\xi) P_{k-2}(\xi)) \neq 0$ on a : $D_k = 0$.

◇ Pour $i = k-2$ on a : $E_k c(U_{k-2}(\xi) P_{k-2}(\xi)) = -c(\xi U_{k-2}(\xi) P_{k-1}(\xi))$.

Comme $c(U_{k-2}(\xi) P_{k-2}(\xi)) \neq 0$ on a : $E_k = \frac{-c(\xi U_{k-2}(\xi) P_{k-1}(\xi))}{c(U_{k-2}(\xi) P_{k-2}(\xi))}$.

◇ Pour $i = k-1$ on a :

$$c(\xi U_{k-1}(\xi) P_{k-1}(\xi)) + B_k c(U_{k-1}(\xi) P_{k-1}(\xi)) + E_k c(U_{k-1}(\xi) P_{k-2}(\xi)) = 0.$$

Donc comme $c(U_{k-1}(\xi) P_{k-1}(\xi)) \neq 0$ on a :

$$B_k = \frac{-c(\xi U_{k-1}(\xi) P_{k-1}(\xi)) - E_k c(U_{k-1}(\xi) P_{k-2}(\xi))}{c(U_{k-1}(\xi) P_{k-1}(\xi))}.$$

Par conséquent la relation A_4 est :

$$P_k(\xi) = A_k [(\xi + B_k) P_{k-1}(\xi) + E_k P_{k-2}(\xi)]$$

avec

$$E_k = \frac{-c(\xi) U_{k-2}(\xi) P_{k-1}(\xi)}{c(U_{k-2}(\xi) P_{k-2}(\xi))}$$

$$B_k = \frac{-c(\xi) U_{k-1}(\xi) P_{k-1}(\xi) - E_k c(U_{k-1}(\xi) P_{k-2}(\xi))}{c(U_{k-1}(\xi) P_{k-1}(\xi))}$$

$$A_k = \frac{1}{B_k + E_k}.$$

Nous retrouvons le fait que $\{ P_k \}$ est une famille de polynômes orthogonaux formels et qu'une telle famille vérifie une relation de récurrence à trois termes: P_k, P_{k-1}, P_{k-2} .

Choisissons le polynôme U_i .

$$1^{\text{er}} \text{ cas: } U_i(\xi) = \xi^i.$$

Alors

$$E_k = \frac{-c(\xi^{k-1} P_{k-1}(\xi))}{c(\xi^{k-2} P_{k-2}(\xi))}$$

$$B_k = \frac{-c(\xi^k P_{k-1}(\xi)) - E_k c(\xi^{k-1} P_{k-2}(\xi))}{c(\xi^{k-1} P_{k-1}(\xi))}$$

$$A_k = \frac{1}{B_k + E_k}$$

$$\text{et } P_k(\xi) = A_k [(\xi + B_k) P_{k-1}(\xi) + E_k P_{k-2}(\xi)].$$

$$2^{\text{e}} \text{ cas: } U_i(\xi) = P_i(\xi).$$

Alors

$$E_k = \frac{-c(\xi) P_{k-2}(\xi) P_{k-1}(\xi)}{c(P_{k-2}^2(\xi))}$$

$$B_k = \frac{-c(\xi) P_{k-1}^2(\xi)}{c(P_{k-1}^2(\xi))}$$

$$A_k = \frac{1}{B_k + E_k}$$

et $P_k(\xi) = A_k[(\xi + B_k) P_{k-1}(\xi) + E_k P_{k-2}(\xi)].$

3^e cas: $U_i(\xi) = P_i^{(1)}(\xi).$

Alors

$$E_k = \frac{-c(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi) P_{k-1}(\xi)}{c(P_{k-2}^{(1)}(\xi) P_{k-2}(\xi))}$$

$$B_k = \frac{-c(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi) P_{k-1}(\xi) - E_k c(P_{k-1}^{(1)}(\xi) P_{k-2}(\xi))}{c(P_{k-1}^{(1)}(\xi) P_{k-1}(\xi))}$$

$$A_k = \frac{1}{B_k + E_k}$$

et $P_k(\xi) = A_k[(\xi + B_k) P_{k-1}(\xi) + E_k P_{k-2}(\xi)].$

2.1.5. Relation A_5

On cherche la relation A_5 c'est à dire $P_k \leftarrow P_{k-2}^{(1)}, P_{k-1}$ pour $k \geq 2$.

Comme le degré des polynômes $P_k, P_{k-2}^{(1)}, P_{k-1}$ est respectivement $k, k-2$ et $k-1$, on a à déterminer les constantes A_k, B_k, C_k, D_k, E_k telles que :

$$P_k(\xi) = A_k \left[(\xi + B_k) P_{k-1}(\xi) + (C_k \xi^2 + D_k \xi + E_k) P_{k-2}^{(1)}(\xi) \right].$$

Comme $\forall k, P_k(0) = 1$ on a : $\forall k, 1 = A_k [B_k + E_k P_{k-2}^{(1)}(0)]$.

Soit U_i un polynôme unitaire de degré exactement i .

Alors $\forall i = 0, \dots, k-1 \quad c(U_i(\xi) P_k(\xi)) = 0. \quad (2.4)$

Or

$$c(U_i P_k) = A_k \left[c(\xi U_i P_{k-1}) + B_k c(U_i P_{k-1}) + C_k c(\xi^2 U_i P_{k-2}^{(1)}) + D_k c(\xi U_i P_{k-2}^{(1)}) + E_k c(U_i P_{k-2}^{(1)}) \right].$$

Par suite, en appliquant (2.3) et (2.4), on a la relation (2.A.5) : pour $i = 0, \dots, k-1$

$$c(\xi U_i P_{k-1}) + B_k c(U_i P_{k-1}) + C_k c^{(1)}(\xi U_i P_{k-2}^{(1)}) + D_k c^{(1)}(U_i P_{k-2}^{(1)}) + E_k c(U_i P_{k-2}^{(1)}) = 0.$$

Par conséquent, en supposant $k \geq 4$,

$$\diamond \text{ Pour } i = 0 \text{ on a : } E_k c(U_0(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) = 0.$$

Comme $c(U_0(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) \neq 0$ on a : $E_k = 0$. Par suite $1 = A_k B_k$.

$\diamond$ Pour $i = 1, \dots, k-4$ la relation (2.A.5) est toujours vraie.

$$\diamond \text{ Pour } i = k-3 \text{ on a : } C_k c^{(1)}(\xi U_{k-3}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) = 0.$$

Comme $c^{(1)}(\xi U_{k-3}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) \neq 0$ on a : $C_k = 0$.

$$\diamond \text{ Pour } i = k-2 \text{ on a : } c(\xi U_{k-2}(\xi) P_{k-1}(\xi)) + D_k c^{(1)}(U_{k-2}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) = 0.$$

$$\text{Donc } D_k = \frac{-c(\xi U_{k-2}(\xi) P_{k-1}(\xi))}{c(\xi U_{k-2}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi))}.$$

$\diamond$ Pour $i = k-1$ on a :

$$c(\xi U_{k-1}(\xi) P_{k-1}(\xi)) + B_k c(U_{k-1}(\xi) P_{k-1}(\xi)) + D_k c^{(1)}(U_{k-1}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) = 0.$$

Par conséquent la relation A_5 est :

$$P_k(\xi) = A_k \left[(\xi + B_k) P_{k-1}(\xi) + D_k \xi P_{k-2}^{(1)}(\xi) \right]$$

avec

$$D_k = \frac{-c(\xi U_{k-2}(\xi) P_{k-1}(\xi))}{c(\xi U_{k-2}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi))}$$

$$B_k = \frac{-c(\xi U_{k-1}(\xi) P_{k-1}(\xi)) - D_k c(\xi U_{k-1}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi))}{c(U_{k-1}(\xi) P_{k-1}(\xi))}$$

$$A_k = \frac{1}{B_k}$$

Choisissons le polynôme U_i

$$1^{\text{er}} \text{ cas: } U_i(\xi) = \xi^i$$

Alors

$$D_k = \frac{-c(\xi^{k-1} P_{k-1}(\xi))}{c(\xi^{k-2} P_{k-2}^{(1)}(\xi))}$$

$$B_k = \frac{-c(\xi^k P_{k-1}(\xi)) - D_k c(\xi^k P_{k-2}^{(1)}(\xi))}{c(\xi^{k-1} P_{k-1}(\xi))}$$

$$A_k = \frac{1}{B_k}$$

$$\text{et } P_k(\xi) = A_k \left[(\xi + B_k) P_{k-1}(\xi) + D_k \xi P_{k-2}^{(1)}(\xi) \right]$$

$$2^{\text{e}} \text{ cas: } U_i(\xi) = P_i(\xi)$$

Alors

$$D_k = \frac{-c(\xi P_{k-2}(\xi) P_{k-1}(\xi))}{c(\xi P_{k-2}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi))}$$

$$B_k = \frac{-c(\xi P_{k-1}^2(\xi)) - D_k c(\xi P_{k-1}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi))}{c(P_{k-1}^2(\xi))}$$

$$A_k = \frac{1}{B_k}$$

et $P_k(\xi) = A_k \left[(\xi + B_k) P_{k-1}(\xi) + D_k \xi P_{k-2}^{(1)}(\xi) \right].$

3^e cas: $U_i(\xi) = P_i^{(1)}(\xi).$

Alors

$$D_k = \frac{-c(\xi P_{k-2}^{(1)}(\xi) P_{k-1}(\xi))}{c(\xi P_{k-2}^{(1)2}(\xi))}$$

$$B_k = \frac{-c(\xi P_{k-1}^{(1)}(\xi) P_{k-1}(\xi))}{c(P_{k-1}^{(1)}(\xi) P_{k-1}(\xi))}$$

$$A_k = \frac{1}{B_k}$$

et $P_k(\xi) = A_k \left[(\xi + B_k) P_{k-1}(\xi) + D_k \xi P_{k-2}^{(1)}(\xi) \right].$

2.1.6. Relation A_6

On cherche la relation A_6 c'est à dire $P_k \leftarrow P_{k-1}^{(1)}, P_{k-2}^{(1)}$ pour $k \geq 2$.

Comme le degré des polynômes $P_k, P_{k-2}^{(1)}, P_{k-1}^{(1)}$ est respectivement $k, k-2$ et $k-1$, on a à déterminer les constantes A_k, B_k, C_k, D_k, E_k telles que :

$$P_k(\xi) = A_k \left[(\xi + B_k) P_{k-1}^{(1)}(\xi) + (C_k \xi^2 + D_k \xi + E_k) P_{k-2}^{(1)}(\xi) \right].$$

Comme $\forall k, P_k(0) = 1$ on a : $\forall k, 1 = A_k \left[B_k P_{k-1}^{(1)}(0) + E_k P_{k-2}^{(1)}(0) \right]$.

Soit U_i un polynôme unitaire de degré exactement i .

$$\text{Alors } \forall i = 0, \dots, k-1 \quad c(U_i(\xi) P_k(\xi)) = 0. \quad (2.4)$$

Or

$$c(U_i P_k) = A_k \left[c(\xi U_i P_{k-1}^{(1)}) + B_k c(U_i P_{k-1}^{(1)}) + C_k c(\xi^2 U_i P_{k-2}^{(1)}) + D_k c(\xi U_i P_{k-2}^{(1)}) + E_k c(U_i P_{k-2}^{(1)}) \right]$$

Par suite, en appliquant (2.3) et (2.4), on a la relation (2.A.6) : pour $i = 0, \dots, k-1$

$$c^{(1)}(U_i P_{k-1}^{(1)}) + B_k c(U_i P_{k-1}^{(1)}) + C_k c^{(1)}(\xi U_i P_{k-2}^{(1)}) + D_k c^{(1)}(U_i P_{k-2}^{(1)}) + E_k c(U_i P_{k-2}^{(1)}) = 0.$$

Par conséquent, en supposant $k \geq 4$,

$$\diamond \text{ Pour } i = 0 \text{ on a : } B_k c(U_0(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)) + E_k c(U_0(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) = 0.$$

$$\text{Par suite } B_k c(P_{k-1}^{(1)}(\xi)) + E_k c(P_{k-2}^{(1)}(\xi)) = 0.$$

$$\diamond \text{ Pour } i = 1, \dots, k-4 \quad \text{la relation (2.A.6) est toujours vraie.}$$

$$\diamond \text{ Pour } i = k-3 \text{ on a : } C_k c^{(1)}(\xi U_{k-3}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) = 0.$$

$$\text{Comme } c^{(1)}(\xi U_{k-3}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) \neq 0 \text{ on a : } C_k = 0.$$

$$\diamond \text{ Pour } i = k-2 \text{ on a : } D_k c^{(1)}(U_{k-2}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) = 0.$$

$$\text{Comme } c^{(1)}(U_{k-2}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) \neq 0 \text{ on a : } D_k = 0.$$

$$\diamond \text{ Pour } i = k-1 \text{ on a :}$$

$$c^{(1)}(U_{k-1}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)) + B_k c(U_{k-1}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)) + E_k c(U_{k-1}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) = 0.$$

Par conséquent la relation A_6 est :

$$P_k(\xi) = A_k \left[(\xi + B_k) P_{k-1}^{(1)}(\xi) + E_k P_{k-2}^{(1)}(\xi) \right]$$

avec

$$\begin{cases} B_k c(P_{k-1}^{(1)}(\xi)) + E_k c(P_{k-2}^{(1)}(\xi)) = 0 \\ B_k c(U_{k-1}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)) + E_k c(U_{k-1}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) = -c^{(1)}(U_{k-1}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)) \end{cases}$$

$$A_k = \frac{1}{B_k P_{k-1}^{(1)}(0) + E_k P_{k-2}^{(1)}(0)}$$

Réolvons le système précédent.

Le déterminant de ce système est : $\Delta_k = \begin{vmatrix} c(P_{k-1}^{(1)}) & c(P_{k-2}^{(1)}) \\ c(U_{k-1} P_{k-1}^{(1)}) & c(U_{k-1} P_{k-2}^{(1)}) \end{vmatrix}$

Par suite on a : $\Delta_k = c(P_{k-1}^{(1)}) c(U_{k-1} P_{k-2}^{(1)}) - c(P_{k-2}^{(1)}) c(U_{k-1} P_{k-1}^{(1)})$.

Donc si $\Delta_k \neq 0$, on trouve B_k et E_k de manière unique. On a :

$$B_k = \frac{\begin{vmatrix} 0 & c(P_{k-2}^{(1)}) \\ -c^{(1)}(U_{k-1} P_{k-1}^{(1)}) & c(U_{k-1} P_{k-2}^{(1)}) \end{vmatrix}}{\Delta_k} = \frac{c(P_{k-2}^{(1)}) c^{(1)}(U_{k-1} P_{k-1}^{(1)})}{\Delta_k}$$

$$E_k = \frac{-c(P_{k-1}^{(1)})}{c(P_{k-2}^{(1)})} B_k = \frac{c(P_{k-1}^{(1)}) c^{(1)}(U_{k-1} P_{k-1}^{(1)})}{\Delta_k}$$

Choisissons le polynôme U_i .

1^{er} cas: $U_i(\xi) = \xi^i$.

On a : $\Delta_k = c(P_{k-1}^{(1)}) c(\xi^{k-1} P_{k-2}^{(1)}) - c(P_{k-2}^{(1)}) c(\xi^{k-1} P_{k-1}^{(1)})$.

Par suite, comme $c(\xi^{k-1} P_{k-1}^{(1)}) = c^{(1)}(\xi^{k-2} P_{k-1}^{(1)}) = 0$ et comme $c(P_{k-1}^{(1)}) \neq 0$ et $c(\xi^{k-1} P_{k-2}^{(1)}) \neq 0$, on a toujours $\Delta_k \neq 0$.

Alors

$$B_k = \frac{c(P_{k-2}^{(1)}(\xi)) c(\xi^k P_{k-1}^{(1)}(\xi))}{c(P_{k-1}^{(1)}(\xi)) c(\xi^{k-1} P_{k-2}^{(1)}(\xi))}$$

$$E_k = \frac{-c(\xi^k P_{k-1}^{(1)}(\xi))}{c(\xi^{k-1} P_{k-2}^{(1)}(\xi))}$$

$$A_k = \frac{1}{B_k P_{k-1}^{(1)}(0) + E_k P_{k-2}^{(1)}(0)}$$

et $P_k(\xi) = A_k \left[(\xi + B_k) P_{k-1}^{(1)}(\xi) + E_k P_{k-2}^{(1)}(\xi) \right].$

2^e cas: $U_i(\xi) = P_i(\xi).$

On a : $\Delta_k = c(P_{k-1}^{(1)}) c(P_{k-1} P_{k-2}^{(1)}) - c(P_{k-2}^{(1)}) c(P_{k-1} P_{k-1}^{(1)}).$

Par suite, comme $c(P_{k-1} P_{k-2}^{(1)}) = 0$, on a : $\Delta_k = -c(P_{k-2}^{(1)}) c(P_{k-1} P_{k-1}^{(1)}).$

Alors

$$B_k = \frac{-c(\xi P_{k-1}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi))}{c(P_{k-1}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi))}$$

$$E_k = \frac{c(P_{k-1}^{(1)}(\xi)) c(\xi P_{k-1}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi))}{c(P_{k-2}^{(1)}(\xi)) c(P_{k-1}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi))}$$

$$A_k = \frac{1}{B_k P_{k-1}^{(1)}(0) + E_k P_{k-2}^{(1)}(0)}$$

et $P_k(\xi) = A_k \left[(\xi + B_k) P_{k-1}^{(1)}(\xi) + E_k P_{k-2}^{(1)}(\xi) \right].$

3^e cas: $U_i(\xi) = P_i^{(1)}(\xi).$

On a : $\Delta_k = c(P_{k-1}^{(1)}) c(P_{k-1}^{(1)} P_{k-2}^{(1)}) - c(P_{k-2}^{(1)}) c(P_{k-1}^{(1)2}).$

Si $\Delta_k \neq 0$, on a alors :

$$B_k = \frac{c(P_{k-2}^{(1)}(\xi)) c(\xi P_{k-1}^{(1)2}(\xi))}{\Delta_k}$$

$$E_k = \frac{-c(P_{k-1}^{(1)}(\xi)) c(\xi P_{k-1}^{(1)2}(\xi))}{\Delta_k}$$

$$A_k = \frac{1}{B_k P_{k-1}^{(1)}(0) + E_k P_{k-2}^{(1)}(0)}$$

et
$$P_k(\xi) = A_k \left[(\xi + B_k) P_{k-1}^{(1)}(\xi) + E_k P_{k-2}^{(1)}(\xi) \right]$$

Remarque: Le but de ces formules est, comme nous l'avons dit dans l'introduction, de trouver $r_k = P_k(A)r_0$ et x_k , avec $r_k = b - Ax_k$, sans évidemment inverser A . Nous avons également précisé que $z_k = P_k^{(1)}r_0$.

Si nous appliquons ceci à la relation A_6 , nous avons :

$$r_k = A_k \left[A z_{k-1} + B_k z_{k-1} + E_k z_{k-2} \right].$$

Par suite on peut connaître r_k mais pour connaître x_k il faudrait inverser A . En effet on a :

$$Ax_k = b - A_k \left[Az_{k-1} + B_k z_{k-1} + E_k z_{k-2} \right].$$

Par conséquent la relation A_6 n'est pas utilisable pour calculer x_k (sans inverser A).

2.1.7. Relation A_7

On cherche la relation A_7 c'est à dire $P_k \leftarrow P_{k-2}^{(1)}, P_k^{(1)}$ pour $k \geq 2$.

Comme le degré des polynômes $P_k, P_{k-2}^{(1)}, P_k^{(1)}$ est respectivement $k, k-2$ et k , on a à déterminer les constantes A_k, B_k, C_k, D_k telles que :

$$P_k(\xi) = (A_k \xi^2 + B_k \xi + C_k) P_{k-2}^{(1)}(\xi) + D_k P_k^{(1)}(\xi).$$

Comme $\forall k, P_k(0) = 1$ on a : $\forall k, 1 = C_k P_{k-2}^{(1)}(0) + D_k P_k^{(1)}(0)$.

Soit U_i un polynôme unitaire de degré exactement i .

$$\text{Alors } \forall i = 0, \dots, k-1 \quad c(U_i(\xi) P_k(\xi)) = 0. \quad (2.4)$$

Or

$$c(U_i(\xi) P_k(\xi)) = A_k c(\xi^2 U_i(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) + B_k c(\xi U_i(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) + C_k c(U_i(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) + D_k c(U_i(\xi) P_k^{(1)}(\xi)).$$

Par suite, en appliquant (2.3) et (2.4), on a la relation (2.A.7) : pour $i = 0, \dots, k-1$

$$A_k c^{(1)}(\xi U_i(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) + B_k c^{(1)}(U_i(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) + C_k c(U_i(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) + D_k c(U_i(\xi) P_k^{(1)}(\xi)) = 0.$$

Par conséquent, en supposant $k \geq 4$,

$$\diamond \text{ Pour } i = 0 \text{ on a : } C_k c(U_0(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) + D_k c(U_0(\xi) P_k^{(1)}(\xi)) = 0.$$

$$\diamond \text{ Pour } i = 1, \dots, k-4 \quad \text{la relation (2.A.7) est toujours vraie.}$$

$$\diamond \text{ Pour } i = k-3 \text{ on a : } A_k c^{(1)}(\xi U_{k-3}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) = 0.$$

$$\text{Comme } c^{(1)}(\xi U_{k-3}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) \neq 0 \text{ on a : } A_k = 0.$$

$$\diamond \text{ Pour } i = k-2 \text{ on a : } B_k c^{(1)}(U_{k-2}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) = 0.$$

$$\text{Comme } c^{(1)}(U_{k-2}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) \neq 0 \text{ on a : } B_k = 0.$$

$$\diamond \text{ Pour } i = k-1 \text{ on a : } C_k c(U_{k-1}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) = 0.$$

$$\text{Comme } c(U_{k-1}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) \neq 0 \text{ on a : } C_k = 0.$$

Par suite la relation $C_k c(U_0(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) + D_k c(U_0(\xi) P_k^{(1)}(\xi)) = 0$ devient :

$$D_k c(U_0(\xi) P_k^{(1)}(\xi)) = 0.$$

Comme $c(U_0(\xi) P_k^{(1)}(\xi)) = 0$ on a : $D_k = 0$.

Par suite on a $P_k(\xi) = 0$. Or ceci est impossible car $\forall k \quad P_k(0) = 1$.

Par conséquent une relation de la forme A7 n'existe pas.

2.1.8. Relation A_8

On cherche la relation A_8 c'est à dire $P_k \leftarrow P_{k-1}^{(1)}, P_{k-1}$ pour $k \geq 2$.
On remarque que c'est la relation (q) du (QD) algorithme.

Comme le degré des polynômes $P_k, P_{k-1}^{(1)}, P_{k-1}$ est respectivement $k, k-1$ et $k-1$, on a à déterminer les constantes A_k, B_k, C_k, D_k telles que :

$$P_k(\xi) = (A_k \xi + B_k) P_{k-1}^{(1)}(\xi) + (C_k \xi + D_k) P_{k-1}(\xi).$$

Comme $\forall k, P_k(0) = 1$ on a : $\forall k, 1 = B_k P_{k-1}^{(1)}(0) + D_k$.

Soit U_i un polynôme unitaire de degré exactement i .

Alors $\forall i = 0, \dots, k-1 \quad c(U_i(\xi) P_k(\xi)) = 0. \quad (2.4)$

Or

$$c(U_i(\xi) P_k(\xi)) = A_k c(\xi U_i(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)) + B_k c(U_i(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)) + C_k (\xi U_i(\xi) P_{k-1}(\xi)) + D_k c(U_i(\xi) P_{k-1}(\xi)).$$

Par suite, en appliquant (2.3) et (2.4), on a la relation (2.A.8) : pour $i = 0, \dots, k-1$

$$A_k c^{(1)}(U_i(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)) + B_k c(U_i(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)) + C_k (\xi U_i(\xi) P_{k-1}(\xi)) + D_k c(U_i(\xi) P_{k-1}(\xi)) = 0.$$

Par conséquent, en supposant $k \geq 3$,

$$\diamond \text{ Pour } i = 0 \text{ on a : } B_k c(U_0(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)) = 0.$$

Par suite, comme $c(U_0(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)) \neq 0$, on a : $B_k = 0$.

Comme $B_k = 0$ et $1 = B_k P_{k-1}^{(1)}(0) + D_k$, on a : $D_k = 1$.

$\diamond$ Pour $i = 1, \dots, k-3$ la relation (2.A.8) est toujours vraie.

$$\diamond \text{ Pour } i = k-2 \text{ on a : } C_k c(\xi U_{k-2}(\xi) P_{k-1}(\xi)) = 0.$$

Comme $c(\xi U_{k-2}(\xi) P_{k-1}(\xi)) \neq 0$ on a : $C_k = 0$.

$$\diamond \text{ Pour } i = k-1 \text{ on a : } A_k c^{(1)}(U_{k-1}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)) + c(U_{k-1}(\xi) P_{k-1}(\xi)) = 0.$$

$$\text{Donc } A_k = \frac{-c(U_{k-1}(\xi) P_{k-1}(\xi))}{c(\xi U_{k-1}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi))}.$$

Par conséquent la relation A_g est :

$$P_k(\xi) = A_k \xi P_{k-1}^{(1)}(\xi) + P_{k-1}(\xi)$$

avec

$$A_k = \frac{-c(U_{k-1}(\xi) P_{k-1}(\xi))}{c(\xi U_{k-1}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi))}.$$

Choisissons le polynôme U_i .

$$1^{\text{er}} \text{ cas: } U_i(\xi) = \xi.$$

$$\text{Alors } A_k = \frac{-c(\xi^{k-1} P_{k-1}(\xi))}{c(\xi^k P_{k-1}^{(1)}(\xi))}$$

$$\text{et } P_k(\xi) = A_k \xi P_{k-1}^{(1)}(\xi) + P_{k-1}(\xi).$$

$$2^{\text{e}} \text{ cas: } U_i(\xi) = P_i(\xi).$$

$$\text{Alors } A_k = \frac{-c(P_{k-1}^2(\xi))}{c(\xi P_{k-1}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi))}$$

$$\text{et } P_k(\xi) = A_k \xi P_{k-1}^{(1)}(\xi) + P_{k-1}(\xi).$$

$$3^{\text{e}} \text{ cas: } U_i(\xi) = P_i^{(1)}(\xi).$$

$$\text{Alors } A_k = \frac{-c(P_{k-1}^{(1)} P_{k-1}(\xi))}{c(\xi P_{k-1}^{(1)2}(\xi))}$$

$$\text{et } P_k(\xi) = A_k \xi P_{k-1}^{(1)}(\xi) + P_{k-1}(\xi).$$

2.1.9. Relation A₉

On cherche la relation A₉ c'est à dire $P_k \leftarrow P_{k-1}, P_k^{(1)}$ pour $k \geq 2$.

Comme le degré des polynômes $P_k, P_{k-1}, P_k^{(1)}$ est respectivement $k, k-1$ et k , on a à déterminer les constantes A_k, B_k, C_k telles que :

$$P_k(\xi) = (A_k \xi + B_k) P_{k-1}(\xi) + C_k P_k^{(1)}(\xi).$$

Comme $\forall k, P_k(0) = 1$ on a : $\forall k, 1 = B_k + C_k P_k^{(1)}(0)$.

Soit U_i un polynôme unitaire de degré exactement i .

Alors $\forall i = 0, \dots, k-1 \quad c(U_i(\xi) P_k(\xi)) = 0. \quad (2.4)$

Or

$$c(U_i(\xi) P_k(\xi)) = A_k c(\xi U_i(\xi) P_{k-1}(\xi)) + B_k c(U_i(\xi) P_{k-1}(\xi)) + C_k c(U_i(\xi) P_k^{(1)}(\xi)).$$

Par suite, en appliquant (2.4), on a la relation (2.A.9) : pour $i = 0, \dots, k-1$

$$A_k c(\xi U_i(\xi) P_{k-1}(\xi)) + B_k c(U_i(\xi) P_{k-1}(\xi)) + C_k c(U_i(\xi) P_k^{(1)}(\xi)) = 0.$$

Par conséquent, en supposant $k \geq 3$,

$$\diamond \text{ Pour } i = 0 \text{ on a : } C_k c(U_0(\xi) P_k^{(1)}(\xi)) = 0.$$

Par suite, comme $c(U_0(\xi) P_k^{(1)}(\xi)) \neq 0$, on a : $C_k = 0$.

$$\text{Comme } \forall k \quad 1 = B_k + C_k P_k^{(1)}(0) \text{ on a : } B_k = 1.$$

$\diamond$ Pour $i = 1, \dots, k-3$ la relation (2.A.9) est toujours vraie.

$$\diamond \text{ Pour } i = k-2 \text{ on a : } A_k c(\xi U_{k-2}(\xi) P_{k-1}(\xi)) = 0.$$

Comme $c(\xi U_{k-2}(\xi) P_{k-1}(\xi)) \neq 0$ on a : $A_k = 0$.

$$\diamond \text{ Pour } i = k-1 \text{ on a : } c(\xi U_{k-1}(\xi) P_{k-1}(\xi)) = 0 \quad \text{ce qui est faux.}$$

Par conséquent une relation de la forme A₉ n'existe pas.

2.1.10. Relation A_{10}

On cherche la relation A_{10} c'est à dire $P_k \leftarrow P_{k-1}^{(1)}, P_k^{(1)}$ pour $k \geq 2$.

Comme le degré des polynômes $P_k, P_{k-1}^{(1)}, P_k^{(1)}$ est respectivement $k, k-1$ et k , on a à déterminer les constantes A_k, B_k, C_k telles que :

$$P_k(\xi) = A_k \left[P_k^{(1)}(\xi) + (B_k \xi + C_k) P_{k-1}^{(1)}(\xi) \right].$$

Comme $\forall k, P_k(0) = 1$ on a : $\forall k, 1 = A_k \left[P_k^{(1)}(0) + C_k P_{k-1}^{(1)}(0) \right].$

Soit U_i un polynôme unitaire de degré exactement i .

Alors $\forall i = 0, \dots, k-1 \quad c(U_i(\xi) P_k(\xi)) = 0. \quad (2.4)$

Or $c(U_i(\xi) P_k(\xi)) = A_k \left[c(U_i(\xi) P_k^{(1)}(\xi)) + B_k c(\xi U_i(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)) + C_k c(U_i(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)) \right].$

Par suite, en appliquant (2.3) et (2.4), on a la relation (2.A.10) : pour $i = 0, \dots, k-1$

$$c(U_i(\xi) P_k^{(1)}(\xi)) + B_k c^{(1)}(U_i(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)) + C_k c(U_i(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)) = 0.$$

Par conséquent, en supposant $k \geq 2$,

◇ Pour $i = 0$ on a : $c(U_0(\xi) P_k^{(1)}(\xi)) + C_k c(U_0(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)) = 0.$

Par suite, comme $c(U_0(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)) \neq 0$ on a : $C_k = \frac{-c(P_k^{(1)}(\xi))}{c(P_{k-1}^{(1)}(\xi))}.$

◇ Pour $i = 1, \dots, k-2$ la relation (2.A.10) est toujours vraie.

◇ Pour $i = k-1$ on a : $B_k c^{(1)}(U_{k-1}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)) = 0.$

Comme $c^{(1)}(U_{k-1}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)) \neq 0$ on a : $B_k = 0.$

Par conséquent la relation A_{10} est :

$$P_k(\xi) = A_k [P_k^{(1)}(\xi) + C_k P_{k-1}^{(1)}(\xi)]$$

avec

$$C_k = \frac{-c(P_k^{(1)}(\xi))}{c(P_{k-1}^{(1)}(\xi))}$$

$$A_k = \frac{1}{P_k^{(1)}(0) + C_k P_{k-1}^{(1)}(0)}$$

Pour n'importe quel polynôme unitaire U_i de degré exactement i , on a :

$$C_k = \frac{-c(P_k^{(1)}(\xi))}{c(P_{k-1}^{(1)}(\xi))}$$

$$A_k = \frac{1}{P_k^{(1)}(0) + C_k P_{k-1}^{(1)}(0)}$$

$$\text{et } P_k(\xi) = A_k [P_k^{(1)}(\xi) + C_k P_{k-1}^{(1)}(\xi)].$$

Remarque : En reprenant les mêmes notations que dans la remarque de la relation A_6 on a :

$$r_k = A_k [z_k + C_k z_{k-1}].$$

Comme $r_k = b - A x_k$, on a : $A x_k = b - A_k [z_k + C_k z_{k-1}]$.

Par suite on peut connaître r_k mais on ne peut pas connaître x_k sans inverser A .

Par conséquent la relation A_{10} n'est pas utilisable pour calculer x_k (sans inverser A).

2.2. Les relations B_j

2.2.1. Relation B_1

On cherche la relation B_1 c'est à dire $P_k^{(1)} \leftarrow P_{k-2}, P_{k-2}^{(1)}$ pour $k \geq 2$.

Comme le degré des polynômes $P_k^{(1)}, P_{k-2}, P_{k-2}^{(1)}$ est respectivement $k, k-2$ et $k-2$, on a à déterminer les constantes $A_k, B_k, C_k, D_k, E_k, F_k$ telles que :

$$P_k^{(1)}(\xi) = (A_k \xi^2 + B_k \xi + C_k) P_{k-2}(\xi) + (D_k \xi^2 + E_k \xi + F_k) P_{k-2}^{(1)}(\xi).$$

Soit U_i un polynôme unitaire de degré exactement i .

$$\text{Alors } \forall i = 0, \dots, k-1 \quad c^{(1)}(U_i(\xi) P_k^{(1)}(\xi)) = 0. \quad (2.5)$$

Or

$$\begin{aligned} c^{(1)}(U_i P_k^{(1)}) &= A_k c^{(1)}(\xi^2 U_i P_{k-2}) + B_k c^{(1)}(\xi U_i P_{k-2}) + C_k c^{(1)}(U_i P_{k-2}) \\ &\quad + D_k c^{(1)}(\xi^2 U_i P_{k-2}^{(1)}) + E_k c^{(1)}(\xi U_i P_{k-2}^{(1)}) + F_k c^{(1)}(U_i P_{k-2}^{(1)}). \end{aligned}$$

Par suite, en appliquant (2.3) et (2.5), on a la relation (2.B.1) : pour $i = 0, \dots, k-1$

$$\begin{aligned} A_k c(\xi^3 U_i P_{k-2}) + B_k c(\xi^2 U_i P_{k-2}) + C_k c(\xi U_i P_{k-2}) + D_k c^{(1)}(\xi^2 U_i P_{k-2}^{(1)}) \\ + E_k c^{(1)}(\xi U_i P_{k-2}^{(1)}) + F_k c^{(1)}(U_i P_{k-2}^{(1)}) = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, en supposant $k \geq 6$, on a :

◇ Pour $i = 0, \dots, k-6$ la relation (2.B.1) est toujours vraie.

◇ Pour $i = k-5$ on a : $A_k c(\xi^3 U_{k-5}(\xi) P_{k-2}(\xi)) = 0$.

Comme $c(\xi^3 U_{k-5}(\xi) P_{k-2}(\xi)) \neq 0$ on a : $A_k = 0$.

Comme $\forall k \quad P_k^{(1)}$ est unitaire, on doit avoir : $D_k = 1$.

◇ Pour $i = k-4$ on a : $B_k c(\xi^2 U_{k-4}(\xi) P_{k-2}(\xi)) + c^{(1)}(\xi^2 U_{k-4}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) = 0$.

Par suite, comme $c(\xi U_{k-4}(\xi) P_{k-2}(\xi)) \neq 0$, on a : $B_k = \frac{-c(\xi^3 U_{k-4}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi))}{c(\xi^2 U_{k-4}(\xi) P_{k-2}(\xi))}$.

◇ Pour $i = k-3$ on a :

$$B_k c(\xi^2 U_{k-3} P_{k-2}) + C_k c(\xi U_{k-3} P_{k-2}) + c^{(1)}(\xi^2 U_{k-3} P_{k-2}^{(1)}) + E_k c^{(1)}(\xi U_{k-3} P_{k-2}^{(1)}) = 0.$$

◇ Pour $i = k-2$ on a :

$$B_k c(\xi^2 U_{k-2} P_{k-2}) + C_k c(\xi U_{k-2} P_{k-2}) + c^{(1)}(\xi^2 U_{k-2} P_{k-2}^{(1)}) \\ + E_k c^{(1)}(\xi U_{k-2} P_{k-2}^{(1)}) + F_k c^{(1)}(U_{k-2} P_{k-2}^{(1)}) = 0.$$

◇ Pour $i = k - 1$ on a :

$$B_k c(\xi^2 U_{k-1} P_{k-2}) + C_k c(\xi U_{k-1} P_{k-2}) + c^{(1)}(\xi^2 U_{k-1} P_{k-2}^{(1)}) \\ + E_k c^{(1)}(\xi U_{k-1} P_{k-2}^{(1)}) + F_k c^{(1)}(U_{k-1} P_{k-2}^{(1)}) = 0.$$

Par conséquent la relation B_1 est :

$$P_k^{(1)}(\xi) = (B_k \xi + C_k) P_{k-2}(\xi) + (\xi^2 + E_k \xi + F_k) P_{k-2}^{(1)}(\xi)$$

avec $B_k = \frac{-c(\xi^3 U_{k-4}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi))}{c(\xi^2 U_{k-4}(\xi) P_{k-2}(\xi))}$ et

$$\begin{cases} C_k c(\xi U_{k-3} P_{k-2}) + E_k c^{(1)}(\xi U_{k-3} P_{k-2}^{(1)}) = -c^{(1)}(\xi^2 U_{k-3} P_{k-2}^{(1)}) - B_k c(\xi^2 U_{k-3} P_{k-2}) \\ C_k c(\xi U_{k-2} P_{k-2}) + E_k c^{(1)}(\xi U_{k-2} P_{k-2}^{(1)}) + F_k c^{(1)}(U_{k-2} P_{k-2}^{(1)}) = -c^{(1)}(\xi^2 U_{k-2} P_{k-2}^{(1)}) - B_k c(\xi^2 U_{k-2} P_{k-2}) \\ C_k c(\xi U_{k-1} P_{k-2}) + E_k c^{(1)}(\xi U_{k-1} P_{k-2}^{(1)}) + F_k c^{(1)}(U_{k-1} P_{k-2}^{(1)}) = -c^{(1)}(\xi^2 U_{k-1} P_{k-2}^{(1)}) - B_k c(\xi^2 U_{k-1} P_{k-2}). \end{cases}$$

Réolvons le système précédent.

Le déterminant de ce système est Δ_k :

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} c(\xi U_{k-3} P_{k-2}) & c^{(1)}(\xi U_{k-3} P_{k-2}^{(1)}) & 0 \\ c(\xi U_{k-2} P_{k-2}) & c^{(1)}(\xi U_{k-2} P_{k-2}^{(1)}) & c^{(1)}(U_{k-2} P_{k-2}^{(1)}) \\ c(\xi U_{k-1} P_{k-2}) & c^{(1)}(\xi U_{k-1} P_{k-2}^{(1)}) & c^{(1)}(U_{k-1} P_{k-2}^{(1)}) \end{vmatrix}.$$

Par suite on a :

$$\Delta_k = c(\xi U_{k-3} P_{k-2}) \left[c^{(1)}(\xi U_{k-2} P_{k-2}^{(1)}) c^{(1)}(U_{k-1} P_{k-2}^{(1)}) - c^{(1)}(\xi U_{k-1} P_{k-2}^{(1)}) c^{(1)}(U_{k-2} P_{k-2}^{(1)}) \right] \\ - c^{(1)}(\xi U_{k-3} P_{k-2}^{(1)}) \left[c(\xi U_{k-2} P_{k-2}) c^{(1)}(U_{k-1} P_{k-2}^{(1)}) - c(\xi U_{k-1} P_{k-2}) c^{(1)}(U_{k-2} P_{k-2}^{(1)}) \right].$$

Donc si $\Delta_k \neq 0$, on trouve C_k , E_k et F_k de manière unique.

Nous allons prendre pour U_i différents polynômes de degré i .

1^{er} cas: $U_i(\xi) = \xi^i$.

$$\text{Alors } B_k = \frac{-c(\xi^{k-1} P_{k-2}^{(1)}(\xi))}{c(\xi^{k-2} P_{k-2}^{(1)}(\xi))}.$$

De plus

$$\begin{aligned} \Delta_k = c(\xi^{k-2} P_{k-2}) & \left[c(\xi^k P_{k-2}^{(1)})^2 - c(\xi^{k+1} P_{k-2}^{(1)}) c(\xi^{k-1} P_{k-2}^{(1)}) \right] \\ & - c(\xi^{k-1} P_{k-2}^{(1)}) \left[c(\xi^{k-1} P_{k-2}) c(\xi^k P_{k-2}^{(1)}) - c(\xi^k P_{k-2}) c(\xi^{k-1} P_{k-2}^{(1)}) \right]. \end{aligned}$$

Si $\Delta_k \neq 0$ on a :

$$\begin{aligned} C_k = \frac{1}{\Delta_k} & \left\{ c(\xi^{k-1} P_{k-2}^{(1)}) \left[c(\xi^{k+1} P_{k-2}^{(1)}) + B_k c(\xi^k P_{k-2}) \right] c(\xi^k P_{k-2}^{(1)}) - \left[c(\xi^{k+2} P_{k-2}^{(1)}) + B_k c(\xi^{k+1} P_{k-2}) \right] c(\xi^{k-1} P_{k-2}^{(1)}) \right\} \\ & - \left\{ c(\xi^k P_{k-2}^{(1)}) + B_k c(\xi^{k-1} P_{k-2}^{(1)}) \right\} \left\{ c(\xi^k P_{k-2}^{(1)})^2 - c(\xi^{k+1} P_{k-2}^{(1)}) c(\xi^{k-1} P_{k-2}^{(1)}) \right\} \end{aligned}$$

$$E_k = \frac{-c(\xi^k P_{k-2}^{(1)}(\xi)) - B_k c(\xi^{k-1} P_{k-2}^{(1)}(\xi)) - C_k c(\xi^{k-2} P_{k-2}^{(1)}(\xi))}{c(\xi^{k-1} P_{k-2}^{(1)}(\xi))}$$

$$F_k = \frac{-c(\xi^{k+1} P_{k-2}^{(1)}) - B_k c(\xi^k P_{k-2}) - C_k c(\xi^{k-1} P_{k-2}) - E_k c(\xi^k P_{k-2}^{(1)})}{c(\xi^{k-1} P_{k-2}^{(1)})}$$

$$\text{et } P_k^{(1)}(\xi) = (B_k \xi + C_k) P_{k-2}(\xi) + (\xi^2 + E_k \xi + F_k) P_{k-2}^{(1)}(\xi).$$

$$2^{\text{e}} \text{ cas: } U_i(\xi) = P_i(\xi).$$

$$\text{Alors } B_k = \frac{-c(\xi^3 P_{k-3}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi))}{c(\xi^2 P_{k-4}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi))}.$$

De plus

$$\begin{aligned} \Delta_k = c(\xi P_{k-3} P_{k-2}) & \left[c^{(1)}(\xi P_{k-2} P_{k-2}^{(1)}) c^{(1)}(P_{k-1} P_{k-2}^{(1)}) - c^{(1)}(\xi P_{k-1} P_{k-2}^{(1)}) c^{(1)}(P_{k-2} P_{k-2}^{(1)}) \right] \\ & - c^{(1)}(\xi P_{k-3} P_{k-2}^{(1)}) \left[c(\xi P_{k-2}^2) c^{(1)}(P_{k-1} P_{k-2}^{(1)}) - c(\xi P_{k-1} P_{k-2}) c^{(1)}(P_{k-2} P_{k-2}^{(1)}) \right]. \end{aligned}$$

Si $\Delta_k \neq 0$ on a :

$$\begin{aligned} C_k = \frac{1}{\Delta_k} & \left\{ c^{(1)}(\xi^2 P_{k-3} P_{k-2}^{(1)}) + B_k c(\xi^2 P_{k-3} P_{k-2}) \right\} c^{(1)}(\xi P_{k-1} P_{k-2}^{(1)}) c^{(1)}(P_{k-2} P_{k-2}^{(1)}) \\ & - c^{(1)}(\xi P_{k-2} P_{k-2}^{(1)}) c^{(1)}(P_{k-1} P_{k-2}^{(1)}) \left\{ c^{(1)}(\xi P_{k-3} P_{k-2}^{(1)}) \right\} - c^{(1)}(\xi P_{k-3} P_{k-2}^{(1)}) \left[c^{(1)}(P_{k-2} P_{k-2}^{(1)}) \right. \\ & \left. \left\{ c^{(1)}(\xi^2 P_{k-1} P_{k-2}^{(1)}) + B_k c(\xi^2 P_{k-1} P_{k-2}) \right\} - \left\{ c^{(1)}(\xi^2 P_{k-2} P_{k-2}^{(1)}) + B_k c(\xi^2 P_{k-2}^2) \right\} c^{(1)}(P_{k-1} P_{k-2}^{(1)}) \right] \end{aligned}$$

$$E_k = \frac{-c^{(1)}(\xi^2 P_{k-3} P_{k-2}^{(1)}) - B_k c(\xi^2 P_{k-3} P_{k-2}) - C_k c(\xi P_{k-3} P_{k-2})}{c^{(1)}(\xi P_{k-3} P_{k-2}^{(1)})}$$

$$F_k = \frac{-c^{(1)}(\xi^2 P_{k-2} P_{k-2}^{(1)}) - B_k c(\xi^2 P_{k-2}^2) - C_k c(\xi P_{k-2}^2) - E_k c^{(1)}(\xi P_{k-2} P_{k-2}^{(1)})}{c^{(1)}(P_{k-2} P_{k-2}^{(1)})}$$

et $P_k^{(1)}(\xi) = (B_k \xi + C_k) P_{k-2}(\xi) + (\xi^2 + E_k \xi + F_k) P_{k-2}^{(1)}(\xi).$

3^e cas: $U_i(\xi) = P_i^{(1)}(\xi).$

Alors $B_k = \frac{-c(\xi^3 P_{k-4}^{(1)}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi))}{c(\xi^2 P_{k-4}^{(1)}(\xi) P_{k-2}(\xi))}.$

De plus comme $c^{(1)}(P_{k-1}^{(1)}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) = 0$ et $c(\xi P_{k-1}^{(1)}(\xi) P_{k-2}(\xi)) = c^{(1)}(P_{k-1}^{(1)}(\xi) P_{k-2}(\xi)) = 0$, le système devient :

$$\begin{cases} C_k c(\xi P_{k-3}^{(1)} P_{k-2}) + E_k c^{(1)}(\xi P_{k-3}^{(1)} P_{k-2}^{(1)}) = -c^{(1)}(\xi^2 P_{k-3}^{(1)} P_{k-2}^{(1)}) - B_k c(\xi^2 P_{k-3}^{(1)} P_{k-2}) \\ C_k c(\xi P_{k-2}^{(1)} P_{k-2}) + E_k c^{(1)}(\xi P_{k-2}^{(1)2}) + F_k c^{(1)}(P_{k-2}^{(1)2}) = -c^{(1)}(\xi^2 P_{k-2}^{(1)2}) - B_k c(\xi^2 P_{k-2}^{(1)} P_{k-2}) \\ E_k c^{(1)}(\xi P_{k-1}^{(1)} P_{k-2}^{(1)}) = -c^{(1)}(\xi^2 P_{k-1}^{(1)} P_{k-2}^{(1)}) - B_k c(\xi^2 P_{k-1}^{(1)} P_{k-2}). \end{cases}$$

Par suite on a :

$$E_k = \frac{-c(\xi^3 P_{k-1}^{(1)} P_{k-2}^{(1)}) - B_k c(\xi^2 P_{k-1}^{(1)} P_{k-2})}{c(\xi^2 P_{k-1}^{(1)} P_{k-2}^{(1)})}$$

$$C_k = \frac{-c(\xi^3 P_{k-3}^{(1)} P_{k-2}^{(1)}) - B_k c(\xi^2 P_{k-3}^{(1)} P_{k-2}) - E_k c(\xi^2 P_{k-3}^{(1)} P_{k-2}^{(1)})}{c(\xi P_{k-3}^{(1)} P_{k-2})}$$

$$F_k = \frac{-c(\xi^3 P_{k-2}^{(1)2}) - B_k c(\xi^2 P_{k-2}^{(1)} P_{k-2}) - C_k c(\xi P_{k-2}^{(1)} P_{k-2}) - E_k c(\xi^2 P_{k-2}^{(1)2})}{c(\xi P_{k-2}^{(1)2})}$$

et $P_k^{(1)}(\xi) = (B_k \xi + C_k) P_{k-2}(\xi) + (\xi^2 + E_k \xi + F_k) P_{k-2}^{(1)}(\xi).$

2.2.2. Relation B_2

On cherche la relation B_2 c'est à dire $P_k^{(1)} \leftarrow P_{k-2}, P_{k-1}^{(1)}$ pour $k \geq 2$.

Comme le degré des polynômes $P_k^{(1)}, P_{k-2}, P_{k-1}^{(1)}$ est respectivement $k, k-2$ et $k-1$, on a à déterminer les constantes A_k, B_k, C_k, D_k, E_k telles que :

$$P_k^{(1)}(\xi) = (A_k \xi^2 + B_k \xi + C_k) P_{k-2}(\xi) + (D_k \xi + E_k) P_{k-1}^{(1)}(\xi).$$

Soit U_i un polynôme unitaire de degré exactement i .

$$\text{Alors } \forall i = 0, \dots, k-1, \quad c^{(1)}(U_i(\xi) P_k^{(1)}(\xi)) = 0. \quad (2.5)$$

Or

$$\begin{aligned} c^{(1)}(U_i P_k^{(1)}) &= A_k c^{(1)}(\xi^2 U_i P_{k-2}) + B_k c^{(1)}(\xi U_i P_{k-2}) + C_k c^{(1)}(U_i P_{k-2}) \\ &\quad + D_k c^{(1)}(\xi U_i P_{k-1}^{(1)}) + E_k c^{(1)}(U_i P_{k-1}^{(1)}). \end{aligned}$$

Par suite, en appliquant (2.3) et (2.5), on a la relation (2.B.2) : pour $i = 0, \dots, k-1$

$$\begin{aligned} A_k c(\xi^3 U_i(\xi) P_{k-2}(\xi)) + B_k c(\xi^2 U_i(\xi) P_{k-2}(\xi)) + C_k c(U_i(\xi) P_{k-2}(\xi)) \\ + D_k c^{(1)}(\xi U_i(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)) + E_k c^{(1)}(U_i(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)) = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, en supposant $k \geq 6$,

◇ Pour $i = 0, \dots, k-6$ la relation (2.B.2) est toujours vraie.

$$\text{◇ Pour } i = k-5 \text{ on a : } A_k c(\xi^3 U_{k-5}(\xi) P_{k-2}(\xi)) = 0.$$

$$\text{Comme } c(\xi^3 U_{k-5}(\xi) P_{k-2}(\xi)) \neq 0 \text{ on a : } A_k = 0.$$

$$\text{◇ Pour } i = k-4 \text{ on a : } B_k c(\xi^2 U_{k-4}(\xi) P_{k-2}(\xi)) = 0.$$

$$\text{Comme } c(\xi^2 U_{k-4}(\xi) P_{k-2}(\xi)) \neq 0 \text{ on a : } B_k = 0.$$

$$\text{◇ Pour } i = k-3 \text{ on a : } C_k c(\xi U_{k-3}(\xi) P_{k-2}(\xi)) = 0.$$

$$\text{Comme } c(\xi U_{k-3}(\xi) P_{k-2}(\xi)) \neq 0 \text{ on a : } C_k = 0.$$

$$\text{◇ Pour } i = k-2 \text{ on a : } D_k c^{(1)}(\xi U_{k-2}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)) = 0.$$

$$\text{Comme } c^{(1)}(\xi U_{k-2}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)) \neq 0 \text{ on a : } D_k = 0.$$

$$\text{◇ Pour } i = k-1 \text{ on a : } E_k c^{(1)}(U_{k-1}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)) = 0.$$

$$\text{Comme } c^{(1)}(U_{k-1}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)) \neq 0 \text{ on a : } E_k = 0.$$

Par suite on aura : $\forall k \geq 6 \quad \forall \xi \quad P_k^{(1)}(\xi) = 0$, ce qui est faux.

Par conséquent une relation de la forme B_2 n'existe pas pour $k \geq 6$.

2.2.3. Relation B_3

On cherche la relation B_3 c'est à dire $P_k^{(1)} \leftarrow P_{k-2}, P_k$ pour $k \geq 2$.

Comme le degré des polynômes $P_k^{(1)}, P_{k-2}, P_k$ est respectivement $k, k-2$ et k , on a à déterminer les constantes A_k, B_k, C_k, D_k telles que :

$$P_k^{(1)}(\xi) = (A_k \xi^2 + B_k \xi + C_k) P_{k-2}(\xi) + D_k P_k(\xi).$$

Soit U_i un polynôme unitaire de degré exactement i .

$$\text{Alors } \forall i = 0, \dots, k-1, \quad c^{(1)}(U_i(\xi) P_k^{(1)}(\xi)) = 0. \quad (2.5)$$

Or

$$c^{(1)}(U_i P_k^{(1)}) = A_k c^{(1)}(\xi^2 U_i P_{k-2}) + B_k c^{(1)}(\xi U_i P_{k-2}) + C_k c^{(1)}(U_i P_{k-2}) + D_k c^{(1)}(U_i P_k).$$

Par suite, en appliquant (2.3) et (2.5), on a la relation (2.B.3) : pour $i = 0, \dots, k-1$

$$A_k c(\xi^3 U_i P_{k-2}) + B_k c(\xi^2 U_i P_{k-2}) + C_k c(\xi U_i P_{k-2}) + D_k c(\xi U_i P_k) = 0.$$

On suppose pour la suite que $k \geq 6$.

◇ Pour $i = 0, \dots, k-6$ la relation (2.B.3) est toujours vraie.

$$\text{◇ Pour } i = k-5 \text{ on a : } A_k c(\xi^3 U_{k-5}(\xi) P_{k-2}(\xi)) = 0.$$

$$\text{Comme } c(\xi^3 U_{k-5}(\xi) P_{k-2}(\xi)) \neq 0 \text{ on a : } A_k = 0.$$

$$\text{◇ Pour } i = k-4 \text{ on a : } B_k c(\xi^2 U_{k-4}(\xi) P_{k-2}(\xi)) = 0.$$

$$\text{Comme } c(\xi^2 U_{k-4}(\xi) P_{k-2}(\xi)) \neq 0 \text{ on a : } B_k = 0.$$

$$\text{◇ Pour } i = k-3 \text{ on a : } C_k c(\xi U_{k-3}(\xi) P_{k-2}(\xi)) = 0.$$

$$\text{Comme } c(\xi U_{k-3}(\xi) P_{k-2}(\xi)) \neq 0 \text{ on a : } C_k = 0.$$

◇ Pour $i = k-2$ la relation est vraie.

$$\text{◇ Pour } i = k-1 \text{ on a : } D_k c(\xi U_{k-1}(\xi) P_k(\xi)) = 0.$$

$$\text{Comme } c(\xi U_{k-1}(\xi) P_k(\xi)) \neq 0 \text{ on a : } D_k = 0.$$

Par suite on aura : $\forall k \geq 6 \quad \forall \xi \quad P_k^{(1)}(\xi) = 0$, ce qui est faux.

Par conséquent une relation de la forme B_3 n'existe pas pour $k \geq 6$.

2.2.4. Relation B_4

On cherche la relation B_4 c'est à dire $P_k^{(1)} \leftarrow P_{k-2}, P_{k-1}$ pour $k \geq 2$.

Comme le degré des polynômes $P_k^{(1)}, P_{k-2}, P_{k-1}$ est respectivement $k, k-2$ et $k-1$, on a à déterminer les constantes A_k, B_k, C_k, D_k, E_k telles que :

$$P_k^{(1)}(\xi) = (A_k \xi^2 + B_k \xi + C_k) P_{k-2}(\xi) + (D_k \xi + E_k) P_{k-1}(\xi).$$

Soit U_i un polynôme unitaire de degré exactement i .

$$\text{Alors } \forall i = 0, \dots, k-1, \quad c^{(1)}(U_i(\xi) P_k^{(1)}(\xi)) = 0. \quad (2.5)$$

Or

$$\begin{aligned} c^{(1)}(U_i P_k^{(1)}) &= A_k c^{(1)}(\xi^2 U_i P_{k-2}) + B_k c^{(1)}(\xi U_i P_{k-2}) + C_k c^{(1)}(U_i P_{k-2}) \\ &\quad + D_k c^{(1)}(\xi U_i P_{k-1}) + E_k c^{(1)}(U_i P_{k-1}). \end{aligned}$$

Par suite, en appliquant (2.3) et (2.5), on a la relation (2.B.4) : pour $i = 0, \dots, k-1$

$$\begin{aligned} A_k c^{(1)}(\xi^2 U_i(\xi) P_{k-2}(\xi)) + B_k c^{(1)}(\xi U_i(\xi) P_{k-2}(\xi)) + C_k c^{(1)}(U_i(\xi) P_{k-2}(\xi)) \\ + D_k c^{(1)}(\xi U_i(\xi) P_{k-1}(\xi)) + E_k c^{(1)}(U_i(\xi) P_{k-1}(\xi)) = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, en supposant $k \geq 6$,

◇ Pour $i = 0, \dots, k-6$ la relation (2.B.4) est toujours vraie.

◇ Pour $i = k-5$ on a : $A_k c(\xi^3 U_{k-5}(\xi) P_{k-2}(\xi)) = 0$.

Comme $c(\xi^3 U_{k-5}(\xi) P_{k-2}(\xi)) \neq 0$ on a : $A_k = 0$.

◇ Pour $i = k-4$ on a : $B_k c(\xi^2 U_{k-4}(\xi) P_{k-2}(\xi)) = 0$.

Comme $c(\xi^2 U_{k-4}(\xi) P_{k-2}(\xi)) \neq 0$ on a : $B_k = 0$.

◇ Pour $i = k-3$ on a : $C_k c(\xi U_{k-3}(\xi) P_{k-2}(\xi)) + D_k c(\xi^2 U_{k-3}(\xi) P_{k-1}(\xi)) = 0$.

◇ Pour $i = k-2$ on a :

$$C_k c(\xi U_{k-2}(\xi) P_{k-2}(\xi)) + D_k c(\xi^2 U_{k-2}(\xi) P_{k-1}(\xi)) + E_k c(\xi U_{k-2}(\xi) P_{k-1}(\xi)) = 0.$$

◇ Pour $i = k-1$ on a :

$$C_k c(\xi U_{k-1}(\xi) P_{k-2}(\xi)) + D_k c(\xi^2 U_{k-1}(\xi) P_{k-1}(\xi)) + E_k c(\xi U_{k-1}(\xi) P_{k-1}(\xi)) = 0.$$

Par suite les constantes C_k, D_k et E_k doivent vérifier le système :

$$\begin{cases} C_k c(\xi U_{k-3} P_{k-2}) + D_k c(\xi^2 U_{k-3} P_{k-1}) = 0 \\ C_k c(\xi U_{k-2} P_{k-2}) + D_k c(\xi^2 U_{k-2} P_{k-1}) + E_k c(\xi U_{k-2} P_{k-1}) = 0 \\ C_k c(\xi U_{k-1} P_{k-2}) + D_k c(\xi^2 U_{k-1} P_{k-1}) + E_k c(\xi U_{k-1} P_{k-1}) = 0. \end{cases}$$

Donc on a : $C_k = D_k = E_k = 0$.

Par suite on aura : $\forall k \geq 6 \quad \forall \xi \quad P_k^{(1)}(\xi) = 0$, ce qui est faux.

Par conséquent une relation de la forme B_4 n'existe pas.

2.2.5. Relation B₅

On cherche la relation B₅ c'est à dire $P_k^{(1)} \leftarrow P_{k-1}, P_{k-2}^{(1)}$ pour $k \geq 2$.

Comme le degré des polynômes $P_k^{(1)}, P_{k-1}, P_{k-2}^{(1)}$ est respectivement $k, k-1$ et $k-2$, on a à déterminer les constantes A_k, B_k, C_k, D_k, E_k telles que :

$$P_k^{(1)} = A_k \left[(\xi + B_k) P_{k-1}(\xi) + (C_k \xi^2 + D_k \xi + E_k) P_{k-2}^{(1)}(\xi) \right].$$

Soit U_i un polynôme unitaire de degré exactement i .

$$\text{Alors } \forall i = 0, \dots, k-1 \quad c^{(1)}(U_i(\xi) P_k^{(1)}(\xi)) = 0. \quad (2.5)$$

Or

$$c^{(1)}(U_i P_k^{(1)}) = A_k \left[c^{(1)}(\xi U_i P_{k-1}) + B_k c^{(1)}(U_i P_{k-1}) + C_k c^{(1)}(\xi^2 U_i P_{k-2}^{(1)}) \right. \\ \left. + D_k c^{(1)}(\xi U_i P_{k-2}^{(1)}) + E_k c^{(1)}(U_i P_{k-2}^{(1)}) \right].$$

Par suite, en appliquant (2.3) et (2.5), on a la relation (2.B.5) : pour $i = 0, \dots, k-1$

$$c(\xi^2 U_i(\xi) P_{k-1}(\xi)) + B_k c(\xi U_i(\xi) P_{k-1}(\xi)) + C_k c^{(1)}(\xi^2 U_i(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) \\ + D_k c^{(1)}(\xi U_i(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) + E_k c^{(1)}(U_i(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) = 0.$$

Par conséquent, en supposant $k \geq 5$,

◇ Pour $i = 0, \dots, k-5$ la relation (2.B.5) est toujours vraie.

◇ Pour $i = k-4$ on a : $C_k c^{(1)}(\xi^2 U_{k-4}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) = 0$.

Comme $c^{(1)}(\xi^2 U_{k-4}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) \neq 0$ on a : $C_k = 0$.

Par suite, comme $P_k^{(1)}$ est unitaire, on a : $1 = A_k a_{k-1}$ où $P_{k-1}(\xi) = a_{k-1} \xi^{k-1} + \dots + 1$.

◇ Pour $i = k-3$ on a : $c(\xi^2 U_{k-3}(\xi) P_{k-1}(\xi)) + D_k c^{(1)}(\xi U_{k-3}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) = 0$.

Donc, comme $c^{(1)}(\xi U_{k-3}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) \neq 0$ on a : $D_k = \frac{-c(\xi^2 U_{k-3}(\xi) P_{k-1}(\xi))}{c^{(1)}(\xi U_{k-3}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi))}$.

◇ Pour $i = k-2$ on a :

$$c(\xi^2 U_{k-2}(\xi) P_{k-1}(\xi)) + B_k c(\xi U_{k-2}(\xi) P_{k-1}(\xi)) + D_k c^{(1)}(\xi U_{k-2}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) \\ + E_k c^{(1)}(U_{k-2}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) = 0.$$

◇ Pour $i = k - 1$ on a :

$$c(\xi^2 U_{k-1}(\xi) P_{k-1}(\xi)) + B_k c(\xi U_{k-1}(\xi) P_{k-1}(\xi)) + D_k c^{(1)}(\xi U_{k-1}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) \\ + E_k c^{(1)}(U_{k-1}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) = 0.$$

Par conséquent la relation B_5 est :

$$P_k^{(1)} = A_k \left[(\xi + B_k) P_{k-1}(\xi) + (D_k \xi + E_k) P_{k-2}^{(1)}(\xi) \right]$$

avec

$$D_k = \frac{-c(\xi^2 U_{k-3}(\xi) P_{k-1}(\xi))}{c(\xi^2 U_{k-3}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi))}$$

$$A_k = \frac{1}{a_{k-1}} \quad \text{où } a_{k-1} \text{ est définie par } P_{k-1}(\xi) = a_{k-1} \xi^{k-1} + \dots + 1$$

$$\begin{cases} B_k c(\xi U_{k-2} P_{k-1}) + E_k c^{(1)}(U_{k-2} P_{k-2}^{(1)}) = -c(\xi^2 U_{k-2} P_{k-1}) - D_k c^{(1)}(\xi U_{k-2} P_{k-2}^{(1)}) \\ B_k c(\xi U_{k-1} P_{k-1}) + E_k c^{(1)}(U_{k-1} P_{k-2}^{(1)}) = -c(\xi^2 U_{k-1} P_{k-1}) - D_k c^{(1)}(\xi U_{k-1} P_{k-2}^{(1)}). \end{cases}$$

Choisissons le polynôme U_j .

$$1^{\text{er}} \text{ cas: } U_i(\xi) = \xi^i.$$

Alors

$$D_k = \frac{-c(\xi^{k-1} P_{k-1}(\xi))}{c(\xi^{k-1} P_{k-2}^{(1)}(\xi))}$$

$$A_k = \frac{1}{a_{k-1}}$$

$$\begin{cases} B_k c(\xi^{k-1} P_{k-1}) + E_k c(\xi^{k-1} P_{k-2}^{(1)}) = -c(\xi^k P_{k-1}) - D_k c(\xi^k P_{k-2}^{(1)}) \\ B_k c(\xi^k P_{k-1}) + E_k c(\xi^k P_{k-2}^{(1)}) = -c(\xi^{k+1} P_{k-1}) - D_k c(\xi^{k+1} P_{k-2}^{(1)}). \end{cases}$$

Par suite

$$B_k = \frac{c(\xi^{k-1} P_{k-2}^{(1)}) \left\{ c(\xi^{k+1} P_{k-1}) + D_k c(\xi^{k+1} P_{k-2}^{(1)}) \right\} - c(\xi^k P_{k-2}^{(1)}) \left\{ c(\xi^k P_{k-1}) + D_k c(\xi^k P_{k-2}^{(1)}) \right\}}{c(\xi^{k-1} P_{k-1}) c(\xi^k P_{k-2}^{(1)}) - c(\xi^k P_{k-1}) c(\xi^{k-1} P_{k-2}^{(1)})}$$

$$E_k = \frac{-c(\xi^k P_{k-1}(\xi)) - D_k c(\xi^k P_{k-2}^{(1)}(\xi)) - B_k c(\xi^{k-1} P_{k-1}(\xi))}{c(\xi^{k-1} P_{k-2}^{(1)}(\xi))}$$

$$\text{et } P_k^{(1)} = A_k \left[(\xi + B_k) P_{k-1}(\xi) + (D_k \xi + E_k) P_{k-2}^{(1)}(\xi) \right].$$

2^e cas: $U_i(\xi) = P_i(\xi)$.

Alors

$$D_k = \frac{-c(\xi^2 P_{k-3}(\xi) P_{k-1}(\xi))}{c(\xi^2 P_{k-3}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi))}$$

$$A_k = \frac{1}{a_{k-1}}$$

$$\begin{cases} B_k c(\xi P_{k-2} P_{k-1}) + E_k c^{(1)}(P_{k-2} P_{k-2}^{(1)}) = -c(\xi^2 P_{k-2} P_{k-1}) - D_k c^{(1)}(\xi P_{k-2} P_{k-2}^{(1)}) \\ B_k c(\xi P_{k-1}^2) + E_k c^{(1)}(P_{k-1} P_{k-2}^{(1)}) = -c(\xi^2 P_{k-1}^2) - D_k c^{(1)}(\xi P_{k-1} P_{k-2}^{(1)}) \end{cases}$$

Par suite

$$B_k = \frac{c(\xi P_{k-2} P_{k-2}^{(1)}) \left\{ c(\xi^2 P_{k-1}^2) + D_k c(\xi^2 P_{k-1} P_{k-2}^{(1)}) \right\} - c(\xi P_{k-1} P_{k-2}^{(1)}) \left\{ c(\xi^2 P_{k-2} P_{k-1}) + D_k c(\xi^2 P_{k-2}^{(1)} P_{k-2}) \right\}}{c(\xi P_{k-2} P_{k-1}) c(\xi P_{k-1} P_{k-2}^{(1)}) - c(\xi P_{k-1}^2) c(\xi P_{k-2} P_{k-2}^{(1)})}$$

$$E_k = \frac{-c(\xi^2 P_{k-2}(\xi) P_{k-1}(\xi)) - D_k c(\xi^2 P_{k-2}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) - B_k c(\xi P_{k-2}(\xi) P_{k-1}(\xi))}{c(\xi P_{k-2}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi))}$$

$$\text{et } P_k^{(1)} = A_k \left[(\xi + B_k) P_{k-1}(\xi) + (D_k \xi + E_k) P_{k-2}^{(1)}(\xi) \right].$$

3^e cas: $U_i(\xi) = P_i^{(1)}(\xi)$.

Alors

$$D_k = \frac{-c(\xi^2 P_{k-3}^{(1)}(\xi) P_{k-1}(\xi))}{c(\xi^2 P_{k-2}^{(1)}(\xi) P_{k-3}^{(1)}(\xi))}$$

$$A_k = \frac{1}{a_{k-1}}$$

$$\begin{cases} B_k c(\xi P_{k-2}^{(1)} P_{k-1}) + E_k c^{(1)}(P_{k-2}^{(1)2}) = -c(\xi^2 P_{k-2}^{(1)} P_{k-1}) - D_k c^{(1)}(\xi P_{k-2}^{(1)2}) \\ B_k c(\xi P_{k-1}^{(1)} P_{k-1}) = -c(\xi^2 P_{k-1}^{(1)} P_{k-1}) - D_k c^{(1)}(\xi P_{k-1}^{(1)} P_{k-2}^{(1)}). \end{cases}$$

Par suite

$$B_k = \frac{-c(\xi^2 P_{k-1}^{(1)}(\xi) P_{k-1}(\xi)) - D_k c(\xi^2 P_{k-1}^{(1)}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi))}{c(\xi P_{k-1}^{(1)}(\xi) P_{k-1}(\xi))}$$

$$E_k = \frac{-c(\xi^2 P_{k-2}^{(1)}(\xi) P_{k-1}(\xi)) - D_k c(\xi^2 P_{k-2}^{(1)2}(\xi)) - B_k c(\xi P_{k-2}^{(1)}(\xi) P_{k-1}(\xi))}{c(\xi P_{k-2}^{(1)2}(\xi))}$$

et
$$P_k^{(1)}(\xi) = A_k \left[(\xi + B_k) P_{k-1}(\xi) + (D_k \xi + E_k) P_{k-2}^{(1)}(\xi) \right].$$

2.2.6. Relation B_6

On cherche la relation B_6 c'est à dire $P_k^{(1)} \leftarrow P_{k-2}^{(1)}, P_{k-1}^{(1)}$ pour $k \geq 2$.

Comme le degré des polynômes $P_k^{(1)}, P_{k-2}^{(1)}, P_{k-1}^{(1)}$ est respectivement $k, k-2$ et $k-1$, on a à déterminer les constantes A_k, B_k, C_k, D_k, E_k telles que :

$$P_k^{(1)}(\xi) = (A_k \xi^2 + B_k \xi + C_k) P_{k-2}^{(1)}(\xi) + (D_k \xi + E_k) P_{k-1}^{(1)}(\xi).$$

Soit U_i un polynôme unitaire de degré exactement i .

$$\text{Alors } \forall i = 0, \dots, k-1, \quad c^{(1)}(U_i(\xi) P_k^{(1)}(\xi)) = 0. \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \text{Or } c^{(1)}(U_i P_k^{(1)}) &= A_k c^{(1)}(\xi^2 U_i P_{k-2}^{(1)}) + B_k c^{(1)}(\xi U_i P_{k-2}^{(1)}) + C_k c^{(1)}(U_i P_{k-2}^{(1)}) \\ &\quad + D_k c^{(1)}(\xi U_i P_{k-1}^{(1)}) + E_k c^{(1)}(U_i P_{k-1}^{(1)}). \end{aligned}$$

Par suite, en appliquant (2.5), on a la relation (2.B.6) : pour $i = 0, \dots, k-1$

$$\begin{aligned} A_k c^{(1)}(\xi^2 U_i(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) + B_k c^{(1)}(\xi U_i(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) + C_k c^{(1)}(U_i(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) \\ + D_k c^{(1)}(\xi U_i(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)) + E_k c^{(1)}(U_i(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)) = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, en supposant $k \geq 5$,

◇ Pour $i = 0, \dots, k-5$ la relation (2.B.6) est toujours vraie.

$$\diamond \text{ Pour } i = k-4 \text{ on a : } A_k c^{(1)}(\xi^2 U_{k-4}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) = 0.$$

$$\text{Comme } c^{(1)}(\xi^2 U_{k-4}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) \neq 0 \text{ on a : } A_k = 0.$$

$$\text{Comme } P_k^{(1)} \text{ est unitaire, on doit avoir : } D_k = 1.$$

$$\diamond \text{ Pour } i = k-3 \text{ on a : } B_k c^{(1)}(\xi U_{k-3}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) = 0.$$

$$\text{Comme } c^{(1)}(\xi U_{k-3}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) \neq 0 \text{ on a : } B_k = 0.$$

$$\diamond \text{ Pour } i = k-2 \text{ on a : } c^{(1)}(\xi U_{k-2}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)) + C_k c^{(1)}(U_{k-2}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) = 0.$$

$$\text{Donc, comme } c^{(1)}(U_{k-2}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) \neq 0, \quad C_k = \frac{-c^{(1)}(\xi U_{k-2}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi))}{c^{(1)}(U_{k-2}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi))}.$$

◇ Pour $i = k-1$ on a :

$$c^{(1)}(\xi U_{k-1} P_{k-1}^{(1)}) + C_k c^{(1)}(U_{k-1} P_{k-2}^{(1)}) + E_k c^{(1)}(U_{k-1} P_{k-1}^{(1)}) = 0.$$

Comme $c^{(1)}(U_{k-1}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)) = 0$, on a :

$$E_k = \frac{-c^{(1)}(\xi U_{k-1}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)) - C_k c^{(1)}(U_{k-1}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi))}{c^{(1)}(U_{k-1}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi))}.$$

Par conséquent la relation B₆ est :

$$P_k^{(1)}(\xi) = C_k P_{k-2}^{(1)}(\xi) + (\xi + E_k) P_{k-1}^{(1)}(\xi)$$

avec

$$C_k = \frac{-c^{(1)}(\xi U_{k-2}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi))}{c^{(1)}(U_{k-2}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi))}$$

$$E_k = \frac{-c^{(1)}(\xi U_{k-1} P_{k-1}^{(1)}) - C_k c^{(1)}(U_{k-1} P_{k-2}^{(1)})}{c^{(1)}(U_{k-1} P_{k-1}^{(1)})}.$$

Choisissons le polynôme U_i .

$$1^{\text{er}} \text{ cas: } U_i(\xi) = \xi^r.$$

Alors

$$C_k = \frac{-c(\xi^k P_{k-1}^{(1)}(\xi))}{c(\xi^{k-1} P_{k-2}^{(1)}(\xi))}$$

$$E_k = \frac{-c(\xi^{k+1} P_{k-1}^{(1)}(\xi)) - C_k c(\xi^k P_{k-2}^{(1)}(\xi))}{c(\xi^k P_{k-1}^{(1)}(\xi))}$$

$$\text{et } P_k^{(1)}(\xi) = C_k P_{k-2}^{(1)}(\xi) + (\xi + E_k) P_{k-1}^{(1)}(\xi).$$

$$2^{\text{e}} \text{ cas: } U_i(\xi) = P_i(\xi).$$

Alors

$$C_k = \frac{-c(\xi^2 P_{k-2}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi))}{c(\xi P_{k-2}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi))}$$

$$E_k = \frac{-c(\xi^2 P_{k-1}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)) - C_k c(\xi P_{k-1}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi))}{c(\xi P_{k-1}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi))}$$

et
$$P_k^{(1)}(\xi) = C_k P_{k-2}^{(1)}(\xi) + (\xi + E_k) P_{k-1}^{(1)}(\xi).$$

3^e cas: $U_i(\xi) = P_i^{(1)}(\xi).$

Alors

$$C_k = \frac{-c(\xi^2 P_{k-2}^{(1)}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi))}{c(\xi P_{k-2}^{(1)2}(\xi))}$$

$$E_k = \frac{-c(\xi^2 P_{k-1}^{(1)2}(\xi))}{c(\xi P_{k-1}^{(1)2}(\xi))}$$

et
$$P_k^{(1)}(\xi) = C_k P_{k-2}^{(1)}(\xi) + (\xi + E_k) P_{k-1}^{(1)}(\xi).$$

2.2.7. Relation B_7

On cherche la relation B_7 c'est à dire $P_k^{(1)} \leftarrow P_{k-2}^{(1)}, P_k$ pour $k \geq 2$.

Comme le degré des polynômes $P_k^{(1)}, P_{k-2}^{(1)}, P_k$ est respectivement $k, k-2$ et k , on a à déterminer les constantes A_k, B_k, C_k, D_k telles que :

$$P_k^{(1)}(\xi) = (A_k \xi^2 + B_k \xi + C_k) P_{k-2}^{(1)}(\xi) + D_k P_k(\xi).$$

Soit U_i un polynôme unitaire de degré exactement i .

$$\text{Alors } \forall i = 0, \dots, k-1, \quad c^{(1)}(U_i(\xi) P_k^{(1)}(\xi)) = 0. \quad (2.5)$$

Or

$$c^{(1)}(U_i P_k^{(1)}) = A_k c^{(1)}(\xi^2 U_i P_{k-2}^{(1)}) + B_k c^{(1)}(\xi U_i P_{k-2}^{(1)}) + C_k c^{(1)}(U_i P_{k-2}^{(1)}) + D_k c^{(1)}(U_i P_k).$$

Par suite, en appliquant (2.3) et (2.5), on a la relation (2.B.7) : pour $i = 0, \dots, k-1$

$$A_k c^{(1)}(\xi^2 U_i P_{k-2}^{(1)}) + B_k c^{(1)}(\xi U_i P_{k-2}^{(1)}) + C_k c^{(1)}(U_i P_{k-2}^{(1)}) + D_k c^{(1)}(\xi U_i P_k) = 0.$$

Par conséquent, en supposant $k \geq 5$,

◇ Pour $i = 0, \dots, k-5$ la relation (2.B.7) est toujours vraie.

$$\diamond \text{ Pour } i = k-4 \text{ on a : } A_k c^{(1)}(\xi^2 U_{k-4}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) = 0.$$

$$\text{Comme } c^{(1)}(\xi^2 U_{k-4}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) \neq 0 \text{ on a : } A_k = 0.$$

$$\diamond \text{ Pour } i = k-3 \text{ on a : } B_k c^{(1)}(\xi U_{k-3}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) = 0.$$

$$\text{Comme } c^{(1)}(\xi U_{k-3}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) \neq 0 \text{ on a : } B_k = 0.$$

$$\diamond \text{ Pour } i = k-2 \text{ on a : } C_k c^{(1)}(U_{k-2}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) = 0.$$

$$\text{Comme } c^{(1)}(U_{k-2}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi)) \neq 0 \text{ on a : } C_k = 0.$$

$$\diamond \text{ Pour } i = k-1 \text{ on a : } D_k c^{(1)}(U_{k-1}(\xi) P_k(\xi)) = 0.$$

$$\text{Comme } c^{(1)}(U_{k-1}(\xi) P_k(\xi)) \neq 0 \text{ on a : } D_k = 0.$$

Par suite on aura : $\forall k \geq 5 \quad \forall \xi \quad P_k^{(1)}(\xi) = 0$, ce qui est faux.

Par conséquent une relation de la forme B_7 n'existe pas.

2.2.8. Relation B_8

On cherche la relation B_8 c'est à dire $P_k^{(1)} \leftarrow P_{k-1}^{(1)}, P_{k-1}$ pour $k \geq 1$.

Comme le degré des polynômes $P_k^{(1)}, P_{k-1}^{(1)}, P_{k-1}$ est respectivement $k, k-1$ et $k-1$, on a à déterminer les constantes A_k, B_k, C_k, D_k telles que :

$$P_k^{(1)}(\xi) = (A_k \xi + B_k) P_{k-1}^{(1)}(\xi) + (C_k \xi + D_k) P_{k-1}(\xi).$$

Soit U_i un polynôme unitaire de degré exactement i .

$$\text{Alors } \forall i = 0, \dots, k-1, \quad c^{(1)}(U_i(\xi) P_k^{(1)}(\xi)) = 0. \quad (2.5)$$

Or

$$c^{(1)}(U_i P_k^{(1)}) = A_k c^{(1)}(\xi U_i P_{k-1}^{(1)}) + B_k c^{(1)}(U_i P_{k-1}^{(1)}) + C_k c^{(1)}(\xi U_i P_{k-1}) + D_k c^{(1)}(U_i P_{k-1}).$$

Par suite, en appliquant (2.3) et (2.5), on a la relation (2.B.8) : pour $i = 0, \dots, k-1$

$$A_k c^{(1)}(\xi U_i P_{k-1}^{(1)}) + B_k c^{(1)}(U_i P_{k-1}^{(1)}) + C_k c^{(1)}(\xi^2 U_i P_{k-1}) + D_k c^{(1)}(\xi U_i P_{k-1}) = 0.$$

Par conséquent, en supposant $k \geq 4$,

◇ Pour $i = 0, \dots, k-4$ la relation (2.B.8) est toujours vraie.

$$\diamond \text{ Pour } i = k-3 \text{ on a : } C_k c^{(1)}(\xi^2 U_{k-3}(\xi) P_{k-1}(\xi)) = 0.$$

$$\text{Comme } c^{(1)}(\xi^2 U_{k-3}(\xi) P_{k-1}(\xi)) \neq 0 \text{ on a : } C_k = 0.$$

$$\text{Comme } P_k^{(1)} \text{ est unitaire, on doit avoir : } A_k = 1.$$

$$\diamond \text{ Pour } i = k-2 \text{ on a : } c^{(1)}(\xi U_{k-2} P_{k-1}^{(1)}) + D_k c^{(1)}(\xi U_{k-2} P_{k-1}) = 0.$$

$$\text{Comme } c^{(1)}(\xi U_{k-2}(\xi) P_{k-1}(\xi)) \neq 0, \text{ on a : } D_k = \frac{-c^{(1)}(\xi U_{k-2}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi))}{c^{(1)}(\xi U_{k-2}(\xi) P_{k-1}(\xi))}.$$

$$\diamond \text{ Pour } i = k-1 \text{ on a : } c^{(1)}(\xi U_{k-1} P_{k-1}^{(1)}) + B_k c^{(1)}(U_{k-1} P_{k-1}^{(1)}) + D_k c^{(1)}(\xi U_{k-1} P_{k-1}) = 0.$$

$$\text{Comme } c^{(1)}(U_{k-1}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)) \neq 0, \text{ on a :}$$

$$B_k = \frac{-c^{(1)}(\xi U_{k-1}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)) - D_k c^{(1)}(\xi U_{k-1}(\xi) P_{k-1}(\xi))}{c^{(1)}(U_{k-1}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi))}.$$

Par conséquent la relation B_8 est :

$$P_k^{(1)}(\xi) = (\xi + B_k) P_{k-1}^{(1)}(\xi) + D_k P_{k-1}(\xi)$$

avec

$$D_k = \frac{-c^{(1)}(\xi) U_{k-2}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)}{c(\xi) U_{k-2}(\xi) P_{k-1}(\xi)}$$

$$B_k = \frac{-c^{(1)}(\xi) U_{k-1}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi) - D_k c(\xi) U_{k-1}(\xi) P_{k-1}(\xi)}{c^{(1)}(U_{k-1}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi))}$$

Choisissons le polynôme U_i .

$$1^{\text{er}} \text{ cas: } U_i(\xi) = \xi^i.$$

Alors

$$D_k = \frac{-c(\xi^k P_{k-1}^{(1)}(\xi))}{c(\xi^{k-1} P_{k-1}(\xi))}$$

$$B_k = \frac{-c(\xi^{k+1} P_{k-1}^{(1)}(\xi)) - D_k c(\xi^k P_{k-1}(\xi))}{c(\xi^k P_{k-1}^{(1)}(\xi))}$$

$$\text{et } P_k^{(1)}(\xi) = (\xi + B_k) P_{k-1}^{(1)}(\xi) + D_k P_{k-1}(\xi).$$

$$2^{\text{e}} \text{ cas: } U_i(\xi) = P_i(\xi).$$

Alors

$$D_k = \frac{-c(\xi^2 P_{k-2}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi))}{c(\xi P_{k-2}(\xi) P_{k-1}(\xi))}$$

$$B_k = \frac{-c^{(1)}(\xi P_{k-1}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)) - D_k c(\xi P_{k-1}^2(\xi))}{c(\xi P_{k-1}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi))}$$

$$\text{et } P_k^{(1)}(\xi) = (\xi + B_k) P_{k-1}^{(1)}(\xi) + D_k P_{k-1}(\xi).$$

$$3^{\text{e}} \text{ cas: } U_i(\xi) = P_i^{(1)}(\xi).$$

Alors

$$D_k = \frac{-c(\xi^2 P_{k-2}^{(1)}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi))}{c(\xi P_{k-2}^{(1)}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi))}$$

$$B_k = \frac{-c(\xi^2 P_{k-1}^{(1)2}(\xi)) - D_k c(\xi P_{k-1}^{(1)}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi))}{c^{(1)}(P_{k-1}^{(1)2}(\xi))}$$

et
$$P_k^{(1)}(\xi) = (\xi + B_k) P_{k-1}^{(1)}(\xi) + D_k P_{k-1}^{(1)}(\xi).$$

2.2.9. Relation B_9

On cherche la relation B_9 c'est à dire $P_k^{(1)} \leftarrow P_{k-1}, P_k$ pour $k \geq 1$.

Comme le degré des polynômes $P_k^{(1)}, P_{k-1}, P_k$ est respectivement $k, k-1$ et k , on a à déterminer les constantes A_k, B_k, C_k telles que :

$$P_k^{(1)}(\xi) = (A_k \xi + B_k) P_{k-1}(\xi) + C_k P_k(\xi).$$

Soit U_i un polynôme unitaire de degré exactement i .

$$\text{Alors } \forall i = 0, \dots, k-1, \quad c^{(1)}(U_i(\xi) P_k^{(1)}(\xi)) = 0. \quad (2.5)$$

$$\text{Or } c^{(1)}(U_i(\xi) P_k^{(1)}(\xi)) = A_k c^{(1)}(\xi U_i(\xi) P_{k-1}(\xi)) + B_k c^{(1)}(U_i(\xi) P_{k-1}(\xi)) + C_k c^{(1)}(U_i(\xi) P_k(\xi)).$$

Par suite, en appliquant (2.3) et (2.5), on a la relation (2.B.9) : pour $i = 0, \dots, k-1$

$$A_k c(\xi^2 U_i(\xi) P_{k-1}(\xi)) + B_k c(\xi U_i(\xi) P_{k-1}(\xi)) + C_k c(\xi U_i(\xi) P_k(\xi)) = 0.$$

Par conséquent, en supposant $k \geq 4$,

◇ Pour $i = 0, \dots, k-4$ la relation (2.B.9) est toujours vraie.

$$\text{◇ Pour } i = k-3 \text{ on a : } A_k c(\xi^2 U_{k-3}(\xi) P_{k-1}(\xi)) = 0.$$

$$\text{Comme } c(\xi^2 U_{k-3}(\xi) P_{k-1}(\xi)) \neq 0 \text{ on a : } A_k = 0.$$

$$\text{◇ Pour } i = k-2 \text{ on a : } B_k c(\xi U_{k-2}(\xi) P_{k-1}(\xi)) = 0.$$

$$\text{Comme } c(\xi U_{k-2}(\xi) P_{k-1}(\xi)) \neq 0 \text{ on a : } B_k = 0.$$

$$\text{◇ Pour } i = k-1 \text{ on a : } C_k c(\xi U_{k-1}(\xi) P_k(\xi)) = 0.$$

$$\text{Comme } c(\xi U_{k-1}(\xi) P_k(\xi)) \neq 0 \text{ on a : } C_k = 0.$$

Par suite on aura : $\forall k \geq 4 \quad \forall \xi \quad P_k^{(1)}(\xi) = 0$, ce qui est faux.

Par conséquent une relation de la forme B_9 n'existe pas.

2.2.10. Relation B_{10}

On cherche la relation B_{10} c'est à dire $P_k^{(1)} \leftarrow P_{k-1}^{(1)}, P_k$ pour $k \geq 1$.

Comme le degré des polynômes $P_k^{(1)}, P_{k-1}^{(1)}, P_k$ est respectivement $k, k-1$ et k , on a à déterminer les constantes A_k, B_k, C_k telles que :

$$P_k^{(1)}(\xi) = (A_k \xi + B_k) P_{k-1}^{(1)}(\xi) + C_k P_k(\xi).$$

Soit U_i un polynôme unitaire de degré exactement i .

$$\text{Alors } \forall i = 0, \dots, k-1, \quad c^{(1)}(U_i(\xi) P_k^{(1)}(\xi)) = 0. \quad (2.5)$$

$$\text{Or } c^{(1)}(U_i(\xi) P_k^{(1)}(\xi)) = A_k c^{(1)}(\xi U_i(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)) + B_k c^{(1)}(U_i(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)) + C_k c^{(1)}(U_i(\xi) P_k(\xi)).$$

Par suite, en appliquant (2.3) et (2.5), on a la relation (2.B.10) : pour $i = 0, \dots, k-1$

$$A_k c^{(1)}(\xi U_i(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)) + B_k c^{(1)}(U_i(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)) + C_k c(\xi U_i(\xi) P_k(\xi)) = 0.$$

Par conséquent, en supposant $k \geq 3$,

◇ Pour $i = 1, \dots, k-3$ la relation (2.B.10) est toujours vraie.

$$\diamond \text{ Pour } i = k-2 \text{ on a : } A_k c^{(1)}(\xi U_{k-2}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)) = 0.$$

$$\text{Comme } c^{(1)}(\xi U_{k-2}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)) \neq 0 \text{ on a : } A_k = 0.$$

Comme $P_k^{(1)}$ est unitaire, on a : $1 = C_k a_k$ où a_k est définie par $P_k(\xi) = a_k \xi^k + \dots + 1$.

$$\diamond \text{ Pour } i = k-1 \text{ on a : } B_k c^{(1)}(U_{k-1}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)) + C_k c(\xi U_{k-1}(\xi) P_k(\xi)) = 0.$$

$$\text{Comme } c^{(1)}(U_{k-1}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)) \neq 0 \text{ on a : } B_k = \frac{-C_k c(\xi U_{k-1}(\xi) P_k(\xi))}{c^{(1)}(U_{k-1}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi))}.$$

Par conséquent la relation B_{10} est :

$$P_k^{(1)}(\xi) = B_k P_{k-1}^{(1)}(\xi) + C_k P_k(\xi)$$

avec

$$C_k = \frac{1}{a_k} \quad \text{où } a_k \text{ est définie par } P_k(\xi) = a_k \xi^k + \dots + 1$$

$$B_k = \frac{-C_k c(\xi U_{k-1}(\xi) P_k(\xi))}{c^{(1)}(U_{k-1}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi))}$$

Choisissons le polynôme U_j .

$$1^{\text{er}} \text{ cas: } U_i(\xi) = \xi^i.$$

Alors

$$C_k = \frac{1}{a_k}$$

$$B_k = \frac{-C_k c(\xi^k P_k(\xi))}{c(\xi^k P_{k-1}^{(1)}(\xi))}$$

$$\text{et} \quad P_k^{(1)}(\xi) = B_k P_{k-1}^{(1)}(\xi) + C_k P_k(\xi).$$

$$2^{\text{e}} \text{ cas: } U_i(\xi) = P_i(\xi).$$

Alors

$$C_k = \frac{1}{a_k}$$

$$B_k = \frac{-C_k c(\xi P_{k-1}(\xi) P_k(\xi))}{c(\xi P_{k-1}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi))}$$

$$\text{et} \quad P_k^{(1)}(\xi) = B_k P_{k-1}^{(1)}(\xi) + C_k P_k(\xi).$$

$$3^{\text{e}} \text{ cas: } U_i(\xi) = P_i^{(1)}(\xi).$$

Alors

$$C_k = \frac{1}{a_k}$$

$$B_k = \frac{-C_k c(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi) P_k(\xi)}{c(\xi) P_{k-1}^{(1)2}(\xi)}$$

et $P_k^{(1)}(\xi) = B_k P_{k-1}^{(1)}(\xi) + C_k P_k(\xi) .$

2.3. Conclusion

Les relations A_2 , A_3 , A_7 , A_9 n'existent pas.

Les relations B_2 , B_3 , B_4 , B_7 , B_9 n'existent pas.

On remarque qu'en enlevant la relation A_4 , qui se suffit à elle-même, il y a le même nombre de relations possibles pour A_i et pour B_j .

D'après les remarques faites dans l'introduction, les seules combinaisons A_i / B_j possibles sont :

$$\begin{array}{c}
 A_4 \\
 A_1 / B_1 \quad A_1 / B_5 \quad A_1 / B_6 \quad A_1 / B_8 \quad A_1 / B_{10} \\
 A_5 / B_1 \quad A_5 / B_5 \quad A_5 / B_6 \quad A_5 / B_8 \quad A_5 / B_{10} \\
 A_8 / B_1 \quad A_8 / B_5 \quad A_8 / B_6 \quad A_8 / B_8 \quad A_8 / B_{10}
 \end{array}$$

Nous avons donc 16 méthodes à étudier.

Remarquons que certaines de ces méthodes sont déjà connues : Il s'agit de A_4 , A_8 / B_6 et A_8 / B_{10} .

3. LES DIFFERENTES METHODES A_i / B_j

Nous avons vu, dans le chapitre précédent, que 16 méthodes A_i / B_j sont à étudier.

Pour cela, en définissant les vecteurs r_k et z_k par $r_k = P_k(A) r_0 = b - A x_k$ et $z_k = P_k^{(1)}(A) r_0$, la relation A_i permet d'obtenir une formule calculant r_k puis x_k , et la relation B_j permet d'obtenir une formule calculant z_k , de manière récursive.

Une méthode A_i / B_j est définie par les formules permettant de calculer récursivement r_k , x_k et z_k .

Les différents coefficients apparaissant dans ces relations de récurrence sont alors déterminés, de manière à minimiser le nombre de multiplications matrice-vecteur. Comme cela a été vu dans le chapitre précédent, suivant le choix du polynôme unitaire U_i , les coefficients ont une forme différente. En conséquence, les algorithmes permettant de calculer ces coefficients et par suite les vecteurs r_k et x_k seront également différents.

Pour la méthode A_4 , seuls deux choix pour U_i seront réalisés : $U_i(\xi) = \xi^i$ et $U_i(\xi) = P_i(\xi)$. Ceci vient du fait que, dans cette méthode, on utilise uniquement r_k , le vecteur z_k n'intervenant pas dans la formule donnant r_k .

Pour les 15 autres méthodes, on fait trois choix différents pour U_i : $U_i(\xi) = \xi^i$, $U_i(\xi) = P_i(\xi)$ et $U_i(\xi) = P_i^{(1)}(\xi)$. Ceci conduira à trois algorithmes différents pour chaque méthode.

3.1. Méthode A₄

Soit $r_k = P_k(A)r_0$. La relation A₄ donne immédiatement :

$$r_k = A_k (A r_{k-1} + B_k r_{k-1} + E_k r_{k-2}). \quad (1)$$

En utilisant le fait que $r_k = b - A x_k$ et que $A_k = \frac{1}{B_k + E_k}$, on a :

$$b - A x_k = A_k (A r_{k-1} + B_k b - B_k A x_{k-1} + E_k b - E_k A r_{k-2}).$$

$$\text{D'où } b - A x_k = A_k A r_{k-1} + b - A_k A (B_k x_{k-1} + E_k x_{k-2}).$$

$$\text{Donc } x_k = A_k (B_k x_{k-1} + E_k x_{k-2} - r_{k-1}). \quad (2)$$

Les formules (1) et (2) définissent la méthode A₄ connue sous le nom de Lanczos/Orthores (voir [12]).

Il nous faut maintenant étudier comment programmer les coefficients A_k , B_k , E_k apparaissant dans ces formules.

Premier cas : $U_i(\xi) = \xi^i$.

Dans ce qui suit on utilisera la formule (1.10).

Comme $E_k = \frac{-c(\xi^{k-1} P_{k-1}(\xi))}{c(\xi^{k-2} P_{k-2}(\xi))}$ et $B_k = \frac{-c(\xi^k P_{k-1}(\xi)) - E_k c(\xi^{k-1} P_{k-2}(\xi))}{c(\xi^{k-1} P_{k-1}(\xi))}$, on a :

$$E_k = \frac{-(A^{*k-1} y, r_{k-1})}{(A^{*k-2} y, r_{k-2})} \text{ et } B_k = \frac{-(A^{*k} y, r_{k-1}) - E_k (A^{*k-1} y, r_{k-2})}{(A^{*k-1} y, r_{k-1})}.$$

En regroupant toutes ces formules, nous avons l'algorithme suivant :

◇ Choix de x_0 et y .

$$\text{Soit } r_0 = b - A x_0$$

$$y_0 = y$$

◇ Pour $k = 0, 1, \dots$ faire

$$E_{k+1} = \frac{-(y_k, r_k)}{(y_{k-1}, r_{k-1})} \quad \text{si } k \geq 1, \quad E_1 = 0$$

$$B_{k+1} = \frac{-(y_k, A r_k) - E_{k+1} (y_k, r_{k-1})}{(y_k, r_k)}$$

$$A_{k+1} = \frac{1}{B_{k+1} + E_{k+1}}$$

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_{k+1} (B_{k+1} x_k + E_{k+1} x_{k-1} - r_k) \\ r_{k+1} &= A_{k+1} (A r_k + B_{k+1} r_k + E_{k+1} r_{k-1}) \end{aligned}$$

◇ Si $r_{k+1} = 0$, alors faire $y_{k+1} = A^* y_k$.

Deuxième cas : $U_i(\xi) = P_i(\xi)$.

On a :
$$E_k = \frac{-c(\xi P_{k-2}(\xi) P_{k-1}(\xi))}{c(P_{k-2}^2(\xi))}.$$

Comme $P_{k-1}(\xi) = A_{k-1} [(\xi + B_{k-1}) P_{k-2}(\xi) + E_{k-1} P_{k-3}(\xi)]$, en multipliant par P_{k-1} et en appliquant la fonctionnelle c , on obtient :

$$c(P_{k-1}^2) = A_{k-1} c(\xi P_{k-1} P_{k-2}) + A_{k-1} B_{k-1} c(P_{k-1} P_{k-2}) + A_{k-1} E_{k-1} c(P_{k-1} P_{k-3}).$$

Comme $c(P_{k-1} P_{k-2}) = c(P_{k-1} P_{k-3}) = 0$, on a : $c(P_{k-1}^2) = A_{k-1} c(\xi P_{k-1} P_{k-2})$.

Par suite
$$E_k = \frac{-c(P_{k-1}^2(\xi))}{A_{k-1} c(P_{k-2}^2(\xi))}.$$

Notons $\tilde{p}_k = \bar{P}_k(A^*) y$.

Alors
$$E_k = \frac{-(\tilde{p}_{k-1}, r_{k-1})}{A_{k-1} (\tilde{p}_{k-2}, r_{k-2})}. \quad (3)$$

Comme $B_k = \frac{-c(\xi P_{k-1}^2(\xi))}{c(P_{k-1}^2(\xi))}$, on a : $B_k = \frac{-(\tilde{p}_{k-1}, A r_{k-1})}{(\tilde{p}_{k-1}, r_{k-1})}. \quad (4)$

Comme $P_k(\xi) = A_k [(\xi + B_k) P_{k-1}(\xi) + E_k P_{k-2}(\xi)]$, on a :

$$\tilde{p}_k = \bar{A}_k [A^* \tilde{p}_{k-1} + \bar{B}_k \tilde{p}_{k-1} + \bar{E}_k \tilde{p}_{k-2}]. \quad (5)$$

Les formules (1), (2), (3), (4), (5) définissent l'algorithme connu sous le nom de BIORÉS [11], qui est le suivant :

◇ Choix de x_0 et y .

Soit $r_0 = b - A x_0$

$$\tilde{p}_0 = y$$

◇ Pour $k = 0, 1, \dots$ faire

$$E_{k+1} = \frac{-(\tilde{p}_k, r_k)}{A_k (\tilde{p}_{k-1}, r_{k-1})} \quad \text{si } k \geq 1, \quad E_1 = 0$$

$$B_{k+1} = \frac{-(\tilde{\rho}_k, A r_k)}{(\tilde{\rho}_k, r_k)}$$

$$A_{k+1} = \frac{1}{B_{k+1} + E_{k+1}}$$

$$x_{k+1} = A_{k+1} (B_{k+1} x_k + E_{k+1} x_{k-1} - r_k)$$

$$r_{k+1} = A_{k+1} (A r_k + B_{k+1} r_k + E_{k+1} r_{k-1})$$

$$\tilde{\rho}_{k+1} = \bar{A}_{k+1} (A^* \tilde{\rho}_k + \bar{B}_{k+1} \tilde{\rho}_k + \bar{E}_{k+1} \tilde{\rho}_{k-1})$$

◇ Si $r_{k+1} = 0$, alors continuer.

3.2. Méthode Ag / B₁

De la relation Ag, nous obtenons immédiatement : $r_k = r_{k-1} + A_k A z_{k-1}$ (1)

en notant $z_k = P_k^{(1)}(A) r_0$.

Comme $r_k = b - A x_k$, on a : $x_k = x_{k-1} - A_k z_{k-1}$. (2)

De la relation B₁, nous obtenons :

$$z_k = B'_k A r_{k-2} + C_k r_{k-2} + A^2 z_{k-2} + E_k A z_{k-2} + F_k z_{k-2}. \quad (3)$$

La méthode Ag / B₁ est définie par les formules (1), (2), (3).

Avec la relation Ag, on a : $A r_{k-1} = A r_{k-2} + A_{k-1} A^2 z_{k-2}$.

Par suite $z_k = B'_k A r_{k-2} + C_k r_{k-2} + \frac{1}{A_{k-1}} (A r_{k-1} - A r_{k-2}) + E_k A z_{k-2} + F_k z_{k-2}$.

Par conséquent $z_k = \frac{1}{A_{k-1}} A r_{k-1} + (B'_k - \frac{1}{A_{k-1}}) A r_{k-2} + C_k r_{k-2} + E_k A z_{k-2} + F_k z_{k-2}$.

Premier cas : $U_i(\xi) = \xi^i$.

Comme $A_k = \frac{-c(\xi^{k-1} P_{k-1}^{(1)}(\xi))}{c(\xi^{k-1} P_{k-1}^{(1)}(\xi))}$, on a : $A_k = \frac{-(A^{*k-1} y, r_{k-1})}{(A^{*k-1} y, A z_{k-1})}$.

Comme $B'_k = \frac{-c(\xi^{k-1} P_{k-2}^{(1)}(\xi))}{c(\xi^{k-2} P_{k-2}^{(1)}(\xi))}$, on a : $B'_k = \frac{-(A^{*k-2} y, A z_{k-2})}{(A^{*k-2} y, r_{k-2})}$.

Par suite $B'_k = \frac{1}{A_{k-1}}$.

Donc $z_k = \frac{1}{A_{k-1}} A r_{k-1} + C_k r_{k-2} + E_k A z_{k-2} + F_k z_{k-2}$.

De plus

$$\Delta_k = (A^{*k-2} y, r_{k-2}) \left[(A^{*k-1} y, A z_{k-2})^2 - (A^{*k} y, A z_{k-2})(A^{*k-1} y, z_{k-2}) \right] \\ - (A^{*k-1} y, z_{k-2}) \left[(A^{*k-1} y, r_{k-2})(A^{*k} y, z_{k-2}) - (A^{*k} y, r_{k-2})(A^{*k-1} y, z_{k-2}) \right]$$

Comme $B'_k = \frac{-(A^{*k-2} y, A z_{k-2})}{(A^{*k-2} y, r_{k-2})}$, on a :

$$\Delta_k = -(A^{*k-2} y, Az_{k-2}) \left[\frac{1}{B_k} \left\{ (A^{*k-1} y, Az_{k-2})^2 - (A^{*k} y, Az_{k-2})(A^{*k-1} y, z_{k-2}) \right\} \right. \\ \left. + (A^{*k-1} y, r_{k-2})(A^{*k} y, z_{k-2}) - (A^{*k} y, r_{k-2})(A^{*k-1} y, z_{k-2}) \right].$$

Comme $\frac{1}{B_k} = A_{k-1}$ et $r_{k-1} = r_{k-2} + A_{k-1} A z_{k-2}$, on a :

$$\Delta_k = -(A^{*k-1} y, z_{k-2}) \left[(A^{*k} y, z_{k-2})(A^{*k-1} y, r_{k-1}) - (A^{*k-1} y, z_{k-2})(A^{*k} y, r_{k-1}) \right].$$

D'après les formules de C_k , E_k et F_k et en procédant comme précédemment, on a :

$$C_k = \frac{(A^{*k-1} y, z_{k-2})}{\Delta_k A_{k-1}} \left[(A^{*k} y, r_{k-1})(A^{*k} y, z_{k-2}) - (A^{*k} y, A r_{k-1})(A^{*k-1} y, z_{k-2}) \right] \\ - \frac{(A^{*k-1} y, r_{k-1})}{\Delta_k A_{k-1}} \left[(A^{*k} y, z_{k-2})^2 - (A^{*k} y, A z_{k-2})(A^{*k-1} y, z_{k-2}) \right]$$

$$E_k = \frac{\frac{-1}{A_{k-1}} (A^{*k-1} y, r_{k-1}) - C_k (A^{*k-2} y, r_{k-2})}{(A^{*k-1} y, z_{k-2})}$$

$$F_k = \frac{\frac{-1}{A_{k-1}} (A^{*k} y, r_{k-1}) - C_k (A^{*k-1} y, r_{k-2}) - E_k (A^{*k} y, z_{k-2})}{(A^{*k-1} y, z_{k-2})}.$$

Par conséquent on a l'algorithme suivant :

◇ Choix de x_0 et y .

Soit $r_0 = b - A x_0$

$$y_0 = y$$

$$z_0 = r_0$$

$$y_1 = A^* y_0$$

$$z_1 = A z_0 - \frac{(y_1, A r_0)}{(y_1, r_0)} z_0$$

◇ Pour $k = 1, 2, \dots$ faire

$$A_k = \frac{-(y_{k-1}, r_{k-1})}{(y_k, z_{k-1})}$$

$$r_k = r_{k-1} + A_k A z_{k-1}$$

$$x_k = x_{k-1} - A_k z_{k-1}$$

◇ Si $r_k = 0$ alors faire

$$y_{k+1} = A^* y_k$$

$$B'_{k+1} = \frac{1}{A_k}$$

$$\Delta_{k+1} = (y_k, z_{k-1}) [(y_k, z_{k-1})(y_{k+1}, r_k) - (y_{k+1}, z_{k-1})(y_k, r_k)]$$

$$C_{k+1} = \frac{1}{A_k \Delta_{k+1}} \left\{ (y_k, z_{k-1}) [(y_{k+1}, r_k)(y_{k+1}, z_{k-1}) - (y_{k+1}, A r_k)(y_k, z_{k-1})] \right. \\ \left. - (y_k, r_k) [(y_{k+1}, z_{k-1})^2 - (y_{k+1}, A z_{k-1})(y_k, z_{k-1})] \right\}$$

$$E_{k+1} = \frac{-B'_{k+1} (y_k, r_k) - C_{k+1} (y_{k-1}, r_{k-1})}{(y_k, z_{k-1})}$$

$$F_{k+1} = \frac{-B'_{k+1} (y_{k+1}, r_k) - C_{k+1} (y_k, r_{k-1}) - E_{k+1} (y_{k+1}, z_{k-1})}{(y_k, z_{k-1})}$$

$$z_{k+1} = B_{k+1} A r_k + C_{k+1} r_{k-1} + E_{k+1} A z_{k-1} + F_{k+1} z_{k-1}$$

Deuxième cas : $U_i(\xi) = P_i(\xi)$.

On pose $\tilde{r}_k = P_k(A)^* y$ et $\tilde{z}_k = P_k^{(1)}(A)^* y$.

Comme $A_k = \frac{-c(P_{k-1}^2(\xi))}{c(\xi P_{k-1}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi))}$, on a : $A_k = \frac{-(\tilde{r}_{k-1}, r_{k-1})}{(\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-1})}$.

Reprenons les formules de Δ_{k+1} , B'_{k+1} , C_{k+1} , E_{k+1} , F_{k+1} et notons $\alpha_k = c(\xi^3 P_{k-2} P_{k-1}^{(1)})$,

$\beta_k = c(\xi^3 P_k P_{k-1}^{(1)})$, $\gamma_k = c(\xi^3 P_{k-1} P_{k-1}^{(1)})$, on a alors :

$$B'_{k+1} = \frac{\alpha_k}{(A^* \tilde{r}_{k-1}, A r_{k-3})}$$

$$\Delta_{k+1} = (\tilde{r}_{k-2}, A r_{k-1}) \left[(A^* \tilde{r}_{k-1}, A z_{k-1})(\tilde{r}_k, A z_{k-1}) - (A^* \tilde{r}_k, A z_{k-1})(\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-1}) \right] \\ - (A^* \tilde{r}_{k-2}, A z_{k-1}) [(\tilde{r}_{k-1}, A r_{k-1})(\tilde{r}_k, A z_{k-1}) - (\tilde{r}_k, A r_{k-1})(\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-1})]$$

$$C_{k+1} = \frac{1}{\Delta_{k+1}} \left[\left\{ \alpha_k + B'_{k+1} (A^* \tilde{r}_{k-2}, A r_{k-1}) \right\} (A^* \tilde{r}_k, A z_{k-1})(\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-1}) \right. \\ \left. - (A^* \tilde{r}_{k-1}, A z_{k-1})(\tilde{r}_k, A z_{k-1}) \right\} - (A^* \tilde{r}_{k-2}, A z_{k-1}) [(\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-1}) \\ \left\{ \beta_k + B'_{k+1} (A^* \tilde{r}_k, A r_{k-1}) \right\} - (\tilde{r}_k, A z_{k-1}) \left\{ \gamma_k + B'_{k+1} (A^* \tilde{r}_{k-1}, A r_{k-1}) \right\}]]$$

$$E_{k+1} = \frac{-\alpha_k - B'_{k+1} (A^* \tilde{r}_{k-2}, A r_{k-1}) - C_{k+1} (\tilde{r}_{k-1}, A r_{k-1})}{(A^* \tilde{r}_{k-2}, A z_{k-1})}$$

$$\eta_k = B'_{k+1} (A^* \tilde{r}_{k-1}, A r_{k-1}) + C_{k+1} (\tilde{r}_{k-1}, A r_{k-1})$$

$$F_{k+1} = \frac{-\gamma_k - \eta_k - E_{k+1} (A^* \tilde{r}_{k-1}, Az_{k-1})}{(\tilde{r}_{k-1}, Az_{k-1})}$$

Exprimons α_k , β_k , γ_k sans ξ^3 .

$$\text{On a : } \xi P_k(\xi) = \xi P_{k-1}(\xi) + A_k \xi^2 P_{k-1}^{(1)}(\xi).$$

$$\text{Par suite : } c(\xi^2 P_{k-2} P_k) = c(\xi^2 P_{k-2} P_{k-1}) + A_k c(\xi^3 P_{k-2} P_{k-1}^{(1)})$$

$$c(\xi^2 P_k^2) = c(\xi^2 P_k P_{k-1}) + A_k c(\xi^3 P_k P_{k-1}^{(1)})$$

$$c(\xi^2 P_{k-1} P_k) = c(\xi^2 P_{k-1}^2) + A_k c(\xi^3 P_{k-1} P_{k-1}^{(1)}).$$

$$\text{Donc on a : } \begin{cases} \alpha_k = \frac{1}{A_k} [c(\xi^2 P_{k-2} P_k) - c(\xi^2 P_{k-2} P_{k-1})] \\ \beta_k = \frac{1}{A_k} [c(\xi^2 P_k^2) - c(\xi^2 P_k P_{k-1})] \\ \gamma_k = \frac{1}{A_k} [c(\xi^2 P_{k-1} P_k) - c(\xi^2 P_{k-1}^2)] \end{cases}$$

$$\text{Par conséquent on a : } \begin{cases} \alpha_k = \frac{1}{A_k} [(A^* \tilde{r}_{k-2}, A r_k) - (A^* \tilde{r}_{k-2}, A r_{k-1})] \\ \beta_k = \frac{1}{A_k} [(A^* \tilde{r}_k, A r_k) - (A^* \tilde{r}_{k-1}, A r_k)] \\ \gamma_k = \frac{1}{A_k} [(A^* \tilde{r}_k, A r_{k-1}) - (A^* \tilde{r}_{k-1}, A r_{k-1})] \end{cases}$$

Les formules précédentes sont valables pour $k \geq 3$. Il faut donc trouver r_1, r_2 et z_1, z_2, z_3 différemment.

$$\text{On a : } r_1 = r_0 + A_1 A z_0 \text{ où } A_1 = \frac{-(\tilde{r}_0, r_0)}{(\tilde{r}_0, A z_0)} \text{ et } r_2 = r_1 + A_2 A z_1 \text{ où } A_2 = \frac{-(\tilde{r}_1, r_1)}{(\tilde{r}_1, A z_1)}.$$

On suppose que : $\tilde{r}_0 = \tilde{z}_0 = y$ et $r_0 = z_0$. De plus, on rappelle que $c_i = (y, A^i r_0)$.

Exprimons z_1 .

$$P_1^{(1)}(\xi) = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ 1 & \xi \end{vmatrix}}{c_1} = \xi - \frac{c_2}{c_1}.$$

$$\text{Par suite } z_1 = A z_0 - \frac{c_2}{c_1} z_0.$$

Exprimons z_2 .

$$P_2^{(1)}(\xi) = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ 1 & \xi & \xi^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}} = \xi^2 - \xi \frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_3 \\ c_2 & c_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}} + \frac{\begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ c_3 & c_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}}$$

$$P_2^{(1)}(\xi) = \xi^2 - \frac{c_1 c_4 - c_2 c_3}{c_1 c_3 - c_2^2} \xi + \frac{c_2 c_4 - c_3^2}{c_1 c_3 - c_2^2}.$$

On a : $c_3 = (v, A^3 r_0) = (A^{*2} \tilde{r}_0, A z_0)$.

Comme $A z_0 = z_1 + \frac{c_2}{c_1} z_0$, on a : $c_3 = (A^{*2} \tilde{r}_0, z_1) + \frac{c_2}{c_1} (A^{*2} \tilde{r}_0, z_0)$.

D'où $c_3 = (A^{*2} \tilde{r}_0, z_1) + \frac{c_2}{c_1} c_2$.

Donc $c_3 c_1 - c_2^2 = (A^{*2} \tilde{r}_0, z_1) c_1$.

On a : $c_4 = (v, A^4 r_0) = (A^{*2} \tilde{r}_0, A^2 z_0)$.

Comme $A z_1 = A^2 z_0 - \frac{c_2}{c_1} A z_0$, on a : $c_4 = (A^{*2} \tilde{r}_0, A z_1) + \frac{c_2}{c_1} (A^{*2} \tilde{r}_0, A z_0)$.

D'où $c_4 = (A^{*2} \tilde{r}_0, A z_1) + \frac{c_2}{c_1} c_3$.

Donc $c_1 c_4 - c_2 c_3 = (A^{*2} \tilde{r}_0, A z_1) c_1$.

Par conséquent : $\frac{c_1 c_4 - c_2 c_3}{c_3 c_1 - c_2^2} = \frac{(A^{*2} \tilde{r}_0, A z_1)}{(A^{*2} \tilde{r}_0, z_1)}$.

On a : $c_2 c_4 - c_3^2 = c_2 (A^{*2} \tilde{r}_0, A z_1) + \frac{c_2^2}{c_1} c_3 - c_3^2$.

D'où $c_2 c_4 - c_3^2 = c_2 (A^{*2} \tilde{r}_0, A z_1) + \frac{c_3}{c_1} (c_2^2 - c_1 c_3)$.

Donc $c_2 c_4 - c_3^2 = c_2 (A^{*2} \tilde{r}_0, A z_1) - c_3 (A^{*2} \tilde{r}_0, z_1)$.

Par conséquent $\frac{c_2 c_4 - c_3^2}{c_3 c_1 - c_2^2} = \frac{c_2}{c_1} \frac{(A^{*2} \tilde{r}_0, A z_1)}{(A^{*2} \tilde{r}_0, z_1)} - \frac{c_3}{c_1}$.

Donc on a : $z_2 = A^2 z_0 - \frac{(A^{*2} \tilde{r}_0, A z_1)}{(A^{*2} \tilde{r}_0, z_1)} A z_0 + \left[\frac{c_2}{c_1} \frac{(A^{*2} \tilde{r}_0, A z_1)}{(A^{*2} \tilde{r}_0, z_1)} - \frac{c_3}{c_1} \right] z_0$.

Exprimons z_3 .

$$P_3^{(1)}(\xi) = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \\ 1 & \xi & \xi^2 & \xi^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ c_3 & c_4 & c_5 \end{vmatrix}} = \xi^3 - \xi^2 \frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_4 \\ c_2 & c_4 & c_5 \\ c_3 & c_5 & c_6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ c_3 & c_4 & c_5 \end{vmatrix}} + \xi \frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_3 & c_4 \\ c_2 & c_4 & c_5 \\ c_3 & c_5 & c_6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ c_3 & c_4 & c_5 \end{vmatrix}} - \frac{\begin{vmatrix} c_2 & c_3 & c_4 \\ c_3 & c_4 & c_5 \\ c_4 & c_5 & c_6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ c_3 & c_4 & c_5 \end{vmatrix}}.$$

On a : $c_5 = (A^{*3} \tilde{r}_0, A^2 z_0)$ et $c_6 = (A^{*4} \tilde{r}_0, A^2 z_0)$.

En notant $\lambda = \frac{(A^{*2} \tilde{r}_0, A z_1)}{(A^{*2} \tilde{r}_0, z_1)}$ et comme $z_2 = A^2 z_0 - \lambda A z_0 + \frac{c_2 \lambda - c_3}{c_1} z_0$, on a :

$$c_5 = (A^{*3} \tilde{r}_0, z_2 + \lambda A z_0 - \frac{c_2 \lambda - c_3}{c_1} z_0) = (A^{*3} \tilde{r}_0, z_2) + \lambda c_4 - \frac{c_2 \lambda - c_3}{c_1} c_3$$

$$c_6 = (A^{*4} \tilde{r}_0, z_2 + \lambda A z_0 - \frac{\lambda c_2 - c_3}{c_1} z_0) = (A^{*4} \tilde{r}_0, z_2) + \lambda c_5 - \frac{c_2 \lambda - c_3}{c_1} c_4.$$

$$\text{Soit } \Delta = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ c_3 & c_4 & c_5 \end{vmatrix}.$$

$$\text{On a : } \Delta = c_3(c_2 c_4 - c_3^2) - c_4(c_1 c_4 - c_2 c_3) + c_5(c_1 c_3 - c_2^2).$$

$$\text{D'où } \Delta = c_3 [c_2 (A^{*2} \tilde{r}_0, A z_1) - c_3 (A^{*2} \tilde{r}_0, z_1)] - c_1 c_4 (A^{*2} \tilde{r}_0, A z_1) + c_1 c_5 (A^{*2} \tilde{r}_0, z_1)$$

$$\Delta = (A^{*2} \tilde{r}_0, A z_1)(c_2 c_3 - c_1 c_4) - (A^{*2} \tilde{r}_0, z_1)(c_3^2 - c_1 c_5)$$

$$\Delta = -c_1 (A^{*2} \tilde{r}_0, A z_1)^2 - (A^{*2} \tilde{r}_0, z_1)(c_3^2 - c_1 c_5).$$

$$\text{On a : } z_3 = A^3 z_0 - \frac{\delta}{\Delta} A^2 z_0 + \frac{\mu}{\Delta} A z_0 - \frac{\nu}{\Delta} z_0.$$

$$\text{Par suite } z_3 = A z_2 - (\frac{\delta}{\Delta} - \lambda) A^2 z_0 + (\frac{\mu}{\Delta} + \frac{c_2 \lambda - c_3}{c_1}) A z_0 - \frac{\nu}{\Delta} z_0.$$

Par conséquent on a l'algorithme suivant :

◇ Choix de x_0 et y .

$$\text{Soit } r_0 = b - A x_0$$

$$z_0 = r_0$$

$$\tilde{r}_0 = \tilde{z}_0 = y$$

$$c_0 = (y, r_0)$$

$$c_1 = (v, A r_0)$$

$$c_2 = (v, A^2 r_0)$$

$$z_1 = A z_0 - \frac{c_2}{c_1} z_0$$

$$\tilde{z}_1 = A^* \tilde{z}_0 - \frac{\bar{c}_2}{\bar{c}_1} \tilde{z}_0$$

$$r_1 = r_0 - \frac{c_0}{c_1} A z_0$$

$$\tilde{r}_1 = \tilde{r}_0 - \frac{\bar{c}_0}{\bar{c}_1} A^* \tilde{z}_0$$

$$x_1 = x_0 + \frac{c_0}{c_1} z_0$$

$$c_3 = (A^{*2} \tilde{r}_0, z_1) + \frac{c_2^2}{c_1}$$

$$\lambda = \frac{(A^{*2} \tilde{r}_0, A z_1)}{(A^{*2} \tilde{r}_0, z_1)}$$

$$z_2 = A^2 z_0 - \lambda A z_0 + \frac{c_2 \lambda - c_3}{c_1} z_0$$

$$\tilde{z}_2 = A^{*2} \tilde{z}_0 - \bar{\lambda} A^* \tilde{z}_0 + \frac{\bar{c}_2 \bar{\lambda} - \bar{c}_3}{\bar{c}_1} \tilde{z}_0$$

$$A_2 = \frac{-(\tilde{r}_1, r_1)}{(\tilde{r}_1, A z_1)}$$

$$r_2 = r_1 + A_2 A z_1$$

$$\tilde{r}_2 = \tilde{r}_1 + \bar{A}_2 A^* \tilde{z}_1$$

$$x_2 = x_1 - A_2 z_1$$

$$c_4 = (A^{*2} \tilde{r}_0, A z_1) + \frac{c_2}{c_1} c_3$$

$$c_5 = (A^{*2} \tilde{r}_0, A z_2) + \lambda c_4 - \frac{c_2 \lambda - c_3}{c_1} c_3$$

$$c_6 = (A^{*2} \tilde{r}_0, A^{*2} z_2) + \lambda c_5 - \frac{c_2 \lambda - c_3}{c_1} c_4$$

$$\Delta = -c_1 (A^{*2} \tilde{r}_0, A z_1)^2 - (A^{*2} \tilde{r}_0, z_1)(c_3^2 - c_1 c_5)$$

$$\delta = c_4 (c_1 c_4 - c_2^2) - c_5 (c_1 c_5 - c_2 c_3) + c_6 (c_1 c_4 - c_2^2)$$

$$\mu = c_2 (c_2 c_5 - c_3 c_4) - c_5 (c_1 c_4 - c_3^2) + c_6 (c_1 c_4 - c_2 c_3)$$

$$v = c_4(c_3 c_5 - c_4^2) - c_5(c_2 c_5 - c_4 c_3) + c_6(c_2 c_4 - c_3^2)$$

$$z_3 = A z_2 - \left(\frac{\delta}{\Delta} - \lambda\right) A^2 z_0 + \left(\frac{\mu}{\Delta} + \frac{c_2 \lambda - c_3}{c_1}\right) A z_0 - \frac{v}{\Delta} z_0$$

$$\tilde{z}_3 = A^* \tilde{z}_2 - \left(\frac{\bar{\delta}}{\Delta} - \bar{\lambda}\right) A^{*2} \tilde{z}_0 + \left(\frac{\bar{\mu}}{\Delta} + \frac{\bar{c}_2 \bar{\lambda} - \bar{c}_3}{\bar{c}_1}\right) A^* \tilde{z}_0 - \frac{\bar{v}}{\Delta} \tilde{z}_0$$

◇ Pour $k = 3, 4, \dots$ faire

$$A_k = \frac{-(\tilde{r}_{k-1}, r_{k-1})}{(\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-1})}$$

$$r_k = r_{k-1} + A_k A z_{k-1}$$

$$\tilde{r}_k = \tilde{r}_{k-1} + \bar{A}_k A^* \tilde{z}_{k-1}$$

$$x_k = x_{k-1} - A_k z_{k-1}$$

◇ Si $r_k \neq 0$ alors faire

$$\alpha_k = \frac{1}{A_k} \left[(A^* \tilde{r}_{k-2}, A r_k) - (A^* \tilde{r}_{k-2}, A r_{k-1}) \right]$$

$$B'_{k+1} = \frac{\alpha_k}{(A^* \tilde{r}_{k-1}, A r_{k-3})}$$

$$\Delta_{k+1} = (\tilde{r}_{k-2}, A r_{k-1}) \left[(A^* \tilde{r}_{k-1}, A z_{k-1})(\tilde{r}_k, A z_{k-1}) - (A^* \tilde{r}_k, A z_{k-1})(\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-1}) \right] \\ - (A^* \tilde{r}_{k-2}, A z_{k-1}) \left[(\tilde{r}_{k-1}, A r_{k-1})(\tilde{r}_k, A z_{k-1}) - (\tilde{r}_k, A r_{k-1})(\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-1}) \right]$$

$$\beta_k = \frac{1}{A_k} \left[(A^* \tilde{r}_k, A r_k) - (A^* \tilde{r}_{k-1}, A r_k) \right]$$

$$\gamma_k = \frac{1}{A_k} \left[(A^* \tilde{r}_k, A r_{k-1}) - (A^* \tilde{r}_{k-1}, A r_{k-1}) \right]$$

$$C_{k+1} = \frac{1}{\Delta_{k+1}} \left[\left\{ \alpha_k + B'_{k+1} (A^* \tilde{r}_{k-2}, A r_{k-1}) \right\} \left\{ (A^* \tilde{r}_k, A z_{k-1})(\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-1}) \right. \right. \\ \left. \left. - (A^* \tilde{r}_{k-1}, A z_{k-1})(\tilde{r}_k, A z_{k-1}) \right\} - (A^* \tilde{r}_{k-2}, A z_{k-1}) \left[(\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-1}) \right. \right. \\ \left. \left. \left\{ \beta_k + B'_{k+1} (A^* \tilde{r}_k, A r_{k-1}) \right\} - (\tilde{r}_k, A z_{k-1}) \left\{ \gamma_k + B'_{k+1} (A^* \tilde{r}_{k-1}, A r_{k-1}) \right\} \right] \right]$$

$$E_{k+1} = \frac{-\alpha_k - B'_{k+1} (A^* \tilde{r}_{k-2}, A r_{k-1}) - C_{k+1} (\tilde{r}_{k-1}, A r_{k-1})}{(A^* \tilde{r}_{k-2}, A z_{k-1})}$$

$$\eta_k = B'_{k+1} (A^* \tilde{r}_{k-1}, A r_{k-1}) + C_{k+1} (\tilde{r}_{k-1}, A r_{k-1})$$

$$F_{k+1} = \frac{-\gamma_k - \eta_k - E_{k+1} (A^* \tilde{r}_{k-1}, A z_{k-1})}{(\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-1})}$$

$$z_{k+1} = \frac{1}{A_k} A r_k + (B'_{k+1} - \frac{1}{A_k}) A r_{k-1} + C_{k+1} r_{k-1} + E_{k+1} A z_{k-1} + F_{k+1} z_{k-1}$$

$$\tilde{z}_{k+1} = \frac{1}{A_k} A^* \tilde{r}_k + (\bar{B}'_{k+1} - \frac{1}{A_k}) A^* \tilde{r}_{k-1} + \bar{C}_{k+1} \tilde{r}_{k-1} + \bar{E}_{k+1} A^* \tilde{z}_{k-1} + \bar{F}_{k+1} \tilde{z}_{k-1}$$

Troisième cas : $U_i(\xi) = P_i^{(1)}(\xi)$.

On pose $\tilde{r}_k = P_k(A)^* y$ et $\tilde{z}_k = P_k^{(1)}(A)^* y$.

Comme $A_k = \frac{-c(P_{k-1}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi))}{c(\xi P_{k-1}^{(1)2}(\xi))}$, on a : $A_k = \frac{-(\tilde{r}_{k-1}, z_{k-1})}{(\tilde{z}_{k-1}, A z_{k-1})}$.

Reprenons les formules de B'_{k+1} , C_{k+1} , E_{k+1} , F_{k+1} et notons $\alpha_k = c(\xi^3 P_{k-3}^{(1)} P_{k-1}^{(1)})$,

$\beta_k = c(\xi^3 P_{k-3}^{(1)} P_{k-2}^{(1)})$ et $\gamma_k = c(\xi^3 P_{k-1}^{(1)2})$, on a alors :

$$B'_{k+1} = \frac{-\alpha_k}{(A^* \tilde{r}_{k-1}, A z_{k-3})}$$

$$E_{k+1} = \frac{-\beta_{k+2} - B'_{k+1} (A^* \tilde{r}_{k-1}, A z_k)}{(A^* \tilde{z}_k, A z_{k-1})}$$

$$C_{k+1} = \frac{-\beta_{k+1} - B'_{k+1} (A^* \tilde{r}_{k-1}, A z_{k-2}) - E_{k+1} (A^* \tilde{z}_{k-1}, A z_{k-2})}{(\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-2})}$$

$$\eta_k = B'_{k+1} (A^* \tilde{r}_{k-1}, A z_{k-1}) + C_{k+1} (\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-1})$$

$$F_{k+1} = \frac{-\gamma_k - \eta_k - E_{k+1} (A^* \tilde{z}_{k-1}, A z_{k-1})}{(\tilde{z}_{k-1}, A z_{k-1})}$$

Exprimons α_k , β_k , γ_k sans ξ^3 .

On a : $P_{k-2}(\xi) = P_{k-3}(\xi) + A_{k-2} \xi P_{k-3}^{(1)}(\xi)$.

D'où : $c(\xi^2 P_{k-2} P_{k-2}^{(1)}) = c(\xi^2 P_{k-3} P_{k-2}^{(1)}) + A_{k-2} c(\xi^3 P_{k-2}^{(1)} P_{k-3}^{(1)})$.

$$\text{Donc } \beta_k = \frac{1}{A_{k-2}} \left[c(\xi^2 P_{k-2}^{(1)} P_{k-2}) - c(\xi^2 P_{k-2}^{(1)} P_{k-3}) \right].$$

$$\text{Par conséquent } \beta_k = \frac{1}{A_{k-2}} \left[(A^* \tilde{r}_{k-1}, A z_{k-3}) - (A^* \tilde{r}_{k-2}, A z_{k-3}) \right].$$

On a : $P_k(\xi) = P_{k-1}(\xi) + A_k \xi P_{k-1}^{(1)}(\xi)$.

D'où : $c(\xi^2 P_k P_{k-3}^{(1)}) = c(\xi^2 P_{k-1} P_{k-3}^{(1)}) + A_k c(\xi^3 P_{k-1}^{(1)} P_{k-3}^{(1)})$.

$$\text{Donc } \alpha_k = \frac{1}{A_k} \left[c(\xi^2 P_{k-3}^{(1)} P_k) - c(\xi^2 P_{k-3}^{(1)} P_{k-1}) \right].$$

$$\text{Par conséquent } \alpha_k = \frac{1}{A_k} \left[(A^* \tilde{r}_k, A z_{k-3}) - (A^* \tilde{r}_{k-1}, A z_{k-3}) \right].$$

$$\text{On a également } c(\xi^2 P_k P_{k-1}^{(1)}) = c(\xi^2 P_{k-1} P_{k-1}^{(1)}) + A_k c(\xi^3 P_{k-1}^{(1)2}).$$

$$\text{D'où } \gamma_k = \frac{1}{A_k} \left[c(\xi^2 P_{k-1}^{(1)} P_k) - c(\xi^2 P_{k-1}^{(1)} P_{k-1}) \right].$$

$$\text{Par conséquent } \gamma_k = \frac{1}{A_k} \left[(A^* \tilde{r}_k, A z_{k-1}) - (A^* \tilde{r}_{k-1}, A z_{k-1}) \right].$$

Les formules précédentes sont valables pour $k \geq 3$. On reprend pour r_1, r_2 et z_1, z_2, z_3 les formules trouvées précédemment. On a donc l'algorithme suivant :

◇ Choix de x_0 et y .

$$\text{Soit } r_0 = b - A x_0$$

$$z_0 = r_0$$

$$\tilde{r}_0 = \tilde{z}_0 = y$$

$$c_0 = (y, r_0)$$

$$c_1 = (y, A r_0)$$

$$c_2 = (y, A^2 r_0)$$

$$z_1 = A z_0 - \frac{c_2}{c_1} z_0$$

$$\tilde{z}_1 = A^* \tilde{z}_0 - \frac{\bar{c}_2}{\bar{c}_1} \tilde{z}_0$$

$$r_1 = r_0 - \frac{c_0}{c_1} A z_0$$

$$\tilde{r}_1 = \tilde{r}_0 - \frac{\bar{c}_0}{\bar{c}_1} A^* \tilde{z}_0$$

$$x_1 = x_0 + \frac{c_0}{c_1} z_0$$

$$c_3 = (A^{*2} \tilde{r}_0, z_1) + \frac{c_2^2}{c_1}$$

$$\lambda = \frac{(A^{*2} \tilde{r}_0, A z_1)}{(A^{*2} \tilde{r}_0, z_1)}$$

$$z_2 = A^2 z_0 - \lambda A z_0 + \frac{c_2 \lambda - c_3}{c_1} z_0$$

$$\tilde{z}_2 = A^{*2} \tilde{z}_0 - \bar{\lambda} A^* \tilde{z}_0 + \frac{\bar{c}_2 \bar{\lambda} - \bar{c}_3}{\bar{c}_1} \tilde{z}_0$$

$$A_2 = \frac{-(\tilde{r}_1, r_1)}{(\tilde{r}_1, A z_1)}$$

$$r_2 = r_1 + A_2 A z_1$$

$$\tilde{r}_2 = \tilde{r}_1 + \bar{A}_2 A^* \tilde{z}_1$$

$$x_2 = x_1 - A_2 z_1$$

$$c_4 = (A^{*2} \tilde{r}_0, A z_1) + \frac{c_2}{c_1} c_3$$

$$c_5 = (A^{*2} \tilde{r}_0, A z_2) + \lambda c_4 - \frac{c_2 \lambda - c_3}{c_1} c_3$$

$$c_6 = (A^{*2} \tilde{r}_0, A^{*2} z_2) + \lambda c_5 - \frac{c_2 \lambda - c_3}{c_1} c_4$$

$$\Delta = -c_1 (A^{*2} \tilde{r}_0, A z_1)^2 - (A^{*2} \tilde{r}_0, z_1) (c_3^2 - c_1 c_5)$$

$$\delta = c_4 (c_1 c_4 - c_2^2) - c_5 (c_1 c_5 - c_2 c_3) + c_6 (c_1 c_4 - c_2^2)$$

$$\mu = c_2 (c_2 c_5 - c_3 c_4) - c_5 (c_1 c_4 - c_2^2) + c_6 (c_1 c_4 - c_2 c_3)$$

$$v = c_4 (c_3 c_5 - c_4^2) - c_5 (c_2 c_5 - c_4 c_3) + c_6 (c_2 c_4 - c_3^2)$$

$$z_3 = A z_2 - \left(\frac{\delta}{\Delta} - \lambda\right) A^2 z_0 + \left(\frac{\mu}{\Delta} + \frac{c_2 \lambda - c_3}{c_1}\right) A z_0 - \frac{v}{\Delta} z_0$$

$$\tilde{z}_3 = A^* \tilde{z}_2 - \left(\frac{\bar{\delta}}{\Delta} - \bar{\lambda}\right) A^{*2} \tilde{z}_0 + \left(\frac{\bar{\mu}}{\Delta} + \frac{\bar{c}_2 \bar{\lambda} - \bar{c}_3}{\bar{c}_1}\right) A^* \tilde{z}_0 - \frac{\bar{v}}{\Delta} \tilde{z}_0$$

◇ Pour $k = 3, 4, \dots$ faire

$$A_{k+1} = \frac{-(\tilde{r}_k, z_k)}{(\tilde{z}_k, A z_k)}$$

$$r_{k+1} = r_k + A_{k+1} A z_k$$

$$\tilde{r}_{k+1} = \tilde{r}_k + \bar{A}_{k+1} A^* \tilde{z}_k$$

$$x_{k+1} = x_k - A_{k+1} z_k$$

◇ Si $r_{k+1} = 0$ alors faire

$$\alpha_k = \frac{1}{A_k} \left[(A^* \tilde{r}_k, A z_{k-3}) - (A^* \tilde{r}_{k-1}, A z_{k-3}) \right]$$

$$\beta_{k+2} = \frac{1}{A_k} \left[(A^* \tilde{r}_{k+1}, A z_{k-1}) - (A^* \tilde{r}_k, A z_{k-1}) \right]$$

$$\gamma_k = \frac{1}{A_k} \left[(A^* \tilde{r}_k, A z_{k-1}) - (A^* \tilde{r}_{k-1}, A z_{k-1}) \right]$$

$$B'_{k+1} = \frac{-\alpha_k}{(A^* \tilde{r}_{k-1}, A z_{k-1})}$$

$$E_{k+1} = \frac{-\beta_{k+2} - B'_{k+1} (A^* \tilde{r}_{k-1}, A z_k)}{(A^* \tilde{z}_k, A z_{k-1})}$$

$$C_{k+1} = \frac{-\beta_{k+1} - B'_{k+1} (A^* \tilde{r}_{k-1}, A z_{k-2}) - E_{k+1} (A^* \tilde{z}_{k-1}, A z_{k-2})}{(\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-2})}$$

$$\eta_k = B'_{k+1} (A^* \tilde{r}_{k-1}, A z_{k-1}) + C_{k+1} (\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-1})$$

$$F_{k+1} = \frac{-\gamma_k - \eta_k - E_{k+1} (A^* \tilde{z}_{k-1}, A z_{k-1})}{(\tilde{z}_{k-1}, A z_{k-1})}$$

$$z_{k+1} = \frac{1}{A_k} A r_k + (B'_{k+1} - \frac{1}{A_k}) A r_{k-1} + C_{k+1} r_{k-1} + E_{k+1} A z_{k-1} + F_{k+1} z_{k-1}$$

$$\tilde{z}_{k+1} = \frac{1}{A_k} A^* \tilde{r}_k + (\bar{B}'_{k+1} - \frac{1}{A_k}) A^* \tilde{r}_{k-1} + \bar{C}'_{k+1} \tilde{r}_{k-1} + \bar{E}_{k+1} A^* \tilde{z}_{k-1} + \bar{F}_{k+1} \tilde{z}_{k-1}$$

3.3. Méthode Ag / B5

De la relation A_8 , nous obtenons immédiatement :

$$r_k = r_{k-1} + A_k A z_{k-1} \quad (1)$$

en notant $z_k = P_k^{(1)}(A) r_0$.

$$\text{Par suite } x_k = x_{k-1} - A_k z_{k-1}. \quad (2)$$

De la relation B_5 , nous obtenons :

$$z_k = A'_k (A r_{k-1} + B'_k r_{k-1} + D'_k A z_{k-2} + E'_k z_{k-2}). \quad (3)$$

La méthode A_8 / B_5 est définie par les formules (1), (2), (3).

Il nous faut maintenant étudier comment programmer les coefficients $A_k, A'_k, B'_k, D'_k, E'_k$ apparaissant dans ces formules.

On a : $A'_k = \frac{1}{a_{k-1}}$ où a_{k-1} est définie par $P_{k-1}(\xi) = a_{k-1} \xi^{k-1} + \dots + 1$.

Par suite on a : $a_{k-1} = A_{k-1} A'_{k-2} a_{k-3}$.

Donc $A'_k = \frac{A_{k-3}}{A_{k-1} A'_{k-2}}$ pour $k \geq 3$.

Or $A'_1 = \frac{1}{a_0} = 1$.

De plus $A'_2 = \frac{1}{a_1}$ où a_1 est définie par $P_1(\xi) = a_1 \xi + 1$.

Comme $P_1(\xi) = \begin{vmatrix} 1 & \xi \\ c_0 & c_1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{c_0}{c_1} \xi$, on a : $a_1 = \frac{-c_0}{c_1}$ avec $c_0 = (y, r_0)$ et $c_1 = (y, A r_0)$.

Donc $A'_2 = \frac{-c_0}{c_1}$.

Premier cas : $U_i(\xi) = \xi^i$.

Comme $A_k = \frac{-c(\xi^{k-1} P_{k-1}(\xi))}{c(\xi^k P_{k-1}^{(1)}(\xi))}$, on a : $A_k = \frac{-(A^{*k-1} y, r_{k-1})}{(A^{*k-1} y, A z_{k-1})}$.

D'après les expressions des coefficients B'_k, D'_k, E'_k , on a :

$$D'_k = \frac{-(A^{*k-1} y, r_{k-1})}{(A^{*k-1} y, z_{k-2})}$$

$$B'_k = \frac{\alpha_k - (A^{*k} y, z_{k-2}) \left[(A^{*k} y, r_{k-1}) + D'_k (A^{*k} y, z_{k-2}) \right]}{(A^{*k-1} y, r_{k-1})(A^{*k} y, z_{k-2}) - (A^{*k} y, r_{k-1})(A^{*k-1} y, z_{k-2})}$$

$$\text{avec } \alpha_k = (A^{*k-1} y, z_{k-2}) \left[(A^{*k} y, r_{k-1}) + D'_k (A^{*k} y, z_{k-2}) \right]$$

$$E_k = \frac{-(A^{*k} y, r_{k-1}) - D'_k (A^{*k} y, z_{k-2}) - B'_k (A^{*k-1} y, r_{k-1})}{(A^{*k-1} y, z_{k-2})}$$

Il faut chercher $P_1^{(1)}(\xi)$.

$$\text{D'après l'introduction, } P_1^{(1)}(\xi) = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ 1 & \xi \end{vmatrix}}{c_1} = \xi - \frac{c_2}{c_1}. \text{ Par suite } z_1 = A r_0 - \frac{(A^{*2} y, r_0)}{(A^{*1} y, r_0)} r_0.$$

En regroupant toutes ces formules, nous avons l'algorithme suivant :

◇ Choix de x_0 et y .

$$\text{Soit } r_0 = b - A x_0$$

$$y_0 = y$$

$$z_0 = r_0$$

$$A_0 = 1$$

$$A'_1 = 1$$

$$y_1 = A^{*} y_0$$

$$A_1 = \frac{-(y_0, r_0)}{(y_1, z_0)}$$

$$x_1 = x_0 - A_1 z_0$$

$$r_1 = r_0 + A_1 A z_0$$

$$z_1 = A r_0 - \frac{(y_1, A z_0)}{(y_1, r_0)} r_0$$

◇ Pour $k = 1, 2, \dots$ faire

$$A_{k+1} = \frac{-(y_k, r_k)}{(y_k, A z_k)}$$

$$x_{k+1} = x_k - A_{k+1} z_k$$

$$r_{k+1} = r_k + A_{k+1} A z_k$$

◇ Si $r_{k+1} = 0$ alors faire

$$y_{k+1} = A^* y_k$$

$$D'_{k+1} = \frac{-(y_k, r_k)}{(y_k, z_{k-1})}$$

$$B'_{k+1} = \frac{\alpha_{k+1} - (y_{k+1}, z_{k-1}) [(y_{k+1}, r_k) + D'_{k+1} (y_{k+1}, z_{k-1})]}{(y_k, r_k)(y_{k+1}, z_{k-1}) - (y_{k+1}, r_k)(y_k, z_{k-1})}$$

$$\text{avec } \alpha_{k+1} = (y_k, z_{k-1}) [(y_{k+1}, A r_k) + D'_{k+1} (y_{k+1}, A z_{k-1})]$$

$$E'_{k+1} = \frac{-(y_{k+1}, r_k) - D'_{k+1} (y_{k+1}, z_{k-1}) - B'_{k+1} (y_k, r_k)}{(y_k, z_{k-1})}$$

$$A'_{k+1} = \frac{A_{k-2}}{A_k A'_{k-1}} \quad \text{si } k \geq 2, \quad A'_2 = \frac{1}{A_1}$$

$$z_{k+1} = A'_{k+1} (A r_k + B'_{k+1} r_k + D'_{k+1} A z_{k-1} + E'_{k+1} z_{k-1}).$$

Deuxième cas : $U_i(\xi) = P_i(\xi)$.

On pose $\tilde{z}_k = P_k^{(1)}(A)^* y$ et $\tilde{r}_k = P_k(A)^* y$.

$$\text{Comme } A_k = \frac{-c(P_{k-1}^2(\xi))}{c(\xi P_{k-1}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi))}, \text{ on a : } A_k = \frac{-(\tilde{r}_{k-1}, r_{k-1})}{(\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-1})}.$$

$$\text{Comme } D'_k = \frac{-c(\xi^2 P_{k-3}(\xi) P_{k-1}(\xi))}{c(\xi^2 P_{k-3}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi))}, \text{ on a : } D'_k = \frac{-(A^* \tilde{r}_{k-1}, A r_{k-3})}{(A^* \tilde{r}_{k-3}, A z_{k-2})}.$$

D'après les formules de B'_k et E'_k , on a :

$$B'_k = \frac{\alpha_k - (\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-2}) [(A^* \tilde{r}_{k-2}, A r_{k-1}) + D'_k (A^* \tilde{r}_{k-2}, A z_{k-2})]}{(\tilde{r}_{k-2}, A r_{k-1})(\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-2}) - (\tilde{r}_{k-1}, A r_{k-1})(\tilde{r}_{k-2}, A z_{k-2})}$$

$$\text{avec } \alpha_k = (\tilde{r}_{k-2}, A z_{k-2}) [(A^* \tilde{r}_{k-1}, A r_{k-1}) + D'_k (A^* \tilde{r}_{k-2}, A z_{k-2})]$$

$$E'_k = \frac{-(A^* \tilde{r}_{k-2}, A r_{k-1}) - D'_k (A^* \tilde{r}_{k-2}, A z_{k-2}) - B'_k (\tilde{r}_{k-2}, A r_{k-1})}{(\tilde{r}_{k-2}, A z_{k-2})}.$$

On a : $A'_k = \frac{1}{a_{k-1}}$. Comme $P_{k-1}(\xi) = A_{k-1} \xi P_{k-2}^{(1)}(\xi) + P_{k-2}(\xi)$, on a : $a_{k-1} = A_{k-1}$. Donc

$$A'_k = \frac{1}{A_{k-1}}.$$

Il nous faut exprimer z_1 et z_2 d'une autre manière.

$$\text{On a : } P_1^{(1)}(\xi) = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ 1 & \xi \end{vmatrix}}{c_1} = \xi - \frac{c_2}{c_1} \quad \text{avec } c_0 = (y, r_0), c_1 = (y, A r_0), \text{ et}$$

$$c_2 = (y, A^2 r_0) = (A^* y, A r_0).$$

$$\text{Donc } z_1 = A r_0 - \frac{c_2}{c_1} r_0.$$

$$\text{On a : } P_2^{(1)}(\xi) = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ 1 & \xi & \xi^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}} = \xi^2 - \xi \frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_3 \\ c_2 & c_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}} + \frac{\begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ c_3 & c_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

$$\text{Comme on prend } r_0 = z_0 \text{ et } y = \tilde{r}_0 = \tilde{z}_0, \text{ on a : } c_3 = (y, A^3 r_0) = (A^* y, A^2 z_0).$$

$$\text{Or } r_1 = A_1 A z_0 + r_0. \text{ D'où } A z_0 = \frac{1}{A_1} (r_1 - r_0).$$

$$\text{Donc } c_3 = \frac{1}{A_1} [(A^* y, A r_1) - (A^* y, A r_0)] = \frac{1}{A_1} [(A^* y, A r_1) - c_2].$$

$$\text{De plus } c_4 = (y, A^4 r_0) = (A^* y, A^3 r_0).$$

$$\text{Or } r_2 = A_2 A z_1 + r_1 \quad \text{et} \quad z_1 = A r_0 - \frac{c_2}{c_1} r_0.$$

$$\text{Par suite } r_2 = A_2 (A^2 r_0 - \frac{c_2}{c_1} A r_0) + r_1.$$

$$\text{Donc } A^2 r_0 = \frac{1}{A_2} (r_2 - r_1) + \frac{c_2}{c_1} A r_0.$$

$$\text{Par conséquent : } c_4 = \frac{1}{A_2} [(A^* y, A r_2) - (A^* y, A r_1)] + \frac{c_2}{c_1} (A^* y, A^2 r_0)$$

$$\text{soit encore } c_4 = \frac{1}{A_2} (A^* y, A r_2) - \frac{A_1 c_3 + c_2}{A_2} + \frac{c_3 c_2}{c_1}.$$

$$\text{Or } A_1 = \frac{-(\tilde{z}_0, r_0)}{(\tilde{z}_0, A z_0)} = \frac{-c_0}{c_1}.$$

$$\text{Donc } c_4 = \frac{1}{A_2} (A^* y, A r_2) + \frac{c_0 c_3 - c_1 c_2}{c_1 A_2} + \frac{c_3 c_2}{c_1}.$$

Par conséquent $z_2 = A^2 z_0 - A r_0 \frac{c_1 c_4 - c_2 c_3}{c_1 c_3 - c_2^2} + \frac{c_2 c_4 - c_3^2}{c_1 c_3 - c_2^2} r_0$.

Comme $A z_0 = \frac{1}{A_1} (r_1 - r_0)$, on a : $z_2 = \frac{1}{A_1} A r_1 - (\frac{1}{A_1} + \frac{c_1 c_4 - c_2 c_3}{c_1 c_3 - c_2^2}) A r_0 + \frac{c_2 c_4 - c_3^2}{c_1 c_3 - c_2^2} r_0$.

Par conséquent on a l'algorithme suivant :

◇ Choix de x_0 et y .

Soit $r_0 = b - A x_0$

$$\tilde{z}_0 = \tilde{r}_0 = y$$

$$z_0 = r_0$$

$$c_0 = (y, r_0)$$

$$c_1 = (y, A r_0)$$

$$A_1 = \frac{-c_0}{c_1}$$

$$x_1 = x_0 - A_1 z_0$$

$$r_1 = r_0 + A_1 A z_0$$

$$\tilde{r}_1 = \tilde{r}_0 + \overline{A_1} A^* \tilde{z}_0$$

$$c_2 = (A^* y, A r_0)$$

$$z_1 = A r_0 - \frac{c_2}{c_1} r_0$$

$$\tilde{z}_1 = A^* \tilde{r}_0 - \frac{\bar{c}_2}{\bar{c}_1} \tilde{r}_0$$

$$A_2 = \frac{-(\tilde{r}_1, r_1)}{(\tilde{r}_1, A z_1)}$$

$$r_2 = r_1 + A_2 A z_1$$

$$\tilde{r}_2 = \tilde{r}_1 + \overline{A_2} A^* \tilde{z}_1$$

$$x_2 = x_1 - A_2 z_1$$

$$c_3 = \frac{1}{A_1} [(A^* y, A r_1) - c_2]$$

$$c_4 = \frac{1}{A_2} (A^* y, A r_2) + \frac{c_0 c_3 - c_1 c_2}{c_1 A_2} + \frac{c_3 c_2}{c_1}$$

$$z_2 = \frac{1}{A_1} A r_1 - (\frac{1}{A_1} + \frac{c_1 c_4 - c_2 c_3}{c_1 c_3 - c_2^2}) A r_0 + \frac{c_2 c_4 - c_3^2}{c_1 c_3 - c_2^2} r_0$$

$$\tilde{z}_2 = \frac{1}{A_1} A^* \tilde{r}_1 - \left(\frac{1}{A_1} + \frac{\bar{c}_1 \bar{c}_4 - \bar{c}_2 \bar{c}_3}{\bar{c}_1 \bar{c}_3 - \bar{c}_2^2} \right) A^* \tilde{r}_0 + \frac{\bar{c}_2 \bar{c}_4 - \bar{c}_3^2}{\bar{c}_1 \bar{c}_3 - \bar{c}_2^2} \tilde{r}_0$$

$$A_3 = \frac{-(\tilde{r}_2, r_2)}{(\tilde{r}_2, A z_2)}$$

$$x_3 = x_2 - A_3 z_2$$

$$r_3 = r_2 + A_3 A z_2$$

$$\tilde{r}_3 = \tilde{r}_2 + \bar{A}_3 A^* \tilde{z}_2$$

◇ Pour $k = 2, 3, \dots$ faire

$$D'_{k+1} = \frac{-(A^* \tilde{r}_k, A r_{k-2})}{(A^* \tilde{r}_{k-2}, A z_{k-1})}$$

$$\alpha_{k+1} = (\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-1}) \left[(A^* \tilde{r}_k, A r_k) + D'_{k+1} (A^* \tilde{r}_{k-1}, A z_{k-1}) \right]$$

$$B'_{k+1} = \frac{\alpha_{k+1} - (\tilde{r}_k, A z_{k-1}) \left[(A^* \tilde{r}_{k-1}, A r_k) + D'_{k+1} (A^* \tilde{r}_{k-1}, A z_{k-1}) \right]}{(\tilde{r}_{k-1}, A r_k)(\tilde{r}_k, A z_{k-1}) - (\tilde{r}_k, A r_k)(\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-1})}$$

$$E_{k+1} = \frac{-(A^* \tilde{r}_{k-1}, A r_k) - D'_{k+1} (A^* \tilde{r}_{k-1}, A z_{k-1}) - B'_{k+1} (\tilde{r}_{k-1}, A r_k)}{(\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-1})}$$

$$A'_{k+1} = \frac{1}{A_k}$$

$$z_{k+1} = A'_{k+1} (A r_k + B'_{k+1} r_k + D'_{k+1} A z_{k-1} + E_{k+1} z_{k-1})$$

$$\tilde{z}_{k+1} = \bar{A}'_{k+1} (A^* \tilde{r}_k + \bar{B}'_{k+1} \tilde{r}_k + \bar{D}'_{k+1} A^* \tilde{z}_{k-1} + \bar{E}_{k+1} \tilde{z}_{k-1})$$

$$A_{k+2} = \frac{-(\tilde{r}_{k+1}, r_{k+1})}{(\tilde{r}_{k+1}, A z_{k+1})}$$

$$r_{k+2} = r_{k+1} + A_{k+2} A z_{k+1}$$

$$\tilde{r}_{k+2} = \tilde{r}_{k+1} + \bar{A}_{k+2} A^* \tilde{z}_{k+1}$$

$$x_{k+2} = x_{k+1} - A_{k+2} z_{k+1}$$

Troisième cas : $U_i(\xi) = P_i^{(1)}(\xi)$.

On pose $\tilde{z}_k = P_k^{(1)}(A)^* y$ et $\tilde{r}_k = P_k(A)^* y$.

$$\text{Comme } A_k = \frac{-c(P_{k-1}^{(1)}(\xi) P_{k-1}(\xi))}{c(\xi P_{k-1}^{(1)2}(\xi))}, \text{ on a : } A_k = \frac{-(\tilde{z}_{k-1}, r_{k-1})}{(\tilde{z}_{k-1}, A z_{k-1})}.$$

$$\text{Comme } D'_k = \frac{-c(\xi^2 P_{k-3}^{(1)}(\xi) P_{k-1}(\xi))}{c(\xi^2 P_{k-3}^{(1)}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi))}, \text{ on a : } D'_k = \frac{-(A^* \tilde{z}_{k-3}, A r_{k-1})}{(A^* \tilde{z}_{k-3}, A z_{k-2})}.$$

$$\text{Comme } B'_k = \frac{-c(\xi^2 P_{k-1}^{(1)}(\xi) P_{k-1}(\xi)) - D'_k c(\xi^2 P_{k-1}^{(1)}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi))}{c(\xi P_{k-1}^{(1)}(\xi) P_{k-1}(\xi))}, \text{ on a :}$$

$$B'_k = \frac{-(A^* \tilde{z}_{k-1}, A r_{k-1}) - D'_k (A^* \tilde{z}_{k-2}, A z_{k-1})}{(\tilde{z}_{k-1}, A r_{k-1})}.$$

$$\text{Comme } E'_k = \frac{-c(\xi^2 P_{k-2}^{(1)} P_{k-1}) - D'_k c(\xi^2 P_{k-2}^{(1)2}) - B'_k c(\xi P_{k-2}^{(1)} P_{k-1})}{c(\xi P_{k-2}^{(1)2})}, \text{ on a :}$$

$$E'_k = \frac{-(A^* \tilde{z}_{k-2}, A r_{k-1}) - D'_k (A^* \tilde{z}_{k-2}, A z_{k-2}) - B'_k (\tilde{z}_{k-2}, A r_{k-1})}{(\tilde{z}_{k-2}, A z_{k-2})}.$$

$$\text{On a : } A'_k = \frac{1}{a_{k-1}}. \text{ Comme } P_{k-1}(\xi) = A_{k-1} \xi P_{k-2}^{(1)}(\xi) + P_{k-2}(\xi), \text{ on a : } a_{k-1} = A_{k-1}.$$

$$\text{Donc } A'_k = \frac{1}{A_{k-1}}.$$

On exprime z_1 et z_2 de la même manière que dans le deuxième cas.

Par suite on a l'algorithme suivant :

◇ Choix de x_0 et y .

$$\text{Soit } r_0 = b - A x_0$$

$$\tilde{z}_0 = \tilde{r}_0 = y$$

$$z_0 = r_0$$

$$c_0 = (y, r_0)$$

$$c_1 = (y, A r_0)$$

$$A_1 = \frac{-c_0}{c_1}$$

$$x_1 = x_0 - A_1 z_0$$

$$r_1 = r_0 + A_1 A z_0$$

$$\tilde{r}_1 = \tilde{r}_0 + \bar{A}_1 A^* \tilde{z}_0$$

$$c_2 = (A^* y, A r_0)$$

$$z_1 = A r_0 - \frac{c_2}{c_1} r_0$$

$$\tilde{z}_1 = A^* \tilde{r}_0 - \frac{\bar{c}_2}{\bar{c}_1} \tilde{r}_0$$

$$A_2 = \frac{-(\tilde{z}_1, r_1)}{(\tilde{z}_1, A z_1)}$$

$$r_2 = r_1 + A_2 A z_1$$

$$\tilde{r}_2 = \tilde{r}_1 + \bar{A}_2 A^* \tilde{z}_1$$

$$x_2 = x_1 - A_2 z_1$$

$$c_3 = \frac{1}{A_1} [(A^* y, A r_1) - c_2]$$

$$c_4 = \frac{1}{A_2} (A^* y, A r_2) + \frac{c_1 c_3 - c_2 c_2}{c_1 A_2} + \frac{c_3 c_2}{c_1}$$

$$z_2 = \frac{1}{A_1} A r_1 - \left(\frac{1}{A_1} + \frac{c_1 c_4 - c_2 c_3}{c_1 c_3 - c_2^2} \right) A r_0 + \frac{c_2 c_4 - c_3^2}{c_1 c_3 - c_2^2} r_0$$

$$\tilde{z}_2 = \frac{1}{A_1} A^* \tilde{r}_1 - \left(\frac{1}{A_1} + \frac{\bar{c}_1 \bar{c}_4 - \bar{c}_2 \bar{c}_3}{\bar{c}_1 \bar{c}_3 - \bar{c}_2^2} \right) A^* \tilde{r}_0 + \frac{\bar{c}_2 \bar{c}_4 - \bar{c}_3^2}{\bar{c}_1 \bar{c}_3 - \bar{c}_2^2} \tilde{r}_0$$

$$A_3 = \frac{-(\tilde{z}_2, r_2)}{(\tilde{z}_2, A z_2)}$$

$$x_3 = x_2 - A_3 z_2$$

$$r_3 = r_2 + A_3 A z_2$$

$$\tilde{r}_3 = \tilde{r}_2 + \bar{A}_3 A^* \tilde{z}_2$$

◇ Pour $k = 2, 3, \dots$ faire

$$D'_{k+1} = \frac{-(A^* \tilde{z}_{k-2}, A r_k)}{(A^* \tilde{z}_{k-2}, A z_{k-1})}$$

$$B'_{k+1} = \frac{-(A^* \tilde{z}_k, A r_k) - D'_{k+1} (A^* \tilde{z}_{k-1}, A z_k)}{(\tilde{z}_k, A r_k)}$$

$$E_{k+1} = \frac{-(A^* \tilde{z}_{k-1}, A r_k) - D'_{k+1} (A^* \tilde{z}_{k-1}, A z_{k-1}) - B'_{k+1} (\tilde{z}_{k-1}, A r_k)}{(\tilde{z}_{k-1}, A z_{k-1})}$$

$$A'_{k+1} = \frac{1}{A_k}$$

$$z_{k+1} = A'_{k+1} (A r_k + B'_{k+1} r_k + D'_{k+1} A z_{k-1} + E_{k+1} z_{k-1})$$

$$\tilde{z}_{k+1} = \bar{A}'_{k+1} (A^* \tilde{r}_k + \bar{B}'_{k+1} \tilde{r}_k + \bar{D}'_{k+1} A^* \tilde{z}_{k-1} + \bar{E}_{k+1} \tilde{z}_{k-1})$$

$$A_{k+2} = \frac{-(\tilde{z}_{k+1}, r_{k+1})}{(\tilde{z}_{k+1}, A z_{k+1})}$$

$$r_{k+2} = r_{k+1} + A_{k+2} A z_{k+1}$$

$$\tilde{r}_{k+2} = \tilde{r}_{k+1} + \bar{A}_{k+2} A^* \tilde{z}_{k+1}$$

$$x_{k+2} = x_{k+1} - A_{k+2} z_{k+1}$$

◇ Si $r_{k+2} = 0$ alors continuer.

3.4. Méthode Ag / B6

De la relation Ag, nous obtenons immédiatement :

$$r_k = r_{k-1} + A_k A z_{k-1} \quad (1)$$

en notant $z_k = P_k^{(1)}(A) r_0$.

$$\text{Comme } r_k = b - A x_k, \text{ on a : } x_k = x_{k-1} - A_k z_{k-1}. \quad (2)$$

De la relation B6, nous obtenons :

$$z_k = C_k z_{k-2} + E_k z_{k-1} + A z_{k-1}. \quad (3)$$

La méthode Ag / B6 appelée Lanczos/Orthodir est définie par les formules (1), (2), (3). (voir [12],[15])

Il nous faut maintenant étudier comment programmer les coefficients A_k , C_k , E_k apparaissant dans ces formules.

Premier cas : $U_i(\xi) = \xi^i$.

$$\text{Comme } A_k = \frac{-c(\xi^{k-1} P_{k-1}^{(1)}(\xi))}{c(\xi^k P_{k-1}^{(1)}(\xi))}, \text{ on a : } A_k = \frac{-(A^{*k-1} y, r_{k-1})}{(A^{*k} y, z_{k-1})}.$$

$$\text{De plus comme } C_k = \frac{-c(\xi^k P_{k-2}^{(1)}(\xi))}{c(\xi^{k-1} P_{k-2}^{(1)}(\xi))}, \text{ on a : } C_k = \frac{-(A^{*k} y, z_{k-2})}{(A^{*k-1} y, z_{k-2})}.$$

$$\text{Comme } E_k = \frac{-c(\xi^{k+1} P_{k-1}^{(1)}(\xi)) - C_k c(\xi^k P_{k-2}^{(1)}(\xi))}{c(\xi^k P_{k-1}^{(1)}(\xi))}, \text{ on a :}$$

$$E_k = \frac{-(A^{*k} y, A z_{k-1}) - C_k (A^{*k} y, z_{k-2})}{(A^{*k} y, z_{k-1})}.$$

Par conséquent, on a l'algorithme suivant :

◇ Choix de x_0 et y .

$$\text{Soit } r_0 = b - A x_0$$

$$y_0 = y$$

$$z_0 = r_0$$

◇ Pour $k = 0, 1, 2, \dots$ faire

$$A_{k+1} = \frac{-(y_k, r_k)}{(y_k, A z_k)}$$

$$r_{k+1} = r_k + A_{k+1} A z_k$$

$$x_{k+1} = x_k - A_{k+1} z_k$$

◇ Si $r_{k+1} = 0$ alors faire

$$y_{k+1} = A^* y_k$$

$$C_{k+1} = \frac{-(y_{k+1}, z_k)}{(y_k, z_{k-1})} \quad \text{si } k \geq 1, \quad C_1 = 0$$

$$E_{k+1} = \frac{-(y_{k+1}, A z_k) - C_{k+1} (y_{k+1}, z_{k-1})}{(y_{k+1}, z_k)}$$

$$z_{k+1} = C_{k+1} z_{k-1} + E_{k+1} z_k + A z_k.$$

Deuxième cas : $U_i(\xi) = P_i(\xi)$.

On note $\tilde{r}_k = P_k(A)^* y$ et $\tilde{z}_k = \bar{P}_k^{(1)}(A^*) y = P_k^{(1)}(A)^* y$.

Comme $A_k = \frac{-c(P_{k-1}^2(\xi))}{c(\xi P_{k-1}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi))}$, on a : $A_k = \frac{-(\tilde{r}_{k-1}, r_{k-1})}{(\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-1})}$.

Comme $C_k = \frac{-c(\xi^2 P_{k-2}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi))}{c(\xi P_{k-2}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi))}$, on a : $C_k = \frac{-(A^* \tilde{r}_{k-2}, A z_{k-1})}{(\tilde{r}_{k-2}, A z_{k-2})}$.

Comme $E_k = \frac{-c(\xi^2 P_{k-1}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)) - C_k c(\xi P_{k-1}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi))}{c(\xi P_{k-1}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi))}$, on a :

$$E_k = \frac{-(A^* \tilde{r}_{k-1}, A z_{k-1}) - C_k (\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-2})}{(\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-1})}.$$

Par conséquent, on a l'algorithme suivant :

◇ Choix de x_0 et y .

Soit $r_0 = b - A x_0$

$$z_0 = r_0$$

$$\tilde{z}_0 = \tilde{r}_0 = y$$

◇ Pour $k = 0, 1, 2, \dots$ faire

$$A_{k+1} = \frac{-(\tilde{r}_k, r_k)}{(\tilde{r}_k, A z_k)}$$

$$r_{k+1} = r_k + A_{k+1} A z_k$$

$$\tilde{r}_{k+1} = \tilde{r}_k + \bar{A}_{k+1} A^* \tilde{z}_k$$

$$x_{k+1} = x_k - A_{k+1} z_k$$

◇ Si $r_{k+1} = 0$ alors faire

$$C_{k+1} = \frac{-(A^* \tilde{r}_{k-1}, A z_k)}{(\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-1})} \quad \text{si } k \geq 1, \quad C_1 = 0$$

$$E_{k+1} = \frac{-(A^* \tilde{r}_k, A z_k) - C_{k+1} (\tilde{r}_k, A z_{k-1})}{(\tilde{r}_k, A z_k)}$$

$$z_{k+1} = A z_k + C_{k+1} z_{k-1} + E_{k+1} z_k$$

$$\tilde{z}_{k+1} = A^* \tilde{z}_k + \bar{C}_{k+1} \tilde{z}_{k-1} + \bar{E}_{k+1} \tilde{z}_k.$$

Troisième cas : $U_i(\xi) = P_i^{(1)}(\xi)$.

On note $\tilde{z}_k = \bar{P}_k^{(1)}(A^*) y = P_k^{(1)}(A)^* y$.

$$\text{Comme } A_k = \frac{-c(P_{k-1}^{(1)}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi))}{c(\xi P_{k-1}^{(1)2}(\xi))}, \text{ on a : } A_k = \frac{-(\tilde{z}_{k-1}, r_{k-1})}{(\tilde{z}_{k-1}, A z_{k-1})}.$$

$$\text{Comme } C_k = \frac{-c(\xi^2 P_{k-2}^{(1)}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi))}{c(\xi P_{k-2}^{(1)2}(\xi))}, \text{ on a : } C_k = \frac{-(A^* \tilde{z}_{k-2}, A z_{k-1})}{(\tilde{z}_{k-2}, A z_{k-2})}.$$

$$\text{Comme } E_k = \frac{-c(\xi^2 P_{k-1}^{(1)2}(\xi))}{c(\xi P_{k-1}^{(1)2}(\xi))}, \text{ on a : } E_k = \frac{-(A^* \tilde{z}_{k-1}, A z_{k-1})}{(\tilde{z}_{k-1}, A z_{k-1})}.$$

Comme $P_{k-1}^{(1)}(\xi) = C_{k-1} P_{k-3}^{(1)}(\xi) + \xi P_{k-2}^{(1)}(\xi) + E_{k-1} P_{k-2}^{(1)}(\xi)$, en multipliant de chaque côté par

$$\xi P_{k-1}^{(1)}(\xi) \text{ et en appliquant la fonctionnelle } c, \text{ on a : } c(\xi P_{k-1}^{(1)2}(\xi)) = c(\xi^2 P_{k-1}^{(1)}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi))$$

en appliquant (2.3) et (2.4).

$$\text{Par suite } C_k = \frac{-c(\xi P_{k-1}^{(1)2}(\xi))}{c(\xi P_{k-2}^{(1)2}(\xi))} = \frac{-(\tilde{z}_{k-1}, A z_{k-1})}{(\tilde{z}_{k-2}, A z_{k-2})}.$$

Par conséquent, on a l'algorithme suivant, connu sous le nom de BIODIR ([11]) :

◇ Choix de x_0 et y .

$$\text{Soit } r_0 = b - A x_0$$

$$z_0 = r_0$$

$$\tilde{z}_0 = y$$

◇ Pour $k = 0, 1, 2, \dots$ faire

$$A_{k+1} = \frac{-(\tilde{z}_k, r_k)}{(\tilde{z}_k, A z_k)}$$

$$r_{k+1} = r_k + A_{k+1} A z_k$$

$$x_{k+1} = x_k - A_{k+1} z_k$$

◇ Si $r_{k+1} = 0$ alors faire

$$C_{k+1} = \frac{-(\tilde{z}_k, A z_k)}{(\tilde{z}_{k-1}, A z_{k-1})} \quad \text{si } k \geq 1, \quad C_1 = 0$$

$$E_{k+1} = \frac{-(A^* \tilde{z}_k, A z_k)}{(\tilde{z}_k, A z_k)}$$

$$z_{k+1} = A z_k + C_{k+1} z_{k-1} + E_{k+1} z_k$$

$$\tilde{z}_{k+1} = A^* \tilde{z}_k + \bar{C}_{k+1} \tilde{z}_{k-1} + \bar{E}_{k+1} \tilde{z}_k$$

3.5. Méthode Ag / Bg

De la relation Ag, nous obtenons immédiatement :

$$r_k = r_{k-1} + A_k A z_{k-1} \quad (1)$$

en notant $z_k = P_k^{(1)}(A) r_0$.

$$\text{Comme } r_k = b - A x_k, \text{ on a : } x_k = x_{k-1} - A_k z_{k-1}. \quad (2)$$

De la relation Bg, nous obtenons :

$$z_k = B'_k z_{k-1} + D'_k r_{k-1} + A z_{k-1}. \quad (3)$$

La méthode Ag/Bg est définie par les formules (1), (2), (3). (Voir aussi [8]).

Il nous faut maintenant étudier comment programmer les coefficients A_k , D'_k , B'_k apparaissant dans ces formules.

Premier cas : $U_i(\xi) = \xi^i$.

$$\text{Comme } A_k = \frac{-c(\xi^{k-1} P_{k-1}^{(1)}(\xi))}{c(\xi^k P_{k-1}^{(1)}(\xi))}, \text{ on a : } A_k = \frac{-(A^{*k-1} y, r_{k-1})}{(A^{*k-1} y, A z_{k-1})}.$$

$$\text{Comme } D'_k = \frac{-c(\xi^k P_{k-1}^{(1)}(\xi))}{c(\xi^{k-1} P_{k-1}^{(1)}(\xi))}, \text{ on a : } D'_k = \frac{-(A^{*k} y, z_{k-1})}{(A^{*k-1} y, r_{k-1})}.$$

$$\text{Comme } B'_k = \frac{-c(\xi^{k+1} P_{k-1}^{(1)}(\xi)) - D'_k c(\xi^k P_{k-1}^{(1)}(\xi))}{c(\xi^k P_{k-1}^{(1)}(\xi))}, \text{ on a :}$$

$$B'_k = \frac{-(A^{*k} y, A z_{k-1}) - D'_k (A^{*k} y, r_{k-1})}{(A^{*k} y, z_{k-1})}.$$

Par conséquent, on a l'algorithme suivant :

◇ Choix de x_0 et y .

$$\text{Soit } r_0 = b - A x_0$$

$$y_0 = y$$

$$z_0 = r_0$$

◇ Pour $k = 0, 1, 2, \dots$ faire

$$A_{k+1} = \frac{-(y_k, r_k)}{(y_k, A z_k)}$$

$$r_{k+1} = r_k + A_{k+1} A z_k$$

$$x_{k+1} = x_k - A_{k+1} z_k$$

◇ Si $r_{k+1} = 0$ alors faire

$$y_{k+1} = A^* y_k$$

$$D'_{k+1} = \frac{-(y_k, A z_k)}{(y_k, r_k)}$$

$$B'_{k+1} = \frac{-(y_{k+1}, A z_k) - D'_{k+1} (y_{k+1}, r_k)}{(y_k, A z_k)} = \frac{(y_{k+1}, r_k)}{(y_k, r_k)} - \frac{(y_{k+1}, A z_k)}{(y_k, A z_k)}$$

$$z_{k+1} = A z_k + B'_{k+1} z_k + D'_{k+1} r_k.$$

Deuxième cas : $U_i(\xi) = P_i(\xi)$.

On note $\tilde{r}_k = P_k(A)^* y$ et $\tilde{z}_k = P_k^{(1)}(A)^* y$.

Comme $A_k = \frac{-c(P_{k-1}^2(\xi))}{c(\xi P_{k-1}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi))}$, on a : $A_k = \frac{-(\tilde{r}_{k-1}, r_{k-1})}{(\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-1})}$.

En multipliant la relation $P_k = P_{k-1} + A_k \xi P_{k-1}^{(1)}$ par ξP_{k-2} et en appliquant la fonctionnelle c , on a :

$$c(\xi P_{k-2} P_k) = c(\xi P_{k-2} P_{k-1}) + A_k c(\xi^2 P_{k-2} P_{k-1}^{(1)}).$$

Par suite on a : $c(\xi P_{k-2} P_{k-1}) + A_k c(\xi^2 P_{k-2} P_{k-1}^{(1)}) = 0$.

$$\text{Donc } A_k = \frac{-c(\xi P_{k-2}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi))}{c(\xi^2 P_{k-2}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi))}.$$

$$\text{Or } D'_k = \frac{-c(\xi^2 P_{k-2}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi))}{c(\xi P_{k-2}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi))}. \text{ Par conséquent } D'_k = \frac{1}{A_k}.$$

$$\text{Comme } B'_k = \frac{-c(\xi^2 P_{k-1}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)) - D'_k c(\xi P_{k-1}^2(\xi))}{c(\xi P_{k-1}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi))}, \text{ on a :}$$

$$B'_k = \frac{-c(\xi P_{k-1}(\xi)(\xi P_{k-1}^{(1)}(\xi) + D'_k P_{k-1}(\xi)))}{c(\xi P_{k-1}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi))}.$$

$$\text{Or } P_k(\xi) = P_{k-1}(\xi) + A_k \xi P_{k-1}^{(1)}(\xi).$$

$$\text{D'où } D'_k P_k(\xi) = D'_k P_{k-1}(\xi) + \xi P_{k-1}^{(1)}(\xi) \quad \text{car } D'_k = \frac{1}{A_k}.$$

$$\text{Par suite } B'_k = \frac{-D'_k c(\xi P_{k-1}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi))}{c(\xi P_{k-1}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi))}.$$

$$\text{Donc } B'_k = \frac{c(\xi P_{k-1}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi))}{c(P_{k-1}^2(\xi))}. \text{ Par conséquent } B'_k = \frac{(\tilde{r}_{k-1}, A r_k)}{(\tilde{r}_{k-1}, r_{k-1})}.$$

Par conséquent, on a l'algorithme suivant :

◇ Choix de x_0 et y .

$$\text{Soit } r_0 = b - A x_0$$

$$z_0 = r_0$$

$$\tilde{z}_0 = \tilde{r}_0 = y$$

◇ Pour $k = 0, 1, 2, \dots$ faire

$$A_{k+1} = \frac{-(\tilde{r}_k, r_k)}{(\tilde{r}_k, A z_k)}$$

$$r_{k+1} = r_k + A_{k+1} A z_k$$

$$\tilde{r}_{k+1} = \tilde{r}_k + \bar{A}_{k+1} A^* \tilde{z}_k$$

$$x_{k+1} = x_k - A_{k+1} z_k$$

◇ Si $r_{k+1} = 0$ alors faire

$$D'_{k+1} = \frac{1}{A_{k+1}}$$

$$B'_{k+1} = \frac{(\tilde{r}_k, A r_{k+1})}{(\tilde{r}_k, r_k)}$$

$$z_{k+1} = A z_k + B'_{k+1} z_k + D'_{k+1} r_k$$

$$\tilde{z}_{k+1} = A^* \tilde{z}_k + \bar{B}'_{k+1} \tilde{z}_k + \bar{D}'_{k+1} \tilde{r}_k.$$

$$\text{On a : } B'_k = \frac{c(\xi P_k(\xi) P_{k-1}(\xi))}{c(P_{k-1}^2(\xi))}.$$

On multiplie la relation $P_{k-1} = P_{k-2} + A_{k-1} \xi P_{k-2}^{(1)}$ par ξP_k et on applique la fonctionnelle c , ce qui

$$\text{donne : } c(\xi P_k P_{k-1}) = c(\xi P_k P_{k-2}) + A_{k-1} c(\xi^2 P_{k-2}^{(1)} P_k).$$

$$\text{Par suite } c(\xi P_k P_{k-1}) = A_{k-1} c(\xi^2 P_{k-2}^{(1)} P_k).$$

On multiplie la relation $P_{k-1}^{(1)} = \xi P_{k-2}^{(1)} + B'_{k-1} P_{k-2}^{(1)} + D'_{k-1} P_{k-2}$ par ξP_k et on applique la fonctionnelle c , ce qui donne :

$$c(\xi P_k P_{k-1}^{(1)}) = c(\xi^2 P_k P_{k-2}^{(1)}) + B'_{k-1} c(\xi P_{k-2}^{(1)} P_k) + D'_{k-1} c(\xi P_{k-2} P_k).$$

Comme P_k est orthogonal à $\xi P_{k-2}^{(1)}$, qui est un polynôme de degré $k-1$, et comme $c(\xi P_{k-2} P_k) = 0$,

$$\text{on a : } c(\xi P_k P_{k-1}^{(1)}) = c(\xi^2 P_k P_{k-2}^{(1)}).$$

Donc $c(\xi P_k P_{k-1}) = A_{k-1} c(\xi P_k P_{k-1}^{(1)})$.

Par conséquent $B'_k = A_{k-1} \frac{c(\xi P_k(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi))}{c(P_{k-1}^2(\xi))}$.

En regroupant toutes ces formules, on a l'algorithme suivant :

◇ Choix de x_0 et y .

Soit $r_0 = b - A x_0$

$z_0 = r_0$

$\tilde{z}_0 = \tilde{r}_0 = y$

$A_0 = 1$

◇ Pour $k = 0, 1, 2, \dots$ faire

$$A_{k+1} = \frac{-(\tilde{r}_k, r_k)}{(\tilde{r}_k, A z_k)}$$

$$r_{k+1} = r_k + A_{k+1} A z_k$$

$$\tilde{r}_{k+1} = \tilde{r}_k + \bar{A}_{k+1} A^* \tilde{z}_k$$

$$x_{k+1} = x_k - A_{k+1} z_k$$

◇ Si $r_{k+1} = 0$ alors faire

$$D'_{k+1} = \frac{1}{A_{k+1}}$$

$$B'_{k+1} = A_k \frac{(\tilde{r}_{k+1}, A z_k)}{(\tilde{r}_k, r_k)} = \frac{A_k}{A_{k+1}} \frac{(\tilde{r}_{k+1}, r_{k+1})}{(\tilde{r}_k, r_k)}$$

$$z_{k+1} = A z_k + B'_{k+1} z_k + D'_{k+1} r_k$$

$$\tilde{z}_{k+1} = A^* \tilde{z}_k + \bar{B}'_{k+1} \tilde{z}_k + \bar{D}'_{k+1} \tilde{r}_k.$$

Troisième cas : $U_i(\xi) = P_i^{(1)}(\xi)$.

On note $\tilde{r}_k = P_k(A)^* y$ et $\tilde{z}_k = P_k^{(1)}(A)^* y$.

Comme $A_k = \frac{-c(P_{k-1}^{(1)}(\xi) P_{k-1}(\xi))}{c(\xi P_{k-1}^{(1)2}(\xi))}$, on a : $A_k = \frac{-(\tilde{z}_{k-1}, r_{k-1})}{(\tilde{z}_{k-1}, A z_{k-1})}$.

Comme $D'_k = \frac{-c(\xi^2 P_{k-2}^{(1)}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi))}{c(\xi P_{k-2}^{(1)}(\xi) P_{k-1}(\xi))}$, on a : $D'_k = \frac{-(A^* \tilde{z}_{k-2}, A z_{k-1})}{(\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-2})}$.

Comme $B'_k = \frac{-c(\xi^2 P_{k-1}^{(1)2}(\xi)) - D'_k c(\xi P_{k-1}^{(1)}(\xi) P_{k-1}(\xi))}{c(\xi P_{k-1}^{(1)2}(\xi))}$, on a :

$$B'_k = \frac{-(A^* \tilde{z}_{k-1}, A z_{k-1}) - D'_k (\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-1})}{(\tilde{z}_{k-1}, A z_{k-1})}.$$

Par conséquent, on a l'algorithme suivant :

◇ Choix de x_0 et y .

Soit $r_0 = b - A x_0$

$$z_0 = r_0$$

$$\tilde{z}_0 = \tilde{r}_0 = y$$

◇ Pour $k = 0, 1, 2, \dots$ faire

$$A_{k+1} = \frac{-(\tilde{z}_k, r_k)}{(\tilde{z}_k, A z_k)}$$

$$r_{k+1} = r_k + A_{k+1} A z_k$$

$$\tilde{r}_{k+1} = \tilde{r}_k + \bar{A}_{k+1} A^* \tilde{z}_k$$

$$x_{k+1} = x_k - A_{k+1} z_k$$

◇ Si $r_{k+1} = 0$ alors faire

$$D'_{k+1} = \frac{-(A^* \tilde{z}_{k-1}, A z_k)}{(\tilde{r}_k, A z_{k-1})} \quad \text{si } k \geq 1, \quad D'_1 = 0$$

$$B'_{k+1} = \frac{-(A^* \tilde{z}_k, A z_k) - D'_{k+1} (\tilde{r}_k, A z_k)}{(\tilde{z}_k, A z_k)}$$

$$z_{k+1} = A z_k + B'_{k+1} z_k + D'_{k+1} r_k$$

$$\tilde{z}_{k+1} = A^* \tilde{z}_k + \bar{B}'_{k+1} \tilde{z}_k + \bar{D}'_{k+1} \tilde{r}_k.$$

Remarque : Procédons comme dans le deuxième cas :

On multiplie la relation $P_k = P_{k-1} + A_k \xi P_{k-1}^{(1)}$ par $\xi P_{k-2}^{(1)}$ et on applique la fonctionnelle c .

Alors $c(\xi P_{k-2}^{(1)} P_k) = c(\xi P_{k-2}^{(1)} P_{k-1}) + A_k c(\xi^2 P_{k-2}^{(1)} P_{k-1}^{(1)})$.

D'où $A_k = \frac{-c(\xi P_{k-2}^{(1)}(\xi) P_{k-1}(\xi))}{c(\xi^2 P_{k-2}^{(1)}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi))}$. Donc on a : $D'_k = \frac{1}{A_k}$.

De la même manière, on a :

$$B'_k = \frac{-c(\xi P_{k-1}^{(1)}(\xi) (\xi P_{k-1}^{(1)}(\xi) + D'_k P_{k-1}(\xi)))}{c(\xi P_{k-1}^{(1)2}(\xi))} = \frac{-D'_k c(\xi P_{k-1}^{(1)}(\xi) P_k(\xi))}{c(\xi P_{k-1}^{(1)2}(\xi))}.$$

On a alors $B'_k = \frac{-D'_k (\tilde{r}_k, A z_{k-1})}{(\tilde{z}_{k-1}, A z_{k-1})}.$

Donc on a l'algorithme suivant :

◇ Choix de x_0 et y .

Soit $r_0 = b - A x_0$

$$z_0 = r_0$$

$$\tilde{z}_0 = \tilde{r}_0 = y$$

◇ Pour $k = 0, 1, 2, \dots$ faire

$$A_{k+1} = \frac{-(\tilde{z}_k, r_k)}{(\tilde{z}_k, A z_k)}$$

$$r_{k+1} = r_k + A_{k+1} A z_k$$

$$\tilde{r}_{k+1} = \tilde{r}_k + \bar{A}_{k+1} A^* \tilde{z}_k$$

$$x_{k+1} = x_k - A_{k+1} z_k$$

◇ Si $r_{k+1} = 0$ alors faire

$$D'_{k+1} = \frac{1}{A_{k+1}}$$

$$B'_{k+1} = \frac{-D'_{k+1} (\tilde{r}_{k+1}, A z_k)}{(\tilde{z}_k, A z_k)}$$

$$z_{k+1} = A z_k + B'_{k+1} z_k + D'_{k+1} r_k$$

$$\tilde{z}_{k+1} = A^* \tilde{z}_k + \bar{B}'_{k+1} \tilde{z}_k + \bar{D}'_{k+1} \tilde{r}_k.$$

Remarque générale pour A_8 / B_8 : Les coefficients A_{k+1} , B'_{k+1} et D'_{k+1} ont les mêmes expressions

que les coefficients A_{k+1} , B'_{k+1} , C'_{k+1} de l'algorithme A_8 / B_{10} .

L'expression pour x_{k+1} et r_{k+1} est la même. Par contre pour z_{k+1} nous avons une expression plus simple mais qui revient au même que celle-ci.

En effet ici on a : $z_{k+1} = A z_k + B'_{k+1} z_k + D'_{k+1} r_k.$

Comme $Az_k = \frac{1}{A_{k+1}} r_{k+1} - \frac{1}{A_{k+1}} r_k$ et $D'_{k+1} = \frac{1}{A_{k+1}}$, on a : $Az_k = D'_{k+1} r_{k+1} - D_{k+1} r_k$.

Donc $z_{k+1} = D'_{k+1} r_{k+1} - D_k r_k + B'_{k+1} z_k + D'_{k+1} r_k$ et on retrouve

$$z_{k+1} = D'_{k+1} r_{k+1} + B'_{k+1} z_k.$$

3.6. Méthode A₈ / B₁₀

De la relation A₈, nous obtenons immédiatement :

$$r_k = r_{k-1} + A_k A z_{k-1} \quad (1)$$

en notant $z_k = P_k^{(1)}(A) r_0$.

$$\text{Comme } r_k = b - A x_k, \text{ on a : } x_k = x_{k-1} - A_k z_{k-1}. \quad (2)$$

$$\text{De la relation B}_{10}, \text{ nous obtenons : } z_k = B'_k z_{k-1} + C_k r_k. \quad (3)$$

La méthode A₈ / B₁₀, appelée Lanczos / Orthomin, est définie par les formules (1), (2), (3). (Voir [12]).

Il nous faut maintenant étudier comment programmer les coefficients A_k, E'_k, C'_k apparaissant dans ces formules.

Comme $C_k = \frac{1}{a_k}$ où a_k est définie par $P_k(\xi) = a_k \xi^k + \dots + 1$, on a : $a_k = A_k C_{k-1} a_{k-1} = A_k$.

$$\text{D'où } C_k = \frac{1}{A_k}.$$

Premier cas : $U_i(\xi) = \xi^i$.

$$\text{Comme } A_k = \frac{-c(\xi^{k-1} P_{k-1}(\xi))}{c(\xi^k P_k^{(1)}(\xi))}, \text{ on a : } A_k = \frac{-(A^{*k-1} y, r_{k-1})}{(A^{*k} y, z_{k-1})}.$$

$$\text{Comme } B'_k = \frac{-C_k c(\xi^k P_k(\xi))}{c(\xi^k P_{k-1}^{(1)}(\xi))}, \text{ on a : } B'_k = \frac{-C_k (A^{*k} y, r_k)}{(A^{*k} y, z_{k-1})}.$$

Par conséquent, on a l'algorithme suivant :

◇ Choix de x_0 et y .

$$\text{Soit } r_0 = b - A x_0$$

$$y_0 = y$$

$$z_0 = r_0$$

◇ Pour $k = 0, 1, 2, \dots$ faire

$$A_{k+1} = \frac{-(y_k, r_k)}{(y_k, A z_k)}$$

$$r_{k+1} = r_k + A_{k+1} A z_k$$

$$x_{k+1} = x_k - A_{k+1} z_k$$

◇ Si $r_{k+1} = 0$ alors faire

$$y_{k+1} = A^* y_k$$

$$C_{k+1} = \frac{1}{A_{k+1}}$$

$$B'_{k+1} = \frac{-C_{k+1} (y_{k+1}, r_{k+1})}{(y_k, A z_k)}$$

$$z_{k+1} = B'_{k+1} z_k + C_{k+1} r_{k+1}.$$

Deuxième cas : $U_i(\xi) = P_i(\xi)$.

On note $\tilde{r}_k = P_k(A)^* y$ et $\tilde{z}_k = P_k^{(1)}(A)^* y$.

Comme $A_k = \frac{-c(P_{k-1}^2(\xi))}{c(\xi P_{k-1}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi))}$, on a $A_k = \frac{-(\tilde{r}_{k-1}, r_{k-1})}{(\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-1})}$.

Comme $B'_k = -C_k \frac{c(\xi P_k(\xi) P_{k-1}(\xi))}{c(\xi P_{k-1}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi))}$, on a : $B'_k = -C_k \frac{(\tilde{r}_k, A r_{k-1})}{(\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-1})}$.

Si on laisse cette expression pour B'_k , l'algorithme va requérir 3 multiplications matrice-vecteur. Pour cette raison, nous allons transformer $c(\xi P_k(\xi) P_{k-1}(\xi))$.

La relation B_{10} donne à l'ordre $k-1$: $z_{k-1} = B'_{k-1} z_{k-2} + C_{k-1} r_{k-1}$.

Par suite $(\tilde{r}_k, A z_{k-1}) = B'_{k-1} (\tilde{r}_k, A z_{k-2}) + C_{k-1} (\tilde{r}_k, A r_{k-1})$.

Donc $(\tilde{r}_k, A r_{k-1}) = \frac{1}{C_{k-1}} [(\tilde{r}_k, A z_{k-1}) - B'_{k-1} (\tilde{r}_k, A z_{k-2})]$.

Par conséquent, comme $C_{k-1} = \frac{1}{A_{k-1}}$, on a : $B'_k = -C_k A_{k-1} \frac{(\tilde{r}_k, A z_{k-1}) - B'_{k-1} (\tilde{r}_k, A z_{k-2})}{(\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-1})}$

pour $k \geq 2$.

Pour B'_1 on reprend la formule du départ qui nous donne : $B'_1 = \frac{-C_1 (A^* \tilde{r}_0, r_0)}{(\tilde{r}_0, A z_0)}$.

Par conséquent, on a l'algorithme suivant, qui est une variante de BIOMIN ([11]) :

◇ Choix de x_0 et y .

Soit $r_0 = b - A x_0$

$$z_0 = r_0$$

$$\tilde{z}_0 = \tilde{r}_0 = y$$

$$A_0 = 1$$

◇ Pour $k = 0, 1, 2, \dots$ faire

$$A_{k+1} = \frac{-(\tilde{r}_k, r_k)}{(\tilde{r}_k, A z_k)}$$

$$r_{k+1} = r_k + A_{k+1} A z_k$$

$$\tilde{r}_{k+1} = \tilde{r}_k + \bar{A}_{k+1} A^* \tilde{z}_k$$

$$x_{k+1} = x_k - A_{k+1} z_k$$

◇ Si $r_{k+1} = 0$ alors faire

$$C_{k+1} = \frac{1}{A_{k+1}}$$

$$B'_{k+1} = -C_{k+1} A_k \frac{(\tilde{r}_{k+1}, A z_k) - B'_k (\tilde{r}_{k+1}, A z_{k-1})}{(\tilde{r}_k, A z_k)} \quad \text{si } k \geq 2, B'_1 = \frac{-C_1 (\tilde{r}_0, A r_0)}{(\tilde{r}_0, A z_0)}$$

$$z_{k+1} = B'_{k+1} z_k + C_{k+1} r_{k+1}$$

$$\tilde{z}_{k+1} = \bar{B}'_{k+1} \tilde{z}_k + \bar{C}'_{k+1} \tilde{r}_{k+1}.$$

Troisième cas : $U_i(\xi) = P_i^{(1)}(\xi)$.

On note $\tilde{z}_k = P_k^{(1)}(A)^* y$ et $\tilde{r}_k = P_k(A)^* y$.

Comme $A_k = \frac{-c(P_{k-1}^{(1)}(\xi) P_{k-1}(\xi))}{c(\xi P_{k-1}^{(1)2}(\xi))}$, on a : $A_k = \frac{-(\tilde{z}_{k-1}, r_{k-1})}{(\tilde{z}_{k-1}, A z_{k-1})}$.

Comme $B'_k = \frac{-C_k c(\xi P_{k-1}^{(1)}(\xi) P_k(\xi))}{c(\xi P_{k-1}^{(1)2}(\xi))}$, on a : $B'_k = \frac{-C_k (\tilde{r}_k, A z_{k-1})}{(\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-1})}$.

Par conséquent, on a l'algorithme suivant :

◇ Choix de x_0 et y .

Soit $r_0 = b - A x_0$

$$z_0 = r_0$$

$$\tilde{z}_0 = \tilde{r}_0 = y$$

◇ Pour $k = 0, 1, 2, \dots$ faire

$$A_{k+1} = \frac{-(\tilde{z}_k, r_k)}{(\tilde{z}_k, A z_k)}$$

$$r_{k+1} = r_k + A_{k+1} A z_k$$

$$\tilde{r}_{k+1} = \tilde{r}_k + \bar{A}_{k+1} A^* \tilde{z}_k$$

$$x_{k+1} = x_k - A_{k+1} z_k$$

◇ Si $r_{k+1} = 0$ alors faire

$$C_{k+1} = \frac{1}{A_{k+1}}$$

$$B'_{k+1} = \frac{-C_{k+1} (\tilde{r}_{k+1}, A z_k)}{(\tilde{r}_k, A z_k)}$$

$$z_{k+1} = B'_{k+1} z_k + C_{k+1} r_{k+1}$$

$$\tilde{z}_{k+1} = \bar{B}'_{k+1} \tilde{z}_k + \bar{C}'_{k+1} \tilde{r}_{k+1}$$



3.7. Méthode A₅ / B₁

De la relation A₅, nous obtenons immédiatement :

$$r_k = r_{k-1} + A_k A (r_{k-1} + D_k z_{k-2}) \quad (1)$$

en notant $z_k = P_k^{(1)}(A) r_0$.

$$\text{Comme } r_k = b - A x_k, \text{ on a : } x_k = x_{k-1} - A_k (r_{k-1} + D_k z_{k-2}). \quad (2)$$

De la relation B₁, nous obtenons :

$$z_k = B'_k A r_{k-2} + C'_k r_{k-2} + A^2 z_{k-2} + E'_k A z_{k-2} + F'_k z_{k-2}. \quad (3)$$

La méthode A₅ / B₁ est définie par les formules (1), (2), (3).

Premier cas : $U_i(\xi) = \xi^i$.

$$\text{Comme } D_k = \frac{-c(\xi^{k-1} P_{k-1}(\xi))}{c(\xi^{k-1} P_{k-2}^{(1)}(\xi))}, \text{ on a : } D_k = \frac{-(A^{*k-1} y, r_{k-1})}{(A^{*k-1} y, z_{k-2})}.$$

$$\text{De plus } \frac{1}{A_k} = B_k = \frac{-c(\xi^k P_{k-1}) - D_k c(\xi^k P_{k-2}^{(1)})}{c(\xi^{k-1} P_{k-1})} = \frac{c(\xi^k P_{k-2}^{(1)})}{c(\xi^{k-1} P_{k-2}^{(1)})} - \frac{c(\xi^k P_{k-1})}{c(\xi^{k-1} P_{k-1})}.$$

$$\text{En notant } p_{k-1} = r_{k-1} + D_k z_{k-2}, \text{ on a : } A_k = \frac{-(A^{*k-1} y, r_{k-1})}{(A^{*k-1} y, A p_{k-1})} \text{ et } r_k = r_{k-1} + A_k A p_{k-1}.$$

$$\text{Comme } B'_k = \frac{c(\xi^{k-1} P_{k-2}^{(1)}(\xi))}{c(\xi^{k-2} P_{k-2}(\xi))}, \text{ on a : } B'_k = \frac{(A^{*k-1} y, z_{k-2})}{(A^{*k-2} y, r_{k-2})}.$$

De plus, d'après les formules de Δ'_k, C'_k, E'_k et F'_k , et en notant $v_{k-1} = A z_{k-2} + B'_k r_{k-2}$, on a :

$$\begin{aligned} \Delta'_k &= (A^{*k-1} y, r_{k-2}) \left[(A^{*k} y, z_{k-2})^2 - (A^{*k} y, A z_{k-2})(A^{*k-1} y, z_{k-2}) \right] \\ &\quad - (A^{*k-1} y, z_{k-2}) \left[(A^{*k-1} y, r_{k-2})(A^{*k} y, z_{k-2}) - (A^{*k} y, r_{k-2})(A^{*k-1} y, z_{k-2}) \right]. \end{aligned}$$

Si $\Delta'_k \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{\Delta'_k} \left[(A^{*k-1} y, z_{k-2}) \left\{ (A^{*k} y, v_{k-1})(A^{*k} y, z_{k-2}) - (A^{*k} y, A v_{k-1})(A^{*k-1} y, z_{k-2}) \right\} \right. \\ &\quad \left. - (A^{*k-1} y, v_{k-1}) \left\{ (A^{*k} y, z_{k-2})^2 - (A^{*k} y, A z_{k-2})(A^{*k-1} y, z_{k-2}) \right\} \right] \end{aligned}$$

$$E_k = \frac{-(A^{*k-1} y, v_{k-1}) - C_k (A^{*k-2} y, r_{k-2})}{(A^{*k-1} y, z_{k-2})}$$

$$F_k = \frac{-(A^{*k} y, v_{k-1}) - C_k (A^{*k-1} y, r_{k-2}) - E_k (A^{*k} y, z_{k-2})}{(A^{*k-1} y, z_{k-2})}.$$

De plus $z_k = A v_{k-1} + C_k r_{k-2} + E_k A z_{k-2} + F_k z_{k-2}$ pour $k \geq 2$.

Or $z_1 = A r_0 - \frac{c_2}{c_1} r_0$ avec $c_2 = (A^* y, A r_0)$ et $c_1 = (y, A r_0)$.

Par suite, en regroupant toutes ces formules, on a l'algorithme suivant :

◇ Choix de x_0 et y .

Soit $r_0 = b - A x_0$

$y_0 = y$

$z_0 = r_0$

$A_1 = \frac{-(y, r_0)}{(y, A r_0)}$

$r_1 = r_0 + A_1 A r_0$

$x_1 = x_0 - A_1 r_0$

$D_2 = \frac{-(A^* y, r_1)}{(A^* y, z_0)}$

$A_2 = \frac{-(A^* y, r_1)}{(A^* y, A r_1) + D_2 (A^* y, A z_0)}$

$r_2 = r_1 + A_2 (A r_1 + D_2 A z_0)$

$x_2 = x_1 - A_2 (r_1 + D_2 z_0)$

$z_1 = A r_0 - \frac{(A^* y, A r_0)}{(y, A r_0)} r_0$

◇ Pour $k = 2, 3, \dots$ faire

$y_k = A^* y_{k-1}$

$D_{k+1} = \frac{-(y_k, r_k)}{(y_k, z_{k-1})}$

$p_k = r_k + D_{k+1} z_{k-1}$

$A_{k+1} = \frac{-(y_k, r_k)}{(y_k, A p_k)}$

$r_{k+1} = r_k + A_{k+1} A p_k$

$x_{k+1} = x_k - A_{k+1} p_k$

◇ Si $r_{k+1} \approx 0$ alors faire

$$B'_k = \frac{(y_{k-1}, z_{k-2})}{(y_{k-2}, r_{k-2})}$$

$$\Delta'_k = (y_{k-1}, r_{k-2}) \left[(y_k, z_{k-2})^2 - (y_k, A z_{k-2})(y_{k-1}, z_{k-2}) \right] \\ - (y_{k-1}, z_{k-2}) \left[(y_{k-1}, r_{k-2})(y_k, z_{k-2}) - (y_k, r_{k-2})(y_{k-1}, z_{k-2}) \right]$$

Si $\Delta'_k \neq 0$, on a :

$$v_{k-1} = A z_{k-2} + B'_k r_{k-2}$$

$$C_k = \frac{1}{\Delta'_k} \left[(y_{k-1}, z_{k-2}) \{ (y_k, v_{k-1})(y_k, z_{k-2}) - (y_k, A v_{k-1})(y_{k-1}, z_{k-2}) \} \right. \\ \left. - (y_{k-1}, v_{k-1}) \{ (y_k, z_{k-2})^2 - (y_k, A z_{k-2})(y_{k-1}, z_{k-2}) \} \right]$$

$$E_k = \frac{-(y_{k-1}, v_{k-1}) - C_k (y_{k-2}, r_{k-2})}{(y_{k-1}, z_{k-2})}$$

$$F_k = \frac{-(y_k, v_{k-1}) - C_k (y_{k-1}, r_{k-2}) - E_k (y_k, z_{k-2})}{(y_{k-1}, z_{k-2})}$$

$$z_k = A v_{k-1} + C_k r_{k-2} + E_k A z_{k-2} + F_k z_{k-2}.$$

Deuxième cas : $U_i(\xi) = P_i(\xi)$.

On note $\tilde{r}_k = P_k(A^*)y$ et $\tilde{z}_k = P_k^{(1)}(A^*)y$.

$$\text{Comme } D_k = \frac{-c(\xi P_{k-2}(\xi) P_{k-1}(\xi))}{c(\xi P_{k-2}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi))}, \text{ on a : } D_k = \frac{-(\tilde{r}_{k-2}, A r_{k-1})}{(\tilde{r}_{k-2}, A z_{k-2})}.$$

$$\text{Comme } \frac{1}{A_k} = B_k = \frac{-c(\xi P_{k-1}^2) - D_k c(\xi P_{k-1} P_{k-2}^{(1)})}{c(P_{k-1}^2)}, \text{ on a, en notant } p_{k-1} = r_{k-1} + D_k z_{k-2},$$

$$A_k = \frac{-(\tilde{r}_{k-1}, r_{k-1})}{(\tilde{r}_{k-1}, A p_{k-1})} \quad \text{et} \quad r_k = r_{k-1} + A_k A p_{k-1}.$$

$$\text{Comme } B'_k = \frac{-c(\xi^3 P_{k-3}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi))}{c(\xi^2 P_{k-4}(\xi) P_{k-2}(\xi))}, \text{ on a : } B'_k = \frac{-(A^* \tilde{r}_{k-3}, A^2 z_{k-2})}{(A^* \tilde{r}_{k-2}, A r_{k-4})} \text{ pour } k \geq 4.$$

En notant $v_{k-1} = A z_{k-2} + B'_k r_{k-2}$, on a :

$$\Delta'_k = (\tilde{r}_{k-2}, A r_{k-3}) \left[(\tilde{r}_{k-2}, A^2 z_{k-2})(\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-2}) - (\tilde{r}_{k-1}, A^2 z_{k-2})(\tilde{r}_{k-2}, A z_{k-2}) \right] \\ - (\tilde{r}_{k-3}, A^2 z_{k-2}) \left[(\tilde{r}_{k-2}, A r_{k-2})(\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-2}) - (\tilde{r}_{k-1}, A r_{k-2})(\tilde{r}_{k-2}, A z_{k-2}) \right].$$

Si $\Delta'_k \neq 0$ on a :

$$C_k = \frac{1}{\Delta'_k} \left[(A^* \tilde{v}_{k-1}, A r_{k-3}) \{ (\tilde{r}_{k-1}, A^2 z_{k-2}) (\tilde{r}_{k-2}, A z_{k-2}) - (\tilde{r}_{k-2}, A^2 z_{k-2}) (\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-2}) \} \right. \\ \left. - (\tilde{r}_{k-3}, A^2 z_{k-2}) \{ (\tilde{r}_{k-2}, A z_{k-2}) (\tilde{r}_{k-1}, A^2 z_{k-2}) - (\tilde{r}_{k-2}, A^2 z_{k-2}) (\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-2}) \} \right]$$

$$E_k = \frac{-(A^* \tilde{r}_{k-3}, A v_{k-1}) - C_k (\tilde{r}_{k-3}, A r_{k-2})}{(\tilde{r}_{k-3}, A^2 z_{k-2})}$$

$$F_k = \frac{-(A^* \tilde{r}_{k-2}, A v_{k-1}) - C_k (\tilde{r}_{k-2}, A r_{k-2}) - E_k (\tilde{r}_{k-2}, A^2 z_{k-2})}{(\tilde{r}_{k-2}, A z_{k-2})}$$

De plus $z_k = A v_{k-1} + C_k r_{k-2} + E_k A z_{k-2} + F_k z_{k-2}$ pour $k \geq 4$.

Il faut donc exprimer autrement r_1, r_2, r_3 et z_1, z_2, z_3 .

On suppose que : $\tilde{r}_0 = \tilde{z}_0 = y$ et $r_0 = z_0$. De plus, on rappelle que $c_1 = (y, A^i r_0)$.

$$\text{On a : } r_1 = r_0 + A_1 A z_0 \text{ où } A_1 = \frac{-(\tilde{r}_0, r_0)}{(\tilde{r}_0, A z_0)} = \frac{-c_0}{c_1}.$$

$$\text{De plus } p_1 = r_1 + D_2 z_0 \text{ où } D_2 = \frac{-(A^* y, r_1)}{(A^* y, z_0)} = \frac{-(y, A r_1)}{c_1}.$$

$$\text{D'où } r_2 = r_1 + A_2 A p_1 \text{ où } A_2 = \frac{-(A^* y, r_1)}{(A^* y, p_1)}.$$

$$\text{On a également } p_2 = r_2 + D_3 z_1 \text{ où } D_3 = \frac{-(A^{*2} y, r_2)}{(A^{*2} y, z_1)} = \frac{-(A^* y, A r_2)}{(A^* y, A z_1)}.$$

$$\text{D'où } r_3 = r_2 + A_3 A p_2 \text{ où } A_3 = \frac{-(A^{*2} y, r_2)}{(A^{*2} y, p_2)} = \frac{-(A^* y, A r_2)}{(A^* y, A p_2)}.$$

Exprimons z_1 .

$$P_1^{(1)}(\xi) = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ 1 & \xi \end{vmatrix}}{c_1} = \xi - \frac{c_2}{c_1}.$$

$$\text{Par suite } z_1 = A z_0 - \frac{c_2}{c_1} z_0.$$

Exprimons z_2 .

$$P_2^{(1)}(\xi) = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ 1 & \xi & \xi^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}} = \xi^2 - \xi \frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_3 \\ c_2 & c_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}} + \frac{\begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ c_3 & c_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

$$P_2^{(1)}(\xi) = \xi^2 - \frac{c_1 c_4 - c_2 c_3}{c_1 c_3 - c_2^2} \xi + \frac{c_2 c_4 - c_3^2}{c_1 c_3 - c_2^2}.$$

On a : $c_3 = (v, A^3 r_0) = (A^* \tilde{r}_0, A^2 r_0)$.

Comme $r_1 = r_0 + A_1 A z_0$, on a : $A^2 r_0 = \frac{1}{A_1} A (r_1 - r_0)$.

Par suite $c_3 = \frac{1}{A_1} [(A^* \tilde{r}_0, r_1) - c_2]$.

On a : $c_4 = (v, A^4 r_0) = (A^* \tilde{r}_0, A^3 z_0)$.

Comme $r_2 = r_1 + A_2 A (r_1 + D_2 z_0)$ et $r_1 = r_0 + A_1 A z_0$, on a :

$$r_2 = r_1 + A_2 (A r_0 + A_1 A^2 z_0 + D_2 A z_0) = r_0 + A_1 A_2 A^2 r_0 + (A_1 + A_2 + A_2 D_2) A r_0.$$

D'où $A^3 r_0 = \frac{1}{A_1 A_2} [A r_2 - A r_0 - (A_1 + A_2 + A_2 D_2) A^2 r_0]$.

Par suite $c_4 = \frac{1}{A_1 A_2} [(A^* \tilde{r}_0, A r_2) - c_2 - (A_1 + A_2 + A_2 D_2) c_3]$.

On a alors : $z_2 = A^2 r_0 - \frac{c_1 c_4 - c_2 c_3}{c_1 c_3 - c_2^2} A r_0 + \frac{c_2 c_4 - c_3^2}{c_1 c_3 - c_2^2} r_0$ soit encore, comme

$$A^2 r_0 = \frac{1}{A_1} A (r_1 - r_0), \text{ on a : } z_2 = \frac{1}{A_1} A r_1 - \left(\frac{1}{A_1} + \frac{c_1 c_4 - c_2 c_3}{c_1 c_3 - c_2^2} \right) A r_0 + \frac{c_2 c_4 - c_3^2}{c_1 c_3 - c_2^2} r_0.$$

Exprimons z_3 .

$$P_3^{(1)}(\xi) = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \\ 1 & \xi & \xi^2 & \xi^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ c_3 & c_4 & c_5 \end{vmatrix}} = \xi^3 - \xi^2 \frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_4 \\ c_2 & c_4 & c_5 \\ c_3 & c_5 & c_6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ c_3 & c_4 & c_5 \end{vmatrix}} + \xi \frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_3 & c_4 \\ c_2 & c_4 & c_5 \\ c_3 & c_5 & c_6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ c_3 & c_4 & c_5 \end{vmatrix}} - \frac{\begin{vmatrix} c_2 & c_3 & c_4 \\ c_3 & c_4 & c_5 \\ c_4 & c_5 & c_6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ c_3 & c_4 & c_5 \end{vmatrix}}.$$

On a : $c_5 = (A^{*2} \tilde{r}_0, A^3 z_0) = (A^{*2} \tilde{r}_0, A^3 r_0)$.

Comme $A^3 r_0 = \frac{1}{A_1 A_2} [A r_2 - A r_0 - (A_1 + A_2 + A_2 D_2) A^2 r_0]$, on a :

$$c_5 = \frac{1}{A_1 A_2} [(A^{*2} \tilde{r}_0, A r_2) - c_3 - (A_1 + A_2 + A_2 D_2) c_4]$$

On a : $c_6 = (A^{*3} \tilde{r}_0, A^3 z_0) = (A^{*2} \tilde{r}_0, A^4 z_0)$.

Par suite, comme pour c_5 , on a : $c_6 = \frac{1}{A_1 A_2} [(A^{*2} \tilde{r}_0, A^2 r_2) - c_4 - (A_1 + A_2 + A_2 D_2) c_5]$.

$$\text{Soit } \Delta = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ c_3 & c_4 & c_5 \end{vmatrix}.$$

On a : $\Delta = c_3(c_2 c_4 - c_3^2) - c_4(c_1 c_4 - c_2 c_3) + c_5(c_1 c_3 - c_2^2)$.

On a alors $z_3 = A^3 r_0 - \frac{\delta}{\Delta} A^2 r_0 + \frac{\mu}{\Delta} A r_0 - \frac{\nu}{\Delta} r_0$.

Par suite $z_3 = \frac{1}{A_1} A^2 r_1 - (\frac{\delta}{\Delta} + \frac{1}{A_1}) A^2 r_0 + \frac{\mu}{\Delta} A r_0 - \frac{\nu}{\Delta} r_0$.

Par conséquent on a l'algorithme suivant :

◊ Choix de x_0 et y .

Soit $r_0 = b - A x_0$

$$z_0 = r_0$$

$$\tilde{r}_0 = \tilde{z}_0 = y$$

$$c_0 = (y, r_0)$$

$$c_1 = (y, A r_0)$$

$$c_2 = (y, A^2 r_0)$$

$$A_1 = -\frac{c_0}{c_1}$$

$$r_1 = r_0 + A_1 A z_0$$

$$\tilde{r}_1 = \tilde{r}_0 + \bar{A}_1 A^* \tilde{z}_0$$

$$x_1 = x_0 - A_1 z_0$$

$$z_1 = A z_0 - \frac{c_2}{c_1} z_0$$

$$\tilde{z}_1 = A^* \tilde{z}_0 - \frac{\tilde{c}_2}{\tilde{c}_1} \tilde{z}_0$$

$$D_2 = \frac{-(\tilde{r}_0, A r_1)}{c_1}$$

$$p_1 = r_1 + D_2 z_0$$

$$\tilde{p}_1 = \tilde{r}_1 + \bar{D}_2 \tilde{z}_0$$

$$A_2 = \frac{-(\tilde{r}_0, A r_1)}{(\tilde{r}_0, A p_1)}$$

$$r_2 = r_1 + A_2 A p_1$$

$$\tilde{r}_2 = \tilde{r}_1 + \bar{A}_2 A^* \tilde{p}_1$$

$$x_2 = x_1 - A_2 p_1$$

$$c_3 = \frac{1}{A_1} [(A^* \tilde{r}_0, r_1) - c_2]$$

$$c_4 = \frac{1}{A_1 A_2} [(A^* \tilde{r}_0, A r_2) - c_2 - (A_1 + A_2 + A_2 D_2) c_3]$$

$$z_2 = \frac{1}{A_1} A r_1 - \left(\frac{1}{A_1} + \frac{c_1 c_4 - c_2 c_3}{c_1 c_3 - c_2^2} \right) A r_0 + \frac{c_2 c_4 - c_3^2}{c_1 c_3 - c_2^2} r_0$$

$$\tilde{z}_2 = \frac{1}{A_1} A^* \tilde{r}_1 - \left(\frac{1}{A_1} + \frac{c_1 c_4 - c_2 c_3}{c_1 c_3 - c_2^2} \right) A^* \tilde{r}_0 + \frac{c_2 c_4 - c_3^2}{c_1 c_3 - c_2^2} \tilde{r}_0$$

$$D_3 = \frac{-(A^* \tilde{r}_0, A r_2)}{(A^* \tilde{r}_0, A z_1)}$$

$$p_2 = r_2 + D_3 z_1$$

$$\tilde{p}_2 = \tilde{r}_2 + \bar{D}_3 \tilde{z}_1$$

$$A_3 = \frac{-(A^* \tilde{r}_0, A r_2)}{(A^* \tilde{r}_0, A p_2)}$$

$$r_3 = r_2 + A_3 A p_2$$

$$\tilde{r}_3 = \tilde{r}_2 + \bar{A}_3 A^* \tilde{p}_2$$

$$x_3 = x_2 - A_3 p_2$$

$$c_5 = \frac{1}{A_1 A_2} [(A^{*2} \tilde{r}_0, A r_2) - c_3 - (A_1 + A_2 + A_2 D_2) c_4]$$

$$c_6 = \frac{1}{A_1 A_2} [(A^{*2} \tilde{r}_0, A^2 r_2) - c_4 - (A_1 + A_2 + A_2 D_2) c_5]$$

$$\Delta = c_3(c_2 c_4 - c_3^2) - c_4(c_1 c_4 - c_2 c_3) + c_5(c_1 c_3 - c_2^2)$$

$$\delta = c_4(c_1 c_4 - c_2^2) - c_5(c_1 c_3 - c_2 c_3) + c_6(c_1 c_4 - c_2^2)$$

$$\mu = c_4(c_2 c_3 - c_3 c_4) - c_5(c_1 c_4 - c_3^2) + c_6(c_1 c_4 - c_2 c_3)$$

$$v = c_4 (c_3 c_5 - c_4^2) - c_5 (c_2 c_5 - c_4 c_3) + c_6 (c_2 c_4 - c_3^2)$$

$$z_3 = \frac{1}{A_1} A^2 r_1 - \left(\frac{\delta}{\Delta} + \frac{1}{A_1} \right) A^2 r_0 + \frac{\mu}{\Delta} A r_0 - \frac{\nu}{\Delta} r_0$$

$$\tilde{z}_3 = \frac{1}{A_1} A^{*2} \tilde{r}_1 - \left(\frac{\delta}{\Delta} + \frac{1}{A_1} \right) A^{*2} \tilde{r}_0 + \frac{\bar{\mu}}{\Delta} A^* \tilde{r}_0 - \frac{\bar{\nu}}{\Delta} \tilde{r}_0$$

◇ Pour $k = 4, 5, \dots$ faire

$$D_k = \frac{-(\tilde{r}_{k-2}, A r_{k-1})}{(\tilde{r}_{k-2}, A z_{k-2})}$$

$$p_{k-1} = r_{k-1} + D_k z_{k-2}$$

$$\tilde{p}_{k-1} = \tilde{r}_{k-1} + \bar{D}_k \tilde{z}_{k-2}$$

$$A_k = \frac{-(\tilde{r}_{k-1}, r_{k-1})}{(\tilde{r}_{k-1}, A p_{k-1})}$$

$$r_k = r_{k-1} + A_k A p_{k-1}$$

$$\tilde{r}_k = \tilde{r}_{k-1} + \bar{A}_k A^* \tilde{p}_{k-1}$$

$$x_k = x_{k-1} - A_k p_{k-1}$$

◇ Si $r_k = 0$ alors faire

$$B'_k = \frac{-(A^* \tilde{r}_{k-3}, A^2 z_{k-2})}{(A^* \tilde{r}_{k-2}, A r_{k-1})}$$

$$v_{k-1} = A z_{k-2} + B'_k r_{k-2}$$

$$\tilde{v}_{k-1} = A^* \tilde{z}_{k-2} + \bar{B}'_k \tilde{r}_{k-2}$$

$$\Delta'_k = (\tilde{r}_{k-2}, A r_{k-3}) \left[(\tilde{r}_{k-2}, A^2 z_{k-2})(\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-2}) - (\tilde{r}_{k-1}, A^2 z_{k-2})(\tilde{r}_{k-2}, A z_{k-2}) \right] \\ - (\tilde{r}_{k-3}, A^2 z_{k-2}) \left[(\tilde{r}_{k-2}, A r_{k-2})(\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-2}) - (\tilde{r}_{k-1}, A r_{k-2})(\tilde{r}_{k-2}, A z_{k-2}) \right]$$

Si $\Delta'_k = 0$ alors faire

$$C_k = \frac{1}{\Delta'_k} \left[(A^* \tilde{v}_{k-1}, A r_{k-3}) \left\{ (\tilde{r}_{k-1}, A^2 z_{k-2})(\tilde{r}_{k-2}, A z_{k-2}) - (\tilde{r}_{k-2}, A^2 z_{k-2})(\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-2}) \right\} \right. \\ \left. - (\tilde{r}_{k-3}, A^2 z_{k-2}) \left\{ (\tilde{r}_{k-2}, A z_{k-2})(\tilde{r}_{k-1}, A^2 z_{k-2}) - (\tilde{r}_{k-2}, A^2 z_{k-2})(\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-2}) \right\} \right]$$

$$E_k = \frac{-(A^* \tilde{r}_{k-3}, A v_{k-1}) - C_k (\tilde{r}_{k-3}, A r_{k-2})}{(\tilde{r}_{k-3}, A^2 z_{k-2})}$$

$$F_k = \frac{-(A^* \tilde{r}_{k-2}, A v_{k-1}) - C_k (\tilde{r}_{k-2}, A r_{k-2}) - E_k (\tilde{r}_{k-2}, A^2 z_{k-2})}{(\tilde{r}_{k-2}, A z_{k-2})}$$

$$z_k = A v_{k-1} + C_k r_{k-2} + E_k A z_{k-2} + F_k z_{k-2}$$

$$\tilde{z}_k = A^* \tilde{v}_{k-1} + \bar{C}_k \tilde{r}_{k-2} + \bar{E}_k A^* \tilde{z}_{k-2} + \bar{F}_k \tilde{z}_{k-2}.$$

Troisième cas : $U_i(\xi) = P_i^{(1)}(\xi).$

On note $\tilde{r}_k = P_k(A^*)y$ et $\tilde{z}_k = P_k^{(1)}(A^*)y.$

Comme $D_k = \frac{-c(\xi P_{k-2}^{(1)}(\xi) P_{k-1}(\xi))}{c(\xi P_{k-2}^{(1)2}(\xi))}$, on a : $D_k = \frac{-(\tilde{z}_{k-2}, A r_{k-1})}{(\tilde{z}_{k-2}, A z_{k-2})}.$

Comme $A_k = \frac{-c(P_{k-1} P_{k-1}^{(1)})}{c(\xi P_{k-1}^{(1)} P_{k-1})}$, on a : $A_k = \frac{-(\tilde{z}_{k-1}, r_{k-1})}{(\tilde{z}_{k-1}, A r_{k-1})}.$

De plus $r_k = r_{k-1} + A_k (A r_{k-1} + D_k A z_{k-2}).$

Comme $B'_k = \frac{-c(\xi^3 P_{k-4}^{(1)}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi))}{c(\xi^2 P_{k-4}^{(1)}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi))}$, on a : $B'_k = \frac{-(A^* \tilde{z}_{k-2}, A^2 z_{k-4})}{(\tilde{r}_{k-2}, A^2 z_{k-4})}$ pour $k \geq 4.$

Comme $E_k = \frac{-c(\xi^3 P_{k-1}^{(1)} P_{k-2}^{(1)}) - B'_k c(\xi^2 P_{k-1}^{(1)} P_{k-2})}{c(\xi^2 P_{k-1}^{(1)} P_{k-2})}$, on a :

$$E_k = \frac{-(A^* \tilde{z}_{k-1}, A^2 z_{k-2}) - B'_k (\tilde{r}_{k-2}, A^2 z_{k-1})}{(\tilde{z}_{k-1}, A^2 z_{k-2})}.$$

Comme $C_k = \frac{-c(\xi^3 P_{k-3}^{(1)} P_{k-2}^{(1)}) - B'_k c(\xi^2 P_{k-3}^{(1)} P_{k-2}) - E_k c(\xi^2 P_{k-3}^{(1)} P_{k-2}^{(1)})}{c(\xi P_{k-3}^{(1)} P_{k-2})}$, on a :

$$C_k = \frac{-(A^* \tilde{z}_{k-2}, A^2 z_{k-3}) - B'_k (\tilde{r}_{k-2}, A^2 z_{k-3}) - E_k (\tilde{z}_{k-2}, A^2 z_{k-3})}{(\tilde{r}_{k-2}, A z_{k-3})}.$$

Comme $F_k = \frac{\alpha_k - C_k c(\xi P_{k-2}^{(1)} P_{k-2}) - E_k c(\xi^2 P_{k-2}^{(1)2})}{c(\xi P_{k-2}^{(1)2})}$ avec

$\alpha_k = -c(\xi^3 P_{k-3}^{(1)2}) - B'_k c(\xi^2 P_{k-2}^{(1)} P_{k-2})$, on a

$$F_k = \frac{\alpha_k - C_k (\tilde{r}_{k-2}, A z_{k-2}) - E_k (\tilde{z}_{k-2}, A^2 z_{k-2})}{(\tilde{z}_{k-2}, A z_{k-2})}$$
 avec

$\alpha_k = -(A^* \tilde{z}_{k-2}, A^2 z_{k-2}) - B'_k (\tilde{r}_{k-2}, A^2 z_{k-2}).$

De plus $z_k = A^2 z_{k-2} + B'_k A r_{k-2} + C_k r_{k-2} + E_k A z_{k-2} + F_k z_{k-2}$ pour $k \geq 4.$

Pour z_1, z_2, z_3 , on reprend les expressions trouvées précédemment, en supposant $\tilde{r}_0 = \tilde{z}_0 = y$ et

$r_0 = z_0.$

On a : $r_1 = r_0 + A_1 A z_0$ où $A_1 = \frac{-(\tilde{r}_0, r_0)}{(\tilde{r}_0, A z_0)} = \frac{-c_0}{c_1}.$

$$\text{De plus } D_2 = \frac{-(A^* y, r_1)}{(A^* y, z_0)} = \frac{-(y, A r_1)}{c_1} \text{ et } A_2 = \frac{-(\tilde{z}_1, r_1)}{(\tilde{z}_1, A r_1)}.$$

$$\text{On a alors : } r_2 = r_1 + A_2 (A r_1 + D_2 A z_1).$$

$$\text{Comme } D_3 = \frac{-(\tilde{z}_1, A r_2)}{(\tilde{z}_1, A z_1)} \text{ et } A_3 = \frac{-(\tilde{z}_2, r_2)}{(\tilde{z}_2, A r_2)}, \text{ on a : } r_3 = r_2 + A_3 (A r_2 + D_3 A z_2).$$

Par conséquent on a l'algorithme suivant :

◇ Choix de x_0 et y .

$$\text{Soit } r_0 = b - A x_0$$

$$z_0 = r_0$$

$$\tilde{r}_0 = \tilde{z}_0 = y$$

$$c_0 = (y, r_0)$$

$$c_1 = (y, A r_0)$$

$$c_2 = (y, A^2 r_0)$$

$$A_1 = -\frac{c_0}{c_1}$$

$$r_1 = r_0 + A_1 A z_0$$

$$\tilde{r}_1 = \tilde{r}_0 + \overline{A_1} A^* \tilde{z}_0$$

$$x_1 = x_0 - A_1 z_0$$

$$z_1 = A z_0 - \frac{c_2}{c_1} z_0$$

$$\tilde{z}_1 = A^* \tilde{z}_0 - \frac{\bar{c}_2}{\bar{c}_1} \tilde{z}_0$$

$$D_2 = \frac{-(\tilde{r}_0, A r_1)}{c_1}$$

$$A_2 = \frac{-(\tilde{z}_1, r_1)}{(\tilde{z}_1, A r_1)}$$

$$r_2 = r_1 + A_2 (A r_1 + D_2 A z_1)$$

$$\tilde{r}_2 = \tilde{r}_1 + \overline{A_2} (A^* \tilde{r}_1 + \overline{D_2} A^* \tilde{z}_1)$$

$$x_2 = x_1 - A_2 (r_1 + D_2 z_1)$$

$$c_3 = \frac{1}{A_1} [(A^* \tilde{r}_0, r_1) - c_2]$$

$$c_4 = \frac{1}{A_1 A_2} [(A^* \tilde{r}_0, A r_2) - c_2 - (A_1 + A_2 + A_2 D_2) c_3]$$

$$z_2 = \frac{1}{A_1} A r_1 - \left(\frac{1}{A_1} + \frac{c_1 c_4 - c_2 c_3}{c_1 c_3 - c_2^2} \right) A r_0 + \frac{c_2 c_4 - c_3^2}{c_1 c_3 - c_2^2} r_0$$

$$\tilde{z}_2 = \frac{1}{A_1} A^* \tilde{r}_1 - \overline{\left(\frac{1}{A_1} + \frac{c_1 c_4 - c_2 c_3}{c_1 c_3 - c_2^2} \right)} A^* \tilde{r}_0 + \overline{\left(\frac{c_2 c_4 - c_3^2}{c_1 c_3 - c_2^2} \right)} \tilde{r}_0$$

$$D_3 = \frac{-(\tilde{z}_1, A r_2)}{(\tilde{z}_1, A z_1)}$$

$$A_3 = \frac{-(\tilde{z}_2, r_2)}{(\tilde{z}_2, A r_2)}$$

$$r_3 = r_2 + A_3 (A r_2 + D_3 A z_2)$$

$$\tilde{r}_3 = \tilde{r}_2 + \bar{A}_3 (A^* \tilde{r}_2 + \bar{D}_3 A^* \tilde{z}_2)$$

$$x_3 = x_2 - A_3 (r_2 + D_3 z_2)$$

$$c_5 = \frac{1}{A_1 A_2} \left[(A^{*2} \tilde{r}_0, A r_2) - c_3 - (A_1 + A_2 + A_2 D_2) c_4 \right]$$

$$c_6 = \frac{1}{A_1 A_2} \left[(A^{*2} \tilde{r}_0, A^2 r_2) - c_4 - (A_1 + A_2 + A_2 D_2) c_5 \right]$$

$$\Delta = c_3(c_2 c_4 - c_3^2) - c_4(c_1 c_4 - c_2 c_3) + c_5(c_1 c_3 - c_2^2)$$

$$\delta = c_4(c_1 c_4 - c_2^2) - c_5(c_1 c_3 - c_2 c_3) + c_6(c_1 c_4 - c_2^2)$$

$$\mu = c_4(c_2 c_3 - c_3 c_4) - c_5(c_1 c_4 - c_3^2) + c_6(c_1 c_4 - c_2 c_3)$$

$$v = c_4(c_3 c_5 - c_4^2) - c_5(c_2 c_5 - c_4 c_3) + c_6(c_2 c_4 - c_3^2)$$

$$z_3 = \frac{1}{A_1} A^2 r_1 - \left(\frac{\delta}{\Delta} + \frac{1}{A_1} \right) A^2 r_0 + \frac{\mu}{\Delta} A r_0 - \frac{v}{\Delta} r_0$$

$$\tilde{z}_3 = \frac{1}{A_1} A^{*2} \tilde{r}_1 - \overline{\left(\frac{\delta}{\Delta} + \frac{1}{A_1} \right)} A^{*2} \tilde{r}_0 + \frac{\bar{\mu}}{\Delta} A^* \tilde{r}_0 - \frac{\bar{v}}{\Delta} \tilde{r}_0$$

◇ Pour $k = 4, 5, \dots$ faire

$$D_k = \frac{-(\tilde{z}_{k-2}, A r_{k-1})}{(\tilde{z}_{k-2}, A z_{k-2})}$$

$$A_k = \frac{-(\tilde{z}_{k-1}, r_{k-1})}{(\tilde{z}_{k-1}, A r_{k-1})}$$

$$r_k = r_{k-1} + A_k (A r_{k-1} + D_k A z_{k-2})$$

$$\tilde{r}_k = \tilde{r}_{k-1} + \bar{A}_k (A^* \tilde{r}_{k-1} + \bar{D}_k A^* \tilde{z}_{k-2})$$

$$x_k = x_{k-1} - A_k (r_{k-1} + D_k z_{k-2})$$

◇ Si $r_k = 0$ alors faire

$$B_k = \frac{-(A^* \tilde{z}_{k-2}, A^2 z_{k-4})}{(\tilde{r}_{k-2}, A^2 z_{k-4})}$$

$$E_k = \frac{-(A^* \tilde{z}_{k-1}, A^2 z_{k-2}) - B_k (\tilde{r}_{k-2}, A^2 z_{k-1})}{(\tilde{z}_{k-1}, A^2 z_{k-2})}$$

$$C_k = \frac{-(A^* \tilde{z}_{k-2}, A^2 z_{k-3}) - B_k (\tilde{r}_{k-2}, A^2 z_{k-3}) - E_k (\tilde{z}_{k-2}, A^2 z_{k-3})}{(\tilde{r}_{k-2}, A z_{k-3})}$$

$$\alpha_k = -(A^* \tilde{z}_{k-2}, A^2 z_{k-2}) - B_k (\tilde{r}_{k-2}, A^2 z_{k-2})$$

$$F_k = \frac{\alpha_k - C_k (\tilde{r}_{k-2}, A z_{k-2}) - E_k (\tilde{z}_{k-2}, A^2 z_{k-2})}{(\tilde{z}_{k-2}, A z_{k-2})}$$

$$z_k = A^2 z_{k-2} + B_k A r_{k-2} + C_k r_{k-2} + E_k A z_{k-2} + F_k z_{k-2}$$

$$\tilde{z}_k = A^{*2} \tilde{z}_{k-2} + \bar{B}_k A^* \tilde{r}_{k-2} + \bar{C}_k \tilde{r}_{k-2} + \bar{E}_k A^* \tilde{z}_{k-2} + \bar{F}_k \tilde{z}_{k-2}$$

3.8. Méthode A₅ / B₅

De la relation A₅, nous obtenons immédiatement :

$$r_k = r_{k-1} + A_k A (r_{k-1} + D_k z_{k-2}) \quad (1)$$

en notant $z_k = P_k^{(1)}(A)r_0$.

$$\text{Comme } r_k = b - A x_k, \text{ on a : } x_k = x_{k-1} - A_k (r_{k-1} + D_k z_{k-2}). \quad (2)$$

De la relation B₅, nous obtenons :

$$z_k = A'_k [A (r_{k-1} + D'_k z_{k-2}) + B'_k r_{k-1} + E'_k z_{k-2}]. \quad (3)$$

La méthode A₅ / B₅ est définie par les formules (1), (2), (3).

Il nous faut maintenant étudier comment programmer les coefficients $A_k, D_k, A'_k, D'_k, B'_k, E'_k$ apparaissant dans ces formules.

Comme $A'_k = \frac{1}{a_{k-1}}$ où a_{k-1} est définie par $P_{k-1}(\xi) = a_{k-1} \xi^{k-1} + \dots + 1$, on a : $a_{k-1} = A_{k-1} a_{k-2}$.

$$\text{Par suite} \quad A'_k = \frac{1}{A_{k-1} a_{k-2}} = \frac{A'_{k-1}}{A_{k-1}}.$$

Premier cas : $U_i(\xi) = \xi^i$.

$$\text{On a : } D_k = \frac{-c(\xi^{k-1} P_{k-1}(\xi))}{c(\xi^{k-1} P_{k-2}^{(1)}(\xi))} \quad \text{et} \quad D'_k = \frac{-c(\xi^{k-1} P_{k-1}(\xi))}{c(\xi^{k-1} P_{k-2}^{(1)}(\xi))}.$$

$$\text{Par suite } D_k = D'_k.$$

Posons $p_{k-1} = r_{k-1} + D_k z_{k-2}$ pour $k \geq 2$.

$$\text{Alors } r_k = r_{k-1} + A_k A p_{k-1} \text{ et } x_k = x_{k-1} - A_k p_{k-1}.$$

$$\text{De plus } z_k = A'_k [A p_{k-1} + B'_k r_{k-1} + E'_k z_{k-2}].$$

$$\text{On a : } D_k = \frac{-(A^{*k-1} y, r_{k-1})}{(A^{*k-1} y, z_{k-2})}.$$

$$\text{Comme } \frac{1}{A_k} = B_k = \frac{-c(\xi^k (P_{k-1}(\xi) + D_k P_{k-2}^{(1)}(\xi)))}{c(\xi^k P_{k-1}(\xi))}, \text{ on a : } \frac{1}{A_k} = \frac{-(A^{*k} y, p_{k-1})}{(A^{*k-1} y, r_{k-1})}.$$

D'après les formules de B'_k et de E'_k , on a :

$$B_k = \frac{(A^{*k-1}y, z_{k-2})(A^{*k}y, Ap_{k-1}) - (A^{*k}y, z_{k-2})(A^{*k}y, p_{k-1})}{(A^{*k-1}y, r_{k-1})(A^{*k}y, z_{k-2}) - (A^{*k}y, r_{k-1})(A^{*k-1}y, z_{k-2})}$$

$$E_k = \frac{-(A^{*k}y, p_{k-1}) - B_k(A^{*k-1}y, r_{k-1})}{(A^{*k-1}y, z_{k-2})}$$

Il faut chercher $P_1^{(1)}(\xi)$.

Comme $P_1^{(1)}(\xi) = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ 1 & \xi \end{vmatrix}}{c_1} = \xi - \frac{c_2}{c_1}$, et $c_1 = (y, Ar_0)$ et $c_2 = (A^*y, Ar_0)$, on a : $E_1 = 0$ et

$$B_1 = \frac{-(A^*y, Ar_0)}{(y, Ar_0)}$$

Par conséquent, on a l'algorithme suivant :

◇ Choix de x_0 et y .

Soit $r_0 = b - Ax_0$

$$y_0 = y$$

$$p_0 = z_0 = r_0$$

$$A_1 = \frac{-(y_0, r_0)}{(y_0, Ar_0)}$$

$$r_1 = r_0 + A_1 Ar_0$$

$$x_1 = x_0 - A_1 r_0$$

◇ Pour $k = 1, 2, \dots$ faire

$$y_k = A^* y_{k-1}$$

$$D_{k+1} = \frac{-(y_k, r_k)}{(y_k, z_{k-1})}$$

$$p_k = r_k + D_{k+1} z_{k-1}$$

$$A_{k+1} = \frac{-(y_k, r_k)}{(y_k, Ap_k)}$$

$$r_{k+1} = r_k + A_{k+1} Ap_k$$

$$x_{k+1} = x_k - A_{k+1} p_k$$

◇ Si $r_{k+1} = 0$ alors faire

$$A'_k = \frac{A'_{k-1}}{A_{k-1}} \quad \text{si } k \geq 2, \quad A'_1 = 1$$

$$B'_k = \frac{(y_{k-1}, z_{k-2})(y_k, A p_{k-1}) - (y_k, z_{k-2})(y_{k-1}, p_{k-1})}{(y_{k-1}, r_{k-1})(y_k, z_{k-2}) - (y_k, r_{k-1})(y_{k-1}, z_{k-2})} \text{ si } k \geq 2, \quad B'_1 = \frac{-(y_1, A r_0)}{(y_1, r_0)}$$

$$E'_k = \frac{-(y_{k-1}, A p_{k-1}) - B'_k (y_{k-1}, r_{k-1})}{(y_{k-1}, z_{k-2})} \text{ si } k \geq 2, \quad E'_1 = 0$$

$$z_k = A'_k [A p_{k-1} + B'_k r_{k-1} + E'_k z_{k-2}].$$

Deuxième cas : $U_i(\xi) = P_i(\xi)$.

On note $\tilde{r}_k = P_k(A)^* y$ et $\tilde{z}_k = P_k^{(1)}(A)^* y$.

$$\text{On a : } D'_k = \frac{-c(\xi^2 P_{k-3}(\xi) P_{k-1}(\xi))}{c(\xi^2 P_{k-3}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi))}.$$

En multipliant la relation $P_k = P_{k-1} + A_k [\xi P_{k-1} + D_k \xi P_{k-2}^{(1)}]$ par ξP_{k-3} , on a :

$$c(\xi P_k P_{k-3}) = c(\xi P_{k-3} P_{k-1}) + A_k [c(\xi^2 P_{k-3} P_{k-1}) + D_k c(\xi^2 P_{k-3} P_{k-2}^{(1)})].$$

$$\text{Comme } c(\xi P_{k-3} P_k) = c(\xi P_{k-3} P_{k-1}) = 0, \text{ on a : } D_k = \frac{-c(\xi^2 P_{k-3}(\xi) P_{k-1}(\xi))}{c(\xi^2 P_{k-3}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi))}.$$

Par conséquent $D_k = D'_k$.

Posons $p_{k-1} = r_{k-1} + D_k z_{k-2}$ et $\tilde{p}_{k-1} = \tilde{r}_{k-1} + \bar{D}_k \tilde{z}_{k-2}$.

Alors $r_k = r_{k-1} + A_k A p_{k-1}$ et $z_k = A'_k [A p_{k-1} + B'_k r_{k-1} + E'_k z_{k-2}]$.

$$\text{Comme } D_k = \frac{-c(\xi P_{k-2}(\xi) P_{k-1}(\xi))}{c(\xi P_{k-2}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi))}, \text{ on a : } D_k = \frac{-(\tilde{r}_{k-1}, A r_{k-2})}{(\tilde{z}_{k-2}, A r_{k-2})}.$$

$$\text{Comme } \frac{1}{A_k} = B_k = \frac{-c(\xi P_{k-1}(\xi) (P_{k-1}(\xi) + D_k P_{k-2}^{(1)}(\xi)))}{c(P_{k-1}^2(\xi))}, \text{ on a : } A_k = \frac{-(\tilde{r}_{k-1}, r_{k-1})}{(\tilde{r}_{k-1}, A p_{k-1})}.$$

D'après les formules de B'_k et de E'_k , on a :

$$B'_k = \frac{(\tilde{z}_{k-2}, A r_{k-2})(A^* \tilde{p}_{k-1}, A r_{k-1}) - (\tilde{z}_{k-2}, A r_{k-1})(A^* \tilde{p}_{k-1}, A r_{k-2})}{(\tilde{r}_{k-1}, A r_{k-2})(\tilde{z}_{k-2}, A r_{k-1}) - (\tilde{r}_{k-1}, A r_{k-1})(\tilde{z}_{k-2}, A r_{k-2})}$$

$$E'_k = \frac{-(A^* \tilde{p}_{k-1}, A r_{k-2}) - B'_k (\tilde{r}_{k-1}, A r_{k-2})}{(\tilde{z}_{k-2}, A r_{k-2})}.$$

Par conséquent, on a l'algorithme suivant :

◇ Choix de x_0 et y .

Soit

$$r_0 = b - A x_0$$

$$p_0 = z_0 = r_0$$

$$\tilde{p}_0 = \tilde{z}_0 = \tilde{r}_0 = y$$

$$A_1 = \frac{-(y, r_0)}{(y, A r_0)}$$

$$r_1 = r_0 + A_1 A r_0$$

$$\tilde{r}_1 = \tilde{r}_0 + \bar{A}_1 A^* \tilde{r}_0$$

$$x_1 = x_0 - A_1 r_0$$

◇ Pour $k = 1, 2, \dots$ faire

$$D_{k+1} = \frac{-(\tilde{r}_k, A r_{k-1})}{(\tilde{z}_{k-1}, A r_{k-1})}$$

$$p_k = r_k + D_{k+1} z_{k-1}$$

$$\tilde{p}_k = \tilde{r}_k + \bar{D}_{k+1} \tilde{z}_{k-1}$$

$$A_{k+1} = \frac{-(\tilde{r}_k, r_k)}{(\tilde{r}_k, A p_k)}$$

$$r_{k+1} = r_k + A_{k+1} A p_k$$

$$\tilde{r}_{k+1} = \tilde{r}_k + \bar{A}_{k+1} A^* \tilde{p}_k$$

$$x_{k+1} = x_k - A_{k+1} p_k$$

◇ Si $r_{k+1} = 0$ alors faire

$$A'_k = \frac{A'_{k-1}}{A_{k-1}} \quad \text{si } k \geq 2, \quad A'_1 = 1$$

$$B'_k = \frac{(\tilde{z}_{k-2}, A r_{k-2})(A^* \tilde{p}_{k-1}, A r_{k-1}) - (\tilde{z}_{k-2}, A r_{k-1})(A^* \tilde{p}_{k-1}, A r_{k-2})}{(\tilde{r}_{k-1}, A r_{k-2})(\tilde{z}_{k-2}, A r_{k-1}) - (\tilde{r}_{k-1}, A r_{k-1})(\tilde{z}_{k-2}, A r_{k-2})} \quad \text{si } k \geq 2,$$

$$B'_1 = \frac{-(A^* y, A r_0)}{(y, A r_0)}$$

$$E_k = \frac{-(A^* \tilde{p}_{k-1}, A r_{k-2}) - B'_k (\tilde{r}_{k-1}, A r_{k-2})}{(\tilde{z}_{k-2}, A r_{k-2})} \quad \text{si } k \geq 2, \quad E_1 = 0$$

$$z_k = A'_k [A p_{k-1} + B'_k r_{k-1} + E_k z_{k-2}]$$

$$\tilde{z}_k = \bar{A}'_k [A^* \tilde{p}_{k-1} + \bar{B}'_k \tilde{r}_{k-1} + \bar{E}_k \tilde{z}_{k-2}].$$

Troisième cas : $U_i(\xi) = P_i^{(1)}(\xi)$.

On note $\tilde{r}_k = P_k(A)^* y$ et $\tilde{z}_k = P_k^{(1)}(A)^* y$.

En multipliant la relation $P_k = P_{k-1} + A_k [\xi P_{k-1} + D_k \xi P_{k-2}^{(1)}]$ par $\xi P_{k-3}^{(1)}$ et en appliquant la fonctionnelle c , on a :

$$c(\xi P_k P_{k-3}^{(1)}) = c(\xi P_{k-3}^{(1)} P_{k-1}) + A_k [c(\xi^2 P_{k-3}^{(1)} P_{k-1}) + D_k c(\xi^2 P_{k-3}^{(1)} P_{k-2}^{(1)})].$$

$$\text{Comme } c(\xi P_{k-3}^{(1)} P_k) = c(\xi P_{k-3}^{(1)} P_{k-1}) = 0, \text{ on a : } D_k = \frac{-c(\xi^2 P_{k-3}^{(1)} P_{k-1})}{c(\xi^2 P_{k-3}^{(1)} P_{k-2}^{(1)})}.$$

$$\text{Comme } D'_k = \frac{-c(\xi^2 P_{k-3}^{(1)} P_{k-1})}{c(\xi^2 P_{k-3}^{(1)} P_{k-2}^{(1)})}, \text{ on a : } D_k = D'_k.$$

$$\text{Posons } p_{k-1} = r_{k-1} + D_k z_{k-2} \text{ et } \tilde{p}_{k-1} = \tilde{r}_{k-1} + \bar{D}_k \tilde{z}_{k-2}.$$

$$\text{Alors } r_k = r_{k-1} + A_k p_{k-1} \text{ et } z_k = A'_k [A p_{k-1} + B'_k r_{k-1} + E_k z_{k-2}].$$

$$\text{Comme } D_k = \frac{-c(\xi P_{k-2}^{(1)}(\xi) P_{k-1}(\xi))}{c(\xi P_{k-2}^{(1)2}(\xi))}, \text{ on a : } D_k = \frac{-(\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-2})}{(\tilde{z}_{k-2}, A z_{k-2})}.$$

$$\text{Comme } \frac{1}{A_k} = B_k = \frac{-c(\xi P_{k-1}^{(1)}(\xi) P_{k-1}(\xi))}{c(P_{k-1}^{(1)}(\xi) P_{k-1}(\xi))}, \text{ on a : } A_k = \frac{-(\tilde{r}_{k-1}, z_{k-1})}{(\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-1})}.$$

D'après les formules de B'_k et de E'_k , on a :

$$B'_k = \frac{-c(\xi^2 P_{k-1}^{(1)}(\xi) (P_{k-1}(\xi) + D_k P_{k-2}^{(1)}(\xi)))}{c(\xi P_{k-1}^{(1)}(\xi) P_{k-1}(\xi))}$$

$$E_k = \frac{-c(\xi^2 P_{k-1}^{(1)}(\xi) (P_{k-1}(\xi) + D_k P_{k-2}^{(1)}(\xi))) - B'_k c(\xi P_{k-2}^{(1)}(\xi) P_{k-1}(\xi))}{c(\xi P_{k-2}^{(1)2}(\xi))}.$$

$$\text{D'où } B'_k = \frac{-(A^* \tilde{p}_{k-1}, A z_{k-1})}{(\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-1})}$$

$$\text{et } E_k = \frac{-(A^* \tilde{p}_{k-1}, A z_{k-2}) - B'_k (\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-2})}{(\tilde{z}_{k-2}, A z_{k-2})} \text{ si } k \geq 2, \quad E_1 = 0.$$

Par conséquent, on a l'algorithme suivant :

◇ Choix de x_0 et y .

$$\text{Soit } r_0 = b - A x_0$$

$$z_0 = r_0$$

$$\tilde{z}_0 = \tilde{r}_0 = y$$

◇ Pour $k = 0, 1, 2, \dots$ faire

$$D_{k+1} = \frac{-(\tilde{r}_k, A z_{k-1})}{(\tilde{z}_{k-1}, A z_{k-1})} \quad \text{si } k \geq 1, \quad D_1 = 0$$

$$p_k = r_k + D_{k+1} z_{k-1} \quad \text{si } k \geq 1, \quad p_0 = r_0$$

$$\tilde{p}_k = \tilde{r}_k + \bar{D}_{k+1} \tilde{z}_{k-1} \quad \text{si } k \geq 1, \quad \tilde{p}_0 = \tilde{r}_0$$

$$A_{k+1} = \frac{-(\tilde{r}_k, z_k)}{(\tilde{r}_k, A z_k)}$$

$$r_{k+1} = r_k + A_{k+1} A p_k$$

$$\tilde{r}_{k+1} = \tilde{r}_k + \bar{A}_{k+1} A^* \tilde{p}_k$$

$$x_{k+1} = x_k - A_{k+1} p_k$$

◇ Si $r_{k+1} = 0$ alors faire

$$A'_{k+1} = \frac{A'_k}{A_k} \quad \text{si } k \geq 1, \quad A'_1 = 1$$

$$B'_{k+1} = \frac{-(A^* \tilde{p}_k, A z_k)}{(\tilde{r}_k, A z_k)}$$

$$E_{k+1} = \frac{-(A^* \tilde{p}_k, A z_{k-1}) - B'_{k+1} (\tilde{r}_k, A z_{k-1})}{(\tilde{z}_{k-1}, A z_{k-1})} \quad \text{si } k \geq 1, \quad E_1 = 0$$

$$z_{k+1} = A'_{k+1} [A p_k + B'_{k+1} r_k + E_{k+1} z_{k-1}]$$

$$\tilde{z}_{k+1} = \bar{A}'_{k+1} [A^* \tilde{p}_k + \bar{B}'_{k+1} \tilde{r}_k + \bar{E}_{k+1} \tilde{z}_{k-1}].$$

3.9. Méthode A₅ / B₆

De la relation A₅, nous obtenons immédiatement :

$$r_k = r_{k-1} + A_k A (r_{k-1} + D_k z_{k-2}) \quad (1)$$

en notant $z_k = P_k^{(1)}(A) r_0$.

$$\text{Comme } r_k = b - A x_k, \text{ on a : } x_k = x_{k-1} - A_k (r_{k-1} + D_k z_{k-2}). \quad (2)$$

De la relation B₆, nous obtenons :

$$z_k = C_k z_{k-2} + E_k z_{k-1} + A z_{k-1}. \quad (3)$$

La méthode A₅ / B₆ est définie par les formules (1), (2), (3).

Il nous faut maintenant étudier comment programmer les coefficients A_k, D_k, C_k, E_k apparaissant dans ces formules.

Premier cas : $U_i(\xi) = \xi^i$.

$$\text{Comme } D_k = \frac{-c(\xi^{k-1} P_{k-1}^{(1)}(\xi))}{c(\xi^{k-1} P_{k-2}^{(1)}(\xi))}, \text{ on a : } D_k = \frac{-(A^{*k-1} y, r_{k-1})}{(A^{*k-1} y, z_{k-2})}.$$

$$\text{Comme } \frac{1}{A_k} = B_k = \frac{-c(\xi^k (P_{k-1}^{(1)}(\xi) + D_k P_{k-2}^{(1)}(\xi)))}{c(\xi^{k-1} P_{k-1}^{(1)}(\xi))}, \text{ on a :}$$

$$\frac{1}{A_k} = B_k = \frac{-(A^{*k-1} y, A r_{k-1}) - D_k (A^{*k-1} y, A z_{k-2})}{(A^{*k-1} y, r_{k-1})}.$$

$$\text{De plus comme } C_k = \frac{-c(\xi^k P_{k-1}^{(1)}(\xi))}{c(\xi^{k-1} P_{k-2}^{(1)}(\xi))}, \text{ on a : } C_k = \frac{-(A^{*k} y, z_{k-1})}{(A^{*k-1} y, z_{k-2})}.$$

$$\text{Comme } E_k = \frac{-c(\xi^{k+1} P_{k-1}^{(1)}(\xi)) - C_k c(\xi^k P_{k-2}^{(1)}(\xi))}{c(\xi^k P_{k-1}^{(1)}(\xi))}, \text{ on a :}$$

$$E_k = \frac{-(A^{*k} y, A z_{k-1}) - C_k (A^{*k} y, z_{k-2})}{(A^{*k} y, z_{k-1})}.$$

Par conséquent, on a l'algorithme suivant :

◇ Choix de x_0 et y .

$$\text{Soit } r_0 = b - A x_0$$

$$y_0 = y$$

$$z_0 = r_0$$

$$A_1 = \frac{-(y, r_0)}{(y, A r_0)}$$

$$r_1 = r_0 + A_1 A r_0$$

$$x_1 = x_0 - A_1 r_0$$

◇ Pour $k = 1, 2, \dots$ faire

$$y_k = A^* y_{k-1}$$

$$D_{k+1} = \frac{-(y_k, r_k)}{(y_k, z_{k-1})}$$

$$A_{k+1} = \frac{-(y_k, r_k)}{(y_k, A r_k) + D_{k+1} (y_k, A z_{k-1})}$$

$$r_{k+1} = r_k + A_{k+1} (A r_k + D_{k+1} A z_{k-1})$$

$$x_{k+1} = x_k - A_{k+1} (r_k + D_{k+1} z_{k-1})$$

◇ Si $r_{k+1} = 0$ alors faire

$$C_k = \frac{-(y_k, z_{k-1})}{(y_{k-1}, z_{k-2})} \quad \text{si } k \geq 2, \quad C_1 = 0$$

$$E_k = \frac{-(y_k, A z_{k-1}) - C_k (y_k, z_{k-2})}{(y_k, z_{k-1})}$$

$$z_k = C_k z_{k-2} + E_k z_{k-1} + A z_{k-1}.$$

Deuxième cas : $U_i(\xi) = P_i(\xi)$.

On note $\tilde{r}_k = P_k(A)^* y$ et $\tilde{z}_k = P_k^{(1)}(A)^* y$.

Comme $D_k = \frac{-c(\xi P_{k-2}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi))}{c(\xi P_{k-2}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi))}$, on a : $D_k = \frac{-(\tilde{r}_{k-2}, A r_{k-1})}{(\tilde{r}_{k-2}, A z_{k-2})}$.

Comme $\frac{1}{A_k} = B_k = \frac{-c(\xi P_{k-1}^2(\xi)) - D_k c(\xi P_{k-1}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi))}{c(P_{k-1}^2(\xi))}$, on a :

$$\frac{1}{A_k} = \frac{-(\tilde{r}_{k-1}, A r_{k-1}) - D_k (\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-2})}{(\tilde{r}_{k-1}, r_{k-1})}.$$

Comme $C_k = \frac{-c(\xi^2 P_{k-2}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi))}{c(\xi P_{k-2}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi))}$, on a : $C_k = \frac{-(A^* \tilde{r}_{k-2}, A z_{k-1})}{(\tilde{r}_{k-2}, A z_{k-2})}$.

Comme $E_k = \frac{-c(\xi^2 P_{k-1}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)) - C_k c(\xi P_{k-1}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi))}{c(\xi P_{k-1}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi))}$, on a :

$$E_k = \frac{-(A^* \tilde{r}_{k-1}, A z_{k-1}) - C_k (\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-2})}{(\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-1})}$$

Par conséquent, on a l'algorithme suivant :

◇ Choix de x_0 et y .

Soit $r_0 = b - A x_0$

$$z_0 = r_0$$

$$\tilde{z}_0 = \tilde{r}_0 = y$$

$$A_1 = \frac{-(\tilde{r}_0, r_0)}{(\tilde{r}_0, A r_0)}$$

$$r_1 = r_0 + A_1 A r_0$$

$$\tilde{r}_1 = \tilde{r}_0 + \bar{A}_1 A^* \tilde{r}_0$$

$$x_1 = x_0 - A_1 r_0$$

◇ Pour $k = 1, 2, \dots$ faire

$$D_{k+1} = \frac{-(\tilde{r}_{k-1}, A r_k)}{(\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-1})}$$

$$A_{k+1} = \frac{-(\tilde{r}_k, r_k)}{(\tilde{r}_k, A r_k) + D_{k+1} (\tilde{r}_k, A z_{k-1})}$$

$$r_{k+1} = r_k + A_{k+1} (A r_k + D_{k+1} A z_{k-1})$$

$$\tilde{r}_{k+1} = \tilde{r}_k + \bar{A}_{k+1} (A^* \tilde{r}_k + \bar{D}_{k+1} A^* \tilde{z}_{k-1})$$

$$x_{k+1} = x_k - A_{k+1} (r_k + D_{k+1} z_{k-1})$$

◇ Si $r_{k+1} = 0$ alors faire

$$C_k = \frac{-(A^* \tilde{r}_{k-2}, A z_{k-1})}{(\tilde{r}_{k-2}, A z_{k-2})} \quad \text{si } k \geq 2, \quad C_1 = 0$$

$$E_k = \frac{-(A^* \tilde{r}_{k-1}, A z_{k-1}) - C_k (\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-2})}{(\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-1})}$$

$$z_k = A z_{k-1} + C_k z_{k-2} + E_k z_{k-1}$$

$$\tilde{z}_k = A^* \tilde{z}_{k-1} + \bar{C}_k \tilde{z}_{k-2} + \bar{E}_k \tilde{z}_{k-1}$$

Troisième cas : $U_i(\xi) = P_i^{(1)}(\xi)$.

On note $\tilde{z}_k = P_k^{(1)}(A)^* y$.

Comme $D_{k+1} = \frac{-c(\xi P_{k-1}^{(1)}(\xi) P_k(\xi))}{c(\xi P_{k-1}^{(1)2}(\xi))}$, on a : $D_{k+1} = \frac{-(\tilde{z}_{k-1}, A r_k)}{(\tilde{z}_{k-1}, A z_{k-1})}$.

Comme $\frac{1}{A_{k+1}} = \frac{-c(\xi P_k^{(1)}(\xi) P_k(\xi))}{c(P_k^{(1)}(\xi) P_k(\xi))}$, on a : $A_{k+1} = \frac{-(\tilde{z}_k, r_k)}{(\tilde{z}_k, A r_k)}$.

Comme $C_{k+1} = \frac{-c(\xi^2 P_{k-1}^{(1)}(\xi) P_k^{(1)}(\xi))}{c(\xi P_{k-1}^{(1)2}(\xi))}$, on a : $C_{k+1} = \frac{-(A^* \tilde{z}_{k-1}, A z_k)}{(\tilde{z}_{k-1}, A z_{k-1})}$.

Comme $E_{k+1} = \frac{-c(\xi^2 P_k^{(1)2}(\xi))}{c(\xi P_k^{(1)2}(\xi))}$, on a : $E_{k+1} = \frac{-(A^* \tilde{z}_k, A z_k)}{(\tilde{z}_k, A z_k)}$.

Par conséquent, on a l'algorithme suivant :

◇ Choix de x_0 et y .

Soit $r_0 = b - A x_0$

$z_0 = r_0$

$\tilde{z}_0 = y$

◇ Pour $k = 0, 1, 2, \dots$ faire

$$D_{k+1} = \frac{-(\tilde{z}_{k-1}, A r_k)}{(\tilde{z}_{k-1}, A z_{k-1})} \quad \text{si } k \geq 1, \quad D_1 = 0$$

$$A_{k+1} = \frac{-(\tilde{z}_k, r_k)}{(\tilde{z}_k, A r_k)}$$

$$r_{k+1} = r_k + A_{k+1} (A r_k + D_{k+1} A z_{k-1})$$

$$x_{k+1} = x_k - A_{k+1} (r_k + D_{k+1} z_{k-1})$$

◇ Si $r_{k+1} = 0$ alors faire

$$C_{k+1} = \frac{-(A^* \tilde{z}_{k-1}, A z_k)}{(\tilde{z}_{k-1}, A z_{k-1})} \quad \text{si } k \geq 1, \quad C_1 = 0$$

$$E_{k+1} = \frac{-(A^* \tilde{z}_k, A z_k)}{(\tilde{z}_k, A z_k)}$$

$$z_{k+1} = A z_k + C_{k+1} z_{k-1} + E_{k+1} z_k$$

$$\tilde{z}_{k+1} = A^* \tilde{z}_k + \bar{C}_{k+1} \tilde{z}_{k-1} + \bar{E}_{k+1} \tilde{z}_k.$$

3.10. Méthode A₅ / B₈

De la relation A₅, nous obtenons immédiatement :

$$r_k = r_{k-1} + A_k A (r_{k-1} + D_k z_{k-2}) \quad (1)$$

en notant $z_k = P_k^{(1)}(A) r_0$.

$$\text{Comme } r_k = b - A x_k, \text{ on a : } x_k = x_{k-1} - A_k (r_{k-1} + D_k z_{k-2}). \quad (2)$$

De la relation B₈, nous obtenons :

$$z_k = B'_k z_{k-1} + D'_k r_{k-1} + A z_{k-1}. \quad (3)$$

La méthode A₅ / B₈ est définie par les formules (1), (2), (3).

Il nous faut maintenant étudier comment programmer les coefficients A_k, D_k, D'_k, B'_k apparaissant dans ces formules.

Premier cas : $U_i(\xi) = \xi^i$.

Posons $p_k = r_k + D_{k+1} z_{k-1}$ et $v_{k-1} = A z_{k-1} + D'_k r_{k-1}$ pour $k \geq 1$.

Alors $r_{k+1} = r_k + A_{k+1} A p_k$ et $x_{k+1} = x_k - A_{k+1} p_k$.

De plus $z_k = B'_k z_{k-1} + v_{k-1}$.

$$\text{Comme } D_{k+1} = \frac{-c(\xi^k P_k(\xi))}{c(\xi^k P_{k-1}^{(1)}(\xi))}, \text{ on a : } D_{k+1} = \frac{-(A^{*k} y, r_k)}{(A^{*k} y, z_{k-1})}.$$

$$\text{Comme } \frac{1}{A_{k+1}} = B_{k+1} = \frac{-c(\xi^{k+1} (P_k(\xi) + D_{k+1} P_{k-1}^{(1)}(\xi)))}{c(\xi^k P_k(\xi))}, \text{ on a : } A_{k+1} = \frac{-(A^{*k} y, r_k)}{(A^{*k} y, A p_k)}.$$

$$\text{Comme } D'_k = \frac{-c(\xi^k P_{k-1}^{(1)}(\xi))}{c(\xi^{k-1} P_{k-1}(\xi))}, \text{ on a : } D'_k = \frac{-(A^{*k} y, z_{k-1})}{(A^{*k-1} y, r_{k-1})}.$$

$$\text{Comme } B'_k = \frac{-c(\xi^{k+1} P_{k-1}^{(1)}(\xi)) - D'_k c(\xi^k P_{k-1}(\xi))}{c(\xi^k P_{k-1}^{(1)}(\xi))}, \text{ on a : } B'_k = \frac{-(A^{*k} y, v_{k-1})}{(A^{*k} y, z_{k-1})}.$$

Par conséquent, on a l'algorithme suivant :

◇ Choix de x_0 et y .

Soit $r_0 = b - A x_0$

$y_0 = y$

$z_0 = r_0$

◇ Pour $k = 0, 1, 2, \dots$ faire

$$D_{k+1} = \frac{-(y_k, r_k)}{(y_k, z_{k-1})} \quad \text{si } k \geq 1, \quad D_1 = 0$$

$$p_k = r_k + D_{k+1} z_{k-1} \quad \text{si } k \geq 1, \quad p_0 = r_0$$

$$A_{k+1} = \frac{-(y_k, r_k)}{(y_k, A p_k)}$$

$$r_{k+1} = r_k + A_{k+1} A p_k$$

$$x_{k+1} = x_k - A_{k+1} p_k$$

◇ Si $r_{k+1} = 0$ alors faire

$$y_{k+1} = A^* y_k$$

$$D'_{k+1} = \frac{-(y_{k+1}, z_k)}{(y_k, r_k)}$$

$$v_k = A z_k + D'_{k+1} r_k$$

$$B'_{k+1} = \frac{-(y_{k+1}, v_k)}{(y_{k+1}, z_k)}$$

$$z_{k+1} = B'_{k+1} z_k + v_k.$$

Deuxième cas : $U_i(\xi) = P_i(\xi)$.

On note $\tilde{r}_k = P_k(A)^* y$ et $\tilde{z}_k = P_k^{(1)}(A)^* y$.

Comme $D_{k+1} = \frac{-c(\xi P_{k-1}(\xi) P_k(\xi))}{c(\xi P_{k-1}(\xi) P_k^{(1)}(\xi))}$, on a : $D_{k+1} = \frac{-(\tilde{r}_{k-1}, A r_k)}{(\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-1})}$.

Comme $\frac{1}{A_{k+1}} = B_{k+1} = \frac{-c(\xi P_k^2(\xi)) - D_{k+1} c(\xi P_k(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi))}{c(P_k^2(\xi))}$, on a :

$$\frac{1}{A_{k+1}} = \frac{-(\tilde{r}_k, A r_k) - D_{k+1} (\tilde{r}_k, A z_{k-1})}{(\tilde{r}_k, r_k)}.$$

Comme $D'_k = \frac{-c(\xi^2 P_{k-2}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi))}{c(\xi P_{k-2}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi))}$, on a : $D'_k = \frac{-(A^* \tilde{r}_{k-2}, A z_{k-1})}{(\tilde{r}_{k-2}, A r_{k-1})}$.

Comme $B'_k = \frac{-c(\xi^2 P_{k-1}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)) - D'_k c(\xi P_{k-1}^2(\xi))}{c(\xi P_{k-1}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi))}$, on a :

$$B'_k = \frac{-(A^* \tilde{r}_{k-1}, A z_{k-1}) - D'_k (\tilde{r}_{k-1}, A r_{k-1})}{(\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-1})}.$$

Par conséquent, on a l'algorithme suivant :

◇ Choix de x_0 et y .

$$\text{Soit } r_0 = b - A x_0$$

$$z_0 = r_0$$

$$\tilde{z}_0 = \tilde{r}_0 = y$$

$$A_1 = \frac{-(y, r_0)}{(y, A r_0)}$$

$$r_1 = r_0 + A_1 A r_0$$

$$\tilde{r}_1 = \tilde{r}_0 + \bar{A}_1 A^* \tilde{r}_0$$

$$x_1 = x_0 - A_1 r_0$$

◇ Pour $k = 1, 2, \dots$ faire

$$D_{k+1} = \frac{-(\tilde{r}_{k-1}, A r_k)}{(\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-1})}$$

$$A_{k+1} = \frac{-(\tilde{r}_k, r_k)}{(\tilde{r}_k, A r_k) + D_{k+1} (\tilde{r}_k, A z_{k-1})}$$

$$r_{k+1} = r_k + A_{k+1} (A r_k + D_{k+1} A z_{k-1})$$

$$\tilde{r}_{k+1} = \tilde{r}_k + \bar{A}_{k+1} (A^* \tilde{r}_k + \bar{D}_{k+1} A^* \tilde{z}_{k-1})$$

$$x_{k+1} = x_k - A_{k+1} (r_k + D_{k+1} z_{k-1})$$

◇ Si $r_{k+1} = 0$ alors faire

$$D'_k = \frac{-(A^* \tilde{r}_{k-2}, A z_{k-1})}{(\tilde{r}_{k-2}, A r_{k-1})} \quad \text{si } k \geq 2, \quad D'_1 = 0$$

$$B'_k = \frac{-(A^* \tilde{r}_{k-1}, A z_{k-1}) - D'_k (\tilde{r}_{k-1}, A r_{k-1})}{(\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-1})}$$

$$z_k = A z_{k-1} + B'_k z_{k-1} + D'_k r_{k-1}$$

$$\tilde{z}_k = A^* \tilde{z}_{k-1} + \bar{B}'_k \tilde{z}_{k-1} + \bar{D}'_k \tilde{r}_{k-1}.$$

Troisième cas : $U_i(\xi) = P_i^{(1)}(\xi)$.

On note $\tilde{r}_k = P_k(A)^* y$ et $\tilde{z}_k = P_k^{(1)}(A)^* y$.

Comme $D_{k+1} = \frac{-c(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi) P_k(\xi)}{c(\xi) P_{k-1}^{(1)2}(\xi)}$, on a : $D_{k+1} = \frac{-(\tilde{r}_k, A z_{k-1})}{(\tilde{z}_{k-1}, A z_{k-1})}$.

$$\text{Comme } \frac{1}{A_{k+1}} = \frac{-c(\xi P_k^{(1)}(\xi) P_k(\xi))}{c(P_k^{(1)}(\xi) P_k(\xi))}, \text{ on a : } A_{k+1} = \frac{-(\tilde{r}_k, z_k)}{(\tilde{r}_k, A z_k)}.$$

$$\text{Comme } D'_{k+1} = \frac{-c(\xi^2 P_{k-1}^{(1)}(\xi) P_k^{(1)}(\xi))}{c(\xi P_{k-1}^{(1)}(\xi) P_k(\xi))}, \text{ on a : } D'_{k+1} = \frac{-(A^* \tilde{z}_{k-1}, A z_k)}{(\tilde{r}_k, A z_{k-1})}.$$

$$\text{Comme } B'_{k+1} = \frac{-c(\xi^2 P_k^{(1)2}(\xi)) - D'_{k+1} c(\xi P_k^{(1)}(\xi) P_k(\xi))}{c(\xi P_k^{(1)2}(\xi))}, \text{ on a :}$$

$$B'_{k+1} = \frac{-(A^* \tilde{z}_k, A z_k) - D'_{k+1} (\tilde{r}_k, A z_k)}{(\tilde{z}_k, A z_k)}.$$

Par conséquent, on a l'algorithme suivant :

◇ Choix de x_0 et y .

$$\text{Soit } r_0 = b - A x_0$$

$$z_0 = r_0$$

$$\tilde{z}_0 = \tilde{r}_0 = y$$

◇ Pour $k = 0, 1, 2, \dots$ faire

$$D_{k+1} = \frac{-(\tilde{r}_k, A z_{k-1})}{(\tilde{z}_{k-1}, A z_{k-1})} \quad \text{si } k \geq 1, \quad D_1 = 0$$

$$A_{k+1} = \frac{-(\tilde{r}_k, z_k)}{(\tilde{r}_k, A z_k)}$$

$$r_{k+1} = r_k + A_{k+1} (A r_k + D_{k+1} A z_{k-1})$$

$$\tilde{r}_{k+1} = \tilde{r}_k + \bar{A}_{k+1} (A^* \tilde{r}_k + \bar{D}_{k+1} A^* \tilde{z}_{k-1})$$

$$x_{k+1} = x_k - A_{k+1} (r_k + D_{k+1} z_{k-1})$$

◇ Si $r_{k+1} = 0$ alors faire

$$D'_{k+1} = \frac{-(A^* \tilde{z}_{k-1}, A z_k)}{(\tilde{r}_k, A z_{k-1})} \quad \text{si } k \geq 1, \quad D'_1 = 0$$

$$B'_{k+1} = \frac{-(A^* \tilde{z}_k, A z_k) - D'_{k+1} (\tilde{r}_k, A z_k)}{(\tilde{z}_k, A z_k)}$$

$$z_{k+1} = A z_k + B'_{k+1} z_k + D'_{k+1} r_k$$

$$\tilde{z}_{k+1} = A^* \tilde{z}_k + \bar{B}'_{k+1} \tilde{z}_k + \bar{D}'_{k+1} \tilde{r}_k.$$

3.11. Méthode A₅ / B₁₀

De la relation A₅, nous obtenons immédiatement :

$$r_k = r_{k-1} + A_k A (r_{k-1} + D_k z_{k-2}) \quad (1)$$

en notant $z_k = P_k^{(1)}(A) r_0$.

$$\text{Comme } r_k = b - A x_k, \text{ on a : } x_k = x_{k-1} - A_k (r_{k-1} + D_k z_{k-2}). \quad (2)$$

$$\text{De la relation B}_{10}, \text{ nous obtenons : } z_k = B'_k z_{k-1} + C_k r_k. \quad (3)$$

La méthode A₅ / B₁₀ est définie par les formules (1), (2), (3).

Il nous faut maintenant étudier comment programmer les coefficients A_k, D_k, B'_k, C'_k apparaissant dans ces formules.

$$\text{Comme } C_k = \frac{1}{a_k} \text{ où } a_k \text{ est définie par } P_k(\xi) = a_k \xi^k + \dots + 1, \text{ on a : } a_k = A_k a_{k-1}.$$

$$\text{D'où } C_k = \frac{C_{k-1}}{A_k}.$$

Remarque : D'après les formules de D_k et B'_k , on a : $B'_k = C_k D_{k+1}$.

Par suite on a : $z_k = C_k (r_k + D_{k+1} z_{k-1})$.

Notons $p_{k-1} = r_{k-1} + D_k z_{k-2}$. Alors $r_k = r_{k-1} + A_k A p_{k-1}$ et $z_k = C_k p_k$.

Par suite $p_k = r_k + D_{k+1} C_{k-1} p_{k-1}$.

On a donc à chercher uniquement A_k, D_{k+1} et C'_k .

Premier cas : $U_i(\xi) = \xi^i$.

$$\text{Comme } D_k = \frac{-c(\xi^{k-1} P_{k-1}(\xi))}{c(\xi^{k-1} P_{k-2}^{(1)}(\xi))}, \text{ on a : } D_k = \frac{-(A^{*k-1} y, r_{k-1})}{(A^{*k-1} y, z_{k-2})}.$$

$$\text{Comme } \frac{1}{A_k} = B_k = \frac{-c(\xi^k (P_{k-1}(\xi) + D_k P_{k-2}^{(1)}(\xi)))}{c(\xi^{k-1} P_{k-1}(\xi))}, \text{ on a : } \frac{1}{A_k} = B_k = \frac{-(A^{*k-1} y, A p_{k-1})}{(A^{*k-1} y, r_{k-1})}.$$

Par conséquent, on a l'algorithme suivant :

◇ Choix de x_0 et y .

Soit $r_0 = b - A x_0$

$y_0 = y$

$p_0 = r_0$

$$A_1 = \frac{-(y_0, r_0)}{(y_0, A r_0)}$$

$$r_1 = r_0 + A_1 A r_0$$

$$x_1 = x_0 - A_1 r_0$$

$$C_0 = 1$$

◇ Pour $k = 1, 2, \dots$ faire

$$y_k = A^* y_{k-1}$$

$$D_{k+1} = \frac{-(y_k, r_k)}{C_{k-1} (y_k, p_{k-1})}$$

$$p_k = r_k + D_{k+1} C_{k-1} p_{k-1}$$

$$A_{k+1} = \frac{-(y_k, r_k)}{(y_k, A p_k)}$$

$$r_{k+1} = r_k + A_{k+1} A p_k$$

$$x_{k+1} = x_k - A_{k+1} p_k$$

◇ Si $r_{k+1} = 0$ alors faire $C_k = \frac{C_{k-1}}{A_k}$.

Deuxième cas : $U_i(\xi) = P_i(\xi)$.

On note $\tilde{r}_k = P_k(A)^* y$ et $\tilde{p}_k = \frac{1}{C_k} P_k^{(1)}(A)^* y$.

Comme $\frac{1}{A_k} = B_k = \frac{-c(\xi P_{k-1}(\xi)(P_{k-1}(\xi) + D_k P_{k-2}^{(1)}(\xi)))}{c(P_{k-1}^2(\xi))}$, on a : $\frac{1}{A_k} = \frac{-(\tilde{r}_{k-1}, A p_{k-1})}{(\tilde{r}_{k-1}, r_{k-1})}$.

Comme $D_k = \frac{-c(\xi P_{k-2}(\xi) P_{k-1}(\xi))}{c(\xi P_{k-2}(\xi) P_{k-2}^{(1)}(\xi))}$, on a : $D_k = \frac{-(A^* \tilde{r}_{k-2}, r_{k-1})}{C_{k-2} (\tilde{r}_{k-2}, A p_{k-2})}$ si $k \geq 2$.

On a $\tilde{p}_{k-2} = \tilde{r}_{k-2} + \bar{D}_{k-1} \bar{C}'_{k-3} \tilde{p}_{k-3}$ pour $k \geq 3$.

Par suite $(A^* \tilde{r}_{k-2}, r_{k-1}) = (A^* \tilde{p}_{k-2}, r_{k-1}) - \bar{D}_{k-1} \bar{C}'_{k-3} (A^* \tilde{p}_{k-3}, r_{k-1})$.

Donc pour $k \geq 3$ $D_k = \frac{\bar{D}_{k-1} \bar{C}'_{k-3} (A^* \tilde{p}_{k-3}, r_{k-1}) - (A^* \tilde{p}_{k-2}, r_{k-1})}{C_{k-2} (\tilde{r}_{k-2}, A p_{k-2})}$ et $D_2 = \frac{-(\tilde{r}_1, A r_0)}{(\tilde{r}_0, A p_0)}$.

Par conséquent, on a l'algorithme suivant :

◇ Choix de x_0 et y .

Soit $r_0 = b - A x_0$

$$p_0 = r_0$$

$$\tilde{p}_0 = \tilde{r}_0 = y$$

$$A_1 = \frac{-(\tilde{r}_0, r_0)}{(\tilde{r}_0, A p_0)}$$

$$r_1 = r_0 + A_1 A r_0$$

$$\tilde{r}_1 = \tilde{r}_0 + \bar{A}_1 A^* \tilde{r}_0$$

$$x_1 = x_0 - A_1 r_0$$

$$C_0 = 1$$

◇ Pour $k = 1, 2, \dots$ faire

$$D_{k+1} = \frac{\bar{D}_k \bar{C}_{k-2} (A^* \tilde{p}_{k-2}, r_k) - (A^* \tilde{p}_{k-1}, r_k)}{C_{k-1} (\tilde{r}_{k-1}, A p_{k-1})} \text{ si } k \geq 2, \quad D_2 = \frac{-(\tilde{r}_1, A r_0)}{(\tilde{r}_0, A p_0)}$$

$$p_k = r_k + D_{k+1} C_{k-1} p_{k-1}$$

$$\tilde{p}_k = \tilde{r}_k + \bar{D}_{k+1} \bar{C}_{k-1} \tilde{p}_{k-1}$$

$$A_{k+1} = \frac{-(\tilde{r}_k, r_k)}{(\tilde{r}_k, A p_k)}$$

$$r_{k+1} = r_k + A_{k+1} A p_k$$

$$\tilde{r}_{k+1} = \tilde{r}_k + \bar{A}_{k+1} A^* \tilde{p}_k$$

$$x_{k+1} = x_k - A_{k+1} p_k$$

◇ Si $r_{k+1} = 0$ alors faire $C_k = \frac{C_{k-1}}{A_k}$.

Troisième cas : $U_i(\xi) = P_i^{(1)}(\xi)$.

On note $\tilde{r}_k = P_k(A)^* y$ et $\tilde{p}_k = \frac{1}{C_k} P_k^{(1)}(A)^* y$.

Comme $D_{k+1} = \frac{-c(\xi P_{k-1}^{(1)}(\xi) P_k(\xi))}{c(\xi P_{k-1}^{(1)2}(\xi))}$, on a : $D_{k+1} = \frac{-(\tilde{r}_k, A p_k)}{(\tilde{p}_{k-1}, A p_{k-1})}$.

Comme $\frac{1}{A_{k+1}} = \frac{-c(\xi P_k^{(1)}(\xi) P_k(\xi))}{c(P_k^{(1)}(\xi) P_k(\xi))}$, on a : $A_{k+1} = \frac{-(\tilde{r}_k, p_k)}{(\tilde{r}_k, A p_k)}$.

Par conséquent, on a l'algorithme suivant :

◇ Choix de x_0 et y .

Soit $r_0 = b - A x_0$

$$p_0 = r_0$$

$$\tilde{p}_0 = \tilde{r}_0 = y$$

$$A_1 = \frac{-(\tilde{r}_0, p_0)}{(\tilde{r}_0, A p_0)}$$

$$r_1 = r_0 + A_1 A r_0$$

$$\tilde{r}_1 = \tilde{r}_0 + \bar{A}_1 A^* \tilde{r}_0$$

$$x_1 = x_0 - A_1 r_0$$

$$C_0 = 1$$

◇ Pour $k = 1, 2, \dots$ faire

$$D_{k+1} = \frac{-(\tilde{r}_k, A p_k)}{(\tilde{p}_{k-1}, A p_{k-1})}$$

$$p_k = r_k + D_{k+1} C_{k-1} p_{k-1}$$

$$\tilde{p}_k = \tilde{r}_k + \bar{D}_{k+1} \bar{C}_{k-1} \tilde{p}_{k-1}$$

$$A_{k+1} = \frac{-(\tilde{r}_k, p_k)}{(\tilde{r}_k, A p_k)}$$

$$r_{k+1} = r_k + A_{k+1} A p_k$$

$$\tilde{r}_{k+1} = \tilde{r}_k + \bar{A}_{k+1} A^* \tilde{p}_k$$

$$x_{k+1} = x_k - A_{k+1} p_k$$

◇ Si $r_{k+1} \neq 0$ alors faire $C_k = \frac{C_{k-1}}{A_k}$.

3.12. Méthode A_1 / B_1

De la relation A_1 , nous obtenons immédiatement :

$$r_k = B_k A r_{k-2} + r_{k-2} + D_k A^2 z_{k-2} + E_k A z_{k-2} \quad (1)$$

en notant $z_k = P_k^{(1)}(A) r_0$.

$$\text{Comme } r_k = b - A x_k, \text{ on a : } x_k = x_{k-2} - B_k r_{k-2} - D_k A z_{k-2} - E_k z_{k-2}. \quad (2)$$

De la relation B_1 , nous obtenons :

$$z_k = B'_k A r_{k-2} + C_k r_{k-2} + A^2 z_{k-2} + E_k A z_{k-2} + F_k z_{k-2}. \quad (3)$$

La méthode A_1 / B_1 est définie par les formules (1), (2), (3).

Il nous faut maintenant étudier comment programmer les coefficients apparaissant dans ces formules.

On remarque que l'on a toujours $\Delta_k = \Delta'_k$.

Premier cas : $U_i(\xi) = \xi$.

Posons $\lambda_k = (A^{*k} y, z_{k-2})$ et $\mu_k = (A^{*k-1} y, z_{k-2})$

et $\alpha_k = (A^{*k-1} y, r_{k-2})$ et $\beta_k = (A^{*k-2} y, r_{k-2})$.

D'après les différentes expressions, on a :

$$B'_k = \frac{-\mu_k}{\beta_k}$$

$$\Delta_k = \beta_k [\lambda_k^2 - (A^{*k+1} y, z_{k-2}) \mu_k] - \mu_k [\alpha_k \lambda_k - (A^{*k} y, r_{k-2}) \mu_k]$$

Si $\Delta_k \neq 0$, on a :

$$C_k = \frac{1}{\Delta_k} \left\{ \mu_k \left[(A^{*k+1} y, z_{k-2}) + B'_k (A^{*k} y, r_{k-2}) \right] \lambda_k - \left[(A^{*k+1} y, z_{k-2}) + B'_k (A^{*k+1} y, r_{k-2}) \right] \mu_k \right\} \\ - \{ \lambda_k + B'_k \mu_k \} \left[\lambda_k^2 - (A^{*k+1} y, z_{k-2}) \mu_k \right]$$

$$E_k = \frac{-\lambda_k - B'_k \alpha_k - \beta_k}{\mu_k}$$

$$F_k = \frac{-(A^{*k+1} y, z_{k-2}) - B'_k (A^{*k} y, r_{k-2}) - C_k \alpha_k - E_k \lambda_k}{\mu_k}$$

$$B_k = \frac{\mu_k (\beta_k \lambda_k - \alpha_k \mu_k)}{\Delta_k}$$

$$D_k = -B_k \frac{\beta_k}{\mu_k}$$

$$E_k = \frac{-\beta_k - B_k \alpha_k - D_k \lambda_k}{\mu_k}$$

Les formules précédentes, valables pour $k \geq 2$, permettent de calculer r_k et z_k .

Il faut donc chercher autrement r_1 et z_1 .

D'après les formules de $P_1(\xi)$ et de $P_1^{(1)}(\xi)$, on a : $r_1 = r_0 + A_1 A r_0$ avec $A_1 = \frac{-(y, r_0)}{(y, A r_0)} = \frac{-c_0}{c_1}$ et

$$z_1 = A r_0 - \frac{c_2}{c_1} r_0 \text{ avec } c_2 = (y, A^2 r_0) = (A^* \tilde{r}_0, A r_0).$$

Par conséquent on a l'algorithme suivant :

◇ Choix de x_0 et y .

$$\text{Soit } r_0 = b - A x_0$$

$$r_0 = z_0$$

$$y_0 = y$$

$$A_1 = \frac{-(y, r_0)}{(y, A r_0)}$$

$$r_1 = r_0 + A_1 A r_0$$

$$y_1 = A^* y_0$$

$$z_1 = A r_0 - \frac{(y_1, A r_0)}{(y_1, r_0)} r_0$$

◇ Pour $k = 2, 3, 4, \dots$ faire

$$y_k = A^* y_{k-1}$$

$$\lambda_k = (y_k, z_{k-2})$$

$$\mu_k = (y_{k-1}, z_{k-2})$$

$$\alpha_k = (y_{k-1}, r_{k-2})$$

$$\beta_k = (y_{k-2}, r_{k-2})$$

$$\Delta_k = \beta_k [\lambda_k^2 - (y_k, A z_{k-2}) \mu_k] - \mu_k [\alpha_k \lambda_k - (y_k, r_{k-2}) \mu_k]$$

Si $\Delta_k \neq 0$, alors faire

$$B_k = \frac{\mu_k (\beta_k \lambda_k - \alpha_k \mu_k)}{\Delta_k}$$

$$D_k = -B_k \frac{\beta_k}{\mu_k}$$

$$E_k = \frac{-\beta_k - B_k \alpha_k - D_k \lambda_k}{\mu_k}$$

$$r_k = B_k A r_{k-2} + r_{k-2} + D_k A^2 z_{k-2} + E_k A z_{k-2}$$

$$x_k = x_{k-2} - B_k r_{k-2} - D_k A z_{k-2} - E_k z_{k-2}$$

◇ Si $r_k \neq 0$ alors faire

$$B'_k = \frac{-\mu_k}{\beta_k}$$

$$C'_k = \frac{1}{\Delta_k} \left[\mu_k \left\{ [(y_{k+1}, z_{k-2}) + B'_k (y_k, r_k)] \lambda_k - [(y_{k+1}, z_{k-2}) + B'_k (y_{k+1}, r_{k-2})] \mu_k \right\} \right. \\ \left. - \{ \lambda_k + B'_k \mu_k \} \left\{ \lambda_k^2 - (y_{k+1}, z_{k-2}) \mu_k \right\} \right]$$

$$E'_k = \frac{-\lambda_k - B'_k \alpha_k - \beta_k}{\mu_k}$$

$$F'_k = \frac{-(y_{k+1}, z_{k-2}) - B'_k (y_k, r_{k-2}) - C'_k \alpha_k - E'_k \lambda_k}{\mu_k}$$

$$z_k = B'_k A r_{k-2} + C'_k r_{k-2} + A^2 z_{k-2} + E'_k A z_{k-2} + F'_k z_{k-2}.$$

Deuxième cas : $U_i(\xi) = P_i(\xi)$.

On note $\tilde{r}_k = P_k(A)^* y$ et $\tilde{z}_k = P_k^{(1)}(A)^* y$.

Notons $\lambda_k = (\tilde{r}_{k-1}, A^2 z_{k-2})$ $\mu_k = (\tilde{r}_{k-2}, A^2 z_{k-2})$

$\alpha_k = (A^* \tilde{r}_{k-1}, A^2 z_{k-2})$ $\beta_k = (A^* \tilde{r}_{k-2}, A^2 z_{k-1})$.

D'après les différentes expressions, on a :

$$B'_{k+1} = \frac{-\beta_k}{(A^* \tilde{r}_{k-3}, A r_{k-1})}$$

$$\Delta_{k+1} = (\tilde{r}_{k-2}, A r_{k-1}) \left[(\tilde{r}_k, A z_{k-1}) \mu_{k+1} - (\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-1}) \lambda_{k+1} \right] \\ - (\tilde{r}_{k-2}, A^2 z_{k-1}) \left[(\tilde{r}_{k-1}, A r_{k-1}) (\tilde{r}_k, A z_{k-1}) - (\tilde{r}_k, A r_{k-1}) (\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-1}) \right]$$

Si $\Delta_{k+1} \neq 0$ alors on a :

$$C_{k+1} = \frac{1}{\Delta_{k+1}} \left[\left\{ \beta_k + B'_{k+1} (A^* \tilde{r}_{k-2}, Ar_{k-1}) \right\} (\tilde{r}_{k-1}, Az_{k-1}) \lambda_{k+1} - (\tilde{r}_k, Az_{k-1}) \mu_{k+1} \right. \\ \left. - (\tilde{r}_{k-2}, A^2 z_{k-1}) \left[(\tilde{r}_{k-1}, Az_{k-1}) \left\{ (A^* \tilde{r}_k, A^2 z_{k-1}) + B'_{k+1} (A^* \tilde{r}_k, Ar_{k-1}) \right\} \right. \right. \\ \left. \left. - \left\{ \alpha_k + B'_{k+1} (A^* \tilde{r}_{k-1}, Ar_{k-1}) \right\} (\tilde{r}_k, Az_{k-1}) \right] \right]$$

$$E_{k+1} = \frac{-\beta_k - B'_{k+1} (A^* \tilde{r}_{k-2}, Ar_{k-1}) - C_{k+1} (\tilde{r}_{k-2}, Ar_{k-1})}{(\tilde{r}_{k-2}, A^2 z_{k-1})}$$

$$F_{k+1} = \frac{-\alpha_k - B'_{k+1} (A^* \tilde{r}_{k-1}, Ar_{k-1}) - E_{k+1} \mu_{k+1}}{(\tilde{r}_{k-1}, Az_{k-1})}$$

$$B_k = \frac{(\tilde{r}_{k-3}, A^2 z_{k-2}) (\tilde{r}_{k-2}, r_{k-2}) (\tilde{r}_{k-1}, Az_{k-2})}{\Delta_k}$$

$$D_k = -B_k \frac{(\tilde{r}_{k-3}, Ar_{k-2})}{\lambda_k}$$

$$E_k = \frac{-B_k (\tilde{r}_{k-2}, Ar_{k-1}) - D_k \lambda_k}{(\tilde{r}_{k-1}, Az_{k-2})}$$

Les formules précédentes, valables pour $k \geq 3$, permettent de calculer z_{k+1} et r_k . Il faut donc chercher autrement r_1, r_2 et z_1, z_2, z_3 .

On suppose que $\tilde{z}_0 = \tilde{r}_0 = y$ et $z_0 = r_0$ et on rappelle que $c_i = (y, A^i r_0)$.

D'après les formules de $P_1(\xi)$ et de $P_1^{(1)}(\xi)$, on a : $r_1 = r_0 + A_1 A r_0$ avec $A_1 = \frac{-(y, r_0)}{(y, A r_0)} = \frac{-c_0}{c_1}$ et

$$z_1 = A r_0 - \frac{c_2}{c_1} r_0 \text{ avec } c_2 = (y, A^2 r_0) = (A^* \tilde{r}_0, A r_0).$$

Exprimons r_2 .

$$P_2(\xi) = \begin{vmatrix} 1 & \xi & \xi^2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \xi^2 \begin{vmatrix} c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} - \xi \begin{vmatrix} c_0 & c_2 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + 1.$$

Comme $c_3 = (A^* y, A^2 r_0)$ et comme $A^2 r_0 = \frac{1}{A_1} (Ar_1 - Ar_0)$, on a :

$$c_3 = \frac{1}{A_1} [(y, A^2 r_1) - c_2] = \frac{-c_1}{c_0} [(A^* \tilde{r}_0, A r_1) - c_2].$$

Par suite $c_0 c_3 - c_1 c_2 = -c_1 (A^* \tilde{r}_0, A r_1)$.

Or $A^2 r_0 = A z_1 + \frac{c_2}{c_1} A r_0$. On peut donc exprimer autrement c_3 .

$$c_3 = \frac{c_2}{c_1} c_2 + (A^* \tilde{r}_0, A z_1).$$

$$\text{Par suite } c_1 c_3 - c_2^2 = (A^* \tilde{r}_0, A z_1) c_1.$$

Exprimons de la même manière c_2 .

$$\text{Comme } A^2 r_0 = \frac{1}{A_1} (A r_1 - A r_0) = \frac{-c_1}{c_0} (A r_1 - A r_0), \text{ on a : } c_2 = (v, A^2 r_0) = \frac{-c_1}{c_0} [(\tilde{r}_0, A r_1) - c_1].$$

$$\text{Par suite } c_0 c_2 - c_1^2 = -c_1 (\tilde{r}_0, A r_1).$$

$$\text{Par conséquent en notant } D_2 = \frac{-(\tilde{r}_0, A r_1)}{(\tilde{r}_0, A^2 z_1)} \text{ et } \alpha = \frac{(A^* \tilde{r}_0, A r_1)}{(\tilde{r}_0, A^2 z_1)}, \text{ on a : } r_2 = D_2 A^2 z_0 + \alpha A r_0 + r_0.$$

Exprimons z_2 .

$$P_2^{(1)}(\xi) = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ 1 & \xi & \xi^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}} = \xi^2 - \xi \frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_3 \\ c_2 & c_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}} + \frac{\begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ c_3 & c_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

$$P_2^{(1)}(\xi) = \xi^2 - \frac{c_1 c_4 - c_2 c_3}{c_1 c_3 - c_2^2} \xi + \frac{c_2 c_4 - c_3^2}{c_1 c_3 - c_2^2}.$$

$$\text{On a : } c_3 = (v, A^3 r_0) = (A^* \tilde{r}_0, A^2 r_0).$$

$$\text{Comme } r_1 = r_0 + A_1 A z_0, \text{ on a : } A^2 r_0 = \frac{1}{A_1} A (r_1 - r_0). \text{ Par suite } c_3 = \frac{1}{A_1} [(A^* \tilde{r}_0, r_1) - c_2].$$

$$\text{On a : } c_4 = (v, A^4 r_0) = (A^* \tilde{r}_0, A^3 z_0).$$

$$\text{Comme } A^2 z_0 = \frac{1}{D_2} (r_2 - \alpha A z_0 - z_0), \text{ on a : } c_4 = \frac{1}{D_2} [(A^* \tilde{r}_0, A r_2) - \alpha c_3 - c_2].$$

$$\text{On a alors : } z_2 = A^2 z_0 - \frac{c_1 c_4 - c_2 c_3}{c_1 c_3 - c_2^2} A r_0 + \frac{c_2 c_4 - c_3^2}{c_1 c_3 - c_2^2} r_0.$$

Exprimons z_3 .

$$P_3^{(1)}(\xi) = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \\ 1 & \xi & \xi^2 & \xi^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ c_3 & c_4 & c_5 \end{vmatrix}} = \xi^3 - \xi^2 \frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_4 \\ c_2 & c_4 & c_5 \\ c_3 & c_5 & c_6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ c_3 & c_4 & c_5 \end{vmatrix}} + \xi \frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_3 & c_4 \\ c_2 & c_4 & c_5 \\ c_3 & c_4 & c_6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ c_3 & c_4 & c_5 \end{vmatrix}} - \frac{\begin{vmatrix} c_2 & c_3 & c_4 \\ c_3 & c_4 & c_5 \\ c_4 & c_5 & c_6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ c_3 & c_4 & c_5 \end{vmatrix}}.$$

$$\text{On a : } c_5 = (A^{*2} \tilde{r}_0, A^3 z_0) = (A^{*2} \tilde{r}_0, A^3 r_0).$$

$$\text{Comme } A^3 z_0 = \frac{1}{D_2} (Ar_2 - \alpha A^2 z_0 - Az_0), \text{ on a : } c_5 = \frac{1}{D_2} [(A^{*2} \tilde{r}_0, Ar_2) - \alpha c_4 - c_3].$$

$$\text{On a : } c_6 = (A^{*3} \tilde{r}_0, A^3 z_0) = (A^{*2} \tilde{r}_0, A^4 z_0).$$

$$\text{Par suite, comme pour } c_5, \text{ on a : } c_6 = \frac{1}{D_2} [(A^{*2} \tilde{r}_0, A^2 r_2) - \alpha c_5 - c_4].$$

$$\text{Soit } \Delta = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ c_3 & c_4 & c_5 \end{vmatrix}.$$

$$\text{On a : } \Delta = c_3(c_2 c_4 - c_3^2) - c_4(c_1 c_4 - c_2 c_3) + c_5(c_1 c_3 - c_2^2).$$

$$\text{On a alors } z_3 = A^3 r_0 - \frac{\delta}{\Delta} A^2 r_0 + \frac{\mu}{\Delta} A r_0 - \frac{\nu}{\Delta} r_0.$$

$$\text{Par suite } z_3 = \frac{1}{A_1} A^2 r_1 - \left(\frac{\delta}{\Delta} + \frac{1}{A_1}\right) A^2 r_0 + \frac{\mu}{\Delta} A r_0 - \frac{\nu}{\Delta} r_0.$$

Par conséquent on a l'algorithme suivant :

◇ Choix de x_0 et y .

$$\text{Soit } r_0 = b - Ax_0$$

$$z_0 = r_0$$

$$\tilde{z}_0 = \tilde{r}_0 = y$$

$$c_1 = (\nu, A r_0)$$

$$A_1 = \frac{-(\nu, r_0)}{c_1}$$

$$r_1 = r_0 + A_1 A r_0$$

$$\tilde{r}_1 = \tilde{r}_0 + \bar{A}_1 A^* \tilde{r}_0$$

$$x_1 = x_0 - A_1 r_0$$

$$c_2 = (A^* \tilde{r}_0, A r_0)$$

$$z_1 = A r_0 - \frac{c_2}{c_1} r_0$$

$$\tilde{z}_1 = A^* \tilde{r}_0 - \frac{\bar{c}_2}{\bar{c}_1} \tilde{r}_0$$

$$D_2 = \frac{-(\tilde{r}_0, A r_1)}{(A^* \tilde{r}_0, A z_1)}$$

$$\alpha = \frac{(A^* \tilde{r}_0, A r_1)}{(A^* \tilde{r}_0, A z_1)}$$

$$r_2 = D_2 A^2 z_0 + \alpha A r_0 + r_0$$

$$\tilde{r}_2 = \bar{D}_2 A^{*2} \tilde{z}_0 + \bar{\alpha} A^* \tilde{r}_0 + \tilde{r}_0$$

$$x_2 = x_0 - D_2 A z_0 - \alpha r_0$$

$$c_3 = \frac{1}{A_1} [(A^* \tilde{r}_0, r_1) - c_2]$$

$$c_4 = \frac{1}{D_2} [(A^* \tilde{r}_0, A r_2) - \alpha c_3 - c_2]$$

$$z_2 = A^2 z_0 - \frac{c_1 c_4 - c_2 c_3}{c_1 c_3 - c_2^2} A r_0 + \frac{c_2 c_4 - c_3^2}{c_1 c_3 - c_2^2} r_0$$

$$\tilde{z}_2 = A^{*2} \tilde{z}_0 - \frac{c_1 c_4 - c_2 c_3}{c_1 c_3 - c_2^2} A^* \tilde{r}_0 + \frac{c_2 c_4 - c_3^2}{c_1 c_3 - c_2^2} \tilde{r}_0$$

$$c_5 = \frac{1}{D_2} [(A^{*2} \tilde{r}_0, A r_2) - \alpha c_4 - c_3]$$

$$c_6 = \frac{1}{D_2} [(A^{*2} \tilde{r}_0, A^2 r_2) - \alpha c_5 - c_4]$$

$$\Delta = c_3(c_2 c_4 - c_3^2) - c_4(c_1 c_4 - c_2 c_3) + c_5(c_1 c_3 - c_2^2)$$

$$\delta = c_4(c_1 c_4 - c_2^2) - c_5(c_1 c_3 - c_2 c_3) + c_6(c_1 c_4 - c_2^2)$$

$$\mu = c_4(c_2 c_3 - c_3 c_4) - c_5(c_1 c_4 - c_3^2) + c_6(c_1 c_4 - c_2 c_3)$$

$$v = c_4(c_3 c_3 - c_4^2) - c_5(c_2 c_3 - c_4 c_3) + c_6(c_2 c_4 - c_3^2)$$

$$z_3 = \frac{1}{A_1} A^2 r_1 - \left(\frac{\delta}{\Delta} + \frac{1}{A_1}\right) A^2 r_0 + \frac{\mu}{\Delta} A r_0 - \frac{v}{\Delta} r_0$$

$$\tilde{z}_3 = \frac{1}{A_1} A^{*2} \tilde{r}_1 - \left(\frac{\bar{\delta}}{\Delta} + \frac{1}{A_1}\right) A^{*2} \tilde{r}_0 + \frac{\bar{\mu}}{\Delta} A^* \tilde{r}_0 - \frac{\bar{v}}{\Delta} \tilde{r}_0$$

$$\lambda_3 = (\tilde{r}_2, A^2 z_1)$$

$$\mu_3 = (\tilde{r}_1, A^2 z_1)$$

$$\Delta_3 = (\tilde{r}_0, A r_1) [(\tilde{r}_2, A z_1) \mu_3 - (\tilde{r}_1, A z_1) \lambda_3] - (\tilde{r}_0, A^2 z_1) [(\tilde{r}_1, A r_1)(\tilde{r}_2, A z_1) - (\tilde{r}_2, A r_1)(\tilde{r}_1, A z_1)]$$

◇ Pour $k = 3, 4, \dots$ faire

$$B_k = \frac{(\tilde{r}_{k-3}, A^2 z_{k-2})(\tilde{r}_{k-2}, r_{k-2})(\tilde{r}_{k-1}, Az_{k-2})}{\Delta_k}$$

$$D_k = -B_k \frac{(\tilde{r}_{k-3}, Ar_{k-2})}{\lambda_k}$$

$$E_k = \frac{-B_k(\tilde{r}_{k-2}, Ar_{k-1}) - D_k \lambda_k}{(\tilde{r}_{k-1}, Az_{k-2})}$$

$$r_k = B_k A r_{k-2} + r_{k-2} + D_k A^2 z_{k-2} + E_k A z_{k-2}$$

$$\tilde{r}_k = \bar{B}_k A^* \tilde{r}_{k-2} + \tilde{r}_{k-2} + \bar{D}_k A^{*2} \tilde{z}_{k-2} + \bar{E}_k A^* \tilde{z}_{k-2}$$

$$x_k = x_{k-2} - B_k r_{k-2} - D_k A z_{k-2} - E_k z_{k-2}$$

◇ Si $r_k = 0$ alors faire

$$\lambda_{k+1} = (\tilde{r}_k, A^2 z_{k-1})$$

$$\mu_{k+1} = (\tilde{r}_{k-1}, A^2 z_{k-1})$$

$$\alpha_k = (A^* \tilde{r}_{k-1}, A^2 z_{k-2})$$

$$\beta_k = (A^* \tilde{r}_{k-2}, A^2 z_{k-1})$$

$$B'_{k+1} = \frac{-\beta_k}{(A^* \tilde{r}_{k-3}, A r_{k-1})}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{k+1} = & (\tilde{r}_{k-2}, Ar_{k-1}) [(\tilde{r}_k, Az_{k-1})\mu_{k+1} - (\tilde{r}_{k-1}, Az_{k-1})\lambda_{k+1}] \\ & - (\tilde{r}_{k-2}, A^2 z_{k-1}) [(\tilde{r}_{k-1}, Ar_{k-1})(\tilde{r}_k, Az_{k-1}) - (\tilde{r}_k, Ar_{k-1})(\tilde{r}_{k-1}, Az_{k-1})] \end{aligned}$$

Si $\Delta_{k+1} = 0$ alors faire

$$\begin{aligned} C_{k+1} = & \frac{1}{\Delta_{k+1}} \left[\left\{ \beta_k + B'_{k+1} (A^* \tilde{r}_{k-2}, Ar_{k-1}) \right\} \left\{ (\tilde{r}_{k-1}, Az_{k-1})\lambda_{k+1} - (\tilde{r}_k, Az_{k-1})\mu_{k+1} \right\} \right. \\ & - (\tilde{r}_{k-2}, A^2 z_{k-1}) \left[(\tilde{r}_{k-1}, Az_{k-1}) \left\{ A^* \tilde{r}_k, A^2 z_{k-1} \right\} + B'_{k+1} (A^* \tilde{r}_k, Ar_{k-1}) \right\} \\ & \left. - \left\{ \alpha_k + B'_{k+1} (A^* \tilde{r}_{k-1}, Ar_{k-1}) \right\} (\tilde{r}_k, Az_{k-1}) \right] \end{aligned}$$

$$E_{k+1} = \frac{-\beta_k - B'_{k+1} (A^* \tilde{r}_{k-2}, Ar_{k-1}) - C_{k+1} (\tilde{r}_{k-2}, Ar_{k-1})}{(\tilde{r}_{k-2}, A^2 z_{k-1})}$$

$$F_{k+1} = \frac{-\alpha_k - B'_{k+1} (A^* \tilde{r}_{k-1}, Ar_{k-1}) - E_{k+1} \mu_{k+1}}{(\tilde{r}_{k-1}, Az_{k-1})}$$

$$z_{k+1} = B'_{k+1} A r_{k-1} + C_{k+1} r_{k-1} + A^2 z_{k-1} + E_{k+1} A z_{k-1} + F_{k+1} z_{k-1}$$

$$\tilde{z}_{k+1} = \bar{B}'_{k+1} A^* \tilde{r}_{k-1} + \bar{C}'_{k+1} \tilde{r}_{k-1} + A^{*2} \tilde{z}_{k-1} + \bar{E}'_{k+1} A^* \tilde{z}_{k-1} + \bar{F}'_{k+1} \tilde{z}_{k-1}$$

Troisième cas : $U_i(\xi) = P_i^{(1)}(\xi)$.

On note $\tilde{r}_k = P_k(A)^* y$ et $\tilde{z}_k = P_k^{(1)}(A)^* y$.

D'après les différentes expressions, on a :

$$B'_{k+1} = \frac{-(A^* \tilde{z}_{k-1}, A^2 z_{k-3})}{(\tilde{r}_{k-1}, A^2 z_{k-3})}$$

$$\Delta_{k+1} = -(\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-2})(\tilde{z}_{k-1}, A^2 z_k)(\tilde{z}_{k-1}, A z_{k-1})$$

Si $\Delta_{k+1} \neq 0$ alors on a :

$$E_{k+1} = \frac{-(A^* \tilde{z}_k, A^2 z_{k-1}) - B'_{k+1}(\tilde{r}_{k-1}, A^2 z_k)}{(\tilde{z}_k, A^2 z_{k-1})}$$

$$C_{k+1} = \frac{-(A^* \tilde{z}_{k-1}, A^2 z_{k-2}) - B'_{k+1}(\tilde{r}_{k-1}, A^2 z_{k-2}) - E_{k+1}(\tilde{z}_{k-1}, A^2 z_{k-2})}{(\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-2})}$$

$$f_{k+1} = -(A^* \tilde{z}_{k-1}, A^2 z_{k-1}) - B'_{k+1}(\tilde{r}_{k-1}, A^2 z_{k-1})$$

$$F_{k+1} = \frac{f_{k+1} - C_{k+1}(\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-1}) - E_{k+1}(\tilde{z}_{k-1}, A^2 z_{k-1})}{(\tilde{z}_{k-1}, A z_{k-1})}$$

$$B_k = \frac{(\tilde{r}_{k-2}, z_{k-1})(\tilde{z}_{k-3}, A^2 z_{k-2})}{(\tilde{r}_{k-2}, A z_{k-3})(\tilde{z}_{k-2}, A^2 z_{k-1})}$$

$$D_k = \frac{-(\tilde{r}_{k-2}, z_{k-1})}{(\tilde{z}_{k-2}, A^2 z_{k-1})}$$

$$E_k = \frac{-(\tilde{r}_{k-2}, z_{k-2}) - B_k(\tilde{r}_{k-2}, A z_{k-2}) - D_k(\tilde{z}_{k-2}, A^2 z_{k-2})}{(\tilde{z}_{k-2}, A z_{k-2})}$$

Les formules précédentes, valables pour $k \geq 3$, permettent de calculer z_{k+1} et r_k . Il faut donc reprendre les formules de r_1, r_2 et z_1, z_2, z_3 trouvées précédemment.

Par conséquent on a l'algorithme suivant :

◇ Choix de x_0 et y .

Soit $r_0 = b - A x_0$

$$z_0 = r_0$$

$$\tilde{z}_0 = \tilde{r}_0 = y$$

$$c_1 = (y, A r_0)$$

$$A_1 = \frac{-(y, r_0)}{c_1}$$

$$r_1 = r_0 + A_1 A r_0$$

$$\tilde{r}_1 = \tilde{r}_0 + \bar{A}_1 A^* \tilde{r}_0$$

$$x_1 = x_0 - A_1 r_0$$

$$c_2 = (A^* \tilde{r}_0, A r_0)$$

$$z_1 = A r_0 - \frac{c_2}{c_1} r_0$$

$$\tilde{z}_1 = A^* \tilde{r}_0 - \frac{\bar{c}_2}{\bar{c}_1} \tilde{r}_0$$

$$D_2 = \frac{-(\tilde{r}_0, A r_1)}{(A^* \tilde{r}_0, A z_1)}$$

$$\alpha = \frac{(A^* \tilde{r}_0, A r_1)}{(A^* \tilde{r}_0, A z_1)}$$

$$r_2 = D_2 A^2 z_0 + \alpha A r_0 + r_0$$

$$\tilde{r}_2 = \bar{D}_2 A^{*2} \tilde{z}_0 + \bar{\alpha} A^* \tilde{r}_0 + \tilde{r}_0$$

$$x_2 = x_0 - D_2 A z_0 - \alpha r_0$$

$$c_3 = \frac{1}{A_1} [(A^* \tilde{r}_0, r_1) - c_2]$$

$$c_4 = \frac{1}{D_2} [(A^* \tilde{r}_0, A r_2) - \alpha c_3 - c_2]$$

$$z_2 = A^2 z_0 - \frac{c_1 c_4 - c_2 c_3}{c_1 c_3 - c_2^2} A r_0 + \frac{c_2 c_4 - c_3^2}{c_1 c_3 - c_2^2} r_0$$

$$\tilde{z}_2 = A^{*2} \tilde{z}_0 - \frac{c_1 c_4 - c_2 c_3}{c_1 c_3 - c_2^2} A^* \tilde{r}_0 + \frac{c_2 c_4 - c_3^2}{c_1 c_3 - c_2^2} \tilde{r}_0$$

$$c_5 = \frac{1}{D_2} [(A^{*2} \tilde{r}_0, A r_2) - \alpha c_4 - c_3]$$

$$c_6 = \frac{1}{D_2} [(A^{*2} \tilde{r}_0, A^2 r_2) - \alpha c_5 - c_4]$$

$$\Delta = c_3(c_2 c_4 - c_3^2) - c_4(c_1 c_4 - c_2 c_3) + c_5(c_1 c_3 - c_2^2)$$

$$\delta = c_4(c_1 c_4 - c_2^2) - c_5(c_1 c_3 - c_2 c_3) + c_6(c_1 c_4 - c_2^2)$$

$$\mu = c_4(c_2 c_3 - c_3 c_4) - c_5(c_1 c_4 - c_3^2) + c_6(c_1 c_4 - c_2 c_3)$$

$$\nu = c_4(c_3 c_3 - c_4^2) - c_5(c_2 c_3 - c_4 c_3) + c_6(c_2 c_4 - c_3^2)$$

$$z_3 = \frac{1}{A_1} A^2 r_1 - \left(\frac{\delta}{\Delta} + \frac{1}{A_1}\right) A^2 r_0 + \frac{\mu}{\Delta} A r_0 - \frac{\nu}{\Delta} r_0$$

$$\tilde{z}_3 = \frac{1}{A_1} A^{*2} \tilde{r}_1 - \left(\frac{\delta}{\Delta} + \frac{1}{A_1}\right) A^{*2} \tilde{r}_0 + \frac{\bar{\mu}}{\Delta} A^* \tilde{r}_0 - \frac{\bar{\nu}}{\Delta} \tilde{r}_0$$

$$\Delta_3 = -(\tilde{r}_1, A z_0)(\tilde{z}_1, A^2 z_2)(\tilde{z}_1, A z_1)$$

◇ Pour $k = 3, 4, \dots$ faire

$$B_k = \frac{(\tilde{r}_{k-2}, z_{k-1})(\tilde{z}_{k-3}, A^2 z_{k-2})}{(\tilde{r}_{k-2}, A z_{k-3})(\tilde{z}_{k-2}, A^2 z_{k-1})}$$

$$D_k = \frac{-(\tilde{r}_{k-2}, z_{k-1})}{(\tilde{z}_{k-2}, A^2 z_{k-1})}$$

$$E_k = \frac{-(\tilde{r}_{k-2}, z_{k-2}) - B_k(\tilde{r}_{k-2}, A z_{k-2}) - D_k(\tilde{z}_{k-2}, A^2 z_{k-2})}{(\tilde{z}_{k-2}, A z_{k-2})}$$

$$r_k = B_k A r_{k-2} + r_{k-2} + D_k A^2 z_{k-2} + E_k A z_{k-2}$$

$$\tilde{r}_k = \bar{B}_k A^* \tilde{r}_{k-2} + \tilde{r}_{k-2} + \bar{D}_k A^{*2} \tilde{z}_{k-2} + \bar{E}_k A^* \tilde{z}_{k-2}$$

$$x_k = x_{k-2} - B_k r_{k-2} - D_k A z_{k-2} - E_k z_{k-2}$$

◇ Si $r_k = 0$ alors faire

$$B'_{k+1} = \frac{-(A^* \tilde{z}_{k-1}, A^2 z_{k-3})}{(\tilde{r}_{k-1}, A^2 z_{k-3})}$$

$$\Delta_{k+1} = -(\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-2})(\tilde{z}_{k-1}, A^2 z_k)(\tilde{z}_{k-1}, A z_{k-1})$$

Si $\Delta_{k+1} = 0$ alors faire

$$E_{k+1} = \frac{-(A^* \tilde{z}_k, A^2 z_{k-1}) - B'_{k+1}(\tilde{r}_{k-1}, A^2 z_k)}{(\tilde{z}_k, A^2 z_{k-1})}$$

$$C_{k+1} = \frac{-(A^* \tilde{z}_{k-1}, A^2 z_{k-2}) - B'_{k+1}(\tilde{r}_{k-1}, A^2 z_{k-2}) - E_{k+1}(\tilde{z}_{k-1}, A^2 z_{k-2})}{(\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-2})}$$

$$f_{k+1} = -(A^* \tilde{z}_{k-1}, A^2 z_{k-1}) - B'_{k+1}(\tilde{r}_{k-1}, A^2 z_{k-1})$$

$$F_{k+1} = \frac{f_{k+1} - C_{k+1}(\tilde{r}_{k-1}, A z_{k-1}) - E_{k+1}(\tilde{z}_{k-1}, A^2 z_{k-1})}{(\tilde{z}_{k-1}, A z_{k-1})}$$

$$z_{k+1} = B'_{k+1} A r_{k-1} + C_{k+1} r_{k-1} + A^2 z_{k-1} + E_{k+1} A z_{k-1} + F_{k+1} z_{k-1}$$

$$\tilde{z}_{k+1} = \bar{B}'_{k+1} A^* \tilde{r}_{k-1} + \bar{C}'_{k+1} \tilde{r}_{k-1} + A^{*2} \tilde{z}_{k-1} + \bar{E}'_{k+1} A^* \tilde{z}_{k-1} + \bar{F}'_{k+1} \tilde{z}_{k-1}$$

3.13. Méthode A_1 / B_5

De la relation A_1 , nous obtenons immédiatement :

$$r_k = B_k A r_{k-2} + r_{k-2} + D_k A^2 z_{k-2} + E_k A z_{k-2} \quad (1)$$

en notant $z_k = P_k^{(1)}(A) r_0$.

$$\text{Comme } r_k = b - A x_k, \text{ on a : } x_k = x_{k-2} - B_k r_{k-2} - D_k A z_{k-2} - E_k z_{k-2}. \quad (2)$$

De la relation B_5 , nous obtenons :

$$z_k = A'_k [A r_{k-1} + B'_k r_{k-1} + D'_k A z_{k-2} + E'_k z_{k-2}]. \quad (3)$$

La méthode A_1 / B_5 est définie par les formules (1), (2), (3).

Il nous faut maintenant étudier comment programmer les coefficients apparaissant dans ces formules.

Comme $A'_k = \frac{1}{a_{k-1}}$ où a_{k-1} est définie par $P_{k-1}(\xi) = a_{k-1} \xi^{k-1} + \dots + 1$, on a : $a_{k-1} = D_{k-1}$.

$$\text{Donc } A'_k = \frac{1}{D_{k-1}}.$$

Premier cas : $U_i(\xi) = \xi^i$.

Posons $\lambda_{k+1} = (A^{*k+1} y, z_{k-1})$ et $\mu_{k+1} = (A^{*k} y, z_{k-1})$.

$$\text{Comme } D'_{k+1} = \frac{-c(\xi^k P_k(\xi))}{c(\xi^k P_{k-1}^{(1)}(\xi))}, \text{ on a : } D'_{k+1} = \frac{-(A^{*k} y, r_k)}{(A^{*k} y, z_{k-1})} = \frac{-(A^{*k} y, r_k)}{\mu_{k+1}}.$$

D'après les expressions de B'_{k+1} et E'_{k+1} , on a :

$$\alpha_{k+1} = (A^{*k+2} y, r_k) + D'_{k+1} (A^{*k+2} y, z_{k-1})$$

$$B'_{k+1} = \frac{\mu_{k+1} \alpha_{k+1} - \lambda_{k+1} [(A^{*k+1} y, r_k) + D'_{k+1} \lambda_{k+1}]}{(A^{*k} y, r_k) \lambda_{k+1} - (A^{*k+1} y, r_k) \mu_{k+1}}$$

$$E'_{k+1} = \frac{-(A^{*k+1} y, r_k) - D'_{k+1} \lambda_{k+1} - B'_{k+1} (A^{*k} y, r_k)}{\mu_{k+1}}.$$

De plus

$$\Delta_k = (A^{*k-2} y, r_{k-2}) [\lambda_k^2 - (A^{*k+1} y, z_{k-2}) \mu_k] - \mu_k [(A^{*k-1} y, r_{k-2}) \lambda_k - (A^{*k} y, r_{k-2}) \mu_k]$$

On suppose $\Delta_k \neq 0$. On a alors :

$$B_k = \frac{\mu_k [(A^{*k-2} y, r_{k-2}) \lambda_k - (A^{*k-1} y, r_{k-2}) \mu_k]}{\Delta_k}$$

$$D_k = -B_k \frac{(A^{*k-2} y, r_{k-2})}{\mu_k}$$

$$E_k = \frac{-(A^{*k-2} y, r_{k-2}) - B_k (A^{*k-1} y, r_{k-2}) - D_k \lambda_k}{\mu_k}$$

Il faut chercher d'autres expressions pour z_1, z_2 et r_1 .

On suppose que $z_0 = r_0$ et on rappelle que $c_i = (y, A^i r_0)$.

D'après les formules de $P_1(\xi)$ et de $P_1^{(1)}(\xi)$, on a : $r_1 = r_0 + A_1 A r_0$ avec $A_1 = \frac{-(y, r_0)}{(y, A r_0)} = \frac{-c_0}{c_1}$ et

$$z_1 = A r_0 - \frac{c_2}{c_1} r_0 \text{ avec } c_2 = (y, A^2 r_0) = (A^* y, A r_0).$$

Exprimons z_2 .

$$P_2^{(1)}(\xi) = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ 1 & \xi & \xi^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}} = \xi^2 - \xi \frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_3 \\ c_2 & c_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}} + \frac{\begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ c_3 & c_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

$$P_2^{(1)}(\xi) = \xi^2 - \frac{c_1 c_4 - c_2 c_3}{c_1 c_3 - c_2^2} \xi + \frac{c_2 c_4 - c_3^2}{c_1 c_3 - c_2^2}.$$

On a : $c_3 = (y, A^3 r_0) = (A^* y, A^2 r_0)$.

Comme $A^2 r_0 = A z_1 + \frac{c_2}{c_1} A r_0$, on a : $c_3 = (A^* y, A z_1) + \frac{c_2^2}{c_1}$.

Par suite $c_1 c_3 - c_2^2 = c_1 (A^* y, A z_1)$.

On a : $c_4 = (y, A^4 r_0) = (A^{*2} y, A^2 r_0)$.

Par suite, comme $A^2 r_0 = A z_1 + \frac{c_2}{c_1} A r_0$, on a : $c_4 = (A^{*2} y, A^2 z_1) + \frac{c_2 c_3}{c_1}$.

D'où $c_1 c_4 - c_2 c_3 = c_1 (A^{*2} y, A z_1)$.

Par suite : $z_2 = A^2 r_0 - \frac{(A^{*2} y, A z_1)}{(A^{*2} y, A^2 z_1)} A r_0 + \frac{c_2 c_4 - c_3^2}{c_1 (A^{*2} y, A^2 z_1)} r_0$.

Par conséquent, on a l'algorithme suivant :

◇ Choix de x_0 et y .

Soit $r_0 = b - A x_0$

$$z_0 = r_0$$

$$y_0 = y$$

$$y_1 = A^* y_0$$

$$c_1 = (y, A r_0)$$

$$A_1 = \frac{-(y, r_0)}{c_1}$$

$$r_1 = r_0 + A_1 A r_0$$

$$x_1 = x_0 - A_1 r_0$$

$$c_2 = (y_1, A r_0)$$

$$z_1 = A r_0 - \frac{c_2}{c_1} r_0$$

$$c_3 = (y_1, A z_1) + \frac{c_2^2}{c_1}$$

$$c_4 = (y_1, A^2 z_1) + \frac{c_2 c_3}{c_1}$$

$$z_2 = A^2 r_0 - \frac{(y_1, A z_1)}{(y_1, A^2 z_1)} A r_0 + \frac{c_2 c_4 - c_3^2}{c_1 (y_1, A^2 z_1)} r_0$$

$$y_2 = A^* y_1$$

$$\lambda_2 = (y_2, z_0)$$

$$\mu_2 = (y_1, z_0)$$

◇ Pour $k = 2, 3, 4, \dots$ faire

$$\Delta_k = (y_{k-2}, r_{k-2}) \left[\lambda_k^2 - (y_k, A z_{k-2}) \mu_k \right] - \mu_k \left[(y_{k-1}, r_{k-2}) \lambda_k - (y_k, r_{k-2}) \mu_k \right]$$

Si $\Delta_k \neq 0$ alors faire

$$B_k = \frac{\mu_k \left[(y_{k-2}, r_{k-2}) \lambda_k - (y_{k-1}, r_{k-2}) \mu_k \right]}{\Delta_k}$$

$$D_k = -B_k \frac{(y_{k-2}, r_{k-2})}{\mu_k}$$

$$E_k = \frac{-(y_{k-2}, r_{k-2}) - B_k (y_{k-1}, r_{k-2}) - D_k \lambda_k}{\mu_k}$$

$$r_k = B_k A r_{k-2} + r_{k-2} + D_k A^2 z_{k-2} + E_k A z_{k-2}$$

$$x_k = x_{k-2} - B_k r_{k-2} - D_k A z_{k-2} - E_k z_{k-2}$$

◇ Si $r_k \neq 0$ alors faire

$$y_{k+1} = A^* y_k$$

$$\lambda_{k+1} = (y_{k+1}, z_{k-1})$$

$$\mu_{k+1} = (y_k, z_{k-1})$$

$$A'_{k+1} = \frac{1}{D_k}$$

$$D'_{k+1} = \frac{-(y_k, r_k)}{\mu_{k+1}}$$

$$\alpha_{k+1} = (y_{k+1}, A r_k) + D'_{k+1} (y_{k+1}, A z_{k-1})$$

$$B'_{k+1} = \frac{\mu_{k+1} \alpha_{k+1} - \lambda_{k+1} [(y_{k+1}, r_k) + D'_{k+1} \lambda_{k+1}]}{(y_k, r_k) \lambda_{k+1} - (y_{k+1}, r_k) \mu_{k+1}}$$

$$E_{k+1} = \frac{-(y_{k+1}, r_k) - D'_{k+1} \lambda_{k+1} - B'_{k+1} (y_k, r_k)}{\mu_{k+1}}$$

$$z_{k+1} = A'_{k+1} [A r_k + B'_{k+1} r_k + D'_{k+1} A z_{k-1} + E_{k+1} z_{k-1}].$$

Deuxième cas : $U_i(\xi) = P_i(\xi)$.

On note $\tilde{r}_k = P_k(A)^* y$ et $\tilde{z}_k = P_k^{(1)}(A)^* y$.

Posons $\lambda_{k+1} = (\tilde{r}_k, A r_{k-1})$, $\mu_{k+1} = (\tilde{r}_k, A r_k)$ et $v_k = (\tilde{r}_{k-1}, r_{k-1})$.

D'après les expressions des différents coefficients, on a :

$$D'_{k+1} = \frac{-(A^* \tilde{r}_k, A r_{k-2})}{(A^* \tilde{z}_{k-1}, A r_{k-2})}$$

$$b_{k+1} = (A^* \tilde{z}_{k-1}, r_{k-1}) [\mu_{k+1} + D'_{k+1} (A^* \tilde{z}_{k-1}, A r_k)]$$

$$B'_{k+1} = \frac{b_{k+1} - (A^* \tilde{z}_{k-1}, r_k) [(A^* \tilde{r}_k, A r_{k-1}) + D'_{k+1} (A^* \tilde{z}_{k-1}, r_{k-2})]}{(A^* \tilde{z}_{k-1}, r_k) \lambda_{k+1} - (A^* \tilde{z}_{k-1}, r_{k-1}) \mu_{k+1}}$$

$$E_{k+1} = \frac{-(A^* \tilde{r}_{k-1}, A r_{k-2}) - D'_{k+1} (A^* \tilde{z}_{k-1}, A r_{k-1}) - B'_{k+1} \lambda_{k+1}}{(A^* \tilde{z}_{k-1}, r_{k-1})}$$

$$\Delta_{k+1} = \lambda_k \left[(A^* \tilde{z}_{k-1}, A r_{k-1}) (A^* \tilde{z}_{k-1}, r_k) - (A^* \tilde{z}_{k-1}, A r_k) (A^* \tilde{z}_{k-1}, r_{k-1}) \right] \\ - (A^* \tilde{z}_{k-1}, A r_{k-2}) \left[\mu_k (A^* \tilde{z}_{k-1}, r_k) - \lambda_{k+1} (A^* \tilde{z}_{k-1}, r_{k-1}) \right]$$

Si $\Delta_{k+1} = 0$, on a :

$$B_{k+1} = \frac{(A^* \tilde{z}_{k-1}, A r_{k-2}) (A^* \tilde{z}_{k-1}, r_k) v_k}{\Delta_{k+1}}$$

$$D_{k+1} = -B_{k+1} \frac{\lambda_k}{(A^* \tilde{z}_{k-1}, A r_{k-2})}$$

$$E_{k+1} = \frac{-B_{k+1} \lambda_k - D_{k+1} (A^* \tilde{z}_{k-1}, A r_k)}{(A^* \tilde{z}_{k-1}, r_k)}.$$

Les formules précédentes, valables pour $k \geq 2$, permettent de calculer z_{k+1} et r_{k+1} . Par suite, il faut calculer z_1, z_2 et r_1, r_2 .

Pour r_1, z_1, z_2 , on reprend les expressions trouvées dans le premier cas.

On suppose que $\tilde{z}_0 = \tilde{r}_0 = y$ et $z_0 = r_0$ et on rappelle que $c_i = (y, A^i r_0)$.

Exprimons r_2 .

$$P_2(\xi) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \xi & \xi^2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}} = \xi^2 \frac{\begin{vmatrix} c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}} - \xi \frac{\begin{vmatrix} c_0 & c_2 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}} + 1.$$

Comme $c_3 = (A^* y, A^2 r_0)$ et comme $A^2 r_0 = \frac{1}{A_1} (Ar_1 - Ar_0)$, on a :

$$c_3 = \frac{1}{A_1} [(y, A^2 r_1) - c_2] = \frac{-c_1}{c_0} [(A^* \tilde{r}_0, A r_1) - c_2].$$

Par suite $c_0 c_3 - c_1 c_2 = -c_1 (A^* \tilde{r}_0, A r_1)$.

Or $A^2 r_0 = A z_1 + \frac{c_2}{c_1} A r_0$. On peut donc exprimer autrement c_3 .

$$c_3 = \frac{c_2}{c_1} c_2 + (A^* \tilde{r}_0, A z_1).$$

Par suite $c_1 c_3 - c_2^2 = (A^* \tilde{r}_0, A z_1) c_1$.

Exprimons de la même manière c_2 .

Comme $A^2 r_0 = \frac{1}{A_1} (Ar_1 - Ar_0) = \frac{-c_1}{c_0} (Ar_1 - Ar_0)$, on a : $c_2 = (y, A^2 r_0) = \frac{-c_1}{c_0} [(r_0, A r_1) - c_1]$.

Par suite $c_0 c_2 - c_1^2 = -c_1 (r_0, A r_1)$.

Par conséquent $r_2 = \frac{-(r_0, A r_1)}{(A^* \tilde{r}_0, A z_1)} A^2 r_0 + \frac{(A^* \tilde{r}_0, A r_1)}{(A^* \tilde{r}_0, A z_1)} A r_0 + r_0$.

Comme $A^2 r_0 = \frac{1}{A_1} (A r_1 - A r_0)$, on a :

$$r_2 = \frac{-(\tilde{r}_0, A r_1)}{A_1 (A^* \tilde{r}_0, A z_1)} A r_1 + \frac{1}{A_1} \left[\frac{(A^* \tilde{r}_0, A r_1)}{(A^* \tilde{r}_0, A z_1)} - 1 \right] A r_0 + r_0.$$

Par conséquent on a l'algorithme suivant :

◇ Choix de x_0 et y .

Soit $r_0 = b - A x_0$

$$z_0 = r_0$$

$$\tilde{z}_0 = \tilde{r}_0 = y$$

$$c_1 = (y, A r_0)$$

$$A_1 = \frac{-(y, r_0)}{c_1}$$

$$r_1 = r_0 + A_1 A r_0$$

$$\tilde{r}_1 = \tilde{r}_0 + \bar{A}_1 A^* \tilde{r}_0$$

$$x_1 = x_0 - A_1 r_0$$

$$c_2 = \frac{-c_1}{c_0} [(\tilde{r}_0, A r_1) - c_1]$$

$$z_1 = A r_0 - \frac{c_2}{c_1} r_0$$

$$\tilde{z}_1 = A^* \tilde{r}_0 - \frac{\bar{c}_2}{\bar{c}_1} \tilde{r}_0$$

$$r_2 = \frac{-(\tilde{r}_0, A r_1)}{A_1 (A^* \tilde{r}_0, A z_1)} A r_1 + \frac{1}{A_1} \left[\frac{(A^* \tilde{r}_0, A r_1)}{(A^* \tilde{r}_0, A z_1)} - 1 \right] A r_0 + r_0$$

$$\tilde{r}_2 = \frac{-(\tilde{r}_0, A r_1)}{A_1 (A^* \tilde{r}_0, A z_1)} A^* \tilde{r}_1 + \frac{1}{A_1} \left[\frac{(A^* \tilde{r}_0, A r_1)}{(A^* \tilde{r}_0, A z_1)} - 1 \right] A^* \tilde{r}_0 + \tilde{r}_0$$

$$x_2 = \frac{(\tilde{r}_0, A r_1)}{A_1 (A^* \tilde{r}_0, A z_1)} r_1 - \frac{1}{A_1} \left[\frac{(A^* \tilde{r}_0, A r_1)}{(A^* \tilde{r}_0, A z_1)} - 1 \right] r_0 + x_0$$

$$c_3 = (A^* \tilde{r}_0, A z_1) + \frac{c_2^2}{c_1}$$

$$c_4 = (A \tilde{r}_0, A^2 z_1) + \frac{c_2 c_3}{c_1}$$

$$z_2 = A^2 r_0 - \frac{(A \tilde{r}_0, A z_1)}{(A \tilde{r}_0, A^2 z_1)} A r_0 + \frac{c_2 c_4 - c_3^2}{(A \tilde{r}_0, A^2 z_1)} r_0$$

$$D_2 = \frac{-(\tilde{r}_0, A r_1)}{(A^* \tilde{r}_0, A z_1)}$$

$$\lambda_2 = (\tilde{r}_1, A r_0)$$

$$\mu_2 = (\tilde{r}_1, A r_1)$$

◇ Pour $k = 2, 3, 4, \dots$ faire

$$\lambda_{k+1} = (\tilde{r}_k, A r_{k-1})$$

$$v_k = (\tilde{r}_{k-1}, r_{k-1})$$

$$\Delta_{k+1} = \lambda_k \left[(A^* \tilde{z}_{k-1}, A r_{k-1})(A^* \tilde{z}_{k-1}, r_k) - (A^* \tilde{z}_{k-1}, A r_k)(A^* \tilde{z}_{k-1}, r_{k-1}) \right] \\ - (A^* \tilde{z}_{k-1}, A r_{k-2}) \left[\mu_k (A^* \tilde{z}_{k-1}, r_k) - \lambda_{k+1} (A^* \tilde{z}_{k-1}, r_{k-1}) \right]$$

Si $\Delta_{k+1} \neq 0$, alors faire

$$B_{k+1} = \frac{(A^* \tilde{z}_{k-1}, A r_{k-2})(A^* \tilde{z}_{k-1}, r_k) v_k}{\Delta_{k+1}}$$

$$D_{k+1} = -B_{k+1} \frac{\lambda_k}{(A^* \tilde{z}_{k-1}, A r_{k-2})}$$

$$E_{k+1} = \frac{-B_{k+1} \lambda_k - D_{k+1} (A^* \tilde{z}_{k-1}, A r_k)}{(A^* \tilde{z}_{k-1}, r_k)}$$

$$r_{k+1} = B_{k+1} A r_{k-1} + r_{k-1} + D_{k+1} A^2 z_{k-1} + E_{k+1} A z_{k-1}$$

$$\tilde{r}_{k+1} = \bar{B}_{k+1} A^* \tilde{r}_{k-1} + \tilde{r}_{k-1} + \bar{D}_{k+1} A^{*2} \tilde{z}_{k-1} + \bar{E}_{k+1} A^* \tilde{z}_{k-1}$$

$$x_{k+1} = x_{k-1} - B_{k+1} r_{k-1} - D_{k+1} A z_{k-1} - E_{k+1} z_{k-1}$$

◇ Si $r_{k+1} = 0$ alors faire

$$\mu_{k+1} = (\tilde{r}_k, A r_k)$$

$$A'_{k+1} = \frac{1}{D_k}$$

$$D'_{k+1} = \frac{-(A^* \tilde{r}_k, A r_{k-2})}{(A^* \tilde{z}_{k-1}, A r_{k-2})}$$

$$b_{k+1} = (A^* \tilde{z}_{k-1}, r_{k-1}) \left[\mu_{k+1} + D'_{k+1} (A^{*k} \tilde{z}_{k-1}, A r_k) \right]$$

$$B'_{k+1} = \frac{b_{k+1} - (A^* \tilde{z}_{k-1}, r_k) \left[(A^* \tilde{r}_k, A r_{k-1}) + D'_{k+1} (A^* \tilde{z}_{k-1}, r_{k-1}) \right]}{(A^* \tilde{z}_{k-1}, r_k) \lambda_{k+1} - (A^* \tilde{z}_{k-1}, r_{k-1}) \mu_{k+1}}$$

$$E_{k+1} = \frac{-(A^* \tilde{r}_{k-1}, Ar_{k-2}) - D'_{k+1} (A^* \tilde{z}_{k-1}, Ar_{k-1}) - B'_{k+1} \lambda_{k+1}}{(A^* \tilde{z}_{k-1}, r_{k-1})}$$

$$z_{k+1} = A'_{k+1} [A r_k + B'_{k+1} r_k + D'_{k+1} A z_{k-1} + E_{k+1} z_{k-1}]$$

$$\tilde{z}_{k+1} = \bar{A}'_{k+1} [A^* \tilde{r}_k + \bar{B}'_{k+1} \tilde{r}_k + \bar{D}'_{k+1} A^* \tilde{z}_{k-1} + \bar{E}_{k+1} \tilde{z}_{k-1}].$$

Troisième cas : $U_i(\xi) = P_i^{(1)}(\xi)$.

On note $\tilde{r}_k = P_k(A)^* y$ et $\tilde{z}_k = P_k^{(1)}(A)^* y$.

D'après les expressions des différents coefficients, on a :

$$D'_{k+1} = \frac{-(A^* \tilde{z}_{k-2}, A r_k)}{(A^* \tilde{z}_{k-2}, A z_{k-1})}$$

$$B'_{k+1} = \frac{-(A^* \tilde{z}_k, r_k) - D'_{k+1} (A^* \tilde{z}_k, A z_{k-1})}{(\tilde{z}_k, A r_k)}$$

$$E_{k+1} = \frac{-(A^* \tilde{z}_{k-1}, A r_k) - D'_{k+1} (A^* \tilde{z}_{k-1}, A z_{k-1}) - B'_{k+1} (A^* \tilde{z}_{k-1}, r_k)}{(A^* \tilde{z}_{k-1}, z_{k-1})}$$

$$\Delta_{k+1} = -(A^* \tilde{z}_{k-2}, r_{k-1}) (A^* \tilde{z}_k, A z_{k-1}) (\tilde{z}_{k-1}, A z_{k-1}).$$

On suppose $\Delta_{k+1} \neq 0$. On a alors :

$$B_{k+1} = \frac{(A^* \tilde{z}_{k-1}, A z_{k-2}) (\tilde{z}_k, r_{k-1})}{(A^* \tilde{z}_{k-1}, A z_{k-2}) (\tilde{z}_{k-2}, A r_{k-1})}$$

$$D_{k+1} = \frac{-(\tilde{z}_k, r_{k-1})}{(A^* \tilde{z}_k, A z_{k-1})}$$

$$E_{k+1} = \frac{-(\tilde{z}_{k-1}, r_{k-1}) - B_{k+1} (\tilde{z}_{k-1}, A r_{k-1}) - D_{k+1} (A^* \tilde{z}_{k-1}, A z_{k-1})}{(\tilde{z}_{k-1}, A z_{k-1})}.$$

Les formules précédentes, valables pour $k \geq 1$, permettent de calculer z_{k+1} et r_{k+1} . Il faut reprendre les expressions du deuxième cas pour z_1, z_2 et r_1, r_2 .

Par conséquent on a l'algorithme suivant :

◇ Choix de x_0 et y .

Soit $r_0 = b - A x_0$

$$z_0 = r_0$$

$$\tilde{z}_0 = \tilde{r}_0 = y$$

$$c_1 = (\nu, A r_0)$$

$$A_1 = \frac{-(\nu, r_0)}{c_1}$$

$$r_1 = r_0 + A_1 A r_0$$

$$\tilde{r}_1 = \tilde{r}_0 + \bar{A}_1 A^* \tilde{r}_0$$

$$x_1 = x_0 - A_1 r_0$$

$$c_2 = \frac{-c_1}{c_0} [(\tilde{r}_0, A r_1) - c_1]$$

$$z_1 = A r_0 - \frac{c_2}{c_1} r_0$$

$$\tilde{z}_1 = A^* \tilde{r}_0 - \frac{\bar{c}_2}{\bar{c}_1} \tilde{r}_0$$

$$r_2 = \frac{-(\tilde{r}_0, A r_1)}{A_1 (A^* \tilde{r}_0, A z_1)} A r_1 + \frac{1}{A_1} \left[\frac{(A^* \tilde{r}_0, A r_1)}{(A^* \tilde{r}_0, A z_1)} - 1 \right] A r_0 + r_0$$

$$\tilde{r}_2 = \frac{-(\tilde{r}_0, A r_1)}{A_1 (A^* \tilde{r}_0, A z_1)} A^* \tilde{r}_1 + \frac{1}{A_1} \left[\frac{(A^* \tilde{r}_0, A r_1)}{(A^* \tilde{r}_0, A z_1)} - 1 \right] A^* \tilde{r}_0 + \tilde{r}_0$$

$$x_2 = \frac{(\tilde{r}_0, A r_1)}{A_1 (A^* \tilde{r}_0, A z_1)} r_1 - \frac{1}{A_1} \left[\frac{(A^* \tilde{r}_0, A r_1)}{(A^* \tilde{r}_0, A z_1)} - 1 \right] r_0 + x_0$$

$$c_3 = (A^* \tilde{r}_0, A z_1) + \frac{c_2^2}{c_1}$$

$$c_4 = (A \tilde{r}_0, A^2 z_1) + \frac{c_2 c_3}{c_1}$$

$$z_2 = A^2 r_0 - \frac{(A \tilde{r}_0, A z_1)}{(A \tilde{r}_0, A^2 z_1)} A r_0 + \frac{c_2 c_4 - c_3^2}{(A \tilde{r}_0, A^2 z_1)} r_0$$

$$D_2 = \frac{-(\tilde{r}_0, A r_1)}{(A^* \tilde{r}_0, A z_1)}$$

◇ Pour $k = 2, 3, 4, \dots$ faire

$$\Delta_{k+1} = -(A^* \tilde{z}_{k-2}, r_{k-1}) (A^* \tilde{z}_k, A z_{k-1}) (\tilde{z}_{k-1}, A z_{k-1})$$

Si $\Delta_{k+1} = 0$, alors faire

$$B_{k+1} = \frac{(A^* \tilde{z}_{k-1}, A z_{k-2}) (\tilde{z}_k, r_{k-1})}{(A^* \tilde{z}_{k-1}, A z_{k-2}) (\tilde{z}_{k-2}, A r_{k-1})}$$

$$D_{k+1} = \frac{-(\tilde{z}_k, r_{k-1})}{(A^* \tilde{z}_k, A z_{k-1})}$$

$$E_{k+1} = \frac{-(\tilde{z}_{k-1}, r_{k-1}) - B_{k+1}(\tilde{z}_{k-1}, Ar_{k-1}) - D_{k+1}(A^* \tilde{z}_{k-1}, Az_{k-1})}{(\tilde{z}_{k-1}, Az_{k-1})}$$

$$r_{k+1} = B_{k+1} A r_{k-1} + r_{k-1} + D_{k+1} A^2 z_{k-1} + E_{k+1} A z_{k-1}$$

$$\tilde{r}_{k+1} = \bar{B}_{k+1} A^* \tilde{r}_{k-1} + \tilde{r}_{k-1} + \bar{D}_{k+1} A^{*2} \tilde{z}_{k-1} + \bar{E}_{k+1} A^* \tilde{z}_{k-1}$$

$$x_{k+1} = x_{k-1} - B_{k+1} r_{k-1} - D_{k+1} A z_{k-1} - E_{k+1} z_{k-1}$$

◇ Si $r_{k+1} = 0$ alors faire

$$D'_{k+1} = \frac{-(A^* \tilde{z}_{k-2}, A r_k)}{(A^* \tilde{z}_{k-2}, A z_{k-1})}$$

$$B'_{k+1} = \frac{-(A^* \tilde{z}_k, r_k) - D'_{k+1} (A^* \tilde{z}_k, A z_{k-1})}{(\tilde{z}_k, A r_k)}$$

$$E_{k+1} = \frac{-(A^* \tilde{z}_{k-1}, A r_k) - D'_{k+1} (A^* \tilde{z}_{k-1}, A z_{k-1}) - B'_{k+1} (A^* \tilde{z}_{k-1}, r_k)}{(A^* \tilde{z}_{k-1}, z_{k-1})}$$

$$z_{k+1} = A'_{k+1} [A r_k + B'_{k+1} r_k + D'_{k+1} A z_{k-1} + E_{k+1} z_{k-1}]$$

$$\tilde{z}_{k+1} = \bar{A}'_{k+1} [A^* \tilde{r}_k + \bar{B}'_{k+1} \tilde{r}_k + \bar{D}'_{k+1} A^* \tilde{z}_{k-1} + \bar{E}_{k+1} \tilde{z}_{k-1}]$$

3.14. Méthode A₁ / B₆

De la relation A₁, nous obtenons immédiatement :

$$r_k = B_k A r_{k-2} + r_{k-2} + D_k A^2 z_{k-2} + E_k A z_{k-2} \quad (1)$$

en notant $z_k = P_k^{(1)}(A) r_0$.

$$\text{Comme } r_k = b - A x_k, \text{ on a : } x_k = x_{k-2} - B_k r_{k-2} - D_k A z_{k-2} - E_k z_{k-2}. \quad (2)$$

$$\text{De la relation B}_6, \text{ nous obtenons : } z_k = C_k z_{k-2} + A z_{k-1} + E_k z_{k-1}. \quad (3)$$

$$\text{Avec la relation, B}_6 \text{ on a : } A z_{k-1} = C_{k-1} A z_{k-3} + A^2 z_{k-2} + E_{k-1} A z_{k-2}.$$

$$\text{Par suite } r_k = B_k A r_{k-2} + r_{k-2} + D_k [A z_{k-1} - C_{k-1} A z_{k-3} - E_{k-1} A z_{k-2}] + E_k A z_{k-2}.$$

$$\text{Donc } r_k = r_{k-2} + B_k A r_{k-2} + D_k A z_{k-1} + (E_k - D_k E_{k-1}) A z_{k-2} - D_k C_{k-1} A z_{k-3}.$$

La méthode A₁ / B₆ est définie par les formules (1), (2), (3).

Il nous faut maintenant étudier comment programmer les coefficients apparaissant dans ces formules.

Premier cas : $U_i(\xi) = \xi$.

Posons $\lambda_k = (A^{*k+1} y, A z_k)$ et $\mu_k = (A^{*k+1} y, z_k)$.

$$\text{Comme } C_{k+1} = \frac{-c(\xi^{k+1} P_k^{(1)}(\xi))}{c(\xi^k P_{k-1}^{(1)}(\xi))}, \text{ on a : } C_{k+1} = \frac{-(A^{*k+1} y, z_k)}{(A^{*k} y, z_{k-1})} = \frac{-\mu_k}{\mu_{k-1}}.$$

$$\text{Comme } E_{k+1} = \frac{-c(\xi^{k+2} P_k^{(1)}(\xi)) - C_{k+1} c(\xi^{k+1} P_{k-1}^{(1)}(\xi))}{c(\xi^{k+1} P_k^{(1)}(\xi))}, \text{ on a :}$$

$$E_{k+1} = \frac{-(A^{*k+1} y, A z_k) - C_{k+1} (A^{*k} y, A z_{k-1})}{(A^{*k+1} y, z_k)} = \frac{-\lambda_k - C_{k+1} \lambda_{k-1}}{\mu_k}.$$

De plus

$$\begin{aligned} \Delta_{k+2} = c(\xi^k P_k) & \left[c(\xi^{k+2} P_k^{(1)})^2 - c(\xi^{k+3} P_k^{(1)}) c(\xi^{k+1} P_k^{(1)}) \right] \\ & - c(\xi^{k+1} P_k^{(1)}) \left[c(\xi^{k+1} P_k) c(\xi^{k+2} P_k^{(1)}) - c(\xi^{k+2} P_k) c(\xi^{k+1} P_k^{(1)}) \right]. \end{aligned}$$

D'où

$$\Delta_{k+2} = (A^{*k} y, r_k) \left[\lambda_k^2 - (A^{*k+3} y, z_k) \mu_k \right] - \mu_k \left[(A^{*k+1} y, r_k) \lambda_k - (A^{*k+2} y, r_k) \mu_k \right].$$

$$\text{Comme } B_{k+2} = \frac{c(\xi^{k+1} P_k^{(1)}) \left[c(\xi^k P_k) c(\xi^{k+2} P_k^{(1)}) - c(\xi^{k+1} P_k) c(\xi^{k+1} P_k^{(1)}) \right]}{\Delta_{k+2}}, \text{ on a :}$$

$$B_{k+2} = \frac{\mu_k [(A^{*k} y, r_k) \lambda_k - (A^{*k+1} y, r_k) \mu_k]}{\Delta_{k+2}}.$$

Comme $D_{k+2} = -B_{k+2} \frac{c(\xi^k P_k(\xi))}{c(\xi^{k+1} P_k^{(1)}(\xi))}$, on a : $D_{k+2} = -B_{k+2} \frac{(A^{*k} y, r_k)}{\mu_k}$.

Comme $E_{k+2} = \frac{-c(\xi^k P_k) - B_{k+2} c(\xi^{k+1} P_k) - D_{k+2} c(\xi^{k+2} P_k^{(1)})}{c(\xi^{k+1} P_k^{(1)})}$, on a :

$$E_{k+2} = \frac{-(A^{*k} y, r_k) - B_{k+2} (A^{*k+1} y, r_k) - D_{k+2} \lambda_k}{\mu_k}.$$

On pose $C_1 = 0$.

Par conséquent, on a l'algorithme suivant :

◇ Choix de x_0 et y .

Soit $r_0 = b - A x_0$

$$y_0 = y$$

$$y_1 = A^* y_0$$

$$z_0 = r_0$$

$$A_1 = \frac{-(y, r_0)}{(y_1, r_0)}$$

$$r_1 = r_0 + A_1 A r_0$$

$$x_1 = x_0 - A_1 r_0$$

◇ Pour $k = 0, 1, 2, \dots$ faire

$$y_{k+2} = A^* y_{k+1}$$

$$\lambda_k = (y_{k+2}, z_k)$$

$$\mu_k = (y_{k+1}, z_k)$$

$$C_{k+1} = \frac{-\mu_k}{\mu_{k-1}} \quad \text{si } k \geq 1, \quad C_1 = 0$$

$$E_{k+1} = \frac{-\lambda_k - C_{k+1} \lambda_{k-1}}{\mu_k}$$

$$z_{k+1} = C_{k+1} z_{k-1} + A z_k + E_{k+1} z_k$$

$$\Delta_{k+2} = (y_k, r_k) [\lambda_k^2 - (y_{k+2}, A z_k) \mu_k] - \mu_k [(y_{k+1}, r_k) \lambda_k - (y_{k+2}, r_k) \mu_k]$$

$$B_{k+2} = \frac{\mu_k [(y_k, r_k) \lambda_k - (y_{k+1}, r_k) \mu_k]}{\Delta_{k+2}}$$

$$D_{k+2} = -B_{k+2} \frac{(y_k, r_k)}{\mu_k}$$

$$E_{k+2} = \frac{-(y_k, r_k) - B_{k+2} (y_{k+1}, r_k) - D_{k+2} \lambda_k}{\mu_k}$$

$$r_{k+2} = r_k + B_{k+2} A r_k + D_{k+2} A z_{k+1} + (E_{k+2} - D_{k+2} E_{k+1}) A z_k - D_{k+2} C_{k+1} A z_{k-1}$$

$$x_{k+2} = x_k - B_{k+2} r_k - D_{k+2} z_{k+1} - (E_{k+2} - D_{k+2} E_{k+1}) z_k + D_{k+2} C_{k+1} z_{k-1}.$$

Deuxième cas : $U_i(\xi) = P_i(\xi)$.

On note $\tilde{r}_k = P_k(A)^* y$ et $\tilde{z}_k = P_k^{(1)}(A)^* y$.

Posons $\lambda_k = (\tilde{r}_k, A r_{k-1})$, $\mu_k = (\tilde{r}_k, A r_k)$ et $v_k = (\tilde{r}_k, r_k)$.

Comme $C_{k+1} = \frac{-c(\xi^2 P_k^{(1)}(\xi) P_{k-1}(\xi))}{c(\xi P_{k-1}(\xi) P_k^{(1)}(\xi))}$, on a : $C_{k+1} = \frac{-(A^* \tilde{z}_k, A r_{k-1})}{(A^* \tilde{z}_{k-1}, r_{k-1})}$.

Comme $E_{k+1} = \frac{-c(\xi^2 P_k(\xi) P_k^{(1)}(\xi)) - C_{k+1} c(\xi P_k(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi))}{c(\xi P_k(\xi) P_k^{(1)}(\xi))}$, on a :

$$E_{k+1} = \frac{-(A^* \tilde{z}_k, A r_k) - C_{k+1} (A^* \tilde{z}_{k-1}, r_k)}{(A^* \tilde{z}_k, r_k)}.$$

De plus

$$\begin{aligned} \Delta_{k+2} = c(\xi P_{k-1} P_k) & \left[c(\xi^2 P_k P_k^{(1)}) c(\xi P_{k+1} P_k^{(1)}) - c(\xi^2 P_{k+1} P_k^{(1)}) c(\xi P_k P_k^{(1)}) \right] \\ & - c(\xi^2 P_{k-1} P_k^{(1)}) \left[c(\xi P_k^2) c(\xi P_{k+1} P_k^{(1)}) - c(\xi P_{k+1} P_k) c(\xi P_k P_k^{(1)}) \right]. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \Delta_{k+2} = \lambda_k & \left[(A^* \tilde{z}_k, A r_k) (A^* \tilde{z}_k, r_{k+1}) - (A^* \tilde{z}_k, r_{k+1}) (A^* \tilde{z}_k, r_k) \right] \\ & - (A^* \tilde{z}_k, A r_{k-1}) \left[\mu_k (A^* \tilde{z}_k, r_{k+1}) - \lambda_{k+1} (A^* \tilde{z}_k, r_k) \right]. \end{aligned}$$

Comme $B_{k+2} = \frac{c(\xi^2 P_{k-1} P_k^{(1)}) c(P_k^2) c(\xi P_{k+1} P_k^{(1)})}{\Delta_{k+2}}$, on a : $B_{k+2} = \frac{(A^* \tilde{z}_k, r_{k-1}) (A^* \tilde{z}_k, r_{k+1}) v_k}{\Delta_{k+2}}$.

Comme $D_{k+2} = -B_{k+2} \frac{c(\xi P_{k-1}(\xi) P_k(\xi))}{c(\xi^2 P_{k-1}(\xi) P_k^{(1)}(\xi))}$, on a : $D_{k+2} = -B_{k+2} \frac{\lambda_k}{(A^* \tilde{z}_k, A r_{k-1})}$

Comme $E_{k+2} = \frac{-B_{k+2} c(\xi P_{k+1} P_k) - D_{k+2} c(\xi^2 P_{k+1} P_k^{(1)})}{c(\xi P_{k+1} P_k^{(1)})}$, on a :

$$E_{k+2} = \frac{-B_{k+2} \lambda_{k+1} - D_{k+2} (A^* \tilde{z}_k, A r_{k+1})}{(A^* \tilde{z}_k, r_{k+1})}.$$

On peut exprimer λ_k, μ_k et v_k sans utiliser $\tilde{r}_k$, ce qui diminue le nombre de multiplications matrice-vecteur, car dans ce cas on a à chercher uniquement $\tilde{z}_k$. Cependant, les expressions de λ_k, μ_k et v_k , extrêmement compliquées, sont valables pour $k \geq 4$ et permettent de calculer z_{k+1} et r_{k+2} .

Il faut garder alors en mémoire $D_{k-1}, E_{k-1}, D_k, E_k, B_k, C_{k-2}, E_{k-2}, C_{k-1}, E_{k-1}$ et il faut chercher autrement z_1, z_2, z_3, z_4 et r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 .

Dans l'algorithme suivant, on exprime λ_k, μ_k et v_k en fonction de $\tilde{r}_k$. On a donc ici à chercher uniquement z_1 et r_1, r_2 .

On suppose que $\tilde{z}_0 = \tilde{r}_0 = y$ et $z_0 = r_0$ et on rappelle que $c_i = (y, A^i r_0)$.

D'après les formules de $P_1(\xi)$ et de $P_1^{(1)}(\xi)$, on a : $r_1 = r_0 + A_1 A r_0$ avec $A_1 = \frac{-(y, r_0)}{(y, A r_0)} = \frac{-c_0}{c_1}$ et

$$z_1 = A r_0 - \frac{c_2}{c_1} r_0 \text{ avec } c_2 = (y, A^2 r_0) = (A^* \tilde{r}_0, A r_0).$$

Exprimons r_2 .

$$P_2(\xi) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \xi & \xi^2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}} = \xi^2 \frac{\begin{vmatrix} c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}} - \xi \frac{\begin{vmatrix} c_0 & c_2 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}} + 1.$$

Comme $c_3 = (A^* y, A^2 r_0)$ et comme $A^2 r_0 = \frac{1}{A_1} (A r_1 - A r_0)$, on a :

$$c_3 = \frac{1}{A_1} [(y, A^2 r_1) - c_2] = \frac{-c_1}{c_0} [(A^* \tilde{r}_0, A r_1) - c_2].$$

Par suite $c_0 c_3 - c_1 c_2 = -c_1 (A^* \tilde{r}_0, A r_1)$.

Or $A^2 r_0 = A z_1 + \frac{c_2}{c_1} A r_0$. On peut donc exprimer autrement c_3 .

$$c_3 = \frac{c_2}{c_1} c_2 + (A^* \tilde{r}_0, A z_1). \text{ Par suite } c_1 c_3 - c_2^2 = (A^* \tilde{r}_0, A z_1) c_1.$$

Exprimons de la même manière c_2 .

Comme $A^2 r_0 = \frac{1}{A_1} (Ar_1 - Ar_0) = \frac{-c_1}{c_0} (Ar_1 - Ar_0)$, on a : $c_2 = (v, A^2 r_0) = \frac{-c_1}{c_0} [(\tilde{r}_0, Ar_1) - c_1]$.

Par suite $c_0 c_2 - c_1^2 = -c_1 (\tilde{r}_0, Ar_1)$.

Par conséquent $r_2 = \frac{-(\tilde{r}_0, Ar_1)}{(A^* \tilde{r}_0, Az_1)} A^2 r_0 + \frac{(A^* \tilde{r}_0, Ar_1)}{(A^* \tilde{r}_0, Az_1)} Ar_0 + r_0$.

Comme $A^2 r_0 = \frac{1}{A_1} (Ar_1 - Ar_0)$, on a donc :

$$r_2 = \frac{-(\tilde{r}_0, Ar_1)}{A_1 (A^* \tilde{r}_0, Az_1)} Ar_1 + \frac{1}{A_1} \left[\frac{(A^* \tilde{r}_0, Ar_1)}{(A^* \tilde{r}_0, Az_1)} - 1 \right] Ar_0 + r_0.$$

Par conséquent on a l'algorithme suivant :

◇ Choix de x_0 et y .

Soit $r_0 = b - Ax_0$

$$z_0 = r_0$$

$$\tilde{z}_0 = \tilde{r}_0 = y$$

$$c_1 = (v, Ar_0)$$

$$A_1 = \frac{-(v, r_0)}{c_1}$$

$$r_1 = r_0 + A_1 Ar_0$$

$$\tilde{r}_1 = \tilde{r}_0 + \bar{A}_1 A^* \tilde{r}_0$$

$$x_1 = x_0 - A_1 r_0$$

$$c_2 = \frac{-c_1}{c_0} [(\tilde{r}_0, Ar_1) - c_1]$$

$$z_1 = Ar_0 - \frac{c_2}{c_1} r_0$$

$$\tilde{z}_1 = A^* \tilde{r}_0 - \frac{\bar{c}_2}{\bar{c}_1} \tilde{r}_0$$

$$r_2 = \frac{-(\tilde{r}_0, Ar_1)}{A_1 (A^* \tilde{r}_0, Az_1)} Ar_1 + \frac{1}{A_1} \left[\frac{(A^* \tilde{r}_0, Ar_1)}{(A^* \tilde{r}_0, Az_1)} - 1 \right] Ar_0 + r_0$$

$$\tilde{r}_2 = \frac{-(\tilde{r}_0, Ar_1)}{A_1 (A^* \tilde{r}_0, Az_1)} A^* \tilde{r}_1 + \frac{1}{A_1} \left[\frac{(A^* \tilde{r}_0, Ar_1)}{(A^* \tilde{r}_0, Az_1)} - 1 \right] A^* \tilde{r}_0 + \tilde{r}_0$$

$$x_2 = \frac{(\tilde{r}_0, Ar_1)}{A_1 (A^* \tilde{r}_0, Az_1)} r_1 - \frac{1}{A_1} \left[\frac{(A^* \tilde{r}_0, Ar_1)}{(A^* \tilde{r}_0, Az_1)} - 1 \right] r_0 + x_0$$

$$\lambda_1 = (\tilde{r}_1, A r_0)$$

◇ Pour $k = 1, 2, 3, \dots$ faire

$$C_{k+1} = \frac{-(A^* \tilde{z}_k, A r_{k-1})}{(A^* \tilde{z}_{k-1}, r_{k-1})}$$

$$E_{k+1} = \frac{-(A^* \tilde{z}_k, A r_k) - C_{k+1} (A^* \tilde{z}_{k-1}, r_k)}{(A^* \tilde{z}_k, r_k)}$$

$$z_{k+1} = C_{k+1} z_{k-1} + A z_k + E_{k+1} z_k$$

$$\tilde{z}_{k+1} = \bar{C}_{k+1} \tilde{z}_{k-1} + A^* \tilde{z}_k + \bar{E}_{k+1} \tilde{z}_k$$

$$\lambda_{k+1} = (\tilde{r}_k, A r_{k-1})$$

$$\mu_k = (\tilde{r}_k, A r_k)$$

$$v_k = (\tilde{r}_k, r_k)$$

$$\Delta_{k+2} = \lambda_k \left[(A^* \tilde{z}_k, A r_k)(A^* \tilde{z}_k, r_{k+1}) - (A^* \tilde{z}_k, r_{k+1})(A^* \tilde{z}_k, r_k) \right] \\ - (A^* \tilde{z}_k, A r_{k-1}) \left[\mu_k (A^* \tilde{z}_k, r_{k+1}) - \lambda_{k+1} (A^* \tilde{z}_k, r_k) \right]$$

Si $\Delta_{k+2} = 0$, alors

$$B_{k+2} = \frac{v_k (A^* \tilde{z}_k, r_{k-1}) (A^* \tilde{z}_k, r_{k+1})}{\Delta_{k+2}}$$

$$D_{k+2} = -B_{k+2} \frac{\lambda_k}{(A^* \tilde{z}_k, A r_{k-1})}$$

$$E_{k+2} = \frac{-B_{k+2} \lambda_{k+1} - D_{k+2} (A^* \tilde{z}_k, A r_{k+1})}{(A^* \tilde{z}_k, r_{k+1})}$$

$$r_{k+2} = r_k + B_{k+2} A r_k + D_{k+2} A z_{k+1} + (E_{k+2} - D_{k+2} E_{k+1}) A z_k - D_{k+2} C_{k+1} A z_{k-1}$$

$$\tilde{r}_{k+2} = \tilde{r}_k + \bar{B}_{k+2} A^* \tilde{r}_k + \bar{D}_{k+2} A^* \tilde{z}_{k+1} + (\bar{E}_{k+2} - \bar{D}_{k+2} \bar{E}_{k+1}) A^* \tilde{z}_k - \bar{D}_{k+2} \bar{C}_{k+1} A^* \tilde{z}_{k-1}$$

$$x_{k+2} = x_k - B_{k+2} r_k - D_{k+2} z_{k+1} - (E_{k+2} - D_{k+2} E_{k+1}) z_k + D_{k+2} C_{k+1} z_{k-1}$$

◇ Si $r_{k+2} = 0$ alors continuer.

Troisième cas : $U_i(\xi) = P_i^{(1)}(\xi)$.

On note $\tilde{r}_k = P_k(A)^* y$ et $\tilde{z}_k = P_k^{(1)}(A)^* y$.

Comme $C_{k+1} = \frac{-c(\xi^2 P_k^{(1)}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi))}{c(\xi P_{k-1}^{(1)}(\xi))^2}$, on a : $C_{k+1} = \frac{-(A^* \tilde{z}_k, A z_{k-1})}{(\tilde{z}_{k-1}, A z_{k-1})}$.

$$\text{Comme } E_{k+1} = \frac{-c(\xi^2 P_k^{(1)2}(\xi))}{c(\xi P_k^{(1)2}(\xi))}, \text{ on a : } E_{k+1} = \frac{-(A^* \tilde{z}_k, A z_k)}{(\tilde{z}_k, A z_k)}.$$

$$\text{Comme } \Delta_{k+2} = -c(\xi P_{k-1}^{(1)} P_k) c(\xi^2 P_{k+1}^{(1)} P_k^{(1)}) c(\xi P_k^{(1)2}), \text{ on a :}$$

$$\Delta_{k+2} = -(\tilde{z}_{k-1}, A r_k) (A^* \tilde{z}_{k+1}, A z_k) (\tilde{z}_k, A z_k).$$

On suppose $\Delta_{k+2} \neq 0$.

$$\text{Comme } B_{k+2} = \frac{c(\xi^2 P_k^{(1)} P_{k-1}^{(1)}) c(P_{k+1}^{(1)} P_k)}{c(\xi^2 P_k^{(1)} P_{k+1}^{(1)}) c(\xi P_{k-1}^{(1)} P_k)}, \text{ on a : } B_{k+2} = \frac{(A^* \tilde{z}_k, A z_{k-1}) (\tilde{z}_{k+1}, r_k)}{(A^* \tilde{z}_{k-1}, A z_k) (\tilde{z}_{k-1}, A r_k)}.$$

$$\text{Comme } D_{k+2} = \frac{-c(P_{k+1}^{(1)} P_k)}{c(\xi^2 P_k^{(1)} P_{k+1}^{(1)})}, \text{ on a : } D_{k+2} = \frac{-(\tilde{z}_{k+1}, r_k)}{(A^* \tilde{z}_{k+1}, A z_k)}.$$

$$\text{Comme } E_{k+2} = \frac{-c(P_k^{(1)} P_k) - B_{k+2} c(\xi P_k^{(1)} P_k) - D_{k+2} c(\xi^2 P_k^{(1)2})}{c(\xi P_k^{(1)2})}, \text{ on a :}$$

$$E_{k+2} = \frac{-(\tilde{z}_k, r_k) - B_{k+2} (\tilde{z}_k, A r_k) - D_{k+2} (A^* \tilde{z}_k, A z_k)}{(\tilde{z}_k, A z_k)}.$$

Les formules précédentes, valables pour $k \geq 1$, permettent de calculer z_{k+1} et r_{k+2} sans calculer $\tilde{r}_k$. Il faut reprendre les expressions du deuxième cas pour z_1 et r_1, r_2 .

Par conséquent on a l'algorithme suivant :

◇ Choix de x_0 et y .

$$\text{Soit } r_0 = b - A x_0$$

$$z_0 = r_0$$

$$\tilde{z}_0 = y$$

$$c_1 = (y, A r_0)$$

$$A_1 = \frac{-(y, r_0)}{c_1}$$

$$r_1 = r_0 + A_1 A r_0$$

$$x_1 = x_0 - A_1 r_0$$

$$c_2 = \frac{-c_1}{c_0} [(r_0, A r_1) - c_1]$$

$$z_1 = A r_0 - \frac{c_2}{c_1} r_0$$

$$\tilde{z}_1 = A^* \tilde{r}_0 - \frac{\tilde{c}_2}{\tilde{c}_1} \tilde{r}_0$$

$$r_2 = \frac{-(\tilde{r}_0, A r_1)}{A_1 (A^* \tilde{r}_0, A z_1)} A r_1 + \frac{1}{A_1} \left[\frac{(A^* \tilde{r}_0, A r_1)}{(A^* \tilde{r}_0, A z_1)} - 1 \right] A r_0 + r_0$$

$$x_2 = \frac{(\tilde{r}_0, A r_1)}{A_1 (A^* \tilde{r}_0, A z_1)} r_1 - \frac{1}{A_1} \left[\frac{(A^* \tilde{r}_0, A r_1)}{(A^* \tilde{r}_0, A z_1)} - 1 \right] r_0 + x_0$$

◇ Pour $k = 1, 2, 3, \dots$ faire

$$C_{k+1} = \frac{-(A^* \tilde{z}_k, A z_{k-1})}{(\tilde{z}_{k-1}, A z_{k-1})}$$

$$E_{k+1} = \frac{-(A^* \tilde{z}_k, A z_k)}{(\tilde{z}_k, A z_k)}$$

$$z_{k+1} = C_{k+1} z_{k-1} + A z_k + E_{k+1} z_k$$

$$\tilde{z}_{k+1} = \tilde{C}_{k+1} \tilde{z}_{k-1} + A^* \tilde{z}_k + \tilde{E}_{k+1} \tilde{z}_k$$

$$\Delta_{k+2} = -(\tilde{z}_{k-1}, A r_k) (A^* \tilde{z}_{k+1}, A z_k) (\tilde{z}_k, A z_k)$$

Si $\Delta_{k+2} = 0$, alors

$$B_{k+2} = \frac{(A^* \tilde{z}_k, A z_{k-1}) (\tilde{z}_{k+1}, r_k)}{(A^* \tilde{z}_{k-1}, A z_k) (\tilde{z}_{k-1}, A r_k)}$$

$$D_{k+2} = \frac{-(\tilde{z}_{k+1}, r_k)}{(A^* \tilde{z}_{k+1}, A z_k)}$$

$$E_{k+2} = \frac{-(\tilde{z}_k, r_k) - B_{k+2} (\tilde{z}_k, A r_k) - D_{k+2} (A^* \tilde{z}_k, A z_k)}{(\tilde{z}_k, A z_k)}$$

$$r_{k+2} = r_k + B_{k+2} A r_k + D_{k+2} A z_{k+1} + (E_{k+2} - D_{k+2} E_{k+1}) A z_k - D_{k+2} C_{k+1} A z_{k-1}$$

$$x_{k+2} = x_k - B_{k+2} r_k - D_{k+2} z_{k+1} - (E_{k+2} - D_{k+2} E_{k+1}) z_k + D_{k+2} C_{k+1} z_{k-1}$$

◇ Si $r_{k+2} = 0$ alors continuer.

3.15. Méthode A_1 / B_8

De la relation A_1 , nous obtenons immédiatement :

$$r_k = B_k A r_{k-2} + r_{k-2} + D_k A^2 z_{k-2} + E_k A z_{k-2} \quad (1)$$

en notant $z_k = P_k^{(1)}(A) r_0$.

$$\text{Comme } r_k = b - A x_k, \text{ on a : } x_k = x_{k-2} - B_k r_{k-2} - D_k A z_{k-2} - E_k z_{k-2}. \quad (2)$$

De la relation B_8 , nous obtenons :

$$z_k = A z_{k-1} + B'_k z_{k-1} + D'_k r_{k-1}. \quad (3)$$

La méthode A_1 / B_8 est définie par les formules (1), (2), (3).

Comme $A z_{k-2} = z_{k-1} - B'_{k-1} z_{k-2} - D'_{k-1} r_{k-2}$, en remplaçant dans la formule (1), on a :

$$r_k = B_k A r_{k-2} + r_{k-2} + D_k (A z_{k-1} - B'_{k-1} A z_{k-2} - D'_{k-1} A r_{k-2}) + E_k A z_{k-2}.$$

$$\text{Par suite } r_k = r_{k-2} + (B_k - D_k D'_{k-1}) A r_{k-2} + D_k A z_{k-1} + (E_k - D_k B'_{k-1}) A z_{k-2}.$$

Premier cas : $U_i(\xi) = \xi^i$.

$$\text{On a : } D'_{k+1} = \frac{-c(\xi^{k+1} P_k^{(1)}(\xi))}{c(\xi^k P_k(\xi))}. \text{ Par suite } D'_{k+1} = \frac{-(A^{*k+1} y, z_k)}{(A^{*k} y, r_k)}.$$

$$\text{Comme } B'_{k+1} = \frac{-c(\xi^{k+2} P_k^{(1)}(\xi)) - D'_{k+1} c(\xi^{k+1} P_k(\xi))}{c(\xi^{k+1} P_k^{(1)}(\xi))}, \text{ on a :}$$

$$B'_{k+1} = \frac{-(A^{*k+1} y, A z_k) - D'_{k+1} (A^{*k+1} y, r_k)}{(A^{*k+1} y, z_k)}.$$

De plus, en reprenant les formules de Δ_k , B_k , D_k , E_k , et en notant $\alpha_k = (A^{*k+1} y, A^2 z_k)$, on a :

$$\begin{aligned} \Delta_{k+2} = (A^{*k} y, r_k) & \left[(A^{*k+1} y, A z_k)^2 - \alpha_k (A^{*k+1} y, z_k) \right] \\ & - (A^{*k+1} y, z_k) \left[(A^{*k+1} y, r_k)(A^{*k+1} y, A z_k) - (A^{*k+1} y, A r_k)(A^{*k+1} y, z_k) \right] \end{aligned}$$

$$B_{k+2} = \frac{(A^{*k+1} y, z_k) \left[(A^{*k} y, r_k)(A^{*k+1} y, A z_k) - (A^{*k+1} y, r_k)(A^{*k+1} y, z_k) \right]}{\Delta_{k+2}}$$

$$D_{k+2} = -B_{k+2} \frac{(A^{*k} y, r_k)}{(A^{*k+1} y, z_k)}$$

$$E_{k+2} = \frac{-(A^{*k} y, r_k) - B_{k+2} (A^{*k+1} y, r_k) - D_{k+2} (A^{*k+1} y, A z_k)}{(A^{*k+1} y, z_k)}$$

Exprimons α_k d'une façon où n'intervient pas $A^2 z_k$.

On a : $z_{k+1} = A z_k + B'_{k+1} z_k + D'_{k+1} r_k$.

Par suite, comme $\alpha_k = (A^{*k+1} y, A^2 z_k)$, on a :

$$\alpha_k = (A^{*k+1} y, A z_{k+1}) - B'_{k+1} (A^{*k+1} y, A z_k) - D'_{k+1} (A^{*k+1} y, A r_k).$$

Par conséquent on a l' algorithme suivant :

◇ Choix de x_0 et y .

$$\text{Soit } r_0 = b - A x_0$$

$$y_0 = y$$

$$z_0 = r_0$$

$$D_1 = \frac{-(y, r_0)}{(y, A r_0)}$$

$$r_1 = r_0 + D_1 A r_0$$

$$x_1 = x_0 - D_1 r_0$$

◇ Pour $k = 0, 1, 2, \dots$ faire

$$y_{k+1} = A^* y_k$$

$$D'_{k+1} = \frac{-(y_{k+1}, z_k)}{(y_k, r_k)}$$

$$B'_{k+1} = \frac{-(y_{k+1}, A z_k) - D'_{k+1} (y_{k+1}, r_k)}{(y_{k+1}, z_k)}$$

$$z_{k+1} = A z_k + B'_{k+1} z_k + D'_{k+1} r_k$$

$$\alpha_k = (y_{k+1}, A z_{k+1}) - B'_{k+1} (y_{k+1}, A z_k) - D'_{k+1} (y_{k+1}, A r_k)$$

$$\Delta_{k+2} = (y_k, r_k) \left[(y_{k+1}, A z_k)^2 - \alpha_k (y_{k+1}, z_k) \right] \\ - (y_{k+1}, z_k) \left[(y_{k+1}, r_k)(y_{k+1}, A z_k) - (y_{k+1}, A r_k)(y_{k+1}, z_k) \right]$$

$$B_{k+2} = \frac{(y_{k+1}, z_k) \left[(y_k, r_k)(y_{k+1}, A z_k) - (y_{k+1}, r_k)(y_{k+1}, z_k) \right]}{\Delta_{k+2}}$$

$$D_{k+2} = -B_{k+2} \frac{(y_k, r_k)}{(y_{k+1}, z_k)}$$

$$E_{k+2} = \frac{-(y_k, r_k) - B_{k+2} (y_{k+1}, r_k) - D_{k+2} (y_{k+1}, A z_k)}{(y_{k+1}, z_k)}$$

$$\begin{aligned} r_{k+2} &= r_k + (B_{k+2} - D_{k+2} D'_{k+1}) A r_k + D_{k+2} A z_{k+1} + (E_{k+2} - D_{k+2} B'_{k+1}) A z_k \\ x_{k+2} &= x_k - (B_{k+2} - D_{k+2} D'_{k+1}) r_k - D_{k+2} z_{k+1} - (E_{k+2} - D_{k+2} B'_{k+1}) z_k \end{aligned}$$

◇ Si $r_{k+2} = 0$ alors continuer.

Deuxième cas : $U_i(\xi) = P_i(\xi)$.

Comme $D'_{k+1} = \frac{-c(\xi^2 P_{k-1}(\xi) P_k^{(1)}(\xi))}{c(\xi P_{k-1}(\xi) P_k(\xi))}$, on a : $D'_{k+1} = \frac{-(A^* \tilde{r}_{k-1}, A z_k)}{(\tilde{r}_{k-1}, A r_k)}$.

Comme $B_{k+1} = \frac{-c(\xi^2 P_k^{(1)}(\xi) P_k(\xi)) - D'_{k+1} c(\xi P_k^2(\xi))}{c(\xi P_k^{(1)}(\xi) P_k(\xi))}$, on a :

$$B_{k+1} = \frac{-(A^* \tilde{r}_k, A z_k) - D'_{k+1} (\tilde{r}_k, A r_k)}{(\tilde{r}_k, A z_k)}.$$

D'après les expressions de Δ_{k+2} , B_{k+2} , D_{k+2} , E_{k+2} , on a :

$$\begin{aligned} \Delta_{k+2} &= (\tilde{r}_k, A r_{k-1}) \left[(A^* \tilde{r}_k, A z_k)(\tilde{r}_{k+1}, A z_k) - (A^* \tilde{r}_{k+1}, A z_k)(\tilde{r}_k, A z_k) \right] \\ &\quad - (A^* \tilde{r}_{k-1}, A z_k) \left[(\tilde{r}_k, A r_k)(\tilde{r}_{k+1}, A z_k) - (\tilde{r}_{k+1}, A r_k)(\tilde{r}_k, A z_k) \right]. \end{aligned}$$

On suppose $\Delta_{k+2} = 0$. On a alors :

$$B_{k+2} = \frac{-(A^* \tilde{r}_{k-1}, A z_k) (\tilde{r}_k, r_k) (\tilde{r}_{k+1}, A z_k)}{\Delta_{k+2}}$$

$$D_{k+2} = -B_{k+2} \frac{(\tilde{r}_k, A r_{k-1})}{(A^* \tilde{r}_{k+1}, A z_k)}$$

$$E_{k+2} = \frac{-B_{k+2} (\tilde{r}_{k+1}, A r_k) - D_{k+2} (A^* \tilde{r}_{k+1}, A z_k)}{(\tilde{r}_{k+1}, A z_k)}.$$

Les formules précédentes sont valables pour $k \geq 1$. Il faut donc exprimer autrement z_1 et r_1, r_2 .

On suppose que $\tilde{z}_0 = \tilde{r}_0 = y$ et $z_0 = r_0$ et on rappelle que $c_1 = (y, A^1 r_0)$.

D'après les formules de $P_1(\xi)$ et de $P_1^{(1)}(\xi)$, on a : $r_1 = r_0 + D_1 A r_0$ avec $D_1 = \frac{-(y, r_0)}{(y, A r_0)} = \frac{-c_0}{c_1}$ et

$$z_1 = A r_0 - \frac{c_2}{c_1} r_0 \text{ avec } c_2 = (y, A^2 r_0) = (A^* \tilde{r}_0, A r_0).$$

Exprimons r_2 .

$$P_2(\xi) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \xi & \xi^2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}} = \xi^2 \frac{\begin{vmatrix} c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}} - \xi \frac{\begin{vmatrix} c_0 & c_2 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}} + 1.$$

Comme $c_3 = (A^* y, A^2 r_0)$ et comme $A^2 r_0 = \frac{1}{D_1} (Ar_1 - Ar_0)$, on a :

$$c_3 = \frac{1}{D_1} [(y, A^2 r_1) - c_2] = \frac{-c_1}{c_0} [(A^* \tilde{r}_0, Ar_1) - c_2]$$

Par suite $c_0 c_3 - c_1 c_2 = -c_1 (A^* \tilde{r}_0, Ar_1)$.

Or $A^2 r_0 = Az_1 + \frac{c_2}{c_1} Ar_0$. On peut donc exprimer autrement c_3 .

$$c_3 = \frac{c_2}{c_1} c_2 + (A^* \tilde{r}_0, Az_1).$$

Par suite $c_1 c_3 - c_2^2 = (A^* \tilde{r}_0, Az_1) c_1$.

Exprimons de la même manière c_2 .

Comme $A^2 r_0 = \frac{1}{D_1} (Ar_1 - Ar_0) = \frac{-c_1}{c_0} (Ar_1 - Ar_0)$, on a : $c_2 = (y, A^2 r_0) = \frac{-c_1}{c_0} [(\tilde{r}_0, Ar_1) - c_1]$.

Par suite $c_0 c_2 - c_1^2 = -c_1 (\tilde{r}_0, Ar_1)$.

Par conséquent en notant $D_2 = \frac{-(\tilde{r}_0, Ar_1)}{(A^* \tilde{r}_0, Az_1)}$ et $\alpha = \frac{(A^* \tilde{r}_0, Ar_1)}{(A^* \tilde{r}_0, Az_1)}$ et comme

$$A^2 r_0 = Az_1 + \frac{c_2}{c_1} Ar_0, \text{ on a : } r_2 = D_2 Az_1 + (D_2 \frac{c_2}{c_1} + \alpha) Ar_0 + r_0.$$

Par conséquent on a l'algorithme suivant :

◇ Choix de x_0 et y .

Soit $r_0 = b - Ax_0$

$$z_0 = r_0$$

$$\tilde{z}_0 = \tilde{r}_0 = y$$

$$c_1 = (y, Ar_0)$$

$$D_1 = \frac{-(y, r_0)}{c_1}$$

$$r_1 = r_0 + D_1 Ar_0$$

$$\tilde{r}_1 = \tilde{r}_0 + \bar{D}_1 A^* \tilde{r}_0$$

$$x_1 = x_0 - D_1 r_0$$

$$c_2 = (A^* \tilde{r}_0, A r_0)$$

$$z_1 = A r_0 - \frac{c_2}{c_1} r_0$$

$$\tilde{z}_1 = A^* \tilde{r}_0 - \frac{\bar{c}_2}{\bar{c}_1} \tilde{r}_0$$

$$D_2 = \frac{-(\tilde{r}_0, A r_1)}{(A^* \tilde{r}_0, A z_1)}$$

$$\alpha = \frac{(A^* \tilde{r}_0, A r_1)}{(A^* \tilde{r}_0, A z_1)}$$

$$r_2 = D_2 A z_1 + (D_2 \frac{c_2}{c_1} + \alpha) A r_0 + r_0$$

$$\tilde{r}_2 = \bar{D}_2 A^* \tilde{z}_1 + (\bar{D}_2 \frac{\bar{c}_2}{\bar{c}_1} + \bar{\alpha}) A^* \tilde{r}_0 + \tilde{r}_0$$

$$x_2 = x_0 - D_2 z_1 - (D_2 \frac{c_2}{c_1} + \alpha) r_0$$

◇ Pour $k = 1, 2, 3, \dots$ faire

$$D'_{k+1} = \frac{-(A^* \tilde{r}_{k-1}, A z_k)}{(\tilde{r}_{k-1}, A r_k)}$$

$$B_{k+1} = \frac{-(A^* \tilde{r}_k, A z_k) - D'_{k+1} (\tilde{r}_k, A r_k)}{(\tilde{r}_k, A z_k)}$$

$$z_{k+1} = A z_k + B_{k+1} z_k + D'_{k+1} r_k$$

$$\tilde{z}_{k+1} = A^* \tilde{z}_k + \bar{B}'_{k+1} \tilde{z}_k + \bar{D}'_{k+1} \tilde{r}_k$$

$$\Delta_{k+2} = (\tilde{r}_k, A r_{k-1}) \left[(A^* \tilde{r}_k, A z_k)(\tilde{r}_{k+1}, A z_k) - (A^* \tilde{r}_{k+1}, A z_k)(\tilde{r}_k, A z_k) \right] \\ - (A^* \tilde{r}_{k-1}, A z_k) \left[(\tilde{r}_k, A r_k)(\tilde{r}_{k+1}, A z_k) - (\tilde{r}_{k+1}, A r_k)(\tilde{r}_k, A z_k) \right]$$

Si $\Delta_{k+2} = 0$, alors

$$B_{k+2} = \frac{-(A^* \tilde{r}_{k-1}, A z_k)(\tilde{r}_k, r_k)(\tilde{r}_{k+1}, A z_k)}{\Delta_{k+2}}$$

$$D_{k+2} = -B_{k+2} \frac{(\tilde{r}_k, A r_{k-1})}{(A^* \tilde{r}_{k+1}, A z_k)}$$

$$E_{k+2} = \frac{-B_{k+2}(\tilde{r}_{k+1}, A r_k) - D_{k+2}(A^* \tilde{r}_{k+1}, A z_k)}{(\tilde{r}_{k+1}, A z_k)}$$

$$\begin{aligned}
 r_{k+2} &= r_k + (B_{k+2} - D_{k+2} D'_{k+1}) A r_k + D_{k+2} A z_{k+1} + (E_{k+2} - D_{k+2} B'_{k+1}) A z_k \\
 \tilde{r}_{k+2} &= \tilde{r}_k + (\bar{B}_{k+2} - \bar{D}_{k+2} \bar{D}'_{k+1}) A^* \tilde{r}_k + \bar{D}_{k+2} A^* \tilde{z}_{k+1} + (E_{k+2} - D_{k+2} B'_{k+1}) A^* \tilde{z}_k \\
 x_{k+2} &= x_k - (B_{k+2} - D_{k+2} D'_{k+1}) r_k - D_{k+2} z_{k+1} - (E_{k+2} - D_{k+2} B'_{k+1}) z_k
 \end{aligned}$$

◇ Si $r_{k+2} = 0$ alors continuer.

Troisième cas : $U_i(\xi) = P_i^{(1)}(\xi)$.

Comme $D'_{k+1} = \frac{-c(\xi^2 P_{k-1}^{(1)}(\xi) P_k^{(1)}(\xi))}{c(\xi P_{k-1}^{(1)}(\xi) P_k^{(1)}(\xi))}$, on a : $D'_{k+1} = \frac{-(A^* \tilde{z}_k, A z_{k-1})}{(\tilde{r}_k, A z_{k-1})}$.

Comme $B'_{k+1} = \frac{-c(\xi^2 P_k^{(1)2}(\xi)) - D'_{k+1} c(\xi P_k^{(1)}(\xi) P_k^{(1)}(\xi))}{c(\xi P_k^{(1)2}(\xi))}$, on a :

$$B'_{k+1} = \frac{-(A^* \tilde{z}_k, A z_k) - D'_{k+1} (\tilde{r}_k, A z_k)}{(\tilde{z}_k, A z_k)}.$$

Comme $\Delta_{k+2} = -c(\xi P_{k-1}^{(1)} P_k^{(1)}) c(\xi^2 P_{k+1}^{(1)} P_k^{(1)}) c(\xi P_k^{(1)2})$, on a :

$$\Delta_{k+2} = -(\tilde{r}_k, A z_{k-1}) (A^* \tilde{z}_{k+1}, A z_k) (\tilde{z}_k, A z_k).$$

On suppose $\Delta_{k+2} \neq 0$.

Comme $B_{k+2} = \frac{-c(\xi^2 P_k^{(1)} P_{k-1}^{(1)}) c(P_{k+1}^{(1)} P_k^{(1)})}{c(\xi^2 P_k^{(1)} P_{k+1}^{(1)}) c(\xi P_{k-1}^{(1)} P_k^{(1)})}$, on a : $B_{k+2} = \frac{-(A^* \tilde{z}_k, A z_{k-1}) (\tilde{r}_k, z_{k+1})}{(A^* \tilde{z}_{k+1}, A z_k) (\tilde{r}_k, A z_{k-1})}$.

Comme $D_{k+2} = \frac{-c(P_{k+1}^{(1)} P_k^{(1)})}{c(\xi^2 P_k^{(1)} P_{k+1}^{(1)})}$, on a : $D_{k+2} = \frac{-(\tilde{r}_k, z_{k+1})}{(A^* \tilde{z}_{k+1}, A z_k)}$.

Comme $E_{k+2} = \frac{-c(P_k^{(1)} P_k^{(1)}) - B_{k+2} c(\xi P_k^{(1)} P_k^{(1)}) - D_{k+2} c(\xi^2 P_k^{(1)2})}{c(\xi P_k^{(1)2})}$, on a :

$$E_{k+2} = \frac{-(\tilde{r}_k, z_k) - B_{k+2} (\tilde{r}_k, A z_k) - D_{k+2} (A^* \tilde{z}_k, A z_k)}{(\tilde{z}_k, A z_k)}.$$

Les formules précédentes sont valables pour $k \geq 1$. Il faut donc reprendre les expressions de z_1 et r_1, r_2 trouvées précédemment.

Par conséquent on a l'algorithme suivant :

◇ Choix de x_0 et y .

Soit $r_0 = b - A x_0$

$$z_0 = r_0$$

$$\tilde{z}_0 = \tilde{r}_0 = y$$

$$c_1 = (y, A r_0)$$

$$D_1 = \frac{-(y, r_0)}{c_1}$$

$$r_1 = r_0 + D_1 A r_0$$

$$\tilde{r}_1 = \tilde{r}_0 + \bar{D}_1 A^* \tilde{r}_0$$

$$x_1 = x_0 - D_1 r_0$$

$$c_2 = (A^* \tilde{r}_0, A r_0)$$

$$z_1 = A r_0 - \frac{c_2}{c_1} r_0$$

$$\tilde{z}_1 = A^* \tilde{r}_0 - \frac{\bar{c}_2}{\bar{c}_1} \tilde{r}_0$$

$$D_2 = \frac{-(\tilde{r}_0, A r_1)}{(A^* \tilde{r}_0, A z_1)}$$

$$\alpha = \frac{(A^* \tilde{r}_0, A r_1)}{(A^* \tilde{r}_0, A z_1)}$$

$$r_2 = D_2 A z_1 + (D_2 \frac{c_2}{c_1} + \alpha) A r_0 + r_0$$

$$\tilde{r}_2 = \bar{D}_2 A^* \tilde{z}_1 + (\bar{D}_2 \frac{\bar{c}_2}{\bar{c}_1} + \bar{\alpha}) A^* \tilde{r}_0 + \tilde{r}_0$$

$$x_2 = x_0 - D_2 z_1 - (D_2 \frac{c_2}{c_1} + \alpha) r_0$$

◇ Pour $k = 1, 2, 3, \dots$ faire

$$D'_{k+1} = \frac{-(A^* \tilde{z}_k, A z_{k-1})}{(\tilde{r}_k, A z_{k-1})}$$

$$B'_{k+1} = \frac{-(A^* \tilde{z}_k, A z_k) - D'_{k+1} (\tilde{r}_k, A z_k)}{(\tilde{z}_k, A z_k)}$$

$$z_{k+1} = A z_k + B'_{k+1} z_k + D'_{k+1} r_k$$

$$\tilde{z}_{k+1} = A^* \tilde{z}_k + \bar{B}'_{k+1} \tilde{z}_k + \bar{D}'_{k+1} \tilde{r}_k$$

$$\Delta_{k+2} = -(\tilde{r}_k, A z_{k-1}) (A^* \tilde{z}_{k+1}, A z_k) (\tilde{z}_k, A z_k)$$

Si $\Delta_{k+2} = 0$, alors

$$B_{k+2} = \frac{-(A^* \tilde{z}_k, A z_{k-1}) (\tilde{r}_k, z_{k+1})}{(A^* \tilde{z}_{k+1}, A z_k) (\tilde{r}_k, A z_{k-1})}$$

$$D_{k+2} = \frac{-(\tilde{r}_k, z_{k+1})}{(A^* \tilde{z}_{k+1}, A z_k)}$$

$$E_{k+2} = \frac{-(\tilde{r}_k, z_k) - B_{k+2} (\tilde{r}_k, A z_k) - D_{k+2} (A^* \tilde{z}_k, A z_k)}{(\tilde{z}_k, A z_k)}$$

$$r_{k+2} = r_k + (B_{k+2} - D_{k+2} D'_{k+1}) A r_k + D_{k+2} A z_{k+1} + (E_{k+2} - D_{k+2} B'_{k+1}) A z_k$$

$$\tilde{r}_{k+2} = \tilde{r}_k + (\bar{B}_{k+2} - \bar{D}_{k+2} \bar{D}'_{k+1}) A^* \tilde{r}_k + \bar{D}_{k+2} A^* \tilde{z}_{k+1} + (E_{k+2} - D_{k+2} B'_{k+1}) A^* \tilde{z}_k$$

$$x_{k+2} = x_k - (B_{k+2} - D_{k+2} D'_{k+1}) r_k - D_{k+2} z_{k+1} - (E_{k+2} - D_{k+2} B'_{k+1}) z_k$$

◇ Si $r_{k+2} = 0$ alors continuer.

3.16. Méthode A_1 / B_{10}

De la relation A_1 , nous obtenons immédiatement :

$$r_k = B_k A r_{k-2} + r_{k-2} + D_k A^2 z_{k-2} + E_k A z_{k-2} \quad (1)$$

en notant $z_k = P_k^{(1)}(A) r_0$.

$$\text{Comme } r_k = b - A x_k, \text{ on a : } x_k = x_{k-2} - B_k r_{k-2} - D_k A^2 z_{k-2} - E_k z_{k-2}. \quad (2)$$

$$\text{De la relation } B_{10}, \text{ nous obtenons : } z_k = B'_k z_{k-1} + C_k r_k. \quad (3)$$

La méthode A_1 / B_{10} est définie par les formules (1), (2), (3).

Il nous faut maintenant étudier comment programmer les coefficients B_k, D_k, E_k, B'_k, C_k apparaissant dans ces formules.

Comme $C_k = \frac{1}{a_k}$ où a_k est définie par $P_k(\xi) = a_k \xi^k + \dots + 1$, on a : $a_k = D_k$ car $P_k^{(1)}$ est unitaire.

$$\text{D'où } C_k = \frac{1}{D_k}.$$

Premier cas : $U_i(\xi) = \xi^i$.

$$\text{On a : } B'_k = \frac{-C_k c(\xi^k P_k(\xi))}{c(\xi^k P_{k-1}^{(1)}(\xi))}. \text{ Par suite } B'_k = \frac{-C_k (A^{*k} y, r_k)}{(A^{*k} y, z_{k-1})}.$$

De plus en reprenant les formules de Δ_k, B_k, D_k, E_k , on a :

$$\begin{aligned} \Delta_k = (A^{*k-2} y, r_{k-2}) & \left[(A^{*k-1} y, A z_{k-2})^2 - (A^{*k-1} y, A^2 z_{k-2})(A^{*k-1} y, z_{k-2}) \right] \\ & - (A^{*k-1} y, z_{k-2}) \left[(A^{*k-1} y, r_{k-2})(A^{*k-1} y, A z_{k-2}) - (A^{*k-1} y, A r_{k-2})(A^{*k-1} y, z_{k-2}) \right]. \end{aligned}$$

$$b_k = (A^{*k-2} y, r_{k-2})(A^{*k-1} y, A z_{k-2}) - (A^{*k-1} y, r_{k-2})(A^{*k-1} y, z_{k-2})$$

$$B_k = \frac{(A^{*k-1} y, z_{k-2}) b_k}{\Delta_k}$$

$$D_k = -B_k \frac{(A^{*k-2} y, r_{k-2})}{(A^{*k-1} y, A z_{k-2})}$$

$$E_k = \frac{-(A^{*k-2} y, r_{k-2}) - B_k (A^{*k-1} y, A r_{k-2}) - D_k (A^{*k-1} y, A^2 z_{k-2})}{(A^{*k-1} y, A z_{k-2})}.$$

D'après les expressions de $P_0(\xi)$ et de $P_1(\xi)$, on a : $D_0 = 1$ et $D_1 = \frac{-c_0}{c_1}$ où $c_0 = (y, r_0)$ et $c_1 = (y, A r_0)$.

De plus il faut prendre $B'_0 = 0$.

Par conséquent on a l'algorithme suivant :

◇ Choix de x_0 et y .

Soit $r_0 = b - A x_0$.

$$D_0 = 1$$

$$y_0 = y$$

$$D_1 = \frac{-(y, r_0)}{(y, A r_0)}$$

$$r_1 = r_0 + D_1 A r_0$$

$$x_1 = x_0 - D_1 r_0$$

◇ Pour $k = 0, 1, 2, \dots$ faire

$$y_{k+1} = A^* y_k$$

$$C_k = \frac{1}{D_k}$$

$$B'_k = \frac{-C_k (y_k, r_k)}{(y_k, z_{k-1})} \quad \text{si } k \geq 1, \quad B'_0 = 0$$

$$z_k = B'_k z_{k-1} + C_k r_k$$

$$\Delta_{k+2} = (y_k, r_k) \left[(y_{k+1}, A z_k)^2 - (y_{k+1}, A^2 z_k)(y_{k+1}, z_k) \right] - (y_{k+1}, z_k) \left[(y_{k+1}, r_k)(y_{k+1}, A z_k) - (y_{k+1}, A r_k)(y_{k+1}, z_k) \right]$$

$$B_{k+2} = \frac{(y_{k+1}, z_k) \left[(y_k, r_k)(y_{k+1}, A z_k) - (y_{k+1}, r_k)(y_{k+1}, z_k) \right]}{\Delta_{k+2}}$$

$$D_{k+2} = -B_{k+2} \frac{(y_k, r_k)}{(y_{k+1}, A z_k)}$$

$$E_{k+2} = \frac{-(y_k, r_k) - B_{k+2}(y_{k+1}, A r_k) - D_{k+2}(y_{k+1}, A^2 z_k)}{(y_{k+1}, A z_k)}$$

$$r_{k+2} = B_{k+2} A r_k + r_k + D_{k+2} A^2 z_k + E_{k+2} A z_k$$

$$x_{k+2} = x_k - B_{k+2} r_k - D_{k+2} A z_k - E_{k+2} z_k.$$

◇ Si $r_{k+2} = 0$ alors continuer.

Deuxième cas : $U_i(\xi) = P_i(\xi)$.

On note $\tilde{r}_k = P_k(A)^* y$ et $\tilde{z}_k = P_k^{(1)}(A)^* y$.

On a : $B'_k = \frac{-C_k c(\xi P_{k-1}(\xi) P_k(\xi))}{c(\xi P_{k-1}(\xi) P_k^{(1)}(\xi))}$. Par suite $B_k = \frac{-C_k (\tilde{r}_{k-1}, A r_k)}{(\tilde{z}_{k-1}, A r_{k-1})} = \frac{-C_k \alpha_k}{(\tilde{z}_{k-1}, A r_{k-1})}$ en

notant $\alpha_k = c(\xi P_{k-1}(\xi) P_k(\xi))$.

De plus, notons $\beta_k = c(\xi^2 P_{k-1}(\xi) P_k^{(1)}(\xi))$.

On a alors : $\alpha_k = (\tilde{r}_k, A r_{k-1})$ et $\beta_k = (\tilde{r}_{k-1}, A^2 z_k)$.

On a :

$$\Delta_{k+2} = \alpha_k \left[c(\xi^2 P_k P_k^{(1)}) c(\xi P_{k+1} P_k^{(1)}) - c(\xi^2 P_{k+1} P_k^{(1)}) c(\xi P_k P_k^{(1)}) \right] \\ - \beta_k \left[c(\xi P_k^2) c(\xi P_{k+1} P_k^{(1)}) - c(\xi P_{k+1} P_k) c(\xi P_k P_k^{(1)}) \right].$$

Par suite

$$\Delta_{k+2} = \alpha_k \left[(\tilde{r}_k, A^2 z_k)(\tilde{z}_k, A r_{k+1}) - (\tilde{r}_{k+1}, A^2 z_k)(\tilde{z}_k, A r_k) \right] \\ - \beta_k \left[(\tilde{r}_k, A r_k)(\tilde{z}_k, A r_{k+1}) - (\tilde{r}_k, A r_{k+1})(\tilde{z}_k, A r_k) \right].$$

Comme $B_{k+2} = \frac{c(\xi^2 P_{k-1} P_k^{(1)}) c(P_k^2) c(\xi P_{k+1} P_k^{(1)})}{\Delta_{k+2}}$, on a : $B_{k+2} = \frac{\beta_k (\tilde{r}_k, r_k) (\tilde{z}_k, A r_{k+1})}{\Delta_{k+2}}$.

Comme $D_{k+2} = -B_{k+2} \frac{c(\xi P_{k-1} P_k)}{c(\xi^2 P_{k-1} P_k^{(1)})}$, on a : $D_{k+2} = -B_{k+2} \frac{\alpha_k}{\beta_k}$.

Comme $E_{k+2} = \frac{-B_{k+2} c(\xi P_{k+1} P_k) - D_{k+2} c(\xi^2 P_{k+1} P_k^{(1)})}{c(\xi P_{k+1} P_k^{(1)})}$, on a :

$$E_{k+2} = \frac{-B_{k+2} (\tilde{r}_k, A r_{k+1}) - D_{k+2} (\tilde{r}_{k+1}, A^2 z_k)}{(\tilde{z}_k, A r_{k+1})}.$$

Les formules pour α_k et β_k sont valables pour $k \geq 1$. Elles nous permettent de chercher r_{k+2} . Il faut donc chercher autrement r_1, r_2 . De plus il faut connaître D_2 .

On suppose que $\tilde{z}_0 = \tilde{r}_0 = y$ et $z_0 = r_0$ et on rappelle que $c_i = (y, A^i r_0)$.

D'après la formule de $P_1(\xi)$, on a : $r_1 = r_0 + D_1 A r_0$ avec $D_1 = \frac{-(y, r_0)}{(y, A r_0)} = \frac{-c_0}{c_1}$.

Exprimons r_2 .

$$P_2(\xi) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \xi & \xi^2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}} = \xi^2 \frac{\begin{vmatrix} c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}} - \xi \frac{\begin{vmatrix} c_0 & c_2 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}} + 1.$$

On a : $c_2 = (y, A^2 r_0)$.

Comme $c_3 = (A^* y, A^2 r_0)$ et comme $A^2 r_0 = \frac{1}{D_1} (A r_1 - A r_0)$, on a :

$$c_3 = \frac{1}{D_1} [(y, A^2 r_1) - c_2] = \frac{-c_1}{c_0} [(A^* \tilde{r}_0, A r_1) - c_2].$$

Par suite $c_0 c_3 - c_1 c_2 = -c_1 (A^* \tilde{r}_0, A r_1)$.

Par conséquent en notant $D_2 = \frac{c_0 c_2 - c_1^2}{c_1 c_3 - c_2^2}$, on a : $r_2 = D_2 A^2 r_0 + \frac{c_1 (A^* \tilde{r}_0, A r_1)}{c_1 c_3 - c_2^2} A r_0 + r_0$.

Par conséquent, on a l'algorithme suivant :

◇ Choix de x_0 et y .

Soit $r_0 = b - A x_0$

$$z_0 = r_0$$

$$\tilde{z}_0 = \tilde{r}_0 = y$$

$$c_0 = (y, r_0)$$

$$c_1 = (y, A r_0)$$

$$D_1 = \frac{-c_0}{c_1}$$

$$r_1 = r_0 + D_1 A r_0$$

$$\tilde{r}_1 = \tilde{r}_0 + \overline{D_1} A^* \tilde{r}_0$$

$$x_1 = x_0 - D_1 r_0$$

$$c_2 = (y, A^2 r_0)$$

$$c_3 = \frac{1}{D_1} [(y, A^2 r_1) - c_2]$$

$$D_2 = \frac{c_0 c_2 - c_1^2}{c_1 c_3 - c_2^2}$$

$$r_2 = D_2 A^2 r_0 + \frac{c_1 (A^* \tilde{r}_0, A r_1)}{c_1 c_3 - c_2^2} A r_0 + r_0$$

$$\tilde{r}_2 = \bar{D}_2 A^{*2} \tilde{r}_0 + \frac{\bar{c}_1 (A^* \tilde{r}_0, A r_1)}{\bar{c}_1 \bar{c}_3 - \bar{c}_2^2} A^* \tilde{r}_0 + \tilde{r}_0$$

$$x_2 = x_0 - D_2 A r_0 - \frac{c_1 (A^* \tilde{r}_0, A r_1)}{c_1 c_3 - c_2^2} r_0$$

◇ Pour $k = 1, 2, 3, \dots$ faire

$$C_k = \frac{1}{D_k}$$

$$\alpha_k = (\tilde{r}_k, A r_{k-1})$$

$$B'_k = \frac{-C_k \alpha_k}{(\tilde{z}_{k-1}, A r_{k-1})}$$

$$z_k = B'_k z_{k-1} + C_k r_k$$

$$\tilde{z}_k = \bar{B}'_k \tilde{z}_{k-1} + \bar{C}'_k \tilde{r}_k$$

$$\beta_k = (\tilde{r}_{k-1}, A^2 z_k)$$

$$\Delta_{k+2} = \alpha_k \left[(\tilde{r}_k, A^2 z_k)(\tilde{z}_k, A r_{k+1}) - (\tilde{r}_{k+1}, A^2 z_k)(\tilde{z}_k, A r_k) \right] \\ - \beta_k \left[(\tilde{r}_k, A r_k)(\tilde{z}_k, A r_{k+1}) - (\tilde{r}_k, A r_{k+1})(\tilde{z}_k, A r_k) \right]$$

$$B_{k+2} = \frac{\beta_k (\tilde{r}_k, r_k) (\tilde{z}_k, A r_{k+1})}{\Delta_{k+2}}$$

$$D_{k+2} = -B_{k+2} \frac{\alpha_k}{\beta_k}$$

$$E_{k+2} = \frac{-B_{k+2} (\tilde{r}_k, A r_{k+1}) - D_{k+2} (\tilde{r}_{k+1}, A^2 z_k)}{(\tilde{z}_k, A r_{k+1})}$$

$$r_{k+2} = r_k + B_{k+2} A r_k + D_{k+2} A^2 z_k + E_{k+2} A z_k$$

$$\tilde{r}_{k+2} = \tilde{r}_k + \bar{B}_{k+2} A^* \tilde{r}_k + \bar{D}_{k+2} A^{*2} \tilde{z}_k + \bar{E}_{k+2} A^* \tilde{z}_k$$

$$x_{k+2} = x_k - B_{k+2} r_k - D_{k+2} A z_k - E_{k+2} z_k.$$

◇ Si $r_{k+2} = 0$ alors continuer.

Troisième cas : $U_i(\xi) = P_i^{(1)}(\xi)$.

On note $\tilde{r}_k = P_k(A)^* y$ et $\tilde{z}_k = P_k^{(1)}(A)^* y$.

On a : $B'_{k+1} = \frac{-C_{k+1} c(\xi P_{k+1}(\xi) P_k^{(1)}(\xi))}{c(\xi P_k^{(1)2}(\xi))}$. Par suite $B'_{k+1} = \frac{-C_{k+1} (\tilde{r}_{k+1}, A z_k)}{(\tilde{z}_k, A z_k)}$.

$$\text{Comme } B_{k+2} = \frac{c(\xi^2 P_{k-1}^{(1)}(\xi) P_k^{(1)}(\xi)) c(P_k(\xi) P_{k+1}^{(1)}(\xi))}{c(\xi^2 P_{k+1}^{(1)}(\xi) P_k^{(1)}(\xi)) c(\xi P_k(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi))}, \text{ on a : } B_{k+2} = \frac{(\tilde{r}_k, z_{k+1}) (\tilde{z}_k, A^2 z_{k-1})}{(\tilde{r}_k, A z_{k-1}) (\tilde{z}_{k+1}, A^2 z_k)}.$$

$$\text{Comme } D_{k+2} = \frac{-c(P_{k+1}^{(1)}(\xi) P_k(\xi))}{c(\xi^2 P_{k+1}^{(1)}(\xi) P_k^{(1)}(\xi))}, \text{ on a : } D_{k+2} = \frac{-(\tilde{r}_k, z_{k+1})}{(\tilde{z}_{k+1}, A^2 z_k)}.$$

$$\text{Comme } E_{k+2} = \frac{-c(P_k^{(1)}(\xi) P_k(\xi)) - B_{k+2} c(\xi P_k^{(1)}(\xi) P_k(\xi)) - D_{k+2} c(\xi^2 P_k^{(1)2}(\xi))}{c(\xi P_k^{(1)2}(\xi))}, \text{ on a :}$$

$$E_{k+2} = \frac{-(\tilde{r}_k, z_k) - B_{k+2} (\tilde{r}_k, A z_k) - D_{k+2} (\tilde{z}_k, A^2 z_k)}{(\tilde{z}_k, A z_k)}.$$

$$\text{De plus on a : } r_1 = r_0 + D_1 A r_0 \text{ avec } D_1 = \frac{-(\gamma, r_0)}{(\gamma, A r_0)}.$$

Par conséquent, on a l'algorithme suivant :

◇ Choix de x_0 et y .

$$\text{Soit } r_0 = b - A x_0$$

$$z_0 = r_0$$

$$\tilde{z}_0 = \tilde{r}_0 = y$$

$$D_1 = \frac{-(\gamma, r_0)}{(\gamma, A r_0)}$$

$$r_1 = r_0 + D_1 A r_0$$

$$\tilde{r}_1 = \tilde{r}_0 + \bar{D}_1 A^* \tilde{r}_0$$

$$x_1 = x_0 - D_1 r_0$$

◇ Pour $k = 0, 1, 2, \dots$ faire

$$C_{k+1} = \frac{1}{D_{k+1}}$$

$$B'_{k+1} = \frac{-C_{k+1} (\tilde{r}_{k+1}, A z_k)}{(\tilde{z}_k, A z_k)}$$

$$z_{k+1} = B'_{k+1} z_k + C_{k+1} r_{k+1}$$

$$\tilde{z}_{k+1} = \bar{B}'_{k+1} \tilde{z}_k + \bar{C}'_{k+1} \tilde{r}_{k+1}$$

$$B_{k+2} = \frac{(\tilde{r}_k, z_{k+1}) (\tilde{z}_k, A^2 z_{k-1})}{(\tilde{r}_k, A z_{k-1}) (\tilde{z}_{k+1}, A^2 z_k)}$$

$$D_{k+2} = \frac{-(\tilde{r}_k, z_{k+1})}{(\tilde{z}_{k+1}, A^2 z_k)}$$

$$E_{k+2} = \frac{-(\tilde{r}_k, z_k) - B_{k+2}(\tilde{r}_k, A z_k) - D_{k+2}(\tilde{z}_k, A^2 z_k)}{(\tilde{z}_k, A z_k)}$$

$$r_{k+2} = r_k + B_{k+2} A r_k + D_{k+2} A^2 z_k + E_{k+2} A z_k$$

$$\tilde{r}_{k+2} = \tilde{r}_k + \bar{B}_{k+2} A^* \tilde{r}_k + \bar{D}_{k+2} A^{*2} \tilde{z}_k + \bar{E}_{k+2} A^* \tilde{z}_k$$

$$x_{k+2} = x_k - B_{k+2} r_k - D_{k+2} A z_k - E_{k+2} z_k$$

◇ Si $r_{k+2} = 0$ alors continuer.

4. RESULTATS NUMERIQUES POUR LES METHODES A_i / B_j

Nous savons que le BCG[10] nécessite seulement deux multiplications matrice-vecteur par itération. Nous allons uniquement comparer les méthodes dont les algorithmes utilisent deux ou trois multiplications matrice-vecteur par itération.

Les algorithmes nécessitant deux multiplications matrice-vecteur sont :

- ◇ $A_4, A_8 / B_6, A_8 / B_8, A_8 / B_{10}, A_5 / B_5, A_5 / B_{10}$ lorsque $U_i(\xi) = \xi^i$
- ◇ $A_4, A_8 / B_8, A_8 / B_{10}, A_5 / B_{10}$ lorsque $U_i(\xi) = P_i(\xi)$
- ◇ $A_8 / B_6, A_8 / B_8, A_8 / B_{10}, A_5 / B_{10}$ lorsque $U_i(\xi) = P_i^{(1)}(\xi)$.

Les algorithmes nécessitant trois multiplications matrice-vecteur sont :

- ◇ $A_8 / B_1, A_8 / B_5, A_5 / B_6, A_5 / B_8, A_1 / B_6, A_1 / B_8$ lorsque $U_i(\xi) = \xi^i$
- ◇ $A_8 / B_6, A_5 / B_5$ lorsque $U_i(\xi) = P_i(\xi)$
- ◇ $A_5 / B_5, A_5 / B_6, A_1 / B_6$ lorsque $U_i(\xi) = P_i^{(1)}(\xi)$.

Pour l'exemple numérique, nous choisissons de prendre

$$A = \begin{pmatrix} B & -I & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -I & B & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -I \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -I & B \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & \alpha & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \beta & 4 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \alpha \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \beta & 4 \end{pmatrix}$$

avec $\alpha = -1 + \delta$ et $\beta = -1 - \delta$. B est de dimension 10 et A est de dimension 100.

Ces matrices représentent la discrétisation 5-point de l'opérateur $-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial}{\partial x}$ sur un rectangle.

Le vecteur b est pris tel que $b = A X$, où $X = (1, \dots, 1)^T$ (X est la solution du système). Nous allons prendre pour δ différentes valeurs.

PREMIER EXEMPLE : $\delta = 0$.

Dans ce cas, la matrice A est symétrique.

Dans le cas où $U_i(\xi) = \xi^i$, seuls trois algorithmes donnent au plus 11 chiffres exacts ($-\log_{10}$ de la norme du résidu). Cela signifie que la précision sur le résidu est en 10^{-11} . On constate, sur les figures 1, 2 et 3, que les autres algorithmes donnent au moins 11 chiffres exacts en environ 25 itérations. Cependant, certains ne sont pas très stables.

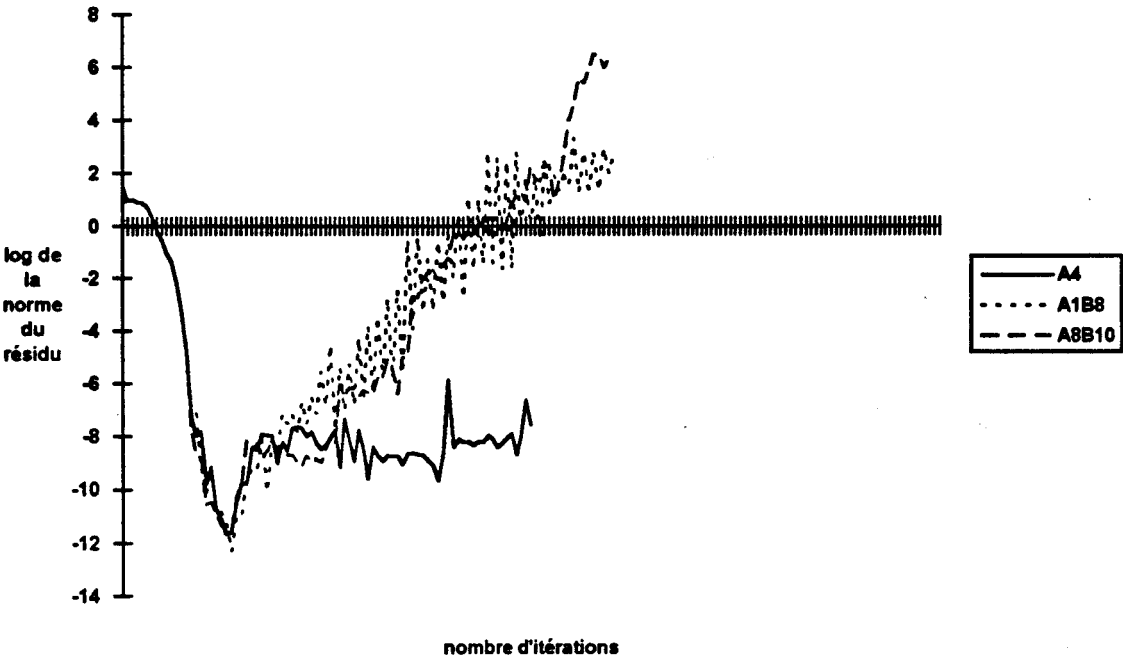


fig 1

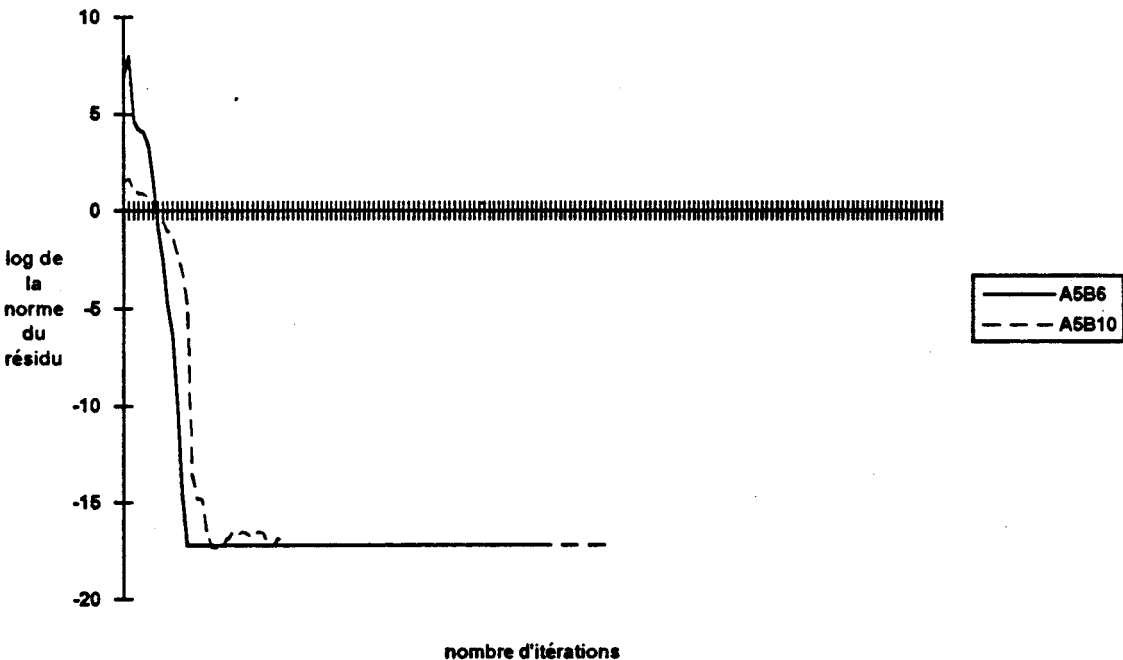


fig 2

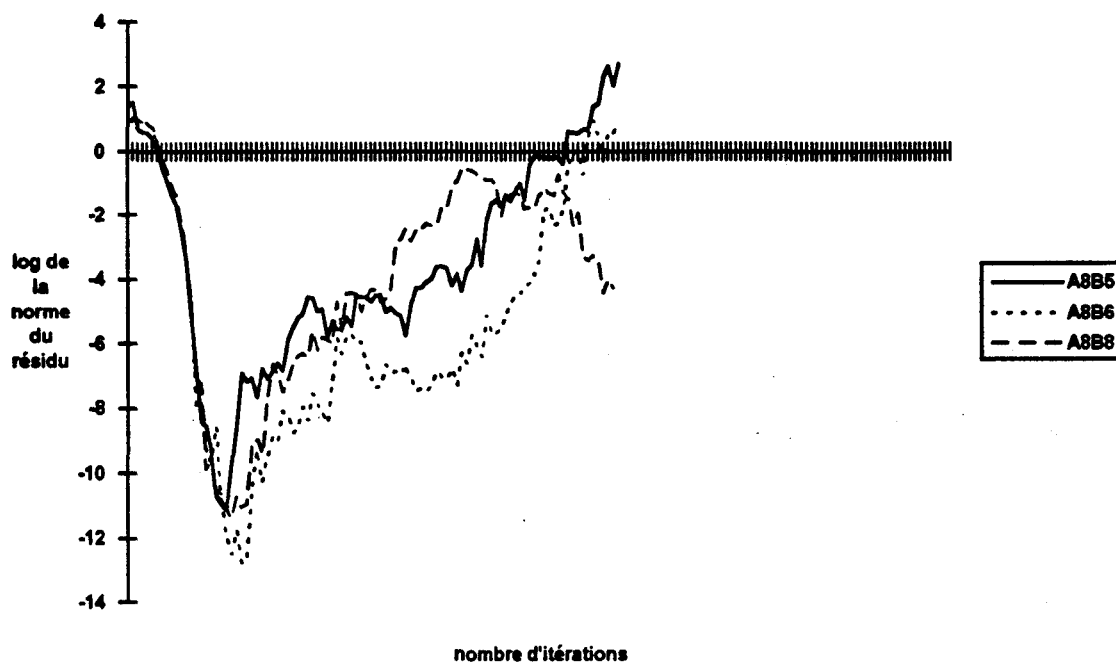


fig 3

Dans le cas où $U_i(\xi) = P_i(\xi)$ ou $U_i(\xi) = P_i^{(1)}(\xi)$, les différents algorithmes considérés permettent de trouver au moins 15 chiffres exacts, et sont plus stables que les précédents.

Dans le cas où $U_i(\xi) = P_i(\xi)$, on a les figures 4 et 5.

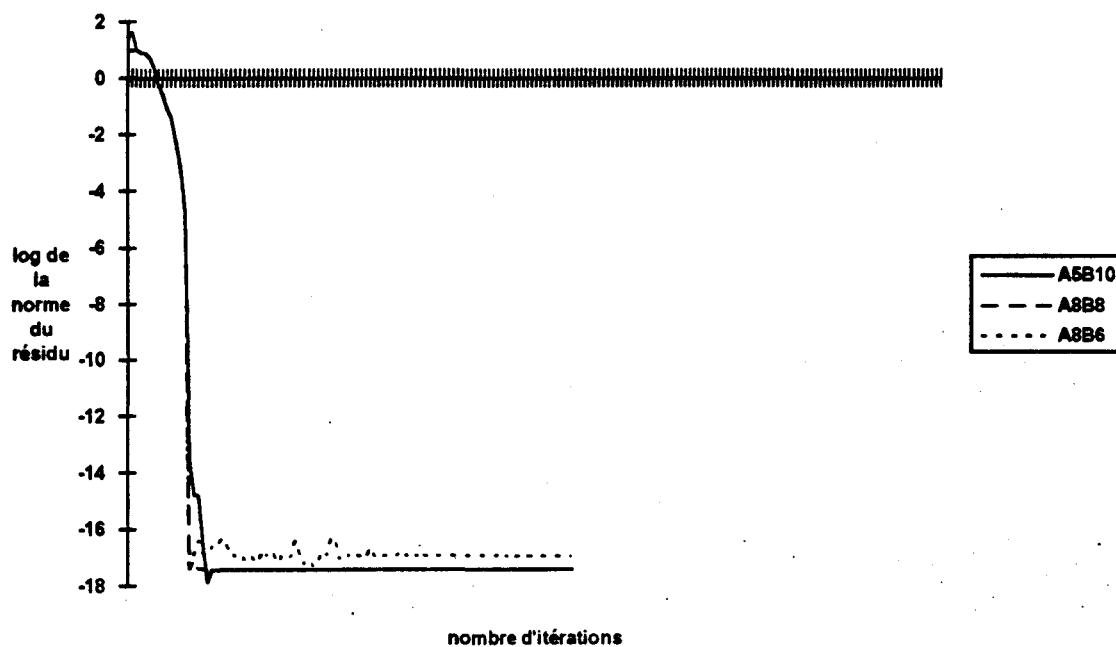


fig 4

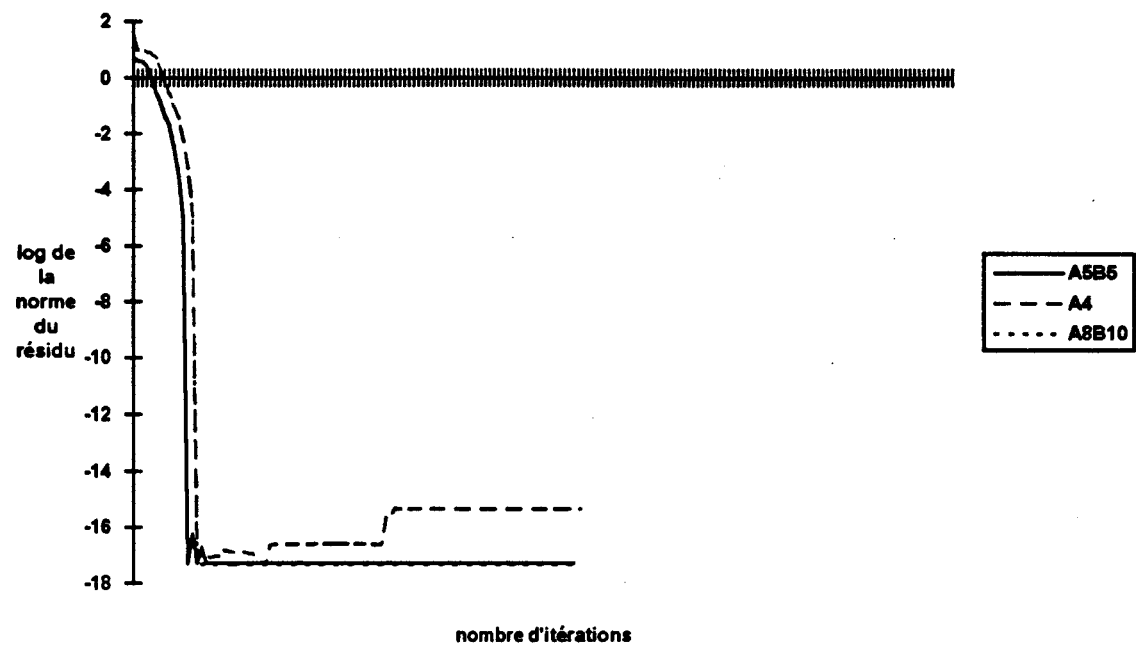


fig 5

Dans le cas où $U_i(\xi) = P_i^{(1)}(\xi)$, on a les figures 6 et 7.

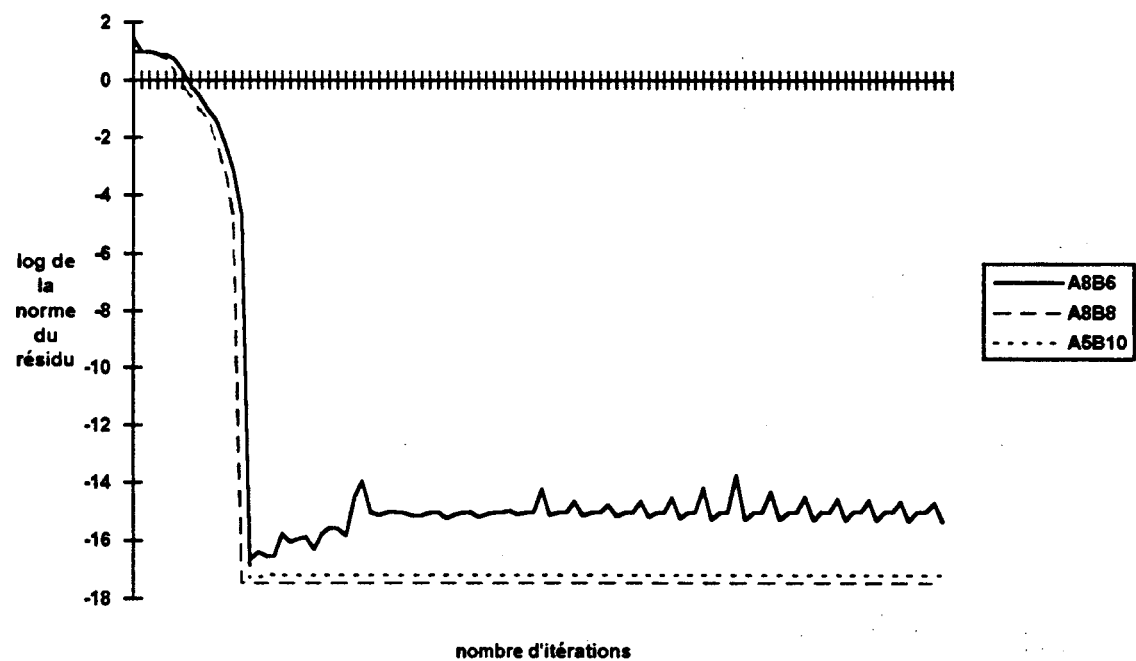


fig 6

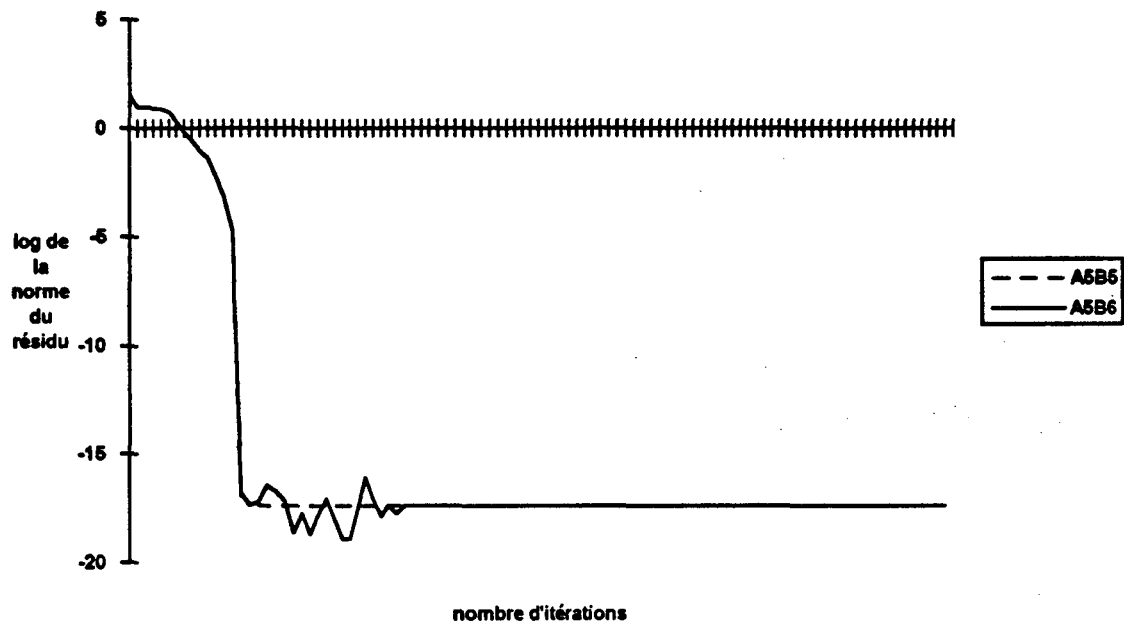


fig 7

Lorsque $U_i(\xi) = \xi^i$, les résultats sont moins précis et en général moins bons que lorsque $U_i(\xi) = P_i(\xi)$ ou $U_i(\xi) = P_i^{(1)}(\xi)$.

DEUXIEME EXEMPLE : $\delta = 0.2$.

Dans le cas où $U_i(\xi) = \xi^i$, les différents algorithmes donnent au plus 6 chiffres exacts ($-\log_{10}$ de la norme du résidu). Cela signifie que la précision sur le résidu est en 10^{-6} .

Si nous comparons les algorithmes A_5 / B_{10} et A_5 / B_6 , nous constatons (fig8) que l'algorithme A_5 / B_{10} est meilleur et nécessite 2 multiplications matrice-vecteur.

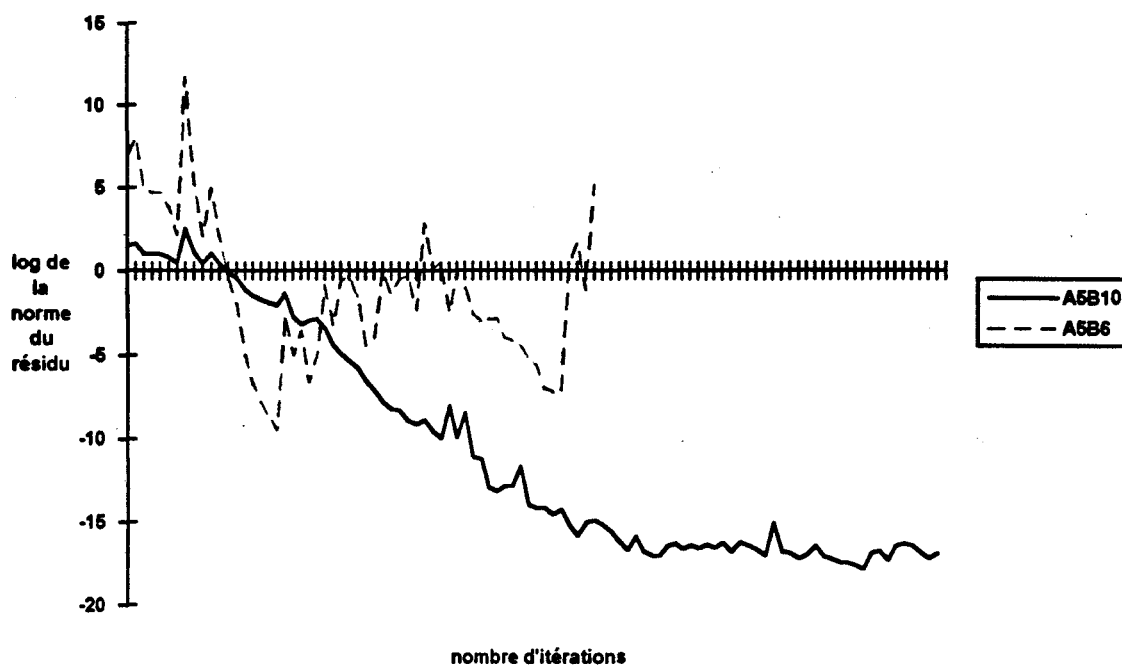


fig 8

Dans le cas où $U_i(\xi) = P_i(\xi)$ ou $U_i(\xi) = P_i^{(1)}(\xi)$, nous constatons que les différents algorithmes sont meilleurs et sont plus stables. Ils sont plus nombreux à donner au moins 14 chiffres exacts.

Dans le cas où $U_i(\xi) = P_i(\xi)$, on a les figures 9 et 10.

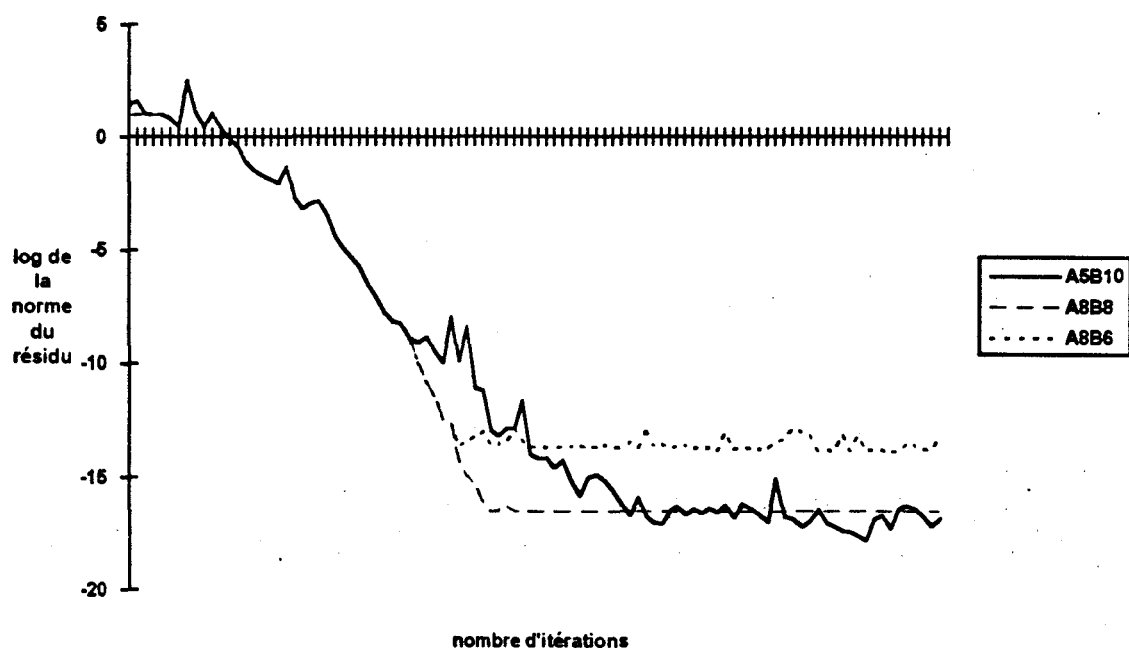


fig 9

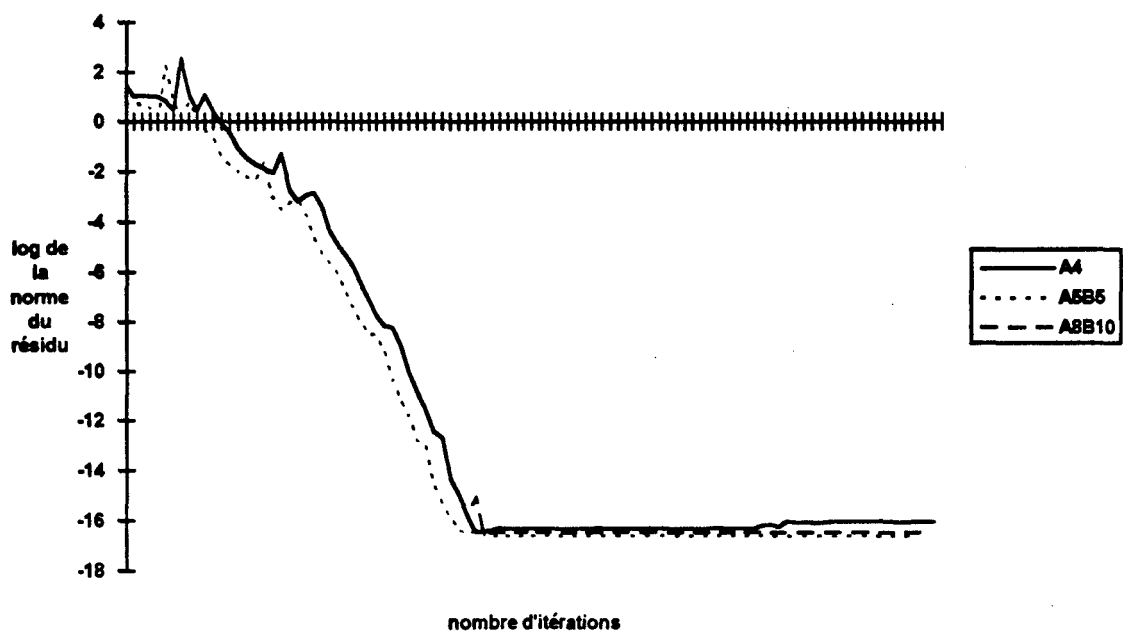


fig 10

Dans le cas où $U_i(\xi) = P_i^{(1)}(\xi)$, on a les figures 11 et 12.

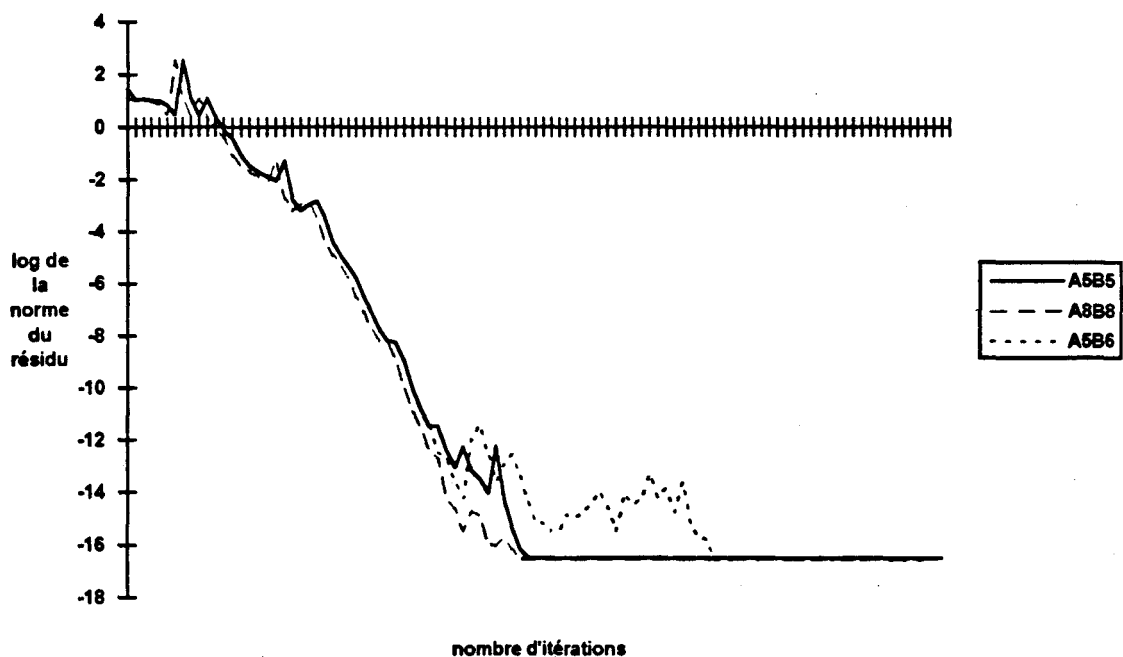


fig 11

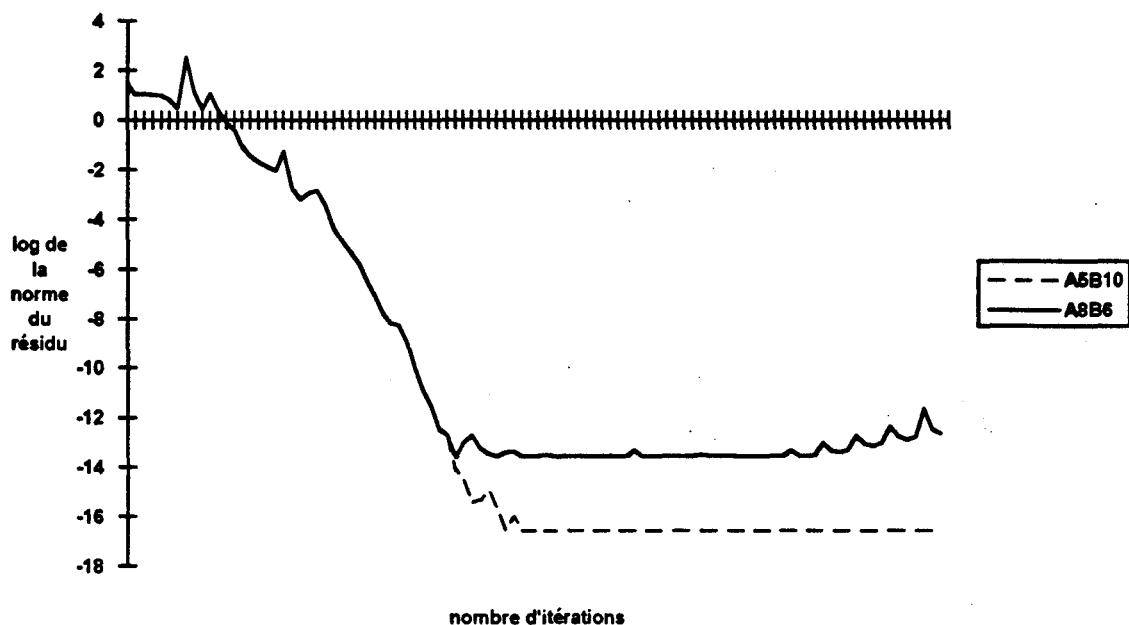


fig 12

TROISIEME EXEMPLE : $\delta = 1$.

Dans le cas où $U_i(\xi) = \xi^i$, on retrouve des résultats comparables au cas précédent.

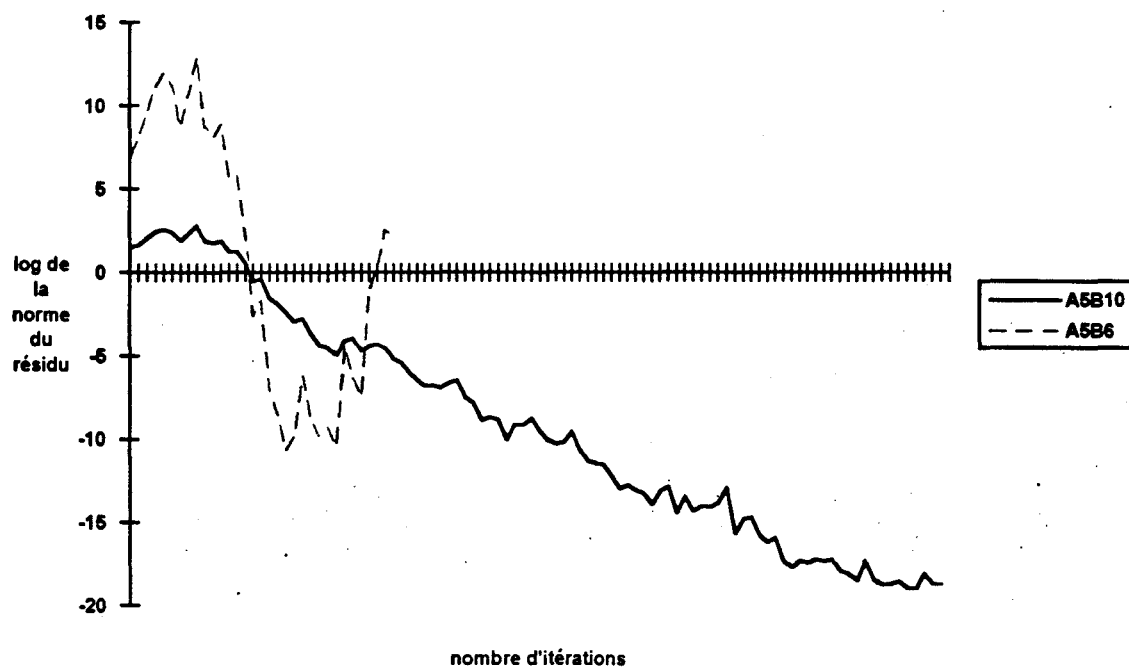


fig 13

Dans le cas où $U_i(\xi) = P_i(\xi)$ ou $U_i(\xi) = P_i^{(1)}(\xi)$, nous constatons que les différents algorithmes considérés convergent toujours avant 100 itérations (100 est la dimension du système). On trouve au moins 14 chiffres exacts (sauf A_8 / B_6 , mais plus ou moins rapidement suivant les algorithmes).

Dans le cas où $U_i(\xi) = P_i(\xi)$, on a les figures 14 et 15.

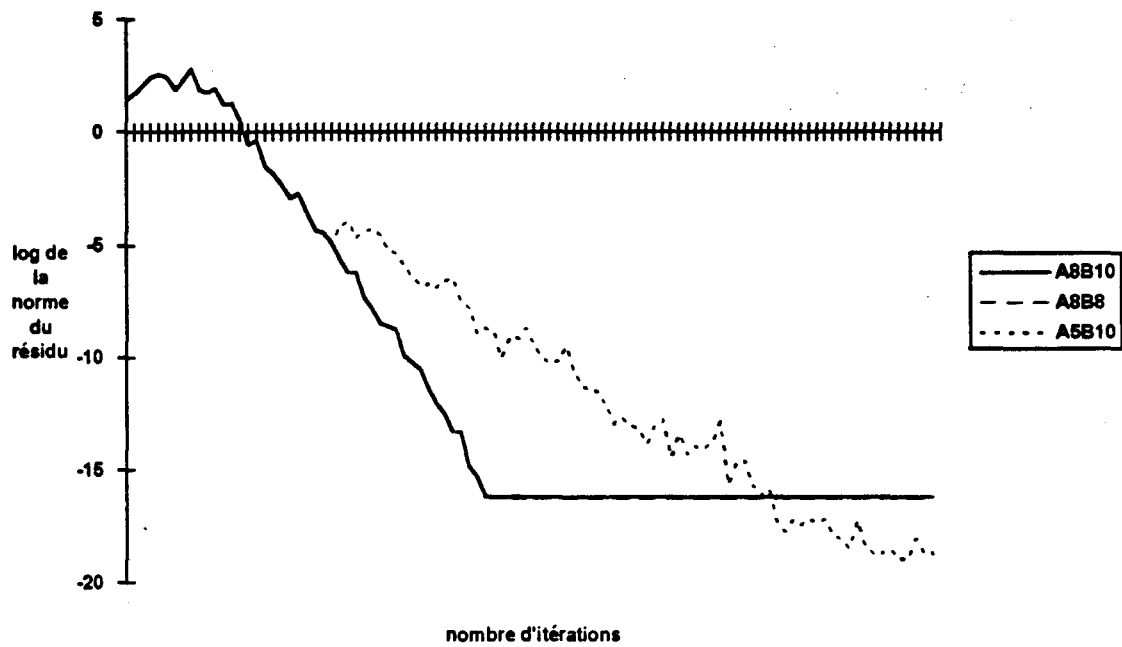


fig 14

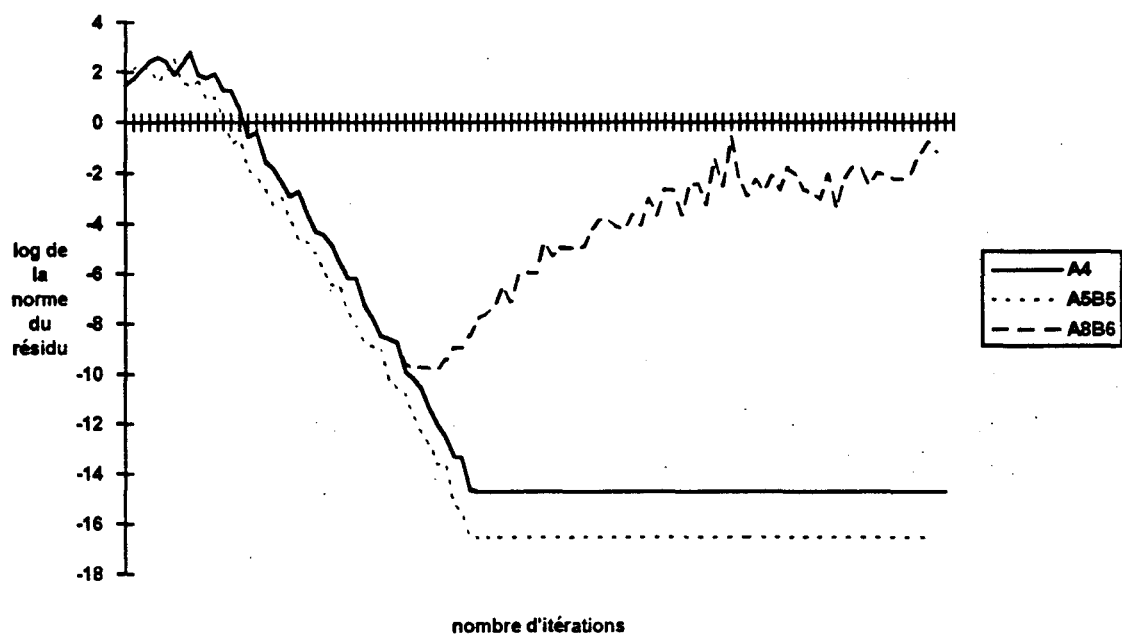


fig 15

Dans le cas où $U_i(\xi) = P_i^{(1)}(\xi)$, on a les figures 16 et 17.

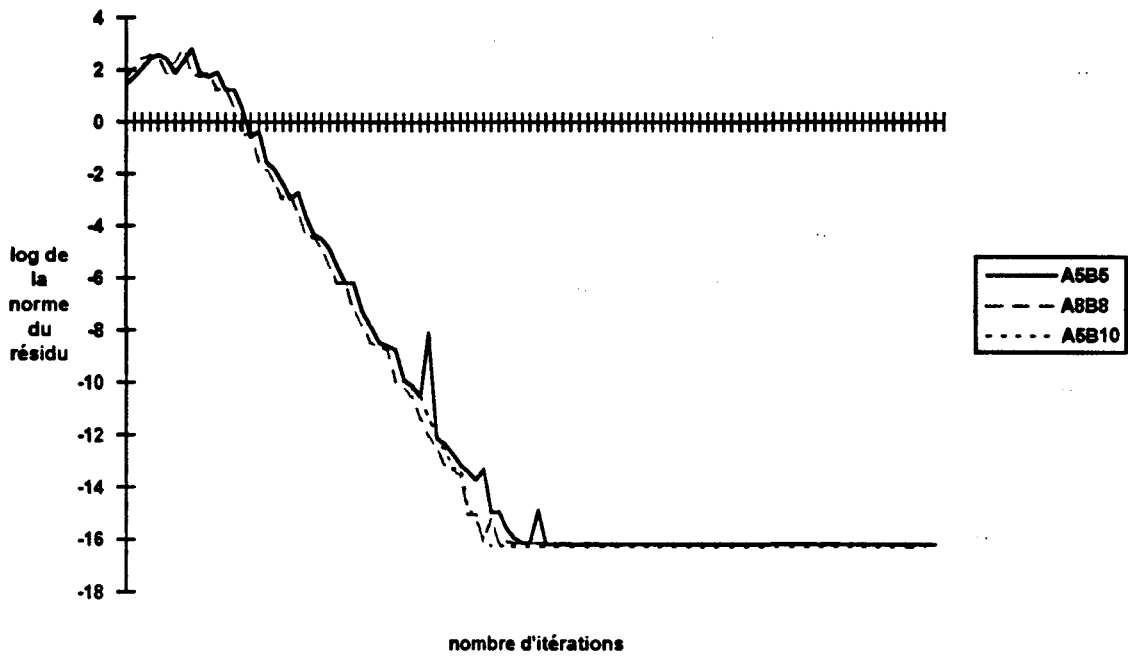


fig 16

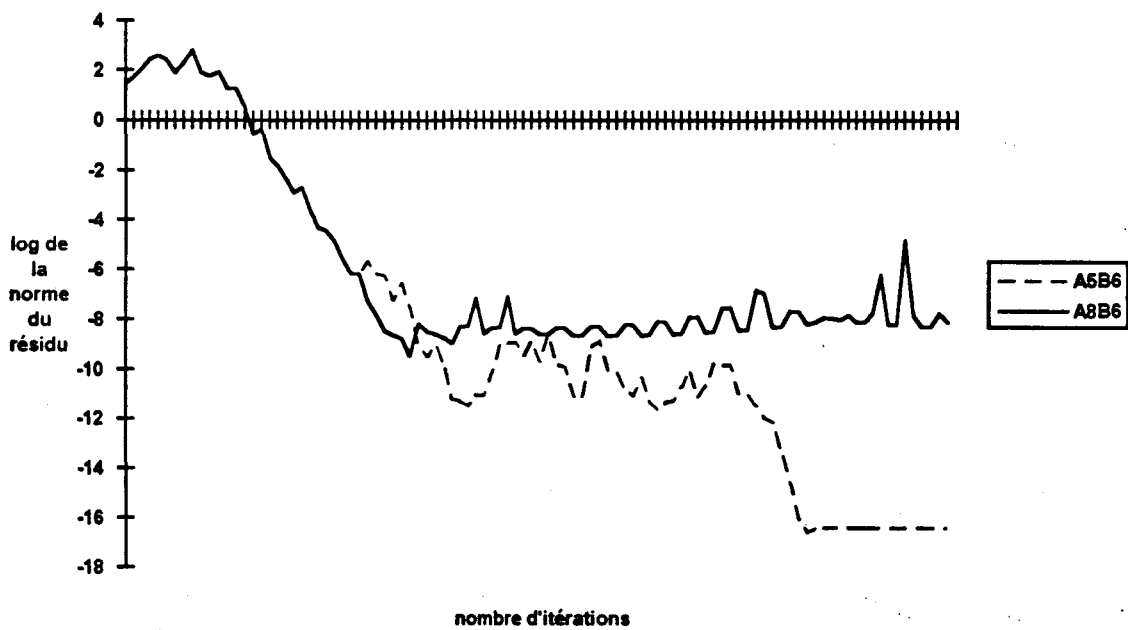


fig 17

Lorsque $U_i(\xi) = \xi^i$, les résultats sont moins précis et moins nombreux que lorsque $U_i(\xi) = P_i(\xi)$ ou $U_i(\xi) = P_i^{(1)}(\xi)$.

QUATRIEME EXEMPLE : $\delta = 5$.

Dans le cas où $U_i(\xi) = \xi^i$, les algorithmes A_4 (Orthores), A_8 / B_1 , A_8 / B_5 , A_8 / B_6 (Orthodir), A_5 / B_8 , A_1 / B_8 , A_5 / B_5 , A_5 / B_8 , A_5 / B_{10} donnent au plus 6 chiffres exacts ($-\log_{10}$ de la norme du résidu). Cela signifie que la précision sur le résidu est en 10^{-6} .

Si nous comparons les algorithmes A_8 / B_{10} (Orthomin) et A_5 / B_6 , nous constatons (fig18) que l'algorithme A_5 / B_6 donne 8 chiffres exacts. Cependant, l'algorithme A_5 / B_6 nécessite 3 multiplications matrice-vecteur. L'algorithme A_8 / B_{10} nécessite seulement 2 multiplications matrice-vecteur mais ne fournit que 6 chiffres exacts.

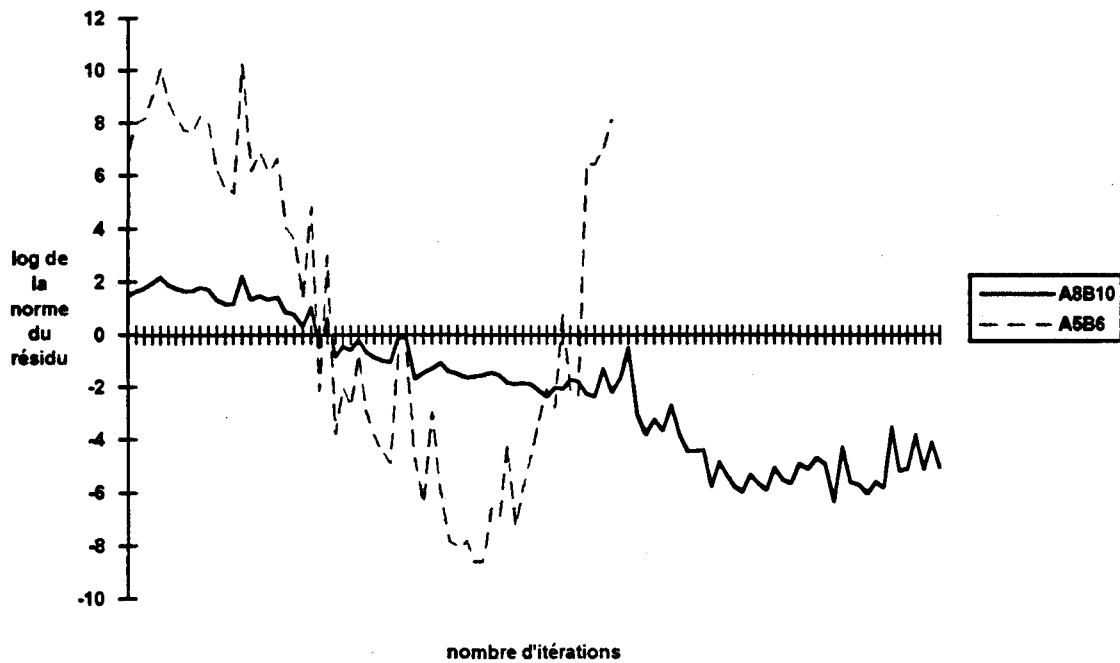


fig 18

Dans le cas où $U_i(\xi) = P_i(\xi)$ ou $U_i(\xi) = P_i^{(1)}(\xi)$, nous constatons que les différents algorithmes considérés convergent toujours avant 100 itérations (100 est la dimension du système). On trouve au moins 14 chiffres exacts, mais plus ou moins rapidement suivant les algorithmes.

Dans le cas où $U_i(\xi) = P_i(\xi)$, on a les figures 19 et 20.

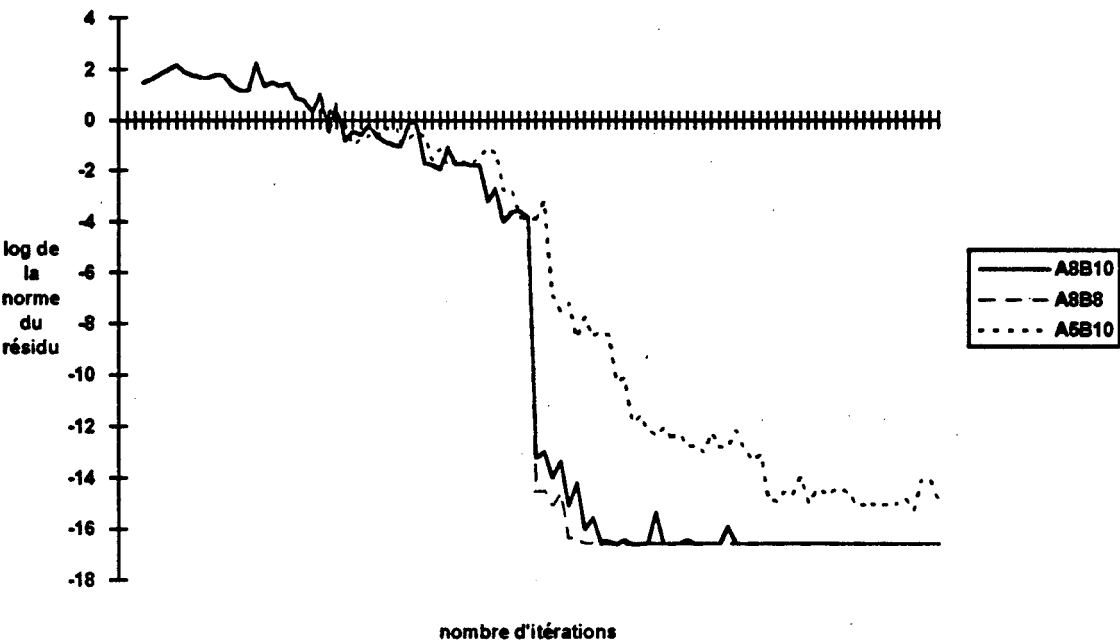


fig 19

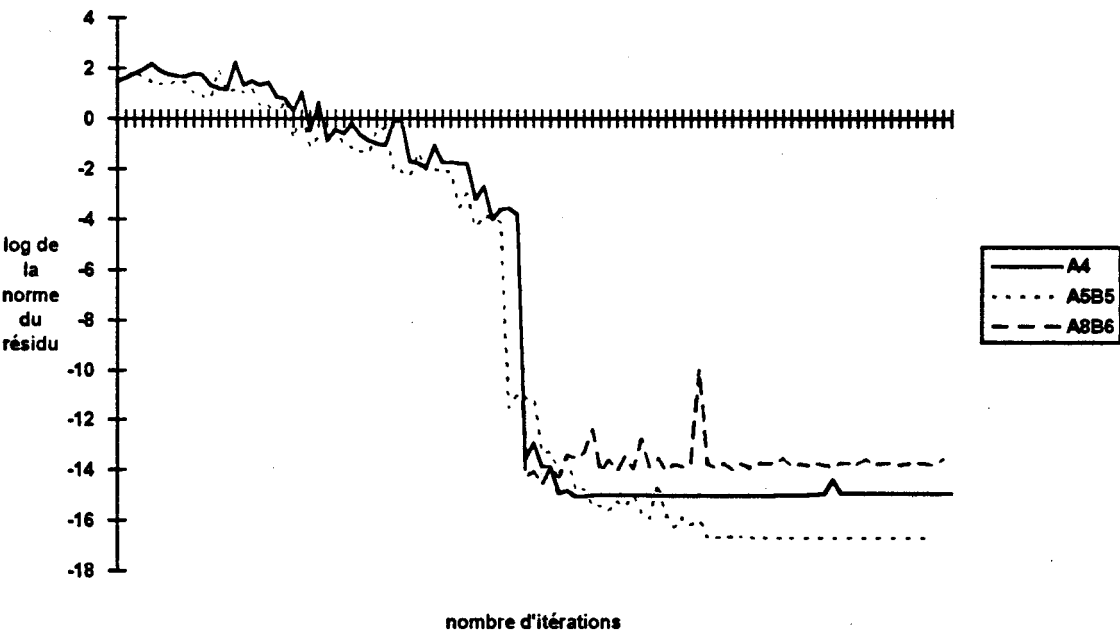


fig 20

Dans le cas où $U_i(\xi) = P_i^{(1)}(\xi)$, on a les figures 21 et 22.

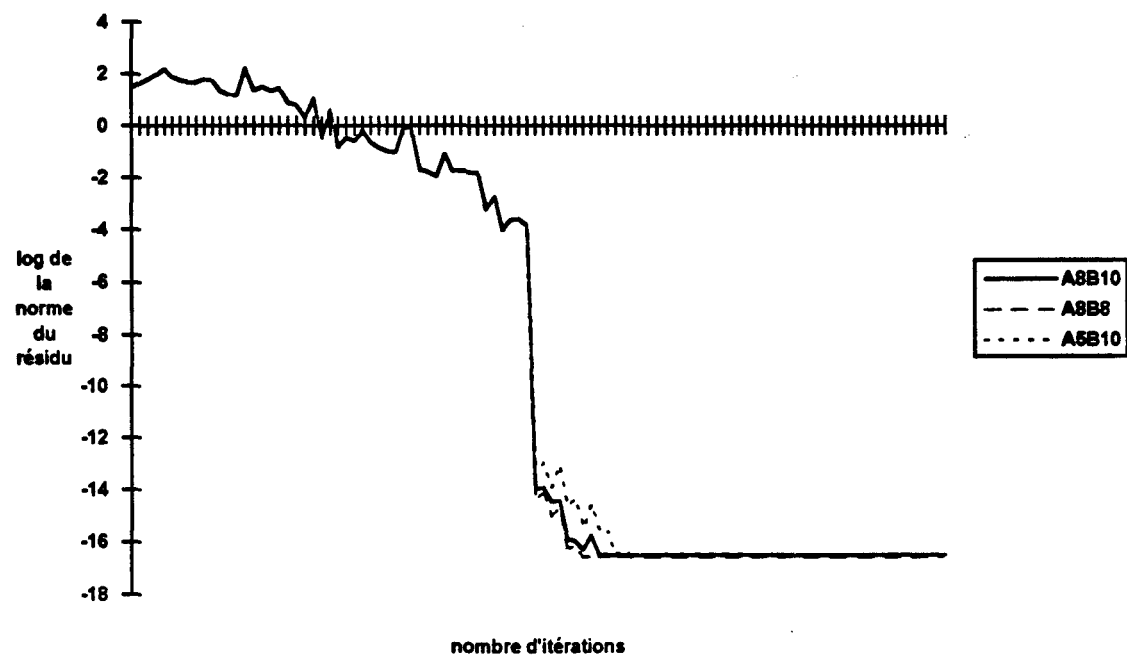


fig 21

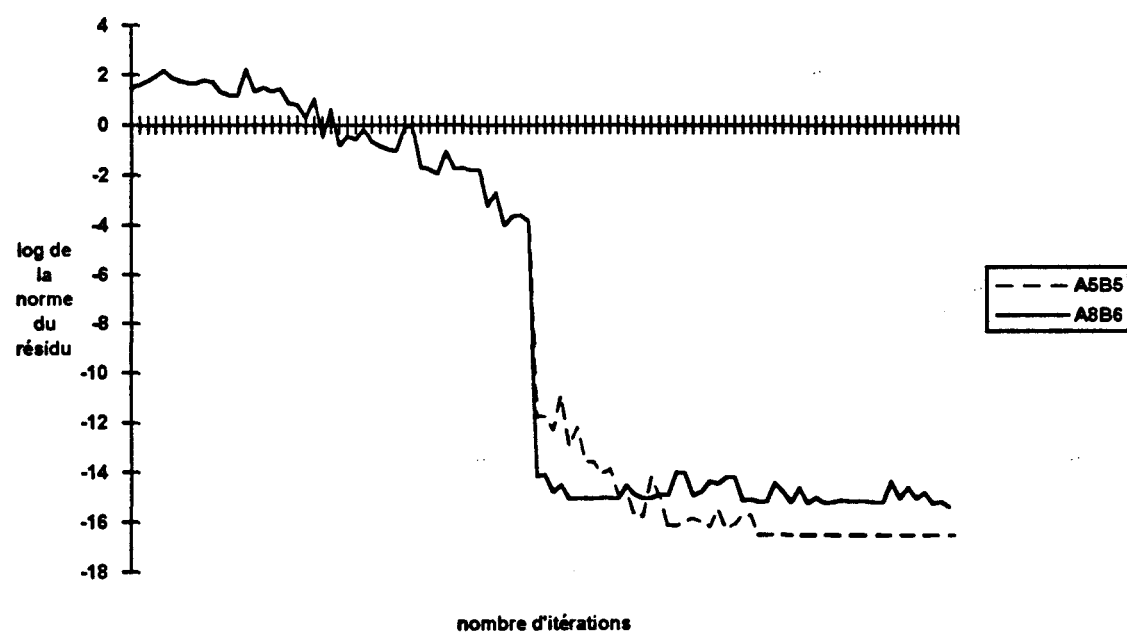
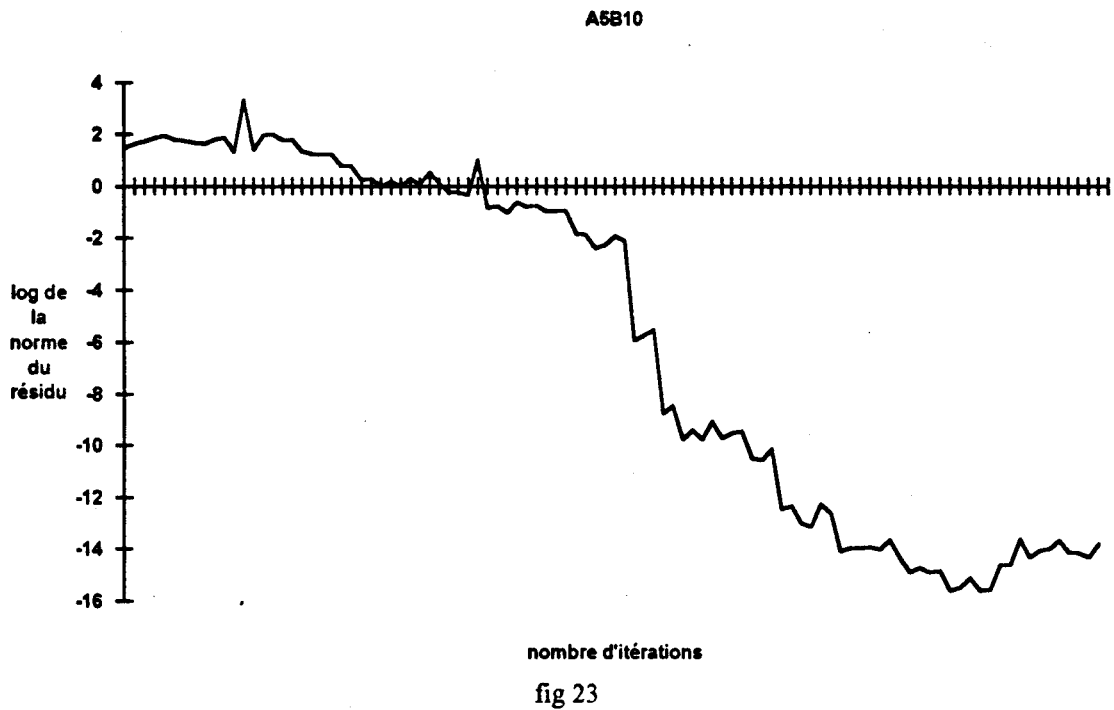


fig 22

Lorsque $U_i(\xi) = \xi^i$, les résultats sont moins précis (au maximum 8 chiffres exacts) que lorsque $U_i(\xi) = P_i(\xi)$ ou $U_i(\xi) = P_i^{(1)}(\xi)$.

CINQUIEME EXEMPLE : $\delta = 8$.

Dans le cas où $U_i(\xi) = \xi^i$, les différents algorithmes donnent au plus 6 chiffres exacts ($-\log_{10}$ de la norme du résidu). Cela signifie que la précision sur le résidu est en 10^{-6} . On a la figure 23.



Dans le cas où $U_i(\xi) = P_i(\xi)$ ou $U_i(\xi) = P_i^{(1)}(\xi)$, nous constatons que les différents algorithmes sont meilleurs et sont plus stables. Ils sont plus nombreux à donner au moins 14 chiffres exacts.

Dans le cas où $U_i(\xi) = P_i(\xi)$, on a les figures 24 et 25.



fig 24

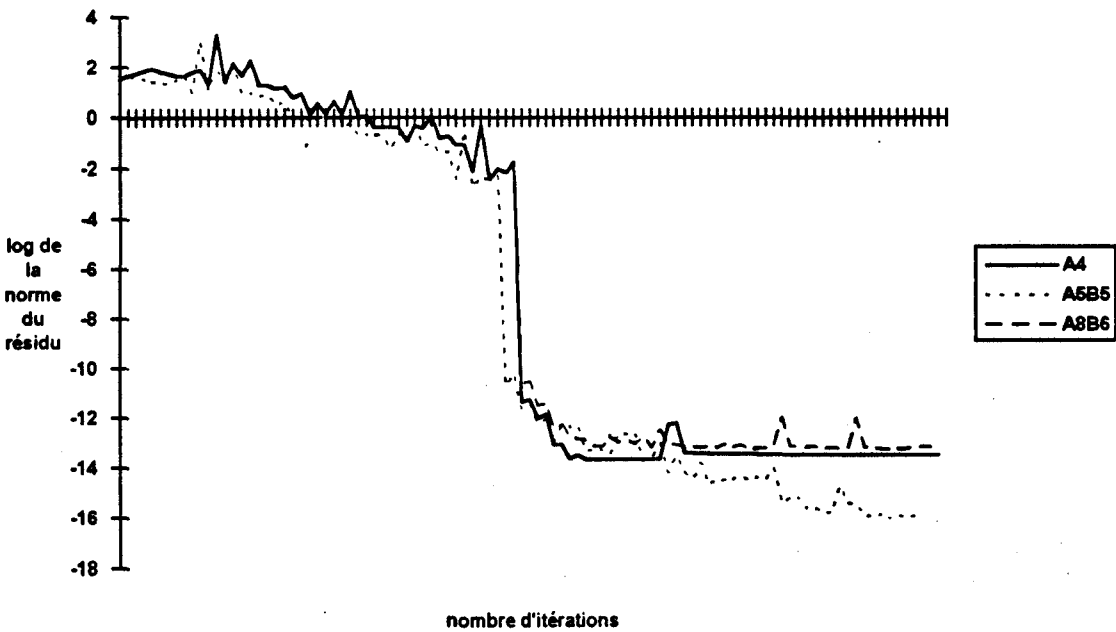


fig 25

Dans le cas où $U_i(\xi) = P_i^{(1)}(\xi)$, on a les figures 26 et 27.

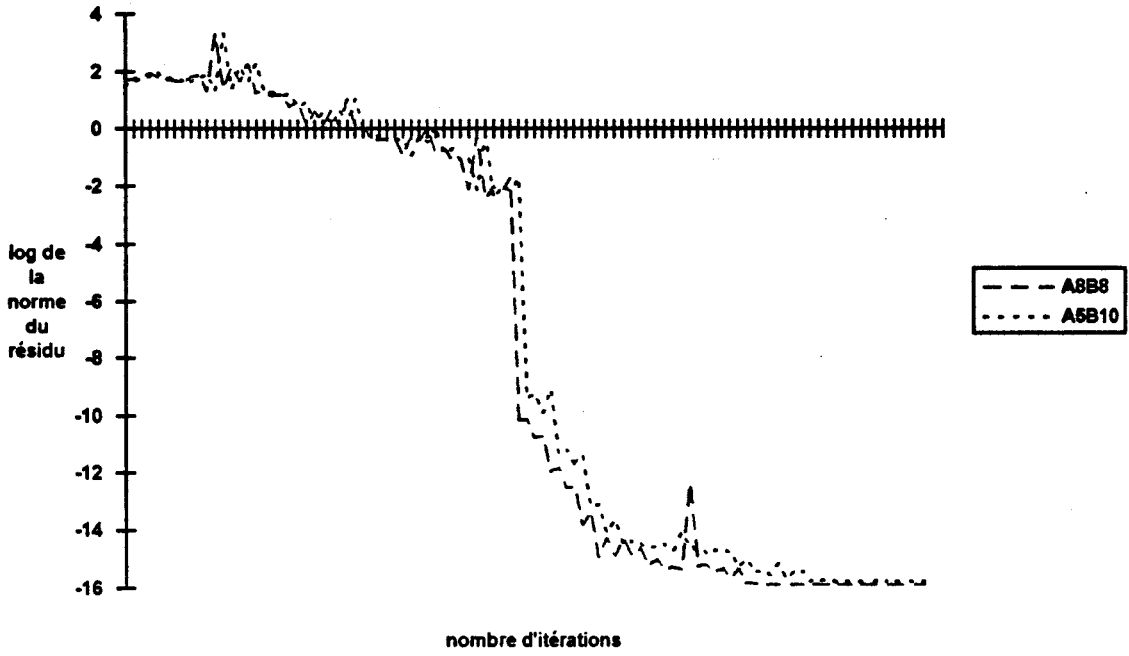


fig 26

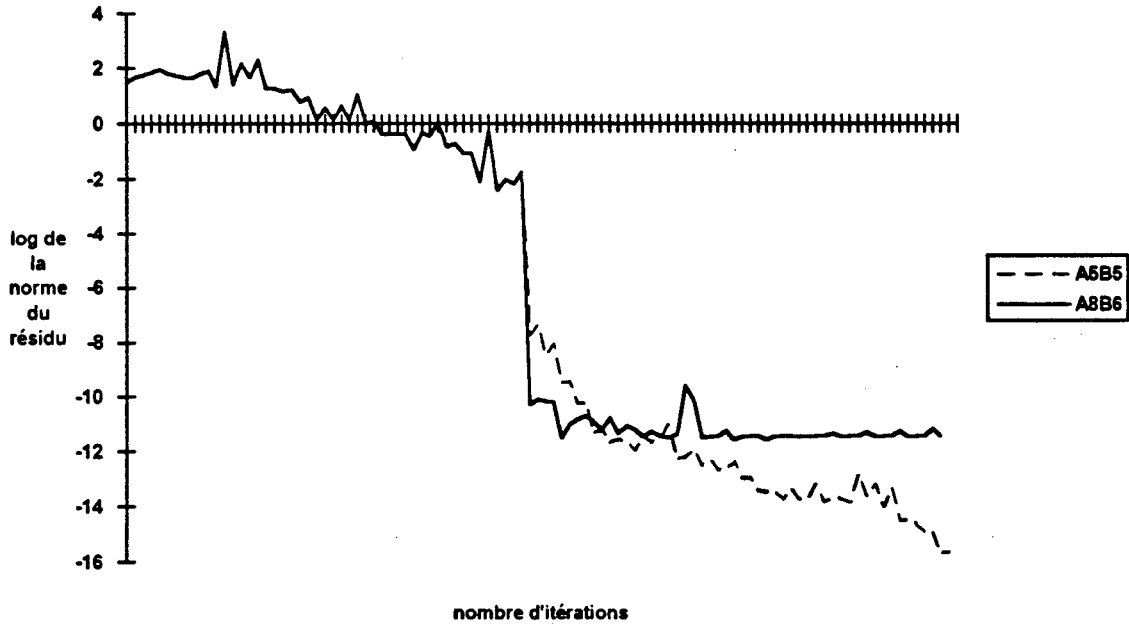


fig 27

Lorsque $U_i(\xi) = \xi^i$, les résultats sont moins précis et surtout moins nombreux que lorsque $U_i(\xi) = P_i(\xi)$ ou $U_i(\xi) = P_i^{(1)}(\xi)$.

On remarque donc que, dans tous les exemples considérés, lorsqu'on prend la base de Krylov pour $U_i(\xi)$, la précision des résultats est moins bonne [14] et que le nombre d'algorithmes donnant au moins 6 chiffres exacts est moins grand.

5. LES RELATIONS A_i ET B_j DANS LE CAS DE LA RUPTURE

La programmation récursive de P_k nécessite la programmation de produits scalaires qui apparaissent aux dénominateurs des coefficients des relations de récurrence. Par suite, si l'un de ces produits scalaires est nul, il y a un cas de rupture dans l'algorithme, qui est alors arrêté. Ceci est dû à la non existence de quelques polynômes P_k . Pour éviter cette rupture, il faut sauter au dessus des polynômes qui n'existent pas et augmenter progressivement le degré jusqu'à trouver un polynôme qui existe et le calculer.

Dans les chapitres suivants, nous considérons uniquement les polynômes orthogonaux qui existent, c'est à dire ceux qui sont réguliers. On note P_k et P_{k+1} les deux polynômes successifs réguliers de degré respectivement n_k et $n_{k+1} = n_k + m_k$ au plus. Le nombre m_k correspond au saut que l'on doit faire pour passer de l'un à l'autre.

Le chapitre 5 met en évidence les différentes relations dans le cas de la rupture, en étudiant uniquement celles qui existaient précédemment. On trouve les relations du type A_8 , du type B_{10} et du type A_4 , en utilisant les conditions d'orthogonalité définies par Draux [9]. A partir du type A_8 et du type B_{10} , on trouve les autres relations.

5.1. Relation du type A_8

Nous cherchons une relation du type A_8 c'est à dire $P_{k+1} \leftarrow P_k, P_k^{(1)}$.

D'après ce qui a été fait dans la section précédente, nous allons essayer d'exprimer $P_{k+1}(\xi)$ de la manière suivante :

$$P_{k+1}(\xi) = u_k(\xi) P_k(\xi) + \xi v_k(\xi) P_k^{(1)}(\xi)$$

où u_k et v_k sont des polynômes de degré $m_k - 1$ au plus, et $m_k - 1$.

De plus, comme $\forall k \quad P_k(0) = 1$, on a : $1 = u_k(0)$.

Donc u_k et v_k vont s'écrire sous la forme suivante :

$$u_k(\xi) = 1 + \alpha_1 \xi + \dots + \alpha_{m_k-1} \xi^{m_k-1} = 1 + \xi q_k(\xi)$$

où q_k est un polynôme de degré $m_k - 2$ au plus.

$$v_k(\xi) = \beta_0 + \beta_1 \xi + \dots + \beta_{m_k-1} \xi^{m_k-1}.$$

On a donc $2 m_k - 1$ coefficients à déterminer.

On a la relation (5.A.8) : Pour $i = 0, 1, \dots$

$$c(\xi^i P_{k+1}(\xi)) = c(\xi^i P_k(\xi)) + c(\xi^{i+1} q_k(\xi) P_k(\xi)) + c^{(1)}(\xi^i v_k(\xi) P_k^{(1)}(\xi)).$$

Dans le cas de la rupture, on a d'après Draux [9] :

$$c(\xi^i P_{k+1}(\xi)) = 0 \quad \text{pour } i = 0, \dots, n_k + m_k - 1$$

$$c(\xi^i P_k(\xi)) = 0 \quad \text{pour } i = 0, \dots, n_k - 1$$

$$c^{(1)}(\xi^i P_k^{(1)}(\xi)) = 0 \quad \text{pour } i = 0, \dots, n_k + m_k - 2.$$

$$c^{(1)}(\xi^i P_k^{(1)}(\xi)) = 0 \quad \text{pour } i = n_k + m_k - 1$$

$$\text{Par suite } c(\xi^{i+1} q_k(\xi) P_k(\xi)) = 0 \quad \text{pour } i = 0, \dots, n_k - m_k$$

$$c^{(1)}(\xi^i v_k(\xi) P_k^{(1)}(\xi)) = 0 \quad \text{pour } i = 0, \dots, n_k - 1.$$

Premier cas : $n_k - m_k \geq 0$.

◇ Pour $i = 0, \dots, n_k - m_k$ la relation (5.A.8) est toujours vérifiée.

◇ Pour $i = n_k - m_k + 1, \dots, n_k - 1$ on a les $m_k - 1$ équations suivantes :

$$c(\xi^{i+1} q_k(\xi) P_k(\xi)) = 0.$$

◇ Pour $i = n_k, \dots, n_k + m_k - 1$ on a les m_k équations suivantes :

$$c(\xi^{i+1} q_k(\xi) P_k(\xi)) + c^{(1)}(\xi^i v_k(\xi) P_k^{(1)}(\xi)) = -c(\xi^i P_k(\xi)).$$

Les $m_k - 1$ équations donnent le système :

$$\begin{cases} \alpha_{m_k-1} c(\xi^{n_k} P_k) = 0 \\ \alpha_{m_k-2} c(\xi^{n_k} P_k) + \alpha_{m_k-1} c(\xi^{n_k+1} P_k) = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 c(\xi^{n_k} P_k) + \dots + \alpha_{m_k-1} c(\xi^{n_k+m_k-2} P_k) = 0. \end{cases}$$

◆ Si $c(\xi^{n_k} P_k(\xi)) \neq 0$ alors $\alpha_{m_k-1} = 0 = \alpha_{m_k-2} = \dots = \alpha_1$.

◆ Si $c(\xi^{n_k} P_k(\xi)) = 0$ alors α_{m_k-1} est arbitraire, on peut choisir α_{m_k-1} nulle.

Dans ce cas, la deuxième équation devient : $\alpha_{m_k-2} c(\xi^{n_k} P_k(\xi)) = 0$.

Par suite α_{m_k-2} est arbitraire et on peut choisir α_{m_k-2} nulle.

Etc...

Donc on peut choisir $\alpha_{m_k-1} = \alpha_{m_k-2} = \dots = \alpha_1 = 0$.

Par conséquent, dans les deux cas, on a : $q_k(\xi) = 0$ et $u_k(\xi) = 1$.

Par suite les m_k dernières équations sont données par :

$$\diamond \text{ Pour } i = n_k, \dots, n_k + m_k - 1 \quad c^{(1)}(\xi^i v_k(\xi) P_k^{(1)}(\xi)) = -c(\xi^i P_k(\xi))$$

c'est à dire qu' on a le système suivant :

$$\begin{cases} \beta_{m_k-1} c^{(1)}(\xi^{n_k+m_k-1} P_k^{(1)}) = -c(\xi^{n_k} P_k) \\ \beta_{m_k-2} c^{(1)}(\xi^{n_k+m_k-1} P_k^{(1)}) + \beta_{m_k-1} c^{(1)}(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) = -c(\xi^{n_k+1} P_k) \\ \vdots \\ \beta_0 c^{(1)}(\xi^{n_k+m_k-1} P_k^{(1)}) + \dots + \beta_{m_k-1} c^{(1)}(\xi^{n_k+2m_k-2} P_k^{(1)}) = -c(\xi^{n_k+m_k-1} P_k). \end{cases}$$

Comme $c^{(1)}(\xi^{n_k+m_k-1} P_k^{(1)}) = 0$, le système triangulaire est régulier et on trouve de manière unique les coefficients β_i pour $i = 0, \dots, m_k - 1$.

On a donc trouvé la relation du type A_8 pour $n_k - m_k \geq 0$.

Deuxième cas : $n_k - m_k < 0$.

On cherche P_{k+1} sous la forme suivante : $P_{k+1}(\xi) = P_k(\xi) + \xi v_k(\xi) P_k^{(1)}(\xi)$

où v_k est un polynôme de degré $m_k - 1$.

Notons : $v_k(\xi) = \beta_0 + \beta_1 \xi + \dots + \beta_{m_k-1} \xi^{m_k-1}$.

On a la relation (5.A.8) : pour $i = 0, 1, \dots$

$$c(\xi^i P_{k+1}(\xi)) = c(\xi^i P_k(\xi)) + c^{(1)}(\xi^i v_k(\xi) P_k^{(1)}(\xi)).$$

Dans le cas de la rupture, on a :

$$c(\xi^i P_{k+1}(\xi)) = 0 \quad \text{pour } i = 0, \dots, n_k + m_k - 1$$

$$c(\xi^i P_k(\xi)) = 0 \quad \text{pour } i = 0, \dots, n_k - 1$$

$$c^{(1)}(\xi^i v_k(\xi) P_k^{(1)}(\xi)) = 0 \quad \text{pour } i = 0, \dots, n_k - 1.$$

Par suite :

◇ Pour $i = 0, \dots, n_k - 1$ la relation (5.A.8) est toujours vraie.

◇ Pour $i = n_k, \dots, n_k + m_k - 1$ on a les m_k équations suivantes :

$$c^{(1)}(\xi^i v_k(\xi) P_k^{(1)}(\xi)) = -c(\xi^i P_k(\xi))$$

soit encore :

$$\begin{cases} \beta_{m_k-1} c^{(1)}(\xi^{n_k+m_k-1} P_k^{(1)}) = -c(\xi^{n_k} P_k) \\ \beta_{m_k-2} c^{(1)}(\xi^{n_k+m_k-1} P_k^{(1)}) + \beta_{m_k-1} c^{(1)}(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) = -c(\xi^{n_k+1} P_k) \\ \vdots \\ \beta_0 c^{(1)}(\xi^{n_k+m_k-1} P_k^{(1)}) + \dots + \beta_{m_k-1} c^{(1)}(\xi^{n_k+2m_k-2} P_k^{(1)}) = -c(\xi^{n_k+m_k-1} P_k). \end{cases}$$

Comme $c^{(1)}(\xi^{n_k+m_k-1} P_k^{(1)}) \neq 0$, le système triangulaire est régulier et on trouve de manière unique les coefficients β_i pour $i = 0, \dots, m_k - 1$.

On a donc trouvé la relation du type A_8 pour $n_k - m_k < 0$.

Conclusion

La relation du type A_g est :

$$P_{k+1}(\xi) = P_k(\xi) + \xi (\beta_0 + \beta_1 \xi + \dots + \beta_{m_k-1} \xi^{m_k-1}) P_k^{(1)}(\xi)$$

où les constantes β_j sont déterminées de manière unique par :

$$\begin{cases} \beta_{m_k-1} c^{(1)}(\xi^{n_k+m_k-1} P_k^{(1)}) = -c(\xi^{n_k} P_k) \\ \beta_{m_k-2} c^{(1)}(\xi^{n_k+m_k-1} P_k^{(1)}) + \beta_{m_k-1} c^{(1)}(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) = -c(\xi^{n_k+1} P_k) \\ \vdots \\ \beta_0 c^{(1)}(\xi^{n_k+m_k-1} P_k^{(1)}) + \dots + \beta_{m_k-1} c^{(1)}(\xi^{n_k+2m_k-2} P_k^{(1)}) = -c(\xi^{n_k+m_k-1} P_k). \end{cases}$$

Remarque : Dans le cas où $m_k = 1$ c'est à dire lorsqu'il n'y a pas de saut, on a :

$$\beta_0 = \frac{-c(\xi^{n_k} P_k(\xi))}{c^{(1)}(\xi^{n_k} P_k^{(1)}(\xi))}.$$

On a alors $P_{k+1}(\xi) = P_k(\xi) + \xi \beta_0 P_k^{(1)}(\xi)$.

On retrouve ce qui a été fait dans le deuxième chapitre.

5.2. Relation du type B_{10}

Nous cherchons une relation du type B_{10} c'est à dire $P_{k+1}^{(1)} \leftarrow P_k^{(1)}, P_{k+1}$.

D'après ce qui a été fait dans le deuxième chapitre, nous allons essayer d'exprimer $P_{k+1}^{(1)}(\xi)$ de la manière suivante :

$$P_{k+1}^{(1)}(\xi) = B_{k+1} P_k^{(1)}(\xi) + C_{k+1} P_{k+1}(\xi).$$

Comme $P_{k+1}^{(1)}$ est unitaire, et si $P_{k+1}(\xi) = a_{n_k+m_k} \xi^{n_k+m_k} + \dots + 1$, on a, en identifiant les termes de degré $n_k + m_k$:

$$1 = C_{k+1} a_{n_k+m_k}.$$

$$\text{D'où : } C_{k+1} = \frac{1}{a_{n_k+m_k}}.$$

En multipliant par ξ^i la relation liant $P_{k+1}^{(1)}$, $P_k^{(1)}$ et P_{k+1} , et en appliquant la fonctionnelle $c^{(1)}$, on a la relation (5.B.10) : Pour $i = 0, 1, \dots$

$$c^{(1)}(\xi^i P_{k+1}^{(1)}(\xi)) = B_{k+1} c^{(1)}(\xi^i P_k^{(1)}(\xi)) + C_{k+1} c^{(1)}(\xi^i P_{k+1}(\xi)).$$

$$\text{ou encore : } c^{(1)}(\xi^i P_{k+1}^{(1)}(\xi)) = B_{k+1} c^{(1)}(\xi^i P_k^{(1)}(\xi)) + C_{k+1} c^{(i+1)} P_{k+1}(\xi).$$

Comme $c^{(1)}(\xi^i P_{k+1}^{(1)}(\xi)) = 0$ pour $i = 0, \dots, n_k + m_k - 1$, on a :

$$\text{pour } i = 0, \dots, n_k + m_k - 1 \quad B_{k+1} c^{(1)}(\xi^i P_k^{(1)}(\xi)) + C_{k+1} c^{(i+1)} P_{k+1}(\xi) = 0.$$

Dans le cas de la rupture, on a d'après Draux [9] :

$$c^{(1)}(\xi^i P_k^{(1)}(\xi)) = 0 \quad \text{pour } i = 0, \dots, n_k + m_k - 2$$

$$c^{(1)}(\xi^i P_k^{(1)}(\xi)) \neq 0 \quad \text{pour } i = n_k + m_k - 1$$

$$c^{(i+1)} P_{k+1}(\xi) = 0 \quad \text{pour } i = 0, \dots, n_k + m_k - 2.$$

Par suite :

◇ Pour $i = 0, \dots, n_k + m_k - 2$ la relation (5.B.10) est toujours vérifiée.

◇ Pour $i = n_k + m_k - 1$ on a :

$$B_{k+1} c^{(1)}(\xi^{n_k+m_k-1} P_k^{(1)}(\xi)) + C_{k+1} c^{(n_k+m_k)} P_{k+1}(\xi) = 0.$$

$$\text{Comme } c^{(1)}(\xi^{n_k+m_k-1} P_k^{(1)}(\xi)) \neq 0, \text{ on a : } B_{k+1} = \frac{-C_{k+1} c^{(n_k+m_k)} P_{k+1}(\xi)}{c^{(1)}(\xi^{n_k+m_k-1} P_k^{(1)}(\xi))}.$$

Conclusion

La relation du type B_{10} est :

$$P_{k+1}^{(1)}(\xi) = B_{k+1} P_k^{(1)}(\xi) + C_{k+1} P_{k+1}(\xi)$$

avec $C_{k+1} = \frac{1}{a_{n_k+m_k}}$

où $a_{n_k+m_k}$ est défini par $P_{k+1}(\xi) = a_{n_k+m_k} \xi^{n_k+m_k} + \dots + 1$

$$B_{k+1} = \frac{-C_{k+1} c(\xi^{n_k+m_k} P_{k+1}(\xi))}{c^{(1)}(\xi^{n_k+m_k-1} P_k^{(1)}(\xi))}.$$

Remarque : Dans le cas où $m_k = 1$, c'est à dire lorsqu'il n'y a pas de saut, on a :

$$C_{k+1} = \frac{1}{a_{n_k+m_k}} \text{ où } a_{n_k+m_k} \text{ est défini par } P_{k+1}(\xi) = a_{n_k+m_k} \xi^{n_k+m_k} + \dots + 1$$

$$B_{k+1} = \frac{-C_{k+1} c(\xi^{n_k+1} P_{k+1}(\xi))}{c^{(1)}(\xi^{n_k} P_k^{(1)}(\xi))}.$$

On a alors $P_{k+1}^{(1)}(\xi) = B_{k+1} P_k^{(1)}(\xi) + C_{k+1} P_{k+1}(\xi)$.

On retrouve ce qui a été fait dans le deuxième chapitre.

5.3. Relation du type B_6

Nous cherchons une relation du type B_6 c'est à dire $P_{k+1}^{(1)} \leftarrow P_{k-1}^{(1)}, P_k^{(1)}$.

D'après ce qui a été fait dans le deuxième chapitre, nous allons essayer d'exprimer $P_{k+1}^{(1)}(\xi)$ de la manière suivante :

$$P_{k+1}^{(1)}(\xi) = u_k(\xi) P_k^{(1)}(\xi) + C_k P_{k-1}^{(1)}(\xi)$$

où u_k est un polynôme de degré m_k , et C_k est une constante.

On a la relation (5.B.6) : Pour $i = 0, 1, \dots$

$$c^{(1)}(\xi^i P_{k+1}^{(1)}(\xi)) = c^{(1)}(\xi^i u_k(\xi) P_k^{(1)}(\xi)) + C_k c^{(1)}(\xi^i P_{k-1}^{(1)}(\xi)).$$

Dans le cas de la rupture, on a d'après Draux [9] :

$$c^{(1)}(\xi^i P_{k+1}^{(1)}(\xi)) = 0 \quad \text{pour } i = 0, \dots, n_k + m_k - 1$$

$$c^{(1)}(\xi^i P_k^{(1)}(\xi)) = 0 \quad \text{pour } i = 0, \dots, n_k + m_k - 2$$

$$c^{(1)}(\xi^i P_{k-1}^{(1)}(\xi)) = 0 \quad \text{pour } i = 0, \dots, n_k - 2.$$

Par suite $c^{(1)}(\xi^i u_k(\xi) P_k^{(1)}(\xi)) = 0$ pour $i = 0, \dots, n_k - 2$.

On suppose $n_k \geq 2$. Par suite, on a :

◇ Pour $i = 0, \dots, n_k - 2$ la relation (5.B.6) est toujours vérifiée.

◇ Pour $i = n_k - 1, \dots, n_k + m_k - 1$ on a :

$$c^{(1)}(\xi^i u_k(\xi) P_k^{(1)}(\xi)) + C_k c^{(1)}(\xi^i P_{k-1}^{(1)}(\xi)) = 0.$$

Comme u_k est un polynôme unitaire de degré m_k , notons le :

$$u_k(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \dots + \alpha_{m_k-1} \xi^{m_k-1} + \xi^{m_k}.$$

On a donc $m_k + 1$ coefficients à chercher et on a $m_k + 1$ équations. On a le système suivant :

$$\begin{cases} c^{(1)}(\xi^{n_k+m_k-1} P_k^{(1)}) + C_k c^{(1)}(\xi^{n_k-1} P_{k-1}^{(1)}) = 0 \\ \alpha_{m_k-1} c^{(1)}(\xi^{n_k+m_k-1} P_k^{(1)}) + c^{(1)}(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) + C_k c^{(1)}(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)}) = 0 \\ \vdots \\ \alpha_0 c^{(1)}(\xi^{n_k+m_k-1} P_k^{(1)}) + \dots + \alpha_{m_k-1} c^{(1)}(\xi^{n_k+2m_k-2} P_k^{(1)}) \\ \quad + c^{(1)}(\xi^{n_k+2m_k-1} P_k^{(1)}) + C_k c^{(1)}(\xi^{n_k+m_k-1} P_{k-1}^{(1)}) = 0. \end{cases}$$

Par conséquent la première équation nous donne C_k car $c^{(1)}(\xi^{n_k-1} P_{k-1}^{(1)}(\xi)) = 0$ et les m_k équations suivantes forment un système triangulaire régulier car $c^{(1)}(\xi^{n_k+m_k-1} P_k^{(1)}) = 0$. Donc on a trouvé de manière unique $\alpha_0, \dots, \alpha_{m_k-1}$.

Conclusion

La relation du type B_6 est :

$$P_{k+1}^{(1)}(\xi) = C_k P_{k-1}^{(1)}(\xi) + (\alpha_0 + \alpha_1 \xi + \dots + \alpha_{m_k-1} \xi^{m_k-1} + \xi^{m_k}) P_k^{(1)}(\xi)$$

où
$$C_k = \frac{-c^{(1)}(\xi^{n_k+m_k-1} P_k^{(1)}(\xi))}{c^{(1)}(\xi^{n_k-1} P_{k-1}^{(1)}(\xi))}$$

et les coefficients α_i sont déterminés de manière unique par :

$$\begin{cases} \alpha_{m_k-1} c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) = -c(\xi^{n_k+m_k+1} P_k^{(1)}) - C_k c(\xi^{n_k+1} P_{k-1}^{(1)}) \\ \vdots \\ \alpha_1 c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) + \dots + \alpha_{m_k-1} c(\xi^{n_k+2m_k-2} P_k^{(1)}) = -c(\xi^{n_k+2m_k-1} P_k^{(1)}) - C_k c(\xi^{n_k+m_k-1} P_{k-1}^{(1)}) \\ \alpha_0 c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) + \dots + \alpha_{m_k-1} c(\xi^{n_k+2m_k-1} P_k^{(1)}) = -c(\xi^{n_k+2m_k} P_k^{(1)}) - C_k c(\xi^{n_k+m_k} P_{k-1}^{(1)}). \end{cases}$$

Remarque : Dans le cas où $m_k = 1$, c'est à dire lorsqu'il n'y a pas de saut, on a :

$$P_{k+1}^{(1)}(\xi) = C_k P_{k-1}^{(1)}(\xi) + (\alpha_0 + \xi) P_k^{(1)}(\xi)$$

avec
$$C_k = \frac{-c^{(1)}(\xi^{n_k} P_k^{(1)})}{c^{(1)}(\xi^{n_k-1} P_{k-1}^{(1)})} \quad \text{et} \quad \alpha_0 = \frac{-c^{(1)}(\xi^{n_k+1} P_k^{(1)}) - C_k c^{(1)}(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})}{c^{(1)}(\xi^{n_k} P_k^{(1)})}.$$

On retrouve ce qui a été fait dans le deuxième chapitre.

Nous allons essayer d'exprimer la relation du type B_6 grâce aux relations du type A_8 et du type B_{10} .

Pour trouver les relations du type B_8 , du type B_5 , du type B_1 , du type A_5 , et du type A_1 , nous allons également utiliser les relations du type A_8 et du type B_{10} .

On utilisera, pour la suite, des notations du type suivant :

$$B_{10}(P_k^{(1)}) + A_8(P_{k+1}) + B_{10}(P_{k+1}^{(1)}) \rightarrow B_6(P_{k+1}^{(1)})$$

pour indiquer que $P_k^{(1)}$ est calculé par la relation B_{10} puis que P_{k+1} est calculé par la relation A_8 et enfin que $P_{k+1}^{(1)}$ est calculé par la relation B_{10} , la flèche signifiant que la relation B_6 est déterminée grâce aux trois relations précédentes.

La relation du type B₁₀ à l'ordre n_k est : $P_k^{(1)}(\xi) = B_{k+1}^{(k)} P_{k-1}^{(1)}(\xi) + C_{k+1}^{(k)} P_k(\xi)$

avec $C_{k+1}^{(k)} = \frac{1}{a_{n_k}}$ où a_{n_k} est défini par $P_k(\xi) = a_{n_k} \xi^{n_k} + \dots + 1$

et $B_{k+1}^{(k)} = \frac{-C_{k+1}^{(k)} c(\xi^{n_k} P_k(\xi))}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)}(\xi))}$.

La relation du type A₈ est : $P_{k+1}(\xi) = P_k(\xi) + \xi v_k(\xi) P_k^{(1)}(\xi)$

avec $v_k(\xi) = \beta_0 + \beta_1 \xi + \dots + \beta_{m_k-1} \xi^{m_k-1}$ et où les coefficients β_i sont déterminées de manière unique par

$$\text{le système (1) : } \begin{cases} \beta_{m_k-1} c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) = -c(\xi^{n_k} P_k) \\ \beta_{m_k-2} c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) + \beta_{m_k-1} c(\xi^{n_k+m_k+1} P_k^{(1)}) = -c(\xi^{n_k+1} P_k) \\ \vdots \\ \beta_0 c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) + \dots + \beta_{m_k-1} c(\xi^{n_k+2m_k-1} P_k^{(1)}) = -c(\xi^{n_k+m_k-1} P_k). \end{cases}$$

La relation du type B₁₀ est : $P_{k+1}^{(1)}(\xi) = B_{k+1} P_k^{(1)}(\xi) + C_{k+1} P_{k+1}(\xi)$

avec $C_{k+1} = \frac{1}{a_{n_k+m_k}}$ où $a_{n_k+m_k}$ est défini par $P_{k+1}(\xi) = a_{n_k+m_k} \xi^{n_k+m_k} + \dots + 1$

et $B_{k+1} = \frac{-C_{k+1} c(\xi^{n_k+m_k} P_{k+1}(\xi))}{c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}(\xi))}$.

On cherche la relation du type B₆ c'est à dire $P_{k+1}^{(1)} \leftarrow P_{k-1}^{(1)}, P_k^{(1)}$.

On a, en appliquant les relations du type B₁₀ et du type A₈:

$$P_{k+1}^{(1)}(\xi) = B_{k+1} P_k^{(1)}(\xi) + C_{k+1} [P_k(\xi) + \xi v_k(\xi) P_k^{(1)}(\xi)].$$

D'où $P_{k+1}^{(1)}(\xi) = C_{k+1} P_k(\xi) + (B_{k+1} + \xi C_{k+1} v_k(\xi)) P_k^{(1)}(\xi)$.

Par suite, en appliquant la relation du type B₁₀ à l'ordre n_k , on a :

$$P_{k+1}^{(1)}(\xi) = \frac{C_{k+1}}{C_{k+1}^{(k)}} [P_k^{(1)}(\xi) - B_{k+1}^{(k)} P_{k-1}^{(1)}(\xi)] + (B_{k+1} + \xi C_{k+1} v_k(\xi)) P_k^{(1)}(\xi).$$

$$\text{Donc } P_{k+1}^{(1)}(\xi) = \left[\frac{C_{k+1}}{C_{k+1}^{(k)}} + B_{k+1} + \xi C_{k+1} v_k(\xi) \right] P_k^{(1)}(\xi) - \frac{C_{k+1} B_{k+1}^{(k)}}{C_{k+1}^{(k)}} P_{k-1}^{(1)}(\xi).$$

Par conséquent en notant $C_k = -\frac{C_{k+1} B_{k+1}^{(k)}}{C_{k+1}^{(k)}}$, $\alpha_0 = \frac{C_{k+1}}{C_{k+1}^{(k)}} + B_{k+1}$,

et pour $i = 1, \dots, m_k$ $\alpha_i = \beta_{i-1} C_{k+1}$, on a la relation du type B_6 :

$$P_{k+1}^{(1)}(\xi) = C_k P_{k-1}^{(1)}(\xi) + (\alpha_0 + \alpha_1 \xi + \dots + \alpha_{m_k} \xi^{m_k}) P_k^{(1)}(\xi).$$

Exprimons les différents coefficients.

On a : $a_{n_k+m_k} = \beta_{m_k-1}$ par la relation du type A_8 .

$$\text{Par suite } \alpha_{m_k} = C_{k+1} \beta_{m_k-1} = \frac{\beta_{m_k-1}}{a_{n_k+m_k}} = 1 \text{ et } C_{k+1} = \frac{1}{\beta_{m_k-1}} = \frac{-c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)})}{c(\xi^{n_k} P_k)}.$$

$$\text{De plus } C_k = -\frac{B_{k+1}^{(k)}}{C_{k+1}^{(k)}} C_{k+1} = C_{k+1} \frac{c(\xi^{n_k} P_k)}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})}.$$

$$\text{Donc } C_k = \frac{-c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)})}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})}.$$

En multipliant chaque membre de chaque équation du système (1) par C_{k+1} , on a :

$$\begin{cases} c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) = -C_{k+1} c(\xi^{n_k} P_k) \\ \alpha_{m_k-1} c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) = -C_{k+1} c(\xi^{n_k+1} P_k) - c(\xi^{n_k+m_k-1} P_k^{(1)}) \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_1 c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) + \dots + \alpha_{m_k-1} c(\xi^{n_k+2m_k-2} P_k^{(1)}) = -C_{k+1} c(\xi^{n_k+m_k-1} P_k) - c(\xi^{n_k+2m_k-1} P_k^{(1)}). \end{cases}$$

$$\text{Or pour } i = 1, \dots, m_k - 1 \text{ on a : } C_{k+1} c(\xi^{n_k+i} P_k) = \frac{-C_{k+1}^{(k)}}{B_{k+1}^{(k)}} c(\xi^{n_k+i} P_k) C_k.$$

$$\text{D'où } C_{k+1} c(\xi^{n_k+i} P_k) = \frac{-C_k}{B_{k+1}^{(k)}} \left[c(\xi^{n_k+i} P_k^{(1)}) - B_{k+1}^{(k)} c(\xi^{n_k+i} P_{k-1}^{(1)}) \right].$$

Comme pour $i = 1, \dots, m_k - 1$, en supposant $m_k \geq 2$, $c(\xi^{n_k+i} P_k^{(1)}) = 0$, on a :

$$C_{k+1} c(\xi^{n_k+i} P_k) = C_k c(\xi^{n_k+i} P_{k-1}^{(1)}).$$

Par suite on a le système formé par les $m_k - 1$ équations suivantes :

$$\begin{cases} \alpha_{m_k-1} c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) = -c(\xi^{n_k+m_k-1} P_k^{(1)}) - C_k c(\xi^{n_k+1} P_{k-1}^{(1)}) \\ \vdots \\ \alpha_1 c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) + \dots + \alpha_{m_k-1} c(\xi^{n_k+2m_k-2} P_k^{(1)}) = -c(\xi^{n_k+2m_k-1} P_k^{(1)}) - C_k c(\xi^{n_k+m_k+1} P_{k-1}^{(1)}). \end{cases}$$

Il reste à déterminer $\alpha_0 = \frac{C_{k+1}}{C_{k+1}^{(k)}} + B_{k+1}$.

$$\text{On a : } \alpha_0 c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) = \frac{C_{k+1}}{C_{k+1}^{(k)}} c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) + B_{k+1} c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}).$$

Remplaçons P_{k+1} par la relation du type A_8 dans $B_{k+1} c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) = -C_{k+1} c(\xi^{n_k+m_k} P_{k+1})$.

Par suite

$$B_{k+1} c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) = -C_{k+1} c(\xi^{n_k+m_k} P_k) - C_{k+1} \beta_0 c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) - \dots - C_{k+1} \beta_{m_k-1} c(\xi^{n_k+2m_k} P_k^{(1)}).$$

Donc

$$B_{k+1} c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) = -C_{k+1} c(\xi^{n_k+m_k} P_k) - \alpha_1 c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) - \dots - \alpha_{m_k-1} c(\xi^{n_k+2m_k-1} P_k^{(1)}) - c(\xi^{n_k+2m_k} P_k^{(1)}).$$

Par suite :

$$\alpha_0 c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) + \dots + \alpha_{m_k-1} c(\xi^{n_k+2m_k-1} P_k^{(1)}) = -c(\xi^{n_k+2m_k} P_k^{(1)}) + \left[\frac{C_{k+1}}{C_{k+1}^{(k)}} c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) - C_{k+1} c(\xi^{n_k+m_k} P_k) \right].$$

Comme $\frac{C_{k+1}}{C_{k+1}^{(k)}} c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) - C_{k+1} c(\xi^{n_k+m_k} P_k) = \frac{C_{k+1}}{C_{k+1}^{(k)}} B_{k+1}^{(k)} c(\xi^{n_k+m_k} P_{k-1}^{(1)})$ et comme

$$C_k = -\frac{C_{k+1} B_{k+1}^{(k)}}{C_{k+1}^{(k)}}, \text{ on a la } m_k \text{ ième dernière équation :}$$

$$\alpha_0 c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) + \dots + \alpha_{m_k-1} c(\xi^{n_k+2m_k-1} P_k^{(1)}) = -c(\xi^{n_k+2m_k} P_k^{(1)}) - C_k c(\xi^{n_k+m_k} P_{k-1}^{(1)}).$$

Par conséquent on a le système constitué des m_k équations :

$$\begin{cases} \alpha_{m_k-1} c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) = -c(\xi^{n_k+m_k+1} P_k^{(1)}) - C_k c(\xi^{n_k+1} P_{k-1}^{(1)}) \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_1 c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) + \dots + \alpha_{m_k-1} c(\xi^{n_k+2m_k-2} P_k^{(1)}) = -c(\xi^{n_k+2m_k-1} P_k^{(1)}) - C_k c(\xi^{n_k+m_k-1} P_{k-1}^{(1)}) \\ \alpha_0 c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) + \dots + \alpha_{m_k-1} c(\xi^{n_k+2m_k-1} P_k^{(1)}) = -c(\xi^{n_k+2m_k} P_k^{(1)}) - C_k c(\xi^{n_k+m_k} P_{k-1}^{(1)}) \end{cases}$$

On retrouve donc la relation du type B_6 qui a été proposée par Brezinski, Sadok, Redivo Zaglia [5],[6] par une nouvelle démonstration.

On a :

$$B_{10}(P_k^{(1)}) + A_8(P_{k+1}) + B_{10}(P_{k+1}^{(1)}) \rightarrow B_6(P_{k+1}^{(1)})$$

5.4. Relation du type B_8

La relation du type A_8 est : $P_{k+1}(\xi) = P_k(\xi) + \xi v_k(\xi) P_k^{(1)}(\xi)$

avec $v_k(\xi) = \beta_0 + \beta_1 \xi + \dots + \beta_{m_k-1} \xi^{m_k-1}$ et où les coefficients β_i sont déterminés de manière unique par

$$\text{le système (1) : } \begin{cases} \beta_{m_k-1} c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) = -c(\xi^{n_k} P_k) \\ \beta_{m_k-2} c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) + \beta_{m_k-1} c(\xi^{n_k+m_k+1} P_k^{(1)}) = -c(\xi^{n_k+1} P_k) \\ \vdots \\ \beta_0 c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) + \dots + \beta_{m_k-1} c(\xi^{n_k+2m_k-1} P_k^{(1)}) = -c(\xi^{n_k+m_k-1} P_k). \end{cases}$$

La relation du type B_{10} est : $P_{k+1}^{(1)}(\xi) = B_{k+1} P_k^{(1)}(\xi) + C_{k+1} P_{k+1}(\xi)$

avec $C_{k+1} = \frac{1}{a_{n_k+m_k}}$ où $a_{n_k+m_k}$ est défini par $P_{k+1}(\xi) = a_{n_k+m_k} \xi^{n_k+m_k} + \dots + 1$

$$\text{et } B_{k+1} = \frac{-C_{k+1} c(\xi^{n_k+m_k} P_{k+1}(\xi))}{c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}(\xi))} = C_{k+1} \beta_{-1} \text{ en notant } \beta_{-1} = \frac{c(\xi^{n_k+m_k} P_{k+1}(\xi))}{c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}(\xi))}.$$

On cherche la relation du type B_8 c'est à dire $P_{k+1}^{(1)} \leftarrow P_k, P_k^{(1)}$.

On a, en appliquant les relations du type B_{10} et du type A_8 :

$$P_{k+1}^{(1)}(\xi) = \left[B_{k+1} + \xi C_{k+1} (\beta_0 + \beta_1 \xi + \dots + \beta_{m_k-1} \xi^{m_k-1}) \right] P_k^{(1)}(\xi) + C_{k+1} P_k(\xi).$$

$$\text{Donc } P_{k+1}^{(1)}(\xi) = (B_{k+1} + C_{k+1} \beta_0 \xi + \dots + C_{k+1} \beta_{m_k-1} \xi^{m_k}) P_k^{(1)}(\xi) + C_{k+1} P_k(\xi).$$

$$\text{Par conséquent } P_{k+1}^{(1)}(\xi) = C_{k+1} (\beta_{-1} + \beta_0 \xi + \dots + \beta_{m_k-1} \xi^{m_k}) P_k^{(1)}(\xi) + C_{k+1} P_k(\xi).$$

Déterminons les différents coefficients.

On a : $a_{n_k+m_k} = \beta_{m_k-1}$ d'après la relation du type A_8 .

$$\text{Par suite } a_{n_k+m_k} = \frac{-c(\xi^{n_k} P_k)}{c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)})}.$$

$$\text{Par conséquent, si } c(\xi^{n_k} P_k) \neq 0, \text{ on a : } C_{k+1} = \frac{-c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)})}{c(\xi^{n_k} P_k)}.$$

Par suite $B_{k+1} = C_{k+1} \beta_{-1} = \frac{-c(\xi^{n_k+m_k} P_{k+1})}{c(\xi^{n_k} P_k)}$.

On a : $C_{k+1} \beta_{m_k-1} = 1$.

En reprenant le système (1) sauf la première ligne qui a déjà été utilisée, et en multipliant chaque membre de chaque équation par C_{k+1} on a :

$$\begin{cases} C_{k+1} \beta_{m_k-2} c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) + c(\xi^{n_k+m_k+1} P_k^{(1)}) = -C_{k+1} c(\xi^{n_k+1} P_k) \\ \vdots \\ C_{k+1} \beta_0 c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) + \dots + C_{k+1} \beta_{m_k-2} c(\xi^{n_k+2m_k-2} P_k^{(1)}) + c(\xi^{n_k+2m_k-1} P_k^{(1)}) = -C_{k+1} c(\xi^{n_k+m_k-1} P_k). \end{cases}$$

On a $m_k - 1$ équations.

De plus $C_{k+1} \beta_{-1} = \frac{-c(\xi^{n_k+m_k} P_{k+1}) C_{k+1}}{c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)})}$.

En remplaçant P_{k+1} par la relation du type A_8 on a :

$$C_{k+1} \beta_{-1} = \frac{-C_{k+1} c(\xi^{n_k+m_k} P_k) - C_{k+1} \beta_0 c(\xi^{n_k+m_k+1} P_k^{(1)}) - \dots - C_{k+1} \beta_{m_k-1} c(\xi^{n_k+2m_k} P_k^{(1)})}{c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)})}.$$

Par suite la m_k ième équation est la suivante :

$$C_{k+1} \beta_{-1} c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) + \dots + C_{k+1} \beta_{m_k-2} c(\xi^{n_k+2m_k-1} P_k^{(1)}) + c(\xi^{n_k+2m_k} P_k^{(1)}) = -C_{k+1} c(\xi^{n_k+m_k} P_k).$$

Changeons de notation et notons $\alpha_i = C_{k+1} \beta_{i-1}$ et $\beta'_0 = C_{k+1}$.

On a alors la conclusion suivante :

Conclusion

La relation du type B_8 est, si $c(\xi^{n_k} P_k) \neq 0$,

$$P_{k+1}^{(1)}(\xi) = \beta_0' P_k(\xi) + (\alpha_0 + \dots + \alpha_{m_k-1} \xi^{m_k-1} + \xi^{m_k}) P_k^{(1)}(\xi)$$

avec $\beta_0' = \frac{-c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)})}{c(\xi^{n_k} P_k)}$

et les constantes $\alpha_0, \dots, \alpha_{m_k-1}$ sont déterminées de manière unique par :

$$\begin{cases} \alpha_{m_k-1} c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) = -\beta_0' c(\xi^{n_k+1} P_k) - c(\xi^{n_k+m_k+1} P_k^{(1)}) \\ \vdots \\ \alpha_1 c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) + \dots + \alpha_{m_k-1} c(\xi^{n_k+2m_k-2} P_k^{(1)}) \\ \quad = -\beta_0' c(\xi^{n_k+m_k-1} P_k) - c(\xi^{n_k+2m_k-1} P_k^{(1)}) \\ \alpha_0 c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) + \dots + \alpha_{m_k-1} c(\xi^{n_k+2m_k-1} P_k^{(1)}) \\ \quad = -\beta_0' c(\xi^{n_k+m_k} P_k) - c(\xi^{n_k+2m_k} P_k^{(1)}) \end{cases}$$

Nous retrouvons donc la relation du type B_8 qui a été donnée par Brezinski et Sadok dans[5],[6].

Par conséquent :

$$A_8 (P_{k+1}) + B_{10} (P_{k+1}^{(1)}) \rightarrow B_8 (P_{k+1}^{(1)})$$

5.5. Relation du type A_5

La relation du type B_{10} à l'ordre n_k est : $P_k^{(1)}(\xi) = B_{k+1}^{(k)} P_{k-1}^{(1)}(\xi) + C_{k+1}^{(k)} P_k(\xi)$

avec $C_{k+1}^{(k)} = \frac{1}{a_{n_k}}$ où a_{n_k} est défini par $P_k(\xi) = a_{n_k} \xi^{n_k} + \dots + 1$

$$\text{et } B_{k+1}^{(k)} = \frac{-C_{k+1}^{(k)} c(\xi^{n_k} P_k(\xi))}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)}(\xi))}.$$

La relation du type A_8 est : $P_{k+1}(\xi) = P_k(\xi) + \xi v_k(\xi) P_k^{(1)}(\xi)$

avec $v_k(\xi) = \beta_0 + \beta_1 \xi + \dots + \beta_{m_k-1} \xi^{m_k-1}$ et où les coefficients β_i sont déterminés de manière unique par

$$\text{le système (1) : } \begin{cases} \beta_{m_k-1} c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) = -c(\xi^{n_k} P_k) \\ \beta_{m_k-2} c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) + \beta_{m_k-1} c(\xi^{n_k+m_k+1} P_k^{(1)}) = -c(\xi^{n_k+1} P_k) \\ \vdots \\ \beta_0 c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) + \dots + \beta_{m_k-1} c(\xi^{n_k+2m_k-1} P_k^{(1)}) = -c(\xi^{n_k+m_k-1} P_k). \end{cases}$$

On cherche la relation du type A_5 c'est à dire $P_{k+1} \leftarrow P_k, P_{k-1}^{(1)}$.

On a, en appliquant les relations du type B_{10} et du type A_8 :

$$P_{k+1}(\xi) = P_k(\xi) + \xi v_k(\xi) \left[B_{k+1}^{(k)} P_{k-1}^{(1)}(\xi) + C_{k+1}^{(k)} P_k(\xi) \right].$$

$$\text{Par conséquent } P_{k+1}(\xi) = \left[1 + \xi C_{k+1}^{(k)} v_k(\xi) \right] P_k(\xi) + \xi B_{k+1}^{(k)} v_k(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi).$$

$$\text{Notons } u_k(\xi) = 1 + \xi C_{k+1}^{(k)} v_k(\xi) = 1 + \alpha_1 \xi + \dots + \alpha_{m_k} \xi^{m_k}$$

$$\text{et } w_k(\xi) = B_{k+1}^{(k)} v_k(\xi) = \gamma_0 + \gamma_1 \xi + \dots + \gamma_{m_k-1} \xi^{m_k-1}.$$

$$\text{On a alors : } P_{k+1}(\xi) = u_k(\xi) P_k(\xi) + \xi w_k(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi).$$

Exprimons les coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_{m_k}, \gamma_0, \dots, \gamma_{m_k-1}$.

$$\text{On a : } \alpha_i = C_{k+1}^{(k)} \beta_{i-1} \text{ pour } i = 1, \dots, m_k \text{ et } \gamma_i = B_{k+1}^{(k)} \beta_i \text{ pour } i = 0, \dots, m_k-1.$$

Remplaçons dans le système (1) $P_k^{(1)}$ par $B_{k+1}^{(k)} P_{k-1}^{(1)} + C_{k+1}^{(k)} P_k$. On a alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{m_k-1} B_{k+1}^{(k)} c(\xi^{n_k+m_k} P_{k-1}^{(1)}) + \beta_{m_k-1} C_{k+1}^{(k)} c(\xi^{n_k+m_k} P_k) = -c(\xi^{n_k} P_k) \\ \beta_{m_k-2} B_{k+1}^{(k)} c(\xi^{n_k+m_k} P_{k-1}^{(1)}) + \beta_{m_k-2} C_{k+1}^{(k)} c(\xi^{n_k+m_k} P_k) \\ \quad + \beta_{m_k-1} B_{k+1}^{(k)} c(\xi^{n_k+m_k+1} P_{k-1}^{(1)}) + \beta_{m_k-1} C_{k+1}^{(k)} c(\xi^{n_k+m_k+1} P_k) = -c(\xi^{n_k+1} P_k) \\ \vdots \\ \beta_0 B_{k+1}^{(k)} c(\xi^{n_k+m_k} P_{k-1}^{(1)}) + \beta_0 C_{k+1}^{(k)} c(\xi^{n_k+m_k} P_k) + \dots \\ \quad + \beta_{m_k-1} B_{k+1}^{(k)} c(\xi^{n_k+2m_k-1} P_{k-1}^{(1)}) + \beta_{m_k-1} C_{k+1}^{(k)} c(\xi^{n_k+2m_k-1} P_k) = -c(\xi^{n_k+m_k-1} P_k). \end{array} \right.$$

soit encore :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{m_k-1} c(\xi^{n_k+m_k} P_{k-1}^{(1)}) + \alpha_{m_k} c(\xi^{n_k+m_k} P_k) = -c(\xi^{n_k} P_k) \\ \gamma_{m_k-2} c(\xi^{n_k+m_k} P_{k-1}^{(1)}) + \alpha_{m_k-1} c(\xi^{n_k+m_k} P_k) + \gamma_{m_k-1} c(\xi^{n_k+m_k+1} P_{k-1}^{(1)}) \\ \quad + \alpha_{m_k} c(\xi^{n_k+m_k+1} P_k) = -c(\xi^{n_k+1} P_k) \\ \vdots \\ \gamma_0 c(\xi^{n_k+m_k} P_{k-1}^{(1)}) + \alpha_1 c(\xi^{n_k+m_k} P_k) + \dots + \gamma_{m_k-1} c(\xi^{n_k+2m_k-1} P_{k-1}^{(1)}) \\ \quad + \alpha_{m_k} c(\xi^{n_k+2m_k-1} P_k) = -c(\xi^{n_k+m_k-1} P_k). \end{array} \right.$$

On a donc m_k équations.

$$\text{De plus } \gamma_{i-1} = \frac{B_{k+1}^{(1)}}{C_{k+1}^{(k)}} \alpha_i \quad \text{pour } i = 1, \dots, m_k.$$

$$\text{Par suite } \gamma_{i-1} = \frac{-c(\xi^{n_k} P_k)}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})} \alpha_i \quad \text{pour } i = 1, \dots, m_k.$$

Par conséquent, en remplaçant dans le système précédent, et en notant

$$C_k^{(i)} = c(\xi^{n_k+n_k+i} P_k) - \frac{c(\xi^{n_k} P_k)}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})} c(\xi^{n_k+m_k+i} P_{k-1}^{(1)}) \quad \text{pour } i = 0, \dots, m_k - 1, \text{ on a :}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_k^{(0)} \alpha_{m_k} = -c(\xi^{n_k} P_k) \\ C_k^{(0)} \alpha_{m_k-1} + C_k^{(1)} \alpha_{m_k} = -c(\xi^{n_k+1} P_k) \\ \vdots \\ C_k^{(0)} \alpha_1 + \dots + C_k^{(m_k-1)} \alpha_{m_k} = -c(\xi^{n_k+m_k-1} P_k). \end{array} \right.$$

On a donc un système triangulaire pour trouver les coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_{m_k}$. Puis connaissant les

$$\alpha_1, \dots, \alpha_{m_k}, \text{ on trouve les coefficients } \gamma_0, \dots, \gamma_{m_k-1} \text{ par } \gamma_{i-1} = \frac{-c(\xi^{n_k} P_k)}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})} \alpha_i.$$

Si $C_k^{(0)} \neq 0$, le système triangulaire donnera $\alpha_1, \dots, \alpha_{m_k}$ de manière unique.

Exprimons $C_k^{(0)}$ d'une autre manière.

$$C_k^{(0)} = c(\xi^{n_k+m_k} P_k) + \frac{B_{k+1}^{(k)}}{C_{k+1}^{(k)}} c(\xi^{n_k+m_k} P_{k-1}^{(1)}) = c(\xi^{n_k+m_k} P_k) + B_{k+1}^{(k)} a_{n_k} c(\xi^{n_k+m_k} P_{k-1}^{(1)}).$$

Comme $P_k(\xi) = a_{n_k} \left[P_k^{(1)}(\xi) - B_{k+1}^{(k)} P_{k-1}^{(1)}(\xi) \right]$ d'après la relation du type B_{10} à l'ordre n_k , on a :

$$C_k^{(0)} = a_{n_k} c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) - B_{k+1}^{(k)} a_{n_k} c(\xi^{n_k+m_k} P_{k-1}^{(1)}) + B_{k+1}^{(k)} a_{n_k} c(\xi^{n_k+m_k} P_{k-1}^{(1)}).$$

$$\text{Donc } C_k^{(0)} = a_{n_k} c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}).$$

Comme $c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) = 0$ et $a_{n_k} = 0$, on a $C_k^{(0)} = 0$.

Par conséquent les coefficients sont déterminés de manière unique.

Remarque :

On ne peut pas utiliser l'expression plus simple de $C_k^{(0)}$ dans le système car elle ne s'exprime pas avec

P_k et $P_{k-1}^{(1)}$ et on ne connaît pas explicitement a_{n_k} .

Par conséquent on a :

$$B_{10} (P_k^{(1)}) + A_8 (P_{k+1}) \rightarrow A_5 (P_{k+1})$$

La relation du type A_5 est :

$$P_{k+1}(\xi) = (1 + \alpha_1 \xi + \dots + \alpha_{m_k} \xi^{m_k}) P_k(\xi) + \xi (\gamma_0 + \gamma_1 \xi + \dots + \gamma_{m_k-1} \xi^{m_k-1}) P_{k-1}^{(1)}(\xi)$$

$$\text{avec } C_k^{(i)} = c(\xi^{n_k+m_k+i} P_k) - \frac{c(\xi^{n_k} P_k)}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})} c(\xi^{n_k+m_k+i} P_{k-1}^{(1)}) \quad \text{pour } i = 0, \dots, m_k - 1$$

$$\begin{cases} C_k^{(0)} \alpha_{m_k} = -c(\xi^{n_k} P_k) \\ C_k^{(0)} \alpha_{m_k-1} + C_k^{(1)} \alpha_{m_k} = -c(\xi^{n_k+1} P_k) \\ \vdots \\ C_k^{(0)} \alpha_1 + \dots + C_k^{(m_k-1)} \alpha_{m_k} = -c(\xi^{n_k+m_k-1} P_k) \end{cases}$$

$$\gamma_i = \frac{-c(\xi^{n_k} P_k)}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})} \alpha_{i+1} \quad \text{pour } i = 0, \dots, m_k - 1.$$

5.6. Relation du type B_5

La relation du type B_{10} à l'ordre n_k est : $P_k^{(1)}(\xi) = B_{k+1}^{(k)} P_{k-1}^{(1)}(\xi) + C_{k+1}^{(k)} P_k(\xi)$

avec $C_{k+1}^{(k)} = \frac{1}{a_{n_k}}$ où a_{n_k} est défini par $P_k(\xi) = a_{n_k} \xi^{n_k} + \dots + 1$

et $B_{k+1}^{(k)} = \frac{-C_{k+1}^{(k)} c(\xi^{n_k} P_k(\xi))}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)}(\xi))}$.

La relation du type B_6 est : $P_{k+1}^{(1)}(\xi) = C_k P_{k-1}^{(1)}(\xi) + (\alpha_0 + \alpha_1 \xi + \dots + \alpha_{m_k-1} \xi^{m_k-1} + \xi^{m_k}) P_k^{(1)}(\xi)$

avec $C_k = \frac{-c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)})}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})}$

et les coefficients $\alpha_0, \dots, \alpha_{m_k-1}$ sont déterminés par le système (1) :

$$\begin{cases} \alpha_{m_k-1} c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) = -c(\xi^{n_k+m_k+1} P_k^{(1)}) - C_k c(\xi^{n_k+1} P_{k-1}^{(1)}) \\ \vdots \\ \alpha_0 c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) + \dots + \alpha_{m_k-1} c(\xi^{n_k+2m_k-1} P_k^{(1)}) = -c(\xi^{n_k+2m_k} P_k^{(1)}) - C_k c(\xi^{n_k+m_k} P_{k-1}^{(1)}). \end{cases}$$

On cherche la relation du type B_5 c'est à dire $P_{k+1}^{(1)} \leftarrow P_k, P_{k-1}^{(1)}$.

On a, en appliquant les relations du type B_{10} à l'ordre n_k et du type B_6 :

$$P_{k+1}^{(1)} = C_k P_{k-1}^{(1)} + \left[B_{k+1}^{(k)} P_{k-1}^{(1)} + C_{k+1}^{(k)} P_k \right] (\alpha_0 + \alpha_1 \xi + \dots + \alpha_{m_k-1} \xi^{m_k-1} + \xi^{m_k}).$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } P_{k+1}^{(1)}(\xi) &= \left[C_k + B_{k+1}^{(k)} (\alpha_0 + \alpha_1 \xi + \dots + \alpha_{m_k-1} \xi^{m_k-1} + \xi^{m_k}) \right] P_{k-1}^{(1)}(\xi) \\ &\quad + C_{k+1}^{(k)} (\alpha_0 + \alpha_1 \xi + \dots + \alpha_{m_k-1} \xi^{m_k-1} + \xi^{m_k}) P_k(\xi). \end{aligned}$$

Par conséquent $P_{k+1}^{(1)}(\xi) = u_k(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi) + v_k(\xi) P_k(\xi)$

avec $u_k(\xi) = C_k + B_{k+1}^{(k)} (\alpha_0 + \alpha_1 \xi + \dots + \alpha_{m_k-1} \xi^{m_k-1} + \xi^{m_k})$

$$v_k(\xi) = C_{k+1}^{(k)} (\alpha_0 + \alpha_1 \xi + \dots + \alpha_{m_k-1} \xi^{m_k-1} + \xi^{m_k}).$$

Notons $\gamma_0 = C_k + B_{k+1}^{(k)} \alpha_0$, $\gamma_{m_k} = B_{k+1}^{(k)}$ et $\gamma_i = B_{k+1}^{(k)} \alpha_i$ pour $i = 1, \dots, m_k - 1$

et notons $\delta_i = C_{k+1}^{(k)} \alpha_i$ pour $i = 0, \dots, m_k - 1$ et $\delta_{m_k} = C_{k+1}^{(k)}$.

On a alors : $u_k(\xi) = \gamma_0 + \gamma_1 \xi + \dots + \gamma_{m_k-1} \xi^{m_k-1} + \gamma_{m_k} \xi^{m_k}$

et $v_k(\xi) = \delta_0 + \delta_1 \xi + \dots + \delta_{m_k} \xi^{m_k}$.

Exprimons plus simplement et à l'aide des polynômes $P_{k-1}^{(1)}$ et P_k les coefficients $\gamma_0, \dots, \gamma_{m_k}$, $\delta_0, \dots, \delta_{m_k}$.

On a immédiatement $\delta_{m_k} = \frac{1}{a_{n_k}}$ où a_{n_k} est défini par $P_k(\xi) = a_{n_k} \xi^{n_k} + \dots + 1$.

De plus $\gamma_{m_k} = B_{k+1}^{(k)} = \frac{-\delta_{m_k} c(\xi^{n_k} P_k)}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})}$.

D'après les formules de C_k et de $P_k^{(1)}$, on a : $C_k = \frac{-B_{k+1}^{(k)} c(\xi^{n_k+m_k} P_{k-1}^{(1)}) - C_{k+1}^{(k)} c(\xi^{n_k+m_k} P_k)}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})}$.

D'après les formules de $B_{k+1}^{(k)}$ et de $C_{k+1}^{(k)}$, on a :

$$C_k = \frac{\delta_{m_k} \left[\frac{c(\xi^{n_k} P_k)}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})} c(\xi^{n_k+m_k} P_{k-1}^{(1)}) - c(\xi^{n_k+m_k} P_k) \right]}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})}.$$

Notons $C_k^{(0)} = c(\xi^{n_k+m_k} P_k) - \frac{c(\xi^{n_k} P_k)}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})} c(\xi^{n_k+m_k} P_{k-1}^{(1)})$.

On a alors $C_k = \frac{-\delta_{m_k} C_k^{(0)}}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})}$.

Considérons la i ème équation du système (1), pour $i = 1, \dots, m_k - 1$, et remplaçons $P_k^{(1)}$ par

$B_{k+1}^{(k)} P_{k-1}^{(1)} + C_{k+1}^{(k)} P_k$, on a alors :

$$\begin{aligned} B_{k+1}^{(k)} \alpha_{m_k-i} c(\xi^{n_k+m_k} P_{k-1}^{(1)}) + C_{k+1}^{(k)} \alpha_{m_k-i} c(\xi^{n_k+m_k} P_k) + \dots \\ + B_{k+1}^{(k)} \alpha_{m_k-1} c(\xi^{n_k+m_k+i-1} P_{k-1}^{(1)}) + C_{k+1}^{(k)} \alpha_{m_k-1} c(\xi^{n_k+m_k+i-1} P_k) \\ = -B_{k+1}^{(k)} c(\xi^{n_k+m_k+i} P_{k-1}^{(1)}) - C_{k+1}^{(k)} c(\xi^{n_k+m_k+i} P_k) - C_k c(\xi^{n_k+i} P_{k-1}^{(1)}). \end{aligned}$$

Notons $C_k^{(i)} = c(\xi^{n_k+m_k+i} P_k) + \frac{B_{k+1}^{(k)}}{C_{k+1}^{(k)}} c(\xi^{n_k+m_k+i} P_{k-1}^{(1)})$ pour $i = 0, \dots, m_k$.

Comme $\frac{B_{k+1}^{(k)}}{C_{k+1}^{(k)}} = \frac{-c(\xi^{n_k} P_k)}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})}$, on retrouve $C_k^{(0)} = c(\xi^{n_k+m_k} P_k) - \frac{c(\xi^{n_k} P_k)}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})} c(\xi^{n_k+m_k} P_{k-1}^{(1)})$ qui a

été défini auparavant.

Donc la ième équation du système (1) devient : pour $i = 1, \dots, m_k$

$$C_{k+1}^{(k)} \alpha_{m_k-i} C_k^{(0)} + \dots + C_{k+1}^{(k)} \alpha_{m_k-1} C_k^{(i-1)} = -C_{k+1}^{(k)} C_k^{(i)} - C_k c(\xi^{n_k+i} P_{k-1}^{(1)}).$$

Par suite, comme $\delta_i = C_{k+1}^{(k)} \alpha_i$ pour $i = 0, \dots, m_k - 1$ et $\delta_{m_k} = C_{k+1}^{(k)}$, on a :

$$\delta_{m_k-i} C_k^{(0)} + \dots + \delta_{m_k-1} C_k^{(i-1)} = -\delta_{m_k} C_k^{(i)} - C_k c(\xi^{n_k+i} P_{k-1}^{(1)}) \quad \text{pour } i = 1, \dots, m_k.$$

$$\text{Or } C_k = \frac{-\delta_{m_k} C_k^{(0)}}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})}.$$

$$\text{Donc } \delta_{m_k-i} C_k^{(0)} + \dots + \delta_{m_k-1} C_k^{(i-1)} = -\delta_{m_k} C_k^{(i)} - \delta_{m_k} C_k^{(0)} \frac{c(\xi^{n_k+i} P_{k-1}^{(1)})}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})} \quad \text{pour } i = 1, \dots, m_k.$$

Par conséquent le système (1) devient :

$$\begin{cases} C_k^{(0)} \delta_{m_k-1} = -C_k^{(1)} \delta_{m_k} + C_k^{(0)} \delta_{m_k} \frac{c(\xi^{n_k+1} P_{k-1}^{(1)})}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})} \\ \vdots \\ C_k^{(0)} \delta_1 + \dots + C_k^{(m_k-2)} \delta_{m_k-1} = -C_k^{(m_k-1)} \delta_{m_k} + C_k^{(0)} \delta_{m_k} \frac{c(\xi^{n_k+m_k-1} P_{k-1}^{(1)})}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})} \\ C_k^{(0)} \delta_0 + \dots + C_k^{(m_k-1)} \delta_{m_k-1} = -C_k^{(m_k)} \delta_{m_k} + C_k^{(0)} \delta_{m_k} \frac{c(\xi^{n_k+m_k} P_{k-1}^{(1)})}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})}. \end{cases}$$

Le système est triangulaire régulier si $C_k^{(0)} \neq 0$.

Comme $C_k^{(0)} = \frac{-C_k c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})}{\delta_{m_k}} = a_{n_k} c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)})$ et comme $c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) \neq 0$, on a un système

triangulaire régulier qui nous donne les coefficients $\delta_0, \dots, \delta_{m_k-1}$ de manière unique.

Pour trouver $\gamma_0, \dots, \gamma_{m_k-1}$, on applique $\gamma_i = \frac{-c(\xi^{n_k} P_k)}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})} \delta_i$ pour $i = 1, \dots, m_k - 1$ et

$$\gamma_0 = C_k - \frac{c(\xi^{n_k} P_k)}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})} \delta_0.$$

Remarque : $C_k^{(i)} = c(\xi^{n_k+m_k+i} P_k) + \frac{\gamma_{m_k}}{\delta_{m_k}} c(\xi^{n_k+m_k+i} P_{k-1}^{(1)})$.

D'où $C_k^{(i)} = c(\xi^{n_k+m_k+i} P_k) - \frac{c(\xi^{n_k} P_k)}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})} c(\xi^{n_k+m_k+i} P_{k-1}^{(1)})$ pour $i = 0, \dots, m_k$.

Par conséquent on a :

La relation du type B_5 est :

$$P_{k+1}^{(1)}(\xi) = (\gamma_0 + \dots + \gamma_{m_k} \xi^{m_k}) P_{k-1}^{(1)}(\xi) + (\delta_0 + \dots + \delta_{m_k} \xi^{m_k}) P_k(\xi)$$

avec

$$\delta_{m_k} = \frac{1}{a_{n_k}} \text{ où } a_{n_k} \text{ est défini par } P_k(\xi) = a_{n_k} \xi^{n_k} + \dots + 1$$

$$\gamma_{m_k} = \frac{-\delta_{m_k} c(\xi^{n_k} P_k)}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})}$$

$$C_k^{(i)} = c(\xi^{n_k+m_k+i} P_k) - \frac{c(\xi^{n_k} P_k)}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})} c(\xi^{n_k+m_k+i} P_{k-1}^{(1)}) \quad \text{pour } i = 0, \dots, m_k$$

$$\begin{cases} C_k^{(0)} \delta_{m_k-1} = -C_k^{(1)} \delta_{m_k} + C_k^{(0)} \delta_{m_k} \frac{c(\xi^{n_k+1} P_{k-1}^{(1)})}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})} \\ \vdots \\ C_k^{(0)} \delta_1 + \dots + C_k^{(m_k-2)} \delta_{m_k-1} = -C_k^{(m_k-1)} \delta_{m_k} + C_k^{(0)} \delta_{m_k} \frac{c(\xi^{n_k+m_k-1} P_{k-1}^{(1)})}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})} \\ C_k^{(0)} \delta_0 + \dots + C_k^{(m_k-1)} \delta_{m_k-1} = -C_k^{(m_k)} \delta_{m_k} + C_k^{(0)} \delta_{m_k} \frac{c(\xi^{n_k+m_k} P_{k-1}^{(1)})}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})} \end{cases}$$

$$\gamma_i = \frac{-c(\xi^{n_k} P_k)}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})} \delta_i \quad \text{pour } i = 1, \dots, m_k - 1$$

$$\gamma_0 = C_k - \frac{c(\xi^{n_k} P_k)}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})} \delta_0.$$

Par conséquent :

$$B_{10} (P_k^{(1)}) + B_6 (P_{k+1}^{(1)}) \rightarrow B_5 (P_{k+1}^{(1)})$$

5.7. Relation du type A_1

La relation du type A_8 à l'ordre n_k est : $P_k(\xi) = P_{k-1}(\xi) + \xi v_{k-1}(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)$

avec $v_{k-1}(\xi) = \beta_0 + \beta_1 \xi + \dots + \beta_{m_{k-1}-1} \xi^{m_{k-1}-1}$ et où les coefficients β_i sont déterminés de manière

unique par le système (1) :

$$\begin{cases} \beta_{m_{k-1}-1} c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)}) = -c(\xi^{n_{k-1}} P_{k-1}) \\ \beta_{m_{k-1}-2} c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)}) + \beta_{m_{k-1}-1} c(\xi^{n_k+1} P_{k-1}^{(1)}) = -c(\xi^{n_{k-1}+1} P_{k-1}) \\ \vdots \\ \beta_0 c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)}) + \dots + \beta_{m_{k-1}-1} c(\xi^{n_k+m_{k-1}-1} P_{k-1}^{(1)}) = -c(\xi^{n_{k-1}} P_{k-1}). \end{cases}$$

La relation du type A_5 est :

$$P_{k+1}(\xi) = (1 + \alpha_1 \xi + \dots + \alpha_{m_k} \xi^{m_k}) P_k(\xi) + \xi (\gamma_0 + \gamma_1 \xi + \dots + \gamma_{m_k-1} \xi^{m_k-1}) P_{k-1}^{(1)}(\xi)$$

avec

$$C_k^{(i)} = c(\xi^{n_k+m_k+i} P_k) - \frac{c(\xi^{n_k} P_k)}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})} c(\xi^{n_k+m_k+i} P_{k-1}^{(1)}) \quad \text{pour } i = 0, \dots, m_k - 1$$

$$\begin{cases} C_k^{(0)} \alpha_{m_k} = -c(\xi^{n_k} P_k) \\ C_k^{(0)} \alpha_{m_k-1} + C_k^{(1)} \alpha_{m_k} = -c(\xi^{n_k+1} P_k) \\ \vdots \\ C_k^{(0)} \alpha_1 + \dots + C_k^{(m_k-1)} \alpha_{m_k} = -c(\xi^{n_k+m_k-1} P_k). \end{cases}$$

$$\gamma_i = \frac{-c(\xi^{n_k} P_k)}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})} \alpha_{i+1} \quad \text{pour } i = 0, \dots, m_k - 1.$$

On cherche la relation du type A_1 c'est à dire $P_{k+1} \leftarrow P_{k-1}, P_{k-1}^{(1)}$.

On a, en appliquant les relations du type A_8 à l'ordre n_k et du type A_5 :

$$P_{k+1}(\xi) = (1 + \alpha_1 \xi + \dots + \alpha_{m_k} \xi^{m_k}) P_{k-1}(\xi) + \xi \left[\gamma_0 + \gamma_1 \xi + \dots + \gamma_{m_k-1} \xi^{m_k-1} \right. \\ \left. + (1 + \alpha_1 \xi + \dots + \alpha_{m_k} \xi^{m_k}) (\beta_0 + \beta_1 \xi + \dots + \beta_{m_{k-1}-1} \xi^{m_{k-1}-1}) P_{k-1}^{(1)}(\xi) \right].$$

Par conséquent $P_{k+1}(\xi) = u_k(\xi) P_{k-1}(\xi) + \xi w_k(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)$

avec

$$w_k(\xi) = \gamma_0 + \gamma_1 \xi + \dots + \gamma_{m_k-1} \xi^{m_k-1} + (1 + \alpha_1 \xi + \dots + \alpha_{m_k} \xi^{m_k}) (\beta_0 + \beta_1 \xi + \dots + \beta_{m_k-1} \xi^{m_k-1})$$

$$u_k(\xi) = 1 + \alpha_1 \xi + \dots + \alpha_{m_k} \xi^{m_k}$$

et le système (1) :

$$\begin{cases} \beta_{m_k-1} c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)}) = -c(\xi^{n_k-m_k-1} P_{k-1}) \\ \beta_{m_k-2} c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)}) + \beta_{m_k-1} c(\xi^{n_k+1} P_{k-1}^{(1)}) = -c(\xi^{n_k-m_k-1+1} P_{k-1}) \\ \vdots \\ \beta_0 c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)}) + \dots + \beta_{m_k-1} c(\xi^{n_k+m_k-1} P_{k-1}^{(1)}) = -c(\xi^{n_k-1} P_{k-1}). \end{cases}$$

De plus $c(\xi^{n_k} P_k) = c(\xi^{n_k} P_{k-1}) + \beta_0 c(\xi^{n_k+1} P_{k-1}^{(1)}) + \dots + \beta_{m_k-1} c(\xi^{n_k+m_k-1} P_{k-1}^{(1)})$.

En notant $\delta_i = c(\xi^{n_k+i} P_k)$, on a :

$$\delta_i = c(\xi^{n_k+i} P_{k-1}) + \beta_0 c(\xi^{n_k+i+1} P_{k-1}^{(1)}) + \dots + \beta_{m_k-1} c(\xi^{n_k+m_k-1+i} P_{k-1}^{(1)}) \quad \text{et}$$

$$C_k^{(i)} = \delta_{m_k+i} - \frac{\delta_0}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})} c(\xi^{n_k+m_k+i} P_{k-1}^{(1)}) \quad \text{pour } i = 0, \dots, m_k-1.$$

Par suite on a le système (2) :

$$\begin{cases} C_k^{(0)} \alpha_{m_k} = -\delta_0 \\ C_k^{(0)} \alpha_{m_k-1} + C_k^{(1)} \alpha_{m_k} = -\delta_1 \\ \vdots \\ C_k^{(0)} \alpha_1 + \dots + C_k^{(m_k-1)} \alpha_{m_k} = -\delta_{m_k-1} \end{cases}$$

et $\gamma_i = \frac{-\delta_0}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})} \alpha_{i+1} \quad \text{pour } i = 0, \dots, m_k-1.$

Les systèmes (1) et (2) sont triangulaires réguliers d'après l'étude faite pour les relations du type A_8 et A_5 . Donc les coefficients $\beta_{m_k-1}, \dots, \beta_0, \alpha_{m_k}, \dots, \alpha_1$ sont déterminés de manière unique.

On a alors la conclusion suivante :

Conclusion

La relation du type A_1 est

$$P_{k+1}(\xi) = u_k(\xi) P_{k-1}(\xi) + \xi w_k(\xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)$$

avec

$$w_k(\xi) = \gamma_0 + \gamma_1 \xi + \dots + \gamma_{m_k-1} \xi^{m_k-1} + (1 + \alpha_1 \xi + \dots + \alpha_{m_k} \xi^{m_k}) (\beta_0 + \beta_1 \xi + \dots + \beta_{m_k-1} \xi^{m_k-1})$$

$$u_k(\xi) = 1 + \alpha_1 \xi + \dots + \alpha_{m_k} \xi^{m_k}$$

et les constantes sont déterminées de manière unique par :

$$\begin{cases} \beta_{m_k-1} c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)}) = -c(\xi^{n_k-m_k-1} P_{k-1}) \\ \beta_{m_k-2} c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)}) + \beta_{m_k-1} c(\xi^{n_k+1} P_{k-1}^{(1)}) = -c(\xi^{n_k-m_k+1} P_{k-1}) \\ \vdots \\ \beta_0 c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)}) + \dots + \beta_{m_k-1} c(\xi^{n_k+m_k-1} P_{k-1}^{(1)}) = -c(\xi^{n_k-1} P_{k-1}) \end{cases}$$

$$\delta_i = c(\xi^{n_k+i} P_{k-1}) + \beta_0 c(\xi^{n_k+i+1} P_{k-1}^{(1)}) + \dots + \beta_{m_k-1} c(\xi^{n_k+m_k-1+i} P_{k-1}^{(1)})$$

pour $i = 0, \dots, 2m_k - 1$

$$C_k^{(i)} = \delta_{m_k+i} - \frac{\delta_0}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})} c(\xi^{n_k+m_k+i} P_{k-1}^{(1)}) \quad \text{pour } i = 0, \dots, m_k - 1$$

$$\begin{cases} C_k^{(0)} \alpha_{m_k} = -\delta_0 \\ C_k^{(0)} \alpha_{m_k-1} + C_k^{(1)} \alpha_{m_k} = -\delta_1 \\ \vdots \\ C_k^{(0)} \alpha_1 + \dots + C_k^{(m_k-1)} \alpha_{m_k} = -\delta_{m_k-1} \end{cases}$$

$$\gamma_i = \frac{-\delta_0}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})} \alpha_{i+1} \quad \text{pour } i = 0, \dots, m_k - 1.$$

Par conséquent :

$$A_8(P_k) + A_5(P_k) \rightarrow A_1(P_k)$$

Remarque : Dans le cas où $m_k = 1$ et $m_{k-1} = 1$ c'est à dire lorsqu'il n'y a pas de saut, on a

$$P_{k+1}(\xi) = (1 + \alpha_1 \xi) P_{k-1}(\xi) + \xi (\gamma_0 + \beta_0 + \alpha_1 \beta_0 \xi) P_{k-1}^{(1)}(\xi)$$

avec

$$\beta_0 = \frac{-c(\xi^{n_k-1} P_{k-1})}{c(\xi^{n_k-1} P_{k-1}^{(1)})}$$

$$\alpha_1 = \frac{-c(\xi^{n_k} P_{k-1}) - \beta_0 c(\xi^{n_k+1} P_{k-1}^{(1)})}{c(\xi^{n_k+1} P_{k-1}) + \beta_0 c(\xi^{n_k+2} P_{k-1}^{(1)}) - \frac{c(\xi^{n_k} P_{k-1}) + \beta_0 c(\xi^{n_k+1} P_{k-1}^{(1)})}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})} c(\xi^{n_k+1} P_{k-1}^{(1)})}$$

$$\gamma_0 = \frac{-c(\xi^{n_k} P_{k-1}) - \beta_0 c(\xi^{n_k+1} P_{k-1}^{(1)})}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})} \alpha_1.$$

Exprimons autrement α_1 .

$$\alpha_1 = \frac{c(\xi^{n_k+1} P_{k-1}^{(1)}) c(\xi^{n_k-1} P_{k-1}) - c(\xi^{n_k} P_{k-1}) c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)}) c(\xi^{n_k+1} P_{k-1}) - c(\xi^{n_k-1} P_{k-1}) c(\xi^{n_k+2} P_{k-1}^{(1)}) - f_1} \quad \text{où}$$

$$f_1 = \frac{c(\xi^{n_k} P_{k-1}) c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)}) - c(\xi^{n_k-1} P_{k-1}) c(\xi^{n_k+1} P_{k-1}^{(1)})}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})} c(\xi^{n_k+1} P_{k-1}^{(1)})$$

$$\alpha_1 = \frac{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)}) \left[c(\xi^{n_k+1} P_{k-1}^{(1)}) c(\xi^{n_k-1} P_{k-1}) - c(\xi^{n_k} P_{k-1}) c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)}) \right]}{\Delta_{k+1}} \quad \text{avec}$$

$$\Delta_{k+1} = c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)}) \left[c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)}) c(\xi^{n_k+1} P_{k-1}) - c(\xi^{n_k-1} P_{k-1}) c(\xi^{n_k+2} P_{k-1}^{(1)}) \right] \\ - c(\xi^{n_k+1} P_{k-1}^{(1)}) \left[c(\xi^{n_k} P_{k-1}) c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)}) - c(\xi^{n_k-1} P_{k-1}) c(\xi^{n_k+1} P_{k-1}^{(1)}) \right]$$

c'est à dire

$$\Delta_{k+1} = c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)}) \left[c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)}) c(\xi^{n_k+1} P_{k-1}) - c(\xi^{n_k} P_{k-1}) c(\xi^{n_k+1} P_{k-1}^{(1)}) \right] \\ + c(\xi^{n_k-1} P_{k-1}) \left[c(\xi^{n_k+1} P_{k-1}^{(1)})^2 - c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)}) c(\xi^{n_k+2} P_{k-1}^{(1)}) \right].$$

On retrouve ce qui a été fait dans le deuxième chapitre.

5.8. Relation du type A_4

Nous cherchons une relation du type A_4 c'est à dire $P_{k+1} \leftarrow P_k, P_{k-1}$.

D'après ce qui a été fait dans la section précédente, nous allons essayer d'exprimer $P_{k+1}(\xi)$ de la manière suivante :

$$P_{k+1}(\xi) = u_k(\xi) P_{k-1}(\xi) + v_k(\xi) P_k(\xi)$$

où u_k et v_k sont des polynômes de degré $m_k - 1$, et m_k au plus.

u_k et v_k vont s'écrire sous la forme : $u_k(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \dots + \alpha_{m_k-1} \xi^{m_k-1}$ et

$$v_k(\xi) = \beta_0 + \beta_1 \xi + \dots + \beta_{m_k} \xi^{m_k}.$$

De plus, comme $\forall k \quad P_k(0) = 1$, on a : $u_k(0) + v_k(0) = 1$.

Par suite $\alpha_0 + \beta_0 = 1$.

On a donc $2 m_k$ coefficients à déterminer.

On a la relation (5.A.4) : Pour $i = 0, 1, \dots$

$$c(\xi^i P_{k+1}(\xi)) = c(\xi^i u_k(\xi) P_{k-1}(\xi)) + c(\xi^i v_k(\xi) P_k(\xi)).$$

Dans le cas de la rupture, on a d'après Draux [9] :

$$c(\xi^i P_{k+1}(\xi)) = 0 \quad \text{pour } i = 0, \dots, n_k + m_k - 1$$

$$c(\xi^i P_k(\xi)) = 0 \quad \text{pour } i = 0, \dots, n_k - 1$$

$$c(\xi^i P_{k-1}(\xi)) = 0 \quad \text{pour } i = 0, \dots, n_k - 2.$$

$$\text{Par suite } c(\xi^i v_k(\xi) P_k(\xi)) = 0 \quad \text{pour } i = 0, \dots, n_k - m_k - 1$$

$$c(\xi^i u_k(\xi) P_{k-1}(\xi)) = 0 \quad \text{pour } i = 0, \dots, n_k - m_k - 1.$$

Premier cas : $n_k - m_k - 1 \geq 0$.

◇ Pour $i = 0, \dots, n_k - m_k - 1$ la relation (5.A.4) est toujours vérifiée.

◇ Pour $i = n_k - m_k, \dots, n_k + m_k - 1$ on a les $2m_k$ équations suivantes :

$$c(\xi^i u_k(\xi) P_{k-1}(\xi)) + c(\xi^i v_k(\xi) P_k(\xi)) = 0$$

qui forment le système :

$$\begin{cases}
 \alpha_{m_k-1} c(\xi^{n_k-1} P_{k-1}) + \beta_{m_k} c(\xi^{n_k} P_k) = 0 \\
 \alpha_{m_k-1} c(\xi^{n_k} P_{k-1}) + \alpha_{m_k-2} c(\xi^{n_k-1} P_{k-1}) + \beta_{m_k} c(\xi^{n_k+1} P_k) + \beta_{m_k-1} c(\xi^{n_k} P_k) = 0 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \alpha_{m_k-1} c(\xi^{n_k+m_k-3} P_{k-1}) + \dots + \alpha_1 c(\xi^{n_k-1} P_{k-1}) + \beta_{m_k} c(\xi^{n_k+m_k-2} P_k) + \dots + \beta_2 c(\xi^{n_k} P_k) = 0 \\
 \alpha_{m_k-1} c(\xi^{n_k+m_k-2} P_{k-1}) + \dots + \alpha_0 c(\xi^{n_k-1} P_{k-1}) + \beta_{m_k} c(\xi^{n_k+m_k-1} P_k) + \dots + \beta_1 c(\xi^{n_k} P_k) = 0 \\
 \alpha_{m_k-1} c(\xi^{n_k+m_k-1} P_{k-1}) + \dots + \alpha_0 c(\xi^{n_k} P_{k-1}) + \beta_{m_k} c(\xi^{n_k+m_k} P_k) + \dots + \beta_0 c(\xi^{n_k} P_k) = 0 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \alpha_{m_k-1} c(\xi^{n_k+2m_k-2} P_{k-1}) + \dots + \alpha_0 c(\xi^{n_k+m_k-1} P_{k-1}) + \beta_{m_k} c(\xi^{n_k+2m_k-1} P_k) + \dots + \beta_0 c(\xi^{n_k+m_k-1} P_k) = 0.
 \end{cases}$$

En transposant et en renumérotant les équations et comme $\beta_0 = 1 - \alpha_0$, on a un système de la forme :

$$\begin{array}{c} mk \\ mk \end{array} \left(\begin{array}{cc} \boxed{} & \boxed{} \\ \begin{array}{c} \diagdown \\ \bigcirc \end{array} & \begin{array}{c} \diagdown \\ \bigcirc \end{array} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{mk} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{mk}$

Remarque : Si $m_k = 1$ c'est à dire si il n'y a pas de saut, on a :

$$\begin{cases} \alpha_0 + \beta_0 = 1 \\ \alpha_0 c(\xi^{n_k-1} P_{k-1}) + \beta_1 c(\xi^{n_k} P_k) = 0 \\ \alpha_0 c(\xi^{n_k} P_{k-1}) + \beta_1 c(\xi^{n_k+1} P_k) + \beta_0 c(\xi^{n_k} P_k) = 0. \end{cases}$$

$$\text{D'où } \begin{cases} \alpha_0 + \beta_0 = 1 \\ \alpha_0 c(\xi^{n_k-1} P_{k-1}) + \beta_1 c(\xi^{n_k} P_k) = 0 \\ \alpha_0 [c(\xi^{n_k} P_{k-1}) - c(\xi^{n_k} P_k)] + \beta_1 c(\xi^{n_k+1} P_k) = -c(\xi^{n_k} P_k). \end{cases}$$

Donc

$$\beta_1 = \frac{-c(\xi^{n_k-1} P_{k-1})c(\xi^{n_k} P_k)}{c(\xi^{n_k-1} P_{k-1})c(\xi^{n_k+1} P_k) - c(\xi^{n_k} P_k) [c(\xi^{n_k} P_{k-1}) - c(\xi^{n_k} P_k)]}$$

$$\alpha_0 = \frac{-\beta_1 c(\xi^{n_k} P_k)}{c(\xi^{n_k-1} P_{k-1})}$$

$$\beta_0 = 1 - \alpha_0.$$

On a alors $P_{k+1}(\xi) = \alpha_0 P_{k-1}(\xi) + (\beta_0 + \beta_1 \xi) P_k(\xi).$

Deuxième cas : $n_k - m_k - 1 < 0$.

On cherche P_{k+1} sous la forme suivante : $P_{k+1}(\xi) = u_k(\xi) P_{k-1}(\xi) + v_k(\xi) P_k(\xi)$

où u_k et v_k sont des polynômes de degré $n_k - 1$ et m_k au plus.

u_k et v_k s'écrivent sous la forme suivante :

$$u_k(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \dots + \alpha_{n_k-1} \xi^{n_k-1} \text{ et } v_k(\xi) = \beta_0 + \beta_1 \xi + \dots + \beta_{m_k} \xi^{m_k}.$$

Comme $\forall k \quad P_k(0) = 1$, on a : $\alpha_0 + \beta_0 = 1$.

On a donc $n_k + m_k$ coefficients à trouver.

On a la relation (5.A.4) : pour $i = 0, 1, \dots$

$$c(\xi^i P_{k+1}(\xi)) = c(\xi^i u_k(\xi) P_{k-1}(\xi)) + c(\xi^i v_k(\xi) P_k(\xi)).$$

Dans le cas de la rupture, on a :

$$c(\xi^i P_{k+1}(\xi)) = 0 \quad \text{pour } i = 0, \dots, n_k + m_k - 1.$$

Par suite, comme $n_k - m_k - 1 < 0$, on a :

◇ Pour $i = 0, \dots, n_k + m_k - 1$ on a les $n_k + m_k$ équations suivantes :

$$c(\xi^i u_k(\xi) P_{k-1}(\xi)) + c(\xi^i v_k(\xi) P_k(\xi)) = 0$$

soit encore :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{n_k-1} c(\xi^{n_k-1} P_{k-1}) + \beta_{n_k} c(\xi^{n_k} P_k) + \dots + \beta_{m_k} c(\xi^{m_k} P_k) = 0 \\ \alpha_{n_k-2} c(\xi^{n_k-2} P_{k-1}) + \alpha_{n_k-1} c(\xi^{n_k-1} P_{k-1}) + \beta_{n_k-1} c(\xi^{n_k} P_k) + \dots + \beta_{m_k} c(\xi^{m_k+1} P_k) = 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_0 c(\xi^{n_k-1} P_{k-1}) + \dots + \alpha_{n_k-1} c(\xi^{2n_k-2} P_{k-1}) + \beta_1 c(\xi^{n_k} P_k) + \dots + \beta_{m_k} c(\xi^{m_k+n_k-1} P_k) = 0 \\ \alpha_0 c(\xi^{n_k} P_{k-1}) + \dots + \alpha_{n_k-1} c(\xi^{2n_k-1} P_{k-1}) + \beta_0 c(\xi^{n_k} P_k) + \dots + \beta_{m_k} c(\xi^{m_k+n_k} P_k) = 0 \\ \vdots \\ \alpha_0 c(\xi^{n_k+1} P_{k-1}) + \dots + \alpha_{n_k-1} c(\xi^{2n_k} P_{k-1}) + \beta_0 c(\xi^{n_k+1} P_k) + \dots + \beta_{m_k} c(\xi^{n_k+m_k+1} P_k) = 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_0 c(\xi^{n_k+m_k-1} P_{k-1}) + \dots + \alpha_{n_k-1} c(\xi^{2n_k+m_k-1} P_{k-1}) + \beta_0 c(\xi^{n_k+m_k-1} P_k) + \dots + \beta_{m_k} c(\xi^{n_k+m_k+1} P_k) = 0. \end{array} \right.$$

On a donc trouvé la relation du type A_4 pour $n_k - m_k - 1 < 0$, en transposant et en renumérotant les équations et comme $\beta_0 = 1 - \alpha_0$, on a un système de la forme :

$$\begin{pmatrix} \square & \square \\ \triangle & \triangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Conclusion

La relation du type A_4 est :

$$P_{k+1}(\xi) = u_k(\xi) P_{k-1}(\xi) + v_k(\xi) P_k(\xi)$$

où $v_k(\xi) = \beta_0 + \beta_1 \xi + \dots + \beta_{m_k} \xi^{m_k}$

1er cas : $n_k - m_k - 1 \geq 0$.

Alors $u_k(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \dots + \alpha_{m_k-1} \xi^{m_k-1}$ et les constantes $\alpha_0, \dots, \alpha_{m_k-1}, \beta_0, \dots, \beta_{m_k}$ sont déterminées de manière unique par $\beta_0 = 1 - \alpha_0$ et

$$\begin{cases} \alpha_{m_k-1} c(\xi^{n_k-1} P_{k-1}) + \beta_{m_k} c(\xi^{n_k} P_k) = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{m_k-1} c(\xi^{n_k+m_k-2} P_{k-1}) + \dots + \alpha_0 c(\xi^{n_k-1} P_{k-1}) + \beta_{m_k} c(\xi^{n_k+m_k-1} P_k) + \dots + \beta_1 c(\xi^{n_k} P_k) = 0 \\ \alpha_{m_k-1} c(\xi^{n_k+m_k-1} P_{k-1}) + \dots + \alpha_0 c(\xi^{n_k} P_{k-1}) + \beta_{m_k} c(\xi^{n_k+m_k} P_k) + \dots + \beta_0 c(\xi^{n_k} P_k) = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{m_k-1} c(\xi^{n_k+2m_k-2} P_{k-1}) + \dots + \alpha_0 c(\xi^{n_k+m_k-1} P_{k-1}) + \beta_{m_k} c(\xi^{n_k+2m_k-1} P_k) + \dots + \beta_0 c(\xi^{n_k+m_k-1} P_k) = 0. \end{cases}$$

2ème cas : $n_k - m_k - 1 < 0$.

Alors $u_k(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \dots + \alpha_{n_k-1} \xi^{n_k-1}$ et les constantes $\alpha_0, \dots, \alpha_{n_k-1}, \beta_0, \dots, \beta_{m_k}$ sont déterminées de manière unique par $\beta_0 = 1 - \alpha_0$ et

$$\begin{cases} \alpha_{n_k-1} c(\xi^{n_k-1} P_{k-1}) + \beta_{n_k} c(\xi^{n_k} P_k) + \dots + \beta_{m_k} c(\xi^{m_k} P_k) = 0 \\ \vdots \\ \alpha_0 c(\xi^{n_k} P_{k-1}) + \dots + \alpha_{n_k-1} c(\xi^{2n_k-1} P_{k-1}) + \beta_0 c(\xi^{n_k} P_k) + \dots + \beta_{m_k} c(\xi^{m_k+n_k} P_k) = 0 \\ \alpha_0 c(\xi^{n_k+1} P_{k-1}) + \dots + \alpha_{n_k-1} c(\xi^{2n_k} P_{k-1}) + \beta_0 c(\xi^{n_k+1} P_k) + \dots + \beta_{m_k} c(\xi^{n_k+m_k+1} P_k) = 0 \\ \vdots \\ \alpha_0 c(\xi^{n_k+m_k-1} P_{k-1}) + \dots + \alpha_{n_k-1} c(\xi^{2n_k+m_k-1} P_{k-1}) + \beta_0 c(\xi^{n_k+m_k-1} P_k) + \dots + \beta_{m_k} c(\xi^{n_k+m_k+1} P_k) = 0. \end{cases}$$

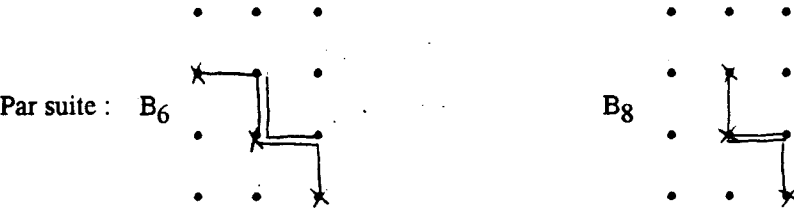
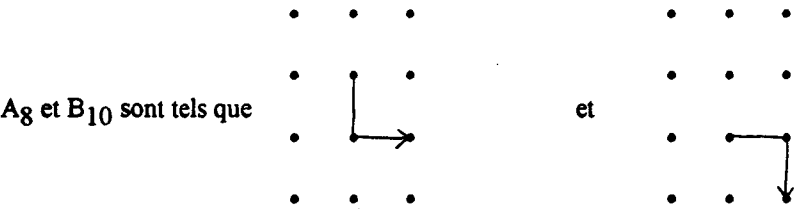
5.9. Conclusion

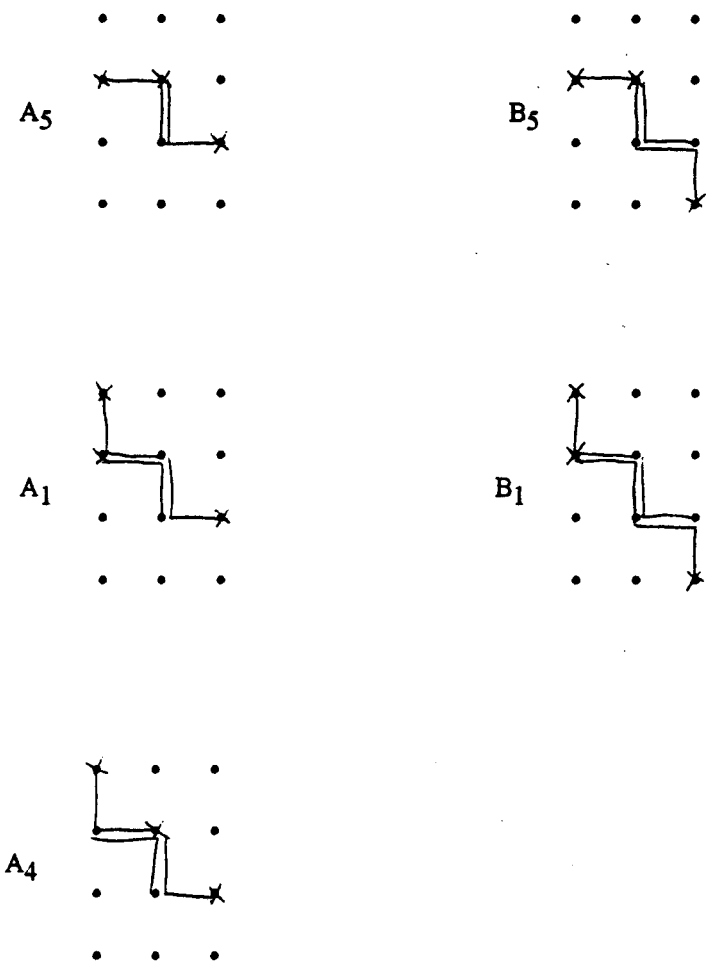
On a montré précédemment que :

$$\begin{aligned} B_{10} (P_k^{(1)}) + A_8 (P_{k+1}) + B_{10} (P_{k+1}^{(1)}) &\rightarrow B_6 (P_{k+1}^{(1)}) \\ A_8 (P_{k+1}) + B_{10} (P_{k+1}^{(1)}) &\rightarrow B_8 (P_{k+1}^{(1)}) \\ B_{10} (P_k^{(1)}) + A_8 (P_{k+1}) &\rightarrow A_5 (P_{k+1}) \\ B_{10} (P_{k+1}^{(1)}) + A_8 (P_{k+1}) + B_{10} (P_k^{(1)}) &\rightarrow B_5 (P_{k+1}^{(1)}) \\ A_8 (P_k) + B_{10} (P_k^{(1)}) + A_8 (P_{k+1}) &\rightarrow A_1 (P_{k+1}) \\ A_8 (P_k) + B_{10} (P_k^{(1)}) + A_8 (P_{k+1}) + B_{10} (P_{k+1}^{(1)}) &\rightarrow B_1 (P_{k+1}^{(1)}) \end{aligned}$$

Ceci était prévisible avec la table des P_k :

$P_{n-1}^{(0)}$	$P_n^{(-1)}$	$P_{n+1}^{(-2)}$
$P_{n-1}^{(1)}$	$P_n^{(0)}$	$P_{n+1}^{(-1)}$
$P_{n-1}^{(2)}$	$P_n^{(1)}$	$P_{n+1}^{(0)}$
$P_{n-1}^{(3)}$	$P_n^{(2)}$	$P_{n+1}^{(1)}$





6. METHODES A_i / B_j DANS LE CAS DE LA RUPTURE

On procède de la même manière que dans le chapitre 3.

Par les relations déterminées dans le chapitre 5, on peut programmer de manière récursive r_{k+1} , x_{k+1} et z_{k+1} .

Pour cela, il faut tout d'abord déterminer le nombre m_k qui correspond au saut que l'on doit faire pour passer d'un polynôme au suivant qui existe. Ensuite, il faut déterminer les différents coefficients qui interviennent dans les relations de récurrence, soit de manière directe si on a une formule explicite, soit en résolvant un système de dimension au plus m_k pour les méthodes étudiées ici.

Pour les algorithmes, on essayera encore de minimiser le nombre de multiplications matrice-vecteur, en introduisant notamment de nouveaux vecteurs qui se calculeront de manière récursive et qui seront utilisés dans la programmation de r_{k+1} , x_{k+1} et z_{k+1} .

6.1. Méthode du type A_8 / B_6 ou encore MRZ

6.1.1. MRZ

Dans la partie précédente, nous avons prouvé que la relation du type A_8 est de la forme :

$$P_{k+1}(\xi) = P_k(\xi) + \xi (\beta_0 + \beta_1 \xi + \dots + \beta_{m_k-1} \xi^{m_k-1}) P_k^{(1)}(\xi)$$

où les constantes β_i sont déterminées de manière unique par :

$$\begin{cases} \beta_{m_k-1} c^{(1)}(\xi^{m_k+n_k-1} P_k^{(1)}) = -c(\xi^{n_k} P_k) \\ \beta_{m_k-2} c^{(1)}(\xi^{m_k+n_k-1} P_k^{(1)}) + \beta_{m_k-1} c^{(1)}(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) = -c(\xi^{n_k+1} P_k) \\ \vdots \\ \beta_0 c^{(1)}(\xi^{m_k+n_k-1} P_k^{(1)}) + \dots + \beta_{m_k-1} c^{(1)}(\xi^{2m_k+n_k-2} P_k^{(1)}) = -c(\xi^{n_k+m_k-1} P_k). \end{cases}$$

Dans la partie précédente, nous avons prouvé que la relation du type B_6 est de la forme :

$$P_{k+1}^{(1)}(\xi) = C_k P_{k-1}^{(1)}(\xi) + (\alpha_0 + \alpha_1 \xi + \dots + \alpha_{m_k-1} \xi^{m_k-1} + \xi^{m_k}) P_k^{(1)}(\xi)$$

$$\text{où } C_k = \frac{-c^{(1)}(\xi^{n_k+m_k-1} P_k^{(1)})}{c^{(1)}(\xi^{n_k-1} P_{k-1}^{(1)})}$$

et les constantes α_i sont déterminées de manière unique par :

$$\begin{cases} \alpha_{m_k-1} c^{(1)}(\xi^{n_k+m_k-1} P_k^{(1)}) = -c^{(1)}(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) - C_k c^{(1)}(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)}) \\ \vdots \\ \alpha_0 c^{(1)}(\xi^{n_k+m_k-1} P_k^{(1)}) + \dots + \alpha_{m_k-1} c^{(1)}(\xi^{n_k+2m_k-2} P_k^{(1)}) = -c^{(1)}(\xi^{n_k+2m_k-1} P_k^{(1)}) - C_k c^{(1)}(\xi^{n_k+m_k-1} P_{k-1}^{(1)}). \end{cases}$$

Si on pose $r_k = P_k(A) r_0$ et $z_k = P_k^{(1)}(A) r_0$ alors on a :

$$\begin{aligned} r_{k+1} &= r_k + A(\beta_0 + \beta_1 A + \dots + \beta_{m_k-1} A^{m_k-1}) z_k \\ x_{k+1} &= x_k + A(\beta_0 + \beta_1 A + \dots + \beta_{m_k-1} A^{m_k-1}) z_k \\ z_{k+1} &= C_k z_{k-1} + (\alpha_0 + \alpha_1 A + \dots + \alpha_{m_k-1} A^{m_k-1} + A^{m_k}) z_k \end{aligned}$$

avec $z_0 = r_0$, $z_{-1} = 0$, $C_0 = 0$.

Le saut m_k que l'on doit faire pour passer d'un polynôme P_k de degré n_k au suivant P_{k+1} de degré n_{k+1} qui existe, peut se déterminer par les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} (y, A^{i+1} z_k) &= 0 \quad \text{pour } i = 0, \dots, n_k + m_k - 2 \\ (y, A^{n_k+m_k} z_k) &= 0. \end{aligned}$$

Cette méthode présentée dans [6] a été appelée Method of Recursive Zoom (MRZ) car les sauts que l'on fait pour passer d'un polynôme au suivant qui existe sont différents et leur recherche ressemble à un zoom. Elle est une généralisation de la méthode Orthodir et de l'algorithme BIODIR. Elle n'est sujette à aucune rupture, à part le "incurable hard breakdown" qui se produit quand $(y, A^n z_k) = 0$ avec n la dimension du système.

On a l'algorithme suivant : **algorithme MRZ**

- 1) Choisir x_0 et y d'une façon arbitraire
- 2) Poser $z_0 = r_0 = A x_0 - b$, $z_{-1} = 0$, $k = 0$, $n_0 = 0$
- 3) Déterminer m_k de façon que
 $(y, A^{i+1} z_k) = 0$ pour $i = n_k, \dots, n_k + m_k - 2$
et $(y, A^{n_k + m_k} z_k) \neq 0$
- 4) Calculer $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{m_k-1}$ et poser
$$r_{k+1} = r_k + A (\beta_0 + \beta_1 A + \dots + \beta_{m_k-1} A^{m_k-1}) z_k$$

$$x_{k+1} = x_k + A (\beta_0 + \beta_1 A + \dots + \beta_{m_k-1} A^{m_k-1}) z_k$$
- 5) Calculer $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m_k-1}$ et poser
$$z_{k+1} = C_k z_{k-1} + (\alpha_0 + \alpha_1 A + \dots + \alpha_{m_k-1} A^{m_k-1} + A^{m_k}) z_k$$
- 6) Si $r_{k+1} = 0$ alors $x_{k+1} = x$ et stop
- 7) Poser $n_{k+1} = n_k + m_k$
- 8) Si $n_{k+1} < n$ alors remplacer k avec $k+1$ et retourner à 3), autrement stop.

6.1.2. Mise en oeuvre de l'algorithme MRZ.

En notant $d_i = (y, A^{n_k+i} r_k)$, les systèmes deviennent

$$b_i = (y, A^{n_k+m_k+i} z_k)$$

$$p_i = (y, A^{n_k+i} z_{k-1})$$

$$\begin{cases} \beta_{m_k-1} b_0 = -d_0 \\ \beta_{m_k-2} b_0 + \beta_{m_k-1} b_1 = -d_1 \\ \vdots \\ \beta_0 b_0 + \dots + \beta_{m_k-1} b_{m_k-1} = -d_{m_k-1} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} C_k = \frac{-b_0}{p_0} \\ \alpha_{m_k-1} b_0 = -b_1 - C_k p_1 \\ \vdots \\ \alpha_0 b_0 + \dots + \alpha_{m_k-1} b_{m_k-1} = -b_{m_k} - C_k p_{m_k}. \end{cases}$$

L'analyse de ces systèmes montre qu'ils peuvent être réunis en un seul système avec deux seconds membres différents selon le schéma suivant :

Système de m_k équations pour β

Système de m_k équations pour α ($C_k = \frac{-b_0}{p_0}$)

	Pour β	Pour α
$\beta_0 \quad \beta_1 \quad \dots \quad \beta_{m_k-1}$		
$\alpha_0 \quad \alpha_1 \quad \dots \quad \alpha_{m_k-1}$		
$b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_{m_k-1}$	$-d_{m_k-1}$	$-b_{m_k} + b_0 p_{m_k} / p_0$
$b_0 \quad \dots \quad b_{m_k-2}$	$-d_{m_k-2}$	$-b_{m_k-1} + b_0 p_{m_k-1} / p_0$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
b_0	$-d_0$	$-b_1 + b_0 p_{m_k} / p_0$

Si l'on pose $s_i = A^i z_k = A s_{k-1}$ avec $s_0 = z_k$, on aura :

$$r_{k+1} = r_k + (\beta_0 s_1 + \beta_1 s_2 + \dots + \beta_{m_k-1} s_{m_k})$$

$$x_{k+1} = x_k + (\beta_0 s_0 + \beta_1 s_1 + \dots + \beta_{m_k-1} s_{m_k-1})$$

$$z_{k+1} = C_k z_{k-1} + \alpha_0 s_0 + \alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_{m_k-1} s_{m_k-1} + s_{m_k}.$$

Donc dans cet algorithme, on aura besoin à chaque étape k des quantités suivantes :

$$d_i = (y, A^{n_k+i} r_k) \quad \text{pour} \quad i = 0, \dots, m_k - 1$$

$$b_i = (y, A^{n_k+m_k+i} z_k) \quad \text{pour} \quad i = 0, \dots, m_k$$

$$p_i = (y, A^{n_k+i} z_{k-1}) \quad \text{pour} \quad i = 0, \dots, m_k$$

$$s_i = A^i z_k \quad \text{pour} \quad i = 0, \dots, m_k.$$

A l'itération k , il faut calculer les produits scalaires

$$(y, A^{i+j} z_{k-1}) \quad \text{pour} \quad i+j = n_k, \dots, n_k + m_k.$$

Mais à l'itération précédente, on a déjà calculé les produits scalaires

$$(y, A^{i+j} z_{k-1}) \quad \text{pour} \quad i+j = n_{k-1} + m_{k-1}, \dots, n_{k-1} + 2m_{k-1}$$

c'est à dire pour $i+j = n_k, \dots, n_k + m_{k-1}$.

Il y a donc à calculer seulement de nouveaux produits scalaires si $m_k > m_{k-1}$:

$$(y, A^{i+j} z_{k-1}) \quad \text{pour} \quad i+j = n_k + m_{k-1} + 1, n_k + m_{k-1} + 2, \dots, n_k + m_k.$$

Par suite il est suffisant de calculer :

$$d_i = (A^{Tn_k} y, A^i r_k) \quad \text{pour} \quad i = 0, \dots, m_k - 1$$

$$b_i = (A^{Tn_k} y, A^i z_k) \quad \text{pour} \quad i = m_k, \dots, 2m_k$$

$$p_i = (A^{Tn_k} y, A^i z_{k-1}) \quad \text{pour} \quad i = m_{k-1} + 1, \dots, m_k \quad (\text{si } m_k > m_{k-1}).$$

Il faut garder en mémoire $s_i = A^i z_k$ pour $i = 0, \dots, m_k$ et on a :

$$d_i = (A^{Tn_k+i} y, r_k) \quad \text{pour} \quad i = 0, \dots, m_k - 1$$

$$b_i = (A^{Tn_k+i} y, s_{m_k}) \quad \text{pour} \quad i = 0, \dots, m_k$$

$$p_i = (A^{Tn_k+i} y, z_{k-1}) \quad \text{pour} \quad i = m_{k-1} + 1, \dots, m_k \quad (\text{si } m_k > m_{k-1}).$$

6.1.3. Pseudo-code du MRZ

ALGORITHM MRZ (A, b, x_0, y)

1) Initializations :

$$z_{-1} \leftarrow 0$$

$$r_0 \leftarrow A x_0 - b$$

$$s_0 = r_0 = z_0$$

$$n_0 \leftarrow 0$$

2) For $k = 0, 1, 2, \dots$ until convergence do :

If $n_k = n$ then
 solution not obtained after n iterations
 stop

end if

$$s_1 \leftarrow A s_0$$

If $(y, s_1) = 0$ and $n_k = n - 1$ then
 incurable breakdown
 stop

$$m_k \leftarrow 1$$

3) While $(y, s_{m_k}) = 0$ and $m_k < n - n_k$ do :

$$m_k \leftarrow m_k + 1$$

$$s_{m_k} \leftarrow A s_{m_k - 1}$$

End while

If $m_k = n - n_k$ and $(y, s_{m_k}) = 0$ then
 incurable breakdown
 stop

End if

$$d_0 \leftarrow (y, r_k)$$

$$b_0 \leftarrow (y, s_{m_k})$$

$$\beta_{m_k - 1} \leftarrow -d_0 / b_0$$

4) For $i = 1, \dots, m_k$ do :

$$y \leftarrow A^T y$$

$$b_i \leftarrow (y, s_{m_k})$$

If $i = m_k$ then

```

         $d_i \leftarrow (v, r_k)$ 
        compute  $\beta_{m_k-i-1}$ 
    End if
    If  $k \neq 0$  and  $i > m_{k-1}$  then
         $p_i \leftarrow (v, z_{k-1})$ 
    End if
End for

5) Compute  $x_{k+1} = x_k + \beta_0 s_0 + \beta_1 s_1 + \dots + \beta_{m_k-1} s_{m_k-1}$ 
         $r_{k+1} = r_k + \beta_0 s_1 + \beta_1 s_2 + \dots + \beta_{m_k-1} s_{m_k}$ 
    If  $r_{k+1} = 0$  then
        solution obtained
        stop
    End if
     $n_{k+1} \leftarrow n_k + m_k$ 

6) If  $k = 0$  then
         $C_0 \leftarrow 0$ 
         $p_0 \leftarrow 0$ 
    Else
         $C_k \leftarrow -b_0 / p_0$ 
    End if

7) For  $i = 1, \dots, m_k$  do
        If  $k = 0$  then
             $p_i \leftarrow 0$ 
        End if
        Compute  $\alpha_{m_k-i}$ 
    End for

8) For  $i = 0, \dots, m_k$  do
         $p_i \leftarrow b_i$ 
    End for
     $s_0 \leftarrow z_{k+1} = C_k z_{k-1} + \alpha_0 s_0 + \alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_{m_k-1} s_{m_k-1} + s_{m_k}$ 
End for

```


6.2. Méthode du type Ag / B₁₀ ou encore BMRZ

6.2.1. BMRZ

La méthode calcule P_{k+1} à partir de $P_k^{(1)}$ et de P_k et après elle calcule $P_{k+1}^{(1)}$ à partir de P_{k+1} et de $P_k^{(1)}$. Il y a donc une "espèce de balancement" entre les deux relations. Le B de la méthode BMRZ signifie balancing.

La relation du type Ag est de la forme :

$$P_{k+1}(\xi) = P_k(\xi) + \xi (\beta_0 + \beta_1 \xi + \dots + \beta_{m_k-1} \xi^{m_k-1}) P_k^{(1)}(\xi)$$

où les constantes β_i sont déterminées de manière unique par :

$$\begin{cases} \beta_{m_k-1} c^{(1)}(\xi^{m_k+n_k-1} P_k^{(1)}) = -c(\xi^{n_k} P_k) \\ \beta_{m_k-2} c^{(1)}(\xi^{m_k+n_k-1} P_k^{(1)}) + \beta_{m_k-1} c^{(1)}(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) = -c(\xi^{n_k+1} P_k) \\ \vdots \\ \beta_0 c^{(1)}(\xi^{m_k+n_k-1} P_k^{(1)}) + \dots + \beta_{m_k-1} c^{(1)}(\xi^{n_k+2m_k-2} P_k^{(1)}) = -c(\xi^{n_k+m_k-1} P_k). \end{cases}$$

La relation du type B₁₀ est de la forme : $P_{k+1}^{(1)}(\xi) = B_{k+1} P_k^{(1)}(\xi) + C_{k+1} P_{k+1}(\xi)$

avec $C_{k+1} = \frac{1}{a_{n_k+m_k}}$ où $a_{n_k+m_k}$ est défini par $P_{k+1}(\xi) = a_{n_k+m_k} \xi^{n_k+m_k} + \dots + 1$

$$B_{k+1} = \frac{-C_{k+1} c(\xi^{n_k+m_k} P_{k+1}(\xi))}{c^{(1)}(\xi^{n_k+m_k-1} P_k^{(1)}(\xi))}.$$

D'après la forme de P_{k+1} on a : $\beta_{m_k-1} = a_{n_k+m_k}$.

$$\text{Par suite } C_{k+1} = \frac{1}{a_{n_k+m_k}} = \frac{-c^{(1)}(\xi^{n_k+m_k-1} P_k^{(1)}(\xi))}{c(\xi^{n_k} P_k(\xi))}$$

$$\text{et } B_{k+1} = \frac{c(\xi^{n_k+m_k} P_{k+1}(\xi))}{c(\xi^{n_k} P_k(\xi))}.$$

Cette relation est la même que celle démontré par Draux[9] et elle est une généralisation de la deuxième relation entre familles adjacentes de polynômes orthogonaux, c'est à dire la relation qui

implique $e_k^{(0)}$ (voir Brezinski [2] relation 2.9 p92 ou p95).

Donc la méthode BMRZ ne peut être utilisé que si $c(\xi^{n_k} P_k(\xi)) \neq 0$.

Comme [6] l'a montré, le BMRZ est une version simplifiée de l'algorithme SMRZ.

Si on pose $r_k = P_k(A) r_0$ et $z_k = P_k^{(1)}(A) r_0$ alors on a :

$$r_{k+1} = r_k + A (\beta_0 + \beta_1 A + \dots + \beta_{m_k-1} A^{m_k-1}) z_k$$

$$x_{k+1} = x_k - (\beta_0 + \beta_1 A + \dots + \beta_{m_k-1} A^{m_k-1}) z_k$$

$$z_{k+1} = B_{k+1} z_k + C_{k+1} r_{k+1}.$$

6.2.2. Mise en oeuvre de l'algorithme BMRZ.

En notant $d_i = (y, A^{n_k+i} r_k)$, le système devient

$$b_i = (y, A^{n_k+m_k+i} z_k)$$

$$\begin{cases} \beta_{m_k-1} b_0 = -d_0 \\ \beta_{m_k-2} b_0 + \beta_{m_k-1} b_1 = -d_1 \\ \vdots \\ \beta_0 b_0 + \dots + \beta_{m_k-1} b_{m_k-1} = -d_{m_k-1} \end{cases}$$

et on a à calculer $C_{k+1} = \frac{-b_0}{d_0}$ et $B_{k+1} = \frac{(y, A^{n_k+m_k} r_{k+1})}{d_0}$.

Cette formulation est celle du gradient biconjugué de Fletcher [10](voir aussi Brezinski [2] p91, où z_{k+1} est calculé à partir de r_{k+1} et z_k).

6.2.3. Pseudo-code du BMRZ

ALGORITHM BMRZ (A, b, x_0, y)

1) Initializations :

$$r_0 \leftarrow b - A x_0$$

$$s_0 = z_0 = r_0$$

$$n_0 \leftarrow 0$$

2) For $k = 0, 1, 2, \dots$ until convergence do :

If $n_k = n$ then
 solution not obtained after n iterations
 stop

end if

$$s_1 \leftarrow A s_0$$

If $(v, s_1) = 0$ and $n_k = n - 1$ then
 incurable breakdown
 stop

end if

$$m_k \leftarrow 1$$

3) While $(v, s_{m_k}) = 0$ and $m_k < n - n_k$ do :

$$m_k \leftarrow m_k + 1$$

$$s_{m_k} \leftarrow A s_{m_k - 1}$$

End while

If $m_k = n - n_k$ and $(v, s_{m_k}) = 0$ then
 incurable breakdown
 stop

End if

$$d_0 \leftarrow (v, r_k)$$

If $d_0 = 0$ then

$(v, A^{n_k} r_k) = 0$
 use the MRZ algorithm
 stop

End if

$$b_0 \leftarrow (v, s_{m_k})$$

$$\hat{y} \leftarrow y$$

$$\beta_{m_k - 1} \leftarrow -d_0 / b_0$$

- 4) For $i = 1, \dots, m_k$ do :
 - $y \leftarrow A^T y$
 - If $i = m_k$ then
 - $b_i \leftarrow (y, s_{m_k})$
 - $d_i \leftarrow (y, r_k)$
 - compute β_{m_k-1-i}
 - End if
- End for

- 5) Compute $x_{k+1} = x_k - (\beta_0 s_0 + \beta_1 s_1 + \dots + \beta_{m_k-1} s_{m_k-1})$
 - $r_{k+1} = r_k + \beta_0 s_1 + \beta_1 s_2 + \dots + \beta_{m_k-1} s_{m_k}$
 - If $r_{k+1} = 0$ then
 - solution obtained
 - stop
 - End if

- 6) $n_{k+1} \leftarrow n_k + m_k$

- 7) For $i = 1, \dots, m_k$ do
 - $\hat{y} \leftarrow A^T \hat{y}$
 - End for
 - $C_{k+1} \leftarrow 1 / \beta_{m_k-1}$
 - $B_{k+1} \leftarrow (\hat{y}, r_{k+1}) / d_0$
 - $s_0 \leftarrow z_{k+1} = B_{k+1} z_k + C_{k+1} r_{k+1}$
 - End for.

6.3. Méthode du type Ag / Bg ou encore SMRZ

6.3.1. SMRZ

Dans le SMRZ [5], P_{k+1} est calculé en utilisant P_k et $P_k^{(1)}$ et $P_{k+1}^{(1)}$ est calculé en utilisant P_k et $P_k^{(1)}$. Il y a donc une symétrie entre les deux relations. Le S de la méthode SMRZ signifie symetric.

La relation du type Ag est de la forme : $P_{k+1}(\xi) = P_k(\xi) + \xi(\beta_0 + \beta_1 \xi + \dots + \beta_{m_k-1} \xi^{m_k-1})P_k^{(1)}(\xi)$

où les constantes β_i sont déterminées de manière unique par :

$$\begin{cases} \beta_{m_k-1} c^{(1)}(\xi^{m_k+n_k-1} P_k^{(1)}) = -c(\xi^{n_k} P_k) \\ \beta_{m_k-2} c^{(1)}(\xi^{m_k+n_k-1} P_k^{(1)}) + \beta_{m_k-1} c^{(1)}(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) = -c(\xi^{n_k+1} P_k) \\ \vdots \\ \beta_0 c^{(1)}(\xi^{m_k+n_k-1} P_k^{(1)}) + \dots + \beta_{m_k-1} c^{(1)}(\xi^{n_k+2m_k-2} P_k^{(1)}) = -c(\xi^{n_k+m_k-1} P_k). \end{cases}$$

La relation du type Bg est, si $c(\xi^{n_k} P_k) \neq 0$,

$$P_{k+1}^{(1)}(\xi) = \delta_0 P_k(\xi) + (\alpha_0 + \dots + \alpha_{m_k-1} \xi^{m_k-1} + \xi^{m_k}) P_k^{(1)}(\xi)$$

avec $\delta_0 = \frac{-c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)})}{c(\xi^{n_k} P_k)}$ et les constantes $\alpha_0, \dots, \alpha_{m_k-1}$ sont déterminées de manière unique par :

$$\begin{cases} \alpha_{m_k-1} c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) = -\delta_0 c(\xi^{n_k+1} P_k) - c(\xi^{n_k+m_k+1} P_k^{(1)}) \\ \vdots \\ \alpha_1 c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) + \dots + \alpha_{m_k-1} c(\xi^{n_k+2m_k-2} P_k^{(1)}) = -\delta_0 c(\xi^{n_k+m_k-1} P_k) - c(\xi^{n_k+2m_k-1} P_k^{(1)}) \\ \alpha_0 c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) + \dots + \alpha_{m_k-1} c(\xi^{n_k+2m_k-1} P_k^{(1)}) = -\delta_0 c(\xi^{n_k+m_k} P_k) - c(\xi^{n_k+2m_k} P_k^{(1)}). \end{cases}$$

Le SMRZ ne peut être utilisé que si $c(\xi^{n_k} P_k) \neq 0$. Il a été montré dans [6] que :

$c(\xi^{n_k} P_k) = 0$ si et seulement si P_{k+1} est identique à P_k . Si $c(\xi^{n_k} P_k) = 0$ alors $P_{k+1}^{(1)}$ ne peut pas non plus être calculé comme combinaison linéaire (utilisant des coefficients polynomiaux) de $P_k^{(1)}$ et de P_k , c'est à dire qu'il n'existe pas de relation de la forme

$$P_{k+1}^{(1)}(\xi) = t_k(\xi) P_k^{(1)}(\xi) + u_k(\xi) P_k(\xi)$$

où t_k et u_k sont des polynômes de degré au plus m_k .

Si on pose $r_k = P_k(A) r_0$ et $z_k = P_k^{(1)}(A) r_0$ alors on a :

$$r_{k+1} = r_k + A (\beta_0 + \beta_1 A + \dots + \beta_{m_k-1} A^{m_k-1}) z_k$$

$$x_{k+1} = x_k - (\beta_0 + \beta_1 A + \dots + \beta_{m_k-1} A^{m_k-1}) z_k$$

$$z_{k+1} = \delta_0 r_k + (\alpha_0 + \dots + \alpha_{m_k-1} A^{m_k-1} + A^{m_k}) z_k.$$

6.3.2. Mise en oeuvre de l'algorithme SMRZ.

En notant $d_i = (y, A^{n_k+i} r_k)$, les systèmes deviennent :

$$b_i = (y, A^{n_k+m_k+i} z_k)$$

$$\begin{cases} \beta_{m_k-1} b_0 = -d_0 \\ \beta_{m_k-2} b_0 + \beta_{m_k-1} b_1 = -d_1 \\ \vdots \\ \beta_0 b_0 + \dots + \beta_{m_k-1} b_{m_k-1} = -d_{m_k-1} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \delta_0 = \frac{-b_0}{d_0} \\ \alpha_{m_k-1} b_0 = -\delta_0 d_1 - b_1 \\ \alpha_{m_k-2} b_0 + \alpha_{m_k-1} b_1 = -\delta_0 d_2 - b_2 \\ \vdots \\ \alpha_0 b_0 + \dots + \alpha_{m_k-1} b_{m_k-1} = -\delta_0 d_{m_k} - b_{m_k} \end{cases}$$

L'analyse de ces systèmes montre qu'ils peuvent être réunis en un seul système avec deux seconds membres différents selon le schéma suivant :

Système de m_k équations pour β

Système de m_k équations pour α ($\delta_0 = \frac{-b_0}{d_0}$).

	Pour β	Pour α
$\beta_0 \quad \beta_1 \quad \dots \quad \beta_{m_k-1}$		
$\alpha_0 \quad \alpha_1 \quad \dots \quad \alpha_{m_k-1}$		
$b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_{m_k-1}$	$-d_{m_k-1}$	$-b_{m_k} + d_{m_k} b_0 / p_0$
$\quad b_0 \quad \dots \quad b_{m_k-2}$	$-d_{m_k-2}$	$-b_{m_k-1} + d_{m_k-1} b_0 / p_0$
$\quad \quad \ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$\quad \quad \quad b_0$	$-d_0$	$-b_1 + d_1 b_0 / p_0$

Si l'on pose $s_i = A^i z_k = A s_{i-1}$ avec $s_0 = z_k$, on aura :

$$x_{k+1} = x_k - (\beta_0 s_0 + \beta_1 s_1 + \dots + \beta_{m_k-1} s_{m_k-1})$$

$$r_{k+1} = r_k + \beta_0 s_1 + \beta_1 s_2 + \dots + \beta_{m_k-1} s_{m_k}$$

$$z_{k+1} = \delta_0 r_k + \alpha_0 s_0 + \dots + \alpha_{m_k-1} s_{m_k-1} + s_{m_k}$$

Donc dans cet algorithme, on aura besoin à chaque étape k de calculer les produits scalaires :

$$d_i = (y, A^{n_k+i} r_k) = (A^{T n_k} y, A^i r_k) \quad \text{pour } i = 0, \dots, m_k$$

$$b_i = (y, A^{n_k+m_k+i} z_k) = (A^{T n_k} y, A^i s_{m_k}) \quad \text{pour } i = 0, \dots, m_k$$

et de garder en mémoire $s_i = A^i z_k$ pour $i = 0, \dots, m_k$.

6.3.3. Pseudo-code du SMRZ

ALGORITHM SMRZ (A, b, x_0, y)

1) Initializations :

$$r_0 \leftarrow b - A x_0$$

$$s_0 = z_0 = r_0$$

$$n_0 \leftarrow 0$$

2) For $k = 0, 1, 2, \dots$ until convergence do :

If $n_k = n$ then
 solution not obtained after n iterations
 stop

End if

$$s_1 \leftarrow A s_0$$

If $(y, s_1) = 0$ and $n_k = n - 1$ then
 incurable breakdown
 stop

End if

$$m_k \leftarrow 1$$

3) While $(y, s_{m_k}) = 0$ and $m_k < n - n_k$ do :

$$m_k \leftarrow m_k + 1$$

$$s_{m_k} \leftarrow A s_{m_k-1}$$

End while

If $m_k = n - n_k$ and $(y, s_{m_k}) = 0$ then
 incurable breakdown
 stop

End if

If $d_0 = 0$ then

$$(y, A^{n_k} r_k) = 0$$

use the MRZ algorithm
 stop

End if

$$b_0 \leftarrow (y, s_{m_k})$$

$$\beta_{m_k-1} \leftarrow -\frac{d_0}{b_0}$$

4) For $i = 1, \dots, m_k$ do

$$y \leftarrow A^T y$$

$$b_i \leftarrow (y, s_{m_k})$$

$$d_i \leftarrow (y, r_k)$$

If $i = m_k$ then

compute β_{m_k-1-i}

End if

End for

5) Compute $x_{k+1} = x_k - (\beta_0 s_0 + \beta_1 s_1 + \dots + \beta_{m_k-1} s_{m_k-1})$

$$r_{k+1} = r_k + \beta_0 s_1 + \beta_1 s_2 + \dots + \beta_{m_k-1} s_{m_k}$$

If $r_{k+1} = 0$ then

solution obtained

stop

End if

6) $n_{k+1} \leftarrow n_k + m_k$

$$\delta_0 \leftarrow -\frac{b_0}{d_0}$$

7) For $i = 1, \dots, m_k$ do

compute α_{m_k-i}

End for

8) $s_0 \leftarrow z_{k+1} = \delta_0 r_k + \alpha_0 s_0 + \dots + \alpha_{m_k-1} s_{m_k-1} + s_{m_k}$

End for.

6.4. Méthode du type A₈ / B₅

6.4.1. Méthode du type A₈ / B₅

La relation du type A₈ est de la forme : $P_{k+1}(\xi) = P_k(\xi) + \xi (\beta_0 + \beta_1 \xi + \dots + \beta_{m_k-1} \xi^{m_k-1}) P_k^{(1)}(\xi)$

où les constantes β_i sont déterminées de manière unique par :

$$\begin{cases} \beta_{m_k-1} c^{(1)}(\xi^{m_k+n_k-1} P_k^{(1)}) = -c(\xi^{n_k} P_k) \\ \beta_{m_k-2} c^{(1)}(\xi^{m_k+n_k-1} P_k^{(1)}) + \beta_{m_k-1} c^{(1)}(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) = -c(\xi^{n_k+1} P_k) \\ \vdots \\ \beta_0 c^{(1)}(\xi^{m_k+n_k-1} P_k^{(1)}) + \dots + \beta_{m_k-1} c^{(1)}(\xi^{n_k+2m_k-2} P_k^{(1)}) = -c(\xi^{n_k+m_k-1} P_k). \end{cases}$$

La relation du type B₅ est : $P_{k+1}^{(1)}(\xi) = (\gamma_0 + \dots + \gamma_{m_k} \xi^{m_k}) P_{k-1}^{(1)}(\xi) + (\delta_0 + \dots + \delta_{m_k} \xi^{m_k}) P_k(\xi)$

avec $\delta_{m_k} = \frac{1}{a_{n_k}}$ où a_{n_k} est défini par $P_k(\xi) = a_{n_k} \xi^{n_k} + \dots + 1$

$$\gamma_{m_k} = \frac{-\delta_{m_k} c(\xi^{n_k} P_k)}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})}$$

$$C_k^{(i)} = c(\xi^{n_k+m_k+i} P_k) - \frac{c(\xi^{n_k} P_k)}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})} c(\xi^{n_k+m_k+i} P_{k-1}^{(1)}) \quad \text{pour } i = 0, \dots, m_k$$

$$\begin{cases} C_k^{(0)} \delta_{m_k-1} = -C_k^{(1)} \delta_{m_k} + C_k^{(0)} \delta_{m_k} \frac{c(\xi^{n_k+1} P_{k-1}^{(1)})}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})} \\ \vdots \\ C_k^{(0)} \delta_1 + \dots + C_k^{(m_k-2)} \delta_{m_k-1} = -C_k^{(m_k-1)} \delta_{m_k} + C_k^{(0)} \delta_{m_k} \frac{c(\xi^{n_k+m_k-1} P_{k-1}^{(1)})}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})} \\ C_k^{(0)} \delta_0 + \dots + C_k^{(m_k-1)} \delta_{m_k-1} = -C_k^{(m_k)} \delta_{m_k} + C_k^{(0)} \delta_{m_k} \frac{c(\xi^{n_k+m_k} P_{k-1}^{(1)})}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})} \end{cases}$$

$$\gamma_i = \frac{-c(\xi^{n_k} P_k)}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})} \delta_i \quad \text{pour } i = 1, \dots, m_k-1$$

$$\gamma_0 = \frac{-\delta_{m_k} C_k^{(0)} - c(\xi^{n_k} P_k) \delta_0}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})}$$

On a : $a_{n_k} = \beta_{m_k-1}$. Par suite $\delta_{m_k} = \frac{1}{\beta_{m_k-1}}$.

Si l'on pose $r_k = P_k(A) r_0$ et $z_k = P_k^{(1)}(A) r_0$ et si de plus $r_k = b - Ax_k$, et $v_i = A^i z_{k-1}$, $s^i = A^i z_k$, $u^i = A^i r_k$, on obtient :

$$r_{k+1} = r_k + \beta_0 s_1 + \beta_1 s_2 + \dots + \beta_{m_k-1} s_{m_k}$$

$$x_{k+1} = x_k - (\beta_0 s_0 + \beta_1 s_1 + \dots + \beta_{m_k-1} s_{m_k-1})$$

$$z_{k+1} = \gamma_0 v_0 + \dots + \gamma_{m_k} v_{m_k} + \delta_0 u_0 + \dots + \delta_{m_k} u_{m_k}.$$

6.4.2. Mise en oeuvre de l'algorithme du type A₈ / B₅

En notant $d_i = (y, A^{n_k+i} r_k)$, les systèmes deviennent :

$$b_i = (y, A^{n_k+m_k+i} z_k)$$

$$b_i = (y, A^{n_k+m_k+i} z_k)$$

$$\begin{cases} \beta_{m_k-1} b_0 = -d_0 \\ \beta_{m_k-2} b_0 + \beta_{m_k-1} b_1 = -d_1 \\ \vdots \\ \beta_0 b_0 + \dots + \beta_{m_k-1} b_{m_k-1} = -d_{m_k-1} \end{cases}$$

$$\delta_{m_k} = \frac{1}{\beta_{m_k-1} - 1}$$

$$\gamma_{m_k} = \frac{-\delta_{m_k} d_0}{p_0}$$

$$C_k^{(i)} = d_{m_k+i} - \frac{d_0}{p_0} p_{m_k+i} \quad \text{pour } i = 0, \dots, m_k$$

$$\begin{cases} C_k^{(0)} \delta_{m_k-1} = -C_k^{(1)} \delta_{m_k} + C_k^{(0)} \delta_{m_k} \frac{p_1}{p_0} \\ \vdots \\ C_k^{(0)} \delta_1 + \dots + C_k^{(m_k-2)} \delta_{m_k-1} = -C_k^{(m_k-1)} \delta_{m_k} + C_k^{(0)} \delta_{m_k} \frac{p_{m_k-1}}{p_0} \\ C_k^{(0)} \delta_0 + \dots + C_k^{(m_k-1)} \delta_{m_k-1} = -C_k^{(m_k)} \delta_{m_k} + C_k^{(0)} \delta_{m_k} \frac{p_{m_k}}{p_0} \end{cases}$$

$$\gamma_i = \frac{-d_0}{p_0} \delta_i \quad \text{pour } i = 1, \dots, m_k - 1$$

$$\gamma_0 = \frac{-\delta_{m_k} C_k^{(0)} - d_0 \delta_0}{p_0}$$

Donc dans cet algorithme, on aura besoin à chaque étape k de calculer les produits scalaires :

$$d_i = (y, A^{n_k+i} r_k) = (A^{T n_k} y, A^i r_k) \quad \text{pour } i = 0, \dots, m_k$$

$$b_i = (y, A^{n_k+m_k+i} z_k) = (A^{T n_k} y, A^i s_{m_k}) \quad \text{pour } i = 0, \dots, m_k$$

$$d_i = (y, A^{n_k+i} r_k) = (A^{T n_k} y, A^i r_k) \quad \text{pour } i = 0, \dots, 2m_k$$

$$\text{et de garder en mémoire } s_i = A^i z_k \quad \text{pour } i = 0, \dots, m_k$$

$$u_i = A^i r_k \quad \text{pour } i = 0, \dots, m_k$$

$$v_i = A^i z_{k-1} \quad \text{pour } i = 0, \dots, m_k$$

6.4.3. Pseudo-code du type A_8 / B_5

ALGORITHM TA8B5 (A, b, x_0, y)

1) Initializations :

$$r_0 \leftarrow b - A x_0$$

$$z_0 = r_0$$

$$n_0 \leftarrow 0$$

$$r_1 \leftarrow r_0 - \frac{(y, r_0)}{(y, A r_0)} A r_0$$

$$x_1 \leftarrow x_0 + \frac{(y, r_0)}{(y, A r_0)} r_0$$

$$z_1 \leftarrow A r_0 - \frac{(y, A^2 r_0)}{(y, A r_0)} r_0$$

$$s_0 = z_1$$

$$u_0 = r_1$$

$$v_0 = z_0$$

$$\beta_{m_{k-1}-1} \leftarrow -\frac{(y, r_0)}{(y, A r_0)}$$

$$n_1 \leftarrow 1$$

2) For $k = 0, 1, 2, \dots$ until convergence do :

If $n_k = n$ then
 solution not obtained after n iterations
 stop

End if

$$s_1 \leftarrow A s_0$$

If $(y, s_1) = 0$ and $n_k = n - 1$ then
 incurable breakdown
 stop

End if

$$m_k \leftarrow 1$$

3) While $(y, s_{m_k}) = 0$ and $m_k < n - n_k$ do :

$$m_k \leftarrow m_k + 1$$

$$s_{m_k} \leftarrow A s_{m_k-1}$$

End while

If $m_k = n - n_k$ and $(y, s_{m_k}) = 0$ then
 incurable breakdown

- stop
- End if
- $d_0 \leftarrow (y, r_k)$
- $b_0 \leftarrow (y, s_{m_k})$
- $\hat{y} \leftarrow y$
- $\beta_{m_k-1} \leftarrow -\frac{d_0}{b_0}$
- 4) For $i = 1, \dots, m_k - 1$ do
- $y \leftarrow A^T y$
- $b_i \leftarrow (y, s_{m_k})$
- $d_i \leftarrow (y, r_k)$
- compute β_{m_k-1-i}
- End for
- 5) Compute $x_{k+1} = x_k - (\beta_0 s_0 + \beta_1 s_1 + \dots + \beta_{m_k-1} s_{m_k-1})$
- $r_{k+1} = r_k + \beta_0 s_1 + \beta_1 s_2 + \dots + \beta_{m_k-1} s_{m_k}$
- If $r_{k+1} = 0$ then
- solution obtained
- stop
- End if
- 6) $n_{k+1} \leftarrow n_k + m_k$
- $p_0 \leftarrow (\hat{y}, z_{k-1})$
- 7) For $i = 1, \dots, m_k - 1$ do
- $\hat{y} \leftarrow A^T \hat{y}$
- $p_i \leftarrow (\hat{y}, z_{k-1})$
- End for
- $\delta_{m_k} = \frac{1}{\beta_{m_k-1-1}}$
- $\gamma_{m_k} = \frac{-\delta_{m_k} d_0}{p_0}$
- For $i = m_k, \dots, 2m_k$ do
- $\hat{y} \leftarrow A^T \hat{y}$
- $p_i \leftarrow (\hat{y}, z_{k-1})$

$$d_i \leftarrow (\hat{y}, r_k)$$

$$C_k^{(i-m_k)} = d_i - \frac{d_0}{p_0} p_i$$

End for

For $i = 0, \dots, m_k - 1$ do

If $i = m_k - 1$ then

compute δ_{m_k-i-1}

$$\gamma_{m_k-i-1} = \frac{-d_0}{p_0} \delta_{m_k-i-1}$$

Else

compute δ_0

$$\gamma_0 = \frac{-\delta_{m_k} C_k^{(0)} - d_0 \delta_0}{p_0}$$

End if

End for

8) For $i = 1, \dots, m_k$ do

$$u_i \leftarrow A u_{i-1}$$

$$v_i \leftarrow A v_{i-1}$$

End for

$$z_{k+1} = \gamma_0 v_0 + \dots + \gamma_{m_k} v_{m_k} + \delta_0 u_0 + \dots + \delta_{m_k} u_{m_k}$$

$$s_0 \leftarrow z_{k+1}$$

$$u_0 \leftarrow r_{k+1}$$

$$v_0 \leftarrow z_k$$

End for.

Remarque :

A l'itération k , il faut calculer les produits scalaires

$$(\gamma, A^{i+j} z_{k-1}) \text{ pour } i+j = n_k, \dots, n_k + 2m_k.$$

Mais à l'itération $k-1$, on a déjà calculé les produits scalaires

$$(\gamma, A^{i+j} z_{k-1}) \text{ pour } i+j = n_{k-1} + m_{k-1}, \dots, n_{k-1} + 2m_{k-1} - 1$$

c'est à dire pour $i+j = n_k, \dots, n_k + m_{k-1} - 1$.

Il y a donc à calculer les nouveaux produits scalaires

$$(\gamma, A^{i+j} z_{k-1}) \text{ pour } i+j = n_k + m_{k-1}, \dots, n_k + 2m_k \text{ (si } m_{k-1} \leq 2m_k \text{)}.$$

Donc il faut garder uniquement en mémoire :

$$s_i = A^i z_k \quad \text{pour } i = 0, \dots, m_k$$

$$u_i = A^i r_k \quad \text{pour } i = 0, \dots, m_k$$

$$v_i = A^i z_{k-1} \quad \text{pour } i = 0, \dots, m_k$$

et

$$d_i = (y, A^{n_k+i} r_k) = (A^{T n_k} y, A^i r_k) \quad \text{pour } i = 0, \dots, 2m_k$$

$$b_i = (y, A^{n_k+m_k+i} z_k) = (A^{T n_k} y, A^i s_{m_k}) \quad \text{pour } i = 0, \dots, m_k - 1$$

$$p_i = (y, A^{n_k+i} z_{k-1}) = (A^{T n_k} y, A^i z_{k-1}) \quad \text{pour } i = m_{k-1}, \dots, 2m_k \quad (\text{si } m_{k-1} \leq 2m_k).$$

6.5. Méthode du type A₅ / B₅

6.5.1. Méthode du type A₅ / B₅

La relation du type A₅ est de la forme :

$$P_{k+1}(\xi) = (1 + \alpha_1 \xi + \dots + \alpha_{m_k} \xi^{m_k}) P_k(\xi) + \xi (\beta_0 + \beta_1 \xi + \dots + \beta_{m_k-1} \xi^{m_k-1}) P_k^{(1)}(\xi)$$

$$\text{avec } C_k^{(i)} = c(\xi^{n_k+m_k+i} P_k) - \frac{c(\xi^{n_k} P_k)}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})} c(\xi^{n_k+m_k+i} P_{k-1}^{(1)}) \quad \text{pour } i = 0, \dots, m_k - 1 \text{ et}$$

$$\begin{cases} C_k^{(0)} \alpha_{m_k} = -c(\xi^{n_k} P_k) \\ \vdots \\ C_k^{(0)} \alpha_2 + \dots + C_k^{(m_k-2)} \alpha_{m_k} = -c(\xi^{n_k+m_k-2} P_k) \\ C_k^{(0)} \alpha_1 + \dots + C_k^{(m_k-1)} \alpha_{m_k} = -c(\xi^{n_k+m_k-1} P_k) \end{cases}$$

$$\beta_i = \frac{-c(\xi^{n_k} P_k)}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})} \alpha_{i+1} \quad \text{pour } i = 0, \dots, m_k - 1.$$

$$\text{La relation du type B}_5 \text{ est } P_{k+1}^{(1)}(\xi) = (\gamma_0 + \dots + \gamma_{m_k} \xi^{m_k}) P_{k-1}^{(1)}(\xi) + (\delta_0 + \dots + \delta_{m_k} \xi^{m_k}) P_k(\xi)$$

$$\text{avec } \delta_{m_k} = \frac{1}{a_{n_k}} \text{ où } a_{n_k} \text{ est défini par } P_k(\xi) = a_{n_k} \xi^{n_k} + \dots + 1$$

$$\gamma_{m_k} = \frac{-\delta_{m_k} c(\xi^{n_k} P_k)}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})}$$

$$C_k^{(i)} = c(\xi^{n_k+m_k+i} P_k) - \frac{c(\xi^{n_k} P_k)}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})} c(\xi^{n_k+m_k+i} P_{k-1}^{(1)}) \quad \text{pour } i = 0, \dots, m_k$$

$$\begin{cases} C_k^{(0)} \delta_{m_k-1} = -C_k^{(1)} \delta_{m_k} + C_k^{(0)} \delta_{m_k} \frac{c(\xi^{n_k+1} P_{k-1}^{(1)})}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})} \\ \vdots \\ C_k^{(0)} \delta_1 + \dots + C_k^{(m_k-2)} \delta_{m_k-1} = -C_k^{(m_k-1)} \delta_{m_k} + C_k^{(0)} \delta_{m_k} \frac{c(\xi^{n_k+m_k-1} P_{k-1}^{(1)})}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})} \\ C_k^{(0)} \delta_0 + \dots + C_k^{(m_k-1)} \delta_{m_k-1} = -C_k^{(m_k)} \delta_{m_k} + C_k^{(0)} \delta_{m_k} \frac{c(\xi^{n_k+m_k} P_{k-1}^{(1)})}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})} \end{cases}$$

$$\gamma_i = \frac{-c(\xi^{n_k} P_k)}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})} \delta_i \quad \text{pour } i = 1, \dots, m_k - 1$$

$$\gamma_0 = \frac{-\delta_{m_k} C_k^{(0)} - c(\xi^{n_k} P_k) \delta_0}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})}.$$

On a : $a_{n_k} = \alpha_{m_{k-1}}$. Par suite $\delta_{m_k} = \frac{1}{\alpha_{m_{k-1}}}$.

Si on pose $r_k = P_k(A) r_0$ et $z_k = P_k^{(1)}(A) r_0$ et si de plus $r_k = b - Ax_k$, et

$v_i = A^i z_{k-1}$, $s^i = A^i z_k$, $u^i = A^i r_k$, on obtient :

$$r_{k+1} = r_k + \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{m_k} u_{m_k} + \beta_0 v_1 + \dots + \beta_{m_k-1} v_{m_k}$$

$$x_{k+1} = x_k - (\alpha_1 u_0 + \dots + \alpha_{m_k} u_{m_k-1} + \beta_0 v_0 + \dots + \beta_{m_k-1} v_{m_k-1})$$

$$z_{k+1} = \gamma_0 v_0 + \dots + \gamma_{m_k} v_{m_k} + \delta_0 u_0 + \dots + \delta_{m_k} u_{m_k}.$$

6.5.2. Mise en oeuvre de l'algorithme du type A₅ / B₅

En notant $d_i = (v, A^{n_k+i} r_k)$, alors on a :

$$b_i = (v, A^{n_k+m_k+i} z_k)$$

$$C_k^{(i)} = d_{m_k+i} - \frac{d_0}{p_0} p_{m_k+i} \quad \text{pour } i = 0, \dots, m_k$$

$$\begin{cases} C_k^{(0)} \alpha_{m_k} = -d_0 \\ \vdots \\ C_k^{(0)} \alpha_2 + \dots + C_k^{(m_k-2)} \alpha_{m_k} = -d_{m_k-2} \\ C_k^{(0)} \alpha_1 + \dots + C_k^{(m_k-1)} \alpha_{m_k} = -d_{m_k-1} \end{cases}$$

$$\beta_i = \frac{-d_0}{p_0} \alpha_{i+1} \quad \text{pour } i = 0, \dots, m_k - 1$$

$$\delta_{m_k} = \frac{1}{\alpha_{m_k-1}}$$

$$\gamma_{m_k} = \frac{-\delta_{m_k} d_0}{p_0}$$

$$\begin{cases} C_k^{(0)} \delta_{m_k-1} = -C_k^{(1)} \delta_{m_k} + C_k^{(0)} \delta_{m_k} \frac{p_1}{p_0} \\ \vdots \\ C_k^{(0)} \delta_1 + \dots + C_k^{(m_k-2)} \delta_{m_k-1} = -C_k^{(m_k-1)} \delta_{m_k} + C_k^{(0)} \delta_{m_k} \frac{p_{m_k-1}}{p_0} \\ C_k^{(0)} \delta_0 + \dots + C_k^{(m_k-1)} \delta_{m_k-1} = -C_k^{(m_k)} \delta_{m_k} + C_k^{(0)} \delta_{m_k} \frac{p_{m_k}}{p_0} \end{cases}$$

$$\gamma_i = \frac{-d_0}{p_0} \delta_i \quad \text{pour } i = 1, \dots, m_k - 1$$

$$\gamma_0 = \frac{-\delta_{m_k} C_k^{(0)} - d_0 \delta_0}{p_0}$$

L'analyse de ces systèmes montre qu'ils peuvent être réunis en un seul système avec deux seconds membres différents selon le schéma suivant :

Système de m_k équations pour α

Système de m_k équations pour δ

	Pour α	Pour δ
$\delta_0 \quad \delta_1 \quad \dots \quad \delta_{m_k-1}$		
$\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_{m_k}$		
$C_k^{(0)} \quad C_k^{(1)} \quad \dots \quad C_k^{(m_k-1)}$	$-d_{m_k-1}$	$-C_k^{(m_k)} \delta_{m_k} + C_k^{(0)} \delta_{m_k} p_{m_k} / p_0$
$C_k^{(0)} \quad \dots \quad C_k^{(m_k-2)}$	$-d_{m_k-2}$	$-C_k^{(m_k-1)} \delta_{m_k} + C_k^{(0)} \delta_{m_k} p_{m_k-1} / p_0$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$C_k^{(0)}$	$-d_0$	$-C_k^{(1)} \delta_{m_k} + C_k^{(0)} \delta_{m_k} p_1 / p_0$

Donc dans cet algorithme, on aura besoin à chaque étape k de calculer les produits scalaires :

$$d_i = (y, A^{n_k+i} r_k) = (A^{T n_k} y, A^i r_k) \quad \text{pour } i = 0, \dots, m_k$$

$$p_i = (y, A^{n_k+i} z_{k-1}) = (A^{T n_k} y, A^i z_{k-1}) \quad \text{pour } i = 0, \dots, 2m_k$$

et de garder en mémoire $u_i = A^i r_k \quad \text{pour } i = 0, \dots, m_k$

$$v_i = A^i z_{k-1} \quad \text{pour } i = 0, \dots, m_k.$$

6.5.3. Pseudo-code du type A₅ / B₅

ALGORITHM TA5B5 (A, b, x₀, y)

1) Initializations :

$$r_0 \leftarrow b - A x_0$$

$$z_0 = r_0$$

$$n_0 \leftarrow 0$$

$$r_1 \leftarrow r_0 - \frac{(y, r_0)}{(y, Ar_0)} Ar_0$$

$$x_1 \leftarrow x_0 + \frac{(y, r_0)}{(y, Ar_0)} r_0$$

$$z_1 \leftarrow Ar_0 - \frac{(y, A^2 r_0)}{(y, Ar_0)} r_0$$

$$s_0 = z_1$$

$$u_0 = r_1$$

$$v_0 = z_0$$

$$n_1 \leftarrow 1$$

2) For $k = 0, 1, 2, \dots$ until convergence do :

 If $n_k = n$ then

 solution not obtained after n iterations

 stop

 End if

$$s_1 \leftarrow A s_0$$

 If $(y, s_1) = 0$ and $n_k = n - 1$ then

 incurable breakdown

 stop

 End if

$$m_k \leftarrow 1$$

3) While $(y, s_{m_k}) = 0$ and $m_k < n - n_k$ do :

$$m_k \leftarrow m_k + 1$$

$$s_{m_k} \leftarrow A s_{m_k - 1}$$

End while

 If $m_k = n - n_k$ and $(y, s_{m_k}) = 0$ then

 incurable breakdown

 stop

 End if

$$b_0 \leftarrow (y, s_{m_k})$$

$$p_0 \leftarrow (y, z_{k-1})$$

4) For $i = 1, \dots, m_k$ do

$$y \leftarrow A^T y$$

$$d_i \leftarrow (y, r_k)$$

$$p_i \leftarrow (y, z_{k-1})$$

$$u_i \leftarrow Au_{i-1}$$

$$v_i \leftarrow Av_{i-1}$$

End for

For $i = m_k, \dots, 2m_k$ do

$$y \leftarrow A^T y$$

$$d_i \leftarrow (y, r_k)$$

$$p_i \leftarrow (y, z_{k-1})$$

$$C_k^{(i-m_k)} = d_i - \frac{d_0}{p_0} p_i$$

If $i = 2m_k$ then

compute α_{2m_k-i}

$$\beta_{2m_k-i-1} = \frac{-d_0}{p_0} \alpha_{2m_k-i}$$

End if

If $i = m_k$ then

$$u_i \leftarrow Au_{i-1}$$

$$v_i \leftarrow Av_{i-1}$$

End if

End for

5) Compute $r_{k+1} = r_k + \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{m_k} u_{m_k} + \beta_0 v_1 + \dots + \beta_{m_k-1} v_{m_k}$

$$x_{k+1} = x_k - (\alpha_1 u_0 + \dots + \alpha_{m_k} u_{m_k-1} + \beta_0 v_0 + \dots + \beta_{m_k-1} v_{m_k-1})$$

If $r_{k+1} = 0$ then

solution obtained
stop

End if

6) $n_{k+1} \leftarrow n_k + m_k$

$$7) \quad \delta_{m_k} = \frac{1}{\alpha_{m_k-1}}$$

$$\gamma_{m_k} = \frac{-d_0}{p_0} \delta_{m_k}$$

$$\gamma_0 = \frac{-\delta_{m_k} C_k^{(0)} - d_0 \delta_0}{p_0}$$

For $i = 1, \dots, m_k$ do

compute δ_{m_k-i}

If $i = m_k - 1$ then

$$\gamma_{m_k-i-1} = \frac{-d_0}{p_0} \delta_{m_k-i-1}$$

End if

End for

$$8) \quad z_{k+1} = \gamma_0 v_0 + \dots + \gamma_{m_k} v_{m_k} + \delta_0 u_0 + \dots + \delta_{m_k} u_{m_k}$$

$$s_0 \leftarrow z_{k+1}$$

$$u_0 \leftarrow r_{k+1}$$

$$v_0 \leftarrow z_k$$

9) End for.

6.6. Méthode du type A₅ / B₁₀

6.6.1. Méthode du type A₅ / B₁₀

La relation du type A₅ est de la forme :

$$P_{k+1}(\xi) = (1 + \alpha_1 \xi + \dots + \alpha_{m_k} \xi^{m_k}) P_k(\xi) + \xi (\beta_0 + \beta_1 \xi + \dots + \beta_{m_k-1} \xi^{m_k-1}) P_k^{(1)}(\xi)$$

avec

$$C_k^{(i)} = c(\xi^{n_k+m_k+i} P_k) - \frac{c(\xi^{n_k} P_k)}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})} c(\xi^{n_k+m_k+i} P_{k-1}^{(1)}) \quad \text{pour } i = 0, \dots, m_k - 1$$

$$\begin{cases} C_k^{(0)} \alpha_{m_k} = -c(\xi^{n_k} P_k) \\ \vdots \\ C_k^{(0)} \alpha_2 + \dots + C_k^{(m_k-2)} \alpha_{m_k} = -c(\xi^{n_k+m_k-2} P_k) \\ C_k^{(0)} \alpha_1 + \dots + C_k^{(m_k-1)} \alpha_{m_k} = -c(\xi^{n_k+m_k-1} P_k) \end{cases}$$

$$\beta_i = \frac{-c(\xi^{n_k} P_k)}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})} \alpha_{i+1} \quad \text{pour } i = 0, \dots, m_k - 1.$$

La relation du type B₁₀ est de la forme $P_{k+1}^{(1)}(\xi) = B_{k+1} P_k^{(1)}(\xi) + C_{k+1} P_{k+1}(\xi)$

avec $C_{k+1} = \frac{1}{a_{n_k+m_k}}$ où $a_{n_k+m_k}$ est défini par $P_{k+1}(\xi) = a_{n_k+m_k} \xi^{n_k+m_k} + \dots + 1$

$$B_{k+1} = \frac{-C_{k+1} c(\xi^{n_k+m_k} P_{k+1})}{c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)})}.$$

On a : $a_{n_k+m_k} = \alpha_{m_k}$. Par suite $C_{k+1} = \frac{1}{\alpha_{m_k}}$.

Si l'on pose $r_k = P_k(A) r_0$ et $z_k = P_k^{(1)}(A) r_0$ et si de plus $r_k = b - Ax_k$, et $v_i = A^i z_{k-1}$,

$s^i = A^i z_k$, $u^i = A^i r_k$, on obtient :

$$r_{k+1} = r_k + \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{m_k} u_{m_k} + \beta_0 v_1 + \dots + \beta_{m_k-1} v_{m_k}$$

$$x_{k+1} = x_k - (\alpha_1 u_0 + \dots + \alpha_{m_k} u_{m_k-1} + \beta_0 v_0 + \dots + \beta_{m_k-1} v_{m_k-1})$$

$$z_{k+1} = B_{k+1} z_k + C_{k+1} r_{k+1}.$$

6.6.2. Mise en oeuvre de l'algorithme du type A₅ / B₁₀

En notant $d_i = (y, A^{n_k+i} r_k)$, alors on a :

$$b_i = (y, A^{n_k+m_k+i} z_k)$$

$$p_i = (y, A^{n_k+i} z_{k-1})$$

$$C_k^{(i)} = d_{m_k+i} - \frac{d_0}{p_0} p_{m_k+i} \quad \text{pour } i = 0, \dots, m_k - 1$$

$$\begin{cases} C_k^{(0)} \alpha_{m_k} = -d_0 \\ \vdots \\ C_k^{(0)} \alpha_2 + \dots + C_k^{(m_k-2)} \alpha_{m_k} = -d_{m_k-2} \\ C_k^{(0)} \alpha_1 + \dots + C_k^{(m_k-1)} \alpha_{m_k} = -d_{m_k-1} \end{cases}$$

$$\beta_i = \frac{-d_0}{p_0} \alpha_{i+1} \quad \text{pour } i = 0, \dots, m_k - 1$$

$$B_{k+1} = \frac{-C_{k+1}(y, A^{n_k+m_k} r_{k+1})}{b_0}.$$

Donc dans cet algorithme, on aura besoin à chaque étape k de calculer les produits scalaires :

$$b_0 = (y, A^{n_k+m_k} z_k)$$

$$d_i = (y, A^{n_k+i} r_k) = (A^{T n_k} y, A^i r_k) \quad \text{pour } i = 0, \dots, 2m_k - 1$$

$$p_i = (y, A^{n_k+i} z_{k-1}) = (A^{T n_k} y, A^i z_{k-1}) \quad \text{pour } i = 0, \dots, 2m_k - 1$$

et de garder en mémoire $u_i = A^i r_k$ pour $i = 0, \dots, m_k$

$$v_i = A^i z_{k-1} \quad \text{pour } i = 0, \dots, m_k.$$

6.6.3. Pseudo-code du type A₅ / B₁₀

ALGORITHM TA5B10 (A, b, x_0, y)

1) Initializations :

$$r_0 \leftarrow b - A x_0$$

$$z_0 = r_0$$

$$n_0 \leftarrow 0$$

$$r_1 \leftarrow r_0 - \frac{(y, r_0)}{(y, A r_0)} A r_0$$

$$x_1 \leftarrow x_0 + \frac{(y, r_0)}{(y, A r_0)} r_0$$

$$z_1 \leftarrow A r_0 - \frac{(y, A^2 r_0)}{(y, A r_0)} r_0$$

$$s_0 = z_1$$

$$u_0 = r_1$$

$$v_0 = z_0$$

$$n_1 \leftarrow 1$$

2) For $k = 0, 1, 2, \dots$ until convergence do :

If $n_k = n$ then
 solution no obtained after n iterations
 stop

End if

$$s_1 \leftarrow A s_0$$

If $(y, s_1) = 0$ and $n_k = n - 1$ then
 incurable breakdown
 stop

End if

$$m_k \leftarrow 1$$

3) While $(y, s_{m_k}) = 0$ and $m_k < n - n_k$ do :

$$m_k \leftarrow m_k + 1$$

$$s_{m_k} \leftarrow A s_{m_k - 1}$$

End while

If $m_k = n - n_k$ and $(y, s_{m_k}) = 0$ then
 incurable breakdown
 stop

End if

$$d_0 \leftarrow (y, r_k)$$

- $p_0 \leftarrow (v, z_{k-1})$
 $b_0 \leftarrow (v, s_{m_k})$
 $\tilde{y} \leftarrow y$
- 4) For $i = 0, \dots, m_k - 1$ do
- $u_{i+1} \leftarrow Au_i$
 $v_{i+1} \leftarrow Av_i$
 If $i \neq 0$ then
 $y \leftarrow A^T y$
 $d_i \leftarrow (v, r_k)$
 $p_i \leftarrow (v, z_{k-1})$
 End if
 End for
 $\hat{y} \leftarrow y$
- For $i = 0, \dots, m_k - 1$ do
- $\hat{y} \leftarrow A^T \hat{y}$
 $d_{i+m_k} \leftarrow (\hat{y}, r_k)$
 $p_{i+m_k} \leftarrow (\hat{y}, z_{k-1})$
 $C_k^{(i)} = d_{i+m_k} - \frac{d_0}{p_0} p_{i+m_k}$
 compute α_{m_k-i}
 $\beta_{m_k-i-1} = \frac{-d_0}{p_0} \alpha_{m_k-i}$
 End for
- 5) Compute $r_{k+1} = r_k + \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{m_k} u_{m_k} + \beta_0 v_1 + \dots + \beta_{m_k-1} v_{m_k}$
- $x_{k+1} = x_k - (\alpha_1 u_0 + \dots + \alpha_{m_k} u_{m_k-1} + \beta_0 v_0 + \dots + \beta_{m_k-1} v_{m_k-1})$
- If $r_{k+1} = 0$ then
 solution obtained
 stop
 End if
- 6) $n_{k+1} \leftarrow n_k + m_k$

$$7) \quad C_{k+1} = \frac{1}{\alpha_{m_k}}$$

For $i = 1, \dots, m_k$ do

$$\tilde{y} \leftarrow A^T \tilde{y}$$

End for

$$B_{k+1} = \frac{-C_{k+1} (\tilde{v}, A^{Tn_k} r_{k+1})}{b_0}$$

$$8) \quad z_{k+1} = B_{k+1} z_k + C_{k+1} r_{k+1}$$

$$s_0 \leftarrow z_{k+1}$$

$$u_0 \leftarrow r_{k+1}$$

$$v_0 \leftarrow z_k$$

9) End for.

6.7. Méthode du type A₅ / B₆

6.7.1. Méthode du type A₅ / B₆

La relation du type A₅ est de la forme :

$$P_{k+1}(\xi) = (1 + \alpha_1 \xi + \dots + \alpha_{m_k} \xi^{m_k}) P_k(\xi) + \xi (\beta_0 + \beta_1 \xi + \dots + \beta_{m_k-1} \xi^{m_k-1}) P_k^{(1)}(\xi)$$

avec

$$C_k^{(i)} = c(\xi^{n_k+m_k+i} P_k) - \frac{c(\xi^{n_k} P_k)}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})} c(\xi^{n_k+m_k+i} P_{k-1}^{(1)}) \quad \text{pour } i = 0, \dots, m_k - 1$$

$$\begin{cases} C_k^{(0)} \alpha_{m_k} = -c(\xi^{n_k} P_k) \\ \vdots \\ C_k^{(0)} \alpha_2 + \dots + C_k^{(m_k-2)} \alpha_{m_k} = -c(\xi^{n_k+m_k-2} P_k) \\ C_k^{(0)} \alpha_1 + \dots + C_k^{(m_k-1)} \alpha_{m_k} = -c(\xi^{n_k+m_k-1} P_k) \end{cases}$$

$$\beta_i = \frac{-c(\xi^{n_k} P_k)}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})} \alpha_{i+1} \quad \text{pour } i = 0, \dots, m_k - 1.$$

La relation du type B₆ est de la forme

$$P_{k+1}^{(1)}(\xi) = C_k P_{k-1}^{(1)}(\xi) + (\gamma_0 + \dots + \gamma_{m_k-1} \xi^{m_k-1} + \xi^{m_k}) P_k^{(1)}(\xi)$$

$$\text{avec } C_k = \frac{-c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)})}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})}$$

$$\begin{cases} \gamma_{m_k-1} c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) = -c(\xi^{n_k+m_k+1} P_k^{(1)}) - C_k c(\xi^{n_k+1} P_{k-1}^{(1)}) \\ \vdots \\ \gamma_0 c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) + \dots + \gamma_{m_k-1} c(\xi^{n_k+2m_k-1} P_k^{(1)}) = -c(\xi^{n_k+2m_k} P_k^{(1)}) - C_k c(\xi^{n_k+m_k} P_{k-1}^{(1)}). \end{cases}$$

Si l'on pose $r_k = P_k(A) r_0$ et $z_k = P_k^{(1)}(A) r_0$ et si de plus $r_k = b - Ax_k$, et $v_i = A^i z_{k-1}$,

$s^j = A^j z_k$, $u^i = A^i r_k$, on obtient :

$$r_{k+1} = r_k + \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{m_k} u_{m_k} + \beta_0 v_1 + \dots + \beta_{m_k-1} v_{m_k}$$

$$x_{k+1} = x_k - (\alpha_1 u_0 + \dots + \alpha_{m_k} u_{m_k-1} + \beta_0 v_0 + \dots + \beta_{m_k-1} v_{m_k-1})$$

$$z_{k+1} = C_k z_{k-1} + \gamma_0 s_0 + \dots + \gamma_{m_k-1} s_{m_k-1} + s_{m_k}.$$

6.7.2. Mise en oeuvre de l'algorithme du type A₅ / B₆

En notant $d_i = (y, A^{n_k+i} r_k)$, alors on a :

$$b_i = (y, A^{n_k+m_k+i} z_k)$$

$$p_i = (y, A^{n_k+i} z_{k-1})$$

$$C_k^{(i)} = d_{m_k+i} - \frac{d_0}{p_0} p_{m_k+i} \quad \text{pour } i = 0, \dots, m_k - 1$$

$$\begin{cases} C_k^{(0)} \alpha_{m_k} = -d_0 \\ \vdots \\ C_k^{(0)} \alpha_2 + \dots + C_k^{(m_k-2)} \alpha_{m_k} = -d_{m_k-2} \\ C_k^{(0)} \alpha_1 + \dots + C_k^{(m_k-1)} \alpha_{m_k} = -d_{m_k-1} \end{cases}$$

$$\beta_i = \frac{-d_0}{p_0} \alpha_{i+1} \quad \text{pour } i = 0, \dots, m_k - 1$$

$$C_k = \frac{-b_0}{p_0}$$

$$\begin{cases} \gamma_{m_k-1} b_0 = -b_1 - C_k p_1 \\ \vdots \\ \gamma_0 b_0 + \dots + \gamma_{m_k-1} b_{m_k-1} = -b_{m_k} - C_k p_{m_k} \end{cases}$$

Donc dans cet algorithme, on aura besoin à chaque étape k de calculer les produits scalaires :

$$d_i = (y, A^{n_k+i} r_k) = (A^{T n_k} y, A^i r_k) \quad \text{pour } i = 0, \dots, 2m_k - 1$$

$$b_i = (y, A^{n_k+m_k+i} z_k) = (A^{T n_k} y, A^{i+m_k} z_k) \quad \text{pour } i = 0, \dots, m_k$$

$$p_i = (y, A^{n_k+i} z_{k-1}) = (A^{T n_k} y, A^i z_{k-1}) \quad \text{pour } i = 0, \dots, 2m_k - 1$$

$$\text{et de garder en mémoire } s_i = A^i z_k \quad \text{pour } i = 0, \dots, m_k$$

$$u_i = A^i r_k \quad \text{pour } i = 0, \dots, m_k$$

$$v_i = A^i z_{k-1} \quad \text{pour } i = 0, \dots, m_k$$

6.7.3. Pseudo-code du type A₅ / B₆

ALGORITHM TA5B6 (A, b, x₀, y)

1) Initializations :

$$r_0 \leftarrow b - A x_0$$

$$z_0 = r_0$$

$$n_0 \leftarrow 0$$

$$r_1 \leftarrow r_0 - \frac{(y, r_0)}{(y, A r_0)} A r_0$$

$$x_1 \leftarrow x_0 + \frac{(y, r_0)}{(y, A r_0)} r_0$$

$$z_1 \leftarrow A r_0 - \frac{(y, A^2 r_0)}{(y, A r_0)} r_0$$

$$s_0 = z_1$$

$$u_0 = r_1$$

$$v_0 = z_0$$

$$n_1 \leftarrow 1$$

2) For $k = 0, 1, 2, \dots$ until convergence do :

If $n_k = n$ then
 solution not obtained after n iterations
 stop

End if

$$s_1 \leftarrow A s_0$$

If $(y, s_1) = 0$ and $n_k = n - 1$ then
 incurable breakdown
 stop

End if

$$m_k \leftarrow 1$$

3) While $(y, s_{m_k}) = 0$ and $m_k < n - n_k$ do :

$$m_k \leftarrow m_k + 1$$

$$s_{m_k} \leftarrow A s_{m_k - 1}$$

End while

If $m_k = n - n_k$ and $(y, s_{m_k}) = 0$ then
 incurable breakdown
 stop

End if

$$d_0 \leftarrow (y, r_k)$$

$$p_0 \leftarrow (y, z_{k-1})$$

$$b_0 \leftarrow (y, s_{m_k})$$

$$C_k = \frac{-b_0}{p_0}$$

4) For $i = 1, \dots, m_k$ do

$$y \leftarrow A^T y$$

$$b_i \leftarrow (y, s_{m_k})$$

$$d_i \leftarrow (y, r_k)$$

$$p_i \leftarrow (y, z_{k-1})$$

compute γ_{m_k-i}

End for

$$\text{Compute } z_{k+1} = C_k z_{k-1} + \gamma_0 s_0 + \dots + \gamma_{m_k-1} s_{m_k-1} + s_{m_k}$$

5) For $i = 1, \dots, m_k$ do

 If $i = 1$ then

$$y \leftarrow A^T y$$

$$d_{i-1+m_k} \leftarrow (y, r_k)$$

$$p_{i-1+m_k} \leftarrow (y, z_{k-1})$$

 End if

$$C_k^{(i-1)} = d_{i-1+m_k} - \frac{d_0}{p_0} p_{i-1+m_k}$$

 compute α_{m_k-i+1}

$$\beta_{m_k-i} \leftarrow \frac{-d_0}{p_0} \alpha_{m_k-i+1}$$

End for

For $i = 0, \dots, m_k - 1$ do

$$v_{i+1} \leftarrow A v_i$$

$$u_{i+1} \leftarrow A u_i$$

End for

6) Compute $r_{k+1} = r_k + \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{m_k} u_{m_k} + \beta_0 v_1 + \dots + \beta_{m_k-1} v_{m_k}$

$$x_{k+1} = x_k - (\alpha_1 u_0 + \dots + \alpha_{m_k} u_{m_k-1} + \beta_0 v_0 + \dots + \beta_{m_k-1} v_{m_k-1})$$

If $r_{k+1} = 0$ then

 solution obtained

stop
End if

7) $n_{k+1} \leftarrow n_k + m_k$

8) $s_0 \leftarrow z_{k+1}$

$$u_0 \leftarrow r_{k+1}$$

$$v_0 \leftarrow z_k$$

9) End for.

6.8. Méthode du type A₅ / B₈

6.8.1. Méthode du type A₅ / B₈

La relation du type A₅ est de la forme :

$$P_{k+1}(\xi) = (1 + \alpha_1 \xi + \dots + \alpha_{m_k} \xi^{m_k}) P_k(\xi) + \xi (\beta_0 + \beta_1 \xi + \dots + \beta_{m_k-1} \xi^{m_k-1}) P_k^{(1)}(\xi)$$

avec

$$C_k^{(i)} = c(\xi^{n_k+m_k+i} P_k) - \frac{c(\xi^{n_k} P_k)}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})} c(\xi^{n_k+m_k+i} P_{k-1}^{(1)}) \quad \text{pour } i = 0, \dots, m_k - 1$$

$$\begin{cases} C_k^{(0)} \alpha_{m_k} = -c(\xi^{n_k} P_k) \\ \vdots \\ C_k^{(0)} \alpha_2 + \dots + C_k^{(m_k-2)} \alpha_{m_k} = -c(\xi^{n_k+m_k-2} P_k) \\ C_k^{(0)} \alpha_1 + \dots + C_k^{(m_k-1)} \alpha_{m_k} = -c(\xi^{n_k+m_k-1} P_k) \end{cases}$$

$$\beta_i = \frac{-c(\xi^{n_k} P_k)}{c(\xi^{n_k} P_{k-1}^{(1)})} \alpha_{i+1} \quad \text{pour } i = 0, \dots, m_k - 1.$$

La relation du type B₈ est, si $c(\xi^{n_k} P_k) \neq 0$,

$$P_{k+1}^{(1)}(\xi) = \delta_0 P_k(\xi) + (\gamma_0 + \dots + \gamma_{m_k-1} \xi^{m_k-1} + \xi^{m_k}) P_k^{(1)}(\xi)$$

avec

$$\delta_0 = \frac{-c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)})}{c(\xi^{n_k} P_k)}$$

$$\begin{cases} \gamma_{m_k-1} c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) = -\delta_0 c(\xi^{n_k+1} P_k) - c(\xi^{n_k+m_k+1} P_k^{(1)}) \\ \vdots \\ \gamma_1 c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) + \dots + \gamma_{m_k-1} c(\xi^{n_k+2m_k-2} P_k^{(1)}) = -\delta_0 c(\xi^{n_k+m_k-1} P_k) - c(\xi^{n_k+2m_k-1} P_k^{(1)}) \\ \gamma_0 c(\xi^{n_k+m_k} P_k^{(1)}) + \dots + \gamma_{m_k-1} c(\xi^{n_k+2m_k-1} P_k^{(1)}) = -\delta_0 c(\xi^{n_k+m_k} P_k) - c(\xi^{n_k+2m_k} P_k^{(1)}). \end{cases}$$

Si l'on pose $r_k = P_k(A) r_0$ et $z_k = P_k^{(1)}(A) r_0$ et si de plus $r_k = b - Ax_k$, et $v_i = A^i z_{k-1}$,

$s^i = A^i z_k$, $u^i = A^i r_k$, on obtient :

$$r_{k+1} = r_k + \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{m_k} u_{m_k} + \beta_0 v_1 + \dots + \beta_{m_k-1} v_{m_k}$$

$$x_{k+1} = x_k - (\alpha_1 u_0 + \dots + \alpha_{m_k} u_{m_k-1} + \beta_0 v_0 + \dots + \beta_{m_k-1} v_{m_k-1})$$

$$z_{k+1} = \delta_0 r_k + \gamma_0 s_0 + \dots + \gamma_{m_k-1} s_{m_k-1} + s_{m_k}.$$

6.8.2. Mise en oeuvre de l'algorithme du type A₅ / B₈

En notant $d_i = (y, A^{n_k+i} r_k)$, alors on a :

$$b_i = (y, A^{n_k+m_k+i} z_k)$$

$$p_i = (y, A^{n_k+i} z_{k-1})$$

$$\delta_0 = \frac{-b_0}{d_0}$$

$$\begin{cases} \gamma_{m_k-1} b_0 = -\delta_0 d_1 - b_1 \\ \vdots \\ \gamma_1 b_0 + \dots + \gamma_{m_k-1} b_{m_k-2} = -\delta_0 d_{m_k-1} - b_{m_k-1} \\ \gamma_0 b_0 + \dots + \gamma_{m_k-1} b_{m_k-1} = -\delta_0 d_{m_k} - b_{m_k} \end{cases}$$

$$C_k^{(i)} = d_{m_k+i} - \frac{d_0}{p_0} p_{m_k+i} \quad \text{pour } i = 0, \dots, m_k - 1$$

$$\begin{cases} C_k^{(0)} \alpha_{m_k} = -d_0 \\ \vdots \\ C_k^{(0)} \alpha_2 + \dots + C_k^{(m_k-2)} \alpha_{m_k} = -d_{m_k-2} \\ C_k^{(0)} \alpha_1 + \dots + C_k^{(m_k-1)} \alpha_{m_k} = -d_{m_k-1} \end{cases}$$

$$\beta_i = \frac{-d_0}{p_0} \alpha_{i+1} \quad \text{pour } i = 0, \dots, m_k - 1.$$

Donc dans cet algorithme, on aura besoin à chaque étape k de calculer les produits scalaires :

$$d_i = (y, A^{n_k+i} r_k) = (A^{T n_k} y, A^i r_k) \quad \text{pour } i = 0, \dots, 2m_k - 1$$

$$b_i = (y, A^{n_k+m_k+i} z_k) = (A^{T n_k} y, A^{m_k+i} z_k) \quad \text{pour } i = 0, \dots, m_k$$

$$p_i = (y, A^{n_k+i} z_{k-1}) = (A^{T n_k} y, A^i z_{k-1}) \quad \text{pour } i = 0, \dots, 2m_k - 1$$

$$\text{et de garder en mémoire } s_i = A^i z_k \quad \text{pour } i = 0, \dots, m_k$$

$$u_i = A^i r_k \quad \text{pour } i = 0, \dots, m_k$$

$$v_i = A^i z_{k-1} \quad \text{pour } i = 0, \dots, m_k.$$

6.8.3. Pseudo-code du type A₅ / B₈

ALGORITHM TA5B8 (A, b, x₀, y)

1) Initializations :

$$r_0 \leftarrow b - A x_0$$

$$z_0 = r_0$$

$$n_0 \leftarrow 0$$

$$r_1 \leftarrow r_0 - \frac{(y, r_0)}{(y, A r_0)} A r_0$$

$$x_1 \leftarrow x_0 + \frac{(y, r_0)}{(y, A r_0)} r_0$$

$$z_1 \leftarrow A r_0 - \frac{(y, A^2 r_0)}{(y, A r_0)} r_0$$

$$s_0 = z_1$$

$$u_0 = r_1$$

$$v_0 = z_0$$

$$n_1 \leftarrow 1$$

2) For $k = 0, 1, 2, \dots$ until convergence do :

If $n_k = n$ then
 solution not obtained after n iterations
 stop

End if

$$s_1 \leftarrow A s_0$$

If $(y, s_1) = 0$ and $n_k = n - 1$ then
 incurable breakdown
 stop

End if

$$m_k \leftarrow 1$$

3) While $(y, s_{m_k}) = 0$ and $m_k < n - n_k$ do :

$$m_k \leftarrow m_k + 1$$

$$s_{m_k} \leftarrow A s_{m_k - 1}$$

End while

If $m_k = n - n_k$ and $(y, s_{m_k}) = 0$ then
 incurable breakdown
 stop

End if

$$d_0 \leftarrow (y, r_k)$$

If $d_0 = 0$ then
 use the MRZ algorithm
 stop

End if

$$p_0 \leftarrow (v, z_{k-1})$$

$$b_0 \leftarrow (v, s_{m_k})$$

$$\delta_0 = \frac{-b_0}{d_0}$$

4) For $i = 1, \dots, m_k$ do

$$y \leftarrow A^T y$$

$$b_i \leftarrow (v, s_{m_k})$$

$$d_i \leftarrow (v, r_k)$$

$$p_i \leftarrow (v, z_{k-1})$$

compute γ_{m_k-i}

End for

$$\text{Compute } z_{k+1} = \delta_0 r_k + \gamma_0 s_0 + \dots + \gamma_{m_k-1} s_{m_k-1} + s_{m_k}$$

5) For $i = 0, \dots, m_k - 1$ do

$$u_{i+1} \leftarrow Au_i$$

If $i = 0$ then

$$C_k^{(i)} = d_{i+m_k} - \frac{d_0}{p_0} p_{i+m_k}$$

Else

$$y \leftarrow A^T y$$

$$d_{i+m_k} \leftarrow (v, r_k)$$

$$p_{i+m_k} \leftarrow (v, z_{k-1})$$

$$C_k^{(i-1)} = d_{i-1+m_k} - \frac{d_0}{p_0} p_{i-1+m_k}$$

End if

Compute α_{m_k-i}

$$\beta_{m_k-i-1} \leftarrow \frac{-d_0}{p_0} \alpha_{m_k-i}$$

End for

For $i = 0, \dots, m_k - 1$ do

$$v_{i+1} \leftarrow Av_i$$

End for

6) Compute $r_{k+1} = r_k + \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{m_k} u_{m_k} + \beta_0 v_1 + \dots + \beta_{m_k-1} v_{m_k}$

$$x_{k+1} = x_k - (\alpha_1 u_0 + \dots + \alpha_{m_k} u_{m_k-1} + \beta_0 v_0 + \dots + \beta_{m_k-1} v_{m_k-1})$$

If $r_{k+1} = 0$ then
 solution obtained
 stop
 End if

7) $n_{k+1} \leftarrow n_k + m_k$

8) $s_0 \leftarrow z_{k+1}$

$$u_0 \leftarrow r_{k+1}$$

$$v_0 \leftarrow z_k$$

9) End for.

7. RESULTATS NUMERIQUES DANS LE CAS DE LA RUPTURE

Le chapitre 7 met en évidence les méthodes étudiées dans le chapitre 6, dans le cas de la rupture.

Il ne semble pas qu'une certaine relation soit meilleure que les autres, les résultats numériques obtenus dépendant beaucoup de l'exemple choisi.

Pour tester une rupture, une égalité à zéro d'un produit scalaire ne peut jamais être obtenue à cause des erreurs d'arrondi. Pour cette raison, dans nos programmes, la condition est remplacée par la valeur absolue du produit scalaire inférieure à un nombre ε donné

On considère le système suivant :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -n \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n-1 \end{pmatrix}$$

Avec l'algorithme TA8B6, on obtient les résultats suivants :

On prend toujours $x_0 = 0, y = (1, \dots, 1)^T$

On considère $n = 12$.

Pour $\varepsilon = 10^{-1}$, on obtient :

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n_k	1	2	3	6	8	9	10	11	12
$\ r_k\ $	24.7	19.5	21.5	21.5	112.6	114	19.8	9.8	7.4

Pour $\varepsilon = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}, 10^{-8}, 10^{-9}, 10^{-10}, 10^{-11}, 10^{-12}, 10^{-13}, 10^{-14}$, on obtient :

k	1	2	3	4	5	6	7
n_k	1	2	3	4	10	11	12
$\ r_k\ $	24.7	19.5	31.8	31.8	19.8	9.2	1.10^{-14}

On considère $n = 30$.

Pour $\epsilon = 10^{-1}$, on obtient :

k	1	2	3	4	5	6	...	...	18
n_k	1	2	3	11	14	18	...	...	30
$\ r_k\ $	37.6	44.8	46.6	46.4	46.4	266.3	...	...	30.5

Pour $\epsilon = 10^{-2}$, on obtient :

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n_k	1	2	3	6	8	23	24	25	26	27	28	29
$\ r_k\ $	37.6	44.8	49.9	49.2	49.2	235.1	49.5	134.4	135.5	45.2	23.9	20.7

Pour $\epsilon = 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}, 10^{-8}, 10^{-9}, 10^{-10}, 10^{-11}, 10^{-12}, 10^{-13}, 10^{-14}, 10^{-15}, 10^{-16}$, on obtient :

k	1	2	3	4	5	6	7
n_k	1	2	3	4	27	29	30
$\ r_k\ $	37.6	44.8	75.9	75.9	45.2	21.9	$2 \cdot 10^{-12}$

La détection correcte du saut dépend de ϵ .

Quand le saut est correctement déterminé, la solution exacte du système est obtenue.

CONCLUSION

Cette thèse porte sur les trois points suivants :

1) Etude systématique des relations A_i et B_j .

Seules les relations $A_1, A_4, A_5, A_6, A_8, A_{10}$ et $B_1, B_5, B_6, B_8, B_{10}$ sont possibles.

2) Etude des différentes méthodes A_i / B_j .

Les différentes méthodes étudiées sont :

A_4					
A_1 / B_1	A_1 / B_5	A_1 / B_6	A_1 / B_8	A_1 / B_{10}	
A_5 / B_1	A_5 / B_5	A_5 / B_6	A_5 / B_8	A_5 / B_{10}	
A_8 / B_1	A_1 / B_5	A_8 / B_6	A_8 / B_8	A_8 / B_{10}	

Les algorithmes nécessitant deux multiplications matrice-vecteur sont :

$A_4, A_8 / B_6, A_8 / B_8, A_8 / B_{10}, A_5 / B_5, A_5 / B_{10}$ lorsque $U_i(\xi) = \xi^i$

$A_4, A_8 / B_8, A_8 / B_{10}, A_5 / B_{10}$ lorsque $U_i(\xi) = P_i(\xi)$

$A_8 / B_6, A_8 / B_8, A_8 / B_{10}, A_5 / B_{10}$ lorsque $U_i(\xi) = P_i^{(1)}(\xi)$.

Les algorithmes nécessitant trois multiplications matrice-vecteur sont :

$A_8 / B_1, A_8 / B_5, A_5 / B_6, A_5 / B_8, A_1 / B_6, A_1 / B_8$ lorsque $U_i(\xi) = \xi^i$

$A_8 / B_6, A_5 / B_5$ lorsque $U_i(\xi) = P_i(\xi)$

$A_5 / B_5, A_5 / B_6, A_1 / B_6$ lorsque $U_i(\xi) = P_i^{(1)}(\xi)$.

On constate numériquement que lorsque $U_i(\xi) = \xi^i$, les algorithmes sont moins bons que lorsque $U_i(\xi) = P_i(\xi)$ ou $U_i(\xi) = P_i^{(1)}(\xi)$. De plus, certains algorithmes sont moins stables et nécessitent trois multiplications matrice-vecteur.

Il est à noter que certains nouveaux algorithmes sont aussi performants que les algorithmes connus.

3) Dans le cas de la rupture, les relations du type A_8 et du type B_{10} permettent de démontrer les autres relations (ceci est également vrai dans le cas où il n'y a pas de rupture).

De plus la relation du type B_6 , démontrée dans [5], a été démontrée d'une autre manière. On a :

$$\begin{aligned}
 B_{10} (P_k^{(1)}) + A_8 (P_{k+1}) + B_{10} (P_{k+1}^{(1)}) &\rightarrow B_6 (P_{k+1}^{(1)}) \\
 A_8 (P_{k+1}) + B_{10} (P_{k+1}^{(1)}) &\rightarrow B_8 (P_{k+1}^{(1)}) \\
 B_{10} (P_k^{(1)}) + A_8 (P_{k+1}) &\rightarrow A_5 (P_{k+1}) \\
 B_{10} (P_{k+1}^{(1)}) + A_8 (P_{k+1}) + B_{10} (P_k^{(1)}) &\rightarrow B_5 (P_{k+1}^{(1)}) \\
 A_8 (P_k) + B_{10} (P_k^{(1)}) + A_8 (P_{k+1}) &\rightarrow A_1 (P_{k+1}) \\
 A_8 (P_k) + B_{10} (P_k^{(1)}) + A_8 (P_{k+1}) + B_{10} (P_{k+1}^{(1)}) &\rightarrow B_1 (P_{k+1}^{(1)})
 \end{aligned}$$

Les prolongations possibles de ce travail sont :

◇ l'étude des différentes méthodes A_i / B_j en choisissant d'autre polynômes unitaires U_i

◇ l'étude de la quasi-rupture (c'est à dire la division par un nombre voisin de zéro, ce qui entraine une instabilité numérique de l'algorithme) :

Dans le cas quasi-rupture, c'est une heuristique qui décide des sauts. Une étude théorique approfondie serait nécessaire afin de déterminer le meilleur critère possible pour les sauts.

Il est ensuite nécessaire de trouver les relations A_i et B_j dans le cas de la quasi-rupture et étudier les différents algorithmes possibles

◇ l'étude des relations possibles du chapitre 2 en procédant de la même manière que dans le chapitre 5, c'est à dire en utilisant la table des P_k

◇ le lien avec les polynômes biorthogonaux [13], la table des P_k et les différentes relations A_i et B_j possibles afin d'étendre ce travail aux généralisations de la méthode de Lanczos basées sur ces polynômes.

Références

- [1] C.Baheux, New implementations of Lanczos method, J.Comput. Appl. Math., à paraître.
- [2] C.Brezinski, Padé-Type Approximation and General Orthogonal Polynomials, ISNM vol.50, Birkhauser-Verlag, Basel, 1980.
- [3] C.Brezinski, M.Redivo-Zaglia, A new presentation of orthogonal polynomials with applications to their computation, Numerical Algorithms, 1 (1991), 207-221.
- [4] C.Brezinski, M.Redivo-Zaglia, Breakdowns in the computation of orthogonal polynomials, dans *Nonlinear Numerical Methods and Rational Approximation*, A.Cuyt ed., Kluwer, Dordrecht, à paraître.
- [5] C.Brezinski, M.Redivo-Zaglia, H.Sadok, A breakdown-free Lanczos type algorithm for solving linear systems, Numer. Math., 63 (1992) 29-38.
- [6] C.Brezinski, M.Redivo-Zaglia, H.Sadok, Avoiding breakdown and near-breakdown in Lanczos type algorithms, Numerical Algorithms, 1 (1991), 261-284.
- [7] C.Brezinski, M.Redivo-Zaglia, H.Sadok, Addendum to « Avoiding breakdown and near-breakdown in Lanczos type algorithms », Numerical Algorithms, 2 (1992) 133-136.
- [8] C.Brezinski, H.Sadok, Lanczos-type algorithms for solving systems of linear equations, Appl. Numer. Math., 11 (1993) 443-473.
- [9] A.Draux, *Polynômes Orthogonaux Formels. Applications*, LNM vol.974, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [10] R.Fletcher, Conjugate gradient methods for indefinite systems, dans G.A.Watson, ed., Numerical Analysis, LNM 506, Springer-Verlag, Berlin (1976) 73-89.
- [11] M.H.Gutknecht, The unsymmetric Lanczos algorithms and their relations to Padé approximation, continued fractions, and the QD algorithm, dans : *Proceeding Copper Mountain Conference on Iterative Methods* (1990).
- [12] K.C.Jea, D.M.Young, On the simplification of generalized conjugate gradient methods for nonsymmetrizable linear systems, Linear Algebra Appl., 52 (1983) 299-317.
- [13] Z.Da.Rocha, Applications de la théorie de la biorthogonalité, Thèse Université des Sciences et Technologies de Villeneuve d'ascq, 1994.

[14] H.Sadok, Communication privée (1993).

[15] D.M.Young, K.C.Jea, Generalized conjugate gradient acceleration of nonsymmetrizable iterative methods, *Linear Algebra Appl.*, 34 (1980), 159–194.

