N° d'ordre : 1386

THÈSE

présentée à

L'Université des Sciences et Technologies de Lille

pour obtenir le grade de

DOCTEUR D'UNIVERSITE

Spécialité : Productique: Automatique et Informatique Industrielle

par

Michel DAMBRINE
Ingénieur IDN

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DE LA STABILITÉ DES SYSTÈMES À RETARDS

Soutenue le 21 *octobre* 1994 *devant le jury composé de :*

Président :	P. BORNE (Professeur, LAIL-EC Lille)
Rapporteurs :	J. M. DION (D. R. CNRS, LAG-Grenoble)
	J. F. LAFAY (Professeur, LAN-EC Nantes)
Examinateurs :	P. BORNE (Professeur, LAIL-EC Lille)
	Lj.T. GRUJIĆ (Professeur, ENIBe Belfort)
	J.P. RICHARD (Professeur, LAIL-EC Lille)
	F. ROTELLA (Professeur, ENI-Tarbes)
	M. STAROSWIECKI (Professeur, LAIL-EUDIL)

Directeur de thèse: J.P. RICHARD (Professeur, LAIL-EC Lille)

Travail préparé au Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle de Lille (LAIL URA-CNRS D1440), Ecole Centrale de Lille.

A Laurence,
à mes parents.

AVANT PROPOS

Le travail que nous présentons dans ce mémoire a été effectué au Laboratoire d'Automatique et Informatique Industrielle de Lille, à l'Ecole Centrale de Lille, sous la direction de Monsieur le Professeur J. P. Richard.

C'est avec empressement que nous voulons remercier Monsieur le Professeur Richard qui a su nous faire partager son intérêt pour la recherche. Durant toute l'élaboration de cette thèse, ces conseils sérieux, ainsi que sa sincère amitié nous ont permis de mener ces travaux dans les meilleures conditions possibles.

Qu'il nous soit ensuite permis de remercier très vivement, Monsieur le Professeur P. Borne, Directeur scientifique de l'Ecole Centrale de Lille qui, tant par son enseignement que par sa grande expérience de la recherche, a su nous diriger durant nos travaux. Nous sommes très touché de l'honneur qu'il nous fait en acceptant d'assurer la Présidence du jury de thèse.

Nous tenons à exprimer notre très vive reconnaissance à Monsieur J. M. Dion, Directeur de Recherche au C.N.R.S. qui, malgré les lourdes charges auxquelles ses fonctions l'obligent, a accepté d'être rapporteur sur ce mémoire.

Nous tenons également à exprimer notre gratitude à J. F. Lafay professeur à l'Ecole Centrale de Nantes pour l'intérêt qu'il a montré pour nos travaux et qui a accepté spontanément d'être rapporteur et de juger notre travail.

Nous sommes grandement honoré de l'attention que Monsieur le Professeur Grujić, de l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Belfort, a bien voulu porter à nos travaux, en acceptant de participer à notre Jury. Ses remarques et conseils avisés nous ont permis d'approfondir plusieurs points de ce mémoire, nous lui exprimons toute notre reconnaissance.

Nous remercions également, pour leur participation au jury, Monsieur le Professeur M. Staroswiecki de l'Université des Sciences et Technologie de Lille, et Monsieur le Professeur F. Rotella de l'Ecole Nationale d'ingénieurs de Tarbes.

Nous tenons à remercier pour leur aide financière le C.N.R.S. ainsi que la région Nord-Pas-de-Calais.

Nous tenons enfin à remercier tous nos collègues, ainsi que l'ensemble du personnel du L.A.I.L. pour l'ambiance cordiale et chaleureuse qu'ils entretiennent au sein du laboratoire, et tout particulièrement, Melle A. Goubet, ainsi que Messieurs D. Lefebvre et W. Perruquetti qui, à tout moment ont su jouer le rôle d'interlocuteurs intéressés.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Une hypothèse classique dans la modélisation mathématique d'un processus physique est de supposer que le comportement futur du système peut être résumé, dans le cadre déterministe, par son seul état présent, sans dépendre de son évolution antérieure. Cette conjecture conduit à une modélisation sous forme de système d'équations différentielles ordinaires.

Mais il existe de nombreux cas où cette hypothèse est mise en défaut, et il est alors nécessaire de prendre en compte d'autres phénomènes, ce qui entraîne alors pour l'analyse du système un surcroît de complexité.

L'un de ces agents est le phénomène de retard ou d'hérédité qui caractérise l'influence que l'état passé d'un processus exerce sur son comportement au moment actuel : nous en verrons plusieurs exemples concrets dans le chapitre d'introduction. Ainsi, les systèmes commandés présentant des retards non négligeables ne peuvent plus être formulés mathématiquement sous forme de systèmes différentiels ordinaires, mais ils sont décrits par des équations héréditaires dont la dimension théorique devient infinie. Le plus simple de ces modèles correspond aux systèmes d'équations différentielles à retards (que l'on appellera par la suite équations à retards).

La présence de retards peut avoir une influence considérable sur le comportement d'un système bouclé. C'est ainsi que bien souvent l'existence de mouvements oscillatoires, voire instables, peut être expliquée en introduisant une modélisation des retards dans la chaîne d'action ou de rétroaction. On comprend alors la nécessité de pouvoir disposer d'outils adaptés à l'analyse de tels systèmes, et c'est dans ce but que nous allons présenter dans ce mémoire une approche nouvelle pour l'analyse de la stabilité et la stabilisation des systèmes à retards.

La technique de majoration qui est basée sur l'utilisation de fonctions vectorielles de Lyapunov d'un type particulier - les normes vectorielles - a initialement été employée pour l'analyse des systèmes de dimension finie que ce soit en temps continu ou en temps discret. Notre objectif est de montrer comment cette approche peut être généralisée aux systèmes à retards.

Le premier chapitre de ce mémoire est consacré aux bases théoriques des systèmes à retards. On y trouvera les définitions des principales notions fondamentales liées aux comportements des systèmes, tels que la stabilité et les différents concepts associés.

Le deuxième chapitre traite du problème de la stabilité des systèmes linéaires. L'étude portera principalement sur deux classes de systèmes : la première classe regroupe les systèmes linéaires stationnaires et sera traitée sous la forme d'un bilan comparatif des principales méthodes d'analyse de la stabilité rencontrées dans la littérature ; la deuxième concerne les systèmes à coefficients périodiques.

Le troisième chapitre concerne les modèles non linéaires : il est essentiellement divisé en deux parties.
La première concerne les principales méthodes d'analyse de la stabilité des systèmes non linéaires, en particulier les extensions de la méthode directe de Lyapunov. La difficulté bien connue de mise en oeuvre de la seconde méthode de Lyapunov, à savoir la recherche d'une fonction possédant certaines propriétés, est accentuée ici du fait de la complexité structurelle de l'espace d'état sur lequel on opère.
Les bases de notre contribution sont présentées dans la seconde partie, qui propose une solution possible à ce problème : étendre la méthode des normes vectorielles introduites en Automatique par Borne et Gentina aux cas des systèmes à retards. Plusieurs critères originaux de stabilité sont énoncés et confirment l'efficacité de cette approche.

Le dernier chapitre concerne l'application de la méthode des normes vectorielles aux problèmes d'analyse ou de commande suivants : estimation des domaines de stabilité, détermination d'une commande stabilisante respectant des contraintes en l'état et en la commande, stabilité absolue, et enfin estimation des attracteurs et des domaines d'attraction associés.

NOTATIONS

NOTATIONS

$\mathbb{R}$: Corps des réels

$\mathbb{R}_+$: Ensemble des nombres réels positifs ou nuls

$\mathbb{R}^n$: $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n

$\mathbb{C}$: Corps des nombres complexes

Re z: Partie réelle du nombre complexe z

Im z : Partie imaginaire du nombre complexe z

$\bar{z}$: Nombre conjugué du complexe z

$\mathcal{D}$: Sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$

C : Ensemble des fonctions continues définies sur l'intervalle $[-\tau, 0]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

$\mathbf{C}_{\mathcal{D}}$: Ensemble des fonctions continues définies sur l'intervalle $[-\tau, 0]$ à valeurs dans $\mathcal{D}$

x_t : Elément de **C** associé à une fonction continue x et à un instant t par $x_t(s) = x(t+s)$

$|\ |$: désigne soit la valeur absolue d'un réel, soit le module d'un nombre complexe, soit une norme d'un vecteur

$\|\ \|$: désigne soit une norme de matrice, soit la norme sur **C** définie par : $\|\varphi\| = \max_{-\tau \leq s \leq 0} |\varphi(s)|$.

A^T : Transposée de la matrice A

A^* : Transposée conjuguée de la matrice A

$y_1 \leq y_2$: Pour y_1 et $y_2 \in \mathbb{R}^n$: inégalité composante par composante

CHAPITRE 1

CHAPITRE 1 :

INTRODUCTION AUX SYSTÈMES À RETARDS

INTRODUCTION

La présence de retards purs entre la commande et la sortie est un phénomène courant dans de nombreux processus industriels, c'est le cas en particulier lorsqu'il y a transport de matière. Ces retards entraînent des difficultés considérables dans la commande de ces processus.

S'ils sont continus, de tels processus sont caractérisés par une représentation d'état de la forme :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t - \tau)),$$

où x est un vecteur d'état, u(t) désigne la commande appliquée au système à l'instant t, et τ est la durée du retard temporel (par la suite on désignera cette quantité comme le retard du système).

Lorsque la commande appliquée au système est du type retour d'état, par exemple

$$u(t) = K\, x(t),$$

alors l'équation précédente se récrit

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t), x(t - \tau)).$$

Cette dernière relation n'est plus une équation différentielle ordinaire, mais fait partie de la classe des équations à retards, et plus généralement des équations héréditaires.

Les premières équations héréditaires ont été rencontrées dès le XVIII^e siècle dans l'étude de divers problèmes géométriques par plusieurs savants, dont Euler, Bernoulli et Lagrange. Durant le XIX^e et le début du XX^e siècle, les équations à retards ont rarement fait l'objet d'études.

Dans les années 1930, la situation a complètement évolué : un grand nombre de problèmes scientifiques et techniques ont nécessité une description adéquate prenant en compte les différents retards existants. Les premiers problèmes de ce type ont été analysés par Volterra dans ses études sur la viscoélasticité (1909) et sur la modélisation de la compétition entre espèces (modèles proie-prédateur, 1931), Kostitzin (phénomènes

de symbiose et de parasitisme, 1934), Callender et Stevenson (instabilité des systèmes à retards, 1939), Gorelik (oscillateurs à micro-ondes, 1939), Minorsky (stabilisation de navires, 1942), Andronov et Mayer (phénomène de retard dans la commande par rétroaction, 1946),...
Ces problèmes d'applications pratiques ont suscité l'intérêt des mathématiciens et, vers les années 50, la théorie des équations héréditaires a commencé à se développer rapidement. L'article de Myshkis (1949) est sans doute une des principales raisons de cet essor, car on y trouve pour la première fois une formulation correcte du problème de la valeur initiale. Depuis, une littérature importante est disponible sur le sujet : Myshkis (1955), Bellman (1963), El'sgol'ts (1966), Halanay (1966), Hale (1977), ...

Ce premier chapitre constitue une introduction aux systèmes à retards : nous allons y donner les notions de base, les premiers résultats, et aussi quelques exemples d'application. Cette présentation sera aussi l'occasion de mettre en évidence certaines propriétés ou difficultés caractéristiques liées à la présence de retards.

1. Les systèmes à retards

1.1. Définitions, notations

On appelle système à retards une équation différentielle de la forme

$$\text{(E)} \qquad \dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau_1), \ldots, x(t-\tau_m)) \ ; \quad t \geq t_0, \tag{1.1}$$

où x est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ dont la valeur prise à l'instant t est notée x(t), f une fonction vectorielle, et où les τ_i sont soit des nombres réels positifs (appelés retards), soit des fonctions positives du temps, continues (ou continues par morceaux) sur $[t_0, +\infty[$, bornées, c'est-à-dire telles qu'il existe un nombre réel $\tau > 0$ pour lequel les fonctions τ_i (t) vérifient

$$\forall\, t \geq t_0, \qquad 0 \leq \tau_i(t) \leq \tau, \qquad i = 1, \ldots, m. \tag{1.2}$$

Le vecteur x(t) de l'équation (E) est appelé par plusieurs auteurs le vecteur d'état ou l'état instantané du système, mais l'*état du système* à l'instant t est la fonction x_t définie par :

$$x_t(\theta) = x(t+\theta) \quad \text{pour } -\tau \leq \theta \leq 0. \tag{1.3}$$

[notation de Shimanov (1960)]

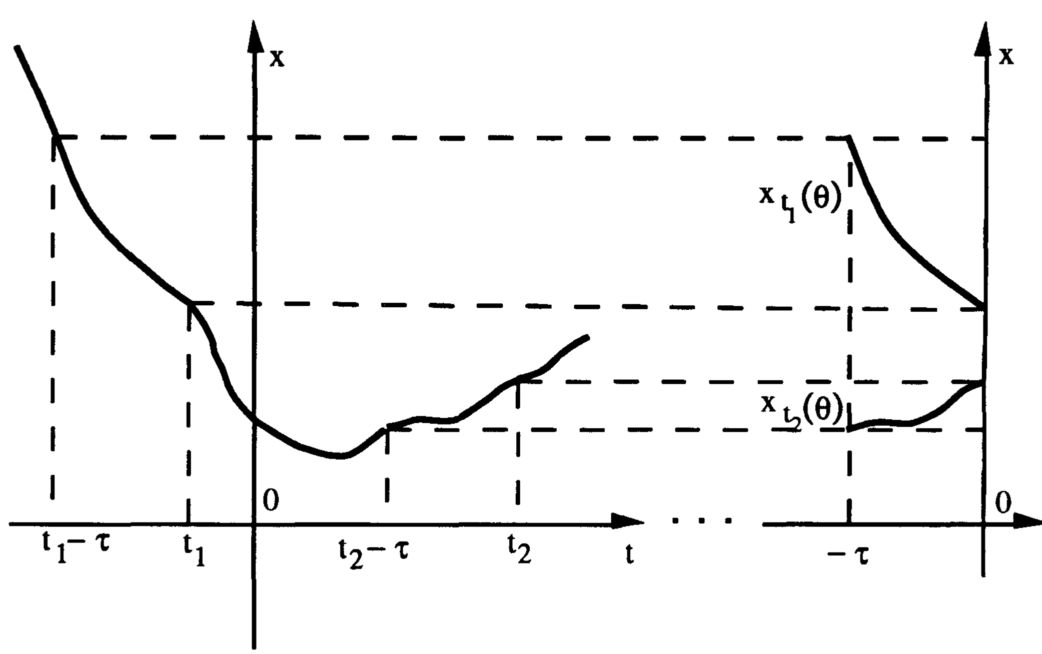

Figure 1.1. Interprétation géométrique de (1.3)

L'espace d'état est donc un espace fonctionnel constitué des fonctions définies sur l'intervalle $[-\tau, 0]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Les équations à retards font donc partie de la classe plus générale des systèmes de dimension infinie.

Notations : Dans la suite, l'espace d'état employé sera $\mathbf{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$, l'ensemble des fonctions définies et continues de $[-\tau, 0]$ dans $\mathbb{R}^n$, que l'on notera **C**.
De même, si $\mathcal{D}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{C}_{\mathcal{D}}$ représentera l'ensemble $\mathbf{C}([-\tau, 0], \mathcal{D})$.

Le système (1.1) est dit *linéaire* lorsque la fonction f est une application linéaire de ces (m+1) derniers arguments, c'est-à-dire lorsqu'il existe (m+1) matrices, notées $A_0(t)$, $A_1(t)$, $A_2(t)$, ..., $A_m(t)$, d'ordre n et à coefficients variables avec le temps, ainsi qu'une fonction $f_1(t)$ telles que

$$f(t, x(t), x(t-\tau_1), \ldots, x(t-\tau_m)) = A_0(t)\, x(t) + \sum_{i=1}^{m} A_i(t)\, x(t-\tau_i) + f_1(t).$$

Pour un tel système, le principe de superposition est valable. Lorsque la fonction $f_1(t)$ est identiquement nulle, le système est dit *homogène.*

Le système (1.1) est dit *stationnaire* ou *autonome* lorsque f ne dépend pas explicitement du temps, et que les retards sont aussi indépendants du temps.

Le système est dit *à coefficients périodiques* lorsqu'il existe un réel $T > 0$ tel que
$\forall\, t \geq t_0, \quad f(t+T, x(t), x(t-\tau_1), \ldots, x(t-\tau_m)) = f(t, x(t), x(t-\tau_1), \ldots, x(t-\tau_m)).$

Enfin, lorsque les retards τ_i sont tous multiples d'un même réel τ_0 appelé retard de base, c'est-à-dire

$$\forall\, i = 1, \ldots, m, \quad \frac{\tau_i}{\tau_0} \in \mathbb{N},$$

le système est dit *à retards commensurables* ou proportionnés.

1.2. Causes des retards

La présence de retards intrinsèques à un système peut être due à une ou plusieurs causes :

- Mesure de variables ;
- Propriétés physiques ou chimiques des matériels utilisés dans le système ;
- Transmission de signaux, d'énergie ou de matière (retard de transport).

L'introduction de retards dans la modélisation d'un processus peut aussi être employée pour tenir compte dans une étude de robustesse des dynamiques négligées.
En effet, si

$$\tilde{P}(s) = P(s) \left(\frac{1}{1 + \tau_1\, s} \right) \left(\frac{1}{1 + \tau_2\, s} \right) \cdots$$

alors pour $| \tau_i \omega | << 1$, on a

$$\tilde{P}(s) \approx P(s)\, e^{-\tau s}, \quad \text{où } \tau = \tau_1 + \tau_2 + \ldots$$

La notion de marge de retard introduite dans [Bourlès et Irving (1991)] permet de prendre en compte, outre ces retards équivalents, les divers retards parasites apparaissant lors du bouclage (la commande numérique en est un exemple typique). Inversement, on verra au deuxième chapitre que, sous certaines conditions, l'analyse d'un système à retards peut être réalisée en remplaçant dans la fonction de transfert du processus les termes exponentiels ($e^{-\tau s}$) par un de leur approximant de Padé.

De plus, une stratégie de commande pour certains processus consiste à introduire délibérément des retards ; leur présence dans un régulateur peut permettre, en particulier, d'éliminer les dépassements excessifs et de diminuer les oscillations, entraînant ainsi un régime transitoire lisse et rapide (consulter à ce sujet [Marshall et Salehi (1982)], [Swisher et Tenqchen (1988)] ou [Kwon *et al.* (1990)]).

L'effet des retards sur la dynamique du système dépend de leur valeur et des caractéristiques du système. Quelquefois le retard peut être négligé dans le modèle sans avoir de conséquences importantes dans l'analyse ou la synthèse si ce n'est une diminution des performances espérées.

Une autre classe de modèles prenant en compte le phénomène de retard est constituée par les équations intégro-différentielles de Volterra. On parle alors d'équation à retard continu. Il est fréquent, pour simplifier l'étude de ces systèmes, d'approcher le système par une équation à retard où tout le phénomène d'hérédité est traduit par un retard équivalent. On rencontre également cette notion de retard équivalent lorsqu'on remplace une équation différentielle d'un ordre relativement important par un système à retard d'ordre moins élevé (cf. méthode de Ziegler et Nichols (1942)).

1.3. Exemples

1.3.1. Réacteur chimique [Kolmanovskii (1986)]

On considère le système décrit par la figure (1.2). Le réacteur est rempli de deux liquides venant des conduites A et B. Sur la conduite B est placée une vanne. Après le mélange (ou la réaction), le liquide sort du récipient à travers la conduite C. La valeur du pH du liquide dans la conduite C est mesurée, et ce signal, après passage dans un régulateur, ajuste l'actionneur de la vanne. Les processus physiques et chimiques sont caractérisés par leur complexité. Pour simplifier l'étude, il est courant d'employer un modèle du réacteur défini par la fonction de transfert $W(s) = K \exp(-\tau s)/(1 + Ts)$. Le facteur $\exp(-\tau s)$ introduit dans la fonction de transfert traduit le fait qu'un changement dans le taux volumétrique du liquide entrant dans le réacteur ne produit un changement dans le liquide sortant qu'après une période de temps égale à τ. En effet, le mélange des liquides, la réaction chimique et l'écoulement du liquide de B vers C nécessitent un certain temps. La durée totale est supposée égale à τ. Ce retard peut être important, de l'ordre de plusieurs minutes.

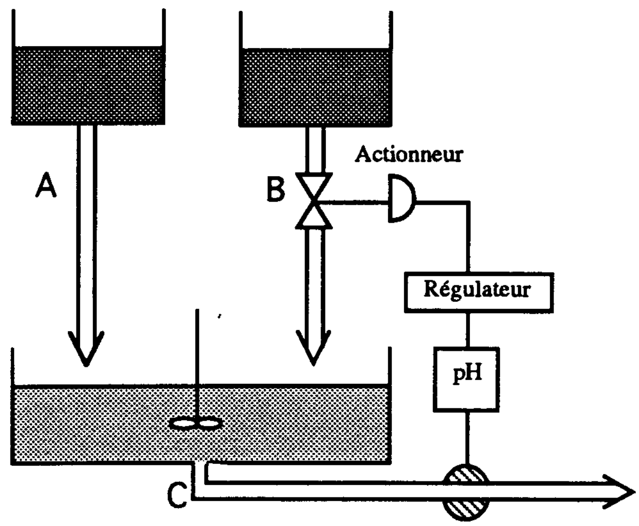

Figure 1.2. Schéma d'un réacteur chimique

1.3.2. Stabilisation d'un navire

Minorsky a été le premier scientifique à montrer l'importance du phénomène de retard dans les systèmes à commande rétroactive. Dans ses essais sur un système anti-roulis , il a montré que ce phénomène peut être à l'origine d'oscillations indésirables [Minorsky, (1947)].

Un autre problème illustrant le phénomène de retard des systèmes à commande bouclée est le réglage d'un pilote automatique pour un navire.

La dynamique du navire est décrite par [Kolmanovskii, (1986)] :

$$I\ddot{\varphi} + h\dot{\varphi} = -K\psi, \quad \text{avec } I, K > 0, \tag{1.4}$$

où φ est l'angle de déviation du bateau et ψ l'angle du gouvernail.

L'angle ψ est gouverné par une loi de pilotage automatique donnée par l'équation

$$T\dot{\psi} + \psi = \alpha\xi + \beta\dot{\xi}, \quad \text{avec } T > 0, \tag{1.5}$$

où ξ est la valeur mesurée de l'angle de déviation du navire. En pratique $\xi(t) \neq \varphi(t)$ car il est impossible de mesurer la déviation du navire instantanément. On suppose donc que

$$\xi(t) = \varphi(t - \tau). \tag{1.6}$$

Sous ces hypothèses, le comportement du navire est décrit par l'équation à retard :

$$TI\dddot{\varphi}(t) + (Th + I)\ddot{\varphi}(t) + h\dot{\varphi}(t) + K\beta\dot{\varphi}(t - \tau) + K\alpha\varphi(t - \tau) = 0. \tag{1.7}$$

Le principal problème réside dès lors dans la détermination des paramètres α et β du pilote automatique qui garantissent la stabilité du système bouclé.

1.3.3. Modèles démographiques

Le choix d'équations à retards pour modéliser l'évolution d'une population permet de prendre en compte la notion d'espérance de vie.
Par exemple, considérons le modèle très simple suivant, avec les notations :

$x(t) =$ nombre d'individus à l'instant t,
$\tau =$ temps de gestation,
$a =$ taux de natalité,
$\sigma =$ espérance de vie d'un individu.

On suppose que τ, a, et σ sont constants, le taux de variation de la population est alors donné par l'équation

$$\dot{x}(t) = a\,[x(t-\tau) - x(t-\tau-\sigma)], \tag{1.8}$$

puisque $ax(t-\tau)$ représente le nombre d'individus nés, par unité de temps, à l'instant t, et $ax(t-\tau-\sigma)$ le taux d'individus morts à t.
On peut citer de nombreux autres exemples, comme par exemple le modèle développé par Hutchinson (1948) :

$$\dot{x}(t) = [\alpha - \gamma\, x(t-\sigma)]\, x(t), \tag{1.9}$$

ou encore ceux de Wangersky et Cunningham (1956), et de Zaharov *et al.* (1982).

1.3.4. Modèles biologiques

Les équations à retards permettent de modéliser différents phénomènes fréquents en écologie ou en biologie, comme par exemple le temps d'incubation pour une maladie ou, pour une réaction immunitaire, le temps nécessaire à la production d'anticorps.
Ainsi, un exemple simple de modélisation d'une réaction immunitaire est le suivant [Dibrov *et al.*, (1979)]. Si g(t) représente le nombre d'antigènes pénétrant dans l'organisme et a(t) le nombre d'anticorps produits, alors le taux d'anticorps produits peut être supposé proportionnel à $g(t-\tau)$. Ici τ est le temps moyen de réaction de l'organisme face aux antigènes, de l'ordre de 3 ou 4 jours. Cette réaction immunitaire peut être décrite par le système d'équations

$$\begin{aligned} \dot{g}(t) &= K\, g(t) - Q\, g(t)\, a(t) \\ \dot{a}(t) &= A\, g(t-\tau) - R\, g(t)\, a(t) - E\, a(t). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Il existe d'autre modèles plus complexes de réponse immunitaire par exemple ceux de Marchuk (1979), ou de Wangersky et Cunningham (1957).
Dans le domaine biomédical, de nombreuses autres applications peuvent être modélisées par des équations à retards comme l'étude de la répartition de l'albumine dans le système sanguin humain ([Bailey et Reeves (1962)], le comportement du système nerveux pendant un apprentissage [Shimbell (1950)], ou des études épidémiologiques [London et Yorke (1973)], [Waltman (1974)], ...

Ces quelques exemples illustrent bien l'intérêt que peuvent susciter les équations à retards. Elles ne sont évidemment pas la seule modélisation possible du phénomène de post-effet, et nous allons dans la suite situer ces équations parmi la classe plus générale des équations héréditaires.

2. CLASSIFICATIONS DES SYSTÈMES HÉRÉDITAIRES

La terminologie employée dans la littérature sur le sujet est souvent variable ou imprécise : on utilise les termes d'équations héréditaires, d'équations différentielles fonctionnelles ou d'équations à retards pour désigner indifféremment une même classe d'équations. Nous proposons dans ce paragraphe une classification des équations héréditaires.

2.1. Définition

Une équation héréditaire est une relation entre une fonction vectorielle et ses dérivées pour des valeurs présentes et passées de son argument (ici, le temps).
Si on désigne par x cette fonction à valeur dans $\mathbb{R}^n$, alors cette relation de dépendance est représentée mathématiquement par l'équation héréditaire générale

$$\text{(EHG)} \qquad G(t, t', x(t), \dot{x}(t), x(t'), \dot{x}(t')) = 0, \quad \text{avec } t' < t. \qquad (1.11)$$

Dans cette égalité, G est une fonctionnelle puisque $x(t')$ dénote en fait la fonction x définie pour des valeurs $t' < t$. On suppose dans la suite que l'équation (1.11) peut être mise sous la forme normale

$$\text{(EH)} \qquad \dot{x}(t) = F(t, t', x(t), x(t'), \dot{x}(t')), \quad \text{avec } t' < t. \qquad (1.12)$$

2.2. Notion de type d'une équation héréditaire

Fondamentalement G peut dépendre de trois façons différentes de $\dot{x}(t)$ et de $\dot{x}(t')$:
- Le premier cas est celui où (EH) s'écrit sous la forme

$$\text{(EHR)} \qquad \dot{x}(t) = F_1(t, t', x(t), x(t')), \text{ avec } t' < t, \tag{1.13}$$

c'est à dire que G dans (EHG) dépend implicitement de $\dot{x}(t)$ et est indépendante de $\dot{x}(t')$. On dit alors que l'équation héréditaire (EHG) est de *type retardé.*

- Le second cas est celui où la fonctionnelle F dépend implicitement de $\dot{x}(t')$. On peut alors récrire (EH) sous la forme

$$\text{(EHN)} \qquad \dot{x}(t) = F_2(t, t', x(t), x(t'), \dot{x}(t')), \text{ avec } t' < t. \tag{1.14}$$

On dit alors que (EHG) est de *type neutre.*
- Le troisième et dernier cas correspond au fait que la fonctionnelle G est indépendante de $\dot{x}(t)$. On dit alors que (EHG) est de *type avancé.*

En régle général, lorsqu'on inverse le sens du temps (transformation $t \rightarrow -t$) un système de type retardé se transforme en un système de type avancé et réciproquement. Les systèmes de type neutre conservant le même type dans cette transformation sont dits *bilatéraux.* Par exemple, le système

$$\dot{x}(t) = x(t-1) + \dot{x}(t-2) \tag{1.15}$$

est de type neutre bilatéral, contrairement à l'équation

$$\dot{x}(t) = \dot{x}(t-1) + x(t-2). \tag{1.16}$$

En pratique, les systèmes rencontrés sont dans la majorité des cas de type retardé, parfois de type neutre et très exceptionnellement de type avancé.

2.3. Système à retards infinis ou bornés

Dans la plupart des cas réellement rencontrés, seule une partie récente du passé exerce une influence sur le comportement du système. On parle alors d'équations à retards bornés s'il existe un nombre réel $\tau > 0$ tel que t' dans l'équation (EHG) appartienne à l'intervalle $[t - \tau, t]$. On les désigne plus souvent comme étant des *équations différentielles fonctionnelles* [Hale (1977)] (d'autres auteurs n'utilisent pas cette convention et emploient indifféremment les deux expressions équation différentielle fonctionnelle ou équation héréditaire). Les équations différentielles fonctionnelles de type retardé ont pour forme générale :

$$\text{(EFR)} \qquad \dot{x}(t) = F(t, x_t), \tag{1.17}$$

où x_t (notation de Shimanov (1960)) représente l'application associée à la fonction x et à l'instant t par $x_t(s) = x(t+s)$, pour tout s appartenant à l'intervalle $[-\tau, 0]$.

Dans le cas contraire, on dit que le système est à retard infini.

2.4. Système à retards localisés ou distribués

Un système à retards localisés est un système héréditaire où les instants t' dans la loi d'évolution (EHG) sont en nombre fini. On les appelle également équations à arguments déviés. Les termes $\tau_i = t - t'$ sont appelés retards du système et peuvent être fonctions du temps, de la fonction x et/ou de ses dérivées. Notons que les équations à retards font partie de cette classe puisque leurs retards sont constants ou fonction du temps.

Dans le cas contraire, on parle de système à retards distribués. C'est le cas par exemple des équations intégro-différentielles.

2.5. Exemples

Pour illustrer cette classification, considérons les exemples suivants :

(i) $\dot{x}(t) = x(\frac{t}{2}), \ t \geq t_0 \geq 0$ (1.18)

(ii) $\dot{x}(t) = r\,x(t)\left[1 - \frac{x(t-\tau)}{K}\right]$ (équation logistique retardée [Gopalsamy (1992)]) (1.19)

(iii) $\dot{x}(t) = \int_0^t (t-s)^m \, x(s)\, ds$ (1.20)

(iv) $\dot{x}(t) = -\int_{t-\tau}^{t} a(t-s)g(x(s))ds, \quad \tau > 0$ (réacteur nucléaire à combustible circulant, [Ergen (1954)]) (1.21)

(v) $\dot{x}(t) + \dot{x}(t-1) = x(t-2) - 2x(t),$ (1.22)

(vi) $\dot{x}(t-1) = k(t)x(t) - k(t-1)x(t-1)$ (1.23)

(ralentissement des neutrons dans un réacteur nucléaire [Slater et Wilf (1960)]).

Les équations (i)-(iv) sont de type retardé, (v) est de type neutre, et (vi) de type avancé. (i) et (ii) sont à retards localisés alors que (iii) et (iv) sont à retards distribués. Enfin, (i) et (iii) sont à retards infinis tandis que (ii) et (iv) sont à retards bornés.

3. Problème de Cauchy pour les équations à retards

3.1. Problème de la valeur initiale

Le problème de la valeur initiale pour l'équation (1.1) que l'on rappelle ici :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau_1(t)), \dots, x(t - \tau_m(t))) \; ; \quad t \geq t_0, \tag{1.24}$$

avec $0 \leq \tau_i(t) \leq \tau$, se formule de la manière suivante.
Soit une fonction arbitraire φ définie sur l'intervalle $[-\tau, 0]$ à valeur dans $\mathbb{R}^n$. Une fonction x définie sur un intervalle $[t_0 - \tau, t_0 + b[$, où b est un nombre réel strictement positif, fini ou infini, telle que :

(i) $x_{t_0} = \varphi$,

(ii) x est continue sur l'intervalle $[t_0, t_0 + b[$, et

(iii) x vérifie l'équation (1.24) pour tout t dans $[t_0, t_0 + b[$ (où $\dot{x}(t_0)$, par extension, désigne la dérivée à droite de x en t_0),

est appelée solution de l'équation (1.24) avec la condition initiale φ à l'instant t_0.
On dira que la solution x est unique si c'est la seule solution de (1.24) pour la condition initiale φ.

Remarque : Contrairement aux cas des systèmes non retardés, il n'est pas exclus que deux trajectoires distinctes de (1.24) coïncident au bout d'un certain laps de temps. Pour illustrer ce point, il nous suffit de considérer l'équation

$$\dot{x}(t) = -a\, x(t-1)\, [1 - x^2(t)]$$

qui admet la solution constante $x(t) = 1$. Mais pour toute condition initiale φ définie et continue sur l'intervalle $[-\tau, 0]$ et telles que $\varphi(0) = 1$, alors on a $x_t = \mathbf{1}$, $\forall\, t \geq \tau$, où ici $\mathbf{1}$ est la fonction constante de $\mathbf{C}$ de valeur 1.

Dans la suite, les fonctions initiales φ seront choisies continues, on imposera de plus la condition $x(t_0 + 0) = \varphi(0)$. C'est à dire que x est continue sur l'intervalle $[t_0 - \tau, t_0 + b[$. Ces restrictions ne sont pas contraignantes pour une étude générale de la stabilité des solutions de (1.24). En effet, si φ est discontinue en $\theta = 0$, il suffit de considérer la solution ayant comme condition initiale, à l'instant initial $t_0 + \tau$, la fonction $x_{t_0+\tau}$, qui, elle, est continue.

3.2. La méthode de résolution pas-à-pas

Un moyen simple de résoudre l'équation différentielle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)) \\ x_{t_0} = \varphi \end{cases} \tag{1.25}$$

où φ est un élément de **C**, est de se ramener à la résolution d'une équation différentielle ordinaire. Pour cela, pour t appartenant au segment $[t_0, t_0+\tau]$, on remplace $x(t-\tau)$ dans (1.25) par $\varphi(t-t_0-\tau)$, ce qui réduit le problème précédent à la détermination de la solution de l'équation différentielle ordinaire

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), \varphi(t-t_0-\tau)) \\ x(t_0) = \varphi(0) \end{cases} \tag{1.26}$$

La solution x(t) étant définie sur l'intervalle $[t_0, t_0+\tau]$, ce processus peut être réitéré pour les intervalles $[t_0+\tau, t_0+2\tau]$, $[t_0+2\tau, t_0+3\tau]$, et ainsi de suite jusqu'à définir complètement la solution x(t). Cette technique de résolution est connue sous le nom de méthode "pas-à-pas" ou méthode des pas.

Remarque : la méthode pas-à-pas s'applique encore pour les systèmes à retards variant avec le temps à la condition qu'il existe un nombre réel δ strictement positif minorant chacun des retards, i.e.

$$\forall\, i, \forall\, t \geq t_0,\ \ \tau_i(t) \geq \delta.$$

Elles s'étend également aux cas des équations du type (1.17) lorsque la fonctionnelle $F(t, x_t)$ ne dépend que de x(t) et de x(t + s) pour $s \in [-\tau, \varepsilon]$, où $\varepsilon < 0$.

Pour illustrer cette technique, on considère le système

$$\dot{x}(t) = -\, x(t-1), \quad \text{pour } t \geq 0, \tag{1.27}$$

muni de la condition initiale x(t) = 1 pour $t \in [-1, 0]$. Dans ce cas particulier, la solution pour tout t positif est donnée par la formule

$$x(t) = \sum_{i=0}^{n+1} \frac{(-1)^i}{i!}\,(t-(i-1))^i, \tag{1.28}$$

où n est la partie entière de t.

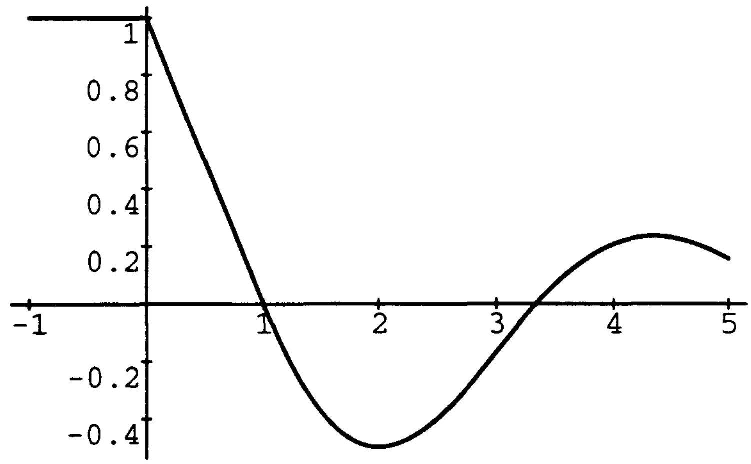

Figure 1.3. Graphe de la solution de (1.27)

Cet exemple permet d'illustrer quelques propriétés spécifiques aux systèmes à retards.

* A la différence des équations différentielles ordinaires, la solution générique du système (1.25) n'est pas de classe C^∞, même pour des fonctions f et φ analytiques. On remarque plus précisément qu'au point $t = t_0 + (k - 1)\,\tau$ la dérivée d'ordre k de la solution de (1.25) présente une discontinuité de première espèce (ceci pour toute fonction initiale φ ne vérifiant pas l'égalité $\dot{\varphi}(0) = f[t_0, \varphi(0), \varphi(-\tau)]$), mais par contre les dérivées d'ordres inférieurs sont continues en ce point. Ainsi, la solution x(t) est de plus en plus régulière selon les valeurs croissantes de t.

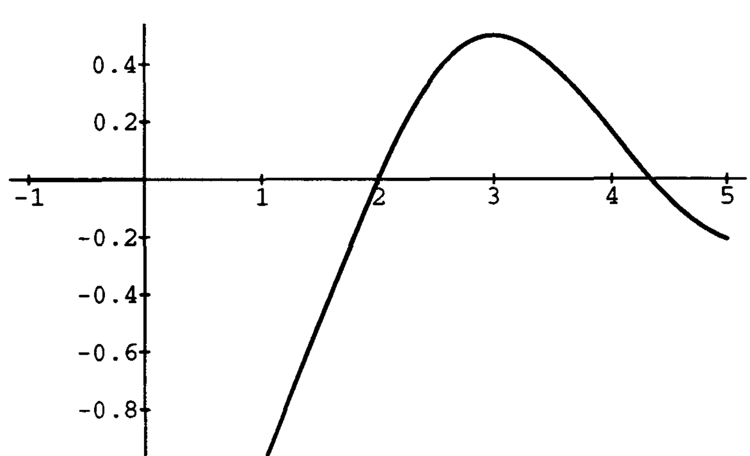

Figure 1.4. Graphe de la dérivée première de la solution de (1.27)

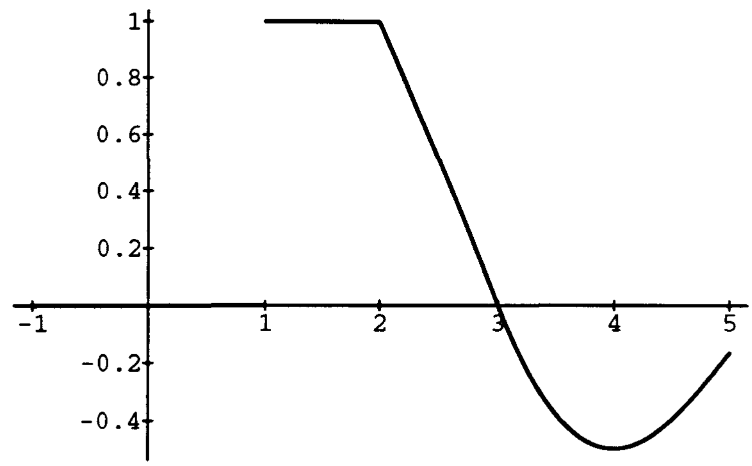

Figure 1.5. Graphe de la dérivée seconde de la solution de (1.27)

* Dans certains problèmes de commande, il est nécessaire de déduire l'état initial de l'état courant : si ce problème, appelé prolongement à gauche de la solution, ne pose pas de difficultés sérieuses pour les systèmes différentiels ordinaires, il n'en est pas de même pour les systèmes à retards. Par exemple, le système (1.27) muni de la condition initiale $x(t) = \varphi(t)$ pour $t \in [-1, 0]$ peut être récrit sous la forme

$$x(t) = -\dot{x}(t + 1). \tag{1.29}$$

Ainsi, sur $[-2, -1]$ on a $x(t) = -\dot{\varphi}(t + 1)$, sur $[-3, -2]$ $x(t) = \ddot{\varphi}(t + 2)$, et ainsi de suite. On voit donc que l'existence de solutions à gauche de l'instant initial est soumise à des conditions sévères : ici, la fonction φ doit au moins être de classe C^1, et vérifier la condition $\varphi(-1) = -\dot{\varphi}(0^-)$.

De plus ce problème est mal posé au sens de Hadamard [Hadamard (1932)] : si la fonction initiale $\varphi(t)$ n'est connue qu'à une certaine précision, c'est-à-dire, on connaît $\varphi_c(t) = \varphi(t) + \delta(t)$, ainsi qu'une estimation δ_0 ($\| \delta(t) \| \leq \delta_0$) de l'erreur, alors, ces hypothèses ne nous permettent pas de déterminer $x(t)$ à gauche de l'instant initial à quelque degré de précision que ce soit. Dans notre exemple, pour $\delta(t) = \delta_0 \sin \omega t$, on a $x(t) = -\dot{\varphi}_c(t+1) = -\dot{\varphi}(t+1) - \delta_0\, \omega \cos \omega(t+1)$, et l'erreur $\| x(t) + \dot{\varphi}(t+1) \|$ est une fonction non bornée de la fréquence ω.

3.3. Existence et unicité des solutions

3.3.1. Application de la méthode pas-à-pas

Lorsqu'elle s'applique, la méthode pas-à-pas fournit une réponse simple au problème de Cauchy. En effet, l'équation à retards (1.24) ne possède des solutions que si l'équation différentielle ordinaire associée

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u_1(t), ..., u_m(t)) \tag{1.30}$$

(où $u_i(t) = x(t - \tau_i(t))$, ces valeurs de x étant supposées connues), admet des solutions. De même, l'unicité des solutions de (1.30) implique celle des solutions de (1.24). Les critères classiques d'existence et d'unicité de la solution d'un système ordinaire (théorèmes de Cauchy-Peano-Arzela et de Cauchy-Lipschitz) permettent donc d'énoncer le résultat suivant.

Théorème 3.1. [El'sgol'ts et Norkin (1973)] : *Soit l'équation différentielle à retards* (1.24). *On suppose que les retards* $\tau_i(t)$ *sont des fonctions continues, strictement positives du temps.*
Si la fonction f *est continue par rapport à toutes ses variables alors, pour toute condition initiale* φ *élément de* **C**, *il existe une solution passant par* φ *à l'instant* t_0. *Si de plus* f *est localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable, alors la solution est unique.*

3.3.2. Application du théorème du point fixe

Si, dans l'équation (1.24), un des retards s'annule, alors le théorème précédent ne s'applique pas. Une nouvelle condition suffisante d'existence et d'unicité des solutions peut être établie en utilisant, comme pour les systèmes sans retard, la notion d'application contractante et un théorème du point fixe (ici, celui de Schauder). Par raison de commodité, on utilise l'écriture des systèmes sous la forme fonctionnelle (1.17). Ainsi, par exemple, le système (1.24) se récrit sous la forme

$$\dot{x}(t) = F(t, x_t), \tag{1.31}$$

où, pour tout φ dans **C**, la fonctionnelle F est définie par :

$$F(t, \varphi) = f(t, \varphi(0), \varphi(-\tau_1(t)), ..., \varphi(-\tau_m(t))).$$

Théorème 3.2. [Driver (1977)], [Hale (1977)] : *Si* $F(t, \phi)$ *dans* (1.31) *est continue en* (t, ϕ) *sur* $\mathbb{R} \times$ **C**, *alors pour tout* (t_0, φ) *dans* $\mathbb{R} \times$ **C**, *il existe une solution de* (1.31) *admettant la valeur initiale* φ *à* $t = t_0$. *Si de plus* F *est localement lipschtzienne en* ϕ *sur* $\mathbb{R} \times$ **C**, *alors la solution est unique et elle dépend continûment de la fonctionnelle* F, *de l'instant initial* t_0 *et de la valeur initiale* φ.

Remarques :
(i) La fonctionnelle F est localement lipschtzienne en ϕ sur $\mathbb{R} \times$ **C** si, pour tout point (t, φ), il existe un voisinage **V** de ce point dans $\mathbb{R} \times$ **C** et un nombre k strictement positif tels que, pour tous (t, φ_1) et (t, φ_2) dans **V**, on ait :

$$| F(t, \varphi_1) - F(t, \varphi_2) | \leq k \, \| \varphi_1 - \varphi_2 \|,$$

où $| \, . \, |$ est une norme quelconque de $\mathbb{R}^n$ et $\| \, . \, \|$ est la norme sur **C** définie par

$$\| \varphi \| = \sup \{ | \varphi(\theta) | \, ; \, \theta \in [-\tau, 0] \}.$$

(ii) Dans le cas de l'équation (1.24), cette condition peut également s'énoncer "f est localement lipschitzienne relativement à toutes ses variables excepté la première".

(iii) Une autre condition d'existence et d'unicité des solutions, donnée par Hale (1977), est que F soit continue, et transforme tout sous-ensemble borné de $\mathbb{R} \times \mathbf{C}$ en un nouveau sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^n$.

(iv) Une condition suffisante [Kolmanovskii et Myshkis (1992)] d'existence globale de la solution, c'est-à-dire assurant que la solution x(t) est définie sur l'intervalle $[t_0 - \tau, +\infty[$, est que F vérifie en plus de la condition locale de Lipschitz une condition de type Nagumo :

$$| F(t, \phi) | \leq \Phi(t, \| \phi \|), \quad \forall (t, \phi) \in [t_0, \infty[\times \mathbf{C},$$

où $\Phi : [t_0, \infty[\times \mathbb{R}_+ \rightarrow]0, \infty[$ est une fonction continue, croissante en t, et telle que

$$\int_0^\infty \frac{ds}{\Phi(t, s)} = \infty, \quad t_0 \leq t \leq \infty.$$

Cette propriété est vérifiée dans le cas particulier où il existe deux fonctions A et B définies et continues pour $t \geq t_0$ telle que

$$| F(t, \phi) | \leq A(t) \, \| \phi \| + B(t), \quad \forall (t, \phi) \in [t_0, \infty[\times \mathbf{C}.$$

4. NOTIONS DE STABILITÉ POUR LES SYSTÈMES À RETARDS

La continuité par rapport aux conditions initiales est une propriété importante pour un système, elle signifie que le système est résistant vis-à-vis de faibles perturbations pour un intervalle de temps donné. Cette notion est cependant insuffisante, le système pouvant présenter différents types de comportements. L'un d'entre eux est le comportement chaotique : les solutions de ce type de système, calculées pour des conditions initiales distinctes mais arbitrairement voisines l'une de l'autre, sont très proches l'une de l'autre sur un intervalle de temps donné, mais à plus longue échéance les solutions s'éloignent et semblent complètement indépendantes, leurs comportements apparaissent alors comme étant aléatoires. C'est l'exemple-type d'un système complètement imprédictible, puisque dans la réalité, on ne peut reproduire exactement les mêmes conditions d'une expérience à une autre. Pour remédier à ce problème, la notion de stabilité a été introduite. Elle concerne la sensibilité d'une solution vis-à-vis de sa condition initiale. Les définitions classiques des diverses notions de stabilité pour les équations différentielles ordinaires s'étendent aisément dans le cadre des systèmes à retards.

4.1. Cas des solutions stationnaires

Les premières études sur la stabilité sont issues du domaine de la mécanique, elles portaient essentiellement sur deux types de solutions particulières : les solutions stationnaires (citons par exemple le théorème classique de Lagrange-Dirichlet pour analyser la stabilité d'un point d'équilibre en mécanique du solide), ou les solutions périodiques (les travaux de Poincaré et de Lyapunov sur l'étude de la stabilité d'une orbite en mécanique céleste restent une référence dans ce domaine).
L'objet de cette partie est de définir, pour un système à retards, les notions d'état d'équilibre, de point d'équilibre ainsi que les différents concepts de stabilité associés.

Dans les définitions qui suivent, on utilise les notations suivantes :

$x(t; t_0, \varphi)$ est la valeur prise à l'instant t par la solution de (1.31) (ou de (1.24)) dont l'état x_t passe par la valeur initiale φ à l'instant t_0, et on note $x_t(t_0, \varphi)$ son état à l'instant t. Comme précédemment, $\| . \|$ désigne la norme sur **C** définie par

$$\| \phi \| = \sup \{ | \phi(\theta) | ; \theta \in [-\tau, 0] \},$$

et $\mathbf{B}(\varphi, \delta)$ est l'ensemble des fonctions ϕ de **C** vérifiant $\| \phi - \varphi \| < \delta$.

4.1.1. Notions d'état d'équilibre et de point d'équilibre

φ_e, élément de **C**, est un *état d'équilibre* de (1.31) si, pour tout t_0 dans $\mathbb{R}$, la solution $x(t; t_0, \varphi_e)$ existe, et est donnée par :

$$\forall\ t \geq t_0,\ x_t(t_0, \varphi_e) = \varphi_e . \tag{1.32}$$

On voit que si φ_e est un état d'équilibre du système (1.31), alors, pour tout $t \geq t_0$ et tout $T \geq 0$, on a :

$$x_{t+T}(t_0, \varphi_e) = x_t(t_0, \varphi_e),$$

c'est-à-dire $x_t(t_0, \varphi_e)$ (ou encore φ_e) est une fonction constante : il existe un point x_e de $\mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall\ \theta \in [-\tau, 0], \qquad \varphi_e(\theta) = x_e. \tag{1.33}$$

Par définition, x_e est un *point d'équilibre* du système (1.31).

Proposition 4.1 : $\varphi_e \in$ **C** est un état d'équilibre du système (1.31) si, et seulement si, les trois conditions suivantes sont vérifiées :

(i) $\forall\ t_0 \in \mathbb{R}$, pour la condition initiale φ_e à l'instant initial t_0, le système (1.31) admet une solution unique définie sur l'intervalle $[t_0 - \tau, +\infty[$,

(ii) $\forall\ t \in \mathbb{R}, \quad F(t, \varphi_e) = 0,$ (1.34)

(iii) φ_e est une fonction constante de **C**.

Démonstration :

Condition nécessaire : Si φ_e est un état d'équilibre, alors les propriétés (i), (ii) et (iii) dérivent directement de la définition (1.32).

Condition suffisante : Si les propriétés (ii) et (iii) sont vérifiées, alors il existe un vecteur x_e de $\mathbb{R}^n$ vérifiant (1.33), et la condition (ii) implique alors que la fonction constante $x(t) = x(t; t_0, \varphi_e) = x_e$ vérifie

$$\dot{x}(t) = 0 = F(t, x_t),\ \forall\ t \geq t_0,\ \forall\ t_0 \in \mathbb{R}$$

Donc, $x(t; t_0, \varphi_e) = x_e$ est une solution de (1.31) passant par φ_e à t_0, cette solution est unique d'après la condition (i). La relation (1.32) est donc vérifiée : φ_e est un état d'équilibre de (1.31).

Remarque : dans le cas d'une équation de la forme (1.24), la condition (1.34) s'écrit

$$\forall\ t \in \mathbb{R}, \qquad f(t, x_e, \ldots, x_e) = 0. \tag{1.35}$$

4.1.2. Stabilité d'une solution stationnaire

Le comportement d'une solution d'un système peut dépendre de l'instant initial choisi, ainsi un équilibre peut être instable pour un instant initial donné et stable pour un autre. On retrouve ce fait dans la littérature : certains définissent la stabilité correspondant à un instant initial donné ([Kolmanovskii & Mishkys (1992)] , [Kolmanovskii & Nosov (1986)], [El'sgol'ts & Norkin (1973)], [Driver (1977)], [Krasovskii (1963)]) alors que d'autres la définissent pour tous les instants initiaux possibles ([Hale (1977)], [Yoshizawa (1966)], [Burton & Hatvani (1990)], [Wang (1992)]). Dans ce qui suit, nous nous proposons d'étendre aux cas des systèmes à retards les définitions de la stabilité et de l'attractivité donnée par Grujić (voir par exemple [Grujić (1975)] ou [Perruquetti (1994)]). Dans ces définitions, $\mathcal{T}_i$ est un ensemble connexe d'instants initiaux t_0. $\mathcal{T}_i$ peut par exemple être un intervalle de $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{R}$ tout entier.

Soit φ_e un état d'équilibre de (1.31) de valeur x_e, la solution $x(t; t_0, \varphi_e)$ (ou l'état φ_e) de (1.31) est dite :

(i) *stable par rapport à t_0* (au sens de Lyapunov) si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\delta > 0$ dépendant de t_0, de ε et de x_e tel que l'inégalité $| x(t; t_0, \varphi') - x_e | \leq \varepsilon$ soit vérifiée pour toute condition initiale φ' dans $\mathbf{B}(\varphi_e, \delta)$, et pour tout instant $t \geq t_0$.

(ii) *stable par rapport à $\mathcal{T}_i$* si elle est stable par rapport à tout $t_0 \in \mathcal{T}_i$.

(iii) *stable* si elle est stable par rapport à $\mathbb{R}$.

(iv) Dans les cas contraires à (i), (ii), (iii), la solution $x(t; t_0, \varphi)$ est respectivement dite *instable par rapport à t_0, instable par rapport à $\mathcal{T}_i$, instable.*

(v) *uniformément stable par rapport à $\mathcal{T}_i$* si, pour tout réel $\varepsilon > 0$ et tout $t_0 \in \mathcal{T}_i$, il existe un réel $\delta > 0$ dépendant uniquement de ε et de x_e tel que $| x(t; t_0, \varphi') - x_e | \leq \varepsilon$ soit vérifiée pour toute condition initiale φ' dans $\mathbf{B}(\varphi_e, \delta)$, et pour tout instant $t \geq t_0$.

(vi) *uniformément stable* si elle est uniformément stable par rapport à $\mathbb{R}$.

(vii) *attractive par rapport à t_0* s'il existe un réel $\Delta > 0$ tel que, pour toute condition initiale φ' dans $\mathbf{B}(\varphi_e, \Delta)$, on ait

$$\lim_{t \to \infty} x(t; t_0, \varphi') = x_e. \tag{1.36}$$

(viii) *attractive par rapport à $\mathcal{T}_i$* si elle est attractive par rapport à tout $t_0 \in \mathcal{T}_i$.

(ix) *attractive* si elle est attractive par rapport à $\mathbb{R}$.

(x) *uniformément attractive par rapport à $\mathcal{T}_i$* s'il existe un $\Delta > 0$ tel que, à tout $\gamma > 0$, on puisse associer un $T > 0$ tel que l'inégalité $| x(t; t_0, \varphi') - x_e | \leq \gamma$ soit vérifiée pour tout $t_0 \in \mathcal{T}_i$, tout instant $t \geq t_0 + T$, et pour toute condition initiale φ' dans $\mathbf{B}(\varphi_e, \Delta)$.

(xi) *asymptotiquement stable* (respectivement par rapport à t_0, ou $\mathcal{T}_i$) si elle est à la fois stable et attractive (resp. par rapport à t_0, ou $\mathcal{T}_i$).

(xii) *uniformément asymptotiquement stable* (resp. par rapport à $\mathcal{T}_i$) si elle est uniformément stable (resp. par rapport à $\mathcal{T}_i$) et uniformément attractive (resp. par rapport à $\mathcal{T}_i$).

(xiii) *exponentiellement stable par rapport à t_0* s'il existe trois constantes α, β et μ strictement positives telles que pour tout φ' dans $\mathbf{B}(\varphi_e, \mu)$ l'inégalité

$$| x(t; t_0, \varphi') - x_e | \leq \alpha \, \| \varphi' - \varphi_e \| \exp[-\beta(t - t_0)] \tag{1.37}$$

soit vérifiée pour tout $t \geq t_0$.

(xiv) *exponentiellement stable* (resp. par rapport à $\mathcal{T}_i$) si elle est exponentiellement stable pour tout t_0 dans $\mathbb{R}$ (resp. pour tout t_0 dans $\mathcal{T}_i$).

(xv) *uniformément exponentiellement stable* (par rapport à $\mathcal{T}_i$) si elle est exponentiellement stable (par rapport à $\mathcal{T}_i$) et si dans (1.37) les réels α, β et μ sont indépendants de t_0.

4.2. Stabilité d'une solution générale

L'étude de la stabilité d'une solution quelconque $x(t; t_0, \varphi)$ peut se ramener à l'étude de la stabilité de la solution nulle d'un autre système, il suffit pour cela de considérer l'équation aux écarts entre la trajectoire nominale et la trajectoire perturbée. En effet, si on effectue le changement de variable $x(t) = x(t; t_0, \varphi) + y(t)$, avec comme condition initiale $\varphi' = \varphi + \psi$, alors y est solution du problème

$$\dot{y}(t) = F(t, x_t(t_0, \varphi) + y_t) - F(t, x_t(t_0, \varphi)) \triangleq F'(t, y_t) \quad (\text{avec } F'(t, 0) \equiv 0),$$

$$y_{t_0} = \psi.$$

Définition : La solution $x(t\,; t_0, \varphi)$ est dite stable (au sens de Lyapunov) par rapport à $\mathcal{T}_i$ si pour tout $t_0 \in \mathcal{T}_i$ et pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un réel $\delta > 0$, dépendant de t_0 et de ε, tel que l'inégalité $| x(t; t_0, \varphi') - x(t\,; t_0, \varphi) | \leq \varepsilon$ soit vérifiée pour toute condition initiale φ' dans $\mathbf{B}(\varphi, \delta)$, et pour tout instant $t \geq t_0$, ou encore, si la solution nulle du système

$$\dot{y}(t) = F'(t, y_t)$$

défini ci-dessus est stable par rapport à $\mathcal{T}_i$.

Le concept de stabilité par rapport à t_0 est illustré par le schéma suivant :

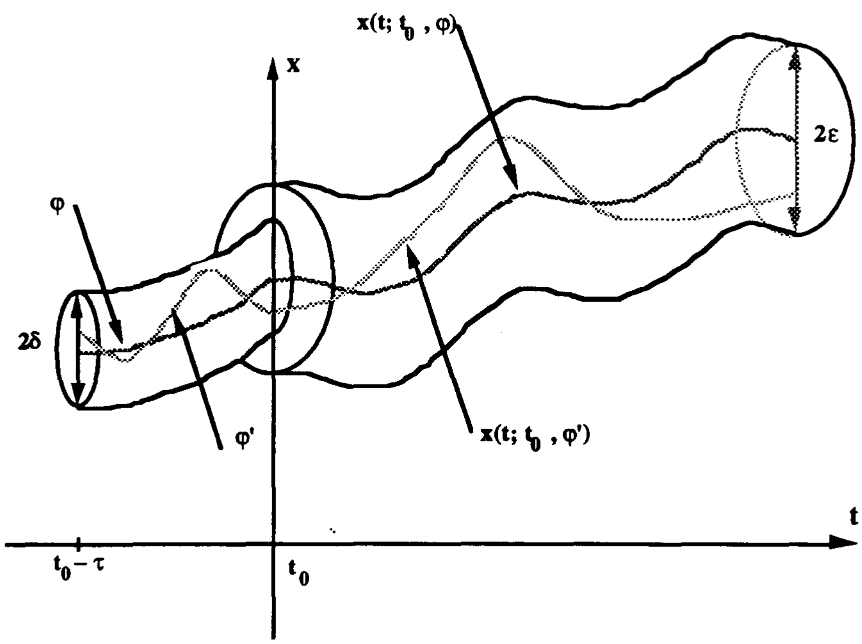

Figure 1.6. Illustration du concept de stabilité

Dans la suite de ce mémoire, nous nous restreindrons donc à l'étude de la stabilité de la solution nulle d'un système à retards, c'est à dire que nous supposerons, sauf évidemment indication du contraire, que le système admet la fonction $x = 0$ comme solution, et donc que $f(t, 0, ..., 0) \equiv 0$ (ou encore $F(t, 0) \equiv 0$), et qu'il vérifie des conditions d'existence et d'unicité des solutions.

On a vu dans le paragraphe précédent que la propriété de stabilité dépend de l'instant initial, mais cette influence de t_0 peut être nuancée si la solution dépend continûment des conditions initiales :

Théorème 4.1. [Driver (1977)] : *Supposons que le système* (1.31) *vérifie des conditions d'existence, d'unicité, et de continuité des solutions vis-à-vis des données initiales pour tout* t_0 *appartenant à un intervalle* $[\alpha, \beta]$ (*avec éventuellement* $\beta = +\infty$), *alors si la solution nulle est stable par rapport à un instant* $t_1 \in [\alpha, \beta]$, *elle est stable par rapport à l'intervalle* $[\alpha, t_1]$.

Remarque : il peut exister un instant $t_2 > t_1$ par rapport auquel la solution nulle est instable comme le montre l'exemple suivant.

Exemple : ([Zverkin (1959)], [Kolmanovskii & Nosov (1986)])
Soit l'équation

$$\dot{x}(t) = b(t)\, x(t - \frac{3\pi}{2}), \tag{1.38}$$

où la fonction b(t) est définie par

$$b(t) = \begin{cases} 0 \text{ pour } t \leq \frac{3\pi}{2} \\ b(t) = -\cos t \text{ pour } \frac{3\pi}{2} \leq t \leq 3\pi \\ b(t) = 1 \text{ pour } t \geq 3\pi. \end{cases}$$

La solution passant à $t_0 = 0$ par toute fonction φ définie et continue sur $[-\frac{3\pi}{2}, 0]$ est donnée par les relations

$$x(t, 0, \varphi) = \varphi(0) \qquad \text{pour } t \in [0, \tfrac{3\pi}{2}],$$

et

$$x(t, 0, \varphi) = -\varphi(0) \sin t \qquad \text{pour } t \geq \tfrac{3\pi}{2}.$$

On a donc $| x(t, 0, \varphi) | \leq | \varphi(0) |$ pour $t \geq 0$. La solution nulle de (1.38) est donc stable par rapport à $t_0 = 0$.

Considérons à présent un instant $t_1 \geq 3\pi$, et soit φ_1 la fonction définie par

$$\varphi_1(\theta) = \delta \exp[\lambda(t_1 + \theta)] \text{ pour } \theta \in [-\tfrac{3\pi}{2}, 0],$$

où λ est la racine réelle positive de l'équation

$$y = \exp[-\tfrac{3\pi y}{2}].$$

On vérifie alors aisément que $x(t; t_1, \varphi_1) = \delta \exp[\lambda(t - t_1)]$ pour $t \geq t_1 - \frac{3\pi}{2}$, et donc que la solution nulle est instable par rapport à tout instant $t_1 \geq 3\pi$.

C'est une différence majeure avec les systèmes non retardés puisque, dans les conditions précédentes, la solution nulle d'une équation différentielle ordinaire est stable par rapport à l'intervalle $[\alpha, \beta]$. Ceci a amené Hahn à définir la propriété de stabilité pour une solution générale de (1.31) par :

Définition [Hahn (1963)] : La solution $x(t; t_0, \varphi)$ du système (1.31) est dite stable (au sens de Hahn) si pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $t_1 \geq t_0$ il existe un réel $\delta > 0$ dépendant de ε, t_1 et t_0 tel que l'inégalité

$$| x(t; t_1, \varphi') - x(t; t_0, \varphi) | < \varepsilon$$

soit vérifiée pour tout $t \geq t_1$ et toute fonction φ' vérifiant

$$\| \varphi' - x_{t_1}(t_0, \varphi) \| < \delta.$$

Cette notion de stabilité de Hahn est illustrée par la figure suivante :

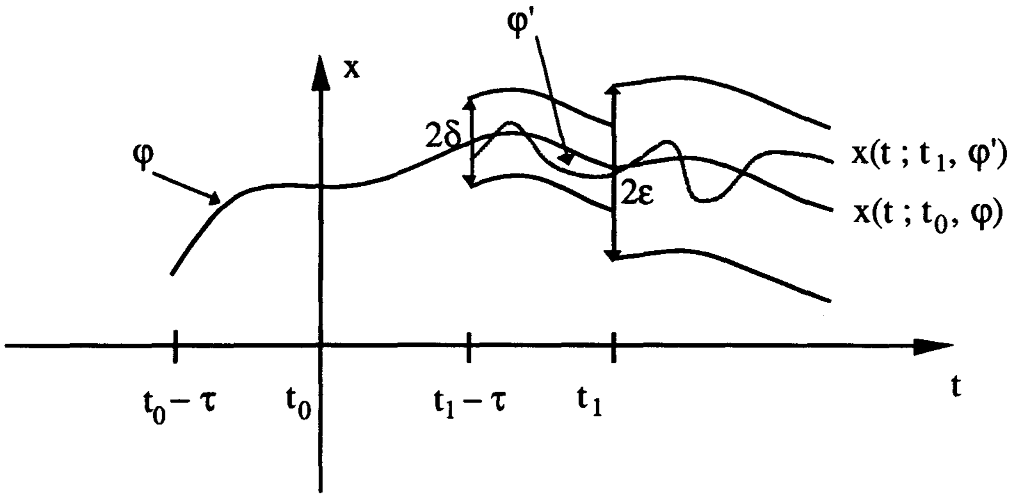

Figure 1.7. Illustration du concept de stabilité au sens de Hahn

Il est à noter que la stabilité au sens de Hahn est équivalente à la notion de stabilité par rapport à l'intervalle $[t_0, \infty[$ introduite précedemment.

Remarques :

(i) La stabilité dépend en général de la valeur des retards ; lorsqu'au contraire une solution est stable pour des retards quelconques, on parle alors de stabilité i.o.d. (abréviation de l'anglais "independent of delay"). Lorsque le système est à retards commensurables, une solution est dite stable i.o.d. si elle est stable pour toutes les valeurs positives du retard de base τ.

(ii) La stabilité asymptotique uniforme est équivalente à la stabilité asymptotique pour les systèmes autonomes ou pour les systèmes à coefficients périodiques [Hale (1977)] .

(iii) La propriété de stabilité asymptotique n'est pas une condition *sine qua non* de bon fonctionnement pour un processus ; en effet, on peut, dans certains cas, autoriser des oscillations d'amplitudes suffisamment faibles. Ceci a conduit à définir de nouveaux types de stabilité comme par exemple la stabilité pratique ([Lasalle & Lefschetz (1961)], [Grujić (1973)], ou la stabilité sur un intervalle de temps fini ([Kamenkov (1953)], [Chetaev (1955)]).

4.3. Domaines de stabilité pour les systèmes à retards

Une autre lacune dans la définition de la stabilité est la suivante : dans la définition (i) de la stabilité, l'ordre de grandeur de δ n'apparaît pas ; il peut être de l'ordre de 10^{-1}, 10^{-3} ou 10^{-10}, cela ne change rien à la stabilité de la solution, mais en pratique cet ordre présente une grande importance car il indique la taille des perturbations admissibles. C'est dans cet esprit que Grujić (1975) a associé à chacune des notions de stabilité un domaine de stabilité. Les notions de stabilité et d'attractivité étant mutuellement indépendantes, ces définitions ont naturellement complété et précisé la notion de domaine d'attraction introduite par Hahn (1963) et Zubov (1961). Les définitions proposées ci-dessous permettent l'extension des principales notions de domaines de stabilité aux cas des systèmes à retards.

a) $\mathcal{D}_s(t_0)$ est le *domaine de stabilité par rapport à t_0* de la solution nulle $x = 0$ de (1.31) si :

(i) pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathcal{D}_s(t_0, \varepsilon)$, le sous-ensemble de **C** défini par :

$\mathcal{D}_s(t_0, \varepsilon) = \{\varphi \in \mathbf{C} : \forall\, t \geq t_0, \| x(t\,;\, t_0, \varphi) \| < \varepsilon\}$,

est un voisinage (dans **C** muni de la norme uniforme $\| . \|$) de l'état $\varphi = 0$, et

(ii) $\mathcal{D}_s(t_0) = \bigcup\limits_{\varepsilon > 0} \mathcal{D}_s(t_0, \varepsilon)$.

Si $\mathcal{D}_s(t_0) = \mathbf{C}$, la solution $x = 0$ de (1.31) est dite *globalement stable par rapport à t_0.*

b) Le sous-ensemble $\mathcal{D}_a(t_0)$ de **C** défini par:

$$\mathcal{D}_a(t_0) = \{\varphi \in \mathbf{C} : \lim_{t \to \infty} x(t;\, t_0, \varphi) = 0\}$$

est appelé *domaine d'attraction par rapport à t_0* de la solution nulle $x = 0$ de (1.31) si, et seulement si, c'est un voisinage de l'état $\varphi = 0$.

Si le domaine d'attraction est l'espace d'état tout entier, c'est-à-dire $\mathcal{D}_a(t_0) = \mathbf{C}$, la solution nulle $x = 0$ est alors dite *globalement attractive par rapport à t_0.*

c) La solution nulle $x = 0$ du système (1.31) admet $\mathcal{D}_{sa}(t_0)$ comme *domaine de stabilité asymptotique par rapport à t_0* si :

$$\mathcal{D}_{sa}(t_0) = \mathcal{D}_s(t_0) \cap \mathcal{D}_a(t_0).$$

La solution nulle $x = 0$ est dite *globalement asymptotiquement stable par rapport à t_0* si elle est à la fois globalement stable et globalement attractive par rapport à t_0, c'est-à-dire, si et seulement si $\mathcal{D}_{sa}(t_0) = \mathbf{C}$.

d) Le sous-ensemble $\mathcal{D}_e(\alpha, \beta, t_0)$ de **C** défini par:

$$\mathcal{D}_e(\alpha,\beta, t_0) = \{\varphi \in \mathbf{C} : \forall\, t \geq t_0, \| x(t;\, t_0, \varphi) \| \leq \alpha \| \varphi \| \exp[\beta(t - t_0)]\}$$

est appelé *domaine de stabilité exponentielle par rapport à* (α, β, t_0) de la solution $x = 0$ de (1.31) si et seulement si c'est un voisinage de l'état $\varphi = 0$.

S'il existe $\alpha \geq 1$ et $\beta > 0$ tel que le domaine $\mathcal{D}_e(\alpha,\beta, t_0)$ soit confondu avec l'espace **C** tout entier, alors la solution nulle est dite *globalement exponentiellement stable par rapport à t_0.*

A chacune des différentes notions de stabilité et/ou d'attractivité par rapport à un intervalle d'instants initiaux $\mathcal{T}_i$ peut également être associé un domaine, par exemple $\mathcal{D}_S(\mathcal{T}_i)$ est le *domaine de stabilité par rapport à* $\mathcal{T}_i$ de la solution nulle de (1.31) si :

(i) Pour tout $t_0 \in \mathcal{T}_i$, la solution nulle de (1.31) possède un domaine de stabilité $\mathcal{D}_S(t_0)$,

(ii) $\bigcap_{t_0 \in \mathcal{T}_i} \mathcal{D}_S(t_0)$ est un voisinage de $\varphi = 0$,

(iii) $\mathcal{D}_S(\mathcal{T}_i) = \bigcap_{t_0 \in \mathcal{T}_i} \mathcal{D}_S(t_0)$.

Les domaines de stabilité sont généralement très complexes à déterminer de façon exacte, aussi on se contente souvent d'en calculer une estimation. Cette notion est définie de la façon suivante :

Le domaine $\mathcal{D}$ est une estimation du domaine de stabilité s'il est inclus dans ce domaine.

Remarque : on n'impose pas dans cette définition la propriété d'invariance positive (voir chapitre 3, définition 2.1), mais cette dernière est souvent utilisée pour démontrer qu'un certain domaine est effectivement une estimation d'un domaine de stabilité.

5. MÉTHODES DE RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES SYSTÈMES À RETARDS

L'objet de cette partie est de présenter différentes méthodes d'analyse numérique pour les équations à retards. Pour en simplifier la présentation, seules seront considérées les équations à retard unique et constant.

5.1. Application de la méthode pas-à-pas – méthode de Bellman

On considère l'équation

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)), \quad t \geq t_0 \tag{1.39}$$

munie de la condition initiale

$$x_{t_0} = \varphi \in \mathbf{C}. \tag{1.40}$$

Soit $x_{(i+1)}$ la fonction définie par

$$x_{(i+1)}(\theta) = x(t_0 + \tau\,(\theta + i)), \quad \text{avec } 0 \leq \theta \leq 1, \text{ et } i = -1, 0, 1, 2, \ldots \tag{1.41}$$

La variable θ correspond donc à un changement d'échelle de temps normalisant le retard à $\tau = 1$.

Pour $i = -1$, on retrouve la condition initiale : $x_{(0)}(\theta) = \varphi(\tau\,(\theta - 1))$ (avec $\theta \in [0, 1]$).

Selon le principe de la méthode pas-à-pas, la fonction $x_{(i+1)}$ (pour i = 0, 1, ...) est solution de l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{d}{d\theta} x_{(i+1)}(\theta) = \tau\, f(t_0 + \tau\,(\theta + i),\, x_{(i+1)}(\theta),\, x_{(i)}(\theta)), \quad 0 \leq \theta \leq 1 \qquad (1.42)$$

$$x_{(i+1)}(0) = x_{(i)}(1)$$

Ce problème peut être résolu en utilisant n'importe quelle méthode numérique pour les équations différentielles ordinaires. Il y a cependant deux inconvénients majeurs à cette approche. Premièrement, les valeurs calculées de $x_{(i)}$ doivent être gardées en mémoire jusqu'à la fin du calcul de $x_{(i+1)}$. Deuxièmement, il se peut que dans le calcul de $x_{(i+1)}$ on ait besoin d'une valeur de $x_{(i)}$ en un point que l'on n'a pas calculé, en effet les algorithmes les plus efficaces de résolution numérique d'une équation différentielle ordinaire sont à pas variable. Dans un tel cas, la valeur désirée est obtenue par interpolation. On comprend alors que suivant la méthode d'interpolation, soit on augmente le temps de calcul, soit on diminue la précision des résultats.
Pour remédier à ces inconvénients, Bellman (1961) a proposé la technique suivante : comme précédemment, $x_{(1)}$ est déterminé numériquement à partir du problème

$$\frac{d}{d\theta} x_{(1)}(\theta) = \tau\, f(t_0 + \tau\,\theta,\, x_{(1)}(\theta),\, \varphi(\tau\,(\theta - 1))), \quad 0 \leq \theta \leq 1 \qquad (1.43)$$

$$x_{(1)}(0) = \varphi(0)$$

Puis les fonctions $x_{(1)}$ et $x_{(2)}$ sont déterminées simultanément en résolvant le système formé par les deux premières équations (1.42) avec i = 0 et i = 1 et avec pour conditions initiales $x_{(1)}(0) = \varphi(0)$, et $x_{(2)}(0) = \tilde{x}_{(1)}(1)$ (où $\tilde{x}_{(i)}(1)$ indique la valeur de $x_{(i)}(1)$ calculée à l'étape précédente). Ensuite, $x_{(1)}$, $x_{(2)}$ et $x_{(3)}$ sont calculées simultanément à partir des trois premières équations (1.42) avec comme valeurs initiales $x_{(1)}(0) = \varphi(0)$, $x_{(2)}(0) = \tilde{x}_{(1)}(1)$, $x_{(3)}(0) = \tilde{x}_{(2)}(1)$. En procédant de cette façon la suite complète $x_{(1)}$, $x_{(2)}$, ... est obtenue. Cet algorithme est bien évidemment coûteux en temps de calcul, mais il permet de résoudre les problèmes présentant des discontinuités dans les conditions initiales, et de ce fait, il peut être employé pour initialiser une autre méthode plus efficace.

5.2. Extensions des méthodes classiques à un pas

Les méthodes de résolutions numériques pour les systèmes d'équations différentielles ordinaires sont classiquement regroupées en deux classes principales : les méthodes à un pas et les méthodes à pas multiples. Les méthodes à un pas sont caractérisées par le fait que pour déterminer la valeur d'une solution à une certaine étape n seule la valeur de cette solution à l'étape n − 1 est nécessitée : c'est à dire que l'équation aux différences approchant le système différentiel initial est d'ordre 1, alors que dans une méthode à r pas les valeurs déterminées de la solution aux étapes n − 1, ..., n − r interviennent dans le calcul de la solution à l'étape n. L'ordre de l'équation aux différences approchant le système initial est donc égal à r. Pour les systèmes à retards, on voit que, si le pas de la méthode choisie diffère de la valeur du retard, il ne peut exister de méthode à un pas. Cependant, les méthodes que nous citons dans les deux sections suivantes sont des extensions naturelles des méthodes classiques d'Euler et de Runge-Kutta, et nous avons choisi de garder cette appellation.

5.2.1. Méthode d'Euler

La méthode d'Euler est la plus simple de toutes les méthodes numériques. Elle a été généralisée pour les systèmes à retards par El'sgol'ts (1964 et 1966).
Pour un pas constant h de la forme $h = \tau/m$, où m est un entier, la solution approchant x est générée par l'équation aux différences

$$\tilde{x}(t_{n+1}) = \tilde{x}(t_n) + h\, f(t_n, \tilde{x}(t_n), \tilde{x}(t_{n-m})) \tag{1.44}$$

$$\tilde{x}(t_n) = \varphi(nh), \quad \text{pour} \quad -m \leq n \leq 0$$

où $t_n = t_0 + nh$.
Cette méthode est de faible précision : elle est d'ordre 1 sous certaines hypothèses sur f. Une extension de cette méthode proposée par Feldstein (1964) permet de prendre en compte le cas de retards dépendants du temps.

5.2.2. Méthode de Runge-Kutta

Plusieurs auteurs ont proposé une extension de la méthode classique de Runge-Kutta. Par exemple, Birkhoff (1966) a réalisé une étude numérique d'un système à retard apparaissant dans l'étude des réacteurs nucléaires, Grafton (1972) a décrit un algorithme d'ordre 4 pour calculer les solutions périodiques d'une équation de Liénard retardée. Nous présentons ici une extension proposée par Virk (1985) qui dans le cas d'un système à un seul retard constant permet d'obtenir une solution approchée sans nécessiter d'interpolation.
On suppose connue la solution x jusqu'à l'instant t et on désire une approximation de $x(t+\Delta t)$ en utilisant r points intermédiaires entre t et $t + \Delta t$.
On a alors

$$\tilde{x}(t + \Delta t) = x(t) + \sum_{i=1}^{r} \omega_i\, k_i(t) \tag{1.45}$$

où ω_i sont les poids et les k_i sont définis par
- pour $t > t_0$:

$$k_i(t) = \Delta t\, f(t + c_i \Delta t,\, x(t) + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, k_j(t),\, x(t-\tau) + \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij}\, k_j(t-\tau)), \tag{1.46}$$

où $c_1 = 0$ et $0 \leq c_i \leq 1$ pour $i = 2, ..., r$.
- pour $t \in [t_0 - \tau, t_0]$

$$k_i(t) = \dot{\varphi}(t).\Delta t \tag{1.47}$$

- pour $t < t_0 - \tau$

$$k_i(t) = 0. \tag{1.48}$$

Les paramètres inconnus ω_i, a_{ij}, b_{ij}, et c_i sont déterminés en égalant les termes de degré inférieurs ou égaux à r dans les développements en série de Taylor de $\tilde{x}(t + \Delta t)$ et de $x(t + \Delta t)$.

Remarques :
- Le pas Δt sera choisi de la forme τ/m où m est un entier afin de ne nécessiter aucune interpolation.
- On peut montrer que, pour tout i et tout j, $a_{ij} = b_{ij}$ et que ces coefficients ainsi que les ω_i et c_i sont les mêmes que ceux utilisés dans la méthode classique de Runge-Kutta de même ordre.
- Les simulations proposées dans ce mémoire ont été réalisées en appliquant cette méthode à l'ordre 3.

5.3. Extensions des méthodes classiques à pas multiples

La méthode d'Adams peut directement être appliquée aux systèmes à retards. L'idée de départ est d'approcher la solution en utilisant son développement en série de Taylor, i.e.

$$x_{k+1} = x(t_k + \Delta t) = x(t_k) + \Delta t\, \dot{x}(t_k) + ... + \frac{(\Delta t)^n}{n!} x^{(n)}(t_k), \tag{1.49}$$

mais, pour simplifier les calculs, les valeurs des dérivées de x(t) d'ordre supérieur à deux sont remplacées par des approximations.

A l'ordre 1, on aboutit au schéma de calcul

$$x_{k+1} = x_k + q_k, \tag{1.50}$$

où $t_k = t_0 + k\Delta t$, $\Delta t = \frac{\tau}{m}$ (m entier), $x_k = x(t_k)$, $q_k = \Delta t\, \dot{x}(t_k) = f(t_k, x_k, x_{k-m})$.
On retrouve la méthode d'Euler.

A l'ordre 2, 3, 4 et 5, on obtient les formules suivantes :

$$x_{k+1} = x_k + q_k + \frac{1}{2}\Delta q_{k-1}, \tag{1.51}$$

où $\Delta q_{k-1} = q_k - q_{k-1}$;

$$x_{k+1} = x_k + q_k + \frac{1}{2}\Delta q_{k-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 q_{k-2}, \tag{1.52}$$

$$x_{k+1} = x_k + q_k + \frac{1}{2}\Delta q_{k-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 q_{k-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 q_{k-3}, \tag{1.53}$$

$$x_{k+1} = x_k + q_k + \frac{1}{2}\Delta q_{k-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 q_{k-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 q_{k-3} + \frac{251}{720}\Delta^4 q_{k-4}, \tag{1.54}$$

où $\Delta^p q_{k-1} = \Delta^{p-1} q_k - \Delta^{p-1} q_{k-1}$.

Ces formules sont applicables si la solution x est au moins n+1 fois dérivable, où n est l'ordre de la méthode. Ces méthodes ne peuvent donc s'appliquer que pour $t > t_0 + n\tau$. Pour initialiser une de ces méthodes, on peut appliquer la méthode de Bellman, ou la méthode de Runge-Kutta de même ordre, ou encore utiliser les méthodes d'Adams d'ordres inférieurs en utilisant un pas plus fin.

Une façon d'améliorer ces méthodes a été proposée par Zverkina (1967). Elle consiste à prendre en compte les discontinuités de la solution en appliquant la formule généralisée de Taylor (cf. El'sgol'ts (1973)).

5.4. Développements en série des solutions

Une méthode pour trouver une solution approchée d'un système linéaire à retards

$$\dot{x}(t) = A\, x(t) + \sum_{i=1}^{k} B_i\, x(t - \tau_i) \tag{1.55}$$

$$x(t) = \varphi(t) \quad \text{pour } t \in [-\max_{1 \le i \le k} \{\tau_i\}, 0[,$$

$$x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$

consiste à obtenir un développement en série (de Taylor ou de polynômes orthogonaux) de la solution. Pour cela, on emploie un formalisme matriciel : le développement

$$x(t) = \sum_{i=0}^{m-1} x_i\, \phi_i(t) \tag{1.56}$$

est noté

$$x(t) = X^T \Phi(t) \tag{1.57}$$

où $\Phi(t) = [\phi_0(t), \phi_1(t), ..., \phi_{m-1}(t)]^T$ est le vecteur composé des fonctions élémentaires jusqu'à l'ordre m−1, par exemple pour la série de Taylor $\Phi(t) = [1, t, ..., t^{m-1}]^T$, et $X = [x_0, x_1, ..., x_{m-1}]^T$ est le vecteur généralisé des coefficients du développement de x tronqué à l'ordre m−1.

On définit pour le développement choisi deux matrices opérationnelles.
Pour α, réel quelconque, on définit la matrice opérationnelle d'intégration $P(\alpha)$ par

$$\left[\int_{\alpha}^{t} \Phi(s)\, ds \right]_{m-1} = P(\alpha)\, \Phi(t), \tag{1.58}$$

où $[x(t)]_{m-1}$ désigne le développement en série de $x(t)$ tronqué à l'ordre $m-1$.
Pour τ réel positif quelconque, la matrice opérationnelle de retard D_τ est définie par

$$[\, \Phi(t - \tau)\,]_{m-1} = D_\tau\, \Phi(t). \tag{1.59}$$

A l'aide de ces deux opérateurs, on réduit l'équation intégrale

$$x(t) = x_0 + \int_0^t A\, x(s)\, ds + \int_0^t \sum_{i=1}^{k} B_i\, x(s - \tau_i)\, ds \tag{1.60}$$

issue de (1.55) à un ensemble d'équations algébriques dont la résolution numérique est plus aisée.
Dans le cas des systèmes linéaires non stationnaires, on définit une troisième matrice opérationnelle dite de produit donnant le développement tronqué à l'ordre $m-1$ du produit de deux séries elles-mêmes tronquées à l'ordre $m-1$ (se référer à [Lee & Chang (1987)] ou à [Razzaghi & Razzaghi (1989)]).

CONCLUSION

Comme les exemples donnés le montrent, les systèmes à retards ont une place importante dans de nombreux domaines comme l'automatique, l'électronique, la mécanique, l'économie, la biologie, pour ne citer que ceux-là.
Cette partie montre également que bien qu'étant d'une nature différente - la dimension de l'espace d'état est infinie - certaines propriétés de base des systèmes à retards diffèrent peu de celles des équations différentielles ordinaires. Cette similitude nous a permis de proposer des définitions originales de la stabilité, et pour la première fois, de définir les domaines de stabilité. Cependant, nous avons également pu constater que l'étude des dynamiques des systèmes à retards ne peut pas découler intuitivement de nos seules connaissances concernant les systèmes sans retard : citons pour mémoire l'exemple (1.27) où un "simple" système scalaire, stationnaire, autonome présente des oscillations en régime transitoire.
Dans les chapitres qui suivent, notre intérêt sera porté sur les méthodes d'analyse de la stabilité, que ce soit pour les systèmes linéaires (chapitre 2) ou les systèmes non linéaires (chapitre 3).

CHAPITRE 2

CHAPITRE 2 :

STABILITE DES SYSTEMES LINEAIRES A RETARDS

INTRODUCTION

Une première approche dans l'étude de tout processus consiste généralement à se donner un modèle le plus simple possible. Dans la très grande majorité des cas, ce modèle est linéaire et constitue une approximation au premier ordre de la réalité. On l'obtient généralement en négligeant tous les phénomènes purement non linéaires comme les saturations ou les hystérésis. Le système obtenu peut alors être étudié en utilisant le formalisme simple des matrices ou des fonctions de transfert. Lorsqu'un modèle plus complexe est disponible, une étude préliminaire, parfois bien suffisante, est faite en linéarisant le système au voisinage d'un point ou d'une trajectoire de fonctionnement.

Il existe de nombreuses méthodes d'étude de la stabilité des systèmes linéaires stationnaires, aucune d'entre elles n'est idéale au sens où elle donnerait des conditions de stabilité qui soient à la fois nécessaires et suffisantes et simples à mettre en oeuvre. Complétant le bilan présenté dans [Dambrine et Richard (1993a)], nous passons en revue un grand nombre de méthodes d'analyse de la stabilité rencontrées dans la littérature, et proposons de mettre en évidence les avantages et inconvénients de ces méthodes à l'aide d'un exemple traité par chacune d'entre elles. L'analyse des systèmes linéaires non stationnaires est en pratique aussi ardue que celle des systèmes non linéaires, comme le révélera en particulier l'étude des systèmes à retards variables. Enfin, pour conclure ce chapitre, l'étude des systèmes à coefficients périodiques sera réalisée.

1. PROPRIÉTÉS DES SYSTÈMES LINÉAIRES À RETARDS

L'équation générale d'un système linéaire commandé à retards s'écrit

$$\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + \sum_{i=1}^{m} B_i(t)\,x(t - \tau_i(t)) + C_0(t)\,u(t) + \sum_{i=1}^{m} C_i(t)\,u(t - \tau_i(t)), \quad (2.1)$$

où x(t) et u(t) appartiennent respectivement à $\mathbb{R}^n$ et à $\mathbb{R}^p$, les matrices A, B_i, et C_i sont à éléments réels et de dimensions adaptées, et enfin les τ_i sont des fonctions du temps continues (éventuellement par morceaux) vérifiant :

$$0 \le \tau_i(t) \le \tau, \qquad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.2)$$

où τ est une constante réelle positive ou nulle. On notera dans la suite $x(t\,;\,t_0, \varphi, u)$ la solution de (2.1) passant à t_0 par $x_{t_0} = \varphi$ pour une commande u(t).

Le système (2.1) est dit stationnaire si les matrices A(t), $B_i(t)$, et $C_i(t)$ sont indépendantes du temps t, et si les retards $\tau_i(t)$ sont des fonctions constantes du temps.

Le système homogène associé à (2.1) est le système défini par l'équation vectorielle :

$$\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + \sum_{i=1}^{m} B_i(t)\,x(t - \tau_i(t)), \quad (2.3)$$

et sa solution est notée $x(t\,;\,t_0, \varphi, 0) \triangleq x(t\,;\,t_0, \varphi)$.

Les résultats du paragraphe 3.3 du chapitre 1 nous permettent d'énoncer la propriété suivante :

Existence globale et unicité des solutions : *Si les matrices* A(t), $B_i(t)$, et $C_i(t)$ *sont continues par rapport à la variable* t, *alors pour tout instant initial* $t_0 \in \mathbb{R}$, *pour toute condition initiale* $\varphi \in$ **C**, *et pour toute commande admissible* u *(c'est-à-dire ici une fonction continue par morceaux définie sur l'intervalle* $[t_0 - \tau, +\infty[$ *et à valeurs dans* $\mathbb{R}^p$*), le système* (2.1) *admet une solution unique définie sur l'intervalle* $[t_0 - \tau, +\infty[$. *De plus, cette solution dépend continûment de* t_0 *et des fonctions* φ *et* u.

Cette propriété reste vraie si les matrices A(t), $B_i(t)$, et $C_i(t)$ sont supposées continues par morceaux.

On peut définir de façon plus générale un système linéaire en exprimant qu'il vérifie la propriété suivante appelée *principe de superposition.*

Principe de superposition :
$x(t\ ;\ t_0, \varphi, u)$ *est une fonction linéaire du vecteur* $[u^T, \varphi^T]^T$, *c'est-à-dire, pour tous nombres réels* α et β, *pour toutes commandes admissibles* u_1, u_2, *et pour toutes fonctions* φ_1 , φ_2 *de* **C**, *on a* :

$$x(t\ ;\ t_0, \alpha\,\varphi_1 + \beta\,\varphi_2, \alpha\,u_1 + \beta\,u_2) = \alpha\,x(t\ ;\ t_0, \varphi_1, u_1) + \beta\,x(t\ ;\ t_0, \varphi_2, u_2). \quad (2.4)$$

En particulier, la solution générale $x(t\ ;\ t_0, \varphi, u)$ du système (2.1) peut se décomposer en la somme de la solution du système homogène $(x(t\ ;\ t_0, \varphi, 0))$ et de la solution du système relaxé $(x(t\ ;\ t_0, 0, u))$, le premier terme étant alors une fonction linéaire en la condition initiale φ, tandis que le second est linéaire en la commande u.

De ces propriétés, on peut déduire quelques résultats concernant la stabilité des solutions d'un système linéaire à retards.

Application à la stabilité :

1) La propriété suivante est due à Zverkin (1968) : le système (2.3) est stable si et seulement si, pour tout φ dans **C**, la solution $x(t\ ;\ t_0, \varphi)$ est bornée.
Un corollaire immédiat de ce résultat est que l'attractivité et la stabilité asymptotique sont deux notions équivalentes pour un système linéaire.

2) De même, on peut montrer [Halanay, (1966)] que les notions de stabilité asymptotique uniforme et de stabilité exponentielle sont confondues pour un système linéaire de type retardé.

3) Si une solution x(t) d'un système linéaire est stable (resp. attractive) par rapport à un intervalle $\mathcal{T}_i$, alors cette stabilité (resp. cette attractivité) de x(t) est globale, ce qui revient à dire que son domaine de stabilité $\mathcal{D}_s(\mathcal{T}_i)$ (resp. d'attractivité $\mathcal{D}_a(\mathcal{T}_i)$) est confondu avec l'espace **C** tout entier.

2. Cas des systèmes linéaires stationnaires

2.1. Equations et racines caractéristiques

On considère dans cette section les systèmes linéaires stationnaires, c'est-à-dire, les systèmes décrits par une équation différentielle de la forme

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + \sum_{i=1}^{m} B_i\, x(t - \tau_i), \tag{2.5}$$

où les matrices A et B_i ainsi que les retards τ_i sont des constantes.

L'*équation caractéristique* du système (2.5) est obtenue lors de la recherche de solutions particulières de la forme $x(t) = e^{\lambda t} c$, où λ est réel, et c est un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Elle est définie par l'expression :

$$p(s, \tau_1, ..., \tau_m) = \text{dét}\,[\, s\,I - A - \sum_{i=1}^{m} B_i\, e^{-\tau_i s} \,] = 0. \tag{2.6}$$

$p(s, \tau_1, ..., \tau_m)$ est appelée la *fonction caractéristique* du système (2.5) ; c'est un quasi-polynôme, c'est-à-dire un polynôme en s, $e^{-\tau_1 s}$, ..., $e^{-\tau_m s}$. Elle peut encore s'écrire

$$p(s, \tau_1, ..., \tau_m) = s^n + \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{m'} a_{pq}\, s^p\, e^{-h_q s}, \tag{2.7}$$

où les h_i sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers naturels des τ_i.

Les zéros de $p(s, \tau_1, ..., \tau_m)$ sont les *racines caractéristiques* du système ; ces racines sont en général en nombre infini (voir figure (2.1)) sauf dans le cas de systèmes dégénérés pour lesquelles la fonction caractéristique est un polynôme en s. Par exemple, le système

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0 & 1 \\ 0 & -0.5 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t-\tau)$$

admet pour fonction caractéristique le polynôme $p(s, \tau) = s(s^2 + 1)$.

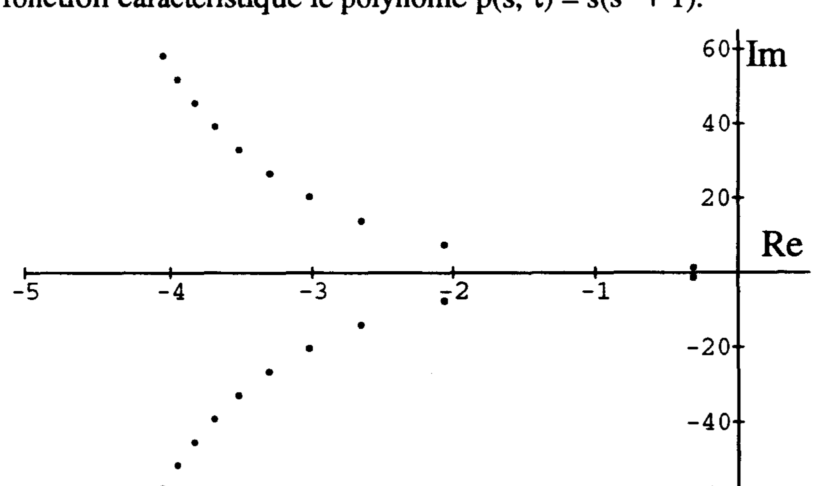

Fig. 2.1. - racines caractéristiques de $s + e^{-s}$

Dans le cas de systèmes non dégénérés, les racines caractéristiques vérifient les propriétés suivantes :
- Il n'existe qu'un nombre fini de racines caractéristiques situées dans un sous-ensemble compact du plan complexe.
- Soit $(s_i)_{i\geq 1}$ la suite des racines caractéristiques ordonnées suivant la valeur croissante de leur module, c'est-à-dire $|s_1| \leq |s_2| \leq \ldots \leq |s_{k-1}| \leq |s_k| \leq \ldots$ Alors, la suite $(\mathrm{Re}\, s_i)$ tend vers $-\infty$ quand $i \rightarrow +\infty$.

- Un corollaire des deux propriétés précédentes est que, pour tout réel arbitraire α, il n'existe qu'un nombre fini de racines caractéristiques s_i telles que $\mathrm{Re}\, s_i > \alpha$.

- La solution $x(t\,; 0, \varphi)$ admet au voisinage de $t = +\infty$ le développement en série

$$x(t) = \sum_{i:\ \mathrm{Re}\, s_i > \alpha} Q_i(t)\, e^{s_i t} + O(e^{\alpha t}). \tag{2.8}$$

Dans cette expression, $Q_i(t)$ est un vecteur dont les composantes sont des polynômes en t de degré strictement inférieur à l'ordre de multiplicité de la racine s_i de (2.6), et α est un nombre réel arbitraire n'appartenant pas à l'ensemble des s_i. Cette propriété a été démontrée par Bellman et Cooke (1966) en utilisant la transformation de Laplace, on peut aussi consulter à ce sujet [El'sgol'ts et Norkin (1973)].

De cette dernière propriété, on peut déduire le résultat suivant :

Théorème 2.1. : *La solution nulle du système* (2.5) *est asymptotiquement stable si, et seulement si, toutes ses racines caractéristiques sont à partie réelle strictement négative, instable s'il existe au moins une racine caractéristique à partie réelle positive. Enfin, s'il existe une ou plusieurs racines caractéristiques imaginaires pures* ($s_i = j\omega_i$, $j^2 = -1$), *le système est stable si l'ordre de multiplicité de chacune de ces racines est égal à la dimension de l'espace propre de la matrice* $[A - \sum_i B_i e^{-j\tau_i \omega_i}]$ *associé à la valeur propre* s_i.

Cet énoncé bien qu'identique à celui des systèmes linéaires non retardés, n'est pas suivi d'un critère simple du type Routh-Hurwitz donnant des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité asymptotique. Dans la suite de ce chapitre, nous proposons une sélection de méthodes d'analyse de la stabilité proposées dans la littérature. Ces méthodes sont groupées en trois classes principales : les méthodes fréquentielles dans lesquelles on teste l'absence de racines caractéristiques à partie réelle positive, les méthodes algébriques nécessitant une écriture sous forme d'équation d'état, et enfin les méthodes graphiques. Pour ne pas anticiper, nous n'avons pas énoncé les résultats utilisant les extensions de la méthode directe de Lyapunov qui seront étudiées au troisième chapitre.

2.2. Méthodes fréquentielles

2.2.1. Critère de Routh-Hurwitz généralisé

La stabilité asymptotique des systèmes de la forme (2.5) ne dépend que de l'absence de racines caractéristiques situées dans le demi-plan complexe droit, c'est-à-dire le demi-plan Re $s \geq 0$. Le théorème de Routh-Hurwitz donne des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un polynôme n'admette aucun zéro à partie réelle positive ou nulle. Plusieurs extensions de ce résultat au cas des quasi-polynômes ont été proposées, nous présentons ici les versions de Chebotarev et de Pontryagin.
Les critères proposés ci-dessous ne s'appliquent pas directement à la fonction caractéristique $p(s, \tau_1, ..., \tau_m)$ du système mais au quasi-polynôme $D(s)$ défini par $D(s) = e^{Ts}\, p(s, \tau_1, ..., \tau_m)$, où T èst le plus grand des retards h_q intervenant dans l'expression (2.7). Ces deux fonctions p et D ont évidemment les mêmes zéros.

2.2.1.a) Théorème de Chebotarev

Par développement en série de Taylor des termes exponentiels de D(s), on obtient :

$$D(s) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\, s^i. \tag{2.9}$$

Soient f et g les fonctions définies pour $\omega \in \mathbb{R}$ par :

$$D(j\omega) = f(\omega) + j\, g(\omega),\ f(\omega) = a_0 - a_2\, \omega^2 + a_4\, \omega^4 + ...$$
$$g(\omega) = a_1\, \omega - a_3\, \omega^3 + a_5\, \omega^5 + ... \tag{2.10}$$

Enfin, on introduit les matrices $Q^k \in \mathbb{R}^{k \times k}$ pour $k = 1, 2, ...$ déterminées par leurs coefficients :

$$Q^k_{p\,q} = a_{2q-p}\ ,\quad p, q = 1, 2, ..., k, \tag{2.11}$$

avec, par convention, $a_i = 0$ pour $i < 0$.
Par exemple,

$$Q^1 = [a_1],\ Q^2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{bmatrix},\ Q^3 = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix}.$$

Théorème 2.2. [Chebotarev et Meiman (1949)] : *On suppose que les fonctions* f *et* g *n'ont pas de zéros réels communs. Alors les zéros de* D(s) *sont tous à partie réelle strictement négative si et seulement si*

$$\text{dét}\ Q^k > 0\ ,\quad k = 1, 2, ... \tag{2.12}$$

Remarque : Ce critère est inapplicable pour tester la stabilité d'un état d'équilibre puisqu'il faut déterminer le signe d'une infinité d'expressions, par contre, il donne une condition suffisante de non stabilité asymptotique quelquefois très simple à vérifier : s'il existe un indice k_0 tel que dét $Q^{k_0} \leq 0$, alors le système n'est pas asymptotiquement stable.

2.2.1.b) Théorème de Pontryagin

On ne considère ici que les systèmes à retards commensurables ; alors en changeant l'echelle des temps, le quasi-polynôme D(s) peut être récrit sous la forme

$$D(s) = \sum_{p,\, q \geq 0} a_{pq}\, s^p\, e^{qs}. \qquad (2.13)$$

Le système étant de type retardé, le quasi-polynôme D admet le terme principal $a_{nq_0}\, s^n\, e^{q_0 s}$, avec $a_{nq_0} \neq 0$ (un terme est dit principal si pour tout autre couple (p, q) tel que $a_{pq} \neq 0$, les inégalités $p \leq n$, $q \leq q_0$ sont vérifiées, l'une d'entre elle au moins étant stricte, c'est-à-dire $p + q < n + q_0$).

On définit comme précédemment les fonctions f et g de variable réelle ω :

$$D(j\omega) = f(\omega) + j\, g(\omega),\ \omega \in \mathbb{R}$$

Théorème 2.3. [Pontryagin (1942)] : *Si le quasi-polynôme* D(s) *n'admet aucune racine à partie réelle positive ou nulle alors les zéros des fonctions* g(ω) *et* f(ω) *sont réels, simples et alternés, et pour tout* ω *dans* $\mathbb{R}$, *l'inégalité*

$$\dot{g}(\omega)\, f(\omega) - \dot{f}(\omega)\, g(\omega) > 0 \qquad (2.14)$$

est vérifiée (avec ici $\dot{g} = \dfrac{dg}{d\omega}$ *).*

Réciproquement, tous les zéros de D(s) *sont dans le demi-plan ouvert gauche à condition de satisfaire l'une des conditions suivantes* :

(i) *Tous les zéros des fonctions* f *et* g *sont réels, simples et alternés, et il existe au moins un réel* ω *vérifiant l'inégalité* (2.14).

(ii) *Tous les zéros de la fonction* g *(ou* f*) sont réels et simples, et pour chacun de ces zéros l'inégalité* (2.14) *est remplie.*

2.2.2. Méthodes du lieu des racines

On écrit ici que la fonction caractéristique $p(s, \tau_1, ..., \tau_m)$ dépend non seulement des retards τ_i, mais également de paramètres-coefficients a_{pq} :

$$p(s, \tau_1, ..., \tau_m, a_{00}, ..., a_{n-1\, m}) = s^n + \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{m} a_{pq}\, s^p\, e^{-h_q s}. \qquad (2.15)$$

Les zéros du quasi-polynôme (2.15) sont des fonctions continues des paramètres a_{pq} et τ_i. Donc, si en faisant varier d'une façon continue les paramètres, la stabilité du système est modifiée c'est qu'il existe une valeur particulière des paramètres pour laquelle au moins un des zéros de p est à partie réelle nulle.

Il existe de nombreuses méthodes d'analyse de la stabilité basées sur cette propriété. Elles peuvent être regroupées en deux classes principales : la technique de la D-partition [Neimark (1949)], et celle de la τ-partition [Lee et Hsu (1969)].

2.2.2.a. Méthode de la D-partition

La méthode de la D-partition consiste à décomposer l'espace des paramètres de p en régions dont les frontières sont l'ensemble des coefficients pour lesquels la fonction caractéristique (2.15) admet au moins un zéro sur l'axe imaginaire. Les points à l'intérieur de chacun des domaines correspondent à des quasi-polynômes (2.15) ayant le même nombre de zéros à parties réelles positives, en effet, étant donné la propriété de continuité des zéros vis-à-vis des paramètres, l'hypothèse contraire implique l'existence d'un zéro à partie réelle nulle à l'intérieur de ce domaine, ce qui contredit la définition de chacune des région. Les régions n'ayant aucun zéro à partie réelle positive correspondent à l'ensemble des paramètres pour lesquels le système (2.5) est asymptotiquement stable.

Pour illustrer cette méthode, considérons l'équation

$$\dot{x}(t) + a\,x(t) + b\,x(t-\tau) = 0. \tag{2.16}$$

L'équation caractéristique de ce système est

$$s + a + b\,e^{-\tau s} = 0 \tag{2.17}$$

et cette dernière admet la racine s = 0 pour

$$a + b = 0. \tag{2.18}$$

De même, si l'équation (2.17) possède une racine imaginaire pure $s = j\omega$, alors on a

$$j\omega + a + b\,e^{-j\omega\tau} = 0,$$

En séparant les parties réelles et les parties imaginaires, on obtient une équation paramétrée en ω des frontières de la D-partition :

$$a = \frac{-\,\omega \cos \omega\tau}{\sin \omega\tau}, \quad b = \frac{\omega}{\sin \omega\tau}, \tag{2.19}$$

en comprenant le point limite $a = -\frac{1}{\tau}$, $b = \frac{1}{\tau}$. Il existe ici une infinité de régions, les cinq premières sont représentées sur la figure suivante.

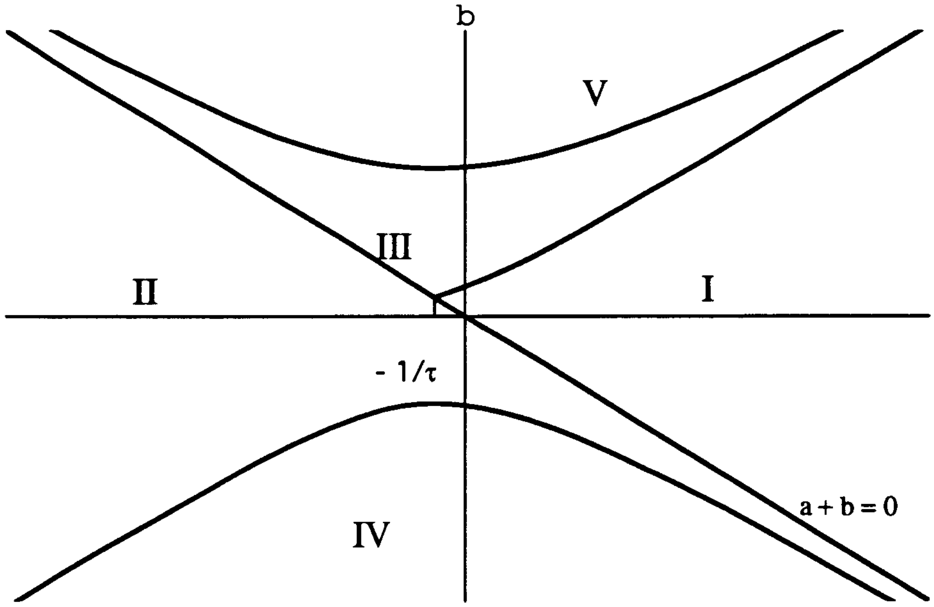

figure 2.2. D-partition de (2.16)

Pour b fixé à la valeur 0, l'équilibre x = 0 de (2.16) est asymptotiquement stable à la seule condition que a soit strictement positif : la région I correspond donc à l'ensemble des paramètres pour lequel (2.16) est asymptotiquement stable. On détermine le nombre de zéros à partie réelle positive des autres régions en calculant le signe de la différentielle de la partie réelle de la racine calculée en un point de la frontière. Cette différentielle est déterminée à partir de l'équation caractéristique $p(s, a_1, \ldots, a_q)$, où les a_i sont les paramètres du système, à l'aide de la formule

$$d(\mathrm{Re}\, s) = -\,\mathrm{Re}\,\frac{\sum_{i=0}^{q} \frac{\partial p}{\partial a_i} da_i}{\frac{\partial p}{\partial s}} \tag{2.20}$$

Par exemple, sur la droite a + b = 0, la seule racine critique est s = 0 et en ce point on a

$$\mathrm{Re}\,\frac{ds}{da} = \frac{-1}{1 - b\tau}\,, \tag{2.21}$$

donc, pour $b < \frac{1}{\tau}$, on a $\mathrm{Re}\,\frac{ds}{da} < 0$. Pour chaque paire de paramètres (a, b) située dans la région II, le système admet une unique racine caractéristique à partie réelle positive. De même, si $b > \frac{1}{\tau}$, l'expression (2.21) est de signe positif, donc lorsqu'on passe de la région II à la région III, le nombre de racines instables augmente de 1. On procède de même pour les autres régions.

2.2.2.b. Principe de la τ-partition et méthodes dérivées

On ne considère ici que des systèmes à retards commensurables. Pour analyser la stabilité, on va rechercher s'il existe des valeurs τ_i du retard de base pour lequel l'équation caractéristique admet au moins une racine imaginaire pure. En effet, c'est en ces points τ_i qu'un changement dans le comportement asymptotique du système peut se produire.

L' étape suivante consiste à déterminer le comportement du lieu des racines au voisinage de ces racines critiques lorsque le paramètre τ varie. Cette analyse est réalisable en un nombre fini de pas car on peut montrer que si le lieu des racines paramétré en τ possède un nombre illimité de branches, il n'a par contre qu'un nombre fini de points d'intersection avec l'axe imaginaire.

Il existe différentes méthodes basées sur ce principe comme par exemple la méthode directe de Walton et Marshall (1987), et la méthode des pseudo-retards introduite par Rekasius (1980).

Méthode directe de Walton et Marshall

Cette méthode consiste à associer à l'équation caractéristique d'un système à retards commensurables un polynôme monovariable obtenu après élimination des termes exponentiels entre l'équation caractéristique et sa relation conjuguée. Le comportement du lieu des racines au voisinage des pôles critiques du système peut être déduit de ce polynôme.

On considère d'abord le cas des systèmes admettant une équation caractéristique de la forme :

$$p(s,\tau) = n(s) + d(s)\, e^{-\tau s} = 0, \tag{2.21}$$

où n(s) et d(s) sont des polynômes à coefficients réels n'ayant aucun zéro en commun. L'équation caractéristique est à coefficients réels, donc si s est une racine de (2.21) alors son conjugué $\bar{s}$ l'est également. Puisque pour les nombres complexes imaginaires purs, on a $\bar{s} = -s$, s'il existe des racines caractéristiques du système situées sur l'axe imaginaire, alors elles vérifient le système

$$\begin{cases} n(s) + d(s)\, e^{-\tau s} = 0 \\ n(-s) + d(-s)\, e^{\tau s} = 0 \end{cases}$$

et par élimination de $e^{\tau s}$, elles sont également solution de l'équation

$$n(s)\, n(-s) - d(s)\, d(-s) = 0.$$

Réciproquement, si ω vérifie $w(\omega^2) = 0$ où w est le polynôme de degré n en ω^2 défini par

$$w(\omega^2) = n(j\omega)\, n(-j\omega) - d(j\omega)\, d(-j\omega), \tag{2.22}$$

alors $s = j\omega$ et $s = -j\omega$ sont des racines caractéristiques du système pour des retards τ vérifiant l'égalité

$$e^{-j\omega\tau} = -\frac{n(j\omega)}{d(j\omega)}\ .$$

On procède de même pour le cas de systèmes à retards commensurables d'équation caractéristique

$$p(s,\tau) = \sum_{k=0}^{m} a_k(s)\, e^{-ks\tau}\ , \tag{2.23}$$

où les $a_i(s)$ sont des polynômes, a_0 étant de degré maximal égal à n.
S'il existe une valeur τ_0 pour laquelle $s = j\omega_0$ est une solution de

$$p(s,\tau) = \sum_{k=0}^{m} a_k(s)\, e^{-ks\tau} = 0, \tag{2.24 a}$$

alors s est aussi solution de la relation conjuguée

$$p(-s,\tau) = \sum_{k=0}^{m} a_k(-s)\, e^{ks\tau} = 0, \qquad (2.24\text{ b})$$

Pour éliminer τ de ces deux équations, on définit :

$$p^{[1]}(s,\tau) = a_0(-s)\, p(s,\tau) - a_m(s)\, e^{-ms\tau} p(-s,\tau)$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \{a_0(-s)\, a_k(s) - a_m(s)\, a_{m-k}(-s)\}\, e^{-ks\tau}.$$

Si $s = j\omega_0$ est une solution des équations (2.24 a) et (2.24 b), c'est aussi une solution de :

$$\begin{cases} p^{[1]}(s,\tau) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} a_k^{(1)}(s) e^{-ks\tau} \\ p^{[1]}(-s,\tau) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} a_k^{(1)}(-s) e^{ks\tau} \end{cases} \qquad (2.25)$$

où les $a_k^{(1)}(s)$ sont définis par :

$$a_k^{(1)}(s) = a_0(-s)\, a_k(s) - a_m(s)\, a_{m-k}(-s). \qquad (2.26)$$

On répète cette procédure en définissant de façon récurrente :

$$a_k^{(r+1)}(s) = a_0^{(r)}(-s)\, a_k^{(r)}(s) - a_{m-r}^{(r)}(s)\, a_{m-r-k}^{(r)}(-s), \qquad (2.27)$$

et ainsi les m quasi-polynômes

$$p^{[r]}(s,\tau) = \sum_{k=0}^{m-r} a_k^{(r)}(s) e^{-ks\tau} = 0 \quad \text{pour } 1 \le r \le q. \qquad (2.28)$$

On voit donc que si $s = j\omega_0$ est une racine de $p(s,\tau)$ pour une valeur de τ alors s est aussi une solution de :

$$p^{[m]}(s) = a_0^{(m)}(s) = 0, \qquad (2.29)$$

et on définit le polynôme w par :

$$w(\omega^2) = a_0^{(m)}(j\omega). \qquad (2.30)$$

On remarque ici que le nombre de points d'intersection entre le lieu des racines et l'axe imaginaire est fini (et même inférieur ou égal à 2n).

L'analyse de la stabilité du système peut se déduire de celle du polynôme w à l'aide de la procédure suivante :

1°) Déterminer le nombre de racines du système non retardé (racines de $p(s,0) = 0$) situées sur l'axe imaginaire ou dans le demi-plan complexe droit. Ce nombre peut être calculé en utilisant le critère de Routh-Hurwitz.

2°) Calculer le polynôme w.

3°) Rechercher ou étudier l'existence des racines réelles positives ω_0^2 de $w(\omega^2)$.

4°) Etudier le comportement du lieu des racines de $p(s,\tau)$ en $s = j\omega_0$.
On détermine si le lieu des racines traverse ou non l'axe imaginaire, ainsi que la direction du croisement pour les τ croissants. On peut ainsi déterminer les valeurs de τ pour lesquelles il existe des racines de l'équation caractéristique situées dans le demi-plan complexe gauche, c'est-à-dire celles pour lesquelles le système est instable.
Cette étude locale du lieu des racines de $p(s,\tau)$ peut être réalisée à travers l'analyse du polynôme w : en effet, on peut montrer que dans le cas d'un systèmes admettant une équation caractéristique de la forme (2.21), le lieu des racines traverse l'axe imaginaire de gauche vers la droite (respectivement de la droite vers la gauche) si, et seulement si, le graphe de w traverse l'axe des ω^2 du bas vers le haut (respectivement du haut vers le bas). On résume cela par l'égalité suivante :

$$\text{signe Re}\frac{ds}{d\tau}\Big|_{s=j\omega_0} = \text{signe } w'(\omega_0^2). \tag{2.31}$$

De même pour les systèmes à retards commensurables d'équation caractéristique (2.23), on peut montrer que la relation analogue

$$\text{signe Re}\frac{ds}{d\tau}\Big|_{s=j\omega} = \text{signe } \alpha\ w'(\omega^2), \tag{2.32}$$

où $\alpha = a_0^{(1)}(s)\, a_0^{(2)}(s) \ldots a_0^{(m-1)}(s)\ \Big|_{s=j\omega}$,
est vérifiée.

Dans de nombreux cas, l'analyse *in extenso* n'est pas nécessaire, par exemple lorsque le système est asymptotiquement stable i.o.d., il n'existe pas de racines imaginaires pures ; l'analyse s'arrête donc à la troisième étape. Pour plus de clarté, nous allons illustrer la méthode par quelques exemples caractéristiques.

Exemple 1 :
Soit le système d'équation caractéristique

$$p(s,\tau) = (s+2)^2 - \frac{1}{4}e^{-\tau s} = 0.$$

1°) $p(s,0) = [\,s + \frac{5}{2}\,]\,[\,s + \frac{3}{2}\,]$, Les 2 racines du système non retardé sont dans le demi-plan complexe gauche.

2°) $w(\omega^2) = (\omega^2 + 4)^2 - \frac{1}{16} = [\omega^2 + \frac{15}{4}]\,[\omega^2 + \frac{17}{4}] = 0,$

Le polynôme w n'admet pas de racines réelles positives : le système est donc asymptotiquement stable i.o.d.

Exemple 2 :

On considère le système d'équation caractéristique

$$p(s,\tau) = s^3 + s^2 + 2s + 1 + e^{-\tau s} = 0$$

1°) $p(s,0) = s^3 + s^2 + 2s + 2 = (s + 1)\,(s^2 + 2).$

En $\tau = 0$, il y a deux zéros sur l'axe imaginaire ($s = \pm j\sqrt{2}$) et un dans le demi-plan gauche.

2°) $w(\omega^2) = (-j\omega^3 - \omega^2 + 2j\omega + 1)\,(j\omega^3 - \omega^2 - 2j\omega + 1) - 1 = \omega^2\,(\omega^2 - 1)\,(\omega^2 - 2),$

$s = 0$ n'est pas une racine de $p(s,\tau) = 0$, on l'ignore donc.

En $\omega = \sqrt{2}$, la plus grande racine, les racines traversent l'axe imaginaire de gauche à droite pour τ croissant et cela arrive pour $\cos \tau\sqrt{2} = 1$, i.e. $\tau = k\pi\sqrt{2}$.

En $\omega = 1$, les racines traversent l'axe de droite à gauche et cela arrive quand $\sin \tau = 1$ soit $\tau = (2k + \frac{1}{2})\,\pi$.

Le système est donc asymptotiquement stable pour : $\frac{\pi}{2} < \tau < \pi\sqrt{2}$ et $\frac{5\pi}{2} < \tau < 2\pi\sqrt{2}$.

Exemple 3 :

On considère ici un système à retards commensurables d'équation caractéristique

$$p(s,\tau) = s + 1 + e^{-s\tau} + 3e^{-2s\tau} = 0.$$

1°) $p(s,0) = s + 5.$

En $\tau = 0$, l'unique racine est dans le demi-plan complexe gauche.

2°) $a_0(s) = s + 1,\ a_1(s) = 1,\ a_2(s) = 3.$

$a_0^{(1)}(s) = -s^2 - 8,\ a_1^{(1)}(s) = -s - 2.$

$a_0^{(2)}(s) = s^4 + 17s^2 + 60.$

Soit $w(\omega^2) = \omega^4 - 17\omega^2 + 60 = (\omega^2 - 12)\,(\omega^2 - 5).$

3° En $\omega = 2\sqrt{3}$, $a_0^{(1)} = 4 > 0$ et $w'(\omega^2) = 7 > 0,$

une branche du lieu des racines traverse donc l'axe imaginaire de la gauche vers la droite pour $\tau = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$, soit $\tau \approx 0{,}302$.

Pour $\omega = \sqrt{5}$, $a_0^{(1)} = -3 < 0$ et $w'(\omega^2) = -7 < 0$, $\alpha = 21 > 0$, une autre branche du lieu des racines traverse l'axe imaginaire de la gauche vers la droite pour $\tau \approx 1{,}781$. L'intervalle de stabilité est donc $0 \leq \tau < \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$.

Remarque : Hertz *et al* ont établi une méthode similaire basée sur le calcul du résultant de deux polynômes [Hertz *et al.* (1984 b)] .

Méthodes des pseudo-retards

Dans le même ordre d'idée, pour les systèmes à retards proportionnés, certains auteurs proposent de substituer dans l'équation caractéristique les termes $e^{-j\omega\tau}$ par une fraction de deux polynômes $\frac{n_1(sT)}{d_1(sT)}$ (avec $s = j\omega$) où T est un *pseudo-retard.* On se ramène ainsi, dans le cas d'un système à retards proportionnés, à la recherche des racines imaginaires pures de

$$p_1(s,T) = \sum_{k=0}^{m} a_k(s)\ (d_1(sT))^k\ (n_1(sT))^{m-k} = 0. \tag{2.33}$$

C'est une équation polynomiale en s paramétrée en T, la méthode classique de Routh-Hurwitz peut donc s'appliquer.
Les paramétrisations rencontrées en pratique sont :

$$n_1(sT) = 1 - sT \quad \text{et} \quad d_1(sT) = 1 + sT, \tag{2.34}$$

avec T réel (voir [Rekasius (1980)], [Hertz *et al.* (1984a)]),
et

$$n_1(sT) = (1 - sT)^2 \quad \text{et} \quad d_1(sT) = (1 + sT)^2, \tag{2.35}$$

avec T réel positif [Thowsen (1981)].
Dans les deux cas, on ne doit pas oublier de prendre en compte le cas limite $e^{-j\omega\tau} = -1$.
La procédure est la même que celle de la méthode de Walton et Marshall, en remplaçant w par $p_1(s,T)$. L'étude du lieu des racines au voisinage des racines imaginaires pures se fait en étudiant le signe de la partie réelle de $\frac{ds}{d\tau}$, cette dérivée étant obtenue en dérivant l'équation caractéristique $p(s, \tau) = 0$ par rapport à τ.

Pour illustrer cette méthode, on considère un système défini par l'équation caractéristique

$$p(s,\tau) = s + e^{-\tau s} + e^{-2\tau s}.$$

1°) $p(s,0) = s + 2$
Le système non retardé admet une unique racine caractéristique à partie réelle négative.

2°) Pour $e^{-\tau s} = -1$, $p(s,\tau) = s \neq 0$ pour Re $s = 0$ et $s \neq 0$.
Pour T fini, on a :

$$p_1(s,T) = s\ (1 + sT)^2 + (1 + sT)\ (1 - sT) + (1 - sT)^2.$$

On calcule le tableau de Routh :

$$\left\{\begin{array}{cc} T^2 & 1-2T \\ 2T & 2 \\ 1-3T & \\ 2 & \end{array}\right.$$

$p_1(s,T)$ a des zéros sur l'axe imaginaire si et seulement si $T = \frac{1}{3}$, ils sont situés en $s = \pm j\sqrt{3}$, et correspondent à des valeurs de τ égales à $\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6} + k\pi\right)$.

3°) En $s = j\sqrt{3}$, on a $\mathrm{Re}\,\frac{ds}{d\tau} > 0$. Le système devient donc instable pour $\tau > \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \tau_0$.

Remarque : La méthode de la τ-partition a été étendue aux cas des systèmes à retards non commensurables, on pourra se référer pour plus de détails à [Cooke et Van den Driessche (1986)], et à [Kuang (1993)].

2.2.3. Utilisation des séries de Taylor

Une méthode d'analyse de la stabilité couramment utilisée dans le passé consiste à remplacer dans l'équation caractéristique les termes exponentiels par un développement tronqué à un certain ordre de leur série de Taylor, comme par exemple approcher $e^{-\tau s}$ par le polynôme $1 - \tau s$.

On peut encore, selon le même principe, remplacer les termes exponentiels par un de leurs approximants de Padé, par exemple utiliser l'approximation $e^{-\tau s} = \frac{2 - \tau s}{2 + \tau s}$

Cette technique donne souvent une bonne approximation des conditions de stabilité. Par exemple, considérons le système scalaire

$$\dot{x}(t) = -k\, x(t-1) \tag{2.36}$$

d'équation caractéristique

$$s + k\, e^{-\tau s} = 0. \tag{2.37}$$

Si, dans (2.37), on remplace $e^{-\tau s}$ par son approximant de Padé d'ordre 1, on est ramené à l'étude de la stabilité du polynôme $s^2 + (2-k)s + 2k$, la condition de stabilité asymptotique obtenue est donc $0 < k < 2$, la condition exacte étant $0 < k < \pi/2$. L'utilisation d'un approximant de plus grand ordre aurait donnée une meilleure estimation de l'intervalle de stabilité. Ce résultat a été montré pour un système linéaire de type retardé quelconque par Takahashi *et al.* (1987).

2.2.4. Stabilité i.o.d.

Une condition necessaire et suffisante de stabilité asymptotique indépendante des retards du système (2.5) est

$$p(s, \tau_1, \dots, \tau_m) \neq 0, \ \forall \ s \text{ tel que Re } s \geq 0 \text{ et } \forall \ \tau_i \geq 0.$$

Or si s est à partie réelle positive, alors puisque tous les retards τ_i sont positifs, l'inégalité

$$| e^{-\tau_i s} | \leq 1$$

est toujours vérifiée.

La fonction caractéristique $p(s, \tau_1, \dots, \tau_m)$ est un polynôme en s et en $z_i = e^{-\tau_i s}$ que l'on note $p(s, z_1, \dots, z_m)$.

Une condition suffisante de stabilité indépendante du retard est donc que le polynôme à m variables $p(s, z_1, \dots, z_m)$ ne s'annule pas sur le domaine

$$\{s : \text{Re } s \geq 0\} \times \{z_1 : | z_1 | \leq 1\} \times \dots \times \{z_m : | z_m | \leq 1\}. \qquad (2.38)$$

De même dans le cas d'un système à retards commensurables, si le polynôme à deux variables p(s, z) déduit de la fonction caractéristique par substitution de $e^{-\tau s}$ par z ne s'annule pas sur le domaine

$$\{s : \text{Re } s \geq 0\} \times \{z : | z | \leq 1\}, \qquad (2.39)$$

alors le système est asymptotiquement stable i.o.d.

Les méthodes suivantes sont basées selon ce principe, nous avons distingué le cas des systèmes à retards commensurables puisque pour ces derniers, la condition (2.39) est nécessaire et suffisante pour la stabilité asymptotique i.o.d sous l'hypothèse que p(0, z) ne s'annule pas lorsque z est de module égal à l'unité.

2.2.4.a. Cas des systèmes à retards commensurables

Kamen (1980) a montré l'équivalence des trois propriétés suivantes :

(1) $p(s, e^{-\tau s}) \neq 0$, Re $s \geq 0$, $\forall \tau \in \mathbb{R}^+$ et $p(0, z) \neq 0$ pour $| z | = 1$

(2) $p(s, z) \neq 0$, Re $s \geq 0$, $| z | \leq 1$

(3) $p(s, z) \neq 0$, Re $s \geq 0$, $| z | = 1$

Pour tester la condition (3), l'auteur propose de calculer la matrice de Hermite $H(e^{j\omega})$ associée au polynôme $p(s, e^{j\omega})$. Le critère est alors vérifié si la matrice H(1) est définie positive et si dét $(H(e^{j\omega})) > 0$ pour tout ω dans $[0, 2\pi]$, cette dernière condition est alors testée en utilisant le schéma récursif de Marden (cf. Siljak (1975)).

Pour illustrer cette méthode, considérons un système d'équation caractéristique

$$p(s, z) = s + a + bz + cz^2,$$

La matrice de Hermite se réduit ici à un scalaire

$$H(e^{j\omega})= 2(a + b \cos \omega + c \cos (2\omega))$$

Soit en posant $x = \cos \omega$, on obtient $H(e^{j\omega})= 2\ (2cx^2 + bx + a - c)$

Pour que $H(e^{j\omega}) > 0\ \forall\ \omega$, il faut et il suffit que ($4c < | b |$ et $a + c > | b |$) ou ($a - c > b^2/8c$)

On montre aussi que si $H(1)$ est définie positive alors dét $[H(e^{j\omega})] > 0$ si et seulement si dét $(H(e^{j\omega})) \neq 0$ pour tout $\omega \in [0, 2\pi]$.

Le déterminant de $H(e^{j\omega})$ est une fonction de $\cos \omega, \cos 2\omega, ..., \cos n\omega$.

En posant $x = \cos \omega$, le déterminant devient alors une fonction polynomiale $f(x)$. Il ne reste plus alors qu'à tester si f a ou non des racines réelles dans $[-1, 1]$. Les conditions nécessaires et suffisantes pour des polynômes de degré inférieurs ou égaux à 4 sont explicitées dans [Jury et Mansour (1982)].

On peut aussi utiliser la transformation bilinéaire $x = (u - 1)/(u + 1)$, qui transforme la condition $f(x) > 0$ pour $| x | \leq 1$ en la nouvelle condition $f_1(u) > 0$ pour $u \in [0, +\infty[$.

Pour l'exemple précédent, on trouve $f(x) = 2(2cx^2 + bx + a - c)$

et les conditions sont ($b^2 < 8c\ (a - c)$ et $c > 0$) ou ($a > 3c$ et $a + c > | b |$).

On retrouve le domaine obtenu précédemment.

2.2.4.b. Cas des systèmes à retards quelconques

Le résultat précédent est généralisable au cas des polynômes multivariables quelconques [Hertz *et al.* (1987)] ; ces travaux permettent également l'analyse de la stabilité asymptotique i.o.d. de systèmes incertains.

Une autre approche de la stabilité i.o.d des systèmes à retards consiste à récrire le système (2.5) sous la forme hybride

$$\begin{bmatrix} y_1(t+\tau_1) \\ y_2(t+\tau_2) \\ \vdots \\ y_m(t+\tau_m) \\ \dot{y}_{m+1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,m} & A_{1,m+1} \\ A_{2,1} & & A_{2,m} & A_{2,m+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{m,1} & \cdots & A_{m,m} & A_{m,m+1} \\ A_{m+1,1} & \cdots & A_{m+1,m} & A_{m+1,m+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \\ y_{m+1}(t) \end{bmatrix} \tag{2.40}$$

où les y_i sont des vecteurs de dimension n_i. Une telle réalisation est toujours possible, il suffit en effet de poser $y_i(t) = x(t - \tau_i)$ pour i compris entre 1 et m, et $y_{m+1}(t) = x(t)$, on déduit alors très facilement l'expression des matrices $A_{i,j}$ de l'équation vectorielle (2.5).

On définit le polynôme caractéristique $q(s, z_1, ... , z_m)$ de ce (m+1)D-système par

$$q(s, z_1, \dots, z_m) = \begin{vmatrix} I_{n_1} - z_1 A_{1,1} & \dots & -z_1 A_{1,m} & -z_1 A_{1,m+1} \\ -z_2 A_{2,1} & & -z_2 A_{2,m} & -z_2 A_{2,m+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ -z_m A_{m,1} & \dots & I_{n_m} - z_m A_{m,m} & -z_m A_{m,m+1} \\ -A_{m+1,1} & \dots & -A_{m+1,m} & sI_{n_{m+1}} - A_{m+1,m+1} \end{vmatrix} \quad (2.41)$$

On peut montrer qu'on a alors $q(s, z_1, \dots, z_m) = p(s, z_1, \dots, z_m)$.
En utilisant cette écriture, Agatholis et Foda (1989) ont établi des critères de stabilité i.o.d. basés sur l'utilisation d'équations de Lyapunov.

2.3. Méthodes matricielles

2.3.1. Utilisation de la mesure de matrice

Soit le système différentiel à un seul retard :

$$\dot{x}(t) = A\, x(t) + B\, x(t - \tau) \quad \text{pour } t \geq 0, \qquad (2.42)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, A et B $\in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\tau > 0$.

Coppel a été l'un des premiers à se servir de la mesure de matrices, appelée également norme logarithmique (voir l'annexe 1) pour analyser la stabilité des systèmes non retardés [Coppel (1963)]. Cet outil se révèle également intéressant pour l'analyse de la stabilité des systèmes avec retard. L'un des critères les plus simples et les plus efficaces obtenu par Mori *et al.* (1981) est le suivant :

Théorème 2.4. : Critère de Mori, Fukuma et Kuwahara
Si l'inégalité

$$-\mu(A) > \| B \|, \qquad (2.43)$$

où μ *est la mesure de matrice associée à la norme* $\| . \|$, *est vérifiée, alors le système* (2.42) *est asymptotiquement stable i.o.d. De plus, la solution réelle* σ *de l'équation*

$$1 + \frac{\sigma}{\mu(A)} + \frac{\| B \|}{\mu(A)} \exp(\sigma\tau) = 0 \qquad (2.44)$$

est telle que

$$| x(t) | \leq \| x_0 \| \exp(-\sigma t), \; t \geq 0. \qquad (2.45)$$

Ce critère connait de nombreuses généralisations, citons par exemple les travaux de Mori (1985), de Hmamed (1986), ou encore de Mori et Kokame (1989).

– Critère de Mori

Si on peut vérifier :

$$\begin{cases} \mu(A) + \max\limits_{y\in\Delta} \mu(Be^{-\tau yj}) < 0 \text{ pour } \max\limits_{y\in\Delta} \mu(Be^{-\tau yj}) \geq -\dfrac{1}{\tau} \\ 1 + \tau.[\max\limits_{y\in\Delta} \mu(Be^{-\tau yj})]\, e^{1-\tau\,\mu(A)} < 0 \text{ pour } \max\limits_{y\in\Delta} \mu(Be^{-\tau yj}) < -\dfrac{1}{\tau} \end{cases} \quad (2.46)$$

où Δ est l'ensemble des valeurs prises par la solution y de :

$$y = \mathrm{Im}\,\lambda_i\,(A + Be^{-\tau yj}.e^{-\mathrm{Re}\,\tau s}),\ \mathrm{Re}\,s \geq 0$$

alors le système (2.42) est asymptotiquement stable.

Ce résultat est très difficile à mettre en pratique, aussi l'auteur propose de remplacer Δ par d'autres intervalles plus simples à manipuler.

Corollaire 1 : Le théorème est valable si on se contente de choisir $\Delta = \Delta_1 = [0\,,\,2\pi/\tau]$.

Corollaire 2 : Idem avec $\Delta = \Delta_2$ où Δ_2 est défini par :

$$\Delta_2 = \left[-\mu(jA) - \max_{\omega\in\Delta_1} \mu(jBe^{-\tau\omega j})\ ;\ \mu(-jA) + \max_{\omega\in\Delta_1} \mu(-jBe^{-\tau\omega j}) \right]$$

Corollaire 3 : Idem avec $\Delta = \Delta_3$ défini par :

$$\Delta_3 = \{y : -\mu(jA) - M_2 \leq y \leq \mu(-jA) + M_1\},$$

où $M_1 = \max[0\,,\,\mu(-jBe^{-\tau yj})]$ et $M_2 = \max[0\,,\,\mu(jBe^{-\tau yj})]$.

Remarque : On a $\Delta \subset \Delta_3 \subset \Delta_2 \subset \Delta_1$, ainsi du corollaire 1 au corollaire 3 et au théorème initial, les conditions de stabilité sont de plus en plus précises au prix d'une complexité croissante.

Le résultat suivant est une version corrigée du critère de Hmamed (1986). La correction a été proposée par Bourlès (1987).

– Critère de Hmamed

Si l'inégalité

$$-\mu(A) > \mu(zB) \quad (2.47)$$

est vérifiée pour tout nombre complexe z de module 1, alors le système (2.42) est asymptotiquement stable i.o.d. Si, de plus, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout z de module $e^{\alpha\tau}$, on ait

$$-\mu(A) - \alpha > \mu(zB)\,, \quad (2.48)$$

alors le système est exponentiellement stable avec un taux de décroissance égal à α.

– Critère de T. Mori et H. Kokame

Soient l_1 et l_2 deux nombres définis par

$$l_1 = \mu(A) + \| B \| \qquad \text{et} \qquad l_2 = \mu(-jA) + \| B \|.$$

Dans le cas où $l_1 \geq 0$, si Re λ_i $(A + Be^{-\tau s}) < 0$ pour $i = 1, 2, ..., n$ et pour s prenant ses valeurs dans les ensembles

(1) $\{ s : s = j\omega, \omega \in [0 , l_2] \}$

(2) $\{ s : s = l_1 + j\omega, \omega \in [0 , l_2] \}$

(3) $\{ s : s = r + jl_2, r \in [0 , l_1] \}$,

alors le système (2.42) est stable.

Remarques : Lorsque $l_2 \geq \pi/\tau$, seul le premier ensemble est à considérer, et dans ce cas la stabilité du système est indépendante du retard. On peut obtenir une condition plus fine en remplaçant l'ensemble (3) par $\{ s : s = r + jl_2, r \in [0 , \alpha] \}$, où α est un nombre positif arbitraire vérifiant l'inégalité $\alpha > \mu(A) + \| B \| e^{-\tau\alpha}$ [Wang (1992)].

2.3.2. Equation complexe de Lyapunov

Soit un système différentiel à retards proportionnés , d'équation :

$$\dot{x}(t) = \sum_{k=0}^{m} F_k \, x(t - k\tau), \quad \text{pour } t > 0. \tag{2.49}$$

En notant

$$F(e^{-\tau s}) = \sum_{k=0}^{m} F_k \, e^{-k\tau s}, \tag{2.50}$$

on a le résultat suivant :

Théorème 2.5. [Brierley *et al.* (1982)] :

Le système (2.49) *est asymptotiquement stable i.o.d. si et seulement si pour une matrice* $Q(e^{j\omega})$ *arbitrairement choisie telle que* $Q(e^{j\omega})$ *soit hermitienne et définie positive sur l'intervalle* $\omega \in [0, 2\pi]$, *la solution* $P(e^{j\omega})$ *de l'équation de Lyapunov*

$$F^*(e^{j\omega}) \, P(e^{j\omega}) + P(e^{j\omega}) \, F(e^{j\omega}) = - \, Q(e^{j\omega}) \tag{2.51}$$

est aussi une matrice hermitienne définie positive pour tout ω *dans* $[0, 2\pi]$.

2.3.3. Utilisation des M-matrices

On considère les systèmes différentiels dont les équations sont de la forme :

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, x_j(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \, x_j(t - \tau_{ij}), \quad i = 1, 2, ..., n \tag{2.52}$$

Une condition suffisante de stabilité pour ces systèmes est donnée par le théorème suivant :

Théorème 2.6. [Tokumaru *et al.* (1975)], [Lewis *et al.* (1980)], [Mori *et al.* (1981)] : *Si la matrice* M + N *où*

$$M = \{m_{ij}\}, \ m_{ij} = \begin{cases} a_{ii}, & \text{pour } i = j \\ | a_{ij} |, & \text{pour } i \neq j \end{cases}$$
$$N = \{| b_{ij} |\} \tag{2.53}$$

est l'opposée d'une M-matrice (cf. annexe 2), *alors le système* (2.52) *est globalement asymptotiquement stable.*

Ce résultat se généralise au cas des systèmes interconnectés ([Mori *et al.* (1981)]). De plus, la méthode est valable pour des retards τ_{ij} quelconques, éventuellement fonctions bornées du temps.

2.3.4. Cas particuliers des retards faibles ou importants

2.3.4.a) Cas des retards faibles

On considère le système

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + \sum_{i=1}^{m} B_i\,x(t - \tau_i), \tag{2.54}$$

avec $0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_m$.
Si les retards τ_i sont suffisamment faibles, alors il est naturel d'espérer pouvoir déduire le comportement des solutions de (2.54) de celui du système obtenu en négligeant les retards, c'est-à-dire, le système

$$\dot{x}(t) = (A + \sum_{i=1}^{m} B_i)\,x(t), \tag{2.55}$$

Le théorème suivant permet de justifier cette approximation.

Théorème 2.7. [Els'gol'ts et Norkin (1973)] :
I. *Si les solutions du système* (2.55) *sont asymptotiquement stables, alors pour des valeurs suffisamment faibles de* τ_m, *les solutions de l'équation* (2.54) *sont également asymptotiquement stables.*

II. *Si le système* (2.55) *admet une racine caractéristique instable, c'est-à-dire de partie réelle strictement positive, alors les solutions du système* (2.54) *sont instables pour des valeurs de* τ_m *suffisamment petites.*

III. *Si* $s = 0$ *est une racine caractéristique simple du système* (2.55), *et si toutes les autres racines caractéristiques du système ont une partie réelle strictement négative, alors pour des valeurs du retard* τ_m *suffisamment faibles, les solutions du système* (2.54) *sont stables.*

Dans [Els'gol'ts et Norkin (1973)], la démonstration de ces propositions est basée sur le théorème de Rouché. Un des points faibles de ce résultat est qu'elle ne donne aucune information quantitative sur les valeurs permises du retard τ_m. La proposition I a été étendue par Halanay (1966) aux cas des systèmes non stationnaires à retards constants. La démonstration, basée sur la théorie des inégalités différentielles, donne une estimation de τ_m, la borne supérieure des retards laissant le système asymptotiquement stable.

2.3.4.b) Cas des retards importants

On considère de nouveau le système (2.54), et on examine l'influence du système

$$\dot{x}(t) = A\,x(t), \tag{2.56}$$

sur la stabilité de (2.54) pour des valeurs suffisamment importantes des retards τ_i. Ce problème reste ouvert, l'un des rares résultats existants proposé par Els'gol'ts et Norkin peut se formuler de la manière suivante :

Théorème 2.8. [Els'gol'ts et Norkin (1973)] : *Si le système* (2.56) *admet au moins une racine caractéristique à partie réelle positive alors le système* (2.54) *n'est pas stable i.o.d.*

Remarque : L'effet d'un retard sur le comportement asymptotique d'un système n'est pas toujours aussi prévisible que pourrait ne le faire penser les résultats précédents. Considérons, par exemple, le système décrit par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= -4\pi^2 x_1(t) + x_2(t) - \pi^2 x_1(t-\tau).\end{aligned}$$

Pour $\tau = 0$, le système est instable : il admet deux racines caractéristiques à partie réelle strictement positive. Cependant, on peut montrer en utilisant par exemple la méthode de Walton et Marschall que le système est asymptotiquement stable pour des valeurs du retard comprises entre 0.669 et 0.808.

2.4. Méthodes graphiques

Le principe de l'argument [Gorecki *et al.* (1989)] appliqué aux systèmes linéaires sans retards est à la base de nombreux critères de stabilité bien connus des automaticiens, comme par exemple le critère de Leonhard-Mikhailov, ou celui de Nyquist.
Le théorème suivant permet la généralisation de ces critères aux systèmes de type retardé. La fonction caractéristique est notée ici f(s).

Théorème 2.9. [Gorecki *et al.* (1989)] : *La fonction caractéristique* f(s) *a exactement* N *zéros (en comptant leur multiplicité) dans le demi-plan complexe ouvert droit et aucune*

racine située sur l'axe imaginaire si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(i) $f(j\omega) \neq 0, \forall\, \omega \in \mathbb{R}$,

(ii) $$N = \frac{n}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_m \{\arg f(j\omega_m^-) - \arg f(j\omega_m^+)\}, \tag{2.57}$$

où n *est l'ordre du système,* ω_m *est un point de discontinuité de la fonction de* $\mathbb{R}^+$ *dans* $[0, 2\pi[$, *qui à* ω *associe* $\arg f(j\omega)$, $\arg f(j0^-) = \arg f(0)$, *et* $\arg f(j\infty) = \arg e^{jn\pi/2}$.

Un système linéaire stationnaire retardé est donc asymptotiquement stable si et seulement si la condition

$$\arg f(j\omega) \Big|_0^\infty = n\pi/2 \quad \text{et} \quad \forall\, \omega \geq 0 \quad f(j\omega) \neq 0 \tag{2.58}$$

est vérifiée.

L'analyse de la stabilité peut donc être réalisée en traçant la courbe $f(j\omega)$, pour $\omega \in \mathbb{R}^+$. Cette courbe est appelée *lieu de Mikhailov* de la fonction f [Kolmanovskii et Nosov (1986)].

La figure (2.3) représente les lieux de Mikhailov de $f(s) = s + Ke^{-s}$, pour K = 1, K = 1.5, et K = 2.

Le critère précédent prouve que le système est asymptotiquement stable pour les deux premières valeurs de K.

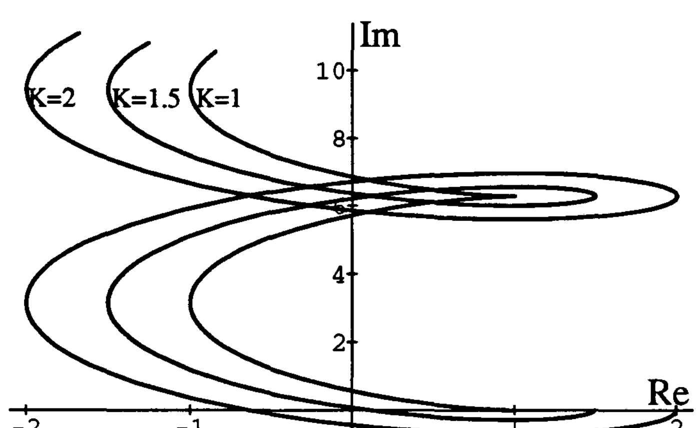

figure 2.3 : Lieux de Mikhailov de f

De même, le critère de Nyquist peut s'appliquer aux systèmes à retards : Considérons le système représenté figure (2.4) où les polynômes D(s) et $N_i(s)$ sont de degré n et m_i, avec $m_i < n$, et n'ayant aucun zéro commun. On suppose de plus que la fonction caractéristique du système en boucle fermée n'admet pas de zéros à partie réelle nulle.

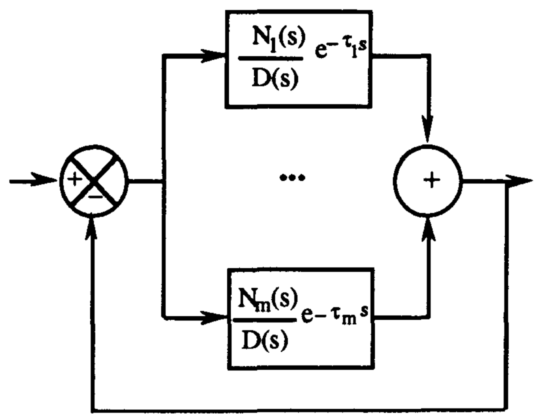

figure 2.4. schéma-bloc de l'exemple

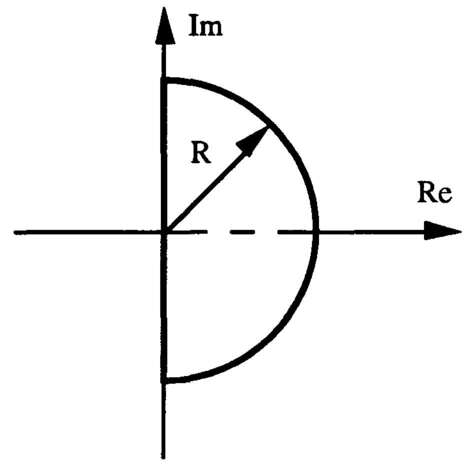

figure 2.5. Contour d'exclusion de Nyquist

Le lieu de Nyquist du système est l'image de la fonction de transfert en boucle ouverte (c'est-à-dire $L(s) = \sum_{k=1}^{m} \frac{N_k(s)}{D(s)} e^{-\tau_k s}$) lorsque s décrit le contour d'exclusion de Nyquist (fig. (2.5)). L'énoncé du critère de Nyquist est le même que pour les systèmes non retardés.

Théorème 2.10 : *Le système bouclé de la figure* (2.4) *est asymptotiquement stable si, et seulement si, son lieu de Nyquist ne passe pas par le point* -1 *et encercle ce point N fois dans le sens direct, où N est le nombre de pôles instables de la fonction de transfert du système en boucle ouverte.*

La stabilité du système

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,x(t-\tau), \tag{2.59}$$

peut également être testée par la méthode graphique suivante proposée par Mori *et al.* (1986).
Soit a_m un nombre réel auquel on associe la matrice $A_0 = A - a_m I$.

Théorème 2.11. [Mori *et al.* (1986)] : *Si, pour tout* $\omega \in [0, 2\pi]$, *les valeurs propres de la matrice* $B + A_0 e^{j\omega}$ *sont à l'intérieur de la région fermée du plan complexe bornée par la courbe de représentation paramétrique*

$$\begin{cases} b_1 = -y \sin \tau y - a_m \cos \tau y \\ b_2 = y \cos \tau y - a_m \sin \tau y, \qquad -y_1 \le y \le y_1 \end{cases} \tag{2.60}$$

où y_1 *est la plus petite racine positive de l'équation* $y = a_m \operatorname{tg}(\tau y)$,
alors le système (2.59) *est asymptotiquement stable.*

En complément de ce résultat, les auteurs ont établi une condition suffisante d'instabilité.

Théorème 2.12. : *Si toutes les valeurs propres des matrices* $B + A_0 e^{j\omega}$ *sont à l'extérieur de la région* (2.60) *et si aucune des branches de ce lieu des racines n'entoure la région, alors le système* (2.59) *est instable.*

Ces résultats sont illustrés par l'exemple suivant :
Soit le système

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} x(t - \tau). \tag{2.61}$$

Les lieux des valeurs propres pour le système (2.61) ainsi que la région (2.60) ont été representés fig. 2.6.a pour $\tau = 0.4$, avec $a_m = -3$, et fig 2.6.b pour $\tau = 1$, avec $a_m = 0$. Les deux théorèmes précédents permettent de conclure que la solution nulle du système (2.61) est asymptotiquement stable pour $\tau = 0.4$ et instable pour $\tau = 1$.

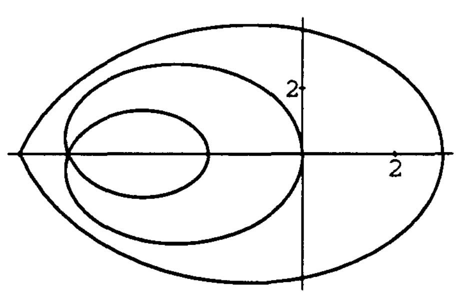

Fig. 2.6.a - lieu du syst. (2.61) pour $\tau = 0.4$

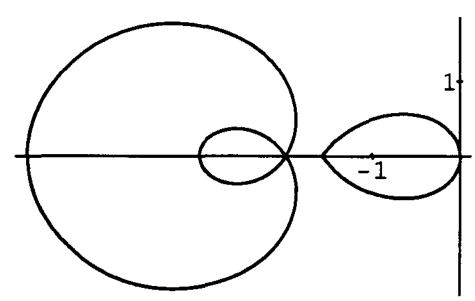

fig. 2.6.b - lieu du syst. (2.61) pour $\tau = 1$

2.5. Etude comparative sur un exemple

Il existe donc, comme on a pu le constater, de nombreux critères de stabilité. Ces méthodes ne sont pas toutes équivalentes au sens où certaines ne considèrent que la stabilité i.o.d., d'autres sont réservées aux systèmes à retards commensurables, et de plus les conditions de stabilité peuvent être difficiles à tester surtout en présence de paramètres formels. Dans la suite, nous ne considérerons que le cas des systèmes à retards proportionnés, cette restriction est justifiée par les deux faits suivants : premièrement, il est difficile d'identifier précisément la valeur des retards présents dans un processus, et deuxièmement, pour deux familles de retards suffisamment proches l'une de l'autre, la stabilité asymptotique du système est la même. En appliquant chacun des critères de stabilité au système à un paramètre

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix} x(t - 2), \text{ avec } a > 0, \tag{2.62}$$

on se propose de mettre en évidence leurs avantages et inconvénients.

Méthodes fréquentielles

– Critère de Chebotarev

Les conditions données ici sont nécessaires mais non suffisantes. Le quasi-polynôme D(s) est donné par l'expression

$$D(s) = 4\,a + a\,s + e^{2s}\,(\,s^2 + 8s + 15). \tag{2.63}$$

Pour k = 1, 3, 5, 7, les conditions obtenues sont respectivement $a > -\frac{15}{4}$, $a < 11.6$, $a < 5.11$, et $a < 4.19$.

Cette méthode donne ici de bons résultats dès k = 7, en effet on montrera plus loin que le système (2.62) est stable pour des valeurs du paramètre a comprises entre −3.75 et 4.05. L'avantage majeur de cette méthode est qu'elle est simple à tester à l'aide d'un programme spécial ou d'un logiciel de calcul formel, mais il se pose alors le problème de déterminer l'ordre du développement de D(s) pour obtenir la précision voulue du résultat. Cette méthode peut aussi être utilisée conjointement à une autre méthode, par exemple graphique, afin de donner une première approximation de l'ensemble des paramètres adéquats.

– Critère de Pontryagin

Le quasi-polynôme normalisé $D_1(s)$ a pour expression :

$$D_1(s) = 2a\,(\,s + 8) + e^s\,(s^2 + 16\,s + 60) \tag{2.64}$$

f et g sont données par

$$f(\omega) = 16\,a + (60 - \omega^2)\cos\omega - 16\,\omega\sin\omega$$
$$g(\omega) = 2\,a\,\omega + (60 - \omega^2)\sin\omega + 16\,\omega\cos\omega$$

Les hypothèses du théorème de Pontryagin sont difficiles à appliquer analytiquement, mais cependant, on constate que pour des valeurs suffisamment importantes de ω les zéros de f sont proches de $\pm\,\pi/2 + 2k\pi$, et ceux de g sont voisins de $2k\pi$ ou $\pi + 2k\pi$, donc pour ω grand, les zéros de f et g sont simples et alternés. En traçant les graphes des fonctions f et g, on vérifie facilement que, lorsque a est compris entre −3.75 et 4, les conditions du théorème de Pontryagin sont vérifiées, et donc, pour ces valeurs, le système est asymptotiquement stable.

– Méthode de la D-partition

L'équation caractéristique du système est

$$p(s) = s^2 + 8s + 15 + a(s + 4)\,e^{-2s}. \tag{2.65}$$

Cette équation admet s = 0, ou $s = j\omega$ comme racines si $a = -\frac{15}{4}$, ou

$$a = \frac{8\,\omega}{4\sin 2\omega - \omega\cos 2\omega} = \frac{\omega^2 - 15}{4\cos 2\omega + \omega\sin 2\omega}\,, \tag{2.66}$$

c'est-à-dire, $a = f(\omega_i)$, où les ω_i sont les racines de l'équation

$$8\,\omega\,(4\cos 2\omega + \omega \sin 2\omega) - (\omega^2 - 15)\,(4\sin 2\omega - \omega\cos 2\omega) = 0$$

La plus petite racine positive de cette équation donne $a \approx 4.05$; le système est asymptotiquement stable en $a = 0$. Le système est donc asymptotiquement stable pour a compris entre -3.75 et 4.05. Un long calcul montre que a et Re $\frac{ds}{da}$ calculé en $s = j\omega_i$ pour $a = f(\omega_i)$ ont le même signe : le système est donc asymptotiquement stable si et seulement si $-3.75 < a < 4.05$.

– Méthodes de la τ-partition

a) Méthode de Walton et Marshall : On a $p(s, \tau) = s^2 + 8s + 15 + a(s + 4)\,e^{-\tau s}$.

i) Pour $\tau = 0$, le système (2.62) est asymptotiquement stable si et seulement si $a > -3.75$, les racines de $p(s, 0)$ sont donc dans le demi-plan Re $s < 0$.

ii) Le polynôme w a pour expression

$$w(\omega^2) = \omega^4 + (34 - a^2)\,\omega^2 + 15^2 - 16\,a^2. \tag{2.67}$$

Le discriminant de w est toujours positif, on peut donc en conclure que w n'admet aucun zéro réel positif lorsque $|\,a\,| < 3.75$, pour ces valeurs de a le système est asymptotiquement stable i.o.d. ; en dehors de cet intervalle, w admet un unique zéro réel positif que l'on note ω_1^2. En ce point, la dérivée $\frac{dw}{d\omega^2}$ est strictement positive : c'est donc une racine déstabilisante. Pour $\tau = 2$, Le système est asymptotiquement stable si a est compris entre -3.75 et a_1, où a_1 vérifie les deux équations

$$\cos(2\omega_1) = -\frac{60 + 4\,\omega_1^2}{a_1\,(16 + \omega_1^2)} \quad \text{et} \quad \sin(2\omega_1) = \frac{\omega_1(17 + \omega_1^2)}{a_1\,(16 + \omega_1^2)}.$$

On trouve numériquement $a_1 \approx 4.05$.

b) Méthode des pseudo-retards

La méthode des pseudo-retards est ici difficilement utilisable à cause de la présence du paramètre a.

– Utilisation des approximants de Padé

On note p(k) l'approximant de Padé d'ordre k de la fonction exp $(-2s)$ défini par :

$$p(k) = \frac{N(s)}{D(s)}, \text{ où } D(s) = N(-s) = \sum_{i=0}^{k} \frac{2^i\,(2\,k - i)!}{i!\,(k - i)!}\,s^i$$

On remplace dans l'équation caractéristique le terme e^{-2s} par p(k) dans l'équation caractéristique. En appliquant le critère de Routh au polynôme obtenu, il vient les résultats suivants : pour $k = 1$, a doit être compris entre -3.75 et 7.66, pour $k = 2$, a doit vérifier $-3.75 < a < 4.23$, et pour $k = 3$, $-3.75 < a < 4.096$. On retrouve ici le même problème que pour la méthode de Chebotarev, c'est-à-dire, de savoir à quel ordre on doit aller pour obtenir une estimation suffisamment précise du domaine de stabilité. La méthodes des approximants de Padé est proche de celle de Chebotarev, mais en présence de paramètres, elle nécessite des calculs plus complexes (ici, résolution de polynômes de degré 5 pour $k = 3$) ; de plus le théorème de Chebotarev donne des conditions nécessaires de stabilité, le domaine paramétrique de stabilité obtenu à n'importe quel ordre est donc toujours une estimation par excès du domaine réel, ce n'est pas forcément le cas pour la méthode des approximants de Padé : à un ordre fixé, les conditions ne sont *a priori* ni nécessaires, ni suffisantes.

– Critère de stabilité i.o.d. (méthode de Kamen)

On a ici :

$$p(s, z) = s^2 + 8s + 15 + a + a\,(s + 4)\,z,$$

soit :

$$p(s, e^{j\omega}) = s^2 + (8 + a\,e^{j\omega})\,z + 15 + 4\,a\,e^{j\omega}.$$

La matrice de Hermite associée est

$$H(e^{j\omega}) = 2\begin{pmatrix} 8 + a\cos\omega & -a\sin\omega \\ -a\sin\omega & 120 + 4\,a^2 + 47\,a\cos\omega \end{pmatrix},$$

on vérifie aisément que $H(1)$ est définie positive. Le calcul du déterminant de $H(e^{j\omega})$ donne :

$$\text{dét}(H(e^{j\omega})) = 48\,a^2\cos^2\omega + (4\,a^3 + 496\,a)\cos\omega + 960 + 31\,a^2.$$

En appliquant les conditions de Jury et Mansour, on montre alors que le système est asymptotiquement stable indépendamment du retard si $|a| < 3{,}75$.

Cette méthode est simple dès lors que le degré en $\cos\omega$ du déterminant de $D(e^{j\omega})$ est inférieur ou égal à 4. En effet, pour ces systèmes, on peut appliquer les conditions de positivité de Jury et Mansour. Dans les autres cas, l'étude apparait compliquée pour des systèmes admettant un ou plusieurs paramètres.

Méthodes matricielles

– Critères de Mori *et al.* et de Hmamed

On choisit la norme euclidienne.

On a alors

$$\mu(A) = -3,\ \|B\| = |a| \text{ et } \mathrm{Max}\,\{\mu(zB)\,;\,|z| = 1\} = |a| \tag{2.68}$$

Les critères de Mori, Fukuma et Kuwahara et de Hmamed permettent de conclure que le système est asymptotiquement stable si $|a| < 3$.

$$\begin{aligned} &\mu(A) = -3,\ \mu(jA) = \mu(-jA) = 0 \text{ et } \|B\| = |a| \\ &\mu(Be^{-2yj}) = \max\,\{0, -a\cos(2y)\} \\ &\mu(jBe^{-2yj}) = \max\,\{0, -a\sin(2y)\} \\ &\mu(-jBe^{-2yj}) = \max\,\{0, a\sin(2y)\} \end{aligned} \tag{2.69}$$

Si on applique les deux premiers corollaires du critère de Mori, on retrouve le résultat précédent.

En appliquant le troisième corollaire, on obtient la condition $-3 < a < a_{max}$, où a_{max} vérifie :

$a_{max} = y/\sin(2y)$, avec $y \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$, solution de $-3 - y \operatorname{cotg}(2y) = 0$.

On trouve numériquement $a_{max} = 3.29$.

C'est pour ce groupe de méthodes que les résultats sont les plus mauvais. Sur cet exemple, on constate que, bien que les conditions de stabilité données par le critère de Mori dépendent du retard, les conditions de stabilité obtenues sont plus fortes que les conditions de stabilité asymptotiques i.o.d. De plus, lorsque le système admet un ou plusieurs paramètres, la méthode nécessite une analyse relativement complexe (surtout pour le corollaire 3). Cependant, les critères de Mori, Fukuma et Kuwahara et de Hmamed se révèlent intéressants car ils permettent une analyse relativement simple de la stabilité d'un système même lorsque celui-ci admet quelques paramètres. La qualité des résultats dépend fortement du choix de la norme et du choix de la représentation d'état (les résultats dépendent de la base choisie).

– Critère de Mori et Kokame

Ici, $l_1 = -3 + |a|$ et $l_2 = |a|$.

Le système est stable pour $l_1 < 0$ c'est-à-dire pour $|a| < 3$, on suppose donc désormais que $|a| > 3$.

$l_2 = |a| > \pi/2$, il suffit donc de trouver pour quelles valeurs du paramètre a toutes les valeurs propres de la matrice $A + Be^{-2s}$ sont à partie réelle strictement négative lorsque $s = j\,\omega$, $\omega \in [0, \pi]$.

Les valeurs propres de $A + Be^{-2j\omega}$ sont les solutions de l'équation :

$$\lambda^2 + (8 + a\,e^{-2j\omega})\,\lambda + (15 + 4a\,e^{-2j\omega}) = 0. \tag{2.70}$$

En résolvant cette équation, on peut montrer que le système est asymptotiquement stable pour toute valeur de a telle que le polynôme $960 + 16\,a^2 + [496 + 4\,a^2]\,a\,x + 63\,a^2\,x^2$ est strictement positif pour tout x appartenant à l'intervalle $[-1, 1]$.

On montre alors que le système est stable pour $|a| < 3.75$.

Ce critère est difficilement applicable lorsque l'ordre du système ou le nombre de paramètres augmentent : on retrouve les mêmes difficultés qu'avec la méthode de Jury-Mansour. On peut néanmoins, pour simplifier, ne plus considérer la négativité des valeurs propres de $A + Be^{-\tau s}$ mais celle de sa mesure.

– Equation complexe de Lyapunov

On a $F(z) = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -4 - az \end{bmatrix}$, avec $z = e^{j\omega}$. On choisit $Q(z) = I_2$, matrice identité.

La solution P(z) de l'équation $F^*(z)\,P(z) + P(z)\,F(z) = -I_2$ est la matrice

$$\frac{1}{d}\begin{bmatrix} [4 + a \cos \omega]\,[64 + 16\, a \cos \omega + a^2] & [8 + a \cos \omega]\,[8 + a\, e^{-j\omega}] \\ [8 + a \cos \omega]\,[8 + a\, e^{j\omega}] & 4\,[64 + 16\, a \cos \omega + a^2] \end{bmatrix} \qquad (2.71)$$

avec $d = 960 + 16\, a^2 + [496 + 4\, a^2]\, a \cos \omega + 63\, a^2 \cos^2 \omega$.

On montre que P(z) est définie positive pour tout ω dans $[0 , 2\pi]$ si et seulement si $d > 0$ pour tout $\omega \in [0 , 2\pi]$, et ceci est vérifié uniquement pour $| a | < 3.75$.

Ce critère est difficilement applicable même lorsque l'ordre du système est relativement faible, car la résolution de l'équation complexe de Lyapunov est en régle générale compliquée.

– Critère de Tokumaru *et al.*

La matrice

$$M + N = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -4 + | a | \end{bmatrix} \qquad (2.72)$$

est l'opposée d'une M-matrice si

$$-4 < 0 \text{ et } -4\,(-4 + | a |) - 1 > 0.$$

Le système est donc stable lorsque $| a | < 3.75$.

Ce critère est l'un des plus simples à utiliser même en présence de paramètres. Les inconvénients majeurs de cette méthode sont qu'elle donne des conditions suffisantes mais non nécessaires de stabilité et les résultats dépendent fortement de la représentation d'état : un changement de base est utile pour conditionner la matrice M + N sous forme d'une matrice à diagonale négative dominante. Notons aussi que c'est la seule des méthodes présentée qui soit encore valable lorsque le retard est variable avec le temps.

Méthodes graphiques

La condition de stabilité $-3.75 < a < 4.05$ s'obtient ici très facilement en traçant les lieux de Mikhailhov. Un des inconvénients de cette méthode est la possibilité d'oublier une des composantes de l'ensemble des paramètres pour lesquels le système est asymptotiquement stable lorsque celui-ci est non connexe. L'utilisation du critère de Chebotarev permet d'éviter cet inconvénient, les conditions de stabilité obtenues sont nécessaires et permettent de limiter le domaine possible des paramètres convenables.
On trouve la même condition pour a en utilisant le critère de Nyquist.

La méthode de Mori s'applique ici avec $a_m = -4$, et on montre alors que le système est asymptotiquement stable pour des valeurs de a comprises strictement entre -3.75 et -4. La méthode nécessite le calcul des solutions d'une équation à coefficients complexes, l'outil informatique se révèle alors indispensable.

Bilan

Les tableaux suivants résument l'étude précédente. Pour chaque méthode, la classe de système considérée ($\forall$ pour systèmes à retards quelconques, C lorque les retards sont commensurables, et 1 pour les systèmes à un seul retard) et le type de stabilité analysée (i.o.d. ou non) sont indiqués.

A) Méthodes fréquentielles

MÉTHODES	RETARDS	STAB.	COMMENTAIRES
Th. de Chebotarev	$\forall$	CN	+ : Méthode simple, pré-analyse utile pour limiter le calcul de paramètres de commandes. – : des conditions nécessaires peuvent n'apparaître que pour des déterminants de rangs élevés.
Th. de Pontryagin	C	CNS	+ : Bonne méthode graphique. – : Méthode analytique complexe si le système à analyser admet des paramètres.
D-partition	$\forall$	CNS	+ : Méthode simple lorsque le système admet moins de 2 paramètres réglables. – : Difficile à appliquer lorsqu'il y a plus de 2 paramètres.
Walton & Marshall	C	CNS	+ : Permet de déterminer toutes les valeurs du retard de base pour lequel le système est stable. – : Méthode complexe si l'ordre du système est élevé ou s'il admet des paramètres.
Pseudo-retards	C	CNS	idem Walton et Marshall
Approx. de Padé	$\forall$		+ : Méthode simple pour des approximants d'ordre faibles. – : La fiabilité de cette méthode nécessite parfois de pousser l'analyse à des ordres élevés, l'analyse devient alors difficile.
Kamen	C	CNS i.o.d.	+ : sous l'hypothèse $p(0, z) \neq 0$ pour $\mid z \mid = 1$ conditions nécessaires et suffisantes de stabilité i.o.d. – : Méthode complexe si le système admet des paramètres.

B) Méthodes matricielles

MÉTHODES	RETARDS	STAB.	COMMENTAIRES
Mori *et al.* – Hmamed	1	CS	+ : Méthode simple. – : Critère non conservatif : dépend de la représentation d'état choisie, condition parfois excessive (cf. exemple).
Mori	1	CS	+ : améliore la précision des résultats précédents – : Complexe si le système possède un ou plusieurs paramètres + mêmes inconvénients que pour la méthode de Mori *et al.*
Mori & Kokame	1	CS	+ : conditions plus faibles que la méthode de Mori *et al.* – : Calculs complexes (calcul des zéros d'une équation à coefficients complexes).
Brierley *et al.*	C	CS i.o.d.	+ : Conditions nécessaires et suffisantes de stabilité i.o.d. – : Calculs complexes.
Tokumaru *et al.*	∀	CS i.o.d.	+ : Méthode très simple, valable si les retards varient avec le temps. – : Peut nécessiter un conditionnement de l'écriture du système.

C) Méthodes graphiques

MÉTHODES	RETARDS	STAB.	COMMENTAIRES
Lieu de Mikhailov	∀	CNS	+ : Méthode simple. – : méthode coup par coup : risque d'oublier un sous-ensemble de paramètres stabilisants.
Critère de Nyquist	∀	CNS	+ : Méthode simple lorsque le dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée à la forme (2.21) – : idem lieu de Mikhailov.
lieu de Mori *et al.*	1	CS	+ : Si par cette méthode, on a montré que le système est stable pour $\tau = \tau_1$, alors il est stable pour tout $\tau \leq \tau_1$. – : Nécessite le tracé du lieu des racines de systèmes à coefficients complexes.

3. CAS DES SYSTÈMES À RETARDS VARIABLES

Contrairement aux cas des systèmes linéaires stationnaires, il y a peu de travaux traitant de la stabilité des systèmes à coefficients constants et à retards variables. Parmi les résultats précédents, seule la méthode de Tokumaru *et al.* reste valable lorsque le retard dépend du temps. Il est en effet important de noter que la stabilité asymptotique des systèmes obtenus en "gelant" le retard ne suffit pas à assurer la stabilité asymptotique du système initial. Ce phénomène peut être illustré par l'exemple suivant [Hirai et Satoh (1980)] :

Considérons le système scalaire

$$\dot{x}(t) = -a\,x(t) - b\,x(t - \tau(t)), \tag{2.73}$$

où $\tau(t)$ est défini par

$$\tau(t) = t - kT_0, \quad \text{pour} \quad kT_0 < t \le (k+1)\,T_0. \tag{2.74}$$

L'équation (2.73) peut se récrire

$$\dot{x}(t) = -a\,x(t) - b\,x(kT_0), \quad \text{pour} \quad kT_0 < t \le (k+1)\,T_0. \tag{2.75}$$

Il est alors facile de calculer $x((k+1)\,T_0)$ en fonction de $x(kT_0)$:

$$\begin{aligned} x((k+1)\,T_0) &= [(1 + \frac{b}{a})\,e^{-aT_0} - \frac{b}{a}]\,x(kT_0), \quad \text{si } a \neq 0 \\ &= (1 - bT_0)\,x(kT_0), \quad \text{si } a = 0. \end{aligned}$$

Le système est donc asymptotiquement stable si et seulement si

$$\begin{cases} \left| (1 + \frac{b}{a})\,e^{-aT_0} - \frac{b}{a} \right| < 1 & \text{si } a \neq 0 \\ \left| 1 - bT_0 \right| < 1 & \text{si } a = 0 \end{cases} \tag{2.76}$$

Sur la figure suivante, on a représenté dans le plan (a, b) l'ensemble des paramètres pour lesquels le système (2.73) est stable avec le retard (2.74) et, en trait pointillé, celui obtenu pour un retard τ constant inférieur ou égal à 1.

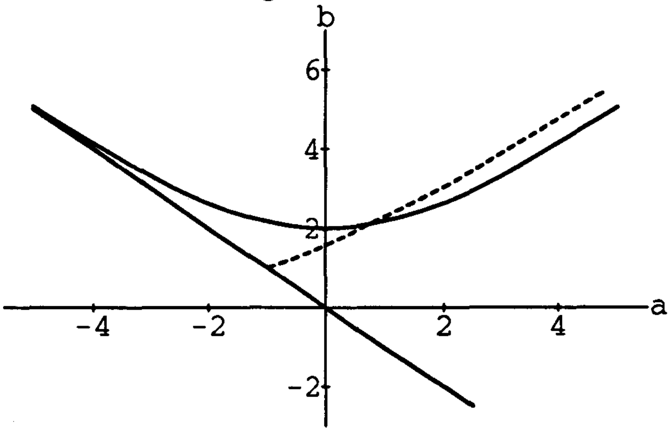

figure 2.7 . Région de stabilité de l'Eq. (2.73)

On voit donc que le système (2.73) avec le retard variable $0 \le \tau(t) \le 1$ peut être instable alors même qu'il est asymptotiquement stable pour tout retard constant majoré par 1, et inversement, il existe des valeurs (a,b) pour lequel le système (2.73) est asymptotiquement stable pour toute loi du retard τ de la forme (2.74) avec T_0 inférieur à 1, mais instable lorsque le retard est fixé à une valeur toujours inférieure à 1.

4. CAS DES SYSTÈMES LINÉAIRES À COEFFICIENTS PÉRIODIQUES

4.1. Théorie de Floquet

On considère dans cette partie les systèmes linéaires homogènes admettant une équation de la forme :

$$\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + \sum_{i=1}^{m} B_i(t)\,x(t - \tau_i(t)), \tag{2.77}$$

où les matrices $A(t)$ et $B_i(t)$ de dimensions $n \times n$, ainsi que le retards $\tau_i(t)$ sont des fonctions T-périodiques du temps, c'est-à-dire vérifient les égalités

$$A(t+T) = A(t),\; B_i(t+T) = B(t),\; \tau_i(t+T) = \tau_i(t)$$

pour tout t réel.

Comme dans le cas non retardé, on définit l'opérateur de transition $\Phi(t, s)$ par

$$\Phi(t, s)\,\varphi = x_t\,(s, \varphi),$$

pour tout $t \geq s$ et tout φ dans $\mathbf{C}$. L'opérateur Φ vérifie toujours la relation de semi-groupe

$$\Phi(t, t_1)\,\Phi(t_1, s) = \Phi(t, s),$$

pour tout $t \geq t_1 \geq s$. En outre, la périodicité du système (2.77) implique les égalités

$$\Phi(t+T, s+T) = \Phi(t, s), \text{ et } \quad \Phi(t+T, s) = \Phi(t, s)\,\Phi(s+T, s),$$

pour tout $t \geq s$. On définit alors l'*opérateur de monodromie* $U(t) : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ par

$$U(t)\,\varphi = \Phi(t+T, t)\,\varphi$$

Le spectre de $U(t)$ est indépendant de t et constitue un sous-ensemble compact du plan complexe. Soit ρ un élément non nul du spectre de $U(t)$, alors ρ est une valeur propre de l'opérateur $U(t)$, c'est-à-dire, il existe un élément non nul φ de $\mathbf{C}$ tel que $U(t)\,\varphi = \rho\,\varphi$. Les valeurs propres de l'opérateur $U(t)$ sont appelées également *multiplieurs caractéristiques* du système (2.77), et tout nombre λ tel qu'il existe un multiplieur caractéristique ρ vérifiant $\rho = e^{\lambda T}$ est appelé *exposant caractéristique* du système (2.77). A tout multiplieur caractéristique ρ du système (2.77) on peut associer $\mathbf{E}_\rho$ et $\mathbf{K}_\rho$ deux sous-espaces fermés de $\mathbf{C}$ tels que les propriétés suivantes soient vérifiées :

(i) $\mathbf{E}_\rho$ est de dimension finie ;
(ii) $\mathbf{E}_\rho \oplus \mathbf{K}_\rho = \mathbf{C}$;
(iii) les sous-espaces $\mathbf{E}_\rho$ et $\mathbf{K}_\rho$ sont invariants par U.
(iv) $\sigma(U \mid \mathbf{E}_\rho) = \{\rho\}$, $\sigma(U \mid \mathbf{K}_\rho) = \sigma(U) \setminus \{\rho\}$,

où $\sigma(U)$ représente le spectre de l'opérateur U, et $U \mid \mathbf{E}$ est la restriction de U au sous-espace $\mathbf{E}$.

La dimension d du sous-espace E_ρ est appelée la multiplicité du multiplieur ρ.

Théorème 4.1. : *Soit* $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_d)$ *une base de* E_ρ, *alors il existe deux matrices* $P(t)$ *et* B *de dimensions* $d \times d$ *vérifiant*

(i) *la matrice* e^{BT} *admet* ρ *comme unique valeur propre, et*

(ii) $P(t)$ *est à coefficients dans* $\mathbf{C}$, *et pour tout* t, $P(t + T) = P(t)$

telles que, si $\varphi = \Phi b$, *alors la solution de* (2.77) *passant par* φ *est définie pour tout* t *réel et donnée par*

$$x_t(0, \varphi) = P(t)\, e^{Bt}\, b.$$

Les solutions de conditions initiales appartenant au sous-espace E_ρ sont dites de Floquet : ces solutions sont le produit d'un terme exponentiel $e^{\lambda t}$ par un polynôme en t à coefficients fonctions T-périodiques de t.

Pour φ élément quelconque de $\mathbf{C}$, la solution $x(t\,;\, t_0, \varphi)$ peut être décomposée en une série de solutions de Floquet. Pour cela, soient ρ_i les différents multiplieurs caractéristiques du système (2.77), et soit P_i l'opérateur de projection de $\mathbf{C}$ sur le sous-espace E_{ρ_i}. A l'aide de ces notations, on peut énoncer le résultat suivant :

Théorème 4.2. [Stokes (1962)], [Hale (1977)] : *Soit* φ *un élément arbitraire de* $\mathbf{C}$, *et soit* α *un nombre réel arbitraire, alors il existe des constantes* $\beta = \beta(\alpha) > 0$, $k = k(\alpha) > 0$ *telles que*

$$\left| x(t\,;\, t_0, \varphi) - \sum_{|\rho_i| \geq \exp \alpha T} x(t\,;\, t_0, P_i\varphi) \right| \leq k\, e^{(\alpha - \beta)(t - t_0)}, \quad t \geq t_0$$

Remarque : Cette décomposition est similaire au développement (2.8) obtenu pour les équations linéaires stationnaires.

4.2. Théorème général de stabilité

Le résultat suivant, corollaire du précédent, est une extension aux cas des systèmes à retards d'un théorème dû à Lyapunov :

Théorème 4.3. [Stokes (1962)], [Halanay (1966)] : *Le système* (2.77) *est asymptotiquement stable si et seulement si tous ses multiplieurs caractéristiques sont de module strictement inférieur à l'unité. De même, la solution nulle de l'équation* (2.77) *est stable si et seulement si tous les multiplieurs caractéristiques du système* (2.77) *sont dans le disque unité et aux multiplieurs de module égal à l'unité correspondent des diviseurs élémentaires simples.*

4.3. Applications à une classe particulière d'équations

Le problème de la stabilité d'un système linéaire périodique de type retardé est donc réduit à la détermination ou à l'estimation des valeurs propres de son opérateur de monodromie. Si dans le cas non retardé les multiplieurs caractéristiques peuvent être approchés à l'aide d'algorithmes numériques (voir par exemple [Rabenasolo (1992)], il n'en va pas de même pour les systèmes à retards. Les seuls résultats significatifs concernent des classes particulières d'équations. Par exemple, considérons l'équation scalaire suivante dont les retards sont divisibles par la période T ([Zverkin (1967)], [Kolmanovskii et Nosov (1986)]) :

$$\dot{x}(t) + a(t)\, x(t) + b_1(t)\, x(t - m_1 T) + b_2(t)\, x(t - m_2 T) = 0, \tag{2.78}$$

où m_1 et m_2 sont des entiers naturels. On recherche les solutions de la forme

$$x(t) = p(t)\, e^{\lambda t}, \tag{2.79}$$

où p(t) est une fonction T-périodique.

La fonction p(t) doit alors vérifier l'équation différentielle

$$\dot{p}(t) + [\lambda + g(t, \lambda)]\, p(t) = 0, \tag{2.80}$$

où $g(t, \lambda) = a(t) + b_1(t) \exp(-m_1 \lambda T) + b_2(t) \exp(-m_2 \lambda T)$.

Par intégration, on obtient alors l'expression de p(t) :

$$p(t) = C \exp\Big[-\lambda t - \int_0^t g(s, \lambda)\, ds\Big].$$

p est périodique, λ doit donc être solution de l'équation

$$\lambda T + \int_0^T g(s, \lambda)\, ds = 0. \tag{2.81}$$

Cette équation est transcendantale, elle admet au plus une famille dénombrable de solutions. A chacune de ces racines, on peut associer la solution de Floquet (2.79). La solution nulle de l'équation (2.78) est asymptotiquement stable si et seulement si tous les λ solutions de (2.81) sont à partie réelle négative. Le cas des systèmes différentiels à retards divisibles par T peut être traité similairement à condition de pouvoir calculer la matrice fondamentale d'un système différentiel ordinaire paramétré par λ ([Hale (1977)]). A titre d'exemple, considérons l'équation scalaire [Hale (1977)]

$$\dot{x}(t) = \sin(t)\, x(t - 2\pi). \tag{2.82}$$

L'équation (2.81) se réduit à $\lambda = 0$, le seul multiplieur caractéristique du système est donc $\rho = 1$. La solution de Floquet associée à $\rho = 1$ est $p(t) = e^{-\cos t}$. Enfin, si P est l'opérateur de projection de **C** sur E_1, alors pour tout $\varphi \in$ **C**, la solution $x(t, 0, \varphi - P\varphi)$ décroît plus vite que n'importe quelle exponentielle, ce qui prouve que, dans le cas général, il n'existe pas de transformation de Floquet-Lyapunov réduisant (2.82) en une équation à coefficients constants (l'égalité (2.8) montre en effet que toute solution d'une équation linéaire stationnaire est majorée par une fonction exponentielle du type k $e^{-\alpha t}$, où α est une constante).

CONCLUSION

Cette partie illustre bien la singularité des systèmes à retards : concernant la stabilité, les résultats théoriques sont, à peu de choses près, identiques à ceux des systèmes ordinaires, mais en pratique l'étude de la stabilité se révèle beaucoup plus complexe à traiter. Ainsi, il existe de nombreuses méthodes d'analyse de la stabilité pour les systèmes linéaires stationnaires, mais seul un faible nombre d'entre elles peut être utilisé pour la synthèse d'une loi de commande puisque dans ce cas la présence de paramètres formels est systématique. La complexité de l'analyse croît lorsque les systèmes sont non stationnaires. Les outils employés pour traiter cette classe de systèmes sont alors identiques à ceux appliqués pour les systèmes non linéaires. Ils seront exposés au chapitre suivant.

CHAPITRE 3

CHAPITRE 3 :

STABILITE
DES SYSTEMES NON LINEAIRES A RETARDS

INTRODUCTION

Les phénomènes non linéaires d'un processus doivent souvent être pris en compte dans la modélisation afin d'obtenir un comportement réaliste dans un domaine de validité convenable.
La plupart des méthodes d'étude de la stabilité applicables aux systèmes linéaires ne sont plus valables lorsque le modèle est non linéaire. Nous allons dans ce chapitre présenter des outils et des méthodes permettant leur analyse.
Dans une première étape, nous allons rappeler les différentes techniques existantes : ainsi, il sera présenté une généralisation de la méthode de Lyapunov-Poincaré et l'extension de la seconde méthode de Lyapunov aux cas des systèmes à retards. Nous présentons deux variantes de cette méthode : la première suggérée par Krasovskii consiste à utiliser des fonctions définies non plus sur $\mathbb{R}^n$, mais sur l'espace fonctionnel **C** ; la deuxième, due à Razumikhin, conserve quant à elle la notion classique de fonctions de Lyapunov. Nous verrons également comment le principe d'invariance de LaSalle peut être généralisé aux cas des systèmes à retards à travers ces deux méthodes. Ensuite, la méthode fréquentielle d'analyse de la stabilité sera présentée. Enfin, nous conclurons ces rappels en présentant divers principes de comparaison applicables aux systèmes à retards et à l'étude de la stabilité.
Dans un deuxième temps, nous développons une méthode originale d'étude de la stabilité basée sur la notion de normes vectorielles utilisées en tant que fonctions vectorielles de Lyapunov. Cette étude généralise aux cas des systèmes à retards la méthode définie dans

[Gentina (1976)] pour les systèmes d'équations différentielles ordinaires et dans [Borne (1976)] pour les systèmes discrets. L'étude de la stabilité d'un système est réalisée à travers celle d'un système de comparaison, et il sera donné des conditions suffisantes de stabilité dépendant de la structure du système majorant et simples à tester.

L'approche par normes vectorielles nous conduit ainsi, dans ce chapitre, à énoncer plusieurs théorèmes de base : les deux premiers concernent le calcul des systèmes majorants et le principe de comparaison (théorèmes 5.1 et 5.2), et neuf autres (Th. 5.3 à 5.11) donnent des critères relatifs à la stabilité. Le chapitre 4 reprendra ces résultats pour les appliquer à l'estimation des domaines de stabilité ainsi qu'à divers autres problèmes d'analyse et de commande.

1. STABILITÉ AU PREMIER ORDRE DES ÉQUATIONS À RETARDS

La stabilité d'une solution d'un système non linéaire ordinaire peut se déduire, sous certaines hypothèses, de la stabilité de son système linéarisé tangent. Cette méthode, justifiée par les travaux de Poincaré et de Lyapunov, peut être étendue au cas des systèmes à retards.

1.1. Système linéarisé tangent

Considérons le système

$$\dot{x}(t) = A\, x(t) + \sum_{k=1}^{m} B_k\, x(t-\tau_k) + r(t, x(t), x(t-h_1(t)), \ldots, x(t-h_p(t))), \qquad (3.1)$$

où les τ_k sont des constantes positives, les retards $h_i(t)$ sont des fonctions continues, positives et bornées du temps, et où la fonction continue r est telle qu'il existe deux réels strictement positifs ε et β pour lesquels l'inégalité

$$| r(t, u_1, \ldots, u_{p+1}) | \leq \beta\, (| u_1 | + \ldots + | u_{p+1} |) \qquad (3.2)$$

est vérifiée pour tout $t \geq t_0$, et tout $u_i \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $| u_i | < \varepsilon$ $(i = 1, \ldots, p+1)$.
Sous certaines hypothèses, la stabilité de la solution nulle du système (3.1) peut se déduire de celle du système

$$\dot{x}(t) = A\, x(t) + \sum_{k=1}^{m} B_k\, x(t-\tau_k). \qquad (3.3)$$

Lorsque la constante β apparaissant dans l'inégalité (3.2) converge vers zéro pour des valeurs de ε tendant vers zéro, ce système sera appelé le *système linéarisé tangent.*

Théorème 1.1. [El'sgol'ts et Norkin (1973)] : *Si le système linéaire stationnaire* (3.3) *est asymptotiquement stable, alors, pour des valeurs suffisamment faibles de* β, *la solution nulle du système* (3.1) *est aussi asymptotiquement stable.*
De même, si le système (3.3) *admet au moins une racine caractéristique à partie réelle strictement positive, alors, pour des valeurs suffisamment faibles de* β, *la solution nulle du système* (3.1) *est instable.*

Lorsque (3.3) est le système linéarisé tangent, alors β peut être pris aussi petit que l'on désire (il suffit pour cela de choisir une valeur convenable de ε), le théorème 1.1 est alors équivalent à une première méthode de Lyapunov.

Ce théorème s'applique aussi lorsque r est suffisamment faible en moyenne, c'est-à-dire, s'il existe un réel $T > 0$ et une fonction continue $\psi(t)$ telle que

$$| r(t, u_1, ..., u_{p+1}) | \leq \psi(t) \, (| u_1 | + ... + | u_{p+1} |), \tag{3.4}$$

et

$$\int_t^{t+T} \psi(s) \, ds < \beta, \qquad \forall \, t. \tag{3.5}$$

Sous des conditions plus fortes, l'hypothèse de stationnarité du système linéaire tangent peut être levée, en effet, considérons le système perturbé

$$\dot{x}(t) = A(t) \, x(t) + \sum_{k=1}^{m} B_k(t) \, x(t - \tau_k(t)) + r(t, x(t), x(t - h_1(t)), ..., x(t - h_p(t))), \tag{3.6}$$

où les retards $\tau_k(t)$ et $h_i(t)$ sont des fonctions continues, positives et bornées :

$$0 \leq \tau_k(t) \leq \tau \quad (k = 1, ..., m), \quad 0 \leq h_i(t) \leq \tau \quad (i = 1, ..., p),$$

et où r est une fonction continue arbitraire pour laquelle il existe deux réels $\varepsilon > 0$ et $\beta > 0$ tels que

$$| r(t, x(t), x(t - r_1(t)), ..., x(t - r_p(t))) | \leq \beta \, \| x_t \| \tag{3.7}$$

pour tout $t \geq t_0$ et toute fonction $x_t \in \mathbf{C}$ vérifiant $\| x_t \| < \varepsilon$.

Théorème 1.2. [Krasovskii (1963)] : *Si la solution nulle du système non perturbé*

$$\dot{x}(t) = A(t) \, x(t) + \sum_{k=1}^{m} B_k(t) \, x(t - \tau_k(t)) \tag{3.8}$$

est exponentiellement stable alors pour β *suffisamment petit, la solution nulle de* (3.6) *pour toute fonction* r *continue vérifiant l'inégalité* (3.7) *est asymptotiquement stable.*

1.2. Généralisation à la stabilité totale

On voit donc que, pour les systèmes linéaires, la propriété de stabilité asymptotique uniforme (équivalente alors à la stabilité exponentielle) pour un équilibre entraîne en plus d'une relative insensibilité vis-à-vis des conditions initiales (paramètre ε) une certaine tolérance envers des perturbations structurelles comme le terme r(t, ...) pour le système (3.1).

De façon plus générale, c'est-à-dire lorsque la fonction r n'est pas nécessairement nulle pour $x_t = 0$, cette propriété est appelée *stabilité totale* ([Hahn (1963)], [Yoshizawa (1966)]), ou encore *stabilité sous perturbations permanentes* ([Krasovskii (1963)]), et est définie pour les systèmes à retards comme suit : On considère l'équation

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau_1(t)), ..., x(t - \tau_m(t))), \tag{3.9}$$

où les retards $\tau_k(t)$ sont des fonctions continues, positives et majorées par τ. On suppose que f est continue, admet une condition de Lipschitz en toutes ses variables sauf la première, et que $f(t, 0, ..., 0) = 0$.
On associe à (3.9) le système perturbé :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - h_1(t)), ..., x(t - h_m(t))) \\ + r(t, x(t), x(t - r_1(t)), ..., x(t - r_m(t))), \tag{3.10}$$

où $0 \le h_i(t) \le \tau$, $0 \le r_i(t) \le \tau$, et r est une fonction continue de ses arguments non nécessairement nulle lorsque $x_t = 0$.

Définition 1.1. : La solution x = 0 du système (3.9) est dite *totalement stable* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des nombres positifs δ_0, η, et Δ tels que,
pour toute condition initiale φ vérifiant

$$\| \varphi \| < \delta_0, \tag{3.11}$$

pour toute fonction h_i telle que

$$| \tau_i(t) - h_i(t) | < \Delta \qquad (i = 1, ..., m), \tag{3.12}$$

pour toute fonction vectorielle r telle que

$$| x | < \varepsilon, \ | y_i | < \varepsilon \quad (i = 1, ..., m) \Rightarrow | r(t, x, y_1, ..., y_m) | < \eta, \tag{3.13}$$

et pour tout $t \ge t_0$,
la solution $x(t ; t_0, \varphi)$ de (3.10) vérifie l'inégalité

$$| x(t ; t_0, \varphi) | < \varepsilon. \tag{3.14}$$

On peut alors généraliser les deux théorèmes précédents :

Théorème 1.3. [Krasovskii (1963)] : *Si la solution nulle de* (3.9) *est uniformément asymptotiquement stable, alors elle est totalement stable.*

Remarque : Le théorème est encore valable si les perturbations sont bornées en moyenne, c'est-à-dire, s'il existe un réel T > 0, et deux fonctions ψ_1 et ψ_2 telles que les inégalités (3.12) et (3.13) sont remplacées par les inégalités

$$| r(t, x, y_1, ..., y_m) | < \psi_1(t) \text{ pour } | x | < \varepsilon, \ | y_i | < \varepsilon \quad (i = 1, ..., m),$$

et

$$\sup_{i = 1, ..., m} | \tau_i(t) - h_i(t) | < \psi_2(t),$$

avec $$\int_t^{t+T} \psi_1(s)\, ds < \eta, \qquad \int_t^{t+T} \psi_2(s)\, ds < \Delta, \qquad \forall\, t.$$

2. SECONDE MÉTHODE DE LYAPUNOV POUR LES SYSTÈMES À RETARDS

2.1. Validité et limitations de la méthode directe de Lyapunov

Si la méthode précédente permet bien souvent de conclure sur la stabilité d'un équilibre, elle n'apporte par contre aucune information pratique concernant les domaines de stabilité introduits au premier chapitre.

Dans le cadre des équations différentielles ordinaires, la seconde méthode de Lyapunov, appelée également méthode directe car elle ne nécessite pas la résolution des solutions, permet de combler cette lacune. La méthode des fonctions de Lyapunov peut être appliquée sans modification majeure aux systèmes à retards :

Par exemple, la solution nulle du système

$$\begin{cases} \dot{x}_1\ (t) = x_2(t) - x_1(t)\ x_2^2(t - \tau_1(t)) \\ \dot{x}_2\ (t) = -\ x_1(t) - x_2(t)\ x_1^2(t - \tau_2(t)) \qquad t \geq t_0,\ t_0 \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{3.15}$$

où les fonctions τ_i $(i = 1, 2)$ sont définies, continues par morceaux, positives et bornées pour $t \geq t_0$, est asymptotiquement stable. Pour le montrer, il suffit de considérer la fonction $v(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ qui, le long des solutions de (3.15), admet comme dérivée la fonction

$$\frac{dv}{dt} = -\ 2\ [x_1^2(t)\ x_2^2(t - \tau_1(t)) + x_2^2(t)\ x_1^2(t - \tau_2(t))] \leq 0.$$

Cependant cette méthode présente, dans le cas général, deux inconvénients majeurs : premièrement, on devra imposer des conditions sévères sur le système pour montrer que la dérivée de la fonction de Lyapunov calculée le long des trajectoires solutions est négative (en effet, cette dérivée n'est plus une fonction ordinaire, mais une fonctionnelle : elle dépend aussi de certaines valeurs passées de l'argument t, et deuxièmement, il n'existe pas de réciproque à ces résultats. Ce dernier point peut être illustré par l'exemple suivant : considérons le système décrit par l'équation

$$\dot{x}\ (t) = f(x(t), x(t - \tau)), \qquad (\tau > 0) \tag{3.16}$$

où f est une fonction lipschitzienne telle que $f(0, 0) = 0$. On suppose que la solution est uniformément asymptotiquement stable pour une valeur τ_0 du retard, et que comme cela est vrai pour les systèmes non retardés, il existe une fonction de la forme $v(t, x)$ permettant de conclure quant à la stabilité du système. Alors comme cette fonction v ne fait pas intervenir le retard τ, la stabilité serait assurée pour tout retard τ (il suffit pour le montrer de considérer la fonction $v(kt, x)$, où $k = \tau/\tau_0$). Autrement dit, la solution nulle du système (3.16) serait alors asymptotiquement stable i.o.d.

Ce résultat est évidemment faux, il suffit de considérer l'équation scalaire

$$\dot{x}\ (t) = -\ x(t - \tau),$$

qui n'est stable que si τ est compris entre 0 et $\pi/2$.

Une extension plus naturelle, proposée par Krasovskii (1963), consiste à remplacer les fonctions de Lyapunov par des fonctionnelles (c'est-à-dire à des fonctions définies sur **C**) ayant des propriétés semblables.

2.2. Méthode des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii

L'utilisation de fonctionnelles permet d'étendre aux systèmes à retards la plupart des résultats désormais classiques pour les équations différentielles ordinaires.
Pour cela, on considère le système d'équations différentielles

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau_1(t)), ..., x(t - \tau_m(t))), \qquad t \geq t_0 \qquad (3.18)$$

où $f : [t_0, \infty[\times \mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue et vérifie localement une condition de Lipschitz en toutes ses variables sauf la première.
On suppose de plus que $f(t, 0, ..., 0) = 0$ de telle sorte que $x = 0$ est une solution de (3.18). Dans tout ce chapitre, sauf indication du contraire, on se restreindra à l'étude de cette solution particulière.

Dans cette partie, on se servira des notations suivantes :
Etant donné $\alpha > 0$, $\mathbf{C}_\alpha$ représente l'ensemble des fonctions φ de **C** telles que $\| \varphi \| < \alpha$.
La fonction de Lyapunov v sera remplacée par une fonctionnelle scalaire $\mathcal{V}(t, \varphi)$ définie et continue sur $[t_0, \infty[\times \mathbf{C}_\alpha$, à laquelle est associée la dérivée de $\mathcal{V}$ le long des solutions de (3.18), notée $\dot{\mathcal{V}}(t\,;\, t_0, \varphi)$ et définie comme étant la dérivée supérieure à droite par rapport à t de la fonction $v(t) = \mathcal{V}(t, x_t(t_0, \varphi))$, où $x(t_0, \varphi)$ est la solution de (3.18) passant par φ à $t = t_0$, c'est-à-dire :

$$\dot{\mathcal{V}}(t\,;\, t_0, \varphi) = \lim_{\Delta t \to 0^+} \sup \frac{\mathcal{V}(t + \Delta t, x_{t+\Delta t}(t_0, \varphi)) - \mathcal{V}(t, x_t(t_0, \varphi))}{\Delta t} . \qquad (3.19)$$

Les hypothèses réalisées sur la fonction f garantissant l'unicité des solutions, cet opérateur sera remplacé de façon équivalente par l'opérateur plus simple à calculer

$$\dot{\mathcal{V}}(t, \varphi) = \lim_{\Delta t \to 0^+} \sup \frac{\mathcal{V}(t + \Delta t, x_{t+\Delta t}(t, \varphi)) - \mathcal{V}(t, \varphi)}{\Delta t} . \qquad (3.20)$$

Le premier théorème proposé concerne la stabilité simple et uniforme. La condition de stabilité simple est due à El'sgol'ts et Norkin (1973) tandis que le résultat sur la stabilité uniforme est tiré de [Hale (1977)].

Théorème 2.1. (Stabilité - Stabilité uniforme) : *S'il existe une fonctionnelle continue* $\mathcal{V}$ *possédant les deux propriétés suivantes :*

1. *il existe une fonction* $\omega_1 : [0, \alpha[\rightarrow \mathbb{R}_+$ *continue et définie positive* ($\omega_1(0) = 0$ *et* $\omega_1(\xi) > 0$ *pour* $\xi \neq 0$) *telle que*
$$\mathcal{V}(t, \varphi) \geq \omega_1(\| \varphi \|), \qquad \forall \varphi \in \mathbf{C}_\alpha \tag{3.21}$$
2. $\dot{\mathcal{V}}(t, \varphi) \leq 0, \forall t \geq t_0, \forall \varphi \in \mathbf{C}_\alpha$,

alors, la solution $x = 0$ *de* (3.18) *est stable.*
Si, de plus, il existe une fonction ω_2 *continue et définie positive sur* $[0, \alpha[$ *telle que*
$$\omega_2(| \varphi(0) |) \geq \mathcal{V}(t, \varphi), \quad \forall t \geq t_0, \forall \varphi \in \mathbf{C}_\alpha, \tag{3.22}$$
alors la stabilité de la solution nulle est uniforme.

Ce résultat admet une réciproque [Halanay (1966)]:

Théorème 2.2. (Réciproque du Th. 2.1.) : *Si la solution nulle de* (3.18) *est uniformément stable, alors il existe une fonctionnelle* $\mathcal{V}(t, \varphi)$ *continue à laquelle on peut associer deux fonctions scalaires définies positives* ω_1, ω_2 *telles que*
$$\omega_1(\| \varphi \|) \leq \mathcal{V}(t, \varphi) \leq \omega_2(\| \varphi \|), \tag{3.23}$$
et telle que sa dérivée $\dot{\mathcal{V}}(t, \varphi)$ *calculée comme en* (3.20) *est négative.*

Un des résultats de base concernant la stabilité asymptotique, dû à Krasovskii (1963), est le suivant :

Théorème 2.3. (Stabilité asymptotique uniforme) : *Si l'on peut associer à l'équation* (3.18) *une fonctionnelle continue* $\mathcal{V}(t, \varphi)$ *telle qu'il existe trois fonctions* ω_1, ω_2, et ω *définies positives sur* $[0, \alpha[$ *vérifiant pour tout* $\varphi \in \mathbf{C}_\alpha$ *et tout* t :
$$\omega_1(\| \varphi \|) \leq \mathcal{V}(t, \varphi) \leq \omega_2(\| \varphi \|), \tag{3.24}$$
et
$$\dot{\mathcal{V}}(t, \varphi) \leq - \omega(\| \varphi \|), \tag{3.25}$$
alors la solution nulle de (3.18) *est uniformément asymptotiquement stable. Si, de plus, il existe deux réels* α_0 *et* α_1 ($\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha$) *tels que la condition*
$$\inf_{t \geq t_0} [\mathcal{V}(t, \varphi) : \| \varphi \| = \alpha_1] > \sup_{t \geq t_0} [\mathcal{V}(t, \varphi) : \| \varphi \| = \alpha_0] \tag{3.26}$$
est vérifiée, alors la région $\mathbf{C}_{\alpha_0}$ *est située dans le domaine d'attraction du point* $x = 0$.

Ce théorème est très important théoriquement car il admet une réciproque [Krasovskii (1963)].

Théorème 2.4. (Réciproque du Th. 2.3.) : *Si la solution nulle de* (3.18) *est uniformément asymptotiquement stable, alors il existe une fonctionnelle* $\mathcal{V}(t, \varphi)$ *vérifiant les conditions* (3.24) et (3.25) *et vérifiant une condition de Lipschitz en* φ.

Ce critère de stabilité est cependant difficile à mettre en oeuvre, car en pratique on obtient souvent des majorations de $\dot{\mathcal{V}}(t, \varphi)$ dépendant de $|\varphi(0)|$ ou de $\| \varphi \|_2 = [\int_{-\tau}^{0} |\varphi(s)|^2 \, ds]^{1/2}$.
De plus, pour certains systèmes fortement non stationnaires, il s'avère souvent indispensable de pouvoir considérer des majorations de la dérivée $\dot{\mathcal{V}}(t, \varphi)$ dépendant explicitement du temps, ce qui n'est pas le cas dans (3.25).
Les résultats suivants permettent de prendre en compte ces contraintes.

Théorème 2.5. (Variantes du Th. 2.3.) : *Soit* $\mathcal{V}$: $[t_0, \infty[\times C_\alpha \to \mathbb{R}_+$ *une fonctionnelle continue et on suppose qu'il existe des fonctions* $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ et ω : $[0, \alpha[\to \mathbb{R}_+$ *continues, définie positives et strictement croissantes.*

(i) *Si l'une des conditions*

(a) $\omega_1(| \varphi(0) |) \le \mathcal{V}(t, \varphi) \le \omega_2(\| \varphi \|)$ et $\dot{\mathcal{V}}(t, \varphi) \le -\omega(| \varphi(0) |)$, ou

(b) $\omega_1(| \varphi(0) |) \le \mathcal{V}(t, \varphi) \le \omega_2(| \varphi(0) |) + \omega_3(\| \varphi \|_2)$ et $\dot{\mathcal{V}}(t, \varphi) \le -\omega(| \varphi(0) |)$,

est vérifiée pour tout $t \ge t_0$ *et tout* $\varphi \in C_\alpha$, *alors la solution nulle de* (3.18) *est uniformément asymptotiquement stable.*

(ii) *Soit* η : $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *une fonction mesurable telle que* $\int_0^\infty \eta(s) \, ds = \infty$.

Si l'une des conditions suivantes

(c) $\omega_1(| \varphi(0) |) \le \mathcal{V}(t, \varphi) \le \omega_2(| \varphi(0) |) + \omega_3(\| \varphi \|_2)$ et

$\dot{\mathcal{V}}(t, \varphi) \le -\eta(t)\, \omega(\| \varphi \|_2)$,

(d) $\omega_1(| \varphi(0) |) \le \mathcal{V}(t, \varphi) \le \omega_2(| \varphi(0) |) + \omega_3(\| \varphi \|_2)$ *et*

$\dot{\mathcal{V}}(t, \varphi) \le -\eta(t)\, \omega(\| \varphi \|_2)$, *où* η *est une fonction monotone,*

est vérifiée pour tout $t \ge t_0$ *et tout* $\varphi \in C_{\alpha_0}$ *(avec* $0 < \alpha_0 < \alpha$), *alors la solution nulle de* (3.18) *est asymptotiquement stable.*

Krasovskii (1963) a montré sous les conditions (a) et (b) la stabilité asymptotique. Ces résultats ont été améliorés par Yoshizawa (1966) et Burton (1978), qui, sous les mêmes hypothèses, ont montré la stabilité asymptotique uniforme. Les conditions (c) et (d) sont tirées de [Burton et Hatvani (1990)].

Il est intéressant de noter que la condition (d) lorsque τ tend vers zéro se réduit à la condition $\dot{\mathcal{V}}(t, \varphi) \leq 0$: cette condition ne peut donc pas prouver la stabilité asymptotique d'un système d'équations différentielles ordinaires.

Le résultat suivant donne une condition suffisante d'instabilité :

Théorème 2.6. [Hale (1977)] : *Soit $\mathcal{V}(\varphi)$ une fonction scalaire, continue et bornée sur* **C**. *S'il existe un réel $\gamma > 0$, des fonctions $u(\xi)$ et $w(\xi)$, continues, strictement croissantes et positives pour $\xi > 0$, et un ouvert* **U** *de* **C** *tels que*

(i) $\mathcal{V}(\varphi) > 0$ *sur* **U**, $\mathcal{V}(\varphi) = 0$ *sur la frontière de* **U**,

(ii) 0 *appartient à l'adhérence de* $\mathbf{U} \cap \mathbf{C}_\gamma$,

(iii) $\mathcal{V}(\varphi) \leq u(|\varphi(0)|)$ *sur* $\mathbf{U} \cap \mathbf{C}_\gamma$,

(iv) $\dot{\mathcal{V}}^*(t, \varphi) \geq w(|\varphi(0)|)$ *sur* $[0, \infty[\times \mathbf{U} \cap \mathbf{C}_\gamma$, *avec*

$$\dot{\mathcal{V}}^*(t, \varphi) = \lim_{h \to 0^+} \inf \frac{1}{h} [\mathcal{V}(x_{t+h}(t, \varphi)) - \mathcal{V}(\varphi)],$$

alors la solution $x = 0$ *du système* (3.18) *est instable. Plus précisément, chaque solution* $x_t(t_0, \varphi)$ *de condition initiale* φ *dans* $\mathbf{U} \cap \mathbf{C}_\gamma$ *à* $t = t_0$ *atteint la frontière de* $\mathbf{C}_\gamma$ *en un temps fini.*

L'utilisation pratique de ces résultats est liée à la possibilité de trouver assez facilement une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii vérifiant les hypothèses d'un des énoncés précédents. Cela est rarement le cas. Une autre possibilité est d'utiliser les fonctions de Lyapunov qui restent relativement simple à utiliser. Cette méthode a été développée par Razumikhin (1956).

2.3. Méthode des fonctions de Lyapunov-Razumikhin

Si $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une fonction définie positive, continûment dérivable, alors la dérivée de v le long des trajectoires de (3.18) est donnée par

$$\dot{v}(x(t)) = \frac{\partial v}{\partial t}(x(t))\, f(t, x(t), x(t - \tau_1(t)), \ldots, x(t - \tau_m(t))).$$

Pour étudier le signe de $\dot{v}$ sans déterminer la solution, on peut considérer que les différentes variables $x(t), x(t - \tau_1(t)), \ldots, x(t - \tau_m(t))$ sont indépendantes. La stabilité de l'équilibre est alors démontrée de cette façon au prix de conditions sévéres sur la fonction f. Une autre manière de procéder, proposée par Razumikhin (1956) et (1960), est de remarquer que la condition de négativité de $\dot{v}$ ne se révèle pas indispensable pour toutes les solutions. En fait, si une solution de (3.18) part d'une boule et la quitte à un instant t, alors la fonction x_t vérifie $\| x_t \| = | x(t) |$, c'est-à-dire $| x(t + s) | \leq | x(t) |$ pour tout

$s \in [-\tau, 0]$. Il suffit donc de ne considérer que les fonctions vérifiant cette dernière propriété puisque ce sont celles qui peuvent correspondre à une éventuelle divergence. C'est l'idée de base exploitée dans cette section.

Soit $v : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. La dérivée de $v(t, x)$ le long des solutions de (3.18) est définie par

$$\dot{v}(t, \varphi) = \lim_{\Delta t \to 0^+} \sup \frac{1}{\Delta t} [v(t + \Delta t, x(t + \Delta t, t, \varphi)) - v(t, \varphi(0))],$$

où $x(t, \varphi)$ est la solution de (3.18) passant par φ à l'instant initial t dont la valeur à l'instant s est notée $x(s, t, \varphi)$.

Théorème 2.7. [Razumikhin (1956)] : *Soient* $\omega_1, \omega_2, \omega : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ *des fonctions continues, croissantes,* $\omega_1(\xi)$ *et* $\omega_2(\xi)$ *étant strictement positives pour* $\xi > 0$, $\omega_1(0) = \omega_2(0) = 0$. *S'il existe une fonction continue* $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ *telle que*

$$\omega_1(| x |) \leq v(t, x) \leq \omega_2(| x |), \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.27}$$

et

$$\dot{v}(t, \varphi) \leq - \omega(| \varphi(0) |)$$

pour toutes les fonctions φ *vérifiant*

$$v(t + s, \varphi(s)) \leq v(t, \varphi(0)), \ \forall\, s \in [-\tau, 0], \tag{3.28}$$

alors la solution $x = 0$ *de* (3.18) *est uniformément stable.*

Théorème 2.8. [Krasovskii (1956)] : *On suppose que toutes les hypothèses du Th.* 2.7 *sont remplies et que, de plus,* $\omega(\xi) > 0$ *si* $\xi > 0$. *S'il existe une fonction* p *continue, strictement croissante telle que* $p(\xi) > \xi$ *pour* $\xi > 0$ *et l'inégalité*

$$\dot{v}(t, \varphi) \leq - \omega(| \varphi(0) |) \tag{3.29}$$

est respectée pour toutes les fonctions φ *vérifiant*

$$v(t + s, \varphi(s)) \leq p(v(t, \varphi(0))), \quad \forall\, s \in [-\tau, 0], \tag{3.30}$$

alors la solution $x = 0$ *de* (3.18) *est uniformément asymptotiquement stable.*
Si, de plus, il existe des nombres α_0, α_1 $(\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha)$ *tels que*

$$\inf \{v(t, x) : | x | = \alpha_1\} > \sup \{v(t, x) : | x | \leq \alpha_0\} \tag{3.31}$$

alors l'ensemble C_{α_0} *est inclus dans le domaine d'attraction de la solution* $x = 0$.
Si $\omega_1(s)$ *est non bornée, alors la solution* $x = 0$ *est un attracteur global de* (3.18).

Remarques : L'hypothèse sur p ne peut être supprimée [Mikolajska (1969)].
La classe minimale de fonctions pour laquelle la dérivée de v doit vérifier l'inégalité (3.29) peut être définie autrement que par la relation (3.30), par exemple Xu et Liu (1994) proposent l'ensemble des fonctions φ pour lesquelles il existe un réel $q > 1$ tel que

$$| \varphi(s) | \leq q \, | \varphi(0) |, \qquad \forall\, s \in [-\tau, 0].$$

Les auteurs ont montré que cette formulation du théorème 4.18 permet de réduire le conservatisme lié au choix de la représentation du vecteur x. On trouvera également dans [Razumikhin (1960)] la définition d'autres classes minimales de fonctions.

2.4. Extensions du principe de LaSalle

Le principe d'invariance de LaSalle [LaSalle (1960)] est une extension de la théorie des fonctions de Lyapunov permettant d'étudier le comportement limite des solutions d'un système d'équations différentielles ordinaires. Ce principe a été étendu aux cas des systèmes à retards stationnaires de deux façons différentes : la première utilise la théorie des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii [Hale (1965)], la seconde est basée sur la méthode des fonctions de Lyapunov-Razumikhin [Haddock et Terjéki (1983)]. Nous proposons ici un rapide survol de ces résultats.

On considère ici des systèmes stationnaires de la forme

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-\tau_1), ..., x(t-\tau_m)), \qquad t \geq t_0 \tag{3.32}$$

où $f : \mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est continue et telle que les solutions de (3.32) dépendent continûment des conditions initiales. On note $x(\varphi)$ la solution de (3.32) passant par φ à $t = 0$.

2.4.1. Principe d'invariance via les fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii

Si $\mathcal{V} : \mathbf{C} \to \mathbb{R}$ est une fonctionnelle continue, on définit la dérivée de $\mathcal{V}$ le long des trajectoires de (3.32) comme précédemment, c'est-à-dire,

$$\dot{\mathcal{V}}(\varphi) = \lim_{\Delta t \to 0^+} \sup \frac{1}{\Delta t} [\mathcal{V}(x_{\Delta t}(\varphi)) - \mathcal{V}(\varphi)]. \tag{3.33}$$

Avant de donner les principaux résultats, nous introduisons les notions de domaine invariant et de fonction de Lyapunov (au sens général).

Définition 2.1. Un ensemble $\mathbf{M} \subset \mathbf{C}$ est dit *positivement invariant* (par rapport à (3.32)) si, pour toute fonction φ de $\mathbf{M}$, la solution $x(\varphi)$ est définie sur $[-\tau, +\infty[$, et vérifie $x_t(\varphi) \in \mathbf{M}$, $\forall\, t \geq 0$.

Un ensemble $\mathbf{M}$ est dit *invariant* si, pour tout φ dans $\mathbf{M}$, il existe une fonction $x^*(t, \varphi)$ définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

(i) $x_0^* = \varphi$,

(ii) $x_t^* \in \mathbf{M}$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$

(iii) $\forall\, s \in \mathbb{R}$, la solution $x(s, x_s^*)$ de (3.32) vérifie $x_t(s, x_s^*) = x_t^*$, $\forall\, t \geq s$.

Définition 2.2. On dira que $\mathcal{V}: \mathbf{C} \to \mathbb{R}$ est une fonctionnelle de Lyapunov sur un sous-ensemble **G** de **C** relativement à l'équation (3.32) si $\mathcal{V}$ est continue sur $\bar{\mathbf{G}}$, l'adhérence de **G**, et $\dot{\mathcal{V}}(\varphi) \leq 0$.

On associe à la fonctionnelle $\mathcal{V}$ et à l'ensemble **G** les trois sous-ensembles suivants :

$\mathbf{S} = \{\varphi \in \bar{\mathbf{G}} : \dot{\mathcal{V}}(\varphi) = 0\}$,
M = le plus grand ensemble inclus dans **S** invariant par rapport à (3.32),
$\mathbf{U}_\delta = \{\varphi \in \mathbf{C} : \mathcal{V}(\varphi) < \delta\}, \delta > 0$.

Le théorème suivant dû à Hale (1965) constitue une généralisation du principe d'invariance de LaSalle.

Théorème 2.8. (Principe d'invariance) : *Si* $\mathcal{V}$ *est une fonctionnelle de Lyapunov sur* **G** *et* $x_t(\varphi)$ *est une solution bornée de* (3.32) *qui reste dans* **G**, *alors* $x_t(\varphi)$ *converge asymptotiquement vers* **M**.

Le théorème 2.9. énoncé ci-dessous est une version plus pratique de ce résultat.

Théorème 2.9. [Hale (1977)] : *Si* V *est une fonctionnelle de Lyapunov sur* $\mathbf{U}_\delta$ *et s'il existe une constante* $K = K(\delta)$ *telle que la condition* $(\varphi \in \mathbf{U}_\delta)$ *implique l'inégalité* $|\varphi(0)| < K$, *alors toute solution* $x_t(\varphi)$ *de* (3.32) *avec* φ *appartenant à* $\mathbf{U}_\delta$ *converge asymptotiquement vers* **M**.

L'utilisation du principe d'invariance permet de retrouver (dans le cadre restrictif des équations stationnaires) certaines conditions suffisantes de stabilité obtenues initialement par Krasovskii et énoncées dans la section 2.1 de ce chapitre.

Corollaire 2.1. *Supposons que* $\mathcal{V}: \mathbf{C} \to \mathbb{R}$ *est continue et qu'il existe des fonctions positives* $a(\xi)$ *et* $b(\xi)$ *telles que* $a(\xi) \to \infty$ *lorsque* $\xi \to \infty$,

$$a(|\varphi(0)|) \leq \mathcal{V}(\varphi), \quad \text{et} \quad \dot{\mathcal{V}}(\varphi) \leq -b(|\varphi(0)|). \tag{3.34}$$

Alors la solution $x = 0$ *de l'équation* (3.32) *est stable et toute solution est bornée. Si, de plus,* $b(\xi)$ *est définie positive, alors toute solution converge asymptotiquement vers l'origine.*

De même, on peut déduire du Th. 2.8. une condition suffisante d'instabilité généralisant le théorème de Chetaev.

Théorème 2.10. *Supposons que zéro (la fonction nulle) appartient à l'adhérence d'un ouvert* **U** *de* **C**, *que* **N** *est un voisinage ouvert de zéro dans* **C**, *et que*

(i) $\mathcal{V}$ *est une fonctionnelle de Lyapunov sur* $\mathbf{G} = \mathbf{N} \cap \mathbf{U}$.

(ii) $\mathbf{M} \cap \mathbf{G}$ *est soit vide, soit réduit au singleton zéro.*

(iii) $\mathcal{V}(\varphi) < \eta$ *sur* **G** *lorsque* $\varphi \neq 0$.

(iv) $\mathcal{V}(0) = \eta$ *et* $\mathcal{V}(\varphi) = \eta$ *lorsque* $\varphi \in \partial\mathbf{G} \cap \mathbf{N}$.

Si $\mathbf{N_0}$ *est un voisinage borné de zéro strictement inclus dans* **N**, *alors* $\varphi \neq 0$ *dans* $\mathbf{G} \cap \mathbf{N_0}$ *implique l'existence d'un* t_1 *tel que* $x_{t_1}(\varphi) \in \partial\mathbf{N_0}$.

2.4.2. Principe d'invariance via les fonctions de Lyapunov-Razumikhin

Dans cette partie, v représente une fonction continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ dont la dérivée le long des solutions de (3.32) est définie par :

$$\dot{v}(\varphi) = \limsup_{\Delta t \to 0^+} \frac{1}{\Delta t} \left[v(x(\Delta t, \varphi)) - v(\varphi(0))\right], \qquad (3.35)$$

où $x(t, \varphi)$ représente la valeur à l'instant t de la solution de (3.32) de condition initiale φ à l'instant initial $t_0 = 0$.

Les résultats présentés ci-dessous sont extraits de [Haddock et Terjéki (1983)].

La fonction v sera dite fonction candidate de Lyapunov-Razumikhin si toutes ses dérivées partielles au premier ordre existent et sont continues.
On peut noter que dans ce cas, la dérivée de v le long des solutions est donnée plus simplement par la formule

$$\dot{v}(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} (\varphi(0))\, f_i(\varphi(0), \varphi(-\tau_1), ..., \varphi(-\tau_m)), \qquad (3.36)$$

où f_i est la i^e composante de la fonction f.

Soit v une fonction candidate de Lyapunov-Razumikhin. Pour un ensemble $\mathbf{G} \subset \mathbf{C}$, on définit les deux sous-ensembles $\mathbf{S}'$ et $\mathbf{M}'$ de la manière suivante :

$$\mathbf{S}' = \{\varphi \in \mathbf{G} : \max_{-\tau \le s \le 0} v(x(t+s, \varphi)) = \max_{-\tau \le s \le 0} v(\varphi(s)),\ \forall\, t \ge 0\},$$

$\mathbf{M}'$ = le plus grand ensemble invariant par rapport à (3.32) contenu dans $\mathbf{S}'$.

A l'aide de ces hypothèses, on peut énoncer un nouveau principe d'invariance.

Théorème 2.11. [Haddock et Terjéki (1983)] : *Supposons qu'il existe une fonction candidate de Lyapunov-Razumikhin* v *et un ensemble fermé* **G** *positivement invariant par rapport à* (3.32) *tels que*

$$\dot{v}(\varphi) \le 0 \tag{3.37}$$

pour tout $\varphi \in$ **G** *vérifiant*

$$v(\varphi(0)) = \max_{-\tau \le s \le 0} v(\varphi(s)), \tag{3.38}$$

alors, pour toute fonction φ *de* **G** *telle que la solution* $x(\varphi)$ *est définie et bornée sur* $[-\tau, \infty[$, *la fonction* $x_t(\varphi)$ *converge vers* **M´** *lorsque* t *devient infiniment grand.*

Ce théorème est en général assez peu pratique car les ensembles **S´** et **M´** sont relativement difficiles à déterminer. Cependant, on peut déduire de ce théorème une condition de stabilité asymptotique pour les systèmes stationnaires.

Corollaire 2.2. *On suppose que la fonction* f *vérifie* $f(0) = 0$ *et qu'il existe une fonction candidate de Lyapunov-Razumikhin* $v(x)$ *vérifiant, pour une constante* $\alpha > 0$, *les conditions suivantes* :

(i) $v(0) = 0$ *et* $v(x) > 0$ *pour tout* x *tel que* $0 < | x | < \alpha$,

(ii) $\dot{v}(0) = 0$, *et*

(iii) $\dot{v}(\varphi) < 0$ *pour tout* φ *vérifiant* $0 < \| \varphi \| < \alpha$ *et* $\max_{-\tau \le s \le 0} v(\varphi(s)) = v(\varphi(0))$.

Alors la solution $x = 0$ *du système* (3.32) *est asymptotiquement stable.*

Remarque : Les hypothèses de ce résultat sont moins restrictive que celles du théorème 2.8., mais Mikolajska a montré par un contre-exemple que ce corollaire 2.2 n'est pas valable dans le cas d'un système non stationnaire [Mikolajska (1969)].

3. MÉTHODES FRÉQUENTIELLES

On considère le système d'équation

$$\dot{x}(t) = A\, x(t) + \sum_{i=1}^{m} B_i\, x(t - \tau_i) + Q_0\, f(v(t)), \tag{3.39}$$

où $v(t) = C_0\, x(t) + \sum_{i=1}^{m} C_i\, x(t - \tau_i)$.

A et B sont des matrices $n \times n$, Q_0 une matrice $n \times p$, C_0 et C_i des matrices $p \times n$. La fonction f de bouclage est supposée de la forme

$$f(v) = [\varphi_1(v_1), \ldots, \varphi_p(v_p)]^T,$$

où les fonctions φ_i vérifient

$$0 \leq \frac{\varphi_i(v_i)}{v_i} \leq k_i, \qquad i = 1, ..., p.$$

Le cas dit *fondamental* est celui où le système non bouclé

$$\dot{x}(t) = A\, x(t) + \sum_{i=1}^{m} B_i\, x(t - \tau_i)$$

est asymptotiquement stable.

On notera dans la suite $C(\sigma) = C_0 + \sum_{i=1}^{m} C_i\, e^{-\sigma\tau_i}$ et $B(\sigma) = \sum_{i=1}^{m} B_i\, e^{-\sigma\tau_i}$.

Une condition suffisante de stabilité asymptotique peut alors être donnée dans le domaine fréquentiel [Halanay (1973)]

Théorème 3.1. [Popov et Halanay (1962)] : *Considérons le système* (3.39) *dans le cas fondamental. Supposons qu'il existe une matrice diagonale* P *à éléments strictement positifs et une matrice* Q *telles que la matrice*

$$G(j\omega) + G^T(-j\omega)$$

est définie positive pour tout ω *réel, la matrice* $G(\sigma)$ *étant définie par*

$$G(\sigma) = PK^{-1} + (P + \sigma\, Q)\, C(\sigma)\, (A + B(\sigma) - \sigma\, I_n)^{-1}\, Q_0,$$

et

$$K = \mathrm{diag}(k_1, ..., k_m).$$

Alors la solution nulle du système (3.39) *est asymptotiquement stable.*

Lorsque certaines des valeurs k_i sont infinies, le théorème peut encore s'appliquer, mais les éléments correspondants de Q doivent être strictement positifs, et ceux qui leur correspondent dans K^{-1} doivent être nuls.

4. Fonctions vectorielles de Lyapunov et principes de comparaison

Même dans le cas des systèmes non retardés, l'application directe de la seconde méthode de Lyapunov à l'analyse de la stabilité des systèmes de grande dimension se révèle très souvent difficile. Une solution proposée simultanément par Bellman et Matrosov consiste alors à généraliser la méthode de Lyapunov en utilisant des fonctions de Lyapunov vectorielles, l'étude du système initial est alors ramenée à celle d'un système associé de dimension plus faible et de complexité moindre dit de comparaison si sa stabilité implique celle du système initial ([Bellman (1962)], [Matrosov (1962)]). Cet outil se révéle souvent efficace pour l'étude de la stabilité d'un système de grande dimension car la structure du système étudié peut être un facteur important dans le choix des composantes

d'une fonction de Lyapunov vectorielle, en effet, la décomposition du système initial en sous-système permet de fractionner le problème global en sous-problèmes plus simples à traiter. Cette approche initialement appliquée par Bailey (1966) pour les systèmes classiques a été étendue à de nombreuses autres classes de modèles par Michel et Miller (1977).
Les principes de comparaison sont le plus souvent tirés de la théorie des inégalités différentielles ; les plus connus proviennent des travaux de Wazewski (1950), de Matrosov (1968 et 1969) ou de Borne et Gentina (voir [Grujić, Gentina et Borne (1976)]).

Ces méthodes de comparaison ont été étendues aux cas des systèmes à retards. Les premiers résultats obtenus considèrent des systèmes de comparaison scalaires ([Driver (1962)], [Lakshmikantham et Leela (1969)] ; par exemple, le résultat suivant dû à Halanay (1966) est intéressant pour l'analyse de la stabilité exponentielle d'un système.

Théorème 4.1. [Halanay (1966)] : *Si* $f : [t_0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ *est une fonction continue vérifiant l'inégalité*

$$\dot{f}(t) \leq -\alpha\, f(t) + \beta \left[\sup_{t-\tau \leq s \leq t} f(s) \right] \qquad \textit{pour } t \geq t_0 \qquad (3.40)$$

et si $\alpha > \beta > 0$, *alors il existe deux nombres* γ *et* k, *strictement positifs, tels que*

$$f(t) < k\, e^{-\gamma t} \qquad \textit{pour } t > t_0.$$

Un des premiers résultats utilisant la notion de système de comparaison vectoriel pour les systèmes à retards est énoncé dans [Tokumaru *et al.* (1975)]. Le principe de comparaison donné permet de généraliser le théorème précédent.

Théorème 4.2. [Tokumaru *et al.* (1975)] : *Soit* $u : [t_0 - \tau, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^k$ *une fonction continue vérifiant l'inégalité différentielle*

$$\dot{u}(t) \leq g(t, u(t), \overline{u}(t)), \qquad t \geq t_0, \qquad (3.41)$$

où

$$\overline{u}(t) = \left[\sup_{-\tau \leq s \leq 0} u_1(t+s), \ldots, \sup_{-\tau \leq s \leq 0} u_k(t+s) \right]^T,$$

et soit $z(t)$ *une solution de l'équation différentielle*

$$\dot{z}(t) = g(t, z(t), \overline{z}(t)). \qquad (3.42)$$

On suppose les conditions suivantes satisfaites :

(i) *la fonction* $g(t, x, y)$ *est définie, continue sur* $[t_0, \infty[\times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$, *croissante en* y, *c'est-à-dire* :

$$g(t, x, y^1) \leq g(t, x, y^2) \tag{3.43}$$

pour tout x, y^1, y^2 *dans* $\mathbb{R}^k$ *tels que*

$$y^1 \leq y^2,$$

et quasi-monotone croissante en x, *c'est-à-dire telle que :*

$$g_i(t, x^1, y) \leq g_i(t, x^2, y) \qquad \forall\ i = 1, \dots, k \tag{3.44}$$

pour tout x^1, x^2, y *dans* $\mathbb{R}^k$ *tels que*

$$x_i^1 = x_i^2 \quad et \quad x^1 \leq x^2.$$

(ii) *La solution de l'équation différentielle*

$$\dot{y}(t) = g(t, y(t), \overline{y}(t)) + \varepsilon \tag{3.45}$$

existe et est unique pour toute fonction initiale continue y_{t_0} *et pour tout* ε *suffisamment petit.*

Alors, pour tout $t \geq t_0$, *l'inégalité*

$$u(t) \leq z(t) \tag{3.46}$$

est vérifiée si les conditions initiales vérifient la même propriété :

$$u(t_0 + s) \leq z(t_0 + s) \quad pour\ tout\ s \in [-\tau, 0]. \tag{3.47}$$

Dans cette énoncé, ainsi que dans tout le reste de ce mémoire, l'inégalité $A \leq B$, où $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont deux matrices de mêmes dimensions, est équivalente par définition à l'ensemble des inégalités $a_{ij} \leq b_{ij}$.

La technique des fonctions vectorielles de Lyapunov a été développée pour les systèmes à retards par Gromova et Markos (1979) et par Karatueva et Matrosov (1985). Dans cette dernière étude, s'inspirant des travaux de Razumikhin, les auteurs ont obtenu un système de comparaison décrit par un système d'équations différentielles ordinaires. Cette méthode est décrite ci-dessous.

On considère le système

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau_1(t)), \dots, x(t - \tau_m(t))), \qquad t \geq t_0 \tag{3.48}$$

où $f : [t_0, \infty[\times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonctionnelle continue, vérifiant une condition de Lipschitz en toutes ses variables excepté la première.

Soit $V = [V_1, V_2, \dots, V_k]^T \in C([t_0, \infty[\times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+^k]$. On suppose que la dérivée de V le long des solutions de (3.48) vérifie l'inégalité différentielle

$$\dot{V}(t, \varphi) \leq g(t, V(t, \varphi(0))), \quad t \geq t_0,$$

pour toute fonction φ appartenant à un des ensembles $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2$ définis par :

$\Omega_0 = \{\varphi \in \mathbf{C} : V(t + s, \varphi(s)) \leq V(t, \varphi(0)), \forall\ s \in [-\tau, 0], t \geq t_0\}$

$$\Omega_1 = \{\varphi \in \mathbf{C} : \sum_{i=1}^{k} V_i(t+s, \varphi(s)) < h\,(\sum_{i=1}^{k} V_i(t, \varphi(0))),\ \forall\, s \in [-\tau, 0],\ t \geq t_0\} \quad (3.49)$$

$$\Omega_2 = \{\varphi \in \mathbf{C} : V_i(t+s, \varphi(s)) < h_i\,(V_i(t, \varphi(0))),\ i = 1, ..., k,\ t \geq t_0\},$$

où les fonctions h et h_i sont continues, croissantes sur $\mathbb{R}_+$, vérifiant $h(u) > u$ ou $h_i(u) > u$.

La solution maximale de l'équation

$$\dot{u}(t) = g(t, u) \quad (3.50)$$

passant par u_0 à t_0 sera notée $\bar{u}(t, t_0, u_0)$.

Théorème 4.3. [Karatueva et Matrosov (1985)] : *On suppose que* g *est une fonction continue, quasi-monotone croissante, c'est-à-dire vérifiant la propriété*

$$u_i = \bar{u}_i,\ u_j \leq \bar{u}_j\ (\forall\, j \neq i) \Rightarrow g_i(t, u) \leq g_i(t, \bar{u}),\ \forall\, i = 1, ..., k.$$

Alors, pour toute fonction $\varphi \in \mathbf{C}$ *et tout scalaire* u_0 *tels que*

$$V(t_0, \varphi(s)) \leq u_0 \qquad \forall\, s \in [-\tau, 0], \quad (3.51)$$

la solution $x(t_0, \varphi)$ *de* (3.48) *vérifie l'inégalité*

$$V(t, x_t(t_0, \varphi)(t)) \leq \bar{u}(t, t_0, u_0), \quad (3.52)$$

sur le domaine commun d'existence de $x(t, t_0, \varphi)$ *et de* $\bar{u}(t, t_0, u_0)$.

Un point commun aux méthodes exposées ci-dessus est qu'elles exigent une estimation de $\dot{V}(t, x_t)$ ne dépendant pas explicitement de la fonction x_t. En pratique, pour obtenir une telle estimation, on est souvent amené à réaliser des majorations supplémentaires, ce qui peut mener à des conditions de stabilité très restrictives. La méthode que nous proposons dans la section suivante est basée sur la méthode des normes vectorielles développées par Borne et Gentina pour les systèmes non linéaires en temps discret ou continu ([Borne (1976), Gentina (1976)]. Elle repose sur un lemme de comparaison qui autorise des estimations de l'expression $\dot{V}(t, x_t)$ dépendantes de la fonction d'état x_t.

5. MÉTHODE DES NORMES VECTORIELLES

La notion de normes vectorielles a été introduite dans le domaine de l'analyse numérique par Robert dans ses travaux sur l'étude de la convergence des récurrences linéaires [Robert (1964)]. Cet outil a également été employé dans l'analyse de la stabilité des systèmes non linéaires de grandes dimensions que ce soit pour des systèmes à temps discret [Borne (1976)] ou des systèmes à temps continu [Gentina (1976)]. Cette application particulière des normes vectorielles se révèle tout à fait intéressante puisqu'elle permet une construction systématique de systèmes de comparaison de dimension arbitraire. Les travaux présentés dans cette section proposent une extension aux systèmes à retards de cette méthode.

5.1. Définition des normes vectorielles

Définitions 5.1. : Une application $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+^k$ est une *norme vectorielle d'ordre* k si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & \forall \lambda \in \mathbb{R},\ V(\lambda x) = |\lambda|\, V(x). \\ \text{(ii)} & \forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ V(x+y) \le V(x) + V(y). \\ \text{(iii)} & V(x) = 0 \Rightarrow x = 0. \end{array} \tag{3.53}$$

On peut remarquer que si V est une norme vectorielle alors chacune de ses composantes est une semi-norme sur $\mathbb{R}^n$.

La norme vectorielle V est dite *surjective* si, pour tout vecteur $z \in \mathbb{R}_+^k$, il existe au moins un vecteur x de $\mathbb{R}^n$ tel que $V(x) = z$.
On définit maintenant une classe particulière de normes vectorielles surjectives dont nous nous servirons par la suite.
Soient e_i les vecteurs de $\mathbb{R}^k$ de composantes toutes nulles excepté la i^e égale à l'unité :

$$e_1 = [1, 0, ..., 0]^T \ ; \ e_2 = [0, 1, 0, ..., 0]^T, ..., e_k = [0, ..., 0, 1]^T.$$

On note $V^{-1}(\{e_i\})$ l'ensemble des vecteurs x de $\mathbb{R}^n$ tels que $V(x) = e_i$, et E_i = Vect $(V^{-1}(\{e_i\}))$, l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs appartenant à $V^{-1}(\{e_i\})$.
La norme vectorielle V est dite ***régulière*** si les espaces E_i sont disjoints deux à deux et forment une partition de $\mathbb{R}^n$, on a alors de façon équivalente :

$$\mathbb{R}^n = E_1 \oplus E_2 \oplus ... \oplus E_k, \tag{3.54}$$

où le symbole $\oplus$ représente l'opérateur somme directe.
Réciproquement, on peut définir une norme vectorielle régulière à partir de la décomposition (3.54) de l'espace $\mathbb{R}^n$ en sous-espaces supplémentaires :
Soient P_i l'opérateur de projection de $\mathbb{R}^n$ sur l'espace E_i, p_i une norme de l'espace E_i, et notons x_i l'image de x par P_i : $x_i = P_i\, x \quad (i = 1, ..., k)$.
Il est alors aisé de montrer que l'application $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+^k$ dont la i^e composante est définie par

$$V_i(x) = p_i(x_i) \tag{3.55}$$

est une norme vectorielle régulière d'ordre k.

Par exemple, les trois applications

$$V^1(x) = |x_1| + |x_2| + |x_3|,$$

$$V^2(x) = \begin{bmatrix} \max(\,|x_1|, |x_2|\,) \\ |x_3| \end{bmatrix},$$

et
$$V^3(x) = \begin{bmatrix} |x_1| \\ |x_2| \\ |x_3| \end{bmatrix}$$

sont des normes vectorielles régulières sur $\mathbb{R}^3$ d'ordres respectifs 1, 2 et 3.

Nous allons maintenant définir à l'aide de ces applications une classe particulière de systèmes de comparaison.

5.2. Systèmes majorants : définition et construction

5.2.1. Classe de systèmes

Dans cette étude, la classe de systèmes considérée est l'ensemble des équations de la forme :

$$\dot{x}(t) = A[t, x(t), x(t-\tau_1(t)), \ldots, x(t-\tau_m(t))]\, x(t) + \sum_{i=1}^{m} B^i[t, x(t), x(t-\tau_1(t)), \ldots, x(t-\tau_m(t))]\, x(t-\tau_i(t)), \quad t \geq t_0, \tag{3.56}$$

où $x(t)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, $A(.)$ et $B^i(.)$ représentent des matrices à coefficients réels de dimensions $n \times n$, les τ_i sont des fonctions continues par morceaux de la variable t vérifiant

$$0 \leq \tau_i(t) \leq \tau,$$

et enfin, il est supposé que, pour tout t_0 dans $\mathbb{R}$, et pour toute fonction vectorielle φ définie et continue sur $[t_0 - \tau, t_0]$, l'équation (3.56) admet une solution unique, notée $x(t\,;\, t_0, \varphi)$, passant par φ à $t = t_0$.

Dans la suite, V représente une norme vectorielle régulière d'ordre k de i^e composante définie par l'égalité (3.55), $\mathcal{D}$ une région de $\mathbb{R}^n$ contenant un voisinage de l'origine et $\mathbf{C}_{\mathcal{D}}$ est le sous-ensemble de **C** comprenant l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle $[-\tau, 0]$ à valeurs dans $\mathcal{D}$. $D^+V(x(t))$ dénote la dérivée à droite de $V(x)$ calculée le long des solutions de (3.56), et $\mathcal{T}_0$ désignera l'intervalle $[t_0, \infty[$. Enfin, on utilisera souvent l'abbréviation (.) au lieu du uplet $(t, x(t), \ldots, x(t-\tau_m(t)))$.

Définition 5.2. : Les matrices M, N^1, ..., N^m : $\mathcal{T}_0 \times \mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{k \times k}$ définissent un *système majorant* du système (3.56) relativement à la norme vectorielle régulière V et à la région $\mathcal{D}$ si, pour tout $t \in \mathcal{T}_0$ et pour tout $x_t \in \mathbf{C}_{\mathcal{D}}$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$D^+V(x(t)) \leq M(.)\ V(x(t)) + \sum_{i=1}^{m} N^i(.)\ V(x(t - \tau_i(t))), \tag{3.57}$$

et si les éléments hors-diagonaux de M(.) et les coefficients des matrices N(.) sont tous positifs.

Le système majorant est alors défini par :

$$\dot{z}(t) = M(.)\ z(t) + \sum_{i=1}^{m} N^i(.)\ z(t - \tau_i(t)),$$

Si $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$, le système majorant est dit *global.*

Dans la définition précédente, la fonction V peut être une fonction de Lyapunov vectorielle quelconque, mais l'intérêt principal des normes vectorielles est l'existence de formules permettant de construire systématiquement un système majorant. Ces formules généralisent aux cas des systèmes à retards (3.56) celles données dans [Gentina *et al.* (1972)] pour les systèmes d'équations différentielles ordinaires.

5.2.2. Formules basées sur le calcul du gradient

Avant de donner les expressions d'un système majorant particulier, nous introduisons les notations suivantes :

$$y^i = x(t - \tau_i(t)),$$

$$V(x) = [p_1(x_1), ..., p_k(x_k)]^T,$$

$$A_{rs}(.) = P_r\ A(.)\ P_s\ , \quad B^i_{rs}(.) = P_r\ B^i(.)\ P_s$$

$$m_{rs}(t, x, y^1, ..., y^m, u) = \frac{\text{grad } p_r(u_r)^T\ A_{rs}(.)\ u_s}{p_s(u_s)}, \tag{3.58}$$

$$n^i_{rs}(t, x, y^1, ..., y^m, u, v) = \frac{\text{grad } p_r(u_r)^T\ B^i_{rs}(.)\ v_s}{p_s(v_s)},$$

pour $i \in \{1, ..., m\}$, r et $s \in \{1, ..., k\}$.

Théorème 5.1. [Dambrine et Richard (1993b)] : *Les matrices* $M(t, x, y^1, ..., y^m) = \{\mu_{rs}(t, x, y^1, ..., y^m)\}$, $N^i(t, x, y^1, ..., y^m) = \nu^i_{rs}(t, x, y^1, ..., y^m)$ *données par :*

$$\mu_{rs}(t, x, y^1, ..., y^m) = \sup_{u \in \mathcal{D}} \{m_{rs}(t, x, y^1, ..., y^m, u)\}$$

$$\nu^i_{rs}(t, x, y^1, ..., y^m) = \sup_{u,\, v \in \mathcal{D}} \{n^i_{rs}(t, x, y^1, ..., y^m, u, v)\}, \qquad (3.59)$$

$\forall$ r, s $\in$ {1, ..., k}, $\forall$ i $\in$ {1, ..., m} *et* $\forall$ t $\in \mathcal{T}_0$, $\forall$ x, $y^i \in \mathcal{D}$,

définissent un système majorant de (3.56) *relativement à la norme vectorielle régulière* V *et à la région* $\mathcal{D}$.

Les systèmes donnés par les expressions (3.59) sont appelés *systèmes majorants naturels* de (3.56).

Démonstration : La dérivée à droite de $V_r(x) = p_r(x_r)$ calculée le long des solutions de (3.56) est donnée par l'égalité :

$$D^+ p_r(x_r) = \sum_{s=1}^{k} \text{grad } p_r(x_r)^T A_{rs}(.)\, x_s + \sum_{i=1}^{m} \sum_{s=1}^{k} \text{grad } p_r(x_r)^T B^i_{rs}(.)\, y^i_s .$$

Si x_s est non nul, alors on peut écrire

$$\text{grad } p_r(x_r)^T A_{rs}(.)\, x_s = \frac{\text{grad } p_r(x_r)^T A_{rs}(.)\, x_s}{p_s(x_s)}\, p_s(x_s),$$

et donc, compte tenu de la définition des coefficients $\mu_{rs}(t, x, y)$, il vient :

$$\text{grad } p_r(x_r)^T A_{rs}(.)\, x_s \le \mu_{rs}(.)\, p_s(x_s).$$

Cette dernière inégalité est trivialement vérifiée lorsque x_s est nul. En procédant de la même façon, on montre les inégalités

$$\text{grad } p_r(x_r)^T B^i_{rs}(.)\, y^i_s \le \nu^i_{rs}(.)\, p_s(y^i_s).$$

L'inégalité (3.57) est donc vérifiée.

Tous les élements hors-diagonaux de la matrice M et tous les éléments des matrices N^i définis en (3.59) sont positifs. En effet, dans (3.58), lorsque $r \neq s$, les vecteurs u_r et u_s peuvent être choisis indépendants l'un de l'autre, et cette liberté de choix implique que les coefficients hors-diagonaux de M(.) sont positifs. De même, de l'indépendance des vecteurs u_r et v_s, il résulte que les coefficients de toutes les matrices N^i sont positifs.

Corollaire 5.1. : *Toutes matrices* $\tilde{M}(.)$ et $\tilde{N}^i(.)$ *vérifiant les inégalités*

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_{rs}(t, x, y^1, ..., y^m)) &\ge \mu_{rs}(t, x, y^1, ..., y^m), \\ \tilde{\nu}^i_{rs}(t, x, y^1, ..., y^m)) &\ge \nu^i_{rs}(t, x, y^1, ..., y^m), \end{aligned} \qquad (3.60)$$

$\forall$ r, s $\in$ {1, ... , k}, $\forall$ t $\in \mathcal{T}_0$, $\forall$ x, y^1, ..., $y^m \in \mathcal{D}$,

définissent également un système majorant de (3.56).

Ce corollaire, très utile, permet de déduire par majoration des expressions (3.59) des systèmes majorants de (3.56) plus simples à analyser, par exemple, les matrices M and N^i peuvent être constantes.

5.2.3. Formules basées sur les normes et mesures

Les formules (3.59) prennent une forme très simple dans le cas particulier des normes usuelles de Hölder.

On considère ici une norme vectorielle régulière V dont la r^e composante est définie par

$$V_r(x) = p_r(x_r)$$

où x_r est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ formé des composantes de x prises dans un ensemble d'indices J_r, et où p_r est une norme arbitraire sur l'espace E_r associé. La partition de $\mathbb{R}^n$ associée à cette norme vectorielle induit une partition en bloc des matrices A et B^i : chaque bloc A_{rs} sera caractérisé par ses ensembles d'indices de lignes et de colonnes notés respectivement J_r et J_s.

Les coefficients des matrices M et N^i sont alors donnés par les formules ([Dambrine et Richard (1994b)] :

$$\begin{aligned} &\mu_{rr}(.) = \mu_r(A_{rr}), \quad \text{pour } r = 1, ..., k, \\ &\mu_{rs}(.) = \| A_{rs} \|_{rs}, \quad \text{pour } r, s = 1, ..., k \quad \text{et} \quad r \neq s, \\ &\nu^i_{rs}(.) = \| B^i_{rs} \|_{rs}, \quad \text{pour } i = 1, ..., m \quad \text{et} \quad r, s = 1, ..., k, \end{aligned} \tag{3.61}$$

où $\| A_{rs} \|_{rs}$ est la norme de la matrice A_{rs} induite par les normes p_r et p_s (elle est définie par $\| A_{rs} \|_{rs} = \sup\limits_{x_s \in E_s\setminus\{0\}} \dfrac{p_r(A_{rs}\, x_s)}{p_s(x_s)}$), et $\mu_r(A_{rr})$ est la mesure de la matrice A_{rr} associée à la norme p_r ou $\| . \|_{rr}$ (cf. annexes).

Ces formules peuvent être démontrées directement, sans l'aide des formules (3.59). En effet, on a

$$D^+ p_r(x_r) = \lim_{h\to 0^+} h^{-1} [p_r(x_r(t + h)) - p_r(x_r(t))].$$

Après développement de $x_r(t + h)$ au premier ordre, on obtient

$$D^+ p_r(x_r) = \lim_{h\to 0^+} h^{-1} [p_r(x_r(t) + h (\sum_{s=1}^{k} (A_{rs}\, x_s + \sum_{i=1}^{m} B^i_{rs} y^i_s)) - p_r(x_r(t))],$$

en utilisant les propriétés des normes, il vient l'inégalité

$$\begin{aligned} D^+ p_r(x_r) \leq &\big(\lim_{h\to 0^+} h^{-1} [\| I_r + h\, A_{rr} \|_{rr} - 1]\big)\, p_r(x_r(t)) \\ &+ \sum_{s\neq r} p_r(A_{rs}\, x_s) + \sum_{s=1}^{k} \sum_{i=1}^{m} p_r(B^i_{rs} y^i_s)), \end{aligned}$$

où I_r est la matrice identité de même dimension que A_{rr}.

On a par définition de la mesure d'une matrice $\lim\limits_{h\to 0^+} h^{-1} [\| I_r + h\, A_{rr} \|_{rr} - 1] = \mu_r(A_{rr})$, et enfin d'après la définition des normes $\| . \|_{rs}$, il vient

$$D^+ p_r(x_r) \leq \mu_r(A_{rr})\, p_r(x_r(t)) + \sum_{s\neq r} \| A_{rs} \|_{rs}\, p_s(x_s) + \sum_{s=1}^{k} \sum_{i=1}^{m} \| B^i_{rs} \|_{rs}\, p_s(y^i_s),$$

ce qui achève la démonstration du résultat.

Si toutes les composantes de la norme vectorielle V sont du type norme du max, c'est-à-dire $p_r(x_r) = \max_{s \in J_r} (| x_s |)$, les formules (3.61) prennent la forme ([Dambrine et Richard (1993a)]) :

$$\mu_{rr}(.) = \max_{p \in J_r} [a_{pp} + \sum_{q \in J_r \setminus \{p\}} | a_{pq} |], \quad \forall\, r \in \{1, ..., k\}$$

$$\mu_{rs}(.) = \max_{p \in J_r} [\sum_{q \in J_s} | a_{pq} |], \quad \forall\, r, s \in \{1, ..., k\}, r \neq s \qquad (3.62)$$

$$v^i_{rs}(.) = \max_{p \in J_r} [\sum_{q \in J_s} | b^i_{pq} |], \quad \forall\, r, s \in \{1, ..., k\}, \forall\, i \in \{1, ..., m\},$$

où les a_{pq} sont les coefficients de la matrice A(.) et b^i_{pq} ceux de la matrice $B^i(.)$ (avec i = 1, ..., m).

Pour la norme duale, $p_r(x_r) = \sum_{s \in J_r} | x_s |$ (r = 1, ..., k), les formules (3.61) s'écrivent ([Dambrine et Richard (1993b)]) :

$$\mu_{rr}(.) = \max_{p \in J_r} [a_{pp} + \sum_{q \in J_r \setminus \{p\}} | a_{qp} |], \quad \forall\, r \in \{1, ..., k\}$$

$$\mu_{rs}(.) = \max_{p \in J_r} [\sum_{q \in J_s} | a_{qp} |], \quad \forall\, r, s \in \{1, ..., k\}, r \neq s \qquad (3.63)$$

$$v^i_{rs}(.) = \max_{p \in J_r} [\sum_{q \in J_s} | b^i_{qp} |], \quad \forall\, r, s \in \{1, ..., k\}, \forall\, i \in \{1, ..., m\}.$$

Remarque : Dans ces deux cas (normes max ou duale), les formules (3.59) et (3.61) donnent les mêmes expressions (3.62) ou (3.63). Celles-ci constituent une généralisation des formules données dans [Gentina, Borne et Laurent (1972)] pour les systèmes non linéaires et non retardés.

Pour la norme euclidienne, $p_r(x_r) = (\sum_{s \in J_r} | x_s |^2)^{1/2}$, par les formules (3.61), on obtient le système majorant donné par :

$$\mu_{rr}(.) = \frac{1}{2} \max_j \lambda_j (A_{rr} + A^T_{rr}), \quad \forall\, r \in \{1, ..., k\}$$

$$\mu_{rs}(.) = [\max_j \lambda_j (A_{rs} A^T_{rs})]^{1/2}, \quad \forall\, r, s \in \{1, ..., k\}, r \neq s \qquad (3.64)$$

$$v^i_{rs}(.) = [\max_j \lambda_j (B^i_{rs} {B^i_{rs}}^T)]^{1/2}, \quad \forall\, r, s \in \{1, ..., k\}, \forall\, i \in \{1, ..., m\}.$$

où les $\lambda_j(X)$ représentent les différentes valeurs propres de la matrice X.

Pour cette norme toujours, les formules données dans [Gentina, Borne et Laurent (1972)] peuvent encore être généralisées, on obtient alors un système majorant moins précis, mais plus simple à calculer :

$$\mu_{rr}(.) = \max_{p \in J_r} [a_{pp} + \frac{1}{2} \sum_{q \in J_r \setminus \{p\}} | a_{pq} + a_{qp} |],$$

$$\mu_{rs}(.) = \frac{1}{2} (\max_{p \in J_r} [\sum_{q \in J_s} | a_{pq} |] + \max_{q \in J_s} [\sum_{p \in J_r} | a_{qp} |]), \quad r \neq s \quad (3.65)$$

$$v^i_{rs}(.) = \frac{1}{2} (\max_{p \in J_r} [\sum_{q \in J_s} | b^i_{pq} |] + \max_{q \in J_s} [\sum_{p \in J_r} | b^i_{qp} |]),$$

On retrouve encore lorsque les matrices B^i sont toutes identiquement nulles les formules données dans [Grujić, Gentina et Borne (1976)].

5.3. Principe de comparaison

La condition imposée au signe des coefficients hors-diagonaux de M(.) et des éléments des matrices $N^i(.)$ nous permet d'énoncer un principe de comparaison généralisant aux cas des systèmes à retards le lemme donné dans [Grujić, Gentina et Borne (1976)].
Les systèmes majorants utilisés dans la suite seront supposés vérifier l'hypothèse suivante :
Hypothèse (H) : les matrices M(.) et $N^i(.)$ sont telles que le système majorant

$$\dot{z}(t) = M(.)\, z(t) + \sum_{i=1}^{m} N^i(.)\, z(t - \tau_i(t))$$

admet une solution unique pour toute solution x(t) de (3.56) et toute condition initiale $z_{t_0} \in \mathbf{C}$, par exemple, M(.) et N(.) peuvent être des fonctions continues de leurs arguments ou encore être constantes.

Théorème 5.2. (Principe de comparaison [Dambrine et Richard (1993b)]) :
Soit $(M(.), N^1(.), ..., N^m(.))$ *définissant un système majorant de* (3.56) *relativement à une norme vectorielle régulière* V *et à une région* $\mathcal{D}$ *contenant un voisinage de l'origine tel que les matrices* M(.) *et* $N^i(.)$ *vérifient* (H), *alors le système*

$$\dot{z}(t) = M(.)\, z(t) + \sum_{i=1}^{m} N^i(.)\, z(t - \tau_i(t)) \quad (3.66)$$

est un système de comparaison de (3.56) *au sens où si, pour une fonction initiale* $x_{t_0} \in \mathbf{C}_{\mathcal{D}}$, *les solutions* x(t) *de* (3.56) *et* z(t) *de* (3.66) *vérifient l'inégalité*

$$z(t) \geq V(x(t)) \quad (3.67)$$

initialement, c'est-à-dire pour tout t *dans* $[t_0 - \tau, t_0]$, *alors elle est encore vraie aussi longtemps que* x(t) *reste dans* $\mathcal{D}$, *et que la solution* z(t) *existe.*

Démonstration : Soit z^n une solution du système

$$\dot{z}^n(t) = M(.)\, z^n(t) + \sum_{i=1}^{m} N^i(.)\, z^n(t - \tau_i(t)) + \varepsilon^n\,, \qquad (3.68)$$

avec la condition initiale

$$z^n(t_0 + s) = z(t_0 + s) + \varepsilon^n\,, \quad \forall\, s \in [-\tau, 0],$$

où ε^n est un vecteur constant à composantes strictement positives.

Alors, l'inégalité

$$V(x(t)) < z^n(t) \qquad (3.69)$$

est vérifiée aussi longtemps que z^n est définie et que $x(t)$ reste dans $\mathcal{D}$. En effet, supposons qu'il existe un instant $t_1 > t_0$ et un indice j_0 tels que

$$V_{j_0}(x(t_1)) = z^n_{j_0}(t_1),$$

alors la borne inférieure de l'ensemble $\{t : V_j(x(t)) = z^n_j(t),\ j \in \{1, ..., k\}\}$ existe, notons la t_2. On a, par hypothèse, $t_2 > t_0$.

Posons $\varepsilon(t) = z^n(t) - V(x(t))$, alors compte tenu des relations (3.57) et (3.68), il vient

$$\dot{\varepsilon}_j(t_2) \geq \mu_{jj}(.)\, [z^n_j(t_2) - V_j(x(t_2))] + \sum_{r \neq j} \mu_{jr}(.)\, [z^n_r(t_2) - V_r(x(t_2))]$$
$$+ \sum_{i=1}^{m} \sum_{r=1}^{k} v^i_{jr}(.)\, [z^n_r(t_2 - \tau_i(t_2)) - V_r(x(t_2 - \tau_i(t_2)))] + \varepsilon^n.$$

Or, par définition de t_2, il résulte les relations suivantes :

$$z^n_j(t_2) = V_j(x(t_2)),$$
$$z^n_r(t_2) \geq V_r(x(t_2)), \quad \text{pour tout } r \neq j,$$
$$z^n_r(t_2 - \tau_i(t_2)) \geq V_r(x(t_2 - \tau_i(t_2))), \quad \text{pour tout } r.$$

De plus, par hypothèse, les coefficients $\mu_{jr}(.)$ ($\forall$ r, j : r $\neq$ j), et $v^i_{jr}(.)$ ($\forall$ i, r, j) sont positifs. Par suite, l'inégalité

$$\dot{\varepsilon}_j(t_2) \geq \varepsilon^n > 0$$

est vérifiée. La fonction $\varepsilon_j(t)$ est donc strictement croissante sur un voisinage de t_2. Il y a là contradiction, puisque, par définition de t_2, on a, pour tout $t < t_2$, $\varepsilon_j(t) > 0$ et $\varepsilon_j(t_2) = 0$.

Pour démontrer le théorème, il suffit maintenant de faire tendre ε^n vers le vecteur nul. La solution $z^n(t)$ converge alors vers $z(t)$ et l'inégalité (3.67) est obtenue par passage à la limite de l'inégalité (3.69).

5.4. Application à l'étude de la stabilité

Dans cette partie, nous proposons de montrer que, sous les conditions du principe de comparaison, l'étude d'une propriété de stabilité du système initial (3.56) peut être réalisée indirectement en analysant la même propriété pour le système de comparaison.

Enfin, des conditions de stabilité, simples à tester, seront données et justifieront la méthode des normes vectorielles.

5.4.1. Propriétés de stabilité induites par le système de comparaison

On suppose dans tout ce qui suit que le système (3.66) vérifie les hypothèses du principe de comparaison (Th. 5.2).

– Induction de la stabilité

Soit ϕ_1 la norme sur $\mathbb{R}^k$ définie par $\phi_1(z) = \sum_{i=1}^{k} | z_i |$. L'application $\phi_1 \circ V$ est alors une norme de $\mathbb{R}^n$ [Robert (1964)].

On suppose que la solution z = 0 du système (3.66) est stable par rapport à $\mathcal{T}_i$, alors la solution x = 0 du système (3.56) est également stable par rapport à $\mathcal{T}_i$. En effet, soit $t_0 \in \mathcal{T}_i$, et soit $\varepsilon > 0$ tel que l'ensemble $U = \{x \in \mathbb{R}^n : \phi_1(V(x)) < \varepsilon\}$ soit contenu dans $\mathcal{D}$ (cela est possible, car on a supposé que $\mathcal{D}$ contenait un voisinage de l'origine). Soit x_{t_0} une fonction de **C**, et soit z_{t_0} la fonction définie sur $[-\tau, 0]$ par $z(t_0 + s) = V(x(t_0 + s))$. D'après la définition de la stabilité, il existe un nombre δ dépendant de ε et de t_0 tel que, si z_{t_0} vérifie la condition $\max\limits_{-\tau \leq s \leq 0} \phi_1(z(t_0 + s)) < \delta$, alors l'inégalité

$$\phi_1(z(t\,;\, t_0, z_{t_0})) < \varepsilon \tag{3.70}$$

est satisfaite pour tout $t \geq t_0$. La condition imposée à ε entraîne que la fonction x_{t_0} est dans l'ensemble $\mathbf{C}_{\mathcal{D}}$. Le principe de comparaison peut donc être appliqué : l'inégalité

$$V(x(t\,;\, t_0, x_{t_0})) \leq z(t\,;\, t_0, z_{t_0}) \tag{3.71}$$

est vérifiée pour tout $t \in [t_0, t_2[$, où t_2 est tel que $x(t_2)$ appartient à la frontière de $\mathcal{D}$. On a nécessairement $t_2 = +\infty$, car sinon, la solution x(t) étant continue, il existerait $t_1 \in [t_0, t_2[$ pour lequel $x(t_1)$ appartiendrait à la frontière de U, c'est-à-dire $\phi_1(V(x(t_1))) = \varepsilon$. Or, l'inégalité (3.71) entraîne que $\phi_1(V(x(t_1))) \leq \phi_1(z(t_1))$. On aurait alors (inégalité (3.70)

$$\varepsilon = \phi_1(V(x(t_1))) \leq \phi_1(z(t_1)) < \varepsilon,$$

ce qui est absurde.

La démonstration permet également de montrer que si la solution z = 0 du système de comparaison est uniformément stable par rapport à $\mathcal{T}_i$, alors la solution x = 0 du système (3.56) possède la même propriété. De même, si $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$, alors la solution x = 0 du système initial est globalement stable si la solution z = 0 du système de comparaison possède la même propriété.

– Induction de la stabilité asymptotique

De toute évidence, l'inégalité

$$V(x(t\,;\,t_0,\,x_{t_0})) \leq z(t\,;\,t_0,\,z_{t_0})$$

entraîne les implications

$$\lim_{t\to\infty} z(t\,;\,t_0,\,z_{t_0}) = 0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{t\to\infty} V(x(t\,;\,t_0,\,x_{t_0})) = 0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{t\to\infty} x(t\,;\,t_0,\,x_{t_0}) = 0.$$

Il est alors facile de montrer que si la solution nulle du système de comparaison est (uniformément) asymptotiquement stable par rapport à $\mathcal{T}_i$, alors la solution $x = 0$ du système initial possède la même propriété. Notons ici que si le système majorant est global et si la solution nulle du système de comparaison est attractive, alors la solution nulle du système initial est également attractive. Cette propriété n'est pas forcément vérifiée si le système majorant est strictement local ($\mathcal{D} \neq \mathbb{R}^n$) : si la solution nulle du système de comparaison n'est pas stable, il peut exister des instants $t \geq t_0$ pour lequel $x(t)$ quitte le domaine $\mathcal{D}$, l'inégalité (3.67) n'est alors plus assurée. Cette objection est levée si l'on peut montrer l'existence d'ensembles positivement invariants inclus dans $\mathcal{D}$, nous étudierons ce point dans le quatrième chapitre.

– Induction de la stabilité exponentielle

Nous supposons maintenant que la solution nulle du système de comparaison est exponentiellement stable par rapport à $\mathcal{T}_i$, c'est-à-dire, en utilisant la norme ϕ_1 : il existe α et β deux réels strictement positifs tels que

$$\phi_1(z(t\,;\,t_0,\,z_{t_0})) < \alpha \max_{-\tau \leq s \leq 0} \phi_1(z(t_0 + s))\, e^{-\beta(t - t_0)},$$

où $t_0 \in \mathcal{T}_i$. Soit $x_{t_0} \in U$, et soit z_{t_0} la fonction définie sur $[-\tau,\,0]$ par $z(t_0 + s) = V(x(t_0 + s))$. On choisit comme norme sur $\mathbb{R}^n$ l'application $\phi_1 \circ V$: $|\,x\,| = \phi_1(V(x))$. Il vient alors $\|\,x_{t_0}\,\| = \max_{-\tau \leq s \leq 0} \phi_1(z(t_0 + s))$, et

$$|\,x(t\,;\,t_0,\,x_{t_0})\,| \leq \phi_1(z(t\,;\,t_0,\,z_{t_0})) < \alpha\,\|\,x_{t_0}\,\|\, e^{-\beta(t - t_0)}.$$

La solution nulle du système initial est donc également exponentiellement stable par rapport à $\mathcal{T}_i$. De même, il serait possible de montrer que, si la solution $z = 0$ du système de comparaison est uniformément exponentiellement stable, alors la solution nulle du système initial possède la même propriété.

Les résultats précédents peuvent se résumer par le théorème suivant :

Théorème 5.3. : *Lorsque les conditions d'application du principe de comparaison sont vérifiées, le système* (3.56) *possède une des propriétés définies au* § 4.1.2. *du premier chapitre (à l'exception des propriétés vii à x) s'il admet un système de comparaison possédant la même propriété. Si de plus, le système majorant est global, alors ce qui précède est aussi vrai pour les propriétés d'attractivité.*

5.4.2. Systèmes de comparaison à coefficients constants

Nous supposons ici qu'il existe une norme vectorielle régulière V et un domaine $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$ contenant un voisinage de l'origine pour lesquels le système (3.56) admet un système majorant à coefficients constants. Les matrices M(.) et N^i(.) sont donc constantes, notées M et N^i, et vérifient par conséquence l'hypothèse (H).
L'étude de la stabilité du système (3.56) peut être réalisée à travers celle du système

$$\dot{z}(t) = M\, z(t) + \sum_{i=1}^{m} N^i\, z(t - \tau_i(t)). \tag{3.72}$$

Une condition de stabilité du système (3.72) est alors donnée par le critère de Tokumaru *et al.* (cf. chapitre 2, § 2.3.2.) : si la matrice $M + \sum_{i=1}^{m} N^i$ est l'opposée d'une M-matrice irréductible (voir l'annexe 2), alors le système de comparaison est asymptotiquement stable. Il vient donc le théorème suivant :

Théorème 5.4. : *Si le système non linéaire* (3.56) *admet un système majorant à coefficients constants de la forme* (3.72) *tel que la matrice* $M + \sum_{i=1}^{m} N^i$ *est l'opposée d'une M-matrice irréductible, alors, quelles que soient les fonctions* $\tau_i(t)$ *continues, positives et bornées, la solution* $x = 0$ *du système* (3.56) *est exponentiellement stable. De plus, si le système majorant est global, alors la stabilité exponentielle est globale.*

Cette condition est simple à tester puisqu'il suffit de s'assurer que les mineurs principaux de la matrice $-(M + \sum_{i=1}^{m} N^i)$ sont tous de signe positif. L'hypothèse d'irréductibilité de cette même matrice demandée par Tokumaru *et al.* n'est en fait pas nécessaire (cf. Th. 5.5 ci-dessous).

5.4.3. Systèmes de comparaison non linéaires

On suppose ici que le système de comparaison (3.66) est non linéaire, et nous nous proposons de définir des classes de systèmes majorants pour lesquelles les conditions simples du théorème 5.4 garantissent encore la stabilité du système initial. Ces résultats peuvent être considérés comme les extensions des critères pratiques de stabilité de Borne et Gentina [Gentina (1976)].

Dans ce premier résultat, on se restreint au cas des systèmes à retards constants, et pour simplifier, on ne considérera que le cas d'un système à retard unique.

Théorème 5.5. : *Soit un système*

$$\dot{x}(t) = A[t, x(t), x(t-\tau)]\, x(t) + B[t, x(t), x(t-\tau)]\, x(t-\tau), \qquad (3.73)$$

tel que

(i) (3.73) *admet un système majorant*

$$\dot{z}(t) = M(t, x(t), x(t-\tau))\, z(t) + N(t, x(t), x(t-\tau))\, z(t-\tau), \qquad (3.74)$$

relativement à une norme vectorielle régulière V *et une région* $\mathcal{D}$ *contenant un voisinage de l'origine, et vérifiant l'hypothèse* (H).

(ii) *Il existe un réel* $\varepsilon > 0$ *et un vecteur u de* $\mathbb{R}^k$ *à composantes strictement positives tels que la matrice* $Z_1(t, x, y, w) = M(t, x, y) + N(t+\tau, w, x)$ *vérifie l'inégalité*

$$Z_1^T(t, x, y, w)\, u \le -\varepsilon\, u, \qquad (3.75)$$

pour tout t *dans* $\mathcal{T}_0$, *et tout* x, y, *et* w *dans* $\mathcal{D}$.

Alors la solution nulle de (3.73) *est stable. Si de plus, la matrice* N(.) *est bornée alors la stabilité est asymptotique. Enfin, lorsque* $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$, *la stabilité (asymptotique) est globale.*

Démonstration : Soit la fonctionnelle

$$\mathcal{V}(t, x_t) = V^T(x(t))\, u + \int_{t-\tau}^{t} V^T(x(s))\, N^T(s+\tau, x(s+\tau), x(s))u\, ds. \qquad (3.76)$$

La dérivée à droite de $\mathcal{V}$ le long des solutions de (3.73) admet la majoration :

$$\dot{\mathcal{V}}(t, x_t) \le V^T(x(t))\, Z_1^T(t, x(t), x(t-\tau), x(t+\tau))\, u$$

et par hypothèse sur u, il vient :

$$\dot{\mathcal{V}}(t, x_t) \le -\varepsilon\, V^T(x(t))\, u.$$

Le théorème 2.5 permet alors les conclusions suivantes : la solution x = 0 de (3.73) est stable, et, si N(.) est bornée, elle est asymptotiquement stable.

Le théorème précédent requiert la connaissance d'un vecteur u vérifiant (3.75). La recherche d'un tel vecteur peut être ardue, mais il est possible de définir des classes particulières de matrices Z_1 pour lesquelles l'existence de u peut être prouvée simplement. Une première classe particulière est obtenue en considérant que la matrice Z_1 peut être décomposée en le produit d'une matrice constante et d'une matrice diagonale :

$$Z_1(.) = Z\, D(.), \qquad (3.77)$$

où $D(.) = \mathrm{diag}(d_1(.), ..., d_k(.))$ est une matrice diagonale à éléments positifs. Alors, si Z est l'opposée d'une M-matrice irréductible, et si tous les termes $d_i(.)$ sont minorés par un nombre $\delta > 0$, le vecteur propre u associé à la valeur propre de Z^T de plus grande partie réelle (notée ici λ_{max}) est à composantes toutes strictement positives et vérifie

$$Z_1^T(.)\, u = D^T(.)\, Z^T u = \lambda_{max}\, D^T(.)\, u \le -\varepsilon\, u,$$

où $\varepsilon = -\lambda_{max}\,\delta > 0$. D'où le théorème :

Théorème 5.6. : *On suppose la condition* (i) *du théorème 5.5 vérifiée.*
S'il existe une matrice diagonale D(t, x, y, w) *dont les éléments sont minorés par un nombre réel strictement positif sur* $\mathcal{T}_0 \times \mathcal{D} \times \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ *et une matrice constante* Z *de Hurwitz telles que la relation* (3.77) *est vérifiée, alors la solution nulle de* (3.73) *est stable. Si de plus, la matrice* N(.) *est bornée alors la stabilité est asymptotique. Enfin, lorsque* $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$, *la stabilité (asymptotique) est globale.*

Supposons maintenant que les éléments non constants de la matrice $Z_1(t, x, y, w)$ sont regroupés dans une seule colonne, et qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout t dans $\mathcal{T}_0$, et tout x, y, w dans $\mathcal{D}$, la matrice $Z_1(t, x, y, w) + \varepsilon\, I_k$ est de Hurwitz. Alors, le lemme A1 de l'annexe 2 appliqué à la matrice $Z_1^T(.) + \varepsilon\, I_k$ permet de prouver l'existence d'un vecteur u satisfaisant l'inégalité (3.75). Il vient donc le théorème :

Théorème 5.7. [Dambrine et Richard (1994b)] : *On suppose la condition* (i) *du théorème 5.5 vérifiée. Si la matrice* $Z_1(.)$ *vérifie les deux conditions*

(a) *les éléments non constants de la matrice* $Z_1(t, x, y, w) = M(t, x, y) + N(t + \tau, w, x)$ *sont isolés dans une seule colonne, et*

(b) *il existe un réel* $\varepsilon > 0$ *tel que pour tout* t *dans* $\mathcal{T}_0$, *et tout* x, y, w *dans* $\mathcal{D}$,
$Z_1(t, x, y, w) + \varepsilon\, I_k$ *est l'opposée d'une M-matrice,*

alors la solution nulle de (3.73) *est stable. Si de plus, la matrice* N(.) *est bornée alors la stabilité est asymptotique. Enfin, lorsque* $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$, *la stabilité (asymptotique) est globale.*

Les trois théorèmes précédents reposent sur l'existence d'une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii particulière (3.76). Nous proposons maintenant d'établir des résultats similaires en se basant sur la théorie des fonctions de Lyapunov-Razumikhin. Les résultats sont de nouveau valables pour des retards τ_i variables avec le temps.

Théorème 5.8. : *Soit un système de la forme* (3.56) *vérifiant les conditions suivantes :*
(i) (3.56) *admet le système majorant* (3.66) *relativement à une norme vectorielle régulière* V *et une région* $\mathcal{D}$ *contenant un voisinage de l'origine.*
(ii) *Il existe un réel* $\varepsilon > 0$ *et un vecteur* u *de* $\mathbb{R}^k$ *à composantes strictement positives tels que la matrice*

$$Z_2(t, x, y_1, ..., y_m) = M(t, x, y_1, ..., y_m) + \sum_{i=1}^{m} N^i(t, x, y_1, ..., y_m)$$

vérifie l'inégalité

$$Z_2(t, x, y_1, ..., y_m)\, u \leq -\varepsilon\, u, \tag{3.78}$$

pour tout t *dans* $\mathcal{T}_0$, *et tout* $x, y_1, ..., y_m$ *dans* $\mathcal{D}$.

Alors, la solution nulle de (3.56) *est stable. Elle est asymptotiquement stable si de plus les matrices* $N^i(.)$ *sont bornées sur* $\mathcal{T}_0 \times \mathcal{D} \times \ldots \times \mathcal{D}$. *Enfin, si* $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$, *la stabilité (asymptotique) est globale.*

Démonstration : Soit la fonction

$$v(x) = \max_{1 \le r \le k} \left\{ \frac{V_r(x)}{u_r} \right\}, \tag{3.79}$$

où u_r est la $r^{ième}$ composante du vecteur u.

Pour chaque instant $t \in \mathcal{T}_0$, il existe un indice r tel que $v(x(t)) = \frac{V_r(x(t))}{u_r}$. Il vient donc :

$$\dot{v}(x(t)) = \frac{1}{u_r}\, \dot{V}_r(x(t)),$$

l'inégalité (3.57) entraîne alors la relation

$$\dot{v}(x(t)) \le \frac{1}{u_r}\left[\mu_{rr}(.)\, V_r(x(t)) + \sum_{s \ne r} \mu_{rs}(.)\, V_s(x(t)) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{s=1}^{k} v^i_{rs}(.)\, V_s(x(t-\tau_i(t)))\right],$$

et compte tenu de la définition de v(x), il vient

$$\dot{v}(x(t)) \le \frac{1}{u_r}\left[M(.)\, u\, v(x(t)) + \sum_{i=1}^{m} N^i(.)\, u\, v(x(t-\tau_i(t)))\right]_r, \tag{3.80}$$

où $[.]_r$ indique la $r^{ième}$ composante du vecteur entre crochet.

Suivant la méthode de Razumikhin, il suffit de considérer les solutions vérifiant l'inégalité

$$v(x(t)) \ge v(x(t-\tau_i(t)), \qquad \text{pour tout } i \in \{1, \ldots, m\}.$$

Alors, $\dot{v}(x(t))$ vérifie l'inégalité

$$\dot{v}(x(t)) \le \frac{1}{u_r}\, [Z_2(.)\, u]_r\; v(x(t)) \le -\varepsilon\, v(x(t)).$$

v(x) est donc une fonction de Lyapunov-Razumikhin pour le système (3.56), et par suite, la solution x = 0 est stable.

On suppose maintenant que les matrices $N^i(.)$ sont bornées. Soit α un nombre réel strictement positif. Il suffit alors d'estimer $\dot{v}(x(t))$ pour les solutions vérifiant

$$v(x(t-\tau_i(t)) \le (1+\alpha)\, v(x(t)),$$

pour tout t dans $\mathcal{T}_0$, et pour tout entier i compris entre 1 et m. De l'inégalité (3.80), on tire la majoration

$$\dot{v}(x(t)) \le \frac{1}{u_r}\left[Z_2(.)\, u + \alpha \sum_{i=1}^{m} N^i(.)\, u\right]_r v(x(t)).$$

On pose $\beta = \frac{1}{u_r} \operatorname{Sup} \left[\sum_{i=1}^{m} N^i(.)\, u\right]_r$, et donc la dérivée $\dot{v}(x(t))$ vérifie l'inégalité

$$\dot{v}(x(t)) \le -(\varepsilon - \alpha\beta)\, v(x(t)).$$

Pour α suffisamment petit, la dérivée $\dot{v}(x(t))$ est définie négative et donc, d'après le théorème 2.8, la solution x = 0 est asymptotiquement stable.

Des raisonnements semblables aux précédents permettent d'obtenir deux classes particulières de matrices $Z_2(.)$ vérifiant l'inégalité (3.78). Ces résultats sont formulés dans les deux théorèmes suivants.

Théorème 5.9. : *On suppose que le système* (3.56) *vérifie la condition (i) du Th. 5.8. S'il existe une matrice de Hurwitz à éléments constants, notée* Z, *et une matrice diagonale* $D(t, x, y_1, ..., y_m) = \mathrm{diag}(d_1(.), ..., d_k(.))$ *dont les éléments sont minorés par un nombre réel strictement positif :*

$$d_r(t, x, y_1, ..., y_m) \geq \delta, \qquad \forall\ (t, x, y_1, ..., y_m) \in \mathcal{T}_0 \times \mathcal{D} \times ... \times \mathcal{D},$$

telles que la matrice $Z_2(.)$ *soit le produit de* $D(.)$ *par* Z *:*

$$Z_2(.) = D(.)\, Z.$$

Alors, la solution nulle de (3.56) *est stable. Si de plus, les matrices* $N^i(.)$ *sont bornées sur* $\mathcal{T}_0 \times \mathcal{D} \times ... \times \mathcal{D}$*, alors elle est asymptotiquement stable. Enfin, si* $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$*, la stabilité (asymptotique) est globale.*

Théorème 5.10. [Dambrine et Richard (1994b)]: *On suppose que le système* (3.56) *vérifie la condition (i) du Th. 5.8. Si la matrice* $Z_2(.)$ *vérifie les deux conditions*

(a) *les éléments non constants de la matrice* $Z_2(t, x, y_1, ..., y_m)$ *sont isolés dans une seule ligne, et*

(b) *il existe un réel* $\varepsilon > 0$ *tel que pour tout* t *dans* $\mathcal{T}_0$*, et tout* x, y *dans* $\mathcal{D}$*,*

$$Z_2(t, x, y_1, ..., y_m) + \varepsilon\, I_k \text{ est l'opposée d'une M-matrice,}$$

Alors, la solution nulle de (3.56) *est stable, ou asymptotiquement stable si les matrices* $N^i(.)$ *sont bornées sur* $\mathcal{T}_0 \times \mathcal{D} \times ... \times \mathcal{D}$*. Enfin, si* $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$*, la stabilité (asymptotique) est globale.*

La technique d'agrégation permet dans le cas particulier d'un système de comparaison scalaire d'étendre la condition de Mori *et al.* donnée au paragraphe 2.3.1. du second chapitre aux cas des systèmes non linéaires.

Théorème 5.11. [Dambrine et Richard (1994b)]: *S'il existe* (m + 1) *fonctions continues* $a(t), b_1(t), ..., b_m(t)$ *telles que :*

(i) $\exists\ \varepsilon > 0, \forall\ t \in \mathcal{T}_0,\ a(t) \leq -\varepsilon,$

(ii) $\exists\ \alpha > 1, \forall\ t \in \mathcal{T}_0,\ a(t) + \alpha \sum_{i=1}^{m} b_i(t) < 0,$ *et*

(iii) $\forall\ t \in \mathcal{T}_0, \forall\ x, y_1, ..., y_m \in \mathbb{R}^n,\ \mu(A(t, x, y_1, ..., y_m)) \leq a(t)$ et $\| B^i(t, x, y_1, ..., y_m) \| \leq b_i(t),$

où $\| . \|$ *est une norme induite de* $\mathbb{R}^{n \times n}$*, et* $\mu(.)$ *est la mesure de matrice associée à* $\| . \|$*, alors la solution nulle de* (3.56) *est globalement asymptotiquement stable.*

Démonstration : La norme $V(x) = | x |$ est une norme vectorielle de taille 1, alors d'après les formules (3.61),

$$D^+V(x(t)) \le \mu(A(.))\, V(x(t)) + \| B(.) \|\, V(x(t-\tau(t)))$$

est un système majorant de (3.56), et donc, il en est de même pour le système

$$\dot{z}(t) = a(t)\, z(t) + \sum_{i=1}^{m} b_i(t)\, z(t-\tau_i(t)).$$

Il suffit maintenant d'appliquer la méthode de Lyapunov-Razumikhin avec la fonction $v(z) = z^2$. La dérivée de v le long des solutions vérifiant $v(z(t - \tau_i(t))) < \alpha\, v(z)$ est strictement négative : la solution $x = 0$ de (3.56) est donc globalement asymptotiquement stable.

5.4.4. Critères de stabilité dépendants de la taille des retards

Les théorèmes précédents donnent tous des conditions de stabilité indépendantes des retards. Ces conditions sont quelquefois très sévères, ou peuvent s'avérer inefficaces dans certains cas, par exemple, la synthèse d'une loi de commande rétroactive sur un système instable admettant un retard en la commande. Nous allons voir ici comment la méthode précédente peut être adaptée à la résolution de ce problème.

On va pour simplifier l'énoncé ne considérer que le cas d'un système monoretardé.

Soit un système décrit par l'équation

$$\dot{x}(t) = A[t, x(t), x(t-\tau(t))]\, x(t) + B[t, x(t), x(t-\tau(t))]\, x(t-\tau(t)), \tag{3.81}$$

où τ est une fonction positive, continue et acceptant τ_0 comme majorant.

La solution x(t) est dérivable sur $[t_0 + \tau, \infty[$. Alors, d'après le théorème de la moyenne, il existe un nombre réel θ_i dépendant de t et de la solution x, compris entre 0 et 1, tel que

$$x_i(t) - x_i(t-\tau(t)) = \tau(t)\, \dot{x}_i(t-\theta_i\tau(t)), \qquad \forall\, t \ge t_0 + 2\tau,\ i = 1, ..., n$$

Notons $\tau_1^i(t) = \theta_i\tau(t)$, et $\tau_2^i(t) = \tau_i^1(t) + \tau(t - \tau_i^1(t))$.

On définit la matrice A^i comme suit : la ième ligne de A^i est égale à la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice $A[t-\tau_1^i(t), x(t-\tau_1^i(t)), x(t-\tau_2^i(t))]$, les autres lignes étant nulles. On définit de la même façon la matrice B^i associée à la matrice $B[t-\tau_1^i(t), x(t-\tau_1^i(t)), x(t-\tau_2^i(t))]$.

Alors, si x est une solution de (3.81), x est aussi une solution de l'équation

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) = (A(.) + B(.))\, x(t) - \tau(t)\, B[t, ...] \sum_{i=1}^{n} A^i\, x(t-\tau_1^i(t)) \\ - \tau(t)\, B[t, ...] \sum_{i=1}^{n} B^i\, x(t-\tau_2^i(t)),\end{aligned} \tag{3.82}$$

pour $t \ge t_0 + 2\tau_0$.

La stabilité de la solution $x = 0$ du système (3.81) est alors prouvée si le système (3.82) vérifie les conditions d'un des théorèmes 5.4 à 5.10. On peut remarquer que ces conditions dépendent de τ, la taille maximale du retard. On peut aussi utiliser une décomposition de B en la somme de deux matrices $B(.) = B_1(.) + B_2(.)$ pour obtenir la forme intermédiaire entre (3.81) et (3.82) [Goubet, Dambrine, Richard (1995)]:

$$\dot{x}(t) = (A[t, ...] + B_1[t, ...])\, x(t) - \tau(t)\, B_1[t, ...] \sum_{i=1}^{n} A^i\, x(t - \tau_1^i(t))$$
$$- \tau(t)\, B_1[t, ...] \sum_{i=1}^{n} B^i\, x(t - \tau_2^i(t)) + B_2[t, ...]\, x(t - \tau(t)). \tag{3.83}$$

Cette forme peut être particulièrement intéressante pour le théorème 5.10 lorsque $B_1(.)$ est choisie sous la forme diagonale.

5.4.5. Exemples d'application

Dans ce paragraphe, nous proposons d'illustrer la technique de majoration et de montrer l'efficacité des résultats précédents à travers l'étude de quelques exemples.

5.4.5.a) Deux exemples d'introduction

– Exemple 1

Soit le système différentiel d'ordre 5 suivant

$$\dot{x}(t) = A_1\, x(t) + B_1\, x(t - \tau), \tag{3.84}$$

avec

$$A_1 = \begin{bmatrix} -4 & 0.7 \sin x_2 & 0.1 & 0.5 & 1 \\ 0 & -3.5 & 0.2 \text{ sat } x_4 & 0.4 & 1.3 \\ -0.7 & 0 & -2 & 0 & 0.4\, e^{-x_5^2} \\ 0.4 \cos x_3(t-\tau) & -0.2 & 0.2 & -2.5 & -0.5 \\ 0.2 & -0.4 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix},$$

et

$$B_1 = \begin{bmatrix} \sin x_1(t-\tau) & 0.3 & 0.5 & 0 & -0.5 \\ 1.2 & 0 & 0.1 & 0.5 & 0.7 \\ 0 & -0.4 & 0.3 & 0.2 & \dfrac{0.5\, t^2}{1+t^2} \\ -0.3 & 0 & 0 & 0.5 & 0.4 \text{ sat } x_4 \\ 0.3 \cos t & 0.1 & 0 & -0.3 & 0 \end{bmatrix},$$

où $\text{sat } x_4 = \begin{cases} x_4 & \text{si } -1 < x_4 < 1 \\ 1 & \text{si } x_4 \geq 1 \\ -1 & \text{si } x_4 \leq -1 \end{cases}$

Une première étude consiste à définir un système majorant d'ordre 1 obtenu simplement à partir de la norme du max ou de la somme des modules, il vient alors les systèmes de comparaison :

$$D^+V_1(x(t)) \leq -0.9\ V_1(x(t)) + 2.5\ V_1(x(t-\tau)),$$

$$D^+V_2(x(t)) \leq -1.5\ V_2(x(t)) + 2.8\ V_2(x(t-\tau)),$$

avec :

$$V_1(x) = \max_{1 \leq i \leq 5} |\, x_i \,|,$$

et

$$V_2(x) = \sum_{i=1}^{5} |\, x_i \,|.$$

Ces deux systèmes de comparaison d'ordre 1 sont instables quelle que soit la valeur de τ. Nous proposons donc de définir un système majorant d'ordre 3. Pour cela, considérons la norme vectorielle de taille 3 dont chaque composante est formée d'une norme scalaire du type norme max :

$$V_3(x) = [\max(|\, x_1 \,|, |\, x_2 \,|), \max(|\, x_3 \,|, |\, x_4 \,|), |\, x_5 \,|]^T. \tag{3.85}$$

A l'aide des formules (3.62), il vient le système de comparaison linéaire

$$\dot{z}(t) = M_1\, z(t) + N_1\, z(t-\tau), \tag{3.86}$$

avec

$$M_1 = \begin{bmatrix} -3.3 & 0.6 & 1.3 \\ 0.7 & -2 & 0.5 \\ 0.6 & 0 & -6 \end{bmatrix}, \text{ et } N_1 = \begin{bmatrix} 1.3 & 0.6 & 0.7 \\ 0.4 & 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.3 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice $M_1 + N_1$ est alors égale à

$$\begin{bmatrix} -2 & 1.2 & 2 \\ 1.1 & -1.5 & 1 \\ 1 & 0.3 & -6 \end{bmatrix}, \tag{3.87}$$

et vérifie les conditions de Kotelianski :

$$(-2) < 0, \begin{vmatrix} -2 & 1.2 \\ 1.1 & -1.5 \end{vmatrix} > 0, \text{et } \begin{vmatrix} -2 & 1.2 & 2 \\ 1.1 & -1.5 & 1 \\ 1 & 0.3 & -6 \end{vmatrix} < 0.$$

D'après le théorème (5.4), la solution nulle du système de comparaison (3.86) et celle du système initial (3.84) sont globalement exponentiellement stables.

– Exemple 2

Le système étudié est maintenant décrit par l'équation :

$$\dot{x}(t) = A_2\, x(t) + B_2\, x(t-\tau), \tag{3.88}$$

avec

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1.5-2\varphi_1(t, x, x(t-\tau)) & -0.6\varphi_1(t, x, x(t-\tau)) & 1.3\varphi_1(t, x, x(t-\tau)) \\ -0.7\varphi_2(t, x, x(t-\tau)) & -2\varphi_2(t, x, x(t-\tau)) & -0.5\varphi_2(t, x, x(t-\tau)) \\ 0.6 \sin t & 0 & -6 \end{bmatrix},$$

et

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1.4 & 0.6\varphi_1(t, x, x(t-\tau)) & 0.7\varphi_1(t, x, x(t-\tau)) \\ 0.4\varphi_2(t, x, x(t-\tau)) & 0.5\varphi_2(t, x, x(t-\tau)) & 0.5\varphi_2(t, x, x(t-\tau)) \\ -0.4 & 0.3 \text{ sat } x_4 & 0 \end{bmatrix},$$

où φ_1 et φ_2 sont deux fonctions minorées par un nombre δ strictement positif.

En choisissant la norme vectorielle

$$V_4(x) = [|x_1|, |x_2|, |x_3|]^T, \tag{3.89}$$

il vient le système de comparaison

$$\dot{z}(t) = M_2(.)\, z(t) + N_2(.)\, z(t-\tau), \tag{3.90}$$

où

$$M_2(.) = \begin{bmatrix} -1.5-2\varphi_1(.) & 0.6\varphi_1(.) & 1.3\varphi_1(.) \\ 0.7\varphi_2(.) & -2\varphi_2(.) & 0.5\varphi_2(.) \\ 0.6 & 0 & -6 \end{bmatrix},$$

et

$$N(.) = \begin{bmatrix} 1.4 & 0.6\varphi_1(.) & 0.7\varphi_1(.) \\ 0.4\varphi_2(.) & 0.5\varphi_2(.) & 0.5\varphi_2(.) \\ 0.4 & 0.3 & 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1.5 & 0.6\varphi_1(.) & 0.7\varphi_1(.) \\ 0.4\varphi_2(.) & 0.5\varphi_2(.) & 0.5\varphi_2(.) \\ 0.4 & 0.3 & 0 \end{bmatrix} = N_2(.).$$

La matrice $M_2(.) + N_2(.)$ est alors égale à :

$$\begin{bmatrix} \varphi_1(.) & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_2(.) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1.2 & 2 \\ 1.1 & -1.5 & 1 \\ 1 & 0.3 & -6 \end{bmatrix}. \tag{3.91}$$

Le second facteur de (3.91) est l'opposée d'une M-matrice irréductible et constante : le théorème 5.9 permet alors d'affirmer que la solution nulle du système (3.88) est globalement asymptotiquement stable.

5.4.5.b) Exemple de deux réacteurs nucléaires interconnectés

Le système considéré ici est le modèle de deux réacteurs nucléaires interconnectés [Gorjachenko (1971)]. Une analyse de la stabilité a été proposée dans [Kolmanovskii et Nosov (1986)] par la méthode des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii. Nous reprenons ici cet exemple à l'aide de la méthode des normes vectorielles.

Le système est décrit par les équations différentielles (d'ordre $2 + 2m_1 + 2m_2$) :

$$
\begin{aligned}
\dot{N}_1(t) &= \frac{\rho_1(t) - \beta_1}{l_1} N_1(t) + \frac{\alpha_{12}}{l_1} N_2(t - \tau_{12}) + \sum_{i=1}^{m_1} \lambda_{i1} C_{i1} \\
\dot{N}_2(t) &= \frac{\rho_2(t) - \beta_2}{l_2} N_2(t) + \frac{\alpha_{21}}{l_2} N_1(t - \tau_{21}) + \sum_{j=1}^{m_2} \lambda_{j2} C_{j2} \\
\dot{C}_{i1}(t) &= -\lambda_{i1} C_{i1} + \frac{\beta_{i1}}{l_1} N_1(t), \qquad i = 1, \ldots, m_1 \\
\dot{C}_{j2}(t) &= -\lambda_{j2} C_{j2} + \frac{\beta_{j2}}{l_2} N_2(t), \qquad j = 1, \ldots, m_2
\end{aligned}
\tag{3.92}
$$

avec $\quad \rho_k(t) = \rho_{k0} - \varepsilon_k [N_k(t) - N_{k0}], \qquad \beta_k = \sum_{i=1}^{m_k} \beta_{ik}\,, \qquad k = 1, 2.$

Ici N_i et ρ_i (i = 1, 2) sont, respectivement, la densité et la réactivité des neutrons dans le $i^{\text{ème}}$ réacteur, et C_{ik}, la concentration d'un $i^{\text{ème}}$ groupe de neutrons émis dans le réacteur numéro k.

On s'intéresse à l'étude de la stabilité de la solution stationnaire

$$
\begin{aligned}
N_k &= N_{k0} > 0, \qquad && k = 1, 2 \\
C_{i1} &= C_{i10} > 0, && i = 1, \ldots, m_1 \\
C_{j2} &= C_{j20} > 0, && j = 1, \ldots, m_2
\end{aligned}
$$

A l'aide des nouvelles variables

$$
\begin{aligned}
x_k(t) &= (N_k(t) - N_{k0})/N_{k0}, \qquad && k = 1, 2 \\
y_{i1}(t) &= (C_{i1}(t) - C_{i10})/C_{i10}, && i = 1, \ldots, m_1 \\
y_{j2}(t) &= (C_{j2}(t) - C_{j20})/C_{j20}, && j = 1, \ldots, m_2
\end{aligned}
$$

et du vecteur $x(t) = [x_1(t), x_2(t), y_{11}(t), \ldots, y_{m_1 1}, y_{12}, \ldots, y_{m_2 2}]^T$, le système (3.92) peut se récrire sous la forme

$$\dot{x}(t) = A\, x(t) + B_1\, x(t - \tau_{12}) + B_2\, x(t - \tau_{21}), \tag{3.93}$$

où

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix},$$

avec

$$A_{11} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma_1}\left[-b_1(1+x_1) - 1 - \sum_{i=1}^{m_1} \mu_{i1}\right] & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma_2}\left[-b_2(1+x_2) - 1 - \sum_{j=1}^{m_2} \mu_{j2}\right] \end{bmatrix},$$

$$A_{22} = \mathrm{diag}(-\lambda_{11};\ldots;-\lambda_{m_11}),\ A_{33} = \mathrm{diag}(-\lambda_{12};\ldots;-\lambda_{m_22}),\ A_{12} = \begin{bmatrix} \frac{\mu_{11}}{\gamma_1} & \cdots & \frac{\mu_{m_11}}{\gamma_1} \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{13} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\mu_{11}}{\gamma_2} & \cdots & \frac{\mu_{m_11}}{\gamma_2} \end{bmatrix},\ A_{21}^T = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{m_11} \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},\ \ A_{31}^T = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{m_22} \end{bmatrix},$$

et les matrices A_{23}, A_{32} sont nulles. Les matrices B_1 et B_2 sont définies par : $b_{12}^1 = \frac{1}{\gamma_1}$, $b_{21}^2 = \frac{1}{\gamma_2}$, et tous leurs autres coefficients sont nuls.
Les paramètres b_k et μ_{ik} s'expriment aisément en fonction des paramètres précédents et sont tous positifs.

Une fois établie cette modélisation (identique à celle considérée dans [Kolmanovskii et Nosov (1986)]), nous pouvons appliquer notre méthode.

Relativement à la norme vectorielle

$$V(x) = [|x_1|, |x_2|, |y_{11}|, \ldots, |y_{m_11}|, |y_{12}|, \ldots, |y_{m_22}|]^T,$$

le système (3.92) admet le système majorant

$$\dot{z}(t) = M\, z(t) + N_1\, x(t-\tau_{12}) + N_2\, x(t-\tau_{21}), \tag{3.94}$$

où $M = A$, $N_1 = B_1$ et $N_2 = B_2$.

Soit le domaine $\mathcal{D} = \{(x_1, x_2, y_{11}, \ldots, y_{m_22}) \in \mathbb{R}^{m_1+m_2+2} : 1 + x_1 \geq \alpha_1\ ,\ 1 + x_2 \geq \alpha_2\}$, où α_1 et α_2 sont deux nombres réels strictement compris entre 0 et 1.
Il existe un $\varepsilon > 0$ et un vecteur constant u à composantes strictement positives vérifiant la relation :

$$(M + N_1 + N_2)\, u \leq -\varepsilon\, u.$$

Il suffit, en effet, de choisir $u = [1 - \zeta_1, 1 - \zeta_2, 1, \ldots, 1]^T$, avec ζ_1, ζ_2 et ε vérifiant les inégalités

$$\frac{\varepsilon}{\lambda_{i1}} \leq \zeta_1 \leq \frac{b_1\,\alpha_1}{1 + b_1\,\alpha_1 + \sum_{i=1}^{m_1} \mu_{i1} - \gamma_1\,\varepsilon}$$

$$\frac{\varepsilon}{\lambda_{j2}} \leq \zeta_2 \leq \frac{b_2\,\alpha_2}{1 + b_2\,\alpha_2 + \sum_{j=1}^{m_2} \mu_{j2} - \gamma_2\,\varepsilon}$$

D'après le théorème 5.8, la solution stationnaire du système (3.92) est asymptotiquement stable pour toutes les valeurs des retards τ_{12} et τ_{21}.

Le résultat est identique à celui obtenu par Kolmanovskii et Nosov à l'aide de la fonctionnelle de Lyapunov

$$V = \frac{\gamma_1}{2}\,x_1^2 + \frac{\gamma_2}{2}\,x_2^2 + \sum_{i=1}^{m_1} \mu_{i1}\lambda_{i1}^{-1}\,y_{i1}^2 + \sum_{j=1}^{m_2} \mu_{j2}\lambda_{j2}^{-1}\,y_{j2}^2 + \int_{t-\tau_{12}}^{t} x_1^2(s)\,ds \;+\; \int_{t-\tau_{21}}^{t} x_2^2(s)\,ds.$$

5.4.5.c) Exemple de comparaison avec d'autres méthodes

Nous considérons ici le système suivant :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 2\cos^2 t \\ 1 + x_1 & -2-\sin^2 t \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a\sin^2 t \end{bmatrix} x(t-1). \tag{3.95}$$

Dans une première étape, nous allons montrer que le théorème 5.4, ainsi que les conditions de stabilité basées sur le théorème de Tokumaru *et al.* (comme notre théorème 5.4 ou les résultats énoncés dans [Wang, Chen et Lin (1987)] et [Xu (1986)]) ne peuvent s'appliquer ici.

En effet, le système de comparaison linéaire stationnaire le plus fin associé à la norme vectorielle $V(x) = [|x_1|, |x_2|]^T$ et à une région $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \leq \alpha\}$ (où α est un nombre réel strictement positif) est donné par :

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 + \alpha & -1 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & |a| \end{bmatrix} z(t-1), \tag{3.96}$$

mais M + N n'est pas l'opposé d'une M-matrice.

Cependant si l'on considère le système majorant non stationnaire relatif à V et à $\mathcal{D}$:

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 + \alpha & -2-\sin^2 t \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & |a|\sin^2 t \end{bmatrix} z(t-1), \tag{3.97}$$

les termes non constants de la nouvelle matrice M + N sont situés sur la deuxième ligne ou colonne. De plus, il existe un nombre ε positif, suffisamment petit, tel que la matrice

$$\begin{bmatrix} -2+\varepsilon & 2 \\ 1+\alpha & -2+\varepsilon+(|a|-1)\sin^2 t \end{bmatrix}$$

est l'opposé d'une M-matrice pour tout t si et seulement si la condition $|a| + \alpha < 2$ est réalisée. Sous cette hypothèse, les théorèmes 5.7 et 5.10 nous permettent de conclure à la stabilité asymptotique de la solution x = 0 du système (3.95).

5.4.5.d) Exemple d'application à la stabilisation par retour d'état

On considère le système (instable en boucle ouverte)

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1+\sin x_1 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t-\tau). \tag{3.98}$$

On se propose de stabiliser le système à l'aide d'une commande par retour d'état $u(t) = -Kx(t)$, où $K = [k_1, k_2]$.
Il vient pour le système en boucle fermée :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1+\sin x_1(t) & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} x(t-\tau). \tag{3.99}$$

La première matrice n'est l'opposée d'une M-matrice pour aucune valeur de t et de x_1, les théorèmes donnés aux paragraphes 5.4.2 et 5.4.3 ne peuvent donc s'appliquer. On se propose ainsi d'utiliser la méthode présentée au paragraphe 5.4.4. La stabilité du système (3.99) peut être montrée à travers celle du système donné par l'équation (3.82). Ce système s'écrit ici :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1+\sin x_1(t)-k_1 & 1-k_2 \end{bmatrix} x(t) \\ & -\tau \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t-\tau_1^1(t)) \\ & -\tau \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1+\sin x_1(t-\tau_2^1(t)) & 1 \end{bmatrix} x(t-\tau_2^1(t)) \\ & -\tau \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} x(t-\tau_2^2(t)). \end{aligned} \tag{3.100}$$

Soit encore :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 + \sin x_1(t) - k_1 & 1 - k_2 \end{bmatrix} x(t)$$
$$+ \tau \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -3k_1 & 2\,k_1 \end{bmatrix} x(t - \tau_1^1(t))$$
$$+ \tau \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_2(1 + \sin x_1(t - \tau_2^1(t))) & k_2 \end{bmatrix} x(t - \tau_2^1(t))$$
$$- \tau \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_1 k_2 & k_2^2 \end{bmatrix} x(t - \tau_2^2(t)). \qquad (3.101)$$

Ce système admet le système majorant suivant

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ |1-k_1|+1 & 1-k_2 \end{bmatrix} z(t) + \tau \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3\,|\,k_1\,| & 2\,|\,k_1\,| \end{bmatrix} z(t - \tau_1^1(t))$$
$$+ \tau \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2\,|\,k_2\,| & |\,k_2\,| \end{bmatrix} z(t - \tau_2^1(t))$$
$$+ \tau \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ |k_1 k_2| & k_2^2 \end{bmatrix} z(t - \tau_2^2(t)). \qquad (3.102)$$

Il s'agit maintenant de trouver des valeurs de k_1 et k_2 vérifiant la condition

$$\tau < \frac{3\,k_2 - 2\,|\,1 - k_1\,| - 5}{3\,k_2^2 + 12\,|\,k_1\,| + 7\,|\,k_2\,| + 2\,|\,k_1\,|\,|\,k_2\,|}.$$

Pour $k_1 = 1$ et $k_2 = 4.45$, on obtient la condition de stabilité $\tau < 7.49\ 10^{-2}$.

CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons présenté les principales méthodes existantes pour analyser la stabilité des systèmes non linéaires à retards. Il a ensuite été proposé une technique originale d'étude de la stabilité des systèmes à retards : la méthode des normes vectorielles. L'utilisation de ces fonctions particulières nous a permis de construire de façon simple et systématique des systèmes de comparaison. Cette méthode se révèle intéressante pour les systèmes de grandes dimensions pour lesquels l'approche peut être guidée par la structure en sous-systèmes du processus étudié bien que ceci ne constitue pas une obligation. Une particularité des systèmes de comparaison obtenus est qu'ils peuvent dépendre de la solution du système initial. Cette liberté permet d'éviter une seconde majoration pouvant aboutir à des conditions de stabilité trop sévères. Enfin, il a été montré que, sous certaines hypothèses sur la structure des systèmes majorants, la stabilité du système peut être étudiée à l'aide d'un test simple proposé initialement pour les systèmes linéaires stationnaires. Différents exemples comme celui de l'interconnection de deux réacteurs nucléaires ont montré que ces méthodes sont applicables en pratique. Un exemple a par ailleurs montré que nos résultats peuvent s'appliquer dans des cas où d'autres méthodes sont inefficaces.

CHAPITRE 4

CHAPITRE 4 :

AUTRES APPLICATIONS DE LA MÉTHODE DES NORMES VECTORIELLES

INTRODUCTION

Dans le chapitre précédent, il a été montré comment l'analyse de la stabilité d'une solution peut être menée à partir de fonctions simples : les normes vectorielles. Nous allons ici compléter cette étude en traitant quatre problèmes liés à l'analyse et à la commande. Ces problèmes largement étudiés dans le cas des systèmes non retardés sont par contre originaux en ce qui concerne la classe des systèmes à retards.

Le premier problème abordé est celui de l'estimation de domaines de stabilité et la détermination d'ensembles positivement invariants. Les résultats établis nous serviront alors à traiter le problème délicat de la commande sous contraintes en l'état et en la commande des systèmes à retards. Nous distinguerons deux cas selon que le système est linéaire ou non. Le troisième problème étudié est celui de la stabilité absolue, nous verrons alors que la méthode des normes vectorielles se révèle parfaitement adaptée à ce problème. Enfin, nous conclurons ce chapitre par l'estimation de types de comportements asymptotiques différents des points d'équilibre, par exemple les cycles-limites. Pour cela, nous définirons une nouvelle classe de systèmes de comparaison, appelés systèmes majorants non homogènes. Nous verrons alors comment il est possible d'analyser la stabilité de ces ensembles attractifs, et de donner une estimation de leur domaine d'attraction.

1. ESTIMATION DES DOMAINES DE STABILITÉ - ENSEMBLES POSITIVEMENT INVARIANTS

Comme cela a déjà été observé aux chapitres précédents, prouver la stabilité en un point d'équilibre ne suffit pas en pratique à garantir le bon fonctionnement d'un système : il faut s'assurer aussi que le domaine de la stabilité étudiée (généralement la stabilité asymptotique ou exponentielle) soit suffisamment important.
Dans cette partie, nous donnerons des conditions suffisantes pour que la stabilité du système soit globale, et lorsque ces conditions ne sont pas remplies, nous verrons qu'il est parfois possible d'obtenir de manière simple une estimation du domaine de stabilité.

1.1. Stabilité globale

On considère le système d'équations différentielles suivant :

$$\dot{x}(t) = A[t, x(t), x(t-\tau_1(t)), ..., x(t-\tau_m(t))]\, x(t) +$$

$$\sum_{i=1}^{m} B^i[t, x(t), x(t-\tau_1(t)), ..., x(t-\tau_m(t))]\, x(t-\tau_i(t)), \quad t \geq t_0, \tag{4.1}$$

défini pour tout $(t, x_t) \in [t_0, \infty[\times C$, et où les retards τ_i sont des fonctions continues par morceaux telles qu'il existe un réel $\tau > 0$ pour lequel

$$0 \leq \tau_i(t) \leq \tau, \qquad \forall\, t \geq t_0, \forall\, i = 1, ..., m$$

Le choix d'une norme vectorielle $V(x)$, $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, permet de définir le système de comparaison global

$$\dot{z}(t) = M(t, x(t), x(t-\tau_1(t)), ...)\, z(t) + \sum_{i=1}^{m} N^i(t, x(t), x(t-\tau_1(t)), ...)\, z(t-\tau_i(t)), \tag{4.2}$$

tel que, si la fonction initiale x_{t_0} du système (4.1) et la condition initiale z_{t_0} du système (4.2) vérifient la condition

$$V(x(t_0+s)) \leq z(t_0+s), \qquad \forall\, s \in [-\tau, 0],$$

alors l'inégalité

$$V(x(t\,; t_0, x_{t_0})) \leq z(t\,; t_0, z_{t_0}) \tag{4.3}$$

est satisfaite pour tout t pour lequel la solution du système de comparaison est définie.
On supposera ici que le système de comparaison possède des propriétés suffisant à assurer l'existence et l'unicité des solutions pour toute condition initiale z_{t_0} à composantes positives et toute fonction x solution de (4.1).

Il est aisé de montrer que si la solution nulle du système de comparaison est globalement stable pour toute fonction x solution de l'équation (4.1), alors la solution nulle du système initial est également globalement stable. Ce résultat est encore valable si la propriété de stabilité est remplacée par une des propriétés quelconques définies au § 4.1.2 du premier chapitre. Les résultats énoncés au chapitre 3 peuvent donc être appliqués pour montrer la stabilité au sens de Lyapunov ou la stabilité asymptotique globale. Par exemple à partir du théorème III.5.8., il vient le théorème :

Théorème 1.1. : *S'il existe un réel* $\varepsilon > 0$ *et un vecteur* u *de* $\mathbb{R}^k$ *à composantes strictement positives tels que la matrice*

$$Z_2(t, x, y_1, \dots, y_m) = M(t, x, y_1, \dots, y_m) + \sum_{i=1}^{m} N^i(t, x, y_1, \dots, y_m)$$

vérifie l'inégalité

$$Z_2(t, x, y_1, \dots, y_m) \,.\, u \le -\varepsilon\, u, \tag{4.4}$$

pour tout t *dans* $\mathcal{T}_0$, *et tout* $x, y_1, \dots, y_m$ *dans* $\mathbb{R}^n$.

Alors, la solution nulle de (4.1) *est globalement stable, ou globalement asymptotiquement stable si les matrices* $N^i(.)$ *sont bornées sur* $\mathcal{T}_0 \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$.

Et de la même façon on peut donner des énoncés correspondant aux théorèmes III.5.4 à III.5.11.

1.2. Stabilité locale

Même si le système de comparaison (4.2) est linéaire en z, sa stabilité ne permet pas toujours de conclure à la stabilité globale de la solution nulle de (4.1). Par exemple, le système de comparaison ne peut être valable que sur un domaine $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$, dans ce cas l'inégalité (4.3) n'est prouvée que pour les instants où la solution est dans $\mathcal{D}$. Un deuxième cas possible, très similaire au précédent, est celui d'un système de comparaison global, mais stable uniquement si la solution x est contrainte à appartenir à une région donnée de l'espace $\mathbb{R}^n$. Dans le cas de systèmes de comparaison non linéaires en z, il est également impossible de conclure à la stabilité globale du système initial si le système de comparaison n'est stable que localement (par rapport à la variable z).

On va considérer ici le premier cas, c'est à dire que l'ensemble d'équations (4.2) est un système de comparaison de (4.1) relatif à une région $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$, et on suppose que les hypothèses du théorème III.5.8 sont vérifiées sur cette région. Une estimation du domaine de stabilité sera obtenue s'il est possible de trouver un domaine $W \subset \mathbb{R}_+^k$ tel que l'ensemble C_W soit positivement invariant par le système (4.2). En effet, si la région U de $\mathbb{R}^n$ définie par $U = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \in W\}$ est incluse dans $\mathcal{D}$, alors l'ensemble C_U est également inclus dans le domaine de stabilité de la solution nulle de (4.1). Le théorème suivant, basé sur ce principe, généralise les résultats donnés dans [Dambrine et Richard (1993c)].

Théorème 1.2. : *Soit un système de la forme* (4.1), *admettant le système* (4.2) *comme système majorant relativement à une norme vectorielle régulière* V *et à une région* $\mathcal{D}$ *contenant un voisinage de l'origine. On suppose qu'il existe un réel* $\varepsilon > 0$ *et un vecteur* u *de* $\mathbb{R}^k$ *à composantes strictement positives pour lesquels la matrice*

$$Z_2(t, x, y_1, ..., y_m) = M(t, x, y_1, ..., y_m) + \sum_{i=1}^{m} N^i(t, x, y_1, ..., y_m)$$

vérifie l'inégalité

$$Z_2(t, x, y_1, ..., y_m) \,.\, u \leq -\varepsilon\, u, \tag{4.5}$$

pour tout t *dans* $\mathcal{T}_0$, *et tout* $x, y_1, ..., y_m$ *dans* $\mathcal{D}$.
Soit un réel $\alpha > 0$ *tel que l'ensemble* $I(u, \alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq \alpha\, u\}$ *est inclus dans* $\mathcal{D}$.
Alors, l'ensemble $\mathfrak{I}(u, \alpha)$ *défini par* $\{\varphi \in \mathbf{C} : V(\varphi(s)) \leq \alpha\, u, \forall\, s \in [-\tau, 0]\}$ *est une estimation positivement invariante du domaine de stabilité de la solution nulle du système* (4.1).
Si, de plus, toutes les matrices $N^i(t, x, y_1, ..., y_m)$ *sont bornées sur* $\mathcal{T}_0 \times \mathcal{D} \times ... \times \mathcal{D}$, *alors le domaine* $\mathfrak{I}(u, \alpha)$ *est une estimation du domaine de stabilité asymptotique de la solution nulle du système* (4.1).

Démonstration : Supposons que $x_{t_0} \in \mathfrak{I}(u, \alpha)$, et qu'il existe un instant $t_1 > t_0$ tel que $x(t_1) \notin I(u, \alpha)$.
Soit alors t_2 la borne supérieure de l'ensemble $\{t \geq t_0 : x(s) \in I(u, \alpha), \forall\, s \in [t_0, t]\}$. Il vient :
(i) $x(s) \in I(u, \alpha), \forall\, s \in [t_0, t_2]$,
(ii) $x(t_2)$ est situé sur la frontière de $I(u, \alpha)$, c'est-à-dire il existe un indice $r \in \{1, ..., k\}$ tel que

$$V_r(x(t_2)) = \alpha\, u_r,$$

et pour tout indice $s \neq r$

$$V_s(x(t_2)) \leq \alpha\, u_s,$$

(iii) il existe un réel $\Delta t > 0$, tel que

$$V_r(x(t)) > \alpha\, u_r, \qquad \text{pour tout } t \in\,]t_2, t_2 + \Delta t[$$

En $t = t_2$, la dérivée de la fonction $t \to V_r(x(t))$, pour x solution du système (4.1), vérifie l'inégalité :

$$\dot{V}_r(x(t_2)) \leq \mu_{rr}(.)\, V_r(x(t_2)) + \sum_{s\neq r} \mu_{rs}(.)\, V_s(x(t_2)) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{s=1}^{k} \nu^i_{rs}(.)\, V_s(x(t_2 - \tau_i(t_2))),$$

Les coefficients $\mu_{rs}(.)$ (pour $s \neq r$) et $\nu^i_{rs}(.)$ (pour tout s) sont positifs, il vient donc :

$$\dot{V}_r(x(t_2)) \leq \mu_{rr}(.)\ \alpha\ u_r + \sum_{s\neq r} \mu_{rs}(.)\ \alpha\ u_s + \sum_{i=1}^{m}\ \sum_{s=1}^{k} \nu^{i}_{rs}(.)\ \alpha\ u_s.$$

Cette dernière inégalité peut encore s'écrire :

$$\dot{V}_r(x(t_2)) \leq \alpha\ \ [Z_2(.)\ u]_r\,.$$

Soit enfin :

$$\dot{V}_r(x(t_2)) \leq -\ \varepsilon\ \alpha\ u_r < 0.$$

La fonction $V_r(x(t))$ est donc strictement décroissante sur un voisinage de t_2, ce qui est incompatible avec la propriété (iii). L'instant t_1 ne peut exister, et l'ensemble $\mathfrak{S}(u, \alpha)$ est donc positivement invariant par le système (4.1). Les autres résultats du théorème se déduisent simplement de ce fait.

Les résultats suivants sont des applications directes du théorème 1.2.

Théorème 1.3. [Dambrine et Richard (1993c)] : *Soit un système de la forme* (4.1), *admettant le système* (4.2) *comme système majorant relativement à une norme vectorielle régulière* V *et à une région* $\mathcal{D}$ *contenant un voisinage de l'origine. On suppose que la matrice*

$$Z_2(t, x, y_1, ..., y_m) = M(t, x, y_1, ..., y_m) + \sum_{i=1}^{m} N^i(t, x, y_1, ..., y_m)$$

vérifie les deux conditions suivantes :

(i) *les éléments non constants de la matrice* $Z_2(t, x, y_1, ..., y_m)$ *sont isolés dans une seule ligne, et*

(ii) *il existe un réel* $\varepsilon > 0$ *tel que, pour tout* t *dans* $\mathcal{T}_0$, *et tout* $x, y_1, ..., y_m$ *dans* $\mathcal{D}$,

$$Z_2(t, x, y_1, ..., y_m) + \varepsilon\ I_k \text{ est l'opposée d'une M-matrice.}$$

Soit u_c *un vecteur propre associé à la valeur propre ayant la plus grande partie réelle parmi toutes les valeurs propres des matrices* $Z_2(t, x, y_1, ..., y_m)$ *(cf. Annexe 2), et soit* α *un nombre réel arbitraire tel que l'ensemble* $I(u_c, \alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq \alpha\ u_c\}$ *est inclus dans* $\mathcal{D}$.

Alors l'ensemble $\mathfrak{S}(u_c, \alpha)$ *est une estimation positivement invariante du domaine de stabilité de la solution nulle du système* (4.1). *Si, de plus, toutes les matrices* $N^i(t, x, y_1, ..., y_m)$ *sont bornées sur* $\mathcal{T}_0 \times \mathcal{D} \times ... \times \mathcal{D}$, *alors le domaine* $\mathfrak{S}(u_c, \alpha)$ *est une estimation positivement invariante du domaine de stabilité asymptotique de la solution nulle du système* (4.1).

Théorème 1.4. [Dambrine et Richard (1993c)] : *Soit un système de la forme* (4.1), *admettant le système* (4.2) *comme système majorant relativement à une norme vectorielle régulière* V *et à une région* $\mathcal{D}$ *contenant un voisinage de l'origine. On suppose que la matrice*

$$Z_2(t, x, y_1, ..., y_m) = M(t, x, y_1, ..., y_m) + \sum_{i=1}^{m} N^i(t, x, y_1, ..., y_m)$$

est telle qu'il existe une matrice diagonale $D(t, x, y_1, ..., y_m)$ *et une matrice* Z *à coefficients constants telles que*

(i) *les éléments diagonaux de la matrice* D(.) *sont minorés par un nombre réel* $\delta > 0$ *sur l'ensemble* $\mathcal{T}_0 \times \mathcal{D} \times ... \times \mathcal{D}$,

(ii) *la matrice* Z *est l'opposée d'une M-matrice, et*

(iii) $Z_2(t, x, y_1, ..., y_m) = D(t, x, y_1, ..., y_m)\, Z$.

Alors il existe un vecteur u *à composantes strictement positives tel que le vecteur* Z u *est strictement négatif, et pour tout réel* $\alpha > 0$ *tel que l'ensemble* $I(u, \alpha)$ *est inclus dans* $\mathcal{D}$, *le sous-ensemble* $\mathfrak{I}(u, \alpha)$ *de* **C** *est une estimation positivement invariante du domaine de stabilité de la solution nulle du système* (4.1). *Si, de plus, toutes les matrices* $N^i(t, x, y_1, ..., y_m)$ *du système de comparaison sont bornées sur* $\mathcal{T}_0 \times \mathcal{D} \times ... \times \mathcal{D}$, *alors le domaine* $\mathfrak{I}(u, \alpha)$ *est une estimation positivement invariante du domaine de stabilité asymptotique de la solution nulle du système (4.1).*

En effet, si la matrice Z est l'opposée d'une M-matrice, alors il existe toujours un vecteur u à composantes strictement positives vérifiant l'inégalité (4.5) (cf. Annexe 2). On peut encore énoncer le théorème suivant qui est un corollaire immédiat de chacun des théorèmes 1.2, 1.3 et 1.4.

Théorème 1.5. [Dambrine et Richard (1993c)] : *Si le système* (4.1) *admet un système majorant relativement à une norme vectorielle régulière* V *et à une région* $\mathcal{D}$ *contenant un voisinage de l'origine, d'équation*

$$\dot{z}(t) = M\, z(t) + \sum_{i=1}^{m} N^i\, z(t - \tau_i(t)), \tag{4.6}$$

et tel que la matrice $Z = M + \sum_{i=1}^{m} N^i$ *est l'opposée d'une M-matrice, alors pour tout vecteur u à composantes strictement positives tel que*

$$Z\,u < 0,$$

et pour tout réel α *strictement positif tel que le domaine* $I(u, \alpha)$ *est inclus dans* $\mathcal{D}$, *l'ensemble* $\mathfrak{I}(u, \alpha)$ *est une estimation positivement invariante du domaine de stabilité exponentielle de la solution nulle du système* (4.1).

On va illustrer ce résultat par un exemple.
Considérons le système d'équations différentielles suivant :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -3 + x_1 & \sin y_2 \\ 2 \cos t & -4 + y_1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sin x_1 \end{bmatrix} x(t-2), \qquad (4.7)$$

où $y(t) = x(t-2) = [y_1, y_2]^T$.

Par le choix de la norme vectorielle

$$V(x) = [|x_1|, |x_2|]^T, \qquad (4.8)$$

et par application des formules (3.62), il vient l'expression du système de comparaison suivant :

$$M(t, x, y) = \begin{bmatrix} -3 + x_1 & |\sin y_2| \\ 2|\cos t| & -4 + y_1 \end{bmatrix},$$

et

$$N(t, x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & |\sin x_1| \end{bmatrix}$$

Une nouvelle majoration permet d'obtenir un système majorant stationnaire et plus simple à étudier :

$$M(x, y) = \begin{bmatrix} -3 + x_1 & 1 \\ 2 & -4 + y_1 \end{bmatrix}, \qquad (4.9a)$$

et

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (4.9b)$$

Sur le domaine $\mathcal{D}(\delta)$ défini par

$$\mathcal{D}(\delta) =]-\infty, 3 - \sqrt{2} - \delta] \times \mathbb{R},$$

où $\delta > 0$, la matrice $M(x, y)$ peut être majorée par la matrice $M(\delta)$ définie par

$$M(\delta) = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} - \delta & 1 \\ 2 & -1 - \sqrt{2} - \delta \end{bmatrix}. \qquad (4.10)$$

La matrice $M(\delta) + N$ d'expression

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{2} - \delta & 1 \\ 2 & -\sqrt{2} - \delta \end{bmatrix}$$

est l'opposée d'une M-matrice : la solution nulle du système (4.7) est donc localement exponentiellement stable.
Le vecteur $u(\delta)$ de composantes

$$u_1(\delta) = 3 - \sqrt{2} - \delta,$$

$$u_2(\delta) = 3\sqrt{2} - 2 + (3 - 2\sqrt{2})\,\delta - \delta^2$$

vérifie l'inégalité $(M(\delta) + N)\,u(\delta) < 0$.

L'ensemble $I(u(\delta), 1)$ est inclus dans la région $\mathcal{D}(\delta)$.

Les hypothèses du théorème 1.3 sont donc vérifiées, et par conséquent, le domaine $\mathfrak{I}(u(\delta), 1)$ est un ensemble positivement invariant pour le système (4.7).

En laissant δ prendre des valeurs infiniment petites, on montre que le domaine

$$\mathfrak{I} = \{\varphi \in C\colon V(\varphi(s)) < [3-\sqrt{2}\,,\, 3\sqrt{2}-2]^T,\ \forall\, s \in [-\tau, 0]\}$$

est une estimation du domaine de stabilité exponentielle de la solution nulle du système 4.7. La figure suivante illustre ce résultat : des simulations ont été effectuées pour diverses conditions initiales. Il peut être observé que toutes les fonctions initiales choisies dans le domaine $\mathfrak{I}$ assurent la convergence vers l'origine, alors qu'une initialisation relativement proche mais à l'extérieur de $\mathfrak{I}$ conduit à une divergence.

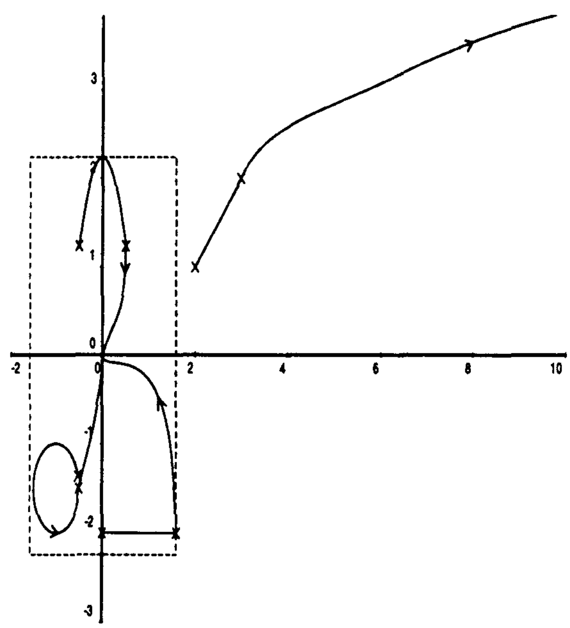

Fig. 4.1: Simulation du système (4.7) pour différentes conditions initiales

2. COMMANDE SOUS CONTRAINTES DES SYSTÈMES À RETARDS

Dans les modèles que nous avons utilisés tout au long de ce manuscrit, nous n'avons jusqu'à présent imposé aucune contrainte sur l'état ou sur la commande. Il est clair que dans une application pratique, aucune de ces variables ne peut prendre des valeurs infinies : les variables d'état ou de commande sont naturellement bornées. C'est le cas, par exemple, des systèmes à commande saturée. Il est également possible, pour des raisons de sécurité, de vouloir imposer aux vecteurs d'état et de commande certaines limitations.

Une méthode expéditive de traiter ce problème, souvent utilisée en pratique, consiste à calculer une loi de commande en ignorant les limitations, puis ensuite, à la saturer : cette méthode peut cependant s'avérer dangereuse puisqu'elle ne garantit pas la stabilité (voir à ce sujet l'exemple donné dans [Gutman et Hagander (1985)]).
Une solution, plus rigoureuse, consiste à appliquer la théorie de la commande optimale où les contraintes peuvent être prises en compte à l'aide du formalisme des paramètres de Lagrange, mais l'implantation de la loi de commande obtenue nécessite la mémorisation d'une courbe de commutation souvent complexe. De plus, dans le cadre des systèmes à retards, le calcul d'une commande optimale est lié à la résolution complexe d'une équation de type mixte (possédant à la fois des termes retardés et avancés) (cf. [Malek-Zavarei et Jamshidi (1987)]).
Une autre approche est basée sur l'utilisation de fonctions de Lyapunov et des domaines invariants associés. Cette technique a été utilisée pour diverses classes de modèles sans retards : les systèmes à temps discret ([Benzaouia et Burgat (1988)], [Vassilaki *et al.* (1988)], [Borne *et al.* (1993)], [Burgat et Tarbouriech (1993)], ...), les systèmes à temps continu qu'ils soient linéaires ([Gutman et Hagander (1985)], [Chegancas and Burgat (1986)], [Vassilaki et Bitsoris (1989)], [Benzaouia et Hmamed (1993)], ...), ou non ([Vassilaki (1990)], [Radhy *et al.* (1990)], [Radhy (1992)], [Perruquetti (1994)], ...). C'est cette dernière approche que nous allons développer ici pour les systèmes à retards non linéaires. Nous traiterons dans un deuxième temps le cas des systèmes linéaires, cette hypothèse nous permettant de considérer des domaines de contraintes d'un type plus général.

2.1. Cas des systèmes non linéaires

Soit un système décrit par l'équation vectorielle

$$\dot{x}(t) = A[t, x(t), x(t-\tau_1(t)), ..., x(t-\tau_m(t))]\, x(t) +$$
$$\sum_{i=1}^{m} B^i[t, x(t), x(t-\tau_1(t)), ..., x(t-\tau_m(t))]\, x(t-\tau_i(t)) +$$
$$C[t, x(t), x(t-\tau_1(t)), ..., x(t-\tau_m(t))]\, u(t) +$$
$$\sum_{i=1}^{m} C^i[t, x(t), x(t-\tau_1(t)), ..., x(t-\tau_m(t))]\, u(t-\tau_i(t)), \tag{4.11}$$

où x(t) est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, u(t) un vecteur de $\mathbb{R}^p$ et les retards τ_i sont des fonctions continues par morceaux telles qu'il existe un réel $\tau > 0$ pour lequel

$$0 \le \tau_i(t) \le \tau, \qquad \forall\ t \ge t_0, \forall\ i = 1, ..., m.$$

Dans cette étude, les coefficients des matrices A(.) et B^i(.) seront supposés bornés sur tout ensemble $\mathcal{T}_0 \times \mathcal{D} \times ... \times \mathcal{D}$, où $\mathcal{D}$ est un domaine borné quelconque de $\mathbb{R}^n$.

On suppose que le vecteur u(t) est contraint d'appartenir à l'ensemble polyédrique symétrique S_u défini par

$$S_u = \{u \in \mathbb{R}^p : -d \le u \le d\}, \tag{4.12}$$

où d est un vecteur de $\mathbb{R}^p$ à composantes strictement positives.
On fait également l'hypothèse que le vecteur état x(t) est soumis aux limitations suivantes:

$$x(t) \in S_x = \{x \in \mathbb{R}^n : -w \le x \le w\}, \tag{4.13}$$

où w est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ à composantes strictement positives.
Enfin, on suppose que toutes les fonctions initiales x_{t_0} appartiennent à l'ensemble $\mathcal{C}_{S_0}$, où $S_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : -w_0 \le x \le w_0\}$, avec S_0 inclus dans S_x ($w_0 \le w$).

Toutes les composantes du vecteur état seront considérées accessibles à la mesure. Le problème envisagé ici est le suivant :
déterminer un retour d'état statique

$$u(t) = K\, x(t), \tag{4.14}$$

tel que, pour toute fonction initiale x_{t_0} *à valeurs dans* S_0, *la solution du système* (4.11) *converge asymptotiquement vers l'origine sans quitter le domaine* S_x, *et tel que le vecteur commande* u(t) *appartient à l'ensemble* S_u, *pour tout* $t \ge t_0$.

Pour résoudre ce problème, nous allons suivre la démarche proposée dans [Dambrine et Richard (1994a)] : il s'agit de trouver une matrice des gains $K \in \mathbb{R}^{p\times n}$ et un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tels que :

(i) $S_0 \subseteq \Omega \subseteq S_x$,

(ii) $\forall\, x \in \Omega,\ Kx \in S_u$,

(iii) l'ensemble C_Ω est positivement invariant pour le système (4.11) muni de la loi de commande (4.14), et

(iv) la solution nulle du système (4.11) muni de la loi de commande (4.14) est asymptotiquement stable, et son domaine de stabilité asymptotique contient l'ensemble C_Ω.

Soit alors un système majorant du système bouclé (4.11)-(4.14) relatif à la norme vectorielle $V(x) = [|x_1|, ..., |x_n|]^T$ et à la région S_x, d'équation

$$\dot{z}(t) = M[., K]\, z(t) + \sum_{i=1}^{m} N^i[., K]\, z(t - \tau_i(t)), \tag{4.15}$$

avec $M[., K] = M[t, x(t), x(t-\tau_1(t)), ..., x(t-\tau_m(t)), K]$ associée à la matrice $A(.) + C(.)K$, et $N^i[., K] = N^i[t, x(t), x(t-\tau_1(t)), ..., x(t-\tau_m(t)), K]$ associée à la matrice $B^i(.) + C^i(.)K$.

On cherchera alors à déterminer une matrice K telle que la matrice

$$Z_2(., K) = M(., K) + \sum_{i=1}^{m} N^i(., K)$$

vérifie l'hypothèse du théorème 1.2, c'est-à-dire il existe un vecteur v de $\mathbb{R}^n$ à composantes strictement positives et un réel $\varepsilon > 0$ tels que

$$Z_2(t, x(t), ..., x(t-\tau_m(t)), K)\, v \leq -\varepsilon\, v. \tag{4.16}$$

Alors, le problème est résolu s'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que le domaine $I(v, \alpha)$ (défini au premier paragraphe de ce chapitre) vérifie les conditions

a) $w_0 \leq \alpha\, v \leq w$, et

b) $\alpha\, |K|\, v \leq d$, (4.17)

où la matrice $|K|$ est déduite de K en remplaçant chacun de ses termes par sa valeur absolue.

En effet, le domaine $\Omega = I(v, \alpha)$ vérifie les conditions (i) à (iv) : les conditions (i) et (ii) par construction, les conditions (iii) et (iv) par l'application du théorème 1.2.

En pratique, pour simplifier, on choisira $\Omega = S_0$, ou $\Omega = S_x$, c'est-à-dire α sera pris égal à 1, et le vecteur v égal à w_0 ou w. Il restera alors à trouver une matrice K vérifiant les inégalités (4.16) et (4.17).

Afin d'illustrer cette méthode, considérons l'exemple suivant.

Soit le système différentiel suivant :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -4 + \sin x_1(t) & 3 \\ 2 + \cos t & -3 + x_2(t-2) \end{bmatrix} x(t) +$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x(t-2) + \begin{bmatrix} 2 + x_2(t) \\ 3 \end{bmatrix} u(t), \tag{4.18}$$

avec la loi de commande :

$$u(t) = K\, x(t), \quad K = [k_1, k_2]. \tag{4.19}$$

Le vecteur état est contraint à rester dans l'ensemble

$$S_x = \{x \in \mathbb{R}^2 : [-1, -1] \leq x^T \leq [1, 1]\}, \tag{4.20}$$

et les limitations imposées sur le vecteur de commande sont :

$$| u(t) | \leq 3, \ \forall\, t \in \mathcal{T}_0. \tag{4.21}$$

Le système en boucle fermé est décrit par l'équation :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -4 + \sin x_1(t) + (2 + x_2(t))\, k_1 & 3 + (2 + x_2(t))\, k_2 \\ 2 + \cos t + 3\, k_1 & -3 + x_2(t-2) + 3\, k_2 \end{bmatrix} x(t)$$
$$+ \begin{bmatrix} x_1(t) & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x(t-2). \tag{4.22}$$

Un système de comparaison de (4.22) valable sur le domaine S_x et relatif à la norme vectorielle $V(x) = [| x_1 |, | x_2 |]^T$ est donné par

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} -3 + 2k_1 + | k_1 | & | 3 + 2k_2 | + | k_2 | \\ | 2 + 3k_1 | + 1 & -2 + 3k_2 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} z(t-2). \tag{4.23}$$

Pour que le système (4.23) soit asymptotiquement stable et que le domaine S_x soit positivement invariant par (4.23), il suffit que le vecteur K vérifie les inégalités

$$-2 + 2\, k_1 + | k_1 | + | k_2 | + | 3 + 2\, k_2 | < 0,$$

et

$$1 + 3\, k_2 + | 2 + 3\, k_1 | < 0. \tag{4.24}$$

Afin d'améliorer la dynamique, on choisit $K = [-1.25, -1.5]$ qui minimise le critère

$$\max\left(-2 + 2k_1 + |k_1| + |k_2| + |3 + 2k_2|,\ 1 + 3k_2 + |2 + 3k_1|\right). \qquad (4.25)$$

On peut alors montrer que le système (4.23) est exponentiellement stable avec un taux de décroissance égal à 0.235 (valeur déterminée en recherchant la plus grande racine caractéristique réelle). Il est alors clair que la commande $u = Kx$ assure que la solution du système (4.22), pour toute fonction initiale x_{t_0} à valeurs dans S_x, converge exponentiellement vers l'origine sans quitter le domaine S_x, et ceci alors que que le vecteur commande $u(t)$ vérifie l'inégalité (4.21) pour tout t. Ce résultat est confirmé par la simulation du système (4.22) présentée Fig. 4.2. On y a représenté deux solutions du système en boucle fermée, et une solution (divergente) du système en boucle ouverte.

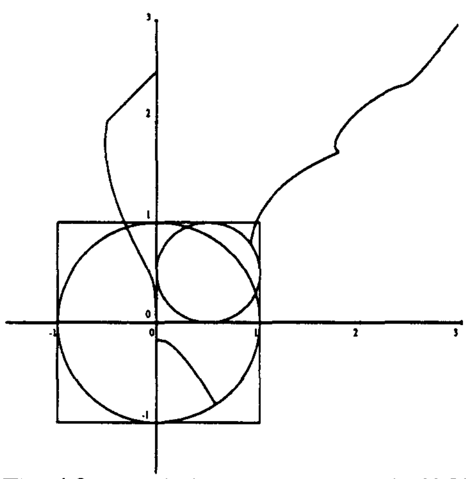

Fig. 4.2 : simulation des solutions de (4.22)

Remarque 1 : l'utilisation de la méthode des normes vectorielles permet de prendre en compte des ensembles de contraintes S_u et S_x définis comme le produit de boules associées à diverses normes comme l'ensemble

$$S_u = \{u \in \mathbb{R}^3 : u_1^2 + u_2^2 \leq \alpha_1,\ |u_3| \leq \alpha_2\}.$$

Remarque 2 : cette méthode est basée sur la résolution de l'inéquation (4.16) portant sur la matrice K, même dans le cas où le système majorant est à coefficients constants, c'est-à-dire $Z_2 = M(K) + N^i(K)$, il n'existe aucune condition générale (de type condition de commandabilité) permettant d'assurer l'existence d'une solution K stabilisante. Ce problème reste donc ouvert.

Remarque 3 : Dans l'exemple traité, nous avons considéré une commande non retardée, mais notre méthode peut aussi fonctionner en présence de retards en la commande.

2.2. Cas des systèmes linéaires stationnaires

2.2.1. Formulations du problème

On considère dans cette partie le cas de systèmes décrits par une équation différentielle de la forme :

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,x(t-\tau) + C\,u(t), \qquad t \geq 0, \qquad (4.26)$$

où x(t) est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, u(t) appartient à $\mathbb{R}^p$, les matrices A, B et C sont constantes et de dimensions appropriées, et enfin τ est un nombre réel strictement positif. Le système étant à coefficients constants, l'instant initial est fixé à $t_0 = 0$.
Nous ne considérons dans cette partie que le cas de systèmes à commande non retardée, mais la méthode proposée permet de prendre en compte le cas de retards en la commande.

Dans la suite, les notations suivantes seront employées : les matrices A^+, A^-, A_+ et A_- associées à la matrice $A = \{a_{ij}\}$ sont définies par

$$A^+ = \begin{cases} a_{ii} & \text{pour } i = j \\ \max\,(0,\, a_{ij}) & \text{pour } i \neq j \end{cases}, \qquad A^- = A^+ - A\,,$$

$$A_+ = \{\max\,(0,\, a_{ij})\}, \qquad A_- = A_+ - A\,.$$

Le vecteur commande u(t) est supposé vérifier les contraintes dissymétriques

$$-d_2 \leq u(t) \leq d_1, \qquad (4.27)$$

où d_1, d_2 sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^p$ à composantes strictement positives.

Les contraintes sur le vecteur état sont définies comme suit : pour tout instant $t \geq 0$, le vecteur x(t) appartient à l'ensemble

$$S_x = \{x \in \mathbb{R}^n : \ -w_2 \leq Sx \leq w_1\}, \qquad (4.28)$$

où S est une matrice réelle de dimension $q \times n$ de rang égal à n, et w_1, w_2 sont deux vecteurs de dimension q à composantes strictement positives.

On suppose encore que les fonctions initiales x_0 appartiennent à l'ensemble C_{S_0}, où

$$S_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : \ -c_2 \leq Dx \leq c_1\}, \qquad (4.29)$$

D étant une matrice à coefficients réels, de dimensions $r \times n$ et de rang n, où les vecteurs c_1, c_2, de dimension r, sont à composantes réelles strictement positives. On suppose évidemment que les conditions initiales vérifient les contraintes (4.28) sur l'état, c'est-à-dire $S_0 \subseteq S_x$.

Le problème que nous nous proposons d'étudier est défini comme suit :

Trouver une loi de commande par retour d'état statique

$$u(t) = Kx(t) \tag{4.30}$$

telle que, pour toute fonction d'état initiale x_0 *vérifiant les contraintes* (4.29), *la solution du système en boucle fermée, d'équation*

$$\dot{x}(t) = (A + CK)\, x(t) + B\, x(t - \tau), \tag{4.31}$$

converge asymptotiquement vers l'origine alors que, pour tout $t \geq 0$, *le vecteur commande vérifie les contraintes* (4.27) *et le vecteur état reste dans l'ensemble* S_x.

Le choix d'une commande par retour d'état linéaire nous permet de reformuler les contraintes (4.27) sur le vecteur commande : soit $\mathbf{C}(K, d_1, d_2)$ le sous-ensemble de $\mathbf{C}$ défini par

$$\mathbf{C}(K, d_1, d_2) = \{\varphi \in \mathbf{C} : \forall\, s \in [-\tau, 0], -d_2 \leq K\varphi(s) \leq d_1\},$$

il est alors clair que tout élément de $\mathbf{C}(K, d_1, d_2)$ vérifie les contraintes (4.27) lorsque u est de la forme (4.30).

D'une façon analogue, l'ensemble des fonctions d'état vérifiant les contraintes (4.28) est

$$\mathbf{C}(S, w_1, w_2) = \{\varphi \in \mathbf{C} : \forall\, s \in [-\tau, 0], -w_2 \leq S\varphi(s) \leq w_1\},$$

et le sous-ensemble des états initiaux vérifiant les contraintes (4.29) est donné par

$$\mathbf{C}(D, c_1, c_2) = \{\varphi \in \mathbf{C} : \forall\, s \in [-\tau, 0], -c_2 \leq D\varphi(s) \leq c_1\}$$

En utilisant ce formalisme, le problème précédent peut être reformulé ainsi :

trouver une matrice des gains K *telle que le système* (4.31) *est asymptotiquement stable, et que, pour tout état initial appartenant à* $\mathbf{C}(D, c_1, c_2)$, *l'état* x_t *est dans l'ensemble* $\mathbf{C}(S, w_1, w_2)$, *pour tout instant* $t \geq 0$, *et dans l'ensemble* $\mathbf{C}(K, d_1, d_2)$ *pour tout instant* $t \geq \tau$.

Comme pour le cas non linéaire, la résolution de ce problème est liée à l'existence et à la détermination d'un ensemble positivement invariant par (4.31) et vérifiant certaines propriétés :

Théorème 2.1. [Dambrine et Richard (1995)] : *La matrice* $K \in \mathbb{R}^{p \times n}$ *est une solution du problème ci-dessus si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées* :
(i) *le système* (4.31) *est asymptotiquement stable,*
(ii) *il existe un ensemble* $\Omega \subseteq C$ *positivement invariant par le système* (4.31) *tel que*

$$C(D, c_1, c_2) \subseteq \Omega \subseteq C(S, w_1, w_2),$$
$$x_\tau(\Omega) \subseteq C(K, d_1, d_2),$$

où $x_\tau(\Omega) = \{x_\tau(\varphi) : \varphi \in \Omega\}$ ($x_t(\varphi)$ *représente l'état à l'instant* t *de la solution du système* (4.31) *de condition initiale* φ).

Démonstration : Il est évident que si un tel ensemble Ω existe alors K est solution de notre problème. Supposons donc qu'il existe une loi de commande $u = Kx$ solution du problème précédent. Soit alors l'ensemble Ω_1 défini par :

$$\Omega_1 = \{x_t(\varphi) : \varphi \in C(D, c_1, c_2)\}$$

Alors, il est clair que Ω_1 est un ensemble positivement invariant pour le système (4.31) tel que

$$C(D, c_1, c_2) \subseteq \Omega_1,$$

et de plus, puisque u est une commande satisfaisant les contraintes imposées sur l'état et la commande, les inclusions

$$\Omega_1 \subseteq C(S, w_1, w_2),$$
$$x_\tau(\Omega_1) \subseteq C(K, d_1, d_2)$$

sont vérifiées.

Ce résultat nous fournit la méthode suivante de résolution :
déterminer une matrice K telle que
(i) le retour d'état $u = Kx$ stabilise le système (4.26),
(ii) un des trois sous-ensembles $C(D, c_1, c_2)$, $C(S, w_1, w_2)$, ou $C(K, d_1, d_2)$ est positivement invariant pour le système (4.31), et
(iii) les inclusions

$$C(D, c_1, c_2) \subseteq C(S, w_1, w_2)$$
$$C(D, c_1, c_2) \subseteq C(K, d_1, d_2)$$

ou

$$C(D, c_1, c_2) \subseteq C(S, w_1, w_2) \subseteq C(K, d_1, d_2)$$

ou encore

$$C(D, c_1, c_2) \subseteq C(K, d_1, d_2) \subseteq C(S, w_1, w_2)$$

sont vérifiées.

Il nous reste donc à établir les conditions pour qu'un ensemble polyédrique soit positivement invariant.

2.2.2. Conditions d'invariance positive pour un ensemble polyédrique

Avant d'énoncer le théorème principal, on va donner quelques résultats préliminaires.

Lemme 2.1. : *Soit* $F \in \mathbb{R}^{p \times n}$ *de rang* p et $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. *Si*

$$\mathrm{Ker}\, F \subseteq \mathrm{Ker}\, FA,$$

alors il existe une matrice $H \in \mathbb{R}^{p \times p}$ *solution de l'équation*

$$FA = HF$$

Ce résultat est démontré dans [Bitsoris (1988)].

Lemme 2.2. : *Soit* $F \in \mathbb{R}^{p \times n}$. *S'il existe deux vecteurs* w_1 *et* w_2 *de* $\mathbb{R}^p$ *à composantes strictement positives tels que l'ensemble*

$$\mathbf{C}(F, w_1, w_2) = \{\varphi \in \mathbf{C} : \forall\, s \in [-\tau, 0],\ -w_2 \leq F\varphi(s) \leq w_1\}$$

est positivement invariant pour le système (4.32), *alors l'ensemble*

$$\mathbf{C}_{\mathrm{Ker}\,F} = \{\varphi \in \mathbf{C} : \forall\, s \in [-\tau, 0],\ F\varphi(s) = 0\}$$

est également positivement invariant pour le système (4.32).

Démonstration : On s'appuie sur le fait que si $\mathbf{C}(F, w_1, w_2)$ est positivement invariant, alors, le système (4.32) étant linéaire, pour tout réel $\alpha > 0$, l'ensemble $\mathbf{C}(F, \alpha w_1, \alpha w_2)$ est également positivement invariant pour le système (4.32).
Soit alors φ un élément de $\mathbf{C}_{\mathrm{Ker}\,F}$, et supposons qu'il existe un instant t_1 tel que $Fx(t_1\,;0,\varphi) \neq 0$. Alors, il existe $\alpha > 0$ et un indice i ($1 \leq i \leq p$) tels que

$$[Fx(t_1\,;0,\varphi)]_i > \alpha\, w_{1i}, \quad \text{ou} \quad [Fx(t_1\,;0,\varphi)]_i < -\alpha\, w_{2i}$$

D'où la contradiction : la solution $x(t\,;\varphi)$ de condition initiale prise dans l'ensemble positivement invariant $\mathbf{C}(F, \alpha w_1, \alpha w_2)$ le quitte.

Le lemme suivant propose un premier résultat sur l'invariance du sous-ensemble $\mathbf{C}(F, w_1, w_2)$, dans le cas particulier p = n et $F = I_n$.

Lemme 2.3. : *L'ensemble*

$$\mathbf{C}(I_n, w_1, w_2) = \{\varphi \in \mathbf{C} : \forall\, s \in [-\tau, 0],\ -w_2 \leq \varphi(s) \leq w_1\}$$

est positivement invariant pour le système

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,x(t-\tau) \tag{4.32}$$

si, et seulement si, l'inégalité vectorielle

$$\begin{bmatrix} A^+ + B_+ & A^- + B_- \\ A^- + B_- & A^+ + B_+ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \leq 0, \tag{4.33}$$

est vérifiée.

Remarque : Dans le cas de contraintes symétriques ($w_1 = w_2$), on retrouve la condition du théorème 1.5.

Démonstration :

On note w_{1i} la i^e composante du vecteur w_1, et w_{2i} celle du vecteur w_2.

a) condition nécessaire :

Supposons qu'il existe un indice $i \in \{1, ..., 2n\}$ tel que la i^e composante du vecteur

$$\begin{bmatrix} A^+ + B_+ & A^- + B_- \\ A^- + B_- & A^+ + B_+ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

soit strictement positive.

Supposons i compris entre 1 et n.

Soit φ une fonction de **C** telle que la valeur de φ en 0 est définie par

$$\varphi_j(0) = \text{signe}(a_{ij})\, w_{1j} \text{ pour } j \neq i \text{ et } \varphi_i(0) = w_{1j},$$

la valeur de φ en $-\tau$ est donnée par : $\varphi_j(-\tau) = \text{signe}(b_{ij})\, w_{2j}$, et pour tout s dans $]-\tau, 0[$

$$\varphi(s) = (s + \tau)\frac{\varphi(0) - \varphi(-\tau)}{\tau} + \varphi(-\tau).$$

La fonction φ appartient à l'ensemble $\mathbf{C}(I_n, w_1, w_2)$, mais si x est la solution de (4.32) de condition initiale φ alors $\dot{x}_i(0) > 0$: la solution quitte alors le domaine $\mathbf{C}(I_n, w_1, w_2)$ qui ne peut donc être invariant.

Si l'indice i est compris entre n + 1 et 2n, un raisonnement analogue mène à la même contradiction.

b) condition suffisante :

Soit la fonction $v(x) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \left(\max\left(\frac{x_i}{w_{1i}}, \frac{-x_i}{w_{2i}}\right)\right)$. On va montrer que la fonction définie positive v est une fonction de Lyapunov-Razumikhin lorsque la condition (4.33) est remplie.

En effet, soit x une solution de l'équation telle qu'à l'instant t, l'inégalité

$$v(x(t - \tau) \leq v(x(t)) \tag{4.34}$$

soit vérifiée.

Il existe un indice i compris entre 1 et n tel que $v(x(t)) = \frac{x_i(t)}{w_{1i}}$, ou $v(x(t)) = -\frac{x_i(t)}{w_{2i}}$.

Supposons que $v(x) = \frac{x_i}{w_{1i}}$. La dérivée de v le long des solutions de (4.33) à l'instant t est égale à :

$$\dot{v}(x(t)) = \frac{1}{w_{1i}}\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, x_j(t - \tau)\right].$$

Notons $a_{ij}^{+} = \max(0, a_{ij})$, et $a_{ij}^{-} = \max(0, -a_{ij})$. On a alors :

$$\begin{cases} a_{ij} = a_{ij}^{+} - a_{ij}^{-} \\ | a_{ij} | = a_{ij}^{+} + a_{ij}^{-} \end{cases}$$

et en adoptant la même notation pour les b_{ij}, il vient :

$$\dot{v}(x(t)) = \frac{1}{w_{1i}} \left[a_{ii} x_i + \sum_{j \neq i} a_{ij}^{+} x_j(t) - \sum_{j \neq i} a_{ij}^{-} x_j(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{+} x_j(t-\tau) - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{-} x_j(t-\tau)\right].$$

Or, par définition de v, on a

$$x_j(t) \leq \frac{w_{1j}}{w_{1i}} x_i(t) \text{ et } -x_j(t) \leq \frac{w_{2j}}{w_{1i}} x_i(t).$$

De même, de l'inégalité (4.34), on peut déduire les relations

$$x_j(t-\tau) \leq \frac{w_{1j}}{w_{1i}} x_i(t) \text{ et } -x_j(t-\tau) \leq \frac{w_{2j}}{w_{1i}} x_i(t).$$

Il vient alors

$$\dot{v}(x(t)) \leq \frac{1}{w_{1i}} \left[a_{ii} w_{1i} + \sum_{j \neq i} a_{ij}^{+} w_{1j} + \sum_{j \neq i} a_{ij}^{-} w_{2j} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{+} w_{1i} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{-} w_{2j}\right] v(x(t)),$$

c'est-à-dire, sous forme vectorielle (où $[\ ]_i$ représente la ième composante du vecteur entre crochet) :

$$\dot{v}(x(t)) \leq \frac{1}{w_{1i}} \left[A^{+} w_1 + A^{-} w_2 + B_{+} w_1 + B_{-} w_2\right]_i v(x(t)).$$

L'inégalité (4.33) entraîne alors l'inégalité $\dot{v}(x(t)) \leq 0$.

Si $v(x(t)) = -\frac{x_i(t)}{w_{2i}}$, alors, par un raisonnement identique, on montre que $\dot{v}(x(t))$ vérifie la même inégalité. La fonction v est donc une fonction de Lyapunov-Razumikhin pour le système (4.32). L'ensemble $\{\varphi \in \mathbf{C} : v(\varphi(s)) \leq 1, \forall s \in [-\tau, 0]\}$ $(= \mathbf{C}(I_n, w_1, w_2))$ est donc positivement invariant pour le système (4.32).

Ces résultats nous permettent d'établir le théorème suivant :

Théorème 2.1. : *Soit* $F \in \mathbb{R}^{p \times n}$ *de rang* p, *alors l'ensemble*

$$\mathbf{C}(F, w_1, w_2) = \{\varphi \in \mathbf{C} : \forall s \in [-\tau, 0], -w_2 \leq F\varphi(s) \leq w_1\},$$

est positivement invariant pour le système (4.32) *si, et seulement si, il existe deux matrices* H *et* G, *éléments de* $\mathbb{R}^{p \times p}$, *telles que*

$$FA = GF$$

$$FB = HF$$

$$\begin{bmatrix} G^{+} + H_{+} & G^{-} + H_{-} \\ G^{-} + H_{-} & G^{+} + H_{+} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \leq 0, \tag{4.35}$$

Démonstration :

Condition nécessaire : On suppose l'ensemble $C(F, w_1, w_2)$ positivement invariant pour le système (4.32), alors d'après le lemme 2.2, l'ensemble $C_{\mathrm{Ker}\, F}$ est également positivement invariant pour le même système. Soit un élément x quelconque pris dans l'espace Ker F, et soit φ_1 la fonction définie par

$$\varphi_1(s) = \frac{s + \tau}{\tau}\, x.$$

Par construction, $\varphi_1 \in C_{\mathrm{Ker}\, F}$, donc la solution $x(t\,; \varphi_1)$ vérifie $Fx(t\,; \varphi_1) \equiv 0$, et donc également $F\dot{x}(t\,; \varphi_1) \equiv 0$. En $t = 0$, il vient de (4.32) la relation $FA\,x = 0$. D'où d'après le lemme 2.1, il existe une matrice G telle que $FA = GF$. De même, en effectuant ce raisonnement avec $\varphi_2 = -\frac{s}{\tau}\, x$, on montre qu'il existe une matrice H telle que $FB = HF$.

Soit alors la fonction z(t) définie par $z(t) = Fx(t)$. Lorsque x(t) est solution de l'équation (4.32), la fonction z(t) vérifie l'équation

$$\dot{z}(t) = G\, z(t) + H\, z(t - \tau) \tag{4.36}$$

F étant de rang p, on peut montrer que l'ensemble $C(I_p, w_1, w_2)$ est positivement invariant pour le système (4.36), et donc, d'après le lemme 2.3, G et H vérifient la condition (4.35).

Condition suffisante :

Supposons qu'il existe une fonction $\varphi \in C(F, w_1, w_2)$ telle que la solution $x(t\,; \varphi)$ quitte à l'instant t_1 le domaine $\{x \in \mathbb{R}^n : -w_2 \leq Fx \leq w_1\}$. Alors, la fonction $z(t) = Fx(t\,; \varphi)$ est une solution de l'équation (4.36) à condition initiale dans $C(I_p, w_1, w_2)$, et qui à l'instant t_1 quitte le domaine $\{z \in \mathbb{R}^p : -w_2 \leq z \leq w_1\}$. Cette situation est impossible puisque l'inégalité (4.35) et le lemme 2.3 impliquent que l'ensemble $C(I_p, w_1, w_2)$ est positivement invariant pour le système (4.36) : l'ensemble $C(F, w_1, w_2)$ est donc positivement invariant pour le système (4.32).

Théorème 2.2. : *Soit* $F \in \mathbb{R}^{p \times n}$ *de rang* n (*avec* $p > n$), *et soient* G *et* H *deux matrices solutions des équations*

$$FA = GF$$
$$FB = HF$$

Alors, si l'inégalité (4.35) *est vérifiée, le sous-ensemble* $C(F, w_1, w_2)$ *est positivement invariant pour le système* (4.32).

La démonstration de ce résultat est identique à celle de la condition suffisante du théorème précédent et n'est donc pas répétée ici.

Remarque : Selon que F est de rang inférieur ou supérieur à n, la forme du domaine de contraintes $S = \{x \in \mathbb{R}^n : -w_1 \le Fx \le w_2\}$ est différente :

– si $p < n$, le domaine S est non borné, par exemple, la figure (4.3.a) représente le domaine S_1 pour $F= [1, 1]$ $w_1 = 2$, $w_2 = 3$ ($n = 2$, $p = 1$).

– si $p \ge n$, le domaine S est borné, il possède p faces parallèles ; par exemple, le domaine S_2 pour $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ pour $w_1 = [2, 2, 3]^T$, $w_2 = [1, 2, 2]^T$ ($n = 2$, $p = 3$) est illustré figure (4.3.b)

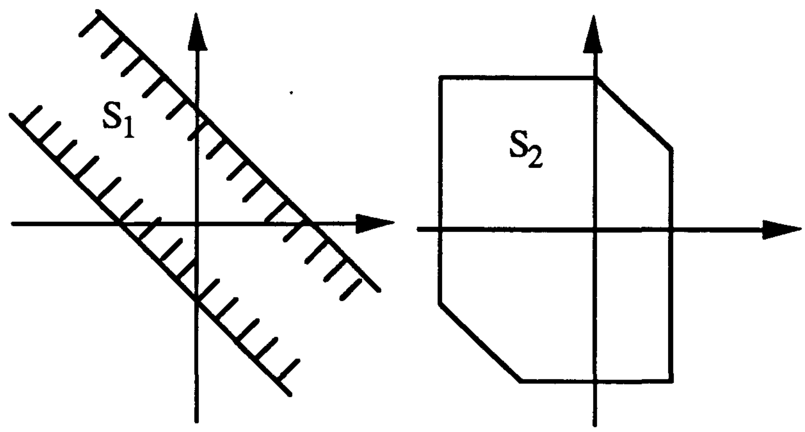

Fig. 4.3.a exemple d'ensemble S (cas p < n) Fig. 4.3.b. exemple d'ensemble S (cas p > n)

2.2.3. Application à la synthèse d'un régulateur

L'algorithme que nous proposons maintenant est basé sur l'invariance positive du sous-ensemble $C(S, w_1, w_2)$.

La loi de commande $u = Kx$, avec $K \in \mathbb{R}^{p \times n}$ est une solution de notre problème si :

(i) le système (4.31) est asymptotiquement stable ;

(ii) il existe deux matrices G et H vérifiant

$$S(A + CK) = GS \qquad (4.37)$$

$$SB = HS \qquad (4.38)$$

et telles que :

$$Mw \le 0, \qquad (4.39)$$

où

$$M = \begin{bmatrix} G^+ + H_+ & G^- + H_- \\ G^- + H_- & G^+ + H_+ \end{bmatrix}, \qquad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \qquad (4.40)$$

(iii) $C(S, w_1, w_2) \subseteq C(K, d_1, d_2)$. (4.41)

Remarque 1 : supposons que l'inégalité (4.39) est stricte, alors il vient

$$[(G^+ + G^-) + (H_+ + H_-)](w_1 + w_2) < 0.$$

Le système (4.36) vérifie donc les conditions de stabilité asymptotique de Tokumaru *et al.* (1975), ceci entraîne la stabilité asymptotique du système bouclé puisque la matrice S est supposé de rang n.

Remarque 2 : la condition (iii) peut être remplacée de manière équivalente par l'ensemble d'inégalités :

$$- d_2 \leq Kx_{(i)} \leq d_1, \tag{4.42}$$

où les $x_{(i)}$ représentent les sommets du polyèdre

$$\{x \in \mathbb{R}^n : - w_2 \leq Sx \leq w_1\}.$$

Remarque 3 : cette résolution du problème peut ne posséder aucune solution ou au contraire en avoir une infinité ; dans ce dernier cas, il est intéressant de pouvoir trouver une loi u = Kx optimisant le temps de réponse du système (4.31).
Cela peut être réalisé en résolvant le problème d'optimisation suivant :

Déterminer K maximisant le critère ε, sous les contraintes suivantes :

$$S(A + CK) = GS \tag{4.43a}$$

$$SB = HS \tag{4.43b}$$

$$\begin{bmatrix} G^+ + e^{\tau\varepsilon} H_+ & G^- + e^{\tau\varepsilon} H_- \\ G^- + e^{\tau\varepsilon} H_- & G^+ + e^{\tau\varepsilon} H_+ \end{bmatrix} w \leq -\varepsilon\, w \tag{4.43c}$$

$$- d_2 \leq Kx_{(i)} \leq d_1 \tag{4.43d}$$

$$\varepsilon \geq 0 \tag{4.43e}$$

Ce problème est fortement non linéaire et par conséquent complexe à résoudre, on peut cependant trouver une loi quasi-optimale en remplaçant le terme $e^{\tau\varepsilon}$ par une constante β à condition de vérifier *a posteriori* l'inégalité $e^{\tau\varepsilon} \leq \beta$.

Exemple :

Soit le système

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(t-1) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t), \qquad (4.44)$$

Pendant le fonctionnement, le vecteur état doit rester dans l'ensemble

$$S_x = \{x \in \mathbb{R}^2 : -[2\ ;\ 2] \leq x^T \leq [3\ ;\ 2]\}.$$

On supposera que les conditions initiales sont à valeurs dans S_x (i.e. $S_0 = S_x$).

On cherche une matrice $K = [k_1, k_2]$ telle que le bouclage $u = Kx$ stabilise le système (4.42) tout en vérifiant les contraintes

$$-10 \leq u(t) \leq 9.$$

Ici, la matrice $S = I_2$, d'où $G = A + CK$ et $H = B$.

L'ensemble des coefficients k_1 et k_2 vérifiant les conditions (4.40) et (4.42) est représenté figure (4.4) :

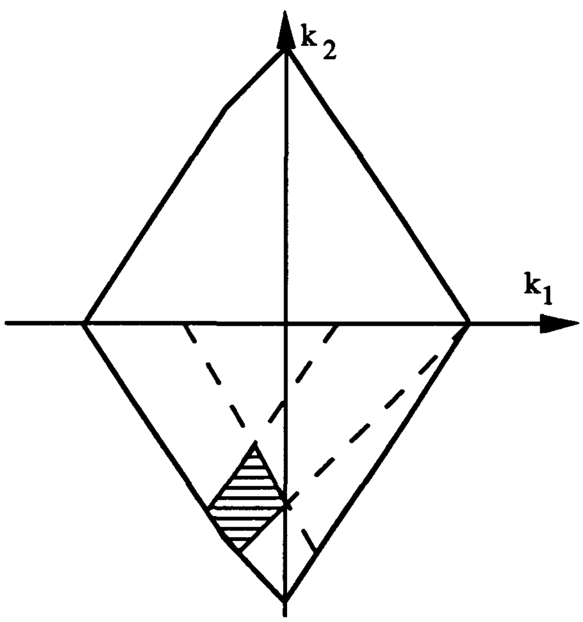

Fig. 4.4. : Domaine des gains admissibles

La solution du problème (4.43) est donnée par $K = [-1.12\ ;\ -3.32]$. La valeur de ε obtenue est alors égale à 0.254 : ceci garantit donc que le bouclage défini par $u = Kx$ stabilise le système de façon exponentielle avec un taux de décroissance égal à 0.254.

3. STABILITÉ ABSOLUE DES SYSTÈMES À RETARDS

Un système

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau) + Qf(\sigma), \qquad (4.45)$$
$$\sigma = C_0x(t) + C_1x(t-\tau),$$

où A et B $\in \mathbb{R}^{n\times n}$, Q $\in \mathbb{R}^{n\times 1}$, C_0 et $C_1 \in \mathbb{R}^{1\times n}$, et f est une fonction scalaire définie sur $\mathbb{R}$, est dit absolument stable par rapport au secteur $[k_1, k_2]$ si la solution nulle du système (4.45) est globalement asymptotiquement stable pour toute fonction f vérifiant pour tout σ les inégalités

$$k_1 \le \frac{f(\sigma)}{\sigma} \le k_2.$$

Les premières études sur le problème de la stabilité absolue pour les systèmes à retards ont été réalisées par Popov et Halanay (1962) et par Rasvan (1972).
Dans cette partie, nous proposons de montrer comment une résolution de ce problème peut être abordée à l'aide de la méthode des normes vectorielles

3.1. Critères matriciels

3.1.1. Commande non retardée

On considère ici le système monovariable (4.45) avec une commande non retardée ($\sigma = C_0x$).
On suppose que la première composante du co-vecteur C_0, notée c_{01}, est non nulle. Soit alors le nouveau vecteur d'état y obtenu en remplaçant x_1, la première composante de vecteur x par le scalaire σ :

$$y = [\sigma, x_2, ..., x_n]^T,$$

ou encore y = Px, où la matrice de changement P s'écrit :

$$P = \begin{bmatrix} c_{01} & c_{02} & c_{03} & \dots & c_{0n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Le système (4.45) est décrit dans cette nouvelle base par l'équation

$$\dot{y}(t) = A_1(y_1)\, y(t) + B_1\, y(t-\tau), \qquad (4.46)$$

où

$$A_1(y_1) = PAP^{-1} + PQ\,[1, 0, ..., 0]\ \frac{f(y_1)}{y_1}\ ,$$
$$B_1 = PBP^{-1}.$$

Les éléments non linéaires de la matrice $A_1(y_1)$ sont ainsi isolés dans sa première colonne. Une condition de stabilité absolue sur le gain équivalent $f^*(\sigma) = \dfrac{f(\sigma)}{\sigma}$ peut alors être obtenue très simplement en appliquant le théorème III.5.5 à un système majorant de (4.46) relatif, par exemple, à la norme vectorielle $V(x) = [|\,y_1\,|, |\,y_2\,|, ..., |\,y_n\,|]^T$.

A titre d'exemple, considérons le système suivant :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0.5 & -1 \end{bmatrix} x(t-\tau) - \begin{bmatrix} 1 \\ 1.5 \end{bmatrix} f(\sigma),$$
$$\sigma = 2\,x_1(t) - 2\,x_2(t).$$

Effectuons le changement de variable $y = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x$, le système se récrit alors :

$$\dot{y}(t) = \begin{bmatrix} -3 + f^* & 0 \\ 1 - f^* & -3 \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} y(t-\tau).$$

La matrice

$$\begin{bmatrix} -2 + f^* & 1 \\ 1 + |\,1 - f^*\,| & -3 \end{bmatrix}$$

est l'opposée d'une M-matrice si et seulement si $f^* < 1.5$. D'après le théorème III.5.5, le système étudié est absolument stable sur $]-\infty\,;\,1.5[$.

3.1.2. Commande retardée

Cette méthode est aussi applicable lorsque la commande du système (4.45) est purement retardée ($\sigma = C_1\,x(t-\tau)$). Alors, de même, si c_{11}, la première composante du co-vecteur C_1, est non nulle, on peut définir la nouvelle variable d'état $y = [\sigma, x_2, ..., x_n]^T = P_1\,x$, où

$$P_1 = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Dans cette base, le système a pour expression :

$$\dot{y}(t) = A_2\,y(t) + B_2(y_1(t-\tau))\,y(t-\tau), \tag{4.47}$$

où $A_2 = P_1AP_1^{-1}$ est une matrice constante, et $B_2(y_1(t-\tau))$ donnée par

$$B_2(y_1(t-\tau)) = P_1BP_1^{-1} + P_1Q\,[1, 0, ..., 0]\ \frac{f(y_1(t-\tau))}{y_1(t-\tau)}\ ,$$

est une matrice dont les termes non constants sont isolés dans la première colonne. Par application du théorème III.5.5, on peut alors déduire des conditions de stabilité absolue portant sur la fonction gain équivalent $f^*(\sigma)$.

3.1.3. Commande mixte

Dans le cas général où les co-vecteurs C_0 et C_1 sont tous les deux non nuls, il suffit de considérer un changement de variable du type $y = [\sigma_1, \sigma_2, x_3, ..., x_n]^T = P_2x$, où $\sigma_1 = C_0x$, $\sigma_2 = C_1x$. Dans cette base, le système se récrit sous la forme

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) = {} & [P_2AP_2^{-1} + P_2Q\ [1, 0, ..., 0]\ f^*(\sigma)]\ y(t) + \\ & [P_2BP_2^{-1} + P_2Q\ [0, 1, ..., 0]\ f^*(\sigma)]\ y(t - \tau).\end{aligned} \tag{4.48}$$

Soit alors une norme vectorielle de la forme $V(x) = [v([\sigma_1, \sigma_2]^T), |x_3|, ..., |x_n|]^T$, où $v(.)$ est une norme quelconque de $\mathbb{R}^2$. Le système majorant obtenu est tel que ses termes non constants sont regroupés dans la première colonne, il suffit alors comme précédemment d'appliquer le théorème III.5.5 pour obtenir des conditions de stabilité absolue.

Cette méthode peut être étendue à une classe de systèmes interconnectés (cf. [Gentina (1976)].

3.1.4. Généralisation au cas multivariable

Soit maintenant un système décrit par l'équation différentielle

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)\ x(t) + B(t)\ x(t - \tau) + Q(t)\ f(t, \Sigma), \\ \Sigma &= C_0(t)\ x + C_1(t)\ x(t - \tau),\end{aligned} \tag{4.49}$$

où A et B : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, Q : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times p}$, C_0 et C_1 : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{p \times n}$, et enfin $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$.

On note $\Sigma = [\sigma_1, ..., \sigma_p]^T$.

On suppose que la fonction f est telle que

$$f(t, \Sigma) = [f_1(t, \sigma_1), ..., f_p(t, \sigma_p)]^T,$$

et que chacune des fonctions-composantes f_i est telle que le rapport

$$f_i^*(t, \sigma_i) = \frac{f_i(t, \sigma_i)}{\sigma_i}$$

admet une limite lorsque σ_i tend vers 0 et vérifie

$$k_{1i} \leq f_i^*(t, \sigma_i) \leq k_{2i}, \qquad \forall (t, \Sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p.$$

On pose $F^* = \mathrm{diag}(f_1^*, \ldots, f_p^*)$, $f^* = [f_1^*, \ldots, f_p^*]^T$, $k_i = [k_{i1}, \ldots, k_{ip}]^T$ (i = 1 ou 2), et on définit l'ensemble $\mathcal{S}_k$ de $\mathbb{R}^p$ par

$$\mathcal{S}_k = \{k \in \mathbb{R}^p : k_1 \leq k \leq k_2\}.$$

A l'aide de ces notations, le système (4.49) peut être récrit sous la forme

$$\dot{x}(t) = [A(t) + Q(t)F^*C_0]\, x(t) + [B(t) + Q(t)F^*C_1]\, x(t-\tau), \tag{4.50}$$

ou encore

$$\dot{x}(t) = D(t, f^*)\, x(t) + E(t, f^*)\, x(t-\tau), \tag{4.51}$$

Le système (4.49) sera dit absolument stable sur $\mathcal{S}_k$ si la solution nulle du système (4.49) est globalement asymptotiquement stable pour toute fonction f dont le gain vectoriel équivalent f^* appartient à chaque instant au domaine $\mathcal{S}_k$.

Les résultats énoncés au chapitre III § 5.4 permettent alors d'établir des conditions suffisantes de stabilité absolue généralisant certains des résultats de [Grujić, Borne et Gentina (1979)].

Hypothèse (H1) : On suppose dans la suite que tous les éléments hors-diagonaux de la matrice $D(t, f^*)$ et tous les éléments de la matrice $E(t, f^*)$ sont positifs (ce qui peut être obtenu, en cas de besoin, par majoration).

Théorème 3.1 : *Sous l'hypothèse* (H1), *s'il existe un vecteur constant* $u \in \mathbb{R}^n$ *à composantes strictement positives et un réel* $\varepsilon > 0$ *tels que l'inégalité*

$$[D(t, f^*) + E(t, f^*)]\, u \leq -\varepsilon\, u$$

soit vérifiée pour tout $t \geq t_0$ *et tout* f^* *à valeur dans* $\mathcal{S}_k$, *alors le système* (4.49) *est absolument stable sur* $\mathcal{S}_k$.

Théorème 3.2 : *Sous l'hypothèse* (H1), *si la matrice* $D(t, f^*) + E(t, f^*)$ *est de la forme* $F^* M$, *où* M *est l'opposée d'une M-matrice constante et si le vecteur* k_1 *est à composantes strictement positives, alors le système* (4.49) *est absolument stable sur* $\mathcal{S}_k$.

Théorème 3.3 : *Sous l'hypothèse* (H1), *si les conditions suivantes sont réalisées* :

(i) *il existe un réel* $\varepsilon > 0$ *tel que* $D(t, f^*) + E(t, f^*) + \varepsilon\, I_n$ *est l'opposée d'une M-matrice irréductible pour tout* $t \geq t_0$ *et tout* f^* *à valeur dans* $\mathcal{S}_k$, *et*

(ii) *les éléments non constants de la matrice* $D(t, f^*) + E(t, f^*)$ *sont regroupées dans une seule ligne,*

alors le système (4.49) *est absolument stable sur* $\mathcal{S}_k$.

Exemple : Considérons le système

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t-\tau) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} f(\Sigma), \qquad (4.52)$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} x(t-\tau).$$

On suppose que f vérifie les hypothèses correspondant à la notation f*. On a alors :

$$D(t, f^*) = \begin{bmatrix} -1 - 3\, f_1^* & 0.5 + 2\, f_1^* \\ 0 & -2 - 4\, f_2^* \end{bmatrix},$$

et

$$E(t, f^*) \doteq \begin{bmatrix} f_1^* & 0.5 + 2\, f_1^* \\ f_2^* & 1 + f_2^* \end{bmatrix}.$$

Pour f_1^* et $f_2^* \geq 0$, D et E vérifient l'hypothèse (H1). On a

$$D(t, f^*) + E(t, f^*) = \begin{bmatrix} -1 - 2\, f_1^* & 1 + 4\, f_1^* \\ f_2^* & -2 - 3\, f_2^* \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + f_1^* & 1 \\ 0.5 & 1 + f_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Il suffit alors d'appliquer le théorème 3.1 (avec $u = [3,\ 1.3]^T$) pour montrer la stabilité absolue du système (4.52) sur $\mathbb{R}_+^2$.

3.2. Critères fréquentiels

La méthode des normes vectorielles telles qu'elle a été présentée jusqu'ici ne permet pas l'application des critères fréquentiels de stabilité donnés au § 3. du chapitre III. Cela est essentiellement dû au principe de comparaison énoncé au théorème III.5.2 qui n'autorise que des systèmes majorants linéaires en z, or les systèmes considérés dans Popov et Halanay (1962) (cf.§3 du chapitre 3) sont non linéaires. Nous allons proposer dans cette section un nouveau principe de comparaison qui permettra de considérer une classe plus importante de systèmes de comparaison.

Théorème 3.4 : *Soit* v *une fonction vectorielle de dimension n vérifiant l'inégalité*

$$\dot{v}(t) \leq f(t, v(t), v(t-\tau_1(t)), \ldots, v(t-\tau_m(t))), \qquad t \geq t_0, \qquad (4.53)$$

où les τ_i *sont des fonctions positives, continues par morceaux et bornées de* t.

On suppose que la fonction $f(t, x, y_1, \ldots, y_m)$ *est définie et continue sur l'ensemble* $[t_0, +\infty[\times \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n$, *qu'elle est croissante par rapport aux variables* y_i *et quasi-*

monotone croissante en x. *Enfin, on suppose que* f *possède des propriétés suffisantes pour garantir l'existence et l'unicité des solutions* z(t) *de l'équation différentielle*

$$\dot{z}(t) = f(t, z(t), z(t-\tau_1(t)), \ldots, z(t-\tau_m(t)), \qquad t \geq t_0, \tag{4.54}$$

pour toute condition initiale z_{t_0} *appartenant à* **C**.

Sous ces conditions, si l'inégalité

$$v(t) \leq z(t) \tag{4.55}$$

est vérifiée pour tout t *appartenant à* $[t_0 - \tau, t_0]$, *alors elle est encore vérifiée pour tout instant* $t \geq t_0$.

Démonstration : Soit z^n une solution du système

$$\dot{z}^n(t) = f(t, z^n(t), z^n(t-\tau_1(t)), \ldots, z^n(t-\tau_m(t)) + \varepsilon^n, \tag{4.56}$$

avec la condition initiale

$$z^n(t_0 + s) = z(t_0 + s) + \varepsilon^n, \quad \forall\, s \in [-\tau, 0],$$

où ε^n est un vecteur constant à composantes strictement positives.

Alors, l'inégalité

$$V(t) < z^n(t) \tag{4.57}$$

est vérifiée pour tout $t \geq t_0$. En effet, supposons qu'il existe un instant $t_1 > t_0$ et un indice j_0 tels que

$$V_{j_0}(x(t_1)) = z^n_{j_0}(t_1),$$

alors t_2 la borne inférieure de l'ensemble $\{t : V_j(x(t)) = z^n_j(t),\ j \in \{1, \ldots, k\}\}$ existe, et vérifie par hypothèse, $t_2 > t_0$.

Posons $\varepsilon(t) = z^n(t) - V(x(t))$, alors compte tenu des relations (4.53) et (4.56), il vient

$$\dot{\varepsilon}_j(t_2) \geq f(t, z^n(t), z^n(t-\tau_1(t)), \ldots, z^n(t-\tau_m(t)) -$$
$$f(t, v(t), v(t-\tau_1(t)), \ldots, v(t-\tau_m(t)) + \varepsilon^n.$$

Or, par définition de t_2, les relations suivantes sont vérifiées :

$$z^n_j(t_2) = V_j(x(t_2)),$$
$$z^n_r(t_2) \geq V_r(x(t_2)), \text{ pour tout } r \neq j,$$
$$z^n_r(t_2 - \tau_i(t_2)) \geq V_r(x(t_2 - \tau_i(t_2))), \ \forall\, r = 1, \ldots, n \text{ et } \forall\, i = 1, \ldots, m.$$

Il vient alors des propriétés de quasi-monotonie et de monotonie de f l'inégalité

$$\dot{\varepsilon}_j(t_2) \geq \varepsilon^n > 0$$

La fonction $\varepsilon_j(t)$ est donc strictement croissante sur un voisinage de t_2. Il y a là contradiction, puisque, par définition de t_2, on a, pour tout $t < t_2$, $\varepsilon_j(t) > 0$ et $\varepsilon_j(t_2) = 0$.

Pour démontrer le théorème, il suffit maintenant de faire tendre ε^n vers le vecteur nul. La solution $z^n(t)$ converge alors vers z(t) et l'inégalité (4.55) est obtenue par passage à la limite de l'inégalité (4.57).

Le théorème 3.4 est encore valable sous les mêmes hypothèses lorsque la fonction f dépend de la valeur en différents arguments d'une fonction-paramètre x.

Théorème 3.5 : *Soit* v *une fonction vectorielle de dimension n vérifiant l'inégalité*

$$\dot{v}(t) \leq f(t, x(t), \ldots, x(t-h_p(t)), v(t), v(t-\tau_1(t)), \ldots, v(t-\tau_m(t)), \qquad (4.53)$$

où les τ_i *et* h_i *sont des fonctions positives, continues par morceaux et bornées de* t, *et* x *est une fonction continue définie pour* $t \geq t_0 - \sup\limits_{1 \leq i \leq p, t \geq t_0} h_i(t)$.

On suppose que la fonction $f(t, x, y_1, \ldots, y_p, v, v_1, \ldots, v_m)$ *est définie et continue sur l'ensemble* $[t_0, +\infty[\times \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n$, *qu'elle est croissante par rapport aux variables* v_i *et quasi-monotone croissante en* v. *Enfin, on suppose que* f *possède des propriétés suffisantes pour garantir l'existence et l'unicité des solutions* z(t) *de l'équation différentielle*

$$\dot{z}(t) = f(t, x(t), \ldots, x(t-h_p(t)), z(t), z(t-\tau_1(t)), \ldots, z(t-\tau_m(t)) \qquad (4.54)$$

pour toute condition initiale z_{t_0} *appartenant à* **C**.

Sous ces conditions, si l'inégalité

$$v(t) \leq z(t) \qquad (4.55)$$

est vérifiée pour tout t *appartenant à* $[t_0 - \tau, t_0]$, *alors elle est aussi vérifiée pout tout instant* $t \geq t_0$.

On a alors une généralisation du théorème III.5.2. : on vérifie aisément que la fonction

$$f(t, x(t), x(t-\tau_1), \ldots, z(t), z(t-\tau_1), \ldots) =$$

$$M(t, x(t), \ldots)\, z(t) + \sum_{i=1}^{m} N^i(t, x(t), \ldots)\, z(t-\tau_i),$$

vérifie la conditions de quasi-monotonicité en z lorsque la matrice M(.) est à coefficients hors-diagonaux positifs, et les conditions de croissance en $z(t-\tau_i)$ lorsque les matrices $N^i(.)$ sont positives.

Supposons ici que l'utilisation d'une norme vectorielle V(x) permette la construction d'une inégalité différentielle de la forme

$$\dot{V}(x(t)) \leq M\, V(x) + N\, V(x(t-\tau)) + Q_0\, f(\Sigma), \qquad (4.58)$$

où $M = \{\mu_{ij}\}$ et $N = \{\nu_{ij}\}$ sont deux matrices à coefficients réels et de dimensions $k \times k$, telles que

$$\mu_{ij} \geq 0 \quad \forall\, i \neq j = 1, \ldots, k,$$
$$\nu_{ij} \geq 0 \quad \forall\, i, j = 1, \ldots, k,$$

la variable Σ admet pour expression

$$\Sigma = C_0\, V(x(t)) + C_1\, V(x(t-\tau)),$$

où C_0 et C_1 sont des matrices de dimensions $p \times k$, Q_0 est une matrice de dimensions $k \times p$, et la fonction $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ est telle que

$$f(\Sigma) = [f_1(\sigma_1), ..., f_p(\sigma_p)]^T,$$

et pour chacune des composantes f_i, il existe un nombre k_i, éventuellement infini, tel que

$$0 \le \frac{f_i(\sigma_i)}{\sigma_i} \le k_i.$$

Alors, si la fonction $\quad \mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}_+^k \rightarrow \mathbb{R}^k$

$$(z_1, z_2) \rightarrow Q_0\, f(C_0\, z_1 + C_1\, z_2)$$

est quasi-monotone croissante par rapport à z_1 et croissante par rapport à z_2, le système

$$\dot{z}(t) = M\, z(t) + N\, z(t - \tau) + Q_0\, f(\Sigma), \tag{4.59}$$

est de comparaison pour l'inégalité (4.58), et donc la stabilité du système initial peut être testée à partir des conditions fréquentielles de Popov et Halanay :

On notera dans la suite $C(\lambda) = C_0 + \sum_{i=1}^{m} C_i\, e^{-\lambda\tau_i}$ et $B(\lambda) = \sum_{i=1}^{m} B_i\, e^{-\lambda\tau_i}$.

Si la matrice M+N est l'opposée d'une M-matrice, et s'il existe une matrice diagonale P à éléments strictement positifs et une matrice Q telles que la matrice

$$G(j\omega) + G^T(-j\omega)$$

est définie positive pour tout ω réel, la matrice $G(\lambda)$ étant définie par

$$G(\lambda) = PK^{-1} + (P + \lambda\, Q)\, C(\lambda)\, (A + B(\lambda) - \lambda\, I_n)^{-1}\, Q_0,$$

et

$$K = \mathrm{diag}(k_1, ..., k_m).$$

Alors la solution nulle du système (3.39) est asymptotiquement stable.

4. Estimation des attracteurs et de leurs domaines d'attraction

La propriété de stabilité asymptotique n'est pas en matière de systèmes de commande une condition nécessaire. Par exemple, un point d'équilibre peut être instable mais contenu dans un cycle limite stable de faible dimension, le comportement des solutions peut être alors jugé convenable pour certaines applications (notion de stabilité pratique). Il se révèle donc important en pratique de pouvoir déterminer une estimation d'un ensemble attractif, ainsi qu'une estimation de son domaine d'attraction. Nous nous proposons ici de montrer comment la méthode des normes vectorielles peut être adaptée à la résolution de ce problème.

4.1. Ensembles attractifs et domaines d'attraction associés

La notion d'ensemble attractif généralise celles de point d'équilibre attractif, de cycle limite stable, ou d'attracteurs (cf. [Hale (1977)]. Elle est définit comme suit :

Définition 4.1. (ensemble attractif) : Un ensemble $\mathcal{A}$, compact non vide de $\mathbf{C}$, est dit *attractif par rapport à un intervalle* $\mathcal{T}_i$ et pour l'équation

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau_1(t)), ..., x(t - \tau_m(t))), \tag{4.60}$$

si pour tout instant initial $t_0 \in \mathcal{T}_i$, l'état de la solution de (4.60) de condition initiale φ à $t = t_0$ converge asymptotiquement vers $\mathcal{A}$ pour toute fonction φ prise dans un voisinage de $\mathcal{A}$. Ou encore, plus formellement :

$\forall\ t_0 \in \mathcal{T}_i, \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \eta > 0, \forall\ \varphi \in \mathbf{C} : \rho(\varphi, \mathcal{A}) < \eta, \exists\ T = T(t_0, \varphi, \varepsilon) > 0 : \forall\ t \geq t_0 + T,$
$\rho(x_t(t_0, \varphi), \mathcal{A}) < \varepsilon,$

où $\rho(\varphi, \mathcal{A})$ est la distance d'un élément φ de $\mathbf{C}$ à l'ensemble $\mathcal{A}$, définie par :

$$\rho(\varphi, \mathcal{A}) = \inf \{\| \varphi - \psi \| : \psi \in \mathcal{A}\}.$$

$\mathcal{A}$ sera dit *uniformément attractif par rapport à un intervalle* $\mathcal{T}_i$ si dans la définition précédente le réel η est indépendant de t_0, et T ne dépend que de ε et de η.

Définition 4.2. (domaine d'attraction) : Le sous-ensemble $\mathcal{D}_a(\mathcal{A}, t_0)$ de $\mathbf{C}$ défini par :

$$\mathcal{D}_a(\mathcal{A}, t_0) = \{\varphi \in \mathbf{C} : \lim_{t \to \infty} \rho(x_t(t_0, \varphi), \mathcal{A}) = 0\}$$

est appelé domaine d'attraction s'il est un voisinage de $\mathcal{A}$.

Ces deux notions sont illustrées par la figure 4.5.

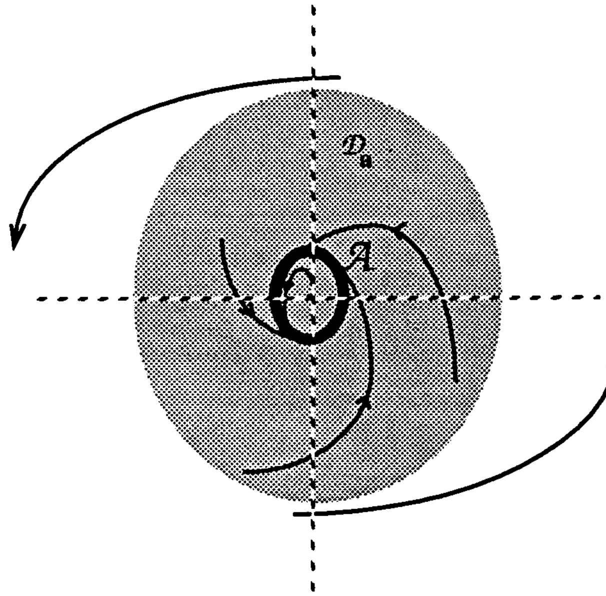

Fig. 4.5. : exemple d'ensemble attractif et de son domaine d'attraction

Enfin, on peut définir de la même façon que pour un point d'équilibre la notion de stabilité d'un ensemble :

Définition 4.3. (ensemble stable) : Un ensemble $\mathcal{A}$, compact non vide de **C**, est dit *stable par rapport à un intervalle* $\mathcal{T}_i$ et pour le système (4.60) si
$\forall\ t_0 \in \mathcal{T}_i, \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \eta > 0, \forall\ \varphi \in \mathbf{C}$:

$$\rho(\varphi, \mathcal{A}) < \eta \quad \Rightarrow \quad \rho(x_t(t_0, \varphi), \mathcal{A}) < \varepsilon, \quad \forall\ t \geq t_0.$$

4.2. Systèmes majorants non homogènes

Dans cette étude, nous considérons la classe de systèmes décrits par une équation différentielle de la forme :

$$\dot{x}(t) = A(.)\, x(t) \ + \sum_{i=1}^{m} B^i(.)\, x(t - \tau_i(t)) \ + \ c(.), \tag{4.61}$$

où (.) représente $(t, x(t), x(t - \tau_1(t))\ , \ldots, x(t - \tau_m(t)))$, $A(.)$ et $B^i(.)$ sont des matrices de dimensions $n \times n$, $c(.)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, et enfin les τ_i sont des fonctions continues par morceaux, positives et majorées par un réel $\tau > 0$.
L'origine n'est plus nécessairement un point d'équilibre du système (4.61), l'étude de ces systèmes nécessite donc la définition d'une classe plus générale de systèmes de comparaison.

Définition 4.3. (Système majorant non homogène) : Le système

$$\dot{z}\,(t) = M(.)\, z(t) + \sum_{i=1}^{m} N^i(.)\, z(t - \tau_i(t)) + q(.) \tag{4.62}$$

définit un *système majorant non homogène* de (4.61) relativement à une norme vectorielle régulière V et à un domaine $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$ contenant un voisinage de l'origine si l'inégalité

$$\dot{V}(x(t)) \leq M(.)\ V(x(t)) + \sum_{i=1}^{m} N^i(.)\ V(x(t - \tau_i(t))) + q(.), \tag{4.63}$$

est vérifiée pour tout $x_t \in \mathbf{C}_{\mathcal{D}}$ et pour tout $t \in \mathcal{T}_0$, où les éléments hors-diagonaux de $M(.)$, les coefficients des matrices $N^i(.)$ et ceux du vecteur $q(.)$ sont tous positifs lorsque $x_t \in \mathbf{C}_{\mathcal{D}}$ et $t \in \mathcal{T}_0$.
On supposera de plus que les matrices $M(.)$, $N^i(.)$ et le vecteur $q(.)$ sont tels que le système majorant (4.62) admet une solution unique pour toutes conditions initiales x_{t_0} et $z_{t_0} \in \mathbf{C}_{\mathcal{D}}$.

L'écriture du système sous la forme (4.61) permet encore d'obtenir de manière systématique un système majorant non homogène :
– les matrices $M(.)$ et $N^i(.)$ sont déterminées par les formules (3.59) (ou celles déduites données en (3.61)-(3.64)),

– le vecteur q est donné par la formule

$$q_i(.) = |\ \mathrm{grad}\ p_i(x_i)^T P_i\ c(.)\ |, \quad \text{pour } i = 1, \dots, k. \tag{4.64}$$

Ainsi, si toutes les composantes de V(x) sont des normes de type max :

$$p_r(x_r) = \max \{|\ x_q\ | : q \in J_r\} \qquad r = 1, \dots, k,$$

alors, le vecteur q(.) admet pour composantes

$$q_r(.) = \max \{|\ c_q(.)\ | : q \in J_r\}, \qquad r = 1, \dots, k. \tag{4.65}$$

De même, lorsque les composantes de V sont des normes de type somme des modules :

$$p_r(x_r) = \sum_{q \in J_r} |\ x_q\ | \qquad r = 1, \dots, k,$$

alors, le vecteur q(.) admet pour composantes

$$q_r(.) = \sum_{q \in J_r} |\ x_q\ |, \qquad r = 1, \dots, k. \tag{4.66}$$

On retrouve, lorsque les matrices N^i sont nulles, la notion de système majorant non homogène définie pour les systèmes non linéaires dans [Borne et Richard (1990)], [Borne, Richard et Tahiri (1990)], [Radhy (1992)] ou [Perruquetti (1994)].

4.3. Principe de comparaison

Si l'on récrit le système (4.62) sous la forme

$$\dot{z}(t) = f[t, x(t), \dots, x(t - \tau_m(t)), z(t), \dots, z(t - \tau_m(t))],$$

il peut être observé que, puisque les coefficients hors-diagonaux de M(.) sont positifs, la fonction f est quasi-monotone croissante, et de même le fait que chacun des éléments des matrices $N^i(.)$ soient positifs implique que f est croissante par rapport à chacune des variables $z(t - \tau_i(t))$. Le théorème 3.4 permet alors d'énoncer le résultat suivant :

Théorème 4.1. (Lemme de comparaison) : *Si le système* (4.62) *est un système majorant non homogène du système* (4.61) *relativement à une norme vectorielle régulière* V *et une région* $\mathcal{D}$ *de* $\mathbb{R}^n$ *contenant un voisinage de l'origine, alors c'est aussi un système de comparaison de* (4.61), *c'est-à-dire : si les conditions initiales* x_{t_0} *du système* (4.61) *et* z_{t_0} *du système* (4.62) *vérifient les conditions*

$$x_{t_0}(s) \in \mathcal{D}, \ \textit{et}\ \ z_{t_0}(s) \geq V(x_{t_0}(s)), \qquad \forall\, s \in [-\tau, 0] \tag{4.67}$$

alors l'inégalité

$$z(t) \geq V(x(t)) \tag{4.68}$$

est vérifiée aussi longtemps que x(t) *reste dans* $\mathcal{D}$ *et que la solution* z(t) *existe.*

4.4. Application à l'estimation d'attracteurs et de leurs domaines d'attraction

On se place maintenant dans le cas particulier où il est possible de définir un système majorant à coefficients constants du système (4.61) relatif à une norme vectorielle régulière V et à une région $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$ contenant un voisinage de l'origine, d'équation

$$\dot{z}(t) = M\, z(t) + \sum_{i=1}^{m} N^i\, z(t - \tau_i(t)) + q. \tag{4.69}$$

Alors, il vient le résultat suivant :

Théorème 4.2. : *Si les matrices* M, N^i *et le vecteur* q *vérifient les deux propriétés suivantes* :

(i) *La matrice* $M + \sum_{i=1}^{m} N^i$ *est l'opposée d'une M-matrice, et*

(ii) *le sous-ensemble* E *de* $\mathbb{R}^n$ *défini par*

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq -(M + \sum_{i=1}^{m} N^i)^{-1}\, q\}$$

est inclus dans $\mathcal{D}$.

Alors, l'ensemble $\mathcal{E} = \mathbf{C}_E$ *est attractif et stable pour le système* (4.61), *et pour tout vecteur* d *de* $\mathbb{R}^k$ *à composantes positives vérifiant les trois conditions*

(i) $d \geq q$

(ii) $(M + \sum_{i=1}^{m} N^i)\, d < 0$, *et*

(iii) *l'ensemble* J(d) *défini par* $J(d) = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq d\}$ *est inclus dans* $\mathcal{D}$,

l'ensemble $\mathbf{J}(d) = \{\varphi \in \mathbf{C} : V(\varphi(s)) \leq d, \forall\, s \in [-\tau, 0]\}$ *est une estimation positivement invariante du domaine d'attraction de* $\mathcal{E}$.

Démonstration : Le système de comparaison (4.69) admet la solution stationnaire $z_e = -(M + \sum_{i=1}^{m} N^i)^{-1}\, q$. Cette solution est globalement asymptotiquement stable (Th. III.5.4). Donc toute solution x(t) restant dans l'ensemble $\mathcal{D}$ vérifie $\lim_{t \to \infty} V(x(t)) \leq z_e$ (en effet, d'après le principe de comparaison $V(x(t)) \leq z(t)$ et $\lim_{t \to \infty} z(t) = z_e$). Il reste à démontrer que l'ensemble $\mathbf{J}(d)$ (où le vecteur d est tel que le sous-ensemble J(d) est inclus dans $\mathcal{D}$) est positivement invariant pour le système (4.61) ; cette démonstration est essentiellement la même que pour la preuve du théorème 1.2, on ne la reproduira donc pas ici.

D'une manière générale, l'ensemble $\mathcal{E}$ obtenu n'est pas le plus petit ensemble attractif possible : il peut contenir un ensemble de points d'équilibre attractifs, un ou plusieurs cycles limites ou plus généralement un ensemble d'attracteurs (cf. figure 4.6.). Si $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{E}$ contient tous les attracteurs du système.

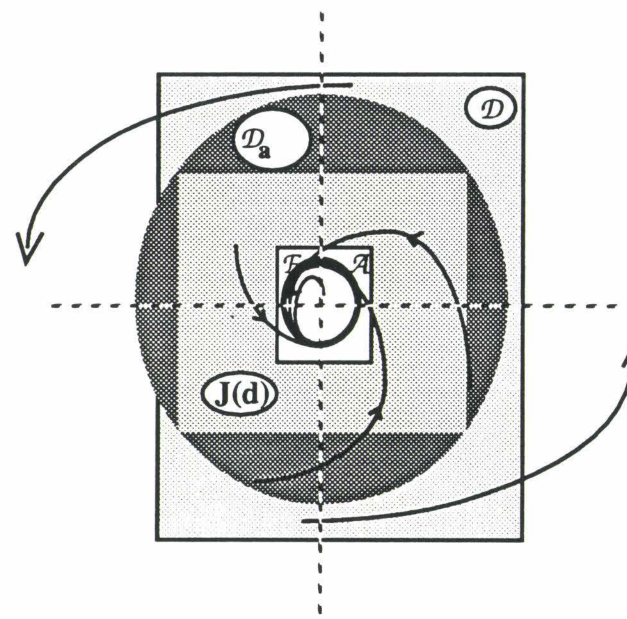

Fig. 4.6. Illustration du th. 4.2.

Afin d'illustrer la méthode, considérons le système suivant :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 - x_1^2 - x_2^2 & -1 \\ \cos t & 1 - x_1^2 - x_2^2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \sin x_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t-1). \quad (4.70)$$

La solution nulle n'est pas stable, il est par conséquent inutile de rechercher un majorant homogène. On recherche donc un système majorant non homogène relatif à la norme vectorielle $V(x) = [|x_1|, |x_2|]^T$.

Pour cela, on remarque que le système (4.70) peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ \cos t & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \sin x_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t-1) + \begin{bmatrix} x_1(6 - x_1^2 - x_2^2) \\ x_2(6 - x_1^2 - x_2^2) \end{bmatrix}. \quad (4.71)$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $V(x) \geq [\sqrt{3}, \sqrt{3}]^T$, le système (4.70) admet le système majorant suivant :

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z(t-1), \quad (4.72)$$

et pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $V(x) \leq [\sqrt{3}, \sqrt{3}]^T$, le système (4.71) admet le système majorant non homogène

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z(t-1) + \begin{bmatrix} 4\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} \end{bmatrix}. \qquad (4.73)$$

Puisque le vecteur $[4\sqrt{2}\ ,\ 4\sqrt{2}]^T$ est à composantes positives, le système (4.73) est un système majorant global de (4.70).

Le théorème 4.2 peut être appliqué puisque la matrice $M + N = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$ est l'opposée d'une M-matrice, et

$$-(M+N)^{-1} q = \frac{4\sqrt{2}}{19} \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

L'ensemble $\mathcal{E} = \{\varphi \in \mathbf{C} : V(\varphi(s)) \leq -(M+N)^{-1} q,\ \forall\, s \in [-\tau, 0]\}$ est globalement stable et attractif.

La simulation présentée figure suivante montre qu'il existe bien un attracteur (ici un cycle limite) contenu dans l'ensemble $\mathcal{E}$.

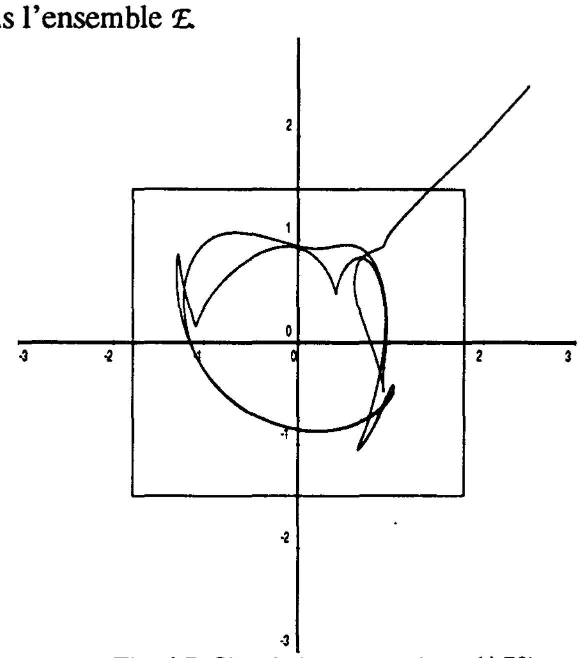

Fig. 4.7. Simulation du système (4.70)

L'étude a été menée ici pour des raisons de simplicité à l'aide de majorants non homogènes à coefficients constants, mais il est possible d'étendre ces résultats en considérant des systèmes majorants non linéaires. On pourra consulter à ce sujet [Perruquetti (1994)] traitant ce problème pour les systèmes non linéaires et non retardés. Enfin, ces travaux permettent une approche possible de la stabilité pratique des systèmes à retards (voir le rapport [Goubet (1993)]).

CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons montré comment la méthode des normes vectorielles peut être appliquée à la résolution de problèmes divers.
En particulier, il a été montré comment on pouvait de façon simple déterminer des ensembles positivement invariants pour des classes diverses de systèmes, cette technique permettant également d'obtenir des estimations du domaine de stabilité asymptotique. Ce type de résultats est original dans la littérature traitant des systèmes à retards.

Nous avons ensuite abordé le problème de la régulation des systèmes à retards linéaires ou non sous contraintes d'état et de commande. Les domaines de contraintes envisagées sont des ensembles polyédriques non nécessairement symétriques. La méthode proposée consiste en la synthèse d'une loi linéaire de retour d'état statique telle que le domaine des conditions initiales possibles est contenu dans un ensemble positivement invariant pour le système en boucle fermée.

Le problème de la stabilité absolue des systèmes à retards a ensuite été envisagé. La méthodes des normes vectorielles a permis d'établir de nouveaux critères algébriques. Il a été également obtenu un principe de comparaison généralisant celui donné au troisième chapitre.

Enfin, dans une dernière partie, nous avons proposé une extension de la méthode permettant d'analyser des comportements asymptotiques autres que la convergence vers une solution stationnaire, comme des cycles limites. La technique de majoration permet alors d'obtenir une estimation de ces attracteurs, ainsi qu'une estimation de leurs domaines d'attraction. Un exemple montre qu'à ce niveau la qualité des résultats obtenus est fortement dépendante de la décomposition considérée du système.

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GENERALE

Il existe de nombreux travaux concernant l'analyse de la stabilité des systèmes à retards, tous cependant peuvent être regroupés en deux classes principales :
– soit la méthode d'analyse est simple, et alors les conditions données sont très conservatives, ou ne concernent qu'une classe particulière de systèmes,
– soit la méthode est plus "universelle" et donne des conditions très fines, mais dans ce cas, elle est très complexe à appliquer.
Ce constat, qui peut être vérifié pour les systèmes linéaires vus au deuxième chapitre, est d'autant plus vrai que le système est complexe (grande dimension, présence de non-linéarités, de paramètres).

Au regard de la complexité des systèmes à retards, la méthode des normes vectorielles que nous avons développée se situe plutôt parmi les approches simples : la technique de majoration employée permet de considérer des modèles très généraux, qui peuvent être non linéaires, instationnaires, posséder des coefficients discontinus ou même dépendre de perturbations, ou encore, être de dimension importante. Les conditions données dans le chapitre 3 sont algébriques et donc simples à tester. Elles sont invariantes pour des transformations du type $y = Px$, où P est une matrice diagonale. De plus, elles conduisent à plusieurs applications originales comme l'estimation pratique de domaines de stabilité. La commande stabilisante sous contraintes, l'analyse de la stabilité absolue, ou des ensembles attracteurs sont d'autres apports de notre approche.

Le revers de la médaille, c'est que, si la majoration entraîne une simplification du système à analyser, elle équivaut aussi à une perte d'information sur son comportement réel. Par exemple, si la matrice A(.) en facteur de l'état non retardé n'est pas à diagonale négative dominante, alors l'emploi d'une norme vectorielle usuelle (composantes définies par les normes de Hölder) ne permet aucune conclusion quant à la stabilité du système.
Un autre point faible de la méthode actuelle est que les principaux critères de stabilité donnent des conditions de stabilité indépendantes de la valeur du retard.

Il existe cependant des indices nous laissant envisager plusieurs remèdes :

– Pour réponse à la nécessité de diagonale-dominance, on peut remarquer dans le cas linéaire qu'une matrice carrée à coefficients réels admet une représentation semblable à une matrice à diagonale négative dominante si ses valeurs propres sont dans la région du plan complexe définie par $\{z = \lambda + j\mu : |\mu| < -\lambda\}$ [Bitsoris (1991)]. Cette condition est toujours vérifiée lorsqu'on impose au système d'avoir un coefficient d'amortissement supérieur à 0.7, ce qui est en général le cas pour un système régulé.
Si on généralise ce résultat au cas non linéaire, nous pensons pouvoir définir des transformations pour lesquelles la nouvelle représentation d'état est bien conditionnée à l'application des critères de stabilité. De tels travaux existent pour les systèmes non retardés [Benrejeb (1980)], [Richard et Borne (1987)] et semblent pouvoir être étendus aux cas des systèmes à retards.
- La taille des retards peut être prise en compte dans nos critères par l'emploi d'une nouvelle écriture du système, ce principe a été utilisé dans le paragraphe 5.4.4 du quatrième chapitre. Cette solution a également été employée dans [Niculescu *et al.* (1993)]. Dans ces travaux, on utilise également une fonctionnelle de Lyapunov qui dépend du retard. L'emploi d'un type de fonction similaire peut être envisagé dans une extension de notre méthode.

C'est dans ces directions, ainsi que dans l'étude plus générale de la commande des systèmes à retards, que nous envisageons de poursuivre nos travaux.

ANNEXES

ANNEXE 1 : MESURE D'UNE MATRICE

Définition [Coppel (1965)] :

La mesure de la matrice X, associée à une norme donnée ($\|\ \|$), est définie par :

$$\mu(X) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\| I + \varepsilon X \| - 1}{\varepsilon}$$

Expressions :

Pour les normes de Hölder 1, 2 et ∞, les mesures de matrices associées pour une matrice $X = \{x_{ik}\} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sont données par les formules suivantes :

$$\mu_1(X) = \max_k \left(\mathrm{Re}(x_{kk}) + \sum_{i \neq k} | x_{ik} |\right) \qquad \left(\text{avec } \| X \|_1 = \max_k \left(\sum_{i=1}^{n} | x_{ik} | \right)\right)$$

$$\mu_2(X) = \frac{1}{2} \max_i \lambda_i (X + X^*) \qquad \left(\text{avec } \| X \|_2 = [\max_i \lambda_i(XX^*)]^{1/2}\right)$$

$$\mu_\infty(X) = \max_i \left(\mathrm{Re}(x_{ii}) + \sum_{k \neq i} | x_{ik} |\right) \qquad \left(\text{avec } \| X \|_\infty = \max_i \left(\sum_{k=1}^{n} | x_{ik} | \right)\right)$$

où $\lambda_1(X), \lambda_2(X), ..., \lambda_n(X)$, représentent les différentes valeurs propres de X.

Propriétés [Desoer et Vidyasagar (1975)] :

Pour toutes matrices $X, Y \in \mathbb{C}^{n \times n}$, on a :

$$\mathrm{Re}\, \lambda_i (X) \leq \mu (X)$$

$$-\mu (X) \leq \mathrm{Im}\ \lambda_i (X) \leq \mu (-jX)$$

$$\mu (X + Y) \leq \mu (X) + \mu (Y)$$

$$\mu (X) \leq \| X \|$$

$$\mu (\varepsilon X) = \varepsilon\ \mu (X), \quad \forall\ \varepsilon \geq 0$$

ANNEXE 2 : (−M)-MATRICES

Définition : la matrice M est l'*opposée d'une M-matrice* (ou (−M)-matrice) si c'est une matrice de Hurwitz (toutes ses valeurs propres sont à partie réelle strictement négative) et tous ses coefficients hors-diagonaux sont positifs ou nuls.

Propriétés : [Fiedler et Ptak (1962)]

Soit M une matrice à coefficients hors-diagonaux positifs ou nuls, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) M est une (−M)-matrice

2) M^{-1} est une matrice à coefficients négatifs ou nuls.

3) Il existe une matrice diagonale strictement positive Δ telle que $M\Delta v < 0$, où $v = [1, 1, \dots, 1]^T$.

4) Il existe une matrice diagonale Δ telle que $N = M\Delta$ est une matrice à diagonale négative dominante.

5) Il existe un vecteur u à composantes positives ou nulles tel que $Mu < 0$.

6) Il existe un vecteur propre u à composantes strictement positives tels que $Mu < 0$.

7) Pour tout vecteur $x \geq 0$, $x \neq 0$, il existe un indice i tel que $x_i y_i < 0$ (avec $y = Mx$).

8) Toutes les valeurs propres de M sont à partie réelle strictement négative.

9) M admet une valeur propre λ_m réelle et strictement négative telle que toutes les autres valeurs propres ont une partie réelle strictement inférieure à λ_m.

10) M vérifie les conditions de Koteliansky, c'est-à-dire tous ses mineurs principaux successifs sont de signes alternés :

$$(-1)^i M\begin{bmatrix} 1, & \dots, & i \\ 1, & \dots, & i \end{bmatrix}(.) > 0 \; ; \forall\, i = 1, \dots, k.$$

Un vecteur propre u associé à la valeur propre λ_m peut être choisi à composantes positives ou nulles. Si de plus, la matrice M est irréductible (c'est-à-dire qui ne peut être mise sous une forme bloc-triangulaire par une permutation), alors les composantes de u sont strictement positives.

Lemme A1 :

Soit $M(t, x, y_1, ..., y_m)$ une matrice carrée de dimension k ayant tous ses termes non constants isolés dans une même ligne. On suppose que pour tout uplet $(t, x, y_1, ..., y_m)$ appartenant à $\mathcal{T}_0 \times \mathcal{D} \times ... \times \mathcal{D}$, $M(t, x, y_1, ..., y_m)$ est l'opposée d'une M-matrice. Soit $\lambda_{max} = \sup[\lambda_m(M(t, x, y_1, ..., y_m))\ ;\ (t, x, y_1, ..., y_m) \in \mathcal{T}_0 \times \mathcal{D} \times ... \times \mathcal{D}]$, et soit u un vecteur propre associé à λ_{max}.

Alors, l'inégalité :

$$M(t, x, y)\, u \leq \lambda_{max}\, u \tag{A1}$$

est vérifiée pour tout $(t, x, y_1, ..., y_m)$ dans $\mathcal{T}_0 \times \mathcal{D} \times ... \times \mathcal{D}$.

Démonstration : On suppose que tous les éléments non constants de M(.) sont regroupés dans la dernière ligne. Il y a deux cas possibles : soit le uplet $(t, x, y_1, ..., y_m)$ est tel que u est un vecteur propre de $M(t, x, y_1, ..., y_m)$ associé à λ_{max}, et alors l'inégalité (A1) est évidente, soit le uplet $(t, x, y_1, ..., y_m)$ est tel que $(M(t, x, y_1, ..., y_m) - \lambda_{max} I_k)$ est l'opposée d'une M-matrice. Mais, dans ce cas les k−1 premières composantes du vecteur $(M(t, x, y) - \lambda_{max} I_k)\, u$ sont nulles (propriété due à la forme particulière de M(.) et à la définition de u). D'après la propriété 7), la $k^{ième}$ composante de ce vecteur est strictement négative : l'inégalité (A1) est donc encore vérifiée.

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

AGATHOKLIS, P. et FODA, S. (1989)
Stability and the matrix Lyapunov equation for delay differential systems
Int. J. Control, Vol. 49, No. 2, pp. 417-432.

ANDRONOV, A. A. et MAYER, A. G. (1946)
The simplest linear systems with delay.
Automat. Remote Control Vol. 7, No. 2-3, pp. 95-106. (En russe)

BAILEY, F. N. (1966)
The application of Lyapunov second method to interconnected systems.
J. SIAM Control, Ser. A, vol. 3, No. 3, pp. 443-462.

BAILEY, H. R. et REEVE, E. B. (1962)
Mathematical models describing the distribution of I^{131} -albumin in man.
J. Lab. Clin. Med., vol. 60, pp. 923-943.

BELLMAN, R. E. (1961)
On the computational solution of differential-difference equations,
J. Math. Anal. Appl., vol. 2, pp. 108-110.

BELLMAN, R. (1962)
Vector Lyapunov functions.
J. SIAM Control, Ser. A, vol. 1, No. 1, pp. 33-34.

BELLMAN, R. et COOKE, K. L. (1963)
Differential-Difference Equations.
Academic Press, New york

BENREJEB, M. (1980)
Sur l'analyse et la synthèse des processus complexes hierarchisés. Application aux systèmes singulièrement perturbés.
Thèse de doctorat es Sciences Physiques. Univ. des Sciences et Technologie de Lille.

BENZAOUIA, A. et BURGAT, C. (1988)
Regulator problem for linear discrete-time systems with non-symmetrical constrained control.
Int. J. Control, vol. 48, No. 6, pp. 2441-2451.

BENZAOUIA, A. et HMAMED, A. (1993)
Regulator problem for linear continuous-time systems with nonsymmetrical constrained control.
IEEE Trans. on Aut. Cont., vol. 38, No. 10, pp. 1556-1560.

BIRKHOFF, G. (1966)
Numerical solution of the reactor kinetics equations,
in *Numerical solutions of nonlinear differential equations*, Greenspan, D. (Ed.),
Wiley, New York.

BITSORIS, G. (1988)
Positively invariant polyhedral sets of discrete-time linear systems.
Int. J. Control, vol. 47, No. 6, pp. 1713-1726.

BITSORIS, G. (1991)
Existence of positively invariant polyhedral sets for continuous-time linear systems.
Control-Theory and Advanced Technology, vol. 7, No. 3, pp. 407-427.

BORNE, P. (1976)
Contribution à l'étude des systèmes discrets non-linéaires de grande dimension. Application aux systèmes interconnectés.
Thèse d'Etat, Université de Lille.

BORNE, P. et RICHARD, J. P. (1990)
Local and global stability of attractors by use of vector norms.
In : *The Lyapunov functions method and applications*.. P. Borne and V. Matrosov (Eds). J.C. Baltzer AG, Scientific Publishing Co. – IMACS, pp. 53-62.

BORNE, P., RICHARD, J. P. et RADHY, N. E. (1993)
Stabilité, stabilisation, régulation : approche par les normes vectorielles
In : *Systèmes non linéaires, vol. 2 : Stabilité - stabilisation.*
Masson, Paris, pp. 45-90.

BORNE, P., RICHARD, J. P. et TAHIRI, M. (1990)
Estimation of attractive domains for locally stable or unstable systems.
Syst. Anal. Model. Simul., vol. 7, No. 8, pp. 595-610.

BOURLÈS, H. (1987)
α-stability of systems governed by a functional differential equation - extension of results concerning linear delay systems.
Int. J. Control, Vol. 45, No. 6, pp. 2233-2234.

BOURLÈS, H. et IRVING, E. (1991)
La méthode LQG/LTR : Une interprétation polynomiale temps continu / temps discret.
RAIRO APII, Vol. 25, pp. 545-592.

BRIERLEY,S., CHIASSON, J., LEE, E., et ZAK, S. (1982)
On stability independent of delay for linear systems
I.E.E.E. Trans. Aut. Cont., Vol. 27, No. 1, pp. 252-254.

BURGAT, C et TARBOURIECH, S. (1993)
Stabilité et commande des systèmes linéaires avec saturations.
In : *Systèmes non linéaires, vol. 2 : Stabilité - stabilisation.*
Masson, Paris, pp. 113-197.

BURTON, T. (1978)
Uniform asymptotic stability in functional differential equations.
Proc. Amer. Math. Soc., vol. 78, pp. 195-199.

BURTON, T. A. et HATVANI, L. (1990)
On nonuniform asymptotic stability for nonautonomous functional differential equations.
Differential and Integral Equations, vol. 3, No. 2, pp. 285-293.

CALLENDER, A. et STEVENSON, A. G. (1939)
Time lag in a control system.
Proc.Soc. Chem. Ind. Vol. 18, No. 1, pp. 108-117.

CHEBOTAREV, N. G., et MEYMAN, N. N. (1949)
Problems of Routh-Hurwitz for polynomials and entire functions.
Trudy Mat. Instituta im. V.A. Steklova, vol. XXVI (en russe).

CHEGANCAS, J. et BURGAT, C. (1986)
Régulateur p-invariant avec contraintes sur les commandes.
Actes du Congrès Automatique 1985 d'AFCET, Toulouse, France, pp. 193-203.

CHETAEV, N. G. (1955)
Stability of motion
GITTL, Moscou. (en russe)

COOKE, K. L. et van den DRIESCHE, P. (1986)
On zeroes of some transcendental equations.
Funkcialaj Ekvacioj, vol. 29, pp. 77-90.

COPPEL, W. A. (1965)
Stability and asymptotic behavior of differential equations
D. C. Heath, Boston.

DAMBRINE, M et RICHARD, J. P. (1993a)
Sur un bilan comparatif des méthodes d'étude de la stabilité pour les systèmes linéaires à retards.
Rapport interne [NI/92/3] du LAIL.

DAMBRINE, M. et RICHARD, J. P. (1993b)
Stability analysis of time-delay systems.
Dynamic Systems and Applications, vol. 2, pp. 405-414.

DAMBRINE, M. et RICHARD, J. P. (1993c)
Estimation of stability domains of nonlinear differential-difference equations.
In : *Proc. of 1993 IEEE Int. Conf. on Systems, Man and Cybernetics*, Le Touquet – France, vol. 1, pp. 307-310.

DAMBRINE, M. et RICHARD, J. P. (1994a)
Stabilization of constrained nonlinear time-delay systems.
In : *Proc. of the 1st IMACS Symp. on Mathematical Modelling*, Vienna, Feb. 1994, I. Troch and F. Breiteners (Eds.), vol. 3, pp. 488-491.

DAMBRINE, M. et RICHARD, J. P. (1994b)
Stability and stability domains analysis for nonlinear differential-difference equations.
Dynamic Systems and Applications, vol. 3, No. 3, pp. 369-378.

DAMBRINE, M., RICHARD, J. P. et BORNE, P. (1995)
Feedback control of time-delay systems with bounded control and state.
A paraître dans *Mathematical Problems in Engineering, Theory, Methods and Applications.*

DESOER, C. A. et VIDYASAGAR, M. (1975)
Feedback Systems : Input-Output Properties
Academic Press, New York.

DIBROV, B. F., LIVSHITS, M. A., et VOLKENSTEIN, M. V. (1979)
The effect of a time lag in the immune reaction.
Lecture Notes in Control and Information Sci., No. 18, pp. 87-94.

DRIVER, R. D. (1962)
Existence and stability of solutions of a delay-differential system.
Arch. Rational Mech. Anal., vol. 10, pp. 401-426.

DRIVER, R. D. (1977)
Ordinary and delay differential equations,
Springer Verlag, New York.

EL'SGOL'TS, L. E. (1964)
Qualitative methods in mathematical analysis,
Amer. Math. Soc., Providence.

EL'SGOL'TZ, L. E. (1966)
Introduction to the Theory of Differential Equations with Deviating Arguments.
Holden-Day, San Francisco.

EL'SGOL'TS, L. E. et NORKIN, S. B. (1973)
Introduction to the theory and application of differential equations with deviating arguments,
Academic Press, New York.

ERGEN, W. K. (1954)
Kinetics of the circulating fuel nuclear reactor.
J. Appl. Phys., vol. 25, pp. 702-711.

FELDSTEIN, M. A. (1964)
Discretization methods for retarded ordinary differential equations,
Ph. D. thesis, University of California, Los Angeles.

FIEDLER, M. et PTAK, V. (1962)
On matrices with non-positive off-diagonal elements and positive principal minors.
Czech. Math. J., vol. 12, No. 87, pp. 382-400.

GENTINA, J. C. (1976)
Contribution à l'analyse et à la synthèse des systèmes continus non-linéaires de grande dimension.
Thèse d'Etat, Université de Lille.

GENTINA, J. C., BORNE, P. et LAURENT, F. (1976)
Stabilité des systèmes continus non linéaires de grande dimension.
Revue R.A.I.R.O. J. 3, pp. 69-77.

GOPALSAMY, K. (1992)
Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics,
Kluwer Academic Publisher, Dordrecht.

GORECKI, H., FUKSA, S., GRABOWSKI, P. and KORYTOWSKI (1989)
Analysis and synthesis of time-delay systems
John Wiley & Sons, Chichester and PWN - Polish Scientific Publishers, Warszawa.

GORELIK, G. (1939)
To the theory of feedback with delay,
J. Tech. Phys., Vol. 9, No. 5, pp. 450-454.

GORJACHENKO, V. D. (1971)
Méthodes de la théorie de la stabilité dans la dynamique des réacteurs nucléaires.
Atomizdat, Moscou. (en russe.)

GOUBET, A. (1993)
Sur la stabilité pratique des systèmes non linéaires à retards.
Rapport de DEA en Productique, U.S.T. de Lille - Ecole Centrale de Lille

GOUBET, A., DAMBRINE, M. et RICHARD, J. P. (1995)
An extension of stability criteria for linear and nonlinear time-delay systems.
Proposé au congrès IFAC Conf. on System Structure and Control, Nantes, juillet 1995.

GRAFTON, R. B. (1972)
Periodic solutions of Liénard equations with delay: some theoretical and numerical results.
In *Delay and Functional Differential Equations and their applications*, K. Schmitt (Ed.), Academic Press, New York, pp 321-334.

GROMOVA, P. S. et MARKOS, L. P. (1979)
Method of Liapunov vector functions for retarded systems.
In : *Trudy Sem. Teor. Differencial. Uravnenii s Otklon. Argumentom Univ. Druzby. Naradov Patrisa Lumumby*, vol. 9, pp. 31-39.

GRUJIĆ, Lj. T. (1973)
On practical stability.
Int. J. Control, vol. 17, No. 4, pp. 881-887.

GRUJIĆ, Lj. T. (1975)
Novel development of Lyapunov stability of motion.
Int. J. Control, vol. 22, No. 4, pp. 525-549.

GRUJIĆ, Lj. T., GENTINA, J. C. et BORNE, P. (1976)
General aggregation of large-scale systems by vector Lyapunov functions and vector norms.
Int. J. Control, vol. 24, No. 4, pp. 529-550.

GRUJIĆ, Lj. T., BORNE, P. et GENTINA , J. C. (1979)
Matrix approaches to the absolute stability of time-varying Lurie-Postnikov systems.
Int. J. Control, vol. 30, No. 6, pp. 967-980.

GUTMAN, P. 0 et HAGANDER, P. (1985)
A new design of constrained controllers for linear systems.
IEEE Trans. on Aut. Cont., vol. 30, No. 1, pp. 22-33.

HADAMARD, J. (1932)
Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques,
Hermann, Paris.

HADDOCK, J. R. et TERJÉKI, J. (1983)
Liapunov-Razumikhin functions and an invariance principle for functional differential equations.
Journal of Differential Equations, vol. 48, pp. 95-122.

HAHN, W. (1963)
Theory and application of Liapunov's direct method,
Prentice-Hall, Englewood Cliffs

HALANAY, A. (1966)
Differential Equations : stability, oscillations, time lags
Academic Press, New-York

HALANAY, A. (1973)
Systèmes à retards. Application des méthodes fréquentielles.
In : *Equations différentielles et fonctionnelles non linéaires.* (P. Janssens, J. Mawhin et N. Rouche Eds.).
Hermann, Paris, pp. 357-380.

HALE, J. K. (1965)
Sufficient conditions for stability and instability of autonomous functional-differential equations.
Journal of Differential Equations, vol. 1, pp. 452-482.

HALE, J. (1977)
Theory of Functional Differential Equations
Springer-Verlag, New york

HERTZ, D., JURY, E.I., et ZEHEB, E. (1984 a)
Simplified analytic stability test for systems with commensurate time delays
I.E.E. Proceedings, Vol. 131, part D, No. 1, pp. 52-56.

HERTZ, D., JURY, E.I., et ZEHEB, E. (1984 b)
Stability independent and dependent of delay for delay differential systems.
J. of the Franklin Institute, Vol. 318, No. 3, pp. 143-150.

HERTZ, D., JURY, E.I., et ZEHEB, E. (1987)
Roots exclusion from complex polydomains and some of its applications.
Automatica, Vol. 23, No. 3, pp. 399-404.

HIRAI, K., et SATOH, Y (1980)
Stability of a system with variable time-delay.
I.E.E.E. Trans. Aut. Cont., vol. 25, No. 3, pp. 552-554.

HMAMED, A. (1986)
On the stability of time-delay systems : New results.
Int. J. Control, Vol 43, No. 1, pp 321-324.

HUTCHINSON, G. E. (1948)
Circular causal systems in ecology.
Ann. N. Y. Acad. Sci., vol. 50, pp. 221-246.

JURY, E.I., et MANSOUR M. (1982)
Stability conditions for a class of delay differential systems.
Int. J. Control, Vol. 35, No. 4, pp. 689-699.

KAMEN, E. (1980)
On the relationship between zero criteria for two-variable polynomials and asymptotic stability of delay differential equations.
I.E.E.E. Trans.Aut. Cont., Vol. 25, No. 5, pp. 983-984.

KAMENKOV, G. V. (1953)
On stability of motion over a finite interval of time.
Prikl. Mat. Meh., vol. 17, No. 5, pp. 529-540. (en russe)

KARATUEVA, N. A. et MATROSOV, V. M. (1985)
Vector Lyapunov functions method for difference-differential systems and its applications to immunology.
In : *Proc. 12th IFIP Conf. Budapest, Hungary, 1985.* Lecture Notes in Control and Inf. Sci., vol. 84 (1986), pp. 384-393.

KOLMANOVSKII, V. B. et MYSHKIS, A. (1992)
Applied theory of functional differential equations,
Kluwer Academic Publisher, Dordrecht.

KOLMANOVSKII, V. B. et NOSOV, V. R. (1986)
Stability of functional differential equations.
Academic Press, London.

KOSTITZIN, V. A. (1934)
Symbiose, parasitisme et évolution (Etudes mathématiques),
Hermann, Paris.

KRASOVSKII, N. N. (1956)
On asymptotic stability of systems with after effect.
Prikl. Mat. Meh., vol. 20, No. 4, pp. 513-518.

KRASOVSKII, N. N.. (1963)
Stability of Motion : Applications of Lyapunov's second method to differential systems and equations with delay,
Stanford University Press, Stanford.

KUANG, Y. (1993)
Delay differential equations with applications in population dynamics
Academic Press, Boston.

KWON, W. H., LEE, C. W., et KIM, S. W. (1990)
Performance improvement using time delays in multivariable controller design.
Int. J. Control, vol. 52, No. 6, pp. 1455-1473.

LAKSHMIKANTHAM, V. et LEELA, S. (1969)
Differential and integral inequalities : Theory and Applications. Vol. 2.
Academic Press, New York.

LASALLE, J. (1960)
Some extensions of Liapunov's second method.
IRE Trans. Circuit Theory, vol. 7, pp. 520-527.

LASALLE, J. et LEFSCHETZ, S. (1961)
Stability by Liapunov's direct method with applications,
Academic Press, New York.

LEE, M et HSU, C. (1969)
On the τ-decomposition method of stability analysis for retarded dynamical systems.
SIAM J. Control, vol. 7, No. 2, pp. 242-259.

LEE, T et CHANG, Y (1987)
Analysis of time-varying delay systems via general orthogonal polynomials.
Int. J. Control, vol. 45, No. 1, pp. 169-181.

LEWIS, R. M. et ANDERSON, B. D. O. (1980)
Necessary and sufficient conditions for delay-independent stability of linear autonomous systems
I.E.E.E. Trans. on Aut. Contr., Vol. 25, No. 4, pp. 735-739.

LONDON, W.P. et YORKE, J. A. (1973)
Recurrent epidemics of measles, chickenpox, and mumps I et II,
Amer. J. Epid., vol. 98, pp 453-482.

MALEK-ZAVAREI, M. et JAMSHIDI, M. (1987)
Time-delay systems : Analysis, Optimization and Applications.
North-Holland, Amsterdam.

MARCHUK, G. I. (1979)
Mathematical models in immunology and their interpretation.
Lecture Notes in Control and Information Sci., No. 18, pp. 114-129.

MARSHALL, I. E. et SALEHI, S. V. (1982)
Improvement of system performance by the use of time-delay elements.
IEE Proc. D. Control Th & Appl., vol. 129, No. 5, pp. 177-181.

MATROSOV, V. M. (1962)
On the theory of stability of motion
Prikl. Mat. Meh., vol. 26, No. 6, pp. 992-1002.

MATROSOV, V. M. (1968 et 1969)
Comparison principle and vector Lyapunov functions.
I : *Diff. Uranh.*, vol. 4, No. 8, pp. 1374-1386, (1968).
II : *Diff. Uranh.*, vol. 4, No. 10, pp. 1740-1752, (1968).
III : *Diff. Uranh.*, vol. 5, No. 7, pp. 1171-1185, (1969).
IV : *Diff. Uranh.*, vol. 5, No. 12, pp. 2128-2143, (1969).

MICHEL, A. N. et MILLER, R. K. (1977)
Qualitative analysis of large-scale dynamical systems.
Academic Press, New York.

MIKOLAJSKA, Z. (1969)
Une remarque sur des notes de Razumichin et Krasovskij sur la stabilité asymptotique.
Annales Polonici Mathematici, vol. XXII, pp. 69-72.

MINORSKY, N. (1942)
Self-excited oscillations in dynamical systems possessing retarded actions,
J. Appl. Mech., Vol. 9, pp. 65-71.

MINORSKY, N. (1947)
Experiments with activated tanks.
Transl. ASME No. 69, pp. 735-747.

MORI T. (1985)
Criteria for asymptotic stability of linear time delay systems.
I.E.E.E. Trans. on Aut. Cont., Vol. 30, No. 2, pp. 158-160.

MORI T., FUKUMA N., et KUWAHARA M. (1981)
Simple stability criteria for single and composite linear systems with time delays.
Int. J. Control, Vol. 34, No. 6, pp. 1175-1184.

MORI, T., KOKAME, H. et KUWAHARA, M. (1986)
Analysis of time-delay systems : stability and instability.
In *Proceedings of 25th Conference on Decision and Control,* Athens, Greece - December 1986 -, pp. 895-898.

MORI, T. et KOKAME, H. (1989)
Stability of $dx/dt = A\,x(t) + B\,x(t-\tau)$.
I.E.E.E. Trans. on Aut. Cont., vol. 34, No. 4, pp. 460-462.

MYSHKIS, A. D. (1949)
General theory of differential equations with delay,
Uspehi Mat. Nauk.(N.S.), Vol. 4, No. 33, pp. 99-141. (En russe), (Traduit en anglais dans *Transl. AMS.* No. 55, pp. 1-62 (1951)).

MYSHKIS, A. D. (1955)
Lineare Differentialgleichungen mit nacheilenden Argumentom
Deutscher Verlag. Wiss. Berlin

NEIMARK, J. (1949)
D-subdivisions and spaces of quasi-polynomials.
Prikl. Mat. Meh., vol. 13, No. 4, pp. 349-380.

NICULESCU, S. I., De SOUZA, C. E., DION, J. M., DUGARD, L. (1993)
Robust stability and Stabilization of uncertain linear systems with state delays: Single delay case (I).
Internal note L.A.G. 93-91.

PERRUQUETTI, W. (1994)
Sur la stabilité et l'estimation des comportements non linéaires non stationnaires perturbés.
Thèse de l'Université des Sciences et Technologies de Lille. No. d'ordre 1286.

PONTRYAGIN, L. S. (1942)
On the zeros of some elementary transcendental functions.
Izvestiya Akad. Nauk SSSR, vol. 6, No. 33, pp. 115-134. (Une traduction anglaise est disponible dans A.M.S. Transl. (1955), vol. 1, pp. 95-110.)

POPOV, V. M. et HALANAY, A. (1962)
About stability of nonlinear controlled systems with delay.
Autom. and Remote Control, vol. 23, No. 7, pp. 849-851.

RABENASOLO, A. B. (1992)
Analyse et commande des systèmes linéaires à coefficients périodiques.
Thése de 3ème cycle No. 993, Université des Sciences et Technologie de Lille.

RADHY, N. E. (1992)
Contibution à l'étude de la stabilisabilité et de la régulation des systèmes non linéaires complexes sous contraintes d'état et de commande.
Thèse de doctorat es Sciences Physiques. Université Hassan II de Casablanca, Maroc.

RADHY, N. E., BORNE, P. et RICHARD, J. P. (1990)
Regulation of nonlinear time-varying continuous systems with constrained state.
In : *The Lyapunov functions method and applications.*. P. Borne and V. Matrosov (Eds). J.C. Baltzer AG, Scientific Publishing Co. – IMACS, pp. 81-88.

RASVAN, V. (1972)
Frequency domain stability criteria for time lag control systems with several nonlinearities. Part I: General Results.
Rev. Roum. Sci. Techn. – Electrotechn. et Energ., vol. 17, No. 1, pp. 129-144.
II: Applications.
Rev. Roum. Sci. Techn. – Electrotechn. et Energ., vol. 17, No. 2, pp. 369-381
III: Linear and nonlinear systems with monotonic time-varying gain.
Rev. Roum. Sci. Techn. – Electrotechn. et Energ., vol. 17, No. 3, pp. 507-521.

RAZUMIKHIN, B. S. (1956)
On the stability of systems with delay.
Prikl. Mat. Meh., vol. 20, No. 4, pp. 500-512.

RAZUMIKHIN, B. S. (1960)
The applications of Lyapunov's method to problems in the stability of systems with delay.
Automat. i Telem., vol. 21, No. 6, pp. 740-748.

RAZZAGHI, MO. et RAZZAGHI, ME. (1989)
Taylor series analysis of time-varying multi-delays systems.
Int. J. Control, vol. 50, No. 1, pp. 183-192.

REKASIUS, Z. V. (1980)
A stability test for systems with delays.
In *Proc. of the 1980 Joint Automatic Control Conf.*, San Francisco, CA, paper TP9-A.

RICHARD, J. P. et BORNE, P. (1987)
State-space modelling : state-space transformation
In : *Systems & Control Encyclopedia. Theory, Technology, Applications..*
M. G. Singh (Ed.)
Pergamon Press, Oxford. T. 7, pp. 4540-4547.

ROBERT, F. (1964)
Normes vectorielles de vecteurs et de matrices.
Revue Française de traitement de l'information, vol. 7, No. 4, pp. 261-269.

SHIMANOV, S. N. (1960)
On stability in the critical case of a zero root for systems with time lag.
J. Appl. Math. Mech., Vol 24, pp. 653-668.

SHIMBELL, A. (1950)
Contributions to the mathematical biophysics of the central nervous system with special reference to learning.
Bull. Math. Biophys., vol. 12, pp. 241-275.

SILJAK, D. D. (1975)
Stability Criteria for two-variable polynomials.
I.E.E.E. Trans. on Circuits and Systems, Vol. 22, No. 3, pp. 185-189.

SLATER, M. et WILF, H. S. (1960)
A class of linear differential difference equations.
Pac. J. Math., vol. 10, pp. 1419-1427.

STOKES, A. P. (1962)
A Floquet theory for functional differential equations.
Proc. Nat. Acad. of Sci., USA, vol. 48, pp. 1330-1334.

SWISHER, G. M. et TENQCHEN, S. (1988)
Design of proportional-minus delay action feedback controller for second and third order systems.
Proc. Amer. Control Conf., pp. 254-260.

TAKAHASHI, S., YAMANAKA, K. et YAMADA, M. (1987)
Detection of dominant poles of systems with time delays by using Padé approximation.
Int. J. Control, vol. 45, No. 1, pp. 251-254.

THOWSEN A. (1981)
The Routh-Hurwitz method for stability determination of linear differential-difference systems.
Int. J. Control, Vol. 33, No. 5, pp. 991-995.

TOKUMARU, H., ADACHI, N. et AMEMIYA, T. (1975)
Macroscopic stability of interconnected systems.
Preprint of 6th IFAC Congress, paper ID44.4.

VASSILAKI, M. (1990)
Applications of the method of Lyapunov functions to the design of constrained regulators.
In : *The Lyapunov functions method and applications*.. P. Borne and V. Matrosov (Eds). J.C. Baltzer AG, Scientific Publishing Co. – IMACS, pp. 97-102.

VASSILAKI, M. et BITSORIS, G. (1989)
Optimum algebraic design of continuous-time regulators with polyhedral constraints.
Preprints of AIPAC'89, Nancy, France, IFAC, vol 1, pp. 61-64.

VASSILAKI, M., HENNET, J. C. et BITSORIS G. (1988)
Feedback control of linear discrete-time systems under state and control constraints.
Int. J. Control, vol. 47, No. 6, pp. 1727-1735.

VIRK, G. S. (1985)
Runge Kutta method for delay-differential systems.
IEE Proceedings, vol. 132, part D, No. 3, PP. 119-123.

VOLTERRA, V. (1909)
Sulle equazioni integrodifferenziali della teorie dell'elasticita.
Atti Reale Accad. Lincei 18, 295.

VOLTERRA, V. (1931)
Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie,
Gauthier-Villars, Paris

WALTMAN, P. (1974)
Deterministic threshold models in the theory of epidemics.
Lecture Notes in Biomathematics, vol. 1, Springer-Verlag, Berlin

WALTON, K. et MARSCHALL, J.E. (1987)
Direct method for TDS stability analysis.
I.E.E. Proceedings, Vol. 134, part D, No. 2, pp. 101-107.

WANG, S. S. (1992)
Further results on stability of $dx/dt = A\,x(t) + B\,x(t - \tau)$.
Systems and Control letters, Vol. 19, No. 2, pp. 165-168.

WANG, S. S., CHEN, B. S. et LIN, T. P. (1987)
Robust stability of uncertain time-delay systems
Int. J. Control, vol. 46, No.3, pp. 963-976.

WANG, T (1992)
Equivalent conditions on stability of functional differential equations.
J. of Mathematical Analysis and Applications, vol. 170, pp. 138-157.

WANGERSKY, P. J. et CUNNINGHAM, W. J. (1956)
On time lags in equations of growth.
Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., vol 42, pp. 690-702.

WANGERSKY, P. J. et CUNNINGHAM, W. J. (1957)
Time lags in prey-predator population models.
Ecology, vol. 38, pp. 136-139.

WAZEWSKI, T. (1950)
Systèmes des équations et des inégalités différentielles ordinaires aux deuxièmes membres monotones et leurs applications.
Annales Soc. Polonaise de Math., Tome XXIII, pp. 112-166.

XU , D (1986)
Stability criteria for time-varying delay systems.
In : *Frequency domain in state space methods for linear systems.*, C. I. Byrnes et A. Lindquist (Eds.).
Elsevier Science Publishers B.V. (North Holland), pp. 431-437.

XU, B. et LIU, Y. (1994)
An improved Razumikhin-type theorem and its applications.
I.E.E.E. Trans. on Aut. Cont., vol. 39, No. 4, pp. 839-841.

YOSHIZAWA, T. (1966)
Stability theory by Liapunov's second method,
The Mathematical Society of Japan.

ZAHAROV, A.A., KOLESOV, J.S., SPOKOJNOV, A.N. et FEDOTOV, N.B. (1982)
Theoretical explanation of ten years oscillation cycles of quantities of animals in Canada and Iakoutia.
In *Studies in Stability and Oscillations*, pp. 82-131. Iaroslavl, 1982.

ZIEGLER, J. G. et NICHOLS, N. B. (1942)
Optimum settings for automatic controllers,
Transl. ASME, vol. 64, No. 11, pp. 752-768.

ZUBOV, V. I. (1961)
Methods of A. M. Lyapunov and their applications,
Transl. Series of United States Atomic Energy Commission.

ZVERKIN, A. M. (1959)
Dependance of the stability of solutions of linear differential equations with lag upon the choice of the initial moment.
Vestnik Moscov Univ. Ser. I. Mat. Meh. Astr. Him., vol. 5, pp. 15-20. (En russe.)

ZVERKIN, A.M. (1967)
Differential-difference equations with periodic coefficients.
Appendice de la traduction russe de "Differential-difference equations" (Bellman et Cooke). MIR, Moscou.

ZVERKIN, A.M. (1967)
The connection between boundedness and stability of solutions of linear systems within infinite number of degrees of freedom.
Differentialniye Uravnenija, vol. 4, pp. 1726.

ZVERKIN, A. M. (1968)
The connection between boundedness and stability of solutions of linear systems within infinite number of degree of freedom.
Differentialniye Uravnenija, vol. 4, pp. 366-367. (En russe.)

ZVERKINA, T. S. (1967)
On the question of the numerical integration of systems with a delay.
Proc. Sem. Th. Diff. Eqs. Dev. Arg., vol. 4, pp. 221-232.