N° d'ordre : 1361

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

présentée par

Driss TOUIJAR

Algorithmes stochastiques et application à l'imagerie électromagnétique bayésienne

Soutenue le 28 Septembre 1994 devant la Commission d'Examen :

Président : M.C. VIANO Professeur, Université de Lille I
Rapporteurs : C. COCOZZA Professeur, Université de Marne la Vallée
M. MENVIELLE, Professeur, Université de Paris Sud
Membres : M. ROUSSIGNOL, Professeur, Université de Marne la Vallée
C. LANGRAND, Professeur, Université de Lille I

$\mathcal{A}$ mes parents
$\mathcal{A}$ ma femme
$\mathcal{A}$ ma famille

Avant propos.

Le travail que nous présentons dans ce mémoire a été effectué au laboratoire de Statistique et Probabilités de l'Université de Lille (I) sous la direction de Monsieur le Professeur Michel ROUSSIGNOL.

En premier lieu, j'exprime ma reconnaissance à Monsieur le Professeur Michel ROUSSIGNOL, Directeur de thèse, pour la bienveillance avec laquelle il en a guidé la réalisation. Je suis heureux, ici, de lui exprimer ma profonde reconnaissance pour les conseils qu'il m'a prodigué avec un dynamisme et un enthousiasme qui m'ont été fort utiles tout au long de ce travail.

J'adresse mes remerciments très sincères à Madame le Professeur Marie Claude VIANO, Directrice du Laboratoire, pour l'honneur qu'elle me fait en acceptant de présider ce jury.

Que Madame le Professeur Christiane COCOZZA et Monsieur le Professeur Michel MENVIELLE soient remerciés très vivement, pour l'intérêt qu'ils ont montré pour notre travail en participant au jury de notre thèse comme rapporteurs.

C'est avec empressement que je veux remercier Monsieur Claude LANGRAND, directeur de l' U.F.R. de Mathématiques de Lille (I), pour sa participation au jury de thèse comme examinateur.

Je tiens enfin à remercier tous les membres du Laboratoire et tous ceux qui ont contribué de loin ou de près à ce travail.

Table des matières

Introduction

Ce travail consiste en l'étude des problèmes inverses en géomagnétisme. Le problème se résume ainsi : à l'aide des mesures du champ électrique et magnétique en surface , peut-on trouver les valeurs de la conductivité dans le sous-sol ?

Pour répondre à cette question, nous utilisons le point de vue statistique bayesien et menons les estimations à l'aide d'algorithmes stochastiques selon les méthodes décrites dans (M.ROUSSIGNOL,V.JOUANNE, M.MENVIELLE et P.TARITS [20]).

Ce travail comporte deux aspects : théorique et pratique. L'aspect théorique consiste à étudier certains algorithmes stochastiques utilisables dans les techniques bayésiennes d'inversion. L'aspect pratique consiste à mettre en œuvre ces algorithmes pour résoudre un problème inverse en géomagnétisme.

Le premier chapitre traite le problème inverse dans le cas d'une plaque mince hétérogène en surface, surmontant un milieu stratifié où chaque couche a une conductivité constante. Autrement dit, le problème posé est d'essayer de retrouver les valeurs des conductances de cette plaque horizontale à l'aide des mesures de champs électrique et magnétique éffectuées à la surface du sol.

Dans le deuxième chapitre, on utilise la méthode de l'**O.D.E.** (ordinary differential equation) pour étudier des propriétés d'un algorithme utilisé dans le chapitre 1.

Dans le troisième chapitre, on étudie la stabilité de cet algorithme à l'aide d'une méthode de contraction. On trouve des conditions sous lesquelles l'algorithme converge.

Le quatrième chapitre traite le problème inverse bidimensionnel. Dans ce cas, le sous-sol est représenté par une coupe verticale du terrain dont les résistivités ne varient que suivant les deux directions horizontale et verticale.

Chapitre 1

Problèmes inverses en géomagnétisme

BUT

Le but de ce chapitre est de trouver les valeurs de la conductivité d'une zone dans le sous-sol à l'aide des mesures de champ électrique et magnétique effectuées à la surface du sol.
On adopte ici la méthode évoquée dans le travail de (ROUSSIGNOL, JOUANE, MENVIELLE et TARITS [20]) ; Bayesian electromagnetic imaging) qui consiste en l'utilisation d'un algorithme stochastique afin de trouver un estimateur bayesien des conductivités recherchées. Cet algorithme est testé sur un modèle synthétique fait à partir d'une plaque mince hétérogène se trouvant dans le sous-sol.

1.1 Introduction

Le but final des études effectuées dans le domaine de l'induction électromagnétique, est l'estimation de la distribution des conductivités des roches à partir des mesures électromagnétiques. Autrement dit, trouver une solution du problème inverse en géomagnétisme.

Les mesures électromagnétiques se font en des points de surface uniformément distribués, à une gamme limitée de fréquences et avec un bruit expérimental.

Avant d'aborder le problème inverse, on commence par résoudre le problème direct en électromagnétisme ; c'est à dire le calcul du champ électrique et magnétique en surface quand on connaît la structure du sous-sol, qui est définie par la connaissance des conductivités de ce dernier.

Le problème se résoud plus facilement lorsque les particularitées géométriques de la distribution des conductivités permettent des simplifications dans le calcul et un gain au niveau du temps de calcul. En effet, c'est le cas quand la conductivité ne dépend pas d'une direction horizontale ou quand les hétérogénéités latérales de la conductivité sont situées dans une couche fine du sous-sol (approximation de la plaque mince, voir MARESCHAL et VASSEUR [16] pour une critique de toutes les solutions proposées). (VASSEUR etWEIDELT [22]) ont proposé une solution pour le problème direct dans le cas d'une plaque mince hétérogène à la surface du sol, et ils ont montré que leur méthode reste valable pour la résolution du problème inverse. BARTHES et VASSEUR[2] ont donné un exemple de la solution du problème inverse en utilisant la technique de l'optimisation au sens des moindres carrés.

L'objectif de ce chapitre est la présentation de la méthode générale bayesienne pour résoudre le problème inverse quand on dispose d'une solution du problème direct.

On cherche les conductivités solutions dans un intervalle bien choisi à l'avance. Le choix de ce dernier se fait en se basant sur la connaissance des roches du sous-sol, ou simplement pour avoir des simplifications dans le calcul. La méthode bayesienne exprime en premier lieu sa connaissance et son choix par la donnée d'une loi de probabilité de la distribution des conductivités appelée la loi à priori. Ensuite on calcule la loi à postériori, qui est une loi de probabilité de la distribution des conductivités connaissant les observations et la densité de probabilité du bruit expérimental. Il est alors intéressant de calculer la moyenne de cette loi à postériori à partir de laquelle on calcule l'estimateur de la distribution des conductivités. Et il est intéressant aussi d'en calculer la variance. Cette dernière mesure la fiabilité de l'estimateur.

La technique bayesienne en géomagnétisme a été déjà utilisée soit avec les lois à priori gaussiennes et un bruit experimental de loi gaussienne (BACKUS[1], MACKIE et al.[15]) soit avec les lois à priori uniformes et un bruit expérimental de loi gaussienne (TARITS et al.[21]).

Lorsqu'on veut se passer de l'hypothèse gaussienne, on se heurte à la forme analytique de la loi à postériori qui rend impossible le calcul direct. Dans ce cas, on recourt à un algorithme stochastique qui simule une chaîne de markov se stabilisant autour de la loi à postériori. Cet algorithme est proche de celui de "heat bath" et de "simulated annealing" utilisés en imagerie (KIRKPATRICK[13], GEMAN et GEMAN [10] et GIBERT et VERIEUX [11]).

les équations de base sont données dans la deuxième partie de ce chapitre. Dans la troisième partie, on calcule la loi à postériori avec les lois à priori et les lois du bruit étant des lois quelconques. Dans la quatrième partie, on décrit une chaîne de markov qui se stabilise vers la loi à postériori. Et dans la cinquième partie, on donne une chaîne de markov modifiée dont la simulation est très économique, du point de vue temps de calcul, par rapport à la chaîne de markov de base. Et à la fin, dans la sixième partie, on donne les résultats d'expériences avec un modèle synthétique d'une plaque mince hétérogène.

1.2 Les équations de base

On suppose qu'on peut calculer les transformées de Fourier $E_n(M,f)$ et $H_n(M,f)$ des champs électrique et magnétique en tout point M et à toute fréquence f, pour une structure donnée qu'on appelle structure normale. La structure normale est définie par les conductivités $\sigma_n(M)$ en tout point M. Par exemple, une structure normale peut être représentée par une série de couches uniformes et horizontales. La structure réelle diffère de la structure normale par l'existence d'une zone d'intérêt D. Notons $\sigma(M)$ la conductivité au point M pour la structure réelle. On suppose que $\sigma(M)$ et $\sigma_n(M)$ sont égales en dehors de la zone d'intérêt D. On notera alors $\sigma_a(M)$ la différence $\sigma(M) - \sigma_n(M)$ entre la conductivité réelle et la conductivité normale au point M. $E(M,f,\sigma)$ et $H(M,f,\sigma)$ désignent les transformées de Fourier des champs électrique et magnétique au point M, à une fréquence f et avec une structure réelle σ.
En utilisant la méthode du noyau de Green, on peut réécrire les équations de base de l'électromagnétisme comme suit (WEIDELT [23]) :

$$E(M,f,\sigma) = E_n(M,f) - if\mu \int_D \sigma_a(N)G(M,N,f)E(N,f,\sigma)dN \quad (1.1)$$

$$H(M,f,\sigma) = H_n(M,f) + \int_D \sigma_a(N) rot(G(M,N,f))E(N,f,\sigma)dN \quad (1.2)$$

en tout point M et à toute fréquence f. La quantité μ est la perméabilité magnétique du milieu. On prendra μ égale à la perméabilité du vide.
$G(M,N,f)$ est une matrice complexe d'ordre 3×3, appelée noyau de Green. $G(M,N,f)\delta(N)$ représente la transformée de Fourier du champ électrique au point M et à la fréquence f, engendré par un dipôle unitaire $\delta(N)$ situé au point N (MORSE et FESHBACK [17]).
$rot(G(M,N,f))$ est une matrice complexe d'ordre 3×3 obtenue en prenant le rotationnel des vecteurs colonnes de la matrice $G(M,N,f)$ au point M.

Pour résoudre ces équations, on discrétise le domaine D en K petites mailles $P_k(k = 1,\ldots,K)$ dans lesquelles les conductivités, les noyaux de Green et les champs électrique et magnétique sont supposés constants. Alors, en utilisant quelques notations et en désignant par $\tau = (\tau_k; k = 1,\ldots,K)$ les conductivités anormales aux mailles P_k (c'est à dire la conductance), les équations de base deviennent :

$$E(M,f,\tau) = E_n(M,f) - if\mu \sum_{k=1}^{K} \tau_k G(M,P_k,f)E(P_k,f,\tau) \quad (1.3)$$

$$H(M,f,\tau) = H_n(M,f) + \sum_{k=1}^{K} \tau_k rot(G(M,P_k,f))E(P_k,f,\tau) \quad (1.4)$$

en tout point M et à toute fréquence f.

Considérons le système linéaire formé par l'équation (1.3) écrite pour chaque point $P_k(k = 1,\ldots,K)$ dans D. Etant donnée la distribution de la conductance anormale $\tau = (\tau_k; k = 1,\ldots,K)$, les quantités $E(P_k,f,\tau)$ sont alors solutions de ce système. Dans le cas général, pour chaque fréquence, le système a $6K$ équations et $6K$ inconnues. Et donc, le champ électrique et le champ magnétique sont calculables à partir des équations (1.3) et (1.4), en tout point M et à toute fréquence f.

Considérons maintenant le problème inverse. Les conductances $\tau = (\tau_k; k = 1,\ldots,K)$ sont inconnues, et on veut les estimer à l'aide de mesures effectuées en différents points de la surface du sol et à différentes fréquences. Les données $y_{i,j}$ sont des mesures d'une fonction $h(E(M_i,f_j,\tau), H(M_i,f_j,\tau))$ aux points $M_i(i = 1,\ldots,I)$ de la surface du sol, et à des fréquences $f_j(j = 1,\ldots,J)$. Pour chaque point M_i et à chaque fréqeuence f_j, la donnée

$y_{i,j}$ est égale à $h(E(M_i, f_j, \tau), H(M_i, f_j, \tau))$ plus un bruit expérimental $w_{i,j}$:

$$y_{i,j} = h(E(M_i, f_j, \tau), H(M_i, f_j, \tau)) + w_{i,j} \tag{1.5}$$

On suppose que la donnée $\mathbf{y} = (y_{i,j}; i = 1, \ldots, I; j = 1, \ldots, J)$ et le bruit $\mathbf{w} = (w_{i,j}; i = 1, \ldots, I; j = 1, \ldots, J)$ sont les réalisations des variables aléatoires $\mathbf{Y} = (Y_{i,j}; i = 1, \ldots, I; j = 1, \ldots, J)$ et $\mathbf{W} = (W_{i,j}; i = 1, \ldots, I; j = 1, \ldots, J)$. On suppose en outre que les variables aléatoires $(W_{i,j}; i = 1, \ldots, I; j = 1, \ldots, J)$ sont indépendantes, et que pour chaque point d'indice i et pour chaque fréquence d'indice j, elles ont la loi de probabilité $p_{i,j}$. On suppose que l'espérance mathématique des $W_{i,j}$ est nulle. Habituellement, on suppose que ces distributions sont gaussiennes, ce qui n'est pas toujours le cas.

La résolution du problème inverse consiste en l'estimation des conductances $\tau = (\tau_k; k = 1, \ldots, K)$ connaissant la donnée $\mathbf{y} = (y_{i,j}; i = 1, \ldots, I; j = 1, \ldots, J)$.

1.3 Estimation bayesienne

On cherche les solutions de la distribution des conductances, dans une classe réduite de conductances, en se basant : soit sur les connaissances géophysiques, soit sur les choix de simplifications. Les connaissances géologiques proviennent des recherches antérieurs faites dans l'étude de la géologie ou des méthodes géophysiques, et proviennent aussi des mesures de laboratoire faites sur les conductivités des roches. La méthode bayesienne exprime ces connaissances et ces choix par une loi de probabilité q sur la distribution des conductances, appelée la loi à priori. Le support de q est le premier choix. Les valeurs maximales et minimales des conductances possibles en chaque maille sont déduites des résultats obtenues dans le cadre des autres sciences de la terre. La définition du support de q comme étant un ensemble fini, est rendue nécessaire par les calculs numériques. Dans la suite, on prendra en chaque maille, L valeurs différentes des conductances possibles. Le support de q est alors l'ensemble des L^K images possibles. Il est évident que, plus L est grand, plus le modèle est précis, mais plus le calcul est long. On prend le même ensemble des L possibles conductances pour toutes les mailles. Mais, il est possible encore de réduire la classe des conductances en toute maille, en rendant la probabilité à priori égale à zéro en d'autres valeurs. Si aucune autre information n'est disponible, on prend alors comme probabilité à priori la probabilité uniforme sur la classe réduite des images reconnues des conductances. Dans certaines situations géophysiques, on peut remarquer que certaines conductances varient régulièrement avec l'espace, c'est à dire sans oscillations importantes. Par conséquent, l'image a besoin d'un lissage. Ce que l'on peut obtenir en prenant la loi de "Gibbs" comme loi à priori (GEMAN et GEMAN[10]). En effet, on peut choisir une loi de Gibbs qui donne une grande probabilité pour les images régulières et une petite probabilité pour les autres images. On peut prendre par exemple la loi de probabilité suivante :

$$q(\mathbf{a}) = Z \exp\left(-\lambda \sum_{k_i \text{ et } k_j \text{ voisins}} (a_{k_i} - a_{k_j})^2\right) \tag{1.6}$$

où Z est une constante de normalisation, et λ un paramètre positif. Le paramètre λ controle la régularité de la distribution des conductances dans D. Le plus grand λ correspond à la distribution la plus régulière ; si λ est égale à 0, là on n'a plus d'informations à priori sur la régularité.

Du point de vue bayesien (TARANTOLA[19], PRESS[18]), les observations et les conductances sont toutes des variables aléatoires. La loi des observations est la loi conditionnelle connaissant les valeurs des conductances dont la densité est donnée par :

$$f(y,\tau) = \prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{J} p_{i,j}(y_{i,j} - h(E(M_i, f_j, \tau), H(M_i, f_j, \tau))) \tag{1.7}$$

Cette quantité est une fonction de $\tau = (\tau_k; k = 1, \ldots, K)$ par l'intermédiaire de E et H (voir équations (1.3) et (1.4)). C'est une densité de probabilité de la variable $\mathbf{y} = (y_{i,j}; i = 1, \ldots, I; j = 1, \ldots, J)$.

Si les densités de probabilité $p_{i,j}$ sont gaussiennes, on peut alors réécrire l'équation (1.7) comme suit :

$$f(y,\tau) = Z \exp\left(-\sum_{i,j} \frac{(y_{i,j} - h(E(M_i, f_j, \tau), H(M_i, f_j, \tau)))^2}{2(\sigma_{i,j})^2}\right) \tag{1.8}$$

où Z est une constante de normalisation.

On s'intéresse à la loi à postériori des conductances, c'est à dire la probabilité conditionnelle connaissant les observations. Les calculs standards des probabilités conditionnelles donnent : pour toute image $\mathbf{a}$ et toute donnée $\mathbf{y}$

$$\mathbb{P}(\tau = \mathbf{a}/Y = \mathbf{y}) = \frac{f(\mathbf{y},\mathbf{a})q(\mathbf{a})}{\sum\limits_{\mathbf{b}\in A} f(\mathbf{y},\mathbf{b})q(\mathbf{b})} \tag{1.9}$$

où A est l'ensemble des L^K images possibles.

On prend, comme estimateur de la distribution des conductances, la moyenne de la probabilité à postériori. Si $A(k, c_l)$ est l'ensemble des images qui ont la conductance c_l dans la maille k, la k^{ieme} probabilité marginale à postériori po_k est :

$$po_k(c_l) = \frac{\sum\limits_{\mathbf{a}\in A(k,c_l)} f(\mathbf{y},\mathbf{a})q(\mathbf{a})}{\sum\limits_{\mathbf{a}\in A} f(\mathbf{y},\mathbf{a})q(\mathbf{a})} \tag{1.10}$$

L'estimateur de la conductance de la k^{ieme} maille est la moyenne de la k^{ieme} probabilité marginale à postériori :

$$\underline{\tau}_k = \sum_{l=1}^{L} c_l po_k(c_l) \tag{1.11}$$

La variance de cette probabilité marginale donne une indication sur la fiabilité de l'estimation. On peut avoir une autre indication en dressant les diagrammes de toutes les probabilités marginales afin de voir si la moyenne des probabilités est un estimateur acceptable. Dans la probabilité à postériori, sont incorporés deux facteurs d'imprécision : le bruit des mesures et la non unicité du problème inverse.

La fonction $h(.,.)$ peut être choisie de différentes façons. Dans le cas du sondage magnétotellurique, c'est le tenseur d'impédance $\underline{Z}$, défini par :

$$E = \underline{Z}H.$$

Ce tenseur peut être exprimé par un couple de base réelle ou complexe (une base magnétique et une base électrique) dans laquelle le tenseur est antidiagonal (EGGERS [9],COUNIL et al.[6], LA TORRACA et al. [14]). Dans le cas du sondage géomagnétique, c'est en général le vecteur d'induction V, appelé également "le tipper", vérifiant :

$$H_z = VH.$$

Ce tipper relit la composante verticale du champ magnétique à sa composante horizontale. Dans certains cas, il est intéressant d'utiliser le tenseur d'impédance et le tipper. La fonction h est calculée à l'aide des quantités $E(M_i, f_j, \tau)$ et $H(M_i, f_j, \tau)$; chaque calcul, en général, nécessite la résolution de J systèmes linéaires de $6K$ équations et $6K$ inconnues (voir partie 2).

Revenons à l'équation (1.9). Une petite difficulté qu'on ne voit pas au premier coup, c'est le calcul du dénominateur. Pour faire ce calcul, on a besoin de calculer $f(\mathbf{y}, \mathbf{b})q(\mathbf{b})$ pour toute les images $\mathbf{b}$ possibles des conductances, c'est à dire L^K fois. Dans les conditions réelles, il est impossible d'achever le calcul directement. C'est pour cela qu'on utilise un algorithme qui permet de calculer la loi à postériori.

1.4 Algorithme d'une chaîne de markov

On va définir un algorithme qui simule une chaîne de markov se stabilisant autour de la loi à postériori. Notons $X^{(n)} = (X^{(n)}(P_k), k = 1, \ldots, K)$ l'image formée par les conductances obtenues à l'étape n de l'algorithme. On part de l'image initiale $X^{(0)}$ des conductances. A l'étape n, on actualise l'image $X^{(n)}$ en changeant l'image précédente en une seule maille (qu'on appelle dans le cas d'une image un "pixel"). On choisit alors le pixel d'une façon aléatoire selon une loi de probabilité uniforme sur les K pixels. Si par exemple on tombe sur le k^{ieme} pixel, la nouvelle valeur de la conductance en ce pixel est choisie selon la loi de probabilité suivante :

$$\mathbb{P}(X^{(n+1)}(P_k) = c_l) = \frac{f(\mathbf{y}, \mathbf{a}(k, c_l))q(\mathbf{a}(k, c_l))}{\sum_{l=1}^{L} f(\mathbf{y}, \mathbf{a}(k, c_l))q(\mathbf{a}(k, c_l))} \tag{1.12}$$

où $\mathbf{a}(k, c_l)$ désigne l'image qui est égale à $X^{(n)}$ en tout pixel autre le k^{ieme} et est égale à c_l sur le k^{ieme}. Le calcul du terme $\mathbb{P}(X^{(n+1)}(P_k) = c_l)$ nécessite L fois le calcul du terme $f(\mathbf{y}, \mathbf{a}(k, c_l))q(\mathbf{a}(k, c_l))$.

La suite des images $(X^{(n)})_{n\geq 0}$ est un processus aléatoire qui n'est autre qu'une chaîne de markov homogène : la loi de $X^{(n+1)}$ ne dépend que de $X^{(n)}$ et d'un choix aléatoire indépendant du passé. C'est le même cas que l'échantillonneur de Gibbs (GEMAN et GEMAN [10]).

Proposition 1 *La chaîne de markov $(X^{(n)})_{n\geq 0}$ est irréductible et apériodique sur l'espace A de toutes les images possibles, qui est fini. La loi à postériori est la loi invariante de la chaîne .*

Démonstration

On montre que la loi à postériori est une loi invariante pour la chaîne de markov homogène définie dans la partie (4).

La chaîne de markov prend ses valeurs dans un ensemble A de toutes les images possibles des conductances. Cet ensemble a L^K éléments. Les probabilités de transition sont définies par :

-si $\mathbf{a}$ et $\mathbf{a}'$ diffèrent en plus d'une maille : $P(\mathbf{a}, \mathbf{a}') = 0$

-si $\mathbf{a}$ et $\mathbf{a}'$ sont égales ou diffèrent seulement à la maille k :

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{a}') = \frac{1}{K} \frac{f(\mathbf{y}, \mathbf{a}')q(\mathbf{a}')}{\sum_{l=1}^{L} f(\mathbf{y}, \mathbf{a}(k, c_l))q(\mathbf{a}(k, c_l))} \tag{1.13}$$

où $\mathbf{a}(k, c_l)$ désigne l'image égale à $\mathbf{a}$ ou à $\mathbf{a}'$ en toute maille différente de la k^{ieme} et qui prend la valeur c_l à la k^{ieme}.

La loi à postériori est égale à :

$$\pi(\mathbf{a}) = \frac{f(\mathbf{y}, \mathbf{a})q(\mathbf{a})}{\sum_{\mathbf{b}\in A} f(\mathbf{y}, \mathbf{b})q(\mathbf{b})} \tag{1.14}$$

Montrons que cette loi à postériori est réversible (i.e. $\pi(\mathbf{a}')P(\mathbf{a}',\mathbf{a}) = \pi(\mathbf{a})P(\mathbf{a},\mathbf{a}'))$:

Si $\mathbf{a}$ et $\mathbf{a}'$ diffèrent en plus d'une maille, la relation de la réversibilité devient évidente.

si $\mathbf{a}$ et $\mathbf{a}'$ sont égales ou diffèrent seulement à la maille k,on a dans ce cas :

$$\pi(\mathbf{a})P(\mathbf{a},\mathbf{a}') = \frac{f(\mathbf{y},\mathbf{a})q(\mathbf{a})}{\sum_{\mathbf{b}\in A} f(\mathbf{y},\mathbf{b})q(\mathbf{b})} \frac{1}{K} \frac{f(\mathbf{y},\mathbf{a}')q(\mathbf{a}')}{\sum_{l=1}^{L} f(\mathbf{y},\mathbf{a}(k,c_l))q(\mathbf{a}(k,c_l))} \tag{1.15}$$

Puisque $\mathbf{a}$ et $\mathbf{a}'$ jouent le même rôle dans le terme à droite de l'égalité, on obtient :

$$\pi(\mathbf{a})P(\mathbf{a},\mathbf{a}') = \pi(\mathbf{a}')P(\mathbf{a}',\mathbf{a})$$

Supposons que pour toute image $\mathbf{a}$, la quantité $f(\mathbf{y},\mathbf{a})q(\mathbf{a})$ soit strictement positive. D'où, pour tout $\mathbf{a}$ et $\mathbf{a}'$, il existe une probabilité strictement positive pour que la chaîne de markov passe de $\mathbf{a}$ à $\mathbf{a}'$ en K transitions. Donc la chaîne est irréductible. Et on montre de même que la chaîne est apériodique. Puisque l'espace d'état est fini, alors elle est récurrente.

■

D'après cette proposition, il existe une seule loi invariante, et par conséquent le théorème ergodique concernant les chaînes de Markov est vrai :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X^{(i)}(P_k)=c_l\}} = po_k(c_l) \quad \text{a.s.} \tag{1.16}$$

où $\mathbf{1}_{\{X^{(i)}(P_k)=c_l\}}$ désigne la fonction indicatrice de l'événement $\{X^{(i)}(P_k) = c_l\}$.

Néanmoins, il reste que le balayage aléatoire n'est pas très pratique. En effet, on n'est pas très sûr qu'après un certain nombre de balayage, tous les pixels ont été actualisés. C'est pour cela qu'on préfére un balayage régulier pixel par pixel.

Mais, dans ce cas, la chaîne de Markov ainsi construite n'est pas homogène, car sa probabilité de transition dépend de l'étape à laquelle on actualise un pixel.

Cependant, sa loi à postériori est invariante. En effet, soit $P_n(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ sa probabilité de transition à l'étape n

$$P_n(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{f(\mathbf{y}, \mathbf{a}(k(n), c_l))q(\mathbf{a}(k(n), c_l))}{\sum_{l=1}^{L} f(\mathbf{y}, \mathbf{a}(k(n), c_l))q(\mathbf{a}(k(n), c_l))} \tag{1.17}$$

où $\mathbf{a}(k(n), c_l)$ désigne l'image $\mathbf{a}$ dont la valeur au pixel k, à l'étape n, est c_l.

Supposons que la probabilité que l'image à l'étape n est $\mathbf{a}$ soit égale à la loi à postériori de $\mathbf{a}$ et montrons que c'est encore vrai à l'étape $n + 1$; c'est à dire qu'on montre que :

$$P(X^{(n)} = \mathbf{a}) = \pi(\mathbf{a}) \Longrightarrow P(X^{(n+1)} = \mathbf{a}) = \pi(\mathbf{a}) \tag{1.18}$$

En effet :

$$\begin{aligned} P(X^{(n+1)} = \mathbf{a}) &= \sum_{\mathbf{b} \in A} P(X^{(n)} = \mathbf{b}) P_n(\mathbf{b}, \mathbf{a}) \\ &= \sum_{\mathbf{b} \in A} \pi(\mathbf{b}) P_n(\mathbf{b}, \mathbf{a}) \end{aligned} \tag{1.19}$$

Or puisque les images à deux étapes successives ne diffèrent qu'au plus en un pixel, la somme ci-dessus se réduit à une somme sur les différentes valeurs possibles que peut prendre le pixel en question. D'où :

$$P(X^{(n+1)} = \mathbf{a}) = \sum_{j=1}^{L} \frac{f(\mathbf{y}, \mathbf{b}(k, c_j))q(\mathbf{b}(k, c_j))}{\sum_{\mathbf{b} \in A} f(\mathbf{y}, \mathbf{b})q(\mathbf{b})} \frac{f(\mathbf{y}, \mathbf{a}(k, c_l))q(\mathbf{a}(k, c_l))}{\sum_{i=1}^{L} f(\mathbf{y}, \mathbf{b}(k, c_i))q(\mathbf{b}(k, c_i))}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{f(\mathbf{y}, \mathbf{a}(k, c_l))q(\mathbf{a}(k, c_l))}{\sum\limits_{\mathbf{b} \in A} f(\mathbf{y}, \mathbf{b})q(\mathbf{b})} \\
&= \pi(\mathbf{a}) \qquad \blacksquare \qquad (1.20)
\end{aligned}
$$

Pour appliquer le théorème ergodique, on va assimiler notre chaîne à une chaîne de Markov homogène en considérant qu'une étape de la chaîne correspond à un balayage régulier complet de l'image.

Par cette nouvelle façon de balayage, on obtient une chaîne $(\tilde{X}^{(n)})_{n \geq 0}$ où $\tilde{X}^{(n)} = X^{(nK)}$ est l'image obtenue après le n^{eme} balayage complet. D'où, la probabilité de transition de $\tilde{X}^{(n+1)}$ à $\tilde{X}^{(n)}$ ne dépend pas de n et donc la chaîne est homogène.

Définissons la probabilité de transition de $\tilde{X}^{(n)}$ à partir des probabilités de transitions de $X^{(n)}$; on a :

$$
\begin{aligned}
P(\tilde{X}^{(n+1)} = \mathbf{b} / \tilde{X}^{(n)} = \mathbf{a}) &= P(\tilde{X}^{(1)} = \mathbf{b} / \tilde{X}^{(0)} = \mathbf{a}) \\
&= P(X^{(K)} = \mathbf{b} / X^{(0)} = \mathbf{a}) \\
&= P_0 P_1 P_2 \ldots P_{K-1}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \qquad (1.21)
\end{aligned}
$$

où $P_0 P_1 P_2 \ldots P_{K-1}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ est le produit de K matrices de transition de la chaîne non homogène $(X^{(n)})$, qu'on note $\tilde{P}^{K}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$: probabilité de transition de $\mathbf{a}$ à $\mathbf{b}$ en K étapes.

Montrons maintenant que la loi à postériori de $(\tilde{X}^{(n)})$ est sa loi invariante. Pour cela, on va montrer que :

$$
P(\tilde{X}^{(n)} = \mathbf{a}) = \pi(\mathbf{a}) \Longrightarrow P(\tilde{X}^{(n+1)} = \mathbf{a}) = \pi(\mathbf{a}) \qquad (1.22)
$$

Comme précédement, on a :

$$\begin{aligned}
P(\tilde{X}^{(n+1)} = \mathbf{a}) &= \sum_{\mathbf{b}\in A} P(\tilde{X}^{(n)} = \mathbf{b})\, \tilde{P}^{K}(\mathbf{b},\mathbf{a}) \\
&= \sum_{\mathbf{b}\in A} \pi(\mathbf{b}) \sum_{\mathbf{b}_1\in A}\sum_{\mathbf{b}_2\in A}\cdots\sum_{\mathbf{b}_{K-1}\in A} \\
&\quad P_0(\mathbf{b},\mathbf{b}_1)P_1(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2)\ldots P_{K-1}(\mathbf{b}_{K-1},\mathbf{a}) \qquad (1.23)
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que π est invariante pour $X^{(n)}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
P(\tilde{X}^{(n+1)} = \mathbf{a}) &= \sum_{\mathbf{b}_1\in A}\sum_{\mathbf{b}_2\in A}\cdots\sum_{\mathbf{b}_{K-1}\in A} \pi(\mathbf{b}_1)P_1(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2)\ldots P_{K-1}(\mathbf{b}_{K-1},\mathbf{a}) \\
&\ldots \\
&= \sum_{\mathbf{b}_{K-1}\in A} \pi(\mathbf{b}_{K-1})P_{K-1}(\mathbf{b}_{K-1},\mathbf{a}) \\
&= \pi(\mathbf{a}) \qquad \blacksquare \qquad (1.24)
\end{aligned}$$

La chaîne $(\tilde{X}^{(n)})$ est irréductible. En effet, $\tilde{P}^{K}(\mathbf{a},\mathbf{b})$ est strictement positive car elle est définie à partir des probabilités de transitions de $(X^{(n)})$ qui le sont. De même on montre qu'elle est apériodique. D'où le théorème ergodique.

Dans les deux cas du balayage (aléatoire ou régulier), on obtient donc une méthode pour estimer les probabilités marginales de la loi à postériori, sa moyenne et sa variance.

A chaque étape de cet algorithme, afin de calculer le champ électrique dans la zone D, on doit résoudre $L \times J$ systèmes linéaires de dimension $6K$ pour chaque prochaine image possible de conductance et pour chaque fréquence de mesure. A chaque itération, les solutions des systèmes linéaires changent peu. Donc, en utilisant une méthode itérative comme celle de

Gauss-Seidel, on peut résoudre les systèmes d'une manière assez rapide. On a besoin d'environ $K \times 200$ étapes pour avoir des statistiques significatives sur l'état stationnaire. D'où le nombre énorme de calculs à faire. Cependant, il est plus concevable de faire ce calcul que de résoudre $L^K \times J$ systèmes linéaires de dimension $6K$ qui est nécessaire pour un calcul direct de la loi à postériori.

1.5 Chaîne de markov modifiée

Le but de cette partie est de modifier la méthode du paragraphe précédent, afin de minimiser le temps de calcul. A chaque étape, on change l'image de la même manière que précédement ; sauf qu'au lieu de résoudre les systèmes linéaires, on actualise aussi le champ électrique dans D selon une méthode comme celle de Gauss-Seidel.

On part d'une image initiale $X^{(0)}(P_k)$ des conductances, et un champ électrique initial $E^{(0)}(P_k, f_j)$ en chaque pixel P_k et à chaque fréquence f_j. A l'étape n, on désigne par $X^{(n)}(P_k)$ la conductance au pixel P_k, $E^{(n)}(P_k, f_j)$ le champ électrique au pixel P_k et à la fréquence f_j. On balaye régulièrement l'image et on désigne par $P_{k(n)}$ le pixel balayé à l'instant n. On obtient l'algorithme suivant :

A l'étape n, et à toute fréquence f_j, on actualise $\underline{E}^{(n)}$ par $\underline{E}^{(n+1)}$ au pixel $P_{k(n)}$ par une itération de la méthode de Gauss-Seidel :

$$\underline{E}^{(n+1)}(P_{k(n)}, f_j) = A^{-1}V \tag{1.25}$$

$$\begin{aligned} \text{avec :}\quad A &= I - \underline{X}^{(n)}(P_{k(n)})G(P_{k(n)}, P_{k(n)}, f_j) \\ V &= E_n(P_{k(n)}, f_j) - if_j\mu_0 \sum_{l \neq k(n)} \underline{X}^{(n)}(P_l)G(P_{k(n)}, P_l, f_j)\underline{E}^{(n)}(P_l, f_j) \end{aligned}$$

Alors, on actualise l'image $\underline{X}^{(n)}$ par $\underline{X}^{(n+1)}$ en la changeant seulement au pixel $P_{k(n)}$.
$\underline{X}^{(n+1)}$ a alors partout les mêmes valeurs que $\underline{X}^{(n)}$ sauf au pixel $P_{k(n)}$. La nouvelle valeur de la conductance en ce pixel est choisie d'une manière

aléatoire selon la loi de probabilité suivante :

$$\mathbb{P}(\underline{X}^{(n+1)}(P_{k^{(n)}}) = c_l) = \frac{f^{(n+1)}(\mathbf{y}, \mathbf{a}(k^{(n)}, c_l))q(\mathbf{a}(k^{(n)}, c_l))}{\sum_{l=1}^{L} f^{(n+1)}(\mathbf{y}, \mathbf{a}(k^{(n)}, c_l))q(\mathbf{a}(k^{(n)}, c_l))} \tag{1.26}$$

où $\mathbf{a}(k^{(n)}, c_l)$ est l'image qui est égale à c_l au pixel $P_{k^{(n)}}$ et est égale à $\underline{X}^{(n)}$ en tout pixel autre que $P_{k^{(n)}}$; et où $f^{(n+1)}(\mathbf{y}, \mathbf{a})$ désigne :

$$f^{(n+1)}(\mathbf{y}, \mathbf{a}) = \prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{J} p_{i,j}(y_{i,j} - h(E^{(n+1)}(M_i, f_j, \mathbf{a}), H^{(n+1)}(M_i, f_j, \mathbf{a}))) \tag{1.27}$$

avec :

$$\begin{aligned} E^{(n+1)}(M_i, f_j, \mathbf{a}) &= E_n(M_i, f_j) - if\mu_0 \sum_{k=1}^{K} \mathbf{a}(k) G(M_i, P_k, f_j) \underline{E}^{(n+1)}(P_k, f_j) \\ H^{(n+1)}(M_i, f_j, \mathbf{a}) &= H_n(M_i, f_j) + \sum_{k=1}^{K} \mathbf{a}(k) rot(G(M_i, P_k, f_j)) \underline{E}^{(n+1)}(P_k, f_j) \end{aligned}$$

La suite $(\underline{X}^{(n)}(P_k), \underline{E}^{(n)}(P_k, f_j); k = 1, \ldots, K; j = 1, \ldots, J)$ est un processus aléatoire sur l'espace produit : l'espace de toutes les images possibles et $\mathbb{C}^{3KJ}$. C'est une chaîne de markov puisque $(\underline{X}^{(n+1)}, \underline{E}^{(n+1)})$ dépend de $(\underline{X}^{(n)}, \underline{E}^{(n)})$ et des suites aléatoires indépendantes du passé. Cette chaîne est particulière à cause de son espace qui est le produit d'un espace fini et d'un espace continu. Les expériences montrent qu'elle se comporte comme une chaîne ergodique et ceci permet, comme l'algorithme précédent, d'estimer la loi à postériori. Du point de vue convergence, ce nouvel algorithme est plus rapide que l'ancien.

Dans les chapitres suivants (2 et 3), on écrira cet algorithme sous la forme suivante :

$$E^{(n+1)} = f(X^{(n)})E^{(n)} + B \tag{1.28}$$

où la probabilité de transition de $X^{(n)}$ dépend de $E^{(n)}$, et où f est une fonction et B une constante.

On étudiera, alors, d'une part les propriétés de $(X^{(n)})$ en utilisant la méthode de l'Equation Différentielle Moyenne (O.D.E.) (voir chapitre 2) et d'autre part la stabilité du couple $(X^{(n)}, E^{(n)})$ en utilisant une méthode de contraction.

1.6 Expériences sur les modèles synthétiques

On teste l'algorithme décrit dans la partie (5) sur deux modèles synthétiques. La zone d'intérêt est une plaque mince hétérogène. Pour les deux modèles, la plaque mince est à la surface du sol; elle surmonte un milieu stratifié où chaque couche a une conductivité constante (voir figure (a)).

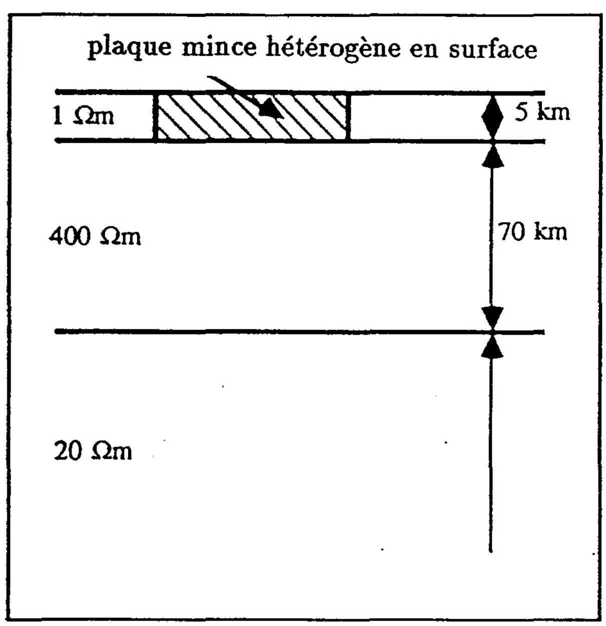


Figure a

Dans les deux modèles, la partie hétérogène de la plaque se trouve dans un carré entouré par un domaine homogène infini dans les deux directions. Elle est formée de 49 mailles carrés de $30km \times 30km$. L'hétérogénéité provient de l'emplacement d'une zone résistante dans un milieu conducteur. Cette zone, dans le modèle 1, est sous forme d'un "C". La distribution des conductances du modèle 1 est montrée par la figure (1) et celle du modèle 2 est montrée par la figure (2).

Pour les deux modèles, les points de mesures sont uniformément distribués à la surface du sol, au dessus de la zone anormale. Les données sont les valeurs du champ électrique aux points de mesures pour cinq fréquences $(400s, 600s, 800s, 1000s, 1200s)$.

On effectue les deux expériences avec 25 points de mesures qui correspondent à un point pour deux mailles. Pour les expériences synthétiques, on calcule le champ électrique avec l'algorithme de (VASSEUR etWEIDELT [22]). La loi à priori est la loi uniforme sur une classe des 5 conductances.

On a étudié l'influence de l'état initial $(X^{(0)}, E^{(0)})$. L'état correspondant au modèle normal a été le plus signifiant. On peut mesurer la convergence à l'aide de l'amplitude de la différence entre les données et le champ électrique calculé, aux points de mesures, avec les valeurs des conductances trouvées. Avec le modèle normal comme état initial, cette amplitude décroît au premier balayage puis se stabilise après environ 10 balayages de toutes les mailles. Ceci prouve, expérimentalement, la convergence de l'algorithme. Les figures (1.a), (1.b) et (1.c) montrent les images obtenues pour le modèle 1. La figure (2.a) montre celle obtenue pour le modèle 2. Toutes ces images sont obtenues avec 25 points de mesures et 49 mailles. La géométrie de la zone anormale apparaît, mais avec imprécision sur chaque côté de la structure résistante et sur les bords de la plaque.

(ROUSSIGNOL, JOUANE, MENVIELLE et TARITS [20]) ont refait la même expérience avec le modèle 2 pour 49 points de mesures ; c'est à dire que la taille de la maille correspond à l'espacement des points de mesures. Ils ont retrouvés parfaitement le modèle synthétique. L'estimation de la conductance était exacte, sauf sur de faibles bandes de chaque côté de la structure résistante. Leurs exemples montrent que l'algorithme stochastique reproduit presque exactement la distribution de la conductance.

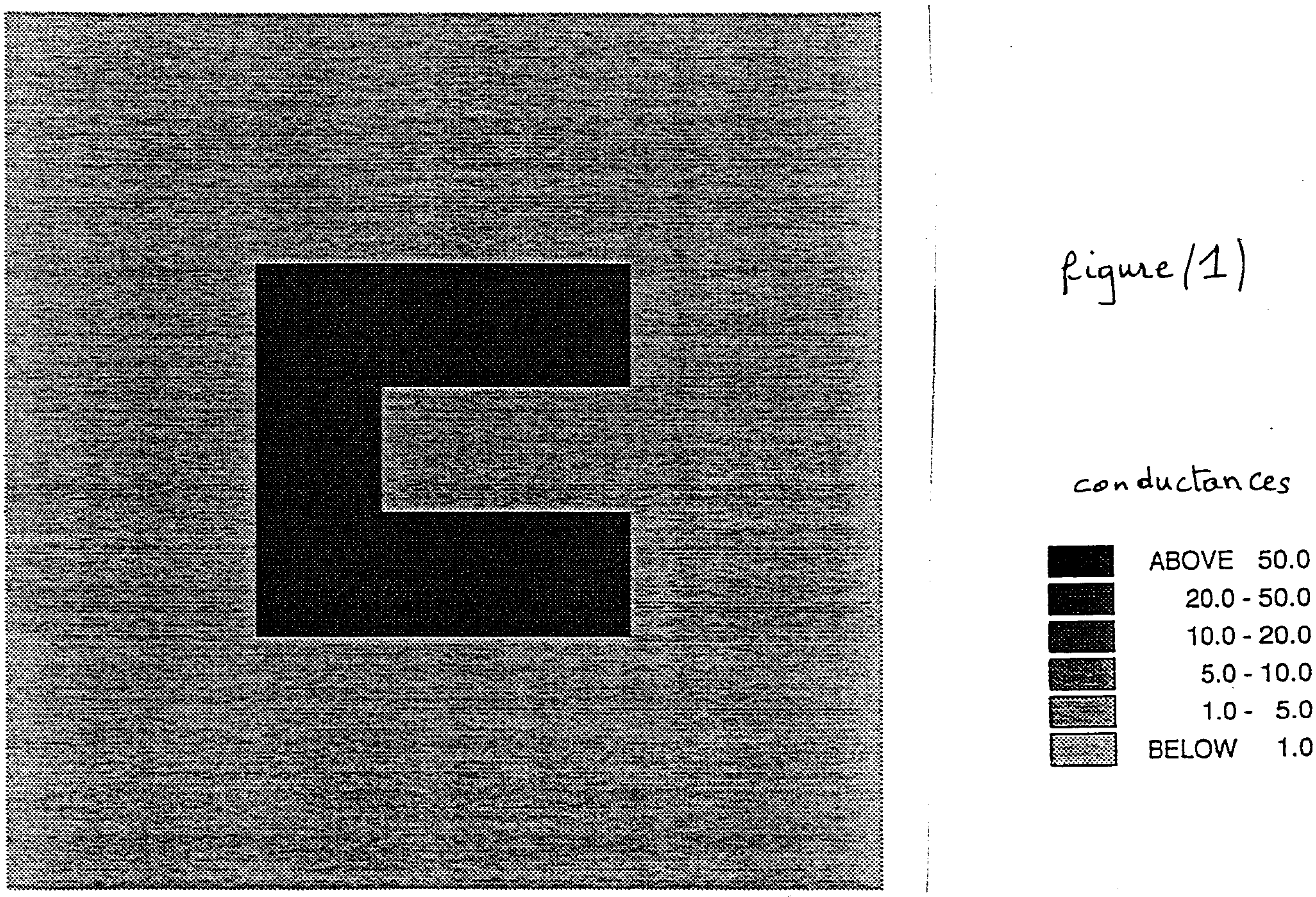


figure (1)

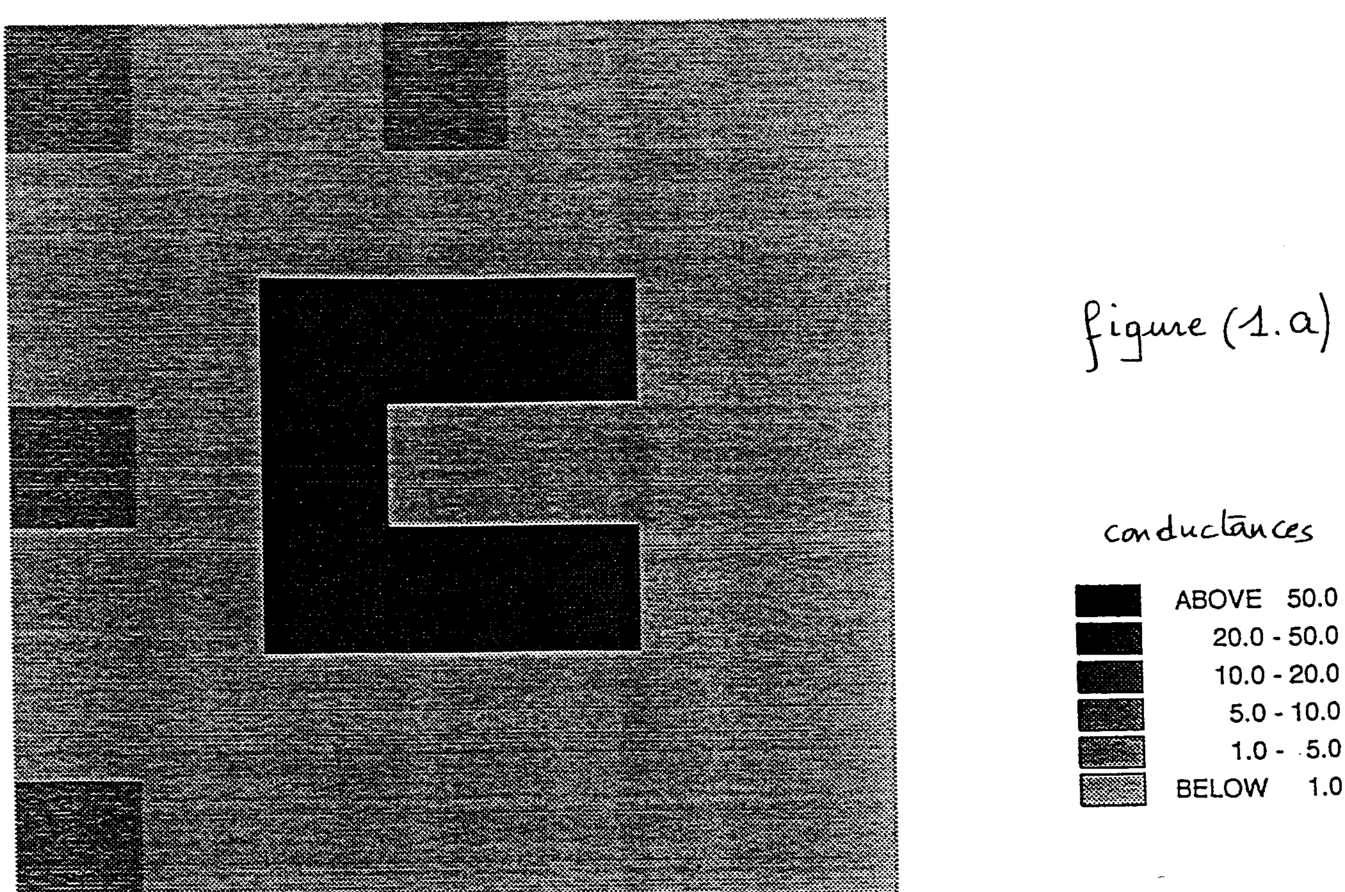


figure (1.a)

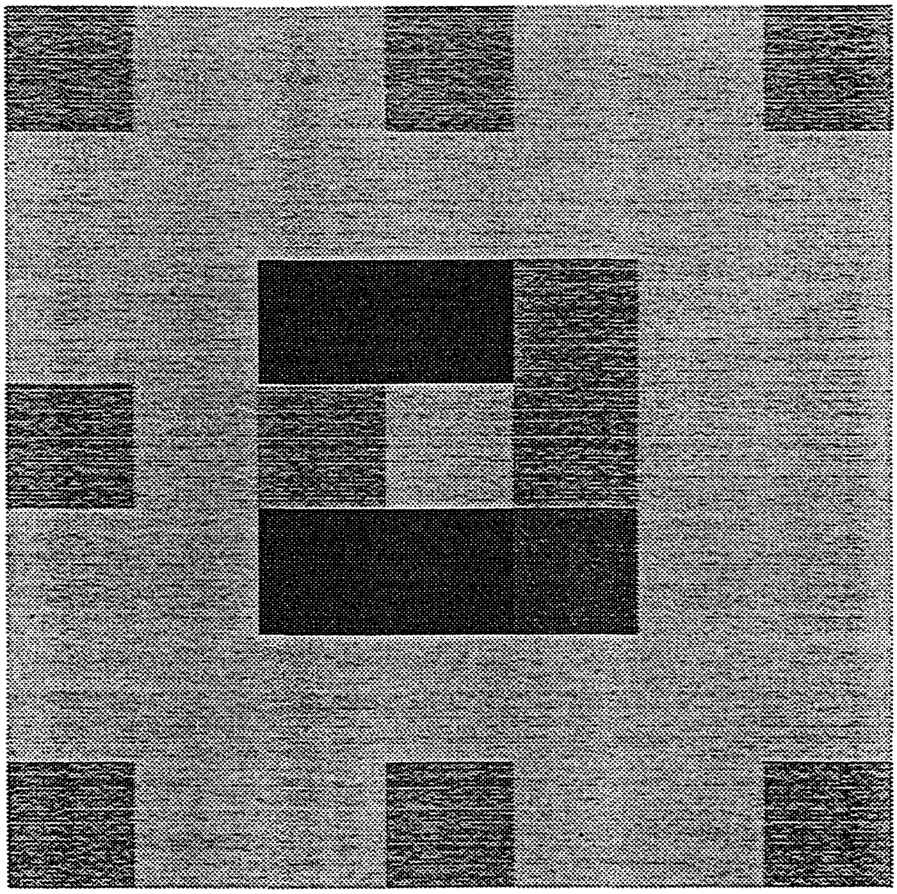


figure (1.b)

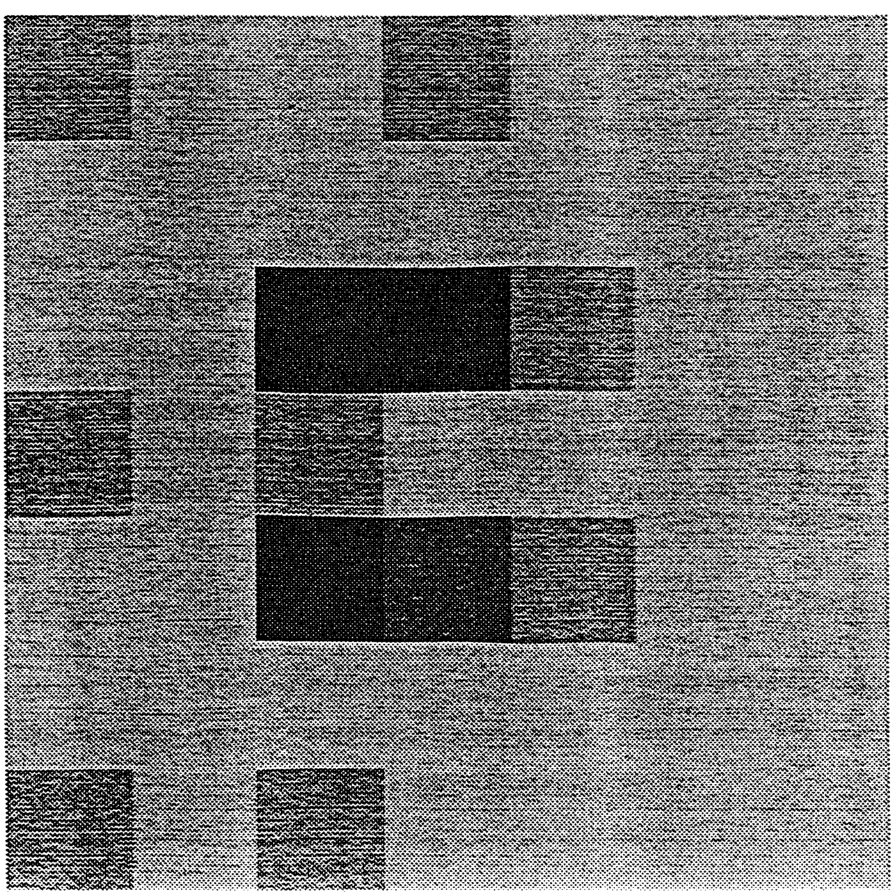


figure (1.C)

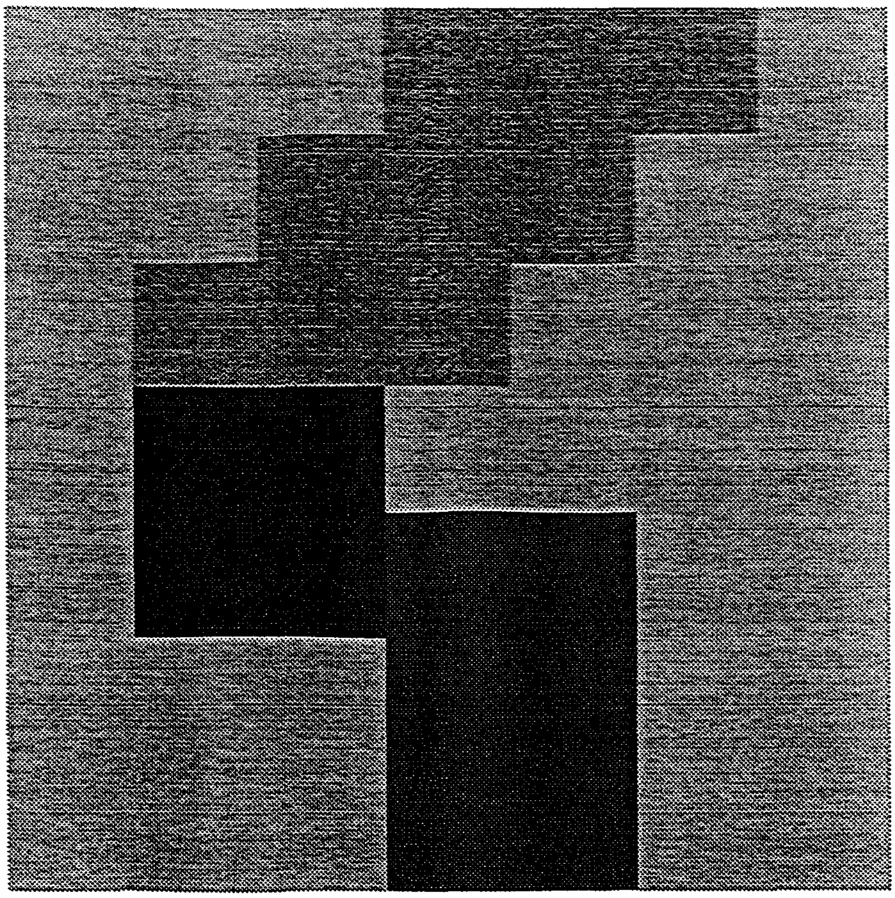


figure (2)

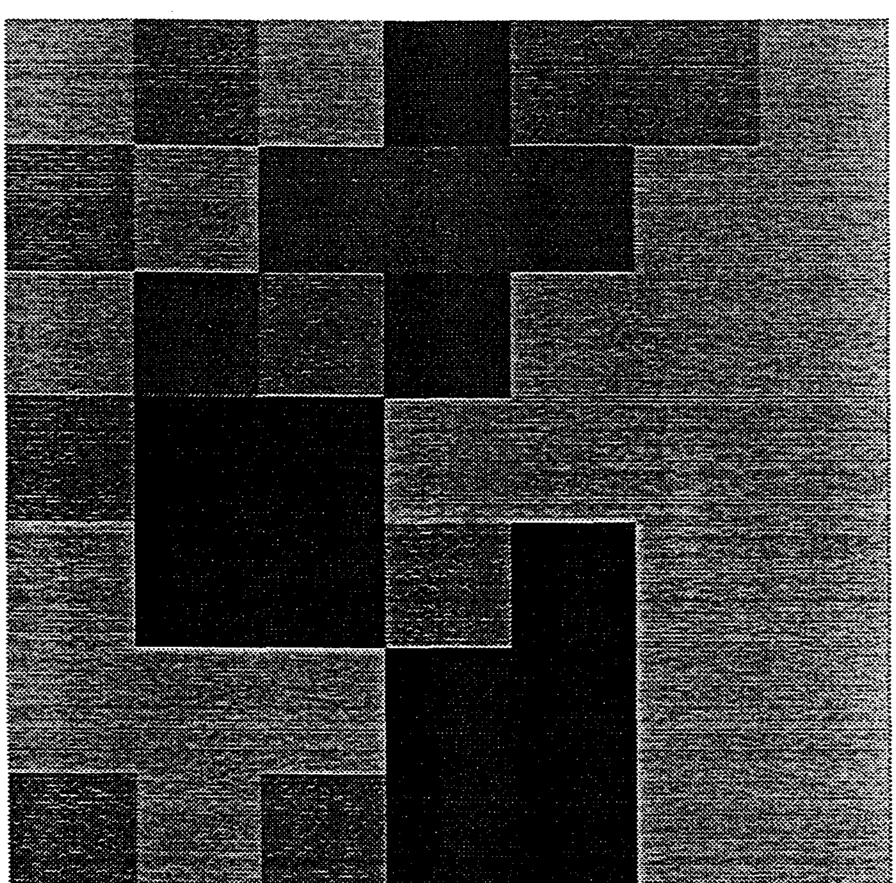


figure (2.a)

1.7 Conclusion

La méthode présentée ici est générale puisqu'on peut travailler avec n'importe quel type de données et avec n'importe quel type de bruit. On peut aussi incorporer quelques connaissances déjà acquises sur la structure inconnue. La méthode est disponible dès qu'on peut résoudre le problème direct. Le problème essentiel de cette méthode, c'est qu'elle aboutit à des calculs très longs, qui peuvent être allégés avec l'algorithme modifié.

Elle a été testée sur deux modèles synthétiques avec une plaque mince hétérogène à la surface du sol ; avec un champ électrique comme donnée et avec deux densités des points de mesures différentes. Dans le cas où la taille des mailles correspond à l'espacement entre les points de mesures, la géométrie de la zone anormale apparaît correctement.

Ces résultats montrent que la méthode est disponible, mais nécessite encore beaucoup de travail pour la mise au point.

Chapitre 2

Méthode de l'O.D.E

2.1 Introduction

Soit $(X_n)_{(n\geq 0)}$ une suite de vecteurs aléatoires à valeurs dans un ensemble E fini et $(\Theta_n)_{(n\geq 0)}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
On définie alors le modèle (X_n, Θ_n) comme suit :

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X_{n+1} = y / X_n = x, \Theta_n = \theta) = \mathbb{P}_\theta(x, y) \\ \Theta_{n+1} = \gamma f(X_{n+1})\Theta_n + B \end{cases} \tag{2.1}$$

avec :
•$(\mathbb{P}_\theta(x, y), \theta \in \mathbb{R})$ famille de probabilités de transition .
•f fonction définie sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
•B un réel strictement positif.
•γ une constante réelle, appelée dans certains ouvrages le gain, et vérifiant :

$$0 < \gamma f(x) < 1 \quad \forall x \in E \tag{2.2}$$

L'algorithme (2.1) n'est autre qu'une forme simple de l'algorithme décrit dans le premier chapitre, où on a montré la convergence expérimentale du couple $(X_n, \Theta_n)_{n\geq 0}$.

Dans ce chapitre, on introduit la méthode de l' O.D.E. (Equation Différentielle moyenne) pour étudier des propriétés de l'algorithme (2.1). Plus précisément, on s'intéresse au comportement asymptotique de la suite $(\Theta_n)_{n\geq 0}$

2.2 Propriétés du modèle

On peut remarquer que, pour un θ fixé, (X_n) est une chaîne de Markov homogène sur E.
On suppose, de plus, que la chaîne $(X_n)_{n\geq 0}$ vérifie certaines autres propriétés :

(H0)- La chaîne est irréductible et apériodique.
Comme l'espace d'état E est fini, on déduit de l'hypothèse (H0) que la chaîne est récurrente et admet une mesure invariante unique. Autrement dit, la chaîne a un comportement asymptotique stationnaire unique. Soit π_θ sa mesure invariante ; on a donc :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_\theta(X_n = x / X_0 = x_0) = \pi_\theta(x) \tag{2.3}$$

et pour toute fonction φ définie sur E et à valeurs réelles , nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi(X_k) = \sum_{x\in E} \varphi(x)\pi_\theta(x) \quad \text{p.s.} \tag{2.4}$$

On aura besoin d'une autre hypothése faite sur π_θ :

(H1)- π_θ est de classe C^1, c'est à dire dérivable par rapport à θ et sa dérivée est continue en θ.

On énoncera ici une propriété qui nous permettra de restreindre le domaine de définition de la suite (Θ_n).

Lemme 1 *Si $\frac{B}{1-\gamma f_m} < \Theta_0 < \frac{B}{1-\gamma f_M}$, alors $\forall n > 0$ $\frac{B}{1-\gamma f_m} < \Theta_n < \frac{B}{1-\gamma f_M}$ où f_M (respectivement f_m) est le maximum (respectivement le minimum) de f sur E.*

<u>Preuve</u>

$\theta_1 = \gamma f(x_1)\theta_0 + B \geq \frac{\gamma f_m B}{1-\gamma f_m} + B = \frac{B}{1-\gamma f_m}$

et $\theta_1 \leq \frac{\gamma f_M B}{1-\gamma f_M} + B = \frac{B}{1-\gamma f_M}$ ■

Dorénavant on suppose que $\Theta_0 \in \overset{\circ}{I}$; où $I = \left[\frac{B}{1-\gamma f_m}, \frac{B}{1-\gamma f_M}\right]$, et $\overset{\circ}{I}$ est l'intérieur de I.

2.3 Convergence : méthode de l'O.D.E.

2.3.1 Réécriture du modèle

L'algorithme (1) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X_{n+1} = y / X_n = x, \Theta_n = \theta) = \mathbb{P}_\theta(x, y) \\ \Theta_{n+1} = \Theta_n + \gamma H(\Theta_n, X_{n+1}) \end{cases} \tag{2.5}$$

où

$$H(\theta, x) = \theta(f(x) - 1/\gamma) + B/\gamma.$$

Donc on peut classer le modèle (2.5) parmi les algorithmes récursifs à pas constant (voir BENVENISTE, METIVIER et PRIOURET [3]), avec la seule différence que H dépend ici de γ.

2.3.2 Introduction de l'équation différentielle moyenne

En général, on introduit la méthode de l'équation différentielle moyenne, pour étudier le comportement asymptotique de certains algorithmes récursifs particuliers qui sont très proches des trajectoires des solutions d'une équation différentielle plus simple.
Autrement, elle nous sert à comparer les trajectoires d'une suite récursive et celles d'une solution de l'équation différentielle ayant le même point de départ.
Dans notre cas, on n'aura pas besoin de toute cette théorie, par contre on s'intéressera seulement à la notion d' "Attracteur d'une équation différentielle" dont on fera un rappel.

Definition 1 *Soit l'équation différentielle suivante :*

$$\frac{d\Theta(t)}{dt} = h(\Theta(t)) \tag{2.6}$$

où $\Theta(t)$ est une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, et h une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Soit θ^* un zéro de h. Un "domaine d'attraction" $D(\theta^*)$ de θ^* est un ensemble contenant strictement θ^* tel que, si Θ est une solution de (2.6) pour laquelle $\Theta(0) \in D(\theta^*)$,alors : a) pour tout t, $\Theta(t) \in D(\theta^*)$ [le domaine est dit "stable" pour (2.6)];
b) $\lim_{t\to\infty} \Theta(t) = \theta^*$;
c) pour tout compact K de $D(\theta^*)$ contenant θ^* et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que $\Theta(0) \in K$ et $\| \Theta(0) - \theta^* \| \leq \delta$ impliquent $\| \Theta(t) - \theta^* \| \leq \varepsilon$.
Un zéro de h est un "attracteur" s'il a un domaine d'attraction.

Pour l'étude de l'algorithme (2.5), on procède comme suit :
- On interpole la suite $(\Theta_n)_{n\geq 0}$ à temps discret par une suite $(\Theta(t))_{t\geq 0}$ à temps continu. On évoquera alors l'équation différentielle associée à (2.5)

$$\frac{d\Theta(t)}{dt} = h(\Theta(t)); \quad \Theta(0) = \Theta_0 \tag{2.7}$$

où h étant une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$, qu'on déterminera plus tard.
-On essayera de montrer que h admet un zéro unique qu'on notera θ^*, et qui n'est autre que l'attracteur de (2.7).
- On conclut par un théorème qui nous permettra d'étudier le comportement asymptotique de l'algorithme vis-à-vis de l'attracteur θ^*.

Interpolation

On pose :

$$\begin{aligned} h(\theta) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_\theta\left[H(\theta, X_n)\right] && (2.8) \\ &= \sum_{x\in E} H(\theta, x)\pi_\theta(x) && (2.9) \end{aligned}$$

où $\mathbb{E}_\theta$ désigne l'espérance par rapport à la loi de (X_n), lorsque θ est fixé. Ces deux dernières égalités ont un sens grace à l'hypothèse (H0).

On aura besoin de quelques approximations, qu'on justifiera plus tard. Soit $N > 0$ et n fixé, on a alors :

$$\begin{aligned} \Theta_{n+N} &= \Theta_n + \gamma \sum_{i=0}^{N-1} H(\Theta_{n+i}, X_{n+i+1}) \\ &\cong \Theta_n + \gamma \sum_{i=0}^{N-1} H(\Theta_n, X_{n+i+1}) \\ &= \Theta_n + N\gamma \left[\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} H(\Theta_n, X_{n+i+1})\right] \\ &\cong \Theta_n + N\gamma h(\Theta_n) \end{aligned}$$

Approximation 1 : suppose que Θ_{n+i} ait été peu modifié au cours des N itérations éffectuées, ce qui nécessite que γ soit très petit.
Approximation 2 : nécessite que N soit assez grand pour qu'on puisse appliquer la loi des grands nombres à $H(\Theta_n, X_{n+i+1})$

Avec ces approximations, on peut approcher l'algorithme (2.5) par :

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X_{n+1} = y / X_n = x, \Theta_n = \theta) = \mathbb{P}_\theta(x, y) \\ \Theta_{n+1} = \Theta_n + \gamma h(\Theta_n) \end{cases} \tag{2.10}$$

Autrement dit, l'égalité $\Theta_{n+1} - \Theta_n = \gamma h(\Theta_n)$ est l'approximation discrète de l'équation (2.7).

Dorénavant on désignera par l' O.D.E.(Ordinary Differential Equation) l'équation différentielle moyenne (2.7).

L'attracteur de l'O.D.E.

On commence par étudier quelques propriétés de la fonction h.
D'après l'équation (2.9) et grâce à l'hypothèse (H1), on a h qui est continue. Montrons maintenant qu'à l'aide d'une troisième hypothèse, h est strictement décroissante sur I.

Lemme 2 *h admet un zéro sur I.*
Soit l'hypothèse (H2) :

(H2) $\quad B\Delta < \frac{(1-\gamma f_M)^2}{\gamma f_M}$

où $\Delta = \sup_{\theta \in I} \sup_{x \in E} \mid \dfrac{\pi'_\theta(x)}{\pi_\theta(x)} \mid$ *avec* $\pi'_\theta(x) = \frac{d(\pi_\theta(x))}{d\theta}$.

Alors sous (H2) h est strictement décroissante sur I et par conséquent le zéro est unique ; de plus $h'(\theta) = \frac{dh(\theta)}{d\theta}$ vérifie :

$$\mid 1 + \gamma h'(\theta) \mid \leq \beta_\gamma < 1 \tag{2.11}$$

où $\beta_\gamma = \gamma f_M (1 + \frac{B\Delta}{1-\gamma f_M})$

<u>Preuve.</u>

$$h(\theta) \;=\; \sum_{x \in E} H(\theta, x) \pi_\theta(x)$$

$$= \sum_{x\in E} \left[\theta(f(x) - \frac{1}{\gamma}) + \frac{B}{\gamma}\right] \pi_\theta(x)$$

soit

$$\gamma h(\theta) = B - \theta + \theta \sum_{x\in E} \gamma f(x)\pi_\theta(x)$$

d'où

$$B - \theta(1-\gamma f_m) \leq \gamma h(\theta) \leq B - \theta(1-\gamma f_M)$$

Il est clair que

$$\begin{aligned} h(\frac{B}{1-\gamma f_M}) &\leq 0 \\ h(\frac{B}{1-\gamma f_m}) &\geq 0 \end{aligned}$$

Donc

$$\exists \theta^* \in I \text{ tel que } h(\theta^*) = 0$$

Remarque : les inégalités ci-dessus sont en réalité strictes du fait que f n'est pas constante sur E, et par suite on a $\theta^* \in \overset{\circ}{I}$.
D'autre part

$$\begin{aligned} \gamma h'(\theta) &= -1 + \sum_{x\in E} \gamma f(x)\pi_\theta(x) + \theta \sum_{x\in E} \gamma f(x) \frac{\pi'_\theta(x)}{\pi_\theta(x)} \pi_\theta(x) \\ &\leq -1 + \gamma f_M + \theta\gamma f_M \Delta. \end{aligned}$$

On a aussi

$$\gamma h'(\theta) \geq -1 + \gamma f_m - \theta\gamma f_M \Delta.$$

Et d'après l'hypothèse (H2)

$$\gamma h'(\theta) < 0 \quad \forall \theta \in I$$

Dans ce cas θ^* est la solution unique de $h(\theta) = 0$
Pour l'inégalité (2.11), en utilisant (H2) :

$$\begin{aligned} 1 + \gamma h'(\theta) &\leq \gamma f_M + \frac{B}{1-\gamma f_M}\gamma f_M \Delta = \beta_\gamma \\ &< 1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 1+\gamma h'(\theta) &\geq \gamma f_m - \frac{B}{1-\gamma f_M}\gamma f_M \Delta \\ &\geq -(\gamma f_M + \frac{B}{1-\gamma f_M}\gamma f_M \Delta) \end{aligned}$$

Et on retrouve l'inégalité (2.11). ∎

Lemme 3 *Sous (H2), θ^* est l'attracteur de l'O.D.E.*

Preuve. Pour la démonstration de ce lemme, on a besoin de vérifier les trois conditions citées dans la proposition de Lyapounov (voir DUFLO [7] page 143) :
Soit V la fonction de Lyapounov en θ^*, définie de $\overset{\circ}{I}$ dans $\mathbb{R}_+$ par :

$$V(\theta) = \left(\frac{(\theta-\theta^*)}{(r_1-\theta)(\theta-r_0)}\right)^2$$

où $r_1 = \frac{B}{1-\gamma f_M}$ et $r_0 = \frac{B}{1-\gamma f_m}$. r_1 et r_0 sont les frontières de $\overset{\circ}{I}$.
Alors V vérifie les conditions L1,L2 et L3 :

L1) $V(\theta^*) = 0$ et $V(\theta) > 0$ si θ est distinct de θ^* ;

L2) $\lim\limits_{\theta \to \{r_0, r_1\}} V(\theta) = \infty$;

L3) Soit $D(t) = V[\Theta(t)]$; alors $\frac{dD(t)}{dt} \leq 0$.

Et donc θ^* est l'attracteur de l'O.D.E. de domaine d'attraction $\overset{\circ}{I}$. ∎

Exemple

Pour clarifier l'hypothèse (H2) citée dans le lemme 2, on calcule Δ dans le cas de la loi de Gibbs.

1)**Rappel : loi de Gibbs**

Definition 2 *Etant donnée une fonction U définie sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}$, la mesure de Gibbs de fonction d'énergie U est la probabilité π sur E définie par*

$$\pi(x) = \frac{1}{Z}\exp(-U(x))$$

Z est la constante de normalisation : $Z = \sum_{x\in E}\exp(-U(x))$

Soit donc $\pi_\theta(x) = \frac{1}{Z_\theta}\exp(-\theta U(x))$.

On a :

$$\begin{aligned}
\pi'_\theta(y) &= -U(y)\frac{\exp(-\theta U(x))}{Z_\theta} + \sum_{x\in E} U(x)\frac{\exp(-\theta U(x))}{Z_\theta^2}\exp(-\theta U(y)) \\
&= -U(y)\pi_\theta(y) + \pi_\theta(y)\sum_{x\in E} U(x)\pi_\theta(x)
\end{aligned}$$

D'où :

$$\pi'_\theta(y)/\pi_\theta(y) = \sum_{x\in E}(U(x) - U(y))\pi_\theta(x)$$

Donc :

$$|\ \pi'_\theta(y)/\pi_\theta(y)\ | \leq U_M - U_m$$

où U_M (respectivement U_m) est le maximum (respectivement le minimun) de U.

D'où $\Delta \leq U_M - U_m$.

Le but de ce chapitre est de démontrer un théorème de convergence semblable au théorème 3 de (BENVENISTE, METIVIER et PRIOURET [3], page 47).

Théorème 1 *On suppose l'hypothèse (H2), alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $c(\gamma)$ telle que :*

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\{|\ \Theta_n - \Theta^*\ | > \varepsilon\} \leq c(\gamma) \tag{2.12}$$

où $c(\gamma)$ tend vers zéro lorsque γ tend vers zéro.

Ce théorème montre que plus γ est petit (tend vers zéro) plus la probabilité, pour que $| \Theta_n - \Theta^* |$ ne dépasse pas un $\varepsilon > 0$ arbitraire, tend vers 1. Autremend dit, la probabilité pour que l'écart entre l'algorithme (2.5) et l'attracteur l'O.D.E devienne grand est d'autant plus faible que γ est petit.

<u>Démonstration du Théorème 1.</u> - D'après l' algorithme (2.5) on a :

$$\begin{aligned}
\Theta_n - \Theta^* &= \Theta_{n-1} - \Theta^* + \gamma\,[H(\Theta_{n-1}, X_n) - h(\Theta_{n-1})] + \gamma\,[h(\Theta_{n-1}) - h(\Theta^*)] \\
&= \Theta_{n-1} - \Theta^* + \gamma\,[H(\Theta_{n-1}, X_n) - h(\Theta_{n-1})] + \gamma h'(a_{n-1})(\Theta_{n-1} - \Theta^*) \\
&= (1 + \gamma h'(a_{n-1}))(\Theta_{n-1} - \Theta^*) + \gamma\,[H(\Theta_{n-1}, X_n) - h(\Theta_{n-1})]
\end{aligned}$$

où $a_{n-1} \in]\Theta^*, \Theta_{n-1}[$.

Or, d'après le Lemme 2

$$| 1 + \gamma h'(\theta) | \leq \beta_\gamma < 1$$

Et en posant :

$$\tilde{\Theta}_n = \Theta_n - \Theta^*$$

on a :

$$|\tilde{\Theta}_n| \leq \beta_\gamma\, |\tilde{\Theta}_{n-1}| + \gamma\, | H(\Theta_{n-1}, X_n) - h(\Theta_{n-1}) |$$

De proche en proche, on obtient :

$$|\tilde{\Theta}_n| \leq \beta_\gamma^n\, |\tilde{\Theta}_0| + \gamma \sum_{k=0}^{n-1} \beta_\gamma^k\, | H(\Theta_{n-k-1}, X_{n-k}) - h(\Theta_{n-k-1}) | \,.$$

On peut majorer les deux fonctions H et h uniformément en θ et x. En effet :

$$\begin{aligned}
| H(\theta, x) | &= | \theta(f(x) - 1/\gamma) + B/\gamma | \\
&\leq \frac{B(f_M - f_m)}{1 - \gamma f_M} = c_1(\gamma)
\end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned}
\mid h(\theta) \mid &\leq \sum_{y\in E} \mid H(\theta,y) \mid \pi_\theta(y) \\
&\leq \left(\sup_{x\in E} \mid H(\theta,x) \mid\right) \sum_{y\in E} \pi_\theta(y) \\
&\leq \frac{B(f_M - f_m)}{1-\gamma f_M} = c_1(\gamma)
\end{aligned}$$

D'où :

$$|\widetilde{\Theta}_n| \leq \beta_\gamma^n \; |\widetilde{\Theta}_0| \; + 2\gamma\beta_\gamma^{n-1} c_1(\gamma) \sum_{k=0}^{n-1} \beta_\gamma^{-k}$$

Notons par $\mathbb{E}_{x,a}$ l'espérance mathématique sachant que $X_0 = x$ et $\Theta_0 = a$ on a alors :

$$\mathbb{E}_{x,a}(|\widetilde{\Theta}_0|) \leq a + \Theta^*$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{x,a}(|\widetilde{\Theta}_n|) &\leq \beta_\gamma^n(a+\Theta^*) + 2\gamma c_1(\gamma)\beta_\gamma^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \beta_\gamma^{-k} \\
&= \beta_\gamma^n(a+\Theta^*) + 2\gamma c_1(\gamma)\left(\frac{1-\beta_\gamma^n}{1-\beta_\gamma}\right).
\end{aligned}$$

Soit :

$$c(\gamma) = 2\gamma c_1(\gamma)\,(1/1-\beta_\gamma)$$

Alors, on a $c(\gamma)$ tend vers zéro lorsque γ tend vers zéro.
D'où, d'après l'inégalité de Markov :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sup \mathbb{P}\{|\widetilde{\Theta}_n| > \varepsilon\} &\leq (1/\varepsilon) \lim_{n\to\infty} \sup \mathbb{E}_{x,a}(|\widetilde{\Theta}_n|) \\
&\leq (1/\varepsilon) c(\gamma) \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

2.4 Simulation

2.4.1 But.

Le but de cette simulation est d'interpréter le comportement asymptotique de l'algorithme (2.5) vis-à-vis de θ^*, l'attracteur de l'O.D.E., et ce en fonction de certains paramètres qui vérifient ou non l'hypothèse $(H2)$ déjà citée dans le lemme 2.

2.4.2 Un modèle particulier

Rappel : Loi de Gibbs - Algorithme de Métropolis

On prendra comme modèle un processus $(X_n)_{n\geq 0}$ qui représente une image à deux niveaux de gris et à neuf pixels, et dont le niveau de gris est uniforme sur chaque pixel. On note par S l'ensemble des pixels, $S = \{(i,j), \text{ tel que } 1 \leq i,j \leq 3\}$, par $A = \{0,1\}$ l'ensemble des codes représentant les niveaux de gris et par E_s l'espace d'état de X_n^s, où X_n^s est une composante du vecteur X_n, s un élément de S et n l'instant auquel on observe le vecteur X. Donc l'espace d'état E de X s'écrit : $E = \prod_{s\in S} E_s = A^S$ qui est fini ; d'où $card(E) = 2^9$.
On prendra aussi : $f(x) = \exp(-\sum_{(i,j)\in S} x_{i,j})$ où f est déjà citée dans l'algorithme (1).

1)modèle d'Ising

Definition 3 *le modèle d'Ising est la loi de Gibbs qui a pour énergie la fonction U_T, qui dépend du paramètre T qu'on appelle température, soit :*

$$U_T(x) = 8/T\sum_{(i,j)} x_{i,j} - 4/T\left(\sum_{(i,j)} x_{i,j}x_{i+1,j} + \sum_{(i,j)} x_{i,j}x_{i,j+1}\right)$$

où $x = (x_{i,j})$ est un élément de E.

2) Algorithme de métropolis

L'algorithme de Métropolis suivant nous permet de simuler une chaîne de Markov (X_n) dont la probabilité de transition dépend de (Θ_n) et où (Θ_n) est, selon l'algorithme (1), une suite de variables aléatoires réelles satisfaisant une équation de récurrence dont un paramètre dépend de X_n.

Cette chaîne aura pour mesure invariante le modèle d'Ising dépendant lui aussi de la suite (Θ_n).

Soit x_n, pour un θ fixé, la configuration de l'évolution X à l'instant n : $x_n = X_n(\omega)$. On construit alors $x_{n+1} = X_{n+1}(\omega)$ de la façon suivante :

1) On tire un site s avec la loi uniforme sur l'ensemble des sites, c'est à dire si J est une variable aléatoire uniforme sur S et si $J(\omega) = s$, alors on s'intéresse au site s.

2) On choisit un niveau de gris pour le site S avec la loi uniforme sur A ; d'une autre façon si W est une variable aléatoire uniforme sur A, soit $\tilde{x}$ l'élément de E définit par :

$$\tilde{x}^s = W(\omega) \quad \text{et} \quad \tilde{x}^t = x^t{}_n, \text{ pour } t \in S, \quad t \neq s$$

3) Posons $\overline{\Delta U_T} = U_T(\tilde{x}) - U_T(x_n)$; U_T étant l'énergie correspondante au modèle d'Ising, et qui est définie sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

i)- Si $\overline{\Delta U_T} \leq 0 \quad x_{n+1} = X_{n+1}(\omega) = \tilde{x}$.

ii)- Si $\overline{\Delta U_T} > 0$ prenons $x_{n+1} = X_{n+1}(\omega) = \tilde{x}$ avec probabilité $\exp(-\theta\overline{\Delta U_T})$ et $x_{n+1} = X_{n+1}(\omega) = x_n$ avec probabilité $1-\exp(-\theta\overline{\Delta U_T})$. Pour cela si Y est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$, nous prenons $x_{n+1} = \tilde{x}$ si $Y(\omega) \leq \exp(-\theta\overline{\Delta U_T})$ et $x_{n+1} = x_n$ si $Y(\omega) > \exp(-\theta\overline{\Delta U_T})$.

On a alors le résultat suivant :
Pour une valeur fixée θ de Θ_n ; la chaîne (X_n) est récurrente et apériodique, et admet pour loi invariante le modèle d'Ising $\pi_{T,\theta}$ d'énergie θU_T.
On a donc :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_\theta(X_n = x/X_0 = x_0) = \frac{1}{Z_{T,\theta}} \exp(-\theta U_T(x))$$

On a dans ce cas l'hypothèse (H1) qui est vérifiée.

Pour ce qui est de l'hypothèse (H2), calculons d'abord Δ.
En effet, on a :

$$\pi'_{T,\theta}(x) = \pi_{T,\theta}(x) \left[-U_T(x) + \sum_{x\in E} U_T(x)\pi_{T,\theta}(x) \right]$$

Posons : $U_T^1 = \max U_T(x) = (8 * 5)/T = 40/T$

et $U_T^0 = \min U_T(x) = 0$.
on aura donc :

$$\frac{\pi'_{T,\theta}(x)}{\pi_{T,\theta}(x)} \leq U_T^1 - U(x) \leq U_T^1$$

$$\frac{\pi'_{T,\theta}(x)}{\pi_{T,\theta}(x)} \geq U_T^0 - U(x) \geq -U_T^1$$

ceci implique que

$$\Delta \leq 40/T$$

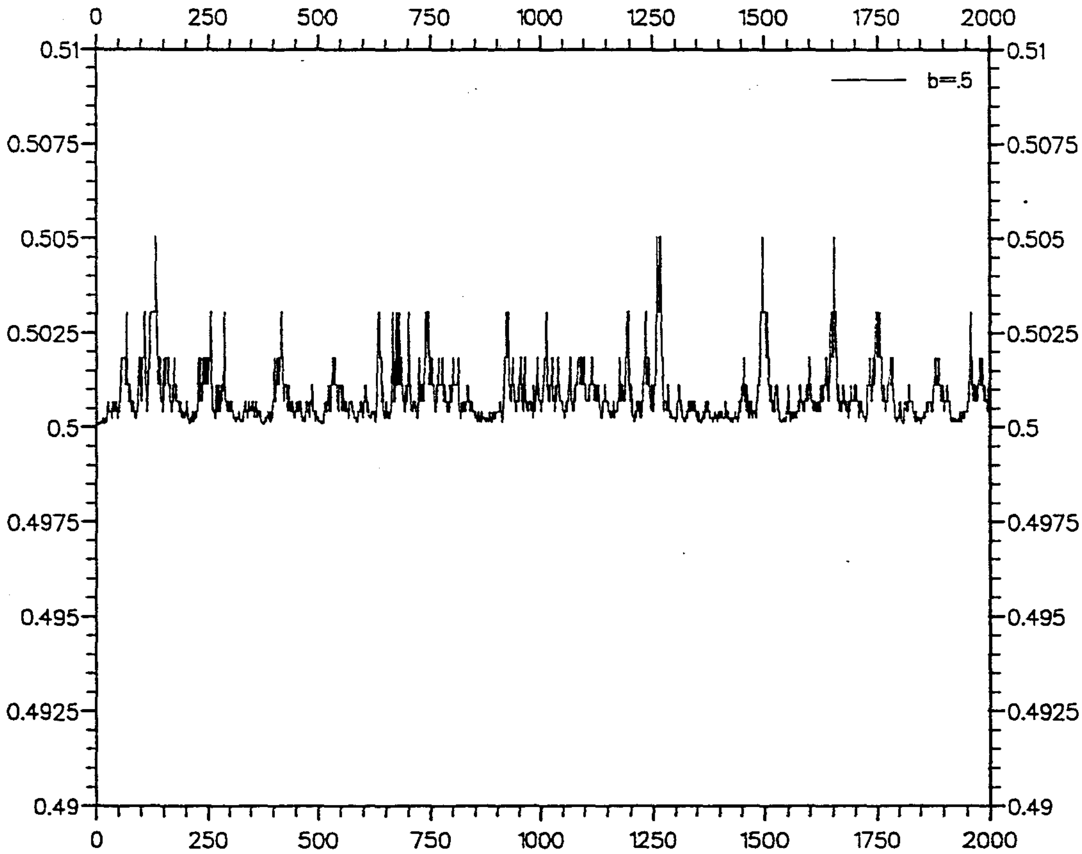
D'où (H2) devient :

$$(H2) \qquad T > T_0 = \frac{(40)\gamma B}{(1-\gamma)^2}$$

2.4.3 Interprétation

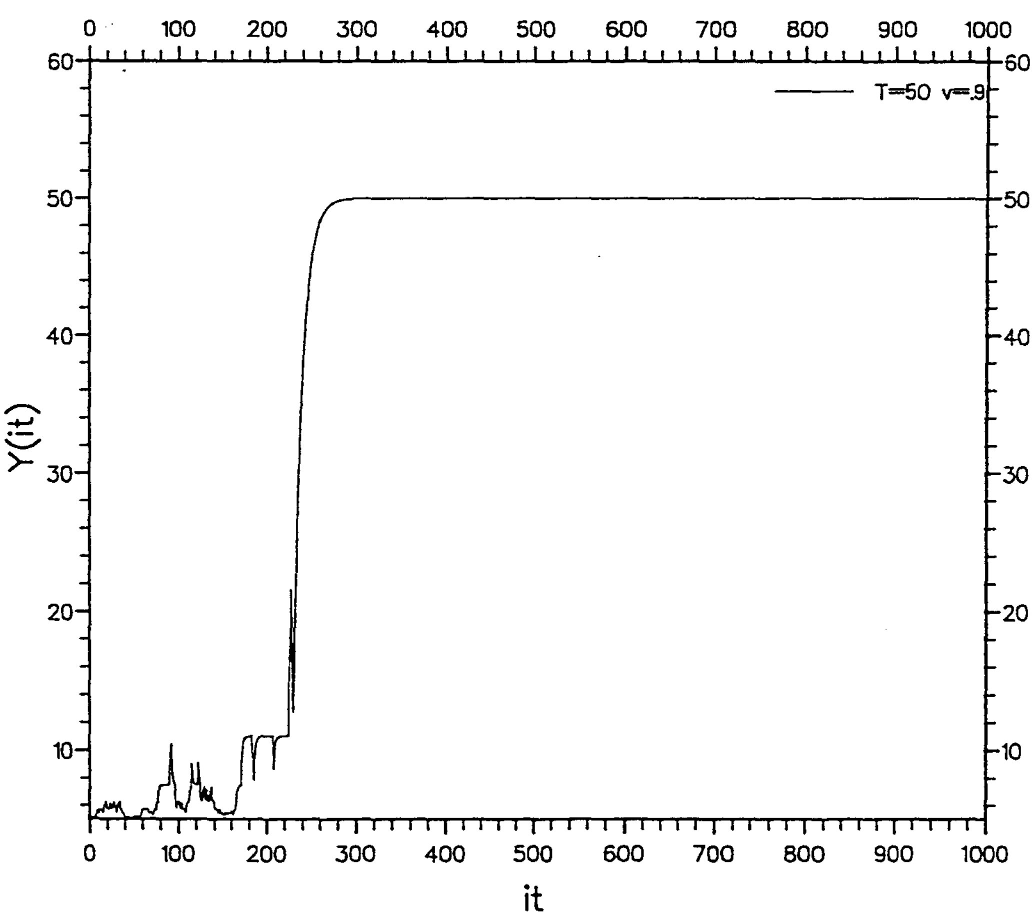
On effectue des simulations avec le modèle vu au paragraphe précédent. On constate un comportement différent de l'algorithme selon les valeurs du paramètre T : pour un $T \geq T_0$ on remarque que l'algorithme se stabilise très vite en oscillant (voir figure 1). Pour $T \ll T_0$, l'algorithme commence à osciller, puis tend très vite vers la borne supérieure de l'intervale I. c'est le cas de divergence (voir figure 2).

Par ailleurs, on montre graphiquement sur cet exemple qu'il existe des cas où la fonction h admet plusieurs zéros (voir figure 3). En cas de convergence, la fonction h coupe l'intervale $\overset{o}{I}$ en un seul et unique point Θ^* tout en étant strictement décroissante. Dans ce cas, le Θ^* en question n'est autre que l'attracteur de l'O.D.E. (voir figure 4).



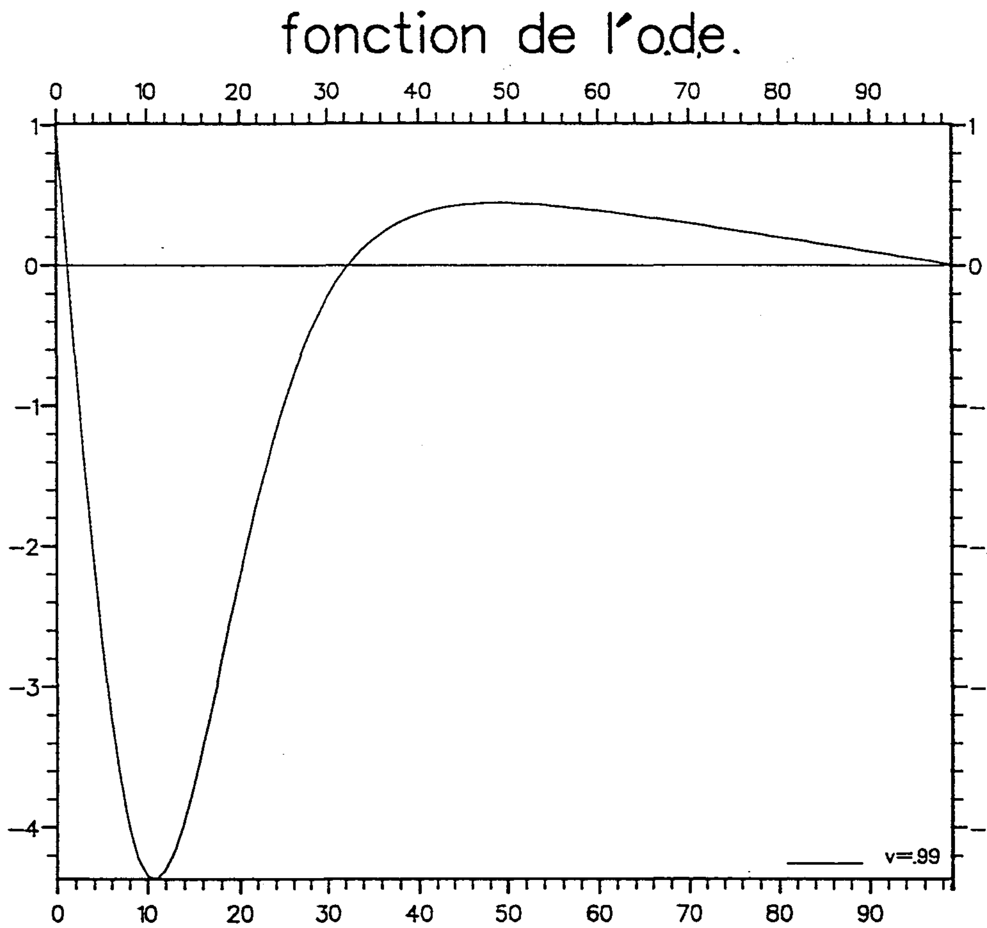
$\begin{cases} T = 50 \\ \gamma = 0{,}01 \\ B = 0{,}5 \end{cases}$

figure (1)



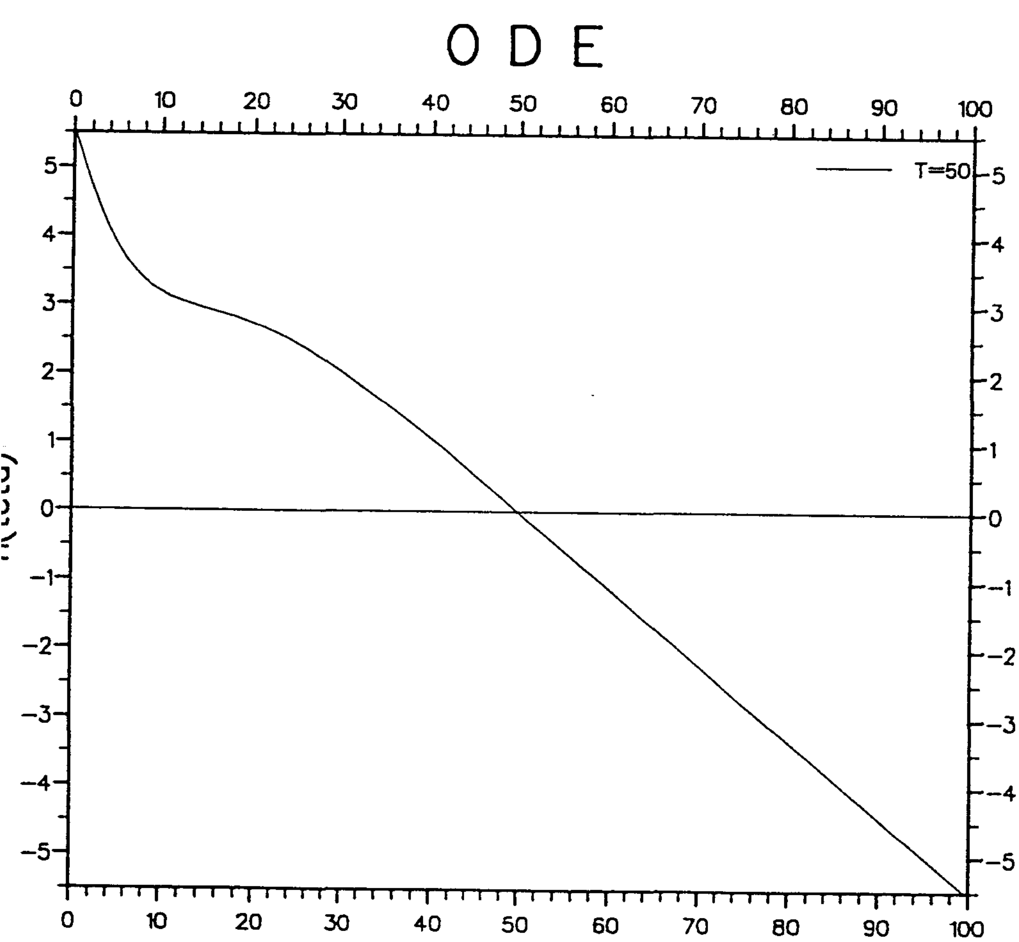
$\begin{cases} T = 50 \\ \gamma = 0{,}9 \\ B = 5 \end{cases}$

figure (2)



$\begin{cases} \gamma = 0{,}99 \\ B = 1 \end{cases}$

figure (3)



$\gamma = 0{,}1$
$B = 5$
ici $T_0 \simeq 24{,}\cancel{7}$

figure (4)

Chapitre 3

Stabilité de l'algorithme

3.1 Introduction

Dans le chapitre 2 on a étudié le comportement asymptotique de la suite$(\Theta_n)_{n\geq 0}$, où Θ_n est définie par l'algorithme (2.1), qu'on rappelle encore une fois :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{P}(X_{n+1} = y / X_n = x, \Theta_n = \theta) = \mathbb{P}_\theta(x, y) \\ \Theta_{n+1} = \gamma f(X_{n+1})\Theta_n + B \end{array} \right. \tag{3.1}$$

avec :
•$(\mathbb{P}_\theta(x, y), \theta \in \mathbb{R})$ famille de probabilités de transition sur E $\times$ E.
•f fonction définie sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
•B un réel strictement positif.
•γ une constante réelle, appelée dans certains ouvrages le gain, et vérifiant :

$$0 < \gamma f(x) < 1 \quad \forall x \in E \tag{3.2}$$

Ici on s'intéressera au modèle (X_n, Θ_n) dont on étudiera la stabilité au sens de DUFLO [7].
Pour cela on a besoin de redéfinir et réécrire le modèle et de rappeler certaines propriétés qui seront nécessaires pour la démonstration du théorème de stabilité.
Dorénavant on pose $Y_n = (X_n, \Theta_n)$. Il est clair que $(Y_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov homogène sur l'espace produit $E \times I$.

3.2 Rappels

3.2.1 Loi empirique

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité sur lequel on définit des vecteurs aléatoires (Z_n), à valeurs dans un espace d'état A. A chaque $\omega \in \Omega$ on associe la trajectoire $[Z_n(\omega)]$ et la loi empirique $\Lambda_n(\omega, .)$ probabilité sur A définie par :

$$\Lambda_n(\omega, \Gamma) = \frac{1}{n+1} N_n(\omega, \Gamma) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} 1_{\{Z_k(\omega) \in \Gamma\}} \tag{3.3}$$

où Γ est un élément de la tribu engendrée par A, et où $N_n(\omega, \Gamma)$ est le nombre de passages dans Γ des Z_k jusqu'à l'instant n.
Et pour toute f variable aléatoire sur A on a :

$$\Lambda_n(\omega, f) = \frac{1}{n+1} N_n(\omega, f) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f(Z_k(\omega)) \tag{3.4}$$

3.2.2 Tension

Definition 4 *Une famille de probabilités sur $\mathbb{R}^d$ $(\nu_i)_{i \in J}$ est dite "tendue" si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K_ε de A $(A \subset \mathbb{R}^d)$ tel que pour tout $i \in J$*

$$\nu_i(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon \tag{3.5}$$

Une valeur d'adhérence de $(\nu_i)_{i \in J}$ est une probabilité ν limite pour la convergence étroite d'une sous-suite.

3.2.3 Stabilité

On se référera, pour cette notion de stabilité, au livre de DUFLO [7]. On commencera d'abord par rappeler quelques définitions .

Definition 5 *On dit que $Z = (Z_n)$ est un modèle stable, s'il existe une probabilité φ sur A telle que, pour presque tout ω*

$$\Lambda_n(\omega, .) \xrightarrow{\mathcal{L}} \varphi \tag{3.6}$$

Où $\xrightarrow{\mathcal{L}}$ désigne la convergence en Loi.
La probabilité φ est la loi stationnaire du modèle.

Definition 6 *Une chaîne de Markov (Z_n) est dite stable si son espace d'état A est métrique et si la suite (Z_n) est stable pour toute loi initiale ν, avec une loi stationnaire indépendante de ν.*

On revient maintenant à notre modèle (Y_n).

Remarque– Soit $\Pi_n(.) = \mathbb{P}(Y_n, .)$ la loi de Y_n et $\overline{\Pi}_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \Pi_k$ la loi empirique ; alors la stabilité implique

$$\overline{\Pi}_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mu. \tag{3.7}$$

La probabilité μ étant la loi stationnaire du modèle (Y_n).

Proposition 2 *1)- Si g est une variable aléatoire bornée sur $E \times I$, on a :*

$$\overline{\Pi}_n g(x) - \overline{\Pi}_n[\Pi g](x) \to 0 \quad \forall x \tag{3.8}$$

$$\Lambda_n g - \Lambda_n[\Pi g] \to 0 \quad p.s. \quad , \text{pour toute loi initiale.} \tag{3.9}$$

2)- Pour que le modèle itératif markovien soit stable, il est nécessaire qu'existe une probabilité invariante unique qui est sa loi stationnaire.

Démonstration : 1)- Soit g une variable aléatoire bornée sur $E \times I$, on a :

$$\begin{aligned} \overline{\Pi}_n g(x) - \overline{\Pi}_n[\Pi g](x) &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}[\Pi_k g(x) - \Pi_{k+1} g(x)] \\ &= \frac{g(x)}{n+1} - \frac{\Pi_{n+1} g(x)}{n+1} \end{aligned}$$

D'où $\overline{\Pi}_n g(x) - \overline{\Pi}_n[\Pi g](x) = o(n) \quad \forall x$
Posons $\varepsilon_n = g(X_n) - \Pi g(X_{n-1})$; d'aprés les propriétés de la chaîne de Markov on a :

$$\mathbb{E}(\varepsilon_n / X_{n-1}) = 0; \quad \mathbb{E}(\varepsilon_n^2) < \infty$$

Par conséquent (ε_n) est un bruit borné qui vérifit la loi des grands nombre (voir DUFLO [8] page 39) :

$$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k = o(n), \quad p.s. \tag{3.10}$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{n}[g(X_k) - g(X_{k-1})] = o(n), \quad p.s.$$

Or

$$\begin{aligned}
\Lambda_n g - \Lambda_n[\Pi g] &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}[g(X_k) - \Pi g(X_k)] \\
&= \frac{1}{n+1}\{\sum_{k=1}^{n}[g(X_k) - \Pi g(X_{k-1})] + \sum_{k=1}^{n}[g(X_{k-1}) - \Pi g(X_k)] + [g(X_0) - \Pi g(X_0)]\} \\
&= \frac{1}{n+1}\{\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k + [g(X_0) - \Pi g(X_n)]\}
\end{aligned}$$

d'où la deuxième partie de 1).

2)–Supposons qu'on a la stabilité avec la loi stationnaire μ. D'aprés 1), on a pour toute fonction g continue bornée

$$\mu(g) = \int g d\mu = \mu([\Pi g]) = \int g d(\mu\Pi).$$

D'où $\mu = \mu\Pi$ et donc μ est invariante.

Supposons que ν est une autre probabilité invariante ; montrons que $\nu = \mu$.

$$\nu = \nu\Pi \Longrightarrow \nu = \nu\Pi_k \quad \forall k \geq 1.$$

Or pour toute fonction g continue bornée on a :

$$\nu g(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\nu\Pi_k g(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\int d\nu\Pi_k g(x)$$

D'où

$$\nu g(x) = \int d\nu\overline{\Pi}_n g(x)$$

La stabilité $\Longrightarrow \overline{\Pi}_n g(x) \to \mu g(x)$.
Donc

$$\nu(g) = lim\int d\nu(x)\overline{\Pi}_n g(x) = \mu(g).$$

D'où $\nu = \mu$. ■

3.3 Critère de stabilité

3.3.1 Conditions de stabilité

Comme l'espace $E \times I$ est compact, la famille des lois de la chaîne $(Y_n)_{(n \geq 0)}$ est tendue.
Or en appliquant la proposition 1 à $g(x) = \exp(i < u, x >)$ pour tout $u \in \mathbb{Q}^d$ (d étant la dimension de $E \times I$), on obtient :

$$\int \Lambda_n(\omega, dy)[\exp(i < u, y >) - \int \Pi(y, dz) \exp(i < u, z >)] \to 0 \quad (3.11)$$

Et d'après la définition 4, les seuls valeurs d'adhérences possibles de $\Lambda_n(\omega, .)$ sont invariantes, pour presque tout ω. Donc il y a toujours au moins une probabilité invariante μ.
Pour montrer la stabilité, il nous reste à montrer l'unicité de la probabilité μ du modèle.

Le résultat principal de ce chapitre est le théorème suivant :

Théorème 2 *Supposons que la famille $\{\mathbb{P}_\theta, \theta \in I\}$ vérifie l'inégalité suivante : pour tout $\theta_1, \theta_2 \in I$ on a*

$$\sup_{x \in E} \sup_{y \in E} \mid \mathbb{P}_{\theta_1}(y, x) - \mathbb{P}_{\theta_2}(y, x) \mid \leq K \mid \theta_1 - \theta_2 \mid \quad (3.12)$$

et si

$$K < \frac{2}{3N(N-1)} \frac{(1 - \gamma f_M)^2}{\gamma B(f_M - f_m)} \inf_{\theta \in I} \sum_{x \in E} \inf_{y \in E} \mathbb{P}_\theta(y, x) \quad (3.13)$$

on a

$$[Y_n^a - Y_n^b] \xrightarrow{P} 0 \quad \forall (a, b) \in (E \times I)^2 \quad (3.14)$$

Le modèle est alors stable .

(où Y_n^a est la chaîne Y_n partant d'un état initial $Y_0 = a$; f_m et f_M sont respectivement le minimun et le maximum de f sur E et où N est le cardinal de E).

Remarque– i) Si $\gamma \to 0$, l'inégalité (3.13) devient très large.

ii) L'inégalité (3.13) suppose que $\inf_{\theta \in I} \sum_{x \in E} \inf_{y \in E} \mathbb{P}_\theta(y, x) > 0$.

iii) L'équation(3.14) signifie que la chaîne (Y_n), à partir d'un certain instant n et avec une grande probabilité, décrit la même trajectoire quelque soit son point de départ. Cette propriété est appelée, dans DUFLO [8], "Oubli du point de départ".

iv) Dans le cas d'une image, lorsque N est grand, la condition (3.13) devient forte. Ce qui nécessite encore du travail pour améliorer cette condition.

<u>*Démonstration*</u>

La stabilité du modèle découle des deux propriétés suivantes :

i)<u>Ecriture du modèle sous la forme itérative.</u>

$$(X_{n+1}, \Theta_{n+1}) = F\left((X_n, \Theta_n); U_{n+1}\right) \qquad (3.15)$$

avec $(U_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, et indépendante de l'état initial (X_0, Θ_0).

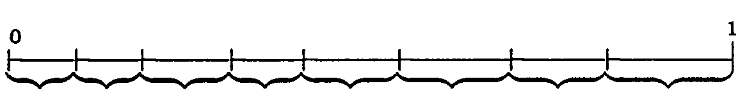
ii)<u>Propriété de mélange Lipschitzien.</u>– il existe $\delta < 1$ tel que

$$\mathbb{E}\left[d_\alpha\left(F\left((x_1,\theta_1);U\right);F\left((x_2,\theta_2);U\right)\right)\right] \leq \delta d_\alpha\left((x_1,\theta_1);(x_2,\theta_2)\right) \qquad (3.16)$$

où d_α est une distance sur $E \times I$.

<u>Ecriture du modèle itératif.</u>

Nous allons réaliser le tirage au sort $\mathbb{P}_\theta(x,y)$ de la manière suivante :
On partage l'intervalle $[0,1]$ en $2N$ intervalles : $I_1(\theta), I_2(\theta), \ldots, I_N(\theta), J_1(x,\theta)$, $J_2(x,\theta), \ldots, J_N(x,\theta)$:



tels que :

$$\mid I_i(\theta) \mid = \inf_{y\in E} \mathbb{P}_\theta(y,x_i); \qquad \mid J_i(x,\theta) \mid = \mathbb{P}_\theta(x,x_i) - \inf_{y\in E} \mathbb{P}_\theta(y,x_i) \qquad (3.17)$$

((x_i) éléments de E ; et $\mid I_i \mid$ est la longueur de l'intervalle I_i)
On prend U variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$.
Si $(X_n, \Theta_n) = (x, \theta)$, on définit alors X_{n+1} comme suit :
$X_{n+1} = x_i$ si $U \in I_i(\theta) \cup J_i(x,\theta)$.

On obtient ainsi le modèle itératif :

$$\begin{cases} X_{n+1} = g(X_n, \Theta_n, U) = \sum_{i=1}^{N} x_i \mathbf{1}_{\{U \in I_i(\Theta_n) \cup J_i(X_n, \Theta_n)\}} \\ \Theta_{n+1} = \Theta_n \gamma f(X_{n+1}) + B \end{cases} \tag{3.18}$$

Propriété de mélange Lipschitzien

Proposition 3 *Si les conditions (3.12) et (3.13) du théorème 2 sont vérifiées, alors on a la propriété de mélange Lipschitzien :* (3.16).

Preuve– Avec la distance :

$$d_\alpha((x_1, \theta_1); (x_2, \theta_2)) = \mathbf{1}_{\{x_1 \neq x_2\}} + \alpha \mid \theta_1 - \theta_2 \mid \tag{3.19}$$

on a :

$$\mathbb{E}\left[d_\alpha\left(F\left((x_1, \theta_1); U\right); F\left((x_2, \theta_2); U\right)\right)\right] =$$

$$\mathbb{P}\left(g(x_1, \theta_1, U) \neq g(x_2, \theta_2, U)\right) + \alpha\gamma \mid \theta_1 f(x_1) - \theta_2 f(x_2) \mid \leq$$

$$\mathbb{P}\left(g(x_1, \theta_2, U) \neq g(x_2, \theta_2, U)\right) \mathbf{1}_{\{x_1 \neq x_2\}} + \mathbb{P}\left(g(x_1, \theta_1, U) \neq g(x_1, \theta_2, U)\right)$$

$$+\alpha\gamma \mid \theta_1 f(x_1) - \theta_2 f(x_2) \mid$$

Pour traiter le terme $\mathbb{P}\left(g(x_1, \theta_1, U) \neq g(x_2, \theta_2, U)\right)$, on constate que :

$$\{g(x_1, \theta_1, U) \neq g(x_2, \theta_2, U)\} \subset$$

$$\{g(x_1, \theta_1, U) \neq g(x_1, \theta_2, U)\} \cup \{g(x_1, \theta_2, U) \neq g(x_2, \theta_2, U)\}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(g(x_1, \theta_1, U) &\neq g(x_2, \theta_2, U)) \\ &\leq \mathbb{P}\left(g(x_1, \theta_2, U) \neq g(x_2, \theta_2, U)\right) \mathbf{1}_{\{x_1 \neq x_2\}} \\ &\quad + \mathbb{P}\left(g(x_1, \theta_1, U) \neq g(x_1, \theta_2, U)\right) \end{aligned}$$

Les deux lemmes suivants permettent de majorer chacun des deux termes qui interviennent dans la somme ci-dessus.

Lemme 4

$$\mathbb{P}\left(g(x_1,\theta_2,U) \neq g(x_2,\theta_2,U)\right) \mathbf{1}_{\{x_1 \neq x_2\}} \leq \left(1 - \inf_{\theta \in I} \sum_{x \in E} \inf_{y \in E} \mathbb{P}_\theta(y,x)\right) \mathbf{1}_{\{x_1 \neq x_2\}}$$

<u>*Démonstration*</u> – Si $x_1 \neq x_2$ on a :

$$\mathbb{P}\left(g(x_1,\theta_2,U) \neq g(x_2,\theta_2,U)\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}\left(U \in (I_i(\theta_2) \cup J_i(x_1,\theta_2)) \cap \cup_{\{k=1,k\neq i\}}^{N} (I_k(\theta_2) \cup J_k(x_2,\theta_2))\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}\left(U \in (J_i(x_1,\theta_2)) \cap \cup_{\{k=1,k\neq i\}}^{N} (J_k(x_2,\theta_2))\right) \leq$$

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}\left(U \in J_i(x_1,\theta_2)\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{N} \mid J_i(x_1,\theta_2) \mid \leq 1 - \inf_{\theta \in I} \sum_{x \in E} \inf_{y \in E} \mathbb{P}_\theta(y,x) \quad \blacksquare$$

Lemme 5

$$\mathbb{P}\left(g(x_1,\theta_1,U) \neq g(x_1,\theta_2,U)\right) \leq \sum_{k=1}^{N} (2N-k) \sup_{y \in E} \mid \mathbb{P}_{\theta_1}(y,x_k) - \mathbb{P}_{\theta_2}(y,x_k) \mid$$

<u>*Démonstration*</u>

$$\mathbb{P}\left(g(x_1,\theta_1,U) \neq g(x_1,\theta_2,U)\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}\left(U \in (I_i(\theta_1) \cup J_i(x_1,\theta_1)) \cap \cup_{\{k=1,k\neq i\}}^{N} (I_k(\theta_2) \cup J_k(x_1,\theta_2))\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{N} \underbrace{\mathbb{P}(U \in I_i(\theta_1) \cap I_i^c(\theta_2))}_{A_i} \quad + \quad \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\mathbb{P}(U \in J_i(x_1,\theta_1) \cap J_i^c(x_1,\theta_2))}_{B_i}$$

où $I_i^c(\theta_2)$ (respectivement $J_i^c(x_1,\theta_2)$) est le complémentaire de $I_i(\theta_2)$ (respectivement $J_i(x_1,\theta_2)$) dans $[0,1]$.

On commence par traiter le premier terme A_i. Notons par Δ_i la valeur absolue de la différence entre les longueurs des intervales $I_i(\theta_1)$ et $I_i(\theta_2)$:

$$\Delta_i = \big|\ |I_i(\theta_1)| - |I_i(\theta_2)|\ \big|$$

On distingue alors tous les cas possibles :

1)- Si $I_i(\theta_1) \subset I_i(\theta_2)$; dans ce cas $A_i = 0$.

2)- Si $I_i(\theta_1) \supset I_i(\theta_2)$; dans ce cas $A_i = \Delta_i$.

3)- Si $I_i(\theta_1) \cap I_i(\theta_2) \neq \emptyset$; on a deux sous-cas :

a)- Si la borne supérieure de $I_i(\theta_1)$ est supérieure à celle de $I_i(\theta_2)$; on obtient alors :

$$\begin{aligned} A_i &= \sum_{k=1}^{i} |I_k(\theta_1)| - \sum_{k=1}^{i} |I_k(\theta_2)| \\ &\leq \sum_{k=1}^{i} \Delta_k \end{aligned}$$

b)- Si c'est le contraire ; on a :

$$\begin{aligned} A_i &= \sum_{k=1}^{i-1} |I_k(\theta_2)| - \sum_{k=1}^{i-1} |I_k(\theta_1)| \\ &\leq \sum_{k=1}^{i} \Delta_k \end{aligned}$$

4)- Si $I_i(\theta_1) \cap I_i(\theta_2) = \emptyset$; on a encore deux sous-cas :

a)- Si $I_i(\theta_1)$ est placé après $I_i(\theta_2)$:

$$\begin{aligned} A_i &= \mid I_i(\theta_1) \mid \\ &\leq \sum_{k=1}^{i} \mid I_k(\theta_1) \mid - \sum_{k=1}^{i} \mid I_k(\theta_2) \mid \\ &\leq \sum_{k=1}^{i} \Delta_k \end{aligned}$$

b)- Sinon :

$$\begin{aligned} A_i &= \mid I_i(\theta_1) \mid \\ &\leq \sum_{k=1}^{i-1} \mid I_k(\theta_2) \mid - \sum_{k=1}^{i-1} \mid I_k(\theta_1) \mid \\ &\leq \sum_{k=1}^{i} \Delta_k \end{aligned}$$

Donc, dans tous les cas on a :

$$A_i \leq \sum_{k=1}^{i} \Delta_k \tag{3.20}$$

Pour le terme B_i, tous les cas se traitent presque de la même façon qu'auparavant. On reprendra ici le troisième pour exemple. On rappelle que $\mid J_i(x,\theta) \mid = \mathbb{P}_\theta(x, x_i) - \inf_{y \in E} \mathbb{P}_\theta(y, x_i)$.

<u>Pour $i < N$</u> :

3.a)- Si $J_i(x_1,\theta_1) \cap J_i(x_1,\theta_2) \neq \emptyset$: ($J_i(x_1,\theta_1)$ devance $J_i(x_1,\theta_2)$) ; alors

$$B_i = \sum_{k=1}^{N} \mid I_k(\theta_1) \mid + \sum_{k=1}^{i} \mid J_k(x_1,\theta_1) \mid - (\sum_{k=1}^{N} \mid I_k(\theta_2) \mid + \sum_{k=1}^{i} \mid J_k(x_1,\theta_2) \mid)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=i+1}^{N} \mid I_k(\theta_1) \mid + \sum_{k=1}^{i} \mid \mathbb{P}_{\theta_1}(x_1, x_k) \mid -(\sum_{k=i+1}^{N} \mid I_k(\theta_2) \mid + \sum_{k=1}^{i} \mid \mathbb{P}_{\theta_2}(x_1, x_k) \mid) \\
&\leq \sum_{k=i+1}^{N} \Delta_k + \sum_{k=1}^{i} \mid \mathbb{P}_{\theta_1}(x_1, x_k) - \mathbb{P}_{\theta_2}(x_1, x_k) \mid
\end{aligned}
$$

Or, on peut remarquer que $\Delta_k \leq \sup_{x \in E} \mid \mathbb{P}_{\theta_1}(x, x_k) - \mathbb{P}_{\theta_2}(x, x_k) \mid$

D'où

$$
B_i \leq \sum_{k=1}^{N} \sup_{x \in E} \mid \mathbb{P}_{\theta_1}(x, x_k) - \mathbb{P}_{\theta_2}(x, x_k) \mid \tag{3.21}
$$

<u>Pour $i = N$</u> :

L'idée est la suivante :

Si $J_N(x_1, \theta_1) \subset J_N(x_1, \theta_2)$, alors $B_N = 0$.
Et

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(g(x_1, \theta_1, U) \neq g(x_1, \theta_2, U)\right) &= \sum_{i=1}^{N} A_i + \sum_{i=1}^{N} B_i \\
&\leq \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{i} \Delta_k + (N-1) \sum_{k=1}^{N} \sup_{x \in E} \mid \mathbb{P}_{\theta_1}(x, x_k) - \mathbb{P}_{\theta_2}(x, x_k) \mid \\
&\leq \sum_{k=1}^{N} (N-k+1) \Delta_k + (N-1) \sum_{k=1}^{N} \sup_{x \in E} \mid \mathbb{P}_{\theta_1}(x, x_k) - \mathbb{P}_{\theta_2}(x, x_k) \mid \\
&\leq \sum_{k=1}^{N} (2N-k) \sup_{x \in E} \mid \mathbb{P}_{\theta_1}(x, x_k) - \mathbb{P}_{\theta_2}(x, x_k) \mid \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Sinon, on a deux cas :

1)–$\exists i_0 < N$ telque $J_{i_0}(x_1, \theta_1) \subset J_{i_0}(x_1, \theta_2)$; alors on a B_{i_0} qui est nul, et donc

$$\sum_{i=1}^{N} B_i \leq (N-1) \sum_{i=1}^{N} \sup_{x \in E} \mid \mathbb{P}_{\theta_1}(x, x_i) - \mathbb{P}_{\theta_2}(x, x_i) \mid$$

On obtient alors le même résultat que précédemment.

2)-$\exists i_0 \leq N$ telque $I_{i_0}(\theta_1) \subset I_{i_0}(\theta_2)$; dans ce cas, le terme "B_1" sera en quelque sorte le "dernier terme" de la somme des A_i à qui manque le terme A_{i_0}. D'où, la somme des B_i manque elle aussi d'un terme ; et, puisque ces termes sont majorés par la même valeur indépendemment de i, on aura

$$\sum_{i=1}^{N} B_i \leq (N-1) \sum_{i=1}^{N} \sup_{x \in E} \mid \mathbb{P}_{\theta_1}(x, x_i) - \mathbb{P}_{\theta_2}(x, x_i) \mid$$

<u>Conclusion</u> : dans tous les cas, on retrouve l'inégalité du Lemme 5.

■

En utilisant l'hypothèse de Lipschitz en θ faite sur les probabilités de transition (hypothèse (3.12)), on obtient :

$$\mathbb{E}\left[d_\alpha\left(F\left((x_1, \theta_1); U\right); F\left((x_2, \theta_2); U\right)\right)\right] \leq \delta d_\alpha\left((x_1, \theta_1); (x_2, \theta_2)\right)$$

Où :

$$\delta = \sup\left\{\left[1 - \inf_{\theta \in I} \sum_{x \in E} \inf_{y \in E} \mathbb{P}_\theta(y, x)\right] + \alpha\gamma B \frac{f_M - f_m}{1 - \gamma f_M} \ ; \ \frac{3}{2} N(N-1)\frac{K}{\alpha} + \gamma f_M\right\}$$

Or, pour que δ soit inférieur à 1, il faut avoir :

$$[1 - \inf_{\theta \in I} \sum_{x \in E} \inf_{y \in E} \mathbb{P}_\theta(y, x)] + \alpha\gamma B \frac{f_M - f_m}{1 - \gamma f_M} < 1$$

et

$$\frac{3}{2} N(N-1)\frac{K}{\alpha} + \gamma f_M < 1$$

Donc, il faut que le système suivant admette des solutions :

$$\begin{cases} \alpha < \inf_{\theta \in I} \sum_{x \in E} \inf_{y \in E} \mathbb{P}_\theta(y,x) \dfrac{1-\gamma f_M}{\gamma B(f_M - f_m)} \\ \alpha > (3/2)\frac{KN(N-1)}{1-\gamma f_M} \end{cases} \tag{3.22}$$

Or il est possible de trouver une solution si la condition (3.13) du théorème est vérifiée.

Cela démontre la proposition 3.

Fin de la démonstration du théorème 2. –Pour finir la démonstration du théorème 2, il nous reste à montrer la propriété(3.14) : "Oubli du point de départ" et on en déduira l'unicité de la mesure invariante μ de la chaîne Y_n qui nous donnera sa stabilité.

Oubli du point de départ.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[d_\alpha\left(Y_n^a, Y_n^b\right)\right] &= \mathbb{E}\left[d_\alpha\left(F\left(Y_{n-1}^a, U_n\right); F\left(Y_{n-1}^b, U_n\right)\right)\right] \\ &\leq \delta \quad \mathbb{E}\left[d_\alpha\left(Y_{n-1}^a, Y_{n-1}^b\right)\right] \end{aligned}$$

(car U_n est indépendante de la tribu engendrée par les $(Y_k)_{k \leq n-1}$, les variables aléatoires U_n ont même loi et d'après la propriété (3.16)).

De proche en proche, on montre que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[d_\alpha\left(Y_n^a, Y_n^b\right)\right] &\leq \delta^{n-1}\mathbb{E}\left[d_\alpha\left(Y_1^a, Y_1^b\right)\right] \\ &= \delta^{n-1}\mathbb{E}\left[d_\alpha\left(F\left(a, U_1\right); F\left(b, U_1\right)\right)\right] \\ &\leq \delta^n d_\alpha(a,b) \end{aligned}$$

Donc on a, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{d_\alpha\left(Y_n^a, Y_n^b\right) \geq \varepsilon\} &\leq (1/\varepsilon)\mathbb{E}\left[d_\alpha\left(Y_n^a, Y_n^b\right)\right] \\ &\leq (\delta^n/\varepsilon) d_\alpha(a,b) \end{aligned}$$

D'où l'équation (3.14) du théorème 2.

L'unicité de μ.

Supposons que Y_n a deux mesures invariantes (μ, ν), alors :

$$\begin{aligned}
&\left| \int d\nu(a)\mathbb{E}\left(\exp(i < u, a >)\right) - \int d\mu(a)\mathbb{E}\left(\exp(i < u, a >)\right) \right| = \\
&\quad \left| \int d\nu(a)\mathbb{E}\left(\exp(i < u, Y_n^a >)\right) - \int d\mu(b)\mathbb{E}\left(\exp(i < u, Y_n^b >)\right) \right| \leq \\
&\quad \int d\nu(a)d\mu(b) \left| \mathbb{E}\left(\exp(i < u, Y_n^a >)\right) - \mathbb{E}\left(\exp(i < u, Y_n^b >)\right) \right|
\end{aligned}$$

or la convergence en probabilité implique la convergence en loi :

$$[Y_n^a - Y_n^b] \xrightarrow{P} 0 \Longrightarrow [Y_n^a - Y_n^b] \xrightarrow{\mathcal{L}} 0 \tag{3.23}$$

D'où :

$$\mathbb{E}\left(\exp(i < u, (Y_n^a - Y_n^b) >)\right) - 1 \to 0 \tag{3.24}$$

et

$$\mathbb{E}\left[\left(\exp(i < u, Y_n^a >) - \exp(i < u, Y_n^b >)\right)\exp(i < u, -Y_n^a >)\right] \to 0 \tag{3.25}$$

Y_n^a et Y_n^b jouent le même rôle, donc :

$$\mathbb{E}\left[\left(\underbrace{\exp(i < u, Y_n^b >) - \exp(i < u, Y_n^a >)}_{W_n}\right)\exp(i < u, -Y_n^b >)\right] \to 0 \tag{3.26}$$

Donc (3.25) + (3.26) donne :

$$\mathbb{E}\left[| W_n |^2\right] = \mathbb{E}\left[W_n \overline{W}_n\right] \to 0 \tag{3.27}$$

or

$$| \mathbb{E}[W_n] | \leq \left(\mathbb{E}\left[| W_n |^2\right]\right)^{(1/2)} \tag{3.28}$$

Donc, d'après (3.27)

$$| \mathbb{E}[W_n] | \to 0 \tag{3.29}$$

D'où :

$$\int d\nu(a)d\mu(b) \left| \mathbb{E}\left(\exp(i < u, Y_n^a >)\right) - \mathbb{E}\left(\exp(i < u, Y_n^b >)\right) \right| \to 0$$

et puisque μ et ν ont la même transformée de Fourier, alors $\mu = \nu$.

■

Remarque.– On peut généraliser l'algorithme(3.1) en travaillant en plusieurs dimensions, c'est à dire, on prend $\theta \in \mathbb{R}^d$ et $B \in \mathbb{R}^d$ où $d \geq 2$; le théorème 1 reste vraie : l'intervale I deviendra

$$I_1 = \left[\frac{\| B \|}{1-\gamma f_m}, \frac{\| B \|}{1-\gamma f_M}\right]$$

et c'est facile de montrer que si $\| \Theta_0 \| \in I_1$ alors $\| \Theta_n \| \in I_1 \quad \forall n \geq 0$.
On obtient aussi la même condition sur le facteur K de la condition (3.13), en remplaçant B par $\| B \|$.

3.3.2 Exemples

On considère que l'espace E est à deux états . La matrice de probabilités de transition s'écrit :

$$\mathbb{P}_\theta = \begin{pmatrix} a(\theta) & 1-a(\theta) \\ b(\theta) & 1-b(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{où } a(\theta), b(\theta) \in]0,1[$$

On montre facilement dans ce cas que :

$$\inf_{\theta \in I} \sum_{x \in E} \inf_{y \in E} \mathbb{P}_\theta(y,x) = 1 - \sup_{\theta \in I} | a(\theta) - b(\theta) |$$

Alors la condition (3.13) devient :

$$K < \frac{1}{3} \frac{(1-\gamma f_M)^2}{\gamma B(f_M - f_m)} \left(1 - \sup_{\theta \in I} | a(\theta) - b(\theta) |\right) \tag{3.30}$$

Si on suppose de plus que

$$a(\theta) = b(\theta) \quad \forall \theta \in I$$

c'est à dire que la suite $(X_n)_{n \geq 0}$ est indépendante et de même loi , la condition ci-dessus s'écrit :

$$K < \frac{1}{3} \frac{(1-\gamma f_M)^2}{\gamma B(f_M - f_m)} \tag{3.31}$$

Cependant en reprenant les démonstrations des lemmes 4 et 5, on trouve les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(g(x_1,\theta_2,U) \neq g(x_2,\theta_2,U))\, \mathbf{1}_{\{x_1 \neq x_2\}} &= 0 \\ \mathbb{P}(g(x_1,\theta_1,U) \neq g(x_1,\theta_2,U)) &= | a(\theta_1) - a(\theta_2) | \\ &\leq K \mid \theta_1 - \theta_2 \mid \end{aligned}$$

D'où une condition plus fine dans ce cas particulier :

$$K < \frac{(1-\gamma f_M)^2}{\gamma B(f_M - f_m)} \tag{3.32}$$

3.4 Théorème de limite centrale.

On a vu dans le théorème 1 qu'un modèle qui a la propriété de mélange Lipschitzien est stable. Il y a en outre des résultats qui en découlent concernant le comportement asymptotique de la chaîne (Y_n).

1) Pour toute fonction φ continue de $E \times I$ dans $\mathbb{R}$ et pour toute loi initiale, on a la "loi des grands nombres" :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi(Y_k) \overset{p.s}{\to} \mu(\varphi). \tag{3.33}$$

(où μ est la loi stationnaire du modèle).

2) Pour toute fonction g Lipschitzienne, on a :

$$\mid \Pi_n g(x) - \mu(g) \mid \leq \kappa\alpha^n \quad (0 \leq \alpha < 1) \tag{3.34}$$

où κ est une constante positive.
La fonction $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(\Pi_n g(x) - \mu(g))$ est aussi Lipschitzienne et en plus elle satisfait l'équation de Poisson :

$$G - \Pi G = g - \mu(g). \tag{3.35}$$

<u>**Condition de Lindeberg**</u>

On reprend ici un théorème de limite centrale pour les martingales de carré intégrable (Voir DUFLO [7]).

Théorème 3 *Soit M une martingale de carré intégrable adaptée à une filtration $(\mathcal{F}_n)$ et soit $< M >$ son crochet.*
On suppose que, pour une suite réelle déterministe et croissante vers $+\infty$, (u_n), les deux hypothèses suivantes sont réalisées :
H1)

$$u_n^{-1} < M >_n \overset{P}{\to} \Gamma. \tag{3.36}$$

où $\overset{P}{\to}$ désigne la convergence en probabilité.

H2) la condition de Lindeberg est satisfaite, c'est à dire que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$u_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(\mid M_k - M_{k-1} \mid^2 \mathbf{1}_{\left[|M_k - M_{k-1}| \geq \varepsilon u_n^{1/2}\right]} \mid \mathcal{F}_{k-1} \right) \xrightarrow{P} 0. \tag{3.37}$$

Alors :

$$u_n^{-1/2} M_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Gamma). \tag{3.38}$$

Si Γ *est inversible :*

$$u_n^{1/2} < M >_n^{-1} M_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Gamma^{-1}). \tag{3.39}$$

Théorème de limite centrale pour les chaînes de Markov.

Théorème 4 *Les hypothèses sont celles du théorème 2.*
Soit g *une fonction Lipschitzienne, pour toute loi initiale :*

$$n^{-1/2} \sum_{k=1}^{n} (g(Y_k) - \mu(g)) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2(g)). \tag{3.40}$$

avec

$$\sigma^2(g) = \int d\mu(x) \int \Pi(x, dy)[G(y) - \Pi G(y)]^2 \geq 0; \tag{3.41}$$

$$\sigma^2(g) = \mu(G^2) - \mu\left((\Pi G)^2\right) = 2\mu\left(G(g - \mu(g))\right) - \mu\left((g - \mu(g))^2\right). \tag{3.42}$$

Démonstration.- On pose :

$$Z_n = g(Y_{n-1}) - \mu(g) - G(Y_{n-1}) + G(Y_n) \tag{3.43}$$

Pour $M_n = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n$,

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} (g(Y_k) - \mu(g)) + G(Y_n) - G(Y_0). \tag{3.44}$$

Puisque g est Lipschitzienne et est définie sur $E \times I$ qui est un compact, on vérifie sans problème que $M = (M_n)$ est une martingale de carré intégrable. Après un calcul simple, on obtient : $< M >_n = \sum_{k=1}^{n} C(Y_{k-1})$ avec

$$\begin{aligned} C(x) &= \int \Pi(x, dy)[G(y) - \Pi G(y)]^2 & (3.45) \\ &= \Pi G^2(x) - (\Pi G(x))^2. & (3.46) \end{aligned}$$

et où $< M >_n$ est le processus croissant de M_n.
On peut vérifier alors que

$$\mu(C) = \sigma^2(g) \tag{3.47}$$

et donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(< M >_n) &\leq n\overline{\Pi}_{n-1}G^2(x) & (3.48)\\ &\leq \lambda n & (3.49) \end{aligned}$$

où λ est une constante. On a aussi

$$\frac{M_n}{n} \to 0 \quad \text{p.s} \tag{3.50}$$

Et en appliquant l'équation (3.33) à $< M >_n$ on obtient

$$\frac{< M >_n}{n} \to \sigma^2(g) \quad \text{p.s} \tag{3.51}$$

or on a

$$n^{-1/2}\left(\sum_{k=1}^{n}(g(Y_k) - \mu(g)) - M_n\right) \to 0 \quad \text{p.s} \tag{3.52}$$

(car $G(Y_n) = o(n^{1/2})$).

Le théorème 4 sera établi si la condition de Lindeberg est réalisée pour $u_n = n$, soit

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left(\mid M_k - M_{k-1} \mid^2 \mathbf{1}_{[|M_k - M_{k-1}| \geq \varepsilon\sqrt{n}]} \mid \mathcal{F}_{k-1}\right) \xrightarrow{P} 0. \tag{3.53}$$

Or $M_k - M_{k-1} = Y_k$ est l'accroissement de la martingale M_n qui est majorée par une constante "a" du fait que g et G sont continues sur le compact $E \times I$. Donc il suffit de remarquer que, pour n assez grand, $\varepsilon\sqrt{n} \geq a$.
On obtient alors (3.53), et on conclut en utilisant le théorème 3. ∎

Chapitre 4

Imagerie électromagnétique

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéressera au développement de la méthode d'inversion des données magnétotelluriques correspondant à un milieu bidimensionnel. Cette méthode qu'on appelle aussi méthode de résolution du problème inverse bayesien a pour but d'estimer la loi à postériori des paramètres du modèle.

Lorsque le nombre des paramètres est grand, il devient intéressant d'utiliser la simulation d'une chaîne de Markov. C'est la même méthode qu'on a utilisé dans le premier chapitre. Les paramètres à estimer, dans notre cas, sont les résistivités. La méthode d'inversion bidimensionnelle qu'on étudie dans ce chapitre a été testée sur des données synthétiques, et ceci afin d'étudier la convergence et la stabilité de l'algorithme.

4.2 Imagerie électromagnétique bidimensionnelle

4.2.1 Rappel sur le modèle unidimensionnel

Le modèle unidimensionnel est un modèle où la résistivité ne varie qu'en fonction de la profondeur ; il peut alors être représenté par une succession de couches de résistivité homogène.

L'approche classique du problème inverse consiste à estimer les paramètres du modèle dont la réponse théorique est la plus proche de l'observable au sens des moindres-carrés. Cette méthode ne donne pas toujours de solution satisfaisante.

Une approche bayesienne utilisant une méthode de Monte-Carlo a été proposée par (TARITS et al.[21]). Cette dernière permet d'estimer la probabilité à postériori des paramètres et évite d'avoir recours à linéariser le problème direct reliant les paramètres et l'observable.

Dans ces deux approches, il faut déterminer le nombre de couches du modèle avant d'estimer ses paramètres. Si l'on ne dispose pas d'informations à priori sur ce nombre, des inversions préliminaires avec plusieurs nombres de couches différents sont nécessaires pour estimer le nombre de couches le plus probable. En effet, la sur-estimation du nombre de couches est équivalente à l'augmentation du nombre de paramètres à estimer, ce qui peut conduire à l'instabilité de l' algorithme. Et la sous-estimation du nombre de couches peut conduire à un écart important entre les données calculées et les observables.

Une étude complète, dans ce domaine, a été faite par (GRANDIS [12]). Ce dernier a apporté une réponse au problème de détermination du nombre de couches en adoptant un modèle qui comporte un grand nombre de couches minces dont l'épaisseur est fixe. Les paramètres du modèle, ainsi discrétisé, sont les résistivités de chaque couche. Et comme le nombre de paramètres est grand, il a jugé intéressant l'utilisation, dans l'algorithme d'inversion, d'une chaîne de Markov. Ensuite, pour lisser l'image, il a utilisé des informations à priori qui consiste à respecter la continuité de la résistivité en profondeur. Son algorithme est semblable à celui décrit dans le premier chapitre.

4.2.2 Modèle bidimensionnel

Le modèle bidimensionnel est un modèle où la résistivité ne varie que suivant les deux axes vertical et horizontal d'une coupe verticale du terrain.

Dans ce cas bidimensionnel, les prospecteurs utilisent une méthode qui consiste à répartir régulièrement les points de mesures à la surface de la zone étudiée. Sous chaque point de mesure, ils réalisent une inversion en considérant que le modèle est unidimensionnel. Ensuite ils essaient de "**recoller**" les différents modèles inverses obtenus.

Ici, en s'inspirant de l'idée précédente, on propose un algorithme stochastique d'inversion bidimensionnel utilisant la simulation d'une chaîne de Markov. La reconstitution du modèle inverse se fait en plusieurs étapes. Chaque étape correspond à une inversion unidimensionnelle. Le lissage du modèle inverse se fait grâce à des informations à priori favorisant une continuité verticale et surtout horizontale de la résistivité.

Les résultats expérimentaux obtenus lors de l'inversion de certains modèles synthétiques sont assez satisfaisants. Ils assurent une convergence expérimentale de l'algorithme et donne une idée sur sa robustesse.

Dans le paragraphe suivant, on reparle du principe de cet algorithme et des propriétés de la chaîne ainsi obtenue.

Principe de l'algorithme d'inversion

i)Modèle

En discrétisant notre modèle en couches d'épaisseurs fixes, on pourra alors le représenter par une grille formée de K mailles, de telle sorte que dans chaque maille la résistivité soit homogène (où K = I × J, I étant le nombre des mailles verticales et J étant celui des mailles horizontales). Le modèle ainsi discrétisé, est décrit par une matrice **a** formée de vecteurs colonnes $\mathbf{a}_j (j = 1, \ldots, J)$ où :

$$\mathbf{a}_j = (\rho_{1,j}, \rho_{2,j}, \ldots, \rho_{I,j}) \tag{4.1}$$

et où $\rho_{i,j}$ est la résistivité de la i^{eme} couche et de la j^{eme} colonne, autrement dit c'est la résistivité de la maille d'indice (i, j).

Comme dans le chapitre 1, on peut assimiler le modèle **a** à une image bidimensionnelle. Ici, l'image correspond à une coupe verticale du terrain. Une maille de cette image est appelée "pixel". Le paramètre de chaque pixel est la résistivité.

ii)Loi à priori des paramètres

L'information à priori est une caractéristique principale dans la détermination de la loi à postériori. Cette information est exprimée par une loi de probabilité appelée "**loi à priori**". Celle-ci décrit notre connaissance sur les paramètres du modèle avant d'effectuer l'inférence sur ces paramètres, et ceci nous permet de réduire la classe des valeurs possibles des paramètres que peut prendre la résistivité en chaque pixel.

Soit M le nombre de valeurs de résistivités possibles dans la classe à priori. On écrit alors la loi de probabilité à priori, q, d'un modèle $\mathbf{a}$ composé de $I \times J$ pixels

$$\begin{aligned} q(\mathbf{a}) &= \mathbb{P}(\rho_{i,j} = a_{i,j}; i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J) \\ &= Z \exp(-\{\lambda \sum_{i,j} [\log(\frac{a_{i,j}}{a_{i+1,j}})]^2 + \beta \sum_{i,j} [\log(\frac{a_{i,j}}{a_{i,j+1}})]^2\}) \end{aligned} \quad (4.2)$$

où Z est la constante de normalisation, $a_{i,j}$ est l'un des M paramètres du modèle, et où λ (respectivement β) est un facteur de lissage vertical (respectivement horizontal).

Cette expression de la loi à priori (équation (4.2)) permet de favoriser les petits sauts et de défavoriser les grands sauts des valeurs de deux résistivités consécutives soit verticalement, en jouant sur le paramètre λ, soit horizontalement en agissant sur β. Cela favorise un lissage de l'image bidimensionnelle.

iii)Loi de l'observable

On exprime la probabilité de l'observable connaissant le modèle par la loi suivante (voir chapitre 1) :

$$g(\mathbf{y}/\mathbf{a}) = g(\mathbf{y} - F(\mathbf{a})) \quad (4.3)$$

Cette loi n'est autre que la loi du bruit, lorsqu'il est considéré comme étant l'écart entre l'observable $\mathbf{y}$ et la réponse du vrai modèle $F(\mathbf{a})$.

Lorsqu'on considère que le bruit suit une loi gaussienne, on peut supposer,dans ce cas, que les données observées d_i à la fréquence f_i sont indépendantes, de moyenne $F_i(\mathbf{a})$ et de variance σ_i^2. La loi de l'observable s'écrit alors comme suit :

$$\begin{aligned} g(\mathbf{y}/\mathbf{a}) &= \frac{1}{\prod_{i=1}^{2N}\sqrt{2\pi}\sigma_i}\exp\left(\sum_{i=1}^{2N} -\frac{1}{2}\left(\frac{y_i - F_i(\mathbf{a})}{\sigma_i}\right)^2\right) &(4.4)\\ &= Z\exp\left(\sum_{i=1}^{2N} -\frac{1}{2}\left(\frac{y_i - F_i(\mathbf{a})}{\sigma_i}\right)^2\right) &(4.5)\\ & &(4.6)\end{aligned}$$

où Z est la constante de normalisation et N est le nombre de fréquences.

iv)Résolution par la simulation d'une chaîne de Markov

Comme on a vu dans le premier chapitre, la résolution du problème inverse, dans notre cas, est basée sur le calcul de la loi à postériori des résistivités dont les valeurs sont prises dans la classe à priori, et qui s'écrit :

$$\mathbb{P}(\rho = \mathbf{a}/\mathbf{y}) = \frac{g(\mathbf{y}/\mathbf{a})q(\mathbf{a})}{\sum_{\mathbf{b}\in A} g(\mathbf{y}/\mathbf{b})q(\mathbf{b})} \tag{4.7}$$

pour toute image **a** et toute donnée **y**.
A désigne l'ensemble des images définies par toutes les combinaisons possibles des valeurs à priori des paramètres ρ. D'où le cardinal de A est égal à M^K.

Il est encore plus intéressant de calculer la probabilité marginale à postériori des paramètres, c'est à dire la probabilité conditionnelle de la résistivité d'une maille sachant la résistivité des autres mailles. Donc, si $A(k, \bar{\rho}_m)$ est l'ensemble des images qui ont la résistivité $\bar{\rho}_m$ dans la maille k, alors cette probabilité marginale à postériori, notée po_k, s'écrit :

$$po_k(\bar{\rho}_m) = \frac{\sum_{\mathbf{a}\in A(k,\bar{\rho}_m)} g(\mathbf{y}/\mathbf{a})q(\mathbf{a})}{\sum_{\mathbf{b}\in A} g(\mathbf{y}/\mathbf{b})q(\mathbf{b})} \tag{4.8}$$

L'estimateur de la résistivité de la k^{eme} maille est la moyenne de cette probabilité marginale à postériori :

$$\underline{\rho_k} = \sum_{m=1}^{M} \bar{\rho}_m po_k(\bar{\rho}_m) \tag{4.9}$$

La variance de cette probabilité donne une indication sur la fiabilité de l'estimation.

Un problème qui se pose ici, est l'énorme calcul qui nous attend pour traiter le dénominateur de la loi à postériori et donc l'impossibilité d'un calcul direct de cette loi.

De là vient l'idée de contourner ce problème en construisant un algorithme stochastique utilisant la simulation d'un chaîne de Markov qui se stabilise autour de la loi à postériori. Comme on a vu dans la partie (4.2.2.i) de ce chapitre, notre modèle peut être représenter par une image à I lignes et J colonnes, donc à I $\times$ J pixels.

On construit le modèle ainsi :
A la surface du sol, on observe l'impédance complexe $\mathbf{y}$ à N fréquences.
Les points de mesures sont répartis uniformément à la surface du sol de telle sorte que chaque point de mesure correspond à une maille horizontale (voir chapitre 1) ; donc on prend N égale à J. On désigne alors par $y_{i,j}$ l'impédance observée à la fréquence i et au point de mesure j. On désigne aussi par $F_{i,j}(\mathbf{a})$ l'impédance calculée à la fréquence i et au point de mesure j, en supposant, comme on vient de le signaler au (4.2.2), que le milieu est uni- dimensionnel sous la mesure j.

Sous chaque mesure j, l'image est actualisée de la même façon que dans le cas unidimensionnel ; c'est à dire en changeant la valeur de la résistivité en un seul pixel à la fois avec la loi de probabilité citée dans l'équation (4.7).

L'étape suivante consiste à "**recoller**" les images unidimensionnelles pour former une image bidimensionnelle. Ce "**recollage**" doit se faire de telle sorte qu'on ait une régularité de valeurs des résistivités suivant la direction horizontale.Et c'est là qu'intervient le rôle de la forme de la loi à priori exprimée dans l'équation (4.2).

On obtient alors, avec la loi à priori ainsi définie, des modèles $(\rho_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ vérifiant les propriétés d'une chaîne de Markov (voir chapitre 1).

Sa probabilité de transition est définie par la probabilité conditionnelle à postériori :

Pour chaque j fixé on a : pour tout $k \leq I$

$$\mathbb{P}(\rho_{k,j} = \bar{\rho}_m / \rho_{l,j}; l \neq k) =$$

$$\frac{\exp\left(\sum_{i=1}^{2N} -\frac{1}{2}\left(\frac{y_{i,j} - F_{i,j}(\mathbf{a}; \rho_{k,j} = \bar{\rho}_m)}{\sigma_i}\right)^2\right) q(\mathbf{a}; \rho_{k,j} = \bar{\rho}_m)}{\sum_{n=1}^{M} \exp\left(\sum_{i=1}^{2N} -\frac{1}{2}\left(\frac{y_{i,j} - F_{i,j}(\mathbf{a}; \rho_{k,j} = \bar{\rho}_n)}{\sigma_i}\right)^2\right) q(\mathbf{a}; \rho_{k,j} = \bar{\rho}_n)} \tag{4.10}$$

où la notation $(\mathbf{a}; \rho_{k,j} = \bar{\rho}_m)$ désigne le modèle $(\mathbf{a})$ dont la valeur de la résistivité en la maille k de la colonne j est $\bar{\rho}_m$.

Avant de remplacer $q(\mathbf{a}; \rho_{k,j} = \bar{\rho}_m)$ par son expression de l'équation (4.2) dans l'équation (4.9), on va la réécrire en séparant les termes qui dépendent de ρ_{kj} de ceux qui n'en dépendent pas. Ceci afin de pouvoir simplifier par ces derniers dans l'équation(4.9). En effet :

$$\sum_{(i,l)} (\log(\frac{\rho_{i,l}}{\rho_{i+1,l}}))^2 =$$

$$\sum_{(i,l) \neq \{(k-1,j);(k,j)\}} [(\log(\frac{\rho_{i,l}}{\rho_{i+1,l}}))^2] + (\log(\frac{\rho_{k-1,j}}{\rho_{k,j}}))^2 + (\log(\frac{\rho_{k,j}}{\rho_{k+1,j}}))^2$$

$$\sum_{(i,l)} (\log(\frac{\rho_{i,l}}{\rho_{i,l+1}}))^2 =$$

$$\sum_{(i,l) \neq \{(k,j-1);(k,j)\}} [(\log(\frac{\rho_{i,l}}{\rho_{i,l+1}}))^2] + (\log(\frac{\rho_{k,j-1}}{\rho_{k,j}}))^2 + (\log(\frac{\rho_{k,j}}{\rho_{k,j+1}}))^2$$

D'où en reportant ces deux expressions dans l'équation (4.2), et en remplaçant l'expression obtenue dans l'équation (4.9), la probabilité de transition de la chaîne de Markov devient :

pour $1 < j < J$ et pour $1 < k < I$ on a :

$$\mathbb{P}(\rho_{kj} = \bar{\rho}_m / \rho_{lj}; l \neq k) =$$

$$Z \exp\left(\sum_{i=1}^{2N} -\frac{1}{2}\left(\frac{y_{i,j} - F_{i,j}(\mathbf{a}; \rho_{k,j} = \bar{\rho}_m)}{\sigma_i}\right)^2\right) \exp(-S_{k,j}(\bar{\rho}_m))$$

où Z est la constante de normalisation, et

$$S_{k,j}(\bar{\rho}_m) =$$

$$\lambda\{(\log(\frac{\rho_{k-1,j}}{\bar{\rho}_m}))^2 + (\log(\frac{\bar{\rho}_m}{\rho_{k+1,j}}))^2\} + \beta\{(\log(\frac{\rho_{k,j-1}}{\bar{\rho}_m}))^2 + (\log(\frac{\bar{\rho}_m}{\rho_{k,j+1}}))^2\}$$

pour $j = 1$ et $k = 1$, on a :

$$\mathbb{P}(\rho_{1,1} = \bar{\rho}_m / \rho_{l,1}; l > 1) =$$

$$Z \exp\left(\sum_{i=1}^{2N} -\frac{1}{2}\left(\frac{y_{i,1} - F_{i,1}(\mathbf{a}; \rho_{1,1} = \bar{\rho}_m)}{\sigma_i}\right)^2\right) \exp(-S_{1,1}(\bar{\rho}_m))$$

avec :

$$S_{1,1}(\rho_m) = \lambda\{(\log(\frac{\bar{\rho}_m}{\rho_{2,1}}))^2\} + \beta\{(\log(\frac{\bar{\rho}_m}{\rho_{1,2}}))^2\})$$

pour $j = J$ et $k = I$, on a :

$$\mathbb{P}(\rho_{I,J} = \bar{\rho}_m / \rho_{l,J}; l < I) =$$

$$Z_3 \exp\left(\sum_{i=1}^{2N} -\frac{1}{2}\left(\frac{y_{i,J} - F_{i,J}(\mathbf{a}; \rho_{J,I} = \bar{\rho}_m)}{\sigma_i}\right)^2\right) \exp(-S_{I,J}(\bar{\rho}_m))$$

avec :

$$S_{IJ}(\bar{\rho}_m) = \lambda\{(\log(\frac{\rho_{I-1,J}}{\bar{\rho}_m}))^2\} + \beta\{(\log(\frac{\rho_{I,J-1}}{\bar{\rho}_m}))^2\}$$

On obtient de la même manière les probabilités de transition lorsqu'on balaie la première et la dernière colonne.

4.3 Simulation

4.3.1 Modèles et données synthétiques

Pour tester notre méthode d'inversion bidimensionnelle, on a utilisé quatre modèles ; trois d'entre eux ont la même stucture et le quatrième est un modèle dont les propriétés physiques le rendent très difficile à reconstruire.

Le point commun entre tous ces modèles, est qu'ils représentent des coupes verticales du terrain. Ces coupes sont formées de quatre zones ;

une zone centrale construite d'une succession finie de couches, où chaque couche est composée d'un certain nombre de prismes rectangulaires ayant des résistivités différentes, deux zones latérales (gauche et droite) formées d'une série finie de couches homogènes et la quatrième, qui se trouve en dessous des trois zones, est formée d'un socle infini et homogène.

On divise ces coupes en un nombre fini de couches minces horizontales dont l'épaisseur augmente avec la profondeur. Chaque maille verticale correspond alors à une couche. La discrétisation verticale se fera de la façon suivante :
l'épaisseur de la première couche est prise arbitrairement ; soit x_0 cette épaisseur. La profondeur des couches suivantes est calculée en utilisant l'échelle logarithmique, caractérisée par la fonction suivante :

$$h(x) = \log(x + x_0) \tag{4.11}$$

L'épaisseur de la k^{eme} maille verticale est alors obtenue en calculant la différence entre les profondeurs de la k^{eme} couche et de la $(k-1)^{eme}$.

Le nombre de mailles verticales sera compris entre "50" et "60" suivant le modèle et x_0 lui varira de "100" à "1000" mètres.

Le pas de la discrétisation horizontale de ces coupes est constant, il est de "10 Km". On prend neuf mailles horizontales, dont la longueur de chacune vaut "10 Km". Sept de ces mailles appartiennent à la zone centrale.

Les points de mesures sont répartis uniformément à la surface du sol, de telle sorte que chaque point corresponde à une maille. Donc on aura neuf points de mesures.

En ce qui concerne les données synthétiques, on a calculé l'impédance (rapport entre les composantes croisées des champs électrique et magnétique) avec un algorithme, fourni par P.Tarits, qui donne les valeurs exactes pour un milieu bidimensionnel. La réponse théorique de chaque modèle synthétique est calculée pour la gamme de périodes comprises entre 0.0025 et 250 secondes. Cette gamme a été obtenue à la suite d'un échantillonnage régulier de cinq points par décade sur une échelle logarithmique de périodes, ceci afin de conserver l'information contenue dans la réponse théorique du modèle. Cela fait 26 données d'impédance complexe en chaque point de mesure.

On a ajouté à ces données synthétiques, un bruit gaussien centré d'écart type égale à 5% de l'amplitude de l'impédance.

En ce qui concerne la classe à priori des résistivités, elle est également la même pour les quatres modèles. Elle comprend toutes les valeurs des résistivités utilisées dans ces modèles. En effet, cette classe varie de 1 à 1000 Ohm.m. On a choisi 19 valeurs de résistivités à priori obtenues par un échantillonnage régulier de six résistivités par décade en échelle logarithmique.

i) Modèle synthétique 1

Le modèle est constitué de cinq couches et d'un socle. Les résistivités (en Ohm.m) sont réparties de la façon indiquée dans le tableau **1.1**. La première et la dernière colonne correspondent aux zones latérales. Une image, en niveau de gris, de ce modèle synthétique est présentée par la figure (**1.a**).

250	250	250	250	250	250	250	250	250
250	250	250	250	250	50	50	50	50
250	250	250	50	50	50	250	250	250
250	250	50	50	250	250	250	250	250
50	50	50	250	250	250	250	250	250
25	25	25	25	25	25	25	25	25

<u>Tableau **1.1**</u>

Les épaisseurs et les profondeurs des couches sont indiquées dans le tableau **1.2**.

couche	épaisseur (m)	profondeur(m)
1	600.00	0.00
2	1391.40	600.00
3	1000.00	1991.4
4	2794.73	2991.4
5	4000.00	5786.13
6	∞	9786.13

<u>Tableau **1.2**</u>

On discrétise le modèle en 50×9 mailles. La profondeur minimale x_0 est de 100 m et la prondeur maximale est de 20 Km. La discrétisation verticale porte sur "90 Km".

Pour inverser les données synthétiques, on balaie toutes les mailles en actualisant une seule maille à la fois. On considère qu'un modèle est obtenu après un balayage complet de toutes les mailles. la suite des modèles obtenus vérifie la propriété d'une chaîne de Markov homogène.

A l'itération N, on estime la résistivité en une maille par la moyenne empirique des résistivités obtenues en cette maille lors des itérations antérieures :

$$\tilde{\rho}_k = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \rho_{k,n} \tag{4.12}$$

où $\rho_{k,n}$ est la résistivité de la maille k à l'itération n.

On étudie la convergence de la chaîne en observant la stabilité des images obtenues. Un des indicateurs de la stabilité utilisé est l'écart entre les données observées et celles calculées. Lorsque celui-ci se stabilise autour d'une valeur proche du niveau de bruit introduit dans les données observées on peut dire que la chaîne est convergente.

La première chose qu'on a testée, ce sont les paramètres de lissage (λ et β) qui apparaissent dans la formule de la loi à priori. Lorsqu'on prend λ et β tous les deux nuls, c'est à dire qu'on n'a plus d'informations "douces" sur les paramètres à estimer, on obtient alors un modèle inverse dont l'image présente une irrégularité des valeurs de la résistivité (voir figure **1.b**). L'écart entre les données observées et celles calculées, qu'on appelle dorénavant "l'erreur", est de 6.6%.

Dans toutes les expériences effectuées, on remarque que l'erreur se stabilise très vite. Et ceci à partir de la cinquième itération.

Après une série d'essais qui visent à montrer le rôle déterminant des paramètres de lissage dans cette méthode, on obtient les résultats suivants (voir annexe pour les résultats numériques) :

Pour $\lambda = 1$ et $\beta = 0$, c'est à dire en mettant une contrainte très faible verticale,on commence déjà à voir une régularité suivant cette direction, et l'erreur devient de 6.18%.

Pour $\lambda = 1$ et $\beta = 1$, donc pour deux "petites" contraintes verticale et horizontale, le résultat s'améliore un petit peu, et l'erreur dans ce cas est d'environ 6%.

Et pour voir l'importance du lissage horizontale, on a fixé β à "10" tout en laissant $\lambda = 1$. En effet, l'effet de ce lissage horizontal est très visible au niveau du socle dont la valeur de la résistivité est de "25 Ohm.m" pour le modèle synthétique. L'exemple de $\lambda = 1$ et $\beta = 0$ le montre bien, car on peut remarquer que dans le socle, le saut des valeurs de la résistivité suivant l'horizontal varie de "0" à "190 Ohm.m", alors que dans notre cas ($\lambda = 1$ et $\beta = 10$) le saut varie de "0" à "43 Ohm.m". L'erreur, dans ce cas est de 5.29%.

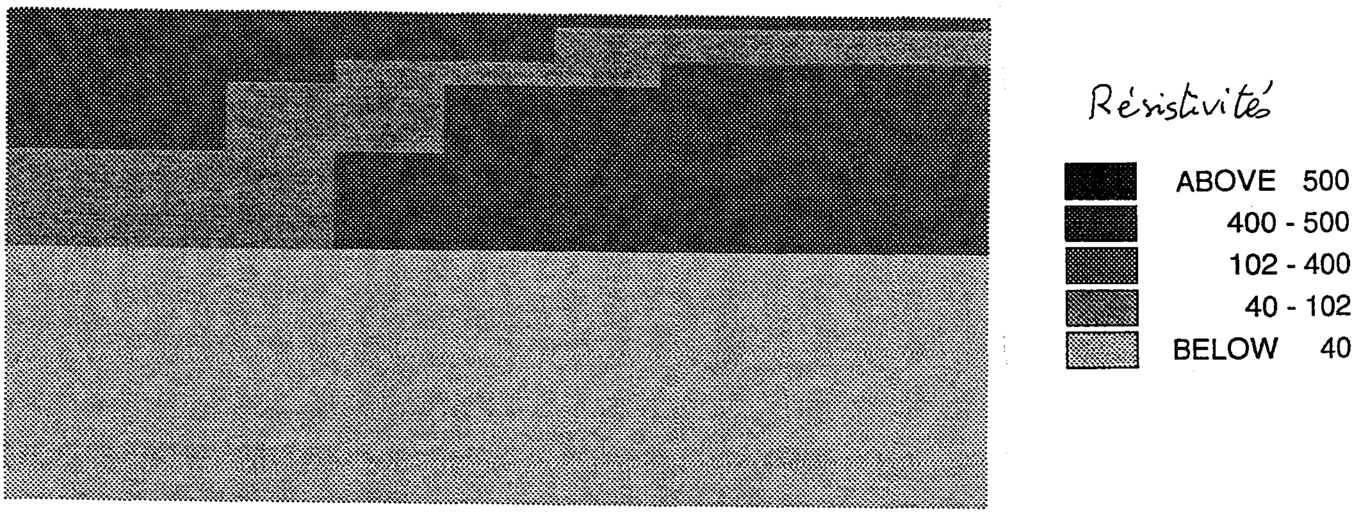
On constate une nette amélioration du modèle inverse pour $\lambda = \beta = 3$. L'erreur se stabilise autour de 4.95%.

Pour $\lambda = \beta = 5$, on ne remarque pas de grands changements. L'erreur dans ce cas est d'environ 4.88%.

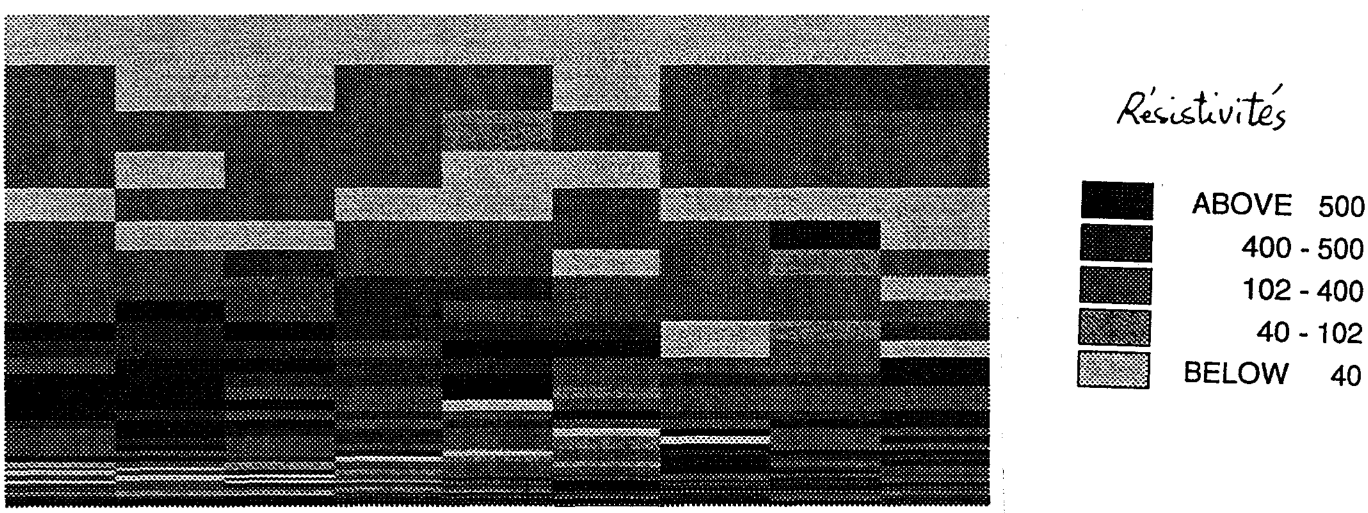
Pour $\lambda = \beta = 8$, l'erreur oscille autour de 4.92% et atteint 5.5% pour $\lambda = \beta = 10$.

On remarque qu'entre les valeurs "3" et "8" de λ et β, il n'y a pas de grandes variations de l'erreur. Par contre, le modèle inverse présente une forte régularité pour λ et β voisins de "8".

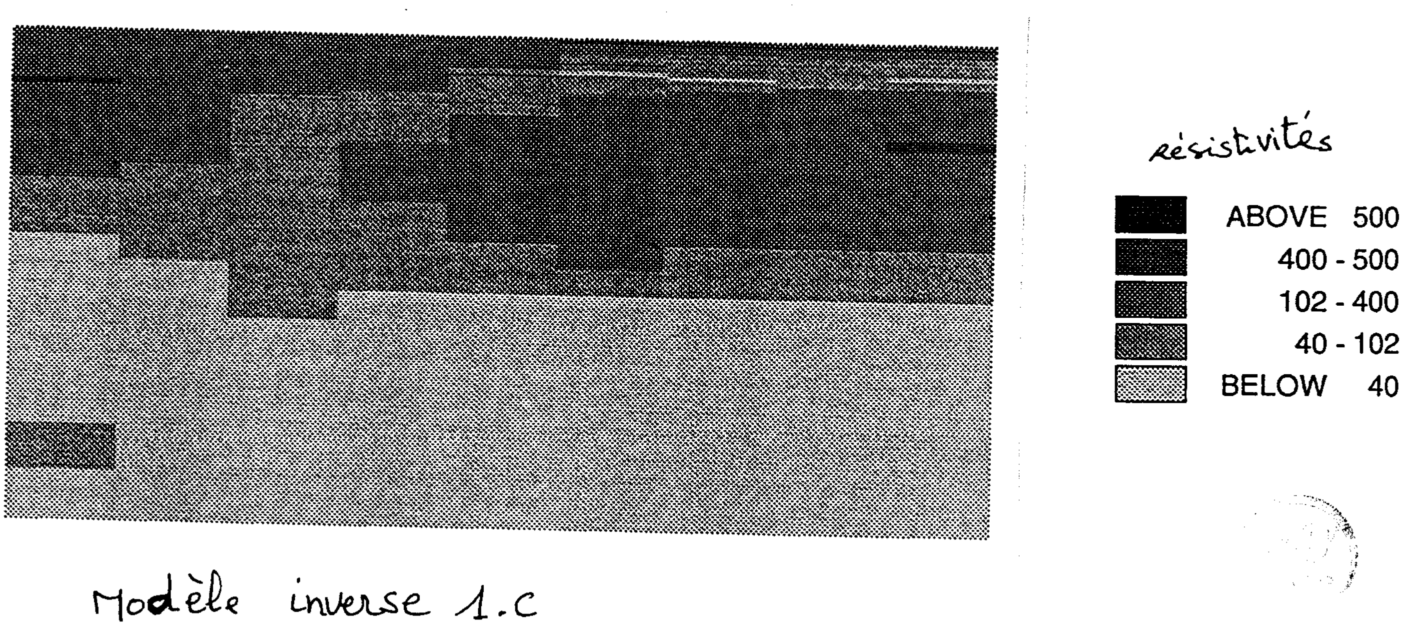
On a opté donc pour $\lambda = \beta = 8$. On obtient, dans ce cas, un modèle inverse qui est plus lisse que les autres (voir figure **1.c**). On reconnaît assez bien le modèle synthétique. Le socle est parfaitement reconstitué, par contre la zone en escalier l'est moins bien. Les contours des zones de résistivités différentes sont mal reconstruites, ceci est dû aux paramètres de lissage qui font que la résistivité varie de façon progressive.



Modèle synthétique 1.a



Modèle inverse 1.b



Modèle inverse 1.c

ii) Modèles synthétiques 2 et 3

La forme géométrique des structures des modéles 1, 2 et 3 est la même (voir figures **2.a** et **3.a**). Ce qui change ici, c'est la valeur de la résistivité de la zone en escalier et celle du socle (voir tableaux **2.b** et **3.b**). Ceci afin d' étudier la robustesse de notre méthode d'inversion.

250	250	250	250	250	250	250	250	250
250	250	250	250	250	50	50	50	50
250	250	250	50	50	50	250	250	250
250	250	50	50	250	250	250	250	250
50	50	50	250	250	250	250	250	250
1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000

Tableau **2.1**

250	250	250	250	250	250	250	250	250
250	250	250	250	250	10	10	10	10
250	250	250	10	10	10	250	250	250
250	250	10	10	250	250	250	250	250
10	10	10	250	250	250	250	250	250
1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000

Tableau **3.1**

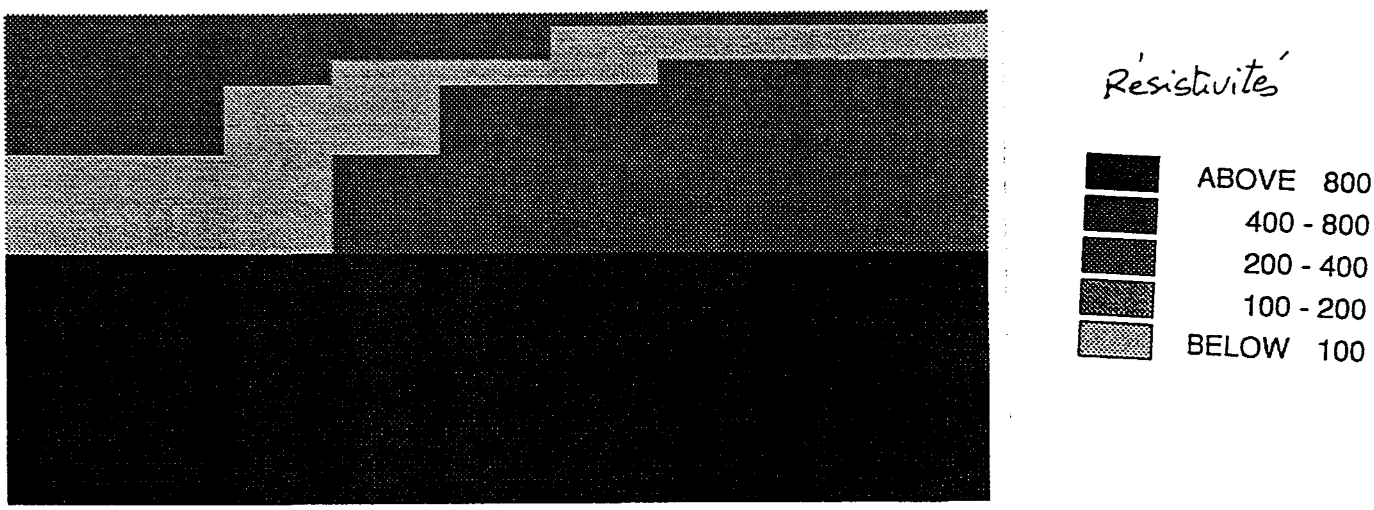
Les épaisseurs et les profondeurs des couches sont indiquées dans le tableau **1.2**. La discrétisation est la même que celle faite dans le cas du modèle 1, soit 50×9 mailles.

En se basant sur les remarques faites pour le choix de λ et β lors des essais concernant le modèle 1, on note ici les deux plus importants essais pour chacun des modèles 2 et 3 (voir annexe) :

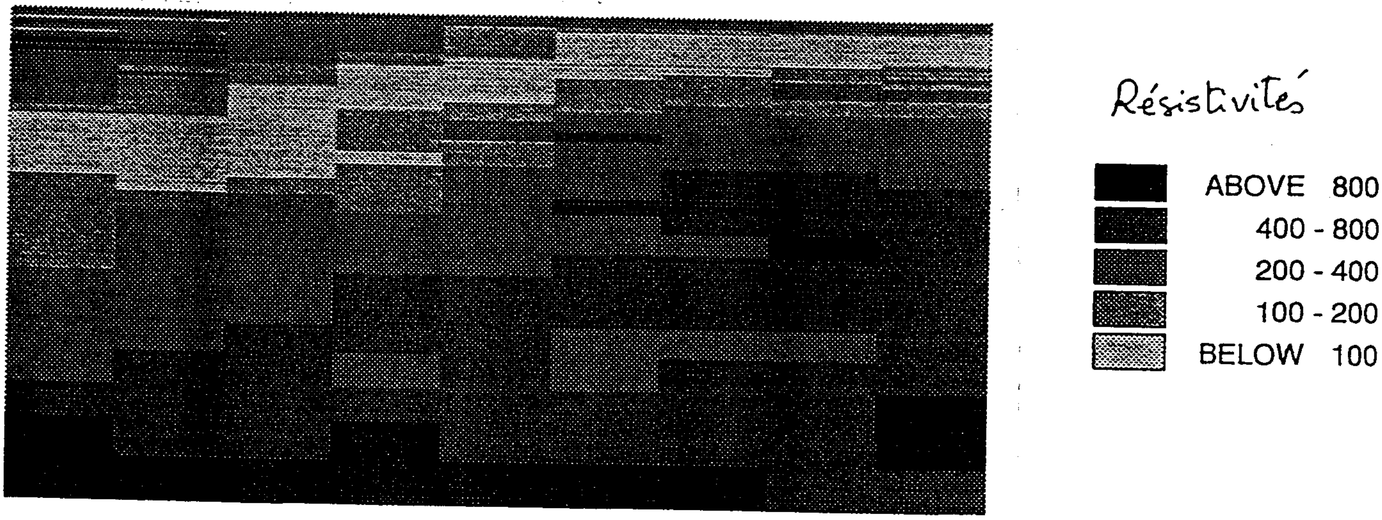
En ce qui concerne le modèle 2, on a obtenu un modèle inverse pour $\lambda = \beta = 5$, l'erreur est d'environ 5.1%.

Pour le modèle 3, on a pris également $\lambda = \beta = 5$, l'erreur est d'environ 5.7%.

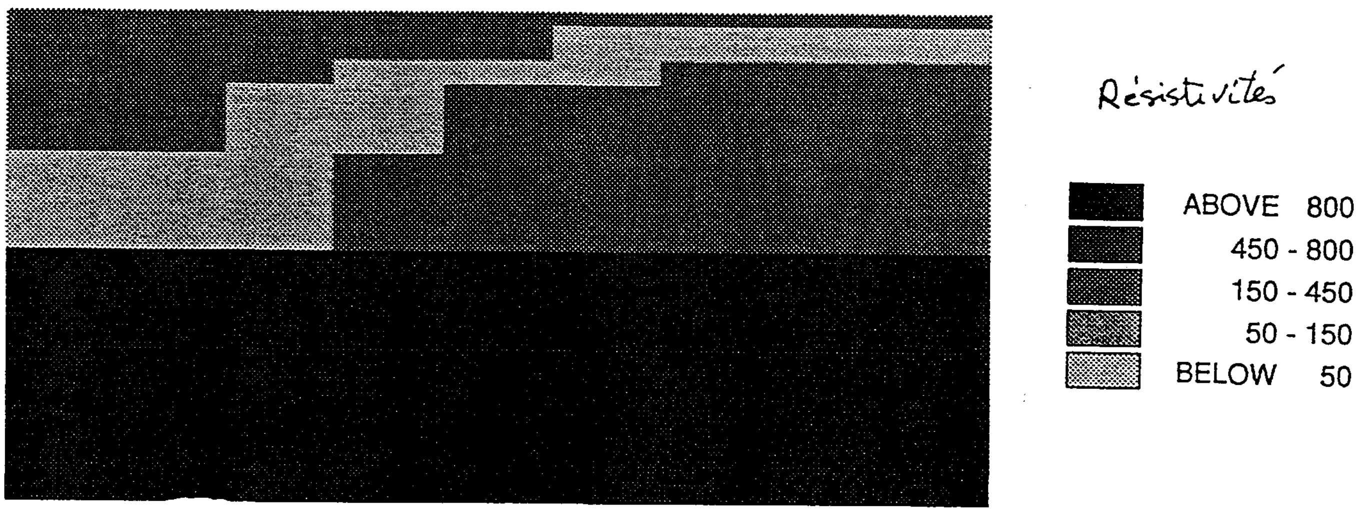
Pour $\lambda = \beta = 8$, on a obtenu des modèles inverses présentés par les figures (**2.b** et **3.b**) correspondent aux modèles synthétiques respectifs (**2** et 3). Comme on peut le constater, ces images sont moins bien reconstruites que celle du modèle 1. Ceci est dû au socle très résistant (1000 Ohm.m) ; à qui s'ajoute, pour le modèle 2, la perturbation causée par la zone très conductrice (10 Ohm.m) à proximité de la surface du sol. On remarque aussi que, dans les deux cas, la valeur de la résistivité du socle est sous-estimée. Ceci est dû au choix de la classe à priori des résistivités qui a pour borne supérieure "1000 Ohm.m".



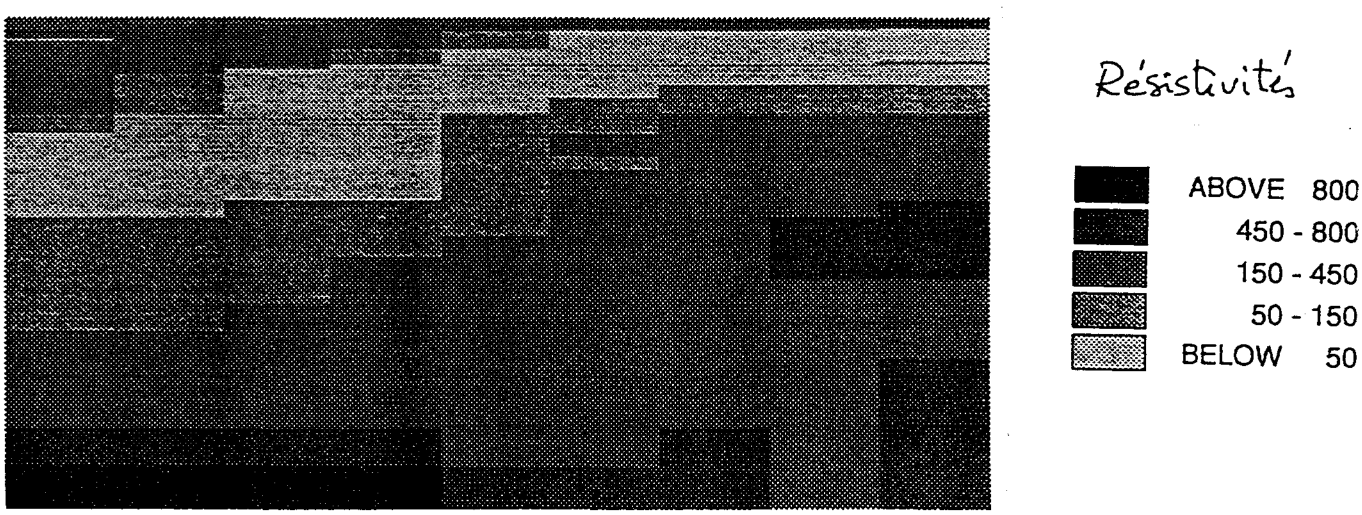
Modèle synthétique 2.a



Modèle inverse 2,b



Modèle synthétique 3.a



Modèle inverse 3.b

i) Modèle synthétique 4

La forme géométrique de cette structure est particulière; elle comporte quatre couches et un socle. La profondeur de la structure est de "50 Km" plus le socle. La profondeur de la discrétisation de ce modèle varie de "50" à "60 Km" et sa longueur est toujours de "90 Km".

On étudie ici quatre sous-modèles synthétiques en jouant sur l'épaisseur de la première couche de la zone centrale et sur la profondeur de la troisième couche tout en modifiant la largeur du prisme contenu dans celle-ci.

Le premier sous-modèle (**4.i**), est défini par les deux tableaux (**4.i.1** et **4.i.2**) qui indiquent respectivement la distribution de la résistivité et la profondeur et l'épaisseur des couches.

1000	1000	50	50	50	50	50	1000	1000
1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
1000	1000	1000	10	10	10	1000	1000	1000
1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
10	10	10	10	10	10	10	10	10

Tableau **4.i.1**

couche	épaisseur (m)	profondeur(m)
1	5000.00	0.00
2	15000.00	5000.00
3	15000.00	20000.00
4	15000.00	35000.00
5	∞	50000.00

Tableau **4.i.2**

La discrétisation, dans ce cas, produit 50×9 mailles et la profondeur minimale est de $x_0 = 1000$ métres au lieu de 100 métres pour les modèles précédents.

On pose $\lambda = \beta = 7$ et on change la gamme des périodes qui sera comprise entre "0.001" et "1000" secondes.

Aprés l'inversion, on constate que la deuxième couche est sous-estimée et la quatrième n'apparaît pas du tout. Par contre, la reconstitution du socle est assez bonne. L'erreur dans ce cas est d'environ 25%.

On refait le même essai avec cette fois $\lambda = \beta = 10$, on obtient pratiquement le même résultat et la même erreur (voir annexe).

Le deuxième sous-modèle (**4.ii**) est construit à partir du premier, en augmentant l'épaisseur de la quatrième couche tout en diminuant celle de la troisième. Ce sous-modèle est défini par les tableaux (**4.i.1** et **4.ii.2**). La discrétisation correspondante est toujours de 50×9 mailles.

couche	épaisseur (m)	profondeur(m)
1	5000.00	0.00
2	15000.00	5000.00
3	5000.00	20000.00
4	25000.00	25000.00
5	∞	50000.00

Tableau **4.ii.2**

Pour $\lambda = \beta = 5$, on a effectué une inversion pour chacune des deux gammes de périodes utilisées précédement. Pour la gamme comprise entre 0.0025 et 250 secondes, l'erreur est d'environ 11% et pour la gamme comprise entre 0.001 et 1000 secondes, l'erreur est de 26%.

Dans ces deux cas, on constate l'absence du prisme de "10 Ohm.m". Par contre, la valeur de la résistivité, en certains mailles, de la quatrième couche augmente pour atteindre environ "120 Ohm.m", alors que dans le cas du sous-modèle (**4.i**), elle n'a pas dépassée "40 Ohm.m" (voir annexe).

Dans le troisième sous-modèle (**4.iii**), on a redéplacé la troisième couche vers le haut tout en réaugmentant son épaisseur et sa largeur de la façon indiquée par les tableaux (**4.iii.1** et **4.iii.2**). La discrétisation correspondante est en premier lieu de 50×9 mailles.

1000	1000	50	50	50	50	50	1000	1000
1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
1000	1000	10	10	10	10	10	1000	1000
1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
10	10	10	10	10	10	10	10	10

Tableau **4.iii.1**

couche	épaisseur (m)	profondeur(m)
1	5000.00	0.00
2	6000.00	5000.00
3	12000.00	11000.00
4	27000.00	23000.00
5	∞	50000.00

Tableau **4.iii.2**

Le modèle inverse obtenu pour $\lambda = \beta = 5$ et pour la gamme de période comprise entre 0.0025 et 250 secondes s'est beaucoup amélioré dans le sens où les valeurs de la résistivité de la quatrième couche ont atteint "1000 Ohm.m". L'erreur, dans ce cas, est de 11% (voir annexe).

En fin, en ce qui concerne le quatrième sous-modèle (**4.iv.**), on a réduit l'épaisseur des trois premières couches tout en augmentant celle de la quatrième (voir tableaux (**4.iii.1** et **4.iv.2**)).

couche	épaisseur (m)	profondeur(m)
1	1000.00	0.00
2	2500.00	1000.00
3	8000.00	3500.00
4	38500.00	11500.00
5	∞	50000.00

Tableau **4.iv.2**

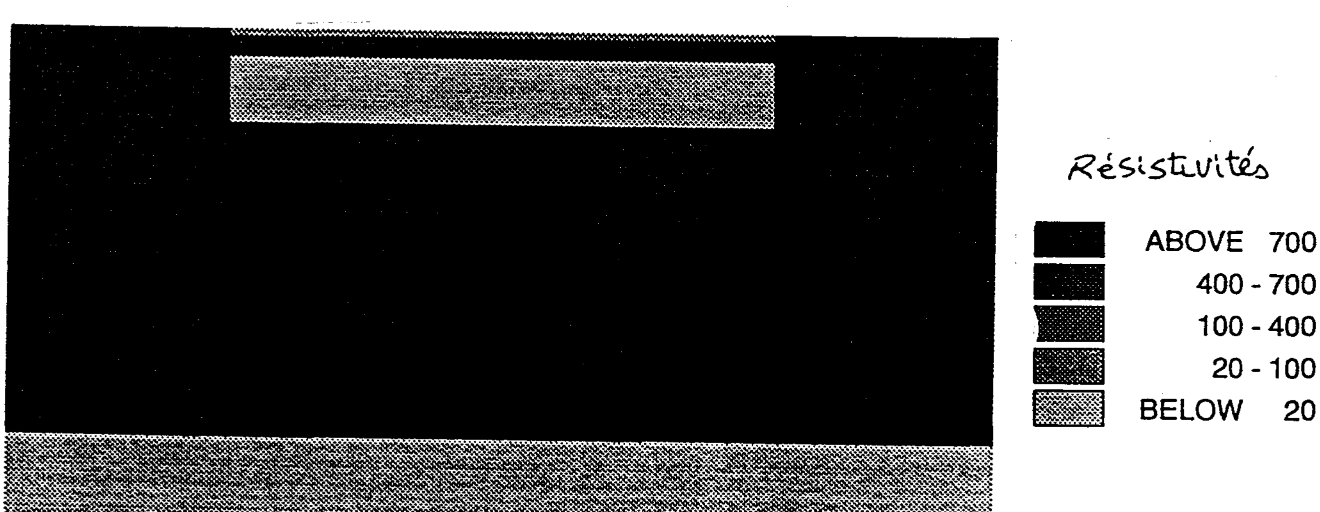
Dans ce cas, on se ramène à une discrétisation semblable à celle faite dans le cas des modèles 1,2 et 3 ; c'est à dire à une discrétisation de 60×9 et une profondeur minimale de 100 mètres. Dorénavant, la gamme des périodes est prise entre 0.0025 et 250 secondes.

On a effectué une inversion pour $\lambda = \beta = 8$. Le modèle inverse ainsi obtenu est présenté par la figure (**4.b**). Cette figure montre bien la reconstitution presque parfaite du socle qui est de (10 Ohm.m).
Par contre la couche qui sépare le socle et la couche de la zone centrale de (10 Ohm.m) est sous-estimée. Ceci à cause d'un flux du champs électrique qui traverse cette couche.
La couche superficielle de la zone centrale est à peine visible, ce qui est dû d'abord au fait que l'épaisseur de cette couche est négligeable devant la profondeur de la structure, et au fait que la valeur de la résistivité (50 Ohm.m) a tendance d'augmenter rapidement pour atteindre la valeur de

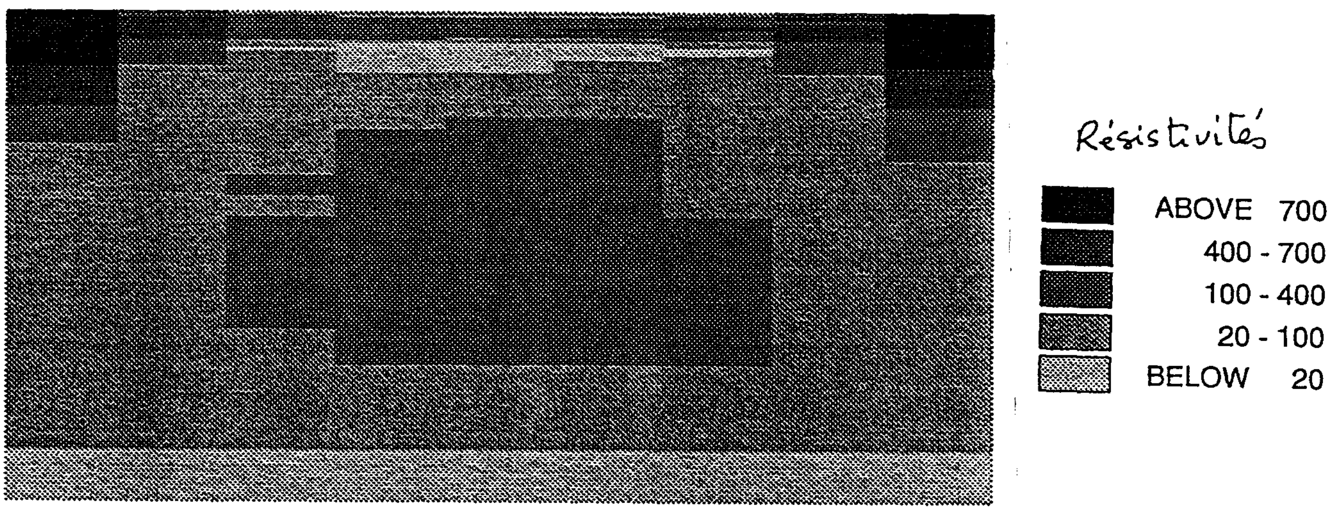
(1000 Ohm.m) de la couche en dessous. L'erreur, dans ce cas, est d'environ 8% (voir annexe).

Lorsqu'on a ramené la profondeur minimale à 200 métres tout en gardant $\lambda = \beta = 8$, on a constaté que les deux résultats sont presque les même (voir annexe).

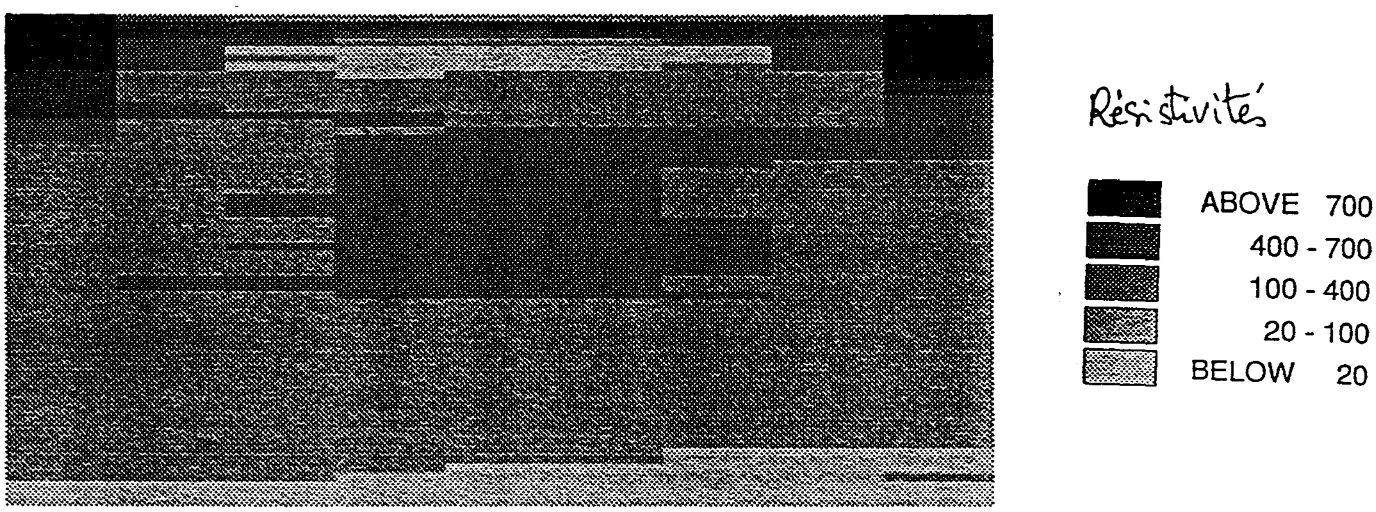
Dans le cas du modèle inverse présenté par la figure (**4.c**), on a voulu montrer l'importance de la discrétisation verticale en échelle logarithmique, en adoptant une échelle à pas constant qui est de " 1 Km". On remarque alors que plus la profondeur augmente plus on arrive mal à reconstruire l'image.



Modèle synthétique : figure (4.a)



Modèle inverse : figure (4.b)



Modèle inverse figure (4.c)

Conclusion

Dans ce chapitre, on a développé une méthode de résolution du problème inverse bayesien dans le cas bidimensionnel.

L'idée de ce chapitre était d'effectuer des inversions unidimensionnelles, puis de recoller les modèles inverses ainsi obtenus.

Pour éviter d'avoir des grands sauts des paramètres du modèle, on a injecté des informations à priori sous forme de loi à priori afin de lisser le modèle à postériori. Dans l'expression de cette loi à priori, on trouve deux facteurs de lissage. Leur rôle est de défavorser les grandes variations des valeurs de la résistivité à la frontière des zones de résistivités différentes, soit verticalement ou horizontalement.

Dans la partie simulation de ce chapitre, on a voulu montrer l'importance du choix de ces facteurs à travers une série d'essais faits sur différents modèles. En effet, on a constaté que lorsqu'on annule ces deux facteurs, les modèles inverses présentent des irrégularités frappantes et que l'on peut trouver des valeurs rendant les modèles très réguliers.

L'algorithme converge très vite. En effet, c'est à partir de la cinquième itération que la série des modèles inverses commence à se stabiliser.

Le modèle inverse obtenu avec les bons paramètres de lissage permet de retrouver une grande partie du modèle synthétique.

4.4 Annexe

erreur $= 6{,}6 \cdot 10^{-2}$

resistivite moyenne:

1	266.96	247.22	205.88	394.05	218.36	231.81	153.02	162.18	162.18
2	678.04	489.41	327.42	84.60	451.38	371.93	879.89	773.23	682.10
3	422.67	209.59	445.34	324.61	373.94	580.53	759.86	662.36	692.75
4	460.70	551.88	759.86	551.48	562.38	562.25	766.94	656.19	651.85
5	376.89	782.47	519.78	490.86	471.19	648.91	691.33	578.38	812.78
6	408.24	715.48	601.61	571.42	442.27	639.94	604.41	826.16	691.33
7	467.77	604.56	795.91	586.87	575.63	753.49	893.34	724.52	744.26
8	348.04	443.18	662.36	545.27	662.36	557.97	942.05	744.26	784.54
9	378.76	559.38	633.46	489.72	597.40	613.72	778.25	769.02	719.50
10	572.71	381.07	662.44	711.07	453.46	639.94	698.49	688.53	773.23
11	759.86	376.41	643.96	711.07	394.41	499.29	656.07	711.26	560.72
12	677.88	324.38	840.41	418.32	565.05	396.21	788.76	720.43	630.59
13	443.23	189.43	682.17	54.31	459.08	604.68	653.20	392.25	450.08
14	352.04	451.38	42.29	490.93	373.09	586.89	697.77	513.54	334.84
15	421.56	228.98	580.53	372.69	250.56	393.71	686.50	246.91	348.96
16	184.52	117.01	598.43	597.40	411.04	174.57	356.22	259.64	41.67
17	547.42	422.53	727.46	548.81	724.59	483.36	124.28	119.79	423.15
18	147.16	202.96	362.53	539.02	67.08	48.39	389.81	49.23	37.63
19	608.94	515.57	815.65	595.44	324.00	243.97	25.64	165.13	448.51
20	460.83	651.06	533.28	708.27	334.84	68.00	398.05	408.35	276.90
21	566.35	509.13	416.44	711.07	471.24	254.13	396.70	114.85	422.83
22	748.47	474.11	431.52	645.56	331.51	365.49	472.11	304.27	101.51
23	133.75	442.17	503.54	666.89	350.01	55.86	23.38	76.57	17.17
24	440.97	712.49	355.14	98.46	561.45	402.31	372.77	30.65	316.22
25	486.60	234.02	427.35	504.43	287.01	32.13	22.46	27.04	194.76
26	239.32	519.83	466.41	456.49	247.78	59.81	425.53	136.09	29.30
27	196.44	540.98	509.29	342.62	130.29	342.74	50.28	64.71	335.80
28	499.97	302.61	501.06	64.26	187.53	105.48	43.64	155.79	106.86
29	533.98	524.81	639.82	379.01	51.51	31.62	544.52	359.19	669.02
30	675.81	448.29	442.96	396.58	44.27	440.11	237.55	428.89	276.43
31	529.12	106.09	503.05	67.38	117.38	208.89	392.38	449.59	406.92
32	580.46	457.67	32.97	49.86	263.39	375.38	459.95	424.69	274.53
33	268.17	245.70	556.01	41.04	244.61	365.37	513.74	491.13	167.34
34	543.26	547.34	143.77	197.61	439.02	334.73	589.05	580.46	443.23
35	541.89	509.13	424.69	676.00	246.23	412.51	150.25	460.54	519.78
36	182.36	184.74	75.61	165.29	105.48	314.61	655.27	551.68	617.98
37	283.87	62.30	335.32	43.22	591.24	456.49	380.06	463.91	522.63
38	471.46	460.58	500.18	419.92	512.13	424.64	411.17	677.96	480.23
39	424.55	219.56	218.25	358.52	421.35	317.04	505.07	577.71	400.75
40	24.72	142.43	27.04	467.13	507.46	381.79	471.38	397.60	541.18
41	585.07	117.91	35.94	409.19	360.83	476.21	599.60	507.43	448.57
42	457.69	285.81	329.79	416.89	241.45	410.54	171.61	464.09	200.04
43	20.88	66.78	273.87	112.09	470.15	416.99	453.15	316.23	229.47
44	82.96	28.68	282.61	168.89	230.28	147.66	386.35	259.32	299.87
45	19.73	534.89	238.76	147.91	308.91	127.16	16.84	15.47	77.68
46	14.85	8.69	10.74	192.81	11.47	16.82	365.11	107.53	7.39
47	292.41	373.71	164.66	10.85	22.32	167.85	271.22	33.34	324.87
48	95.79	130.20	243.79	243.04	91.83	208.69	171.53	172.30	347.43
49	329.63	503.58	117.62	22.13	436.61	282.99	10.90	14.18	310.80
50	21.54	21.54	21.54	31.62	21.54	21.54	30.71	21.54	21.54

odèle inverse 1 : $\lambda = \beta = 0$

erreur=6.18 10^{-2}

resistivite moyenne:

1	247.22	233.77	218.36	209.20	209.20	231.81	218.36	162.18	162.18
2	587.02	343.64	248.94	548.69	458.59	382.25	609.67	724.52	653.12
3	486.78	197.09	375.89	491.04	435.98	538.11	546.90	662.36	701.84
4	382.31	542.51	639.87	662.36	606.68	594.03	420.31	642.69	678.75
5	369.72	764.07	415.27	592.45	468.20	648.91	331.60	564.93	783.81
6	375.05	721.72	480.35	609.43	409.08	720.31	357.16	797.19	711.07
7	481.21	691.33	662.36	600.27	524.05	728.73	753.49	724.52	737.97
8	380.30	422.41	560.72	542.39	613.72	597.59	806.42	744.26	797.99
9	337.88	438.90	538.11	544.55	574.79	517.68	740.12	740.04	719.50
10	481.70	294.96	503.05	679.30	489.52	610.97	567.88	677.88	764.00
11	682.17	275.17	571.30	636.33	388.12	441.42	593.91	711.26	636.33
12	606.56	299.14	797.99	321.13	488.78	374.51	691.33	691.45	620.01
13	480.35	600.27	381.02	65.10	449.92	567.28	575.58	383.06	396.58
14	170.20	633.58	73.92	330.34	440.01	586.89	631.25	393.59	360.32
15	375.23	292.90	277.42	268.09	266.07	340.86	667.46	272.38	236.32
16	232.07	121.26	464.83	518.37	425.40	115.93	330.85	203.41	36.29
17	345.54	96.01	457.55	431.69	516.91	309.63	54.10	63.34	209.13
18	318.18	393.68	213.76	436.52	79.10	52.34	219.31	177.80	156.83
19	493.73	480.16	600.27	493.80	230.34	117.91	53.38	60.11	272.46
20	506.38	613.65	540.37	688.53	211.75	150.51	65.10	165.97	160.77
21	598.12	411.95	299.41	624.15	381.59	128.49	134.99	43.85	184.59
22	535.96	463.62	363.19	605.22	331.59	135.57	145.18	99.64	69.14
23	86.87	559.19	535.31	551.76	356.11	100.61	42.86	93.34	44.44
24	354.25	644.03	428.77	258.93	522.79	136.80	83.91	44.98	43.01
25	411.95	321.46	419.61	307.00	265.23	34.11	30.22	21.54	21.54
26	263.18	500.09	445.42	394.93	154.06	69.78	87.32	52.46	92.04
27	267.00	486.60	401.87	277.71	99.08	230.50	66.66	50.07	197.01
28	516.29	366.61	591.11	141.80	100.57	190.14	45.07	134.22	203.07
29	505.12	447.09	471.12	165.39	98.61	39.61	208.16	258.16	409.14
30	613.72	401.66	331.62	229.31	44.27	146.05	211.22	392.66	144.77
31	549.77	214.62	212.41	143.86	35.66	135.10	285.13	442.34	100.60
32	591.04	309.94	45.70	49.65	194.19	297.11	434.72	513.66	163.07
33	396.44	206.96	227.87	29.87	409.22	326.79	465.07	433.06	278.70
34	486.77	330.55	129.77	168.15	352.29	221.79	345.99	466.78	461.96
35	498.27	359.11	259.31	474.11	268.90	291.33	127.25	464.83	528.95
36	203.80	134.10	93.76	206.94	77.24	365.96	452.34	519.83	626.30
37	200.29	184.08	222.05	191.30	280.77	376.09	304.57	427.35	522.51
38	279.37	336.43	390.17	237.16	318.79	356.16	366.61	688.53	424.36
39	159.16	115.93	201.72	165.33	348.33	250.78	402.92	553.02	402.91
40	54.73	39.69	38.84	341.53	478.56	304.19	412.17	405.12	548.77
41	254.13	49.16	31.99	249.92	360.68	438.11	493.93	462.84	409.65
42	177.31	172.68	165.48	187.87	269.19	390.91	231.01	340.75	205.51
43	14.68	125.42	200.14	70.49	357.80	278.81	367.65	264.67	197.57
44	47.25	37.81	191.38	52.35	149.68	190.03	216.99	124.82	161.15
45	34.70	99.25	103.11	36.06	65.82	34.70	17.17	32.00	58.06
46	25.11	12.33	17.34	60.02	11.90	36.19	112.10	21.21	7.39
47	46.07	62.55	17.44	102.84	37.58	32.34	193.50	17.17	114.50
48	35.80	58.84	89.11	48.65	47.31	35.68	74.07	56.38	247.58
49	97.10	135.94	81.92	11.28	99.22	29.25	10.90	19.83	203.61
50	21.54	21.54	21.54	31.62	21.54	31.62	30.71	21.54	21.54

Modèle inverse 1 $\lambda = 1$, $\beta = 0$

erreur = 6,07 10^{-2}

resistivite moyenne:

1	247.22	233.77	159.26	209.20	209.20	340.25	218.36	153.02	162.18
2	555.94	349.74	473.99	538.11	404.78	134.84	529.84	675.81	682.10
3	372.64	206.70	576.24	474.12	402.79	316.06	533.28	648.91	701.84
4	373.81	565.17	799.41	662.36	612.92	420.41	471.24	624.29	665.30
5	307.64	715.36	656.07	597.33	522.58	511.51	435.90	545.19	792.97
6	341.40	666.77	660.28	629.17	468.13	557.85	384.39	826.16	730.81
7	304.65	622.88	835.39	609.55	509.21	646.83	711.14	724.52	718.23
8	284.34	362.36	695.55	509.21	545.31	611.04	724.52	748.47	797.99
9	315.87	369.68	627.09	476.10	516.91	504.31	701.98	782.47	728.73
10	407.00	268.13	600.35	591.11	475.95	617.21	389.27	677.88	764.00
11	595.25	350.24	613.65	533.82	374.71	356.15	431.69	726.67	607.35
12	580.46	365.31	802.21	281.66	349.74	362.39	629.17	706.94	600.27
13	573.49	489.40	499.97	94.77	306.52	489.80	489.40	369.61	351.98
14	462.08	466.91	246.43	291.24	382.13	540.18	564.21	431.60	318.02
15	418.19	207.58	151.22	220.91	293.45	357.57	535.29	330.10	236.32
16	184.89	113.21	250.51	435.01	401.37	184.06	295.68	181.11	51.62
17	250.38	195.67	289.20	360.37	486.64	270.16	113.03	60.02	122.18
18	119.47	176.66	147.61	304.69	75.77	62.08	108.16	93.90	86.87
19	545.43	447.05	591.04	531.82	300.75	100.26	26.55	58.98	167.24
20	604.60	613.65	604.48	619.94	288.15	144.69	178.85	136.23	133.87
21	640.54	489.40	396.55	584.67	413.37	154.76	212.53	119.68	179.81
22	627.09	460.61	427.23	578.32	256.94	106.36	149.00	123.07	74.94
23	253.09	413.86	617.14	642.62	265.17	52.97	38.06	74.62	49.73
24	254.07	552.90	430.73	297.03	428.70	147.01	72.77	34.31	40.32
25	256.01	302.61	328.59	236.46	177.74	36.08	31.99	26.13	21.54
26	203.52	445.14	397.84	320.32	139.99	74.94	75.73	42.29	74.72
27	267.00	449.12	366.61	189.16	121.63	156.12	54.11	54.34	120.36
28	345.45	272.43	464.95	179.79	72.87	159.07	108.95	120.18	210.43
29	502.17	461.96	408.91	178.42	61.16	35.66	133.77	219.62	440.89
30	613.65	398.58	324.41	103.91	60.31	119.28	139.43	270.84	179.81
31	503.13	252.83	184.91	92.06	55.24	145.64	194.15	360.52	148.97
32	457.55	226.87	45.70	43.22	109.80	335.75	407.78	457.79	156.81
33	353.28	175.33	179.36	53.26	197.08	395.79	486.72	433.10	216.68
34	477.60	251.10	86.12	97.67	175.08	276.51	358.64	473.87	392.29
35	458.71	297.36	260.45	271.41	216.80	257.64	147.16	380.06	468.20
36	154.82	112.45	96.86	95.69	71.41	233.60	392.21	528.99	580.58
37	158.99	136.68	110.06	139.36	250.46	323.06	281.99	404.62	493.61
38	269.60	339.33	284.12	264.09	277.86	331.55	353.16	630.59	466.78
39	151.86	133.58	176.41	139.82	234.56	242.56	402.72	550.10	373.94
40	43.85	39.69	50.27	244.21	316.74	287.28	363.35	469.04	505.00
41	183.03	57.63	23.38	144.11	234.52	392.38	442.32	492.55	407.62
42	139.10	148.61	152.72	176.41	275.83	315.90	210.47	286.35	192.06
43	20.88	75.81	147.81	121.75	237.06	289.38	235.63	228.58	163.07
44	31.56	17.33	93.99	54.90	86.05	152.61	112.66	105.57	120.18
45	31.99	97.30	68.05	38.49	58.27	26.22	19.60	22.95	38.63
46	22.52	28.00	24.12	22.75	13.44	27.86	46.06	34.03	8.84
47	33.54	26.65	27.88	19.34	41.19	48.61	129.66	40.75	76.86
48	36.86	31.56	45.62	29.83	42.72	42.95	89.06	72.35	130.26
49	105.81	88.13	63.88	30.22	65.73	19.93	21.50	12.98	84.13
50	21.54	21.54	21.54	31.62	21.54	31.62	21.54	21.54	21.54

modèle inverse 1 $\lambda = \beta = 1$

erreur= 5,29. 10^{-2}

resistivite moyenne:

1	316.23	410.37	329.68	356.57	316.23	349.42	238.05	224.61	238.05
2	263.87	206.56	200.29	257.39	348.95	373.51	601.06	516.22	530.29
3	127.05	113.65	139.36	151.86	201.22	253.06	358.95	335.50	375.89
4	226.19	265.21	320.89	261.25	291.07	281.96	346.87	278.62	274.38
5	252.69	281.91	246.81	240.57	224.20	251.72	293.03	268.46	346.87
6	304.65	292.49	259.30	243.89	232.07	251.72	297.31	403.21	495.69
7	330.18	367.62	343.50	310.39	329.09	451.26	617.86	598.12	578.38
8	114.56	95.56	123.07	144.52	260.26	407.49	631.31	686.31	724.52
9	328.59	290.74	311.86	286.24	262.22	284.83	492.89	502.17	444.10
10	287.75	265.14	307.49	282.87	268.46	320.89	329.09	315.64	357.99
11	496.48	375.72	394.05	413.79	275.67	224.86	264.17	317.97	290.58
12	440.68	362.27	398.33	251.69	212.12	200.60	275.67	290.08	297.40
13	524.66	420.94	355.98	271.38	319.97	327.26	243.49	160.98	145.60
14	480.16	395.46	308.85	300.23	386.96	396.92	446.97	297.31	239.61
15	498.56	382.01	351.70	301.20	346.87	439.89	513.42	418.07	367.52
16	218.96	215.70	284.83	319.92	315.64	275.67	286.28	240.57	263.26
17	250.14	239.61	297.90	336.29	404.62	286.79	180.91	167.50	178.65
18	149.15	129.77	128.86	195.38	173.74	105.61	74.85	74.43	48.39
19	384.93	375.77	432.18	357.99	185.85	68.93	44.36	48.93	67.38
20	369.48	445.63	392.04	293.03	121.26	44.98	37.00	65.10	79.59
21	431.52	394.05	348.83	348.83	238.62	133.75	99.81	94.03	127.35
22	392.09	371.44	344.54	315.64	195.38	121.71	92.04	67.08	52.55
23	165.89	237.65	293.03	319.92	163.24	69.98	32.48	40.18	58.98
24	315.10	378.59	338.25	345.95	322.84	179.98	106.06	66.66	54.94
25	227.16	234.33	239.61	219.95	147.86	57.34	35.66	28.87	21.54
26	251.15	322.84	324.80	227.78	119.72	55.24	54.31	44.98	44.85
27	368.69	338.25	264.17	154.74	124.01	85.82	62.30	59.49	96.48
28	306.48	265.54	265.54	123.99	76.20	59.18	58.26	90.69	129.31
29	509.26	440.84	280.54	128.86	65.62	58.13	82.62	139.08	243.95
30	451.92	362.32	222.87	98.58	54.31	83.84	117.01	168.15	169.08
31	401.82	308.90	200.29	109.86	77.43	106.98	146.51	202.56	208.80
32	268.46	180.91	66.16	46.33	76.20	167.50	281.96	333.42	303.19
33	192.06	117.01	75.15	68.00	107.41	233.34	349.91	340.58	289.12
34	328.67	173.76	79.59	72.13	100.86	178.65	356.15	437.81	447.05
35	489.47	338.25	298.28	269.46	223.84	238.33	212.38	259.30	302.61
36	114.56	75.15	54.31	62.08	85.51	173.76	274.70	338.25	373.81
37	148.77	133.75	99.19	122.62	175.73	217.03	212.12	274.70	339.66
38	318.02	296.98	203.52	191.19	209.76	292.08	318.56	493.61	475.95
39	130.22	104.07	96.93	117.47	140.71	193.39	281.91	399.80	380.13
40	40.32	39.69	43.64	106.79	148.94	177.74	218.62	298.33	373.81
41	98.17	58.05	39.69	88.41	122.62	194.05	278.62	336.34	333.37
42	112.30	104.08	112.63	141.35	158.11	160.35	138.02	155.67	138.00
43	22.42	30.22	49.36	86.74	128.23	132.21	132.86	116.55	107.72
44	37.14	37.43	52.91	56.49	63.13	76.10	73.80	74.23	77.74
45	51.76	53.52	50.28	44.07	47.39	38.98	30.65	27.96	26.85
46	20.88	20.59	20.88	16.55	18.36	17.93	23.04	16.13	14.65
47	23.77	20.26	19.83	18.09	22.42	35.32	49.43	36.51	42.93
48	31.56	32.05	38.78	33.63	31.80	28.77	37.77	33.05	43.99
49	114.93	99.95	56.91	39.69	47.67	28.25	28.87	25.60	38.63
50	21.54	21.54	21.54	31.62	21.54	31.62	21.54	21.54	21.54

odèle inverse 1, $\lambda=1$, $\beta=10$

erreur = $4,9 \cdot 10^{-2}$

resistivite moyenne:

1	383.47	316.23	233.77	288.74	252.09	257.79	224.61	224.61	238.05
2	313.35	188.23	236.29	375.72	413.86	371.44	567.01	363.19	301.20
3	158.11	118.38	231.41	271.38	393.51	483.03	499.97	313.73	333.50
4	159.01	263.18	425.33	375.72	442.76	494.34	428.77	263.84	295.36
5	163.01	336.29	379.14	360.44	390.18	513.47	402.72	283.87	415.32
6	226.33	356.03	346.82	280.00	335.38	493.61	374.31	498.56	522.70
7	231.41	360.32	392.04	336.50	413.79	627.09	604.48	487.37	478.82
8	160.61	237.65	286.24	272.80	451.26	545.19	682.10	569.15	601.61
9	242.64	258.93	303.60	259.67	309.40	408.91	548.69	562.13	516.22
10	399.75	288.74	327.18	298.28	281.91	383.05	283.87	389.17	467.58
11	513.35	348.83	404.62	329.13	192.75	191.18	255.98	352.12	336.79
12	617.93	359.40	460.42	249.77	215.04	257.39	408.19	363.36	313.73
13	600.27	375.72	340.63	236.29	272.80	373.90	319.92	230.08	216.66
14	571.30	360.32	234.81	242.56	330.50	386.30	401.75	300.23	211.72
15	469.58	214.67	217.96	251.69	319.92	337.83	437.93	326.21	224.86
16	293.50	158.99	215.04	306.48	371.44	251.10	309.01	224.20	203.93
17	205.51	208.80	233.37	334.39	382.93	234.33	138.00	129.50	124.61
18	123.25	181.57	165.26	239.64	178.65	95.56	89.77	100.75	56.29
19	313.76	296.77	447.05	396.12	194.11	62.08	36.94	44.98	80.02
20	392.14	472.53	509.21	431.52	166.16	68.00	48.30	74.85	79.59
21	469.58	436.47	373.81	398.33	220.91	94.02	94.94	62.08	72.45
22	516.29	418.19	333.96	389.76	192.06	113.21	91.44	52.25	49.02
23	327.13	388.38	382.88	440.68	198.30	104.07	50.91	55.15	63.01
24	243.89	378.59	348.83	291.07	256.01	85.82	62.08	60.23	44.36
25	253.06	289.12	295.36	245.45	175.73	54.93	39.61	48.30	41.67
26	188.12	333.37	324.80	209.46	127.51	43.01	40.32	29.73	35.66
27	200.70	297.31	275.67	128.86	118.66	75.77	50.28	44.36	55.15
28	309.40	274.70	326.21	125.96	96.31	75.15	76.82	80.64	84.28
29	538.23	380.75	300.23	145.60	86.12	74.85	117.01	139.10	201.65
30	613.65	385.00	272.80	123.51	51.41	104.07	156.09	196.32	207.50
31	506.34	287.86	158.99	74.85	49.23	84.28	187.81	286.24	248.77
32	362.27	196.35	69.05	52.34	88.24	192.06	327.18	448.53	287.78
33	293.45	139.99	75.15	48.30	142.02	300.78	435.98	415.20	284.83
34	361.85	166.16	71.82	82.62	147.86	263.87	389.37	446.97	372.92
35	378.85	198.30	167.24	172.41	170.14	249.82	214.40	357.99	372.85
36	174.84	123.70	113.94	124.15	101.49	204.97	268.46	384.88	393.51
37	172.41	148.50	90.69	118.37	159.01	203.24	204.55	310.76	384.88
38	194.13	183.98	125.27	146.30	161.91	194.05	222.87	461.84	375.72
39	97.84	76.70	90.07	113.49	168.60	178.65	269.42	455.67	357.57
40	55.15	52.97	48.30	144.71	211.79	200.32	258.90	389.34	427.39
41	73.39	42.93	36.09	121.09	168.64	206.79	256.03	315.30	300.28
42	73.18	68.51	61.26	106.34	137.83	192.10	163.96	194.05	157.00
43	43.36	58.05	64.99	82.00	123.99	146.29	148.27	134.22	119.47
44	29.30	35.31	63.85	64.26	66.24	90.15	79.42	74.76	82.30
45	29.11	40.46	50.91	33.34	38.78	38.49	27.47	34.88	36.23
46	21.60	22.13	21.67	19.67	25.40	27.86	32.71	21.50	12.13
47	34.41	26.55	27.37	21.21	20.26	19.21	40.05	19.67	32.43
48	39.21	26.42	40.75	30.65	27.04	25.93	44.70	29.73	52.25
49	66.55	51.33	37.14	24.29	45.70	33.82	28.39	23.34	53.39
50	22.46	21.54	21.54	31.62	21.54	31.62	21.54	21.54	21.54

odèle inverse 1, $\lambda = \beta = 3$

erreur= 4.8838487801271D-02

resistivite moyenne:

1	316.23	329.68	316.23	356.57	242.93	215.44	215.44	215.44	215.44
2	356.03	289.71	236.32	355.19	373.51	357.99	469.58	382.93	342.53
3	275.67	224.24	246.81	239.64	372.85	496.48	446.97	315.64	312.77
4	224.20	262.22	267.13	239.61	404.62	485.11	446.43	334.34	310.76
5	192.10	277.62	195.38	174.39	330.05	478.16	384.88	306.48	391.18
6	171.50	211.72	161.25	201.22	297.31	443.55	383.47	465.37	557.85
7	157.66	215.04	221.28	210.79	315.64	575.44	564.93	489.40	492.27
8	147.16	123.25	190.47	246.81	400.34	507.06	584.74	476.74	524.05
9	196.35	157.00	199.64	269.88	351.70	404.62	571.30	518.30	410.37
10	304.52	302.19	339.66	324.26	342.58	359.40	384.88	389.17	430.11
11	451.26	347.41	402.62	326.21	251.69	275.70	279.58	334.34	328.59
12	496.48	371.44	387.76	277.62	277.62	265.54	372.85	327.18	284.86
13	524.66	351.70	320.89	258.90	239.61	227.16	269.42	236.40	203.21
14	463.84	384.88	297.40	251.69	246.81	240.57	266.10	210.79	177.62
15	391.18	269.42	273.34	270.42	281.91	227.16	328.59	246.81	188.47
16	284.83	184.89	264.17	268.46	302.19	231.44	277.08	211.72	197.68
17	205.88	224.20	268.46	265.14	322.84	213.71	133.75	126.60	139.99
18	239.24	243.49	236.32	221.32	163.24	114.11	99.81	114.11	88.41
19	284.83	280.40	342.58	300.23	135.10	72.87	51.62	66.16	75.77
20	239.61	346.03	363.24	355.98	166.16	71.95	46.33	57.21	64.68
21	306.48	332.01	297.31	306.48	196.32	72.25	57.84	39.69	66.95
22	324.80	344.54	284.83	313.68	195.38	101.17	76.09	64.18	67.26
23	219.95	339.66	369.43	436.40	204.55	102.71	61.79	70.90	59.81
24	225.17	312.32	286.79	322.84	248.77	104.99	57.42	54.31	41.67
25	210.79	265.54	268.46	271.38	171.75	62.51	49.86	44.36	43.64
26	256.38	351.70	319.92	201.63	118.37	43.73	50.57	39.69	31.99
27	331.55	310.81	277.62	140.26	101.17	61.79	36.71	32.05	53.60
28	362.27	262.22	292.44	137.37	71.95	69.98	58.47	56.49	80.95
29	429.31	280.54	264.17	115.47	77.74	73.92	103.16	144.52	184.89
30	469.58	333.42	222.25	101.17	55.24	89.77	155.01	202.56	228.49
31	369.60	295.41	175.73	69.98	66.33	95.56	192.06	278.99	224.20
32	335.38	199.64	89.77	53.80	58.13	142.25	262.22	343.95	256.01
33	234.73	136.01	75.77	65.10	117.46	246.81	369.48	384.88	266.50
34	311.93	189.14	74.53	89.16	140.26	260.92	421.06	413.79	342.58
35	273.76	176.66	105.02	116.55	148.50	232.09	280.58	431.52	437.81
36	141.35	106.96	102.71	104.07	109.69	195.41	300.23	471.00	555.89
37	144.52	112.76	90.07	121.26	186.90	198.30	245.85	436.40	516.29
38	182.22	134.02	101.18	121.54	153.40	200.29	239.61	464.71	436.40
39	123.25	92.97	87.79	97.84	135.57	161.91	255.98	373.77	306.52
40	69.14	62.08	55.15	124.61	168.19	179.33	236.32	346.87	370.89
41	59.39	41.67	44.98	109.69	160.09	210.39	211.75	262.22	250.14
42	57.42	55.16	58.77	99.19	144.98	184.95	153.40	172.41	131.76
43	40.46	47.67	63.64	86.87	119.72	125.06	113.21	93.11	84.28
44	28.82	35.17	49.86	54.73	69.13	88.12	73.18	60.12	56.91
45	27.76	36.51	42.29	33.34	37.43	32.42	26.55	30.65	31.14
46	20.88	22.75	24.39	22.75	20.26	21.80	26.13	26.85	17.17
47	34.45	25.64	25.60	21.60	20.59	26.55	34.88	22.13	28.39
48	37.43	30.22	32.91	26.42	26.13	23.67	38.35	27.47	37.86
49	44.98	36.51	30.22	27.76	37.24	27.96	32.48	19.96	36.23
50	21.54	21.54	21.54	31.62	24.29	31.62	21.54	21.54	21.54

odèle inverse 1, $\lambda=\beta=5$

erreur= 4.9210467998785D-02

resistivite moyenne:

1	316.23	316.23	316.23	316.23	297.90	316.23	215.44	215.44	215.44
2	313.68	276.26	233.37	315.64	324.85	278.99	422.95	362.27	297.31
3	246.81	231.41	222.87	224.86	270.42	311.35	407.49	319.92	306.52
4	205.88	289.12	269.42	230.08	268.46	288.15	398.33	309.40	295.36
5	198.34	282.50	207.47	192.06	230.45	289.71	351.70	293.03	368.56
6	227.16	239.61	177.99	239.61	224.20	245.85	311.35	449.84	509.13
7	186.22	221.28	242.93	274.70	264.17	332.01	420.94	454.13	505.71
8	152.75	164.17	233.37	275.67	315.64	347.41	460.42	463.29	510.48
9	193.39	171.75	212.12	266.50	282.50	329.09	473.87	489.32	410.37
10	230.45	205.88	253.06	284.83	283.87	303.60	357.99	342.53	374.31
11	286.79	233.77	293.03	312.77	221.28	216.63	270.42	291.07	288.15
12	347.41	268.46	320.51	253.06	221.28	199.24	301.60	287.75	257.97
13	459.04	306.48	293.99	265.14	252.09	243.89	253.06	242.64	218.64
14	466.78	351.70	264.21	215.04	291.07	297.31	324.21	239.61	200.60
15	376.31	300.23	288.74	265.14	313.68	304.52	368.56	259.30	219.95
16	315.64	243.89	282.50	293.03	347.41	281.91	295.41	217.96	188.49
17	227.12	239.61	283.87	286.79	329.09	213.71	144.24	135.10	129.94
18	203.21	178.65	233.40	221.28	202.56	117.01	95.56	106.96	88.41
19	248.80	265.54	309.40	283.87	148.52	72.87	50.91	54.31	74.85
20	253.06	312.77	303.15	306.48	148.77	72.87	47.04	54.31	56.91
21	288.15	291.66	256.38	288.15	178.65	69.98	52.97	56.29	64.05
22	315.64	321.93	284.83	304.52	184.23	94.02	68.00	62.21	68.93
23	277.62	371.44	369.43	380.60	201.63	95.56	56.91	61.79	62.08
24	272.75	378.59	315.64	300.23	221.28	89.33	53.26	42.38	35.66
25	230.45	315.05	324.80	283.87	171.75	78.97	46.96	45.07	44.98
26	234.73	293.03	306.48	199.64	94.21	43.73	48.60	35.66	32.97
27	295.44	278.99	286.79	146.51	98.46	56.29	41.04	41.67	50.91
28	319.92	256.38	274.70	137.37	89.77	67.08	56.29	72.87	94.02
29	330.50	260.85	236.69	118.37	69.55	62.21	87.79	127.51	178.65
30	394.05	277.62	193.39	94.02	59.18	92.66	136.01	155.01	179.58
31	318.02	237.65	140.26	79.72	62.08	89.77	157.00	215.04	184.23
32	339.66	202.56	76.82	47.67	63.13	150.76	230.45	304.52	242.56
33	253.06	167.50	79.72	54.31	98.27	211.72	342.58	338.25	268.46
34	269.51	193.39	103.16	86.87	115.47	216.63	344.54	374.31	335.38
35	244.86	148.77	91.12	104.07	142.25	204.55	245.85	351.70	384.88
36	157.00	105.61	94.21	99.81	118.37	186.22	270.42	404.62	469.04
37	140.26	109.86	78.67	121.26	184.89	179.98	239.61	380.60	411.78
38	163.90	117.01	85.82	129.32	157.00	193.39	239.61	401.20	370.02
39	117.01	86.87	81.57	105.61	139.36	187.15	268.46	373.77	303.60
40	64.05	65.10	59.18	106.96	141.35	159.01	227.16	304.52	337.71
41	51.62	43.01	43.01	90.69	123.07	168.15	189.14	215.04	236.69
42	45.41	44.07	49.23	80.64	109.24	133.11	133.77	158.99	140.26
43	44.36	50.99	56.79	83.97	98.46	102.71	104.07	98.91	96.92
44	32.91	38.06	51.20	50.28	52.97	71.83	68.93	61.16	58.26
45	28.97	36.09	43.64	36.09	36.09	36.51	29.73	34.74	31.14
46	23.34	22.75	23.04	20.92	22.85	22.13	27.47	25.93	17.17
47	27.76	27.04	26.22	22.85	25.21	22.75	32.91	19.05	25.21
48	29.59	26.13	31.56	26.42	27.76	25.64	37.00	27.47	36.51
49	42.72	36.51	28.87	26.13	31.56	27.04	28.87	20.59	36.23
50	22.46	21.54	21.54	31.62	21.54	31.62	21.54	21.54	21.54

Modèle inverse 1, $\lambda=\beta=7$

erreur= 5.5045335354077D-02

resistivite moyenne:

1	316.23	288.74	316.23	316.23	242.93	279.58	215.44	215.44	215.44
2	310.76	267.09	236.69	302.19	340.25	315.64	370.02	315.64	288.74
3	243.89	221.28	219.33	242.53	347.41	370.02	396.92	315.64	283.87
4	230.45	261.25	248.77	270.42	338.25	356.57	449.84	342.53	313.68
5	213.09	279.58	217.96	222.25	324.80	398.33	409.50	319.92	351.70
6	213.71	255.01	190.47	227.53	320.51	389.76	383.47	463.29	473.87
7	187.15	239.61	230.45	248.77	320.51	384.88	457.00	443.55	472.53
8	178.65	199.64	230.45	228.49	315.64	327.13	407.49	437.26	451.26
9	170.42	184.23	218.36	256.38	273.34	284.83	389.17	394.05	370.02
10	217.96	242.53	243.89	278.99	277.62	310.76	357.99	302.19	324.80
11	257.93	245.85	279.58	283.87	248.77	266.50	279.58	288.74	288.15
12	320.51	252.09	307.07	265.14	256.38	231.41	310.76	292.04	264.21
13	395.46	279.58	286.79	242.53	230.45	253.06	281.91	266.55	221.54
14	384.88	288.74	255.05	205.88	243.89	264.17	297.31	255.01	219.33
15	347.41	236.69	255.01	255.01	261.25	227.53	297.31	245.85	221.28
16	274.70	221.28	264.17	283.87	293.03	208.80	216.01	182.90	179.30
17	212.12	215.04	261.25	264.17	278.99	180.64	125.52	120.36	106.96
18	211.72	199.64	224.20	230.45	205.88	118.37	95.56	104.07	76.82
19	259.30	255.01	286.79	293.03	176.66	97.10	63.13	66.16	69.98
20	270.42	302.19	315.64	288.74	153.02	78.67	49.65	56.29	64.18
21	320.51	320.51	302.19	261.25	161.25	68.00	47.04	52.34	65.10
22	297.90	320.51	306.48	293.03	161.25	72.87	53.89	50.36	53.89
23	233.37	315.64	351.70	347.41	165.51	83.54	56.29	54.23	48.30
24	208.80	324.80	293.03	293.03	196.72	94.21	55.24	48.39	44.36
25	224.20	261.25	270.42	261.25	146.78	82.62	54.31	46.33	39.69
26	240.97	288.74	279.58	193.39	97.10	42.38	43.01	42.38	39.69
27	319.92	311.35	261.25	140.26	91.31	50.36	38.98	43.73	62.21
28	355.98	274.70	250.14	133.11	85.51	70.90	62.21	63.13	89.77
29	360.86	270.42	218.36	129.77	89.77	86.87	92.66	112.76	140.26
30	403.21	277.62	180.91	92.66	69.05	96.92	142.53	155.01	163.24
31	307.89	237.65	146.51	73.92	66.33	95.56	167.50	221.28	177.99
32	256.38	171.75	98.46	57.12	54.31	129.77	212.12	264.17	204.55
33	215.04	148.77	82.62	63.13	89.77	172.41	268.46	302.19	230.45
34	223.84	161.25	77.13	77.13	102.71	175.73	295.95	338.25	302.19
35	211.75	142.25	88.72	94.94	125.24	198.30	227.53	324.80	338.25
36	142.25	105.61	91.31	96.92	118.37	186.22	252.09	338.25	376.64
37	142.53	117.01	91.31	121.26	157.00	167.50	196.72	320.51	357.99
38	154.74	125.52	92.66	133.13	157.00	193.39	230.45	378.59	333.96
39	112.76	88.41	77.74	105.61	148.50	187.15	255.01	327.13	274.70
40	80.33	69.98	61.16	111.22	142.25	161.25	208.80	277.62	291.07
41	63.13	50.99	47.67	90.69	119.72	158.99	189.14	215.04	205.88
42	46.33	44.36	46.33	80.64	104.99	124.61	127.51	146.51	121.26
43	31.99	33.40	44.36	71.03	88.41	99.81	99.81	89.77	86.87
44	28.87	29.30	45.19	49.65	56.29	68.94	64.05	55.86	56.29
45	26.13	36.09	42.09	32.91	37.00	38.35	32.48	32.48	31.14
46	25.21	28.39	27.04	24.29	23.47	22.13	27.47	24.68	19.96
47	32.91	27.96	24.88	22.42	24.29	23.96	31.56	23.38	27.04
48	33.40	30.22	29.30	24.59	24.59	26.55	34.31	28.39	33.82
49	35.66	31.14	27.96	26.13	28.05	25.50	27.96	21.21	29.30
50	21.54	21.54	21.54	31.62	24.29	31.62	21.54	21.54	21.54

odèle inverse 1 , $\lambda = \beta = 10$

erreur= 5.6772909138696D-02

resistivite moyenne:

1	316.23	316.23	316.23	316.23	316.23	329.68	215.44	202.96	196.72
2	304.52	267.09	233.37	293.03	277.62	263.58	394.05	313.68	293.99
3	237.65	198.30	209.76	215.04	224.20	257.93	371.44	264.17	275.67
4	179.98	215.04	224.20	217.96	230.45	263.58	380.01	284.83	322.35
5	192.10	286.79	224.20	217.96	233.77	295.95	380.60	333.37	450.54
6	248.80	277.62	190.47	227.53	230.45	293.03	416.66	519.16	575.51
7	211.72	239.61	227.53	220.88	239.61	358.90	507.06	522.51	591.83
8	155.67	150.76	193.39	227.12	275.67	347.41	520.51	569.15	639.75
9	166.16	163.24	171.75	192.06	239.61	298.28	502.84	598.12	591.83
10	202.56	199.64	219.33	246.81	259.30	317.05	394.05	463.29	588.89
11	295.95	245.85	306.48	321.93	288.15	289.15	347.41	392.04	436.40
12	420.94	302.19	360.86	293.03	311.35	301.60	433.53	356.03	322.84
13	457.62	335.38	315.64	307.44	315.64	298.28	295.36	256.06	248.43
14	447.05	367.15	295.95	293.03	304.52	277.62	289.12	222.87	183.59
15	403.21	324.21	342.53	319.92	273.34	208.80	255.01	177.99	152.75
16	288.15	228.49	279.58	297.31	261.25	179.58	166.16	111.22	102.84
17	208.80	212.12	274.70	268.46	224.20	109.67	69.98	54.52	45.61
18	203.21	184.23	254.02	226.19	152.75	47.67	28.68	31.08	19.05
19	256.01	247.22	291.07	274.70	96.93	17.57	11.70	16.46	20.45
20	255.01	317.05	300.23	279.58	85.51	13.40	10.14	12.60	16.37
21	319.92	320.51	315.64	283.87	106.96	18.16	10.99	5.83	6.70
22	319.92	321.93	310.81	291.07	98.46	28.19	12.69	7.10	5.04
23	253.06	348.83	315.64	320.51	87.79	27.76	9.49	8.84	6.62
24	196.32	324.80	277.62	221.28	81.57	22.62	10.12	10.85	9.69
25	169.49	281.91	245.85	177.99	47.67	10.12	5.63	9.85	13.94
26	219.33	319.92	264.17	128.86	28.19	7.39	8.26	11.90	17.17
27	318.02	291.07	230.45	90.69	25.37	14.25	12.08	11.90	19.67
28	324.21	262.22	211.72	69.55	19.34	13.40	19.34	19.41	29.30
29	301.65	215.04	134.02	45.41	14.65	12.13	32.91	44.36	55.86
30	342.53	195.38	76.20	21.80	8.26	17.67	47.67	50.36	53.47
31	308.85	172.41	50.99	12.55	13.02	23.34	56.91	73.92	56.91
32	266.50	123.25	27.96	14.45	17.17	43.01	84.89	98.27	70.90
33	217.96	105.61	30.65	19.54	26.65	59.18	118.81	115.47	83.97
34	223.84	109.86	25.79	14.09	23.43	57.84	133.11	121.26	117.46
35	213.74	71.95	19.99	17.80	33.97	71.53	122.62	146.51	152.75
36	106.96	37.00	10.88	13.37	28.87	73.50	155.01	175.73	206.54
37	72.87	26.71	8.26	12.75	46.33	92.04	144.52	187.15	215.04
38	41.49	18.36	10.99	25.04	65.10	121.71	186.22	248.77	221.28
39	4.84	6.81	13.18	33.40	83.84	125.52	233.37	254.64	213.09
40	7.19	6.81	14.68	51.34	101.47	132.84	236.32	292.04	311.77
41	19.73	12.52	20.59	59.81	129.31	176.66	262.22	286.79	311.35
42	36.37	36.37	50.00	87.79	176.70	221.32	281.96	284.83	261.25
43	57.84	69.98	97.84	142.25	239.61	281.91	336.29	277.62	284.83
44	85.82	106.96	152.75	168.15	243.49	360.32	404.62	348.83	351.70
45	144.69	178.65	219.95	184.89	221.28	271.38	302.19	337.66	413.79
46	184.91	198.30	215.70	177.31	199.96	235.36	372.85	420.08	462.50
47	274.37	282.87	316.06	275.38	216.63	333.42	489.32	469.58	600.20
48	395.58	386.37	460.54	386.96	242.56	355.98	549.41	600.20	637.60
49	675.81	675.81	608.63	529.67	378.59	387.76	509.93	440.68	607.35
50	1000.00	1000.00	1000.00	1000.00	681.29	562.86	464.16	316.23	464.16

…odèle inverse 3 , $\lambda=\beta=5$

erreur= 0.25637995206976

resistivite moyenne:

1	1.00	1000.00	316.23	68.13	46.42	46.42	46.42	68.13	410.37	1000.00
2	1.09	913.08	463.29	130.85	96.93	92.06	92.04	168.15	427.35	855.13
3	1.18	913.08	535.96	203.25	100.75	123.99	139.36	171.47	344.00	806.42
4	1.28	884.11	611.57	250.84	119.75	125.35	138.74	164.64	329.13	826.16
5	1.40	826.16	656.07	162.34	88.75	94.53	116.86	112.57	302.19	922.31
6	1.52	893.34	559.98	110.31	65.19	59.39	66.03	79.72	380.60	913.08
7	1.65	826.16	434.39	97.84	46.96	44.36	61.79	103.45	354.62	942.05
8	1.79	864.37	319.92	62.08	30.22	34.69	45.91	98.29	329.09	864.37
9	1.95	855.13	304.52	57.84	31.56	25.21	37.43	87.17	315.64	942.05
10	2.12	913.08	302.19	78.05	46.33	37.43	43.01	74.23	257.93	971.03
11	2.31	864.37	277.62	88.72	61.79	34.74	33.00	59.18	279.95	942.05
12	2.51	942.05	239.61	98.46	50.99	39.69	41.67	82.92	259.30	942.05
13	2.73	855.13	253.06	92.97	52.97	33.40	47.88	69.98	215.04	864.37
14	2.96	864.37	236.69	77.76	66.24	54.52	83.35	117.46	277.62	826.16
15	3.22	855.13	207.47	99.81	89.77	83.54	99.19	187.81	348.83	884.11
16	3.50	826.16	178.65	104.07	106.96	120.36	130.85	188.12	315.64	844.63
17	3.81	815.65	193.39	131.76	125.96	150.48	136.01	129.77	242.93	826.16
18	4.14	826.16	217.96	177.31	166.59	145.60	123.25	138.00	236.69	797.19
19	4.50	835.39	297.31	277.62	224.20	172.46	135.10	136.50	171.73	777.45
20	4.89	884.11	423.02	339.66	288.74	207.47	201.65	206.54	248.77	815.65
21	5.32	1000.00	443.55	357.99	348.83	297.31	302.19	315.64	324.80	835.39
22	5.78	884.11	418.73	408.91	420.94	387.76	476.74	485.11	423.81	835.39
23	6.29	739.24	449.92	446.97	607.35	513.35	613.65	496.48	509.93	797.19
24	6.83	660.28	425.23	407.54	554.43	660.28	641.81	545.19	558.64	737.97
25	7.43	611.57	358.90	416.66	582.60	602.33	611.57	496.48	471.00	777.45
26	8.08	578.38	383.47	463.29	531.75	457.00	407.49	430.11	394.05	602.33
27	8.78	708.99	440.68	469.58	463.29	505.71	416.66	314.27	261.25	529.67
28	9.55	689.25	418.07	558.64	531.75	496.48	457.00	338.25	302.19	578.38
29	10.38	620.80	428.10	578.38	604.41	633.38	549.41	483.03	483.03	797.19
30	11.28	728.73	588.96	611.57	657.34	598.12	637.60	562.86	516.22	708.99
31	12.26	613.65	660.28	757.71	628.37	636.33	604.41	617.86	689.25	622.07
32	13.33	627.09	607.35	588.89	582.60	598.12	690.53	728.73	737.97	646.83
33	14.50	512.01	476.74	558.64	598.12	695.55	757.71	777.45	737.97	562.86
34	15.76	593.98	598.12	531.75	545.19	529.67	642.62	757.71	699.76	646.83
35	17.13	593.91	503.64	483.03	483.03	476.74	542.25	549.41	651.05	708.99
36	18.63	394.05	370.02	403.21	329.09	283.87	345.45	516.22	651.05	686.31
37	20.25	370.02	324.80	255.01	215.04	262.22	253.68	360.86	535.96	617.86
38	22.01	457.55	329.09	186.88	142.72	151.42	174.39	261.25	430.11	430.11
39	23.93	338.25	199.64	104.07	58.76	62.42	80.95	173.74	254.64	269.88
40	26.02	214.67	128.86	55.86	42.29	34.25	36.03	92.04	168.15	245.48
41	28.28	146.51	65.10	31.56	26.42	21.80	27.96	59.81	99.81	155.01
42	30.75	89.77	51.62	33.54	28.39	26.85	28.05	36.71	59.81	85.51
43	33.43	49.02	39.40	35.37	34.74	35.17	34.25	31.56	33.54	48.60
44	36.34	24.29	27.47	35.31	38.78	41.67	42.30	29.79	22.13	32.05
45	39.51	25.93	33.05	40.75	40.32	45.70	35.17	21.17	20.16	25.50
46	42.95	26.13	27.47	30.65	33.82	39.75	39.83	32.62	28.39	22.42
47	46.70	29.11	28.68	31.37	37.14	38.78	54.52	52.25	36.51	30.65
48	50.77	25.93	26.85	28.39	30.65	31.56	52.55	49.02	39.83	31.37
49	55.19	26.55	24.59	19.67	20.30	23.96	31.14	27.96	19.54	20.13
50	60.00	10.00	10.00	10.00	14.68	10.43	10.85	11.28	7.97	10.00

Modèle inverse 4.1 $\lambda = \beta = 7$

erreur= 0.25584172522005

resistivite moyenne:

1	1.00	1000.00	316.23	68.13	46.42	46.42	46.42	68.13	340.88	1000.00
2	1.09	893.76	390.19	102.48	77.62	74.00	75.13	150.43	414.85	893.76
3	1.18	840.65	414.85	127.04	75.13	82.93	102.48	193.76	426.38	840.65
4	1.28	787.53	548.07	154.89	75.13	82.93	109.15	148.76	398.05	893.76
5	1.40	787.53	500.35	160.21	62.97	66.58	84.10	116.41	340.88	840.65
6	1.52	857.58	458.90	104.97	43.95	41.48	60.89	84.06	340.88	946.88
7	1.65	946.88	475.69	107.80	53.65	40.17	60.89	89.38	307.29	893.76
8	1.79	910.69	365.54	75.13	47.57	42.64	45.10	91.86	299.43	893.76
9	1.95	840.65	315.15	60.12	34.09	32.41	36.55	71.52	265.84	1000.00
10	2.12	804.46	204.00	57.27	33.19	29.94	37.71	53.65	226.15	946.88
11	2.31	946.88	237.59	75.13	50.03	32.41	36.55	60.89	254.39	787.53
12	2.51	893.76	232.24	102.48	54.81	41.48	36.55	97.17	237.59	804.46
13	2.73	840.65	237.59	86.55	62.58	53.65	54.03	78.75	184.76	698.22
14	2.96	751.34	290.49	98.87	89.38	71.52	86.55	115.59	256.90	734.41
15	3.22	893.76	295.84	134.83	104.97	97.17	107.80	190.11	340.88	946.88
16	3.50	787.53	232.24	150.43	125.87	119.24	123.39	197.91	282.63	893.76
17	3.81	840.65	235.15	131.19	131.19	134.83	158.22	131.19	249.04	734.41
18	4.14	787.53	226.15	142.63	145.12	118.08	142.63	150.43	265.84	734.41
19	4.50	804.46	249.04	209.35	181.11	110.28	150.43	142.63	220.80	804.46
20	4.89	840.65	273.69	303.70	215.44	150.43	173.32	186.47	249.04	751.34
21	5.32	946.88	299.43	299.43	299.43	254.39	237.59	209.35	232.24	751.34
22	5.78	893.76	360.27	365.54	414.85	324.09	324.09	351.33	324.09	662.03
23	6.29	787.53	451.04	414.85	523.42	426.38	398.05	398.05	414.85	734.41
24	6.83	751.34	511.88	475.69	487.23	511.88	475.69	500.35	536.54	698.22
25	7.43	662.03	365.54	414.85	439.50	414.85	439.50	511.88	572.73	787.53
26	8.08	608.91	451.04	439.50	426.38	414.85	365.54	414.85	426.38	645.10
27	8.78	572.73	390.19	451.04	426.38	414.85	439.50	414.85	365.54	698.22
28	9.55	645.10	365.54	511.88	523.42	511.88	511.88	414.85	451.04	698.22
29	10.38	715.15	500.35	625.84	565.00	548.07	511.88	536.54	500.35	840.65
30	11.28	787.53	637.38	625.84	584.26	511.88	608.91	536.54	536.54	715.15
31	12.26	662.03	625.84	572.73	548.07	451.04	548.07	601.19	536.54	645.10
32	13.33	500.35	475.69	451.04	500.35	487.23	608.91	698.22	678.96	673.57
33	14.50	487.23	439.50	451.04	475.69	487.23	475.69	637.38	608.91	572.73
34	15.76	601.19	511.88	426.38	414.85	487.23	451.04	625.84	572.73	625.84
35	17.13	601.19	511.88	451.04	451.04	451.04	409.58	458.90	511.88	536.54
36	18.63	365.54	324.09	340.88	265.84	232.24	299.43	390.19	414.85	523.42
37	20.25	365.54	331.94	249.04	192.56	192.56	209.35	282.63	340.88	414.85
38	22.01	409.58	324.09	209.35	161.87	142.63	146.28	249.04	390.19	390.19
39	23.93	282.63	169.67	102.48	73.44	69.05	76.83	178.67	295.84	290.49
40	26.02	138.98	100.00	51.19	43.95	41.48	52.34	102.48	161.87	243.01
41	28.28	123.39	66.20	34.09	28.26	28.26	30.73	60.12	102.48	150.43
42	30.75	89.38	57.27	37.71	28.26	30.73	32.41	34.09	51.19	75.13
43	33.43	50.03	42.64	34.09	31.62	32.41	34.87	32.41	34.09	41.48
44	36.34	26.58	29.05	38.49	30.73	34.87	38.49	31.62	24.90	31.62
45	39.51	30.73	34.87	37.34	36.55	34.09	34.87	26.58	22.08	25.44
46	42.95	23.22	24.90	28.26	29.94	29.05	30.73	27.37	24.90	22.08
47	46.70	25.69	23.22	23.22	28.26	34.09	36.55	32.41	26.58	29.05
48	50.77	24.90	23.76	24.90	28.26	28.26	30.73	34.09	30.73	27.12
49	55.19	20.40	22.08	20.40	21.54	22.08	21.54	21.54	18.48	16.97
50	60.00	10.00	10.00	10.00	14.68	10.78	14.68	13.90	8.41	10.00

Lodèle inverse 4.1 $\lambda=\beta=10$

erreur= 0.10730335588009

resistivite moyenne:

1	1.00	1000.00	316.23	68.13	46.42	46.42	46.42	68.13	464.16	1000.00
2	1.09	893.34	425.23	126.60	95.59	94.03	94.02	130.85	217.99	855.13
3	1.18	942.05	483.10	205.51	94.32	109.27	122.62	132.21	202.96	835.39
4	1.28	913.08	613.65	228.23	103.45	116.86	132.24	141.79	265.14	806.42
5	1.40	884.11	715.29	158.08	82.96	88.30	116.87	120.80	302.19	971.03
6	1.52	893.34	586.02	112.30	69.44	62.30	89.15	114.11	463.29	942.05
7	1.65	971.03	564.93	111.22	51.62	46.04	82.00	151.84	493.61	942.05
8	1.79	893.34	374.31	73.80	34.74	44.28	57.12	116.84	430.11	864.37
9	1.95	864.37	304.52	56.49	37.14	30.59	33.34	73.18	413.79	971.03
10	2.12	893.34	302.19	60.11	45.61	37.63	36.09	57.51	309.40	1000.00
11	2.31	864.37	302.19	84.89	57.84	32.28	28.48	46.96	260.26	884.11
12	2.51	971.03	315.64	106.96	44.70	32.48	37.63	84.89	300.23	942.05
13	2.73	855.13	293.03	97.22	55.15	37.86	49.86	95.37	277.08	913.08
14	2.96	864.37	286.79	98.29	69.55	55.86	89.15	137.09	291.07	855.13
15	3.22	884.11	224.24	97.10	82.62	84.89	108.33	210.42	302.19	913.08
16	3.50	826.16	182.90	99.81	104.07	128.86	137.12	199.27	261.25	884.11
17	3.81	786.68	167.50	127.51	123.07	168.15	150.31	127.51	215.04	884.11
18	4.14	835.39	187.81	136.47	148.81	147.59	127.51	148.50	245.85	797.19
19	4.50	864.37	250.14	259.33	246.81	184.95	146.51	136.50	127.51	777.45
20	4.89	884.11	395.53	380.18	306.48	204.55	207.89	210.79	250.14	815.65
21	5.32	971.03	378.59	366.56	346.87	304.52	309.40	322.84	306.48	786.68
22	5.78	913.08	322.89	354.12	382.93	374.31	492.27	480.23	457.00	835.39
23	6.29	797.19	409.03	413.79	567.88	487.32	604.48	551.48	598.12	826.16
24	6.83	737.97	502.77	431.52	554.43	695.55	686.31	564.93	564.93	806.42
25	7.43	660.28	394.05	430.11	582.60	641.81	680.02	549.41	502.77	797.19
26	8.08	660.28	483.03	535.96	531.75	516.22	440.68	525.45	424.36	602.33
27	8.78	675.81	404.62	463.29	483.10	564.93	443.55	324.80	255.01	549.41
28	9.55	669.52	431.52	589.69	524.00	578.38	558.64	384.88	333.37	617.86
29	10.38	620.80	454.13	607.35	604.41	704.78	666.57	545.19	601.06	864.37
30	11.28	748.47	588.96	611.57	648.18	660.28	744.26	680.02	558.64	708.99
31	12.26	593.91	660.28	689.25	588.89	636.33	604.41	617.86	669.52	611.57
32	13.33	666.57	627.09	578.38	528.80	584.67	719.50	728.73	718.23	578.38
33	14.50	554.43	617.86	613.65	584.67	724.52	777.45	815.65	708.99	549.41
34	15.76	609.50	792.97	564.93	593.91	558.64	662.36	815.65	680.02	627.09
35	17.13	633.38	660.28	603.14	642.62	574.17	613.65	637.60	637.60	708.99
36	18.63	380.60	367.15	430.11	338.25	346.87	411.78	549.41	646.83	744.26
37	20.25	416.66	329.09	262.22	239.61	331.46	267.13	365.14	449.84	591.83
38	22.01	506.26	355.98	210.79	189.84	199.27	186.88	264.17	398.33	422.95
39	23.93	319.92	199.64	139.36	94.94	102.11	114.58	189.14	242.58	251.55
40	26.02	197.01	135.10	86.87	92.66	75.78	64.68	118.81	155.42	203.21
41	28.28	133.11	74.23	52.25	64.68	66.53	71.82	102.54	113.94	146.51
42	30.75	106.06	81.38	72.46	78.67	74.44	78.68	66.03	77.74	85.51
43	33.43	86.25	86.25	99.84	101.17	95.87	87.79	69.86	56.07	70.90
44	36.34	74.85	82.00	114.60	94.94	98.27	120.21	86.87	58.26	71.95
45	39.51	74.10	110.32	121.09	94.32	96.92	96.30	67.87	62.72	67.08
46	42.95	66.03	69.98	70.48	68.93	85.88	92.04	90.52	87.17	73.81
47	46.70	57.42	57.84	58.05	70.48	73.80	103.46	105.42	70.90	73.81
48	50.77	40.03	42.30	50.28	55.15	50.28	75.15	69.55	54.23	50.91
49	55.19	31.99	30.45	24.59	28.39	31.56	34.74	32.48	20.45	23.43
50	60.00	9.71	9.71	8.98	15.50	10.70	10.56	12.98	6.31	7.10

odèle inverse 4.2 $\lambda = \beta = 5$

erreur= 0.25575743961846

resistivite moyenne:

1	1.00	1000.00	316.23	68.13	46.42	46.42	46.42	68.13	410.37	1000.00
2	1.09	942.05	496.48	126.60	98.48	101.22	96.92	168.15	371.64	855.13
3	1.18	884.11	509.06	163.92	84.47	112.59	138.00	192.72	350.24	864.37
4	1.28	884.11	640.54	206.58	89.15	108.33	138.49	176.41	380.60	855.13
5	1.40	864.37	724.52	136.46	59.40	73.08	106.38	118.81	320.51	951.29
6	1.52	893.34	579.72	103.16	55.36	52.47	68.00	82.62	413.79	913.08
7	1.65	913.08	584.67	114.11	51.62	51.62	78.05	118.81	368.06	942.05
8	1.79	893.34	338.25	73.80	38.06	39.12	54.23	116.84	355.98	864.37
9	1.95	835.39	281.91	63.13	38.49	27.47	29.30	77.13	362.27	971.03
10	2.12	893.34	295.95	75.15	44.27	30.22	29.73	43.22	239.61	971.03
11	2.31	864.37	277.62	97.22	67.58	37.43	39.83	51.62	260.26	884.11
12	2.51	942.05	259.30	111.85	58.76	46.96	46.96	110.31	277.62	922.31
13	2.73	884.11	291.07	79.60	57.21	40.03	56.80	96.92	234.73	893.34
14	2.96	893.34	283.87	83.35	69.13	61.67	92.04	137.09	277.62	826.16
15	3.22	884.11	219.95	99.81	87.79	82.93	92.04	187.81	293.03	884.11
16	3.50	826.16	176.66	108.32	104.07	113.21	107.43	175.36	274.70	864.37
17	3.81	806.42	157.00	128.86	115.92	154.10	142.70	117.01	215.04	884.11
18	4.14	835.39	203.21	149.89	137.38	138.45	129.50	148.50	255.01	797.19
19	4.50	864.37	303.01	255.05	213.71	154.20	130.85	142.74	171.73	786.68
20	4.89	884.11	413.86	349.79	279.58	194.05	226.22	242.56	288.15	815.65
21	5.32	971.03	401.20	375.72	369.48	324.21	338.25	362.32	338.25	835.39
22	5.78	913.08	436.47	393.51	445.02	403.21	554.43	547.27	457.00	864.37
23	6.29	806.42	506.34	512.01	656.07	516.29	604.48	526.80	558.64	826.16
24	6.83	718.23	507.18	480.23	574.17	675.81	686.31	555.77	564.93	766.94
25	7.43	631.31	375.72	430.11	611.57	622.07	699.76	535.96	484.45	777.45
26	8.08	558.64	436.40	533.09	551.48	483.03	430.11	465.37	395.46	582.60
27	8.78	675.81	433.60	542.32	531.75	551.48	430.11	305.11	236.69	509.93
28	9.55	649.78	408.91	636.33	562.06	565.00	492.27	338.25	280.54	578.38
29	10.38	611.57	454.13	631.31	604.41	704.78	686.31	538.90	587.62	855.13
30	11.28	806.42	598.12	611.57	648.18	660.28	773.23	699.76	587.62	728.73
31	12.26	593.91	660.28	708.99	608.63	603.14	633.38	637.60	708.99	670.79
32	13.33	680.02	646.83	578.38	528.80	571.22	699.76	728.73	737.97	695.55
33	14.50	545.19	509.93	564.93	564.93	656.07	724.52	753.49	708.99	543.12
34	15.76	642.69	680.02	512.01	545.19	529.67	653.20	773.23	660.28	572.09
35	17.13	633.38	558.64	493.68	535.96	476.74	528.87	529.74	584.67	689.25
36	18.63	351.70	367.15	407.49	329.09	282.87	356.03	496.48	555.70	724.52
37	20.25	360.86	315.64	259.30	239.61	311.81	265.17	332.01	449.84	564.93
38	22.01	486.52	342.53	189.14	150.31	157.66	177.74	245.85	431.52	403.21
39	23.93	339.66	195.38	118.81	78.48	90.99	101.17	184.89	281.54	269.88
40	26.02	210.42	146.51	82.00	70.90	71.83	58.68	126.41	181.57	265.17
41	28.28	149.85	87.79	59.18	59.81	63.63	69.85	102.54	125.96	187.15
42	30.75	118.09	92.97	81.60	74.72	81.58	81.58	84.89	94.94	96.92
43	33.43	83.35	92.04	101.18	111.66	122.00	94.94	86.25	58.76	74.23
44	36.34	67.71	82.00	114.60	118.81	113.02	111.71	84.89	50.99	68.63
45	39.51	69.86	101.18	128.24	104.07	108.51	78.97	54.52	50.08	63.76
46	42.95	53.60	61.16	70.48	70.90	91.89	80.02	77.43	67.87	57.00
47	46.70	55.16	54.52	62.29	86.55	75.77	104.51	95.37	61.16	62.71
48	50.77	36.09	31.57	47.59	64.06	48.30	75.15	72.87	61.36	48.93
49	55.19	30.65	24.88	23.96	29.30	26.71	36.09	36.51	28.68	28.00
50	60.00	10.00	10.00	9.42	10.00	10.00	10.00	10.00	6.81	10.00

odèle inverse 4.2 $\lambda=\beta=5$; de 0.001 à 1000 secondes.

erreur= 0.10762004366405

resistivite moyenne:

1	1.00	1000.00	316.23	68.13	46.42	46.42	46.42	68.13	464.16	1000.00
2	1.09	913.08	420.94	118.38	84.92	89.16	91.12	147.16	229.11	855.13
3	1.18	913.08	440.68	166.85	75.36	88.73	122.62	151.84	209.20	835.39
4	1.28	913.08	646.83	237.37	98.27	98.76	131.30	139.36	281.91	826.16
5	1.40	884.11	764.00	186.88	80.97	85.82	122.65	110.60	270.42	942.05
6	1.52	893.34	608.63	133.75	68.50	59.39	83.97	114.11	449.84	913.08
7	1.65	942.05	564.93	122.62	57.42	56.91	93.59	160.98	493.61	942.05
8	1.79	893.34	351.70	82.00	46.97	54.10	61.16	123.99	423.81	864.37
9	1.95	884.11	304.52	51.83	43.22	34.25	34.68	82.93	394.05	942.05
10	2.12	864.37	295.95	64.06	57.42	41.67	40.75	52.13	267.09	971.03
11	2.31	864.37	277.62	88.72	66.03	40.32	39.20	48.02	254.02	884.11
12	2.51	971.03	298.28	107.89	56.49	44.36	46.33	98.27	280.54	922.31
13	2.73	826.16	300.23	92.97	53.17	30.94	46.54	94.02	237.65	864.37
14	2.96	884.11	329.09	86.89	59.39	46.96	77.43	141.35	283.87	826.16
15	3.22	855.13	236.32	96.92	72.87	60.74	77.13	201.26	335.38	942.05
16	3.50	797.19	168.15	115.47	99.64	89.77	107.86	175.36	297.31	884.11
17	3.81	835.39	198.30	138.00	103.46	117.46	105.42	105.61	212.12	884.11
18	4.14	855.13	244.55	158.11	119.74	103.45	83.97	133.75	255.01	797.19
19	4.50	864.37	345.95	256.01	185.82	130.25	97.84	133.60	202.56	806.42
20	4.89	884.11	424.43	309.82	239.61	169.51	168.58	184.89	274.70	835.39
21	5.32	971.03	420.94	300.23	277.62	233.37	230.45	269.42	297.31	806.42
22	5.78	913.08	373.51	272.34	289.74	274.70	371.48	397.54	401.20	864.37
23	6.29	855.13	395.53	313.68	420.08	351.75	431.57	411.83	509.93	826.16
24	6.83	689.25	419.04	281.99	342.63	413.79	444.97	392.09	542.32	815.65
25	7.43	660.28	351.75	250.14	297.31	315.64	380.60	351.70	471.00	777.45
26	8.08	620.80	351.70	248.77	236.32	190.47	189.14	259.30	366.56	690.53
27	8.78	708.99	319.97	209.46	174.39	168.15	131.76	131.12	208.80	670.79
28	9.55	708.99	300.23	220.91	153.22	140.01	117.46	115.47	199.64	637.60
29	10.38	640.54	273.34	160.35	108.01	121.11	119.74	141.35	335.38	884.11
30	11.28	728.73	297.40	108.77	68.64	66.53	84.28	142.25	288.15	689.25
31	12.26	531.75	233.40	66.03	36.09	34.40	40.75	96.30	279.95	582.60
32	13.33	492.27	146.51	30.65	16.19	12.95	31.37	85.82	222.87	493.61
33	14.50	319.92	91.31	28.68	14.65	15.08	25.34	63.55	154.76	360.86
34	15.76	328.54	94.02	26.32	13.57	12.04	13.37	38.29	85.51	326.21
35	17.13	249.77	57.84	30.32	27.63	19.01	15.34	14.09	43.01	239.61
36	18.63	120.36	31.99	28.55	26.13	16.95	19.50	23.04	46.33	192.46
37	20.25	108.51	43.64	29.30	36.09	41.18	34.26	21.54	30.65	121.26
38	22.01	102.54	44.36	35.31	45.13	51.20	48.93	31.56	30.65	67.08
39	23.93	39.40	20.26	28.68	41.38	57.75	52.97	40.12	25.37	32.91
40	26.02	15.93	19.67	26.85	60.02	70.49	57.85	43.35	24.68	28.39
41	28.28	23.04	23.77	27.47	57.12	76.27	73.80	49.36	27.86	20.68
42	30.75	33.97	40.27	50.00	74.43	105.00	96.93	54.52	37.77	25.21
43	33.43	36.66	59.39	72.88	109.67	136.01	117.91	73.18	36.23	31.99
44	36.34	47.67	70.28	92.49	114.56	124.61	123.10	85.20	40.75	39.40
45	39.51	62.29	101.18	114.87	96.92	108.51	90.38	62.71	47.39	40.12
46	42.95	59.10	70.90	72.03	71.82	93.45	81.58	79.71	55.86	37.15
47	46.70	54.73	59.18	56.70	80.96	73.80	85.40	83.84	46.96	42.73
48	50.77	43.36	43.45	53.19	64.06	48.93	61.36	61.79	43.79	34.25
49	55.19	33.05	30.74	28.68	35.60	31.37	30.02	32.91	19.12	23.01
50	60.00	12.33	12.75	19.12	23.83	14.63	12.69	18.29	10.32	11.41

dèle inverse 4.3 $\lambda = \beta = 5$ de 0,0025 à 250 secondes

erreur= 8.3299543128789D-02

resistivite moyenne:

1	0.10	1000.00	611.57	68.13	68.13	46.42	50.36	68.13	523.38	1000.00
2	0.11	795.91	320.51	78.05	36.66	66.95	91.14	145.60	519.16	826.16
3	0.12	728.73	322.84	68.00	20.59	63.13	83.54	167.50	384.88	728.73
4	0.14	835.39	360.27	93.27	42.44	74.85	96.49	173.74	383.47	708.99
5	0.15	951.29	427.23	117.01	61.16	86.87	90.58	158.99	355.98	913.08
6	0.17	768.21	383.47	129.50	70.48	89.15	99.52	161.00	490.19	884.11
7	0.19	826.16	333.96	89.77	58.26	74.23	94.77	159.92	457.00	913.08
8	0.21	855.13	288.15	76.08	44.36	58.26	64.68	114.56	454.13	884.11
9	0.24	826.16	344.54	81.38	60.23	60.03	55.86	102.09	509.93	1000.00
10	0.27	971.03	380.60	110.76	73.80	65.31	52.55	64.18	398.33	913.08
11	0.30	942.05	437.26	102.71	72.87	52.34	43.01	37.00	293.03	893.34
12	0.33	942.05	387.76	98.46	57.84	33.82	27.04	37.00	245.85	855.13
13	0.37	1000.00	387.76	125.06	69.05	42.29	24.10	31.62	259.30	855.13
14	0.41	1000.00	365.14	58.26	56.49	41.67	50.99	69.98	311.35	884.11
15	0.46	942.05	277.62	37.00	30.65	39.69	52.97	113.21	374.31	1000.00
16	0.51	942.05	283.87	57.12	31.56	47.67	61.79	133.75	443.55	971.03
17	0.57	893.34	259.30	82.62	40.12	61.16	68.00	102.71	476.74	1000.00
18	0.63	942.05	297.31	102.54	58.47	69.98	90.07	108.32	434.39	1000.00
19	0.70	884.11	351.70	152.75	81.07	76.69	82.00	106.96	403.21	971.03
20	0.78	942.05	397.47	157.00	89.77	77.74	79.72	99.19	335.38	884.11
21	0.87	971.03	409.50	198.30	136.21	95.56	91.31	121.26	347.41	971.03
22	0.97	1000.00	478.82	221.28	151.42	136.01	177.72	186.22	416.66	1000.00
23	1.09	971.03	473.87	261.25	195.38	184.89	224.20	218.36	403.21	884.11
24	1.21	884.11	549.41	329.09	238.28	237.65	240.57	270.42	394.05	884.11
25	1.35	855.13	543.12	387.76	230.45	242.53	291.07	283.87	389.76	942.05
26	1.50	913.08	442.76	302.19	283.87	268.46	268.46	302.19	374.31	942.05
27	1.68	826.16	499.90	307.44	246.81	244.52	348.83	384.88	437.26	942.05
28	1.87	942.05	588.89	306.48	239.61	236.69	329.09	480.16	607.35	913.08
29	2.08	942.05	572.09	354.62	329.09	297.31	351.70	493.61	640.54	913.08
30	2.32	942.05	509.06	338.25	355.98	333.96	451.92	422.95	555.70	1000.00
31	2.59	884.11	598.12	320.51	295.95	315.69	345.45	360.86	531.75	942.05
32	2.88	913.08	529.67	282.53	245.85	246.81	281.91	318.56	575.51	1000.00
33	3.21	1000.00	575.44	259.30	169.49	155.01	187.15	229.11	509.06	942.05
34	3.58	913.08	502.77	198.30	116.84	77.74	94.94	113.21	422.95	913.08
35	3.99	884.11	384.88	83.54	47.04	32.00	46.68	61.37	374.31	942.05
36	4.45	855.13	245.85	25.21	14.99	11.26	16.33	31.14	236.69	748.47
37	4.96	797.19	184.23	10.85	4.64	4.64	4.84	17.17	193.39	797.19
38	5.52	855.13	205.88	21.21	10.85	6.12	6.81	10.00	178.65	719.50
39	6.16	826.16	168.43	26.13	16.52	12.13	14.68	28.39	179.98	748.47
40	6.86	757.71	121.26	22.75	14.85	15.08	20.30	29.30	182.90	728.73
41	7.65	622.07	88.72	24.59	16.10	19.96	23.38	35.66	122.62	680.02
42	8.52	602.33	68.00	26.55	26.13	32.05	27.47	41.04	84.28	602.33
43	9.50	470.45	57.54	32.05	40.75	41.67	32.48	37.86	60.02	545.19
44	10.59	449.84	43.73	40.46	48.30	62.71	54.10	43.64	41.67	476.74
45	11.80	427.23	53.89	48.30	77.74	82.30	68.93	52.97	43.49	403.21
46	13.15	335.38	54.52	59.18	99.19	94.02	84.89	59.18	64.18	374.31
47	14.66	230.45	59.81	62.21	89.77	104.07	106.96	72.25	64.68	261.25
48	16.33	161.25	63.13	65.10	113.21	127.51	125.52	77.74	54.94	169.49
49	18.21	95.56	53.26	78.67	127.51	151.42	150.76	84.89	56.91	104.07
50	20.29	54.31	52.34	88.41	129.77	146.51	136.01	76.82	54.31	66.03
51	22.61	43.01	63.13	106.96	148.50	159.26	126.60	68.31	48.93	28.87
52	25.20	38.35	73.31	95.56	158.99	205.88	178.65	85.51	68.00	45.70
53	28.09	43.64	87.79	114.11	184.23	212.12	171.75	109.86	69.98	48.39
54	31.31	58.76	94.94	135.10	239.61	245.85	202.56	121.26	73.80	58.76
55	34.89	89.77	89.77	123.25	210.79	236.69	193.39	157.00	83.97	68.00
56	38.89	90.69	87.79	127.95	174.39	181.97	167.50	136.01	83.54	71.95
57	43.34	74.43	82.62	89.15	132.21	143.61	123.25	106.96	85.51	78.67
58	48.30	50.99	59.18	67.58	87.79	75.77	81.57	63.13	45.41	42.10
59	53.83	33.34	38.06	35.17	44.98	38.78	38.49	35.80	22.62	24.59
60	60.00	15.70	15.57	17.17	19.05	14.03	14.45	17.80	11.70	11.70

odèle inverse 4.4 $\lambda=\beta=8$ 0,0025 à 250 secondes

erreur= 7.8518166535398D-02

resistivite moyenne:

1	0.20	1000.00	464.16	68.13	46.42	46.42	46.42	68.13	464.16	1000.00
2	0.22	815.65	347.41	129.50	103.16	102.71	138.00	213.71	558.64	913.08
3	0.24	835.39	389.17	147.88	127.99	123.97	147.86	245.85	436.40	806.42
4	0.27	884.11	430.11	172.83	124.01	118.81	143.63	236.72	410.37	777.45
5	0.29	971.03	430.11	152.75	100.55	90.69	96.81	170.59	369.43	942.05
6	0.32	768.21	347.41	111.66	65.61	62.08	64.90	116.87	416.66	884.11
7	0.36	826.16	242.93	52.34	34.31	41.67	40.03	71.33	324.80	884.11
8	0.39	855.13	212.12	38.98	22.71	27.47	21.17	26.13	239.61	864.37
9	0.43	826.16	237.65	35.31	26.13	32.91	25.21	32.91	297.90	971.03
10	0.48	971.03	310.76	69.05	43.73	42.29	40.32	54.73	315.64	884.11
11	0.53	942.05	387.76	99.19	56.29	56.29	66.03	79.72	320.51	913.08
12	0.58	942.05	420.94	140.71	68.00	52.55	64.05	95.56	288.74	1000.00
13	0.64	1000.00	454.13	230.45	106.96	80.33	76.20	98.27	311.35	884.11
14	0.70	1000.00	427.23	187.15	109.67	82.62	118.37	161.25	320.51	884.11
15	0.77	971.03	362.27	138.00	84.89	109.67	149.85	246.81	434.39	1000.00
16	0.85	942.05	319.92	157.00	96.31	130.22	182.90	309.40	483.03	942.05
17	0.94	864.37	315.64	193.39	129.50	152.75	189.14	256.38	495.61	971.03
18	1.03	942.05	394.05	204.55	148.50	146.51	206.54	255.98	513.35	942.05
19	1.14	855.13	430.11	259.30	199.27	174.39	208.80	262.22	436.40	971..03
20	1.26	884.11	485.11	242.93	179.98	173.74	208.80	231.10	371.44	826.16
21	1.38	971.03	496.48	300.23	275.75	216.01	224.20	277.62	410.37	913.08
22	1.52	913.08	538.90	315.64	266.50	253.06	315.64	309.40	496.48	1000.00
23	1.68	942.05	608.63	360.86	322.84	284.83	342.53	311.35	463.29	884.11
24	1.85	893.34	666.57	389.76	345.45	362.32	362.27	365.14	449.84	884.11
25	2.04	884.11	631.31	396.92	293.03	346.82	394.05	348.83	476.74	942.05
26	2.24	884.11	527.53	311.35	333.37	302.19	317.05	343.12	502.77	942.05
27	2.47	855.13	590.96	284.83	243.89	267.13	362.27	425.28	569.15	942.05
28	2.72	942.05	588.89	283.87	215.04	205.88	261.25	422.41	656.07	971.03
29	3.00	971.03	525.45	241.60	177.99	183.83	199.64	313.68	620.80	913.08
30	3.30	971.03	416.66	161.25	133.11	144.52	187.15	221.28	496.48	1000.00
31	3.64	893.34	420.94	105.61	66.03	72.45	83.54	125.52	407.49	913.08
32	4.00	855.13	288.74	50.99	30.65	23.87	35.80	60.23	319.97	913.08
33	4.41	942.05	293.03	37.43	14.56	8.38	11.12	23.63	227.12	797.19
34	4.86	855.13	233.37	28.39	8.84	5.23	4.84	12.55	187.15	826.16
35	5.35	815.65	191.13	12.55	7.48	10.43	9.85	13.60	199.64	719.50
36	5.90	855.13	161.25	12.55	8.26	9.85	12.55	27.47	193.39	708.99
37	6.49	719.50	142.25	25.50	14.45	10.00	15.50	38.49	177.99	826.16
38	7.15	719.50	139.99	27.47	17.80	14.23	18.09	43.64	184.89	651.05
39	7.88	651.05	83.97	29.79	22.42	17.80	23.38	40.75	122.62	670.79
40	8.68	489.32	51.20	22.13	25.40	23.38	26.42	24.29	68.00	490.19
41	9.56	410.37	45.13	36.29	33.34	33.97	25.64	21.80	26.13	416.66
42	10.53	476.74	59.81	45.13	49.02	54.31	48.60	41.67	57.42	443.55
43	11.60	409.50	82.54	65.20	78.67	83.97	70.90	72.45	98.60	473.87
44	12.78	384.88	86.25	80.02	88.41	133.11	108.32	84.89	71.54	394.05
45	14.07	304.52	80.02	77.74	122.62	153.85	125.52	95.56	73.18	319.92
46	15.50	196.32	52.55	71.95	133.11	142.25	128.86	88.41	70.28	245.85
47	17.07	114.11	44.98	62.21	105.61	125.52	128.86	79.10	54.31	131.76
48	18.81	73.80	45.91	56.29	114.85	157.00	140.26	71.95	43.01	70.90
49	20.72	47.04	58.76	75.77	127.51	175.33	150.76	80.64	39.69	37.00
50	22.82	39.69	63.13	101.17	131.76	170.42	166.16	94.02	51.62	41.67
51	25.14	43.36	75.77	115.47	146.51	165.51	147.86	89.15	71.82	39.69
52	27.69	48.30	86.87	105.61	152.75	205.88	161.91	101.17	87.79	55.86
53	30.50	60.11	105.61	126.87	171.75	199.64	161.25	109.86	82.62	63.13
54	33.59	70.28	104.80	139.36	198.30	224.20	174.67	119.00	83.55	67.58
55	37.00	104.07	98.29	127.51	198.30	208.80	182.90	133.75	79.72	63.13
56	40.76	94.94	89.15	127.95	154.74	154.10	146.51	111.22	74.72	65.10
57	44.89	73.50	85.51	86.25	108.32	119.45	104.07	79.72	69.98	68.93
58	49.45	47.67	57.21	61.36	69.55	66.53	66.66	52.97	36.94	34.97
59	54.47	30.74	34.74	30.94	34.88	31.80	32.62	30.65	18.62	21.21
60	60.00	14.65	14.94	16.75	16.32	11.84	11.84	15.50	10.70	11.28

dèle inverse 1.1. λ = R = 8 0.0025 à 250 secondes

Bibliographie

[1] G.E.BACKUS , Bayesian inference in geomagnetism, Geophysical Journal, 92, p. 125-142, 1988.

[2] V.BARTHES ET G.VASSEUR , An inverse problem for electromagnetic prospection, 1980.

[3] A.BENVENISTE , M.METIVIER ET P.PRIOURET , Algorithmes Adaptatifs et Approximations Stochastiques, Masson, 1987.

[4] P.BOUGEROL ET N.PICARD , Strict stationarity of generalized autoregressive processes, Annals of Probability, vol.20, N.4, p. 1714-1730, 1992.

[5] A.BRANDT, The stochastic equation $Y_{n+1} = A_n Y_n + B_n$ with stationary coefficients.Adv . Appl. Prob. 18, p. 211-220, 1986.

[6] J.L.COUNIL, J.L.MOUEL ET M.MENVIELLE , Associate and conjugate direction concepts in magnetotellurics, Annales Geophysicae, 4,B, p. 115-130, 1986.

[7] M.DUFLO, Méthodes récursives aléatoires, Masson, p.157-185, 1991.

[8] M.DUFLO, Modélisations itératives et algorithmes stochastiques, cours de DESS, Université de Marne La Vallée, p. 25-49, 1993.

[9] D.E.EGGERS , An eigenstate formulation of the magnetotelluric impedance tensor, Geophysics, 47, p. 1204-1214, 1982.

[10] S.GEMAN ET D.GEMAN , Stocastic relaxation, Gibbs distribution, and the Bayesian restoration of images, IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence, 6, p. 721-741, 1984.

[11] D.GIBERT ET J.VIRIEUX , Electromagnetic imaging and simulated annealing, J. Geophys. Res., 96, p. 8057-8067, 1991.

[12] H.GRANDIS , These de doctorat soutenue en 1994.

[13] S.KIRKPATRICK , Optimisation by simulated annealing : quantitative studies, J.Stat.Phys, 34, p. 975-986, 1984.

[14] G.A.LA TORRACA, T.R.MADDEN ET J.KORRINGA , An analysis of the magnetotelluric impedance tensor for three-dimensional conductivity structures, Geophysics, 51, p. 1819-1829, 1986.

[15] R.L.MACKIE, B.R.BENNETT ET T.R.MADDEN , Long period magnetotelluric measurements near the central California coast : a land locked view of the conductivity structure under the pacific ocean, Geophys.J.Royal Astr.Soc., 95, p. 181-194, 1988.

[16] M.MARESCHAL ET G.VASSEUR , Bimodal induction in non-uniform thin sheets : do the present algorithms work for regional studies,J.Geophys., 55, p. 203-213, 1984.

[17] P.MORSE ET H.FESHBACK , Methods of theoritical physics, Mc Graw-Hill New York, 1953.

[18] S.J.PRESS , Bayesian statistics : principle, models ans applications, John Wiley and sons, 1989.

[19] A.TARANTOLA , Inverse problem theory, Elsevier Science Publishers B.V., 1987.

[20] M.ROUSSIGNOL, V.JOUANNE, M.MENVIELLE ET P.TARITS , Bayesian electromagnetic imaging, in Computer intensive methods in statistics, W. Härdle and L. Simar eds, Physica-Verlag, p. 85-97, 1993.

[21] P.TARITS, V.JOUANNE, M.MENVIELLE ET M.ROUSSIGNOL , Bayesian statistics of non linear inverse problems : example of the magnetotelluric 1-D, Geophysical Journal International, sous presse, 1994.

[22] G.VASSEUR ET P.WEIDELT , Bimodal electromagnetic induction in non-uniform thin sheets with an application to the northern Pyrenean induction anomaly, Geophys.J.R.astr.Soc., 51, p. 669-690, 1977

[23] P.WEIDELT , electromagnetic induction in three-dimensional structures, J.Geophys., 41, p. 85-109, 1975