

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

50376  
1994  
263

**THESE DE DOCTORAT**

(LABEL EUROPEEN)



*Présentée au*

**LABORATOIRE DE MECANIQUE DE LILLE**

(GROUPE FIABILITE DES STRUCTURES)

**Spécialité : Mécanique**

*Par*

**Abdelkader HACHEMI**

Ingénieur ENPA

---

**CONTRIBUTION A L'ANALYSE DE L'ADAPTATION  
DES STRUCTURES INELASTIQUES  
AVEC PRISE EN COMPTE DE L'ENDOMMAGEMENT**

**CONTRIBUTION TO THE SHAKEDOWN ANALYSIS  
OF INELASTIC STRUCTURES ACCOUNTING FOR DAMAGE**

---

Soutenue le 21 Octobre 1994 devant la commission d'examen composée de :

<b>Président, Rapporteur</b>	Mme. G. INGLEBERT	I.S.M.C.M., Saint-Ouen
<b>Rapporteurs</b>	M. G. DE SAXCE	Faculté Polytechnique, Mons
	M. J. GROSS-WEEGE	I.F.M., Duisburg-Huckingen
<b>Examineurs</b>	M. D. WEICHERT	E.U.D.I.L., Lille
	M. F. BOULANGER	Ecole des Mines, Douai

*A la mémoire de ma mère,  
à mon père,  
à ma famille,  
et à mes amis (es).*

## AVANT PROPOS

Le travail présenté dans cette thèse a été réalisé au sein du Laboratoire de Mécanique de Lille "Groupe Fiabilité des Structures" (Ecole Universitaire d'Ingénieurs de Lille), en collaboration avec le Département Informatique de l'Ecole des Mines de Douai.

J'exprime ma profonde gratitude à mon directeur de recherche Monsieur D. WEICHERT, Professeur à l'E.U.D.I.L. et responsable du groupe fiabilité des structures du L.M.L. C'est à lui que va ma reconnaissance la plus vive pour la confiance et l'aide qu'il m'a accordé au cours de ces années de recherche. Ses qualités scientifiques et humaines ont été un soutien important pour mes travaux.

Je suis très reconnaissant à Monsieur F. BOULANGER, chef du département informatique de l'Ecole des Mines de Douai, pour les remarques précieuses et l'aide qu'il m'a apporté tout au long de la thèse et pour avoir accepté d'examiner mon travail.

Je remercie très sincèrement Madame G. INGLEBERT, Professeur d'Université à I.S.M.C.M. de Saint-Ouen, d'avoir accepté de présider la commission d'examen et d'être rapporteur de ma thèse ainsi que pour les remarques constructives concernant le travail et le manuscrit.

Je remercie vivement Monsieur G. DE SAXCE, Professeur à la Faculté Polytechnique de Mons (Belgique), et Monsieur J. GROSS-WEEGE, Docteur d'Etat à I.F.M. de Duisburg-Huckingen (Allemagne), pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'être les rapporteurs de ma thèse et dont les avis et conseils, ont contribué à son amélioration.

Je remercie mes collègues du groupe fiabilité des structures (L.M.L.) et du département informatique (Mines de Douai), qui ont contribué, par leur qualités professionnelles et humaines, à la réalisation de ce travail. Ne pouvant tous les citer, j'adresse en particulier mes remerciements à J.-B. TRITSCH, O.M. TEYEB, A. HADDI, J.M. DEVELTER, B. THERY, B. ZIELINSKI et S. HOUSSEMANN.

Enfin, que tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin dans l'aboutissement de ce travail trouvent ici mes sincères remerciements.

**ABSTRACT** – A new approach is proposed to predict the failure of mechanical structures. The presented method is an extension of the statical shakedown theorems to inelastic damaging structures under variable mechanical and thermal loads. The effect of linear kinematical hardening is taken into account by using the concept of generalized standard material.

The thermodynamics of irreversible processes provided the necessary scientific basis to describe the damage phenomena and material hardening by internal variables, which lead to kinetical equations coupled with the constitutive laws.

Here, ductile plastic damage is taken into account by using the models of LEMAITRE and SHICHUN-HUA, where the damage parameter is a linear function of the equivalent plastic strains. The unlimited accumulation of plastic strains leads to the forming of macrocracks leading to the degradation of the material properties. Consequently, the criteria of shakedown is that the total dissipated energy is bounded at any point of the structure for current the load path.

This approach is based on the finite element method and mathematical programming, giving the safety factor against failure due to incremental collapse, with the condition that the damage parameter does not reach its critical value of failure.

A comparison with the results of step-by-step methods is presented and a good correlation is found between our approach and the incremental method with a minimum of informations on the loading history.

**KEY WORDS** : Shakedown – Thermoelasticity – Limit analysis – Elastoplasticity – Damage – Optimization – Kinematical hardening – Finite element.

# **SOMMAIRE**

## SOMMAIRE

<b>INTRODUCTION GENERALE</b>	5
1. GENERALITES	5
2. HISTORIQUE	6
3. MOTIVATIONS	10
4. CONTENU DU RAPPORT	11
<b>CHAPITRE 1</b>	
<b>BASES DE LA THEORIE D'ADAPTATION</b>	14
1.1. INTRODUCTION	14
1.2. HYPOTHESES DE BASE	14
1.3. ENONCE DU THEOREME STATIQUE DE MELAN	17
1.4. COEFFICIENT DE SECURITE A L'ADAPTATION	21
1.5. CONCLUSION	23
<b>CHAPITRE 2</b>	
<b>LOIS DE COMPORTEMENT</b>	24
2.1. INTRODUCTION	24
2.2. DOMAINE DE VALIDITE ET D'EMPLOI	24
2.3. THEORIE DE L'ENDOMMAGEMENT ISOTROPE	26
2.3.1. Variable d'endommagement	26
2.3.2. Modèle du matériau standard généralisé	29

---

2.3.3. Potentiel thermodynamique	30
2.3.4. Principe de la thermodynamique	32
2.3.5. Potentiel de dissipation	36
2.3.6. Comportement élastique	37
2.3.7. Comportement plastique	37
2.4. CONCLUSION	40
<b>CHAPITRE 3</b>	
<b>MODELES D'ENDOMMAGEMENT PLASTIQUE DUCTILE</b>	<b>41</b>
3.1. INTRODUCTION	41
3.2. MODELE DE LEMAITRE	41
3.3. MODELE DE SHICHUN-HUA	46
3.4. IDENTIFICATION DES PARAMETRES	50
3.5. CONCLUSION	53
<b>CHAPITRE 4</b>	
<b>EXTENSION DU THEOREME STATIQUE D'ADAPTATION</b>	<b>54</b>
4.1. INTRODUCTION	54
4.2. THEOREME STATIQUE D'ADAPTATION	54
4.2.1. Hypothèses et domaine de chargement	54
4.2.2. Enoncé du théorème	56
4.2.3. Démonstration du théorème	56
4.3. FACTEUR DE CHARGES A L'ADAPTATION	61
4.3.1. Facteur de charges vis-à-vis de la plasticité accumulée	63
4.3.2. Facteur de charges vis-à-vis de la plasticité alternée	64

---

4.4. BORNE SUPERIEURE DU PARAMETRE D'ENDOMMAGEMENT	66
4.5. FORMULATION ELEMENTS FINIS	69
4.5.1. Calcul de la réponse purement élastique	69
4.5.2. Discrétisation du champ de contraintes résiduelles	72
4.6. CONCLUSION	73
<b>CHAPITRE 5</b>	
<b>MODELISATION ET EXPLOITATION NUMERIQUE</b>	<b>74</b>
5.1. INTRODUCTION	74
5.2. MODELISATION DES COQUES	75
5.2.1. Equations constitutives	76
5.2.2. Critère d'Ilyuschin	79
5.2.3. Critère des coques sandwich	80
5.2.4. Borne inférieure du facteur de sécurité	81
5.3. EXPLOITATION NUMERIQUE	82
5.3.1. Généralités	82
5.3.2. Coque cylindrique soumise à une pression interne et à une charge annulaire	85
5.3.2.1. Comportement élastique parfaitement plastique	86
5.3.2.2. Comportement élastoplastique à écrouissage cinématique linéaire	88
5.3.2.3. Comportement élastique parfaitement plastique sous l'influence de l'endommagement	89
5.3.2.4. Comportement élastoplastique endommageable à écrouissage cinématique	91
5.3.2.5. Comparaison avec une méthode incrémentale	92
5.3.3. Tube soumis à une pression et à une température internes variables	95
5.3.3.1. Comportement élastique parfaitement plastique	96

---

5.3.3.2. Comportement élastoplastique écrouissable	98
5.3.3.3. Comportement élastique parfaitement plastique endommageable	99
5.3.3.4. Comportement élastoplastique endommageable à écrouissage cinématique	100
<b>CONCLUSION GENERALE</b>	101
<b>REFERENCES</b>	104
<b>ANNEXES</b>	

## **INTRODUCTION GENERALE**

## INTRODUCTION GENERALE

### 1. GENERALITES :

Les contraintes économiques de plus en plus fortes, limitent souvent les ambitions et poussent les chercheurs et les industriels, notamment dans le domaine de la mécanique, à privilégier la simulation numérique à la simulation expérimentale. Un problème d'actualité est celui de l'étude des procédés de mise en forme, comme l'emboutissage où, le coût d'une expérience réelle est très élevé et conduit les bureaux d'études à l'utilisation de la modélisation numérique.

En effet, lors de la conception d'un système mécanique, que ce soit en construction mécanique, en génie civil ou dans l'industrie chimique, l'ingénieur mécanicien a besoin de modéliser ce système, afin d'en connaître le comportement, d'évaluer sa résistance et sa fiabilité vis-à-vis des charges qu'il aura à supporter et de déterminer, plus particulièrement, la charge limite admissible qu'il peut atteindre avant la défaillance. Cette modélisation permettra, avant le stade de fabrication, d'apporter des améliorations tant au niveau de la résistance qu'au niveau de la mise en forme.

Le premier instrument de calcul pour l'ingénieur, dans l'étude du comportement et de l'évaluation de la résistance et de la fiabilité d'un système mécanique, fut la théorie d'élasticité linéaire, qui reste encore de nos jours la plus employée dans les bureaux d'études. Cependant, celle-ci montre ses limites au-delà de la limite élastique. La théorie de l'analyse limite comble alors cette carence, et permet d'accéder à la charge limite avant la défaillance du système sous un chargement proportionnel.

Dans la réalité, plusieurs systèmes mécaniques sont sujets au cycle de chargement variable. Quand on connaît l'histoire du cycle de chargement avec exactitude, l'étude peut être abordée par la méthode incrémentale "pas-à-pas". Toutefois, comme il est souvent

difficile de connaître avec exactitude l'historique des charges que le système peut subir, l'étude est rendue possible par l'application de la "théorie d'adaptation" établie par MELAN [66] (1936).

Il est souvent plus important pour l'ingénieur de savoir si le système va s'effondrer, en ayant un minimum d'informations sur l'historique du chargement, que de déterminer les quantités décrivant son état durant le processus de déformation. C'est là l'intérêt et l'avantage de cette théorie, qui stipule que, pour une histoire de charges variables évoluant entre des limites prescrites, le comportement élastoplastique du système devient purement élastique, après un certain nombre de cycles de charges initiales.

## **2. HISTORIQUE :**

La première étude des structures élastoplastiques sous chargement variable semble être celle de GRÜNIG [24] (1926) et BLEICH [4] (1932). Cette étude a été généralisée aux milieux continus tridimensionnels par l'application d'un théorème, abondamment cité dans la littérature comme "théorème statique d'adaptation de MELAN" (MELAN [66] (1936)), pour des poutres constituées d'un matériau élastique parfaitement plastique, sous l'hypothèse de la linéarité géométrique et de la validité de la règle d'écoulement associée. La démonstration et l'aménagement de ce dernier n'ont été obtenus que plus tard par SYMONDS [98] (1951) et KOITER [36] (1952).

Dans un article très célèbre, KOITER [37] (1960) établit une approche cinématique du théorème de l'adaptation, dans lequel il introduit le coefficient de sécurité ; ceci lui permet d'obtenir une majoration du travail de déformations plastiques, ce qui constitue un pas décisif vers la maturité du théorème. DEBORGES & NAYROLES [13] (1976) montrent que l'approche statique et l'approche cinématique sont duales au sens de l'analyse convexe. A partir du concept de dissipation moyenne, DE SAXCE [16] (1989) introduit de nouveaux principes variationnels pour décrire les états limites, et récemment, KAMENJARZH & WEICHERT [35] (1992), expriment au moyen de la dualité la borne du

coefficient de sécurité, en considérant le cas particulier de la surface d'écoulement sphérique.

L'extension et l'application du théorème de l'adaptation aux classes de matériaux à comportements complexes, tenant compte des sollicitations thermiques et dynamiques, de l'érouissage, de l'influence de la géométrie non-linéaire et de l'endommagement sur les lois de comportement a suscité beaucoup d'intérêts ces dernières années.

Déjà PRAGER [78] (1956) et ROZENBLUM [85] (1957) donnent une extension du premier théorème en prenant en compte les contraintes thermiques. L'influence de la température sur le module de Young et sur le seuil d'écoulement a été donnée par KÖNIG [38] (1969) et [40] (1979). ROZENBLUM [86] (1965) et DE DONATO [15] (1970) utilisent l'approche cinématique pour les sollicitations thermiques, alors que GOKHFELD & CHERNIAVSKY [20] (1980) et GROSS-WEEGE & WEICHERT [23] (1992) utilisent l'approche statique. Le cas de sollicitations dynamiques a été étudié en premier par KALISKI & WŁODARCZYK [34] (1967). La généralisation du théorème statique à ce type de sollicitations est due à CERADINI [7] (1969), MRÓZ [70] (1971), MAIER [60] (1972), HWA-SHAN-HO [30] (1972) et CORRADI & MAIER [12] (1973). MAIER [59] (1969) montre les liaisons entre l'approche cinématique et l'approche statique au moyen de la dualité en programmation linéaire, avec la prise en compte des lois non-associées. GOKHFELD [19] (1966) et SAWCZUK [90] (1969) déduisent, en utilisant l'approche cinématique, un critère d'effondrement incrémental et montrent que, dans le cas du critère d'écoulement linéaire, l'inégalité énergétique peut être intégrée dans le temps. Plusieurs nouvelles solutions ont été obtenues en utilisant cette approche. Un critère de plasticité alternée a été établi par KÖNIG [39] (1979), indépendamment de la plasticité accumulée.

L'effet de l'érouissage a été étudié en premier par MELAN [67] (1938), dans un article original par l'introduction de l'érouissage cinématique linéaire. NEAL [73] (1950) utilise le critère d'écoulement linéaire pour des considérations numériques ; MAIER [61] (1972) présenta un modèle généralisé pour les structures discrètes, tenant compte des effets géométriques du second ordre ; MANDEL & al. [64] (1977) et ZARKA & al. [106] (1990)

mirent en évidence une condition nécessaire de l'adaptation pour les structures élastoplastiques à écoulement isotrope et cinématique combinés. KÖNIG [46] (1987) et KÖNIG & SIEMASKO [47] (1988) développèrent une méthode d'analyse de stabilité du processus d'adaptation ; PONTER [77] (1975) et MANDEL [63] (1976) étendirent le théorème au comportement du matériau écroui, en utilisant le Modèle du Matériau Standard Généralisé (M.M.S.G.) développé par HALPHEN & NGUYEN QUOC SON [27] (1975). Tous ces auteurs ont traité le cas de l'écrouissage cinématique linéaire illimité. Mais PONTER [77] (1975), ZARKA & CASIER [105] (1981) et KÖNIG [46] (1987) constatèrent que l'hypothèse de l'écrouissage illimité conduit à l'impossibilité de prédire la non-adaptation par déformations plastiques progressives, et que seul l'effondrement de la structure par plasticité alternée peut être modélisé. L'écrouissage cinématique limité est pris en compte par WEICHERT & GROSS-WEEGE [102] (1988) et STEIN & al. [97] (1990). Utilisant le M.M.S.G., WEICHERT & GROSS-WEEGE [102] (1988) proposèrent une limite d'évolution du paramètre d'écrouissage cinématique linéaire, au moyen d'une condition simplifiée de deux surfaces d'écoulement. Pour considérer le problème de l'adaptation non-linéaire, STEIN & al. [97] (1990) proposèrent un modèle micro-mécanique (Overlay model) avec écoulement cinématique non-linéaire limité, similaire au modèle micro-mécanique proposé par NEAL [73] (1950) pour les états de contraintes unidimensionnelles.

Les méthodes d'analyse de l'adaptation ont évolué avec les performances des méthodes numériques, ainsi on est passé de l'étude des structures discrétisées par des éléments unidimensionnels utilisant une formulation matricielle et l'optimisation linéaire, à l'étude des structures bidimensionnelles discrétisées par les éléments finis et utilisant l'optimisation non-linéaire (COHN & MAIER [10] (1979), KÖNIG & MAIER [42] (1981), MAIER & LLOYD SMITH [62] (1986), KÖNIG [46] (1987) et GROSS-WEEGE [22] (1990)).

La généralisation du théorème d'adaptation, au comportement des structures géométriquement non-linéaires a suscité un intérêt particulier chez certains auteurs. Le premier à s'intéresser à ce problème est MAIER [61] (1972). Il présenta une approche, tenant compte des effets géométriques du second ordre, appliqués aux structures discrètes,

en utilisant une formulation matricielle simplifiée. Cette méthode est aussi utilisée par KÖNIG [41] (1980) et [45] (1984), KÖNIG & SIEMASKO [47] (1988) pour l'étude de l'influence des effets géométriques sur la stabilité des structures. En appliquant les deux théorèmes, statique et cinématique, de l'adaptation, WEICHERT [101] (1986) et [103] (1990) introduit l'influence des non-linéarités géométriques en utilisant l'approche tensorielle dans le cadre de la mécanique des milieux continus. Pour des raisons pratiques il étudie les petites évolutions au voisinage d'une configuration déformée de référence, en mentionnant l'intérêt des approximations cinématique proposées par CASEY [6] (1985). GROSS-WEEGE [21] (1988) présenta des résultats numériques pour les coques de révolution en se basant sur les travaux de MORELLE & NGUYEN DANG HUNG [68] (1983) et MORELLE [69] (1984), en utilisant la méthode d'optimisation non-linéaire dite de Lagrangien Augmenté (PIERRE & LOWE [76] (1975)) pour le calcul du coefficient de sécurité à l'adaptation. L'auteur (GROSS-WEEGE [22] (1990)) montre par la suite que cette formulation peut servir de base à une unification des différentes approches non-linéaires déjà élaborées. Il est suivi dans cette démarche par SACZUK & STUMPF [88] (1990) ainsi que par PYCKO & KÖNIG [80] (1991). Récemment TRITSCH [99] (1993) utilise le formalisme tensoriel des grandes déformations présenté par SIDOROFF [94] (1982); Il développe une formulation originale du premier théorème, et fait un lien entre les différentes approches géométriquement non-linéaires. Tous ces auteurs utilisent l'artifice d'un corps de comparaison purement élastique, soumis aux mêmes charges que le corps étudié.

Concernant les lois de comportement et l'affaiblissement des matériaux, WEICHERT & RAAD [104] (1992) donnent une extension du théorème statique d'adaptation à une certaine classe de géomatériaux élastiques parfaitement plastiques avec des coefficients d'élasticité variables. Dans le cadre de la mécanique des milieux continus et en utilisant le concept du M.M.S.G, HACHEMI & WEICHERT [25] (1992) établissent une extension générale du premier théorème à une certaine classe de matériaux élastoplastiques endommageables, selon le modèle d'endommagement isotrope de JU [32] (1989). Récemment, SIEMASZKO [95] (1993) présenta une méthode pas-à-pas d'analyse de

---

l'inadaptation pour des structures discrètes élastoplastiques. Cette méthode tient compte de l'effet géométrique non-linéaire, de l'endommagement progressif et de l'écroutissement non-linéaire. L'endommagement est pris en compte par un paramètre de porosité qui est interprété comme une fraction de volume des vides. L'évolution de ce paramètre décrit le changement des imperfections internes, utilisant la fonction d'adoucissement du matériau développé par PERZYNA [75] (1984), combiné avec l'écroutissement isotrope.

Les résultats expérimentaux se limitent à ceux de LEERS [51] (1985) et LEERS & al. [52] (1985) concernant un tube de révolution.

### 3. MOTIVATIONS :

A une étape de conception, l'ingénieur mécanicien a besoin de tenir compte des différents paramètres influençant le comportement des structures, afin d'apporter le plus de fiabilité possible à son étude. La plupart des modèles utilisés dans les bureaux d'études, ignorent le critère de rupture. Après avoir réalisé son calcul, l'ingénieur applique le critère de Tresca ou de Hubert-Mises, sans tenir compte de l'effet d'adoucissement. La loi de comportement de la forme  $\sigma = (1-D)E:\epsilon^e$ , fait justement apparaître un point maximal en contrainte suivi d'un adoucissement, en fonction du paramètre d'endommagement  $D$ , issu des lois d'évolution. En effet, pour les matériaux ductiles, l'accumulation illimitée des déformations plastiques conduit à l'apparition et à l'amorçage des fissures macroscopiques, qui se propagent jusqu'à la rupture complète de la structure.

La plupart des calculs de prévision de défaillance des structures métalliques sont fondés sur la mécanique des milieux continus, et utilisent la méthode incrémentale. Parler de contraintes ou de déformations, suppose l'existence de dérivées spatiales des variables décrivant le comportement. Dans la même ligne de conduite, introduire l'endommagement à des fins prévisionnelles dans les méthodes de la mécanique des milieux continus impose de caractériser ce phénomène par une variable continue. La modélisation des mécanismes physiques de la rupture par la mécanique de l'endommagement reste à ce jour un des

problèmes scientifiques le plus ouvert. De nombreux modèles ont été élaborés afin de représenter le plus fidèlement possible les comportements observés; notamment pour les matériaux métalliques (KACHANOV [33] (1958), RABOTNOV [82] (1968), LEMAITRE [54] (1983), LEMAITRE & CHABOCHE [56] (1985) et SHICHUN & HUA [93] (1990)) avec couplage des effets plastiques ou viscoplastiques (CHABOCHE [8] (1978) et JU [32] (1989)), ou pour les matériaux composites avec l'introduction de la théorie de l'endommagement anisotrope (LADEVEZE [49] (1983) et LADEVEZE & LEMAITRE [50] (1984)). Ce type d'endommagement a, entre autre, été étudié par CORDEBOIS & SIDOROFF [11] (1982), SIMO & JU [96] (1987), SAWCZUK & SADOWSKI [92] (1983) et LU & CHOW [58] (1990).

Le problème essentiel des simulations numériques de l'endommagement réside dans l'instabilité de ces calculs. En effet, des difficultés peuvent apparaître dès qu'un point de la structure atteint le seuil critique d'endommagement. Certains auteurs ont tenté d'analyser ce phénomène d'instabilité et d'apporter des remèdes pour poursuivre les calculs après l'apparition d'un point limite (SAADOUNI [87] (1988) et BENKRID & BUSSY [3] (1993)).

C'est pour prévoir la stabilité et la sécurité de la structure endommagée et éviter le coût prohibitif du calcul incrémental, que nous avons proposé une nouvelle approche par l'application de la théorie de l'adaptation. En effet, en utilisant la méthode de programmation mathématique non-linéaire et en imposant que l'endommagement reste inférieur à sa valeur critique, nous exprimons la borne supérieure du paramètre d'endommagement que la structure peut atteindre avant défaillance ainsi que la borne inférieure du coefficient de charges.

#### **4. CONTENU DU RAPPORT :**

Le **premier chapitre** de ce rapport, rappelle les fondements du théorème statique d'adaptation, qui utilise la propriété de convexité de la surface d'écoulement et introduit la fonction d'énergie totale résiduelle de déformations élastiques. Nous joignons à ces fondements les améliorations apportés par DEBORDES & NAYROLES [13] (1976) pour

donner plus d'éclaircissement et de compréhension à ce théorème, en indiquant le rôle du coefficient de sécurité introduit par KOITER [37] (1960).

Le **deuxième chapitre** est consacré aux lois de comportement dans le domaine des petites transformations. L'approche adoptée est celle de la thermodynamique des phénomènes irréversibles, qui constitue l'un des fondements indispensables de la théorie de la plasticité. Nous commençons par définir la variable d'endommagement introduite par KACHANOV [33] (1958) ainsi que la contrainte effective en utilisant le concept d'équivalence en déformation (LEMAITRE & CHABOCHE [56] (1985)). Pour tenir compte de l'érouissage cinématique, nous utilisons le concept du M.M.S.G. développé par HALPHEN & N. Q. SON [27] (1975). Par la définition du potentiel thermodynamique, et à partir du principe de la thermodynamique, nous déduisons les inégalités dissipatives.

Le **troisième chapitre** présente deux modèles tridimensionnels d'endommagement plastique ductile établis par LEMAITRE [54] (1983), [55] (1985) et SHICHUN & HUA [93] (1990). Ces modèles sont fondés sur la notion de variable continue d'endommagement et sur le concept de contraintes effectives. Ils expriment la vitesse d'endommagement en fonction de sa variable associée et de la vitesse de déformation plastique cumulée. Ce sont ces deux modèles qui seront utilisés dans notre étude afin de cerner l'influence de chacun.

Dans le **quatrième chapitre**, nous proposons une extension générale du premier théorème d'adaptation avec la prise en compte de l'endommagement et de l'érouissage cinématique linéaire, sous sollicitations mécaniques et thermiques combinées. Par l'utilisation du critère d'écoulement de von Mises, dont le seuil d'écoulement dépend de la température, nous exprimons la borne supérieure du paramètre d'endommagement via la méthode de programmation mathématique, ainsi que la borne inférieure du coefficient de sécurité qui garantit l'adaptation et la sécurité de la structure. En dernier, nous présentons la formulation des éléments finis établie par MORELLE & NGUYEN DANG HUNG [68] (1983) et MORELLE [69] (1984) et améliorée par GROSS-WEERGE [21] (1988).

Nous présentons, dans le **cinquième chapitre**, quelques applications numériques classiques de l'étude des coques de révolution, en nous basant sur les travaux de GROSS-WEERGE [21] (1988). La comparaison des résultats donnés par cette approche et par la méthode incrémentale est faite, en utilisant le programme NONSAP élaboré par BATHE & al. [2] (1974) à l'université de Californie et amélioré par KREJA & al. [48] (1993). Enfin nous rappelons brièvement la modélisation des coques de révolution avec les critères d'écoulement correspondant.

---

---

# CHAPITRE 1

---

---

**BASES DE LA THEORIE D'ADAPTATION**

## BASES DE LA THEORIE D'ADAPTATION

### 1.1. INTRODUCTION :

Dans ce chapitre, nous rappelons les fondements de la théorie d'adaptation dite statique, abondamment citée dans la littérature par le théorème de Melan (MELAN [66] (1936), [67] (1938)). Ce théorème utilise la propriété de convexité du domaine élastique et introduit la fonction d'énergie totale résiduelle de déformations élastiques qui joue le rôle de norme énergétique. Il est basé sur les hypothèses restrictives suivantes :

- transformations infiniment petites, isothermes,
- évolution quasi-statique,
- comportement élastoplastique parfait, ou à écrouissage cinématique linéaire,
- loi d'écoulement associée,
- milieu continu isotrope.

### 1.2. HYPOTHESES DE BASE :

On considère un corps élastique parfaitement plastique de volume  $V$  et de surface  $S = S_u \cup S_p$ ,  $S_u \cap S_p = \emptyset$ , soumis à :

- des forces de volume :  $\mathbf{f}^d$  dans  $V$  ;
- des tractions de surface :  $\mathbf{p}^d$  sur  $S_p$  ;
- des déplacements imposés :  $\mathbf{u}^d$  sur  $S_u$  ;

ces charges varient arbitrairement et indépendamment, l'une de l'autre, entre des limites prescrites.

La condition d'équilibre d'une distribution de contraintes  $\sigma_{ij}$  avec les forces de volume  $f_i^d$  et des tractions de surface  $p_i^d$  sur  $S_p$  est exprimée par le principe des travaux virtuels :

$$\int_{(V)} f_i^d \dot{u}_i^* dV + \int_{(S_p)} p_i^d \dot{u}_i^* dS = \int_{(V)} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^* dV, \quad (1.1)$$

pour toutes les distributions de déformations cinématiquement admissibles.

On suppose une décomposition additive pour les déformations totales  $\epsilon_{ij}$ , en fonction des déformations élastiques  $\epsilon_{ij}^e$  et des déformations plastiques  $\epsilon_{ij}^p$  :

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^p. \quad (1.2)$$

Pour un corps élastique parfaitement plastique, la déformation élastique  $\epsilon_{ij}^e$  est liée linéairement à la contrainte  $\sigma_{ij}$  par la loi de Hooke :

$$\epsilon_{ij}^e = E_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl}; \quad (1.3)$$

Pour un matériau isotrope le tenseur d'élasticité  $\mathbf{E}$  s'exprime par :

$$E_{ijkl}^{-1} = \frac{1}{E} [(1 + \nu)\delta_{ik}\delta_{jl} - \nu\delta_{ij}\delta_{kl}] \quad (1.4)$$

avec la propriété de symétrie  $E_{ijkl} = E_{jikl} = E_{ijlk} = E_{klij}$

où,  $E$  est le module de Young,  $\nu$  le coefficient de Poisson et  $\delta$  le symbole de Kronecker.

Tandis que la déformation plastique est exprimée par la loi de normalité :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_{ij}} \quad (1.5)$$

avec

$$\begin{cases} \dot{\lambda} = 0 & \text{si } \mathcal{F} < 0 \text{ ou si } \mathcal{F} = 0 \text{ et } \dot{\mathcal{F}} < 0 \\ \dot{\lambda} \geq 0 & \text{si } \mathcal{F} = \dot{\mathcal{F}} = 0 \end{cases}$$

où,  $\dot{\lambda}$  est le multiplicateur plastique donné par la condition de consistance,  $\mathcal{F}(\sigma_{ij}) = 0$  est le critère de plasticité représenté par une surface convexe dans l'espace des contraintes et le point  $(\cdot)$  exprime la dérivée totale temporelle des quantités considérées.

On suppose que le matériau obéit au principe de HILL [29] (1950), qui stipule que :

(a) si  $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$  est une vitesse de déformation plastique non nulle, se produisant pour un état de contrainte  $\sigma_{ij}$  quelconque, et  $\sigma_{ij}^{(s)}$  un état de contrainte de sécurité, alors le corps satisfait la relation de convexité suivante (Fig. 1.1) :

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)}) \dot{\varepsilon}_{ij}^p > 0, \quad (1.6a)$$

pour tout  $\sigma_{ij}^{(s)}$  appartenant au domaine défini par l'inégalité  $\mathcal{F}(\sigma_{ij}^{(s)}) < 0$  ;

(b) par contre, pour un état de contraintes admissibles  $\sigma_{ij}^{(a)}$ , on a :

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(a)}) \dot{\varepsilon}_{ij}^p \geq 0. \quad (1.6b)$$

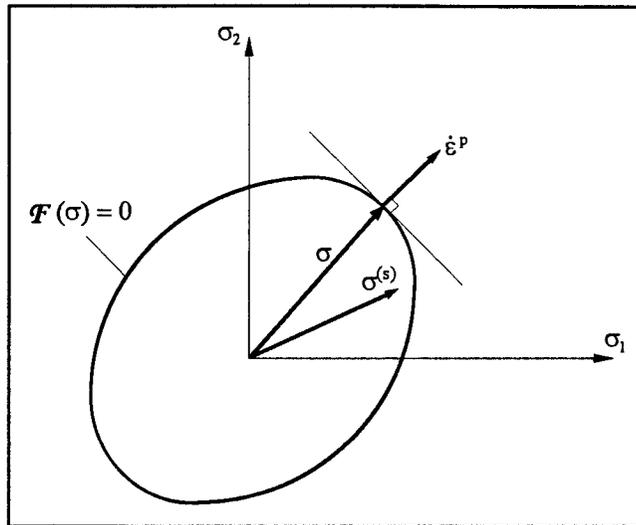


Fig. 1.1 - Convexité de la surface d'écoulement et loi de normalité -

### 1.3. ENONCE DU THEOREME STATIQUE DE MELAN :

L'approche statique à l'analyse de la condition d'adaptation sous charges répétées est basée sur le théorème de Melan, formulé pour une structure tridimensionnelle en 1936. Le théorème peut être énoncé comme suit :

1. Une structure élastoplastique **s'adapte** sous des sollicitations variables répétées, c'est-à-dire que son comportement après un certain nombre de cycles de charges initiales devient purement élastique, s'il existe une distribution de contraintes résiduelles indépendante du temps  $\overset{\circ}{\rho}$  telle que sa superposition avec les contraintes purement élastiques constitue un état de contraintes sûr et ne viole pas le critère d'écoulement en tout point  $x$  de la structure, sous les différentes combinaisons possibles de charges à l'intérieur des limites prescrites :

$$\mathcal{F}(\sigma_{ij}^{(e)}(x, t) + \overset{\circ}{\rho}_{ij}(x), \sigma_F) < 0 \quad (1.7)$$

avec

$$\sigma_{ij}^{(e)} + \overset{\circ}{\rho}_{ij} = \sigma_{ij}^{(s)} \quad (1.8)$$

telle que,  $\sigma^{(e)}$  vérifie le système d'équations suivant :

$$\sigma_{ij,j}^{(e)} = -f_i^d \quad \text{dans } V \quad (1.9a)$$

$$n_j \sigma_{ij}^{(e)} = p_i^d \quad \text{sur } S_p \quad (1.9b)$$

$$u_i^{(e)} = u_i^d \quad \text{sur } S_u \quad (1.9c)$$

$$\epsilon_{ij}^{(e)} = \frac{1}{2} (u_{i,j}^{(e)} + u_{j,i}^{(e)}) \quad \text{dans } V \quad (1.9d)$$

$$\epsilon_{ij}^{(e)} = E_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl}^{(e)} \quad \text{dans } V \quad (1.9e)$$

et  $\rho^{\circ}$  vérifie les conditions d'équilibre sans forces :

$$\rho_{ij,j}^{\circ} = 0 \quad \text{dans } V \quad (1.10a)$$

$$n_j \rho_{ij}^{\circ} = 0 \quad \text{sur } S_p \quad (1.10b)$$

où,  $n$  est le vecteur normal unitaire extérieur à la surface  $S$ .

2. Par contre, si on ne peut trouver une distribution de contraintes résiduelles indépendante du temps, constituant avec les contraintes élastiques un état de contraintes admissibles ( $\sigma^{(a)} \leq \sigma_p$ ), sous la combinaison de charges possibles, alors la structure ne peut jamais **s'adapter**.

L'énoncé de ce théorème exige une preuve formelle, qui est la base de la démonstration du théorème de l'adaptation.

Pour la démonstration de ce théorème (critère de Melan), on considère l'énergie de déformation élastique fictive  $W$  correspondant aux contraintes auto-équilibrées ( $\rho - \rho^{\circ}$ ), où  $\rho$  est le champ de contraintes résiduelles actuelles à chaque étape du programme de chargement et  $\rho^{\circ}$  est un champ de contraintes résiduelles indépendant du temps pour lequel

le critère de Melan est satisfait. Soit  $\varepsilon^r$  le champ de déformations élastiques, correspondant au champ de contraintes résiduelles  $\rho$  par la loi de Hooke.

L'énergie de déformation élastique fictive  $W$ , définie positive, est introduite par :

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_{(V)} (\rho_{ij} - \hat{\rho}_{ij}) E_{ijkl}^{-1} (\rho_{kl} - \hat{\rho}_{kl}) dV \\ &= \frac{1}{2} \int_{(V)} (\rho_{ij} - \hat{\rho}_{ij}) (\varepsilon_{ij}^r - \hat{\varepsilon}_{ij}^r) dV, \end{aligned} \quad (1.11)$$

avec les définitions suivantes :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^r &= E_{ijkl}^{-1} \rho_{kl} \quad \text{et} \quad \hat{\varepsilon}_{ij}^r = E_{ijkl}^{-1} \hat{\rho}_{kl}, \\ \varepsilon_{ij}^{(e)} &= \frac{1}{2} (u_{i,j}^{(e)} + u_{j,i}^{(e)}), \\ \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^r &= \frac{1}{2} (u_{i,j}^r + u_{j,i}^r), \\ u_i &= u_i^{(e)} + u_i^r, \end{aligned}$$

où,  $\mathbf{u}$  est le champ de déplacements actuels et  $\mathbf{u}^r$  le champ de déplacements résiduels de la structure considérée.

La dérivée de  $W$  par rapport au temps donne :

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \int_{(V)} (\rho_{ij} - \hat{\rho}_{ij}) E_{ijkl}^{-1} \dot{\rho}_{kl} dV \\ &= \int_{(V)} (\rho_{ij} - \hat{\rho}_{ij}) \dot{\varepsilon}_{ij}^r dV. \end{aligned} \quad (1.12)$$

La déformation totale à chaque instant est donnée par :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ij}^{(e)} + \varepsilon_{ij}^p \\ &= \varepsilon_{ij}^{(e)} + \varepsilon_{ij}^r + \varepsilon_{ij}^p, \end{aligned} \quad (1.13)$$

où,  $\varepsilon_{ij}^{(e)}$  est le champ de déformations élastiques correspondant aux contraintes purement élastiques  $\sigma_{ij}^{(e)}$  par la loi de Hooke, et l'équation (1.12) se réduit à

$$\dot{W} = \int_{(V)} (\rho_{ij} - \overset{\circ}{\rho}_{ij})(\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^e - \dot{\varepsilon}_{ij}^p) dV. \quad (1.14)$$

Le système de contraintes résiduelles  $(\rho_{ij} - \overset{\circ}{\rho}_{ij})$  est auto-équilibré et la vitesse de déformations  $(\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^{(e)})$  est cinématiquement admissible, car elle est la différence entre deux vitesses de déformations cinématiquement admissibles. Donc l'intégrale sur le volume:

$$\dot{W} = \int_{(V)} (\rho_{ij} - \overset{\circ}{\rho}_{ij})(\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^{(e)}) dV = 0, \quad (1.15)$$

en tenant compte du principe des travaux virtuels (éq. (1.1)).

On écrit de nouveau

$$\rho_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(e)}, \quad \overset{\circ}{\rho}_{ij} = \sigma_{ij}^{(s)} - \sigma_{ij}^{(e)} \quad (1.16)$$

où,  $\sigma_{ij}$  est l'état de contraintes actuelles et  $\sigma_{ij}^{(s)}$  l'état de contraintes de sécurité. On obtient finalement :

$$\dot{W} = - \int_{(V)} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)}) \dot{\varepsilon}_{ij}^p dV. \quad (1.17)$$

En raison de l'inégalité (1.6a),  $\dot{W}$  est toujours négative chaque fois que les déformations plastiques apparaissent. Comme elle a été définie,  $W$  est quadratique et ne peut jamais devenir négative, ce qui implique que les déformations plastiques doivent cesser de se développer, et le corps **s'adapte** s'il existe une distribution de contraintes résiduelles  $\overset{\circ}{\rho}$  telle que les variations des sollicitations ne provoquent plus que des déformations élastiques.

On en déduit, en suivant le raisonnement de DEBORDES & NAYROLES [13] (1976), que le domaine élastique contient une boule de rayon  $r$  centrée à l'origine. Le principe du travail plastique maximal (éqs. (1.6)) montre alors que :

$$r |\dot{\varepsilon}_{ij}^p(\mathbf{x}, t)| \leq \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) \dot{\varepsilon}_{ij}^p(\mathbf{x}, t). \quad (1.18)$$

Donc, si le corps s'adapte, l'intégrale

$$\int_0^\infty \int_{(V)} |\dot{\varepsilon}_{ij}^p(\mathbf{x}, t)| dV dt \quad (1.19)$$

est bornée. Alors, le champ de déformations plastiques  $\varepsilon_{ij}^p(\mathbf{x}, t)$  tend vers une limite lorsque le temps  $t$  tend vers l'infini, c'est-à-dire qu'il existe un champ  $\hat{\varepsilon}_{ij}^p(\mathbf{x})$  tel que l'intégrale :

$$\int_{(V)} |\varepsilon_{ij}^p(\mathbf{x}, t) - \hat{\varepsilon}_{ij}^p(\mathbf{x})| dV \quad (1.20)$$

tend vers zéro lorsque  $t$  tend vers l'infini.

La propriété (1.20) implique, dans le cas d'une structure formée d'un nombre fini d'éléments, que dans chaque élément le travail dissipé est borné, donc aussi la norme de déformation plastique et par conséquent la déformation plastique tend vers une limite. Le champ de contraintes résiduelles, qui en est une projection dans un espace de dimension finie, possède également une limite, ce qui donne une condition suffisante d'adaptation.

#### 1.4. COEFFICIENT DE SECURITE A L'ADAPTATION :

La valeur de la déformation plastique totale qui peut apparaître avant que la structure atteigne son état d'adaptation, n'a pas été donnée par le critère et la démonstration

de Melan. Il a été suggéré par KOITER [37] (1960) que l'évaluation du travail plastique, accompli sur la structure, est un critère convenable pour estimer les déformations plastiques totales. Il peut être démontré que l'énergie totale dissipée est bornée en utilisant l'équation (1.6b). Pour cela, on considère un coefficient de sécurité  $\alpha > 1$ , contre la défaillance de la structure due à l'inadaptation, tel que l'état de contrainte  $\alpha\sigma_{ij}^{(s)}$  soit à l'intérieur du domaine élastique, et constitue un état admissible, c'est-à-dire que :

$$\mathcal{F}(\alpha\sigma_{ij}^{(s)}) < 0, \quad (1.21)$$

avec  $\alpha(\sigma_{ij}^{(e)} + \dot{\rho}_{ij}) = \sigma_{ij}^{(a)}$  comme état de contrainte admissible.

Le principe du travail plastique maximal (éq. (1.6b)) montre que :

$$(\sigma_{ij} - \alpha\sigma_{ij}^{(s)})\dot{\epsilon}_{ij}^p \geq 0, \quad (1.22)$$

d'où l'on déduit :

$$\dot{W}_p = \int_{(V)} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p dV \leq \frac{\alpha}{\alpha - 1} \int_{(V)} (\sigma_{ij} - \alpha\sigma_{ij}^{(s)})\dot{\epsilon}_{ij}^p dV. \quad (1.23)$$

L'intégration, par rapport au temps, de l'inégalité précédente conduit à l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} W_p &\leq \frac{\alpha}{\alpha - 1} [W(0) - W(\tau)] \\ &\leq \frac{\alpha}{\alpha - 1} \int_{(V)} \frac{1}{2} \dot{\rho}_{ij} E_{ijkl}^{-1} \dot{\rho}_{kl} dV, \end{aligned} \quad (1.24)$$

cette inégalité implique que l'énergie totale dissipée est bornée.

### 1.5. CONCLUSION :

On est limité par le fait que la théorie, développée sur la base des milieux continus, ignore le phénomène de fissuration et de rupture : les déformations plastiques peuvent donc, théoriquement, évoluer localement sans limites dans le temps. On imagine bien qu'une structure ne peut pas, sans être détruite, dissiper une quantité infinie d'énergie (on verra au chapitre 2 que dans l'expression du second principe de la thermodynamique,  $\sigma \cdot \dot{\epsilon}^p$  est la puissance intrinsèque dissipée). En fait, l'existence d'un champ de contraintes résiduelles indépendant du temps garantit l'existence d'un noyau élastique vital pour la structure. C'est la notion de "**sanctuaire d'élasticité**" développée par NAYROLES & WEICHERT [72] (1993). Par l'existence d'un tel noyau, les vitesses de déformations plastiques s'annulent une fois qu'elles appartiennent à ce noyau. En effet, le phénomène de rupture peut être représenté par la théorie mécanique de l'endommagement. Ce phénomène est caractérisé par un paramètre interne caché au sens de la thermodynamique. En imposant que les déformations plastiques tendent vers une limite quand le temps  $t$  tend vers l'infini, on démontre que la structure s'adapte, tant que le paramètre d'endommagement n'atteint pas sa valeur critique, ainsi on aura une idée sur l'état de détérioration de la matière par l'intermédiaire de ce paramètre.

---

---

# CHAPITRE 2

---

---

**LOIS DE COMPORTEMENT**

## LOIS DE COMPORTEMENT

### 2.1. INTRODUCTION :

La théorie qui va être développée dans ce chapitre est relative aux lois constitutives de la plasticité dans le domaine des petites transformations. L'approche adoptée ici est celle de la thermodynamique des phénomènes irréversibles basée sur le postulat de l'état local. Il est bien établi que la thermodynamique constitue un des fondements indispensables de la théorie de la plasticité.

Dans ce qui suit, on a tenu compte de trois phénomènes physiques différents caractérisant le comportement local du matériau :

- le comportement élastique linéaire,
- le comportement plastique, caractérisé par l'existence d'une surface d'écoulement convexe dans l'espace des contraintes, avec la validité de la loi de normalité, en tenant compte de l'écroutissage cinématique linéaire selon le concept du "Matériau Standard Généralisé",
- l'endommagement plastique ductile isotrope suivant le modèle de LEMAITRE [54] (1983), [55] (1985) et de SHICHUN & HUA [93] (1990).

### 2.2. DOMAINE DE VALIDITE ET D'EMPLOI :

Par le terme endommagement, il faut entendre la détérioration progressive de la cohésion de la matière sous l'action de sollicitations monotones, ou répétées, conduisant à la formation et à la croissance de microfissures et microvides, pouvant aller jusqu'à la rupture de l'élément de volume. Ce phénomène peut être traduit par une variable interne cachée au sens de la thermodynamique des processus irréversibles, qui fournit les équations

---

d'évolution correspondantes, couplées aux lois de comportement. Ce formalisme est appliqué à la modélisation des endommagements de plasticité, de fluage et de fatigue qui constituent les trois mécanismes de naissance des macrofissures dans les structures métalliques (voir LEMAITRE [57] (1987)) :

- l'endommagement plastique ductile, qui est le résultat de la nucléation, de la croissance et de la coalescence par instabilité de microcavités sous l'effet de grandes déformations plastiques;
- l'endommagement de fluage, qui pour les métaux sollicités à haute température, correspond à des microfissures le plus souvent intergranulaires accompagnant les déformations viscoplastiques;
- l'endommagement de fatigue dû à la répétition des contraintes et qui correspond à des microfissures le plus souvent transgranulaires.

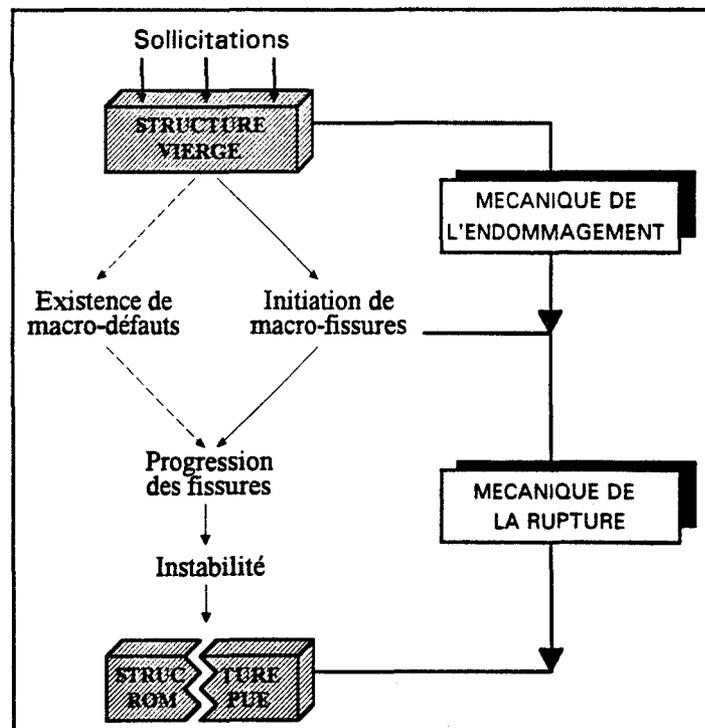


Fig. 2.1 - Schématisation du processus de rupture -

Pour étudier et prévoir l'apparition des fissures macroscopiques créées par croissance ou par coalescence des défauts, on fait appel à la mécanique des milieux continus endommagés, qui est l'objet du présent développement. Alors que, prévoir l'évolution de ces fissures jusqu'à la rupture complète de la structure fait appel à la mécanique de la rupture (Fig. 2.1).

### **2.3. THEORIE DE L'ENDOMMAGEMENT ISOTROPE :**

De nombreux travaux, à propos des sujets les plus variés, ont été consacrés à l'endommagement. L'idée du dommage a été émise pour la première fois par KACHANOV [33] (1958) et RABOTNOV [82] (1968), afin de prévoir le temps au bout duquel se rompt un matériau sous fluage. Ces travaux se sont effectués :

- au niveau microscopique afin de mieux comprendre la naissance et le développement des défauts ; mais il est difficile de définir une variable macroscopique d'endommagement et une loi d'évolution facilement utilisables dans les calculs de mécanique des milieux continus;
- au niveau macroscopique de manière à mieux cerner l'influence de l'endommagement sur le comportement des matériaux, afin de le prendre en compte dans les modélisations. C'est dans ce cadre que se situe le présent développement.

#### **2.3.1. Variable d'endommagement :**

La théorie mécanique de l'endommagement introduit une variable interne qui représente la densité surfacique effective des traces de cavités et des microfissures coupées par tout plan d'orientation  $\mathbf{n}$  dans un solide endommagé. Ce scalaire  $D_n$ , fonction de l'orientation de la normale  $\mathbf{n}$ , dépend du nombre et de la taille des défauts mais aussi des concentrations de micro-contraintes qui existent à leur voisinage, et des interactions entre défauts voisins. Dans le cas général d'un endommagement anisotrope constitué de fissures et de cavités d'orientations privilégiées, la valeur de la variable scalaire  $D_n$  dépend de l'orientation de la normale et est représentée par un tenseur du 2<sup>e</sup> ou du 4<sup>e</sup> ordre

(CHABOCHE [8] (1978), CORDEBOIS & SIDOROFF [11] (1982), SIMO & JU [96] (1987), LU & CHOW [58] (1990)). Alors que dans le cas de l'endommagement isotrope, la valeur de la variable  $D_n$  dépend peu ou pas de l'orientation  $\mathbf{n}$  et se trouve caractérisée par la variable scalaire  $D$  ( $D_n = D \quad \forall \mathbf{n}$ ) (LEMAITRE [54] (1983), [57] (1987), LEMAITRE & CHABOCHE [56] (1985), JU [32] (1989)). Sur le plan physique ceci signifie que les fissures et les cavités sont uniformément distribuées par rapport à toutes les directions. Dans ce qui suit on se limite au cas de l'endommagement isotrope.

Soit  $S$  l'aire d'une section de l'élément de volume repéré par sa normale  $\mathbf{n}$ , et  $\tilde{S}$  la section effectivement résistante tenant compte de la surface des défauts, des concentrations de micro-contraintes qui existent à leur voisinage et des interactions entre défauts voisins  $S - \tilde{S} = S_D$  (Fig. 2.2). La variable d'endommagement  $D$  associée à la normale  $\mathbf{n}$  est définie par :

$$D_n = \frac{S - \tilde{S}}{S} \quad (2.1)$$

Du point de vue physique la variable d'endommagement  $D_n$  est donc l'aire relative (corrigée) des fissures et cavités coupées par le plan normal à la direction  $\mathbf{n}$ .

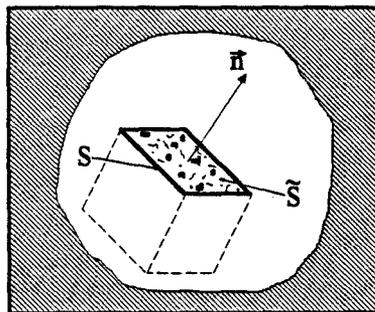


Fig. 2.2 - Élément endommagé -

La valeur de  $D_n = 0$  correspond à l'état non endommagé,  $D_n = D_c$  définit la rupture locale complète ( $D_c \in [0, 1]$ ) et  $D_n \in (0, D_c)$  caractérise l'état d'endommagement.

Le concept d'équivalence en déformation (LEMAITRE & CHABOCHE [56] (1985)), permet de s'affranchir du calcul de  $\tilde{S}$  et de définir une contrainte effective  $\tilde{\sigma}$ , qu'il faut appliquer à l'élément vierge pour obtenir la même déformation  $\varepsilon$  que celle provoquée par la contrainte  $\sigma$  appliquée à l'élément de volume endommagé (Fig. 2.3) :

$$\sigma S = \tilde{\sigma} \tilde{S}, \quad (2.2)$$

des équations (2.1) et (2.2), on obtient la relation suivante :

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - D}, \quad (2.3)$$

qui revient à considérer  $D$  comme une perte de section résistante effective.

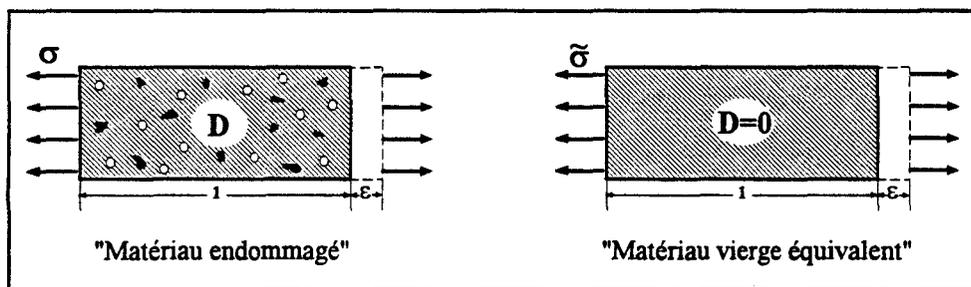


Fig. 2.3 - Principe d'équivalence en déformation -

On suppose que le comportement à la déformation de la matière n'est affecté par l'endommagement que sous la seule forme de la contrainte effective : tout comportement à la déformation, unidimensionnel ou tridimensionnel, d'un matériau endommagé est traduit par les lois de comportement du matériau vierge dans lesquelles on remplace la contrainte usuelle  $\sigma$  par la contrainte effective  $\tilde{\sigma}$ .

Ainsi dans le cas particulier du comportement élastique linéaire, la mesure du module d'élasticité  $\tilde{E}$  du matériau endommagé fournit une mesure de  $D$  par comparaison avec la valeur  $E$  du module d'élasticité du matériau vierge :

$$\tilde{E} = (1 - D)E. \quad (2.4)$$

### 2.3.2. Modèle du matériau standard généralisé :

Une schématisation très utile de l'érouissage anisotrope est l'érouissage cinématique, pour lequel le domaine d'élasticité garde une amplitude constante mais se déplace par translation dans l'espace des contraintes. L'érouissage cinématique est pris en compte en utilisant les paramètres internes (paramètres cachés) accordés au concept du "Matériau Standard Généralisé", qui suppose qu'à chaque instant du processus de déformation, l'état actuel d'érouissage dans un matériau élastoplastique est décrit localement par un nombre fini de paramètres internes à valeurs scalaires ou tensorielles. Une forme pratique du concept du "Matériau Standard Généralisé", a été introduite par HALPHEN & NGUYEN QUOC SON [27] (1975), à partir d'hypothèses thermodynamiques.

Pour décrire le comportement local du matériau, HALPHEN et N. Q. SON introduisent respectivement, les déformations totales, élastiques et plastiques généralisées,  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{e}^e$  et  $\mathbf{e}^p$ , et les contraintes généralisées  $\mathbf{s}$ , définies par les ensembles :

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= [\boldsymbol{\varepsilon}, \omega] \\ \mathbf{e}^e &= [\boldsymbol{\varepsilon}^e, \omega], \quad \mathbf{e}^p = [\boldsymbol{\varepsilon}^p, \kappa] \\ \mathbf{s} &= [\boldsymbol{\sigma}, \pi]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Dans l'hypothèse de petites perturbations, les déformations totales se décomposent en une partie élastique  $e^e$ , une partie plastique  $e^p$  et une partie induite par la température  $e^s$  telles que :

$$e = e^e + e^p + e^s \quad (2.6)$$

avec

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^s \quad (2.7a)$$

$$0 = \omega_m + \kappa_m \quad m=1, 2, \dots, r \quad (2.7b)$$

les indices latins varient de 1 à 3 sauf indication contraire, la convention de sommation sur les indices répétés est adoptée. Les quantités  $\omega$ ,  $\kappa$  et  $\pi$  sont respectivement, les vecteurs de dimension  $r$ , des paramètres internes élastiques et plastiques et des contraintes internes (back-stress). La dimension "r" dépend du choix particulier du modèle d'écrouissage.

### 2.3.3. Potentiel thermodynamique :

Le potentiel thermodynamique, énergie libre  $\Psi$ , écrit pour la thermoélasticité linéaire découplé des déformations plastiques, mais couplé à l'endommagement par l'intermédiaire de la contrainte effective, est une fonction convexe de toutes les variables d'état :

$$\Psi = \Psi(\varepsilon^e, T, D, \kappa). \quad (2.8)$$

Sous l'hypothèse du découplage entre les effets d'écrouissage, représentés par le paramètre interne  $\kappa$ , et les effets de la thermoélasticité associés à l'endommagement, représentés par le tenseur  $\varepsilon^e$ , le potentiel thermodynamique s'exprime par :

$$\Psi = \Psi_e(\varepsilon^e, T, D) + \Psi_p(\kappa), \quad (2.9)$$

$\Psi_e$  et  $\Psi_p$  sont respectivement le potentiel thermoélastique et le potentiel plastique.

La loi de la thermoélasticité linéaire s'obtient en choisissant pour le potentiel thermoélastique une forme quadratique définie positive des déformations, auxquelles il faut ajouter la variable température (LEMAITRE [57] (1987)) :

$$\rho \Psi_e = \frac{1}{2} (1 - D) E_{ijkl} (\varepsilon_{ij}^e - \alpha_s \vartheta \delta_{ij}) (\varepsilon_{kl}^e - \alpha_s \vartheta \delta_{kl}) + C_e \vartheta^2 \quad (2.10)$$

où,

$\vartheta$  : est la différence entre la température absolue (T) et la température de référence (T<sub>0</sub>),

$\alpha_s$  : est le coefficient de dilatation thermique (matériau isotrope),

$\delta$  : est le symbole de Kronecker,

$C_e$  : est la chaleur spécifique à déformation constante.

Le potentiel plastique s'exprime par la relation suivante :

$$\rho \Psi_p = \frac{1}{2} Z_{mn} \kappa_m \kappa_n. \quad (2.11)$$

On note par  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{Z}$  respectivement, le tenseur des coefficients élastiques et modules élastiques internes, définis par :

$$E_{ijkl} = \rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}^e \partial \varepsilon_{kl}^e}; \quad Z_{mn} = \rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \kappa_m \partial \kappa_n}, \quad (2.12)$$

ils sont constants, définis positifs et indépendants du temps, avec la symétrie  $Z_{mn} = Z_{nm}$  et

$$E_{ijkl} = E_{klij} = E_{jilk} = E_{ijlk}.$$

**2.3.4. Principe de la thermodynamique :**

Le premier principe de la thermodynamique (loi de conservation de l'énergie) implique que :

$$\frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho \left( \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + e \right) dV = \int_{(V)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{(S)} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} dS + \int_{(V)} r dV - \int_{(S)} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.13)$$

$\mathbf{v}$  : est la vitesse de la particule,

$e$  : est l'énergie interne spécifique,

$r$  : est une densité volumique de production interne de chaleur à distance,

$\mathbf{q}$  : est le vecteur courant de chaleur,

$\mathbf{f}$  et  $\mathbf{p}$  : sont respectivement les forces volumiques et les forces surfaciques.

L'application de l'axiome de l'équilibre du principe de puissances virtuelles conduit aux équations d'équilibre :

$$\frac{d}{dt} \int_{(V)} \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{(V)} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} dV = \int_{(V)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{(S)} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} dS, \quad (2.14)$$

ce qui permet d'exprimer le premier principe de la thermodynamique par :

$$\rho \dot{e} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + r - \text{div } \mathbf{q}. \quad (2.15)$$

Le second principe de la thermodynamique postule que le taux de production d'entropie est toujours supérieur ou égal au taux de chaleur reçue divisé par la température :

$$\frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho s dV \geq \int_{(V)} \frac{r}{T} dV - \int_{(S)} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{T} dS \quad (2.16)$$

où,  $s$  est l'entropie par unité de volume.

L'inégalité (2.16) entraîne la forme locale exprimant le taux de production irréversible d'entropie :

$$\rho \dot{s} - \frac{r}{T} + \operatorname{div} \frac{\mathbf{q}}{T} \geq 0 \quad (2.17a)$$

ou

$$\rho T \dot{s} - r + \operatorname{div} \mathbf{q} + \mathbf{g} \cdot \mathbf{q} \geq 0 \quad (2.17b)$$

avec  $\mathbf{g} = -\frac{\operatorname{grad} T}{T}$ .

L'inégalité de Clausius-Duhem s'obtient en introduisant l'énergie libre spécifique  $\Psi$ , qui dépend de la partie de déformation élastique, de la température absolue et des variables internes (écrouissage, endommagement ...), définie par :

$$\Psi = e - T s. \quad (2.18)$$

Finalement des équations (2.15), (2.17) et (2.19), on obtient :

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho(\dot{\Psi} + s\dot{T}) + \mathbf{g} \cdot \mathbf{q} \geq 0. \quad (2.19)$$

L'hypothèse de partition et l'application de l'inégalité de Clausius-Duhem au cas des déformations élastoplastiques indépendantes du temps permettent d'écrire les variables thermodynamiques associées à  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  et  $T$ , respectivement le tenseur des contraintes thermoélastiques et l'entropie spécifique, sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e}; \quad s = -\frac{\partial \Psi}{\partial T}. \quad (2.20)$$

En introduisant les définitions suivantes :

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \frac{\partial \Psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\kappa}} \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}} + \frac{\partial \Psi}{\partial D} \dot{D} \quad (2.21)$$

et

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p + \boldsymbol{\varepsilon}^s \quad (2.22)$$

l'inégalité de Clausius-Duhem,

$$\left( \boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\kappa}} \dot{\boldsymbol{\kappa}} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial D} \dot{D} - \rho \left( s + \frac{\partial \Psi}{\partial T} \right) \dot{T} + \mathbf{g} \cdot \mathbf{q} \geq 0 \quad (2.23)$$

se réduit à :

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \rho \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\kappa}} \dot{\boldsymbol{\kappa}} + \frac{\partial \Psi}{\partial D} \dot{D} \right) + \mathbf{g} \cdot \mathbf{q} \geq 0. \quad (2.24)$$

On définit les forces généralisées thermodynamiques  $\boldsymbol{\pi}$  et  $(-Y)$  associées aux variables internes  $\boldsymbol{\kappa}$  et  $D$  par :

$$\boldsymbol{\pi} = -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\kappa}} = -\mathbf{Z} \cdot \boldsymbol{\kappa} \quad (2.25)$$

$$\bar{Y} = -Y = -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial D} = \frac{1}{2} \mathbf{E} : (\boldsymbol{\varepsilon}^e - \alpha_s \boldsymbol{\vartheta} \mathbf{1}) : (\boldsymbol{\varepsilon}^e - \alpha_s \boldsymbol{\vartheta} \mathbf{1}) \quad (2.26)$$

la notation  $\mathbf{1}$  exprime le tenseur d'identité.

Il est intéressant de constater que la fonction d'énergie élastique du matériau non endommagé ( $W_e^0$ ) est la force thermodynamique ( $\bar{Y}$ ) conjuguée à la variable d'endommagement  $D$  (LEMAITRE & CHABOCHE [56] (1985)).

D'où l'expression de l'inégalité de Clausius-Duhem :

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \boldsymbol{\pi} : \dot{\boldsymbol{\kappa}} + \bar{Y} \dot{D} + \mathbf{g} : \mathbf{q} \geq 0. \quad (2.27)$$

On suppose le découplage entre la dissipation mécanique et la dissipation thermique, ce qui n'implique pas que les mécanismes correspondant soient découplés. Cela revient à considérer que le potentiel de dissipation est la somme de deux termes, l'un dépendant des variables duales  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\boldsymbol{\pi}$  et  $\bar{Y}$  et l'autre faisant intervenir la variable  $\mathbf{g}$  :

$$\phi = \phi_1(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\pi}, \bar{Y}) + \phi_2(\mathbf{g}), \quad (2.28)$$

et le second principe est satisfait par les inégalités respectives :

$$\phi_1 = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \boldsymbol{\pi} : \dot{\boldsymbol{\kappa}} + \bar{Y} \dot{D} \geq 0 \quad (2.29a)$$

et

$$\phi_2 = \mathbf{g} : \mathbf{q} \geq 0. \quad (2.29b)$$

Si on suppose que le phénomène d'écoulement plastique peut intervenir sans endommagement, de même que l'endommagement peut intervenir sans écoulement plastique macroscopique appréciable (LEMAITRE [54] (1983), JU [32] (1989) et VOYIADJIS & KATTAN [100] (1990)); on aura séparément :

$$\phi_p = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \boldsymbol{\pi} : \dot{\boldsymbol{\kappa}} \geq 0 \quad (2.30a)$$

$$\phi_D = \bar{Y} \dot{D} \geq 0, \quad (2.30b)$$

( $\bar{Y}$ ) étant une forme quadratique définie positive, le second principe impose donc  $\dot{D} \geq 0$ . L'endommagement tel qu'il est défini ne peut que croître ou rester constant (LEMAITRE & CHABOCHE [56] (1985) et JU [32] (1989)).

### 2.3.5. Potentiel de dissipation :

A partir de l'hypothèse de dissipativité normale, on peut établir pour une classe de matériaux élastoplastiques à déformation plastique instantanée, les lois d'évolution de la transformation plastique et des paramètres internes caractérisant l'écroutissage et l'endommagement. Ces lois possèdent les propriétés de normalité et de convexité et constituent ainsi une extension de la théorie des matériaux plastiques standards.

Pour décrire les processus dissipatifs, en particulier l'évolution des paramètres internes, on postule l'existence d'un potentiel de dissipation s'exprimant comme une fonction à valeur scalaire continue et convexe, positive ou nulle dans l'espace des variables flux :

$$\varphi = \varphi(\dot{\epsilon}^p, \dot{\kappa}, \dot{D}, \mathbf{q}). \quad (2.31)$$

Les lois complémentaires relatives aux processus dissipatifs s'expriment par la propriété de normalité :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\epsilon}^p}, \quad \boldsymbol{\pi} = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\kappa}}, \quad \bar{Y} = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{D}}, \quad \mathbf{g} = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{q}}. \quad (2.32)$$

En utilisant la transformée de Legendre-Fenchel on définit le potentiel  $\varphi^*$ , dual de  $\varphi$  par rapport aux variables  $\dot{\epsilon}^p, \dot{\kappa}, \dot{D}$  et  $\mathbf{q}$  :

$$\varphi^*(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\pi}, Y, \mathbf{g}) = \text{Sup}_{(\dot{\epsilon}^p, \dot{\kappa}, \dot{D}, \mathbf{q})} \{ [\boldsymbol{\sigma} : \dot{\epsilon}^p + \boldsymbol{\pi} : \dot{\kappa} + \bar{Y} \dot{D} + \mathbf{g} : \mathbf{q}] - \varphi(\dot{\epsilon}^p, \dot{\kappa}, \dot{D}, \mathbf{q}) \}. \quad (2.33)$$

Les lois complémentaires d'évolution s'écrivent alors :

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \dot{\kappa} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \boldsymbol{\pi}}, \quad \dot{D} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \bar{Y}}, \quad \mathbf{q} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \mathbf{g}}. \quad (2.34)$$

Par la suite on utilisera le potentiel  $\phi^*$  pour décrire l'évolution de la variable interne d'endommagement.

### 2.3.6. Comportement élastique :

Il est supposé pour la partie élastique du comportement du matériau endommagé, que la déformation généralisée élastique est reliée linéairement à la contrainte généralisée effective, en supposant que le paramètre d'écroûissage n'est pas affecté par l'endommagement :

$$\mathbf{e}^e = \mathcal{L} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.35a)$$

$$\mathbf{e}^e = [\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\omega}] = [\mathbf{E}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{Z}^{-1} \boldsymbol{\pi}]. \quad (2.35b)$$

### 2.3.7. Comportement plastique :

Pour la partie plastique du comportement du matériau endommagé, on suppose l'existence d'une surface d'écoulement  $\mathcal{F}$  fixée dans l'espace des contraintes généralisées effectives  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$  de dimension  $(6+r)$ , telle que la propriété suivante est vérifiée :

$$\mathcal{F}(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, \mathbf{k}) \leq 0, \quad (2.36)$$

pour tous les états de contraintes observables effectives  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  et des paramètres internes  $\boldsymbol{\pi}$  admissibles ; où  $\mathbf{k}$  dénote un scalaire indépendant du temps.

Le mouvement de la surface de charges dans l'espace des contraintes observables effectives  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  est représenté par un changement de valeur des paramètres internes  $\boldsymbol{\pi}$ , où la propriété de convexité et la validité de la loi de normalité sont préservées dans l'espace des contraintes et des déformations généralisées (HALPHEN & N. Q. SON [27] (1975)).

Pour un matériau obéissant au critère d'écoulement de von Mises, à écrouissage cinématique, la fonction de charge adopte la forme suivante (LEMAITRE & CHABOCHE [56] (1985)) :

$$\mathcal{F} = \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{\sigma^D}{1-D} - \pi \right) : \left( \frac{\sigma^D}{1-D} - \pi \right) \right]^{1/2} - \sigma_f \leq 0. \quad (2.37)$$

où,  $\sigma^D$  étant le déviateur des contraintes ( $\sigma^D = \sigma - \sigma_H \mathbf{1}$ ),  $\sigma_H$  la contrainte hydrostatique ( $\sigma_H = 1/3 \text{tr}(\sigma)$ ) et  $\sigma_f$  le seuil d'écoulement qui est indépendant du temps.

La règle de normalité et l'hypothèse de convexité de la fonction d'écoulement permettent de généraliser le principe du travail maximal de HILL [29] (1950) (HALPHEN & N. Q. SON [27] (1975) et MARTIN [65] (1975)) :

$$(\mathbf{s} - \mathbf{s}^{(s)}) : \dot{\mathbf{e}}^p \geq 0 \quad (2.38a)$$

ou en notation indicielle :

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)}) \dot{\epsilon}_{ij}^p + (\pi_m - \pi_m^{(s)}) \dot{\kappa}_m \geq 0, \quad (2.38b)$$

qui s'énonce ainsi : dans l'évolution de la transformation plastique et des paramètres internes, la puissance de dissipation de la force réelle ( $\sigma$ ,  $\pi$ ) est supérieure ou égale à celle de toute autre force ( $\sigma^{(s)}$ ,  $\pi^{(s)}$ ) plastiquement admissible.

On retrouve ainsi la forme classique du principe de HILL [29] (1950) en plasticité parfaite (éq. (1.6)), en supprimant le deuxième terme du premier membre de l'inégalité (2.38b) et en particulier, en supposant que  $\dot{\kappa} = 0$ , c'est-à-dire que les paramètres internes n'évoluent pas (plasticité parfaite).

Dans le cas de l'écouissage cinématique, la loi d'écouissage de PRAGER [79] (1959) implique l'écouissage cinématique linéaire, où l'évolution du paramètre interne plastique est identique au signe près à la vitesse de déformation plastique :

$$\dot{\kappa}_m = -\dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad \begin{cases} \text{pour } i = j, & m = \frac{1}{2}(i+j) \\ \text{pour } i \neq j, & m = i+j+1. \end{cases} \quad (2.39)$$

L'évolution du paramètre interne élastique  $\omega$  est donnée par :

$$\dot{\omega}_m = -\dot{\kappa}_m, \quad (2.40)$$

alors que pour un matériau initialement vierge, on a :

$$\omega_m = -\kappa_m, \quad (2.41)$$

à chaque instant "t" (HALPHEN & N. Q. SON [27] (1975), WEICHERT & GROSS-WEEGE [102] (1988) & BORINO & al. [5] (1989)).

Le modèle rhéologique du solide élastoplastique à écouissage cinématique est représenté sur la Fig. 2.4. L'élément caractéristique est montré dans son état initial sur la Fig. 2.4a, dans son état déformé sur la Fig. 2.4b et dans l'état de contraintes observables et de contraintes internes sur la Fig. 2.4c.

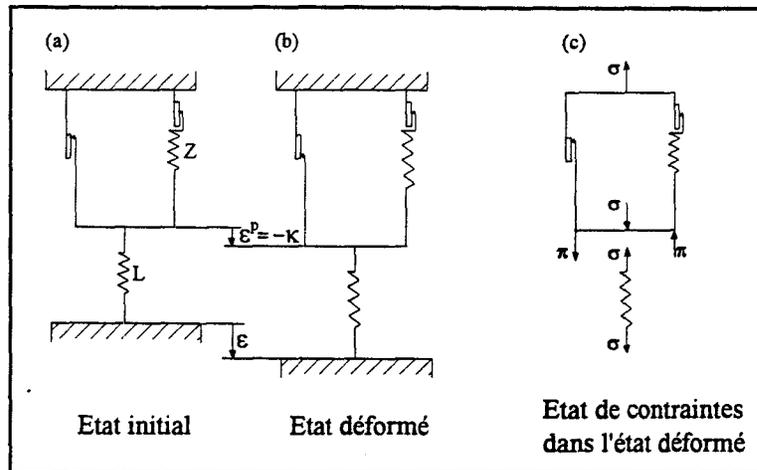


Fig. 2.4 - Représentation unidimensionnelle du modèle rhéologique -

#### 2.4. CONCLUSION :

L'analogie entre la formulation sous forme d'équation différentielle, du problème d'évolution des contraintes dans une structure en matériau élastique parfaitement plastique, avec celle du problème d'évolution des contraintes généralisées dans une structure constituée d'un matériau élastoplastique standard généralisé montre l'intérêt d'introduire cette classe de matériaux. Pour ces derniers tous les résultats que l'on peut obtenir pour les contraintes dans le cas du matériau parfaitement plastique resteront vrais pour les contraintes généralisées. De plus on pourra utiliser pour ces deux types de matériaux les mêmes algorithmes de calcul numérique, en changeant le nombre d'inconnues à déterminer.

Il reste maintenant à définir le potentiel qui peut décrire, le plus fidèlement possible, le phénomène d'endommagement afin de cerner son influence sur le comportement des structures.

---

# CHAPITRE 3

---

**MODELES D'ENDOMMAGEMENT  
PLASTIQUE DUCTILE**

## MODELES D'ENDOMMAGEMENT PLASTIQUE DUCTILE

### 3.1. INTRODUCTION :

Ce chapitre présente deux modèles tridimensionnels d'endommagement plastique ductile, fondés sur la notion de variable continue d'endommagement et sur le concept de contrainte effective. D'un point de vue physique, l'endommagement plastique ductile est la naissance et la coalescence de cavités microscopiques qui se développent sous l'action des grandes déformations locales au voisinage des défauts. Comme pour la plasticité, il est indépendant de la vitesse de chargement et ne fait pas intervenir le temps d'une manière explicite.

Ces modèles établis par LEMAITRE [54] (1983), [55] (1985) et SHICHUN & HUA [93] (1990), utilisent le formalisme de la thermodynamique des processus irréversibles et les aspects phénoménologiques de l'endommagement isotrope. Ils expriment la vitesse d'endommagement en fonction de sa variable associée, de la vitesse de déformation plastique cumulée et de l'endommagement lui-même.

### 3.2. MODELE DE LEMAITRE :

Pour formuler le modèle d'endommagement plastique ductile, dans le cas de l'élasticité isotrope, on postule que le mécanisme d'endommagement est gouverné par l'énergie de déformation élastique totale : énergie de distorsion + énergie de déformation volumique :

$$W^e = W_d^e + W_H^e \quad (3.1)$$

$$W^e = \int_0^{\epsilon^e} \boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\epsilon}^e = \int_0^{\epsilon^{eD}} \boldsymbol{\sigma}^D : d\boldsymbol{\epsilon}^{eD} + 3 \int_0^{\epsilon_H^e} \sigma_H d\epsilon_H^e, \quad (3.2)$$

$\sigma^D$  et  $\varepsilon^{eD}$  étant les déviateurs de  $\sigma$  et  $\varepsilon^e$  ( $\sigma^D = \sigma - \sigma_H \mathbf{1}$ ,  $\varepsilon^{eD} = \varepsilon^e - \varepsilon_H^e \mathbf{1}$ ),  $\sigma_H$  et  $\varepsilon_H^e$  la contrainte et la déformation hydrostatiques ( $\sigma_H = 1/3 \text{tr}(\sigma)$ ,  $\varepsilon_H^e = 1/3 \text{tr}(\varepsilon^e)$ ).

En introduisant la loi d'élasticité linéaire couplée à l'endommagement par la notion de contrainte effective :

$$\varepsilon^{eD} = \frac{1+\nu}{E} \frac{\sigma^D}{1-D}, \quad \varepsilon_H^e = \frac{1-2\nu}{E} \frac{\sigma_H}{1-D}, \quad (3.3)$$

et en supposant que l'endommagement ne varie pas dans le domaine élastique :  $d\sigma/dD = 0$ , on obtient :

$$W^e = \frac{1}{2} \left[ \frac{1+\nu}{E} \frac{\sigma^D : \sigma^D}{1-D} + 3 \frac{1-2\nu}{E} \frac{\sigma_H^2}{1-D} \right] \quad (3.4)$$

ou, avec la contrainte équivalente de von Mises,  $\sigma_{eq} = \left( \frac{3}{2} \sigma^D : \sigma^D \right)^{1/2}$  :

$$W^e = \frac{1}{2E(1-D)} \left[ \frac{2}{3} (1+\nu) \sigma_{eq}^2 + 3(1-2\nu) \sigma_H^2 \right]. \quad (3.5)$$

Comme pour la contrainte équivalente de plasticité, on définit la contrainte équivalente d'endommagement  $\sigma^*$  en écrivant que l'énergie d'un état tridimensionnel est égale à celle de l'état unidimensionnel équivalent, défini par  $\sigma^*$ , pour lequel ( $\sigma_{eq} = \sigma^*$ ,  $\sigma_H = 1/3 \sigma^*$ ) :

$$\frac{\sigma^{*2}}{2E(1-D)} = \frac{1}{2E(1-D)} \left[ \frac{2}{3} (1+\nu) \sigma_{eq}^2 + 3(1-2\nu) \sigma_H^2 \right] \quad (3.6a)$$

ou

$$\sigma^* = \left[ \frac{2}{3} (1+\nu) \sigma_{eq}^2 + 3(1-2\nu) \sigma_H^2 \right]^{1/2}. \quad (3.6b)$$

Le potentiel thermodynamique  $\Psi$  quadratique par rapport aux composantes de la déformation thermoélastique et linéaire en  $(1 - D)$  permet de définir la variable  $\bar{Y}$  associée à  $D$  (voir chapitre 2) qui représente le taux d'énergie élastique restituée lors d'un accroissement d'endommagement à contrainte et température constantes :

$$\bar{Y} = \frac{W^e}{1 - D} = \frac{\sigma^{*2}}{2E(1 - D)^2}. \quad (3.7)$$

On constate que les variables  $\bar{Y}$  et  $\sigma^*$  sont des variables équivalentes, d'où l'expression du taux de restitution d'énergie élastique :

$$\bar{Y} = \frac{\sigma_{eq}^2}{2E(1 - D)^2} \left[ \frac{2}{3}(1 + \nu) + 3(1 - 2\nu) \left( \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} \right)^2 \right]. \quad (3.8)$$

Le potentiel de dissipation  $\phi^*$ , permet d'écrire la loi d'évolution de l'endommagement en fonction des variables flux qui interviennent dans la dissipation : ici, le taux de déformation plastique cumulée  $\dot{p} = (2/3 \dot{\epsilon}^p : \dot{\epsilon}^p)^{1/2}$  et le taux de restitution d'énergie d'endommagement ( $\bar{Y}$ ) :

$$\dot{D} = \frac{\partial \phi^*}{\partial \bar{Y}}(\dot{p}, \bar{Y}). \quad (3.9)$$

Le potentiel d'endommagement est choisi quadratique en ( $\bar{Y}$ ) et linéaire en  $\dot{p}$  :

$$\phi^* = \frac{S_0}{2} \left( \frac{\bar{Y}}{S_0} \right)^2 \dot{p} \quad (3.10)$$

où,  $S_0$  est un coefficient caractéristique du matériau et fonction de la température.

L'équation constitutive de l'évolution de l'endommagement est donnée par la règle de normalité de ce potentiel (éq. (3.9)) :

$$\dot{D} = \left( \frac{\bar{Y}}{S_0} \right) \dot{p}. \quad (3.11)$$

L'endommagement ductile n'intervient qu'au-delà d'un seuil ( $p_D$ ). On peut alors considérer que l'érouissage est saturé dans ce domaine, c'est-à-dire que le comportement du matériau non endommagé équivalent serait parfaitement plastique. Cette hypothèse simplificatrice permet l'intégration analytique du modèle et d'aboutir à une loi d'évolution linéaire en fonction de la déformation plastique cumulée.

On remplace dans l'expression de ( $\bar{Y}$ ), la contrainte équivalente  $\sigma_{eq}$  par son expression tirée de la loi d'érouissage de Ramberg-Osgood couplée à l'endommagement :

$$p = \left[ \frac{\sigma_{eq}}{(1-D)K} \right]^M \quad \text{ou} \quad \frac{\sigma_{eq}}{1-D} = K p^{\frac{1}{M}} \quad (3.12)$$

où, K et M sont les coefficients caractéristiques de chaque matériau. On obtient le modèle différentiel général d'évolution de l'endommagement qui dépend de trois coefficients : ( $K^2/2ES_0$ ),  $\nu$  et M et qui peut être intégré dans chaque cas particulier d'histoire de chargement représenté par  $p(t)$  et  $\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}}(t)$  :

$$\dot{D} = \left( \frac{K^2}{2ES_0} \left[ \frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu) \left( \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} \right)^2 \right] p^{\frac{2}{M}} \right) \dot{p}. \quad (3.13)$$

Un cas intéressant est celui du chargement proportionnel pour lequel le rapport de triaxialité des contraintes  $\sigma_H/\sigma_{eq}$  reste constant. On peut alors effectuer une intégration

explicite, en introduisant la condition initiale définie par le seuil d'endommagement  $p_D$ ,  $p \leq p_D \Rightarrow D = 0$  ; on obtient :

$$D = \frac{K^2}{2ES_0} \left[ \frac{2}{3} (1+\nu) + 3(1-2\nu) \left( \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} \right)^2 \right] \frac{M}{2+M} \left\langle p^{\frac{2+M}{M}} - p_D^{\frac{2+M}{M}} \right\rangle, \quad (3.14)$$

avec

$$\begin{cases} \langle x \rangle = x & \text{si } x > 0 \\ \langle x \rangle = 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

L'endommagement de plasticité ductile se développe essentiellement lors des grandes déformations plastiques, c'est-à-dire pour des valeurs de  $M$  assez élevées puisque un comportement parfaitement plastique correspond à  $M$  infini. Dans ces conditions on peut faire l'approximation  $M/(2+M) \approx 1$ .

En introduisant la déformation cumulée à rupture  $p_R$  pour laquelle  $D = D_c$  "endommagement critique à rupture" :

$$D_c = \frac{K^2}{2ES_0} \left[ \frac{2}{3} (1+\nu) + 3(1-2\nu) \left( \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} \right)^2 \right] \langle p_R - p_D \rangle, \quad (3.15)$$

et en reportant dans l'expression de  $D$  (éq. (3.14)), on obtient :

$$D = D_c \left\langle \frac{p - p_D}{p_R - p_D} \right\rangle. \quad (3.16)$$

En supposant que la triaxialité des contraintes agit de la même manière sur le seuil d'endommagement  $p_D$  et sur la déformation à rupture  $p_R$ , le rapport  $p_D/p_R$  est constant pour chaque matériau et égal à sa valeur en unidimensionnel  $\varepsilon_D/\varepsilon_R$ , en confondant déformation totale et plastique. Le modèle ne fait intervenir que deux constantes  $D_c$  et  $\varepsilon_D/\varepsilon_R$ , et une

fonction  $p_R$  que l'on peut encore exprimer en fonction de la déformation à rupture unidimensionnelle  $\varepsilon_R$  qui correspond à un rapport de triaxialité  $\sigma_H/\sigma_{eq} = 1/3$  :

$$p_R\left(\frac{1}{3}\right) = \varepsilon_R = \left(\frac{2ES_0}{K^2}\right) \frac{D_c}{1 - \varepsilon_D/\varepsilon_R} \quad (3.17a)$$

$$p_R\left(\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}}\right) = \varepsilon_R \left[ \frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu)\left(\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}}\right)^2 \right]^{-1} \quad (3.17b)$$

et finalement, on exprime le modèle d'endommagement plastique ductile tridimensionnel en déformation,

- sous la forme différentielle (chargement quelconque):

$$\dot{D} = \frac{D_c}{\varepsilon_R - \varepsilon_D} \left[ \frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu)\left(\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}}\right)^2 \right] \dot{p} \quad (3.18)$$

- sous la forme intégrée (chargement radial):

$$D \simeq \frac{D_c}{\varepsilon_R - \varepsilon_D} \left\langle p \left[ \frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu)\left(\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}}\right)^2 \right] - \varepsilon_D \right\rangle. \quad (3.19)$$

Une conséquence importante de cette formulation est l'influence de la triaxialité des contraintes sous la forme de la fonction  $\left[ \frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu)\left(\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}}\right)^2 \right]$ .

### 3.3. MODELE DE SHICHUN-HUA :

Récemment SHICHUN & HUA [93] (1990) proposaient un nouveau modèle d'endommagement ductile basé aussi sur la variable d'endommagement, l'hypothèse d'isotropie, la contrainte effective et la déformation cumulée. Le modèle tient compte du signe de la contrainte hydrostatique dans le rapport de triaxialité, ce qui n'est pas le cas dans

le modèle de LEMAITRE [54] (1983), [55] (1985), où le rapport de triaxialité est quadratique.

SHICHUN & HUA [93] (1990) expriment le potentiel plastique  $\Psi$ , dans lequel l'endommagement est pris en compte, comme étant le potentiel thermodynamique, donné par l'expression suivante :

$$\Psi = \frac{1}{\rho} \int_0^p \sigma^* dp \quad (3.20)$$

où,  $\sigma^*$  est comme auparavant, la contrainte équivalente d'endommagement et  $p$  la déformation plastique cumulée.

La contrainte équivalente d'endommagement  $\sigma^*$  est exprimée par la relation suivante:

$$\sigma^* = A \left[ \exp\left(B \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}}\right) \right] \sigma_{eq} \quad (3.21)$$

où,  $\sigma_H$  est la contrainte hydrostatique, et  $A$  et  $B$  des coefficients caractéristiques du matériau.

En substituant l'équation (3.21) dans (3.20), on déduit :

$$\Psi = \frac{1}{\rho} \int_0^p A \left[ \exp\left(B \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}}\right) \right] \sigma_{eq} dp. \quad (3.22)$$

Or de la loi d'érouissage de Ramberg-Osgood couplée à l'endommagement on a  $\sigma_{eq} = (1-D) K p^{\frac{1}{M}}$ , donc le potentiel plastique prend la forme suivante :

$$\Psi = \frac{1}{\rho} \int_0^p A \left[ \exp\left(B \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}}\right) \right] [(1-D) K p^{\frac{1}{M}}] dp. \quad (3.23)$$

Pour un chargement proportionnel,  $\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}}$  est constant, et l'équation (3.23) devient :

$$\Psi = \frac{K}{\rho} A \left[ \exp\left(B \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}}\right) \right] \int_0^p (1-D) K p^{\frac{1}{M}} dp. \quad (3.24)$$

D'où l'expression du taux de restitution d'énergie :

$$\bar{Y} = -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial D} = AK \left[ \exp\left(B \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}}\right) \right] \frac{M}{M+1} p^{\frac{M+1}{M}}. \quad (3.25)$$

Le potentiel de dissipation est pris de la forme suivante :

$$\varphi^* = \frac{S_0}{2} \frac{\bar{Y}^2}{p} \dot{p}. \quad (3.26)$$

Le modèle différentiel d'évolution de l'endommagement est donné par la loi de normalité :

$$\dot{D} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \bar{Y}} = S_0 \frac{\bar{Y}}{p} \dot{p}, \quad (3.27a)$$

et en substituant l'expression de  $(\bar{Y})$  dans l'équation (3.27a), on déduit :

$$\dot{D} = S_0 AK \left[ \exp\left(B \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}}\right) \right] \frac{M}{M+1} p^{\frac{1}{M}} \dot{p}. \quad (3.27b)$$

Comme précédemment, dans le cas des grandes déformations plastiques,  $M$  est très grand. Si  $M \rightarrow \infty$ , alors  $M/(M+1) \approx 1$  et le paramètre d'endommagement s'écrit :

- sous la forme différentielle :

$$\dot{D} = S_0 AK \left[ \exp\left(B \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}}\right) \right] \dot{p} \quad (3.28)$$

- sous la forme intégrée :

$$D = S_0 AK \left[ \exp \left( B \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} \right) \right] \langle p - p_D \rangle. \quad (3.29)$$

Pour  $D = D_c$  on a  $p = p_R$ , d'où :

$$D_c = S_0 AK \left[ \exp \left( B \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} \right) \right] \langle p_R - p_D \rangle. \quad (3.30)$$

Dans le cas unidimensionnel de traction  $\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} = \frac{1}{3}$ , et :

$$D_c = S_0 AK \left[ \exp \left( \frac{1}{3} B \right) \right] \langle \varepsilon_R - \varepsilon_D \rangle. \quad (3.31)$$

En reportant l'équation (3.31) dans les équations (3.28) et (3.29), on obtient :

$$\dot{D} = \frac{D_c}{\varepsilon_R - \varepsilon_D} \left\{ \exp \left[ B \left( \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} - \frac{1}{3} \right) \right] \right\} \dot{p} \quad (3.32)$$

et

$$D = \frac{D_c}{\varepsilon_R - \varepsilon_D} \left\{ \exp \left[ B \left( \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} - \frac{1}{3} \right) \right] \right\} \langle p - p_D \rangle. \quad (3.33)$$

On a vu que  $p_D/p_R = \varepsilon_D/\varepsilon_R$ , ce qui permet d'exprimer le modèle d'endommagement dans le cas d'un chargement proportionnel par :

$$D = \frac{D_c}{\varepsilon_R - \varepsilon_D} \left\langle \exp \left[ B \left( \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} - \frac{1}{3} \right) \right] p - \varepsilon_D \right\rangle. \quad (3.34)$$

En se référant au modèle de RICE & TRACEY [83] (1969), il est recommandé de prendre 3/2 comme valeur du coefficient B :

$$D = \frac{D_c}{\varepsilon_R - \varepsilon_D} \left\langle \exp \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} - \frac{1}{3} \right) \right] p - \varepsilon_D \right\rangle. \quad (3.35)$$

Dans le cas particulier de la traction simple  $p = \varepsilon$  et  $\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} = \frac{1}{3}$ , les équations (3.19) et (3.35) s'écrivent :

$$D = D_c \left\langle \frac{\varepsilon - \varepsilon_D}{\varepsilon_R - \varepsilon_D} \right\rangle. \quad (3.36)$$

Rappelons que cette modélisation dépend de trois constantes caractéristiques du matériau considéré,  $D_c$ ,  $\varepsilon_D$  et  $\varepsilon_R$ , toutes identifiées par un essai de traction.

### 3.4. IDENTIFICATION DES PARAMETRES :

L'endommagement n'est pas directement accessible aux mesures. Son évaluation quantitative, est liée à la définition de la variable choisie pour représenter le phénomène. Ayant choisi une définition fondée sur le concept de contrainte effective, associée au principe d'équivalence en déformation, les mesures qui en découlent sont essentiellement liées au couplage déformation-endommagement, c'est-à-dire à la modification des caractéristiques mécaniques du matériau engendrée par l'endommagement.

En reprenant donc, la définition de D et le concept de contrainte effective appliqué à l'élasticité : il est possible de mesurer D à travers la variation du module d'élasticité.

En écrivant encore la loi d'élasticité endommagée unidimensionnelle :

$$\tilde{\sigma} = E\varepsilon^e \quad \text{ou} \quad \sigma = (1 - D)E\varepsilon^e, \quad (3.37)$$

$E$  étant le module de Young du matériau vierge de tout endommagement ; la quantité :

$$\tilde{E} = (1 - D)E, \quad (3.38)$$

peut être considérée comme le module d'élasticité du matériau endommagé. Si  $E$  est connu, toute mesure de raideur élastique permet d'atteindre l'endommagement par  $D = 1 - \sigma/(E\varepsilon^e)$  et avec  $\sigma = \tilde{E}\varepsilon^e$ , on trouve :

$$D = 1 - \frac{\tilde{E}}{E}. \quad (3.39)$$

La technique de mesure de  $\tilde{E}$  est la suivante (Fig. 3.1) :

- utilisation d'éprouvette à section centrale affaiblie pour bien localiser l'endommagement ;
- mesure de déformation par jauges de faibles dimensions, ou par capteur de déplacement associé à une base de mesure aussi petite que possible ;
- évaluation du module d'élasticité lors des décharges élastiques.

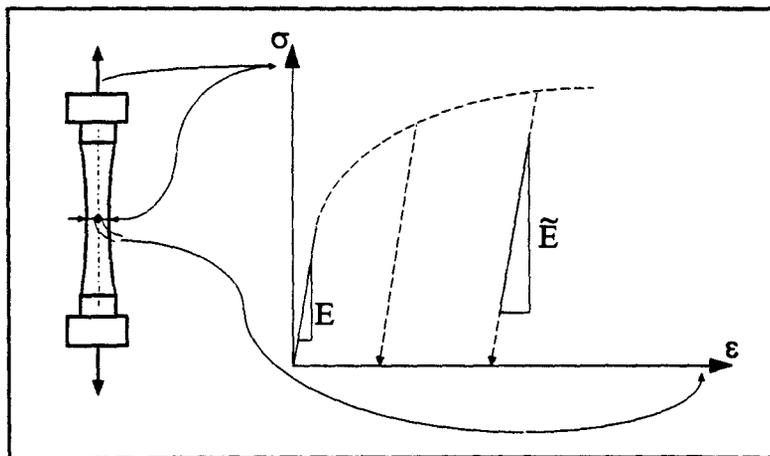


Fig. 3.1 - Mesure du module d'élasticité endommagé -

La méthode d'identification a été appliquée sur de nombreux matériaux, et elle a permis de constater que la variable d'endommagement  $D$  varie linéairement avec la déformation  $\varepsilon$  (Fig. 3.2). Le modèle d'endommagement unidimensionnel (éq. (3.36)) rend assez bien compte des résultats expérimentaux et il traduit bien la droite de la figure 3.2 (LEMAITRE [54] (1983) et SHICHUN & HUA [93] (1990)).

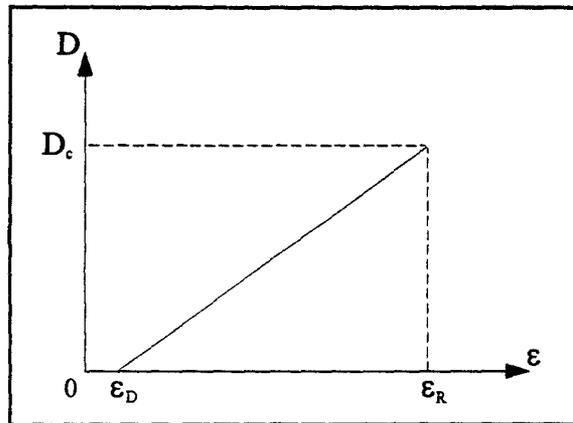


Fig. 3.2 - Evolution de l'endommagement plastique ductile -

Les valeurs des coefficients caractéristiques de certains matériaux sont données sur le tableau ci-dessous (établies au Laboratoire de Mécanique et Technologie de Cachan) :

Matériau	Température (°C)	$\varepsilon_D$	$\varepsilon_R$	$D_c$
Cuivre 99,9 %	20	0,35	1,04	0,85
Alliage AU 4 G 1	20	0,03	0,25	0,23
Acier E 24	20	0,50	0,88	0,17
Acier XC 38	20	0	0,56	0,22
Acier 30 CD 4	20	0,02	0,37	0,24
Alliage INCO 718	20	0,02	0,29	0,24

**3.5. CONCLUSION :**

L'hypothèse principale faite pour ces deux modèles est que le comportement du matériau non endommagé équivalent serait parfaitement plastique, c'est-à-dire que le l'écroutissement est saturé une fois que l'endommagement dépasse son seuil initial.

Que ce soit dans les petites ou les grandes transformations, ces deux modèles restent valables et applicables pour modéliser localement l'endommagement.

---

# CHAPITRE 4

---

**EXTENSION DU THEOREME  
STATIQUE D'ADAPTATION**

## EXTENSION DU THEOREME STATIQUE D'ADAPTATION

### 4.1. INTRODUCTION :

Dans le présent chapitre, on propose une extension du théorème statique d'adaptation pour les structures endommageables avec la prise en compte de l'écroissage cinématique linéaire limité, sous chargement thermique et mécanique combiné. L'endommagement pris en compte dans cette étude, est l'endommagement plastique ductile isotrope caractérisé par un paramètre caché au sens de la thermodynamique. On exprime, en utilisant le critère d'écoulement de von Mises, la borne supérieure du paramètre d'endommagement selon les modèles définis au chapitre 3.

### 4.2. THEOREME STATIQUE D'ADAPTATION :

#### 4.2.1. Hypothèses et domaine de chargement :

On considère un corps  $\mathcal{B}$  de volume  $V$  et de frontière  $S$  suffisamment régulière soumis à des forces de volume  $\mathbf{f}^d$  et des forces de surface  $\mathbf{p}^d$  sur une partie  $S_p$  de sa frontière. Sur la partie complémentaire  $S_u$  les déplacements  $\mathbf{u}^d$  sont imposés. La température prescrite  $\mathcal{G}^d$  est la différence entre la température actuelle ( $T$ ) et la température de référence ( $T_0$ ) pour laquelle le corps  $\mathcal{B}$  est libre de contraintes pour les conditions aux limites mécaniques nulles. Les sollicitations  $f_i^d(x, t)$ ,  $p_i^d(x, t)$ ,  $\mathcal{G}^d(x, t)$  et  $u_i^d(x, t)$ , varient localement entre des limites fixées :

$$\begin{aligned} \hat{f}^-(x) \leq f^d(x, t) \leq \hat{f}^+(x) \quad \text{dans } V, \quad \hat{\mathcal{G}}^-(x) \leq \mathcal{G}^d(x, t) \leq \hat{\mathcal{G}}^+(x) \quad \text{dans } V \text{ et sur } S, \\ \hat{u}^-(x) \leq u^d(x, t) \leq \hat{u}^+(x) \quad \text{sur } S_u, \quad \hat{p}^-(x) \leq p^d(x, t) \leq \hat{p}^+(x) \quad \text{sur } S_p \end{aligned} \quad (4.1)$$

Dans ce qui suit, on introduit la notion de "problème de référence purement élastique", qui diffère du problème d'origine seulement par le fait que le matériau réagit dans ce cas d'une manière purement élastique avec le même module d'élasticité, comme pour la partie élastique du comportement du matériau dans le problème d'origine (Fig. 4.1). Toutes les quantités relatives à ce problème de référence sont indiquées par la souscription "c". On suppose que la solution à ce problème de référence est donnée, et que le système d'équations suivant est vérifié :

$$\sigma_{ij,j}^c = -f_i^d \quad \text{dans } V \quad (4.2.a)$$

$$n_j \sigma_{ij}^c = p_i^d \quad \text{sur } S_p \quad (4.2.b)$$

$$u_i^c = u_i^d \quad \text{sur } S_u \quad (4.2.c)$$

$$\epsilon_{ij}^c = \frac{1}{2} (u_{i,j}^c + u_{j,i}^c) \quad \text{dans } V \quad (4.2.d)$$

$$\epsilon_{ij}^c = E_{ijkl}^{-1} \tilde{\sigma}_{kl}^c + \alpha_{ij} \vartheta \delta_{ij} \quad \text{dans } V. \quad (4.2.e)$$

Les paramètres internes décrivant l'état du matériau, s'annulent pour le problème de référence purement élastique, donc les déformations et les contraintes généralisées sont données par :

$$e^c = e^{ec} = [\epsilon^c, 0], \quad e^{pc} = [0, 0]$$

$$s^c = [\sigma^c, 0]. \quad (4.3)$$

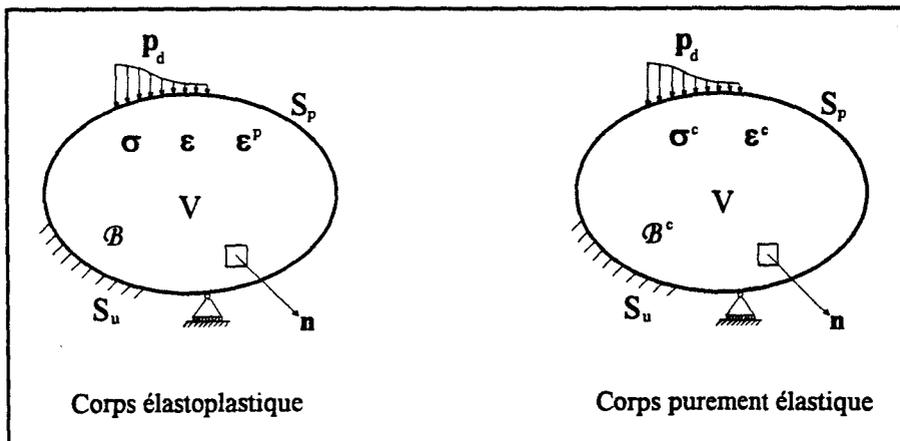


Fig. 4.1

#### 4.2.2. Enoncé du théorème :

Le corps  $\mathcal{B}$  s'adapte en respectant l'histoire de chargement donné en (4.1), s'il existe un champ de contraintes résiduelles effectives indépendant du temps  $\overset{\circ}{\rho}$  et un champ de paramètres internes (back-stress)  $\overset{\circ}{\pi}$  indépendant du temps ( $\overset{\circ}{\mathfrak{S}}(x) = [\overset{\circ}{\rho}(x), \overset{\circ}{\pi}(x)]$ ), tels que pour le temps  $t > 0$ , les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\overset{\circ}{\rho}_{ij,j} = 0 \quad \text{dans } V \quad (4.4.a)$$

$$\mathbf{n}_j \overset{\circ}{\rho}_{ij} = 0 \quad \text{sur } S_p \quad (4.4.b)$$

$$\mathcal{F}(\overset{\circ}{\mathfrak{S}}^c(x, t) + \overset{\circ}{\mathfrak{S}}(x), \sigma_F(\mathcal{B})) < 0 \quad \text{dans } V. \quad (4.4.c)$$

#### 4.2.3. Démonstration du théorème :

Pour démontrer le théorème d'adaptation, on introduit une forme quadratique de l'énergie libre  $W$ , définie par :

$$W = \frac{1}{2} \int_{(V)} [(\rho_{ij} - \overset{\circ}{\rho}_{ij}) \tilde{E}_{ijkl}^{-1} (\rho_{kl} - \overset{\circ}{\rho}_{kl}) + (\pi_m - \overset{\circ}{\pi}_m) Z_{mm}^{-1} (\pi_n - \overset{\circ}{\pi}_n)] dV \quad (4.5)$$

$W$  n'est pas négative, puisque  $(1-D)$  est un scalaire positif et les tenseurs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{Z}$  sont définis positifs. Dans l'équation (4.5),  $\rho$  représente la différence entre le vrai état de contrainte inconnu ( $\sigma$ ) dépendant du temps dans le corps  $\mathcal{B}$  et l'état de contrainte donné ( $\sigma^c$ ) dépendant du temps dans le corps de comparaison purement élastique  $\mathcal{B}^c$ , telle que :

$$\rho_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^c \quad (4.6a)$$

$$\overset{\circ}{\rho}_{ij} = \sigma_{ij}^{(s)} - \sigma_{ij}^c \quad (4.6b)$$

$$\overset{\circ}{\pi}_m = \pi_m^{(s)} \quad (4.6c)$$

$$\rho_{ij} = (1-D) \tilde{\rho}_{ij} \Rightarrow \dot{\rho}_{ij} = (1-D) \dot{\tilde{\rho}}_{ij} - \dot{D} \tilde{\rho}_{ij} \quad (4.6d)$$

Ici,  $\mathfrak{s} = [\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\pi}]$  est l'état de contraintes généralisées actuel et  $\mathfrak{s}^{(s)} = [\boldsymbol{\sigma}^{(s)}, \boldsymbol{\pi}^{(s)}]$  est un état de contraintes généralisées de sécurité défini par le fait que le critère de Hill généralisé est satisfait au sens strict (éq. (2.38)).

La dérivée par rapport au temps de l'équation (4.5) donne avec les équations (4.6) :

$$\begin{aligned} \dot{W} = & \int_{(V)} [(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)})E_{ijkl}^{-1}\dot{\tilde{p}}_{kl} + (\pi_m - \pi_m^{(s)})Z_{mn}^{-1}\dot{\tilde{\pi}}_n]dV \\ & - \frac{1}{2} \int_{(V)} [(\tilde{\sigma}_{ij} - \tilde{\sigma}_{ij}^{(s)})E_{ijkl}^{-1}(\tilde{\sigma}_{kl} - \tilde{\sigma}_{kl}^{(s)})] \dot{D} dV \end{aligned} \quad (4.7)$$

où,  $\dot{\tilde{p}}$ ,  $\dot{\tilde{\pi}}$  et  $\dot{D}$  sont respectivement, les dérivées temporelles de la contrainte résiduelle effective, de la contrainte interne et de la variable d'endommagement.

Par analogie avec l'équation (4.6a), on définit les déformations induites par les contraintes résiduelles :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^r = \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^e - \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^c \quad (4.8)$$

avec

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^e = E_{ijkl}^{-1} \tilde{\sigma}_{kl} + \alpha_{\vartheta} \vartheta \delta_{ij}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^c = E_{ijkl}^{-1} \tilde{\sigma}_{kl}^c + \alpha_{\vartheta} \vartheta \delta_{ij}.$$

en supposant que les déformations dues au chargement thermique dans le corps réel  $\mathcal{B}$  et dans le corps de référence  $\mathcal{B}^c$  sont identiques, on déduit alors la relation constitutive suivante :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^r &= E_{ijkl}^{-1}(\tilde{\sigma}_{kl} - \tilde{\sigma}_{kl}^c) \\ &= E_{ijkl}^{-1} \tilde{p}_{kl}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

A partir des définitions suivantes :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^r = \dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}_{ij}^p - \dot{\epsilon}_{ij}^c, \quad \dot{\kappa}_m + \dot{\omega}_m = 0 \quad (4.10)$$

où

$$\dot{\epsilon}_{ij}^r = E_{ijkl}^{-1} \dot{\tilde{D}}_{kl}, \quad \dot{\omega}_m = Z_{mn}^{-1} \dot{\tilde{\pi}}_n \quad (4.11)$$

et en posant

$$\Delta \bar{Y} = \frac{1}{2} [(\tilde{\sigma}_{ij} - \tilde{\sigma}_{ij}^{(s)}) E_{ijkl}^{-1} (\tilde{\sigma}_{kl} - \tilde{\sigma}_{kl}^{(s)})], \quad (4.12)$$

on déduit :

$$\dot{W} = \int_{(V)} [(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)}) (\dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}_{ij}^p - \dot{\epsilon}_{ij}^c) - (\pi_m - \pi_m^{(s)}) \dot{\kappa}_m] dV - \int_{(V)} \Delta \bar{Y} \dot{D} dV. \quad (4.13)$$

Du théorème de divergence de Gauss, il suit que :

$$\begin{aligned} \int_{(V)} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)}) (\dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}_{ij}^c) dV &= \int_{(V)} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)}) (\dot{u}_{i,j} - \dot{u}_{i,j}^c) dV \\ &= - \int_{(V)} (\sigma_{ij,j} - \sigma_{ij,j}^{(s)}) (\dot{u}_i - \dot{u}_i^c) dV \\ &\quad + \int_{(S)} n_j (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)}) (\dot{u}_i - \dot{u}_i^c) dS = 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Finalement, on a :

$$\begin{aligned} \dot{W} &= - \int_{(V)} [(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)}) \dot{\epsilon}_{ij}^p + (\pi_m - \pi_m^{(s)}) \dot{\kappa}_m] dV - \int_{(V)} \Delta \bar{Y} \dot{D} dV \\ &= - \int_{(V)} (\mathbf{s} - \mathbf{s}^{(s)}) \dot{\epsilon}^p dV - \int_{(V)} \Delta \bar{Y} \dot{D} dV. \end{aligned} \quad (4.15)$$

L'endommagement tel qu'il a été défini ne peut que croître ou rester constant et comme  $(\Delta \bar{Y})$  est définie positive, il suit des inégalités (2.30b) et (2.38) que  $\dot{W} \leq 0$ . A partir de l'inégalité (4.4c),  $\dot{W}$  est égale à zéro seulement si  $\dot{\epsilon}^p = 0$  et  $\dot{D} = 0$ , autrement elle est négative. Comme  $W$  est définie quadratique positive, les dissipations plastique et d'endommagement sont limitées, aussi, l'écoulement plastique ( $\dot{\epsilon}^p = [\dot{\epsilon}^p, \dot{\kappa}]$ ) et l'endommagement ( $\dot{D}$ ) cessent d'évoluer après une durée déterminée, s'il existe un champ de contraintes généralisées indépendant du temps  $\overset{\circ}{\mathfrak{S}}(x)$  vérifiant les relations (4.4). On dit dans ce cas que le corps  $\mathcal{B}$  s'adapte.

Donc, on peut conclure que :

$$W(0) \geq W(t) \quad \text{pour } t > 0$$

et

$$\dot{W} \rightarrow 0 \text{ et } W(t) \rightarrow \text{Cste} \quad \text{pour } t \rightarrow \infty.$$

De manière identique au chapitre 1, on exprime la borne de l'énergie de dissipation plastique et de l'endommagement, en introduisant le coefficient de sécurité  $\alpha > 1$  :

– L'énergie de dissipation plastique s'exprime par :

$$W_p = \int_0^t \int_{(V)} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p dV dt, \quad (4.16)$$

– L'énergie de dissipation due au paramètre d'écrouissage s'exprime par :

$$W_k = \int_0^t \int_{(V)} \pi_m \dot{\kappa}_m dV dt, \quad (4.17)$$

– L'énergie de dissipation due au paramètre de l'endommagement s'exprime par :

$$W_d = \int_0^t \int_{(V)} \bar{Y} \dot{D} \, dV dt. \quad (4.18)$$

Par l'utilisation du critère généralisé de Hill (éq. (2.38)), on exprime la borne de l'énergie de dissipation, en supposant que l'endommagement et le phénomène de l'écoulement plastique sont indépendants :

– pour l'énergie de dissipation plastique :

$$\begin{aligned} W_p &\leq \frac{\alpha}{\alpha - 1} \int_0^t \int_{(V)} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)}) \dot{\epsilon}_{ij}^p \, dV dt \\ &\leq \frac{\alpha}{\alpha - 1} \int_{(V)} \frac{1}{2} \overset{\circ}{\rho}_{ij} E_{ijkl}^{-1} \overset{\circ}{\rho}_{kl} \, dV, \end{aligned} \quad (4.19)$$

– pour l'énergie de dissipation due au paramètre d'écrouissage :

$$\begin{aligned} W_k &\leq \frac{\alpha}{\alpha - 1} \int_0^t \int_{(V)} (\pi_m - \pi_m^{(s)}) \dot{\kappa}_m \, dV dt \\ &\leq \frac{\alpha}{\alpha - 1} \int_{(V)} \frac{1}{2} \overset{\circ}{\pi}_m Z_{mn}^{-1} \overset{\circ}{\pi}_n \, dV, \end{aligned} \quad (4.20)$$

– pour l'énergie de dissipation due au paramètre de l'endommagement :

$$\begin{aligned} W_d &\leq \frac{\alpha}{\alpha - 1} \int_0^t \int_{(V)} \Delta \bar{Y} \dot{D} \, dV dt \\ &\leq \frac{\alpha}{\alpha - 1} \int_{(V)} \frac{1}{2} \overset{\circ}{\rho}_{ij} E_{ijkl}^{-1} \overset{\circ}{\rho}_{kl} \, dV, \end{aligned} \quad (4.21)$$

avec  $\overset{\circ}{\rho} = \frac{\dot{\rho}}{1 - D_{LIM}}$

où,  $D_{LIM}$  correspond à l'endommagement limite que la structure peut atteindre à l'adaptation, son expression est donnée au paragraphe 4.4.

### 4.3. FACTEUR DE CHARGES A L'ADAPTATION :

Pour déterminer le facteur de charges à l'adaptation ( $\alpha_{ad}$ ), on doit tenir compte de deux critères d'effondrement :

- le critère d'effondrement par déformations plastiques progressives,
- le critère d'effondrement par déformations plastiques alternées.

Pour chaque critère, on détermine le facteur de charges correspondant, respectivement ( $\alpha_{pp}$ ) et ( $\alpha_{ap}$ ), qui définit ainsi le domaine d'évolution des charges pour lequel on vérifie qu'une quelconque histoire de charges ne peut conduire à la déstabilisation du processus d'adaptation, et le facteur de charges à l'adaptation résulte de la plus petite valeurs des deux facteurs, c'est-à-dire l'intersection entre les deux domaines de charges.

On note par  $\mathcal{D}$ , le domaine de charges externes, défini par :

$$\mathcal{D} = \left\{ P = \sum_{i=1}^n \mu_i P_i, \mu_i \in [\mu_i^-, \mu_i^+] \right\} \quad (4.22)$$

où, les  $P_i$  sont les charges généralisées fixées et indépendantes (ex. : les forces de volume, les tractions de surface, les déplacements imposés, variation de température ou la combinaison de ces charges) et  $\mu_i$  sont les multiplicateurs de charges avec respectivement  $\mu_i^+$  et  $\mu_i^-$ , la borne supérieure et la borne inférieure ( $i = 1, \dots, n$ ).

Le domaine  $\mathcal{D}$  a la propriété de convexité, c'est-à-dire, pour tout  $P_1$  et  $P_2$  appartenant à  $\mathcal{D}$ , toutes les valeurs de  $P$  définies par :

$$P = \theta P_1 + (1 - \theta) P_2, \theta \in [0, 1] \quad (4.23)$$

appartiennent aussi à  $\mathcal{D}$ .

Il y a adaptation dans le domaine de charges  $\mathcal{D}$  si et seulement si il y a adaptation dans le domaine  $\mathcal{D}$ , enveloppe convexe du domaine  $\mathcal{D}$ , défini par :

$$\mathcal{D} = \left\{ P = \sum_{i=1}^n \mu_i P_i, \quad \mu_i = \mu_i^- \text{ ou } \mu_i^+ \right\}. \quad (4.24)$$

Chaque élément  $P$  de  $\mathcal{D}$  peut s'écrire par :

$$P = \sum_{i=1}^m \theta_i \mathcal{P}_i \quad (4.25)$$

où

$$\sum_{i=1}^m \theta_i = 1, \quad \theta_i \geq 0 \quad \forall i \quad (4.26)$$

avec  $m = 2^n$  et les  $\mathcal{P}_i$ , les points de  $\mathcal{D}$ , sont les points anguleux de  $\mathcal{D}$ . Le cas bidimensionnel est montré sur la figure 4.2.

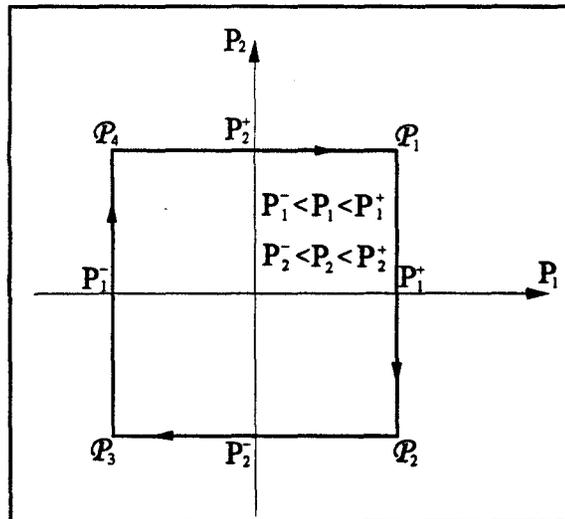


Fig. 4.2 - Domaine de variation des charges -

### 4.3.1. Facteur de charges vis-à-vis de la plasticité accumulée :

Le facteur de charges contre l'effondrement par déformations plastiques progressives ou accumulées ( $\alpha_{pp}$ ) est la solution du problème d'optimisation suivant :

$$\alpha_{pp} = \max_{\mathring{\mathfrak{S}}} \alpha \quad (4.27)$$

sous les contraintes :

$$\mathcal{F}(\alpha \mathring{\mathfrak{S}}^c(\mathcal{P}) + \mathring{\mathfrak{S}}, \sigma_F(\mathcal{P}_g)) < 0 \quad \forall \mathcal{P}, \mathcal{P}_g \in \mathcal{D}. \quad (4.28)$$

Ceci est un problème de programmation mathématique, avec  $\alpha$  comme fonction objective à optimiser et le critère d'écoulement (4.28) comme condition subsidiaire non-linéaire, qui peut être exprimée en terme de contraintes observables effectives  $\mathring{\mathfrak{S}}$  et de contraintes internes  $\mathring{\pi}$  par deux conditions (WEICHERT & GROSS-WEEGE [102] (1988)) :

$$\mathcal{F}_I \left[ \alpha \frac{\sigma^c}{1-D}(\mathcal{P}) + \frac{\mathring{\rho}}{1-D} - \mathring{\pi}, \sigma_F(\mathcal{P}_g) \right] < 0 \quad (4.29a)$$

et

$$\mathcal{F}_L \left[ \alpha \frac{\sigma^c}{1-D}(\mathcal{P}) + \frac{\mathring{\rho}}{1-D}, \sigma_S(\mathcal{P}_g) \right] < 0. \quad (4.29b)$$

Les conditions (4.29) sont la projection du critère d'écoulement (4.28) formulé en termes de contraintes généralisées effectives  $\mathring{\mathfrak{S}}$ , dans l'espace des contraintes observables effectives  $\mathring{\mathfrak{S}}$ . Ici on identifie deux surfaces distinctes  $\mathcal{F}_I$  et  $\mathcal{F}_L$ , avec  $\mathcal{F}_I$  comme surface d'écoulement initiale où son mouvement dans l'espace des contraintes effectives  $\mathring{\mathfrak{S}}$  dû à l'effet d'écrouissage est défini par le vecteur de contraintes internes  $\mathring{\pi}$ . La limitation de ce mouvement est donnée par la surface de charges  $\mathcal{F}_L$  contenant  $\mathcal{F}_I$  pour les états physiques possibles d'écrouissage. Les deux fonctions  $\mathcal{F}_I$  et  $\mathcal{F}_L$  sont convexes de type von Mises caractérisées respectivement, par le seuil d'écoulement initial  $\sigma_F$  et par le seuil d'écoulement limite  $\sigma_S$ , qui peuvent dépendre de la température (Fig. 4.3).

La satisfaction de la condition (4.29b) assure que l'état de sécurité suivant la définition (4.6b) ne soit jamais externe à la surface de charge  $\mathcal{F}_L$  et garantit implicitement la limite de la contrainte interne. La condition (4.29a) contrôle l'exigence de l'adaptation par l'intermédiaire d'un vecteur de contrainte interne  $\overset{\circ}{\pi}$  indépendant du temps, décrivant une translation de la surface d'écoulement  $\mathcal{F}_I$  fixée à l'intérieur de la surface de charges  $\mathcal{F}_L$ .

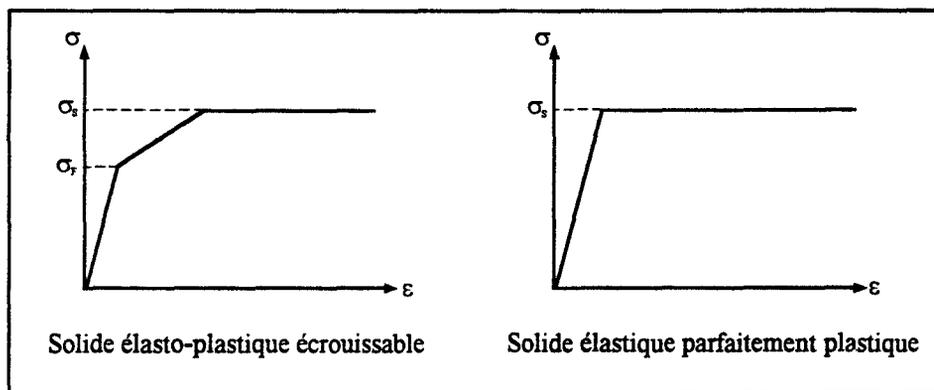


Fig. 4.3 - Schématisation unidimensionnelle de la courbe contraintes-déformations -

#### 4.3.2. Facteur de charges vis-à-vis de la plasticité alternée :

Le terme plasticité alternée signifie que le processus de déformation plastique est tel que, la déformation plastique totale est nulle et que son amplitude maximale est inférieure à une certaine limite. Le facteur de charges contre l'effondrement par déformations plastiques alternées est exprimé par le problème d'optimisation suivant (KÖNIG [39] (1979)) :

$$\alpha_{AP} = \max_{\hat{p}} \alpha \quad (4.30)$$

telle que :

$$\mathcal{F}_A(\alpha \sigma^e(x, t) + \hat{p}(x), \sigma_r(\vartheta)) < 0. \quad (4.31)$$

Donc, le critère de sécurité contre l'effondrement par plasticité alternée (contre la fatigue olygocyclique) est satisfait s'il existe un champ de contraintes  $\hat{p}$  quelconque indépendant du temps lequel, superposé à l'enveloppe de contraintes élastiques, ne viole pas le critère d'écoulement.

Comme il a été proposé par KÖNIG [46] (1987) et PYCKO & MRÓZ [81] (1992), le problème de la plasticité alternée peut être considéré comme un problème élastique limite. Ainsi au lieu de considérer le problème précédent pour déterminer le facteur de charges vis-à-vis de la plasticité alternée, on résout le problème d'optimisation suivant :

$$\alpha_{AP} = \max \alpha \quad (4.32)$$

sous les contraintes :

$$\mathcal{F}_A \left\{ \pm \frac{1}{2} [\mu_i^+ - \mu_i^-] \alpha \sigma^c(\mathcal{P}), \sigma_F(\mathcal{P}_\theta) \right\} < 0 \quad \forall \mathcal{P}, \mathcal{P}_\theta \in \mathcal{D} \quad (4.33)$$

où, toutes les combinaisons du signe  $\pm$  sont considérées. On constate que dans le critère d'écoulement considéré, on a pas tenu compte de l'écrouissage ni de l'endommagement car la ruine par plasticité alternée intervient une fois que l'état de contraintes franchit le seuil d'écoulement initial ( $\sigma_F$ ).

Ainsi, les deux cas de défaillance étudiés nous donnent finalement le facteur de charge à l'adaptation, exprimé par :

$$\alpha_{SD} = \min (\alpha_{PP}, \alpha_{AP}) \quad (4.34)$$

**4.4. BORNE SUPERIEURE DU PARAMETRE D'ENDOMMAGEMENT :**

On a vu au chapitre 3, en adoptant la formulation de von Mises, que l'endommagement dépend de la norme des déformations plastiques ( $\int_0^t (\dot{\epsilon}^P : \dot{\epsilon}^P)^{1/2} dt.$ ), grandeur toujours croissante. On est alors conduit à exiger, pour qu'il y ait adaptation de la structure, qu'en tout point du corps le travail dissipé reste borné quand le temps  $t$  tend vers l'infini, pour le trajet de charge prévu.

En utilisant la fonction de charge  $\mathcal{F}_L$ , caractérisée par le seuil d'écoulement limite  $\sigma_s$ , qui est une fonction convexe de type von Mises, exprimée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_L &= \tilde{\sigma}_{eq} - \sigma_s \leq 0 \\ &= \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{\sigma^D}{1-D} \right) \cdot \left( \frac{\sigma^D}{1-D} \right) \right]^{1/2} - \sigma_s \leq 0, \end{aligned} \quad (4.35)$$

la règle de normalité fournit la loi d'écoulement :

$$\dot{\epsilon}^P = \dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{F}_L}{\partial \sigma} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\lambda}}{1-D} \frac{\tilde{\sigma}^D}{\tilde{\sigma}_{eq}} \quad (4.36)$$

avec

$$\begin{cases} \dot{\lambda} = 0 & \text{si } \mathcal{F}_L < 0 \text{ ou si } \mathcal{F}_L = 0 \text{ et } \dot{\mathcal{F}}_L < 0 \\ \dot{\lambda} \geq 0 & \text{si } \mathcal{F}_L = \dot{\mathcal{F}}_L = 0. \end{cases}$$

La vitesse des déformations plastiques cumulées est exprimée par :

$$\dot{p} = \left[ \frac{2}{3} \dot{\epsilon}^P : \dot{\epsilon}^P \right]^{1/2} = \frac{\dot{\lambda}}{1-D}. \quad (4.37)$$

Des équations (4.36) et (4.37), on déduit l'égalité dissipative :

$$\sigma_{\text{eq}} \dot{p} = \sigma : \dot{\epsilon}^p \quad (4.38)$$

telle que

$$\sigma_{\text{eq}} \dot{p} = \begin{cases} 0 & \text{pour } \sigma_{\text{eq}} < (1-D)\sigma_s \\ (1-D)\sigma_s \dot{p} & \text{pour } \sigma_{\text{eq}} = (1-D)\sigma_s. \end{cases}$$

1. S'il existe un champ de contraintes résiduelles indépendant du temps superposé à l'enveloppe des contraintes élastiques, constituant un état de contraintes sûr et garantissant l'existence d'un noyau élastique, dit sanctuaire d'élasticité (NAYROLES & WEICHERT [72] (1993)), alors on aura l'adaptation de la structure.

2. Si, on a adaptation de la structure en introduisant le coefficient de sécurité  $\alpha > 1$ , alors on peut déduire la borne de l'énergie de dissipation plastique par :

$$\int_0^t \int_{(V)} \sigma : \dot{\epsilon}^p \, dV dt \leq \frac{\alpha}{\alpha - 1} \int_{(V)} \frac{1}{2} \dot{\rho} : \mathbf{E}^{-1} : \dot{\rho} \, dV. \quad (4.39)$$

3. Si le matériau est initialement vierge, alors on aura (DOROSZ [17] (1976) et KÖNIG [46] (1987)):

$$(\epsilon^p : \epsilon^p)^{1/2} \leq \int_0^t (\dot{\epsilon}^p : \dot{\epsilon}^p)^{1/2} \, dt, \quad (4.40a)$$

ou

$$p \leq \int_0^t \dot{p} \, dt. \quad (4.40b)$$

4. Si la surface d'écoulement contient l'origine du système de coordonnées Cartésien et que le matériau est initialement vierge, alors il existe deux constantes  $\zeta$  et  $\xi$  telles que :

$$\zeta (\dot{\epsilon}^p : \dot{\epsilon}^p)^{1/2} \leq \sigma : \dot{\epsilon}^p \leq \xi (\dot{\epsilon}^p : \dot{\epsilon}^p)^{1/2}, \quad (4.41)$$

où,  $\zeta = \sqrt{2/3} (1-D)\sigma_s$  et  $\xi = \sqrt{2/3} \sigma_s$ .

Ce qui conduit à la borne locale des déformations plastiques cumulées par :

$$p \leq \frac{1}{(1 - D_c)\sigma_s} \int_0^i \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p dt, \quad (4.42)$$

et à l'aide de l'équation (4.39), on aura :

$$p \leq \frac{1}{V} \frac{1}{(1 - D_c)\sigma_s} \frac{\alpha}{\alpha - 1} \int_{(v)} \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\rho}} : \mathbf{E}^{-1} : \dot{\boldsymbol{\rho}} dV, \quad (4.43)$$

où,  $V$  est le volume de la structure considérée.

Pour alléger l'écriture, on pose :

$$R_1 = \frac{2}{3}(1 + \nu) + 3(1 - 2\nu) \left( \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} \right)^2 \quad (4.44a)$$

$$R_2 = \exp \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} - \frac{1}{3} \right) \right] \quad (4.44b)$$

qui sont respectivement, les rapports de triaxialité pour le modèle de LEMAITRE [54] (1983), [55] (1985) et le modèle de SHICHUN & HUA [93] (1990). On déduit finalement la borne supérieure du paramètre d'endommagement ductile que la structure peut atteindre avant défaillance à chaque point du corps, par :

$$D_{LIM} = \frac{D_c}{\varepsilon_R - \varepsilon_D} \left\langle \left[ \frac{R_\alpha}{V} \frac{1}{(1 - D_c)\sigma_s} \frac{\alpha}{\alpha - 1} \int_{(v)} \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\rho}} : \mathbf{E}^{-1} : \dot{\boldsymbol{\rho}} dV \right] - \varepsilon_D \right\rangle \quad (4.45)$$

applicable pour les deux modèles décrits au chapitre 3, dans le cas de la plasticité progressive, tout en veillant à ce que  $0 \leq D_{LIM} < D_c$  à chaque point du corps  $\mathcal{B}$ .

#### 4.5. FORMULATION ELEMENTS FINIS :

##### 4.5.1. Calcul de la réponse purement élastique :

Pour résoudre le problème du corps de comparaison purement élastique, on utilise les éléments finis statiquement admissibles en se reportant aux travaux de MORELLE & NGUYEN DANG HUNG [68] (1983) et MORELLE [69] (1984). Ces travaux ont été appliqués par GROSS-WEEGE [21] (1988) avec certains aménagements, par lesquels on a eu le privilège de pouvoir débiter notre étude.

Pour le problème du corps de comparaison purement élastique, on a supposé que le matériau est vierge de tout endommagement et que l'état de contraintes purement élastiques est considéré comme état initial pour le calcul de l'endommagement.

L'hypothèse de base est de choisir le champ de contraintes de la forme suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S}(\mathbf{x}) \mathbf{b} + \mathbf{T}(\mathbf{x}) \mathbf{c}, \quad (4.46)$$

où  $\mathbf{x}$  est la coordonnée du point,  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{c}$  des paramètres tels que  $\mathbf{Sb}$  vérifie les conditions d'équilibre sans forces de volume et  $\mathbf{Tc}$  reprend ces dernières,

$$\partial^T \mathbf{S} \mathbf{b} = 0 \quad (4.47a)$$

$$\partial^T \mathbf{T} \mathbf{c} = \mathbf{f} \quad (4.47b)$$

où " $\partial^T$ " est mis pour la transposition.

Pour garantir l'équilibre entre les éléments d'équilibre voisins, on définit un ensemble de connecteurs  $\mathbf{g}$  garantissant la transmission des tractions de surface  $\mathbf{p}$ , en définissant  $\mathbf{g}$  de la même façon que  $\boldsymbol{\sigma}$  :

$$\mathbf{g} = \mathbf{C}_b \mathbf{b} + \mathbf{C}_c \mathbf{c} \quad (4.48)$$

où  $\mathbf{C}_b$  et  $\mathbf{C}_c$  sont les matrices de connexion statiques de l'élément.

L'énergie de déformation complémentaire interne s'exprime par :

$$\begin{aligned} U_{\text{int}} &= \frac{1}{2} \int_{(V)} [\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{E}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}^s] dV \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{b}^T \mathbf{F}_{bb} \mathbf{b} + \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \mathbf{F}_{cc} \mathbf{c} + \mathbf{b}^T \mathbf{F}_{bc} \mathbf{c} + \mathbf{b}^T \mathbf{E}_b + \mathbf{c}^T \mathbf{E}_c \end{aligned} \quad (4.49)$$

et l'énergie potentielle externe s'exprime par :

$$U_{\text{ext}} = - \int_{(S_u)} \mathbf{u}^T \mathbf{p} dS_u \quad (4.50)$$

Or les tractions de surface  $\mathbf{p}$  dans l'expression (4.50) étant directement liées aux paramètres  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{c}$ , on peut toujours s'arranger pour que l'énergie potentielle ait la forme suivante :

$$U_{\text{ext}} = - \mathbf{g}^T \mathbf{q} \quad (4.51)$$

où  $\mathbf{q}$  sont les déplacements généralisés conjugués aux forces généralisées  $\mathbf{g}$ .

Annulons la variation de l'énergie complémentaire totale  $\delta(U_{\text{int}} + U_{\text{ext}}) = 0$ ,

$$\delta \left( \frac{1}{2} \mathbf{b}^T \mathbf{F}_{bb} \mathbf{b} + \mathbf{b}^T \mathbf{F}_{bc} \mathbf{c} + \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \mathbf{F}_{cc} \mathbf{c} + \mathbf{b}^T \mathbf{E}_b + \mathbf{c}^T \mathbf{E}_c - \mathbf{b}^T \mathbf{C}_b^T \mathbf{q} - \mathbf{c}^T \mathbf{C}_c^T \mathbf{q} \right) = 0 \quad (4.52)$$

où, on a posé :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{bb} &= \int_{(V)} \mathbf{S}^T \mathbf{E}^{-1} \mathbf{S} \, dV, & \mathbf{F}_{bc} &= \int_{(V)} \mathbf{S}^T \mathbf{E}^{-1} \mathbf{T} \, dV, & \mathbf{F}_{cc} &= \int_{(V)} \mathbf{T}^T \mathbf{E}^{-1} \mathbf{T} \, dV \\ \mathbf{E}_b &= \int_{(V)} \mathbf{S}^T \boldsymbol{\varepsilon}^g \, dV, & \mathbf{E}_c &= \int_{(V)} \mathbf{T}^T \boldsymbol{\varepsilon}^g \, dV. \end{aligned} \quad (4.53)$$

L'équation variationnelle (4.52) conduit à :

$$\mathbf{g} + \mathbf{g}_F + \mathbf{g}_g = \mathbf{K} \mathbf{q} \quad (4.54)$$

avec

$$\mathbf{K} = \mathbf{C}_b \mathbf{F}_{bb}^{-1} \mathbf{C}_b^T$$

comme matrice de rigidité

$$\mathbf{g}_F = (\mathbf{C}_b \mathbf{F}_{bb}^{-1} \mathbf{F}_{bc} - \mathbf{C}_c) \mathbf{c}$$

comme vecteur des charges réparties de surface et,

$$\mathbf{g}_g = \mathbf{C}_b \mathbf{F}_{bb}^{-1} \mathbf{E}_b$$

comme vecteur de température

et aussi à

$$\mathbf{b} = \mathbf{F}_{bb}^{-1} (\mathbf{C}_b^T \mathbf{q} - \mathbf{F}_{bc} \mathbf{c} - \mathbf{E}_b). \quad (4.55)$$

L'assemblage est réalisé avec les matrices booléennes  $L_i$  et  $M_i$  ( $i$  correspond au  $i$ ème élément) :

$$\mathbf{q}_i = L_i \mathbf{q}^s, \quad \mathbf{g}^s = \sum_i L_i^T \mathbf{g}_i,$$

$$\mathbf{b}_i = M_i \mathbf{b}^s, \quad \mathbf{c}_i = M_i \mathbf{c}^s,$$

et conduit à un système d'équations structural :

$$\mathbf{g}^s + \mathbf{g}_f^s + \mathbf{g}_g^s = \mathbf{K}^s \mathbf{q}^s, \quad (4.56)$$

$$\mathbf{g}^s = \mathbf{C}_b^s \mathbf{b}^s + \mathbf{C}_c^s \mathbf{c}^s, \quad (4.57)$$

où,

$$\mathbf{K}^s = \sum_i L_i^T \mathbf{K}_i L_i \quad (4.58)$$

$$\mathbf{C}_b^s = \sum_i L_i^T \mathbf{C}_{b_i} M_i \quad (4.59)$$

$$\mathbf{C}_c^s = \sum_i L_i^T \mathbf{C}_{c_i} M_i \quad (4.60)$$

#### 4.5.2. Discrétisation du champ de contraintes résiduelles :

Suivant la formulation proposée par NGUYEN DANG HUNG & KÖNIG [74] (1976), le champ de contraintes résiduelles est discrétisé de la même manière que le champ de contraintes purement élastique ; ce champ de contraintes doit satisfaire les conditions d'équilibre sans second membre (éq. (4.4 a-b)), on pose donc :

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{S} \mathbf{b}. \quad (4.61)$$

En prenant en compte l'équilibre avec les tractions de surface, on divise le vecteur structural  $\mathbf{g}^s$  en deux parties :

$$\mathbf{g}^s = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_{S_p} \\ \mathbf{g}_{S_u} \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{C}_b^s = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{bS_p} \\ \mathbf{C}_{bS_u} \end{pmatrix} \quad (4.62)$$

avec

$$\mathbf{C}_{b_s} \mathbf{b}^s = 0. \quad (4.63)$$

En appliquant la méthode de Gauss-Jordan, l'équation (4.63) se ramène à :

$$[\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2] \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1^s \\ \mathbf{b}_2^s \end{pmatrix} = 0 \quad (4.64)$$

où,  $\mathbf{C}_1^{-1}$  est supposée exister, et finalement :

$$\mathbf{b}_1^s = -\mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{C}_2 \mathbf{b}_2^s \Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{J} \mathbf{b}_2^s = \begin{pmatrix} -\mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} \mathbf{b}_2^s \quad (4.65)$$

ou pour un élément  $i$  :

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{M}_i \mathbf{b}^s = \mathbf{M}_i \mathbf{J} \mathbf{b}_2^s \quad (4.66)$$

Les paramètres linéairement indépendants  $\mathbf{b}_2^s$  caractérisent le champ de contraintes résiduelles.

#### 4.6. CONCLUSION :

L'approche présentée dans ce chapitre, donne un critère de sécurité vis-à-vis de la défaillance par "plasticité accumulée" et garantit l'adaptation de la structure, tant que l'état de contraintes appartient au sanctuaire d'élasticité. L'endommagement et l'écroutissement n'ont pas été pris en compte pour prévenir la ruine vis-à-vis de la plasticité alternée, étant donné qu'on suppose que la structure s'effondre une fois qu'elle atteint le seuil d'écoulement initial. A l'heure actuelle, toutes les approches de modélisation des structures endommageables utilisent la méthode incrémentale pour prévoir l'état de détérioration de la structure, et parmi elles, celle de SIEMASZKO [95] (1993) appliquant la théorie d'adaptation.

---

# CHAPITRE 5

---

**MODELISATION ET  
EXPLOITATION NUMERIQUE**

## MODELISATION ET EXPLOITATION NUMERIQUE

### 5.1. INTRODUCTION :

Le problème posé, dans l'étude de l'adaptation des structures, est le suivant : On suppose que les charges appliquées varient, indépendamment l'une de l'autre, dans des intervalles connus. Ces intervalles à leur tour varient proportionnellement au coefficient de sécurité  $\alpha$ . On cherche la valeur limite  $\alpha_{SD}$  qui garantit l'adaptation de la structure et permet d'obtenir une majoration du travail de déformation plastique ainsi que la limite du paramètre d'endommagement à l'adaptation.

La résolution de ce problème demande :

- la solution du problème du corps de comparaison purement élastique correspondant aux mêmes conditions limites que le problème posé, en supposant que cette solution soit l'état initial pour le calcul de l'endommagement ;
- la construction d'un champ de contraintes résiduelles indépendant du temps.

La détermination du coefficient de sécurité à l'adaptation utilise la méthode de programmation mathématique qui consiste à maximiser  $\alpha$  tout en veillant à ce que le critère d'écoulement ne soit pas violé et que l'endommagement reste inférieur à l'endommagement critique. Le nombre de contraintes est proportionnel au nombre de points-tests pour lesquels on souhaite évaluer le critère d'écoulement ; la non-linéarité de ces contraintes est liée au critère d'écoulement choisi ainsi qu'au modèle de l'endommagement. La résolution de ce problème d'optimisation non-linéaire sous contraintes repose sur la méthode dite de Lagrangien Augmenté exposée par PIERRE & LOWE [76] (1975).

Pour l'étude de l'adaptation, on s'est restreint à l'étude des coques de révolution chargées de façon axisymétrique, en se basant sur les travaux de GROSS-WEEGE [21] (1988). Pour modéliser la coque, on emploie la théorie simplifiée établie par NAGHDI [71] (1963) et MORELLE & NGUYEN DANG HUNG [68] (1983), qui consiste à étudier le comportement d'une tranche axiale. Du fait de la symétrie du problème, cette démarche revient à étudier l'équilibre d'une ligne moyenne, intersection de la surface moyenne avec un plan contenant l'axe de symétrie.

## 5.2. MODELISATION DES COQUES :

Soit une coque, considérée dans son état non-déformé, occupant l'espace Euclidien tridimensionnel. Pour modéliser la coque, on prend une surface moyenne ( $\mathcal{M}$ ) divisant l'épaisseur en deux, et l'on adjoint à cette surface un système de coordonnées curvilignes  $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$  tel que  $-h/2 \leq \theta^3 \leq h/2$  ;  $h$  étant l'épaisseur de la coque supposée réduite par rapport aux deux autres dimensions. La surface moyenne ( $\mathcal{M}$ ) est décrite dans le repère euclidien, Fig. 5.1, par le vecteur :

$$r = x^k (\theta^\alpha) i_k ; \quad k = 1, 2, 3 \text{ et } \alpha = 1, 2; \quad (5.1)$$

où,  $i_k$  est le vecteur de base orthonormé du système de coordonnées Cartésien.

Soit les entités qui représentent le :

- vecteur de base :  $a_\alpha = r_{,\alpha} ; \quad a^\alpha = a^{\alpha\beta} a_{\beta}$
- vecteur normal :  $a_3 = \frac{a_1 \wedge a_2}{|a_1 \wedge a_2|}$
- tenseur métrique :  $a_{\alpha\beta} = a_\alpha \cdot a_\beta ; \quad a^{\alpha\beta} = a^\alpha a^\beta$
- tenseur de courbure :  $b_{\alpha\beta} = -a_\alpha a_{3,\beta} \cdot a_\beta ; \quad b^\beta_\alpha = a_{\alpha\gamma} a^{\gamma\beta}$

où,  $(\cdot)_{,\alpha}$  symbolise la dérivée partielle par rapport à  $\theta^\alpha$ , les souscriptions  $(\cdot)$  et  $(\wedge)$  désignent respectivement, le produit scalaire et le produit vectoriel. Les indices Latins varient de 1 à 3 et les indices Grecs varient de 1 à 2.

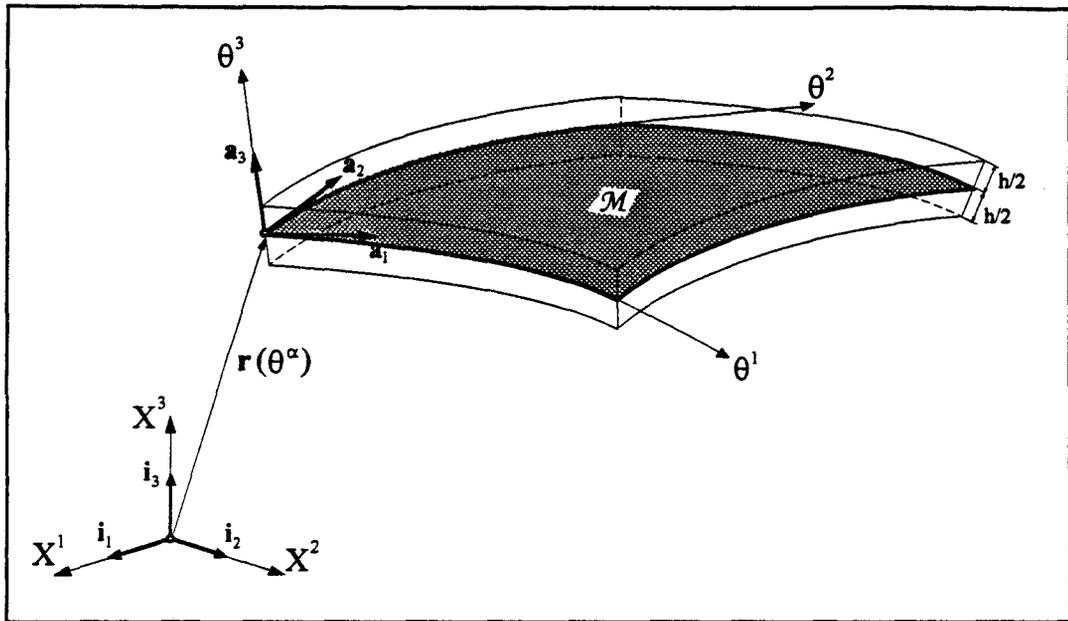


Fig. 5.1 - Géométrie de la coque -

### 5.2.1. Equations constitutives :

La majorité des solutions proposées sur les problèmes des coques ont été obtenues sous l'hypothèse de Love-Kirchhoff, qui stipule que les fibres de la coque dans l'état non-déformé sont rectilignes et orthogonales à la surface moyenne et restent rectilignes et orthogonales à cette surface après déformation sans changement de longueur.

Les tenseurs d'élongations  $\gamma$  et de déformations angulaires (rotations)  $\chi$  sont décomposés en une partie purement élastique ( $\gamma^e, \chi^e$ ), une partie thermique ( $\gamma^\theta, \chi^\theta$ ) et une partie plastique ( $\gamma^p, \chi^p$ ) :

$$\gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta}^e + \gamma_{\alpha\beta}^\theta + \gamma_{\alpha\beta}^p \quad (5.2a)$$

$$\chi_{\alpha\beta} = \chi_{\alpha\beta}^e + \chi_{\alpha\beta}^\theta + \chi_{\alpha\beta}^p \quad (5.2b)$$

Pour un comportement linéaire isotrope, les tenseurs de déformations élastiques sont exprimés par :

$$\gamma_{\alpha\beta}^e = \frac{1}{A} G_{\alpha\beta\gamma\lambda} N^{\gamma\lambda}, \quad (5.3a)$$

$$\chi_{\alpha\beta}^e = \frac{1}{B} G_{\alpha\beta\gamma\lambda} M^{\gamma\lambda}, \quad (5.3b)$$

avec

$$A = \frac{E h}{1 - \nu^2} \text{ et } B = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)}$$

où,  $M$  et  $N$  sont les tenseurs des éléments de réduction (forces de membranes et moments),  $A$  et  $B$  sont respectivement, les facteurs d'élongation et de rotation. Le tenseur d'élasticité  $G$  indépendant du temps est défini par :

$$G_{\alpha\beta\gamma\lambda} = \frac{1}{2(1 - \nu)} [a_{\alpha\gamma} a_{\beta\lambda} + a_{\alpha\lambda} a_{\beta\gamma} - \frac{2\nu}{1 + \nu} a_{\alpha\beta} a_{\gamma\lambda}]. \quad (5.4)$$

Le champ de température est distribué linéairement sur l'épaisseur de la coque, et s'exprime par :

$$\vartheta^*(\theta^i) = \bar{\vartheta}^*(\theta^\alpha) + \frac{\Delta\vartheta^*}{h} \theta^3, \quad (5.5)$$

où, les déformations thermiques sont définies par :

$$\gamma_{\alpha\beta}^s = a_{\alpha\beta} \alpha_s \bar{\vartheta}^*, \quad (5.6a)$$

$$\chi_{\alpha\beta}^s = a_{\alpha\beta} \alpha_s \frac{\Delta\vartheta^*}{h}. \quad (5.6b)$$

Pour la partie plastique de la loi de comportement, on suppose l'existence d'un domaine élastique convexe, limité par la fonction d'écoulement de Huber-Mises, en tenant compte de la métrique des coques :

$$\mathcal{F}(\tilde{\sigma}) = 3 a_{ik} a_{jl} \tilde{\sigma}^{ij} \tilde{\sigma}^{kl} - (a_{ij} \tilde{\sigma}^{ij})^2 - 2 \sigma_F^2 = 0. \quad (5.7)$$

Par simplicité, on suppose que l'état de contraintes est approximativement plan et parallèle à la surface moyenne (c'est à dire que  $\sigma^{13} = \sigma^{23} = \sigma^{33} \approx 0$ ), ce qui donne :

$$\mathcal{F}(\tilde{\sigma}) = 3 a_{\alpha\gamma} a_{\beta\lambda} \tilde{\sigma}^{\alpha\beta} \tilde{\sigma}^{\gamma\lambda} - (a_{\alpha\beta} \tilde{\sigma}^{\alpha\beta})^2 - 2 \sigma_F^2 = 0. \quad (5.8)$$

De la loi de normalité, on exprime les vitesses des déformations plastiques par :

$$\dot{\gamma}_{\alpha\beta}^p = \dot{\lambda}_N \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \tilde{N}^{\alpha\beta}}, \quad (5.9a)$$

$$\dot{\chi}_{\alpha\beta}^p = \dot{\lambda}_M \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \tilde{M}^{\alpha\beta}}, \quad (5.9b)$$

où,  $\dot{\lambda}_N$ ,  $\dot{\lambda}_M$  sont les facteurs de proportionnalité positifs.

Pour un comportement élastique linéaire, la répartition des contraintes suivant l'épaisseur est linéaire, on peut exprimer l'état de contraintes en fonction des éléments de réduction. Ainsi, les points possibles de contraintes maximales sont localisés dans la section au niveau des parois ( $\theta^3 = \pm h/2$ ) :

$$\sigma^{\alpha\beta} = \frac{N^{\alpha\beta}}{h} \pm \frac{6M^{\alpha\beta}}{h^2} \quad (5.10)$$

$$\text{avec } N^{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma^{\alpha\beta} d\theta^3, \quad M^{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma^{\alpha\beta} \theta^3 d\theta^3.$$

La substitution de l'équation (5.10) dans l'équation d'écoulement (5.8), donne la fonction d'écoulement initiale en fonction des éléments de réduction :

$$\mathcal{F}_I(\tilde{N}, \tilde{M}) = I_{NN} + \frac{9}{4} I_{MM} \pm 3 I_{NM} - 1 = 0, \quad (5.11)$$

avec

$$I_{NN} = I_{\alpha\beta\lambda\mu} \tilde{N}^{\alpha\beta} \tilde{N}^{\lambda\mu} / N_p^2, \quad (5.12a)$$

$$I_{MM} = I_{\alpha\beta\lambda\mu} \tilde{M}^{\alpha\beta} \tilde{M}^{\lambda\mu} / M_p^2, \quad (5.12b)$$

$$I_{NM} = I_{\alpha\beta\lambda\mu} \tilde{N}^{\alpha\beta} \tilde{M}^{\lambda\mu} / (N_p \cdot M_p), \quad (5.12c)$$

où,

$$I_{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{3}{2} a_{\alpha\lambda} a_{\beta\mu} - \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} a_{\lambda\mu}. \quad (5.12d)$$

L'équation (5.11) indique le début d'écoulement pour les fibres maximales. Le cas limite est atteint lorsque l'expression de cette équation s'annule. Ici,  $N_p$  et  $M_p$  expriment les efforts et moments plastiques uniaxiaux, et peuvent dépendre de la température  $\vartheta$  :

$$N_p = \sigma_F(\vartheta) h \quad (5.13a)$$

$$M_p = \sigma_F(\vartheta) h^2/4. \quad (5.13b)$$

### 5.2.2. Critère d'Ilyuschin :

Ici, on s'intéresse aux états complètement plastiques, on peut définir la charge limite de section correspondante, en fonction des éléments de réduction, de façon approximative. ILYUSCHIN [31] (1956) a été le premier à s'intéresser à ce problème : il a proposé l'approximation suivante de la condition d'écoulement pour l'état limite complètement plastique :

$$\mathcal{F}_L = I_{NN} + I_{MM} \pm 1/\sqrt{3} I_{NM} - 1 = 0. \quad (5.14)$$

Sur la base des travaux de ROBINSON [84] (1971), la condition limite d'écoulement va être étudiée dans diverses approximations, fournissant l'approximation des charges limites qui, en regard de la solution exacte, sont affectées d'une erreur de 6 % pour la sécurité, et de 3,5 % pour la non-sécurité. Le grand avantage de l'approximation d'ILYUSCHIN [31] (1956) réside dans la linéarité polynomiale de "I", qui est donc quadratique par rapport aux éléments de réduction de section.

**5.2.3. Critère des coques sandwich :**

Dans les constructions légères, on utilise souvent une structure appelée coque sandwich. Cette dernière est constituée de deux couches minces parallèles d'épaisseur  $T$ , assurant la résistance avec la contrainte limite  $\sigma'_F$ , séparées par un noyau d'épaisseur  $h'$  et de résistance négligeable. Pour ce type de coques, la surface d'écoulement initiale et la surface d'écoulement limite sont identiques et peuvent être exprimées par (ROBINSON [84] (1971) et BASAR & KRÄTZIG [1] (1985)) :

$$F_s = I_{NN} + I_{MM} \pm 2 I_{NM} - 1 = 0, \tag{5.15}$$

où,  $N_p$  et  $M_p$  s'expriment par :

$$N_p = 2 \sigma'_F T, \tag{5.16a}$$

$$M_p = \sigma'_F T h'. \tag{5.16b}$$

Les approximations (5.14) et (5.15) sont montrées sur la figure 5.2 pour deux états de membranes différents, ainsi que la condition d'écoulement exact et la condition du début d'écoulement.

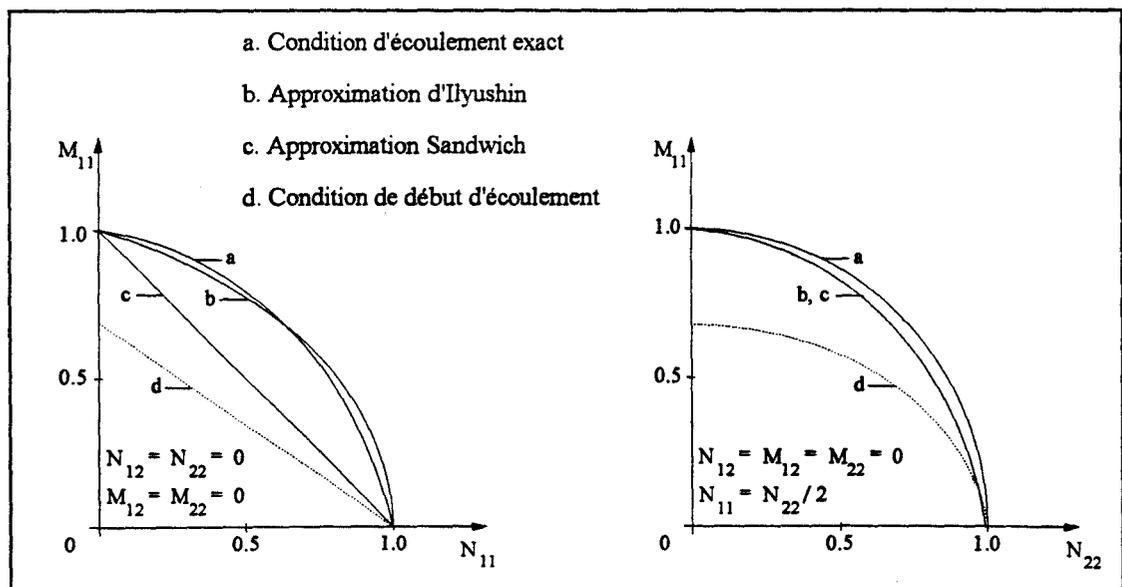


Fig. 5.2 - Comparaison entre les différents critères d'écoulement -

#### 5.2.4. Borne inférieure du facteur de sécurité :

Sous un chargement donné, on détermine le facteur de sécurité contre la défaillance des coques, en utilisant la méthode d'optimisation non linéaire, qui garantit l'adaptation de celles-ci et détermine en même temps la borne limite de l'endommagement avant défaillance. Pour garantir la sécurité de la structure, on résout le problème d'optimisation suivant :

$$\alpha_{SD} = \text{Max } \alpha \quad (5.17)$$

sous les contraintes :

$$\langle D(\alpha, \mathbf{N}^c, \mathring{\mathbf{N}}, \mathbf{M}^c, \mathring{\mathbf{M}}) - D_0 \rangle < D_c \quad (5.18a)$$

$$\mathcal{F}_1(\alpha \mathring{\mathbf{N}}^c(\mathcal{P}) + \mathring{\mathbf{N}} - \mathbf{N}^n, \mathring{\mathbf{M}}^c(\mathcal{P}) + \mathring{\mathbf{M}} - \mathbf{M}^n, \sigma_F(\mathcal{P}_s)) < 0 \quad (5.18b)$$

$$\mathcal{F}_L(\alpha \mathring{\mathbf{N}}^c(\mathcal{P}) + \mathring{\mathbf{N}}, \mathring{\mathbf{M}}^c(\mathcal{P}) + \mathring{\mathbf{M}}, \sigma_s(\mathcal{P}_s)) < 0. \quad (5.18c)$$

Le paramètre d'endommagement est exprimé par :

$$D = \frac{D_c}{\varepsilon_R - \varepsilon_D} \left[ \frac{R}{V} \frac{1}{(1 - D_c)\sigma_s} W_p \right] \quad (5.19)$$

et le seuil d'endommagement par :

$$D_0 = \frac{D_c}{\varepsilon_R - \varepsilon_D} \varepsilon_D \quad (5.20)$$

où, la borne de la dissipation plastique est exprimée pour un élément "e" composé des noeuds k et k+1, par :

$$W_p = 2 \Pi \frac{\alpha}{\alpha - 1} \int_k^{k+1} \left[ \frac{1}{2} (\mathring{\mathbf{S}})^T \mathbf{E}^{-1} (\mathring{\mathbf{S}}) \right] r ds \quad (5.21)$$

avec

$$\mathring{\mathbf{S}} = [N_z, N_\theta, M_z, M_\theta]^T$$

et

$$\mathbf{E}^{-1} = \frac{\sigma_F}{E h} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{h} & -\nu \frac{12}{h} \\ 0 & 0 & -\nu \frac{12}{h} & \frac{12}{h} \end{pmatrix}$$

### 5.3. EXPLOITATION NUMERIQUE :

#### 5.3.1. Généralités :

Afin d'illustrer la nouvelle approche, présentée au chapitre 4, pour l'étude de l'adaptation des structures endommageables, avec la prise en compte de l'écroissage cinématique linéaire tel qu'il a été proposé par WEICHERT & GROSS-WEEGE [102] (1988), sous sollicitations mécaniques et thermiques, nous étudierons, dans ce paragraphe, quelques exemples numériques de l'adaptation des coques de révolution soumises à des charges symétriques par rapport à l'axe de révolution.

En premier point, nous considérerons le problème des coques élastiques parfaitement plastiques dans le cadre de la théorie géométrique linéaire pour d'une part traiter les problèmes fondamentaux de l'adaptation et d'autre part tester le comportement de notre solution et les caractéristiques de convergence du module numérique. Dans les points suivants, nous nous occuperons de trois influences sur l'adaptation : l'influence de l'effet d'endommagement, l'influence du chargement thermique et mécanique combinés ainsi que l'influence de l'écroissage cinématique linéaire. Tous ces effets peuvent être saisis à l'aide du module numérique qui sera présenté par la suite. Ce faisant, le théorème élargi de Melan

conserve ses qualités aux limites. Le cas particulier de la charge proportionnelle est contenu dans ce théorème.

La mise en oeuvre numérique a été réalisée dans un code de calcul en éléments finis, développé initialement par GROSS-WEEGE [21] (1988) pour l'étude des coques élastiques parfaitement plastiques. Ce module de calcul offre la possibilité de prendre en compte trois types de charges différentes, représentant des chargements de révolution compte tenu de la modélisation axisymétrique :

- des charges mécaniques nodales,
- des charges mécaniques réparties,
- des charges thermiques.

Ce module, prend en compte aussi l'influence de la géométrie non-linéaire par l'utilisation de la configuration préchargée telle qu'elle a été étudiée par TRITSCH [99] (1993) avec la liaison entre ce module et le module NONSAP, en introduisant des déplacements non-linéaires.

L'étude est menée vis-à-vis de deux critères d'effondrement :

- le critère d'effondrement par déformations plastiques progressives,
- le critère d'effondrement par déformations plastiques alternées.

Chaque critère définit un domaine limite de variations de charges. Ce domaine englobe tous les points de charges limites (ou sûrs) et à l'intérieur duquel on a adaptation. Le domaine est obtenu de la façon suivante : pour les différents multiplicateurs de charges  $\mu_i^+$  (ou  $\mu_i^-$ ), définissant le domaine de charge  $\mathcal{D}_i$ , nous calculons, à l'aide du processus d'optimisation, le facteur de sécurité correspondant  $\alpha_{SD}$ . De cette façon, on définit le domaine de charges limite  $\mathcal{D}_i^{SD}$  par un agrandissement proportionnel du domaine de charges  $\mathcal{D}_i$ , et, en superposant tous les domaines  $\mathcal{D}_i^{SD}$ , on construit le domaine limite (Fig. 5.3).

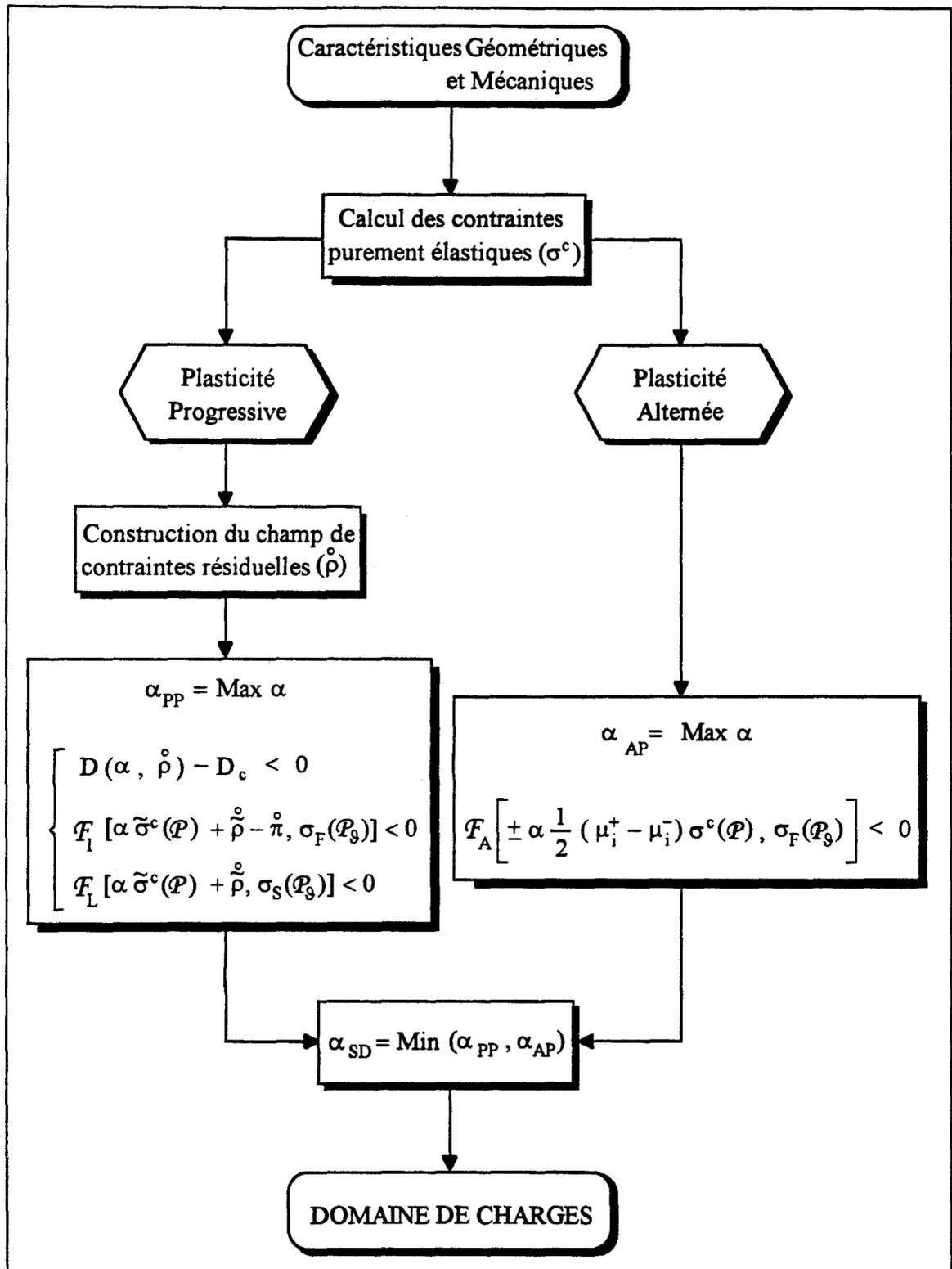


Fig. 5.3 - Méthode de résolution -

Afin de montrer l'efficacité de notre approche, nous avons mené une étude comparative avec une méthode incrémentale sous un chargement proportionnel (analyse limite). Pour cela, on a utilisé le programme de calcul NONSAP développé par BATHE & al. [2] (1974) à l'université de Californie et amélioré par KREJA & al. [48] (1993), pour l'étude des structures endommageables selon le modèle de LEMAITRE [54] (1983) et [55] (1985).

### 5.3.2. Coque cylindrique soumise à une pression interne et à une charge annulaire :

Nous considérons une coque cylindrique circulaire représentée sur la figure 5.4. Elle est soumise à une pression interne  $p$  et à une charge annulaire  $Q$ . Les deux charges varient indépendamment l'une de l'autre entre les limites  $0 \leq p \leq p^*$  et  $0 \leq Q \leq Q^*$ . Nous ne traiterons que le cas de ruine par déformations plastiques progressives. L'exemple a été étudié, entre autre, par SAWCZUK [89] (1969), MORELLE & NGUYEN DANG HUNG [68] (1983) et GROSS-WEEGE [21] (1988), dans le cas de la plasticité parfaite. SAWCZUK [89] (1969) a défini une solution analytique sous forme d'une limite supérieure. Pour cela, il a utilisé une version modifiée du second théorème ainsi que la condition d'écoulement dite "carrée" (One moment limited-interaction yield surface). Par contre MORELLE & NGUYEN DANG HUNG [68] (1983), ont utilisé l'approximation sandwich en utilisant le critère linéaire de Tresca par l'application du premier théorème. Nous représentons ici les résultats tels qu'ils ont été obtenus par GROSS-WEEGE [21] (1988) dans le cas de la plasticité parfaite, à l'aide de l'approximation d'Ilyuschin, qui est sûre et précise.

Pour cela, nous considérerons deux cas de charges :

- (a) La pression  $p$  et la charge annulaire  $Q$  varient d'une manière quelconque entre les limites  $0 \leq p \leq p^*$  et  $0 \leq Q \leq Q^*$ . (deux paramètres de charges "adaptation").
- (b) La pression  $p$  et la charge annulaire  $Q$  varient d'une manière proportionnelle  $p = p^*$  et  $Q = Q^*$  (chargement proportionnel "analyse limite").

Pour chaque cas de charges, nous considérerons quatre comportements :

- le comportement élastique parfaitement plastique ;
- le comportement élastoplastique à écrouissage cinématique linéaire ;
- le comportement élastique parfaitement plastique sous l'influence de l'endommagement ;
- le comportement élastoplastique endommageable à écrouissage cinématique linéaire.

### 5.3.2.1. Comportement élastique parfaitement plastique :

Ce type de comportement, nous a permis de voir l'influence du nombre d'éléments sur la solution obtenue. En effet, nous avons constaté que le temps de calcul augmente avec le nombre d'éléments et n'améliore en rien la solution au-delà d'un certain nombre. Ce qui nous a ramené à choisir dix éléments pour ce type de problème. Nous devons donc, optimiser le problème sur 240 points-tests, pour déterminer le facteur de charge :

- deux critères d'écoulement (traction et compression),
- quatre combinaisons dans le cas de deux paramètres de charges ( $p$ ,  $Q$ ) ( $(p_{\max}, Q_{\max})$ ,  $(p_{\max}, 0)$ ,  $(0, Q_{\max})$ ,  $(0,0)$ ),
- dix éléments,
- trois points gauss par élément.

Il découle, à partir des domaines de charges obtenus pour les deux cas de charges, qu'un dimensionnement basé sur l'analyse limite est dangereux si les charges appliquées peuvent varier de manière indépendante.

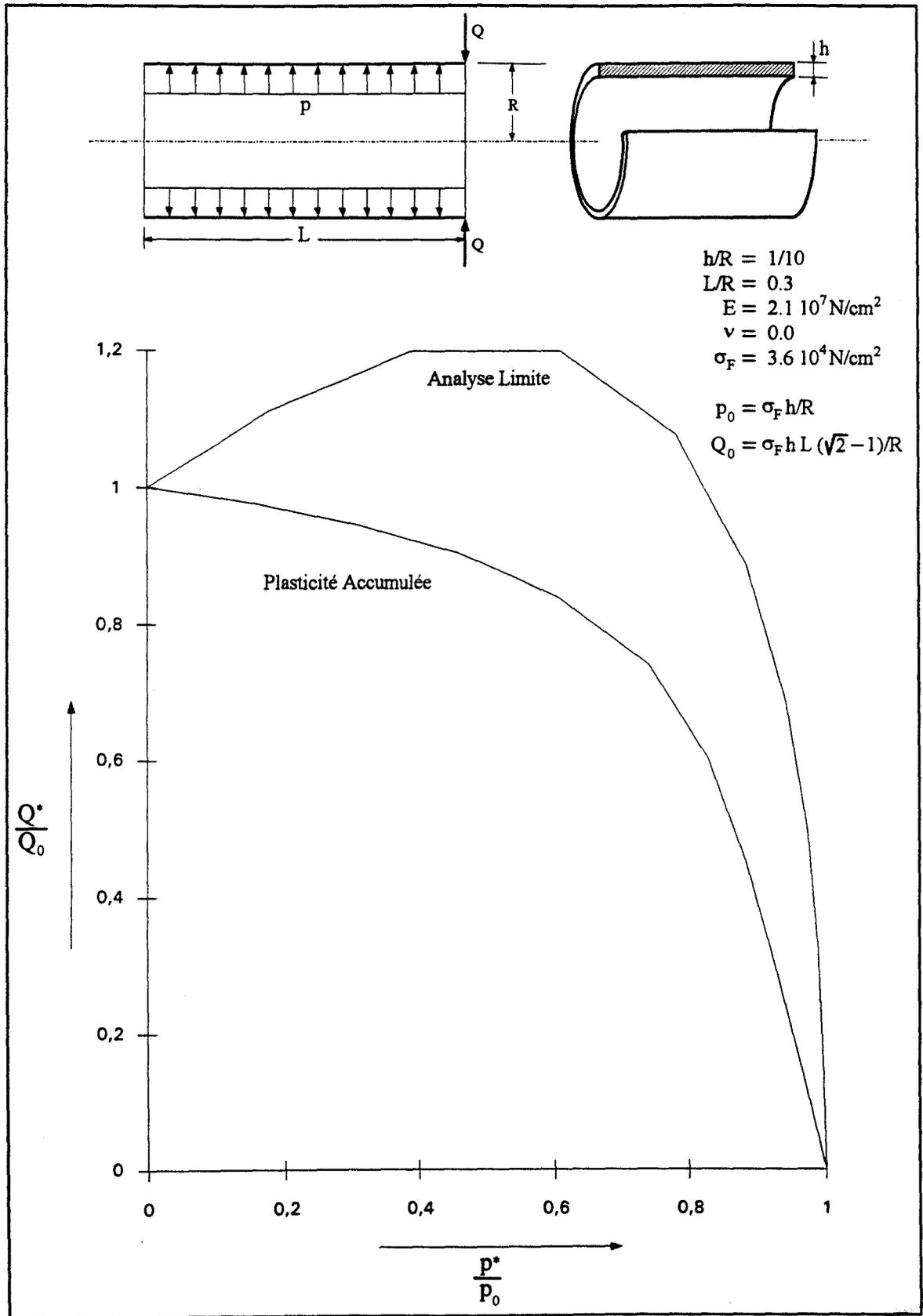


Fig. 5.4 - Domaine de charges pour la plasticité parfaite -

**5.3.2.2. Comportement élastoplastique à écrouissage cinématique linéaire :**

Comme nous l'avons vu au chapitre 4, l'écrouissage est traduit par l'utilisation d'une surface d'écoulement limite, caractérisée par le seuil d'écoulement  $\sigma_s$ , tel qu'il a été proposé par WEICHERT & GROSS-WEERGE [102] (1988). La valeur du seuil d'écoulement limite  $\sigma_s$  est exprimée en fonction du seuil d'écoulement initial  $\sigma_F$  ( $\sigma_s/\sigma_F = \beta$ ). Nous constatons que, le domaine de charges augmente avec  $\beta$  ( $\beta = 1.1, \dots, 1.5$ ), et que l'écrouissage favorise la résistance et la fiabilité de la coque.

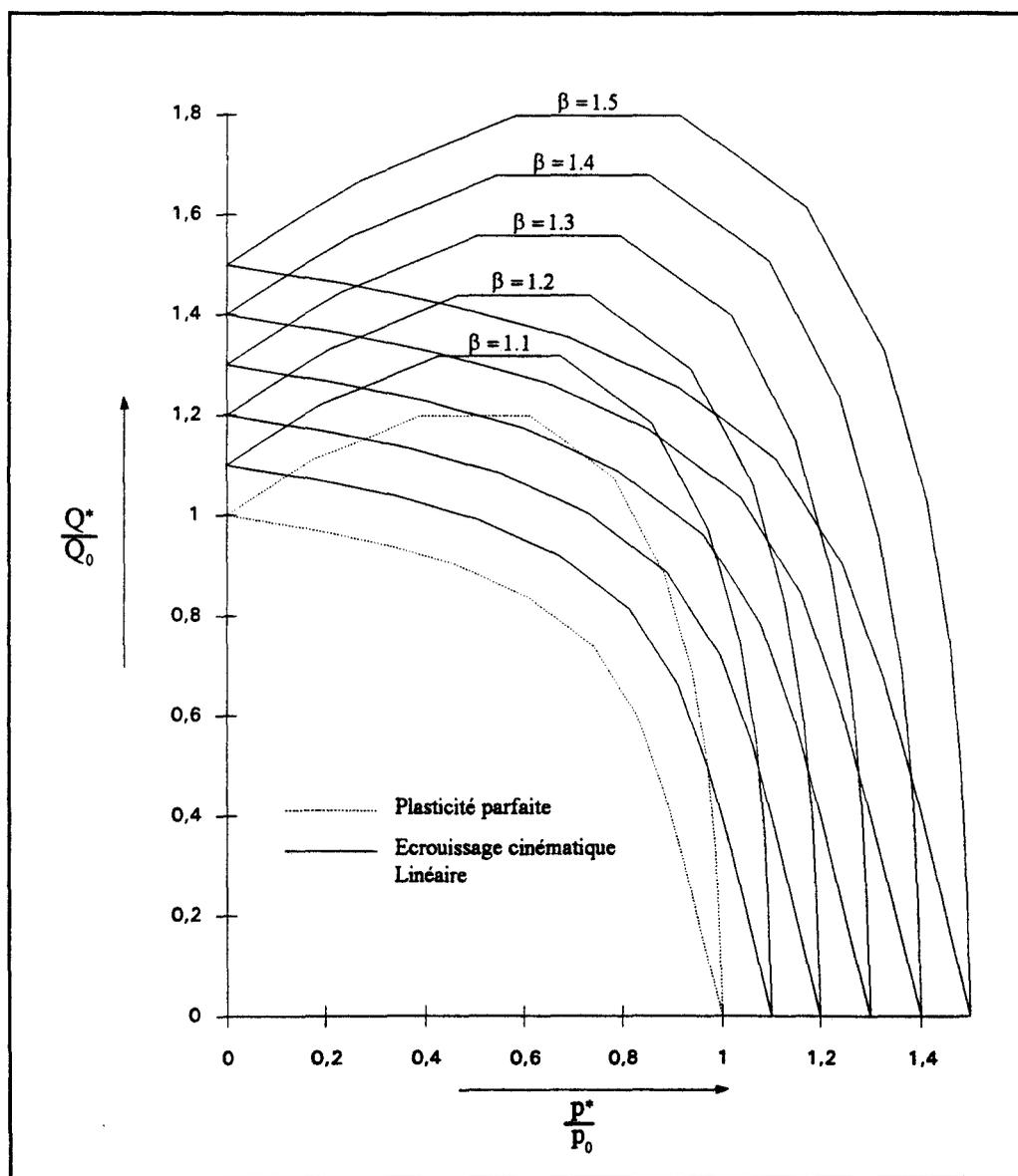


Fig. 5.5 - Influence de l'écrouissage cinématique linéaire -

### 5.3.2.3. Comportement élastique parfaitement plastique sous l'influence de l'endommagement :

Les modèles pris en compte dans l'étude de l'influence de l'endommagement sur le comportement sont ceux de LEMAITRE [54] (1983), [55] (1985) et SHICHUN & HUA [93] (1990), qui diffèrent au niveau du rapport de triaxialité. Le constat que l'on peut faire sur cette influence est que la charge annulaire modifie défavorablement le domaine de charges et réduit la charge limite obtenue dans le cas de la plasticité parfaite d'environ 5%. Alors que sous la pression interne, l'influence de l'endommagement est négligeable, étant donné que la fibre moyenne de la coque se plastifie une fois qu'on atteint le seuil d'écoulement, ce qui conduit à la défaillance de celle-ci, d'une manière instantanée sans qu'elle s'endommage.

Du fait de la faible influence du rapport de triaxialité sur l'endommagement, les valeurs obtenues par les deux modèles d'endommagement sont peu différentes.

Le nombre de points-tests augmente avec la contrainte due à l'endommagement ( $D < D_c$ ), ce qui nous ramène à tester 360 points dans ce cas.

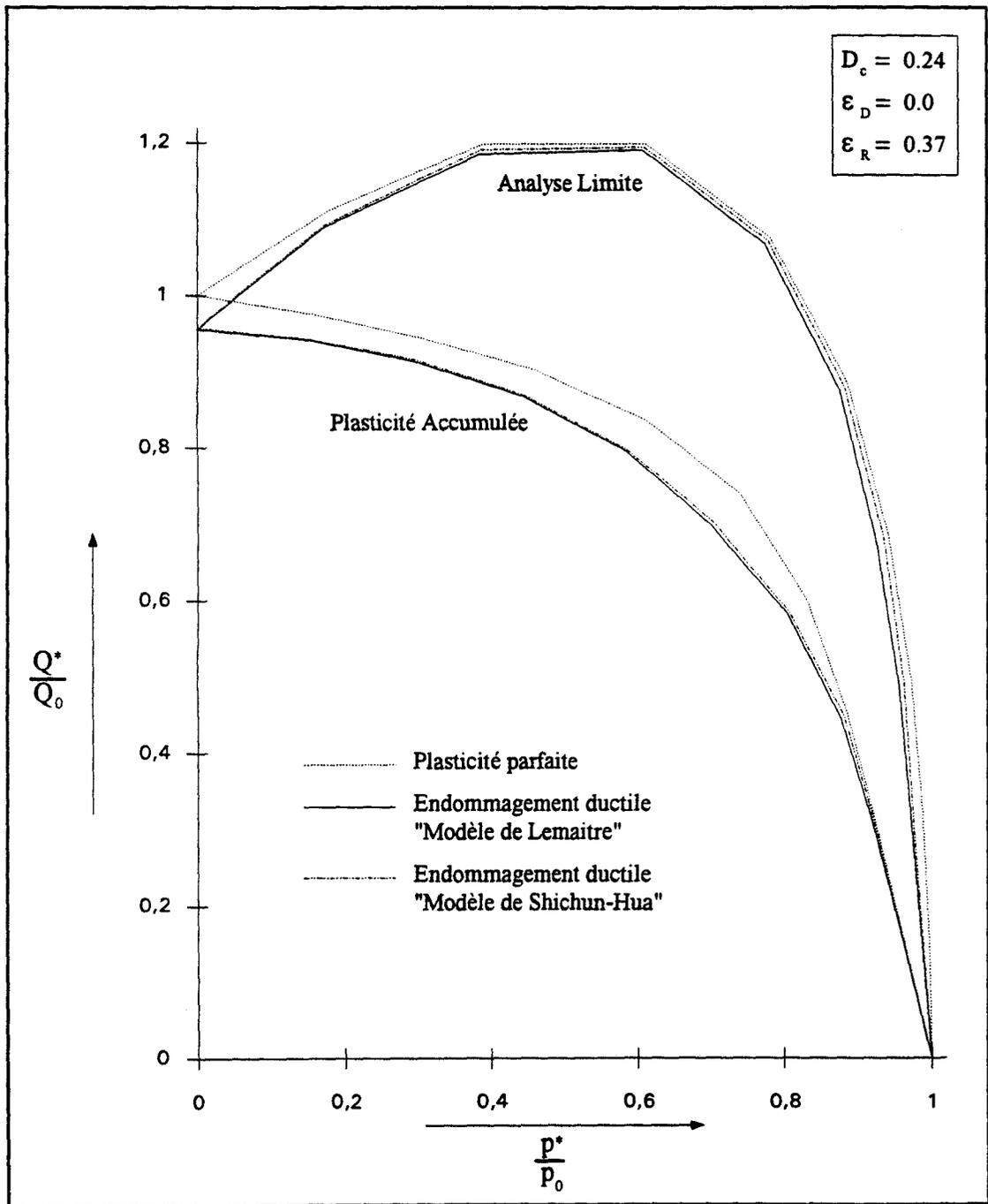


Fig. 5.6 - Influence de l'endommagement plastique ductile -



### 5.3.2.4. Comportement élastoplastique endommageable à écrouissage cinématique :

La borne supérieure du paramètre d'endommagement est inversement proportionnelle au seuil d'écoulement limite, de ce fait l'influence de l'endommagement est moindre dans le cas où nous tenons compte de l'écrouissage. Dans cet exemple, nous prenons comme rapport  $\sigma_s/\sigma_F = 1.25$ .

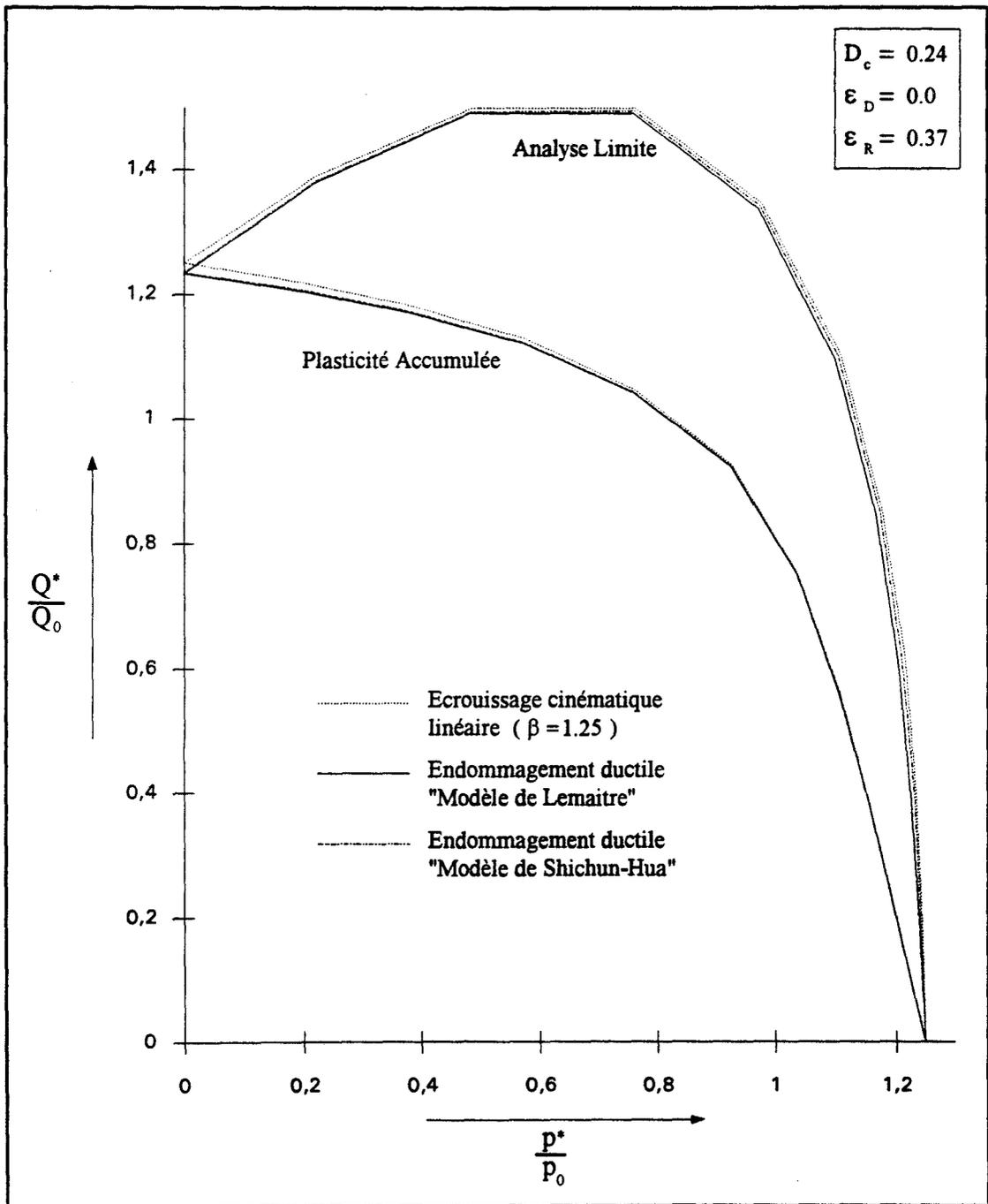


Fig. 5.7 - Influence de l'écrouissage cinématique et de l'endommagement ductile-

### 5.3.2.5. Comparaison avec une méthode incrémentale :

Pour comparer les résultats, obtenus par la méthode de dissipation bornée, avec ceux obtenus par la méthode incrémentale, nous avons utilisé le module NONSAP. Pour modéliser la coque, ce module utilise une tranche axiale à l'aide d'éléments à huit noeuds, dont l'épaisseur circulaire est de un radian. Les coordonnées des points nodaux sont l'abscisse axiale et le rayon. Les charges sont appliquées aux noeuds, dont la modélisation de la charge répartie passe par l'emploi de coefficients d'équivalence appliqués aux charges nodales (Fig. 5.8).

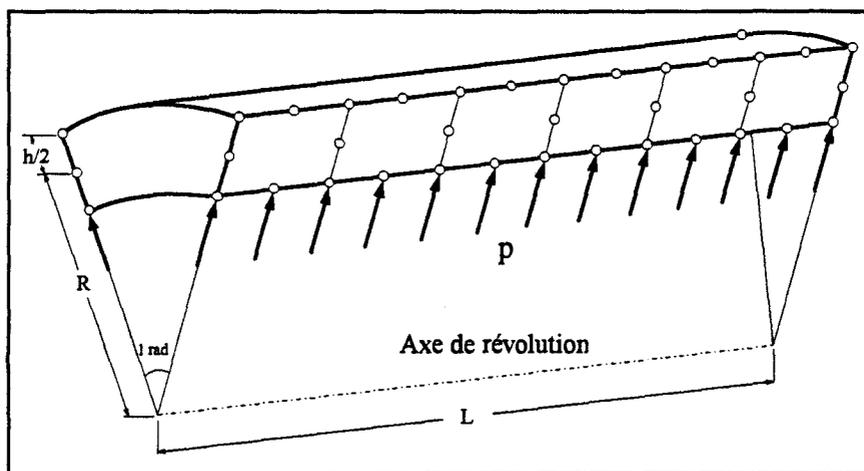


Fig. 5.8 - Modélisation dans le module NONSAP -

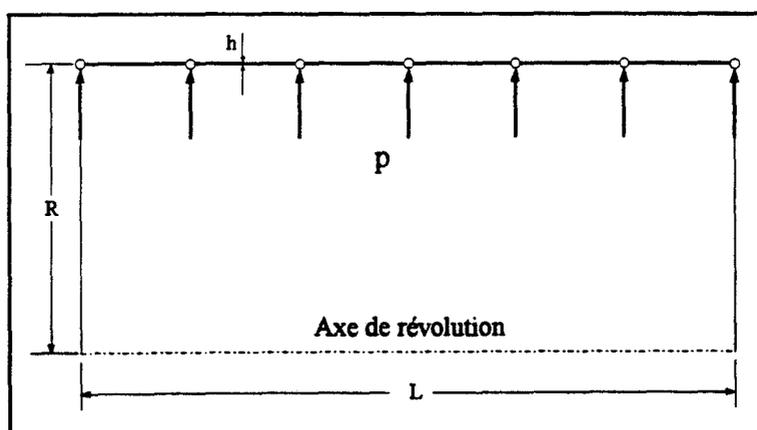


Fig. 5.9 - Modélisation dans le module linéaire -

Nous constatons que les résultats obtenus par les deux modules sont peu différents, et que les résultats du module linéaire garantissent une meilleure sécurité. Cette différence est due à la modélisation des charges, qui dans le module linéaire sont appliquées sur la surface moyenne avec un rayon R. Alors que dans le module NONSAP, la pression est appliquée à "R-h/2". La différence est d'environ de 2 à 4%, suivant le cas de charges.

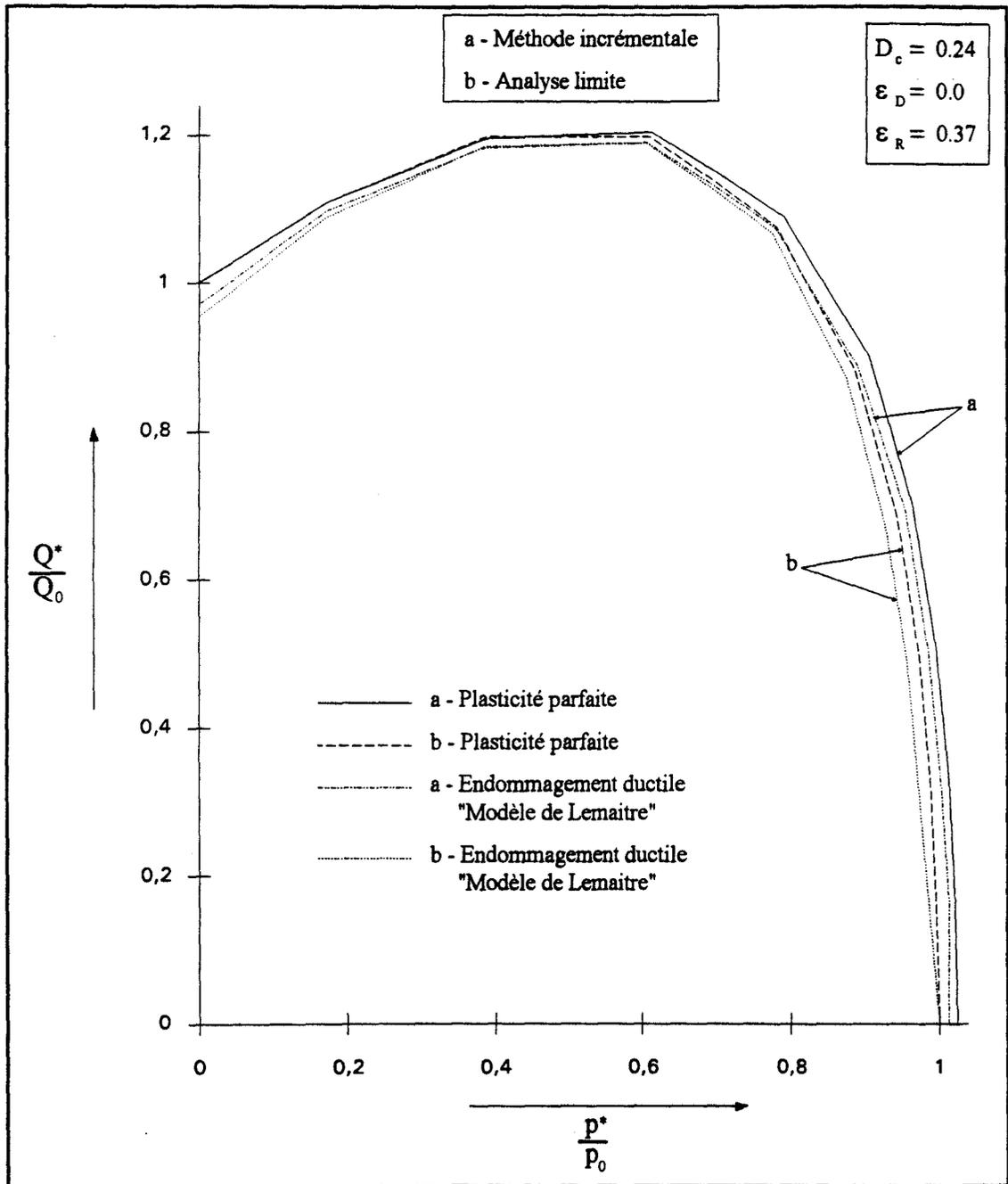


Fig. 5.10 - Comparaison entre le module linéaire et le module NONSAP -

- Modèle de Lemaitre -

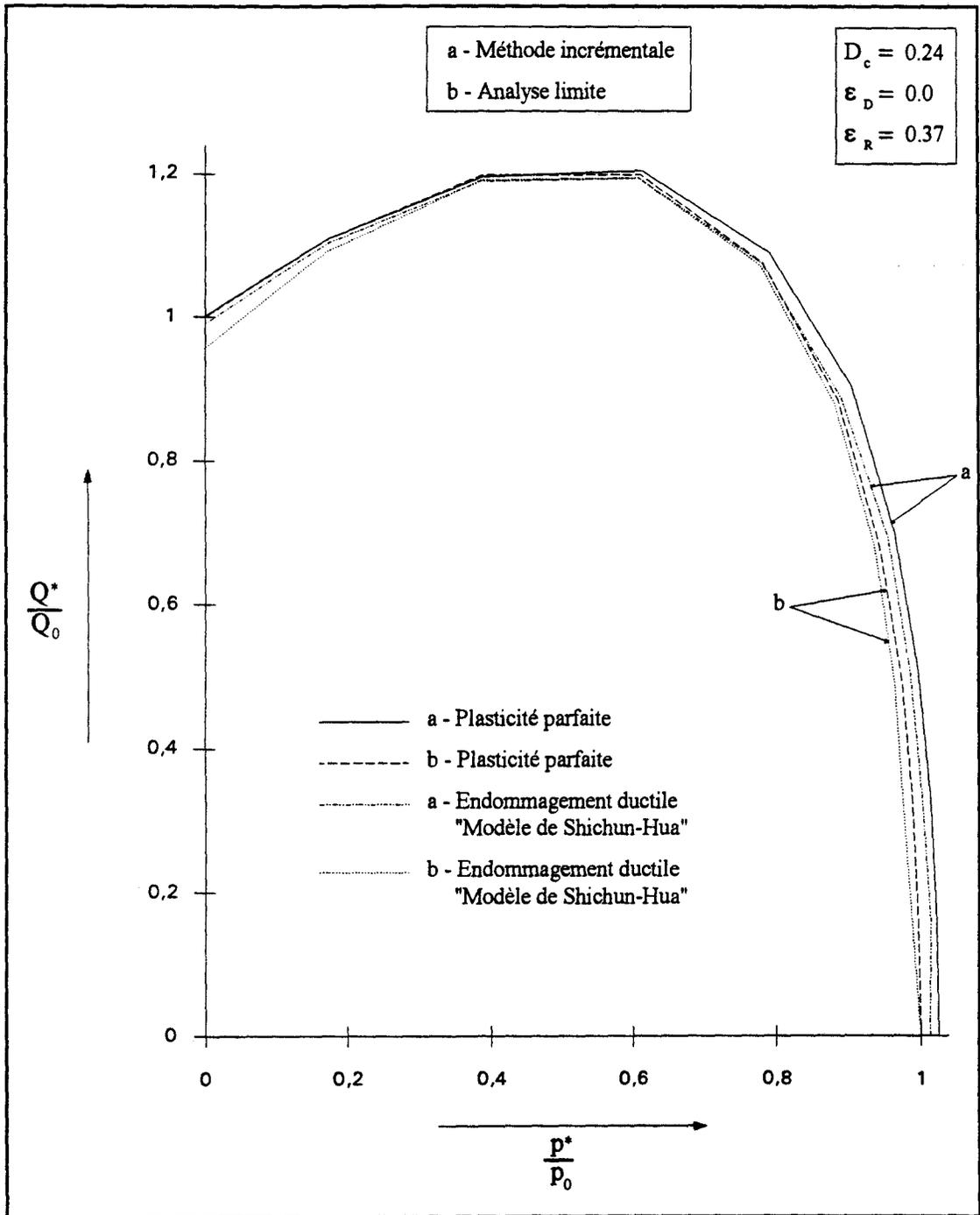


Fig. 5.11 - Comparaison entre le module linéaire et le module NONSAP -  
- Modèle de Shichun & Hua -

### 5.3.3. Tube soumis à une pression et à une température internes variables :

Dans ce paragraphe nous étudierons le comportement limite d'un tube soumis à un chargement thermique et mécanique combinés. Ce type de problèmes apparaît souvent dans les centrales thermiques et dans les entreprises de génie chimique.

Nous considérons le tube représenté sur la figure 5.12, soumis à une pression interne et à une distribution de température variant de façon linéaire suivant l'épaisseur du tube. La température à l'intérieure du tube  $\vartheta_i$  varie entre les limites  $\vartheta_i^a \leq \vartheta_i \leq \vartheta_i^*$ ;  $\vartheta_i^*$  indique la température extérieure constante, par simplicité supposée égale à 0°C. Les déformations axiales sont négligées.

La solution à ce problème a été donnée, en premier, par HYDE & al. [28] (1985). Ils ont choisi une approche incrémentale et la loi d'écoulement de Prandtl-Reuss en utilisant le critère d'écoulement de Huber-Mises. Pour résoudre ce problème, ils utilisent la mise en discrétisation d'un élément fini à l'aide d'éléments axisymétriques isoparamétriques. Récemment, STEIN & al. [97] (1990) traitent le même problème, pour un comportement élastique parfaitement plastique avec écrouissage cinématique non linéaire limité. Nous représentons ici, les résultats qui concordent avec ceux de GROSS-WEEGE [21] (1988), dans le cas de l'élastoplasticité parfaite.

Comme pour l'étude précédente, nous considérerons quatre comportements pour des charges variables  $0 \leq p \leq p^*$  et  $\vartheta_i^a \leq \vartheta_i \leq \vartheta_i^*$ , en adoptant le critère d'Ilyuschin :

- le comportement élastique parfaitement plastique ;
- le comportement élastoplastique à écrouissage cinématique linéaire ;
- le comportement élastique parfaitement plastique sous l'influence de l'endommagement ;
- le comportement élastoplastique endommageable à écrouissage cinématique linéaire.

Pour chaque comportement, nous considérerons le cas où le seuil d'écoulement est fonction de la température actuelle, avec :

$$\sigma_F = (1 + A \vartheta + B \vartheta^2) \sigma_{F_0}$$

où, A et B sont des paramètres caractéristiques du matériau.

### 5.3.3.1. Comportement élastique parfaitement plastique :

Pour ce comportement, nous considérerons deux cas de charge :

- la pression interne est constante, alors que la température varie entre  $\vartheta_i^*$  et  $\vartheta_i^*$  ( $\vartheta_i^* \leq \vartheta_i \leq \vartheta_i^*$ ) (un paramètre de chargement).
- la pression et la température varient entre les limites  $0 \leq p \leq p^*$  et  $\vartheta_i^* \leq \vartheta_i \leq \vartheta_i^*$  (deux paramètres de chargement).

Il résulte de nos calculs que pour les charges  $p \leq 0.75 p_0$ , il n'y a ruine par "plasticité alternée" que si la température varie (courbe a), alors que pour  $0.75 p_0 < p < 1.15 p_0$  il y a défaillance instantanée du tube par "plasticité progressive" (courbe b) (c'est l'effondrement incrémental qui domine). Les résultats montrent clairement que des températures variables réduisent la charge limite p. Dans cet exemple, nous avons enregistré une réduction de la charge limite ( $\vartheta_i$ ) atteignant 40%, quand on tient compte du critère d'effondrement par plasticité alternée. Les variations de températures maximales nécessaires étaient de 121 °K ( $\frac{\vartheta_i}{\vartheta_0} \approx 1.35$ ).

Alors que dans le cas où le seuil d'écoulement dépend de la température, nous constatons que le domaine de charges rétrécit avec la variation de température. Ce seuil est une fonction décroissante de  $\vartheta$ .

Il découle, à partir du domaine d'adaptation obtenu pour les deux cas de charges, que pour des charges thermiques variables, l'effondrement de la coque se produit par plasticité alternée.

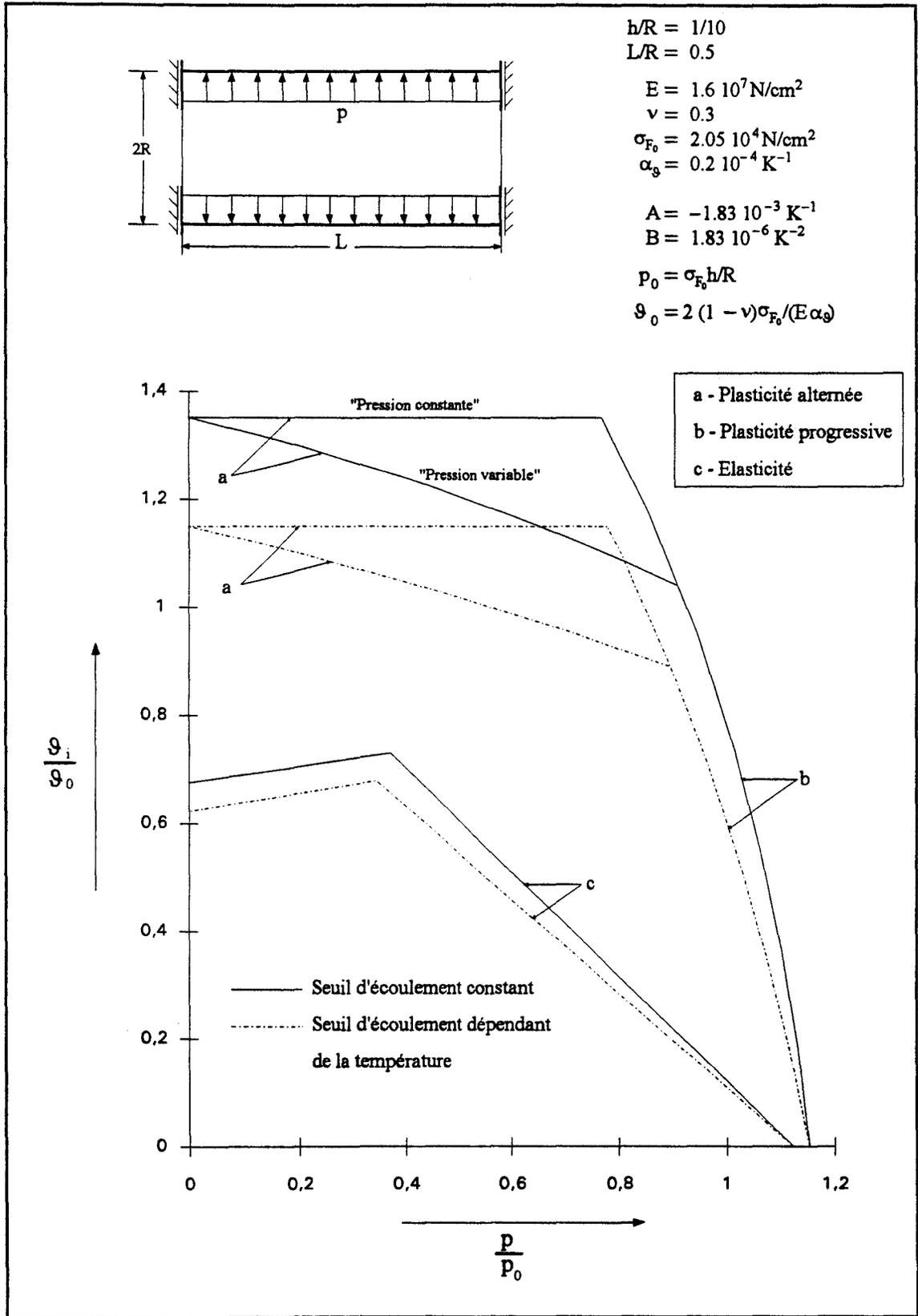


Fig. 5.12 - Domaine de charges dans le cas de l'élasticité et de la plasticité parfaite -

### 5.3.3.2. Comportement élastoplastique écrouissable :

Pour ce type de comportement, nous considérerons le rapport  $\sigma_s/\sigma_F = 1.2$ . Nous observons une croissance du domaine de charges dans la direction de la pression interne, tandis que dans la direction de variation de température, l'effondrement est caractérisé par la plasticité alternée, qui est dans notre cas non influencé par l'écrouissage cinématique, comme nous l'avons vu au chapitre 4.

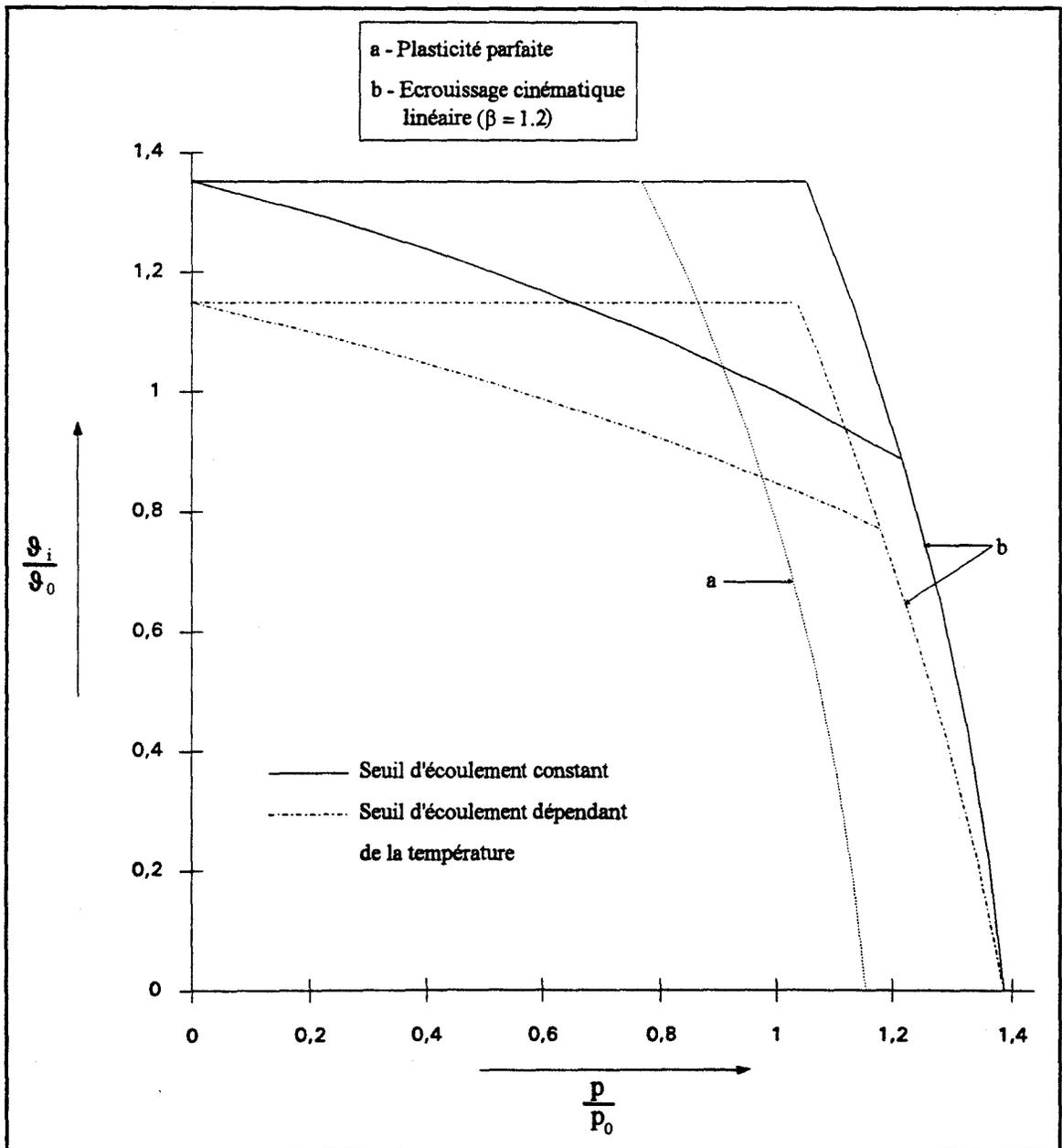


Fig. 5.13 - Influence de l'écrouissage cinématique linéaire -

**5.3.3.3. Comportement élastique parfaitement plastique endommageable :**

Pour ce type de comportement, on a tenu compte que de l'effondrement par plasticité progressive. Sous le chargement thermique, la réduction de la charge limite est de l'ordre de 5 %, en adoptant le modèle de Lemaitre, alors que pour celui de Shichun & Hua, la réduction est de 3%.

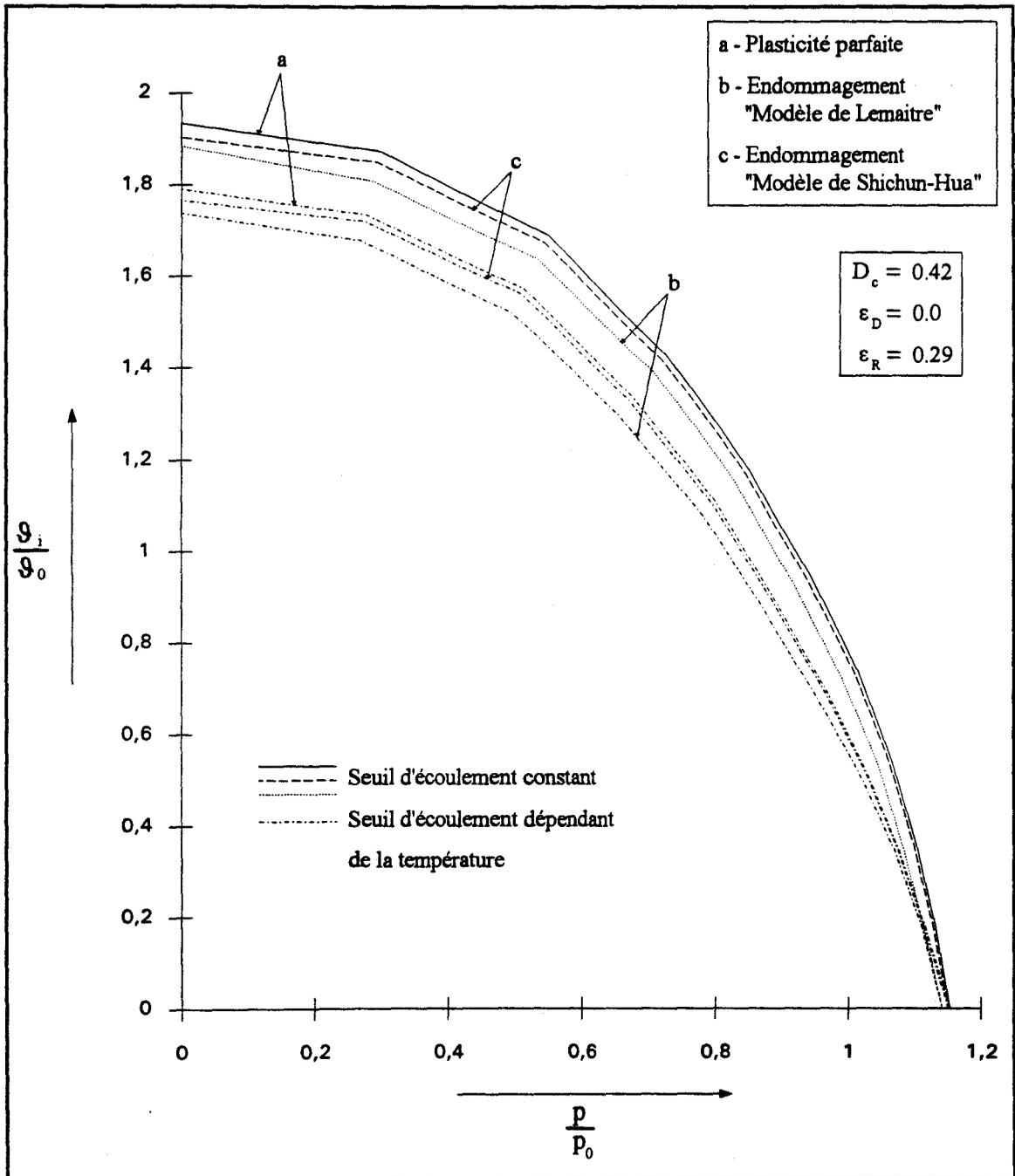


Fig. 5.14 - Influence de l'endommagement plastique ductile -  
- Modèle de Lemaitre et modèle de Shichun & Hua -

5.3.3.4. Comportement élastoplastique endommageable à écrouissage cinématique :

Nous considérerons le rapport  $\sigma_s/\sigma_F = 1.2$ , pour ce type de comportement.

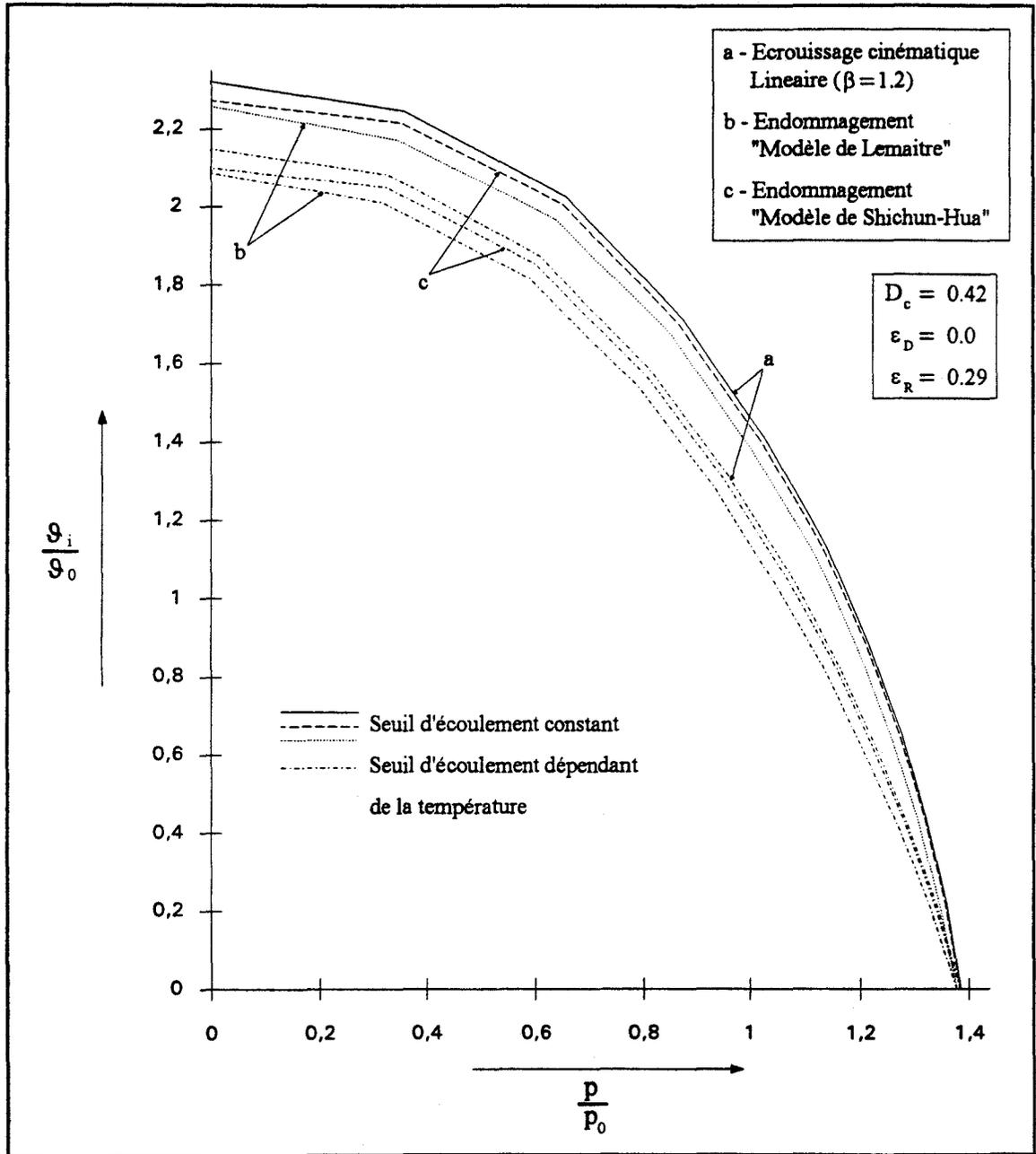


Fig. 5.15 - Influence de l'endommagement ductile et de l'écrouissage cinématique -  
- Modèle de Lemaitre et modèle de Shichun & Hua -

## **CONCLUSION GENERALE**

## CONCLUSION GENERALE

Une contribution à l'analyse de prédiction de défaillance des structures mécaniques, est proposée dans cette thèse. Pour cela, nous avons établi, par l'application du premier théorème d'adaptation, une nouvelle approche pour le calcul des structures élastoplastiques endommageables, sous sollicitations mécaniques et thermiques variables. Nous avons pris en compte, dans cette approche, l'influence de l'érouissage cinématique linéaire, en utilisant le modèle du matériau standard généralisé.

Le phénomène d'endommagement, qui indique le degré de détérioration de la matière et sa perte de résistance, est traduit par une variable interne scalaire, au sens de la thermodynamique des processus irréversibles, qui fournit les équations d'évolution correspondantes couplées aux lois de comportement.

L'approche proposée, repose sur la méthode des éléments finis statiquement admissibles et sur la méthode de programmation mathématique. Cette dernière consiste à déterminer le facteur de charge qui garantit l'adaptation et la sécurité vis-à-vis de l'effondrement par plasticité accumulée, en exigeant qu'en tout point de la structure, le travail dissipé soit borné et que le paramètre d'endommagement reste inférieur à son seuil critique.

Pour le critère d'effondrement vis-à-vis de la plasticité alternée, nous avons supposé que l'endommagement et l'érouissage cinématique, n'influent pas sur ce comportement, étant donné que ce problème est considéré comme un problème élastique limite.

Cette approche, emploie deux modèles d'endommagement plastique ductile, celui de LEMAITRE et celui de SHICHUN & HUA, qui sont fonction de la contrainte effective et de la déformation plastique cumulée. Le premier utilise une forme quadratique du rapport de triaxialité, et le second tient compte du signe des contraintes (compression ou traction).

L'approche repose sur les hypothèses restrictives suivantes :

- le comportement à la déformation du matériau endommagé est traduit par les lois de comportement du matériau vierge équivalent, dans lesquelles on remplace la contrainte usuelle par la contrainte effective ;
- le corps de référence purement élastique est vierge de tout endommagement ;
- la validité de la loi de normalité et la convexité de la surface d'écoulement ;
- les transformations sont infinitésimales ;
- les processus de plasticité et d'endommagement sont indépendants.

L'étude a été appliquée aux coques de révolution axisymétriques, qui consiste à étudier le comportement d'une tranche de la surface moyenne, par une modélisation unidimensionnelle. Les résultats obtenus, sous chargement mécanique, sont comparés à ceux obtenus par la méthode incrémentale, utilisant des éléments bidimensionnels. Avec un temps de calcul réduit d'environ 75 % par rapport à la méthode incrémentale, l'écart entre les deux méthodes employées est faible et d'environ 2 à 4 %. Ceci montre d'une part l'efficacité de l'approche proposée, et d'autre part l'économie qu'on peut avoir au niveau du temps de calcul.

L'approche peut être facilement intégrée dans un code de calcul éléments finis. Elle nécessite un minimum d'informations sur l'histoire du chargement et demande :

- la solution du problème de référence purement élastique,
- la construction d'un champ de contraintes résiduelles indépendant du temps,
- l'utilisation d'un processus d'optimisation, qui consiste à déterminer le facteur de charges qui garantit l'adaptation, tout en veillant à ce que le critère d'écoulement ne soit pas violé et que l'endommagement reste inférieur à l'endommagement critique.

Comme l'endommagement plastique ductile est causé par les grandes déformations plastiques, nous proposons d'étendre, dans le futur, cette étude à ce type de comportement, afin de mieux cerner son influence, en adoptant une décomposition multiplicative du tenseur

de déformation. Prendre en compte l'endommagement dû à la fatigue ou au fluage nous semble indispensable.

Plusieurs travaux expérimentaux, démontrent l'existence d'une anisotropie de l'endommagement, aussi bien pour ce qui concerne sa structure microscopique que pour les effets macroscopiques, ce qui nous incite à étendre la théorie d'adaptation à ce type d'endommagement.

Pour que l'analyse de prédiction de défaillance des structures soit complète, il est important d'étudier l'interaction entre la propagation des fissures et l'adaptation inélastique. Ainsi, nous pourrions mieux évaluer les mécanismes qui aboutissent à la formation d'une ou de plusieurs fissures critiques, pour les différents modes de sollicitations.

Afin de donner plus de maturité à cette théorie, il est souhaitable d'appliquer la théorie d'adaptation et ses différentes extensions à des structures non-axisymétriques.

## **REFERENCES**

## REFERENCES

- [1] **BASAR Y. & KRÄTZIG W. B.**, "Mechanik der flächentragwerke," Vieweg, Braunschweig, (1985).
- [2] **BATHE K. J., WILSON E. L. & IDING R. H.**, "NONSAP : A structural analysis program for static and dynamic response of nonlinear systems," Report N° UGSESM 74-3, Structural and Material Research Departement of Civil Engineering, Structural Engineering Laboratory, University of California, Barkeley, California, (1974).
- [3] **BENKRID K. & BUSSY P.**, "On a stable damage model for structural mechanics," 1er Congrès de Mécanique, 231-238, Rabat, (1993).
- [4] **BLEICH H.**, "Über die bemessung statisch unberstimmter stahlwerke unter der berücksichtigung des elastisch-plastischen verhaltens des baustoffes," Bauingenieur, 13, 261-267, (1932).
- [5] **BORINO G., FLUSCHI P. & POLIZZOTTO C.**, "Consistent time modelling for the evolutive analysis of elastic-plastic solids," In: OWEN D. R., HINTON E. & ONATE E. (Ed.), Computational plasticity, 85-98, (1989).
- [6] **CASEY J.**, "Approximate kinematical relations in plasticity," Int. J. Solids Struct., 21, 671-682, (1985).
- [7] **CERADINI G.**, "Sull' adattamento dei corpi elasto-plastici soggetti ad azioni dinamiche," Giorn. Genio Civile, 106, N° 4/5, 239-250, (1969).
- [8] **CHABOCHE J. L.**, "Description thermodynamique et phénoménologique de la viscoplasticité avec endommagement," Thèse d'Etat, Université de Paris VI, (1978).
- [9] **CHABOCHE J. L.**, "Le concept de contrainte effective appliqué à l'élasticité et à la viscoplasticité en présence d'un endommagement anisotrope," In: BOEHLER J. P. (Ed.), Coll. Int. CNRS, Comportement mécanique des solides anisotrope N° 295.

- [10] COHN M. Z. & MAIER G., "Engineering plasticity by mathematical programming," Pergamon Press, New York, (1979).
- [11] CORDEBOIS J. P. & SIDOROFF F., "Endommagement anisotrope en élasticité et plasticité," J. Méc. Théor. Appl., 45-60, N° Spécial, (1982).
- [12] CORRADI L. & MAIER G., "Inadaptation theorems in the dynamics of elastic-workhardening structures," Ing.-Archiv., 43, 44-57, (1973).
- [13] DEBORDES O. & NAYROLES B., "Sur la théorie et le calcul à l'adaptation des structures élastoplastiques," J. Méc., 15, N°1, 1-53, (1976).
- [14] DEBORDES O., "Duality : Some results in asymptotical elastoplasticity," In: AUSLENDER A. (Ed.), Convex analysis and its application, Springer, Berlin, 100-114, (1977).
- [15] DE DONATO O., "Second shakedown theorem allowing for cycles of both loads and temperature," First Lombardo Scienza Lettere (A), 104, 265-277, (1970).
- [16] DE SAXCE G., "Sur quelques problèmes de mécanique des solides considérés comme matériaux à potentiels convexes," Thèse de doctorat, Coll. Pub. Fac. Sci. Appl., 118, Université de Liège, (1989).
- [17] DOROSZ S., "An upper bound to maximum residual deflections of elastic-plastic structures at shakedown," Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Tech., 24, 167-174, (1976).
- [18] DRUCKER D. C., "On the postulate of stability of material in the mechanics of continua," J. Mech., 3, 235-249, (1964).
- [19] GOKHFELD D. A., "Some problems of shakedown of plates and shells," Izd. Nauka, Moskwa, 284-291, (1966).
- [20] GOKHFELD D. A. & CHERNIAVSKY O. F., "Limit analysis of structures at thermal cycling," Sijthoff and Noordhoff, (1980).
- [21] GROSS-WEEGE J., "Zum einspielverhalten von flächentragwerken," Ruhr-Universität Bochum, IfM-Report, N° 58, (1988).

- [22] **GROSS-WEEGE J.**, "A unified formulation of statical shakedown criteria for geometrically nonlinear problems," *Int. J. Plast.*, 6, 433-447, (1990).
- [23] **GROSS-WEEGE J. & WEICHERT D.**, "Elastic-plastic shells under variable mechanical and thermal loads," *Int. J. Mech. Sci.*, 34, 863-880, (1992).
- [24] **GRÜNIG M.**, "Die tragfähigkeit statisch unbestimmter tragwerke aus stahl bei beliebig häufig wiederholter belastung," Springer, Berlin, (1926).
- [25] **HACHEMI A. & WEICHERT D.**, "An extension of the static shakedown theorem to a certain class of inelastic materials with damage," *Arch. Mech.*, 44, 5, 491-498, (1992).
- [26] **HACHEMI A.**, "Extension du théorème statique d'adaptation au cas des structures endommagées," Rapport de Maîtrise Européenne de 3ème cycle, Faculté Polytechnique de Mons, Belgique, (1992).
- [27] **HALPHEN B. & NGUYEN QUOC SON**, "Sur les matériaux standards généralisés," *J. Mec.*, 14, N° 1, 39-63, (1975).
- [28] **HYDE T. H., SAHARI B. B. & WEBSTER J. J.**, "The effect of axial loading and axial restraint on the thermal ratchetting of thin tube," *Int. J. Mech. Sci.*, 27, 679-692, (1985).
- [29] **HILL R.**, "The mathematical theory of plasticity," In: Oxford (Ed.), (1950).
- [30] **HWA-SHAN-HO**, "Shakedown in elastic-plastic systems under dynamic loading," *Trans. ASME, Ser. E., J. Appl. Mech.*, 39, 416-421, (1972).
- [31] **ILYUSCHIN A. A.**, "Plasticity," Eyrolles, Paris, (1956).
- [32] **JU J. W.**, "On energy-based coupled elastoplastic damage theories: Constitutive modeling and computational aspects," *Int. J. Solids Struct.*, 25, 803-833, (1989).
- [33] **KACHANOV L. M.**, "Time of the rupture process under creep conditions," *Izv. Akad. Nauk, S.S.R., Otd. Tech. Nauk*, N° 8, 26-31, (1958).
- [34] **KALISKI S. & WŁODARCZYK E.**, "The problem of resonance for longitudinal elastic-plastic waves in a finite bar," *Proc. Vibr. Probls.*, 8, 47-59, (1967).

- [35] KAMENJARZH J. & WEICHERT D., "On kinematic upper bounds for the safety factor in shakedown theory," *Int. J. Plast.* 8, 827-837, (1992).
- [36] KOITER W. T., "Some remarks on plastic shakedown theorems," *Proc. Eighth. Int. Congr. Appl. Mech., Istanbul*, 220-230, (1952).
- [37] KOITER W. T., "General theorems for elastic-plastic solids," In: SNEDDON I.N. & HILL R. (Ed.), *Progress in Solid Mechanics*, North Holland, Amsterdam, 165-221, (1960).
- [38] KÖNIG J. A., "A shakedown theorem for temperature dependent elastic moduli," *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Tech.*, 17, 161-165, (1969).
- [39] KÖNIG J. A., "On upper bounds to shakedown loads," *Z. Angew. Math. Mech.*, 59, 349-354, (1979).
- [40] KÖNIG J. A., "On the incremental collapse criterion accounting for temperature dependence of the yield-point stress," *Arch. Mech. Stos.*, 31, 317-325, (1979).
- [41] KÖNIG J. A., "On stability of the incremental collapse process," *Arch. Inz. Lad.*, 26, 219-229, (1980).
- [42] KÖNIG J. A. & MAIER G., "Shakedown analysis of elastoplastic structures, a review of recent developments," *Nucl. Eng. Design.*, 66, 81-95, (1981).
- [43] KÖNIG J. A., "On some recent developments in the shakedown theory," *Adv. Mech.*, 5, 237-258, (1982).
- [44] KÖNIG J. A., "Shakedown criteria in the case of loading and temperature variations," *J. Méc. Théo. Appl.*, N° Spécial, 99-108, (1982).
- [45] KÖNIG J. A., "Stability of the incremental collapse," In: POLIZZOTTO C. & SAWCZUK A. (Ed.), *Inelastic Struct. under var. loads*, Palerme, 329-344, (1984).
- [46] KÖNIG J. A., "Shakedown of elastic-plastic structures" Elsevier, Amsterdam (1987)
- [47] KÖNIG J. A. & SIEMASZKO A., "Strainhardening effects in shakedown process," *Ing.-Archiv.*, 58, 58-66, (1988).

- [48] **KREJA I., SCHMIDT R., TEYEB O. M. & WEICHERT D.**, "Plastic ductile damage finite element analysis of structures," *ZAMM*, 73, 378-381, (1993).
- [49] **LADEVEZE P.**, "On an anisotropic damage théorie," In: CNRS (Ed.), *Failure criteria of struct. media*, (1983).
- [50] **LADEVEZE P. & LEMAITRE J.**, "Damage effective stress in unilateral conditions," *IUTAM*, Lyngby, (1984).
- [51] **LEERS K.**, "Experimentelle und theoretische shakedownuntersuchung an rohren," *Fortschritt-Berichte VDI. Reihe, 18, N° 23*, VDI-Verlag, (1985).
- [52] **LEERS K., KLIE W., KÖNIG J. A. & MAHREHOLTZ O.**, "Experimental investigations on shakedown of tubes," In: SAWCZUK A. & BIANCHI G. (Ed.), *Plasticity Today*, Elsevier, London, 259-275, (1985).
- [53] **LEMAITRE J. & CHABOCHE J. L.**, "Aspect phénoménologique de la rupture par endommagement," *J. Méc. Appl.*, 2, 317-365, (1978).
- [54] **LEMAITRE J.**, "Un modèle linéaire d'endommagement plastique ductile," *C.R. Acad. Sc., Paris, t. 296, Série II*, 1359-1362, (1983).
- [55] **LEMAITRE J.**, "A continuous damage mechanics model for ductile fracture," *J. Eng. Mat. Tech.*, 107, 83-89, (1985).
- [56] **LEMAITRE J. & CHABOCHE J. L.**, "Mécanique des matériaux solides," Dunod, Paris, (1985).
- [57] **LEMAITRE J.**, "Formulation unifiée des lois d'évolution d'endommagement," *C. R. Acad. Sci., t. 305, Série II*, 1125-1130, (1987).
- [58] **LU T.J. & CHOW C.L.**, "On constitutive equations of inelastic solids with anisotropic damage," *Theo. Appl. Fract. Mech.*, 14, 187-218, (1990).
- [59] **MAIER G.**, "Shakedown theory in perfect elastoplasticity with associated and non-associated flow-laws," *Meccanica*, 6, 250-260, (1969).
- [60] **MAIER G.**, "On quasi-static and dynamic shakedown of workhardening plastic structures with unstable parts," *J. Eng. Mech. Div.*, 98, 1322-1327, (1972).

- [61] MAIER G., "A shakedown matrix theory allowing for workhardening and second-order geometric effects," In: SAWCZUK A. (Ed.), Proc. Symp. Foundations of Plasticity, Warsaw, 417-433, (1972).
- [62] MAIER G. & LLOYD SMITH D., "Update to mathematical programming: Application to engineering plastic analysis," In: STEELE C.R. & SPRINGER G.S. (Ed.), ASME, New York, 377-383, (1986).
- [63] MANDEL J., "Adaptation d'une structure plastique écouissable et approximations," Mech. Res. Comm., 3, 483-488, (1976).
- [64] MANDEL J., ZARKA J. & HALPHEN B., "Adaptation d'une structure élastoplastique à écouissage cinématique," Mech. Res. Comm., 4, 309-314, (1977).
- [65] MARTIN J. B., "Plasticity: Fundamentals and general results," MIT Press, Cambridge (MA), (1975).
- [66] MELAN E., "Theorie statisch unbestimmter tragwerke aus ideal-plastischem baustoff," Sitzungsbericht der Akademie der Wissenschaften (Wien) Abt. IIA, 145, 195-218, (1936).
- [67] MELAN E., "Zur plastizität des räumlichen kontinuums," Ing. Arch., 8, 116-126, (1938).
- [68] MORELLE P. & NGUYEN DANG HUNG, "Etude numérique de l'adaptation plastique des plaques et coques de révolution par les éléments finis d'équilibre," J. Méc. Théo. Appl., 2, 567-599, (1983).
- [69] MORELLE P., "Structural shakedown analysis by dual finite-element formulations," Eng. Struct., 6, 70-79, (1984).
- [70] MRÓZ Z., "On the theory of steady plastic cycles in structures," First SMiRT Conf., Berlin, Paper L5/6, (1971).
- [71] NAGHDI P. M., "Foundations of elastic shell theory," Prog. Solid Mech., 4, 1-90, Amsterdam, (1963).
-

- [72] NAYROLES B. & WEICHERT D., "La notion de sanctuaire d'élasticité et l'adaptation des structures," C. R. Acad. Sci., t. 316, Série II, Paris, 1493-1498, (1993).
- [73] NEAL B. G., "Plastic collapse and shake-down theorems for structures of strain-hardening material," J. Aero. Sci., 17, 297-306, (1950).
- [74] NGUYEN DANG HUNG & KÖNIG J. A., "A finite element formulation for shakedown problems using a yield criterion of the mean," Computer Math. Appl. Mech. Eng., 8, 179-192, (1976).
- [75] PERZYNA P., "Constitutive modelling of dissipative solids for postcritical behaviour and fracture," ASME, J. Eng. Mat. Techn., 106, 410-419, (1984).
- [76] PIERRE D. A. & LOWE M. J., "Mathematical programming via augmented lagrangians," London, Addison-Wesley, (1975).
- [77] PONTER A. P. S., "A general shakedown theorem for elastic-plastic bodies with workhardening," Proc. SMIRT-3, paper L5/2, (1975).
- [78] PRAGER W., "Shakedown in elastic-plastic media subjected to cycles of load and temperature," Symp. Plasticita Nella Scienza Della Construzioni, 239-244, (1956).
- [79] PRAGER W., "An introduction to plasticity," Addison-Wesley, London, (1959).
- [80] PYCKO S. & KÖNIG J. A., "Steady plastic cycles on reference configuration in the presence of second-order geometric effects," Eur. J. Mech. Solids, 10, 563-574, (1991).
- [81] PYCKO S. & MRÓZ Z., "Alternative approach to shakedown as a solution of a min-max problem," Acta Mechanica, 93, 202-222, (1992).
- [82] RABOTNOV Y. N., "Creep rupture," Int. Cong. Appl. Mech., Stanford, (1968).
- [83] RICE J. & TRACEY. D., "On ductile enlargement of voids in triaxial stress fields," J. Mech. Phys. Solids, 17, 201-217, (1969).
- [84] ROBINSON M., "A comparison of yield surfaces for thin shells," Int. J. Mech. Sci., 13, 345-354, (1971).

- 
- [85] ROZENBLUM V. I., "On shakedown of uneven heated elastic-plastic bodies," *Izv. Akad. Nauk. SSSR. Otn. Mekh. Mash.*, 7, 136-138, (1957).
- [86] ROZENBLUM V. I., "On shakedown analysis of uneven heated elastic-plastic bodies," *Prikl. Mat. Tkh. Fiz.*, 7, 98-101, (1965).
- [87] SAADOUNI K., "Sur l'analyse de la fissuration des milieux élasto-viscoplastiques par la théorie de l'endommagement continu," Thèse d'Etat UTC, (1988).
- [88] SACZUK J. & STUMPF H., "On statical shakedown theorems for non-linear problems," Ruhr- Universität Bochum, IfM-Report N° 67, (1990).
- [89] SAWCZUK A., "On incremental collapse of shells under cyclic loading," In: Niordson F. I. (Ed.), *Theory of thin shells*, Springer Verlag, Berlin, 328-340, (1969)
- [90] SAWCZUK A., "Evaluation of upper bounds to shakedown loads for shells," *J. Mech. Phys. Solids*, 17, 291-301, (1969).
- [91] SAWCZUK A., "Shakedown analysis of elastic-plastic structures," *Nucl. Eng. Design*, 28, 121-136, (1974).
- [92] SAWCZUK A. & SADOWSKI T., "On anisotropic continuous damage of plates in flexure," *Eng. Struct.*, 5, 234-238, (1983).
- [93] SHICHUN W. & HUA L., "A kinetic equation for ductile damage at large plastic strain," *J. Mat. Proc. Tech.*, 21, 295-302, (1990).
- [94] SIDOROFF F., "Cours sur les grandes déformations," Rapport Gréco, N° 51, (1982).
- [95] SIEMASZKO A., "Inadaptation analysis with hardening and damage," *Eur. J. Mech. Solids*, 12, 237-248, (1993).
- [96] SIMO J. C. & JU J. W., "Strain- and stress-based continuum damage models: I- Formulation," *Int. J. Solids Structures*, 23, N° 7, 821-840, (1987).
- [97] STEIN E., ZHANG G. & KÖNIG J. A., "Micromechanical modelling and computation of shakedown with nonlinear kinematic hardening including examples for 2-D problems," In: AXELRAD D.R. & MUSCHIK W. (Ed.), *Recent Developments of micromechanics*, Springer-Verlag, Berlin, (1990).
-

- [98] SYMONDS P. S., "Shakedown in continuous media," *Trans. ASME, Ser. E., J., Appl. Mech.* 18, 85-89, (1951).
- [99] TRITSCH J. B., "Analyse d'adaptation des structures élasto-plastiques avec prise en compte des effets géométriques," Thèse de doctorat, Université de Lille1, (1993).
- [100] VOYIADJIS G. Z. & KATTAN P. I., "A coupled theory of damage mechanics and finite strain elasto-plasticity- II. Damage and finite strain plasticity," *Int. J. Eng. Sci.*, 28, N° 6, 505-524, (1990).
- [101] WEICHERT D., "On the influence of geometrical nonlinearities on the shakedown of elastic-plastic structures," *Int. J. Plast.*, 2, 135-148, (1986).
- [102] WEICHERT D. & GROSS-WEEGE J., "The numerical assessment of elastic-plastic sheets under variable mechanical and thermal loads using a simplified two-surface yield condition," *Int. J. Mech. Sci.*, 30, 757-767, (1988).
- [103] WEICHERT D., "Advances in the geometrically nonlinear shakedown theory," In KLEIBER M. & KÖNIG J.A. (Ed), *Inelastic Solids and Structures*, Pineridge Press, Swansea, U.K., 489-502, (1990).
- [104] WEICHERT D. & RAAD L., "Extension of the static shakedown-theorem to a certain class of materials with variable elastic coefficients," *Mech. Res. Comm.*, 19, 511-519, (1992).
- [105] ZARKA J. & CASIER J., "Elastic-plastic response of structure to cyclic loading: Pratical rules," In: NEMAT-NASSER S. (Ed.), *Mech. Today*, 6, Pergamon, Oxford, (1981).
- [106] ZARKA J., FRELAT J., INGLEBERT G. & KASMAI-NAVIDI P., "A new approach in inelastic analysis of structures," *Martinus Nijhoff Pub.*, Dordrecht/ Boston/ Lancaster, (1990).

## **ANNEXES**

## ANNEXE A

On propose, la discrétisation des coques minces axisymétriques, telle qu'elle a été établie par GROSS-WEEGE [4] (1988). Cette discrétisation est basée sur les travaux de MORELLE & NGUYEN DANG HUNG [17] (1983).

Soit la coque cylindrique de rayon R, d'épaisseur h et de longueur L :

Le champ de contraintes est choisi de la forme suivante :

$$\sigma = S b + T c \quad (\text{A.1})$$

avec

$$\sigma^T = [n_z, n_\theta, m_z] \quad (\text{A.2a})$$

$$b^T = [b_1, b_2, b_3, b_4, b_5] \quad (\text{A.2b})$$

$$c^T = [c_1, c_2] \quad (\text{A.2c})$$

et

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & C_1 \\ 2C_1C_2 & 2C_1C_2\xi & 0 & 0 & 0 \\ \xi^2 & \frac{1}{3}\xi^3 & \xi & 1 & -C_3(W_3\xi^2 + W_4\xi^3) \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{2C_1}\xi^2 & -\frac{1}{6C_1}\xi^3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

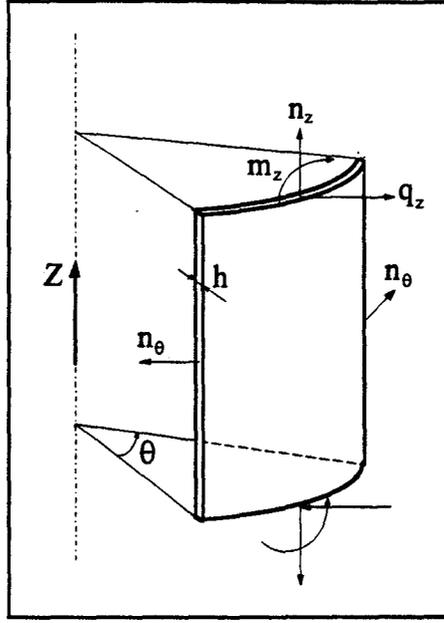


Fig. A.1.

Les connecteurs choisis sont représentés sur la Fig. A.2, ils sont définis par :

$$g = C_b b + C_c c \tag{A.5}$$

avec

$$g^T = [n_1, q_1, m_1, n_2, q_2, m_2] \tag{A.6}$$

$$C_b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -C_1 \\ -2C_1\xi_1 & -C_1\xi_1^2 & -C_1 & 0 & C_1C_3(2W_3\xi_1 + 3W_4\xi_1^2) \\ -\xi_1^2 & -\frac{1}{3}\xi_1^3 & -\xi_1 & -1 & C_3(W_3\xi_1^2 + W_4\xi_1^3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_1 \\ 2C_1\xi_2 & C_1\xi_2^2 & C_1 & 0 & -C_1C_3(2W_3\xi_2 + 3W_4\xi_2^2) \\ \xi_2^2 & \frac{1}{3}\xi_2^3 & \xi_2 & 1 & -C_3(W_3\xi_2^2 + W_4\xi_2^3) \end{pmatrix} \tag{A.7}$$

$$C_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \xi_1 & \frac{1}{2}\xi_1^2 \\ \frac{1}{2C_1}\xi_1^2 & \frac{1}{6C_1}\xi_1^3 \\ 0 & 0 \\ -\xi_2 & -\xi_2^2 \\ -\frac{1}{2C_1}\xi_2^2 & -\frac{1}{6C_1}\xi_2^3 \end{pmatrix} \quad (A.8)$$

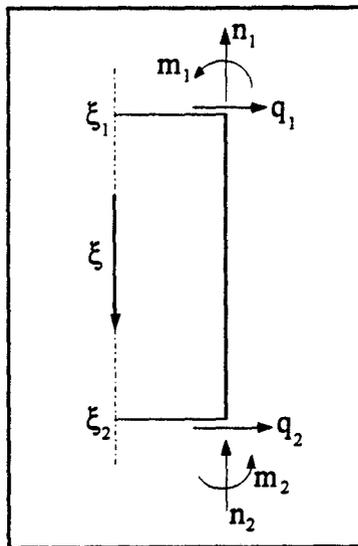


Fig. A.2

Les matrices définies dans le chapitre 4, sont exprimées par :

$$\begin{aligned} F_{bb} &= 2\Pi C_2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} S^T E^{-1} S d\xi \\ &= 2\Pi C_2 \bar{F}_{bb} \end{aligned} \quad (A.9)$$

avec

$$\bar{F}_{bb} = \begin{pmatrix} 4C_1^2 C_2^2 I_0 + 3\beta I_4 & 4C_1^2 C_2^2 I_1 + \beta I_5 & 3\beta I_3 & 3\beta I_2 & -2C_1^2 C_2 v I_0 - 3\beta C_3 (W_3 I_4 + W_4 I_5) \\ & 4C_1^2 C_2^2 I_2 + \frac{1}{3}\beta I_6 & \beta I_4 & \beta I_3 & -2C_1^2 C_2 v I_1 - \beta C_3 (W_3 I_5 + W_4 I_6) \\ & & 3\beta I_2 & 3\beta I_1 & -3\beta C_3 (W_3 I_3 + W_4 I_4) \\ \text{Sym.} & & & 3\beta I_0 & -3\beta C_3 (W_3 I_2 + W_4 I_3) \\ & & & & C_1^2 I_0 + 3\beta C_3 (W_3 I_2 + W_4 I_3) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} F_{bc} &= 2\Pi C_2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} S^T E^{-1} T d\xi \\ &= 2\Pi C_2 \bar{F}_{bc} \end{aligned} \tag{A.10}$$

$$\bar{F}_{bc} = \frac{1}{2C_1} \begin{pmatrix} -3\beta I_4 & -\beta I_5 \\ -\frac{1}{2}\beta I_5 & -\frac{1}{3}\beta I_6 \\ -3\beta I_6 & -\beta I_4 \\ -3\beta I_2 & -\beta I_3 \\ -3C_3\beta I_4(W_3 I_4 + W_4 I_5) & -3C_3\beta I_4(W_3 I_5 + W_4 I_6) \end{pmatrix},$$

avec  $\beta = \frac{1}{4}(1-v^2)$

et

$$\begin{aligned} E_b &= 2\Pi C_2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} S^T \epsilon^s d\xi \\ &= 2\Pi C_2 \bar{E}_b \end{aligned} \tag{A.11}$$

$$\bar{E}_b = \alpha_9 \begin{pmatrix} 2C_1 C_2 \vartheta I_0 + \eta I_2 \\ 2C_1 C_2 \vartheta I_1 + \frac{1}{3} \eta I_3 \\ \eta I_1 \\ \eta I_1 \\ C_1 T I_0 - C_3 \eta (W_3 I_2 + W_4 I_3) \end{pmatrix}$$

avec

$$\eta = \frac{1}{4} (1 + \nu) \Delta \vartheta$$

et

$$I_n = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \xi^n d\xi = \frac{\xi_2^{n+1} - \xi_1^{n+1}}{n+1}$$

et où,

$$W_3 = 3 \frac{W_b - W_a}{(S_2 - S_1)^2} \left( 1 + \frac{2S_1}{S_2 - S_1} \right) + \frac{\varphi_b L}{S_2 - S_1} \left( 1 + \frac{3S_1}{S_2 - S_1} \right) + \frac{\varphi_a L}{S_2 - S_1} \left( 2 + \frac{3S_1}{S_2 - S_1} \right)$$

$$W_4 = - [2(W_b - W_a) + (\varphi_b - \varphi_a)L(S_2 - S_1)] \frac{1}{(S_2 - S_1)^3}$$

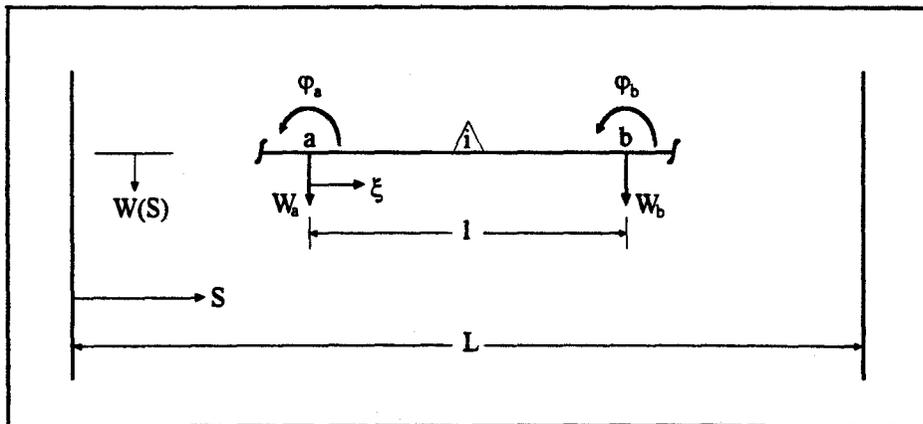


Fig. A.3

## ANNEXE B

Nous présentons dans cette partie l'algorithme d'optimisation, développé par PIERRE & LOWE [19] (1975) et utilisé dans notre étude. Cet algorithme est basé sur les techniques fondamentales suivantes :

- la technique des multiplicateurs de Lagrange, qui permet de transformer le problème d'optimisation avec contraintes en un problème sans contraintes,
- les conditions de Kuhn-Tucker, qui permettent de vérifier si un point proposé est effectivement un point optimal,
- la technique de descente (Line search), qui permet de trouver la plus grande pente.

Le problème d'optimisation consiste à trouver le point optimal  $x^*$ , qui maximise la fonction objective  $f$ . Il peut être énoncé comme suit :

Trouver

$$f(x^*) = \max_x f(x) \quad (\text{B.1})$$

sujette aux contraintes

$$p_i(x) = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m_1 < n \quad (\text{B.2a})$$

$$q_j(x) \leq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, m_2 \quad (\text{B.2b})$$

et tel que

$$c_k < x_k < d_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (\text{B.2c})$$

où, le vecteur  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  est un élément de l'espace Euclidien à  $n$  dimensions  $x \in E^n$ .

Les  $a_i$ ,  $b_j$ ,  $c_k$  et  $d_k$  sont des constantes réelles. La fonction objective  $f$  et les contraintes  $p_i$  et  $q_j$  peuvent être des fonctions linéaires ou non-linéaires.

---

Le problème peut être transformé en utilisant la fonction de Lagrange, définie par :

$$L(x, \alpha, \beta) = f(x) + \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i (a_i - p_i) + \sum_{j=1}^{m_2} \beta_j (b_j - q_j) \quad (\text{B.3})$$

où,  $\alpha_i$  et  $\beta_j$  sont respectivement, les vecteurs multiplicateurs de Lagrange de dimension  $m_1$  et  $m_2$ .

Le gradient de L en respectant x, s'exprime par :

$$\nabla_x L = \nabla_x f - \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i \nabla_x p_i - \sum_{j=1}^{m_2} \beta_j \nabla_x q_j. \quad (\text{B.4})$$

Au point optimal  $x^*$ , le développement en série de Taylor de chaque terme de contrainte d'inégalité  $q_j(x)$ , s'exprime par :

$$q_j(x^* + \Delta x) = q_j^* + \Delta x \nabla_x q_j^* + \dots, \quad j \in S_a \quad (\text{B.5})$$

où

$$S_a = \{j \mid q_j^* = b_j\} \quad (\text{B.6a})$$

et

$$q_j(x^* + \Delta x) \leq b_j \quad \forall j. \quad (\text{B.6b})$$

Des équations (B.5) et (B.6),  $\Delta x$  doit satisfaire :

$$\Delta x \nabla_x q_j^* \leq 0, \quad j \in S_a. \quad (\text{B.7})$$

De même, au voisinage de  $x^*$  :

$$p_i^* = a_i \quad i = 1, 2, \dots, m_1 \quad (\text{B.8a})$$

et

$$p_i(x^* + \Delta x) = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m_1. \quad (\text{B.8b})$$

Le développement en série de Taylor de  $p_i(x^* + \Delta x)$ , s'exprime par :

$$p_i(x^* + \Delta x) = p_i^* + \Delta x \nabla_x p_i^* + \dots \quad (\text{B.9})$$

et en se basant sur les équations (B.8), cette série donne, en tenant compte du terme de premier ordre :

$$\Delta x \nabla_x p_i^* = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m_1. \quad (\text{B.10})$$

D'une manière équivalente, les deux inégalités :

$$\Delta x \nabla_x p_i^* \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m_1 \quad (\text{B.11a})$$

et

$$-\Delta x \nabla_x p_i^* \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m_1 \quad (\text{B.11b})$$

sont les conditions pour lesquelles  $\Delta x$  admissible est satisfait.

En se limitant au termes en  $\Delta x$ ,  $f^*$  est optimale si :

$$f(x^* + \Delta x) - f^* \approx \Delta x \nabla_x f^* \leq 0 \quad (\text{B.12})$$

pour tout  $\Delta x$  suffisamment petit et satisfaisant les équations (B.6b) et (B.8b).

---

Dans ce qui suit, on développe le Lagrangien Augmenté  $L_a(x, \alpha, \beta, w)$  en additionnant les termes de pénalité à  $L$ , avec  $w$  comme ensemble de facteurs de pondération.  $L_a$  est développé afin d'obtenir une relation directe entre un maximum local sous contraintes de  $f(x)$  et un maximum local sans contraintes de  $L_a(x, \alpha^*, \beta^*, w)$  en respectant  $x$ .

Le Lagrangien Augmenté est exprimé par :

$$L_a := L - w_1 P_1 - w_2 P_2 - w_3 P_3 \quad (\text{B.13})$$

où,  $L$  est le Lagrangien de l'équation (B.3) et  $w = [w_1, w_2, w_3]$  est l'ensemble de facteurs de pondération ( $w_i > 0$ ), avec :

$$P_1 := \sum_{i=1}^{m_1} (a_i - p_i)^2 \quad (\text{B.14a})$$

$$P_2 := \sum_{j \in C_a} (b_j - q_j)^2, \quad C_a = \{j \mid \beta_j > 0\} \quad (\text{B.14b})$$

et

$$P_3 := \sum_{j \in C_b} (b_j - q_j)^2, \quad C_b = \{j \mid \beta_j = 0 \text{ et } q_j \geq b_j\}. \quad (\text{B.14c})$$

Le gradient du Lagrangien Augmenté ( $L_a$ ), en respectant  $x$ , est exprimé par :

$$\nabla_x L_a = \nabla_x f - \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i^+ \nabla_x p_i - \sum_{j \in C_a} \beta_j^+ \nabla_x q_j + \sum_{j \in C_b} 2w_3 (b_j - q_j) \nabla_x q_j \quad (\text{B.15})$$

où

$$\alpha_i^+ := \alpha_i - 2w_1 (a_i - p_i) \quad (\text{B.16a})$$

et

$$\beta_j^+ := \beta_j - 2w_2 (b_j - q_j). \quad (\text{B.16b})$$

Si  $L_a(x^*, \alpha^*, \beta^*, w)$  est un maximum local pour le problème sans contraintes, en respectant  $x$ , pour les valeurs finies de  $w_i > 0$ , alors  $f(x^*)$  est un maximum local pour le problème avec contraintes de  $f(x)$ , tel que  $(x^*, \alpha^*, \beta^*, w)$  satisfait les conditions de Kuhn-Tucker (KUHN-TUCKER [11] (1951)) :

$$p_i(x^*) = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m_1 \quad (\text{B.17a})$$

$$q_j(x^*) \leq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, m_2 \quad (\text{B.17b})$$

$$\beta_j^* (b_j - q_j(x^*)) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m_2 \quad (\text{B.17c})$$

$$\beta_j^* \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m_2 \quad (\text{B.17d})$$

et

$$\nabla_x L_a(x^*, \alpha^*, \beta^*, w) = 0. \quad (\text{B.17e})$$

La recherche du point maximal est basée sur la technique de "line search", exprimée par :

$$x^{k+1} = x^k + \rho r^k \quad (\text{B.18})$$

avec

$$r^k = H^k g^k \quad (\text{B.19})$$

où,  $x^{k+1}$  est la nouvelle valeur de  $x$  obtenue pour une variation de  $\rho$  selon la direction  $H^k g^k$ .  $H^k$  est une matrice de dimension  $n \times n$ ,  $g^k$  est le gradient de  $L_a$ , évalué en  $x^k$  et  $\rho$  est un scalaire positif.

L'idée de base de la technique de descente "line search" est de choisir une direction de descente  $r^k$  en  $x^k$  à chaque itération, de telle façon qu'à l'itération suivante, on choisit un point  $x^{k+1}$  diminuant  $f(x)$ , Fig. B.1, c'est-à-dire qu'il faut :

- choisir  $r^k$  pour lequel,  $\nabla_x f(x^k) r^k < 0$ ,  $r^k > 0$ ,

- choisir  $x^{k+1} = x^k + \rho r^k$ ,

en sorte que  $f(x^{k+1}) < f(x^k)$ .

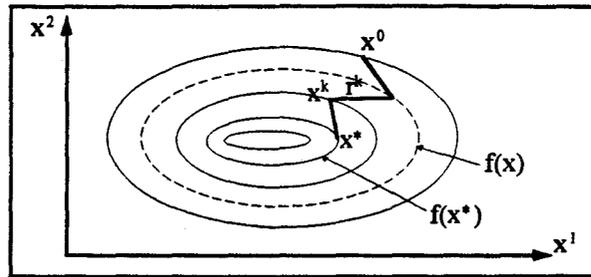


Fig. B.1 - Technique de descente -

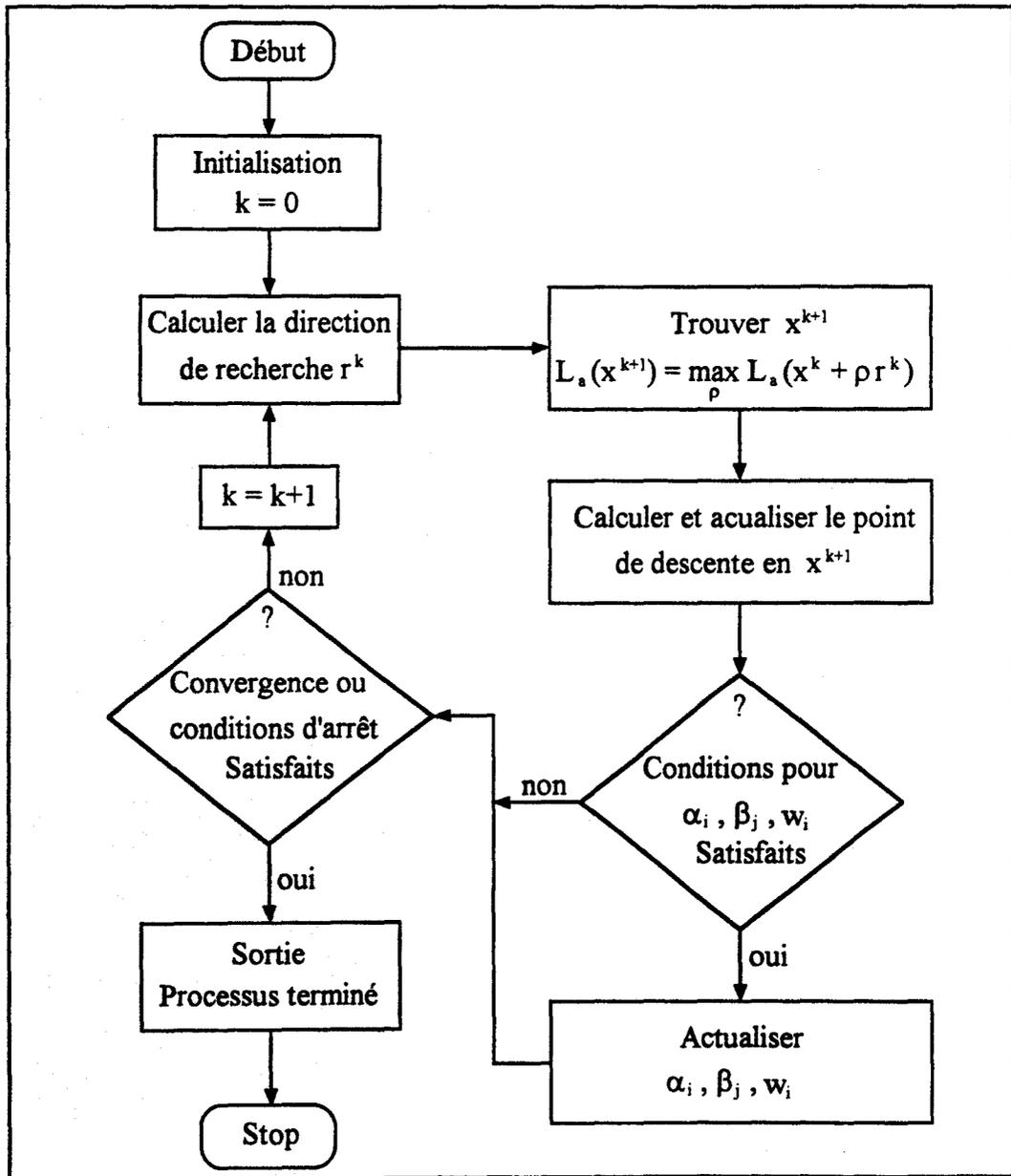


Fig. B.2 - Algorithme de recherche du point optimal -



## ANNEXE C

On donne dans cette partie, l'algorithme de résolution de la méthode pas-à-pas, utilisé dans le module NONSAP, développé par BATHE & al. [1] (1974) et amélioré par KREJA & al. [10] (1993). Cet algorithme détermine l'état actuel de contraintes et la matrice constitutive dans chaque point d'intégration du matériau élastoplastique endommageable.

### **DONNEES :**

#### **\* Constantes matérielles :**

$E^E$  – matrice constitutive élastique (matériau non-endommagé) ;

$D_c$  – endommagement critique ;

$\epsilon_D$  – seuil de déformations initial ;

$\epsilon_R$  – seuil de déformations critique.

#### **\* Historique :**

$\sigma$  – vecteur de contraintes actualisées ;

$\epsilon$  – vecteur de déformations totales actualisées ;

$\epsilon^P$  – vecteur de déformations plastiques actualisées ;

$\sigma_s$  – seuil d'écoulement ;

$D$  – paramètre d'endommagement actualisé.

#### **\* L'état courante :**

$e$  – vecteur de déformations actuelles (calculées sur la base de l'état courante de déformations).

**RESULTATS :**

**s** – vecteur de contraintes totales actuelles ;

**E<sup>E-P-D</sup>** – matrice constitutive élastoplastique (matériau endommagé).

**→ DEBUT**

- ❶ Calcul de l'incrément de déformations totales :

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{e} - \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{C.1})$$

- ❷ Calcul de l'incrément de contraintes et le vecteur de contraintes actuelles sous l'hypothèse d'un comportement élastique :

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = (1 - D) \mathbf{E}^E \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{C.2})$$

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} + \Delta \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{C.3})$$

- ❸ Contrôler la valeur de la fonction de charge  $\mathcal{F}(\boldsymbol{\tau})$  :

$$\blacksquare \mathcal{F}(\boldsymbol{\tau}) \leq 0 \Rightarrow \text{Etat élastique, } \mathbf{s} = \boldsymbol{\tau} \quad (\text{C.4})$$

$$\mathbf{E}^{E-P-D} = (1 - D) \mathbf{E}^E \text{ et stop ;}$$

$$\blacksquare \mathcal{F}(\boldsymbol{\tau}) > 0 \Rightarrow \text{Continuer les calculs.} \quad (\text{C.5})$$

- ❹ Déterminer la partie élastique de l'incrément des contraintes en vérifiant l'équation :

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma} + R \Delta \boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad (\text{C.6})$$

⑤ Introduire, dans le critère d'écoulement, l'état de contraintes :

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{R} (1 - \mathbf{D}) \mathbf{E}^E \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + (1 - \mathbf{R}) \sum_{i=1}^m \mathbf{E}_{i-1}^{E-P-D} \frac{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}}{M} \quad (\text{C.7})$$

le nombre d'incrémentations  $M$  est déterminé en tenant compte de la valeur de  $\mathcal{F}(\boldsymbol{\tau})/\sigma_s$ .

⑥ Evaluation de la nouvelle matrice constitutive  $\mathbf{E}^{E-P-D}$  (sur la base de l'état de contraintes actuelles  $\mathbf{s}$ ).

→ FIN

Détail des calculs de l'étape ⑤ :

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{R} (1 - \mathbf{D}) \mathbf{E}^E \Delta \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}}{M}$$

Les calculs accomplis dans la boucle  $i = 1, 2, \dots, M$  :

(a) Sur la base de l'état de contraintes  $\boldsymbol{\tau}$  :

Evaluation de la matrice constitutive  $\mathbf{E}^{E-P-D}$  et l'incrément de déformations plastiques  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}^P$ .

(b) Actualiser le vecteur de contraintes :

$$\boldsymbol{\tau} \leftarrow \boldsymbol{\tau} + \mathbf{E}^{E-P-D} \delta \boldsymbol{\varepsilon}$$

(c) Actualiser les déformations plastiques totales :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p \leftarrow \boldsymbol{\varepsilon}^p + \delta\boldsymbol{\varepsilon}^p$$

(d) Corriger l'état de contraintes  $\boldsymbol{\tau}$  :

(e) Actualiser le paramètre d'endommagement  $D$  :

(f) Contrôler le critère d'écoulement :

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\tau}, D, \sigma_s) = 0 \Rightarrow \text{retour à (g)}$$

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\tau}, D, \sigma_s) \neq 0 \Rightarrow \text{retour à (d)}$$

(g) Fin de la boucle de l'incrément :

$$i < M \Rightarrow i \leftarrow i + 1 \text{ et retour à (a)}$$

$$i = M \Rightarrow \mathbf{s} \leftarrow \boldsymbol{\tau} \text{ et retour à } \textcircled{6}$$

## ANNEXE D

### ABSTRACT OF THE THESIS REPORT

#### 1. GENERALITIES

Recently, the inelastic analysis began to play an important role in engineering mechanics due to the requirements of modern technologies like nuclear power plants, chemical industry, metal forming, energy conversion and future fusion technology. Because of modern and future technologies, more stringent demands are imposed on the engineering mechanics education. For instance, there is a growing need and necessary for teaching the actual problems, results and methods of various branches of inelastic and non-linear engineering mechanics. The methods of plasticity, for example, penetrate to design procedures at a growing pace.

Among the methods of plasticity employed in structural mechanics for the purpose of designing structures and structural components, the theory of limit analysis became already an engineering tool. The theory of limit analysis employs the rigid-plastic model of material and allows to evaluate the load intensity which the structure is able to carry under agencies monotonically increasing in proportion to a single parameter.

In reality, mechanical elements in power generating and processing industry are often subjected to considerable variations of thermal and mechanical loads, eg. variable pressure of liquid and/or gas. Particularly if the history of variable loads during the lifetime of the considered mechanical element is not precisely known, shakedown theories are appropriate means to estimate structural safety. The foundations of the theoretical achievements in this field of research were given by MELAN [15] (1936), [16] (1938) and KOITER [8] (1952) who proved, under the assumptions of geometrical linearity, elastic-perfectly plastic or linear and unlimited hardening material behaviour, and the validity of an

associated flow law, the classical statical and kinematical theorems of shakedown, respectively.

Extensions of these theorems to broader classes of problems including the change of temperature, hardening, influence of geometrical changes and damage have attracted much interest in the last years.

It is important, at a design stage, to take into account the different parameters influencing the structures behaviour, particularly in the damaged case. In fact, for ductile materials, the unlimited accumulation of plastic strains leads to the forming of macrocracks leading to the degradation of the material properties. The corresponding continuous damage mechanics model allows a more comprehensive approach to the formulation of a criterion of local fracture and it is possible to predict the limit of metal forming and the level of damage during deformation.

Many models have been elaborated representing the damaged structures behaviour; notably for metallic materials (KACHANOV [7] (1958), RABOTNOV [20] (1968) and JU [6] (1989)...), or for the theory of the anisotropic damage (LADEVEZE & LEMAITRE [12] (1984), CORDEBOIS & SIDOROFF [2] (1982), SIMO & JU [22] (1987)...), by using the incremental methods.

To estimate of stability and security for damaged structure and to avoid the time-stepping evolution solution, we have proposed a new approach by the application of the shakedown theory. This approach is based on the finite element method and mathematical programming, giving the safety factor against failure due to incremental collapse, with the condition that the damage parameter does not reach its critical value of failure.

## **2. CONTENT OF REPORT**

The first chapter of this report, presents the statical shakedown theorems given by MELAN [15] (1936), using the convexity property of the yield surface and introduces the residual total energy function of elastic strains. We join to these the improvement

foundations brought by DEBORDES & NAYROLES [3] (1976), by indicating the role of the safety factor introduced by KOITER [9] (1960).

The **second chapter** is devoted to the constitutive equations by assuming the small transformations. The adopted approach is based on the thermodynamic concept of irreversible processes, which constitutes a necessary scientific basis to describe the damage phenomena and material hardening by internal variable. The kinematical hardening is taken into account by the concept of "generalized standard material" developed by HALPHEN & N. Q. SON [5] (1975). We begin by defining the damage variable introduced by KACHANOV [7] (1958) as well as the effective stress by using the hypothesis of strain equivalence (LEMAITRE & CHABOCHE [14] (1985)). By the definition of the thermodynamic potential and from the thermodynamic principle, we deduce the dissipative inequalities.

The **third chapter** presents two three-dimensional models of ductile plastic damage established by LEMAITRE [13] (1985) and SHICHUN & HUA [21] (1990). These models are based on a continuum damage variable, on the effective stress and on thermodynamics concept. They models are linear with equivalent strain and shows a large influence of triaxiality by means of a damage equivalent stress. Identification of several metals is made by means of elasticity modulus change induced by damage.

In the **fourth chapter**, an extension of the statical shakedown theorems is proposed, taking into account the influence of damage and linear kinematical hardening, under combined thermal and mechanical variable loads. By using the von Mises yield criterion, we give the upper bound of the damage parameter via the mathematical programming method (PIERRE & LOWE [19] (1975)), as well as the lower bound of the load factor which guarantees the shakedown and the security of the structure. Finally, we present the finite element formulation introduced by MORELLE & NGUYEN DANG HUNG [17] (1983) and MORELLE [18] (1984) and improved by GROSS-WEEGE [4] (1988).

In the **fifth chapter**, we present some classic numerical examples applied to shell-like structures, based on the work of GROSS-WEEGE [4] (1988). A comparison with the results of step-by-step method is presented, by using the NONSAP program elaborated by

BATHE & al. [1] (1974) at the university of California and improved by KREJA & al. [10] (1993). Finally we recall briefly the modelisation of shell-like structure with the corresponding yield criterion.

### 3. CONCLUSION

A new approach is proposed to predict the failure of mechanical structures. The presented method is an extension of the statical shakedown theorems to inelastic damaging structures under mechanical and thermal variable loads. The effect of linear kinematical hardening is taken into account by using the concept of generalized standard material. The phenomenon of damage is taken into account by an internal variable in the senses of thermodynamics of irreversible processes, which give corresponding constitutive laws coupled with kinetical equations.

The solution technique used is based on a finite element discretization and an application of mathematical programming tools. This latter consists in determining the safety factor that guarantees the shakedown against failure due to accumulated plasticity, requiring that for any point of the structure, the dissipated energy is limited with the condition that the damage parameter does not reach its critical threshold.

In the case of alternating plasticity, we have assumed that the damage and the kinematical hardening, do not influence the shakedown behaviour, although this problem is considered as an elastic limit problem. Here, ductile plastic damage is taken into account by using the models of Lemaitre and Shichun & Hua, these are a function of the effective stress and the accumulated plastic strains. The first uses a quadratic form of the triaxiality ratio, and the second takes into account the sign of hydrostatic stresses (compression or traction).

The proposed approach is based on the following restricted assumptions :

- the strain behaviour of a damaged material is represented by constitutive equations of the virgin material (without any damage) of potential of which the stress is replaced by the effective stress ;
- the purely elastic reference body is considered undamaged ;

- the validity of the associated flow law and convexity of the yield surface ;
- transformations are infinitesimal ;
- the process of the plasticity and damage are independent.

The study has been applied to the shell-like structures. Obtained results, under mechanical loading, are compared to those obtained by the incremental method, using two-dimensional elements. The good correlation is found between the two methods and the difference is weak and approximately 2 to 4 %.

The approach can be easily integrated in a finite element tools. It necessitates a minimum of information on the loading history and needs :

- the solution of the purely elastic reference problem,
- the construction of a time-independent residual stresses field,
- the utilisation of a process of optimization, that consists in determining the safety factor that guarantees the shakedown, while checking that the yield criterion is not violated and that the damage parameter does not reach its critical value of failure

As the ductile plastic damage is induced by large plastic strains, we propose in future to extend this approach to this type of behaviour, so as to better understand its influence, by adopting a multiplicative decomposition of the strains tensor. To take some account of the damage due to the fatigue or to the creep seems in our view.

Several experimental works, demonstrate the existence of a damaged anisotropy which incites us to extend the theory of the shakedown to this type of damage.

In order that the analysis of failure prediction of structures is complete, it is important to study the interaction between the crack propagation and the inelastic shakedown. Thus, we will be better able to evaluate mechanisms that end with the formation of one or several critical cracks.

## REFERENCES DES ANNEXES

- [1] BATHE K. J., WILSON E. L. & IDING R. H., "NONSAP : A structural analysis program for static and dynamic response of nonlinear systems," Report N° UGSESM 74-3, Structural and Material Research Departement of Civil Engineering, Structural Engineering Laboratory, University of California, Barkeley, California, (1974).
- [2] CORDEBOIS J. P. & SIDOROFF F., "Endommagement anisotrope en élasticité et plasticité," J. Méc. Théor. Appl., 45-60, N° Spécial, (1982).
- [3] DEBORDES O. & NAYROLES B., "Sur la théorie et le calcul à l'adaptation des structures élastoplastiques," J. Méc., 15, N°1, 1-53, (1976).
- [4] GROSS-WEEGE J., "Zum einspielverhalten von flächentragwerken," Ruhr-Universität Bochum, IfM-Report, N° 58, (1988).
- [5] HALPHEN B. & NGUYEN QUOC SON, "Sur les matériaux standards généralisés," J. Mec., 14, N° 1, 39-63, (1975).
- [6] JU J. W., "On energy-based coupled elastoplastic damage theories: Constitutive modeling and computational aspects," Int. J. Solids Struct., 25, 803-833, (1989).
- [7] KACHANOV L. M., "Time of the rupture process under creep conditions," Izv. Akad. Nauk, S.S.R., Otd. Tech. Nauk, N° 8, 26-31, (1958).
- [8] KOITER W. T., "Some remarks on plastic shakedown theorems," Proc. Eighth. Int. Congr. Appl. Mech., Istanbul, 220-230, (1952).
- [9] KOITER W. T., "General theorems for elastic-plastic solids," In: SNEDDON I.N. & HILL R. (Ed.), Progress in Solid Mechanics, North Holland, Amsterdam, 165-221, (1960).
- [10] KREJA I., SCHMIDT R., TEYEB O. M. & WEICHERT D., "Plastic ductile damage finite element analysis of structures," ZAMM, 73, 378-381, (1993).

- [11] KUHN H. W. & TUCKER A. W., "Nonlinear Programming," In: Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, NEYMAN J. (Ed.), University of California Press, Berkeley, 481-493, (1951).
- [12] LADEVEZE P. & LEMAITRE J., "Damage effective stress in unilateral conditions," IUTAM, Lyngby, (1984).
- [13] LEMAITRE J., "A continuous damage mechanics model for ductile fracture," J. Eng. Mat. Tech., 107, 83-89, (1985).
- [14] LEMAITRE J. & CHABOCHE J. L., "Mécanique des matériaux solides," Dunod, Paris, (1985).
- [15] MELAN E., "Theorie statisch unbestimmter tragwerke aus ideal-plastischem baustoff," Sitzungsbericht der Akademie der Wissenschaften (Wien) Abt. IIA, 195-218, (1936).
- [16] MELAN E., "Zur plastizität des räumlichen kontinuums," Ing. Arch., 8, 116-126, (1938).
- [17] MORELLE P. & NGUYEN DANG HUNG, "Etude numérique de l'adaptation plastique des plaques et coques de révolution par les éléments finis d'équilibre," J. Méc. Théo. Appl., 2, 567-599, (1983).
- [18] MORELLE P., "Structural shakedown analysis by dual finite-element formulations," Eng. Struct., 6, 70-79, (1984).
- [19] PIERRE D. A. & LOWE M. J., "Mathematical programming via Augmented Lagrangians," London, Addison-Wesley, (1975).
- [20] RABOTNOV Y. N., "Creep rupture," Int. Cong. Appl. Mech., Stanford, (1968).
- [21] SHICHUN W. & HUA L., "A kinetic equation for ductile damage at large plastique strain," J. Mat. Proc. Tech., 21, 295-302, (1990).
- [22] SIMO J. C. & JU J. W., "Strain- and stress-based continuum damage models: I- Formulation," Int. J. Solids Structures, 23, N° 7, 821-840, (1987).