

50376
1994
21

50376
1994
21

CALCULS D'ÉCOULEMENTS INSTATIONNAIRES DANS UN ÉTAGE

DE TURBINE TRANSSONIQUE

EN INTERACTION ROTOR-STATOR

Mémoire de Thèse

présenté par

François INQUIMBERT

en vue de l'obtention du titre de

DOCTEUR EN MECANIQUE

de l'Université des Sciences et Technologies de Lille



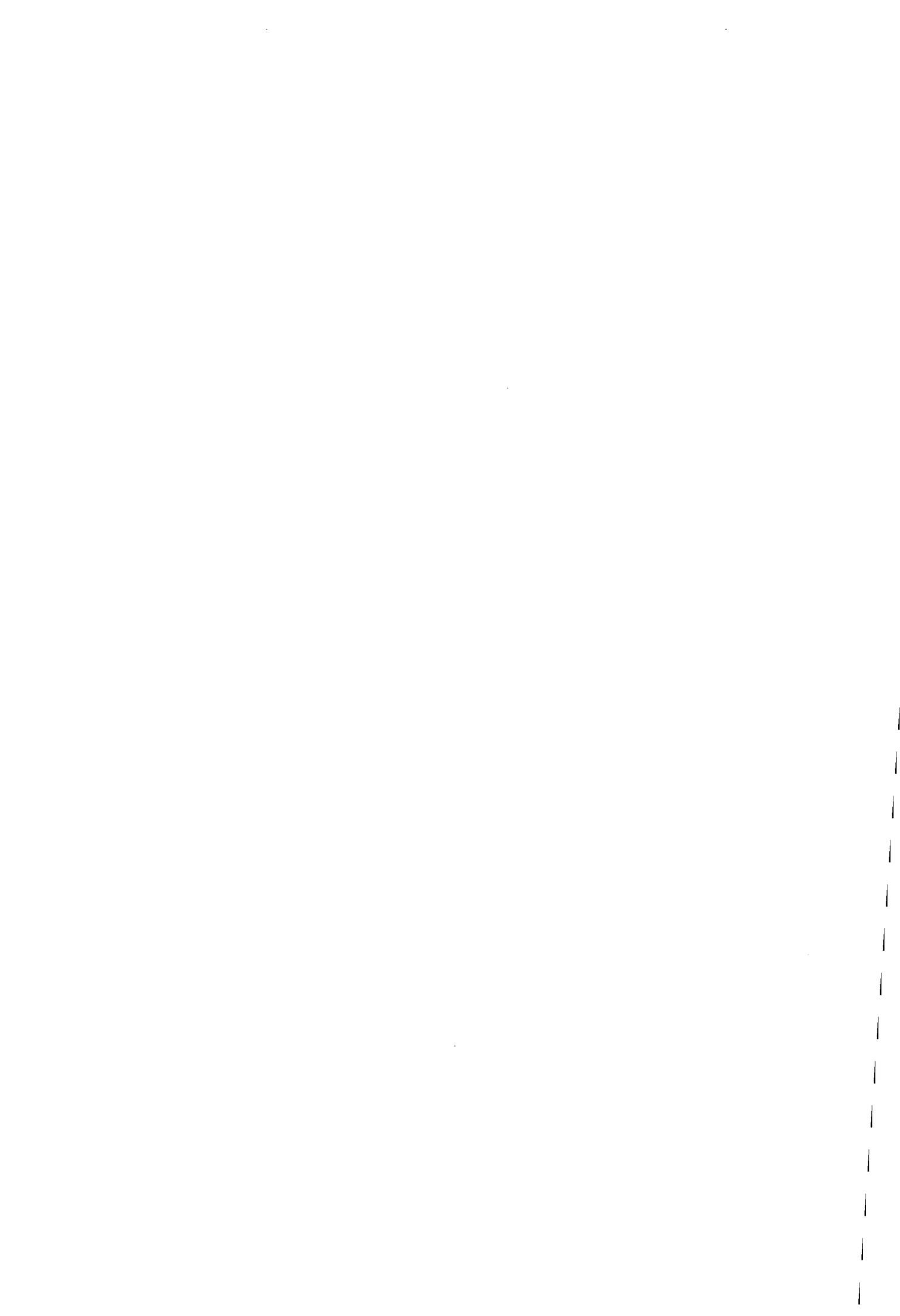
Soutenu le 20 JANVIER 1994

Commission d'Examen de la Thèse :

MM. J. P. BARRAND
G. D. MORTCHELEWICZ
T. ARTS
F. LEOEUF
A. FOURMAUX
J. VIALONGA
H. E. GALLUS
M. BUISINE
J. CHAUVIN

Rapporteur

Rapporteur



A Erika.

REMERCIEMENTS.

Je tiens à remercier Monsieur Jacques BERNARD et Monsieur Bertrand PETOT, du Département "Recherches et Etudes Avancées dans les Turbines" de la SNECMA de m'avoir proposé ce thème de recherche relatif aux interactions rotor stator dans les turbines.

Je voudrais remercier chaleureusement Monsieur le Professeur Jean-Paul BARRAND, du Laboratoire de Mécanique de l'Ecole Nationale Supérieure des Arts et Métiers à Lille, pour avoir dirigé cette thèse, ainsi que pour son aide et les conseils qu'il m'a donnés.

Je remercie également Monsieur Roger LABOURDETTE, Directeur Scientifique, et Monsieur Christian SOIZE, Directeur Scientifique Adjoint, de la "Direction des Structures de l'ONERA", de m'avoir accueilli. Les résultats des travaux de recherches présentés dans ce mémoire ont été obtenus au sein de la division "Aéroélasticité Théorique et Dynamique des Structures", dirigée par Monsieur Jean-Pierre GRISVAL, en collaboration avec la Division "Aérodynamique des Turbomachines" placée sous la responsabilité de Monsieur Georges MEAUZE, Coordinateur Turbomachines. Je leur suis extrêmement reconnaissant d'avoir encouragé et soutenu la réalisation de ce projet.

Les résultats présentés sont les fruits d'une collaboration de chaque instant avec Monsieur Daniel MORTCHELEWICZ, Responsable du Groupe Aérodynamique Instationnaire au sein de la division "Aéroélasticité Théorique et Dynamique des Structures". Je souhaite lui faire part de ma profonde gratitude, pour son encadrement, pour m'avoir fait bénéficier de ses compétences avec une extrême disponibilité, et pour m'avoir permis de partager son enthousiasme pour le développement de méthodes numériques pour l'étude de la mécanique des fluides. Mes remerciements s'adressent également à sa collaboratrice, Madame Anne-Sophie SENS, pour ses conseils avisés et son aide.

Je souhaite tout particulièrement remercier Monsieur Antoine FOURMAUX, Responsable du Groupe Simulation Aérodynamique au sein de la Division "Aérodynamique des Turbomachines" pour son aide précieuse, pour la qualité de son enseignement au sujet des phénomènes physiques rencontrés dans les étages de turbomachines.

Je remercie Monsieur Jacques VIALONGA de la SNECMA pour le suivi de ce travail, et pour nos discussions, réflexions, constructives et fructueuses.

Je suis très reconnaissant à Monsieur le Professeur Francis LEBOEUF de l'Ecole Centrale de Lyon et Monsieur le Professeur Tony ARTS de l'Institut Von Karman de m'avoir fait l'honneur d'accepter d'être Rapporteurs de cette thèse et d'avoir porté un jugement sur ce travail.

Je suis reconnaissant à Monsieur le Professeur Daniel BUISINE de l'Université de Lille, Monsieur le Professeur H. E. GALLUS de l'Université d'Aix-la-Chapelle, et Monsieur le Professeur Jacques CHAUVIN de l'Université d'Orsay de m'avoir fait l'honneur de faire partie de la Commission d'Examen de cette thèse.

Je remercie tous les collègues de l'ONERA pour leur accueil, leur disponibilité.

TABLE DES MATIERES.

LISTE DES FIGURES.	13
NOMENCLATURE.	25
RESUME.	29
INTRODUCTION.	31
Chapitre I - PRESENTATION DU PROBLEME.	35
I.1 - ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE.	36
I.1.1 - Observations expérimentales.	36
I.1.2 - Méthodes numériques de couplage.	39
I.1.3 - Conclusions.	46
I.2 - MODELISATION GEOMETRIQUE.	46
I.3 - MODELISATION AERODYNAMIQUE.	47
I.3.1 - Nature du fluide.	47
I.3.2 - Type d'écoulement.	48
I.3.3 - Types d'instationnarité, d'interactions, transmission d'informations.	49
I.3.4 - Référentiel.	50
I.3.5 - Système d'équations du modèle aérodynamique.	50
I.3.5.1 - Hypothèses.	50
I.3.5.2 - Formulations en référentiel relatif fixe.	51
I.3.5.3 - Formulations en référentiel relatif mobile.	52
Chapitre II - METHODES NUMERIQUES.	55
II.1 - ADAPTATIONS NUMERIQUES DU SYSTEME D'EQUATIONS.	56

II.1.1 - Projections des équations sur le plan de calcul.	56
II.1.2 - Adimensionnalisation.	56
II.1.2.1 - Référentiel fixe.	56
II.1.2.2 - Référentiel mobile.	58
II.2 - METHODE DES ELEMENTS FINIS.	58
II.3 - SCHEMAS NUMERIQUES.	59
II.3.1 - Schéma sans viscosité artificielle.	60
II.3.2 - Schéma avec viscosité artificielle.	62
II.4 - TRAITEMENTS DES CONDITIONS AUX LIMITES.	64
II.4.1 - Relations de compatibilité.	64
II.4.2 - Cas des frontières amont et aval.	66
II.4.3 - Frontières de périodicité plafond et plancher.	66
II.4.4 - Condition de glissement.	67
II.5 - PHASES IMPLICITES.	67
II.6 - CRITIQUE DES CODES.	69
Chapitre III - CALCULS D'ÉCOULEMENTS EN AUBAGES ISOLÉS.	71
III.1 - PRE- ET POST-TRAITEMENTS DES MAILLAGES.	72
III.2 - CONDITIONS INITIALES DES CALCULS.	72
III.2.1 - Cas des aubages fixes.	72
III.2.2 - Cas des aubages mobiles.	73
III.2.3 - Remarque.	74
III.3 - VALIDATIONS DES METHODES NUMERIQUES.	74
III.3.1 - Cas numériques.	74
III.3.2 - Résultats numériques.	78
III.3.2.1 - Référentiel fixe.	78
III.3.2.2 - Référentiel mobile.	85
III.3.3 - Conclusions.	89
Chapitre IV - CALCULS D'ÉCOULEMENTS EN ÉTAGES.	91

IV.1 - REDUCTION DU DOMAINE DE CALCUL.	92
IV.1.1 - Principe.	92
IV.1.2 - Conditions d'utilisation.	95
IV.2 - GESTION MULTIDOMAINES.	95
IV.2.1 - Maillage du domaine de calcul d'un aubage isolé.	95
IV.2.2 - Procédure pour les calculs multidomaines.	96
IV.3 - TECHNIQUES DE COMMUNICATION DES INFORMATIONS.	97
IV.3.1 - Déplacement relatif.	97
IV.3.2 - Relations de compatibilité.	98
IV.3.3 - Recouvrement des domaines.	98
IV.4 - ADAPTATION DES TECHNIQUES DE COUPLAGE.	99
IV.4.1 - Présentation de cas tests.	99
IV.4.2 - Adaptation au code SCHEMA1.	100
IV.4.3 - Une solution avec le code SCHEMA2.	102
IV.5 - SIMULATIONS DE L'INTERACTION ROTOR-STATOR.	103
IV.5.1 - Cas numériques.	103
IV.5.2 - Résultats numériques.	106
IV.5.3 - Conclusions.	109
CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES.	111
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.	115
Annexe - LES EQUATIONS D'EULER EN REFERENTIEL RELATIF ET L'INITIALISATION DES CALCULS DANS LE CADRE DES CALCULS D'ÉCOULEMENTS EN AUBAGES DE TURBOMACHINES.	125
A.I - EXPRESSIONS GENERALES DES EQUATIONS D'EULER EN REFEREN- TIEL RELATIF.	127
A.I.1 - Hypothèses.	127

A.I.2 - Référentiel relatif \mathcal{R}_r.	127
A.I.2.1 - Calcul de la vitesse et de l'accélération.	127
A.I.2.2 - Résultats supplémentaires.	129
A.I.3 - Formulation générale des équations.	130
A.I.3.1 - Cas des variables physiques relatives.	130
A.I.3.2 - Cas des variables physiques absolues.	133
A.II - MODELE D'ECOULEMENT QUASI-TRIDIMENSIONNEL.	134
A.II.1 - Hypothèses.	134
A.II.2 - Cas des variables relatives.	136
A.II.2.1 - Projections des opérateurs mathématiques.	136
A.II.2.2 - Ecriture tridimensionnelle en repère local.	142
A.II.2.3 - Projection quasi-tridimensionnelle.	143
A.II.3 - Cas des variables absolues.	144
A.II.3.1 - Projections des opérateurs.	144
A.II.3.2 - Ecriture tridimensionnelle en repère local.	145
A.II.3.3 - Projection quasi-tridimensionnelle.	146
A.III - MODELE D'ECOULEMENT TRIDIMENSIONNEL.	147
A.III.1 - Cas des coordonnées cartésiennes.	147
A.III.1.1 - Hypothèses.	147
A.III.1.2 - Cas des variables relatives.	147
A.III.1.2.1 - Projections des opérateurs.	147
A.III.1.2.2 - Système d'équations.	149
A.III.1.3 - Cas des variables absolues.	150
A.III.1.3.1 - Projections des opérateurs.	150
A.III.1.3.2 - Système d'équations.	151
A.III.2 - Cas des équations en coordonnées cylindriques.	152
A.III.2.1 - Hypothèses.	152
A.III.2.2 - Cas des variables relatives.	153
A.III.2.3 - Cas des variables absolues.	154
A.IV - INITIALISATION DU CALCUL.	155

A.IV.1 - Cas des aubages fixes. 155

A.IV.2 - Cas des aubages mobiles. 156

FIGURES. 159

LISTE DES FIGURES.

- Figure 1 : Coupe axiale représentative de la veine des turbines, haute et basse pression, et de l'échappement du moteur M88.(SNECMA)
- Figure 2 : Coupe axiale représentative de la veine des turbines, haute et basse pression, et de l'échappement du moteur CFM56-5.(SNECMA)
- Figure 3 : Ecorché représentatif d'un étage de turbine haute pression.
- Figure 4 : Maillage non structuré.
- Figure 5 : Maillage hybride structuré - non structuré.
- Figure 6 : Becquet de bord de fuite.
- Figure 7 : Représentation d'une nappe de courant quasi-tridimensionnelle.
- Figure 8 : Principe de superposition des écoulements.
- Figure 9 : Principe des calculs quasi-tridimensionnels.
- Figure 10 : Référentiels : absolu, relatif et local.
- Figure 11 : Volume élémentaire de la nappe de courant et coordonnées curvilignes.
- Figure 12 : Schéma de principe du code SCHEMA1.
- Figure 13 : Schéma de principe du code SCHEMA2.
- Figure 14 : Traitement des conditions aux limites.
Configuration des caractéristiques dans le plan (M, x, t) .
Le plan $t = cste$ est parallèle à la direction (M, y) .
- Figure 15 : Topologie et frontières du domaine de calcul.
- Figure 16 : Maillage multidomaine structuré.
- Figure 17 : Cas test CTS1.
Maillage : 7057 noeuds, 13295 mailles.
- Figure 18 : Cas test CTS1-1.
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1-1.
- Figure 19 : Cas test CTS1-1.
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1-1.

- Figure 20 : Cas test CTS1-1.
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1-1.
Répartition des isovaleurs de pression $1. - \frac{p}{p_i}$.
 $\Delta = 0.03$.
- Figure 21 : Cas test CTS1-1.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.
- Figure 22 : Cas test CTS1-1.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.
- Figure 23 : Cas test CTS1-1.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.
Répartition des isovaleurs de pression $1. - \frac{p}{p_i}$.
 $\Delta = 0.03$.
- Figure 24 : Cas test CTS1-2.
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1-2.
- Figure 25 : Cas test CTS1-2.
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1-2.
- Figure 26 : Cas test CTS1-2.
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1-2.
Répartition des isovaleurs de pression $1. - \frac{p}{p_i}$.
 $\Delta = 0.03$.
- Figure 27 : Cas test CTS1-2.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.
Répartition des isovaleurs de pression $1. - \frac{p}{p_i}$.
 $\Delta = 0.03$.
- Figure 28 : Cas test CTS1-2.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.
Viscosité artificielle $\chi^{(4)}$ modifiée.
- Figure 29 : Cas test CTS1-2.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.
Viscosité artificielle $\chi^{(4)}$ modifiée.
- Figure 30 : Cas test CTS1-2.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.
Répartition des isovaleurs de pression $1. - \frac{p}{p_i}$.
 $\Delta = 0.03$.
Viscosité artificielle $\chi^{(4)}$ modifiée.
- Figure 31 : Cas test CTS1.
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1-2.

Localisation du point d'arrêt.

- Figure 32 : Cas test CTS1.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.
Localisation du point d'arrêt.
- Figure 33 : Cas test CTS2 2D ET CTS3 2.5D.
Maillage : 4102 noeuds.
Code structuré VOLFINI.
- Figure 34 : Cas test CTS2-1 2D et CTS3-1 2.5D.
Maillage : 3338 noeuds, 6206 mailles.
- Figure 35 : Cas test CTS2-2 2D et CTS3-2 2.5D.
Maillage : 6534 noeuds, 12463 mailles.
- Figure 36 : Résultats : Cas test CTS2.
Code structuré VOLFINI.
- Figure 37 : Cas test CTS2-1.
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1.
- Figure 38 : Cas test CTS2-1.
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1.
- Figure 39 : Cas test CTS2-1.
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1.
Répartition des isovaleurs de pression $1 - \frac{p}{p_i}$.
 $\Delta = 0.01$.
- Figure 40 : Cas test CTS2-1.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.
- Figure 41 : Cas test CTS2-1.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.
- Figure 42 : Cas test CTS2-1.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.
Répartition des isovaleurs de pression $1 - \frac{p}{p_i}$.
 $\Delta = 0.01$.
- Figure 43 : Cas test CTS2-2.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.
- Figure 44 : Cas test CTS2-2.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.
- Figure 45 : Cas test CTS2-2.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.

Répartition des isovaleurs de pression 1. - $\frac{p}{p_i}$.
 $\Delta = 0.01$.

- Figure 46 : Résultats : Cas test CTS3.
Code structuré VOLFINI.
- Figure 47 : Cas test CTS3-1.
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1.
- Figure 48 : Cas test CTS3-1.
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1.
- Figure 49 : Cas test CTS3-1.
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1.
Répartition des isovaleurs de pression 1. - $\frac{p}{p_i}$.
 $\Delta = 0.01$.
- Figure 50 : Cas test CTS3-1.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.
- Figure 51 : Cas test CTS3-1.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.
- Figure 52 : Cas test CTS3-1.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.
Répartition des isovaleurs de pression 1. - $\frac{p}{p_i}$.
 $\Delta = 0.01$.
- Figure 53 : Cas test CTS3-2.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.
- Figure 54 : Cas test CTS3-2.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.
- Figure 55 : Cas test CTS3-2.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.
Répartition des isovaleurs de pression 1. - $\frac{p}{p_i}$.
 $\Delta = 0.01$.
- Figure 56 : Cas test CTS3-3.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.
- Figure 57 : Cas test CTS3-3.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.
- Figure 58 : Cas test CTS3-3.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.
Répartition des isovaleurs de pression 1. - $\frac{p}{p_i}$.
 $\Delta = 0.01$.

- Figure 59 : Cas test CTS2, CTS3, -1 et -3.
Localisation du point d'arrêt.
- Figure 60 : Cas test CTS3-2.
Localisation du point d'arrêt.
- Figure 61 : Cas test CTS4 -1, -2, -3, -4.
Maillage : 3138 noeuds, 5785 mailles.
- Figure 62 : Cas test CTS4-1.
Roue fixe 2D.
Code structuré VOLFINI.
- Figure 63 : Cas test CTS4-1.
Roue fixe 2D.
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1.
- Figure 64 : Cas test CTS4-1.
Roue fixe 2D.
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1.
- Figure 65 : Cas test CTS4-1.
Roue fixe 2D.
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1.
Répartition des isovaleurs de pression $1 - \frac{p}{p_i}$.
 $\Delta = 0.03$.
- Figure 66 : Cas test CTS4-1.
Roue fixe 2D.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.
- Figure 67 : Cas test CTS4-1.
Roue fixe 2D.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.
- Figure 68 : Cas test CTS4-1.
Roue fixe 2D.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.
Répartition des isovaleurs de pression $1 - \frac{p}{p_i}$.
 $\Delta = 0.03$.
- Figure 69 : Cas test CTS4-2.
Roue mobile turbine 2D.
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1.
- Figure 70 : Cas test CTS4-2.
Roue mobile turbine 2D.
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1.

- Figure 71 : Cas test CTS4-2.
Roue mobile turbine 2D.
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1.
Répartition des isovaleurs de pression $1. - \frac{p}{p_i}$.
 $\Delta = 0.03$.
- Figure 72 : Cas test CTS4-2.
Roue mobile turbine 2D.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.
- Figure 73 : Cas test CTS4-2.
Roue mobile turbine 2D.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.
- Figure 74 : Cas test CTS4-2.
Roue mobile turbine 2D.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.
Répartition des isovaleurs de pression $1. - \frac{p}{p_i}$.
 $\Delta = 0.03$.
- Figure 75 : Cas test CTS4-3.
Roue mobile compresseur 2D.
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1.
- Figure 76 : Cas test CTS4-3.
Roue mobile compresseur 2D.
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1.
- Figure 77 : Cas test CTS4-3.
Roue mobile compresseur 2D.
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1.
Répartition des isovaleurs de pression $1. - \frac{p}{p_i}$.
 $\Delta = 0.03$.
- Figure 78 : Cas test CTS4-3.
Roue mobile compresseur 2D.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.
- Figure 79 : Cas test CTS4-3.
Roue mobile compresseur 2D.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.
- Figure 80 : Cas test CTS4-3.
Roue mobile compresseur 2D.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.
Répartition des isovaleurs de pression $1. - \frac{p}{p_i}$.
 $\Delta = 0.03$.
- Figure 81 : Cas test CTS4-4.

Roue mobile turbine 2.5D.
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1.

Figure 82 : Cas test CTS4-4.
Roue mobile turbine 2.5D.
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1.

Figure 83 : Cas test CTS4-4.
Roue mobile turbine 2.5D.
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1.
Répartition des isovaleurs de pression $1. - \frac{p}{p_i}$.
 $\Delta = 0.03$.

Figure 84 : Cas test CTS4-4.
Roue mobile turbine 2.5D.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.

Figure 85 : Cas test CTS4-4.
Roue mobile turbine 2.5D.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.

Figure 86 : Cas test CTS4-4.
Roue mobile turbine 2.5D.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.
Répartition des isovaleurs de pression $1. - \frac{p}{p_i}$.
 $\Delta = 0.03$.

Figure 87 : Cas test CTS4-5.
Roue mobile turbine 2.5D hors adaptation.
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1.

Figure 88 : Cas test CTS4-5.
Roue mobile turbine 2.5D hors adaptation.
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1.

Figure 89 : Cas test CTS4-5.
Roue mobile turbine 2.5D hors adaptation.
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1.
Répartition des isovaleurs de pression $1. - \frac{p}{p_i}$.
 $\Delta = 0.03$.

Figure 90 : Cas test CTS4-5.
Roue mobile turbine 2.5D hors adaptation.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.

Figure 91 : Cas test CTS4-5.
Roue mobile turbine 2.5D hors adaptation.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.

- Figure 92 : Cas test CTS4-5.
Roue mobile turbine 2.5D hors adaptation.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.
Répartition des isovaleurs de pression $1. - \frac{p}{p_i}$.
 $\Delta = 0.03$.
- Figure 93 : Cas test CTS4 -1, -2, -3, -4, -5.
Localisation du point d'arrêt.
- Figure 94 : Modules du SCHEMA1-1 et -2 des conditions initiales et pré-traitement.
- Figure 95 : Modules du SCHEMA2-1 et -2 des conditions initiales et pré-traitement.
- Figure 96 : Cas des domaines contigus.
Principe du traitement sous "forme forte" de la frontière aval.
- Figure 97 : Principe de recouvrement partiel des domaines.
- Figure 98 : Cas des domaines contigus.
Principe du traitement sous "forme faible" de la frontière aval.
- Figure 99 : Algorithme de couplage, code SCHEMA1-1.
- Figure 100 : Algorithme de couplage par recouvrement, code SCHEMA1-2.
- Figure 101 : Algorithme de couplage explicite, code SCHEMA2-1.
- Figure 102 : Algorithme de couplage implicite, code SCHEMA2-2.
- Figure 103 : Modules des SCHEMA1 et 2 (-1 et -2) de post-traitement.
- Figure 104 : Cas test CTINS1-1
Maillages des domaines contigus, 1×1 canaux, 2483×5513 noeuds.
Simulation du décalage des domaines.
- Figure 105 : Cas test CTINS1-1
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1-1.
Vue partielle et zoom (suivant x uniquement) des lignes internes des domaines.
- Figure 106 : Cas test CTINS1-1.
Résultat de couplage.
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1-1.
Répartition des isovaleurs de pression $1. - \frac{p}{p_i}$.
 $\Delta = 0.02$.
Distorsion des chocs à l'interface.
- Figure 107 : Cas test CTS5-1.
Maillages du domaine complet 4449 noeuds, 8400 éléments.
- Figure 108 : Cas test CTS5-2.

Maillages des demi-domaines 2×2240 noeuds, 2×4200 éléments.

- Figure 109 : Cas test CTS5-2.
Interaction stator-stator subsonique.
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1-1.
Répartition des isovaleurs de Mach.
 $\Delta = 0.05$.
- Figure 110 : Cas test CTS5-1 et CTS5-2.
Interaction stator-stator supersonique.
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1-1.
Répartition des isovaleurs de Mach.
 $\Delta = 0.02$.
Distorsion des lignes à l'interface dans le cas CTS5-2.
- Figure 111 : Cas test CTINS1-2.
Topologie des domaines en recouvrement partiel.
- Figure 112 : Cas test CTINS1-2.
Cas des domaines en recouvrement partiel.
Vue partielle et zoom (suivant x uniquement)
des maillages des régions de recouvrement.
(NB. Les échelles ne sont pas respectées.)
- Figure 113 : Cas test CTINS1-2.
Maillages des domaines en recouvrement partiel, 2575×3203 noeuds.
- Figure 114 : Cas test CTINS1-2.
Interaction rotor-stator en recouvrement partiel.
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1-2.
Répartition des isovaleurs de pression $1 - \frac{p}{p_i}$.
 $\Delta = 0.02$.
- Figure 115 : Cas test CTINS1-2.
Interaction rotor-stator en recouvrement partiel.
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1-2.
Vue partielle et zoom (suivant x uniquement).
Répartition des isovaleurs de pression $1 - \frac{p}{p_i}$
au niveau de l'interface.
 $\Delta = 0.02$.
- Figure 116 : Cas test CTINS1-1.
Résultat de couplage.
Code explicite avec viscosité artificielle SCHEMA2-1.
Répartition des isovaleurs de pression $1 - \frac{p}{p_i}$.
- Figure 117 : Cas test CTINS2.
Maillage de chaque aubage (un canal).

- Figure 118 : Cas test CTINS2.
Maillages non structurés de l'étage "réduit",
3 × 5 canaux, 3148 × 4802 noeuds.
- Figure 119 : Cas test CTINS2.
Comparaison des résultats du couplage.
Code STRU et code explicite avec viscosité artificielle SCHEMA2-1.
Répartition des isovaleurs de pression 1. - $\frac{p}{p_i}$.
- Figure 120 : Cas test CTINS2.
Comparaison des résultats du couplage.
Codes avec viscosité artificielle, explicite SCHEMA2-1
Convergence.
Répartition des isovaleurs de pression 1. - $\frac{p}{p_i}$.
- Figure 121 : Cas test CTINS2.
Position des sondes.
- Figure 122 : Cas test CTINS2.
Résultats du couplage.
Codes avec viscosité artificielle, explicite SCHEMA2-1
Convergence des codes : évolution du Mach amont d'étage (sonde 1).
Evolution des débits à l'aval du stator et du rotor.
- Figure 123 : Cas test CTINS2.
Code explicite avec viscosité artificielle SCHEMA2-1.
Résultats du couplage sur une période T .
Répartitions instationnaires de pression 1. - $\frac{P}{P_{a1}}$
sur le profil d'une aube du rotor.
- Figure 124 : Cas test CTINS2.
Code explicite avec viscosité artificielle SCHEMA2-1.
Résultats du couplage sur une période T .
Hodographes, absolu et relatif à la frontière de passage (sondes 3 et 4),
relevés en référentiel absolu.
- Figure 125 : Cas test CTINS2.
Code explicite avec viscosité artificielle SCHEMA2-1.
Résultats du couplage sur une période T .
Evolutions de pression instationnaire $\frac{P}{P_{a1}}$
relevées aux sondes 2 et 5 situées sur le stator et le rotor.
- Figure 126 : Cas test CTINS2.
Code explicite avec viscosité artificielle SCHEMA2-1.
Résultats du couplage sur une période T .
Evolutions des composantes des forces aérodynamiques et Lissajous
pour le stator et le rotor.
- Figure 127 : Cas test CTINS3-1.

Maillages de la géométrie de l'étage (pas relatif du stator).
 1×1 canaux, 2245×2655 noeuds.

- Figure 128 : Cas test CTINS3-1.
 Code explicite avec viscosité artificielle SCHEMA2-1.
 Résultats du couplage sur une période T .
 Répartitions instationnaires des isovaleurs de pression $1. - \frac{p}{p_i}$.
 $\Delta = 0.009$.
 Double page.
- Figure 129 : Cas test CTINS3-2.
 Maillages de la géométrie de l'étage "réduit".
 $1 \times 2 \times 2$ canaux, $5416 \times 2267 \times 1499$ noeuds.
- Figure 130 : Cas test CTINS3-2.
 Position des sondes.
- Figure 131 : Cas test CTINS3-2.
 Résultat du couplage.
 Code implicite avec viscosité artificielle SCHEMA2-2.
 Convergence de la méthode (sonde 1).
- Figure 132 : Cas test CTINS3-2.
 Résultat du couplage, cas bloqué.
 Code implicite avec viscosité artificielle SCHEMA2-2.
 Répartition des isovaleurs de pression $1. - \frac{p}{p_i}$.
 $\Delta = 0.009$.
- Figure 133 : Cas test CTINS3-2.
 Résultats du couplage sur une période T .
 Effet de la réduction du taux de pression à l'aval du stator basse pression.
 Code implicite avec viscosité artificielle SCHEMA2-2.
 Répartitions instationnaires des isovaleurs de pression $1. - \frac{p}{p_i}$.
 $\Delta = 0.009$.
 Double page.
- Figure 134 : Cas test CTINS3-2.
 Résultats du couplage sur une période T .
 Effet de la réduction du taux de pression à l'aval du stator basse pression.
 Code implicite avec viscosité artificielle SCHEMA2-2.
 Répartitions instationnaires de pression $1. - \frac{p}{p_i}$
 sur le profil d'une aube du rotor.
- Figure 135 : Cas test CTINS3-2.
 Résultats du couplage sur une période T .
 Effet de la réduction du taux de pression à l'aval du stator basse pression.
 Code implicite avec viscosité artificielle SCHEMA2-2.

NOMENCLATURE.

r, C_θ	: rayon et rayon moyen de la nappe de courant.
b	: épaisseur relative de la nappe de courant.
m, θ	: coordonnées, méridienne et azimutale.
x, y	: abscisse et ordonnée du plan de calcul.
$Mes(K)$: mesure d'un élément K du maillage.
$Supp$: support d'une fonction.
t	: coordonnée temporelle.
CFL	: nombre de Courant-Friedrichs-Lewy.
e	: entrefer de deux aubages consécutifs.
c	: corde axiale du profil d'une aube.
g	: pas relatif des canaux d'un aubage.
N_1, N_2	: nombre d'aubes totaux de deux aubages consécutifs.
K_1, K_2	: nombre d'aubes effectivement pris en compte dans le calcul de l'interaction de deux aubages consécutifs.
e_1, e_2	: extension azimutale correspondant au nombres K_1 et K_2 .
ec	: extension azimutale moyenne.
λ_1, λ_2	: coefficient d'homothétie des extensions sur l'interface de calcul.
T_i	: temps mis par un point d'une roue pour revenir à une position initiale vis-à-vis d'une seconde roue.
Θ	: coordonnée azimutale des point sur la frontière fictive d'interface.
Ω	: vitesse de rotation angulaire relative de deux domaine en interaction mesurée sur la frontière fictive d'interface.
T_1^a, T_2^a	: périodes temporelles relatives aux groupes des K_1 et K_2 canaux.
s	: coordonnée curviligne dans le plan de calcul.
I	: tenseur unitaire.
$\vec{V}, \vec{W}, \vec{U}$: vecteurs vitesses, absolu, relatif et d'entraînement.
V_m, V_θ	: vitesses absolues, méridienne et azimutale.
α	: angle absolu de la vitesse absolue \vec{V} vis-à-vis de la direction méridienne
W_m, W_θ	: vitesses relatives, méridienne et azimutale.
β	: angle relatif de la vitesse relative \vec{W} vis-à-vis de la direction méridienne
$\vec{\omega}$: vecteur vitesse angulaire de rotation.
c_p, c_v	: chaleurs massiques, à pression et à volume constants.
γ	: rapport des chaleurs massiques.
R	: constante du gaz.
$T, T_i, T_{i,r}$: températures, statique, et d'arrêt absolue et relative.
a	: vitesse du son.
$a_i, a_{i,r}$: vitesses du son, absolue et relative au point d'arrêt.
$\vec{M}, \vec{M}_r, \vec{M}_u$: vecteurs de Mach, absolu, relatif et d'entraînement.
M, M_r, M_u	: nombres de Mach, absolu, relatif et d'entraînement.
k	: fréquence réduite du système.
$\rho, \rho_i, \rho_{i,r}$: masses volumiques, statique, d'arrêt absolue et d'arrêt relative.
$p, p_i, p_{i,r}$: pression statique et pressions d'arrêt absolue et d'arrêt relative.

$p_{i,s}, p_{r,i,s}$: pressions d'arrêt, absolue et relative, isentropiques.
P	: rapport de pressions, statique et d'arrêt.
e	: énergie interne.
E, E_r	: énergies totales, absolue et relative, par unité de volume.
h	: enthalpie interne.
$H_i, H_{i,r}$: enthalpies totales, absolue et relative, énergies par unité de masse.
J	: rothalpie.
S	: entropie.
η	: coefficient d'efficacité de grille.
R, R_r	: référentiels, absolu (fixe) et relatif.
O, O_r	: origines des référentiels, absolu et relatif.
w	: champ.
$f(w), g(w), h(w)$: flux du système d'équation.
Δt	: pas de temps.
n	: nombre d'itérations.
δ_{ij}	: symbole de Kronecker.
\vec{n}, \vec{t}	: vecteurs, normal extérieur et tangeant.
Ω, Ω_T	: domaine de calcul, domaine approximé.
T, C, M	: triangulation du domaine de calcul et espaces d'approximation.
N_i	: fonction d'interpolation associée au noeud i .
mi	: mass-lumping.
K	: élément de la triangulation.
$d\Omega, d\sigma$: mesure élémentaire surfacique et linéique.
$\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}, \vec{I}_r, \vec{J}_r, \vec{K}_r$: vecteurs de base respectifs des référentiels, absolu et relatif.
$\vec{e}_m, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\alpha$: vecteurs de base associés à tout point de la nappe de courant.
\vec{e}_x, \vec{e}_y	: vecteurs de base du plan de calcul.
$\chi^{(2)}, \chi^{(4)}$: paramètres de viscosité artificielle.
β	: coefficient.
$\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial_r}{\partial t}$: dérivations partielles en référentiels, absolu et relatif.
$\frac{d}{dt}, \frac{d_r}{dt}$: dérivations particulières en référentiels, absolu et relatif.
\bar{w}, \bar{w}^{-1}	: fonction aérodynamique et réciproque du rapport de pressions, statique et d'arrêt :

$$\bar{w}(M, \gamma) = \frac{p}{p_i} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma - 1}} ,$$

$$\bar{w}^{-1}\left(\frac{p}{p_i}, \gamma\right) = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1} \left(\left(\frac{p}{p_i}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} - 1\right)} ,$$

$\bar{\rho}$: fonction aérodynamique du rapport de masses volumiques, statique et d'arrêt

$$\bar{\rho}(M, \gamma) = \frac{\rho}{\rho_i} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-\frac{1}{\gamma - 1}} ,$$

Σ, Σ^{-1} : fonction aérodynamique et réciproque du rapport de la section de passage à la section sonique correspondant aux valeurs locales de pression et de température d'arrêt :

$$\Sigma(M, \gamma) = \frac{1}{M} \left(\frac{2 + (\gamma - 1)M^2}{\gamma + 1} \right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} ,$$

Les dernières relations aérodynamiques proviennent de la théorie de la dynamique des gaz, notamment le principe de conservation de l'énergie dans le calcul des écoulement de gaz idéal [1].

Les indices 1, 2, des grandeurs physiques et géométriques, désignent respectivement l'amont et l'aval du domaine de calcul considéré et les indices BA et BF les bords d'attaque et de fuite des aubes.

CALCULS D'ÉCOULEMENTS INSTATIONNAIRES EN ÉTAGE DE TURBINE TRANSSONIQUE EN INTERACTION ROTOR-STATOR.

RESUME : Cette thèse a pour objet l'étude de la simulation numérique d'écoulements transsoniques en turbine multi-aubages. L'originalité de l'étude repose sur la résolution, en maillages non structurés, des équations d'Euler instationnaires exprimées en variables et référentiel relatifs, et la validation de la méthode sur des cas industriels.

Deux méthodes implicites, bidimensionnelles, sont étendues au modèle d'écoulement quasi-tridimensionnel. De nombreuses applications en aubages isolés illustrent la bonne qualité de résolution des deux schémas numériques.

Des applications en étages permettent d'apprécier les difficultés d'implémentation des techniques de couplage des domaines relatifs à chaque aubage. Des résultats très satisfaisants ont été obtenus avec le second schéma de type JAMESON. Un cas de turbine industrielle, comportant trois aubages en interaction, démontre l'efficacité de la méthode.

Mots clés (lexique CEDOCAR) : Equations d'Euler - Ecoulement instationnaire - Ecoulement transsonique - Ecoulement quasi-tridimensionnel - Interaction rotor-stator - Méthode numérique - Maillages non structurés - Méthode des éléments finis - Schéma implicite.

NUMERICAL SIMULATIONS OF UNSTEADY FLOWS IN A TRANSSONIC TURBINE STAGE IN ROTOR-STATOR INTERACTION.

ABSTRACT : This study concerns the numerical simulation of transonic flows in a multi-blade-row turbine. The originality of the study is the resolution on unstructured meshes of the Euler unsteady equations in relative framework and variables, and the validation of the method on industrial cases.

Two implicit bidimensional methods are extended to the quasi-tridimensional flow model. The good quality of the solutions obtained with the two numerical methods is illustrated in many numerical applications for single blade row cases.

The difficulties of the implementation of coupling technics used for each blade row relative domain can be evaluated in several applications. Very satisfactory results are obtained with the second scheme from a JAMESON type. An industrial case of a rotor-stator interaction in a turbine with three blade rows demonstrates the efficiency of the method.

Keywords (NASA thesaurus) : Euler equations - Unsteady flow - Transonic flow - Quasi-tridimensional flow - Rotor-stator interaction - Numerical method - Unstructured Mesh - Finite element method - - implicit scheme.

INTRODUCTION.

Les composants des moteurs à réaction, l'entrée d'air, le compresseur, la chambre de combustion, la turbine et la post-combustion, font l'objet d'importantes recherches en vue d'améliorer leur efficacité, tout en réduisant leur taille et leur masse. En effet, la valeur du coefficient poussée sur poids, voisin de 10 pour le moteur militaire M88 (SNECMA)(fig. 1), ou la très faible consommation spécifique de moteurs civils tels les CFM56 (SNECMA)(fig. 2), font partie des critères déterminants dans la conception d'un aéronef.

Un bref aperçu des phénomènes en présence dans un étage axial "haute pression" (fig. 3), constitué d'une roue fixe, le stator ou distributeur, et d'une roue mobile, le rotor, permet de comprendre les difficultés rencontrées dans l'optimisation de l'aérothermique des turbines.

- ▷ Dans le dessein d'obtenir un rendement optimal de la turbine, on porte la température de combustion à un niveau très important, atteignant dans le cas du moteur M88, par exemple, la valeur de 2000 K. Le point de fusion des composants aérodynamiques de la turbine, situé à 1200 K pour ce propulseur, est très inférieur à la température du gaz. Un refroidissement efficace des parois s'impose. Un film pariétal est généré à cet effet par injection au niveau d'émissions situées sur la surface des aubes, du moyeu et du carter. Cette technique exige une réintroduction notable de fluide engendrant une certaine inhomogénéité de l'écoulement.
- ▷ Par l'interaction de nature visqueuse de l'écoulement et des profils d'aubes, des sillages sont générés aux bords de fuite des aubes du distributeur. En raison de leur faible épaisseur, les bords de fuites sont fendus ou perforés pour augmenter la surface d'échange thermique de l'aube et du réfrigérant.
- ▷ L'aubage distributeur impose une prérotation à l'écoulement. Celle-ci engendre le déplacement relatif en rotation de l'aubage mobile situé à l'aval du stator. Ce mouvement induit une instationnarité de l'alimentation de l'écoulement dans les canaux de la roue mobile en raison du défilement périodique des sillages de l'aubage distributeur. Ces sillages percutent les surfaces des aubes du rotor, perturbent la couche limite et les films de refroidissement.
- ▷ Le régime de l'écoulement est transsonique au niveau du distributeur. Il y a donc formation de chocs qui sont interceptés, hachés et réfléchis par les aubes de la roue mobile, une partie étant renvoyée sur les parois du distributeur.

Au cours de ces dernières années, l'aspect général des étages de turbines s'est modifié et leur masse a diminué. La corde des aubes est devenue plus large, leur nombre ainsi que les tailles des entre-fers des aubages ont diminué. Les nouveaux projets d'aéronefs imposent cependant un effort de recherche particulier, dans le dessein de réduire encore la masse des composants, tout en améliorant leurs performances. La maîtrise des phénomènes relatifs aux interactions rotor-stator en étage est devenue primordiale. En effet, les perturbations aérodynamiques qu'ils engendrent créent des pertes de rendement non négligeables. En outre, ils conditionnent la qualité du film de refroidissement. La détérioration de celui-ci peut engendrer des oxydations, obturer les trous d'injections du réfrigérant [2] et créer des brûlures sur les surfaces des composants aérodynamiques, fragilisant leur tenue mécanique.

KARADIMAS (1989)[3],(1992)[4] a présenté quelques techniques numériques utilisées pour comprendre et prédire les phénomènes relatifs à l'interaction rotor-stator, dans le dessein d'optimiser la conception des compresseurs et des turbines de turboréacteurs.

De nombreux travaux ont été réalisés par différents chercheurs dans le cadre des maillages structurés. Parmi les thèmes de recherches abordés, on relève les sujets suivants :

- ▷ le traitement du passage des informations entre les domaines relatifs aux aubages (recouvrement partiel étendu ou restreint des domaines, relation de compatibilités,...), dans le cas des turbines mono-étage,
- ▷ la réduction des domaines de calcul, en créant artificiellement une périodicité spatio-temporelle de l'écoulement, en particulier dans le cas où le nombre d'aubes des roues en interaction sont premiers entre eux,
- ▷ l'extension de la méthode de passage des informations entre domaine dans le cas des compresseurs ou turbines multi-étages,

La plupart des schémas numériques utilisés sont explicites, et quelques applications ont été réalisées avec une modélisation tridimensionnelle des écoulements.

Les développements relatifs aux méthodes de résolution numérique des équations d'Euler et de Navier-Stokes en maillages non structurés réalisés ces dernières années permettent d'envisager leurs applications pour prédire les phénomènes relatifs à l'interaction rotor-stator. Ces maillages semblent bien adaptés pour prendre en compte les géométries complexes des composants des turbomachines, comme les chambres de combustion des réacteurs. Par ailleurs, de nouvelles techniques de résolution, utilisant des maillages multi-domaines, dit hybrides, et cherchant à exploiter simultanément les avantages procurés par les maillages à la fois structurés (précision des résultats) et non structurés (géométries complexes) par zones sont apparues récemment.

Le travail présenté dans ce mémoire de thèse a pour objectif d'examiner la possibilité de calculer numériquement des écoulements transsoniques circulant au travers de turbines en interaction rotor-stator, à l'aide de maillages non structurés. Il s'agit, pour ce faire, d'étudier des algorithmes de résolution capables de traiter :

- ▷ le calcul en référentiel relatif des écoulements dans les aubages fixes ou mobiles,
- ▷ la modélisation quasi-tridimensionnelle des écoulements,
- ▷ la méthode de couplage des domaines de calcul relatif aux aubages en interaction,
- ▷ le cas des turbines multi-étages.

On s'intéresse plus particulièrement aux possibilités d'extension des domaines d'application de deux types de schémas numériques. Le premier est un schéma implicite de type LERAT adapté au cadre des éléments finis par MORTCHELEWICZ et SENS qui fonctionne sans viscosité artificielle en bidimensionnel. Le second est un schéma de type JAMESON qui nécessite l'adjonction de deux termes de viscosité artificielle. L'adaptation du système d'équations d'Euler quasi-tridimensionnelles en référentiel relatif, ainsi que l'extension des méthodes numériques en 2,5 D et leurs utilisations constituent l'essentiel des développements relatifs aux schémas dans cette étude.

Il s'agit de proposer une solution au problème des topologies des domaines de calculs dans le cas des étages aux entrefers d'aubages très réduits. Une méthodologie basée sur l'emploi des maillages non structurés associés à des schémas de type éléments finis est étudiée, ainsi que son extension au cadre multi-domaines pour le cas des machines multi-aubages.

Le présent mémoire s'articule comme suit :

- ▷ Au chapitre I, une étude bibliographique d'observations expérimentales et de développements numériques introduit la problématique de l'interaction rotor-stator. Les hypothèses et motivations ayant conduit au choix de modélisation géométrique par les maillages non structurés sont détaillées, ainsi que celles se rapportant à la modélisation aérodynamique.
- ▷ Le chapitre II présente l'adaptation et la discrétisation du modèle d'équations quasi-tridimensionnel en référentiel relatif et expose notamment l'évolution des méthodes numériques développées par MORTCHELEWICZ et SENS capables à l'origine de calculs bidimensionnels instationnaires en grilles isolées et fixes. Les traitements des conditions limites relatifs à chaque schéma sont également présentés.
- ▷ Les conditions initiales, pour les calculs d'écoulements en aubages fixes et mobiles, isolés, sont traitées dans le chapitre III. Des validations numériques des deux méthodes présentées au chapitre précédent sont réalisées pour différentes configurations aérodynamiques ainsi qu'une comparaison de leurs performances.
- ▷ Le chapitre IV est consacré à la technique de couplage des domaines de calcul et à son adaptation aux méthodes numériques étudiées. La validation permet la sélection d'un schéma. Une étude comparative avec les résultats d'une méthode structurée illustre les performances de résolution de celui-ci. Diverses applications numériques industrielles illustrent les capacités de la méthode, et notamment un cas de calcul de turbine multi-étage est présenté.
- ▷ Les résultats sont pris en compte dans la conclusion de cette étude pour l'évaluation du potentiel de développements futurs de cette méthode.
- ▷ Les systèmes quasi- et tridimensionnels des équations d'Euler exprimées en référentiel relatif, ainsi que l'adimensionnalisation et l'initialisation dans le cas d'aubages fixes et mobiles, sont développés en Annexe.

Chapitre I - PRESENTATION DU PROBLEME.

I.1 - ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE.	36
I.1.1 - Observations expérimentales.	36
I.1.2 - Méthodes numériques de couplage.	39
I.1.3 - Conclusions.	46
I.2 - MODELISATION GEOMETRIQUE.	46
I.3 - MODELISATION AERODYNAMIQUE.	47
I.3.1 - Nature du fluide.	47
I.3.2 - Type d'écoulement.	48
I.3.3 - Types d'instationnarités, d'interactions, transmission d'informations.	49
I.3.4 - Référentiel.	50
I.3.5 - Système d'équations du modèle aérodynamique.	50
I.3.5.1 - Hypothèses.	50
I.3.5.2 - Formulations en référentiel relatif fixe.	51
I.3.5.3 - Formulations en référentiel relatif mobile.	52

I.1 -ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE.

Le problème de l'interaction rotor-stator est exposé au travers de deux études bibliographiques. La première, sommaire, rend compte des principaux résultats de quelques études expérimentales. La seconde répertorie un certain nombre de techniques numériques développées par le passé pour modéliser l'interaction rotor-stator.

I.1.1 - Observations expérimentales.

Le transport des sillages des aubes dans les étages de turbomachines fut l'objet des premières études expérimentales relatives à l'interaction rotor-stator, en raison de l'espacement important des aubages. Des pics de pression statique et de température statique atteignant 10% du niveau global, ont été relevés à l'aval d'un fan de compresseur disposant d'une roue directrice d'entrée. Dans le cadre de l'élaboration d'un modèle de transport des sillages reliant le profil de températures au facteur de pertes visqueuses de la roue mobile, KERREBROCK et al.(1970)[5] ont présenté une explication du phénomène "simplifié" basée sur une interprétation du triangle de vitesses : la vitesse absolue des sillages étant inférieure à celle de l'écoulement sain à l'aval de l'aubage fixe, une vitesse de glissement apparaît dans le référentiel relatif de la roue mobile orientée vers l'intrados de ses aubes.

Ceci explique le transport des sillages, au travers des canaux du rotor, leur étalement après avoir percuté la surface de l'aubage, et leur mélange aux sillages du rotor. Il a été observé que ces sillages ne se mélangeaient pas à la partie saine de l'écoulement.

Le phénomène est identique pour un redresseur placé en aval du fan, et son influence est faible par rapport aux pertes visqueuses du redresseur, dans la mesure où les aubages sont suffisamment espacés.

Lors de mesures instationnaires, EVANS (1974)[6] a retrouvé des pics de vitesse tangentielle, à l'aval d'un aubage mobile d'étage de compresseur, correspondant aux passages périodiques des sillages, confirmant l'interprétation du triangle de vitesses.

Par ailleurs, il a relevé pour trois cas d'écoulements des augmentations d'incidence du redresseur comprises entre +12 et +15 degrés à chaque passage de sillage sur les aubes.

Enfin, d'après une analyse du triangle de vitesses, il a indiqué que l'interaction des sillages d'un distributeur sur une roue mobile a des conséquences moins néfastes pour la couche limite dans le cas des turbines que dans le cas des compresseurs, du fait de la diminution de l'incidence de l'aubage mobile.

GALLUS et al. (1979)[7] ont réalisé une étude de l'interaction rotor-stator dans un étage de compresseur à l'aide de capteurs embarqués pour la mesure des profils des sillages et des mesures de pressions sur les surfaces des aubes. Divers régimes de l'écoulement furent examinés. Les résultats indiquent une variation d'environ 6% de la portance due aux passages périodiques des sillages, ce qui montre l'influence significative de la présence de la roue directrice d'entrée.

L'intérêt s'est ensuite porté sur l'analyse des phénomènes aérodynamiques dans les étages de turbines avec une modification de l'entrefer des roues. DRING et al. (1982)[8] ont classé les phénomènes d'interactions rotor-stator en deux catégories :

- ▷ les interactions de nature non visqueuse, dites interactions potentielles, et relatives aux écoulements sains. Leurs effets sont inévitables pour des étages aux entrefers réduits, puisqu'ils se manifestent à l'amont et à l'aval de chaque aubage, jusqu'à une longueur de corde.
- ▷ les interactions de nature visqueuse, dues essentiellement aux sillages. Ceux-ci sont transportés par convection uniquement vers l'aval de chaque roue mais l'atténuation de leurs effets est beaucoup plus progressive vis-à-vis de l'interaction potentielle, et ils doivent être pris en compte, même pour des aubages suffisamment espacés.

Dans un cas d'entrefers de 15% de corde, ils ont présenté des graphes illustrant les enveloppes des fluctuations périodiques moyennes de pression qui montrent une augmentation d'amplitude de $\pm 15\%$ à l'extrados des aubes du distributeur sur une région voisine de leur bord de fuite par rapport au niveau de pression dynamique aval du rotor. Ils ont attribué ces fluctuations aux interactions potentielles de l'écoulement avec le rotor. On relève aussi une diminution d'amplitude sur l'extrados du rotor, allant de $\pm 36\%$ près du bord d'attaque à $\pm 18\%$ un peu plus loin, tandis que cette amplitude est de $\pm 9\%$ à l'intrados.

Par ailleurs, la comparaison de leurs résultats pour les ondes de pression instationnaire au bord de fuite du distributeur, avec les résultats d'une méthode numérique permettant le calcul d'écoulements potentiels, indique un bon accord des résultats en amplitude et en phase.

Enfin, leur étude de l'atténuation des phénomènes en fonction de l'éloignement des aubages, en utilisant un entrefer de 65% de corde montre que la méthode potentielle (résolution de l'équation du potentiel complet) est tout à fait satisfaisante pour la prédiction des effets sur le stator, mais reste cependant trop grossière pour le rotor car elle ne prend pas en compte les effets visqueux du sillage dont l'atténuation est plus progressive.

En ce qui concerne le transfert thermique, ils ont noté une augmentation sensible de 25% du nombre de Stanton à l'extrados de la roue mobile quand l'entrefers passe de 65% à 15%, avec une évolution de couche limite, laminaire, en transition, turbulente, identique dans les deux cas. L'effet est beaucoup plus faible à l'intrados.

JOSLYN et al. (1983)[9] ont réalisé des mesures tridimensionnelles dans un montage de turbine axiale constitué de trois aubages, c'est à dire, un étage haute pression avec un distributeur. Ils ont montré que l'interaction potentielle du rotor sur le distributeur haute pression est vraiment faible dans une configuration d'entrefers important.

En revanche, ils ont relevé une déviation fluctuante méridienne supérieure à 20 degrés du sillage de la roue mobile. Compte tenu de la vitesse de glissement, les sillages du distributeur percutent l'extrados des aubes du rotor. Il apparaît alors un écoulement périodique radial sur l'extrados, qui résulte de la centrifugation des sillages au bord de fuite du rotor. Les variations angulaires moyennes en temps étaient de ± 10 degrés dans le plan méridien, et de ± 14.5 degrés dans le plan aube à aube, en dehors des zones affectées par le transport par convection des sillages.

Ensuite, ils ont mis en évidence le caractère très instationnaire de l'écoulement dans le cas du second distributeur. Les résultats montrent l'aspect tridimensionnel de l'écoulement dans la turbine et sa modification périodique à une fréquence égale à celle du passage de la roue.

Enfin, ils ont essayé d'évaluer le degré de validité d'une méthode numérique bidimensionnelle potentielle dans le cas du premier distributeur, à mi-corde vis-à-vis de mesures moyennées en temps, et ont remarqué la bonne qualité de la prédiction des caractéristiques des écoulements absolus et relatifs potentiels. En ce qui concerne le second distributeur, si les variations d'angles coïncident bien avec les calculs, la prédiction de la vitesse est moins bonne que dans le cas du premier distributeur où l'écoulement est pratiquement bidimensionnel et les conditions amont ne sont pas perturbées par

des effets tridimensionnels ou des variations spatiales et temporelles.

BINDER et al.(1985)[10] ont présenté une étude qualitative de la distorsion et de la trajectoire des tronçons de sillages lors de leur transport par convection au travers d'un aubage mobile de turbine. Ils ont utilisé une technique de vélocimétrie laser bidimensionnelle pour mesurer la vitesse de l'écoulement et l'intensité de la turbulence dans les canaux. Les mesures instationnaires du vecteur vitesse ont montré la manière dont les sillages de l'aubage distributeur sont hachés par les aubes du rotor, la distorsion des tronçons de sillages et leur transformation en tourbillons, lesquels migrent au travers des canaux. Ce phénomène de tourbillons contra-rotatifs dans les canaux de l'aubage mobile, résulte du transport par convection des écoulements dans le référentiel relatif du rotor et de l'effet aérodynamique des extradados des aubes. L'importance de ce phénomène complexe d'écoulement, sur le niveau de turbulence et de son comportement instationnaire, est démontrée.

WILLIAMSON et al.(1986)[11] ont examiné différentes configurations d'un étage de turbine transsonique. Leurs essais ont porté sur deux types de distributeurs, d'abord isolés, puis placés en présence d'une roue mobile au nombre d'aubes variable. Ils ont montré qu'il existe une configuration optimale de l'étage. Ils ont aussi mis en évidence les effets tridimensionnels liés aux effets conjoints de la géométrie du carter du distributeur et à la présence de la roue mobile.

L'instrumentation embarquée sur les rotors de turbomachines est délicate à réaliser, et il est plus aisé d'étudier le comportement d'un aubage mobile maintenu fixe en imposant à l'écoulement un angle d'alimentation correspondant à la situation dans son référentiel relatif.

Un nouveau montage expérimental inspiré de ce principe permet des mesures détaillées de couche limite et de transfert thermique sur la surface des aubes. L'étage réel est remplacé par un montage constitué d'un aubage mobile en grille, maintenu fixe devant lequel tourne un rotor muni de barreaux amovibles. Le passage de ces barreaux reproduit le défilement périodique des bords de fuite d'un distributeur. On peut donc étudier le transport des sillages, la propagation des chocs, mais ce montage ne simule pas les effets du soufflage au bord de fuite des aubes du distributeur. Les mesures de pression et les photographies de DOORLY et al.(1985)[12] réalisées avec ce montage montrent les fortes distorsions des sillages en raison des gradients de vitesse importants dans les canaux de la grille.

Les relevés relatifs aux transferts thermiques montrent une transition de la couche limite au niveau du point d'impact du sillage, phénomène que l'on retrouve lors de l'impact des chocs. On a observé sur l'extrados d'une aube percutée une migration en direction du bord de fuite de "poches" de couche limite turbulente. Ce phénomène au cycle très rapide augmente notablement l'échange thermique.

SCHULTZ et al.(1986)[13] ont également utilisé ce montage pour l'étude des sillages et des chocs dans un étage de turbine transsonique. Ils ont montré la forme gauche, c'est à dire tridimensionnelle, de la "nappe" d'un choc issu du bord de fuite du distributeur, générée par les barreaux mobiles du montage et traversant les canaux de la roue mobile en grille fixe.

OLDFIELD et al.(1989)[14] ont étudié, sur le même montage, la propagation des sillages, mais aussi celle des ondes de choc, ainsi que la réfraction, les réflexions et re-réflexions de ces dernières, dans les canaux de la grille.

En ce qui concerne les sillages, deux types d'ondes de pression ont été identifiés. Le premier type correspond à l'impact sur l'extrados d'une aube du "negative jet", cette onde engendre un saut de pression et se propage dans tout le canal. Le second type correspond à une onde de détente. Elle provoque une chute de pression et précède l'arrivée d'un sillage. Ceci résulte de l'interaction du sillage et de la partie saine de l'écoulement qui s'accélère au niveau du plan d'entrée de la grille.

L'effet de l'impact d'un choc est négligeable à l'intrados des aubes, mais il augmente localement la pression sur l'extrados ce qui décharge la grille.

COLLIE et al.(1992)[15] ont réalisé un nouveau montage, original et fort simple, pour étudier plus précisément les effets liés à la propagation des ondes dans les canaux des aubages mobiles de turbines.

L'aubage mobile est en grille, laquelle est maintenue fixe et alimentée par un canal dirigé suivant l'angle de l'écoulement relatif de l'aubage. Un générateur d'ondes, dont le principe repose sur une adaptation de celui du tube à choc, est placé au plafond du canal d'alimentation, orienté suivant la perpendiculaire à l'écoulement. Il émet des ondes en direction du plancher du canal, en amont de la grille. Les ondes de choc traversent le canal d'alimentation et migrent, à la vitesse de l'écoulement, au travers des canaux de la grille.

Leurs mesures expérimentales ont porté sur l'évolution instationnaire de la pression sur les parois des aubes et l'évolution instationnaire de leur sillage. Ils ont déterminé des variations de l'ordre de 120% de la portance instationnaire, et ont mesuré des fluctuations supérieures à 40% du coefficient des pertes.

L'intérêt de ces dernières expérimentations réside dans leur simplicité et leur capacité de fournir un nombre important de clichés et de mesures instationnaires autorisant des comparaisons avec des résultats de codes numériques. Ne pourrait-on d'ailleurs pas étendre le domaine d'application du montage utilisé entre autres par DOORLY et al.(1985)[12], pour analyser les effets engendrés par l'obligation de refroidissement des aubages, notamment du soufflage de réfrigérant au bord de fuite des aubes du distributeur de la turbine haute pression ? On pourrait alors exploiter complètement le potentiel et la simplicité de leur montage pour une première validation des méthodes de calcul pour éviter de construire un étage complet et mettre en oeuvre une technique métrologique délicate.

I.1.2 - Méthodes numériques de couplage.

Toutes les techniques développées par le passé pour reproduire numériquement les effets aérodynamiques relatifs à l'interaction rotor-stator, peuvent être groupées en deux catégories, suivant le type de modélisation :

- ▷ la première consiste à créer une condition limite instationnaire à l'amont du domaine de calcul. Dans le cas d'un aubage mobile d'étage de turbine cette méthode permet de simuler les effets d'un sillage provenant du distributeur,
- ▷ la seconde consiste à calculer directement l'interaction entre des aubages en mouvement relatif.

ADAMCZIK et al.(1973)[16] ont élaboré une méthode de calcul capable de prédire l'influence de l'instationnarité de l'écoulement d'alimentation sur le déclenchement du phénomène de décrochage tournant d'un aubage mobile de compresseur.

Le premier algorithme de simulation d'écoulements en étages de compresseurs axiaux a été réalisé en fluide parfait par ERDOS et al.(1977)[17]. L'originalité de leurs travaux repose sur la conception d'une technique de transmission d'informations combinant les relations caractéristiques et l'utilisation des propriétés de déphasage espace-temps.

Les aubages des étages de turbomachines ont des nombres d'aubes premiers entre eux et ces propriétés de déphasage ont permis de retrouver une périodicité spatiale de l'écoulement, et par

suite, de réduire la taille du domaine de calcul nécessaire, tout en leur donnant une extension azimutale identique.

Cette technique a été exploitée par HODSON (1984)[22], lequel s'est intéressé à l'interaction sillage/roue mobile, le sillage étant modélisé algébriquement.

La méthode a montré que l'essentiel des effets relevés au cours de son étude expérimentale antérieure (1984)[23] était généré plutôt par des effets non visqueux que par des effets visqueux. Cette observation lui a permis de conclure qu'une méthode de calcul fluide parfait suffisait pour prédire convenablement ce type d'interaction.

DENTON et al. (1979)[18] et SINGH (1982)[19] ont proposé une technique visant à réduire le volume et les temps nécessaires aux calculs. Cette technique repose sur une hypothèse simplificatrice qui consiste à considérer que les variations tangentielles de l'écoulement sont négligeables à la frontière interface des domaines de calculs d'aubage en interaction rotor-stator. On considère donc un écoulement moyen en temps. Cette technique a été mise en oeuvre par ARTS (1982)[20], (1984)[21], pour la réalisation de calculs tridimensionnels sur un étage de turbine. Il a, par ailleurs, réalisé une comparaison de ses résultats de calcul avec des mesures expérimentales. Ces travaux ont permis de montrer la nature instationnaire et tridimensionnelle des écoulements dans l'étage.

ADAMCZIK (1984)[24] a proposé une adaptation d'un modèle d'équations de passage, moyennées, stationnaires et tridimensionnelles pour le calcul des écoulements circulant dans les turbomachines multi-étages.

ADAMCZIK et al.(1986)[26] ont utilisé leurs travaux de 1984 pour la simulation du comportement aérodynamique d'un étage UPF (Unducted Propulsion Fan). Ils ont aussi proposé (1986)[27] un modèle d'équation de fermeture pour compléter le caractère fluide parfait du système d'équations de passage.

RAI (1985)[25] a réalisé des calculs Navier-Stokes bi- puis tri-dimensionnels sur un étage de turbine avec des maillages multidomaines structurés, en O au voisinage des aubes et en H au loin, avec recouvrement partiel des maillages au niveau de l'interface des domaines. Il a utilisé une technique de changement d'échelle de la géométrie des aubages pour retrouver une périodicité spatiale dans l'écoulement. Il a étendu ses travaux aux configurations tridimensionnelles (1987)[28].

FOURMAUX et al. (1986)[29], (1987)[30], ont repris les techniques de périodicité spatio-temporelle de ERDOS et al. (1977)[17], les ont complétées par une "technique d'homothétie des pas des canaux" des aubages et ont calculé des écoulements quasi-tridimensionnels en turbines et compresseurs axiaux transsoniques. Ils ont présenté, par la suite, des résultats (1987)[31] relatifs à un certain nombre de cas de simulation et ont indiqué, à cette occasion, que les calculs tridimensionnels étaient limités à un nombre restreint de canaux par roues, en raison de la puissance informatique disponible, tandis que les calculs bi-dimensionnels pouvaient prendre en compte un nombre important d'aubages, au nombre quelconque de canaux par roue. Leurs codes possédaient, en outre, un modèle de pertes capable de reproduire certains effets visqueux liés à l'interaction fluide-paroi. Le bilan des comparaisons des résultats, pour différentes valeurs de nombres d'aubes réduits, montre que le rapport de ces nombres doit être aussi proche que possible du rapport exact des nombres d'aubes.

GILES (1987)[32] a repris le travail d'HODSON (1984)[23] et a construit un nouveau traitement de l'information en utilisant le "time-inclining".

Le principe repose sur un passage des coordonnées physiques aux coordonnées calculs, système dans lequel l'écoulement est à nouveau spatialement périodique.

Ainsi, il a introduit un concept d'inclinaison du pas de temps, inclinaison propre à chaque domaine

puisque le pas spatial et le pas de temps sont distincts, et moyennant un changement de variables du champ, il parvient à calculer des aubages aux nombres d'aubes réels. Il a utilisé (1988)[33] cette technique sur un cas d'étage de turbine en quasi-tridimensionnel.

CHEN (1988)[34] a effectué des calculs Navier-Stokes sur un étage en configuration bi-dimensionnelle, puis tridimensionnelle, en utilisant une méthode de recouvrement partiel des maillages. Il a validé sa méthode sur le cas de turbine de DRING et al. (1982)[8] et a montré que, malgré la réduction d'échelle du rotor pour le calcul, les résultats numériques étaient en accord avec les mesures expérimentales. Les résultats obtenus en tridimensionnel ont prouvé l'importance de l'interaction en pied et en tête des aubages et, par suite, l'intérêt des modélisations numériques tridimensionnelles.

LE MEUR (1988)[35] a calculé l'écoulement dans un étage complet de turbine et a présenté une comparaison de résultats pour deux configurations d'aubages. Il a montré que les effets de l'interaction concernent 40% à 50% de la surface des aubes dans le cas d'un rapport de nombre d'aubes réduit de valeur unitaire, tandis que dans le cas d'un rapport double, toute la surface est concernée. En outre, il a décrit les effets du modèle de pertes, lequel correspondait à l'imposition d'une force de frottement sur les aubes, le moyeu et le carter de l'étage. Ce modèle avait pour effet d' "obstruer" les canaux par réduction de la section de passage de l'écoulement. Il s'ensuivait une augmentation de la vitesse dans les régions subsoniques et un ralentissement dans les régions supersoniques, résultat observé notamment sur les extradados des aubes. Par ailleurs, l'angle de sortie de l'écoulement du distributeur était modifié, ce qui entraînait une modification de l'écoulement de l'aubage mobile.

CHEN et al. (1988)[36] ont présenté une technique de déformation de maillage au cours du temps pour calculer le comportement aérodynamique d'un étage de turbine. Le stator et le rotor possédaient leur propre maillage et on ajoutait un maillage intermédiaire, ce dernier se déformant au cours du temps. L'initialisation du calcul était obtenue à partir du résultat stationnaire de chaque aubage. Cette méthode présentait l'avantage d'éviter le recours à un traitement de l'information à l'interface des domaines, mais son application restait limitée en raison de la taille trop importante de l'entrefer des aubages.

CHIMA et al. (1989)[37] ont calculé un étage de turbine avec un recouvrement partiel très réduit à l'interface et de simples interpolations des informations sur les lignes qui se superposaient.

LIU (1989)[38] a réalisé une étude de grilles de turbine couplées dans laquelle il a utilisé la méthode du "time inclining" de GILES (1987)[33]. Les équations d'Euler sont résolues par le schéma explicite Runge-Kutta de CHIMA, disposant d'un lissage des résidus.

BILLONNET (1990)[39] a appliqué la "technique d'homothétie des pas des canaux" au calcul des effets de l'interaction rotor-stator en étage de turbine supersonique. Le calcul a été réalisé sur un modèle dont la géométrie était simplifiée en respectant les propriétés particulières aux écoulements supersoniques.

CHAPIN et al. (1991)[40] ont présenté l'expression généralisée de la périodicité chorochronique, laquelle permet de réduire les domaines de calcul des aubages en interaction à un seul canal pour chaque aubage.

DELANEY et al. (1990)[41] ont utilisé un schéma de Hopscotch muni d'une phase implicite de type "residual smoothing" afin d'utiliser de grands pas de temps.

Dans le cadre des études de machines multi-étages, le coût calcul devient rapidement important.

Un certain nombre de travaux ont été réalisés pour rendre possible ce type de simulations. DAWES (1990)[42] a réalisé un solveur multi-étages capable de résoudre les équations de Navier-Stokes en utilisant la "technique de moyenne circonférentielle" de DENTON (1979)[18] pour la transmission des informations entre les domaines de calcul des différents aubages.

L'inconvénient du calcul avec une "méthode de moyenne circonférentielle" est d'imposer un écoulement moyen au voisinage des bords d'attaque et de fuite des aubages. DENTON (1990)[43] améliore la situation en extrapolant les valeurs de champs de part et d'autre de chaque interface.

GILES (1992)[44] présente une méthode mathématique asymptotique pour le traitement de l'information à l'interface des domaines des aubages en interaction dans le cadre des machines multi-étages.

On remarque cependant que l'application instationnaire en étage de turbine, réalisée par MAYER (1992)[45], avec une interface moyennée circonférentiellement, permet d'obtenir de bons résultats.

LIU et al. (1993)[46] ont réalisé une méthode numérique fonctionnant sur des maillages hybrides. Elle autorise la simulation des effets des sillages et des chocs dus à une instationnarité de l'écoulement amont d'une roue mobile de turbine.

WIESLER et al. (1993)[47] ont présenté une évaluation des prédictions de diverses méthodes numériques dans le cas de calculs en turbines et compresseurs, vis-à-vis de résultats d'essais expérimentaux. Ils ont démontré l'efficacité de quelques méthodes, dont celle développée par GILES.

Le tableau suivant reprend les caractéristiques des principaux travaux présentés dans cette bibliographie.

TABLEAU DES PRINCIPALES MODELISATIONS DE L'INTERACTION ROTOR/STATOR

Auteur Référence date	Application Etage Régime	Modèle aérodynamique Equations Turbulence/Pertes	Méthode numérique		Simulation d'étage			
			Maillage Nombre de noeuds	Schéma	Périodicité Transmission	Traitement de frontière	situation des domaines	Cas traités canaux
ADAMCZIK [] 1973	transsonique compresseur	2D incompressible —	H	différences finies Arkawa Cranck-Nicholson	temporelle	distortion Pression imposée	isolé	sillage/roue cas 1x1
ERDOS [] 1977	transsonique compresseur	2.5D Euler —	H 60x9	explicite différences finies Mc Cormack	spatio-temporelle interpolations	caractéristiques non réflexion	contigus	1 étage complet 44x46
HODSON [12] 1984	subsonique turbine	2D Euler —	H 94x22	explicite volumes finis Denton	spatio-temporelle	algébrique caractéristiques Pression imposée	isolé	sillage/roue
RAI [14] 1985	subsonique turbine	2D Navier- Stokes Baldwin-Lomax	H/O 101x21x2+(58+60)x31 25x(101x21x2+(58+60)x31)	implicite volumes finis Osher	spatiale interpolations	caractéristiques	recouvrement partiel	étage de 28x22 à 22x22 soit 1x1
ADAMCZIK [] 1986	transsonique UPF	3D Euler —	H 99x36x16	volumes finies explicite Jameson	moyennes	caractéristiques Pression imposée	isolé	étage soit 1x1
ARTS [] 1986	transsonique turbine	3D Euler —	H 2x(49x10x10)	explicite volumes finis McNally	moyenne circonférentielle	Pression calculée (équilibre radial)	contigus	étage 36x64
FOURMAUX [16] 1986	transsonique compresseur turbine	2.5D Euler —	H 70x15 + 50x15	explicite différences finies Mc Cormack	spatio-temporelle homothétie interpolations /splines	caractéristiques non réflexion	contigus	étage 4x5
FOURMAUX [17] 1987	transsonique compresseur turbine	2.5D /3D Euler pertes	H	explicite différences finies Mc Cormack	spatio-temporelle homothétie interpolations /splines	caractéristiques non réflexion	contigus	étage 1x2 (3D)

TABLEAU DES PRINCIPALES MODELISATIONS DE L'INTERACTION ROTOR/STATOR (suite 1)

Auteur Référence date	Application Etagé Régime	Modèle aérodynamique Equations Turbulence/Pertes	Méthode numérique		Simulation d'étage			
			Maillage Nombre de noeuds	Schéma	Périodicité Transmission	Traitement de frontière	situation des domaines	Cas traités canaux
RAI [15] 1987	subsonique turbine	3D Navier- Stokes Baldwin-Lomax	H/O [101x21x2 + 58x31 + 60x31]x25	implicite volumes finis Osher	spatiale interpolations	caractéristiques non réflexion	recouvrement partiel	étage 22x22
GILES [19] 1987	subsonique turbine (HODSON)	2D Euler —	H	explicite Ni	temporelle time/inclining coïncidence	caractéristiques non réflexion	maillage intermédiaire (1 colonne)	sillage/roue 2 sillages X 3 aubes
GILES [20] 1988	transsonique turbine	2.5D Euler —	H 18000 mailles	explicite Lax-Wendroff	temporelle time/inclining coïncidence	caractéristiques non réflexion	maillage intermédiaire 1 colonne	étage 1x1
CHEN [21] 1988	transsonique transsonique turbine	2D /3D Navier- Stokes Laudner k - ϵ	H 93 x 109 x 2 71 x 33 x 31	implicite différences finies Cranck-Nicholson	spatiale interpolations	caractéristiques non réflexion	recouvrement 1 colonne	étage 3x4 et 2x3 (2D) 1x1 (3D)
LE MEUR [22] 1988	transsonique turbine	3D Euler pertes	H 44000	explicite différences finies Mc Cormack	spatio-temporelle homothétie splines	caractéristiques non réflexion	contigus	étage 1x1 et 1x2
CHEN [23] 1988	subsonique turbine	2D Navier- Stokes Laudner k - ϵ	C et H 593 x 31	implicite différences finies LBI Briley- Mc Donald	rien interpolations	caractéristiques non réflexion	déformation du maillage intermédiaire	étage 1x1
JORGENSON [24] 1988	transsonique turbine	2.5D Euler et Navier- Stokes Baldwin-Lomax	C-H 115x31 197x41	explicite Jameson	interpolations	caractéristiques non réflexion	recouvrement 1 colonne	étage 1x1
LIU [25] 1989	transsonique	2D Euler —	H 129x33	explicite Chima	temporelle time/inclining coïncidence	caractéristiques non réflexion	contigus	étage 1x1

TABLEAU DES PRINCIPALES MODELISATIONS DE L'INTERACTION ROTOR/STATOR (suite 2)

Auteur Référence date	Application Etagé Régime	Modèle aérodynamique Equations Turbulence/Pertes	Méthode numérique		Simulation d'étage			
			Maillage Nombre de noeuds	Schéma	Périodicité Transmission	Traitement de frontière	situation des domaines	Cas traités canaux
DELANEY [28] 1990	transsonique turbine	2D Euler et Navier- Stokes Baldwin-Lomax	O 161x15 161x33	explicite/implicite différences finies Opscotch	spatio-temporelle interpolations	caractéristiques non réflexion	recouvrement partiel	étage 2x3
DAWES [29] 1990	transsonique compresseur turbine	3D Navier-Stokes Laudner k - ε	H 21x157x21 17x53x33 17x83x33	explicite/implicite Dawes-Jameson	moyenne circonférentielle	caractéristiques non réflexion	contigus	1 étage 1 étage 1 étage
DENTON [30] 1990	subsonique turbine	3D Euler Pertes	H 50x19x19 180x19x19	multigrille Denton	extrapolations interpolations	caractéristiques non réflexion	contigus	3 et 4 étages
MAYER [32] 1992	subsonique turbine	3D Euler —	H (53+107)x13x11	volumes finis Lax-Wendroff-Richtmeyer	moyenne circonférentielle	caractéristiques non réflexion	contigus	1 étage
LIU [32] 1992	transsonique turbine	2D Euler/Navier- Stokes Baldwin-Lomax	non structuré 3875 elements O 155x21	localement implicite hybride volumes finis TVD et LIU	distortion pression	caractéristiques pression imposée	isolé	sillage/roue 1x1

I.1.3 - Conclusions.

Etant donné la complexité des effets thermo-aérodynamiques liés aux interactions rotor-stator, le développement d'une nouvelle méthode numérique n'est pas exempt de difficultés. Elles concernent principalement :

- ▷ la modélisation géométrique,
- ▷ l'adaptation numérique d'un modèle d'écoulement,
- ▷ le calcul des écoulements en aubages isolés fixes ou mobiles,
- ▷ la transmission des informations entre aubages en étage.

On présente, par la suite, les choix et hypothèses de modélisation retenus, eu égard aux enseignements de l'étude bibliographique, pour tenter de résoudre ces difficultés, et réaliser une thèse répondant à la question :

"Est-il aujourd'hui possible de simuler numériquement les effets des écoulements en étages de turbines actuelles et futures, c'est-à-dire très compactes, dans le dessein de les optimiser ?"

I.2 - MODELISATION GEOMETRIQUE.

Tous les auteurs cités dans la bibliographie ont utilisé des maillages structurés, qui étaient monodomaines en H ou C, certains auteurs effectuant un traitement particulier pour les lacunes des maillages en H, ou bien multidomaines, en O autour des aubes et H pour le reste du domaine. Ces modélisations étaient pénalisées par l'aspect géométrique des étages, c'est-à-dire la complexité de forme et de position relative des aubages. En outre, le nombre de points était limité en raison de la taille mémoire et du temps CPU nécessaires aux calculs.

Dans le cadre de calculs en aubages isolés ou en étages, les méthodes numériques basées, soit sur des techniques volumes finis (ou différences finies), soit sur des techniques d'éléments finis, introduisent des contraintes de maillage. Il s'agit, dans le premier cas, d'obtenir des maillages "orthogonaux", et dans le second, d'obtenir des mailles triangulaires dans le cas d'une modélisation bidimensionnelle ou tétraédriques dans le cas d'une modélisation tridimensionnelle les plus "équilatérales" possibles.

VEUILLOT (1991)[48] présente, dans le cadre structuré, différentes solutions basées, soit sur l'utilisation d'un maillage unique de type H, C ou O, soit sur l'emploi de la technique multidomaine, la transmission des informations entre les sous-domaines juxtaposés étant réalisée à l'aide d'interpolations et des relations de compatibilité.

Dans le cadre des éléments finis, des maillages non structurés bidimensionnels, satisfaisant à l'exigence d'éléments triangulaires "équilatéraux" dans des domaines quelconques, peuvent être facilement réalisés grâce à des mailleurs tel qu' I-DEAS (fig.4). Le développement de ces techniques permet aussi de s'affranchir de l'emploi de la technique de maillages multi-domaines.

Il existe cependant un certain nombre d'inconvénients inhérents à ces techniques. Ainsi, pour un maillage structuré donné transformé en maillage non-structuré, le temps CPU nécessaire à une même série d'opérations est plus important en non structuré qu'en structuré. Cette perte de temps

relative à l'utilisation d'un adressage indirect, peut être compensée partiellement en réalisant des maillages pauvres dans les régions du domaine où l'écoulement est relativement "uniforme".

L'étude systématique du schéma et de l'erreur de troncature, engendrée par la discrétisation des équations, est quasiment impossible sur un "vrai" maillage non structuré. En effet, le nombre de noeuds "voisins" d'un noeud donné varie d'une manière aléatoire dans le maillage.

La technique de maillages hybrides associant un maillage structuré à proximité des profils et non structuré au loin, présentée par NAKAHASHI ET al. (1987)[49] (fig. 5) ou encore LIU et al. (1993)[50], permet d'utiliser au mieux les "bonnes propriétés" de chacune des deux techniques.

En conclusion, la technique des maillages non structurés semble particulièrement attractive pour cette étude, en raison de la complexité des configurations géométriques. Elle semble notamment parfaitement adaptée au cas de l'interaction rotor-stator puisqu'il est possible d'obtenir des maillages sur des domaines de calcul d'étages réalistes, très fins au voisinage des interfaces, tout en conservant un nombre raisonnable d'éléments. Des techniques d'enrichissement de maillages peuvent être également mises en oeuvre pour améliorer localement la qualité des résultats.

I.3 - MODELISATION AERODYNAMIQUE.

I.3.1 - Nature du fluide.

Une difficulté dans l'analyse des écoulements circulant dans les étages de turbines relève de leur nature visqueuse. Ils sont donc régis par les équations de Navier-Stokes d'une complexité hors de propos pour cette étude. L'approche fluide parfait permet de mener rapidement des calculs avec efficacité, comme le démontre PETOT (1992)[51] dans le cadre d'utilisations industrielles pour l'analyse et la conception des turbines de moteurs d'avions. Cette hypothèse permet, par exemple, de réaliser des calculs de distribution de vitesse et de portance, de modéliser les écoulements secondaires.

En outre, d'après la bibliographie, de nombreux codes résolvent les équations d'Euler, bi- ou quasi-tridimensionnelles, avec de bons résultats, certains auteurs les complétant par un modèle de pertes.

Les éventuelles injections pariétales sur les surfaces extradados et intrados et au bord de fuites des aubes ne sont pas abordées. Les aubes sont considérées pleines dans toute la suite de l'exposé.

La reproduction des phénomènes physiques au niveau des bords de fuite des aubes présente une difficulté. Compte tenu de la géométrie retenue, le bord de fuite des aubes est assimilable à un culot. Le calcul des écoulements de type fluide parfait sont difficiles en ce lieu, car la présence de chocs extrêmement intenses engendrées par la déviation brutale de la paroi est très délicate à simuler numériquement, et les résultats obtenus ne correspondent pas à la solution physique. Dans la réalité, les écoulements circulant dans une telle région sont régis par les effets visqueux analogues à ceux décrits, par exemple, dans le cas du culot d'un arrière-corps d'un projectile non propulsé (fig.6) par DELERY (1989)[52]. Il y a des décollements et recollements éventuels de la couche limite, ainsi que la formation d'une zone de recirculation où la pression est uniforme. Pour pallier cette difficulté dans le cadre des calculs d'écoulements non visqueux, on utilise une technique de modélisation du bord de fuite suivant le principe de l'approche multi-composant dans le cas du décollement-recollement en

aval d'une marche (fig.6) de DELERY (1989)[52] . Cette technique consiste à matérialiser les lignes de glissement de l'écoulement, celles-ci délimitant la zone de recirculation, à partir du bord de fuite. La pression le long de ces lignes de glissement est constante et égale à la pression de culot régnant dans la zone de recirculation. Cette procédure revient à compléter le profil des aubes par un becquet (fig.6). La dimension de ce dernier est très petite puisque la taille du bord de fuite, c'est-à-dire celle du culot l'est aussi en regard de la géométrie du profil de l'aube et des configurations habituelles de fonctionnement des aubages de turbomachines présentés dans ce mémoire. Cette technique induit des effets locaux qui restent confinés au voisinage immédiat du bord de fuite, sans effet global dans le reste de l'écoulement, si les conditions suivantes de construction du becquet sont respectées :

- ▷ son profil doit être non portant, pour ne pas modifier le comportement aérodynamique de l'aube étudiée,
- ▷ sa taille doit rester raisonnable pour ne pas diminuer la taille du col formé par les profils de deux aubes successives, c'est-à-dire pour éviter tout effet néfaste sur la prédiction du débit circulant dans le canal.

I.3.2 - Type d'écoulement.

D'une façon générale, les écoulements sont tridimensionnels. Cet aspect se traduit par le gauchissement des surfaces de courant à la traversée d'un canal inter-aube ou des effets radiaux de centrifugations des écoulements, des sillages par exemple, au niveau des rotors dans les étages. On préfère cependant employer le modèle d'écoulements quasi-tridimensionnels, d'adaptation numérique plus simple et très utilisé en conception de turbomachines, car les codes résolvant ce modèle d'écoulements prédisent convenablement les effets azimutaux.

Ce modèle repose sur le concept d'écoulement moyen développé par LORENTZ (1905)[53], qui admet que l'écoulement demeure en moyenne axisymétrique, et dont la justification mathématique a été proposée par GUIRAUD et ZEYTOUNIAN (1974)[54]. Ce concept permet de déterminer la géométrie des nappes de courant de révolution (fig.7), dont le taux d'épaisseur b et le rayon r varient en fonction de l'abscisse curviligne méridienne m , par l'intermédiaire d'un calcul dit méridien. WU (1952)[55] propose un principe de superposition qui couple ce résultat bidimensionnel avec un calcul aube à aube (fig.8) effectué sur la surface moyenne de courant, donc bidimensionnel. Les écoulements étant modélisés par les équations d'Euler instationnaires, les effets de l'évolution temporelle de la position radiale et de l'épaisseur de la nappe, sont instationnaires. Dans le cadre de la modélisation bidimensionnelle de PLATZER (1975), SISTO (1977), FLEETER (1979), les termes correspondants de la modélisation sont omis, cependant le couplage fort a été réalisé par BUISINE et al. (1987)[56]. Les écoulements considérés dans cette étude circulent au travers d'aubages de turbomachines axiales aux évolutions de veines relativement faibles. Les lois de rayon et d'épaisseur de la nappe de courant sont fixées au début des calculs (fig.9), soit en tant que résultat d'un calcul méridien, soit par la relation de conservation de débit [57] entre l'amont et l'aval de la grille,

$$\frac{brp_{i,r}\cos\beta}{\sqrt{H_{i,r}}\Sigma(M_r, \gamma)} = cte \quad , \quad (1.1)$$

et la relation algébrique

$$Y(x) = Y_1 + (Y_2 - Y_1) \left(\frac{x - x_{BA}}{x_{BF} - x_{BA}} \right)^2 \left(3 - 2 \frac{x - x_{BA}}{x_{BF} - x_{BA}} \right) \quad , \quad (1.2)$$

où x_{BA} , x_{BF} désignent les abscisses extrêmes de l'aubage et Y_1, Y_2 les valeurs à l'amont et à l'aval du domaine de calcul des lois d'épaisseur et de rayon, celles-ci étant donc constantes en dehors de l'aubage. Cette technique permet de valider rapidement l'implémentation du modèle d'équations.

Enfin, on considère que le régime des écoulements est transsonique au travers des étages de turbines "haute pression" et subsonique dans les étages de turbines "basse pression".

I.3.3 - Type d'instationnarité, d'interactions, transmission d'informations.

Il existe deux catégories de phénomènes instationnaires :

- ▷ le régime instationnaire pur, obtenu, soit par une variation de la vitesse de rotation, soit par une variation non périodique en temps des conditions aux limites amont et aval des aubages,
- ▷ le régime instationnaire établi, qui résulte, soit de la vibration des aubes, soit de l'interaction aérodynamique de deux aubages successifs.

Ce dernier point constitue l'objet de cette étude.

En outre, parmi les interactions rotor-stator présentées en bibliographie expérimentale, cette étude s'intéresse plus précisément aux interactions non visqueuses, c'est-à-dire, aux effets de l'interaction potentielle liés à la position relative des aubages en mouvement relatif, d'une part, et aux passages des ondes de chocs au travers de leurs canaux, d'autre part. La méthode de résolution doit donc être capable de permettre la localisation des chocs, informations très fines, en raison de leur intensité relativement faible dans le cas transsonique, de simuler leur propagation dans les canaux et leur réflexion par les parois des aubages. La qualité du calcul en étage dépend de celle de la transmission, sans distorsion, des ondes de chocs entre les domaines des aubages.

Dans le cadre des simulations numériques de l'interaction rotor-stator, trois configurations semblent particulièrement intéressantes :

- ▷ Les domaines sont contigus à l'interface.

Cette configuration est particulièrement attractive pour les calculs d'étages de turbines "haute pression", en raison de son encombrement réduit au niveau de l'entrefer des aubages en interaction. Les travaux présentés en bibliographie font état de son utilisation pour des modélisations de type Euler. Rien ne semble interdire son emploi pour des modélisations de type Navier-Stokes. On utilise des méthodes d'interpolations et les relations de compatibilité pour la transmission des informations [17], [29], [30], [35], [39]. La méthode combinant la technique "spatio-temporelle" de ERDOS et al. (1977)[17], associée à la "méthode d'homothétie des pas des canaux des aubages" de FOURMAUX et al. (1987)[30] permet de retrouver une périodicité de l'écoulement.

- ▷ Les domaines se recouvrent partiellement au niveau de l'interface.

Cette configuration est intéressante en raison de la simplicité de sa mise en oeuvre et peut être utilisée indépendamment pour les modélisations aérodynamiques de type Euler ou Navier-Stokes. On distingue deux types de recouvrement : le "recouvrement partiel étendu" [25], pénalisant dans le cas de calculs d'étages aux entrefers d'aubages réduits et le "recouvrement partiel réduit", où une seule colonne de mailles de chaque domaine est en recouvrement [34]. La transmission des informations est réalisée par interpolation dans les deux cas.

▷ Les domaines sont contigus à une colonne de mailles intermédiaires.

Cette méthode peut être utilisée indépendamment pour les modélisations aérodynamiques de type Euler ou Navier-Stokes. Cependant, la définition topologique du domaine est plus délicate à réaliser. Elle supporte la technique du "time inclining" de GILES [32], [33], technique qui impose un changement des variables du champ pour la résolution des système d'équations.

L'objectif, d'évaluer la possibilité d'établir un échange d'informations entre au moins deux domaines d'aubages en interaction, conduit à choisir un principe de couplage simple et rapide, pour pouvoir étudier les comportements des schémas numériques utilisés dans cette étude. On retient donc les deux premières techniques, en raison de leur simplicité de mise en oeuvre, avec une préférence cependant pour la première méthode de couplage, en raison de l'absence de contraintes géométriques.

I.3.4 - Référentiel.

A l'instar des études expérimentales, il est commode d'étudier l'écoulement dans le référentiel propre à chaque aubage (fig.10).

On considère tous les aubages fixes et mobiles alignés sur un même axe relativement à l'axe du moteur, perpendiculaire à leur plan et un référentiel absolu \mathcal{R} lié aux aubages fixes. Soient un système de coordonnées cartésiennes absolues et un repère orthonormal direct $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ associé à ce référentiel de telle sorte que (O, \vec{I}) soit colinéaire à l'axe moteur.

Pour le référentiel relatif \mathcal{R}_r , d'après l'hypothèse d'alignement des aubages fixes et mobiles, on considère un système de coordonnées cartésiennes relatives et un repère orthonormal direct $(O_r, \vec{I}_r, \vec{J}_r, \vec{K}_r)$ tel que les vecteurs \vec{I} et \vec{I}_r soient colinéaires.

Enfin, pour la projection des équations sur la nappe de courant, on considère un système de coordonnées curvilignes (m, θ, α) adapté à la géométrie des nappes (fig.11). On associe à une particule matérialisée par un point M et au système de coordonnées curvilignes un repère local orthonormé direct $(M, \vec{e}_m, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\alpha)$.

I.3.5 - Système d'équations du modèle aérodynamique.

L'objet de ce paragraphe est de présenter les équations utilisées dans cette étude, c'est-à-dire leurs formulations générales, leurs projections quasi-tridimensionnelles. Un développement relatif au système d'équations d'Euler en référentiel mobile et au modèle quasi-tridimensionnel et tridimensionnel est traité dans l'Annexe I.

I.3.5.1 - Hypothèses.

La position axiale des roues est fixe et leur vitesse de rotation angulaire respective ω , autour de leur axe d'alignement, uniforme au cours du temps. Le vecteur vitesse absolue V , le vecteur vitesse

relative W , le rayon de la nappe de courant, le vecteur vitesse de rotation angulaire et le vecteur vitesse d'entraînement U , sont définis respectivement par :

$$\vec{V} = V_x \vec{I} + V_y \vec{J} + V_z \vec{K} \quad , \quad (1.3)$$

$$\vec{W} = W_x \vec{I} + W_y \vec{J}_r + W_z \vec{K}_r \quad , \quad (1.4)$$

$$\vec{r} = r \vec{K}_r \quad , \quad (1.5)$$

$$\vec{\omega} = \omega \vec{I} = \omega \vec{I}_r \quad , \quad (1.6)$$

$$\vec{U} = \vec{\omega} \times \vec{r} = -\omega r \vec{J}_r \quad . \quad (1.7)$$

La relation de composition des vitesses,

$$\vec{V} = \vec{W} + \vec{U} = W_x \vec{I} + (W_y - \omega r) \vec{J}_r + W_z \vec{K}_r \quad , \quad (1.8)$$

assure la transformation de passage des grandeurs physiques entre le référentiel absolu \mathcal{R} fixe et le référentiel propre à chaque roue.

Le gaz considéré est un fluide parfait. Les termes de viscosité, et par suite, les échanges de chaleur sont négligés, ainsi que l'influence du champ gravitationnel. Sous ces hypothèses, les écoulements sont régis par les équations d'Euler instationnaires.

I.3.5.2 - Formulation des équations en référentiel relatif fixe.

Dans le référentiel absolu \mathcal{R} , la relation de composition des vitesses (1.8) devient

$$\vec{V} = \vec{W} \quad . \quad (1.9)$$

Donc, le système d'équations écrit dans le référentiel relatif fixe n'est autre que le système des équations d'Euler écrit en variables absolues dans le référentiel absolu. Sa formulation générale exprimant la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie, s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad , \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V} \otimes \vec{V} + p \cdot \mathbf{I}) = \vec{0} \quad , \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \text{div}((E + p) \vec{V}) = 0 \quad . \quad (1.12)$$

L'équation d'état, l'énergie totale absolue E , l'enthalpie totale absolue H_i , le rapport des chaleurs massiques γ et la constante des gaz parfaits R , sont définis par :

$$p = \rho R T \quad , \quad (1.13)$$

$$E = \rho \left(e(T) + \frac{V^2}{2} \right) = \rho \left(c_v T + \frac{V^2}{2} \right) = \frac{p}{\gamma - 1} + \rho \frac{V^2}{2} \quad , \quad (1.14)$$

$$H_i = \frac{E + p}{\rho} \quad , \quad (1.15)$$

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad , \quad (1.16)$$

$$R = c_p - c_v \quad . \quad (1.17)$$

Dans la suite de cette étude, pour les cas d'aubages fixes, nous utilisons le système d'équations quasi-tridimensionnel. Celui-ci, obtenu par projection sur une nappe de courant, s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V_m)}{\partial m} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\rho V_m}{r} \frac{\partial r}{\partial m} + \frac{\rho V_m}{b} \frac{\partial b}{\partial m} = 0 \quad , \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial(\rho V_m)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V_m^2 + p)}{\partial m} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho V_m V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\rho(V_m^2 - V_\theta^2)}{r} \frac{\partial r}{\partial m} + \frac{\rho V_m^2}{b} \frac{\partial b}{\partial m} = 0 \quad , \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial(\rho V_\theta)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V_m V_\theta)}{\partial m} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho V_\theta^2 + p)}{\partial \theta} + \frac{2\rho V_m V_\theta}{r} \frac{\partial r}{\partial m} + \frac{\rho V_m V_\theta}{b} \frac{\partial b}{\partial m} = 0 \quad , \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial((E+p)V_m)}{\partial m} + \frac{1}{r} \frac{\partial((E+p)V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{(E+p)V_m}{r} \frac{\partial r}{\partial m} + \frac{(E+p)V_\theta}{b} \frac{\partial b}{\partial m} = 0 \quad . \quad (1.21)$$

I.3.5.3 - Formulations des équations en référentiel relatif mobile.

Sous les hypothèses du paragraphe I.3.5.1, la formulation générale du système exprimée en variables et référentiel relatifs, peut s'écrire :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{W}) = 0 \quad , \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial(\rho \vec{W})}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{W} \otimes \vec{W} + p \cdot \mathbf{I}) = \rho \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\omega^2 r^2}{2}\right) - 2\rho \vec{\omega} \times \vec{W} \quad , \quad (1.23)$$

$$\frac{\partial(\rho J - p)}{\partial t} + \text{div}(\rho J \vec{W}) = 0 \quad . \quad (1.24)$$

La rothalpie J , l'enthalpie relative totale $H_{i,r}$ et l'énergie relative totale E_r , sont définies par les relations suivantes :

$$J = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \frac{W^2 - \omega^2 r^2}{2} \quad , \quad (1.25)$$

$$H_{i,r} = J + \frac{\omega^2 r^2}{2} = c_p T + \frac{W^2}{2} \quad , \quad (1.26)$$

$$E_r = \rho H_{i,r} - p = \rho e(T) + \rho \frac{W^2}{2} \quad . \quad (1.27)$$

Par projection sur une nappe de courant donnée, on obtient l'écriture du système d'équations utilisé dans le cadre de cette étude pour les cas d'écoulements en aubages mobiles :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho W_m)}{\partial m} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho W_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\rho W_m}{r} \frac{\partial r}{\partial m} + \frac{\rho W_m}{b} \frac{\partial b}{\partial m} = 0 \quad , \quad (1.28)$$

$$\frac{\partial(\rho W_m)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho W_m^2 + p)}{\partial m} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho W_m W_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\rho(W_m^2 - (W_\theta - \omega r)^2)}{r} \frac{\partial r}{\partial m} + \frac{\rho W_m^2}{b} \frac{\partial b}{\partial m} = 0 \quad (1.29)$$

$$\frac{\partial(\rho W_\theta)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho W_m W_\theta)}{\partial m} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho W_\theta^2 + p)}{\partial \theta} + \frac{2\rho W_m(W_\theta - \omega r)}{r} \frac{\partial r}{\partial m} + \frac{\rho W_m W_\theta}{b} \frac{\partial b}{\partial m} = 0, \quad (1.30)$$

$$\frac{\partial(\rho J - p)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho J W_m)}{\partial m} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho J W_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\rho J W_m}{r} \frac{\partial r}{\partial m} + \frac{\rho J W_m}{b} \frac{\partial b}{\partial m} = 0 \quad . \quad (1.31)$$

Le système d'équations présenté ci-dessus fait apparaître deux termes supplémentaires, par rapport au système écrit en référentiel absolu, $\frac{\rho(\omega r)^2}{r} \frac{\partial r}{\partial m}$ dans la relation (1.29) et $-\frac{2\rho W_m \omega r}{r} \frac{\partial r}{\partial m}$ dans la relation (1.30), engendrés par la prise en compte de l'effet de rotation.

De nombreux auteurs dont VEUILLOT et al. (1990)[58], SOVRANO (1980)[59], FOURMAUX (1986)[30], GEROLYMOS (1988)[60], ont utilisé une formulation équivalente de ce dernier système :

$$\frac{\partial_r(\tau b \rho)}{\partial t} + \frac{\partial_r(\rho W_m \tau b)}{\partial m} + \frac{\partial_r(\rho W_\theta b)}{\partial \theta} = 0 \quad , \quad (1.32)$$

$$\frac{\partial(\tau b \rho W_m)}{\partial t} + \frac{\partial(\tau b \rho W_m W_m + p)}{\partial m} + \frac{\partial(b \rho W_m W_\theta)}{\partial \theta} - \rho b (W_\theta - \omega r)^2 \frac{\partial r}{\partial m} + p \frac{\partial b r}{\partial m} = 0 \quad , \quad (1.33)$$

$$\frac{\partial(\tau b \rho W_\theta)}{\partial t} + \left(\frac{\partial(\tau b \rho W_\theta W_m)}{\partial m} + \frac{\partial(b(\rho W_\theta W_\theta + p))}{\partial \theta} \right) + \frac{\rho b W_m (W_\theta - 2\omega r)}{r} \frac{\partial r}{\partial m} = 0 \quad , \quad (1.34)$$

$$\frac{\partial(\tau b(\rho J - p))}{\partial t} + \frac{1}{r b} \left(\frac{\partial(\rho J W_m \tau b)}{\partial m} + \frac{\partial(\rho J W_\theta b)}{\partial \theta} \right) = 0 \quad . \quad (1.35)$$

Le terme $br \frac{\partial p}{\partial m}$ rend l'adaptation du modèle d'équations délicat pour le traitement de la condition limite de profil.

On note que le système (1.22) à (1.24) présente le défaut de ne pas être conservatif. En effet, il semble que l'influence du terme source $\vec{\omega} \times \vec{W}$ soit prépondérante vis-à-vis de celle du terme $div(\rho \vec{W} \otimes \vec{W})$. Ceci engendre des effets d'instabilités numériques difficiles à contrôler lors de l'emploi de certaines méthodes de résolution. Une autre écriture du système, utilisée par VEUILLOT(1991)[61], pallie cet inconvénient, et s'exprime en variables absolues et référentiel relatif :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{W}) = 0 \quad , \quad (1.36)$$

$$\frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} + div(\rho \vec{V} \otimes \vec{W} + p \cdot \mathbf{I}) + \rho \vec{\omega} \times \vec{V} = 0 \quad , \quad (1.37)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + div(E \vec{W} + p \vec{V}) = 0 \quad . \quad (1.38)$$

Pour ce système d'équations, il est nécessaire d'effectuer une transformation des variables absolues $(\rho, \rho \vec{V}, E)$ en variables relatives, afin de pouvoir appliquer le traitement de la condition limite de profil. Devant la complexité de mise en oeuvre, mais aussi devant l'absence de méthode de calcul quasi-tridimensionnelle écrite en variables absolues, permettant des comparaisons "code à code", on préfère ici le modèle écrit en variables et référentiel relatifs.

Pour conclure, signalons l'existence de méthodes numériques écrites en variables et référentiel absolus, capables de calculs en aubages mobiles et de simuler l'interaction rotor-stator, comme l'a démontré GILES (1987)[32]. Le système d'équations d'Euler résolu par cette méthode est totalement conservatif. L'expérience a montré que les avantages de cette dernière écriture vis-à-vis de celles exprimées en référentiel relatif ne sont pas convaincants dans le cas de calculs aérodynamiques concernant des aubages en étages et de faible envergure, notamment dans le cas de modélisation quasi-tridimensionnelle, car l'influence du terme caractérisant l'accélération de Coriolis reste faible. En revanche, dans le cas de modélisation tridimensionnelle, dans le cas des soufflantes de turboréacteurs, on utilisera plutôt le système d'équations (1.36) à (1.37) et pour des applications numériques se rapportant aux hélices, propfans et rotors d'hélicoptères, on préfère le système exprimé en référentiel absolu.

Chapitre II - METHODES NUMERIQUES.

II.1 - ADAPTATIONS NUMERIQUES DU SYSTEME D'EQUATIONS.	56
II.1.1 - Projections des équations sur le plan de calcul.	56
II.1.2 - Adimensionnalisation.	56
II.1.2.1 - Référentiel fixe.	56
II.1.2.2 - Référentiel mobile.	58
II.2 - METHODE DES ELEMENTS FINIS.	58
II.3 - SCHEMAS NUMERIQUES.	59
II.3.1 - Schéma sans viscosité artificielle.	60
II.3.2 - Schéma avec viscosité artificielle.	62
II.4 - TRAITEMENTS DES CONDITIONS AUX LIMITES.	64
II.4.1 - Relations de compatibilité.	64
II.4.2 - Cas des frontières amont et aval.	66
II.4.3 - Frontières de périodicité plafond et plancher.	66
II.4.4 - Condition de glissement.	67
II.5 - PHASES IMPLICITES.	67
II.6 - CRITIQUE DES CODES.	69

Ce chapitre présente, l'adaptation du système d'équations, la méthode des éléments finis, les deux schémas numériques utilisés, une critique des codes associés à ces schémas.

II.1 - ADAPTATIONS NUMERIQUES DU SYSTEME D'EQUATIONS.

II.1.1 - Projections des équations sur le plan de calcul.

Le domaine physique du calcul modélisé par la nappe de courant moyenne est une surface de révolution (fig.7). Par convention, celle-ci est déroulée dans la direction azimutale et tendue suivant la direction méridienne par application de la transformation :

$${}^t(m, C_\theta \theta) = {}^t(x, y) \quad , \quad (2.1)$$

liant les coordonnées méridienne et azimutale par l'intermédiaire du rayon moyen de la nappe, noté C_θ à l'abscisse et l'ordonnée du plan de calcul. Cette transformation permet la transposition des résultats du plan de calcul (fig.15) à la surface réelle. Par la suite, on travaille dans le repère orthonormé direct (\vec{e}_x, \vec{e}_y) au lieu de $(\vec{e}_m, \vec{e}_\theta)$.

En conséquence, le domaine de calcul projeté dans le plan de calcul moyen est bidimensionnel et la relation de composition des vitesses devient :

$$\vec{V} = \vec{W} + \vec{U} = W_x \vec{e}_x + (W_y - \omega r) \vec{e}_y \quad . \quad (2.2)$$

II.1.2 - Adimensionnalisation.

II.1.2.1 - Référentiel fixe.

Le système d'équations (1.18) à (1.21) est rendu sans dimension à l'aide de grandeurs mesurables dans le référentiel absolu : a_i, ρ_i , respectivement la vitesse du son, la masse volumique, mesurées au point d'arrêt, c la corde axiale du profil et t_0 un temps de référence.

L'état adimensionné de l'écoulement est donc caractérisé par la vitesse du son et la masse volumique, au point d'arrêt, notées * :

$$a_i^* = 1 \quad , \quad (2.3)$$

$$\rho_i^* = 1 \quad . \quad (2.4)$$

On en déduit toutes les autres grandeurs adimensionnées :

$$p_i^* = \frac{\rho_i^* \cdot a_i^{*2}}{\gamma} = \frac{1}{\gamma} , \quad (2.5)$$

$$H_i^* = \frac{a_i^{*2}}{\gamma - 1} = \frac{1}{\gamma - 1} , \quad (2.6)$$

$$m = cm^* , \quad (2.7)$$

$$r = cr^* , \quad (2.8)$$

$$t = t_0 t^* , \quad (2.9)$$

$$V = a_i V^* , \quad (2.10)$$

$$V_m = a_i V_m^* , \quad (2.11)$$

$$V_\theta = a_i V_\theta^* , \quad (2.12)$$

$$\rho = \rho_i \rho^* , \quad (2.13)$$

$$p = \rho_i a_i^2 = \gamma p_i p^* , \quad (2.14)$$

$$E = \rho_i a_i^2 E^* . \quad (2.15)$$

Par souci de clarté, toutes les grandeurs utilisées dans la suite de l'exposé étant adimensionnées, on omet le symbole *.

Après insertion de ces relations dans les équations (1.28) à (1.31), avec application de la transformation (2.1), on obtient le système d'équations d'Euler quasi-tridimensionnelles adimensionnées :

$$k \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f(w)}{\partial x} + \frac{\partial g(w)}{\partial y} + h(w) = 0 , \quad (2.16)$$

Il apparaît le coefficient k dit "fréquence réduite" du système défini par :

$$k = \frac{c}{a_i t_0} , \quad (2.17)$$

et les vecteurs $w, f(w), g(w)$ qui ont pour expression :

$$w = {}^t(\rho, \rho V_x, \rho V_y, E) , \quad (2.18)$$

$$f(w) = {}^t(\rho V_x, \rho V_x^2 + p, \rho V_x V_y, (E + p)V_x) , \quad (2.19)$$

$$g(w) = {}^t(\rho V_y, \rho V_x V_y, \rho V_y^2 + p, (E + p)V_y) . \quad (2.20)$$

Pour un système prenant en compte les évolutions des lois d'épaisseur et de rayon de la nappe de courant donnée, on retrouve une écriture identique à celle du système d'équations d'Euler bidimensionnelles en référentiel absolu, complété par le terme source $h(w)$:

$$\begin{aligned} h(w) = & {}^t \left(\frac{\rho V_x}{r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\rho V_x}{b} \frac{\partial b}{\partial x} , \right. \\ & \frac{\rho(V_x^2 - V_y^2)}{r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\rho V_x^2}{b} \frac{\partial b}{\partial x} , \\ & \frac{2\rho V_x V_y}{r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\rho V_x V_y}{b} \frac{\partial b}{\partial x} , \\ & \left. \frac{(E + p)V_x}{r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{(E + p)V_x}{b} \frac{\partial b}{\partial x} \right) , \quad (2.21) \end{aligned}$$

La pression statique p est obtenue par la relation (1.14).

II.1.2.2 - Référentiel mobile.

Le système quasi-tridimensionnel des équations d'Euler (1.28) à (1.31) est adimensionné et s'écrit de manière identique à la relation (2.16) mais les vecteurs $w, f(w), g(w), h(w)$ ont pour expression :

$$w = {}^t(\rho, \rho W_x, \rho W_y, \rho J - p) \quad , \quad (2.22)$$

$$f(w) = {}^t(\rho W_x, \rho W_x^2 + p, \rho W_x W_y, \rho J W_x) \quad , \quad (2.23)$$

$$g(w) = {}^t(\rho W_y, \rho W_x W_y, \rho W_y^2 + p, \rho J W_y) \quad , \quad (2.24)$$

et

$$\begin{aligned} h(w) = & {}^t \left(\frac{\rho W_x}{r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\rho W_x}{b} \frac{\partial b}{\partial x}, \right. \\ & \frac{\rho(W_x^2 - (W_y - \omega r)^2)}{r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\rho W_x^2}{b} \frac{\partial b}{\partial x}, \\ & \frac{2\rho W_x(W_y - \omega r)}{r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\rho W_x W_y}{b} \frac{\partial b}{\partial x}, \\ & \left. \frac{\rho J W_x}{r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\rho J W_x}{b} \frac{\partial b}{\partial x} \right) . \end{aligned} \quad (2.25)$$

On retrouve donc une écriture identique à celle du système d'équations d'Euler bidimensionnel, en référentiel absolu, le terme $h(w)$ introduisant les effets des lois d'épaisseur et de rayon de la nappe de courant donnée. La pression p est obtenue par la relation (1.25).

II.2 - METHODE DES ELEMENTS FINIS.

La méthode choisie pour la résolution des équations d'Euler, en référentiel relatif fixe ou mobile, est celle des éléments finis de type P1, dont ne figurent ici que les principaux résultats. Pour une présentation complète de cette méthode, appliquée à la résolution des équations aux dérivées partielles, on pourra se reporter à l'ouvrage de RAVIARD et al. (1983)[62].

Soit l'espace vectoriel \mathbb{R}^2 rapporté à son repère orthonormé $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$. Le produit scalaire de deux vecteurs \vec{U} et \vec{V} de \mathbb{R}^2 est noté $\vec{U} \cdot \vec{V}$ ou encore $\vec{U} \vec{V}$, et $\|\vec{U}\|$ désigne la norme Euclidienne associée du vecteur \vec{U} .

Soient Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 , représentation mathématique du domaine de calcul, et Γ sa frontière, supposée de classe C^0 et C^1 par morceaux. On note $d\Omega = dx dy$ la mesure surfacique et $d\sigma$ la mesure linéique.

On considère T une triangulation découpant le domaine de calcul Ω , telle que l'intersection de deux éléments distincts de T soit : un sommet, ou une facette, ou bien l'ensemble vide. On note $\{S_i\}$ les sommets des éléments de la triangulation. Le domaine approchant Ω par réunion des

éléments triangulaires K de T est noté Ω_T et représente le domaine approximé. Dans la suite, pour simplifier les notations, Ω désigne Ω_T .

On note $\vec{n} = {}^t(n_x, n_y)$ le vecteur normal extérieur en tout point de la frontière Γ du domaine Ω , et \vec{t} le vecteur tangent à la frontière, tels que les vecteurs \vec{n} , \vec{t} soient orthonormés.

On construit l'espace d'approximation C formé par des fonctions réelles, continues et linéaires par morceaux sur chaque élément de la triangulation T . Soit $\{N_i\}_i$ une base de C telle que :

$$N_i(S_j) = \delta_{ij} \quad ,$$

où N_i prend la valeur 1 au noeud S_i et 0 pour tout autre sommet. La restriction de la fonction de base N_i à un élément K de la triangulation T est, soit la fonction nulle, si le sommet S_i n'appartient pas à K , soit la fonction barycentrique associée au noeud S_i . Une fonction v de C a donc pour expression

$$v = \sum_j v(S_j) N_j \quad ,$$

où $v(S_j)$ désigne la valeur de v au noeud S_j .

De la même manière, on construit avec l'élément fini de type P0, l'espace d'approximation M formé par des fonctions telles que leur restriction à un élément K de T soit la fonction constante v_K . Elle s'exprime :

$$v = \sum_K v_K(K) P_K \quad ,$$

où P_K désigne la fonction indicatrice de l'élément K .

II.3 - SCHEMAS NUMERIQUES.

De nombreux travaux ont été réalisés ces dernières années sur le développement de méthodes numériques pour la résolution des équations d'Euler et de Navier-Stokes, en maillages non structurés. Un grand nombre de ces méthodes sont des extensions au cadre non structuré de schémas aux différences finies ou volumes finis, précis au second ordre en temps et en espace, centrés ou décentrés, le plus souvent explicites. Dans cette optique, il a été développé à l'ONERA par MORTCHELEWICZ (1989)[67], (1991)[68], un code éléments finis résolvant les équations d'Euler, basé sur le schéma de BURSTEIN (1967)[69]. Ce schéma, centré, explicite, précis au second ordre en temps et en espace sur un maillage cartésien uniforme, est simple de mise en oeuvre et a été fréquemment utilisé notamment par DERVIEUX et al. (1983)[63], SELMIN (1987)[64], ZIENKIEWICZ et al. (1984)[65], KOSCHEL et al. (1988)[66]. Comme tout schéma explicite, son pas de temps est sévèrement limité par un critère de stabilité de type Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) inférieur à 1. Par ailleurs, un terme de viscosité artificielle est nécessaire pour stabiliser la méthode et réduire les oscillations parasites au niveau des discontinuités, comme les ondes d'onde de chocs, par exemple.

Une classe de schémas, sans viscosité artificielle, implicites et acceptant de grands nombres de CFL, a été développée par LERAT, SIDES, DARU, SENS, pour les méthodes de volumes finis. Les principales étapes de cette recherche sur les schémas implicites ont été :

1981 : classe de schémas explicites avec viscosité artificielle [72],

1982 : phase implicite du rayon spectral [70],

1986 : schémas implicites sans viscosité artificielle [71],

1990 : corrections non linéaires pour les schéma S_α^β [72],

1992 : extension des schémas implicites sans viscosité artificielle en instationnaire [73].

SENS et MORTCHELEWICZ (1992)[74], (1993)[75], ont adapté ces techniques au cadre des éléments finis, en utilisant pour la phase explicite du schéma les travaux [67] de 1989, et la phase implicite de type "rayon spectral" est résolue à l'aide d'un "algorithme de gradient conjugué préconditionné". Ils ont retrouvé les propriétés de la méthode structurée. Leurs travaux ont été utilisés pour la conception de codes de calculs numériques, en maillages non structurés, simulant des écoulements instationnaires dans les grilles d'aubes rectilignes de compresseurs et de turbines.

Plus récemment, SENS et MORTCHELEWICZ [76] ont réalisé une adaptation du schéma implicite de JAMESON (1981)[77] au cadre des éléments finis en maillages non structurés. Ce schéma nécessite l'emploi de deux paramètres de viscosité artificielle, mais présente des caractéristiques avantageuses vis-à-vis du schéma précédent :

- ▷ il est plus rapide en temps CPU et plus économique en taille mémoire,
- ▷ son architecture de programmation est simplifiée du fait de l'absence de correcteur et l'adaptation du modèle aérodynamique s'en trouve allégée,
- ▷ il permet de calculer un champ prédit, noté w^* , en tout point du domaine et notamment aux frontières, ce qui autorise un emploi des relations de compatibilité identique au cadre structuré,
- ▷ le choix du modèle d'équations est plus souple qu'auparavant.

Le caractère centré de ces méthodes leur confère une grande simplicité de mise en oeuvre, et permet une excellente qualité de résolution. Les méthodes décentrées présentent certains avantages quant à leur robustesse, leur vitesse de résolution dans le cas supersonique pur et dans le cas des ondes acoustiques. En revanche, dans le cas du régime transsonique, les adaptations nécessaires de ces méthodes réduisent leur intérêt.

Compte tenu des performances des méthodes, il paraît intéressant de réaliser simultanément une extension des travaux de 1991 et 1993 au cadre de cette étude, stratégie qui autorise la comparaison des performances des deux méthodes de résolution. La présentation des deux schémas implicites, sans viscosité artificielle, de type LERAT (rayon spectral), et avec viscosité artificielle, de type JAMESON, se limite à l'essentiel de l'adaptation du modèle d'équations en référentiel relatif. Leur architecture respective (fig.12) et (fig.13), correspond dans ce chapitre aux résolutions en aubages isolés, les modifications intervenant pour le cas de l'interaction rotor-stator étant présentées par la suite au chapitre IV. Les codes associés à ces deux schémas ont pour noms respectifs SCHEMA1 et SCHEMA2.

II.3.1 - Schéma sans viscosité artificielle.

La discrétisation en temps du schéma implicite sans viscosité artificielle, s'obtient à partir de développements en série de Taylor autour d'une solution w de l'équation (2.16).

Ce schéma comporte une phase explicite, basée sur le schéma de Runge-Kutta d'ordre 2 centré en temps, et une phase implicite intervenant à chaque pas de temps. La phase implicite est présentée au paragraphe II.5. La phase explicite du schéma s'écrit sous la forme prédicteur-correcteur :

- prédicteur

$$w^{n+\frac{1}{2}} = w^n + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^n , \quad (2.26)$$

- correcteur

$$\hat{w}^{n+1} = w^n + \Delta t \left[\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^n + \left(\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^{n+\frac{1}{2}} - \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^n \right) \right] , \quad (2.27)$$

où $w^n = w(x, y, n\Delta t)$, et Δt désigne le pas de temps.

En dérivant autant de fois qu'il est nécessaire l'équation (2.16), on exprime les dérivées en temps du vecteur w à partir de dérivées en espace. Une discrétisation spatiale du schéma est ensuite construite à partir de la méthode des éléments finis. Le prédicteur est projeté sur la base de M . Par intégration par parties, sur chaque triangle K , il vient :

$$\int_K w^{n+\frac{1}{2}} d\Omega = \int_K w^n d\Omega - \frac{\Delta t}{2k} \left(\int_{\partial K} (f^n n_x + g^n n_y) d\sigma + \int_K h^n d\Omega \right) . \quad (2.28)$$

avec $f^n = f(w^n)$, $g^n = g(w^n)$, $h^n = h(w^n)$ et $\vec{n} = (n_x, n_y)$ un vecteur normal extérieur à la frontière de K . Les flux f^n , g^n , le terme source h^n et le champ w^n sont interpolés sur la base de C . En projetant le correcteur sur la base de C et en utilisant la formule de Green, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta \hat{w} N_i d\Omega &= \frac{\Delta t}{k} \left[\int_{\Omega} \left(f^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + g^n \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) d\Omega - \int_{\Omega} h^n N_i d\Omega \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Omega} \left((f^{n+\frac{1}{2}} - f^n) \frac{\partial N_i}{\partial x} + (g^{n+\frac{1}{2}} - g^n) \frac{\partial N_i}{\partial y} - (h^{n+\frac{1}{2}} - h^n) N_i \right) d\Omega \right] . \end{aligned} \quad (2.29)$$

où $f^{n+\frac{1}{2}} = f(w^{n+\frac{1}{2}})$, $g^{n+\frac{1}{2}} = g(w^{n+\frac{1}{2}})$, $h^{n+\frac{1}{2}} = h(w^{n+\frac{1}{2}})$ et $\Delta \hat{w} = \hat{w}^{n+1} - w^n$. Les valeurs du champ w sur la frontière Γ sont imposées indépendamment du schéma numérique. Les fonctions de base N_i de C sont relatives aux noeuds internes, il n'apparaît alors aucune intégrale de bord.

Les formules utilisées pour l'intégration numérique sont les suivantes :

$$\int_K \phi d\Omega = \frac{Mes(K)}{3} \sum_{j=1}^{j=3} \phi(S_j) , \quad (2.30)$$

$$\int_K \phi d\Omega = \phi(\text{centre de gravite de } K) Mes(K) . \quad (2.31)$$

Cette formulation contient les corrections non linéaires introduites par LERAT (1989)[72], dans le cadre structuré, adaptées et validées dans le cadre non structuré par SENS et MORTCHELEWICZ (1992)[74], (1993)[75]. La phase implicite du schéma, décrite au paragraphe II.5, rend inutile l'emploi d'un opérateur de viscosité artificielle.

II.3.2 - Schéma avec viscosité artificielle.

La technique de résolution des équations d'Euler présentée par JAMESON (1981)[77] se généralise de la manière suivante :

- ▷ un choix d'espace d'approximation est effectué, sur lequel le système d'équations à résoudre (2.16) est " projeté ",
- ▷ le système différentiel d'ordre 1 en temps ainsi obtenu, est intégré grâce à un schéma de Runge-Kutta,
- ▷ une viscosité artificielle formée d'opérateurs du deuxième et quatrième ordre est introduite, ainsi qu'une phase implicite.

Sur ce principe JAMESON (1983)[78], (1986)[79], a réalisé dans le cadre non structuré un schéma, en choisissant l'espace des fonctions constantes sur chaque élément (élément fini P0). DAWES (1991)[80], (1989)[81] a développé un schéma centré aux noeuds (élément fini P1). L'avantage de ce choix est de permettre la discrétisation des termes du second ordre de manière naturelle en utilisant la forme faible des équations. Ceci est particulièrement intéressant pour approcher le tenseur visqueux intervenant dans les équations de Navier-Stokes moyennées. Le travail présenté se situe dans l'approche suivie par Dawes. Un autre atout de cette méthode est de permettre l'obtention d'un champ frontière à chaque étape de la phase explicite. Ceci sera particulièrement important pour la réalisation du couplage entre deux roues.

Pour la discrétisation spatiale, le système (2.16) est projeté sur la base des fonctions d'interpolation N_i de C . Le champ w s'écrit dans cet espace,

$$w = \sum_j w_j N_j \quad , \quad (2.32)$$

et on utilise les deux simplifications suivantes :

- ▷ les flux non linéaires sont interpolés sur la base de C :

$$f(w) = \sum_j f(w_j) N_j \quad , \quad g(w) = \sum_j g(w_j) N_j \quad , \quad h(w) = \sum_j h(w_j) N_j \quad , \quad (2.33)$$

- ▷ la dérivée temporelle est simplifiée en utilisant la technique du "mass-lumping" :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial t} N_i d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial w_i}{\partial t} N_i d\Omega = \frac{\partial}{\partial t} (m_i w_i) \quad , \quad (2.34)$$

en posant

$$m_i = \int_{\Omega} N_i d\Omega \quad . \quad (2.35)$$

Ceci nous conduit au système discrétisé

$$k \frac{\partial}{\partial t} (m_i w_i) + F_i(w) = 0 \quad , \quad (2.36)$$

avec le flux $F_i(w)$ tel que :

$$F_i(w) = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + h \right) N_i d\Omega \quad . \quad (2.37)$$

On obtient donc un système différentiel d'ordre 1 en temps dont l'intégration est réalisée avec un schéma multi-pas Runge-Kutta en ligne (CIONI et al. (1992)[82]). Dans le cas d'un schéma à N pas, N valant 4 ou 5 habituellement, les coefficients sont définis par :

$$\alpha_l = \frac{1}{N-l+1} \quad , l = 1, \dots, N \quad . \quad (2.38)$$

Pour N supérieur ou égal à 3, la précision obtenue en temps n'est que du deuxième ordre pour des systèmes non linéaires, et d'ordre N pour des systèmes linéaires.

Un terme de viscosité artificielle $D_i(w)$ est ajouté au système (2.36) tel que

$$k \frac{\partial m_i w}{\partial t} + F_i(w) - D_i(w) = 0 \quad , \quad (2.39)$$

Cette viscosité artificielle permet de stabiliser le schéma numérique et son ordre de précision est de trois dans le cas bidimensionnel. La dissipation est obtenue à l'aide d'une combinaison linéaire d'opérateurs :

- ▷ un opérateur du second ordre permet de capturer les chocs et discontinuités de contact,
- ▷ un opérateur du quatrième ordre permet la convergence vers un état stationnaire en rendant le schéma dissipatif au sens de Kreiss.

Le terme de viscosité artificielle a donc pour expression générale :

$$D_i(w) = \sum_l \frac{1}{2} \left(\frac{m_i}{\Delta t_i} + \frac{m_l}{\Delta t_l} \right) [\chi^{(2)} \max(\nu_i, \nu_l) (w_l - w_i) - \max(0, \chi^{(4)} - \chi^{(2)} \max(\nu_i, \nu_l)) (D_i^2 w - D_i^2 w)] \quad , \quad (2.40)$$

avec :

- ▷ la somme sur l effectuée pour tous les noeuds l liés au noeud i par une arête, S_i désignant cet ensemble de noeuds.
- ▷ les opérateurs $D_i^2 w$ et $DA_i^2 w$ au noeud i définis par

$$D_i^2 w = \sum_{l \in S_i} w_l - w_i \quad , \quad (2.41)$$

$$DA_i^2 w = \sum_{l \in S_i} |w_l| + |w_i| \quad , \quad (2.42)$$

- ▷ L'opérateur ν ayant pour écriture

$$\nu_i = \frac{|D_i^2 q|}{DA_i^2 q} \quad . \quad (2.43)$$

Le senseur, noté q dans la formule (2.43), défini aux noeuds, désigne, soit la température, soit la pression, ou encore le nombre de Mach. On préfère choisir une grandeur statique indépendante du référentiel, soit la pression, soit la masse volumique, soit la température. Une phase implicite, décrite au paragraphe II.5, complète ce schéma.

II.4 - TRAITEMENTS DES CONDITIONS AUX LIMITES.

La frontière du domaine de calcul se décompose en une partie fluide-fluide et une partie fluide-paroi :

- ▷ la partie fluide-fluide correspond aux frontières d'injection-sortie du fluide dans le domaine de calcul, c'est à dire d'une part aux frontières amont et aval, et d'autre part aux frontières plafond et plancher du domaine, frontières de périodicité, traitées de manière particulière dans le cadre des turbomachines.
- ▷ la partie fluide-paroi désigne la portion de frontière du domaine fluide en contact avec la paroi de l'aube.

Dans le cadre des méthodes d'éléments finis, les conditions aux limites sont traitées soit sous forme forte, soit sous forme faible. Cette classification sous-entend les deux notions suivantes :

- ▷ forme forte : les degrés de liberté (DDL) ont une valeur imposée, aucune équation n'est résolue.
- ▷ forme faible : le calcul relatif à un DDL inclut d'une part le traitement de l'équation, et d'autre part la condition aux limites que l'on souhaite imposer.

Dans la suite de cet exposé, la signification des termes "forme forte" et "forme faible" sont étendues comme suit :

- ▷ forme forte : les équations d'Euler ne sont pas résolues pour les DDL concernés, il n'y a donc pas de champ prédit. Un système "d'équations équivalentes" (relations de compatibilité, traitement de type LERAT pour une frontière profil) permet de "mettre en équilibre" le champ. Des informations venant du fluide peuvent être obtenues grâce à des extrapolations à l'ordre zéro.
- ▷ forme faible : les équations d'Euler sont résolues pour les DDL concernés, nous disposons d'un champ prédit. Les conditions aux limites peuvent être introduites soit directement au niveau des équations d'Euler (cas de la condition de glissement), soit a posteriori en appliquant les relations de compatibilité, par exemple.

Ces deux formes de traitement vont influencer sur le calcul des conditions aux limites au niveau de la phase implicite (paragraphe II.5).

II.4.1 -Relations de compatibilité.

VIVIAND et VEUILLOT (1978)[83], MEAUZE et VEUILLOT (1985)[84] ont établi les relations de compatibilité basées sur la théorie des caractéristiques.

Soient deux domaines D1 et D2 (fig.14) de frontière commune Γ et $\vec{n}_{(1)}$, $\vec{n}_{(2)}$ les vecteurs unitaires correspondant aux normales extérieures respectives des domaines D1 et D2 en un point M de la frontière Γ .

$$\vec{n}_{(1)} = -\vec{n}_{(2)} \quad . \quad (2.44)$$

On introduit les vecteurs unitaires $\vec{t}_{(1)}$ et $\vec{t}_{(2)}$ définis au point M, tangents à la frontière Γ , tels que les repères $(M, \vec{n}_{(1)}, \vec{t}_{(1)})$ et $(M, \vec{n}_{(2)}, \vec{t}_{(2)})$ soient dans le sens direct. Pour chacun des domaines 1 et

2, on définit les quatre quantités suivantes, calculées en variables absolues :

$$R_1^{(k)} = p^{(k)} + (\rho a)^n \overrightarrow{V^{(k)}} \cdot \overrightarrow{n_{(k)}} \quad , \quad (2.45)$$

$$R_2^{(k)} = p^{(k)} - (a^2)^n \rho^{(k)} \quad , \quad (2.46)$$

$$R_3^{(k)} = \overrightarrow{V^{(k)}} \cdot \overrightarrow{t_{(k)}} \quad , \quad (2.47)$$

$$R_4^{(k)} = p^{(k)} - (\rho a)^n \overrightarrow{V^{(k)}} \cdot \overrightarrow{n_{(k)}} \quad , \quad (2.48)$$

l'exposant n désignant les valeurs connues à l'instant $n\Delta t$ du calcul, a la vitesse du son et ρ la masse volumique calculées au point M de la frontière Γ , k valant 1 ou 2. A chaque quantité $R_i^{(k)}$ est associée une valeur propre $\lambda_i^{(k)}$ définie par :

$$\lambda_1^{(k)} = \overrightarrow{W^{(k)}} \cdot \overrightarrow{n_{(k)}} + a^{(k)} \quad , \quad (2.49)$$

$$\lambda_2^{(k)} = \overrightarrow{W^{(k)}} \cdot \overrightarrow{n_{(k)}} \quad , \quad (2.50)$$

$$\lambda_3^{(k)} = \overrightarrow{W^{(k)}} \cdot \overrightarrow{n_{(k)}} \quad , \quad (2.51)$$

$$\lambda_4^{(k)} = \overrightarrow{W^{(k)}} \cdot \overrightarrow{n_{(k)}} - a^{(k)} \quad , \quad (2.52)$$

où le vecteur $\overrightarrow{W^{(k)}}$ représente le vecteur vitesse relative de l'écoulement calculé dans le domaine k , satisfaisant à la relation de composition des vitesses (1.8).

Pour calculer le champ w sur la frontière Γ à l'instant $(n+1)\Delta t$, on dispose des huit relations suivantes :

$$p^{n+1} + (\rho a)^n \overrightarrow{V^{n+1}} \cdot \overrightarrow{n_{(1)}} = R_1^{(1)} \quad , \quad (2.53)$$

$$p^{n+1} - (a^2)^n \rho^{n+1} = R_2^{(1)} \quad , \quad (2.54)$$

$$\overrightarrow{V^{n+1}} \cdot \overrightarrow{t_{(1)}} = R_3^{(1)} \quad , \quad (2.55)$$

$$p^{n+1} - (\rho a)^n \overrightarrow{V^{n+1}} \cdot \overrightarrow{n_{(1)}} = R_4^{(1)} \quad , \quad (2.56)$$

$$p^{n+1} + (\rho a)^n \overrightarrow{V^{n+1}} \cdot \overrightarrow{n_{(2)}} = R_1^{(2)} \quad , \quad (2.57)$$

$$p^{n+1} - (a^2)^n \rho^{n+1} = R_2^{(2)} \quad , \quad (2.58)$$

$$\overrightarrow{V^{n+1}} \cdot \overrightarrow{t_{(2)}} = R_3^{(2)} \quad , \quad (2.59)$$

$$p^{n+1} - (\rho a)^n \overrightarrow{V^{n+1}} \cdot \overrightarrow{n_{(2)}} = R_4^{(2)} \quad , \quad (2.60)$$

associées aux valeurs propres $\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \dots, \lambda_4^{(2)}$.

Seules peuvent être utilisées les relations pour lesquelles $\lambda_i^{(k)} \geq 0$. Celles-ci sont calculées avec le champ défini soit à l'instant $n\Delta t$, soit avec le champ prédit. Le système obtenu se réduit en fait à quatre équations si on remarque que :

$$\lambda_1^{(1)} = -\lambda_4^{(2)}, \lambda_2^{(1)} = -\lambda_2^{(2)}, \lambda_3^{(1)} = -\lambda_3^{(2)}, \lambda_4^{(1)} = -\lambda_1^{(2)}.$$

Les relations de compatibilité traduisent le transport des informations du domaine 1 vers le domaine 2 lorsque les valeurs propres $\lambda_i^{(1)}$ sont positives, et du domaine 2 vers le domaine 1 lorsque les valeurs propres $\lambda_i^{(2)}$ sont positives.

Pour calculer les quantités $R_i^{(k)}$, on peut, soit utiliser les valeurs prédites sur la frontière Γ dans le domaine k (cas du SCHEMA2), soit effectuer des extrapolations à l'ordre zéro, suivant les lignes de maillages, si on ne dispose pas de valeurs prédites sur la frontière Γ (cas du SCHEMA1).

II.4.2 Cas des frontières amont et aval.

Les frontières amont et aval correspondent à l'entrée (ou injection) et à la sortie du fluide. Le domaine 1 est identifié au domaine de calcul, et le domaine 2 au domaine extérieur.

Par principe de fonctionnement des turbines présentées dans cette étude, on considère dans le cas des roues isolées que l'écoulement, entrant ou sortant du domaine de roues isolées est subsonique. Compte tenu de (1.8), on obtient la relation suivante sur le nombre de Mach normal relatif :

$$-1 \leq M_{rn} \leq 1 \quad , \quad (2.61)$$

Dans le cas de la frontière amont, seule la première valeur propre $\lambda_1^{(1)}$ est positive. Trois conditions complémentaires sont associées à la relation de compatibilité (2.53) : l'enthalpie d'arrêt absolue H_i ou la température d'arrêt T_i , l'entropie S , l'angle de la vitesse absolue α . Le choix de ces grandeurs physiques équivaut à considérer que l'écoulement aussi bien absolu que relatif est subsonique, et conduit à la résolution d'un système non linéaire résolu par une méthode de Newton.

Pour la frontière aval, les trois premières valeurs propres $\lambda_1^{(1)}$, $\lambda_2^{(1)}$, $\lambda_3^{(1)}$ sont positives. Une condition est ajoutée aux relations de compatibilité (2.53), (2.54), (2.55) : soit la donnée de la pression statique aval, soit une relation de non-réflexion réalisée en utilisant la relation de compatibilité (2.57) où $p^{(2)}$ et $V^{(2)}$ sont définis lors de l'initialisation du calcul.

II.4.3 - Frontières de périodicité plafond et plancher.

Dans le cas stationnaire, l'écoulement en aubage isolé présente une périodicité spatiale de la forme :

$$w(x, y) = w(x, y + g) \quad , \quad (2.62)$$

où g désigne le pas relatif des canaux de l'aubage. Cette condition permet de réduire le domaine de calcul à un seul canal. L'utilisation de cette relation lors de la définition topologique du domaine permet d'obtenir la géométrie du canal.

La souplesse des maillages non structurés peut être exploitée pour obtenir des lignes, au plafond et au plancher du domaine de calcul, parfaitement périodiques en imposant une même répartition de noeuds sur ces lignes. Ainsi, il est possible moyennant une translation de la valeur du pas relatif g de reconstituer les géométries des cellules des noeuds homologues (fig.15). Donc, pour deux noeuds homologues i et j de ces lignes associées aux fonctions de bases respectives N_i et N_j , les "véritables" fonctions de bases associées, représentant la périodicité de l'écoulement, sont \tilde{N}_i et \tilde{N}_j respectivement, avec :

$$\tilde{N}_i = \tilde{N}_j = N_i + N_j \quad . \quad (2.63)$$

Cette propriété autorise l'assemblage des contributions partielles avec la relation :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} F\tilde{N}_i d\Omega &= \int_{\Omega} F\tilde{N}_j d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} FN_i d\Omega + \int_{\Omega} FN_j d\Omega \\
 &= \sum_{K \in \text{Supp}(N_i)} \int_K FN_i d\Omega + \sum_{K \in \text{Supp}(N_j)} \int_K FN_j d\Omega \quad . \quad (2.64)
 \end{aligned}$$

Les résultats sont affectés aux noeuds correspondants.

Cette méthode permet de s'affranchir de l'emploi d'interpolations utilisées dans certaines méthodes de calcul (fig.16).

II.4.4 - Condition de glissement.

Par hypothèse, les aubes sont imperméables à l'écoulement et le fluide considéré est parfait. La condition de contact se résume donc au glissement du fluide le long de la paroi des aubes. Celle-ci a pour expression, dans le référentiel relatif des aubages :

$$\vec{W} \cdot \vec{n} = 0 \quad . \quad (2.65)$$

Dans le cas du schéma sans viscosité artificielle, le traitement de cette condition aux limites est réalisée avec la méthode proposée par LERAT et SIDES (1989)[72]. MORTCHELEWICZ et SENS (1992) [74], (1993)[75] ont utilisé cette technique pour des applications instationnaires en maillage fixe. Cette méthode repose sur la détermination de la pression par un bilan de flux. La direction de la vitesse est imposée par l'inclinaison de l'élément frontière. Grâce à des extrapolations à l'ordre 0 de l'entropie et de la rothalpie, on peut calculer l'ensemble des valeurs du champ bord.

Il est possible de suivre la même démarche avec le schéma de type JAMESON, mais on peut également imposer directement la condition (2.65) dans le calcul du flux $F_i(w)$ obtenu avec la relation (2.37). On parlera de traitement sous "forme faible". Dans ce dernier cas, il est nécessaire de recalculer le champ sur la frontière à chaque itération du schéma de Runge-Kutta et d'ajuster les paramètres de viscosité artificielle $\chi^{(4)}$ et $\chi^{(2)}$ pour assurer la stabilité du schéma.

II.5 - PHASES IMPLICITES.

Dans le cas du schéma sans viscosité artificielle, la phase implicite est basée sur la méthode du "rayon spectral" de LERAT et al. (1982)[70]. Soit v désignant l'une des composantes du champ w , on pose :

$$\hat{R} = \hat{v}^{n+1} - v^n \quad , \quad (2.66)$$

$$R = v^{n+1} - v^n \quad , \quad (2.67)$$

où \hat{R} est le résultat du schéma explicite. Alors la méthode du "rayon spectral" s'écrit :

$$R - 0.5\beta\left(\frac{\Delta t}{k}\right)^2\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_s^2\frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_s^2\frac{\partial R}{\partial y}\right)\right] = \hat{R} \quad , \quad (2.68)$$

où ρ_s désigne un majorant des rayons spectraux des matrices Jacobiennes des flux $f(w)$ et $g(w)$, et β représente, pour cette relation, un paramètre que l'on choisit ici tel que $\beta = 1$. Lors de l'utilisation de cette phase implicite, le traitement des conditions aux limites pour les frontières amont, aval et profil, est réalisé en posant :

$$R = 0 \quad , \quad (2.69)$$

ce qui correspond à imposer une condition limite de type Dirichlet. Pour les frontières de périodicité, il suffit d'utiliser les relations (2.62), (2.63), (2.64).

Le système linéaire qui découle de la phase implicite est résolu composante par composante, à l'aide d'une méthode itérative de "gradient conjugué préconditionné". On utilise la diagonale de la matrice du système comme "préconditionneur". Les matrices sont symétriques, définies, positives, sur chaque élément. Ces propriétés permettent de ne calculer localement que des matrices élémentaires triangulaires supérieures. Enfin, la matrice globale n'est pas assemblée pour conserver une taille mémoire raisonnable. La méthode demande une dizaine d'itérations de l'algorithme du "gradient conjugué" à chaque pas de temps. Par ailleurs, une augmentation du nombre de CFL entraîne celle du nombre d'itérations. Le temps CPU par pas de temps est alors plus important, mais la convergence du calcul est plus rapide. La phase implicite du rayon spectral permet d'une part, d'étendre le domaine de stabilité du schéma numérique, autorise l'utilisation de nombres de CFL dix fois plus important vis-à-vis de la méthode simplement explicite, et d'autre part, rend inutile l'emploi d'une viscosité artificielle.

Dans le cas du schéma de type JAMESON, on emploie une phase implicite du type "residual smoothing". Soit v_i désignant l'une des composante du champ w_i au noeud S_i . On considère \hat{w}^{n+1} résultat du schéma explicite de Runge-Kutta et on pose :

$$\hat{R}_i = \hat{v}_i^{n+1} - v_i^n \quad , \quad (2.70)$$

$$R_i = v_i^{n+1} - v_i^n \quad . \quad (2.71)$$

Alors , la phase implicite s'écrit :

$$R_i - \varepsilon \sum_l (R_l - R_i) = \hat{R}_i \quad , \quad (2.72)$$

avec $\varepsilon \simeq 0.5$.

Ce système linéaire est résolu de manière approchée en effectuant deux itérations de l'algorithme de Jacobi. On peut associer à ce système linéaire des conditions aux limites de type Dirichlet (2.69) au niveau des frontières amont, aval, et du profil. Pour les frontières de périodicité, on utilise également les relations (2.62), (2.63), (2.64). Dans le cas où la ligne profil est traitée sous forme faible, w^{n+1} est stocké dans w^n . Pour les calculs en roues isolées cette phase implicite est introduite après la phase explicite et non à chaque itération de l'algorithme de Runge-Kutta comme le propose JAMESON. Une étude de stabilité sur une équation linéaire a montré que la valeur maximale du nombre CFL en explicite est de l'ordre de $2\sqrt{2}$. L'adjonction de cette phase implicite autorise l'augmentation du nombre CFL de 50% et permet d'obtenir des solutions avec des nombres de CFL de l'ordre de 4.

II.6 - CRITIQUE DES CODES.

Les codes SCHEMA1 et SCHEMA2, dont nous venons de présenter les architectures, ont des propriétés différentes, relatives à leur conception. Il convient de les expliciter.

- **Code SCHEMA1.**

Par construction, une dissipation artificielle est introduite dans ce code. Elle est engendrée par :

- ▷ le changement d'espace d'approximation,
- ▷ les corrections non linéaires,
- ▷ la phase implicite.

- **Code SCHEMA2.**

Ce code reprend la majeure partie de l'infrastructure développée pour le code SCHEMA1. Il présente un certain nombre d'avantages qui le rendent particulièrement attractif :

- ▷ le fait de conserver un caractère centré aux noeuds rend le code peu dissipatif de manière naturelle. Le traitement des conditions aux limites sous forme faible semble renforcer cette caractéristique et il est nécessaire d'ajuster correctement les coefficients de viscosité artificielle.
- ▷ ce schéma est capable de calculer le champ frontière, à chaque étape de la phase explicite, capacité mise à profit au chapitre IV pour la réalisation du couplage des domaines de calcul des aubages en interaction rotor stator,
- ▷ la possibilité de résolutions avec des nombre de CFL de l'ordre de 4 avec un coût fixe par itération par rapport au code SCHEMA1.

Certains résultats, présentés par la suite au chapitre III, révèlent les difficultés encore à résoudre au niveau des schémas, vis-à-vis de leur mise en oeuvre et des traitements des conditions aux limites. La résolution de ces problèmes est indépendante de l'objet de cette thèse. Leur diagnostic permet, d'une part d'évaluer préalablement les avantages et inconvénients des codes pour le calcul de l'interaction rotor stator, et d'autre part, à terme, de faire évoluer les méthodes.

Chapitre III - CALCULS D'ÉCOULEMENTS EN AUBAGES ISOLÉS.

III.1 - PRE- ET POST-TRAITEMENTS DES MAILLAGES.	72
III.2 - CONDITIONS INITIALES DES CALCULS.	72
III.2.1 - Cas des aubages fixes.	72
III.2.2 - Cas des aubages mobiles.	73
III.2.3 - Remarque.	74
III.3 - VALIDATIONS DES METHODES NUMERIQUES.	74
III.3.1 - Cas numériques.	74
III.3.2 - Résultats numériques.	78
III.3.2.1 - Référentiel fixe.	78
III.3.2.2 - Référentiel mobile.	85
III.3.3 - Conclusions.	89

Après avoir présenté les pré- et post-traitements des maillages, et les conditions initiales pour l'initialisation des calculs, on décrit un certain nombre de cas tests d'aubages isolés. L'initialisation des calculs est développée en annexe.

III.1 - PRE- ET POST-TRAITEMENTS DES MAILLAGES.

Les maillages non-structurés sont réalisés à l'aide du logiciel I-DEAS. De manière à rendre cette tâche la plus ergonomique possible, des programmes de pré-traitement créent automatiquement des fichiers d'instructions et de données (program files) exécutables par un logiciel industriel, I-DEAS (SDRC).

Un code permet d'effectuer le post-traitement des maillages obtenus avec le logiciel I-DEAS. Les tâches du post-traitement sont définies comme suit :

- ▷ élimination des noeuds doubles,
- ▷ orientation des frontières,
- ▷ coloration des éléments,
- ▷ création des informations entre les noeuds frontières et les noeuds internes du domaine pour la réalisation des extrapolations à l'ordre 0,
- ▷ création des lignes (éléments 1 noeud),
- ▷ création des lignes de périodicité,
- ▷ vérification des maillages,
- ▷ écriture des fichiers maillages.

Des codes de traitement de maillages structurés ont été conçus pour :

- ▷ récupérer les géométries des profils des aubes, les lois d'évolution de veine,
- ▷ transformer ces maillages, en maillages non structurés.

Un logiciel permettant de transformer un maillage d'un domaine mono-canal en un maillage d'un domaine multi-canaux a été développé. Il intervient notamment pour le calcul d'écoulements en étages, présenté au chapitre IV.

III.2 - CONDITIONS INITIALES DES CALCULS.

III.2.1 - Cas des aubages fixes.

Outre la donnée de la loi d'évolution de veine, en rayon et taux d'épaisseur (cf. I.3.2), les conditions initiales d'un calcul en référentiel fixe, correspondent à la définition de l'état absolu de l'écoulement, à l'amont et à l'aval du domaine de calcul. A l'amont, les données sont les suivantes :

- ▷ le nombre de Mach M_1 ,

▷ l'angle absolu α_1 de l'écoulement rentrant dans le domaine.

Dans le cas où les pertes par choc sont négligeables, les pressions d'arrêt respectives de l'amont et de l'aval restent égales. On donne alors pour l'aval :

▷ un rapport de pressions, noté P_2 , rapport de la pression statique aval et de la pression d'arrêt absolue aval, autrement dit :

$$P_2 = \frac{p_2}{p_{i1}} \quad , \quad (3.1)$$

▷ l'angle absolu α_2 de l'écoulement sortant de l'aubage.

Dans le cas où ces pertes ne sont pas négligeables, un coefficient d'efficacité de grille, noté η , est défini, et représente le rapport de la pression d'arrêt absolue réelle à la pression d'arrêt absolue isentropique, p_{i2is} , c'est-à-dire,

$$\eta = \frac{p_{i2}}{p_{i2is}} \quad . \quad (3.2)$$

et on donne :

$$P_2 = \frac{p_2}{p_{i2}} \quad . \quad (3.3)$$

III.2.2 - Cas des aubages mobiles.

Dans le cadre des calculs en référentiel relatif mobile, outre la donnée de la loi d'évolution de veine, les conditions initiales correspondent à l'état relatif de l'écoulement, à l'amont et à l'aval du domaine. Ces états sont notés avec l'indice 1 pour l'amont et 2 pour l'aval. Les données initiales de l'état amont du domaine sont les suivantes :

- ▷ le nombre de Mach relatif M_{r1} ,
- ▷ l'angle absolu α_1 ,
- ▷ l'angle relatif β_1 .

Le triangle des vitesses permet de calculer la vitesse de rotation et le nombre de Mach absolu. Le fait d'imposer l'angle absolu au niveau des conditions aux limites à l'amont est une difficulté, car le triangle de Mach se déforme au cours du calcul. Mais ce choix permet de conserver une vitesse de rotation constante au cours du calcul. Pour l'état aval, en supposant les pertes par choc négligeables dans le domaine, on donne :

▷ le rapport de pression aval noté P_{r2} , représentant le rapport de la pression statique à la pression d'arrêt,

$$P_{r2} = \frac{p_2}{p_{ir2}} \quad , \quad (3.4)$$

Dans le cas où les pertes par chocs ne sont pas négligeables, on définit le coefficient d'efficacité de grille η , comme le rapport de la pression d'arrêt relative totale réelle à la pression d'arrêt relative totale isentropique, p_{ir2is} , c'est-à-dire :

$$\eta = \frac{p_{ir2}}{p_{ir2is}} \quad . \quad (3.5)$$

▷ l'angle relatif de l'écoulement β_2 .

La relation de composition des vitesses (1.8), exprimée dans le repère orthonormé direct (\vec{e}_x, \vec{e}_y) , devient :

$$\begin{aligned}\vec{V} &= \vec{W} + \vec{U} \\ &= \vec{W} + \vec{\omega} \times \vec{r} \\ &= W_x \vec{e}_x + (W_y - \omega r) \vec{e}_y \quad ,\end{aligned}\quad (3.6)$$

et le triangle de Mach s'exprime :

$$M_1 = M_{r1} \frac{\cos(\beta_1)}{\cos(\alpha_1)} \quad , \quad (3.7)$$

$$M_{u1} = M_1 \sin(\alpha_1) - M_{r1} \sin(\beta_1) \quad . \quad (3.8)$$

Ces dernières relations (3.7) et (3.8) engendrent une classe de cas tests, puisqu'elles autorisent des études de fonctionnement d'aubage en roue mobile de compresseur ou de turbine, mais aussi de distributeur (ou de redresseur) par la donnée des angles appropriés.

III.2.3 - Remarque.

Les valeurs numériques figurant dans les différents tableaux de données, présentés ci-après, au paragraphe III.3.1 de ce chapitre et au paragraphe IV.5.1 dans le cas des calculs en étages, permettent l'initialisation des champs aérodynamiques. Parmi toutes ces données, certaines sont utilisées pour la détermination des conditions aux limites (cf. II.4.2) aux frontières amont et aval du domaine de calcul. Il s'agit, en particulier, de l'angle absolu de l'écoulement à la frontière amont, ainsi que de la pression statique à la frontière aval.

III.3 - VALIDATIONS DES METHODES NUMERIQUES.

III.3.1 - Cas numériques.

Par souci de clarté, les cas tests présentés au sein de ce chapitre sont restreints aux cas numériques qui illustrent au mieux les caractéristiques des deux méthodes de résolution pour des calculs d'écoulement autour d'aubage isolé en référentiel fixe ou mobile. L'étape suivante, présentée au chapitre IV, concernera des calculs en étages.

- **Validation en référentiel fixe.**

Pour valider d'une part le système d'équations 2,5 D en référentiel fixe (2.16) et les méthodes numériques discrétisant ce système, on présente trois cas tests. Les deux premiers permettent de s'assurer que les solutions obtenues en cas d'annulation du terme source $h(w)$ (2.21) du système d'équations (2.16) correspondent effectivement aux résultats obtenus antérieurement. Le troisième valide la prise en compte de la géométrie de la nappe de courant en référentiel fixe.

▷ CTS1.

Il s'agit d'une grille de distributeur haute pression, pour laquelle on dispose de mesures expérimentales et de résultats numériques,

▷ CTS2.

Il s'agit d'un aubage de distributeur transsonique haute pression en grille, pour lequel on dispose de résultats numériques, obtenus par le code de calcul VOLFINI basé sur une méthode de type volumes finis, multi-grille, utilisant un maillage structuré (fig.33),

▷ CTS3.

Ce cas est identique au précédent, mais on dispose cette fois de résultats obtenus par le code VOLFINI en configuration quasi-tridimensionnelle. Les lois de rayon et d'épaisseur correspondent à une géométrie de veine réelle convergente (fig.47).

On associe au cas test CTS1 les cas CTS1-1 et CTS1-2 qui correspondent à des points de fonctionnement différents. Le premier cas correspond à un écoulement subsonique. Dans le second cas, il s'agit d'un écoulement transsonique, puisque le régime du fluide, subsonique à l'entrée de la grille est supersonique en sortie.

De même, on associe au cas test CTS2, les cas CTS2-1 et CTS2-2, qui diffèrent uniquement par la taille du maillage. Il en va de même pour le cas CTS3-1 et CTS3-2. Le cas CTS3-3 est identique au cas CTS3-1, mais un traitement sous forme faible de la condition aux limites sur la paroi des aubes est utilisé .

Les données de ces trois cas tests sont présentées dans le tableau suivant :

CAS TESTS EN REFERENTIEL FIXE				
Cas	CTS1-1	CTS1-2	CTS2-1 / CTS3-1	CTS2-2 / CTS3-2 / CTS3-3
Code	SCHEMA1	SCHEMA2	SCHEMA1	SCHEMA2
Conditions de calcul				
Maillage	Non structurés			Structuré
Nombre de noeuds	7057		3338	6534
Nombre de mailles	13295		6206	12463
Extrados	294		82	82
Intrados	228		83	83
Nombre de CFL	4 ou 3 (CTS3-3)			-
Conditions aérodynamiques générales				
γ	1.4		1.296	
efficacité	100 %			
évolution de veine	non		non / méridien	
Conditions aérodynamiques de la frontière amont				
Mach	0.12	0.156	0.081	
Angle (degrés)	0.		0.	
Conditions aérodynamiques de la frontière aval				
Position (x/c)	7.2			2.699
Mach	0.85	1.08	1.23	
Angle (degrés)	-74.12	-73.84	-78.17	
Condition limite	non réflexion (2.57)			
forme	forte	faible (SCHEMA2)	forte	-

- **Validation en référentiel mobile.**

Dans le cadre des calculs en référentiel relatif, la validation des codes SCHEMA1 et SCHEMA2 est réalisée à l'aide du cas test CTS4. Il s'agit d'un aubage mobile de turbine basse pression dont les caractéristiques aérodynamiques en grille fixe sont connues. On présente à cette occasion un certain nombre de configurations de fonctionnement de cet aubage, dans le but d'illustrer les possibilités des codes et notamment la souplesse de la méthode d'initialisation en référentiel relatif :

▷ CTS4-1.

L'aubage en grille est considéré en référentiel relatif fixe. Il s'agit d'une vérification préalable vis-à-vis des résultats du code VOLFINI qui représentent les caractéristiques de l'état de référence connu pour le cas test CTS4.

▷ CTS4-2.

L'aubage reste en grille, mais cette fois le référentiel relatif est mobile. Il s'agit d'un cas de rotation pure. On préfère une approche différente de la condition aux limites amont, en fonction des besoins industriels : ici l'angle absolu est imposé et non l'angle relatif. On s'attend donc à observer

un fonctionnement légèrement différent de celui du cas précédent. L'angle absolu est choisi de sorte que la vitesse relative de l'écoulement, déduite du triangle des vitesses, représente 80% de la vitesse absolue (valeurs choisies pour l'initialisation).

▷ CTS4-3.

L'aubage, en grille, est en référentiel relatif mobile, mais le mouvement de rotation de ce dernier est inversé. La grille fonctionne donc en compresseur. Ce cas, sans grand intérêt du point de vue physique, a pour seul but d'illustrer le potentiel de la méthode d'initialisation aérodynamique.

▷ CTS4-4.

L'aubage fonctionne en turbine et en référentiel relatif mobile. Les lois d'évolution de veine ne sont plus constantes mais calculées avec la relation algébrique (1.2) et respectent la conservation du débit (1.1) et de la rothalpie (1.25). Ce cas correspond à l'implémentation complète du terme $h(w)$ (2.25) en référentiel relatif. L'écoulement aval est le même que dans les cas précédents.

▷ CTS4-5.

Il s'agit du même cas test que le précédent mais l'aubage est en incidence vis-à-vis de l'écoulement relatif. La vitesse relative représente 90% de la vitesse absolue. Ce cas illustre le comportement des codes en configuration de fonctionnement hors adaptation.

La position des frontières amont et aval a été fixée de manière à minimiser l'influence de la prise en compte des traitements des conditions aux limites associées.

Le système d'équations résolu dans les cas test CTS4 -1, -2, -3 est conservatif.

Le tableau suivant répertorie les conditions initiales des cinq configurations :

CAS TESTS EN REFERENTIEL RELATIF					
Cas	CTS4-1	CTS4-2	CTS4-3	CTS4-4	CTS4-5
Code	VOLFINI		SCHEMA1 / SCHEMA2		
Conditions des calculs					
Maillage	Structuré		Non structuré		
Nombre de noeuds	3198		3138		
Nombre de mailles	—		5785		
Extrados	75		153		
Intrados	68		136		
Nombre de CFL	—		4		
Conditions aérodynamiques générales					
évolution de veine	non	non	non	algébrique	algébrique
γ	1.4				
efficacité (%)	100.				
Conditions aérodynamiques de la frontière amont					
Mach relatif	0.48				
Angle relatif (degrés)	43.				49.35
Angle absolu (degrés)	43.	54.2	0.	54.2	
Résultat du triangle de Mach					
Vitesse de rotation (adimensionnée)	0.	-0.64	1.34	-0.289	
Mach absolu	0.48	0.6	0.35	0.6	
Conditions aérodynamiques de la frontière aval					
Position (x/c)	2.699		1.7159		
Mach relatif	0.7				
Angle relatif (degrés)	-54.55				
Angle absolu (degrés)	43.	0.575	-65.85	-44.73	-50.76
Condition limite	non réflexion (2.57)				
forme	—	forte / faible			

Lors du développement des codes, la plupart des calculs ont été menés sur un ordinateur APOLLO DN 10000, mais les résultats présentés ici ont été obtenus sur un ordinateur CRAY/YMP.

III.3.2 - Résultats numériques.

III.3.2.1 - Référentiel fixe.

Dans le cas de calculs menés en référentiel fixe, on s'intéresse plus particulièrement aux résultats suivants :

- ▷ l'évolution de la courbe des résidus quadratiques moyens, pour chacune des variables physiques, révélatrice des performances des schémas, tant en vitesse qu'en niveau de convergence (logarithme décimal du résidu). On rappelle cependant que les courbes de résidus sont représentatives de l'ensemble du domaine de calcul. Une éventuelle stagnation de leur évolution peut donc correspondre à un problème local dans le domaine sans rapport direct avec les résultats aérodynamiques concernant les aubages. Chaque courbe représentée sur les graphes de convergence pouvant permettre de suivre cette évolution, on suit plus précisément celle des résidus quadratiques moyens de la masse volumique.
- ▷ les répartitions de pression et de Mach sur les profils et dans le champ, car elles permettent de vérifier le sens physique des solutions, mais aussi leur qualité, par la présence sur les courbes d'éventuelles oscillations parasites au niveau des chocs, par exemple. Ce sont ces résultats qui sont pris en compte pour la validation des deux codes, car ils permettent de comparer les résultats des méthodes en développement avec ceux de la méthode choisie comme référence dans cette étude.
- ▷ il est intéressant de suivre l'évolution de grandeurs physiques dans certaines régions du domaine. On a choisi de tracer l'évolution de l'angle le long de la ligne de périodicité des domaines. En effet, elle peut révéler, par exemple, une incompatibilité de la condition limite aval, l'influence sur le reste du champ de la proximité de la frontière aval vis-à-vis de l'aubage, le passage des ondes de choc au travers de la région aval des domaines, ou donner une indication quant à la stabilité du calcul.
- ▷ les répartitions de pression d'arrêt et de température d'arrêt qui sont des indicateurs de la bonne qualité des solutions près de la paroi et dans le champ. Il est à noter que des défauts peuvent apparaître localement sur les profils alors que la solution dans le champ est correcte.
- ▷ les grandeurs moyennes amont et aval pour quantifier le niveau des pertes, numériques d'une part, et par choc d'autre part. Le débit, la pression d'arrêt, la rothalpie intervenant dans les tableaux de résultats sont fournis en nombres adimensionnés. Il est nécessaire de préciser, qu'en ce qui concerne les grandeurs moyennes à l'aval, celles-ci sont calculées directement sur la frontière aval du domaine. Rappelons à cet égard que dans le cas du code SCHEMA1 ces valeurs sont extrapolées à l'ordre 0 aux noeuds internes du domaine. En outre, les valeurs obtenues sont influencées par les grandeurs imposées pour le traitement des conditions aux limites calculées lors de l'initialisation. On les considère donc avec une certaine précaution.
- ▷ la position du point d'arrêt de l'écoulement sur les aubes. La valeur de ce résultat est liée à la finesse locale du maillage dans la région du bord d'attaque des aubes. La souplesse des maillages non structurés peut être mise à profit pour détecter cette singularité aérodynamique afin d'éviter de positionner les émissions de réfrigérant en ce lieu, ce qui pourrait engendrer des effets aérodynamiques néfastes.

• Résultats généraux du cas test CTS1.

Ce cas test correspond au cas d'une grille de distributeur haute pression, pour laquelle on dispose de mesures expérimentales et de résultats numériques bidimensionnels. Le maillage du domaine est illustré à la figure 17 et les figures 31 et 32 représentent les positions des points d'arrêt obtenues numériquement pour chacune des deux configurations aérodynamiques. Les deux méthodes donnent la même position du point d'arrêt pour une même configuration.

Il est à noter que les répartitions du nombre de Mach sont tracées en fonction de l'abscisse

curviligne réduite et que les répartitions de pression d'arrêt et de température d'arrêt sont représentées en fonction de l'abscisse x rapportée à la corde axiale du profil.

• **Résultats du cas test CTS1-1.**

Les résultats obtenus sur ce cas correspondent aux figures 18 à 20 pour le code SCHEMA1 et aux figures 21 à 23 pour le code SCHEMA2. Le tableau suivant rapporte les performances de résolution des méthodes pour ce cas test :

CAS TESTS EN REFERENTIEL FIXE : RESULTATS DU CAS CTS1-1				
Codes	SCHEMA1		SCHEMA2	
Performances numériques				
Nombre d'itérations	7900		2600	
Temps CPU (secondes)	1000		255	
Niveau de convergence	10^{-6}		10^{-3}	
Choc à l'extrados				
Position (x/c)	0.6116		0.5956	
Niveau	1.2045		1.1732	
Grandeurs moyennées par le débit				
Frontière	Amont	Aval	Amont	Aval
Débit	0.228	0.229	0.228	0.228
Angle (degrés)	0.	-74.07	0.	-74.17
Mach absolu	0.156	0.847	0.156	0.849
Pression d'arrêt	1.	0.99	1.	0.99
Mach axial	0.156	0.232	0.156	0.232

Dans cette configuration aérodynamique (fig.20, 23) la présence d'un choc droit joignant l'extrados et l'intrados de deux aubes successives de la grille est caractéristique d'un régime bloqué transsonique, l'écoulement étant subsonique à l'aval de la grille.

Les résultats des distributions de vitesses et des répartitions de pression statique sur le profil sont très voisins pour les deux codes SCHEMA1 et SCHEMA2. On constate un très bon accord avec l'expérience sur le profil des aubes. Les différences obtenues au niveau du choc sont dues à des effets visqueux. Non pris en compte dans la résolution des équations d'Euler, ils sont à l'origine des différences observées au niveau du point d'impact du choc sur l'extrados et dans la région du bord de fuite des aubes (interaction choc-couche limite).

On relève un faible écart des débits calculés à l'amont et à l'aval.

D'un point de vue numérique, on constate que le niveau de convergence des résultats obtenu avec le code SCHEMA2 est sensiblement moins bon que celui du code SCHEMA1. Les oscillations relevées sur l'évolution de l'angle près de la frontière aval sont à l'origine du médiocre niveau de convergence, sans pour autant influer sur les résultats obtenus dans la grille.

- **Résultats du cas test CTS1-2.**

Les résultats obtenus avec le code SCHEMA1 sont présentés sur les figures 24 à 26 et ceux calculés avec le code SCHEMA2 sont illustrés sur les figures 28 à 30.

Le tableau suivant rapporte les performances de résolution des méthodes pour ce cas test :

CAS TESTS EN REFERENTIEL FIXE : RESULTATS DU CAS CTS1-2				
Codes	SCHEMA1		SCHEMA2	
Performances numériques				
Nombre d'itérations	8573		9000	
Temps CPU (secondes)	1184		966	
Niveau de convergence	10^{-6}		10^{-3}	
Choc à l'extrados				
Position (x/c)	0.6873		0.6806	
Niveau	1.3095		1.3499	
Grandeurs moyennées par le débit				
Frontière	Amont	Aval	Amont	Aval
Débit	0.228	0.225	0.228	0.236
Angle (degrés)	0.	-73.95	0.	-73.84
Mach absolu	0.156	1.08	0.156	1.10
Pression d'arrêt	1.	0.97	1.	1.
Mach axial	0.156	0.299	0.156	0.30

En ce qui concerne l'écoulement aval, on relève sur les cartes d'isovaleurs de pression statique (fig. 26, 30) que le passage d'un régime d'écoulement subsonique (cas CTS1-1) à un régime supersonique provoque l'apparition d'un système d'ondes de choc, directes et réfléchies, issues du bord de fuite. Ces ondes se propagent vers l'aval. La proximité de la frontière par rapport à la grille d'aubes induit un mauvais traitement de la condition aux limites à l'aval du domaine.

Les tracés des isovaleurs de pression (fig. 26 et 30) montrent des différences dans la zone inter-aube relative au choc intense. Celles-ci sont imputables à la manière dont les dissipations sont générées dans chacun des codes (cf. II.3.1, II.3.2, II.6). Une mauvaise adaptation du coefficient de viscosité artificielle $\chi^{(4)}$ (0.005 au lieu de 0.01) conduit à l'obtention d'un résultat erroné (fig.27).

- **Résultats des cas tests CTS2-1 et CTS2-2.**

Le maillage correspondant au calcul structuré du code VOLFINI est présenté sur la figure 33 et les résultats numériques sont présentés sur la figure 36. Par la suite ces résultats numériques servent de comparaison aux différents calculs réalisés avec les codes SCHEMA1 et SCHEMA2.

Ces cas sont particulièrement intéressants car ils illustrent l'interaction entre le maillage et le traitement des conditions aux limites lointaines. En effet, compte tenu des conditions de calcul, il se crée dans l'écoulement un choc oblique intense, issu du bord de fuite extrados, qui se propage suivant la direction méridienne sur plusieurs cordes axiales, tout en étant affaibli par des ondes de détente issues d'une portion de l'extrados.

Ce phénomène a conduit à construire deux maillages, le premier relativement pauvre (fig. 34) et le second plus dense dans la zone du profil et au départ de l'onde de choc (fig. 35). On peut apprécier, à sa juste valeur, la souplesse procurée par les maillages non structurés qui permettent de mailler des topologies anguleuses sans perte de régularité du maillage. Les éléments restent pour la plupart proches du triangle équilatéral. Le domaine physique étant infini la réduction du domaine de calcul à cette topologie ne doit pas introduire de singularité dans l'écoulement.

Le tableau suivant présente une comparaison des performances des méthodes pour ce cas test :

CAS TESTS EN REFERENTIEL FIXE : RESULTATS DU CAS CTS2								
Cas	CTS2-1						CTS2-2	
Code	SCHEMA1	SCHEMA2	VOLFINI			SCHEMA2		
Performances numériques								
Nombre d'itérations	3229	2279	1500			9000		
Temps CPU (secondes)	313	115	113			883		
Niveau de convergence	10^{-6}	10^{-6}	10^{-4}			10^{-3}		
Grandeurs moyennées par le débit								
Frontière	Amont	Aval	Amont	Aval	Amont	Aval	Amont	Aval
Débit	0.205	0.209	0.205	0.209	—	—	0.206	0.211
Angle (degrés)	0.	-76.9	0.	-77.0	0.	-76.46	0.	-76.9
Mach absolu	0.158	1.155	0.116	1.157	0.1162	1.161	0.116	1.15
Pression d'arrêt	1.	0.991	1.	0.920	1.	0.933	1.00	0.91
Mach axial	0.115	0.26	0.116	0.26	0.116	—	0.116	0.26

La convergence a été obtenue pour les deux codes sur le maillage grossier. Le maillage fin n'a pas permis d'obtenir une solution stationnaire vraiment convergée avec le code SCHEMA2. Cependant, les résultats montrent que les répartitions du nombre de Mach (fig. 38, 41) et de pression (fig. 37, 40) sont tout à fait équivalentes et on remarque un très bon accord avec celles obtenues par le code VOLFINI.

Le tracé des isovaleurs de pression (fig. 39, 42, 45) illustre le bon comportement de la condition aux limites de périodicité. Le choc garde une forme compacte sur la plus grande partie de son trajet. Sa finesse dépend néanmoins de la taille des mailles comme on peut le voir sur la figure 45, où le calcul est réalisé avec le code SCHEMA2 sur le maillage fin. Le choc issu du bord de fuite se propage aussi avec une plus grande intensité.

Des calculs effectués sur un domaine disposant d'une frontière aval beaucoup plus proche de la grille, ont montré une distorsion importante de l'écoulement aval. Même dans les maillages présentés ici, la condition aux limites aval ne permet pas de rendre compte correctement du passage de l'information. En effet, pour un écoulement aval de vitesse axiale subsonique trois grandeurs sont extrapolées dans l'écoulement et une information provient de l'aval. A ce niveau, il est possible d'imposer soit la pression, soit une relation de non réflexion. Or le fait que la pression soit uniforme à l'aval est faux. De même, l'écriture de la condition de non réflexion suppose que l'écoulement dans ce domaine soit uniforme, ce qui est également faux, en particulier au passage des discontinuités. Il est nécessaire, d'un point de vue numérique, d'imposer une contre pression aval pour traiter ce type de configuration aérodynamique, ce qui est incompatible avec le régime supersonique de

l'écoulement en ce lieu. Un traitement plus adéquat de la condition aux limites aval a été testé (quatre informations provenant de l'écoulement). Ceci a conduit à l'obtention d'un angle de sortie de grille moins important accompagnée d'une modification de l'inclinaison de l'onde de choc.

- **Résultats généraux du cas test CTS3.**

Ce cas test est particulièrement important, car il permet de valider la modélisation quasi-tridimensionnelle. Une analyse des résultats de référence obtenus avec le code VOLFINI (fig.46), montre l'importance des pertes calculées : 7% en pression d'arrêt.

Les lois de rayon et de taux d'épaisseur de nappe de courant correspondent au cas d'une veine convergente. Leur évolution (fig. 47, 50) peut sembler surprenante, mais ce choix de données a pour seul but de constituer un cas d'école. On remarque qu'elles correspondent au cas d'une veine convergente, et leur prise en compte dans le calcul influence les résultats vis-à-vis de ceux obtenus sur le cas CTS2. En effet, les courbes d'évolution du nombre de Mach, à l'extrados et à l'intrados des aubes, indiquent une plus forte accélération de l'écoulement le long du profil.

Les résultats précédents ont montré un problème de convergence des résidus avec le code SCHEMA2 dans le maillage le plus fin. Ce schéma n'étant jamais dissipatif, ce sont les termes de viscosité artificielle qui amortissent ou propagent les ondes. Ces viscosités rendent nécessaire le choix d'un senseur et l'ajustement de paramètres qui jouent un rôle aussi bien pour la qualité des solutions que sur la convergence vers un état stationnaire. Cette dernière tâche reste ardue mais elle permet quand ces choix sont optimisés d'obtenir des solutions stationnaires avec une grande vitesse de convergence pour un faible temps CPU. Des tests portant sur le choix du senseur montrent que la pression semble être le senseur le plus adapté.

- **Résultats du cas test CTS3-1.**

Les résultats obtenus avec les codes SCHEMA1 et SCHEMA2 sur le cas CTS3-1 montrent que les pertes en pression d'arrêt augmentent au fur et à mesure que l'on s'éloigne axialement du bord de fuite des aubes. Pour la position axiale de $x/c = 2.699$ correspondant à la frontière aval du domaine de calcul utilisé avec le code VOLFINI, on donne dans le tableau ci-après la valeur des pertes obtenues avec les deux codes ainsi que celles résultantes du code VOLFINI :

Code	SCHEMA1	SCHEMA2	VOLFINI
Déviations (degrés)	-76.86	-76.90	-76.42
Mach absolu	1.159	1.152	1.1512
Enthalpie relative 1. - H_i/H_{i1}	0.000139	-0.000282	—
Pression d'arrêt	0.934415	0.923129	0.9238

Les résultats des deux codes SCHEMA1 et SCHEMA2 sont en très bon accord avec ceux donnés par le code VOLFINI. Les répartitions de pression (fig.47 et 50) montrent un meilleur accord du SCHEMA2 avec le code VOLFINI.

Dans les deux codes, les conditions aux limites sur les frontières amont, aval, profil, périodicité sont traitées de manière identique. Sur les figures 49 et 52, on constate que dans ce maillage l'onde de choc issue du bord de fuite de l'aube se propage jusqu'à la frontière aval tout en perdant de son intensité. Pour évaluer l'influence de cette frontière sur l'écoulement on refait un calcul avec le code SCHEMA2 dans le maillage fin.

- **Résultats des cas test CTS3-2.**

La finesse du maillage dans la zone de bord de fuite permet d'obtenir des chocs de faible épaisseur comme on peut le voir sur la figure 55. Le senseur de pression semble aussi jouer sur la qualité des solutions dans le champ comparativement aux résultats obtenus pour le cas test CTS2-2. Dans ce maillage, le choc issu du bord de fuite semble disparaître au voisinage de la frontière aval.

Comme précédemment, pour la position axiale $x/c = 2.699$, on donne la valeur des pertes :

Code	SCHEMA2	VOLFINI
Déviatiion (degrés)	-76.77	-76.42
Mach absolu	1.1479	1.1512
Enthalpie relative 1. - H_i/H_{i1}	-0.0015	—
Pression d'arrêt	0.9216	0.9238

Le problème de convergence des résidus se retrouve dans ce maillage. Un balayage des paramètres de viscosité artificielles $\chi^{(2)}$ et $\chi^{(4)}$ a été effectué sans succès pour ce cas test.

- **Résultats du cas test CTS3-3.**

Le cas test CTS3-3 permet de valider le traitement sous forme faible de la condition de glissement sur le profil des aubes. Ce traitement est mis en oeuvre dans le code SCHEMA2 car il n'implique pas de changement fondamental au niveau de l'algorithme. Son intérêt réside aussi dans des développements ultérieurs pour les calculs d'aéroélasticité. Des études instationnaires réalisées par MORTCHELEWICZ (1989)[67] ont permis la validation du principe des calculs de profils soumis à de faibles déplacements en maillage fixe. La condition aux limites à la paroi du profil est alors remplacée par une condition de soufflage à la paroi.

Les résultats de calcul obtenus sur le maillage grossier sont présentés sur les figures 56 à 58. Ils sont en accord avec les résultats obtenus précédemment. L'histoire de la convergence présente une décroissance irrégulière mais néanmoins correcte des résidus vers l'état stationnaire.

Comme précédemment, pour la position axiale $x/c = 2.699$, on donne la valeur des pertes :

Code	SCHEMA2	VOLFINI
Déviatiion (degrés)	-76.77	-76.42
Mach absolu	1.1479	1.1512
Enthalpie relative 1. - H_i/H_{i1}	-0.0015	—
Pression d'arrêt	0.9216	0.9238

Le tableau suivant présente une comparaison des performances des méthodes pour ce cas test :

CAS TESTS EN REFERENTIEL FIXE : RESULTATS DU CAS CTS3										
Cas	CTS3-1						CTS3-2		CTS3-3	
Code	SCHEMA1	SCHEMA2	VOLFINI			SCHEMA2				
Performances numériques										
Nombres d'itérations	3343	9000	1500			2534		5000		
Temps CPU (secondes)	407	455	117			250		250		
Niveau de convergence	10^{-6}	10^{-3}	10^{-4}			10^{-3}		10^{-3}		
Grandeurs moyennées par le débit										
Frontière	Amont	Aval	Amont	Aval	Amont	Aval	Amont	Aval	Amont	Aval
Débit	0.067	0.053	0.052	0.053	—	—	0.052	0.053	0.0523	0.0527
Angle (degrés)	0.	-77.03	0.	-77.06	0.	-76.42	0.00	-76.97	0.00	-77.05
Mach absolu	0.102	1.153	0.078	1.15	0.079	1.151	0.079	1.149	0.079	1.14
Pression d'arrêt	1.	0.916	1.	0.913	1.	0.924	1.00	0.910	1.	0.908
Mach axial	0.102	0.25	0.078	0.258	0.116	—	0.079	0.259	0.079	0.257

On relève un niveau de pression d'arrêt peu élevé. En outre, les valeurs du débit amont et du nombre de Mach absolu amont du cas CTS3-1 sont sensiblement plus fortes avec le code SCHEMA1 que ceux obtenus avec les autres méthodes et dans les autres cas CTS3-2 et CTS3-3.

Les figures 59 et 60 présentent la localisation du point d'arrêt obtenue avec les résultats des codes sur les deux maillages.

III.3.2.2 - Référentiel mobile.

Ce cas test permet de valider l'ensemble des codes dans une configuration de roue en rotation, en 2,5 D. Dans le cadre des calculs effectués en référentiel relatif mobile, outre les résultats de convergence, de diagrammes de pression et de Mach et de carte de pression statique, grandeur physique conservée d'un référentiel à l'autre, on porte l'attention sur deux résultats supplémentaires :

- ▷ la rothalpie, grandeur qui doit, d'après le second principe de la thermodynamique, rester constante le long des lignes de courant,
- ▷ l'efficacité qui permet de quantifier les pertes relatives dues à la présence éventuelle d'ondes de chocs.

• Résultats généraux du cas test CTS4.

Le maillage du domaine correspondant à ce cas test est présenté à la figure 61.

Pour chacune des configurations traitées, on présente des solutions convergées aussi bien avec le code SCHEMA1 qu'avec le code SCHEMA2.

La courbe de répartition du nombre de Mach le long des profils concerne l'évolution du nombre de Mach relatif.

La solution obtenue par le code VOLFINI pour le cas CTS4-1, en référentiel fixe, servira de solution de référence pour les autres cas tests. Cette solution sera représentée par des ronds sur les courbes de répartition de Mach et de pression. Cette procédure permettra de mesurer l'influence d'une évolution de veine, du changement de référentiel, du sens de la vitesse de rotation, de la mise en incidence de l'aubage.

Les valeurs moyennes pour les résultats relatifs au cas test CTS4 ont été calculées sur les frontières amont et aval du domaine de calcul et sont donc à considérer avec précaution. Précisons aussi que la condition aux limites sur la frontière aval est traitée sous forme faible dans les calculs réalisés avec le code SCHEMA2, c'est-à-dire directement sur la frontière du domaine de calcul. Donc les valeurs présentées dans les tableaux n'ont de sens que si les champs considérés ne présentent pas de différences trop importantes avec les hypothèses permettant d'écrire les conditions aux limites. Par exemple si la frontière aval est proche de l'aubage, une condition de type pression aval uniforme n'est pas appropriée. Il y a interaction entre le champ et la condition aux limites. Les valeurs moyennes s'en trouvent affectées.

Les résultats obtenus par les deux codes SCHEMA1 et SCHEMA2 vis-à-vis des répartitions de pression statique et des distributions de vitesses sont comparables et en très bon accord avec la solution de référence en ce qui concerne les cas tests CTS4-1, -2 et -3.

- **Résultats du cas test CTS4-1.**

Sur la figure 62, on présente les résultats obtenus en référentiel fixe par le code VOLFINI, et sur les figures 63 à 68 ceux obtenus par les codes SCHEMA1 et SCHEMA2. On constate un bon comportement des deux schémas sur les profils des aubes en accord avec les résultats du code VOLFINI et une décroissance très rapide des résidus avec le code SCHEMA2.

Dans le champ, figure 65 et 68, on observe des perturbations des lignes isovaleurs de pression au voisinage de la frontière avec le code SCHEMA2.

Le point d'arrêt de l'écoulement sur l'aube relatif aux conditions aérodynamiques de ce cas test est représenté sur la figure 93.

Le tableau suivant récapitule tous les résultats associés à cette configuration :

CAS TESTS EN REFERENTIEL RELATIF : RESULTATS DU CAS CTS4-1						
Cas	CTS4-1					
Code	SCHEMA1		SCHEMA2		VOLFINI	
Performances numériques						
Nombres d'itérations	4100		1519		2100	
Temps CPU (secondes)	234		74		-	
Niveau de convergence	10^{-6}		10^{-6}		10^{-5}	
Grandeurs moyennées par le débit						
Frontière	Amont	Aval	Amont	Aval	Amont	Aval
Débit	0.044	0.044	0.044	0.045	—	—
Angle (degrés)	43.	-55.62	43.	-54.55	43.	-54.55
Mach absolu	0.467	0.709	0.467	0.700	0.468	0.700
Pression d'arrêt	1.	0.99	1.	1.	1.	1.
Mach axial	0.341	0.40	0.341	0.406	—	—

Les valeurs de l'angle de l'écoulement à l'aval du domaine correspondent pour les codes SCHEMA1 et VOLFINI, aux données utilisées pour l'initialisation. Ce phénomène que l'on observe également sur les autres cas tests CTS4 -2, -3, -4 et -5 illustre la remarque générale sur les valeurs moyennes.

• Cas test CTS4-2 et CTS4-3.

Les figures 69 à 71 et 75 à 77 correspondent aux résultats obtenus avec le code SCHEMA1, et les figures 72 à 74 et 78 à 80 à ceux du code SCHEMA2 pour les cas tests respectifs CTS4-2 et CTS4-3.

On observe une translation de la courbe de répartition de pression (fig. 69, 72), phénomène explicable par le changement de référentiel. La courbe de référence illustre le rapport p/p_{ir} , de la pression statique rapportée à la pression d'arrêt relative, tandis que les résultats numériques obtenus avec les deux codes illustrent l'évolution du rapport p/p_{ia} , de la pression statique rapportée à la pression d'arrêt absolue.

Les répartitions de Mach sur le profil de l'aube (fig. 70, 73) pour le cas test CTS4-2 sont en accord avec le cas de référence mais on relève une légère prise d'incidence négative du profil, imputable à l'évolution de l'angle relatif, l'angle absolu étant imposé aux frontières du domaine. Le même phénomène se produit pour le cas CTS4-3 de grille en compresseur avec une légère prise d'incidence positive du profil (fig.75, 79). Ces phénomènes indiquent un comportement sain des deux méthodes lors de calculs d'aubages mobiles.

Les lignes isovaleurs de pression sont perturbées au voisinage de la frontière aval quelque soit le code utilisé, ce qui est dû à une trop grande proximité de la ligne frontière.

Le tableau reprend les principaux résultats associés aux deux calculs :

CAS TESTS EN REFERENTIEL FIXE : RESULTATS DES CAS CTS4								
Cas	CTS4-2				CTS4-3			
Code	SCHEMA1	SCHEMA2	SCHEMA1	SCHEMA2	SCHEMA1	SCHEMA2	SCHEMA1	SCHEMA2
Performances numériques								
Nombres d'itérations	4100	1400	4006	1698				
Temps CPU (secondes)	232	68.4	232	81.38				
Niveau de convergence	10^{-6}							
Grandeurs moyennées par le débit								
Frontière	Amont	Aval	Amont	Aval	Amont	Aval	Amont	Aval
Débit	0.041	0.0417	0.0412	0.0419	0.0476	0.0465	0.0476	0.0480
Angle relatif (degrés)	42.58	-61.05	42.62	-54.55	43.25	-35.11	43.67	-54.55
Mach relatif	0.461	0.836	0.463	0.7	0.477	0.487	0.473	0.700
Angle absolu (degrés)	54.2	-54.53	54.2	-45.07	0.	-57.16	0.	-65.85
Mach absolu	0.581	0.697	0.583	0.574	0.347	0.733	0.343	0.750
Mach axial	0.340	0.405	0.341	0.406	0.347	0.398	0.341	0.406
Rothalpie	0.97	1.01	0.976	0.975	1.02	0.968	0.988	0.988

Les valeurs de l'angle de l'écoulement obtenu à l'aval du domaine avec le code SCHEMA1, en particulier pour le cas test CTS4-3 semble indiquer une incompatibilité entre la valeur réellement calculée et la condition aux limites. En effet, on relève pour la position $x/c = 1.6$ qui n'est pas l'abscisse d'un point frontière, une valeur d'angle relatif comprise entre -56. et -55 degrés ce qui est un résultat correct.

• Cas test CTS4-4 et CTS4-5.

Les figures 81 à 83 et 87 à 89 correspondent aux résultats obtenus avec le code SCHEMA1, et les figures 84 à 86 et 90 à 92 à ceux du code SCHEMA2, pour les cas tests respectifs CTS4-4 et CTS4-5.

La prise d'incidence positive du profil dans le cas CTS4-5 est franche vis à vis du cas CTS4-4 (fig. 82, 85, 88,91).

Les point d'arrêts correspondant aux cas CTS4-4 et CTS4-5 sont donnés par le code SCHEMA2 et illustrés sur la figure 93. On observe un résultat cohérent avec les évolutions de pression et de Mach sur le profil. Dans le cas CTS4-4 le point d'arrêt est situé à l'intrados de l'aube vis-à-vis du point d'arrêt obtenu en cas fixe CTS4-1, résultat attendu dans le cas d'un fonctionnement en turbine. Dans le cas de CTS4-5 de mise en incidence, le point d'arrêt migre vers l'extrados.

On obtient les résultats suivants pour les deux configurations :

CAS TESTS EN REFERENTIEL FIXE : RESULTATS DES CAS CTS4								
Cas	CTS4-4				CTS4-5			
Code	SCHEMA1	SCHEMA2	SCHEMA1	SCHEMA2	SCHEMA1	SCHEMA2	SCHEMA1	SCHEMA2
Performances numériques								
Nombres d'itérations	4095	1421			4433			1300
Temps CPU (secondes)	233	68.1			256			61.
Niveau de convergence	10^{-6}							
Grandeurs moyennées par le débit								
Frontière	Amont	Aval	Amont	Aval	Amont	Aval	Amont	Aval
Débit	0.038	0.036	0.038	0.036	0.040	0.036	0.039	0.037
Angle relatif (degrés)	41.93	-60.81	41.62	-54.95	49.76	-57.87	49.6	-54.87
Mach relatif	0.436	0.83	0.425	0.709	0.526	0.757	0.51	0.7
Angle absolu (degrés)	54.2	-54.04	54.2	-45.38	54.2	-54.66	54.2	-50.76
Mach absolu	0.55	0.695	0.54	0.58	0.58	0.69	0.57	0.64
Mach axial	0.324	0.408	0.318	0.407	0.34	0.403	0.331	0.406
Rothalpie	0.97	1.01	0.978	0.978	0.988	1.	1.	1.

III.3.3 - Conclusions.

Les résultats obtenus pour ces différents cas tests illustrent le très bon fonctionnement des codes SCHEMA1 et SCHEMA2. Les répartitions de pression statique et les distributions de vitesses sont en très bon accord avec les résultats expérimentaux et ceux du code de calcul VOLFINI servant de référence pour ces application numériques. Néanmoins, les résultats concernant les cas d'écoulements quasi-tridimensionnels en aubages fixes isolés obtenus avec le code SCHEMA2 sont plus précis.

Il se dégage de cette étude de bonnes performances de convergence des solutions pour le code SCHEMA1. Le traitement de la frontière aval (condition de non réflexion), ainsi que la position axiale de cette frontière peuvent influencer les solutions. Toutefois, dès lors que la frontière est suffisamment éloignée des profils d'aubes, les interactions parasites sont négligeables et les résultats obtenus sur les profils sont corrects. Ce phénomène peut être décelé sur le diagramme de l'état de convergence des résultats puisqu'il est représentatif du domaine de calcul complet. La génération de la dissipation du code SCHEMA2 peut expliquer la stagnation de certains états de convergence.

Les propriétés du code SCHEMA1 sont les suivantes :

- ▷ fonctionnement à grand nombre de CFL,
- ▷ pas de réglage de paramètre de viscosité artificielle,
- ▷ bonne convergence des résidus vers un état stationnaire.

Pendant l'objectif de l'étude est la réalisation du couplage entre sous domaines pour la modélisation de l'interaction rotor-stator. Dans ce contexte, le code SCHEMA1 présente le défaut de ne pas calculer de champ sur les frontières. Ce handicap est dû à :

- ▷ la discrétisation de la phase explicite. Etant donné qu'on ne calcule pas de champ sur la frontière au niveau du prédicteur, cette information manque pour le traitement des termes frontières intervenant au correcteur à l'instant $(n + 1/2)\Delta t$.
- ▷ l'introduction des conditions aux limites de type Dirichlet dans la phase implicite,

A l'aval du domaine, un champ bord artificiel est créé en utilisant des extrapolations à l'ordre zéro, ce qui peut induire certaines difficultés :

- ▷ le lieu où le champ est extrapolé peut être situé dans une région de l'écoulement de nature différente de celle du point concerné sur la frontière. Par exemple, le champ extrapolé dans le domaine peut être subsonique alors que le champ du point frontière correspondant devrait être supersonique.
- ▷ l'extrapolation introduit une condition aux limites de type "dérivée dans une direction nulle" semblant induire des cassures sur les lignes d'isovaleurs au voisinage des frontières.

Le code SCHEMA2 ne présente pas ces contraintes. En effet :

- ▷ il est capable de calculer le champ sur les frontières, propriété qui permet de s'affranchir des extrapolations,
- ▷ il est simple d'écriture, car la construction de la phase explicite se réduit à celle du prédicteur, ce qui facilite l'implémentation du terme source $h(w)$ (2.21) pour les calcul en référentiel fixe et celle du terme $h(w)$ (2.25) pour les cas traités en référentiel relatif,
- ▷ il est possible d'obtenir des solutions avec un nombre de CFL élevé, de l'ordre de 2.8 pour un code purement explicite, et avec un gain de 50%, c'est-à-dire un nombre de CFL de l'ordre de 4, dans le cas du code disposant de la phase implicite,
- ▷ il présente un avantage certain au niveau du coût calcul sur le SCHEMA1, ce dernier nécessitant la résolution d'un système linéaire par une méthode de gradient conjugué préconditionné. Cette technique particulièrement efficace reste néanmoins coûteuse en raison du nombre d'itérations variable de l'algorithme en fonction du nombre de CFL utilisé et ce en dépit de l'asservissement du taux de convergence du gradient conjugué vis-à-vis de l'état de convergence du calcul. Dans le code SCHEMA2 la phase implicite est résolue par deux itérations de l'algorithme de Jacobi, ne permettant qu'une augmentation modérée du nombre de CFL mais limitant le temps CPU.

Ce code présente cependant l'inconvénient de nécessiter un réglage des paramètres de viscosité artificielle $\chi^{(2)}$ et $\chi^{(4)}$ pour certains maillages comme on l'a observé lors des différents calculs.

Chapitre IV - CALCULS D'ÉCOULEMENTS EN ÉTAGES.

IV.1 - REDUCTION DU DOMAINE DE CALCUL.	92
IV.1.1 - Principe.	92
IV.1.2 - Conditions d'utilisation.	95
IV.2 - GESTION MULTIDOMAINES.	95
IV.2.1 - Maillage du domaine de calcul d'un aubage isolé.	95
IV.2.2 - Procédure pour les calculs multidomaines.	96
IV.3 - TECHNIQUES DE COMMUNICATION DES INFORMATIONS.	97
IV.3.1 - Déplacement relatif.	97
IV.3.2 - Relations de compatibilité.	98
IV.3.3 - Recouvrement des domaines.	98
IV.4 - ADAPTATION DES TECHNIQUES DE COUPLAGE.	99
IV.4.1 - Présentation de cas tests.	99
IV.4.2 - Adaptation au code SCHEMA1.	100
IV.4.3 - Une solution avec le code SCHEMA2.	102
IV.5 - SIMULATIONS DE L'INTERACTION ROTOR-STATOR.	103
IV.5.1 - Cas numériques.	103
IV.5.2 - Résultats numériques.	106
IV.5.3 - Conclusions.	109

Ce chapitre expose l'adaptation des techniques de couplage de domaines en déplacement relatif dans le cadre des méthodes d'éléments finis, et de leur validation. Après avoir présenté la technique de réduction du domaine de calcul retenue pour la simulation de l'interaction rotor-stator, on traite la gestion multidomaine, la technique de transmission des informations, ainsi que leur adaptation au cas des maillages non-structurés réalisée dans le cadre de cette étude. Des applications numériques industrielles concluent ce chapitre.

IV.1 - REDUCTION DU DOMAINE DE CALCUL.

On considère un étage comportant N_1 aubes dans la roue amont et N_2 aubes dans la roue aval. Pour des nombres N_1 et N_2 premiers entre eux, la périodicité spatiale n'existe que pour l'étage complet. La technique présentée par FOURMAUX et al. (1987)[30], visant à retrouver une périodicité spatiale de l'écoulement sur un nombre réduit de canaux de chaque roue et éviter le calcul sur l'étage complet, a été retenue. On rappelle ici son principe et ses conditions d'utilisations.

IV.1.1 - Principe.

On choisit tout d'abord deux entiers K_1 et K_2 aussi petits que possible, mais tels que :

$$\frac{K_1}{K_2} \simeq \frac{N_1}{N_2} . \quad (4.1)$$

K_1 et K_2 représentent les nombres de canaux effectivement calculés respectivement dans la roue amont et dans la roue aval.

La démarche suivie pour le traitement des conditions aux limites du domaine de calcul de ces groupes de canaux en déplacement relatif est la suivante. Une condition de périodicité spatiale instantanée sur les frontières azimutales du domaine est appliquée. Sur la frontière amont du domaine du premier groupe de canaux et sur la frontière aval du domaine du second groupe de canaux, des conditions d'injection et de sortie sont utilisées, comme à l'habitude, dans le cas des aubages isolés. La liaison des deux groupes de canaux sur l'interface commune des domaines fait l'objet du présent développement.

Les extensions azimutales réelles de chaque groupe de canaux sont :

$$e_1 = 2.\pi \frac{K_1}{N_1} , \quad (4.2)$$

$$e_2 = 2.\pi \frac{K_2}{N_2} . \quad (4.3)$$

On ne peut appliquer une condition de continuité exacte que si ces extensions sont égales. En général, cette condition n'est pas vérifiée.

On définit alors une extension azimutale moyenne e_c , correspondant à l'extension azimutale d'une frontière fictive homologue aux frontières aval et amont respectives des roues amont et aval, par :

$$e_c = \frac{1}{2}(e_1 + e_2) , \quad (4.4)$$

ainsi que des coefficients d'homothétie λ_1 et λ_2 :

$$\lambda_1 = \frac{e_c}{e_1}, \quad \lambda_2 = \frac{e_c}{e_2} \quad . \quad (4.5)$$

On observe que :

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{e_2}{e_1} = \frac{K_2}{N_2} \cdot \frac{N_1}{K_1} \simeq 1 \quad . \quad (4.6)$$

Grâce au coefficient d'homothétie λ_1 les informations sur la frontière aval d'extension e_1 du domaine de la roue amont peuvent être transmises sur une frontière fictive d'extension ec_1 , ec_1 étant l'extension ec dans le référentiel de la roue. Il en va de même pour la seconde roue.

Pour prendre en compte le déplacement relatif des roues, on considère que les frontières fictives d'extension ec_1 et ec_2 tournent aux vitesses de rotation angulaires respectives ω_1 de la roue amont et ω_2 de la roue aval.

On remarque que si $\frac{K_2}{N_2} = \frac{K_1}{N_1}$, c'est-à-dire, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, la continuité de l'écoulement est parfaitement respectée entre les deux roues.

En général, $\frac{K_2}{N_2} \neq \frac{K_1}{N_1}$. Ceci conduit à faire deux remarques :

- ▷ la première concerne les gradients azimutaux : ils sont dilatés ou contractés par le biais des homothéties.
- ▷ la seconde, moins évidente, est relative aux effets instationnaires. En effet, le temps T_t réel que met un point d'une roue pour revenir à la même position par rapport à l'autre roue est donné par :

$$T_t = \frac{2\pi}{|\omega_2 - \omega_1|} \quad . \quad (4.7)$$

Dans le repère de chaque roue, la période temporelle réelle est donnée par :

$$T_1 = \frac{T_t}{N_2} \quad , \quad (4.8)$$

$$T_2 = \frac{T_t}{N_1} \quad . \quad (4.9)$$

Compte tenu de ce qui précède, le temps apparent mis par un point du premier groupe de canaux pour revenir à la même position par rapport au second groupe de canaux est donné par :

$$T_{ref} = \frac{e_c}{|\omega_2 - \omega_1|} \quad , \quad (4.10)$$

et dans le repère de chaque roue la période temporelle apparente des groupe de canaux est définie par :

$$T_1^a = \frac{T_{ref}}{K_2} \quad , \quad (4.11)$$

$$T_2^a = \frac{T_{ref}}{K_1} \quad , \quad (4.12)$$

Les temps T_1^a et T_2^a sont voisins, compte tenu de la relation (4.1). A partir des relations précédentes on peut écrire :

$$T_1^a = \frac{T_{ref}}{K_2} = \frac{e_c}{|\omega_2 - \omega_1|} \cdot \frac{1}{K_2} \quad , \quad (4.13)$$

$$|\omega_2 - \omega_1| = \frac{2\pi}{T_t} = \frac{2\pi}{T_1 \cdot N_2} \quad (4.14)$$

On déduit de ces deux expressions que :

$$T_1^a = \frac{e_c \cdot T_1 \cdot N_2}{2\pi \cdot K_2} = \frac{e_c}{e_2} \cdot T_1 = \lambda_2 \cdot T_1 \quad (4.15)$$

De même on obtient :

$$T_2^a = \lambda_1 \cdot T_2 \quad (4.16)$$

On constate que les homothéties d'espaces sont associées à des homothéties temporelles. On note à nouveau que ces homothéties disparaissent lorsque les coefficients λ_1, λ_2 sont unitaires.

Soient deux points d'azimut θ_1 et θ_2 sur des lignes homologues des domaines respectifs des roues amont et aval. Ces points sont mis en relation avec des points d'azimut Θ_1 et Θ_2 situés sur la frontière fictive d'extension commune e_c , grâce aux relations :

$$\Theta_1 = \lambda_1 \theta_1 \quad (4.17)$$

$$\Theta_2 = \lambda_2 \theta_2 \quad (4.18)$$

Le passage du premier groupe de canaux devant le deuxième vis-à-vis de la frontière fictive d'extension commune e_c , se fait en un temps T_{ref} . Ceci permet de conserver une vitesse de rotation angulaire Ω qui a pour valeur :

$$\Omega = \omega_2 - \omega_1 \quad (4.19)$$

Les points situés de part et d'autre de cette frontière fictive sont donc reliés, à l'instant t , par la relation cinématique :

$$\Theta_1 = \Theta_2 + \Omega t \quad (4.20)$$

La description de cette technique appelle quelques commentaires supplémentaires :

▷ flux de masse (débit)

A un instant t donné, le débit sortant du groupe de canaux de la roue amont peut être estimé par :

$$\int_{\theta}^{\theta+e_1} \rho \cdot u \cdot b \cdot r \cdot d\theta = \overline{\rho \cdot u} \cdot e_1 \cdot b \cdot r \quad (4.21)$$

soient par canal la quantité $\overline{\rho \cdot u} \cdot \frac{e_1 \cdot b \cdot r}{K_1}$ et pour la roue entière par

$$\overline{\rho \cdot u} \cdot \frac{e_1 \cdot b \cdot r \cdot N_1}{K_1} = \overline{\rho \cdot u} \cdot 2\pi \cdot b \cdot r \quad (4.22)$$

La quantité de mouvement méridienne moyenne étant $\overline{\rho \cdot u}$, le débit passant dans la frontière d'extension e_c vaut $\overline{\rho \cdot u} \cdot b \cdot r \cdot e_c$ et le débit entrant dans le second groupe de canaux est donné par $\overline{\rho \cdot u} \cdot b \cdot r \cdot e_2$, soit par canal une quantité $\overline{\rho \cdot u} \cdot \frac{b \cdot r \cdot e_2}{K_2}$. Pour la seconde roue, on obtient :

$$\overline{\rho \cdot u} \cdot \frac{e_2 \cdot b \cdot r \cdot N_2}{K_2} = \overline{\rho \cdot u} \cdot 2\pi \cdot b \cdot r \quad (4.23)$$

Ceci montre que de façon instantanée, le débit sortant de la première roue rentre dans la seconde, résultat qui restera vrai, a fortiori, en moyenne dans le temps.

- ▷ flux d'enthalpie.

Le raisonnement concernant le flux de masse (débit), s'applique également au flux d'enthalpie. En menant le calcul sur des nombres réduits de canaux, on obtiendra donc en moyenne temporelle les mêmes charges d'aubages qu'en effectuant le calcul sur l'étage complet.

IV.1.2 - Conditions d'utilisation.

Les relations précédentes conduisent aux remarques suivantes concernant leur utilisation :

- ▷ la mise en oeuvre de cette technique suppose que les champs en amont ou en aval de la roue ne sont pas soumis à de fortes distorsions,
- ▷ les maillages de chaque domaine peuvent s'obtenir par translation d'un maillage de base réalisé une fois pour toute,
- ▷ dans le cas où l'équation (4.1) est exacte, on retrouve une périodicité spatio-temporelle sans déformation d'espace ou de temps,
- ▷ comme les pas relatifs de chaque domaine de calculs ne concordent pas en général, des problèmes surgissent pour le tracé des lignes d'isovaleurs de pression. En effet à l'interface, on ne peut plus mettre en évidence la bonne continuité de ces lignes. Les exemples numériques présentés dans ce mémoire, correspondent à des configurations admettant des modélisations réduites exactes.
- ▷ cette méthode reste utilisable dans le cas de calcul de turbines multi-étages.

IV.2 - GESTION MULTIDOMAIN.

L'étude du comportement aérodynamique de deux ou plusieurs aubages en interaction. impose une adaptation de l'architecture originelle de la méthode utilisée jusqu'à présent pour un aubage isolé dont on rappelle ici brièvement la structure du fichier de maillage du domaine de calcul.

IV.2.1 - Maillage du domaine de calcul d'un aubage isolé.

Le fichier du maillage non structuré du domaine de calcul d'un aubage est construit de la manière suivante :

- ▷ données relatives aux noeuds :

titre
nombre de noeuds
coordonnées x, y des noeuds.

- ▷ données relatives aux éléments triangulaires :

titre
nombre de groupes de couleur (permettant de forcer la vectorisation sur le CRAY)

Pour chacun des groupes :

titre, quatre labels

nombre d'éléments du groupe, type du groupe

liste des sommets de chaque élément du groupe.

▷ données relatives aux éléments "deux noeuds" :

titre

nombre de groupes

Pour chacun des groupes :

titre, quatre labels

nombre d'éléments du groupe, type du groupe

liste des sommets de chaque élément du groupe.

▷ données relatives aux éléments "un noeud" :

titre

nombre de groupes

Pour chacun des groupes :

titre, quatre labels

nombre d'éléments du groupe, type du groupe

liste des sommets de chaque élément du groupe.

Les éléments "deux noeuds" permettent le traitement des conditions aux limites de manière automatique, grâce aux types et aux labels. Ils sont orientés, dans le cas où ils représentent les frontières physiques du domaine. L'utilisation des éléments "deux noeuds" a été étendue à toute information liant deux noeuds dans le domaine, comme par exemple la périodicité, la liaison noeud frontière / noeud interne, pour les frontières amont ou aval(extrapolation).

Chaque groupe d'éléments "un noeud" décrit une ligne du domaine. Cette information permet de calculer des grandeurs significatives aux noeuds des frontières (nombre de Mach, distribution de pression ...). Ils ne sont pas utilisés pour le traitement des conditions aux limites.

Compte tenu des qualités intrinsèques des maillages non structurés, la gestion multidomaine se réduit ici à la gestion de maillages de domaines indépendants, correspondant chacun à un aubage.

IV.2.2 - Procédure pour les calculs multidomaines.

Compte tenu des qualités intrinsèques des maillages non structurés, la gestion multidomaine se réduit ici à la gestion de maillages de domaines indépendants, correspondant chacun à un aubage. La procédure permettant la réalisation de calculs d'interactions rotor-stator avec un nombre arbitraire de domaines, est la suivante :

- ▷ le maillage de chaque domaine est réalisé,
- ▷ les maillages sont lus séquentiellement et stockés "bout à bout" dans les mêmes tableaux.
- ▷ un tableau de gestion IGES relatif aux domaines est créé.

Le fichier de maillage de chaque domaine est adapté en conséquence. Ainsi, pour un domaine donné, numéroté *idom*, les adresses des diverses informations du maillage sont gérées comme suit :

▷ les noeuds

$IGES(idom, 1)$ = premier noeud du domaine,
 $IGES(idom, 2)$ = dernier noeud du domaine.

▷ les éléments triangulaires

$IGES(idom, 3)$ = premier groupe du domaine,
 $IGES(idom, 4)$ = dernier groupe du domaine,
 $IGES(idom, 5)$ = premier élément du domaine,
 $IGES(idom, 6)$ = dernier élément du domaine.

▷ les éléments "deux noeuds"

$IGES(idom, 7)$ = premier groupe du domaine,
 $IGES(idom, 8)$ = dernier groupe du domaine,
 $IGES(idom, 9)$ = premier élément du domaine,
 $IGES(idom, 10)$ = dernier élément du domaine.

▷ les éléments "un noeud"

$IGES(idom, 11)$ = premier groupe du domaine,
 $IGES(idom, 12)$ = dernier groupe du domaine,
 $IGES(idom, 13)$ = premier élément du domaine,
 $IGES(idom, 14)$ = dernier élément du domaine.

Cette gestion permet d'identifier les domaines et les différents éléments du maillage. On fournit pour chaque domaine les données relatives à son initialisation. Des types particuliers sont introduits pour permettre le traitement automatique des relations de couplage entre domaines.

Les organigrammes des codes SCHEMA1 et SCHEMA2 sont modifiés en conséquence (fig. 94 à 103). On constate que l'adaptation de cette technique ne bouleverse pas l'architecture des codes.

IV.3 - TECHNIQUES DE COMMUNICATION DES INFORMATIONS.

Le but de ce paragraphe est de présenter les deux techniques retenues dans cette étude pour réaliser la transmission d'informations entre deux domaines en déplacement relatif : le recouvrement partiel des domaines et les relations de compatibilité pour des domaines géométriquement contigus. Le point commun de ces méthodes est d'effectuer ce transfert entre deux lignes homologues de chaque domaine successif.

IV.3.1 - Déplacement relatif.

Le système d'équations est exprimé en variables et référentiel relatifs. Cette formulation permet de considérer les maillages fixes au cours du temps.

La simulation du déplacement relatif des aubages est réalisée au niveau des lignes homologues à deux domaines successifs. A chaque instant, et pour chaque point de la ligne aval du premier

domaine, on associe un point de la ligne homologue de l'amont du deuxième domaine, en tenant compte des relations de transformation présentées au paragraphe IV.1.

Soit C_θ le rayon moyen de la nappe de courant. Le passage d'un point y_1 de la roue amont au point y_2 de la roue aval sur deux lignes homologues est obtenu par les relations suivantes :

$$y_1 = C_\theta \theta_1 \quad , \quad (4.24)$$

$$\Theta_1 = \lambda_1 \theta_1 \quad , \quad (4.25)$$

$$\Theta_1 + \omega_1 t = \Theta_2 + \omega_2 t \quad , \quad (4.26)$$

$$\Theta_2 = \lambda_2 \theta_2 \quad , \quad (4.27)$$

$$y_2 = C_\theta \theta_2 \quad , \quad (4.28)$$

où λ_1, λ_2 , sont définis par la relation (4.5).

En général, il n'y a pas coïncidence, à tout instant, des noeuds sur ces lignes entre deux domaines : pour un noeud du maillage situé sur la ligne du premier domaine, il n'est généralement pas possible d'associer un noeud du maillage sur la ligne du deuxième domaine. Ceci conduit à l'utilisation des interpolations linéaires ou des splines d'ordre 2 [85] pour obtenir les informations au point correspondant.

IV.3.2 - Relations de compatibilité.

On utilise cette technique lorsque les domaines successifs sont contigus. Son principe est illustré aux figures 97 et 98. La prise en compte du couplage sur la frontière commune Γ de deux domaines D1 et D2 peut se faire au moyen des relations de compatibilité développées au chapitre II. Celles-ci sont écrites en variables absolues et on tient compte du mouvement relatif des deux domaines en utilisant les relations (4.24) à (4.15). Une technique de lissage par des splines d'ordre 2 peut être utilisée pour améliorer les résultats.

Les différentes relations à utiliser en fonction de la valeur du nombre de Mach normal relatif M_{rn1} sont :

- ▷ $M_{rn1} \geq 1$: (2.52), (2.53), (2.54), (2.55),
- ▷ $0 \leq M_{rn1} < 1$: (2.52), (2.53), (2.54), (2.56),
- ▷ $-1 \leq M_{rn1} < 0$: (2.56), (2.57), (2.58), (2.52),
- ▷ $M_{rn1} < -1$: (2.56), (2.57), (2.58), (2.59).

IV.3.3 - Recouvrement des domaines.

Soient deux domaines D1 et D2 se recouvrant, Γ_1 et Γ_2 les frontières de D1 dans D2 et de D2 dans D1 (fig. 96). La transmission des informations entre les domaines D1 et D2 peut se réaliser en

imposant le champ sur la frontière Γ_1 de D1 à partir du champ calculé dans D2, d'une part, et en imposant le champ sur la frontière Γ_2 de D2 à partir du champ calculé dans D1, d'autre part. Ce transfert d'informations se fait sur les champs exprimés en variables absolues.

Pour chaque noeud de la frontière du domaine D1, les relations (4.24) à (4.28) permettent d'associer un point du domaine D2 (qui n'est pas nécessairement un noeud du maillage). On doit alors rechercher l'élément triangulaire auquel ce point appartient : les trois fonctions barycentriques définies par ce point doivent être comprises entre 0 et 1. Le champ est calculé par interpolation linéaire, en utilisant la valeur des fonctions barycentriques, sur cet élément.

La mise en oeuvre de cette méthode peut être simplifiée en créant une ligne fictive interne correspondant à la frontière Γ_1 du domaine D1 dans D2 et réciproquement. La méthode exposée se résume alors à la définition correcte d'une interpolation. La technique élémentaire consiste à utiliser des interpolations linéaires. Une technique de lissage par des splines d'ordre 2 permet d'améliorer les résultats. Ce traitement peut être utilisé pour traiter le cas de l'interaction rotor-stator, en tenant compte des relations (4.24) et (4.28).

Cette technique suppose d'obtenir des maillages successifs se couvrant partiellement et nécessite la création de lignes fictives internes aux domaines. Ceci est facilement réalisable avec les maillages non structurés.

IV.4 - ADAPTATION DES TECHNIQUES DE COUPLAGE.

IV.4.1 - Présentation de cas tests.



Les cas tests présentés ont pour but de tester les techniques de couplage exposées aux paragraphes précédents.

- ▷ CTINS1 : il s'agit d'un étage de turbine constitué du distributeur du cas CTS1 et d'une roue mobile. La configuration géométrique retenue correspond au cas d'une configuration réduite 1-1 (un canal stator, et un canal rotor). Les conditions amont et aval de l'écoulement relatif sont calculées pour l'adaptation du rotor. Les lois d'évolution de veine sont constantes. Le système d'équations à résoudre est bidimensionnel et donc conservatif. Des simulations utilisant d'une part la technique des relations de compatibilité (cas test CTINS1-1) et d'autre part la technique de recouvrement partiel des domaines (cas test CTINS1-2), ont été effectuées.

Le tableau ci-après reprend les caractéristiques de ces cas tests.

Conditions aérodynamiques de la frontière amont de l'étage	
Mach absolu	0.1566
Angle absolu (degrés)	0.
Conditions aérodynamiques à l'interface de l'étage	
Mach absolu	0.85
Angle absolu (degrés)	-74.1266
Mach relatif	0.298
Angle relatif (degrés)	-38.8
Conditions aérodynamiques de la frontière aval de l'étage	
Mach relatif	0.4104
Angle relatif (degrés)	53.6
Angle absolu (degrés)	-55.54
Condition limite	non réflexion (2.56)
forme	forte

- ▷ CTS5 : il s'agit d'une configuration aérodynamique stator-stator où deux profils identiques, biparaboliques de 6% d'épaisseur, sont placés l'un derrière l'autre. Les calculs sont réalisés pour un écoulement externe sans incidence. Les cas subsonique (nombre de Mach amont de 0.7) et supersonique (nombre de Mach amont de 1.2) sont étudiés. Dans ce cas test, purement bidimensionnel et stationnaire, on ne s'intéresse qu'aux effets provoqués par l'introduction du couplage. Le cas CTS5-1 est réalisé sur une configuration monodomaine (fig. 107), et permet l'obtention d'une solution de référence. Le cas CTS5-2 est relatif au calcul sur une configuration multidomaine. Le domaine est partagé artificiellement en deux. Une frontière commune (fig. 108) permet de tester l'application des relations de compatibilité.

IV.4.2 - Adaptation au code SCHEMA1.

Ce paragraphe présente l'adaptation des deux techniques de couplage au code SCHEMA1. Une validation est effectuée sur le cas test CTINS1. Les difficultés introduites par les relations de compatibilité sont approfondies sur le cas test CTS5.

- **Adaptation de la technique des relations de compatibilité.**

L'introduction des relations de couplage soulève le problème des conditions aux limites pour la phase implicite. Si on remarque que les relations de couplage sont non linéaires, on en déduit qu'on ne peut pas espérer coupler de manière implicite les deux domaines. Par suite, on est amené à les considérer comme indépendants, ce qui conduit à utiliser pour ce schéma des conditions aux limites de type Dirichlet dans la phase implicite sur cette frontière. L'organigramme correspondant à l'adaptation pour le code SCHEMA1 est présenté aux figures 94, 99, 103.

Le cas test CTINS1-1 permet de valider cette solution. Les deux maillages réalisés pour le stator et le rotor (fig. 104), comportent respectivement 2483 noeuds et 5513 noeuds. Le résultat obtenu sur le champ des isovaleurs de pression illustre deux phénomènes :

- ▷ l'onde de choc, issue du bord de fuite extrados du stator, ne se propage pas dans le domaine du rotor,
- ▷ il apparaît, sur certaines lignes d'isovaleurs, des cassures sur la frontière de couplage.

Cette dernière observation peut découler du traitement numérique que l'on doit effectuer avec ce schéma pour réaliser la technique de couplage. En effet, il est nécessaire de disposer d'un champ bord prédit par le schéma sur les frontières de couplage pour pouvoir appliquer les relations de compatibilité. Or, dans le code SCHEMA1, on ne calcule pas le champ sur les frontières au niveau de la phase explicite du schéma, ce qui impose, par ailleurs, l'utilisation de conditions aux limites de type Dirichlet dans la phase implicite du schéma. Un champ bord artificiel est créé en utilisant des extrapolations à l'ordre zéro (fig. 105). Ce traitement se heurte à deux écueils :

- ▷ le lieu où le champ est extrapolé peut être situé dans une région de l'écoulement de nature différente de celle du point concerné sur la frontière. Par exemple, le champ extrapolé dans le domaine peut être subsonique alors que le champ du point frontière correspondant devrait être supersonique.
- ▷ l'extrapolation introduit une condition aux limites de type "dérivée dans une direction nulle" semblant induire des cassures sur les lignes d'isovaleurs au voisinage des frontières.

Pour approfondir la compréhension de ces phénomènes visibles sur les frontières de couplage, on effectue des calculs sur le cas test CTS5. Il s'agit d'un cas test purement stationnaire, donc indépendant des effets induits par la rotation. Des solutions de référence correspondant aux cas tests CTS5-1, monodomaine, sont obtenues en régime subsonique et supersonique (fig. 109 et 110). Les calculs sont également menés en configuration multidomaine dans le cas test CTS5-2. On n'observe pas de phénomènes particuliers sur la ligne de couplage dans le cas d'un écoulement subsonique. Par contre, les cassures observées lors du cas test CTINS1-1 réapparaissent (fig. 110), dans le cas d'un écoulement supersonique (fig. 110) Ce phénomène est donc indépendant du problème des roues en rotation, et est directement lié aux extrapolations à l'ordre zéro.

Les résultats montrent que la technique associant les relations de compatibilité aux extrapolations à l'ordre zéro, ne peut être envisagée pour le couplage de domaines avec le code SCHEMA1. On propose une autre solution liée à l'utilisation d'une technique de recouvrement.

• Adaptation de la technique de recouvrement.

Comme précédemment, les conditions de type Dirichlet sont conservées sur les frontières de couplage dans la phase implicite. La transmission des informations entre deux domaines successifs est réalisée après la phase implicite. L'organigramme correspondant à l'adaptation pour le code SCHEMA1 est présenté aux figures 94, 100, 103.

Le cas test CTINS1-2 permet d'évaluer cette technique. La topologie du maillage réalisé est présentée à la figure 111. On peut noter l'introduction de lignes fictives internes aux domaines et correspondant aux traces respectives des frontières aval et amont des domaines, dans le but de simplifier les problèmes liés à l'interpolation. Une vue partielle de la zone de recouvrement pour chacun des maillages est illustrée à la figure 112, le maillage global est présenté à la figure 113.

Cette simulation est purement bidimensionnelle (pas de lois d'évolution de veine), le système des équations d'Euler est dans ce cas conservatif.

Les tracés des isovaleurs de pression (fig. 114, 115) permet d'observer le fonctionnement de la méthode pour la transmission de l'information. On constate, en particulier sur la figure 115 dans

la zone de recouvrement, que les lignes d'isovaleurs se recouvrent partiellement. Sur la région haute du domaine, il n'y a pas de prolongement réciproque de ces lignes. Des essais d'enrichissement de maillage n'ont pas permis d'améliorer ce résultat. Comme précédemment, les résultats obtenus avec le code SCHEMA1 ne sont pas satisfaisants.

Les deux techniques de couplage proposées conduisent avec le code SCHEMA1 à une mauvaise prédiction du couplage entre deux roues. Le code SCHEMA2 contrairement au précédent permet de calculer directement à chaque étape de la phase explicite un champ jusqu'à la frontière du domaine de calcul. Ce code qui résout les équations d'Euler instationnaires quasi-tridimensionnelles a été validé en même temps que le SCHEMA1 dans le cas d'aubages isolés, fixes ou mobiles. On l'utilise maintenant pour le cas de calcul d'aubages multiples avec couplage des domaines.

IV.4.3 - Une solution avec le code SCHEMA2.

Le schéma de type Jameson présente, par sa phase explicite, l'avantage de pouvoir calculer directement un champ frontière prédit. Ceci permet d'éviter les extrapolations à l'ordre zéro. L'organigramme correspondant à l'adaptation pour le code SCHEMA2 explicite est présenté aux figures 95, 101, 103. Seule la technique des relations de compatibilité a été testée avec ce code (fig. 98). Le schéma de Runge-Kutta à N pas utilisé ($N > 2$) est précis à l'ordre 2 en temps pour des systèmes non linéaires, et à l'ordre N en temps pour des systèmes linéaires. Chaque pas de Runge-Kutta correspond en pratique à des solutions calculées à des instants intermédiaires définis pour le cas linéaire par :

$$t_l = (n + \frac{1}{N-l+1})\Delta t \quad , l = 1, \dots, N \quad . \quad (4.29)$$

La définition de ces instants permet la prise en compte plus rigoureuse du déplacement de la roue au cours d'un pas de temps.

- **Application au cas test CTSINS1-1.**

La version explicite du code SCHEMA2, désignée SCHEMA2-1, est testée sur le cas CTINS1-1. Le tracé des lignes d'isovaleurs de pression, représenté à la figure 116, montre que les informations sont correctement transmises d'un domaine à l'autre. En particulier, sur la ligne de couplage entre les domaines, il n'apparaît plus de cassures. Les lignes se prolongent correctement de part et d'autre de cette frontière. Les calculs réalisés permettent de valider ce code explicite. On rappelle que les schémas de type JAMESON explicites possèdent des critères de stabilité moins restrictifs ($CFL < 2.8$) que ceux d'un schéma explicite tel que celui utilisé dans le code SCHEMA1 ($CFL \leq 1$) et peuvent donc être envisagés pour des simulations numériques instationnaires. Par ailleurs, la phase implicite telle qu'elle était introduite dans le code SCHEMA2 pour des calculs d'écoulements en aubages isolés, servait essentiellement à améliorer la vitesse de convergence vers un état stationnaire.

- **Implicitation du code.**

Une étude a été réalisée pour implicitiser le code SCHEMA2 (version désignée SCHEMA2-2) en vue de calculs instationnaires. Les solutions numériques obtenues avec ce code en introduisant la phase implicite à l'issue de chaque pas de l'algorithme de Runge Kutta sont comparables à celles obtenues avec le code explicite SCHEMA2-1. Dans la phase implicite, des conditions aux limites

de type Neumann sont induites sur les frontières de couplage. Les relations de compatibilité entre deux domaines successifs sont alors appliquées après la phase implicite. L'algorithme de résolution du code SCHEMA2-2 illustré sur les organigrammes des figures 95, 102, 103, a été mis en oeuvre. Une application numérique de ce code relative à un calcul multi-aubages est présentée dans la suite de l'exposé.

IV.5 - SIMULATIONS DE L'INTERACTION ROTOR-STATOR.

IV.5.1 - Cas numériques.

Deux cas tests illustrant les possibilités des codes SCHEMA2-1 explicite et SCHEMA2-2 implicite sont présentés :

▷ CTINS2 :

Il s'agit d'un étage de turbine transsonique haute pression. Les deux aubages comportent 30 et 50 aubes. Le domaine de calcul réduit comporte 3 aubes pour le stator et 5 aubes pour le rotor.

On dispose de résultats numériques, obtenus par un code désigné STRU. Il s'agit d'une méthode numérique de type volumes finis développée pour la résolution en maillages structurés (de type H) des équations d'Euler quasi-tridimensionnelles, instationnaires, exprimées en référentiel relatif.

La géométrie exacte des profils n'est pas prise en compte, pour permettre la réalisation des maillages en H pour le code STRU (fig.117). De plus, pour traiter le même écoulement dans les deux codes (structuré et non structuré), la modélisation introduite dans le code STRU pour simuler un bord d'attaque arrondi est abandonnée. La condition de glissement est appliquée sur tout le profil. Chaque maille rectangulaire du maillage structuré est découpée en deux triangles afin d'obtenir un maillage non structuré (fig. 118). Ce découpage est effectué suivant la plus petite des diagonales de la maille rectangulaire. Cette technique permet d'obtenir un maillage régulier.

Le modèle d'écoulement est quasi-tridimensionnel et les lois d'évolutions de veine proviennent d'un calcul méridien. Les calculs non structurés sont réalisés avec le code explicite SCHEMA2-1, Pour valider les résultats instationnaires obtenus par le code non structuré, on les compare à ceux obtenus par le code STRU, calculés aux mêmes instants par les deux codes

▷ CTINS3-1 :

Ce cas permet de tester le code explicite SCHEMA2-1 vis-à-vis du passage d'une onde de choc au travers de la frontière de couplage dans le cas d'une turbine haute pression pour achever la validation précédente. Le domaine de calcul réduit comporte 1 aube pour le stator et 1 aube pour le rotor. Le modèle d'écoulement est bidimensionnel, dans ce cas.

▷ CTINS3-2 :

Ce cas illustre la capacité de la méthode à calculer des écoulements dans les turbines multi-aubages, en interaction rotor-stator. On traite le cas de trois aubages comportant respectivement 40, 80 et 90 aubes.

Le domaine de calcul réduit comporte 1 aube pour le stator amont, 2 aubes pour le rotor, et 2 aubes pour le stator aval .

L'écoulement est quasi-tridimensionnel et les lois d'évolutions de veine proviennent d'un calcul méridien. Les calculs sont réalisés avec le code implicite SCHEMA2-2.

Le tableau suivant reprend les caractéristiques de chaque cas test.

CAS TESTS INTATIONNAIRES			
Cas	CTINS2	CTINS3-1	CTINS3-2
Code	STRU	SCHEMA2-1	SCHEMA2-2
Conditions de calcul			
Nombre d'aubages	2		3
Nombre de canaux	3 x 5	1 x 1	1 x 2 x 2
Maillage	H	Non structurés	
Nombre de noeuds	3148 x 4802	2245 x 2655	5416 x 2267 x 1499
Nombre de CFL	0.7		4
Conditions aérodynamiques générales			
γ	1.31	1.3061	
efficacité	—	100 %	
évolution de veine	méridien	non	méridien
$\chi^{(2)}$	—	0.25	
$\chi^{(4)}$	—	0.005	0.01
Conditions aérodynamiques de la frontière amont de l'étage			
Mach absolu	0.21	0.1099	
Angle absolu (degrés)	0.		
Conditions aérodynamiques à l'interface 1 de l'étage			
Angle absolu (degrés)	-67.	-76.	-75.03
Mach relatif	0.657	1.	0.469
Angle relatif (degrés)	-43.88	-65.	-56.16
Résultat du triangle de Mach : entrainement de la roue mobile			
Vitesse de rotation (adimensionnée)	5.36	2.003	1.68
Mach absolu	1.211	1.73	1.218
Conditions aérodynamiques de la frontière aval des étages (ou à l'interface 2 pour CTS3-2)			
Mach absolu	0.593	0.699	0.46
Mach relatif	0.909	1.45	1.019
Angle relatif (degrés)	49.5	72.58	72.58
Angle absolu (degrés)	5.466	51.	49.29
Condition limite	non réflexion (2.57)		—
forme	—	forte	—
Conditions aérodynamiques de la frontière aval 3 (pour CTS3-2)			
Mach absolu	—		0.598
Angle absolu (degrés)	—		-63.28
Condition limite	—		non réflexion (2.57)
forme	—		forte

Le développement des codes a été mené sur un ordinateur APOLLO DN 10000. Les résultats présentés ici ont été obtenus sur un ordinateur CRAY/YMP.

IV.5.2 - Résultats numériques.

Parmi toutes les informations qu'il est possible d'exploiter dans le cas de calculs menés en interaction rotor-stator, on s'intéresse plus particulièrement aux résultats suivants :

- ▷ l'évolution du nombre de Mach à l'amont du domaine de l'étage. Pour cela on utilise une "sonde" qui correspond à un noeud du maillage. Les turbines "haute pression" présentées dans cette étude, comportent des distributeurs, présentant des angles de sortie d'aube très importants vis-à-vis de l'axe méridien de l'écoulement et dans lesquels l'écoulement est souvent bloqué. Les instationnarités ne peuvent donc pas remonter le canal et perturber l'écoulement alimentant le domaine. On s'attend à ce que la valeur du nombre de Mach se stabilise au bout d'un certain nombre d'itérations de calcul. Son évolution est donc révélatrice des performances des schémas, tant en vitesse qu'en niveau de convergence. Cette méthode de sondage peut être utilisée dans tout le domaine et notamment sur les profils des aubes.
- ▷ les répartitions de pression statique sur les profils. Elles indiquent l'influence des aubes entre elles et illustrent un type d'instationnarité lié à l'interaction rotor-stator.
- ▷ les répartitions des isovaleurs de pression statiques dans le champ. Elles permettent de cartographier la position des ondes de choc dans l'écoulement. La pression statique est une grandeur physique indépendante du référentiel. La propagation, les réflexions multiples des ondes de choc sont aussi des instationnarités liées à l'interaction rotor-stator.
- ▷ l'évolution de la portance des aubes au cours du temps.
- ▷ les Lissajous des forces aérodynamiques.

Un certain nombre de programmes de post-traitement du calcul ont été réalisés pour exploiter ces résultats (fig. 88).

Le principe de fonctionnement de ces turbines peut être, brièvement, décrit comme suit :

- ▷ les gaz issus de la chambre de combustion sont déviés et accélérés par le stator du premier domaine,
- ▷ ils entraînent en rotation le rotor et sont redressés,
- ▷ une partie de l'énergie du fluide est transformée sous forme d'énergie mécanique au cours de cette rotation,
- ▷ les gaz passent d'un état "haute pression" à un état "basse pression", lors de leur passage au travers du stator et du rotor, constituant le premier étage,
- ▷ le stator aval, dans le cas CTINS3-2, permet également d'accélérer et de dévier l'écoulement pour alimenter un rotor "basse pression" non modélisé dans le calcul.

• Cas test CTINS2.

Ce cas test a pour but de permettre une validation du code SCHEMA2-1 par comparaison avec le code STRU. Bien que ces deux codes soient différents, tant sur le schéma que sur les traitements des conditions aux limites, les mêmes pas de temps sont employés. Ceci permet la comparaison des champs d'isovaleurs de pression statique aux mêmes instants.

L'état périodique de l'écoulement est atteint au bout de 5040 itérations, soit une durée de 678 secondes CPU, ou encore 8 périodes, à raison de 630 pas de temps par période. Une période représente la durée du passage d'un domaine devant l'autre.

Dans cet étage de turbine, un écoulement supersonique est amorcé dans le distributeur, donnant à l'aval de celui-ci un système d'ondes de choc et de détente, qui provoque des gradients azimutaux des grandeurs aérodynamiques. Une comparaison des cartes des isovaleurs de pression statique, obtenues avec le code STRU et le code SCHEMA2-1, est présentée à la figure 119. L'interpolation utilisée pour l'utilisation des relations de compatibilité est linéaire. On relève une grande similitude entre les deux résultats. L'introduction des splines d'ordre 2 permet d'améliorer le résultat précédent et de retrouver les résultats obtenus avec le code STRU, présentés sur la figure 120. Des sondes sont placées dans l'écoulement (fig.121) pour vérifier la périodicité du résultat. On a constaté que la ligne sonique du distributeur n'est pas influencée par le défilement de la roue mobile : l'écoulement à l'amont de l'étage est donc stationnaire. Une sonde mesurant le nombre de Mach dans cet écoulement (fig. 122) permet d'évaluer aisément la bonne convergence du calcul en ce qui concerne au moins l'établissement de la solution stationnaire amont. Sur la même figure on trouve l'évolution du débit moyen sur la ligne de couplage. Celui-ci évolue de manière périodique. L'écoulement relatif à l'amont de la roue mobile est subsonique et non uniforme. Les effets instationnaires dans l'écoulement sont non négligeables. Ceux-ci sont nettement plus importants pour la roue mobile que pour le distributeur, comme le prouvent les résultats des essais expérimentaux présentés en bibliographie au paragraphe I.1. Ils sont mis en évidence par exemple sur la répartition de la pression statique sur une aube du rotor (fig. 123). Les fluctuations les plus importantes sont celles de l'angle relatif d'entrée de la roue mobile, de l'ordre de 20 degrés (fig. 124). L'obtention d'un état périodique peut être également observé par deux sondes mesurant la pression statique situées sur les profils du stator et du rotor (fig. 125).

Bien que les problèmes d'aéroélasticité ne soient pas des problèmes prépondérants pour ce type d'étage de turbomachine (aubes massives), l'évolution des forces aérodynamiques instationnaires peut être prédite (fig. 126).

On peut remarquer que les phénomènes enregistrés par les sondes ont des périodicités liées au nombre 5 pour les sondes du stator et 3 pour celles du rotor. Ce phénomène s'explique aisément : un observateur lié au stator voit défiler les 5 aubes du rotor pendant une période et simultanément un observateur lié au rotor voit défiler les 3 aubes du stator.

• Cas test CTINS3-1.

Ce cas test sert à rendre compte du fonctionnement de la technique de couplage lors du passage d'une onde de choc.

La configuration est bidimensionnelle (sans lois d'évolution de veine). Les calculs ont été réalisés à l'aide du code explicite SCHEMA2-1. Les splines d'ordre 2 ont été utilisés pour la technique de couplage. L'étage considéré est constitué de deux aubages aux profils d'aubes réalistes, aux bords d'attaque arrondis. La configuration retenue pour ce calcul est de type 1 - 1. Les maillages non structurés permettent de prendre en compte facilement l'entrefer réduit des aubages (fig 127).

Pour faciliter cette visualisation, l'écoulement à l'aval de la roue mobile est fortement détendu. L'évolution de l'onde de choc issue du bord de fuite extradados du stator et son impact sur l'aube du rotor sont décrits pour une période de calcul à la figure 128. On retrouve en fonction de la position de la roue mobile une évolution de la cambrure de l'onde de choc semblable à celle observée expérimentalement par OLDFIELD et al. (1989)[14] et reproduit numériquement par

GILES (1988)[33] dans une configuration voisine (le domaine réduit était constitué d'une aube pour le stator et deux aubes pour le rotor).

Les résultats obtenus montrent que le passage de l'onde de choc entre les deux domaines s'effectue correctement.

Une validation du code implicite SCHEMA2-2 sur le cas CTINS3-1 a permis d'obtenir des résultats en accord avec le code SCHEMA2-1.

- **Cas test CTINS3-2.**

Ce cas de calcul, formé de 3 domaines, a pour but :

- ▷ de démontrer l'aptitude de la gestion multidomaine implémentée dans le code SCHEMA2.
- ▷ de valider la phase implicite développée au paragraphe IV.4.3.

La configuration du domaine réduit comporte une aube pour le stator amont, deux aubes pour le rotor et deux aubes pour le stator aval. Les profils du stator amont et de la roue mobile sont ceux du cas test CTINS3-1. Les pas relatifs des canaux ont été adaptés suivant la méthode décrite au paragraphe IV-1. Le maillage de chaque domaine comprend respectivement 5416 noeuds, 2267 noeuds et 1499 noeuds.

Les conditions initiales correspondent au résultat d'un calcul méridien :

- ▷ lois d'évolution de veine,
- ▷ conditions physiques au niveau des plans d'entrée et de sortie de chaque domaine.

Le calcul présenté nécessite 300 pas de temps par période, 20 périodes sont effectuées en utilisant le code implicite SCHEMA2-2 présenté au paragraphe IV.4.3, avec un nombre CFL de 4. Les coefficients de viscosité artificielle sont $\chi^{(2)} = 0.25$ et $\chi^{(4)} = 0.01$. Une première validation sur le cas CTINS3-1 a permis d'obtenir des résultats en accord avec le code SCHEMA2-1. L'absence de distortion des lignes d'isovaleurs au travers des frontières de couplage, observable à la figure 133, permet de valider le bon passage de l'information y compris avec la phase implicite.

Pour pouvoir vérifier la périodicité de la solution obtenue, des sondes sont installées aux emplacements décrits à la figure 130. Les conditions fournies par le calcul méridien conduisent à l'obtention d'un phénomène de blocage transsonique. L'écoulement amont du premier stator n'est plus influencé par le déplacement du rotor : pour un état convergé du calcul il doit être stationnaire. Ceci s'observe à la figure 131 sur l'évolution temporelle du nombre de Mach, pour une sonde située à l'amont de ce domaine. Ce blocage peut s'observer sur la figure 132. Il est dû en fait à l'interaction potentielle des roues entre elles. On peut expliquer ce résultat soit par une insuffisance de la modélisation du domaine (il aurait été souhaitable de prendre en compte des rapports de nombre d'aubes plus précis), soit par une mauvaise prise en compte de l'influence de l'encombrement des aubes dans le calcul méridien. On poursuit les simulations numériques en abaissant le taux de pression à l'aval du deuxième stator. De la même manière que précédemment l'écoulement à l'amont du premier stator est stationnaire, mais le phénomène de blocage transsonique précédent devient supersonique, ce qui se traduit par une inclinaison des ondes de chocs observable sur la figure 133. Ceci nous permet de constater que cette information influe sur l'écoulement jusque dans la région aval de la première roue. Sur cette figure on présente l'évolution instationnaire du champ pour une période de calcul. Un réseau complexe d'ondes de choc s'établit dans la région située entre le premier stator et le rotor. On observe en particulier le croisement et la rencontre d'ondes de choc (image

numéro 2, fig. 133). A l'instar du cas CTINS3-1 on peut observer l'évolution de l'onde de choc issue du bord de fuite extradados du stator et son impact sur l'aube du rotor pour une période de calcul. Une forte évolution des gradients de pression est notée entre le premier stator et le rotor. Par contre, cette évolution est moins marquée. Ceci peut s'expliquer par l'importance de la taille de l'entrefer entre le rotor et le deuxième stator dans cette zone. L'évolution instationnaire, pour une période, des répartitions des pressions statiques sur un des profils du rotor illustre le caractère instationnaire de l'écoulement (fig. 134). L'influence de l'interaction rotor-stator pour les deux premières roues est mise en évidence par le tracé du nombre de Mach sur la frontière aval du premier stator (fig. 135). L'obtention de la solution périodique peut être visualisée par le tracé de la pression mesurée par la sonde numéro 2 située sur l'extrados du rotor (fig. 135). L'évolution des débits moyens représentée à la figure 135 confirme les remarques précédentes concernant le couplage et la périodicité temporelle de l'écoulement. Les calculs de débits moyens (sur une période) sur les frontières de couplage ont montré que les relations de couplage n'introduisent pratiquement pas de pertes (0.04% pour la première interface, 0.0009% pour la deuxième).

IV.5.3 - Conclusions.

Des calculs multi-étages ont été réalisés avec succès en utilisant le code SCHEMA2. Les résultats sont obtenus avec le schéma de type JAMESON explicite, implicite et une technique de couplage des domaines de calcul géométriquement contigus, basée sur l'emploi des relations de compatibilité, et des splines. La version implicite du code permet d'utiliser un nombre CFL de l'ordre de 4.

Les solutions obtenues sont très satisfaisantes. L'analyse des cas tests présentés permet de retrouver des résultats physiques observés au cours d'essais expérimentaux, ce qui valide les codes réalisés. La propagation des chocs est simulée sans distorsion. Les répartitions de pressions statiques dans le champ permettent d'apprécier les effets de l'interaction potentielle. La conservation des débits moyens aux interfaces est remarquable, et les solutions obtenues sont périodiques. Les résultats démontrent la nette influence des effets de l'interaction de type non visqueuse vis-à-vis des résultats obtenus en roues isolées.

On a pu apprécier, pour ces cas tests, la grande souplesse des maillages non structurés en particulier pour mailler des configurations de roues en étages pour lesquelles l'entrefer est de taille réduite.

Aucune solution satisfaisante n'a pu être obtenue avec le code SCHEMA1. Les extrapolations à l'ordre zéro, indispensables avec ce code pour la transmission des informations sont très pénalisantes.

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES.

Des calculs d'écoulements transsoniques en turbines multi-étages industrielles, aux entrefers d'aubages réduits, ont été réalisés avec succès, à l'aide d'une méthode numérique de type éléments finis en maillages non structurés. Cette méthode s'inscrit parmi les premières capables de tels calculs.

• Bilan des travaux réalisés.

Les études expérimentales présentées dans la bibliographie relatives à l'interaction rotor-stator ont permis de préciser l'importance des effets liés à cette interaction et d'évaluer qualitativement les résultats numériques obtenus avec la nouvelle méthode. Cette bibliographie fait également état d'un certain nombre de codes de calculs associés à des maillages structurés développés pour la modélisation numérique de l'interaction rotor-stator. Il en résulte les choix et développements suivants :

- ▷ On s'intéresse à la simulation numérique des interactions rotor-stator non visqueuses en régime transsonique avec une modélisation quasi-tridimensionnelle des écoulements. Elle permet de vérifier la propagation des ondes de choc au travers des frontières homologues de domaines successifs et de mener rapidement des calculs en tenant compte des effets induits par l'évolution axiale de la veine des turbines. L'écriture du système des équations d'Euler instationnaires, en variables et référentiel relatifs, est retenue.
- ▷ L'exploitation de la souplesse des maillages non structurés pour la réalisation de la modélisation géométrique du couplage de domaines de calculs pour des aubages aux entrefers réduits constitue l'une des approches originales de cette étude.
- ▷ L'extension du champ d'application de deux méthodes numériques de type éléments finis associées à des maillages non structurés a été étudiée. On rappelle que ces méthodes, développées par SENS et MORTCHELEWICZ, étaient capables, à l'origine, de résoudre les équations d'Euler instationnaires pour des calculs d'écoulements bidimensionnels en grille fixe de turbines et de compresseurs. La première méthode associée au code de calcul SCHEMA1 correspond à un schéma sans viscosité artificielle dont la phase implicite est de type LERAT (rayon spectral). La seconde méthode est basée sur le schéma de JAMESON et correspond au code SCHEMA2.
- ▷ Une technique de réduction des domaines de calcul, développée à l'origine dans le cadre structuré, a été choisie et adaptée dans les deux codes. Une gestion multidomaine des maillages non structurés a été développée. Ces deux techniques ne bouleversent pas l'architecture des codes originaux.

La démarche suivie lors de ces travaux s'est déroulée en deux étapes :

- ▷ La première est relative à l'adaptation du système d'équations d'Euler en variables et référentiel relatifs. Cette étape a permis d'obtenir deux codes SCHEMA1 et SCHEMA2 capables de calculs d'écoulements en aubages isolés fixes ou mobiles.
- ▷ L'extension des méthodes pour le calcul des étages constitue la seconde étape. De nombreux logiciels de pré- et post-traitement (maillages, conditions initiales, résultats) ont été développés.

Les codes SCHEMA1 et SCHEMA2 ont été validés, à chaque étape de leurs développements, vis-à-vis de résultats numériques obtenus par des méthodes de calcul, de type volumes finis, associées à des maillages structurés, choisies comme référence. L'étude bibliographique a permis l'évaluation qualitative des résultats numériques obtenus avec la nouvelle méthode sur des configurations industrielles multi-aubages.

• Conclusions.

Les conclusions concernant les calculs des écoulements en aubages isolés sont les suivantes :

- ▷ Il se dégage de cette étude que la prédiction numérique des répartitions de pression statique et des distributions de vitesses dans les canaux et sur les profils est excellente avec les deux codes. Le code SCHEMA1 est simple d'emploi et la convergence de ses résultats numériques est correcte. L'état de convergence de la solution obtenue avec le code SCHEMA2 semble en partie dépendante du réglage et du choix de certains paramètres : nombre de CFL, coefficients de viscosité artificielle, choix du senseur de l'opérateur de viscosité artificielle. Néanmoins, les résultats obtenus en configuration quasi-tridimensionnelle avec le code SCHEMA2 sont plus précis et sa vitesse de résolution peut être plus importante que celle du code SCHEMA1. La réussite de l'implémentation des termes du nouveau système d'équations illustre le potentiel d'extension ultérieur des schémas.
- ▷ Le traitement de la frontière aval (condition de non réflexion), ainsi que la position axiale de cette frontière, peuvent influencer les solutions. Toutefois, dès lors que la frontière est suffisamment éloignée des profils d'aubes, les interactions parasites sont négligeables et les résultats obtenus sur les profils sont corrects. Ce phénomène peut être décelé sur le diagramme de l'état de convergence des résultats puisqu'il est représentatif du domaine de calcul complet.
- ▷ L'utilisation d'extrapolations pour le calcul des conditions aux limites aux frontières amont et aval, indispensable dans le cas du code SCHEMA1, provoque des cassures des lignes isovaleurs.

L'étude du couplage des domaines pour la simulation numérique de l'interaction rotor-stator, a permis d'aboutir aux conclusions suivantes :

- ▷ L'exploitation des maillages non structurés pour prendre en compte la géométrie des profils des aubages malgré la taille réduite de l'entrefer des roues en interaction est un succès. Souple d'emploi, cette technique permet de disposer d'un nombre important de noeuds au niveau du profil des aubes et des frontières communes des domaines successifs, sans augmentation du nombre global d'éléments du maillage. La gestion et la technique de réduction des domaines autorisent les calculs d'écoulements en turbines multi-étages.
- ▷ La technique de transmission des informations, basée sur l'exploitation des relations de compatibilité et associée à des domaines contigus, n'a pas abouti dans le cas du code SCHEMA1. Il est démontré que les extrapolations à l'ordre 0, engendre des distorsions des ondes de chocs au niveau de la frontière de couplage de domaines successifs. L'implémentation dans ce code d'un algorithme de recouvrement partiel des domaines est également insatisfaisante car on assiste au dédoublement des lignes d'isovaleurs dans la région de recouvrement. Le code SCHEMA2 présentant l'avantage de calculer les valeurs du champ, de part et d'autre de la frontière d'interface, la transmission des informations à l'aide des relations de compatibilité s'opère correctement.

Les résultats obtenus avec le code SCHEMA2 prouvent qu'il est possible d'implémenter des techniques développées dans le cadre structuré.

L'état d'avancement des travaux correspond à l'obtention d'un code complet et opérationnel pour la simulation numérique des interactions non visqueuses en turbines multi-étages.

D'un point de vue physique, les résultats confirment l'importance de l'interaction aérodynamique non visqueuse entre les aubages d'un étage, notamment dans le cas des turbines " haute pression " des propulseurs aux géométries complexes. Les répartitions de pressions et les distributions de vitesses sur les aubes et dans les canaux, obtenues avec le code de calcul, démontrent que l'écoulement, est nettement influencé par l'interaction potentielle vis-à-vis des résultats obtenus en roues isolées. La propagation des chocs est également notablement influencée par cette interaction. On observe que de nouvelles structures de chocs apparaissent, et le code de calcul permet de prédire la position du point d'impact des chocs sur les profils des aubages. D'après les études expérimentales, cette dernière possibilité est très importante du point de vue thermique. En effet, la couche limite d'un aubage subit une détérioration de moindre ampleur (moins étendue) que dans le cas de la collision d'un sillage, mais son intensité se révèle être de même importance. La position des points d'impact est donc un renseignement précieux pour la conception de la géométrie du profil. Elle peut conditionner la répartition des trous d'injections des films réfrigérants. On relève que le code de calcul est, par ailleurs, capable de réalisation de calculs aérodynamiques en compresseurs multi-étages.

Au total, de par la richesse des résultats qu'il permet d'obtenir, le code de calcul SCHEMA2 développé à l'occasion de cette étude, est capable de contribuer efficacement à l'optimisation des turbomachines.

• Perspectives.

Les résultats obtenus au cours des validations et des simulations montrent que certains problèmes sont encore à régler, et que de nouvelles perspectives se dessinent pour le calcul des écoulements dans les turbomachines. Parmi tous ces problèmes et perspectives, on retiendra :

- ▷ l'étude du traitement de la condition aux limites, en particulier l'implémentation du traitement proposé par GILES (1989)[86], basé sur l'emploi de "relations de compatibilité bidimensionnelles", reste à réaliser pour éliminer les oscillations parasites à la frontière aval du domaine d'une roue isolée ou du domaine complet.
- ▷ l'extension de la technique de couplage associé à la résolution des équations de Navier-Stokes semble envisageable, comme le prouve le résultat obtenu à l'ONERA (1993)[87] dans le cadre structuré. MEAUZE (1993)[88] indique que ce type de méthode quasi-tridimensionnelle est extrêmement intéressant pour la prédiction du fonctionnement d'une machine multi-étage. Par ailleurs, la simulation des émissions de réfrigérants (cette réintroduction représente jusqu'à 20% du débit d'air traversant l'étage), comme le réalise, par exemple, PETOT et al. (1993)[89] pourrait augmenter le degré de prédiction de ce type de calculs dans le cas des étages de turbines "haute pression" refroidies. La réalisation de calculs instationnaires dans le cadre d'études d'aéroélasticité pour les compresseurs et les turbines "basse pression" semble également tout à fait possible.
- ▷ les enseignements acquis au cours de ces travaux peuvent être repris pour la conception d'un code de calcul utilisant des maillages hybrides (à la fois structurés et non structurés par zones). Cette recherche pourrait être la base de développement d'un code de calcul tridimensionnel capable, en

particulier, de simuler les effets aérodynamiques radiaux, telle la centrifugation des sillages dans les roues mobiles.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.

- [1] J. LUNEAU
Dynamique des fluides compressibles.
Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace.
CEPADUES Editions (1975).
- [2] F. INQUIMBERT
Etude des critères d'acceptation des perçages des émissions
de refroidissement des aubes de turbines.
Mémoire de D.E.A. de l'Université des Sciences et Technologies de Lille 1.
- [3] G. KARADIMAS
Application of Computational Systems to Aircraft Engine Development.
Turbine Design and Analysis Process.
9TH ISABE, 3-8 September 1989, Athens, Greece.
- [4] G. KARADIMAS
The Position of The Unsteady Flow Computation in The Compressor and
Turbine Design and Analysis Process.
AIAA Paper 92-0015.
- [5] J. L. KERREBROCK, A. A. MIKOLAJCZAK
Intra-Stator Transport of Rotor Wakes and its Effects on Compressor
Performances.
ASME 70-GT-39
- [6] R. L. EVANS
Turbulence and Unsteadiness Measurements Downstream of a Moving Blade Row.
ASME 74-GT-73
- [7] H. E. GALLUS, J. LAMBERTZ, T. WALLMAN
Blade-Row Interaction in an Axial Subsonic Compressor Stage.
ASME 79-GT-92 March 1979.
- [8] R. P. DRING, H. D. JOSLYN, L. W. HARDIN, J. H. WAGNER
Turbine Rotor-Stator Interaction
Journal of Engineering for Power, October 1982, Vol. 104, p. 729 - 742.
- [9] H. D. JOSLYN, R. P. DRING, O. P. SHARMA
Unsteady Three-dimensionnal Turbine Aerodynamics.
ASME Vol.105, April 1983, p. 322 - 331.
- [10] A. BINDER, W. FORSTER, H. KRUSE, H. ROGGE
An Experimental Investigation Into the Effect of Wakes on the Unsteady

- Turbine Rotor Flow.
ASME Journal of Engineering for Gas Turbine and Power, Vol.107, N. 2.
April 1985.
- [11] R. G. WILLIAMSON, S. H. MOUSTAPHA, J. P. HUOT
The Effect of a Downstream Rotor on the Measured Performance of a
Transonic Turbine Nozzle.
ASME 86-GT-103.
- [12] D. J. DOORLY, M. G. OLDFIELD
Simulation of a Wake Passing in a Stationary Rotor Cascade Turbine.
Journal of Propulsion and Power, July-August 1985, Vol.1, No 4, p. 317 - 318.
- [13] D. L. SCHULTZ, A. B. JOHNSON
Wakes and Shock Interactions in a Transonic Turbine Stage.
AGARD Paper PEP CP-401-1986.
- [14] M. L. G. OLDFIELD, M. J. RIGBY, A. B. JOHNSON
Unsteady Aerodynamic Phenomena in a Simulated Wake and Shock Wave
Passing Experiment.
AGARD 89-CP-468 28-30 August.
- [15] J. C. COLLIE H.L. MOSES, J.A. SCHETZ
Recent Advances in Simulating Unsteady Flow Phenomena Brought About
by Passage of Shock Waves in a Linear Turbine Cascade.
ASME 92-GT-4.
- [16] J. ADAMCZIK, F. O. CARTA
Unsteady Fluid Dynamic Response of an Axial Flow Compressor Stage with
Distorted Inflow.
Project SQUID, Technical Report UARL-2-PU, July 1973.
- [17] J. ERDOS, E. ALZNER
Computation of Unsteady Transonic Flow Through Rotating Cascades.
I. Method of Analysis.
NASA Report CR-2900, 1977.
- [18] J. D. DENTON, U. K. SINGH
Time-Marching Methods for Turbomachinery Computation.
Applications of Numerical Methods to Flow Calculations in Turbomachines.
VKI, LS 1979-07.
- [19] U. K. SINGH
A Computation and Comparison With Measurements of Transonic Flow in an Axial
Compressor Stage with Choc and Boundary Layer Interaction.
ASME Journal of Engineering for Power, Vol.104, N.4, April 1982, p 510-515.
- [20] T. ARTS

Etude de l'écoulement tridimensionnel dans un étage de turbine transsonique.

Ph. D. Thesis, Université Catholique de Louvain, Oct. 1982.

- [21] T. ARTS
Calculation of the Three-Dimensional, Steady , Inviscid Flow in a Transonic Axial Turbine Stage.
ASME Paper 84-GT-76.
- [22] H.P. HODSON
Measurements of Wake-Generated Unsteadiness in the Rotor Passages of
Axial-Flow Turbines.
29TH ICGT 1984, ASME 84-GT-189.
- [23] H.P. HODSON
An Inviscid Blade To Blade Prediction of a Wake Generated Unsteady Flow.
ASME 84-GT-43.
- [24] J. ADAMCZIK
Model Equation for Simulating Flows in Multistage Turbomachinery.
NASA TM 86869, November 1984.
- [25] M. M. RAI
Navier-Stokes Simulations of Rotor-Stator Interaction Using Patched and Overlaid Grids.
AIAA Paper 85-15193.
- [26] J. ADAMCZIK, R. A. MULAC, M. L. CELESTINA
A Numerical Simulation of the inviscid Flow Through a Counterrotating Propeller.
ASME 86-GT-138.
- [27] J. ADAMCZIK, R. A. MULAC, M. L. CELESTINA
A Model for Closing the Inviscid Form of the Average-Passage Equation System.
ASME 86-GT-227.
- [28] M. M. RAI
Unsteady Three Dimensional Navier-Stokes Simulations of Turbine Rotor-Stator
Interaction.
AIAA Paper 87-2058.
- [29] A. FOURMAUX
Numerical Simulation of Flows in Axial and Radial Turbomachines Using Euler Solver.
XVTH ICAS Londres 1986, ONERA-TP 1986-99.
- [30] A. FOURMAUX, A. LE MEUR
Computation of Unsteady Phenomena in Transonic Turbines and Compressors.
4TH Symposium of Turbomachines and Propellers, Aachen September 1987.
- [31] A. FOURMAUX, G. MEAUZE, G. BILLONNET
Simulation numérique des écoulements tridimensionnels et instationnaires
dans les turbomachines.

- ONERA-TP 1987-145.
- [32] M. B. GILES
Calculation of Unsteady Wake-Rotor Interactions.
AIAA Paper 87-0006.
- [33] M. B. GILES
Stator-rotor Interaction in a Transonic Turbine.
AIAA Paper 88-3093.
- [34] Y.S. CHEN
3D Stator rotor Interactions of the SSME.
AIAA Paper 88-3095.
- [35] A. LE MEUR
Three Dimensional Unsteady Flow Computation in a Transonic Axial Turbine Stage.
AIAA 26TH Aerospace Science Meeting, Reno, 1988.
- [36] Y.S. CHEN, R.C. BUGGELIN, H.J. GIBELING
An Implicit Navier-Stokes Analysis of Turbines Rototr-Stator Interaction.
AIAA Paper 88-3095.
- [37] R.V CHIMA , P.C.E. JORGENSON
Explicit Runge-Kutta Method for Unsteady Rotor-Stator Interaction.
AIAA Journal Vol.27, N. 6 June 1989.
- [38] J.S. LIU
Unsteady Euler Cascades Analysis.
AIAA Paper 89-0322.
- [39] G. BILLONNET
Supersonic Rotor-Stator Interaction in a Turbine Stage.
Colloque ONERA 1990, ONERA-TP 1991-166.
- [40] V. CHAPIN, G. GEROLYMOS
Expression généralisée de la périodicité chorochronique dans
l'interaction des aubages de turbomachines.
La Recherche Aérospatiale Année 1991, N. 5 (septembre-octobre), p.69 à 73.
- [41] R. A. DELANEY, K. V. RAO
Investigation of Unsteady Flow Through Turbine Stage.
Part 1 : Analysis.
AIAA Paper 90-2408.
- [42] W. N. DAWES
Towards Improved Troughflow Capability :
The Use of 3D Viscous Flow Solvers in a Multistage Environment.
ASME 90-GT-18.

- [43] J. D. DENTON
The calculation of Three Dimensional Viscous Flow Through Multistage Turbomachines.
ASME 90-GT-19.
- [44] M. B. GILES
An Approach for Multi-Stage Calculations Incorporating Unsteadiness.
ASME Paper 92-GT-282.
- [45] J. MAYER, F. STABER, H. STETTER
Prediction of Three Dimensional Low Frequency Unsteady Transonic Flow on Forced Vibration in Axial Turbine Stage.
Revue Francaise de Mécanique, N.1992 -3 et -4.
- [46] J. L. LIU, C. J. WANG
Analysis of Steady and Unsteady Turbine Cascade Flows by a Locally Implicit Algorithm.
Journal of Turbomachinery, October 1993, Vol. 115, p.699-706.
- [47] D. C. WIESLER, S. R. MANWARING
Unsteady Aerodynamics and Gust Response in Compressors and Turbines.
ASME 92-GT-422.
- [48] J.P. VEUILLOT
Simulation numérique des écoulements dans les turbomachines.
ONERA-TP 1991-54.
- [49] K. NAKAHASHI, O. NOZAKI, K. KIKUCHI, A. TAMURA
Navier-Stokes Computations of Two and Three Dimensional Cascade Flow Fields.
AIAA Paper 87-1315, june 1987.
- [50] J.L. LIU, C.J. HWANG
Analysis of Steady and Unsteady Turbine Cascade flows by a Locally Implicit Hybrid Algorithm.
Journal of Turbomachinery, 92-GT-127, October 1993, Vol. 115 p. 699 - 706.
- [51] B. PETOT
Utilisation intensive d'une méthode Euler 3D pour l'analyse et la conception des turbines de moteurs d'avions.
La Revue Française de Mécanique, 1992-4, n. 3, p. 401 à 408.
- [52] J. DELERY
Aérodynamique interne : tuyères et arrière corps.
Cours de l'Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace (1989), p. 148, 149 et 169.
- [53] H. LORENTZ
Theorie und Berechnung der Volturbinen und Kriselpumpen.

- Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure, Vol. 49, 1905, p. 1650-1675.
- [54] J.- P. GUIRAUD, R. KH. ZEYTOUNIAN
Application du concept d'échelles multiples à l'écoulement dans une turbomachine axiale.
International Journal of Engineering Sciences, 1974, Vol. 12, p. 311-330.
- [55] C.H. WU
A General through Flow Theory of Fluid Flow with Subsonic or Supersonic Velocity in Turbomachines having Arbitrary Hub and Casing Shapes.
N.A.S.A TN 2388, March 1951.
- [56] D. BUISINE, P. MICHEAU
Ecoulement tridimensionnel dans une roue.
Calcul effectivement tridimensionnel des écoulements dans les turbomachines par la méthode S1-S2.
Journal de mécanique théorique et appliquée, vol.6, num.4, 1987, p.525 à 546.
- [57] G. MEAUZE
Calcul des écoulements dans les turbomachines.
Cours de l'Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace.
- [58] J.P. VEUILLOT, C. VUILLEZ
Quasi-3D Viscous Flow Computations in Subsonic and Transonic Turbomachinery Blading.
AIAA Paper 90-2126, July 1990.
- [59] R. SOVRANO
Calcul de l'écoulement transsonique dans un compresseur centrifuge par une méthode pseudo-stationnaire.
TP-ONERA 1980-42.
- [60] G. A. GEROLYMOS
Numerical Integration of Blade to Blade Surface Euler Equations in Vibrating Cascades.
AIAA Journal Vol 26, N.12, December 1988, p.1483 - 1492.
- [61] J.P. VEUILLOT, L. CAMBIER
Computation Techniques for the Simulation of Turbomachines Compressible Flows.
Stage Ecole Nationale Supérieure des Techniques Avancées, 1991.
- [62] P. A. RAVIART, J. M. THOMAS
Introduction à l'analyse des équations aux dérivées partielles.
Mathématiques appliquées pour la Maitrise.
ed. MASSON 1983.
- [63] A. DERVIEUX, F. ANGRAND, L. LOTH, G. VIJAYASUNDRARAM
Simulation of Euler Transonic Flows by Means of Hyperbolic Equations.

- INRIA 1983, Rapport de Recherche N. 250.
- [64] V. SELMIN
Finite Element Solution of Hyperbolic Equations.
INRIA 1987, Rapport de Recherche N. 665, 706, 708.
- [65] O.C. ZIENKIEWICZ, R. LOHNER, K. MORGAN
High Speed Inviscid Compressible Flow by the Finite Element Method
5th MAFELAP Conference, Brunel University, 1-4 May, 1984.
- [66] W. KOSCHEL, M. LOTZERICH, A. VORNBEGER
Solution on Unstructured Grids for the Euler and Navier-Stokes Equations.
AGARD FDP Symposium on validation of computational fluid dynamics,
Lisbon, Portugal, 2-5 May 1988. AGARD CP No. 437.
- [67] G.D.MORTCHELEWICZ
Résolution des équations d'Euler en maillages non structurés.
La Recherche Aérospatiale, numero 1989-6, p. 1 à 16.
- [68] G. D. MORTCHELEWICZ
Résolution des équations d'Euler tridimensionnelles instationnaires
en maillage non structurés.
La Recherche Aérospatiale 1991 No. 6, Novembre-Décembre.
- [69] S. Z. BURSTEIN
Higher Order Accurate Difference Methods in Hydrodynamic, in
"Nonlinear Partial Difference Equations".
ed. by W. F. Ames, Academic press 1967, p. 279 - 290.
- [70] A. LERAT, J. SIDES, V.DARU
An Implicit Finite Volume Method for Solving the Euler Equations.
Lecture notes in physics 1982, vol.170, p. 343 - 349.
- [71] A. LERAT, J. SIDES
An Implicit Transonic Calculation without Artificial Viscosity
or Upwinding.
GAMM WORKSHOP on "The numerical simulation of compressible Euler flows", Juin 1986.
- [72] A. LERAT
Schémas aux différences pour les systèmes hyperboliques de lois de
conservation.
Ecole de printemps de mécanique des fluides numériques, Aussois 1989.
- [73] A. S. SENS
Calcul d'écoulements transsoniques instationnaires par résolution implicite
centrée des équations d'Euler sans viscosité artificielle.
Thèse de Doctorat de Mécanique de l'Université de Paris 6, 1990.
- [74] A. S. SENS, G. D. MORTCHELEWICZ

- Résolution des équations d'Euler instationnaires en maillages non structurés par une méthode implicite sans viscosité artificielle pour des configurations de grilles rectilignes.
Rapport O.N.E.R.A. 1992, No. 45/1621 017 R.
- [75] A. S. SENS, G.D. MORTCHELEWICZ
Implicit Scheme for Unsteady Euler Equations on Triangular Meshes.
International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics,
Strasbourg (France) May 24-26, 1993.
- [76] A.S. SENS, G.D. MORTCHELEWICZ
Résolution des équations d'Euler instationnaires
en maillages non structurés par un schéma de type Jameson
(à paraître 1994).
- [77] A. JAMESON
Numerical Solution of the Euler Equations by Finite Volume Methods using
Runge-Kutta Time Stepping Schemes.
AIAA-81-1259 14th Fluid and Plasma Dynamics Conference, June 23-25,
1981/Palo Alto, California.
- [78] R.B. PELZ, A. JAMESON
Transonic Flow Calculations Using Triangular Finite Elements.
AIAA Computational Fluid Dynamics, Collection of Technical Papers Danvers,
Massachusetts, July 13-15, 1983.
- [79] A. JAMESON, T.J. BAKER, N.P. WEATHERILL
Calculation of Inviscid Flow Over a Complete Aircraft. AIAA-86-0103,
AIAA-86-0103, 24th Aerospace Sciences Meeting, January, 1986/Reno, Nevada.
- [80] G.L.D.SIDEN, W.N. DAWES, P.J. ALBRATEN
Numerical Simulation of The Two Dimensional Viscous Compressible Flow
in Blade Cascades Using a Solution Adaptive Unstructured Mesh.
ASME 91-GT-124.
- [81] W.N. DAWES
The Simulation of Three Dimensional Viscous
Flow in Turbomachinery Geometries Using a Solution Adaptive
Unstructured Mesh Methodology.
ASME 89-GT-211
- [82] J.P. CIONI, L. FEZOU, H. STEVE
Approximation des équations de Maxwell par des schémas décentrés
en éléments finis.
Rapport de Recherche INRIA numéro 1601, (Février 1992).
- [83] H. VIVIAND, J.P. VEULLLOT
Méthodes pseudo-instationnaires pour le calcul des écoulements

transsoniques.

ONERA-TP N. 1978-4.

- [84] J.P. VEUILLOT, G. MEAUZE
A 3D Euler Method for Internal Transonic Flows Computations with a Multi-Domain Approach.
AGARD/PEP L.S. 140, ONERA-TP N. 1985-41.
- [85] J. BARANGER
Lissage par des fonctions splines.
Introduction a l'analyse numerique, chapitre 6, p.73 - 83
ed. Hermann Paris, collection "Méthodes".
- [86] M. B. GILES
Non-Reflecting Boundary Conditions For Euler Equation Calculations.
AIAA Paper 89-1942-CP.
AIAA Computational Fluid Dynamic Conference Buffalo, June 13-15, 1989.
- [87] C. TARDIF
Les turbomachines du futur sont calculées par ordinateur.
Air et Cosmos / Aviation International, N.1451, Semaine du 13 au 19 décembre 1993, p.48.
- [88] G. MEAUZE
Apport des nouvelles méthodes numériques à la conception
et au développement des turbomachines.
Journées sciences et défense, Paris, 11-12 mai 1993, TP 1993-60.
- [89] P. CHANEZ, B. PETOT, C. JOURDREN
Viscous analysis of high pressure inlet guide vane flow
including cooling injections.
ONERA TP 1993-88
- [90] J. N. JENS
Dérivation en référentiel relatif.
Cours de Mécanique, DEUG A2, LYON 1
- [91] M.H. VAVRA
Aero-Thermodynamics and Flows in Turbomachines.
Particular Fluid Motions, Relative Motions.
chap. 7, p.105 à 132.
- [92] P. GERMAIN
Dérivation suivant un champ de vitesses arbitraire.
Cours de Mécanique, Ecole Polytechnique, Tome 1, chap. II-3-5, p.63.
- [93] C. HIRSCH
Numerical Computation of Internal and External Flow.
Fundamentals of Numerical Discretization.

- Vol.1, chap. 1.3 à 1.5.
ed. John Wiley and Sons Ltd.
- [94] A. DYMENT
Equation de l'énergie
Cours de dynamique des gaz du D.E.A de Mécanique de l'Université Scientifique
et Technique de Lille 1, Chapitre 18, p. 66.
- [95] F. LEBOEUF
Calcul dans le plan méridien, surface S2m-équilibre radial
Cours de turbomachines de l'Ecole Centrale de Lyon, tome 2, Chapitre 3.3.
- [96] T. DERREN
Communication S.N.E.C.M.A.
Equation de Navier-Stokes dans un repère lié à des surfaces de courant
axisymétriques de révolution en mouvement de rotation uniforme. Annexe1.
- [97] P. GERMAIN
Equations en coordonnées curvilignes orthogonales.
Cours de Licence de Mécanique : Mécanique des Milieux Continus, chap. 17, p. 336
ed. Masson 1962.
- [98] P. GERMAIN
Equations en coordonnées cartésiennes.
Cours de Licence de Mécanique : Mécanique des Milieux Continus.
ed. Masson 1962.
- [99] A. FOURMAUX
Approche monodimensionnelle dans le plan méridien.
Cours de turbomachine de l'Ecole Centrale de Nantes (1991).

Annexe - LES EQUATIONS D'EULER EN REFERENTIEL RELATIF

ET L'INITIALISATION DES CALCULS

DANS LE CADRE DES SIMULATIONS AERODYNAMIQUES

EN AUBAGES ISOLES DE TURBOMACHINES.

A.I - EXPRESSIONS GENERALES DES EQUATIONS D'EULER EN REFERENTIEL RELATIF.	127
A.I.1 - Hypothèses.	127
A.I.2 - Référentiel relatif $\mathcal{R}_{r..}$	127
A.I.2.1 - Calcul de la vitesse et de l'accélération.	127
A.I.2.2 - Résultats supplémentaires.	129
A.I.3 - Formulation générale des équations.	130
A.I.3.1 - Cas des variables physiques relatives.	130
A.I.3.2 - Cas des variables physiques absolues.	133
A.II - MODELE D'ECOULEMENT QUASI-TRIDIMENSIONNEL.	134
A.II.1 - Hypothèses.	134
A.II.2 - Cas des variables relatives.	136
A.II.2.1 - Projections des opérateurs mathématiques.	136
A.II.2.2 - Ecriture tridimensionnelle en repère local.	142

A.II.2.3 - Projection quasi-tridimensionnelle.	143
A.II.3 - Cas des variables absolues.	144
A.II.3.1 - Projections des opérateurs.	144
A.II.3.2 - Ecriture tridimensionnelle en repère local.	145
A.II.3.3 - Projection quasi-tridimensionnelle.	146
A.III - MODELE D'ECOULEMENT TRIDIMENSIONNEL.	147
A.III.1 - Cas des coordonnées cartésiennes.	147
A.III.1.1 - Hypothèses.	147
A.III.1.2 - Cas des variables relatives.	147
A.III.1.2.1 - Projections des opérateurs.	147
A.III.1.2.2 - Système d'équations.	149
A.III.1.3 - Cas des variables absolues.	150
A.III.1.3.1 - Projections des opérateurs.	150
A.III.1.3.2 - Système d'équations.	151
A.III.2 - Cas des équations en coordonnées cylindriques.	152
A.III.2.1 - Hypothèses.	152
A.III.2.2 - Cas des variables relatives.	153
A.III.2.3 - Cas des variables absolues.	154
A.IV - INITIALISATION DU CALCUL.	155
A.IV.1 - Cas des aubages fixes.	155
A.IV.2 - Cas des aubages mobiles.	156

Il s'agit d'exposer la technique de passage du système des équations d'Euler, écrit dans un référentiel absolu fixe \mathcal{R} , à sa formulation en référentiel relatif mobile \mathcal{R}_r , et à sa projection sur une nappe de courant ou son écriture tridimensionnelle. Cette démarche se justifie d'une part par la difficulté de trouver une publication complète sur cette modélisation aérodynamique, malgré son utilisation industrielle courante, d'autre part par l'importance du choix du système d'équations, l'adaptation de la méthode de résolution numérique dépendant directement de la formulation retenue. Par souci de clareté, les dérivations effectuées en référentiel absolu ou relatif sont notées

respectivement $\frac{\partial}{\partial t}$ et $\frac{\partial_r}{\partial t}$.

Il en va de même pour les opérateurs mathématiques et les points liés au repère relatif \mathcal{R}_r , indicés par un r de façon à éviter toute confusion.

A.I - EXPRESSIONS GENERALES DES EQUATIONS D'EULER EN REFERENTIEL RELATIF.

A.I.1 - Hypothèses.

Les hypothèses développées au paragraphe I.3.3, quant aux référentiels absolu et relatif (fig.10), sont conservées. Ainsi, la norme du vecteur $\overrightarrow{OO_r}$ est indépendante du temps, la position axiale des roues, par suite celle des référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}_r aussi. Autrement dit,

$$\frac{d\overrightarrow{OO_r}}{dt} = \vec{0} \quad . \quad (a.1)$$

La vitesse de rotation angulaire autour de cet axe, notée ω de la roue mobile, donc celle du référentiel relatif \mathcal{R}_r , vis - à - vis de la roue fixe, autrement dit du référentiel absolu \mathcal{R} , est uniforme au cours du temps, ce qui se traduit par :

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{0} \quad . \quad (a.2)$$

A.I.2 - Référentiel relatif \mathcal{R}_r .

Pour aborder le problème de l'écriture des équations de l'écoulement dans le référentiel relatif \mathcal{R}_r , il est nécessaire de connaître, au préalable, l'expression des outils mathématiques et des grandeurs physiques intervenant dans le changement de référentiel.

A.I.2.1 - Calcul de la vitesse et de l'accélération.

Considérons une particule, désignée M , circulant sur une ligne de courant traversant l'aubage mobile et de vitesse V telle que :

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \quad . \quad (a.3)$$

Pour un observateur lié à cette particule, les deux référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}_r se comportent comme deux solides en rotation l'un par rapport à l'autre au cours du temps. Il observe aussi, pendant cette même période, une déformation de la particule fluide. Le problème se ramène donc pour l'observateur à la superposition d'un problème de mécanique du solide lorsqu'il observe la cinématique des référentiels et d'un problème de mécanique des fluides lorsqu'il observe la particule fluide. En conséquence, les relations de dérivations de la mécanique des solides permettent l'obtention des vitesse et accélération de la particule M , celle-ci étant assimilée à un point matériel, et il suffit d'appliquer la dérivation particulière précisant l'état fluide de la particule pour conclure le calcul. On utilise ce principe pour calculer :

▷ La position de la particule M dans le référentiel relatif \mathcal{R}_r .

A un instant t fixé, elle peut être calculée grâce à la relation :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_r} + \overrightarrow{O_rM} \quad . \quad (a.4)$$

▷ La projection de la vitesse V de la particule M dans le référentiel relatif \mathcal{R}_r .

Des relations (a.1), (a.3) et (a.4), il vient :

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \\ &= \frac{d\overrightarrow{OO_r}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O_rM}}{dt} \\ &= \frac{d\overrightarrow{O_rM}}{dt} \quad . \end{aligned} \quad (a.5)$$

Compte tenu de la cinématique des deux référentiels, il est possible d'utiliser la dérivation en référentiel mobile, telle qu'elle est définie dans [90] :

$$\frac{d\overrightarrow{O_rM}}{dt} = \frac{d_r\overrightarrow{O_rM}}{dt} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{O_rM} \quad . \quad (a.6)$$

Si on considère le rayon r , désignant la position du point M vis-à-vis de l'axe de rotation des roues et mesuré dans un plan perpendiculaire à cet axe dans le référentiel relatif \mathcal{R}_r , alors d'après [91] :

$$\vec{\omega} \times \overrightarrow{O_rM} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad , \quad (a.7)$$

et la relation (a.6) devient :

$$\frac{d\overrightarrow{O_rM}}{dt} = \frac{d_r\overrightarrow{O_rM}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad . \quad (a.8)$$

Par ailleurs, on pose les notations suivantes :

$$\vec{W} = \frac{d_r\overrightarrow{O_rM}}{dt} \quad , \quad (a.9)$$

$$\vec{U} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad . \quad (a.10)$$

En conclusion, avec les relations (a.5), (a.8), (a.9), (a.10), la vitesse absolue de la particule M a pour expression dans le référentiel relatif \mathcal{R}_r :

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \vec{W} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{O_rM} \\ &= \vec{W} + \vec{\omega} \times \vec{r} \\ &= \vec{W} + \vec{U} \\ &= V_x \vec{I} + V_y \vec{J} + V_z \vec{K} \\ &= W_x \vec{I} + (W_y - \omega r) \vec{J}_r + W_z \vec{K}_r \quad . \end{aligned} \quad (1.8)$$

Elle représente la relation de composition des vitesses, où \vec{W} représente le vecteur vitesse relative et \vec{U} le vecteur vitesse d'entraînement.

▷ La projection de l'accélération du point M dans le référentiel relatif \mathcal{R}_r .

De la dérivation de la relation de composition des vitesses (1.8) et des relations (a.2), (a.8) et (a.9), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{V}}{dt} &= \frac{d(\vec{W} + \vec{\omega} \times \overline{O_r M})}{dt} \\ &= \frac{d\vec{W}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\overline{O_r M}}{dt} \\ &= \frac{d\vec{W}}{dt} + \vec{\omega} \times (\vec{W} + \vec{\omega} \times \vec{r}) \quad , \end{aligned} \quad (a.11)$$

et de la dérivation en repère mobile :

$$\frac{d\vec{W}}{dt} = \frac{d_r \vec{W}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{W} \quad . \quad (a.12)$$

La combinaison des deux relations (a.11) et (a.12) permet d'écrire la relation de composition liant les accélérations absolue, relative, d'entraînement et de Coriolis.

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d_r \vec{W}}{dt} + 2\vec{\omega} \times \vec{W} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad , \quad (a.13)$$

La particule M est une particule fluide et son accélération se calcule à l'aide de la dérivation particulaire. Si on applique cette dérivation au vecteur vitesse absolu, il vient :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \quad , \quad (a.14)$$

et elle s'applique également au calcul de l'accélération relative dans son référentiel propre, donc

$$\frac{d_r \vec{W}}{dt} = \frac{\partial_r \vec{W}}{\partial t} + (\vec{W} \cdot \nabla_r) \vec{W} \quad . \quad (a.15)$$

En conclusion, la projection de l'accélération dans le référentiel relatif s'écrit, avec les relation (a.13), (a.14), (a.15) :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial_r \vec{W}}{\partial t} + (\vec{W} \cdot \nabla_r) \vec{W} + 2\vec{\omega} \times \vec{W} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad . \quad (a.16)$$

A.I.2.2 - Résultats supplémentaires.

A un instant t fixé, les dérivations spatiales sont effectuées dans le système de coordonnées propre à chaque référentiel mais les valeurs des gradients et divergences se conservent d'un référentiel à l'autre, puisqu'elles ne sont pas affectées par le changement de coordonnées. Alors les divergences ∇ exprimées dans le référentiel absolu \mathcal{R} , et ∇_r exprimées dans le référentiel relatif

\mathcal{R}_r , d'un vecteur \vec{X} sont telles que :

$$\nabla \vec{X} = \nabla_r \vec{X} \quad . \quad (a.17)$$

Il en va de même pour les gradients $\vec{\nabla}$, exprimés dans le référentiel absolu \mathcal{R} et pour les gradients $\vec{\nabla}_r$, exprimés dans le référentiel relatif \mathcal{R}_r . Ainsi, pour une fonction scalaire F , on peut écrire :

$$\vec{\nabla} F = \vec{\nabla}_r F \quad . \quad (a.18)$$

On peut ajouter aux expressions précédentes un résultat présenté par [93] relatif à l'opération de dérivation particulière d'une fonction scalaire F permettant le passage entre référentiels. Ainsi, on obtient dans le référentiel absolu \mathcal{R} :

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla(F) \quad , \quad (a.19)$$

et par projection dans le référentiel relatif \mathcal{R}_r ,

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial_r F}{\partial t} + \vec{W} \cdot \nabla_r(F) \quad . \quad (a.20)$$

Par combinaison avec l'égalité (a.18) et par différence des relations (a.19) et (a.20), on obtient :

$$\frac{\partial_r F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{r} \cdot \nabla_r(F) \quad . \quad (a.21)$$

Compte tenu de l'hypothèse de rotation uniforme (a.2), et de la définition du rayon r , désignant la position de la particule M à l'instant t fixé par rapport à l'axe de rotation et de la relation (a.17), on obtient d'après [61] :

$$\nabla(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \nabla_r(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{0} \quad . \quad (a.22)$$

D'après [93], on remarque également que :

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) &= (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) \vec{\omega} - \omega^2 \vec{r} \\ &= \vec{0} - \omega^2 r \frac{d\vec{r}}{dr} \\ &= -\vec{\nabla}_r \left(\frac{\omega^2 r^2}{2} \right) \quad . \end{aligned} \quad (a.23)$$

A.I.3 - Formulation générale des équations.

On utilise les résultats précédents pour obtenir les équations du système d'équations. On traite le cas des variables relatives puis le cas des variables absolues.

A.I.3.1 - Cas des variables physiques relatives.

▷ Projection de l'équation de continuité dans le référentiel relatif \mathcal{R}_r .

Son expression (1.10) devient avec les relations (a.21), (1.8) et (1.7) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial_r \rho}{\partial t} - (\vec{\omega} \times \vec{r}') \vec{\nabla}_r(\rho) + \nabla_r(\rho \vec{V}) &= \frac{\partial_r \rho}{\partial t} - (\vec{\omega} \times \vec{r}') \vec{\nabla}_r(\rho) + \nabla_r(\rho \vec{W}) \\ &\quad + (\vec{\omega} \times \vec{r}') \vec{\nabla}_r(\rho) + \rho \nabla_r(\vec{\omega} \times \vec{r}') \quad , \end{aligned} \quad (a.24)$$

et en utilisant la remarque (a.22) :

$$\frac{\partial_r \rho}{\partial t} + \nabla_r(\rho \vec{W}) = 0 \quad . \quad (1.22)$$

▷ Projection de l'équation de quantité de mouvement dans le référentiel relatif \mathcal{R}_r .

Il s'agit en premier lieu de calculer la projection dans le référentiel relatif \mathcal{R}_r de l'expression $\frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{V} \otimes \vec{V})$. En la développant, en utilisant l'équation de continuité (1.10) et le résultat (a.17), il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{V} \otimes \vec{V}) &= \vec{V} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho \vec{V} \nabla(\vec{V}) + \vec{V} \nabla(\rho \vec{V}) \\ &= \rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \nabla \vec{V} \right) \\ &= \rho \frac{\partial_r \vec{W}}{\partial t} + \rho (\vec{W} \nabla_r) \vec{W} + 2\rho \vec{\omega} \times \vec{W} + \rho \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \quad . \end{aligned} \quad (a.25)$$

Par ailleurs, on remarque que :

$$\rho \frac{\partial_r(\vec{W})}{\partial t} + \rho \vec{W} \nabla_r(\vec{W}) = \frac{\partial_r \rho \vec{W}}{\partial t} + \nabla_r(\rho \vec{W} \otimes \vec{W}) - (\vec{W} \left(\frac{\partial_r \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}_r(\rho \vec{W}) \right) + \rho \vec{W} \nabla_r(\vec{W})) \quad , \quad (a.26)$$

expression que l'on peut simplifier avec la relation de continuité (1.22) :

$$\frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{V} \otimes \vec{V}) = \frac{\partial_r(\rho \vec{W})}{\partial t} + \nabla_r(\rho \vec{W} \otimes \vec{W}) + 2\rho \vec{\omega} \times \vec{W} + \rho \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \quad . \quad (a.27)$$

La transformation de l'équation de la quantité de mouvement se fait par substitution dans la relation (1.11) de la relation précédente (a.27) et avec la relation (a.23), on obtient finalement le résultat :

$$\frac{\partial_r(\rho \vec{W})}{\partial t} + \nabla_r(\rho \vec{W} \otimes \vec{W} + p \cdot \mathbf{I}) = -\rho \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - 2\rho \vec{\omega} \times \vec{W} = \rho \vec{\nabla}_r \left(\frac{\omega^2 r^2}{2} \right) - 2\rho \vec{\omega} \times \vec{W} \quad . \quad (1.23)$$

▷ Projection de l'équation de l'énergie dans le référentiel relatif \mathcal{R}_r .

L'expression (1.12) écrite dans le référentiel absolu \mathcal{R} peut également s'écrire, en utilisant les rappels (a.7) et (a.8) et en la développant d'après sa définition [94] :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla((E + p) \vec{V}) &= \frac{\partial(\rho(e(T) + \frac{V^2}{2}))}{\partial t} + \nabla((\rho(e(T) + \frac{V^2}{2}) + p) \vec{V}) \\ &= \frac{\partial(\rho e(T))}{\partial t} + \nabla(\rho e(T) \vec{V}) \\ &\quad + \frac{\partial(\frac{\rho V^2}{2})}{\partial t} + \nabla(\frac{\rho V^2}{2} \vec{V}) \\ &\quad + \nabla(p \vec{V}) = 0 \quad . \end{aligned} \quad (a.28)$$

En suivant une démarche identique au calcul de la projection de l'équation de continuité (1.22), il vient :

$$\frac{\partial(\rho e(T))}{\partial t} + \nabla(\rho e(T) \vec{V}) = \frac{\partial_r(\rho e(T))}{\partial t} + \nabla_r(\rho e \vec{W}) \quad . \quad (a.29)$$

Par ailleurs avec les relations (3.0), (a.35) et (a.31), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\frac{\rho V^2}{2})}{\partial t} + \nabla(\frac{\rho V^2}{2} \vec{V}) &= \vec{V} \left(\frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} + \vec{V} \nabla(\rho \vec{V}) \right) \\ &= (\vec{W} + \vec{U}) \left(\frac{\partial_r(\rho \vec{W})}{\partial t} + \nabla_r(\rho \vec{W} \otimes \vec{W}) \right) \\ &\quad + 2\rho \vec{\omega} \times \vec{W} + \rho \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \\ &= \frac{\partial_r(\rho \frac{W^2}{2})}{\partial t} + \nabla_r(\frac{\rho W^2}{2} \vec{W}) - \rho \vec{W} \vec{\nabla}_r(\frac{\omega^2 r^2}{2}) \\ &\quad + \vec{U} \left(\frac{\partial_r(\rho \vec{W})}{\partial t} + \nabla_r(\rho \vec{W} \cdot \vec{W}) \right) - \rho \vec{\nabla}_r(\frac{\omega^2 r^2}{2}) + 2\rho \vec{\omega} \times \vec{W} \quad . \quad (a.30) \end{aligned}$$

Enfin, en utilisant (a.19), (a.22) et (1.8), on a :

$$\begin{aligned} \nabla(p \vec{V}) &= \nabla_r(p \vec{V}) \\ &= \nabla_r(p \vec{W}) + (\vec{\omega} \times \vec{r}) \nabla_r(p \cdot \mathbf{I}) \quad . \quad (a.31) \end{aligned}$$

On introduit ces nouvelles relations (a.29), (a.30), (a.31) dans l'expression (a.28) :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial_r(\rho(e + \frac{W^2}{2}))}{\partial t} + \nabla_r(\rho(e + \frac{W^2}{2} + p) \vec{W}) - \rho \vec{W} \vec{\nabla}_r(\frac{\omega^2 r^2}{2}) \\ &+ \vec{U} \left(\frac{\partial_r(\rho \vec{W})}{\partial t} + \nabla_r(\rho \vec{W} \cdot \vec{W} + p \cdot \mathbf{I}) \right) - \rho \vec{\nabla}_r(\frac{\omega^2 r^2}{2} + 2\rho \vec{\omega} \times \vec{W}) = 0 \quad , \quad (a.32) \end{aligned}$$

expression qui se réduit d'après l'équation de quantité de mouvement (1.23) à :

$$\frac{\partial_r(\rho(e + \frac{W^2}{2}))}{\partial t} + \nabla_r(\rho(e + \frac{W^2}{2} + p) \vec{W}) - \rho \vec{W} \vec{\nabla}_r(\frac{\omega^2 r^2}{2}) = 0 \quad . \quad (a.33)$$

En utilisant la définition de l'enthalpie relative (1.26) on a :

$$\frac{\partial_r E_r}{\partial t} + \nabla_r(\rho H_{i,r}) - \rho \vec{W} \vec{\nabla}_r(\frac{\omega^2 r^2}{2}) = 0 \quad . \quad (a.34)$$

On remarque aussi, d'une part, d'après la formule du produit mixte et de la relation (a.2) issue de l'hypothèse de rotation uniforme que :

$$\begin{aligned} \frac{d_r(\frac{\omega^2 r^2}{2})}{dt} &= \rho(\vec{\omega} \times \vec{r}) \frac{d_r(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt} \\ &= \rho(\vec{\omega} \times \vec{r}) \vec{\omega} \times \frac{d_r \vec{r}}{dt} \\ &= \rho(\vec{\omega} \times \vec{\omega}) \vec{r} \times \frac{d_r \vec{r}}{dt} \\ &= 0 \quad , \quad (a.35) \end{aligned}$$

et d'autre part, par application de la dérivation particulière dans le référentiel relatif \mathcal{R}_r que :

$$\frac{d_r(\frac{\omega^2 r^2}{2})}{dt} = \frac{\partial_r(\frac{\omega^2 r^2}{2})}{\partial t} + \vec{W} \nabla_r(\frac{\omega^2 r^2}{2}) = 0 \quad . \quad (a.36)$$

Cette dernière égalité (a.36) après développement et avec la relation de continuité (1.22) devient :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial_r(\frac{\omega^2 r^2}{2})}{\partial t} + \rho \vec{W} \nabla_r(\frac{\omega^2 r^2}{2}) &= \frac{\partial_r(\rho \frac{\omega^2 r^2}{2})}{\partial t} - \frac{\omega^2 r^2}{2} \frac{\partial_r \rho}{\partial t} + \rho \vec{W} \nabla_r(\frac{\omega^2 r^2}{2}) \\ &= \frac{\partial_r(\rho \frac{\omega^2 r^2}{2})}{\partial t} + \frac{\omega^2 r^2}{2} \nabla_r(\rho \vec{W}) + \rho \vec{W} \nabla_r(\frac{\omega^2 r^2}{2}) \\ &= \frac{\partial_r(\rho \frac{\omega^2 r^2}{2})}{\partial t} + \nabla_r(\rho \frac{\omega^2 r^2}{2} \vec{W}) = 0 \quad . \end{aligned} \quad (a.37)$$

expression que l'on soustrait à l'expression (a.34) :

$$\frac{\partial_r E_r}{\partial t} + \nabla_r(\rho H_{ir}) - \rho \vec{W} \nabla_r(\frac{\omega^2 r^2}{2}) - \frac{\partial_r(\rho \frac{\omega^2 r^2}{2})}{\partial t} - \nabla_r(\rho \frac{\omega^2 r^2}{2} \vec{W}) = 0 \quad . \quad (a.38)$$

$$\frac{\partial_r E_r}{\partial t} - \frac{\partial_r(\rho \frac{\omega^2 r^2}{2})}{\partial t} + \nabla_r(\rho(H_{ir} - \frac{\omega^2 r^2}{2}) \vec{W}) = 0 \quad . \quad (a.39)$$

En utilisant les formules (1.25), (1.26), (1.27), il vient :

$$E_r = \rho J - p + \rho \frac{\omega^2 r^2}{2} \quad , \quad (a.40)$$

que l'on substitue dans l'écriture précédente (a.39) pour obtenir finalement :

$$\frac{\partial_r(\rho J - p)}{\partial t} + \nabla_r(\rho J \vec{W}) = 0 \quad . \quad (3.13)$$

A.I.3.2 - Cas des variables physiques absolues.

▷ Projection de l'équation de continuité.

Son expression (1.22) ne varie pas dans ce système de variables (1.36).

▷ Projection de l'équation de quantité de mouvement.

Avec la relation (1.8) introduite dans l'équation (1.23) on obtient :

$$\frac{\partial_r(\rho(\vec{V} - \vec{\omega} \times \vec{r}))}{\partial t} + \nabla_r(\rho(\vec{V} - \vec{\omega} \times \vec{r}) \otimes \vec{W} + p \cdot \mathbf{I}) = -\rho \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - \rho \vec{\omega} \times \vec{W} - \rho \vec{\omega} \times \vec{W} \quad . \quad (a.41)$$

En développant et avec (1.10), (a.2), (a.9), (a.21), il vient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial_r(\rho \vec{V})}{\partial t} + \nabla_r(\rho \vec{V} \otimes \vec{W} + p \cdot \mathbf{I}) + \rho \vec{\omega} \times \vec{V} &= \frac{\partial_r(\rho \vec{\omega} \times \vec{r})}{\partial t} + \nabla_r(\rho(\vec{\omega} \times \vec{r}) \otimes \vec{W}) \\
&\quad - \rho \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \rho \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - \rho \vec{\omega} \times \vec{W} \\
&= \frac{\partial_r(\rho \vec{\omega} \times \vec{r})}{\partial t} + \nabla_r(\rho(\vec{\omega} \times \vec{r}) \otimes \vec{W}) - \rho \vec{\omega} \times \vec{W} \\
&= \vec{\omega} \times \vec{r} \frac{\partial_r \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial_r \vec{\omega}}{\partial t} \times \vec{r} + \rho \vec{\omega} \times \frac{\partial_r \vec{r}}{\partial t} \\
&\quad + \nabla_r(\vec{\omega} \times \vec{r}) \rho \vec{W} + \vec{\omega} \times \vec{r} \nabla_r(\rho \vec{W}) - \rho \vec{\omega} \times \vec{W} \\
&= -(\vec{\omega} \times \vec{r}) \nabla_r(\rho \vec{W}) + \vec{0} + \rho \vec{\omega} \times \vec{W} + \vec{0} \\
&\quad + \vec{\omega} \times \vec{r} \nabla_r(\rho \vec{W}) - \rho \vec{\omega} \times \vec{W} \quad . \quad (a.42)
\end{aligned}$$

En conclusion dans ce système de grandeurs physiques absolues, l'équation de quantité de mouvement (1.23) devient donc :

$$\frac{\partial_r(\rho \vec{V})}{\partial t} + \nabla_r(\rho \vec{V} \otimes \vec{W} + p \cdot \mathbf{I}) + \rho \vec{\omega} \times \vec{V} = 0 \quad . \quad (1.37)$$

▷ Projection de l'équation de l'énergie.

Si on développe la relation (1.12), on utilise le principe utilisé pour l'écriture de l'équation de continuité (1.10) et l'égalité (a.17), on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla((E + p) \vec{V}) &= \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla(E \vec{V}) + \nabla(p \vec{V}) \\
&= \frac{\partial_r E}{\partial t} + \nabla_r(E \vec{W}) + \nabla_r(p \vec{V}) \quad . \quad (a.43)
\end{aligned}$$

Par conséquent l'équation de l'énergie a pour écriture dans un système de grandeurs physiques absolues :

$$\frac{\partial_r E}{\partial t} + \nabla_r(E \vec{W} + p \vec{V}) = 0 \quad . \quad (1.38)$$

A.II - MODELE D'ÉCOULEMENT QUASI-TRIDIMENSIONNEL.

A.II.1 - Hypothèses.

Il s'agit d'introduire les relations et les différents outils utilisés pour la projection par la méthode de courbure des lignes de courant [95]. On considère donc un système de coordonnées curvilignes (m, θ, α) (fig.11) adapté à la géométrie des nappes de courant (fig.7) modélisant l'écoulement circulant au sein d'une turbomachine. Ces coordonnées m, θ, α sont telles que :

- ▷ les courbes $\alpha = cste$ définissent des surfaces de courant axisymétriques.
- ▷ les courbes $m = cste$ définissent des surfaces axisymétriques générées par des courbes orthogonales aux lignes de courant $\alpha = cst$.

▷ les courbes $\theta = cste$ définissent des plans méridiens.

On associe à une particule matérialisée par le point M sur la figure et au système de coordonnées curvilignes un repère local orthonormé $(M, \vec{e}_m, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\alpha)$, défini par :

$$\vec{e}_m = \frac{\partial \vec{M}}{\partial h_m} \quad , \quad (a.44)$$

$$\vec{e}_\theta = \frac{\partial \vec{M}}{\partial h_\theta} \quad , \quad (a.45)$$

$$\vec{e}_\alpha = \frac{\partial \vec{M}}{\partial h_\alpha} \quad , \quad (a.46)$$

et le vecteur déplacement élémentaire s'écrit :

$$d\vec{M} = h_m dm \vec{e}_m + h_\theta d\theta \vec{e}_\theta + h_\alpha d\alpha \vec{e}_\alpha \quad . \quad (a.47)$$

et les coefficients métriques h_m, h_θ, h_α :

$$h_m = \frac{\partial M}{\partial m} = \frac{\partial m}{\partial m} = 1 \quad , \quad (a.48)$$

$$h_\theta = \frac{\partial M}{\partial \theta} = \frac{\partial r \theta}{\partial \theta} = r \frac{\partial \theta}{\partial \theta} = r \quad , \quad (a.49)$$

$$h_\alpha = \frac{\partial M}{\partial \alpha} = \frac{\partial b \alpha}{\partial \alpha} = b \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha} = b \quad , \quad (a.50)$$

où m représente la coordonnée méridienne de la ligne de courant moyenne, r , le rayon de la nappe de courant mesuré par rapport à l'axe moteur (O, \vec{I}) , θ la coordonnée azimutale sur la nappe, b le taux d'épaisseur de la nappe de courant et α la coordonnée verticale, ou niveau de cette nappe de courant vis-à-vis de l'axe moteur (O, \vec{I}) . Ces coefficients métriques, h_m, h_θ, h_α , ne dépendent pas de θ puisque :

$$\frac{\partial h_m}{\partial \theta} = 0 \quad , \quad (a.51)$$

$$\frac{\partial h_\theta}{\partial \theta} = \frac{\partial r}{\partial \theta} = 0 \quad , \quad (a.52)$$

$$\frac{\partial h_\alpha}{\partial \theta} = \frac{\partial b}{\partial \theta} = 0 \quad . \quad (a.53)$$

$$r = r(m, \alpha) \quad , \quad (a.54)$$

$$b = b(m, \alpha) \quad . \quad (a.55)$$

Par ailleurs, on a les relations suivantes [96] :

$$\frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial h_\theta}{\partial \alpha} = \frac{1}{b} \frac{\partial r}{\partial \alpha} = \vec{e}_m \cdot \vec{I} = \cos \phi \quad , \quad (a.56)$$

$$\frac{1}{h_m} \frac{\partial h_\theta}{\partial m} = \frac{\partial r}{\partial m} = \vec{e}_\alpha \cdot \vec{K} = \vec{e}_\alpha \cdot \vec{K}_r = \sin \phi \quad , \quad (a.57)$$

$$\frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial h_m}{\partial \alpha} = 0 \quad , \quad (a.58)$$

$$\frac{1}{h_m} \frac{\partial h_\alpha}{\partial m} = \frac{\partial b}{\partial m} \quad . \quad (a.59)$$

On peut alors définir, compte tenu de la relation (a.47) et des résultats (a.48), (a.49 et (a.50), le vecteur déplacement élémentaire dans le repère $(M, \vec{e}_m, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\alpha)$:

$$d\vec{M} = 1dm\vec{e}_m + rd\theta\vec{e}_\theta + bd\alpha\vec{e}_\alpha \quad . \quad (a.60)$$

A.II.2 - Cas des variables relatives.

A.II.2.1 - Projections des opérateurs mathématiques.

La formulation générale des opérateurs écrite dans le cas des coordonnées curvilignes orthogonales est adaptée pour le cas de la représentation quasi-tridimensionnelle. Etant donné l'absence de certains résultats et démonstrations dans la littérature, la présentation de certains calculs semble indispensable, notamment dans le cas de la divergence d'un tenseur.

On pose provisoirement, pour des raisons de commodité lors de l'identification des termes, les notations suivantes : soient $x_i, i = 1, 2, 3$ le système de coordonnées curvilignes et $h_i, i = 1, 2, 3$ le système métrique associés à la base orthonormale $(\vec{e}_i), i = 1, 2, 3$ tels que :

$$(m, \theta, \alpha) = (x_1, x_2, x_3) \quad , \quad (a.61)$$

$$(h_m, h_\theta, h_\alpha) = (h_1, h_2, h_3) \quad , \quad (a.62)$$

$$(\vec{e}_m, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\alpha) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \quad . \quad (a.63)$$

▷ Projection de la divergence d'un vecteur.

Si on considère un vecteur quelconque \vec{X} de composantes (X_1, X_2, X_3) sa divergence dans le référentiel relatif \mathcal{R}_r s'écrit d'après [97] :

$$\nabla_r \vec{X} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial(X_1 h_3 h_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(X_2 h_1 h_3)}{\partial x_2} + \frac{\partial(X_3 h_1 h_2)}{\partial x_3} \right) \quad , \quad (a.64)$$

ce qui se traduit dans notre système de notations initiales par :

$$\nabla_r \vec{X} = \frac{1}{rb} \left(\frac{\partial(X_m r b)}{\partial m} + \frac{\partial(X_\theta b)}{\partial \theta} + \frac{\partial(X_\alpha r)}{\partial \alpha} \right) \quad . \quad (a.65)$$

▷ Projection du gradient d'une fonction scalaire.

Si on considère une fonction scalaire quelconque F son gradient dans le référentiel relatif \mathcal{R}_r d'après [98] s'écrit :

$$\vec{\nabla}_r F = {}^t \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{1}{h_2} \frac{\partial F}{\partial x_2}, \frac{1}{h_3} \frac{\partial F}{\partial x_3} \right) \quad , \quad (a.66)$$

ce qui revient à :

$$\vec{\nabla}_r F = {}^t \left(\frac{\partial F}{\partial m}, \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{1}{b} \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right) \quad . \quad (a.67)$$

▷ Projection de la divergence d'un tenseur en coordonnées curvilignes orthogonales.

D'après [98], la formulation de la divergence d'un tenseur quelconque T où s'écrit :

$$\nabla_r T = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum (h_2 h_3 (T_{11} \vec{e}_1 + T_{21} \vec{e}_2 + T_{31} \vec{e}_3), 1) \quad , \quad (a.68)$$

l'opérateur \sum désignant une sommation sur les indices, ceux-ci changent de valeur par permutation circulaire directe, ce qui revient à écrire :

$$\begin{aligned} \nabla_r T &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} ((h_2 h_3 (T_{11} \vec{e}_1 + T_{21} \vec{e}_2 + T_{31} \vec{e}_3), 1) \\ &+ (h_3 h_1 (T_{22} \vec{e}_2 + T_{32} \vec{e}_3 + T_{12} \vec{e}_1), 2) \\ &+ (h_1 h_2 (T_{33} \vec{e}_3 + T_{13} \vec{e}_1 + T_{23} \vec{e}_2), 3)) \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} (h_2 h_3 (T_{11} \vec{e}_1), 1 + h_2 h_3 (T_{21} \vec{e}_2), 1 + h_2 h_3 (T_{31} \vec{e}_3), 1) \\ &+ h_3 h_1 (T_{22} \vec{e}_2), 2 + h_3 h_1 (T_{32} \vec{e}_3), 2 + h_3 h_1 (T_{12} \vec{e}_1), 2) \\ &+ h_1 h_2 (T_{33} \vec{e}_3), 3 + h_1 h_2 (T_{13} \vec{e}_1), 3 + h_1 h_2 (T_{23} \vec{e}_2), 3) \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} (h_2 h_3 (T_{11}), 1 \vec{e}_1 + h_2 h_3 T_{11} (\vec{e}_1), 1 + h_2 h_3 (T_{21}), 1 \vec{e}_2 + h_2 h_3 T_{21} (\vec{e}_2), 1) \\ &+ h_2 h_3 (T_{31}), 1 \vec{e}_3 + h_2 h_3 T_{31} (\vec{e}_3), 1 + h_3 h_1 (T_{22}), 2 \vec{e}_2 + h_3 h_1 T_{22} (\vec{e}_2), 2) \\ &+ h_3 h_1 (T_{32}), 2 \vec{e}_3 + h_3 h_1 T_{32} (\vec{e}_3), 2 + h_3 h_1 (T_{12}), 2 \vec{e}_1 + h_3 h_1 T_{12} (\vec{e}_1), 2) \\ &+ h_1 h_2 (T_{33}), 3 \vec{e}_3 + h_1 h_2 T_{33} (\vec{e}_3), 3 + h_1 h_2 (T_{13}), 3 \vec{e}_1 + h_1 h_2 T_{13} (\vec{e}_1), 3) \\ &+ h_1 h_2 (T_{23}), 3 \vec{e}_2 + h_1 h_2 T_{23} (\vec{e}_2), 3) \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} (h_2 h_3 (T_{11}), 1 \vec{e}_1 + h_2 h_3 (T_{21}), 1 \vec{e}_2 + h_2 h_3 (T_{31}), 1 \vec{e}_3 \\ &+ h_3 h_1 (T_{12}), 2 \vec{e}_1 + h_3 h_1 (T_{22}), 2 \vec{e}_2 + h_3 h_1 (T_{32}), 2 \vec{e}_3 \\ &+ h_1 h_2 (T_{13}), 3 \vec{e}_1 + h_1 h_2 (T_{23}), 3 \vec{e}_2 + h_1 h_2 (T_{33}), 3 \vec{e}_3 \\ &+ h_2 h_3 T_{11} (\vec{e}_1), 1 + h_2 h_3 T_{21} (\vec{e}_2), 1 + h_2 h_3 T_{31} (\vec{e}_3), 1) \\ &+ h_3 h_1 T_{12} (\vec{e}_1), 2 + h_3 h_1 T_{22} (\vec{e}_2), 2 + h_3 h_1 T_{32} (\vec{e}_3), 2) \\ &+ h_1 h_2 T_{13} (\vec{e}_1), 3 + h_1 h_2 T_{23} (\vec{e}_2), 3 + h_1 h_2 T_{33} (\vec{e}_3), 3) \quad . \end{aligned} \quad (a.69)$$

On calcule alors les expressions des termes $(\vec{e}_i)_{,j}$ en fonction des termes $e_i, h_i, (h_i)_{,k}$.

$$\vec{e}_{i,k} = \omega_{ij}^{(k)} \vec{e}_j \quad , \quad (a.70)$$

Puisque les vecteurs (\vec{e}_i) , $i = 1, 2, 3$ liés au point M de la nappe de courant constitue un trièdre fixé, on a également :

$$(\vec{e}_i)_{,j,k} = 0 \quad , \quad (a.71)$$

ce qui se traduit par les résultats :

$$\omega_{ij}^{(k)} = -\omega_{ji}^{(k)} \quad , \quad (a.72)$$

$$\omega_{ii}^{(k)} = 0 \quad . \quad (a.73)$$

La condition d'intégrabilité de Schwartz détermine les neuf quantités $\omega_{ij}^{(k)}$ manquantes. Donc, pour $i = 1$ et $j = 2$:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial M}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial M}{\partial x_1} \right) \quad , \quad (a.74)$$

autrement dit

$$(\overrightarrow{h_2 e_2})_{,1} = (\overrightarrow{h_1 e_1})_{,2} \quad , \quad (a.75)$$

expression que l'on développe :

$$h_{2,1} \overrightarrow{e_2} + h_2 \omega_{21}^{(1)} \overrightarrow{e_1} + h_2 \omega_{23}^{(1)} \overrightarrow{e_3} = h_{1,2} \overrightarrow{e_1} + h_1 \omega_{12}^{(2)} \overrightarrow{e_2} + h_1 \omega_{13}^{(2)} \overrightarrow{e_3} \quad . \quad (a.76)$$

Par identification terme à terme, on obtient :

$$\omega_{21}^{(1)} = \frac{h_{1,2}}{h_2} \quad , \quad (a.77)$$

$$\omega_{12}^{(2)} = \frac{h_{2,1}}{h_1} \quad , \quad (a.78)$$

$$\frac{\omega_{23}^{(1)}}{h_1} = \frac{\omega_{13}^{(2)}}{h_2} \quad . \quad (a.79)$$

De même, pour $i = 2$ et $j = 3$:

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial M}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial M}{\partial x_2} \right) \quad , \quad (a.80)$$

donc

$$(\overrightarrow{h_3 e_3})_{,2} = (\overrightarrow{h_2 e_2})_{,3} \quad , \quad (a.81)$$

expression que l'on développe :

$$h_{3,2} \overrightarrow{e_3} + h_3 \omega_{31}^{(2)} \overrightarrow{e_1} + h_3 \omega_{32}^{(2)} \overrightarrow{e_2} = h_{2,3} \overrightarrow{e_2} + h_2 \omega_{21}^{(3)} \overrightarrow{e_1} + h_2 \omega_{23}^{(3)} \overrightarrow{e_3} \quad , \quad (a.82)$$

Par identification terme à terme, on obtient :

$$\omega_{23}^{(3)} = \frac{h_{3,2}}{h_2} \quad , \quad (a.83)$$

$$\omega_{32}^{(2)} = \frac{h_{2,3}}{h_3} \quad , \quad (a.84)$$

$$\frac{\omega_{31}^{(1)}}{h_2} = \frac{\omega_{21}^{(3)}}{h_3} \quad . \quad (a.85)$$

Enfin, pour $i = 1$ et $j = 3$:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial M}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial M}{\partial x_1} \right) \quad , \quad (a.86)$$

donc

$$(\overrightarrow{h_3 e_3})_{,1} = (\overrightarrow{h_1 e_1})_{,3} \quad , \quad (a.87)$$

expression que l'on développe :

$$h_{3,1} \overrightarrow{e_3} + h_3 \omega_{31}^{(1)} \overrightarrow{e_1} + h_3 \omega_{32}^{(1)} \overrightarrow{e_2} = h_{1,3} \overrightarrow{e_1} + h_1 \omega_{12}^{(3)} \overrightarrow{e_2} + h_1 \omega_{13}^{(3)} \overrightarrow{e_3} \quad , \quad (a.88)$$

Par identification terme à terme, on obtient :

$$\omega_{13}^{(3)} = \frac{h_{3,1}}{h_1} \quad , \quad (a.89)$$

$$\omega_{31}^{(1)} = \frac{h_{1,3}}{h_3} \quad , \quad (a.90)$$

$$\frac{\omega_{32}^{(1)}}{h_1} = \frac{\omega_{12}^{(3)}}{h_3} , \quad (\text{a.91})$$

Compte tenu des égalités (a.79), (a.80), (a.91), on obtient l'égalité suivante :

$$\frac{\omega_{23}^{(1)}}{h_1} = \frac{\omega_{13}^{(2)}}{h_2} = -\frac{\omega_{31}^{(1)}}{h_2} = -\frac{\omega_{21}^{(3)}}{h_3} = -\frac{\omega_{32}^{(1)}}{h_1} = -\frac{\omega_{12}^{(3)}}{h_3} = 0 . \quad (\text{a.92})$$

Tous les termes $\frac{\omega_{ij}^{(k)}}{h_k}$ s'annulent par permutation circulaire.

En utilisant l'ensemble de tous ces résultats, il vient finalement :

$$(\vec{e}_1)_{,1} = \omega_{11}^{(1)} \vec{e}_1 + \omega_{12}^{(1)} \vec{e}_2 + \omega_{13}^{(1)} \vec{e}_3 = -\frac{h_{1,2}}{h_2} \vec{e}_2 - \frac{h_{1,3}}{h_3} \vec{e}_3 , \quad (\text{a.93})$$

$$(\vec{e}_2)_{,1} = \omega_{21}^{(1)} \vec{e}_1 + \omega_{22}^{(1)} \vec{e}_2 + \omega_{23}^{(1)} \vec{e}_3 = \frac{h_{1,2}}{h_2} \vec{e}_2 , \quad (\text{a.94})$$

$$(\vec{e}_3)_{,1} = \omega_{31}^{(1)} \vec{e}_1 + \omega_{32}^{(1)} \vec{e}_2 + \omega_{33}^{(1)} \vec{e}_3 = \frac{h_{1,3}}{h_3} \vec{e}_1 , \quad (\text{a.95})$$

$$(\vec{e}_1)_{,2} = \omega_{11}^{(2)} \vec{e}_1 + \omega_{12}^{(2)} \vec{e}_2 + \omega_{13}^{(2)} \vec{e}_3 = \frac{h_{2,1}}{h_1} \vec{e}_2 , \quad (\text{a.96})$$

$$(\vec{e}_2)_{,2} = \omega_{21}^{(2)} \vec{e}_1 + \omega_{22}^{(2)} \vec{e}_2 + \omega_{23}^{(2)} \vec{e}_3 = -\frac{h_{2,1}}{h_1} \vec{e}_1 - \frac{h_{2,3}}{h_3} \vec{e}_3 , \quad (\text{a.97})$$

$$(\vec{e}_3)_{,2} = \omega_{31}^{(2)} \vec{e}_1 + \omega_{32}^{(2)} \vec{e}_2 + \omega_{33}^{(2)} \vec{e}_3 = \frac{h_{2,3}}{h_3} \vec{e}_2 , \quad (\text{a.98})$$

$$(\vec{e}_1)_{,3} = \omega_{11}^{(3)} \vec{e}_1 + \omega_{12}^{(3)} \vec{e}_2 + \omega_{13}^{(3)} \vec{e}_3 = \frac{h_{3,1}}{h_1} \vec{e}_3 , \quad (\text{a.99})$$

$$(\vec{e}_2)_{,3} = \omega_{21}^{(3)} \vec{e}_1 + \omega_{22}^{(3)} \vec{e}_2 + \omega_{23}^{(3)} \vec{e}_3 = \frac{h_{3,2}}{h_2} \vec{e}_3 , \quad (\text{a.100})$$

$$(\vec{e}_3)_{,3} = \omega_{31}^{(3)} \vec{e}_1 + \omega_{32}^{(3)} \vec{e}_2 + \omega_{33}^{(3)} \vec{e}_3 = -\frac{h_{3,1}}{h_1} \vec{e}_1 - \frac{h_{3,2}}{h_2} \vec{e}_2 . \quad (\text{a.101})$$

L'expression (a.69) peut donc être transformée à l'aide de ces derniers résultats :

$$\begin{aligned} \nabla_r \mathbf{T} = & \frac{1}{h_1 h_2 h_3} ((h_2 h_3 T_{11})_{,1} \vec{e}_1 + (h_2 h_3 T_{21})_{,1} \vec{e}_2 + (h_2 h_3 T_{31})_{,1} \vec{e}_3 \\ & + (h_3 h_1 T_{12})_{,2} \vec{e}_1 + (h_3 h_1 T_{22})_{,2} \vec{e}_2 + (h_3 h_1 T_{32})_{,2} \vec{e}_3 \\ & + (h_1 h_2 T_{13})_{,3} \vec{e}_1 + (h_1 h_2 T_{23})_{,3} \vec{e}_2 + (h_1 h_2 T_{33})_{,3} \vec{e}_3 \\ & + h_2 h_3 T_{11} \left(-\frac{h_{1,2}}{h_2} \vec{e}_2 - \frac{h_{1,3}}{h_3} \vec{e}_3 \right) + h_2 h_3 T_{21} \left(\frac{h_{1,2}}{h_2} \vec{e}_1 \right) + h_2 h_3 T_{31} \left(\frac{h_{1,3}}{h_3} \vec{e}_1 \right) \\ & + h_3 h_1 T_{12} \left(\frac{h_{2,1}}{h_1} \vec{e}_2 \right) + h_3 h_1 T_{22} \left(-\frac{h_{2,1}}{h_1} \vec{e}_1 - \frac{h_{2,3}}{h_3} \vec{e}_3 \right) + h_3 h_1 T_{32} \left(\frac{h_{2,3}}{h_3} \vec{e}_2 \right) \\ & + h_1 h_2 T_{13} \left(\frac{h_{3,1}}{h_1} \vec{e}_3 \right) + h_1 h_2 T_{23} \left(\frac{h_{3,2}}{h_2} \vec{e}_3 \right) + h_1 h_2 T_{33} \left(-\frac{h_{3,1}}{h_1} \vec{e}_1 - \frac{h_{3,2}}{h_2} \vec{e}_2 \right)) , \quad (\text{a.102}) \end{aligned}$$

et il est alors possible d'écrire les composantes de la divergence d'un tenseur à partir de cette écriture.

Projection suivant \vec{e}_1 :

$$\begin{aligned} \nabla_r T_1 = & \frac{1}{h_1 h_2 h_3} ((h_2 h_3 T_{11})_{,1} + (h_3 h_1 T_{12})_{,2} + (h_1 h_2 T_{13})_{,3} + h_2 h_3 T_{21} \left(\frac{h_{1,2}}{h_2} \right) \\ & + h_2 h_3 T_{31} \left(\frac{h_{1,3}}{h_3} \right) + h_3 h_1 T_{22} \left(-\frac{h_{2,1}}{h_1} \right) + h_1 h_2 T_{33} \left(-\frac{h_{3,1}}{h_1} \right)) , \quad (\text{a.103}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_r T_1 &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} ((h_2 h_3 T_{11})_{,1} + (h_3 h_1 T_{12})_{,2} + (h_1 h_2 T_{13})_{,3}) \\ &\quad + T_{21} \left(\frac{h_{1,2}}{h_1 h_2} \right) + T_{31} \left(\frac{h_{1,3}}{h_1 h_3} \right) - T_{22} \left(\frac{h_{2,1}}{h_1 h_2} \right) - T_{33} \left(\frac{h_{3,1}}{h_1 h_3} \right) \quad . \end{aligned} \quad (a.104)$$

Projection suivant \vec{e}_2 :

$$\begin{aligned} \nabla_r T_2 &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} ((h_2 h_3 T_{21})_{,1} + (h_3 h_1 T_{22})_{,2} + (h_1 h_2 T_{23})_{,3} - h_2 h_3 T_{11} \left(\frac{h_{1,2}}{h_2} \right) \\ &\quad + h_3 h_1 T_{32} \left(\frac{h_{2,3}}{h_3} \right) + h_3 h_1 T_{12} \left(\frac{h_{2,1}}{h_1} \right) - h_1 h_2 T_{33} \left(\frac{h_{3,2}}{h_2} \right)) \quad , \end{aligned} \quad (a.105)$$

$$\begin{aligned} \nabla_r T_2 &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} ((h_2 h_3 T_{21})_{,1} + (h_3 h_1 T_{22})_{,2} + (h_1 h_2 T_{23})_{,3}) \\ &\quad - T_{11} \left(\frac{h_{1,2}}{h_1 h_2} \right) + T_{31} \left(\frac{h_{2,3}}{h_2 h_3} \right) + T_{12} \left(\frac{h_{2,1}}{h_1 h_2} \right) - T_{33} \left(\frac{h_{3,2}}{h_2 h_3} \right) \quad . \end{aligned} \quad (a.106)$$

Projection suivant \vec{e}_3 :

$$\begin{aligned} \nabla_r T_3 &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} ((h_2 h_3 T_{31})_{,1} + (h_3 h_1 T_{32})_{,2} + (h_1 h_2 T_{33})_{,3} + h_2 h_3 T_{11} \left(-\frac{h_{1,3}}{h_3} \right) \\ &\quad + h_3 h_1 T_{22} \left(-\frac{h_{2,3}}{h_3} \right) + h_1 h_2 T_{13} \left(\frac{h_{3,1}}{h_1} \right) + h_1 h_2 T_{23} \left(\frac{h_{3,2}}{h_2} \right)) \quad , \end{aligned} \quad (a.107)$$

$$\begin{aligned} \nabla_r T_3 &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} ((h_2 h_3 T_{31})_{,1} + (h_3 h_1 T_{32})_{,2} + (h_1 h_2 T_{33})_{,3}) \\ &\quad - T_{11} \left(\frac{h_{1,3}}{h_1 h_3} \right) - T_{22} \left(\frac{h_{2,3}}{h_2 h_3} \right) + T_{13} \left(\frac{h_{3,1}}{h_1 h_3} \right) + T_{23} \left(\frac{h_{3,2}}{h_2 h_3} \right) \quad . \end{aligned} \quad (a.108)$$

Les relations (a.104), (a.106), (a.108), retranscrites dans le système initial de notations deviennent :

projection suivant \vec{e}_m :

$$\begin{aligned} \nabla_r T_m &= \frac{1}{h_m h_\theta h_\alpha} ((h_\theta h_\alpha T_{mm})_{,m} + (h_\alpha h_m T_{m\theta})_{,\theta} + (h_m h_\theta T_{m\alpha})_{,\alpha}) \\ &\quad + T_{\theta m} \left(\frac{h_{m,\theta}}{h_m h_\theta} \right) + T_{\alpha m} \left(\frac{h_{m,\alpha}}{h_m h_\alpha} \right) - T_{\theta\theta} \left(\frac{h_{\theta,m}}{h_m h_\theta} \right) - T_{\alpha\alpha} \left(\frac{h_{\alpha,m}}{h_m h_\alpha} \right) \quad , \end{aligned} \quad (a.109)$$

projection suivant \vec{e}_θ :

$$\begin{aligned} \nabla_r T_\theta &= \frac{1}{h_m h_\theta h_\alpha} ((h_\theta h_\alpha T_{\theta m})_{,m} + (h_\alpha h_m T_{\theta\theta})_{,\theta} + (h_m h_\theta T_{\theta\alpha})_{,\alpha}) \\ &\quad - T_{mm} \left(\frac{h_{m,\theta}}{h_m h_\theta} \right) + T_{\alpha\theta} \left(\frac{h_{\theta,\alpha}}{h_\theta h_\alpha} \right) + T_{m\theta} \left(\frac{h_{\theta,m}}{h_m h_\theta} \right) - T_{\alpha\alpha} \left(\frac{h_{\alpha,\theta}}{h_\theta h_\alpha} \right) \quad , \end{aligned} \quad (a.110)$$

projection suivant \vec{e}_α :

$$\begin{aligned} \nabla_r T_\alpha &= \frac{1}{h_m h_\theta h_\alpha} ((h_\theta h_\alpha T_{\alpha m})_{,m} + (h_\alpha h_m T_{\alpha\theta})_{,\theta} + (h_m h_\theta T_{\alpha\alpha})_{,\alpha}) \\ &\quad - T_{mm} \left(\frac{h_{m,\alpha}}{h_m h_\alpha} \right) - T_{\theta\theta} \left(\frac{h_{\theta,\alpha}}{h_\theta h_\alpha} \right) + T_{m\alpha} \left(\frac{h_{\alpha,m}}{h_m h_\alpha} \right) - T_{\theta\alpha} \left(\frac{h_{\alpha,\theta}}{h_\theta h_\alpha} \right) \quad , \end{aligned} \quad (a.111)$$

et en utilisant les relations (a.51) à (a.59), on obtient le résultat :

projection suivant \vec{e}_m :

$$\nabla_r T_m = \frac{1}{rb} \left(\frac{\partial_r (rb T_{mm})}{\partial m} + \frac{\partial_r (b T_{m\theta})}{\partial \theta} + \frac{\partial_r (r T_{m\alpha})}{\partial \alpha} \right) - \frac{T_{\theta\theta}}{r} \frac{\partial_r r}{\partial m} - \frac{T_{\alpha\alpha}}{b} \frac{\partial_r b}{\partial m} , \quad (a.112)$$

projection suivant \vec{e}_θ :

$$\nabla_r T_\theta = \frac{1}{rb} \left(\frac{\partial_r (rb T_{\theta m})}{\partial m} + \frac{\partial_r (b T_{\theta\theta})}{\partial \theta} + \frac{\partial_r (r T_{\theta\alpha})}{\partial \alpha} \right) + \frac{T_{\alpha\theta}}{rb} \frac{\partial_r r}{\partial \alpha} + \frac{T_{m\theta}}{r} \frac{\partial_r r}{\partial m} , \quad (a.113)$$

projection suivant \vec{e}_α :

$$\nabla_r T_\alpha = \frac{1}{rb} \left(\frac{\partial_r (rb T_{\alpha m})}{\partial m} + \frac{\partial_r (b T_{\alpha\theta})}{\partial \theta} + \frac{\partial_r (r T_{\alpha\alpha})}{\partial \alpha} \right) + \frac{T_{\theta\theta}}{rb} \frac{\partial_r r}{\partial \alpha} + \frac{T_{m\alpha}}{b} \frac{\partial_r b}{\partial m} . \quad (a.114)$$

▷ Expressions de l'accélération de Coriolis dans le repère local ($M, \vec{e}_m, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\alpha$).

Les composantes du vecteur vitesse angulaire de rotation sont :

$$\vec{\omega} = {}^t(\omega \cos \phi, 0, \omega \sin \phi) = {}^t\left(\frac{\omega}{b} \frac{\partial_r r}{\partial \alpha}, 0, -\omega \frac{\partial_r r}{\partial m}\right) , \quad (a.115)$$

et celles du vecteur vitesse relative :

$$\vec{W} = {}^t(W_m, W_\theta, W_\alpha) . \quad (a.116)$$

Le vecteur accélération de Coriolis a donc pour composantes :

$$\vec{W} \times \vec{\omega} = -\vec{\omega} \times \vec{W} = {}^t\left(-\omega W_\theta \frac{\partial_r r}{\partial m}, \omega \left(W_m \frac{\partial_r r}{\partial m} + \frac{W_\alpha}{b} \frac{\partial_r r}{\partial \alpha}\right), -\omega \frac{W_\theta}{b} \frac{\partial_r r}{\partial \alpha}\right) . \quad (a.117)$$

▷ Expression du gradient de l'accélération centripète.

D'après (a.22) et avec (a.73) on obtient :

$$\nabla_r \left(\frac{\omega^2 r^2}{2} \right) = \left(\omega^2 r \frac{\partial_r r}{\partial m}, 0, \omega^2 \frac{\partial_r r}{\partial \alpha} \right) . \quad (a.118)$$

▷ Expression de la divergence du vecteur vitesse relative.

Pour le vecteur \vec{W} , de composantes ${}^t(W_m, W_\theta, W_\alpha)$, elle s'écrit avec (a.65) :

$$\nabla_r \vec{W} = \frac{1}{rb} \left(\frac{\partial_r (W_m r b)}{\partial m} + \frac{\partial_r (W_\theta b)}{\partial \theta} + \frac{\partial_r (W_\alpha r)}{\partial \alpha} \right) . \quad (a.119)$$

▷ Expression de la divergence du tenseur

$\rho \vec{W} \otimes \vec{W} + p \cdot \mathbf{I}$ de l'équation de quantité de mouvement (1.23) .

$$\rho \vec{W} \otimes \vec{W} + p \cdot \mathbf{I} = \begin{pmatrix} \rho W_m W_m + p & \rho W_m W_\theta & \rho W_m W_\alpha \\ \rho W_\theta W_m & \rho W_\theta W_\theta + p & \rho W_\theta W_\alpha \\ \rho W_\alpha W_m & \rho W_\alpha W_\theta & \rho W_\alpha W_\alpha + p \end{pmatrix} , \quad (a.120)$$

Compte tenu des résultats (a.112), (a.113), (a.114), il est possible d'écrire les projections de la divergence de ce tenseur,

suivant \vec{e}_m :

$$\begin{aligned} \nabla_r(\rho\vec{W} \otimes \vec{W} + p \cdot \mathbf{I})_m = & \frac{1}{rb} \left(\frac{\partial_r(rb(\rho W_m W_m + p))}{\partial m} + \frac{\partial_r(b\rho W_m W_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial_r(r\rho W_m W_\alpha)}{\partial \alpha} \right) \\ & - \frac{\rho W_\theta W_\theta + p}{r} \frac{\partial_r r}{\partial m} - \frac{\rho W_\alpha W_\alpha + p}{b} \frac{\partial_r b}{\partial m} , \end{aligned} \quad (a.121)$$

suivant \vec{e}_θ :

$$\begin{aligned} \nabla_r(\rho\vec{W} \otimes \vec{W} + p \cdot \mathbf{I})_\theta = & \frac{1}{rb} \left(\frac{\partial_r(rb\rho W_\theta W_m)}{\partial m} + \frac{\partial_r(b(\rho W_\theta W_\theta + p))}{\partial \theta} + \frac{\partial_r(r\rho W_\theta W_\alpha)}{\partial \alpha} \right) \\ & + \frac{\rho W_\alpha W_\theta}{rb} \frac{\partial_r r}{\partial \alpha} + \frac{\rho W_m W_\theta}{r} \frac{\partial_r r}{\partial m} , \end{aligned} \quad (a.122)$$

suivant \vec{e}_α :

$$\begin{aligned} \nabla_r(\rho\vec{W} \otimes \vec{W} + p \cdot \mathbf{I})_\alpha = & \frac{1}{rb} \left(\frac{\partial_r(rb\rho W_\alpha W_m)}{\partial m} + \frac{\partial_r(b\rho W_\alpha W_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial_r(r(\rho W_\alpha W_\alpha + p))}{\partial \alpha} \right) \\ & + \frac{\rho W_\theta W_\theta + p}{rb} \frac{\partial_r r}{\partial \alpha} + \frac{\rho W_m W_\alpha}{b} \frac{\partial_r b}{\partial m} . \end{aligned} \quad (a.123)$$

A.II.2.2 - Ecriture tridimensionnelle en repère local.

▷ Ecriture de l'équation de conservation de la masse.

L'équation (1.22) devient, de par la relation (a.119),

$$\frac{\partial_r \rho}{\partial t} + \frac{1}{rb} \left(\frac{\partial_r(\rho W_m r b)}{\partial m} + \frac{\partial_r(\rho W_\theta b)}{\partial \theta} + \frac{\partial_r(\rho W_\alpha r)}{\partial \alpha} \right) = 0 . \quad (a.124)$$

▷ Ecriture de l'équation de quantité de mouvement.

L'équation (1.23) est projetée à l'aide des relations (a.117), (a.118) et des projections (a.121), (a.122), (a.123).

Ainsi, suivant \vec{e}_m , on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial_r(\rho W_m)}{\partial t} + \frac{1}{rb} \left(\frac{\partial_r(rb(\rho W_m W_m + p))}{\partial m} + \frac{\partial_r(b\rho W_m W_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial_r(r\rho W_m W_\alpha)}{\partial \alpha} \right) \\ - \frac{\rho W_\theta W_\theta + p}{r} \frac{\partial_r r}{\partial m} - \frac{\rho W_\alpha W_\alpha + p}{b} \frac{\partial_r b}{\partial m} = \rho \omega^2 r \frac{\partial_r r}{\partial m} - 2\rho \omega W_\theta \frac{\partial_r r}{\partial m} , \end{aligned} \quad (a.125)$$

suivant \vec{e}_θ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial_r(\rho W_\theta)}{\partial t} + \frac{1}{rb} \left(\frac{\partial_r(rb\rho W_\theta W_m)}{\partial m} + \frac{\partial_r(b(\rho W_\theta W_\theta + p))}{\partial \theta} + \frac{\partial_r(r\rho W_\theta W_\alpha)}{\partial \alpha} \right) \\ + \frac{\rho W_\alpha W_\theta}{rb} \frac{\partial_r r}{\partial \alpha} + \frac{\rho W_m W_\theta}{r} \frac{\partial_r r}{\partial m} = 2\rho \omega \left(W_m \frac{\partial_r r}{\partial m} + \frac{W_\alpha}{b} \frac{\partial_r r}{\partial \alpha} \right) , \end{aligned} \quad (a.126)$$

suisant \vec{e}_α :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial_r(\rho W_\alpha)}{\partial t} + \frac{1}{rb} \left(\frac{\partial_r(rb\rho W_\alpha W_m)}{\partial m} + \frac{\partial_r(b\rho W_\alpha W_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial_r(r(\rho W_\alpha W_\alpha + p))}{\partial \alpha} \right) \\ & - \frac{\rho W_\theta W_\theta + p}{rb} \frac{\partial_r r}{\partial \alpha} + \frac{\rho W_m W_\alpha}{b} \frac{\partial_r b}{\partial m} = \rho \omega^2 \frac{r}{b} \frac{\partial_r r}{\partial \alpha} - 2\rho \omega \frac{W_\theta}{b} \frac{\partial_r r}{\partial \alpha} \quad . \end{aligned} \quad (a.127)$$

▷ Ecriture de l'équation de l'énergie.

L'équation de l'énergie (1.24) est projetée de la même façon que l'équation de conservation de la masse à l'aide de la relation (a.119) et devient :

$$\frac{\partial_r(\rho J - p)}{\partial t} + \frac{1}{rb} \left(\frac{\partial_r(\rho J W_m r b)}{\partial m} + \frac{\partial_r(\rho J W_\theta b)}{\partial \theta} + \frac{\partial_r(\rho J W_\alpha r)}{\partial \alpha} \right) = 0 \quad . \quad (a.128)$$

A.II.2.3 - Projection quasi-tridimensionnelle.

D'après Veullot et Al.(1990)[61], dans le cas de la représentation géométrique quasi-tridimensionnelle étant donné que l'on projette les équations sur une nappe de courant donnée située à α_0 vis-à-vis de l'axe moteur (O, \vec{I}) , le rayon r et le taux d'épaisseur b de la nappe de courant dépendent alors uniquement de la coordonnée méridienne de la ligne de courant moyenne, autrement dit les égalités (a.54) et (a.55) se restreignent à :

$$r = r(m) \quad , \quad (a.129)$$

$$b = b(m) \quad . \quad (a.130)$$

Par ailleurs l'hypothèse de fluide non visqueux impose une condition sur la vitesse dans la direction \vec{e}_α normale à la nappe de courant fixée :

$$\vec{W}_\alpha = \vec{0} \quad . \quad (a.131)$$

Les expressions (a.124), (a.125), (a.126), (a.127) se simplifient et on obtient :

▷ l'équation de conservation de la masse,

$$\frac{\partial_r(rb\rho)}{\partial t} + \frac{\partial_r(\rho W_m r b)}{\partial m} + \frac{\partial_r(\rho W_\theta b)}{\partial \theta} = 0 \quad , \quad (a.132)$$

▷ l'équation de quantité de mouvement,

suisant \vec{e}_m :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial_r(\rho W_m)}{\partial t} + \frac{1}{rb} \left(\frac{\partial_r(rb\rho W_m W_m + p)}{\partial m} + \frac{\partial_r(b\rho W_m W_\theta)}{\partial \theta} \right) \\ & - \frac{\rho W_\theta W_\theta + p}{r} \frac{\partial_r r}{\partial m} = \rho \omega^2 r \frac{\partial_r r}{\partial m} - 2\rho \omega W_\theta \frac{\partial_r r}{\partial m} \quad , \end{aligned} \quad (a.133)$$

et suivant \vec{e}_θ :

$$\frac{\partial_r(\rho W_\theta)}{\partial t} + \frac{1}{rb} \left(\frac{\partial_r(\tau b \rho W_\theta W_m)}{\partial m} + \frac{\partial_r(b(\rho W_\theta W_\theta + p))}{\partial \theta} \right) + \frac{\rho W_m W_\theta}{r} \frac{\partial_r r}{\partial m} = 2\rho\omega W_m \frac{\partial_r r}{\partial m} \quad , \quad (a.134)$$

▷ l'équation de l'énergie,

$$\frac{\partial_r(\tau b(\rho J - p))}{\partial t} + \frac{1}{rb} \left(\frac{\partial_r(\rho J W_m \tau b)}{\partial m} + \frac{\partial_r(\rho J W_\theta b)}{\partial \theta} \right) = 0 \quad . \quad (a.135)$$

Il est alors possible d'écrire de deux facons différentes le système d'équations. Soit le système :

$$\frac{\partial_r(\tau b \rho)}{\partial t} + \frac{\partial_r(\rho W_m \tau b)}{\partial m} + \frac{\partial_r(\rho W_\theta b)}{\partial \theta} = 0, \quad (1.32)$$

$$\frac{\partial_r(\tau b \rho W_m)}{\partial t} + \frac{\partial_r(\tau b \rho W_m W_m + p)}{\partial m} + \frac{\partial_r(b \rho W_m W_\theta)}{\partial \theta} - \rho b (W_\theta - \omega r)^2 \frac{\partial_r r}{\partial m} + p \frac{\partial_r b}{\partial m} = 0, \quad (1.33)$$

$$\frac{\partial_r(\tau b \rho W_\theta)}{\partial t} + \left(\frac{\partial_r(\tau b \rho W_\theta W_m)}{\partial m} + \frac{\partial_r(b(\rho W_\theta W_\theta + p))}{\partial \theta} \right) + \frac{\rho b W_m (W_\theta - 2\omega r)}{r} \frac{\partial_r r}{\partial m} = 0, \quad (1.34)$$

$$\frac{\partial_r(\tau b(\rho J - p))}{\partial t} + \frac{1}{rb} \left(\frac{\partial_r(\rho J W_m \tau b)}{\partial m} + \frac{\partial_r(\rho J W_\theta b)}{\partial \theta} \right) = 0, \quad (1.35)$$

soit le système suivant :

$$\frac{\partial_r \rho}{\partial t} + \frac{\partial_r(\rho W_m)}{\partial m} + \frac{1}{r} \frac{\partial_r(\rho W_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\rho W_m}{r} \frac{\partial_r r}{\partial m} + \frac{\rho W_m}{b} \frac{\partial_r b}{\partial m} = 0, \quad (1.28)$$

$$\frac{\partial_r(\rho W_m)}{\partial t} + \frac{\partial_r(\rho W_m W_m + p)}{\partial m} + \frac{1}{r} \frac{\partial_r(\rho W_m W_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\rho(W_m^2 - (W_\theta - \omega r)^2)}{r} \frac{\partial_r r}{\partial m} + \frac{\rho W_m^2}{b} \frac{\partial_r b}{\partial m} = 0, \quad (1.29)$$

$$\frac{\partial_r(\rho W_\theta)}{\partial t} + \frac{\partial_r(\rho W_\theta W_m)}{\partial m} + \frac{\partial_r(\rho W_\theta W_\theta + p)}{\partial \theta} + 2 \frac{\rho W_m (W_\theta - \omega r)}{r} \frac{\partial_r r}{\partial m} + \frac{\rho W_m W_\theta}{b} \frac{\partial_r b}{\partial m} = 0, \quad (1.30)$$

$$\frac{\partial_r(\rho J - p)}{\partial t} + \frac{\partial_r(\rho J W_m)}{\partial m} + \frac{1}{r} \frac{\partial_r(\rho J W_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\rho J W_m}{r} \frac{\partial_r r}{\partial m} + \frac{\rho J W_m}{b} \frac{\partial_r b}{\partial m} = 0. \quad (1.31)$$

A.II.3 - Cas des variables absolues.

A.II.3.1 - Projections des opérateurs.

La plupart des résultats obtenu précédement au paragraphe A.II.2.1 sont utilisés ici pour établir les équations de l'écoulement dans ce nouveau système de variables, mais il reste un certain nombre d'adaptations à réaliser.

▷ Calcul de l'accélération de Coriolis :

les composantes du vecteur vitesse angulaire de rotation étant :

$$\vec{\omega} = {}^t(\omega \cos \phi, 0, \omega \sin \phi) = {}^t\left(\frac{\omega}{b} \frac{\partial_r r}{\partial \alpha}, 0, -\omega \frac{\partial_r r}{\partial m}\right) \quad , \quad (a.136)$$

et celles du vecteur vitesse absolue :

$$\vec{V} = {}^t(V_m, V_\theta, V_\alpha) \quad . \quad (a.137)$$

Le vecteur accélération de Coriolis a donc pour composantes :

$$\vec{\omega} \times \vec{V} = {}^t(V_\theta \omega \frac{\partial_r r}{\partial m}, -\omega(V_m \frac{\partial_r r}{\partial m} + \frac{V_\alpha}{b} \frac{\partial_r r}{\partial \alpha}), \omega \frac{V_\theta}{b} \frac{\partial_r r}{\partial \alpha}) \quad . \quad (a.138)$$

▷ L'expression de la divergence du vecteur vitesse absolue \vec{V} ,

de composantes ${}^t(V_m, V_\theta, V_\alpha)$, s'écrit avec (a.64) :

$$\nabla_r \vec{V} = \frac{1}{rb} \left(\frac{\partial_r(V_m r b)}{\partial m} + \frac{\partial_r(V_\theta b)}{\partial \theta} + \frac{\partial_r(V_\alpha r)}{\partial \alpha} \right) \quad . \quad (a.139)$$

▷ Expression de la divergence du tenseur

$\rho \vec{V} \otimes \vec{W} + p \cdot \mathbf{I}$ de l'équation de quantité de mouvement (1.37) :

$$\rho \vec{V} \otimes \vec{W} + p \cdot \mathbf{I} = \begin{pmatrix} \rho V_m W_m + p & \rho V_m W_\theta & \rho V_m W_\alpha \\ \rho V_\theta W_m & \rho V_\theta W_\theta + p & \rho V_\theta W_\alpha \\ \rho V_\alpha W_m & \rho V_\alpha W_\theta & \rho V_\alpha W_\alpha + p \end{pmatrix} \quad , \quad (a.140)$$

Compte tenu des résultats (a.111), (a.112), (a.113), il est possible d'écrire les projections de la divergence de ce tenseur,

suivant \vec{e}_m :

$$\begin{aligned} \nabla_r(\rho \vec{V} \otimes \vec{W} + p \cdot \mathbf{I})_m &= \frac{1}{rb} \left(\frac{\partial_r(rb(\rho V_m W_m + p))}{\partial m} + \frac{\partial_r(b\rho V_m W_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial_r(r\rho V_m W_\alpha)}{\partial \alpha} \right) \\ &\quad - \frac{\rho V_\theta W_\theta + p}{r} \frac{\partial_r r}{\partial m} - \frac{\rho V_\alpha W_\alpha + p}{b} \frac{\partial_r b}{\partial m} \quad , \end{aligned} \quad (a.141)$$

suivant \vec{e}_θ :

$$\begin{aligned} \nabla_r(\rho \vec{V} \otimes \vec{W} + p \cdot \mathbf{I})_\theta &= \frac{1}{rb} \left(\frac{\partial_r(rb\rho V_\theta W_m)}{\partial m} + \frac{\partial_r(b(\rho V_\theta W_\theta + p))}{\partial \theta} + \frac{\partial_r(r\rho V_\theta W_\alpha)}{\partial \alpha} \right) \\ &\quad + \frac{\rho V_\alpha W_\theta}{rb} \frac{\partial_r r}{\partial \alpha} + \frac{\rho V_m W_\theta}{r} \frac{\partial_r r}{\partial m} \quad , \end{aligned} \quad (a.142)$$

suivant \vec{e}_α :

$$\begin{aligned} \nabla_r(\rho \vec{V} \otimes \vec{W} + p \cdot \mathbf{I})_\alpha &= \frac{1}{rb} \left(\frac{\partial_r(rb\rho V_\alpha W_m)}{\partial m} + \frac{\partial_r(b\rho V_\alpha W_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial_r(r(\rho V_\alpha W_\alpha + p))}{\partial \alpha} \right) \\ &\quad + \frac{\rho V_\theta W_\theta + p}{rb} \frac{\partial_r r}{\partial \alpha} + \frac{\rho V_m W_\alpha}{b} \frac{\partial_r b}{\partial m} \quad . \end{aligned} \quad (a.143)$$

A.II.3.2 - Ecriture tridimensionnelle en repère local.

▷ L'équation de conservation de la masse (1.36)

s'écrit de la même façon que la relation (a.123).

▷ L'équation de quantité de mouvement (1.37) :

Suivant \vec{e}_m , on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial_r(\tau b \rho V_m)}{\partial t} + \frac{\partial_r(\tau b \rho V_m W_m + p)}{\partial m} + \frac{\partial_r(b \rho V_m W_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial_r(\tau \rho V_m W_\alpha)}{\partial \alpha} \\ - b(\rho V_\theta(W_\theta - \omega r) + p) \frac{\partial_r r}{\partial m} - r(\rho V_\alpha W_\alpha + p) \frac{\partial_r b}{\partial m} = 0 \quad , \end{aligned} \quad (a.144)$$

et suivant \vec{e}_θ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial_r(\tau b \rho V_\theta)}{\partial t} + \frac{\partial_r(\tau b \rho V_\theta W_m)}{\partial m} + \frac{\partial_r(b(\rho V_\theta W_\theta + p))}{\partial \theta} + \frac{\partial_r(\tau \rho V_\theta W_\alpha)}{\partial \alpha} \\ + b(\rho V_m(W_\theta - \omega r)) \frac{\partial_r r}{\partial m} + \rho V_\alpha(W_\theta - \omega r) \frac{\partial_r r}{\partial \alpha} = 0 \quad . \end{aligned} \quad (a.145)$$

enfin, suivant \vec{e}_α :

$$\begin{aligned} \frac{\partial_r(\tau b \rho V_\alpha)}{\partial t} + \frac{\partial_r(\tau b \rho V_\alpha W_m)}{\partial m} + \frac{\partial_r(b \rho V_\alpha W_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial_r(\tau \rho V_\alpha W_\alpha + p)}{\partial \alpha} \\ + \rho V_m W_\alpha \frac{\partial_r b}{\partial m} - (\rho V_\theta(W_\theta - \omega r) + p) \frac{\partial_r r}{\partial m} = 0 \quad . \end{aligned} \quad (a.146)$$

▷ L'équation de l'énergie (1.38)

est projetée de la même façon que l'équation de conservation de la masse et devient :

$$\frac{\partial_r(\tau b E)}{\partial t} + \frac{\partial_r(\tau b(E W_m + p V_m))}{\partial m} + \frac{\partial_r(b(E W_\theta + p V_\theta))}{\partial \theta} + \frac{\partial_r(\tau(E W_\alpha + p V_\alpha))}{\partial \alpha} = 0 \quad . \quad (a.147)$$

A.II.3.3 - Projection quasi-tridimensionnelle.

A partir des hypothèses présentées au paragraphe A.II.2.3 et en utilisant la même démarche on obtient les résultats suivants :

▷ Equation de conservation de la masse :

Puisqu'elle n'est pas modifiée par le changement de variables,

$$\frac{\partial_r \rho}{\partial t} + \frac{\partial_r(\rho W_m)}{\partial m} + \frac{1}{r} \frac{\partial_r(\rho W_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\rho W_m}{r} \frac{\partial_r r}{\partial m} + \frac{\rho W_m}{b} \frac{\partial_r b}{\partial m} = 0 \quad , \quad (a.148)$$

▷ Ecriture de l'équation de quantité de mouvement :

les projections (a.144),(a.145) deviennent :

suivant \vec{e}_m , on a :

$$\frac{\partial_r(\tau b \rho V_m)}{\partial t} + \frac{\partial_r(\tau b \rho V_m W_m + p)}{\partial m} + \frac{\partial_r(b \rho V_m W_\theta)}{\partial \theta} - b(\rho V_\theta(W_\theta - \omega r) + p) \frac{\partial_r r}{\partial m} - r p \frac{\partial_r b}{\partial m} = 0 \quad , \quad (a.149)$$

$$\frac{\partial_r(\rho V_m)}{\partial t} + \frac{\partial_r(\rho V_m W_m + p)}{\partial m} + \frac{1}{r} \frac{\partial_r(\rho V_m W_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\rho(V_m W_m - V_\theta(W_\theta - \omega r))}{r} \frac{\partial_r r}{\partial m} + \frac{\rho V_m W_m}{b} \frac{\partial_r b}{\partial m} = 0 \quad , \quad (a.150)$$

et suivant \vec{e}_θ :

$$\frac{\partial_r(r b \rho W_\theta)}{\partial t} + \frac{\partial_r(r b \rho V_\theta W_m)}{\partial m} + \frac{\partial_r(b(\rho V_\theta W_\theta + p))}{\partial \theta} + b(\rho W_m(V_\theta - \omega r)) \frac{\partial_r r}{\partial m} = 0 \quad . \quad (a.151)$$

$$\frac{\partial_r(\rho W_\theta)}{\partial t} + \frac{\partial_r(\rho V_\theta W_m)}{\partial m} + \frac{1}{r} \frac{\partial_r(\rho V_\theta W_\theta + p)}{\partial \theta} + \frac{\rho(V_m W_\theta + W_m(V_\theta - \omega r))}{r} \frac{\partial_r r}{\partial \alpha} + \frac{\rho V_m W_\theta}{b} \frac{\partial_r b}{\partial m} = 0 \quad . \quad (a.152)$$

▷ Expression de l'équation de l'énergie :

l'équation de l'énergie (a.147) devient

$$\frac{\partial_r r b E}{\partial t} + \frac{\partial(r b(E W_m + p V_m))}{\partial m} + \frac{\partial(b(E W_\theta + p V_\theta))}{\partial \theta} = 0 \quad , \quad (a.153)$$

$$\frac{\partial_r E}{\partial t} + \frac{\partial_r(E W_m + p V_m)}{\partial m} + \frac{1}{r} \frac{\partial_r(E W_\theta + p V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\rho E W_m + p V_m}{r} \frac{\partial_r r}{\partial m} + \frac{\rho E W_m + p V_m}{b} \frac{\partial_r b}{\partial m} = 0 \quad . \quad (a.154)$$

A.III - MODELE D'ÉCOULEMENT TRIDIMENSIONNEL.

A.III.1 - Cas des coordonnées cartésiennes.

A.III.1.1 - Hypothèses.

On considère un système de coordonnées cartésiennes (x, y, z) , et on associe à une particule quelconque de l'écoulement matérialisée sur la figure par le point M un repère local orthonormé $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Le vecteur déplacement élémentaire s'écrit :

$$\vec{dM} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z \quad . \quad (a.155)$$

A.III.1.2 - Cas des variables relatives.

A.III.1.2.1 - Projections des opérateurs.

▷ Divergence d'un vecteur :

Si on considère un vecteur quelconque \vec{X} de composantes (X_x, X_y, X_z) sa divergence dans le référentiel relatif \mathcal{R}_r s'écrit :

$$\nabla_r \vec{X} = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \quad . \quad (a.156)$$

▷ Gradient d'une fonction scalaire :

Si on considère une fonction scalaire quelconque F son gradient dans le référentiel relatif \mathcal{R}_r d'après [93] s'écrit :

$$\vec{\nabla}_r F = {}^t \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) . \quad (a.157)$$

▷ Projections de la divergence d'un tenseur symétrique en coordonnées cartésiennes :

suivant \vec{e}_x :

$$\nabla_r T_x = \frac{\partial_r T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial_r T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial_r T_{xz}}{\partial z} , \quad (a.158)$$

suivant \vec{e}_y :

$$\nabla_r T_y = \frac{\partial_r T_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial_r T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial_r T_{yz}}{\partial z} , \quad (a.159)$$

suivant \vec{e}_z :

$$\nabla_r T_z = \frac{\partial_r T_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial_r T_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial_r T_{zz}}{\partial z} . \quad (a.160)$$

▷ Relation de passage entre référentiels :

les composantes du vecteur vitesse absolue sont :

$$\vec{V} = {}^t(V_x, V_y, V_z) , \quad (a.161)$$

celles du vecteur vitesse relative :

$$\vec{W} = {}^t(W_x, W_y, W_z) . \quad (a.162)$$

et celles du vecteur vitesse angulaire de rotation :

$$\vec{\omega} = {}^t(\omega, 0, 0) , \quad (a.163)$$

le calcul de la vitesse d'entraînement donne :

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{OM} = {}^t(0, -\omega z, \omega y) . \quad (a.164)$$

Alors, la relation de passage entre référentiels s'écrit :

$$\begin{aligned} V_x &= W_x \\ V_y &= W_y - \omega z \\ V_z &= W_z + \omega y . \end{aligned} \quad (a.165)$$

▷ L'accélération de Coriolis a pour écriture :

$$\vec{W} \times \vec{\omega} = -\vec{\omega} \times \vec{W} = {}^t(0, \omega W_z, -\omega W_y) . \quad (a.166)$$

▷ Expression du gradient de l'accélération centripète.

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = (0, -\omega^2 y, -\omega^2 z) \quad . \quad (a.167)$$

▷ L'expression de la divergence du vecteur vitesse relative \vec{W} ,
de composantes (W_x, W_y, W_z) , s'écrit avec (a.156) :

$$\nabla_r \vec{W} = \frac{\partial_r W_x}{\partial x} + \frac{\partial_r W_y}{\partial y} + \frac{\partial_r W_z}{\partial z} \quad . \quad (a.168)$$

▷ Expression de la divergence du tenseur

$\rho \vec{W} \otimes \vec{W} + p \cdot \mathbf{I}$ de l'équation de quantité de mouvement (1.26) :

$$\rho \vec{W} \otimes \vec{W} + p \cdot \mathbf{I} = \begin{pmatrix} \rho W_x W_x + p & \rho W_x W_y & \rho W_x W_z \\ \rho W_y W_x & \rho W_y W_y + p & \rho W_y W_z \\ \rho W_z W_x & \rho W_z W_y & \rho W_z W_z + p \end{pmatrix} \quad , \quad (a.169)$$

Compte tenu des résultats (a.158), (a.159), (a.160), on obtient les projections de la divergence de ce tenseur, suivant \vec{e}_x :

$$\nabla_r (\rho \vec{W} \otimes \vec{W} + p \cdot \mathbf{I})_x = \frac{\partial_r (\rho W_x W_x + p)}{\partial x} + \frac{\partial_r (\rho W_x W_y)}{\partial y} + \frac{\partial_r (\rho W_x W_z)}{\partial z} \quad , \quad (a.170)$$

suivant \vec{e}_y :

$$\nabla_r (\rho \vec{W} \otimes \vec{W} + p \cdot \mathbf{I})_y = \left(\frac{\partial_r (\rho W_y W_x)}{\partial x} + \frac{\partial_r (\rho W_y W_y + p)}{\partial y} + \frac{\partial_r (\rho W_y W_z)}{\partial z} \right) \quad , \quad (a.171)$$

suivant \vec{e}_z :

$$\nabla_r (\rho \vec{W} \otimes \vec{W} + p \cdot \mathbf{I})_z = \frac{\partial_r (\rho W_z W_x)}{\partial x} + \frac{\partial_r (\rho W_z W_y)}{\partial y} + \frac{\partial_r (\rho W_z W_z + p)}{\partial z} \quad . \quad (a.172)$$

A.III.1.2.2 - Système d'équations.

▷ Écriture de l'équation de conservation de la masse :

l'équation (1.22) devient,

$$\frac{\partial_r \rho}{\partial t} + \frac{\partial_r (\rho W_x)}{\partial x} + \frac{\partial_r (\rho W_y)}{\partial y} + \frac{\partial_r (\rho W_z)}{\partial z} = 0 \quad . \quad (a.173)$$

▷ Écriture de l'équation de quantité de mouvement :

l'équation (1.23) est projetée à l'aide des relations (a.170), (a.171), (a.172).

Ainsi, suivant \vec{e}_x , on a :

$$\frac{\partial_r (\rho W_x)}{\partial t} + \frac{\partial_r (\rho W_x W_x + p)}{\partial x} + \frac{\partial_r (\rho W_x W_y)}{\partial y} + \frac{\partial_r (\rho W_x W_z)}{\partial z} = 0 \quad , \quad (a.174)$$

suisant \vec{e}_y :

$$\frac{\partial_r(\rho W_y)}{\partial t} + \frac{\partial_r(\rho W_y W_x)}{\partial x} + \frac{\partial_r(\rho W_y W_y + p)}{\partial y} + \frac{\partial_r(\rho W_y W_z)}{\partial z} - \rho(2\omega W_z + \omega^2 y) = 0 \quad , \quad (a.175)$$

suisant \vec{e}_z :

$$\frac{\partial_r(\rho W_z)}{\partial t} + \frac{\partial_r(\rho W_z W_x)}{\partial x} + \frac{\partial_r(\rho W_z W_y)}{\partial y} + \frac{\partial_r(\rho W_z W_z + p)}{\partial z} + \rho(2\omega W_y - \omega^2 z) = 0 \quad . \quad (a.176)$$

▷ Écriture de l'équation de l'énergie :

l'équation de l'énergie (3.3) est projetée de la même façon que l'équation de conservation de la masse et devient :

$$\frac{\partial_r(\rho J - p)}{\partial t} + \frac{\partial_r(\rho J W_x)}{\partial x} + \frac{\partial_r(\rho J W_y)}{\partial y} + \frac{\partial_r(\rho J W_z)}{\partial z} = 0 \quad . \quad (a.177)$$

On obtient donc l'équation matricielle suivante :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f_x(w)}{\partial x} + \frac{\partial f_y(w)}{\partial y} + \frac{\partial f_z(w)}{\partial z} + g(w) = 0 \quad , \quad (a.178)$$

les vecteurs $w, f_x(w), f_y(w), f_z(w), g(w)$ ayant pour expression :

$$w = {}^t(\rho, \rho W_x, \rho W_y, \rho W_z, \rho J - p) \quad , \quad (a.179)$$

$$f_x(w) = {}^t(\rho W_x, \rho W_x^3 + p, \rho W_x W_y, \rho W_x W_z, \rho J W_x) \quad , \quad (a.180)$$

$$f_y(w) = {}^t(\rho W_y, \rho W_x W_y, \rho W_y^3 + p, \rho W_y W_z, \rho J W_y) \quad , \quad (a.181)$$

$$f_z(w) = {}^t(\rho W_z, \rho W_x W_z, \rho W_y W_z, \rho W_z^3 + p, \rho J W_z) \quad , \quad (a.182)$$

$$g(w) = {}^t(0, 0, -\rho(2\omega W_z + \omega^2 y), \rho(2\omega W_y - \omega^2 z), 0) \quad , \quad (a.183)$$

et la norme de la vitesse relative devient :

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2} \quad , \quad (a.184)$$

A.III.1.3 - Cas des variables absolues.

A.III.1.3.1 - Projections des opérateurs.

▷ L'accélération de Coriolis devient :

$$\vec{\omega} \times \vec{V} = {}^t(0, -\omega V_z, \omega V_y) \quad . \quad (a.185)$$

▷ L'expression de la divergence du vecteur vitesse absolue \vec{V} , de composantes ${}^t(V_x, V_y, V_z)$, s'écrit avec (a.) :

$$\nabla_r \vec{W} = \frac{\partial_r V_x}{\partial x} + \frac{\partial_r V_y}{\partial y} + \frac{\partial_r V_z}{\partial z} \quad . \quad (a.186)$$

▷ Expression de la divergence du tenseur

$\rho \vec{V} \otimes \vec{W} + p \cdot \mathbf{I}$ de l'équation de quantité de mouvement (1.37) :

$$\rho \vec{V} \otimes \vec{W} + p \cdot \mathbf{I} = \begin{pmatrix} \rho V_x W_x + p & \rho V_x W_y & \rho V_x W_z \\ \rho V_y W_x & \rho V_y W_y + p & \rho V_y W_z \\ \rho V_z W_x & \rho V_z W_y & \rho V_z W_z + p \end{pmatrix} \quad , \quad (a.187)$$

Compte tenu des résultats (a.158), (a.159), (a.160), on obtient les projections de la divergence de ce tenseur,

suivant \vec{e}_x :

$$\nabla_r (\rho \vec{V} \otimes \vec{W} + p \cdot \mathbf{I})_x = \frac{\partial_r (\rho V_x W_x + p)}{\partial x} + \frac{\partial_r (\rho V_x W_y)}{\partial y} + \frac{\partial_r (\rho V_x W_z)}{\partial z} \quad , \quad (a.188)$$

suivant \vec{e}_y :

$$\nabla_r (\rho \vec{V} \otimes \vec{W} + p \cdot \mathbf{I})_y = \left(\frac{\partial_r (\rho V_y W_x)}{\partial x} + \frac{\partial_r (\rho V_y W_y + p)}{\partial y} + \frac{\partial_r (\rho V_y W_z)}{\partial z} \right) \quad , \quad (a.189)$$

suivant \vec{e}_z :

$$\nabla_r (\rho \vec{V} \otimes \vec{W} + p \cdot \mathbf{I})_z = \frac{\partial_r (\rho V_z W_x)}{\partial x} + \frac{\partial_r (\rho V_z W_y)}{\partial y} + \frac{\partial_r (\rho V_z W_z + p)}{\partial z} \quad . \quad (a.190)$$

A.III.1.3.2 - Système d'équations.

▷ Écriture de l'équation de conservation de la masse :

l'équation (1.36) devient,

$$\frac{\partial_r \rho}{\partial t} + \frac{\partial_r (\rho W_x)}{\partial x} + \frac{\partial_r (\rho W_y)}{\partial y} + \frac{\partial_r (\rho W_z)}{\partial z} = 0 \quad . \quad (a.191)$$

▷ Écriture de l'équation de quantité de mouvement :

l'équation (1.37) est projetée à l'aide des relations (a.188), (a.189), (a.190). Ainsi, suivant \vec{e}_x , on a :

$$\frac{\partial_r (\rho V_x)}{\partial t} + \frac{\partial_r (\rho V_x W_x + p)}{\partial x} + \frac{\partial_r (\rho V_x W_y)}{\partial y} + \frac{\partial_r (\rho V_x W_z)}{\partial z} = 0 \quad , \quad (a.192)$$

suisant \vec{e}_y :

$$\frac{\partial_r(\rho V_y)}{\partial t} + \frac{\partial_r(\rho V_y W_x)}{\partial x} + \frac{\partial_r(\rho V_y W_y + p)}{\partial y} + \frac{\partial_r(\rho V_y W_z)}{\partial z} - \rho \omega V_z = 0 \quad , \quad (a.193)$$

suisant \vec{e}_z :

$$\frac{\partial_r(\rho V_z)}{\partial t} + \frac{\partial_r(\rho V_z W_x)}{\partial x} + \frac{\partial_r(\rho V_z W_y)}{\partial y} + \frac{\partial_r(\rho V_z W_z + p)}{\partial z} + \rho \omega V_y = 0 \quad . \quad (a.194)$$

▷ Écriture de l'équation de l'énergie :

L'équation de l'énergie (1.38) est projetée de la même façon que l'équation de conservation de la masse et devient :

$$\frac{\partial_r E}{\partial t} + \frac{\partial_r(EW_x + pV_x)}{\partial x} + \frac{\partial_r(EW_y + pV_y)}{\partial y} + \frac{\partial_r(EW_z + pV_z)}{\partial z} = 0 \quad . \quad (a.195)$$

On obtient donc l'équation matricielle suivante :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f_x(w)}{\partial x} + \frac{\partial f_y(w)}{\partial y} + \frac{\partial f_z(w)}{\partial z} + g(w) = 0 \quad , \quad (a.196)$$

les vecteurs $w, f_x(w), f_y(w), f_z(w), g(w)$ ayant pour expression :

$$w = {}^t(\rho, \rho V_x, \rho V_y, \rho V_z, E) \quad , \quad (a.197)$$

$$f_x(w) = {}^t(\rho V_x, \rho V_x W_x + p, \rho V_y W_x, \rho V_z W_x, EW_x + pV_x) \quad , \quad (a.198)$$

$$f_y(w) = {}^t(\rho V_y, \rho V_x W_y, \rho V_y W_y + p, \rho V_z W_y, EW_y + pV_y) \quad , \quad (a.199)$$

$$f_z(w) = {}^t(\rho V_z, \rho V_x W_z, \rho V_y W_z, \rho V_z W_z + p, EW_z + pV_z) \quad , \quad (a.200)$$

$$g(w) = {}^t(0, 0, -\rho \omega V_z, \rho \omega V_y, 0) \quad , \quad (a.201)$$

A.III.2 - Cas des équations en coordonnées cylindriques.

A.III.2.1 - hypothèses.

On considère maintenant un système de coordonnées cylindriques (x, θ, r) adapté à la géométrie de la turbomachine (fig.10). On associe à une particule matérialisée sur la figure par le point M de coordonnées ${}^t(x, \theta, r)$ un repère local orthonormé $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_\theta, \vec{e}_r)$. Le vecteur déplacement élémentaire s'écrit :

$$d\vec{M} = dx\vec{e}_x + r d\theta \vec{e}_\theta + dr \vec{e}_r \quad . \quad (a.202)$$

Il suffit donc de faire la transformation suivante :

$${}^t(h_m dm, h_\theta d\theta, h_x dx) = {}^t(dm, r d\theta, dr) = {}^t(dx, r d\theta, dz) \quad . \quad (a.203)$$

Donc le passage des coordonnées curvilignes orthogonales aux coordonnées cylindriques, revient en fait à poser :

$$\frac{1}{b} \frac{\partial r}{\partial \alpha} = \cos \phi = 1 \quad , \quad (a.204)$$

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \sin \phi = 0 \quad , \quad (a.205)$$

$$b = 1 \quad , \quad (a.206)$$

dans les équations (a.55), (a.56), (a.57), et de reprendre le système d'équations (a.123), (a.124), (a.125), (a.126), (a.127).

A.III.2.2 - Cas des variables relatives.

Le résultat précédent revient à écrire :

▷ l'équation de conservation de la masse,

$$\frac{\partial_r \rho}{\partial t} + \frac{\partial_r(\rho W_x)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial_r(\rho W_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial_r(\rho W_r)}{\partial r} = 0 \quad . \quad (a.207)$$

bigskip

▷ les projections de l'équation de quantité de mouvement,

suisant \vec{e}_x , on a :

$$\frac{\partial_r(\rho W_x)}{\partial t} + \frac{\partial_r(\rho W_x W_x + p)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial_r(\rho W_x W_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial_r(\rho W_x W_r)}{\partial r} = 0 \quad , \quad (a.208)$$

suisant \vec{e}_θ :

$$\frac{\partial_r(\rho W_\theta)}{\partial t} + \frac{\partial_r(\rho W_\theta W_x)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial_r(\rho W_\theta W_\theta + p)}{\partial \theta} + \frac{\partial_r(\rho W_\theta W_r)}{\partial r} + \frac{\rho W_r (W_\theta - 3\omega r)}{r} = 0 \quad , \quad (a.209)$$

suisant \vec{e}_r :

$$\frac{\partial_r(\rho W_r)}{\partial t} + \frac{\partial_r(\rho W_r W_x)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial_r(\rho W_r W_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial_r(\rho W_r W_r + p)}{\partial r} - \frac{\rho (W_\theta - \omega r)^3 + p}{r} = 0 \quad . \quad (a.210)$$

▷ l'équation de l'énergie :

$$\frac{\partial_r(\rho J - p)}{\partial t} + \frac{\partial_r(\rho J W_x)}{\partial x} + \frac{1}{r b} \frac{\partial_r(\rho J W_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial_r(\rho J W_r)}{\partial r} = 0 \quad . \quad (a.211)$$

On obtient donc l'équation matricielle suivante :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f_x(w)}{\partial x} + \frac{\partial f_y(w)}{\partial y} + \frac{\partial f_z(w)}{\partial z} + g(w) = 0 \quad , \quad (a.212)$$

les vecteurs $w, f_x(w), f_y(w), f_z(w), g(w)$ ayant pour expression :

$$w = {}^t(\rho, \rho W_x, \rho W_\theta, \rho W_r, \rho J - p) \quad , \quad (a.213)$$

$$f_x(w) = {}^t(\rho W_x, \rho W_x^3 + p, \rho W_x W_\theta, \rho W_r W_x, \rho J W_x) \quad , \quad (a.214)$$

$$f_\theta(w) = {}^t(\rho W_\theta, \rho W_x W_\theta, \rho W_\theta^3 + p, \rho W_r W_\theta, \rho J W_\theta) \quad , \quad (a.215)$$

$$f_r(w) = {}^t(\rho W_r, \rho W_x W_r, \rho W_\theta W_r, \rho W_r^3 + p, \rho J W_r) \quad , \quad (a.216)$$

$$g(w) = {}^t(0, 0, \frac{\rho W_r (W_\theta - 3\omega r)}{r}, -\frac{\rho (W_\theta - \omega r)^3 + p}{r}, 0) \quad , \quad (a.217)$$

A.III.2.3 - Cas des variables absolues.

En suivant la même démarche qu'au paragraphe précédent, on obtient immédiatement le système d'équations recherché.

▷ Ecriture de l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial_r(\rho)}{\partial t} + \frac{\partial_r(\rho W_x)}{\partial m} + \frac{\partial_r(\rho W_y)}{\partial y} + \frac{\partial_r(\rho W_z)}{\partial z} = 0 \quad , \quad (a.218)$$

▷ Ecriture de l'équation de quantité de mouvement :

Suivant \vec{e}_x , on a :

$$\frac{\partial_r(\rho V_x)}{\partial t} + \frac{\partial_r(\rho V_x W_x + p)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial_r(\rho V_x W_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial_r(\rho V_x W_r)}{\partial r} = 0 \quad , \quad (a.219)$$

et suivant \vec{e}_θ :

$$\frac{\partial_r(\rho V_\theta)}{\partial t} + \frac{\partial_r(\rho V_\theta W_x)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial_r(\rho V_\theta W_\theta + p)}{\partial \theta} + \frac{\partial_r(\rho V_\theta W_r)}{\partial r} + \frac{\rho V_r (W_\theta - \omega r)}{r} = 0 \quad . \quad (a.220)$$

enfin, suivant \vec{e}_r :

$$\frac{\partial_r(\rho V_r)}{\partial t} + \frac{\partial_r(\rho V_r W_x)}{\partial x} + \frac{\partial_r(\rho V_r W_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial_r(\rho V_r W_r + p)}{\partial r} - (\rho V_\theta (W_\theta - \omega r) + p)/r = 0 \quad . \quad (a.221)$$

▷ Ecriture de l'équation de l'énergie :

$$\frac{\partial_r(E)}{\partial t} + \frac{\partial_r(EW_m + pV_m)}{\partial m} + \frac{\partial_r(EW_\theta + pV_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial_r(EW_r + pV_r)}{\partial r} = 0 \quad . \quad (a.222)$$

A.IV - INITIALISATION DU CALCUL.

A.IV.1 - Cas des aubages fixes.

Pour calculer les champs initiaux amont w_1 et aval w_2 , il faut transformer les conditions initiales en grandeurs conservatives adimensionnées correspondant aux variables relatives du système d'équations (2.16) en référentiel relatif. Ces grandeurs, $\rho_1, \rho_1 V_{m1}, \rho_1 V_{\theta 1}, E_1$, et $\rho_2, \rho_2 V_{m2}, \rho_2 V_{\theta 2}, E_2$, sont calculées grâce aux relations (1.9) et (1.13) à (1.17). En outre pour l'amont, on utilise les relations suivantes :

$$\rho_1 = \bar{\rho}(M_1, \gamma) \rho_{a1} = \bar{\rho}(M_1, \gamma) \quad , \quad (a.223)$$

$$p_1 = \bar{\omega}(M_1, \gamma) p_{a1} = \frac{\bar{\omega}(M_1, \gamma)}{\gamma} \quad , \quad (a.224)$$

$$a_1 = \sqrt{\frac{\gamma p_1}{\rho_1}} \quad , \quad (a.225)$$

$$V_1 = M_1 a_1 \quad , \quad (a.226)$$

$$V_{m1} = V_1 \cos(\alpha_1) \quad , \quad (a.227)$$

$$V_{\theta 1} = V_1 \sin(\alpha_1) \quad . \quad (a.228)$$

$$E_1 = \frac{p_1}{\gamma - 1} + \rho_1 \frac{V_1^2}{2} \quad . \quad (a.229)$$

En outre, si les pertes (3.2) sont prises en considération, il vient :

$$p_{i2} = \eta p_{i1} \left(\frac{T_{i2}}{T_{i1}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \eta p_{i1} \left(\frac{H_{i2}}{H_{i1}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad . \quad (a.230)$$

Dans le cas des calculs d'écoulements permanents de fluide parfait en aubages fixes, d'après le second principe de la thermodynamique, l'entropie est une fonction d'état [57] définie par :

$$dS = \frac{1}{T} \left(dh - \frac{dp}{\rho} \right) \quad , \quad (a.231)$$

On obtient donc :

$$dh = T dS + \frac{dp}{\rho} \quad , \quad (a.232)$$

On considère que l'écoulement est isentropique, $dS = 0$, et il vient :

$$dh = \frac{dp}{\rho} \quad , \quad (a.233)$$

autrement dit :

$$dh + W dW = dh + d \frac{W^2}{2} = 0 \quad . \quad (a.234)$$

Après intégration, cette relation devient

$$h + \frac{W^2}{2} = \text{constante} \quad , \quad (a.235)$$

et il apparaît une constante qui n'est autre que H_i , l'enthalpie totale, grandeur qui se conserve le long des lignes de courant. On en déduit, avec la relation (a.230) :

$$p_{i2} = \eta p_{i1} \quad , \quad (a.236)$$

Ce résultat et les relations suivantes permettent alors de calculer le champ initial w_2 à l'aval de la grille :

$$\rho_{i2} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_{i2}}{H_{i2}} \quad , \quad (a.237)$$

$$M_2 = \bar{\omega}^{-1}(P_2, \gamma) \quad , \quad (a.238)$$

$$p_2 = P_2 p_{i2} \quad , \quad (a.239)$$

$$\rho_2 = \bar{\rho}(P_2, \gamma) \rho_{i2} \quad , \quad (a.240)$$

$$a_2 = \sqrt{\frac{\gamma p_2}{\rho_2}} \quad , \quad (a.241)$$

$$V_2 = M_2 a_2 \quad , \quad (a.242)$$

$$V_{m2} = V_2 \cos(\alpha_2) \quad , \quad (a.243)$$

$$V_{\theta 2} = V_2 \sin(\alpha_2) \quad , \quad (a.244)$$

$$E_2 = \frac{p_2}{\gamma - 1} + \rho_2 \frac{V_2^2}{2} \quad , \quad (a.245)$$

En ce qui concerne l'initialisation du reste du domaine, on procède comme suit :

- ▷ pour les régions du domaine situées en dehors de l'aubage, c'est à dire pour tout point du domaine d'abscisse x telle que $x \in [x_1, x_{BA}] \cup [x_{BF}, x_2]$ (fig.15), le champ w est constant et de valeur :

$$w = w_1, \quad x \in [x_1, x_{BA}] \quad , \quad (a.246)$$

$$w = w_2, \quad x \in [x_{BF}, x_2] \quad , \quad (a.247)$$

où x_{BA} , x_{BF} désignent les abscisses extrêmes de l'aubage, et x_1 , x_2 désignent les abscisses respectives des frontières amont et aval du domaine.

- ▷ pour la région du domaine de calcul correspondant aux canaux de l'aubage, on calcule le champ w initial pour tout point d'abscisse x telle que $x \in [x_{BA}, x_{BF}]$ (fig.15) avec l'expression :

$$w = \left(1 - \frac{x - x_{BA}}{c}\right) w_1 + \left(\frac{x - x_{BA}}{c}\right) w_2, \quad x \in [x_{BA}, x_{BF}] \quad , \quad (a.248)$$

où c désigne la corde axiale des aubes.

Il existe cependant une méthode plus élaborée, utilisée par FOURMAUX(1991)[100] et basée sur une approche monodimensionnelle de l'écoulement.

A.IV.2 - Cas des aubages mobiles.

A l'instar de la méthode employée dans le cas des aubages fixes au paragraphe A.IV.2.1, il est nécessaire de transformer les données en grandeurs conservatives relatives ρ , ρW_x , ρW_y , $\rho J - p$ pour

calculer les champs initiaux amont et aval du domaine. Les relations (1.14) à (1.17), (1.25) à (1.27), (a.223) à (a.225), et les relations suivantes permettent de calculer le champ amont initial w_1 :

$$U_1 = M_{u1} a_1 \quad , \quad (a.248)$$

$$\omega = -\frac{U_1}{r_1} \quad , \quad (a.249)$$

$$W_1 = M_{r1} a_1 \quad , \quad (a.250)$$

$$W_{m1} = W_1 \cos(\beta_1) \quad , \quad (a.251)$$

$$W_{\theta 1} = W_1 \sin(\beta_1) \quad . \quad (a.252)$$

On remarque que la relation (3.6) s'écrit après projection :

$$V_{x1} = W_{x1} \quad , \quad (a.253)$$

$$V_{y1} = W_{y1} + U_1 = W_{y1} - \omega r_1 \quad . \quad (a.254)$$

Dans le cas des calculs d'écoulements de fluide parfait permanents en aubages mobiles, d'après le second principe de la thermodynamique, l'écoulement étant isentropique, et suivant le principe utilisé dans le cas des aubages fixes, on obtient :

$$dh + WdW - wrd(wr) = dh + d\left(\frac{W^2}{2}\right) - d\left(\frac{wr^2}{2}\right) = 0 \quad . \quad (a.255)$$

Après intégration, cette relation devient

$$h + \frac{W^2}{2} - \frac{wr^2}{2} = \text{constante} \quad , \quad (a.256)$$

La constante est la rothalpie J , et il s'agit d'une grandeur qui se conserve le long des lignes de courant. La combinaison de ce résultat et des précédents permet d'écrire :

$$J = H_{a1} - U_1 V_{y1} \quad , \quad (a.257)$$

$$H_{ir1} = J + \frac{U_1^2}{2} \quad , \quad (a.258)$$

$$U_2 = U_1 \frac{r_2}{r_1} \quad , \quad (a.259)$$

$$H_{ir2} = J + \frac{U_2^2}{2} \quad , \quad (a.260)$$

$$p_{ir2} = \eta p_{ir1} \left(\frac{T_{ir2}}{T_{ir1}}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \eta p_{ir1} \left(\frac{H_{ir2}}{H_{ir1}}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad , \quad (a.261)$$

$$\rho_{ir2} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_{ir2}}{H_{ir2}} \quad . \quad (a.262)$$

Ces relations traduisent la transformation des grandeurs physiques entre l'amont et l'aval de l'aubage. Ensuite, les expressions suivantes permettent d'établir le champ initial w_2 à l'aval de la grille :

$$M_{r2} = \bar{\omega}^{-1}(P_{r2}, \gamma) \quad , \quad (a.263)$$

$$p_2 = P_{r2} p_{ir2} \quad , \quad (a.264)$$

$$\rho_2 = \bar{\rho}(M_{r2}, \gamma) \rho_{ir2} \quad , \quad (a.265)$$

la vitesse du son est donnée par la relation (a.237), et

$$W_2 = M_{r_2} a_2 \quad , \quad (a.266)$$

$$W_{m_2} = W_2 \cos(\beta_2) \quad , \quad (a.267)$$

$$W_{\theta_2} = W_2 \sin(\beta_2) \quad , \quad (a.268)$$

$$V_{m_2} = W_{m_2} \quad , \quad (a.269)$$

$$V_{\theta_2} = W_{\theta_2} + U_2 = W_{\theta_2} - \omega r_2 \quad , \quad (a.270)$$

$$\alpha_2 = \arctan\left(\frac{V_{\theta_2}}{V_{m_2}}\right) \quad . \quad (a.271)$$

Enfin, pour le calcul de l'initialisation du reste du domaine, on procède suivant la méthode explicitée au paragraphe A.IV.2.1.

FIGURES

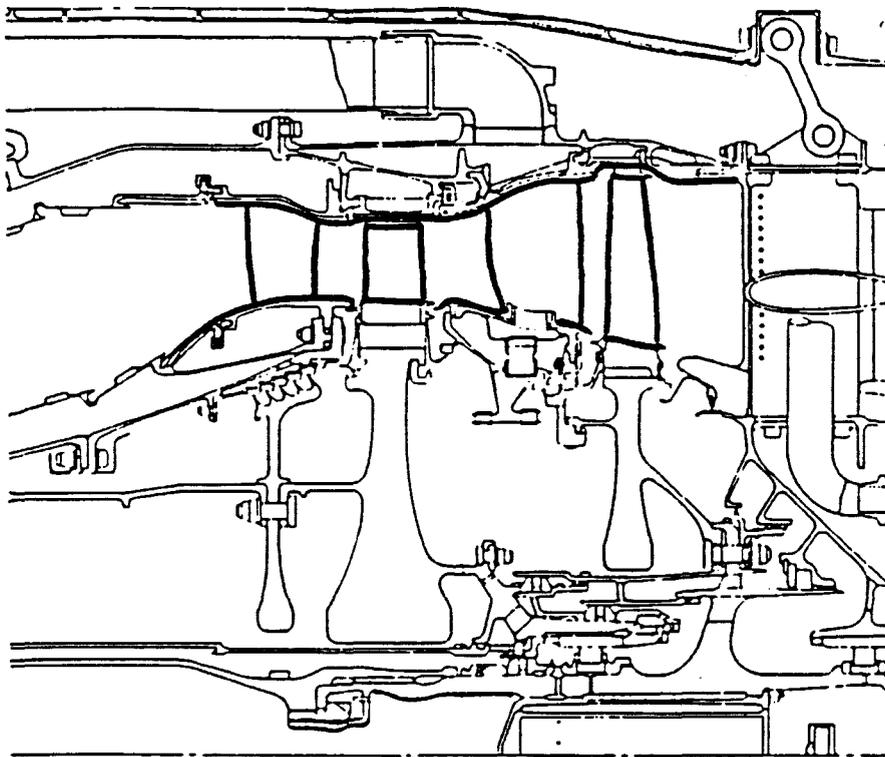


Figure 1 : Coupe axiale représentative de la veine des turbines, haute et basse pression, et de l'échappement du moteur M88.(SNECMA)

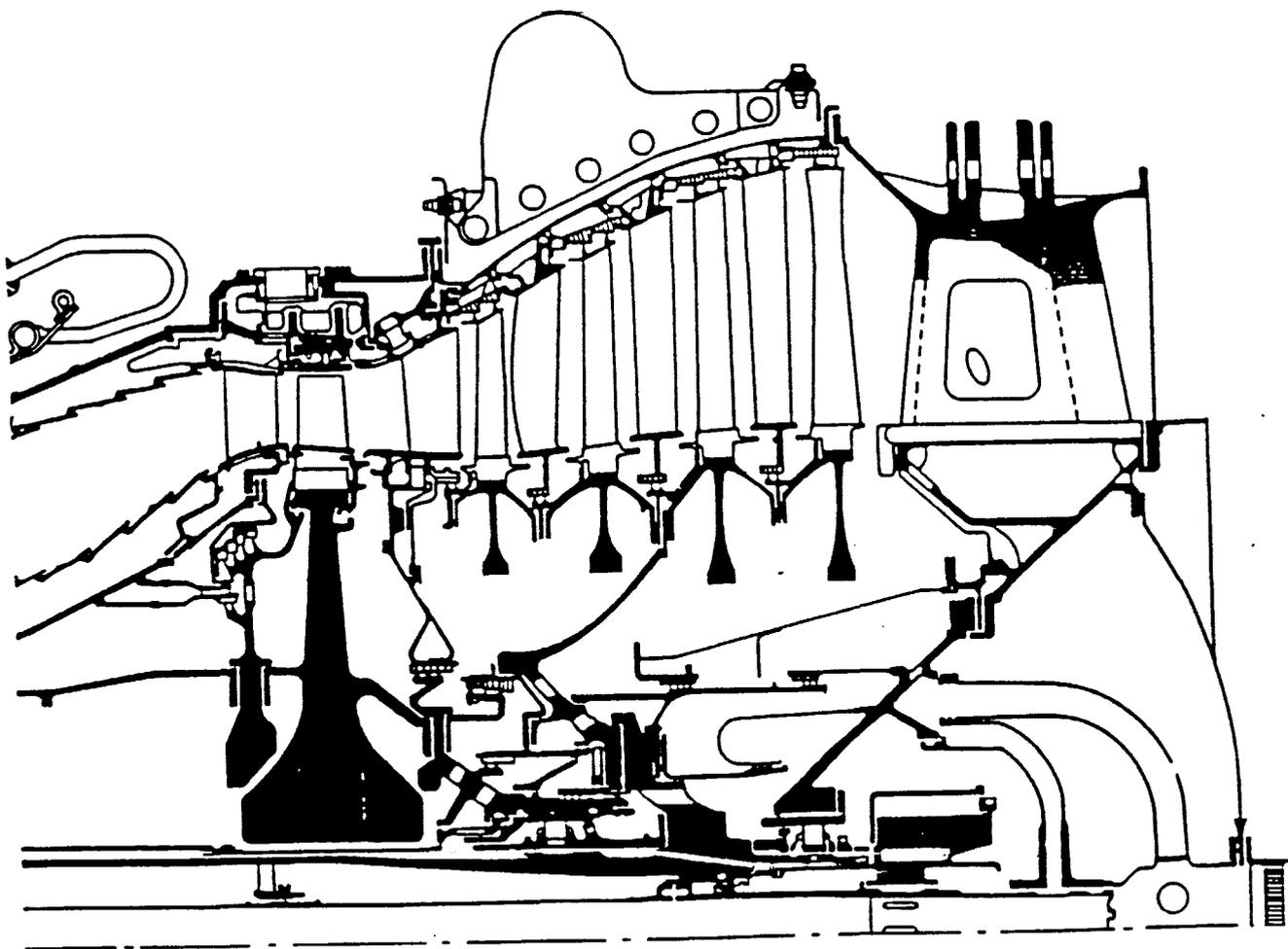
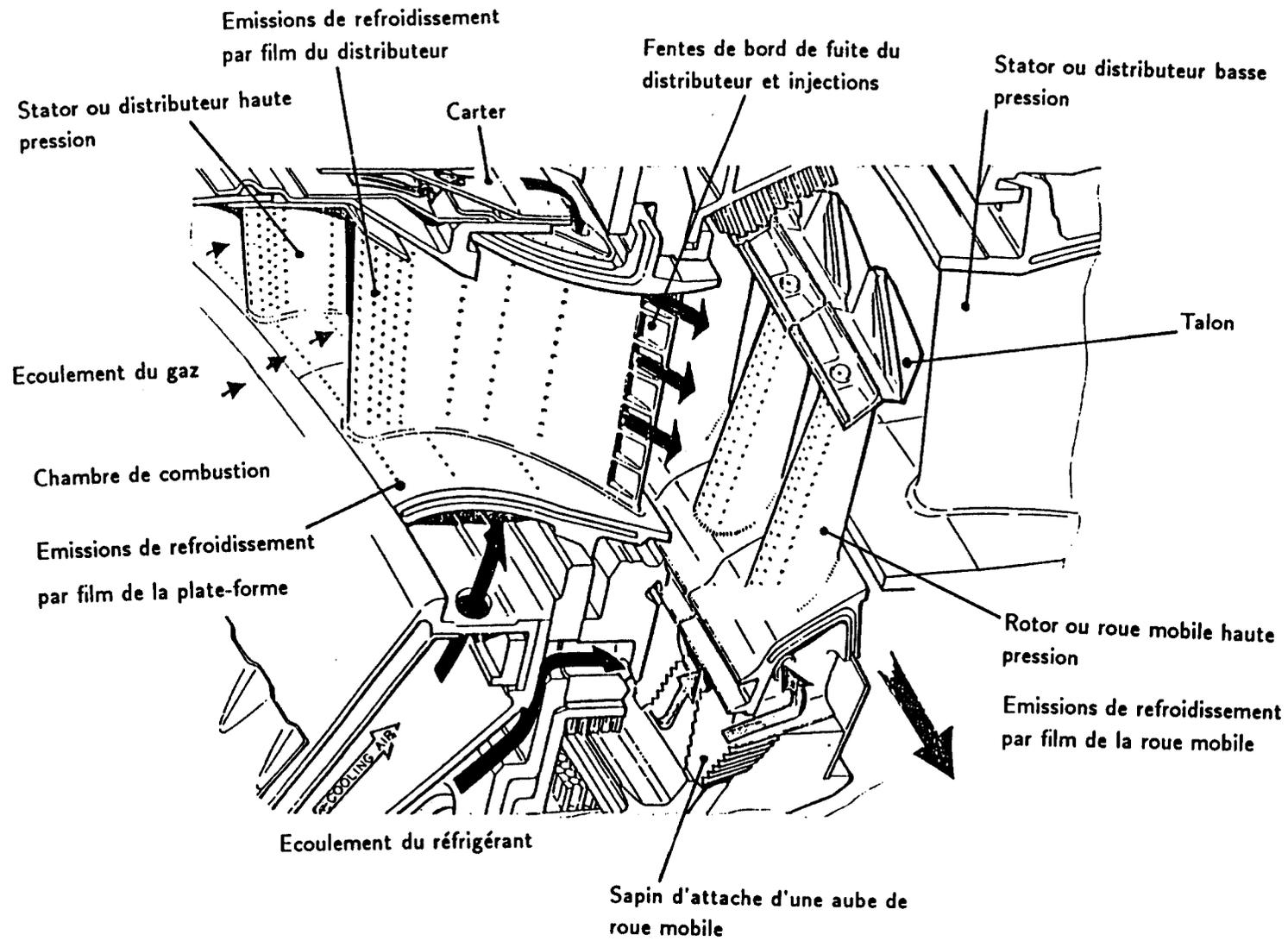


Figure 2 : Coupe axiale représentative de la veine des turbines, haute et basse pression, et de l'échappement du moteur CFM56-5.(SNECMA)

Figure 3



Ecorché représentatif d'un étage de turbine haute pression.

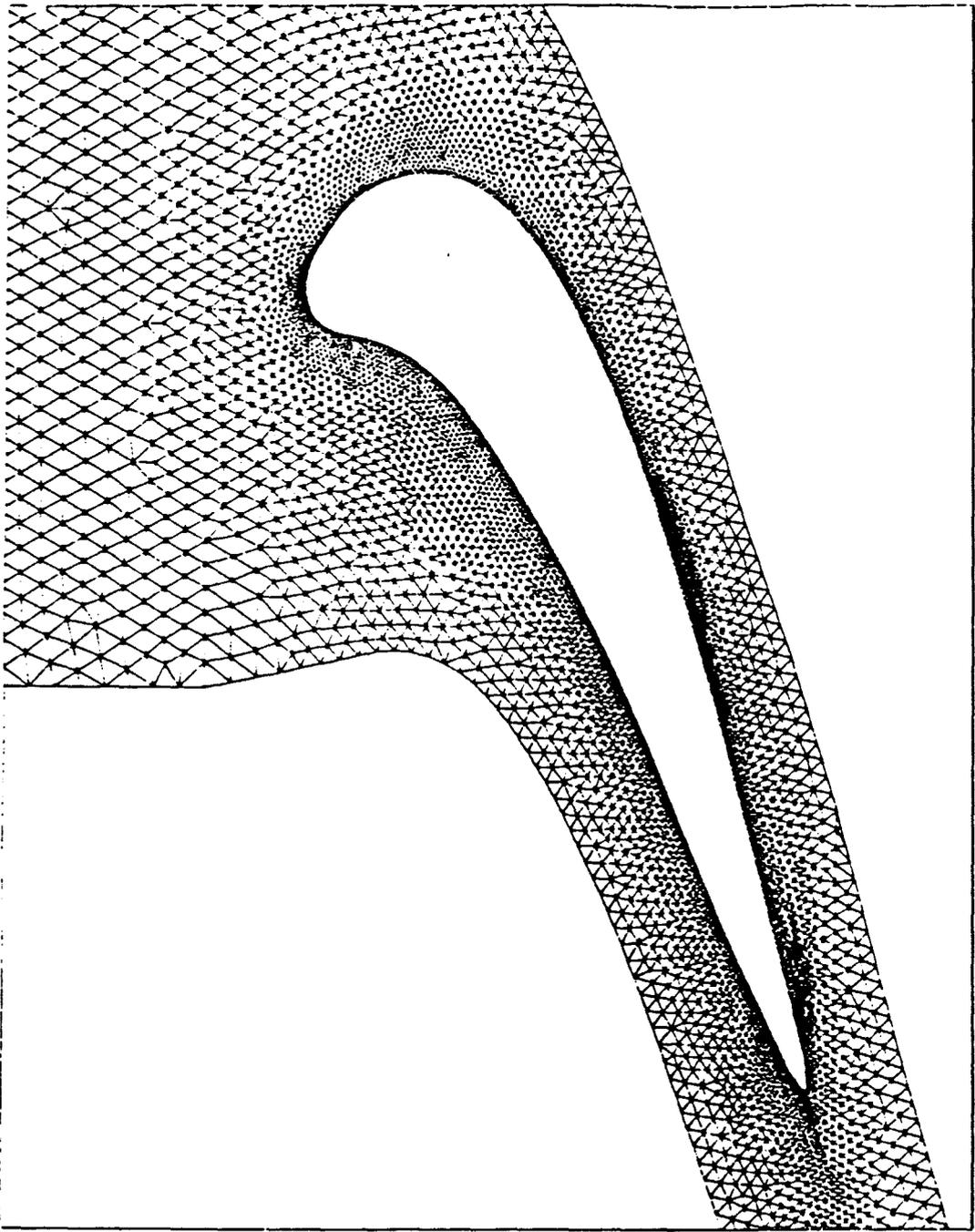


Figure 4 : Maillage non structuré.

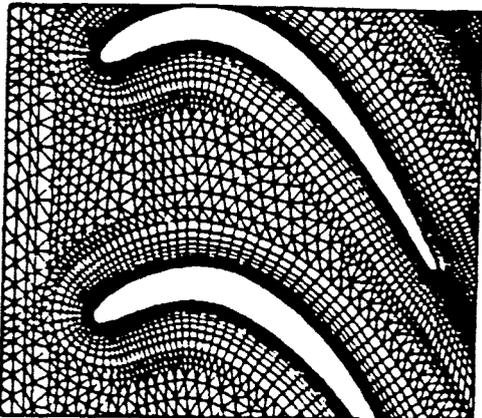
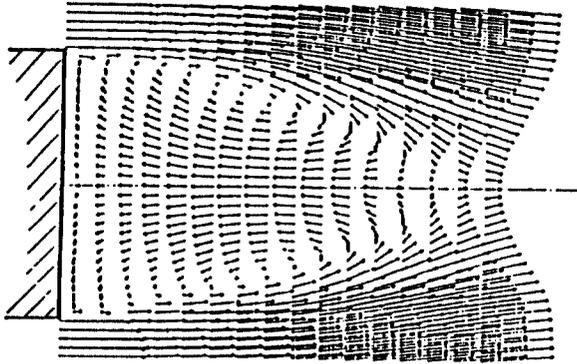
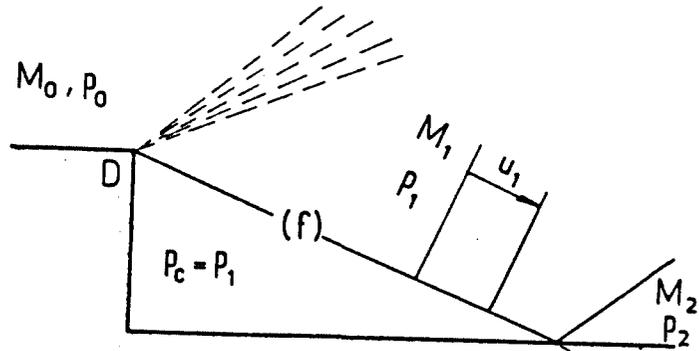


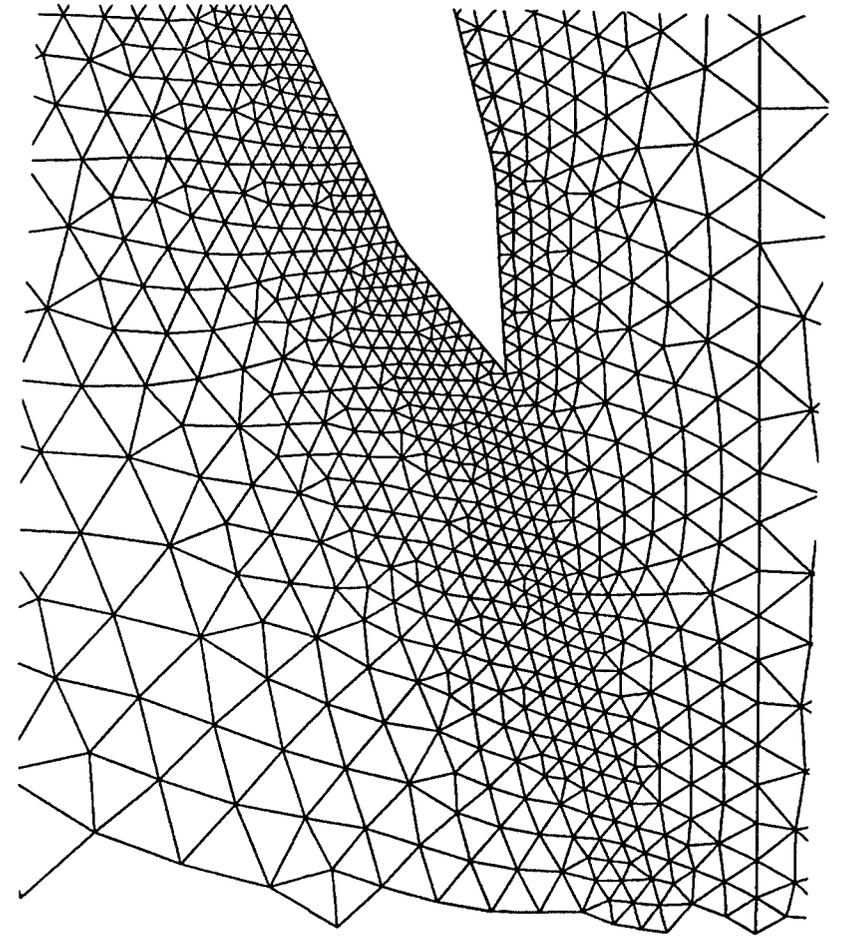
Figure 5 : Maillage hybride structuré - non structuré.



Exemple d'écoulement moyen au culot d'un arrière-corps non propulsé.



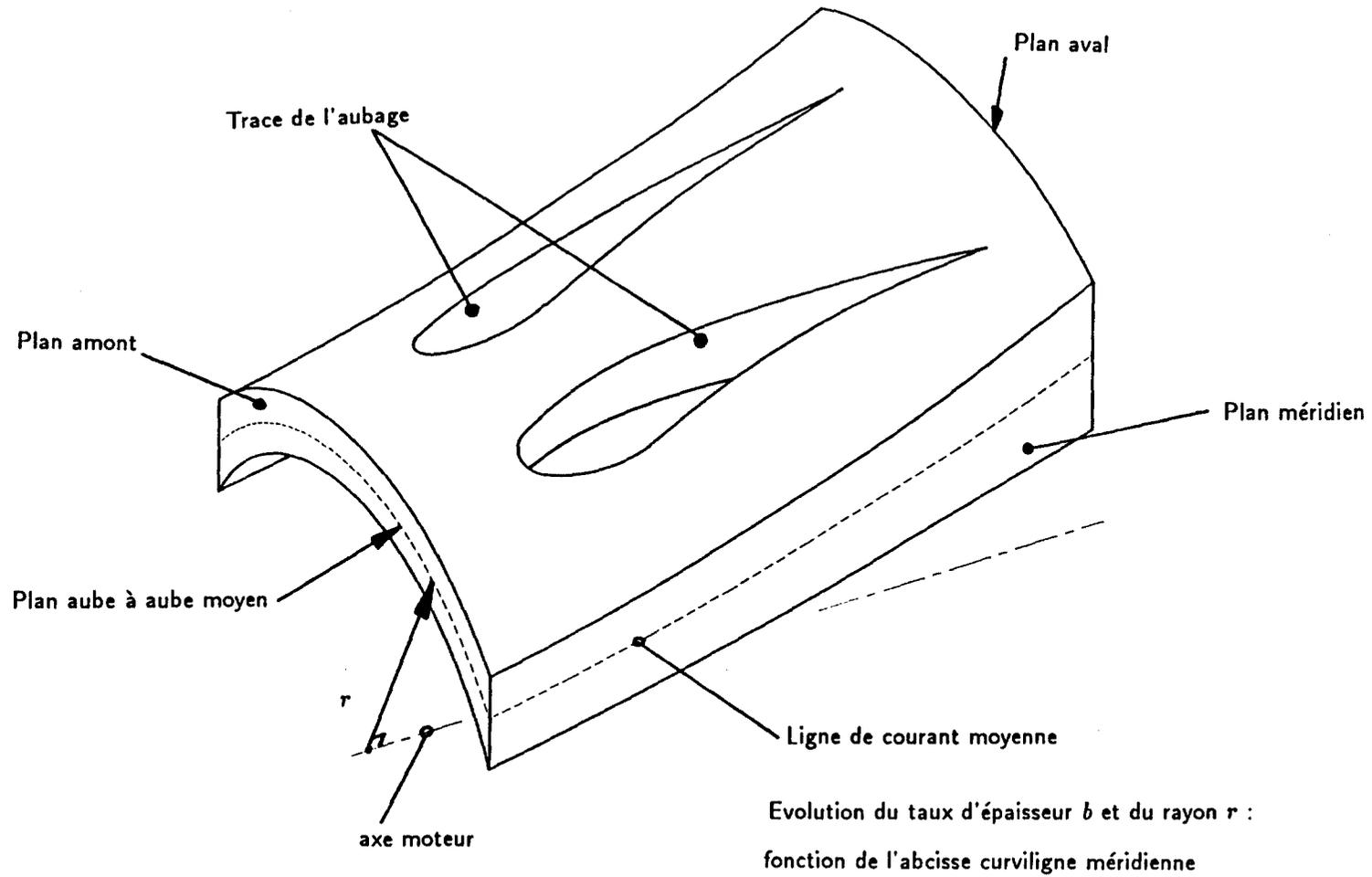
Exemple d'approche multicomposant dans le cadre de calculs de type fluide parfait : décollement-recollement en aval d'une marche.



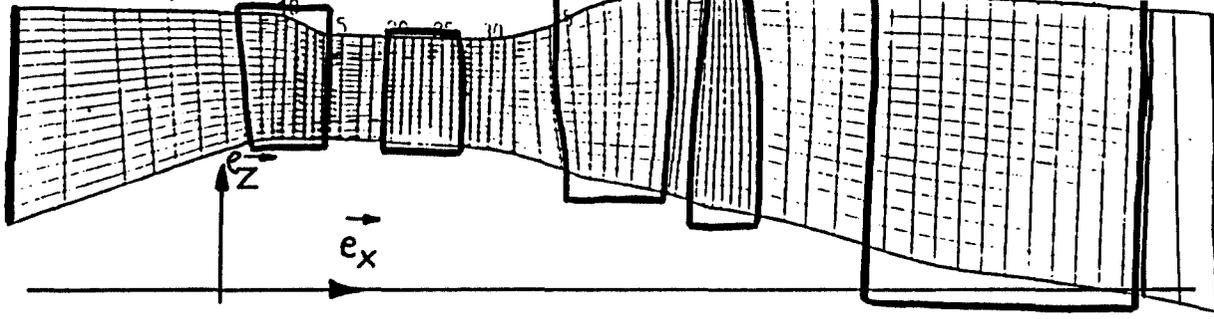
Maillage non structuré, zoom sur le becquet.

Figure 6 : Becquet de bord de fuite.

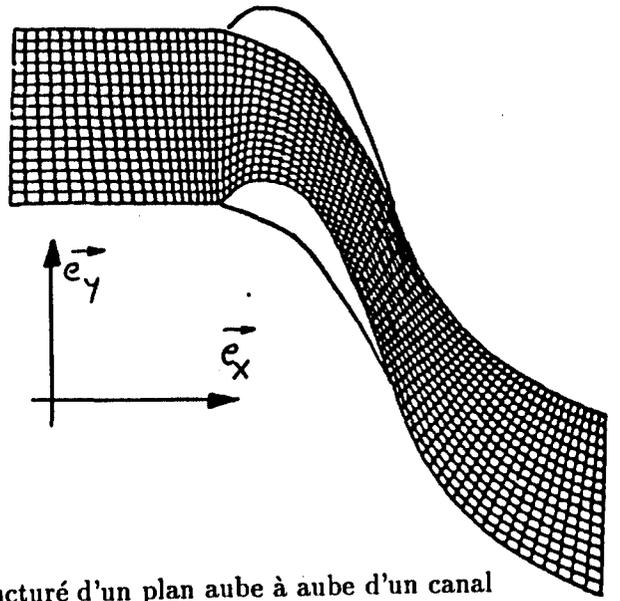
Figure 7 :



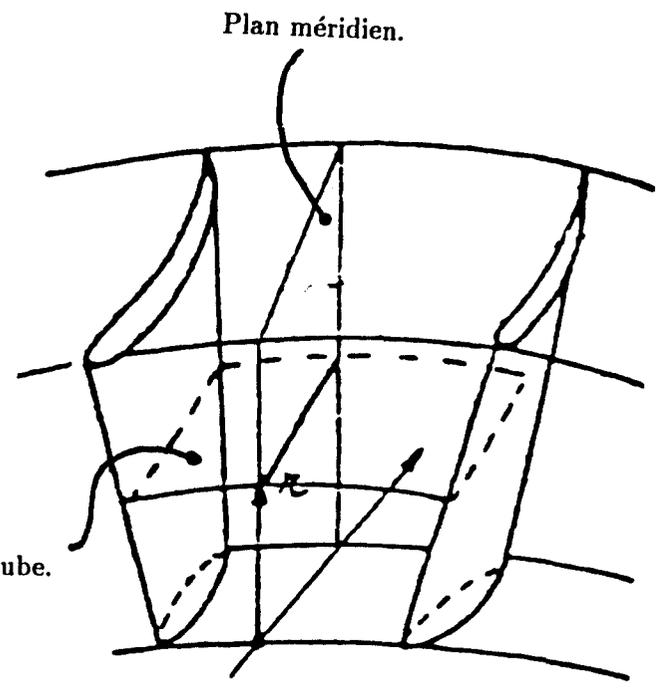
Représentation d'une nappe de courant quasi-tridimensionnelle.



Maillage structuré d'un plan méridien de la veine des turbines hautes et basse pression et de l'échappement du moteur



Maillage structuré d'un plan aube à aube d'un canal d'un distributeur de turbine.



Plan aube à aube.

Principe de superposition des écoulements.

Figure 8

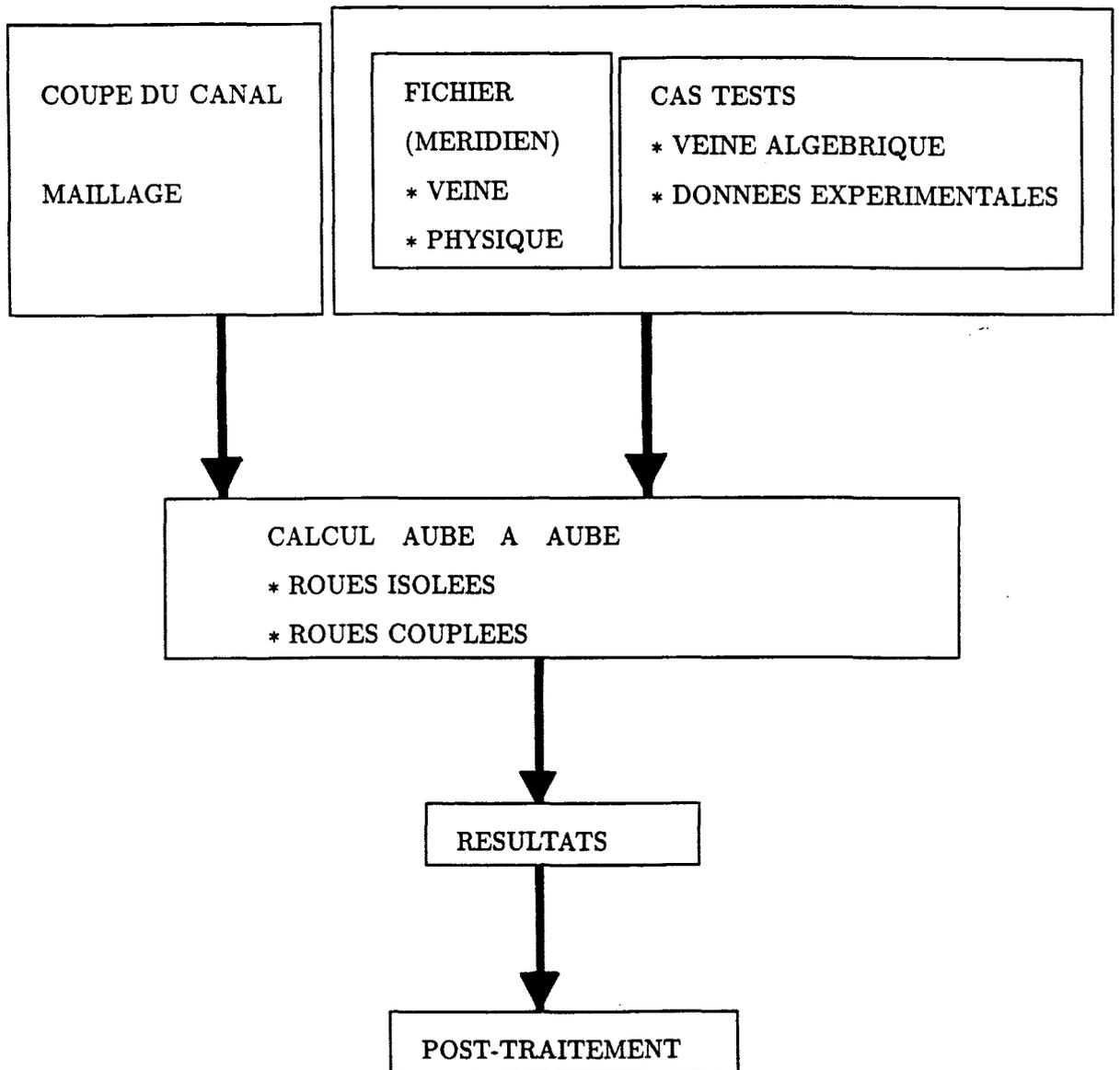


Figure 9 : Principe de calcul quasi-tridimensionnel.

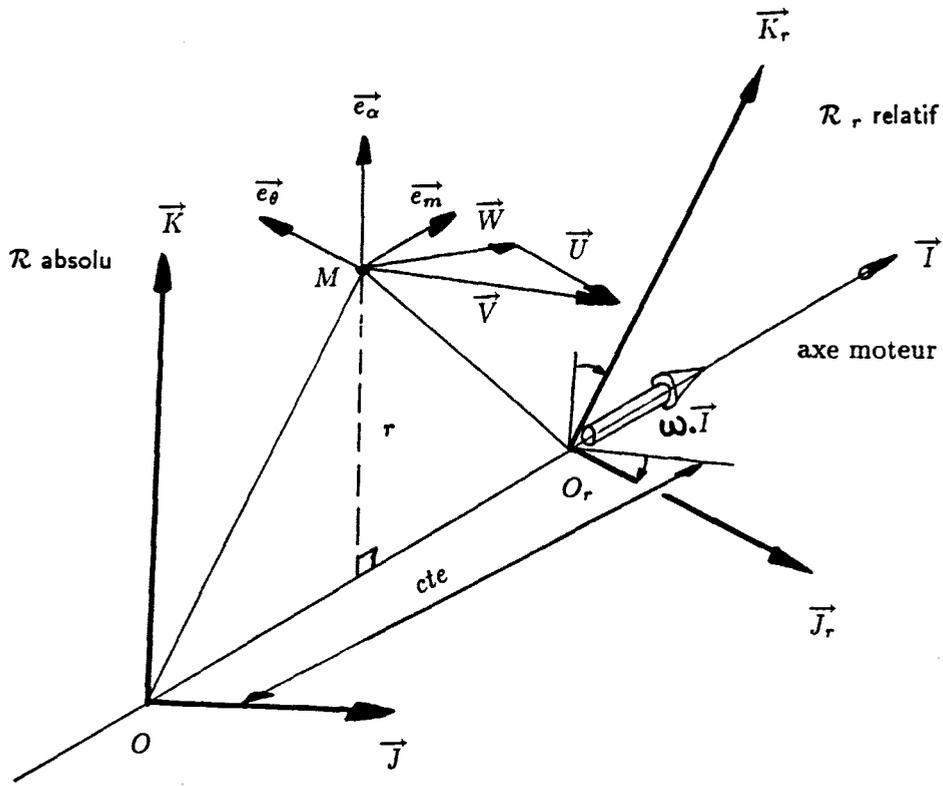


Figure 10 : Référentiels : absolu, relatif et local.

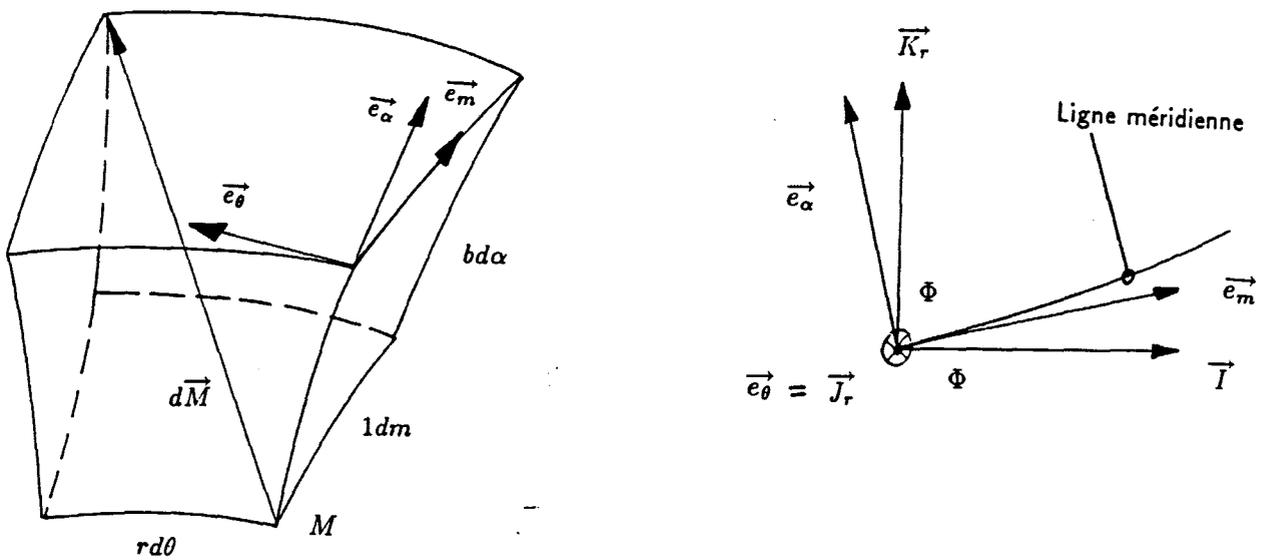


Figure 11 : Volume élémentaire de la nappe de courant et coordonnées curvilignes.

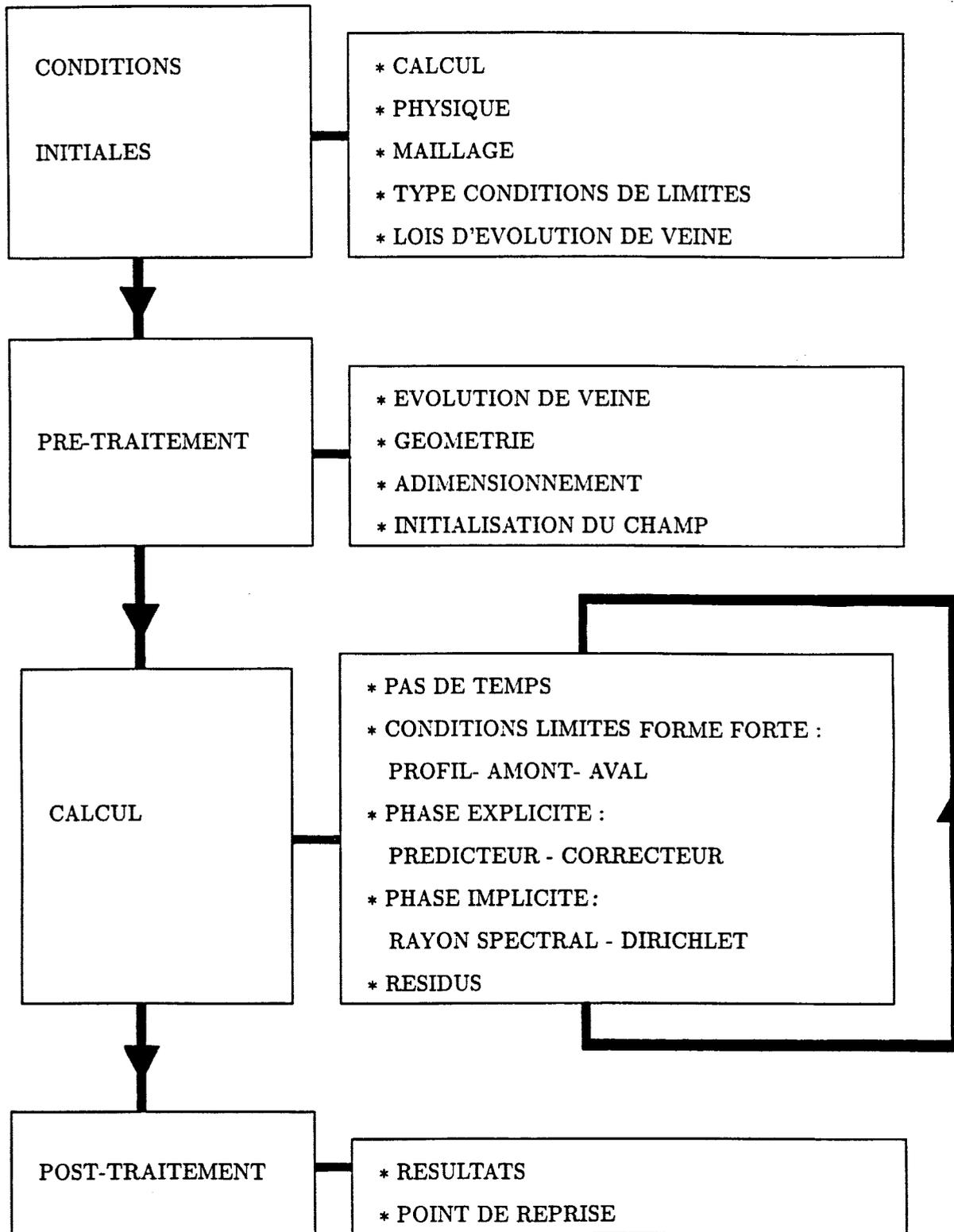


Figure 12 : Schéma de principe du code SCHEMA1

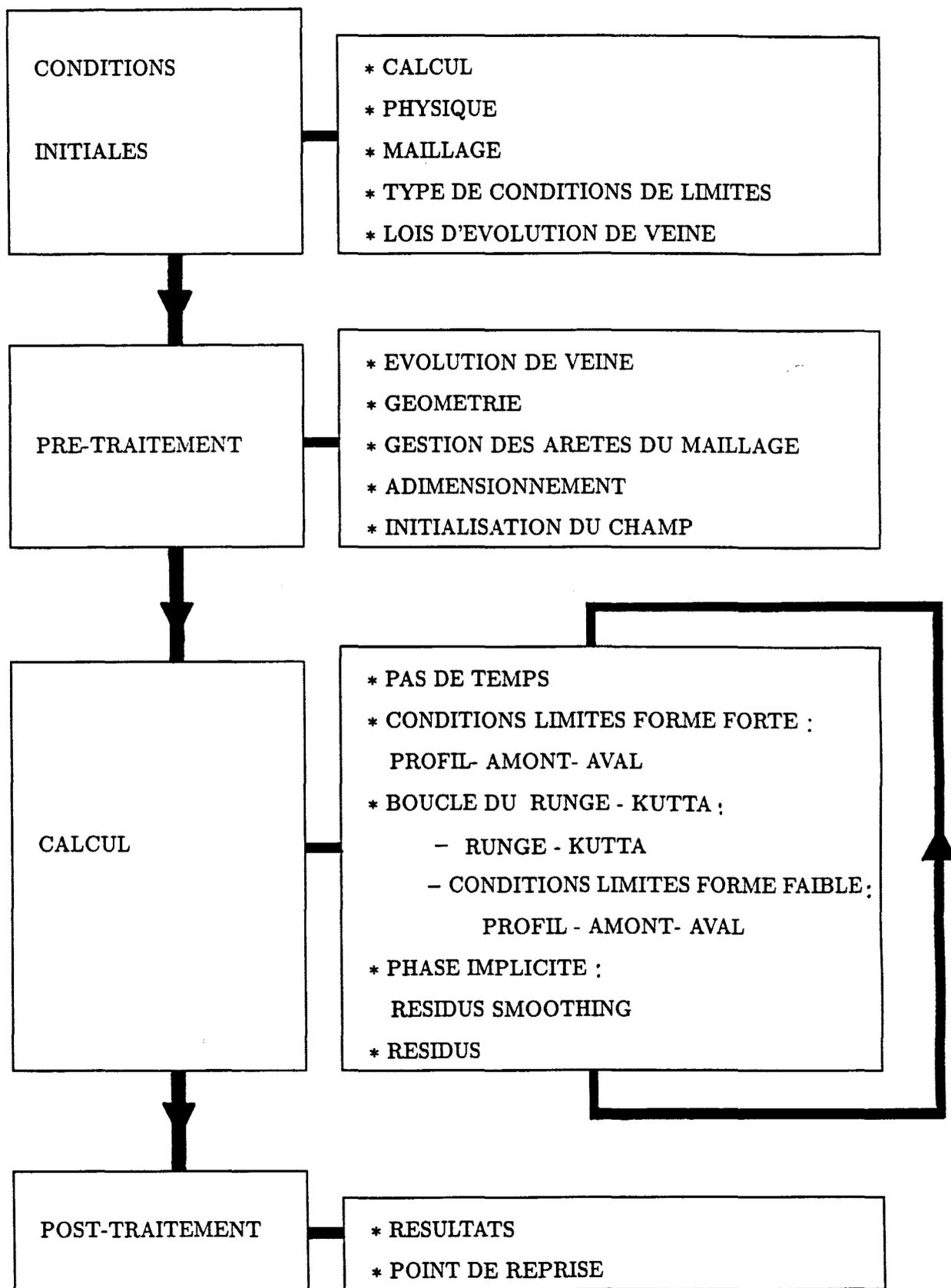


Figure 13 : Schéma de principe du code SCHEMA2

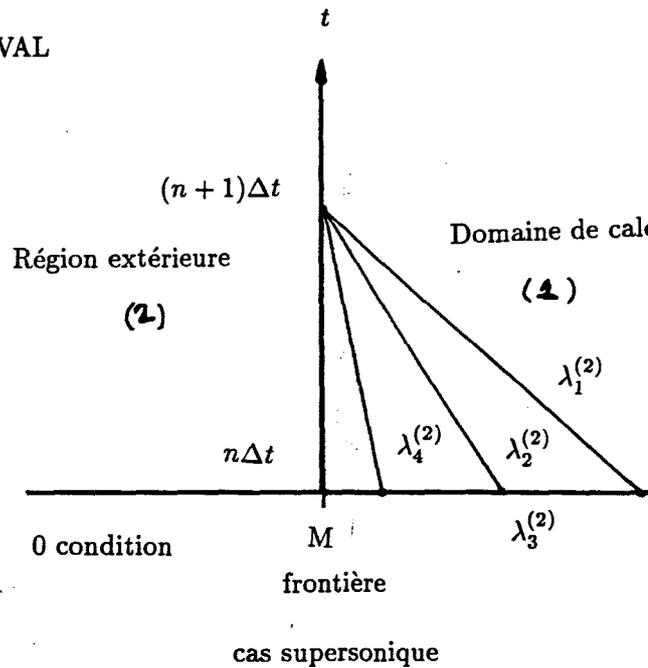
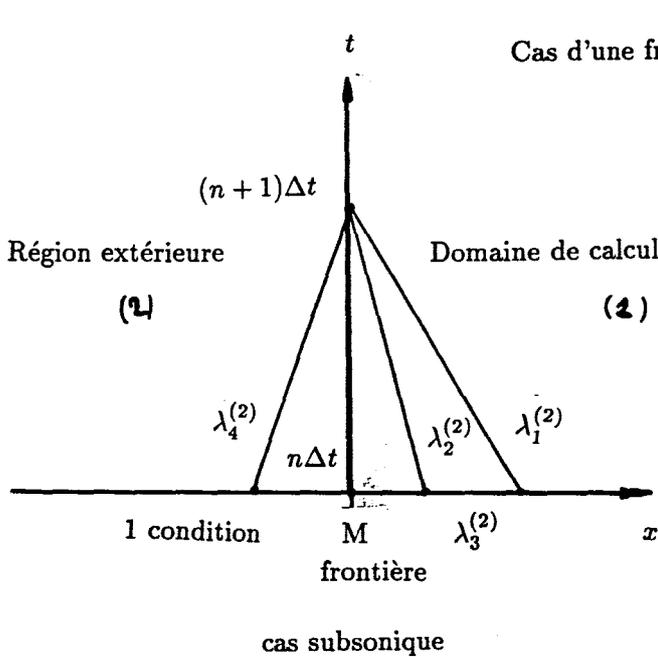
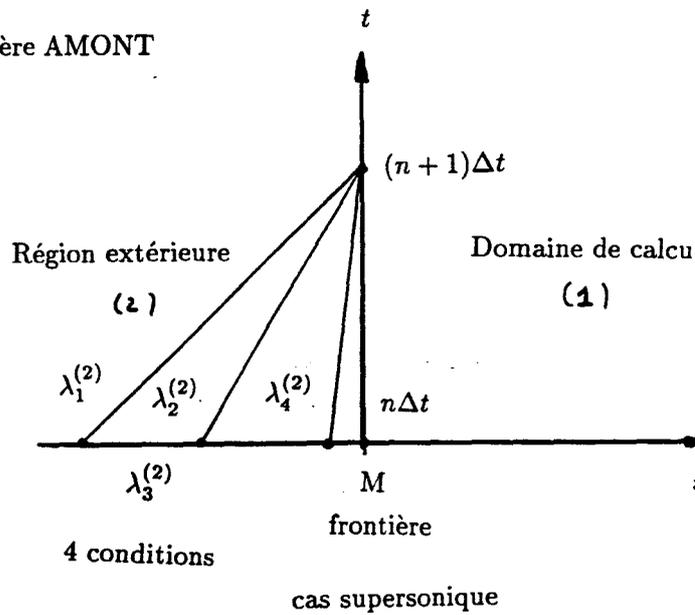
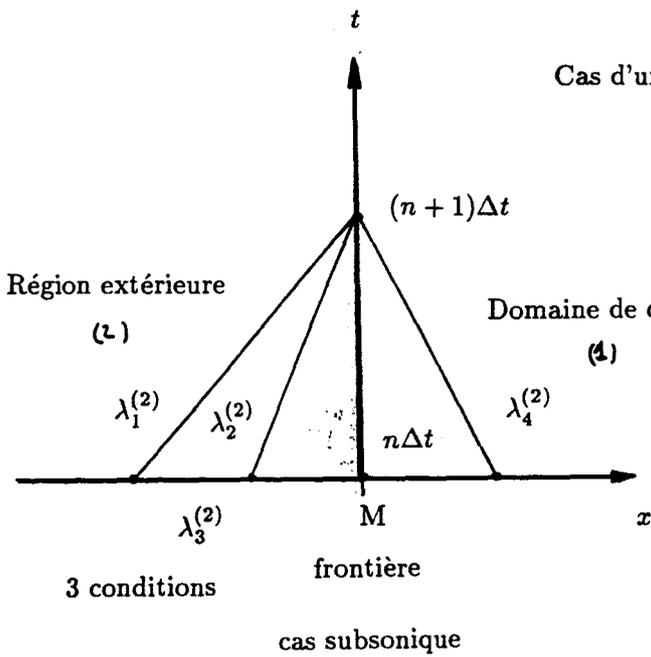
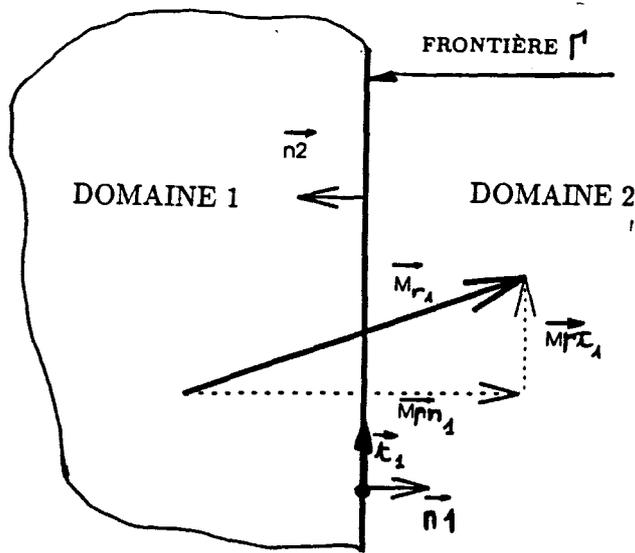


Figure 14 : Traitement des conditions aux limites.
 Configuration des caractéristiques dans le plan (M, x, t) .
 (Le plan $t = cte$ est parallèle à la direction (M, y))

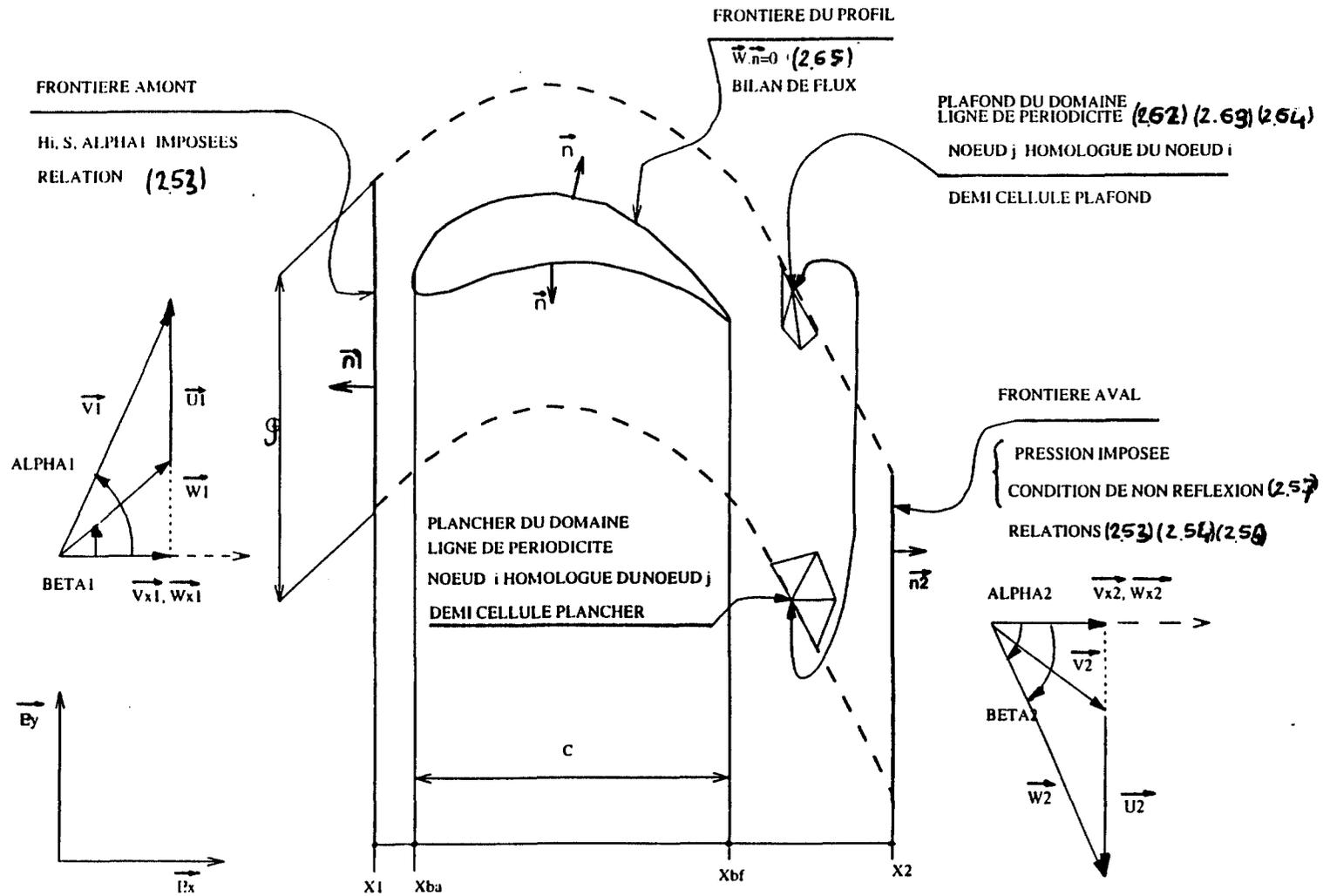


Figure 15 : Topologie et frontières du domaine de calcul.

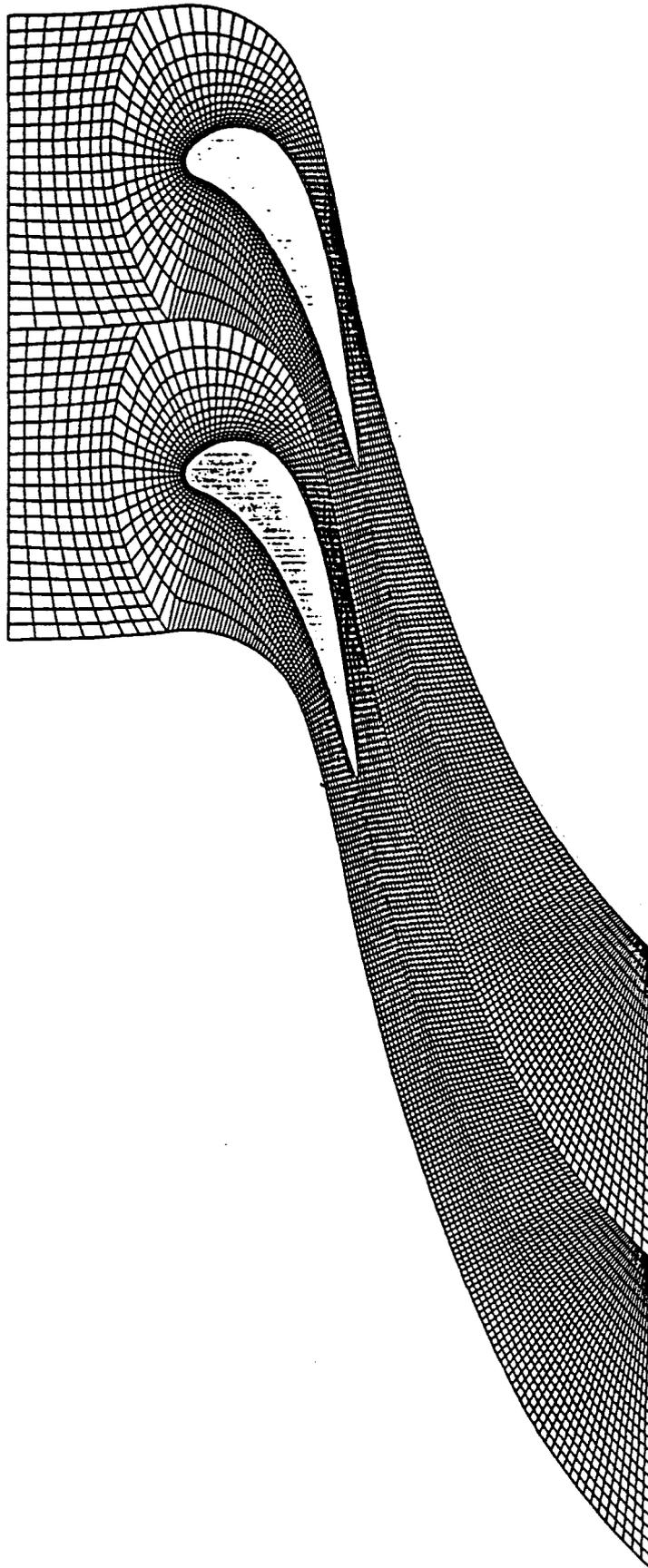


Figure 16 : Maillage multidomaine structuré.

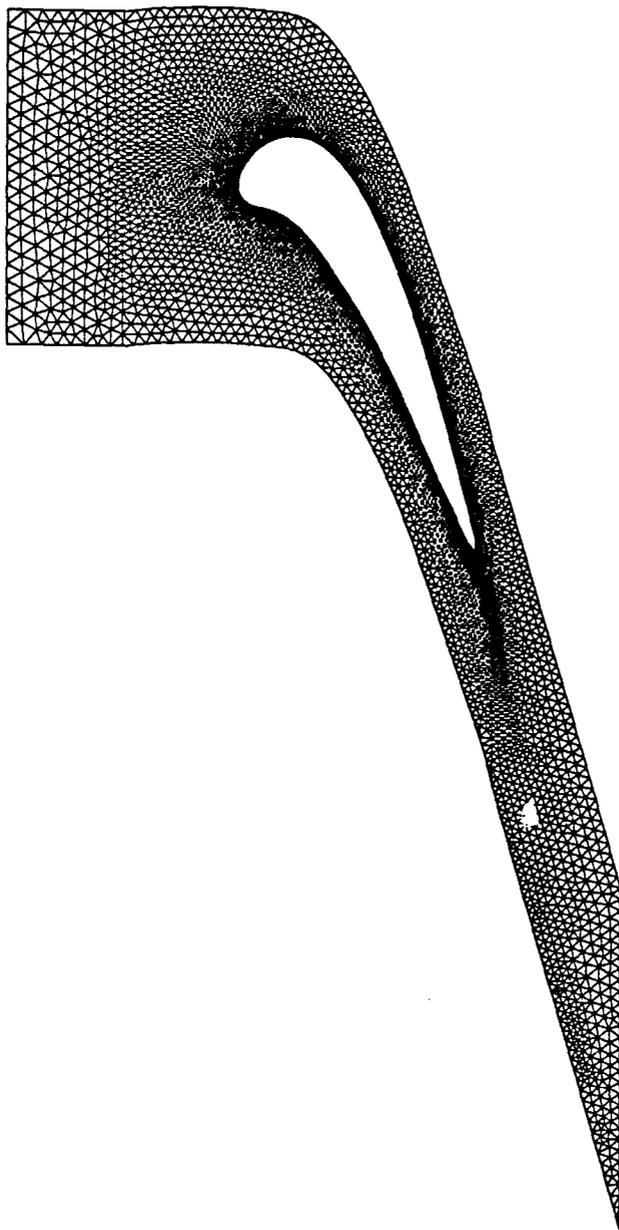


Figure 17 : Cas test CTS1.
Maillage : 7057 noeuds, 13295 mailles.

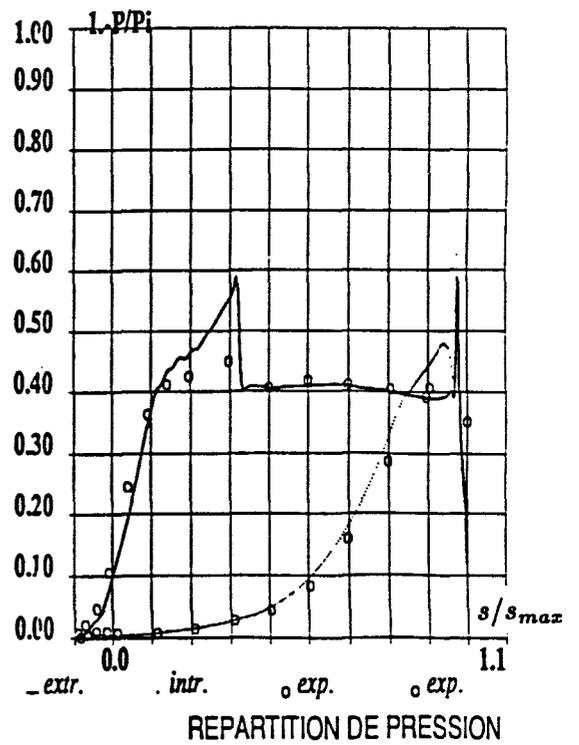
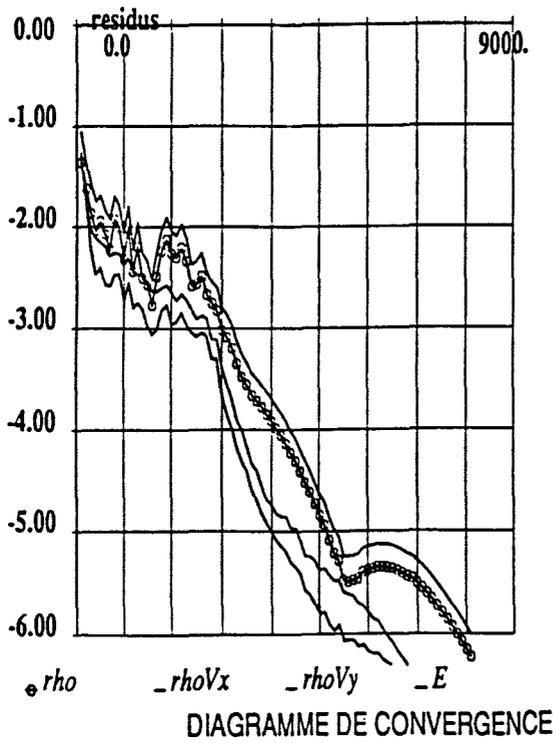
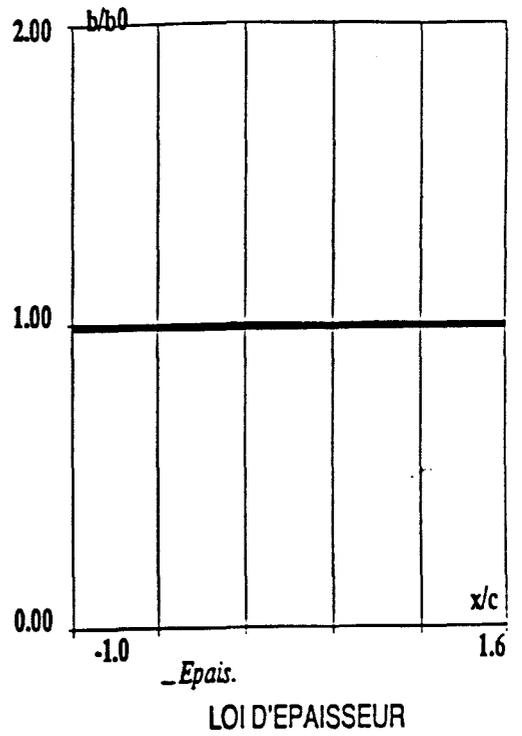
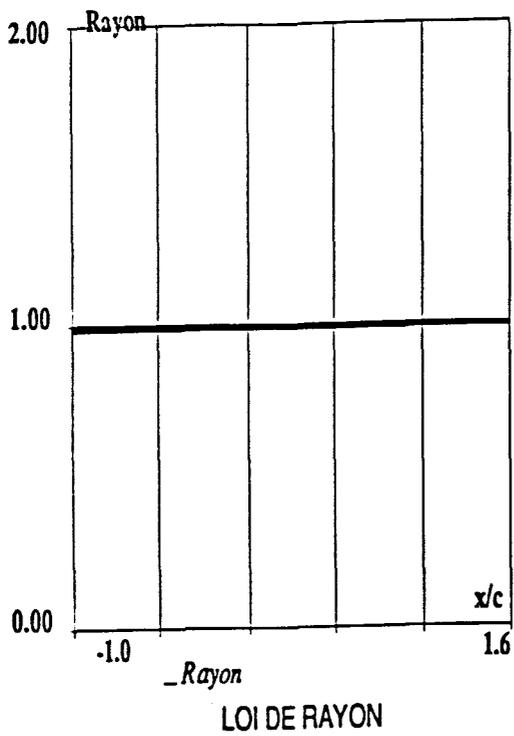


Figure 18 : Cas test CTS1 -1.
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1.

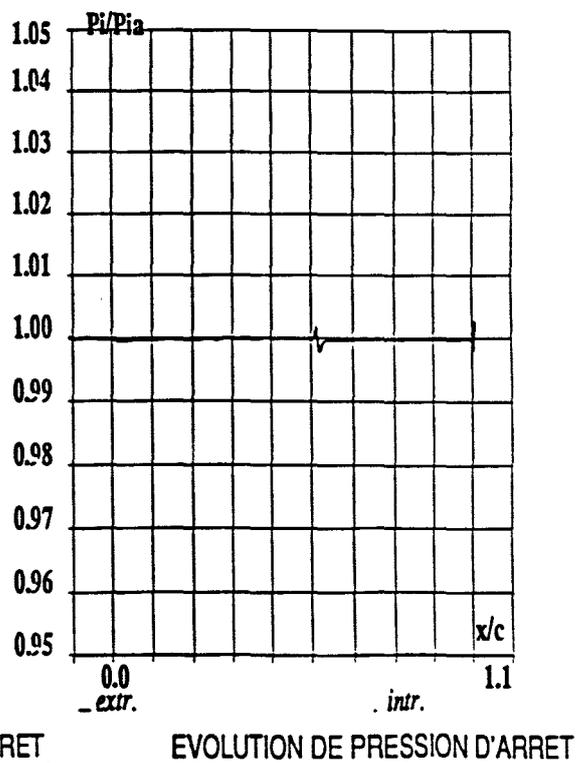
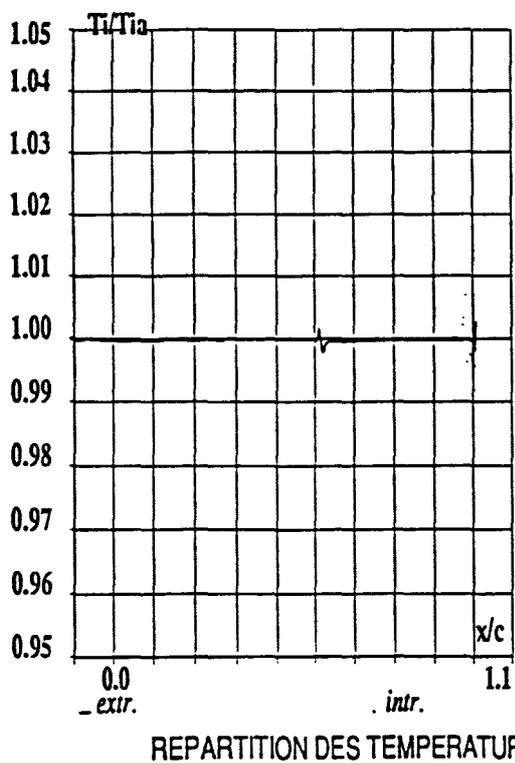
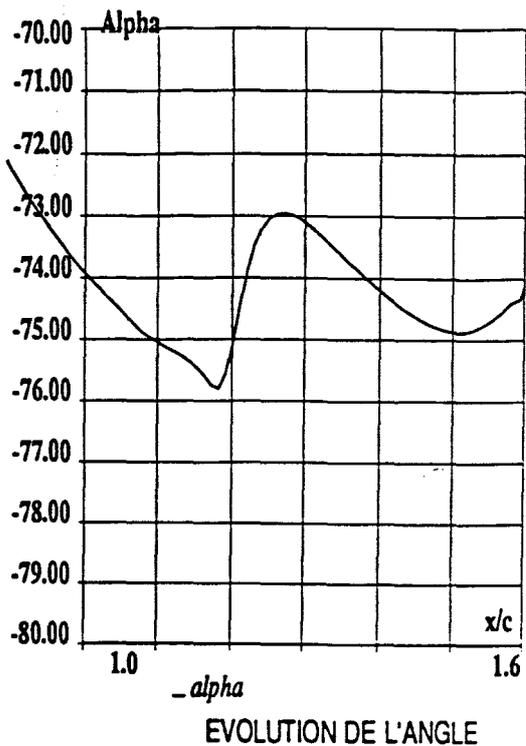
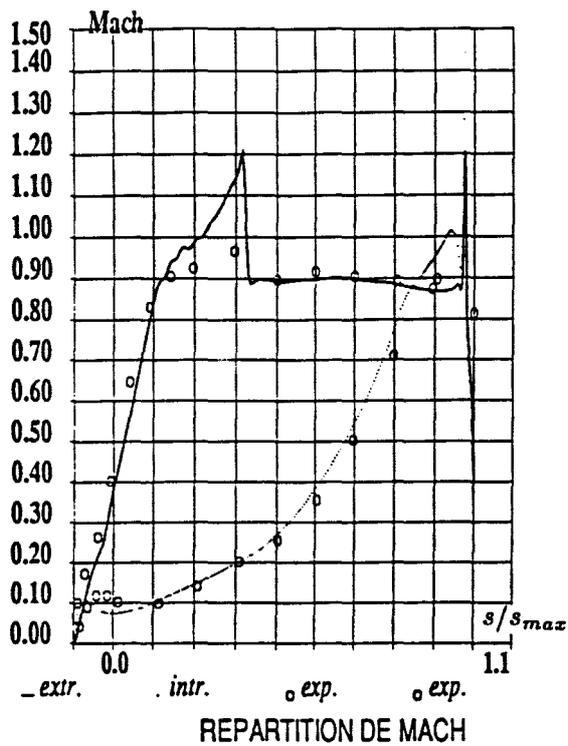


Figure 19 : Cas test CTS1 -1.
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1.

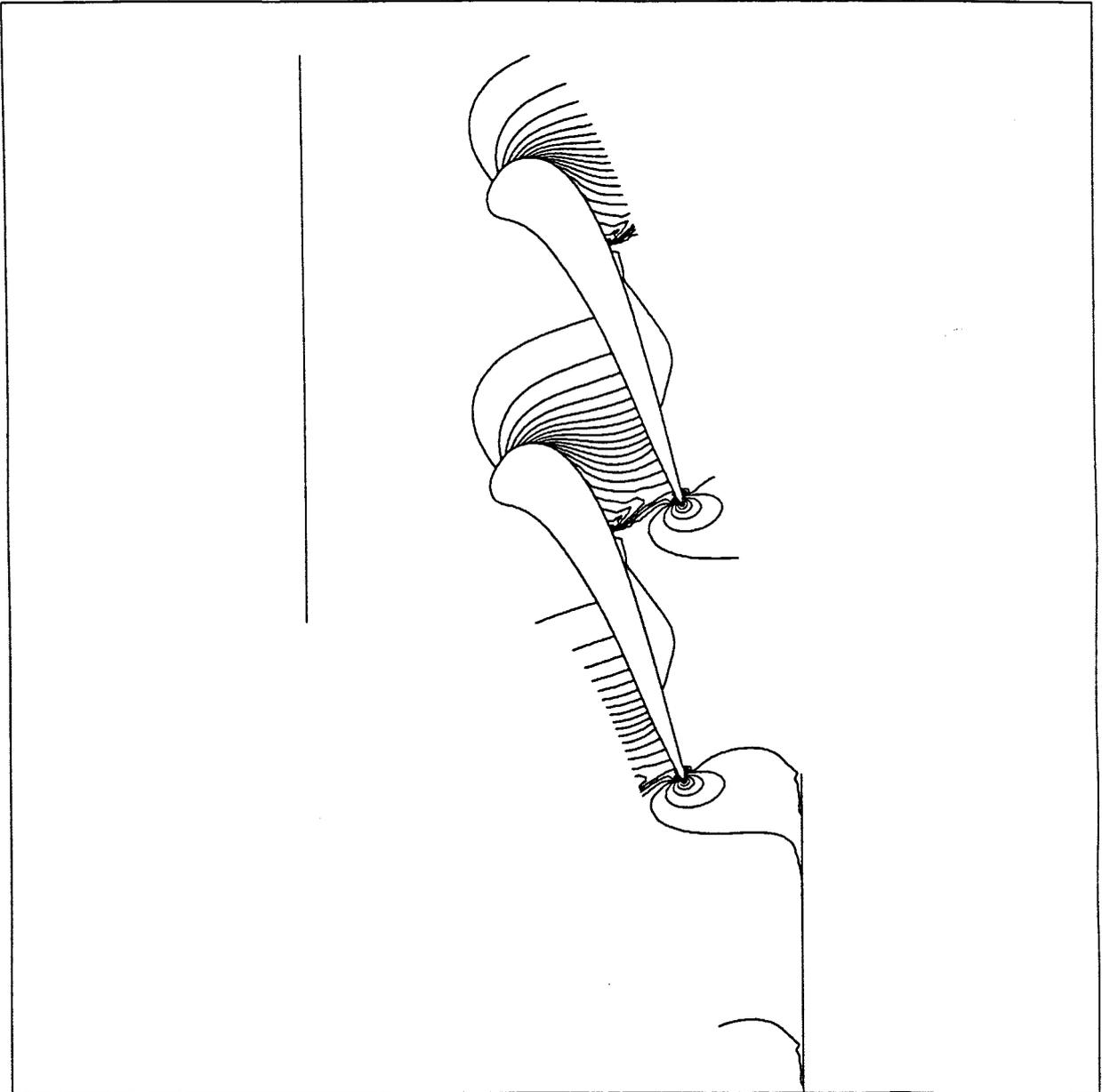


Figure 20 : Cas test CTS1 -1.
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1.
Répartition des isovaleurs de pression $1 - \frac{p}{p_i}$.
 $\Delta = 0.03$.

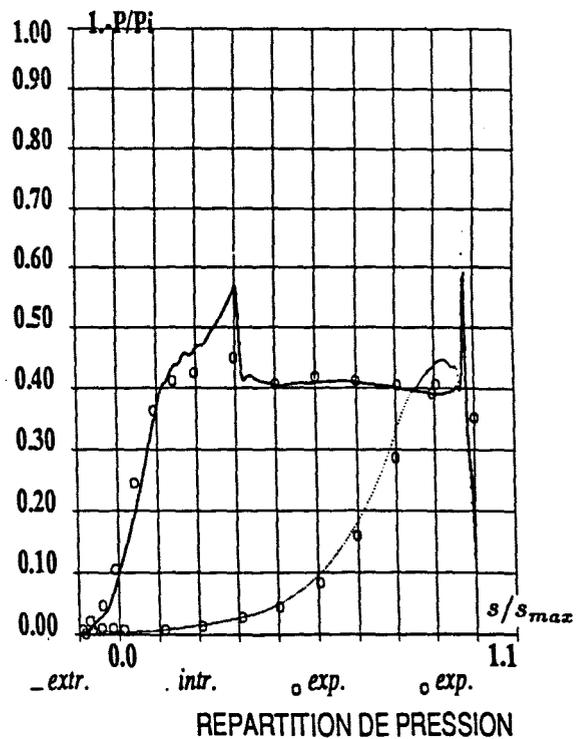
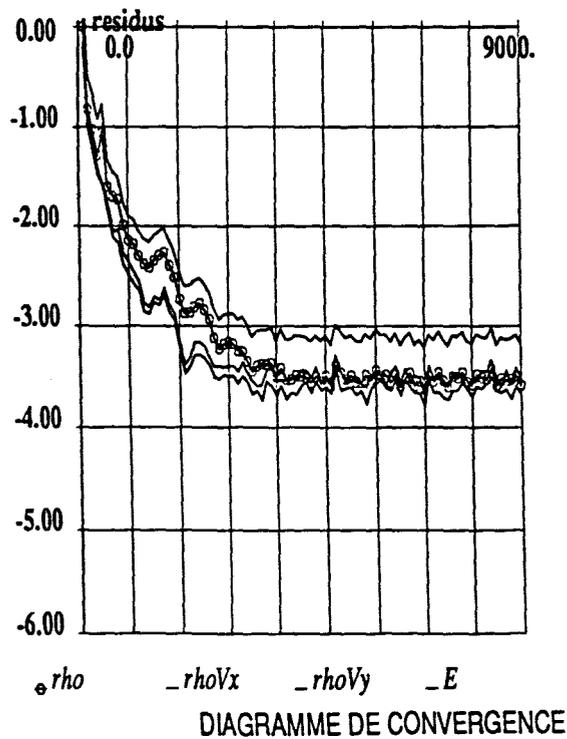
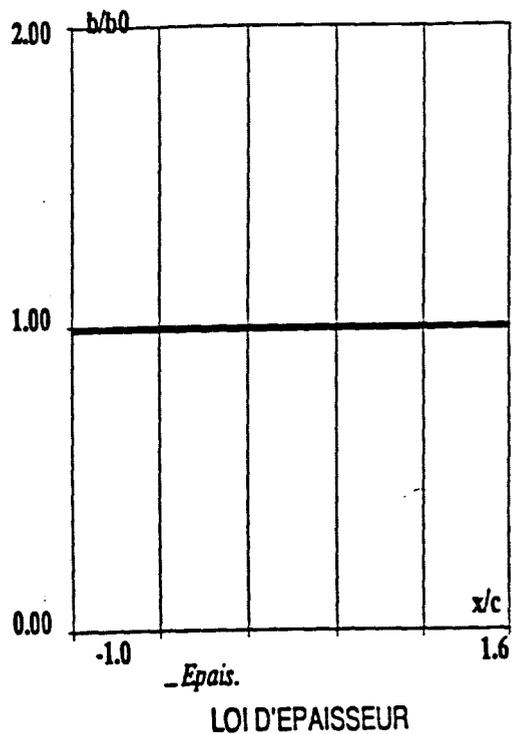
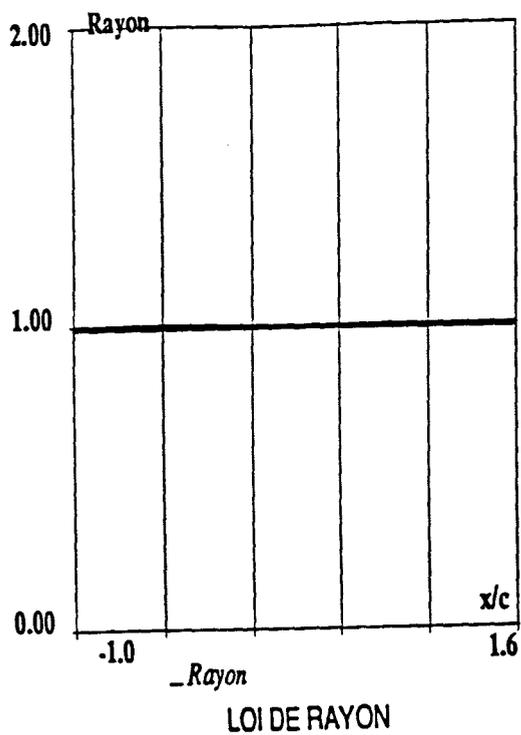


Figure 21 : Cas test CTS1-1.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.

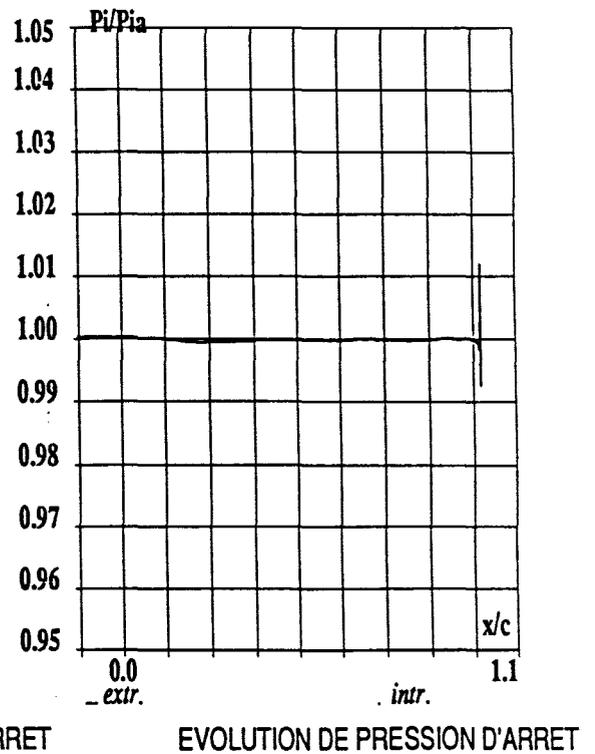
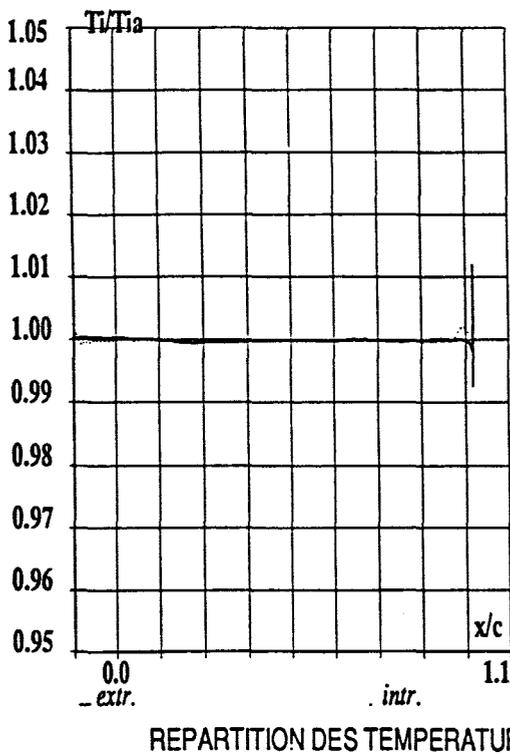
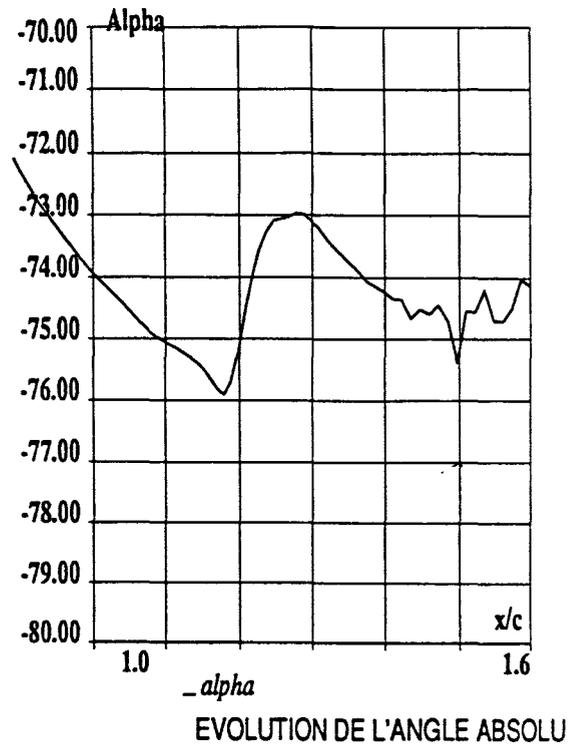
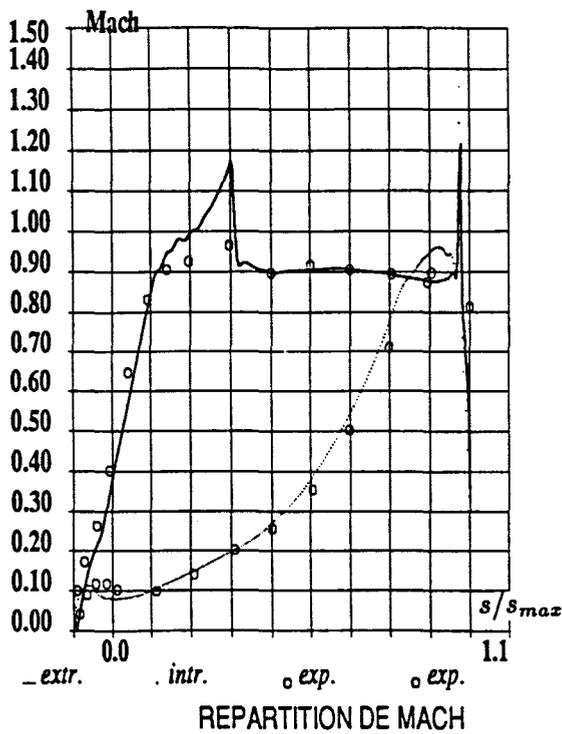


Figure 22 : Cas test CTS1 -1.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.

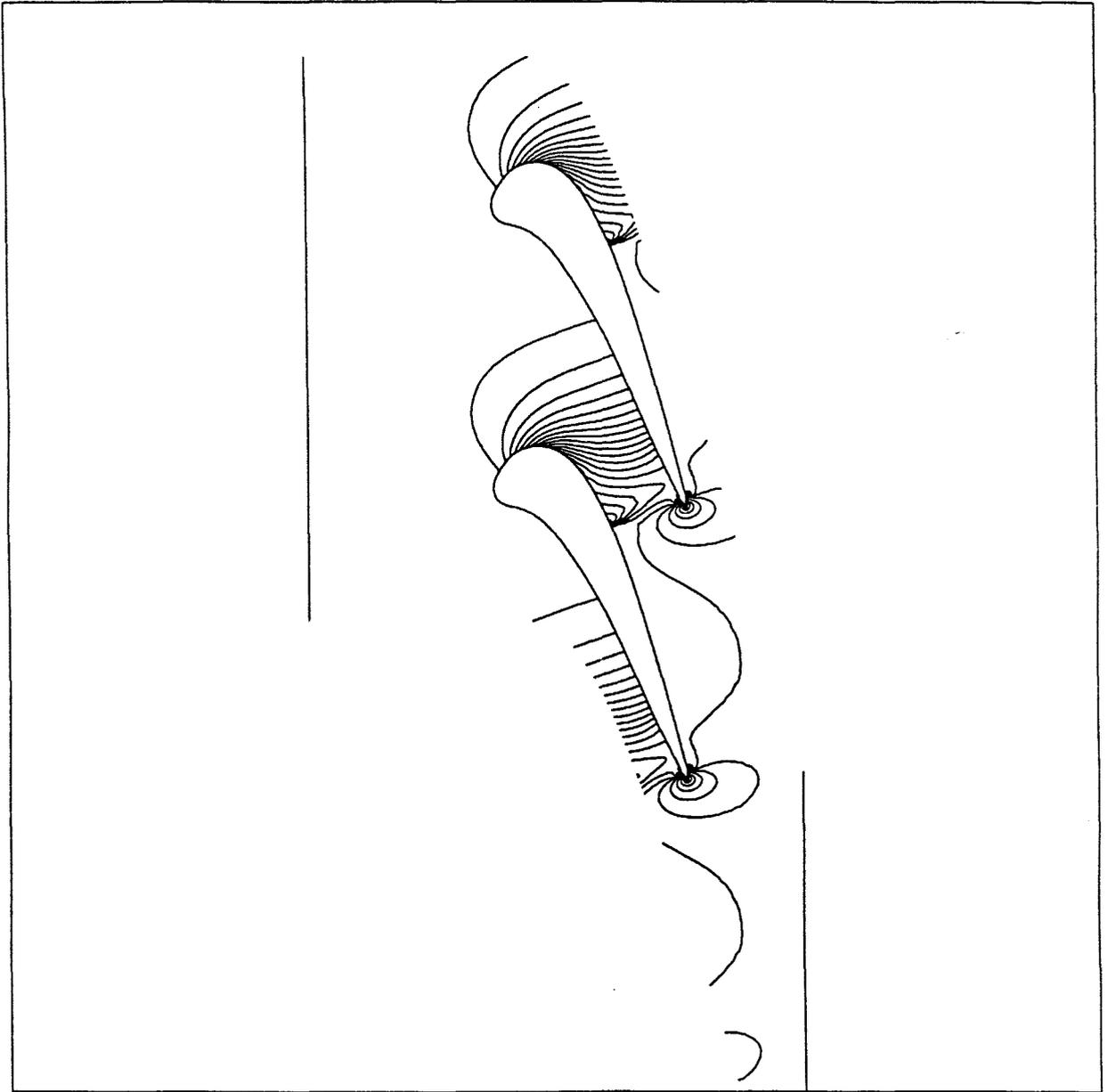
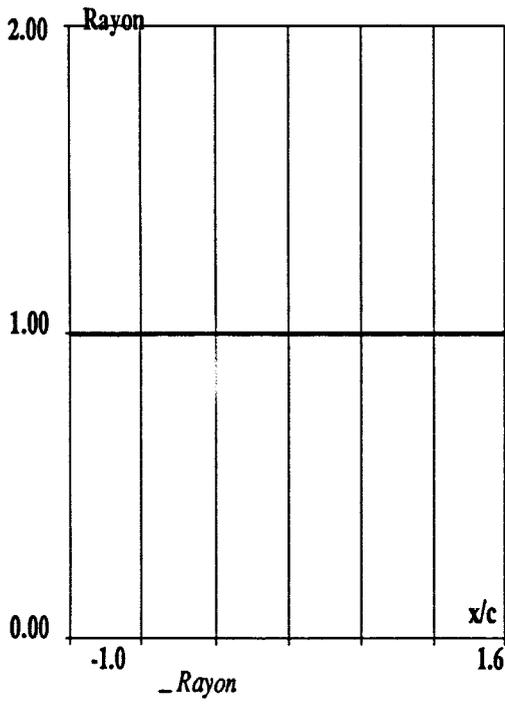


Figure 23 : Cas test CTS1 -1.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.
Répartition des isovaleurs de pression $1 - \frac{p}{p_i}$.
 $\Delta = 0.03$.



LOI DE RAYON



LOI D'EPAISSEUR

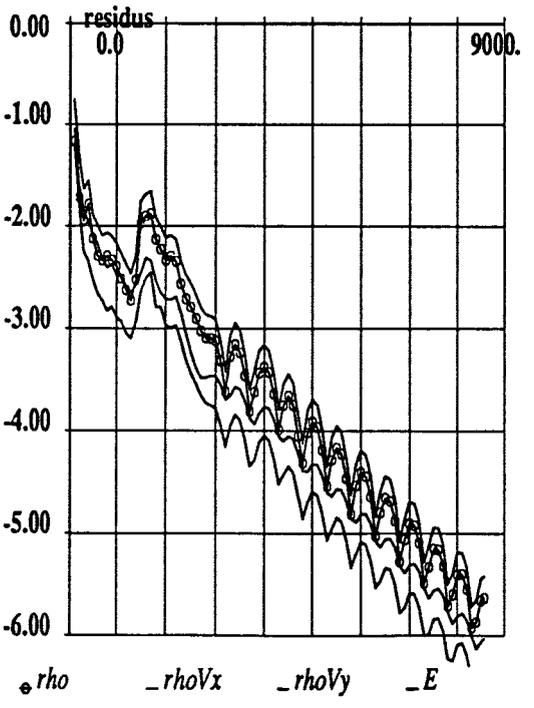
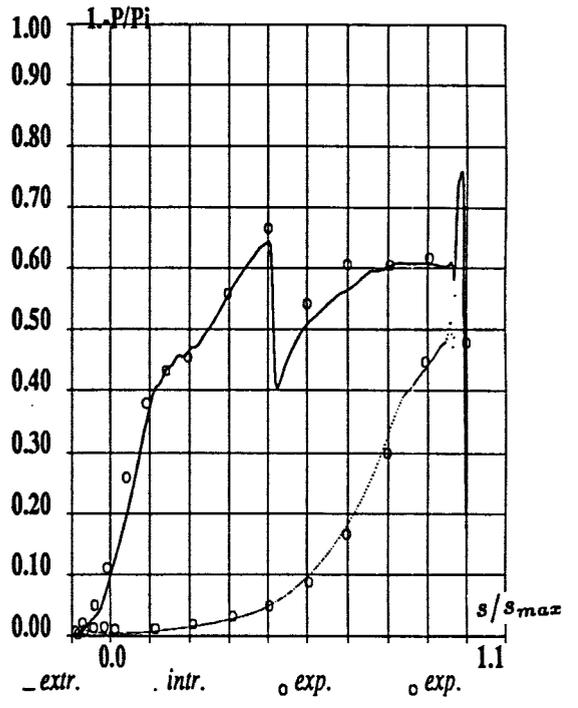


DIAGRAMME DE CONVERGENCE



REPARTITION DE PRESSION

Figure 24 : Cas test CTS1-2.
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1.

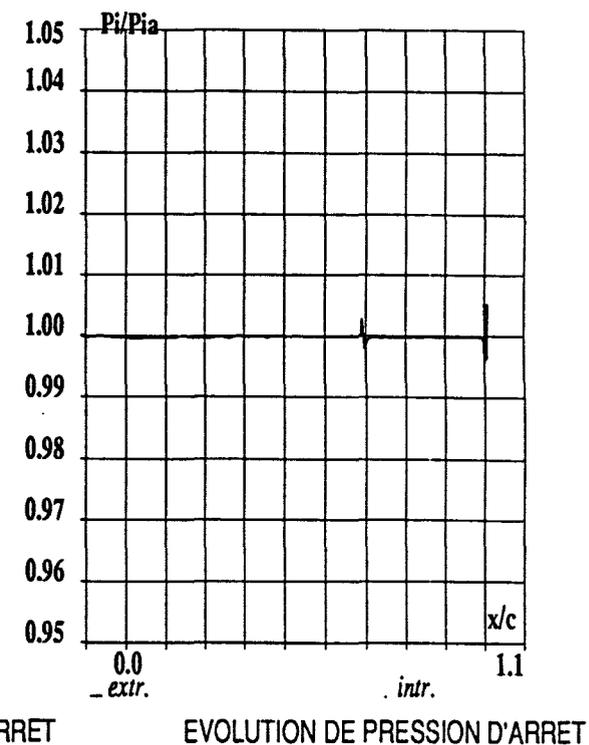
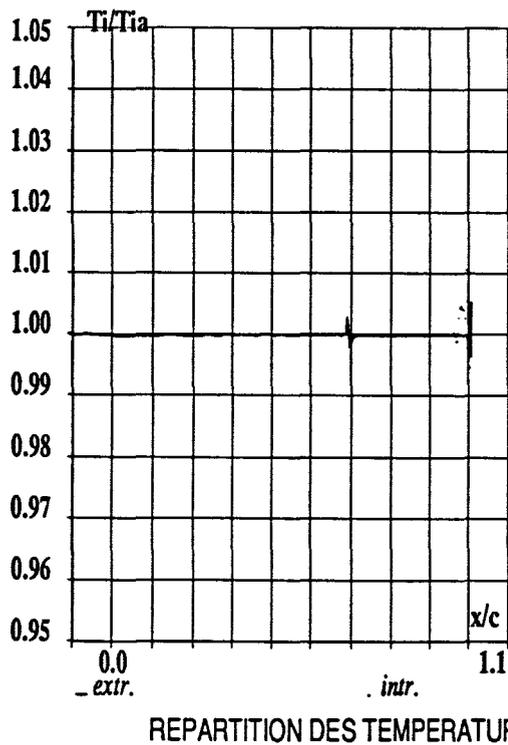
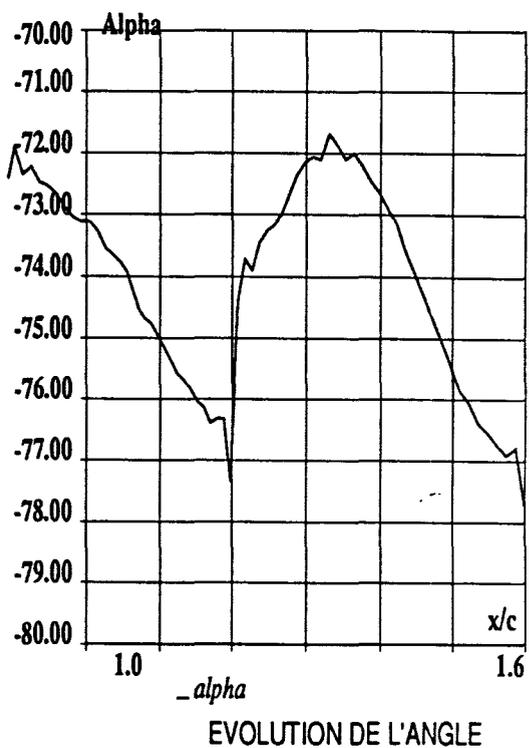
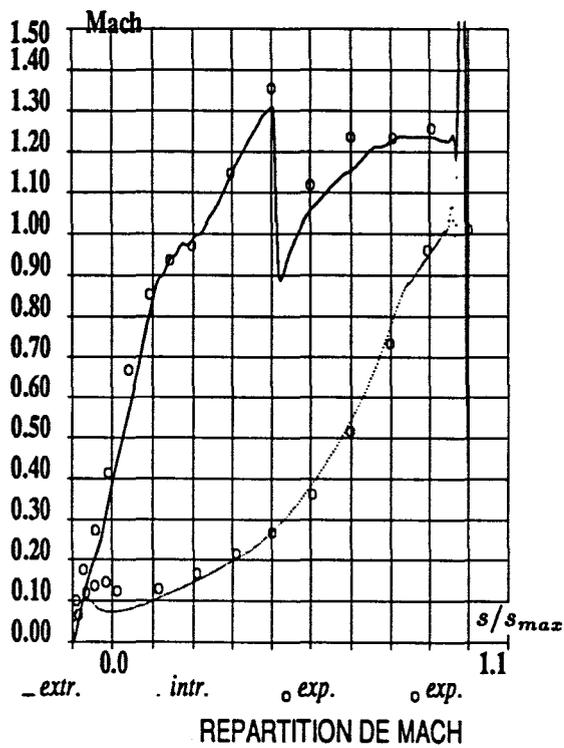


Figure 25 : Cas test CTS1-2.
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1.

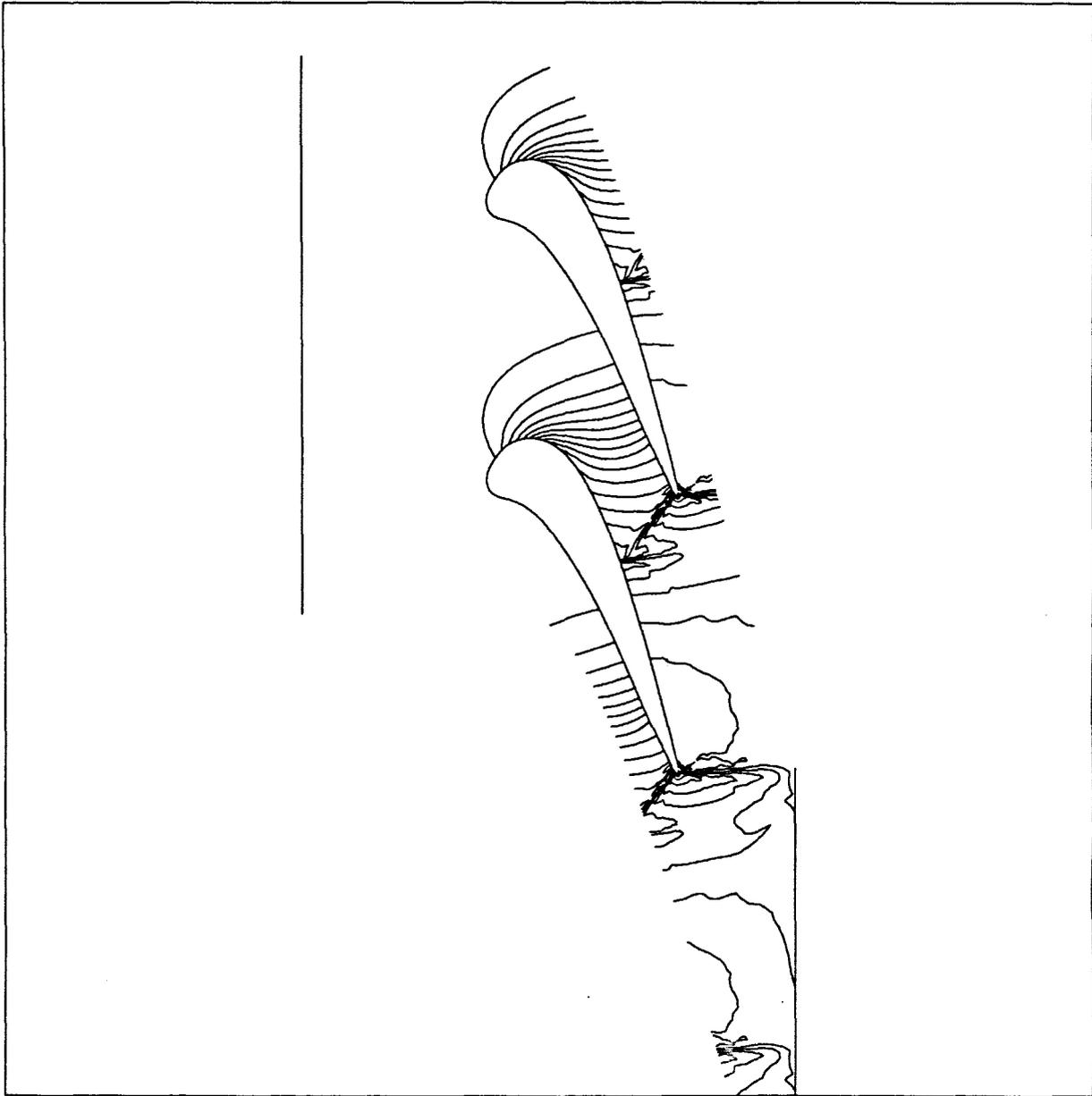


Figure 26 : Cas test CTS1-2.

Code sans viscosité artificielle SCHEMA1.

Répartition des isovaleurs de pression $1. - \frac{P}{P_i}$.

$\Delta = 0.03$.

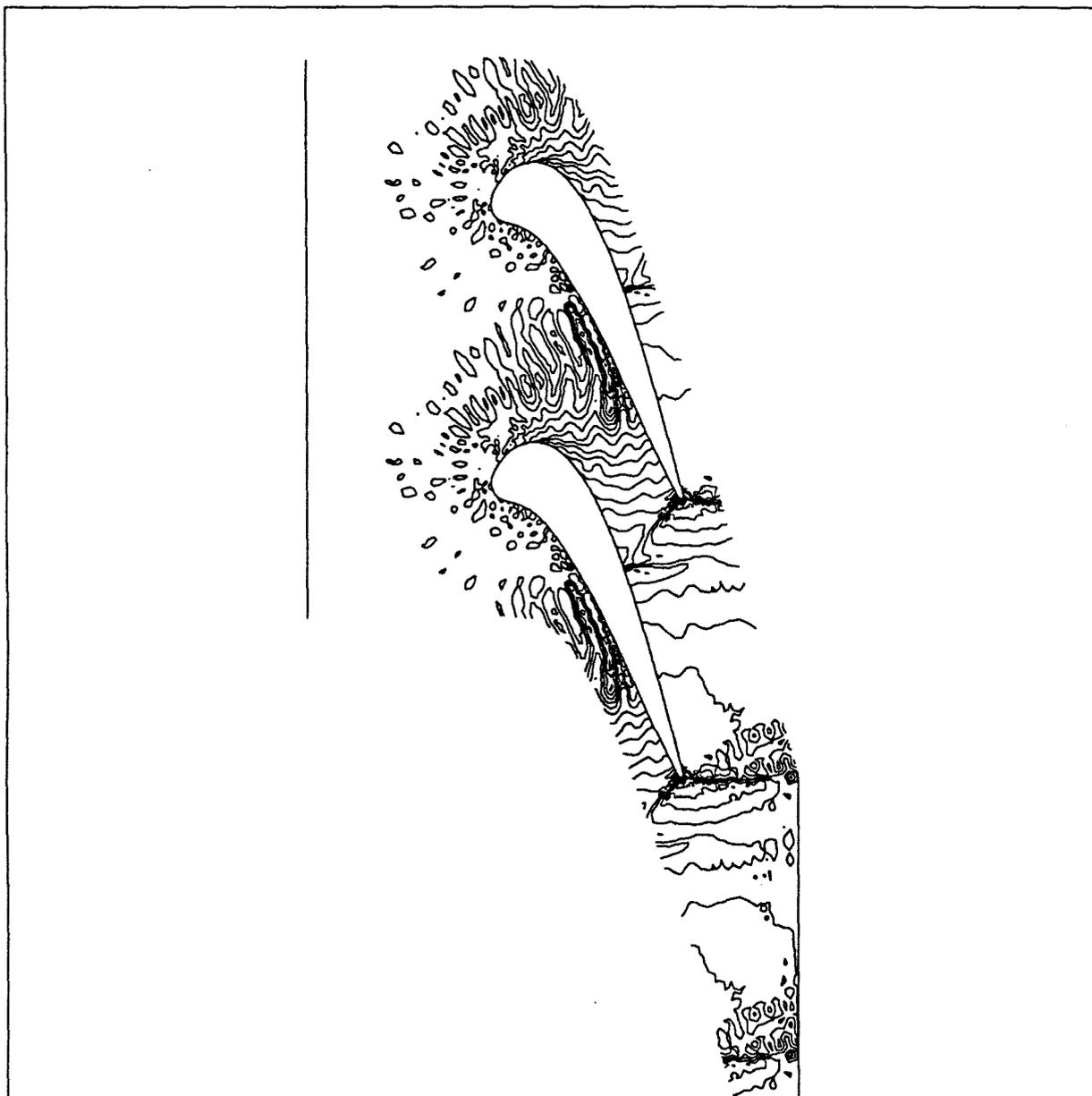


Figure 27 : Cas test CTS1-2.

Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.

Répartition des isovaleurs de pression $1 - \frac{p}{p_i}$.

$\Delta = 0.03$.

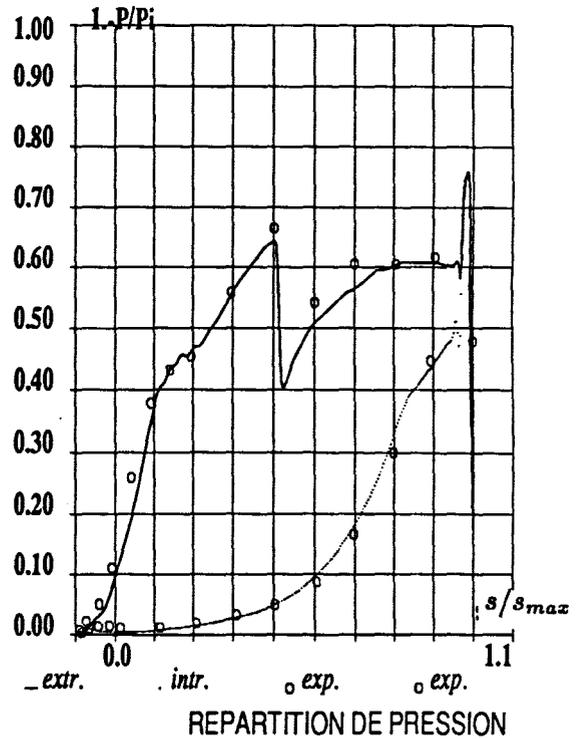
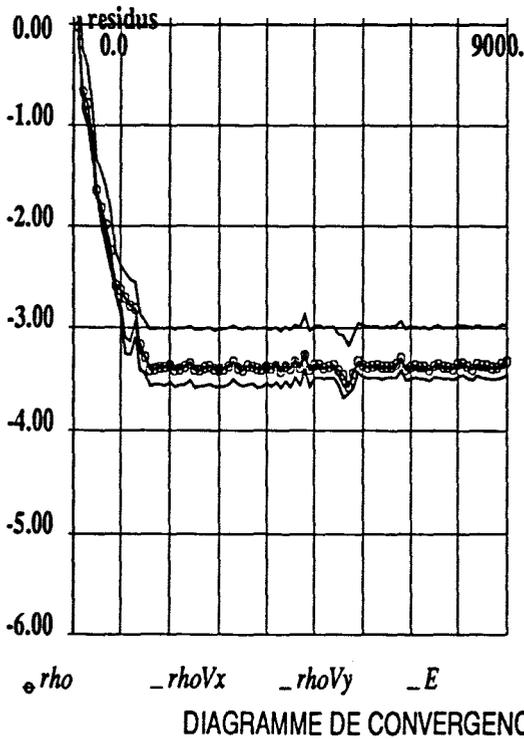
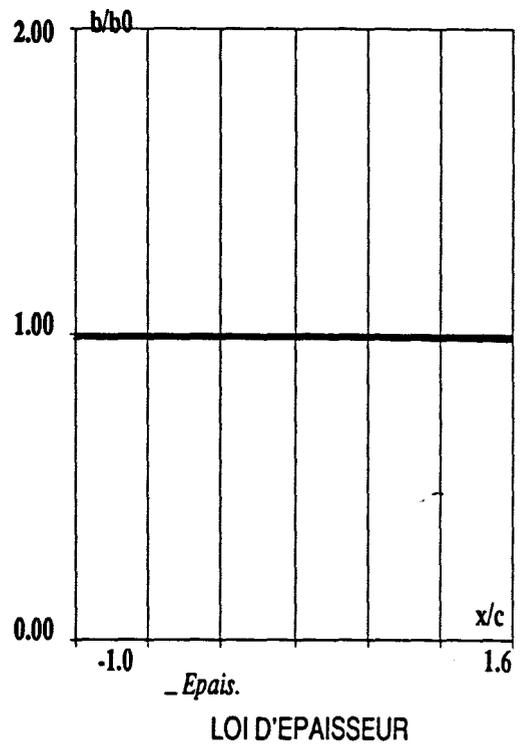
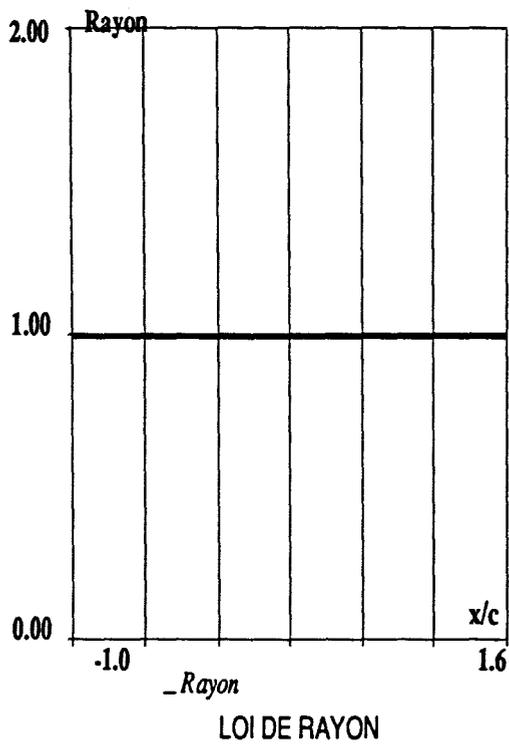


Figure 28 : Cas test CTS1-2.
 Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.
 Viscosité artificielle $\chi^{(4)}$ modifiée.

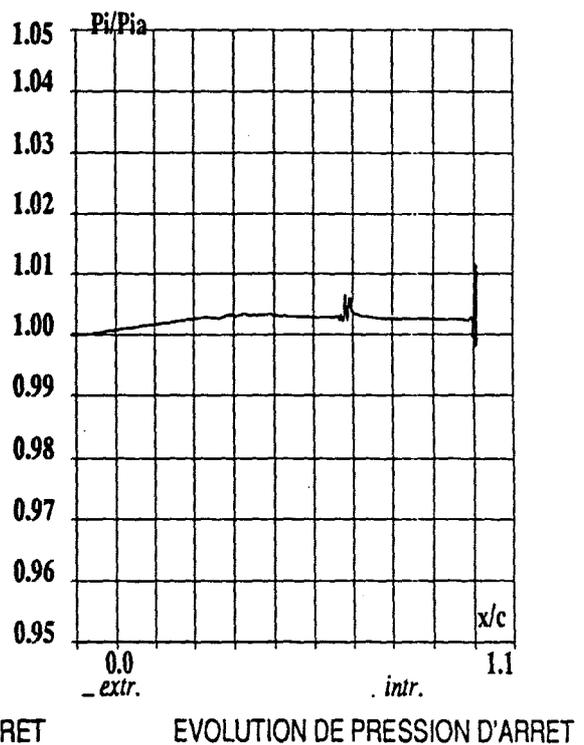
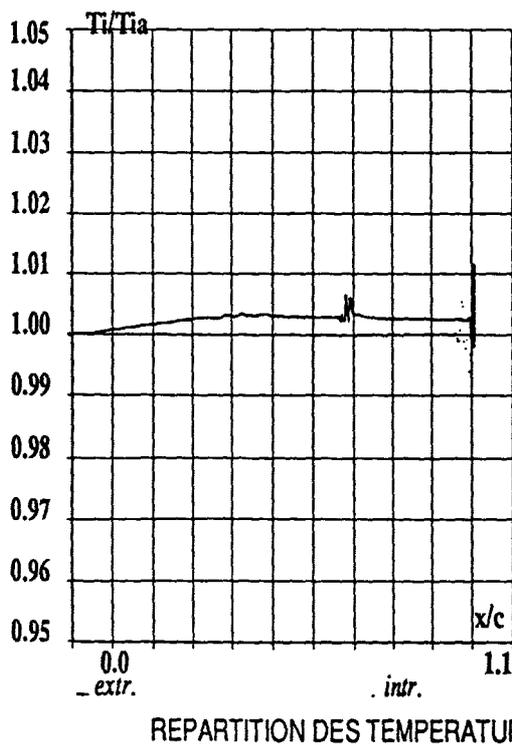
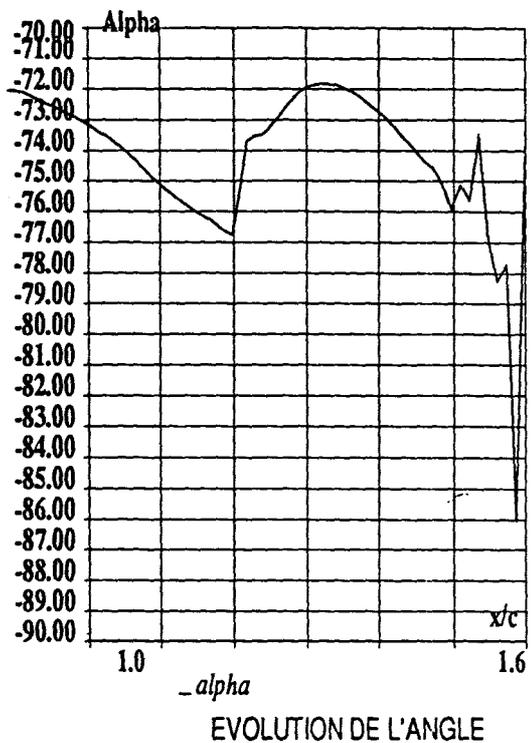
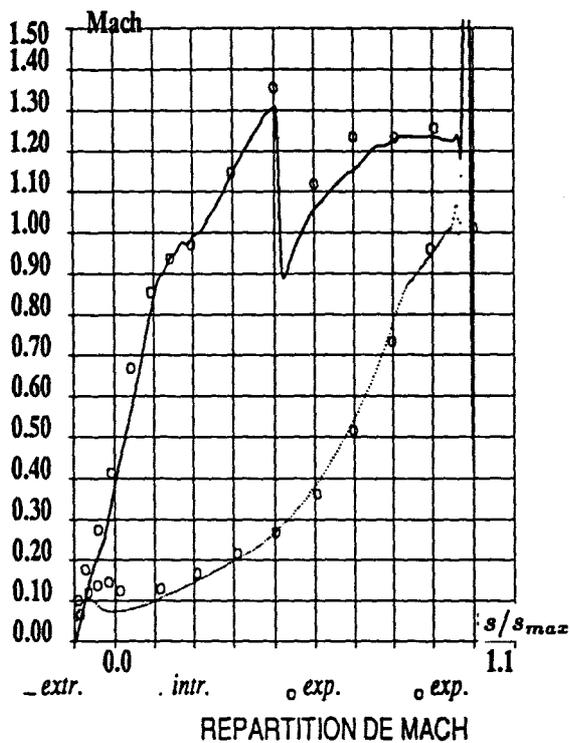


Figure 29 : Cas test CTS1-2.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.
Viscosité artificielle $\chi^{(4)}$ modifiée.

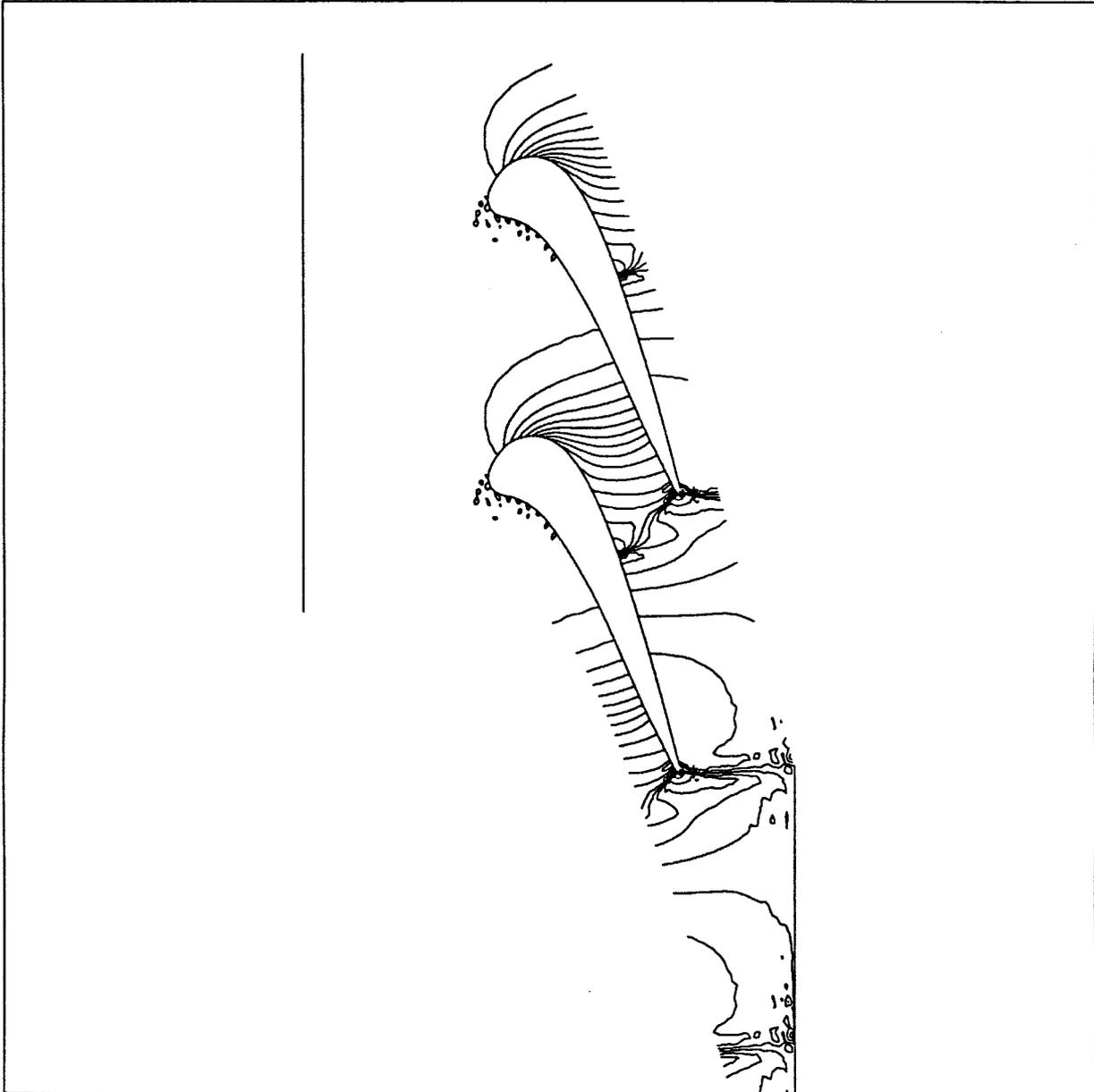


Figure 30 : Cas test CTS1-2.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.
Répartition des isovaleurs de pression $1 - \frac{p}{p_i}$.
 $\Delta = 0.03$.
Viscosité artificielle $\chi^{(4)}$ modifiée.

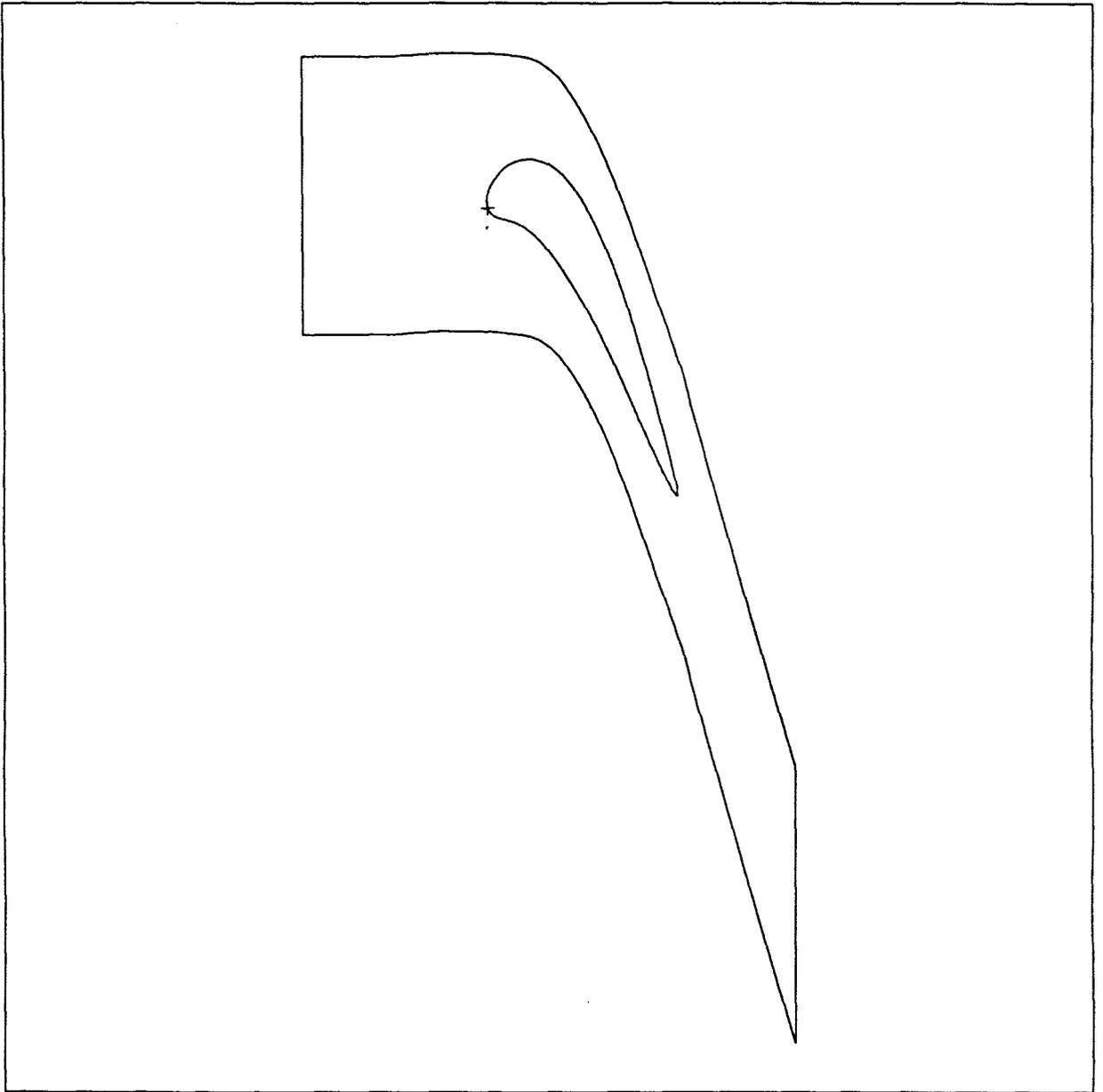


Figure 31 : Cas test CTS1.
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1.
Localisation du point d'arrêt.

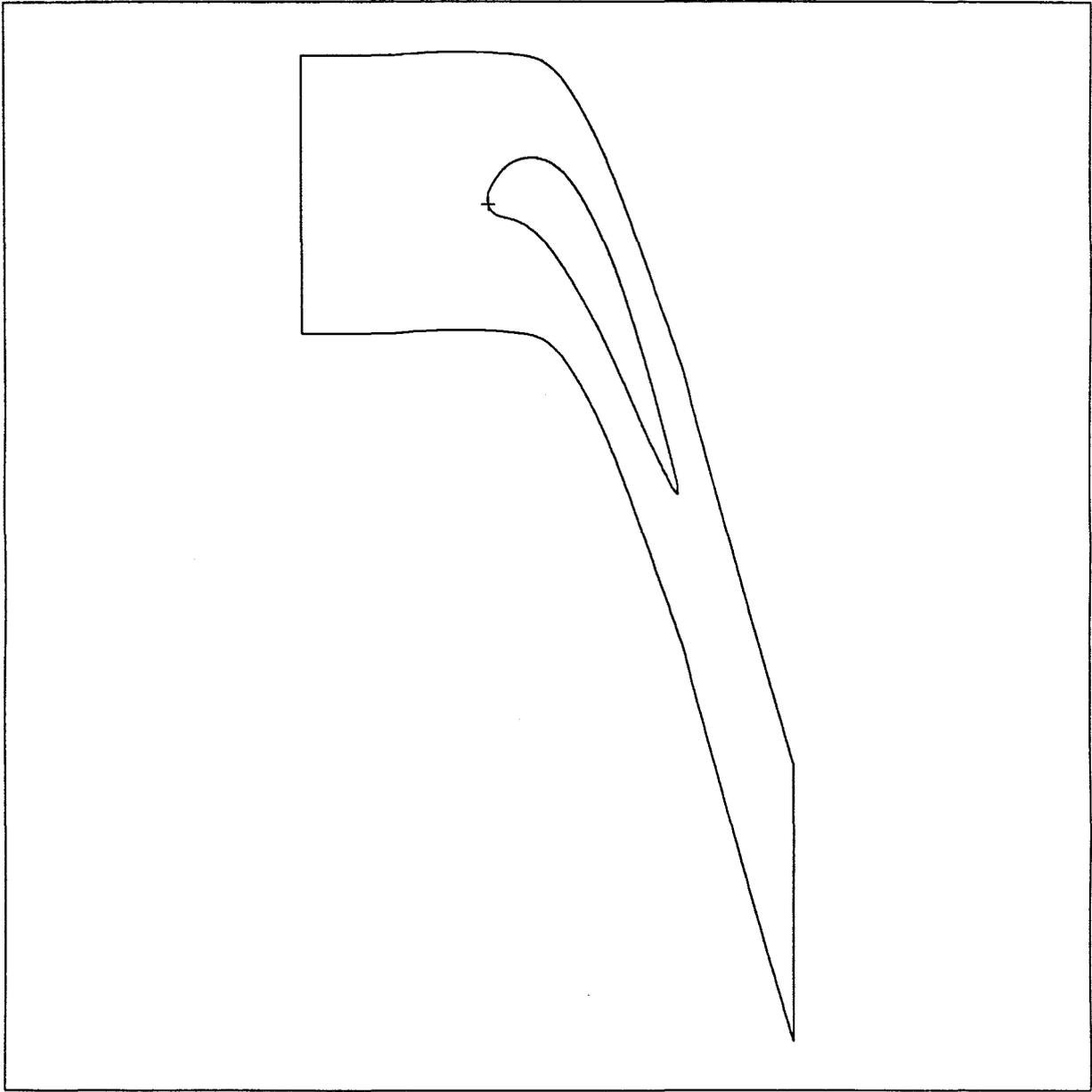


Figure 32 : Cas test CTS1.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.
Localisation du point d'arrêt.

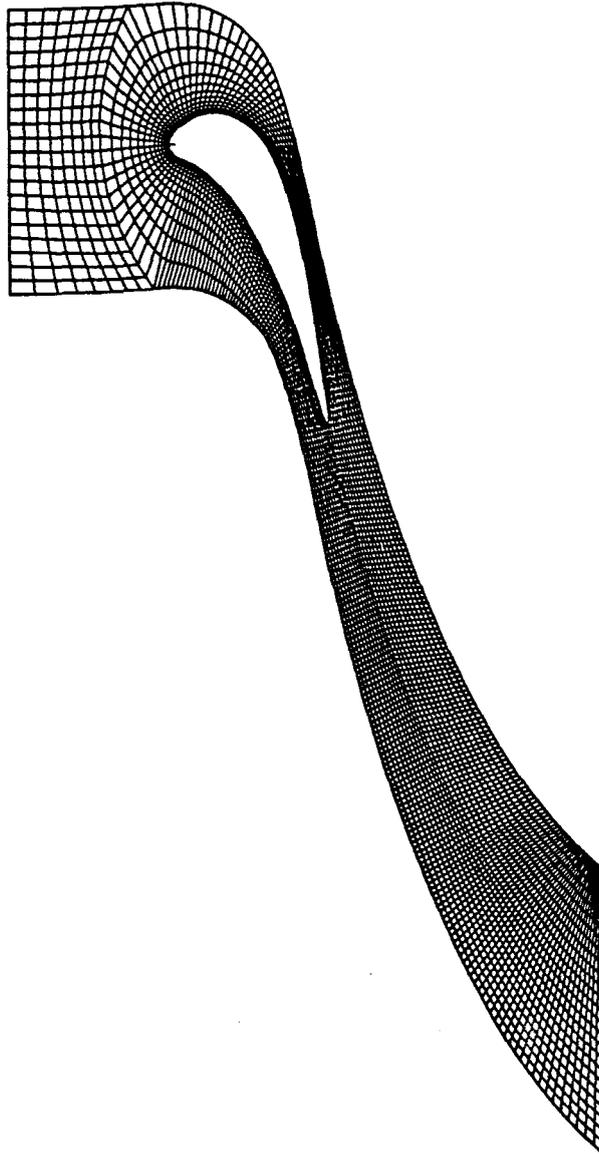


Figure 33 : Cas test CTS2 2D ET CTS3 2.5D.
Maillage : 4102 noeuds.
Code structuré VOLFINI.

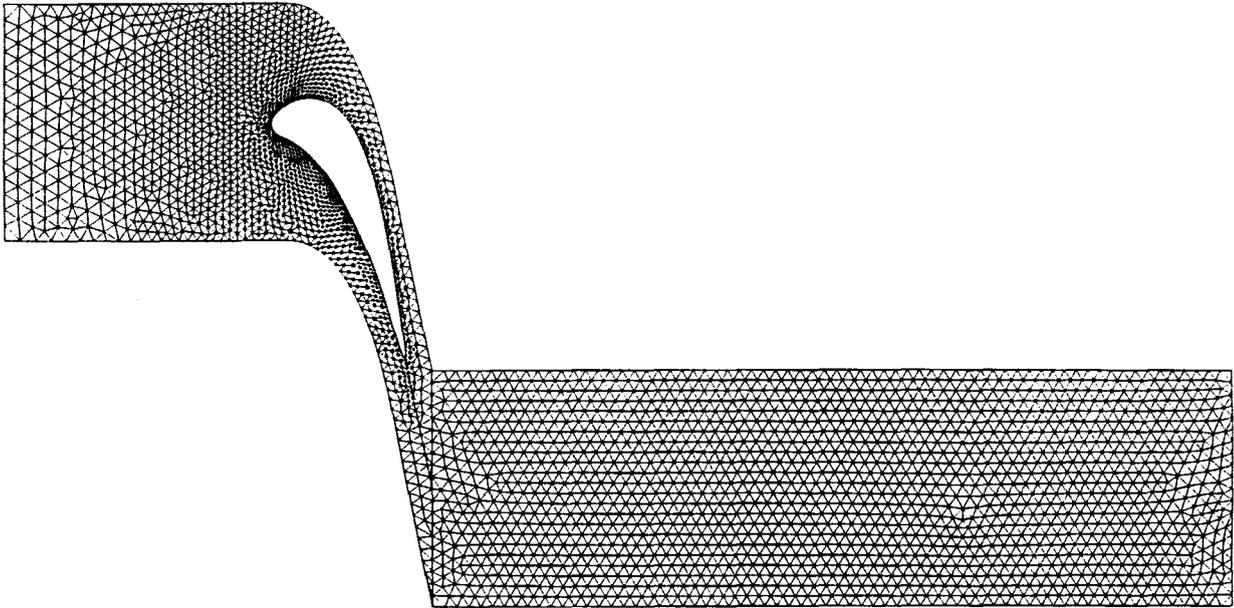


Figure 34 : Cas test CTS2-1 2D et CTS3-1 2.5D.
Maillage : 3338 noeuds, 6206 mailles.

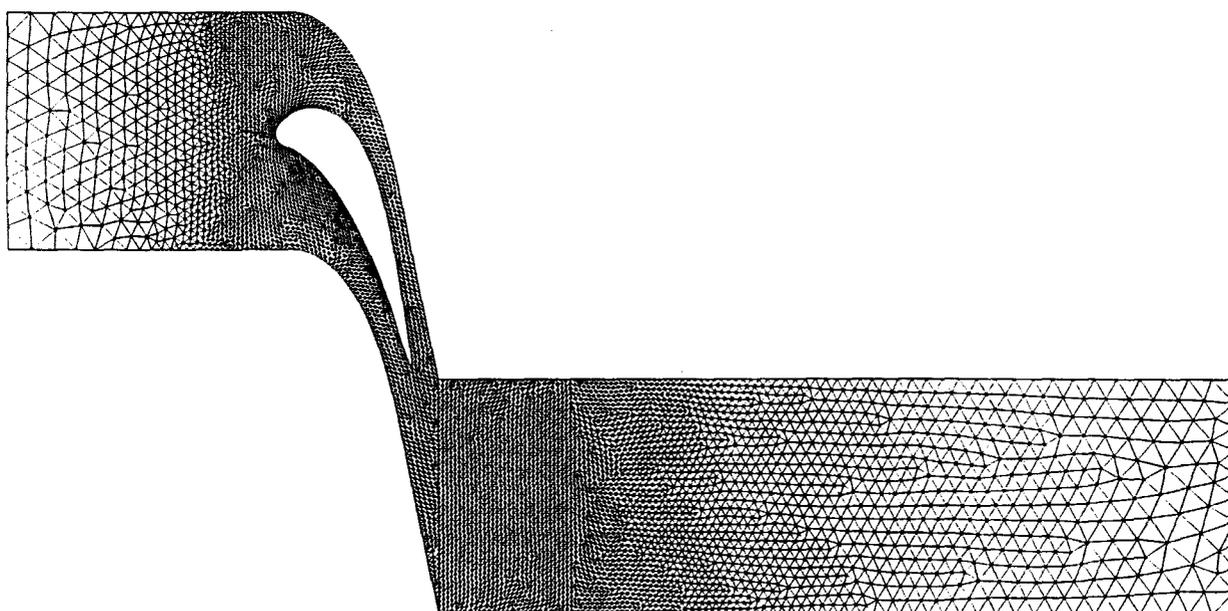
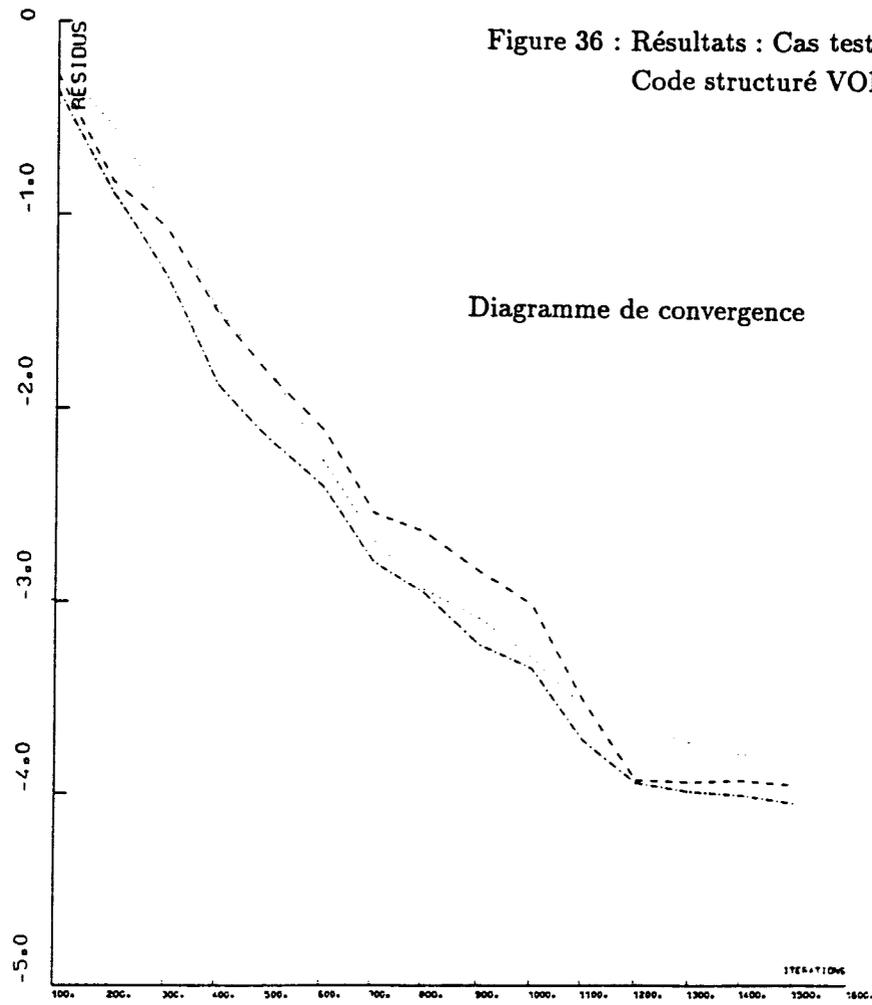
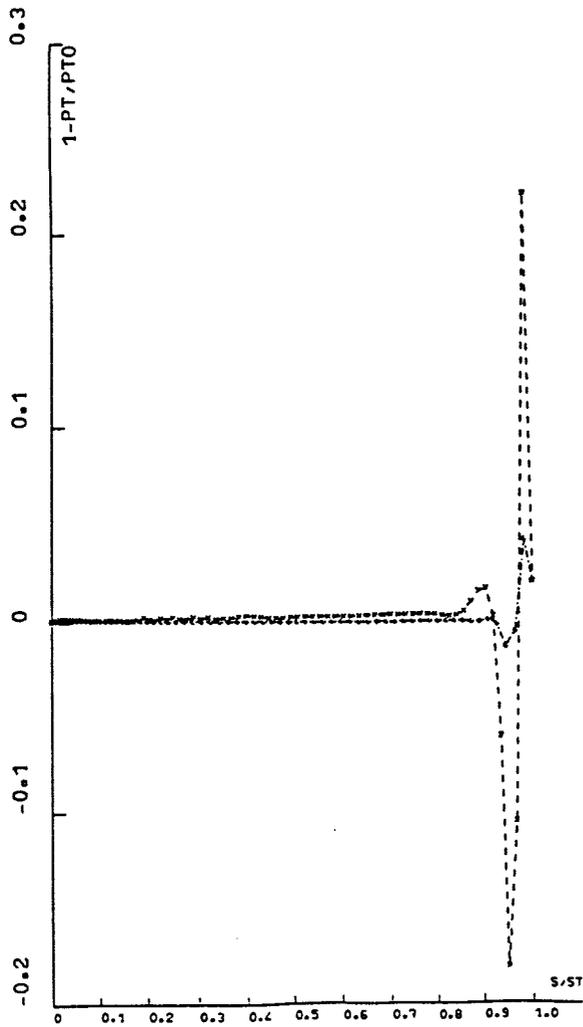


Figure 35 : Cas test CTS2-2 2D et CTS3-2 2.5D.
Maillage : 6534 noeuds, 12463 mailles.

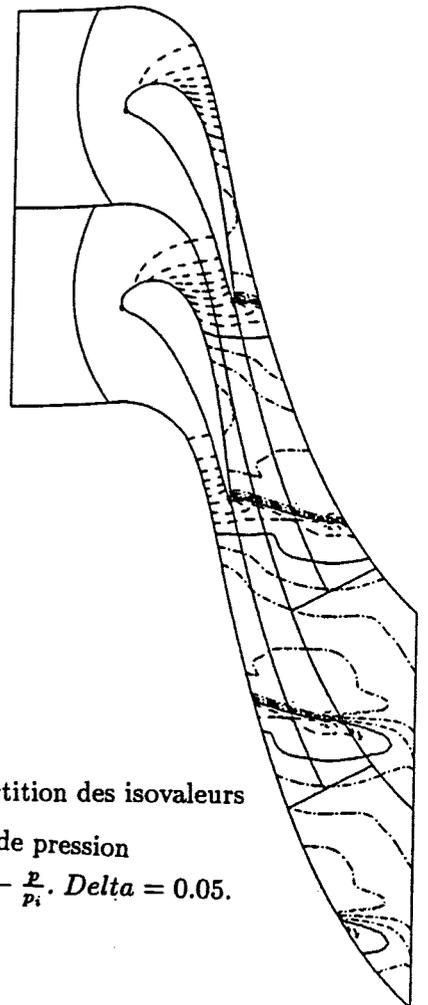
Figure 36 : Résultats : Cas test CTS2.
Code structuré VOLFINI.

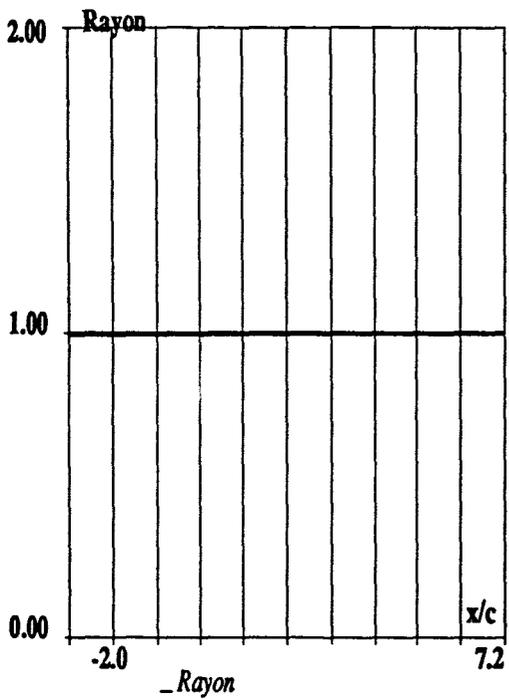


Répartitions des pressions d'arrêt sur les profils 1. - $\frac{p_i}{p_{i1}}$

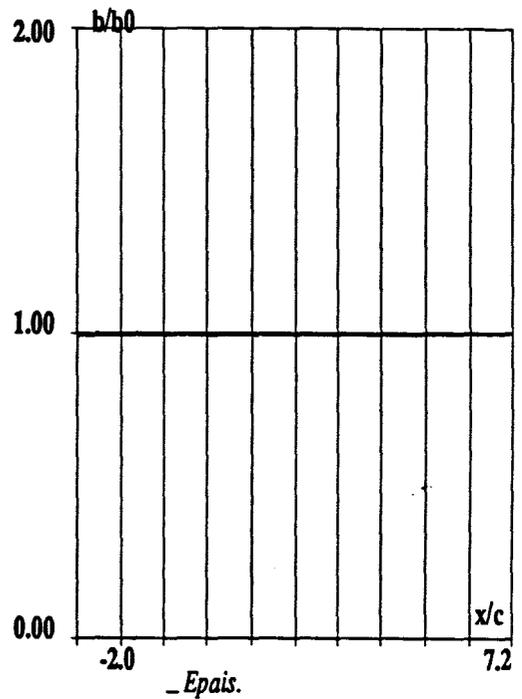


Répartition des isovaleurs
de pression
1. - $\frac{p}{p_i}$. Delta = 0.05.





LOI DE RAYON



LOI D'EPaisseur

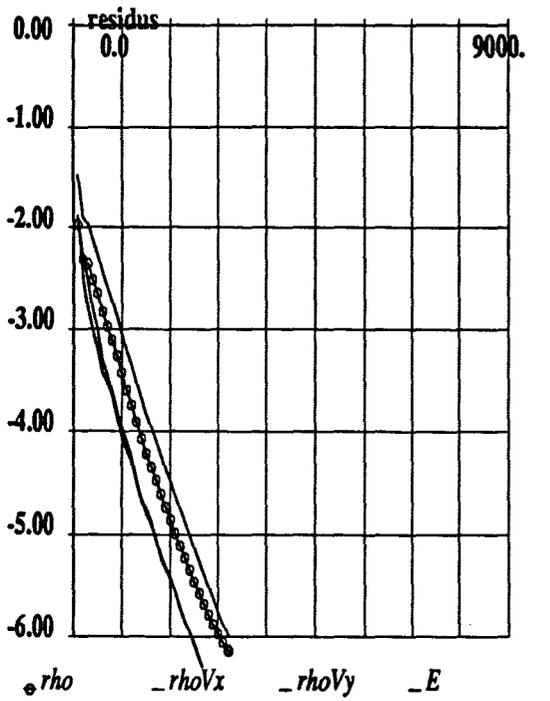
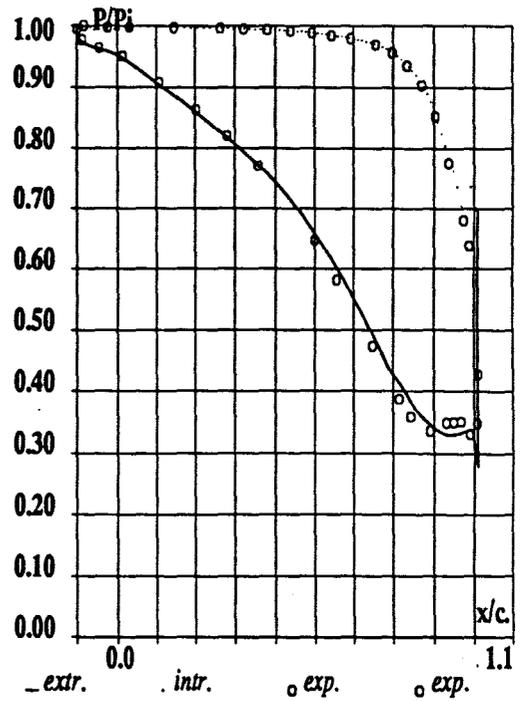


DIAGRAMME DE CONVERGENCE



REPARTITION DE PRESSION

Figure 37 : Cas test CTS2-1.
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1.

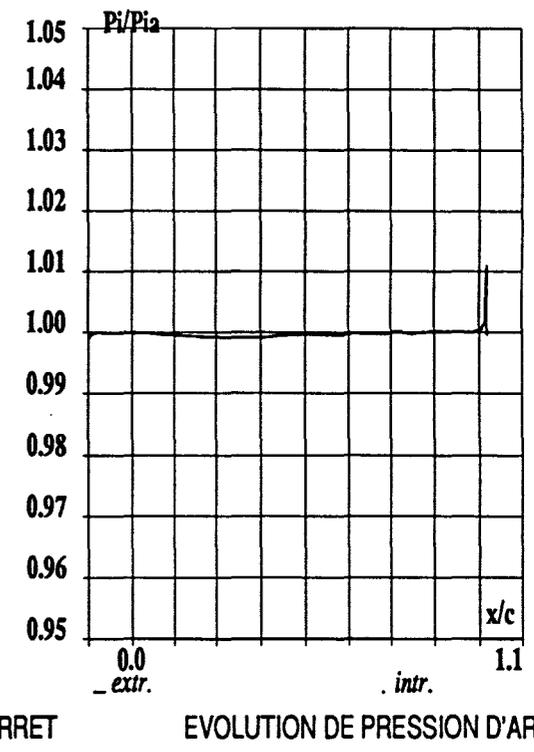
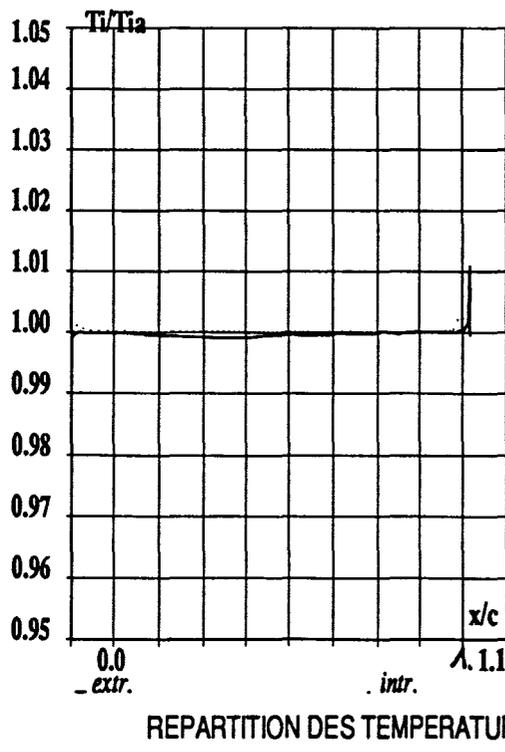
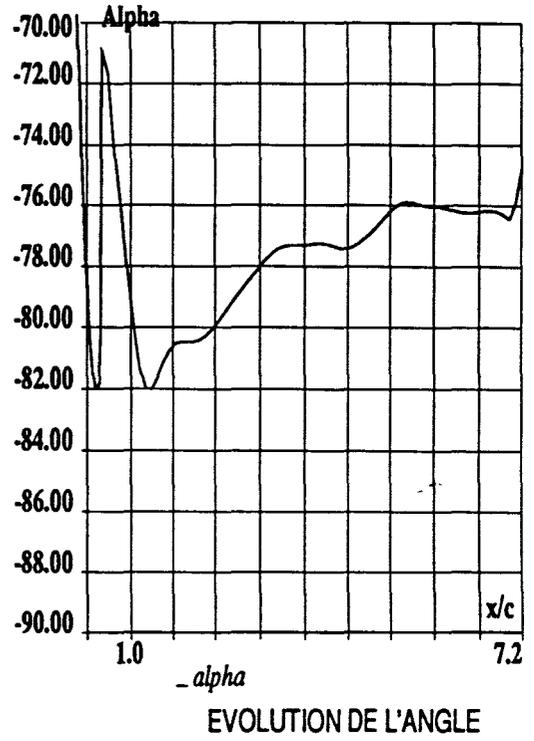
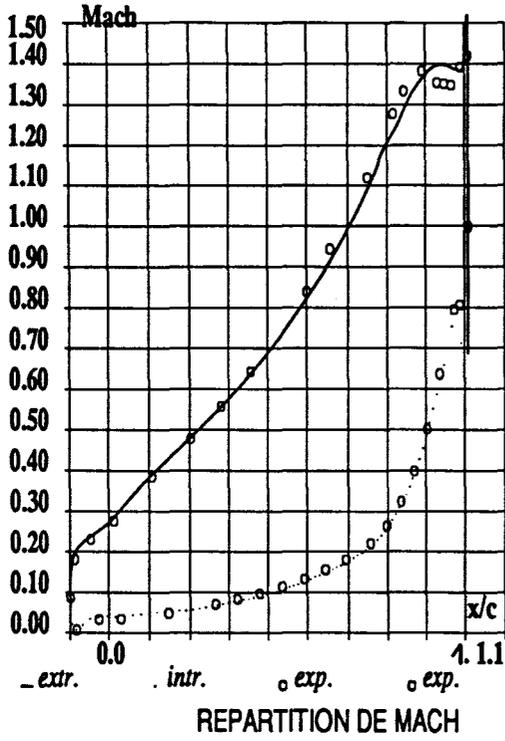


Figure 38 : Cas test CTS2-1.
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1.

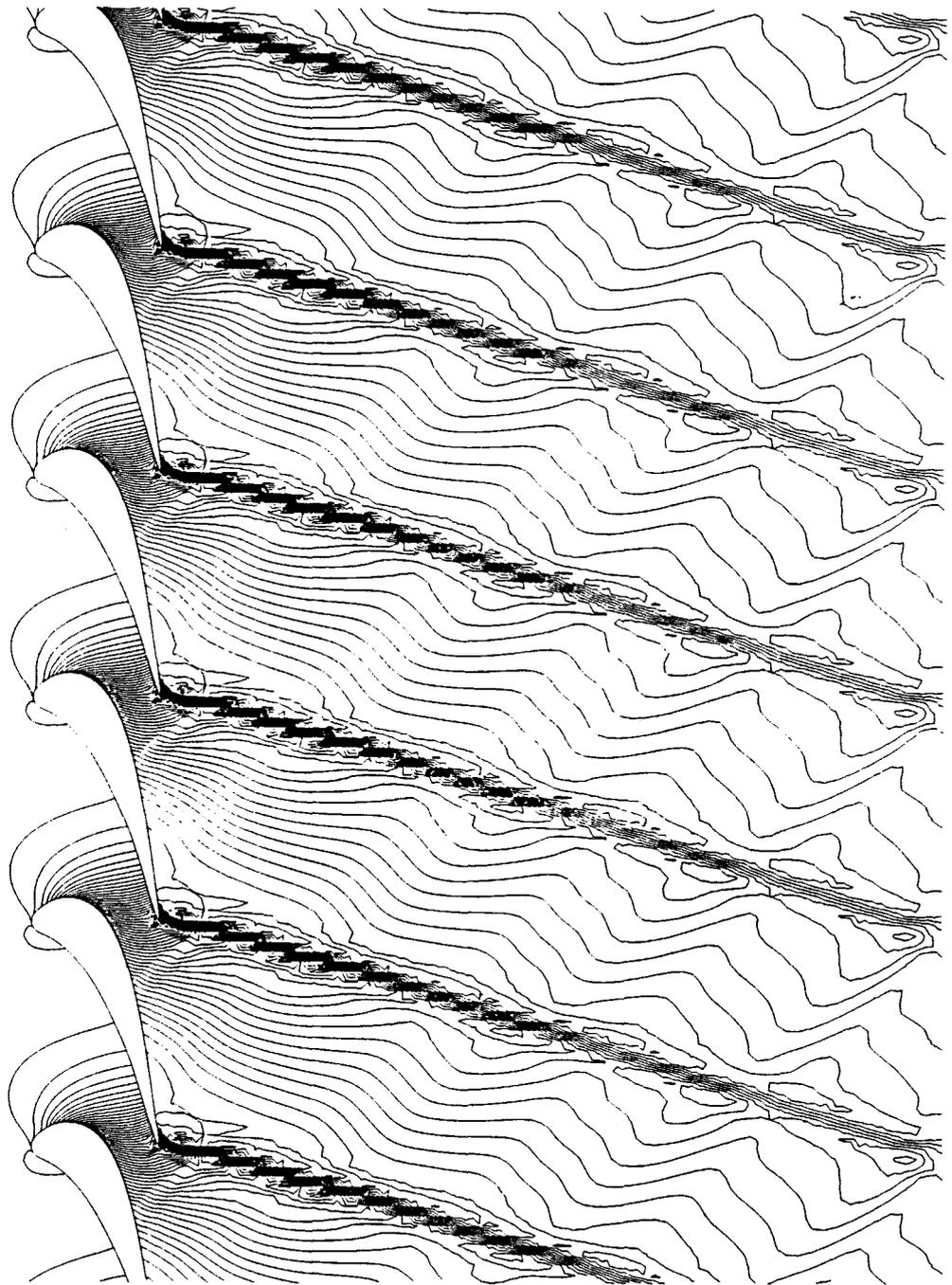
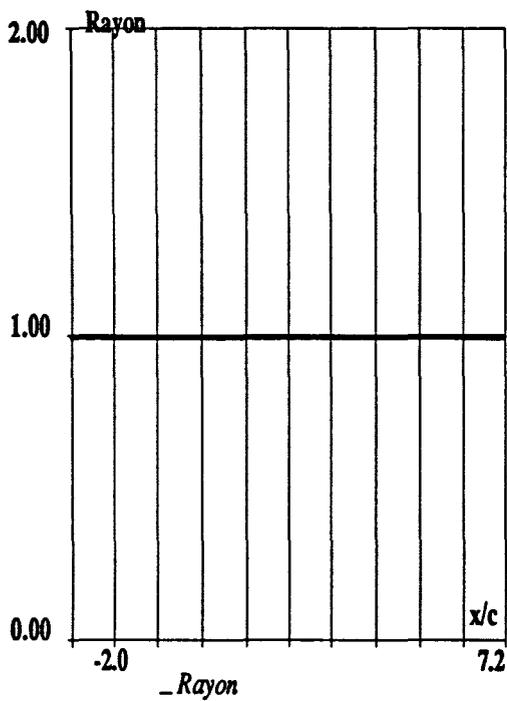
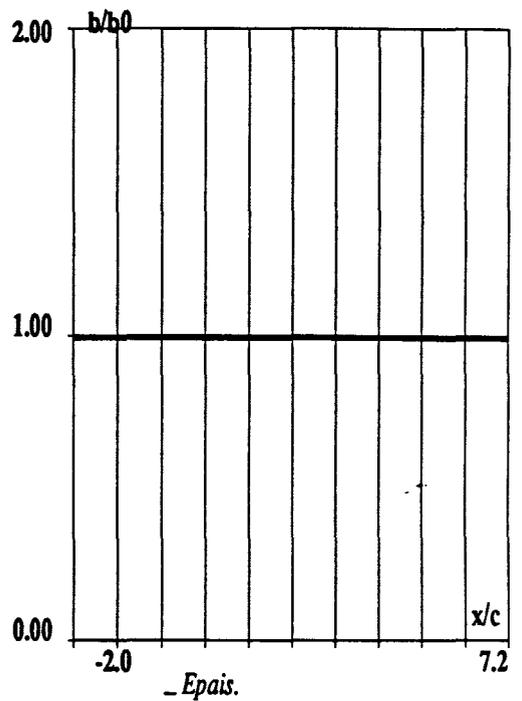


Figure 39 : Cas test CTS2-1.
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1.
Répartition des isovaleurs de pression $1 - \frac{p}{p_i}$.
 $\Delta = 0.01$.



LOI DE RAYON



LOI D'EPaisseur

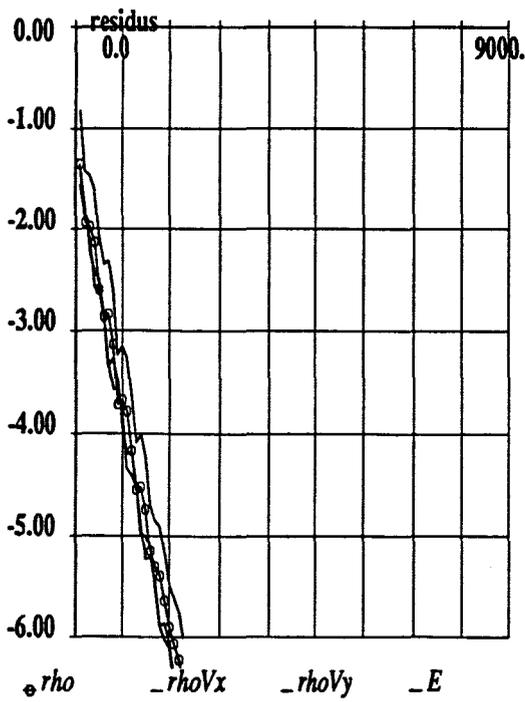
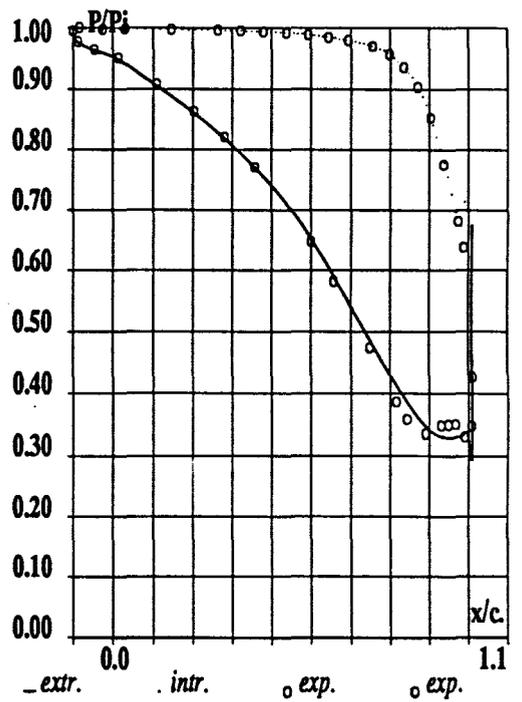


DIAGRAMME DE CONVERGENCE



REPARTITION DE PRESSION

Figure 40 : Cas test CTS2-1.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.

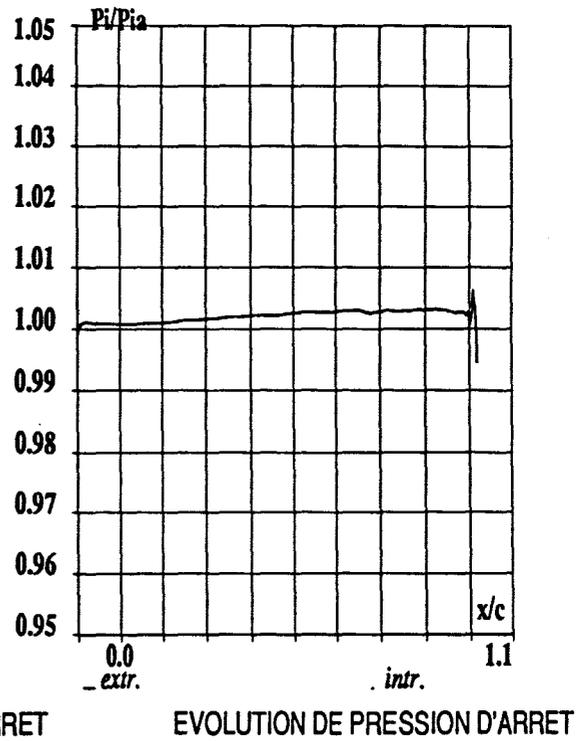
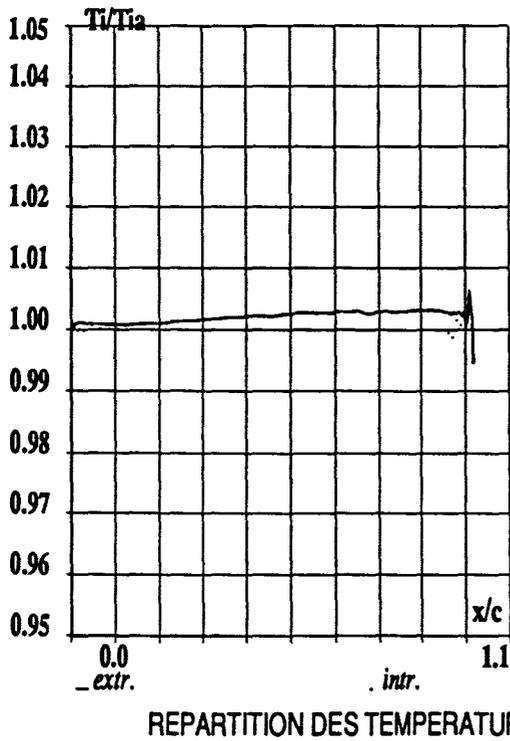
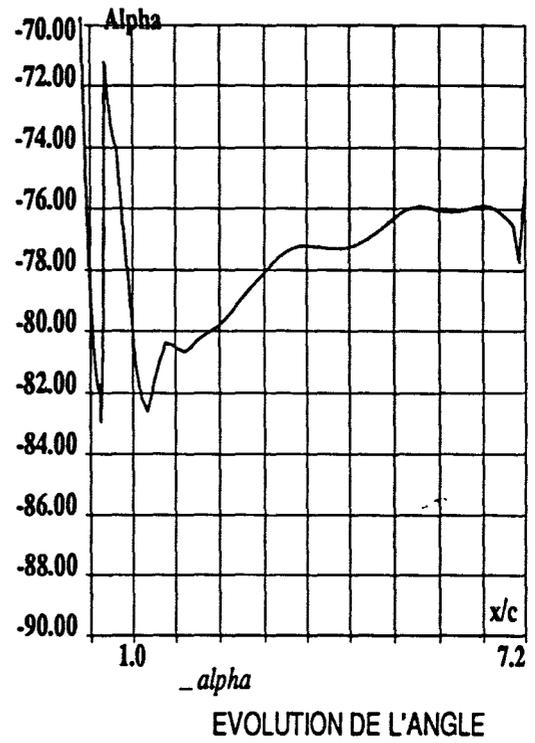
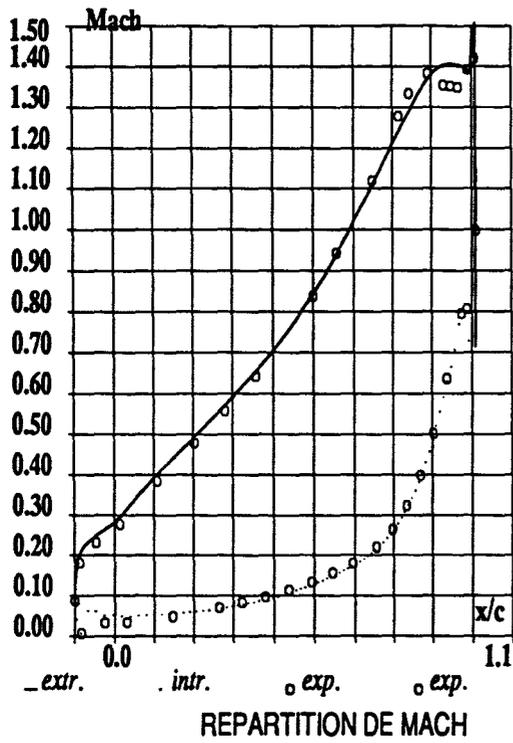


Figure 41 : Cas test CTS2-1.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.

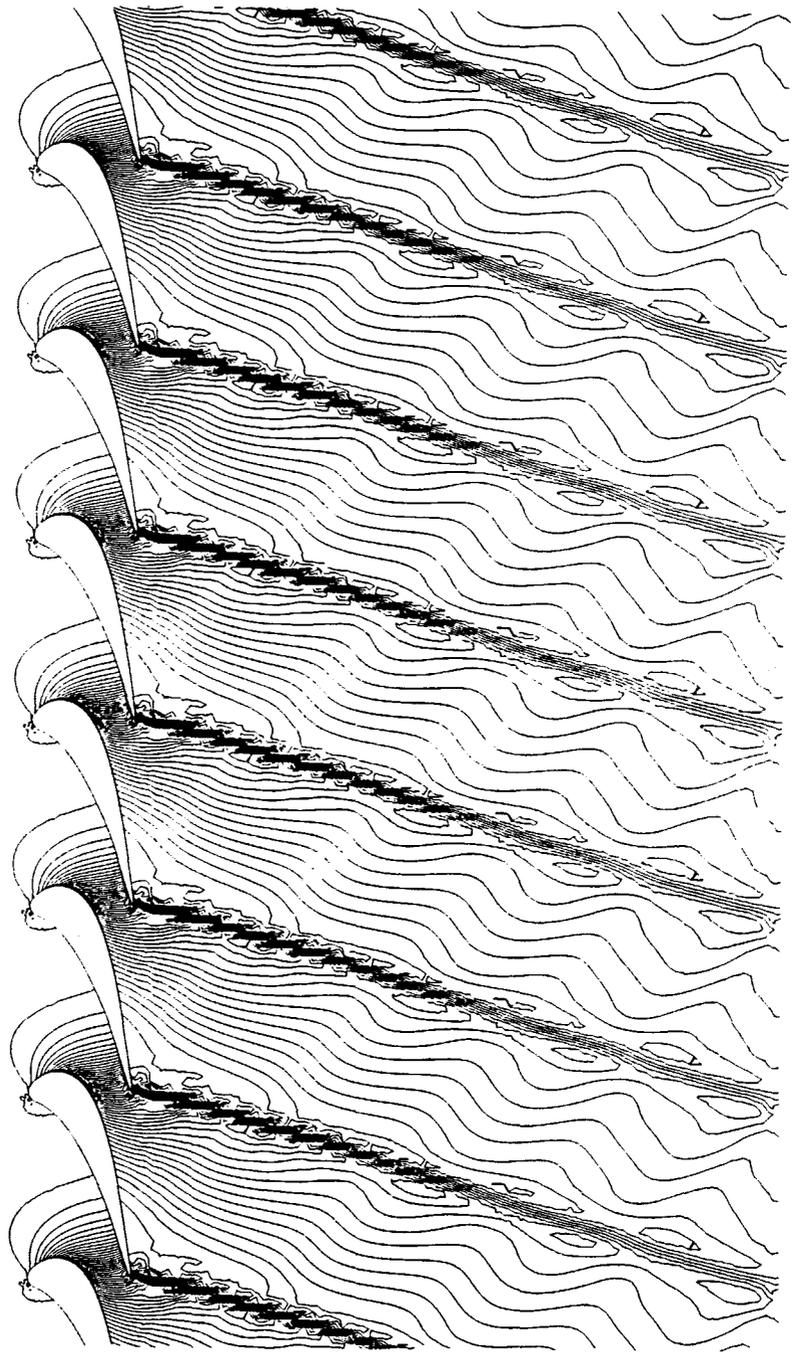
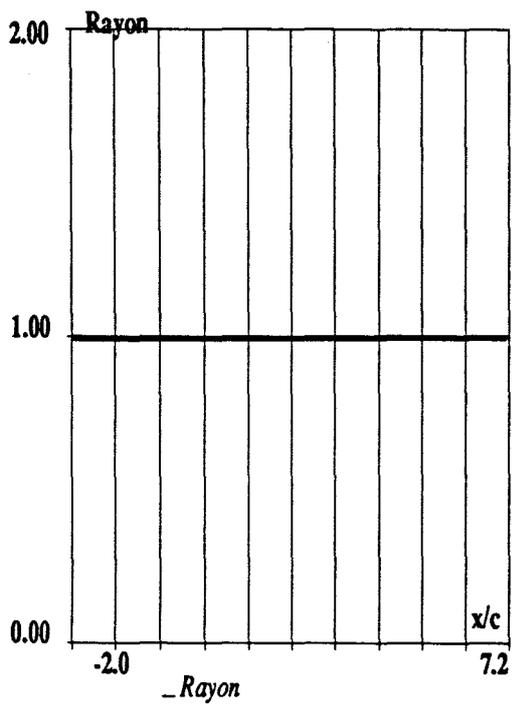
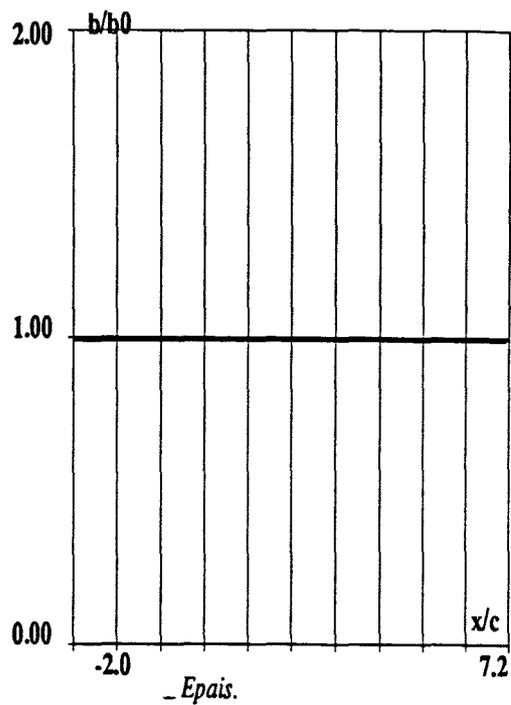


Figure 42 : Cas test CTS2-1.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.
Répartition des isovaleurs de pression $1 - \frac{P}{P_i}$.
 $\Delta = 0.01$.



LOI DE RAYON



LOI D'EPaisseur

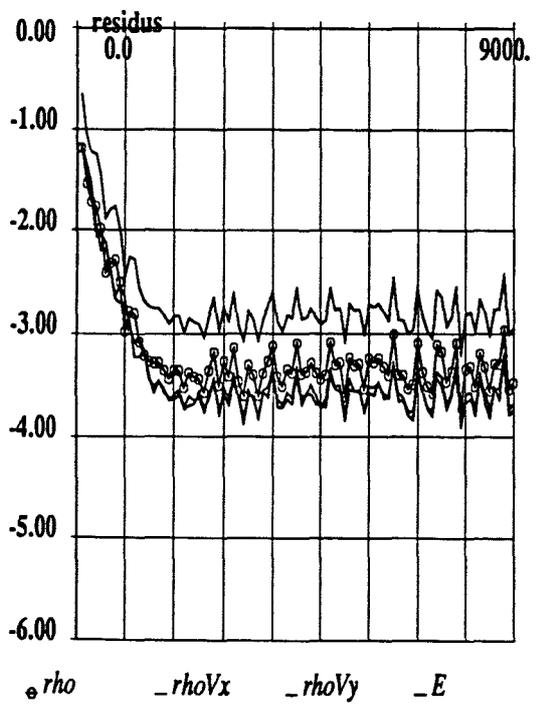
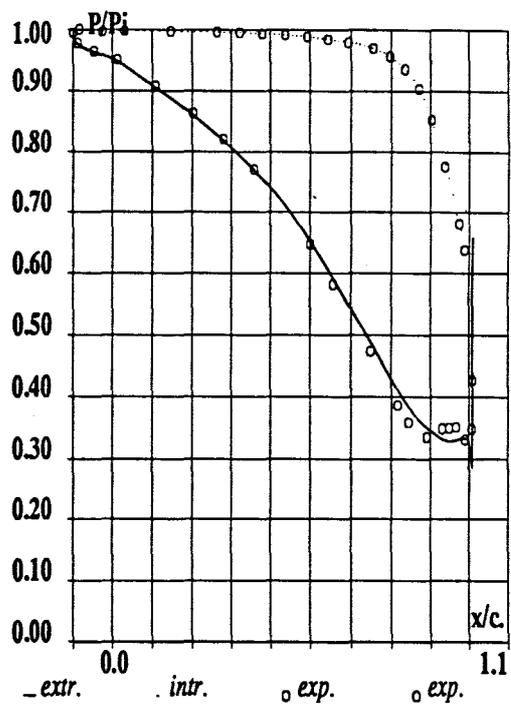


DIAGRAMME DE CONVERGENCE



REPARTITION DE PPRESSION

Figure 43 : Cas test CTS2-2.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.

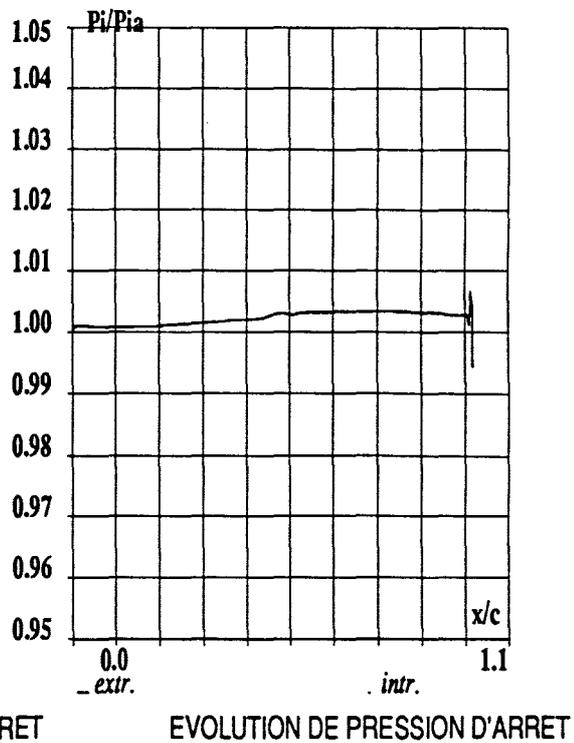
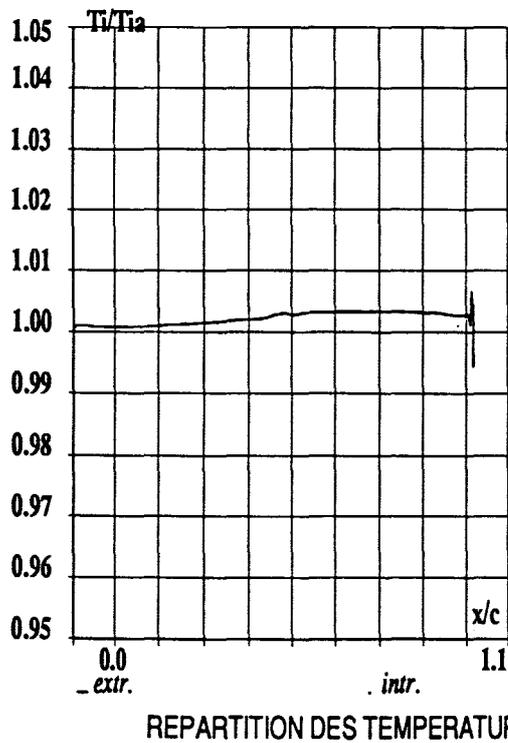
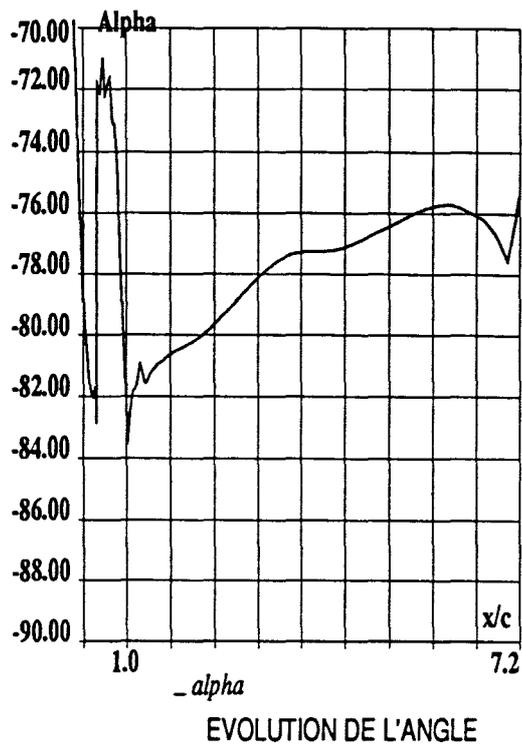
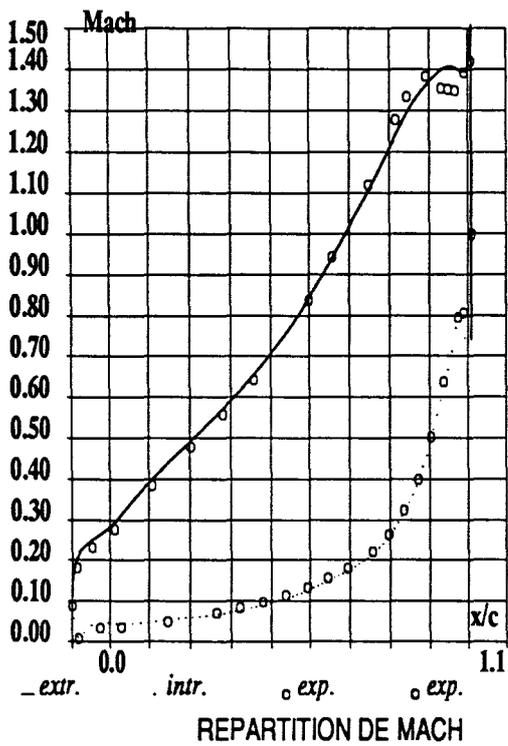


Figure 44 : Cas test CTS2-2.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.

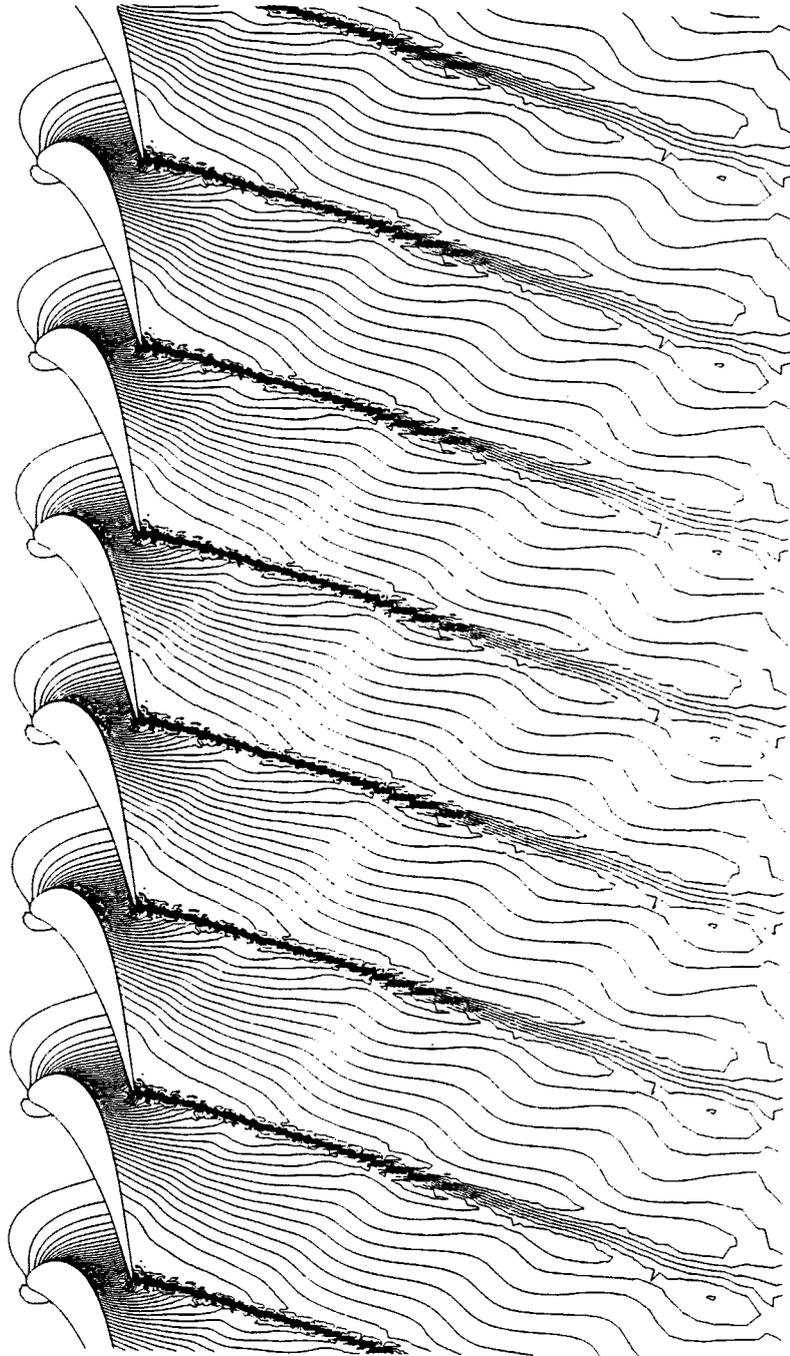


Figure 45 : Cas test CTS2-2.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.
Répartition des isovaleurs de pression $1 - \frac{p}{p_i}$.
 $\Delta = 0.01$.

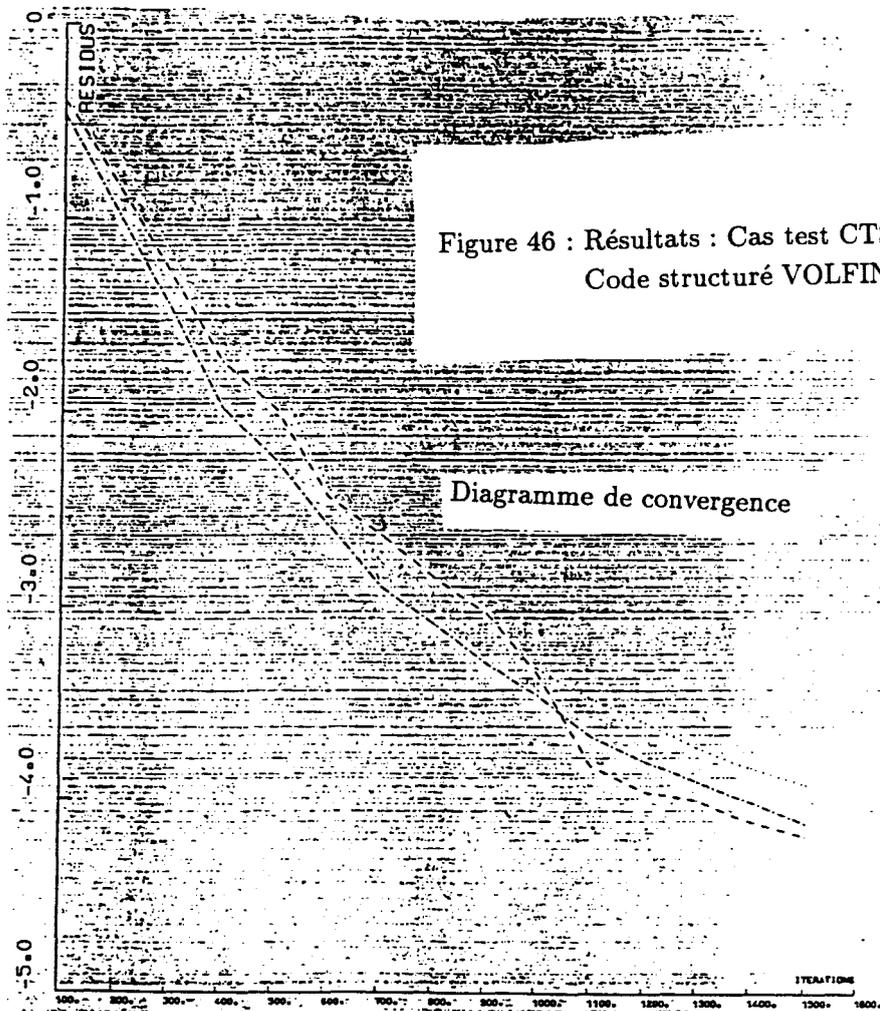
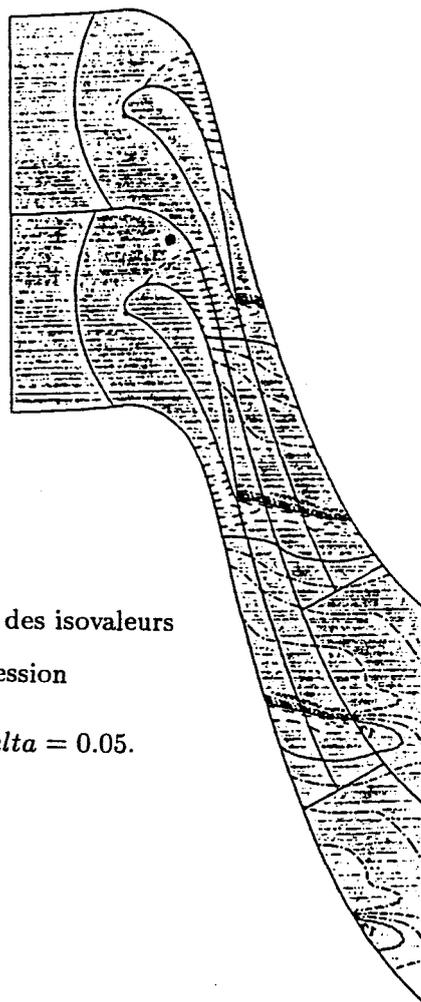
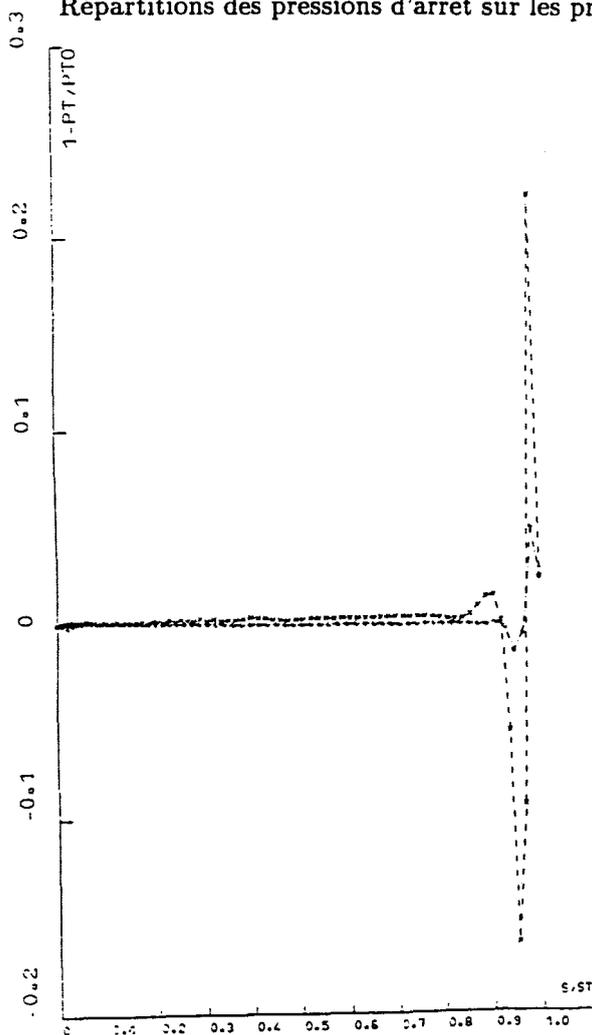


Figure 46 : Résultats : Cas test CTS3.
Code structuré VOLFINI.

Diagramme de convergence

Répartitions des pressions d'arrêt sur les profils 1. - $\frac{p_i}{p_{i1}}$

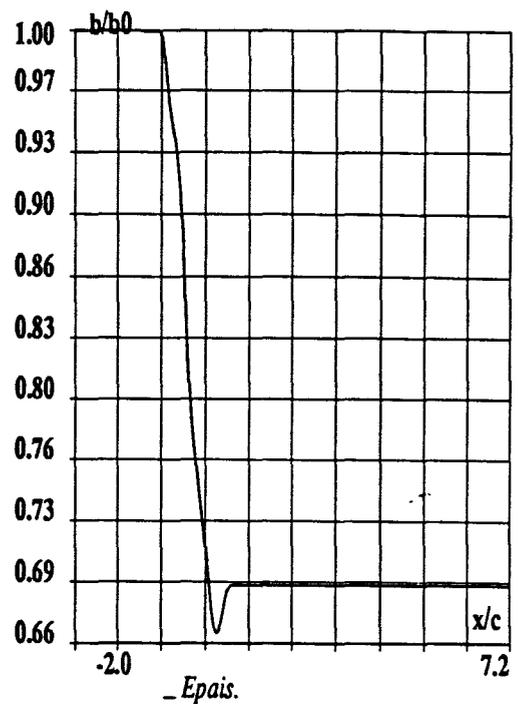


Répartition des isovaleurs
de pression

1. - $\frac{p}{p_i}$. Delta = 0.05.



LOI DE RAYON



LOI D'ÉPAISSEUR

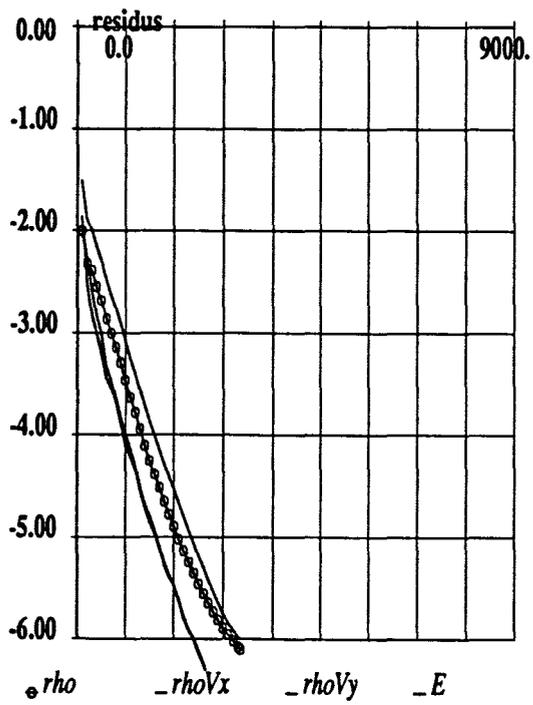
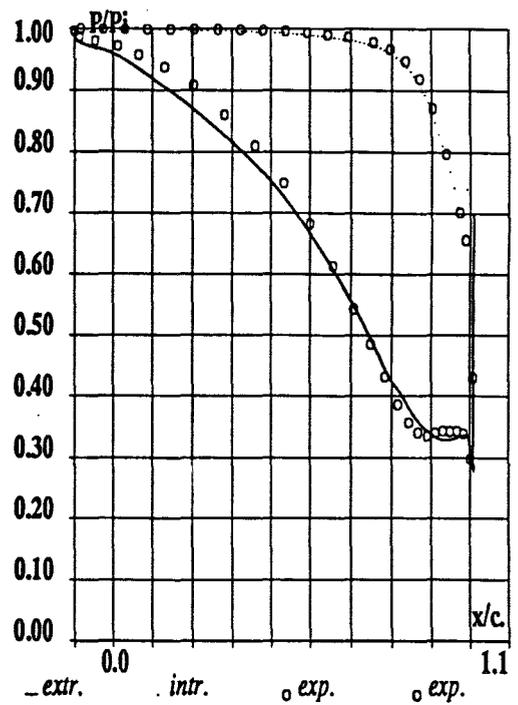


DIAGRAMME DE CONVERGENCE



REPARTITION DE PRESSION

Figure 47 : Cas test CTS3-1.
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1.

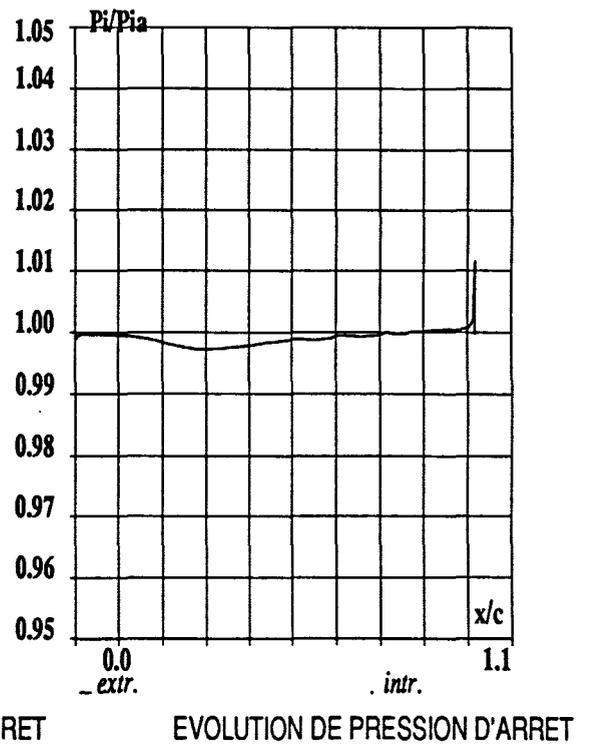
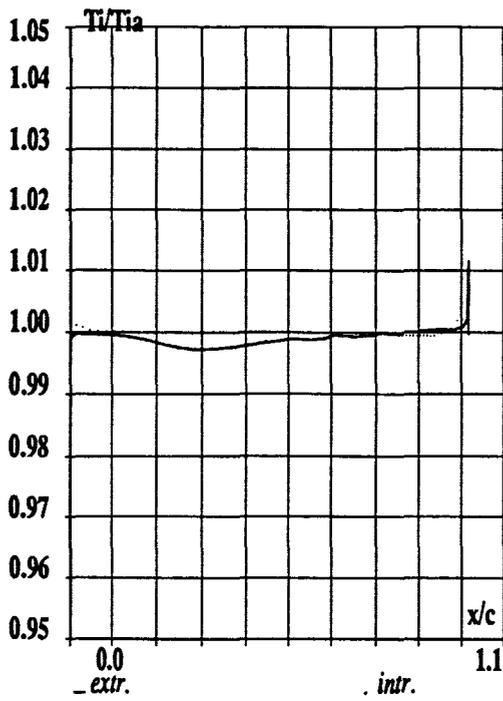
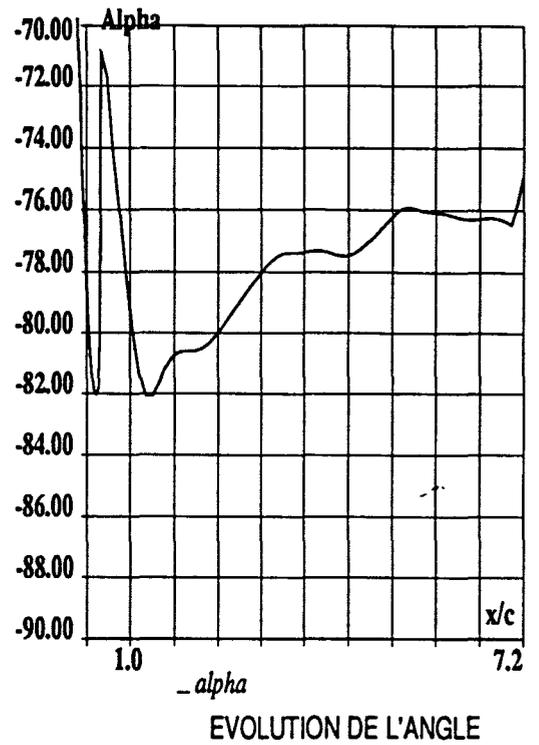
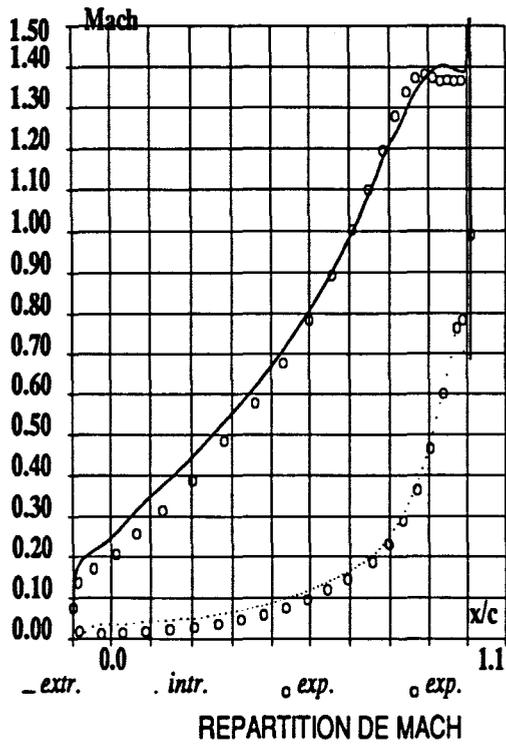


Figure 48 : Cas test CTS3-1.
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1.

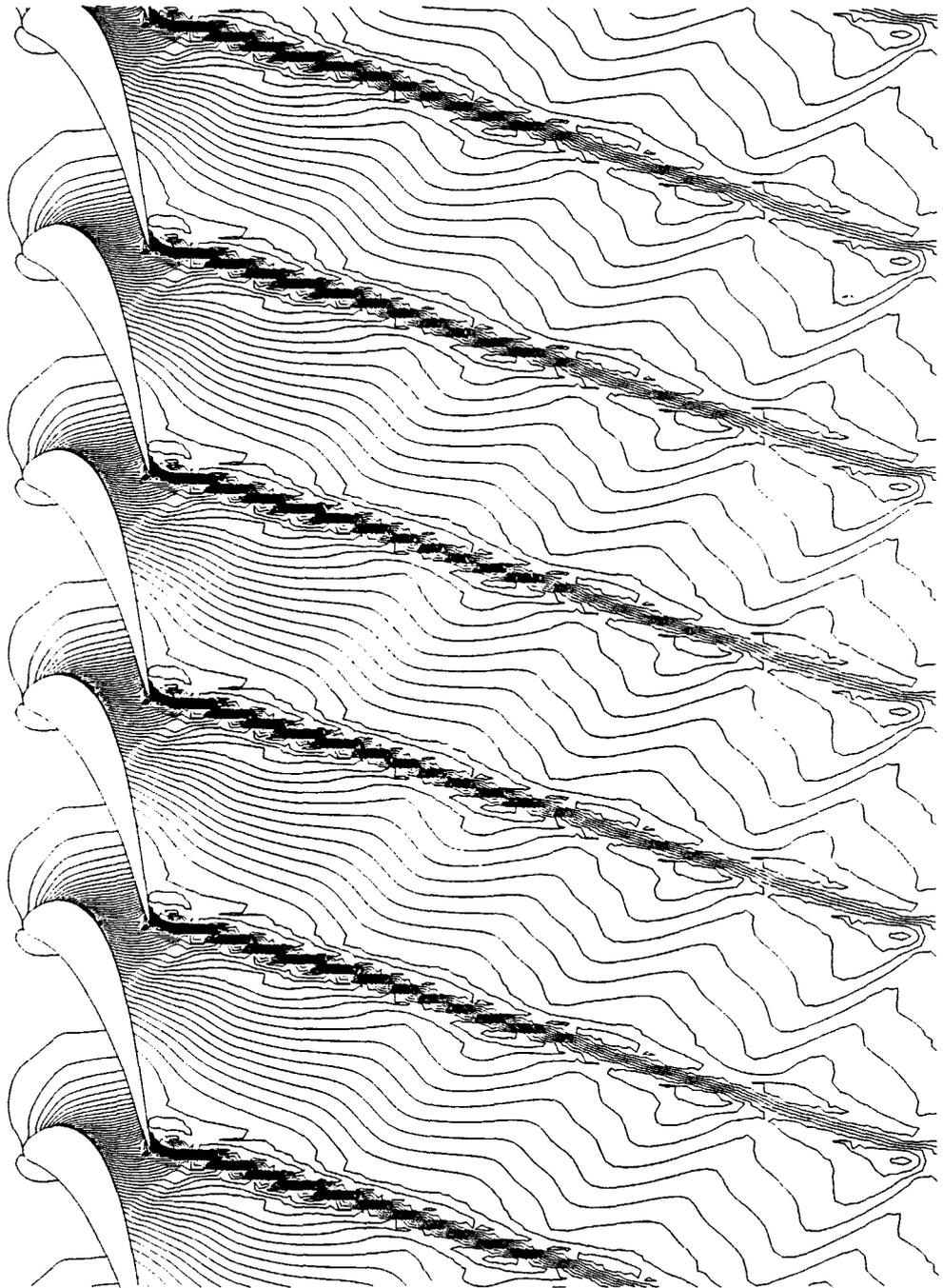


Figure 49 : Cas test CTS3-1.
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1.
Répartition des isovaleurs de pression $1 - \frac{p}{p_i}$.
 $\Delta = 0.01$.

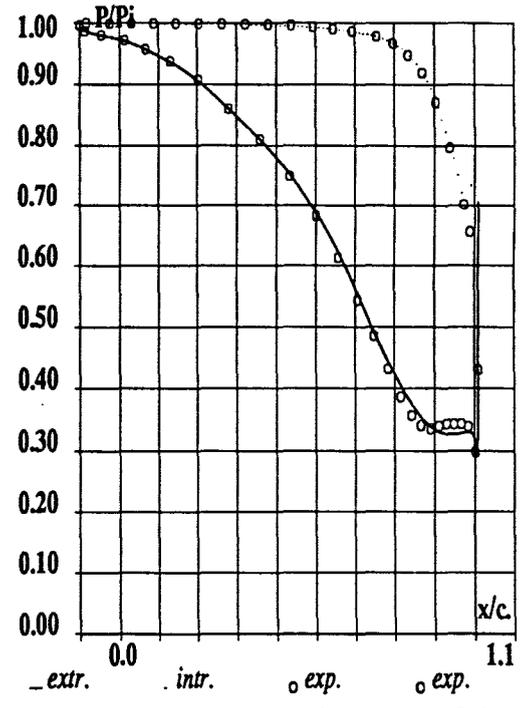
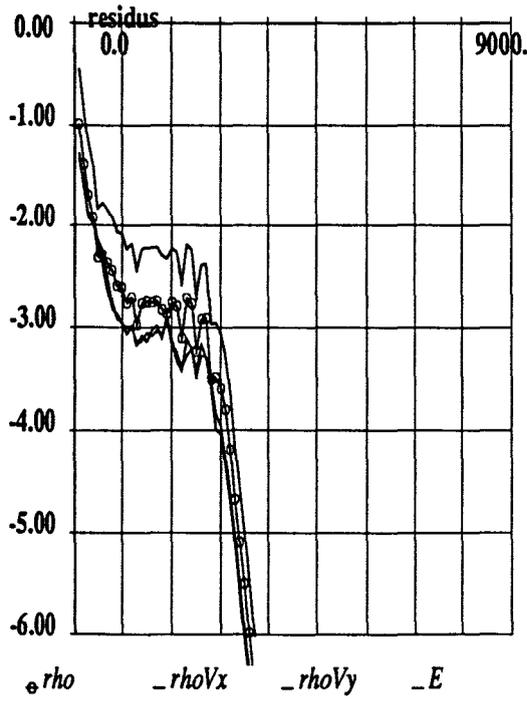
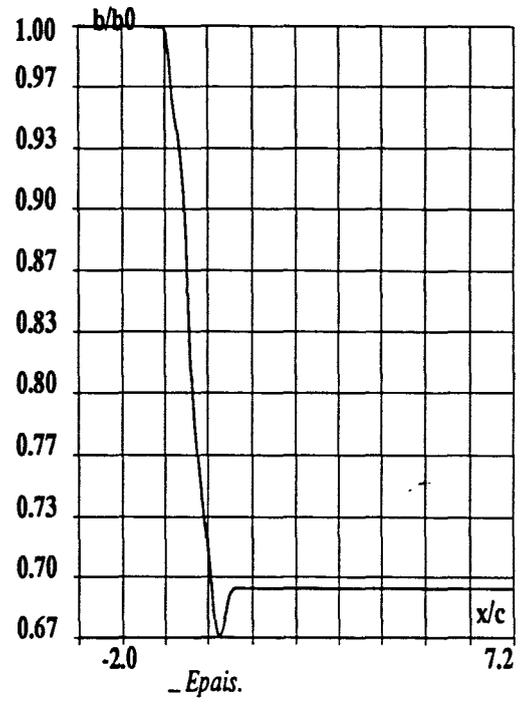
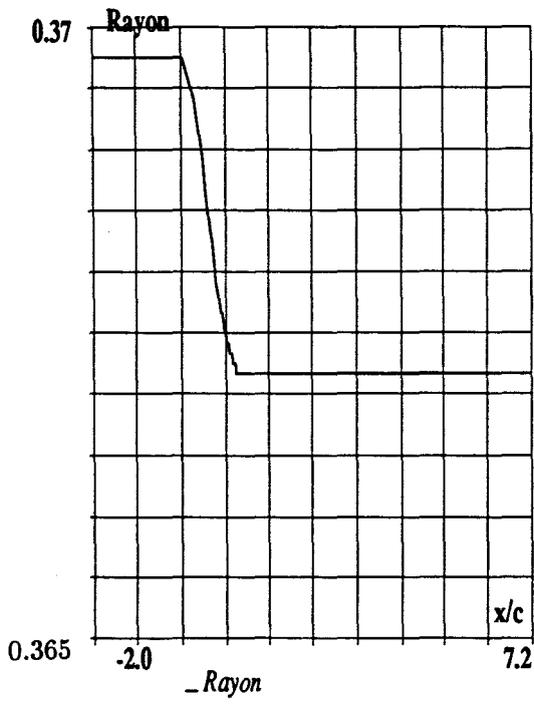


Figure 50 : Cas test CTS3-1.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.

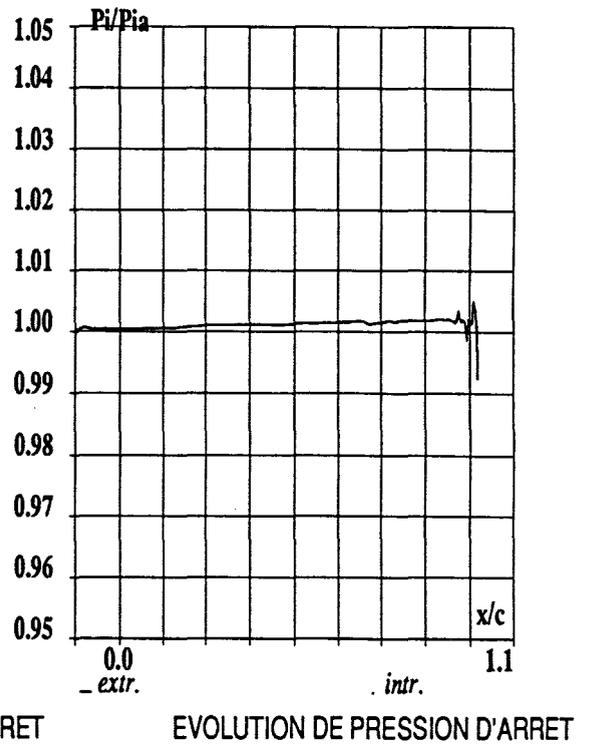
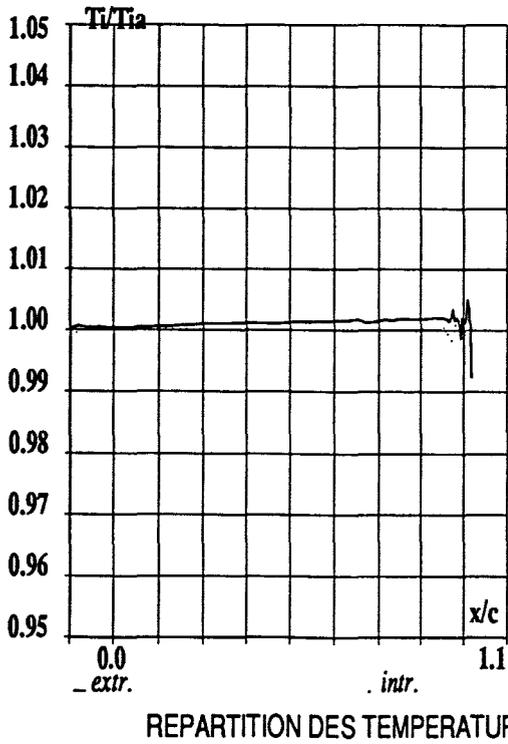
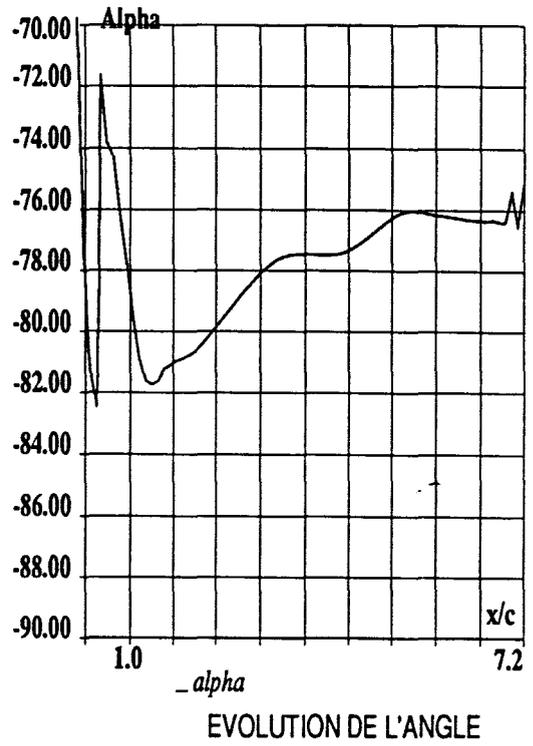
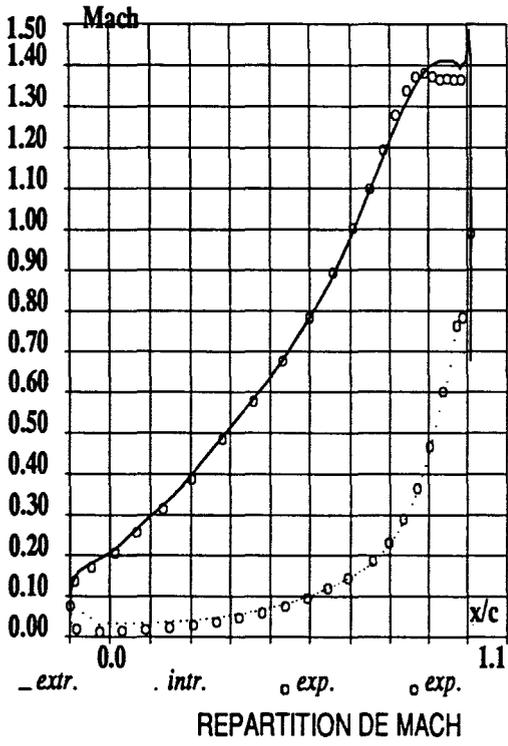


Figure 51 : Cas test CTS3-1.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.

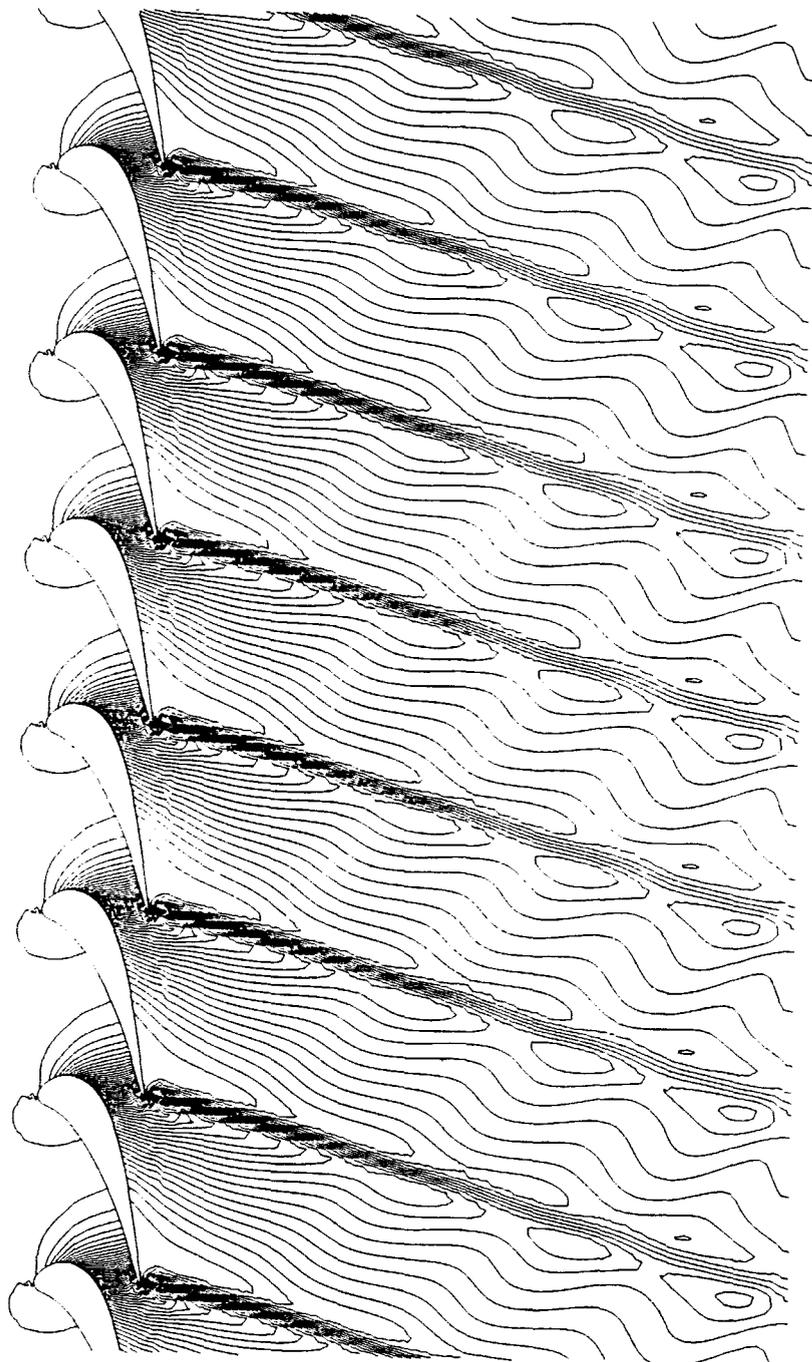
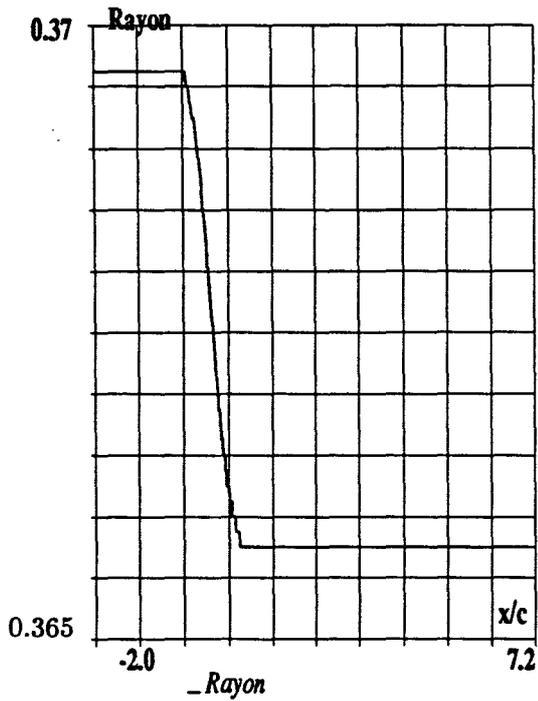
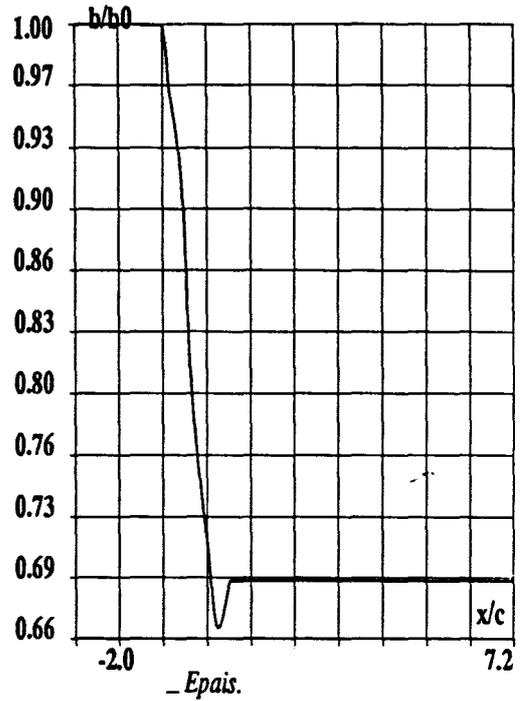


Figure 52 : Cas test CTS3-1.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.
Répartition des isovaleurs de pression $1 - \frac{p}{p_i}$.
 $\Delta = 0.01$.



LOI DE RAYON



LOI D'EPaisseur

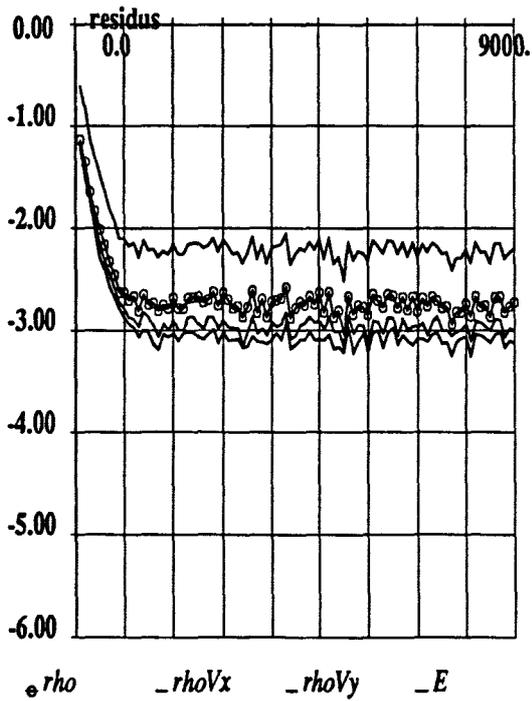
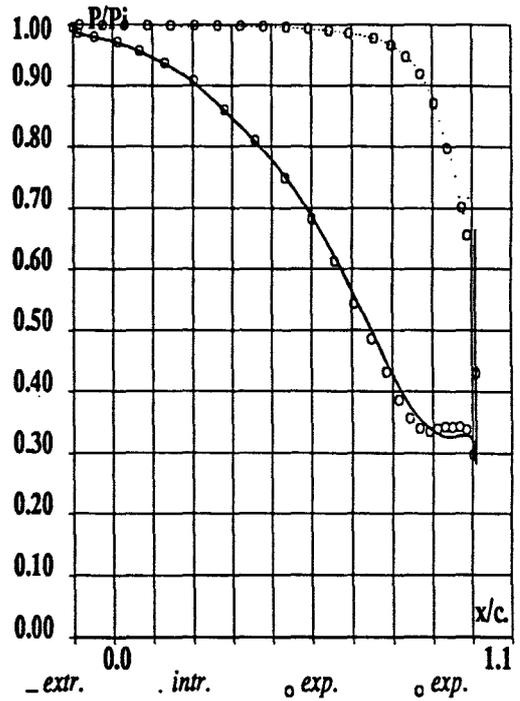


DIAGRAMME DE CONVERGENCE



REPARTITION DE PRESSION

Figure 53 : Cas test CTS3-2.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.

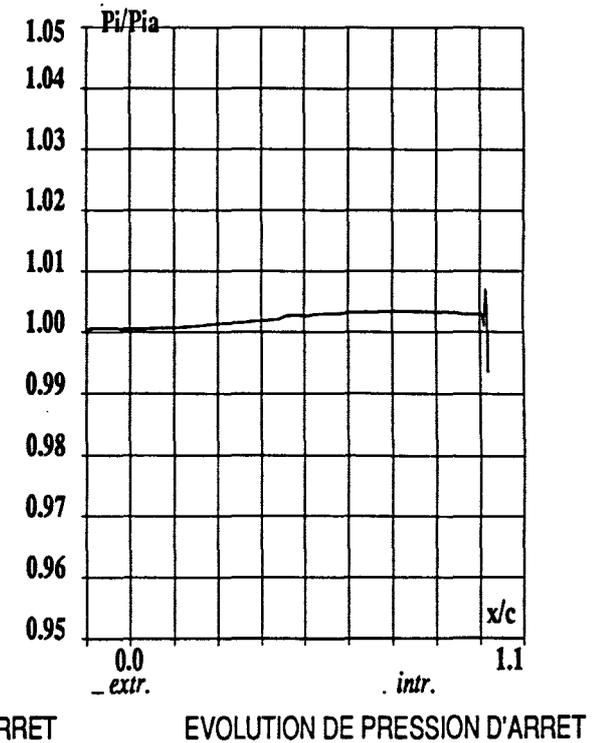
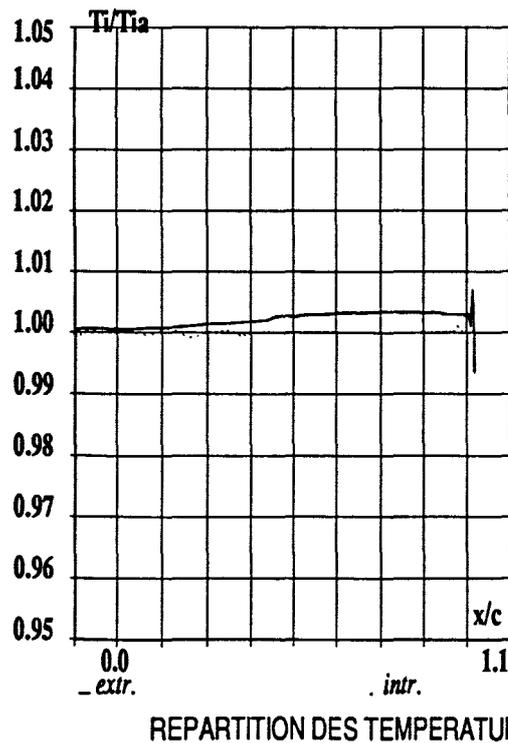
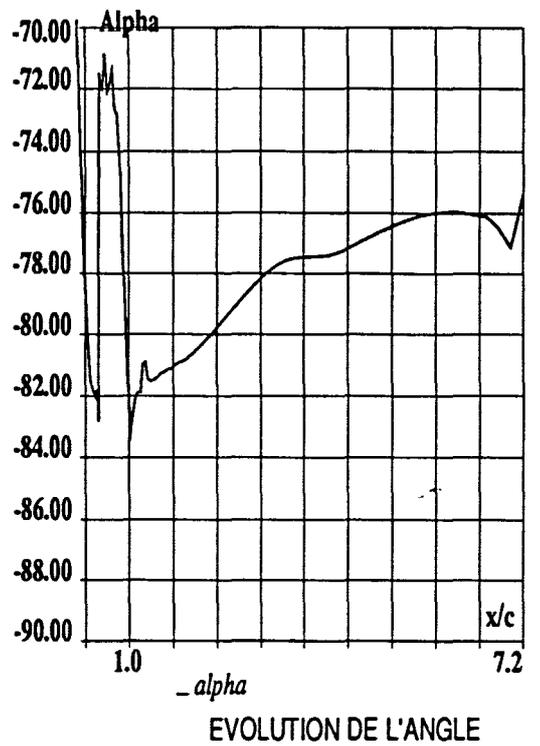
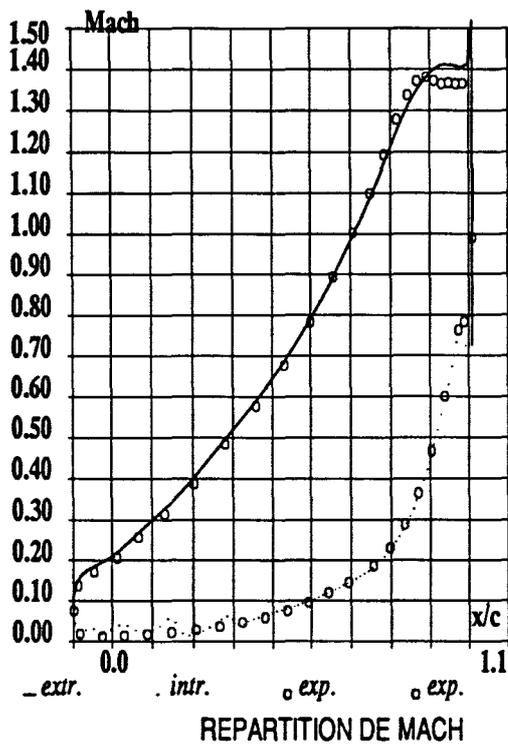


Figure 54 : Cas test CTS3-2.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.

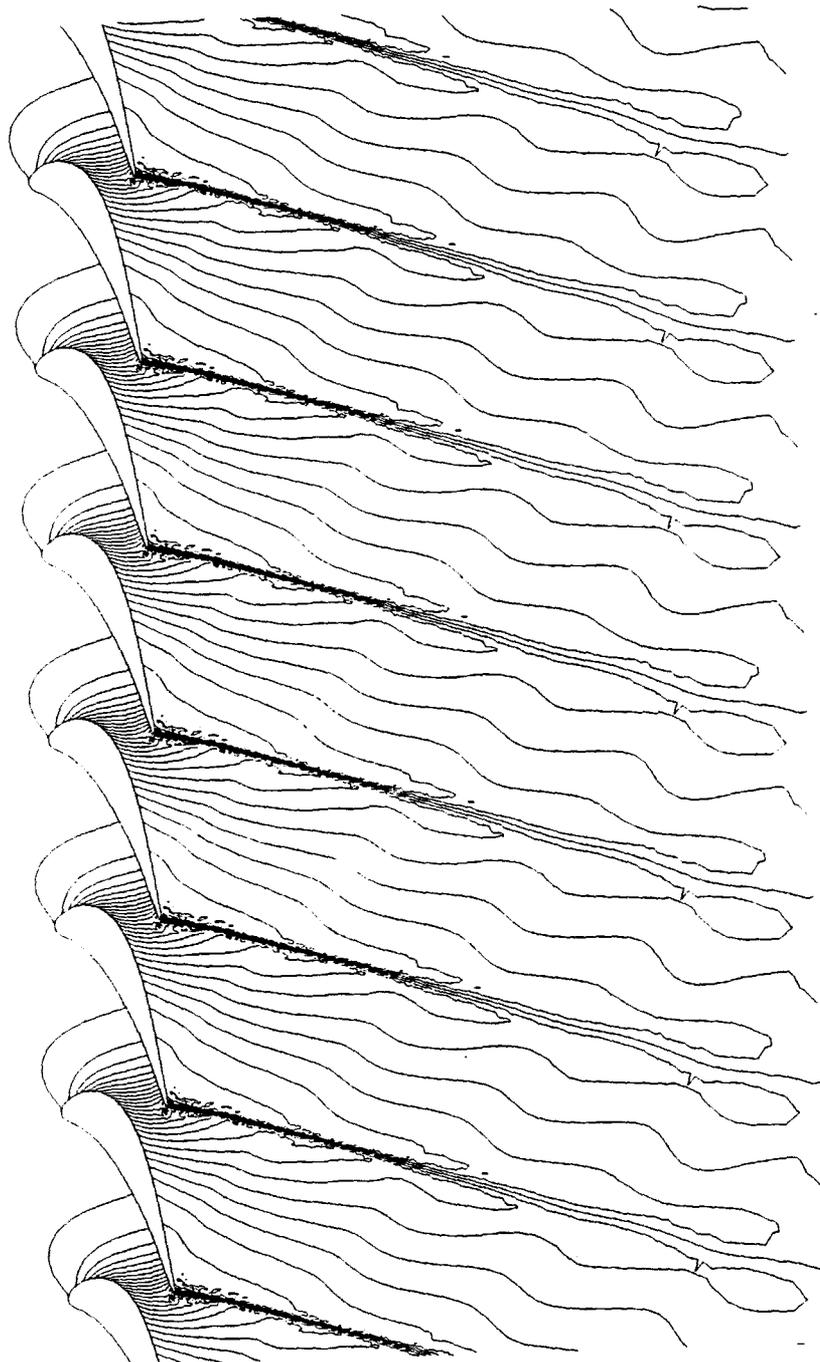
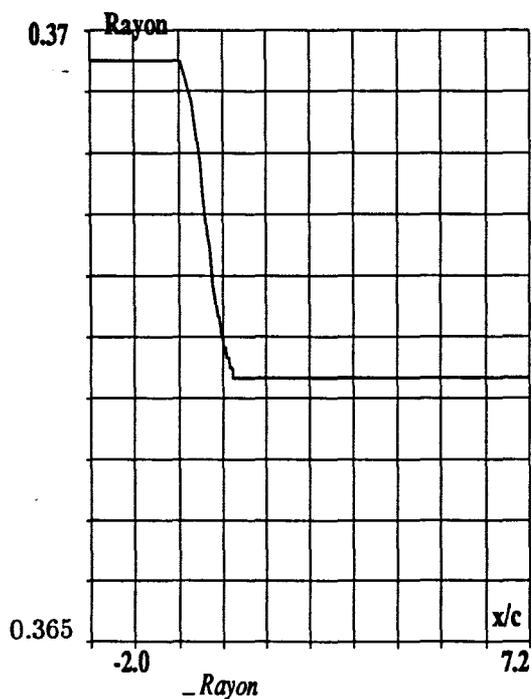
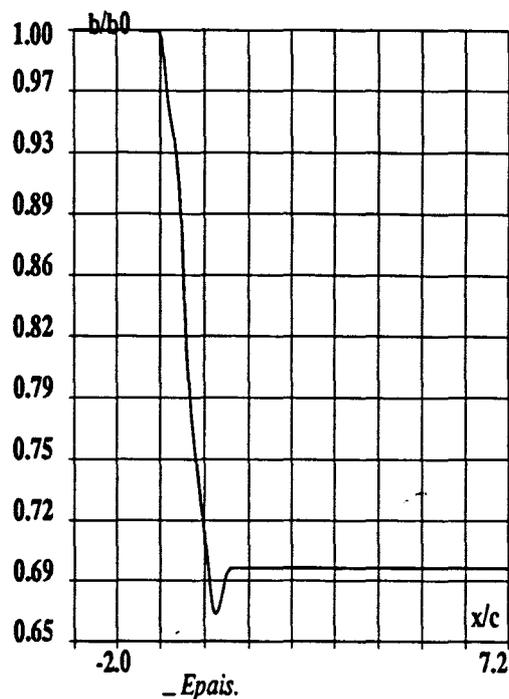


Figure 55 : Cas test CTS3-2.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.
Répartition des isovaleurs de pression $1. - \frac{P}{P_i}$.
 $\Delta = 0.01$.



LOI DE RAYON



LOI D'ÉPAISSEUR

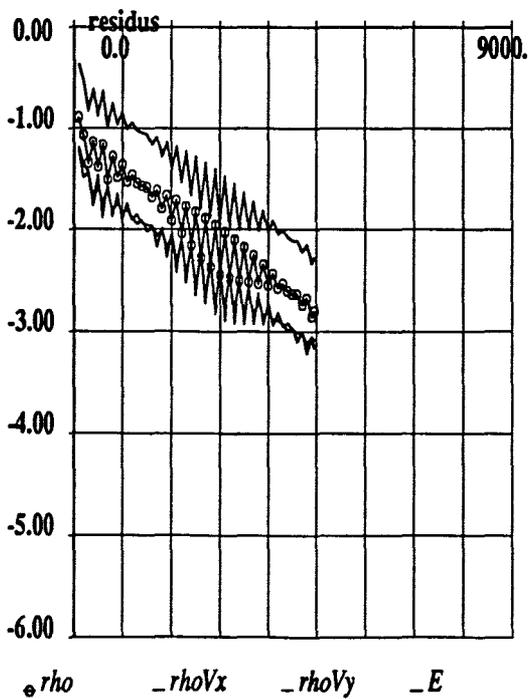
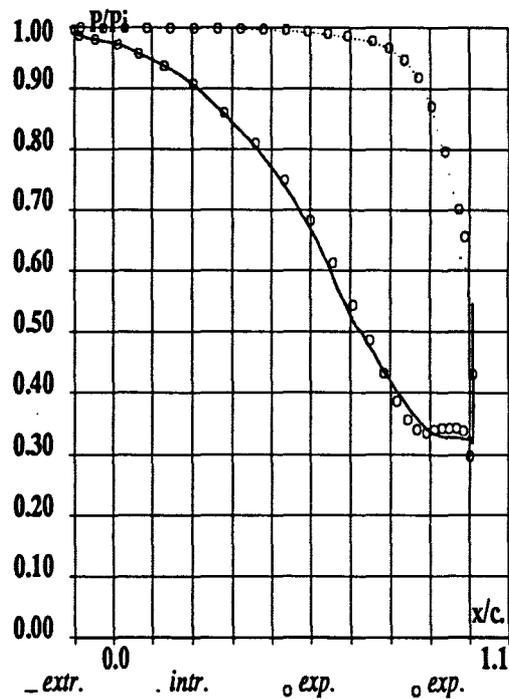


DIAGRAMME DE CONVERGENCE



REPARTITION DE PRESSION

Figure 56 : Cas test CTS3-3.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.

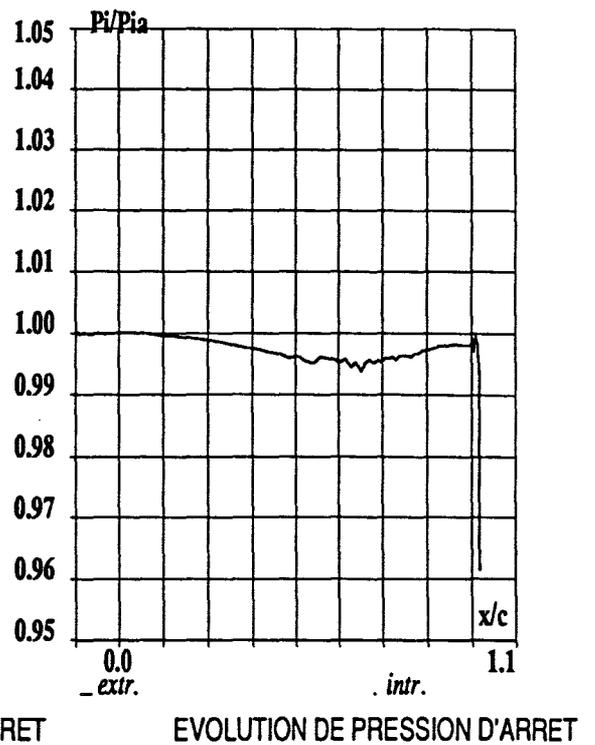
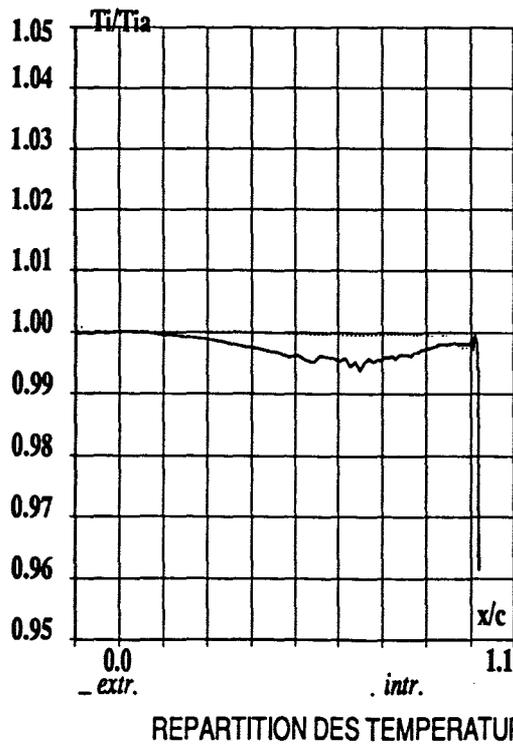
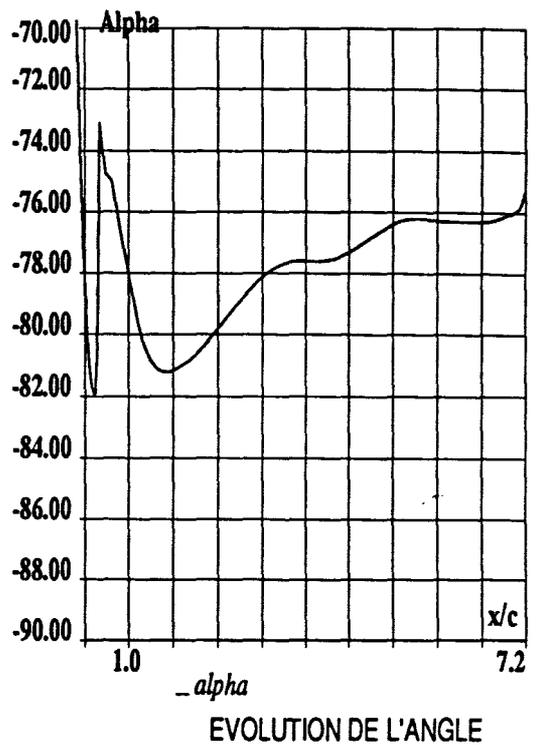
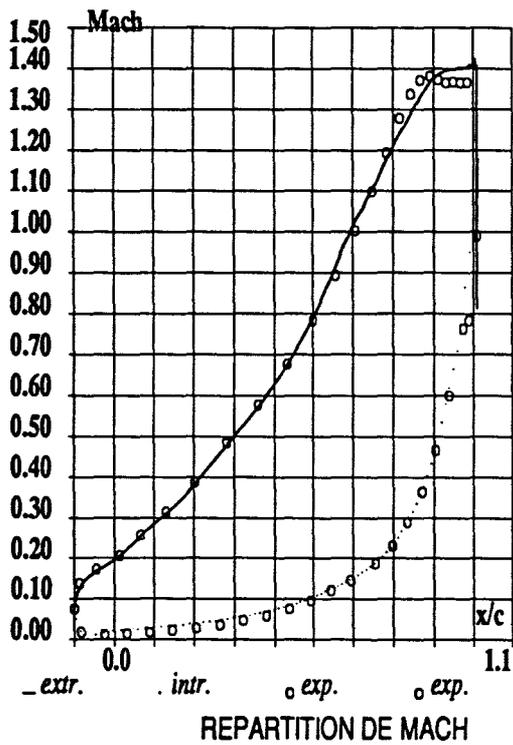


Figure 57 : Cas test CTS3-3.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.

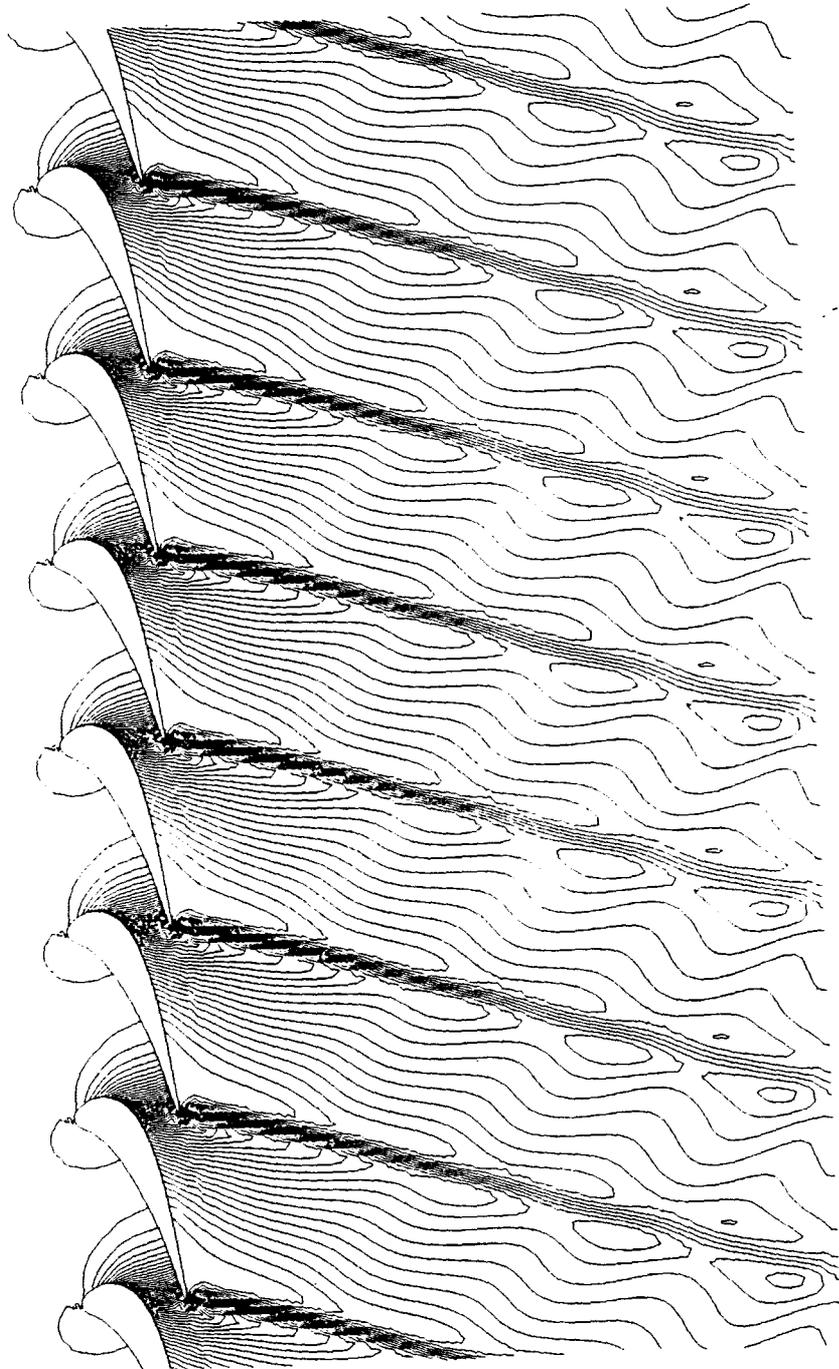


Figure 58 : Cas test CTS3-3.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.
Répartition des isovaleurs de pression $1 - \frac{p}{p_i}$.
 $\Delta = 0.01$.

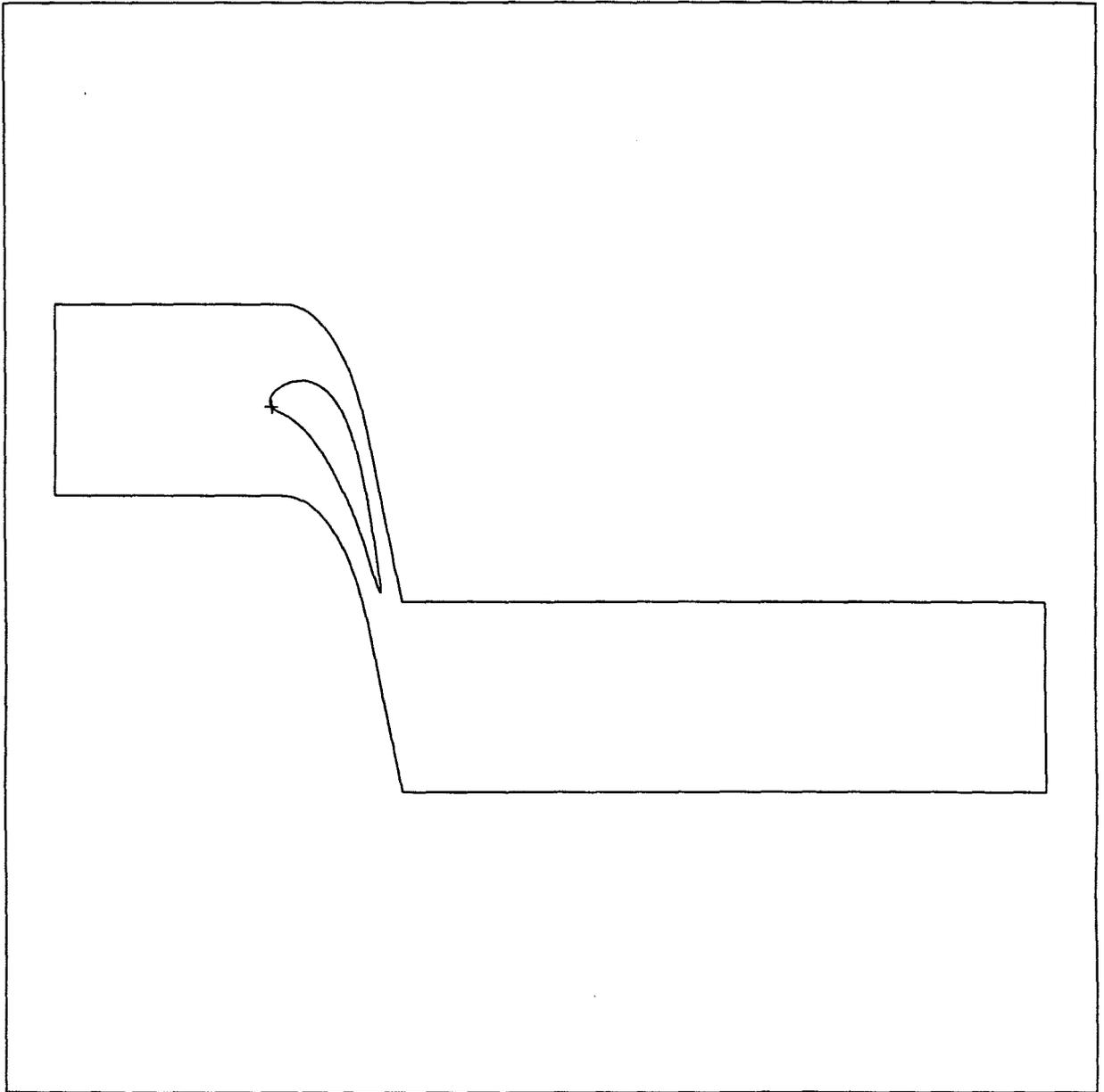


Figure 59 : Cas test CTS2, CTS3, -1 et -3.
Localisation du point d'arrêt.

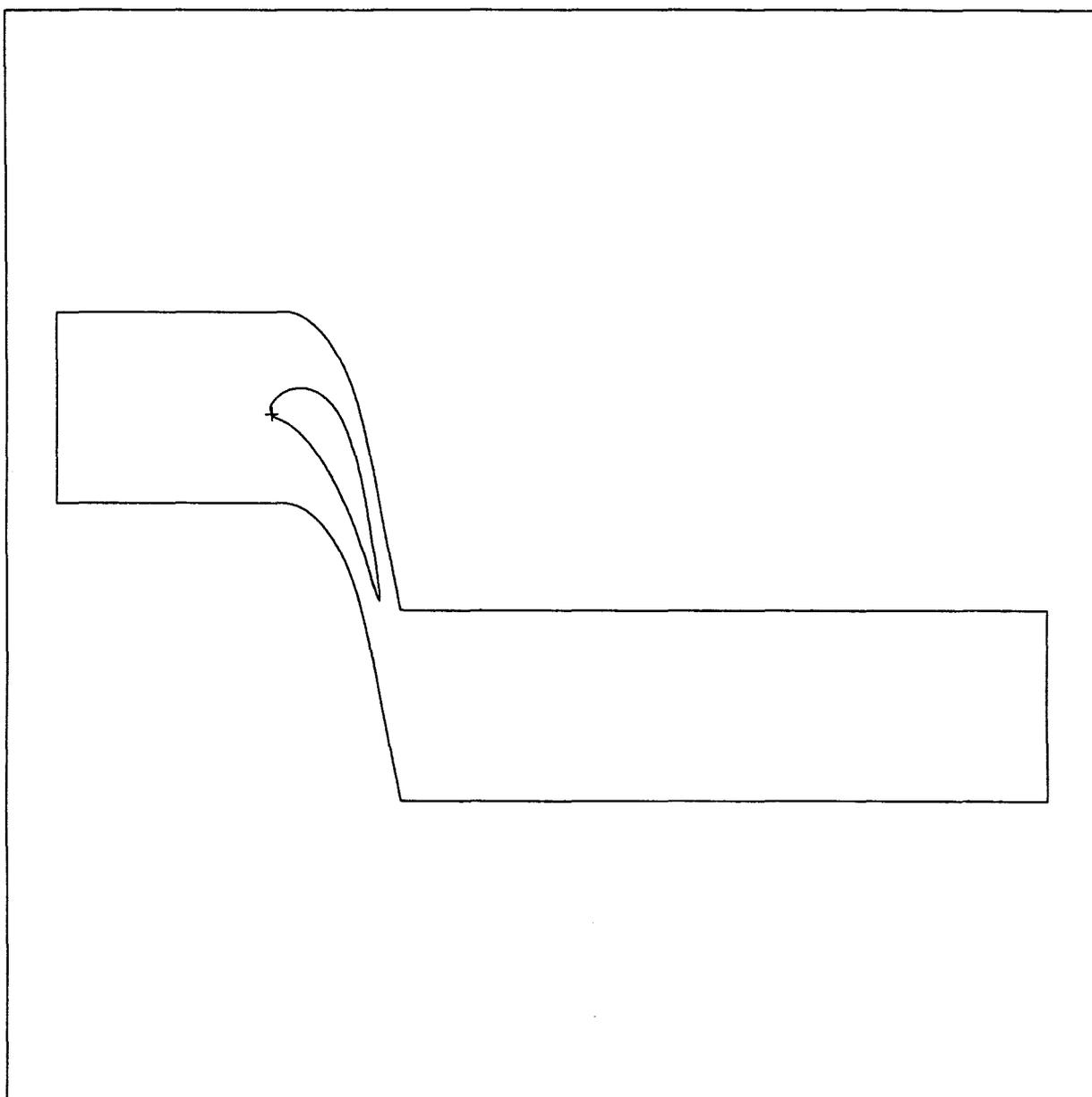


Figure 60 : Cas test CTS3-2.
Localisation du point d'arrêt.

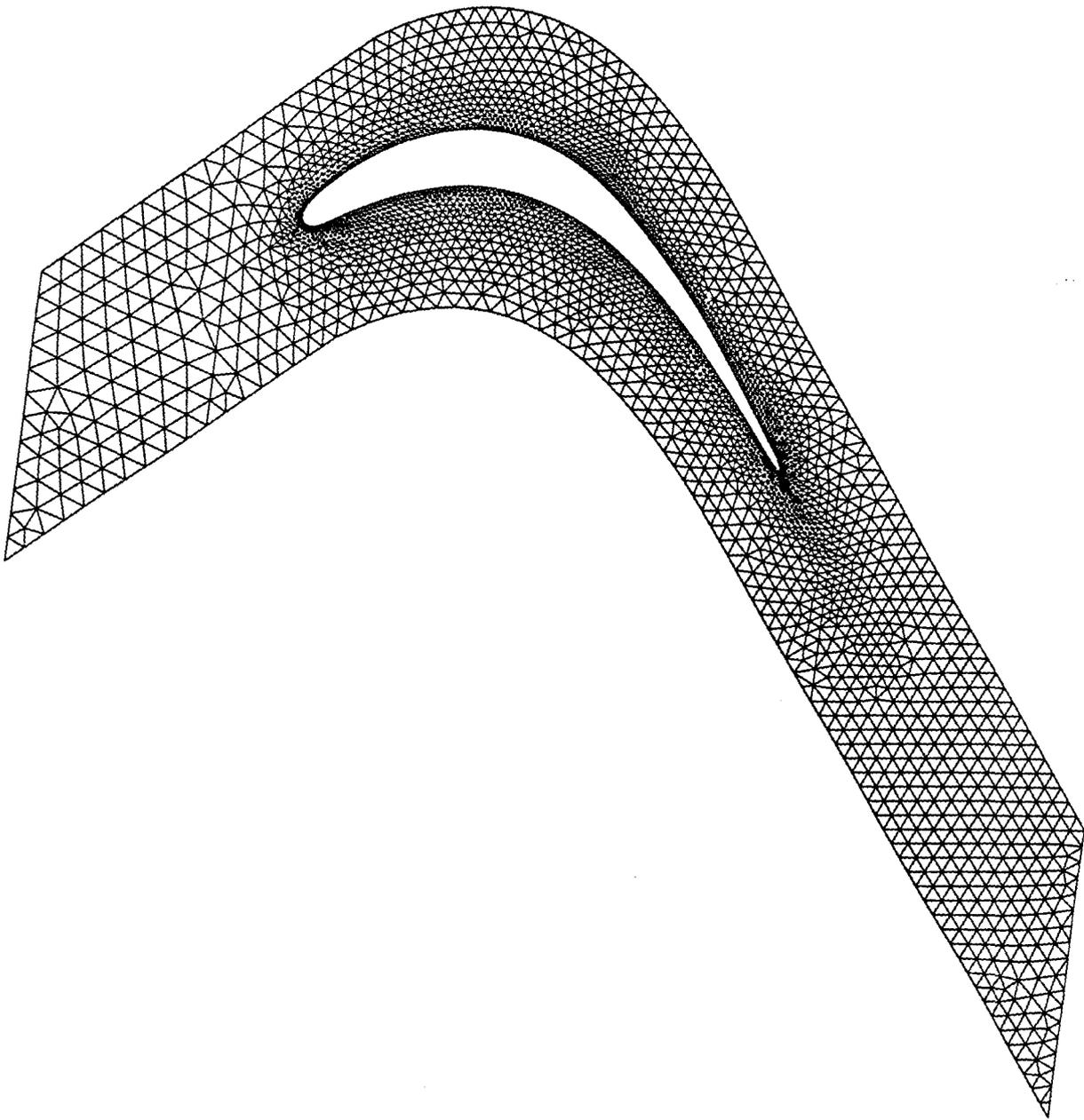


Figure 61 : Cas test CTS4 -1, -2, -3, -4.
Maillage : 3138 noeuds, 5785 mailles.

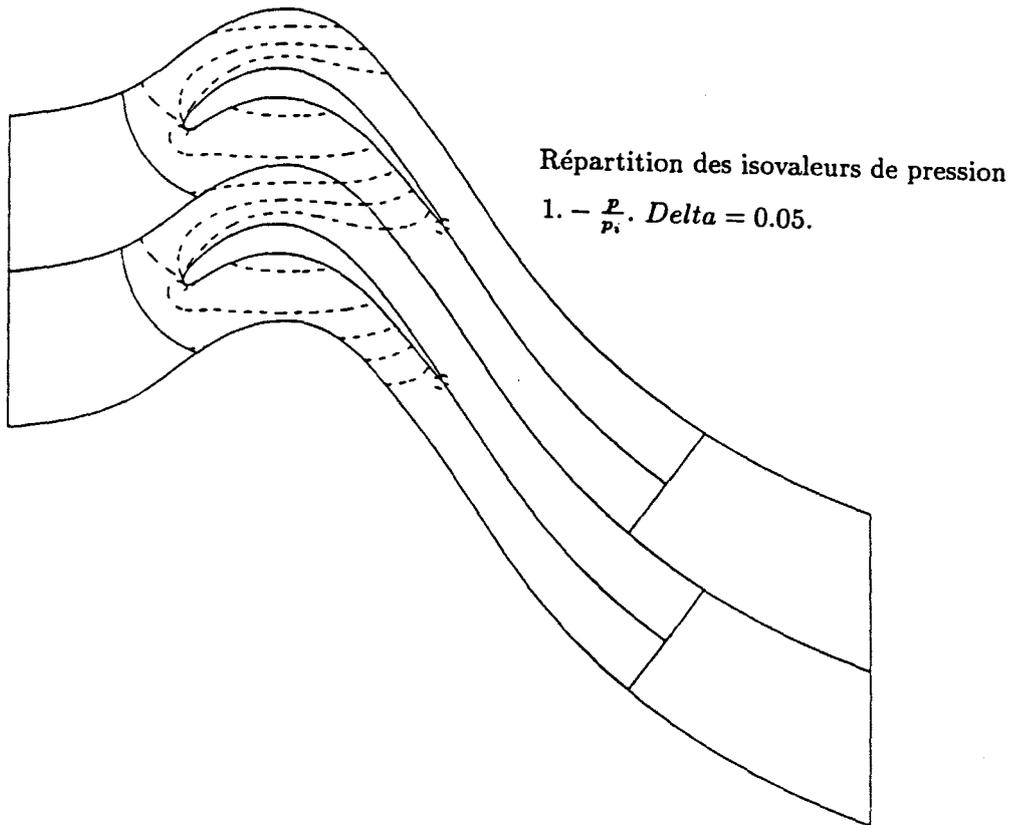
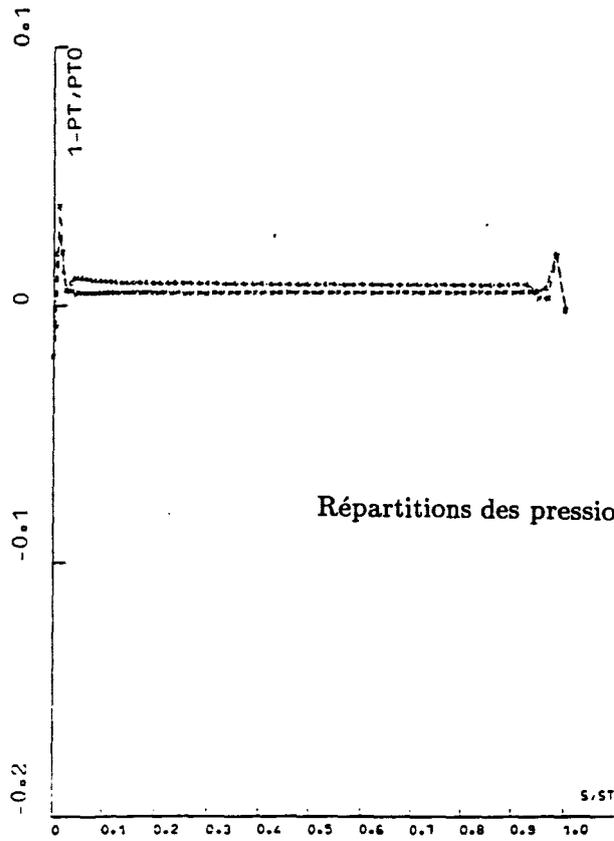
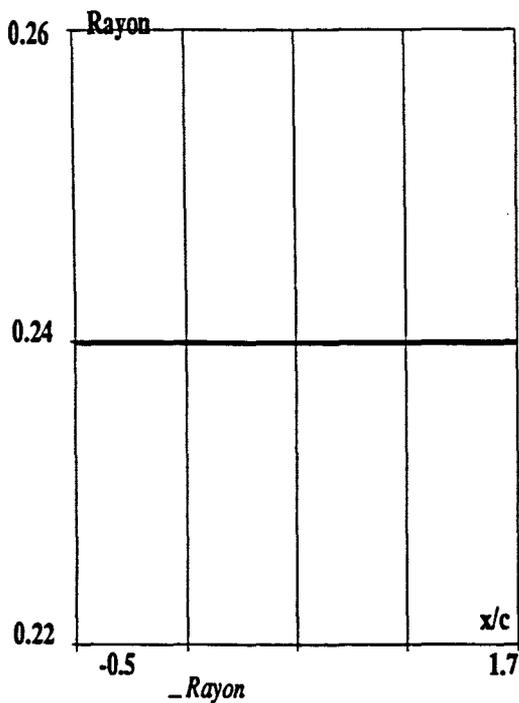
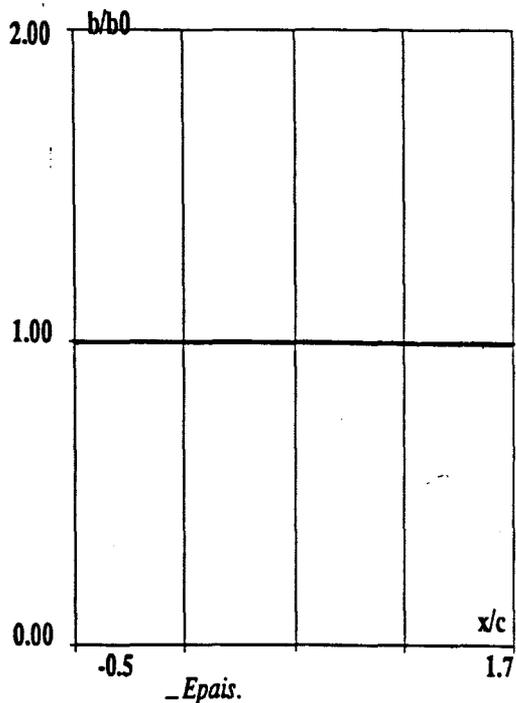


Figure 62 : Cas test CTS4-1.
Roue fixe 2D.
Code structuré VOLFINI.



LOI DE RAYON



LOI D'EPAISSEUR

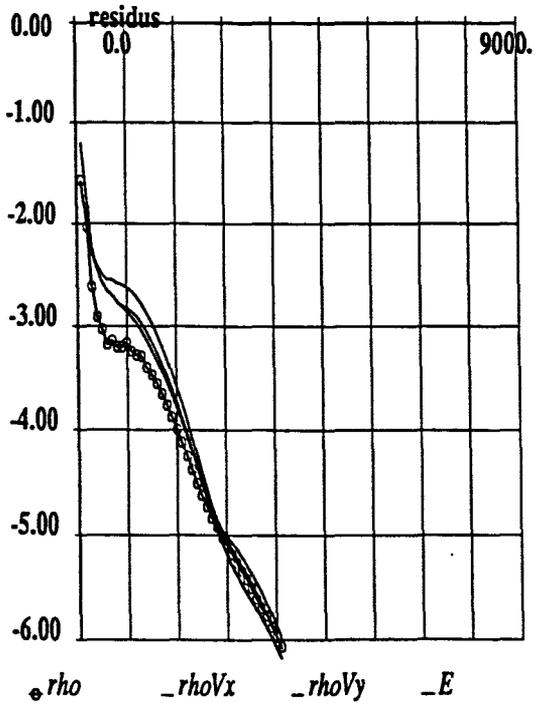
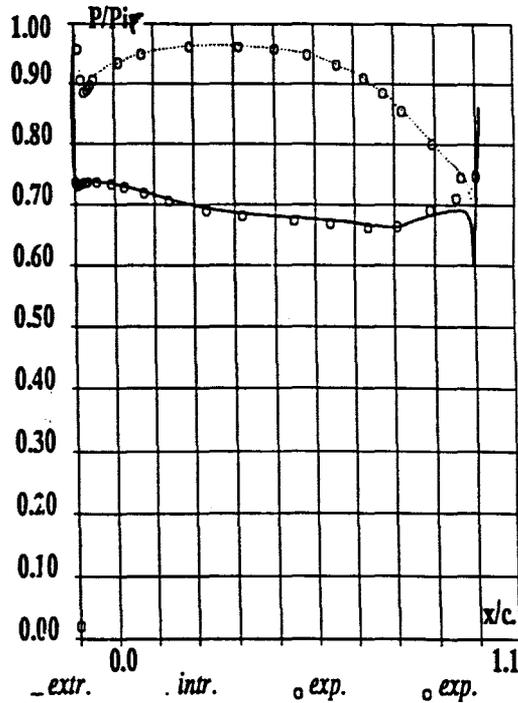


DIAGRAMME DE CONVERGENCE



REPARTITION DE PRESSION

Figure 63 : Cas test CTS4-1.
 Roue fixe 2D.
 Code sans viscosité artificielle SCHEMA1.

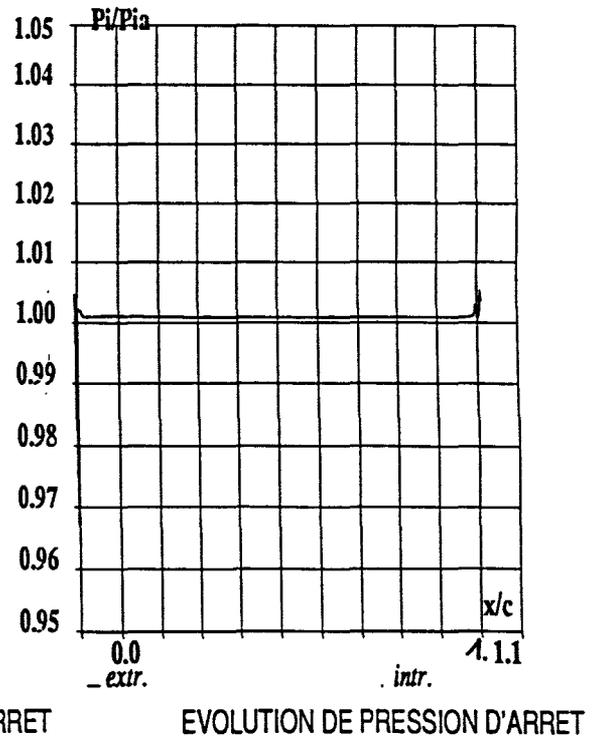
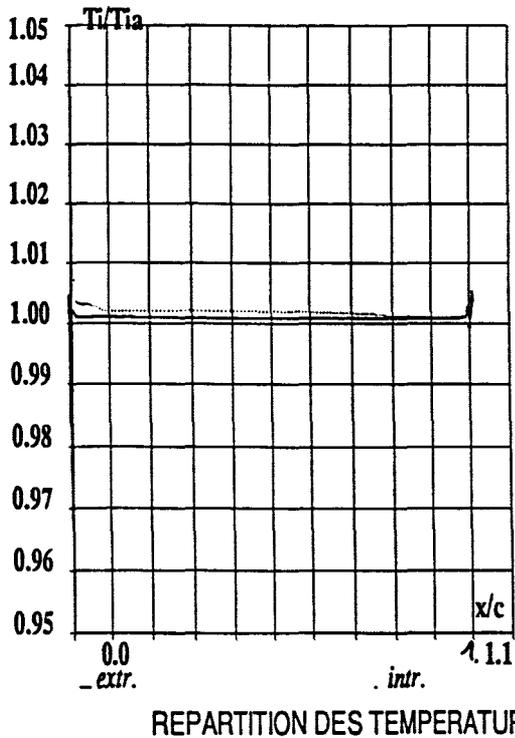
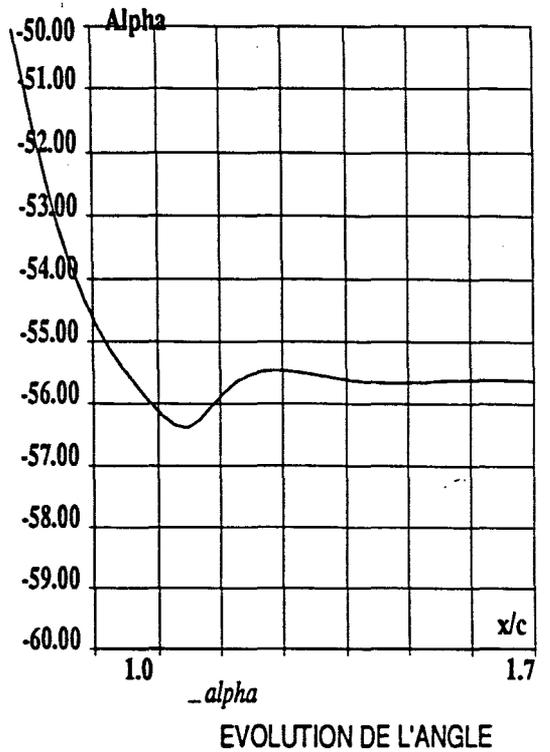
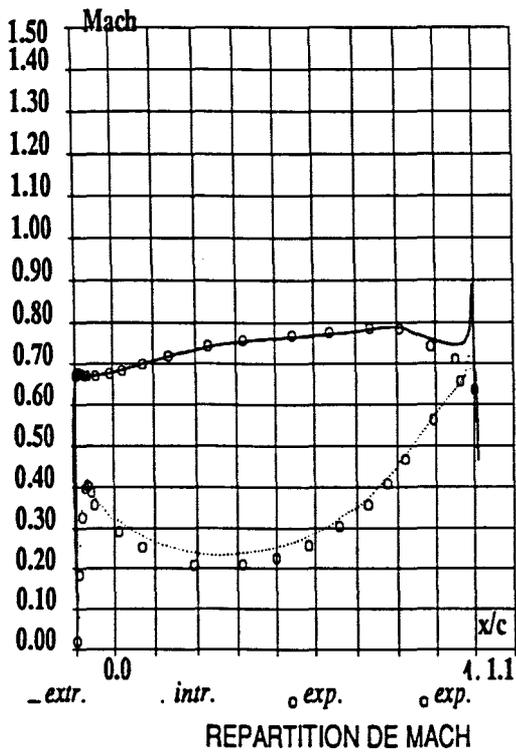


Figure 64 : Cas test CTS4-1.
Roue fixe 2D.
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1.

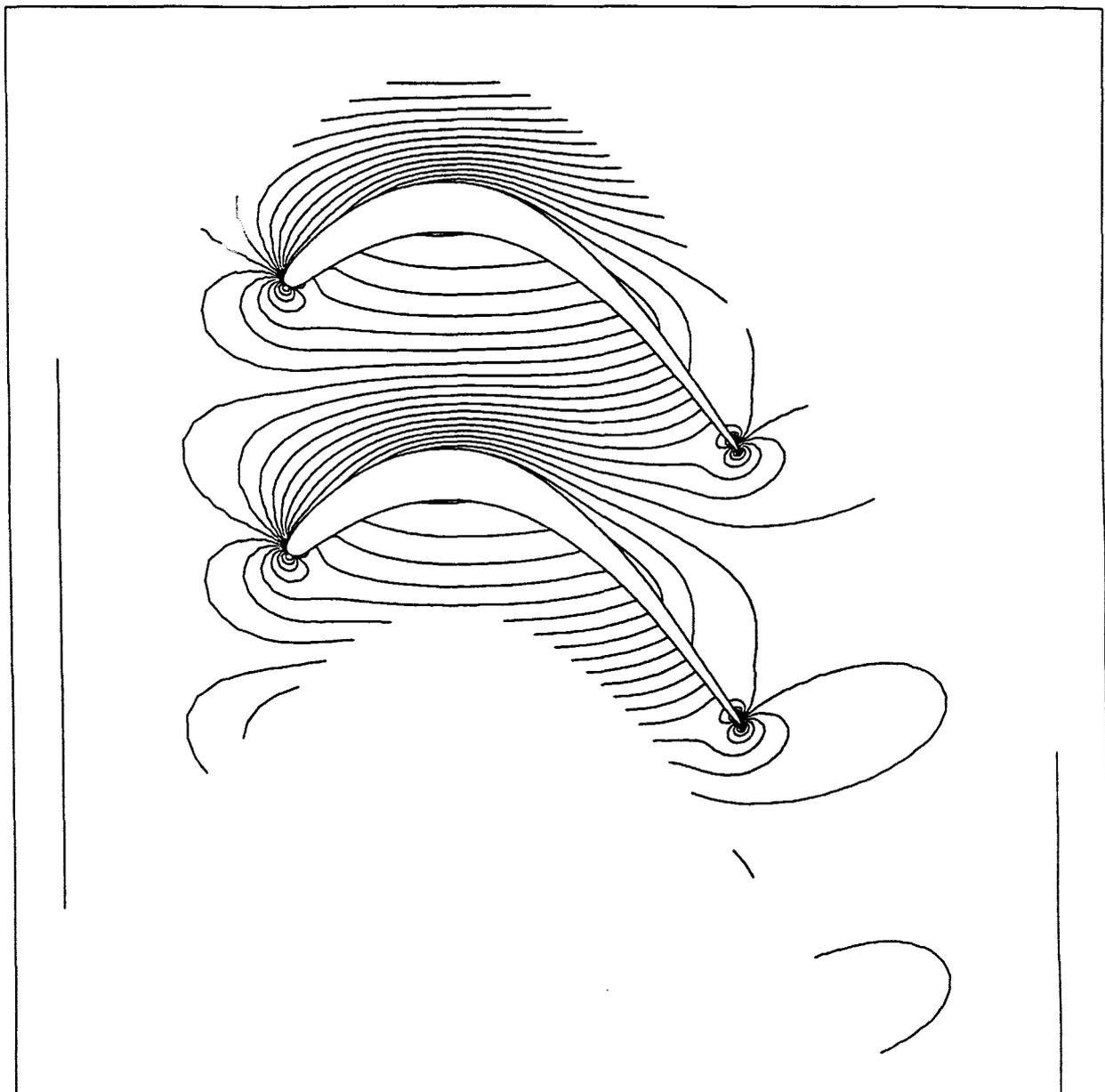


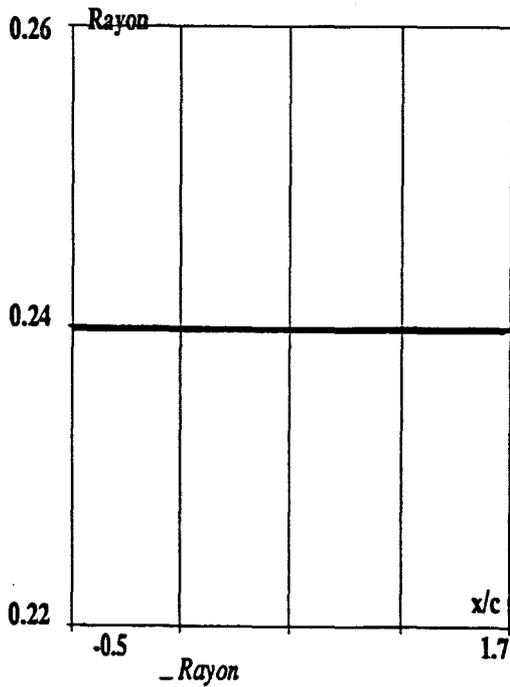
Figure 65 : Cas test CTS4-1.

Roue fixe 2D.

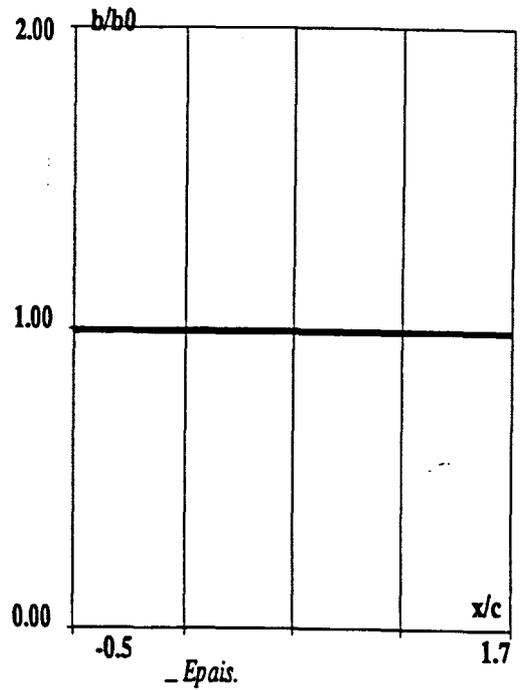
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1.

Répartition des isovaleurs de pression $1 - \frac{p}{p_i}$.

$\Delta = 0.03$.



LOI DE RAYON



LOI D'ÉPAISSEUR

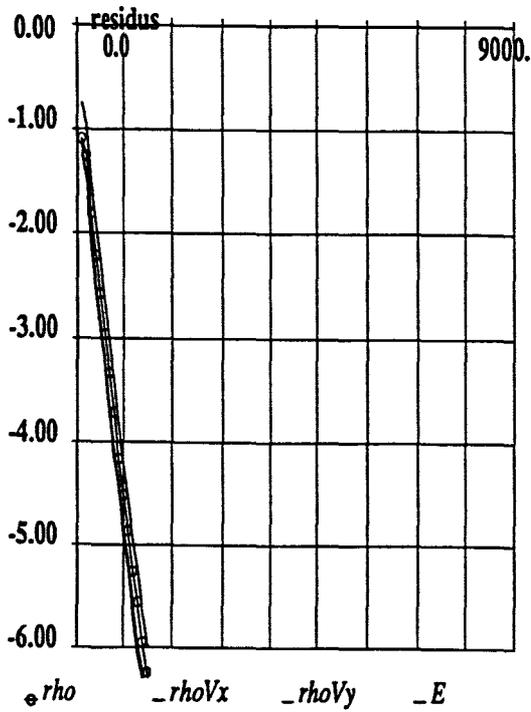
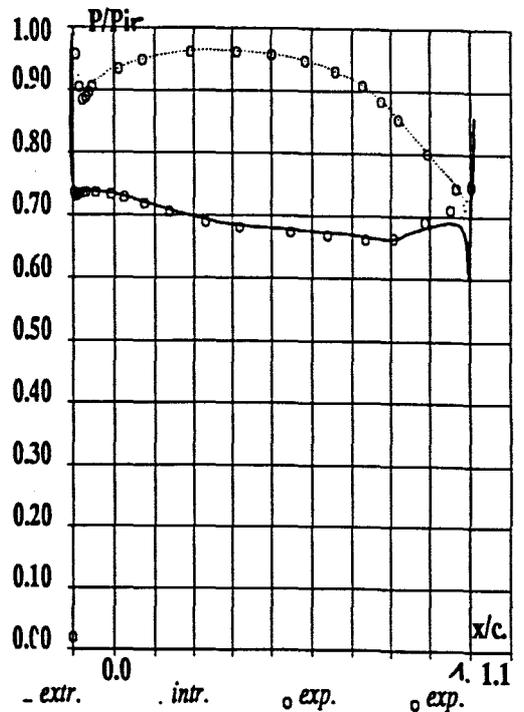


DIAGRAMME DE CONVERGENCE



REPARTITION DE PRESSION

Figure 66 : Cas test CTS4-1.

Roue fixe 2D.

Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.

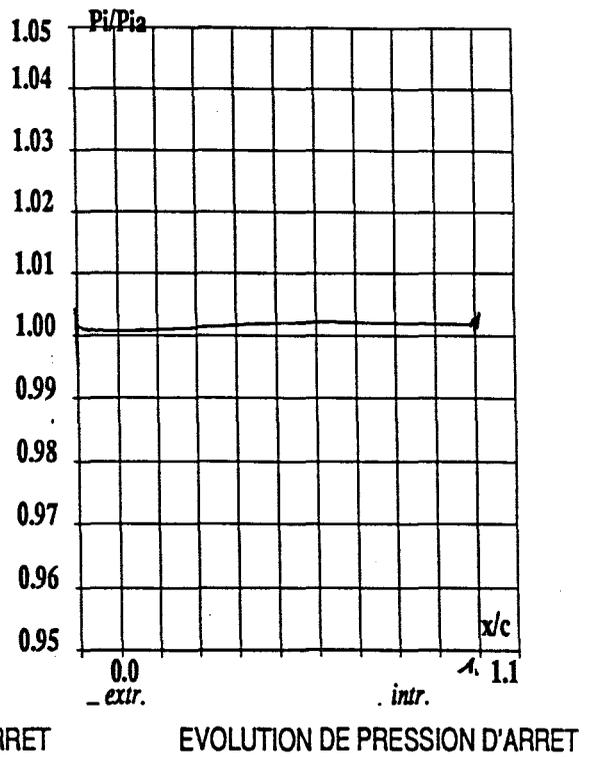
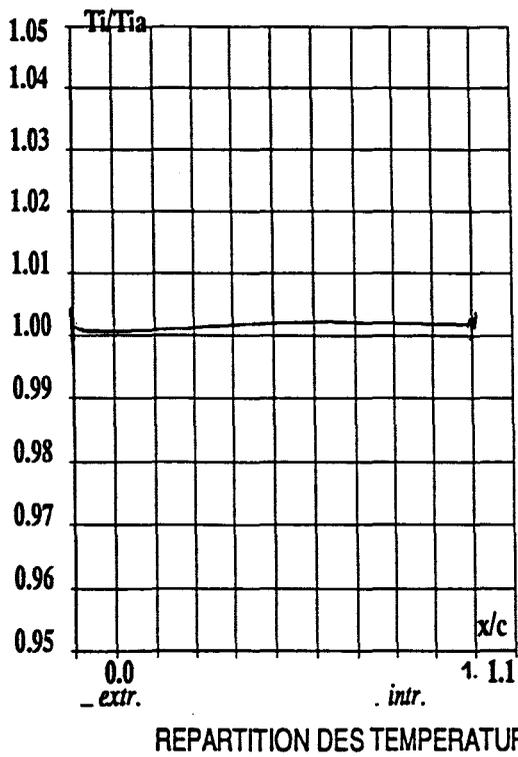
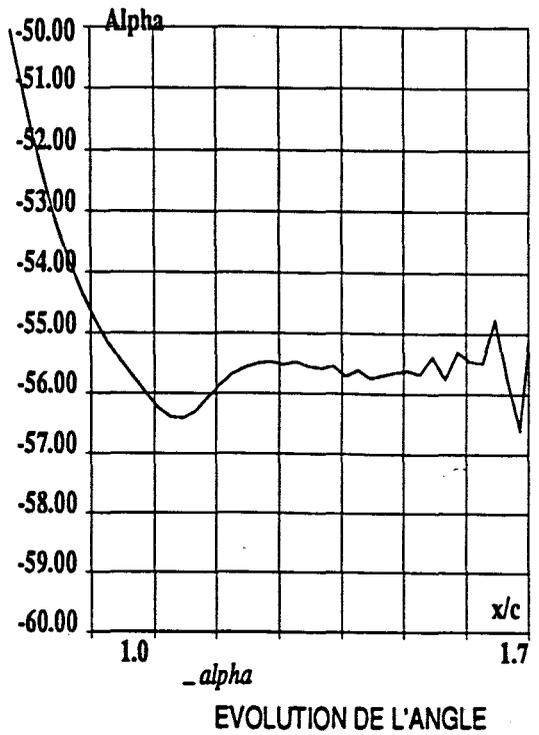
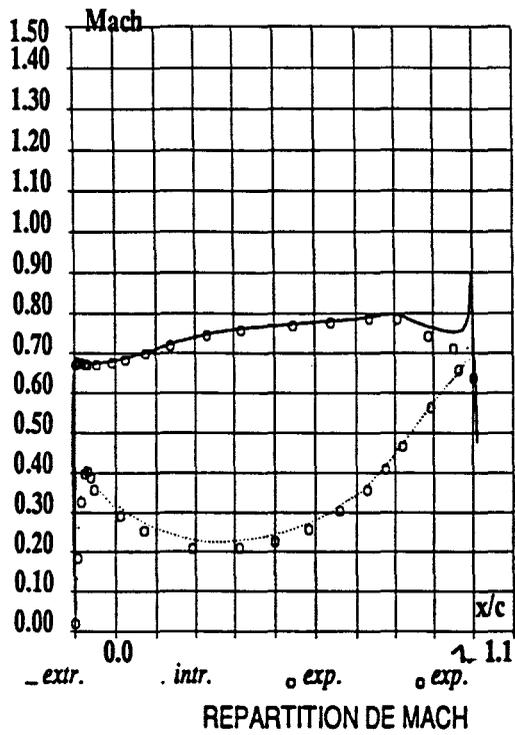


Figure 67 : Cas test CTS4-1.

Roue fixe 2D.

Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.

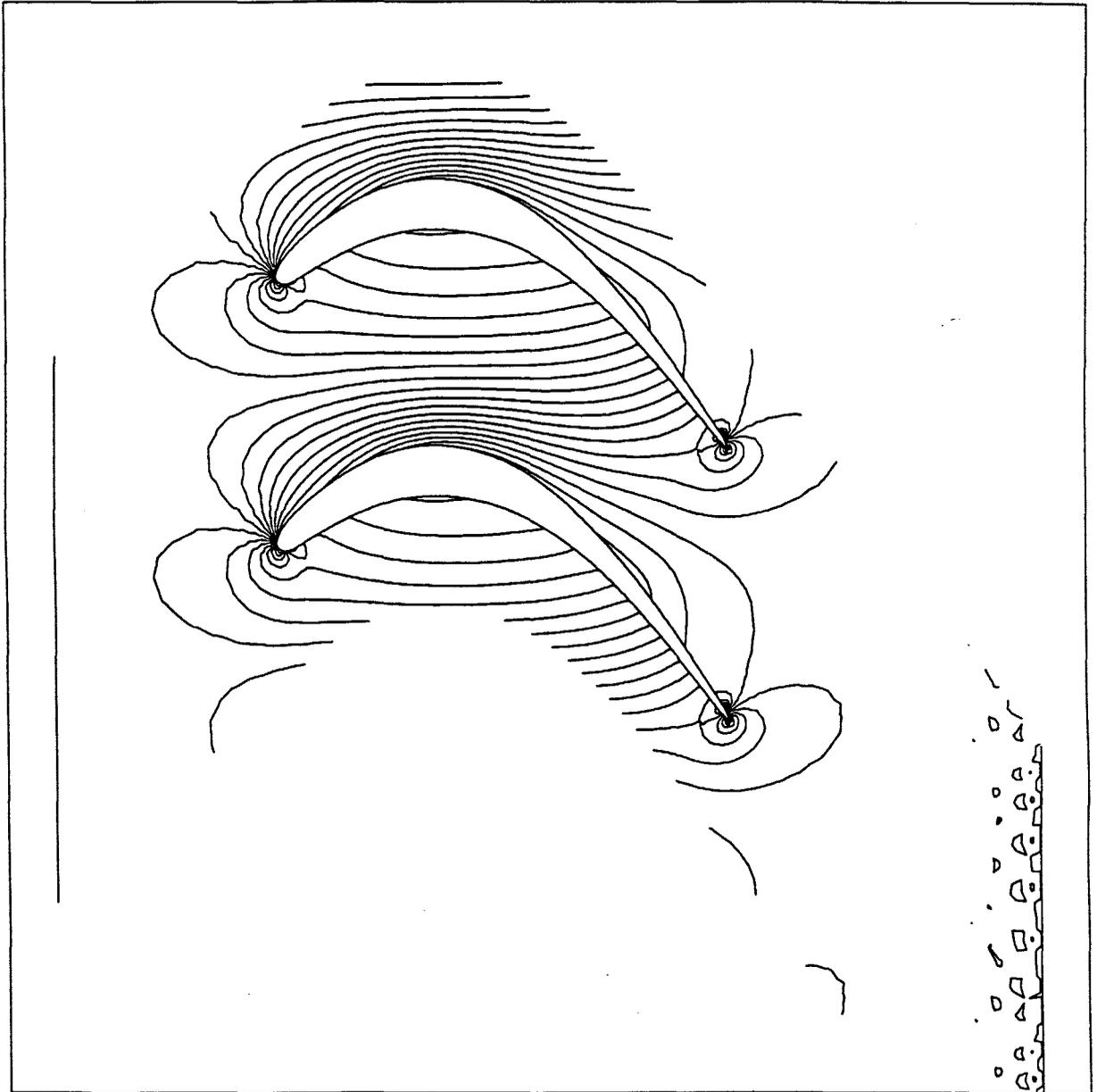


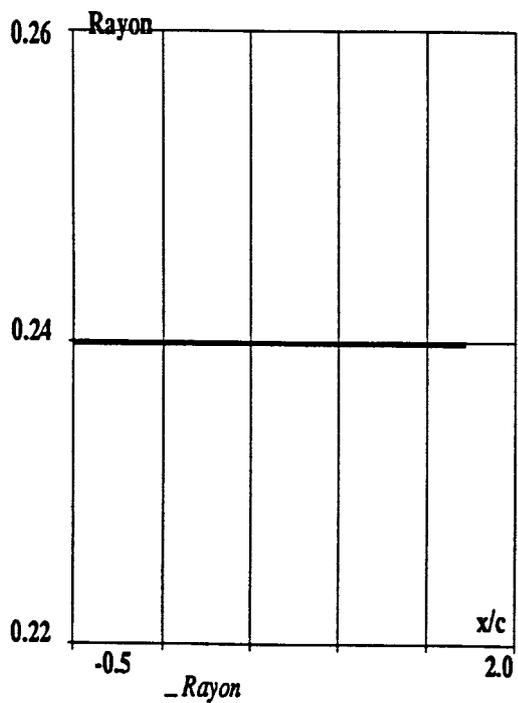
Figure 68 : Cas test CTS4-1.

Roue fixe 2D.

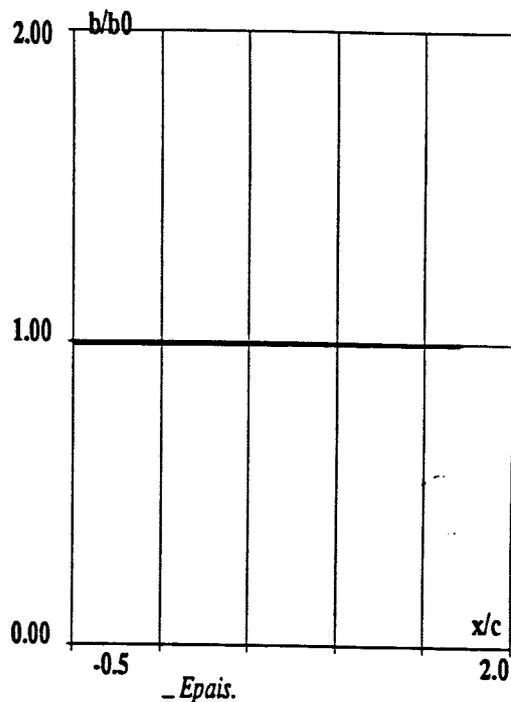
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.

Répartition des isovaleurs de pression 1. - $\frac{p}{P_i}$.

$\Delta = 0.03$.



LOI DE RAYON



LOI D'EPAISSEUR

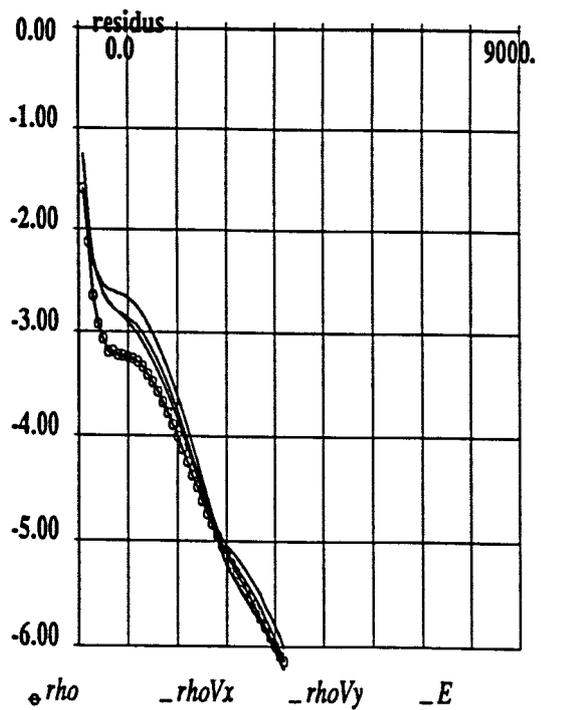
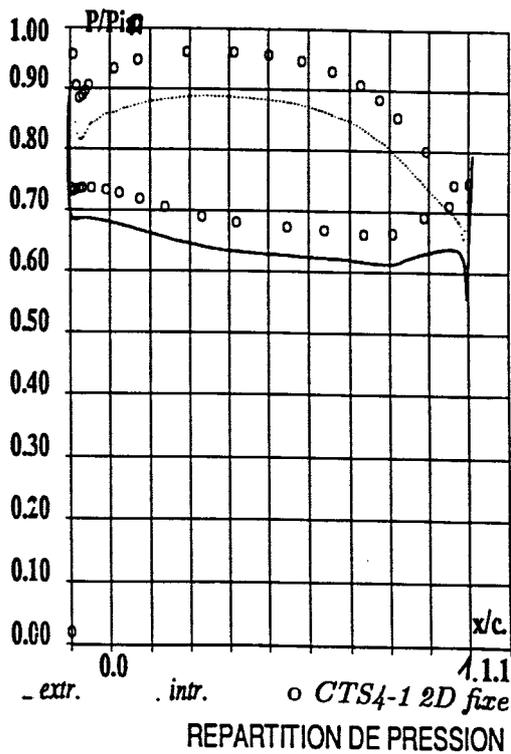


DIAGRAMME DE CONVERGENCE



REPARTITION DE PRESSION

Figure 69 : Cas test CTS4-2.
Roue mobile turbine 2D.
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1.

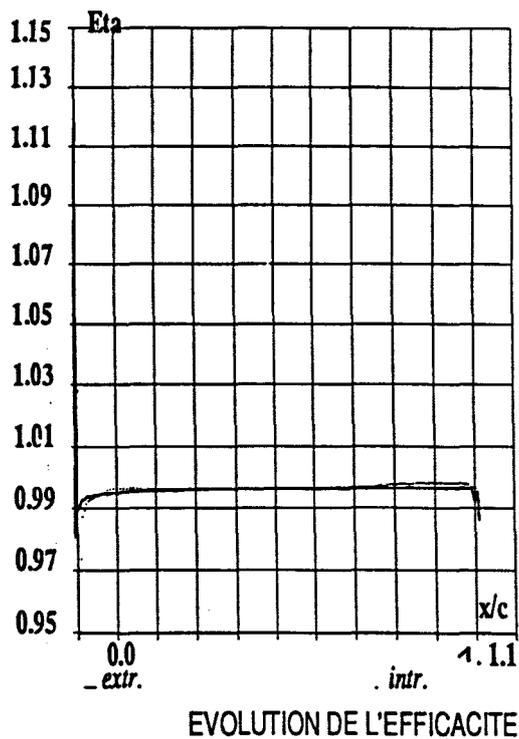
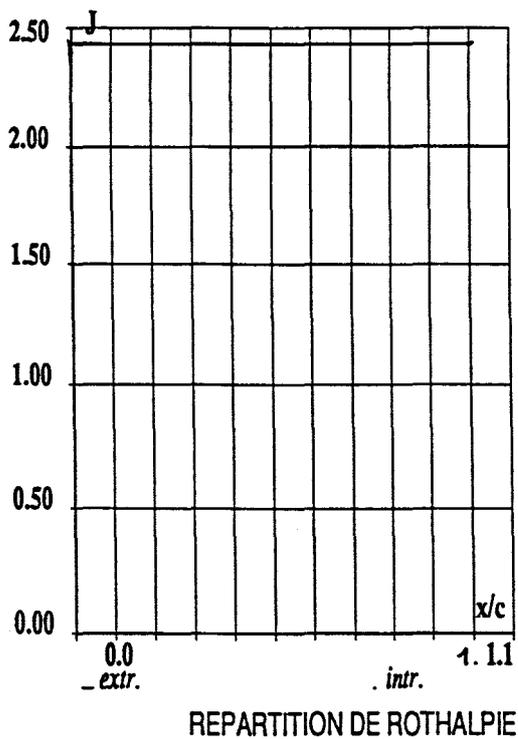
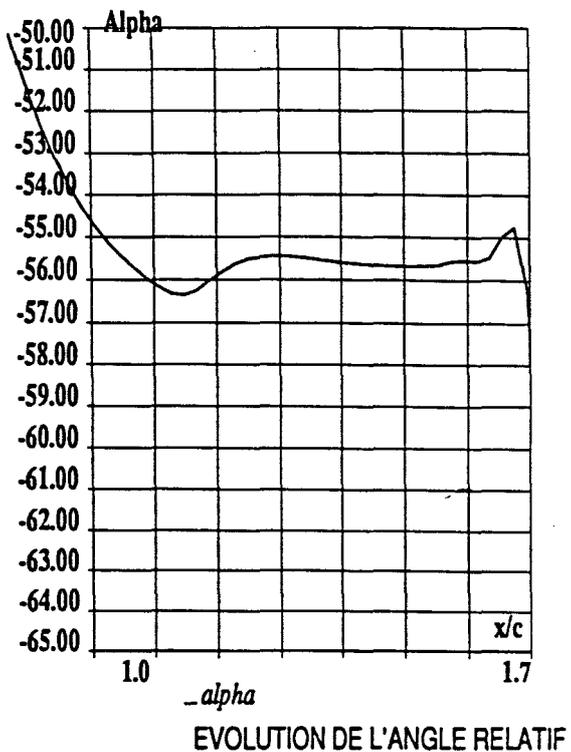
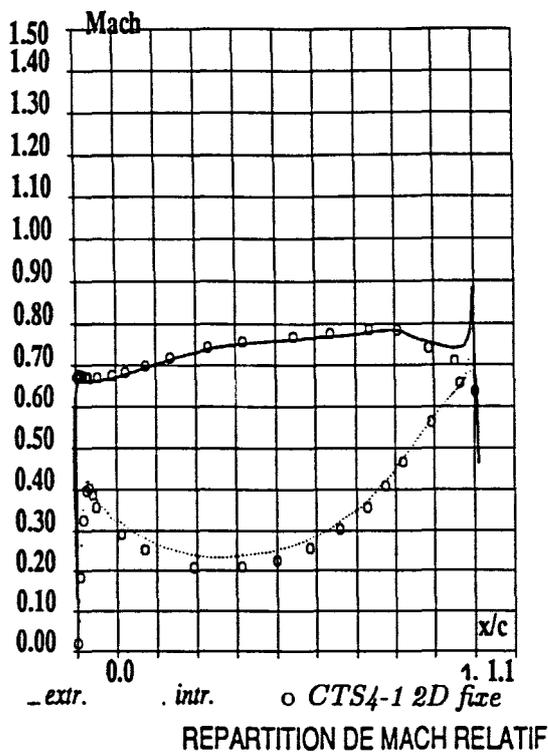


Figure 70 : Cas test CTS4-2.
Roue mobile turbine 2D.
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1.

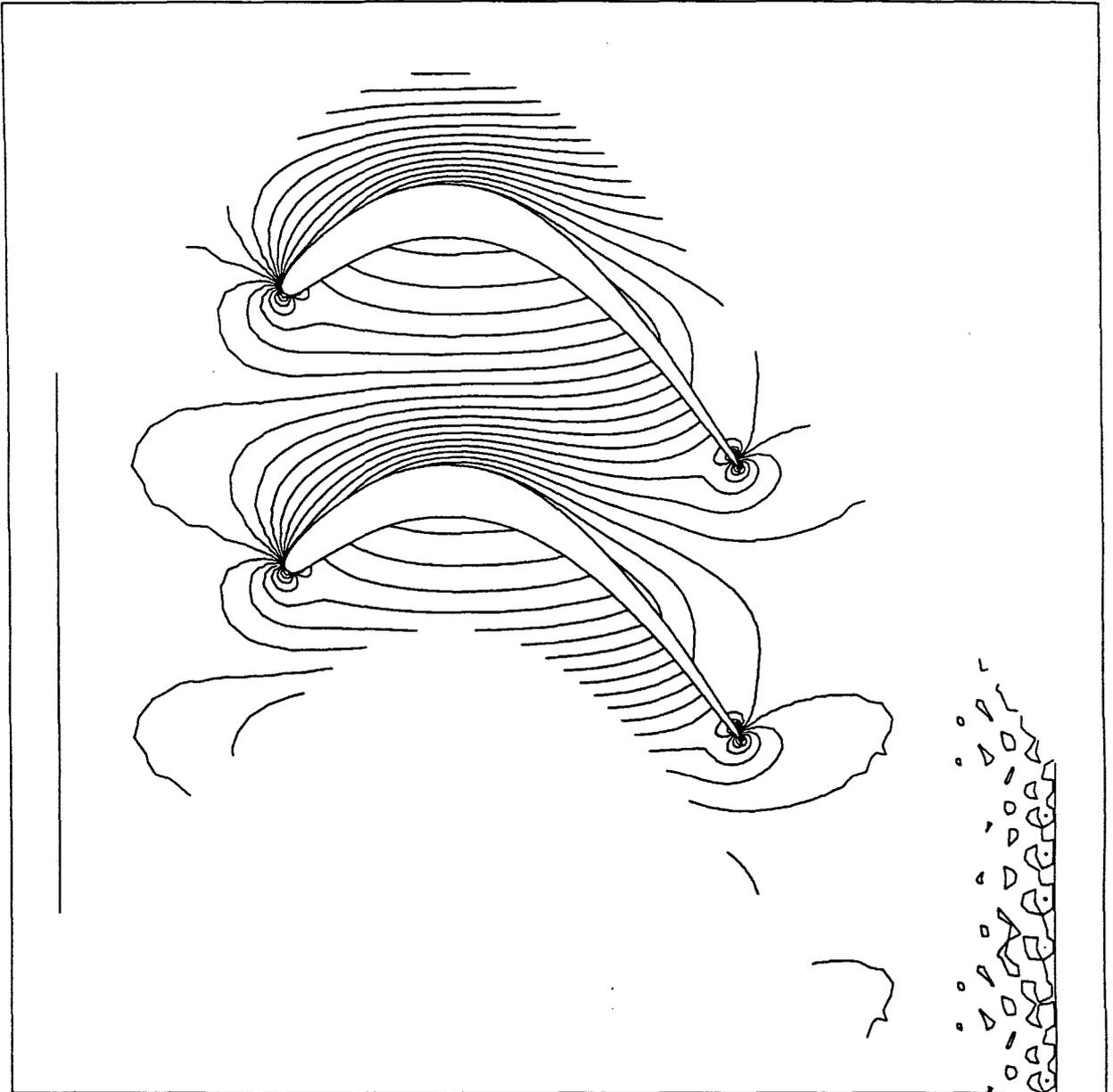


Figure 71 : Cas test CTS4-2.

Roue mobile turbine 2D.

Code sans viscosité artificielle SCHEMA1.

Répartition des isovaleurs de pression $1 - \frac{p}{p_i}$.

$\Delta = 0.03$.

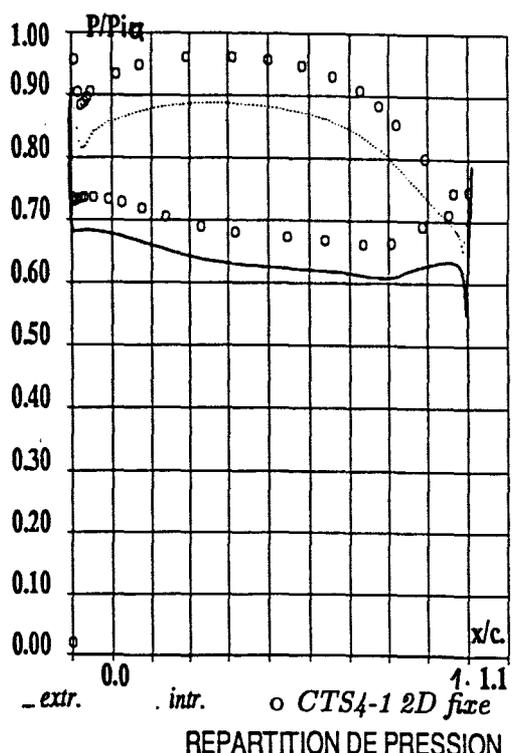
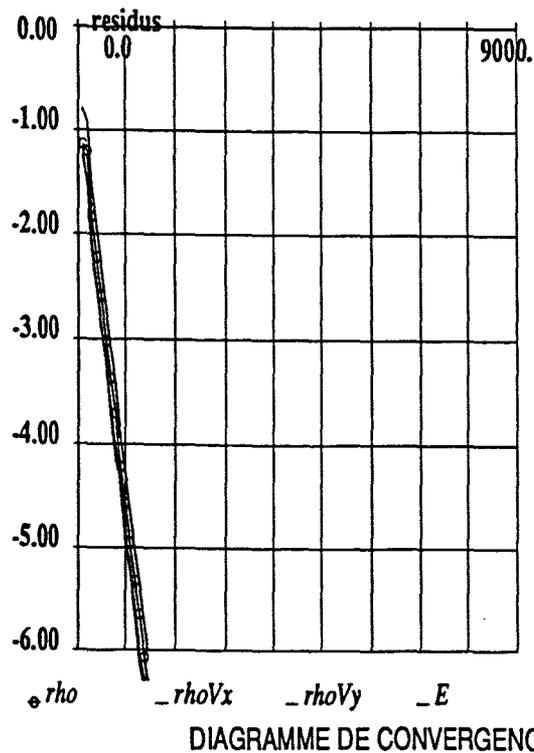
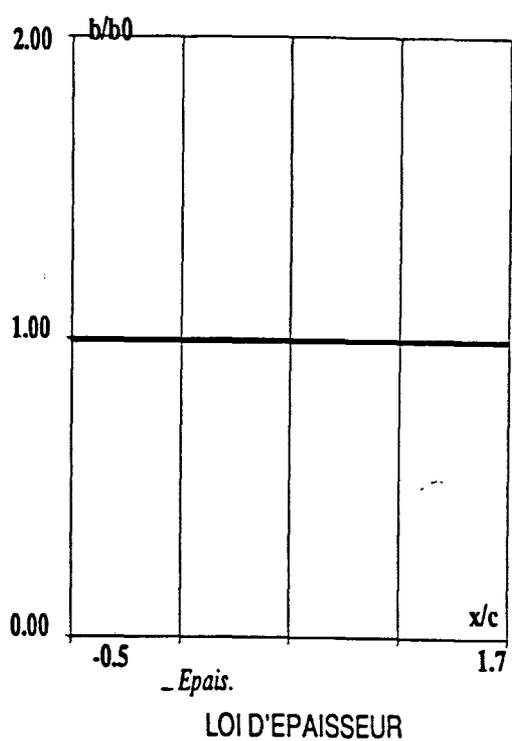
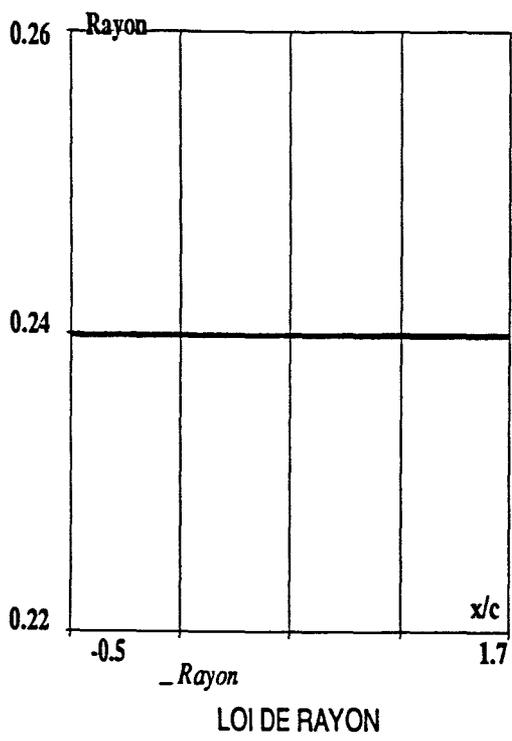


Figure 72 : Cas test CTS4-2.
 Roue mobile turbine 2D.
 Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.

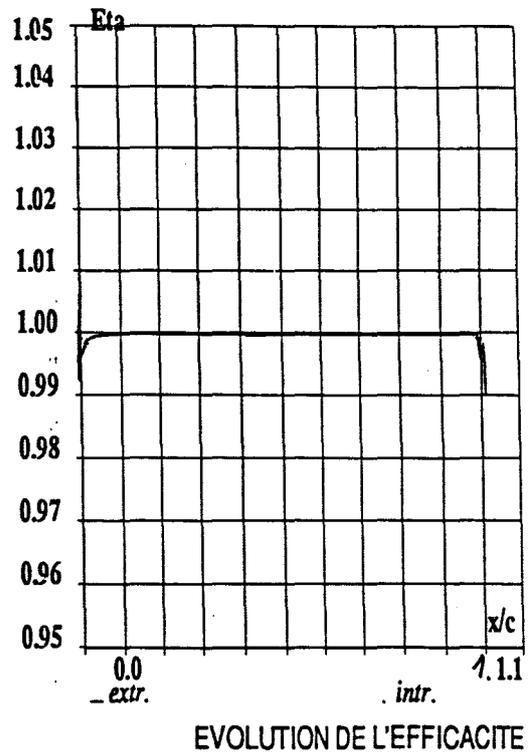
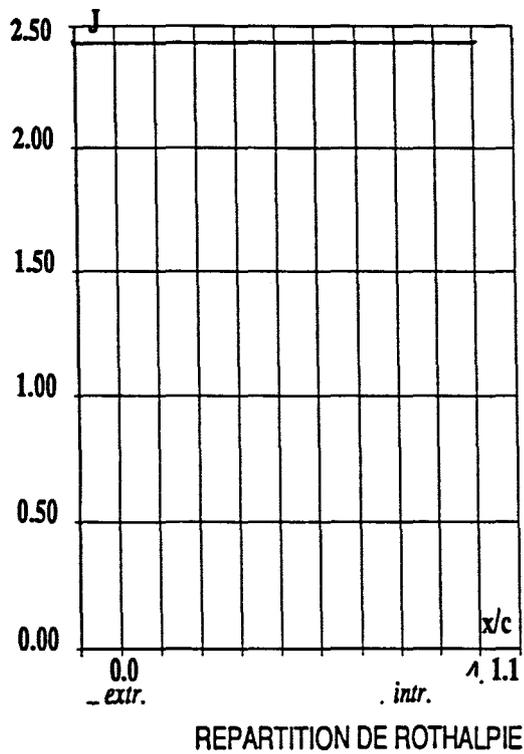
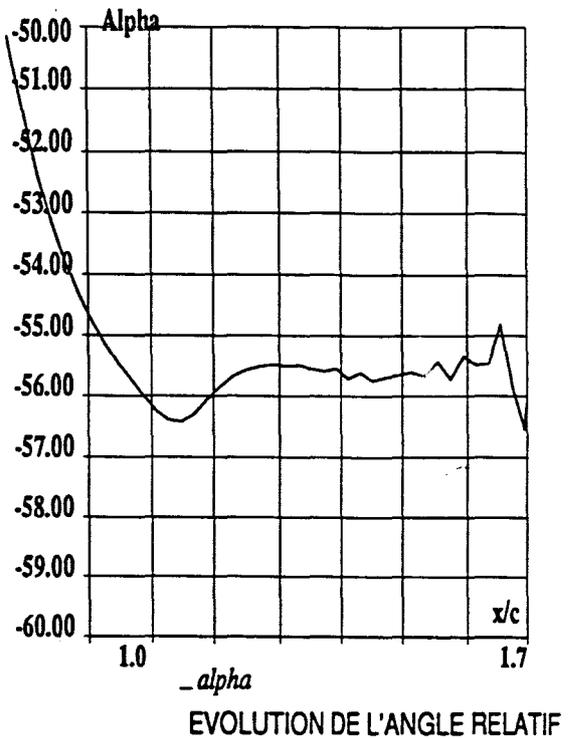
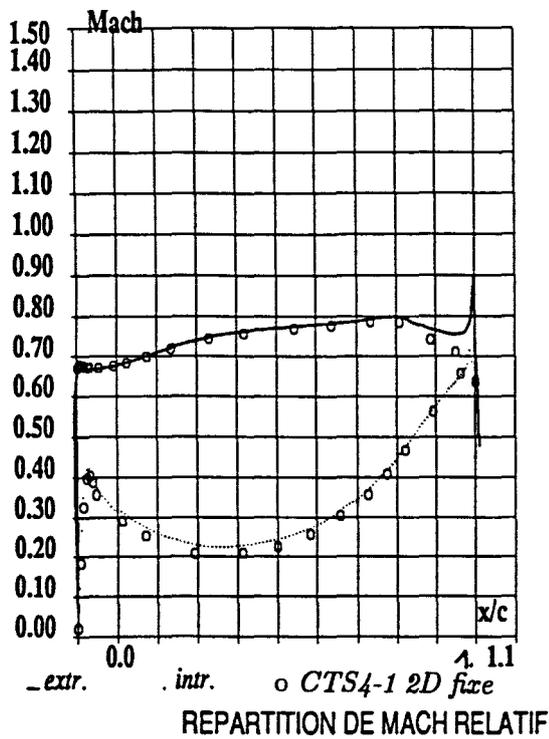


Figure 73 : Cas test CTS4-2.
Roue mobile turbine 2D.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.

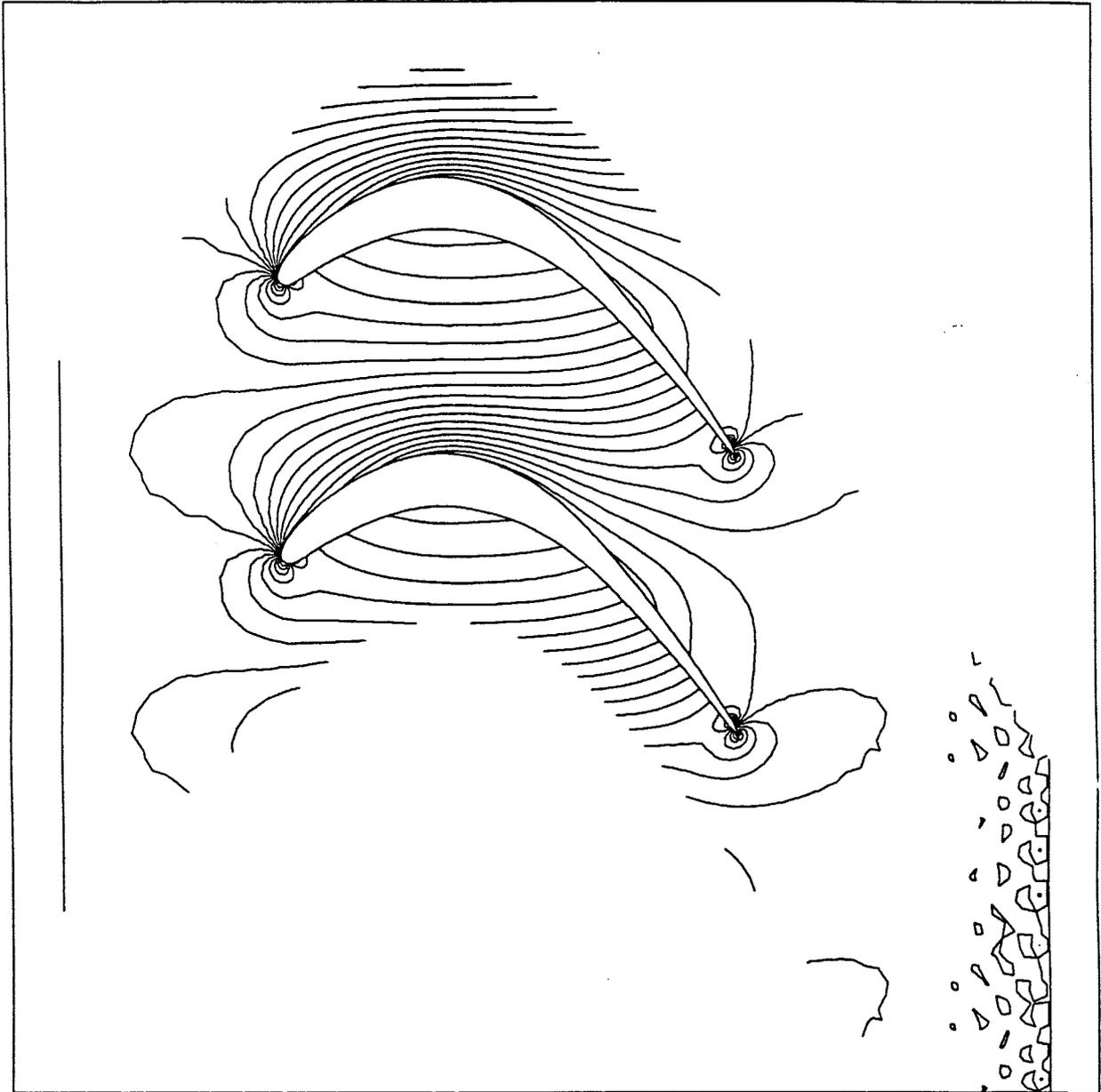


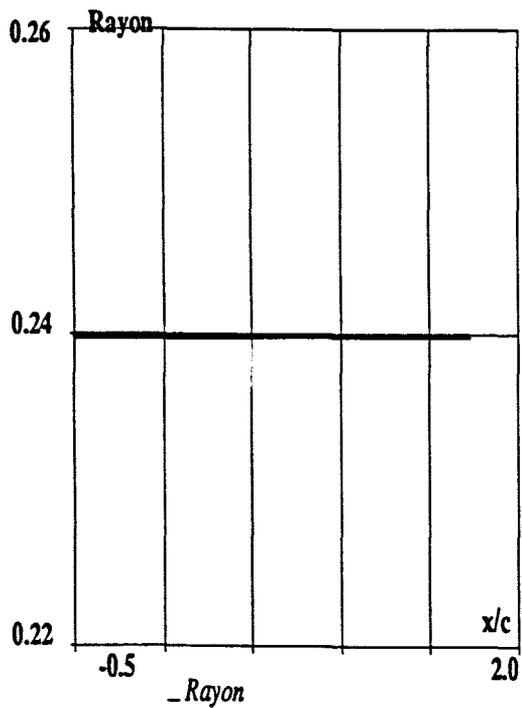
Figure 74 : Cas test CTS4-2.

Roue mobile turbine 2D.

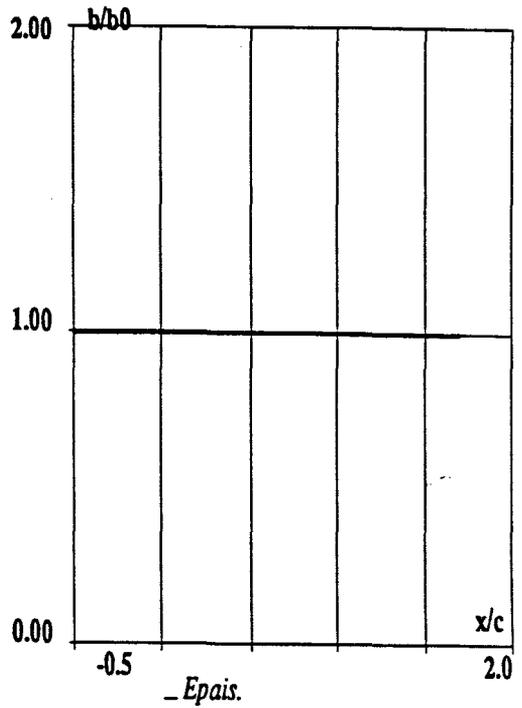
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.

Répartition des isovaleurs de pression $1. - \frac{P}{P_i}$.

$\Delta = 0.03$.



LOI DE RAYON



LOI D'ÉPAISSEUR

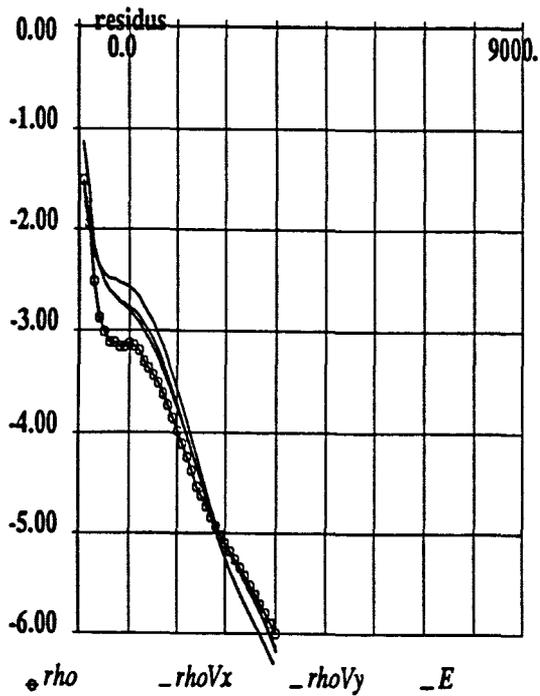
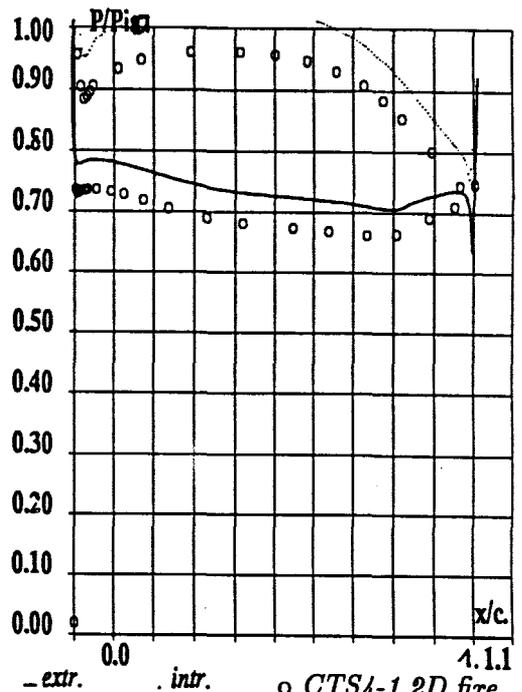


DIAGRAMME DE CONVERGENCE



REPARTITION DE PRESSION

Figure 75 : Cas test CTS4-3.

Roue mobile compresseur 2D.

Code sans viscosité artificielle SCHEMA1.

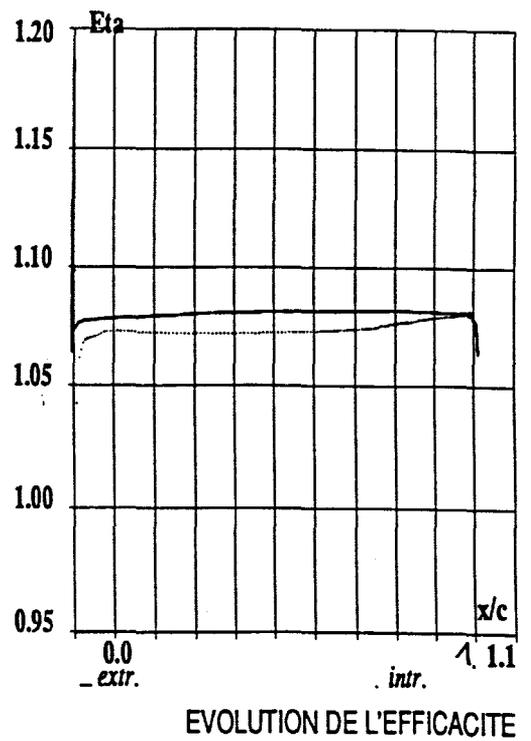
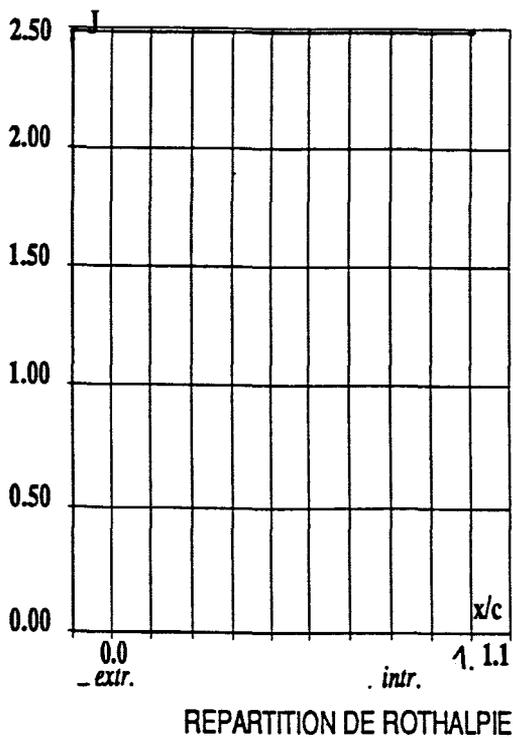
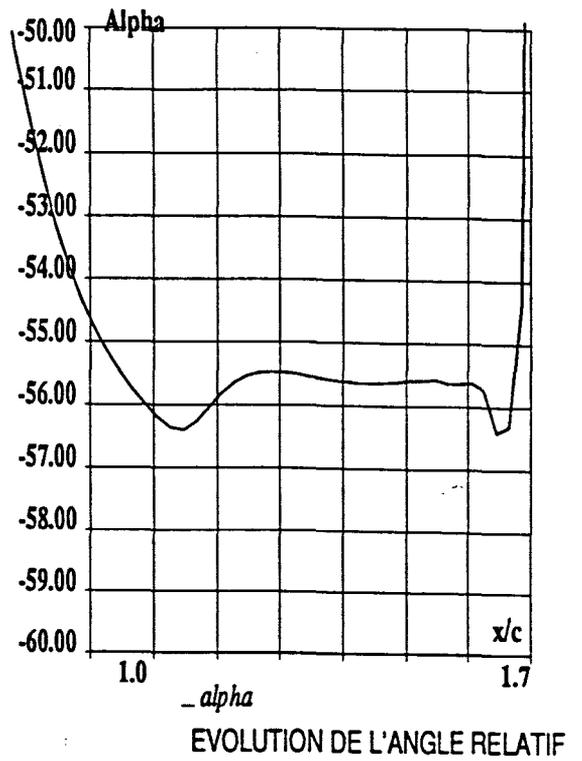
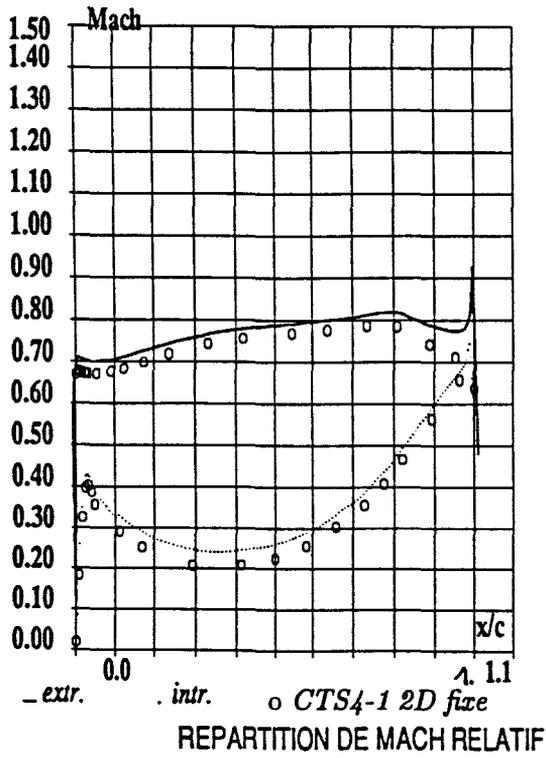


Figure 76 : Cas test CTS4-3.
Roue mobile compresseur 2D.
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1.

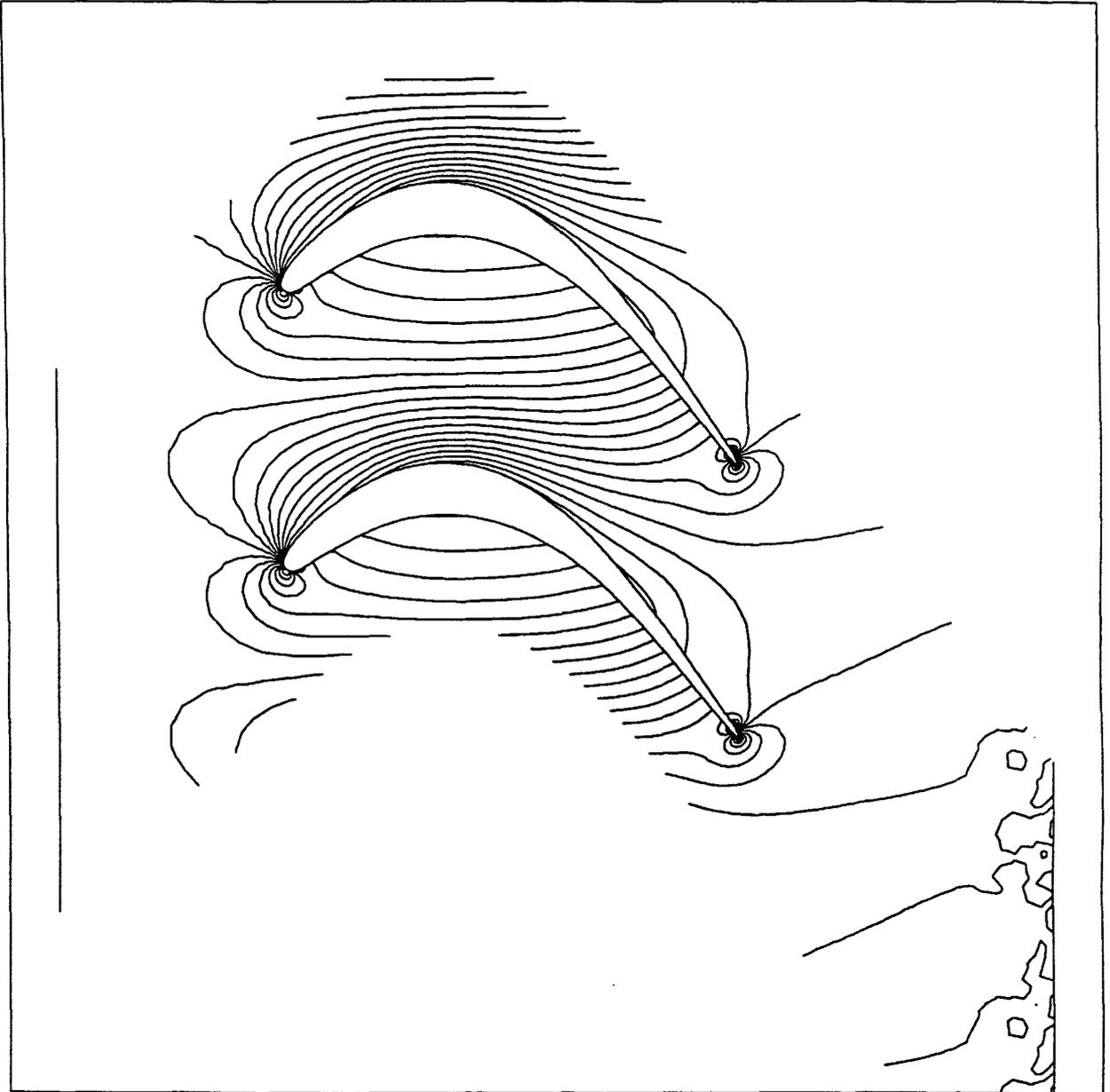


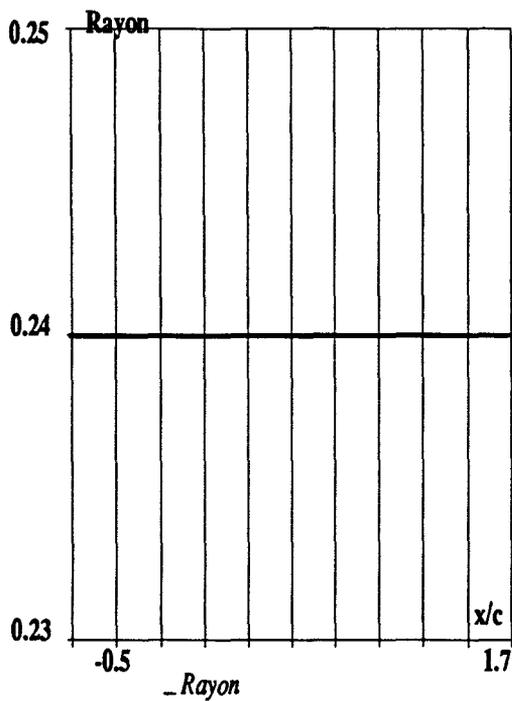
Figure 77 : Cas test CTS4-3.

Roue mobile compresseur 2D.

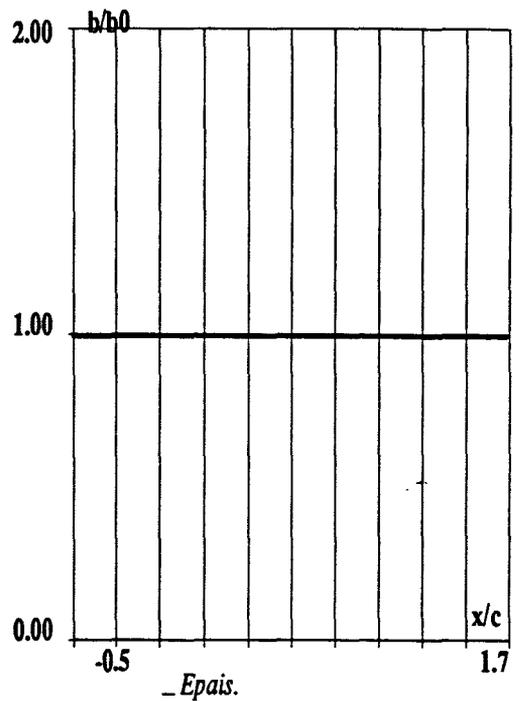
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1.

Répartition des isovaleurs de pression 1: - $\frac{p}{p_i}$.

$\Delta = 0.03$.



LOI DE RAYON



LOI D'EPaisseur

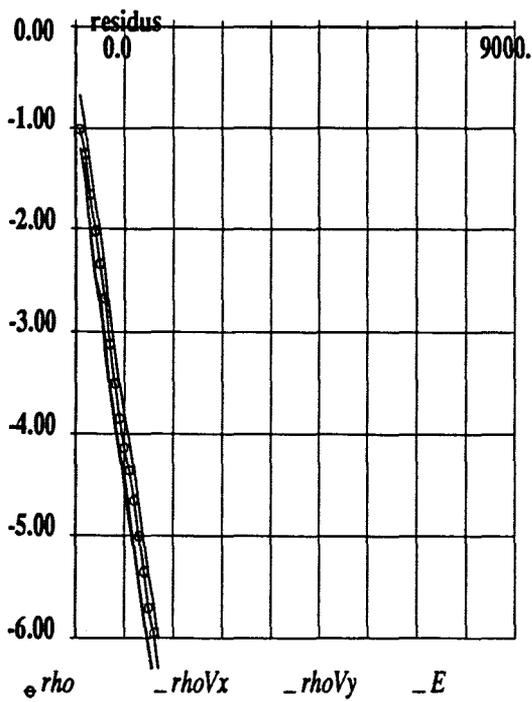
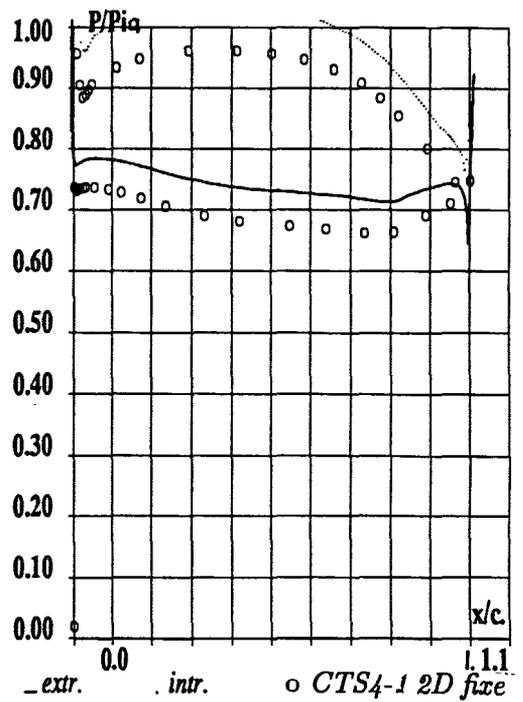


DIAGRAMME DE CONVERGENCE



REPARTITION DE PRESSION

Figure 78 : Cas test CTS4-3.
Roue mobile compresseur 2D.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.

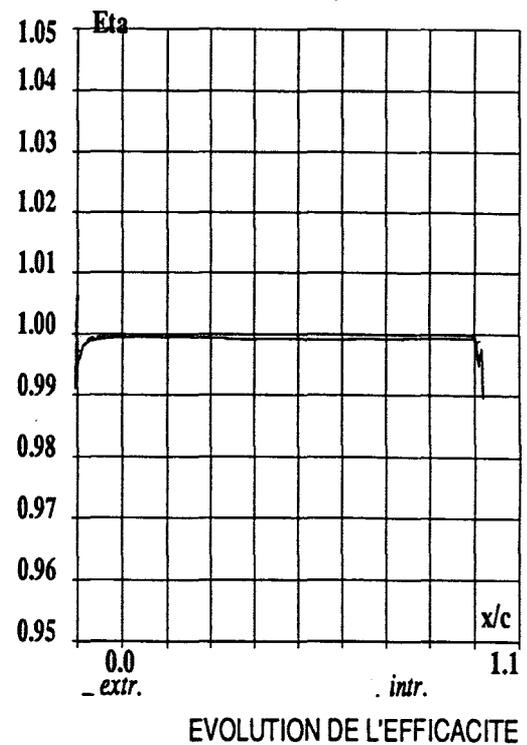
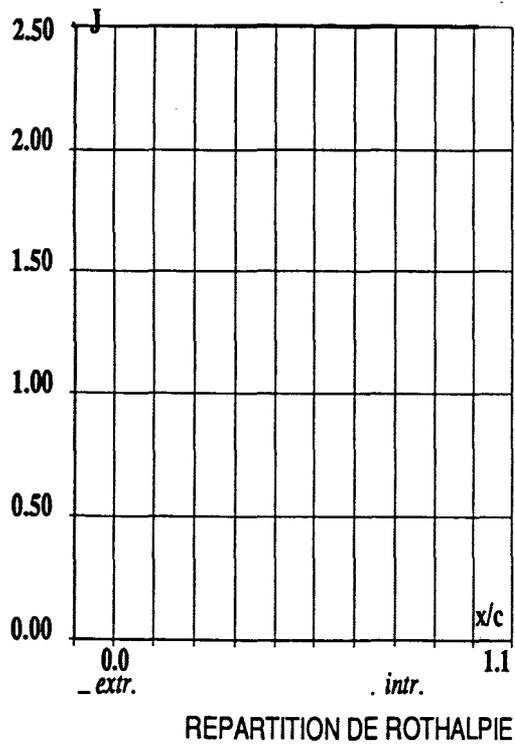
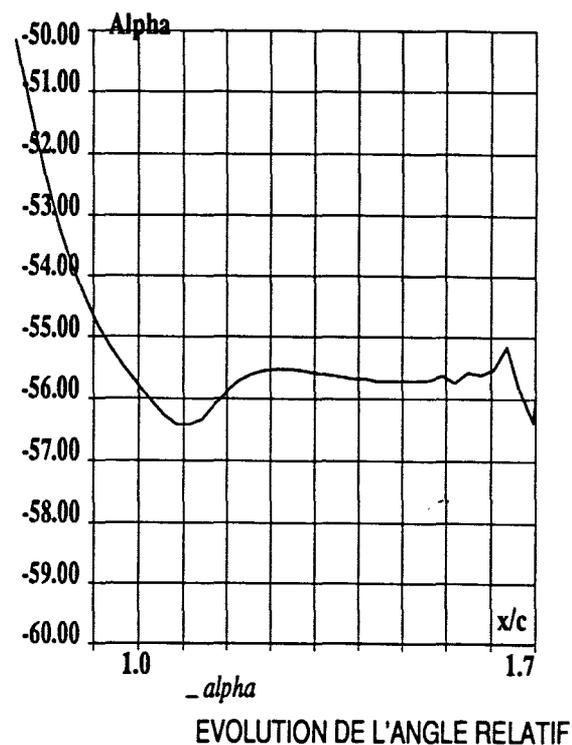
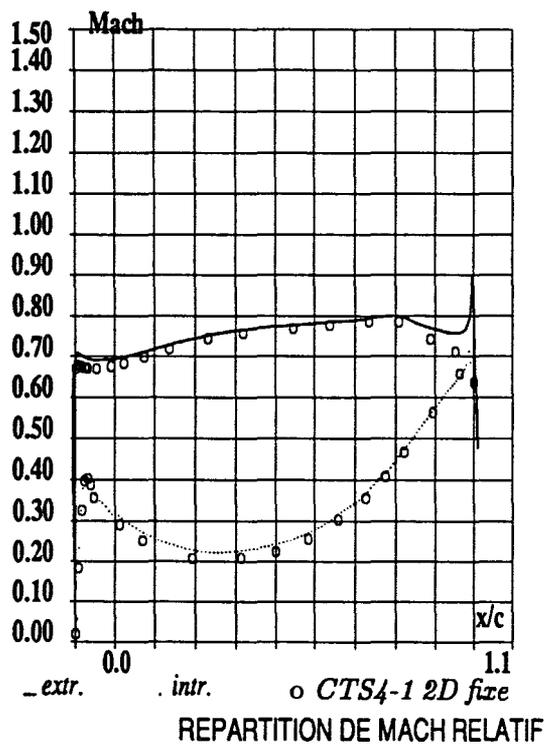


Figure 79 : Cas test CTS4-3.
Roue mobile compresseur 2D.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.

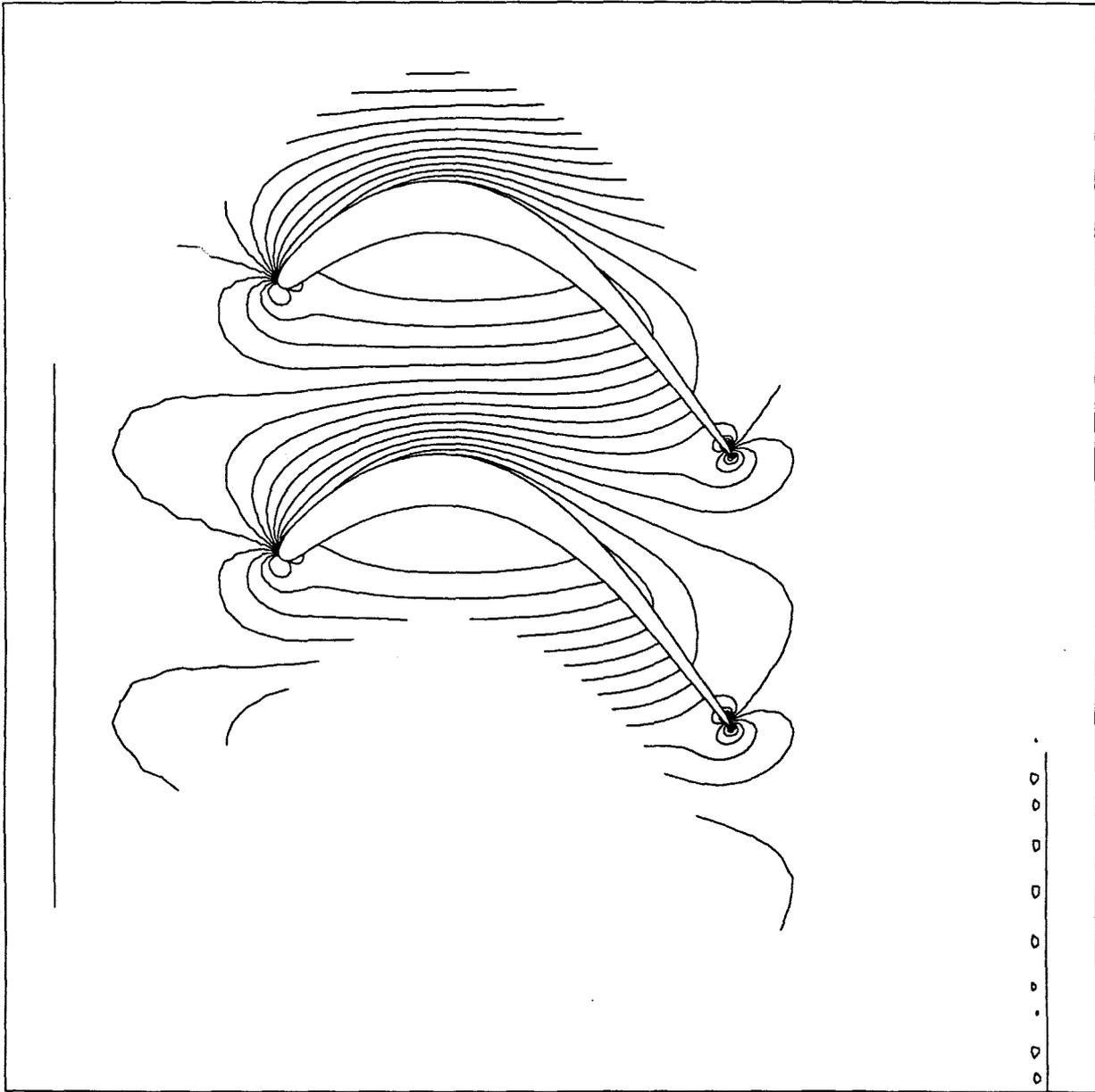


Figure 80 : Cas test CTS4-3.
 Roue mobile compresseur 2D.
 Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.
 Répartition des isovaleurs de pression $1. - \frac{p}{p_i}$.
 $\Delta = 0.03$.

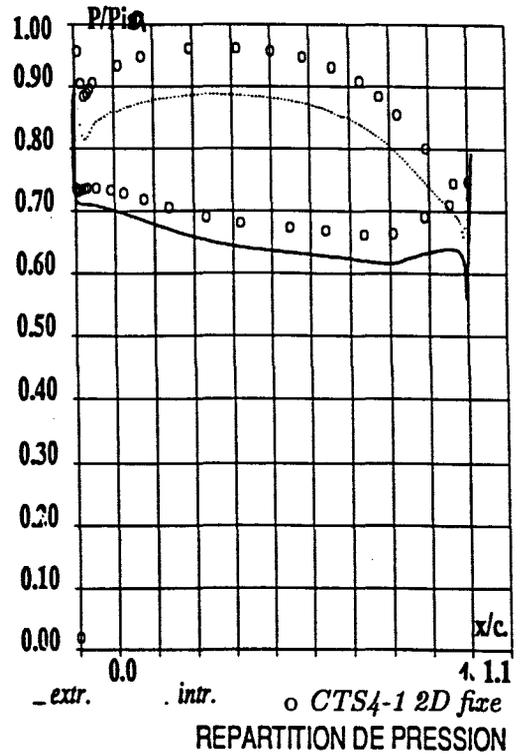
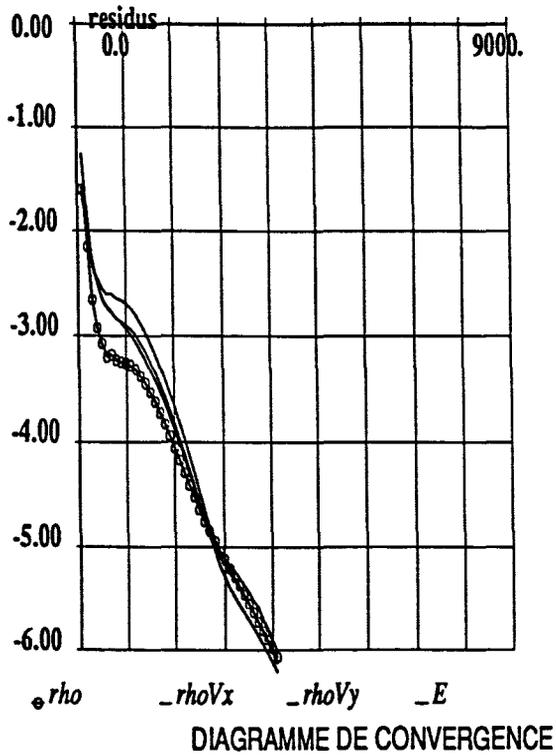
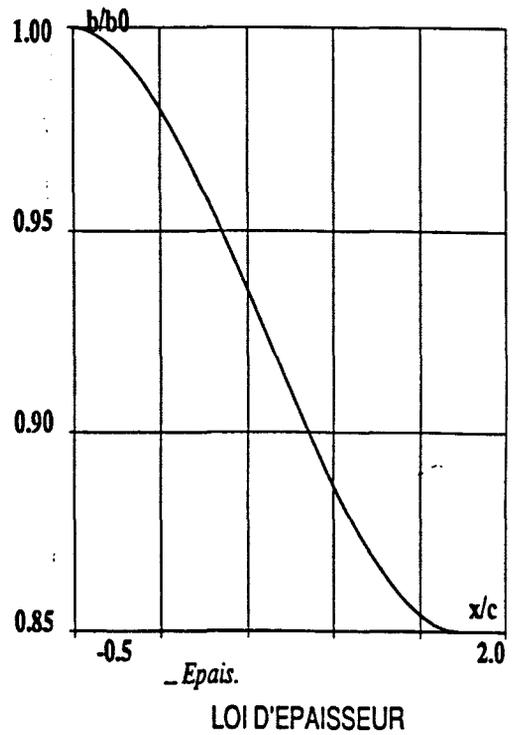
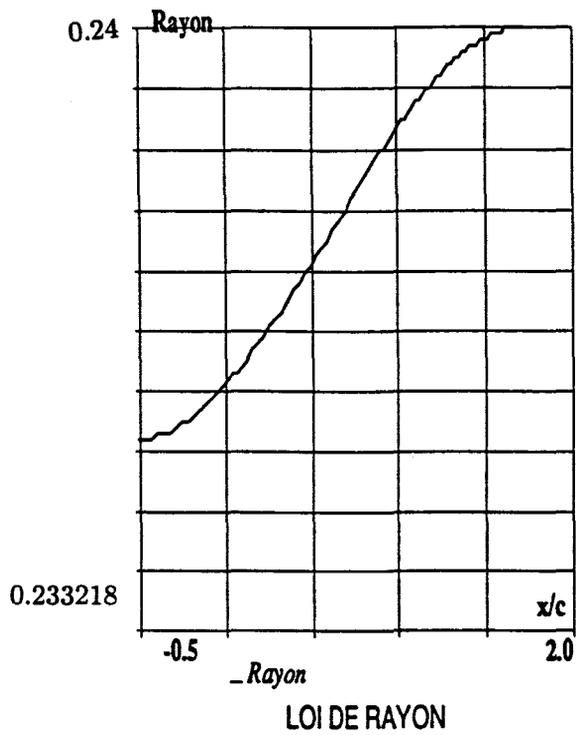


Figure 81 : Cas test CTS4-4.
 Roue mobile turbine 2.5D.
 Code sans viscosité artificielle SCHEMA1.

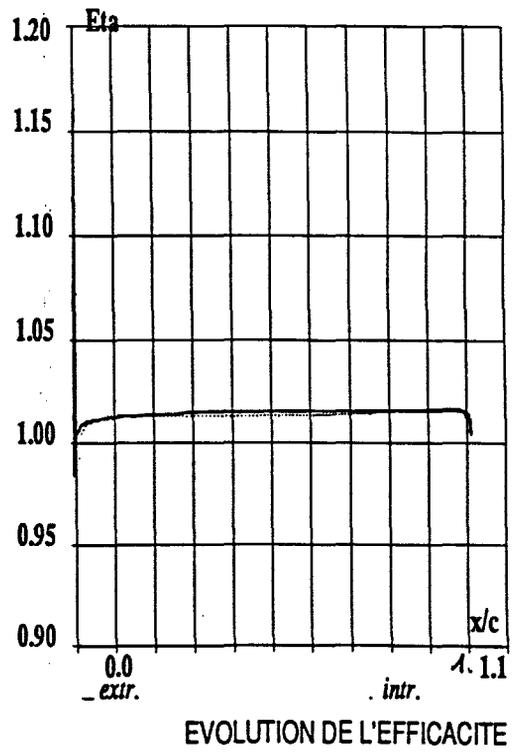
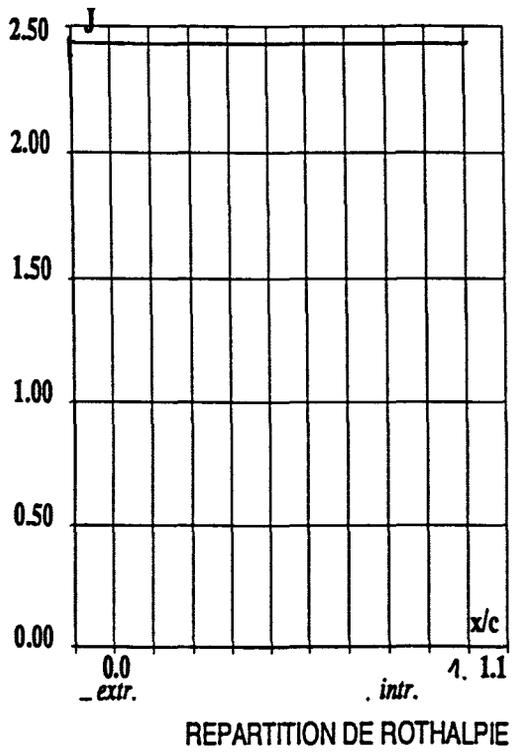
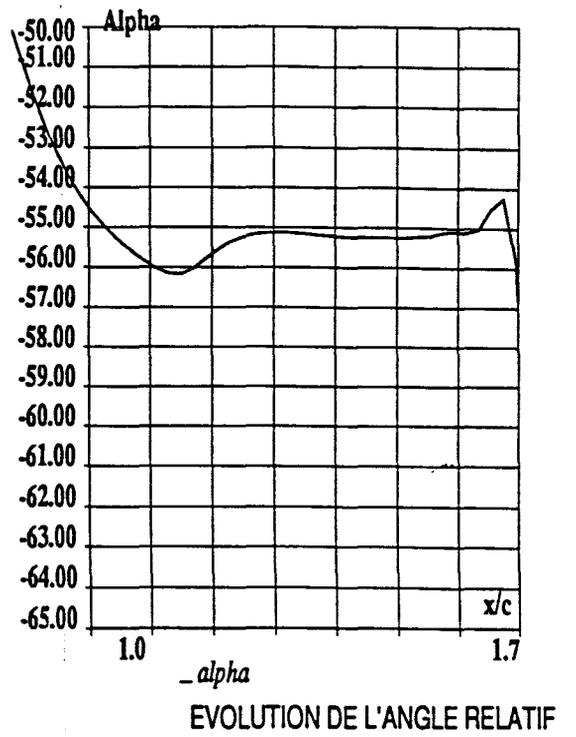
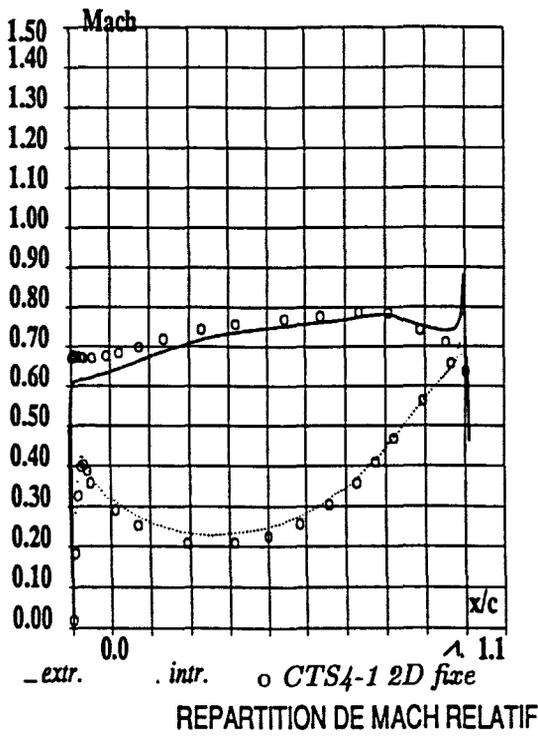


Figure 82 : Cas test CTS4-4.
Roue mobile turbine 2.5D.
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1.

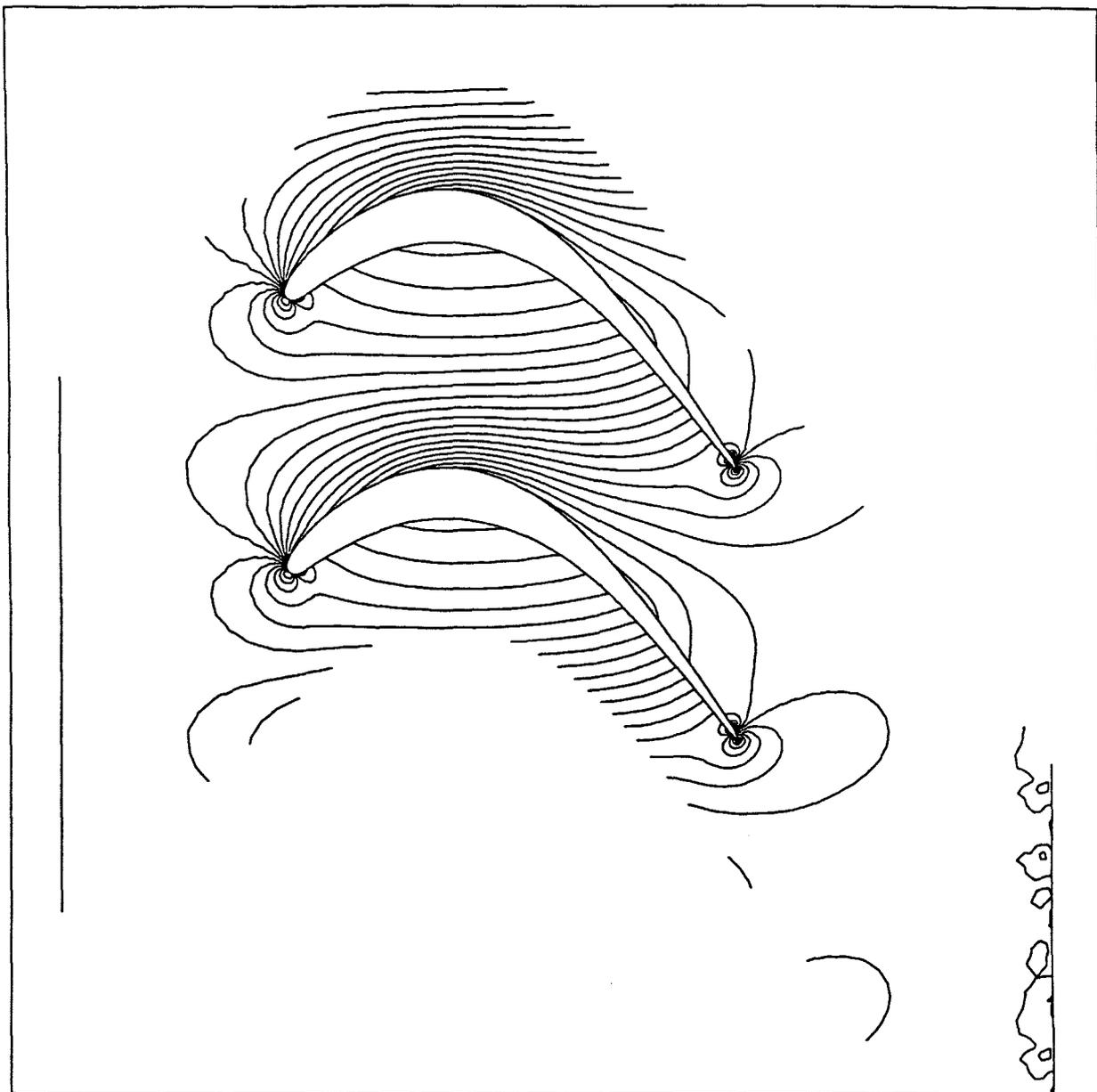


Figure 83 : Cas test CTS4-4.

Roue mobile turbine 2.5D.

Code sans viscosité artificielle SCHEMA1.

Répartition des isovaleurs de pression $1. - \frac{p}{P_i}$.

$\Delta = 0.03$.

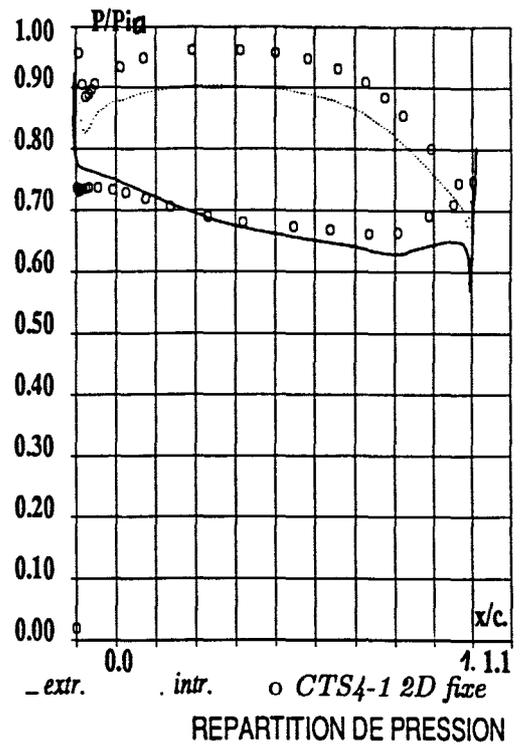
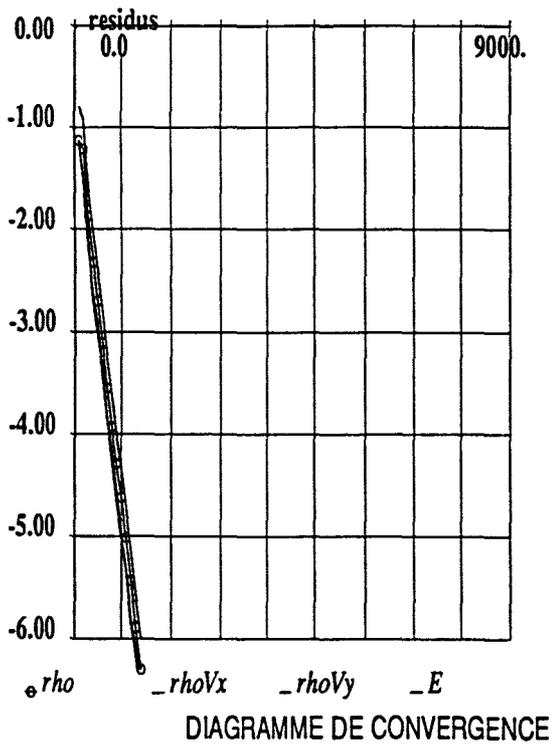
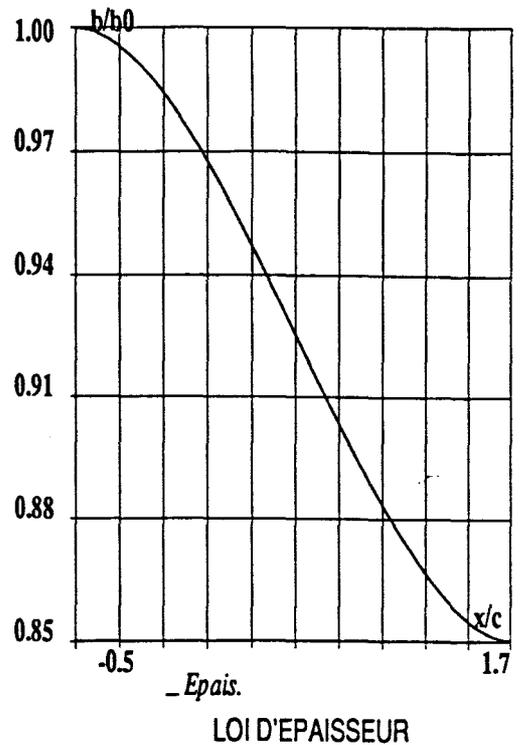
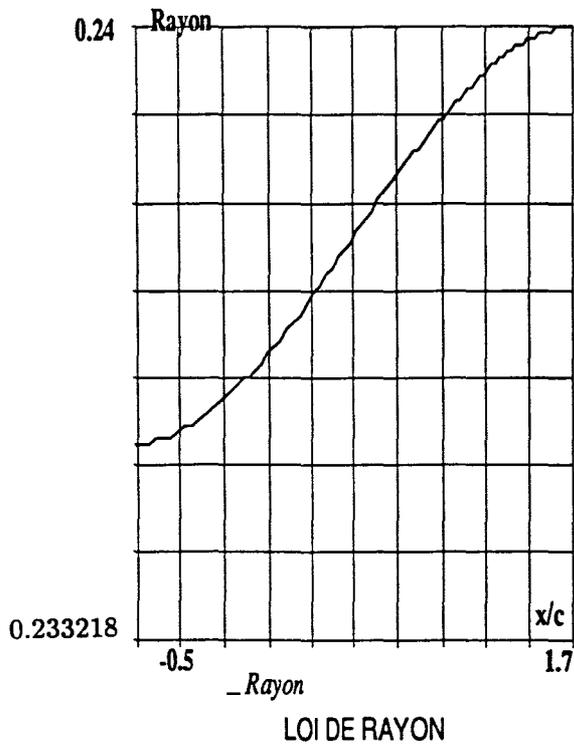


Figure 84 : Cas test CTS4-4.
 Roue mobile turbine 2.5D.
 Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.

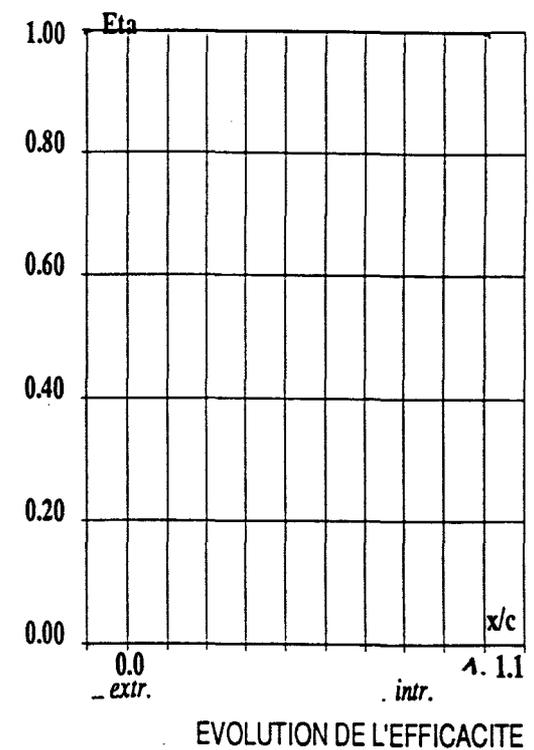
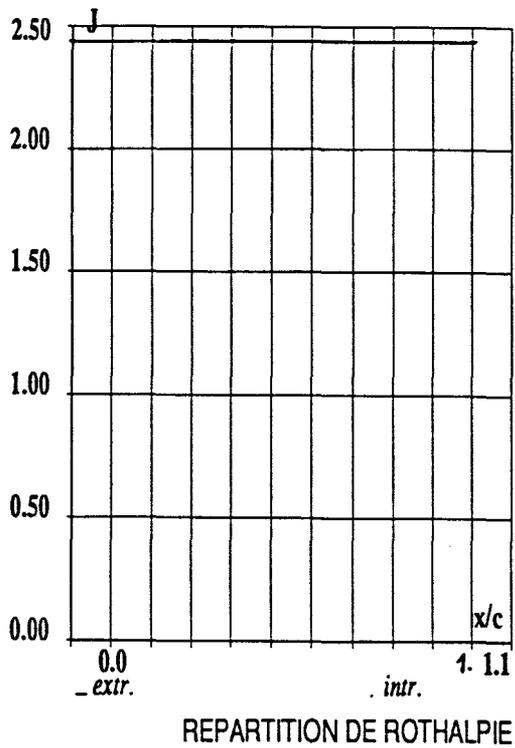
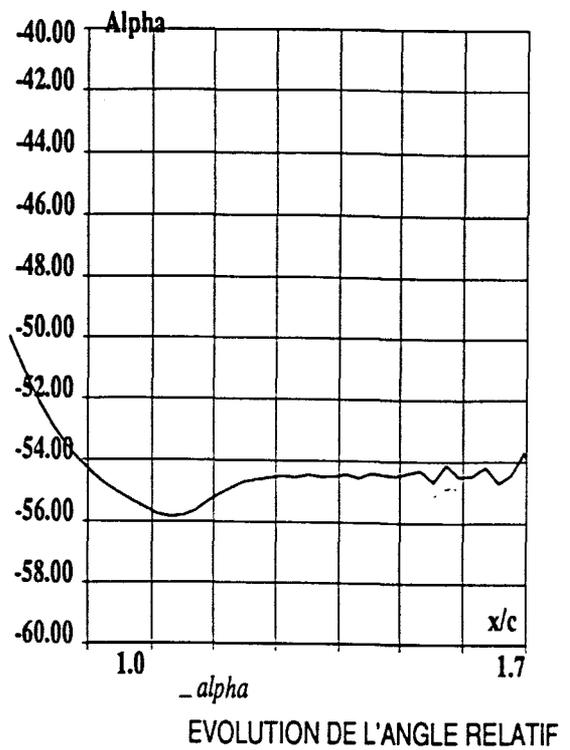
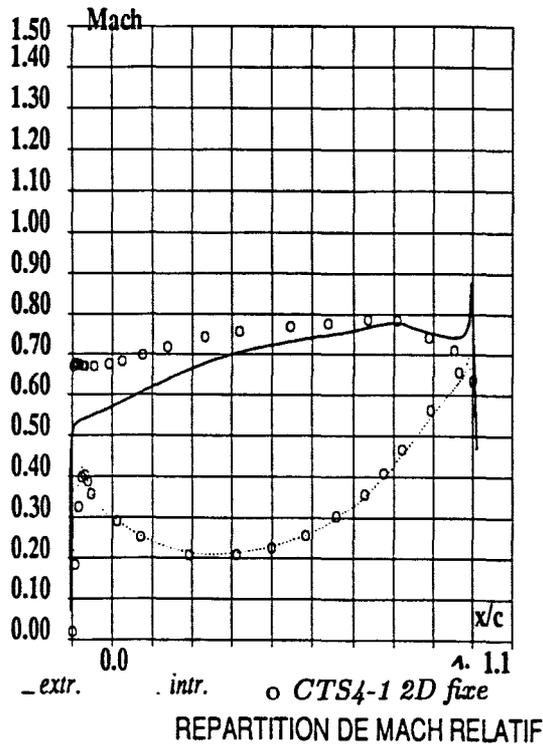


Figure 85 : Cas test CTS4-4.
Roue mobile turbine 2.5D.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.

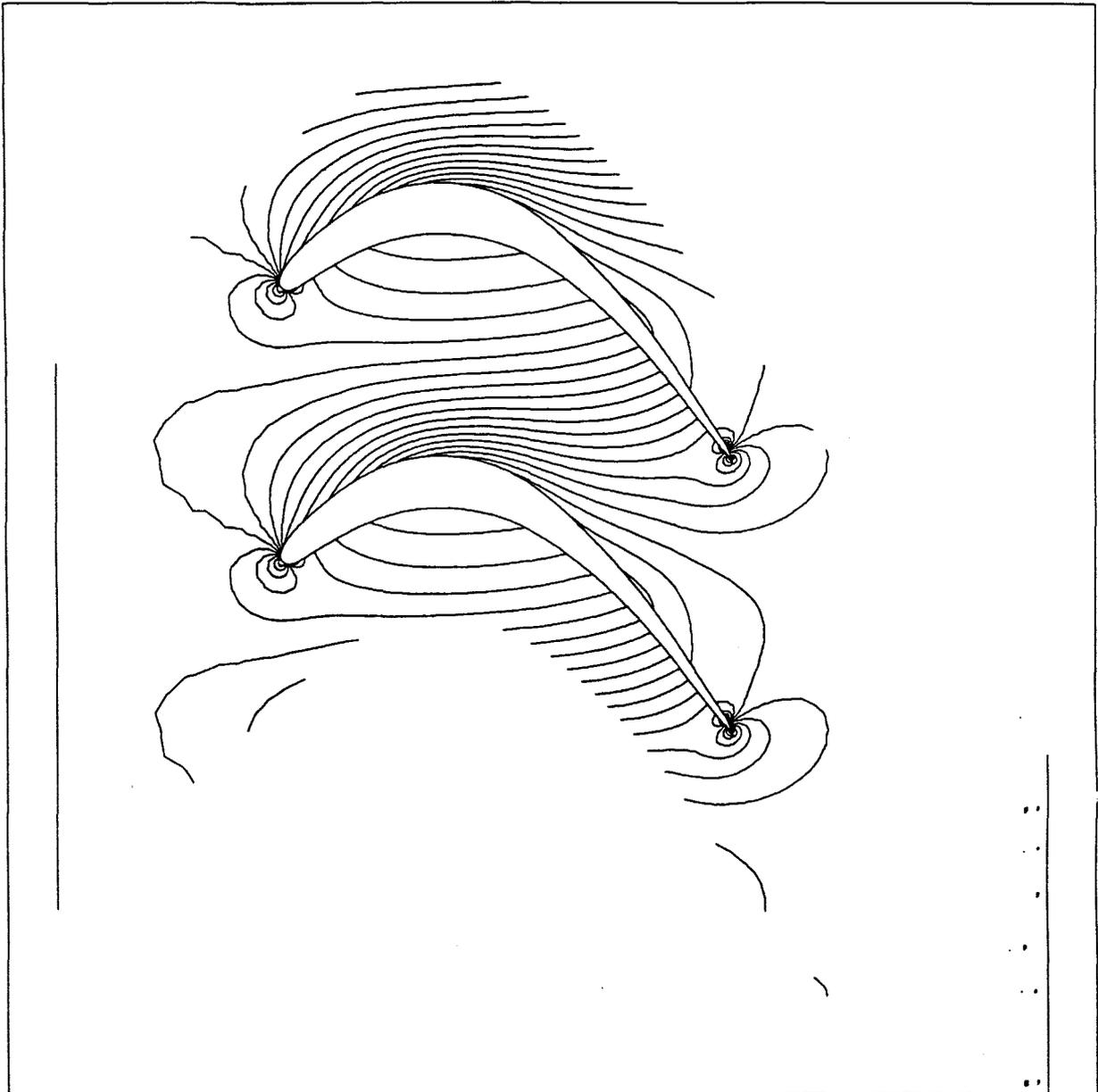


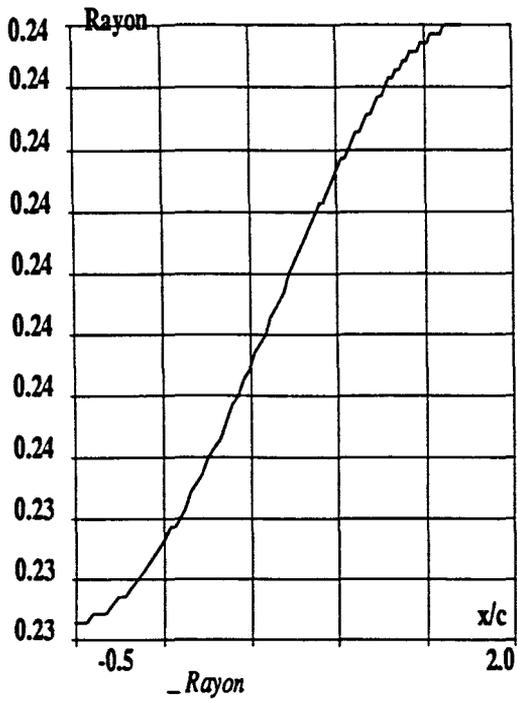
Figure 86 : Cas test CTS4-4.

Roue mobile turbine 2.5D.

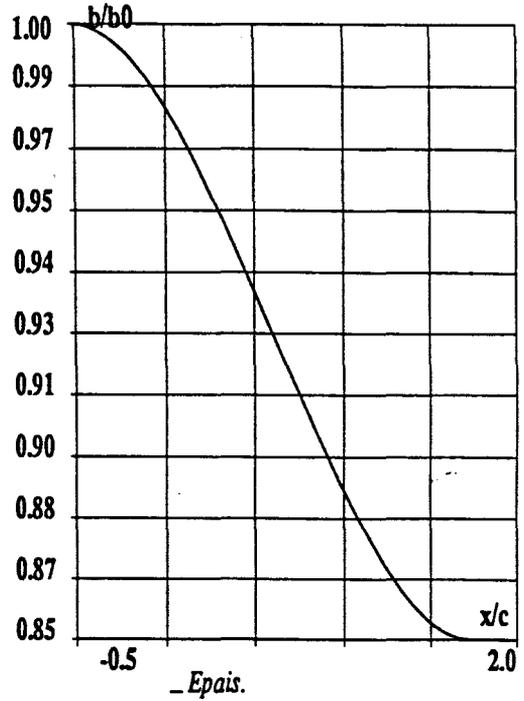
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.

Répartition des isovaleurs de pression $1. - \frac{p}{p_i}$.

$\Delta = 0.03$.



LOI DE RAYON



LOI D'EPAISSEUR

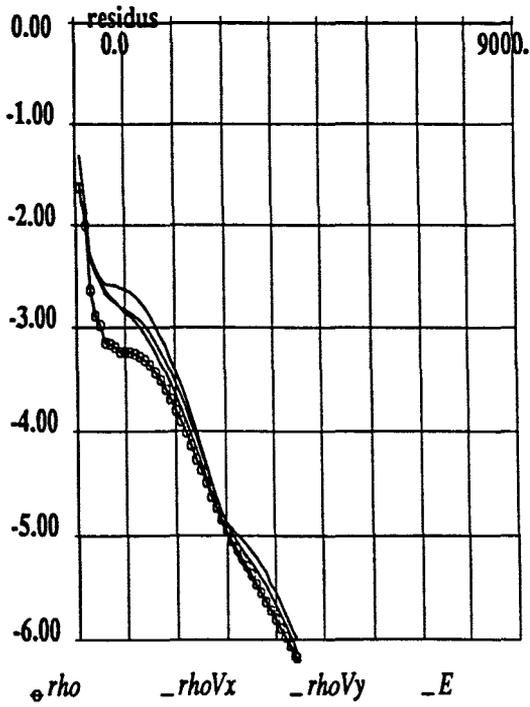
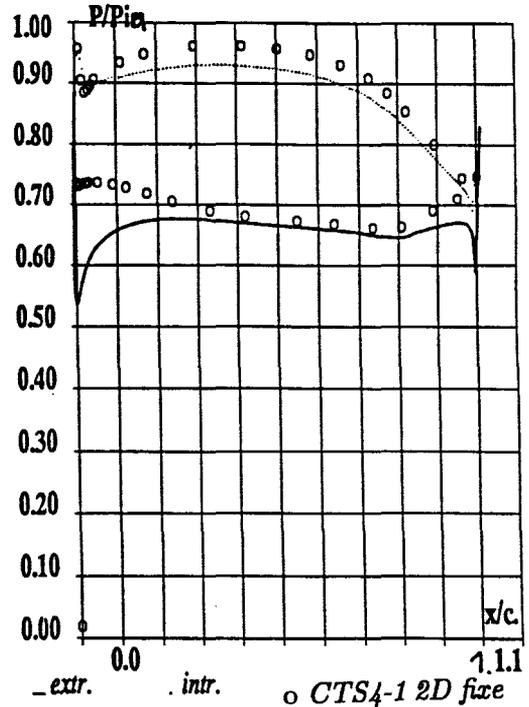


DIAGRAMME DE CONVERGENCE



REPARTITION DE PRESSION

Figure 87 : Cas test CTS4-5.
Roue mobile turbine 2.5D hors adaptation.
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1.

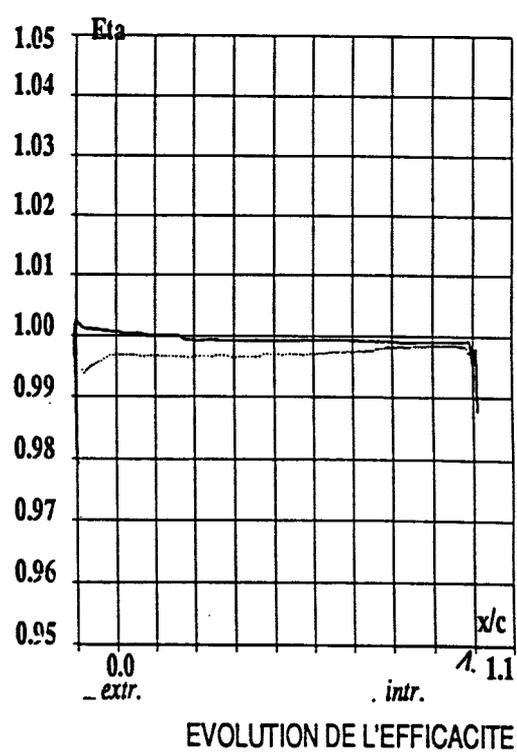
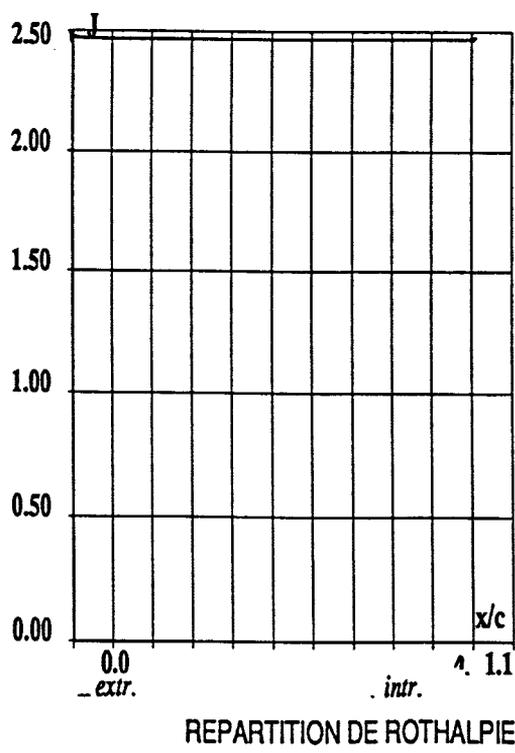
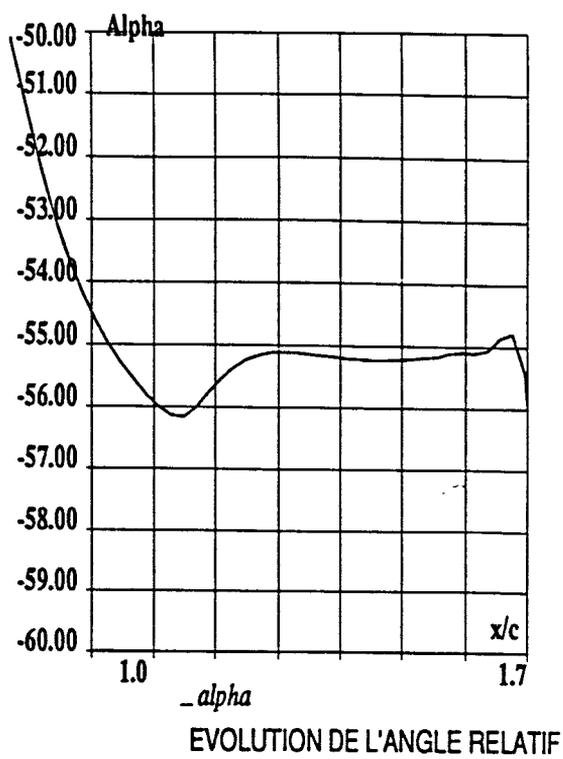
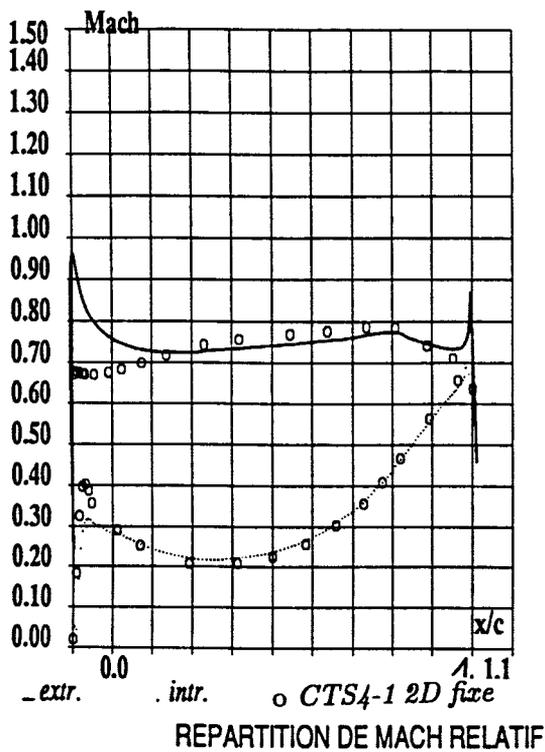


Figure 88 : Cas test CTS4-5.
Roue mobile turbine 2.5D hors adaptation.
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1.

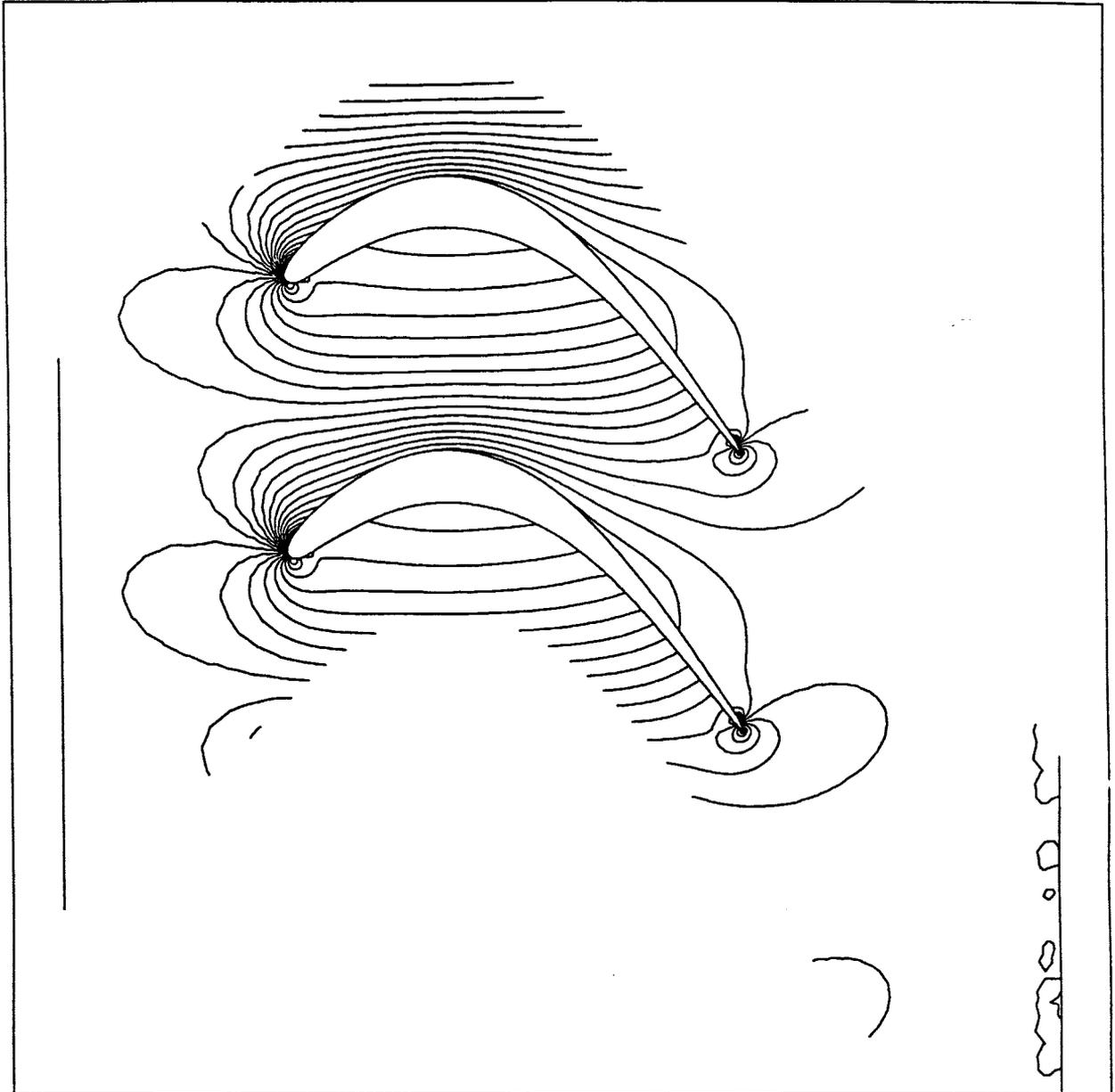


Figure 89 : Cas test CTS4-5.
Roue mobile turbine 2.5D hors adaptation.
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1.
Répartition des isovaleurs de pression $1. - \frac{p}{p_i}$.
Delta = 0.03.

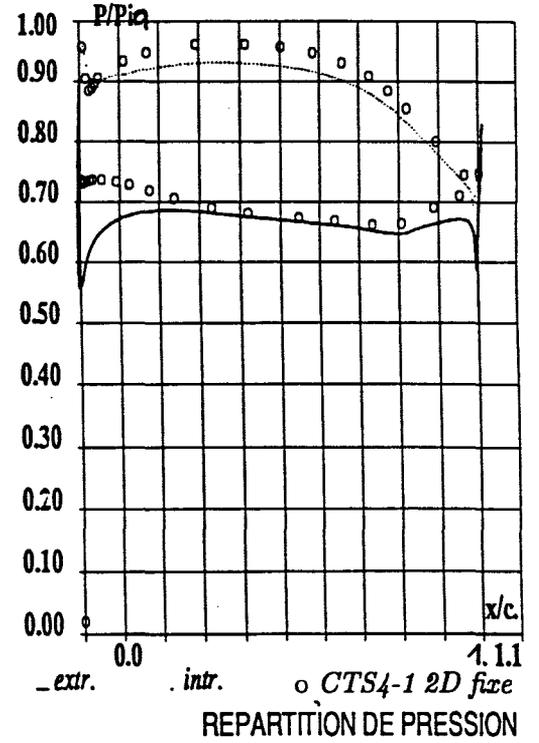
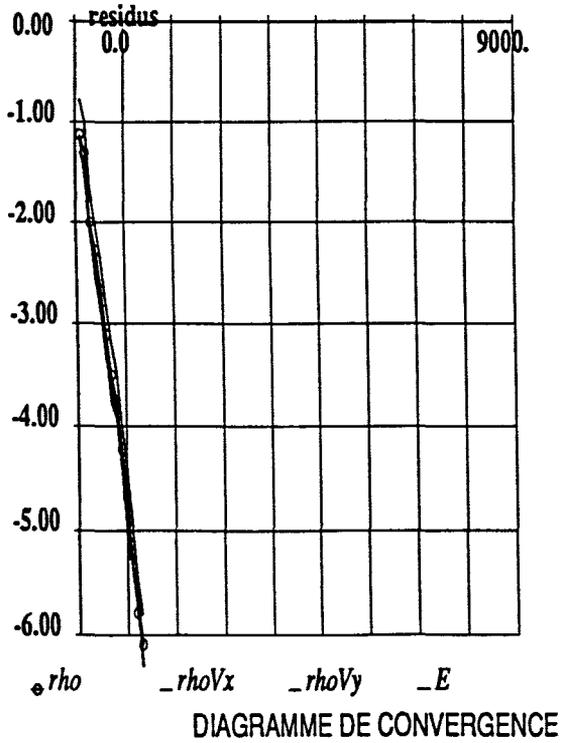
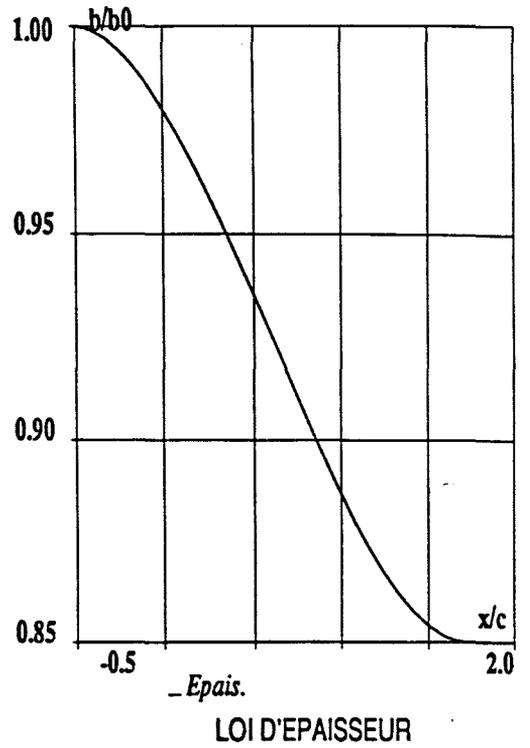
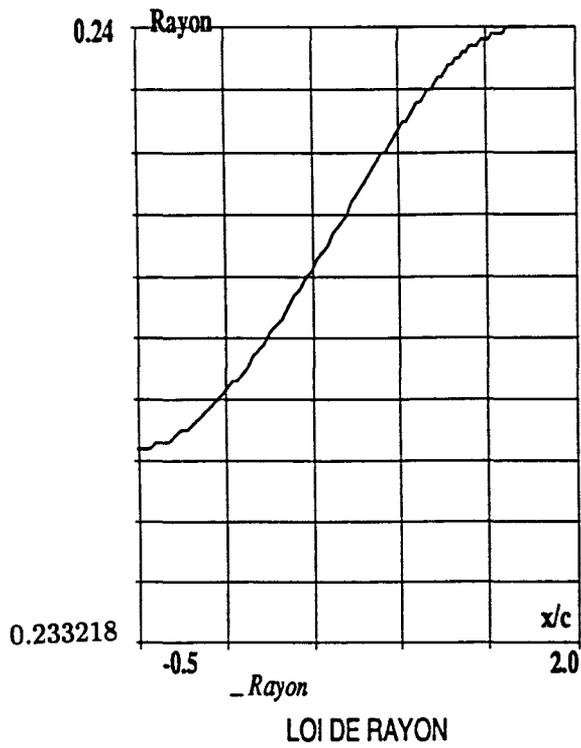


Figure 90 : Cas test CTS4-5.
 Roue mobile turbine 2.5D hors adaptation.
 Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.

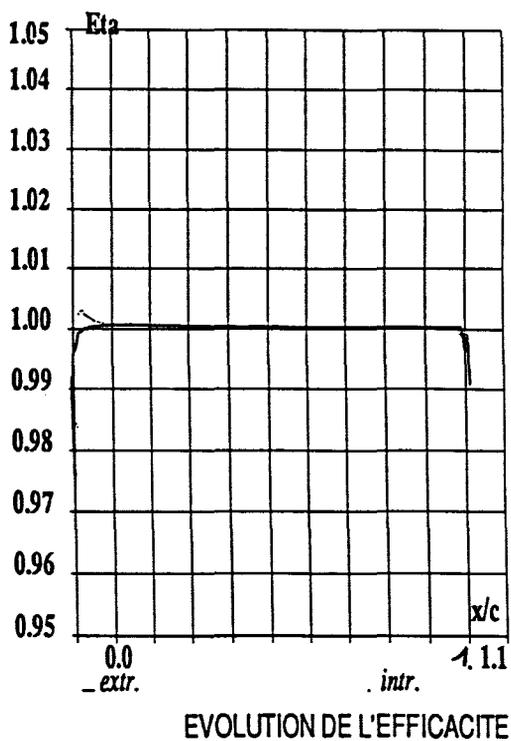
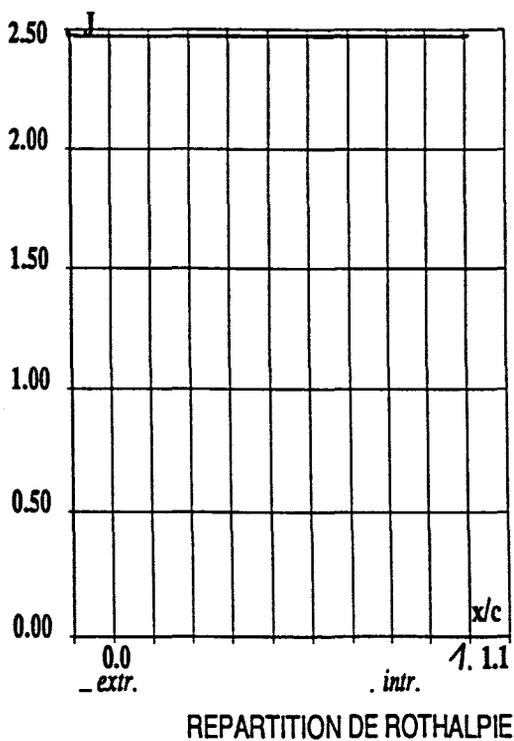
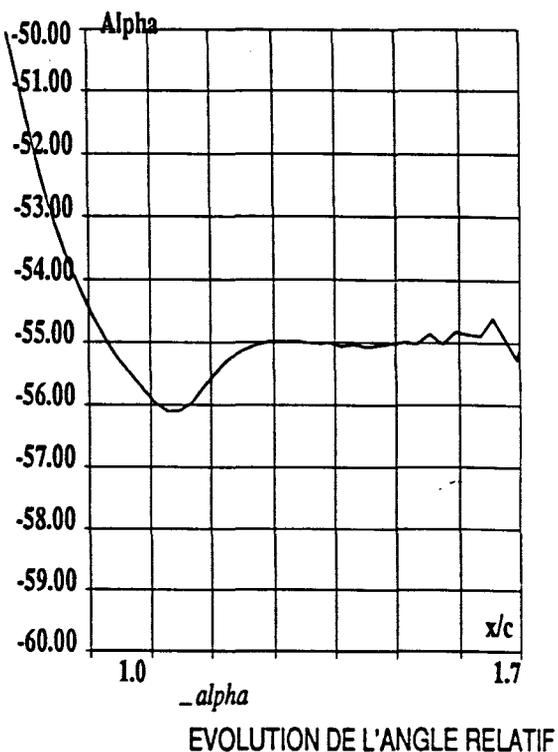
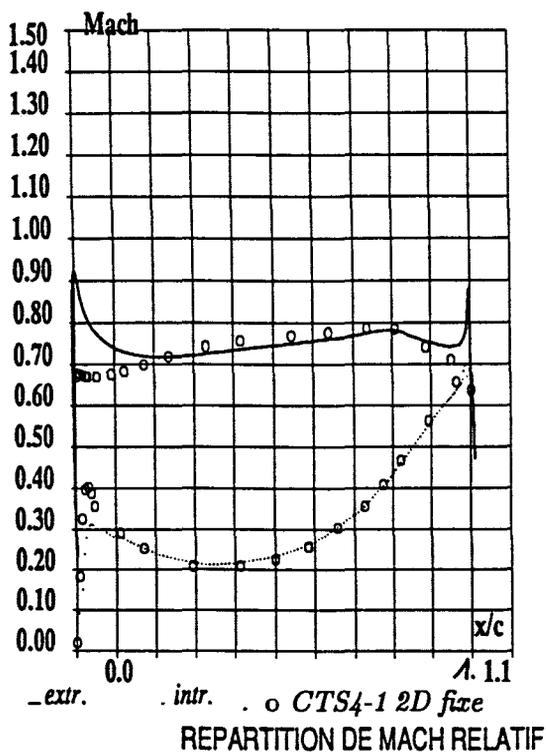


Figure 91 : Cas test CTS4-5.
Roue mobile turbine 2.5D hors adaptation.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.

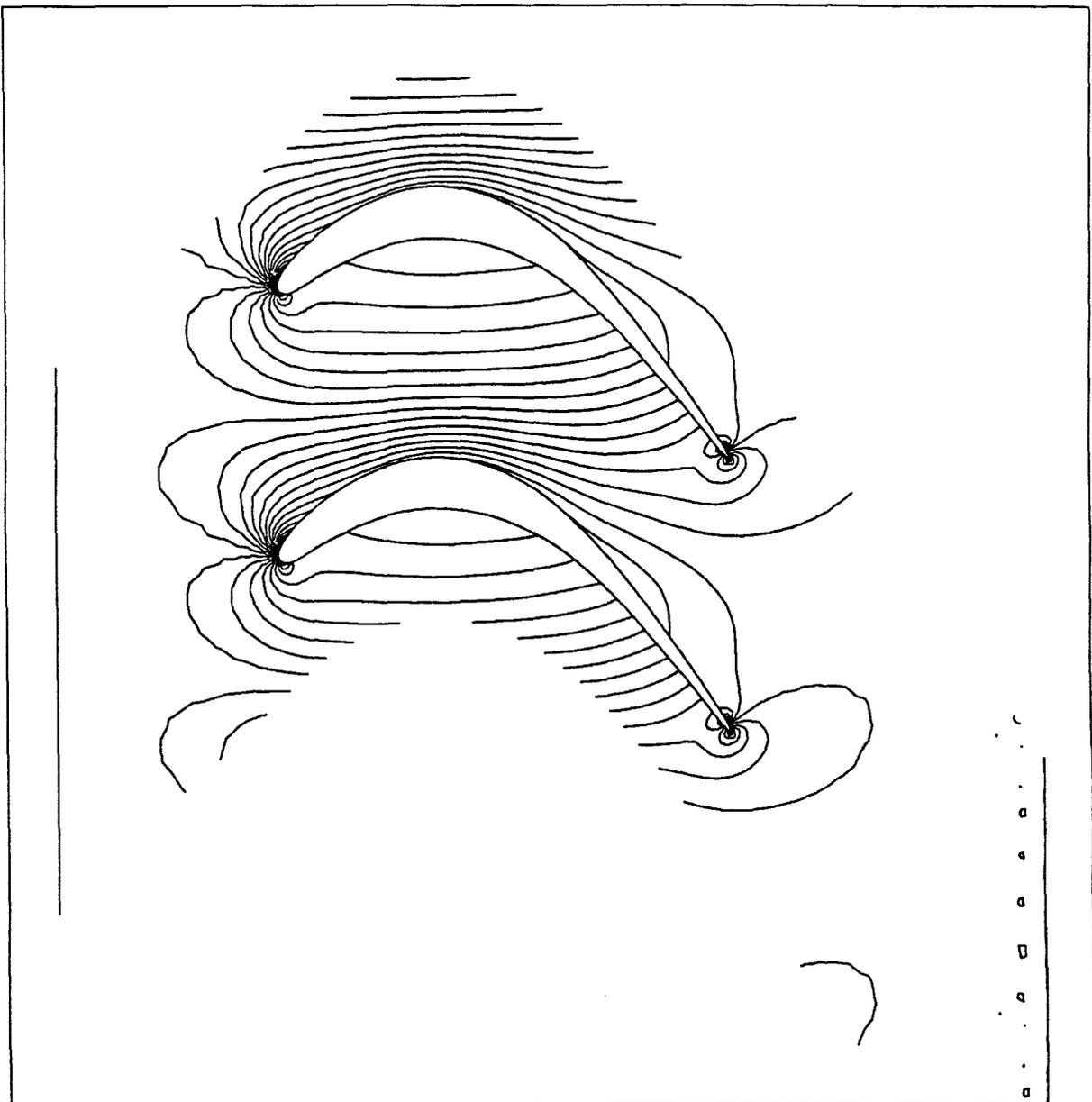
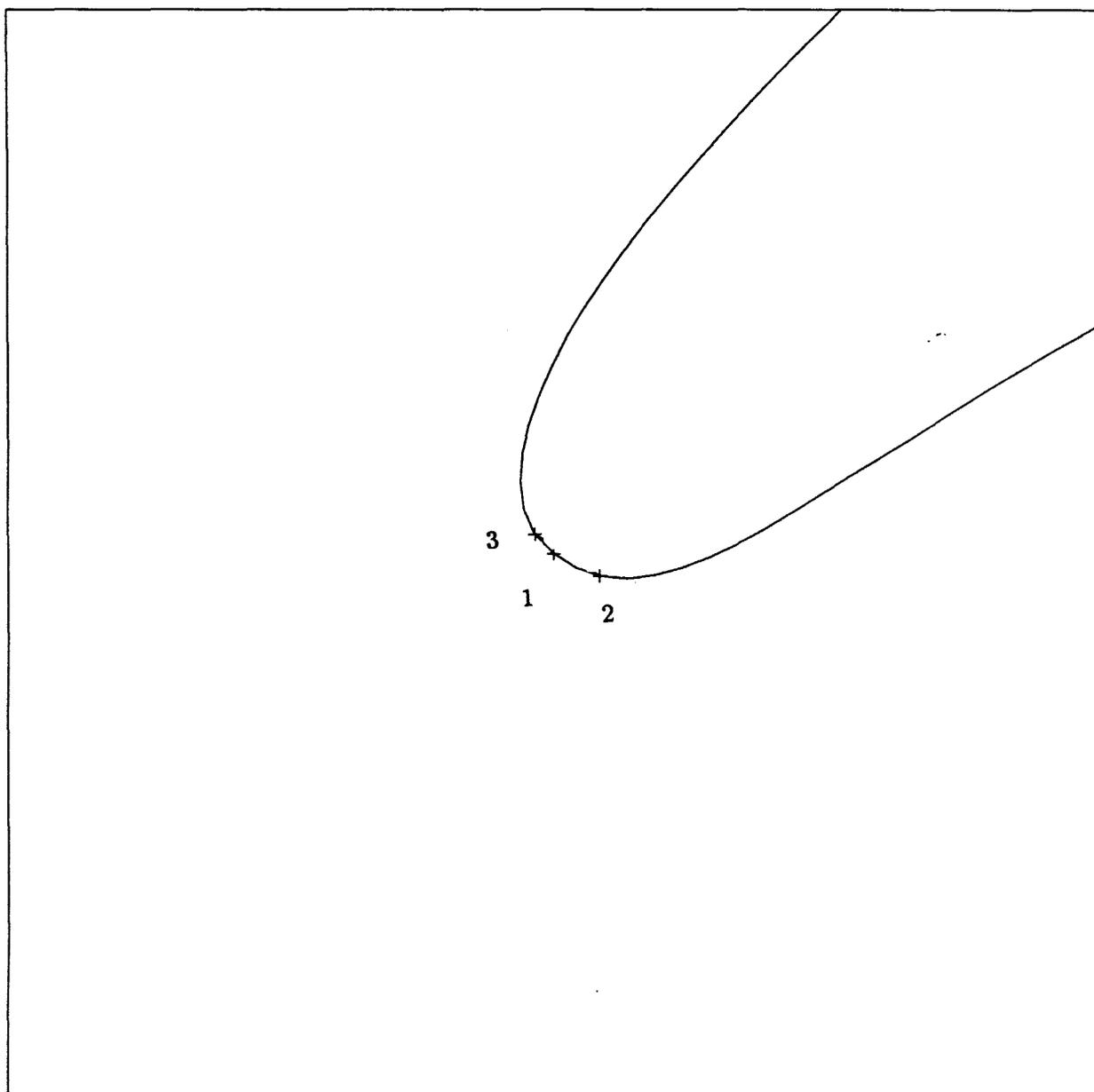


Figure 92 : Cas test CTS4-5.
Roue mobile turbine 2.5D hors adaptation.
Code avec viscosité artificielle SCHEMA2.
Répartition des isovaleurs de pression $1 - \frac{P}{P_i}$.
 $\Delta = 0.03$.



1 - Cas test CTS4-1, cas aubage fixe en grille.

2 - Cas test CTS4-4, cas aubage mobile de turbine avec loi d'évolution de veine.

3 - Cas test CTS4-5, cas aubage mobile de turbine avec loi d'évolution de veine hors adaptation.

Figure 93 : Cas test CTS4 -1, -2, -3, -4, -5.
Localisation du point d'arrêt.

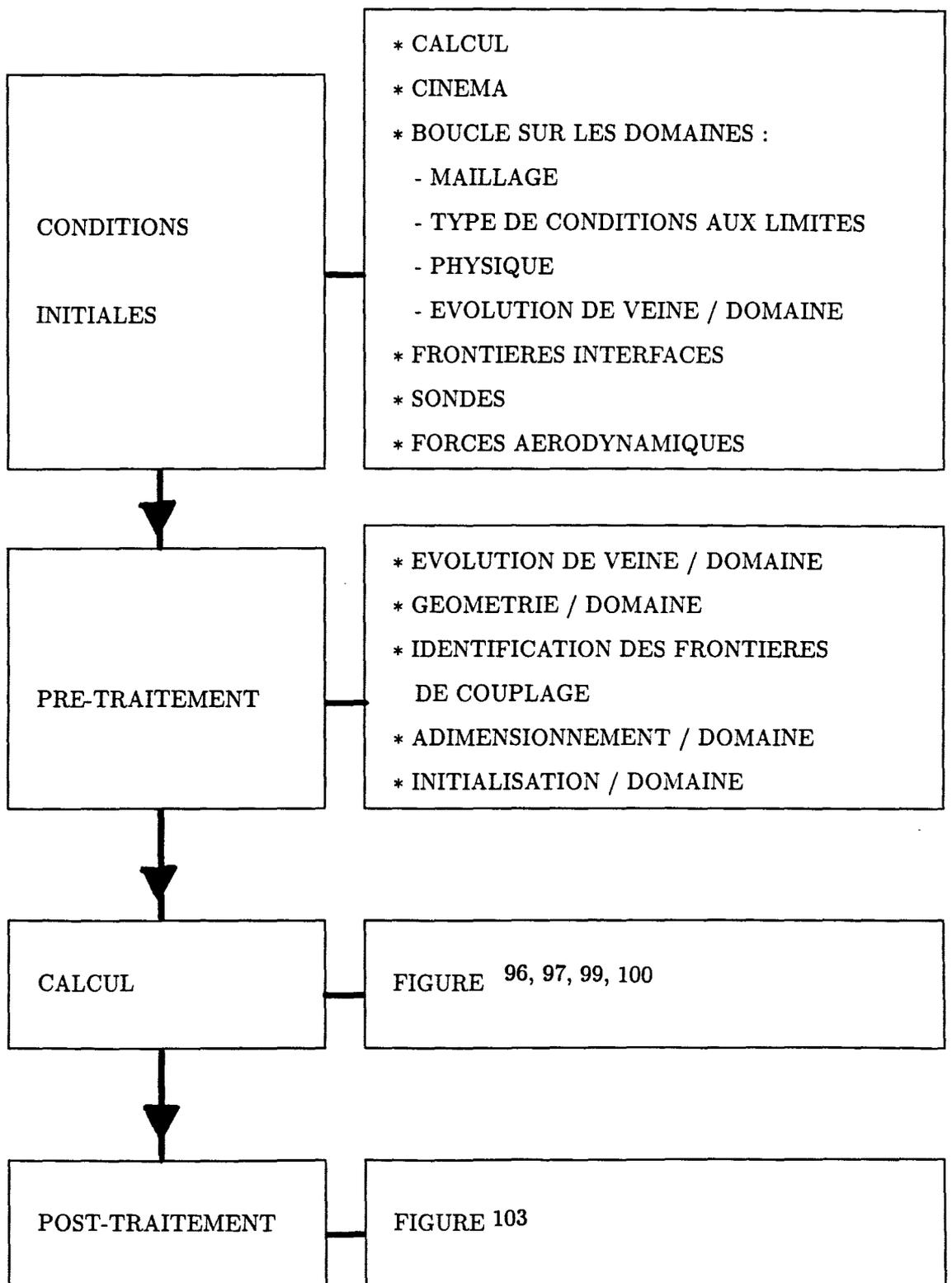


Figure 94 : Modules du SCHEMA1-1 et -2 des conditions initiales et pré-traitement.

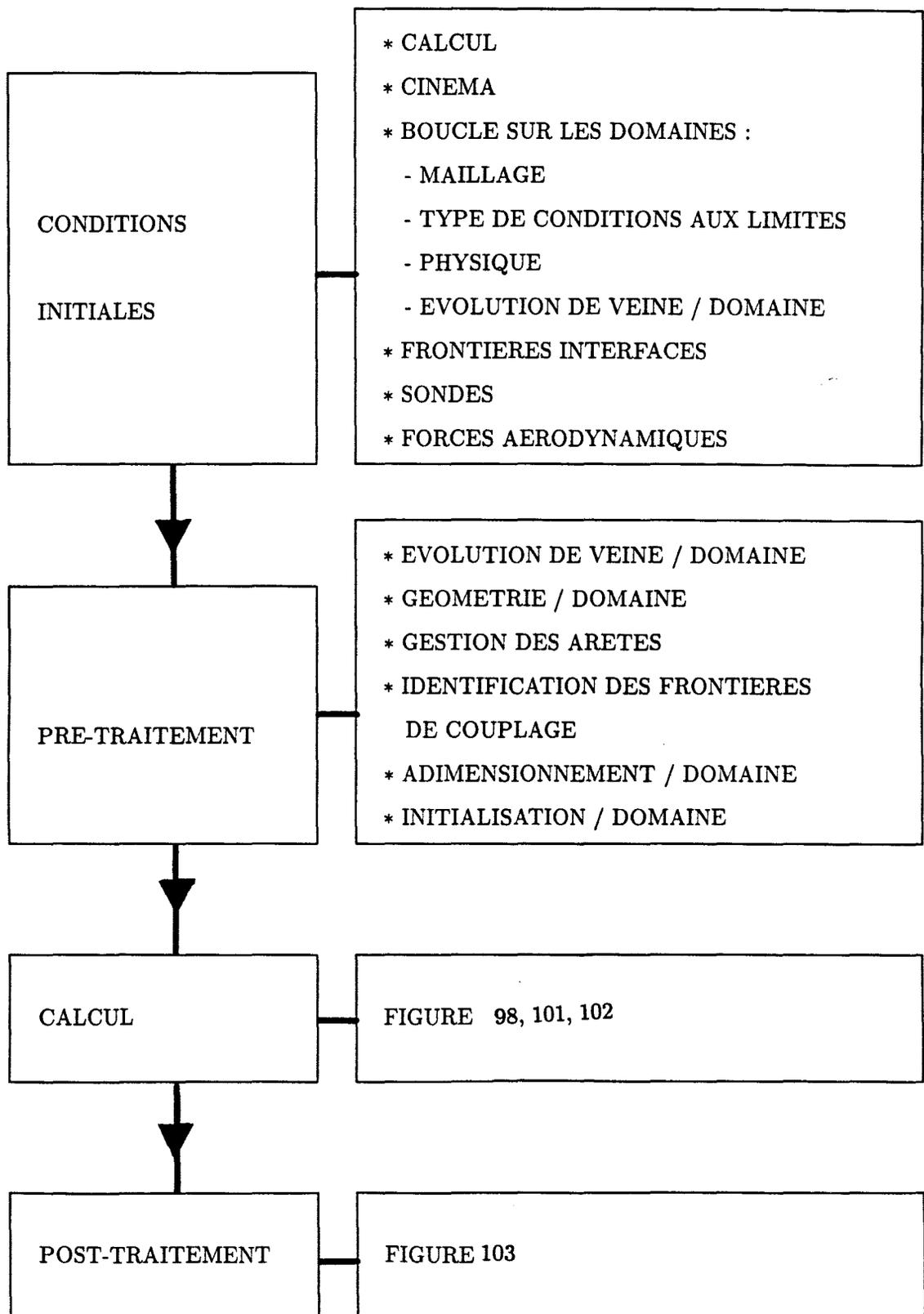


Figure 95 : Modules du SCHEMA2-1 et -2 des conditions initiales et pré-traitement.

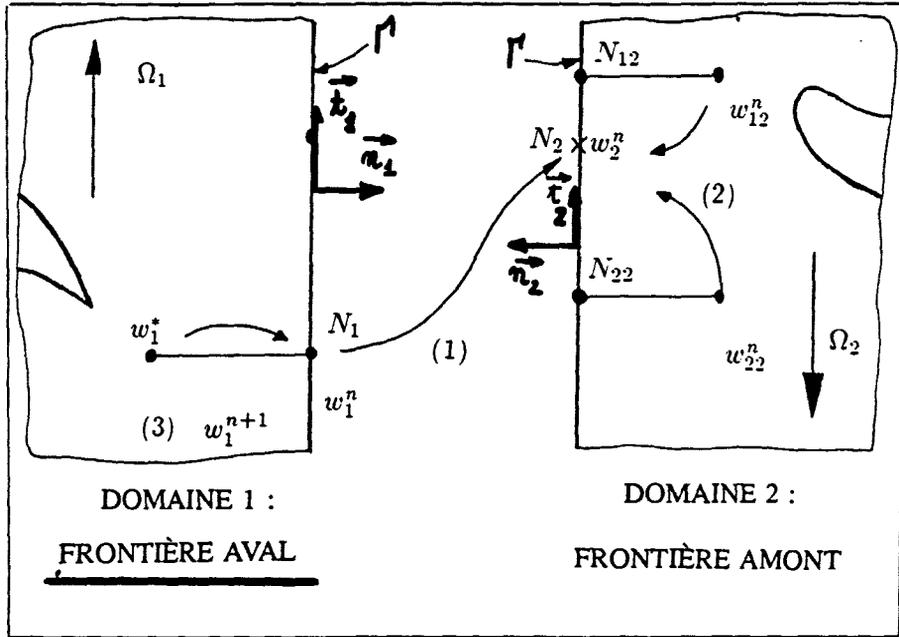
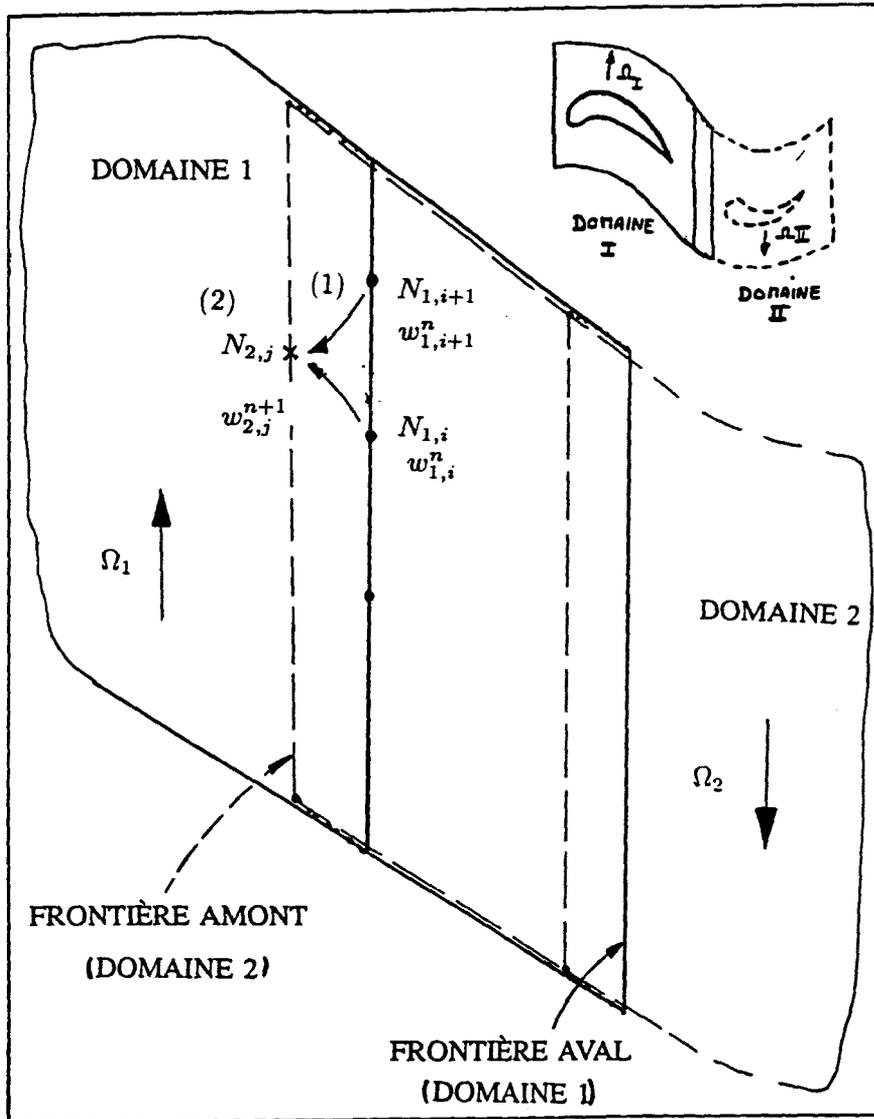


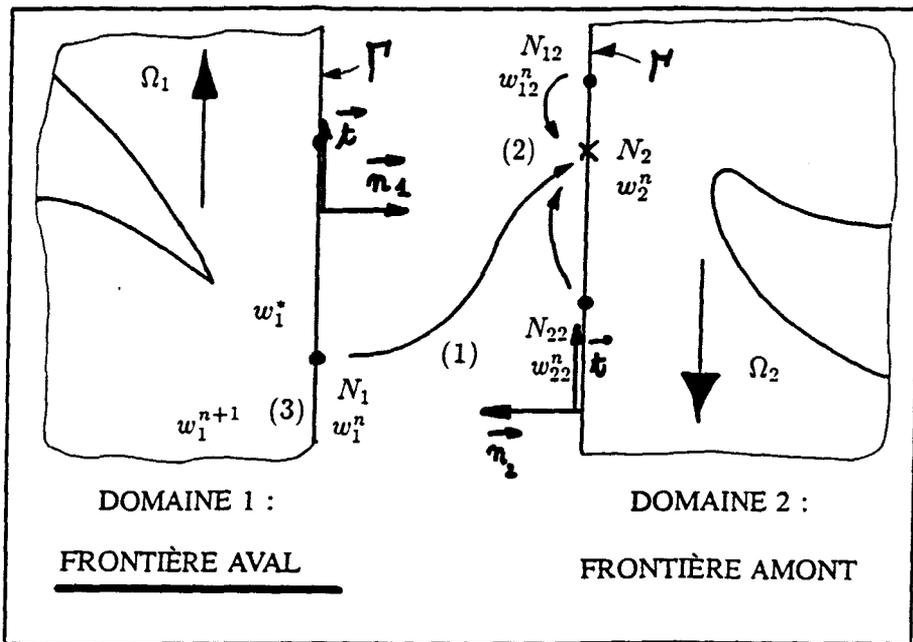
Figure 96 : Cas des domaines contigus.
Principe du traitement sous "forme forte" de la frontière aval.



(1) INTERPOLATION DES VALEURS DU CHAMP CONNU AUX NOEUDS DE LA LIGNE INTERNE DU DOMAINE 1

(2) ON OBTIENT DIRECTEMENT LE CHAMP w^{n+1}

Figure 97 : Principe de recouvrement partiel des domaines.



- (1) CHAMP w_1^* :
VALEUR SCHEMA OBTENUE MAINTENANT PAR LE CALCUL,
SANS EXTRAPOLATION.
- (2) CHAMP w_2^n :
VALEUR INTERPOLEE LINEAIREMENT SUR
LA FRONTIERE AMONT DU DOMAINE CORRESPONDANT.
- (3) CHAMP w_1^{n+1} :
APPLICATION DES RELATIONS DE COMPATIBILITEES.

Figure 98 : Cas des domaines contigus.
Principe du traitement sous "forme faible" de la frontière aval.

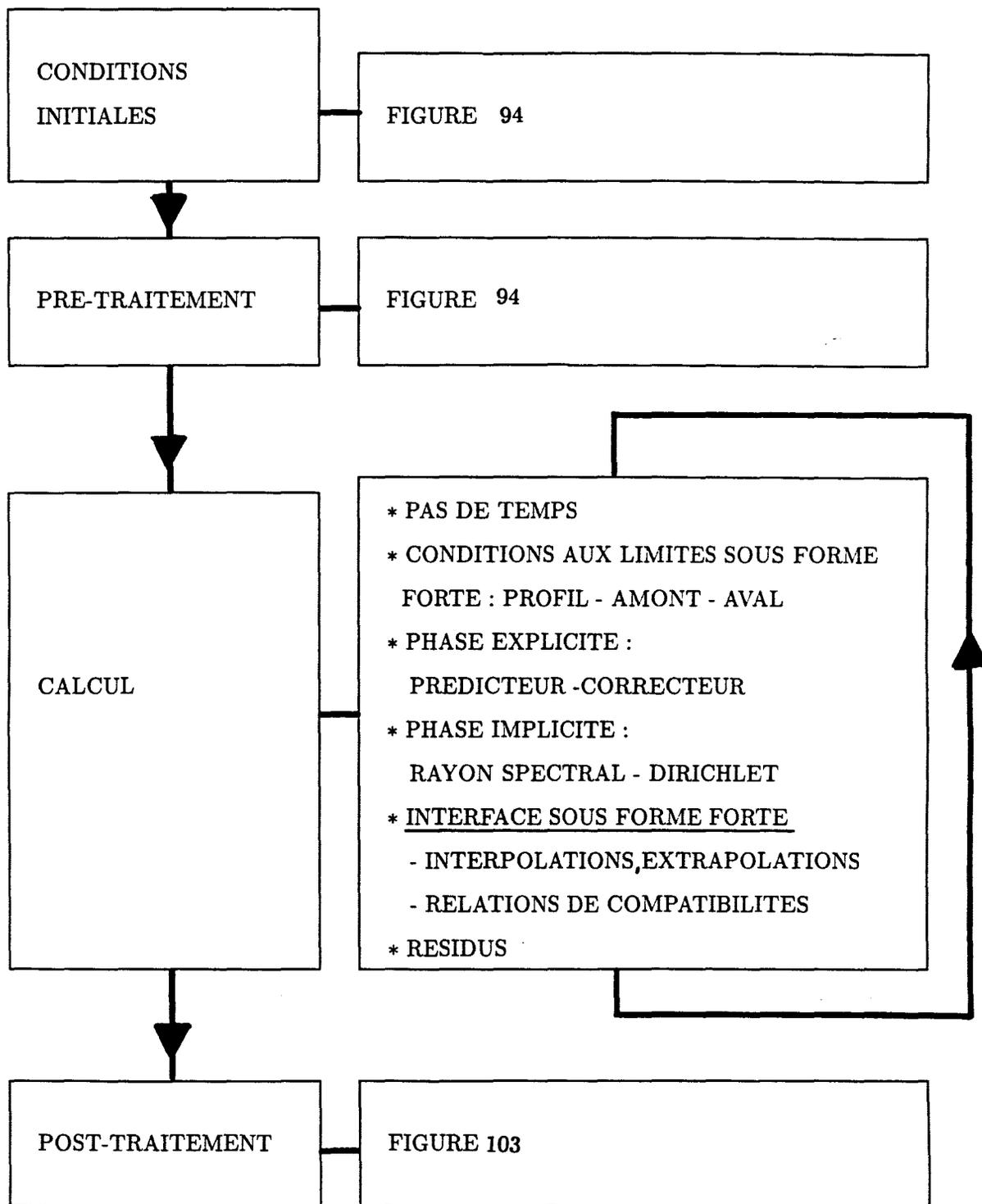


Figure 99 : Algorithme de couplage, code SCHEMA1-1.

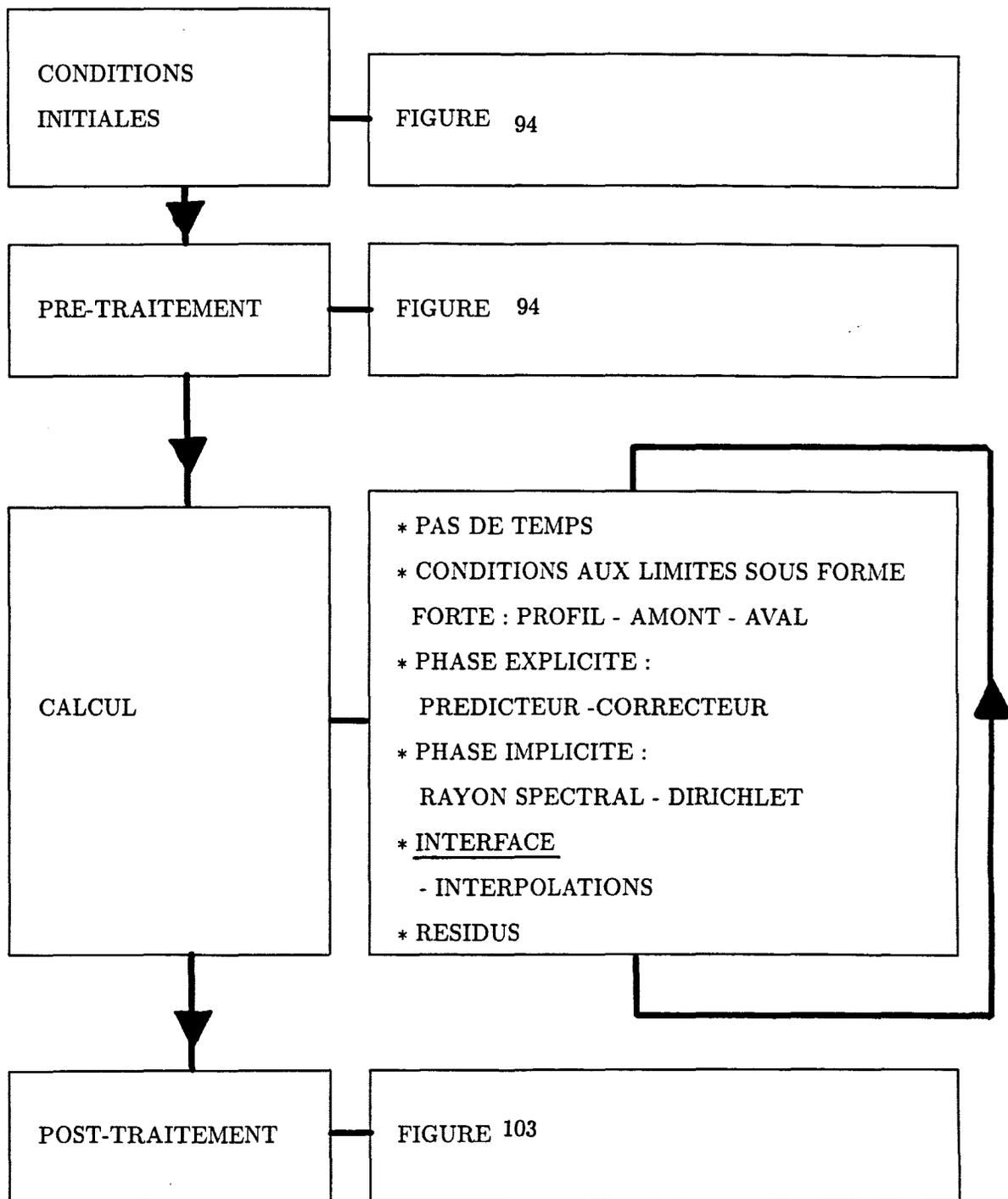


Figure 100 : Algorithme de couplage par recouvrement, code SCHEMA1-2.

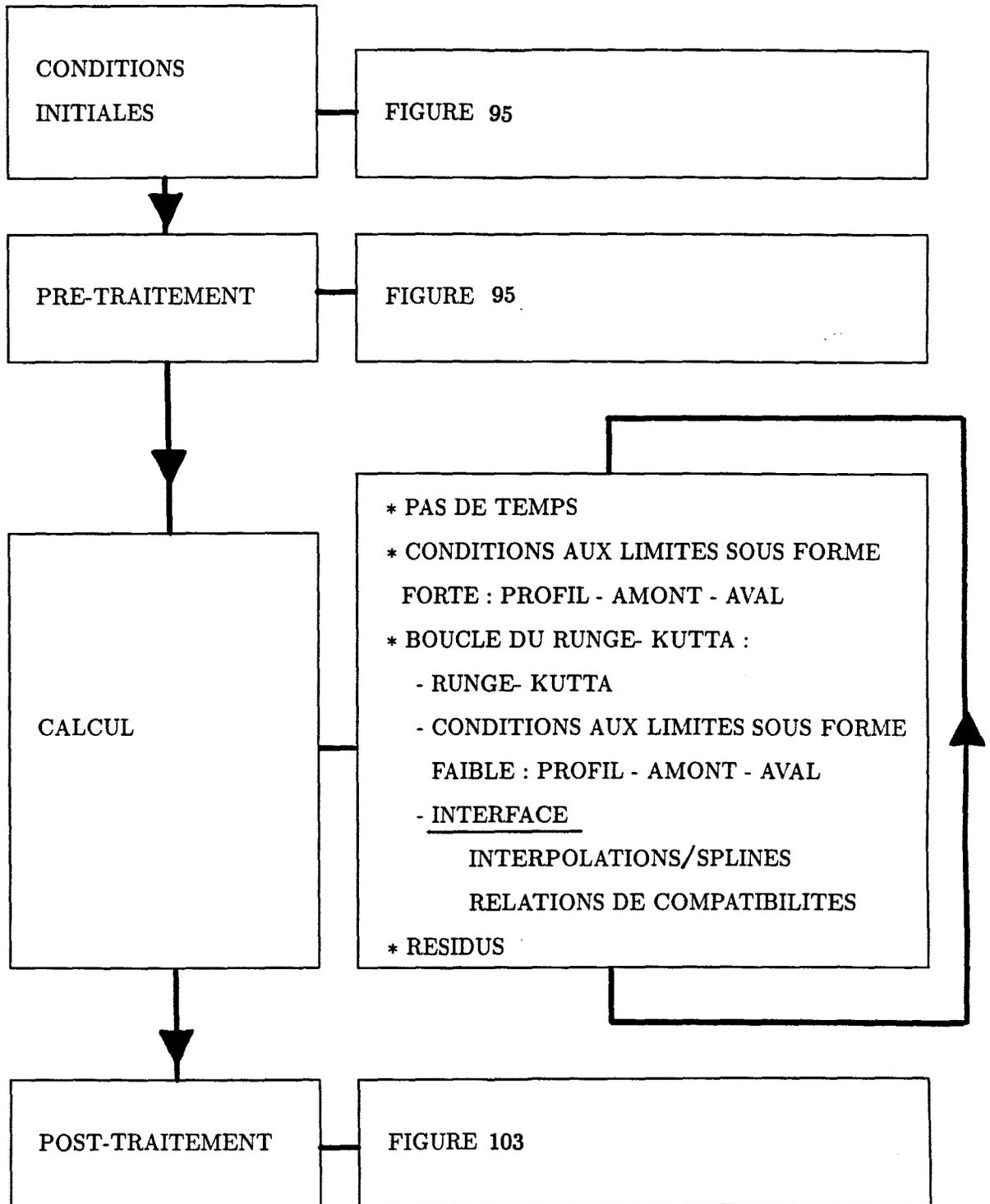


Figure 101 : Algorithme de couplage explicite, code SCHEMA2-1.

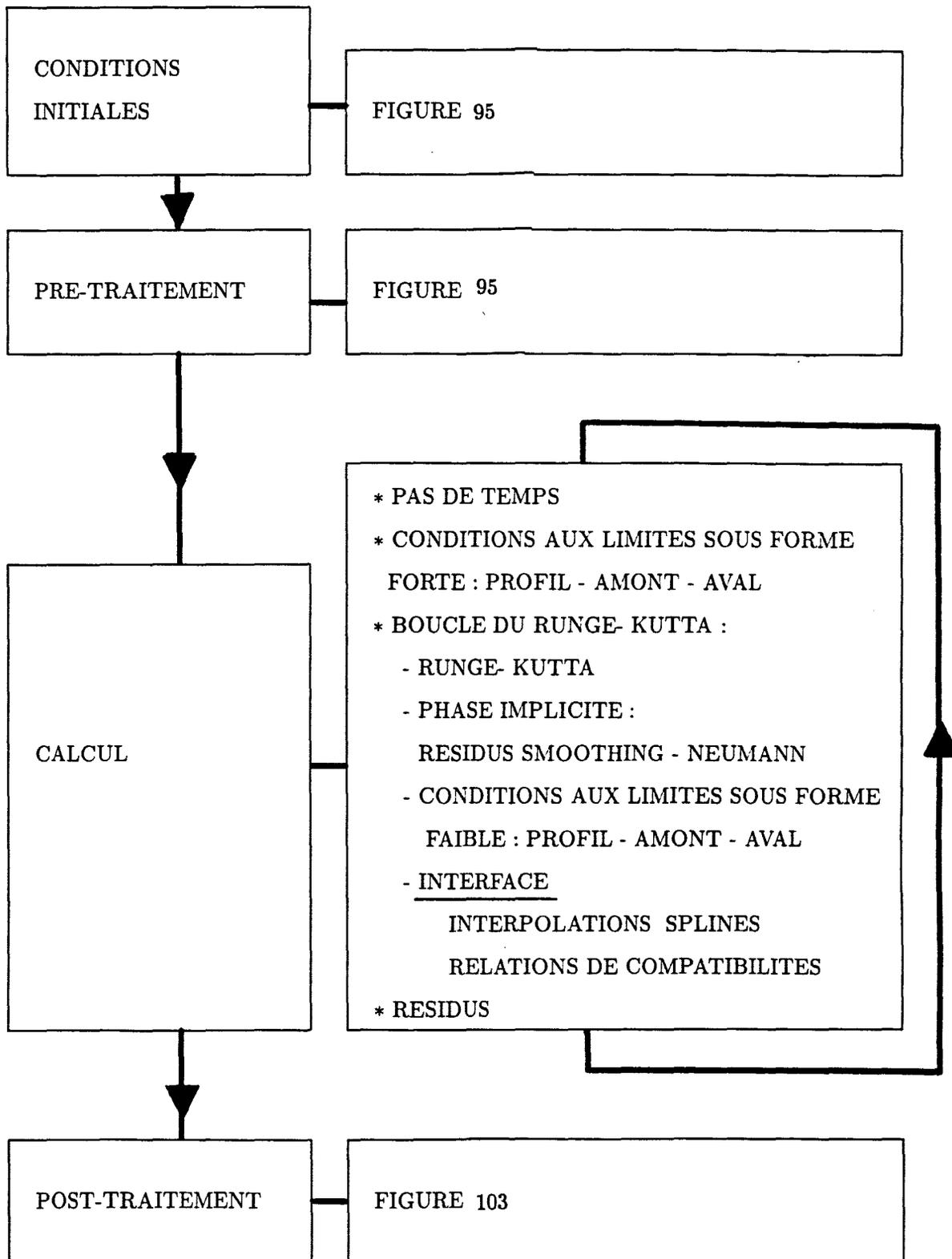


Figure 102 : Algorithme de couplage implicite, code SCHEMA2-2.

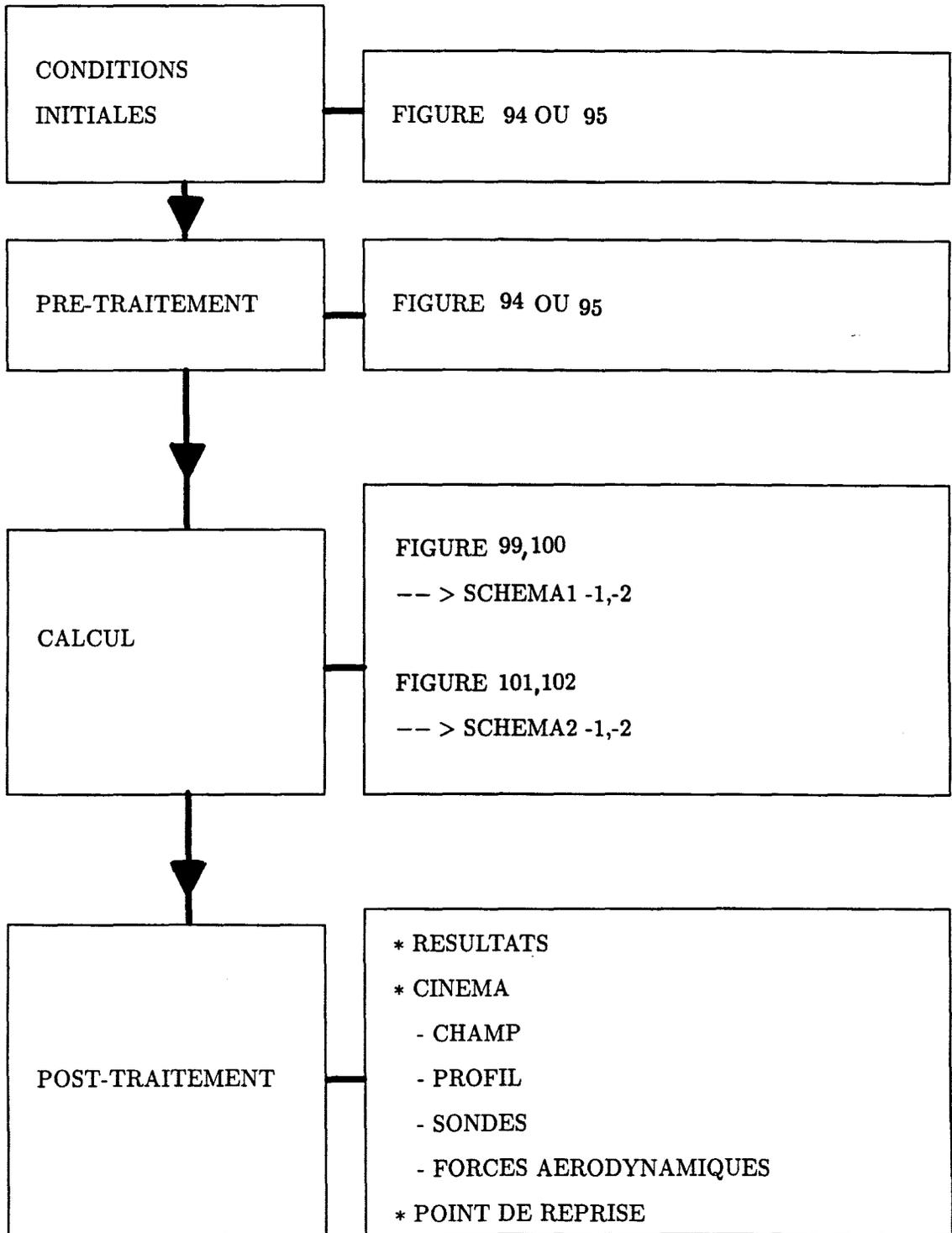


Figure 103 : Modules des SCHEMA1 et 2 (-1 et -2) de post-traitement.

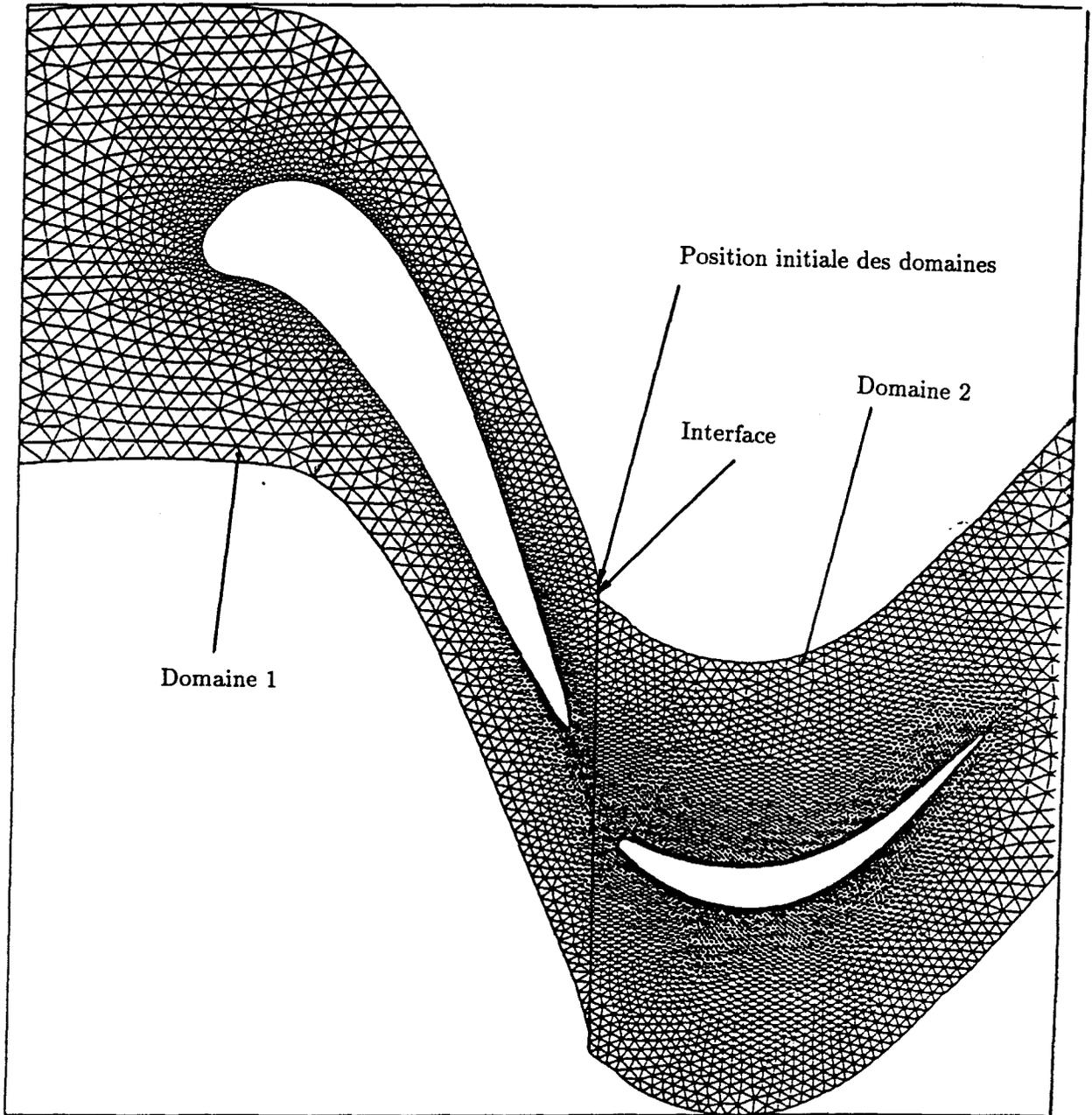


Figure 104 : Cas test CTINS1-1
Maillages des domaines contigus, 1×1 canaux, 2483×5513 noeuds.
Simulation du décalage des domaines.

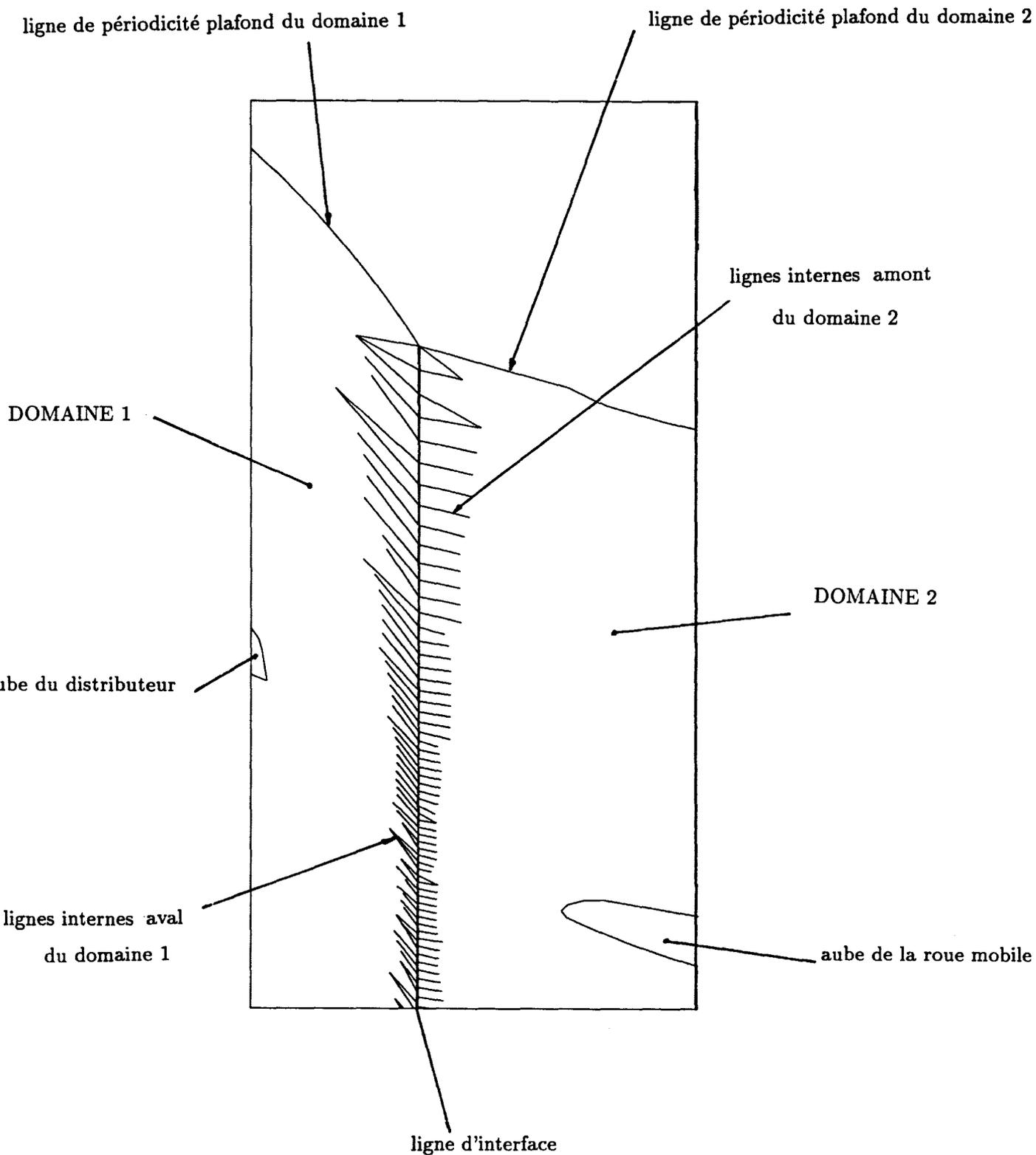


Figure 105 : Cas test CTINS1-1
 Code sans viscosité artificielle SCHEMA1-1.
 Vue partielle et zoom (suivant x uniquement) des lignes internes des domaines.

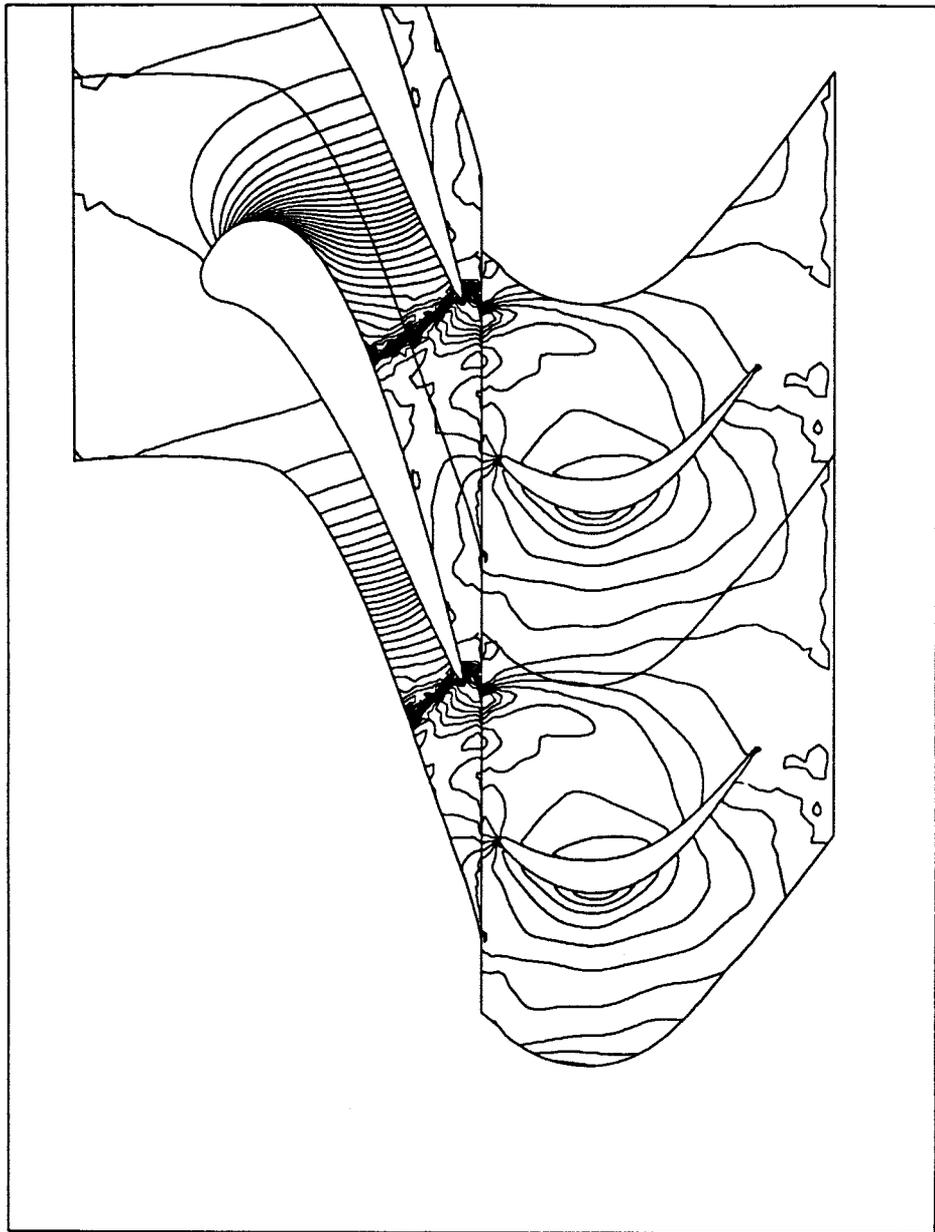


Figure 106 : Cas test CTINS1-1.
Résultat de couplage.
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1-1.
Répartition des isovaleurs de pression $1. - \frac{p}{p_i}$.
 $\Delta = 0.02$.
Distorsion des chocs à l'interface.

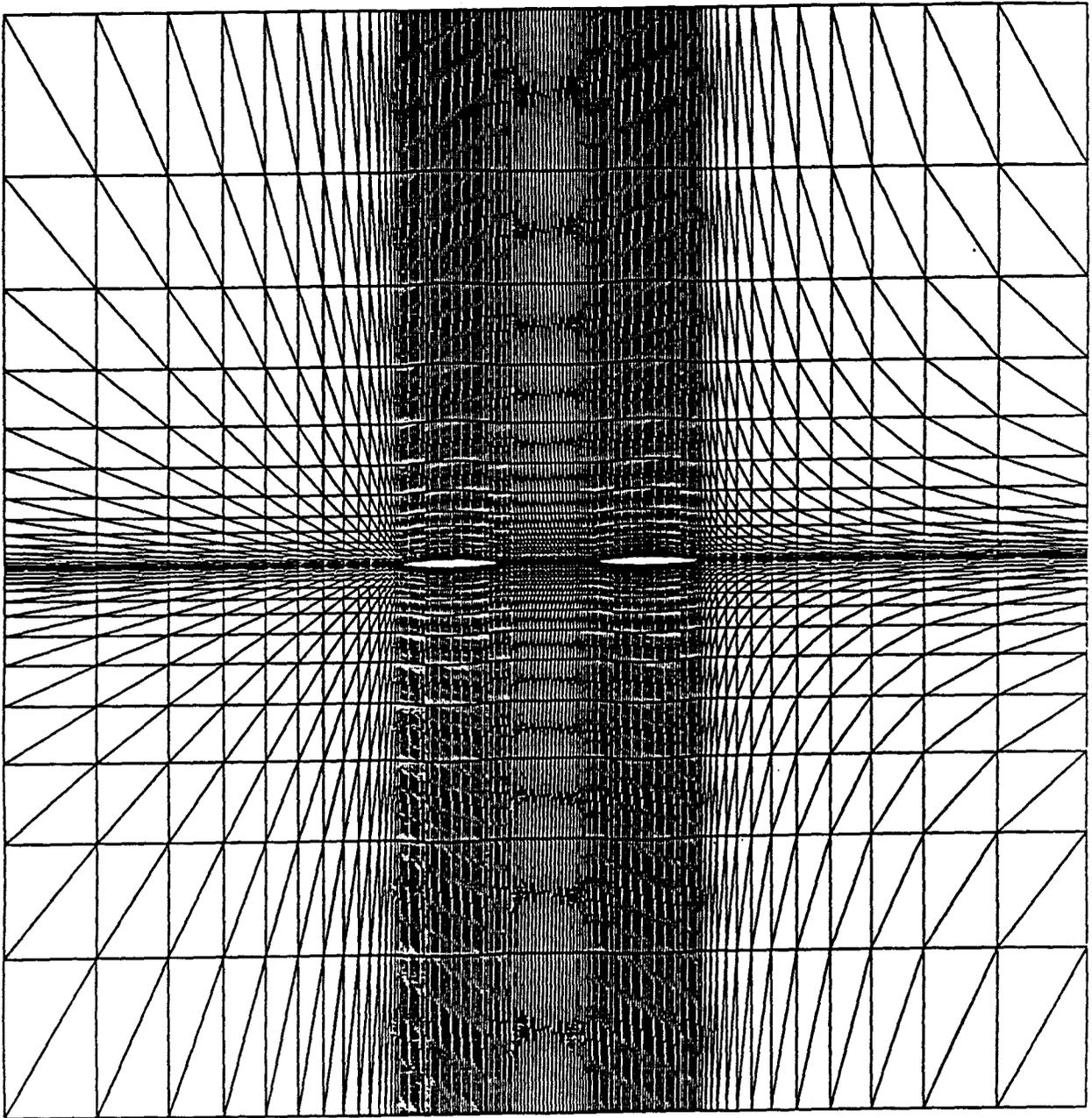


Figure 107 : Cas test CTS5-1.
Maillages du domaine complet 4449 noeuds, 8400 éléments.

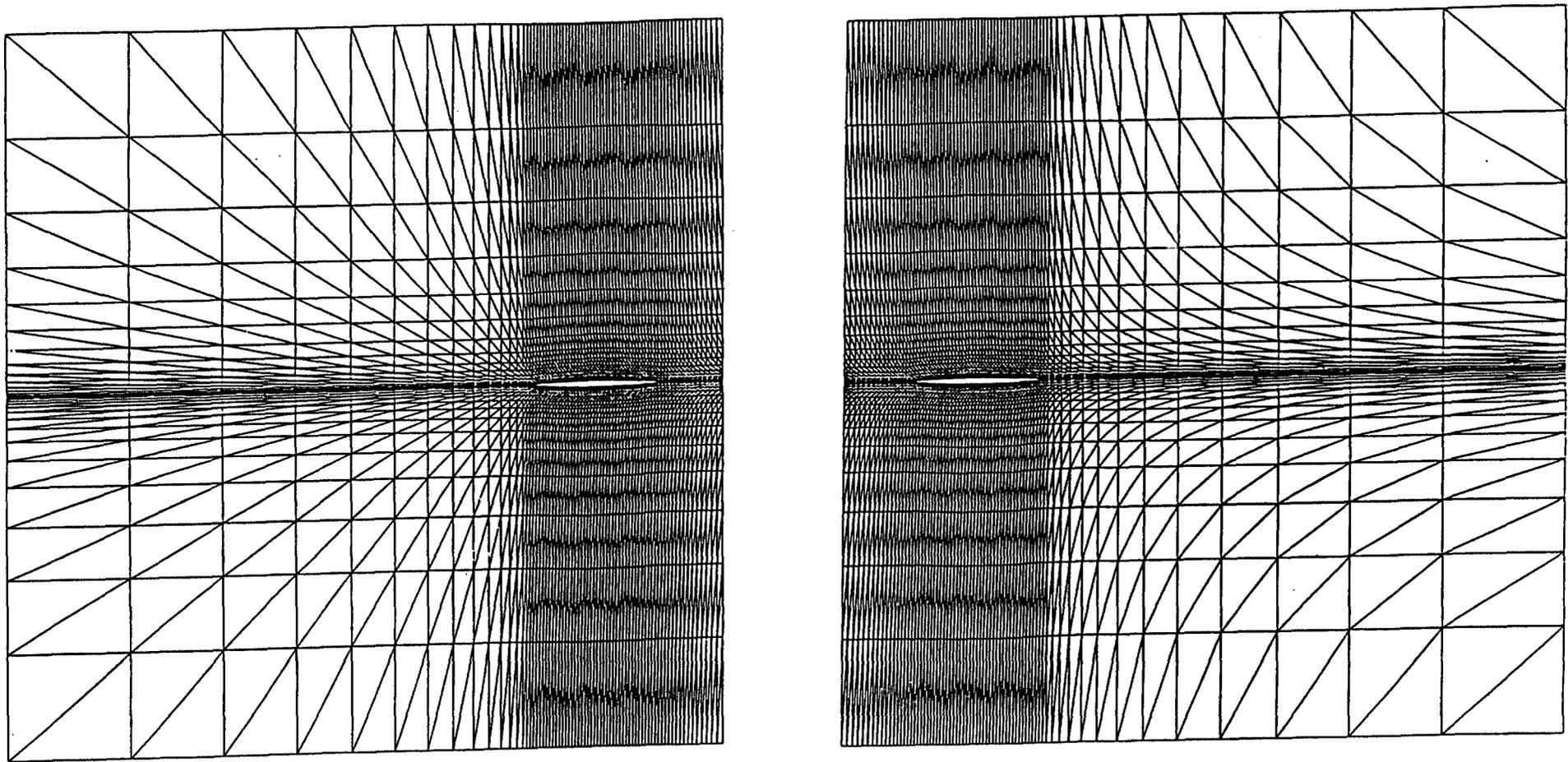


Figure 108 : Cas test CTS5-2.
Maillages des demi-domaines 2×2240 noeuds, 2×4200 éléments.

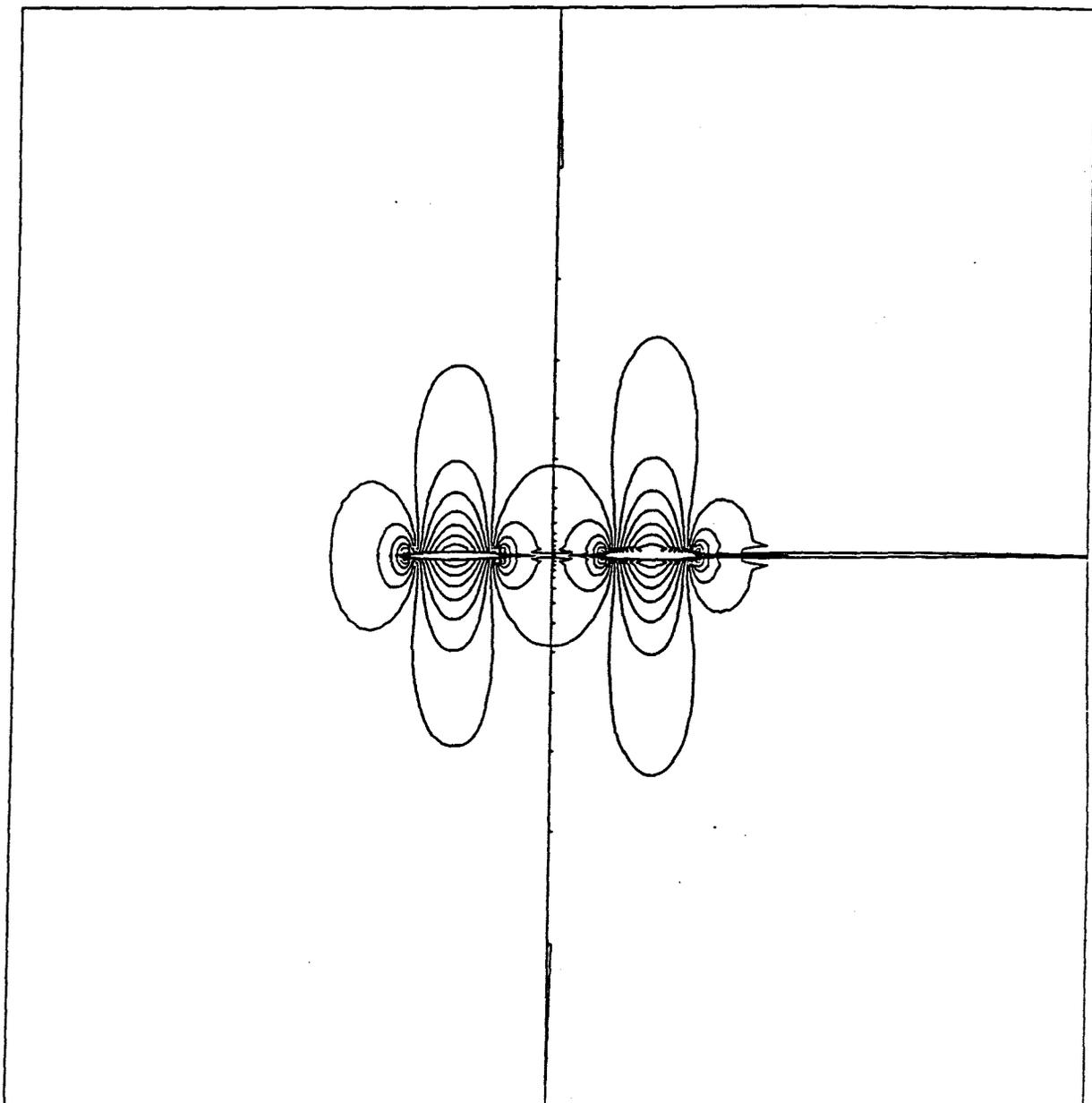
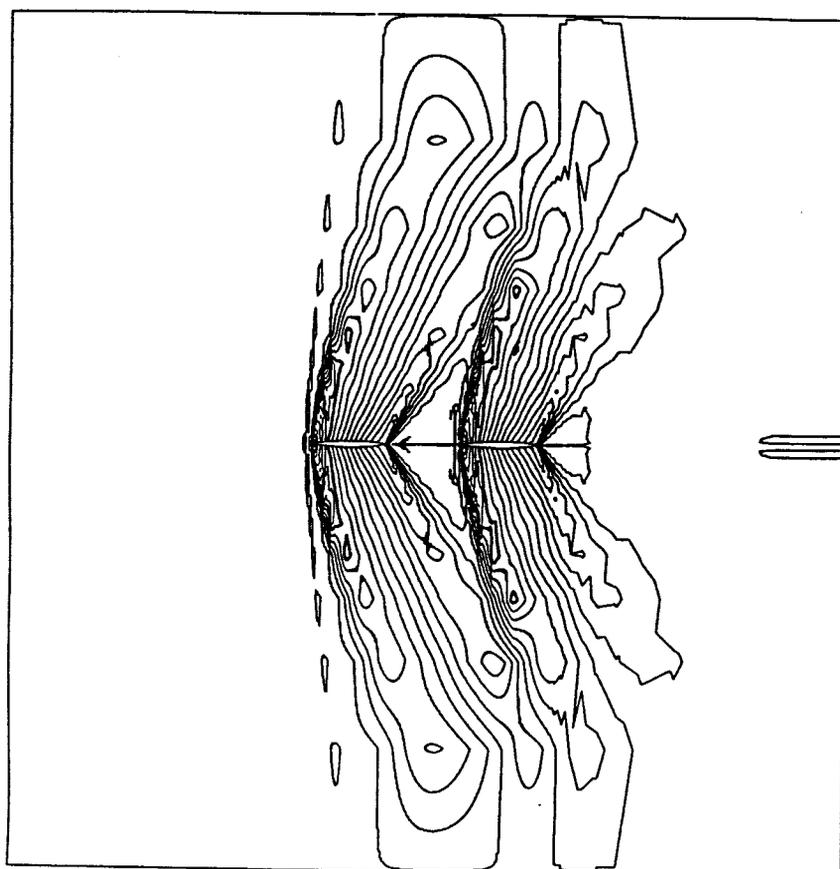
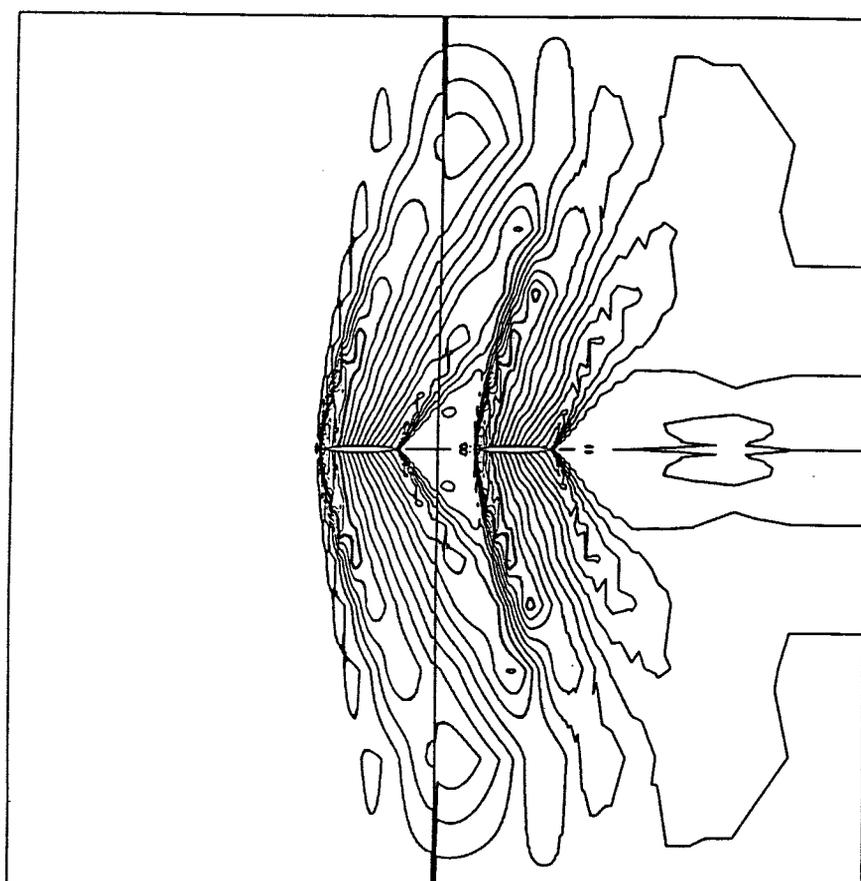


Figure 109 : Cas test CTS5-2.
Interaction stator-stator subsonique.
Code sans viscosité artificielle SCHEMA1-1.
Répartition des isovaleurs de Mach.
 $\Delta = 0.05$.



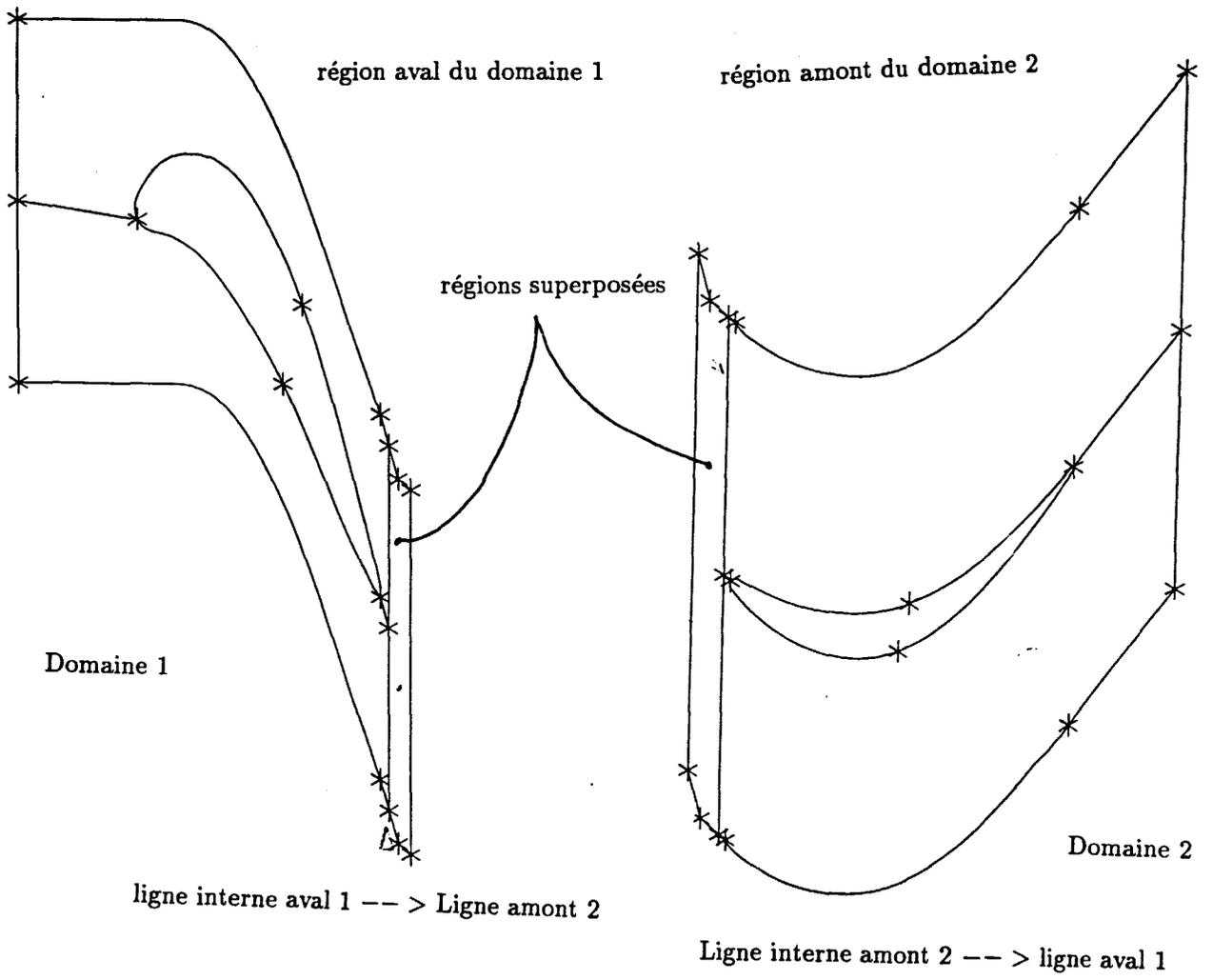
Configuration monodomain



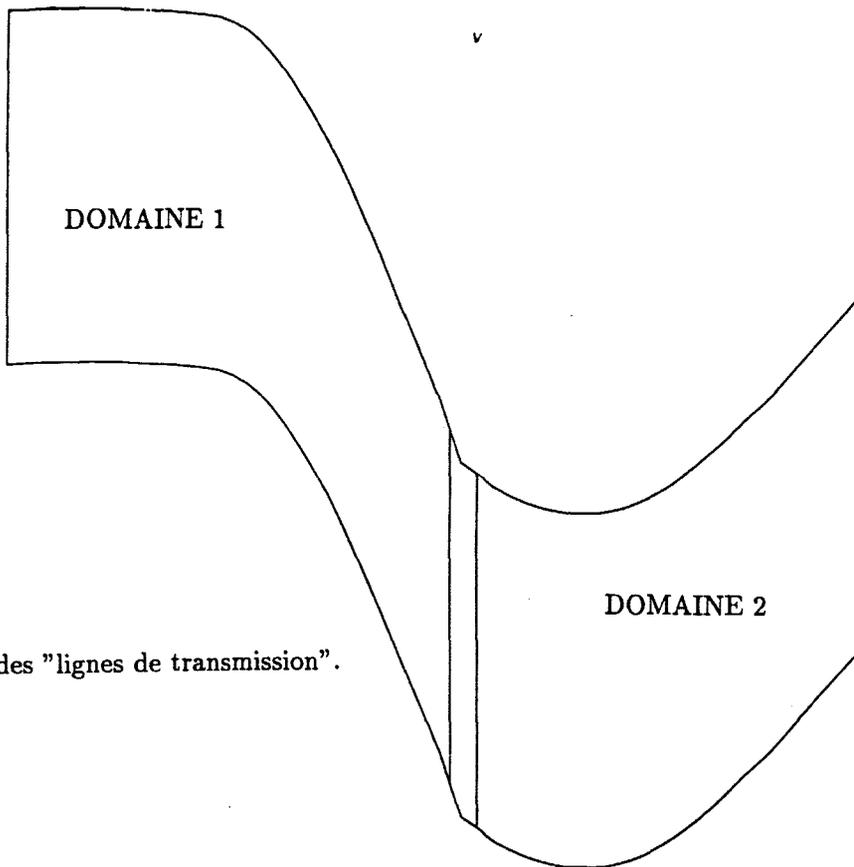
Configuration de couplage

distorsion au niveau de la frontière.

Figure 110 : Cas test CTS5-1 et CTS5-2.
 Interaction stator-stator supersonique.
 Code sans viscosité artificielle SCHEMA1-1.
 Répartition des isovalues de Mach.
 $\Delta = 0.02$.
 Distorsion des lignes à l'interface dans le cas CTS5-2.



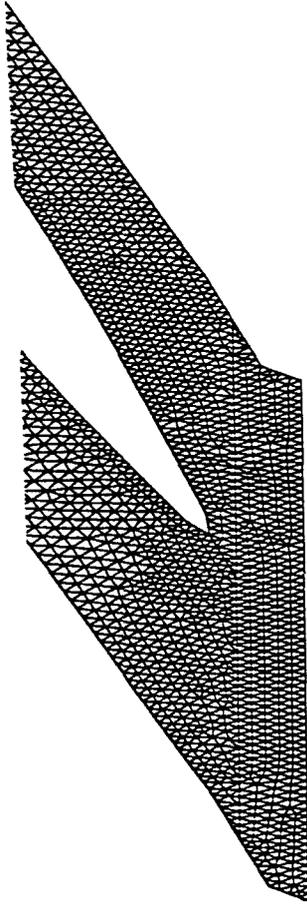
Topologie des deux domaines (NB. Les échelles ne sont pas respectées.)



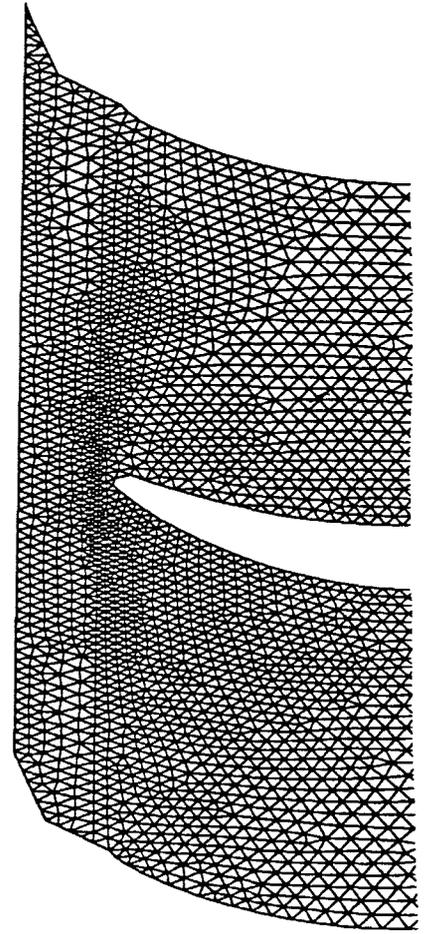
Correspondance axiale des "lignes de transmission".

Figure 111 : Cas test CTINS1-2.

Topologie des domaines en recouvrement partiel.



DOMAINE 1



DOMAINE 2

Figure 112 : Cas test CTINS1-2.
Cas des domaines en recouvrement partiel.
Vue partielle et zoom (suivant x uniquement)
des maillages des régions de recouvrement.
(NB. Les échelles ne sont pas respectées.)

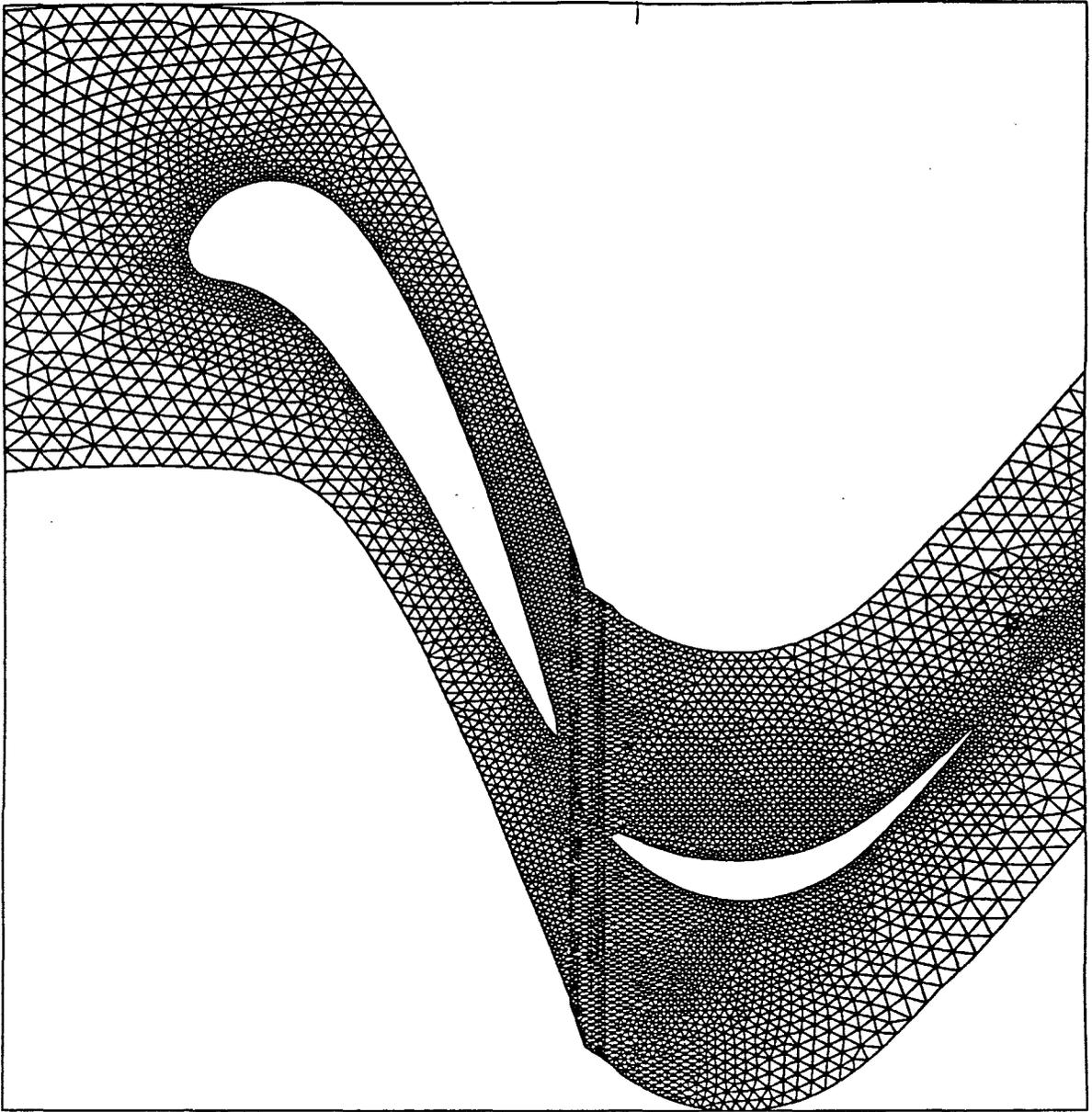


Figure 113 : Cas test CTINS1-2.
Maillages des domaines en recouvrement partiel, 2575 × 3203 noeuds.

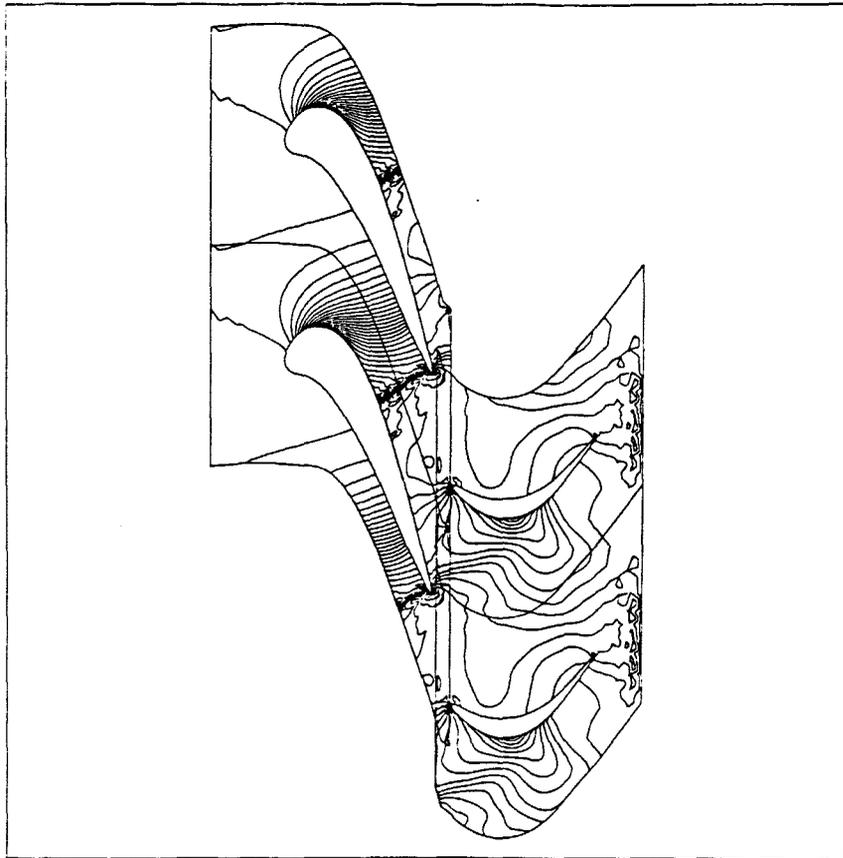


Figure 114 : Cas test CTINS1-2.
 Interaction rotor-stator en recouvrement partiel.
 Code sans viscosité artificielle SCHEMA1-2.
 Répartition des isovaleurs de pression 1. - $\frac{p}{p_i}$.
 Delta = 0.02.



Figure 115 : Cas test CTINS1-2.
 Interaction rotor-stator en recouvrement partiel.
 Code sans viscosité artificielle SCHEMA1-2.
 Vue partielle et zoom (suivant x uniquement).
 Répartition des isovaleurs de pression 1. - $\frac{p}{p_i}$
 au niveau de l'interface

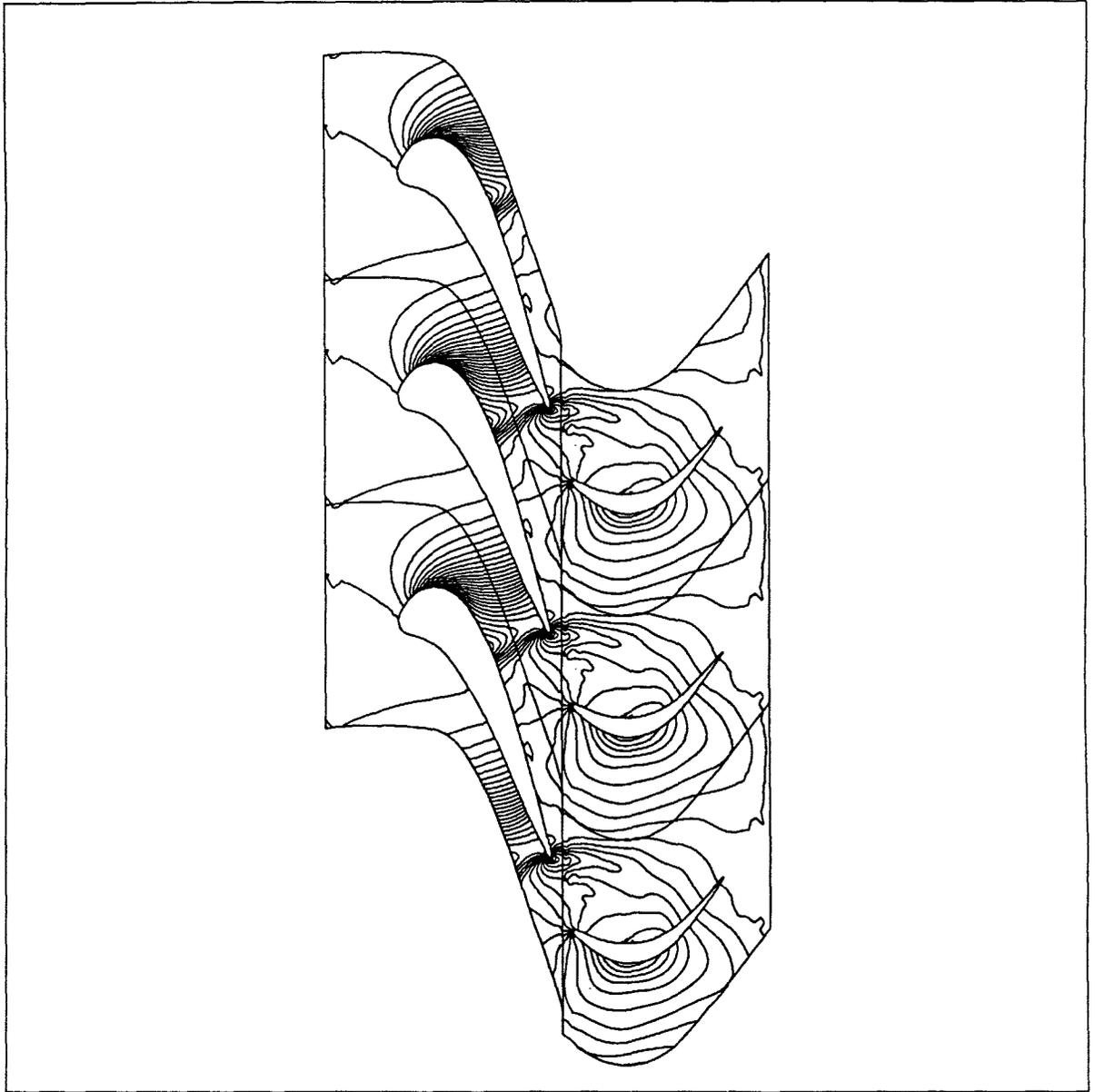


Figure 116 : Cas test CTINS1-1.
Résultat de couplage.
Code explicite avec viscosité artificielle SCHEMA2-1.
Répartition des isovaleurs de pression 1. - $\frac{p}{p_i}$.

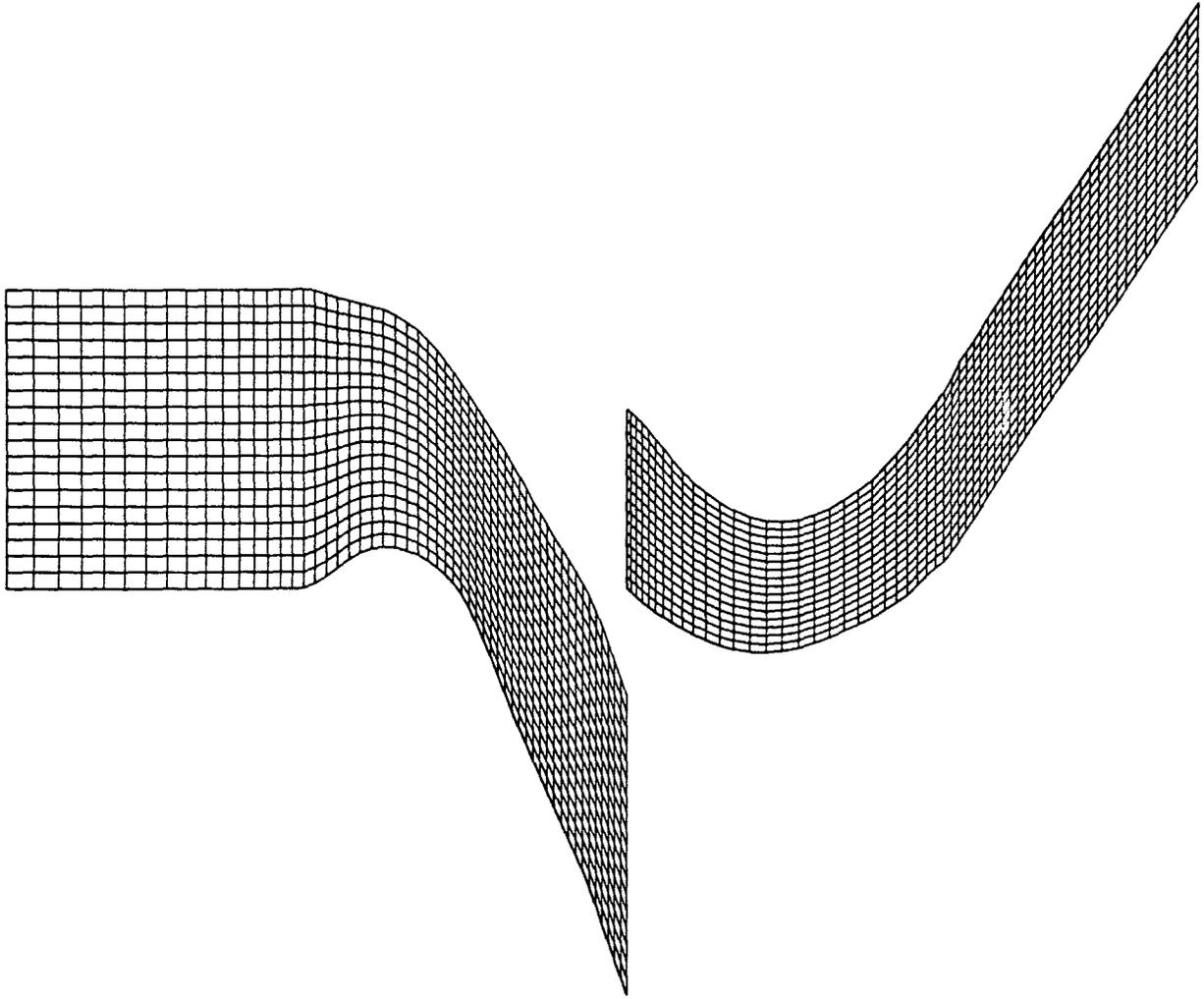


Figure 117 : Cas test CTINS2.
Maillage de chaque aubage (un canal).

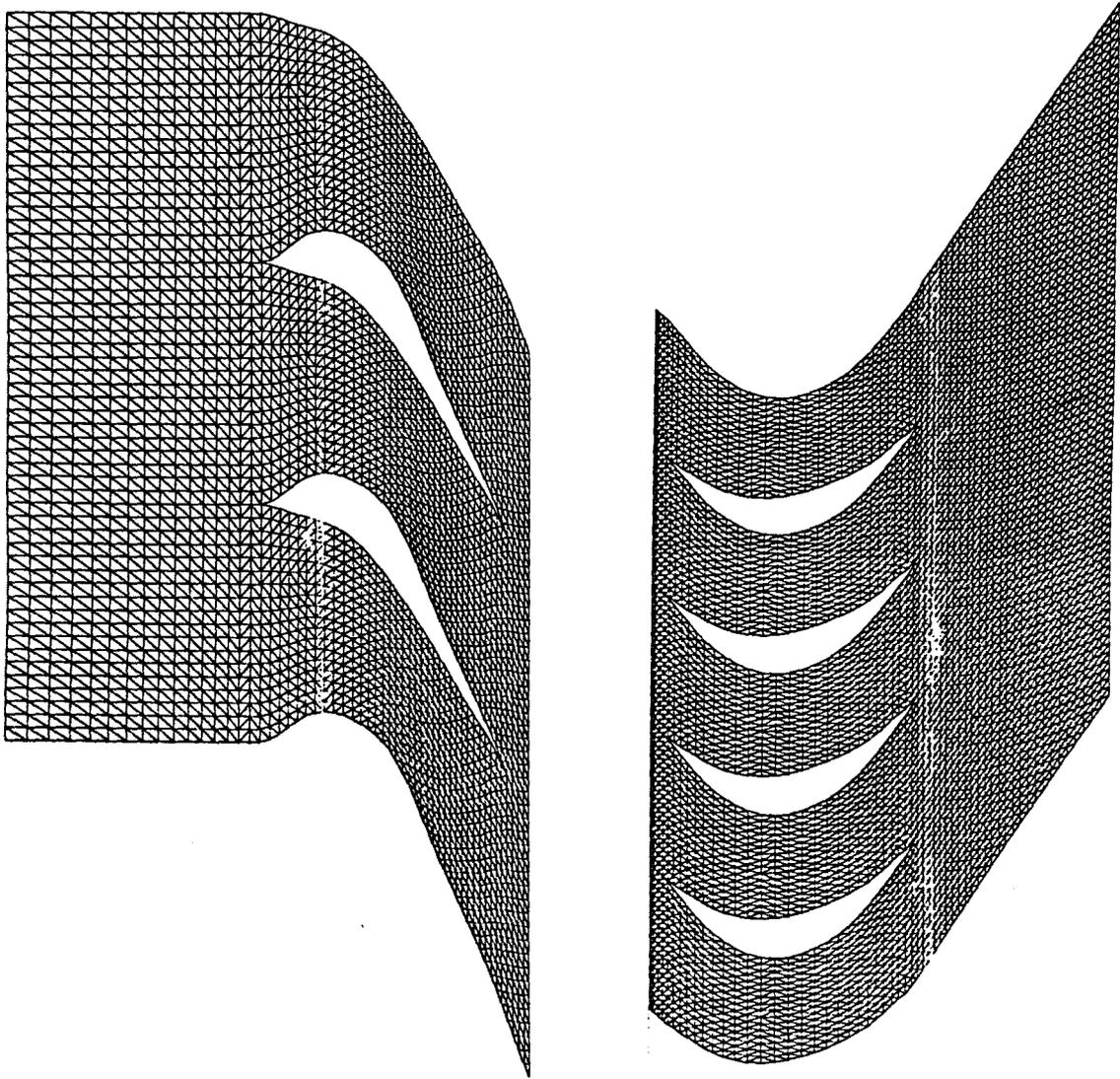
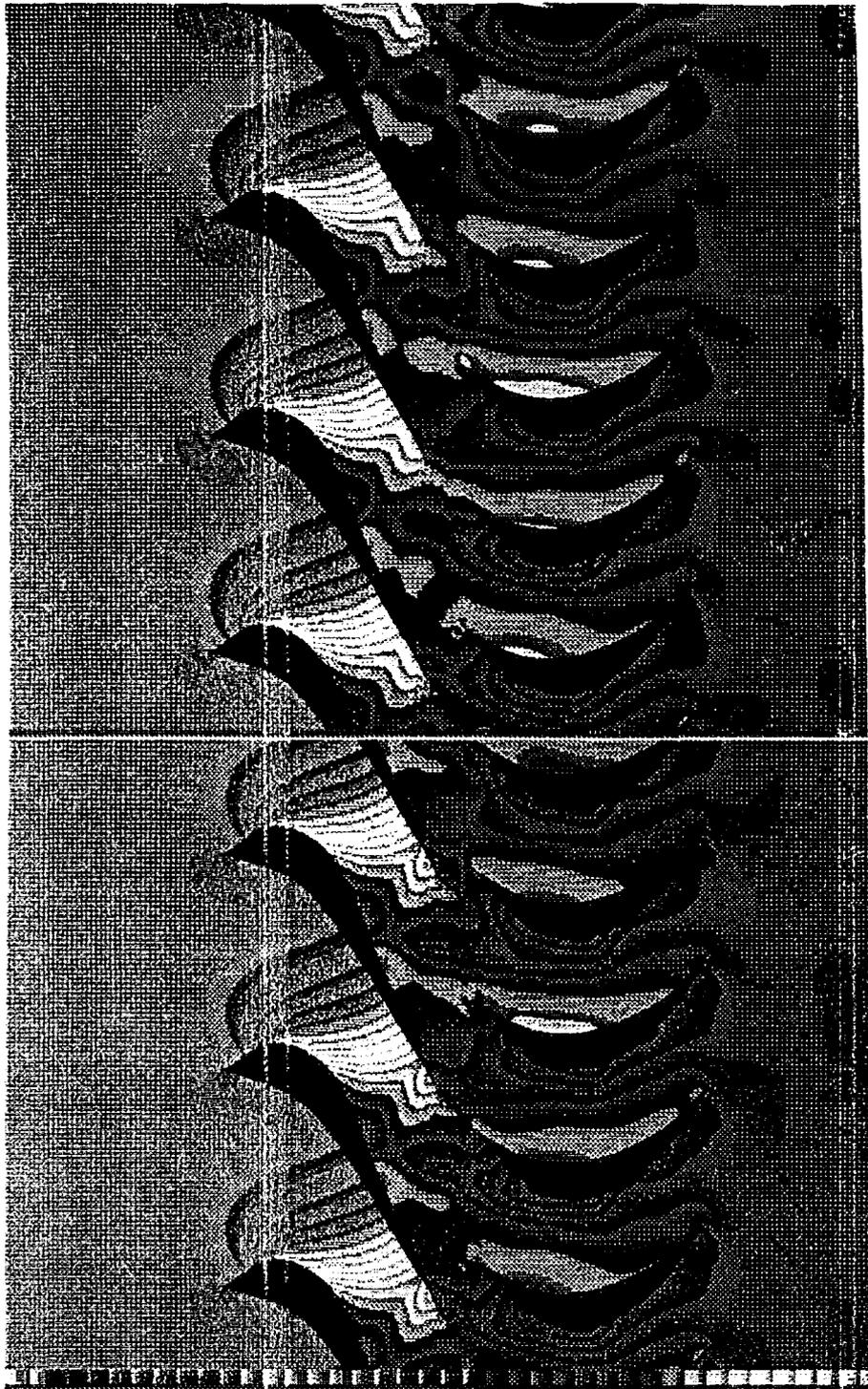


Figure 118 : Cas test CTINS2.
Maillages non structurés de l'étage "réduit",
3 × 5 canaux, 3148 × 4802 noeuds.



Code STRU.

Code SCHEMA2-1

Figure 119 : Cas test CTINS2.
Comparaison des résultats du couplage.
Code STRU et code explicite avec viscosité artificielle SCHEMA2-1.
Répartition des isovaleurs de pression $1 - \frac{p}{p_i}$.

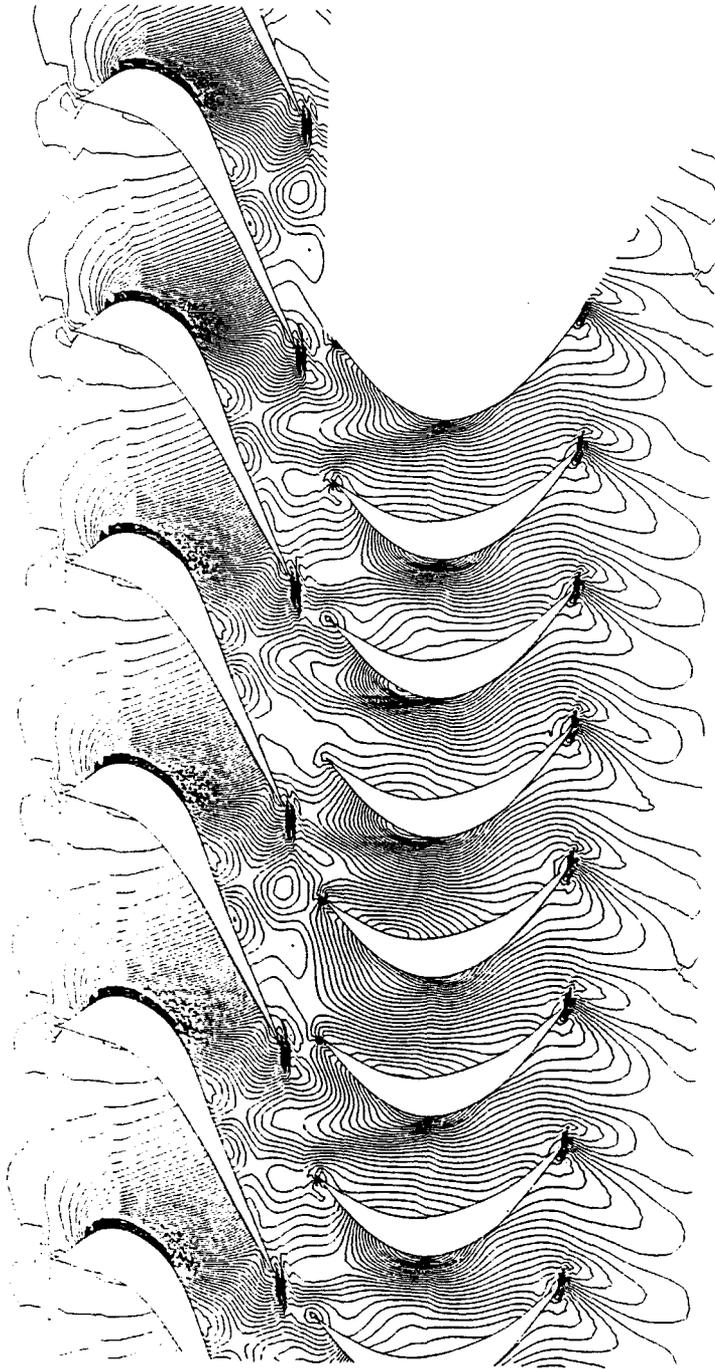


Figure 120 : Cas test CTINS2.
Comparaison des résultats du couplage.
Codes avec viscosité artificielle, explicite SCHEMA2-1
Convergence.
Répartition des isovaleurs de pression 1. - $\frac{p}{p_i}$.

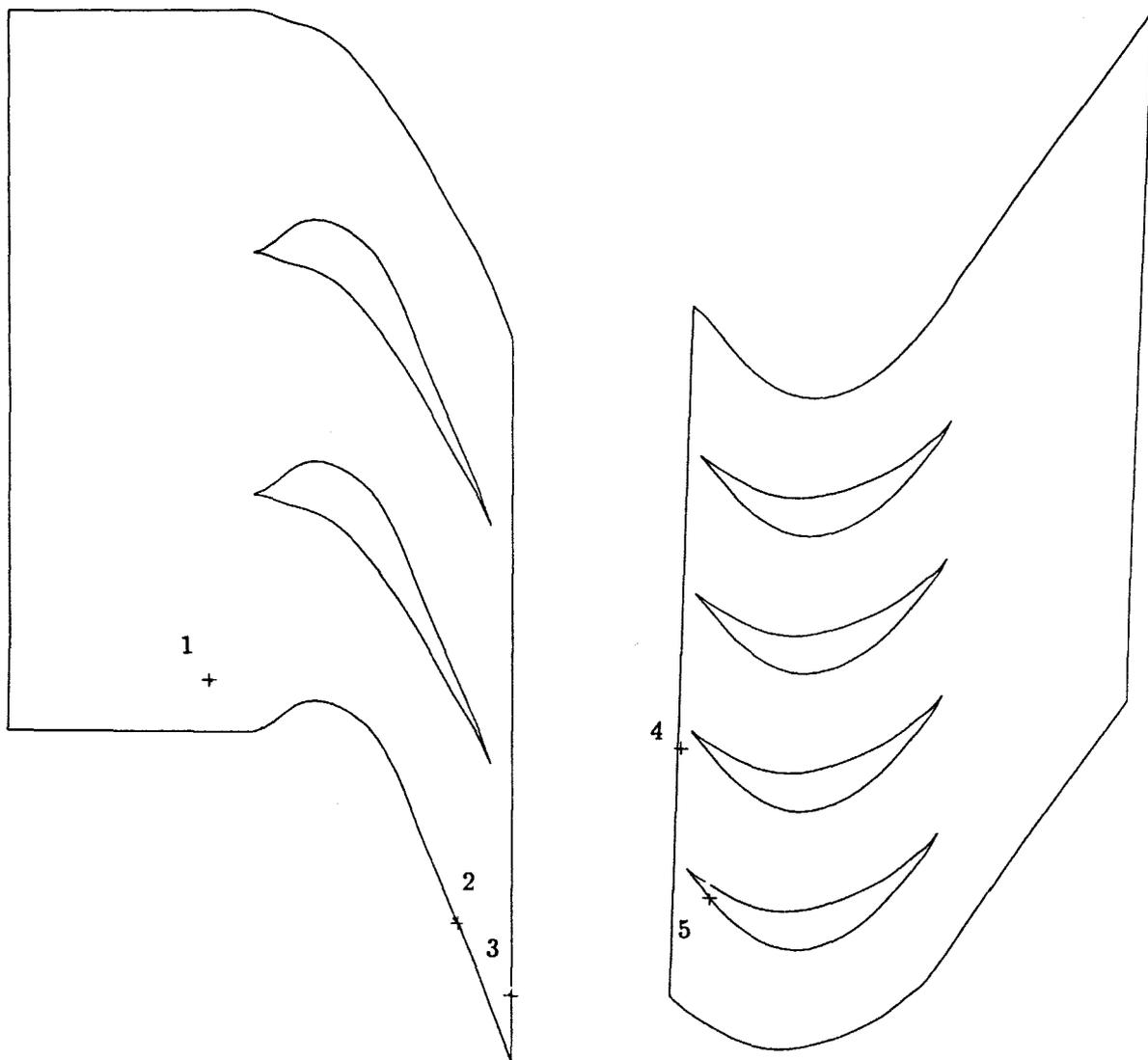
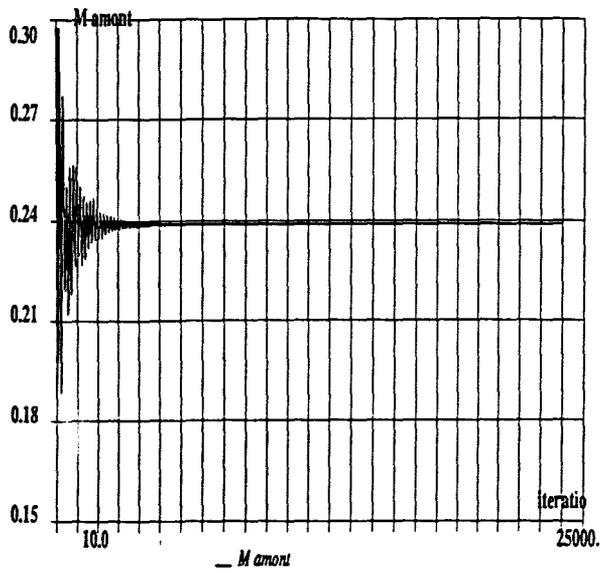
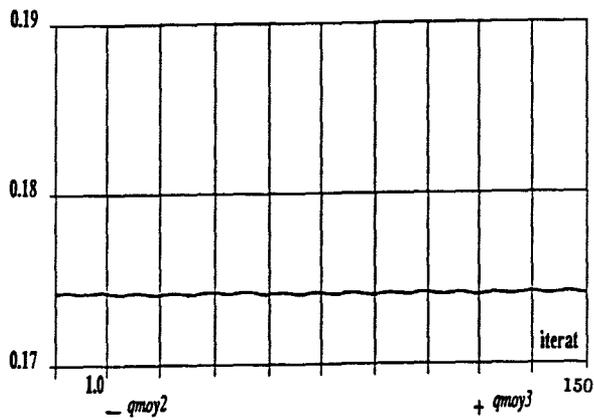


Figure 121 : Cas test CTINS2.
Position des sondes.



Code explicite avec viscosité artificielle SCHEMA2-1.



Evolution des débits à l'aval du stator.

Figure 122 : Cas test CTINS2.
 Résultats du couplage.
 Codes avec viscosité artificielle, explicite SCHEMA2-1
 Convergence des codes : évolution du Mach amont d'étage (sonde 1).
 Evolution des débits à l'aval du stator et du rotor.

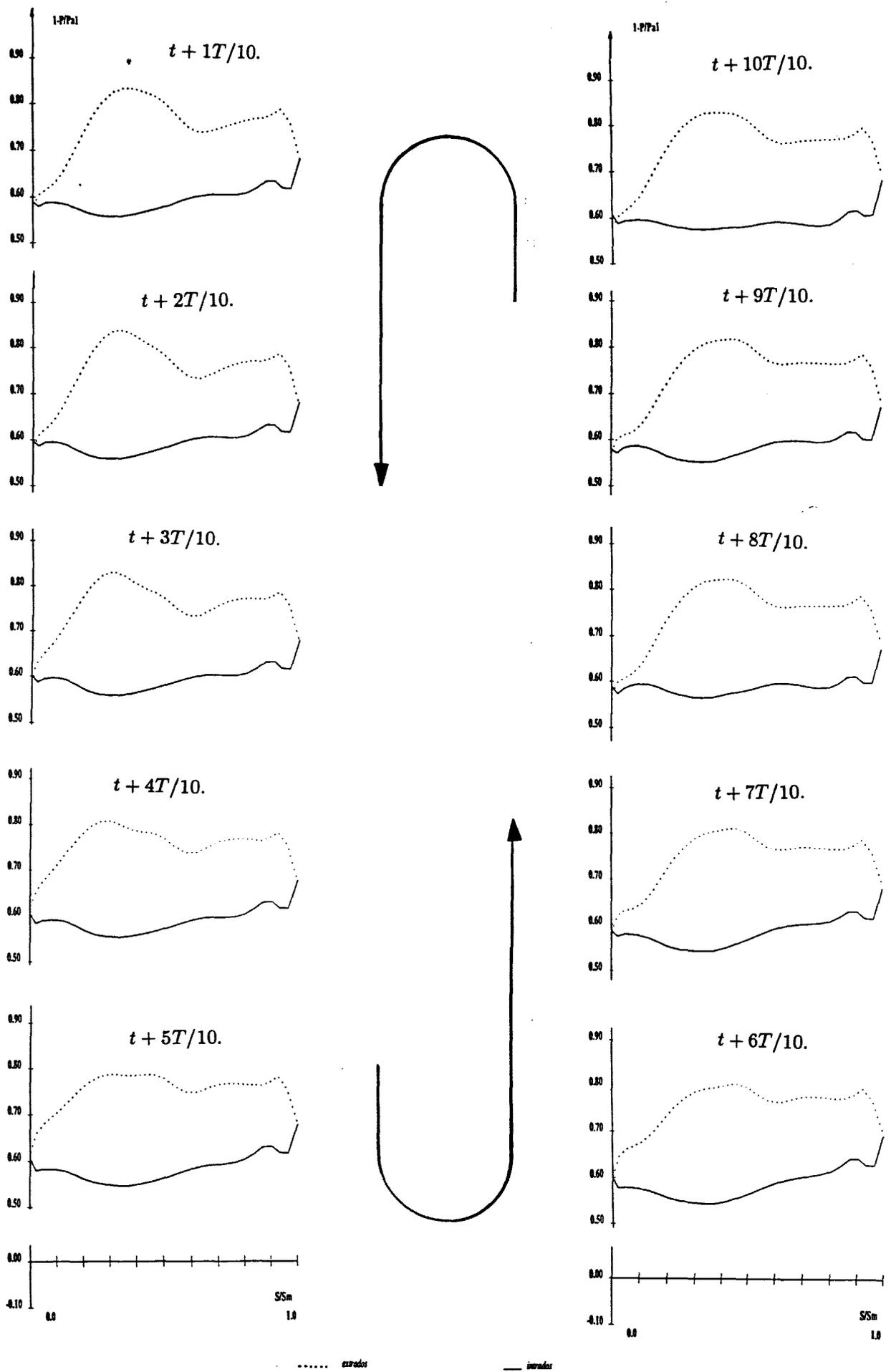
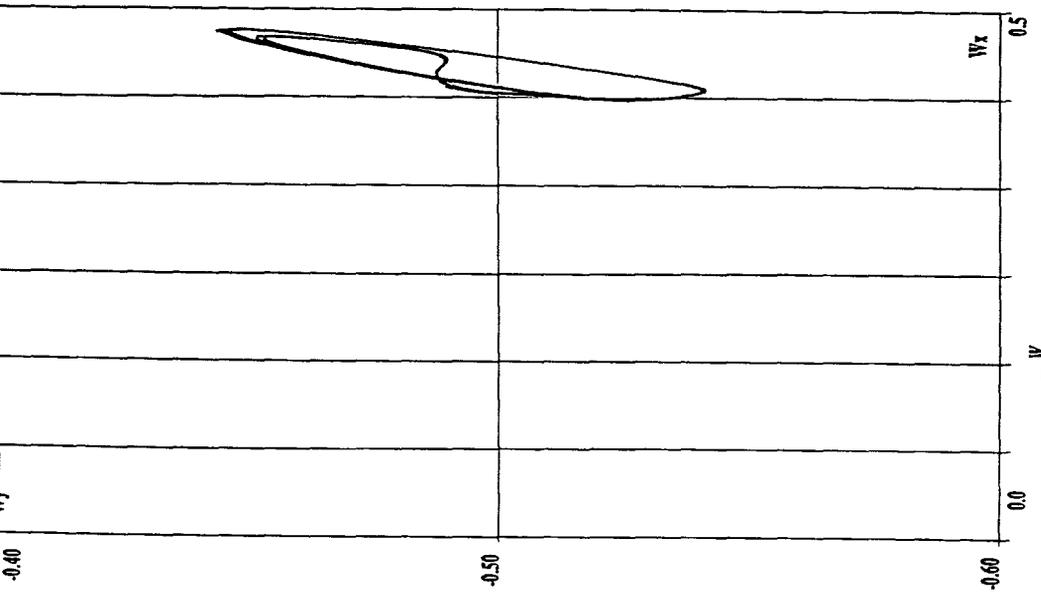


Figure 123 : Cas test CTINS2.

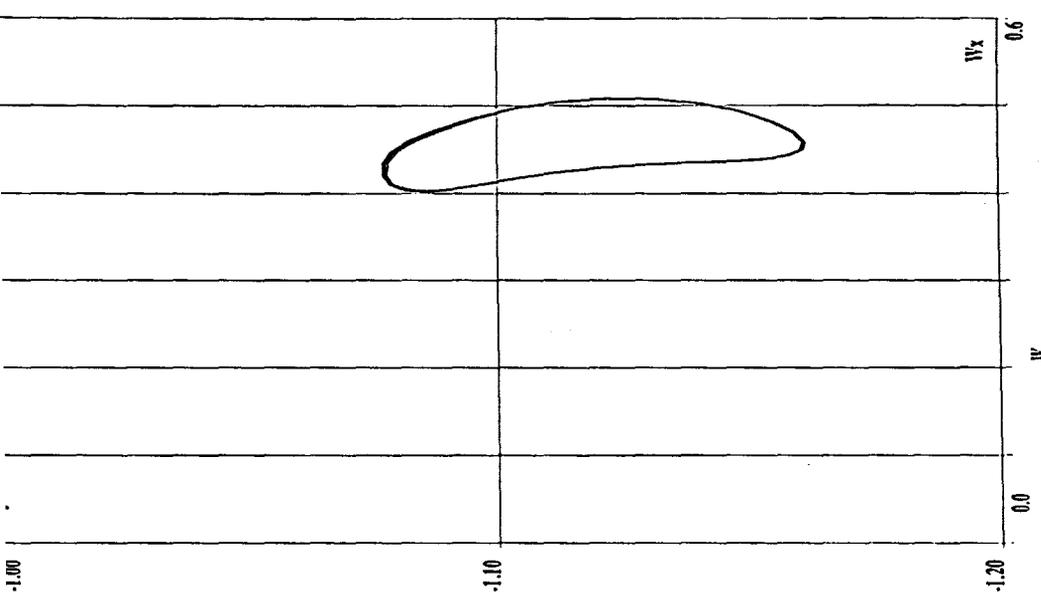
Code explicite avec viscosité artificielle SCHEMA2-1.

Résultats du couplage sur une période T .

Répartitions instationnaires de pression $1 - \frac{P}{Pa1}$ sur le profil d'une aube du rotor.

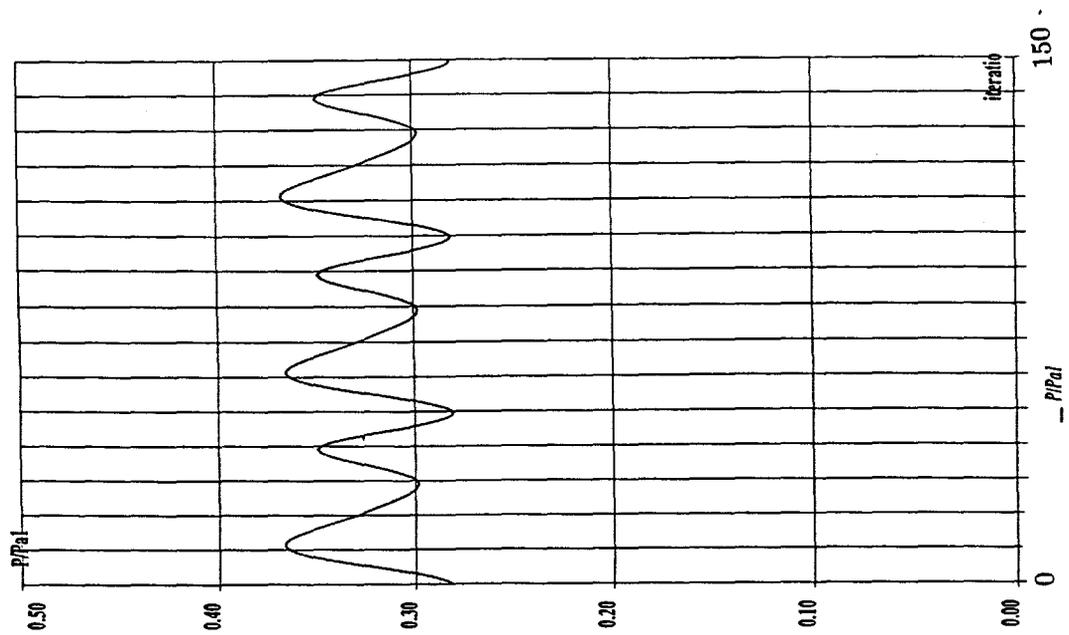


Hodographe rotor (sonde 4).

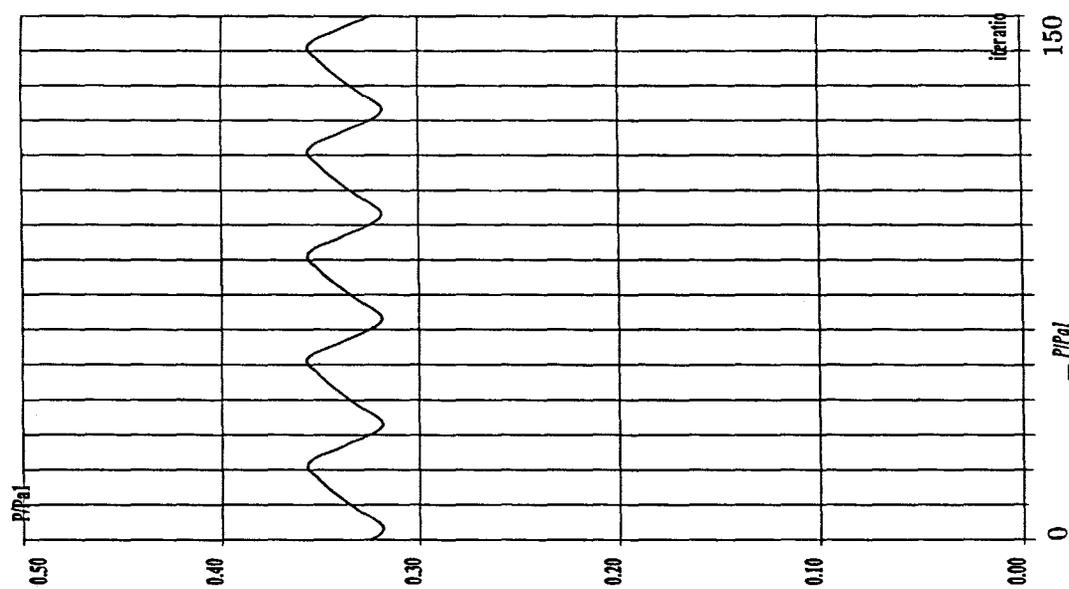


Hodographe stator (sonde 3).

Figure 124 : Cas test CTINS2.
 Code explicite avec viscosité artificielle SCHEMA2-1.
 Résultats du couplage sur une période T .
 Hodographes, absolu et relatif à la frontière de passage (sondes 3 et 4),
 relevés en référentiel absolu.



Sonde extrados amont rotor
(sonde 5).



Sonde extrados aval stator
(sonde 2).

Figure 125 : Cas test CTINS2.
Code explicite avec viscosité artificielle SCHEMA2-1.
Résultats du couplage sur une période T .
Evolutions de pression instationnaire $\frac{P}{P_{a1}}$
relevées aux sondes 2 et 5 situées sur le stator et le rotor.

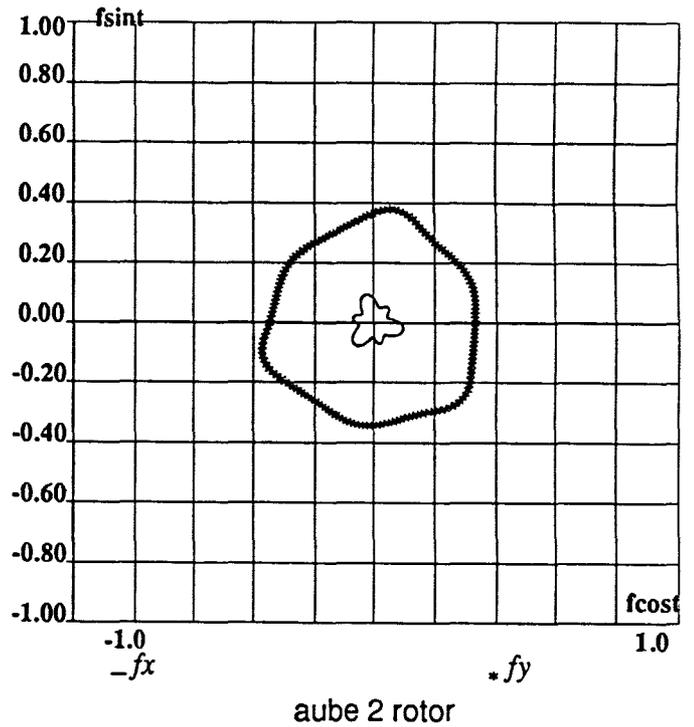
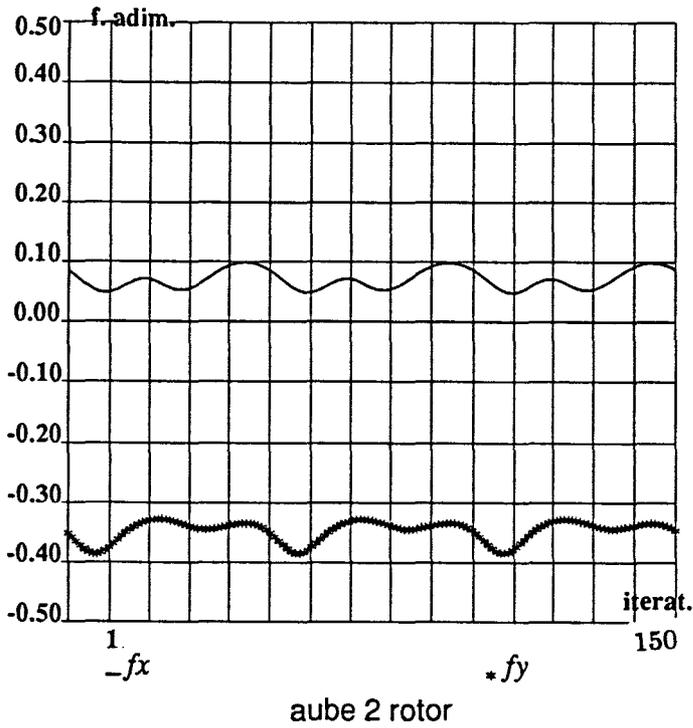
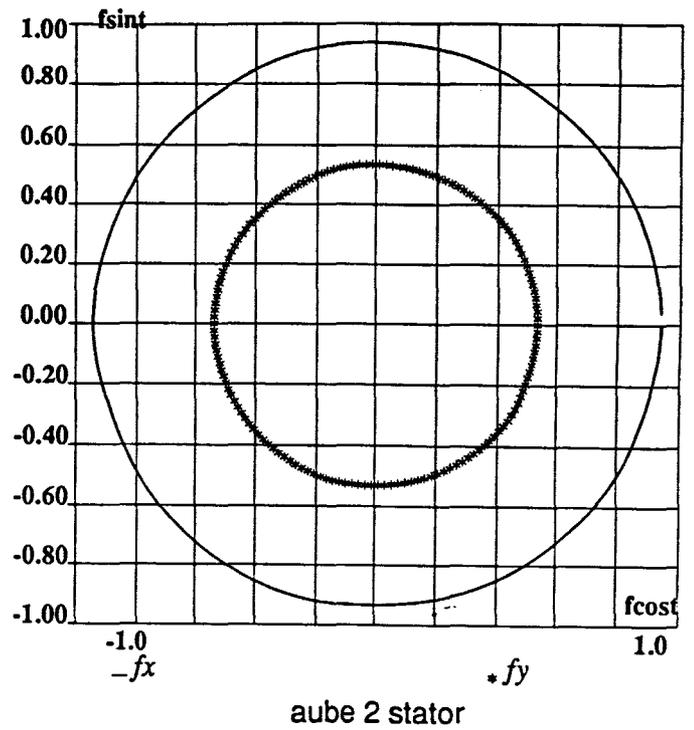
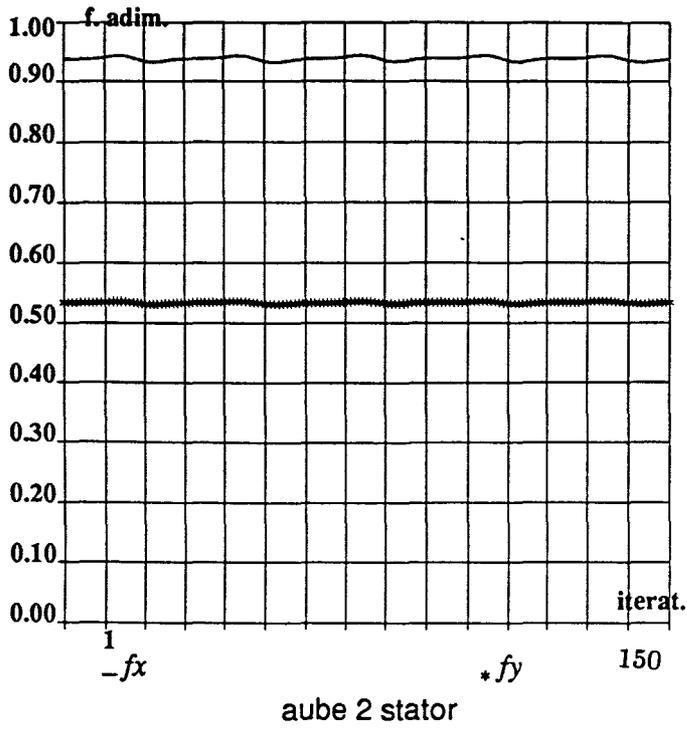


Figure 126 : Cas test CTINS2.
 Code explicite avec viscosité artificielle SCHEMA2-1.
 Résultats du couplage sur une période T .
 Evolutions des composantes des forces aérodynamiques et Lissajous
 pour le stator et le rotor.

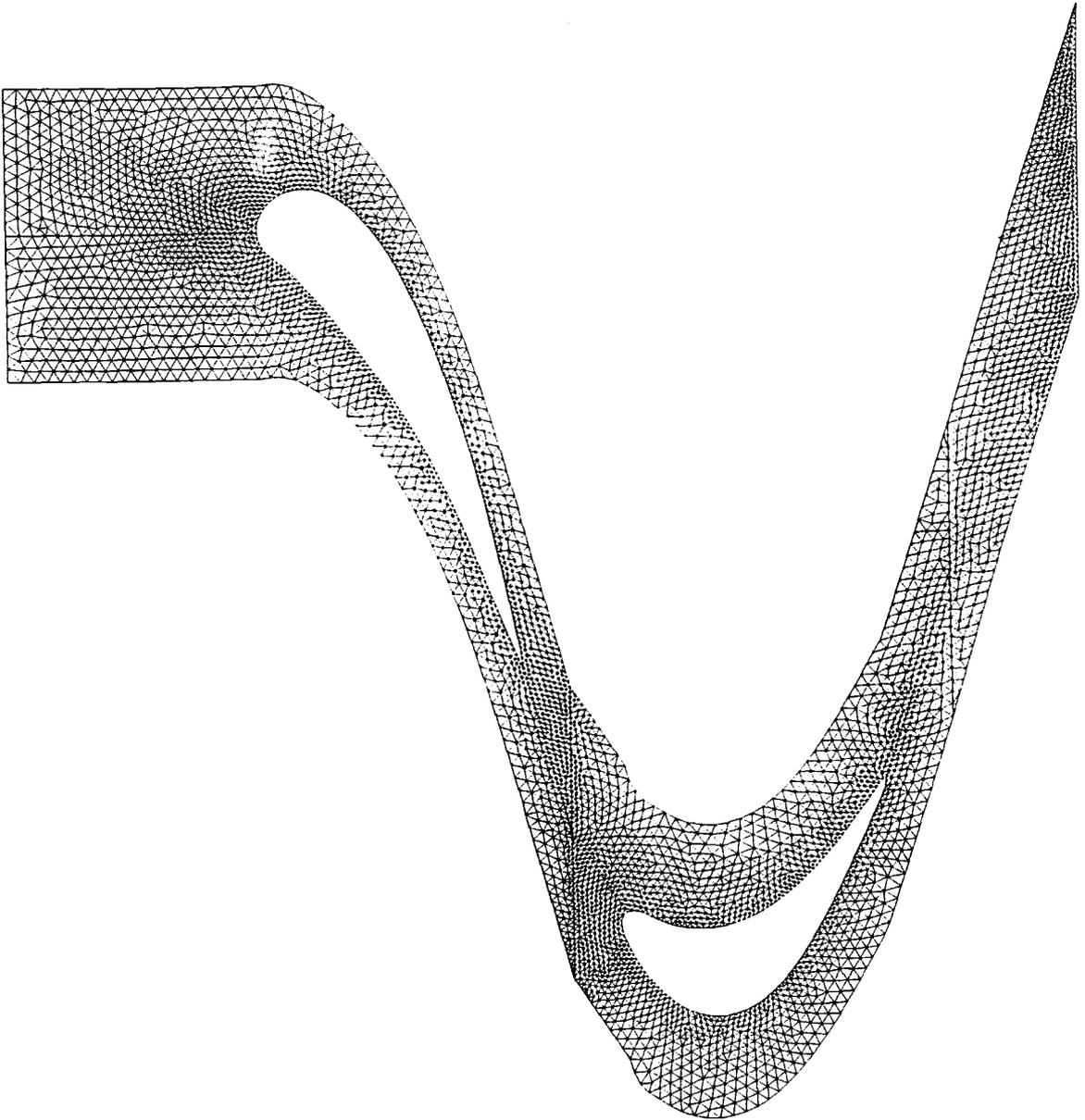
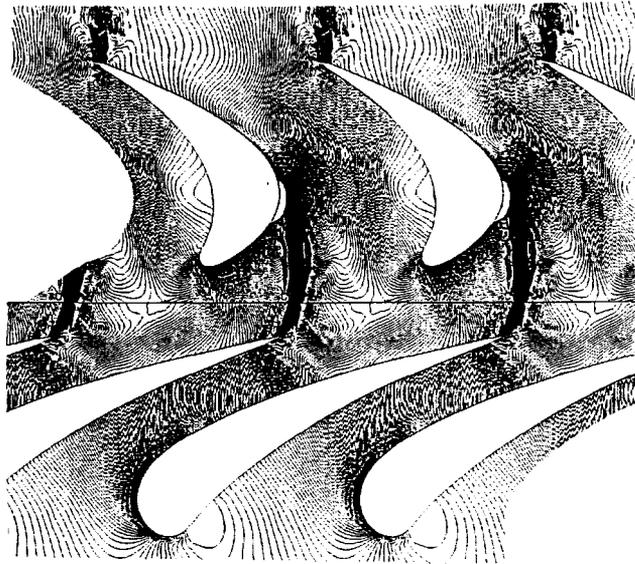


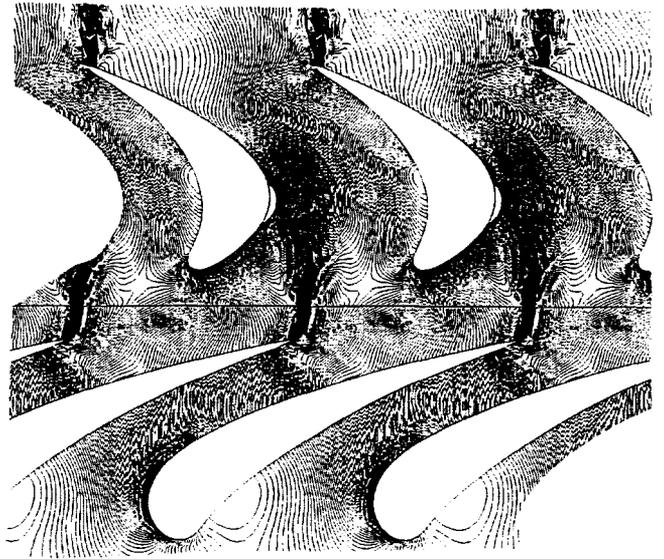
Figure 127 : Cas test CTINS3-1.
Maillages de la géométrie de l'étage (pas relatif du stator).
 1×1 canaux, 2245×2655 noeuds.

Figure 128 : Cas test CTINS3-1.
Code explicite avec viscosité artificielle SCHEMA2-1.
Résultats du couplage sur une période T .
Répartitions instationnaires des isovaleurs de pression $1 - \frac{P}{P_i}$.
 $\Delta t = 0.009$.
Double page.

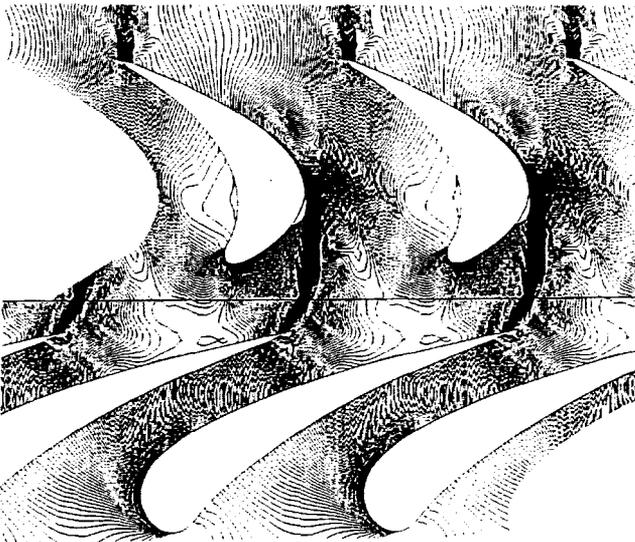


$t + 9T/10.$

IMAGE NUMERO 9

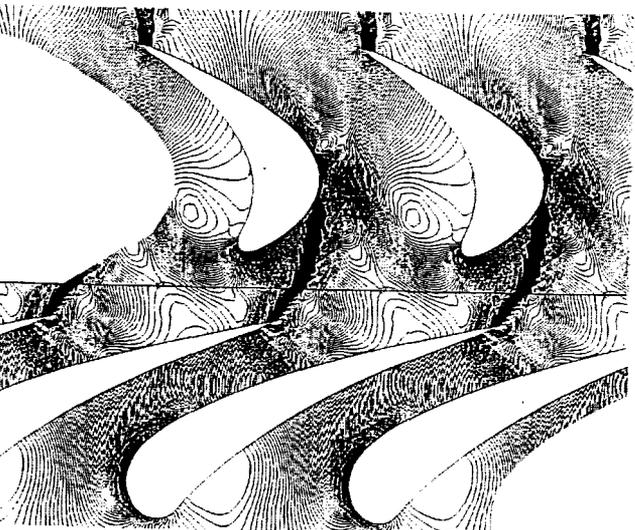
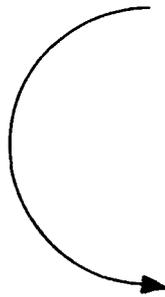


$t + 8T/10$



$t + 10T/10.$

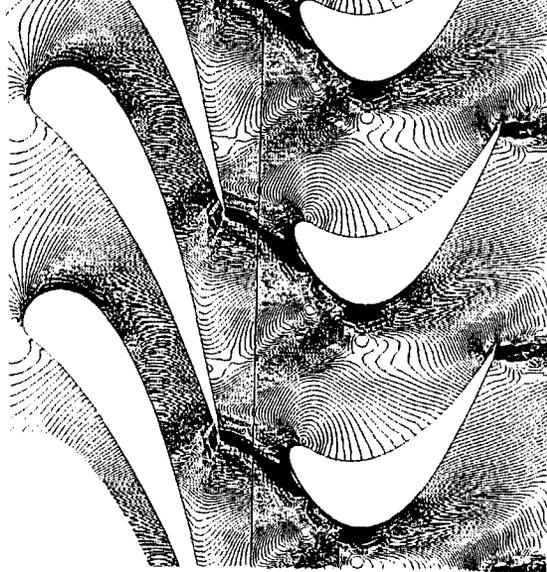
IMAGE NUMERO 10



$t + 1T/10.$

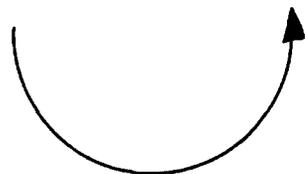
IMAGE NUMERO 1





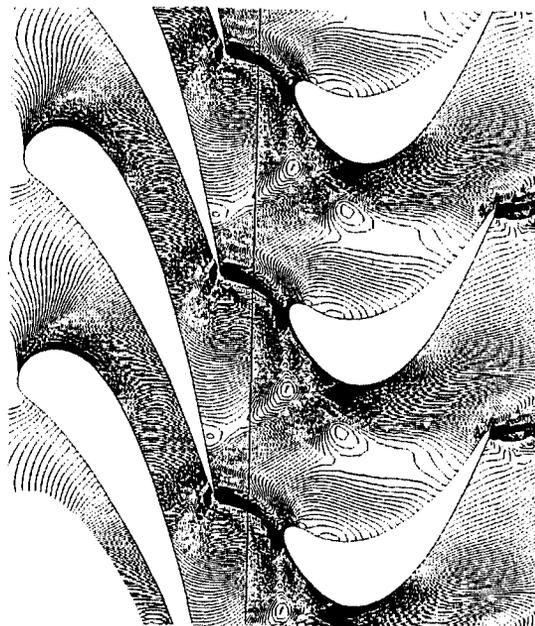
$t + 3T/10.$

IMAGE NUMERO 3



$t + 7T/10.$

IMAGE NUMERO 7



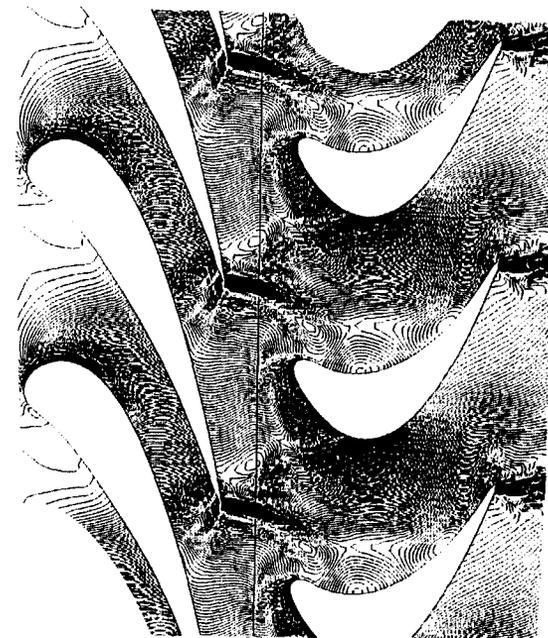
$t + 4T/10.$

IMAGE NUMERO 4



$t + 5T/10.$

IMAGE NUMERO 5



$t + 6T/10.$

IMAGE NUMERO 6

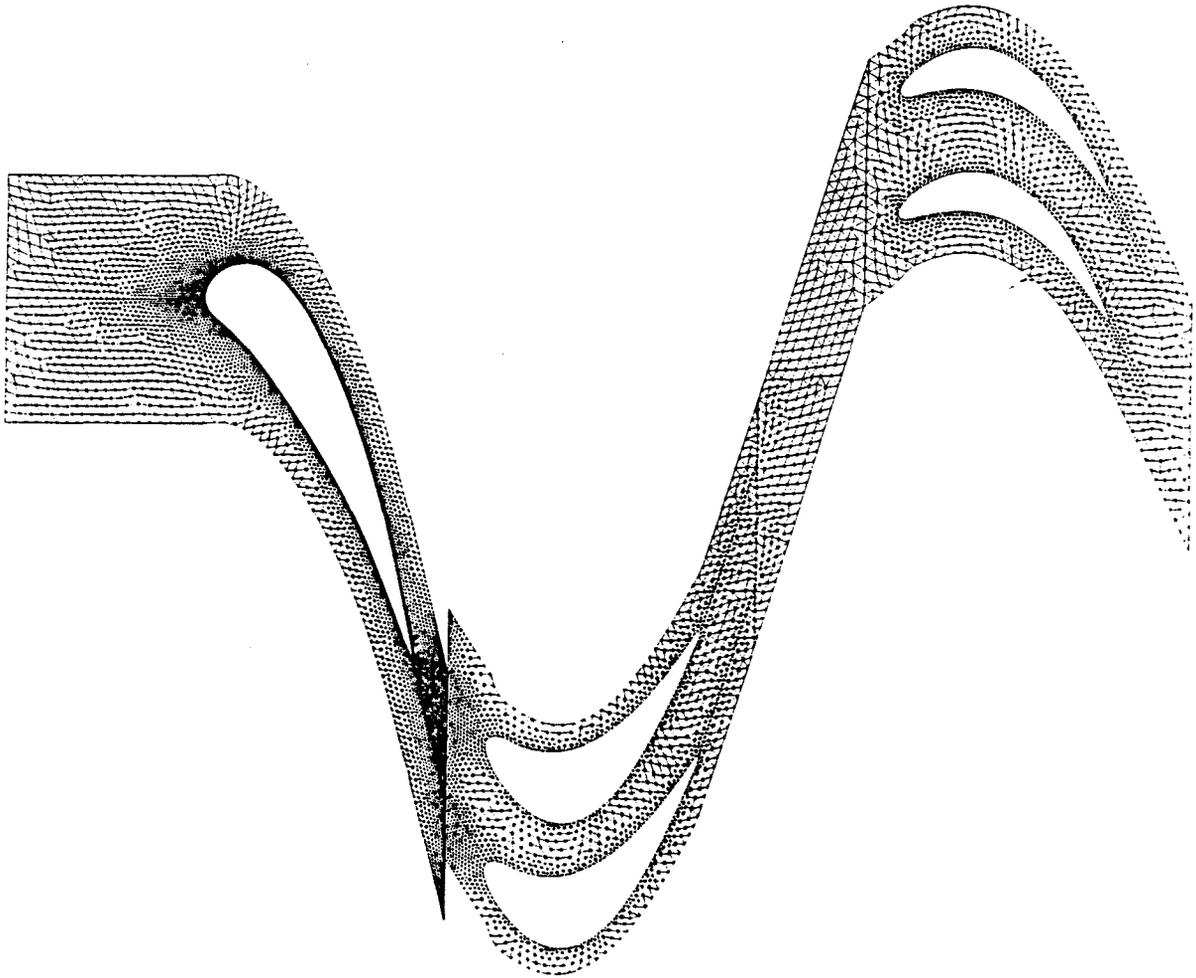


Figure 129 : Cas test CTINS3-2.
Maillages de la géométrie de l'étage "réduit".
 $1 \times 2 \times 2$ canaux, $5416 \times 2267 \times 1499$ noeuds.

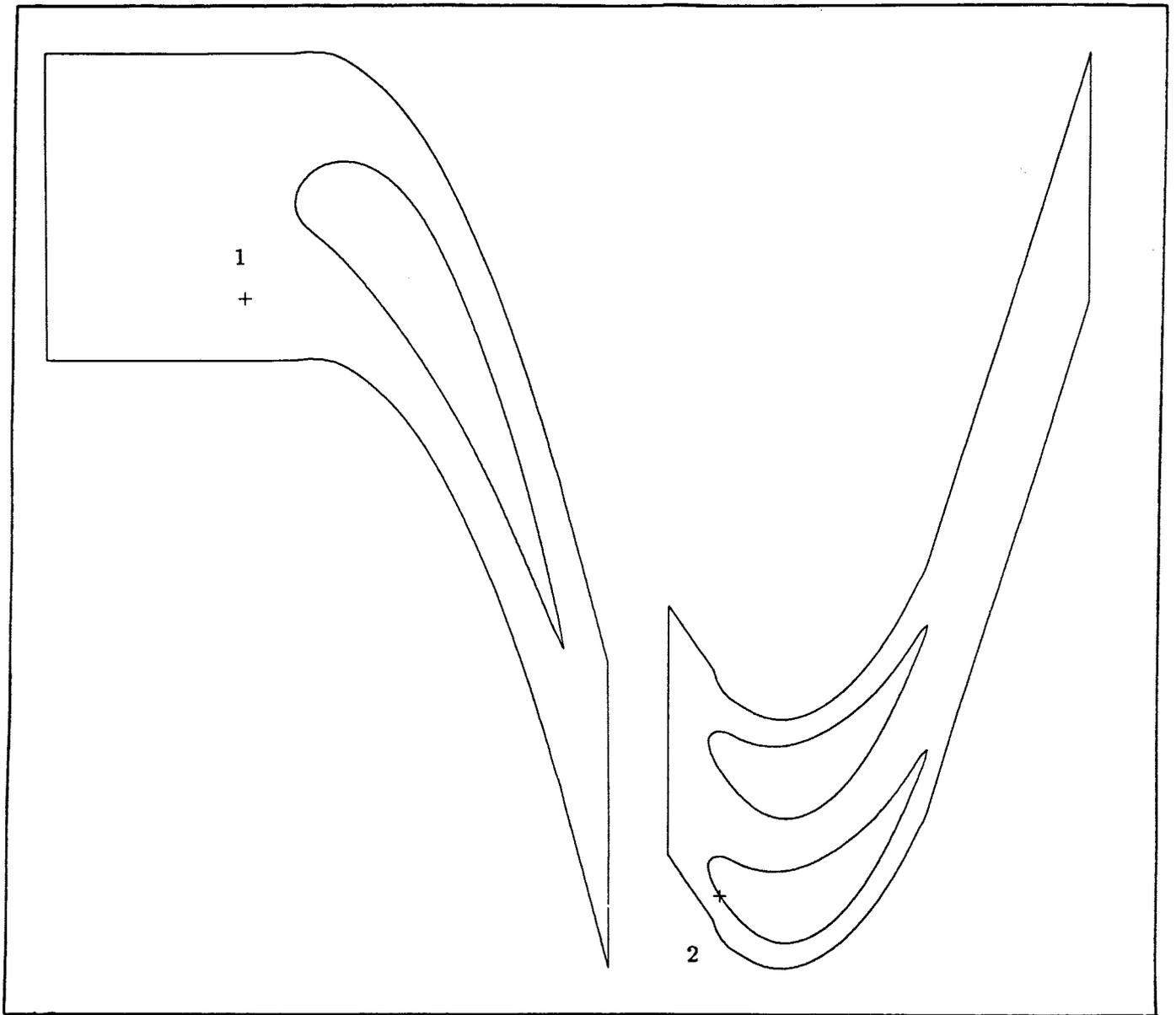


Figure 130 : Cas test CTINS3-2.

Position des sondes.

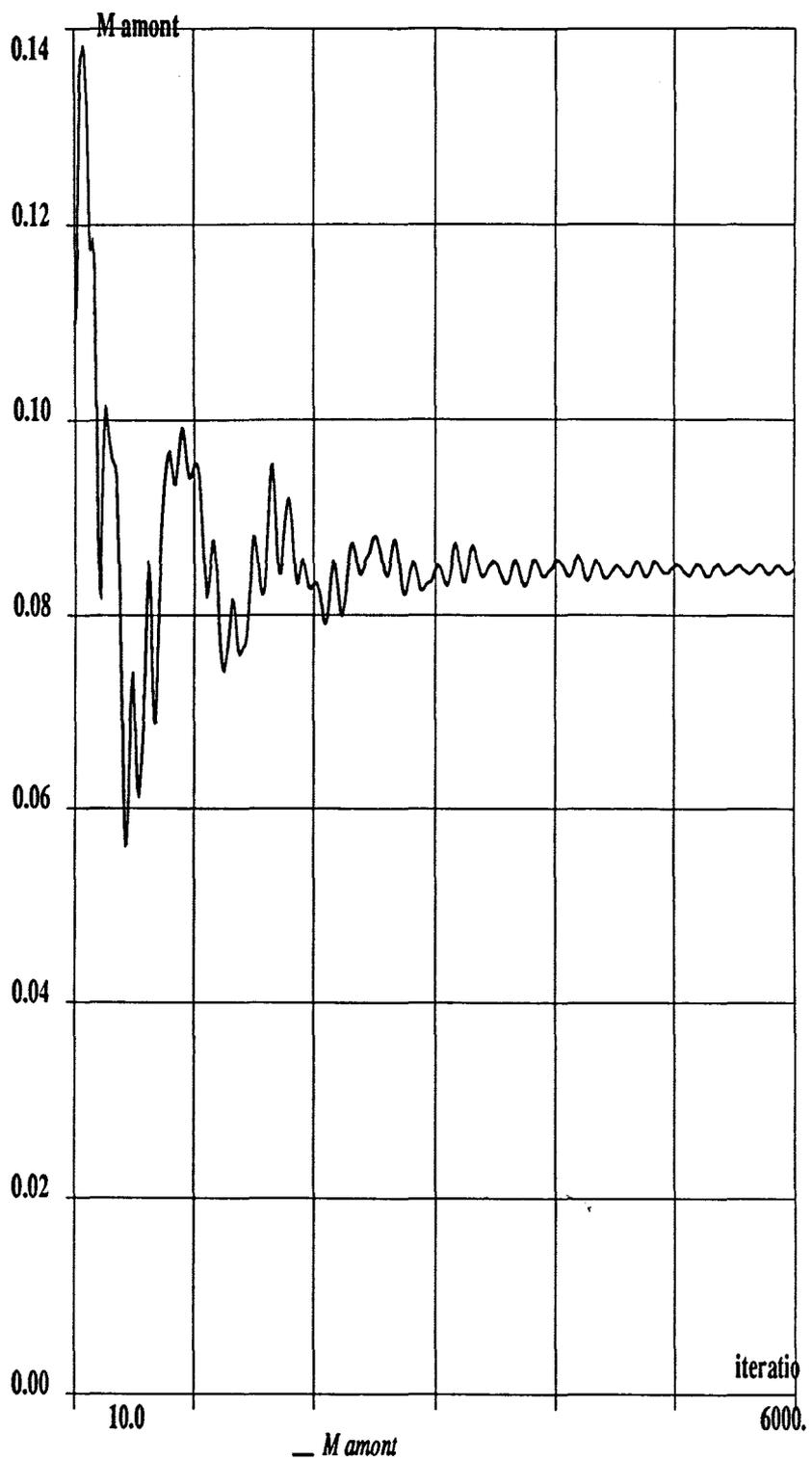


Figure 131 : Cas test CTINS3-2.
 Résultat du couplage.
 Code implicite avec viscosité artificielle SCHEMA2-2.
 Convergence de la méthode (sonde 1).

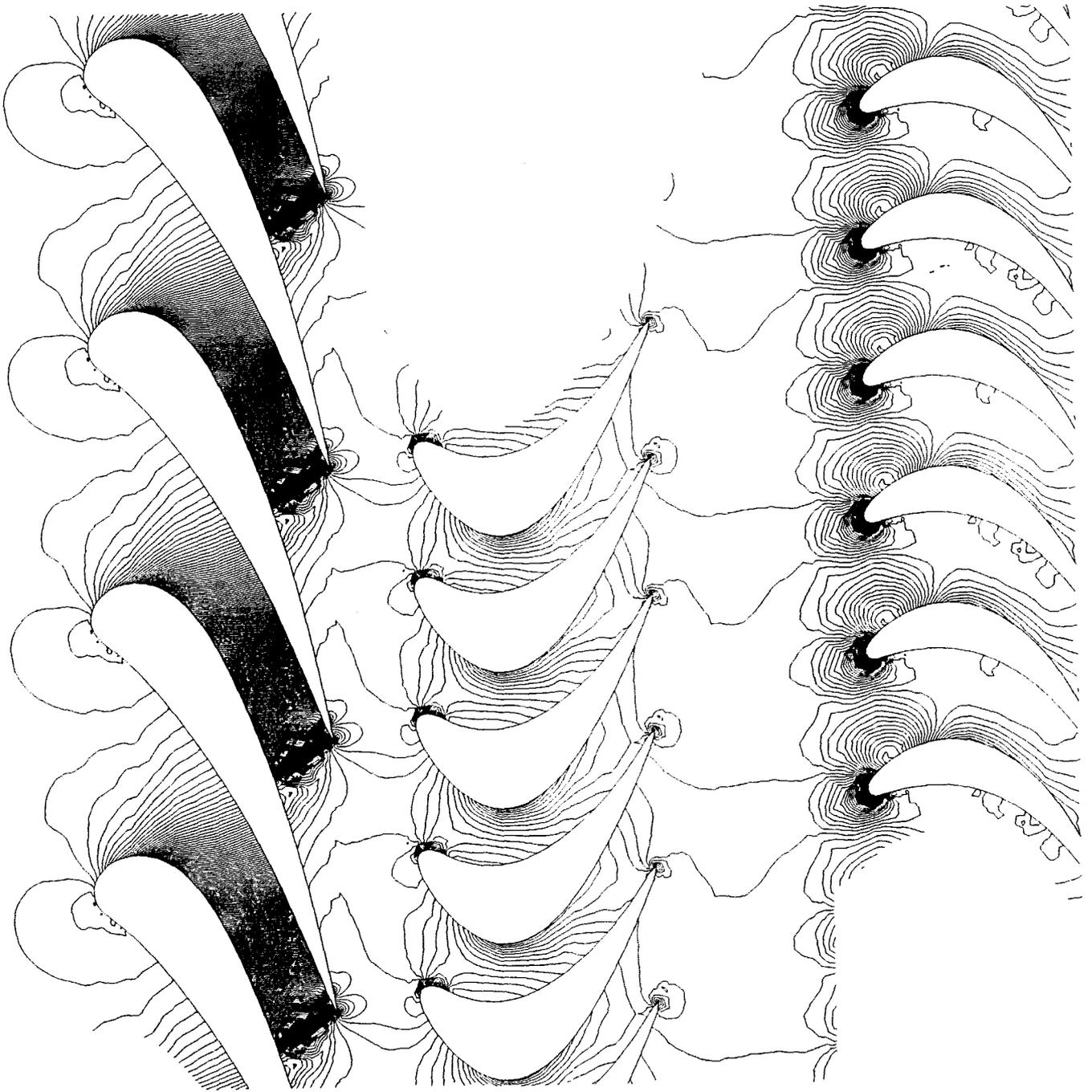
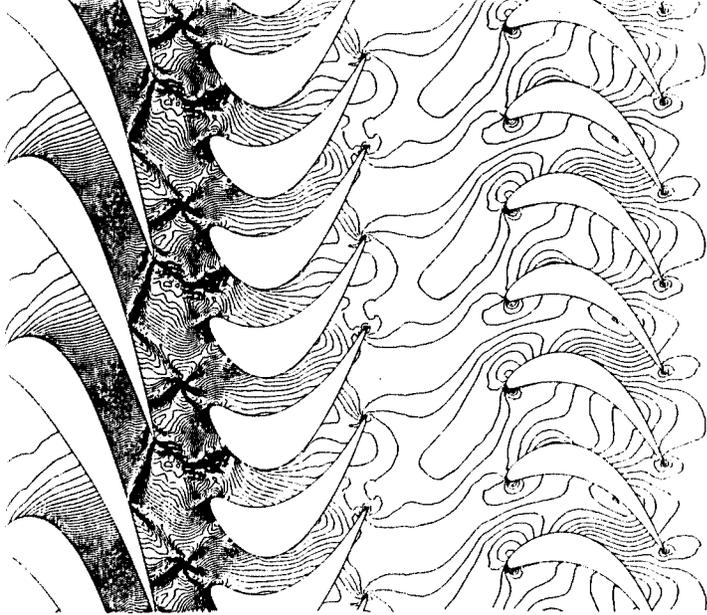
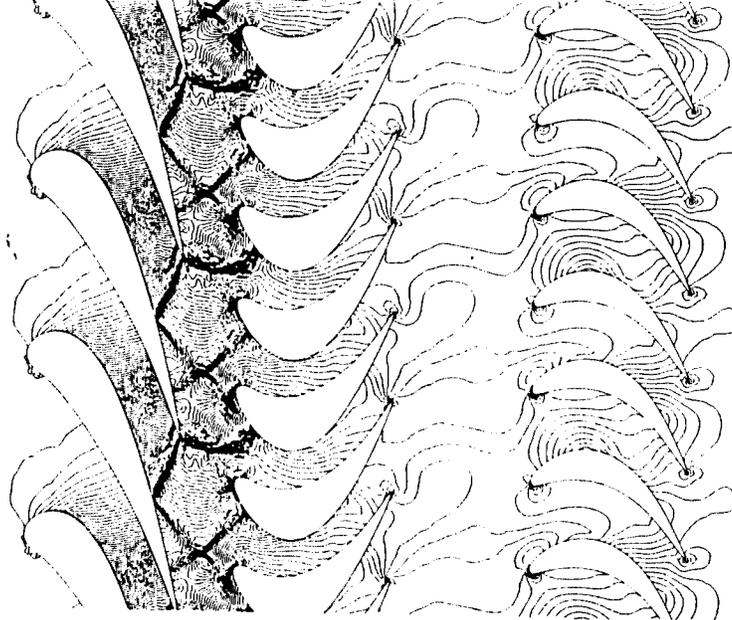


Figure 132 : Cas test CTINS3-2.
 Résultat du couplage, cas bloqué.
 Code implicite avec viscosité artificielle SCHEMA2-2.
 Répartition des isovaleurs de pression 1. - $\frac{p}{p_i}$.
 Delta = 0.009.



$t + 1T/10$

IMAGE NUMERO 1



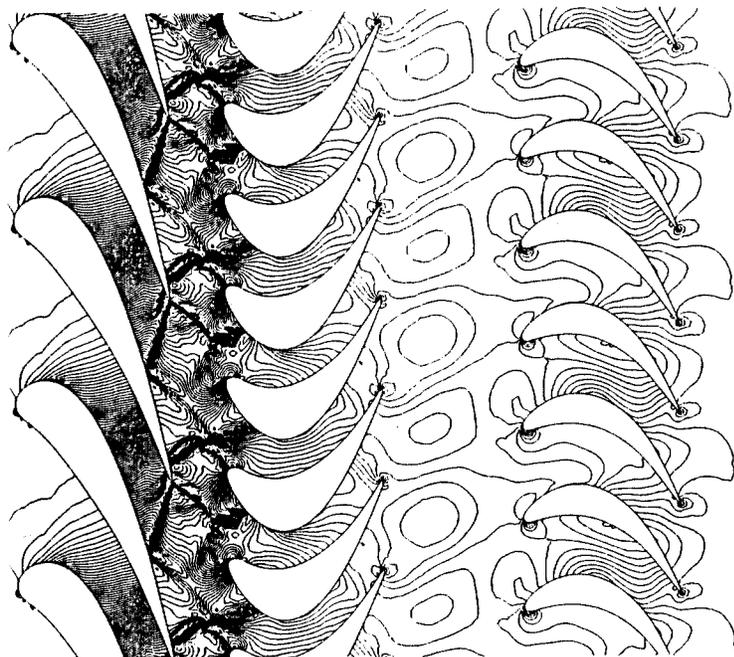
$t + 10T/10$

IMAGE NUMERO 10



$t + 9T/10$

IMAGE NUMERO 9



$t + 2T/10$

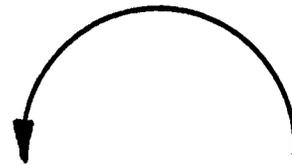


Figure 133 :

Cas test CTINS3-2.

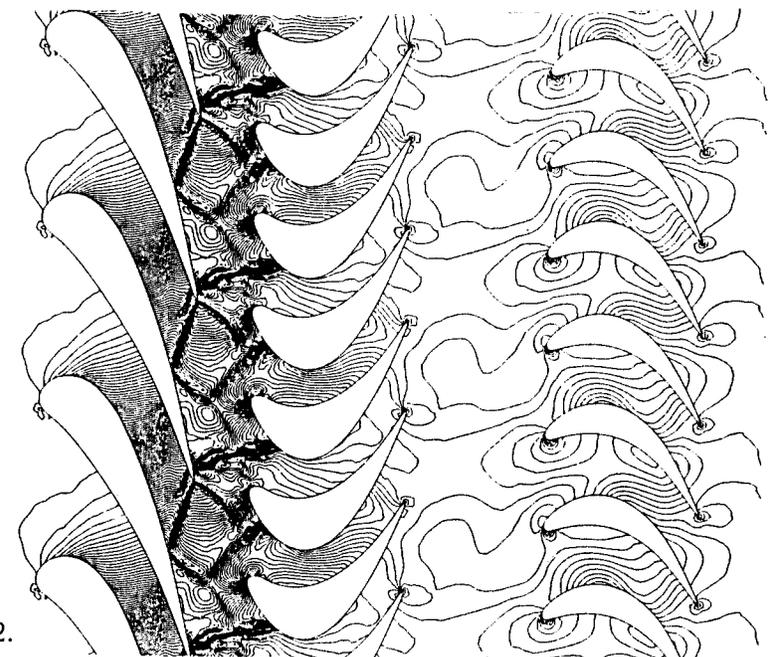
Résultats du couplage sur une période T .

Effet de la réduction du taux de pression à l'aval du stator basse pression.

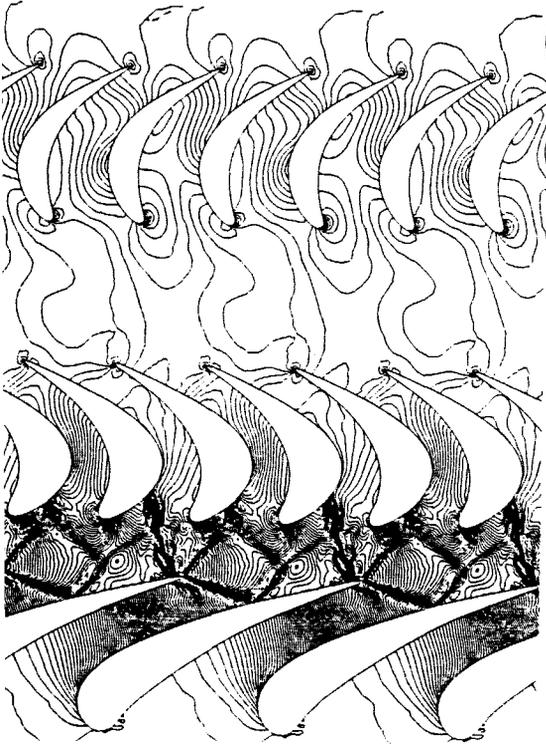
Code implicite avec viscosité artificielle SCHEMA2-2.

Répartitions instationnaires des isovaleurs de pression

1. - $\frac{p}{\rho}$ Delta = 0.009.

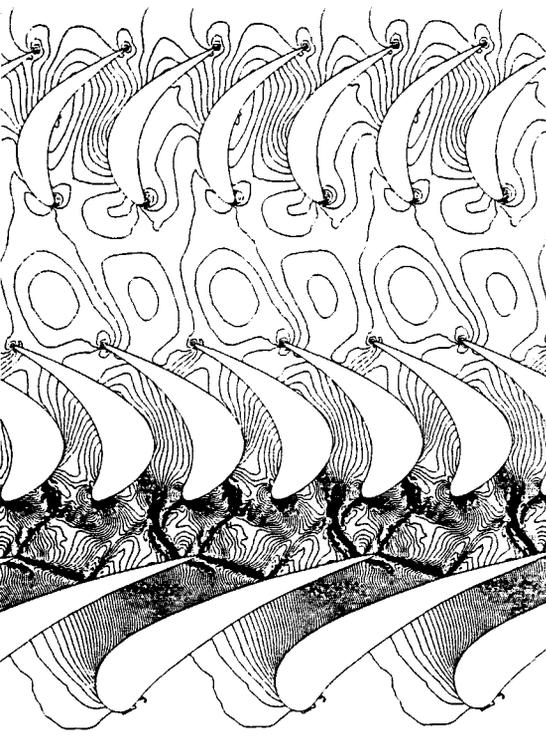


$t + 8T/10$



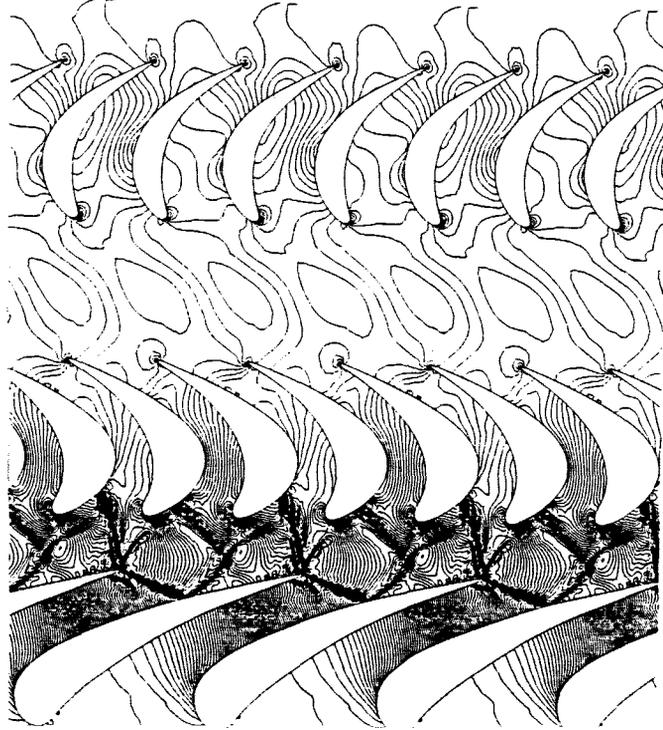
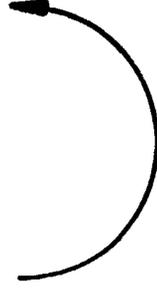
$t + 3T/10$

IMAGE NUMERO 3



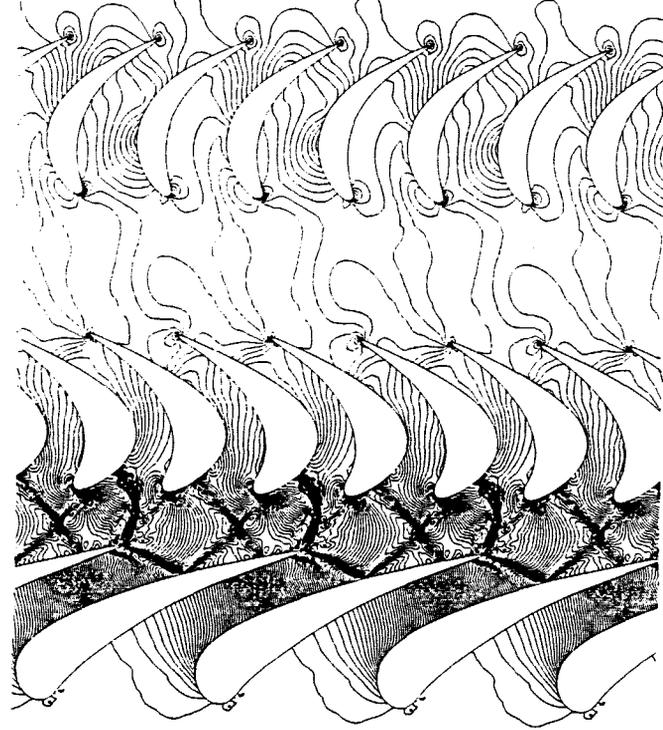
$t + 7T/10$

IMAGE NUMERO 7



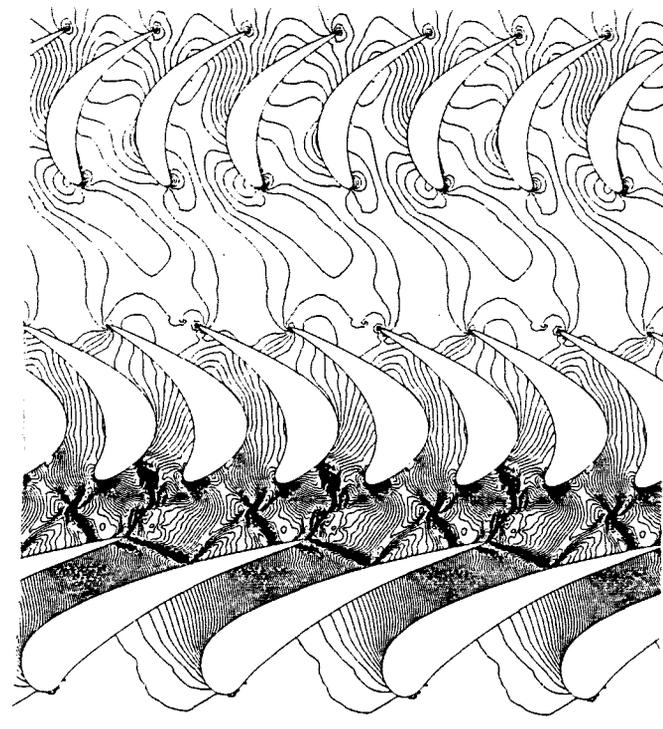
$t + 4T/10$

IMAGE NUMERO 4



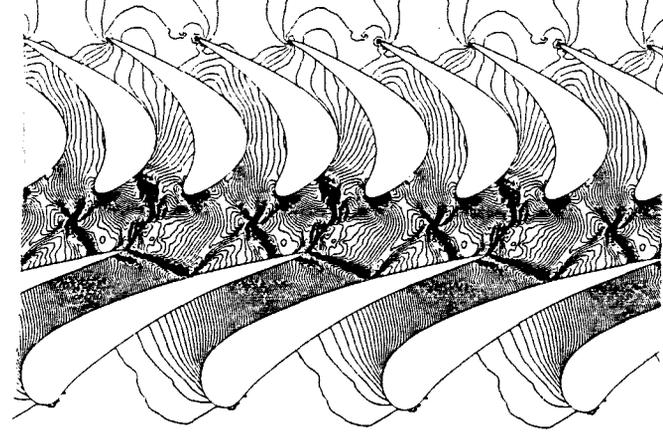
$t + 5T/10$

IMAGE NUMERO 5



$t + 6T/10$

IMAGE NUMERO 6



$t + 6T/10$

IMAGE NUMERO 6

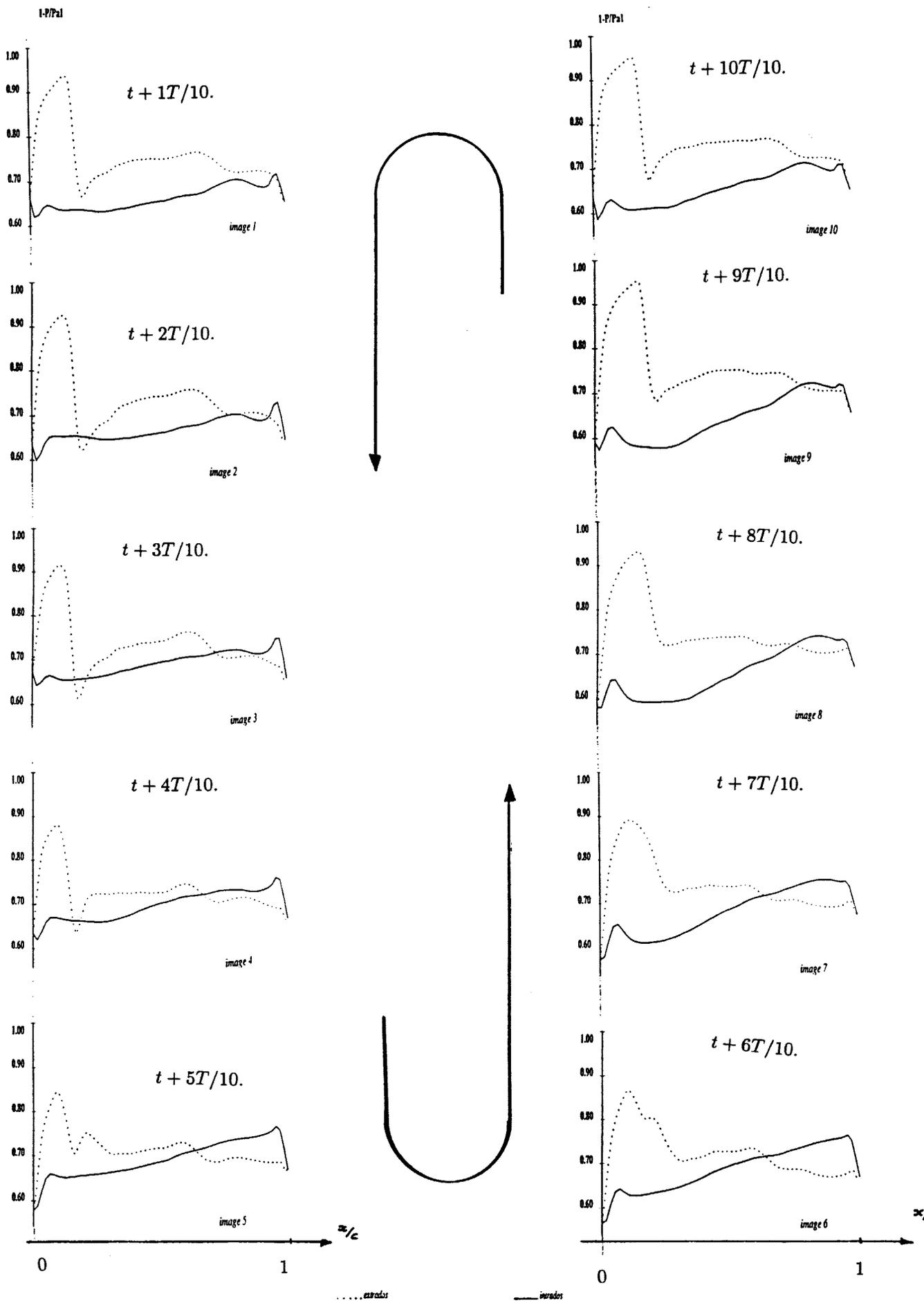
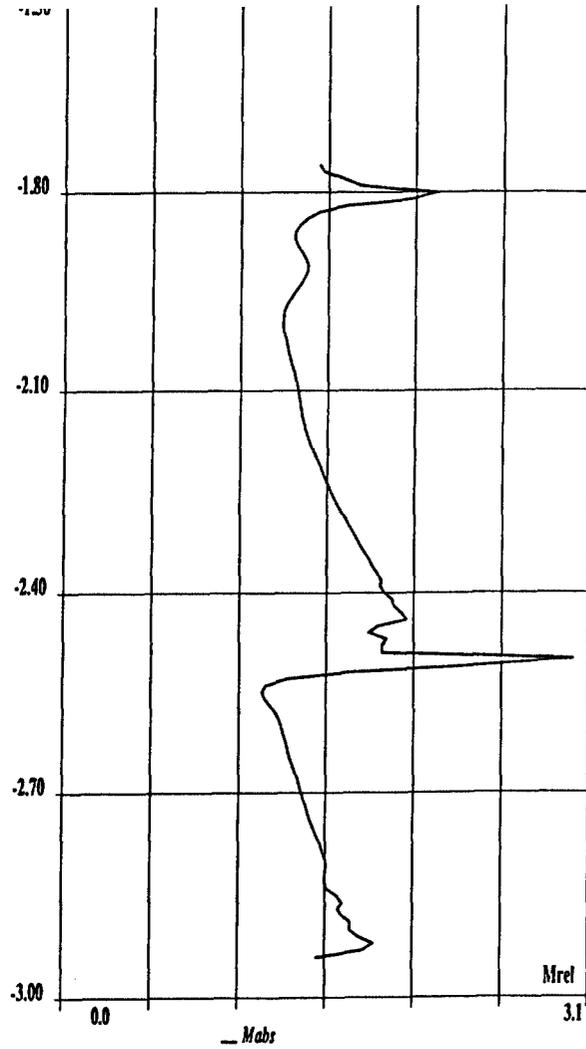
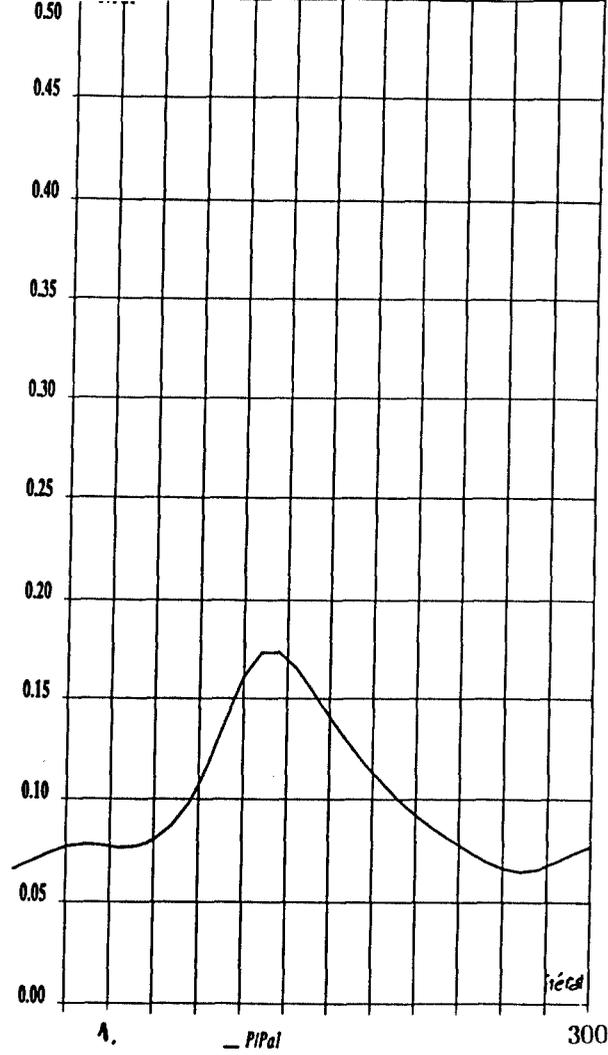


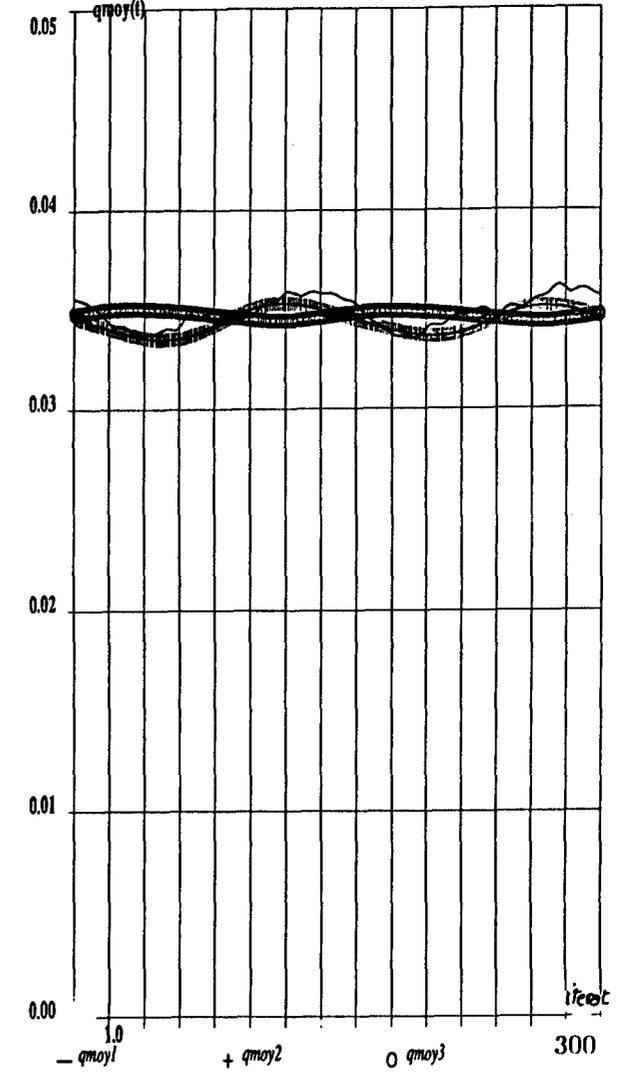
Figure 134 : Cas test CTINS3-2.
 Résultats du couplage sur une période T .
 Effet de la réduction du taux de pression à l'aval du stator basse pression.
 Code implicite avec viscosité artificielle SCHEMA2-2.
 Répartitions instationnaires de pression $1 - \frac{P}{P_i}$
 sur le profil d'une aube du rotor.



Evolution du Mach à la frontière aval du stator.



Evolution de la pression $\frac{P}{P_{a1}}$ en une sonde sur le profil d'une aube du rotor (sonde 2).



Evolution des débits moyens avals des aubages sur une période.

Figure 135 : Cas test CTINS3-2.
 Résultats du couplage sur une période T .
 Effet de la réduction du taux de pression à l'aval du stator basse pression.
 Code implicite avec viscosité artificielle SCHEMA2-2.