

50376
1994
303

20102550
50376
1994
303

N° d'ordre : 1404

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

Pour obtenir le titre de

Docteur en MECANIQUE

par

CHAARA Chafiq

SIMULATION NUMERIQUE TRIDIMENSIONNELLE
D'ECOULEMENT VISQUEUX INCOMPRESSIBLE
DANS UNE GEOMETRIE COMPLEXE

Soutenue le 02 Décembre 1994.



Membres du jury :
Président : G. CAIGNAERT, Professeur à l' E.N.S.A.M. (Lille)
Rapporteurs : A. GIOVANNINI, Professeur à l' U.P.S. (Toulouse)
: B. DESMET, Professeur à l' E.N.S.I.M.E.V. (Valenciennes)

Membres : P. MICHEAU, Professeur à l' U.S.T.L (Lille)
: H. NAJI, Maître de conférences à l' E.U.D.I.L. (Lille)

LABORATOIRE DE MECANIQUE DE LILLE



A mes parents

A mes frères et soeurs

A ma femme

A tous ceux qui me sont chers

Témoignage de ma profonde affection

RESUME

Dans ce travail, un *schéma numérique* de résolution des équations de la mécanique des fluides, pour un écoulement visqueux, incompressible, isotherme, *tridimensionnel* ou *bidimensionnel*, a été *développé* et *mis au point*.

Dans une première partie, on définit l'étendue des phénomènes physiques pris en compte, les aspects théoriques du problème nécessaires pour sa formulation. En suite, on expose les principales techniques numériques adoptées. Les équations de Navier-Stokes écrites sous forme intégrale, sont discrétisées :

- en temps en utilisant une formulation du type Euler-Lagrange, et une méthode de type différences finies.

- en espace en utilisant une méthode de type éléments finis.

Le système discret obtenu pour la pression (Equation de Poisson discrète) permet une résolution itérative par la méthode SOR (Successive Over Relaxation).

Dans la seconde partie, on s'intéresse plus particulièrement aux applications bidimensionnelles en laminaire, puis en turbulent (modèle longueur de mélange et modèle à deux équations de transport).

La troisième partie est consacrée aux applications tridimensionnelles. Plusieurs cas tests ont été effectués, notamment l'écoulement dans (i) un canal droit, (ii) dans des coudes à 60 degrés, 90 degrés et 120 degrés, (iii) une conduite obstruée.

Les résultats obtenus permettent de montrer clairement l'invalidité du schéma numérique utilisé et la mise en évidence des effets tridimensionnels. La différence de pression engendre des écoulements secondaires qui se superposent à l'écoulement principale. Les comparaisons entre nos résultats et ceux d'autres auteurs sont satisfaisantes.

ABSTRACT

An efficient numerical scheme for modeling viscous, incompressible, isotherm, three and two dimensional flows in complex geometries is investigated.

The conservative form of the primitive variable formulation of time dependent Navier-Stokes equations is adopted and discretized :

- in time with a Lagrangian-Eulerian scheme and finite difference technique.

- in space with a finite element technique.

The numerical solution of pressure is obtained with successive over relaxation scheme.

The model is used to simulate two dimensional laminar and turbulent (mixing length, two equations turbulence) flows.

The model is used to simulate three dimensional flows in straight channel, circular channel (60°, 90°, 120°) and channel with obstruction.

The results of the model are compared with experimental and numerical data. The utility and stability of the proposed scheme are investigated, so we obtain a correct simulation of secondary flows.

PRINCIPALES NOTATIONS.....	p.05
INTRODUCTION.....	p.07

- 1. Introduction
- 2. Orientation
- 3. Plan

PREMIERE PARTIE : EQUATIONS DE NAVIER-STOKES ET DISCRETISATION

I. EQUATIONS GENERALES.....	p.14
-----------------------------	------

I.1 Lois Physiques.....	p.14
-------------------------	------

I.2 Equations de Navier-Stokes locales.....	p.14
---	------

I.3 Expression adimensionnée des équations de Navier-Stokes.....	p.16
--	------

I.4 Conditions aux limites et conditions initiales.....	p.17
---	------

I.5 Equations intégrales et formulation Eulerienne-Lagrangienne.....	p.18
--	------

II. METHODES NUMERIQUES.....	p.22
------------------------------	------

II.1 FORMULATION.....	p.22
-----------------------	------

II.2 DISCRETISATION.....	p.24
--------------------------	------

II.2.1 Discrétisation temporelle.....	p.24
---------------------------------------	------

II.2.2 Discrétisation spatiale.....	p.27
-------------------------------------	------

II.2.2.1 Discrétisation du champ de vitesse.....	p.27
--	------

II.2.2.2 Discrétisation du champ de pression.....	p.29
---	------

II.2.2.3 Discrétisation de l'équation de continuité.....	p.31
--	------

(1ère phase).

II.2.2.4 Discrétisation de l'équation de la quantité de mouvement.....	p.32
--	------

(1ère phase)

II.2.2.5 Discrétisation de l'équation de la quantité de mouvement.....	p.36
--	------

(2ème phase).

II.2.2.6 Discrétisation du tenseur des contraintes visqueuses.....	p.37
--	------

II.2.4 Conditions aux limites et conditions initiales.....	p.38
II.2.5 Conditions de stabilité.....	p.39
II.2.6 Système discret et méthodes de résolution.....	p.39
II.2.7 Organigramme.....	p.40

DEUXIEME PARTIE : APPLICATIONS BIDIMENSIONNELLES

I. TESTS EN LAMINAIRES.....	p.46
I.1 Ecoulement parallèle.....	p.46
I.1.1 Ecoulement parallèle dans un canal.....	p.46
a. Ecoulement de Poiseulle	
b. Ecoulement de Couette pur	
I.1.2 Résultats Numériques.....	p.48
a. Caractéristique de l'écoulement	
b. Géométrie	
c. Maillage	
d. Conditions aux limites	
e. Résultats	
f. Conclusion	
I.2. Elargissement brusque : Marche descendante.....	p.69
a. Caractéristique de l'écoulement	
b. Géométrie	
c. Maillage	
d. Conditions aux limites	
e. Résultats	
f. Conclusion	
II. TESTS EN TURBULENTS.....	p.82
II.I. EQUATIONS GENERALES	p.82
II.I.1 Introduction.....	p.82
II.I.2 Caractéristiques de la turbulence.....	p.82

II.I.3 Approche statistique.....	p.83
II.I.4 Equations du mouvement turbulent.....	p.84
II.I.4.1 Equations de Reynolds.....	p.84
II.I.4.2 Equation de transport pour les contraintes de Reynolds.....	p.86
II.I.4.3 Equation de transport pour l'energie cinetique turbulente.....	p.87
II.I.4.4 Equation des taux de dissipation isotrope.....	p.89
II.II. MODELES DE TURBULENCE.....	p.91
II.II.1 Problème de fermeture.....	p.91
II.II.2 Hypothèse de Base.....	p.91
II.II.3 Modèle de fermeture en un point.....	p.92
II.II.4 Modèle à une équation de transport.....	p.94
II.II.5 Modèle à deux équations de transport.....	p.96
II.III. Résultats numériques.....	p.101

TROISIEME PARTIE : APPLICATIONS TRIDIMENSIONNELLES

ECOULEMENTS TRIDIMENSIONNELS.....	p.108
1. Ecoulement dans un canal droit.....	p.109
2. Ecoulement dans une conduite coudée.....	p.118
3. Ecoulement dans une conduite obstruée.....	p.133
CONCLUSION.....	p.140
REFERENCES.....	p.143
ANNEXES	

PRINCIPALES NOTATIONS

$x_i, (i=1,3)$	coordonnées cartésiennes du système physique.
$\xi_i, (i=1,3)$	coordonnées curvilignes du système de transformation.
t	temps.
Δt	pas du temps.
u_i	composante de la vitesse instantanée suivant la direction i .
\bar{u}_i	composante de la vitesse moyenne dans la direction i .
u'_i	composante de la vitesse fluctuante dans la direction i .
p	pression instantanée.
p'	pression fluctuante.
\bar{p}	pression moyenne.
f_i	composante de force volumique dans la direction i .
$\frac{f_i}{u_i u_j}$	tenseur de Reynolds.
k	énergie cinétique de la turbulence.
ε	taux de dissipation.
l	échelle de longueur des grosses structures.
l_m	longueur de mélange.
ρ	masse volumique.
M	masse.
μ	viscosité dynamique.
μ_t	viscosité dynamique turbulente.
ν	viscosité cinématique.
ν_t	viscosité cinématique turbulente.
δ_{ij}	symbole de Kronecker.
$\Rightarrow \tau(\tau_{ij})$	tenseur des contraintes visqueuses.
$\Rightarrow \sigma(\sigma_{ij})$	tenseur des contraintes.
$\Rightarrow \varepsilon(\varepsilon_{ij})$	tenseur de déformation.
Ω	domaine physique, sous-ensemble de \mathcal{R}^2 ou \mathcal{R}^3 .
Ω^d	élément décalé, cellule décalée ou maille décalée.
V^d	volume de l'élément décalé.

R_e	Nombre de Reynolds.
N_i	fonction de pondération ou d'interpolation au noeud i.
$\frac{\partial}{\partial t}$	dérivée temporelle.
dv	élément de volume.
ds	élément de surface.
χ, ϕ	quantités scalaires.
\bar{D}	coefficient géométrique défini par (II.2.2.10)
\bar{D}^d	coefficient géométrique défini par (II.2.2.19).
\bar{C}^v	coefficient géométrique défini par (II.2.2.29).
$\frac{\partial}{\partial x_k}$	dérivées spatiales.
$\frac{d}{dt} \Big _{\bar{u}}, \frac{D}{Dt}$	dérivée en suivant l'élément de volume (formalisme ALE).

Exposants

n	relatif au temps de calcul ($n\Delta t$).
n_i	relatif au temps de calcul intermédiaire.
$n+1$	relatif au temps de calcul $((n+1)\Delta t)$.
d	élément décalé.
e	relatif à un élément (maille, cellule).
a	état de référence.

Indices

α, β	relatif au repérage des éléments.
a	amont.
m	moyen.

INTRODUCTION

INTRODUCTION

1. Introduction

Depuis le début du siècle, d'importants efforts scientifiques, financiers et humains, ont été consacrés à une meilleure compréhension des phénomènes physiques en Mécanique des Fluides. Chacun de ces phénomènes a un grand intérêt scientifique et possède de nombreuses incidences industrielles.

La mécanique des fluides a subi à travers les temps d'énormes évolutions, tant sur le plan de la compréhension que sur celui des moyens de prévisions.

La base théorique de la mécanique des fluides a été développée au fil des temps par Archimède (287-212 av JC), Pascal (1623-1662), Newton (1643-1727) ... Cependant les applications de ces formulations au calcul d'écoulements réels ont été peu nombreuses à cause de la limitation due aux méthodes d'obtention des solutions des équations de base, mais aussi, à cause de la complexité des phénomènes physiques en interaction.

Durant ces trente dernières années la discrétisation des problèmes continus et la résolution des équations algébriques obtenues ont connu un développement considérable motivé par les besoins des industries de pointe et soutenu par le progrès effectué dans le domaine des ordinateurs.

Ainsi, on a assisté à la réalisation de divers codes de calculs destinés à la modélisation des écoulements complexes, permettant de prédire les phénomènes physiques sans recourir systématiquement aux voies expérimentales très coûteuses et peu faciles à mettre en oeuvre.

Par ailleurs, il est intéressant de remarquer que ces codes de calcul ont un caractère pluridisciplinaire, car ils mettent en oeuvre les connaissances de trois disciplines de base :

- La mécanique des fluides.
- L'analyse numérique : méthodes d'approximation, résolution de systèmes linéaires, des problèmes aux valeurs propres ...
- L'informatique appliquée : techniques de développement et maintenance des grands logiciels.

Cependant, pouvoir approfondir les mécanismes physiques fondamentaux du phénomène étudié, affiner les modèles qui les gouvernent, et améliorer les méthodes de résolution et d'optimisation de ces derniers, demande une réelle connaissance de ces codes.

Malheureusement, en ce qui concerne les codes disponibles sur le marché, si les algorithmes utilisés sont généralement connus dans leur globalité, il est assez difficile de les connaître finement, les programmes sources n'étant pas accessibles soit parce qu'ils ne sont pas disponibles, soit parce qu'ils sont d'une lisibilité médiocre. Par ailleurs leurs performances sont rarement homogènes.

Dans la perspective, d'obtenir une modélisation des écoulements visqueux, que l'on maîtrise, notre objectif de travail est le développement et la validation d'un modèle numérique capable de prendre en compte des effets tridimensionnels.

Les efforts de développement d'un code de calcul destiné aussi bien à la recherche qu'aux applications industrielles, s'inscrivent dans un contexte reposant sur plusieurs considérations :

1. avoir une formulation mathématique qui permette de suivre au cours du temps un domaine géométrique déformable, par exemple, écoulement avec surface libre, écoulement dans un tube avec piston mobile etc...
2. pouvoir traiter les phénomènes physiques par étapes successives, permettra de mieux suivre leur évolution,
3. pouvoir approximer le domaine étudié par un ensemble de sous domaines non structuré. Ceci afin de faciliter l'implantation, par la suite, d'éléments de formes variées (hexaédrique, tétraédrique,...).

4. permettre l'évolution et la transition du code vers une version traitant les écoulements compressibles, ce qui sera facilité par le choix de la pression comme une des inconnues principales du problème.

L'algorithme que nous avons développé permet de traiter des écoulements incompressibles isothermes.

Il est d'abord étudié dans le cas de problèmes bidimensionnels laminaires ou turbulents, puis dans le cas de problèmes tridimensionnels.

L'accent a été mis sur les tests en écoulement laminaire qui permettent une première caractérisation en dehors de toute influence des modèles de turbulence.

2. Orientation

La difficulté majeure rencontrée lors de la résolution des équations relatives aux écoulements de fluide incompressible, réside dans le traitement de la pression. En effet, l'estimation du gradient de pression est délicate lorsque l'approximation du champ de pression recherchée est du type constant par éléments.

C'est Harlow et Welch /16/, qui ont apporté une solution à ce problème en développant la méthode dite "Marker and Cell" (MAC). C'est une méthode basée sur une formulation eulerienne et qui consiste à définir une cellule élémentaire décalée par rapport aux mailles où doit être satisfaite l'équation de continuité.

En suite, dans les années 70, dans les prolongements des méthodes MAC, est en outre apparu une nouvelle notion intéressante : la cellule élémentaire de calcul évolutive dans le temps. La méthode lagrangienne qui en découle s'appuie toujours sur la notion de bilan mais appliquée à la cellule matérielle dont le mouvement et la déformation sont régis par le champs de vitesse lui même. Cette approche lagrangienne dite "Link" a été développée par Hirt, Cook et Butler /52/. Elle révèle beaucoup de difficultés d'emploi notamment pour des calculs comportant des zones de fortes distorsions ou de recirculations.

Ainsi, sont apparues les méthodes ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian). Dans cette méthode, Hirt et al. /40/ ont réussi à généraliser les deux procédés précédents sous une seule approche. En effet, les noeuds du maillage de calcul peuvent se déplacer avec le fluide, rester fixes de façon eulerienne ou se déplacer avec une vitesse arbitraire.

On saisit alors tout l'avantage que peut procurer ce point de vue surtout lorsqu'il s'agit d'aborder l'une des difficultés typiques en mécanique des fluides, à savoir la géométrie variable du domaine de calcul. Ce problème peut être rencontré notamment dans les chambres de combustion ou dans des milieux à interface libre (cas multi-fluides).

Une des variantes de la méthode est la combinaison ALE et ICE (Implicite Continuous fluid Eulerian) /55/. Un traitement implicite de l'équation de la pression similaire à celui de ICE permet de calculer l'écoulement à n'importe quelle vitesse, du supersonique au subsonique.

La formulation ALE est devenue largement utilisée par d'autres auteurs sans que l'algorithme initial soit remis en question ni utilisé dans toutes ses possibilités. La discrétisation spatiale est fréquemment du type différences finies /45,53/ , volumes finis /50,57/ ou éléments finis /48,49,54/, même dans les applications les plus récentes /57,53,58/.

3. Plan

Les principes à la base de la réalisation du code de calcul créé font l'objet de la première partie de ce mémoire.

Dans le chapitre I, on définit l'étendue des phénomènes physiques pris en compte. On rappelle les aspects théoriques du problème, nécessaires pour sa formulation. Enfin, on souligne l'importance que peut avoir une formulation mixte (Euler-Lagrange) sur l'étendue des problèmes à traiter.

Le chapitre II expose, tout d'abord, les principales techniques numériques adoptées. En suite, on procède à la formulation du système discret (Equation de Poisson pour la pression, Equations des vitesses ..).

Dans la seconde partie on s'intéresse plus particulièrement aux applications bidimensionnelles en laminaire, chapitre I puis en turbulent, chapitre II.

Les commentaires des résultats numériques et leurs comparaisons avec des solutions analytiques ou expérimentales, permettent de caractériser les schémas numériques utilisés.

La troisième et dernière partie est consacrée aux applications tridimensionnelles avec l'étude de trois types de configurations : le canal rectangulaire, le coude (60 degrés, 90 degrés, 120 degrés) et la conduite obstruée en régime laminaire.

Les résultats obtenus sont comparés à ceux numériques ou expérimentaux fournis par d'autres auteurs.

Enfin, pour conclure on résumera les évaluations obtenues pour les différents schémas numériques adoptés.

PREMIERE PARTIE

***EQUATIONS DE NAVIER-STOKES
ET DISCRETISATION***

CHAPITRE I

I. EQUATIONS GENERALES

I.1 Lois Physiques

L'étude générale d'un écoulement de fluide, est régi par les lois physiques de la mécanique générale qui expriment :

- la conservation de la masse.
- la conservation de la quantité de mouvement.
- la conservation de l'énergie.

Cependant, ces principes doivent être complétés par, des relations fournissant le tenseur des contraintes visqueuses en fonction du tenseur des taux de déformation, et exprimant l'état spécifique du fluide considéré : équation d'état.

Les équations traduisant ces lois physiques pour un écoulement de fluide visqueux newtonien, sont généralement appelées équations de Navier-Stokes.

I.2 Equations de Navier-Stokes locales

Pour un fluide newtonien, continu, homogène, et dans le cas d'un écoulement tridimensionnel laminaire avec ou sans forces extérieures, les équations de Navier-Stokes s'écrivent dans un repère cartésien fixe :

- Continuité

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j) = 0 \quad (\text{I.2.1})$$

avec

$\bar{u}(u_j, j = 1, 3)$ la vitesse décrivant l'état cinématique du fluide en mouvement.

ρ la masse volumique.

• Quantité de mouvement

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ij}) + \rho f_i \quad (I.2.2)$$

avec $\vec{f}(f_i, i = 1, 3)$: force volumique donnée.

$\vec{\sigma}(\sigma_{ij})$ est le tenseur des contraintes, traduisant l'action des forces de pression et celles liées aux frottements visqueux. La loi de comportement est la suivante :

$$\sigma_{lm} = -p\delta_{lm} + \tau_{lm} \quad , \quad \tau_{lm} = -\frac{2}{3}\mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{lm} + \mu \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \right) \quad (I.2.3)$$

• Energie

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \left(e + \frac{u_i u_i}{2} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \rho u_i \left(e + \frac{u_i u_i}{2} \right) - u_i \sigma_{ij} + q_i \right\} = \rho f_i u_i + r \quad (I.2.4)$$

e : énergie interne spécifique

$\vec{q}(q_i, i = 1, 3)$: densité surfacique des taux de chaleur reçue par conduction.

r : densité volumique des taux de chaleur fournie par une source extérieure.

Pour un écoulement isovolume et isotherme, les équations de Navier-Stokes se résument à :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 \\ \rho \frac{\partial}{\partial t}(u_i) + \rho u_j \frac{\partial}{\partial x_j}(u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ij}) + \rho f_i \end{array} \right\} \quad [I.S1.]$$

Le système (I.S1.) complété par des données initiales et des conditions aux frontières convenables, doit permettre en général la détermination du champ des pressions et des vitesses au sein du fluide.

I.3 Expression adimensionnée des équations de Navier-Stokes

Nous désignons respectivement une longueur (L_0), vitesse (u_0), masse volumique (ρ_0), pression (p_0) et pour le temps (t_0) comme grandeurs caractéristiques de l'écoulement étudié.

On définit ensuite des variables adimensionnelles en fonction des grandeurs précédentes :

$$\bar{t} = \frac{t}{t_0}, \quad \bar{p} = \frac{p}{p_0}, \quad \bar{x} = \frac{x}{L_0}, \quad \bar{u} = \frac{u}{u_0}, \quad \bar{f} = \frac{f}{g} \quad (\text{I.3.1})$$

Le système (I.S1.) de Navier-Stokes réécrit avec les variables sans dimension devient :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial \bar{x}_k} &= 0 \\ \text{Str} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} (\bar{u}_i) + \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} (\bar{u}_i) + \frac{p_0}{\rho_0 U_0^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_i} &= \frac{1}{R_e} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} (\bar{\tau}_{ij}) + \frac{1}{\text{Fr}} \bar{f}_i \end{aligned} \right\} \quad [\text{I.S2.}]$$

$$\text{Str} = \frac{L_0}{u_0 t_0}$$

Nombre de Strouhal (fréquence réduite), compare les quantités d'accélération instationnaires et convectives.

$$R_e = \frac{\rho_0 u_0 L_0}{\mu_0}$$

Nombre de Reynolds, mesure le rapport des forces d'inertie au forces de frottement.

$$\text{Fr} = \frac{u_0^2}{gL_0}$$

Nombre de Froude, caractérise le rapport entre les forces d'inertie et les forces volumiques associées au champ de pesanteur.

Le nombre de Reynolds joue un rôle particulièrement important, puisqu'il gouverne le système d'écoulement, qui peut être laminaire ou turbulent.

I.4 Conditions aux limites et conditions initiales

Comme cela a été signalé auparavant, il convient de compléter les équations de Navier-Stokes (.I.S1.) en précisant les conditions aux limites à écrire sur la frontière du domaine fluide et les conditions initiales, afin de permettre éventuellement de déterminer la solution du problème.

I.4.1 Conditions initiales

- Dans le cas stationnaire le terme dérivée partielle par rapport au temps d'une entité physique est nul. Par conséquent, nous n'avons nul besoin de données initiales.

- Dans le cas instationnaire, il convient de se donner, à l'instant initial, les valeurs initiales des inconnues principales du problème : Les champs des vitesses et des pressions, qui pour correspondre à un écoulement, doivent être compatibles entre eux et doivent être une solution des équations de Navier-Stokes.

I.4.2 Conditions aux limites

Deux types de conditions aux frontières peuvent être écrites : l'un relatif à la physique du problème (frontière solide), l'autre imposé sur les frontières où les caractéristiques de l'écoulement ne sont pas connues a priori (frontière fluide de type entrée-sortie).

a. Frontières solides :

- Conditions d'adhérence à la paroi solide, qui exprime la continuité de la vitesse du fluide en contact avec la paroi.

- Conditions dynamiques qui expriment la continuité de la contrainte normale à la paroi (exemple : paroi déformable). C'est une condition très difficile à mettre en oeuvre, du fait que la contrainte compte parmi les inconnues du problème.

b. Frontières fluides

Deux types de frontières : entrée et sortie

Le choix se résume ici à deux types de condition, suivant l'étude de Dutoya /59/ :

- Conditions de débit : on impose le champs de vitesse en tout point.

- Conditions dynamiques : On impose le champs de la contrainte mais compte tenu que généralement seule la pression est connue, on est amené à trouver une condition de substitution admissible : généralement on se donne la pression plus une condition de type Neuman sur la vitesse.

I.5 Equations intégrales et formulation Eulerienne-Lagrangienne

On considère un domaine Ω de frontière $\partial\Omega$, transporté à tout instant t par un mouvement de vitesse \bar{w} . R^a désigne le référentiel absolu fixe.

La dérivée temporelle de d'une entité physique φ transportée par \bar{w} , à l'instant $t+dt$ par rapport à R^a est :

$$\frac{d\varphi}{dt \bar{w}} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\varphi(\bar{x} + \bar{w}dt, t + dt) - \varphi(\bar{x}, t)}{dt} \quad (I.5.1)$$

$$\frac{d\varphi}{dt \bar{w}} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \bar{w} \cdot \nabla\varphi \quad (I.5.2)$$

Soit χ une entité physique, et I l'intégrale de volume sur l'élément Ω de frontière $\partial\Omega$ de cette entité : $I = \int_{\Omega} \chi dv$.

Pour une fonction χ continue et dérivable dans Ω et si la frontière est lisse par morceaux, la dérivée suivant la direction \bar{w} de l'intégrale de volume I par rapport à R^a est donnée par :

$$\frac{dI}{dt_{\bar{w}}} = \frac{d}{dt_{\bar{w}}} \int_{\Omega^a} \chi J dv^a \quad (I.5.3)$$

avec Ω^a configuration de référence donc fixe, J jacobien de la transformation $\Omega_a \rightarrow \Omega$.

$$\frac{dI}{dt_{\bar{w}}} = \int_{\Omega^a} \frac{d}{dt_{\bar{w}}} (\chi J) dv^a \quad (I.5.4)$$

On décompose alors cette dérivée comme la dérivée du produit de deux fonctions, l'expression (I.5.4) devient :

$$\frac{dI}{dt_{\bar{w}}} = \int_{\Omega^a} \left(\frac{d\chi}{dt_{\bar{w}}} \cdot J + \chi \cdot \frac{dJ}{dt_{\bar{w}}} \right) dv^a \quad (I.5.5)$$

On rappelle l'expression de la dérivée du jacobien /56/:

$$\frac{dJ}{dt_{\bar{w}}} = J \operatorname{div} \bar{w} \quad (I.5.6)$$

$$\frac{dI}{dt_{\bar{w}}} = \int_{\Omega^a} \left(\frac{d\chi}{dt_{\bar{w}}} + \chi \cdot \operatorname{div} \bar{w} \right) J dv^a \quad (I.5.7)$$

et par rapport à la configuration Ω :

$$\frac{dI}{dt_{\bar{w}}} = \int_{\Omega} \left(\frac{d\chi}{dt_{\bar{w}}} + \chi \cdot \operatorname{div} \bar{w} \right) dv \quad (I.5.8)$$

ou sous la forme

$$\frac{dI}{dt_{\bar{w}}} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \chi}{\partial t} + \operatorname{div}(\chi \bar{w}) \right) dv \quad (I.5.9)$$

Ce développement reste valable dans le cas de particules fluides transportées par la vitesse du fluide \bar{u} on obtient pour (I.5.2) et (I.5.9) :

$$\frac{d\chi}{dt_{\bar{u}}} = \frac{\partial \chi}{\partial t} + \bar{u} \cdot \bar{\nabla} \chi \quad (I.5.10)$$

$$\frac{dI}{dt_{\bar{u}}} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \chi}{\partial t} + \operatorname{div}(\chi \bar{u}) \right) dv \quad (I.5.11)$$

la comparaison de ces deux équations donne la relation entre les deux dérivées :

$$\frac{dI}{dt_{\bar{w}}} - \frac{dI}{dt_{\bar{u}}} = \int_{\Omega} \text{div}(\chi (\bar{w} - \bar{u})) dv \quad (\text{I.5.12})$$

A présent nous allons appliquer cette formulation aux équations de conservation qui se présentent sous une forme globale :

$$\frac{d}{dt_{\bar{u}}} \int_{\Omega} A dv = F \quad (\text{I.5.13})$$

avec A, F entités physiques, A représentant par exemple la masse volumique pour l'équation de continuité, F est nul dans ce cas.

Lorsque le domaine se déplace avec une vitesse arbitraire, on obtient une formulation mixte qui porte le nom de A.L.E (Arbitrary Eulerian Lagrangian) :

$$\boxed{\frac{d}{dt_{\bar{w}}} \int_{\Omega} A dv = F + \int_{\Omega} \text{div}(A (\bar{w} - \bar{u})) dv}$$

Formulation mixte : Eulérienne-Lagrangienne [I.S3]

Soit pour l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{d}{dt_{\bar{w}}} \int_{\Omega} \rho dv = \int_{\Omega} \text{div}(\rho (\bar{w} - \bar{u})) dv$$

et pour l'équation de la quantité de mouvement :

$$\frac{d}{dt_{\bar{w}}} \int_{\Omega} \rho \bar{u} dv = \int_{\Omega} \text{div}(\rho \bar{u} \otimes (\bar{w} - \bar{u})) dv + \int_{\Omega} \text{div} \vec{\sigma} dv + \int_{\Omega} \vec{f} dv$$

CHAPITRE II

II. METHODES NUMERIQUES

II.1 FORMULATION

II.1.1 Formulation A.L.E

Comme on l'a déjà dit, la technique A.L.E (Arbitrary Lagrangian Eulerian) consiste à utiliser une formulation mixte dans laquelle les éléments se déplacent à une vitesse arbitraire.

Pour un élément de volume Ω quelconque, limité par une surface $\partial\Omega$ se déplaçant avec une vitesse arbitraire \vec{w} , la vitesse des particules fluides est noté \vec{u} .

En l'absence de force de volume on obtient (chapitre I) :

$$\frac{d}{dt_{\vec{w}}} \int_{\Omega} \rho dv - \int_{\partial\Omega} \rho (\vec{w} - \vec{u}) \cdot \vec{n} ds = 0 \quad (\text{II.1.1.1})$$

$$\frac{d}{dt_{\vec{w}}} \int_{\Omega} \rho \vec{u} dv - \int_{\partial\Omega} \rho \vec{u} (\vec{w} - \vec{u}) \cdot \vec{n} ds = \int_{\Omega} \text{div} \vec{\sigma} dv \quad (\text{II.1.1.2})$$

avec \vec{n} : vecteur normal à la surface $\partial\Omega$ dirigé vers l'extérieur.

Le fluide étant supposé incompressible, (II.1.1.1) et (II.1.1.2) peuvent s'écrire :

$$\frac{d}{dt_{\vec{w}}} \int_{\Omega} dv - \int_{\partial\Omega} (\vec{w} - \vec{u}) \cdot \vec{n} ds = 0 \quad (\text{II.1.1.3})$$

$$\frac{d}{dt_{\vec{w}}} \int_{\Omega} \vec{u} dv - \int_{\partial\Omega} \vec{u} (\vec{w} - \vec{u}) \cdot \vec{n} ds = \frac{1}{\rho} \int_{\Omega} \text{div} \vec{\sigma} dv \quad (\text{II.1.1.4})$$

La résolution des équations (II.1.1.3)-(II.1.1.4) peut être effectuée à l'aide de la technique A.L.E. L'opérateur $\left(\frac{d}{dt_{\vec{w}}} \right)$ est décomposé en deux, et suivant deux étapes :

◆ 1^{er} étape :

$$\frac{d}{dt_{\vec{u}}} \int_{\Omega} dv = 0 \quad (\text{II.1.1.5})$$

$$\frac{d}{dt_{\vec{u}}} \int_{\Omega} \vec{u} dv = \frac{1}{\rho} \int_{\Omega} \text{div} \vec{\sigma} dv \quad (\text{II.1.1.6})$$

Cette étape correspond au suivi d'une particule dans son mouvement, les équations (II.1.1.5)-(II.1.1.6) se déduisent effectivement des équations (II.1.1.3)-(II.1.1.4) lorsque $\bar{w} = \bar{u}$, et en tenant compte des termes de contraintes.

◆ 2^{ème} étape :

$$\left(\frac{d}{dt_{\bar{w}}} - \frac{d}{dt_{\bar{u}}} \right) \int_{\Omega} dv - \int_{\partial\Omega} (\bar{w} - \bar{u}) \cdot \bar{n} ds = 0 \quad (\text{II.1.1.7})$$

$$\left(\frac{d}{dt_{\bar{w}}} - \frac{d}{dt_{\bar{u}}} \right) \int_{\Omega} \bar{u} dv - \int_{\partial\Omega} \bar{u} (\bar{w} - \bar{u}) \cdot \bar{n} ds = 0 \quad (\text{II.1.1.8})$$

La seconde étape "étape de convection" permet de corriger la première en tenant compte des termes de convection.

avec les notations :

$$\left(\frac{d}{dt_{\bar{u}}} \right) \approx \frac{d}{dt} \quad , \quad \left(\frac{d}{dt_{\bar{w}}} - \frac{d}{dt_{\bar{u}}} \right) \approx \frac{D}{Dt} \quad (\text{II.1.1.9})$$

les équations (II.1.1.5)-(II.1.1.8) deviennent en suivant les deux étapes :

◆ 1^{er} étape :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} dv = 0 \quad (\text{II.1.1.10})$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \bar{u} dv = \frac{1}{\rho} \int_{\Omega} \text{div} \overset{\Rightarrow}{\sigma} dv \quad (\text{II.1.1.11})$$

◆ 2^{ème} étape :

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} dv - \int_{\partial\Omega} (\bar{w} - \bar{u}) \cdot \bar{n} ds = 0 \quad (\text{II.1.1.12})$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \bar{u} dv - \int_{\partial\Omega} \bar{u} (\bar{w} - \bar{u}) \cdot \bar{n} ds = 0 \quad (\text{II.1.1.13})$$

II.2 DISCRETISATION

Pour obtenir une solution approchée du problème décrit auparavant, cela nécessite une discrétisation dans le temps et dans l'espace.

Le choix d'une méthode de discrétisation est la tâche la plus difficile. Car, il faut la choisir de façon qu'elle puisse supporter des variations importantes de pas et des déformations de maillage sans que la solution ne soit trop affectée.

La discrétisation en termes de bilan de flux, sous tendue par la formulation intégrale des équations a l'avantage de fournir des expressions conservatives des équations discrétisées.

II.2.1 Discrétisation temporelle

Le modèle numérique temporel consiste à approcher dans le temps une entité physique ϕ , aux instants $(t_1, \dots, t_n, \dots, t_{\max})$ donnés. Chaque instant représente un cycle de calcul.

avec t_n : instant t "présent" .

$\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$: pas de temps qui sépare deux cycles consécutifs.

La discrétisation temporelle est du type différences finies au premier ordre :

$$\left. \frac{D\phi}{Dt} \right|_n = \frac{\phi(t_{n+1}) - \phi(t_n)}{t_{n+1} - t_n} \quad (\text{II.2.1.1})$$

Conformément à la formulation A.L.E, le calcul est divisé en deux phases correspondant à deux demi-pas fractionnaires (fig.II.1.1) : à partir des grandeurs connues à l'instant (t_n) , on accède aux grandeurs à l'instant (t_{n+1}) en passant par une étape intermédiaire notée t_{ni} .

Par ailleurs on choisit une discrétisation de type explicite sauf pour les termes de pression, ce qui évite en théorie d'avoir à prendre en compte par rapport à ce terme un critère de stabilité.

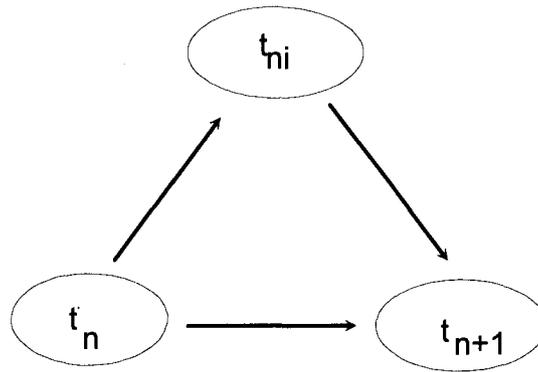


Fig.II.1.1

◆ 1^{er} phase :

Cette phase correspond aux équations obtenues dans la première étape (paragraphe II.1) pour un fluide évoluant entre les instants t_n et t_{ni} .

$$\frac{1}{\Delta t_n} \left(\int_{\Omega_{ni}} dv_{ni} - \int_{\Omega_n} dv_n \right) = 0 \quad (II.2.1.2)$$

$$\frac{1}{\Delta t_n} \left(\int_{\Omega_{ni}} \bar{u}_{ni} dv_{ni} - \int_{\Omega_n} \bar{u}_n dv_n \right) = \frac{1}{\rho} \int_{\Omega_n} (-\bar{\nabla} p_{ni} + \text{div} \bar{\tau}_n) dv_n \quad (II.2.1.3)$$

◆ 2^{ème} phase :

Cette phase correspond aux équations obtenues dans la deuxième étape (paragraphe II.1) pour un fluide évoluant entre les instants t_{ni} et t_{n+1}

$$\frac{1}{\Delta t_n} \left(\int_{\Omega_{n+1}} dv_{n+1} - \int_{\Omega_{ni}} dv_{ni} \right) + \int_{\partial\Omega_{ni}} \bar{u}_{ni} \cdot \bar{n}_{ni} ds_{ni} = 0 \quad (II.2.1.4)$$

$$\frac{1}{\Delta t_n} \left(\int_{\Omega_{n+1}} \bar{u}_{n+1} dv_{n+1} - \int_{\Omega_{ni}} \bar{u}_{ni} dv_{ni} \right) + \int_{\partial\Omega_{ni}} \bar{u}_{ni} (\bar{u}_{ni} \cdot \bar{n}_{ni}) ds_{ni} = 0 \quad (II.2.1.5)$$

Dans le cadre, d'une description purement eulérienne du mouvement du fluide, on a :

$$\Omega_{n+1} = \Omega_n \quad , \quad \partial\Omega_{n+1} = \partial\Omega_n \quad (II.2.1.6)$$

les équations (II.2.1.4) et (II.2.1.5) deviennent :

$$\frac{1}{\Delta t_n} \left(\int_{\Omega_n} dv_n - \int_{\Omega_{ni}} dv_{ni} \right) + \int_{\partial\Omega_{ni}} \bar{u}_{ni} \cdot \bar{n}_{ni} ds_{ni} = 0 \quad (\text{II.2.1.7})$$

$$\frac{1}{\Delta t_n} \left(\int_{\Omega_n} \bar{u}_{n+1} dv_n - \int_{\Omega_{ni}} \bar{u}_{ni} dv_{ni} \right) + \int_{\partial\Omega_{ni}} \bar{u}_{ni} (\bar{u}_{ni} \cdot \bar{n}_{ni}) ds_{ni} = 0 \quad (\text{II.2.1.8})$$

On remarque que l'équation (II.2.1.2) s'écrit au premier ordre en Δt_n :

$$\int_{\Omega_n} (1 + \Delta t_n \text{div} \bar{u}_{ni}) dv_n - \int_{\Omega_n} dv_n = 0 \quad (\text{II.2.1.9})$$

et finalement :

$$\int_{\Omega_n} \text{div} \bar{u}_{ni} dv_n = 0 \quad (\text{II.2.1.10})$$

On peut constater alors que l'équation (II.2.1.7) est vérifiée (toujours au premier ordre).

On obtient finalement le système suivant :

- $\int_{\Omega_n} \text{div} \bar{u}_{ni} dv_n = 0$
- $\frac{1}{\Delta t_n} \left(\int_{\Omega_{ni}} \bar{u}_{ni} dv_{ni} - \int_{\Omega_n} \bar{u}_n dv_n \right) = -\frac{1}{\rho} \int_{\Omega_{ni}} \nabla \bar{p}_{ni} dv_{ni} + \frac{1}{\rho} \int_{\Omega_n} \text{div} \bar{\tau}_n dv_n$
- $\frac{1}{\Delta t_n} \left(\int_{\Omega_n} \bar{u}_{n+1} dv_n - \int_{\Omega_{ni}} \bar{u}_{ni} dv_{ni} \right) + \int_{\partial\Omega_{ni}} \bar{u}_{ni} (\bar{u}_{ni} \cdot \bar{n}_{ni}) ds_{ni} = 0$
- Conditions aux limites
- Conditions initiales

II.2.2 Discrétisation Spatiale /44,43/

La discrétisation spatiale est de type éléments finis. Nous remplaçons ainsi, le domaine Ω sur lequel le problème est posé, par un ensemble d'éléments Ω^e de formes relativement simples (Fig.II.1). Chaque élément doit être défini analytiquement de manière unique en fonction des coordonnées de ses noeuds.

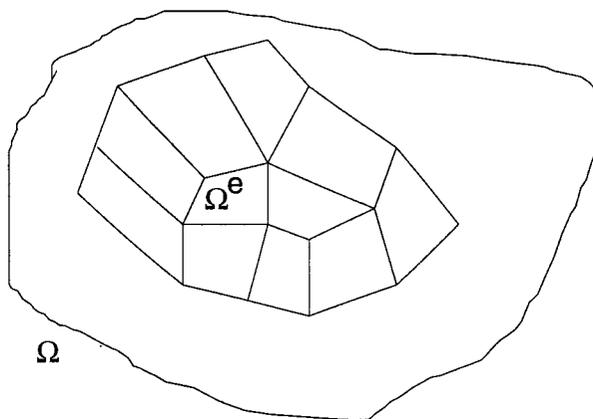


Fig.II.1

L'interpolé d'une fonction ϕ dans un espace polynomial est la fonction ϕ_h qui prend les mêmes valeurs que ϕ sur les noeuds du domaine. Dans ce travail, nous allons adopter des fonctions ϕ_h dont la restriction est trilineaire par morceaux sur les différents types d'éléments définis.

II.2.2.1 Discrétisation du champ de vitesse

On considère un élément Ω^e , hexaèdre à huit noeuds, et dont les numéros globaux des noeuds sont I,J,K,L... (Fig.II.2.) : cellules régulières.

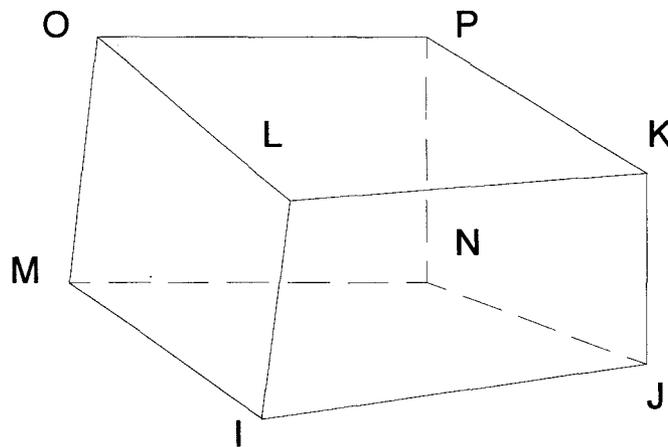


Fig.II.2

Chaque point de cet élément est donné par la relation (II.2.2.1) :

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{ns} N_i(x, y, z) \cdot \vec{P}_i \quad (\text{II.2.2.1})$$

i représente l'indice local d'un noeud dans l'élément.

N_i fonction de pondération ou d'interpolation.

$P_i(x, y, z)$ coordonnées géométriques au noeud i .

ns nombre de sommets de l'élément ($ns=8$)

Le calcul des fonctions d'interpolation N_i dans le repère physique est lourd et dans certains cas difficile à effectuer. Pour cette raison nous allons transformer le domaine Ω^e en un domaine plus simple appelé domaine de référence (fig.II.3).

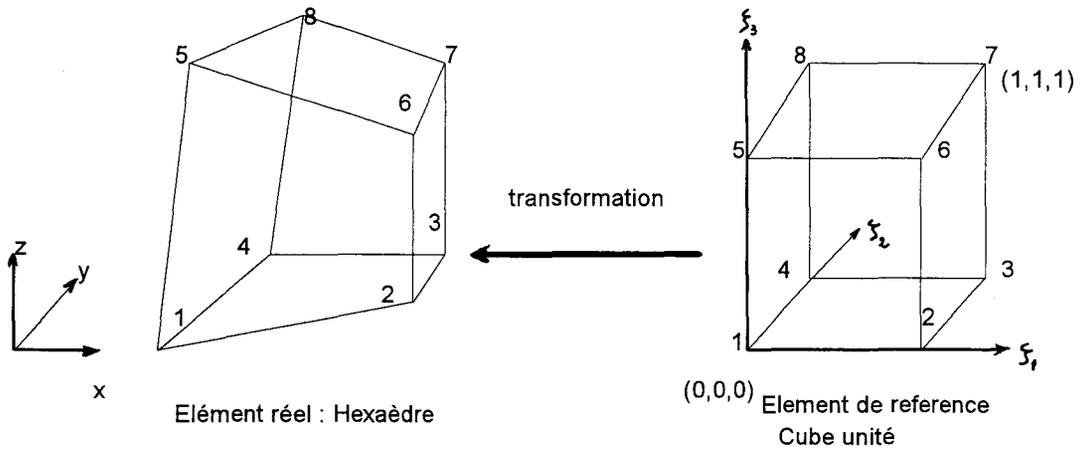


Fig.II.3

$$\begin{aligned}
 N_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= (1-\xi_1)(1-\xi_2)(1-\xi_3) & , N_5(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= (1-\xi_1)(1-\xi_2)\xi_3 \\
 N_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \xi_1(1-\xi_2)(1-\xi_3) & , N_6(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \xi_1(1-\xi_2)\xi_3 \\
 N_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \xi_1\xi_2(1-\xi_3) & , N_7(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \xi_1\xi_2\xi_3 \\
 N_4(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= (1-\xi_1)\xi_2(1-\xi_3) & , N_8(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= (1-\xi_1)\xi_2\xi_3
 \end{aligned}
 \tag{II.2.2.3}$$

On adopte une représentation isoparamétrique pour le champ approché des vitesses. Il s'écrit en fonction des valeurs aux noeuds pour un élément donné :

$$\bar{u} = \sum_{k=1}^{ns} N_k \bar{u}_k \tag{II.2.2.4}$$

ns nombre de sommets de l'élément (ns=8).

II.2.2.2 Discrétisation du champ de pression

On définit un élément décalé à partir des centres des cellules régulières consécutives ($\bar{x}_G = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 \bar{x}_i$), (fig. II.4).

Le champ de pression est ensuite approximé sur l'élément décalé, par des fonctions trilineaires par morceaux sur des éléments de volumes tétraédriques. Les tétraèdres sont construits à partir de trois sommets relatifs à une face décalée et le noeud intérieur à l'élément décalé (fig.II.4).

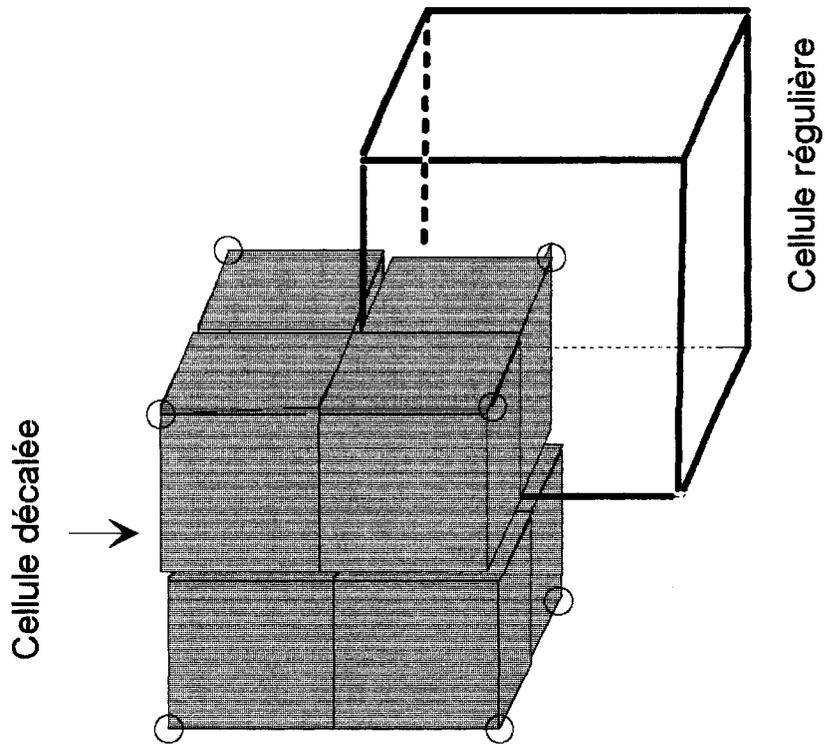
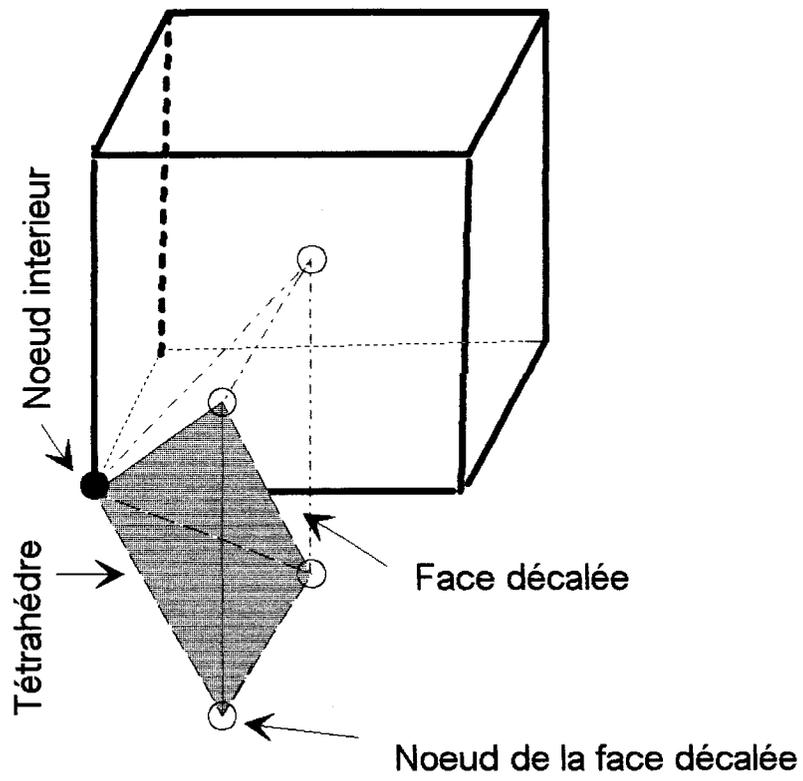


Figure .II.4. : Elements de contrôle

Le champ approché des pressions s'écrit en fonction des valeurs aux noeuds pour un élément tétraédrique donné :

$$p = \sum_{k=1}^{np} N_k p_k \quad , (np=4) \quad (\text{II.2.2.5})$$

II.2.2.3 Discrétisation de l'équation de continuité (1ère phase).

Elle est écrite pour toutes les cellules régulières de volume élémentaire Ω_e de contour surfacique $\partial\Omega_e$. L'équation de la conservation de la masse se présente sous forme de bilan de flux massique :

$$\int_{\partial\Omega_e} \bar{u}^{ni} \cdot \bar{n} ds = 0 \quad (\text{II.2.2.4})$$

Soit (x,y,z) les composantes en coordonnées cartésiennes d'un point P de Ω_e , (u,v,w) les composantes du vecteur vitesse.

à l'aide de la représentation isoparamétrique le vecteur vitesse s'écrit :

$$\bar{u} = \sum_{k=1}^{ns} N_k \bar{u}_k^{ni} \quad (\text{II.2.2.5})$$

on remplace dans (II.2.2.4) :

$$\int_{\partial\Omega_e} \sum_{k=1}^{ns} N_k \bar{u}_k^{ni} \cdot \bar{n} ds = 0 \quad (\text{II.2.2.6})$$

sous une autre forme :

$$\sum_{k=1}^{ns} \bar{u}_k^{ni} \cdot \int_{\partial\Omega_e} N_k \bar{n} ds = 0 \quad (\text{II.2.2.7})$$

reste à déterminer le coefficient géométrique :

$$\bar{D}_k = \int_{\partial\Omega_e} N_k \cdot \bar{n} ds \quad (\text{II.2.2.8})$$

On considère que la frontière $\partial\Omega_e$ de l'élément Ω_e , se décompose de nf surfaces planes :

$$\partial\Omega_e = \bigcup_{j=1}^{nf} \partial\Omega_{ej} \quad (\text{II.2.2.9})$$

les normales extérieures à ces surfaces planes sont constantes :

$$\bar{D}_k = \sum_{j=1}^{nf} \bar{n}_{Gj} \cdot \int_{\partial\Omega_{ej}} N_k ds \quad (\text{II.2.2.10})$$

\bar{n}_{Gj} : normale extérieure à la surface $\partial\Omega_{ej}$.

$\partial\Omega_{ej}$: une des nf faces de l'élément Ω_e , qui est bien évidemment une surface plane.

Donc \bar{n}_{Gj} est constante sur cette face.

L'évaluation de (II.2.2.10) sur chaque maille conduit à une relation linéaire, faisant intervenir les coefficients géométriques des ns noeuds de l'élément Ω_e .

avec $\bar{u}(u, v, w)$ et $\bar{D}(D^x, D^y, D^z)$ l'équation (II.2.2.7) s'écrit :

$$\sum_{k=1}^{ns} (u_k^{ni} D_k^x + v_k^{ni} D_k^y + w_k^{ni} D_k^z) = 0 \quad (\text{II.2.2.11})$$

Les coefficients D_k sont fournis dans l'annexe I.

II.2.2.4 Discrétisation de l'équation de la quantité de mouvement (1ère phase)

On rappelle l'équation de la conservation de la quantité de mouvement à discrétiser : elle s'écrit pour un élément de volume Ω :

$$\frac{1}{\Delta t} \left(\int_{\Omega} \bar{u}^{ni} dv - \int_{\Omega} \bar{u}^n dv \right) = -\frac{1}{\rho} \int_{\Omega} \bar{\nabla} p^{ni} dv + \frac{1}{\rho} \int_{\Omega} \text{div} \bar{\tau}^{=n} dv \quad (\text{II.2.2.12})$$

Les termes de cette équation s'écrivent pour chaque élément de volume décalé Ω_e^d et de contour surfacique $\partial\Omega_e^d$:

Ces éléments décalés sont définis de la manière suivante : on décompose chaque élément régulier en huit petits volumes appelés "quartier", ensuite, on assemble les quartiers contenant le même noeud, on obtient ainsi une cellule décalée dont chaque sommet coïncide avec le milieu d'un élément régulier (fig. II.5.)

terme de vitesse

Dans le but de ne prendre en compte que la vitesse au noeud interieur à l'élément décalé, et de ne pas avoir par la suite à inverser une matrice pour obtenir le champ des vitesses, une approximation classique consiste à faire l'hypothèse du champ de vitesse constant par élément décalé.

L'intégrale du champ de vitesse sur un élément décalé Ω_e^d d'indice k à l'instant intermédiaire t^{ni} s'écrit :

$$\int_{\Omega_{ek}^d} \bar{u}_k^{ni} dv = \bar{u}_k^{ni} \int_{\Omega_{ek}^d} dv \quad (\text{II.2.2.13})$$

on définit le volume de l'élément décalé par (II.2.2.14) et on remplace dans (II.2.2.13) :

$$V_{ek}^d = \int_{\Omega_{ek}^d} dv \quad (\text{II.2.2.14})$$

$$\int_{\Omega_{ek}^d} \bar{u}_k^{ni} dv = V_{ek}^d \bar{u}_k^{ni} \quad (\text{II.2.2.15})$$

terme de pression :

Comme on l'a dit auparavant, la pression possède une représentation isoparamétrique par rapport à des éléments tétraédriques définis sur l'élément décalé.

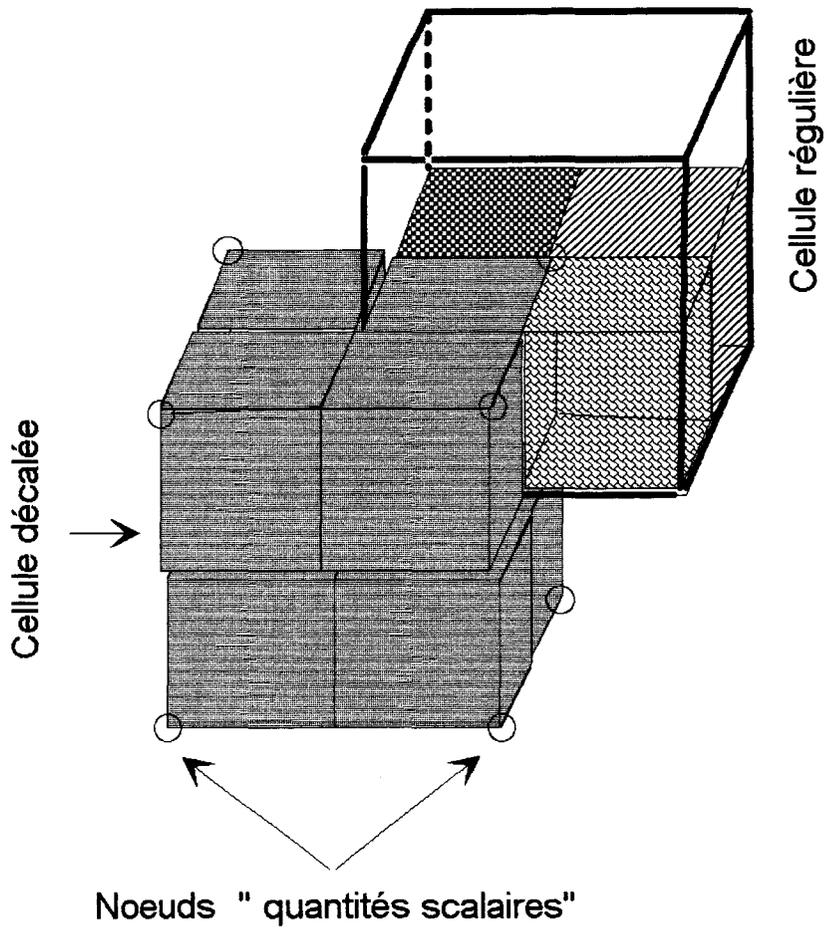
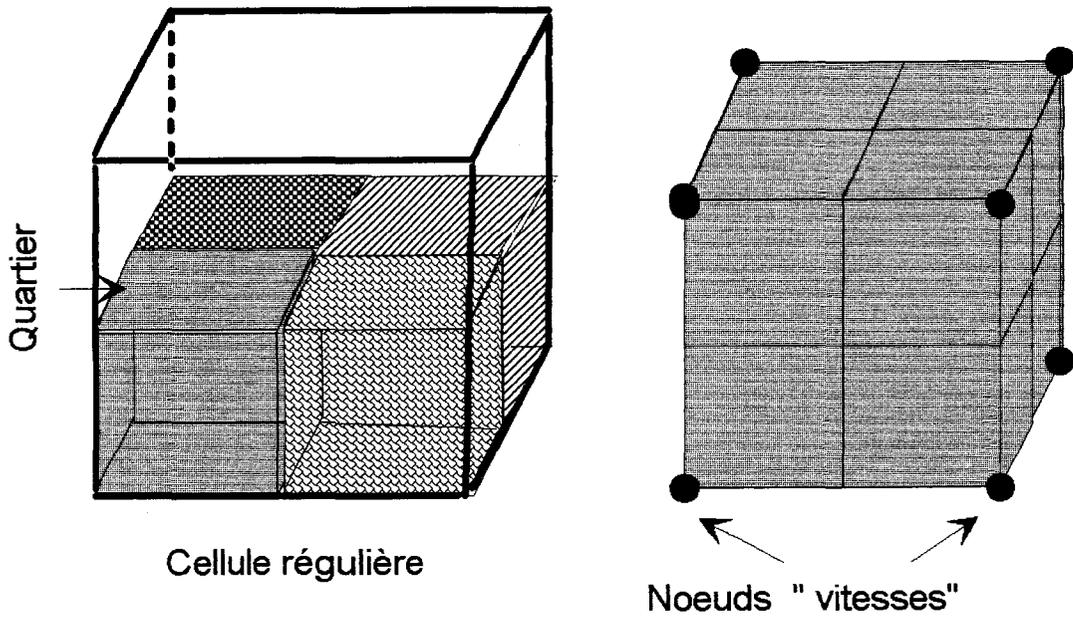


Figure .II.5. : Elements de contrôle

$$p = \sum_{k=1}^{np} N_k p_k \quad (\text{II.2.2.16})$$

np=4 pour un tétraèdre.

$$\int_{\partial\Omega_e^d} p^{ni} \cdot \bar{n} ds = \sum_k \int_{\partial\Omega_{ek}^d} p^{ni} \cdot \bar{n} ds \quad (\text{II.2.2.17})$$

L'intégrale de la pression peut être approximée sur les deux triangles tr(k,1) et tr(k,2) de la face nf.

$$\int_{\partial\Omega_e^d} p^{ni} \cdot \bar{n} ds = \sum_{k=1}^{nf} \sum_{j=1,2} \sum_{q=1}^{np} p_q^{ni} \int_{\text{tr}(k,j)} N_q \cdot \bar{n} ds \quad (\text{II.2.2.18})$$

On définit un coefficient géométrique décalé par :

$$D_q^d = \sum_j \bar{n}_{G_j} \int_{\text{tr}(j)} N_q ds \quad (\text{II.2.2.19})$$

tr(j) triangle qui contient le sommet q.

on remplace dans (II.2.2.17) :

$$\int_{\partial\Omega_e^d} p^{ni} \cdot \bar{n} ds = \sum_{q=1}^{np} p_q^{ni} \cdot \bar{D}_q^d \quad (\text{II.2.2.20})$$

Les composantes de D_q^d sont données dans l'annexe II.

terme de contrainte :

Pour les termes du tenseur des contraintes, le développement étant la même que pour la pression on obtient la relation suivante :

$$\int_{\partial\Omega_e^d} \overset{\Rightarrow n}{\tau} \cdot \bar{n} ds = \sum_{q=1}^8 \overset{\Rightarrow n}{\tau}_q \cdot \bar{D}_q^d \quad (*) \quad (\text{II.2.2.21})$$

(*) les expressions de τ_s^n sont données au § II.2.2.6

En tenant compte des indices liés à l'élément lui même, pour un noeud α donné le champ des vitesses a pour expression :

$$\begin{aligned} (\bar{\mathbf{u}})_{\alpha}^{ni} - (\bar{\mathbf{u}})_{\alpha}^n = & - \frac{\Delta t}{M_{\alpha}} \sum_{\beta=1}^{ne} (\mathbf{p})_{(\alpha\beta)}^{ni} \bar{\mathbf{D}}_{(\alpha\beta)} \\ & + \frac{\Delta t}{M_{\alpha}} \sum_{\beta=1}^{ne} \left(\overset{=}{\boldsymbol{\tau}} \right)_{\alpha\beta}^n \cdot \bar{\mathbf{D}}_{(\alpha\beta)} \end{aligned} \quad (\text{II.2.2.22})$$

avec $M = \int_{\Omega_e^d} \rho dv$

on remplace dans l'équation (II.2.2.11), le champ des vitesses par sa valeur donnée par la relation (II.2.2.22), on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^{ns} \sum_{\beta=1}^{ne} \frac{\Delta t}{M_{\alpha}} \bar{\mathbf{D}}_{\alpha} \cdot \bar{\mathbf{D}}_{\alpha\beta}^d (\mathbf{p})_{\alpha\beta}^{ni} = \\ \sum_{\alpha=1}^{ns} \sum_{\beta=1}^{ne} \frac{\Delta t}{M_{\alpha}} \bar{\mathbf{D}}_{\alpha} \cdot \left(\bar{\mathbf{D}}_{\alpha\beta}^d \cdot \left(\overset{=}{\boldsymbol{\tau}} \right)_{\alpha\beta}^n \right) \\ + \sum_{\alpha=1}^{ns} \bar{\mathbf{D}}_{\alpha} \cdot (\bar{\mathbf{u}})_{\alpha}^n \end{aligned} \quad (\text{II.2.2.23})$$

II.2.2.5 Discrétisation de l'équation de la quantité de mouvement (2ème phase).

L'intégrale à calculer se présente sous la forme suivante :

$$I = \int_{\partial\Omega_e} \bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{n}}) ds \quad (\text{II.2.2.24})$$

On décompose la frontière $\partial\Omega_e^d$ de l'élément Ω_e^d décalé en nf faces (Fig.II.5.), de normale extérieure $\bar{\mathbf{n}}_{nf}$.

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega_e^d} (\bar{\mathbf{u}}^{ni} \cdot \bar{\mathbf{n}}) \bar{\mathbf{u}}^{ni} ds &= \sum_{s=1}^{nf} \int_{\partial\Omega_{es}^d} (\bar{\mathbf{u}}_s^{ni} \cdot \bar{\mathbf{n}}_s) \bar{\mathbf{u}}_s^{ni} ds \\
&= \sum_{s=1}^{nf} (\bar{\mathbf{u}}_a)_s^{ni} \int_{\partial\Omega_{es}^d} (\bar{\mathbf{u}}_m)_s^{ni} \cdot \bar{\mathbf{n}}_s ds \\
&= \sum_{s=1}^{nf} (\bar{\mathbf{u}}_a)_s^{ni} \left((\bar{\mathbf{u}}_m)_s^{ni} \cdot \bar{\mathbf{C}}_s^v \right)
\end{aligned} \tag{II.2.2.25}$$

avec $\bar{\mathbf{u}}_a$: vitesse amont-aval suivant le signe du flux de vitesse à travers une face de l'élément considéré.

$\bar{\mathbf{u}}_m$: vitesse moyennée suivant une surface donnée.

$\bar{\mathbf{C}}^v$: coefficient géométrique défini par (II.2.2.26) :

$$\bar{\mathbf{C}}_s^v = \int_{\partial\Omega_{es}^d} \bar{\mathbf{n}} ds \tag{II.2.2.26}$$

$$\bar{\mathbf{C}}_s^v = \sum_j \bar{\mathbf{n}}_{Gsj} \int_{\partial\Omega_{esj}^d} ds \tag{II.2.2.27}$$

On définit des surfaces décalées :

$$\mathbf{S}_{sj}^d = \int_{\partial\Omega_{esj}^d} ds \tag{II.2.2.28}$$

$$\bar{\mathbf{C}}_s^v = \sum_j \mathbf{S}_{sj}^d \bar{\mathbf{n}}_{Gsj} \tag{II.2.2.29}$$

En tenant compte du développement (II.2.2.15) obtenu pour les termes de vitesses, et l'équation (II.2.1.5) devient :

$$\bar{\mathbf{u}}^{n+1} = -\frac{\Delta t}{M} \sum_{s=1}^{nf} (\bar{\mathbf{u}}_a)_s^{ni} \left((\bar{\mathbf{u}}_m)_s^{ni} \cdot \bar{\mathbf{C}}_s^v \right) + \bar{\mathbf{u}}^n \tag{II.2.2.30}$$

II.2.2.6 Discrétisation du tenseur des contraintes visqueuses

On considère un élément de volume Ω_e de frontière $\partial\Omega_e$. Le tenseur des contraintes visqueuses $\overset{\rightarrow}{\tau}(\tau_{ij})$ moyenné sur Ω_e s'écrit :

$$\vec{\tau} = \frac{1}{V_e} \int_{\Omega_e} \vec{\tau} dv \quad (\text{II.2.2.31})$$

ou

$$\tau_{ij} = \frac{1}{V_e} \int_{\Omega_e} \tau_{ij} dv \quad (\text{II.2.2.32})$$

avec V_e le volume de l'élément, et $\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$. on obtient :

$$\tau_{ij} = \frac{1}{V_e} \sum_{\alpha=1}^{ns} (u_{i\alpha} D_{\alpha i}^j + u_{j\alpha} D_{\alpha j}^i) \quad (\text{II.2.2.33})$$

II.3. Conditions aux limites et conditions initiales

Pour les noeuds frontières on adopte les conditions aux limites suivantes :

◇ Frontière fluide

⊗ Entrée : A l'entrée, on se donne :

* Soit une condition de débit qu'on réalise en imposant le champ de vitesse en tout point de la frontière fluide ($\vec{u} = \vec{u}_E$, vitesse à l'entrée).

* Soit une condition de contrainte en se donnant à la fois un champ de pression et une condition sur le gradient de vitesse normal. Ce qui permet de déterminer la vitesse sur un élément de frontière pression.

$$p = p_E \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial n} = 0 \quad \text{où } \vec{n} \text{ est la normale à la frontière.}$$

⊗ Sortie : On impose la pression, toujours avec la condition $\frac{\partial \vec{u}}{\partial n} = 0$.

◇ Frontière Solide

Sur les frontières solides, on adopte la condition d'adhérence, qui impose aux noeuds frontières une vitesse égale à celle de la paroi $\vec{u} = \vec{u}_p$. Dans le cas d'une paroi fixe, cette vitesse est nulle $\vec{u}_p = 0$.

II.4 Conditions de stabilité

Ces conditions ont été obtenues par le critère de stabilité monodimensionnel de type "Von Neuman". Elles sont liées à la discrétisation de type explicite des termes visqueux et des termes convectifs. :

$$v \frac{\Delta t_v}{\Delta x^2} \leq 2, \text{ condition obtenue à partir de l'équation de la quantité de mouvement.}$$

$$u \frac{\Delta t_c}{\Delta x} \leq 1, \text{ critère de courant Friedrichs Lewy obtenu pour l'étape de convection.}$$

On étend ces conditions pour des écoulements tridimensionnels ou bidimensionnels de la manière suivante :

$$v \frac{\Delta t_v}{r^2} \leq 2, \quad |\bar{u}| \frac{\Delta t_c}{r} \leq 1$$

On désigne par r le plus petit rayon inscrit dans un élément du domaine, et $|\bar{u}|$ le module de la vitesse correspondant à la vitesse maximale moyenne d'un élément du domaine.

Le respect de ces conditions de stabilité pour des conditions aux limites stationnaires permet d'atteindre l'état asymptotique stationnaire.

II.5. Système discret et méthodes de résolution

Dans la première phase, les équations (II.2.2.23) obtenues pour la pression se présentent sous forme d'un système linéaire :

$$[A]\{P^{ni}\} = \{B\}$$

où

$[A]$ représente une matrice carrée dont les termes sont des combinaisons des coefficients géométriques.

$\{P^{ni}\}$ une matrice colonne contenant les pressions à calculer.

{B} une matrice colonne contenant les termes des seconds membres : contribution des tenseurs de contraintes et des divergences de vitesse du cycle précédent.

Nous avons implanté dans le code différents schémas de résolution numérique : Gauss, Gauss-Seidel et SOR(Successive Over Relaxation).

La résolution numérique du type direct pour des problèmes tridimensionnels est trop limitative du fait du nombre important de noeuds.

Pour les applications que nous aurons à traiter les méthodes itératives telles que SOR sont très satisfaisantes.

Une fois le champ de pression déterminé pour toutes les mailles, le calcul de la vitesse "Lagrangienne" (intermediaire : \bar{u}^n) est obtenu explicitement par la relation (II.2.2.23).

Dans l'étape convective le champ de vitesse est obtenu également d'une façon explicite. Il est donnée par la relation (II.2.2.30).

II.6. Organigramme

Le programme se décompose simplement en trois parties (Fig.II.6).

- Une étape d'initialisation qui définit la géométrie et les conditions du calcul, ainsi que le pas de temps.
- La boucle de calcul qui reprend les deux étapes et le stockage des variables à chaque cycle. Un test sur le temps ou sur le nombre d'itérations, permet une sauvegarde des résultats dans un fichier, pour un instant donné, et éventuellement de stopper le calcul.
- Enfin l'arrêt du programme est précédé de l'écriture des résultats et d'un fichier de sauvegarde pour une relance ultérieure.

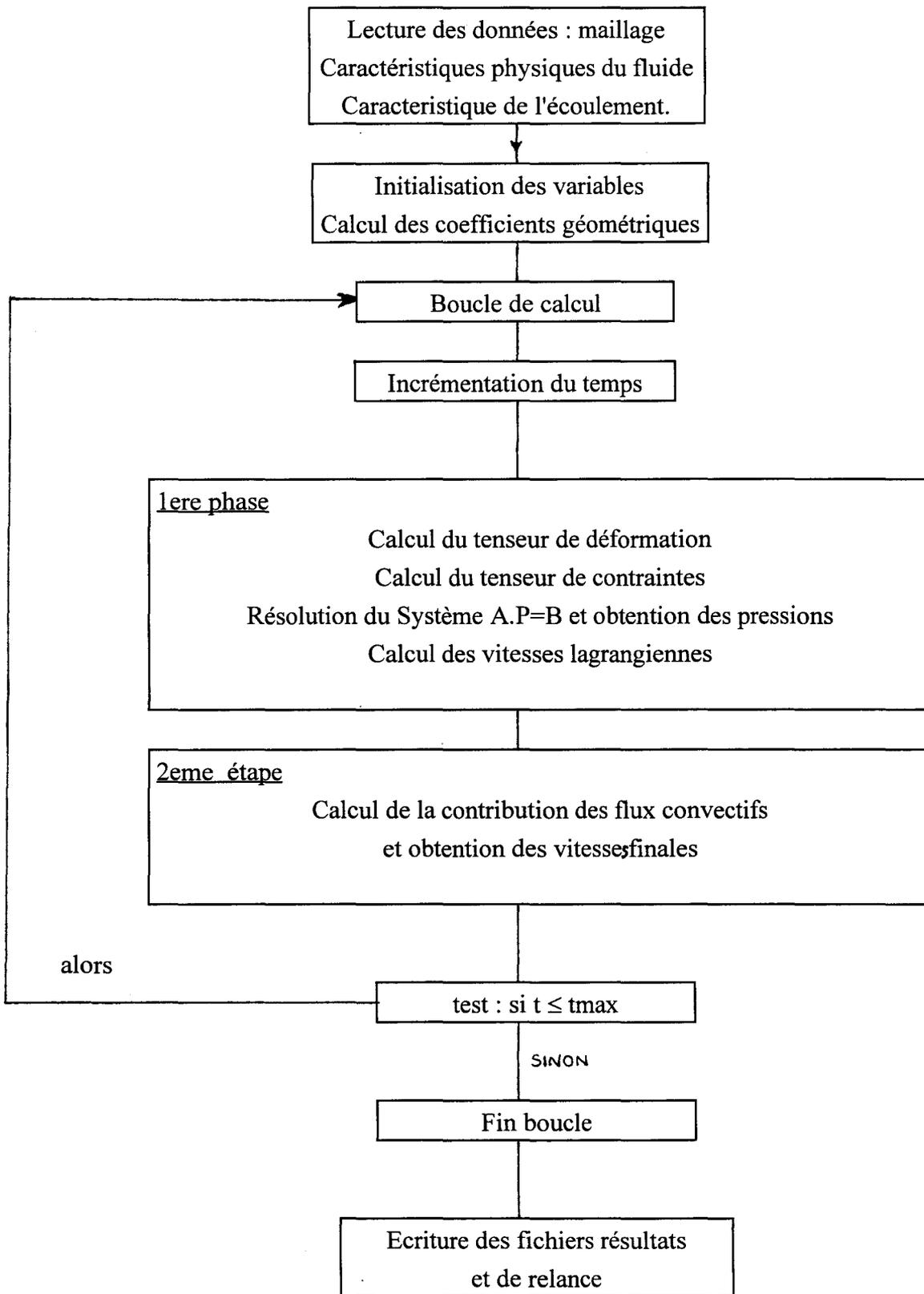


FIG.II.6. : Organigramme

DEUXIEME PARTIE

APPLICATIONS

BIDIMENSIONNELLES

Toutes ces applications ont été réalisées à partir du code 3D, en écrivant dans le programme : $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$, $w = 0$, et suivant les parois solides $z=cste$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial z} = 0$.

Ceci a été obtenu d'une part, par modification des coefficients de la matrice A dans le système d'équations $A.P=B$, et d'autre part par application des conditions aux limites $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial z} = 0$.

Le type de maillage 3D utilisé est à titre d'exemple représenté fig.1.1 et fig.1.2 dans le cas d'un canal et d'une marche descendante. Par suite, tous les résultats relatifs à ces applications tridimensionnelles sont présentées pour un plan $z=cste$.

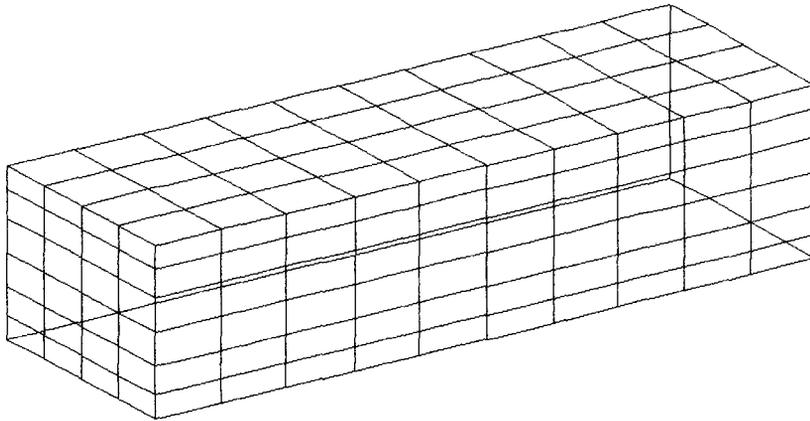


FIG.a. :Maillage MA1

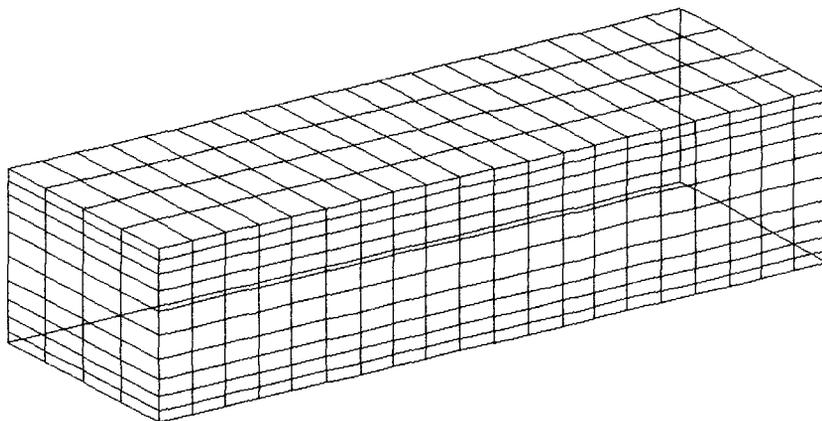


FIG.b. : Maillage MA2

FIGURE.1.1 : MAILLAGE DU DOMAINE

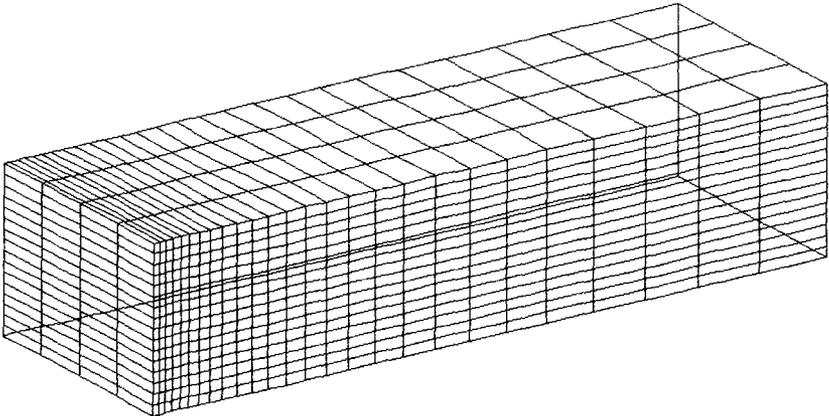


FIG.c : Maillage MA3

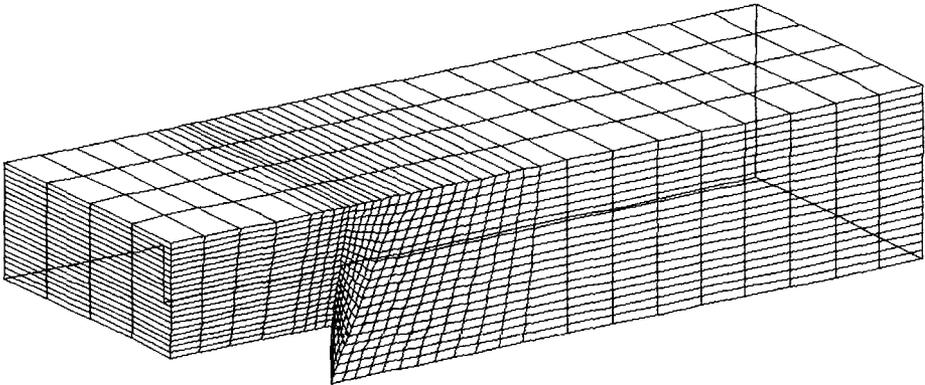


FIG.d : Maillage MR2

FIGURE.1.2 : MAILLAGE DU DOMAINE

CHAPITRE I

I. TESTS LAMINAIRES

Dans ce chapitre, nous allons évaluer la capacité du code à prédire des écoulements laminaires et les erreurs dues au schéma numérique.

I.1 Ecoulement parallèle

Nous envisageons d'étudier quelques exemples d'écoulements parallèles, c'est à dire des écoulements dont le vecteur vitesse présente une seule composante non nulle et dont toutes les particules fluides suivent des trajectoires parallèles.

Ce type d'écoulement présente un intérêt particulier, puisque les équations de Navier-Stokes ont une solution analytique exacte.

I.1.1 Ecoulement parallèle dans un canal bidimensionnel

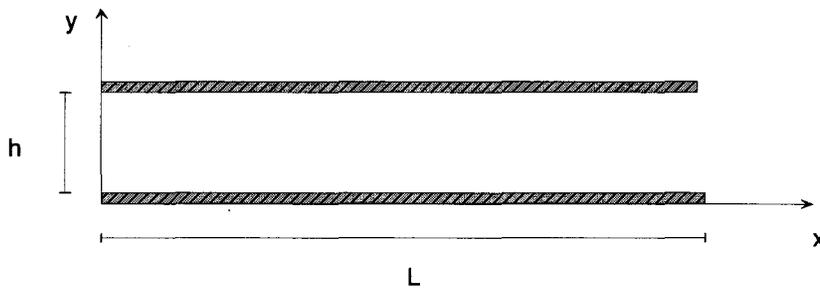


FIG.I.a. Canal

Nous considérons l'écoulement établi de fluide incompressible, entre deux parois planes infinies. l'épaisseur séparant les deux parois est h (FIG.I.1.) et l'écoulement est parallèle à l'axe des x . Une seule composante du vecteur vitesse est donc non nulle :

$$u = u(x,y,z,t) \quad , \quad v = w = 0 \quad (I.1)$$

L'équation de continuité est réduite à :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (\text{I.2})$$

la composante u de la vitesse ne dépend donc pas de x , de plus, dans la configuration étudiée, les propriétés de l'écoulement ne dépendent ni de z (coordonnée latérale) ni du temps t :

$$u = u(y) \quad (\text{I.3})$$

l'équation de conservation de la quantité de mouvement projetée sur les axes des y et z :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (\text{I.4})$$

la pression ne dépend ni de y ni de z , par conséquent $p = p(x)$. Les équations qui représentent l'écoulement deviennent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ u &= u(y) \quad , \quad p = p(x) \\ u(0) &= 0 \quad , \quad u(h) = u_p \end{aligned}$$

Les dernières équations représentent la condition d'adhérence et elles expriment que les particules fluides et les parois solides qui sont en contact, ont la même vitesse.

L'équation possède un premier membre qui ne dépend que de y et un second membre qui ne dépend que de x , ces deux membres doivent être constants et par conséquent le gradient de pression $dp/dx = \text{cste}$.

Le profil de vitesse prend alors la forme parabolique bien connue :

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (y^2 - hy) + \frac{u_p}{h} y \quad (\text{I.5})$$

avec $\frac{dp}{dx} = \frac{p_s - p_e}{L}$

L : longueur des parois

p_e (p_s): pression entrée (sortie) du canal

a. Ecoulement de Poiseuille plan :

On considère l'écoulement entre deux parois planes infinies et fixes. C'est l'écoulement de Poiseuille dont le profil de vitesse se déduit de (I.5) pour ($u_p=0$) :

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (y^2 - hy) \quad (\text{I.6})$$

b. Ecoulement de Couette pur :

L'écoulement de Couette pur est obtenu pour un gradient de pression nul, l'équation (I.5) devient :

$$u(y) = \frac{u_p}{h} y \quad (\text{I.7})$$

I.1.2 Applications

Comme on l'a signalé au dessus, l'analyse de ces types d'écoulements est fondamentale. En effet, la résolution analytique exacte nous fournit une référence précise de comparaison pour nos résultats, elle nous permet de valider notre code dans les cas de figures suivantes :

1. Evolution de l'algorithme vers un état stationnaire dans le cadre d'un régime établi.
2. Vérifier que le schéma conserve le débit avec une bonne précision (conservation de la masse).
3. Vérifier que le profil de vitesse est correct en le comparant au résultat théorique. (conservation de la quantité de mouvement).
4. Influence de l'algorithme sur la répartition de la pression. Comparaison avec le profil théorique.
5. Influence du maillage sur les résultats.

a. Caractéristiques de l'écoulement :

- Ecoulement visqueux dans un canal plan
- Laminaire

- Laminaire
- Régime établi
- Pression de référence 0.0 Pa
- Masse volumique 1.2 kg / m³
- Nombre de Reynolds << 500

b. Géométrie

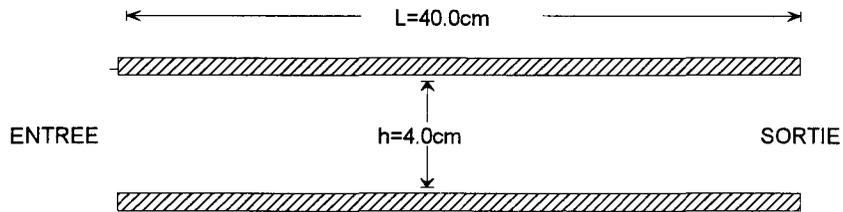


FIGURE.I.b : Configuration géométrique du canal

c. Maillage

Les calculs ont été effectués avec plusieurs types de maillage, du plus grossier au plus fin. En effet, ceux ci permettront de mettre en évidence l'influence du maillage sur les résultats.

Les exemples de maillages sont présentés respectivement sur les figures (I.1.3)

MA1 : est un maillage régulier de 385 noeuds dont 77 noeuds dans le plan $z=cste$, ($L=10h$).

MA2 : est un maillage serré auprès des parois ($L=10h$)

MA3 : est un maillage serré auprès des parois et en amont de l'écoulement ($L=30h$).

Leurs caractéristiques sont résumées dans le tableau N°1.

Maillage	Finesse	Nbre. de noeuds
MA1	1/6	385
MA2	1/10	1155
MA3	1/17	2465

Tableau N° 1

d. Conditions aux limites :

Les conditions aux limites prises en compte sont :

- Parois solides : Conditions d'adhérence
- Frontières fluides :

- Entrée : on impose un profil de vitesse uniforme, parabolique ou une pression constante.

- Sortie : on impose la pression constante.

e. Résultats

Le programme a été testé pour plusieurs configurations (maillage-condition aux limites). Le tableau N° 1-2 résume bien ces cas tests.

On définit en suite les grandeurs suivantes :

◆ ERD : est l'erreur relative obtenue sur l'équation de continuité, donnée par la relation .

$$ERD = \frac{DB_{ne} - DB_{ns}}{DB_{ne}} \quad (I.8)$$

avec DB_{ne} , DB_{ns} sont respectivement le débit volumétrique numérique à l'entrée et à la sortie du canal.

◆ ERU : est l'erreur relative obtenue sur la parabolicité du profil de vitesse à la sortie, donnée par la relation :

$$ERU = \frac{U_{\max.th} - U_{\max.cal}}{U_{\max.th}} \quad (I.9)$$

$U_{\max.th}$, $U_{\max.cal}$ sont respectivement la vitesse maximale calculée et la vitesse maximale théorique.

Le tableau N° 2 fait la comparaison entre les résultats de calcul donnés par les différents types de maillage MA1 à MA3 (figures I.1.), dont les caractéristiques géométriques sont résumés dans le tableau N° 1.

La comparaison porte sur la précision du profil de vitesse à la sortie, du gradient de pression.

CAS TEST N°	Maillage	Conditions aux limites		ERD (%)	ERU (%)
		Entrée	Sortie		
1	MA1	Vit. U.	Pression	0.01	--
2	MA1	Vit. P.	Pression	0.02	0.30
3	MA1	Pression	Pression	0.00	0.00
4	MA2	Vit. U.	Pression	0.08	--
5	MA2	Vit. P.	Pression	0.00	0.00
6	MA2	Pression	Pression	0.00	0.00
7	MA3	Vit. U.	Pression	0.02	0.33
8	MA3	Vit. P.	Pression	0.00	0.00
9	MA3	Pression	Pression	0.00	0.00

Tableau N° 2

Vit. U : vitesse uniforme.

Vit. P : vitesse parabolique.

Le tableau ci-dessus montre la progression des erreurs relatif ERD et ERU en fonction du raffinement du maillage. Bien sûr ERU n'a de sens que dans les cas 2,3,5,6,8,9 stationnaire.

Les valeurs fournies dans le cas 7 montrent simplement que $L=30h$ est une longueur au bout de la quelle l'écoulement de Poiseuille est correctement établi.

Pour chaque cas test on représente les figures donnant :

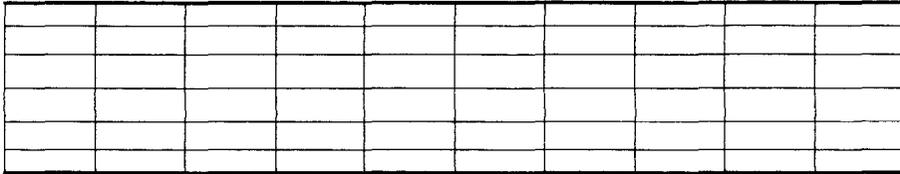
- * le profil de vitesse à la sortie du canal : figures 1.4 , 1.9 , 1.17 , 1.22 , 1.30 et 1.35,
- * le profil de pression le long du canal : figures 1.5 , 1.10 , 1.18 , 1.23 , 1.31 et 1.36 ,
- * l'évolution du profil de vitesse dans tout le canal, et ceci après avoir atteint l'état stationnaire. figures 1.6 , 1.11 , 1.19 , 1.32 et 1.37 ,
- * l'évolution des isobares dans les figures 1.7 , 1.12 , 1.20 , 1.33 et 1.38 ,
- * l'évolution des iso "u" dans les figures 1.8 , 1.13 , 1.21 , 1.34 et 1.39 ,
- * l'évolution de ERD en fonction du temps est présentée dans les figures 1.14 , 1.27 et 1.40 ,
- * le signal temporel représentant la pression au point (L/2,H/2). p_{sta} étant la pression à l'état stationnaire en ce point. figure 1.15 , 1.28 et 1.41 ,
- * l'évolution du résidu $((p^{ni} - p^{ni-1}) / p_{sta})$ dans le temps au point (L/2,H/2). figure 1.16 , 1.29 et 1.42

f. Conclusion :

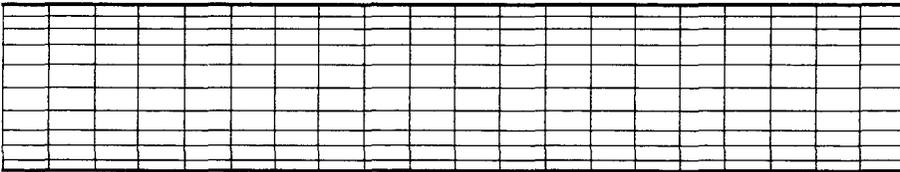
Ces premiers tests montrent que, même dans cette configuration simple, avec un maillage grossier :

- l'algorithme créé est conservatif.
- une fois que l'écoulement est établi au sens physique du terme, les variations des différentes grandeurs et notamment la pression sont inférieures à 10^{-7} en valeur relative d'un pas de temps à un autre.
- l'accord entre les résultats théoriques et les résultats du calcul (état stationnaire, écoulement de Poiseuille) est tout a fait satisfaisant même avec le maillage grossier.

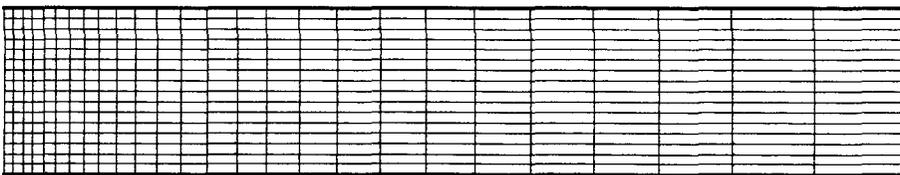
MAILLAGE DU DOMAINE



MAILLAGE MA1



MAILLAGE MA2



MAILLAGE MA3

FIGURE.1.3.

CAS TEST N° 1

Maillage MA1

Conditions aux limites :

entrée : vitesse uniforme

sortie : pression

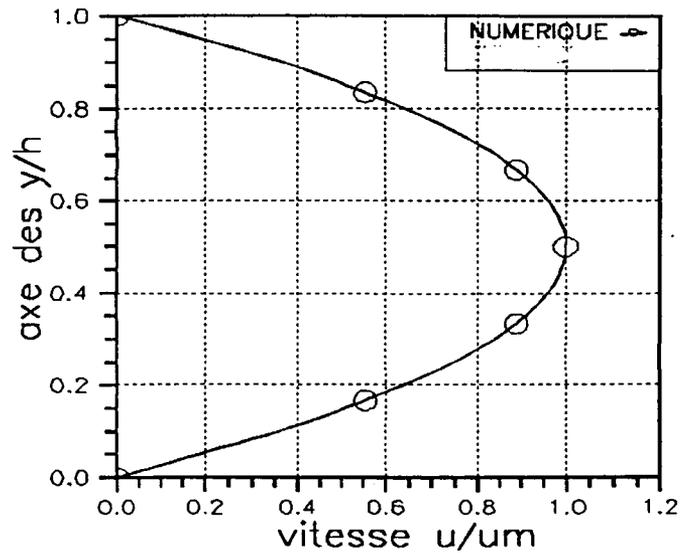


FIGURE.1.4.: PROFIL DE VITESSE A LA SORTIE

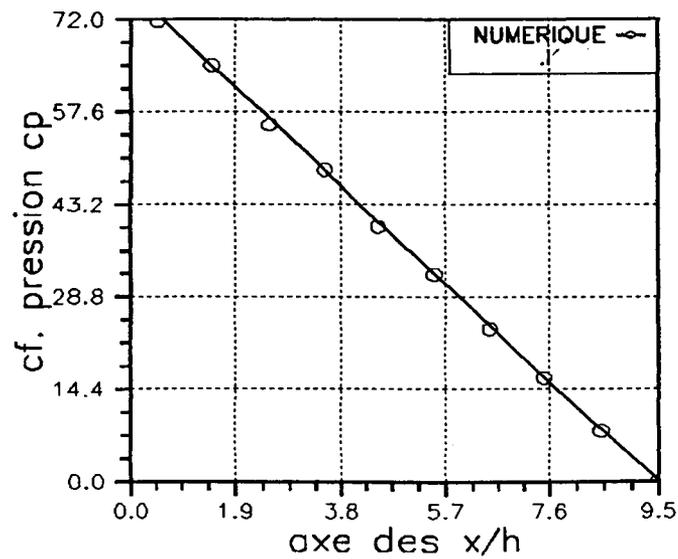


FIGURE.1.5.: PROFIL DE PRESSION LE LONG DE L'AXE DES X
 $(C_p = (p - p_{\min}) / 0.5\rho U_c^2)$

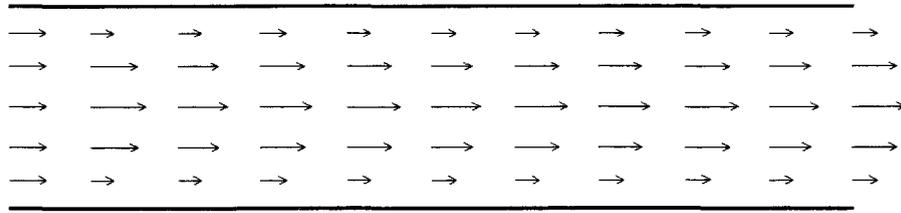


FIGURE.1.6.: EVOLUTION DU CHAMP DE VITESSE

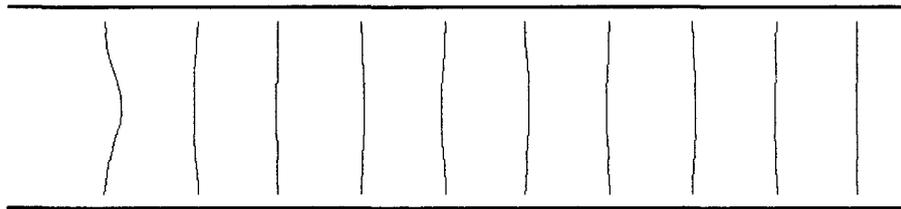


FIGURE.1.7.: LIGNES ISOBARE

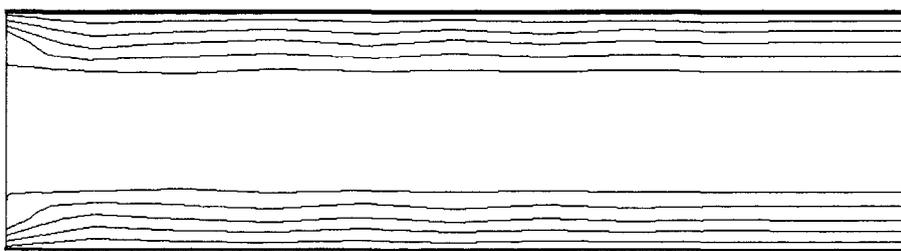


FIGURE.1.8.: LIGNES ISO "u"

CAS TEST N° 2-3

Maillage MA1

Conditions aux limites :

entrée : vitesse parabolique ou pression

sortie : pression

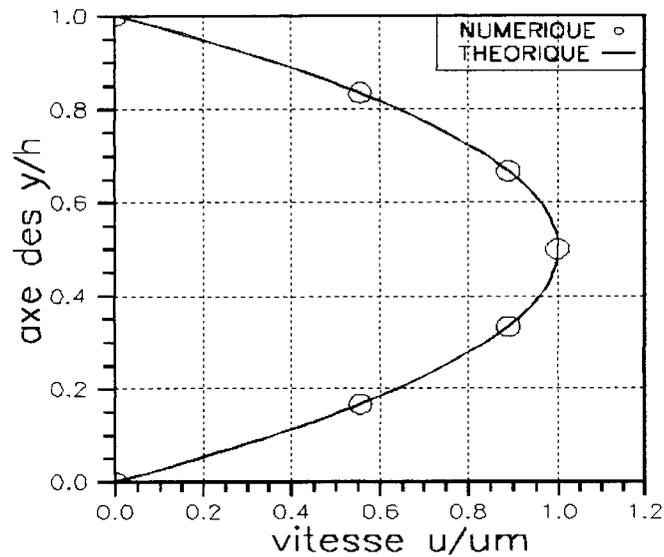


FIGURE 1.9.: PROFIL DE VITESSE A LA SORTIE
COMPARAISON AVEC LE RESULTAT THEORIQUE

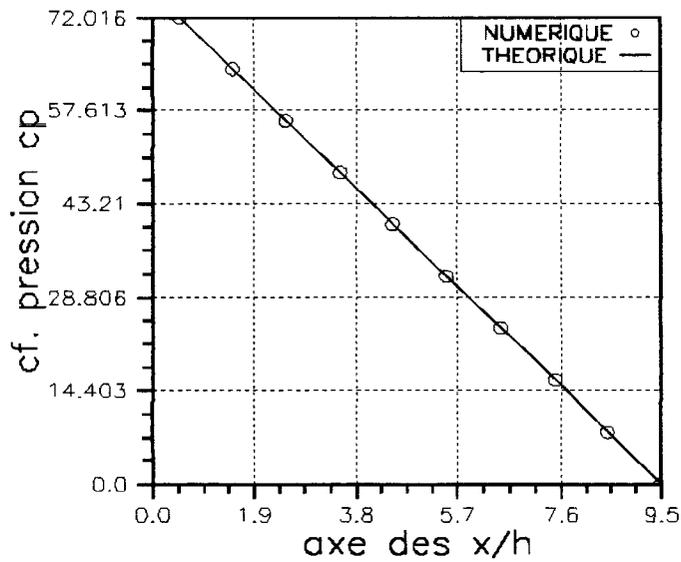


FIGURE 1.10.: PROFIL DE PRESSION LE LONG DE L'AXE DES X
COMPARAISON AVEC LE RESULTAT THEORIQUE

$$(C_p = (p - p_{min}) / 0.5\rho U_c^2)$$

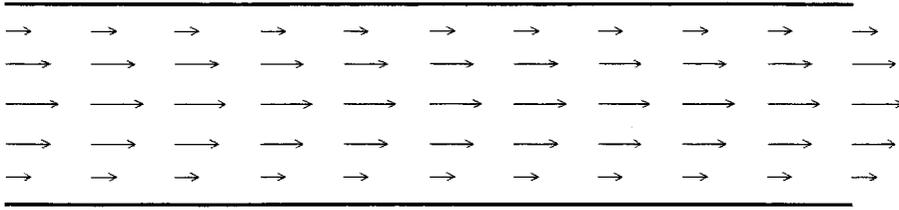


FIGURE.1.11.: EVOLUTION DU CHAMP DE VITESSE

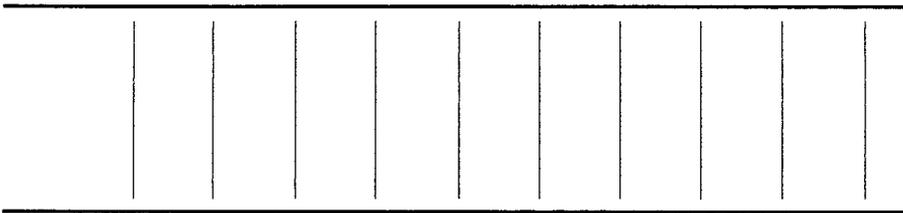


FIGURE.1.12.: LIGNES ISOBARE

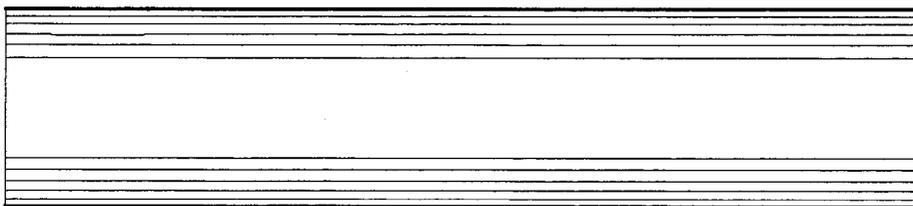


FIGURE.1.13.: LIGNES ISO "u

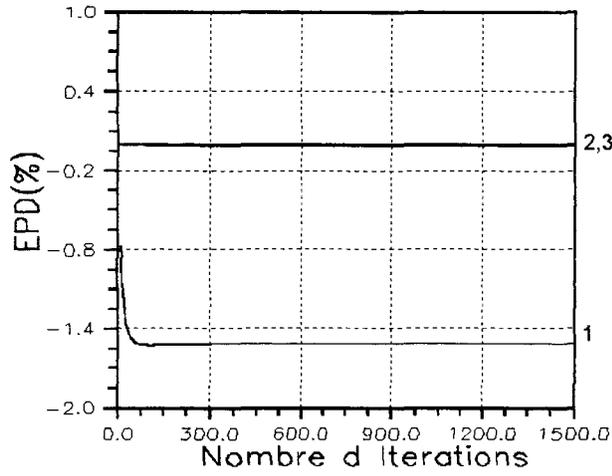


FIGURE.1.14.: Erreur relative EPD=100 ERD

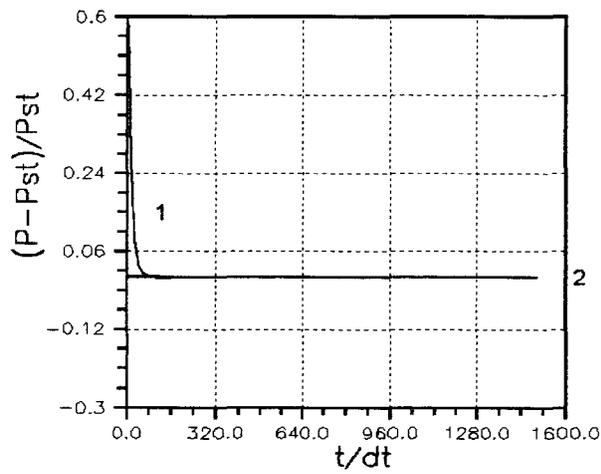


FIGURE.1.15.: Signal temporel de la fluctuation de la pression en $(x=L/2, y=h/2)$.

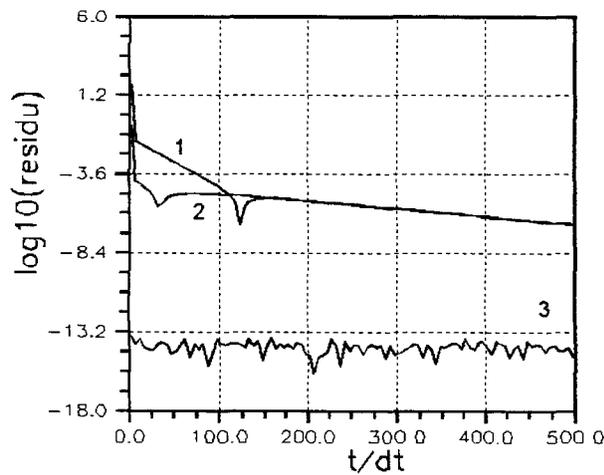


FIGURE.1.16.: Vitesse de convergence du schéma numérique en $(x=L/2, y=h/2)$.

CAS TEST N° 4

Maillage MA2

Conditions aux limites :

entrée : vitesse uniforme

sortie : pression

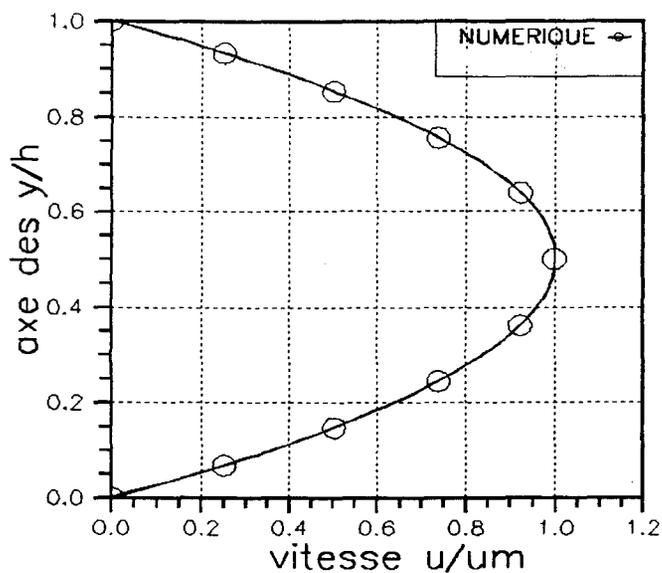


FIGURE.1.17.: PROFIL DE VITESSE A LA SORTIE

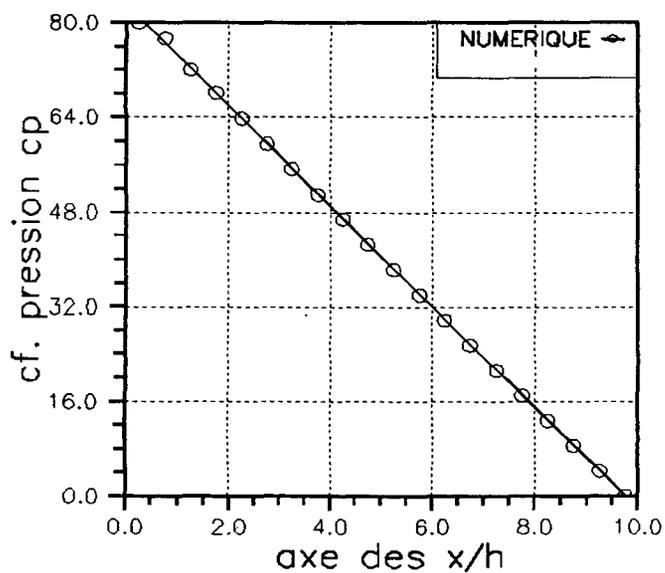


FIGURE.1.18.: PROFIL DE PRESSION LE LONG DE L'AXE DES X
 ($C_p = (p - p_{min}) / 0.5\rho U_c^2$)

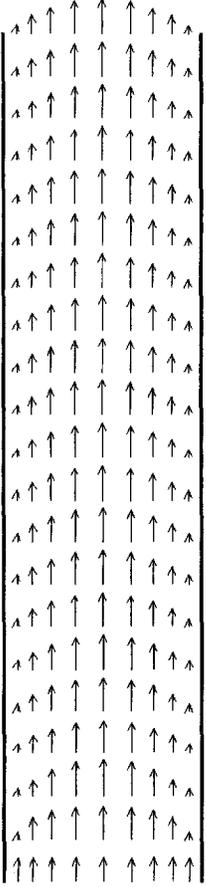


FIGURE.1.19.: EVOLUTION DU CHAMP DE VITESSE

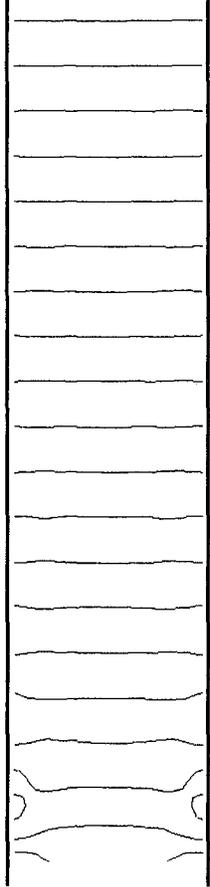


FIGURE.1.20.: LIGNES ISOBARE

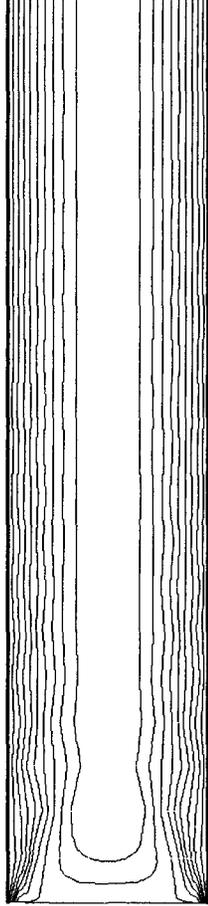


FIGURE.1.21.: LIGNES ISO"u"

CAS TEST N° 5-6

Maillage MA2

Conditions aux limites :

entrée : vitesse parabolique ou pression

sortie : pression

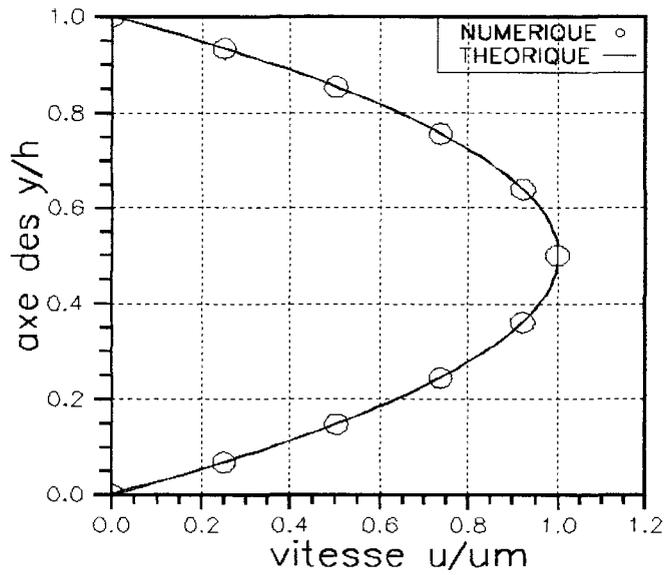


FIGURE.1.22.: PROFIL DE VITESSE A LA SORTIE
COMPARAISON AVEC LE RESULTAT THEORIQUE

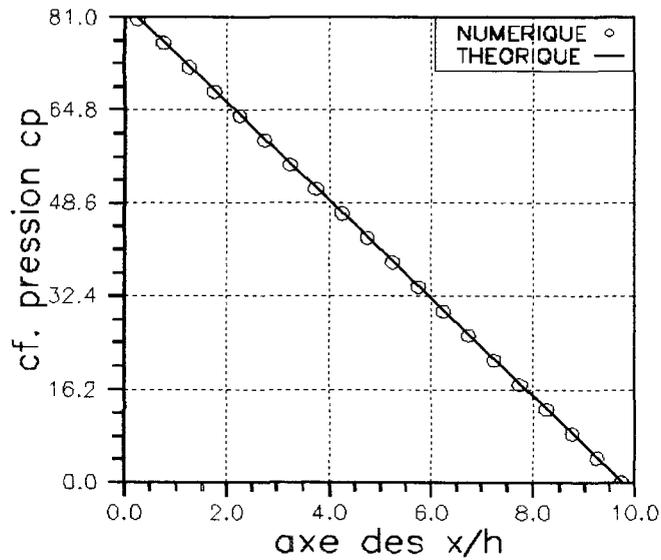


FIGURE.1.23.: PROFIL DE PRESSION LE LONG DE L'AXE DES X
COMPARAISON AVEC LE RESULTAT THEORIQUE

$$(C_p = (p - p_{min}) / 0.5\rho U_c^2)$$

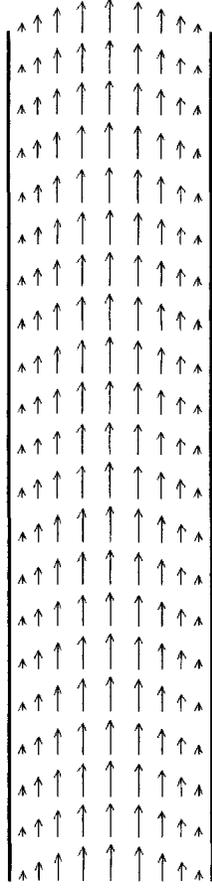


FIGURE. 1.24.: EVOLUTION DU CHAMP DE VITESSE

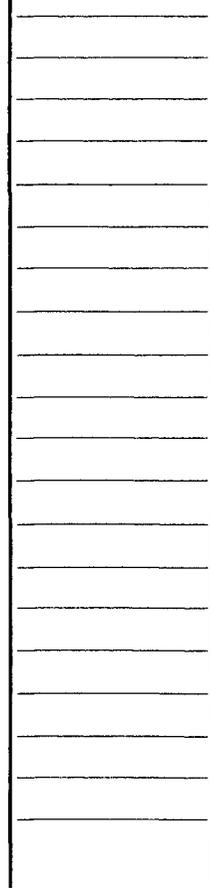


FIGURE. 1.25.: LIGNES ISOBARE

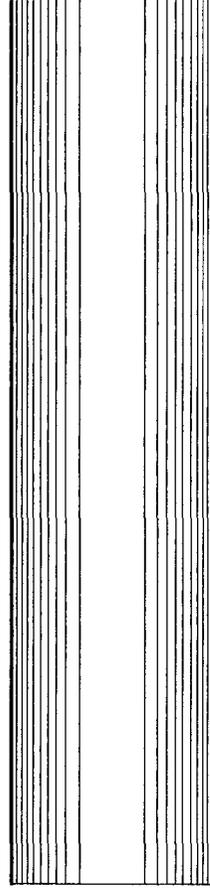


FIGURE. 1.26.: LIGNES ISO"u"

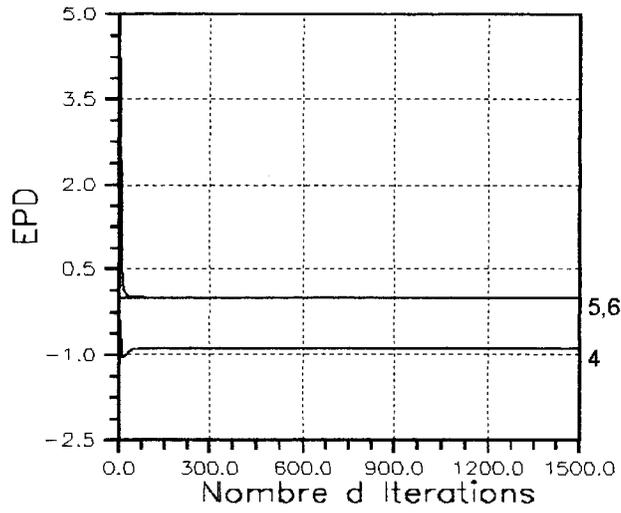


FIGURE.1.27.: Erreur relative EPD=100 ERD

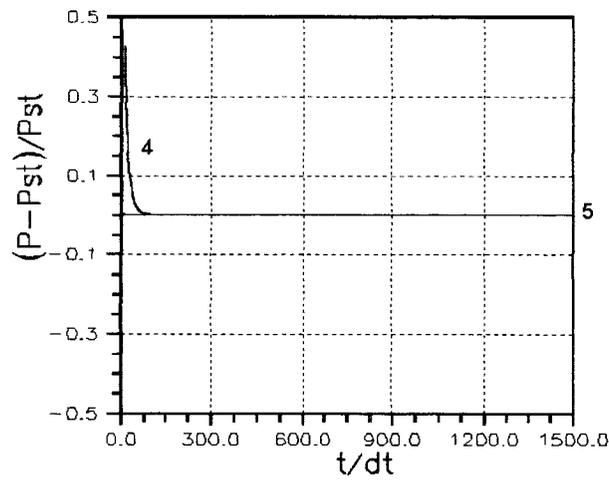


FIGURE.1.28.: Signal temporel de la fluctuation de la pression en $(x=L/2,y=h/2)$.

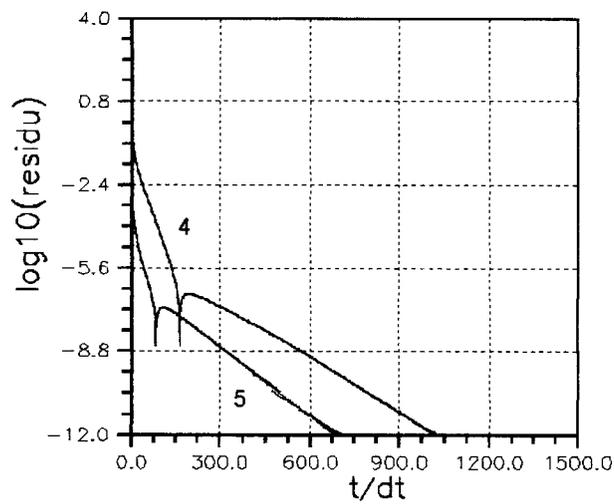


FIGURE.1.29.: Vitesse de convergence du schéma numérique en $(x=L/2,y=h/2)$.

CAS TEST N° 7

Maillage MA3

Conditions aux limites :

entrée : vitesse uniforme

sortie : pression

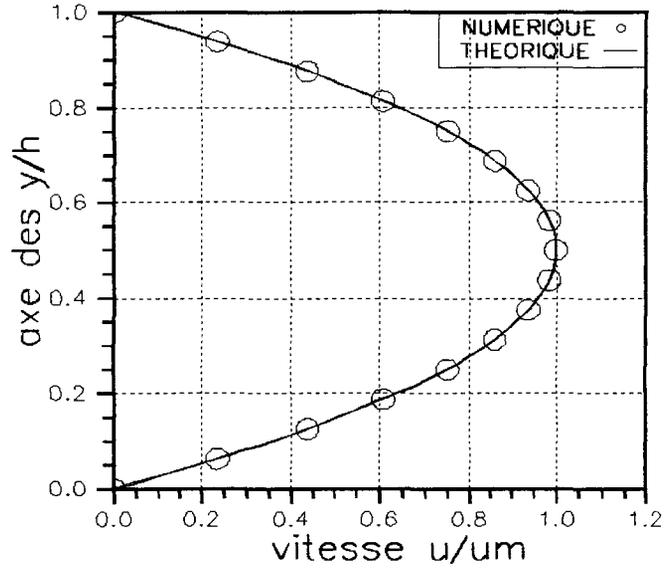


FIGURE 1.30.: PROFIL DE VITESSE A LA SORTIE
COMPARAISON AVEC LE RESULTAT THEORIQUE

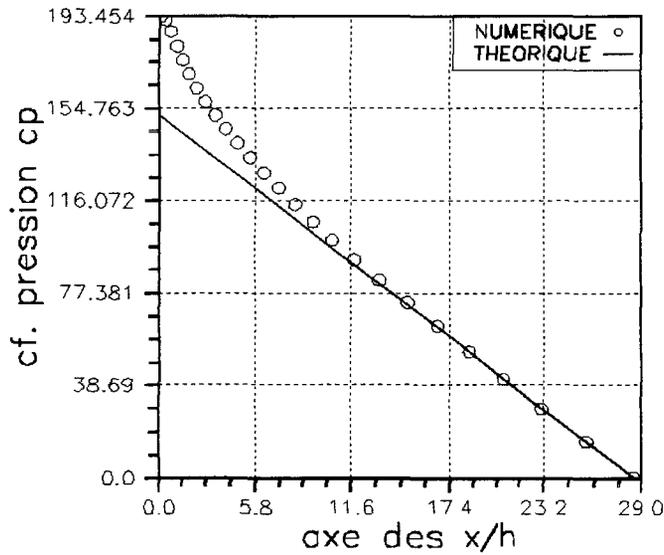


FIGURE 1.31.: PROFIL DE PRESSION LE LONG DE L'AXE DES X
COMPARAISON AVEC LE RESULTAT THEORIQUE

$$(C_p = (p - p_{\min}) / 0.5\rho U_c^2)$$

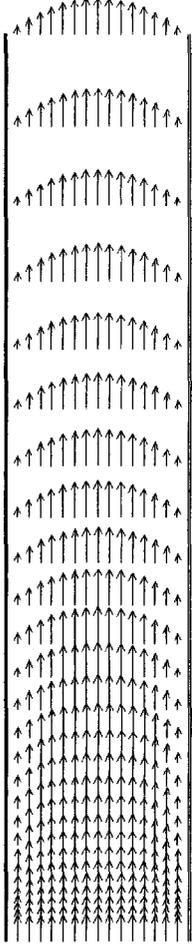


FIGURE 1.32.: EVOLUTION DU CHAMP DE VITESSE

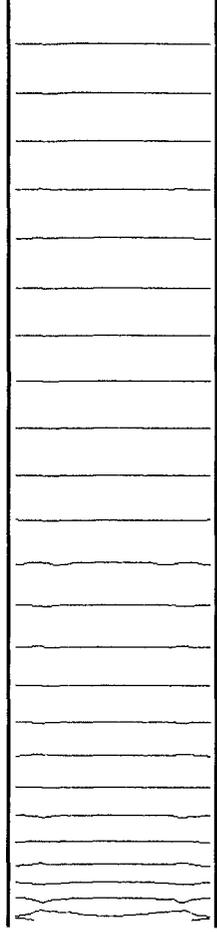


FIGURE 1.33.: LIGNES ISOBARE

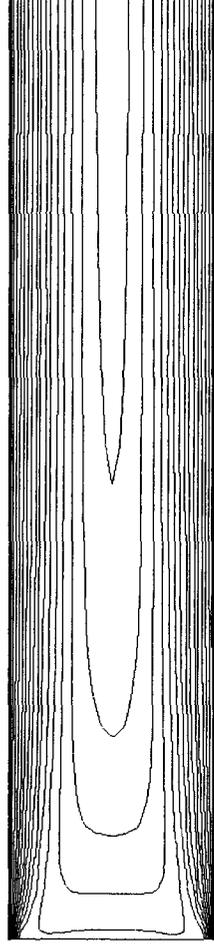


FIGURE 1.34.: LIGNES ISO"u"

CAS TEST N° 8-9

Maillage MA3

Conditions aux limites :

entrée : vitesse parabolique ou pression

sortie : pression

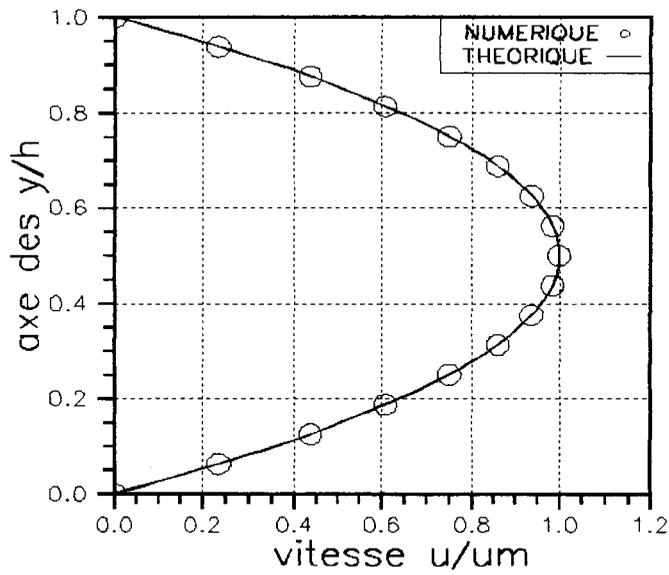


FIGURE.1.35.: PROFIL DE VITESSE A LA SORTIE
COMPARAISON AVEC LE RESULTAT THEORIQUE

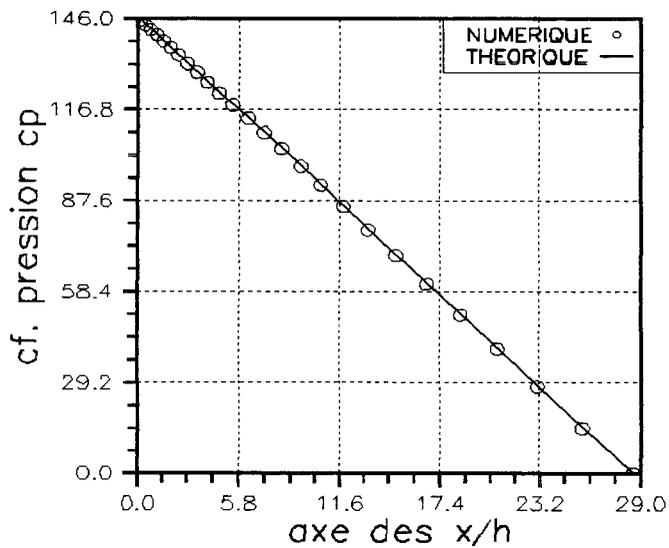


FIGURE.1.36.: PROFIL DE PRESSION LE LONG DE L'AXE DES X
COMPARAISON AVEC LE RESULTAT THEORIQUE

$$(C_p = (p - p_{\min}) / 0.5\rho U_c^2)$$

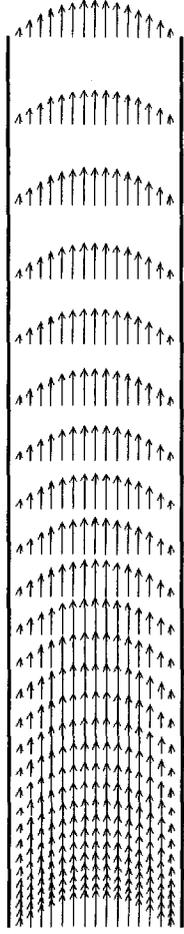


FIGURE 1.37.: EVOLUTION DU CHAMP DE VITESSE

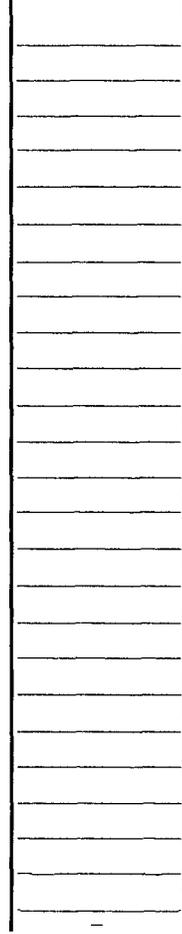


FIGURE 1.38.: LIGNES ISOBARE

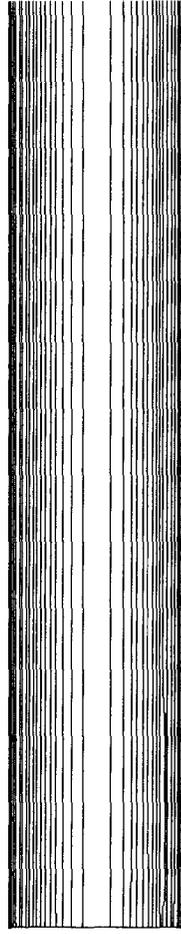


FIGURE 1.39.: LIGNES ISO"u"

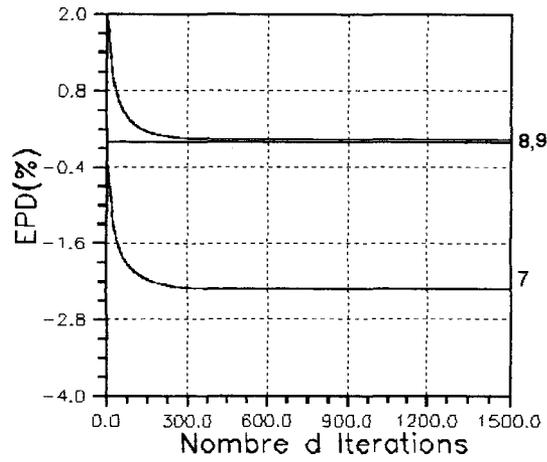


FIGURE.1.40.: Erreur relative EPD=100 ERD

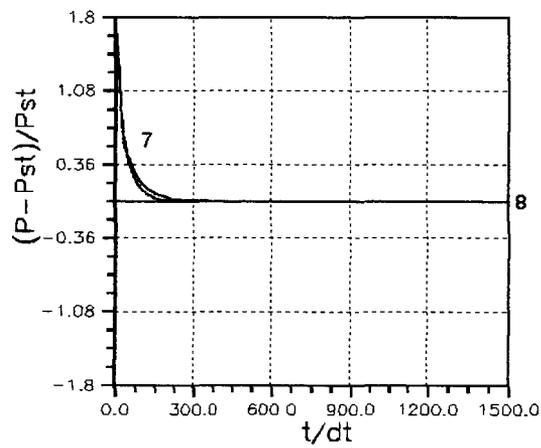


FIGURE.1.41.: Signal temporel de la fluctuation de la pression en $(x=L/2, y=h/2)$.

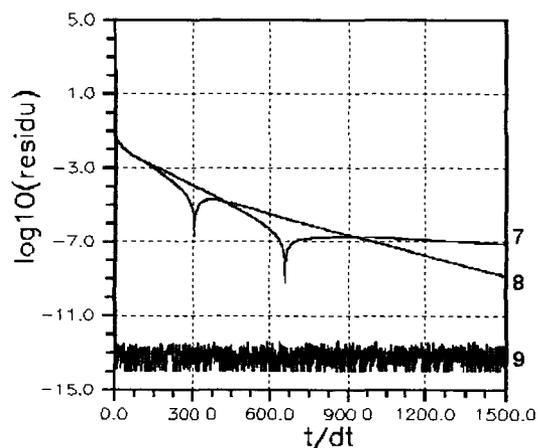


FIGURE.1.42.: Vitesse de convergence du schéma numérique en $(x=L/2, y=h/2)$.

I.2. Elargissement brusque : Marche descendante

On considère l'écoulement laminaire d'un fluide incompressible derrière une marche. Ce type d'écoulement a fait l'objet de nombreuses études autant expérimentales que numériques [14,45,46,47], et parmi ses applications industrielles on cite (diffuseur, brûleur, etc...).

Aujourd'hui, cette configuration constitue un test important pour évaluer les performances d'un code de calcul. En effet, l'élargissement brusque génère un décollement, puis une zone de recirculation s'établit en amont de la marche.

Le test à effectuer consiste donc à évaluer la "longueur de recollement" que vont parcourir les filets fluides, après la marche, avant de recoller à la paroi.

a. Caractéristiques de l'écoulement :

- Ecoulement visqueux derrière une marche descendante.
- Laminaire
- Régime établi
- Pression de référence 0.0 Pa
- Masse volumique 1.2 kg / m^3
- Nombre de Reynolds $\ll 500$

b. Géométrie

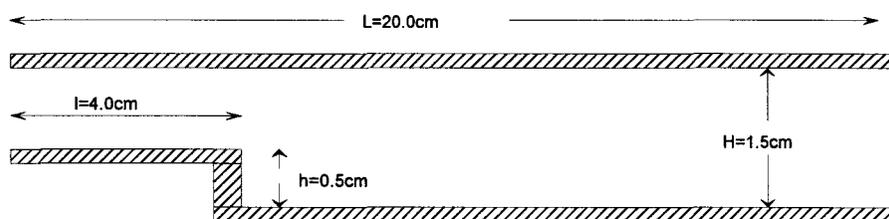


FIGURE.I.2.1 : Configuration géométrique de la marche

c. Maillage

Les calculs ont été effectués avec deux types de maillage.

Les exemples de maillages sont présentés respectivement sur les figures (FIG.2.1. et 2.1.bis).

MR1 : est un maillage orthogonal de 3045 noeuds.

MR2 : est un maillage serré auprès des parois, non orthogonal de 3675 noeuds.

d. Condition aux limites :

Les conditions aux limites prises en compte sont :

- Parois solides : Conditions d'adhérence
- Frontières fluides :
 - Entrée : on impose un profil de vitesse uniforme ou parabolique.
 - Sortie : on impose la pression constante

e. Résultats

Dans ce paragraphe, les résultats expérimentaux de DENHAM et PATRICK /96/ et numériques de ATKINS et al./46/ et de GHONIEM et al. /14/, vont nous servir de référence. Leurs comparaisons avec nos calculs sont exposés dans le tableau ci dessus.

Vit. P : vitesse parabolique,

Vit. U : vitesse uniforme.

CAS TEST N°	Maillage	Cond. aux Limites	Re	Lr		ERL (%)
				Num.	Exp	
1	MR1	Vit. P	25	2.00	2.09	4.34
5	MR1	Vit. U	25	2.00	2.09	4.34
2	MR1	Vit. P	50	2.72	2.61	4.04
6	MR1	Vit. U	50	2.72	2.61	4.04

3	MR1	Vit. P	75	4.2	4.35	3.2
4	MR1	Vit. P	100	5.3	5.61	5.5
7	MR2	Vit. P	25	2.0	2.09	4.34
8	MR2	Vit. P	50	2.7	2.61	3.33
9	MR2	Vit. P	100	5.32	5.61	5.16

Tableau N° 3

* les figures 2.2 (vitesse uniforme en entrée) et 2.3 (vitesse parabolique en entrée) montrent l'évolution du profil de vitesse dans tout le domaine, et ceci après avoir atteint l'état stationnaire. Ces figures sont obtenues pour des Re : 25 (a), 50 (b) et 100 (c). et un maillage de type MR1.

* la figure 2.4 montre l'évolution des iso "u" pour le maillage MR1, et un nombre de Re : 25 (cas a), 50 (cas b) et 100 (cas c).

* les figures 2.6 montre l'évolution des isobares pour le maillage MR1, et un nombre de Re : 25 (cas a), 50 (cas b) et 100 (cas c).

* les figures 2.5 (vitesse parabolique en entrée) montrent l'évolution du profil de vitesse dans tout le domaine, et ceci après avoir atteint l'état stationnaire. Ces figures sont obtenues pour des Re : 25 (a), 50 (b) et 100 (c), et un maillage de type MR2.

* la figure 2.7. présente une comparaison de l'évolution de la longueur de recollement des différents calculs avec les résultats expérimentaux et numériques obtenus par les auteurs suivants /14,46,96/.

* la figure 2.8 présente la répartition de la pression le long de l'axe des x, pour les stations $y = 2h$, MR1.

f. Conclusion :

Les tests de validation concernant l'écoulement derrière une marche montre que la méthode proposée est capable de prédire ce type d'écoulement avec une assez bonne précision dans le cadre d'un maillage orthogonal et non-orthogonal.

Les tests effectués avec les deux types de maillage montrent que :

- l'algorithme proposé permet d'utiliser des maillages non orthogonaux sans que soit altérée la qualité des résultats.

- avec une finesse de maillage raisonnable les résultats obtenus sont conformes aux résultats des autres auteurs.

MAILLAGE DU DOMAINE

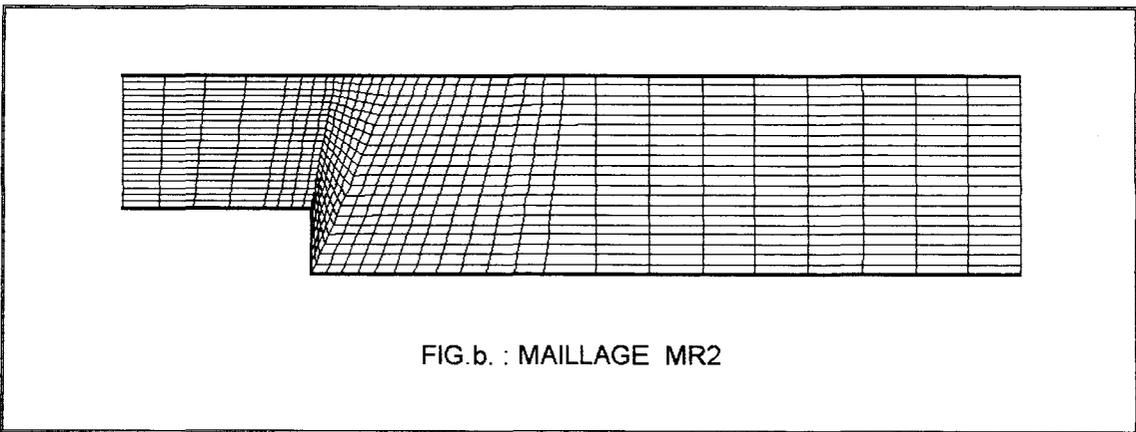
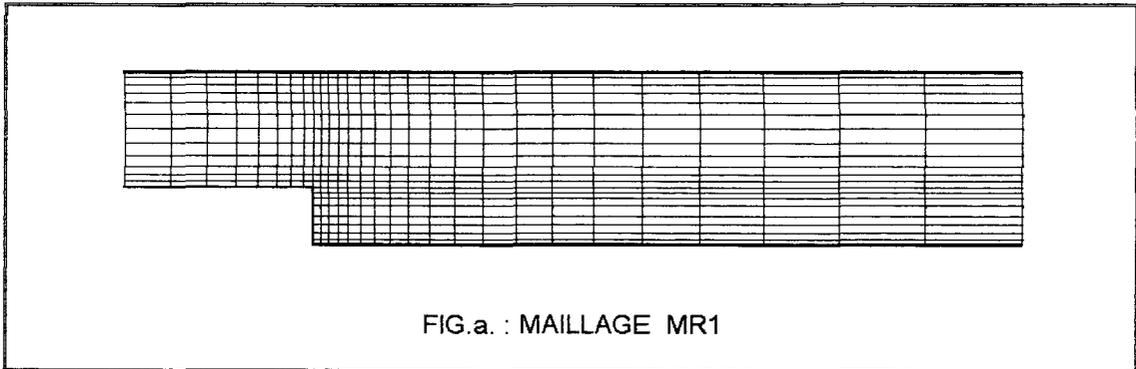


FIGURE.2.1

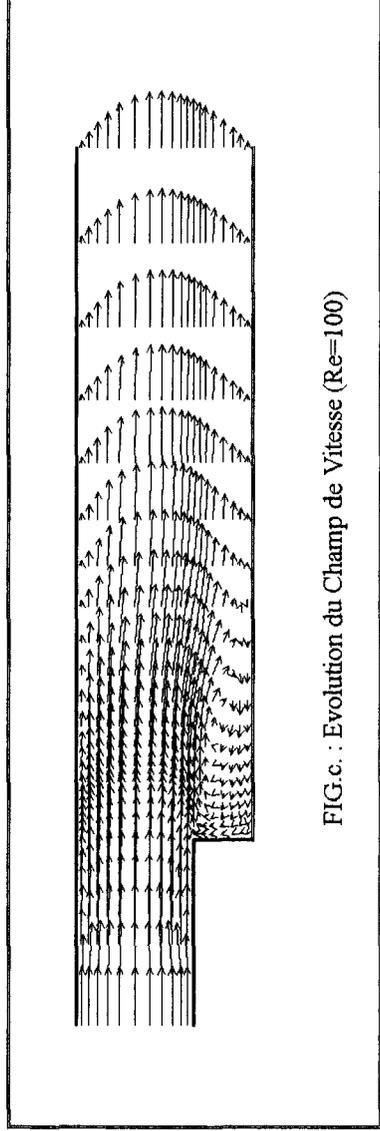
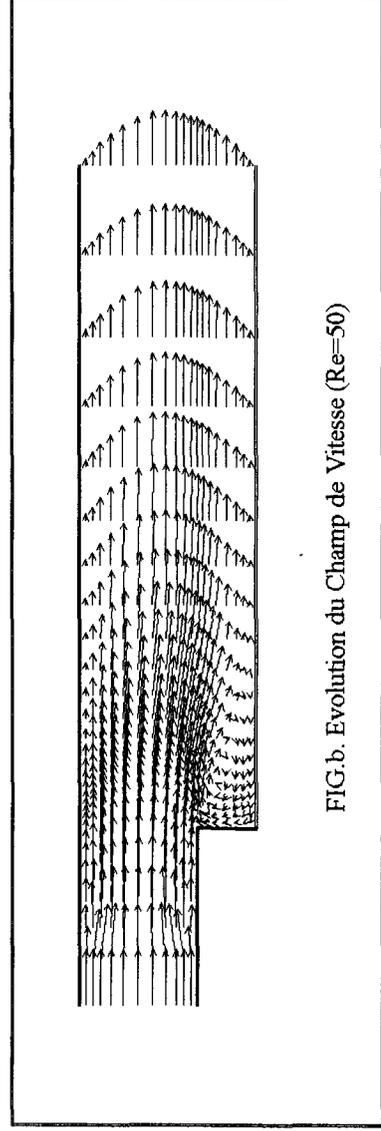
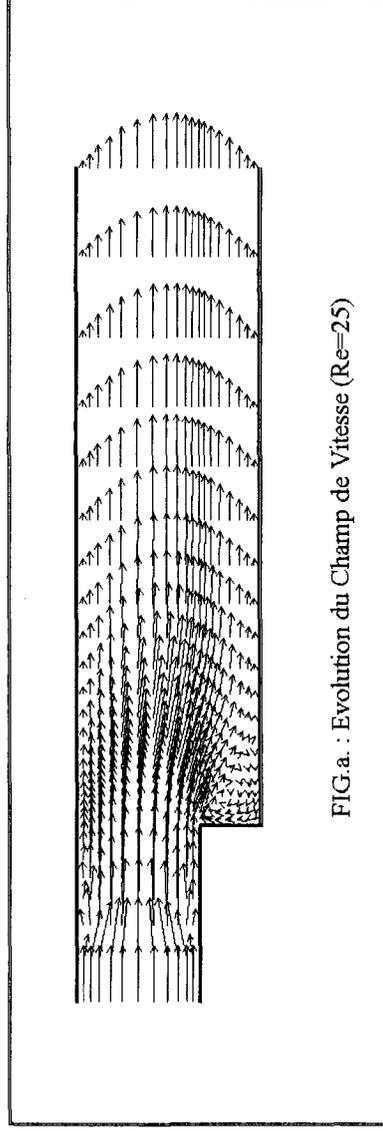


FIG.2.2. : CHAMP DE VITESSE OBTENU POUR UN PROFIL UNIFORME
A L'ENTREE ET POUR $Re : 25, 50, 100$.

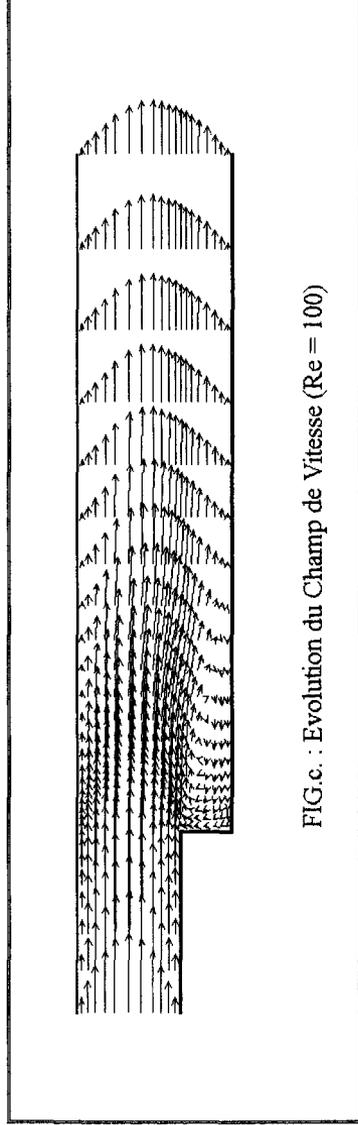
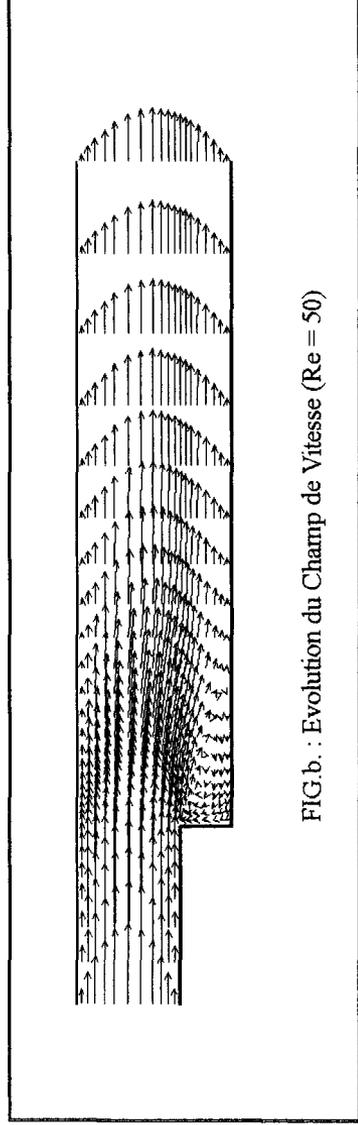
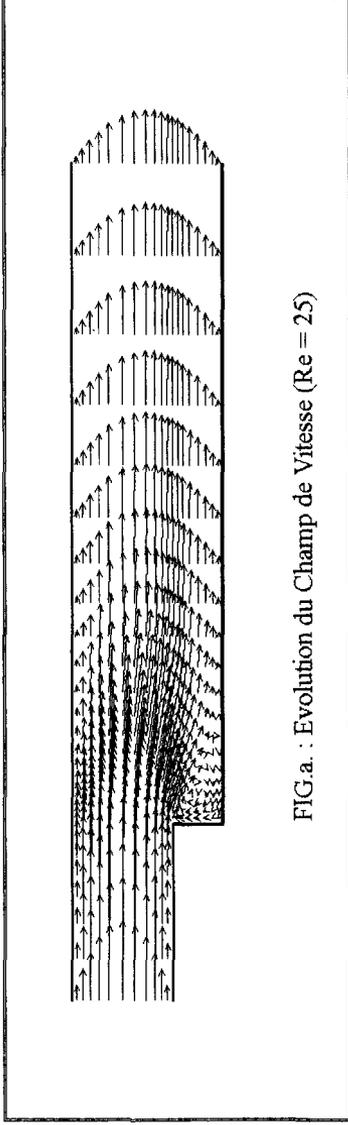
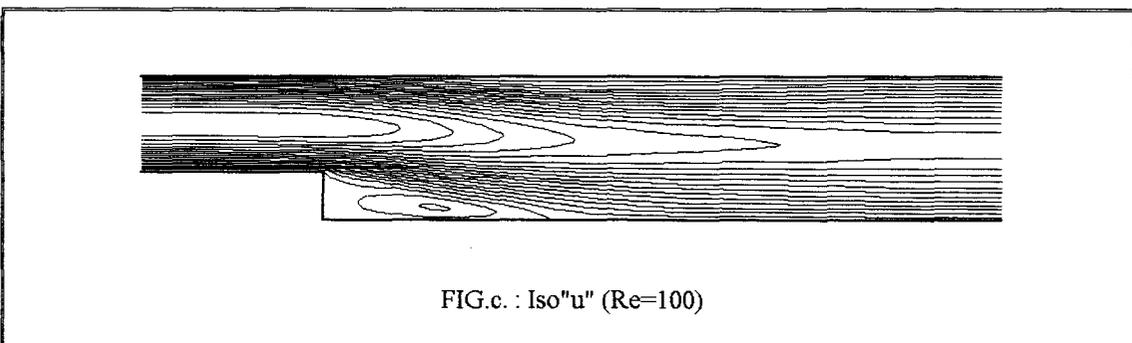
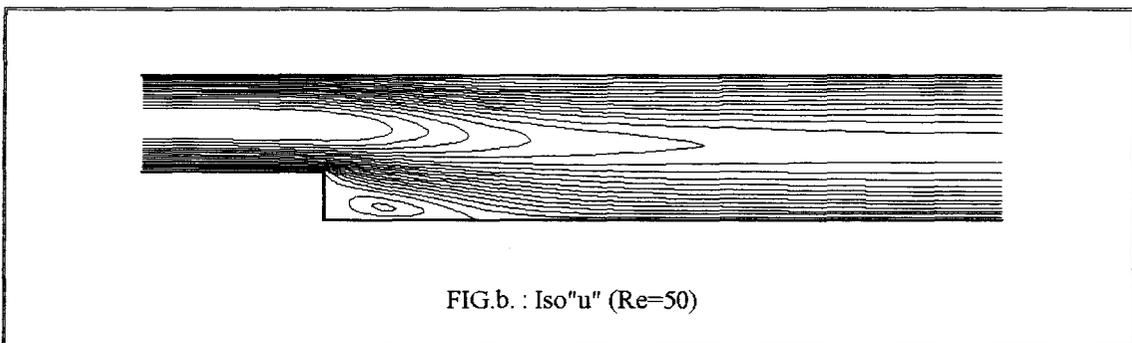
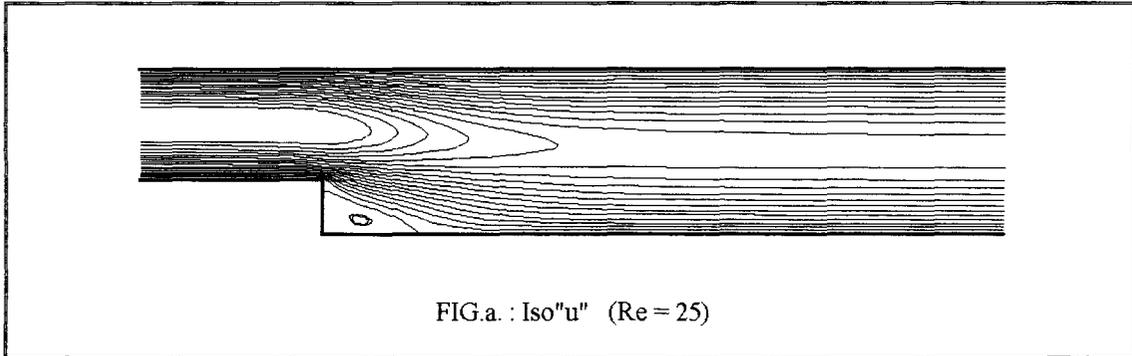


FIG.2.3 : CHAMP DE VITESSE OBTENUE POUR UN PROFIL PARABOLIQUE
A L'ENTREE ET POUR Re :25, 50 et 100.

FIG.2.4 : ISOLIGNES OBTENUES POUR $Re : 25, 50, 100$.

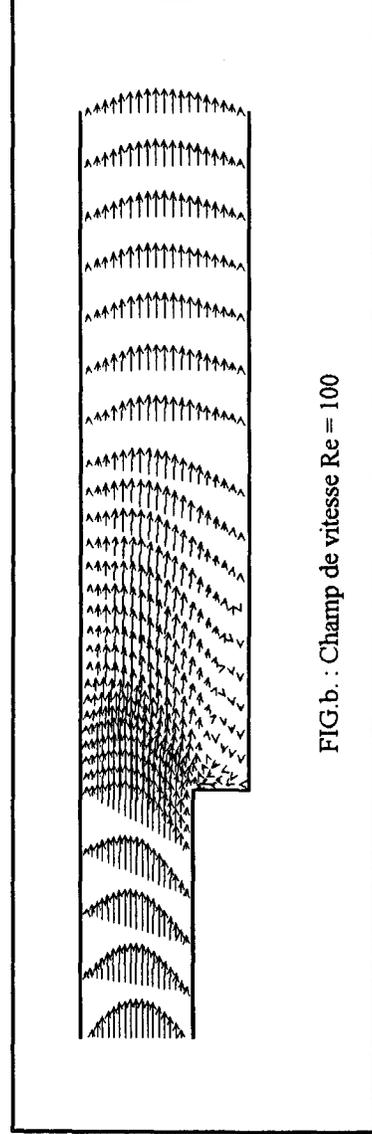
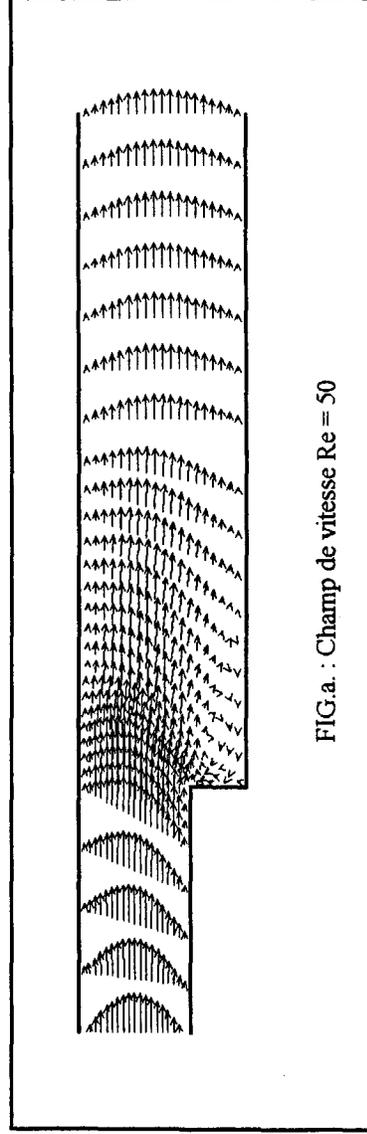
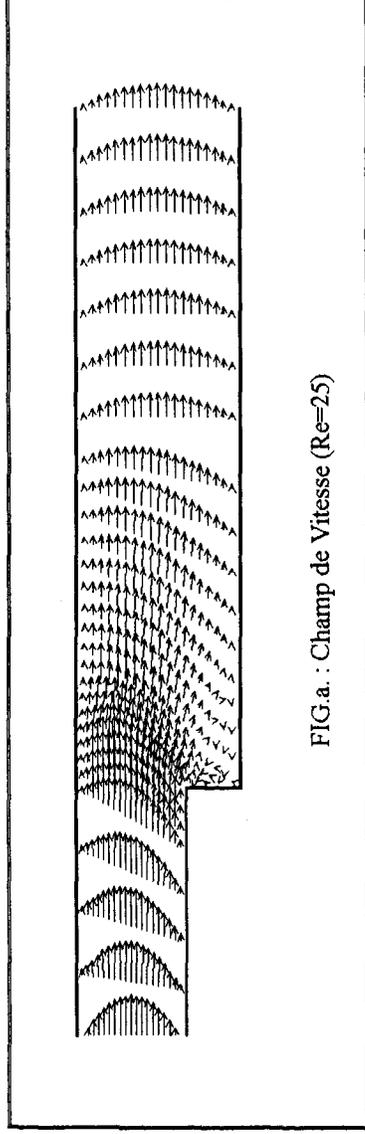


FIG.2.5. : EVOLUTION DU CHAMP DE VITESSE DANS UNE MARCHE DESCENDANTE
AVEC UN MAILLAGE DE TYPE MR2 ET $Re : 25, 50, 100$

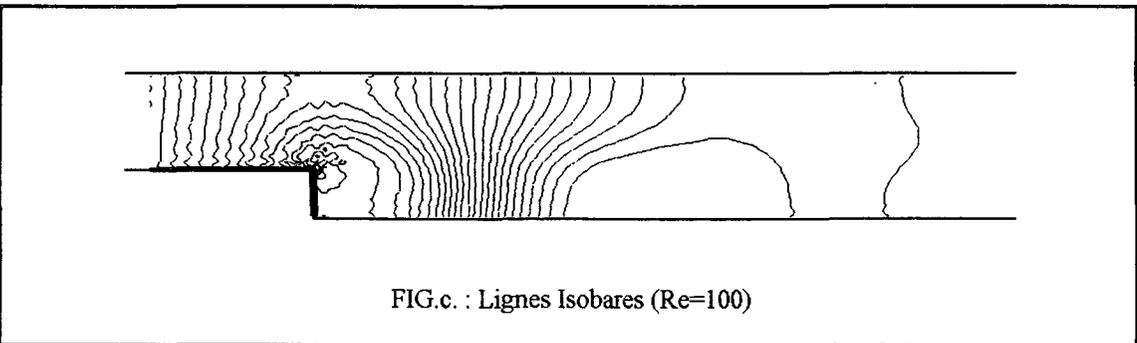
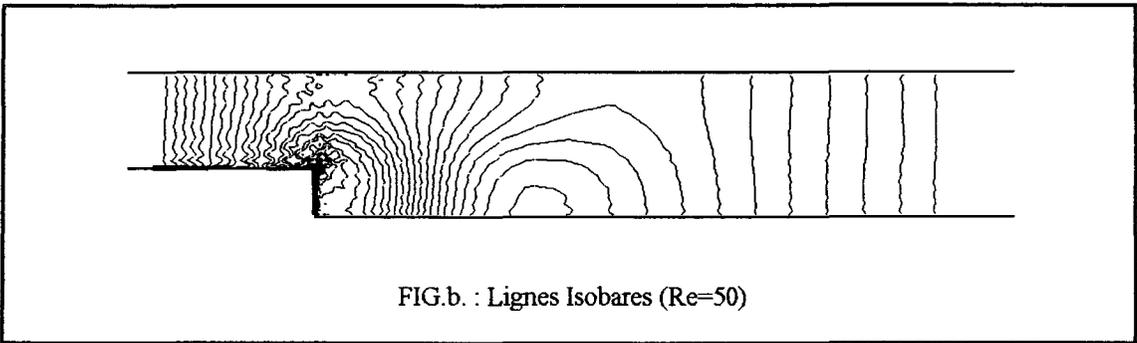
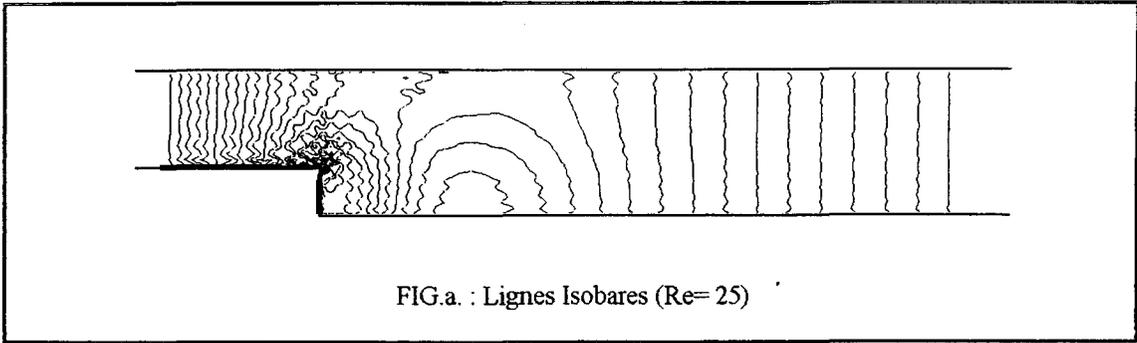
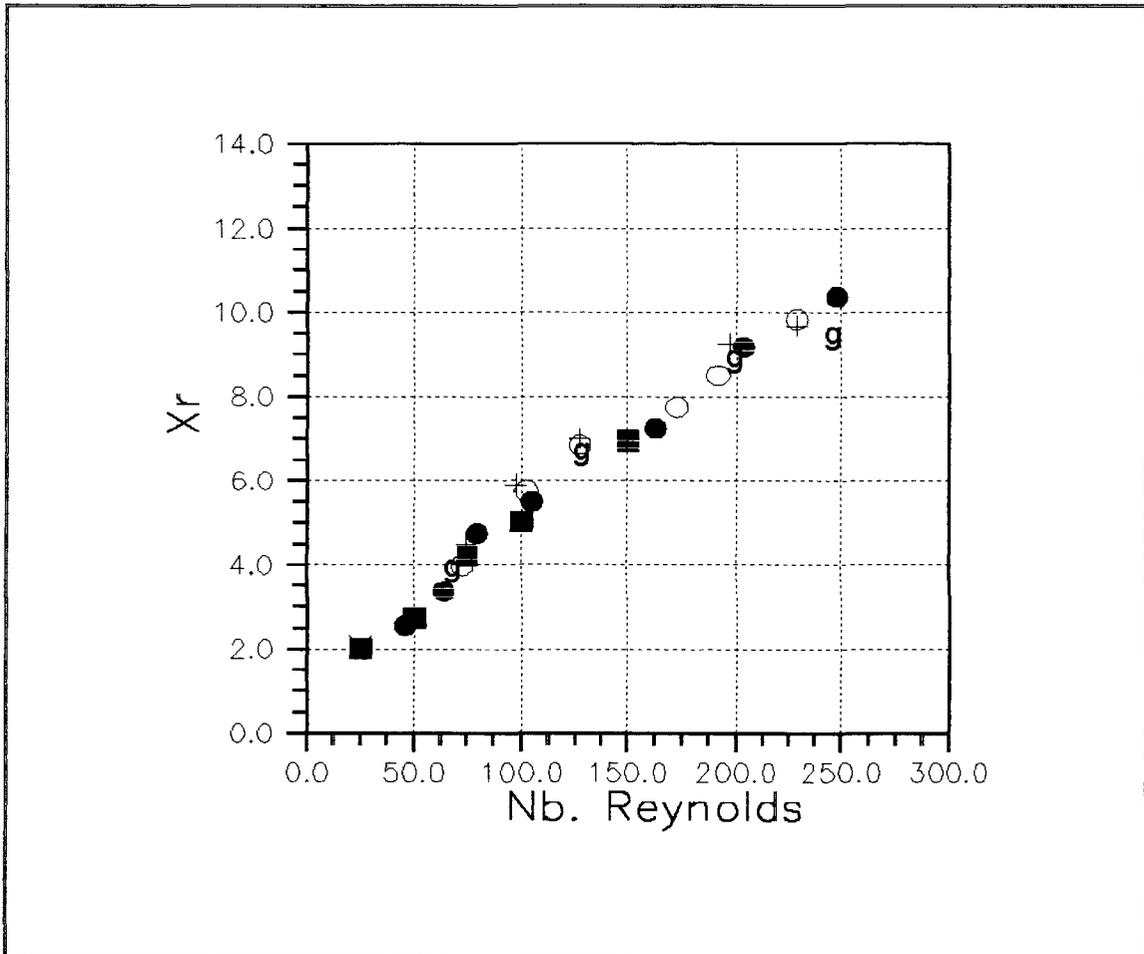
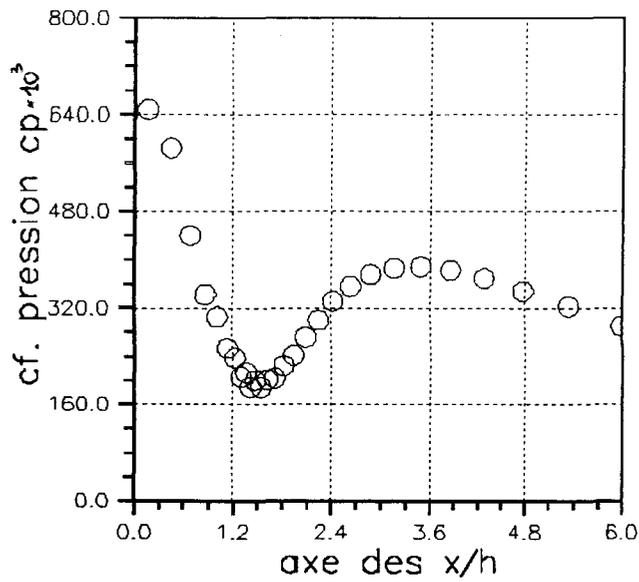


FIG.2.6 : LIGNES ISOBARES
Pour Re : 25, 50, 100.

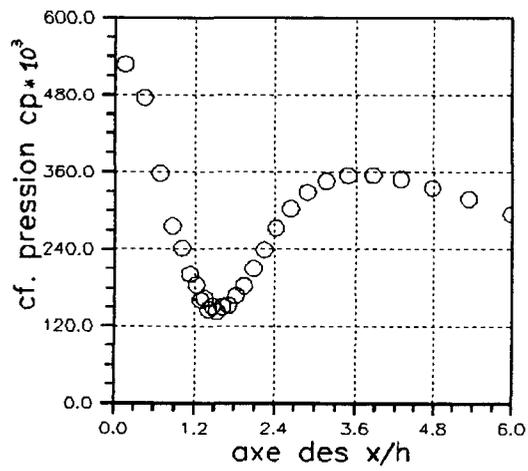


ATKINS : + (calcul)
GHONIEM : g (calcul)
DENHAM : o (exp. laser anemometer)
 • (exp. Dye tracer)
Calculs : ■

FIG.2.7 : COMPARAISON DES LONGUEURS DE RECOLLEMENTS



a. : $Re=25$



b. : $Re=75$

FIG.2.8 : COEFFICIENT DE PRESSION CP OBTENUE POUR $Y=2h$

CHAPITRE II

II. TESTS EN TURBULENTS

II.I. EQUATIONS GENERALES

II.I.1 Introduction

La plupart des écoulements d'intérêt technologique sont le siège d'instabilités qui conduisent au régime turbulent. Citons par exemple, la fumée qui sort d'une cheminée ou du pot d'échappement d'une voiture, le jet d'un réacteur d'avion, l'eau qui s'écoule dans une rivière.

Donner une définition précise de ce phénomène est extrêmement difficile. Cependant les scientifiques s'accordent pour définir le régime turbulent par un ensemble de propriétés que possède l'écoulement. D'ailleurs, on a longtemps associé la turbulence à son caractère "aléatoire" certainement à cause des variations "irrégulières" des grandeurs physiques mises en jeu.

Ce régime a été analysé dès 1883 par O. Reynolds /70/, qui a étudié l'écoulement dans un tuyau. L'expérience a été réalisée grâce à un procédé de visualisation par filets colorés. Cela amena Reynolds à fonder la première théorie de la turbulence en considérant les conditions sous lesquelles l'écoulement change de régime : pour un fluide incompressible le critère consiste à caractériser l'écoulement (laminaire-turbulent) par les valeurs prises par un nombre sans dimension qui portera son nom. Le nombre de Reynolds (Re) défini dans la première partie de ce mémoire, montre bien que le caractère turbulent n'est pas une propriété du fluide mais qu'elle est intimement liée à son mouvement.

II.I.2 Caractéristiques de la Turbulence

Les écoulements turbulents apparaissent dans des circonstances variées et sous des formes très différentes. Cependant, on propose de dégager un certain nombre de ces caractéristiques.

* Caractère aléatoire : Caractère attribué aux irrégularités des grandeurs physiques comme la vitesse, la pression ... etc, qui fluctuent de façon aléatoire autour d'une valeur

moyenne. C'est ce phénomène qui a conduit divers auteurs comme Boussinesq et Reynolds à envisager un traitement statistique de la turbulence.

* Nombre de Reynolds : Lorsque le nombre de Reynolds devient élevé et dépasse une certaine valeur critique, les perturbations de l'écoulement deviennent instables et leur croissance rapide produit la transition vers le régime turbulent.

* Echelles caractéristiques : La présence d'échelles caractéristiques diverses et variées rend la structure de l'écoulement turbulent complexe. Ainsi, les fluctuations aux grandes échelles sont liées à l'écoulement moyen, alors que les fluctuations à petites échelles sont peu influencées par cette dernière.

* Mécanisme de transfert : Les transferts de masse, de quantité de mouvement et d'énergie sont fortement augmentés...

II.1.3 Approche Statistique

L'une des approches pratique pour aborder les problèmes de la turbulence, est sans doute celle qui fut adoptée par O. Reynolds qui est la plus utilisée. Elle consiste à décomposer toute grandeur instantanée ϕ en une partie moyenne $\bar{\phi}$ et une partie fluctuante ϕ' .

$$\phi = \bar{\phi} + \phi' \quad (\text{II.I.3.1})$$

$\bar{\phi}$ est en général la moyenne d'ensemble, obtenue en moyennant ϕ pour un nombre infini de réalisations du phénomène.

ϕ' représente la partie fluctuante de la grandeur ϕ .

Dans le cadre d'un écoulement turbulent stationnaire ou quasi-stationnaire, cas où la moyenne d'ensemble correspond à la moyenne temporelle, $\bar{\phi}$ peut être défini par :

$$\bar{\phi}(\bar{x}) = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \phi(\bar{x}, t) dt \quad (\text{II.I.3.2})$$

τ intervalle de temps :

- grand, devant les périodes caractéristiques du mouvement d'agitation. de telle sorte que $\bar{\phi}$ ne dépende pas de τ .

- petit, devant la durée caractéristique pendant laquelle la moyenne $\bar{\phi}$ varie en fonction du temps (peut être infini dans le cas stationnaire).

La fluctuation est définie par la différence : $\phi' = \phi - \bar{\phi}$ (II.I.3.3)

Les grandeurs ainsi obtenues respectent les règles suivantes :

* Une grandeur dépourvue de fluctuation a une moyenne qui est égale à elle-même. On a donc $\overline{(\bar{\phi})} = \bar{\phi}$ d'où $\bar{\phi}' = 0$

* Soient ϕ et ξ deux grandeurs instantanées, les règles suivantes s'établissent facilement à partir de la définition de la moyenne temporelle :

$$\overline{\phi + \xi} = \bar{\phi} + \bar{\xi} \quad (\text{II.I.3.4})$$

$$\overline{k \cdot \phi} = k \cdot \bar{\phi} \quad (k \text{ est fonction dépourvue de fluctuation.}) \quad (\text{II.I.3.5})$$

$$\overline{\phi \cdot \xi} = \bar{\phi} \cdot \bar{\xi} + \overline{\phi' \cdot \xi'} \quad (\text{II.I.3.6})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \overline{\phi} = \overline{\frac{\partial \phi}{\partial x_i}} \quad (\text{II.I.3.7})$$

$$\int \overline{\phi} dx_i = \overline{\int \phi dx_i} \quad (\text{II.I.3.8})$$

II.I.4 Equations du Mouvement turbulent

II.I.4.1 Equations de Reynolds

En général, les équations de Navier-Stokes ne dépendent pas du régime de l'écoulement considéré. Leur domaine de validité est assuré si l'échelle de longueur (L) caractéristique de l'écoulement est très distincte du libre parcours moyen (l.p.m) des molécules. Cette condition peut être formulée avec le nombre de Knudsen K_n par $K_n = \frac{\text{l.p.m}}{L} \ll 1$.

Une fois cette condition respectée (ce qui est le cas de la plus part des écoulements industriels), les équations de Navier-Stokes obtenues pour un fluide incompressible dans le chapitre I de ce mémoire, restent donc valables. Ces équations sont réécrites ici en l'absence de forces volumiques et avec des grandeurs instantanées de l'écoulement telles que la vitesse \bar{u} et la pression p .

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) &= \frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ij}) \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.I.S.1})$$

Boussinesq/71/ et Reynolds /72/ établirent les équations pour des écoulements incompressibles en moyennant de la façon décrite ci-dessus les équations de la continuité et de la quantité de mouvement.

Des quantités telles que la vitesse ou la pression sont décomposées en une partie moyenne et une partie fluctuante.

$$\begin{aligned} u_i &= \bar{u}_i + u'_i \\ p &= \bar{p} + p' \\ \sigma_{ij} &= \bar{\sigma}_{ij} + \sigma'_{ij} \end{aligned}$$

on obtient alors les équations de Reynolds sous la forme convective :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} &= 0 \quad , \quad \frac{\partial u'_k}{\partial x_k} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{u}_i) + \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \bar{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \overline{u'_i u'_j}) &= \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\sigma}_{ij}) \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.I.S.2})$$

On constate que les équations établies par Boussinesq et Reynolds sont similaires aux équations de Naviers-Stokes avec néanmoins des termes supplémentaires dont la dimension correspond à un tenseur symétrique appelé contrainte de Reynolds $[R_{ij}]$. Ces contraintes caractérisent les effets du frottement turbulent et donnent aussi le taux de production de la turbulence. Elles correspondent aux corrélations vitesse-vitesse et proviennent de la non linéarité des termes convectifs de l'équation de la quantité de mouvement.

$$[R_{ij}] = [\rho \overline{u'_i u'_j}] \quad i, j = 1, 3 \quad (\text{II.I.4.1.1})$$

Le système d'équations de Reynolds constitue un système ouvert, les quatre équations qui représentent l'écoulement contiennent dix inconnues (3 composantes de vitesse, la

- terme(d1) : Transport de la corrélation par les forces visqueuses.
 terme(d2) : Dissipation visqueuse de $\overline{u'_i u'_j}$.
 terme(e) : Diffusion turbulente due aux fluctuations de vitesse.
 terme(f1) : Diffusion turbulente due aux fluctuations de pression.
 terme(f2) : Redistribution de l'énergie turbulente entre les corrélations vitesse-vitesse.

Une autre façon d'écrire les termes (d1) et (d2) est de faire apparaître le taux de dissipation isotrope (ε_{ij}) de la corrélation $\overline{u'_i u'_j}$.

$$\frac{1}{\rho} \left[\overline{u'_i \frac{\partial \tau'_{jk}}{\partial x_k}} + \overline{u'_j \frac{\partial \tau'_{ik}}{\partial x_k}} \right] = \nu \frac{\partial^2 \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k^2} - \varepsilon_{ij} \quad (\text{II.I.4.2.4})$$

avec
$$\varepsilon_{ij} = 2\nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x'_j}} \quad (\text{II.I.4.2.5})$$

En remplaçant (II.I.4.2.2) - (II.I.4.2.5) dans (II.I.4.2.1) on obtient l'équation de transport pour la contrainte visqueuse $\overline{u'_i u'_j}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\overline{u'_i u'_j}) + \overline{u'_k} \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u'_i u'_j}) = & - \left[\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \overline{u'_j}}{\partial x_k} + \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k} \right] \\ & - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\overline{u'_i u'_j u'_k} - \nu \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} + \frac{p'}{\rho} (\delta_{ik} u'_j + \delta_{jk} u'_i) \right] \\ & - \varepsilon_{ij} + \frac{p'}{\rho} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.I.4.2.6})$$

II.I.4.3 Equation de transport pour l'énergie cinétique turbulente

L'énergie cinétique turbulente (K) est définie à partir de l'énergie cinétique totale moyenne de l'écoulement en utilisant la décomposition de Reynolds.

$$\frac{1}{2} \overline{u_i^2} = \frac{1}{2} \overline{u_i^2} + \frac{1}{2} \overline{u_i'^2} \quad , \quad K = \frac{1}{2} \overline{u_i'^2} \quad i = 1, 3 \quad (\text{II.I.4.3.1})$$

Une autre façon d'écrire Les termes (d1) et (d2) est de faire apparaître le taux de dissipation isotrope (ε) de l'énergie cinétique turbulente (K). Dans le cas d'une turbulence homogène ce terme représente vraiment le taux de dissipation visqueuse de la turbulence.

$$(d1) = \nu \frac{\partial^2 K}{\partial x_k^2} + \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \quad (\text{II.I.4.3.5})$$

$$(d2) = \varepsilon + \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x'_k} \frac{\partial u'_k}{\partial x'_i} \quad (\text{II.I.4.3.6})$$

avec $\varepsilon = \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x'_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x'_k}$

En utilisant (II.I.4.3.3) - (II.I.4.3.6) on peut transformer (II.I.4.3.2) en :

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial K}{\partial x_k} = -\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i u'_k} - \nu \frac{\partial K}{\partial x_k} + \frac{p' u'_k}{\rho} \right] - \varepsilon \quad (\text{II.I.4.3.7})$$

C'est sous cette forme que l'équation de l'énergie cinétique turbulente est généralement connue. Cette équation peut être obtenue directement à partir de (II.I.4.2.6).

II.I.4.4. Equation de transport pour le taux de dissipation isotrope

Le taux de dissipation isotrope (ε) qui figure dans l'équation de transport pour l'énergie cinétique turbulente, étant utilisée par certains modèles de fermeture, il est intéressant donc d'établir une équation de transport pour cette inconnue. On obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} &= -2\nu \left[\frac{\overline{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} + \frac{\overline{\partial u'_j}{\partial x_i} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}} \right] \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} - 2\nu \overline{u'_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_k} \\
\text{(a)} \quad \text{(b)} & \quad \quad \quad \text{(c)} \\
& - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\overline{u'_k \varepsilon'} + \nu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} + 2 \frac{\nu}{\rho} \frac{\overline{\partial u'_k}{\partial x_j} \frac{\partial p'}{\partial x_j}} \right] \\
& \quad \quad \quad \text{(d1)} \quad \text{(d2)} \quad \text{(d3)} \\
& - 2\nu \left[\frac{\overline{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j}} \right] + 2\nu^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_k} \right)^2 \\
& \quad \quad \quad \text{(e)} \quad \quad \quad \text{(f)}
\end{aligned}$$

- terme(a) : Variation instationnaire du taux de dissipation turbulente.
- terme(b) : Variation convective du taux de dissipation due à l'écoulement moyen.
- terme(c et e) : Production du taux de dissipation isotrope par l'écoulement moyen et le mouvement fluctuant.
- terme(d1) : Diffusion turbulente due aux fluctuations de vitesse.
- terme(d2) : Diffusion visqueuse.
- terme(d3) : Diffusion turbulente due aux fluctuations de pression.
- terme(f) : Dissipation de (ε) .

II.II. MODELISATION DE LA TURBULENCE

II.II.1 Problème de fermeture

Dans le chapitre précédent nous avons élaboré les équations de l'écoulement moyen. La présence des contraintes de Reynolds dans ces équations a conduit à l'ouverture du système (nombre d'inconnues supérieur au nombre d'équations).

Pour assurer la fermeture des équations de Reynolds, différentes approches sont à envisager.

La première consiste à établir des équations supplémentaires pour les contraintes de Reynolds. Cependant, les équations de transport établies précédemment font apparaître à leur tour de nouvelles inconnues (corrélation pression-vitesse ..). Par conséquent ce processus possède un caractère divergent qui conduit de nouveau à un système ouvert.

La seconde approche consiste à modéliser les contraintes de Reynolds en les reliant aux autres inconnues du système d'équations. On aboutit alors à des modèles algébriques dit à "zéro équation de transport" de type "longueur de mélange".

Une dernière approche consiste à combiner les deux approches précédentes. La fermeture s'effectue au niveau des équations de transport. Ceci afin d'aboutir à des modèles algébriques plus généraux.

II.II.2 Hypothèse de Base

Boussinesq en 1877 proposa d'emprunter la même démarche que celle qui fût adoptée par Newton lors de la formulation de la loi de comportement des contraintes visqueuses. Autrement dit les contraintes de Reynolds seront directement proportionnelles aux gradients de vitesses moyennes.

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \quad (\text{II.II.2.1})$$

$$-\overline{\rho u'_i u'_j} = \mu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \rho K \quad (\text{II.II.2.2})$$

où μ_t désigne la viscosité turbulente, apparente, tourbillonnaire;
 K l'énergie cinétique turbulente ($K = \frac{1}{2}(\overline{u'^2 + v'^2 + w'^2})$);
 δ_{ij} le symbole de Kronecker.

Dans ce cas μ_t n'est plus une propriété du fluide, comme c'est le cas de μ , mais dépend de la structure turbulente du mouvement en chaque point de l'écoulement. Son expression dépend du modèle de fermeture adopté.

Toutes les démarches qui s'appuient sur la relation (II.II.2.2) appartiennent à la classe des modèles au concept de viscosité turbulente.

IV.3 Modèle de fermeture en un point

Dans le cadre du concept de viscosité turbulente, la première formulation fut avancée par Prandtl en 1925 /77/. Par analogie avec la théorie cinétique des gaz, Prandtl a introduit une échelle longueur l_m dite "longueur de mélange" jouant dans le mécanisme de transport un rôle analogue à celui du libre parcours moyen.

Il en résulte que la viscosité turbulente est proportionnelle en chaque point au produit d'une "longueur de mélange" par une "échelle de vitesse adéquate".

$$\nu_t = l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| \quad (\text{II.II.3.1})$$

En opérant de la sorte, on ne fait que déplacer de nouveau le problème, puisqu'il reste à relier la longueur de mélange l_m à une longueur caractéristique de l'écoulement étudié.

Plusieurs expressions "empiriques" ont été proposées pour caractériser l'évolution de la longueur de mélange dans des cas d'écoulements bien spécifiques. Notamment, dans le cadre d'écoulement cisailé mince, on cite à titre d'exemple celles données par :

- NIKURADSE /78/ (Pour un tuyau de rayon R)

$$\frac{l_m}{R} = A - B \left(1 - \frac{y}{R}\right)^2 - C \left(1 - \frac{y}{R}\right)^4 \quad (\text{II.II.3.2})$$

où $A=0.14$, $B=0.08$ et $C=0.06$

- CONSTANTINESCU /79/.(Pour un canal de hauteur h)

$$\begin{aligned} 0 \leq y \leq \frac{h}{2} & \quad l_m = ky \\ \frac{h}{2} \leq y \leq h & \quad l_m = k(h - y) \end{aligned} \quad (\text{II.II.3.3})$$

où $k=0.4$

- VAN DRIEST (1956) /80/ :

$$l_m = ky \left(1 - \exp\left(-\frac{Y^+}{A}\right) \right) \quad (\text{II.II.3.4})$$

avec

$$Y^+ = y \frac{\sqrt{|\tau_w|} \rho}{\nu}$$

où y étant la distance à la paroi la plus proche,

τ_w la contrainte pariétale,

k constante de Von Karman.

les valeurs des constantes sont : $k=0.41$ $A=26.0$

Les modèles à zéro-équations sont intéressants à plus d'un titre :

- * Simplicité de mise en oeuvre.
- * Le fait qu'ils ne nécessitent pas d'équations de transport supplémentaire, a pour conséquence de diminuer le coût du calcul.
- * Les résultats obtenus sont très satisfaisants lorsqu'il s'agit d'écoulements turbulents spécifiques (écoulement cisailé ou de type couche limite ..).

Cependant, tous ces modèles comportent les inconvénients suivants :

- * Manque d'universalité : les lois sont trop empiriques et supposent une connaissance au préalable de l'écoulement à calculer, ce qui n'est pas le cas des nouveaux systèmes industriels à concevoir, où les écoulements sont complexes.
- * Forte indépendance de l'écoulement moyen.

* La viscosité turbulente s'annule systématiquement avec les gradients de vitesse et vice versa. Ceci est mis en défaut dans certains cas d'écoulements, par exemple, écoulement entre deux plaques parallèles .

II.II.4 Modèle à une équation de transport

Une autre façon de procéder consiste à relier la viscosité turbulente avec l'énergie cinétique de la turbulence. Prandtl-Kolmogorov (1945) proposent un schéma analogue à celui de Prandtl obtenu pour le modèle de longueur de mélange, où l'échelle de vitesse est tout simplement remplacée par la racine carré de l'énergie cinétique turbulente $\left(u \approx K^{\frac{1}{2}} \right)$.

$$\nu_t = l K^{\frac{1}{2}} \quad (\text{II.II.4.1})$$

où le paramètre l est toujours homogène à une longueur.

Ce schéma appelé aussi " modèle k-l " nécessite la résolution de l'équation de transport (I.4.3.7) pour k . Pour permettre la fermeture du système, Il suffit de modéliser les termes inconnus de cette équation.

◇ Les termes de production sont modélisés utilisant l'hypothèse de Boussinesq pour les contraintes de Reynolds :

$$-\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \left(\nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} K \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \quad (\text{II.II.4.2})$$

◇ les termes de corrélation vitesse-pression sont souvent négligés pour des considérations expérimentales.

◇ La diffusivité moléculaire est également négligeable devant la diffusion turbulente. Cette dernière est déterminée en faisant une analogie avec les mécanismes de diffusion moléculaire, cela permet d'introduire le coefficient de diffusivité turbulente.

$$-\frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i u'_k} = D_{kt} \frac{\partial K}{\partial x_k} \quad (\text{II.II.4.3})$$

Le coefficient de diffusivité turbulent D_{kt} s'exprime en fonction de la viscosité turbulent ν_t et le nombre de Prandtl turbulent σ_k par :

$$D_{kt} = \frac{\nu_t}{\sigma_k} \quad (\text{II.II.4.4})$$

◇ Enfin, sachant que la dissipation de l'énergie turbulente apparaît principalement dans les petites structures de la turbulence, on admet qu'elle ne dépend explicitement que de l'énergie cinétique de turbulente K et de la viscosité turbulente ν_t .

$$\varepsilon = C_\mu \frac{K^2}{\nu_t} \quad (\text{II.II.4.5})$$

où C_μ est un coefficient sans dimension qui doit être évalué expérimentalement.

Compte tenu de l'hypothèse de Prandtl-Kolmogorov, ε prend la forme :

$$\varepsilon = C_\mu \frac{K^{3/2}}{l} \quad (\text{II.II.4.6})$$

L'expérience montre que cette relation est bien vérifiée pour les écoulements à grand nombre de Reynolds, à condition d'avoir une turbulence homogène.

En tenant compte de ces hypothèses, l'équation de transport pour K devient :

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial K}{\partial x_j} = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial K}{\partial x_k} \right) - \varepsilon \quad (\text{II.II.4.7})$$

Un deuxième aspect de la modélisation $k-l$ est le choix d'une longueur caractéristique de l'écoulement. Beaucoup de modèles sont basés sur la formulation de Van Driest qui donne des résultats très satisfaisants près des parois. Cependant, cette dernière n'est pas adaptée aux écoulements décollés /83/, là où le gradient de vitesse est faible et la production de l'énergie cinétique de la turbulence est forte. Hassid et Poreh /83/ proposent de remplacer dans l'expression de Van Driest $\frac{|\tau_w|}{\rho}$ par K :

$$l = C_l y \left(1 - \exp \left(- \frac{Y^*}{A^*} \right) \right) \quad (\text{II.II.4.8})$$

avec

$$Y^* = y \frac{\sqrt{K}}{\nu}$$

$$A^* = 62. \quad C_1 = 2.44 \quad C_\mu = 0.09$$

II.II.5 Modèle à deux équations de transport

L'aspect empirique des lois établies précédemment, réside principalement dans l'évaluation d'une échelle l de longueur caractéristique de l'écoulement. Cette difficulté provient essentiellement du fait qu'on ne puisse établir, de façon exacte, une équation de transport pour l . Par contre, il est possible, sous certaines conditions, d'obtenir une équation de transport exacte pour des combinaisons du type :

$$\Psi = K^n l^m \quad (\text{II.II.5.1})$$

Le tableau ci-dessous donne quelques exemples d'utilisation de ce modèle suivant les auteurs.

Auteur /référence/	Ψ	Symbole
Kolmogorov /84/	$K^{1/2} . l^{-1}$	f
Chou /85/ Harlow - Nakayama /87/ Jones - Launder /88/	$K^{3/2} . l^{-1}$	ε
Rotta /89/ Rodi - Spalding /91/ Ng- Spalding	$K.l$	$K.l$
Spalding - Saffman	$K.l^{-2}$	ω^2

C'est sans doute le modèle de Jones-Launder qui a connu le plus de succès. Cela tient certainement à la signification physique de la variable $\Psi = K^{3/2} l^{-1}$ qui n'est autre que le taux de dissipation turbulente ε .

$$\varepsilon = K^{3/2} l^{-1} \quad (\text{II.II.5.2})$$

Dans le modèle K- ε , le point de départ est le même que le modèle K-l. Par ailleurs l'expression $l \approx K^{3/2} \varepsilon^{-1}$ de l'échelle de longueur est obtenue à partir de la relation (II.II.5.2). La viscosité turbulente ν_t s'exprime donc en fonction de K et ε par :

$$\nu_t = C_\mu K^2 \varepsilon^{-1} \quad (\text{II.II.5.3})$$

où C_μ est une constante supposée universelle.

Le schéma adopté nécessite la résolution de deux équations de transport supplémentaire pour k et ε . L'équation de transport pour l'énergie cinétique turbulente est la même que (IV.4.8).

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial K}{\partial x_j} = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial K}{\partial x_k} \right) - \varepsilon \quad (\text{II.II.5.4})$$

L'équation (II.II.4.4.1) obtenue pour la dissipation turbulente ε contient des termes inconnus, qui nécessitent d'être modélisés. L'analyse menée par Tennekes et Lumley /73/, montre qu'il est possible, sous certaines conditions, d'obtenir une forme simplifiée de ces termes.

◇ L'analyse menée par Tennekes et Lumley, montre que, pour un nombre de Reynolds turbulent ($R_{et} = K^2 / \nu \varepsilon$) élevé :

- l'ordre de grandeur des termes (e) (f) est le plus important.
- la différence de (f)-(e) reste du même ordre de grandeur que les termes de diffusion (d) et de convection (b).

◇ Rodi montre que (e) et (f) peuvent être modélisés globalement, comme un terme représentant la destruction de la dissipation turbulente ε .

$$(f) - (e) = C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{K} \quad (\text{II.II.5.5})$$

◇ Les termes de diffusion turbulente dus aux fluctuations de vitesse sont modélisés de la même manière que dans l'équation de transport pour K. On obtient :

- Le terme (d3) est négligé.

$$\bullet (d1) = -\frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \quad (\text{II.II.5.6})$$

où σ_ε est une constante.

Enfin, Hanjalic et Launder /93/ proposent pour le terme(c) :

$$(c) = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{K} \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \quad (\text{II.II.5.7})$$

En tenant compte des relations précédentes, l'équation de transport pour la dissipation turbulente ε devient :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} = C_{\varepsilon 1} v_t \frac{\varepsilon}{K} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i} \right) - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{K} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \right) \quad (\text{II.II.5.8})$$

Les valeurs des constantes les plus utilisées dans les modèles K- ε , sont celles adoptées par Launder, Morse, Rodi et Spalding /91/, afin d'optimiser les prédictions des écoulements cisailés à surface libre.

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_k = 1. \\ \sigma_\varepsilon = 1.3 \end{array} \right\} \text{Nombres analogues aux nombres de Prandtl}$$

$$\left. \begin{array}{l} C_{\varepsilon 1} \in [1.4, 1.45] \quad , \quad C_{\varepsilon 1} = 1.44 \\ C_{\varepsilon 2} \in [1.9, 2.0] \quad , \quad C_{\varepsilon 2} = 1.92 \end{array} \right\}$$

$$C_\mu = 0.09$$

Le domaine de validité du modèle est obtenu pour un nombre de Reynolds turbulent grand. Cependant, cette hypothèse tombe en défaut au voisinage d'une paroi où la viscosité moléculaire est prépondérante devant la viscosité turbulente. Pour étendre la résolution jusqu'aux faibles nombres de Reynolds turbulents, les méthodes globalement adoptées consistent à introduire des termes correcteurs. Les équations modifiées prennent la forme :

$$v_t = C_\mu K^2 \tilde{\varepsilon}^{-1} \quad , \quad \varepsilon = \tilde{\varepsilon} + D$$

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial K}{\partial x_k} = v_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\left(v + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial K}{\partial x_k} \right) - \varepsilon$$

$$\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x_k} = C_{\varepsilon 1} f_1 v_t \frac{\tilde{\varepsilon}}{K} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i} \right) - C_{\varepsilon 2} f_2 \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{K} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\left(v + \frac{v_t}{\sigma_1} \right) \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x_k} \right) + E$$

Ces constantes et fonctions d'amortissements ont fait l'objet de plusieurs travaux Jones et Launder /88/, Nisizama et Yorshizawa /81/, Nagano et Hishida /94/, Patel Rodi et Scheuerer /92/ ...etc. Dans le cadre des écoulements cisailés, ces modèles diffèrent, globalement, selon la manière dont il prennent en compte l'effet de la paroi sur la turbulence : Ils utilisent soit la distance à la paroi Chien /75/ (CH), soit le nombre de Reynolds turbulent Launder Sharma /90/ (LS), soit une combinaison des deux Lam et Bremhorst /82/ (LB).

	C_μ	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$	σ_k	σ_ε	D	f_μ
LS	0.09	1.44	1.92	1.0	1.3	$2v \left(\frac{d\sqrt{K}}{dy} \right)^2$	$\exp \left(\frac{-3.4}{(1 + R_t / 50.)^2} \right)$
LB	0.09	1.44	1.92	1.0	1.3	0.0	$[1 - \exp(-.0165R_y)]^2 \left[1 - \frac{20.5}{R_t} \right]$
CH	0.09	1.35	1.80	1.0	1.3	$2v \frac{K}{Y^2}$	$1 - \exp(-.0115Y^+)$

Tableau A : Constantes et Fonction d'Amortissement



	f_1	f_2	E	$\tilde{\epsilon}$ (paroi)
LS	1.	$1.-0.3\exp(-R_t^2)$	$2\nu v_t \left(\frac{d^2\bar{u}}{dy^2}\right)^2$	0.0
LB	$1.+\left(\frac{0.05}{f_\mu}\right)^3$	$1.-\exp(-R_t^2)$	0.0	$\frac{d\tilde{\epsilon}}{dy} = 0$
CH	1.	$1.-0.22\exp(-(R_t/6)^2)$	$2\nu \frac{\tilde{\epsilon}}{Y^2} \exp(-0.5Y^+)$	0.0

Tableau B : Constantes et Fonction d'Amortissement

avec : $R_t = \frac{K^2}{\nu \epsilon}$, $R_y = \frac{\sqrt{KY}}{\nu}$, $Y^+ = \frac{u_t Y}{\nu}$, Y : la distance au paroi la plus proche.

II.III Résultats numériques

Le but de ce chapitre est de tester la capacité du code à rendre compte des phénomènes turbulents en fonction du modèle de turbulence utilisé.

La discrétisation des modèles de type longueur de mélange est immédiate. Pour le modèle $k-\varepsilon$, la discrétisation est obtenue de la même manière que pour l'équation de la quantité de mouvement. Elle est donnée dans l'annexe 5.

a. Caractéristiques de l'écoulement :

- Ecoulement visqueux dans un canal droit .
- Turbulent
- Pression de référence 0.0 Pa
- Masse volumique 1.2 kg/m³
- Nombre de Reynolds 68.55 10³

b. Maillage

Le maillage est présenté sur la figure 3.1, c'est un maillage serré auprès des parois solides $y=cste$. il contient 1595 noeuds

c. Conditions aux limites :

Les conditions aux limites prises en compte sont :

- Parois solides : Conditions d'adhérence
- Frontières fluides :
 - Entrée : on impose une pression constante.
 - Sortie : on impose la pression constante.

$$\text{avec } \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial k}{\partial n} = 0$$

d. résultats

Écoulement de Poiseuille :

La figure (3.2) donne le profil de la vitesse obtenu avec le modèle longueur de mélange et avec le modèle de Chien comparé aux résultats expérimentaux /9/. On constate que vis à vis de ce paramètre les deux modèles sont satisfaisants.

La figure (3.3) présente le profil de la viscosité turbulente, obtenu par le calcul effectué avec le modèle de longueur de mélange comparé aux mesures expérimentales d' El Telbany et Reynolds /9/ et ceux de Chien obtenues avec le modèle (k- ϵ).

La figure (3.4) présente les prédictions de la viscosité turbulente, obtenues par le calcul effectué avec le modèle k- ϵ comparé aux mesures expérimentales d' El Telbany et Reynolds /9/ et ceux de Chien obtenues avec le modèle (k- ϵ) /75/.

La figure (3.5) présente l'énergie cinétique turbulente comparée aux mesures de Clark /76/. On constate que le modèle de Chien sous estime le pic pariétal de l'énergie cinétique turbulente.

Ecoulement de Couette pur :

La figure (3.6) présente les profils de vitesse obtenus par El Telbany et Reynolds et par le calcul. Ces résultats fournissent la même évolution de la vitesse.

La figure (3.7) présente les prédictions de la viscosité turbulente, obtenues par le présent calcul (modèle de Chien k- ϵ) comparé aux mesures expérimentales d' El Telbany et Reynolds et ceux de Lam et Bremhorst.

f. Conclusion

Dans ces deux cas, les résultats obtenus sont conformes à ceux obtenus par d'autres auteurs.

L'algorithme explicite à deux demi-pas fractionnaires s'avère efficace pour la solution des équations fournissant k et ϵ dans le cas du modèle de Chien.

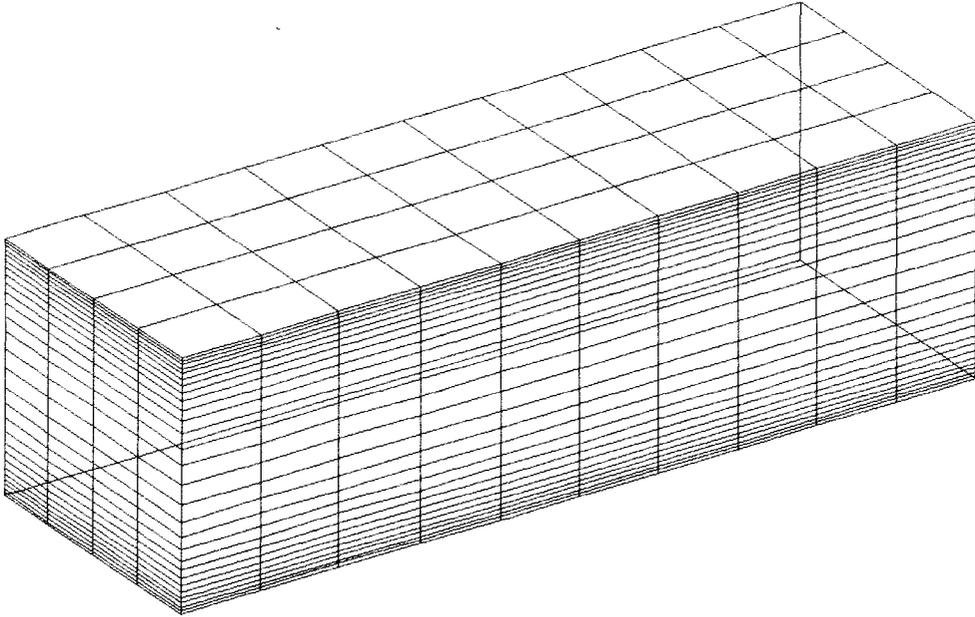


FIG.3.1 : Maillage

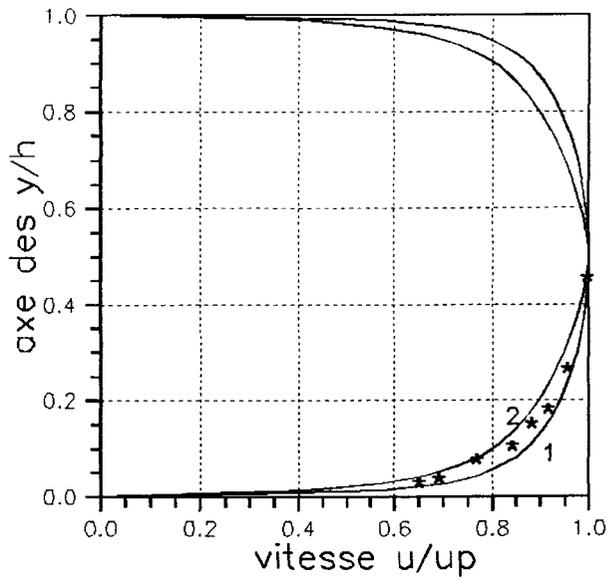


Fig.3.2 : Profil de la vitesse
 * El Telbany et Reynolds
 — Calcul : 1 Longueur de mélange, 2 k-ε.

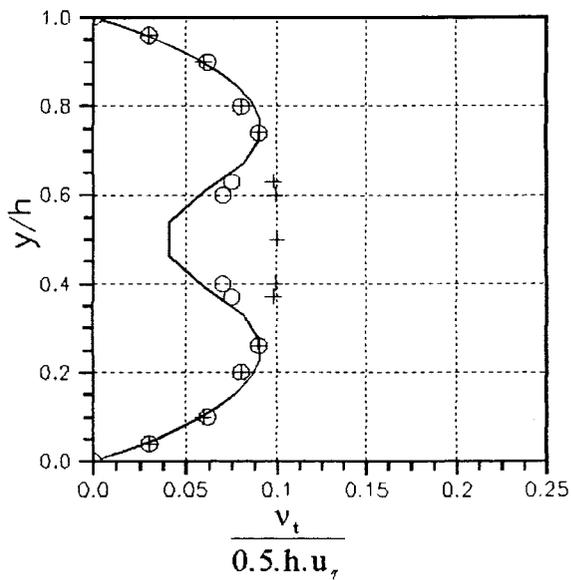


Fig.3.3 : Profil de la viscosité turbulente
 o El Telbany et Reynolds
 — Modele de longueur de mélange
 + Chien

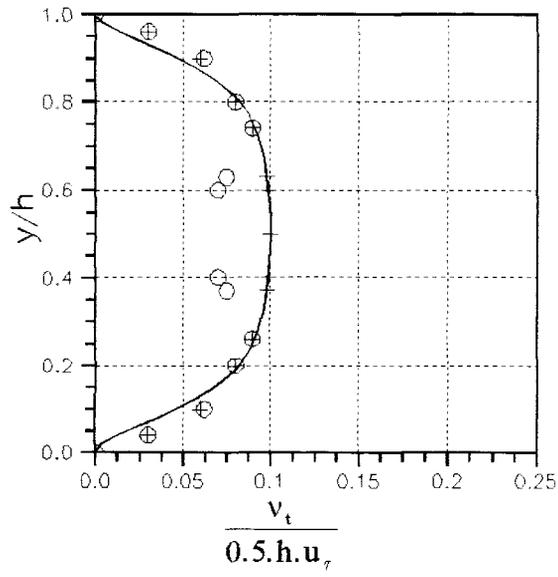


Fig.3.4 : Profil de la viscosité turbulente
 o El Telbany et Reynolds
 — Modele k- ϵ
 + Chien

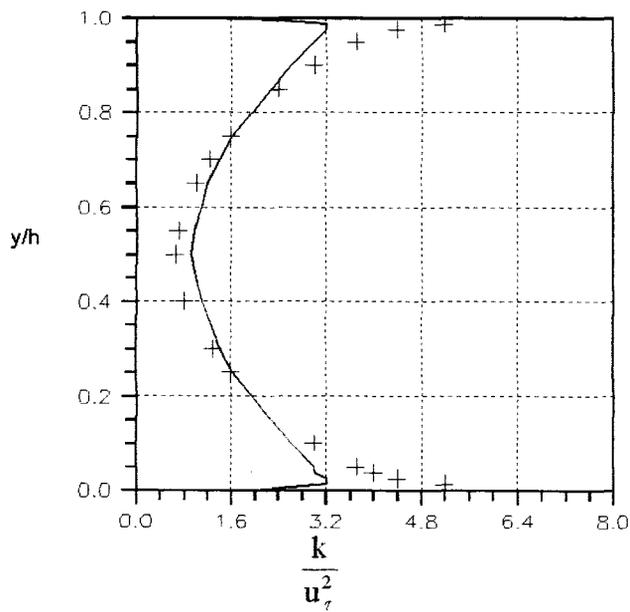


Fig.3.5 : Profil de l'energie cinetique turbulente
 + El Telbany et Reynolds
 — Calcul

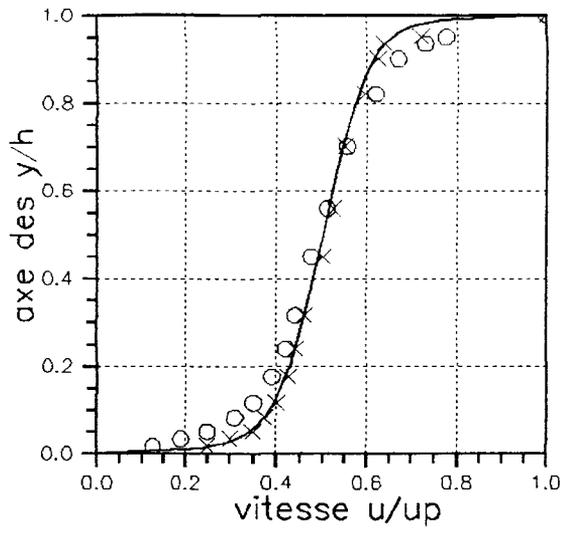


Fig.3.6 : Profil de la vitesse
 o El Telbany et Reynolds
 — Calcul.

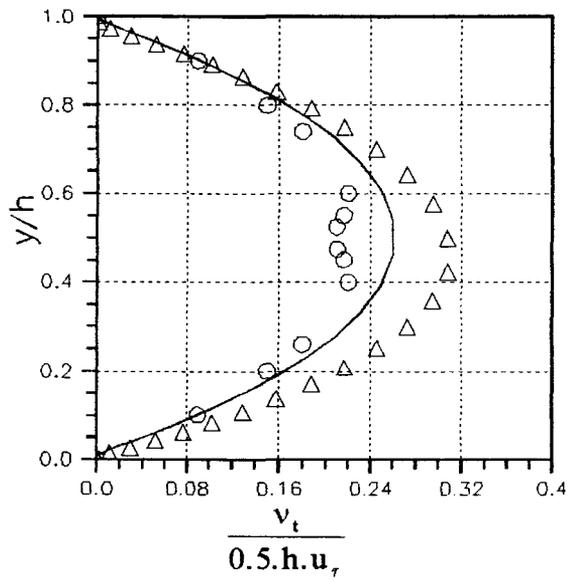


Fig.3.7 : Profil de la viscosité turbulente
 o El Telbany et Reynolds
 — Model $k-\epsilon$
 ∇ Modèle longueur de mélange

TROISIEME PARTIE

APPLICATIONS TRIDIMENSIONNELLES

ÉCOULEMENTS TRIDIMENSIONNELS

On considère l'écoulement laminaire d'un fluide incompressible dans une conduite tridimensionnelle de section carrée du type (FIG.1.). Cette configuration géométrique met en évidence certains caractères purement tridimensionnels de l'écoulement considéré. Elle a fait l'objet de nombreuses études autant expérimentales que numériques [18,26]. Les comparaisons effectuées permettront d'étudier la validité de la discrétisation spatiale et dans une moindre mesure la qualité de convergence de l'algorithme.

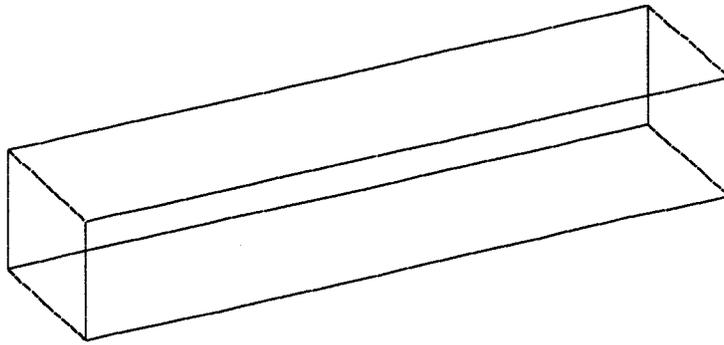


FIG.a. : Canal droit.

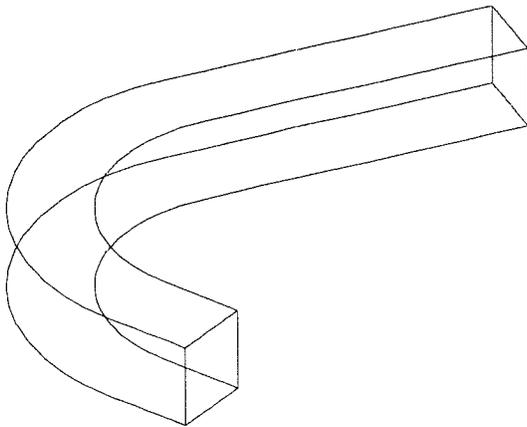


FIG.b.: Conduite Coudée
de section carrée

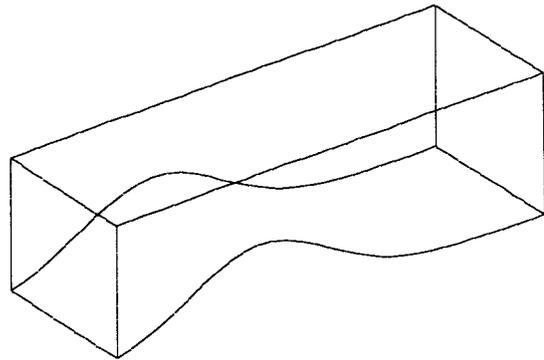


FIG.c. : Conduite Obstruée
de section carrée.

FIG.1.

1. CANAL DROIT

La configuration testée est l'écoulement laminaire d'un fluide visqueux dans un canal droit (FIG.1.a). Ce problème a été étudié par plusieurs auteurs dont Areghesola et Burley , Lacroix , Camarero et Tapucu /95/. Ce problème simple nous permet de se rendre compte de certaines difficultés que rencontre la résolution numérique dans des configurations tridimensionnelles. En effet, le nombre de noeuds et le temps de calcul augmentent considérablement par rapport à une configuration bidimensionnelle.

a. Caractéristiques de l'écoulement :

- Ecoulement visqueux dans un canal droit .
- Laminaire
- Régime établi
- Pression de référence 0.0 Pa
- Masse volumique 10^3 kg/m^3
- Nombre de Reynolds 10, 50

b. Géométrie

La configuration géométrique du canal droit est défini tout simplement par :

$$0 < x < a$$

$$0 < y < b$$

$$0 < z < c$$

La direction principale de l'écoulement est celle de l'axe ox. Dans ce travail une configuration du type canal droit est testée MC (a:1,b:1,c:8).

c. Maillage

Le maillage la configuration MC est donnée FIG.1.1 et FIG.1.2

MC contient 3751 noeuds.

d. Condition aux limites :

Les conditions aux limites prises en compte sont :

- Parois solides : Conditions d'adhérence
- Frontières fluides :
 - Entrée : on impose une vitesse uniforme.
 - Sortie : on impose la pression constante.

e. Résultats

* les figures 1.3 ,1.4 (vitesse uniforme en entrée) , montrent l'évolution du profil de vitesse dans les plans de coupe $z=0.1$, $z=0.3$ et $z=0.5$, et ceci après avoir atteint l'état stationnaire, pour $Re=10$ et $Re=50$.

* les figures 1.5 (vitesse uniforme en entrée) pour $Re 50$, montrent l'évolution des profils de vitesse obtenus par H. Yang , dans les plans de coupe $z=0.1$, $z=0.3$ et $z=0.5$. Bien que la représentation soit différente une comparaison qualitative avec les résultats de la figure 1.4 est cependant possible. L'accord est satisfaisant.

* les figures 1.6 (vitesse uniforme en entrée) montrent l'évolution du profil de vitesse suivant des plans perpendiculaires à la direction principale de l'écoulement. Ces figures sont obtenues pour $Re 50$ et dans les plans de coupe $x=0.53$, $x=0.8$. Elles présentent les mêmes allures caractéristiques que celles obtenues par H. Yang (fig.1.7).

f.conclusion

Les tests de validation dans un canal droit concordent qualitativement avec les résultats obtenus par H. Yang et Camarero. Les écoulements secondaires sont correctement mis en évidence et les symétries bien respectées.

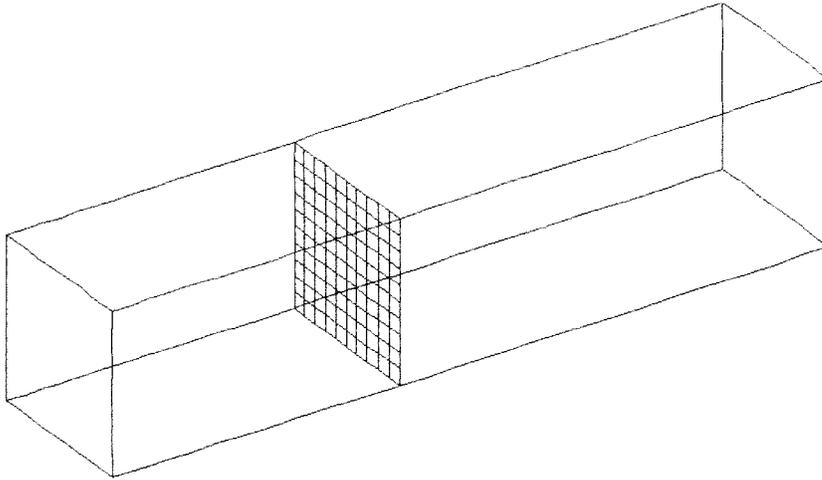


FIG.a : Maillage suivant $x=cste$

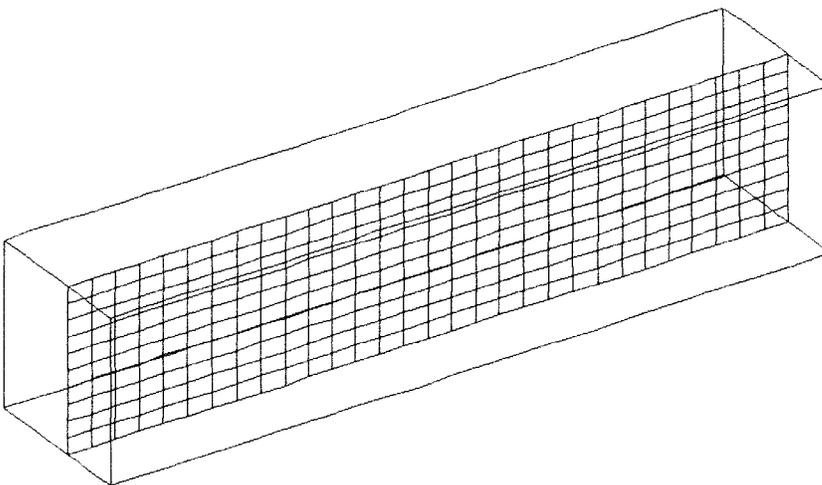


FIG.b : Maillage suivant $z=cste$

**FIG.1.1 : Canal Droit
Maillage MC**

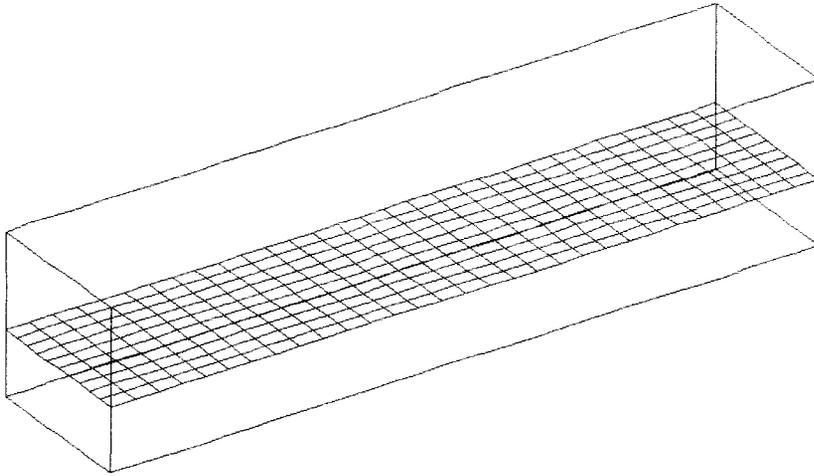


FIG.a : Maillage suivant $y=cste$

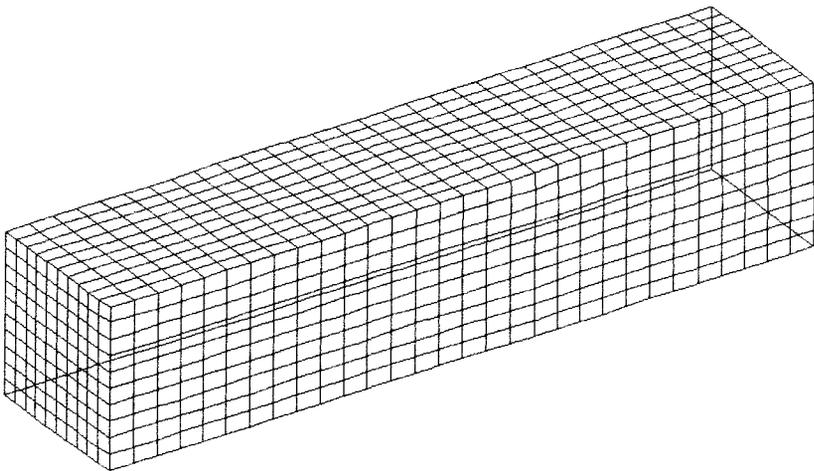


FIG.b : Maillage suivant les faces extérieures

**FIG.1.2 : Canal Droit
maillage MC**

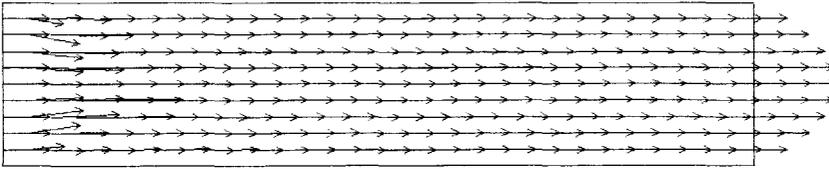
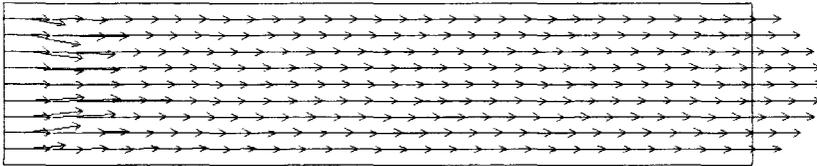
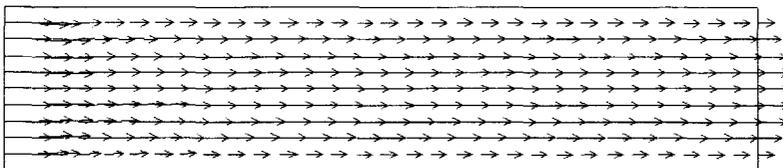
FIG.a : Champ de vitesse, $z=0.5$ FIG.b : Champ de vitesse, $z=0.3$ FIG.c : Champ de vitesse, $z=0.1$

FIG.1.3 : Champ de vitesse
suivant les plans $z=cste$
 $Re=10$

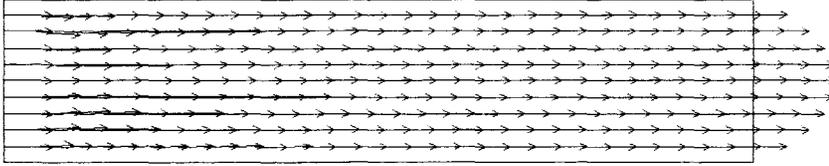
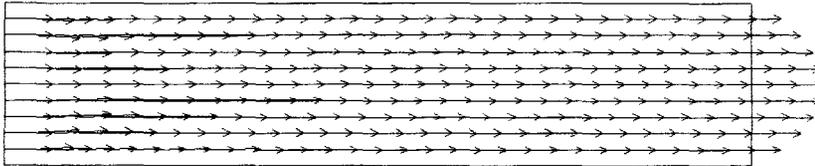
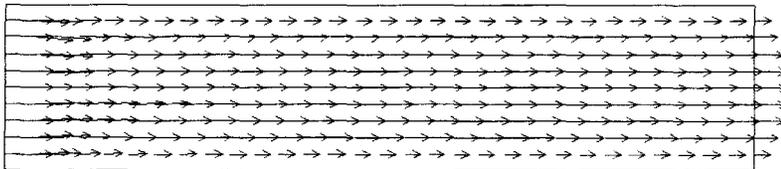
FIG.a : Champ de vitesse, $z=0.5$ FIG.b : Champ de vitesse, $z=0.3$ FIG.c : Champ de vitesse, $z=0.1$

FIG.1.4 : Champ de vitesse
suivant les plans $z=cste$
 $Re=50$

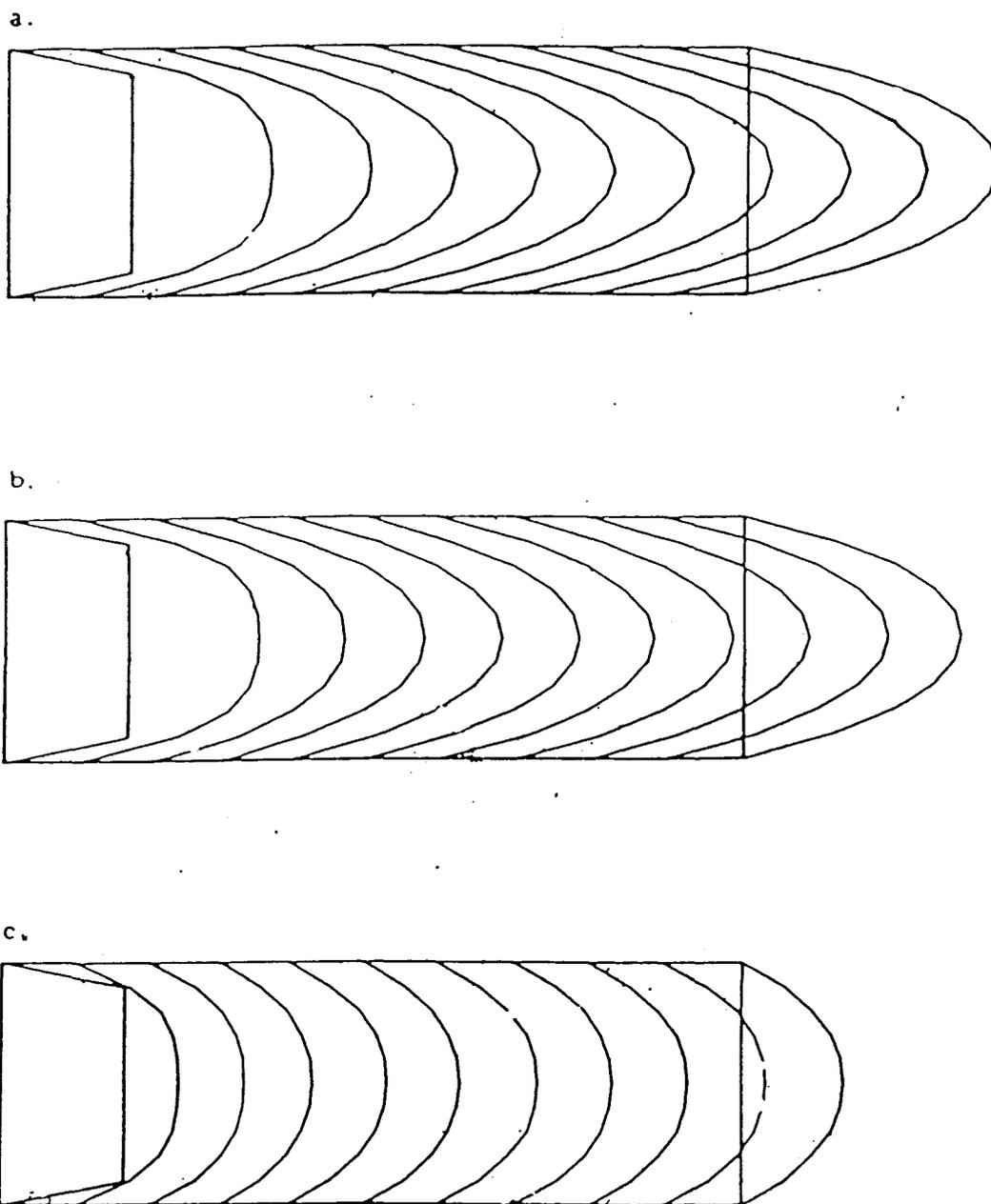


FIG.1.5 : Profil de vitesse

Pour le canal droit a:1,b:1,c:8
a: dans la section $z=0.5$
b: dans la section $z=0.3$
c: dans la section $z=0.1$
résultats obtenus par H. Yang.

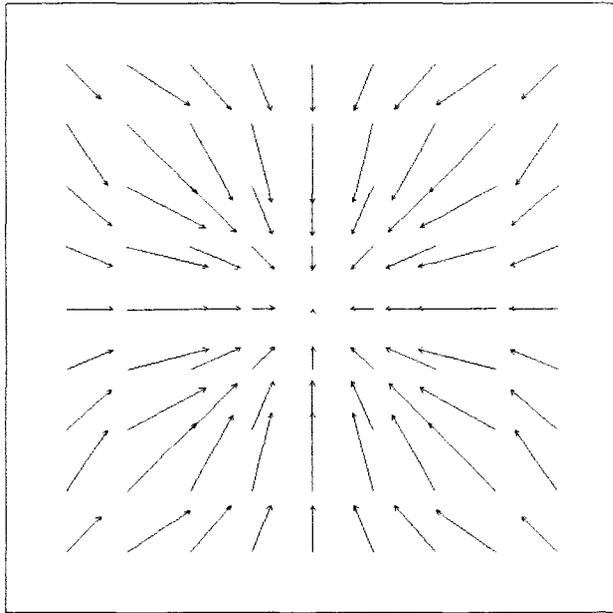


FIG.a.

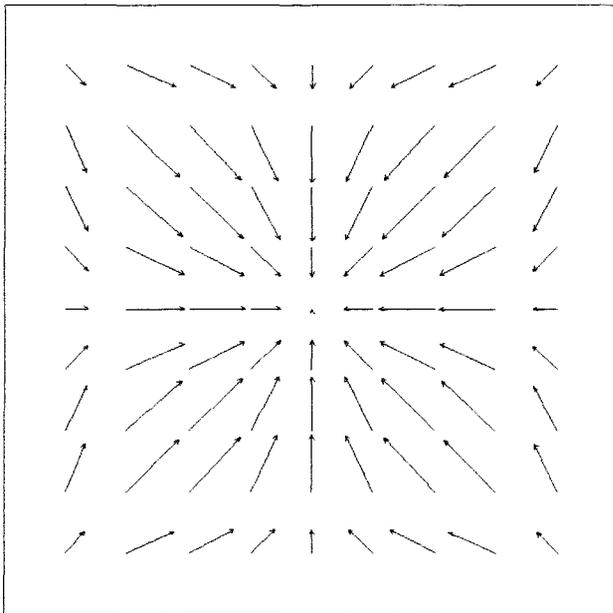


FIG.b.

FIG.1.6 : Distribution transversale de la vitesse
Pour le canal droit a:1, b:1, c:8
a: dans la section $x=0.53$
b: dans la section $x=0.8$

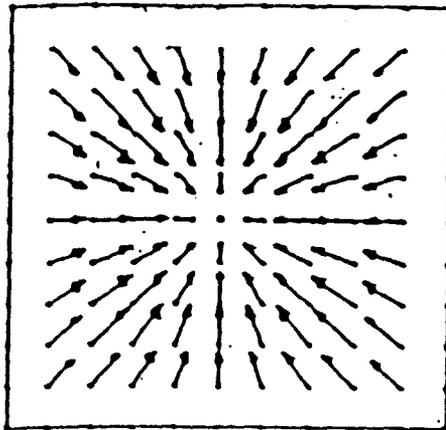


FIG.a.

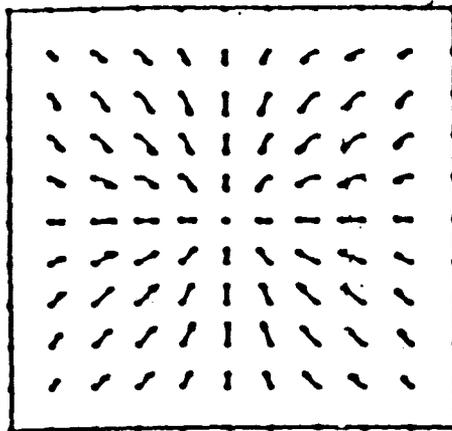


FIG.b.

FIG.1.7 : Distribution transversale de la vitesse

Pour le canal droit $a:1, b:1, c:8$

a: dans la section $x=0.4$

b: dans la section $x=0.8$

résultats obtenus par H. Yang.

2. COUDES

Cette configuration a été étudiée par Khalil et al. /18/ et par Reggio et Camarero /26/. Dans le coude, la différence de pression engendre des écoulements secondaires qui se superposent à l'écoulement principal et modifient la distribution des vitesses à la sortie du coude. L'étude des écoulements secondaires permet de donner un aperçu de la complexité des écoulements dans les organes provoquant des pertes de charges singulières.

La distorsion créée, s'amortit assez lentement et persiste très loin à l'aval du coude. C'est pour cette raison qu'un système déprimogène de mesure du débit (venturi) ne peut être installé qu'après une longueur de conduite rectiligne suffisante. Tout coude, ou autre incident de route placés trop près à l'amont, provoquerait une perturbation de la distribution des vitesses qui modifierait la relation entre la pression différentielle fournie par l'appareil et le débit, ce qui entraînerait une erreur de mesure.

a. Caractéristiques de l'écoulement :

- Ecoulement visqueux dans un coude à 90 degrés ou à 120 degrés .
- Laminaire
- Régime établi
- Pression de référence 0.0 Pa
- Masse volumique 10^3 kg/m^3
- Nombre de Reynolds 80

b. Géométrie

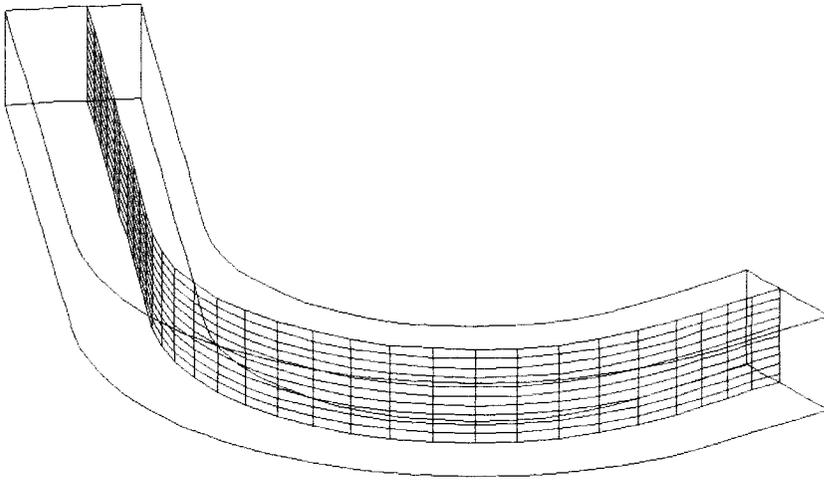
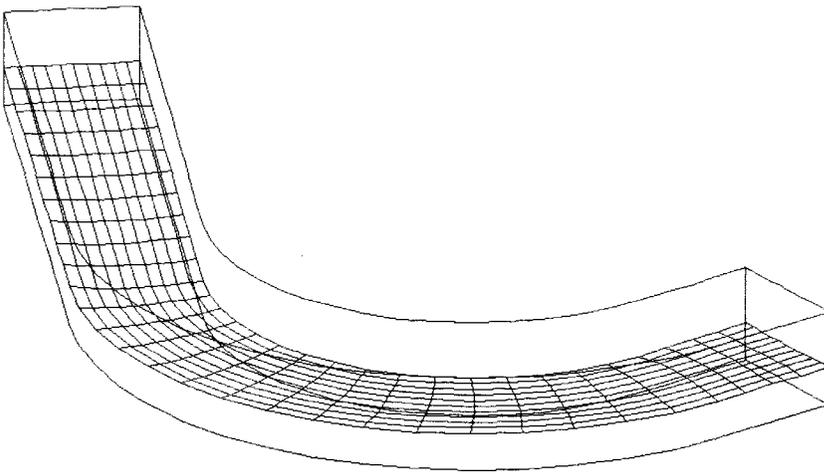
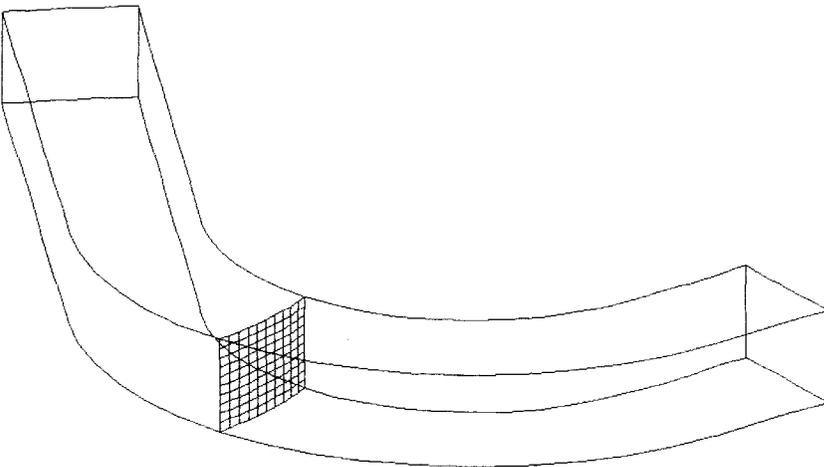
Trois configurations géométriques de type coude sont testées : une configuration coudee à 90 degrés. l'autre à 120 degrés et la dernière à 60 degrés. Ces configurations sont présentées suivant les plans de coupe dans les figures 2.1 et 2.2.

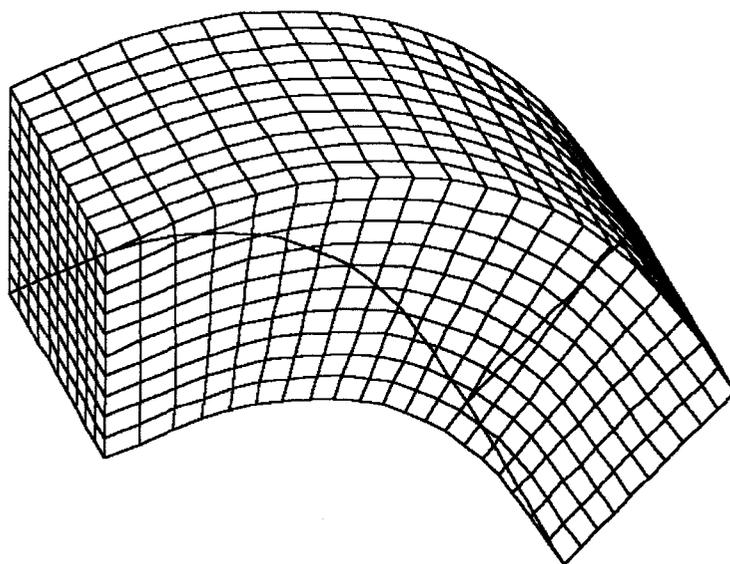
c. Maillage

Le maillage des coudes à 90 degrés et à 120 degrés, contient 3751 noeuds.

L' exemple de maillage est présenté respectivement sur les figures (FIG.2.1.).

Le maillage du coude à 60 degrés contient 2541 noeuds.(FIG.2.2)

FIG.a : Maillage suivant $\xi_2=0.5$ FIG.b : Maillage suivant $\xi_3=0.5$ FIG.c : Maillage suivant $\xi_1=0.0$ **FIG.2.1 : Conduite Coudée**



Maillage suivant les faces exterieures

FIG.2.2 : Conduite Coudée
(60°)

d. Condition aux limites :

Les conditions aux limites prises en compte sont :

- Parois solides : Conditions d'adhérence
- Frontières fluides :
 - Entrée : on impose une vitesse parabolique.
 - Sortie : on impose la pression constante

e. Résultats

Dans ce paragraphe, les résultats Khalil /18/ et de Reggio et Camarero /26/, vont nous servir de référence pour l'écoulement dans le coude à 60 degrés. Néanmoins, les résultats des coudes à 90 degrés et 120 degrés sont donnés à titre indicatif.

• Coudes à 90 et 120 degrés , $Re=80$:

- * les figures 2.3 , 2.4 montrent l'évolution du profil de vitesse projetée, et ceci après avoir atteint l'état stationnaire, dans les plans de coupe $z=0.1$, $z=0.3$ et $z=0.5$.

- * les figures 2.5 montrent l'évolution du profil de vitesse projetée, dans les plans de coupe $z=0.5$, dans le cas du coude à 90 degrés et 120 degrés.

- * les figures 2.6 montrent l'évolution du coefficient de perte de charge le long de la paroi supérieure et inférieure pour $z=0.5$, dans le cas du coude à 90 degrés et 120 degrés.

• Coude à 60 degrés :

- * les figures 2.7 montrent l'évolution du profil de vitesse projetée, et ceci après avoir atteint l'état stationnaire. . Ces figures sont obtenues pour $Re = 80$ et dans les plans de coupe $z=0.1$, $z=0.3$ et $z=0.5$.

- * les figures 2.8 montrent les résultats obtenus pour la même configuration par les différents auteurs cités plus haut .

* les figures 2.9 montrent le développement des écoulements secondaires qui se superposent à l'écoulement principal du fait de la courbure. Les projections de vitesses sont obtenues pour des plans de coupe $\theta = \text{cste}$ (8° , 24° , 40° , 56°)

* les figures 2.10 montrent les résultats de Regio et Camarero /26/ pour la même configuration.

* les figures 2.11 comparent le profil de vitesse obtenu à la sortie du coude ($z=0.5$) aux résultats expérimentaux et numériques de Khalil /18/..

* De plus, la figure 2.12 montre l'évolution en fonction du temps de la vitesse en un point du coude. Le nombre de pas de temps nécessaire pour aboutir à l'état asymptotique est du même ordre de grandeur que le carré du rapport $\left(\frac{\Delta y}{b}\right)^2$, ce qui est satisfaisant.

f. Conclusion :

Les tests effectués dans un coude montrent que le code permet de prédire correctement la structure de l'écoulement laminaire visqueux dans ce type de configuration. La comparaison de nos résultats pour le champ de vitesse, aux résultats expérimentaux et numériques des autres auteurs est satisfaisante du point de vue qualitatif et quantitatif. .

Le champ de vitesse à la sortie du coude à 60° n'est pas parabolique à cause de la longueur très courte à la sortie.

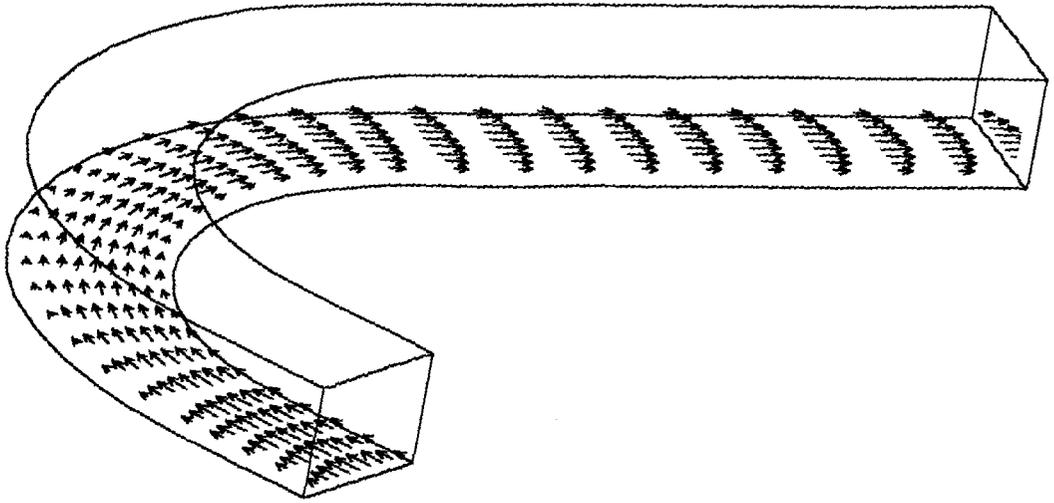


FIG.a. : Champ de vitesse obtenu pour $Z=0.1$
 $Re=80$

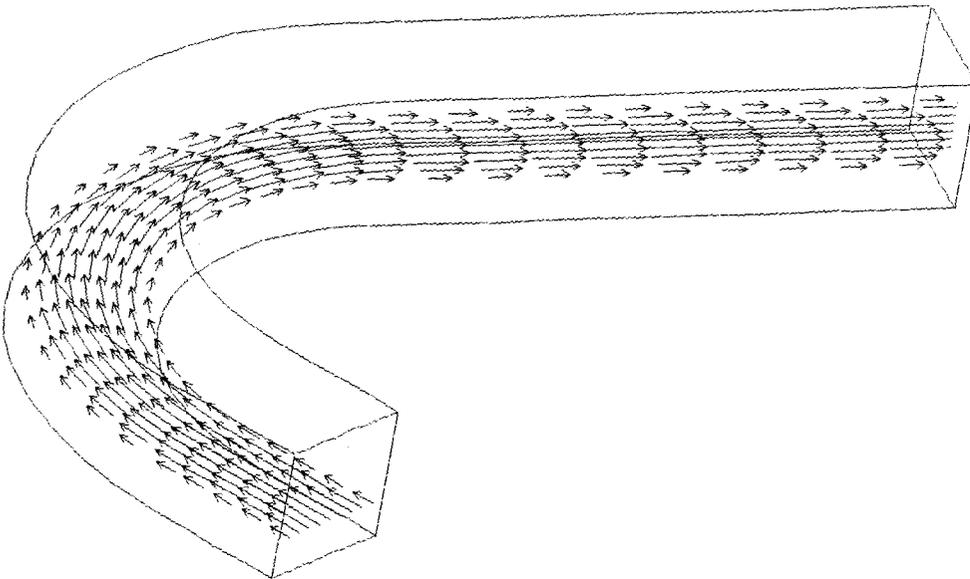


FIG.b. : Champ de vitesse obtenu pour $Z=0.3$
 $Re=80$

FIG.2.3 : Champ de vitesse
dans un coude (à 120 deg)

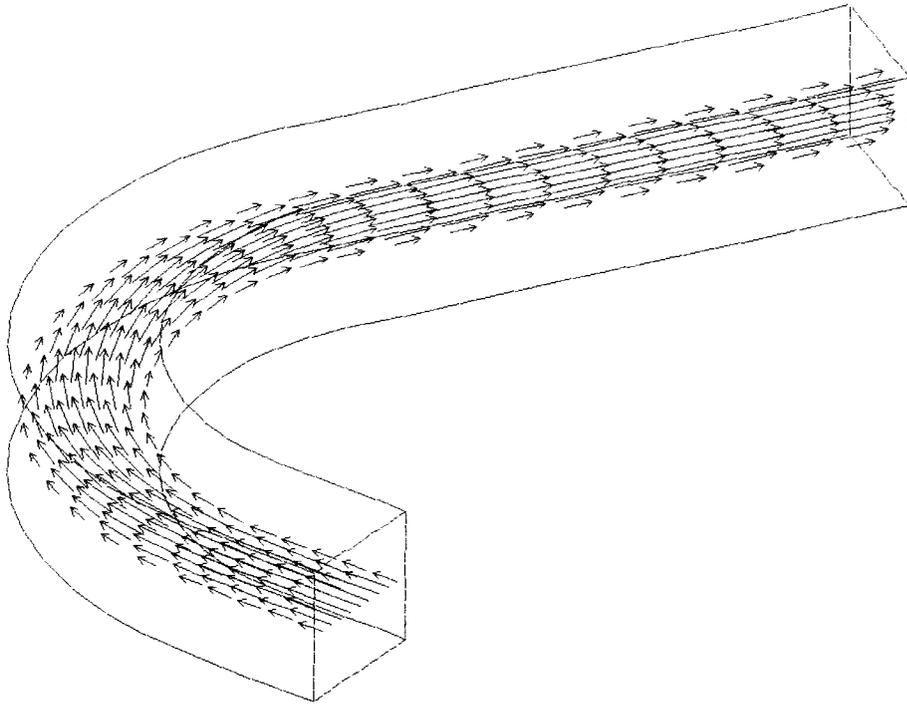


FIG.c. : Champ de vitesse obtenu pour $Z=0.5$
 $Re=80$

FIG.2.4 : Champ de vitesse
dans un coude (à 120 deg)

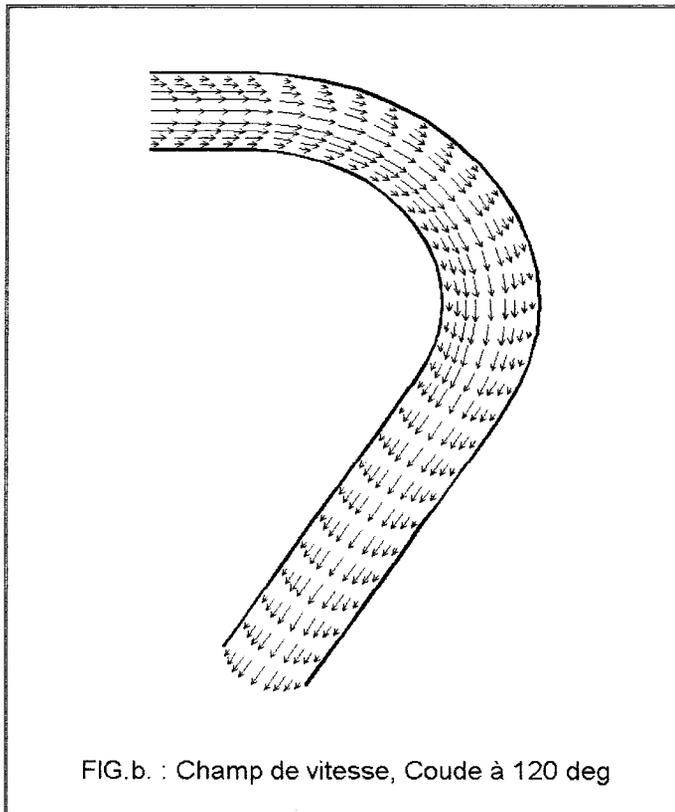
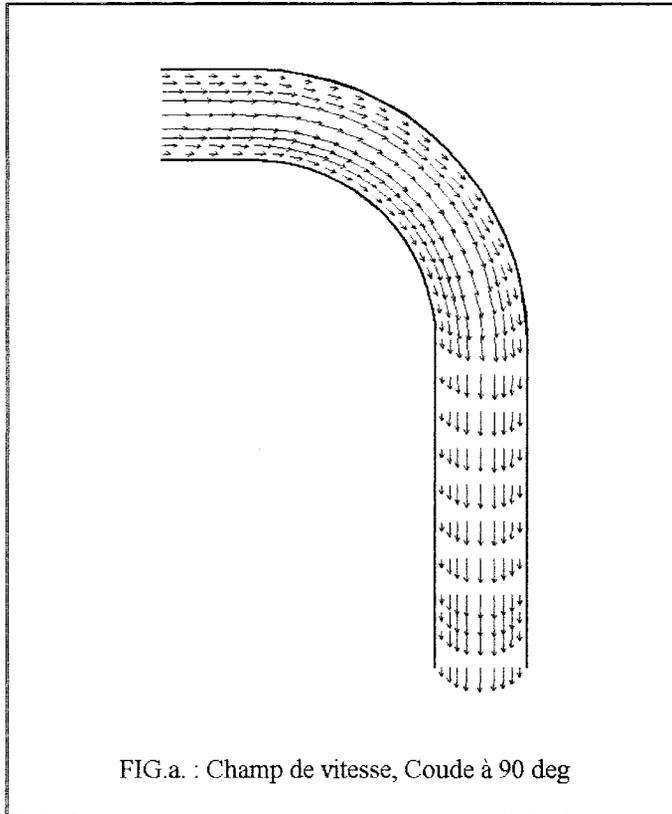


FIG.2.5 : Champ de vitesse

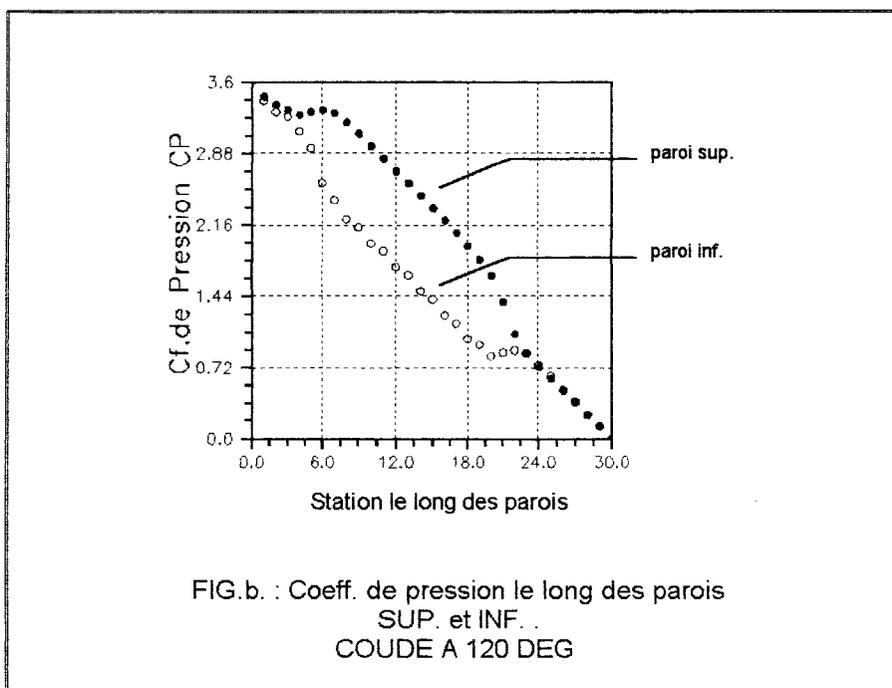
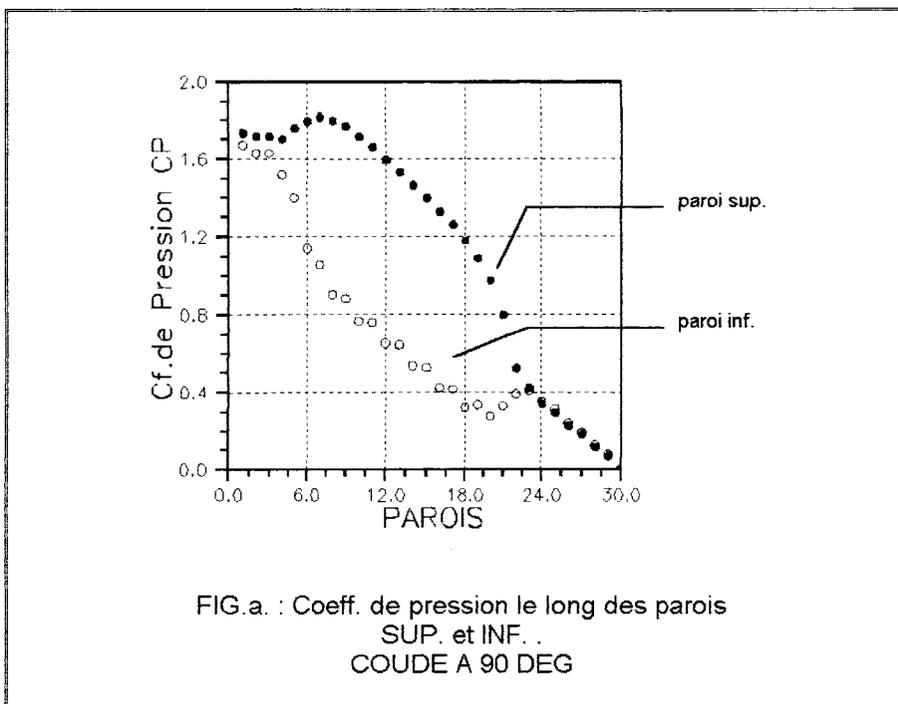
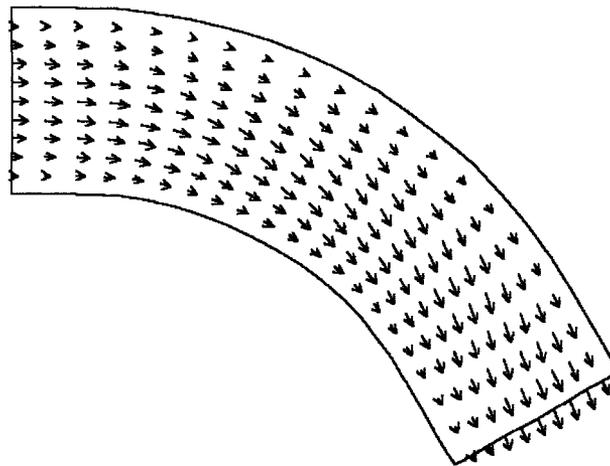
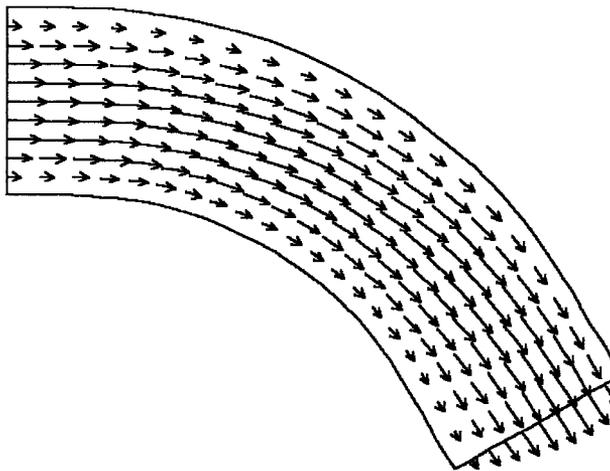


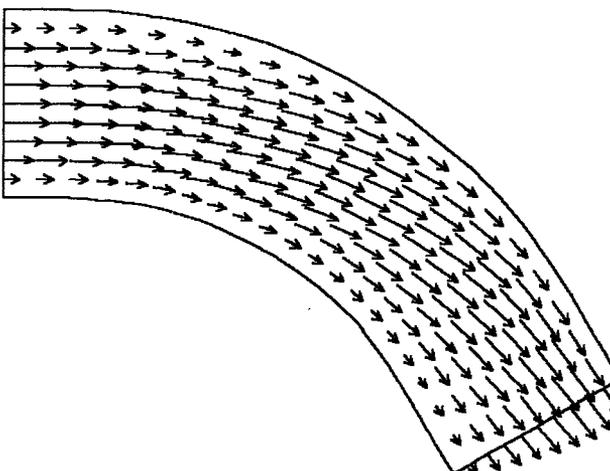
FIG 2.6 : COEFFICIENT DE PRESSION LE LONG DES PAROIS SUP. ET INF. DANS UN COUDE



a. plan $z=0.1$



b. plan $z=0.3$



d. plan $z=0.5$

FIG.2.7 : Champ de vitesse suivant les plan ($z=cste$)
 $Re=80$

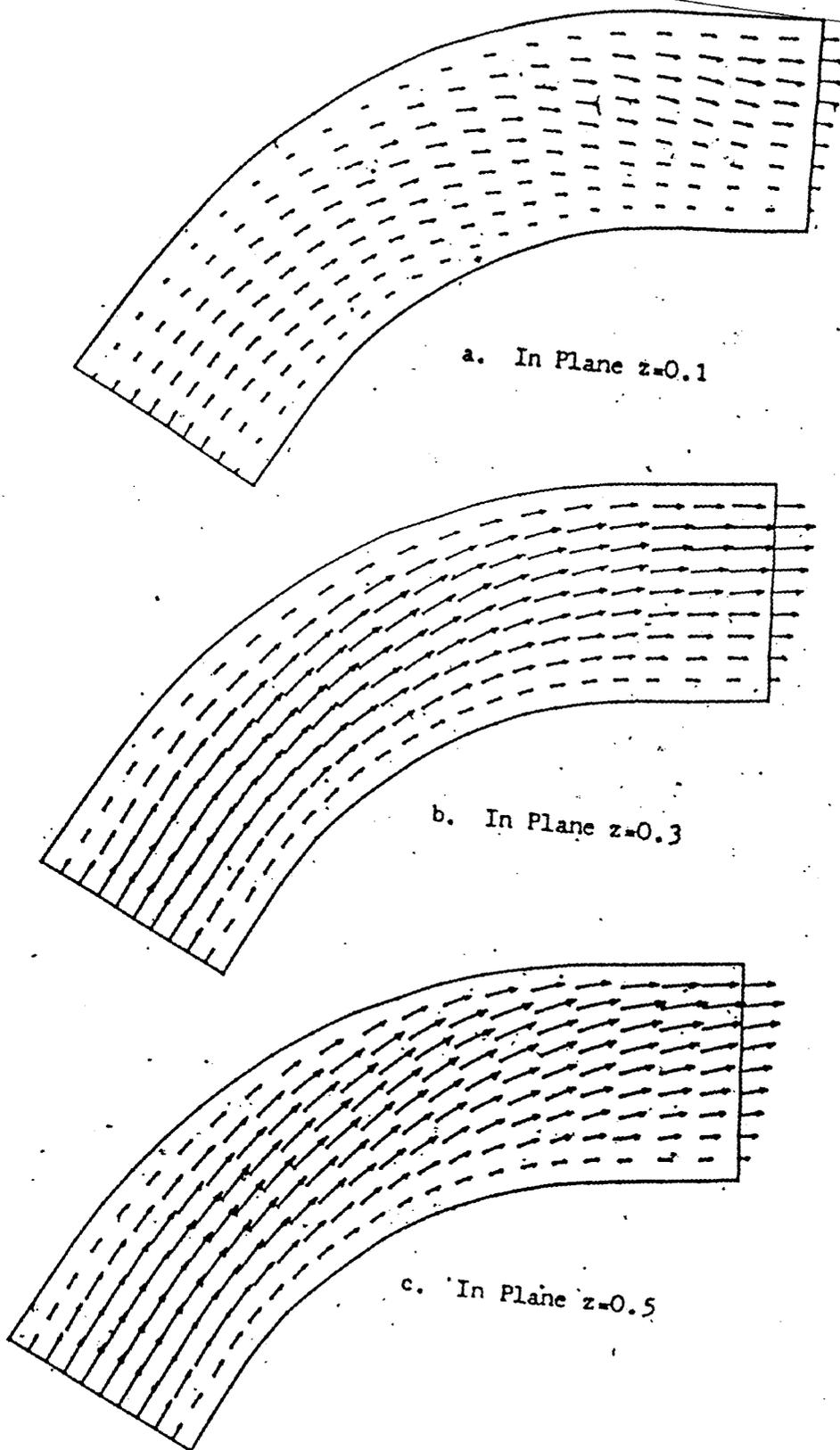
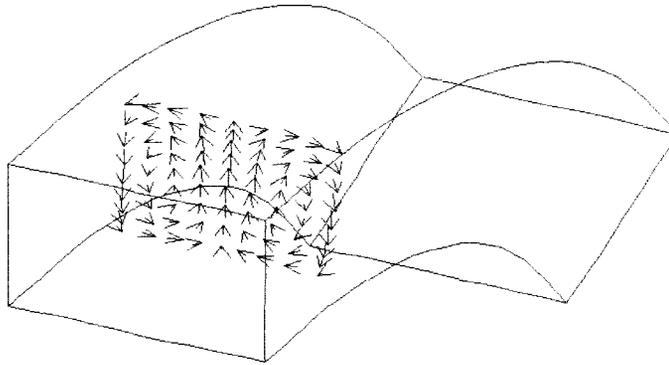
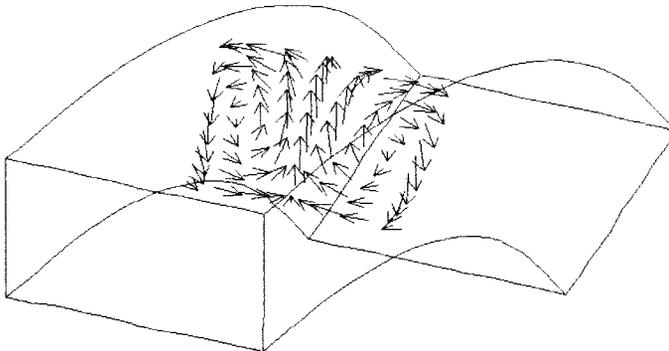
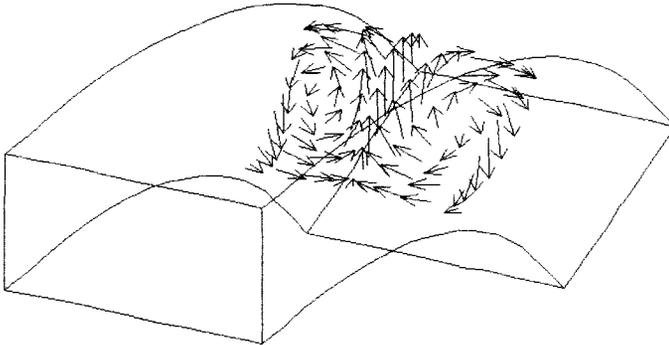
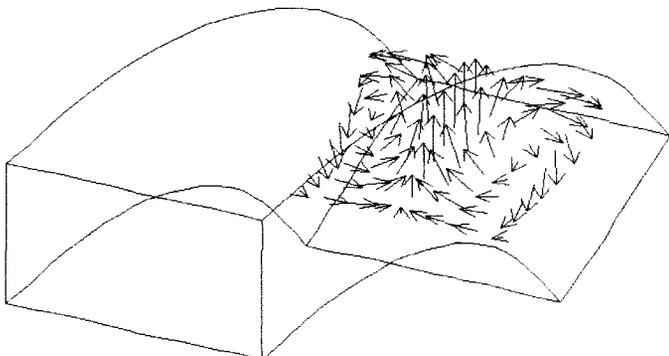


FIG.2.8 : Champ de vitesse
Pour le coude à 60°
a. $z=0.1$, b. $z=0.3$, c. $z=0.5$
résultats obtenus par Camarero et al.

FIG.a. : Coupe dans le plan $\theta = 8^\circ$ FIG.b. : Coupe dans le plan $\theta = 24^\circ$ FIG.c. : Coupe dans le plan $\theta = 40^\circ$ FIG.d. : Coupe dans le plan $\theta = 56^\circ$ FIG.2.9 : Champ de vitesse suivant des sections $\theta = \text{cste}$

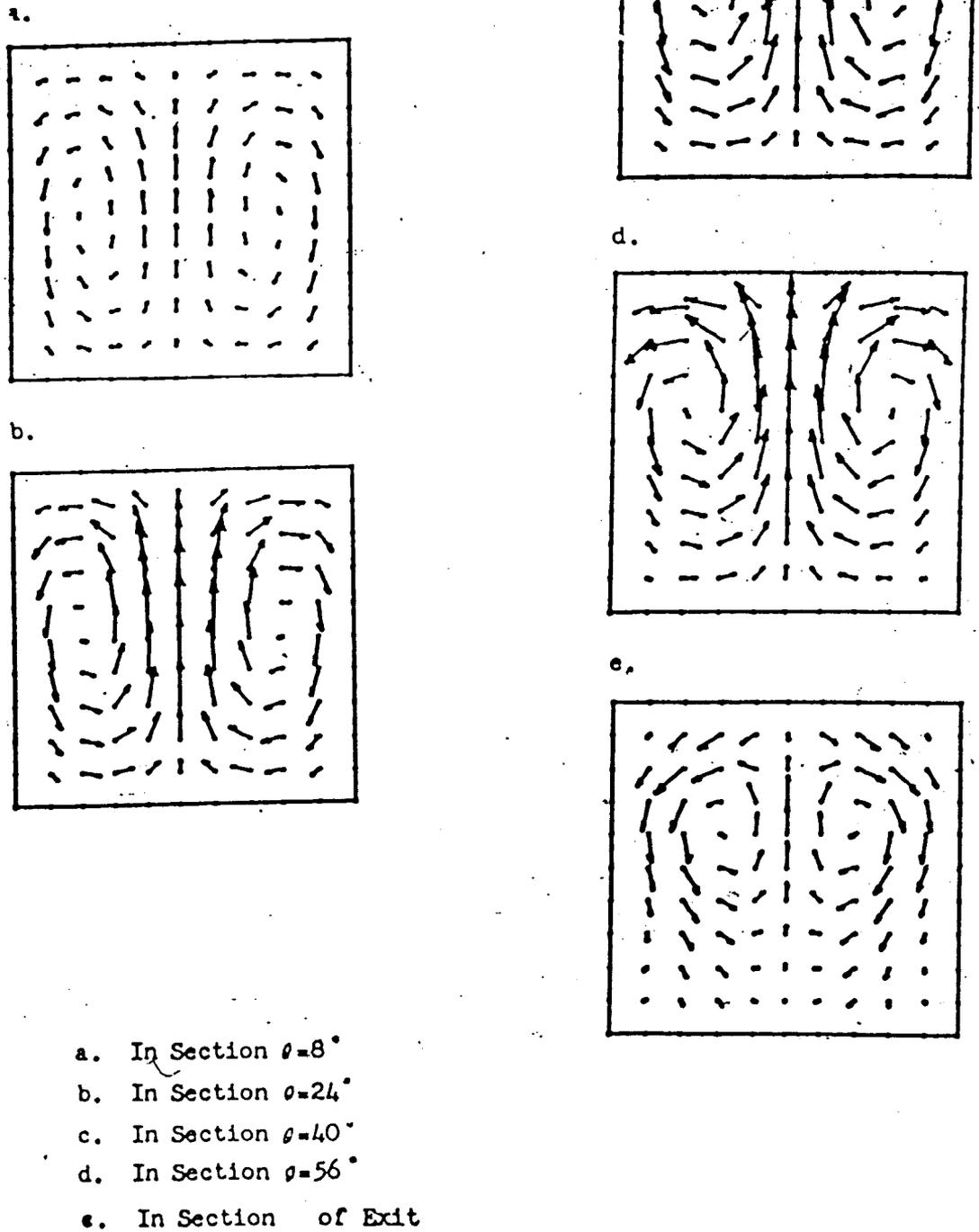


FIG.2.10 : Champ de vitesse
 dans le plan $\theta=cste$
 résultats obtenus par Camarero et al.

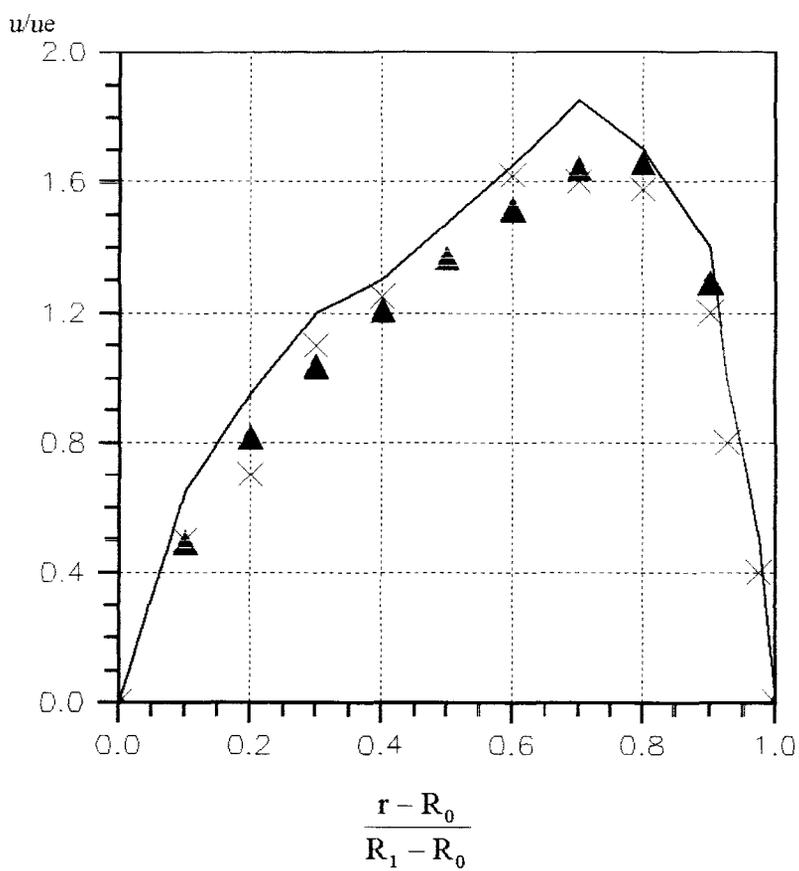


Fig.2.11 : Profil de la vitesse

Δ Calcul
— Khalil
x Mori

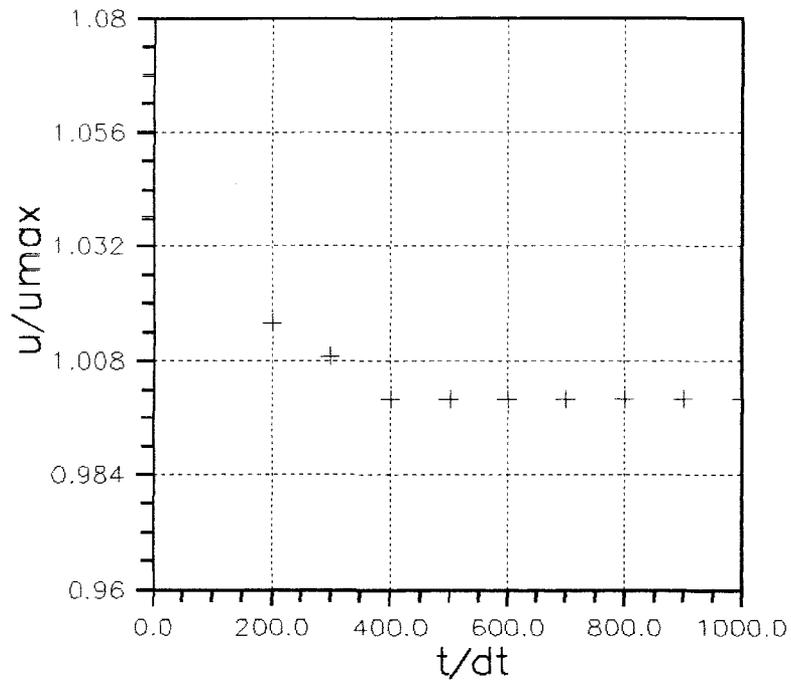


Fig.2.12 : Evolution de la vitesse
au centre de la sortie du coude à 60°

3. CONDUITE OBSTRUEE

Cette configuration a été étudiée par Khalil et al. /18/ et par Reggio et Camarero /26/. Elle permet de mettre en évidence un caractère complexe de l'écoulement tridimensionnel. En effet, on peut observer suivant des plans parallèles de la conduite deux types d'écoulement. L'un près des parois présente une zone de recirculation. L'autre (également situé dans un plan parallèle central) ne présente pas cette zone de recirculation.

a. Caractéristiques de l'écoulement :

- Ecoulement visqueux dans une conduite obstruée .
- Laminaire
- Régime établi
- Pression de référence 0.0 Pa
- Masse volumique 10^3 kg/m^3
- Nombre de Reynolds 80

b. Géométrie

Cette configuration est présentée dans la figure (1.c).

c. Maillage

Le maillage contient 3751 noeuds.

Les exemples de maillages sont présentés respectivement sur les figures (FIG.3.1.).

d. Condition aux limites :

Les conditions aux limites prises en compte sont :

- Parois solides : Conditions d'adhérence
- Frontières fluides :
 - Entrée : on impose une vitesse parabolique.
 - Sortie : on impose la pression constante

e. Résultats

Dans ce paragraphe, les résultats Khalil /18/ et de Reggio et al. /26/, vont encore nous servir de référence.

* les figures 3.2 montrent l'évolution du profil de vitesse , et ceci après avoir atteint l'état stationnaire, dans les plans de coupe curvilignes correspondants aux coordonnées $z=0.1$, $z=0.3$ et $z=0.5$.

* les figures 3.3 montrent l'évolution du profil de vitesse, elles sont obtenues par les auteurs ci dessus, pour la même configuration .

* les figures 3.4 montrent l'évolution du profil de vitesse, correspondant à $\xi_2=0.1$, $\xi_2=0.3$ et $\xi_2=0.5$,et ceci après avoir atteint l'état stationnaire, .

f. Conclusion :

Les tests effectués dans une conduite obstruée montre que le code permet de prédire ce type d'écoulement. Les effets tridimensionnels sont cohérents avec les résultats de Khalil, et de Regio et Camarero.

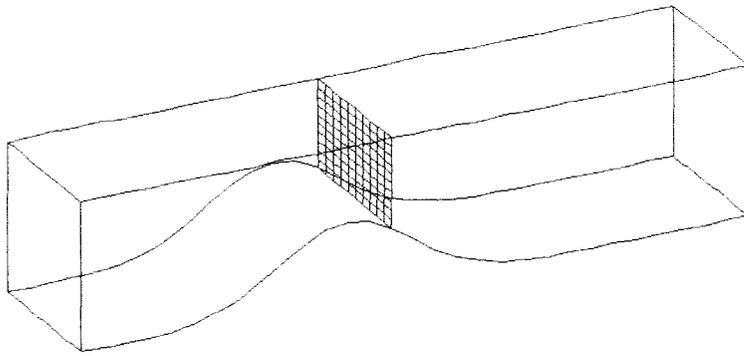
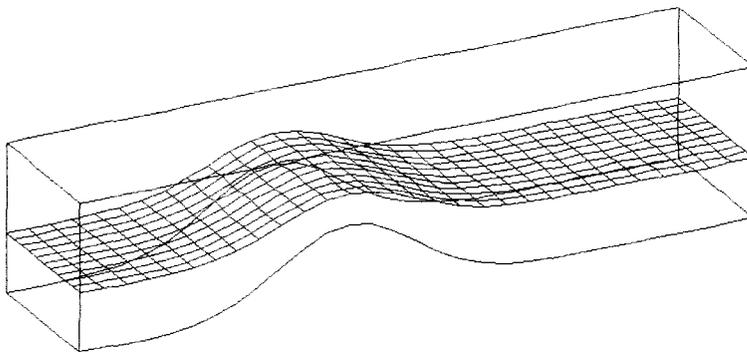
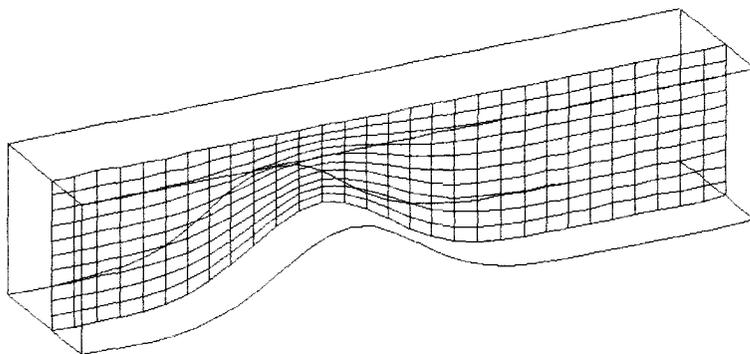
FIG.a. : Maillage suivant $x=cste$ FIG.b. : Maillage suivant $y=cste$ FIG.c. : Maillage suivant $z=cste$

FIG.3.1. : Conduite obstruée

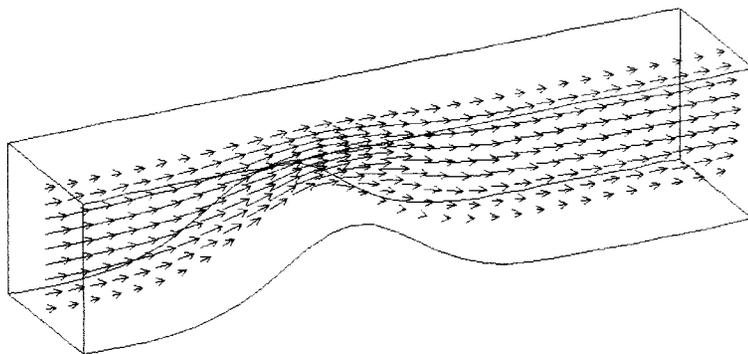


FIG.a. : Champ de vitesse dans le plan $z=0.5$

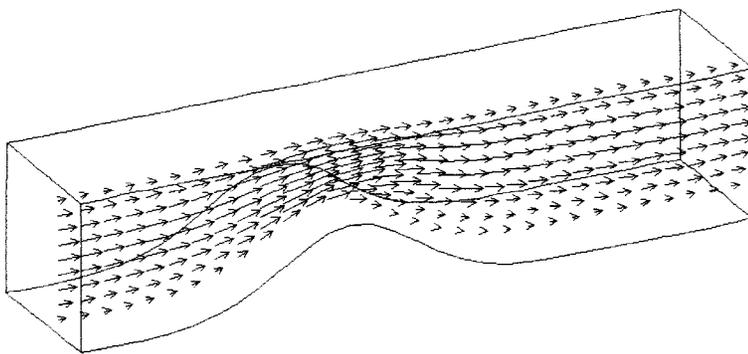


FIG.b. : Champ de vitesse dans le plan $z=0.3$

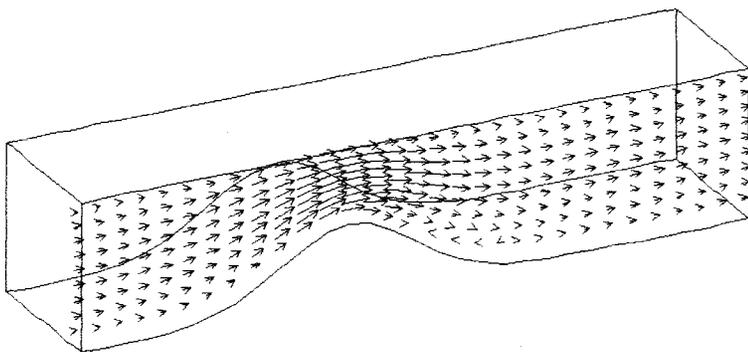
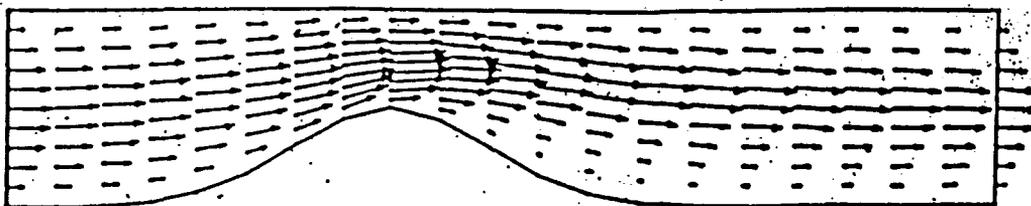


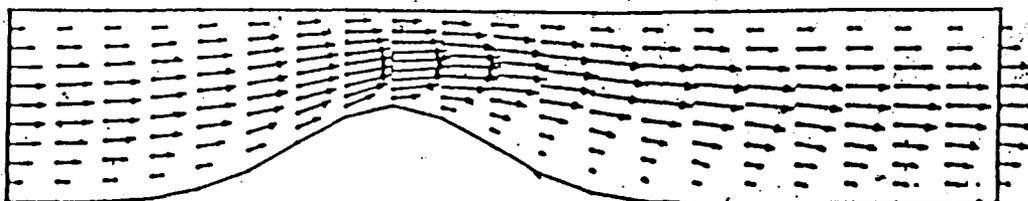
FIG.c. : Champ de vitesse dans le plan $z=0.1$

**FIG.3.2. : Champ de vitesse
suivant les plan $z=0.1, 0.3, 0.5$
 $Re=80$**

a. In the Plane $z=0.5$, $Re = 80$, Scale of $V/v = 1.0$



b. In the Plane $z=0.3$, $Re = 80$, Scale of $V/v = 1.0$



c. In the Plane $z=0.1$, $Re = 80$, Scale of $V/v = 1.0$

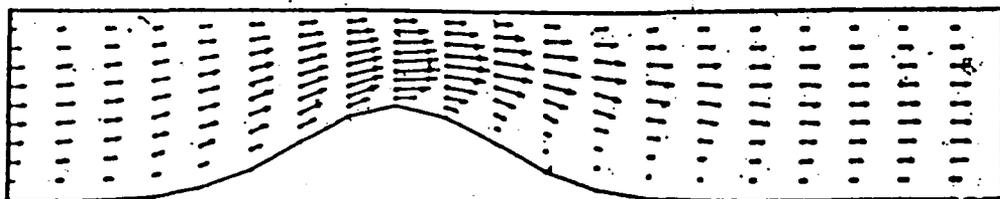


FIG.3.3 : Champ de vitesse
dans le plan $z=cste$
résultats obtenus par Camarero et al.

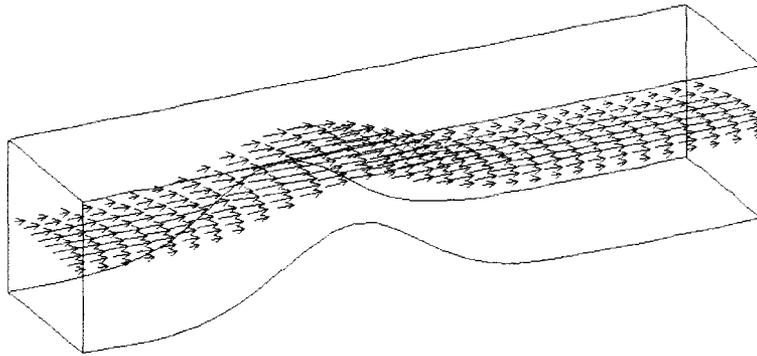


FIG.a. : Champ de vitesse suivant $\xi_2=0.5$

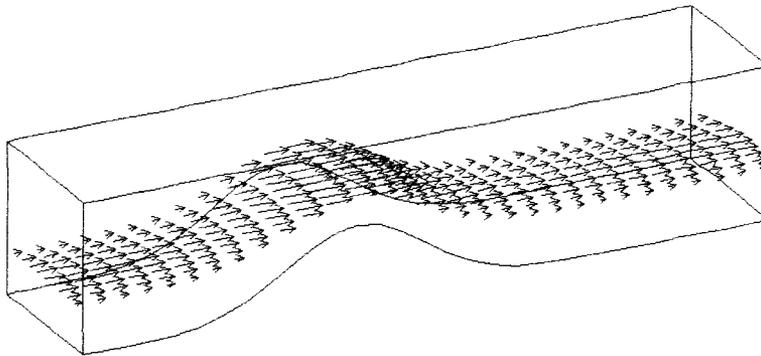


FIG.b. : Champ de vitesse suivant $\xi_2=0.3$

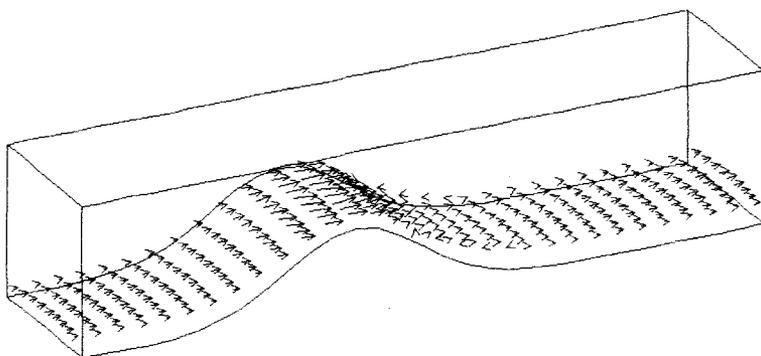
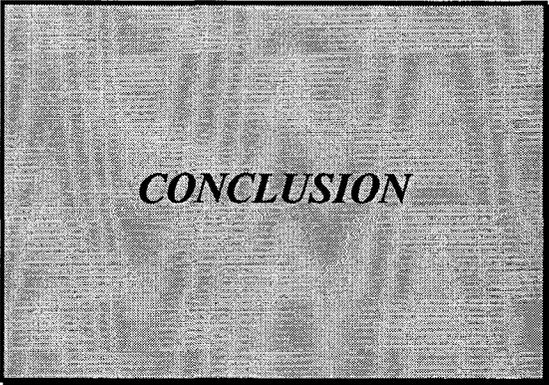


FIG.c. : Champ de vitesse suivant $\xi_2=0.1$

**FIG.3.4. : Champ de vitesse
suivant $\xi_2=0.1, 0.3, 0.5$
Re=80**



CONCLUSION

CONCLUSION

Dans ce travail, un *schéma numérique* de résolution des équations de la mécanique des fluides, pour un écoulement visqueux, incompressible, isotherme, *tridimensionnel* ou *bidimensionnel*, a été *développé* et *mis au point*.

Les équations écrites sous forme intégrale, sont discrétisées en temps en utilisant une discrétisation du type différences finies, et une formulation du type Euler-Lagrange, ce qui conduit à une méthode à deux demi-pas fractionnaires principaux.

La discrétisation spatiale pour les vitesses et les pressions est du type éléments finis. Le domaine de calcul est subdivisé en :

- cellules régulières, sur lesquelles sont exprimées les relations intégrales traduisant la conservation de la masse,
- cellules décalées, sur lesquelles sont exprimées les relations intégrales traduisant la conservation de la quantité de mouvement.

L'algorithme créé a été mis en oeuvre sur des configurations bidimensionnelles (canal , marche descendante), et des configurations tridimensionnelles (canal droit, coudes à 60°, 90°, 120° , conduite obstruée).

On s'est intéressé exclusivement aux résultats stationnaires. Les principales conclusions de cette étude sont les suivantes :

1. Dans tous les cas, le système d'équations fournissant la pression à chaque instant est suffisamment bien conditionné pour que chaque résolution puisse être faite avec une méthode itérative classique (SOR). Ceci est vraisemblablement dû au choix de la discrétisation de la pression.
2. Avec des conditions aux limites stationnaires, la solution évolue vers un état permanent en un nombre de pas de temps cohérent avec la diffusion des effets visqueux dans le maillage.

3. L'algorithme est conservatif et supporte des maillages non orthogonaux.
4. Les résultats obtenus sont en bon accord avec ceux des autres auteurs, tant du point de vue quantitatif que du point de vue qualitatif. Notamment les effets tridimensionnels sont bien mis en évidence.
5. Le schéma numérique est compatible avec la prise en compte de divers modèles de turbulence (longueur de mélange, k - ϵ).

En résumé, le code de calcul écrit et mis en oeuvre permet, comme cela avait été souhaité, de modéliser des écoulements dans des situations très diverses.

REFERENCES

- \01\ AMANO R. S. , GOEL P. ,
Investigation of Third-Order Closer Model of Turbulence for the Computation
of Incompressible Flows in a Channel With a Backward-Facing Step
ASME J. of Fluids Engineering, vol 109, pp 424-428, (1987)
- \02\ BELL K. ,
A Refined Triangular Plate Bending Finite Elements
Int. J. Num. Methods in Engineering, vol 1, pp 101-122, (1969)
- \03\ CAMARERO R. , REGGIO M. ,
A Multigrid Scheme for Three Dimensional Body-Fitted Coordinates in
Turbomachine Applications
J. of Fluids Engineering, vol 105, pp 76-82 , (1983)
- \04\ CAMARERO R. , YOUNIS M. ,
Efficient Generation of Body-Fitted Coordinates
for Cascades Using Multigrid
AIAA. J., vol 18, N° 5, pp 487-488 , (1980)
- \05\ CORMACK D. E. , LEAL L. G. , SEINFELD J. H.
An Evaluation of Mean Reynolds Stress Turbulence Models :
The Triple Velocity Correlation
J. of Fluids Engineering, vol. 100, pp 47-54, (1978)
- \06\ DALY B. J. , HARLOW F. H.
Transport Equations in Turbulence
The Physics of Fluids, vol. 13, n° 11, pp 2634-2649, (1970)
- \07\ DURST F. , SCHIERHOLZ W. F. , WINDERLICH A. M. ,
Experimental and Numerical Investigations of Plane Duct
Flows with Sudden Contraction
ASME, J. of Fluids Engineering, vol 109, pp 376-383, (1987)
- \08\ ECER A., ROUT R. K. and WARD P. ,
Investigation of Solution of Navier-Stokes Equation
Using a Variational Formulation
Int. Journal for Numerical Methods in Fluids, vol 3, pp 23-31, (1983)
- \09\ EL TELBANY M.M.M., REYNOLDS A.J ,
Velocity Distributions in Plane Turbulent Channel Flows
J. of Fluid Mech, vol 100, n°1 , pp 1-29, (1980)
- \10\ EL TELBANY M.M.M., REYNOLDS A.J ,
Turbulences in Plane Channel Flows
J. of Fluid Mech, vol 111, pp 283-318, (1981)
- \11\ EL TELBANY M.M.M., REYNOLDS A.J ,
The Structure of Turbulent Plane Couette Flow
J. of Fluids Engineering ASME, vol 104, pp 367-372, (1982)

- \12\ FUCHS L. , ZHAO H. S. ,
Solution of Three-Dimensional Viscous Incompressible Flows By a
Multigrid Method
Int. J. for Numerical Methods in Fluids, vol. 4, pp 539-555, (1984)
- \13\ FORTIN M.
Calcul Numérique des écoulements par la méthode des éléments finis
Thèse U. Paris 6 (1972)
- \14\ GHONIEM A. F. , CAGNON Y. ,
Vortex Simulation of Laminar Recirculating Flow
J. of Computational Physics, vol 68, pp 346-377, (1987)
- \15\ HUSSAIN A.K.M.F., REYNOLDS W.C ,
Mesurment in Fully Developed Turbulent Channel Flow
J. of Fluids Engineering, vol 97, pp 568-580, (1975)
- \16\ HARLOW F.H., WELCH J.E.,
Numerical Calculation of Time Dependent Viscous Incompressible
Flow of Fluid With Free Surface
Physics of Fluids, vol. 8, pp. 2182-2189, (1965)
- \17\ HARLOW F. H. , AMSDEN A. A. ;
A Numerical Fluid Dynamics Calculation Method for All Flow Speeds
J. of Computational Physics, vol 8, pp 197-213, (1971)
- \18\ KHALIL A. M. , WEBER H. G.
Modeling of Three-Dimensional Flow in Turning Channels
ASME, J. of Engineering for Gaz Turbines and Power, vol. 106, pp 682-691, (1984)
- \19\ KAPITZA H., EPPEL D.,
A 3-D Poisson Solver Based on Conjugate Gradients Compared to Standard
Iterative Methods and Its Performance on Vector Computers
Journal of Computation Physics vol 68, pp 474-484, (1987)
- \20\ LAUFER J.,
Some Recent Measurements in a Two-Dimensional Turbulent Channel
J. of Aeeronautical Science, vol 17, n° 5, pp 277-287, (1950)
- \21\ LESAIN P. ZMALAL M.
Convergence of the Non Conforming Wilson Element for Arbitrary
Quadrilateral Meshes
vol 36, pp 33-52, (1980)
- \22\ MOIN P., KIM J ,
Numerical Investigation of Turbulent Channel Flow
J. of Fluid Mech, vol 118, pp 341-377, (1982)

- \23\ MAJUMDAR S. , RODI W. , ZHU J.,
Three-Dimensional Finite-Volume Method for Incompressible
Flows With Complex Boundaries
J. of Fluids Engineering, vol. 114, pp 496-503, (1992)
- \24\ PANTAKAR S. V. , SPALDING D. B. ,
A Calculation Procedure For Heat, Mass and Momentum Transfer
in Three-Dimensional Parabolic Flows
Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 15, pp 1787-1806, (1972)
- \25\ REGGIO M. , CAMARERO R. ,
Numerical Solution Procedure For Viscous Incompressible Flows
Numerical Heat Transfer, vol. 10, pp 131-146, (1986)
- \26\ REGGIO M. , CAMARERO R. ,
A Calculation Scheme for Three Dimensional Viscous Incompressible Flows
J. of Fluids Engineering, vol 109, pp 345-352 , (1987)
- \27\ ROSCOE D. F.
The Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations for a Three-Dimensional
Laminar flow in Curved Pipes using Finite-Difference Methods
J. of Engineering Mathematics, vol. 12, pp 303-323, (1978)
- \28\ STEINLE P. , MORROW R. ,
An Implicit Flux-Corrected Transport algorithm
J. of Computational Physics, vol 80, pp 61-71, (1989)
- \29\ THOMPSON J. F.,
Grid Generation Techniques in Computational Fluids Dynamics
AIAA Journal, vol. 22, pp. 1505-1523, (1984)
- \30\ TRULIO J. G. , AIR FORCE Weapons Laboratory, Kirtland Air Force Base
Report N° AFWLTR. 66-19, 1966
- \31\ WILLIAM E. PARCET,
Calculating Three-Dimensional Fluid Flows at All Speeds
with an Eulerian-Lagrangian Computing Mesh
Journal of computational physics vol 17, pp 132-159, (1975)
- \32\ YANG H. , CAMARERO R.
An Improved Vorticity-Potential Method For Three-Dimensional
Duct Flow Simulations
Int. J. for Numerical Methods In Fluids, vol. 6, 35-45, (1986)
- \33\ ZIENKIEWICZ O. C. , WU J. ,
Incompressibility Without Tears - How to Avoid Restrictions of
Mixed Formulation
Int. J. for Numerical Methods in Engineering, vol 32, pp 1189-1203, (1991)

- \34\ KWON O. K. , PIETCHER R. H., LEWIS J. P.
Prediction of Sudden Expansion Flows Using the Boundary-layer Equations
J. of Fluids Engineering, vol 106, pp 285-268, (1984)
- \35\ SHIH T. H. , LUMLEY J. L. ,
Kolmogorov Behavior of Near-Wall Turbulence and its Application
in Turbulence Modeling
J. Comp. Fluid Dynamics, vol 1, pp 43-56, (1993)
- \36\ MACAGNO E. O. , HUNG T. K. ,
Computational and Experimental Study of a Captive Annular Eddy
J. of Fluid Mech. vol 28, N° 1, pp 43-64, (1967)
- \37\ WEBER R. , BOYSAN F. , SWITHEBANK J. , ROBERTS P. A. ,
Computations of Near Field Aerodynamics of Swirling Expanding Flows
21 Int. Symposium on Combustion, 1986, pp 1435-1443
- \38\ HARLOW F. H. ,
Numerical Methods for Fluid Dynamics, An Annotated Bibliography
Report N° LA-4281, Los Alamos Scientific Laboratory.
Los Alamos, N.M. , 1969
- \39\ HIRT C.W. , Proceedings of Second Int. Conference on Numerical Methods In
Fluid Dynamics, Berkeley, 1970.
- \40\ HIRT C.W. , AMSDEN A. A., COOK J. L.
An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Computing Method for All Speeds.
J. of Computational Physics, vol 14, pp 227-253, (1974)
- \41\ THOMSON J. F., THAMES F. C. , MASTIN W.
Automatic Numerical Generation of Body-Fitted Curvilinear Coordinate
Systems for Fields Containing any Coordinate of Arbitrary 2D Bodies
J. of Computational Physics, vol 15, pp 299-319, (1974)
- \42\ GHIA U., GHIA K. N.
Boundary-Fitted Coordinates for Regions With highly curved Boundaries
and Reentrant Boundaries.
NASA Publication 2166 Numerical Grid Generation Techniques,
oct 1980, pp 295-306
- /43/ ZIENKIEWICZ O.C.
The Finite Element Method, 3rd ed., UK, (1977)
- /44/ DATT G., TOUZOT G.
Une Présentation de la Méthode des Éléments Finis.
Collection université de Compiègne, Maloine SA. (1982)

- /45/ IKOHAGI T., SHIN B.R.
Finite Difference Schemes For Steady Incompressible Naviers-Stokes
Equations in General Curvilinear Coordinates.
Computers and Fluids vol. 19, N° 3/4, pp 479-488, (1991)
- /46/ ATKINS D.J., MASKELL S.J., PATRICK M.A.
Numerical Prediction of separated Flows.
Int. J. for Num. Meth. in Eng. Vol 15, pp 129-144, (1980)
- /47/ THOMAS C.E., MORGAN K., TAYLOR C.
A Finite Element Analysis of Flow Over A Backward facing Step.
Computers and Fluids vol. 9, pp 265-278, (1981)
- /48/ FEIDT A.,
Quelques résultats sur une methode numerique de resolution du type
Euler-Lagrange, pour les equations de Navier-Stokes.
These de doctorat de mecanique, Univ. de Lille, (1990)
- /49/ DEBUCHY R.,
Ecoulement Turbulent avec aspiration radiale entre un disque fixe et un
disque en rotation.
These de doctorat de mecanique, Univ. de Lille, (1993).
- /50/ AMSDEN A., et al.
Kiva-II, A Computer Program for Chemically Reactive Flows with Sprays.
Los Alamos National Report LA11560, May 1989.
- /51/ AMSDEN A., HIRT C.W.
YAQI : An Arbitrary Lagrangian Computer Program for Fluid Flow at All Speed
Los Alamos National Report LA5100, March 1973.
- /52/ HIRT C.W., COOK J.L. & BUTLER T.D.
A Lagrangian Methode for Calculating the Dynamics of an Incompressible
Fluid with Free Surface.
J. of Computational Physics 5, pp 103-124, 1970.
- /53/ EN-NEFKHAOUI H.
Simulation Numérique d'un Ecoulement Visqueux dans une Géometrie
Complexe par la Methode des Matrices d'Interpolation.
These de doctorat de mecanique, Univ. de Lille, (1994).
- /54/ RECHIA A.
Resolution Numérique des equations de Navier-Stokes en Bidimensionnel
Incompressible : Methode d'Euler Lagrange avec Penalité et Maillage non structure.
These de doctorat de mecanique, Univ. de Lille, (1992).
- /55/ HARLOW F.H. & AMSDEN A.A.
Numerical Calculation of Almost Incompressible Flow.
J. Comp. Phy. 3, pp 80, (1968)

- /56/ GERMAIN P. & MULLER P.
Introduction à la Mécanique des milieux continus.
Masson 1986.
- /57/ HIMDI M.
Contribution à la Simulation Numérique des écoulements de Fluides
Compressibles et Peu Compressibles par le Code KIVA.II.
These de doctorat de mecanique, Univ. de Lille, (1993).
- /58/ SRITI M.
Comportement Statique et Dynamique des Joints de Labyrinthe.
These de doctorat de mecanique, Univ. de Lille, (1994)
- /59/ DUTOYA
Simulation Numérique des Écoulements dans les Cavités Interdisques. Présentation
et Discussion de la Methode de Calcul utilisée dans le Code ICARE.
ONERA, RT n° 11 /3469 EY, (1985).
- /60/ NISIZIMA S. , YOSHIKAWA A.
Turbulent Channel and Couette Flows Using an Anisotropic k- ϵ Model
AIAA J. Vol. 25 , N° 3 , pp. (1987)
- /61/ PATRAP V.S. , SPALDING
Fluid Flow and Heat Transfer in Three Dimensional Duct Flow.
Int. J. Heat Mass and Transfer Vol. 19 pp. 1183-1188, (1976)
- /62/ LEONARD B.P.
Locally Modified Quik Scheme for Highly Convective 2_D and 3_D Flows.
- /63/ RAITHBY G.D.
Skew Upstream Differencing Schemes For Problems Involving Fluid Flow.
Comp. in App. Mech. and Eng. 9, pp. 153-164, (1976)
- /64/ LILLINGTON J.N.
A Vector Upstream Differencing Scheme For Problems in Fluid Flow
Involving Significant Source Terms in Steady-State Linear Systems.
int. J. for Num. Methods in Fluids, Vol. 1, pp. 3-16 , (1981)
- /65/ LIEN F.S. , LESCHZINER M.A.
Approximation of Turbulence Convection in Complex Flows
with a TDV-MUSCL Scheme.
Proc. of the 5th. Int. Sym. Paris(1993)
- /66/ CHIEN K.Y.
Predictions of Channel and Boundary-Layer Flows
with Low-Reynolds Number Turbulence Model.
AIAA J. Vol. 20, N° 1 , pp. 33-38 , (1982)

- /67/ HUMPHREY J. A.C.
Numerical Calculation of Developing Laminar Flow in
Pipes of Arbitrary Curvature Radius.
The Canadian J. of Chemical Eng., Vol. 56, (1978)
- /68/ DODGE P. R.
A Numerical Method for 2-D and 3-D Viscous Flows
AIAA paper NO. 76-425 (1976)
- /69/ MOOR J. , MOORE J.G.
A Calculation Procedure for Three-Dimensional, Viscous, Compressible Duct Flow.
Part I. Inviscid Flow Considerations.
J. of Fluids Eng. Vol. 101, pp. 415-422, (1979)
- /70/ REYNOLDS O.
An Experimental investigation of the circumstances which determine
whether the motion of water shall be direct or sinuous and the law of
resistance in parallel channels.
Phil. Trans. Roy. Soc. London, 174, pp 935-982, (1883)
- /71/ BOUSSINESQ J.
Essais sur la Theorie des eaux courantes.
Memoire presentée à l'académie des sciences de Paris, tome 23, N° 1 (1877)
- /72/ REYNOLDS O.
On The Dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluids
and the Determinate of the Criterion.
Phil. Trans. Roy. Soc. London A, 186, pp 123-164, (1894)
- /73/ TENNEKES H. , LUMLEY J.L.
A First Course in Turbulence.
Cambridge, Mass. and London, MIT Press (1972).
- /74/ COUSTEIX J.
Aérodynamique : Turbulence et Couche Limite, (1989).
- /75/ CHIEN K.Y
Predictions of channel and boundary layer flows with
low Reynolds-number turbulence model.
AIAA J., Vol 20, N° 1 , pp. 33-38, (1982)
- /76/ CLARK J.A
A study of Incompressible turbulent flow.
J. of Basic Engineering, ASME, Vol. 90, pp. 455-468 (1968).
- /77/ PRANDTL L.
Über die Ausgebildete Turbulenz
Z. Angew. Math. Mech. 5, 136 (1925)

- /78/ NIKURADSE J.
Gesetzmässigkeiten der turbulenten Stromung in glatten fohrein.
Forshg arb. Ing. Wes., N° 356, (1932)
- /79/ CONSTANTINESCU
On Turbulent Lubrification.
Proc. Instr. Mech. Engrs., vol. 173, n° 38, pp 881-900, (1959)
- /80/ VAN DRIEST
On Turbulence Flow near Wall.
J. of Aero Science, Vol. 23, (1956).
- /81/ NISIZAMA S., YOSHIKAWA A.
Predictions of channel and couette flows using an anisotropic
k- model.
AIAA J., Vol. 25, N°3, pp. 414-420, (1987).
- /82/ LAM C.K., BREMHORST K.A.
Modified form of the k-ε model for predicting wall turbulence.
J. of Fluids Engineering, Vol. 103, pp. 456-460, (1981)
- /83/ HASSID S., POREH M.
A Turbulent Energy Model for Flows with Drag Reduction.
J. of Fluids Engineering ASME, vol. 97, pp. 234-241, (1975).
- /84/ KOLMOGOROV A.M.
Equation of turbulent motion of an incompressible fluid
Izvestiya. A.N. URSS . Ser. Fiz 6 n°1-2 ,pp 56-58. (1942)
- /85/ CHU W.H.
J. Comput. Phys. 8, pp. 392-408, (1972)
- /87/ HARLOW F.H., NAKAYAMA P.I.
Transport of Turbulent Energie Decay Rate.
Los Alamos Sci. Lab. Uni. of California, Rep. : LA3854, (1968).
- /88/ JONES W.P., LAUNDER B.E.
The Calculation of Low-Reynolds Number Phenomena with a
two-Equation Model of Turbulence.
Int. J. Heat Mass Transfert, vol. 16, pp. 1119-1130, (1973).
- /89/ ROTTA J.C.
Statistische theorie nichthomogener turbulenz.
Zeitsh, Fur Physik, vol. 129, pp. 51-77, (1951).

- /90/ LAUNDER B.E. , SHARMA B.I.
Application of the energy-dissipation model of turbulence to calculation near a spinning disc.
Letters in Heat and mass transfer, vol .I, pp. 131-138, (1974).
- /91/ RODI W , SPALDING D.B et al.
The prediction of free shear flows. A comparison of the performance of six turbulence models.
Mech. Engng. Dept, Imperial College, Rept N° TM/TN/A/19, (1972)
- /92/ PATEL V.C , RODI W. , SCHEURER G.
Turbulence models for near-wall and low Reynolds number flows.: A review.
AIAA J., Vol. 23, N°9, pp. 1308-1319, (1985).
- /93/ HANJALIC K., LAUNDER B.E.
A Reynolds Stress Model of Turbulence and its Application to Thin Shear Flows.
J. Fluid Mech. , vol. 52, N° 4, pp. 609-628, (1972)
- /94/ NAGANO Y. , HISHIDA M.
Improved form of the k- ϵ model for wall turbulent shear flows.
J. of Fluids Engineering ASME, Vol. 109, pp. 156-160, (1987).
- /95/ Lacroix M. Camarero R. and Tapucu A.
Etude d'écoulement internes tridimensionnels.
Rapport Technique of école Polytechnique de montreal, EP 84-R-9, 1984.
- /96/ DENHAM M.K. and PATRICK M.A.
Laminar Flow Over a Downstream-Facing Step in Two-Dimensional Flow Channel
Trans. Instn. Chem. Engrs., Vol. 52, (1974)
- /97/ HAN L.S.
Hydrodynamic Entrance lengths for Incompressible Laminar Flow in Rectangular Ducts
J. App. Mech. , pp. 403-409, (1960)
- /98/ CHEN H.C. , PATEL V.C.
Near-Wall Turbulence models for Complex Flows Including Separation
AIAA J., Vol. 26, N°6 , pp. 641-648, (1988)
- /99/ BAYSAL O., FOULADI K., LESSARD V.R.
Multigrid and Upwind Viscous Flow Solver on Three-Dimensional Overlapped and Embedded Grids
AIAA J. Vol. 29, N° 6, pp 903-910, (1991)
- /100/ CHOI S.k., CHEN C.J.
Navier-Stokes Solution of Complete Turbulent Flow Past Finite Axisymmetric Bodies.
AIAA J. Vol. 29, N° 6, pp.998-1001, (1991)
- /101/ KROGSTAD P.A.
Modification of the Van Driest Damping Function to Include the Effects of Surface Roughness.
AIAA J. Vol. 29, N° 6, pp. 888-894, (1991)

- /102/ OBI S. , PRIE M.
Second-Moment Calculation Procedure for Turbulent Flows
with Collocatec Variable Arrangement.
AIAA J. Vol. 29 , N° 4 , pp. 585-590 , (1991)
- /103/ DEMUREN A.O.
Calculation of Turbulence-Driven Secondary Motion in Ducts
with Arbitrary Cross Section.
AIAA J. Vol. 29, N° 4, pp. 531-537, (1991)
- /104/ PARK S.B. , CHUNG M.K. , CHOI D.H.
Reynolds-Stress Model Analysis of Turbulent Flow over a Curved
Axisymmetric Body.
AIAA J. Vol. 29, N° 4, pp. 591-594, (1991)
- /105/ NAJM H. , GHONIEM A.F.
Numerical Simulation of the Convective Instability in a Dump Combustor.
AIAA J. Vol. 29, N° 6, pp. 911-919, (1991).
- /106/ SITU M. , SCHETZ J.A.
New Mixing-Length Model for Turbulent High-Speed Flows
AIAA J. Vol. 29, N° 6, pp. 872-873, (1991).
- /107/ MOUNTS J.S. , BELK D.M. , MILTON J.E.
Vortical Flow Solutions Using a Time-Lagged, Thin-Layer,
Navier-Stokes Algorithm.
AIAA J. Vol. 29, N° 6, pp. 876-877, (1991).
- /108/ YOON S. , KWAK D.
Three-Dimensional Incompressible Navier-Stokes Solver Using
Lower-Upper Symmetric-Gauss-Seidel Algorithm.
AIAA J. Vol. 29, N° 6, pp. 874-875, (1991).
- /109/ SMITH R.M. , HUTTON A.G.
The Numerical Treatment of Advection : A Performance Comparaison
of Current Methods.
Num. Heat Transfer, Vol. 5, pp. 439-461, (1982)
- /110/ THANGAM S. , SPEZIALE C.G.
Turbulent Flow Past a Backward-Facing Step :
A Critical Evaluation of Two-Equation Models.
AIAA J. Vol. 30, N° 5, pp. 1314-1320, (1992).
- /111/ SELIG M.S. , MAUGHMER M.D.
Multipoint Inverse Airfoil Design Method Based on Conformal Mapping.
AIAA J. Vol. 30, N° 5, pp. 1162-1170, (1992).
- /112/ SHIH C. , LOURENCO L. , DOMMELEN V., KROTHAPALLI A.
Unsteady Flow Past an Airfoil Pitching at a Constant Rate
AIAA J. Vol. 30, N° 5, pp. 1153-1161, (1992).

ANNEXE.1.

Calcul des coefficients geometriques pour la consevation de la masse

L'équation de la conservation discrète s'écrit (II.2.2.11)

$$\sum_{k=1}^{ns=8} (u_k^{ni} D_k^x + v_k^{ni} D_k^y + w_k^{ni} D_k^z) = 0 \quad (A1)$$

avec

$$\bar{D}_k = \sum_{j=1}^{nf=6} \bar{n}_{Gj} \cdot \int_{\partial\Omega_{ej}} N_k ds \quad (A2)$$

\bar{n}_{Gj} : normal extérieur à la surface $\partial\Omega_{ej}$.

$\partial\Omega_{ej}$: une des 6 faces de l'élément Ω_e (hexaèdre à huit noeuds), qui est bien évidemment une surface plane. Donc \bar{n}_{Gj} est constante sur cette face.

On propose de montrer la procédure pour le calcul pour $k=1$ et la face.1 ($\xi_3 = 0$):

$$\int_{\text{face}_1} N_1 ds = \int_{\text{face}_1} N_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3 = 0) J(\xi_1, \xi_2, \xi_3 = 0) d\xi_1 d\xi_2 \quad (A3)$$

où : $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi_1} & \frac{\partial y}{\partial \xi_1} & \frac{\partial z}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi_2} & \frac{\partial y}{\partial \xi_2} & \frac{\partial z}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi_3} & \frac{\partial y}{\partial \xi_3} & \frac{\partial z}{\partial \xi_3} \end{vmatrix}$ le Jacobien J de la transformation qui s'écrit

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^8 N_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) x_i \\ y &= \sum_{i=1}^8 N_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) y_i \\ z &= \sum_{i=1}^8 N_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) z_i \end{aligned}$$

on remplace dans le Jacobien :

$$\begin{aligned}
J &= \begin{vmatrix} \sum_i x_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi_1} & \sum_j y_j \frac{\partial N_j}{\partial \xi_1} & \sum_k z_k \frac{\partial N_k}{\partial \xi_1} \\ \sum_i x_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi_2} & \sum_j y_j \frac{\partial N_j}{\partial \xi_2} & \sum_k z_k \frac{\partial N_k}{\partial \xi_2} \\ \sum_i x_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi_3} & \sum_j y_j \frac{\partial N_j}{\partial \xi_3} & \sum_k z_k \frac{\partial N_k}{\partial \xi_3} \end{vmatrix} \\
&= \sum_i x_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi_1} \left(\sum_j y_j \frac{\partial N_j}{\partial \xi_2} \cdot \sum_k z_k \frac{\partial N_k}{\partial \xi_3} - \sum_j y_j \frac{\partial N_j}{\partial \xi_3} \cdot \sum_k z_k \frac{\partial N_k}{\partial \xi_2} \right) \\
&\quad - \sum_i x_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi_2} \left(\sum_j y_j \frac{\partial N_j}{\partial \xi_1} \cdot \sum_k z_k \frac{\partial N_k}{\partial \xi_3} - \sum_j y_j \frac{\partial N_j}{\partial \xi_3} \cdot \sum_k z_k \frac{\partial N_k}{\partial \xi_1} \right) \\
&\quad + \sum_i x_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi_3} \left(\sum_j y_j \frac{\partial N_j}{\partial \xi_1} \cdot \sum_k z_k \frac{\partial N_k}{\partial \xi_2} - \sum_j y_j \frac{\partial N_j}{\partial \xi_2} \cdot \sum_k z_k \frac{\partial N_k}{\partial \xi_1} \right) \\
&= \sum_i \sum_j \sum_k x_i y_j z_k \left(\frac{\partial N_i}{\partial \xi_1} \frac{\partial N_j}{\partial \xi_2} \frac{\partial N_k}{\partial \xi_3} - \frac{\partial N_i}{\partial \xi_1} \frac{\partial N_j}{\partial \xi_3} \frac{\partial N_k}{\partial \xi_2} \right) \\
&\quad - \sum_i \sum_j \sum_k x_i y_j z_k \left(\frac{\partial N_i}{\partial \xi_2} \frac{\partial N_j}{\partial \xi_3} \frac{\partial N_k}{\partial \xi_1} - \frac{\partial N_i}{\partial \xi_2} \frac{\partial N_j}{\partial \xi_1} \frac{\partial N_k}{\partial \xi_3} \right) \\
&\quad + \sum_i \sum_j \sum_k x_i y_j z_k \left(\frac{\partial N_i}{\partial \xi_3} \frac{\partial N_j}{\partial \xi_1} \frac{\partial N_k}{\partial \xi_2} - \frac{\partial N_i}{\partial \xi_3} \frac{\partial N_j}{\partial \xi_2} \frac{\partial N_k}{\partial \xi_1} \right)
\end{aligned} \tag{A4}$$

Les fonctions d'interpolation s'écrivent :

$$\begin{aligned}
N_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= (1-\xi_1)(1-\xi_2)(1-\xi_3) & N_5(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= (1-\xi_1)(1-\xi_2)\xi_3 \\
N_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \xi_1(1-\xi_2)(1-\xi_3) & N_6(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \xi_1(1-\xi_2)\xi_3 \\
N_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \xi_1\xi_2(1-\xi_3) & N_7(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \xi_1\xi_2\xi_3 \\
N_4(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= (1-\xi_1)\xi_2(1-\xi_3) & N_8(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= (1-\xi_1)\xi_2\xi_3
\end{aligned} \tag{A5}$$

on remplace dans (A3)

$$\begin{aligned}
\int_{\text{face1}} N_1 ds &= \sum_i \sum_j \sum_k x_i y_j z_k \int_{\text{face1}} N_1 \left(\frac{\partial N_i}{\partial \xi_1} \frac{\partial N_j}{\partial \xi_2} \frac{\partial N_k}{\partial \xi_3} - \frac{\partial N_i}{\partial \xi_1} \frac{\partial N_j}{\partial \xi_3} \frac{\partial N_k}{\partial \xi_2} \right) d\xi_1 d\xi_2 \\
&\quad - \sum_i \sum_j \sum_k x_i y_j z_k \int_{\text{face1}} N_1 \left(\frac{\partial N_i}{\partial \xi_2} \frac{\partial N_j}{\partial \xi_3} \frac{\partial N_k}{\partial \xi_1} - \frac{\partial N_i}{\partial \xi_2} \frac{\partial N_j}{\partial \xi_1} \frac{\partial N_k}{\partial \xi_3} \right) d\xi_1 d\xi_2 \\
&\quad + \sum_i \sum_j \sum_k x_i y_j z_k \int_{\text{face1}} N_1 \left(\frac{\partial N_i}{\partial \xi_3} \frac{\partial N_j}{\partial \xi_1} \frac{\partial N_k}{\partial \xi_2} - \frac{\partial N_i}{\partial \xi_3} \frac{\partial N_j}{\partial \xi_2} \frac{\partial N_k}{\partial \xi_1} \right) d\xi_1 d\xi_2
\end{aligned} \tag{A6}$$

Les intégrales à calculer sont finalement du type :

$$I = \int_{\text{face}1} N_1 \left(\frac{\partial N_i}{\partial \xi_3} \frac{\partial N_j}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial N_k}{\partial \xi_2} \right) d\xi_1 d\xi_2$$

exemple :

pour $i=1, j=2$ et $k=3$ on obtient :

$$I = \int_{[0,1] \times [0,1]} N_1 \left(\frac{\partial N_1}{\partial \xi_3} \frac{\partial N_2}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial N_3}{\partial \xi_2} \right) d\xi_1 d\xi_2 = 1/12$$

ANNEXE.2.

Calcul des coefficients géométriques pour la pression

terme de pression :

Comme on l'a dit auparavant, la pression possède une représentation isoparamétrique sur des éléments tétraédriques fig.a.

$$p = \sum_{k=1}^4 N_k p_k \quad (A1)$$

Le flux de pression exprimé sur un élément décalé fig.b

$$\int_{\partial\Omega_e^d} p \cdot \bar{n} ds = \sum_{\text{face.k}} \int_{\text{face.k}} p \cdot \bar{n} ds \quad (A2)$$

On considère la face k de l'élément décalé. Cette face contient quatre noeuds où la pression est définie.

A partir de ces quatre noeuds et le centre de l'élément décalé on forme deux tétraèdres. La face k "coïncide" alors avec une surface contenant deux triangles appartenant chacun à un élément tétraédrique.

Les triangles sont notés tr(1k) et tr(2k). Le calcul du flux de pression sur la face k peut être approximé par celui sur les deux triangles. On obtient :

$$\int_{\text{face.k}} p \cdot \bar{n} ds = \sum_{j=1,2} \int_{\text{tr}(kj)} p \cdot \bar{n} ds \quad (A3)$$

$$\int_{\partial\Omega_e^d} p^{ni} \cdot \bar{n} ds = \sum_{\text{face.k}} \sum_{\text{tr}(kj)} \int_{\text{tr}(kj)} \sum_{q=1}^3 N_q p_q \cdot \bar{n} ds \quad (A4)$$

dans la configuration de référence trr.

$$\int_{\partial\Omega_e^d} p^{ni} \cdot \bar{n} ds = \sum_{\text{face.k}} \sum_{\text{tr}(kj)} \sum_{q=1}^3 p_q \bar{n}_{Gq} \int_{\text{tr}(kj)} N_q J ds \quad (A5)$$

$A_{\text{tr}(kj)}$, l'aire d'un triangle tr(kj) de la face k

$$\int_{\partial\Omega_e^d} \mathbf{p}^{ni} \cdot \bar{\mathbf{n}} ds = \frac{1}{3} \sum_{\text{face.k}} \sum_{\text{tr}(kj)} \sum_{q=1}^3 p_q \bar{\mathbf{n}}_{Gq} A_{\text{tr}(kj)} \quad (\text{A6})$$

Comme cette intégrale ne fait intervenir que les huit noeuds de l'élément décalé, l'assemblage des coefficients pour chaque noeud donné, permet de mettre (A6) sous la forme :

$$\int_{\partial\Omega_e^d} \mathbf{p}^{ni} \cdot \bar{\mathbf{n}} ds = \sum_{j=1}^8 D_j^d p_j \quad (\text{A7})$$

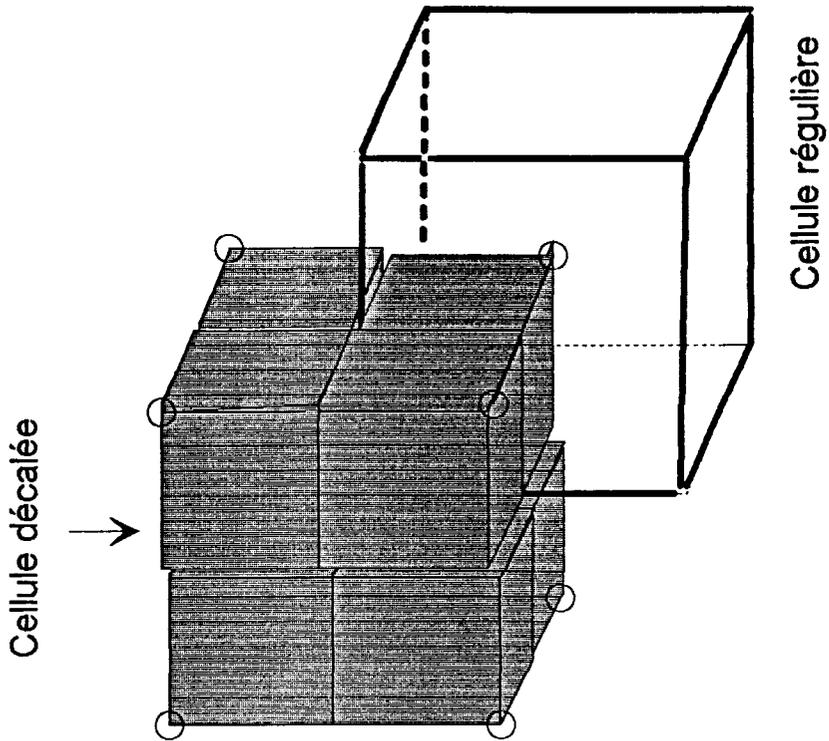
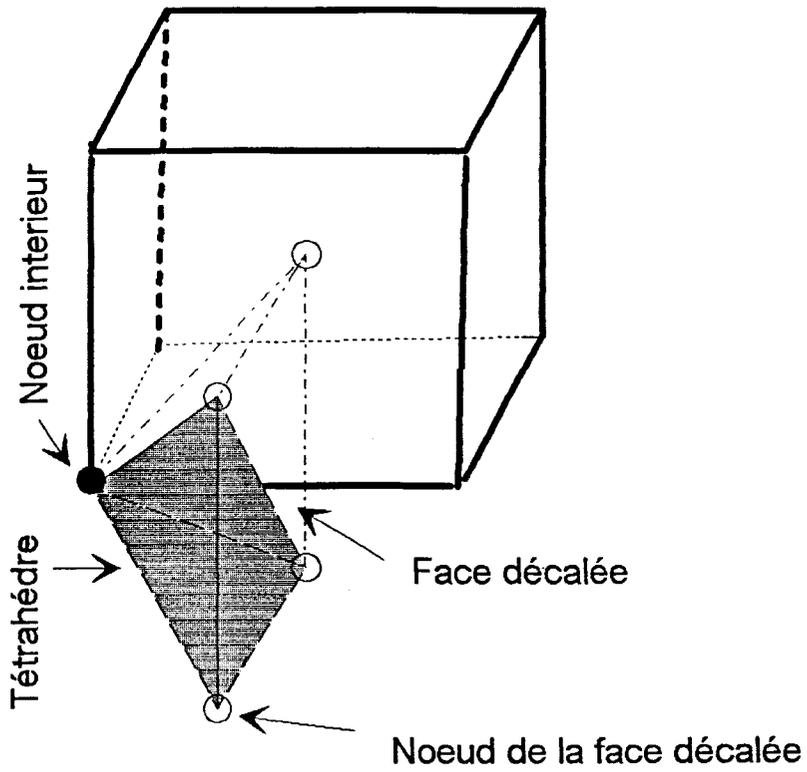


Figure . a . . : Elements de contrôle

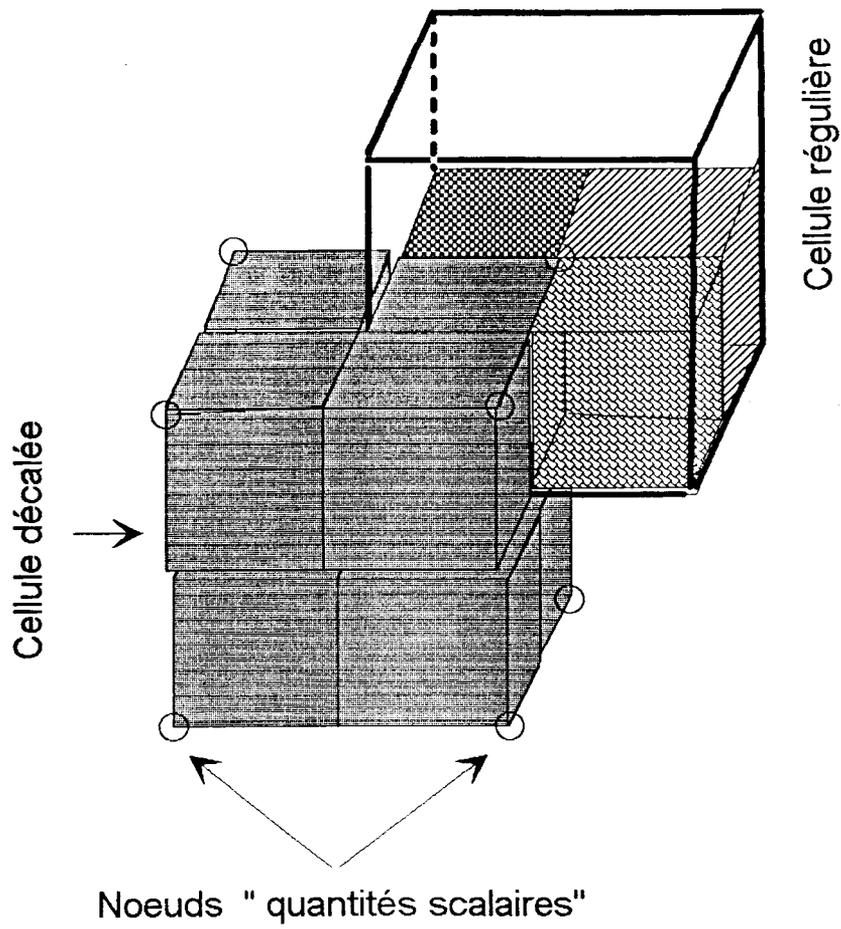
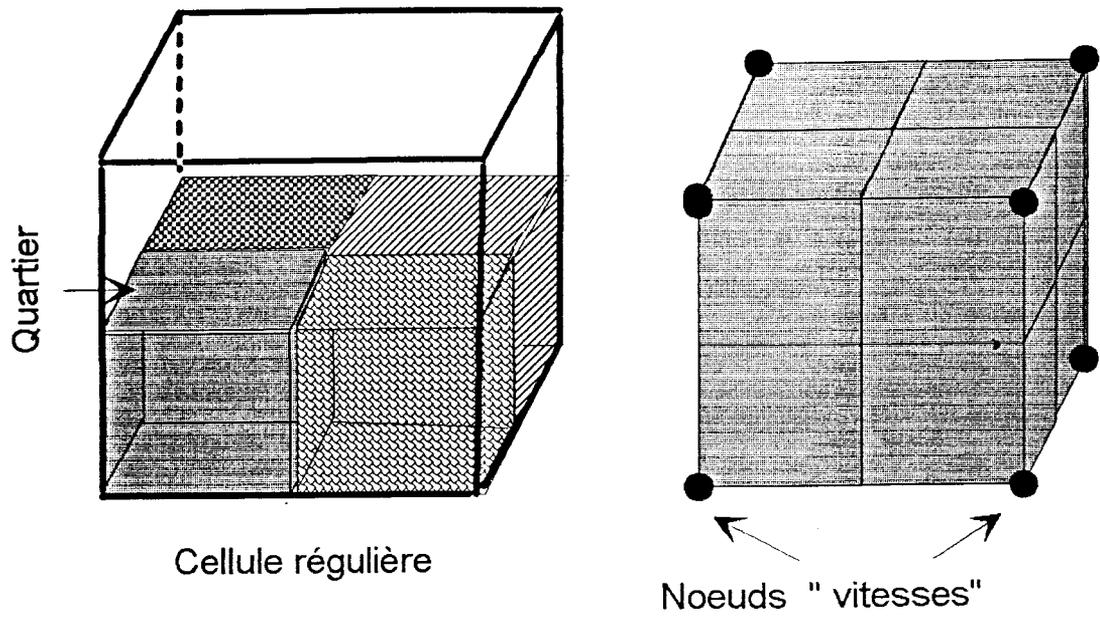


Figure . b : Elements de contrôle

ANNEXE.3.

Calcul du tenseur des contraintes visqueuses

Pour chaque maille on calcule les composantes du tenseur de viscosité par :

$$\tau_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} \quad (A1)$$

avec

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (A2)$$

Il suffit donc de calculer les $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$. Les gradients des vitesses sont approximés au centre de chaque élément régulier par les moyennes sur l'élément régulier.

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{V_e} \int_{\Omega_e} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dv \quad (A3)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{V_e} \int_{\Omega_e} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} .J. dv \quad (A4)$$

avec par exemple pour $i=j=1$:

$$J \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} & \frac{\partial y}{\partial \xi_1} & \frac{\partial z}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial u}{\partial \xi_2} & \frac{\partial y}{\partial \xi_2} & \frac{\partial z}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial u}{\partial \xi_3} & \frac{\partial y}{\partial \xi_3} & \frac{\partial z}{\partial \xi_3} \end{vmatrix} \quad (A5)$$

avec

$$x = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) x_i$$

$$y = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) y_i$$

$$z = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) z_i$$

$$u = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) u_i$$

On obtient le même développement que annexe.1. "(A4)"

$$\begin{aligned} J \cdot \frac{\partial u}{\partial x} &= \sum_i \sum_j \sum_k u_i y_j z_k \frac{\partial N_i}{\partial \xi_1} \frac{\partial N_j}{\partial \xi_2} \frac{\partial N_k}{\partial \xi_3} - u_i y_j z_k \frac{\partial N_i}{\partial \xi_1} \frac{\partial N_j}{\partial \xi_3} \frac{\partial N_k}{\partial \xi_2} \\ &- \sum_i \sum_j \sum_k u_i y_j z_k \frac{\partial N_i}{\partial \xi_2} \frac{\partial N_j}{\partial \xi_3} \frac{\partial N_k}{\partial \xi_1} - u_i y_j z_k \frac{\partial N_i}{\partial \xi_2} \frac{\partial N_j}{\partial \xi_1} \frac{\partial N_k}{\partial \xi_3} \\ &+ \sum_i \sum_j \sum_k u_i y_j z_k \frac{\partial N_i}{\partial \xi_3} \frac{\partial N_j}{\partial \xi_1} \frac{\partial N_k}{\partial \xi_2} - u_i y_j z_k \frac{\partial N_i}{\partial \xi_3} \frac{\partial N_j}{\partial \xi_2} \frac{\partial N_k}{\partial \xi_1} \end{aligned} \quad (A6)$$

on remplace (A4)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{V_e} \left(\sum_i \sum_j \sum_k u_i y_j z_k \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial N_i}{\partial \xi_1} \frac{\partial N_j}{\partial \xi_2} \frac{\partial N_k}{\partial \xi_3} - \frac{\partial N_i}{\partial \xi_1} \frac{\partial N_j}{\partial \xi_3} \frac{\partial N_k}{\partial \xi_2} \right) dv \right. \\ &\quad \left. \sum_i \sum_j \sum_k u_i y_j z_k \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial N_i}{\partial \xi_2} \frac{\partial N_j}{\partial \xi_3} \frac{\partial N_k}{\partial \xi_1} - \frac{\partial N_i}{\partial \xi_2} \frac{\partial N_j}{\partial \xi_1} \frac{\partial N_k}{\partial \xi_3} \right) \right. \\ &\quad \left. \sum_i \sum_j \sum_k u_i y_j z_k \left(\frac{\partial N_i}{\partial \xi_3} \frac{\partial N_j}{\partial \xi_1} \frac{\partial N_k}{\partial \xi_2} - \frac{\partial N_i}{\partial \xi_3} \frac{\partial N_j}{\partial \xi_2} \frac{\partial N_k}{\partial \xi_1} \right) \right) \end{aligned}$$

de la même façon on peut déterminer les autres termes du gradient de la vitesse, et former le tenseur des contraintes.

ANNEXE.4.**Calcul des coefficients des flux convectifs :**

Les coefficients sont données dans (II.2.2.29) :

$$\bar{C}_s^v = \sum_j S_{sj}^d \bar{n}_{Gsj} \quad (A1)$$

On reprend la même décomposition géométrique utilisée dans l'annexe.2. . on exprime que : $\int \bar{n} \cdot ds = 0$ sur une surface fermée construite de la réunion de la face décalée et les deux triangles tr(1) et (tr2). On obtient ainsi :

$$\bar{C}_s^v = \sum_j \sum_{tr(q)} S_{sj}^d (tr(q)) \bar{n}_{Gsj} \quad (A2)$$

où $S_{sj}^d (tr(q))$, \bar{n}_{Gsj} : représentent la surface tr(1) d'un triangle et sa normale extérieure.

Calcul des flux convectifs :

on pose flux = $(\bar{u}_m)_s \cdot \bar{C}_s^v$ sur la face décalée.

on teste alors le sens du flux à travers la surface décalée :

si flux > 0 la vitesse amont correspond à celle du centre de l'élément décalé.

si flux < 0 la vitesse amont correspond à la vitesse amont à l'interface de l'élément décalé.

Ce schéma a l'avantage de conserver la monotonie.

ANNEXE 5

MODELES A DEUX EQUATIONS DE TRANSPORT (K-ε)

EQUATIONS DE TRANSPORT POUR K-ε

Dans ce cas la longueur caractéristique de la turbulence est reliée à l'énergie cinétique de la turbulence et à son taux de dissipation par :

$$v_t = C_{\mu} f_{\mu} K^2 \varepsilon^{-1} \quad (A1)$$

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial K}{\partial x_k} = v_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\left(v + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial K}{\partial x_k} \right) - \varepsilon \quad (A2)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} = C_{\varepsilon 1} v_t \frac{\varepsilon}{K} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i} \right) - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{K} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\left(v + \frac{v_t}{\sigma_1} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \right) \quad (A3)$$

Ces équations sont discrétisées en temps de la même manière que pour l'équation de la quantité de mouvement en suivant deux phases :

PHASE 1 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \left(\int_{\Omega^d} K^{n+1} dv - \int_{\Omega^d} K^n dv \right) &= \int_{\Omega^d} v_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} dv \\ &+ \int_{\Omega^d} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\left(v + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial K}{\partial x_k} \right) dv - \int_{\Omega^d} \varepsilon dv \end{aligned} \quad (A4)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \left(\int_{\Omega^d} \varepsilon^{n+1} dv - \int_{\Omega^d} \varepsilon^n dv \right) &= \int_{\Omega^d} C_{\varepsilon 1} v_t \frac{\varepsilon}{K} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i} \right) dv - \int_{\Omega^d} C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{K} dv \\ &+ \int_{\Omega^d} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\left(v + \frac{v_t}{\sigma_1} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \right) dv \end{aligned} \quad (A5)$$

PHASE 2

$$\int_{\Omega^d} k^{n+1} dv - \int_{\Omega^d} k^{ni} dv + \int_{\partial\Omega^d} k^{ni} (\bar{u}^{ni} \cdot \bar{n}) ds = 0 \quad (A6)$$

$$\int_{\Omega^d} \varepsilon^{n+1} dv - \int_{\Omega^d} \varepsilon^{ni} dv + \int_{\partial\Omega^d} \varepsilon^{ni} (\bar{u}^{ni} \cdot \bar{n}) ds = 0 \quad (A7)$$

L'énergie cinétique k et la dissipation ε sont représentés comme la vitesse par des éléments trilineaires par élément régulier et s'expriment de la même manière. La discrétisation spatiale des seconds membres des équations (A4) et (A5) s'écrit de façon similaire à celle de l'équation de la conservation de la quantité de mouvement. La détermination de la viscosité turbulente, s'obtient en écrivant la relation (A1) pour les valeurs moyennes de k et ε par élément régulier.

La prise en compte des termes convectifs pour (A6) et (A7) est effectuée de la même façon que pour les vitesses.