

50376  
1994  
193

To appear (015733)

50376  
1994  
193

N° d'ordre 1254

# THESE DE DOCTORAT avec le LABEL EUROPEEN

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE

en

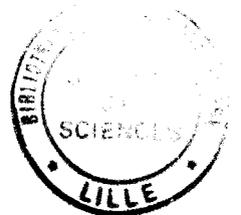
SCIENCES PHYSIQUES

par

**Laurent DAMBLY**

## ETUDES DES INSTABILITES SPATIO- TEMPORELLES DANS LES OSCILLATEURS A GAIN PHOTOREFRACTIF

Soutenue le 21 février 1994 devant la Commission d'Examen



Membre du jury :

M. G. GRYNBERG  
M. P. MANDEL  
M. C. O. WEISS  
M. P. GLORIEUX  
M. D. DANGOISSE  
Md. H. ZEGHLACHE  
M. D. HENNEQUIN

Professeur à l'Ecole Polytechnique  
Professeur à l'ULB, Belgique  
Directeur du PTB, Allemagne  
Professeur à l'USTL  
Professeur à l'USTL  
Maitre de conférence à l'USTL  
Chargé de recherche au CNRS

Président  
Rapporteur  
Rapporteur  
Rapporteur  
Examineur  
Examineur  
Examineur

*Aux deux Christine qui me sont chères*

*Ce travail a été réalisé dans l'U.F.R. de Physique de l'Université des Sciences et Technologies de Lille, dans le Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne associé au C.N.R.S., dirigé par Monsieur P. Glorieux Professeur à l'U.S.T.L, Je tiens à le remercier pour m'avoir accepté dans ce laboratoire.*

*Je suis très reconnaissant à Monsieur D. DANGOISSE Professeur à l'U.S.T.L d'avoir accepté d'être mon directeur de thèse.*

*Les travaux présentés dans cette thèse ont été effectués parallèlement en collaboration avec Hassina ZEGHLACHE, Maître de conférences à l'U.S.T.L. et Daniel HENNEQUIN, chargé de recherche au C.N.R.S. qui m'ont constamment guidé et épaulé depuis mon entrée au laboratoire. Les mots sont insuffisants pour leurs exprimer toute ma gratitude.*

*Je tiens à remercier tout particulièrement Monsieur le Professeur P. MANDEL, Directeur du Laboratoire d'Optique non linéaire théorique de l'Université Libre de Bruxelles qui m'a permis de travailler durant trois mois dans son laboratoire et qui, comme Monsieur C. O. WEISS Directeur du PTB (Allemagne) et Monsieur le Professeur P. GLORIEUX, a accepté de rapporter sur ce travail. Je remercie également Monsieur G. GRYNBERG Professeur à l'école Polytechnique d'avoir bien voulu présider ce jury.*

*Les résultats présentés dans cette thèse ont pu être obtenus grâce au concours de Monsieur J. P. HUIGNARD et de son équipe, (Thomson CSF) qui nous ont aimablement permis de sortir de problème concernant les cristaux photoréfractif Je tiens à les en remercier, je leur suis également reconnaissant pour les nombreux conseils qu'ils nous ont prodigués lors de la mise en œuvre de l'oscillateur à gain photoréfractif.*

*Je suis très reconnaissant envers Monsieur J. M. LAPAUW et son équipe, ainsi qu'à toute l'équipe technique du laboratoire qui ont contribué de manière importante à la réalisation de ce travail.*

*J'ai le plaisir de cloturer ces remerciements en exprimant toute ma gratitude à l'ensemble des personnes qui m'ont cotoyé jusqu'à présent.*

## *Table des matières*

<b>Introduction</b> .....	1
---------------------------	---

### **Première partie :**

#### **CONCEPTS GENERAUX**

<b>I.1: Effet photoréfractif</b> .....	7
I.1.1: Description.....	7
I.1.2: Mélange à deux ondes.....	14
I.1.2.1: Les transferts d'énergie.....	14
I.1.2.2: Influence des paramètres du système.....	19
<b>I.2: Cavités</b> .....	25
I.2.1: Qu'est ce qu'une structure transverse en optique et comment la caractériser? .....	25
I.2.2: Géométrie du résonateur .....	29
I.2.2.1: Modes et fréquences propres des résonateurs stables.....	30
I.2.2.2: Grandeurs caractéristiques de la géométrie du résonateur.....	33
I.2.3: Influence de la parité du nombre de miroirs de cavité .....	36
<b>I.3: L'oscillateur à gain photoréfractif</b> .....	40

### **Deuxième partie :**

#### **ASPECTS EXPERIMENTAUX**

<b>II.1: Dispositif expérimental</b> .....	44
II.1.1: Oscillateur avec gain photoréfractif.....	44
II.1.2: Stabilisation de la cavité.....	48
II.1.3: Caractéristiques de la cavité .....	52
II.1.3.1: Echelles spatiales .....	52
II.1.3.2: Echelles de fréquences .....	53
II.1.3.3: Symétrie transverse de l'oscillateur.....	55
II.1.4: Détection .....	56
II.1.4.1: Détection directe.....	57
II.1.4.2: Détection hétérodyne.....	58

<b>II.2: Méthode de caractérisation des cristaux photoréfractifs</b> .....	61
II.2.1: Dispositif expérimental.....	61
II.2.2: Repérage des faces.....	62
II.2.3: Mesure du gain optique .....	64
<b>II.3: Dynamique spatio-temporelle avec un référentiel transverse fixe</b> ....	65
II.3.1: Diagramme des phases .....	65
II.3.2: Dynamique intra-famille.....	68
II.3.2.1: Famille $q = 0$ .....	68
II.3.2.2: Famille $q = 1$ .....	71
II.3.2.3: Famille $q = 2$ .....	71
II.3.2.4: Famille $q = 3$ .....	74
II.3.2.5: Famille $q \geq 4$ .....	78
II.3.3: Dynamique inter-famille.....	81
II.3.3.1: Familles dégénérées.....	81
II.3.3.2: Transition entre familles .....	84
II.3.4: Origine des fréquences dynamiques .....	87
<b>II.4: Influence de la symétrie du dispositif</b> .....	89
II.4.1: Comparaison avec la dynamique en l'absence de référentiel transverse fixe.....	89
II.4.2: Influence des écarts à la symétrie cylindrique .....	94

### **Troisième partie :**

## **MODÈLE STATIONNAIRE D'OSCILLATEUR A GAIN PHOTORÉFRACTIF**

<b>III.1: Modèle sans structure transverse</b> .....	99
<b>III.2: Modèle avec structure transverse</b> .....	104
III.2.1: Modèle de cavité .....	104
III.2.2: Couplage photoréfractif .....	108
III.2.3: Condition de stationnarité.....	112
III.2.4: Mélange à deux ondes.....	113
III.2.5 Tirage en fréquence.....	116

<b>III.3: Discussion des résultats</b> .....	119
III.3.1: Régime monomode transverse .....	119
III.3.1.1: Mélange à deux ondes .....	119
III.3.1.2: Tirage en fréquence .....	126
III.3.2: Développement perturbatif.....	137
III.3.3: Régime bimode transverse.....	139
III.3.3.1: Mélange à deux ondes .....	140
III.3.3.2: Tirage en fréquence .....	142
III.3.4: Comparaison avec l'expérience .....	147

**Quatrième partie :**

**MODÈLE DYNAMIQUE D'OSCILLATEUR A GAIN**

**PHOTORÉFRACTIF**

<b>IV.1: Modélisation</b> .....	154
IV.1.1: Equations matérielles .....	154
IV.1.2: Mélange à deux ondes.....	162
IV.1.3: Cavité.....	167
IV.1.4: Oscillateur avec gain photoréfractif .....	168
<b>IV.2: Comparaison avec l'expérience</b> .....	170
IV.2.1: Mélange à deux ondes.....	170
IV.2.2: Régime monomode transverse .....	173
<b>IV.3: Conclusions et perspectives</b> .....	176
<b>Annexe: Vérification de l'approximation paraxiale</b> .....	177
<b>Conclusions</b> .....	182
<b>Références</b> .....	185
<b>Summary</b> .....	191

- D'où vient ce noyau impermanent ? demanda le disciple D'où vient ce noyau permanent ?.

- L'impermanence est la flamme, répondit le Maître. Quant au reste, ouvre les yeux et regarde autour de toi.

Tchao-Tchan

## ***Introduction***

En 1963, E. N. Lorenz (E. N. Lorenz [1963]) démontrait l'existence de comportements erratiques engendrés par un système d'équations déterministes. Depuis, de nombreux travaux ont mis en évidence l'universalité des instabilités dynamiques inhérentes aux systèmes non linéaires (D. Ruelle et F. Takens [1971], M. Metropolis et al [1973], J. P. Gollub et H. L. Swinney [1975] et M. Hénon [1976]). En effet, ces instabilités temporelles ont été observées dans des domaines aussi variés que l'hydrodynamique (P. Bergé et al [1980] et A. Libchaber et al [1982]), la chimie (Y. Pomeau et al [1981]), la biologie (M. R. Guevara et al [1981]), l'optique (F. T. Arecchi et al [1982]) et l'électronique (J. Testa et al [1982]).

De la même façon, les structures spatiales engendrées par divers systèmes (P. Cvitanovic [1984]) présentent des analogies qui témoignent de l'universalité des instabilités spatio-temporelles. Les travaux théoriques et numériques du groupe de P. Couillet (P. Couillet et al [1988] et P. Couillet et al [1989]) montrent que les lasers possèdent une dynamique transverse suffisamment riche pour induire du chaos spatio-temporel. A la suite de ces résultats, l'étude de l'influence des dimensions spatiales sur la dynamique spatio-temporelle des systèmes optiques non-linéaires s'est fortement développée.

En optique, les dimensions spatiales interviennent tout d'abord dans les effets de propagation. Une bonne illustration en est fournie par les fibres dopées. Celles-ci permirent l'analyse des propriétés des solitons et de leurs interactions (G. P. Agarwal [1989]) ainsi que de la dynamique fortement multimode des lasers à fibre (S. Bielawski et al [1992]).

Plus récemment, la dynamique transverses des lasers (M. Brambilla et al [1990] et D. Dangoisse et al [1992]) et des milieux Kerr (A. Petrossian et al [1992] et R. G. Harrison et J. S. Uppal [1992]) a été étudiée. Cette dynamique se limite à deux dimensions spatiales car la dépendance longitudinale du champ peut être ignorée.

Néanmoins, ces systèmes optiques possèdent des temps caractéristiques trop court pour que l'on puisse suivre aisément l'évolution des structures spatiales. De plus, même lorsque l'on néglige l'effet des degrés de liberté transverses, ils sont susceptibles d'avoir une dynamique temporelle fort complexe. C'est pourquoi, dans ce travail, nous avons choisi d'étudier les instabilités spatio-temporelles engendrées par un oscillateur à gain photoréfractif. Car, celui-ci possède des temps caractéristiques permettant une analyse aisée de l'évolution du profil transverse avec un dispositif de détection standard. De plus, en utilisant le mélange à deux ondes comme

processus de gain, l'oscillateur ne présente que des états stationnaires en régime monomode, ceci permet d'isoler l'influence des dimensions spatiales.

Afin de comprendre les mécanismes de base de la dynamique spatio-temporelle des oscillateurs à gain photoréfractif, nous avons commencé par analyser les comportements n'impliquant qu'un petit nombre de degrés de liberté spatiaux.

Dans la première partie de ce mémoire, nous introduisons les concepts qui seront utiles dans la suite. Nous commençons par les mécanismes à la base de l'effet photoréfractif. Puis, nous étudions les propriétés des échanges d'énergie dans le mélange à deux ondes et nous décrivons le rôle des différents paramètres liés aux caractéristiques des matériaux. Nous spécifions ensuite l'influence de la géométrie du résonateur sur la structure transverse du faisceau. Nous montrons par exemple que la parité du nombre de miroirs de cavité a des conséquences majeures sur le spectre du résonateur. Enfin, nous explicitons le mécanisme de démarrage de l'oscillateur à gain photoréfractif.

La seconde partie débute par la description des caractéristiques du dispositif que nous avons construit. Ensuite, nous présentons une étude détaillée de la dynamique transverse en régime faiblement multimode. Une attention particulière a été portée au cas où le plan transverse possède une direction privilégiée et au rôle de la longueur du résonateur. Pour finir, nous discutons l'influence des écarts à la symétrie cylindrique sur les structures transverses du faisceau engendré par l'oscillateur. Plus spécifiquement, nous comparons les régimes observés en présence et en l'absence de direction transverse privilégiée et nous analysons les conséquences du décentrage d'éléments optiques dans la cavité et de l'existence d'astigmatisme.

La troisième partie de ce travail est consacrée à la dérivation d'un modèle stationnaire de l'oscillateur à gain photoréfractif en régime multimode transverse. Ce modèle montre clairement l'importance des tirages en fréquence et il permet d'expliquer les résultats expérimentaux décrits dans la partie précédente. Dans ce modèle, nous rejetons l'approximation du champ moyen et nous posons le problème de la forme des non-linéarités induites par l'effet photoréfractif lorsque l'on considère les dimensions spatiales.

Dans la dernière partie, nous établissons un modèle dynamique de l'oscillateur à gain photoréfractif. Pour ce faire, nous détaillons les phénomènes élémentaires de la physique des solides et de l'optique qui sont

impliqués afin d'obtenir une description cohérente du système. Ensuite, nous appliquons ce modèle au mélange à deux ondes et comparons les résultats obtenus à ceux détaillés dans la première partie. Pour finir, nous considérons le modèle complet et nous présentons des résultats préliminaire en situation monomode.

"Le filet de pêche sert à prendre des poissons :

Prends le poisson et oublie le filet.

Le collet sert à prendre des lapins :

Prends le lapin et oublie le collet.

Les mots servent à transmettre des idées :

Prends les idées et oublie les mots."

Tchouang-SEU

## *Première Partie*

### *Concepts généraux*

Le but de ce travail est l'étude des structures transverses engendrées par un oscillateur à gain photoréfractif. Avant d'exposer les résultats obtenus, il est nécessaire d'explicitier les concepts généraux inhérents à ce sujet d'étude.

La section I.1 est consacrée à l'analyse du mécanisme de gain photoréfractif à partir des processus microscopiques. Dans un second temps (sect. I.2), nous précisons la notion de "structures transverses" et nous dégageons l'influence du résonateur sur celles-ci. Pour finir, nous expliquons le principe de démarrage d'un oscillateur à gain photoréfractif.

## I.1: EFFET PHOTORÉFRACTIF

L'effet non linéaire utilisé dans cette étude est le gain issu du mélange de deux ondes effectué dans un cristal photoréfractif. Cette section met l'accent sur la description des mécanismes microscopiques à l'origine de l'effet photoréfractif et la comparaison des caractéristiques de quelques matériaux photoréfractifs. Puis, nous nous intéressons plus particulièrement au mélange à deux ondes. Plus spécifiquement, nous dérivons un modèle stationnaire du mélange de deux ondes planes et nous mettons en évidence les transferts d'énergie entre les deux ondes. Nous discutons, enfin, l'influence des paramètres qui interviennent dans le mélange à deux ondes.

### I.1.1: Description

On qualifie d'effet photoréfractif la variation de l'indice de réfraction d'un matériau induite par la lumière (P. Günter [1988]). Les cristaux qui présentent ce type d'effet sont dits *photoréfractifs*.

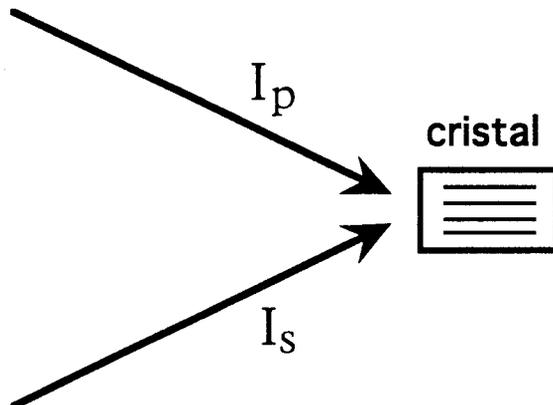


Figure I.1: Deux ondes monochromatiques d'intensité  $I_p$  et  $I_s$  interfèrent dans un cristal photoréfractif

Un tel matériau, semi-conducteur ou isolant, n'est jamais pur mais possède des centres d'impuretés dont le niveau d'énergie (d'ionisation) se situe dans la bande interdite. L'illumination du cristal avec deux faisceaux cohérents et monochromatiques disposés selon la figure I.1 crée un réseau d'interférences (fig. I.2a). Si l'énergie d'un photon incident est suffisante, des électrons sont libérés par photo-excitation des centres d'impuretés qui jouent alors le rôle de donneurs. Un électron ainsi libéré *diffuse* de façon isotrope dans la bande de conduction et est piégé par un site accepteur. Si ce site se trouve dans une zone éclairée, l'électron piégé a une probabilité non négligeable d'être photo-excité dans la bande de conduction. Ce processus se répète jusqu'à ce que les électrons soient *piégés* dans les zones sombres du cristal où la densité électronique est de ce fait plus importante que dans les zones éclairées. Au sein du cristal, le réseau d'interférences engendre donc un *réseau de charges d'espace* de même interfrange mais en opposition de phase avec le réseau lumineux lorsque les porteurs de charge sont des électrons (fig. I.2b). Ce mécanisme est identique si les porteurs de charge sont des trous et non des électrons. Dans la plupart des matériaux, les deux types de porteurs de charge sont présents.

Le réseau de charges d'espace induit un champ électrique appelé *champ de charges d'espace*, dont la distribution d'amplitude  $E_{ce}$  possède aussi la structure du réseau de charges d'espace. Mais ceux-ci sont en quadrature de phase l'un par rapport à l'autre (fig. I.2c). Ce réseau champ de charges d'espace engendre à son tour par effet électro-optique linéaire (*effet Pockels*  $\chi^{(2)}$ ), un *réseau d'indice de réfraction* d'amplitude  $\Delta n$  proportionnel au champ de charges d'espace (fig. I.2d) (P. Yeh [1989] et Yariv [1988]). En chaque point du cristal, l'indice de réfraction peut s'écrire:

$$n(x,y,z) = n_0 + \Delta n(x,y,z)$$

avec  $\Delta n(x,y,z) = u E_{ce}(x,y,z)$  (I.1)

où  $n_0$  est l'indice de réfraction intrinsèque et  $u$  un facteur de proportionnalité. La linéarité de la relation (I.1) implique que seuls les matériaux non centro-symétriques sont susceptibles de présenter un effet électro-optique linéaire (Yariv [1988]).

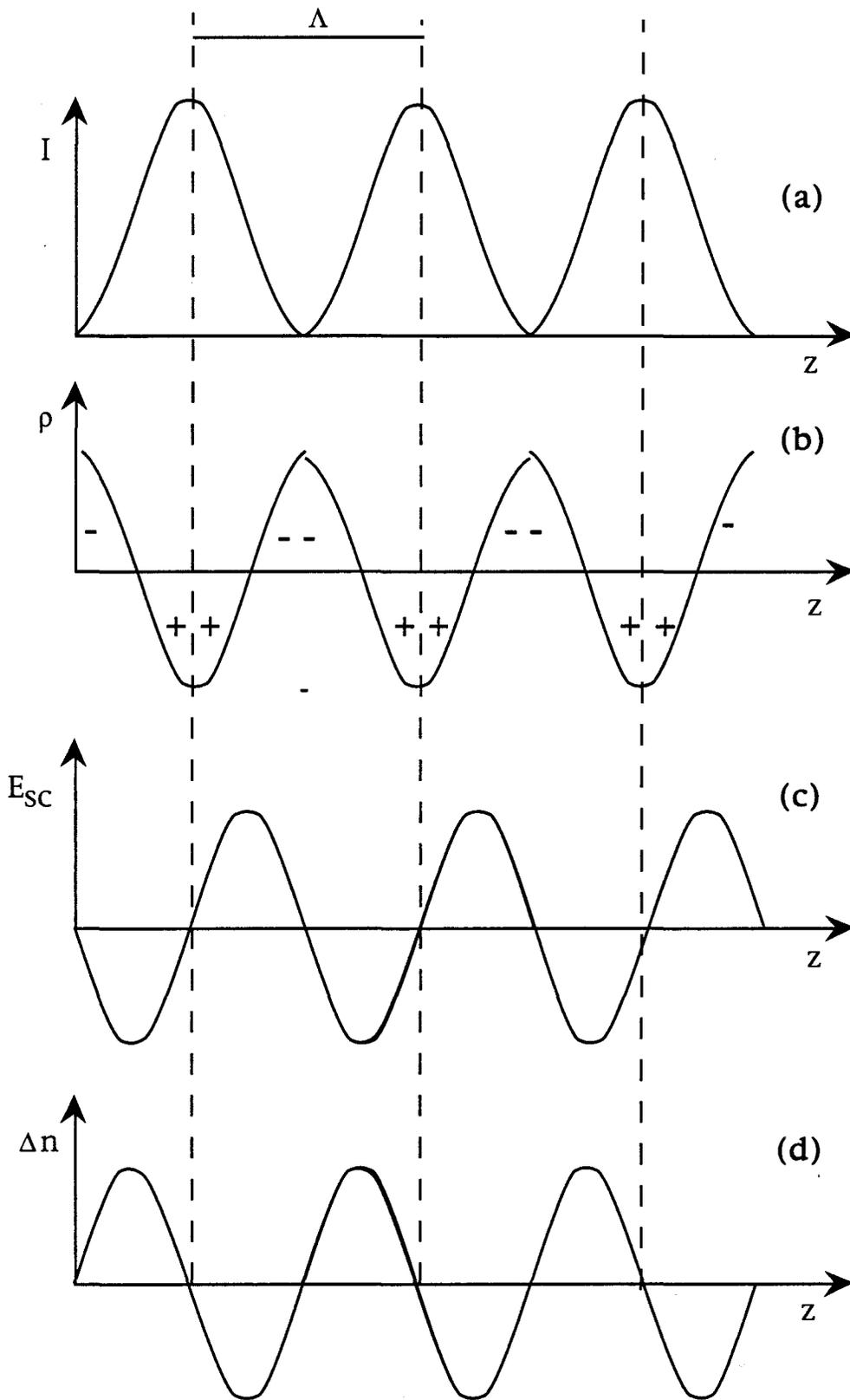


Figure I.2: Les quatre étapes de l'établissement d'un réseau d'indice de réfraction. (a) réseau d'interférences, (b) réseau de charges d'espace, (c) réseau de champ de charges d'espace et (d) réseau d'indice de réfraction. L'axe  $y$  est perpendiculaire aux plans équiphases du réseau d'interférences.

Globalement, le réseau d'indice de réfraction possède les mêmes caractéristiques que le réseau d'interférences bien que déphasé d'un quart d'interfrange par rapport à ce dernier. Il existe des situations où le déphasage entre les réseaux d'interférences et d'indice de réfraction est différent de  $\frac{\pi}{2}$ . En effet, cette valeur du déphasage est atteinte lorsque seul le mécanisme de *diffusion* des porteurs de charge est considéré. Par ailleurs, la dérive des porteurs constitue un autre mécanisme de transport qui modifie le décalage entre les réseaux d'interférences et de charges d'espace. Ce second mécanisme possède deux origines différentes.

i) Dans les cristaux polaires ( $\text{LiNbO}_3$ ), les porteurs de charge se propagent selon des directions privilégiées liées à la structure interne du cristal. Dans ce cas, le courant résultant est appelé *courant photovoltaïque*.

ii) Dans de nombreux cristaux BSO ( $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ ), BGO ( $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$ ), on induit, à l'aide d'un champ électrique extérieur, un *courant de dérive* qui brise l'isotropie du courant de diffusion et accroît considérablement l'efficacité de l'effet photoréfractif. L'efficacité de ce champ dépend de façon cruciale du choix des faces sur lesquelles il est appliqué.

Ces processus mettent clairement en évidence la nature tensorielle de l'effet photoréfractif et montrent que ce dernier dépend donc fortement de la découpe du cristal ainsi que de l'orientation de des faces du cristal par rapport aux directions des champs. La relation scalaire (I.1) doit donc être généralisée, afin d'introduire le tenseur d'indice de réfraction induit: (Yariv [1988], P. Günter [1988])

$$(\Delta n)_{ij} = -\frac{n_0^3}{2} r_{ijk} E_{ce,k} \quad (\text{I.2})$$

où  $r$  est le tenseur électro-optique et où  $i,j,k$  indiquent les trois directions spatiales. Nous adoptons la convention selon laquelle les indices répétés sont sommés.

Pour évaluer une limite inférieure des temps de réaction de l'effet photoréfractif, il faut se rappeler qu'il s'agit d'un phénomène macroscopique. Il requiert donc la création et le transport d'un grand nombre de porteurs de charge. Les quatre processus fondamentaux impliqués dans l'effet photoréfractif sont (i) la photo-excitation, (ii) le transport, (iii) le piégeage des porteurs et (iv) l'effet Pockels.

Il apparaît que le mécanisme le plus lent est ici la photo-excitation des porteurs (P. Yeh [1987], E. Voit et al [1987] et A. M. Glass et al [1987]). En effet, un couplage efficace entre faisceaux incidents nécessite une densité de porteurs de charge photo-excités d'environ  $10^{16} \text{ m}^{-3}$  (J. Feinberg et R. W.

Hellwarth [1980], P. Günter et J. P. Huignard [1988]). Pour créer une telle densité de charge, il faut au minimum  $10^{16}$  photons par  $m^3$ . Avec un faisceau dont l'intensité est typiquement de  $10^2$  W/ $m^2$  dans le visible, le flux de photon est d'environ  $10^{20}$  s<sup>-1</sup> m<sup>-2</sup>. Si on suppose une efficacité quantique de 100%, la durée d'interaction est d'au moins  $10^{-4}$  s pour libérer les porteurs de charge et créer le réseau d'indice de réfraction.

Pratiquement, le temps de formation  $\tau$  du réseau est bien plus long car, hormis une efficacité quantique inférieure à l'unité et une vitesse finie des porteurs, il est peu probable que les électrons de la bande de conduction soient piégés dans une zone sombre dès leur première photo-excitation. Il s'ensuit que les processus de photo-excitation, de transport et de piégeage doivent statistiquement se répéter plusieurs fois pour chaque porteur de charge avant l'inscription d'un réseau d'indice de réfraction au niveau macroscopique.

En négligeant le temps nécessaire au déplacement des porteurs devant celui de photo-excitation, et en supposant que l'efficacité quantique de cette dernière est proche de l'unité, P. Yeh (P. Yeh [1987]) a pu établir une relation donnant une limite inférieure du temps de formation du réseau d'indice de réfraction:

$$\tau = \left(\frac{h\nu}{e}\right) \left(\frac{\lambda}{\Lambda}\right) \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right) \frac{2}{\pi \eta I Q} \quad (I.3)$$

Dans cette relation  $h\nu$ ,  $\lambda$  et  $I$  sont respectivement l'énergie d'un photon, la longueur d'onde et l'intensité lumineuse.  $\Lambda$  est le pas du réseau d'interférences,  $e$  la charge de l'électron,  $\alpha$  le coefficient d'absorption linéaire du milieu,  $\eta$  l'efficacité quantique du processus de photo-excitation et  $\gamma$  est une constante caractérisant l'efficacité du couplage entre les deux faisceaux.  $Q$  est le facteur de qualité du matériau photoréfractif que l'on définit de la manière suivante:

$$Q = \frac{n_0^3 r}{\varepsilon} \quad (I.4)$$

où  $\varepsilon$  et  $r$  sont les composantes pertinentes respectives des tenseurs diélectrique et électro-optique. Comme la relation (I.3) néglige les phénomènes de transport,  $\tau$  représente une limite inférieure du temps nécessaire à la formation d'un réseau d'indice de réfraction. Cette limite dépend de l'efficacité  $\gamma$  du couplage entre les faisceaux optiques. Le rôle primordiale de  $\gamma$  dans les processus optiques seront mis en évidence dans la section suivante. Il est important de noter que d'après la relation (I.3),  $\tau$  est inversement proportionnel à l'intensité incidente. Toutefois, cette relation ne fournit qu'une valeur approchée de  $\tau$  et certains auteurs ont montré expérimentalement que l'exposant de l'intensité lumineuse dans la formule

(I.3) n'est pas toujours -1, mais qu'il peut prendre des valeurs non entières comme, par exemple, -0,62 (S. Ducharme et J. Feinberg [1984]).

Le tableau I.1 rassemble les principales caractéristiques optiques de différents cristaux couramment utilisés.

Tableau I.1: Caractéristiques optiques de différents cristaux (P. Yeh [1987] et P. Günter [1988])

cristal	$\lambda$ ( $\mu\text{m}$ )	$\Lambda$ ( $\mu\text{m}$ )	$n_0$	$r$ (pm/V)	$\alpha$ ( $\text{cm}^{-1}$ )	$\tau$ (s)
BaTiO <sub>3</sub>	0,514	1,3	2,4	$r_{42} = 1640$	1,0	1,3
AsGa	1,06	1,0	3,4	$r_{12} = 1,43$	1,2	$8 \cdot 10^{-5}$
BSO/BGO	0,532	23,0	2,54	$r_{14} = 3,4$	0,46	$1,5 \cdot 10^{-2}$
KNbO <sub>3</sub>	0,568		2,3	$r_{42} = 380$		
LiNbO <sub>3</sub>	0,568		2,2	$r_{33} = 31$		
SBN	0,515	1,5	2,3	$r_{33} = 1340$	0,1	2,5

Dans la première colonne figure la longueur d'onde  $\lambda$  des faisceaux incidents. Une limite inférieure de  $\lambda$  est imposée par la différence d'énergie entre le niveau des donneurs et le minimum de la bande de conduction ou par la différence d'énergie entre le niveau des accepteurs et le maximum de la bande de valence selon que les porteurs de charge sont des électrons ou des trous. Le tableau indique ensuite successivement l'interfrange  $\Lambda$  optimisant l'effet photoréfractif, l'indice de réfraction intrinsèque  $n_0$ , la composante pertinente du tenseur électro-optique  $r$ , l'absorption linéaire  $\alpha$  et la constante de temps  $\tau$  caractéristique du cristal.

Par exemple, des matériaux comme le BaTiO<sub>3</sub> et le SBN ont des coefficients électro-optiques très grands, mais des temps de réaction très longs. Par contre, l'AsGa a un temps de réaction très court mais un gain très faible. Nous avons choisi de travailler avec du BGO et du BSO car ces cristaux réagissent en des temps facilement accessibles expérimentalement et cependant raisonnablement courts. De plus, les gains qu'ils permettent d'atteindre, lorsqu'un champ extérieur leur est appliqué, sont comparables à ceux du BaTiO<sub>3</sub>.

Le BGO et le BSO sont des cristaux cubiques non centro-symétriques appartenant au groupe de symétrie -43m (P. Günter [1987]). Si les cristaux sont taillés selon les axes: (0, 0, 1), (1, -1, 0) et (1, 1, 0) et si on omet l'activité optique, le tenseur diélectrique induit se ramène à l'expression suivante (P. Yeh [1987]):

$$\Delta\varepsilon = -\varepsilon_0 n_0^4 r_{14} \begin{pmatrix} E_y & 0 & E_z \\ 0 & E_y & E_x \\ E_x & E_z & 0 \end{pmatrix} \quad (I.5)$$

où  $\varepsilon_0$  est la permittivité électrique du vide et  $r_{14}$  la composante du tenseur électro-optique correspondant à la découpe et à l'orientation du cristal.  $E_x$ ,  $E_y$  et  $E_z$  représentent les composantes du champ de charges d'espace (fig. I.3).

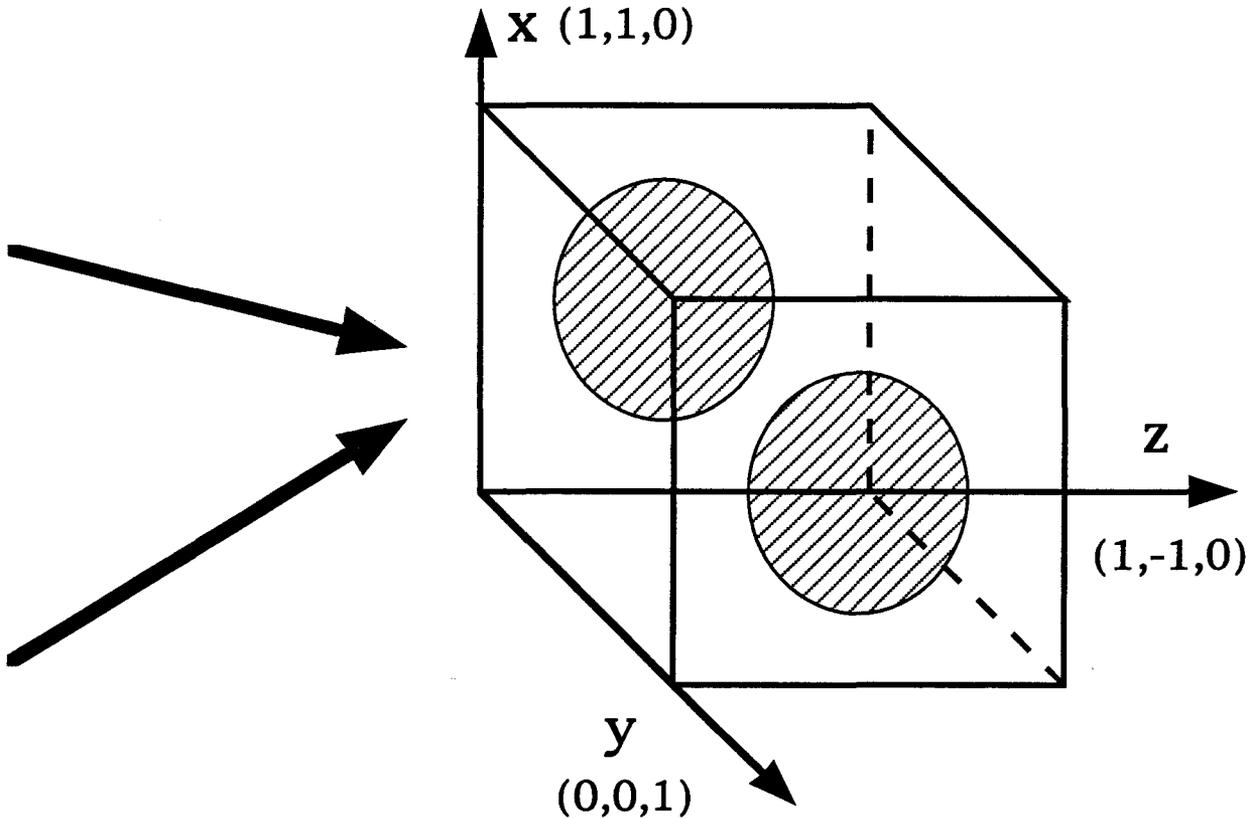


Figure I.3: Découpe et orientation des faces des cristaux de BSO/BGO par rapport aux ondes incidentes.

Pour accroître l'efficacité des processus décrits plus haut, une tension continue  $V_0$  est appliquée entre deux faces opposées de façon à générer un courant de dérive perpendiculaire au plan d'interférences. Deux orientations sont couramment utilisées:

(a) Le champ extérieur est parallèle à la direction  $(1,-1,0)$  et les faisceaux pénètrent dans le cristal perpendiculairement au plan  $[1,1,0]$ .

(b) Le champ extérieur est parallèle à la direction  $(0,0,1)$  et les faisceaux pénètrent par les faces  $[1,-1,0]$ .

Bien que ces deux configurations permettent d'inscrire un hologramme dans le cristal, les interactions qu'elles impliquent, seule la disposition (b), que nous adoptons dans tout ce travail, induit des transferts d'énergie efficaces entre les deux faisceaux incidents (fig. I.3).

### I.1.2: Mélange à deux ondes

La propriété des cristaux photoréfractifs principalement utilisée dans ce travail est le gain dans un mélange à deux ondes. Dans cette section, nous passons en revue et explicitons les principales propriétés de ce processus tant du point de vue expérimental que théorique en essayant de faire le lien entre les deux approches.

#### I.1.2.1: Transferts d'énergie

Cette section est consacrée à l'étude des échanges d'énergie entre les deux faisceaux. Nous verrons que lorsque le déphasage  $\phi$  entre les réseaux d'interférences et d'indice de réfraction prend des valeurs différentes de 0 ou de  $\pi$ , il se produit des échanges d'énergie non réciproques entre les deux faisceaux (N. V. Kukhtarev et al [1979], V. Markov et al [1979], A. Marrakchi et al [1981] et J. Feinberg et al [1980]).

Considérons l'interaction, dans un milieu photoréfractif, de deux ondes monochromatiques, cohérentes, d'amplitudes complexes  $A_p$  et  $A_s$  représentant respectivement les faisceaux de pompe et de sonde (fig. I.4):

$$E_j = A_j e^{i(\omega t - \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r})} \mathbf{1}_y \quad \text{avec } j=p(\text{ompe}), s(\text{onde}). \quad (\text{I.6})$$

où  $\mathbf{k}_j$  est le vecteur d'onde du faisceau  $j$ ,  $\mathbf{1}_y$  le vecteur unitaire selon l'axe  $y$ , conformément à la figure I.3 et  $\omega_j = \omega$ . De plus, par souci de simplicité, nous supposons que les deux faisceaux ont la même polarisation  $s$  (perpendiculaire au plan d'incidence). Dans le matériau, il se forme un réseau d'interférences dont l'intensité  $I(\mathbf{r})$  vérifie:

$$I(\mathbf{r}) = |E|^2 = I_p + I_s + (A_p^* A_s e^{-i \mathbf{K} \cdot \mathbf{r}} + \text{c. c.}) \quad (\text{I.7})$$

$$\text{où} \quad \mathbf{K} = \mathbf{k}_s - \mathbf{k}_p, \quad (\text{I.8})$$

$I_s$  et  $I_p$  symbolisent les intensités des faisceaux de sonde et de pompe et l'interfrange  $\Lambda$  est défini par:

$$\Lambda = \frac{2\pi}{|\mathbf{K}|} = \frac{\lambda}{2 \sin(\theta)} \quad (\text{I.9})$$

où  $\theta$  est le demi-angle entre les deux faisceaux.

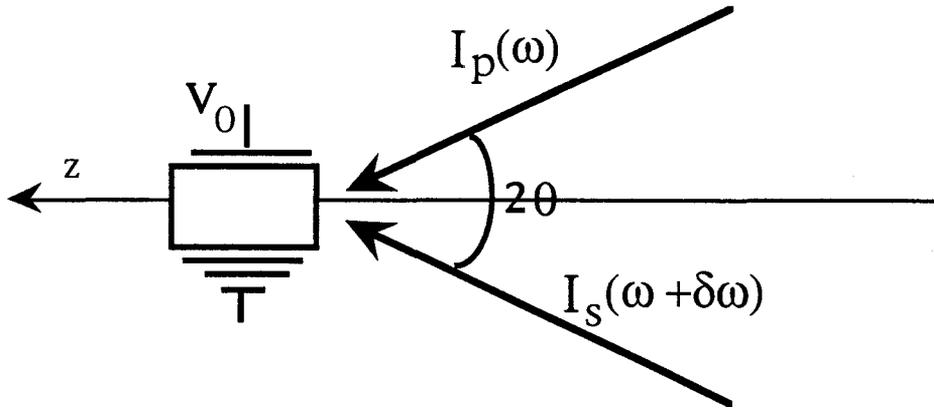


Figure I.4: Dispositif expérimental du mélange à deux ondes en présence de champ électrique statique externe.

En accord avec la section précédente, les variations spatiales de l'intensité génèrent un champ électrique de charges d'espace  $E_{ce}$  qui induit un réseau d'indice de réfraction  $\Delta n$  via l'effet Pockels (V. L. Vinetskii et al [1979] et D. L. Staebler, J. J. Amodei [1972], N. V. Kukhtarev et al [1979], J. Feinberg et al [1980], J. Feinberg et al [1981] et S. Ducharme et J. Feinberg [1984]):

$$n = n_0 + \frac{n_1}{2} \left[ e^{-i\varphi} \frac{A_p^* A_s}{I_p + I_s} e^{-i \mathbf{K} \cdot \mathbf{r}} + c. c. \right] \quad (I.10)$$

Pour simplifier, le réseau d'interférences est supposé scalaire et  $n_1$  et  $\varphi$  sont des nombres réels.

Afin de vérifier l'existence de transferts d'énergie dans les matériaux photoréfractifs, nous établissons les équations stationnaires décrivant la variation de l'amplitude des ondes le long de l'axe  $z$ .

Dans l'équation d'onde stationnaire:

$$\left\{ \Delta + n^2 \frac{\omega^2}{c^2} \right\} \mathbf{E} = 0 \quad (I.11)$$

l'indice de réfraction  $n$  et le champ électrique lumineux total  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_p + \mathbf{E}_s$  peuvent être remplacés par leur expression (I.10) et (I.6) (P. Yeh [1989]).  $\Delta$  est l'opérateur laplacien ( $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ) et  $c$  la vitesse de la lumière dans le vide. Les équations pour les amplitudes des ondes de sonde  $A_s$  et de pompe  $A_p$  s'obtiennent aisément moyennant les approximations suivantes:

(i) Les faisceaux incidents se propagent suivant l'axe  $z$  (fig. I.3), car la composante  $x$  proportionnelle à  $\sin(\theta)$  est négligeable. En effet, selon le tableau I.1, l'interfrange optimal du réseau, est de l'ordre de  $20 \mu\text{m}$  ce qui correspond à  $2\theta = 1.5^\circ$ . Les faisceaux sont des ondes planes:

$$A_j(x,y,z) = A_j(z) \quad (\text{I.12})$$

se propageant suivant  $z$  dans un milieu d'extension infinie. De plus, en accord avec la stationnarité du modèle, les amplitudes  $A_j$  sont indépendantes du temps.

(ii) Les variations longitudinales des amplitudes  $A_j$  sont négligeables sur une longueur d'onde optique. Autrement dit, on applique l'approximation de l'enveloppe lentement variable:

$$\left| \frac{d^2}{dz^2} A_j \right| \ll \left| \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{1}_z \frac{d}{dz} A_j \right| \quad (\text{I.13})$$

(iii) Seuls les termes résonants sont conservés.

(iv) Le développement des équations est limité au premier ordre en  $n_1/n_0$ .

En vertu de ces approximations, l'évolution des amplitudes des champs suivant la direction  $z$  obéit aux équations différentielles suivantes:

$$2 i \mathbf{k}_p \cdot \mathbf{1}_z \frac{d}{dz} A_p = \frac{\omega^2}{c^2} n_1 n_0 e^{-i\varphi} \frac{|A_s|^2 A_p}{(I_p + I_s)} \quad (\text{I.14a})$$

$$2 i \mathbf{k}_s \cdot \mathbf{1}_z \frac{d}{dz} A_s = \frac{\omega^2}{c^2} n_1 n_0 e^{i\varphi} \frac{|A_p|^2 A_s}{(I_p + I_s)} \quad (\text{I.14b})$$

Sachant que:

$$\mathbf{k}_p \cdot \mathbf{1}_z = \mathbf{k}_s \cdot \mathbf{1}_z = \frac{2\pi}{\lambda} n_0 \cos(\theta) \quad (\text{I.15})$$

$$\text{et que: } \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} n_0 \quad (\text{I.16})$$

les équations (I.14) deviennent:

$$\frac{d}{dz} A_p = -i \frac{\sigma e^{-i\varphi}}{2} \frac{A_p |A_s|^2}{I_p + I_s} - \frac{\alpha}{2} A_p \quad (\text{I.17a})$$

$$\frac{d}{dz} A_s = -i \frac{\sigma e^{i\varphi}}{2} \frac{A_s |A_p|^2}{I_p + I_s} - \frac{\alpha}{2} A_s \quad (\text{I.17b})$$

dans lesquelles  $\sigma = \frac{2\pi n_1}{\lambda \cos(\theta)}$  est proportionnel à l'amplitude du réseau d'indice de réfraction. Le terme  $-\frac{\alpha}{2} A_j$ , ajouté empiriquement, traduit l'absorption linéaire du matériau.

Ces deux équations d'amplitude complexes se transforment aisément en quatre équations réelles pour les intensités et les phases des ondes de pompe et de sonde:

$$\frac{d}{dz} I_p = -\sigma \sin(\varphi) \frac{I_p I_s}{I_p + I_s} - \alpha I_p \quad (\text{I.19a})$$

$$\frac{d}{dz} I_s = \sigma \sin(\varphi) \frac{I_p I_s}{I_p + I_s} - \alpha I_s \quad (\text{I.19b})$$

$$\text{et } \frac{d}{dz} \psi_p = \frac{\sigma}{2} \cos(\varphi) \frac{I_s}{I_p + I_s} \quad (\text{I.19c})$$

$$\frac{d}{dz} \psi_s = \frac{\sigma}{2} \cos(\varphi) \frac{I_p}{I_p + I_s} \quad (\text{I.19d})$$

$$\text{avec } A_j = \sqrt{I_j} e^{i\psi_j} \quad (\text{I.20})$$

Les équations des phases (I.19c) et (I.19d) ne dépendant que des intensités, peuvent donc être implicitement résolues:

$$\psi_j(z) - \psi_j(0) = \frac{1}{2} \cotg(\varphi) \ln\left(\frac{I_j(z)}{I_j(0)} e^{\alpha z}\right) \quad (I.21)$$

De plus les équations des intensités admettent les solutions suivantes:

$$I_p(z) = I_p(0) \frac{1 + \beta}{\beta + e^{\sigma \sin(\varphi) z}} e^{-\alpha z} \quad (I.22a)$$

$$I_s(z) = I_s(0) \frac{1 + \beta}{1 + \beta e^{-\sigma \sin(\varphi) z}} e^{-\alpha z} \quad (I.22b)$$

où  $\beta$  est le rapport des intensités incidentes:

$$\beta = \frac{I_p(0)}{I_s(0)} \quad (I.23)$$

Ainsi que le montre la figure I.5 le déphasage  $\varphi$  entre les réseaux d'interférences et d'indice de réfraction joue un rôle crucial dans les échanges d'énergie entre les deux faisceaux. Si  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$  (fig. I.5a), l'énergie est transférée du faisceau de sonde vers celui de pompe. Si  $\varphi = 0$  ou  $\pi$  (fig. I.5b), il n'y a aucun transfert d'énergie. Et enfin, pour  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  (fig. I.5c), la situation qui nous intéresse est obtenue: le faisceau de sonde est amplifié aux dépens du faisceau de pompe. Le couplage non linéaire entre les intensités étant proportionnel à  $\sin(\varphi)$ , tout ceci peut se déduire directement des équations (I.19a) et (I.19b). Comme il n'y a pas d'apport extérieur d'énergie, tout ce que gagne l'un des faisceaux est intégralement perdu par l'autre. En effet, si l'absorption est négligée ( $\alpha = 0$ ), l'intensité totale  $I_p + I_s$  demeure une constante du système d'équations (I.19). Par contre, si l'absorption prend une importance significative, on aura:

$$\left(\frac{d}{dz} + \alpha\right) (I_p + I_s) = 0 \quad (I.24)$$

Ces transferts d'énergie peuvent être quantifiés en terme de gain effectif pour chaque faisceau:

$$g_p = \frac{I_p(L_c)}{I_p(0)} = \frac{1 + \beta}{\beta + e^{\sigma \sin(\varphi) L_c}} e^{-\alpha L_c} \quad (I.25)$$

$$g_s = \frac{I_s(L_c)}{I_s(0)} = \frac{1 + \beta}{1 + \beta e^{-\sigma \sin(\varphi) L_c}} e^{-\alpha L_c} \quad (I.26)$$

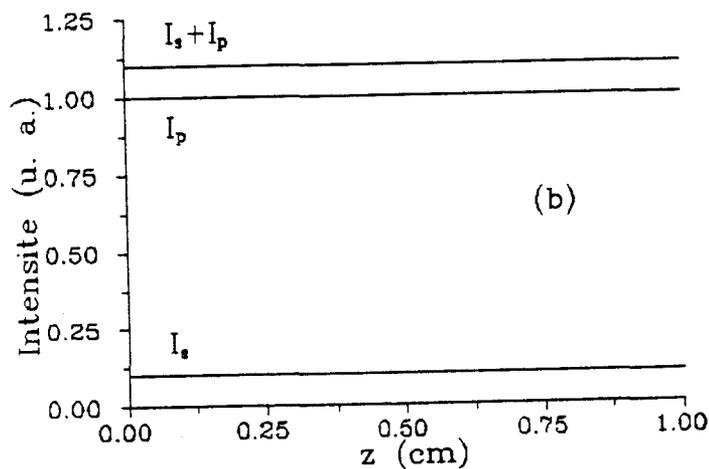
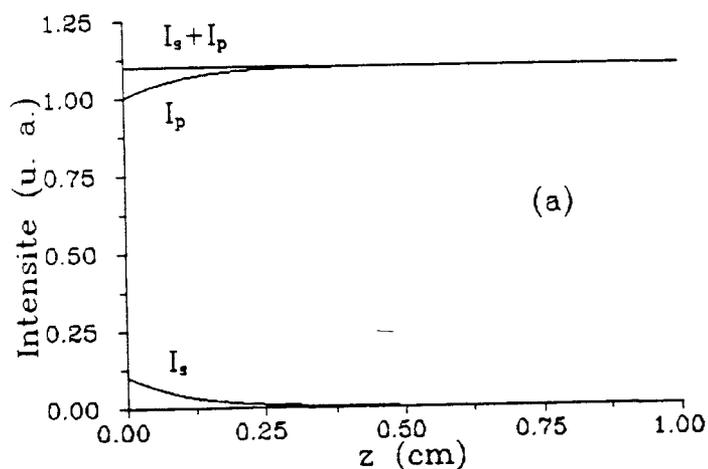
où  $L_c$  est la longueur du cristal photoréfractif et où  $I_p(z)$  et  $I_s(z)$  sont remplacées par leur expression (I.22). Notons, toutefois que par raison de commodité, on utilise le gain  $\Gamma$  dans les expériences:

$$\Gamma = \frac{I_s(z=L_c, I_p > 0)}{I_s(z=L_c, I_p = 0)} \quad (I.27)$$

Ce gain  $\Gamma$  diffère du gain effectif  $g_s$  pour le faisceau de sonde, dans la mesure où il ne prend pas en compte l'absorption du cristal:

$$\Gamma = g_s e^{\alpha L_c} \quad (I.28)$$

Expérimentalement, la longueur et le coefficient d'absorption du cristal ne variant pas, ces deux définitions diffèrent d'un facteur multiplicatif constant. Néanmoins,  $\Gamma$  ne nous renseigne que sur l'efficacité des transferts d'énergie du faisceau de pompe vers celui de sonde alors que  $g_s$  est un compromis entre ceux-ci et les pertes au sein du matériau. Une conséquence immédiate de ces définitions est qu'en l'absence d'échanges d'énergie ( $\sigma \sin(\varphi) = 0$ ),  $\Gamma$  et  $g_s$  valent respectivement 1 et  $e^{-\alpha L_c}$ .



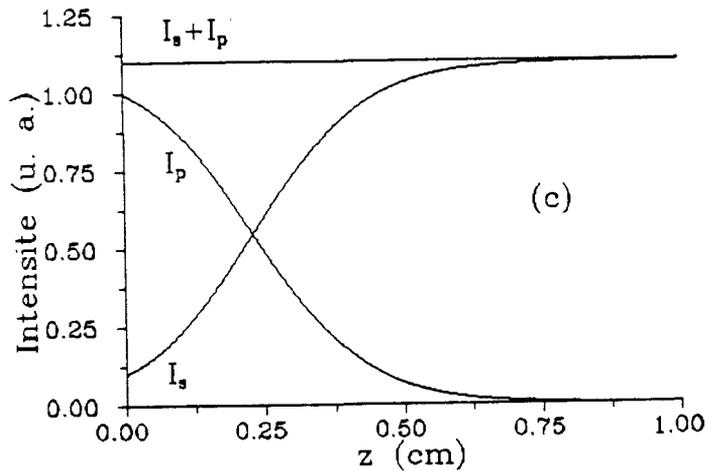


Figure I.5: Graphes des intensités  $I_p$ ,  $I_s$  et  $I_p + I_s$  en unité arbitraire en fonction de  $z$  pour (a)  $\varphi = -\pi/2$ , (b)  $\varphi = 0$  et (c)  $\varphi = \pi/2$ , avec  $\sigma = 10 \text{ cm}^{-1}$

### I.1.2.2: Influence des paramètres du système

Nous utilisons le modèle développé dans la sous-section précédente pour expliciter l'influence de la longueur du cristal  $L_c$  car nos cristaux possèdent tous les mêmes dimensions. Il en est de même pour le déphasage  $\varphi$  entre les réseaux d'interférences et d'indice de réfraction que le dispositif expérimental ne permet pas d'évaluer.

Par contre, la description théorique de la dépendance du gain en fonction des paramètres tel que l'angle  $2\theta$ , la différence de fréquence  $\delta\omega$  entre les deux faisceaux ou le champ extérieur  $E_0$  appliqué au cristal (fig. I.4), nécessite l'élaboration d'un modèle plus complexe qui ne sera pas détaillé ici. Nous nous bornerons à décrire qualitativement l'influence de ces paramètres à partir des observations expérimentales.

#### (i) La longueur du cristal: $L_c$

La figure I.6 illustre l'évolution du gain  $\Gamma$  du cristal. Il apparaît nettement une valeur optimum  $L_{c0}$  de la longueur du cristal correspondant à un transfert total de l'énergie du faisceau de pompe ( $I_p = 0$ ). Le gain  $\Gamma$  est donc une fonction croissante de  $L_c$  tant que cette dernière reste inférieure à  $L_{c0}$  où il culmine à la valeur  $1 + \beta$ .

Si la longueur du cristal est inférieure ou égale à  $L_{c0}$ , le gain  $g_s$  (I.26) a un comportement similaire à celui de  $\Gamma$ . Cependant, si la longueur de cristal

est supérieure à  $L_{CO}$ , le matériau absorbe l'énergie du faisceau de sonde et  $g_s$  décroît exponentiellement (fig. I.6).

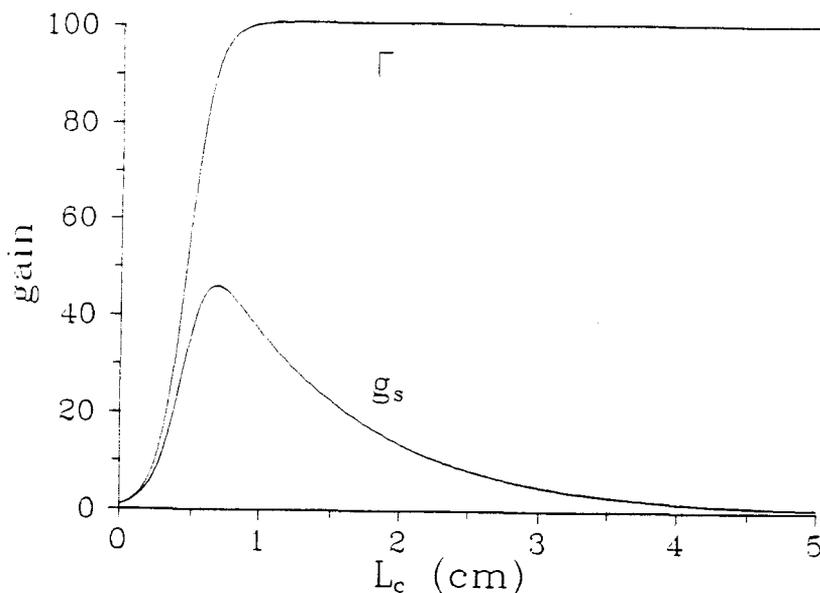


Figure I.6: Dépendance théorique des gains  $\Gamma$  et  $g_s$  (sans dimensions) en fonction de la longueur du cristal  $L_c$  avec  $\beta = 100$ ,  $\alpha = 1 \text{ cm}^{-1}$ ,  $\sigma = 10 \text{ cm}^{-1}$  et  $\varphi = \pi/2$

(ii) Le déphasage entre les réseaux:  $\varphi$

Ainsi que nous l'avons montré dans la section I.1.2.1, le déphasage  $\varphi$  entre les réseaux d'interférences et d'indice de réfraction joue un rôle très important dans la valeur du gain. Pour  $\varphi \in ]0, \pi[$ , l'énergie est transmise de la pompe vers la sonde, ce qui correspond à un gain  $\Gamma$  supérieur à 1. Le gain  $\Gamma$  est, au contraire, inférieur à 1 pour  $\varphi \in ]\pi, 2\pi[$ . La figure I.7 représente  $\Gamma$  et  $g_s$  en fonction de  $\varphi$ . Le gain maximum est obtenu pour  $\varphi = \pi/2 + k\pi$  tandis que pour  $\varphi = k\pi$ , il n'y a pas de transfert d'énergie.

(iii) Le rapport des intensités incidentes:  $\beta$

La figure I.8 donne l'évolution du gain optimal avec  $\beta$  conformément à l'expression (I.26). Pour une longueur de cristal donnée, si  $\beta$  est de l'ordre de l'unité,  $\Gamma$  vaut  $1 + \beta$  car, à la sortie du cristal, toute l'énergie du faisceau de pompe est transférée au faisceau de sonde. Pour des valeurs de  $\beta$  plus grandes ( $> 10^4$ ), le modèle montre que le gain  $\Gamma$  se sature. Pour  $\beta$  supérieur à  $10^5$ ,  $\Gamma$  garde la valeur:

$$\Gamma \approx e^{\sigma \sin(\varphi) L_c} \quad (I.29)$$

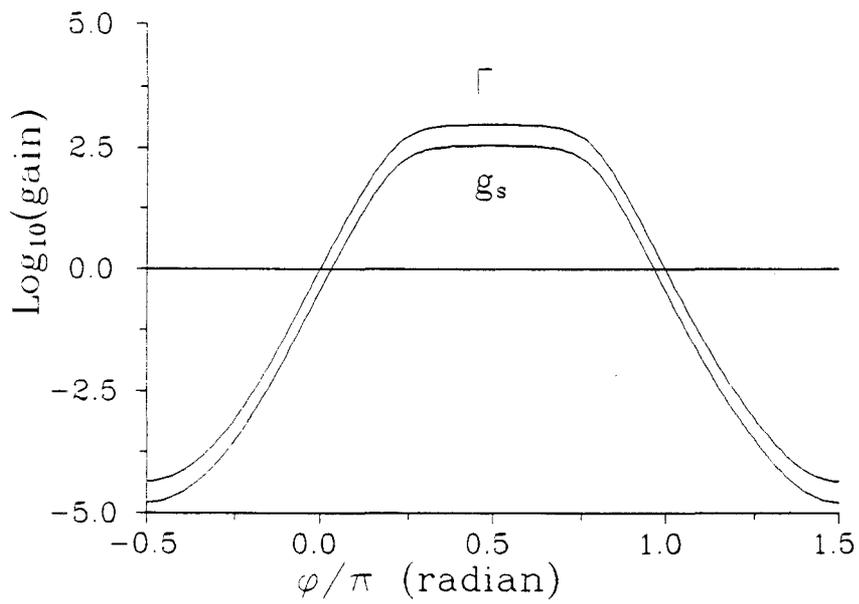


Figure I.7: Dépendance théorique des gains  $\Gamma$  et  $g_s$ , exprimés en échelle logarithmique, en fonction du déphasage entre les réseaux d'interférences et d'indice de réfraction  $\varphi$  avec  $\beta = 1000$ ,  $\alpha = 1 \text{ cm}^{-1}$ ,  $L_c = 1 \text{ cm}$  et  $\sigma = 10 \text{ cm}^{-1}$

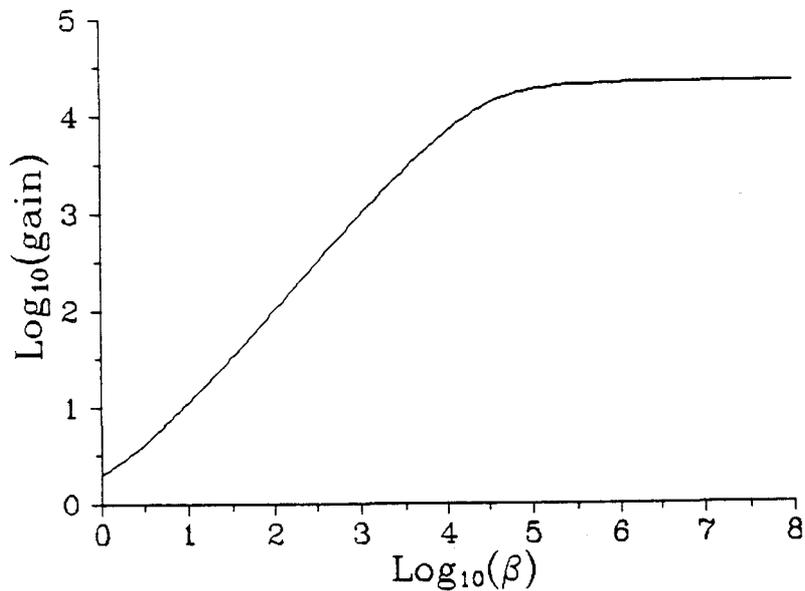


Figure I.8: Dépendance théorique du gain  $g_s$  en fonction du rapport des intensités incidentes  $\beta$  avec  $\sigma = 10 \text{ cm}^{-1}$ ,  $\alpha = 1 \text{ cm}^{-1}$ ,  $L_c = 1 \text{ cm}$  et  $\varphi = \pi/2$

(iv) L'angle entre les deux faisceaux:  $2\theta$

L'angle  $2\theta$  entre les faisceaux incidents est directement relié au pas  $\Lambda$  du réseau d'interférences par la relation (I.9). La figure I.9 montre la courbe de l'évolution du gain  $\Gamma$  en fonction de l'inverse de l'interfrange  $\Lambda$ , elle présente un pic qui culmine pour un interfrange d'environ  $20 \mu\text{m}$ . Cette valeur correspond à un compromis optimisant l'influence des différents processus de transport de charge dans le BGO (tab. I.1).

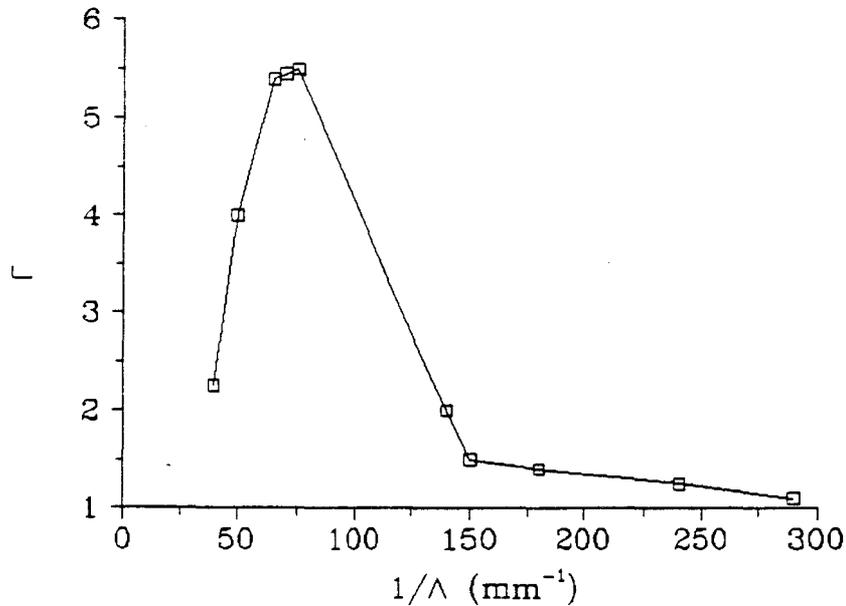


Figure I.9: Dépendance expérimentale du gain  $\Gamma$  en fonction de l'inverse de l'interfrange  $\Lambda$  du réseau d'interférences avec  $\beta = 1000$ ,  $\alpha = 1 \text{ cm}^{-1}$ ,  $L_c = 1 \text{ cm}$ ,  $\sigma = 10 \text{ cm}^{-1}$  et  $\varphi = \pi/2$ .

(v) L'écart en fréquence entre les deux faisceaux:  $\delta\nu$

Comme pour l'angle entre les deux faisceaux incidents, il existe une valeur optimale du décalage en fréquence  $\delta\nu$  entre les deux faisceaux (fig. I.10). En effet, par inertie,  $\delta\omega$  introduit un déphasage supplémentaire entre les réseaux d'interférences et d'indice de réfraction qui, s'il a le bon signe, provoque une augmentation du gain. Mais, si le décalage en fréquence est trop important, le réseau d'indice de réfraction se forme trop lentement pour que le matériau puisse suivre le mouvement des franges. L'amplitude du réseau et donc le gain s'en trouvent diminués. Lorsque les deux faisceaux incidents ont la même fréquence, les transferts d'énergie sont négligeables.

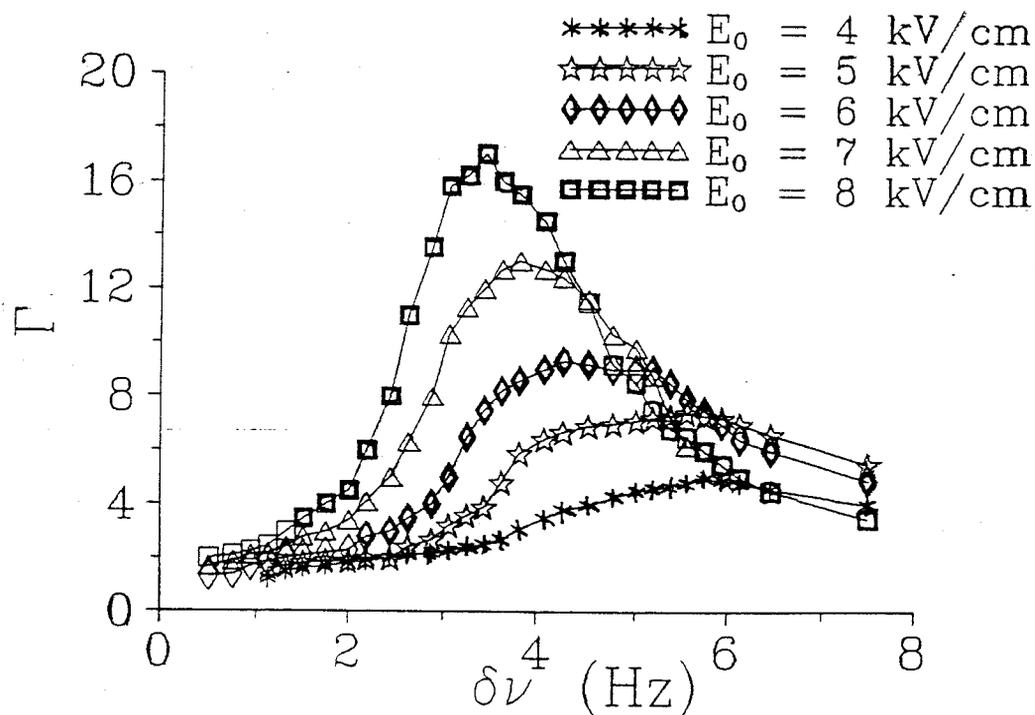


Figure I.10: Dépendance expérimentale du gain  $\Gamma$  en fonction du décalage en fréquence  $\Delta\nu$  entre les deux faisceaux pour plusieurs valeurs du champ électrique extérieur  $E_0$ : (a)  $E_0 = 8$  kV/cm, (b)  $E_0 = 7$  kV/cm, (c)  $E_0 = 6$  kV/cm, (d)  $E_0 = 5$  kV/cm et (e)  $E_0 = 4$  kV/cm

(vi) Le champ extérieur:  $E_0$

La figure I.10 représente  $\Gamma$  en fonction de  $\Delta\nu$  pour plusieurs valeurs du paramètre  $E_0$ . Le gain  $\Gamma$  augmente avec  $E_0$  de façon significative, jusqu'à environ 20 pour  $E_0 = 10$  kV/cm. Parallèlement, lorsque  $E_0$  croît la courbe de gain se rétrécit et se déplace vers les petites valeurs de  $\Delta\nu$ . Ce déplacement du maximum est mis en évidence dans la figure I.11, qui montre la dépendance du décalage en fréquence optimisant le gain en fonction de  $E_0^{-1}$ .

(vii) La polarisation des faisceaux

Compte tenu de l'orientation des axes et de la structure du tenseur électro-optique du cristal, il apparaît que le gain est très nettement favorisé si les polarisations des faisceaux incidents sont parallèles entre elles et perpendiculaires au plan d'incidence (polarisations s) comme cela est supposé dès le début.

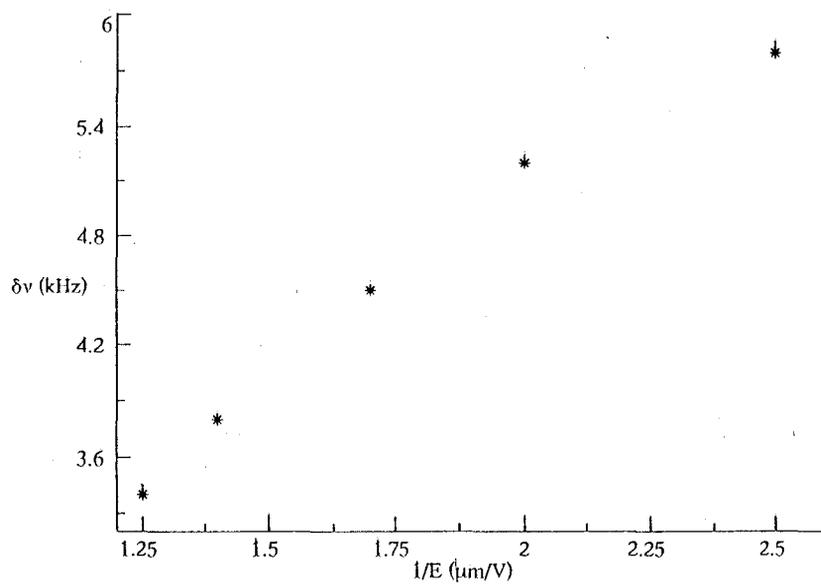


Figure I.11: Dépendance expérimentale du décalage en fréquence  $\Delta\nu$  entre les deux faisceaux incidents optimisant les transferts d'énergie en fonction de l'inverse du champ électrique extérieur  $E_0$ .

## I.2: LA CAVITÉ

Avant d'étudier les structures transverses obtenues à l'aide d'un oscillateur avec gain photoréfractif, il est important de préciser quels sont les paramètres dont dépend le système. Dans la section I.1, nous avons exposé les propriétés des processus non linéaires que nous utilisons. Dans celle-ci, nous présentons les notions de bases qui interviennent dans l'analyse des structures transverses en optique et nous discutons de l'influence des propriétés géométriques du résonateur.

Nous allons tout d'abord préciser ce qu'est une structure transverse en optique et en discuter les éléments constitutifs. Ensuite, nous explicitons le rôle de quelques grandeurs physiques du résonateur dans la dynamique transverse. Nous en profitons pour rappeler les propriétés des modes et des fréquences propres du résonateur. Pour finir, l'influence de la parité du nombre de miroirs constituant la cavité est mise en évidence et détaillée.

### I.2.1: Structures spatiales en optique

L'expression "structure spatiale" utilisée ici, se réfère à la distribution transverse de l'intensité ou du champ électrique d'un faisceau. La grandeur champ électrique n'étant accessible que par des méthodes de détection hétérodyne, nous nous intéressons principalement à la structure transverse de l'intensité des faisceaux dont un exemple est présenté à la figure I.12.

On aimerait pouvoir caractériser une structure transverse très complexe par une quantité d'information plus réduite que la distribution du champ électrique en chaque point du plan transverse. Par exemple, on pourrait la considérer comme un ensemble de zones éclairées dont on ne retiendrait que l'intensité et les coordonnées des maxima locaux. On pourrait aussi améliorer cette représentation en attribuant à chaque maximum un poids fonction de divers paramètres tels que l'étendue de la zone éclairée qui lui est associée.

Cependant, le choix des maxima locaux est arbitraire et on peut se demander s'il n'existe pas des constituants intrinsèques aux structures spatiales plus appropriés à leur étude. Pour répondre à cette question qui n'est pas propre à l'optique, nous essayons de comprendre ce qui engendre ces structures dans les systèmes physiques.

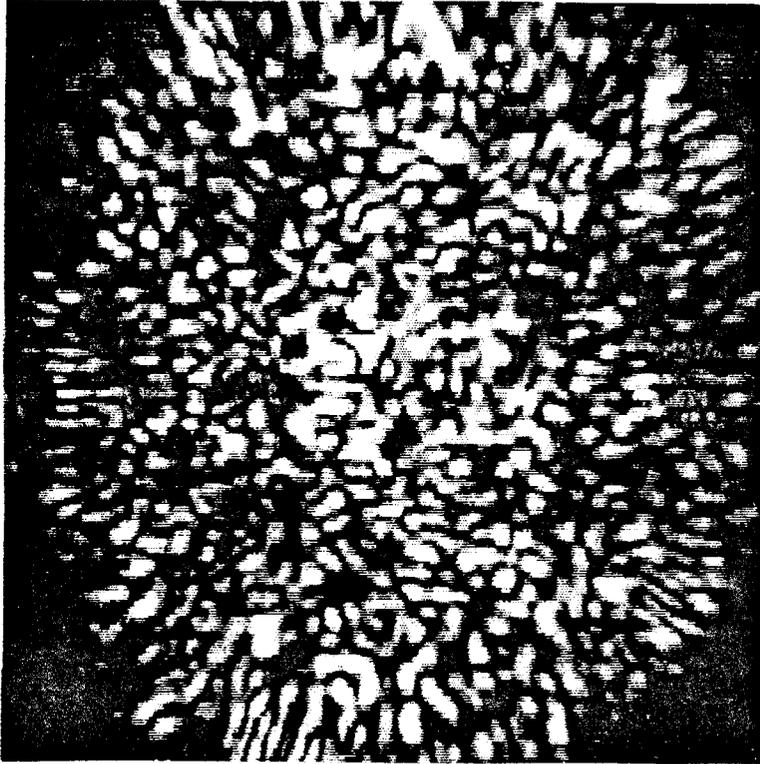


Figure I.12: Exemple de structure transverse du faisceau issu de l'oscillateur.

Lorsqu'un système physique possédant des degrés de liberté spatiaux est conduit loin de son état d'équilibre par un paramètre externe, il apparaît généralement des structures spatiales macroscopiques (J. E. Wesfreid et S. Zaleski [1984]). Un exemple classique de ce phénomène apparaît dans l'expérience de Rayleigh-Bénard dans laquelle une fine couche de fluide maintenue entre deux plaques horizontales est chauffée par le dessous. Au-delà d'une valeur critique de la différence de température entre les deux plaques, des paires de rouleaux de convection surgissent et remplissent tout le système (C. Normand et al. [1977] et P. Bergé et M. Dubois [1984]). Cela correspond à une bifurcation d'un état spatialement homogène vers une structure périodique stationnaire. D'autres types de comportements sont observés comme, par exemple, des régimes dynamiques spatialement périodiques et des comportements turbulents (S. Chandrasekhar [1961] et D. Walgraef et N. M. Ghoniem [1990]).

Près du seuil d'instabilité, les variables du système peuvent se réduire au paramètre d'ordre  $A$  qui obéit à la forme normale de la bifurcation. Lorsque la transition implique l'apparition d'une nouvelle fréquence

spatiale et/ou temporelle, les paramètres d'ordre  $A$  sont complexes et satisfont chacun une équation de Ginzburg-Landau:

$$\frac{d}{dt}A = -(\mu + i\nu)A + (\delta + i\zeta)A|A|^2 + (\kappa + i\eta)\Delta_T A \quad (\text{I.30})$$

où  $\mu, \nu, \delta, \zeta, \kappa, \eta$  sont des nombres réels et  $\Delta_T$  l'opérateur laplacien transverse.

La distribution spatiale macroscopique du système présente souvent des défauts, c'est à dire un ensemble de points singuliers où les variables du système ne répondent plus aux mêmes lois que dans le reste de l'espace. Il peut s'agir, par exemple, d'un pentagone au milieu d'une structure constituée d'hexagones ou, dans l'expérience de Rayleigh-Bénard, de la frontière entre deux régions où l'orientation des rouleaux est différente ou encore de vortex dans l'hélium superfluide.

Des résultats expérimentaux obtenus sur divers systèmes physiques ont montré que ces défauts peuvent changer l'instabilité des structures dans lesquelles ils sont apparus (J. E. Wesfreid et S. Zaleski [1984]), et parallèlement, que l'instabilité de ces structures engendre la *nucléation de défauts* (J. E. Wesfreid et al [1988]). Plusieurs expériences ont révélé l'apparition spontanée de défauts dans le système lors de la transition vers des états turbulents (A. Pocheau et al [1985] et I. Rehberg et al [1989]). Il est aussi montré que les défauts peuvent créer un état turbulent appelé "turbulence induite par des défauts" (P. Couillet et al [1989]). Les points singuliers constituant donc des éléments intrinsèques des structures spatiales, ils nécessitent une étude plus approfondie.

D'une manière générale, l'apparition des défauts est associée à une brisure de symétrie (R. Balian et al [1980]). Dans une cavité optique contenant un milieu non linéaire actif, cette brisure de symétrie se produit lorsque le seuil d'oscillation est franchi et le paramètre d'ordre  $A$  n'est autre que le champ électrique (P. Couillet et al [1987]). En effet, ce type de système est invariant sous une transformation de jauge pour le champ électrique:

$$E \rightarrow E e^{i\psi} \quad (\text{I.31})$$

sous réserve d'appliquer la transformation adéquate des autres variables.

Lorsque le faisceau est engendré par l'oscillateur, la phase du champ électrique  $\psi$  possède une valeur aléatoire mais définie  $\psi_0$  qui brise l'invariance de phase (H. Haken [1977]).

En dessous du seuil, le champ électrique dans la cavité se réduit au bruit de fond qui présente des fluctuations spatiales à grande échelle. Lorsqu'on dépasse le seuil de l'oscillateur, la structure transverse du faisceau est composée d'un ensemble de régions aléatoirement réparties où la phase  $\psi$  est

constante. Celles-ci se réduisent alors à une seule région, occupant toute la section du faisceau mais comprenant des points singuliers où la phase  $\psi(x,y)$  du champ électrique n'est pas définie car le champ électrique  $y$  est nul. Ces points singuliers sont appelés singularités de phase car la circulation du gradient de la phase  $\psi$  du paramètre d'ordre sur un contour fermé entourant un de ces points, est un multiple entier, non nul, de  $2\pi$ :

$$\oint \nabla\psi \cdot d\mathbf{l} = 2\pi m \quad (I.32)$$

où  $m$  est la charge topologique de la singularité de phase. D'une manière générale, dans les systèmes hors d'équilibre, la dynamique des fluctuations du paramètre de contrôle est décrite par une *équation de phase* (D. Walgraef et N. M. Ghoniem [1990] et Y. Pomeau et al [1979]).

En pratique, le champ électrique décrit au voisinage du défaut une spirale tournant à  $m$  fois la fréquence optique du faisceau issu de la cavité (Y. Kuramoto [1984]). Cette spirale correspond à un point noir dans la distribution transverse de l'intensité (fig I.13a) et à une dislocation en détection hétérodyne (fig I.13b).

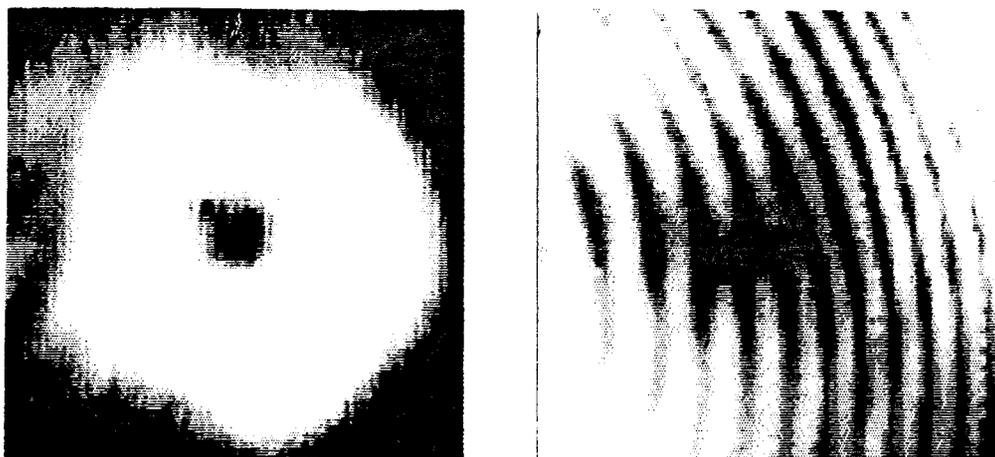


Figure I.13: Mises en évidence des singularités de phase: une singularité de phase de charge topologique 1 (a) dans la distribution transverse de l'intensité d'un faisceau et (b) en détection hétérodyne.

Dans un système d'extension infinie, bien que thermodynamiquement instables, les défauts demeurent topologiquement stables (il n'existe pas de transformation continue permettant de les supprimer individuellement) ce qui explique leur importance dans la dynamique du système. De plus, la structure de l'équation de Ginzburg-Landau imposant la conservation de la charge topologique totale (R. Balian et al [1980]), les défauts ne peuvent apparaître et disparaître que par paire de charges topologiques opposées. Certains auteurs (K. Staliunas [1992]) ont considéré les singularités de phase comme des particules de charge  $m$  soumises à des potentiels d'interaction mutuelle tels que les défauts de même charge se repoussent et ceux de charge opposée s'attirent.

En optique, les faisceaux ne possèdent pas une extension infinie. L'influence des bords fut mise en évidence par F. T. Arecchi qui a montré que le déséquilibre entre les défauts de charges topologiques opposées décroît lorsque le nombre de degrés de liberté spatiaux du système augmente (F. T. Arecchi et al [1992]). D'un point de vue théorique, la vision particulière des défauts fut complétée en considérant la courbure du front d'onde du faisceau comme une force extérieure (K. Staliunas [1992] et K. Staliunas [1993]).

Dans ce travail, comme nous nous sommes limités à des systèmes possédant peu de degrés de liberté spatiaux, nous décomposons les structures transverses des faisceaux sur les modes propres du résonateur qui sont détaillés dans la section suivante. Nous verrons que même dans ce type de situations où les conditions aux limites jouent un rôle primordial, on retrouve certaines propriétés des singularités de phase.

### **I.2.2: Géométrie du résonateur**

Cette section, consacrée à l'influence de la géométrie du résonateur sur les paramètres du système, est subdivisée en deux sous-sections. Dans la première, nous rappelons les propriétés des modes et les fréquences propres des résonateurs stables. Dans la seconde, ayant fixé la géométrie du résonateur, nous définissons quelques grandeurs qui caractérisent ces modes propres.

### I.2.2.1 Modes et fréquences propres des résonateurs stables.

Comme tout système physique de dimension finie, les résonateurs stables possèdent une infinité dénombrable de modes propres et un spectre discret. Cela incite à considérer le résonateur comme un filtre fréquentiel qui permet de simplifier la dynamique transverse du faisceau, mais aussi, à décomposer les structures spatiales du faisceau sur une base de modes adaptées au système étudié.

Les modes propres du résonateur vide, c'est à dire en l'absence d'interaction non linéaire, sont des solutions de l'équation suivante pour l'amplitude du champ électrique, décrivant les phénomènes de diffraction (H. Kogelnik et T. Li [1966]):

$$\left\{ \frac{4i\pi}{\lambda} \frac{\partial}{\partial z} + \Delta_T \right\} S(x,y,z) = 0 \quad (I.33)$$

où  $\Delta_T$  est l'opérateur laplacien agissant sur les coordonnées transverses. La linéarité de l'équation (I.33) permet d'exprimer la solution générale  $S(x,y,z)$  de ce problème comme combinaison linéaire des éléments d'une base de solutions choisies en tenant compte des conditions aux bords inhérentes au résonateur.

D'après les conditions aux bords *longitudinales*, après un tour dans la cavité, la phase de l'onde doit avoir évolué d'un multiple entier  $N$  de  $2\pi$  et par conséquent la longueur du chemin optique du résonateur  $L'_r$  est un multiple entier  $N$  de la longueur d'onde  $\lambda$ :

$$L'_r = N \lambda \quad (I.34)$$

Le vecteur d'onde du mode longitudinal d'indice  $N$  obéit à la relation:

$$k_{zN} = \frac{2\pi\Delta\nu_L}{c} N \quad (I.35)$$

où  $z$  est la coordonnée suivant l'axe optique du résonateur et  $\Delta\nu_L$  l'écart en fréquence entre deux modes longitudinaux successifs, appelé intervalle spectral longitudinal.

Lorsque les conditions aux bords *transverses* sont à symétrie cylindrique, on montre que les modes propres de la cavité vide appartiennent à la base complète des modes de *Laguerre-Gauss*  $A_{p|l|j}(\rho,\varphi,z)$  (fig. I.14) où  $\rho$  et  $\varphi$  sont les coordonnées polaires dans le plan transverse rapportées à la taille locale  $w(z)$  du mode fondamental (L. Tarassov [1985] et L. A. Lugiato et al [1990]), on obtient:

$$A_{plj}(\rho, \varphi, z) = \frac{w_0}{w(z)} \sqrt{\frac{2^{l+1} p!}{\pi (p+l)!}} r^l L_p^l(r^2) G_{l,j}(\varphi) e^{-r^2} e^{-i\Phi(z)}$$

avec  $G_{lj}(\varphi) = \begin{cases} \cos(l \varphi) & \text{si } j=1 \\ \sin(l \varphi) & \text{si } j=2 \end{cases}$  (I.36)

$$r = \frac{\sqrt{2} \rho}{w(z)} \quad (I.37)$$

et  $\Phi(z) = \frac{\pi r^2}{\lambda R(z)} - (q+1) \text{Arctg} \left( \frac{z \lambda}{\pi w_0^2} \right)$  (I.38)

$p$  et  $l$  (entiers positifs) sont les indices radial et azimutal du mode et  $q = 2p + l$ . Le rayon de courbure local  $R(z)$  du front d'onde, la taille transverse locale  $w(z)$  du mode fondamental et le rayon de pincement  $w_0$  sont des fonctions de la géométrie du résonateur et ne dépendent pas du mode transverse concerné. Les fonctions  $L_p^l$  sont les polynômes de Laguerre généralisés, définis par la formule de Rodrigues généralisée (M. Abramowitz et I. A. Stegun [1972]):

$$L_p^l(x) = \frac{e^x x^{-l}}{p!} \frac{d^p}{dx^p} (e^{-x} x^{p+l}) \quad (I.39)$$

Parallèlement, on peut calculer l'écart  $\nu_{p,l}$  entre les fréquences des modes  $A_{plj}(r, \varphi, z)$  et le mode  $A_{0,0}$  (L. Tarassov [1985] et L. A. Lugiato et al [1990]):

$$\nu_{pl} = (2p + l) \Delta\nu_T \quad (I.40)$$

où  $\Delta\nu_T$  est l'écart entre deux ensembles de modes transverses de même indice longitudinal ou intervalle spectral transverse. Ce dernier dépendant exclusivement de la géométrie du résonateur est évalué dans la section suivante. Usuellement, on regroupe les  $2p + l + 1$  modes transverses dégénérés en ce qu'il est convenu d'appeler la *famille de modes* d'indice  $q$ , telle que:

$$q = 2p + l = \text{constante.} \quad (I.41)$$

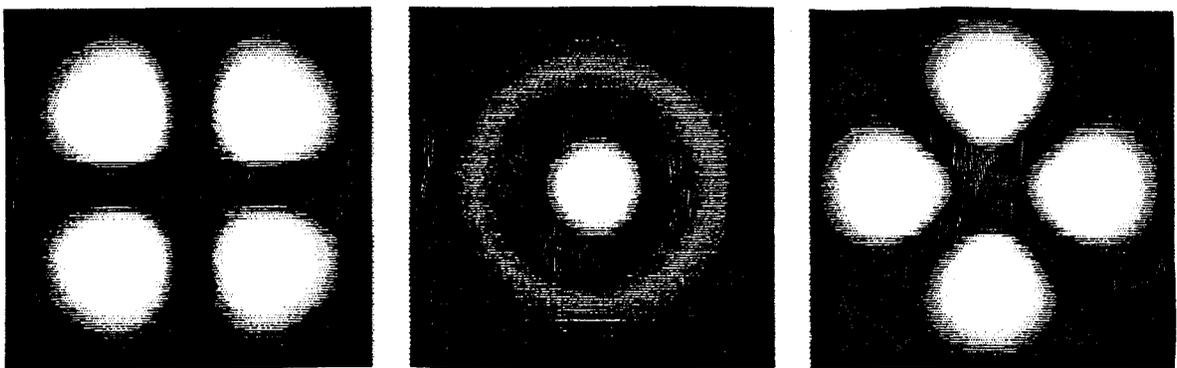


Figure I.14: Représentation de la distribution transverse de l'intensité des modes de la famille d'indice  $q = 2$  dans la base de Laguerre-Gauss: modes (a)  $A_{022}$ , (b)  $A_{10}$  et (c)  $A_{021}$

Lorsque les conditions aux bords transverses sont à symétrie rectangulaire, la base des modes d'*Hermite-Gauss*  $H_{mn}$  (fig. I.15) est plus adaptée,

$$H_{m,n}(X,Y) = \frac{w_0}{w(z)} \sqrt{\frac{m! n!}{(m+n)!}} H_m(X) H_n(Y) e^{-(X^2+Y^2)} e^{-i\Phi(z)} \quad (I.42)$$

où  $X = \frac{\sqrt{2}}{w(z)} x$  et  $Y = \frac{\sqrt{2}}{w(z)} y$  (I.43)

sont les coordonnées cartésiennes dans le plan transverse rapportées à  $w(z)$ , et  $m$  et  $n$  (entiers positifs) sont les indices du mode. La formule de Rodrigus généralisée pour les polynômes d'Hermite a la forme suivante:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) \quad (I.44)$$

Dans la base d'Hermite-Gauss, l'écart en fréquence du mode  $H_{mn}(X,Y)$ , par rapport au mode longitudinal correspondant, s'écrit:

$$\nu_{mn} = (m + n) \Delta\nu_T \quad (I.45)$$

où  $\Delta\nu_T$  a la même signification et la même valeur que dans la base de modes de Laguerre-Gauss. De la même façon, on regroupe les  $m+n+1$  modes dans une famille caractérisée par l'indice

$$q = m + n = \text{constante}. \quad (I.46)$$

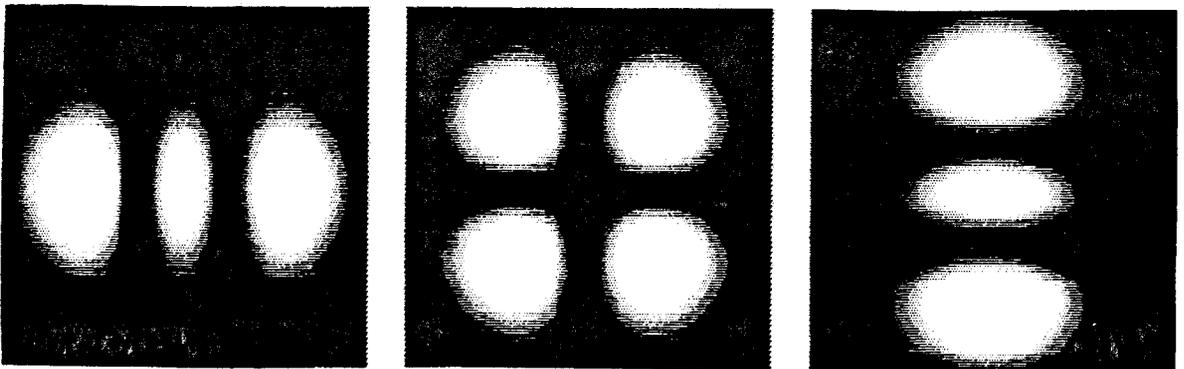


Figure I.15: Représentation de la distribution transverse de l'intensité des modes de la famille d'indice  $q = 2$  dans la base de Hermite-Gauss: modes (a)  $H_{20}$ , (b)  $H_{11}$  et (c)  $H_{02}$

En résumé, un mode propre  $U$  du résonateur est entièrement déterminé par les ensembles d'indices  $(N,p,l,j)$  ou  $(N,m,n)$ :

$$U_{Npjl} = e^{i k_z N z} A_{pjl}(r,\varphi,z) \quad (I.47)$$

$$U_{Nmn} = e^{i k_z N z} H_{mn}(x,y,z) \quad (I.48)$$

tandis que les deux indices  $N$  et  $q$  suffisent en principe à déterminer sa fréquence:

$$\nu_{N,q} = N \Delta\nu_L + q \Delta\nu_T \quad (I.49)$$

Lorsque la structure du faisceau de cavité possède la symétrie cylindrique, on utilise une troisième base de modes propres, nommée base des *doughnuts* dont les constituants ne présentent aucune structure angulaire (fig. I.16). Les modes de cette base peuvent être définis à partir des modes de la base de Laguerre-Gauss, par les relations:

$$\begin{aligned} B_{p0} &= A_{p0} \\ B_{p1} &= A_{p1} + i A_{p2} \\ B_{p2} &= A_{p1} - i A_{p2} \end{aligned} \quad (I.50)$$

En outre, les modes de cette base, caractérisés par un indice  $l$  non nul, possèdent en leur centre une singularité de phase de charge topologique égale à  $l$ .

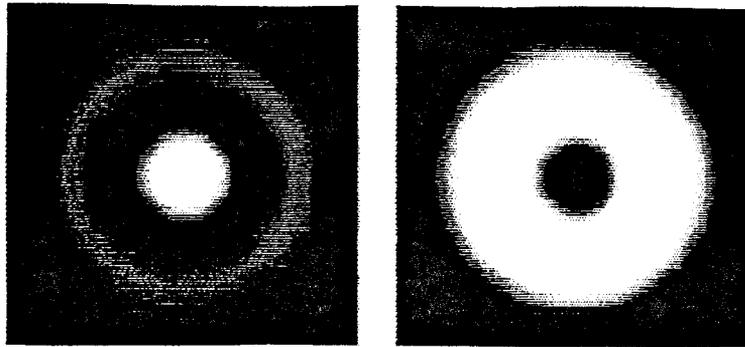


Figure I.16: Représentation de la distribution transverse de l'intensité des modes de la famille d'indice  $q = 2$  dans la base des Doughnuts: modes (a)  $B_{10}$  et (b)  $B_{021}$

Il apparaît que le spectre et la dégénérescence des modes de ces trois bases sont identiques pour une cavité idéale. La complétude de ces bases permet d'exprimer n'importe quel mode d'une base comme combinaison linéaire de modes d'une autre base. Expérimentalement, le choix de la base des modes propres n'a rien de trivial et selon la structure transverse du faisceau engendré dans la cavité nous utilisons indifféremment les deux bases ou un mélange adapté de celles-ci. De plus, un système réel possède souvent une symétrie imparfaite, des levées de dégénérescence entre les modes d'une même famille surgissent et ne sont pas équivalentes d'une base à l'autre.

#### I.2.2.2 Grandeurs caractéristiques de la géométrie du résonateur.

Dans les expressions analytiques des modes propres (I.36) et (I.43), il apparaît les fonctions  $w(z)$  et  $R(z)$  qui sont des facteurs d'échelle introduit par la géométrie du résonateur. Dans les expériences, nous utilisons un

résonateur en anneau de longueur  $L_r$  comprenant, outre des miroirs plans, un miroir sphérique de rayon de courbure  $R$  pour assurer la stabilité géométrique du résonateur. On en déduit la dépendance longitudinale de  $w(z)$  et de  $R(z)$ :

$$w^2(z) = w_0^2 \left\{ 1 + \frac{\left[ \frac{2z}{L'_r} - 1 \right]^2}{\frac{2R}{L'_r} - 1} \right\} \quad (\text{I.51})$$

$$R(z) = \frac{R - 2z \left( 1 - \frac{z}{L'_r} \right)}{\frac{2z}{L'_r} - 1} \quad (\text{I.52})$$

Avec  $w_0^2 = w^2\left(\frac{L'_r}{2}\right) = \frac{\lambda}{\pi} \frac{L'_r}{2} \sqrt{\frac{2R}{L'_r} - 1}$  (I.53)

dans laquelle l'origine des abscisses est fixée au centre du miroir sphérique.

Dans le cadre de l'étude des structures fortement multimode,  $w(z)$  apparaît comme une unité de mesure commode dans le plan transverse pour quantifier le nombre de degrés de liberté du résonateur. Le *nombre de Fresnel*  $\mathcal{N}$  est défini comme la valeur minimale, sur l'axe optique, du rapport entre la section transverse  $\Sigma$  imposée par les éléments de la cavité et l'aire  $\pi w(z)^2$  du mode gaussien à cet endroit:

$$\mathcal{N} = \left( \frac{\Sigma}{\pi w^2} \right)_{\text{minimum}} \quad (\text{I.54})$$

En ce qui concerne la dimension longitudinale, l'unité de longueur correspondant aux phénomènes de diffraction est la longueur de Rayleigh  $L_R$  qui est reliée au rayon de pincement  $w_0$ , par la relation suivante (L. Tarassov [1985]):

$$L_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad (\text{I.55})$$

Les longueurs  $L_r$  du résonateur et  $L_c$  du cristal constituent deux autres grandeurs caractéristiques du dispositif.

En ce qui concerne l'aspect fréquentiel, toutes les grandeurs caractérisant la géométrie du résonateur sont rapportées à l'intervalle spectral longitudinal  $\Delta\nu_L$ :

$$\Delta\nu_L = \frac{c}{L'_r} \quad (\text{I.56})$$

Connaissant  $\Delta\nu_L$ , nous montrons que ces deux grandeurs suffisent à déterminer le spectre du résonateur. La répartition des familles transverses entre deux modes longitudinaux est fixée par  $R_v$  qui est défini par:

$$\Delta\nu_T = R_v \Delta\nu_L \quad (\text{I.57})$$

Ce rapport est relié aux paramètres géométriques de la cavité par la relation:

$$R_v = \frac{1}{\pi} \arccos \left[ \sqrt{1 - \frac{L'_r}{2R}} \right] \quad (\text{I.58})$$

Néanmoins, sur l'axe des fréquences, on observe souvent plus que  $R_V^{-1}$  familles de modes transverses sur un intervalle spectral longitudinal  $\Delta\nu_L$ . En effet, à ces familles s'ajoutent celles d'indice  $q$  supérieur à  $R_V^{-1}$ , apparentées aux modes longitudinaux d'indice inférieur à  $N$ .

Pour comprendre l'influence du paramètre  $R_V$ , nous considérons deux exemples. Dans une cavité constituée uniquement de miroirs plans,  $R_V = 0$  et tous les modes transverses de même indice longitudinal sont dégénérés. L'autre exemple est la cavité semi-confocale ( $R = 2 L'_T$ ) où  $R_V = 0,5$ . Sur un intervalle spectral libre, les familles de modes se répartissent en deux groupes. Les familles d'indice  $q$  pair sont dégénérées avec le mode longitudinal tandis que le groupe des familles d'indice  $q$  impair est décalé d'un demi-intervalle spectral longitudinal. En modifiant les paramètres de la cavité, toutes les valeurs de  $R_V$  comprises entre 0 et 0,5 sont accessibles, tout en conservant la stabilité géométrique.

La finesse  $F$  de la cavité caractérise la largeur à mi-hauteur  $\Delta\nu_C$  d'un pic de résonance:

$$F = \frac{\Delta\nu_C}{\Delta\nu_L} \quad (I.59)$$

Cela signifie que  $F$  familles de modes transverses peuvent, au plus, être distinguées entre deux modes longitudinaux, à mi-hauteur des pics de résonance. Par ailleurs, la finesse est déduite des pertes  $P$  de la cavité par la relation (L. Tarassov [1985]):

$$F = \frac{\pi \sqrt{1-P}}{P} \quad (I.60)$$

Ces différentes grandeurs délimitent l'influence d'une cavité idéale sur la dynamique spatio-temporelle et permettent donc d'adapter la géométrie du résonateur de façon à faire ressortir les phénomènes physiques recherchés. Considérons deux exemples réalistes.

i) On veut étudier la dynamique au sein de la famille d'indice  $q = 3$ . Il faut d'abord s'arranger pour que cette famille soit résonnante puis choisir  $R_V$  proche de 4 afin d'optimiser l'intervalle spectral transverse.

ii) Si, à l'opposé, on s'intéresse à une situation fortement multimode, il faut que la courbe de gain se situe à un recouvrement entre un grand nombre de pics de résonance de famille de modes transverses. Pour ce faire, on construit une cavité constituée uniquement de miroirs de grand rayon de courbure car toutes les familles de modes transverses de même indice longitudinal  $N$  y sont dégénérées ( $R_V \cong 0$ ).

### I.2.3: Influence de la parité du nombre de miroirs de cavité

Comme nous venons de le mentionner dans la section précédente, les phénomènes de diffraction suffisent à déterminer les modes propres et les fréquences propres du résonateur. Dans cette section, nous montrons que la réflexion spéculaire modifie le spectre du résonateur selon la symétrie transverse de ses modes propres. La parité du nombre de miroirs constituant la cavité en est un exemple très important car nous verrons qu'elle induit des changements drastiques dans les régimes transverse susceptibles d'être observés.

Dans le cadre de la dynamique spatio-temporelle, lorsqu'on parle de brisure de symétrie, on sous-entend que le système n'est plus invariant vis-à-vis du groupe de symétrie  $O(2)$  et ne possède donc plus la symétrie cylindrique. Par exemple, si un déséquilibre est introduit entre les deux directions transverses, les modes de la base d'Hermite-Gauss apparaissent au lieu des modes de la base de Laguerre-Gauss qui ne sont plus des solutions du problème.

Bien que leurs propriétés de symétrie transverses restent inchangées, des cavités constituées d'un nombre pair ou impair de miroirs ne possèdent pas la même symétrie globale. En effet, les modes appartenant à une même famille transverse peuvent être résonnants pour des longueurs  $L_r$  de la cavité très différentes ce qui conduit à une simplification notable de la dynamique transverse, tout en conservant la symétrie cylindrique du dispositif.

Il est pratique d'attacher, à la cavité, le système d'axes orthonormés suivant:  $z$  est l'axe de la cavité,  $x$  et  $y$  appartiennent au plan transverse avec  $x$  dans le plan de la cavité (fig. I.17). Les symétries du plan transverse par rapport aux axes  $x$  et  $y$  sont respectivement notées  $\delta_x$  et  $\delta_y$ .

$$\begin{aligned}\delta_x A &= \kappa_x A \\ \delta_y A &= \kappa_y A\end{aligned}\tag{I.61}$$

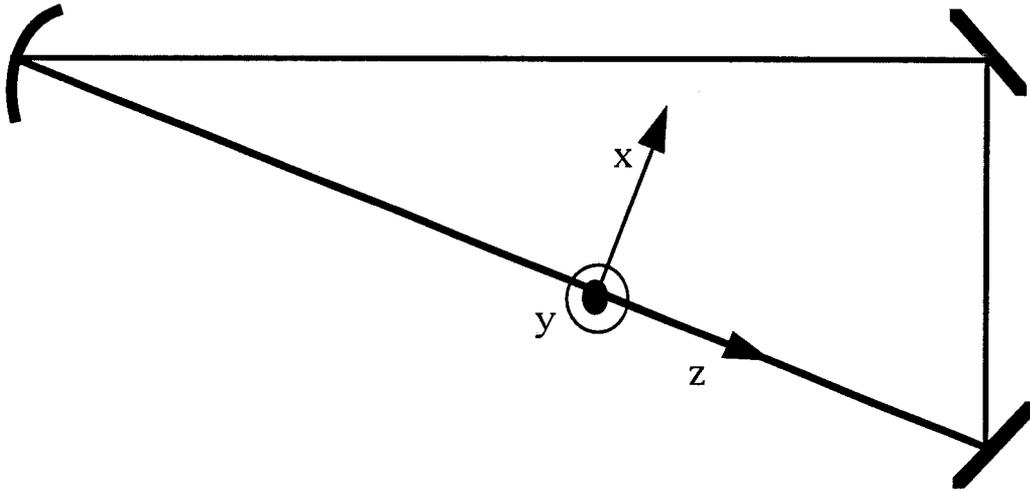


Figure I.17: Description du référentiel attaché au résonateur

Si un mode A est symétrique ( $\kappa = 1$ ) (respectivement anti-symétrique ( $\kappa = -1$ )) par rapport à l'axe x ou y, on parle de mode  $\delta_x$  ou  $\delta_y$  (respectivement de mode anti- $\delta_x$  ou anti- $\delta_y$ ). D'après les expressions (I.36), (I.43) et (I.50), tous les modes propres de la cavité sont soit symétriques, soit anti-symétriques par rapport à chacun des deux axes x et y. Par exemple, le mode  $H_{10}$  est un mode  $\delta_x$  et anti- $\delta_y$ , tandis que  $H_{01}$  est un mode  $\delta_y$  et anti- $\delta_x$ , car dans les deux cas, les deux taches lumineuses qui les composent évoluent en opposition de phase.

Lorsqu'un faisceau est réfléchi sur un miroir, de simples considérations géométriques montrent que dans le plan d'incidence (x,z), le faisceau réfléchi subit la transformation  $\delta_y$ :  $y \rightarrow -y$  (A. E. Siegman [1986]). Par contre, la réflexion n'induit aucune modification par rapport à l'axe x. Il en résulte des comportements très différents selon que le mode est symétrique ou anti-symétrique par rapport à l'axe y. En effet, la réflexion est sans effet sur un mode  $\delta_y$ . A l'opposé, s'il est anti- $\delta_y$ , le mode subit une inversion qui correspond à un déphasage longitudinal de  $\pi$ . Nous appelons ce déphasage *phase d'inversion*  $\phi_i$ . Quoique la phase d'inversion  $\phi_i$  apparaisse lors de la réflexion sur un miroir, il ne faut pas la confondre avec le déphasage  $\phi_r$  résultant de la réflexion à l'interface entre deux milieux d'indice de réfraction différents. En effet,  $\phi_i$  qui a une origine purement géométrique, ne peut prendre que les deux valeurs 0 ou  $\pi$  modulo  $2\pi$  et sépare les modes transverses de symétries différentes tandis que  $\phi_r$  est déterminé par les lois de Fresnel. De plus,  $\phi_r$  ne dépend pas de la structure transverse du faisceau et prend donc la même valeur pour tous les modes transverses sauf s'ils ont des polarisations ou des angles d'incidence différents.

Même si la dynamique transverse en est modifiée, le groupe de symétrie transverse de l'oscillateur reste cylindrique car  $\delta_y \in O(2)$ , et les modes des bases de Laguerre-Gauss et d'Hermite-Gauss restent des solutions du problème. Néanmoins, il apparaît naturellement deux classes d'équivalence: l'ensemble des modes possédant la symétrie  $\delta_y$  et celui des modes anti- $\delta_y$ . Aucune de ces classes d'équivalence ne constitue un sous-groupe de  $O(2)$ . Pour examiner les conséquences de cette propriété, nous considérons le cas d'une cavité formée d'un nombre impair de miroirs, dont la longueur est telle que la famille  $(N,q)$  soit résonnante. Autrement dit:

$$L'_r = \lambda (N + \Delta N + q R_v) \quad (I.62)$$

où  $\Delta N$  tient compte de la somme des déphasages liés à la propagation du mode gaussien, c'est-à-dire, la somme des  $\varphi_r$  et  $R_v$  est défini par la relation (I.54). Un mode anti- $\delta_y$  est déphasé de  $\pi$  après un tour de cavité et ne satisfait donc pas la condition de résonance précédente. Ce mode sera néanmoins résonnant si  $L'_r$  vérifie (fig. I.18a):

$$L'_r = \lambda (N + \Delta N + q R_v + \frac{1}{2}) \quad (I.63)$$

D'après la figure I.18b, dans une cavité constituée d'un nombre pair de miroirs, les modes  $\delta_y$  sont indiqués sur l'axe des fréquences par des traits pleins. Par contre, les modes anti- $\delta_y$  figurant en traits pointillés dans la figure I.18a, ne sont pas déphasés de  $\pi$  après un tour de cavité et satisfont aussi la condition de résonance (I.62) ce qui permet de retrouver la dégénérescence introduite par les phénomènes de diffraction.

En résumé, dans une cavité constituée d'un nombre impair de miroirs, les modes d'une famille sont divisés en deux sous familles, correspondant à deux longueurs de résonance distinctes, caractérisées par la symétrie du mode par rapport à l'axe  $y$ . Avec une cavité formée d'un nombre pair de miroirs ( $\varphi_i$  est toujours égale à zéro modulo  $2\pi$ ) la longueur de la cavité, pour laquelle les modes sont résonnants, est indépendante de  $\delta_y$  (fig. I.18b). Comme seuls les modes résonnants peuvent interagir, le couplage entre les modes et donc la dynamique spatio-temporelle qui en découle sont complètement différents, selon que la cavité est formée d'un nombre pair ou impair de miroirs.

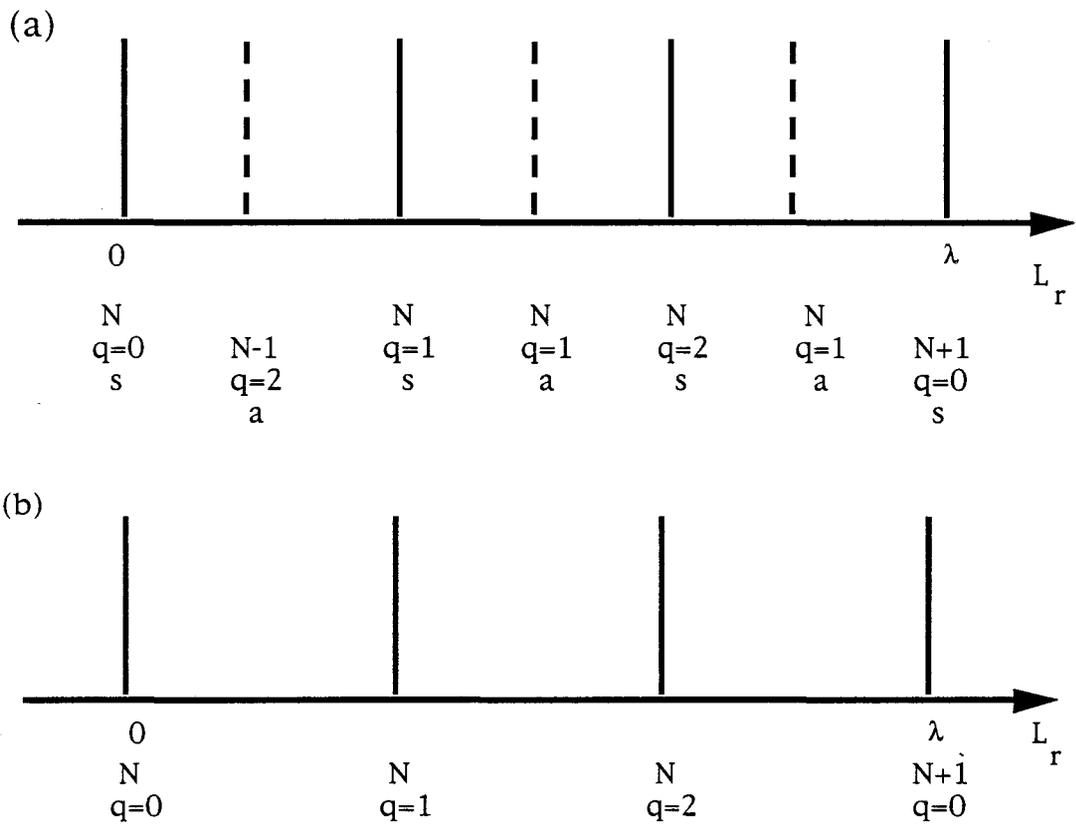


Figure I.18: Disposition théorique des longueurs de cavité résonnantes avec les modes transverses d'une cavité constituée (a) d'un nombre impair de miroirs et (b) d'un nombre pair de miroirs.

### I.3: L'OSCILLATEUR À GAIN PHOTORÉFRACTIF

Jusqu'à présent, nous avons détaillé les mécanismes microscopiques à la base de l'effet photoréfractif, les propriétés du mélange à deux ondes et l'influence des différents paramètres sur l'efficacité des transferts d'énergie de ce processus de gain. Nous avons aussi précisé le rôle du résonateur dans la dynamique spatio-temporelle du faisceau engendré par l'oscillateur à gain photoréfractif.

Dans la figure I.8, nous montrons que les transferts d'énergie entre les faisceaux de pompe et de sonde sont d'autant plus importants que le rapport  $\beta$  de leur intensité à l'entrée du cristal est grand. Lorsque le faisceau de sonde est réduit au bruit de fond ou à la lumière diffuse issue du faisceau de pompe, l'efficacité du processus de gain est donc maximale. Dès lors, on peut s'attendre à amplifier la composante de ce fond lumineux ayant la direction, la fréquence et la polarisation optimisant l'efficacité du mélange à deux ondes. De plus, si on réinjecte dans le cristal la composante amplifiée du fond lumineux, en lui conservant toutes ses propriétés, elle sera de nouveau amplifiée. A chaque tour de cavité, l'intensité du faisceau issu du fond lumineux grandit mais dans une moindre mesure car le rapport des intensités incidentes  $\beta$  décroît (fig. I.8) et le faisceau ainsi créé constitue le faisceau de cavité. Contrairement aux expériences de mélange à deux ondes, la différence de fréquence entre les faisceaux de cavité ( $I_c$ ) et de pompe ( $I_p$ ) n'est pas imposée extérieurement, mais est ajustée par l'oscillateur afin d'optimiser les transferts d'énergie.

Vu le temps de formation du réseau d'indice de réfraction, les temps caractéristiques de l'oscillateur à gain photoréfractif sont de l'ordre de la seconde ce qui implique que la largeur de la courbe de gain vaut au plus quelques Hertz.

Dans la mesure où nous sommes principalement intéressés par la caractérisation du chaos spatio-temporel, c'est à dire le chaos induit par les degrés de liberté spatiaux, nous avons choisi d'utiliser le mélange à deux ondes comme mécanisme non linéaire. En effet, on pourrait envisager des processus d'amplification fort différents comme le mélange à quatre ondes ou le mélange à deux ondes avec une orientation différente du cristal. Mais les travaux d'autres groupes montrent que le comportement d'une cavité monomode utilisant le mélange à quatre ondes présente des comportements

chaotiques (A. A. Zozulya et V. T. Tikhonchuk [1989], A. Bledowski et al [1989] et W. Krokilowski et al [1990]). Par contre, avec le mélange à deux ondes, en situation monomode, l'intensité du faisceau issu de la cavité est généralement indépendante du temps. Donc, avec ce processus d'amplification, les instabilités spatio-temporelles du faisceau de cavité résultent uniquement des dimensions spatiales via le couplage entre les modes.

"En apparence, tout cela n'a aucun sens, il est pourtant impossible que cela n'en ait pas un"

Albert Einstein

*Deuxième partie:*

*Aspects Expérimentaux*

Dans tout ce travail, nous nous intéressons aux caractéristiques des structures créées par des systèmes possédant des degrés de liberté spatiaux. Il fut montré qu'il existe des propriétés indépendantes du système physique étudié. Nous avons choisi de sonder le chaos spatio-temporel dans un oscillateur à gain photoréfractif. Pour comprendre les mécanismes à la base de ces instabilités, nous avons procédé à une étude des situations à faible nombre de degrés de liberté.

Nous présentons d'abord une description du système expérimental incluant des méthodes de stabilisation de la longueur du résonateur. Nous détaillons aussi les dispositifs de détection de la distribution transverse de l'intensité et de la phase du faisceau engendré par l'oscillateur. Ensuite, nous donnons un ordre de grandeur des facteurs d'échelle introduits par l'oscillateur à gain photoréfractif. Dans la deuxième section, nous expliquons la procédure qui nous a permis de caractériser les cristaux photoréfractifs.

Dans les trois dernières sections, nous présentons les résultats expérimentaux que nous avons obtenu. Tout d'abord, nous décrivons la dynamique transverse engendrée par un oscillateur imposant deux axes privilégiés dans le plan transverse. Ensuite, nous explicitons les différences introduites lorsque tous les axes transverses sont équivalents et détaillons l'influence des brisures de symétrie du dispositif. Finalement, nous analysons les phénomènes inhérents à l'axe des fréquences.

## II.1: DISPOSITIF EXPERIMENTAL

Cette section est consacrée à la description du dispositif expérimental. Nous présentons d'abord l'oscillateur à gain photoréfractif. Puis, les différentes techniques adoptées pour garantir une bonne stabilité à la cavité sont explicitées. Les grandeurs caractéristiques de l'oscillateur sont ensuite évaluées. Enfin, les dispositifs de détection sont détaillés.

### II.1.1: Oscillateur avec gain photoréfractif

Le dispositif expérimental est schématisé sur la figure II.1. Afin d'adapter facilement la géométrie du résonateur à la situation expérimentale recherchée, nous avons opté pour une cavité dont la stabilité est assurée par un unique miroir sphérique. En effet, ce dispositif est beaucoup plus facile à aligner que ceux constitués de plusieurs miroirs sphériques ou de lentilles. Outre le miroir sphérique, la cavité est constituée d'un miroir plan MPc et d'un séparateur de faisceau SF<sub>2</sub> qui permet d'extraire 10% du faisceau de cavité. Le choix d'un cube séparateur permet de s'affranchir des réflexions dans les lames minces à faces parallèles qui provoquent des interférences indésirables. Le miroir plan, de planéité  $\lambda/20$ , est recouvert, comme le miroir sphérique, d'un traitement MAXBRITE® RMAX (réflexion  $> 0.99$ ). Il est monté sur une céramique piézo-électrique PZT pour faire varier continûment la longueur de la cavité et mettre en résonance une famille de modes déterminée. La tension maximale d'alimentation de la céramique (1000 volts) produit une extension de 2.5  $\mu\text{m}$ , avec une précision d'environ 2.5 nm. Pour réduire l'astigmatisme, l'angle d'incidence sur le miroir sphérique MSc est limité à quelques degrés. Cela explique la forme allongée de la cavité et la disposition du cristal indiquée sur la figure II.1. Dans la plupart des situations que nous rencontrerons, MSc possède un rayon de courbure R soit de 1 m, soit de 4 m bien que parfois, il soit remplacé par un miroir plan ( $R = \infty$ ). La longueur optique  $L'_r$  du résonateur doit être inférieure à  $2 R$  pour assurer la stabilité géométrique de la cavité. A l'opposé, l'encombrement des supports d'optique ne permet pas de réduire  $L'_r$  en dessous d'environ 50 cm. Notons que cette limite inférieure nous a incité à augmenter le rayon de



d'accroître les transferts d'énergie, on applique au cristal une tension électrique statique  $E_0$  (fig. II.2) qu'on peut varier continûment entre 0 et 5000 V. Pour ne pas risquer d'endommager le cristal, l'intensité électrique qui le traverse est contrôlée en mesurant la tension aux bornes de la résistance  $R_1$  placée en série sur le cristal (fig. II.2). Un limiteur de courant fixe l'énergie maximale dans le cristal à  $100 \mu\text{J}$ . Par ailleurs, cette valeur est rarement atteinte en raison de l'apparition de décharges au sein du cristal.

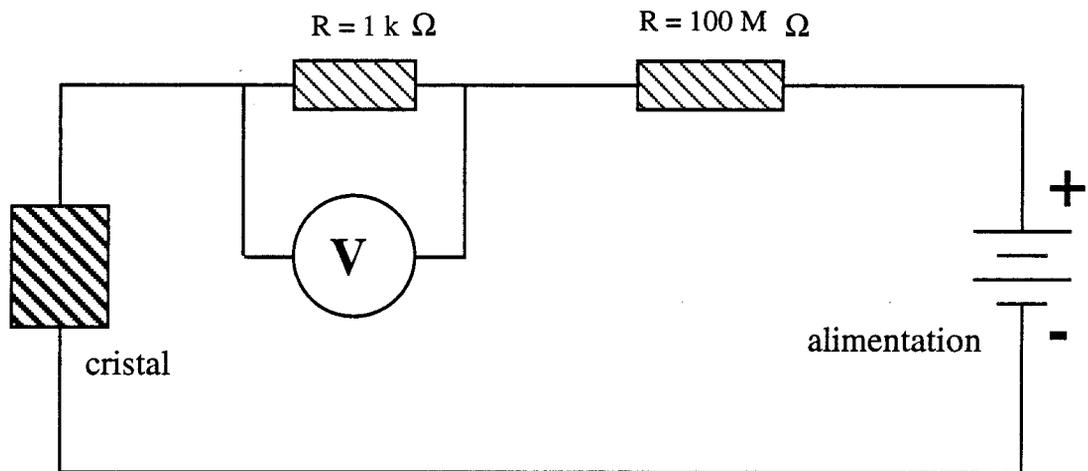


Figure II.2: Dispositif lié au champ électrique extérieur  $E_0$ .

La source lumineuse est constituée d'un laser YAG doublé, monomode, de longueur d'onde dans le vert  $\lambda_V \cong 532 \text{ nm}$ , fabriqué par la société ADLAS. Le faisceau émis a une puissance de  $85 \text{ mW}$  et un diamètre de l'ordre du millimètre. Le télescope T (fig. II.1), constitué des lentilles  $L_1$  et  $L_2$  de distance focale  $1 \text{ cm}$  et  $30 \text{ cm}$ , élargit le faisceau d'un facteur 30. De plus, un trou calibré TC de  $0.1 \text{ mm}$  de diamètre, placé dans le plan focal de  $L_1$ , permet de réduire les composantes de Fourier spatiales indésirables. Le cube séparateur  $SF_1$  divise le faisceau en deux parties d'intensités égales: le faisceau réfléchi d'une intensité de quelques  $\text{mW}/\text{cm}^2$  est utilisé pour "pomper" le cristal tandis que le faisceau transmis sert à aligner la cavité via le cube séparateur  $SF_2$ . Le diaphragme  $D_1$  permet de réduire la dimension transverse du faisceau d'alignement afin d'améliorer la précision des réglages. Le faisceau de pompe, d'un diamètre de  $3 \text{ cm}$ , illumine uniformément le cristal photoréfractif. D'après le tableau I.1, l'interfrange optimisant les transferts d'énergie dans le BGO et le BSO vaut environ  $20 \mu\text{m}$ , ce qui correspond (I.9) à un angle d'environ  $1.5^\circ$  entre les faisceaux de pompe et de cavité. En pratique, pour atteindre cet angle, il faut que le

faisceau de pompe passe tout près de SF<sub>2</sub>, situé à environ 40 cm du cristal. Pour satisfaire cette contrainte technique dans nos expériences, SF<sub>2</sub> doit être soit un cube séparateur de faisceau soit un prisme à base triangulaire. Dans les deux cas, il est possible d'aligner le faisceau de cavité près du bord du coupleur et de les effleurer avec le faisceau de pompe (fig. II.3).

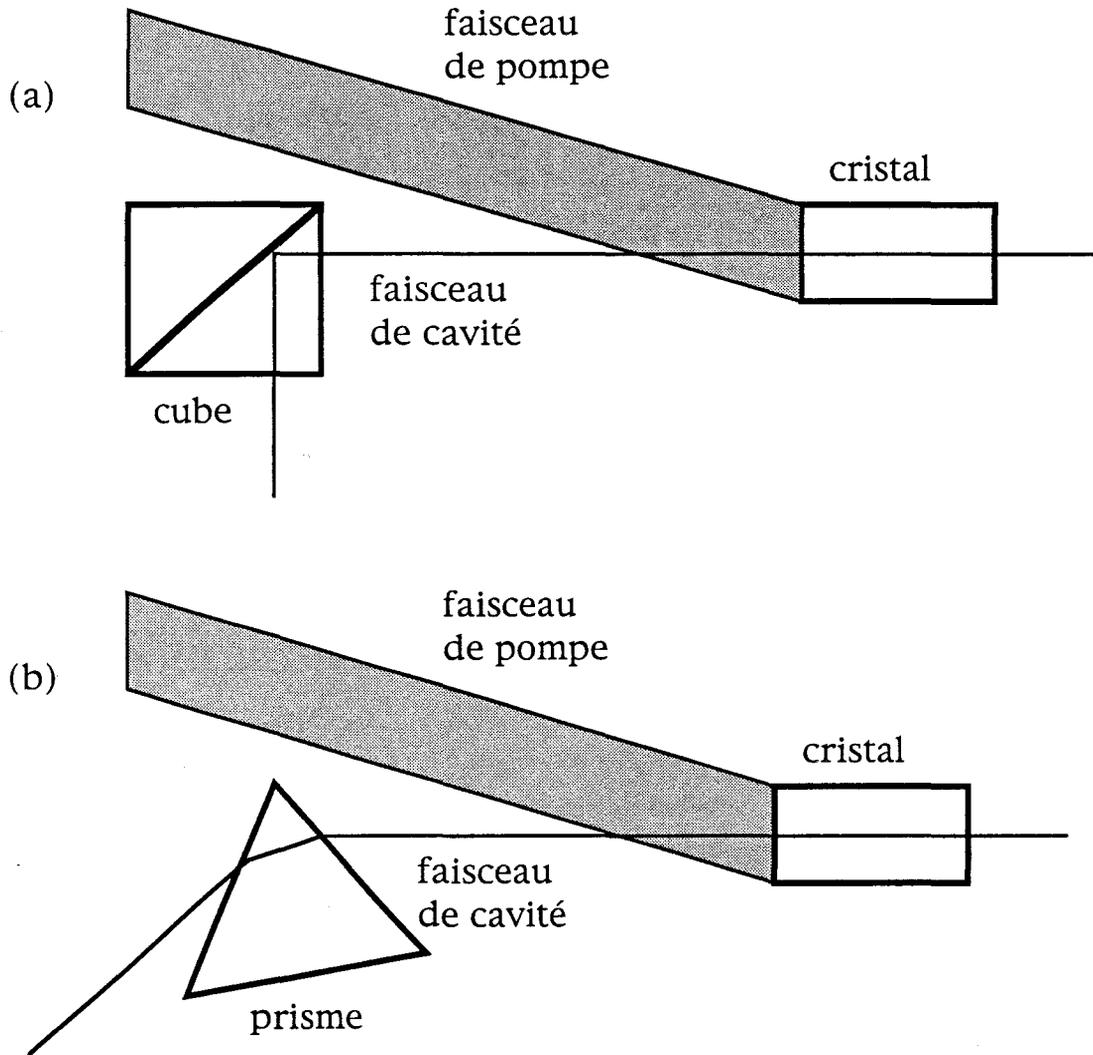


Figure II.3: Détail du montage au voisinage du coupleur (a) SF<sub>2</sub> et (b) prisme à base triangulaire.

En pratique, la géométrie de la cavité est fixée par la nécessité de minimiser l'astigmatisme du dispositif (angle d'incidence faible sur MSc), d'optimiser les transferts d'énergie ( $2\theta \cong 1.5^\circ$ ) et d'assurer la stabilité géométrique du résonateur ( $L'_r < 2R$ ). Avec le prisme à base triangulaire en silicate, le couplage de la cavité vers l'extérieur se fait par la réflexion à l'interface air-silicate. Le coefficient de réflexion  $C_r$  à l'interface de deux

milieux d'indice de réfraction  $n_1$  et  $n_2$  s'exprime de la façon suivante (G. Bruhat [1965]):

$$C_r = \left\{ \frac{n_1 \cos(\xi) - n_2 \cos(\xi')}{n_1 \cos(\xi) + n_2 \cos(\xi')} \right\}^2 \quad (\text{II.1})$$

où  $\xi$  et  $\xi'$  sont les angles d'incidence et de réfraction du faisceau de cavité sur cette interface. L'indice de réfraction du silicate et  $\xi$  valant respectivement 1.57 et  $45^\circ$ , on en déduit que le coefficient de couplage de la cavité vaut 11% avec le prisme et 10% avec le cube SF<sub>2</sub>.

### II.1.2: Stabilisation de la cavité

Les temps caractéristiques particulièrement longs des oscillateurs à gain photoréfractif nécessitent qu'un grand soin soit apporté à la stabilité du dispositif expérimental. D'autre part, les observations antérieures du groupe d'Arecchi ont montré des régimes d'alternances dont la période pouvait atteindre plusieurs minutes. Afin de les différencier d'effets induits par une dérive de la longueur du résonateur, il est nécessaire que cette dernière varie d'une quantité négligeable par rapport à la longueur d'onde sur une période de ces régimes. D'une manière générale, nous supposons qu'un régime cesse d'être transitoire dès qu'il reste observable plus d'une dizaine de fois son temps caractéristique. La stabilisation de l'oscillateur que nous avons réalisée comporte deux étapes.

La première est une stabilisation *passive* de la longueur de la cavité. Elle vise à réduire au minimum les vibrations d'origine mécanique et thermique se propageant par l'intermédiaire des supports et découlant de mouvements de convection de l'air. Pour minimiser les vibrations mécaniques, l'ensemble du dispositif expérimental est monté sur une table Newport KNS munie d'amortisseurs, et les montures des éléments optiques de la cavité sont choisies lourdes et massives. Afin de limiter les effets de la turbulence de l'air, le dispositif est protégé par une cage en PLEXIGLASS qui permet aussi d'amortir les variations intérieures de température. La plupart des expériences ont été effectuées de nuit, lorsque tous les éléments du dispositif se sont thermalisés et que les vibrations mécaniques provoquées par l'agitation diurne dans le bâtiment ont disparu.

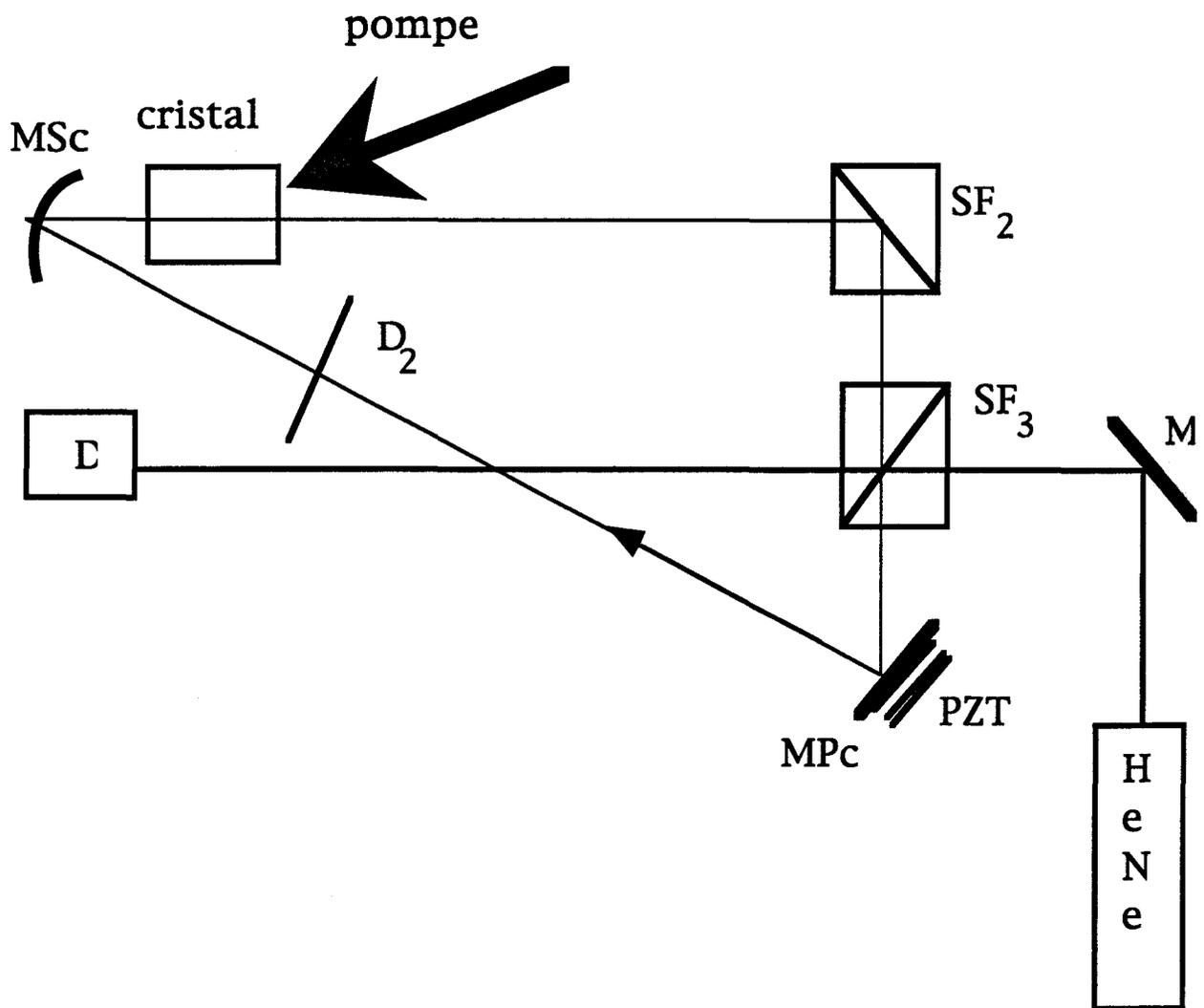


Figure II.4: Schéma de la partie optique du dispositif de stabilisation active de la longueur de la cavité.

La seconde étape consiste en une stabilisation *active* de la cavité basée sur une méthode interférométrique: un faisceau lumineux est divisé en deux parties dont l'une parcourt la cavité, Avant d'interférer avec l'autre partie. La position des franges d'interférences étant fonction de la différence de chemin optique entre les deux faisceaux, la stabilité de la figure d'interférences est liée à celle de la longueur de la cavité. L'application expérimentale de cette méthode nécessite d'introduire dans la cavité un faisceau laser de référence ne perturbant pas les expériences. Notre choix s'est porté sur un laser HeNe émettant 5 mW dans le rouge ( $\lambda_r \cong 628$  nm). La fréquence de ce laser étant suffisamment éloignée de celle du faisceau de cavité, son faisceau ne modifie pas les couplages non-linéaires au sein du cristal, compte tenu de la découpe et de l'orientation de ce dernier. Rappelons en effet que pour des dispositions particulières du cristal, des faisceaux de

longueurs d'onde très différentes peuvent interagir via l'effet photoréfractif (B. Fischer et al [1989]).

Le faisceau rouge est introduit dans la cavité à l'aide d'un cube séparateur de faisceau SF<sub>3</sub> (fig. II.4) qui réfléchit 50% dans le rouge et 5% dans le vert. Il sépare donc le faisceau rouge en deux faisceaux d'égale intensité tandis que le faisceau de cavité ne subit que 5% de pertes supplémentaires par tour de cavité. Le faisceau rouge réfléchi par SF<sub>3</sub> parcourt un tour de cavité puis interfère avec le faisceau rouge directement transmis par SF<sub>3</sub>.

L'angle entre les deux faisceaux rouges est réduit au minimum pour obtenir la phase locale de la figure d'interférence avec une précision supérieure à  $\lambda_v/20$  compte tenu de la surface sensible du détecteur (de 1 mm<sup>2</sup>). La longueur de la cavité est ensuite modulée à 130 Hz par l'intermédiaire de la céramique piézo-électrique avec une amplitude de 17.5 nm, ce qui n'influe pas sur la dynamique de l'oscillateur. Les variations du signal issu du détecteur sont appliquées à un amplificateur à détection synchrone qui corrige la tension moyenne de la céramique piézo-électrique (fig. II.5). L'efficacité de cette stabilisation est limitée par les dérives de fréquence des lasers HeNe et YAG doublé. En effet, on ne recherche pas une longueur de résonateur constante mais une résonance fixe. L'idéal serait donc de stabiliser la longueur de la cavité sur le laser YAG doublé lui-même. Cette possibilité nécessite soit de faire passer un autre faisceau vert dans le cristal et donc de modifier la dynamique de l'oscillateur soit de construire une seconde cavité utilisant les mêmes montures et dont l'axe optique est parallèle à celui de la première. Néanmoins, après 24 heures de fonctionnement, la dérive de fréquence du laser He-Ne reste inférieure à  $\lambda_r/20$  par heure.

Cette méthode permet aisément de doubler les temps de stabilité des structures transverses du faisceau de cavité par rapport à ceux obtenus en se limitant à une stabilisation passive de la longueur du résonateur.

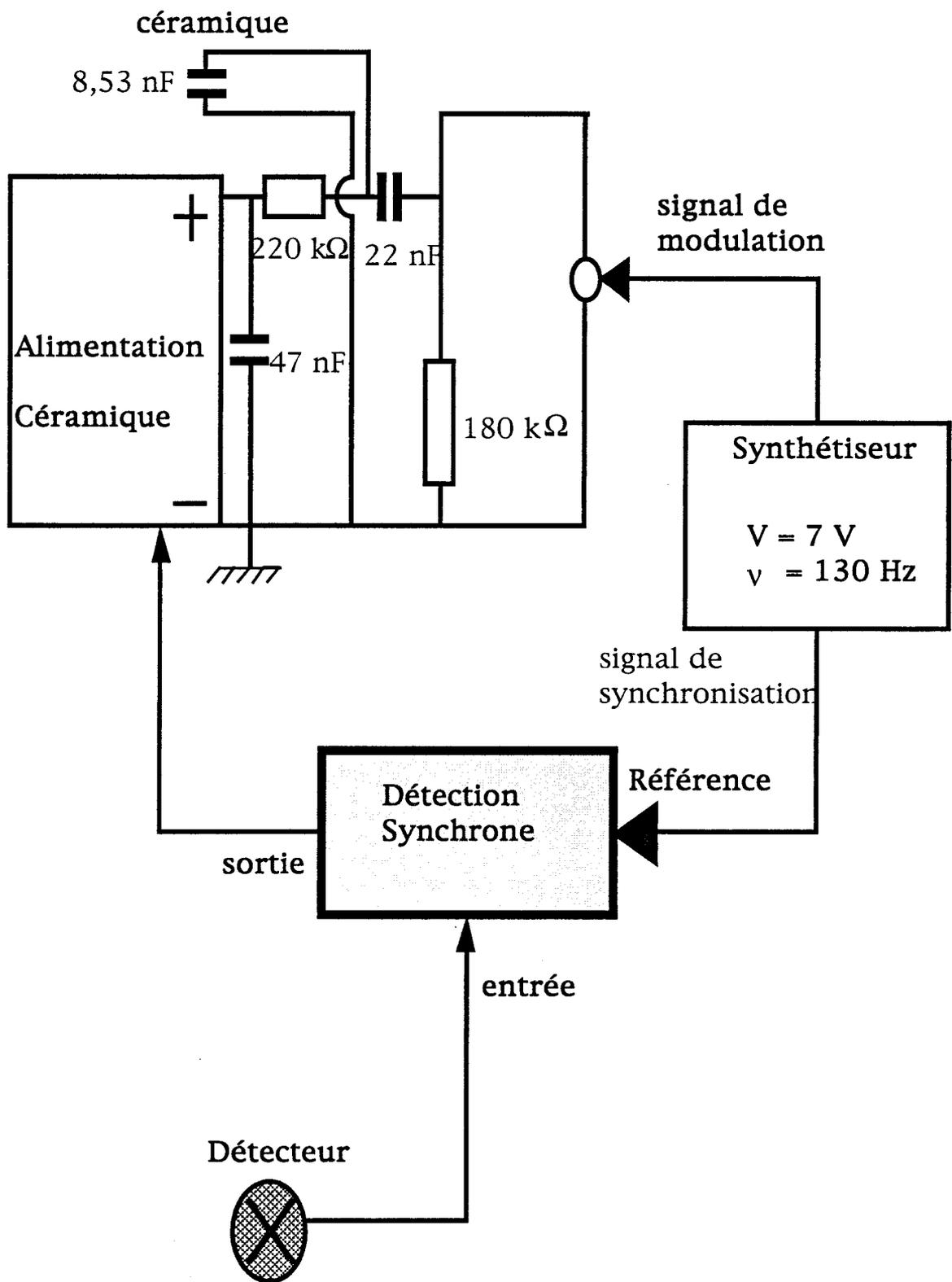


Figure II.5: Dispositif électronique de stabilisation active de la longueur de la cavité.

### II.1.3: Caractéristiques de la cavité

Dans la section I.2.2.2, nous avons défini des grandeurs qui sont évaluées ici afin de déterminer l'influence des différents mécanismes physiques. Ensuite, les causes des différents écarts à la symétrie cylindrique inhérents au système sont analysées.

#### II.1.3.1: Echelles spatiales

Le rayon de pincement du faisceau de cavité est déterminé par l'expression (I.53). Dans les configurations réalisées pour cette étude, sa valeur typique est:

$$w_0 \approx 2 \cdot 10^{-4} \text{ m} \quad (\text{II.2})$$

La section du cristal ( $l_c^2 = 25 \text{ mm}^2$ ) est l'élément le plus limitatif de l'extension du faisceau dans la cavité. L'expression I.54 permet d'estimer le nombre de  $F_1$  montre clairement que le dispositif est bien adapté à l'étude de faisceaux fortement multimodes. Cependant, le travail présenté ici se limitant à l'étude des régimes faiblement multimode, un diaphragme  $D_2$  ne modifiant pas la symétrie globalement cylindrique du dispositif, est introduit dans la cavité.  $D_2$  possède un diamètre d'ouverture  $L_D$  réglable entre 0.1 et 20 mm qui permet de faire varier continûment le nombre de Fresnel entre 0.25 et 200. Ceci revient à fixer le nombre de modes propres susceptibles d'osciller en même temps dans la cavité et de ce fait à agir sur la complexité des structures transverses du faisceau.

Nous pouvons classer les longueurs caractéristiques transverses dans l'ordre croissant suivant:

$$\Lambda < w_0 < L_D < l_c \quad (\text{II.3})$$

0.02            0.2            1            5 (mm)

où nous avons ajouté l'interfrange  $\Lambda$  du réseau d'interférences optimisant les transferts d'énergie afin d'avoir une longueur de référence inhérente au matériau.

En ce qui concerne la dimension longitudinale, la longueur du chemin optique du résonateur  $L_r$  satisfait la relation suivante:

$$L'_r = L_r + L_c (n_0 - 1). \quad (\text{II.4})$$

Elle vaut typiquement 1,6 m tandis que la longueur de Rayleigh  $L_R$  (I.55) caractérisant les phénomènes de diffraction est d'environ 0.24 m. Il apparaît donc que sur la longueur du cristal  $L_c = 1$  cm, les phénomènes de diffraction sont négligeables. Dans l'ordre croissant, nous avons successivement:

$$\begin{array}{ccccccc} L_c & < & L_R & < & L_r & & (\text{II.5}) \\ 10 & & 240 & & 1600 & & (\text{mm}) \end{array}$$

### II.1.3.2: Echelles de fréquence

Le point de vue spectral permet de comparer plus aisément plusieurs grandeurs physiques caractéristiques du dispositif, comme les largeurs des pics de résonance et de la courbe de gain. L'intervalle spectral longitudinal du résonateur (I.56) qui dépend de sa longueur est, dans notre cas, de l'ordre de:

$$\Delta\nu_L = 2 \cdot 10^8 \text{ Hz}. \quad (\text{II.6})$$

En modifiant la longueur du résonateur, il est possible de réaliser tous les types de résonateurs, depuis la situation semi-confocale jusqu'à la cavité complètement dégénérée, en faisant varier  $R_V$  entre 0 et 0.5 (voir relation I.56).

Afin de calculer la finesse de la cavité, il faut évaluer les pertes totales  $P_t$  que subit le faisceau lorsqu'il parcourt un tour de cavité. Celles-ci ont principalement trois origines distinctes:

(i) Le couplage de la cavité vers l'extérieur  $P_r$ , qui vaut environ 10%.

(ii) L'absorption de la lumière lors de la traversée du cristal: le coefficient d'absorption du BGO vaut  $0.46 \text{ cm}^{-1}$  (tab. I.1), ce qui donne pour notre cristal de 1 cm, 63% de pertes par traversé.

(iii) La réflexion sur la face d'entrée du cristal. D'après le tableau I.1, l'indice de réfraction du BGO vaut 2.54. Dans ce cas, la formule (II.1) prévoit 36% de pertes pour la réflexion sur les deux interfaces air-cristal.

Les pertes  $P_c$  induites par le cristal s'élèvent donc à 77%. L'importance de ces pertes nous a conduit à utiliser des cavités en anneau afin d'éviter que le faisceau ne traverse deux fois le cristal sur un tour de cavité. Globalement, les pertes  $P_t$  que subit le faisceau lors d'un tour de cavité valent environ 79%. On peut en conclure que notre dispositif constitue une *mauvaise cavité* dont



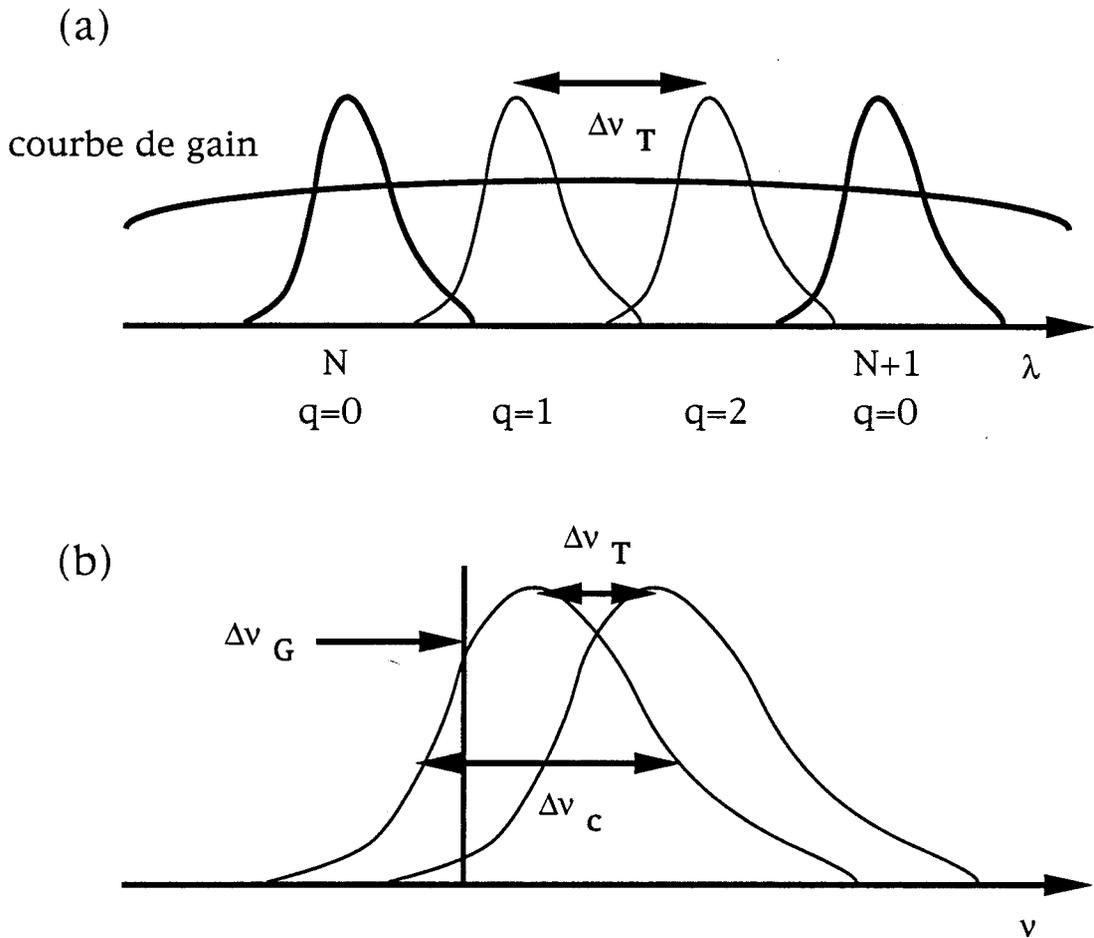


Figure II.6: Comparaison des ordres de grandeur respectifs des largeurs de la courbe de gain et de la courbe de résonance de la cavité (a) pour un laser et (b) pour un oscillateur à gain photoréfractif.

### II.1.3.3: Symétrie transverse de l'oscillateur

Dans la première partie, nous avons décrit les modes propres d'un résonateur idéal. Mais, les dispositifs expérimentaux réels présentent toujours une symétrie imparfaite qui modifie la disposition de ces modes.

Les asymétries proviennent principalement (i) des conditions aux bords, (ii) des défauts d'alignement de la cavité et (iii) de l'astigmatisme.

Comme dans tout ce travail nous nous limitons à des situations faiblement multimodes transverses, c'est essentiellement le positionnement du diaphragme  $D_2$  qui fixe les conditions aux bords. En particulier, il est nécessaire que ce dernier soit parfaitement centré sur l'axe du faisceau de cavité. Dans la pratique, aucun test rigoureux ne permet de déterminer le bon alignement du diaphragme, si ce n'est l'allure des structures transverses

du faisceau engendré. Malheureusement, les asymétries peuvent provenir également d'un mauvais alignement de la cavité. Cela nous oblige à optimiser alternativement le centrage du diaphragme et l'alignement de la cavité en essayant d'optimiser la symétrie des structures transverses. Par ailleurs, dans certaines situations, et en particulier lorsque le diaphragme est largement ouvert, l'élément limitant les dimensions transverses de la cavité est le cristal. On introduit alors une composante à symétrie rectangulaire dans les conditions aux bords qui brise la symétrie cylindrique globale.

La symétrie cylindrique est aussi brisée par l'astigmatisme qui lève les dégénérescences entre les fréquences propres du résonateur. Dans notre cavité, l'astigmatisme est principalement engendré en trois endroits différents:

(i) Lors de la traversée du cristal car, d'une part, l'angle d'incidence du faisceau sur le cristal est non nul (voir sect. I.1.2.2) et d'autre part, le cristal constitue une lame épaisse d'un centimètre et d'indice de réfraction 2.57.

(ii) A la réflexion sur le miroir sphérique avec un angle d'incidence non nul, ce qui est une source de dissymétrie entre les deux axes transverses.

(iii) Lors de la traversée du prisme à base triangulaire utilisé comme coupleur vers l'extérieur.

Le dernier point qui doit être évoqué concerne l'inscription dans le cristal d'un réseau d'interférences transverse et l'application sur le cristal d'un champ électrique pour y créer un courant de dérive. On serait tenté de penser que ces deux processus privilégient un des axes transverses du système. Cependant, les observations expérimentales n'ont pu, jusqu'à présent, montrer une telle brisure de symétrie.

En définitive, notre dispositif ne possède donc certainement pas la symétrie cylindrique, même si nous avons toujours fait en sorte que l'écart à cette symétrie reste le plus faible possible.

#### **II.1.4: Détection**

L'étude de l'évolution des structures transverses du faisceau nécessite la détection simultanée d'une grandeur représentative en tout point du plan transverse. Pour choisir le dispositif de mesure, trois caractéristiques liées aux structures spatiales jouent un rôle prépondérant : (i) la variable que l'on

veut observer, (ii) le contraste des structures et (iii) le temps caractéristique d'évolution.

(i) En optique les détecteurs disponibles ne donnent accès qu'à l'intensité du faisceau. Lorsque l'on désire avoir accès au champ électrique, on utilise parfois la méthode de détection hétérodyne détaillée dans cette section.

(ii) La seconde caractéristique résulte d'un compromis entre les dimensions des structures et la sensibilité des détecteurs. En effet, on peut toujours agrandir le faisceau pour que la surface sensible du détecteur reste petite comparée à la dimension des détails sous réserve que ce détecteur soit suffisamment sensible.

(iii) Enfin, le dispositif de mesure doit avoir un temps de réponse inférieur aux temps caractéristiques du système qui, dans notre cas, sont au minimum de l'ordre de 0.2 s (tab. I.1).

#### II.1.4.1: Détection directe

L'intensité ( $> 1 \mu\text{W}/\text{cm}^2$ ) et la longueur d'onde ( $\lambda_v = 532 \text{ nm}$ ) du faisceau de cavité, ainsi que les temps de réponse du dispositif, permettent d'enregistrer l'évolution temporelle du signal issu de l'oscillateur à l'aide d'un détecteur photovoltaïque en silicium relié à un oscilloscope. Ce dernier est connecté à un ordinateur afin de permettre une analyse numérique du signal. Selon que l'on s'intéresse à l'intensité totale du faisceau ou au contraire, à l'intensité locale, un jeu de lentilles permet de focaliser ou d'élargir le faisceau à détecter.

Néanmoins, dans la plupart des cas, on s'intéresse à la structure transverse du faisceau. Les temps de réponse très longs permettent d'utiliser un équipement vidéo standard: une caméra CCD noir et blanc de marque COHU de résolution 699x580 pixels, de grande sensibilité (0,3 lux) et possédant une importante dynamique (56 dB). Des atténuateurs sont placés sur le trajet du faisceau pour ajuster l'intensité incidente sur l'élément sensible de la caméra et utiliser au maximum sa dynamique. Nous avons principalement utilisé des atténuateurs par absorption (SCHOTT) afin de nous affranchir des phénomènes d'interférences engendrés dans les atténuateurs par réflexion. Pour la même raison, nous avons ôté la fenêtre de protection de la matrice CCD.

La caméra est reliée à un ordinateur via une carte vidéo CYCLOPE qui digitalise les images avec une résolution de 512x512 pixels et une dynamique de 256 niveaux de gris. Comme chaque image représente 256 ko

d'information, les dispositifs informatiques traditionnels ne permettent pas d'en stocker d'importantes quantités. A titre d'exemple, un disque dur de 110 Mo ne peut contenir que 420 images, représentant une séquence d'enregistrement de 17 secondes, ce qui s'avère particulièrement court pour l'analyse de la dynamique transverse. Nous avons donc stocké les images de façon analogique à l'aide d'un magnétoscope S-VHS PANASONIC (référence AG 7355) possédant une résolution d'environ 400 lignes. Ce magnétoscope, doté d'un système de numérotation absolue des images (TIMECODE), est directement géré par un ordinateur via une interface RS-232.

Les fichiers enregistrés sont traités et analysés à l'aide du logiciel de traitement d'images ESILAB développé par la société DESI. La transparence totale de ce logiciel écrit en PASCAL nous permet d'en utiliser les procédures afin d'adapter le traitement des images. Comme exemples de traitements couramment utilisés, citons le zoom, le seuillage des images, l'étiquetage des zones lumineuses du faisceau et l'histogramme des niveaux de gris.

#### II.1.4.2: Détection hétérodyne

La recherche des singularités de phases nécessite de suivre l'évolution temporelle du champ électrique du faisceau de cavité plutôt que celle de son intensité. Une détection hétérodyne a donc été réalisée en utilisant comme référence le faisceau du laser de pompe. Le dispositif expérimental de ce détecteur est décrit dans la figure II.7.

La visibilité de la figure d'interférences est optimisée grâce aux atténuateurs A. L'angle  $\zeta$  entre les faisceaux de référence et de cavité permet de contrôler l'interfrange. Il est optimisé de façon à adapter l'interfrange à la résolution de la matrice CCD. Cette méthode ne fournissant aucune information dans la direction parallèle aux lignes équiphase, l'orientation de celles-ci est choisie selon le type de structure étudiée. Globalement, la visibilité des franges d'interférence permet une bonne estimation du profil transverse de l'intensité du faisceau et leurs positions relatives fournissent le profil transverse de la phase du faisceau.

La vitesse de défilement des franges nous renseigne sur la différence de fréquence entre les faisceaux de cavité et de pompe ( $\cong 1$  Hz). L'évolution temporelle de ces figures d'interférences fournit donc des renseignements précieux tant sur la dynamique spatio-temporelle du système que sur la fréquence du faisceau de cavité. La figure II.8 donne un exemple d'image dans un cas générique.

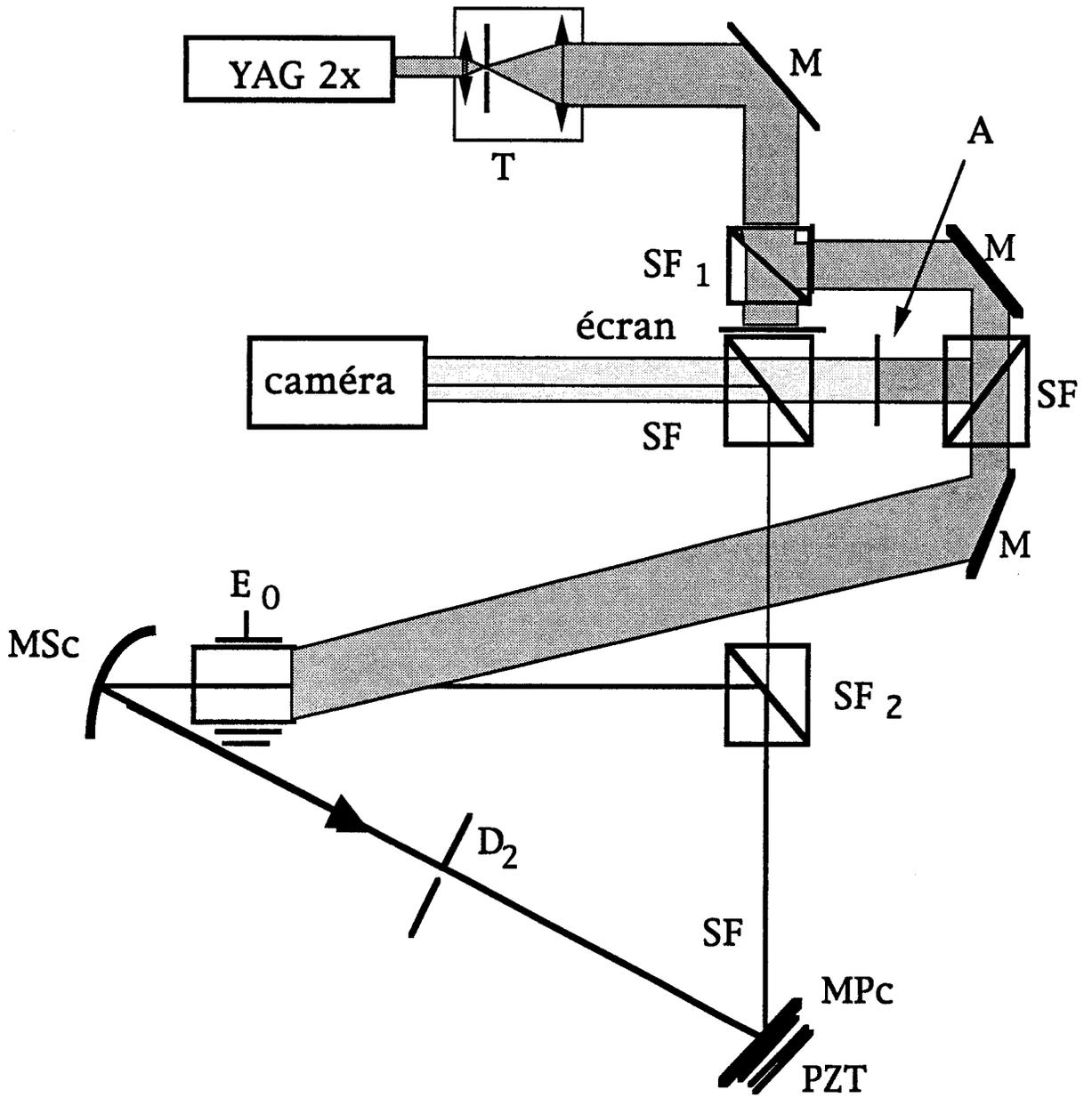


Figure II.7: Dispositif de détection hétérodyne.

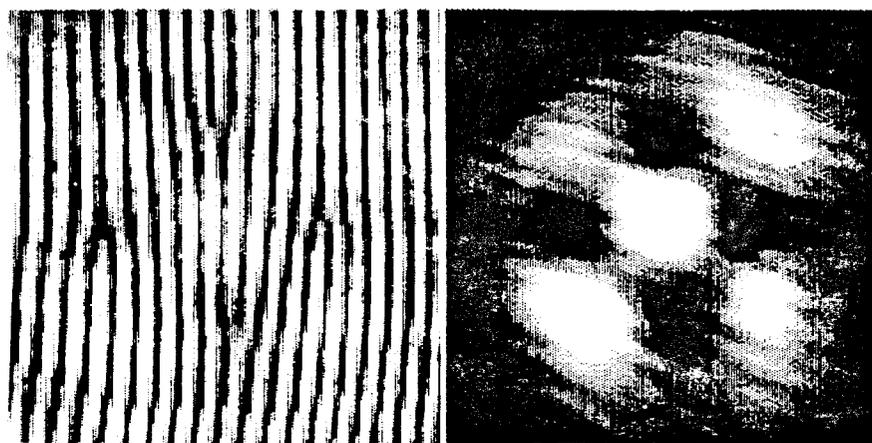


Figure II.8: Distribution transverse (a) en détection hétérodyne et (b) de l'intensité du faisceau observé.

## II.2: METHODE DE CARACTERISATION DES CRISTAUX PHOTOREFRACTIFS

Cette section est consacrée à la description d'une méthode de caractérisation des cristaux. Cette étape s'est révélée indispensable pour évaluer le gain des cristaux livrés non testés avant leur utilisation éventuelle en cavité. La méthode décrite ci-dessous est très largement inspirée de celle utilisée dans le service de J. P. Huignard par la société Thomson LCR.

Après la description du dispositif expérimental, un procédé permettant de repérer simplement les axes du cristal est présenté. Ensuite, la méthode d'évaluation du gain est détaillée et les caractéristiques de quelques cristaux sont résumées.

### II.2.1: Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est schématisé à la figure II.9. Les faisceaux transmis et réfléchi par SF<sub>1</sub> servent respectivement de sonde et de pompe. Le miroir M<sub>1</sub> est monté sur une céramique piézo-électrique qui permet, par effet Doppler, de décaler légèrement la fréquence du faisceau de sonde. Cela se traduit par un mouvement uniforme du réseau d'interférences à la vitesse:

$$v = \frac{\Lambda \Delta\omega}{2\pi} = \frac{2\chi U_m \cos(\eta)}{\lambda T} \quad (\text{II.8})$$

où  $\chi = 2.5 \cdot 10^{-9}$  m/V est l'élongation de la céramique,  $U_m$  la tension maximale de la rampe appliquée,  $T$  sa période et  $\eta$  l'angle d'incidence du faisceau sur le miroir.

Des atténuateurs A placés sur le trajet du faisceau de sonde permettent de modifier le rapport  $\beta$  des intensités incidentes. L'intensité du faisceau de sonde est mesurée à la sortie du cristal à l'aide d'une diode au silicium. Lorsque l'angle  $\theta$  entre les deux faisceaux incidents est petit, il faut éloigner le détecteur du cristal afin de séparer le faisceau de sonde du faisceau de pompe, tandis qu'un diaphragme disposé juste devant le détecteur filtre la majeure partie de la lumière de pompe diffusée par le cristal.

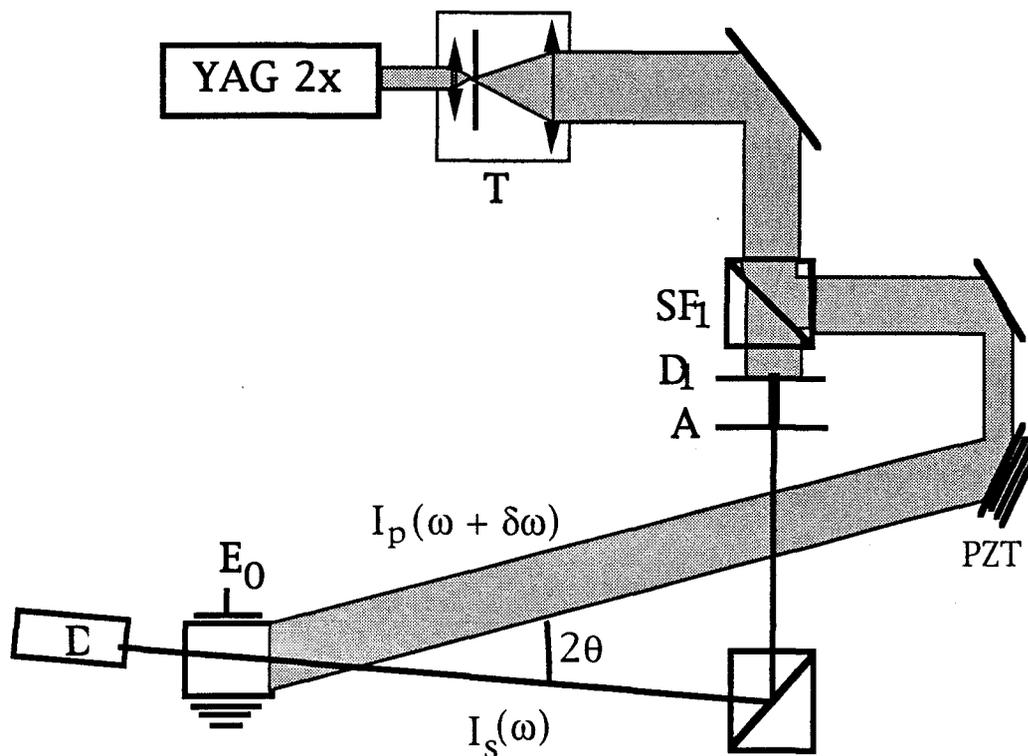


Figure II.9: Dispositif du mélange à deux ondes.

### II.2.2: Repérage des faces

Une partie des cristaux utilisés nous a été aimablement prêtée par J. P. Huignard (Thomson CSF). Ils proviennent des sociétés PRAME Aérospatiale (Bordeaux) et Crystal Technology (Californie). Nous avons également testé des cristaux fournis directement par la société R&G (Lituanie). Quelle que soit l'origine du cristal, seules les propriétés cristallographiques sont précisées par le fournisseur et les faces d'entrée-sortie  $[1,-1,0]$  ont un poli optique qui les rend immédiatement repérables.

Pour déterminer sur quelles faces doit être appliqué le champ extérieur  $E_0$ , on procède comme suit:

- Dans un premier temps, l'angle  $\theta$  est ajusté à environ  $15^\circ$  et  $\beta$  est choisi de l'ordre de 250.
- Le cristal est placé sur son support et illuminé par une des faces  $[1,-1,0]$ .

- L'intensité de la sonde  $I_s$  est mesurée successivement en l'absence  $I_s(I_p=0)$  et en présence  $I_s(I_p>0)$  du champ de pompe.

- Le gain  $\Gamma$  est déduit compte tenu de sa définition:

$$\Gamma = \frac{I_s(I_p>0)}{I_s(I_p=0)} \quad (\text{II.9})$$

Parmi les quatre orientations possibles du cristal, une seule permet de d'obtenir un gain  $\Gamma$  inférieur à un correspondant à l'existence de transferts d'énergie du faisceau de sonde vers celui de pompe. Pour obtenir la disposition optimisant les transferts d'énergie du faisceau de pompe vers celui de sonde, il suffit de tourner le cristal d'un demi-tour.

De toute façon, il est conseillé d'essayer les quatre possibilités afin de s'affranchir de toute incertitude concernant les faces sur lesquelles il faut appliquer le champ électrique extérieur  $E_0$ .

On étend ensuite sur les faces où sera appliqué le champ électrique, une fine couche de laque d'argent. Pour éviter les effets de pointe, il est impératif que la couche de laque soit uniforme, que ses bords soient réguliers et ses coins arrondis (fig. II.10).

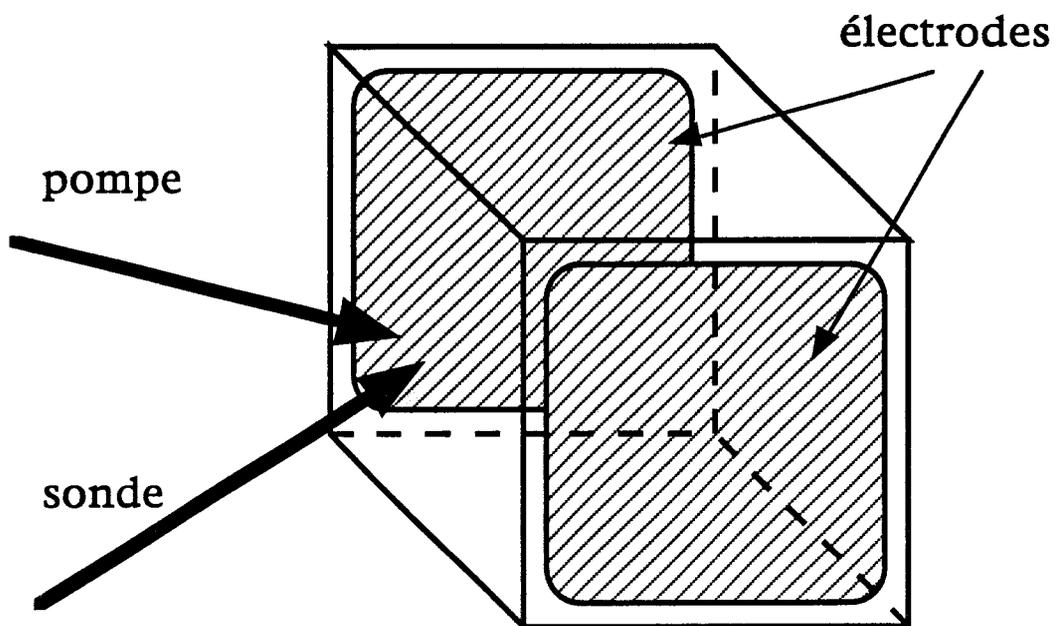


Figure II.10: Repérage des faces du cristal photoréfractif.

### II.2.3: Mesure du gain optique

L'orientation des axes du cristal étant déterminée, le gain optimal peut être mesuré en réduisant l'angle  $2\theta$  à environ  $1.5^\circ$  si on applique au cristal un champ électrique d'environ 9 kV/cm. Un décalage  $\delta\omega$  entre les fréquences des deux faisceaux est introduit pour compenser le déphasage entre les réseaux d'interférences et d'indice de réfraction induit par le champ électrique. Pour évaluer l'efficacité des transferts d'énergie, on procède comme suit.

1) On évalue l'intensité  $I_b$  des "bruits optiques", en mesurant de l'intensité lumineuse en l'absence de faisceau de sonde mais en présence du faisceau de pompe.

2) On mesure l'intensité du faisceau de sonde lorsqu'on obture le faisceau de pompe.

3) On déduit  $I_s(I_p > 0)$  en mesurant l'intensité du faisceau de sonde en présence du faisceau de pompe, à laquelle on retranche  $I_b$ .

4) On évalue le gain optique  $\Gamma$  en faisant le rapport entre les intensités évaluées aux points 3) et 2).

Le tableau II.1 indique les gains des cristaux de BGO et de BSO possédant les propriétés requises pour leur utilisation dans un oscillateur. Tous les paramètres non repris dans le tableau sont choisis pour optimiser le gain  $\Gamma$ .

Tableau II.1: Représentation des gains de quelques cristaux de BGO et de BSO. Tous les paramètres non repris sont choisis pour optimiser le gain  $\Gamma$ .

cristal n°	$E_0$ (kV/cm)	$\Gamma$
1	8,33	2,6
2	8,57	1,3
3	8,75	12,9
4	8,57	1,7
5	6	12,1
6	6	3,5

## II.3: DYNAMIQUE SPATIO-TEMPORELLE AVEC UN REFERENTIEL TRANSVERSE FIXE

Dans cette section, nous décrivons les régimes transverses du faisceau engendré par une cavité constituée d'un nombre impair de miroirs. Rappelons que ce type de résonateur conserve la symétrie transverse  $O(2)$  mais que les conditions aux bords longitudinales permettent de définir un référentiel transverse fixe. En effet, les modes sont groupés en fonction de leur symétrie par rapport à l'axe  $y$  (voir section I.2.3), cet axe est donc naturellement un axe de référence dans le plan transverse même si la symétrie du dispositif est idéale.

Afin de comprendre les différents mécanismes qui régissent la dynamique spatio-temporelle, nous nous restreignons volontairement à l'étude de l'oscillateur à gain photoréfractif possédant un faible nombre de degrés de liberté transverses. Le nombre de Fresnel étant alors petit, une analyse modale est particulièrement bien adaptée à la description des régimes observés. Dans cette décomposition modale, la condition sur le nombre de Fresnel se traduit par la limitation des modes propres susceptibles d'osciller à ceux dont l'indice  $q$  de la famille est inférieur à une valeur limite  $q_c$ .

Dans la première sous-section, nous présentons le diagramme des phases de la structure transverse du faisceau de cavité en fonction de la longueur  $L_r$  du résonateur et du champ électrique  $E_0$  appliqué au cristal. Dans la deuxième sous-section, nous décrivons et analysons les régimes observés au sein de chaque ensemble de modes propres dégénérés. La troisième est consacrée à la description des régimes transverses impliquant des modes propres de deux familles.

### II.3.1: Diagramme des phases

Afin d'obtenir une vue globale du comportement de l'oscillateur à gain photoréfractif, nous avons réalisé un diagramme des phases de la structure du faisceau intracavité en fonction de la longueur du résonateur et de la

tension appliquée au cristal. Le choix de ces deux paramètres de contrôle s'explique par le fait qu'ils semblent avoir davantage d'influence sur la dynamique de l'oscillateur à gain photoréfractif que les autres paramètres accessibles expérimentalement. En particulier, nous avons observé que des modifications de l'intensité du faisceau de pompe induisent uniquement un changement du temps de formation du réseau d'indice de réfraction.

Le diagramme des phases représenté à la figure II.11a est obtenu avec une cavité longue de 1.8 m ce qui correspond à  $\Delta\nu_L = 1.66 \cdot 10^8$  Hz et  $\Delta\nu_T = 6.6 \cdot 10^7$  Hz. Il a été obtenu avec un diaphragme qui fixe  $q_c$  à 4 et en faisant varier régulièrement la longueur  $L_r$  du résonateur à vitesse constante de trois longueurs d'onde  $\lambda_v$  en 90 minutes. Cette vitesse est petite par rapport aux temps de réaction de l'oscillateur, mais suffisamment grande pour que les dérives de  $L_r$  et de la fréquence du laser de pompe restent faibles devant  $\pi t$  la durée de l'expérience. Afin de détecter une éventuelle bistabilité entre les différents régimes transverses,  $L_r$  varie dans le sens croissant puis dans le sens décroissant. Parallèlement, à la fin de chaque cycle de variation de la longueur du résonateur, le champ extérieur  $E_0$  est brusquement incrémenté de 500 V/cm. Par souci de lisibilité, l'axe des abscisses (fig. II.11a) est limité à une variation d'une longueur d'onde. Pour éliminer l'effet des dérives thermiques survenant au cours de l'enregistrement, les familles d'indice  $q = 0$  sont arbitrairement placées à l'origine. Dans chaque zone, les modes qui oscillent sont représentés par un l'indice  $q$  de leur famille, les lettres s ou a indiquent si les modes sont symétriques où antisymétriques par rapport à l'axe y. Les zones hachurées désignent les régions où aucun mode n'oscille. La figure II.11b représente la disposition théorique des ensembles de modes de la cavité passive. Le résonateur étant constitué de trois miroirs, les conditions de résonance des modes antisymétriques par rapport à l'axe y sont déplacées de  $\lambda/2$  (voir section I.2.3).

Le groupe d'Arecchi (F. T. Arecchi [1991]) a observé une alternance périodique de modes transverses lorsque l'on ne fait varier aucun paramètre. Néanmoins, ce diagramme des phases montre que dans notre dispositif seul les modes de fréquence passive la plus proche de la fréquence de résonance du résonateur d'oscillent.

Dès lors, pour observer un régime impliquant les modes d'une famille choisie, il faut se placer à une longueur de cavité résonnante avec cette famille. De même, pour les régimes inter-famille, il faut que la longueur de la cavité soit résonnante simultanément avec les deux familles qui nous intéressent.

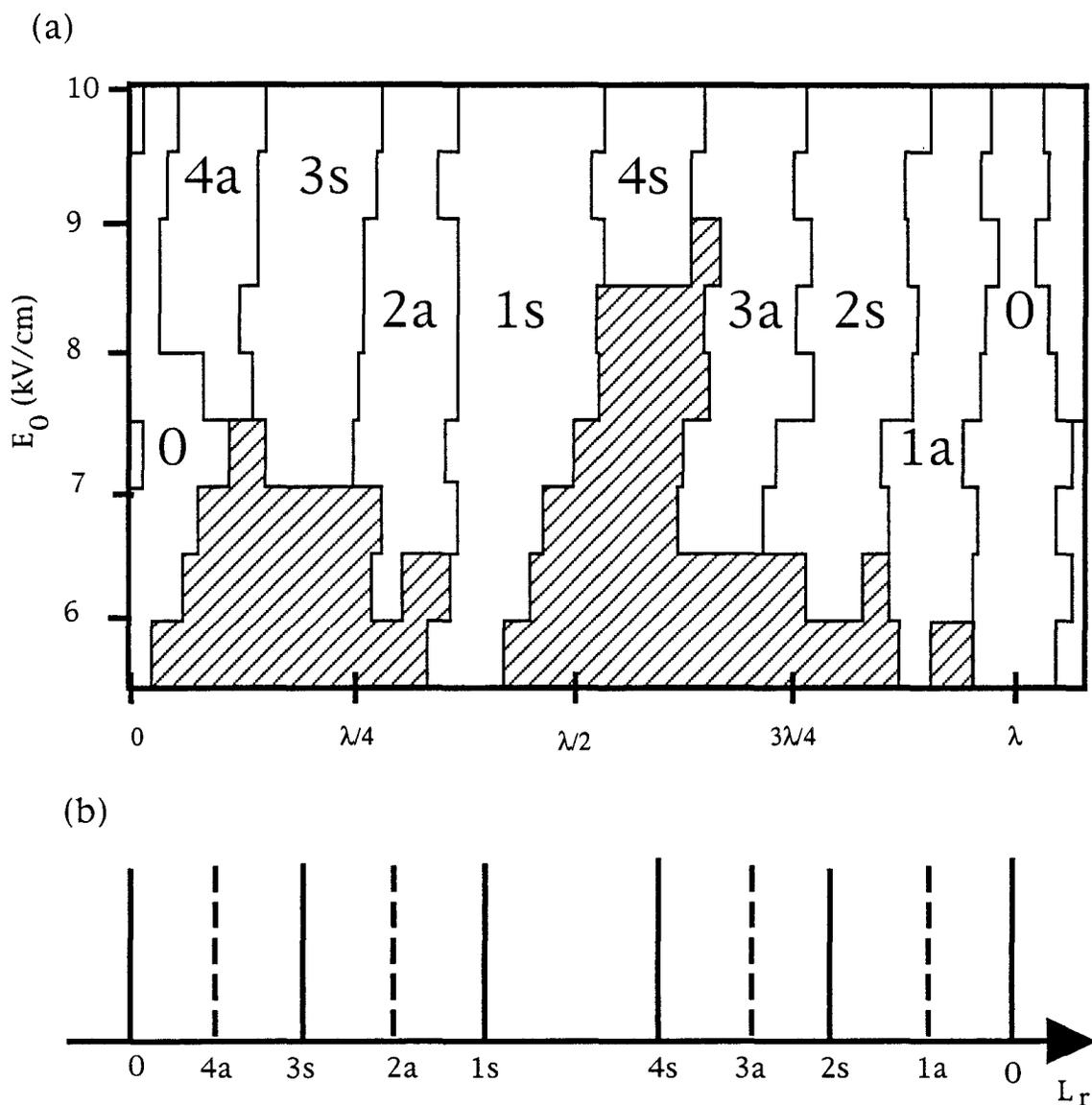


Figure II.11: Diagramme des phases montrant la famille du mode qui oscille en fonction de la longueur  $L_r$  du résonateur et du champ  $E_0$  électrique appliqué au cristal pour une cavité constituée d'un nombre impair de miroirs (a). Et (b) spectre théorique du résonateur correspondant.

Ce fait est corroboré par la dépendance de l'intensité du régime observé en la longueur du résonateur. En effet, celle-ci présente un maximum lorsque  $L_r$  balaye la zone où le régime oscille.

Un autre fait qui ressort de la figure II.11a est le faible recouvrement des différentes familles de modes. Signalons que nous n'avons pas observé de bistabilité.

On remarque que la valeur seuil du champ extérieur pour l'oscillation d'un mode est une fonction de sa structure transverse et de la longueur du

résonateur. Cela résulte de l'augmentation, avec  $E_0$ , de l'efficacité des transferts d'énergie dans le mélange à deux ondes (cf sect. I.1.2.2). Les pertes induites par le diaphragme augmentant avec l'extension transverse des modes, le seuil pour  $E_0$  croît avec l'indice  $q$  des familles. Par conséquent, pour une valeur de  $E_0$ , l'intensité des modes dans la cavité décroît lorsque  $q$  augmente. D'autre part, sur l'axe de variation de la longueur du résonateur, les domaines de stabilité des familles s'étendent avec  $E_0$ , jusqu'à ce qu'ils se touchent. A ces frontières, on observe des régimes transitoires. Bien que la persistance de ces régimes dépende de la stabilité relative des deux familles et donc de  $E_0$ , le domaine de variation de la longueur de cavité pour lesquels les transitoires existent reste très étroit comparé au domaine de stabilité des familles.

De plus, d'après la figure II.11a, les familles de modes oscillent lorsque la longueur de la cavité varie d'environ  $\lambda/6$ . C'est à dire dans une région environ  $10^7$  fois plus grande que la largeur  $\Delta\nu_G$  de la courbe de gain. Dans la troisième partie, nous expliquons ce fait par un important tirage en fréquence déduit des non-linéarités introduites par l'oscillateur à gain photoréfractif. En effet, nous y montrons que le tirage en fréquence permet de ramener la fréquence passive du mode au voisinage de la fréquence  $\nu_0$  qui optimise les transferts d'énergie.

### II.3.2: Dynamique intra-famille

Nous nous contenterons dans cette section de décrire les régimes observés dans chacune des familles de modes propres. Nous nous sommes placés dans la situation la plus simple possible: les caractéristiques de la cavité ont été choisies de façon à éviter toute compétition entre modes de familles différentes et la configuration à trois miroirs a été adoptée afin de réduire le nombre de modes dégénérés. Ceci nous permet d'étudier plusieurs exemples d'interaction de deux modes dans les familles d'indice  $q < 5$ .

#### II.3.2.1: Famille $q = 0$

Le seul régime observé est l'état stationnaire constitué de l'unique mode  $A_{00} = H_{00}$  (fig. II.12). Rappelons que dans d'autres systèmes physiques, des comportements dynamiques apparaissent même en situation monomode. Or, nos observations montrent que toutes les situations monomodes sont

stationnaires: les comportements dynamiques ne peuvent donc provenir que de l'interaction entre modes.



Figure II.12: Distribution transverse de l'intensité du mode  $H_{00}$ .

La figure II.13 montre le mode  $A_{00}$  observé en détection hétérodyne alors que tous les paramètres sont fixes. L'évolution temporelle de cette structure indique que les lignes équiphases se déplacent dans la direction perpendiculaire à ces lignes.

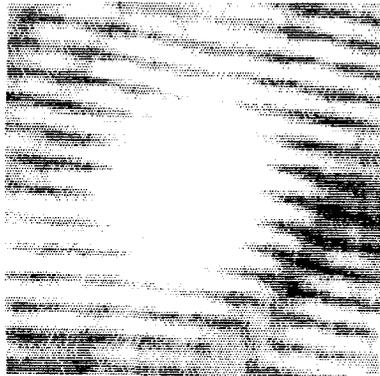


Figure II.13: Mode  $H_{00}$  en détection hétérodyne.

La figure II.14a représente la variation de l'intensité en fonction du temps d'une région du plan transverse, dont les dimensions sont petites comparées à l'interfrange. La périodicité de la courbe indique non seulement que le faisceau de la cavité a une fréquence  $\nu_c$  légèrement différente de celle du faisceau de pompe  $\nu_p$  mais aussi que cette différence de fréquence  $\Delta\nu$  est constante. La figure II.14b permet d'évaluer  $\Delta\nu$  à environ 0.5 Hz. Bien entendu, cela concerne non seulement le mode  $H_{00}$  mais aussi tous les autres

modes et régimes dynamiques car c'est une caractéristique de l'effet photoréfractif dans BGO et BSO. Ce résultat est en accord avec la section I.1.2.2 qui montre qu'un écart en fréquence entre les deux faisceaux est nécessaire pour obtenir des transferts d'énergie dans le mélange à deux ondes.

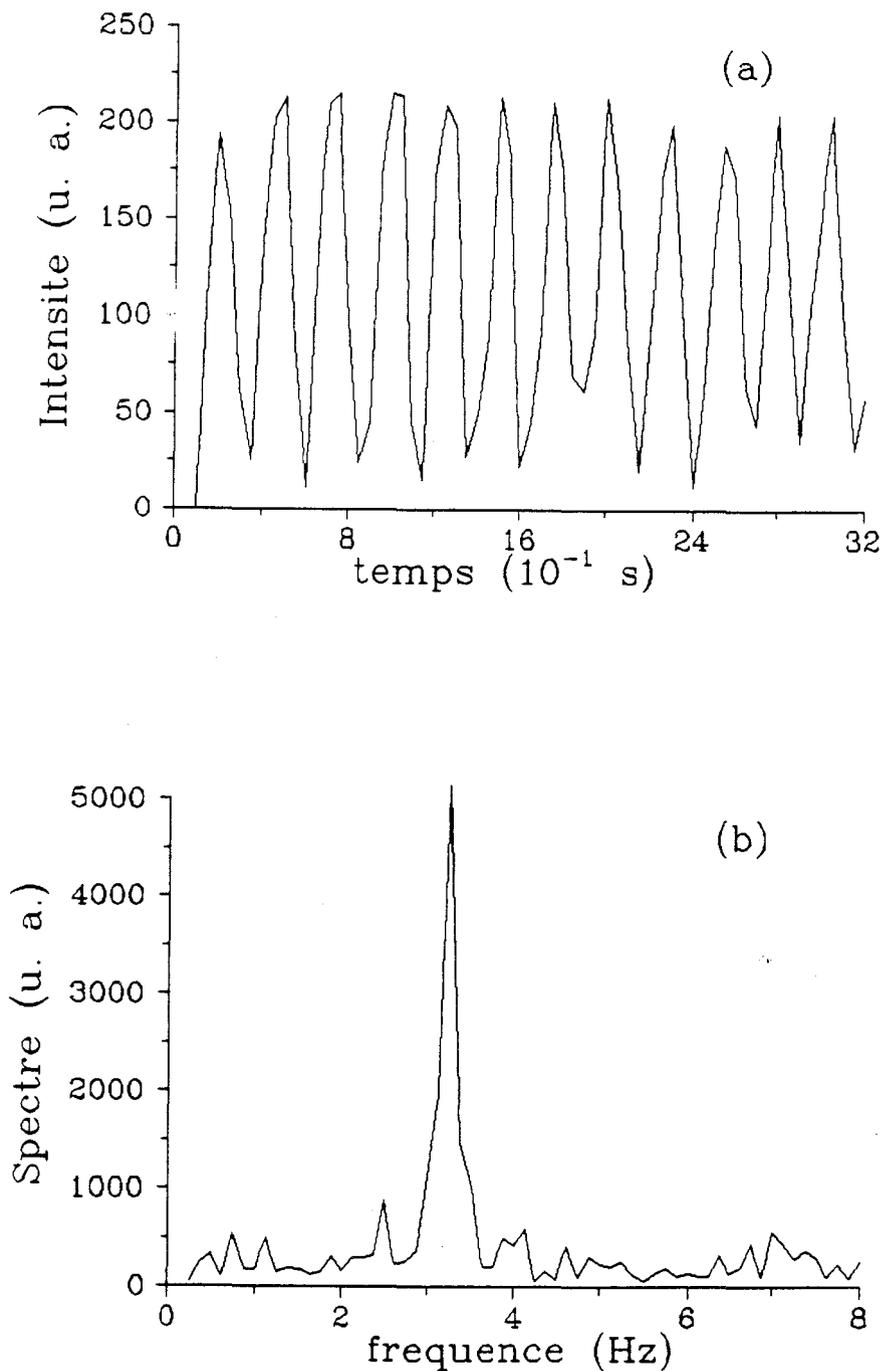


Figure II.14: (a) Évolution temporelle et (b) transformée de Fourier de l'intensité locale du mode  $H_{00}$  en détection hétérodyne.

### II.3.2.2: Famille $q = 1$

Les deux modes  $H_{01} = A_{012}$  (fig. II.15a) et  $H_{10} = A_{011}$  (fig. II.15b) respectivement symétrique et antisymétrique par rapport à l'axe  $y$ , constituent chacun un état stationnaire.

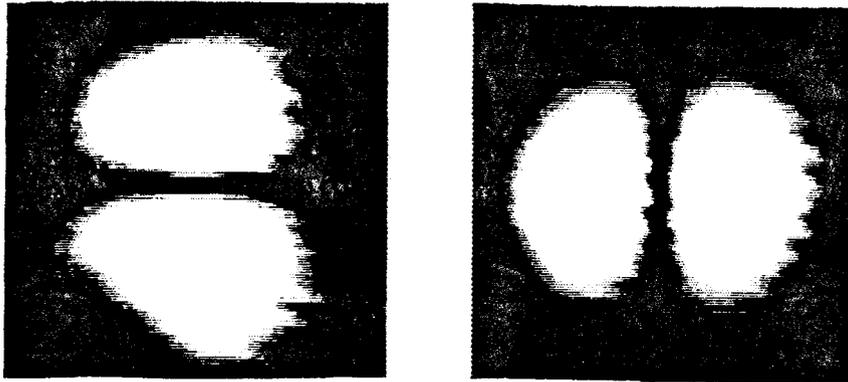


Figure II.15: Distribution transverse de l'intensité du mode (a)  $H_{01}$  et (b) du mode  $H_{10}$ .

### II.3.2.3: Famille $q = 2$

#### 1) Mode antisymétrique

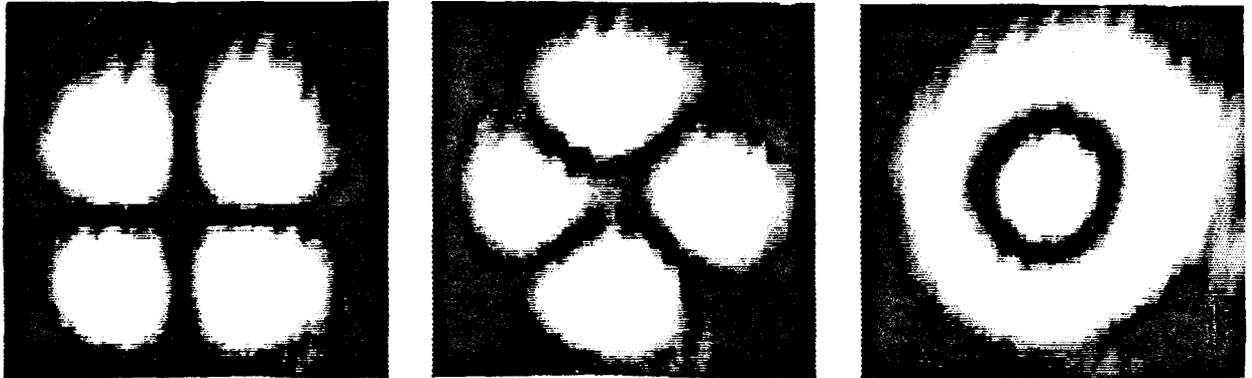
Seul le mode  $H_{11} = A_{022}$  est antisymétrique, et l'état stationnaire associé à ce mode a pu être observé (fig. II.16a).

#### 2) Modes symétriques

Les modes symétriques  $A_{021}$ ,  $A_{10}$ ,  $H_{20}$  et  $H_{02}$  existent tous séparément dans l'état stationnaire (fig. II.16b-e), ainsi que des combinaisons linéaires de ces modes, en particulier l'état  $4H$  (M. Brambilla et al [1990]):

$$|P_1|^2 + |P_2|^2 \tag{II.10}$$

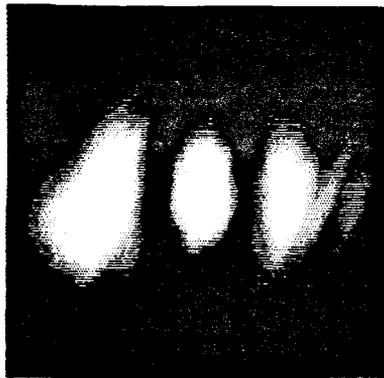
où  $P_1$  et  $P_2$  sont respectivement les amplitudes des modes  $A_{021}$  et  $A_{10}$ .



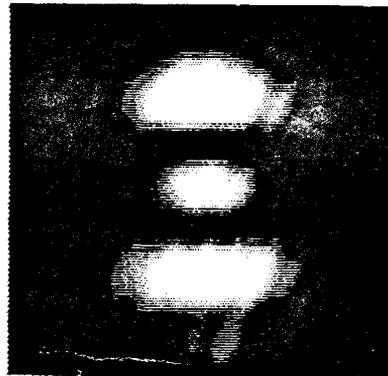
(a)

(b)

(c)



(d)



(e)

Figure II.16: Distribution transverse de l'intensité des modes (a)  $A_{022}$ , (b)  $A_{021}$ , (c)  $A_{10}$ , (d)  $H_{20}$  et (e)  $H_{02}$ .

D'après la figure II.17a, sa structure est caractérisée par quatre minima d'intensité qui justifient son nom: 4 "Holes" en anglais. La figure II.17b est une représentation en détection hétérodyne de ce mode, elle montre que ces minima d'intensités sont des singularités de phase de charge unité (flèches) placées aux sommets d'un carré. Celles qui ont des charges de même signe occupent les sommets opposés du carré en raison du potentiel répulsif qui les couple (sect. I.2.2). Notons que le mode  $4H$  est l'une des structures transverses de la famille  $q = 2$  également observée dans les lasers (M. Brambilla et al [1990]).

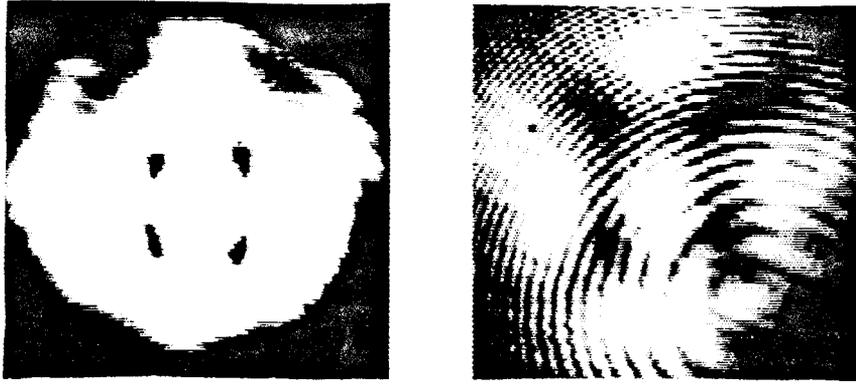


Figure II.17: Mode 4H: (a) distribution transverse de l'intensité et (b) mise en évidence des singularités de phase grâce aux dislocations qui apparaissent dans la figure d'interférences en détection hétérodyne.

Cependant l'état qui apparaît le plus souvent est un régime périodique  $P(2)$ , l'exposant se rapportant à l'indice de la famille de modes impliquée. La figure II.18a présente 5 instantanés pris sur une demi-période de cet état dynamique. En fonction du temps, partant du mode  $A_{10}$ , la structure transite lentement vers le mode  $4H$  pour aboutir finalement au mode  $A_{021}$ . Pendant la seconde moitié de la période, le mouvement s'inverse et on retrouve finalement le mode  $A_{10}$ . La fréquence  $\nu$  de ce régime dynamique est de l'ordre du Hertz. La figure II.18b montre que l'évolution temporelle de l'intensité du faisceau peut être aisément reproduite par l'expression suivante:

$$I = I_1 \cos^2(2\pi\nu t) + I_2 \sin^2(2\pi\nu t) \quad (\text{II.11})$$

avec  $I_1 = |P_1|^2$  et  $I_2 = |P_2|^2$

Dans la suite, ce type d'interaction sera nommé *couplage en intensité* dans la mesure où aucun terme de phase n'apparaît explicitement. On peut facilement démontrer que l'intensité  $I$  donnée par l'équation (II.11) est celle d'un champ électrique d'amplitude  $A$  vérifiant:

$$A = P_1 \cos 2\pi\nu t \cos 2\pi\nu' t + P_2 \sin 2\pi\nu t \sin 2\pi\nu' t \quad (\text{II.12})$$

ou encore

$$A = Q_1 e^{2i\pi\nu_1 t} + Q_2 e^{2i\pi\nu_2 t} \quad (\text{II.13})$$

avec 
$$v = \frac{v_1 - v_2}{2}, v' = \frac{v_1 + v_2}{2},$$

$$Q_1 = \frac{P_1 + P_2}{2} \text{ et } Q_2 = \frac{P_1 - P_2}{2}$$

où  $v_1$  et  $v_2$  sont les fréquences optiques des modes de la cavité vide. Le régime dynamique  $P^{(2)}$  détecté est donc une moyenne de  $|A|^2$  sur un grand nombre de périodes optiques  $v'^{-1}$  et  $v$  est la fréquence du régime dynamique  $P^{(2)}$ . En vertu des propriétés de projection de la base de Laguerre-Gauss sur la base d'Hermite-Gauss,  $Q_1$  et  $Q_2$  représentent l'amplitude des modes  $H_{20}$  et  $H_{02}$ .

Remarquons que c'est la première fois qu'un régime périodique au sein d'une famille transverse est observé dans un oscillateur à gain photoréfractif.

#### II.3.2.4: Famille $q = 3$

##### 1) Modes antisymétriques

Cet ensemble de modes propres du résonateur est constitué des modes  $A_{111}$ ,  $A_{031}$ ,  $H_{30}$  et  $H_{12}$ . Comme toutes les familles à  $q$  impair, la famille  $q = 3$  possède la particularité qu'à chaque mode symétrique correspond un mode antisymétrique dont la structure se déduit de la précédente par une rotation de  $\pi/2$  dans le plan transverse. Au sein des familles d'indice  $q$  impair, on peut donc limiter la description des profils transverses à l'ensemble des modes symétriques.

##### 2) Modes symétriques

Les modes propres impliqués sont les suivants:  $A_{112}$ ,  $A_{032}$ ,  $H_{03}$  et  $H_{21}$ . La première ligne de la figure II.19 montre les différents modes propres qui constituent des états stationnaires. La seconde ligne de la figure II.19 représente des exemples de structures transverses stationnaires, composées de plusieurs modes propres. Mais, contrairement au mode  $4H$ , l'importance relative de chaque mode pur peut varier continûment en fonction de la géométrie de la cavité.

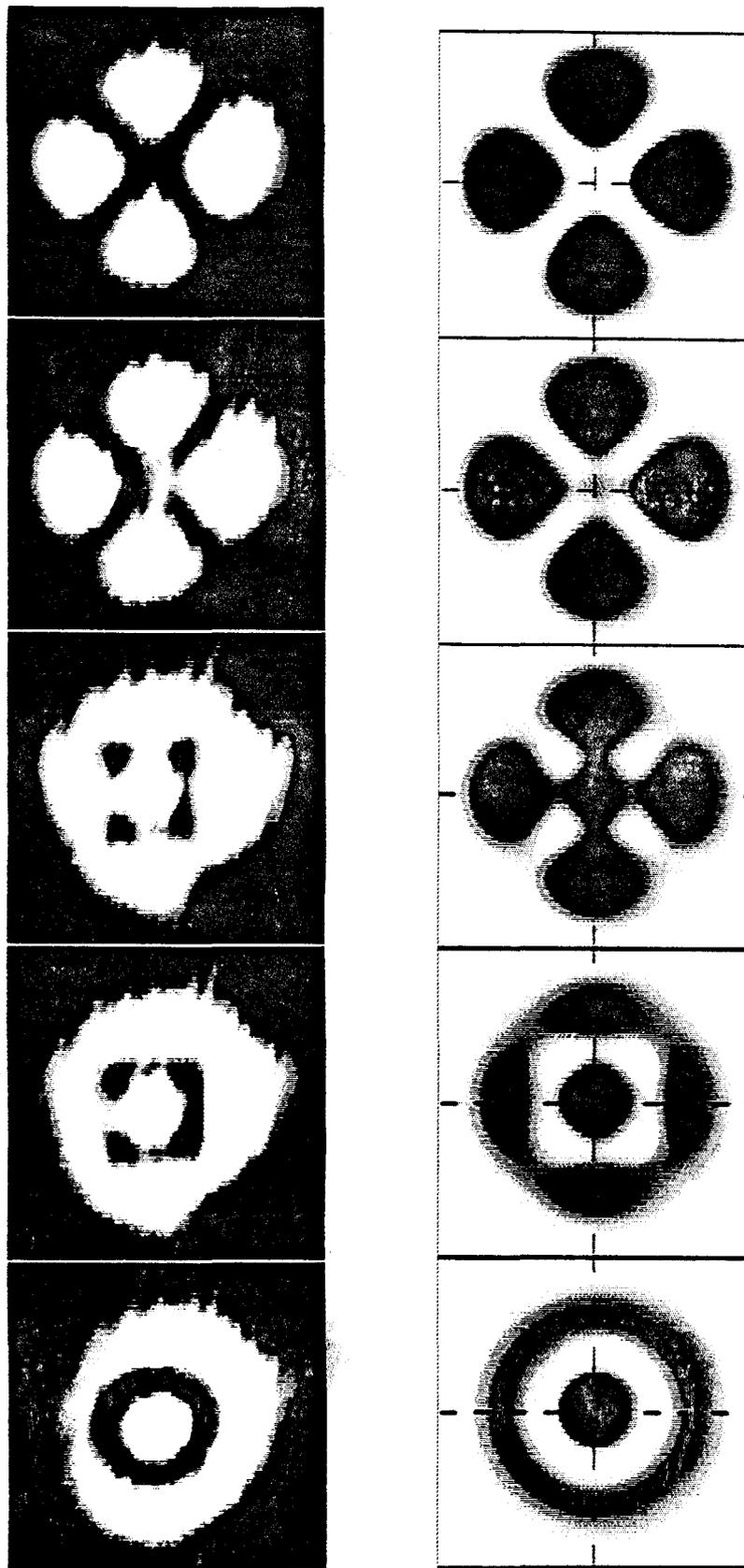
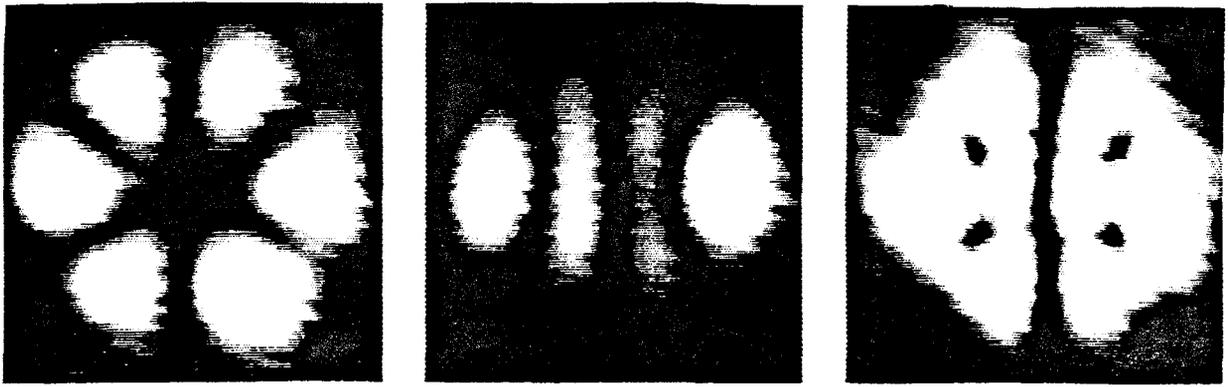


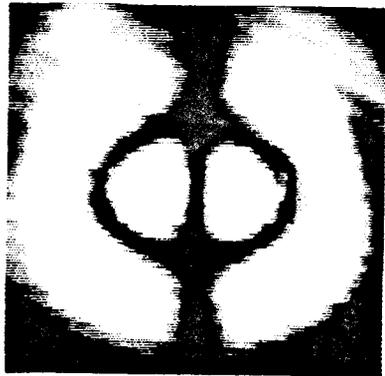
Figure II.18: Régime périodique  $P^{(2)}$ : (a) expérimental et (b) théorique.



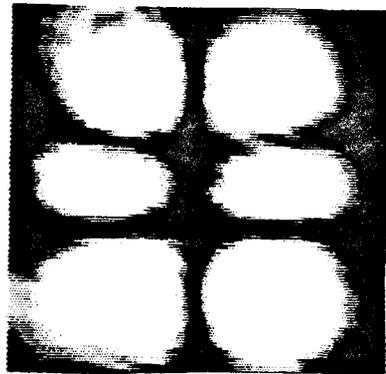
(a)

(b)

(c)



(d)



(e)

Figure II.19: Distribution transverse de l'intensité des états stationnaires de l'ensemble des structures antisymétriques de la famille d'indice  $q = 3$ : (a)  $A_{031}$ , (b)  $H_{30}$ , (c)  $A_{031} + A_{111}$ , (d)  $A_{111}$  et (e)  $H_{12}$ .

Il existe aussi un régime d'alternance  $P^{(3)}$  mettant en jeu les modes  $A_{032}$  et  $A_{112}$  (fig. II.20a) avec une fréquence d'environ un Hertz. La figure II.20b montre que ce régime reste bien modélisé par la relation (II.12) si  $P_1$  et  $P_2$  représentent respectivement les amplitudes des modes  $A_{032}$  et  $A_{112}$  (fig. II.20b).

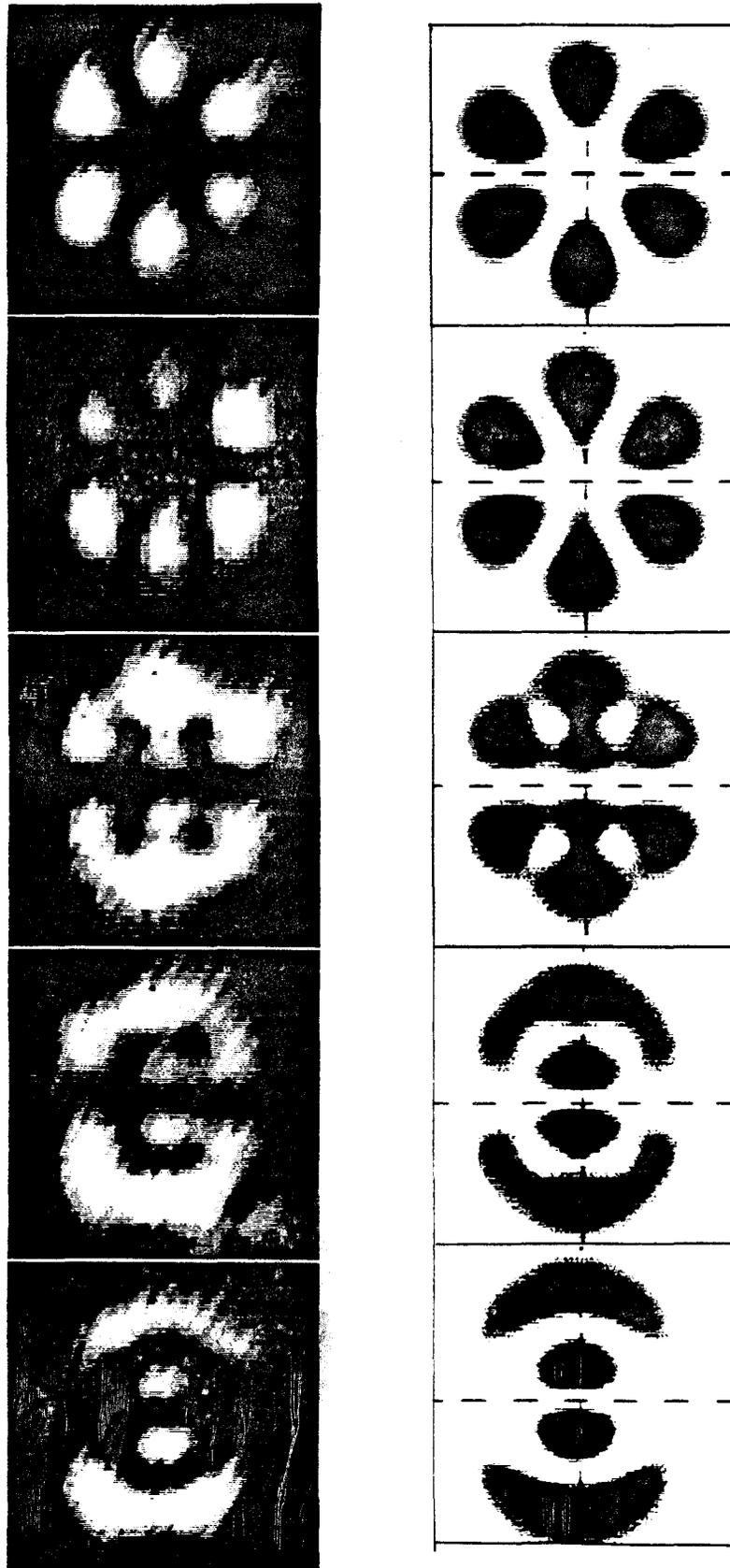


Figure II.20: Régime périodique  $P^{(3)}$ : (a) expérimental et (b) théorique.

### II.3.2.5: Famille $q \geq 4$

Au fur et à mesure que  $q$  augmente, l'évolution temporelle du faisceau issu de l'oscillateur se complique et les modes qui constituent sa structure transverse sont de plus en plus difficilement identifiables. Cela se produit pour deux raisons:

(i) Le nombre de modes impliqués dans les structures observées devient vite très grand et la décomposition modale perd de son efficacité.

(ii) La déformation des modes due aux asymétries du dispositif, qui est très faible pour les modes des premières familles, complique l'identification des modes d'ordre élevé.

Le nombre de modes propres dégénérés, et par conséquent le nombre de régimes transverses possibles, augmente avec  $q$ . Bien que l'astigmatisme lève la dégénérescence entre les modes, en moyenne, à cause des dérives de la longueur du résonateur et du laser de pompe, le temps où le système reste en résonance avec un régime particulier devient comparable au temps caractéristique de ce régime. Bien entendu, ce phénomène va en s'aggravant avec la complexité de la dynamique que l'on veut étudier.

Expérimentalement, certaines structures subsistent suffisamment longtemps pour pouvoir être considérées comme des états stationnaires. Pour la famille d'indice  $q = 4$ , il s'agit dans la plupart des cas de modes propres du résonateur (fig. II.21).

Dans les familles d'ordre supérieur ( $q > 4$ ), ce sont les modes  $A_{0li}$  qui sont favorisés (fig. II.22). En fait, on atteint très vite des situations (typiquement  $q = 6$ ) pour lesquelles, sauf en de rares occasions, la décomposition modale s'avère inadaptée.

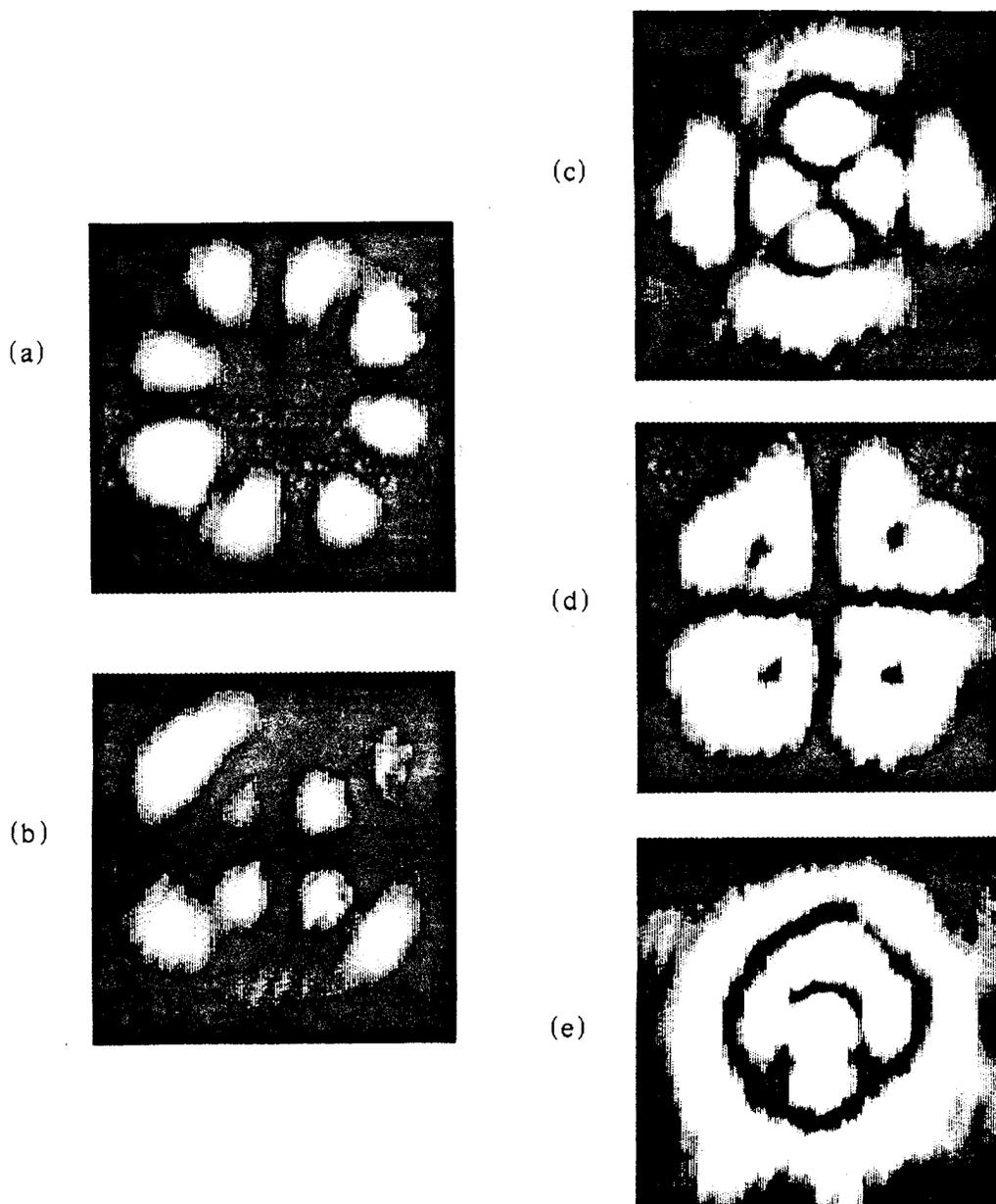


Figure II.21: Distribution transverse de l'intensité des états stationnaire des familles d'indice  $q = 4$ : (a)  $A_{042}$ , (b)  $A_{122}$ , (c)  $A_{121}$ , (d)  $A_{042} + A_{122}$ , (e)  $A_{20}$ ,

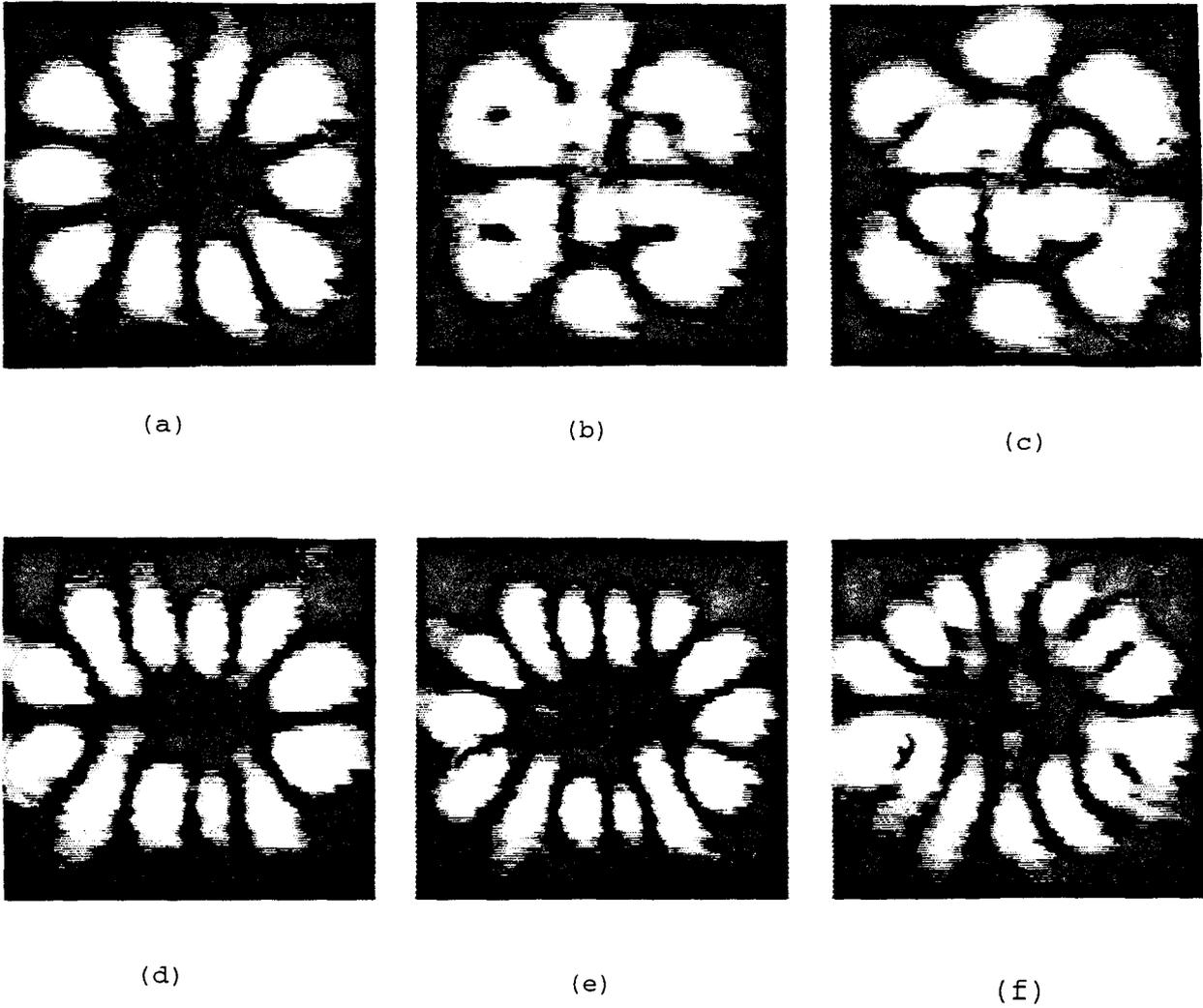


Figure II.22: Distribution transverse de l'intensité des modes  $A_{0,\ell}$  avec  $\ell > 4$ : (a)  $A_{051}$ ,  
 (b)  $A_{132} + A_{052}$ , (c)  $A_{132}$ , (d)  $H_{062}$ , (e)  $A_{071}$  et (f)  $A_{072}$ .

### II.3.3: Dynamique inter-famille

Des interactions entre familles distinctes de modes apparaissent dans deux situations différentes:

(i) lorsque deux familles ont des fréquences de résonance suffisamment proches pour pouvoir osciller en même temps, ce qui conduit à une compétition permanente entre les modes des deux familles et permet d'observer des régimes périodiques.

(ii) lorsqu'un paramètre de contrôle fait passer le système d'une famille à une autre, le transfert de stabilité induit alors des états transitoires.

#### II.3.3.1: Familles dégénérées

Dans la première situation, le faisceau de cavité présente un régime périodique stable, de fréquence de l'ordre du Hertz. La figure II.23a montre une demi-période de ce régime dynamique dans lequel interviennent les modes antisymétriques de la famille  $q = 4$  en quasi-résonance avec  $H_{00}$ : la structure en forme d'étoile à quatre branches effectue une rotation sur elle-même de  $\pi/4$ . Contrairement aux interactions au sein d'une même famille (interactions en intensité), le profil transverse n'est jamais celui d'un mode propre du résonateur passif, qu'il appartienne à la base de Laguerre-Gauss ou à celle d'Hermite-Gauss. Bien que le choix de la base reste libre, notre description s'appuie sur la base de Laguerre-Gauss car le dispositif la favorise lorsqu'il n'y a pas d'interaction entre familles. Ce type de régime périodique est noté  $D^{(ij)}$  où les indices  $i$  et  $j$  sont ceux des familles transverses impliquées.

Pour comprendre le mécanisme conduisant à un tel comportement, nous essayons, comme dans la section précédente, de le décrire à l'aide d'une expression simple de l'évolution temporelle de l'amplitude des modes propres concernés. Cela n'est pas possible avec l'équation II.11 car les structures associées à  $I_1$  et  $I_2$  seraient les distributions d'intensité des structures représentant deux croix à quatre branches orientées à  $45^\circ$  l'une de l'autre, ce qui ne ressemble à aucun mode propre du résonateur.

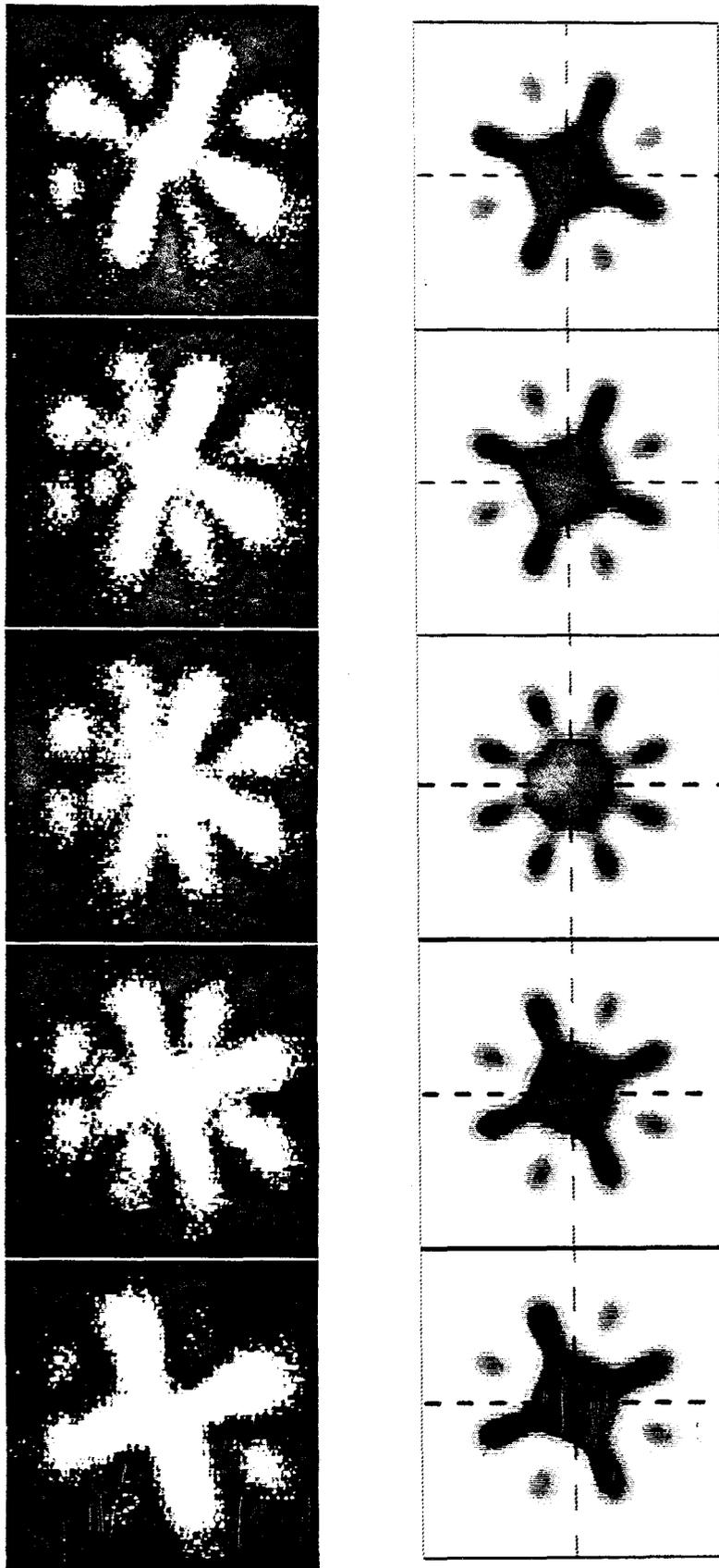


Figure II.23: Régime périodique  $D^{(04)}$ : (a) expérimental et (b) théorique.



Dans la base de Laguerre-Gauss, l'évolution de l'intensité du régime  $D^{(04)}$ , peut être décrite par une équation du type suivant:

$$I = |P_1 \cos(2\pi\nu t) + P_2 \sin(2\pi\nu t)|^2 \quad (\text{II.14})$$

où  $P_1$  et  $P_2$  sont les amplitudes respectives des modes  $A_{00}$  et  $A_{042}$  et  $\nu$  une fréquence de l'ordre du Hertz. Nous qualifions ce type d'interaction de couplage en *amplitude* dans la mesure où la phase apparaît explicitement dans l'évolution temporelle de l'intensité. La figure II.23b représente une demi-période de la structure obtenue par simulation numérique de cette expression. Pour mettre en évidence la différence entre ces deux types de couplage et donc entre les expressions (II.11) et (II.14), nous écrivons l'amplitude du champ associée à l'équation (II.14) en fonction des fréquences optiques, avec les notations de (II.12):

$$A = P_1 \cos(2\pi\nu t) \cos(2\pi\nu' t) + P_2 \sin(2\pi\nu t) \cos(2\pi\nu' t) \quad (\text{II.15})$$

La seule différence avec l'expression (II.12) est la phase relative du terme rapide entre les deux modes  $P_1$  et  $P_2$ . En effet, à cette échelle de temps, le mode  $P_2$  évolue en quadrature avec le mode  $P_1$  dans l'expression (II.12) et sont en phase ou en opposition de phase dans l'expression (II.15). Donc, lorsque les deux modes appartiennent à la même famille, ils sont en quadrature de phase à la fois sur les échelles de temps rapide et lente. Par contre, pour des modes de familles distinctes, les deux modes propres sont soit en phase soit en opposition de phase sur l'échelle de temps rapide et en quadrature sur l'échelle lente. Globalement, il en résulte qu'au sein d'une même famille, les modes sont en phase ou en opposition de phase. Si on veut obtenir une expression de  $A$  sous la forme d'un battement entre les modes (II.13),  $Q_1$  et  $Q_2$  sont respectivement proportionnels à  $P_1 + P_2$  et  $P_1 - P_2$ . Au contraire, dans l'expression (II.15), le couplage des deux modes issus de familles différentes les force à osciller en quadrature de phase. On peut réécrire l'équation (II.15) sous une forme similaire à celle de l'expression (II.13):

$$Q_1 e^{i\omega_1 t} + Q_2 e^{i\omega_2 t} \quad (\text{II.16})$$

avec 
$$Q_1 = \frac{P_1 + iP_2}{2} \text{ et } Q_2 = \frac{P_1 - iP_2}{2}.$$

On remarque l'apparition d'un facteur  $i$  qui traduit le fait que les modes sont en quadrature de phase.

Ce comportement n'est pas spécifique au couplage entre les modes antisymétriques de la famille d'indice  $q = 4$  et le mode  $H_{00}$  car on le retrouve lorsque d'autres familles de modes interagissent.

### II.3.3.2: Transitions entre familles

L'interaction *en amplitude* intervient aussi dans les régimes transitoires qui se produisent lors de l'échange de stabilité entre des modes de deux familles.

A titre d'exemple, la figure II.24a illustre la transition entre le mode symétrique  $H_{01}$  et le mode antisymétrique  $H_{11}$ . Lors de la transition du mode  $H_{01}$  vers le mode  $H_{11}$ , les deux taches du mode  $H_{01}$  se mettent globalement à osciller en phase dans le plan transverse, symétriquement autour de l'horizontale. La fréquence  $\nu$  de cette oscillation est comme pour les autres régimes périodiques de l'ordre du Hertz et son amplitude croît jusqu'à ce que le mode  $H_{11}$  soit atteint, puis s'annule.

Ce régime peut aussi être décrit par l'expression (II.14), si on ajoute un facteur d'atténuation qui tient compte de son caractère transitoire. Les résultats obtenus pour la transition entre les modes  $H_{01}$  et  $H_{11}$  sont représentés par la figure II.24b.

Globalement, dans une cavité constituée d'un nombre impair de miroirs, l'apparition d'un type de couplages plutôt qu'un autre dépend de la position relative de la courbe de gain et des pics de résonance des familles impliquées dans le régime. En effet, nous considérons deux familles distinctes dont les pics de résonance possèdent chacun une région où les gains par passage dans le cristal sont supérieurs aux pertes sur un tour de cavité. Lorsque la courbe de gain se trouve entre ces deux régions et que celles-ci sont suffisamment disjointes, l'oscillateur s'éteint. Par contre, si elle se trouve à l'intérieur d'un de ces pics (fig. II.25a), on observe des structures stationnaires et périodiques au sein de cette famille issues de couplage en *intensités* des modes. Lorsque ces régions se touchent, les états transitoires apparaissent (fig. II.25b). D'une manière générale, le facteur d'atténuation de ces transitoires est lié à l'ampleur du recouvrement entre les zones de stabilité des familles dans la courbe de gain. En effet, si le recouvrement est faible, les deux familles sont soumises à la loi du plus fort tandis que si le recouvrement est important, on parle de familles dégénérées et les états transitoires deviennent des régimes périodiques (fig. II.25c). Dans les deux derniers cas, les couplages entre les modes transverses se font en *amplitudes*.

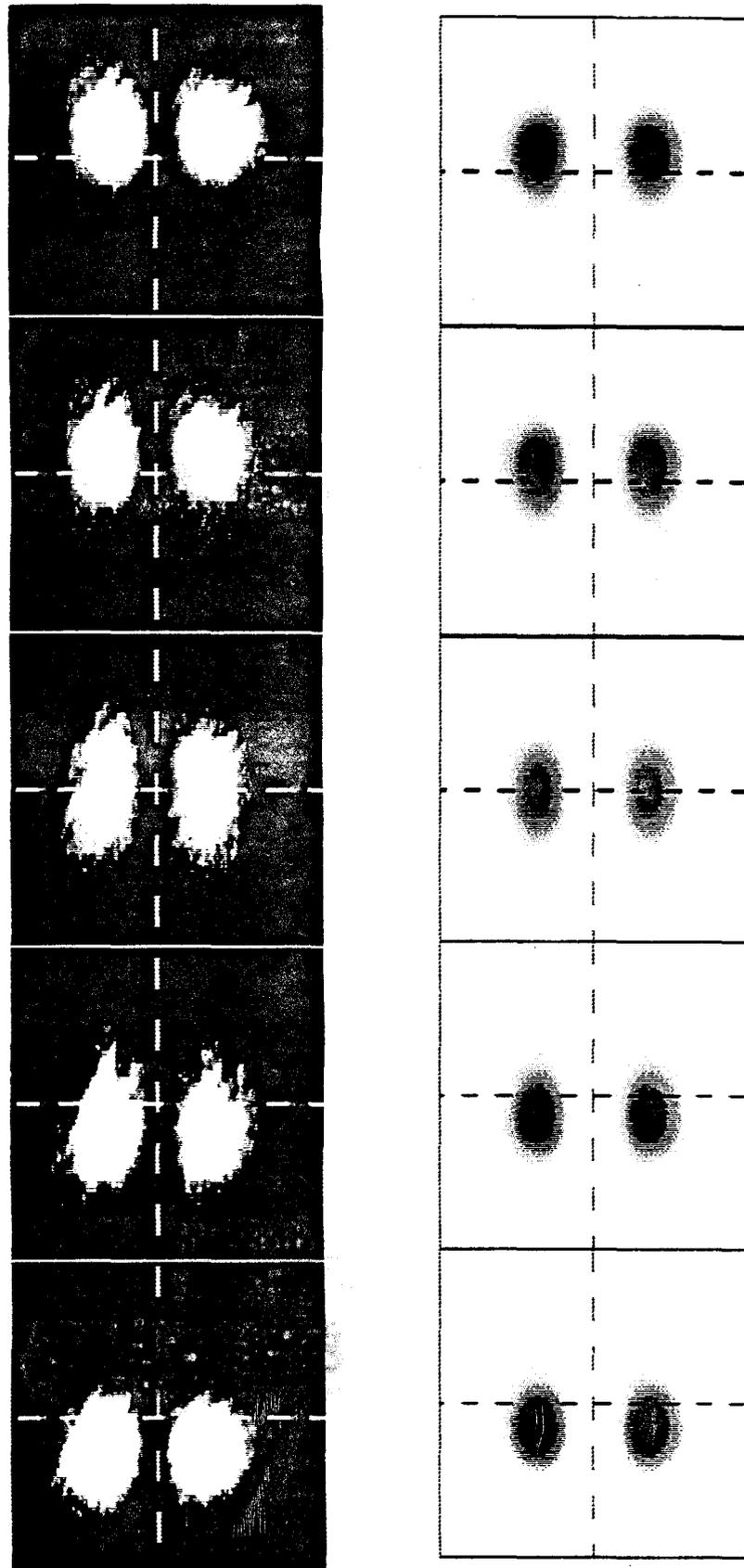


Figure II.24: Régime périodique  $D^{(12)}$ : (a) expérimental et (b) théorique.

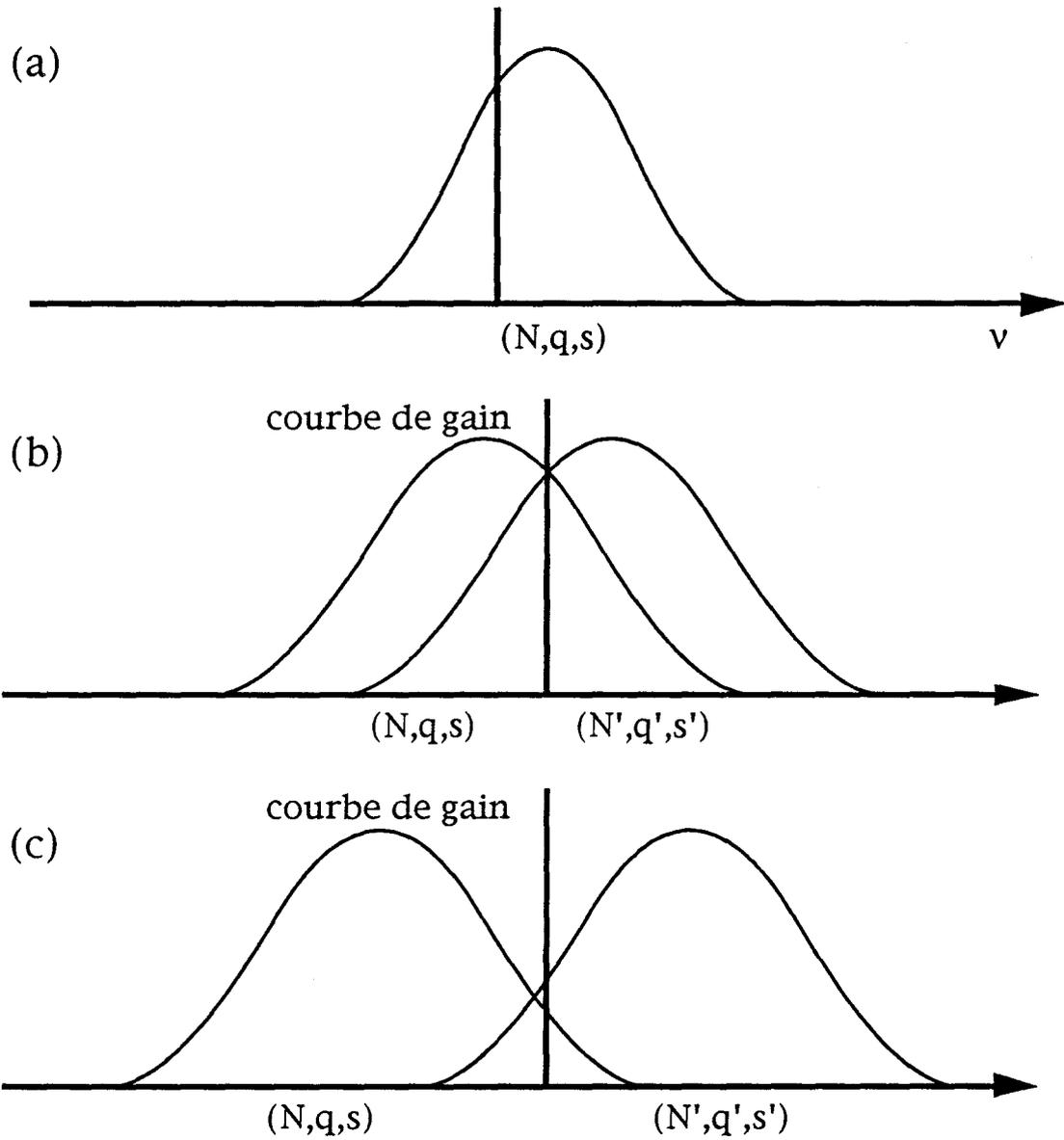


Figure II.25: Situation sur l'axe des fréquences correspondant aux différents types de régimes périodiques dans une cavité constituée de trois miroirs: (a) couplage en intensité, (b) couplage en amplitude et (c) transition entre deux familles.

### II.3.4: Origine des fréquences dynamiques

Le diagramme des phases présenté à la figure II.11a, montre que les familles de modes continuent à osciller lorsque la longueur varie de  $\lambda_v/6$  alors que la largeur de la courbe de gain est  $10^7$  fois plus petite.

Dans les deux sections précédentes, nous décrivons plusieurs régimes dynamiques stables et transitoires. Il apparaît toujours une fréquence de l'ordre du Hertz qui est caractéristique du temps de formation du réseau d'indice de réfraction. D'autre part, les relations (II.13) et (II.16) modélisant l'évolution temporelle de la structure transverse du faisceau intracavité montrent que les régimes dynamiques peuvent être interprétés comme des battements entre modes. Pour illustrer cela, la figure II.26 présente le spectre temporel en puissance de l'intensité locale dans le plan transverse du régime P<sup>(2)</sup> (fig. II.18a) en détection hétérodyne. On y observe un pic à la fréquence 3.25 Hz caractéristique du décalage en fréquences des faisceaux intracavité et de pompe (fig. I.10) et un second pic à 0.5 Hz représentant la fréquence du régime dynamique. Néanmoins, lorsque les deux modes impliqués appartiennent à la même famille, l'écart entre les fréquences passives est égal au déplacement induit par l'astigmatisme  $\Delta v_a$  du dispositif. Comme nous le montrons dans la troisième partie de ce travail, le tirage en fréquence permet de ramener les fréquences passives dans la courbe de gain et l'écart entre leur fréquence active  $\nu'_1$  et  $\nu'_2$  est la fréquence dynamique du régime ( $\cong 1$  Hz).

$$\Delta v_a' = \nu_1 - \nu_2 \cong 1 \text{ Hz.} \quad (\text{II.17})$$

Si les modes de la cavité vide impliqués dans un régime périodique ne sont plus dégénérés, le raisonnement précédent reste valable bien que l'écart entre leurs fréquences passives et donc de leurs fréquences actives résultent non seulement de l'astigmatisme mais surtout de la géométrie du résonateur.

De plus, nous avons vérifié que la fréquence caractéristique d'un régime dynamique dépend de la longueur  $L_r$  du résonateur tout en restant inférieur à un hertz pour une intensité du faisceau de pompe de  $10 \text{ mW/cm}^2$ . Par exemple, on peut trouver une valeur de  $L_r$  telle que la fréquence du régime dynamique s'annule et dans ce cas, la structure transverse du faisceau décrit un des états stationnaires qui apparaît au sein de l'ensemble de modes dégénérés.

Par ailleurs, l'écart en fréquence  $\nu' - \nu_p$  entre les faisceaux intracavité et de pompe est aussi fonction de la longueur du résonateur. Nous n'avons pas observé de corrélation entre les dépendances de  $\nu' - \nu_p$  et de la fréquence dynamique en fonction de  $L_r$ .

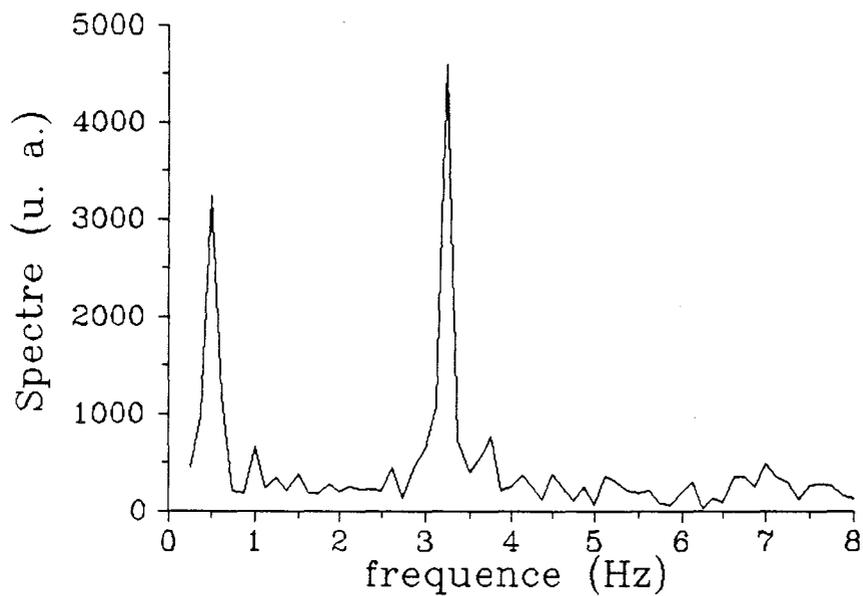


Figure II.26: Spectre du régime  $P^{(2)}$  en détection hétérodyne.

## II.4: INFLUENCE DE LA SYMETRIE DU DISPOSITIF

Jusqu'à présent, nous avons décrit les régimes engendrés par un dispositif possédant une direction transverse privilégiée. Cette section est consacrée, dans un premier temps, aux modifications observées lorsque cette particularité est supprimée. C'est à dire lorsque toutes les directions transverses du dispositif sont équivalentes. Ceci est obtenu dans une cavité formée d'un nombre pair de miroirs qui ne favorise aucun référentiel transverse.

Dans un second temps, nous étudions l'influence des écarts à la symétrie cylindrique du dispositif sur la dynamique transverse du faisceau engendré par l'oscillateur.

### II.4.1: Comparaison à la dynamique spatio-temporelle en l'absence de référentiel fixe

Si un résonateur est constitué d'un nombre impair de miroirs, les conditions aux bords longitudinales favorisent un axe transverse sans pour autant influencer sur la symétrie transverse du dispositif. Il s'agit d'une levée de dégénérescence des conditions de résonance des modes en fonction de leur symétrie par rapport à un axe transverse, sans que leur structure en soit modifiée. On continue notamment à observer dans les cavités formées d'un nombre impair de miroirs, des structures à symétrie cylindriques comme le mode  $A_{10}$  (fig. II.16c).

Dans un résonateur formé d'un nombre pair de miroirs, tous les modes appartenant à une même famille retrouvent la même condition de résonance, et de ce fait apparaissent pour une même longueur de cavité. Ceci est illustré par la figure II.27a, qui présente le diagramme des phases de l'oscillateur pour une cavité de 1.35 m de long constituée de quatre miroirs dont l'un est sphérique avec un rayon de courbure de 1 m. Dans ces conditions,  $R_v = 0.3$ . Contrairement à la figure II.11a, on constate que l'ensemble des modes d'une même famille oscille dans la même région.

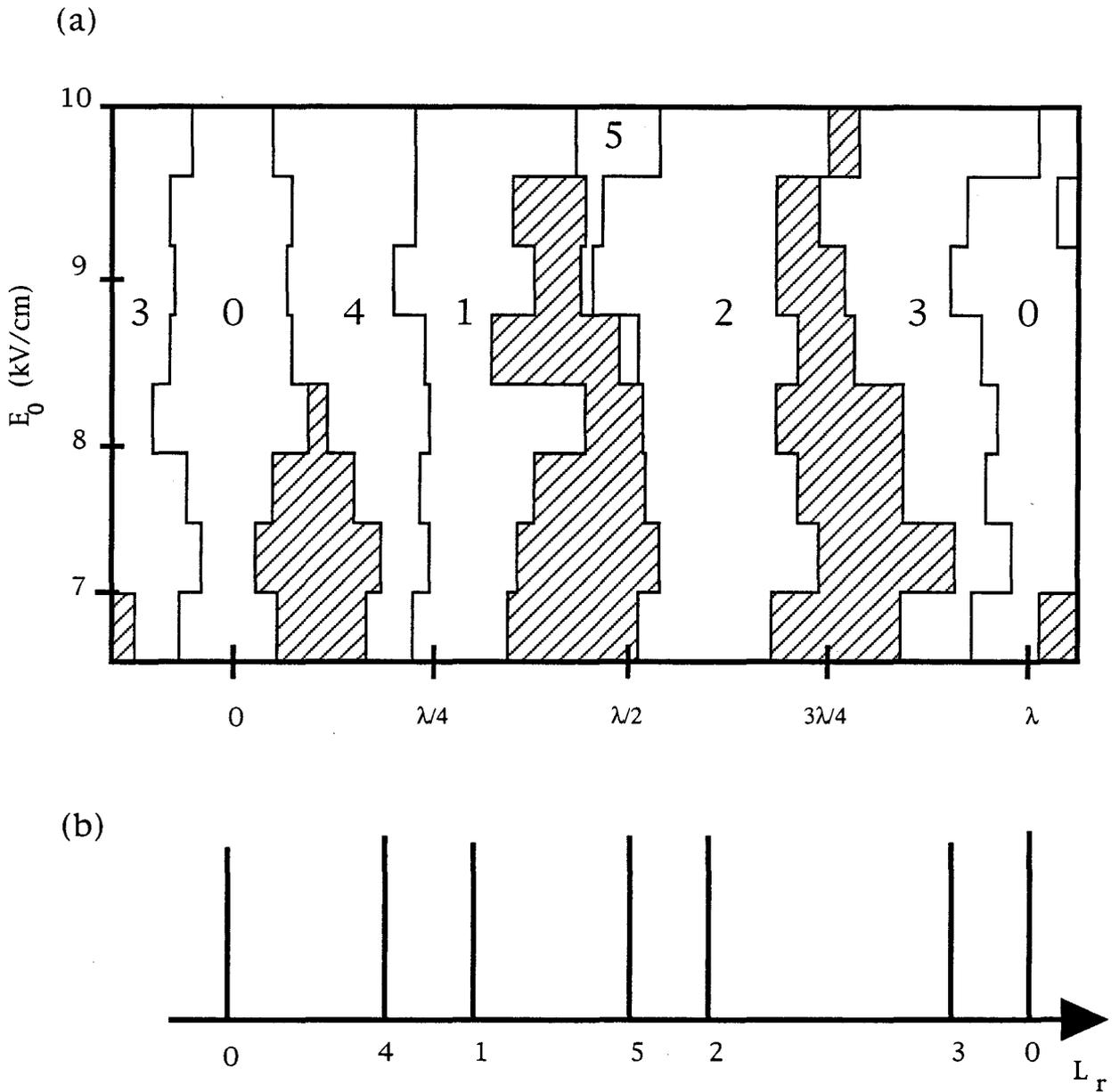


Figure II.27: Diagrammes des phases en fonction de la longueur  $L_r$  du résonateur et du champ  $E_0$  électrique appliqué au cristal pour une cavité constituée d'un nombre pair de miroirs (a). Et spectre théorique du résonateur (b).

Ceci a une conséquence importante sur la symétrie transverse des structures du faisceau intracavité. En effet, tous les modes d'une même famille étant dégénérés, il n'existe plus d'axe privilégié fixant leur orientation. Illustrons ceci par l'exemple de la famille  $q = 1$ , formée des modes  $H_{01}$  et  $H_{10}$ , tous deux constitués de deux taches en opposition de phase. Expérimentalement, la distribution transverse d'intensité du faisceau est soit annulaire (mode  $B_{01i}$  de la base des doughnuts (fig.28a) soit semblable à celle

de  $H_{01}$  mais orienté selon un axe quelconque (fig.28b). Ces deux profils transverses constituent séparément des états stationnaires de l'oscillateur qui sont souvent atteints après de très longs régimes transitoires contenant une fréquence  $\nu$  caractéristique des temps de réaction de l'oscillateur ( $\nu \approx 1$  Hz).

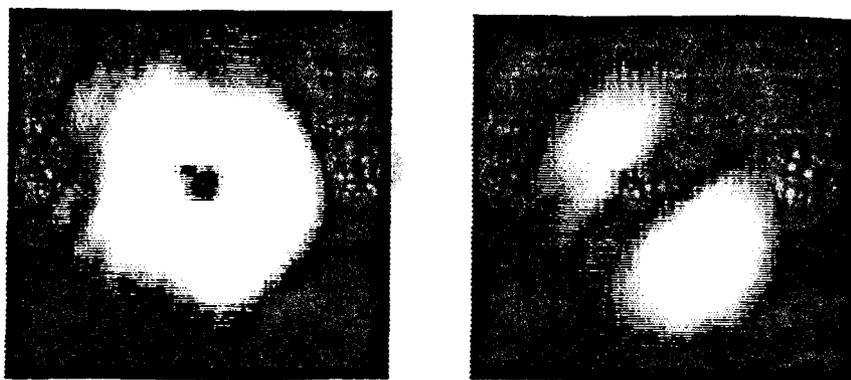


Figure II.28: Distribution transverse de l'intensité du mode (a)  $B_{01}$  et (b) de la structure composée de deux taches orientées à  $-40$  degrés de l'axe  $x$ .

Néanmoins, on observe aussi des régimes périodiques dont l'évolution temporelle est généralement un mélange d'une rotation continue dans le plan transverse de l'axe portant les deux taches et d'un saut brutal entre deux orientations différentes par l'intermédiaire de l'anneau  $B_{01i}$ . Par exemple, l'axe des deux taches tourne continûment d'environ  $40^\circ$  et ensuite, un saut brutal ramène la structure dans son orientation initiale. La figure II.29 montre des résultats expérimentaux correspondant à un régime périodique où l'axe sur lequel sont disposées les deux taches oscille continûment entre deux positions extrémales séparées d'une vingtaine de degrés.

Pour les familles d'ordre supérieur, si on tient compte de l'absence d'axe privilégié, les régimes dynamiques de base sont similaires à ceux obtenus avec une cavité constituée d'un nombre impair de miroirs. Ce fait conjugué aux raisons énoncées plus haut concernant les cavités formées de trois miroirs (sect II.3.1.5) et à l'augmentation du nombre de modes dégénérés, complique l'interprétation de la dynamique spatio-temporelle du faisceau de cavité. Toutefois, tant que  $q < 4$ , on observe des états suffisamment symétriques pour être identifiés.

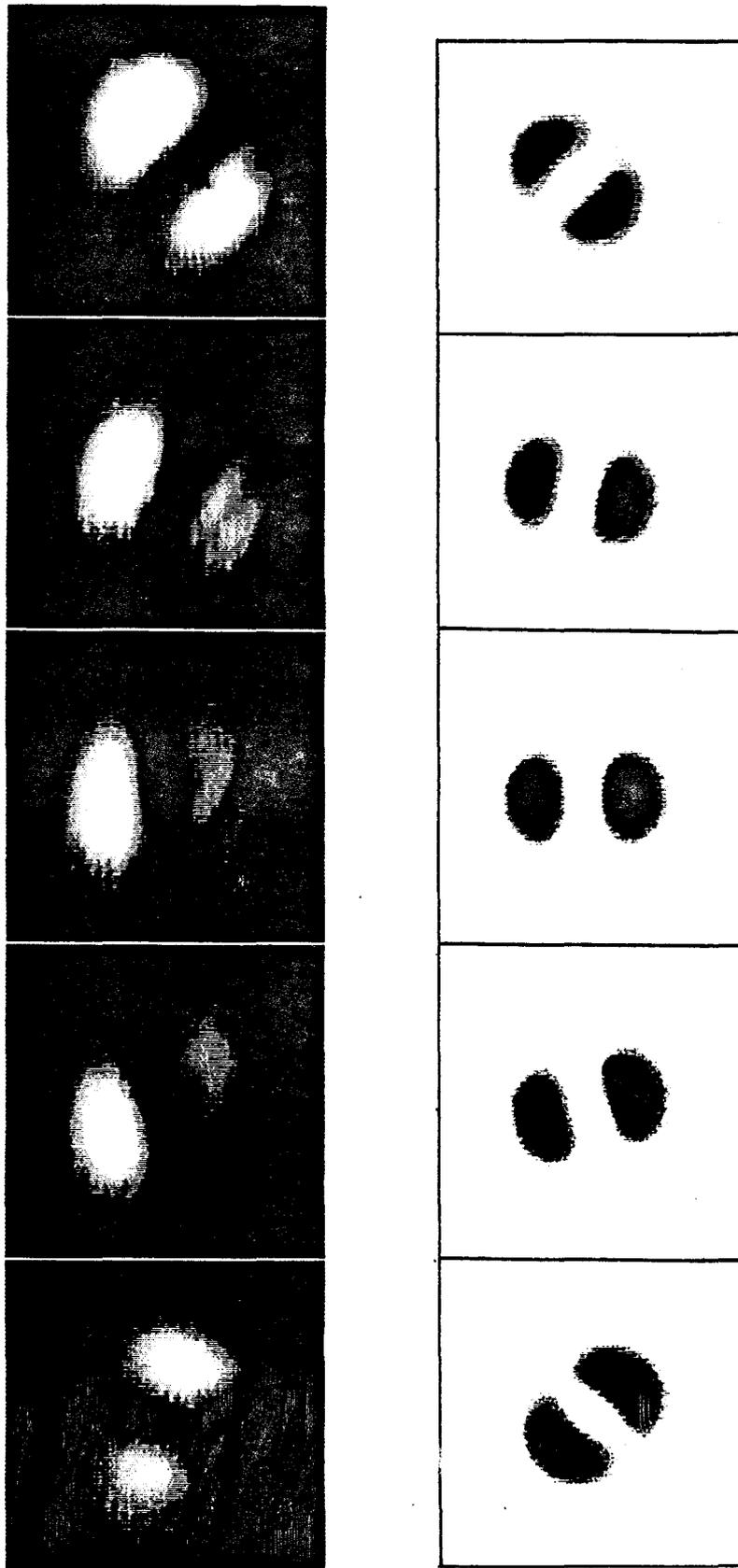


Figure II.29: Régime périodique au sein de la famille  $q = 1$  engendré par un oscillateur constitué de quatre miroirs.

Par ailleurs, dans ce type de résonateur, on peut envisager une description basée sur l'analyse du nombre, de la position et de la charge des singularités de phase qui coexistent dans les structures (section I.2.1). Dans cette description, les états stationnaires correspondent à des structures où les défauts sont régulièrement disposés. La figure II.30 montre la distribution transverse d'intensités du faisceau intracavité pour des profils respectivement composés de 1, 2, 3, 4 et 7 singularités de phases. Ces structures sont similaires à celles observées avec des lasers  $\text{CO}_2$  et  $\text{Na}$  (M. Brambilla et al [1990] et M. Brambilla et al [1993]). En ce qui concerne les régimes périodiques décrits plus haut, ils se traduisent aussi par des mouvements périodiques de défauts qui implique généralement le mécanisme de création et de destruction de paires.

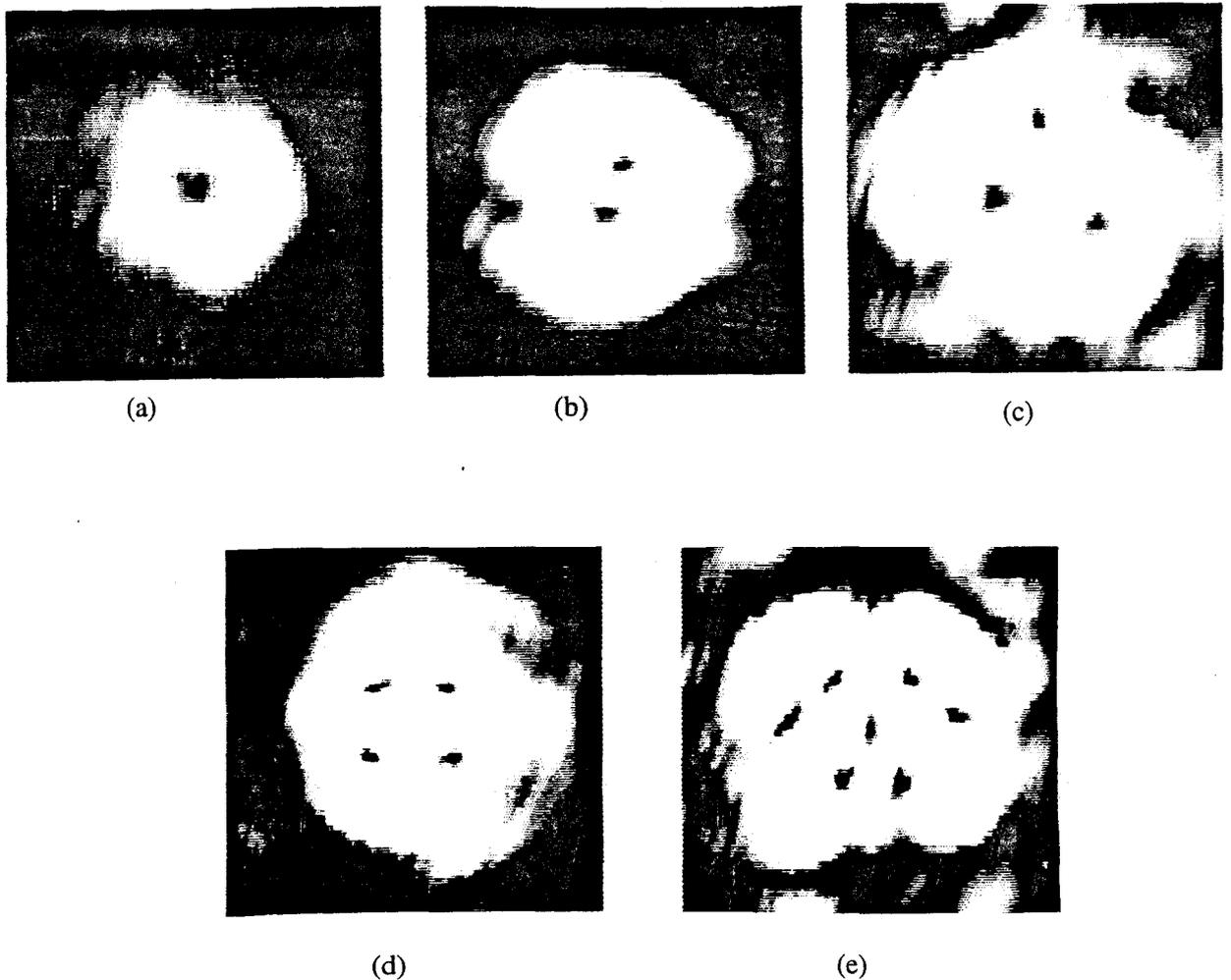


Figure II.30: Distribution transverse de l'intensité des modes (a) 1H, (b) 2H, (c) 3H, (d) 4H et (e) 7H.

#### **II.4.2: Influence des écarts à la symétrie cylindrique**

Le concept de symétrie est extrêmement rigide en mathématiques. En particulier, l'écart à une symétrie donnée n'est jamais évalué, dans la mesure où un système est ou n'est pas invariant par rapport à un groupe de transformations. En physique, et spécifiquement dans les structures transverses engendrées par des systèmes optiques, il apparaît que la notion de *symétrie imparfaite* joue un rôle très important (Tredicce [1992]). Malheureusement, n'ayant pas d'origine mathématique, cette notion est restée très qualitative. On pourrait envisager d'évaluer quantitativement l'écart à une symétrie de référence en mesurant, par exemple, les modifications de l'image de l'invariant de la symétrie de référence dans le système réel. Une approche plus physique consisterait à mesurer l'influence de l'écart d'un élément du dispositif par rapport à sa position optimisant la symétrie du système. Ce pourrait être l'ajustement de l'angle d'un miroir, la position d'un diaphragme ou tout autre élément perturbateur. Malheureusement, une telle mesure n'aurait que très peu de relations avec les brisures effectives de la symétrie transverse du système. En effet, comme nous l'avons vu, des modifications drastiques de la symétrie globale du dispositif peuvent n'avoir que peu ou pas du tout d'influence comme dans le cas de l'utilisation de cavités formées d'un nombre impair de miroirs, sur la symétrie des structures transverses. Nous nous contenterons par conséquent ici d'une approche purement qualitative, qui peut être considérée comme une introduction à un travail futur.

Dans la mesure où, expérimentalement, l'accès à la symétrie transverse de la cavité ne peut se faire que de façon indirecte, une modification de cette symétrie sera en général associée à une variation des fréquences des modes propres. Un changement de la symétrie transverse de la cavité à l'exclusion de toute autre ne peut être, dans l'état actuel du dispositif expérimental, que le fruit d'une combinaison heureuse de plusieurs paramètres et ne saurait être facilement reproductible. Il est cependant relativement facile de distinguer les types de modifications que subissent les modes et d'émettre des hypothèses sur leur provenance. Il s'agit (i) des altérations globales de la forme de la structure transverse, (ii) de l'apparition d'une direction privilégiée et (iii) de la levée de dégénérescence des fréquences propres.

(i) Le premier type d'écart à la symétrie cylindrique induit la déformation des taches qui composent les modes propres du résonateur idéal ainsi qu'une variation de leur intensité relative. Au-delà d'un seuil dépendant de la complexité du régime observé, on ne reconnaît plus les modes et le profil transverse du faisceau sont constitué d'un ensemble de taches de lumière sans lien apparent. Finalement, les pertes que subit le faisceau intracavité sont trop importante pour qu'il puisse être engendré.

(ii) Pour examiner l'influence de la seconde espèce de brisure de symétrie, considérons une cavité formée d'un nombre pair de miroirs car l'existence d'axes privilégiés y résulte uniquement des imperfections du dispositif. Si les asymétries sont négligeables, les structures du faisceau de cavité possèdent la symétrie cylindrique et la base des doughnuts est la plus adaptée à leur description. Lorsque les écarts à la symétrie cylindrique croissent, un axe transverse est favorisé de façon de plus en plus marquée. Celui-ci engendre des hésitations du système concernant l'orientation d'un axe privilégié. Ces hésitations se manifestent, entre autres, par le régime périodique de la famille  $q = 1$  décrivant une rotation de l'axe qui porte les deux taches. L'amplitude angulaire de ce régime décroît avec les écarts du système à la symétrie cylindrique et en fournit donc une mesure. Lorsque ceux-ci croissent, le régime périodique se réduit finalement à un état stationnaire formé des deux taches de lumière et l'orientation de l'axe les portant détermine la direction privilégiée par le dispositif.

A l'extrême, si les défauts d'alignement sont tels que les pertes deviennent supérieures au gain, l'oscillateur ne "démarré" plus.

Dans un résonateur quasi-idéal constitué d'un nombre impair de miroirs, on observe toujours des états stationnaires composés de modes en résonances avec la courbe de gain. Pour des asymétries de faibles amplitudes, on observe encore des états stationnaires mais leur structure transverse est modifiée. Mais contrairement aux effets induit par premier type d'asymétries, la base de modes propres du système de référence reste adaptée à la description du profil du faisceau intracavité. Par exemple, si on considère les modes symétriques de la famille  $q = 2$ , pour des écarts croissant à la symétrie cylindrique, le profil transverse de l'état stationnaire correspond successivement au mode  $4H$ ,  $A_{0,2,i}$  et  $H_{20}$  ou  $H_{02}$  (fig. II.16). Globalement, le "poids relatif" des modes favorisant la direction privilégiée par les écarts à la symétrie cylindrique augmente avec l'ampleur de celles-ci.

En ce qui concerne les régimes périodiques, lorsque les asymétries croissent, on observe le même comportement. En effet, pour de faibles écarts à la symétrie cylindrique, le régime  $P^{(2)}$  peut être décrit uniquement à partir des modes de la cavité idéale  $A_{10}$  et  $A_{021}$  comme le montre la figure II.18b. Les quatre singularités de phases incluses dans ce régime apparaissent et disparaissent mais restent immobiles. Par contre, l'existence de brisures de symétrie induit une oscillation supplémentaire entre les modes  $H_{20}$  et  $H_{02}$ , dont l'influence relative est fixée par l'orientation de l'axe privilégié. Les singularités de phases acquièrent donc un mouvement complexe dans lequel elles se créent et se détruisent par paires conformément à la vision particulière introduite dans la section I.2.1.

(iii) Ce type de brisures de symétrie lève partiellement la dégénérescence des fréquences propres du système en fonction de la structure transverse des modes propres. Le décalage en fréquence induit dépend donc essentiellement de la forme du mode propre et augmentent avec l'ampleur des écarts à la symétrie cylindrique.

Dans la section II.3.4, nous montrons que les fréquences des régimes périodiques résultent d'une différence de fréquence passive entre les modes transverses impliqués dans le régime considéré. La levée de dégénérescence induite par les asymétries du dispositif permet donc d'expliquer l'existence de régimes périodiques intra-famille. Et d'en déduire que si le système possède la symétrie cylindrique, la dynamique au sein de chaque famille se réduit à des états stationnaires. Néanmoins, les régimes périodiques inter-familles continuent à exister car les fréquences des familles ne sont, fort probablement, pas dégénérées.

"Ah! l'univers m'embarrasse! et je ne puis songer que cette horloge existe et n'ait point d'horloger"

Voltaire

## *Troisième partie*

### *Aspects théoriques:*

#### *Modèle stationnaire de l'oscillateur à gain photoréfractif*

Dans la section II.3.1, il apparaît que le même mode peut osciller lorsque la fréquence de résonance de la cavité varie sur un domaine  $10^6$  fois plus grand que la largeur de la courbe de gain du matériau. Par ailleurs, en 1990, le groupe d'Arecchi (F. T. Arecchi et al [1990]) a observé un comportement appelé: "alternance périodique" qui correspond à une séquence de modes de différentes familles se reproduisant périodiquement dans le temps.

Dans cette troisième partie, nous donnons une interprétation de ces comportements basée sur le tirage en fréquence induit par l'effet photoréfractif.

Dans un premier temps, nous ajoutons simplement la condition d'accord de phase inhérente à la cavité en anneau dans le modèle de mélange de deux ondes planes détaillé dans la section I.1.2.

Ensuite, nous dérivons un modèle stationnaire d'oscillateur à gain photoréfractif à partir de la description auto-cohérente de la cavité établie par Lamb (W. E. Lamb [1964]). Nous développons le champ électrique engendré dans l'oscillateur sur une base de modes transverses du résonateur et nous rejetons l'approximation du champ moyen. Après une discussion sur la forme des non-linéaires généralement mises en jeu, nous obtenons une expression du tirage en fréquence que subit chaque mode transverse.

La section III.3 est consacrée à l'étude des résultats de ce modèle pour des régimes monomodes et bimodes en nous basant sur des développements perturbatifs rendus possibles par la valeur de certains paramètres expérimentaux. Ces développements permettent de comprendre les propriétés du mélange à deux ondes et du tirage en fréquence de faisceaux possédant une structure transverse. Finalement, nous appliquons ce modèle à l'analyse de situations expérimentales et donnons une interprétation de l'"itinérance périodique" et une explication concernant la largeur du domaine de fréquence permettant l'oscillation d'une famille de modes.

### III.1 MODELE SANS STRUCTURE TRANSVERSE

Nous développons un modèle stationnaire d'oscillateur à gain photoréfractif basé sur les travaux de P. Yeh (P. Yeh [1985] et B. Fischer et al [1989]). Le modèle stationnaire du mélange à deux ondes planes, analysé dans la première partie, montre que l'évolution longitudinale de l'intensité des deux faisceaux dans le cristal est décrite par les solutions (I.22):

$$I_s(z) = I_s(0) \frac{1 + \beta}{1 + \beta e^{-\eta_s z}} e^{-\alpha z} \quad (\text{III.1})$$

$$I_p(z) = I_p(0) \frac{1 + \beta}{\beta + e^{-\eta_s z}} e^{-\alpha z} \quad (\text{III.2})$$

avec  $\eta_s = \sigma \sin(\varphi)$ .

Conformément aux définitions adoptées dans la première partie,  $\alpha$  est le coefficient d'absorption linéaire,  $\sigma$  le gain par unité de longueur et  $\varphi$  le déphasage entre les réseaux d'interférences et d'indice de réfraction dans le cristal photoréfractif. Le gain effectif  $\sigma$  peut être évalué à partir des relations (I.26) et (I.28):

$$\eta_s = \frac{-1}{L_c} \ln \left\{ \frac{1}{\beta} \left( \frac{1 + \beta}{\Gamma} - 1 \right) \right\}$$

Le gain  $\Gamma$  vaut environ 20 lorsque  $\beta \cong 250$  et que tous les autres paramètres sont optimisés ( $\varphi = \pi/2$ ) ce qui correspond à  $\sigma \cong 3 \text{ cm}^{-1}$  (voir section I.1.2.2).

La dépendance en  $z$  de la phase des deux faisceaux est donnée par la relation (I.21):

$$\Delta\psi(z) = \psi_j(z) - \psi_j(0) = -\frac{1}{2} \cotg(\varphi) \ln \left( \frac{I_j(z)}{I_j(0)} e^{\alpha z} \right) \quad (\text{III.3})$$

avec  $j = s$  ou  $p$ .

Conformément à la figure III.1, le cristal, placé dans une cavité en anneau et éclairé par le faisceau de pompe, y engendre suivant l'axe optique un faisceau d'intensité  $I_c$ . Le cristal est positionné et orienté de manière à optimiser les transferts d'énergie du faisceau de pompe vers celui de cavité. La condition d'accord de phase pour une cavité en anneau unidirectionnelle est:

$$I_c(0) = R_c I_c(L_c) \quad (\text{III.4})$$



où  $R_C$  représente le coefficient de réflexion de la cavité. D'autre part, l'intensité du faisceau de pompe indépendante du temps:

$$I_p(0) = \text{Constante} \quad (\text{III.5})$$

Afin de travailler avec des variables sans dimension, l'intensité du faisceau cavité est normalisée à celle du faisceau de pompe en  $z = 0$ :

$$I_C(z) = \frac{I_C(z)}{I_p(0)} \quad (\text{III.6})$$

On a donc  $I_C(0) = \beta^{-1}$ .

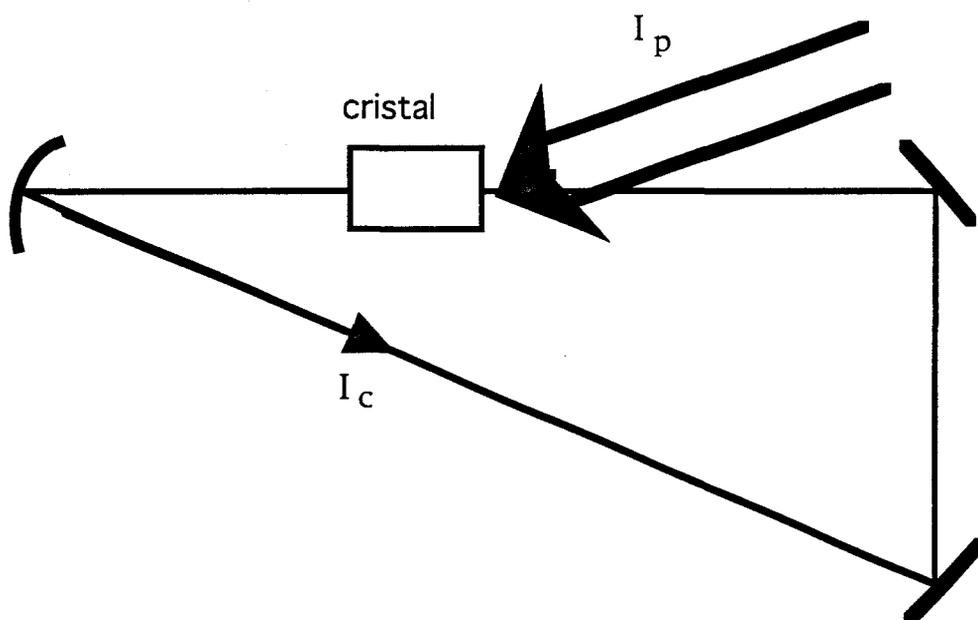


Figure III.1: Schéma de l'oscillateur à gain photoréfractif.

D'après les relations (III.1) et (III.3), l'état stationnaire atteint par l'intensité du faisceau intracavité en  $z = 0$  est le suivant:

$$I_C(0) = \frac{R_C e^{-\alpha L_C} - e^{-\eta_s L_C}}{(1 - R_C e^{-\alpha L_C})} \quad (\text{III.7})$$

La condition de seuil d'oscillation est remplie dès que l'intensité du faisceau intracavité est positive:

$$\eta_s L_C \geq \eta_{\text{seuil}} L_C = \alpha L_C - \ln(R_C) \quad (\text{III.8})$$

La solution triviale ( $I_C(0) = 0$ ) est stable si cette condition n'est pas vérifiée sinon c'est la solution (III.7) qui est stable (Tab. III.1).

Tableau III.1: Analyse de stabilité de l'état stationnaire

	$\eta_s < \eta_{\text{seuil}}$	$\eta_s > \eta_{\text{seuil}}$
0	stable	instable
$\frac{R_c e^{-\alpha} L_c - e^{-\eta_s} L_c}{1 - R_c e^{-\alpha} L_c}$	instable	stable

Pour étudier ce qui se passe au voisinage de la bifurcation, nous introduisons le paramètre de bifurcation  $\delta$ :

$$\eta_s = \eta_{\text{seuil}} + \delta \quad \text{avec } \delta \ll 1 \quad (\text{III.9})$$

A l'ordre le plus faible en  $\delta$ , l'intensité de l'état stationnaire non trivial est proportionnelle à  $\delta$ :

$$I_c(0) = \delta L_c \frac{e^{-\eta_{\text{seuil}}} L_c}{1 - R_c e^{-\alpha} L_c} + O(\delta^2) \quad (\text{III.10})$$

L'échange de stabilité entre la solution triviale et la solution oscillante se fait donc via une *bifurcation transcritique* (fig. III.2).

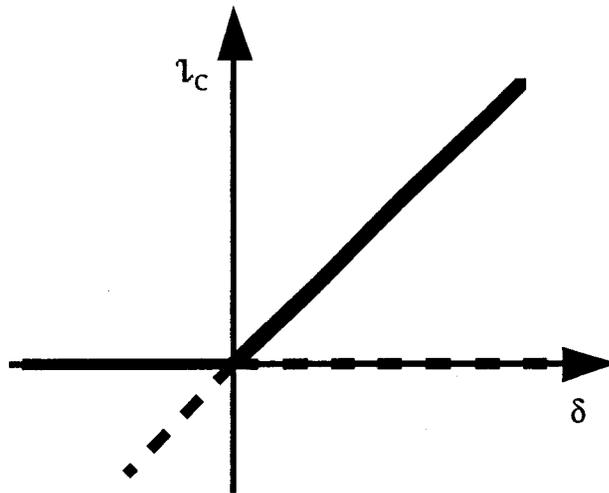


Figure III.2: Bifurcation avec échange de stabilité au seuil de démarrage de l'oscillateur à gain photoréfractif.

Dans le cadre de ce modèle, nous allons évaluer le décalage entre la fréquence passive  $\nu_c$  et active  $\nu_c'$  d'un mode propre longitudinal. D'une manière générale, nous appelons "tirage en fréquence" l'écart  $\nu_c' - \nu_c$ . La

condition d'accord de phase exprime le fait que sur un tour complet de cavité la variation de la phase du faisceau est un multiple entier de  $2\pi$ :

$$v_c' \frac{L_r}{c} = v_c \frac{L_r}{c} + \Delta\psi_c(L_c) \quad (\text{III.11})$$

où  $\Delta\psi_c(z)$  est l'avance de la phase du faisceau sur une longueur de cristal et  $L_r$  la longueur optique du résonateur. En vertu de l'équation (III.1) le tirage en fréquence normalisé à l'intervalle spectral longitudinal  $\Delta\nu_L$  prend la forme suivante à l'état stationnaire:

$$\Delta\nu_c = \frac{v_c' - v_c}{\Delta\nu_L} = -\frac{1}{2} \cotg(\varphi) \{ \ln(R_c) + (\eta_s - \alpha) L_c \} \quad (\text{III.12})$$

La figure III.3a, qui représente  $\Delta\nu_c$  en fonction du déphasage  $\varphi$  entre les réseaux d'interférences et d'indice de réfraction, montre que  $\Delta\nu_c$  présente des valeurs infinies pour  $\varphi = 0 \pmod{\pi}$ . En d'autres termes, le mode peut osciller à une fréquence active  $v_c'$  distante de plusieurs  $\Delta\nu_L$  de sa fréquence passive  $v_c$ . Notons cependant que la condition de seuil III.8 représentée à la figure III.3b, n'est pas satisfaite pour ces valeurs de  $\varphi$ : il n'y a donc ni transfert d'énergie ( $\eta_s \equiv 0$ ) ni amplification du faisceau de cavité. A l'opposé, pour les valeurs de  $\varphi$  optimisant les transferts d'énergie:  $\varphi = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ , le tirage en fréquence  $\Delta\nu_c$  s'annule. Néanmoins, la figure III.3c montre que pour les valeurs de  $\varphi$  permettant le démarrage de la cavité, le tirage en fréquence maximal atteint 0.2.

Ce modèle simplifié permet donc d'expliquer la transition spontanée entre deux familles voisines de modes transverses même s'il est tout à fait insuffisant pour justifier des comportements expérimentaux d'alternance périodique ou chaotique impliquant successivement six ou sept familles de modes (F. T. Arecchi [1990]). Pour tenter d'expliquer ces comportements, nous développons, dans les prochaines sections, un modèle plus complet tenant compte de l'interaction non linéaire du faisceau intracavité avec le matériau photoréfractif et introduisant en outre le profil transverse des faisceaux.

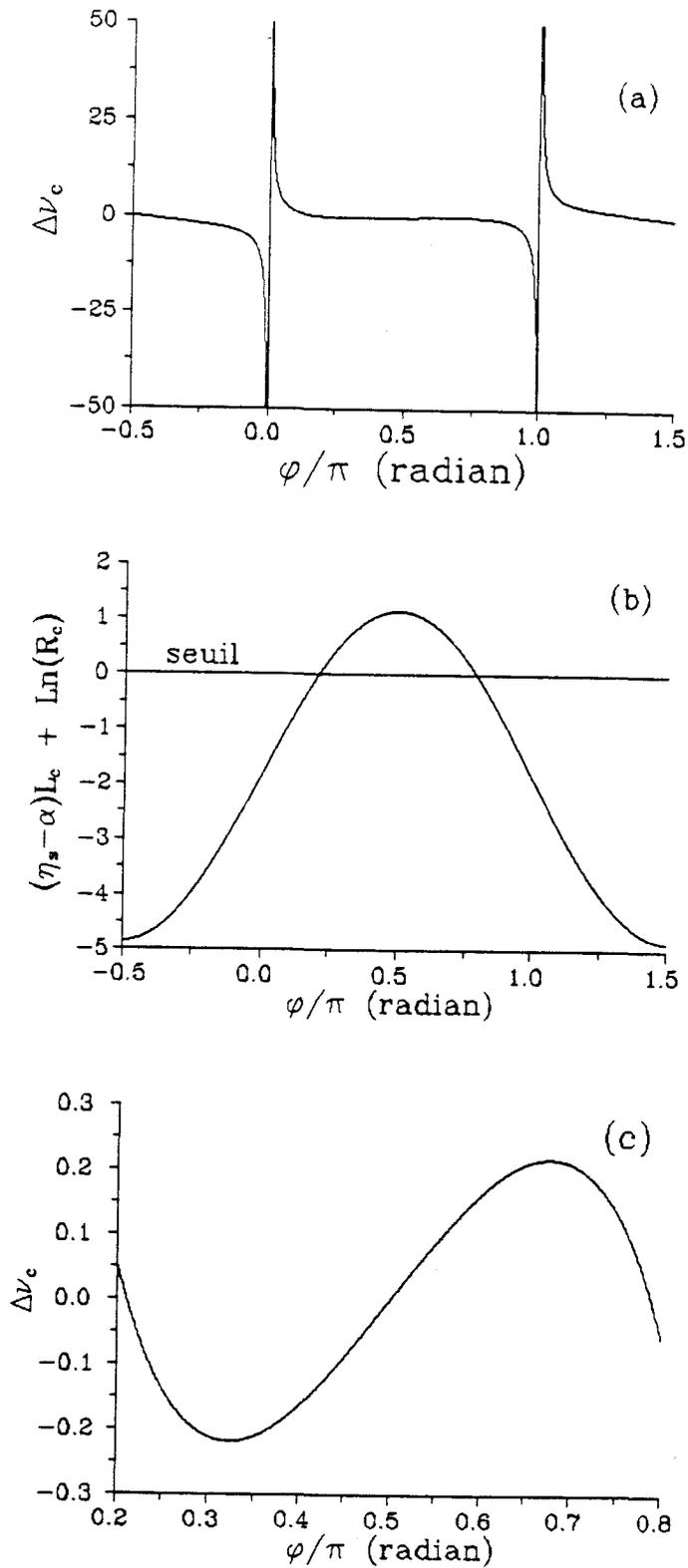


Figure III.3: Evolution en fonction de  $\varphi$  des grandeurs caractéristiques de l'oscillation: (a) le tirage en fréquence; (b) la condition de seuil et (c) le tirage en fréquence dans l'intervalle permettant l'oscillation ( $\sigma = 3 \text{ cm}^{-1}$ ,  $L_c = 1 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 0.46 \text{ cm}^{-1}$  et  $R_c = 0.7$ ).

## III.2: MODELE AVEC STRUCTURE TRANSVERSE

Pour évaluer l'influence du profil transverse du faisceau de cavité sur le tirage en fréquence  $\Delta\nu_C$ , nous présentons un modèle de cavité incluant les degrés de liberté spatiaux. Puis, nous particularisons les effets non linéaires à ceux du mélange à deux ondes dans un matériau photoréfractif. Cette façon de procéder permet d'affiner progressivement la modélisation, d'améliorer la description des non-linéarités et de proposer des approximations réalistes. Un modèle stationnaire de mélange à deux ondes dont l'une est multimode transverse sera dérivé. Celui-ci permettra l'étude de l'évolution de l'amplitude des modes transverses lors de chaque passage dans le cristal. Ensuite, l'expression du tirage en fréquence sera déduite dans le cas général et analysée dans des cas particuliers. Et finalement, nous effectuons une comparaison avec les résultats expérimentaux.

### III.2.1: Modèle de cavité

Le système étudié est schématisé par la figure III.1: les deux faisceaux interfèrent dans un cristal photoréfractif aligné dans une cavité en anneau. Les champs électriques  $E_p(\mathbf{r},t)$  et  $E(\mathbf{r},t)$  des faisceaux de pompe et de cavité, se propagent symétriquement par rapport à la normale à la face d'entrée du cristal suivant des directions formant un angle  $2\theta$ .

La description de ce système présentée par Sze-Kwong et *al* [1986] utilise un schéma d'auto-cohérence similaire à celui introduit par Lamb (W. E. Lamb [1964]) pour le laser: le réseau matériel créé dans le cristal photoréfractif par le biais du mélange à deux ondes ( $E_p(\mathbf{r},t)$  et  $E(\mathbf{r},t)$ ), interagit avec le faisceau de pompe donnant naissance à une polarisation non linéaire, laquelle sert de source au faisceau de cavité. Ce modèle, repris dans cette section, est amélioré et généralisé aux situations multimode transverses. Il est dérivé en deux temps. Le premier est consacré à l'établissement d'un modèle de cavité permettant d'accéder à une équation de dispersion pour les modes actifs dont on déduit le tirage en fréquence. Dans le second temps, la partie non linéaire de la polarisation de la matière qui apparaît comme source du champ de cavité est adaptée au cas d'un couplage photoréfractif entre les deux faisceaux.

Dans ce modèle stationnaire, nous tenons compte de la nature transverse des champs de cavité par un développement sur la base des états propres du résonateur vide. On obtient une hiérarchie infinie d'équations pour les amplitudes modales que l'on peut tronquer en fonction du nombre de modes impliqués dans le régime décrit.

Les champs électrique  $\mathbf{E}$  et magnétique  $\mathbf{H}$  du faisceau de cavité sont donc exprimés sur la base des modes propres des champs électriques  $\mathbf{E}_a$  et magnétiques  $\mathbf{H}_a$  du résonateur vide:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \sum_{a=1}^{\infty} p_a(z, t) \mathbf{E}_a(\mathbf{r}) \quad (\text{III.13a})$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sum_{a=1}^{\infty} \omega_a q_a(z, t) \mathbf{H}_a(\mathbf{r}) \quad (\text{III.13b})$$

où  $\epsilon, \mu$  ( $\approx \mu_0$ ) sont la permittivité électrique et la perméabilité magnétique dans le cristal. Les variables  $p_a$  et  $q_a$  représentent respectivement les amplitudes complexes des modes  $\mathbf{E}_a$  et  $\mathbf{H}_a$  de la base. Le symbole "a" regroupe tous les indices nécessaires à la caractérisation d'un mode propre de la cavité. Par exemple, si le dispositif possède la symétrie cylindrique, la base de modes de Laguerre-Gauss est choisie et "a" représente les indices caractérisant le mode (sect. I.2.2.1). Les modes sont liés par les relations d'orthonormalisation suivantes:

$$\int_{V_r} \mathbf{E}_a^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_b(\mathbf{r}) dV = \delta_{ab} \quad \forall a, b \quad (\text{III.14a})$$

$$\int_{V_r} \mathbf{H}_a^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H}_b(\mathbf{r}) dV = \delta_{ab} \quad \forall a, b \quad (\text{III.14b})$$

où l'intégration s'effectue sur tout le volume du résonateur  $V_r$ .

Dans les expériences décrites précédemment (sect. II.1.1), le matériau photoréfractif est uniformément illuminé par le faisceau de pompe que nous considérons comme une onde plane du fait de sa forme gaussienne de largeur à mi-hauteur cinq à six fois plus élevée que le cristal:

$$\mathbf{E}_p(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_p(r_{\perp}, z, t) = -\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} p_0(z, t) \mathbf{E}_0 \quad (\text{III.15})$$

Les modes propres du résonateur sont caractérisés par les relations suivantes, déduites des équations de Maxwell:

$$\nabla \wedge \mathbf{E}_a = k_a \mathbf{H}_a \quad (\text{III.16})$$

$$\nabla \wedge \mathbf{H}_a = k_a \mathbf{E}_a \quad \forall a \quad (\text{III.17})$$

où  $k_a = \omega_a \sqrt{\epsilon \mu}$  et  $\omega_a$  est la *fréquence angulaire passive* du mode a.

La différence majeure de notre modèle, comparé à celui de Kwong et al [1986], est le maintien de la dépendance longitudinale explicite des coefficients  $p_a$  et  $q_a$ . En effet, d'après la section II.1.3.2, pour qu'un faisceau soit créé dans la cavité, il faut que le gain du cristal photoréfractif compense plus de 70 % de pertes, sur une longueur d'un centimètre. Même au voisinage du seuil d'oscillation, la dépendance en  $z$  de l'amplitude du faisceau ne peut être négligée. Contrairement aux travaux récents (D. Z. Anderson et R. Saxena [1987] et G. P. D'Alessandro [1992]) et aux modèles de lasers, nous rejetons l'approximation du champ moyen qui suppose que, sur un tour de cavité, les variations du champ de cavité sont négligeables.

Les transferts d'énergie dus aux interactions entre le champ optique et la matière sont liés à l'existence d'une polarisation  $\mathbf{P}$  dont la partie non linéaire  $\mathbf{P}_{NL}$  est définie par:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E} + \mathbf{P}_{NL}$$

où  $\chi$  est la partie linéaire de la susceptibilité électrique du milieu et  $\epsilon_0$  la permittivité électrique du vide.

En utilisant les lois de l'électromagnétisme reliant les champs électrique  $\mathbf{E}$  et magnétique  $\mathbf{B}$  aux grandeurs matérielles  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{J}$ :

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \quad \mathbf{J} = \rho \mathbf{E}. \quad (\text{III.18})$$

où  $\rho$  est la résistivité du matériau. Les équations de Maxwell appliquées, au champ de cavité  $\mathbf{E}$ , peuvent s'écrire

$$\nabla \wedge \mathbf{H} = \rho \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}_{NL}}{\partial t} \quad (\text{III.19a})$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (\text{III.19b})$$

Compte tenu des développements modaux (III.13) des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  et des relations (III.18), les équations (III.19) deviennent:

$$\sum_{a=1}^{\infty} \left\{ \frac{\omega_a}{\sqrt{\mu}} [k_a q_a \mathbf{E}_a + \mathbf{H}_a \wedge \nabla q_a] + \frac{\rho}{\sqrt{\epsilon}} p_a \mathbf{E}_a + \sqrt{\epsilon} \mathbf{E}_a \frac{\partial p_a}{\partial t} \right\} = \frac{\partial \mathbf{P}_{NL}}{\partial t} \quad (\text{III.20a})$$

$$\sum_{a=1}^{\infty} \left\{ \mathbf{E}_a \wedge \nabla p_a + k_a \mathbf{H}_a [p_a - \frac{\partial q_a}{\partial t}] \right\} = 0 \quad (\text{III.20b})$$

En dehors du cristal, il ne se produit aucun échange d'énergie et les termes  $\nabla p_a$  et  $\nabla q_a$  sont donc nuls. Dans le cristal, cette relation reste valable à l'ordre le plus bas de l'approximation consistant à négliger les variations

longitudinales de  $p_a$  et  $q_a$  sur une longueur d'onde  $\lambda$ . Des simulations numériques du mélange à deux ondes assurent que la longueur caractéristique d'évolution de  $p_a$  et  $q_a$ , dans le cristal, vaut environ  $10^{-3}$  m alors que  $\lambda \approx 5 \cdot 10^{-7}$  m (sect. II.1.1) ce qui permet d'affirmer la validité de cette approximation. Celle-ci est connue sous le nom d'*approximation de l'amplitude lentement variable* et est d'application générale en optique visible.

L'équation (III.20b) se réduit à

$$p_a = \frac{\partial q_a}{\partial t} \quad \forall a$$

et, l'équation (III.20a), après dérivation par rapport au temps, s'écrit:

$$\sum_{a=1}^{\infty} \left\{ \frac{\omega_a}{\sqrt{\mu}} k_a p_a E_a + \frac{\rho}{\sqrt{\varepsilon}} E_a \frac{\partial p_a}{\partial t} + \sqrt{\varepsilon} E_a \frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} \right\} \equiv \frac{\partial^2 P_{NL}}{\partial t^2}$$

On peut alors projeter cette dernière équation sur un mode transverse  $E_d$  et, tenant compte des relations d'orthonormalisation (III.15a), obtenir la hiérarchie suivante:

$$\begin{aligned} \left( \omega_d^2 + \frac{\omega_d}{Q_d} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left\{ p_d(0,t) + \int_0^{L_R} p_d(z,t) dz \right\} \\ \equiv \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{V_C} E_d^*(\mathbf{r}) P_{NL}(z,t) dV \end{aligned} \quad (III.21)$$

où  $V_C$  est le volume du cristal et  $Q_d = \omega_d (\varepsilon/\rho)$  le facteur de qualité de la cavité pour le mode d. Cette description suppose en outre que:

- L'intégration du membre de droite de III.21 est uniquement effectuée sur le volume du cristal  $V_C$  car  $P_{NL}$  est nul en dehors.

- Dans le terme entre accolades du membre de gauche de III.21, nous avons négligé, devant l'unité, le rapport entre les longueurs du cristal  $L_C$  et de Rayleigh  $L_R$  (I.55). Cette dernière apparaît suite à la normalisation de la coordonnée longitudinale dans l'expression des modes propres. A titre d'exemple, les conditions expérimentales de la section II.1.3.1, sont telles que  $L_R/L_C \approx 24$ .

L'équation d'évolution de l'amplitude modale (III.21) résulte d'un modèle de cavité tout à fait standard contenant un milieu non linéaire. Dans la section suivante, la polarisation non linéaire  $P_{NL}$  est adaptée au cas où le milieu est un cristal photoréfractif.

### III.2.2: Couplage photoréfractif

La polarisation non linéaire  $P_{NL}$ , source du faisceau de cavité  $E(\mathbf{r},t)$ , est produite par la diffraction du faisceau de pompe  $E_p(\mathbf{r},t)$  sur le réseau d'indice de réfraction créé via l'effet photoréfractif. Le réseau d'interférences engendré par les champs  $E_p(\mathbf{r},t)$  et  $E(\mathbf{r},t)$  illuminant le milieu de façon non-uniforme, les charges électriques induites par photoexcitation se déplacent pour créer un réseau de champ de charges d'espace et donc un réseau d'indice de réfraction au sein du matériau par effet Pockels. Dans le modèle de N. V. Kukhtarev (N. V. Kukhtarev et al [1979]) basé sur la description de phénomènes intrinsèques au semi-conducteur, la polarisation non linéaire prend la forme:

$$P_{NL}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \Delta n(\mathbf{r},t) E_p(\mathbf{r},t).$$

où  $\epsilon_0$  est la constante diélectrique du vide et  $\Delta n(\mathbf{r},t)$  le réseau d'indice de réfraction formé par l'interférence entre les faisceaux de pompe et de cavité. Compte tenu des mécanismes de création de l'indice de réfraction,  $\Delta n(\mathbf{r},t)$  est proportionnel au réseau d'interférences:

$$\Delta n(\mathbf{r},t) \propto \frac{E_p^*(\mathbf{r},t) \cdot E(\mathbf{r},t)}{I_T(\mathbf{r},t)}$$

L'intensité  $I_T(\mathbf{r},t)$  de normalisation que nous adoptons dans ce travail a la forme suivante:

$$I_T(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\epsilon} |p_0(z,t) E_0(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{\epsilon} \left| \sum_{c=1}^{\infty} p_c(z,t) E_c(\mathbf{r}) \right|^2 \quad (\text{III.22})$$

Celle formulation du facteur de normalisation est une généralisation immédiate de la formule (I.10) dans laquelle figure la somme des intensités des faisceaux de pompe et de cavité.

L'introduction dans  $\Delta n(\mathbf{r},t)$  des développements modaux (III.13a) et (III.15) conduit au réseau d'indice suivant:

$$\Delta n(\mathbf{r},t) \propto \sum_{a=1}^{\infty} \frac{\sigma_a e^{i\varphi_a} p_0^*(z,t) p_a(z,t) E_0^*(\mathbf{r}) \cdot E_a(\mathbf{r})}{\omega'_a I_T(\mathbf{r},t)} \quad (\text{III.23})$$

où  $\omega'_a$ ,  $\sigma_a$  et  $\varphi_a$  sont la pulsation active, le gain effectif du mélange à deux ondes (sect. I.1.2.2) et le déphasage entre les réseaux d'interférences et

d'indice de réfraction du mode transverse  $E_a$ . Le numérateur de (III.23) exprime le couplage vectoriel entre la pompe et chaque mode du faisceau de cavité. Cette expression est caractéristique du mélange à deux ondes dans un cristal placé le long de l'axe optique avec une orientation adaptée. On en déduit que la polarisation non linéaire est proportionnelle à

$$P_{NL}(\mathbf{r},t) \propto \sum_{a=1}^{\infty} \frac{\sigma_a e^{i\phi_a}}{\omega'_a} \frac{|p_0(z,t) E_0|^2 p_a(z,t) E_a(\mathbf{r})}{|p_0(z,t) E_0|^2 + \sum_{c=1}^{\infty} p_c(z,t) E_c(\mathbf{r})|^2} \quad (III.24)$$

Cette forme comprend non seulement la saturation des modes propres mais aussi des couplages entre ceux-ci. Remarquons que ce choix de  $I_T$  induit des interactions proportionnelles au produit des amplitudes des modes.

Dans une description générale incluant les dimensions transverses, la normalisation de l'indice de réfraction reste un problème ouvert et la solution choisie peut modifier considérablement les non-linéarités du système d'équations. Pour illustrer les implications de cette indétermination, trois autres propositions de normalisation sont exposées ci-après qui impliquent des non-linéarités différentes.

i) Si le terme d'interférence est normalisé à l'intensité incidente de la pompe c'est à dire à l'énergie injectée dans le système:

$$I_T(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\epsilon} |p_0(z,t) E_0(\mathbf{r})|^2$$

En effet, s'il est admis que le faisceau de pompe ne présente pas de structure transverse, en utilisant les propriétés d'orthonormalisation des modes du résonateur, la partie non linéaire de la polarisation du milieu est proportionnelle à:

$$P_{NL}(\mathbf{r},t) \propto \sum_{a=1}^{\infty} \frac{\sigma_a e^{i\phi_a}}{\omega'_a} p_a(z,t) E_a(\mathbf{r})$$

Il en résulte une amputation complète de tous les couplages entre les différents modes transverses et une élimination des termes de saturation!

ii) La deuxième possibilité consiste à normaliser le réseau d'indice  $\Delta n(\mathbf{r},t)$  par la somme des intensités des faisceaux de pompe et du mode considéré. Pour chaque mode, on définit une intensité de normalisation;

$$I_{aT}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\epsilon} |p_0(z,t) E_0(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{\epsilon} |p_a(z,t) E_a(\mathbf{r})|^2$$

Dans ce cas, les termes de saturation réapparaissent mais pas les couplages entre modes:

$$P_{NL}(\mathbf{r},t) \propto \sum_{a=1}^{\infty} \frac{\sigma_a e^{i\varphi_a}}{\omega'_a} \frac{|p_0(z,t) \mathbf{E}_0|^2 p_a(z,t) \mathbf{E}_a(\mathbf{r})}{|p_0(z,t) \mathbf{E}_0(\mathbf{r})|^2 + |p_a(z,t) \mathbf{E}_a(\mathbf{r})|^2}$$

iii) L'intensité totale de normalisation conforme aux notations introduites dans les références (S-K. Kwong et *al* [1986], D. Z. Anderson et *al* [1987], A. Yariv et *al* [1985] et G. P. D'Alessandro [1992]) est donnée par

$$I_T(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\varepsilon} |p_0(z,t) \mathbf{E}_0(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{c=1}^{\infty} |p_c(z,t) \mathbf{E}_c(\mathbf{r})|^2 \quad (\text{III.25})$$

et représente une sorte de normalisation de l'indice de réfraction par une densité locale d'énergie. Comme la définition (II.22), cette relation est une généralisation de la normalisation utilisée pour le mélange à deux ondes planes permettant d'obtenir un réseau d'indice de réfraction sans dimension. A notre connaissance, celle-ci ne possède pas de justification physique précise. En l'absence d'absorption, cette normalisation fait intervenir la conservation de l'énergie dans le mélange de deux ondes planes (I.24). La normalisation (III.25) induit des couplages non linéaires incluant des termes de saturation mais aussi des interactions entre les différents modes transverses puisque la polarisation est proportionnelle à:

$$P_{NL}(\mathbf{r},t) \propto \sum_{a=1}^{\infty} \frac{\sigma_a e^{i\varphi_a}}{\omega'_a} \frac{|p_0(z,t) \mathbf{E}_0|^2 p_a(z,t) \mathbf{E}_a(\mathbf{r})}{|p_0(z,t) \mathbf{E}_0|^2 + \sum_{c=1}^{\infty} |p_c(z,t) \mathbf{E}_c(\mathbf{r})|^2} \quad (\text{III.26})$$

Mais les couplages se font en intensité et non plus en champ comme dans la relation (III.24) que nous adoptons. Ceci constitue une autre différence entre ce modèle et ceux développés dans les travaux théoriques précédents (D. Z. Anderson et R. Saxena [1987] et G. P. D'Alessandro [1992]).

Pour conclure cette discussion concernant la dépendance des non-linéarités en fonction du choix de la normalisation de l'indice de réfraction, notons la cohérence d'une normalisation par une densité locale d'énergie qui permet la conservation de l'intensité totale dans les transferts d'énergie lors du mélange à deux ondes.

Si les expressions (III.22) de  $I_T(\mathbf{r},t)$  et (III.24) de  $P_{NL}$  sont reportées dans l'équation (III.21), on obtient:

$$\left( \omega_d^2 + \frac{\omega_d}{Q_d} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left\{ p_d(0,t) + \int_0^{L_c} p_d(z,t) dz \right\} \propto - \frac{1}{\varepsilon} \sum_{a=1}^{\infty} e^{i\varphi_a} \frac{\sigma_a}{\omega'_a} \frac{\partial^2 H_{ad}}{\partial t^2}$$

(III.27a)

$$\text{avec } H_{ad} = \int_{V_c} |p_0(z,t)|^2 p_a(z,t) \frac{[\mathbf{E}^*_d \cdot \mathbf{E}_0] [\mathbf{E}^*_0 \cdot \mathbf{E}_a]}{I_T(\mathbf{r},t)} dV \quad (\text{III.27b})$$

L'évolution rapide des amplitudes modales à la fréquence optique est isolée en se plaçant dans le référentiel tournant au moyen du changement de variables suivant:

$$p_0(z,t) = \varphi_0(z) e^{i\omega_p t}$$

$$p_d(z,t) = \varphi_d(z) e^{i\omega'_d t}$$

Par souci de cohérence avec l'hypothèse de stationnarité, les amplitudes  $\varphi_d$  et  $\varphi_0$  sont choisies indépendantes du temps.

Dans la limite des temps longs, la polarisation non linéaire s'écrit (N. V. Kukhtarev et al [1979]):

$$P_{NL}(\mathbf{r}) = \frac{2c\epsilon_0}{\epsilon^2} \sum_{a=1}^{\infty} \frac{\sigma_a e^{i\varphi_a}}{\omega'_a} \frac{|\varphi_0(z) \mathbf{E}_0|^2 \varphi_a(z) \mathbf{E}_a(\mathbf{r})}{|\varphi_0(z) \mathbf{E}_0|^2 + \sum_{c=1}^{\infty} \varphi_c(z) \mathbf{E}_c(\mathbf{r})^2}$$

Cette simplification permet d'écrire l'équation (III.27a) sous la forme suivante:

$$\{(\omega_d^2 - \omega'^2_d) + i \frac{\omega_d \omega'_d}{Q_d}\} \left\{ \varphi_d(0) + \int_0^{L_c} \varphi_d(z) dz \right\}$$

$$\equiv \frac{2c\epsilon_0}{\epsilon^2} \sum_{a=1}^{\infty} \sigma_a e^{i\varphi_a} \omega'_a H_{ad} e^{i(\omega'_a - \omega'_d)t} \quad (\text{III.28})$$

où l'approximation de l'enveloppe lentement variable a été appliquée:

$$\left| \frac{d^2}{dt^2} \varphi \right| \ll \left| \omega \frac{d}{dt} \varphi \right| \ll \left| \omega^2 \varphi \right|$$

Compte tenu de la faible valeur du rapport  $L_c/L_R$  (voir discussion de III.21) et des pertes par diffraction liées à la propagation dans le cristal, on peut négliger la dépendance longitudinale des modes propres de la cavité dans le cristal (H. Kogelnik et T. Li [1966] et L. A. Lugiato et al [1990]) et

extraire des composantes du champ le facteur de phase lié à la propagation. Mathématiquement, cela se traduit par:

$$\begin{aligned} E_a(\mathbf{r}) &\approx E'_a(\mathbf{r}_T) e^{-ik_a z} \\ E_0(\mathbf{r}) &= E'_0 e^{-ik_p z} \end{aligned} \quad (\text{III.29})$$

où  $\mathbf{r}_T$  est un vecteur du plan transverse. Cette simplification permet de séparer les intégrales transverse et longitudinale dans le terme de couplage  $H_{ad}$  (III.27b):

$$H_{ad}(z) = \int_0^{L_c} |\varphi_0(z)|^2 \varphi_a(z) G_{da}(z) dz \quad (\text{III.30})$$

avec

$$G_{ad}(z) = \int_{\sigma_T} \frac{[\mathbf{E}'_a \cdot \mathbf{E}_0] [\mathbf{E}'_0 \cdot \mathbf{E}_d]}{I_T(\mathbf{r})} d\mathbf{r}_T \quad (\text{III.31})$$

où  $\sigma_T$  est la section du cristal.

Dans l'interaction multimode, la fonction  $G_{ad}$  est l'élément (a,d) d'une matrice carrée dont la dimension est égale au nombre de modes considérés. Cette fonction représente la proportion du faisceau de pompe qui alimente le mode a par diffraction sur le réseau formé par le mode d et la pompe.

Avant d'analyser la dépendance longitudinale des amplitudes modales  $\varphi_a(z)$  dans le cristal, il convient de constater que l'équation (III.28) contient des termes de battement de la forme  $e^{i(\omega'_a - \omega'_d)t}$ . Leur présence est contraire à l'hypothèse de stationnarité de ce modèle qui nous a permis de négliger les dérivées temporelles. Il faut donc imposer une condition sur les fréquences actives.

### III.2.3: Condition de stationnarité

Notre but est d'évaluer la différence entre les fréquences actives et passives dans les régimes multimode. Pour être cohérent avec les hypothèses de ce modèle, les résultats présentés ne sont valables que pour des états stationnaires. De ce fait, ce modèle ne rend pas compte du régime transitoire qui crée le réseau d'indice de réfraction lors du démarrage de l'oscillation.

Chercher les états stationnaires de l'équation (III.28) nécessite d'imposer la dégénérescence de toutes les fréquences actives, les fréquences

passives étant fixées par la géométrie de la cavité. De ce fait, la condition de stationnarité prend la forme suivante:

$$\omega_p = \omega'_a = \omega' \quad \forall a \quad (\text{III.32})$$

L'équation (III.28) devient stationnaire pour les temps longs.

$$\{(\omega_d^2 - \omega'^2) + i \frac{\omega_d \omega'}{Q_d}\} \{ \rho_d(0) + \int_0^{L_c} \rho_d(z) dz \} \equiv \frac{2c\epsilon_0}{\epsilon} \sum_{a=1}^{\infty} \sigma_a e^{i\phi_a} \omega' H_{ad} \quad (\text{III.33})$$

où  $H_{ad}$  est donné par III.30.

L'analyse de l'équation (III.33) nécessite la connaissance de la dépendance longitudinale des amplitudes des modes transverses et la description des transferts d'énergie entre les faisceaux le long du cristal.

### III.2.4 Mélange à deux ondes

Cette section est consacrée à la généralisation, au régime multimode transverse, du modèle de mélange à deux ondes développé dans la section I.1.2. De façon plus pragmatique, nous étudions l'évolution des amplitudes modales  $\rho_0(z)$  et  $\rho_a(z)$  le long du cristal. Dans le cristal, les équations d'onde associées aux champs électriques s'écrivent:

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \rho \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \epsilon \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}_{NL}}{\partial t^2} \quad (\text{III.34a})$$

$$\Delta \mathbf{E}_p(\mathbf{r}, t) - \rho \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}_p}{\partial t} - \epsilon \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}_p}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}'_{NL}}{\partial t^2} \quad (\text{III.34b})$$

où  $\mathbf{P}_{NL}$  et  $\mathbf{P}'_{NL}$  sont respectivement les couplages non linéaires que subissent les faisceaux intracavité et de pompe.

Ces équations (III.34) sont développées sur les modes propres de la cavité (III.13a) et (III.15) qui sont supposés indépendants de  $z$  dans le cristal (III.29) du fait de la faible longueur d'interaction comparée à la longueur de Rayleigh. En raison de la stationnarité de ce modèle, les composantes des vecteurs d'onde  $k'_p$  et  $k'_a$  le long de l'axe optique sont égales:

$$k'_a = k'_p = \frac{2\pi}{\lambda_p} n_0 \cos(\theta)$$

où  $n_0$  est l'indice de réfraction intrinsèque du milieu et  $\lambda_p$  la longueur d'onde du faisceau de pompe.

Finalement, l'application de l'approximation de l'enveloppe lentement variable et la restriction au modèle stationnaire conduisent aux équations suivantes:

$$\sum_{a=1}^{\infty} \mathbf{E}_{a\perp} e^{i(\omega't - \mathbf{k}'_a z)} \left\{ 2i\mathbf{k}'_a \frac{\partial \varphi_a}{\partial z} + i\omega' \rho \mu_0 \varphi_a \right\} = -\mu_0 \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial^2 \mathbf{P}_{\text{NL}}}{\partial t^2} \quad (\text{III.35a})$$

$$\mathbf{E}_{0\perp} \left\{ 2i\mathbf{k}'_p \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} + i\omega' \rho \mu_0 \varphi_0 \right\} e^{i(\omega't - \mathbf{k}'_p z)} = -\mu_0 \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial^2 \mathbf{P}'_{\text{NL}}}{\partial t^2} \quad (\text{III.35b})$$

Comme précédemment, la projection sur le mode transverse  $\mathbf{E}_{d\perp}$  est effectuée:

$$2i\mathbf{k}'_d \frac{\partial \varphi_d}{\partial z} + i\omega' \rho \mu_0 \varphi_d = -\mu_0 \sqrt{\varepsilon} e^{-i(\omega't - \mathbf{k}'_d z)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{\sigma_T} d\mathbf{r}_{\perp} [\mathbf{E}^*_{d\perp} \mathbf{P}_{\text{NL}}] \quad (\text{III.36a})$$

$$2i\mathbf{k}'_p \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} + i\omega' \rho \mu_0 \varphi_0 = -\mu_0 \sqrt{\varepsilon} e^{-i(\omega't - \mathbf{k}'_p z)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{\sigma_T} d\mathbf{r}_{\perp} [\mathbf{E}^*_{0\perp} \mathbf{P}'_{\text{NL}}] \quad (\text{III.36b})$$

où le domaine d'intégration est limité à la section transverse du cristal  $\sigma_T$ . Notons que les relations d'orthonormalisation que nous avons utilisé pour obtenir les équations (III.36) ne sont pas celles qui sont introduites dans le modèle de cavité. En effet, les relations (III.14a) impliquent une intégrale selon les trois dimensions spatiales alors que celles qui sont utilisées ici ne concernent que les deux dimensions transverses. Néanmoins, les modes propres transverses satisfont aussi des relations d'orthonormalisation dans le plan transverse (voir sect. I.2.1).

Pour pouvoir développer les équations (III.36), il faut adapter le terme de source aux non-linéarités propres à l'effet photoréfractif. Dans ce cas,  $\mathbf{P}_{\text{NL}}$  est issu de la diffraction du faisceau de pompe sur le réseau d'indice de réfraction. Alors que  $\mathbf{P}'_{\text{NL}}$  traduit la diffraction du faisceau de cavité sur le même réseau. Mathématiquement, on obtient:

$$\mathbf{P}_{\text{NL}}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \Delta n(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}_p(\mathbf{r}, t)$$

$$\mathbf{P}'_{\text{NL}}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \Delta n^*(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t).$$

Conformément à (III.22),  $\Delta n(\mathbf{r})$  satisfait la relation suivante:

$$\Delta n(\mathbf{r}) = \frac{2c}{\varepsilon} \sum_{a=1}^{\infty} \frac{\sigma_a e^{i\varphi_a}}{\omega'} e^{i(k'_p - k'_a)z} \frac{\varphi_0^*(z) \varphi_a(z) [E_{0\perp}^* \cdot E_{a\perp}]}{I_T(\mathbf{r})}$$

$I_T(\mathbf{r})$  est donné par (III.25) et les équations (III.36) se mettent sous la forme:

$$\begin{aligned} 2ik_d \frac{d\varphi_d}{dz} + i\omega' \rho \mu_0 \varphi_d &= \\ \frac{2\omega'}{c} |\varphi_0(z)|^2 \sum_{a=1}^{\infty} \sigma_a e^{i\varphi_a} \varphi_a(z) G_{da}(z) \\ 2ik_p \frac{d\varphi_0}{dz} + i\omega' \rho \mu_0 \varphi_0 &= \\ \frac{2\omega'}{c} \varphi_0(z) \sum_{a=1}^{\infty} \sigma_a e^{-i\varphi_a} \varphi_a^*(z) \sum_{b=1}^{\infty} \varphi_b(z) G_{ab}(z) \end{aligned}$$

Les fonctions  $G_{ab}(z)$  étant définies par l'équation (III.31), on obtient:

$$\left( \frac{d}{dz} + \frac{\alpha}{2} \right) \varphi_d(z) = -i |\varphi_0(z)|^2 \sum_{a=1}^{\infty} e^{i\varphi_a} \frac{\sigma_a}{2} \varphi_a(z) G_{da}(z) \quad (\text{III.37a})$$

$$\left( \frac{d}{dz} + \frac{\alpha}{2} \right) \varphi_0(z) = -i \varphi_0(z) \sum_{a=1}^{\infty} e^{-i\varphi_a} \frac{\sigma_a}{2} \varphi_a^*(z) \sum_{b=1}^{\infty} \varphi_b(z) G_{ab}(z) \quad (\text{III.37b})$$

où la coordonnée  $z$  est remplacée par  $\frac{z}{\cos(\theta)}$  et le coefficient d'absorption linéaire du matériau  $\alpha$  est défini par:

$$\alpha = c \rho \mu_0$$

Les équations complexes (III.37) pour les amplitudes des modes sont transformées en équations réelles pour les intensités des modes:

$$\left( \frac{d}{dz} + \alpha \right) I_0(z) = I_0(z) \sum_{a=1}^{\infty} \sigma_a \sum_{b=1}^{\infty} \sqrt{I_a(z) I_b(z)} \operatorname{Im} (e^{-i\varphi_a} e^{i(\psi_b - \psi_a)} G_{ab}(z)) \quad (\text{III.38a})$$

$$\left( \frac{d}{dz} + \alpha \right) I_d(z) = I_0(z) \sum_{a=1}^{\infty} \sigma_a \sqrt{I_a(z) I_d(z)} \operatorname{Im} (e^{i\varphi_a} e^{i(\psi_a - \psi_d)} G_{ad}(z)) \quad (\text{III.38b})$$

et pour les phases du faisceau de pompe et des modes transverses:

$$\frac{d\psi_0(z)}{dz} = -\frac{1}{2} \sum_{a=1}^{\infty} \sigma_a \sum_{b=1}^{\infty} \sqrt{I_a(z) I_b(z)} \operatorname{Re} (e^{-i\varphi_a} e^{i(\psi_b - \psi_a)} G_{ab}(z)) \quad (\text{III.38c})$$

$$\frac{d\psi_d(z)}{dz} = -\frac{I_0(z)}{2} \sum_{a=1}^{\infty} \sigma_a \sqrt{\frac{I_a(z)}{I_d(z)}} \operatorname{Re} (e^{i\varphi_a} e^{i(\psi_a - \psi_d)} G_{ad}(z)) \quad (\text{III.38d})$$

où on a utilisé la décomposition polaire suivante:

$$\varphi_0 = \sqrt{I_0} e^{i\psi_0}$$

$$\varphi_d = \sqrt{I_d} e^{i\psi_d}.$$

Si on néglige l'absorption, quel que soit le régime considéré, monomode ou multimode, l'intensité locale totale est conservée lors des échanges d'énergie. En effet, on a toujours:

$$\left( \frac{d}{dz} + \alpha \right) \left\{ I_0(z) + \sum_{d=1}^{\infty} I_d(z) \right\} = 0 \quad (\text{III.39})$$

Cette dernière équation montre que le faisceau de pompe est la seule source d'énergie du faisceau de cavité.

Les équations (III.37) ou (III.38) modélisant complètement le comportement longitudinal de chaque composante modale du faisceau, il reste à en déduire une expression pour le tirage en fréquence entre les modes passif et actif du modèle de cavité décrit dans la section III.2.1.

### III.2.5: Tirage en fréquence

Expérimentalement, l'extraction d'une partie du faisceau de cavité ne peut se faire qu'en dehors du cristal. Dès lors, on a choisi d'évaluer le tirage en fréquence entre les modes passifs  $\nu_d$  et actifs  $\nu'$ :  $\Delta\nu_d^*$  ( $= \nu_d - \nu'$ ) en  $z = 0$ , c'est à dire dans le plan de la face d'entrée du cristal. Ce choix purement arbitraire ne modifie pas les résultats obtenus.

Lorsque la condition de stationnarité (III.32) est appliquée, l'équation qui régit l'amplitude des modes propres dans la cavité s'écrit:

$$\left\{ (\omega_d^2 - \omega'^2) + i \frac{\omega_d \omega'}{Q_d} \right\} \sqrt{I_d(0)} e^{i\psi_d(0)}$$

$$\equiv \frac{2c\epsilon_0}{\epsilon^2 (1 + N_d)} \sum_{a=1}^{\infty} \sigma_a e^{i\phi_a} \omega' H_{ad} \quad (\text{III.40})$$

avec 
$$N_d = \int_0^{L_c} dz \sqrt{\frac{I_d(z)}{I_d(0)}} e^{i(\psi_d(z) - \psi_d(0))},$$

La partie réelle de l'équation (III.40) permet d'obtenir l'expression suivante:

$$\omega_d^2 - \omega'^2 = \frac{2c\epsilon_0}{\epsilon \sqrt{I_d(0)}} \sigma_d \omega' R_d$$

et la partie imaginaire de l'équation (III.40) s'écrit:

$$\frac{\omega_d}{Q_d} = \frac{2c\epsilon_0}{\epsilon \sqrt{I_d(0)}} \sigma_d I_d$$

où les fonctions  $R_d$  et  $I_d$  sont définies comme suit:

$$R_d = \text{Re} \left\{ \frac{1}{1 + N_d} \sum_{a=1}^{\infty} \sigma_a e^{i\phi_a} H_{ad} \right\} \quad (\text{III.41a})$$

$$I_d = \text{Im} \left\{ \frac{1}{1 + N_d} \sum_{a=1}^{\infty} \sigma_a e^{i\phi_a} H_{ad} \right\} \quad (\text{III.41b})$$

L'influence des autres modes, sur le mode d, provient donc uniquement du terme non linéaire contenu dans  $H_{ad}$ . En remplaçant (III.41b) dans (III.41a), on obtient:

$$\omega_d^2 - \omega'^2 = \frac{\omega'}{\tau_d} \frac{R_d}{I_d}$$

où  $\tau_d = Q_d/\omega_d$  est le temps de décroissance de la densité de photons du mode d en l'absence d'interaction non linéaire. Les pertes que subit le mode d sur un tour de cavité étant très importantes (sect. II.1.3.1), le temps de décroissance  $\tau_d$  du mode d est environ  $10^7$  fois plus petit que le temps caractéristique du milieu photoréfractif ( $\tau \approx 1$  s). Étant donné que  $\Delta\nu_d^*$  est bien plus petit que la fréquence optique, la dernière relation fournit une expression approchée du tirage en fréquence  $\Delta\nu_d^*$ :

$$\Delta\nu_d^* = \frac{1}{4 \pi \tau_d} \frac{R_d}{l_d}$$

Afin d'en déduire une grandeur sans dimension, il est normalisé à l'intervalle spectral longitudinal de la cavité  $\Delta\nu_L$  (I.56):

$$\boxed{\Delta\nu_d = \frac{\omega_d - \omega'}{2 \pi \Delta\nu_L} = \frac{t_r}{4 \pi \tau_d} \frac{R_d}{l_d}} \quad (\text{III.42})$$

où  $t_r$  est le temps mis par la lumière pour effectuer un tour de cavité.

### III.3: DISCUSSIONS DES RESULTATS

Nous sommes, à présent, en mesure d'évaluer le tirage en fréquence  $\Delta\nu_d$  d'un mode transverse  $d$  quelle que soit la structure transverse du faisceau de cavité à l'état stationnaire. En effet, la section III.2.4 permet d'accéder à l'évolution longitudinale des amplitudes des modes (III.37) nécessaire pour le calcul de  $\Delta\nu_d$ , donné par la relation (III.42).

La section III.3.1 est consacrée à l'étude du régime monomode. Avant d'analyser le régime bimode (sect. III.3.3), nous utilisons un petit paramètre issu de l'expérience pour effectuer un développement perturbatif des expressions permettant d'évaluer  $\Delta\nu_d$  (sect. III.3.2). Celui-ci simplifie les termes de couplage entre les modes et de ce fait allège la procédure numérique.

Enfin, nous proposons une interprétation des résultats expérimentaux présentés dans la partie II de ce mémoire ainsi que ceux obtenus par le groupe d'Arecchi (F. T. Arecchi et al {1991}).

#### III.3.1: Régime monomode transverse

Dans cette section, nous envisageons le cas où le faisceau intracavité est constitué d'un unique mode  $d$  et interagit avec un faisceau de pompe sans structure transverse car c'est la situation la plus simple. Nous nous intéressons d'abord au mélange à deux ondes qui constitue le processus de gain de l'oscillateur. Ensuite, nous analysons les propriétés du tirage en fréquence et comparons les résultats obtenus avec ceux du modèle simplifié de la section III.1.

##### III.3.1.1: Mélange à deux ondes

En régime monomode, les équations (III.38a) et (III.38b) se réduisent aux deux équations différentielles ordinaires suivantes:

$$\left(\frac{d}{dz} + \alpha\right) I_0 = -\eta_d I_d I_0 G_{dd} \quad (\text{III.43a})$$

$$\left(\frac{d}{dz} + \alpha\right) I_d = \eta_d I_d I_0 G_{dd} \quad (\text{III.43b})$$

où  $\eta_d = \sigma_d \sin(\varphi_d)$  est le gain par unité de longueur.

La fonction  $G_{dd}(z)$  est donnée par (III.31):

$$G_{dd}(z) = \int_{\sigma_T} \frac{|E_d^* \cdot E_0|^2}{|p_0 \cdot E_0|^2 + |p_d \cdot E_d|^2} dr_T \quad (III.44a)$$

Elle contient toute l'information concernant la nature transverse du faisceau de cavité. Sa forme mathématique, fortement non linéaire, ne permet pas d'autre analyse que numérique. Dans un souci de simplification, nous avons cherché une forme approchée de  $G_{dd}(z)$  qui découple les influences des dimensions transverses et longitudinale des faisceaux. Cette opération qui consiste à affecter à chaque mode un "poids" fonction de sa structure transverse et du rapport entre le rayon du faisceau à la taille du cristal, nous a conduit à l'expression suivante de  $G_{dd}(z)$ :

$$G_{dd}(z) = \frac{1}{I_0} \frac{1}{1 + F_d \frac{I_d}{I_0}} \quad \text{pour } 0 < \frac{I_d}{I_0} < 1 \quad (III.44b)$$

Le dénominateur de  $G_{dd}$  comporte un terme de saturation dépendant du coefficient  $F_d$  qui exprime toute l'influence du profil transverse du faisceau intracavité.

Comme le faisceau de pompe est supposé sans structure transverse et d'extension infinie, l'intégration transverse est uniquement limitée à la section du cristal. Dans notre dispositif, le diamètre du faisceau intracavité est d'environ 0.2 mm. Le rapport entre celui-ci et la largeur du cristal ( $l_c = 5$  mm) est d'environ 0.04 ce qui permet de négliger l'influence des bords du cristal dans le calcul de  $F_d$  pour les premiers modes transverses.

Pour évaluer, la constante  $F_d$  correspondant à chaque mode transverse, nous procédons de la manière suivante: l'expression (III.44a) est calculée pour des valeurs du rapport  $I_d/I_0$  comprises entre 0 et 1. Ensuite, nous déduisons la valeur de  $F_d$  en égalant les expressions (III.44) aux deux points extrêmes. Les erreurs obtenues avec cette méthode restent inférieures au pour-cent.

Le tableau III.2 indique les valeurs de  $F_d$  pour les modes d'indices  $p$  et  $l$  compris entre (0,0) et (3,7) compte tenu de la valeur 0.04 du rapport  $w_0/l_c$ . La figure III.4 représente le graphe de  $F_d(l)$  pour plusieurs valeurs de  $p$ . On remarque une diminution lorsque la complexité du profil transverse augmente (i.e.  $p$  et  $l$  croissent).

Tableau III.2: Valeur de  $F_d$  en fonction des indices  $p$  et  $l$  dans le cas monomode pour un rapport  $w_0/lc \cong 0.04$ .

	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=3$
$l=0$	0.0776	0.0385	0.0264	0.0204
$l=1$	0.0586	0.0367	0.0274	0.0223
$l=2$	0.0442	0.0295	0.0229	0.0191
$l=3$	0.0369	0.0254	0.0202	0.0170
$l=4$	0.0323	0.0227	0.0182	0.0154
$l=5$	0.0291	0.0207	0.0168	0.0143
$l=6$	0.0267	0.0192	0.0156	0.0134
$l=7$	0.0248	0.0179	0.0147	0.0127

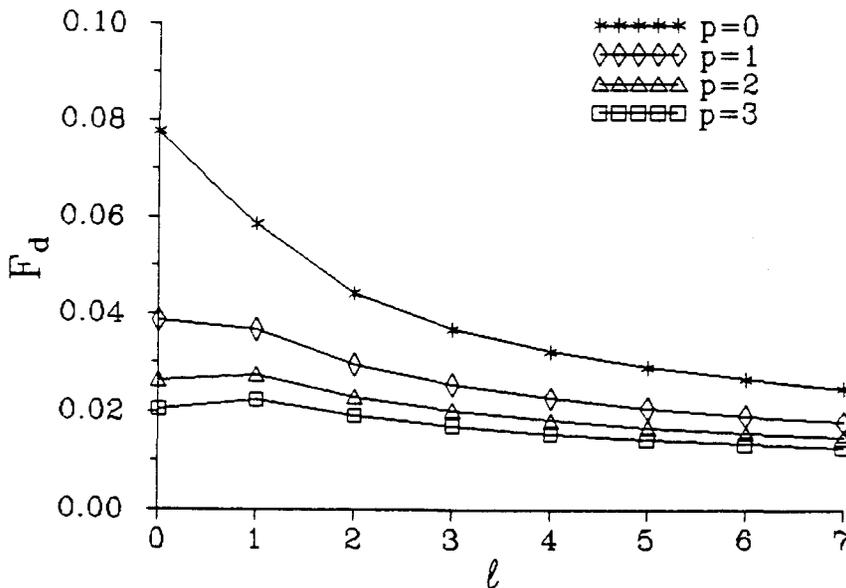


Figure III.4: Valeur du poids  $F_d$  associé à chaque mode en fonction de ses indices  $p$  et  $l$

Par ailleurs, lorsque le faisceau intracavité est une onde plane d'extension limitée par celle du cristal,  $F_d$  vaut l'unité et le système d'équations (III.43) est identique aux équations (III.19a) et (III.19b) décrivant le mélange de deux ondes planes.

La recherche des solutions des équations (III.43) suggère la définition d'une nouvelle variable  $\bar{I}$  pour l'intensité dont on a extrait la décroissance exponentielle liée aux pertes dans le cristal:

$$\bar{I}_{0,d}(z) = I_{0,d}(z) e^{\alpha z} \quad (\text{III.45})$$

Avec ces nouvelles variables, les équations (III.43) deviennent:

$$\frac{d}{dz} \overline{I}_0 = - \frac{\eta_d \overline{I}_d}{1 + F_d \frac{\overline{I}_d}{\overline{I}_0}} \quad (\text{III.46a})$$

$$\frac{d}{dz} \overline{I}_d = \frac{\eta_d \overline{I}_d}{1 + F_d \frac{\overline{I}_d}{\overline{I}_0}} \quad (\text{III.46b})$$

La figure III.5a représente la dépendance en  $z$  du faisceau de pompe et de cavité pour  $F_d = 1, 0.5$  et  $0.1$ . Ces valeurs correspondent, par exemple, à des faisceaux sans structure transverse d'extension, normalisée à la section du cristal, respectivement égale à  $1, 0.5$  et  $0.1$ . Pour les mêmes conditions initiales, les échanges d'énergie sont d'autant plus rapides que  $F_d$  est petit. Ce fait apparait clairement dans les équations (III.46): si  $F_d$  décroît le terme de saturation diminue ce qui permet d'accélérer les échanges d'énergie. La figure III.5b est équivalente à la figure III.5a lorsque le faisceau intracavité est soit onde plane ( $F_d = 1$ ) soit les modes  $A_{00}$  ( $F_d = 0.0776$ ) ou  $A_{371}$  ( $F_d = 0.0127$ ). Il apparait ainsi que la nature transverse du faisceau intracavité joue un rôle non négligeable dans le transfert d'énergie entre les faisceaux. La figure III.5b renforce l'idée selon laquelle les dimensions et la complexité de la structure transverse du faisceau de cavité amplifient les transferts d'énergie. Par contre, ceux-ci changent peu lorsque la structure transverse du faisceau de cavité passe d'un mode propre à un autre ce qui est dû à la faible variation des valeurs de  $F_d$ .

En utilisant l'équation (III.39) de conservation de l'énergie avec les nouvelles variables:

$$\overline{I}_0(z) + \overline{I}_d(z) = \overline{I}_0(0) + \overline{I}_d(0) = K,$$

le système d'équations (III.46) se réduit à une seule équation différentielle pour l'intensité du mode transverse:

$$\frac{d}{dz} \overline{I}_d = \frac{\eta_d \overline{I}_d}{1 + \frac{F_d \overline{I}_d}{K - \overline{I}_d}} \quad (\text{III.47})$$

dont la solution vérifie la relation implicite suivante:

$$\left\{ \frac{\overline{I}_d(z)}{\overline{I}_d(0)} \right\} \left\{ \frac{K - \overline{I}_d(0)}{K - \overline{I}_d(z)} \right\}^{F_d} = e^{\eta_d z} \quad (\text{III.48})$$

Dans le cas du mélange de deux ondes planes ( $F_d = 1$ ), la solution (III.48) est identique aux solutions des équations (I.19) de la première partie:

$$I_0(z) = I_0(0) \frac{1 + \beta}{\beta + e^{\eta_d z}} e^{-\alpha z}$$

$$I_d(z) = I_d(0) \frac{1 + \beta}{\beta e^{\eta_d z} + 1} e^{-\alpha z}$$

où  $\beta$  représente le rapport des intensités au niveau de la face d'entrée du cristal.

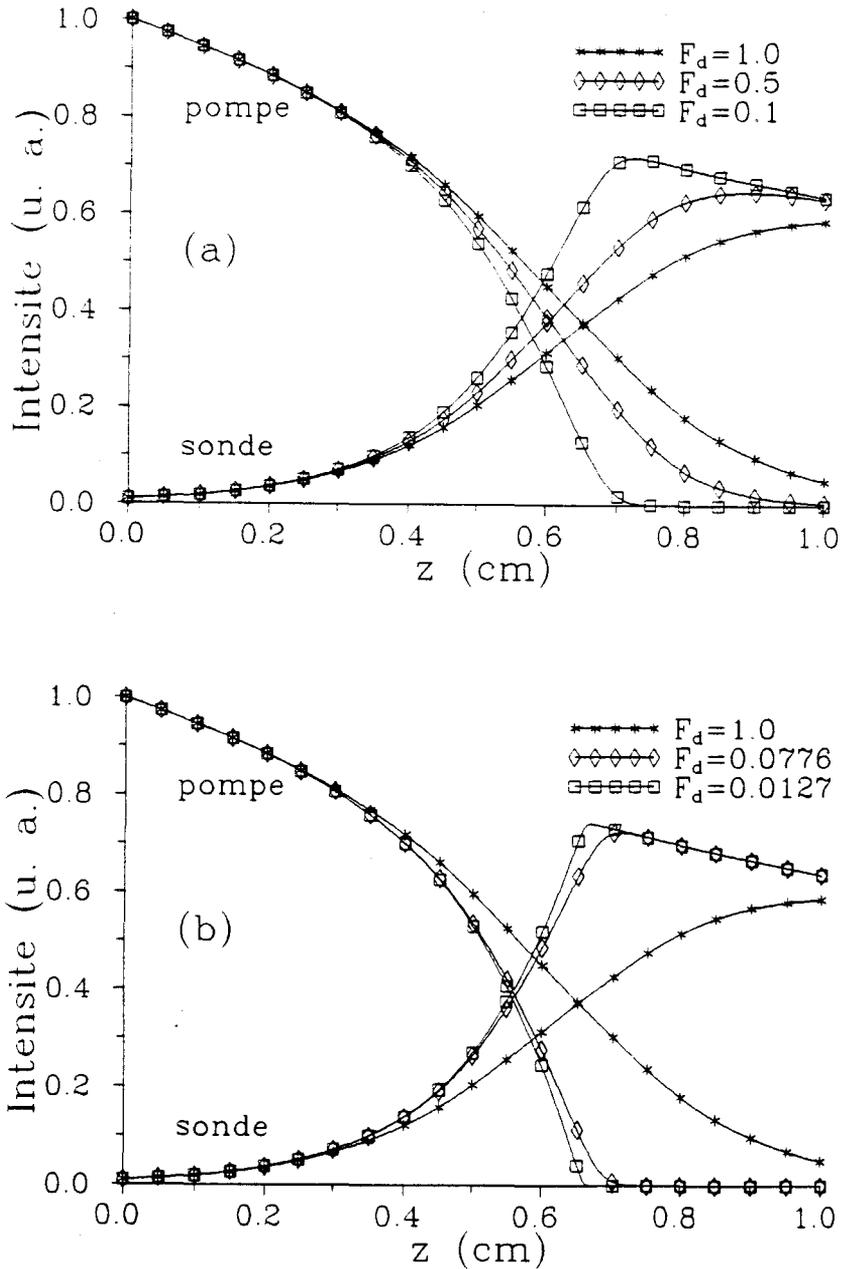


Figure III.5: Evolution le long de l'axe du cristal de l'intensité des faisceaux de pompe  $I_0$  et de cavité  $I_d$  en situation monomode (a) pour  $F_d = 0.1, 0.5$  et  $1$ . et (b) pour  $F_d = 1$  (onde plane),  $0.0776$  ( $A_{00}$ ) et  $0.0127$  ( $A_{371}$ ).

D'après des valeurs du tableau III.2,  $F_d$  peut être considéré comme un petit paramètre. Ceci justifie la décomposition de l'intensité en fonction des puissances successives de  $F_d$ :

$$\overline{I}_d(z) = \overline{I}_d^{(0)}(z) + F_d \overline{I}_d^{(1)}(z) + o(F_d^2). \quad (\text{III.49})$$

Physiquement, l'ordre zéro décrit des échanges d'énergie sans saturation, correspondant à la normalisation de l'indice de réfraction par l'intensité du faisceau de pompe.

$$\overline{I}_d^{(0)}(z) = I_d(0) e^{\eta_d z}$$

Sachant que le terme d'ordre un du développement s'écrit:

$$\overline{I}_d^{(1)}(z) = \overline{I}_d^{(0)}(z) \text{Ln}(\beta^{-1} + 1 - \beta^{-1} e^{\eta_d z}),$$

le développement au premier ordre en  $F_d$  des intensités de pompe et de cavité se résume aux expressions suivantes:

$$I_0(z) = K e^{-\alpha z} - I_d(z)$$

$$I_d(z) = I_d(0) e^{(\eta_d - \alpha) z} [1 + F_d \text{Ln}\{1 + \beta^{-1}(1 - e^{\eta_d z})\}]$$

La convergence du développement (III.49) en  $F_d$  requiert une condition draconienne sur la longueur  $L_c$  du cristal car le coefficient du développement doit prendre des valeurs au maximum d'ordre un, comparé au petit paramètre  $F_d$  pour  $0 < z < L_c$ :

$$- \text{Ln}\{1 + \beta^{-1}(1 - e^{\eta_d z})\} \leq 1 \quad (\text{III.50})$$

On en déduit la longueur maximum du cristal  $L_{\max}$  pour que la validité du développement perturbatif reste acquise:

$$L_{\max} = \frac{\cos(\theta)}{\eta_d} \text{Ln}\left\{1 + \frac{\beta}{e}(e - 1)\right\}. \quad (\text{III.51})$$

Avec les paramètres expérimentaux suivants:  $\eta_d \approx 3 \text{ cm}^{-1}$  et  $\beta \approx 10^3$ , il faut que  $L_c$  reste inférieure à 2.2 cm. Les longueurs de tous les cristaux utilisés dans cette étude ne dépassent pas le centimètre, ce développement reste donc tout à fait justifié. La longueur du cristal n'est pas le seul paramètre limitatif puisque l'expression (III.51) dépend également du gain  $\eta_d$  et de  $\beta$ . Ainsi pour un cristal d'un centimètre de long et  $\beta \approx 10^3$ , la validité du développement perturbatif est assurée pour des gains expérimentaux  $\Gamma < 630$ : valeur à comparer à celles que nous obtenons et qui sont de l'ordre de 20 (sect. I.1.2). Pour donner une idée plus globale de la limite de validité du développement, la figure III.6 renseigne sur la longueur maximale du cristal donnée par la relation (III.51) dans le plan des paramètres  $(\eta_d, \beta)$ .

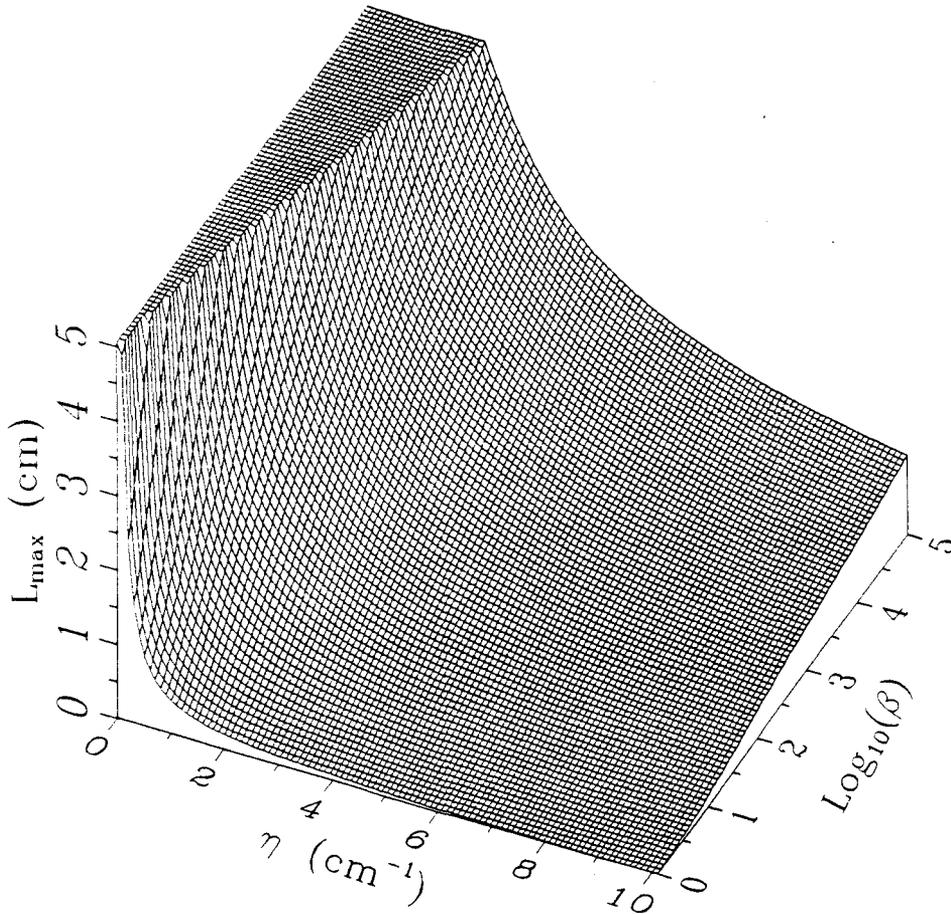


Figure III.6: Représentation de la longueur maximale  $L_{\max}$  du cristal satisfaisant la condition de validité du développement perturbatif en fonction de  $\eta_d$  et  $\beta$ .

Le traitement du mélange de deux faisceaux monomodes est complété par l'analyse de l'évolution de leurs phases le long du cristal. Compte tenu de l'expression de  $G_{dd}$  (III.44), les équations (III.38c) et (III.38d) pour les phases de ces faisceaux s'écrivent:

$$\frac{d\psi_0}{dz} = -\frac{\eta'_d}{2} \frac{I_d}{I_0 + F_d I_d} \quad (\text{III.52a})$$

$$\frac{d\psi_d}{dz} = -\frac{\eta'_d}{2} \frac{I_0}{I_0 + F_d I_d} \quad (\text{III.52b})$$

où  $\eta'_d = \sigma_d \cos(\varphi_d)$ .

Ces équations peuvent être implicitement résolues pour tout  $F_d$  connaissant les intensités  $I_d(z)$  et  $I_0(z)$ :

$$\Delta\psi_0(z) = \psi_0(z) - \psi_0(0) = -\frac{1}{2} \cotg(\varphi_d) \text{Ln} \left\{ \frac{I_0(z)}{I_0(0)} e^{\alpha z} \right\} \quad (\text{III.53a})$$

$$\Delta\psi_d(z) = \psi_d(z) - \psi_d(0) = -\frac{1}{2} \cotg(\varphi_d) \text{Ln} \left\{ \frac{I_d(z)}{I_d(0)} e^{\alpha z} \right\} \quad (\text{III.53b})$$

La figure III.7 présente l'évolution de  $\Delta\psi_d(z)$  et  $\Delta\psi_0(z)$  pour plusieurs valeurs du paramètre  $F_d$ . Pour mettre en évidence l'évolution de ces phases, on a choisi le déphasage entre les réseaux d'interférences et d'indice de réfraction qui rend maximales leurs variations:  $\varphi_d = 0$  et  $\pi$ . La figure III.7 montre que la phase du mode transverse atteint un plateau tandis que celle du faisceau de pompe a pour asymptote une droite de pente  $\eta'_d/F_d$ .

Il apparaît que, pour un cristal suffisamment long, la structure transverse du faisceau possède une grande influence sur l'évolution de la phase du faisceau de pompe  $\psi_0$ . Par ailleurs, l'évolution de la phase du faisceau de pompe est d'autant plus lente que la complexité du profil augmente tandis que la phase du faisceau de sonde atteint rapidement un plateau qui dépend également de  $F_d$ .

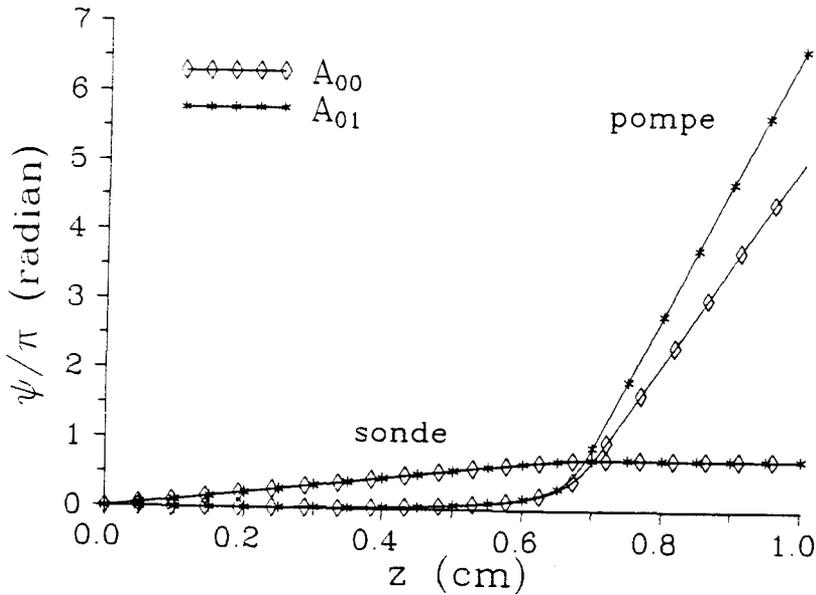


Figure III.7: Evolution le long de l'axe du cristal de la phase des faisceaux de pompe  $\Delta\psi_0$  et de cavité  $\Delta\psi_d$  en situation monomode pour  $F_d = 1$  (onde plane), 0.0776 ( $A_{00}$ ) et 0.0127 ( $A_{371}$ ).

### III.3.1.2: Tirage en fréquence

Dans cette section, nous analysons les propriétés du tirage en fréquence  $\Delta\nu_d$  du mode d en fonction des paramètres expérimentaux:

$$\boxed{\Delta v_d = \frac{t_r}{2} \frac{R_d}{\tau_d} \frac{R_d}{l_d}} \quad (\text{III.42})$$

Les fonctions  $R_d$  et  $l_d$  restent définies par les relations (III.41a) et (III.41b) dans lesquelles  $H_d$  est réduit à:

$$H_d = \int_0^{L_c} dz \sqrt{I_d(z)} I_0 e^{i(\psi_d(z) - \psi_d(0))} G_{dd}$$

On en déduit le rapport  $R_d/l_d$ :

$$\frac{R_d}{l_d} = \frac{C_d (1+NC_d) + NS_d S_d}{S_d (1+NC_d) - NS_d C_d} \quad (\text{III.54})$$

où l'on a défini:

$$C_d = \int_0^{L_c} dz \frac{I_0(z) \sqrt{I_d(z)}}{I_0(z) + F_d I_d(z)} \cos(\psi_d(z) - \psi_d(0) + \varphi_d),$$

$$S_d = \int_0^{L_c} dz \frac{I_0(z) \sqrt{I_d(z)}}{I_0(z) + F_d I_d(z)} \sin(\psi_d(z) - \psi_d(0) + \varphi_d),$$

$$NC_d = \int_0^{L_c} dz \sqrt{\frac{I_d(z)}{I_d(0)}} \cos(\psi_d(z) - \psi_d(0)),$$

et

$$NS_d = \int_0^{L_c} dz \sqrt{\frac{I_d(z)}{I_d(0)}} \sin(\psi_d(z) - \psi_d(0))$$

Les expériences ne fournissant pas de renseignement concernant la valeur du déphasage  $\varphi$  entre les réseaux d'interférences et d'indice de réfraction, il nous a paru judicieux de faire varier  $\varphi$  de  $-\pi/2$  à  $3\pi/2$  dans les simulations pour tenir compte de toutes les situations mathématiquement possibles. De ce fait, nos résultats numériques sont présentés à l'aide d'un graphe à 3 dimensions représentant  $\Delta v_d$  en fonction du déphasage  $\varphi$  et du paramètre dont l'influence est discutée.

La suite de cette section III.3 est consacrée aux applications de ce modèle. Dans un premier temps, nous nous limitons au cas où les faisceaux de pompe et de cavité sont des ondes planes pour comparer les résultats avec ceux du modèle simplifié développé dans la section III.1. Ensuite, nous présentons les résultats obtenus pour des faisceaux de cavité possédant un

profil transverse. Finalement, l'influence des différents paramètres est passée en revue dans le cas limite où  $F_d$  tend vers zéro, cas dans lequel une expression analytique du tirage en fréquence peut être obtenue.

(i) Mélange de deux ondes planes

Lorsque le faisceau de cavité est une onde plane, la comparaison avec le modèle du mélange à deux ondes dérivé dans la première partie (I.19), correspond au cas où  $F_d = 1$ . Les relations (I.21) et (I.22) décrivent l'évolution longitudinale des phases et des intensités des deux faisceaux dans ce cas particulier.

Avant de comparer les résultats issus de ce modèle avec ceux du modèle sans structure transverse développé dans la section III.1, nous définissons le concept de pôle de tirage en fréquence. Un pôle est une valeur  $\varphi_0$  du déphasage entre les réseaux d'interférences et d'indice de réfraction pour laquelle le tirage en fréquence  $\Delta\nu_d$  diverge. On attribue au pôle, le signe de la dérivée de  $\Delta\nu_d$  par rapport à  $\varphi$  autour de  $\varphi_0$  (fig. III.8).

Lorsque le gain  $\sigma$  est proche de zéro, on obtient deux pôles de même signe en  $\varphi = 0$  et  $\pi$ . Mais pour des conditions équivalentes à celles de la figure III.3a, la figure III.9 montre que dans ce modèle, le tirage en fréquence présente des pôles en  $\varphi = 0,3 \pi$  et  $0,7 \pi$ . La présence de ces pôles signifie qu'une onde plane dont la fréquence passive se situe à plusieurs intervalles spectraux longitudinaux de la courbe de gain est capable d'osciller dans la cavité. Alors que, dans le modèle simplifié, la position des pôles sur l'axe du déphasage  $\varphi$  correspond à des situations où le faisceau ne peut être créé dans la cavité (voir section III.1). Par ailleurs, si  $\varphi$  vaut  $\pi/2$  modulo  $\pi$ , on vérifie que le tirage en fréquence est nul car les phases des faisceaux restent constantes dans le mélange à deux ondes (III.53). La différence entre ces deux modèles tient essentiellement à la description de la cavité. Dans le cas simplifié, on impose la condition d'accord de phase en comparant la phase du faisceau intracavité à l'entrée et à la sortie du cristal. Par contre, dans ce modèle plus complet, on intègre les non-linéarités du milieu sur la longueur du cristal.

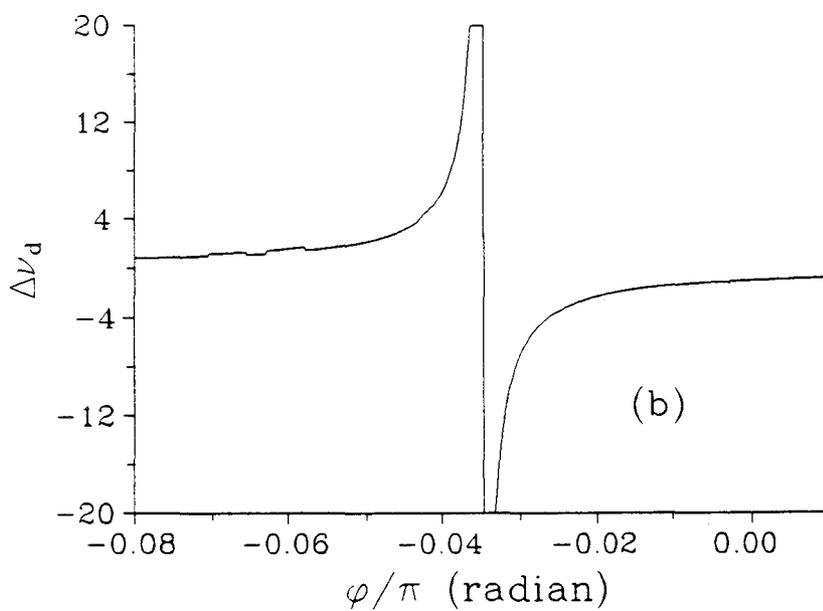
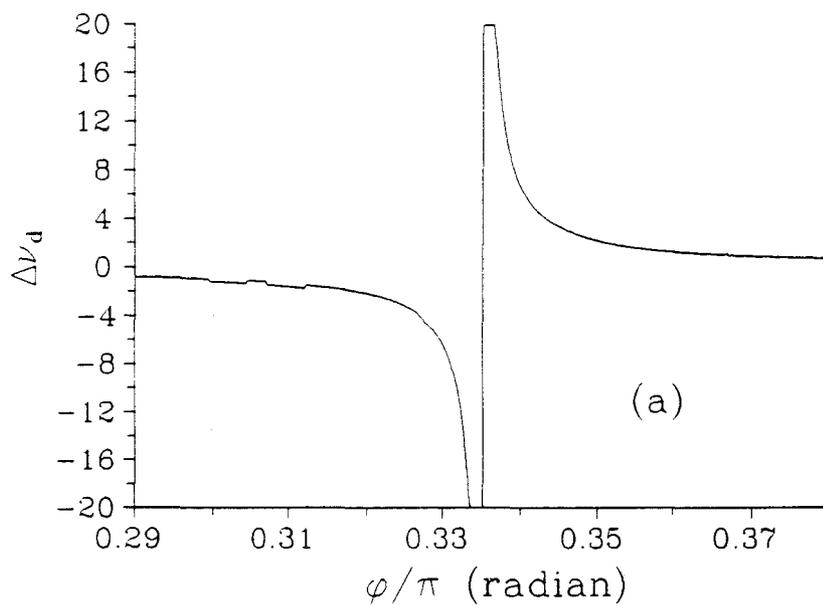


Figure III.8: Exemple de pôle de signe (a) positif et (b) négatif.

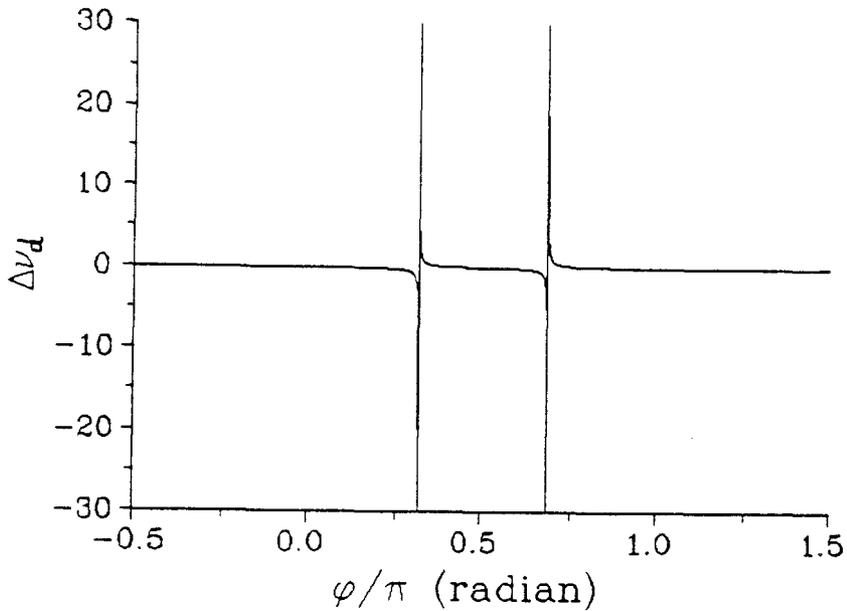


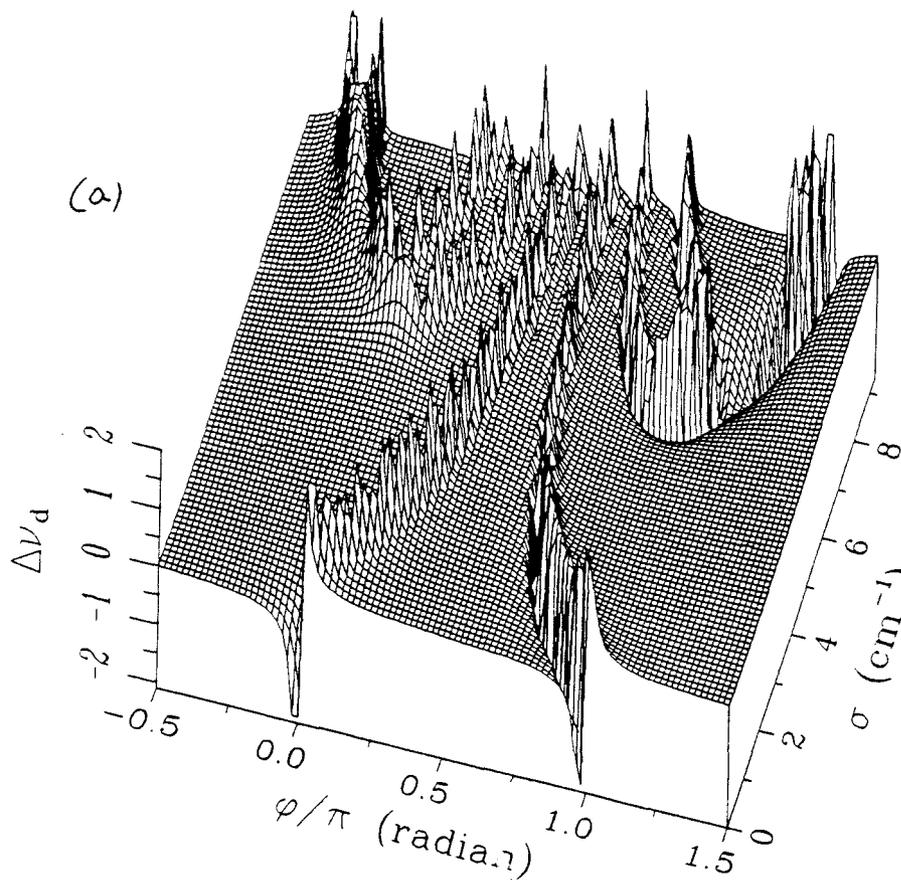
Figure III.9: Tirage en fréquence d'une onde plane  $\Delta v_d$  en fonction de  $\varphi$ .  $\sigma = 3 \text{ cm}^{-1}$ ,  $L_c = 1 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 0,46 \text{ cm}^{-1}$  et  $\beta = 10^4$ .

## ii) Mélange d'une onde plane et d'un mode transverse

Lorsque le profil transverse du faisceau de cavité coïncide avec un mode propre du résonateur (tab. III.2), l'évaluation du tirage en fréquence (III.54) nécessite la connaissance de l'évolution dans le cristal de l'intensité et de la phase qui sont respectivement données par l'intégration numérique de l'équation (III.47) et de l'expression (III.53). Les résultats des simulations numériques du tirage en fréquence sont résumés dans les figures (III.10-12), ils sont obtenus avec des valeurs de paramètres correspondant à notre dispositif expérimental.

La figure III.10 présente le tirage en fréquence en fonction du déphasage  $\varphi$  et du gain effectif  $\sigma$ . Dans la figure III.10a, nous avons choisi une représentation à trois dimensions où nous avons limité les valeurs optimales du tirage en fréquence à quelques unités. La structure dentelée de la figure provient uniquement du maillage du plan de paramètres et du traitement numérique. On constate que, comme dans le cas de l'onde plane ( $F_d = 1$ ), le tirage en fréquence possède des pôles. Dans la figure III.10b, équivalente à la figure III.10a, nous avons uniquement retenu la position et le signe des pôles pour montrer leur comportement global. Pour  $\sigma$  proche de zéro, on retrouve la situation du modèle simplifié (sect. III.1) où des pôles de

même signe se situent en  $\varphi = 0$  modulo  $\pi$ . Lorsque  $\sigma$  augmente, ceux-ci se rapprochent symétriquement de  $\varphi = \pi/2$  autorisant de ce fait l'oscillation de modes transverses dont la fréquence passive est à plus d'un intervalle spectral longitudinal de la courbe de gain. La figure III.10 montre qu'au-delà d'un seuil  $\sigma_{\text{seuil}}$ , en  $\varphi = 0$  et  $\varphi = \pi$ , il apparaît deux nouvelles paires de pôles de signes opposés. Notons que ce seuil a une valeur tout à fait réaliste du point de vue expérimental:  $\sigma_{\text{seuil}} = 5.5 \text{ cm}^{-1}$  (Ph. Refregier et al [1985]). Ensuite, les pôles issus de chaque paire s'éloignent l'un de l'autre jusqu'en  $\sigma = 6.9 \text{ cm}^{-1}$  où le signe des pôles les plus excentrés s'inversent et prennent le signe des deux pôles initiaux. Les six pôles de même signe se rapprochent de  $\varphi = \pi/2$  pour permettre à deux nouvelles paires de pôles de se créer en  $\varphi = -\pi/4$  et  $\varphi = 5\pi/4$ . De sorte qu'en  $\sigma = 9 \text{ cm}^{-1}$ , il y a six pôles dans l'intervalle  $[0.2 \pi; 0.8 \pi]$  qui favorisent l'oscillation du système.



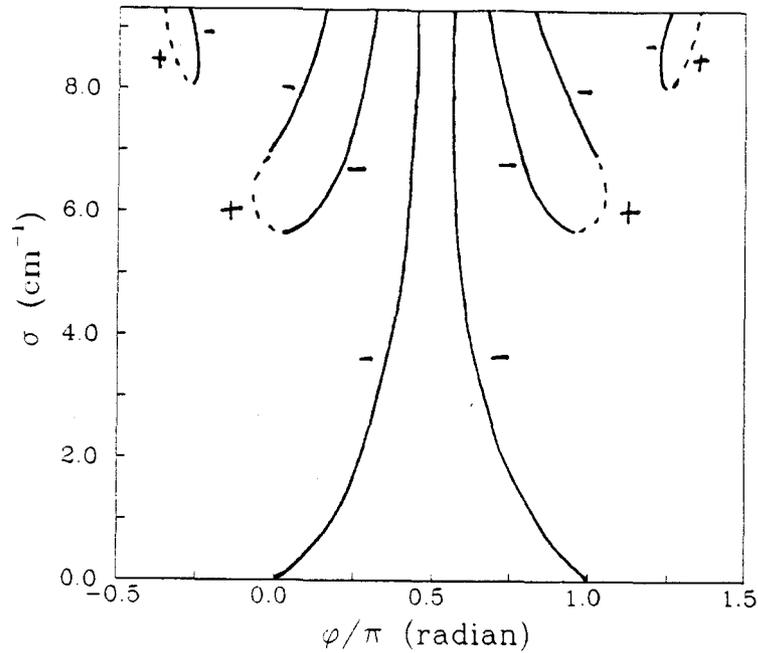


Figure III.10: Tirage en fréquence  $\Delta\nu$  du mode fondamental  $A_{00}$  en fonction du déphasage  $\varphi$  et du gain  $\sigma$  pour  $L_c = 1$  cm,  $\alpha = 0,46$  cm $^{-1}$  et  $\beta = 10^4$ . (a) graphique à trois dimensions et (b) schéma représentant la position et le signes des pôles

La situation de la figure III.10 qui est globalement symétrique autour de  $\varphi = \pi/2$  peut être résumée comme suit: Si le gain  $\sigma$  est inférieur à  $\sigma_{\text{seuil}}$ , seuls les pôles en  $\varphi = 0$  et  $\varphi = \pi$  existent et se rapprochent de  $\varphi = \pi/2$  lorsque  $\sigma$  augmente. Pour  $\sigma = \sigma_{\text{seuil}}$ , deux pôles sont créés (fig. III.11). Les autres pôles apparaissent par paire de signes opposés et puis s'éloignent l'un de l'autre quand  $\sigma$  croît et qu'enfin l'un des deux pôles change de signe (fig. III.12). Deux nouvelles paires de pôles sont ensuite créées et les six pôles préexistants se déplacent vers  $\varphi = \pi/2$  où le tirage en fréquence reste toujours nul quelle que soit la valeur de  $\sigma$ .

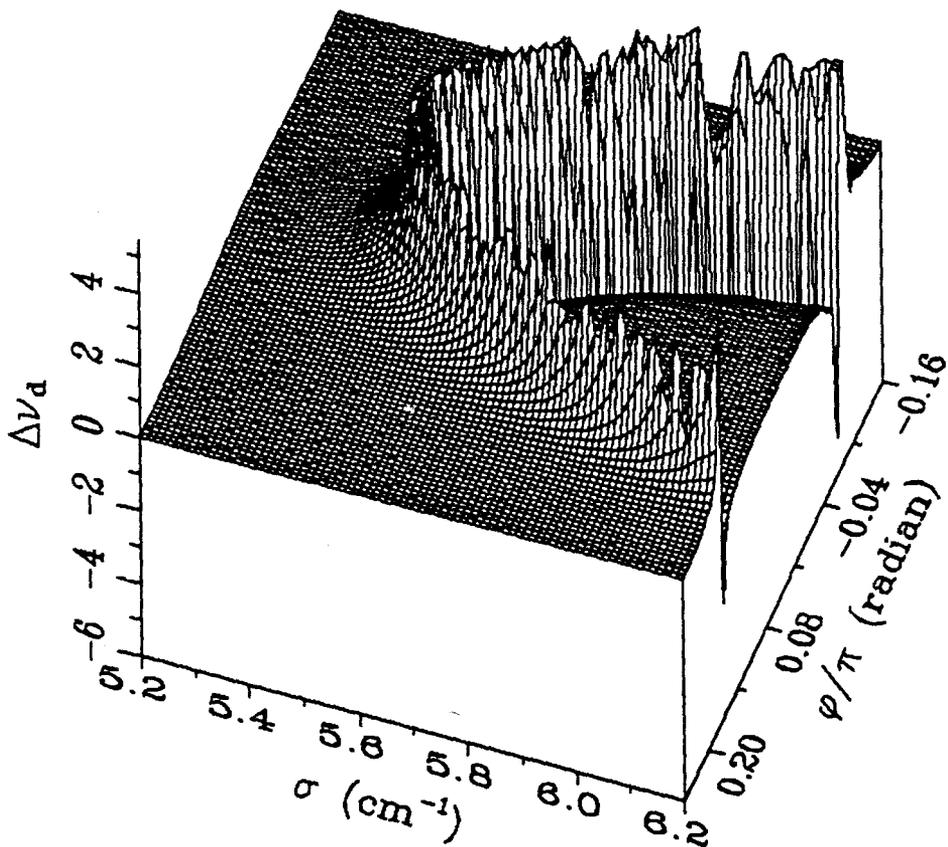


Figure III.11: Détail de la figure III.10a illustrant la création d'une paire de pôles.

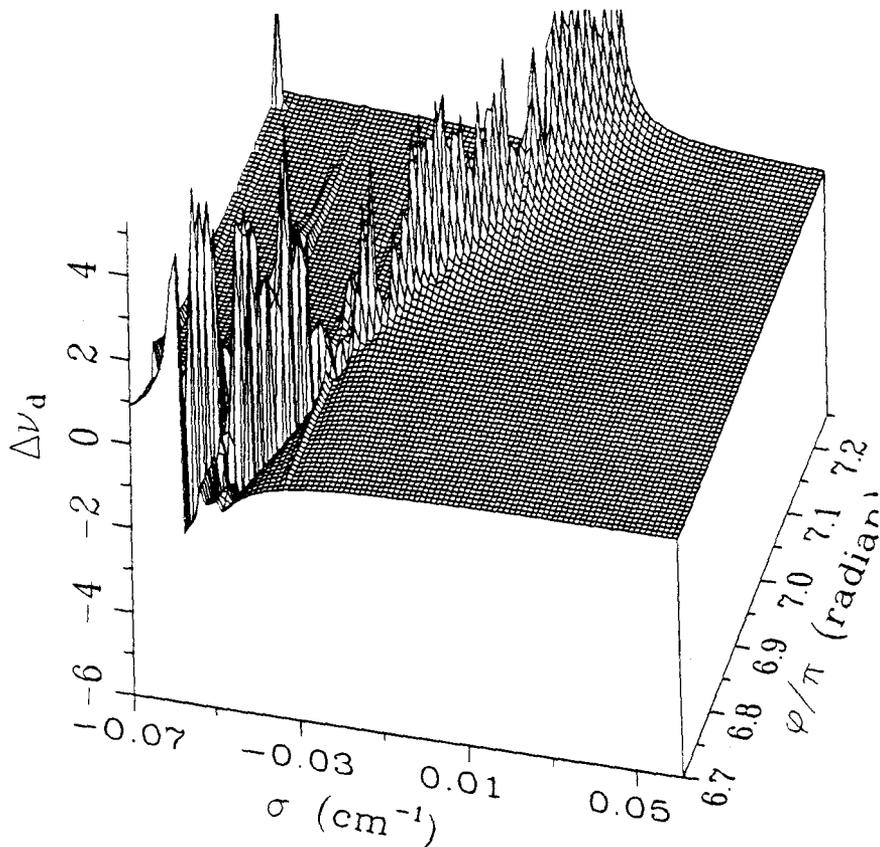


Figure III.12: Détail de la figure III.10a illustrant l'inversion d'un pôle.

iii) Ordre zéro en  $F_d$

Les faibles valeurs de  $F_d$  reportées dans le tableau III.2 nous ont incités à faire un développement perturbatif en fonction de ce petit paramètre. A l'ordre zéro en  $F_d$ , nous avons obtenu une expression analytique du décalage en fréquence que nous étudions dans cette section.

Vu la décroissance de  $F_d$  quand les indices caractérisant les modes transverses augmentent, ce cas limite correspond à une structure particulièrement complexe du faisceau intracavité ou à un rayon de pincement  $w_0$  de la cavité tendant vers zéro. La première possibilité est néanmoins irréaliste car la figure III.4 montre que  $F_d$  tend vers une limite inférieure non nulle lorsque les indices  $p$  et  $l$  croissent.

A l'ordre zéro en  $F_d$ , les dépendances longitudinales des intensités et des phases des faisceaux de pompe et de cavité prennent la forme suivante:

$$\begin{aligned} I(z) &= I(0) e^{(\eta - \alpha) z} \\ I_0(z) &= K e^{-\alpha z} - I(z) \\ \psi_0(z) - \psi_0(0) &= \frac{1}{2} \eta' z \\ \psi(z) - \psi(0) &= -\frac{1}{2} \eta' z \end{aligned}$$

A partir de ces solutions et de la définition (III.54), le rapport  $R^{(0)}/I^{(0)}$  peut être calculé analytiquement:

$$\frac{R^{(0)}}{I^{(0)}} = \frac{e^{(\sigma \sin(\varphi) - \alpha) L_c/2} \cos(\sigma \cos(\varphi) L_c/2 + \zeta + \varphi) - \cos(\zeta + \varphi)}{e^{(\sigma \sin(\varphi) - \alpha) L_c/2} \sin(\sigma \cos(\varphi) L_c/2 + \zeta + \varphi) - \sin(\zeta + \varphi)} \quad (\text{III.55})$$

où  $\zeta$  est défini par la relation

$$\text{arctg } \zeta = \frac{\sigma \cos(\varphi)}{\sigma \sin(\varphi) - \alpha} \quad (\text{III.56})$$

D'après la figure III.13, qui représente le tirage en fréquence dans le plan des paramètres  $(\sigma, \varphi)$ , on constate que les mécanismes, tels que la création et l'inversion de pôles, existent aussi dans le cas limite  $F_d = 0$ . De plus, si on compare les figures III.13 avec son équivalent pour le mode transverse  $A_{00}$  ( $F_d = 0.0776$ ) (fig. III.10), on n'observe pas de différences qualitatives. Cette propriété justifie l'étude, dans ce cas limite, de l'influence sur le tirage en fréquence de la longueur  $L_c$  du cristal et du rapport  $\beta$  des intensités à l'entrée du cristal.

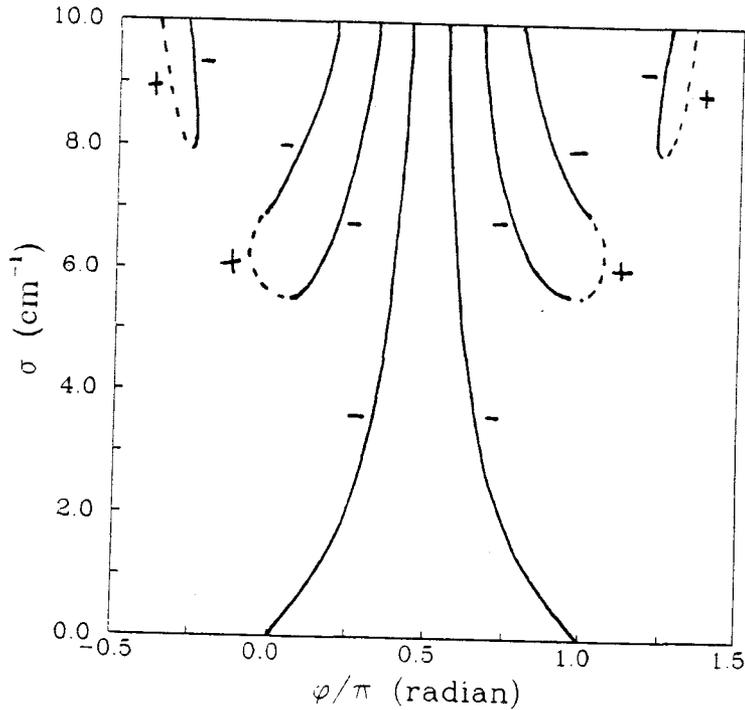


Figure III.13: Schéma représentant le déplacement des pôles du tirage en fréquence  $\Delta\nu$  en situation monomode, à l'ordre zéro en  $F_D$ , en fonction du déphasage  $\varphi$  et du gain  $\sigma$  pour  $L_C = 1$  cm,  $\alpha = 0,46$  cm $^{-1}$  et  $\beta = 10^4$ .

La figure III.14 montre que la longueur du cristal joue un rôle similaire à celui du gain effectif  $\sigma$ . En effet, dans la limite irréaliste  $\alpha = 0$ , la relation III.55 montre que c'est toujours le produit  $\sigma L_C$  qui apparaît dans l'expression du tirage en fréquence. De plus, la valeur de  $\zeta = \pi/2 - \varphi$ , tirée de l'expression (III.56) annule le dénominateur. Il en résulte que le tirage en fréquence présente toujours des pôles.

D'autre part, la figure III.15 illustre la faible influence du rapport  $\beta$  des intensités incidentes sur le tirage en fréquence pour un intervalle de valeurs réalistes comprises entre  $10^1$  et  $10^6$ .

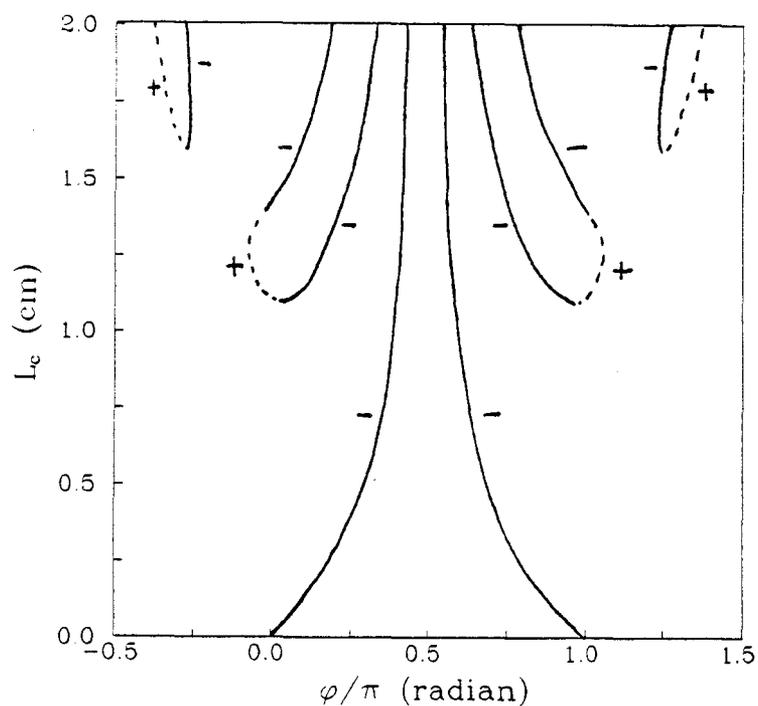


Figure III.14: Schéma représentant le déplacement des pôles du tirage en fréquence  $\Delta\nu$  en situation monomode, à l'ordre zéro en  $F_d$ , en fonction du déphasage  $\varphi$  et de la longueur du cristal  $L_c$  pour  $\sigma = 5 \text{ cm}^{-1}$ ,  $\alpha = 0.46 \text{ cm}^{-1}$  et  $\beta = 10^4$ .

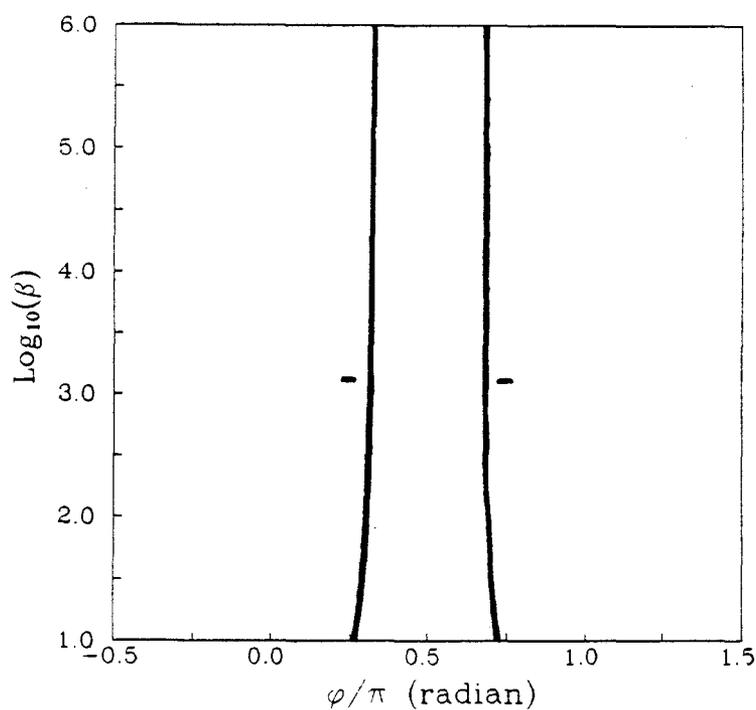


Figure III.15: Schéma représentant le déplacement des pôles du tirage en fréquence  $\Delta\nu$  en situation monomode, à l'ordre zéro en  $F_d$ , en fonction du déphasage  $\varphi$  et du rapport  $\beta$  des intensités du faisceau de pompe et de cavité pour  $L_c = 1 \text{ cm}$ ,  $\sigma = 5 \text{ cm}^{-1}$  et  $\alpha = 0.46 \text{ cm}^{-1}$ .

Dans cette section, nous avons explicité les principales propriétés du tirage en fréquence ainsi que sa dépendance en fonction des paramètres du régime monomode. Ainsi  $\varphi$ ,  $\sigma$  et  $L_c$  sont des paramètres prépondérants dans l'analyse du tirage en fréquence. Par contre, le rapport  $\beta$  n'a quasiment aucune influence.

En régime multimode, on cherche les valeurs de paramètres telles que la condition de stationarité (III.32) soit satisfaite indépendamment de la valeur du tirage en fréquence de chaque mode. En d'autres termes, on veut trouver les conditions expérimentales permettant à tous les modes d'adopter une fréquence commune d'oscillation.

Dans la section suivante, nous présentons un développement perturbatif en fonction de  $\beta^{-1}$  qui nous permet de généraliser cette étude au régime multimode.

### III.3.2: Développements perturbatifs

Pour évaluer le tirage en fréquence en régime multimode, il faut trouver une expression approchée des éléments de la matrice  $G(z)$  (III.31) qui représente le couplage entre les modes transverses. A cause du nombre croissant de couplages croisés et donc de paramètres à ajuster, il devient vite très difficile voire impossible de généraliser la méthode utilisée pour le régime monomode.

Néanmoins, les données expérimentales permettent un développement perturbatif des fonctions  $G_{ab}$ .

L'énergie transférée du faisceau de pompe vers celui de sonde est donnée par la relation (I.26):

$$\kappa = \frac{\sum_{d=1}^{\infty} I_d(L_c)}{I_0(L_c)} = \left[ \frac{\beta}{g_s} e^{-\alpha L_c} - 1 \right]^{-1}$$

où le rapport des intensités incidentes à l'état stationnaire et à l'entrée du cristal est tel que:

$$10^3 < \beta = \frac{I_0(0)}{\sum_{d=1}^{\infty} I_d(0)} < 10^4$$

tandis que le gain  $g_s$  introduit dans la première partie (sect. I.1.2) vérifie l'inégalité suivante:

$$g_s = \frac{\sum_{d=1}^{\infty} I_d(L_c)}{\sum_{d=1}^{\infty} I_d(0)} < 20$$

Donc, pour  $\alpha = 0.46 \text{ cm}^{-1}$  and  $L_c = 1 \text{ cm}$ , même si le gain du mélange à deux ondes est important ( $\approx 20$ ), les pertes élevées de la cavité réduisent suffisamment l'intensité du faisceau de cavité pour que le rapport  $\kappa$  soit compris entre  $10^{-2}$  et  $10^{-3}$ . Les fonctions  $G_{ab}(z)$  peuvent donc être développées à l'ordre un en  $\kappa$ :

$$G_{ab}(z) = \frac{1}{|\rho_0(z)|^2} \{\delta_{ab} - G_{ab} \kappa\}$$

Mais pour être cohérent avec le rejet de l'approximation du champ moyen, il faut conserver toute la dépendance longitudinale de  $G_{ab}$  ce qui nous autorise à utiliser l'expression suivante:

$$G_{ab}(z) = \frac{1}{|\rho_0(z)|^2} \left\{ \delta_{ab} - \sum_{e=1}^{\infty} \sum_{f=1}^{\infty} F_{ab,ef} \frac{\rho_e^*(z) \rho_f(z)}{|\rho_0(z)|^2} \right\} \quad (\text{III.57})$$

Notons que cette formulation améliore la précision du développement perturbatif car, dans le cristal, le rapport des intensités est toujours inférieur à sa valeur  $\kappa$  prise en  $z = L_c$ .

D'autre part, contrairement au cas monomode où la constante  $F_{ab,ef}$  résulte d'un ajustement numérique, ici, elle possède une définition précise qui représente l'intégrale de recouvrement à quatre modes suivante:

$$F_{ab,ef} = \int_{\sigma_T} d\mathbf{r}_T \{ \mathbf{E}_a^*(\mathbf{r}_T) \cdot \mathbf{E}_b(\mathbf{r}_T) \} \{ \mathbf{E}_e^*(\mathbf{r}_T) \cdot \mathbf{E}_f(\mathbf{r}_T) \} \quad (\text{III.58})$$

Si on utilise le même raisonnement que pour  $G_{ab}(z)$ , l'expression de  $H_{da}(z)$  permettant d'évaluer le tirage en fréquence s'écrit:

$$H_{da}(z) = \int_0^{L_c} dz \sqrt{I_a(z)} e^{i\psi_a(z)} \times \left\{ \delta_{ad} - \sum_{b=1}^{\infty} \sum_{c=1}^{\infty} F_{da,bc} \frac{\sqrt{I_b(z) I_c(z)}}{I_0(z)} e^{i(\psi_c(z) - \psi_b(z))} \right\} \quad (\text{III.59})$$

L'influence des modes transverses sur le mode  $d$  s'effectue donc seulement à travers le terme non linéaire proportionnel à  $F_{da,bc}$ .

L'implication de cette approximation peut être perçue dans le cas monomode déjà étudié. Le système d'équations (III.38) se ramène à :

$$\left(\frac{d}{dz} + \alpha\right) I_d(z) = \eta_d I_d(z) \left\{1 - F_d \frac{I_d(z)}{I_0(z)}\right\} \quad (\text{III.60a})$$

$$\left(\frac{d}{dz} + \alpha\right) I_0(z) = -\eta_d I_d(z) \left\{1 - F_d \frac{I_d(z)}{I_0(z)}\right\} \quad (\text{III.60b})$$

Ce système d'équation peut être obtenu en développant au premier ordre en  $I_d/I_0$  la forme approchée (III.44b) de  $G_{dd}$  introduite dans la section consacrée au régime monomode :

$$G_{dd}(z) = \frac{1}{I_0} \frac{1}{1 + F_d \frac{I_d}{I_0}} \cong \frac{1}{I_0} \left\{1 - F_d \frac{I_d}{I_0}\right\} \quad \text{pour } \frac{I_d}{I_0} \ll 1$$

De ce fait, en régime monomode, il est logique que l'on retrouve ici les mêmes valeurs de  $F_d$  que celles qui ont été calculées par la méthode d'ajustement numérique (tableau III.2).

Nous avons ainsi défini deux petits paramètres qui sont respectivement  $F_d$  et le rapport des intensités des faisceaux de cavité et de pompe  $\kappa$ . L'existence du premier résulte d'une intuition vérifiée à posteriori tandis que le second découle de l'expérience. L'ordre dans lequel sont effectués ces deux développements perturbatifs importe peu en régime monomode.

La condition de validité de ce développement en fonction du rapport des intensités  $\kappa$  est la même que celle du développement en fonction de  $F_d$  (III.50) car les équations d'évolution des amplitudes des modes sont les mêmes. La discussion présentée dans la section III.3.1 concernant la longueur de cristal ou le gain maximum reste donc valable.

### III.3.3: Régime bimode transverse

Après avoir analysé le régime monomode transverse, nous étendons notre étude au régime bimode. Conformément au développement perturbatif que nous venons de présenter, nous simplifierons les équations du mélange à deux ondes et la formule du tirage en fréquence  $\Delta\nu$  subi par chacun des modes. Ensuite, nous analyserons les propriétés spécifiques du bimode en nous limitant à l'ordre zéro en  $\kappa$ .

### III.3.3.1: Mélange à deux ondes

Dans le bimode, les équations (III.38b) se réduisent à deux équations différentielles ordinaires pour les intensités des modes qui oscillent:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dz} + \alpha\right) I_1 &= \sigma_1 \sin(\varphi_1) I_1 \left(1 - F_{11} \frac{I_1}{I_0} + F_{12} \frac{I_2}{I_0}\right) \\ &\quad - 2\sigma_2 \sin(\varphi_2 + \psi_2 - \psi_1) F_{12} \frac{I_1 I_2}{I_0} \cos(\psi_2 - \psi_1) \end{aligned} \quad (\text{III.61a})$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dz} + \alpha\right) I_2 &= \sigma_2 \sin(\varphi_2) I_2 \left(1 - F_{11} \frac{I_1}{I_0} + F_{12} \frac{I_2}{I_0}\right) \\ &\quad - 2\sigma_1 \sin(\varphi_1 - \psi_2 + \psi_1) F_{12} \frac{I_1 I_2}{I_0} \cos(\psi_2 - \psi_1) \end{aligned} \quad (\text{III.61b})$$

où compte tenu de l'équation (III.39), l'intensité  $I_0(z)$  du faisceau de pompe obéit à la relation:

$$I_0(z) = (I_0(0) + I_1(0) + I_2(0)) e^{-\alpha z} - I_1(z) - I_2(z)$$

Les équations (III.38d) pour les phases des modes deviennent:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dz} &= -\frac{\sigma_1}{2} \cos(\varphi_1) \left(1 - F_{11} \frac{I_1}{I_0} + F_{12} \frac{I_2}{I_0}\right) \\ &\quad + \sigma_2 \cos(\varphi_2 + \psi_2 - \psi_1) F_{12} \frac{I_2}{I_0} \cos(\psi_2 - \psi_1) \end{aligned} \quad (\text{III.61c})$$

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_2}{dz} &= -\frac{\sigma_2}{2} \cos(\varphi_2) \left(1 - F_{11} \frac{I_1}{I_0} + F_{12} \frac{I_2}{I_0}\right) \\ &\quad + \sigma_1 \cos(\varphi_1 - \psi_2 + \psi_1) F_{12} \frac{I_1}{I_0} \cos(\psi_2 - \psi_1) \end{aligned} \quad (\text{III.61d})$$

Notons que dans les équations III.61, la deuxième ligne est caractéristique des couplages en amplitude introduits par la normalisation (III.25) de l'indice de réfraction que nous avons adopté dans ce travail. En effet, ces termes n'apparaissent pas avec la normalisation généralement utilisée par les autres groupes (D. Z. Anderson et R. Saxena [1987] et G. P. D'Alessandro [1992]).

Les intensités et les phases déduites de l'intégration numérique du système (III.61) sont représentées respectivement par les figures III.16 pour des valeurs réalistes des paramètres. Les échanges d'énergie se produisent entre le faisceau de pompe et les deux composantes du faisceau de sonde. L'évolution des variables reste qualitativement similaire à celle du régime monomode (figs. III.6 et III.7). Comme dans le cas monomode, les équations (III.61) montrent que les échanges d'énergie optimaux de la pompe vers la sonde se produisent pour  $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$  mais que les variations optimales de

phase sont par contre obtenues lorsque  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$  (modulo  $\pi$ ). La différence principale avec le régime monomode réside dans la répartition de l'énergie entre les deux modes car celle-ci dépend non seulement de leur gain respectif ( $\sigma_1, \sigma_2, \varphi_1, \varphi_2$ ) mais aussi de leur intégrale de recouvrement.

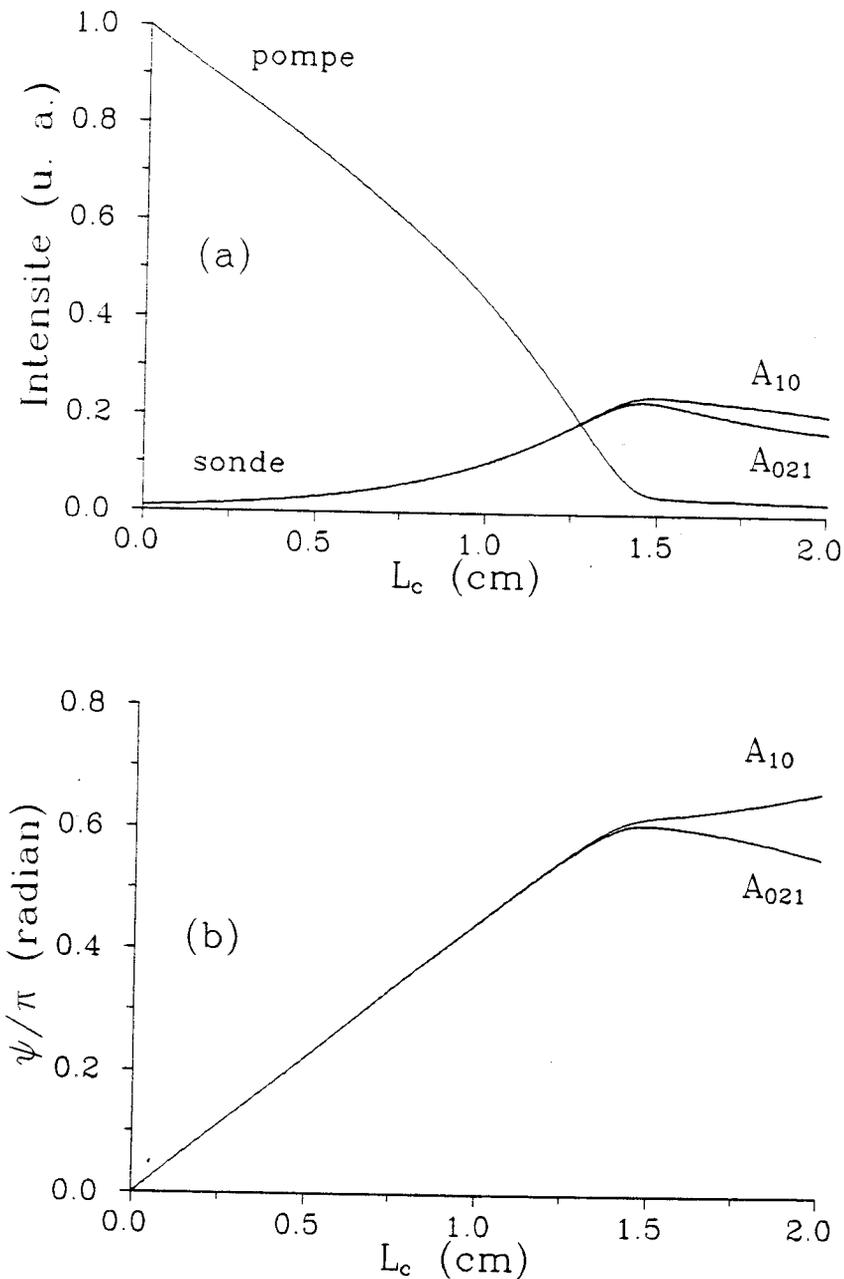


Figure III.16: Mélange à deux ondes dans un bimode: évolution suivant l'axe du cristal (a) de l'intensité des faisceaux de pompe  $I_0$  et de cavité ( $I_1$  et  $I_2$ ) et (b) de la phase des modes ( $A_{021}$ ) et ( $A_{10}$ ) ( $L_c$  de 1 cm,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 4 \text{ cm}^{-1}$ ,  $\varphi_1 = \varphi_2 = 3\pi/4$ ,  $\alpha = 0.46 \text{ cm}^{-1}$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 10^2$ )

### III.3.3.2: Tirage en fréquence

Dans le régime bimode, le tirage en fréquence  $\Delta\nu_d$  du mode  $d$  est donné par l'équation (III.42) et les fonctions  $R_1$ ,  $l_1$ ,  $R_2$  et  $l_2$  restent définies par (III.41). Avec la condition de stationnarité (III.44):

$$\nu'_1 = \nu'_2 = \nu' \quad (\text{III.62})$$

on déduit la relation suivante entre les tirages en fréquence des deux modes:

$$\boxed{\frac{2}{\tau_r} \tau_1 (\nu_1 - \nu_2) = \frac{R_1}{l_1} - \frac{\tau_2}{\tau_1} \frac{R_2}{l_2} = \frac{R}{l}} \quad (\text{III.63})$$

où  $\tau_1$  et  $\tau_2$  sont les temps de décroissance de modes 1 et 2. La différence  $\nu_1 - \nu_2$  entre les fréquences passives des deux modes, exprimée en unité réduite (I.56), est entièrement déterminée par la géométrie du résonateur:

$$\nu_1 - \nu_2 = (\Delta N + R\nu \Delta q)$$

où  $R\nu$  renseigne sur la distribution des fréquences des familles de modes transverses (I.58).  $\Delta N$  et  $\Delta q$  sont respectivement la différence des indices longitudinal et transverse des deux familles.

Par exemple, si les modes appartiennent à deux familles voisines de même indice longitudinal  $\Delta N = 0$  et  $\Delta q = 1$ . Avec  $R\nu = 0.3$ ,  $\tau_1 = 10^{-8}$  s et  $\Delta\nu_L = 2 \cdot 10^8$  Hz, compte tenu des pertes dans la cavité (sect. II.1.3.2), on obtient

$$\frac{2}{\tau_r} \tau_1 (\nu_1 - \nu_2) = 1.2$$

Rappelons que dans ce modèle stationnaire, seules les valeurs de paramètres pour lesquelles les fréquences actives des deux modes sont égales ont un sens (III.32) et ceci indépendamment de la valeur du tirage en fréquence subi par chaque mode. Dans le cadre de l'exemple de deux modes de familles adjacentes, seule l'intersection du plan  $R/l = 1.2$  et de la courbe issue de la seconde égalité de (III.63) donne les valeurs des paramètres pour lesquelles la condition de stationnarité est satisfaite et permettent donc aux deux modes considérés d'osciller en même temps.

Le reste de cette section est consacré à l'analyse numérique de la relation (III.63). Pour donner une idée générale du rôle des différents paramètres, nous nous plaçons dans un premier temps au voisinage du seuil d'oscillation car le traitement numérique est plus simple. En effet, à l'ordre

zéro du développement perturbatif en  $\kappa$ , il est possible d'obtenir une expression analytique du tirage en fréquence.

Néanmoins, à la fin de cette section, pour montrer l'influence de la structure transverse des modes considérés sur le tirage en fréquence, nous nous plaçons au premier ordre du développement en  $\kappa$ .

(i) Au voisinage du seuil

A proximité du seuil d'oscillation, l'intensité des modes transverses est suffisamment faible pour se limiter à l'ordre zéro du développement perturbatif en  $\kappa$ . Dans cette situation limite, les équations (III.38) du mélange à deux ondes admettent les solutions suivantes pour l'intensité de la pompe:

$$I_0(z) = I_0(0) e^{-\alpha z}$$

et pour chaque mode:

$$I_j(z) = I_j(0) e^{(\sigma_j \sin(\varphi_j) - \alpha) z}$$

$$\Delta \Psi_j(z) = \frac{\sigma_j}{2} \cos(\varphi_j) z$$

où l'indice  $j = 1, 2$ .

À l'ordre zéro, tous les termes de couplage entre les modes sont nuls et le bimode se réduit à deux systèmes monomodes indépendants. Le tirage en fréquence de chaque mode prend donc la même forme que dans le régime monomode (III.55).

Afin de mettre en évidence les conséquences du lien entre les tirages en fréquence des modes qu'impose la condition de stationnarité (III.32), nous définissons un jeu de paramètres relatifs  $\Delta\varphi$ ,  $\Delta\tau$  et  $\Delta\sigma$  entre les deux modes:

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \varphi_1 + \Delta\varphi \\ \sigma_2 &= \sigma_1 + \Delta\sigma \\ \tau_2 &= \tau_1 + \Delta\tau \end{aligned} \tag{III.64}$$

L'influence des paramètres  $\varphi_1$ ,  $\sigma_1$  et  $L_c$  sur le régime monomode a été discutée dans la section III.3.1.2. Nous limiterons donc la discussion à l'étude du rôle des paramètres relatifs:  $\Delta\varphi$ ,  $\Delta\sigma$  et  $\Delta\tau$  et supposons fixée la valeur des autres paramètres  $\varphi_1$ ,  $\sigma_1$ ,  $\tau_1$ ,  $\alpha$  et  $L_c$ .

Les figures III.17, III.18 et III.19 représentent le rapport  $R^{(0)}/I^{(0)}$  défini par la relation (III.63):

$$\frac{R^{(0)}}{I^{(0)}} = \frac{R_1^{(0)}}{I_1^{(0)}} - \Delta\tau \frac{R_2^{(0)}}{I_2^{(0)}} \tag{III.65}$$

respectivement dans les sous-espaces des paramètres à deux dimensions  $(\varphi_1, \Delta\varphi)$ ,  $(\varphi_1, \Delta\sigma)$  et  $(\varphi_1, \Delta\tau)$ . Dans ces trois figures, lorsqu'un des paramètres relatifs varie, la valeur des deux autres est choisie de façon à se placer dans la situation symétrique caractérisée par:  $\Delta\sigma = 1$ ,  $\Delta\tau = 1$  et  $\Delta\varphi = 0$ . Cette situation sert de référence car les deux modes y jouent un rôle équivalent et le rapport  $R^{(0)}/I^{(0)}$  y est nul. Par exemple dans la figure III.17, les gains, les intensités et les temps de vie des deux modes transverses sont égaux. De ce fait, lorsque  $\Delta\varphi = 0$ , les paramètres propres à chaque mode prennent les mêmes valeurs et le rapport  $R^{(0)}/I^{(0)}$  s'annule quelle que soit la valeur de  $\varphi_1$ . Par ailleurs, les pics du tirage en fréquence d'un mode sont déplacés de  $\Delta\varphi$  par rapport aux pics de l'autre mode. Dans les deux figures III.18 et III.19, on passe continûment de la situation monomode  $\Delta\sigma = 0$  ( $\Delta\tau = 0$  respectivement) à la situation symétrique  $\Delta\sigma = 1$  ( $\Delta\tau = 1$  respectivement).

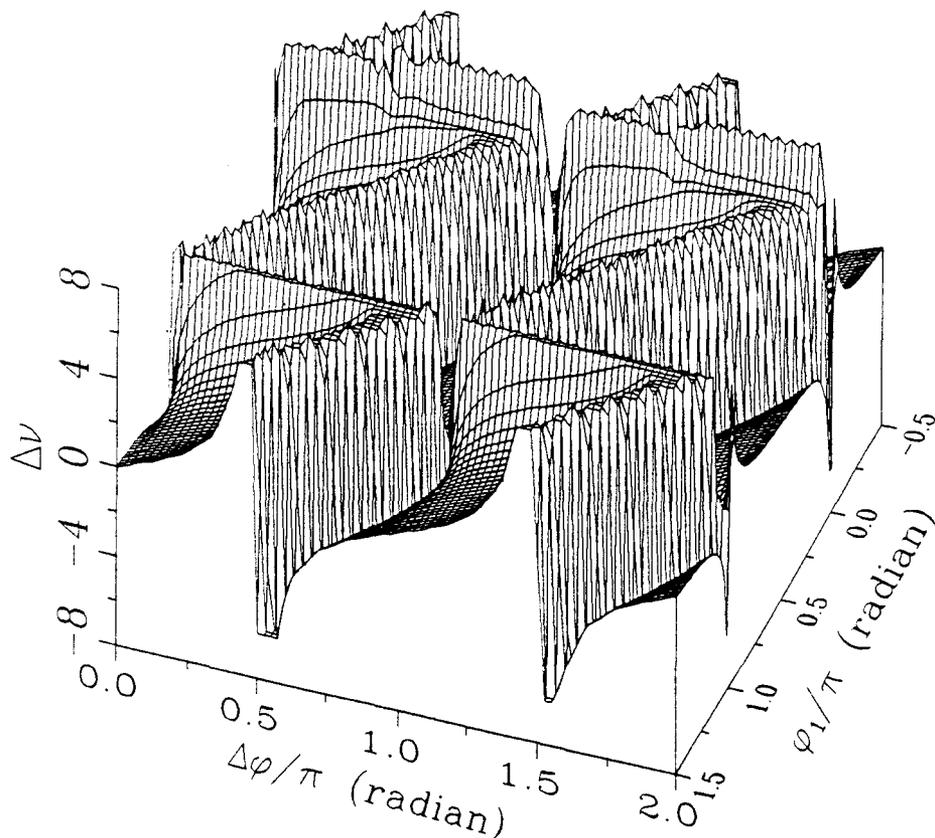


Figure III.17: Tirage en fréquence  $\Delta\nu$  du bimode à l'ordre zéro en  $\kappa$  en fonction de  $\varphi_1$  et de  $\Delta\varphi$ . ( $L_c$  de 1 cm,  $\sigma_1 = 7 \text{ cm}^{-1}$ ,  $\tau_1 = 10^{-8} \text{ s}$ ,  $\alpha = 0.46 \text{ cm}^{-1}$ ,  $\beta = 10^4$ ,  $\Delta\sigma = 1$ ,  $\Delta\tau = 1$ )

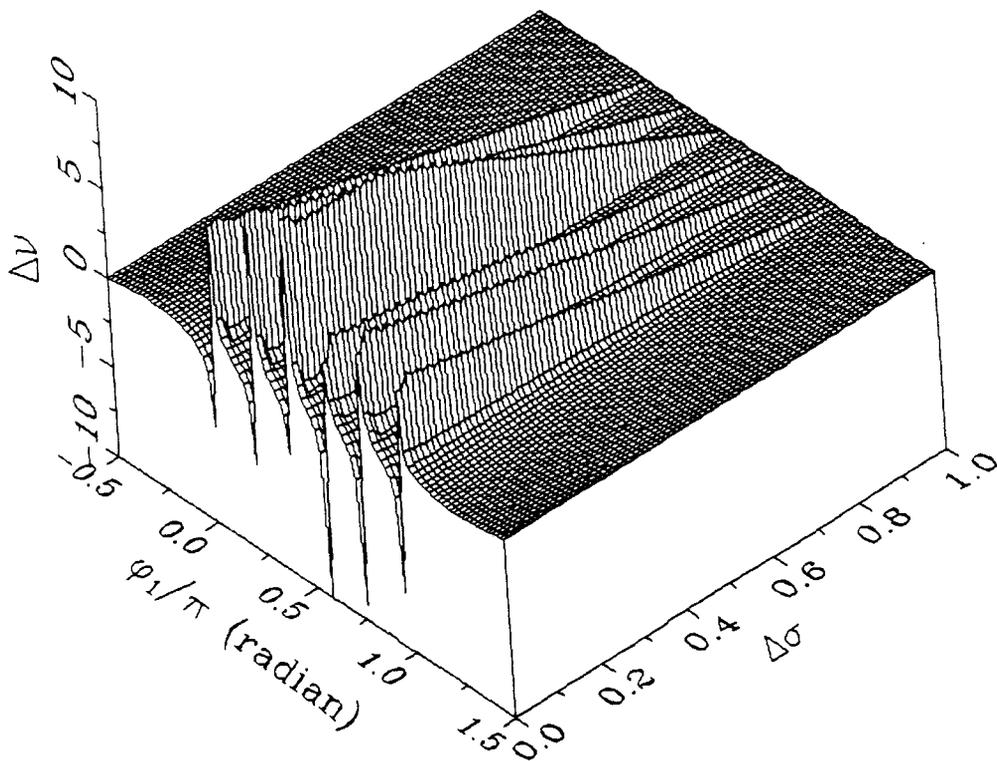


Figure III.18: Tirage en fréquence  $\Delta\nu$  du bimode à l'ordre zéro en  $\kappa$  en fonction de  $\phi_1$  et de  $\Delta\sigma$   
 ( $L_c$  de 1 cm,  $\sigma_1 = 7 \text{ cm}^{-1}$ ,  $\tau_1 = 10^{-8} \text{ s}$ ,  $\alpha = 0.46 \text{ cm}^{-1}$ ,  $\beta = 10^4$ ,  $\Delta\phi = 0$ ,  $\Delta\tau = 1$ )

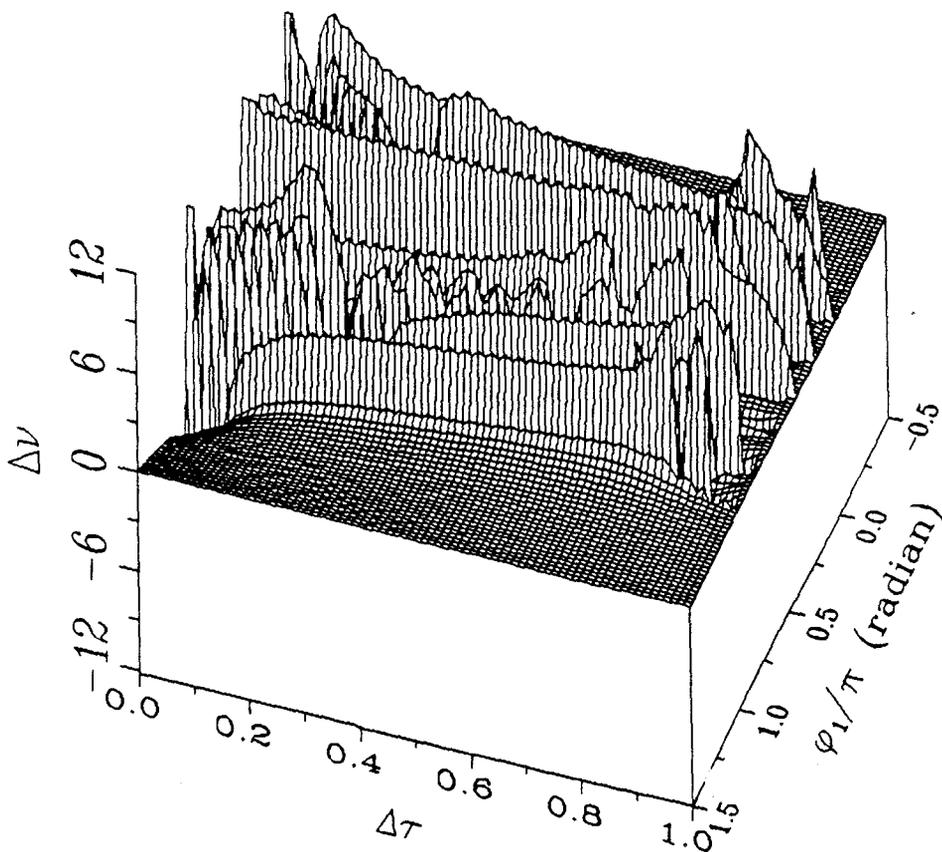


Figure III.19: Tirage en fréquence  $\Delta\nu$  du bimode à l'ordre zéro en  $\kappa$  en fonction de  $\phi_1$  et de  $\Delta\tau$ . ( $L_c$  de 1 cm,  $\sigma_1 = 7 \text{ cm}^{-1}$ ,  $\tau_1 = 10^{-8} \text{ s}$ ,  $\alpha = 0.46 \text{ cm}^{-1}$ ,  $\beta = 10^4$ ,  $\Delta\sigma = 1$ ,  $\Delta\phi = 0$ )



(ii) Mélange d'une onde plane et d'un faisceau bimode transverse

Le premier ordre en  $\kappa$  permet de tenir compte de la structure du faisceau intracavité et donc d'obtenir un accord plus étroit avec les résultats expérimentaux.

Le seul paramètre relatif qui n'apparaît pas à l'ordre zéro du développement est le rapport des intensités de chaque mode transverse:

$$\beta_2 = \beta_1 \cdot \Delta\beta$$

où les  $\beta_j$  sont les rapports d'intensité suivant:

$$\beta_j = \frac{I_0(0)}{I_j(0)}$$

Le tirage en fréquence est peu sensible au rapport  $\Delta\beta$  des intensités des deux modes. De plus, si les intensités des modes sont très différentes l'une de l'autre ce qui correspond à  $\Delta\beta$  très éloigné de l'unité, le dispositif expérimental ne permettrait de détecter que le mode le plus intense et le régime serait supposé monomode.

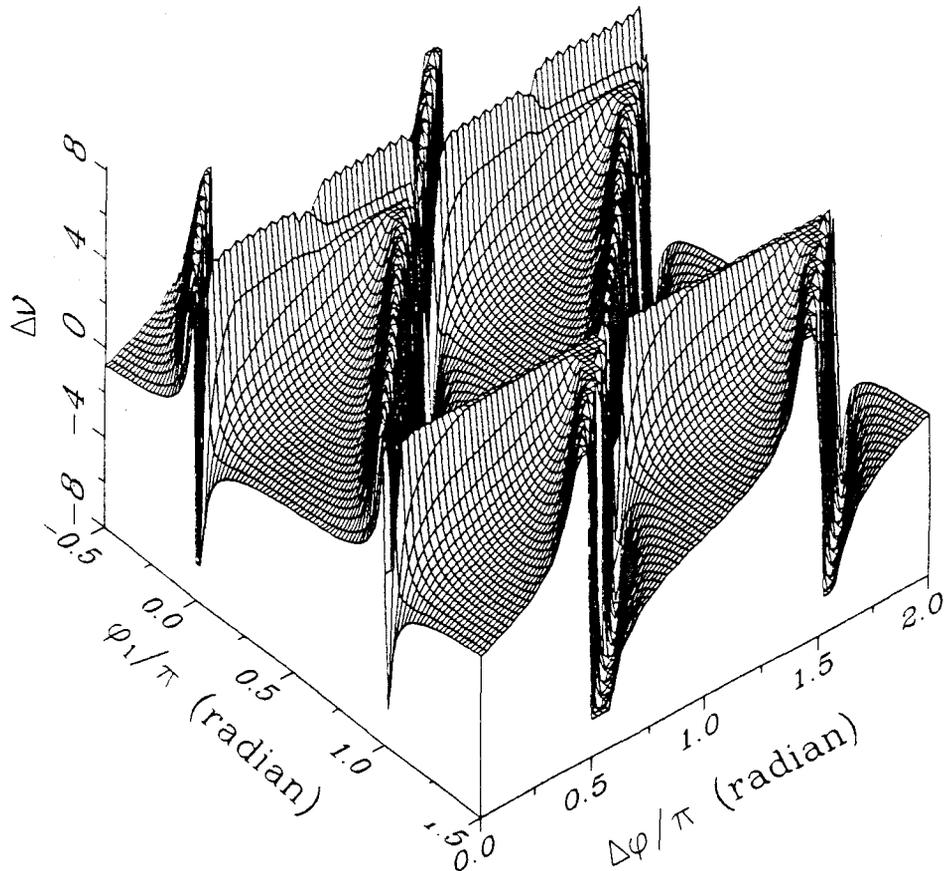


Figure III.20: Tirage en fréquence  $\Delta\nu$  du bimode à l'ordre un en  $\kappa$  en fonction de  $\phi_1$  et de  $\Delta\phi$  pour les modes dégénérés  $A_{10}$  et  $A_{021}$ . ( $L_c$  de 1 cm,  $\sigma_1 = 7 \text{ cm}^{-1}$ ,  $\tau_1 = 10^{-8} \text{ s}$   $\alpha = 0.46 \text{ cm}^{-1}$ ,  $\beta = 10^4$ ,  $\Delta\sigma = 1.3$ ,  $\Delta\tau = 0.7$ ,  $\Delta\beta = 1$ )

La figure III.20 représente le rapport  $R/l$  d'un bimode (modes  $A_{032}$  et  $A_{042}$ ) en fonction des paramètres  $\varphi_1$  et  $\Delta\varphi$ . Pour ces modes, les intégrales de recouvrement  $F_{ij}$  prennent les valeurs suivantes:

$$F_{11} = 0.0373$$

$$F_{12} = 0.0218$$

$$F_{22} = 0.0326$$

et nous avons choisi une situation asymétrique réaliste:  $\Delta\sigma = 1.3$ ,  $\Delta\tau = 0.7$  et  $\Delta\varphi = 0.2 \pi$ . Malgré une disposition différente des pôles et donc des valeurs de paramètres satisfaisant la condition de stationnarité, l'allure générale est fort semblable à celle obtenue pour des situations symétriques.

### III.3.4: Comparaison avec l'expérience

En 1990, le groupe d'Arecchi (F. T. Arecchi et al [1990]) a observé un comportement appelé: "itinérance périodique" dans lequel une même séquence de modes se reproduit périodiquement dans le temps. Dans le cadre de ce modèle, des arguments basés sur la structure transverse des modes permettent d'expliquer leur ordre de passage dans la séquence observée.

A faible nombre de Fresnel, les expériences décrites par le groupe d'Arecchi (F. T. Arecchi et al [1990]) montrent que les modes qui oscillent préférentiellement dans la cavité appartiennent à la base de Laguerre-Gauss ayant un indice radial  $p$  nul (modes  $A_{0l}$ ). L'alternance périodique, observée dans ces expériences, démarre avec le mode d'indice azimutal maximal  $l=l_{\max}$  compatible avec le nombre de Fresnel. Puis, ce mode disparaît, pour faire place au mode d'indice azimutal  $l=l_{\max}-1$ . Ce phénomène se poursuit jusqu'à ce que le mode  $A_{00}$  disparaisse et que le faisceau de cavité s'éteigne. Ensuite, le processus redémarre avec le mode  $l=l_{\max}$  suivi de la même séquence... Nous pouvons suggérer une interprétation de l'ordre de passage des modes au sein de ce régime dynamique basée sur l'interaction non linéaire du faisceau de cavité avec le cristal qui est analysée dans le cadre de ce modèle stationnaire.

La première colonne du tableau III.3 présente les valeurs de l'intégrale de recouvrement transverse  $F_d$  du régime monomode. Pour les modes  $p = 0$ ,  $F_d$  décroît lorsque  $l$  croît. Ceci implique que l'efficacité des transferts d'énergie dans le mélange à deux ondes augmente avec  $l$ , comme le montrent les équations (III.46) et (III.53). Ce phénomène apparaît dans les figures III.21

où est présenté le tirage en fréquence en fonction de  $\varphi$  et de  $\Delta\varphi$  correspondant à plusieurs modes transverses pour des valeurs de paramètres fixées au seuil d'apparition des premières paires de pôles: pour les modes plus complexes la paire de pôles est déjà engendrée alors que pour les modes de structure plus simple, elle commence à se former (fig. III.21b). Ainsi, plus l'indice azimutal du mode est élevé, plus le tirage en fréquence est important, qui déplace sa fréquence dans la courbe de gain et permet donc au mode d'osciller dans la cavité. Cet argument donne une justification qualitative de l'ordre de passage des modes observés dans le régime décrit plus haut.

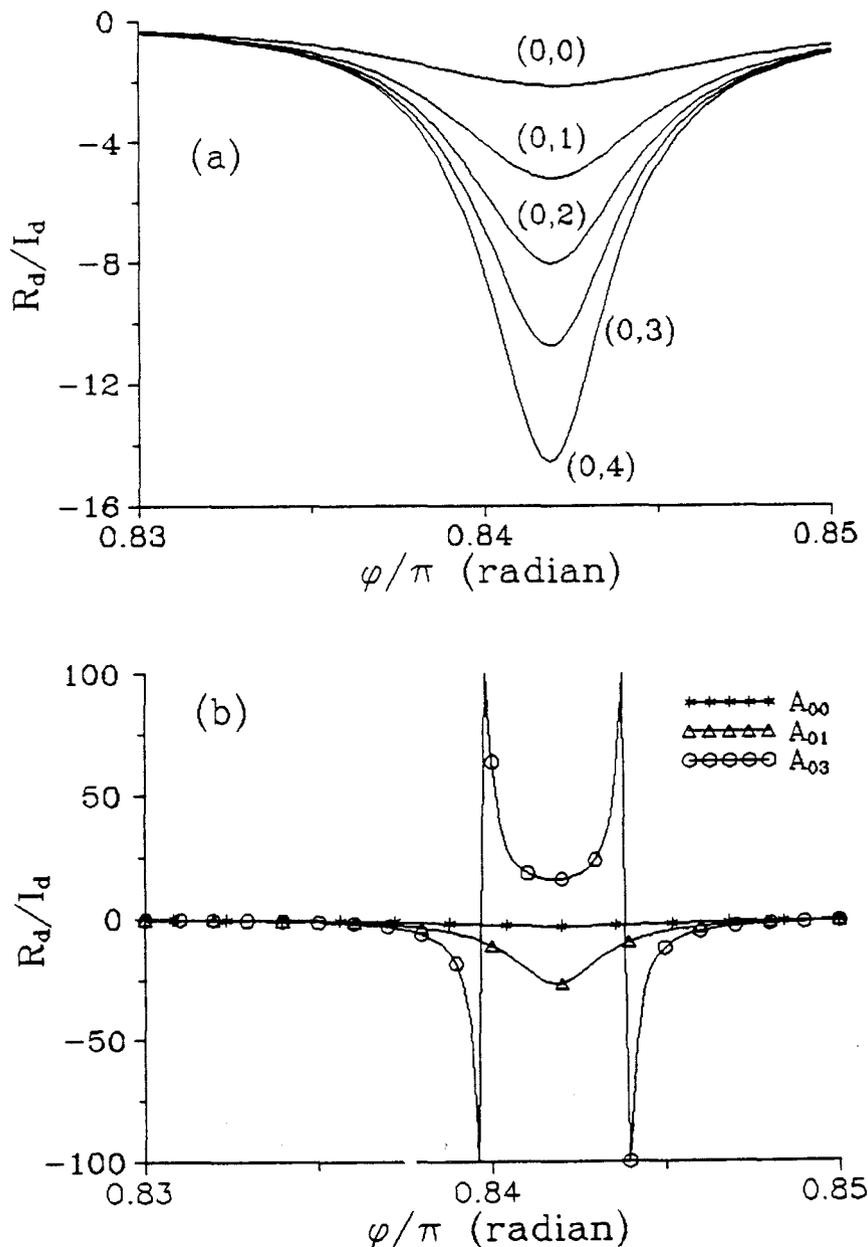


Figure III.21: Tirage en fréquence  $\Delta\nu$  en situation monomode en fonction de  $\varphi$  pour différents modes transverses: (a) création d'une paire de pôles et (b) écartement des pôles. ( $L_c$  de 1 cm,  $\sigma = 7 \text{ cm}^{-1}$ ,  $\tau = 10^{-8} \text{ s}$ ,  $\alpha = 0.46 \text{ cm}^{-1}$ ,  $\beta = 10^4$ )

Par contre pour justifier des transitions entre les différents modes de la séquence, il faut considérer l'exemple du bimode transverse et montrer qu'un ou plusieurs jeux de paramètres permettent aux modes de coexister simultanément dans la courbe de gain.

Choisissons, par exemple, les modes  $A_{032}$  et  $A_{042}$  de la base de Laguerre-Gauss. La figure III.22 représente l'ensemble des points du sous espace des paramètres à deux dimensions  $(\varphi_1, \Delta\varphi)$  tel que le tirage en fréquence est suffisant pour permettre l'oscillation simultanée des deux modes:  $R/l = 1.2$ . On en conclut que la transition entre les modes  $A_{032}$  et  $A_{042}$  peut être expliquée en se basant sur le tirage en fréquence.

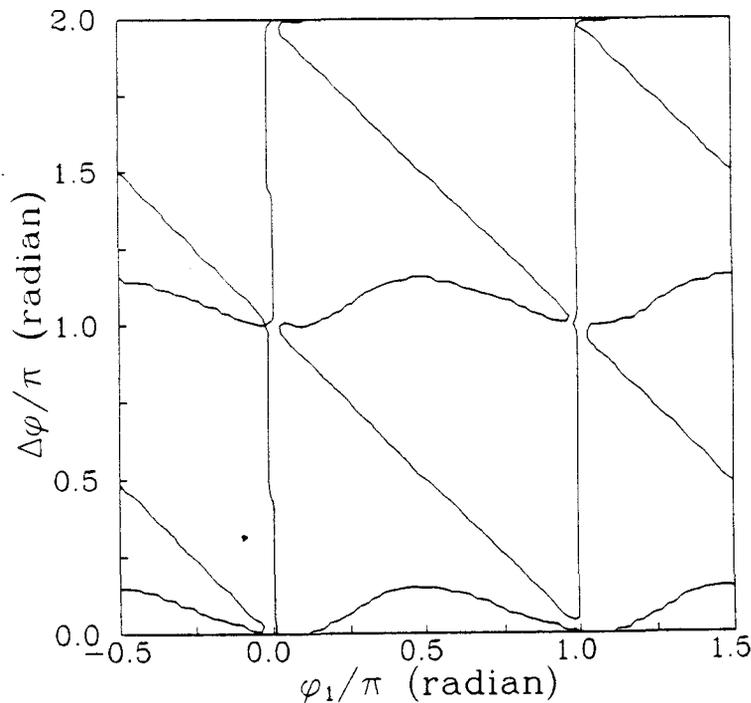


Figure III.22: Couples de valeur des paramètres  $\varphi_1$  et de  $\Delta\varphi$  pour lesquelles les fréquences actives des deux modes  $A_{031}$  et  $A_{041}$  sont dégénérées. ( $L_c$  de 1 cm,  $\sigma_1 = 7 \text{ cm}^{-1}$ ,  $\tau_1 = 10^{-8} \text{ s}$ ,  $\alpha = 0.46 \text{ cm}^{-1}$ ,  $\beta = 10^4$ ,  $\Delta\sigma = 1.3$ ,  $\Delta\tau = 0.7$ ,  $\Delta\beta = 1$ )

Nous venons de considérer le cas de deux modes de fréquences passives non dégénérées, mais dans la seconde partie de ce travail, nous décrivons des régimes impliquant des modes passifs dégénérés dans une cavité idéale. Par exemple, dans le cas de la structure 4H (fig. II.17), les deux modes concernés sont  $A_{10}$  et  $A_{021}$ . La figure III.23, comme la figure III.22, représente l'ensemble des couples de paramètres  $(\varphi_1, \Delta\varphi)$  satisfaisant la condition de

stationnarité (III.32) et donc permettant l'oscillation des modes  $A_{10}$  et  $A_{021}$  constituant la structure 4H ou le régime P<sup>(2)</sup>.

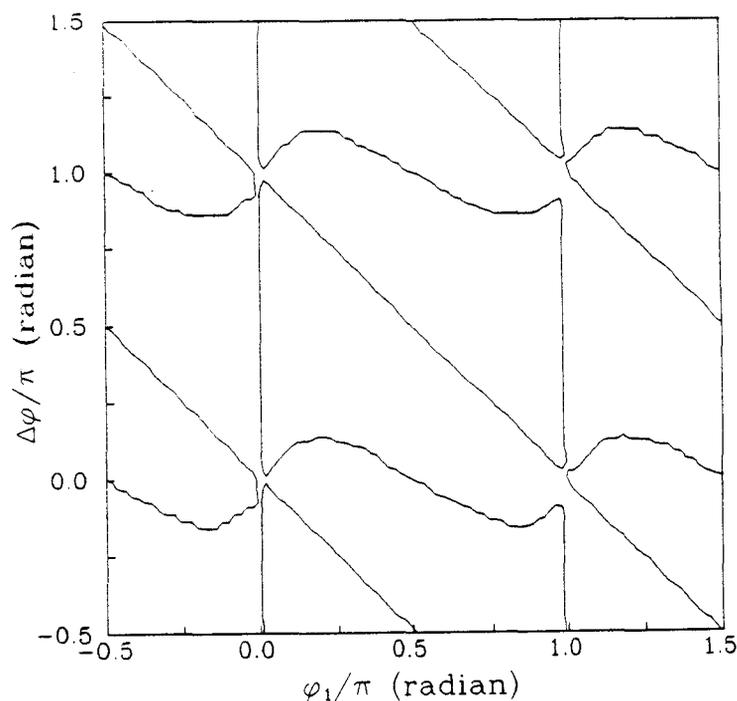


Figure III.23: Couples de valeur des paramètres  $\varphi_1$  et de  $\Delta\varphi$  pour lesquelles les fréquences actives des deux modes  $A_{10}$  et  $A_{021}$  sont dégénérées. ( $L_c$  de 1 cm,  $\sigma_1 = 7 \text{ cm}^{-1}$ ,  $\tau_1 = 10^{-8} \text{ s}$ ,  $\alpha = 0.46 \text{ cm}^{-1}$ ,  $\beta = 10^4$ ,  $\Delta\sigma = 1.3$ ,  $\Delta\tau = 0.7$ ,  $\Delta\beta = 1$ )

Nous avons démontré que, pour certaines valeurs de paramètres, la fréquence active du régime monomode se trouve dans la courbe de gain même si sa fréquence passive est initialement à plusieurs intervalles spectraux longitudinaux. Cela explique que des modes puissent osciller sur des domaines de fréquence de résonance de la cavité  $10^6$  fois plus larges que la courbe de gain du matériau (voir figure II.11 et II.29). Nous avons aussi montré que dans un bimode, il est généralement possible que les deux modes oscillent en même temps. On en conclut que l'alternance périodique est un régime pouvant être justifié par des arguments basés sur le tirage en fréquence produit par l'interaction non linéaire entre le faisceau de cavité et le cristal photoréfractif. Mais, nous n'avons pas démontré que ce régime existe réellement puisque nous n'avons pas encore établi de modèle dynamique. De plus, il existe des paramètres intervenant dans ce modèle stationnaire que le dispositif expérimental ne nous permet pas d'évaluer. Par

exemple, le déphasage  $\phi$  entre les réseaux d'interférences et d'indice de réfraction constitue un paramètre critique de ce modèle qui reste indéterminé sur le plan expérimental. En d'autres termes, nous avons démontré qu'il existe des valeurs de paramètres permettant à deux modes transverses ou plus de se trouver dans l'étroite courbe de gain du matériau.

Par contre, pour sonder les régimes dynamiques de la structure transverse du faisceau de cavité, il faut élaborer un modèle dynamique impliquant non seulement les temps caractéristiques de l'effet photoréfractif et de la cavité mais aussi les degrés de libertés spatiaux.

"Le fait scientifique ne sera jamais que le fait brut traduit dans un langage plus commode"

Henri Poincaré

## *Quatrième partie*

*Aspects théoriques:*

*Modèle dynamique*

Lorsque l'on suit l'évolution temporelle de la structure transverse du faisceau intracavité en détection hétérodyne, on observe une légère différence de fréquence entre la pompe et le faisceau de cavité qui se traduit par le défilement des lignes de phases. Cette différence de fréquence est au plus de l'ordre de la largeur de la courbe de gain du photoréfractif (quelques Hertz). Le modèle stationnaire montre que l'oscillateur à gain photoréfractif est capable de générer un tirage de fréquence supérieur à l'intervalle spectral longitudinal de la cavité ( $\Delta\nu_L \cong 2 \cdot 10^8$  Hz). Mais, comme le montre la deuxième partie de ce mémoire, la largeur du spectre de la dynamique spatio-temporelle du faisceau engendré dans un oscillateur à gain photoréfractif est environ  $10^8$  fois plus petite par rapport au tirage en fréquence. Afin de reproduire les régimes dynamiques décrits dans la deuxième partie de ce mémoire, il faut établir un modèle tenant compte des échelles de temps caractéristiques de l'effet photoréfractif.

Dans ce but, nous établissons les équations matérielles décrivant l'effet photoréfractif au sein du cristal. Ensuite, nous vérifions la validité de l'approximation paraxiale avec des matériaux fortement non linéaires comme les cristaux photoréfractifs et nous dérivons un modèle de mélange à deux ondes. L'ensemble de ces équations constitue le modèle dynamique de l'oscillateur à gain photoréfractif.

Nous clôturons la quatrième partie de ce mémoire en comparant les résultats préliminaires issus de ce modèle avec les observations expérimentales décrites dans la deuxième partie.

## IV.1: MODELISATION

### IV.1.1: Equations matérielles

Dans cette section, nous analysons les processus de base de l'effet photoréfractif. Ce modèle décrit l'évolution temporelle des densités de porteurs de charge et de donneurs ionisés dans un semi-conducteur soumis à un éclairage non uniforme.

Lorsque deux faisceaux monochromatiques interfèrent dans un cristal photoréfractif, il se crée une distribution de charges d'espace due à la photoexcitation des porteurs de charge. Ce processus peut être schématisé par la réaction suivante:

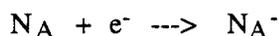


où  $N_D^0$  et  $N_D^+$  représentent respectivement la densité de sites donneurs neutres et ionisés: avec une probabilité  $s$  (section efficace de photo-ionisation), un photon excite un centre donneur qui libère un électron dans la bande de conduction. Celle-ci est caractérisée par la densité  $n_e$  d'électrons libres.

L'électron dans la bande de conduction a ensuite la probabilité  $\gamma$  (coefficient de recombinaison) d'être piégé par un site donneur ionisé, selon la réaction:



Notons que des réactions similaires se produisent aussi avec les sites accepteurs:



mais, dans les cristaux de BSO/BGO, leur densité  $N_A^-$  est suffisamment faible pour qu'en tout point de l'espace et à tout instant, on puisse les supposer saturés (S. L. Hou et al [1973]):

$$N_A = N_A^- \quad (\text{IV.3a})$$

et 
$$\frac{d}{dt} N_A^- = 0. \quad (\text{IV.3b})$$

Comme la distribution des sites accepteurs est homogène, celle des sites ionisés l'est également et il ne se crée pas de distribution de charges d'espace issue de la photoexcitation des sites accepteurs.

L'équation régissant la densité de sites donneurs ionisés au cours du temps découle de l'existence des deux processus (IV.1) et (IV.2):

$$\boxed{\frac{d}{dt} N_{D^+} = (s I + \beta) (N_D - N_{D^+}) - \gamma n_e N_{D^+}} \quad (IV.4)$$

On a introduit les notations suivantes:

$N_D = N_{D^+} + N_D^0$  est la densité de sites donneurs,

$I$ , l'intensité lumineuse locale,

et  $\beta$ , le taux d'ionisation en l'absence de lumière qui traduit les effets thermiques.

Par ailleurs, dans la bande de conduction, le mouvement des électrons provient de trois processus auxquels on associe les densités de courants suivantes:

1) le courant de diffusion issu du mouvement brownien des électrons:

$$J_{dif} = - k_B T \mu \nabla n_e, \quad (IV.5a)$$

2) le courant de dérive provoqué par le champ électrique  $E$  total présent dans le milieu:

$$J_{der} = e n_e \mu E \quad (IV.5b)$$

3) le courant photovoltaïque qui caractérise la nature cristalline du matériau:

$$J_{phot} = p I \quad (IV.5c)$$

Dans l'ordre,  $k_B$ ,  $T$ ,  $\mu$ ,  $e$  et  $p$  symbolisent la constante de Boltzmann, la température dans le matériau, la mobilité des porteurs de charge, la charge électrique de l'électron et le vecteur photovoltaïque du cristal. La mobilité et la température sont des propriétés macroscopiques du matériau. Dans ce modèle, nous ne tiendrons pas compte du courant photovoltaïque car, dans les cristaux BGO/BSO, il est négligeable comparé aux deux autres courants.

Une équation imposant la conservation globale de la charge est nécessaire. A l'échelle microscopique, elle prend la forme d'une équation de continuité:

$$\frac{d}{dt} \rho + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

où  $\rho$  et  $\mathbf{J}$  représentent les densités totales de charge et de courant. Dans notre cas, elle s'écrit:

$$e \frac{d}{dt} (n_e - N_D^+ + N_A^-) + \nabla \cdot (\mathbf{J}_{der} + \mathbf{J}_{dif}) = 0,$$

Ou encore

$$e \frac{d}{dt} (n_e - N_D^+) + e \mu n_e \nabla \cdot \mathbf{E} + e \mu \mathbf{E} \cdot \nabla n_e - k_B T \mu \Delta n_e = 0$$

(IV.6)

La distribution spatiale des charges induit un champ électrique  $\mathbf{E}_{sc}$  décrit par la première équation de Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_{sc} = \frac{\rho}{\epsilon \epsilon_0}$$

Adaptée à notre situation, elle devient

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_{sc} = \frac{e}{\epsilon \epsilon_0} (n_e - N_D^+ + N_A^-)$$

(IV.7)

Les principaux processus mis en jeu peuvent donc être décrits par le système d'équations suivant:

$$\frac{d}{dt} N_D^+ = (s I + \beta) (N_D - N_D^+) - \gamma n_e N_D^+ \quad (IV.8a)$$

$$e \frac{d}{dt} (n_e - N_D^+) + e n_e \mu \nabla \cdot \mathbf{E} + e \mu \mathbf{E} \cdot \nabla n_e - k_B T \mu \Delta n_e = 0, \quad (IV.8b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_{sc} = \frac{e}{\epsilon \epsilon_0} (n_e - N_D^+ + N_A^-) \quad (IV.8c)$$

où  $\mathbf{E}$  est le champ électrique total.

Ces équations sont générales aux matériaux semi-conducteurs. Nous allons à présent y intégrer les particularités liées à l'effet photoréfractif. L'intensité du réseau de franges d'interférences peut être écrit:

$$I = I_0 (1 + M(\mathbf{r}, t) e^{i(\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} - \delta \omega t)} + c.c.) \quad (IV.9).$$

Rappelons que  $\mathbf{K} = \mathbf{k}_p - \mathbf{k}_s = K \mathbf{1}_y$  et  $K = \frac{2\pi}{\Lambda}$  où  $\Lambda$  est l'interfrange du réseau d'interférences et  $\delta \omega$  la différence de fréquence entre les deux faisceaux incidents. Dans le cas du BGO/BSO, l'interfrange optimisant le gain vaut environ  $2 \cdot 10^{-5}$  m. Comme pour l'intensité lumineuse, nous isolons la

composante proportionnelle au réseau d'interférences dans les variables matérielles au moyen des équations suivantes:

$$N_D^+ = N_0 (1 + N_1 e^{i(\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}-\delta\omega t)} + \text{c.c.}) \quad (\text{IV.10a})$$

$$n_e = n_0 + N_0 n_1 (e^{i(\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}-\delta\omega t)} + \text{c.c.}) \quad (\text{IV.10b})$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_{sc} (e^{i(\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}-\delta\omega t)} + \text{c.c.}) \quad (\text{IV.10c})$$

où  $\mathbf{E}_0$  est le champ électrique appliqué. Remarquons que dans ce modèle nous négligeons complètement les réseaux harmoniques car nous supposons que les composantes proportionnelles au réseau d'interférences (indice 1) restent petites comparées à celle décrivant l'équilibre thermodynamique en l'absence des faisceaux incidents (indice 0). Les développements (IV.10) sont utilisés dans les équations (IV.8). La composante homogène et indépendante du temps de l'équation (IV.8a) nous donne une relation entre  $N_0$  et  $n_0$ :

$$n_0 = \frac{(\beta + s I_0) N_D}{\gamma N_0} \quad (\text{IV.11})$$

et celle de l'équation (IV.8c) la conservation de la charge lorsque le cristal n'est pas illuminé:

$$N_0 = N_A + n_0 \quad (\text{IV.12})$$

A présent, nous extrayons des équations (III.8), les composantes  $n_1$ ,  $N_1$  et  $\mathbf{E}_{sc}$  proportionnelles au réseau d'interférences et ne conservons que les termes au premier ordre en ces variables. En effet, nous considérons que les réseaux qui s'inscrivent dans le matériau n'impliquent qu'une faible proportion de densité de charge comparées à celles obtenues à l'équilibre  $n_0$  et  $N_0$ . On obtient les trois équations suivantes:

$$\left(\frac{d}{dt} - i\delta\omega\right) N_1 = -s I_0 N_1 + s I_0 M \left(1 - \frac{N_D}{N_0}\right) - \gamma n_0 N_1 - \gamma n_1 N_0 \quad (\text{IV.13a})$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} - i\delta\omega\right) (n_1 - N_1) + \mu \frac{n_0}{N_0} (i\mathbf{K} + \nabla) \cdot \mathbf{E}_{sc} + \mu \mathbf{E}_0 \cdot (i\mathbf{K} + \nabla) n_1 \\ - \frac{k_B T \mu}{e} (-K^2 + i\mathbf{K} \cdot \nabla + \Delta) n_1 = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.13b})$$

$$(i\mathbf{K} + \nabla) \cdot \mathbf{E}_{sc} = \frac{e N_0}{\varepsilon \varepsilon_0} (n_1 - N_1) \quad (\text{IV.13c})$$

Dans l'équation (IV.13a), nous avons négligé les effets thermiques par rapport aux effets lumineux résonnants. Ceci se traduit par l'inégalité suivante entre les taux d'ionisation:

$$\beta \ll s I_0$$

Pour conserver un hologramme incrit dans un matériau photoréfractif, il est donc plus judicieux de placer le cristal dans l'obscurité et à basse température (Huignard []) car, dans ces conditions, les temps d'effacement de l'hologramme sont significativement rallongés.

Pour faire apparaître les longueurs et les temps caractéristiques du matériau, on écrit les équations (IV.13) sous la forme suivante:

$$\tau_F \left( \frac{d}{dt} - i \delta\omega \right) N_1 = -\frac{n_0}{N_0} \left( 1 + \frac{N_0}{N_D} \right) N_1 + \frac{n_0}{N_0} M \left( 1 - \frac{N_0}{N_D} \right) - n_1 \quad (\text{IV.14a})$$

$$\begin{aligned} (\tau_{\text{der}} \frac{d}{dt} + 1 - i \delta\omega \tau_{\text{der}}) (n_1 - N_1) + i \beta_{\text{der}} \mathbf{1}_{E_0} \cdot (\mathbf{1}_K - i \frac{\nabla}{K}) n_1 \\ - \beta_{\text{dif}} (-1 + i \mathbf{1}_K \cdot \frac{\nabla}{K} + \frac{\Delta}{K^2}) n_1 = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.14b})$$

$$(\mathbf{1}_K - i \frac{\nabla}{K}) \cdot \mathbf{E}_{\text{sc}} = \frac{-i e N_0}{\varepsilon \varepsilon_0 K} (n_1 - N_1) \quad (\text{IV.14c})$$

où la relation (IV.14c) est utilisée pour obtenir l'équation (IV.14b) et on spécifie que

$$\mathbf{K} = K \mathbf{1}_K$$

$$\mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{1}_{E_0}$$

Les temps de réaction caractéristiques des phénomènes de dérive  $\tau_{\text{der}}$  et de piégeage  $\tau_F$  des électrons sont donnés par:

$$\tau_{\text{der}} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{e \mu n_0} \quad (\text{IV.15a})$$

$$\tau_F = \frac{1}{\gamma N_0} \quad (\text{IV.15b})$$

alors que les paramètres  $\beta_{\text{der}}$  et  $\beta_{\text{dif}}$  sont définis par les relations suivantes:

$$\beta_{\text{der}} = \frac{2\pi}{\Lambda} \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E_0}{e N_0} = K l_{\text{der}} \quad (\text{IV.16a})$$

$$\beta_{\text{dif}} = \left( \frac{2\pi}{\Lambda} \right)^2 \frac{k_B T \varepsilon \varepsilon_0}{e^2 N_0} = (K l_{\text{dif}})^2 \quad (\text{IV.16b})$$

Intuitivement,  $\beta_{\text{dif}}$  et  $\beta_{\text{der}}$  représentent la contribution des processus de transport liés à la diffusion et à la dérive des porteurs de charge sur un interfrange  $\Lambda$ .

Nous allons à présent spécifier la valeur des différents paramètres pour des cristaux de BGO et de BSO (Ph. Refregier et al [1985]):

$$\mu = 2.1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \text{ V}^{-1}$$

$$\varepsilon = 6.5$$

$$\gamma = 10^{-16} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$$

$$s = 1.06 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ J}^{-1}$$

$$\begin{aligned}
N_D &= 2.4 \cdot 10^{26} \text{ m}^{-3} \\
N_0 &= 3 \cdot 10^{23} \text{ m}^{-3} \\
e &= 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \\
\epsilon_0 &= 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C V}^{-1} \text{ m}^{-1} \\
k_B &= 1,4 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}
\end{aligned}$$

et l'influence du dispositif expérimental:

$$\begin{aligned}
E_0 &= 8 \cdot 10^5 \text{ V m}^{-1} \\
T &= 293 \text{ K} \\
I_0 &= 90 \text{ W m}^{-2}
\end{aligned}$$

Partant de ces valeurs, on peut évaluer l'influence des deux processus de transport de charge impliqués dans les cristaux de BGO/BSO. D'après les relations (IV.16), on a:

$$\begin{aligned}
\beta_{\text{der}} &\cong 0.16 \\
\beta_{\text{dif}} &\cong 2.53 \cdot 10^{-5}
\end{aligned}$$

Les longueurs caractéristiques liées à la dérive  $l_{\text{der}}$  et à la diffusion  $l_{\text{dif}}$  des électrons sont respectivement 31 et 1000 fois plus petites que l'interfrange  $\Lambda$ . L'effet photoréfractif étant un effet macroscopique, les mouvements des électrons sont moyennés sur un grand nombre d'événements et n'engendrent donc pas de structure spatiale. Cet argument qualitatif suggère de négliger les dérivées spatiales dans les équations (IV.14). Mathématiquement, cette opération est valable si les spectres de Fourier spatiaux de  $n_1$ ,  $N_1$  et  $E_{\text{sc}}$  sont beaucoup plus étroits que  $K$  et centrés autour de  $K$  ce qui revient à supposer que les variables  $n_1$ ,  $N_1$  et  $E_{\text{sc}}$  varient peu sur un interfrange  $\Lambda$ . Pour s'en assurer, introduisons le paramètre sans dimension suivant:

$$\eta_m = \frac{1}{K L_{\text{opt}}}$$

où  $L_{\text{opt}}$  est la plus petite longueur caractéristique inhérente aux phénomènes optique. La simplification est applicable si  $\eta_m$  est beaucoup plus petit que l'unité.

Lorsque le système d'équations possède des dérivées spatiales selon les trois dimensions, on choisit  $L_{\text{opt}}$  égale au rayon de pincement de la cavité  $w_0$ . Dans notre dispositif expérimental ( $\cong 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ ), on obtient  $\eta_m \cong 1.6 \cdot 10^{-2}$ . Notons que si les équations ne contenaient que des dérivées longitudinales, la

validité de cette approximation serait notablement améliorée car c'est alors la longueur de Rayleigh ( $\cong 0.24$  m) qui est choisie comme longueur de référence optique. Dans ce cas,  $\eta_m$  vaudrait environ  $10^{-5}$ . Compte tenu de cette simplification, les équations (III.14) se réduisent donc à:

$$\tau_F \left( \frac{d}{dt} - i \delta\omega \right) N_1 = -\frac{n_0}{N_0} \left( 1 + \frac{N_0}{N_D} \right) N_1 + \frac{n_0}{N_0} M \left( 1 - \frac{N_0}{N_D} \right) - n_1 \quad (\text{IV.17a})$$

$$\left( \tau_{\text{der}} \frac{d}{dt} + 1 - i \delta\omega \tau_{\text{der}} \right) \mathbf{1}_K \cdot \mathbf{E}_{\text{sc}} + \left( \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{1}_K - i \frac{k_B T K}{e} \right) \frac{n_1}{N_0} = 0 \quad (\text{IV.17b})$$

$$\mathbf{1}_K \cdot \mathbf{E}_{\text{sc}} = \frac{-i e}{\varepsilon \varepsilon_0 K} (n_1 - N_1) \quad (\text{IV.17c})$$

Partant des valeurs numériques des paramètres, nous pouvons estimer le rapport des termes de diffusion  $\beta_{\text{dif}}$  et de dérive  $\beta_{\text{der}}$  qui représente le rapport de l'énergie thermique à l'énergie nécessaire pour déplacer un électron soumis à  $E_0$  sur une distance  $\Lambda$ :

$$\frac{\beta_{\text{dif}}}{\beta_{\text{der}}} = \frac{2\pi k_B T}{\Lambda e E_0} = 1.27 \cdot 10^{-2}$$

Ce rapport montre que le processus de dérive des électrons supplante complètement les phénomènes de diffusion. Cette balance des processus de transport repose essentiellement sur la valeur du champ  $E_0$  appliqué au cristal, ce choix étant effectué de façon à optimiser le gain pour les cristaux de BGO/BSO. Par contre, dans des matériaux comme le BaTiO<sub>3</sub>, pour lesquels aucun champ extérieur  $E_0$  n'est appliqué, le processus de transport dominant est la diffusion.

La densité d'électrons libres à l'équilibre (IV.11) prend la valeur suivante:

$$n_0 \cong 8 \cdot 10^{14} \text{ m}^{-3},$$

on en déduit la fraction, à l'équilibre, des charges libres parmi les sites donneurs non ionisés:

$$\frac{n_0}{N_0} \cong 2.5 \cdot 10^{-9}$$

et la fraction de sites ionisés par rapport aux sites non ionisés:

$$\frac{N_0}{N_D} \cong 1.3 \cdot 10^{-2}$$

Si on néglige les termes contenant ces rapports face à l'unité, les équations (IV.17) deviennent:

$$\tau_F \left( \frac{d}{dt} - i \delta\omega \right) N_1 = -\frac{n_0}{N_0} N_1 + \frac{n_0}{N_0} M - n_1 \quad (\text{IV.18a})$$

$$(\tau_{\text{der}} \frac{d}{dt} + 1 - i \delta \omega \tau_{\text{der}}) \mathbf{1}_K \cdot \mathbf{E}_{\text{sc}} + (E_0 \cdot \mathbf{1}_K - i \frac{k_B T K}{e}) \frac{n_1}{N_0} = 0 \quad (\text{IV.18b})$$

$$\mathbf{1}_K \cdot \mathbf{E}_{\text{sc}} = \frac{-i e}{\varepsilon \varepsilon_0 K} (n_1 - N_1) \quad (\text{IV.18c})$$

Les temps caractéristiques  $\tau_F$  et  $\tau_{\text{der}}$  prennent les valeurs suivantes:

$$\tau_{\text{der}} = 1.8 \cdot 10^{-2} \text{ s}$$

$$\tau_F = 3.3 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

Le rapport de ces temps caractéristiques est uniquement relié aux paramètres internes du cristal et vaut environ  $5 \cdot 10^5$  ce qui justifie l'élimination adiabatique de l'équation (IV.18a): la variable  $N_1$  atteint l'état stationnaire avant que  $\mathbf{1}_K \cdot \mathbf{E}_{\text{sc}}$  n'ait eu le temps d'évoluer. Une fois cet état atteint,  $N_1$  suit temporellement la variable  $n_1$ :

$$\left( \frac{n_0}{N_0} - i \delta \omega \tau_F \right) N_1 = \frac{n_0}{N_0} M - n_1 \quad (\text{IV.19a})$$

$$(\tau_{\text{der}} \frac{d}{dt} - i \delta \omega \tau_{\text{der}} + 1) E + [E_0 - i \frac{k_B T K}{e}] \frac{n_1}{n_0} = 0 \quad (\text{IV.19b})$$

$$i E = \frac{e}{K \varepsilon \varepsilon_0} (n_1 - N_1) \quad (\text{IV.19c})$$

où, conformément à la figure I.3, on a  $\mathbf{E}_{\text{sc}} = E \mathbf{1}_K$  et  $E_0 = E_0 \mathbf{1}_K$ .

Les équations (IV.19) se réduisent à l'équation différentielle ordinaire suivante:

$$\boxed{(\tau_{\text{der}} \frac{d}{dt} + g) E = h M} \quad (\text{IV.20})$$

$$\text{où} \quad g = 1 + \frac{E_T}{E_q} + \delta \omega \tau_{\text{der}} \frac{E_0}{E_M} + i \left\{ \frac{E_0}{E_q} - \delta \omega \tau_{\text{der}} \left( 1 + \frac{E_T}{E_M} \right) \right\} \quad (\text{IV.21a})$$

$$\text{et} \quad h = -E_0 + i E_T \quad (\text{IV.21b})$$

Nous avons défini:

$$E_T = \frac{k_B T K}{e}$$

$$E_M = \frac{\gamma N_A}{\mu K}$$

$$E_q = \frac{e N_A}{\varepsilon \varepsilon_0 K}$$

où  $E_T$  représente le champ électrique dû à la diffusion et  $E_q$  la valeur maximale du champ électrique de charges d'espace sur une période  $\Lambda$  du réseau d'interférences.

Dans cette section nous avons dérivé un modèle qui décrit les processus matériels prépondérants de l'effet photoréfractif dans les cristaux de type BGO/BSO. Dans la section suivante, nous élaborons un modèle dynamique de mélange à deux ondes concernant l'aspect optique du mécanisme de gain.

### III.1.2: Mélange à deux ondes

La description mathématique du mélange à deux ondes prend une forme à chaque fois plus complexe lorsqu'on passe d'une formulation "ondes planes", à celle où la structure spatiale n'est plus négligée, et enfin à une description tenant compte de la dynamique spatio-temporelle. Ceci justifie notre approche progressive. En effet, dans la première partie de ce travail, nous nous restreignons à un modèle stationnaire d'ondes planes. Dans le chapitre III.1, nous tenons compte des structures transverses du faisceau oscillant dans la cavité. A présent, nous dérivons un modèle dynamique de mélange à deux ondes possédant des profils transverses.

Le point de départ considéré ici est l'équation d'onde pour  $y$  intégrer l'effet photoréfractif.

Compte tenu de l'approximation paraxiale, l'équation d'onde s'écrit:

$$\Delta F + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} D = 0 \quad (\text{IV.22})$$

où  $F$  et  $D$  sont les vecteurs champ électrique et déplacement électrique. Nous présentons en annexe les calculs permettant de vérifier que, dans le cas d'une non linéarité photoréfractive, l'approximation paraxiale est d'application.

Conformément à la figure III.1, nous pouvons spécifier que

$$F = S v_s + P v_p \quad (\text{IV.23a})$$

avec  $v_s = e^i (\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r} - \omega_s t)$  (IV.23b)

$$v_p = e^i (\mathbf{k}_p \cdot \mathbf{r} - \omega_p t) \quad (\text{IV.23c})$$

où les lettres s et p se rapportent respectivement au faisceau de sonde et de pompe;

Les nonlinéarités liées à l'effet photoréfractif sont incluses dans la réponse du milieu via la variable  $\mathbf{D}$ . Dans notre cas, celle-ci s'écrit (N. V. Kukhtarev [1988]):

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} + \delta \mathbf{D} \quad (\text{IV.24})$$

où  $\epsilon$  est la constante diélectrique du matériau,  $\mathbf{E}$  est le champ électrique total. La partie non linéaire  $\delta \mathbf{D}$  du champ de déplacement est donné par:

$$\delta D_i = \delta \epsilon_{ij} F_j + \gamma_{ijk} (\nabla_k F_j + \frac{1}{2} F_j \nabla_k)$$

où la répétition d'un indice suppose la sommation discrète sur celui-ci.

Le terme  $\delta \epsilon_{ij} F_j$  représente l'effet électro-optique linéaire et le tenseur  $\delta \epsilon$  est donné par le produit scalaire du tenseur électro-optique linéaire  $\mathbf{r}$  et du champ  $\mathbf{E}_{sc}$  de charge d'espace:

$$\delta \epsilon = - \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_{sc}$$

Notons qu'il fut montré que l'influence du tenseur électro-optique quadratique peut atteindre environ 10% de celle obtenue en se limitant au tenseur électro-optique linéaire (H. J. Eischler et al [1992]). Dans ce modèle, nous négligeons le terme quadratique car nos expériences ne permettent pas permis d'observer ses effets. Par ailleurs, on a :

$$k_0 \gamma_{ijk} = \delta_{ijh} g_{kh}$$

où  $\delta_{ijh}$  est le tenseur complètement antisymétrique:

$$\delta_{ijh} = - \delta_{jih} = - \delta_{ihj} = - \delta_{hij} \quad \text{pour tout } i,j,h = 1,2,3$$

$k_0 = \omega/c$  est le vecteur d'onde lumineux dans le vide. Le tenseur  $\mathbf{g}$  décrivant l'activité optique du milieu se décompose en deux parties:

$$g_{kh} = g^0_{kh} + g_{khn} E_n$$

où  $E_n$  représente les composantes du champ électrique de charge d'espace  $\mathbf{E}_{sc}$ . La première partie,  $g^0_{kh}$  représente l'activité optique naturelle et la seconde,  $g_{khn} E_n$ , l'activité optique induite par le champ électrique.

Avec les cristaux du groupe de symétrie -43m comme pour le BGO/BSO, coupé selon les axes (1,-1,0), (1,1,0) et (0,0,1), conformément à la figure I.3, on a:

$$\delta \mathbf{D} = \left\{ -n_0^4 r_{14} \begin{pmatrix} E_y & 0 & E_x \\ E_x & E_z & 0 \\ 0 & E_y & E_z \end{pmatrix} + \frac{g}{k_0} \begin{pmatrix} 0 & \partial_y & -\partial_x \\ -\partial_y & 0 & \partial_z \\ -\partial_x & -\partial_z & 0 \end{pmatrix} + \frac{g_{14}}{2k_0} \begin{pmatrix} 0 & -\eta_{12} & -\eta_{13} \\ -\eta_{13} & -\eta_{23} & 0 \\ -\eta_{12} & 0 & \eta_{23} \end{pmatrix} + \text{c. c.} \right\} \mathbf{F} \quad (\text{IV.25})$$

où

$$\begin{aligned} \eta_{12} &= \partial_z E_z + 2 E_z \partial_z + \partial_x E_x + 2 E_x \partial_x \\ \eta_{23} &= \partial_x E_y + 2 E_y \partial_x + \partial_y E_x + 2 E_x \partial_y \\ \eta_{13} &= -\partial_z E_y - 2 E_y \partial_z - \partial_y E_z - 2 E_z \partial_y \end{aligned}$$

Dans notre dispositif expérimental (fig. I.3), le vecteur d'onde du réseau d'interférences est parallèle à l'axe  $y$  et la propagation se fait principalement selon  $z$ :

$$k_s = k \cos(\theta) \mathbf{1}_z - k \sin(\theta) \mathbf{1}_y \quad (\text{IV.26a})$$

$$k_p = k \cos(\theta) \mathbf{1}_z + k \sin(\theta) \mathbf{1}_y \quad (\text{IV.26b})$$

avec  $k = n_0 k_0$  et  $\mathbf{K} = K \mathbf{1}_y$  où  $K$  conserve la même expression  $2\pi/\Lambda$  et  $n_0$  est l'indice de réfraction en l'absence de lumière. Conformément à la section IV.1.2, cette disposition implique que les champs électriques dans la matière sont parallèles à l'axe  $y$ .

$$\mathbf{E} = E_0 (1 + E v + E^* v^*) \mathbf{1}_y \quad \text{où } v = v_s v_p^* \quad (\text{IV.27})$$

où  $E$  représente l'amplitude du champ de charge d'espace selon l'axe  $\mathbf{1}_y$ .

De la même façon, on projette les champs électriques associés aux faisceaux de sonde  $\mathbf{S}$  et de pompe  $\mathbf{P}$  sur le système d'axes:

$$\mathbf{S} = S_x \mathbf{1}_x + S_y \mathbf{1}_y \quad (\text{IV.28a})$$

$$\mathbf{P} = P_x \mathbf{1}_x + P_y \mathbf{1}_y \quad (\text{IV.28b})$$

où nous avons supposé les polarisations des faisceaux purement transverses.

A partir de l'équation d'onde (IV.22), on remplace  $\mathbf{F}$  par son expression (IV.23a), en tenant compte de (IV.23b) et (IV.23c) et en ne retenant que les termes résonants, on obtient une équation pour chaque faisceau. On utilise également l'approximation de l'amplitude lentement variable caractérisée par les inégalités suivantes:

$$\left| \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} \right| \ll \left| \omega \frac{\partial S}{\partial t} \right| \ll \left| \omega^2 S \right| \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} \right| \ll \left| k \frac{\partial S}{\partial z} \right| \ll \left| k^2 S \right|$$

$$\left| \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \right| \ll \left| \omega \frac{\partial P}{\partial t} \right| \ll \left| \omega^2 P \right| \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right| \ll \left| k \frac{\partial P}{\partial z} \right| \ll \left| k^2 P \right|$$

et une renormalisation des variables spatiales est effectuée selon:

$$X = \frac{x}{w_0}, \quad Y = \frac{y}{w_0}, \quad Z = \frac{z}{L_R}$$

La dimension temporelle est normalisée à un temps qui représente le temps que met la lumière pour parcourir la longueur de Rayleigh  $L_R$  dans le matériau:

$$T = \frac{t}{\tau_0} \quad \text{avec} \quad \tau_0 = \frac{n_0 L_R}{c}$$

A l'ordre dominant en  $\eta_0$ , défini par:

$$\eta_0 = \frac{w_0}{L_R} = \frac{1}{k w_0},$$

on obtient:

$$(\partial_Z + \partial_T - \text{tg}(\theta) \partial_y - \frac{i}{4} \Delta_T + \frac{\alpha}{2}) \mathbf{S} = - \frac{i}{2 \cos(\theta)} \eta_0^{-2} v_s^* \delta \mathbf{D} \quad (\text{IV.29a})$$

$$(\partial_Z + \partial_T + \text{tg}(\theta) \partial_y - \frac{i}{4} \Delta_T + \frac{\alpha}{2}) \mathbf{P} = - \frac{i}{2 \cos(\theta)} \eta_0^{-2} v_p^* \delta \mathbf{D} \quad (\text{IV.29b})$$

où  $\Delta_T$  symbolise l'opérateur laplacien transverse,  $\theta$  le demi-angle entre les faisceaux incidents. De plus, nous avons ajouté empiriquement le terme proportionnel à  $\alpha$  qui traduit l'absorption linéaire du matériau.

L'angle  $2\theta$  entre les deux faisceaux, optimisant les transferts d'énergie entre les deux faisceaux étant de l'ordre de  $1,5^\circ$ : nous avons  $\text{tg}(\theta) \cong 1,3 \cdot 10^{-2}$  et  $\cos(\theta) \cong 1$ . Ceci permet de négliger les termes proportionnels à  $\text{tg}(\theta)$ , et de rester cohérent avec les approximations faites dans les équations décrivant l'effet photoréfractif ( $\eta_m \cong 1,6 \cdot 10^{-2}$ ).

Pour la même raison, nous supposons que l'enveloppe des champs électriques optique et matériel varie peu sur un interfrange  $\Lambda$  du réseau d'interférences.

Lorsque l'on développe les composantes de  $\delta D$  en appliquant les hypothèses précédentes, on obtient:

$$v_s^* \delta D_x = -\xi (S_x - E P_x) + i G (S_z + E P_z) \quad (\text{IV.30a})$$

$$v_s^* \delta D_y = i n_0 g S_z - i G (S_x + E P_x) \quad (\text{IV.30b})$$

où  $\xi = n_0^4 r_{14} E_0$  et  $G = g_{14} n_0 E_0$

La même procédure appliquée à l'équation du faisceau de pompe où l'on remplace les expressions (IV.30) dans les équations (IV.29) permet d'obtenir quatre équations complexes décrivant l'évolution des composantes des champs électriques associés aux faisceaux de sonde et de pompe:

$$(\partial Z + \partial T - \frac{i}{4} \Delta T + \frac{\alpha}{2}) S_x = \frac{i}{2} \eta_0^{-2} \xi (S_x + E P_x) \quad (\text{IV.31a})$$

$$(\partial Z + \partial T - \frac{i}{4} \Delta T + \frac{\alpha}{2}) S_y = -\frac{1}{2} \eta_0^{-2} G (S_x + E P_x) \quad (\text{IV.31b})$$

$$(\partial Z + \partial T - \frac{i}{4} \Delta T + \frac{\alpha}{2}) P_x = \frac{i}{2} \eta_0^{-2} \xi (P_x + E^* S_x) \quad (\text{IV.31c})$$

$$(\partial Z + \partial T - \frac{i}{4} \Delta T + \frac{\alpha}{2}) P_y = -\frac{1}{2} \eta_0^{-2} G (P_x + E^* S_x) \quad (\text{IV.31d})$$

Les équations (IV.31a) et (IV.31c) forme un système fermé d'équations qui régit la dynamique du mélange à deux ondes. En effet, il suffit de suivre l'évolution des composantes  $S_x$  et  $P_x$  pour en déduire les autres composantes transverse des deux faisceaux et donc pour connaître le comportement temporelle de ces derniers.

Cette propriété permet d'isoler les équations (IV.31b) et (IV.31d) qui ont pour unique source l'activité optique.  $S_y$  et  $P_y$  étant initialement nuls, pour que le faisceau de sonde acquière une polarisation  $p$  ( $1_y$ ), il est nécessaire que sa polarisation  $s$  ( $1_x$ ) croisse au préalable.

Pour vérifier que l'activité optique n'influe pas sur la dynamique transverse du faisceau de cavité, nous avons introduit un polariseur dans l'oscillateur. On constate que l'oscillateur ne démarre plus lorsque la projection de l'axe du polariseur sur  $1_y$  dépasse un certain seuil. De plus, si la polariseur est orienté de façon à ne laisser passer que la polarisation  $s$  ( $1_x$ ), on retrouve la dynamique transverse observée dans la deuxième partie de ce mémoire. On peut en conclure que l'évolution des polarisations  $s$  des faisceaux de pompe et intracavité (équations (IV.31a) et (IV.31c)) suffisent à la modélisation des instabilités spatio-temporelles dans notre dispositif expérimental.

En résumé, le modèle de mélange à deux ondes que nous adoptons est représenté par les équations suivantes:

$$\boxed{(\partial_Z + \partial_T - \frac{i}{4} \Delta T + \frac{\alpha}{2}) S_x = i \zeta (S_x + E P_x)} \quad (\text{IV.32a})$$

$$\boxed{(\partial_Z + \partial_T - \frac{i}{4} \Delta T + \frac{\alpha}{2}) P_x = i \zeta (P_x + E^* S_x)} \quad (\text{IV.32b})$$

avec 
$$\zeta = \frac{n_0^4 r_{14} E_0}{2 \eta_0^2} \quad (\text{IV.33})$$

#### IV.1.3: Cavité

Nous avons dérivé un modèle décrivant le processus de gain concernant tant l'aspect matériel qu'optique de l'effet photoréfractif. Pour obtenir un modèle d'oscillateur à gain photoréfractif, il faut placer le cristal dans un résonateur.

Lorsque le faisceau de sonde oscille dans la cavité, il devient faisceau de la cavité et doit satisfaire les conditions aux bords adéquates: la propagation libre du faisceau de cavité s'effectue dans un espace fini et le spectre des solutions du problème passe d'un continuum à un "peigne". La boucle de rétroaction peut s'exprimer de la manière suivante:

$$S_x(X, Y, \frac{-L_c}{2L_R}, T) = R_c e^{-i(L_r - L_c) \frac{\delta_{cR}}{c}} S_x(X, Y, \frac{L_c}{2L_R}, T - \frac{L_r - L_c}{\tau_0 c}) \quad (\text{IV.34})$$

avec  $\delta_{cR} = \omega_c - \omega_R$  où  $\omega_R$  est une fréquence de référence arbitrairement choisie et  $\omega_c$  la fréquence passive du résonateur la plus proche. Notons que le changement de variables de L. A. Orozco (L. A. Orozco et al [1989]) permettant de rendre les conditions aux bords périodiques et isochrones est malheureusement inapplicable dans notre cas. En effet, le pompage du cristal ne se fait pas selon l'axe optique de la cavité et l'efficacité des transferts d'énergie ne permettent plus de supposer que l'apport énergétique se fait de manière homogène sur toute la longueur du cristal. Si on ajoute à cela l'inapplicabilité de l'approximation du champ moyen, on se trouve confronté à un problème aux dérivées partielles dont les conditions aux bords sont non continues.

#### IV.1.4: Modèle d'oscillateur à gain photoréfractif

Nous avons séparément dérivé deux modèles l'un décrivant les processus liés à l'effet photoréfractif au sein du matériau et l'autre concernant le mélange à deux ondes dans une cavité. Soulignons que ces deux modèles sont compatibles dans la mesure où les approximations qu'ils impliquent sont caractérisées par des petits paramètres inférieurs ou égaux à  $\eta_m \cong 2 \cdot 10^{-2}$ . Le modèle d'oscillateur à gain photoréfractif que nous proposons réalise la synthèse de ces deux modèles.

Nous rappelons donc les équations (IV.20) et (IV.21) concernant l'aspect matériel du système:

$$(\tau_{\text{der}} \frac{d}{dt} + g) E = h M \quad (\text{IV.35})$$

avec 
$$g = 1 + \frac{E_T}{E_q} + \delta\omega \tau_{\text{der}} \frac{E_0}{E_M} + i \left\{ \frac{E_0}{E_q} - \delta\omega \tau_{\text{der}} \left( 1 + \frac{E_T}{E_M} \right) \right\}$$

$$h = -E_0 + i E_T$$

et les équations pour le mélange à deux ondes (IV.32):

$$(\partial_Z + \partial_T - \frac{i}{4} \Delta_T + \frac{\alpha}{2}) S_x = i \zeta (S_x + E P_x) \quad (\text{IV.36a})$$

$$(\partial_Z + \partial_T - \frac{i}{4} \Delta_T + \frac{\alpha}{2}) P_x = i \zeta (P_x + E^* S_x) \quad (\text{IV.36b})$$

où 
$$\zeta = \frac{n_0^4 r_{14} E_0}{2 \eta_0^2}$$

ainsi que les conditions aux bords inhérentes au résonateur:

$$S_x(X, Y, \frac{-L_c}{2L_R}, T) = R_c e^{-i(L_r - L_c) \frac{\delta_c R}{c}} S_x(X, Y, \frac{L_c}{2L_R}, T - \frac{L_r - L_c}{\tau_0 c}) \quad (\text{IV.37a})$$

$$P_x(X, Y, \frac{-L_c}{2L_R}, T) = P_0 \quad (\text{IV.37b})$$

Pour coupler les trois aspects du modèle, il nous faut préciser le terme de source de l'équation matérielle (IV.35) au moyen de la relation:

$$M = \frac{S_x P_x^*}{|S_x|^2 + |P_x|^2}$$

En effet, le réseau d'indice de réfraction résulte de l'inscription du réseau d'interférences issu de l'illumination du cristal par les faisceaux de pompe et de cavité. L'équation matérielle s'écrit alors:

$$(\tau_{\text{der}} \frac{d}{dt} + g) E = h \frac{S_x P_x^*}{|S_x|^2 + |P_x|^2} \quad (\text{IV.38})$$

L'échelle de temps impliquée dans les équations (IV.36) décrivant le mélange à deux ondes est  $\tau_0$  ce qui, dans notre dispositif, vaut environ  $2 \cdot 10^{-9}$  s tandis que dans l'équation matérielle (IV.35), le temps caractéristique est de l'ordre de  $\tau_{\text{der}} \cong 2 \cdot 10^{-2}$  s. Le matériau imposant son échelle de temps, il est justifié de supposer que le faisceau dans la cavité atteint un état stationnaire avant que l'amplitude du réseau d'indice de réfraction ait le temps d'évoluer.

Pour conclure, nous soulignons que toutes les approximations effectuées dans ce modèle négligent des termes dont la contribution est toujours inférieure au petit paramètre  $\eta_m$  qui vaut environ  $10^{-2}$ . De plus, la principale différence de ce modèle avec ceux obtenus dans des travaux antérieurs (D. Z. Anderson et R. Saxena [1987] et G. P. D'Alessandro [1992]) est le rejet de l'approximation du champ moyen.

## IV.2: COMPARAISON AVEC L'EXPERIENCE

Pour vérifier la validité de ce modèle, nous allons étudier plusieurs situations et comparer les résultats expérimentaux obtenus par ailleurs.

Dans un premier temps, nous retrouvons les résultats expérimentaux dans le cadre du mélange à deux ondes planes. Ensuite, nous présentons les résultats préliminaires concernant la dynamique transverse observée en régime monomode.

### IV.2.1 Mélange à deux ondes

Le but de cette section est de comparer le modèle de mélange à deux ondes que nous venons de développer avec les expériences décrites dans la première partie de ce travail.

Lorsque les deux faisceaux impliqués dans le mélange à deux ondes sont des ondes planes, les équations (IV.36) deviennent:

$$\begin{aligned} (\partial Z + \partial T + \frac{\alpha}{2}) S_x &= i \zeta (S_x + E P_x) \\ (\partial Z + \partial T + \frac{\alpha}{2}) P_x &= i \zeta (P_x + E^* S_x) \end{aligned}$$

Conformément aux expériences, nous nous plaçons à l'état stationnaire:

$$(\partial Z - i \zeta + \frac{\alpha}{2}) S_x = -i \frac{\sigma}{2} e^{i\varphi} \frac{S_x |P_x|^2}{|S_x|^2 + |P_x|^2} \quad (\text{IV.39a})$$

$$(\partial Z - i \zeta + \frac{\alpha}{2}) P_x = -i \frac{\sigma}{2} e^{-i\varphi} \frac{P_x |S_x|^2}{|S_x|^2 + |P_x|^2} \quad (\text{IV.39b})$$

où nous avons utilisé l'équation matérielle (IV.38) dans la limite des temps longs.

La différence principale avec les équations (I.17) est la partie imaginaire du terme linéaire qui apparait dans les équations (IV.39) et qui est entre autres induit par le champ électrique  $E_0$  appliqué au cristal. De ce fait les solutions des équations en intensité restent identiques à la relation (I.22) et conformément à la définition (I.27), on obtient une expression du gain  $\Gamma$ :

$$\Gamma = \frac{1 + \beta}{1 + \beta e^{-\sigma \sin(\varphi) L_c}}$$

où  $\beta$  est le rapport des intensités incidentes sur la face d'entrée du cristal.

L'état stationnaire de l'équation matérielle (IV.35) permet de déduire l'expression des paramètres  $\sigma$  et  $\varphi$  introduits dans les équations (IV.39) en fonction des paramètres du milieu:

$$\begin{aligned} \sigma e^{i\varphi} &= \frac{-2 \zeta h}{g M} \\ &= 2 \zeta \frac{-E_0 + i E_T}{1 + \frac{E_T}{E_q} + \delta \omega \tau_{\text{der}} \frac{E_0}{E_M} + i \left\{ \frac{E_0}{E_q} - \delta \omega \tau_{\text{der}} \left( 1 + \frac{E_T}{E_M} \right) \right\}} \end{aligned} \quad (\text{IV.40})$$

La figure IV.1 représente le gain  $\Gamma$  en fonction du décalage en fréquence entre les deux faisceaux pour plusieurs valeurs du champ électrique extérieur  $E_0$ , compte tenu des valeurs de paramètres données dans la section consacrée à la dérivation de l'équation matérielle (IV.35). La figure IV.1 doit être comparée à la figure I.10 obtenue dans les mêmes conditions. On observe un bon accord qualitatif pour la forme des courbes mais surtout un accord quantitatif pour la position et la valeur des maxima de gain  $\Gamma$ . Pour mesurer la concordance théorie-expérience concernant la valeur du décalage en fréquence entre les deux faisceaux optimisant le gain  $\Gamma$  en fonction de  $E_0$ , la figure IV.2 représente la courbe théorique et les mesures expérimentales. Nous n'avons pu obtenir de courbe représentant le gain  $\Gamma$  en fonction de l'interfrange  $\Lambda$  du réseau d'interférences, avec ce modèle car cette dépendance résulte de la contribution des harmoniques du réseau (Ph. Refregier et al [1985], thèse de H. Rajbenbach).

Comparé au modèle de la section I.2.1, l'apport essentiel du modèle développé ici est de relier explicitement le gain par unité de longueur  $\sigma$  et le déphasage  $\varphi$  entre les réseaux d'interférences et d'indice de réfraction aux paramètres matériels. Globalement, ce modèle de mélange à deux ondes permet de rendre compte des transferts d'énergie entre les faisceaux de sonde et de pompe. De ce fait, nous allons l'utiliser pour l'étude de la dynamique du faisceau engendré par un oscillateur à gain photoréfractif.

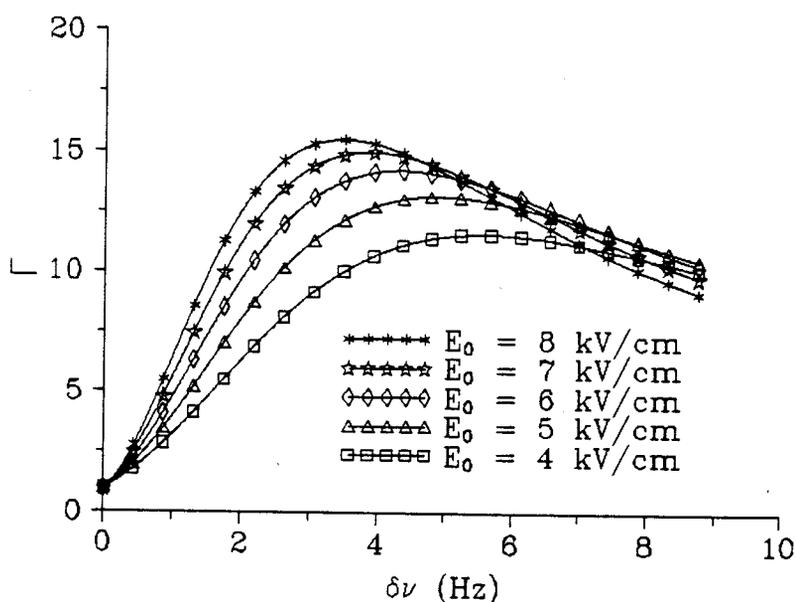


Figure IV.1: Dépendance du gain  $\Gamma$  en fonction du décalage en fréquence pour plusieurs valeurs du champ  $E_0$ . ( $\alpha = 0.46 \text{ cm}^{-1}$ ,  $L_c = 1 \text{ cm}$ ,  $\beta = 10^3$  et les autres paramètres sont donnés dans la section IV.1.1)

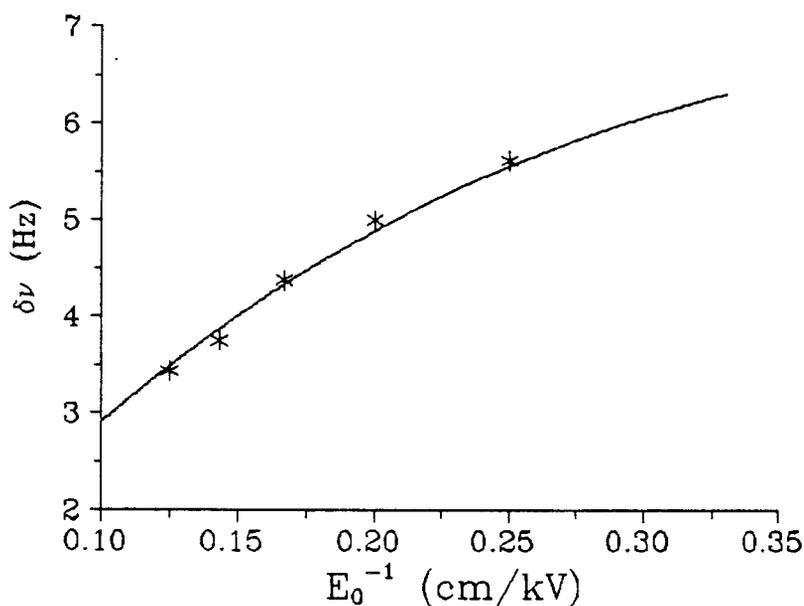


Figure IV.2: Dépendance du décalage en fréquence optimisant le gain  $\Gamma$  en fonction de l'inverse du champ  $E_0$ . La courbe continue représente les résultats théorique et les étoiles les mesures expérimentales (voir fig. I.11). ( $\alpha = 0.46 \text{ cm}^{-1}$ ,  $L_c = 1 \text{ cm}$ ,  $\beta = 10^3$  et les autres paramètres sont donnés dans la section IV.1.1)

#### IV.2.2: Oscillateur à gain photoréfractif en régime monomode

Dans cette section, nous présentons les résultats préliminaires obtenus avec le modèle d'oscillateur à gain photoréfractif que nous avons établi dans cette quatrième partie.

Après avoir vérifié la validité du modèle de mélange à deux ondes compte tenu de la valeur des paramètres, nous analysons le modèle dynamique. A présent, deux possibilités s'offrent à nous: soit de traiter les équations complètes aux dérivées partielles et procéder à leurs analyse numérique, soit de considérer un développement sur les modes propres du résonateur ce qui permet d'éliminer l'opérateur laplacien transverse des équations et donc d'en effectuer une étude analytique. C'est la seconde possibilité qui est choisie parce qu'elle permet de cerner certaines propriétés du système. De plus, nous nous limitons au cas monomode transverse car il permet une simplicité optimal des équations. Néanmoins, même en régime monomode, le modèle est composé de deux équations couplées pour les dimensions temporelle et longitudinale. En effet, il comprend deux équations complexes, l'une décrivant la formation du réseau d'indice de réfraction et l'autre donnant l'évolution de l'amplitude du mode le long de l'axe optique du cristal.

En régime monomode, on projette le faisceau de cavité sur le mode  $d$  tandis que le faisceau de pompe reste une onde plane. Dans le référentiel tournant, on a:

$$S_x(\mathbf{r}, t) = S(z, t) E_d(\mathbf{r}_T)$$

$$P_x(\mathbf{r}, t) = P(z, t)$$

où nous avons négligé la dépendance longitudinale du mode propre du résonateur dans le cristal.

Lorsque l'on normalise la variable longitudinale à  $L_R$  et le temps à  $\tau_0$ , les condition aux bords pour le faisceau de cavité et de pompe s'écrivent:

$$S\left(\frac{-L_c}{2L_R}, T\right) = R_c e^{-i(L_r - L_c)} \frac{\delta_{pc}}{c} S_x\left(\frac{L_c}{2L_R}, T - \frac{L_r - L_c}{\tau_0 c}\right) \quad (\text{IV.41a})$$

$$P\left(\frac{-L_c}{2L_R}, T\right) = P_0 \quad (\text{IV.41b})$$

où nous supposons que la fréquence active du mode optimise les transferts d'énergie du faisceau de pompe vers celui de cavité et  $\delta_{pc}$  est le désaccord entre les fréquences de résonance et de pompe. En d'autres termes, cette simplification propre à ce modèle préliminaire ne permet pas d'étudier les éventuels comportements dynamiques issus du tirage en fréquence.

Par ailleurs, le rapport  $\kappa$  des intensités des faisceaux intracavité et de pompe, mesuré dans les expériences, ne dépasse jamais  $10^{-2}$ . Cela permet de limiter le terme de source de l'équation matérielle (IV.35) à l'ordre dominant en ce petit paramètre:

$$M = \frac{S_x}{P_x} [1 - O(\kappa)]$$

et d'obtenir

$$(\tau_{der} \frac{d}{dt} + g) E = h \frac{S_x}{P_x}$$

De la linéarité de cette équation et de l'orthogonalité des modes propres, on déduit que la structure transverse de l'amplitude du réseau de champ de charge espace  $E$  est la même que celle du mode  $E_d$ :

$$E(\mathbf{r}, t) = u(z, t) E_d(\mathbf{r}_T)$$

Ceci nous permet d'extraire la dépendance transverse qui apparait dans ce modèle:

$$(\tau_{der} \frac{d}{dt} + g) u = h \frac{S}{P} \quad (IV.42a)$$

$$(\partial_Z + \partial_T + \frac{\alpha}{2}) S = i \zeta (S + u P) \quad (IV.42b)$$

$$(\partial_Z + \partial_T + \frac{\alpha}{2}) P = i \zeta (P + u^* S) \quad (IV.42c)$$

où  $\zeta$ ,  $g$ ,  $h$  et  $\alpha$  sont des paramètres constants du système.

Si on associe aux équations (IV.42) les conditions aux bords (IV.41), on obtient un système fermé d'équations que nous appliquons à une situation réaliste.

La figure (IV.3) représente l'évolution temporelle de l'intensité du faisceau intracavité pour des valeurs de paramètres déduites de l'expérience (voir la deuxième partie) et des caractéristiques du matériau (voir section IV.1.1). Conformément à nos résultats expérimentaux, après un transitoire l'amplitude du mode transverse atteint un état stationnaire en quelques temps caractéristiques  $\tau_{der}$ . De plus, l'intensité du faisceau intracavité,

normalisé à l'intensité du faisceau de pompe en  $z = 0$  vaut  $3 \cdot 10^{-4}$  ce qui est du même ordre de grandeur que les valeurs expérimentales mesurées.

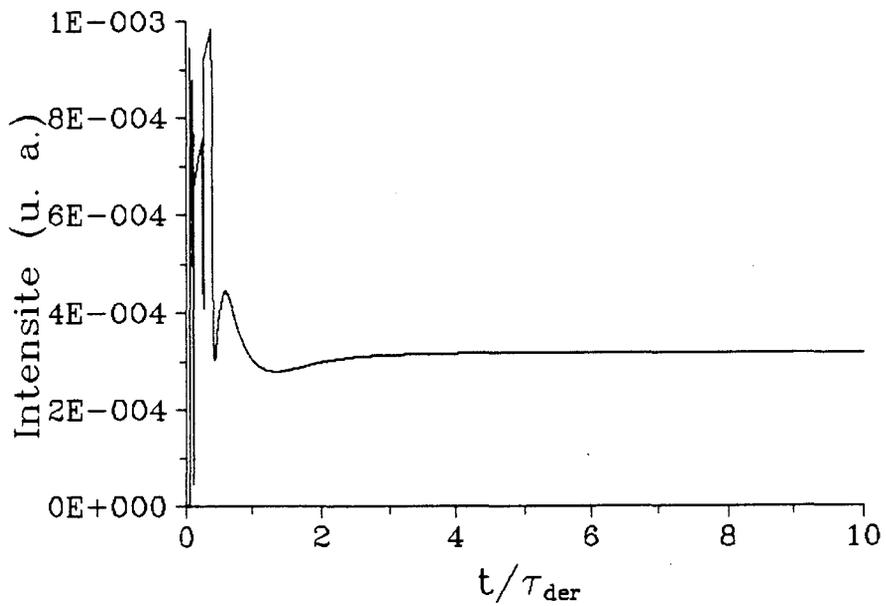


Figure IV.3: Evolution temporelle de l'intensité du faisceau intracavité en régime monomode. ( $\alpha = 0.46 \text{ cm}^{-1}$ ,  $L_c = 1 \text{ cm}$ ,  $L_r = 1.6 \text{ m}$ ,  $R_c = 0.6$ ,  $\delta_{pc} = 0$  et les autres paramètres sont donnés dans la section IV.1.1)

### IV.3: CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Dans cette quatrième partie, nous avons dérivé un modèle afin de décrire la dynamique spatio-temporelle du faisceau engendré par un oscillateur à gain photoréfractif.

Nous montrons que le modèle de mélange à deux ondes permet de retrouver les dépendances expérimentales du gain  $\Gamma$  en fonction des paramètres. Ensuite, nous appliquons le modèle complet et un résultat préliminaire qui met en évidence, pour les valeurs de paramètres fixées par le dispositif expérimental (voir partie II) et les propriétés du matériau, l'existence d'un état stationnaire en accord avec les observations de la section II.3.2.

Dans le futur immédiat, nous voulons mettre en évidence le rôle et les conséquences de l'application de l'approximation du champ moyen afin de comparer nos résultats avec ceux obtenus par d'autres modèles (D. Z. Anderson et R. Saxena [1987] et G. P. D'Alessandro [1992]). Parallèlement, nous projetons d'inclure les effets du tirage en fréquence afin d'analyser la stabilité des états stationnaires.

L'étape suivante consistera alors à étudier les régimes faiblement multimode, toujours dans le but de reproduire la dynamique transverse déduite des expériences.

A plus long terme, nous envisageons d'appliquer ce modèle d'oscillateur à gain photoréfractif à des situations fortement multimodes pour mettre en évidence les propriétés de la turbulence optique.

## ANNEXE DE LA PARTIE QUATRE:

### Vérification de l'approximation paraxiale

En optique, les modèles décrivant la dynamique transverse tiennent tous compte des degrés de liberté transverse par simple adjonction d'un opérateur laplacien transverse à l'équation régissant l'évolution de l'amplitude de l'onde optique. En fait, dans les équations de Maxwell pour le champ électrique en propagation libre les dimensions longitudinales et transverses ne sont pas indépendantes mais l'approximation paraxiale (M. Lax et al [1975], L. W. Davis [1979], G. P. Agrawal et M. Lax [1983]) quand elle est justifiée permet de réduire les couplages entre les coordonnées spatiales au laplacien transverse. M. Lax et al [1975] introduisent un développement perturbatif dont le petit paramètre est le rapport des longueurs de diffraction transverse et longitudinale. Ils montrent que l'approximation paraxiale est applicable pour la modélisation des lasers à gaz parce que les non linéarités du système interviennent, dans l'équation d'onde, au même ordre que le laplacien transverse. Dans cette section, nous vérifions que l'approximation paraxiale peut être utilisée lorsque les non linéarités du système sont issues de l'effet photoréfractif. Toute la discussion présentée dans cette section est basée sur la méthode introduite par M. Lax et al [1975] .

L'approximation paraxiale ne concernant que les dimensions spatiales, nous nous limitons à l'équation d'onde stationnaire dans le référentiel tournant à la pulsation  $\omega$ :

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{F}) - \Delta \mathbf{F} - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{F} = 0 \quad (\text{A.1})$$

où  $\mathbf{E}$  est le tenseur diélectrique. Nous supposons que l'amplitude du champ électrique de l'onde monochromatique de pulsation  $\omega$  est indépendante du temps:

$$\mathbf{F}(x,y,z,t) = \mathbf{F}(x,y,z) e^{i\omega t} \quad (\text{A.2})$$

Pour vérifier l'approximation paraxiale, il faut s'assurer que:

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) \ll \Delta \mathbf{F}.$$

Pour cela, on décompose les vecteurs gradient  $\nabla$  et champ électrique  $\mathbf{F}$  en leurs composantes transverses et longitudinale.

$$\nabla = \nabla_T + \partial_z \mathbf{1}_z \quad (\text{A.3a})$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}'_T + F'_z \mathbf{1}_z \quad (\text{A.3b})$$

où  $\mathbf{1}_z$  est le vecteur unitaire selon l'axe longitudinal. Le facteur de phase lié à la propagation est extrait du champ  $\mathbf{F}$ :

$$\mathbf{F}'_T = \mathbf{F}_T e^{ikz} \quad (\text{A.4a})$$

$$F'_z = F_z e^{ikz} \quad (\text{A.4b})$$

où, dans le cristal, le vecteur d'onde  $k \mathbf{1}_z$  et la pulsation sont reliés par l'équation de dispersion usuelle suivante:

$$k^2 = \epsilon_L \left( \frac{\omega}{c} \right)^2$$

Le tenseur diélectrique est développé en ses parties linéaire  $L$  et non linéaire  $N$  selon la notation:

$$\mathbf{E} = \epsilon_L (L + N)$$

Comme dans la troisième partie de ce mémoire, la variable  $z$  est normalisée à la longueur de Rayleigh  $L_R$  qui est le facteur d'échelle longitudinal des phénomènes de diffraction:

$$Z = \frac{z}{L_R} \quad \text{avec} \quad L_R = k w_0^2$$

et les dimensions transverses  $x$  et  $y$  sont exprimées en unité du rayon de pincement  $w_0$  du résonateur:

$$X = \frac{x}{w_0} \quad \text{et} \quad Y = \frac{y}{w_0}$$

Le but étant de comparer l'influence des différentes dimensions spatiales, on introduit le rapport  $\eta_0$  défini par:

$$\boxed{\eta_0 = \frac{w_0}{L_R} = \frac{1}{k w_0}} \quad (\text{A.5})$$

Dans nos expériences, le rayon de pincement  $w_0$  valant environ  $2 \cdot 10^{-4}$  m, on obtient:  $\eta_0 \cong 4 \cdot 10^{-4}$  pour  $\lambda \cong 532$  nm.

Nous effectuons tous ces changements de variable dans l'équation (A.1) et nous projetons suivant les directions longitudinale  $\mathbf{1}_z$  et transverses  $\mathbf{1}_T$  pour obtenir le système suivant:

$$i \eta_0 (\nabla_T \cdot \mathbf{F}_T) + \eta_0^3 \partial_Z (\nabla_T \cdot \mathbf{F}_T) - \eta_0^2 \Delta_T \mathbf{F}_z - \mathbf{F}_z - \mathbf{1}_z \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{1}_z \mathbf{F}_z - \mathbf{1}_z \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{F}_T = 0 \quad (\text{A.6a})$$

$$\eta_0 \nabla_T \{ \eta_0 (\nabla_T \cdot \mathbf{F}_T) + \eta_0^2 \partial_Z \mathbf{F}_z + i \mathbf{F}_z \} - \eta_0^4 \partial_Z^2 \mathbf{F}_T - 2 i \eta_0^2 \partial_Z \mathbf{F}_T - \eta_0^2 \Delta_T \mathbf{F}_T - \mathbf{1}_T \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{1}_z \mathbf{F}_z - \mathbf{1}_T \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{F}_T = 0 \quad (\text{A.6b})$$

Le développement perturbatif en  $\eta_0$  du tenseur diélectrique non linéaire s'écrit:

$$\mathbf{1}_i \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{1}_j = \eta_0^{\alpha_{ij}} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_i \cdot \mathbf{N}^{(n)} \cdot \mathbf{1}_j \eta_0^n \quad \text{avec } i, j = z, T \quad (\text{A.7})$$

L'élément  $\alpha_{ij}$  permet d'exprimer l'ordre dominant en  $\eta_0$  de chaque composante du tenseur  $\mathbf{N}$  qui dépend du milieu considéré. Dans le développement (A.7), plus l'exposant  $\alpha$  est grand, plus les non linéarités sont petites.

Dans les cristaux comme dans la plupart des milieux non linéaires en optique, les interactions entre les polarisations longitudinale et transverse sont négligeables devant celles liant les polarisations transverses. Autrement dit, le plus faible exposant  $\alpha$  est celui qui couple les dimensions transverses:

$$\alpha_{ij} > \alpha_{TT} \quad \text{pour tout } (i, j) \neq (T, T)$$

Pour connaître la valeur de  $\alpha_{TT}$  dans notre situation expérimentale, la composante transverse du tenseur non linéaire adapté à l'effet photoréfractif dans les cristaux de BSO/BGO peut s'évaluer de la façon suivante (voir eq. (I.2), Yariv [1988], P. Gunter [1988] et P. Yeh [1989]):

$$\mathbf{1}_T \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{1}_T = \epsilon_L r_{\text{eff}} \mathbf{E}_{sc}$$

où  $\epsilon_L \cong 6.5$ ,  $r_{\text{eff}} \cong 3.4 \cdot 10^{-12}$  m/V est la composante effective du tenseur électro-optique et  $\mathbf{E}_{sc} = 7 \cdot 10^3$  V/m le champ de charge d'espace qui est calculé à l'état stationnaire pour un champ de pompe de  $100 \text{ W/m}^2$  et un champ  $\mathbf{E}_0$  extérieur de l'ordre de  $8 \cdot 10^5$  V/m (situation expérimentale). Avec ces valeurs et celle de  $\eta_0$ , on obtient:

$$\boxed{1_T \cdot N \cdot 1_T \equiv \eta_0^2}$$

Pour l'effet photoréfractif, on a donc  $\alpha_{TT} = 2$ . D'après la structure des équations (A.6), le développement des composantes longitudinale et transverse du champ électrique en fonction de  $\eta_0$  prend la forme suivante (M. Lax et al [1975]):

$$F_Z = \sum_{n=0}^{\infty} F_Z^{(2n+1)} \eta_0^{2n+1} \quad (\text{A.8a})$$

$$F_T = \sum_{n=0}^{\infty} F_T^{(2n)} \eta_0^{2n} \quad (\text{A.8b})$$

Lorsque l'on reporte les développements (A.7) et (A.8) dans les équations (A.6), on obtient deux hiérarchies infinies en  $\eta_0$ .

A l'ordre un en  $\eta_0$ , la projection longitudinale de l'équation d'onde (A.6a) se résume à:

$$F_Z^{(1)} = i \nabla_T \cdot F_T^{(0)} \quad (\text{A.9})$$

tandis qu'à l'ordre 2 en  $\eta_0$ , la composante transverse fournit l'équation suivante:

$$\boxed{2 i \partial_Z F_T^{(0)} + \Delta_T F_T^{(0)} + 1_T \cdot N^{(0)} \cdot F_T^{(0)} = 0} \quad (\text{A.10})$$

Cette équation fermée pour  $F_T^{(0)}$  montre que l'approximation paraxiale est valable lorsque les non linéarités sont engendrées par l'effet photoréfractif puisqu'à l'ordre dominant seul l'opérateur laplacien subsiste.

D'autre part, effectuer l'approximation paraxiale sur les équations de Maxwell est équivalent à se ramener à l'optique gaussienne (G. A. Deschamps [1971, M. Couture et P.-A. Belanger [1981] et E. A. J. Marcatili et C. G. Someda [1987]). Cette propriété démontre qu'il est cohérent de décomposer les structures transverses du faisceau engendré dans l'oscillateur à gain photoréfractif sur les modes des bases de Laguerre-Gauss et d'Hermite-Gauss (sect. I.2.2.1) (L. W. Davis [1984]).

Pour montrer l'importance de l'équilibre entre l'ampleur de non linéarités et  $\eta_0$ , supposons qu'un faisceau correspondant à la même valeur de  $\eta_0$  traverse un milieu caractérisé par des non linéarités telles que  $\alpha_{TT} = 4$ .

Dans ce cas, si on tronque les équations (A.6) à l'ordre 4 en  $\eta_0$ , la composante longitudinale du champ électrique est régie par le système d'équations suivant:

$$F_z^{(1)} = i \nabla_T \cdot \mathbf{F}_T^{(0)} \quad (\text{A.11a})$$

$$F_z^{(3)} = i \nabla_T \cdot \mathbf{F}_T^{(2)} + [\partial_Z - i \Delta_T] \nabla_T \cdot \mathbf{F}_T^{(0)} \quad (\text{A.11b})$$

Tandis que pour la composante transverse du champ électrique on a:

$$2 i \partial_Z \mathbf{F}_T^{(0)} + \Delta_T \mathbf{F}_T^{(0)} = \mathbf{0} \quad (\text{A.12a})$$

$$2 i \partial_Z \mathbf{F}_T^{(2)} + \Delta_T \mathbf{F}_T^{(2)} = \nabla_T \{ [2 i \partial_Z - i \Delta_T] \nabla_T \cdot \mathbf{F}_T^{(0)} \} - \partial_Z^2 \mathbf{F}_T^{(0)} - \mathbf{1}_T \cdot \mathbf{N}^{(0)} \cdot \mathbf{F}_T^{(0)} \quad (\text{A.12b})$$

On constate que non seulement, l'équation (A.12b), n'est plus fermée, mais qu'il apparait des couplages entre les dimensions longitudinale et transverses qui montrent que l'approximation paraxiale n'est plus applicable.

"La vérité ne peut s'atteindre que par la compréhension des contraires."

OKAKURA-KAKUZO`

*Conclusion*

Les résultats expérimentaux ont montré que la structure transverse du faisceau engendré par l'oscillateur peut être décomposée sur les modes propres du résonateur vide dont la fréquence passive est la plus proche de la fréquence de résonance de la cavité. Nous avons recensé famille par famille les différents régimes observés. Cela nous a permis de mettre en évidence des couplages en "amplitude" et en "intensité" entre les modes propres du résonateur. D'autre part, les brisures de symétrie et les conditions aux bords influe notablement sur la dynamique spatio-temporelle de l'oscillateur. Par exemple, la présence d'astigmatisme dans la cavité est responsable de l'apparition de régimes périodiques comme le régime P(2). De plus, leurs fréquences caractéristiques dépendent de l'ampleur des écarts à la symétrie cylindrique.

Les résultats théoriques s'appuie essentiellement sur le rejet de l'approximation du champ moyen. Dans le cadre du modèle stationnaire, nous justifions que la largeur du domaine de fréquence dans lequel une famille de modes oscille est  $10^6$  fois plus grande que la courbe de gain à l'aide d'un important tirage en fréquence. Par ailleurs, il apparaît que la forme des non-linéarités caractéristique de l'effet photoréfractif reste un problème ouvert lorsque l'on considère la structure transverse du faisceau engendré par l'oscillateur. On peut par exemple modifier la nature des couplages entre les modes propres et retenir ou non les termes de saturation dans le modèle tout en conservant une normalisation de indice de réfraction par une densité locale d'énergie.

Dans la dernière partie de ce travail, nous avons développé un modèle dynamique de l'oscillateur à gain photoréfractif qui se base sur un unique petit paramètre pour décider de la validité de toutes les approximations effectuées. Nous avons montré que ce modèle est bien adapté à la description du mélange à deux ondes et nous présentons un résultat préliminaire très prometteur pour l'interprétation de régimes transverses que nous avons observé. En effet, en régime monomode, l'intensité du faisceau intracavité reste stationnaire et acquière une valeur conforme à nos résultats expérimentaux.

Pour la suite, nous comptons utiliser le modèle dynamique afin de retrouver les régimes faiblement multimode observés. Parallèlement, nous envisageons, tant expérimentalement que théoriquement, d'étudier des situations fortement multimodes. Plus précisément, nous voulons analyser les propriétés du chaos spatio-temporel en optique. Cela peut comporter de très nombreux sujets de recherche, par exemple, de mettre en évidence

d'éventuelles routes universelles menant à ce type de chaos et les comparer avec celles qui furent découvertes par ailleurs. D'autres part, on peut étudier l'influence des conditions aux bords sur les régimes dynamiques et sur les propriétés des "défauts" qui composent les structures spatiales.

## *Références*

M. Abramowitz et I. A. Stegun [1972], *Handbook of mathematical functions*, Dover Publications, Inc. New York, 9<sup>ème</sup> édition

D. Z. Anderson et R. Saxena [1987], *J. Opt. Soc. Am. B*, **4**, p 164

F. T. Arecchi, R. Meucci, G. Puccioni et J. Tredicce [1982], *Phys. Rev. Lett.*, **49**, p 1217

F. T. Arecchi, G. Giacomelli, P. L. Ramazza et S. Residori [1991], *Phys. Rev. Lett.*, **67**, p 3749

F.T. Arecchi, G. Giacomelli, P.L. Ramazza et S. Residori [1990], *Phys. Rev. Lett.*, **65**, p 2531

G. P. Agrawal et M. Lax [1983], *Phys. Rev. A*, **27**, p 1693

G. P. Agrawal [1989], *Nonlinear fiber optics*, Academic Press Inc., San Diego

Eds R. Balian et al [1982], *Physics of defects*, Proceedings of the Les Houches workshop XXXV, Elsevier

P. Bergé et M. Dubois [1984], *Contemp. Phys.*; **25**, p 535

P. Bergé, M. Dubois, P. Manneville et Y. Pomeau [1980], *J. Phys. Lett.*, **41**, p L341

S. Bielawski, D. Derozier et P. Glorieux [1992], *Phys. Rev. A*, **46**, p 2811

A. Bledowski, W. Krokilowski et A. Kujawski [1989], *J. Opt. Soc. Am. B*, **6**, p 1544

M. Brambilla, F. Battipede, L. A. Lugiato, V. Penna, F. Prati, C. Tamm et C. O. Weiss [1990], *Phys. Rev. A*, **43**, p 5090

M. Brambilla, F. Battipede, L. A. Lugiato, V. Penna, F. Prati, C. Tamm et C. O. Weiss [1990], *Phys. Rev. A*, **43**, p 5114

G. Bruhat [1965], *Optique*, Masson et Cie, 6<sup>e</sup> Ed., Paris

S. Chandrasekhar [1961], *Hydrodynamics and hydromagnetic stability*, International series of monographs on physics, Clarendon, Oxford University Press

F. S. Chen, J. T. LaMacchia, D. B. Frazer [1968], *Appl. Phys. Lett.* **13**, p 223

P. Couillet, L. Gil et F. Rocca [1987], *Opt. Comm*, **73**, p 403

P. Couillet, L. Gil et J. Lega [1989], *Phys. Rev. Lett.*, **62**, p 1619

M. Couture et P-A Belanger [1981], *Phys. Rev. A*, **24**, p 355

P. Cvitanovic [1984], *Universality in chaos*, Adam Hilger Ltd, Bristol

- G. P. D'Alessandro [1992], Phys. Rev. A, **46**, p 2791
- E. J. D'Angelo, E. Izaguirre, G. B. Mindlin, G. Huyet, L. Gil et J. R. Tredicce [1992], Phys. Rev. Lett., **68**, p 3702
- D. Dangoisse, D. Hennequin, C. Lepers, E. Louvergneaux et P. Glorieux [1992], Phys. Rev. A, **46**, p 5955
- L. W. Davis [1979], Phys. Rev. A, **19**, p 1177
- L. W. Davis [1984], Phys. Rev. A, **30**, p 3092
- G. A. Deschamps [1971], Electr. Lett., **7**, p 684
- S. Ducharme et J. Feinberg [1984], J. Appl. Phys., **56**, p 839
- H. J. Eischler, Y. Ding et B. Smandek [1992], Opt. Comm., **94**, p 127
- M. D. Ewbank et P. Yeh [1985], Opt. Lett. **10**, p 496
- J. Feinberg et R. W. Hellwarth [1980], Opt. Lett., **5**, pp 519-521
- J. Feinberg, D. Heiman, A. R. Tanguay et R. W. Hellwarth [1980], J. Appl. Phys., **51**, p 1297
- J. Feinberg, D. Heiman, A. R. Tanguay et R. W. Hellwarth [1981], J. Appl. Phys., **52**, p 537
- Eds. J. Feinberg et R. A. Fisher [1983], (Academic, New York).
- J. Feinberg et G. D. Bacher [1984], Opt. Lett. **9**, p 420
- B. Fischer, S. Sternklar et S. Weiss [1989], IEEE QE, **25**, p 550
- A. M. Glass [1978], Opt. Eng. **17**, p 470
- A. M. Glass, M. B. Klein et G. C. Valley [1987], Appl. Opt., **26**, 3189
- J. P. Gollub et H. L. Swinney [1975], Phys. Rev. Lett., **35**, p 927
- M. R. Guevara et, L. Glass et A. Shrier [1981], Science, **214**, p 1350
- P. Günter, U. Flückiger, J. P. Huignard, F. Micheron [1976], Ferro-electrics **13**, p 297
- P. Günter [1978], Ferro-electrics **22**, p 671,
- Eds P. Gunter [1987], *Electro-optic and Photorefractive Mterials*, Proc. Phys., **18**, Springer-Verlag, Berlin
- Eds P. Günter et J. P. Huignard [1988], *Photorefractive Materials and Applications I*, Topics in Applied Physics, **61**, Springer Verlag, Berlin
- Eds P. Günter et J. P. Huignard [1988], *Photorefractive Materials and Their Applications II*, Topics in Applied Physics, **62**, Springer Verlag, Berlin
- T. J. Hall, R. Jaura, L. M. Connors et P. D. Foote [1985], Prog. Quant. Electr. vol. **10**, p 77, (Pergamon Press Ltd.

H. Haken [1971], *Synergetics*, Springer Series in Synergetics 1, Springer-Verlag, Berlin

Eds R. G. Harrison et J. S. Uppal [1992], *Nonlinear dynamics and spatial complexity in optical systems*, NATO ASI, 41, SUSSP, Edinburgh

M. Hénon [1976], *Commun. Math. Phys.*, 50, p 69

S. L. Hou, R. B. Lauer et R. E. Aldrich [1973], *J. Appl. Phys.*, 44, p 2652

H. Jagannath, P. Venkateswarlu, et M. C. George [1987], *Opt. Lett.* 12, p 1032

H. Kogelnik et T. Li [1966], *Proc. IEEE*, 54, p 1312

W. Krokilowski, M. R. Belic, M. Cronin-Golomb et A. Bledowski [1990], *J. Opt. Soc. Am. B*, 7, p 1204

N. V. Kukhtarev, V. B. Markov, S. G. Odulov, M. S. Soskin et V. L. Vinetskii [1979], *Ferro-electrics*, 22, p 949

N. V. Kukhtarev, V. B. Markov, S. G. Odulov, M. S. Soskin et V. L. Vinetskii [1979], *Ferro-electrics* 22, p 961

N. V. Kukhtarev [1988]; Chap. 4 de *Photorefractive Materials and Their Applications*, Eds P. Günter et J. P. Huignard [1988], *Topics in Applied Physics*, 62, Springer Verlag, Berlin

Y. Kuramoto [1984], *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence*, Springer Series in Synergetics, 19, Springer-Verlag, Berlin

S-K. Kwong, M. Cronin-Golomb et A. Yariv [1986], *IEEE QE*, 25, p 484

S-Kwong, M. Cronin-Golomb et A. Yariv [1986], *IEEE. QE*, 25, p 1508

S-K Kwong et A. Yariv [1986], *Opt. Lett.* 11, p 377

W. E. Lamb Jr [1964], *Phys. Rev. A*, 134, p 1429

M. Lax, W. H. Louisell et W. B. McKnight [1975], *Phys. Rev. A*, 11, p 1365

A. Libchaber, C. Laroche et S. Fauve [1982], *J. Phys. Lett.*, 43, p 211

E. N. Lorenz [1963], *J. Atmos. Sci.*, 25, p 130

L. A. Lugiato, G. L. Oppo, J. R. Tredicce, L. M. Narducci, et M. A. Pernigo [1990], *J. Opt. Soc. Am.* B7, p 1019

Eds P. Manneville, N. Boccara, G. Y. Vichniac et R. Bidaux et [1988], *Cellular Automata and Modeling of Complex Physical Systems*, Springer Proceedings in Physics, Springer-Verlag, Berlin

E. A. J. Marcatili et C. G. Someda [1987], *IEEE QE*, 23, p 164

V. B. Markov, S. G. Odulov et M. S. Soskin [1979], *Opt. Laser Technol.*, 11, p 95

- A. Marrakchi J. P. Huignard et P. Gunter [1981], J. Appl. Phys., **24**, p 131
- M. Metropolis, M. L. Stein et P. R. Stein [1973], J. Combin. Th. (A), **15**, p 25
- R. A. Mullen et R. W. Hellwarth [1985], J. Appl. Phys., **58**
- C. Normand, Y. Pomeau et M. Velarde [1977], Rev. Mod. Phys.; **49**, p 581
- L. A. Orozco, H. J. kimble, A. T. Rosenberger, L. A. Lugiato, M. L. Asquini, M. Brambilla et L. M. Narducci [1989], Phys. Rev. A, **39**, p 1235
- A. Pocheau, V. Croquette et P. Le Gal [1985], Phys. Rev. Lett., **55**, p 1094
- Y. Pomeau et P. Manneville [1979], J. Phys. Lett. , **40**, p 609
- Y. Pomeau, J. C. Roux, A. Rossi, S. Bachelart et C. Vidal [1981], J. Phys. Lett., **42**, p L271.
- H. Rajbenbach et J. P. Huignard [1985], Opt. Lett. **10**, p 137
- Ph. Refregier, L. Solymar, H. Rajbenbach et J. P. Huignard [1985], J. Apl. Phys., **58**, p 45
- Í. Rehberg, S. Rasenat et V. Steinberg [1989], Phys. Rev. Lett., **62**, p 756
- D. Ruelle et F. Takens [1971], Commun. Math. Phys., **20**, p 167
- A. E. Siegman [1986], *Lasers*, University Science book
- D. L. Staebler et J. J. Amodei [1972], J. Appl. Phys., **43**, p 1042
- K. Staliunas [1992], Opt. Comm., **90**, p 123
- K. Staliunas [1993], Phys. Rev. A, **48**, p 1573
- L. Tarassov [1985], *Physique des processus dans les générateurs de rayonnement optique cohérent*, Ed. MIR, Moscou
- J. Testa, J. Pérez et C. Jeffries [1982], Phys. Rev. Lett., **48**, p 714
- G.C. Valley, A.L. Smirl, M. B. Klein, K. Bohnert, T.F. Bogess [1986], Opt. Lett. **11**, p 647
- V. L. Vinetskii, N. V. Kukhtarev, S. G. Odulov et M. S. Soskin [1979], Sov. Phys. Usp., **22**, p 742
- E. Voit, M. Z. Zha, P. Armhein et P. Gunter [1987], Tech. Dig. Top. Meet, Los Angeles, CA, **17**
- Eds D. Walgraef et N. M. Ghoniem [1990], *Patterns Defects and Material Instabilities*, NATO ASI Series E, 183, Kluwer Academic Publishers, London
- S. Weiss et B. Fischer [1989], Opt. Commun. **70**, p 515
- S. Weiss et B. Fischer [1990], Opt. Quantum Electron. **22**, p 517
- Eds J. E. Wesfreid et S. Zaleski [1984], *Lecture Notes in Physics*; **210**, Springer-Verlag, Berlin

Eds J. E. Wesfreid [1988], *Propagation in Systems Far from Equilibrium*, Springer Series in Synergetics, **41**, Springer-Verlag, Berlin

J. O. White, M. Cronin-Golomb, B. Fisher, et A. Yariv [1982], *Appl. Phys. Lett.* **40**, p 450

A. Yariv et S.-K. Kwong [1985], *Opt. Lett.* **10**, p 454

A. Yariv, S. Kwong, et K. Kyuma [1986], *Appl. Phys. Lett.* **48**, p 1114

A. Yariv [1986], *IEEE QE*, **14**, p 650

A. Yariv [1988], *Optical Electronics*, Series in Electrical Engineering, Saunders College Publishing

P. Yeh [1984], *Appl. Opt.* **23**, p 2974

P. Yeh [1985], *J. Opt. Soc. Am. B2*, p 1924

P. Yeh [1987], *Appl. Opt.*, **26**, p 602 et *Appl. Opt.*, **26**, p 3190

P. Yeh [1989], *IEEE QE*, **25**, p 484

A. A. Zozulya et V. T. Tikhonchuk [1989], *Phys. Lett. AI*, **135**, p 447

A. A. Zozulya, K. Baumgärtel et K. Sauer [1989], *Opt. Commun.* **72**, p 381

In 1963, E. N. Lorenz (E. N. Lorenz [1963]) demonstrate the existence of chaotic behavior create by a deterministic system of equation. Since, a lot of works point out the universality of the dynamical instabilities in the non linear system (D. Ruelle et F. Takens [1971], M. Metropolis et al [1973], J. P. Gollub et H. L. Swinney [1975] and M. Hénon [1976]). These temporal instabilities were observed in many different area of nature like hydrdynamic (P. Bergé et al [1980] and A. Libchaber et al [1982]), chemistry (Y. Pomeau et al [1981]), biology (), optic (F. T. Arecchi et al [1982]) and electronic (J. Testa et al [1982]).

In the same way, the spatial structures create in nature present some analogies between them, which show the universality of the spatio-temporal instabilities (P. Cvitanovic [1984]). The theoretical work of P. Coullet and collaborators (P. Coullet et al [1988] and P. Coullet et al [1989]) shows that the transverse structure generate in a laser present some similarities with other spatial structures and that the spatio-temporal dynamic of a laser can be chaotic. Following these results, the study of the behavior induce by the temporal and the spatial degrees of freedom in non linear optic was extensively developped.

Intuitively, in optics, a first extention to the temporal dynamic is to take into account the propagation's effect. the dopped fibers are a good example because usually the transverse effect can be ignored. This system allow us to study the solitons and their mutual interactions (G. P. Agrawal [1989]) and also the dynamic of the high longitudinal multimode fiber laser (S. Bielawski et al [1992]).

In a second step, one can analyse the contributions to the dynamic of the transverse dimensions of the light beam. This can be realise in systems like gaz laser (M. Brambilla et al [1990] and D. Dangoisse et al [1992]) and Kerr medium (A. Petrossian [1992] and R. G. Harrison and J. S. Uppal [1992]) because the influence of the longitudinal dimension can be neglected due to the weak strength of the non linearities (mean field limit).

In the third and last step, one can study the dynamical properties of the three dimensional spatial structures. In optics, this kind of dynamic can be obtain in systems with high non linearities like semi-conductor lasers and photorefractive oscillators.

Usually, the characteristic times of the optical systems are too short and we can't follow easily the evolution of the spatial structures. Futhermore, even if one

ignore the complexity introduced by the spatial degrees of freedom, many optical systems describe chaotic behavior. For these two reasons, in this work, we chose to study the spatio-temporal instabilities of the light beam generated in a photorefractive oscillator. In this system, the characteristic time is of the order of the second and the useful wavelength to pump the photorefractive crystal is around 530 nm (green light). Thus, we can follow the evolution of the transverse section of the generated light beam with a standard detection set-up. For the second point, the analysis of the spatial structures seems to be a more difficult problem than in other optical systems because, as it was announced above, one has to take into account the three spatial dimensions. But, if the two-wave mixing is used as a gain process, this system always relaxes to a stationary state when the transverse degrees of freedom are frozen. Thus, this system allows us to isolate the complexity induced by the transverse dimension from those induced by the propagation.

In the photorefractive oscillators, one can usually reach a number of transverse degrees of freedom (Fresnel number) about 100 and the group of Arrechi has observed the so-called spatio-temporal chaos (F. T. Arrechi et al [1991]). To understand this kind of instabilities, in this work, we restrict ourselves to weak Fresnel number situations. In fact, we introduce a diaphragm in the resonator to avoid the oscillation of the high order transverse families.

In the first part of this work, the concepts used in the following are introduced. The basic mechanisms at the microscopic level of the photorefractive effect like the establishment of the space-charge electric field are explained. We describe the main properties of the energy exchange occurring in a two-wave mixing experiment. We give some details about the influence of the different experimental and theoretical parameters on the gain. In the second section, we specify what is called spatial structures and introduce some of their particularities. In the same way, we expose the three bases of transverse modes useful to describe the light beam generated in the photorefractive oscillator and we recall the parameters which summarize the influence of the geometry of the resonator on its passive eigen-vectors and eigen-values. After that, we show that the parity of the number of mirrors forming the resonator has some major consequence on its spectrum. In fact, all the antisymmetric modes, versus the transverse and orthogonal to the resonator's plane axis (y-axis), have a passive frequency shifted of a half wavelength. This implies whenever that a transverse axis system of reference. To conclude the first part of this work, we explain the mechanisms responsible for the starting of the photorefractive oscillators.

In the second part, we develop the experimental side of this work. We begin by the description of the experimental set-up. We give some details about the limitation of the geometry of the oscillator and about the passive and the active stabilisation of the length of the resonator. This last stabilisation was sometimes a necessity due to the large characteristic time of the experiment ( $\cong 1$  second). After that, we summarize the different time and length scale which appear in the system and we expose the set-up that we use to detect the transverse distribution of the intensity and of the field of the generated light beam. In the second section, we expose a method to measure the gain of a two wave mixing process. In the third section, we describe our experimental results. At first, we explain an experiment which allows us to conclude that the transverse structure of the generated light beam can always be reconstructed only with the transverse modes which have the closest passive frequency to the gain curve. We can extract another conclusion from this experiment: the transverse modes oscillate over a domain in frequency  $10^5$  times larger than the linewidth of the gain curve. Afterwards, we describe all the transverse behavior that we have observed in a cavity made with an odd number of mirrors. We note that even if the number of modes contained in the same family and with the same symmetry versus the y-axis is larger than two, we only observe stationary and periodic states. The transition between two families of modes occurs also by a periodic transient, with a relaxation rate which depends on the frequency gap between the families. We also observe stationary states and periodic states when the modes are passively degenerate and not contained in the same family of modes. But, all these behaviors coupling modes between themselves imply two different kinds of interaction whether the modes belong or not to the same family. If the modes belong to the same family, we can modelise the structures by considering only a summation in intensity of the modes, at the opposite, if the modes don't belong to the same family, we have to sum the amplitude of the modes. Afterwards, we study the transverse structures generated in the photorefractive oscillators when no transverse axis are privileged i. e. when the number of resonator's mirrors is even. We observe that the previous distinction between the two different couplings doesn't subsist and the spatio-temporal dynamic is hardly dependent of the effective symmetry of the set-up. If the group of symmetry is  $O(2)$ , one observes only stationary structures with cylindrical shapes. When, there is some "light" symmetry breakings, the periodic regimes appear and the system seems to hesitate around a transverse privileged axis. When the discrepancies with the  $O(2)$  symmetry grow, a transverse axis is clearly defined and the deformed periodic regimes dominate.

The last two parts of this are devoted to our theoretical study of the photorefractive oscillator. In a first step, we establish a stationary multimode transverse model to give an answer to the following question: How it's possible that the passive and the active frequency can be more than  $10^5$  times the linewidth of the gain curve apart? For this purpose, we have present and discuss some proposal of the generalisation of the photorefractive non linearities to the transverse multimode case. We use a cavity model similar to one of J. E. Lamb (J. E. Lamb [1964]) and we reject the mean field limit which is not relevant due to the high efficiency of the energy exchange in a two-wave mixing process. We conclude that an explanation based on the frequency pulling effect can answer the previous question.

In the last part, we develop a dynamical model of the photorefractive oscillator to sketch the experimental spatio-temporal dynamic. For this purpose, we start from the microscopic equations of the semi-conductor materials and from the maxwell's equations for the electromagnetism. We finally obtain a model of two-wave mixing in photorefractive crystal like BGO/BSO based on a single little parameter. In this model, we don't suppose that the mean field limit is relevant. At this stage, we retrieve the experimental results of the two-wave mixing expose in the first part of this work. Then, we place the photorefractive crystal inside a resonator and present our preliminary numerical results in transverse monomode situation.

