

50376  
1994  
311

N° d'ordre: 1373

20102 50376  
1994  
311

# THESE

présentée à

**L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE**

Spécialité: Electronique

par

**Christophe DELABIE**

**"ELABORATION D'UN SIMULATEUR DE DISPOSITIFS  
PLANAIRE MICROONDES.  
APPLICATION A LA CARACTERISATION DE MATERIAUX  
SUPRACONDUCTEURS"**

Soutenue le 23 Septembre 1994 devant la commission d'examen

Membres du Jury:	MM:	Y.CROSNIER	Président
		P.KENNIS	Directeur de Thèse
		M.CAUTERMAN	Rapporteur
		P.SAGUET	Rapporteur
		C.BELOUET	Examineur
		A.PRIOU	Examineur
		P.PRIBETICH	Examineur



0 20102 50376

" Le temps du Monde fini est arrivé..."

Paul Eluard

## REMERCIEMENTS

Ce travail a été effectué au Département Hyperfréquences et Semi-conducteurs de L'Institut d'Electronique et de Microélectronique du Nord, Département dirigé par **Monsieur le Professeur G.Salmer**.

Je remercie vivement **Monsieur le Professeur Y.Crosnier** de bien vouloir présider ce Jury.

**Monsieur le Professeur P.Kennis**, pour m'avoir accueilli dans son équipe de recherche, mais aussi pour la qualité de ses conseils, lors de la Direction de ce travail.

**Monsieur le Professeur P.Saguet** de l'Université de Grenoble, ainsi que

**Monsieur le Professeur M.Cauterman** de l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Brest; qui me font l'honneur de juger mon travail et d'en assurer la tâche de rapporteurs.

Je remercie également **Monsieur C.Belouet** , Chef de Groupe Alcatel Alsthom Recherche,

**Monsieur A.Priou** , Ingénieur à la Direction des Recherches et des Etudes Techniques,

**Monsieur le Professeur P.Pribetich**, de l'Institut Supérieur de l'Automobile et des Transports, qui me font l'honneur de participer à ce Jury de Thèse.

Je tiens également à remercier les camarades du Laboratoire, dont la liste exhaustive serait trop longue, ainsi que les membres passé et présent de l'équipe Electromagnétisme des Circuits: MM. Y.Delplanque, D.Kinowski, M.Helal, S.Robillard, E.Palczny, J.F.Carpentier, J.F.Légier, V.Leclercq, F.Huret, K.Saïdi, C.Seguilot et Ph.Pannier, pour l'amitié qu'ils m'ont témoignée.

Mes remerciements vont également à Mr. J.P Dehorter, pour le soin qu'il a apporté à la reproduction des différents exemplaires de ce travail.

	page
<b><u>INTRODUCTION GENERALE</u></b>	1
<b><u>CHAPITRE PREMIER: ANALYSE DE RESONATEURS MICRORUBAN RECTANGULAIRES DANS LE DOMAINE SPECTRAL</u></b>	5
I-1 INTRODUCTION	5
I-2 L'APPROCHE DANS LE DOMAINE SPECTRAL	6
I-2-1 Présentation générale	6
I-2-2 L'équation intégrale à résoudre	8
I-2-3 La fonction dyadique de Green	14
I-2-4 Résolution de l'équation intégrale par la méthode des moments	21
I-2-5 Choix des fonctions de base	23
I-3 REGIME LIBRE ET REGIME FORCE	27
I-3-1 Régime libre	27
I-3-2 Régime forcé	28
I-3-2-1 Excitation par sonde coaxiale	28
I-3-2-2 Excitation par ligne microruban	29
I-3-2-3 Résolution du système matriciel	31
I-3-2-4 Calcul de l'impédance d'entrée	32
I-4 CALCUL DES INTEGRALES DANS LE PLAN COMPLEXE DES VARIABLES D'INTEGRATION	33
I-4-1 Position du problème	33
I-4-1-1 Cas du régime libre	35
I-4-1-2 Cas du régime forcé	38
I-4-2 Parcours des intégrants dans le plan complexe $k\rho$	39
I-4-2-1 Singularités liées à la présence de pôles	39
I-4-2-2 Définition d'un parcours d'intégration	40
I-5 CONSIDERATIONS NUMERIQUES	43
I-5-1 Convergence des calculs d'intégrales	43
I-5-1-1 Convergence suivant la variable $k\rho$	43
I-5-1-2 Convergence suivant la variable $\theta$	48
I-5-1-3 Elaboration d'un critère de convergence	49
I-5-2 Influence du nombre de fonctions de base sur la convergence	50
I-6 VALIDATION DE L'ANALYSE	51
I-6-1 Régime libre	53
I-6-2 Régime forcé	54
I-7 CONCLUSION	59
BIBLIOGRAPHIE RELATIVE AU PREMIER CHAPITRE	61

<b><u>CHAPITRE DEUXIEME: ANALYSE DE CIRCUITS MICRORUBAN DE FORME QUELCONQUE</u></b>	<b>63</b>
II-1 INTRODUCTION	63
II-2 CHOIX DES FONCTIONS DE BASE	65
II-3 PROBLEMES NUMERIQUES LIES A L'UTILISATION DE FONCTIONS DE BASE TRIANGULAIRES	69
II-3-1 Mise en évidence de la topologie de la matrice de réaction	70
II-3-2 Etalement du spectre des fonctions de base	72
II-4 CALCULS DES INTEGRALES PAR UNE TRANSFORMEE DE FOURIER RAPIDE	75
II-4-1 Mise en oeuvre	75
II-4-2 Recouvrement des spectres l'intégrant et convergence des calculs d'intégration par transformé rapide	76
II-5 MODELISATION DE L'ALIMENTATION	80
II-5-1 Description du mecanisme d'excitation	80
II-5-2 Détermination de l'impédance d'entrée d'un dipôle	85
II-6 REALISATION DE TERMINAISON ADAPTEE NUMERIQUE	89
II-6-1 Mise en oeuvre et exemple d'application	90
II-6-1-1 Mise en oeuvre	90
II-6-1-2 Exemple d'application	91
II-6-2 Application à la détermination de l'impédance d'entrée d'un dipôle	98
II-6-3 Détermination des paramètres de transfert de quadripôles	100
II-7 METHODE ASYMPTOTIQUE	102
II-8 VALIDATION DE L'ANALYSE SUR DES GEOMETRIES COMPLEXES	107
II-8-1 Analyse de résonateurs rectangulaires en régime libre	107
II-8-2 Analyse de résonateurs de surface complexe en régime libre	108
II-8-3 Etude de résonateurs en régime forcé	111
II-8-4 Analyse de multipôles	114
II-8-4-1 Simulation d'un coude en structure microruban	114
II-8-4-2 Simulation d'une ligne microruban à méandre	116
II-9 CONCLUSION	118
BIBLIOGRAPHIE RELATIVE AU DEUXIEME CHAPITRE	120

<b><u>CHAPITRE TROISIEME: ETUDE DES PERTES CONDUCTEURS ET APPLICATION A LA CARACTERISATION DES MATERIAUX SUPRACONDUCTEURS</u></b>	123
III-1 INTRODUCTION	123
III-2 APPROCHE DANS LA DOMAINE SPECTRAL ET IMPEDANCE DE SURFACE	125
III-2-1 Prise en compte des pertes conducteurs au moyen de l'impédance de surface	125
III-2-2 Calcul de l'impédance de surface d'un conducteur métallique	127
III-2-3 Exploitation de l'impédance de surface	129
III-3 DEFINITION D'UN FACTEUR DE FORME POUR LA PRISE EN COMPTE DE RUBANS METALLIQUES OU SUPRACONDUCTEURS	134
III-3-1 Rappels sur la supraconductivité et approximations employées	134
III-3-1-1 Historique et généralités	134
III-3-1-2 Le modèle à deux fluides	139
III-3-2 Description du champ électromagnétique dans une section droite du conducteur	141
III-3-2-1 Formalisme	
III-3-2-2 Calcul de l'impédance de surface équivalente $Z_s$	146
III-3-2-3 Définition d'un facteur de forme	148
III-3-2-4 Validation du calcul de l'impédance de surface équivalente	149
a) Cas de rubans métalliques	149
b) Cas des matériaux supraconducteurs	151
III-4 APPLICATION A LA CARACTERISATION DES MATERIAUX SUPRACONDUCTEURS	157
III-4-1 Rappel sur les méthodes de caractérisation habituelles	157
III-4-2 Présentation de la structure expérimentale	160
III-4-3 Modélisation de la structure expérimentale	164
III-4-3-1 Prise en compte des paramètres électriques	164
III-4-3-2 Influence des paramètres géométriques	167
a) Hauteur du boîtier	167
b) Influence de la largeur du couplage capacitif	167
III-4-4 Détermination des paramètres du modèle à deux fluides	171
III-4-4-1 Précision sur la méthode d'ajustement	171
a) Méthode d'ajustement	171
b) Calcul des facteurs de forme $K_r$ et $K_i$	171
III-4-4-2 Résultats	173
a) Ajustement de la fréquence de résonance	174
b) Ajustement du coefficient de qualité	176
III-4-5 Détermination des paramètres du modèle à trois fluides	179
III-4-5-1 Présentation du modèle à trois fluides	179
III-4-5-2 Résultats	182
III-4-6 Résultats sur d'autres structures expérimentales	185
III-4-6-1 Résonateur 6 GHz sur film F18361	185
III-4-6-2 Résonateur 8 GHz sur film L327	187
III-5 CONCLUSION	191
BIBLIOGRAPHIE RELATIVE AU TROISIEME CHAPITRE	193

## INTRODUCTION GENERALE

Le développement de dispositifs monolithiques microondes, fonctionnant à des fréquences élevées, impose des contraintes de plus en plus strictes lors de la conception des circuits, notamment au niveau de leur simulation. La synthèse de ces circuits repose généralement sur la mise en cascade de quadripôles élémentaires, dont il convient de connaître avec précision les matrices de répartition. A ce jour, la plupart des logiciels de simulation disponibles reposent sur ce principe mais font appel à des analyses électromagnétiques plus ou moins précises, si ce n'est à des modèles empiriques.

L'accroissement remarquable des performances des calculateurs durant la dernière décennie permet, à présent, d'obtenir avec précision la matrice de répartition d'éléments de circuits de complexité moyenne [1][2][3]. Néanmoins, la simulation dynamique de circuits intégrés complets reste un but à atteindre, notamment lorsque ces circuits ne peuvent pas être décomposés en discontinuités élémentaires sans interaction.

Lorsque la densité d'intégration augmente, ou lorsque les fréquences de travail atteignent les gammes millimétriques, la diminution des dimensions transverses des lignes entraîne un accroissement des pertes métalliques. La prise en compte de ces pertes demeure un sujet d'actualité et constitue depuis plusieurs années un axe de recherche privilégié de l'équipe Electromagnétisme des Circuits (**ELECCIR**) de L'EMN [4][5][6][7].

Face aux problèmes posés par l'augmentation des pertes métalliques dans les structures plaquées, une solution réside dans l'utilisation de matériaux

supraconducteurs. Dans le domaine des microondes, cette éventualité a surtout été envisagée à partir de 1987, date à laquelle ont été découverts les supraconducteurs à haute température critique. La découverte très récente [8] de matériaux supraconducteurs à température ambiante, non réellement confirmée, apporterait une solution idéale à ces problèmes, à condition toutefois que leurs propriétés dans le domaine des microondes sous forme de films minces soient effectivement déterminées.

L'approche dans le domaine spectral, méthode particulièrement bien adaptée à la simulation de circuits planaires, ne peut s'appliquer rigoureusement à l'analyse des pertes dans les conducteurs. Par le biais de la notion d'impédance de surface, ces pertes peuvent néanmoins être prises en compte avec précision [9][10]. Cependant, ceci suppose de modifier cette impédance à partir de la détermination préalable de la répartition du champ électromagnétique au sein des conducteurs [11][12].

Partant de cette analyse, la mise en oeuvre d'une impédance de surface corrigée d'un facteur de forme géométrique au sein de programmes ADS permet d'allier rapidité et précision du code numérique. Cette méthode a été, dans l'équipe **ELECCIR**, appliquée avec succès aux cas des conducteurs métalliques de lignes microruban et coplanaires [6].

La qualité des films supraconducteurs dépend dans une large mesure des procédures suivies lors de leurs dépôts et de leurs gravures sur des substrats diélectriques adéquats. De ce fait, la caractérisation des matériaux supraconducteurs obtenus en fin de réalisation s'impose.

Dans ce contexte, à partir d'une analyse précise du bilan des pertes de structures supraconductrices, et particulièrement de résonateurs, nous avons développé une méthode de caractérisation de matériaux supraconducteurs.

En conséquence, ce mémoire s'articule autour des points suivants.

Dans un premier chapitre, nous rappelons brièvement les principales étapes qui interviennent lors de la mise en oeuvre de l'approche dans le domaine spectral, dans le cas simple du résonateur rectangulaire.

Dans le deuxième chapitre, nous décrivons une extension de ce formalisme à la simulation de circuits microruban de forme quelconque, et proposons un code numérique précis et convivial d'analyse de tels circuits. Cette étude nous a amené en particulier à proposer une nouvelle méthode de simulation de terminaisons adaptées. Ceci nous permet sur le plan numérique d'accéder directement à la matrice de répartition des multipôles.

Dans le troisième et dernier chapitre de ce mémoire, une méthode originale de caractérisation de films minces supraconducteurs est présentée. Nous examinons d'abord la validité de l'expression analytique classique de l'impédance de surface sur différents cas. Le facteur de forme relatif à la partie réelle de l'impédance de surface précédemment obtenu [6] est étendu à la partie imaginaire, et donc à un calcul de la puissance réactive stockée dans les lignes microruban supraconductrices. Les caractéristiques de deux matériaux supraconducteurs différents (YBaCuO et TlBaCaCuO) sont présentées à partir de l'étude de plusieurs résonateurs.

## BIBLIOGRAPHIE RELATIVE A L'INTRODUCTION GENERALE

- [1] N.H.L. Koster, R.H. Jansen: " The Microstrip Step Discontinuity: A Revised Description". IEEE MTT Vol.34, N°2, pp.213-223, February 1986
- [2] G. Splitt, M. Davidovitz: "Guidelines for Design of Electromagnetically Coupled Microstrip Antennas on Two-Layer Substrates". IEEE AP Vol.38, N°7, pp. 1136-1140, July 1990
- [3] J. Sercu, N. Faché, F. Libbrecht, D. de Zutter: "Full Wave Space-Domain Analysis of Open Microstrip Discontinuities Including the Singular Current-Edge Behavior". IEEE MTT Vol.41, N°9, September 1993, pp.1581-1588.
- [4] C.Delabie: " Contribution à l'étude des résonateurs plaqués pour circuits microondes".Mémoire de DEA à l'USTL, Villeneuve d'Ascq, le 13 Juillet 1990.
- [5] E. Paleczny: " Modélisation des pertes métalliques par le raccordement de modes: application aux lignes planaires utilisées en technologie monolithique mic roonde." Thèse de Doctorat de l'Université des Sciences et Techniques de Lille, Septembre 1992.
- [6] D.Kinowski: " Etude comparative de l'approche dans le domaine spectral et d'une formulation par éléments finis pour la simulation de dispositifs microondes et optroniques". Thèse de Doctorat de l'Université des Sciences et Technologies de Lille, le 18 décembre 1992.
- [7] D.Kinowski, P.Pribetich, P.Kennis: " Finite element analysis of superconducting microstrip lines for MMIC applications". MOTL, Vol.5, N°8, pp.369-371, Juillet 1992.
- [8] M.Laguës *et al.*, Science, 262,1850, 1993 et J.L. Tholence *et al.* Phys. Letter A, 184, 215, 1994.
- [9] J.M. Ponds, C.M. Krowne,W.L. Carter: " On the Application of Complex Resistive Boundary Conditions to Model Transmission Lines Consisting of Very Thin Superconductors". IEEE *trans. on Magn.* Vol.37, N°1, pp.181-189, January 1989
- [10] F.Huret, D.Kinowski, C.Seguilot, P.Pribetich, P.Kennis: " Influence des supraconducteurs sur les caractéristiques de propagation de la ligne microruban pour circuits intégrés microondes". J.N.M , Montpellier, pp.173-174, 22-23 Juin 1989.
- [11] R.Faraji-Dana, Y.L. Chow: " The Current Distribution and AC Resistance of a Microstrip Structure". IEEE MTT Vol.38, N°9, pp.1268-1277, September 1990
- [12] C.Delabie, Y.Delplanque, P.Pribetich, P.Kennis: " Equivalent Surface Impedance of Superconducting and Regular Strips for Moment Method Analysis of Planar Circuits". 24th Europ. Microw. Conf., Cannes, 5-8 Sept.1994.

## CHAPITRE PREMIER

# CHAPITRE PREMIER

## I-1 INTRODUCTION

La conception des circuits intégrés monolithiques micro-ondes nécessite de déterminer avec précision les caractéristiques de chacun des éléments les constituant.

Au sein de ces circuits les résonateurs, s'incluant facilement avec la plupart des autres éléments passifs par la technique de photogravure, sont largement utilisés.

Les méthodes d'analyse simplifiées des résonateurs imprimés rectangulaires, telles que le modèle à ligne de transmission ou à cavité, prédisent avec une relative précision leur fréquence de résonance. Malheureusement, ces méthodes ignorent le plus souvent les phénomènes liés à la présence de l'excitation, ce qui les rend difficilement applicables pour le calcul de l'impédance d'entrée et imprécis pour calculer les diagrammes de rayonnement des antennes imprimées.

Dans ce chapitre, nous rappelons les phases essentielles de l'analyse d'un résonateur microruban, basée sur la résolution d'équations intégrales par la méthode des moments.

Incluant dans notre analyse la présence du dispositif d'alimentation, notre but a été d'accéder avec une précision maximale au comportement de telles structures. Néanmoins, les phénomènes liés aux valeurs non nulles de la résistivité des conducteurs employés (métalliques ou supraconducteurs) ont été, pour des raisons de présentation, exposés dans le troisième chapitre de ce mémoire.

## **I-2 L'APPROCHE DANS LE DOMAINE SPECTRAL**

### **I-2-1 PRESENTATION GENERALE**

La structure étudiée est présentée figure I-1. Il s'agit d'un résonateur rectangulaire en structure microruban, excité par une ligne microruban ou une sonde coaxiale. Le résonateur proprement dit (plaque P de surface  $S_p$ ) est constitué d'un conducteur métallique d'épaisseur  $t$ , séparé d'un plan de masse M par une couche de matériau diélectrique (région 1) dont la permittivité  $\epsilon_1$  complexe et tensorielle permet la prise en compte des pertes par effet Joule et d'une anisotropie éventuelle.

Le demi-espace supérieur est constitué d'un autre matériau diélectrique (région 2) de permittivité  $\epsilon_2$ , l'air ou le vide étant généralement considérés. Il peut être limité par un court-circuit électrique (CCE) ou magnétique (CCM) en  $z=h_2$ .

Le modèle d'étude est représenté figure I-1(b-c). La plaque rectangulaire P, que nous supposons dans un premier temps parfaitement conductrice et infiniment mince, et déposée dans le plan  $z=0$ . Excitée par une ligne microruban (figure I-1a) ou une sonde coaxiale (figure I-1b) au point E ( $x_E, y_E$ ), elle est le support de la distribution surfacique de courant  $\vec{J}_p(x, y, 0)$ .

L'analyse fréquentielle du problème s'opère grâce à la technique des équations intégrales liant le champ électrique diffracté  $\bar{E}_p(x,y,z)$  par le courant sur la plaque au champ électrique généré par la présence du dispositif d'excitation  $\bar{E}_s(x,y,z)$ . La fonction dyadique de Green  $\bar{g}(x,y,x',y')$  permet d'exprimer  $\bar{E}_p(x,y)$  en  $z=0$  par l'intégrale:

$$\bar{E}_{p_{z=0}}(x,y) = \int_{-W_x/2}^{W_x/2} \int_{-W_y/2}^{W_y/2} \bar{g}(x,y,x',y') \cdot \bar{J}_p(x',y') dx' dy' \quad (I-1)$$

Cette fonction de Green dépend de façon générale de toutes les constantes électriques et géométriques du modèle d'étude, et nécessite une écriture mathématique complexe. L'étude du problème dans le domaine transformé de Fourier deux dimensions (ou domaine spectral) permet de simplifier dans une large mesure le développement numérique de la solution en permettant une expression analytique simple de la fonction de Green [1].

L'expression des différentes grandeurs électromagnétiques dans le domaine spectral s'opère grâce à la transformée de Fourier 2D suivante:

$$\bar{F}(\alpha,\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y) e^{j(\alpha x + \beta y)} dx dy$$

$$F(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{F}(\alpha,\beta) e^{-j(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta \quad (I-2)$$

$F(x,y)$  fonction complexe devant satisfaire aux conditions suivantes:

- F(x,y) est une fonction sommable des deux variables x et y;
- F(x,y) est continue et dérivable (de dérivées sommables) .

### I-2-2 L'EQUATION INTEGRALE A RESOUDRE:

La mise en oeuvre d'une équation intégrale propre à résoudre le problème posé s'effectue généralement en considérant pour les conducteurs des courts circuits électriques parfaits. Le champ électrique présent dans la structure s'écrit comme la somme du champ électrique généré par le dispositif d'excitation  $E_S(x,y,z)$  et du champ électrique diffracté par la plaque résonnante de surface  $S_P$ . La distribution de la densité surfacique de courant est identiquement nulle en dehors de la surface de la plaque P. Une équation intégrale souvent utilisée dans la littérature est alors écrite en considérant que le produit scalaire entre le champ électrique total et la densité de courant  $\vec{J}_P$  est nul en chaque point de l'interface où se situe le conducteur. L'intégrale de cette quantité sur toute l'interface est elle aussi nulle et nous obtenons:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\vec{E}_P + \vec{E}_S) \cdot \vec{J}_P dx dy = 0 \quad (I-3)$$

Une solution plus simple consiste à utiliser le théorème de réaction de Rumsey [2]. Il décrit les interactions entre deux distributions de courant volumique par le biais du champ électromagnétique créé par chacune d'elles. En l'absence de courant magnétique, il s'énonce comme suit:

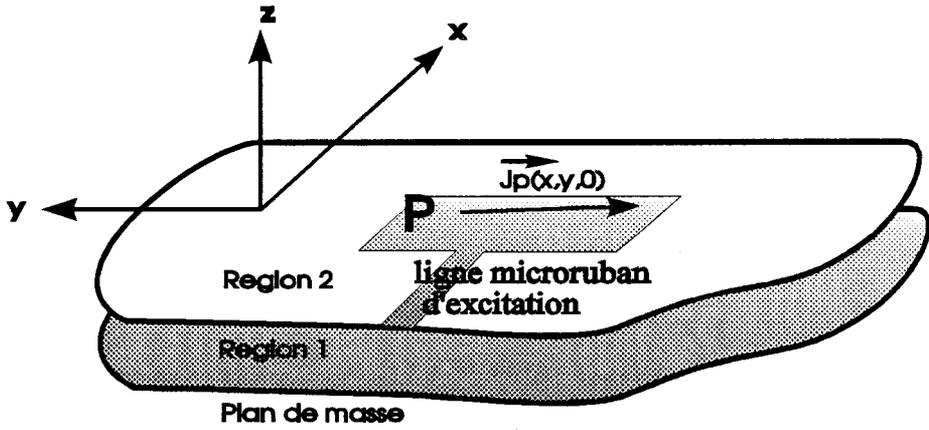


figure I-1a: Vue en perspective

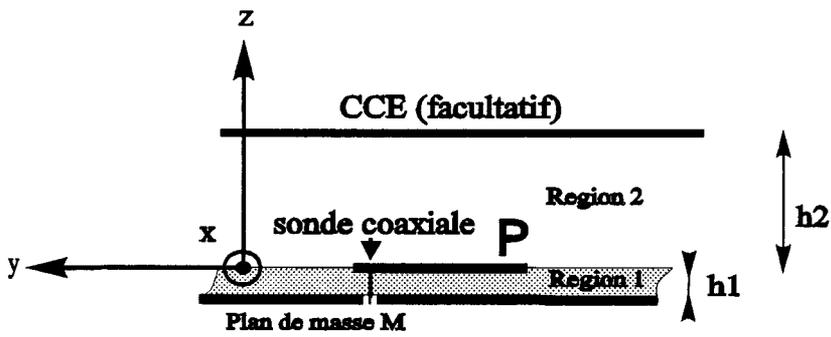


figure I-1b: Coupe dans un plan  $x=cte$

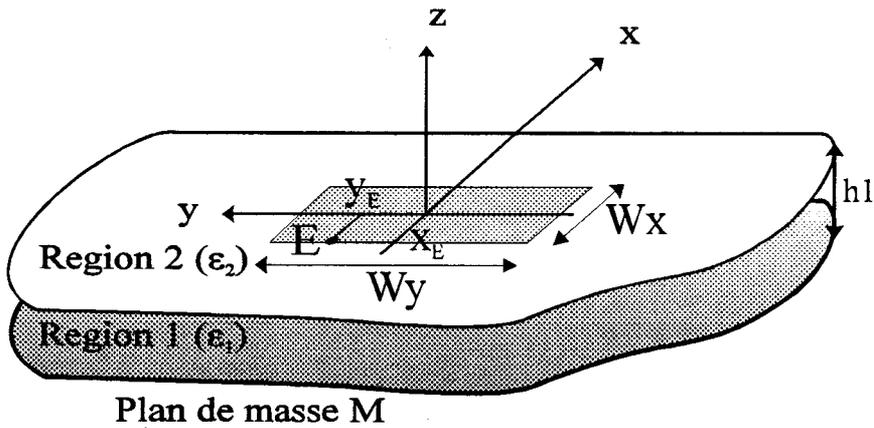


figure I-1c: Modèle d'étude

Figure I-1: Structures étudiées et modèles d'études

Soit deux distributions de densité de courant volumique  $\bar{J}_a$  et  $\bar{J}_b$  respectivement contenues dans les volumes  $V_a$  et  $V_b$ , la réaction de  $\bar{J}_a$  sur  $\bar{J}_b$  est définie par le complexe:

$$\langle \bar{J}_a, \bar{J}_b \rangle = \iiint_{V_A} \bar{E}_b \cdot \bar{J}_a dv \quad (I-4)$$

où  $\bar{E}_b$  représente le champ électrique généré par la source de courant  $\bar{J}_b$  sur la source A.

A une fréquence donnée, pour des milieux linéaires et passifs, le théorème de réaction stipule que pour les sources  $\bar{J}_a$  et  $\bar{J}_b$  :

$$\langle \bar{J}_a, \bar{J}_b \rangle = \langle \bar{J}_b, \bar{J}_a \rangle \quad (I-5)$$

L'application du principe de réciprocité à la structure étudiée nous permet d'écrire l'égalité (I-5) pour les distributions de courant surfacique sur la plaque  $\bar{J}_p$  et sur la source  $\bar{J}_s$ .

$$\iint_{S_{source}} \bar{E}_p \cdot \bar{J}_s ds = \iint_{S_{plaque}} \bar{E}_s \cdot \bar{J}_p ds \quad (I-6)$$

- avec:
- $\bar{J}_s$  densité superficielle de courant modélisant l'excitation
  - $\bar{J}_p$  densité superficielle de courant inconnue sur la plaque P
  - $\bar{E}_p$  champ électrique crée par  $\bar{J}_p$  sur la surface de la source
  - $\bar{E}_s$  champ électrique crée par  $\bar{J}_s$  sur la surface de la plaque P, en l'absence de la plaque.

Dans le cas où nous considérons au niveau de l'excitation un dipôle électrique orienté suivant l'axe Oz, noté  $\bar{J}_{s_z}$ , cette équation impose de calculer la

fonction de Green du champ électrique tangent à la plaque P créée par un dipôle vertical:

$$\begin{pmatrix} E_{s_x} \\ E_{s_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{x,z} \\ G_{x,z} \end{pmatrix} (J_{sz}) \quad (I-7)$$

Une simplification de l'équation (I-6) s'impose dans l'hypothèse où les matériaux conducteurs sont parfaits. Le champ électrique tangent à la plaque P est alors nul et donc:

$$|x| < \frac{W_x}{2}; |y| < \frac{W_y}{2} \Rightarrow (\vec{E}_S(x, y, 0) + \vec{E}_P(x, y, 0)) \times \vec{z} = \vec{0} \quad (I-8)$$

soit:

$$\begin{aligned} E_{px}(x, y, 0) &= -E_{sx}(x, y, 0) \\ E_{py}(x, y, 0) &= -E_{sy}(x, y, 0) \end{aligned} \quad (I-9)$$

L'application de (I-9) nous dispense de calculer la fonction de Green du dipôle vertical (I-7). Un synoptique résume brièvement, **figure I-2**, les différents choix possibles quant à la formulation intégrale et au domaine dans lequel est projeté le problème.

L'équation intégrale obtenue dans le domaine réel est:

$$\iint_{S_{source}} \vec{E}_P \cdot \vec{J}_S ds + \iint_{S_{Plaque}} \vec{E}_P \cdot \vec{J}_P ds = 0 \quad (I-10)$$

L'écriture de l'équation intégrale dans le domaine transformé de Fourier s'effectue en remarquant que les surfaces d'intégration  $S_{source}$  et  $S_{plaque}$

peuvent être étendues à des plans infinis et en appliquant le théorème de Parseval. L'équation intégrale dans le domaine transformé de Fourier s'écrit alors:

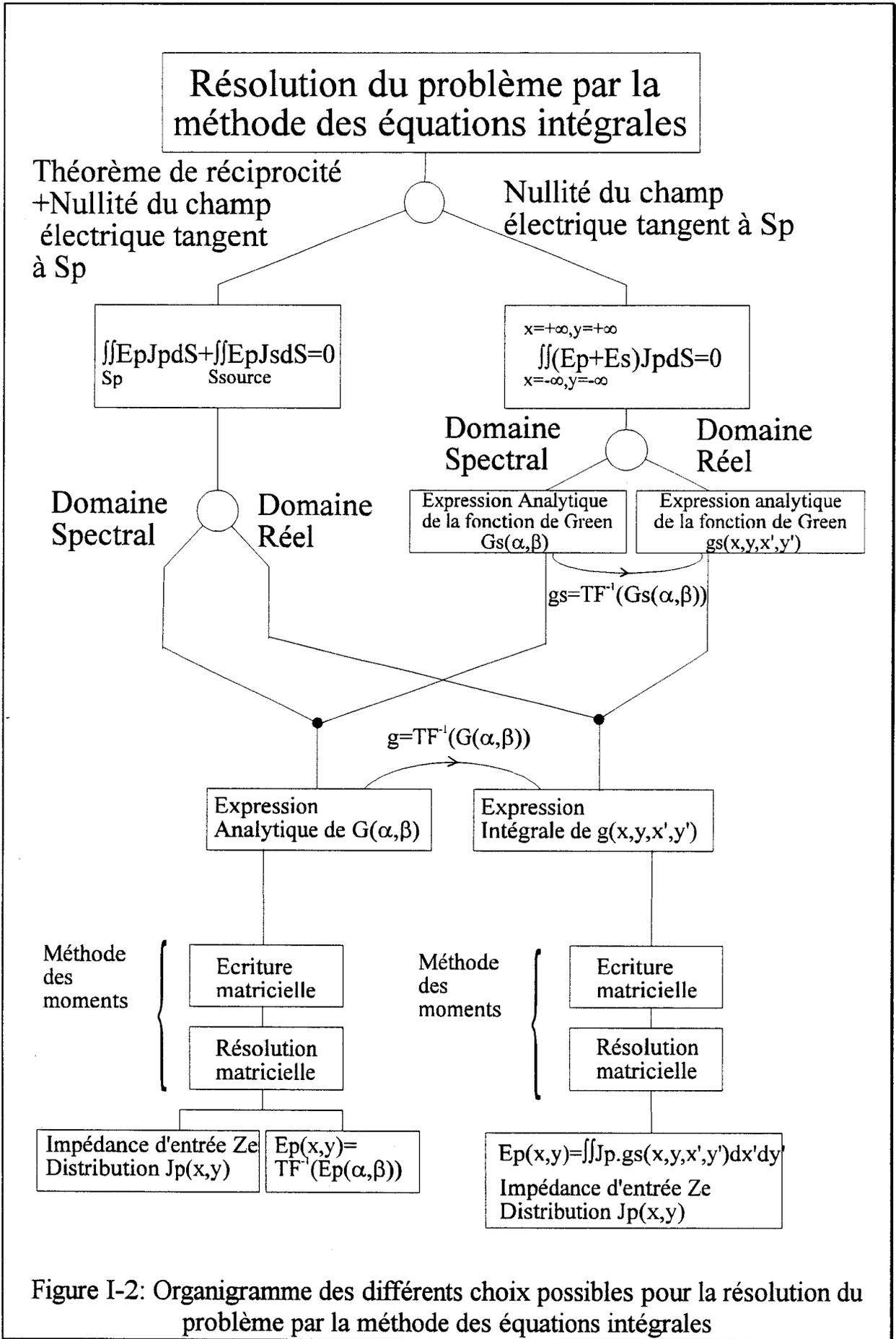
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-h_1}^0 \tilde{\tilde{E}}_p(\alpha, \beta) \cdot \tilde{\tilde{J}}_s^*(\alpha, \beta) d\alpha d\beta dz + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\tilde{E}}_p(\alpha, \beta) \cdot \tilde{\tilde{J}}_p^*(\alpha, \beta) d\alpha d\beta = 0 \quad (I-11)$$

La source de courant d'excitation  $\tilde{\tilde{J}}_s(\alpha, \beta)$  imposée, la résolution de cette équation intégrale permet l'accès à la répartition totale du champ électromagnétique, ainsi qu'à l'impédance d'entrée de la structure. C'est le régime forcé généralement qualifié de déterministe.

En l'absence de source,  $\tilde{\tilde{J}}_s(\alpha, \beta) = 0$  et il résulte de (I-11):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\tilde{E}}_p(\alpha, \beta) \cdot \tilde{\tilde{J}}_p^*(\alpha, \beta) d\alpha d\beta = 0 \quad (I-12)$$

Dans ce cas, le résonateur évolue de façon autonome, les solutions non triviales de (I-12) décrivent l'état découplé du système après une impulsion d'excitation: c'est le régime libre. Ces deux types d'étude sont précisés au paragraphe I-3.



### I-2-3 LA FONCTION DYADIQUE DE GREEN

On résoud l'équation intégrale en disposant d'une relation liant le champ électrique  $\vec{E}_p(x,y,0)$  à la densité de courant  $\vec{J}_p(x,y,0)$ . La fonction dyadique de Green  $\vec{G}(\alpha,\beta)$  exprime, dans le domaine transformé de Fourier, les composantes tangentielles de  $\vec{E}_p(\alpha,\beta)$ :  $\vec{E}_{px}(\alpha,\beta)$  et  $\vec{E}_{py}(\alpha,\beta)$ , en fonction des composantes  $\vec{J}_{px}(\alpha,\beta)$  et  $\vec{J}_{py}(\alpha,\beta)$  de la densité de courant  $\vec{J}_p(\alpha,\beta)$ :

$$\begin{pmatrix} \vec{E}_x(\alpha,\beta) \\ \vec{E}_y(\alpha,\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{xx}(\alpha,\beta) & G_{xy}(\alpha,\beta) \\ G_{yx}(\alpha,\beta) & G_{yy}(\alpha,\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{J}_x(\alpha,\beta) \\ \vec{J}_y(\alpha,\beta) \end{pmatrix} \quad (\text{I-13})$$

L'intérêt de l'approche dans le domaine spectrale réside essentiellement dans la possibilité de pouvoir exprimer cette fonction analytiquement.

Le calcul des composantes de la fonction de Green dyadique peut se mener de deux façons:

- Par l'écriture des champs électriques et magnétiques décomposés en ondes TE/z et TM/z et application des conditions de continuité aux interfaces  $z=-h_1$ ,  $z=0$  et en  $z=+h_2$  en présence d'un capot métallique supérieur [1].

- Par la méthode de la résonance transverse. Dans ce cas un formalisme de type "ligne de transmission" permet un calcul rapide du champ électrique  $\vec{E}_p$  lorsqu'un courant test  $\vec{J}_p$  est placé à l'interface  $z=0$  [3][4].

Dans le cas de substrats anisotropes uniaxes, la méthode de la résonance transverse reste applicable.

En effet, les matériaux supraconducteurs à haute température critique, dont l'étude fait l'objet du chapitre troisième, nécessitent d'être déposés sur des matériaux diélectriques présentant les caractéristiques suivantes [5][6]:

- une permittivité électrique élevée, dans le but de réduire les pertes par rayonnement en même temps que les dimensions des circuits, en vue d'applications miniaturisées.

- une bonne tenue des propriétés au cours du vieillissement.

- un bon accrochage des films minces supraconducteurs et des paramètres de maille entre substrat et matériau supraconducteur similaires.

- une tangente de pertes extrêmement faible afin de ne pas réduire les potentialités qu'offrent les matériaux supraconducteurs.

A ce jour, il semble [7] qu'un seul matériau remplissent ces conditions: le composé  $\text{LaAlO}_3$ . Ce matériau uniaxe présente un tenseur permittivité qui s'écrit:

$$\overline{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{//} & & \\ & \varepsilon_{//} & \\ & & \varepsilon_{\perp} \end{pmatrix} \quad (\text{I-14})$$

avec  $\varepsilon_{//} \neq \varepsilon_{\perp}$

L'annexe A traite du calcul de la fonction de Green dans le cas de l'anisotropie uniaxiale suivant z. Considérons en premier lieu le calcul de  $\overline{\overline{G}}$  dans le cas d'un substrat diélectrique isotrope.

L'équation d'Helmholtz pour le champ électromagnétique  $[\mathbf{E}, \mathbf{H}]_i$  dans le milieu linéaire linéaire, homogène, isotrope et libre de source s'écrit:

$$\nabla^2 [\bar{E}, \bar{H}]_i + k_i^2 [\bar{E}, \bar{H}]_i = 0 ; \quad k_i^2 = \omega^2 \epsilon_i \mu_0 \quad (\text{I-15})$$

Appliquons les propriétés de la transformée de Fourier 2D définie par l'équation (I-2) aux calculs de dérivées:

$$\begin{aligned} \text{TF} \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right) &= -j\alpha \tilde{A}; & \text{TF} \left( \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \right) &= -\alpha^2 \tilde{A} \\ \text{TF} \left( \frac{\partial A}{\partial y} \right) &= -j\beta \tilde{A}; & \text{TF} \left( \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right) &= -\beta^2 \tilde{A} \end{aligned} \quad (\text{I-16})$$

Le champ électromagnétique dans l'espace transformé  $[E, H]_i(\alpha, \beta)$  est alors solution de l'équation:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \alpha^2 - \beta^2 + k_i^2 \right] [\bar{E}(\alpha, \beta, z), \bar{H}(\alpha, \beta, z)]_i = 0 \quad (\text{I-17})$$

En posant  $\gamma_z^2 = \delta^2 / \delta z^2$ , et en supposant que la région 2 s'étende jusqu'en  $z = +\infty$ , le champ électromagnétique exprimé dans l'espace réel s'écrit:

$$[\bar{E}, \bar{H}]_2(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [\bar{E}, \bar{H}]_2(\alpha, \beta) e^{-j(\alpha x + \beta y - j\gamma_z z)} d\alpha d\beta \quad (\text{I-18})$$

cette expression traduit une superposition d'ondes inhomogènes se propageant dans une direction définie par le vecteur:

$$\bar{k} = \alpha \bar{x} + \beta \bar{y} - j\gamma \bar{z} \quad (\text{I-19})$$

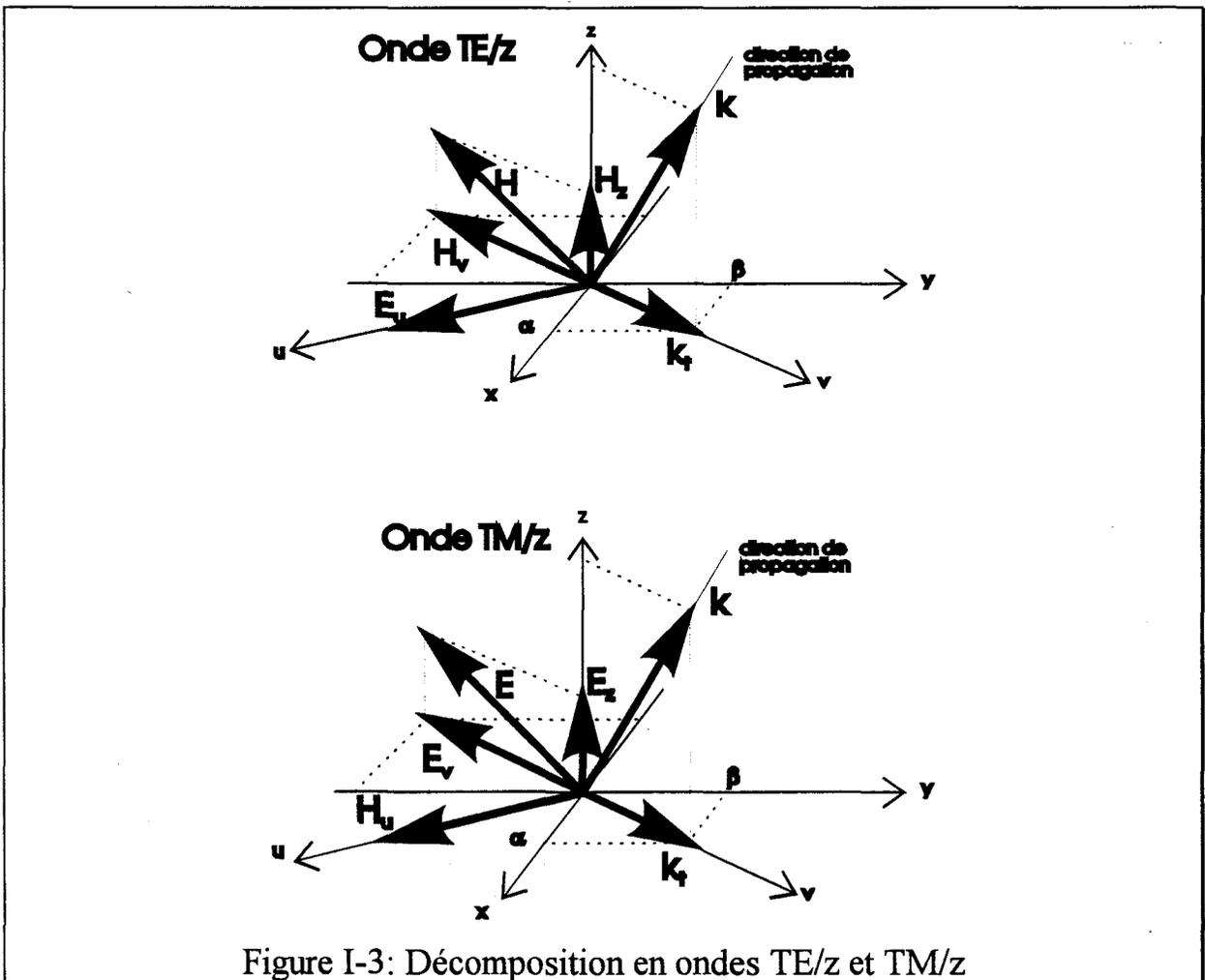
où  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  sont les vecteurs unités suivant les trois directions.

Le choix de la solution de:

$$\gamma_z = \sqrt{\gamma_z^2} \quad (\text{I-20})$$

est déterminé par la nécessaire convergence de l'intégrale (I-18) lorsque  $z$  tend vers l'infini, ce qui impose  $\text{Re}(\gamma_z)$  positif. En fait, ce choix obéit à d'autres conditions examinées en détail au paragraphe I-4, selon que l'on considère un fonctionnement en régime libre ou en régime forcé.

Pour chaque couple de valeurs  $(\alpha, \beta)$ , le champ  $[E, H]_i(\alpha, \beta)$  est décomposé en une onde TE/z et TM/z se propageant dans la direction donnée par le vecteur  $\vec{k}$  (figure I-3).



Afin d'exprimer plus simplement les relations entre la densité de courant  $\vec{J}_p(\alpha,\beta)$  et le champ électrique  $\vec{E}_p(\alpha,\beta)$ , il est utile de remarquer que le champ magnétique tangent au plan  $[x,y]$  dans le cas d'une onde TE/z (respectivement le champ électrique tangent dans le cas d'une onde TM/z) est colinéaire au vecteur  $\vec{k}_t = \alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$ ; et d'effectuer le changement de repère  $(0,x,y,z)$  dans  $(0,u,v,z)$  (figure I-3 et I-4).

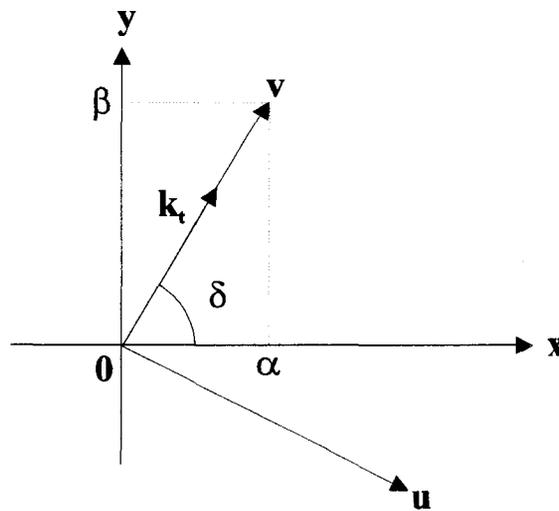


Figure I-4: Changement de repère pour le calcul de la fonction de Green

Dans ce repère, l'écriture de l'équation de Maxwell-Faraday dans le cas de l'onde TE/z conduit à:

$$-j\omega\mu_0\vec{H}_v = -\gamma_i\vec{E}_u \quad (\text{I-21})$$

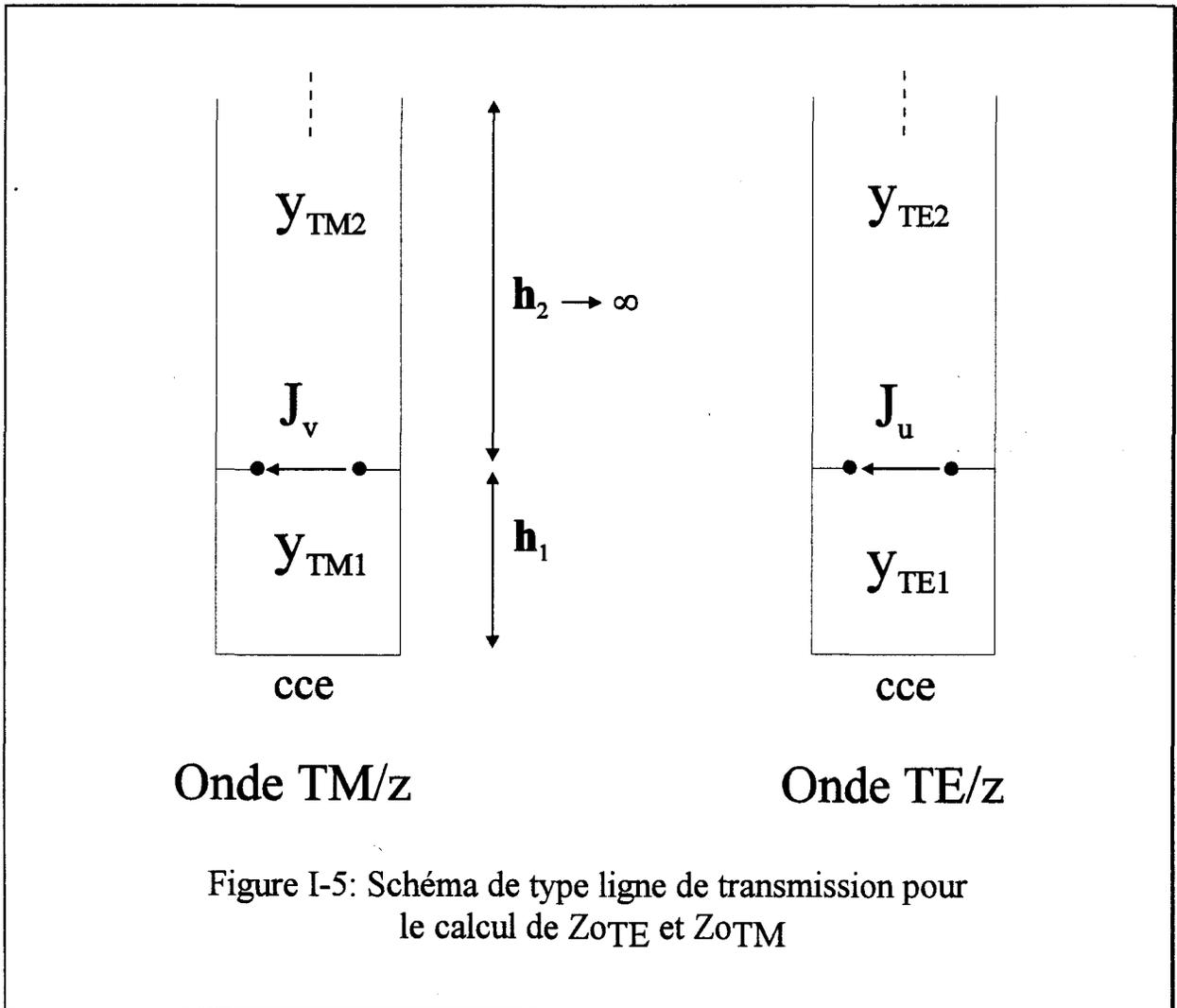
On définit alors l'admittance d'onde  $Y_{\text{TE/z}}$  comme le rapport:

$$Y_{\text{TE/z}} = -\frac{\vec{H}_v}{\vec{E}_u} = -\frac{\gamma_i}{j\omega\mu_0} \quad (\text{I-22})$$

De la même façon; l'écriture de l'équation de Maxwell-Ampère dans le cas d'une onde TM/z mène à:

$$Y_{TM/z} = \frac{\tilde{H}_u}{\tilde{E}_v} = -\frac{j\omega\epsilon_i}{\gamma_i} \quad (I-23)$$

Les composantes transverses  $\tilde{E}_u, \tilde{E}_v, \tilde{H}_u, \tilde{H}_v$  des ondes TE/z et TM/z satisfont les équations des lignes de transmission de sorte qu'il est possible de schématiser, pour chaque couple  $(\alpha, \beta)$ , les milieux que l'on considère par des tronçons de ligne de propagation (**figure I-5**) [4].



L'impédance  $Z_{0_{TE/z}}$  définie par le rapport:  $Z_{0_{TE/z}} = E_u / J_u$  (cf. figure I-3 et I-5) a alors pour expression:

$$Z_{0_{TE/z}} = \frac{1}{Y_{0_{TE/z}^+} + Y_{0_{TE/z}^-}} \quad (I-24)$$

avec  $-Y_{0_{TE}^+}$  admittance vue par la source  $J_u$  vers les  $z$  positifs

$-Y_{0_{TE}^-}$  admittance vue par la source  $J_u$  vers les  $z$  négatifs

La théorie des lignes permet d'exprimer  $Y_{0_{TE}^+}$  et  $Y_{0_{TE}^-}$  en termes d'admittance ramenée par les différents milieux. Dans le cas de la figure I-1-a, ces admittances ont pour expressions:

$$Z_{0_{TE/z}} = \frac{1}{Y_{TE2} + Y_{TE1} \coth(\gamma_1 h_1)} \quad (I-25)$$

$$Z_{0_{TM/z}} = \frac{1}{Y_{TM2} + Y_{TM1} \coth(\gamma_1 h_1)}$$

En remplaçant  $J_u, J_v$  et  $E_u, E_v$  par leurs expressions déduites de la rotation du repère  $(0, x, y, z)$  sur  $Oz$ , les composantes de la fonction de Green  $\overline{G}(\alpha, \beta)$  (I-13) sont déterminées:

$$\begin{aligned} G_{xx}(\alpha, \beta) &= (Z_{0_{TM/z}} \cos^2 \delta + Z_{0_{TE/z}} \sin^2 \delta) \\ G_{xy}(\alpha, \beta) &= G_{yx}(\alpha, \beta) = (Z_{0_{TM/z}} - Z_{0_{TE/z}}) \cdot \sin \delta \cdot \cos \delta \\ G_{yy}(\alpha, \beta) &= (Z_{0_{TE/z}} \cos^2 \delta + Z_{0_{TM/z}} \sin^2 \delta) \end{aligned} \quad (I-26)$$

$$\text{avec: } \cos^2 \delta = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2}; \sin^2 \delta = \frac{\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}; \cos \delta \cdot \sin \delta = \frac{\alpha \beta}{\alpha^2 + \beta^2}$$

## I-24 RESOLUTION DE L'EQUATION INTEGRALE PAR LA METHODE DES MOMENTS

La résolution de l'équation intégrale (I-11):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-h_1}^0 \bar{\bar{E}}_p(\alpha, \beta) \cdot \bar{\bar{J}}_s^*(\alpha, \beta) d\alpha d\beta dz + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\bar{E}}_p(\alpha, \beta) \cdot \bar{\bar{J}}_p^*(\alpha, \beta) d\alpha d\beta = 0$$

s'opère grâce à la méthode des moments classique de Galerkin [8] pour laquelle les fonctions de test sont égales aux fonctions de base. Dans le domaine réel, les distributions de courant  $\bar{J}_{p_x}(x,y)$  et  $\bar{J}_{p_y}(x,y)$  sont approchées par une somme de N fonctions de base, associées aux coefficients de pondération  $I_i$  inconnus:

$$\bar{J}_{p_{x,y}} = \sum_{i=1}^N I_i \bar{J}_{P_{i,x,y}}(x,y) \quad (I-27)$$

La linéarité de la transformée de Fourier permet d'écrire pour l'expression transformée de  $\bar{J}_p(x,y)$  :

$$\bar{J}_{p_{x,y}}(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^N I_i \bar{J}_{P_{i,x,y}}(\alpha, \beta) \quad (I-28)$$

L'équation intégrale se transforme alors en un système de N équations par l'écriture du théorème de réaction entre la densité de courant source et chaque fonction de base:



pour lequel  $I_1, I_2, \dots, I_N$ , coefficients de pondération des fonctions de base, constituent les inconnues du système.

$Z_{ij}$  sont quant à eux les termes de réaction entre la fonction de base  $j$  et la fonction de test  $i$ :

$$\begin{aligned} Z_{i,j} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\bar{E}}_j(\alpha, \beta) \cdot \bar{\bar{J}}_i^*(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\bar{G}}(\alpha, \beta) \bar{\bar{J}}_j(\alpha, \beta) \cdot \bar{\bar{J}}_i^*(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (I-32)$$

Le vecteur  $[V_1, V_2, \dots, V_N]$  constitue le second membre du système et traduit les réactions de chaque fonction de test  $J_i$  avec la densité de courant d'excitation  $J_S$ :

$$V_i = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-h_1}^0 \bar{\bar{E}}_i p_i(\alpha, \beta, z) \cdot \bar{\bar{J}}_S^*(\alpha, \beta, z) d\alpha d\beta dz \quad (I-33)$$

### I-25 CHOIX DES FONCTIONS DE BASE:

Les fonctions de base utilisées dans ce chapitre définissent chacune la surface rectangulaire de la plaque résonnante  $P$ . Certains auteurs préconisent une approximation du courant  $\bar{J}_p(x, y)$  sur la plaque par l'utilisation de polynômes de Legendre, afin de tenir compte des effets de bord du courant. Ils remarquent qu'alors leurs transformées de Fourier s'expriment en fonctions de Bessel à décroissance plus rapide que les fonctions sinus et cosinus [9].

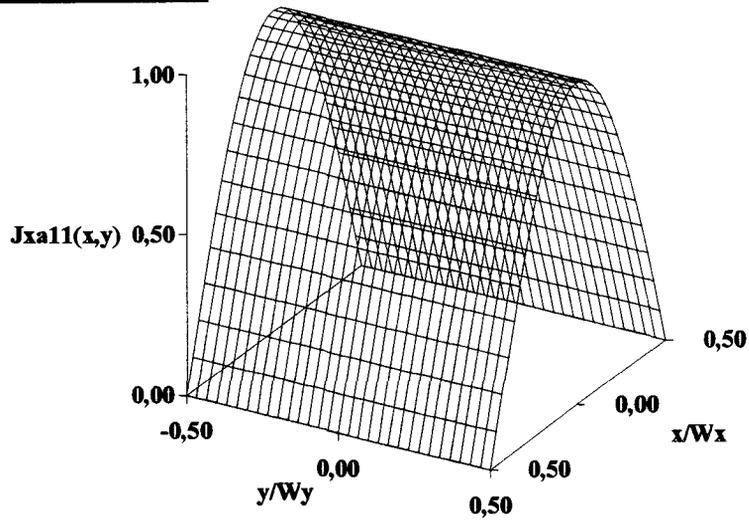
La prise en compte des effets de bord, pertinente dans le cas de conducteur de faible largeur (ligne de propagation microruban), n'est pas retenue par de nombreux auteurs qui se contentent de fonctions de base plus simples dans

le cas du résonateur rectangulaire. Les résultats obtenus en régime libre comme en régime forcé ne varient d'ailleurs presque pas lorsque l'on tient compte des effets de bord; et une seule fonction de base est souvent suffisante pour retrouver les résultats expérimentaux [10][11]. De plus le calcul précis des fonctions de Bessel cylindriques à arguments complexes (comme nous le verrons au paragraphe I-4) s'opère par développements limités et prend numériquement un temps de calcul largement supérieur à celui des fonctions de base exprimées en cosinus et sinus. La présence de la ligne microruban d'excitation perturbe par contre fortement la distribution de courant  $J_p$  au voisinage de la connexion [12] et, de fait, brise la symétrie du problème. Pour cette raison, nous avons décomposé chaque composante  $J_{px}$  et  $J_{py}$  de  $J_p$  en quatre groupes présentant chacun une parité suivant  $x$  et  $y$  différentes:

$$\begin{aligned}
 J_{xa_{r,s}} &= \cos\left(2(r-1)\pi\frac{y}{W_y}\right) \cos\left((2s-1)\pi\frac{x}{W_x}\right) \\
 J_{xb_{r,s}} &= \cos\left(2(r-1)\pi\frac{y}{W_y}\right) \sin\left(2s\pi\frac{x}{W_x}\right) \\
 J_{xc_{r,s}} &= \sin\left(2r\pi\frac{y}{W_y}\right) \cos\left((2s-1)\pi\frac{x}{W_x}\right) \\
 J_{xd_{r,s}} &= \sin\left(2r\pi\frac{y}{W_y}\right) \sin\left(2s\pi\frac{x}{W_x}\right) \\
 J_{ya_{r,s}} &= \cos\left((2r-1)\pi\frac{y}{W_y}\right) \cos\left(2(s-1)\pi\frac{x}{W_x}\right) \\
 J_{yb_{r,s}} &= \cos\left((2r-1)\pi\frac{y}{W_y}\right) \sin\left((2s-1)\pi\frac{x}{W_x}\right) \\
 J_{yc_{r,s}} &= \sin\left(2r\pi\frac{y}{W_y}\right) \cos\left(2(s-1)\pi\frac{x}{W_x}\right) \\
 J_{yd_{r,s}} &= \sin\left(2r\pi\frac{y}{W_y}\right) \sin\left((2s-1)\pi\frac{x}{W_x}\right)
 \end{aligned} \tag{I-34}$$

Les expressions transformées de ces fonctions sont réunies dans l'annexe B. Les fonctions  $J_{xa_{1,1}}$ ,  $J_{xc_{1,2}}$ ,  $J_{ya_{1,1}}$  et  $J_{yc_{2,1}}$  sont représentées **figures I-6 et I-7**.

**Fonction de Base  $J_{xa11}(x,y)$**



**Fonction de base  $J_{xc12}(x,y)$**

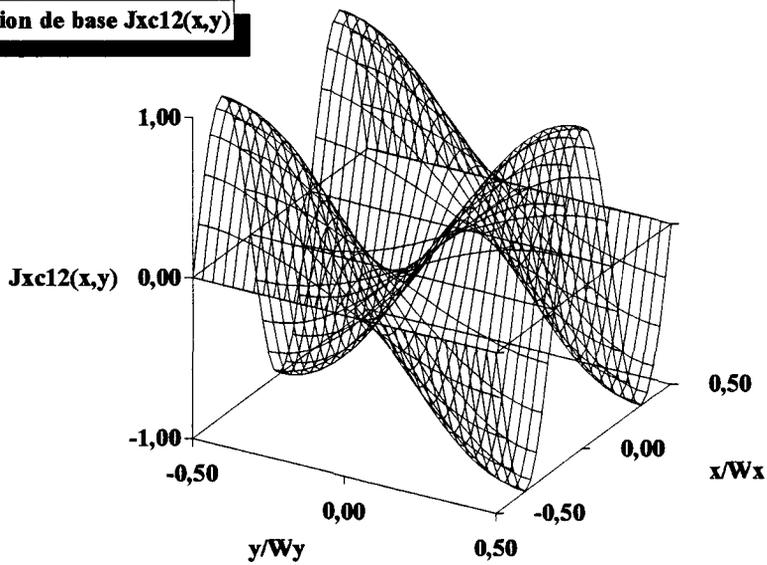
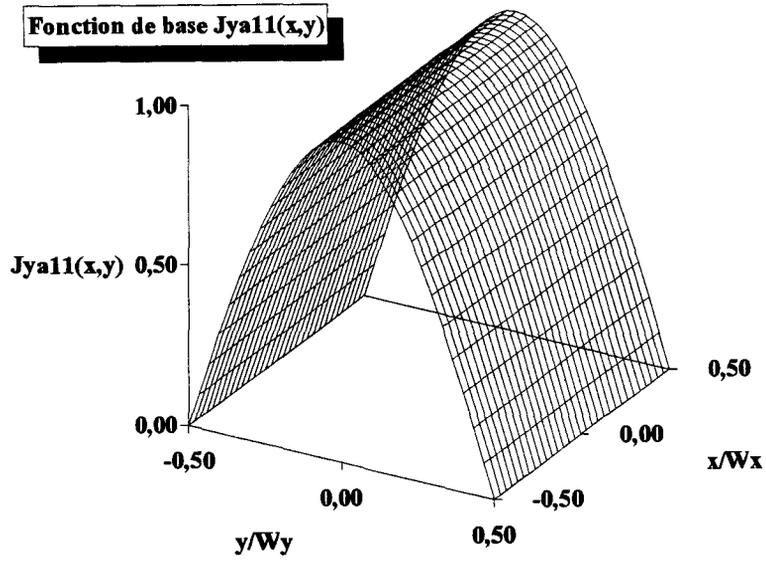


Figure I-6: Evolution des fonctions de base  $J_{xa11}(x,y)$  et  $J_{xc12}(x,y)$  selon  $x$  et  $y$

**Fonction de base  $J_{ya11}(x,y)$**



**Fonction de base  $J_{yc21}(x,y)$**

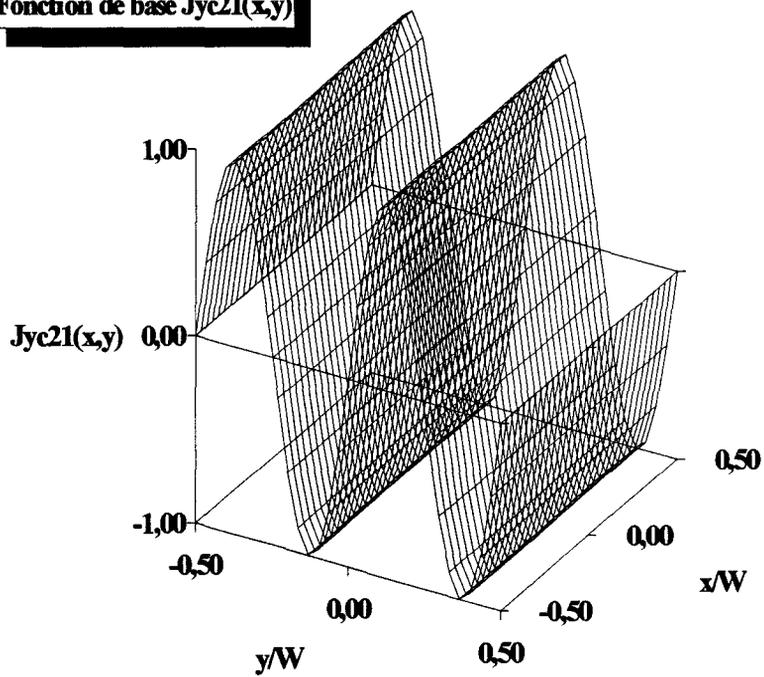


figure I-7: Evolution des fonctions de base  $J_{ya11}(x,y)$  et  $J_{yc21}(x,y)$  selon  $x$  et  $y$



Par analogie avec les circuits résonants à constantes localisées, le coefficient de qualité; par définition égal au rapport de la puissance emmagasinée sur la puissance dissipée par la structure, s'exprime simplement en régime libre par [13]:

$$Q_t = \frac{f_r}{2f_i} \quad (\text{I-38})$$

Afin de trouver les zéros du déterminant de  $[Z]$  dans le plan complexe de la fréquence, il est nécessaire de faire appel à un sous programme spécialisé. Deux méthodes sont couramment utilisées, l'une basée sur le théorème des résidus permet une recherche effective de zéros; tandis que l'autre, plus rapide et s'appuyant itérativement sur une interpolation polynomiale (méthode de Müller), oriente seulement la solution vers un minimum local.

### I-3-2 REGIME FORCE

Les deux types d'alimentation des circuits microruban les plus fréquemment rencontrés correspondent aux solutions technologique les plus pratiques:

#### I-3-2-1 l'excitation par une ligne coaxiale (figure I-8)

Pour des substrats suffisamment minces par rapport à la longueur d'onde dans l'espace libre, il est possible de considérer constant le courant sur l'âme de la sonde. La modélisation de celle-ci se ramène donc simplement à un courant

uniforme perpendiculaire au plan de masse M. Il est situé sur le pourtour du conducteur central et occupe ainsi la surface du cylindre de diamètre  $d_0$ .

La contribution selfique apportée par la sonde est ajoutée à l'impédance d'entrée calculée. La formule de Bailey permet une approche empirique de cette contribution [11]:

$$X_L = 60 k_0 h_1 \text{Log}\left(\frac{2}{k_0 d_0 \sqrt{\epsilon_{r1}}}\right)$$

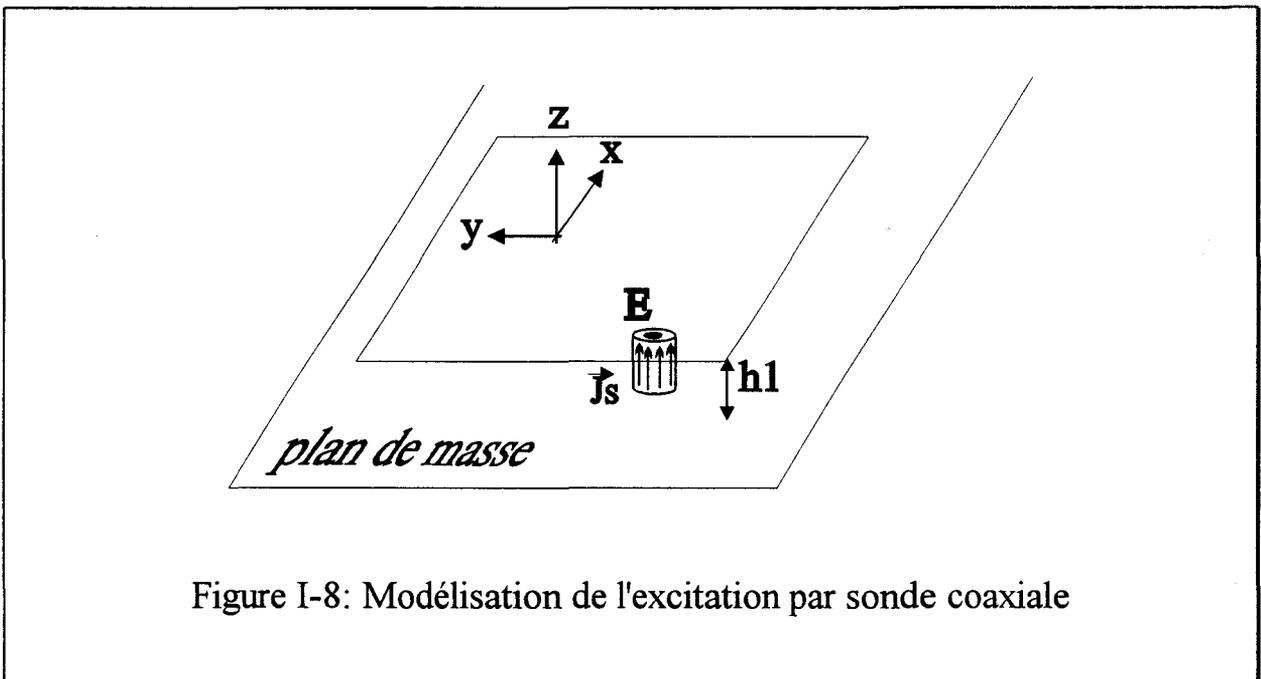


Figure I-8: Modélisation de l'excitation par sonde coaxiale

Nous ne considérerons cependant dans ce rapport que l'excitation par ligne microruban

### I-3-2-2 l'excitation par ligne microruban (figure I-9)

Une ligne microruban est simplement connectée sur l'un des bords de la plaque P. A partir du principe d'équivalence, elle peut être modélisée par un rideau de courant superficiel  $J_s$  occupant la surface définie dans le plan  $(E,y,z)$

par la largeur  $W$  de la ligne d'excitation et la hauteur  $h_1$  du substrat diélectrique (figure I-9).

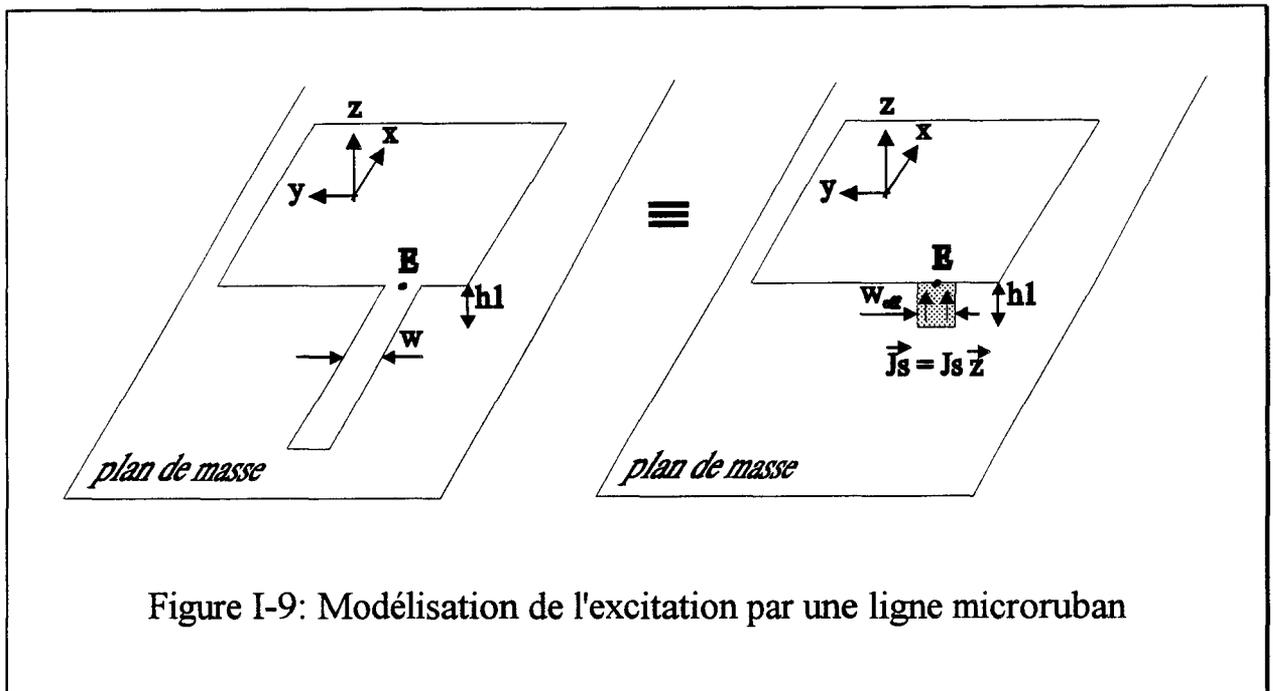


Figure I-9: Modélisation de l'excitation par une ligne microruban

L'équation de réaction appliquée à cette modélisation donne:

$$\iint_{S_{\text{source}}} \vec{E}_p \cdot \vec{J}_s ds = \iint_{S_{\text{plaque}}} \vec{E}_p \cdot \vec{J}_p ds \quad (\text{I-39})$$

Un mode TEM étant par hypothèse considéré pour la ligne microruban, le courant  $J_s$  peut être choisi colinéaire à  $Oz$  [14]. On peut néanmoins corriger cette approximation en choisissant une largeur effective  $W_{\text{eff}}$  supplantant  $W$ . Plusieurs formules empiriques existent pour le calcul de  $W_{\text{eff}}$ , voici celle que nous avons utilisée [9]:

$$W_{\text{eff}} = (W + 0,412 \frac{\epsilon_{\text{eff}} + 0,3}{\epsilon_{\text{eff}} - 0,258} \frac{W + 0,262h_1}{W + 0,813h_1} h_1) \quad (\text{I-40})$$

$\epsilon_{\text{eff}}$  représente la permittivité électrique effective de la ligne microruban, déterminée à partir d'analyses numériques ou d'expressions approchées désormais classiques [15][16]. Le courant d'excitation prend finalement la forme:

$$\tilde{J}_s(x, y, z) = J_s \delta(x - x_E) u(y - y_E, W_{\text{eff}}) u(z + h_1, h_1) \bar{z} \quad (\text{I-41})$$

avec:  $\delta(x)$  fonction de Dirac

$u(x, l)$  fonction créneau centrée en  $x$  et de largeur  $l$

Les termes de réaction  $V_i$  de l'équation matricielle (I-31) s'écrivent:

$$V_i = \int_{-\infty - \infty}^{+\infty + \infty} \int \left\{ \int_{-h_1}^0 E_{zi}(\alpha, \beta, z) \cdot J_s^*(\alpha, \beta, z) \right\} dz d\alpha d\beta \quad (\text{I-42})$$

Le calcul de la transformé de Fourier du rideau de courant source mène à:

$$\tilde{J}_s(\alpha, \beta) = \frac{2}{\pi\beta} e^{j(\alpha x_e + \beta y_e)} \sin\left(\frac{\beta W_{\text{eff}}}{2}\right) \quad (\text{I-43})$$

### I-3-2-3 Résolution du système matriciel:

La présence de l'excitation assure l'existence du second membre de l'équation matricielle (I-31), le problème est de fait déterministe:



$$Z_e = \frac{-\int_{-h_1}^0 E_{pz} \cdot I_s dz}{I_s^2} = \frac{-W \sum_{i=1}^N \int_{-h_1}^0 E_{pz_i} J_s dz}{W^2 J_s^2} \quad (I-45)$$

L'expression de  $\bar{J}_s(x,y,z)$  (I-41) permet d'écrire:

$$Z_e = \frac{-\int_{-h_1}^0 E_{pz} \cdot I_s dz}{I_s^2} = \frac{-\sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-h_1}^0 E_{pz_i} J_s dx dy dz}{W^2 J_s^2} \quad (I-46)$$

soit, dans l'espace transformé, à l'aide du théorème de Parseval:

$$Z_e = \frac{-\sum_{i=1}^N I_i V_i}{I_s^2} \quad (I-47)$$

## **I-4 CALCUL DES INTEGRALES DANS LE PLAN COMPLEXE DES VARIABLES D'INTEGRATION**

### **I-4-1 POSITION DU PROBLEME**

Comme l'a fait remarquer Sylvie Assailly [9], le calcul des intégrales de réactions  $Z_{ij}$  et de  $V_i$  dans l'espace transformé a été incorrectement effectué par différents auteurs. Ce calcul requiert en effet le choix correct de la branche de coupure lors de la détermination de la racine carrée de l'expression  $\gamma_z = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - k_i^2}$ , ainsi que la définition d'un parcours d'intégration complexe pour les variables  $\alpha$  et  $\beta$  qui réponde aux exigences mathématiques et physiques posées par la modélisation du problème. L'équation (I-18):

$$[\bar{E}, \bar{H}]_2(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [\bar{E}, \bar{H}]_2(\alpha, \beta) e^{-j(\alpha x + \beta y - j\gamma_z z)} d\alpha d\beta$$

impose que la valeur du champ électromagnétique s'annule pour  $z$  infini. Cette condition mène à:  $\text{Re}(\gamma_Z) > 0$ . Cependant, la partie imaginaire de  $\gamma_Z^2$  peut prendre des valeurs positives ou négatives lors de la recherche des zéros du déterminant de  $[Z]$  en régime libre. Les algorithmes de recherche de zéros par les méthodes des moments pondérés ou de Müller nécessitent que  $\det[Z]$  soit holomorphe sur un domaine du plan complexe de la fréquence incluant la zone de recherche.

Pour la détermination classique de la branche de coupure de la racine carrée (axe imaginaire négatif),  $\gamma_Z$  subit une brusque variation lorsque  $\text{Im}(\gamma_Z^2)$  passe par zéro, il n'y a donc plus continuité analytique et une nouvelle branche de coupure est nécessaire.

Après avoir effectué le changement de variables en coordonnées polaires pour l'intégrant des intégrales de réaction (**figure I-10**) (I-31):

$$\begin{aligned}
 Z_{i,j} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\mathbf{E}}_j(\alpha, \beta) \cdot \bar{\mathbf{J}}_i^*(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\mathbf{G}}(\alpha, \beta) \bar{\mathbf{J}}_j(\alpha, \beta) \cdot \bar{\mathbf{J}}_i^*(\alpha, \beta) d\alpha d\beta
 \end{aligned}$$

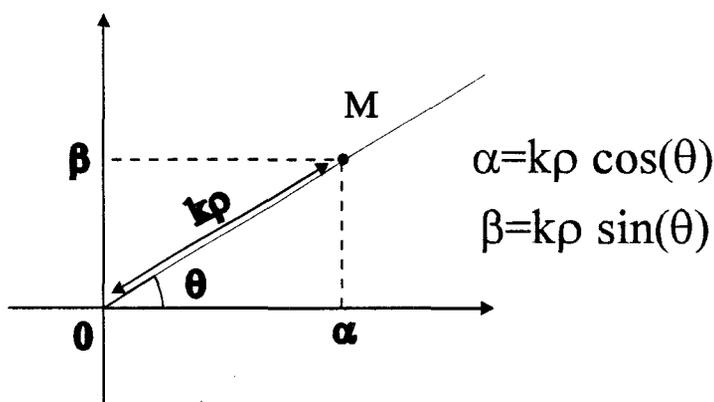


Figure I-10: Changement de variables pour l'intégration des termes de réaction

$$\begin{aligned} \text{avec:} \quad \alpha &= k_{\rho} \cos\theta \\ \beta &= k_{\rho} \sin\theta \end{aligned}$$

, les intégrales précédentes prennent la forme:

$$Z_{ij} = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} G_{ji}(k_{\rho}, \theta) \tilde{J}_j(k_{\rho}, \theta) \tilde{J}_i^*(k_{\rho}, \theta) k_{\rho} dk_{\rho} d\theta \quad (I-48)$$

Ce changement de variable permet:

- de rejeter les problèmes de parcours dans le plan complexe sur la seule variable  $k_{\rho}$  [9]
- de n'avoir qu'une seule borne d'intégration infinie suivant cette même variable
- de pouvoir utiliser les propriétés de symétries de l'intégrant par rapport à  $\theta$ .

Les problèmes de détermination de la racine doivent être précisés selon que l'on considère un fonctionnement en régime libre ou en régime forcé. Nous nous bornerons ici à rappeler les points essentiels d'une étude explicitée plus en détail par ailleurs [9][18][19].

#### I-4-1-1 Cas du régime libre:

En régime libre; il s'agit de rechercher dans le plan complexe de la fréquence la solution  $f=f_0$  pour laquelle  $\det[Z]=0$  (Cf. I-31). En supposant que le milieu 2 situé au-dessus du résonateur présente de faibles pertes diélectriques, nous pouvons écrire:

$$\begin{aligned}\gamma_{z_2}^2 &= k_p^2 - (\omega' + j\omega'')^2 \mu_0 (\epsilon_2' - j\epsilon_2'') \\ &= k_p^2 - k_2^2\end{aligned}\quad (\text{I-49})$$

de sorte que la partie imaginaire:

$$\text{Im}(\gamma_{z_2}^2) = \mu_0 (\omega'^2 \epsilon_2'' - 2\omega' \omega'' \epsilon_2' - \epsilon_2'' \omega''^2) \quad (\text{I-50})$$

peut prendre indifféremment des valeurs positives ou négatives. Au cours de la recherche de la fréquence solution  $f_0$ , il est nécessaire de s'assurer de la continuité du déterminant de  $[Z]$  lorsque  $f$  évolue et donc  $\text{Im}(\gamma_Z)$ . Nous pouvons voir **figure I-11** que la branche de coupure de la racine, choisie classiquement comme l'axe réel négatif, impose une discontinuité sur la détermination de la phase de  $\gamma_Z$ , lorsque  $\text{Im}(\gamma_Z^2)$  passe par zéro.

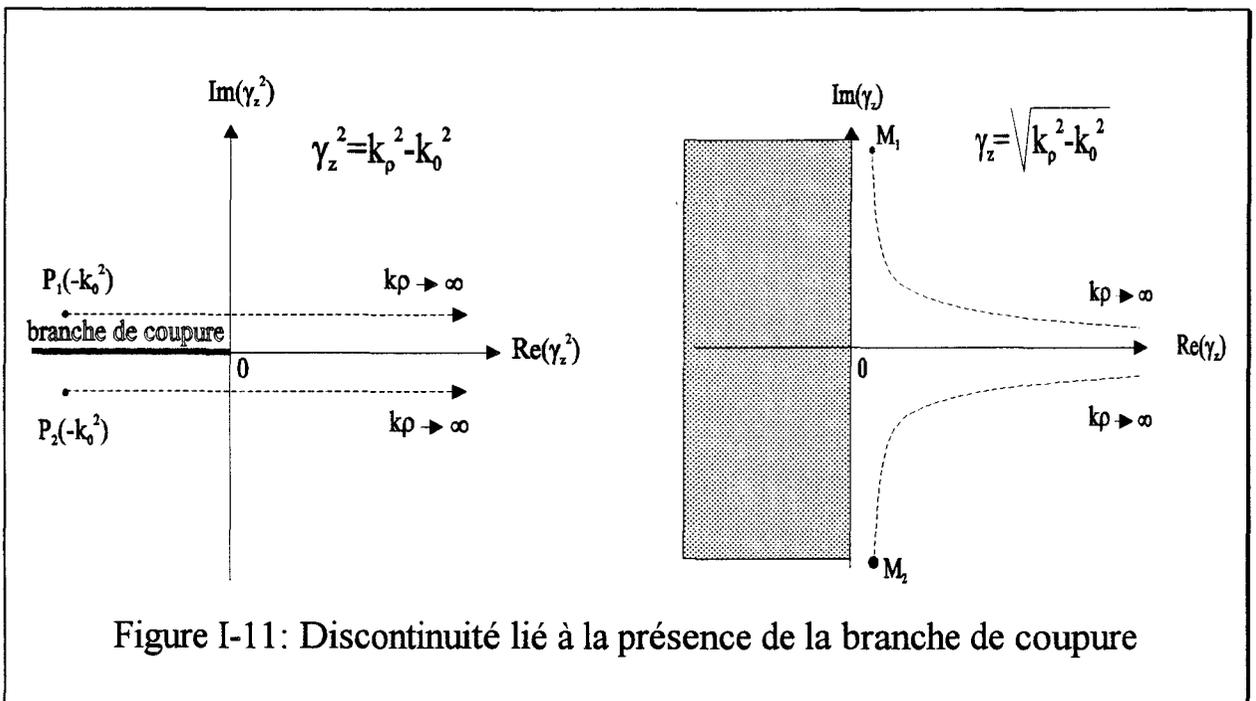


Figure I-11: Discontinuité liée à la présence de la branche de coupure

Ainsi, pour une variation continue de  $\text{Im}(k^2_0)$  menant l'affixe de  $\gamma^2_Z$  du point P1 au point P2, l'on constate un brusque changement de phase de  $\gamma_Z$ . Un choix différent de la branche de coupure est nécessaire. A ce stade, il doit répondre à deux exigences:

- $\text{Re}(\gamma_Z) > 0$  pour  $k_p$  tendant vers l'infini
- Continuité analytique pour la détermination de la branche de coupure de la racine lorsque  $\text{Im}(k^2_0)$  varie.

Un choix possible consiste à prendre pour branche de coupure de la racine l'axe imaginaire négatif; dans ce cas en effet (**figure I-12**):

- On observe bien la continuité analytique entre les deux chemins (variation continue de M1 à M2 possible).
- $\text{Re}(\gamma_Z) > 0$  lorsque  $k_p$  grand.

Cependant, il devient nécessaire d'effectuer un parcours complexe pour  $k_p$ ; afin d'éviter la branche de coupure.

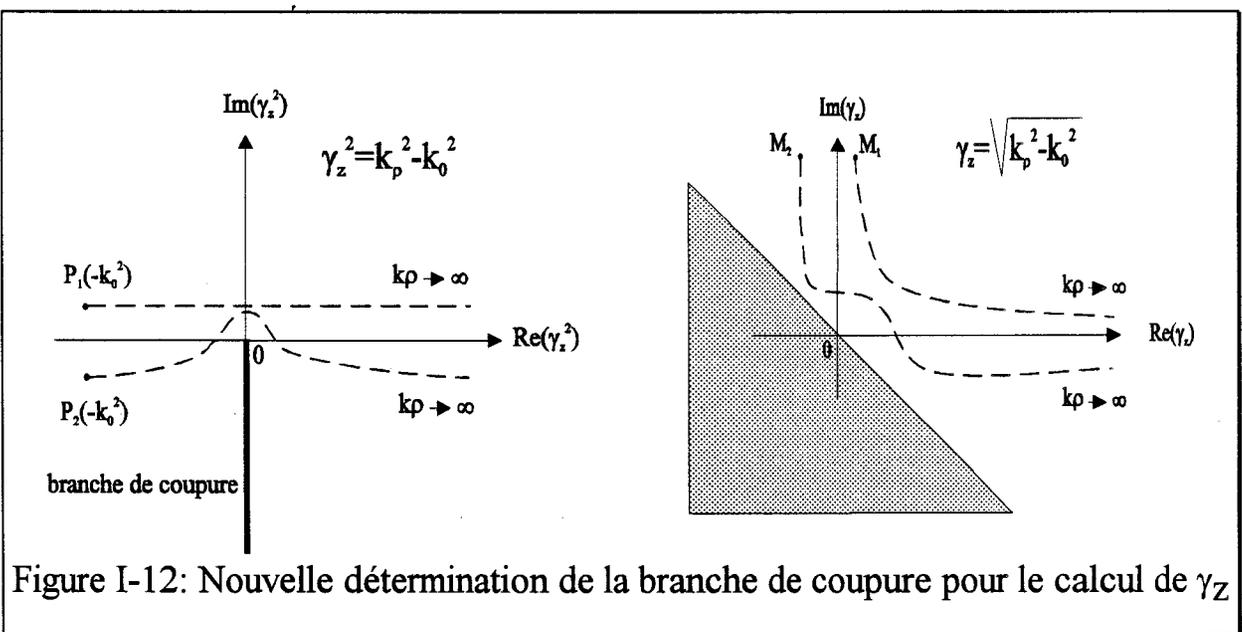


Figure I-12: Nouvelle détermination de la branche de coupure pour le calcul de  $\gamma_Z$

### I-4-1-2 Cas du régime forcé

En régime forcé, la fréquence de la source d'excitation est imposée et réelle, on a dans ce cas:

$$\text{Im}(\gamma_z^2) = \omega^2 \varepsilon'' \mu_0 > 0 \quad (\text{I-51})$$

De fait, la détermination de la racine carrée ne pose plus de problèmes puisque l'on peut choisir la branche de coupure usuelle (**figure I-13**), assurant ainsi la continuité analytique de  $\det[Z]$  sur l'intervalle:

$$\begin{aligned} \text{Im}(-k_0^2) &\in ]0, +\infty[ \\ \text{Re}(\gamma_z) &> 0 \quad \text{lorsque} \quad k_p \rightarrow +\infty \end{aligned} \quad (\text{I-52})$$

Le parcours d'intégration pour  $k_p$  peut ici être pris théoriquement comme l'axe réel positif.

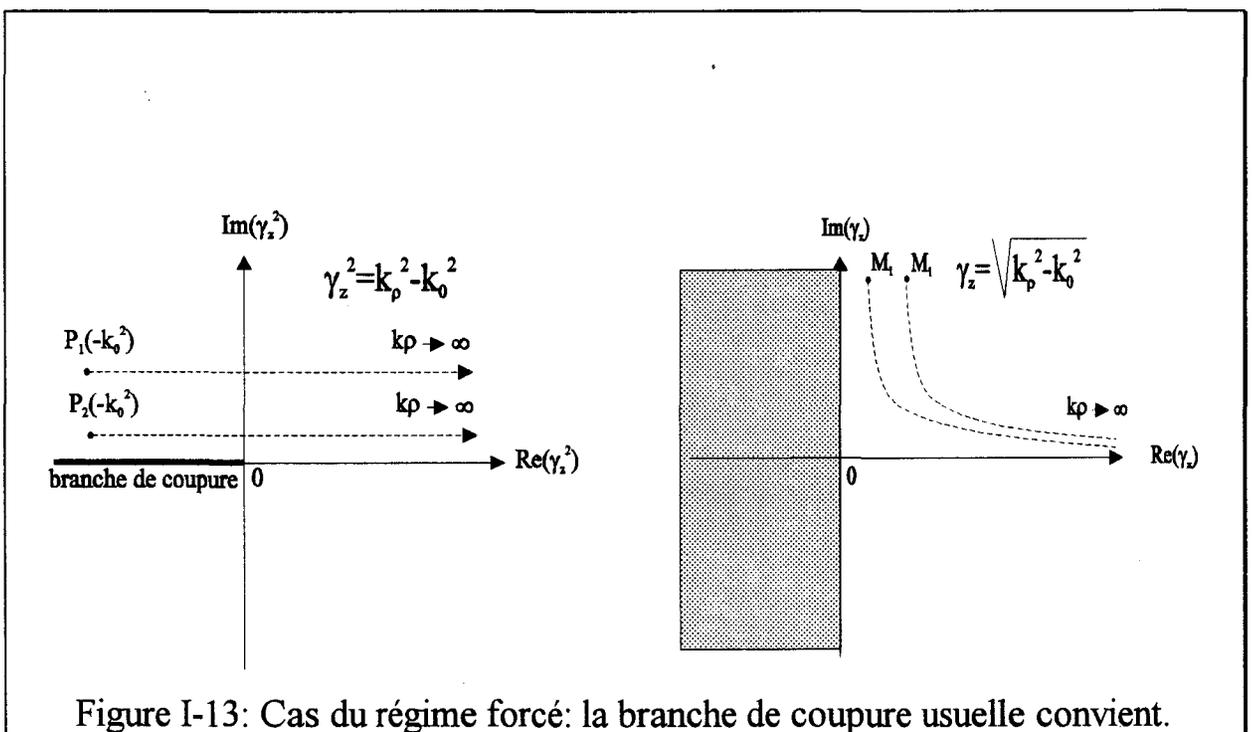


Figure I-13: Cas du régime forcé: la branche de coupure usuelle convient.

## I-4-2 PARCOURS DES INTEGRANTS DANS LE PLAN COMPLEXE $k_\rho$

### I-4-2-1 Singularités liées à la présence de pôles

Les composantes  $G_{XX}(k_\rho, \theta)$  ;  $G_{XY}(k_\rho, \theta)$ ,  $G_{YX}(k_\rho, \theta)$  et  $G_{YY}(k_\rho, \theta)$  de la fonction dyadique de Green peuvent s'écrivent sous la forme:

$$\overline{\overline{G}}(k_\rho, \theta) = \frac{\overline{\overline{A}}(k_\rho, \theta)}{DTM \cdot DTE} \quad (I-53)$$

avec:  $\overline{\overline{A}}(k_\rho, \theta)$  fonction dyadique holomorphe et:

$$\begin{aligned} DTM &= \varepsilon_2 \gamma_1 \operatorname{th}(\gamma_1 h_1) + \varepsilon_1 \gamma_2 \\ DTE &= \gamma_2 + \gamma_1 \operatorname{coth}(\gamma_1 h_1) \end{aligned} \quad (I-54)$$

Les zéros de DTM et de DTE sont les pôles de  $G_{X;Y,X;Y}(k_\rho, \theta)$  dans le plan complexe  $k_\rho$ . Ils correspondent aux ondes de surface prises en compte dans l'analyse qui se propagent dans la couche diélectrique et perturbent fortement l'intégrant. Cependant, pour les cas les plus fréquents, tels que  $h_1 \ll \lambda_g$ , il n'existe en pratique qu'un seul zéro pour DTM. Son affixe est au voisinage immédiat de  $k_0$ , qui rappelons-le constitue le point de branchement de la racine carrée de  $\gamma_z^2$ . La figure I-14 illustre l'allure des plans complexes  $k_\rho$  et  $\gamma_z$  lors du régime libre.

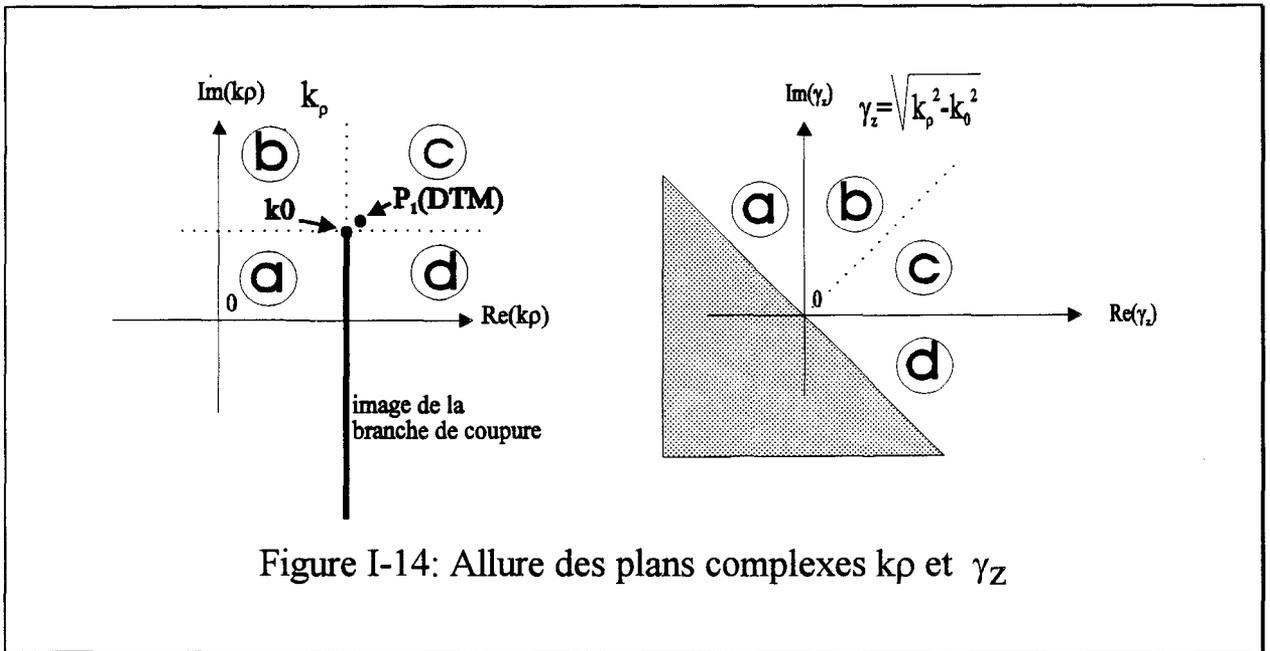


Figure I-14: Allure des plans complexes  $k_\rho$  et  $\gamma_z$

#### I-4-2-2 Définition d'un parcours d'intégration

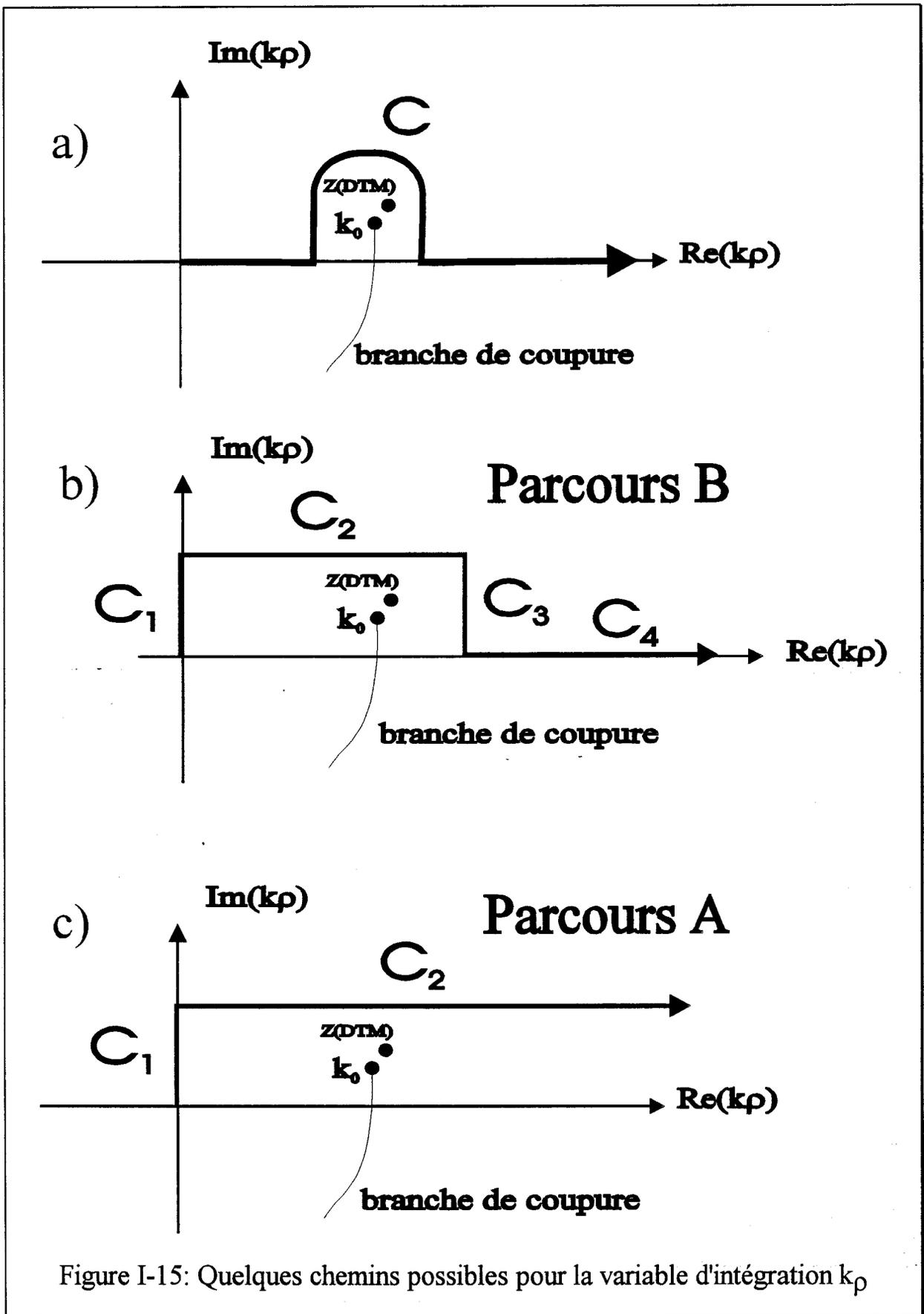
Le parcours d'intégration  $C$  dans le plan  $k_\rho$  se doit d'éviter l'image de la branche de coupure de la racine de  $\gamma_z = (\gamma_z^2)$  ainsi que le pôle  $P(DTM)$ , et mener  $k_\rho$  jusqu'au point d'affixe  $(+\infty, 0)$ .

Différents chemins d'intégration représentés **figure I-15a-b-c** remplissent les critères précédents, seules des considérations pratiques justifient le choix du parcours de la figure I-15b. Comme de plus:

$$\lim_{\lim k_\rho \rightarrow +\infty} G_{x;y,x;y}(k_\rho, \theta) = 0 \quad (I-55)$$

, il est possible de retenir le parcours simple représenté **figure I-15c**.

Dans ce dernier cas, les **figures I-16 a-b-c** représentent les lieux parcourus respectivement par  $k_\rho^2$ ,  $\gamma_z^2$  et  $\gamma_z$  dans leur plan complexe.



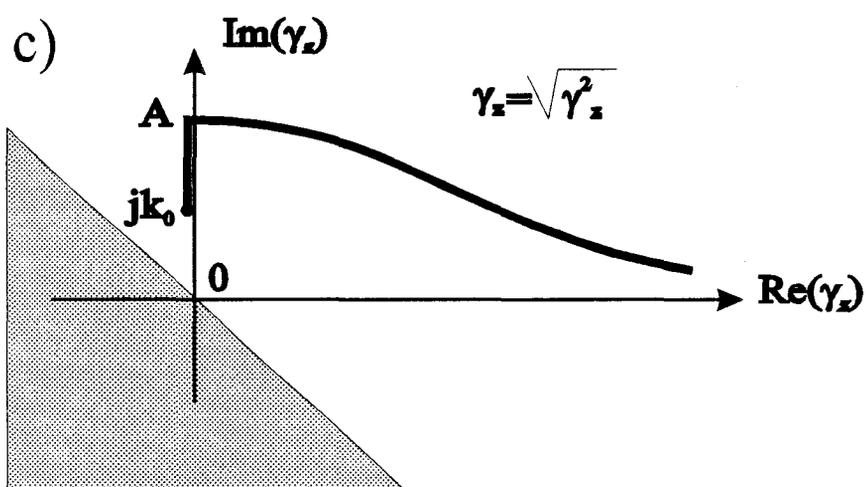
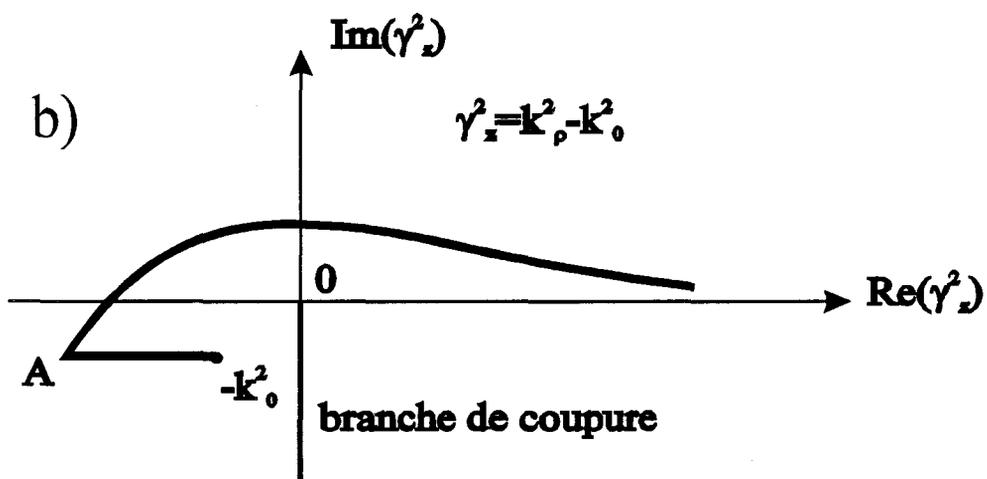
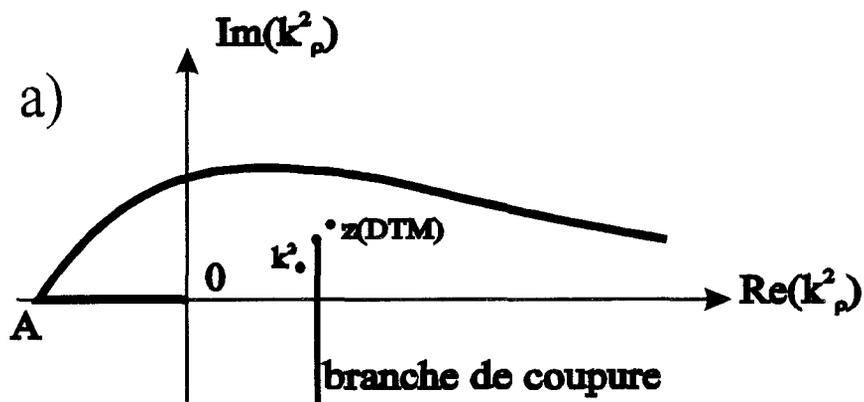


Figure I-16: Image du parcours C dans les plans  $k_p^2$ ,  $\gamma_z^2$  et  $\gamma_z$

## I-5 CONSIDERATIONS NUMERIQUES

L'implantation numérique de l'analyse théorique présentée précédemment nécessite de préciser quels sont les difficultés rencontrées, notamment en terme de convergence des calculs d'intégrales et du nombre de fonctions de base employées.

### I-5-1 CONVERGENCE DES CALCULS D'INTEGRALES

#### I-5-1-1 Convergence suivant la variable $k\rho$ :

Après le changement de variables, les termes  $Z_{ij}$  définis par l'expression (I-48) peuvent se mettre sous la forme:

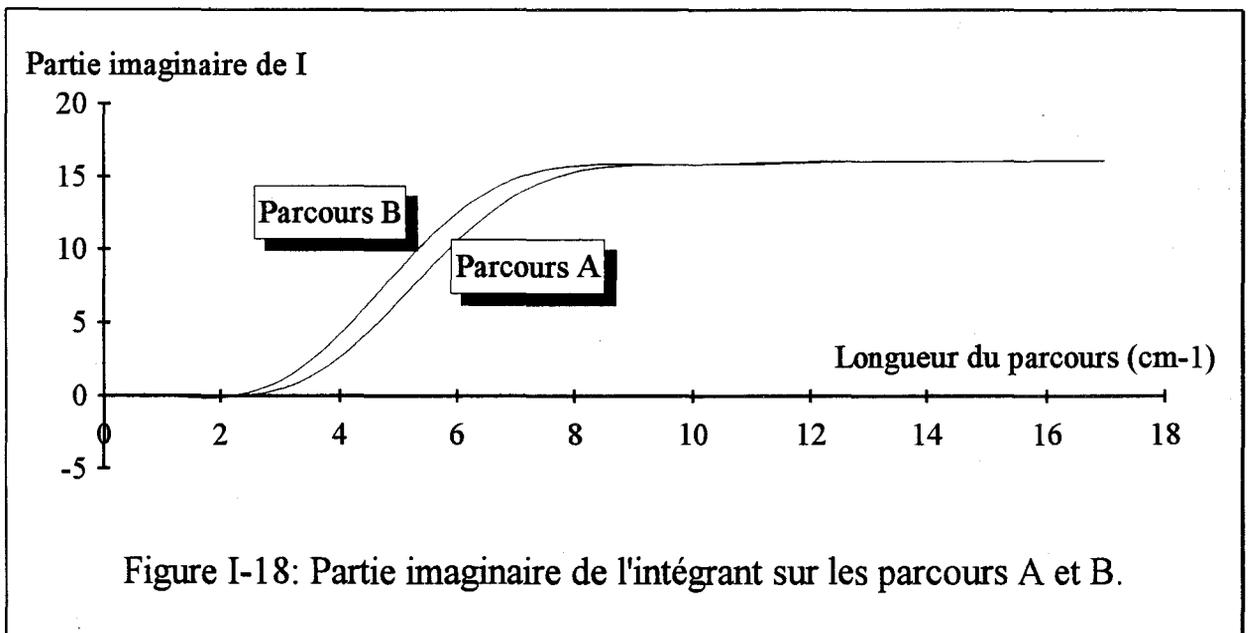
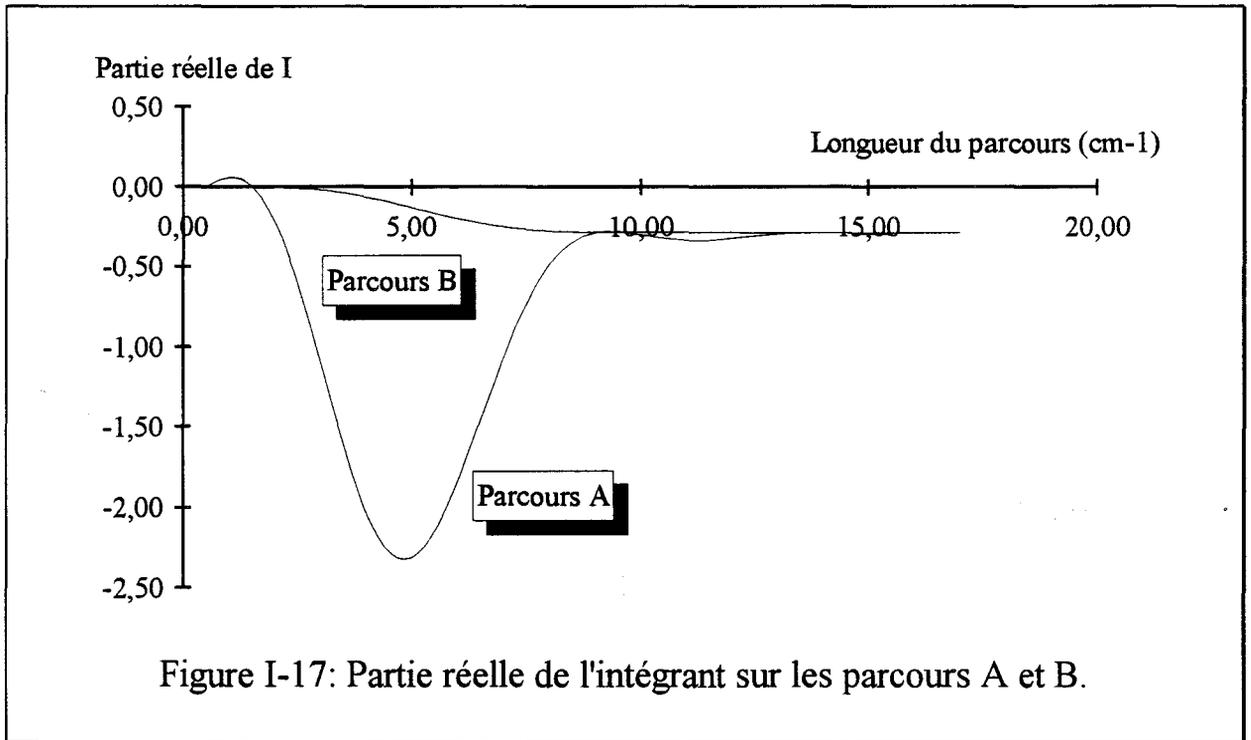
$$Z_{ij} = \int_0^{2\pi} I(\theta) d\theta \quad (I-56)$$

$$\text{avec: } I(\theta) = \int_0^{+\infty} G_{xx}(k\rho, \theta) \tilde{J}_{x_{a_{rb},sb}}(k\rho, \theta) \tilde{J}_{x_{a_{rt,st}}}^*(k\rho, \theta) k\rho dk\rho \quad (I-57)$$

Les **figures I-17** et **I-18** illustrent les problèmes de convergence de l'intégrale  $I(\theta)$  dans le cas particulier d'une fonction de base et de test  $J_{xa_{1,1}}$  pour les parcours A et B définis **figure I-15** dans le plan complexe  $k\rho$  et pour  $\theta=0$ ,  $W_x=W_y=1$  cm.

La convergence de la partie réelle (**figure I-17**) est de toute évidence plus rapide est moins accidentée le long du parcours B. La partie imaginaire est moins sensible à cette différence de parcours; mais converge elle aussi plus rapidement le long du parcours B (**figure I-18**).

Pour cette raison, le parcours B aura dans ce qui suit notre préférence. L'intégration suivant  $k\rho$  s'effectue par la méthode d'interpolation de Legendre à 24 points, sur un segment de longueur variable. La description des parcours A et B s'opère en divisant chaque parcours élémentaires  $C_1, C_2, C_3, C_4$  en  $N_1, N_2, N_3, N_4$  segments où s'effectue l'interpolation (**figure I-19**).



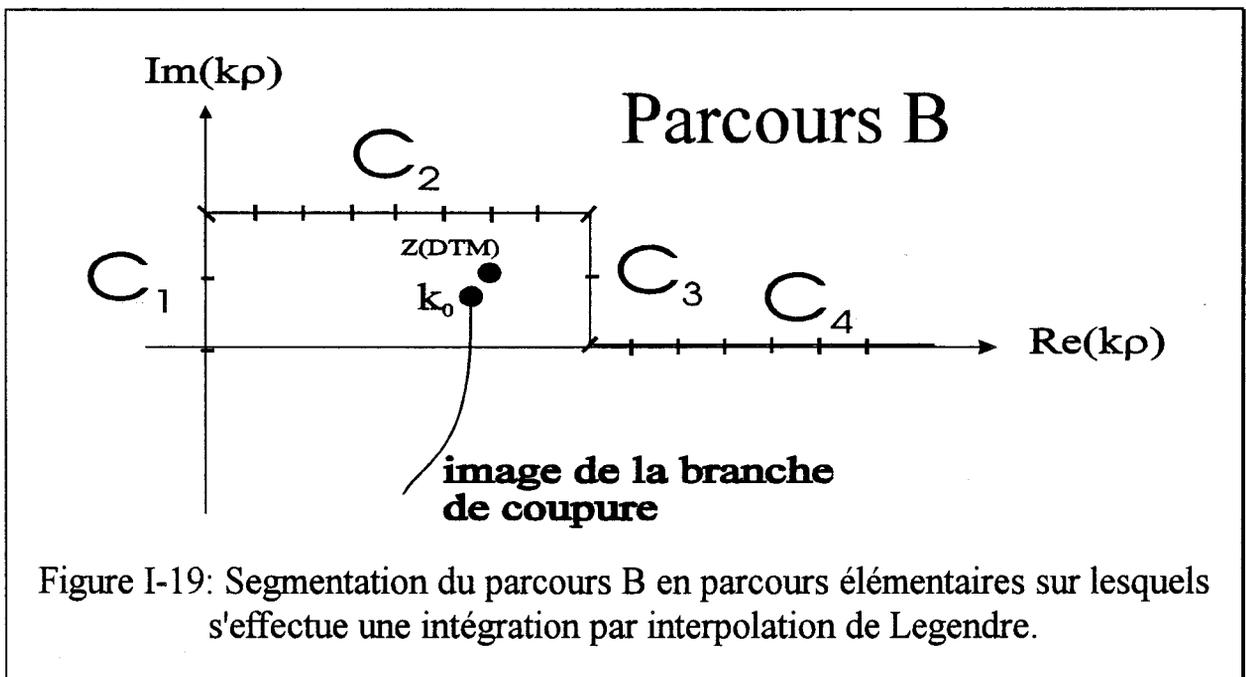
La longueur des parcours  $C_1$  et  $C_3$ , baptisée  $L_1$  et  $L_3$ , est choisie selon un critère empirique décrit dans [9]. En fait, ce critère répond au compromis suivant: s'écarter suffisamment de la racine de DTM ( $L_1 > \text{Im}(k_0)$ ), sans trop s'éloigner toutefois de l'axe réel. L'intégrand de  $I(\theta)$  diverge en effet de façon exponentielle avec la partie imaginaire de  $k_\rho$ .

La valeur optimale est:

$$L_1 = L_3 = 30|\text{Im}(k_0)| \quad (\text{cm}^{-1}) \quad (\text{I-58})$$

La longueur du parcours  $C_2$  n'influe quant à elle quasiment pas sur l'efficacité du parcours et nous l'avons systématiquement pris égal à:

$$L_2 = 5 \text{Re}(k_0) \quad (\text{cm}^{-1})$$



De la longueur du parcours  $C_4$  dépend la convergence de l'intégrale de réaction complète:

$$Z_{XX_{rb, sb, rt, st}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I(\theta) d\theta \quad (I-59)$$

Pour décrire les problèmes rencontrés nous ne considérerons qu'une fonction de test:

$$J_{xa_{1,1}} = \cos\left(\pi \frac{x}{W_x}\right)$$

Tandis que des ordres différents seront affectés aux fonctions de base:

$$J_{xa_{1,s}} = \cos\left((2s-1)\pi \frac{x}{W_x}\right)$$

La **figure I-20**, dans laquelle la partie réelle de  $Z_{XX}$  est portée en ordonnée, montre l'influence prépondérante qu'a la largeur des fonctions de base  $J(x,y)$  sur la longueur  $L_4$  du parcours  $C_4$  pour obtenir la convergence. Pour chaque largeur de  $W_x$ , l'abscisse de convergence peut être déduit de cette courbe.

La longueur du parcours  $L_4$  dépend aussi de l'ordre de la fonction de base utilisée. Sur la **figure I-21**, nous avons considéré la convergence de l'intégrale  $Z_{XX}$ , réaction de la fonction de base  $J_{xa_{1,r}}$  avec la fonction de test  $J_{xa_{1,1}}$ , pour plusieurs valeurs de  $r$ . Nous constatons que la longueur d'intégration  $L_4$  doit être proportionnelle à l'ordre de la fonction de base  $r$ .

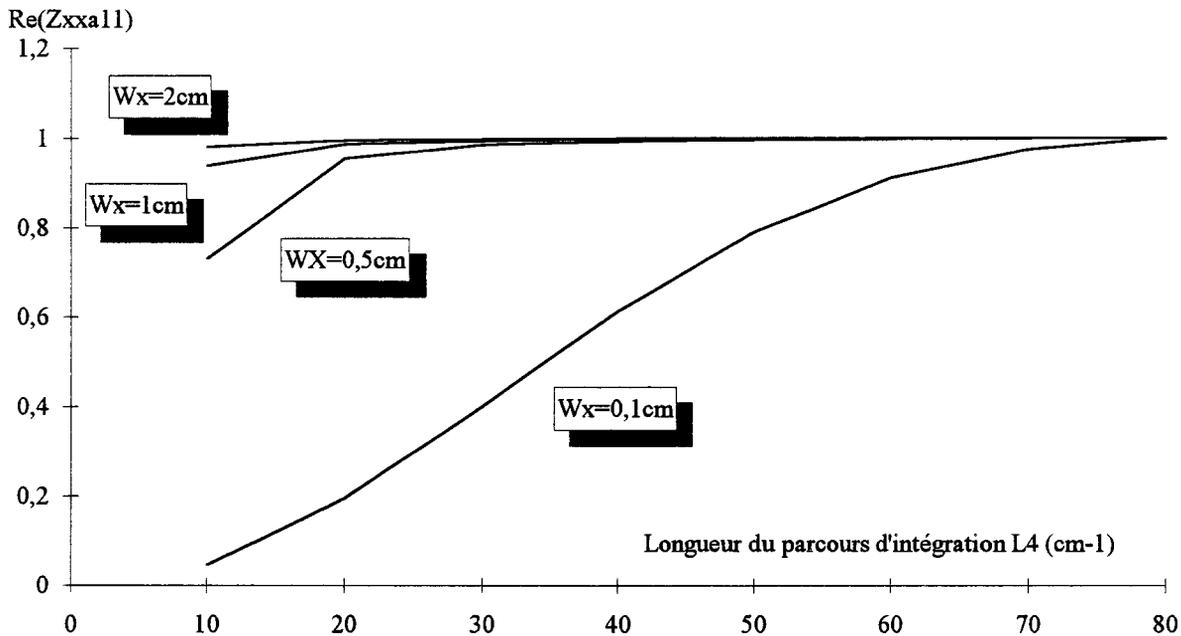


Figure I-20: Influence de la géométrie des fonctions de base sur la convergence de l'intégration sur le parcours C4

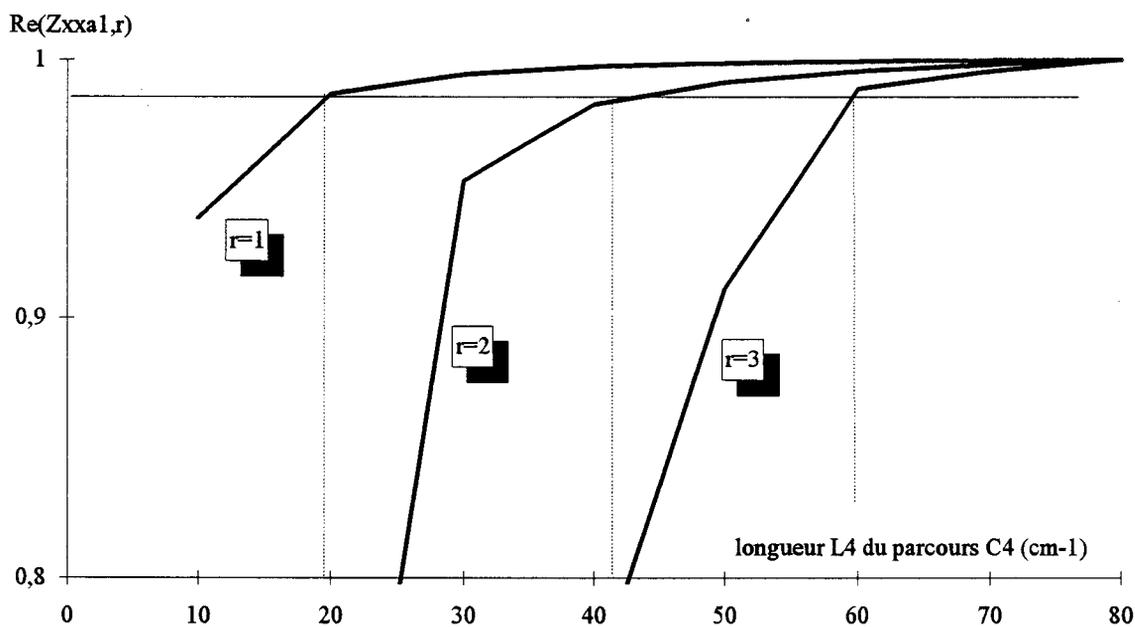
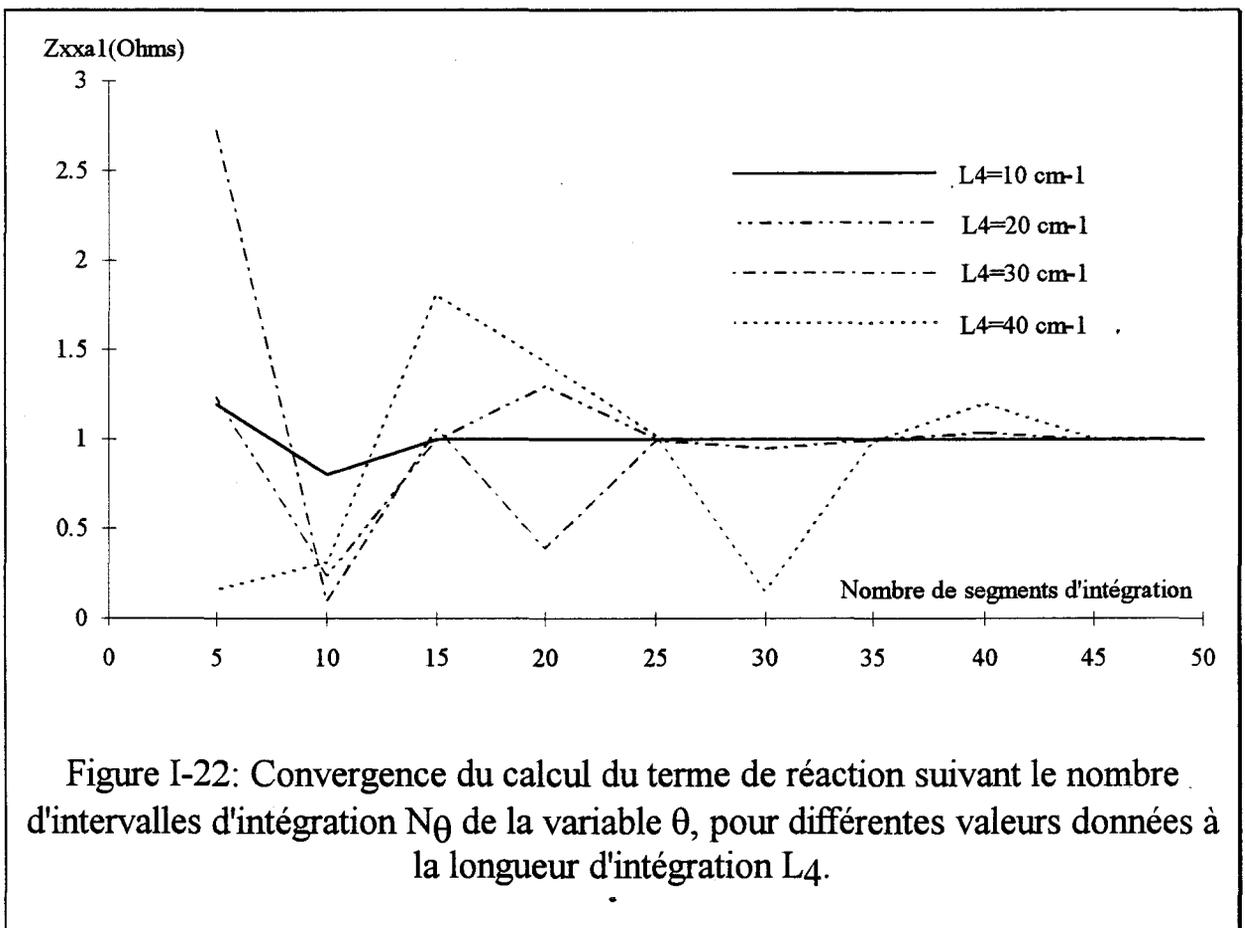


Figure I-21: Influence de l'ordre de la fonction de base utilisée sur la convergence de l'intégration sur le parcours C4

### I-5-1-2 Intégration suivant $\theta$ :

La **figure I-22** représente la convergence de la même intégrale que figure I-21 en fonction du nombre de segments d'intégration  $N_\theta$  de la variable  $\theta$  sur l'intervalle  $[0, 2\pi[$  (chaque segment contient là aussi 24 points d'interpolation) pour différentes valeurs de  $L_4$ . A partir de chaque valeur obtenue pour  $N_\theta$ , nous traçons **figure I-23** la courbe  $N_\theta(L_4)$ . Nous constatons que le nombre  $N_\theta$  obéit à une loi quasi-linéaire de  $L_4$ . La même étude est menée figure I-23 en considérant comme précédemment les termes de réaction relatifs à la fonction de test  $J_{xa11}$ , et aux fonctions de base:  $J_{xa11}$ ,  $J_{ya11}$  et  $J_{yc12}$ . Les courbes obtenues sont semblables à celle obtenue précédemment. Nous en déduisons que la convergence du calcul d'intégration suivant la variable  $\theta$  ne dépend pratiquement que de la valeur de  $k_p$ . Le coefficient directeur de la droite D est égal à 1,4.

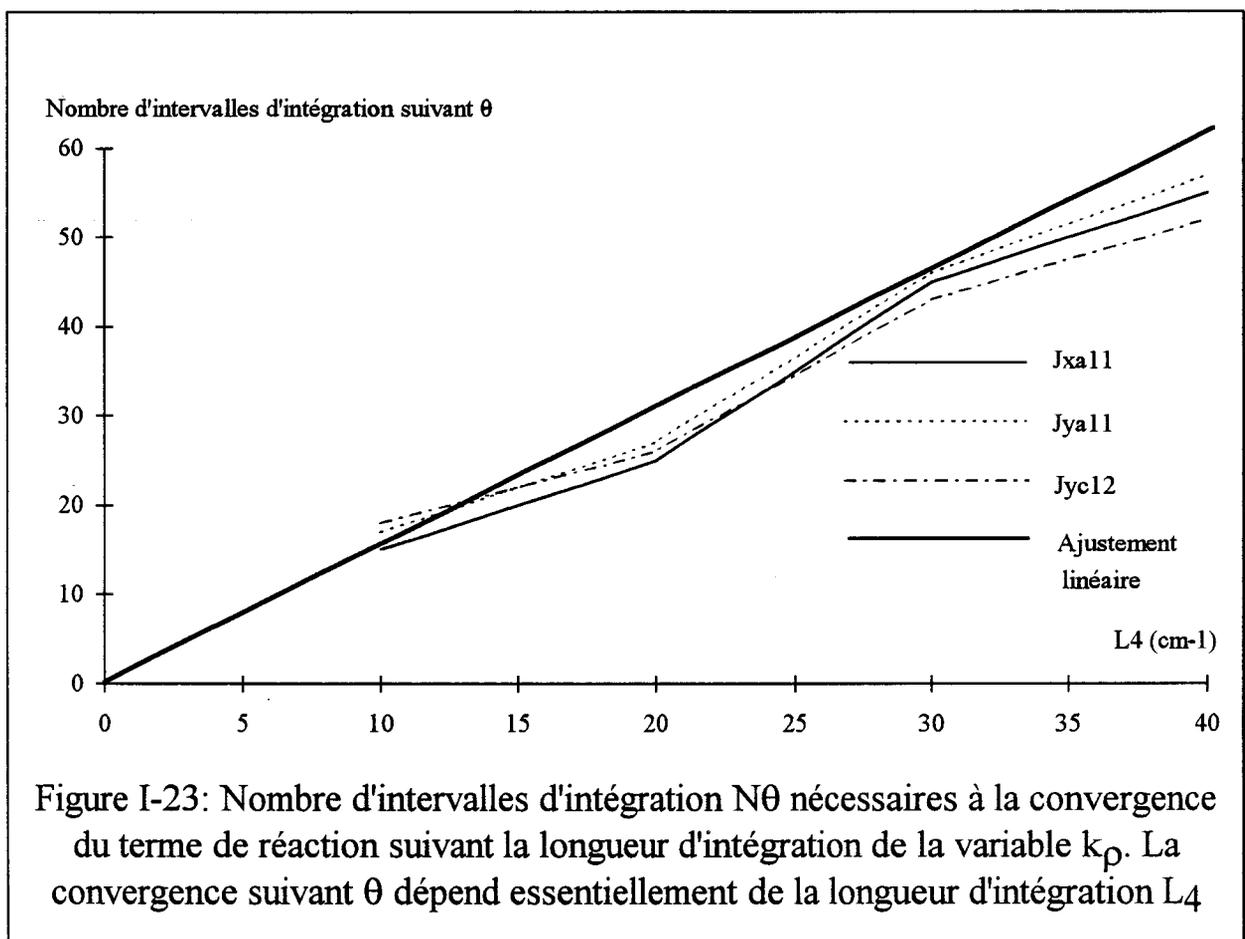


### I-5-1-3 Elaboration d'un critère de convergence:

Des différents tests que nous avons effectués concernant la convergence des intégrales de réaction, nous pouvons énoncer, d'un point de vue empirique, le critère de convergence suivant:

$$*L_4 = \text{SUP} \left( 30, \frac{10r}{W_x}, \frac{10s}{W_y} \right) \quad (\text{I-60})$$

$$*N_\theta = 1,5 L_4$$



## I-5-2 INFLUENCE DU NOMBRE DE FONCTIONS DE BASE SUR LA CONVERGENCE

Le nombre de fonctions de base nécessaire à la convergence dépend du régime étudié. D'une manière générale, le régime forcé présente plus de difficultés pour les raisons suivantes:

- la présence de l'excitation perturbe fortement la distribution de courant sur la plaque au point de connexion. Cette perturbation est plus sensible lorsque la résonance du courant  $J_p$  s'effectue dans la direction perpendiculaire à la ligne microruban d'excitation. Dans ce cas l'impédance d'entrée varie très sensiblement suivant la position du point d'excitation [20].

- le calcul de l'impédance d'entrée résulte de la détermination des coefficients des fonctions de base et reste tributaire de la précision apportée à la résolution du système matriciel (I-31). Au contraire, lors de l'étude en régime libre qui correspond à un problème aux valeurs propres classique, le déterminant de la matrice  $Z$  accuse un comportement stationnaire.

Nous avons, en régime libre, tracé sur la **figure I-24** l'évolution de la fréquence de résonance et du coefficient de qualité en fonction du nombre de fonctions de base employées. Ces courbes attestent de l'excellente convergence des résultats puisqu'une seule fonction de base permet la détermination de la fréquence de résonance et du coefficient de qualité à vide avec une précision de quelques pourcents.

Dans le cas du régime forcé, nous avons également analysé l'influence du nombre de fonction de base sur la convergence des résultats pour deux types d'excitation du mode  $TM_{01}$ , l'un parallèle et l'autre perpendiculaire à l'axe de résonance. La **figure I-25** représente l'évolution de la convergence par rapport au nombre de fonctions de base de l'impédance d'entrée dans le cas d'un résonateur alimenté au centre d'un côté rayonnant; la résonance du courant  $J_p$  s'effectue alors suivant le même axe que celui de la ligne microruban d'excitation. Nous présentons **figure I-26** la même étude, dans le cas plus contraignant d'un résonateur muni d'une excitation décentrée située sur un côté non rayonnant. Ces deux courbes sont présentées à la fréquence de résonance respective de chacune des deux structures.

La figure I-25 montre que pratiquement une seule fonction de base peut être employée à la détermination de l'impédance d'entrée. La convergence représentée figure I-26 souligne par contre la nécessité d'utiliser d'avantage de fonctions de base pour le cas où la distribution du courant, perturbée par la présence de la ligne microruban, adopte une configuration complexe et dissymétrique.

## **I-6 VALIDATION DE L'ANALYSE**

Afin de tester la validité de notre code numérique, nous nous sommes attachés à confirmer plusieurs résultats expérimentaux en régime libre et forcé. Nous avons pour cela réalisé un résonateur fonctionnant suivant les modes  $TM_{01}$  à 2,99 Ghz et  $TM_{10}$  à 4.04Ghz et présentons le coefficient de qualité et la fréquence de résonance de quelques structures. La fréquence de résonance est dans ce rapport définie par la valeur minimale du taux d'ondes stationnaires dans l'abaque de Smith.

fr et Q normalisés

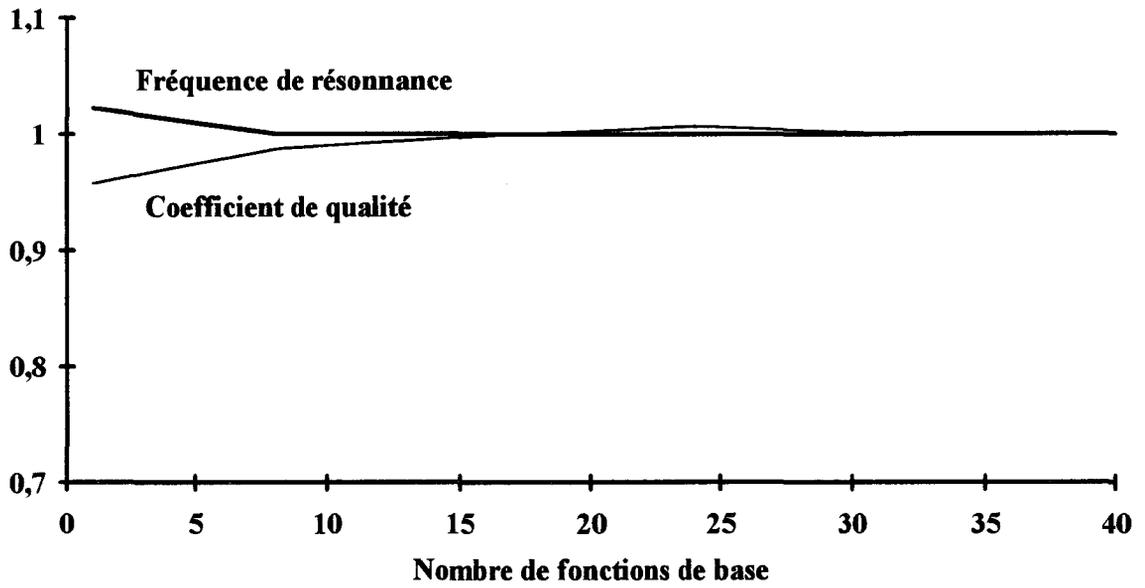


fig I-24: Convergence en fonction de base en régime libre  
 $W_x=W_y=4,02$  cm;  $\epsilon_1=2,55\epsilon_0$ ;  $\text{tg}\delta=0,002$ ;  $h_1=0,159$  cm

Impédance d'entrée normalisée

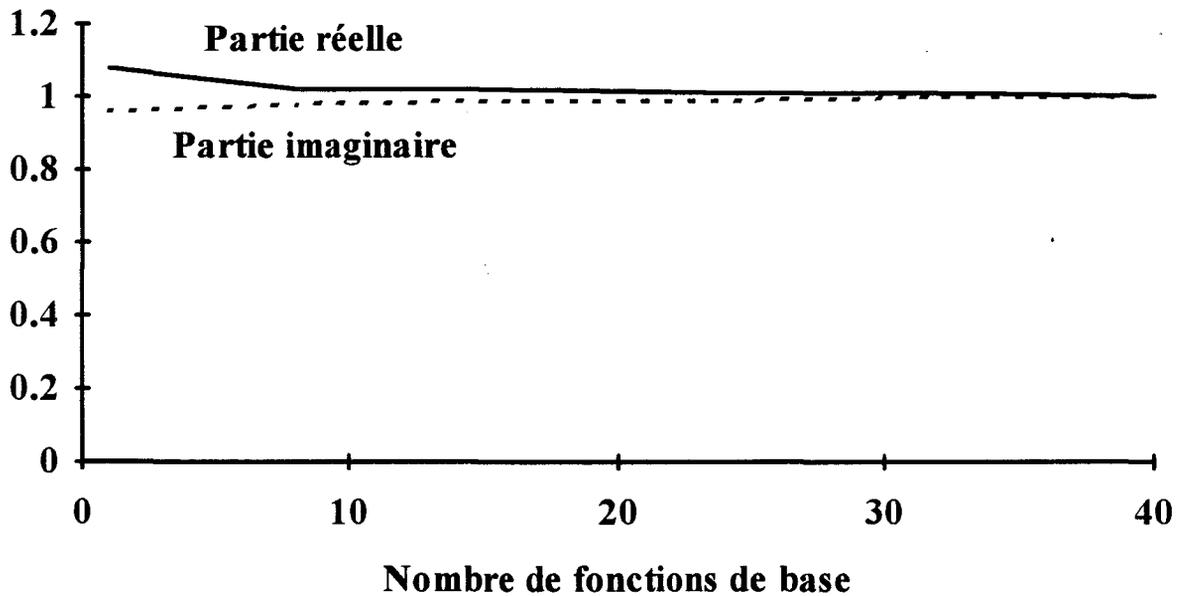
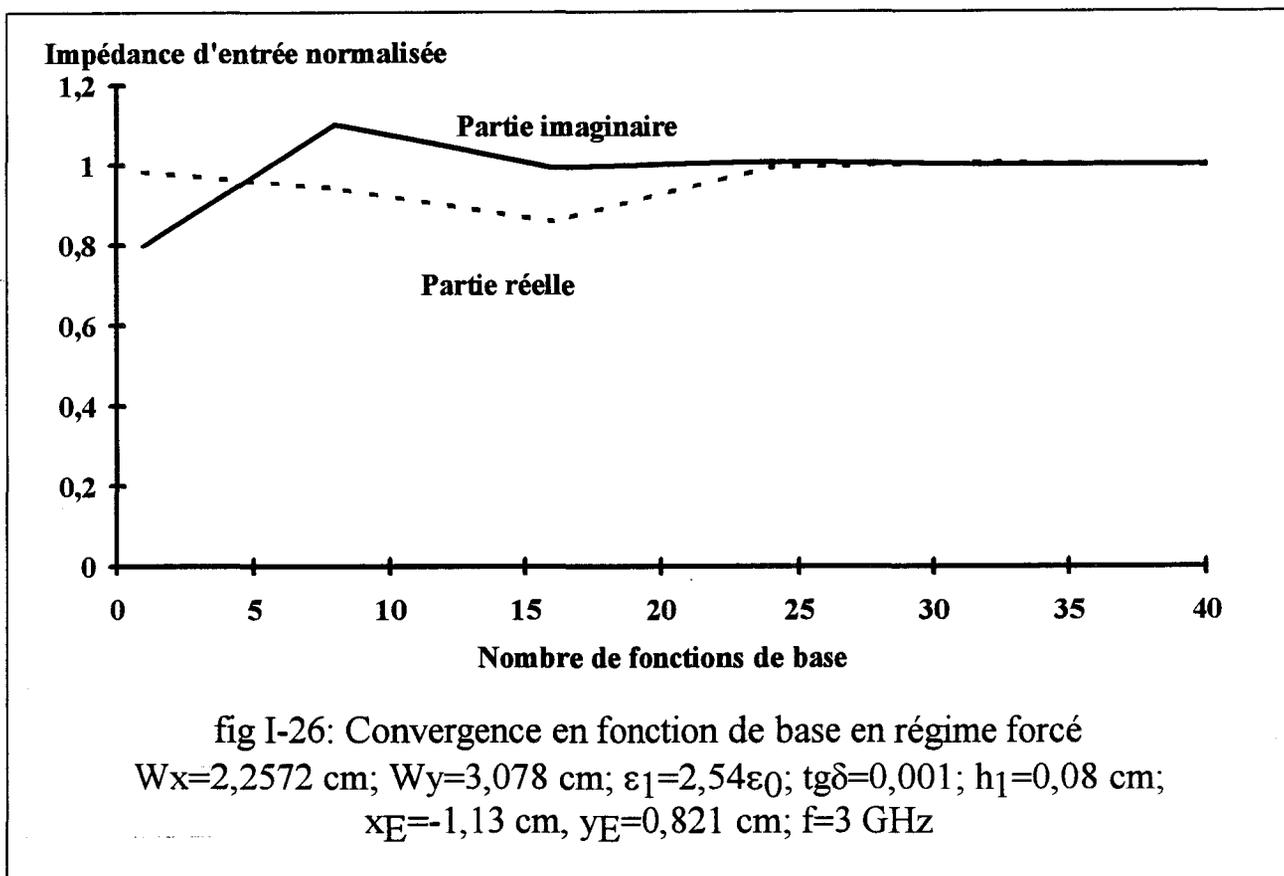


fig I-25: Convergence en fonction de base en régime forcé  
 $W_x=W_y=4,02$  cm;  $\epsilon_1=2,55\epsilon_0$ ;  $\text{tg}\delta=0,002$ ;  $h_1=0,159$  cm,  $x_E=-2,01$  cm,  $y_E=0$  cm;  $f=2,27$  GHz



### I-6-1 REGIME LIBRE

Dans le **tableau I-27** ont été reportés nos résultats de mesure de résonateurs en régime forcé, ainsi que ceux dus à plusieurs auteurs. Ces valeurs ont été comparées à celles provenant de notre programme en régime libre. Nous nous sommes contentés, pour chacun de ces exemples, d'employer un seul groupe de parité pour chaque direction  $J_x$  et  $J_y$  de la densité de courant. Un total de huit fonctions de base est donc introduit dans la résolution matricielle du problème. Nous constatons qu'un excellent accord théorie-expérience est obtenu, puisque la fréquence de résonance théorique se situe toujours à moins de 2% de la valeur expérimentale; tandis que le coefficient de qualité est quant à lui déterminé avec une incertitude de l'ordre de 5%.

	<i>Mode</i>	<i>Fr expérimentale</i>	<i>Fr théorique</i>	<i>Q expérimental</i>	<i>Q théorique</i>
structure A	[1,0]	1,53 GHz	1,55 GHz	97± 10	105
structure B	[0,1]	2,23 GHz	2,27 GHz	44± 6	49
structure C	[1,0]	8,61 GHz	8,61 GHz	10,4	12,1
structure D	[1,0]	4,01 GHz	4,04 GHz	56	51,6
structure D	[0,1]	2,99 GHz	3,02 GHz	87	92,2

figure I-27: Validation des résultats théoriques en régime libre

	<i>W<sub>x</sub></i>	<i>W<sub>y</sub></i>	<i>hl</i>	<i>permittivité</i>	<i>références</i>
structure A	6 cm	4 cm	0,146 cm	2,56	[9]
structure B	4 cm	6 cm	0,146 cm	2,56	[9]
structure C	1 cm	1,5 cm	0,158 cm	2,35	[17]
structure D	2,2572 cm	3,078 cm	0,0810 cm	2,54	

figure I-28: Récapitulatif des structures étudiées

## I-6-2 REGIME FORCE

Nous avons de la même façon comparée l'évolution de l'impédance d'entrée de structures expérimentales avec nos résultats théoriques. Les figures I-(29-32) reproduisent sur l'abaque de Smith l'évolution fréquentielle de l'impédance d'entrée pour différents résonateurs alimentés par une ligne microruban centrée ou non.

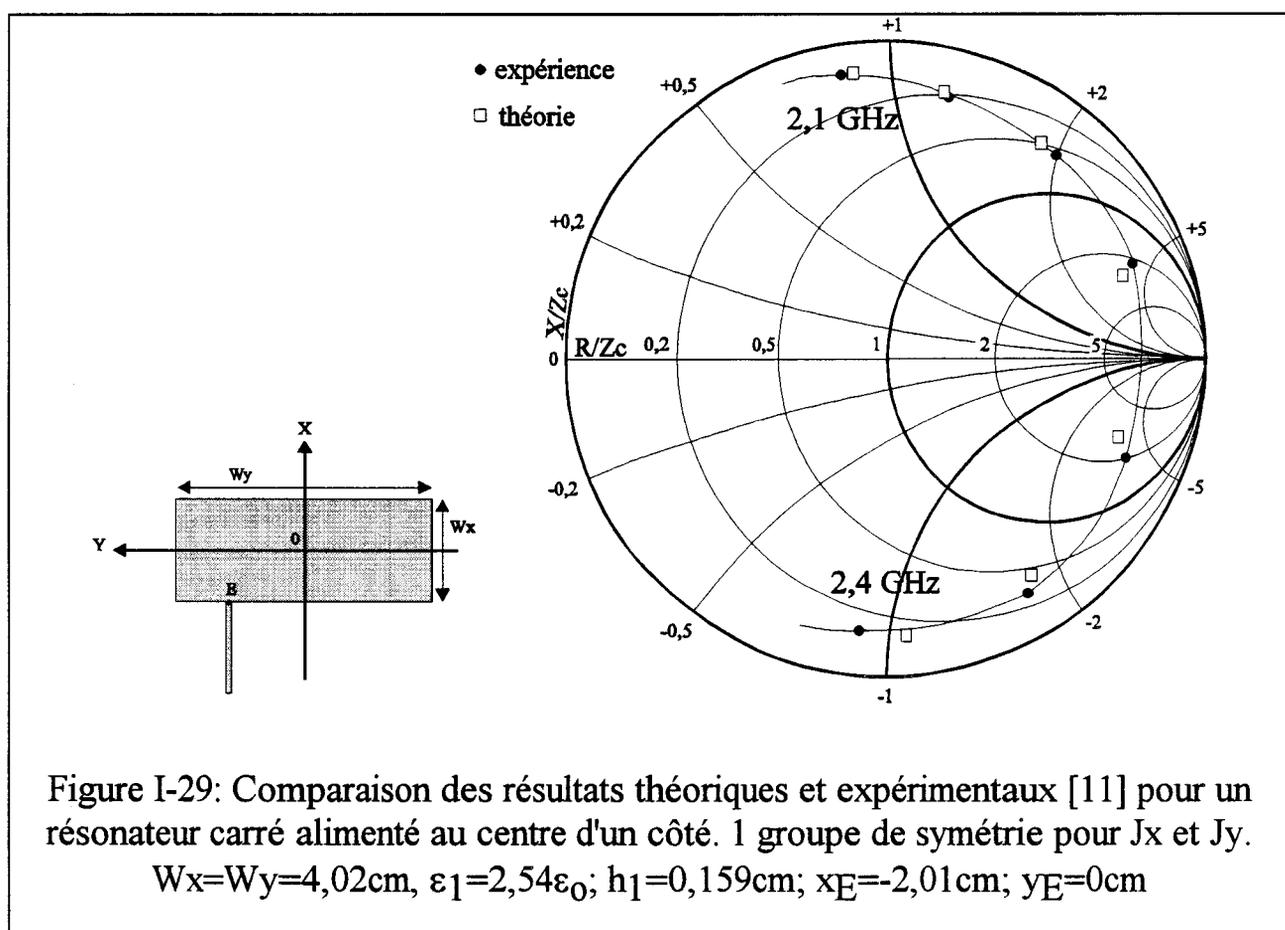
Nous présentons tout d'abord (**figure I-29**) le cas d'un résonateur carré, alimenté au centre d'un côté rayonnant et donc dans une direction parallèle à l'axe de la résonance. Un seul groupe de parité est utilisé pour chaque direction du courant sur la plaque Jp. Les résultats théoriques sont dans ce cas simple très satisfaisant, lorsqu'on les compare aux résultats expérimentaux.

La position de l'alimentation influe considérablement sur l'impédance d'entrée et la fréquence de résonance du résonateur. Nous présentons **figure I-30** l'évolution de l'impédance d'entrée du mode  $TM_{01}$  d'un résonateur alimenté sur un côté non rayonnant. Les résultats issus de notre analyse ont été obtenus à l'aide de quatre groupe de fonctions de base pour chaque direction du courant sur la plaque, soit au total 32 fonctions de base. La fréquence de résonance se situe approximativement à 1,16 GHz. Le lieu occupé par l'impédance d'entrée aux différentes fréquences vérifie bien les résultats expérimentaux [22]. Il existe néanmoins un léger décalage (inférieur à 1%) des points reportés sur l'abaque. Ce décalage évolue en fonction de la fréquence: il ne peut donc être imputé à une erreur sur la valeur de la constante diélectrique du substrat utilisé.

La même structure est étudiée maintenant sous le même mode de résonance, mais avec une alimentation décentrée sur un côté rayonnant (**figure III-31**). Une bonne concordance des résultats est obtenue. Cependant la fréquence de résonance est différente de celle de la structure présentée figure I-30: l'alimentation joue donc un rôle primordial dans les caractéristiques de résonateurs rectangulaires.

Le résonateur que nous avons réalisé opère à des fréquences de 3 et 4 GHz respectivement pour les deux modes fondamentaux  $TM_{01}$  et  $TM_{10}$ . L'alimentation dans ce cas reste immobile. Nous traçons **figures III-32** et **III-33** l'impédance d'entrée théorique sur l'abaque de Smith pour ces deux modes, ainsi que le résultat de nos mesures. Mis à part un décalage fréquentiel constant et inférieur à 1% , ces courbes sont confirmées par notre analyse théorique avec une excellente précision, lorsque nous développons la densité de courant sur de nombreuses fonctions de base (ici quatre groupes, soit trente-deux fonctions de base).

Le faible écart relevé entre les résultats théoriques et expérimentaux atteste, comme dans le cas du régime libre, de la validité de notre analyse en régime forcé. Notons que cet écart est généralement crée par un léger décalage fréquentiel de l'impédance d'entrée. En réalité ces variations en fréquence sont minimales (de l'ordre de 1%) et peuvent être imputées à la sensibilité du phénomène de résonance aux incertitudes liées aux paramètres matériaux ( électriques et géométriques).



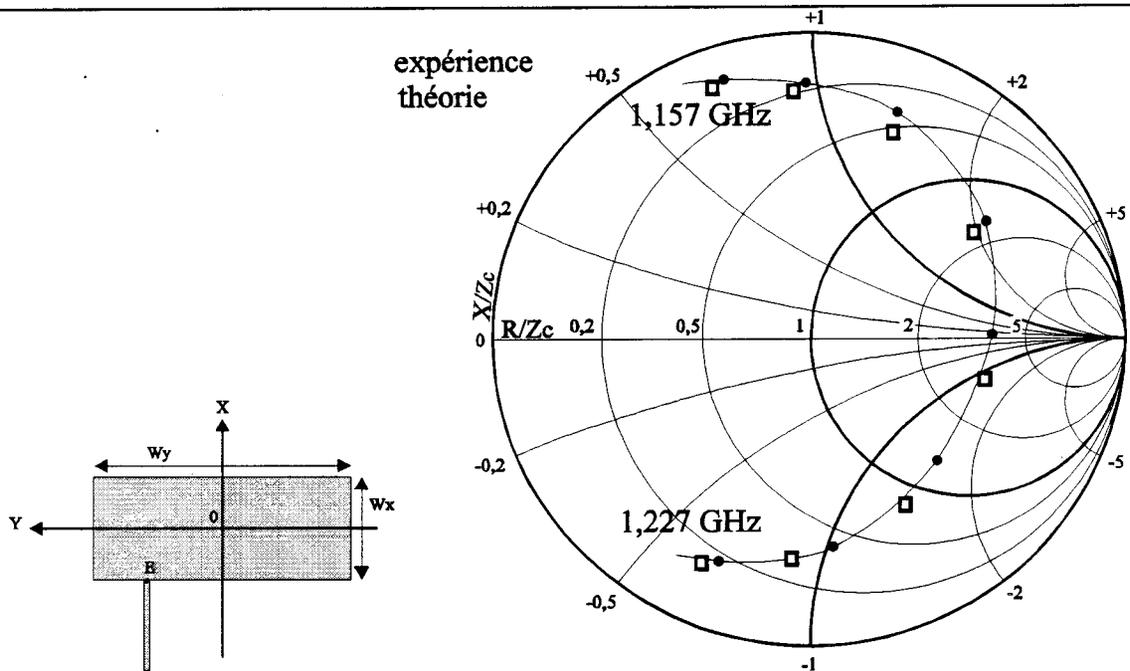


Figure I-30: Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux [22].  
 4 groupes de symétrie pour  $J_x$  et  $J_y$ .  $W_x=11,4$  cm;  $W_y=7,6$  cm,  $\epsilon_1=2,60\epsilon_0$ ;  
 $h_1=0,159$ cm;  $x_E=-5,7$  cm;  $y_E=-1,83$  cm

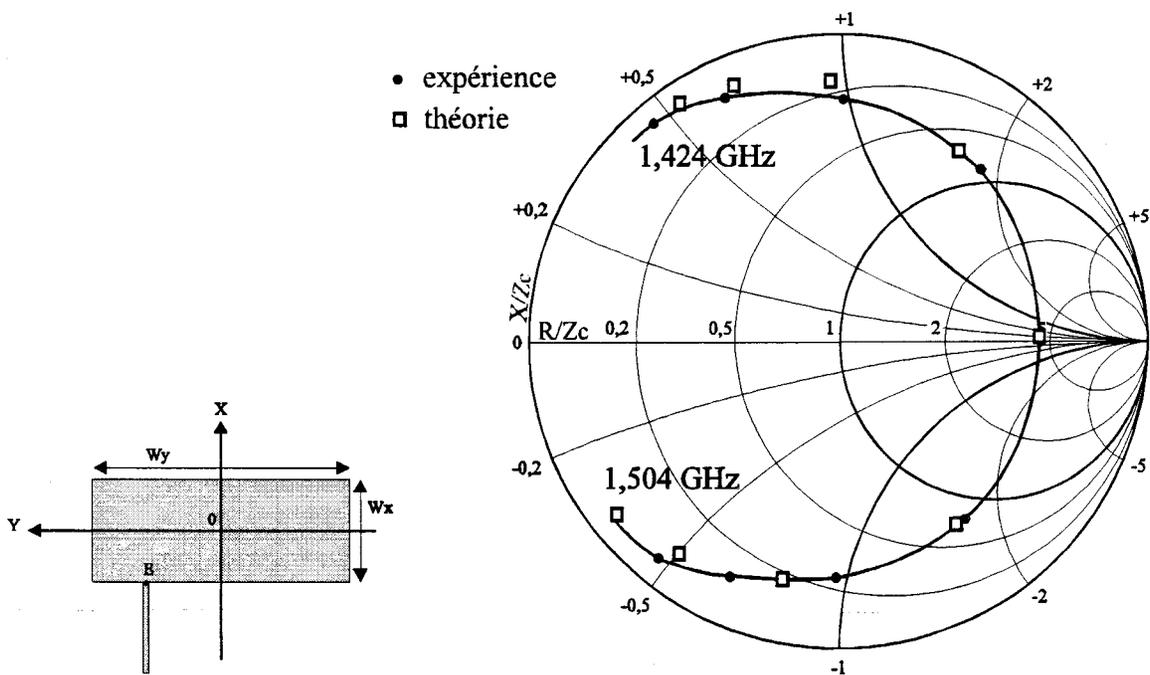


Figure I-31: Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux [22].  
 4 groupes de symétrie pour  $J_x$  et  $J_y$ .  $W_x=7,6$  cm;  $W_y=11,4$  cm,  $\epsilon_1=2,60\epsilon_0$ ;  
 $h_1=0,159$ cm;  $x_E=-3,8$  cm;  $y_E=8,38$  cm

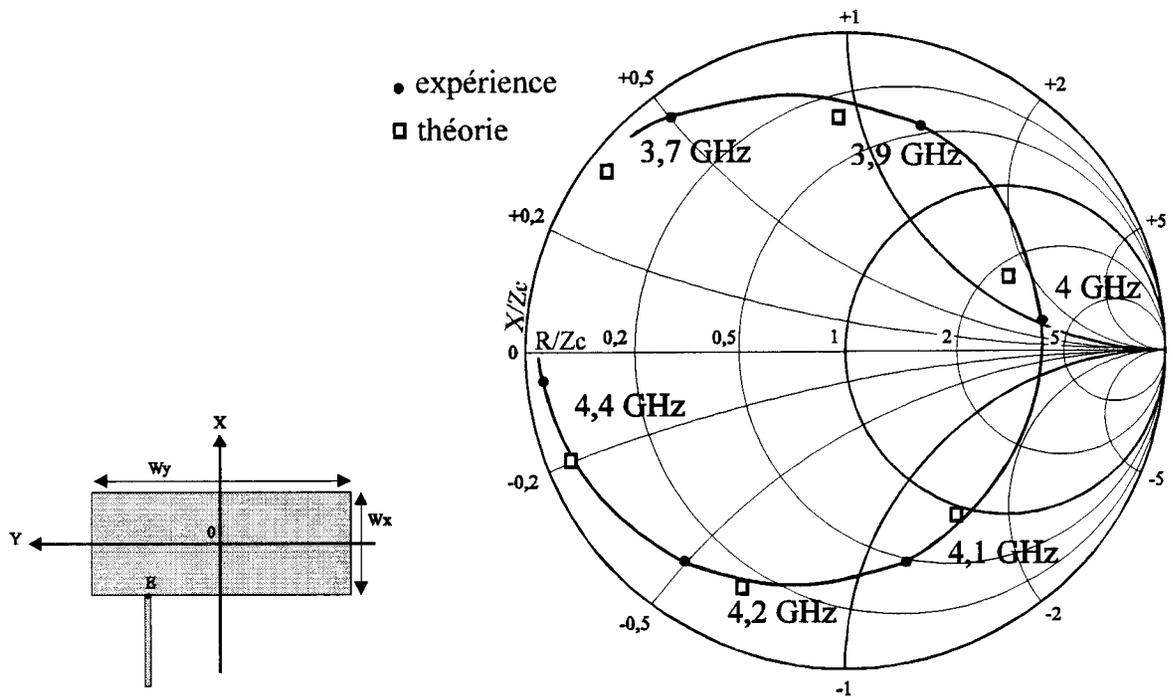


Figure I-32: Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux. 4 groupes de symétrie pour  $J_x$  et  $J_y$ .  $W_x=2,2572$  cm;  $W_y=3,078$  cm,  $\epsilon_1=2,62\epsilon_0$ ;  $h_1=0,08$ cm;  $x_E=-1,13$  cm;  $y_E=0,821$  cm

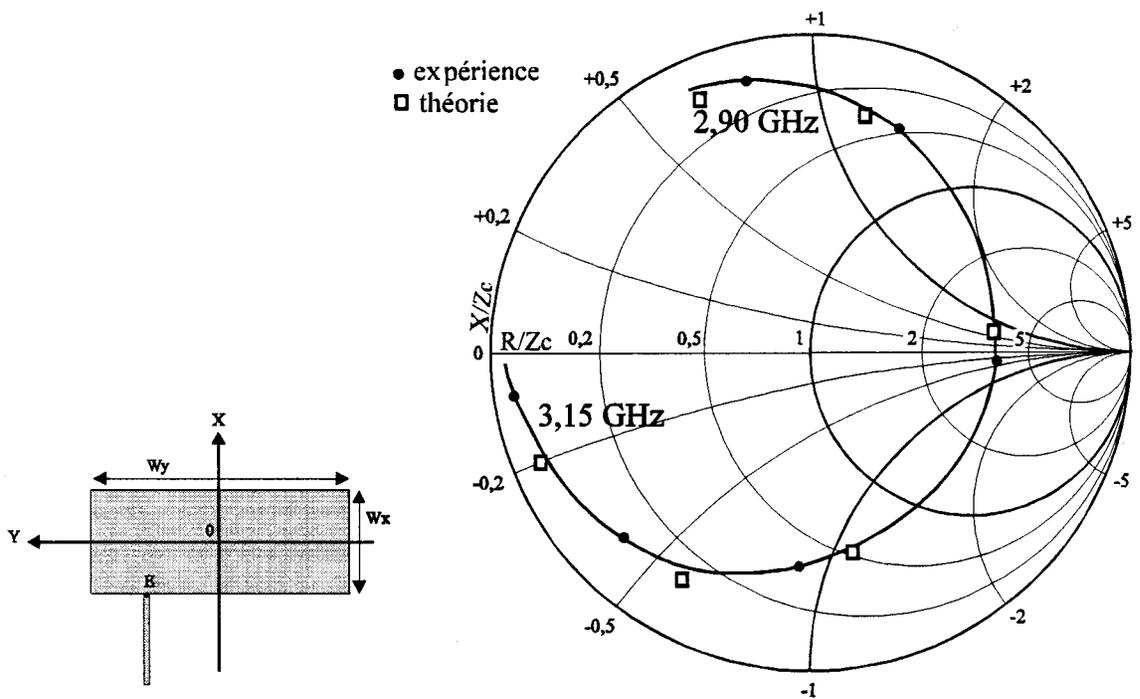


Figure I-33: Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux. 4 groupes de symétrie pour  $J_x$  et  $J_y$ .  $W_x=2,2572$  cm;  $W_y=3,078$  cm,  $\epsilon_1=2,62\epsilon_0$ ;  $h_1=0,08$ cm;  $x_E=-1,13$  cm;  $y_E=0,821$  cm

## I-11 CONCLUSION

Nous avons dans ce chapitre présenté une analyse complète, basée sur la résolution d'équations intégrales par la méthode des moments, du résonateur rectangulaire imprimé en structure microruban.

Nous avons d'abord présenté l'équation intégrale à résoudre. Parmi le choix de deux formulations intégrales, nous justifions l'utilisation du théorème de réaction dans le domaine transformé de Fourier 2 dimensions. L'application de ce théorème ne nécessite en effet pour la résolution du problème en régime forcé qu'une seule fonction de Green.

La fonction de Green peut dans le domaine spectral être calculée analytiquement par une méthode reprenant les résultats de la théorie des lignes. Cette méthode est utilisée ici dans le cas d'une couche diélectrique posée sur un plan de masse, et peut être très facilement généralisée à des structures multicouches et multiconducteurs. Le cas des substrats de permittivité présentant une anisotropie uniaxiale est également évoqué.

Après avoir brièvement décrit la méthode des moments utilisée (méthode de Galerkin), nous décomposons les distributions inconnues de densités de courant de manière à pouvoir appréhender le comportement de résonateurs perturbés par leur excitation. Ces distributions sont en effet approchées par un ensemble de fonctions de base regroupant les quatre groupes de symétrie possibles suivant les axes  $Ox$  et  $Oy$ . Ce choix permet la reconstitution des densités de courant non symétriques rencontrées, en régime forcé, pour des dispositifs d'excitation décentrés et perturbant fortement le courant sur la plaque rectangulaire.

Le calcul des constantes de propagation dans le domaine spectral nécessite la détermination de la branche de coupure de la racine carrée de  $\gamma_z$ . Il devient en conséquence nécessaire d'imposer aux variables d'intégration un parcours dans le plan complexe. Un autre problème réside dans la présence de pôles dans le plan des variables d'intégration. Ces singularités traduisent la génération d'ondes de surface conséquemment prises en compte dans la formulation. Plusieurs parcours sont proposés et un critère de convergence heuristique est dégagé de nos essais.

En France les derniers développements significatifs sur ce type d'étude ont été publiés en 1990 [9]. La présentation du calcul des intégrales de réaction dans le plan complexe n'a en soi rien d'originale, elle constitue cependant une illustration caractéristique des problèmes rencontrés lors de la conception de codes de calcul basés sur l'approche dans le domaine spectral 2 dimensions.

Dans cette première partie la méthode des moments est appliquée en utilisant des fonctions de base définies chacune sur la surface totale de la plaque P. Cette description manque de flexibilité et ne permet pas d'appréhender le comportement de résonateurs de topologie quelconque.

L'introduction de fonctions de base définies par sous-domaines permet de répondre à ce type d'exigence, et constitue l'objet du deuxième chapitre.

BIBLIOGRAPHIE RELATIVE AU PREMIER CHAPITRE

- [1] Tatsuo Itoh: "Analysis of Microstrip Resonators". IEEE MTT Vol.22, N°11, pp.946-952, November 1974
- [2] V.H. Rumsey: "Reaction Concept in Electromagnetic Theory". Physical Review, Vol.94, N°6, pp.1483-1491, June 1954
- [3] Tatsuo Itoh: "Spectral Domain Immitance Approach for Dispersion Characteristics of Generalized Printed Transmission Lines". IEEE MTT Vol.28, N°7, pp.733-736, July 1980
- [4] Tatsuo Itoh, Wolfgang Menzel: "A Full-Wave Analysis Method for Open Microstrip Structures" IEEE AP Vol.29, N°1, pp.63-67, January 1981
- [5] R.W. Simon *et al.*, " Low-loss substrate for epitaxial growth of high-temperature superconductor thin films". Appl. Phys. Letter Vol.53, N°26, pp.2677-2679, December 1988
- [6] N.P. Bansal, R.N. Simons: "High  $T_c$  screen-printed  $YBa_2Cu_3O_{7-x}$  films: Effect of the substrate material". Appl. Phys. Letter Vol.53, N°7, pp.603-605, August 1988
- [7] J. Konopka, I. Wolff: "Dielectric properties of high- $T_c$  substrates up to 40 GHz". IEEE MTT-S Digest, pp. 1027-1030, 1992
- [8] David M. Pozar: " Input Impedance and Mutual Coupling of Rectangular Microstrip Antennas". IEEE AP Vol.30, N°6, pp.1191-1196, November 1982
- [9] S. Assailly: "Contribution à l'étude des antennes imprimées multicouches par une approche dans le domaine spectral. Application au couplage". Thèse de Doctorat de l'Université. Université de Rennes I. 27 Avril 1990
- [10] R.M. Nelson *et al.* " Resonant Frequency of a Rectangular Microstrip Patch on Several Uniaxial Substrates". IEEE AP Vol.38, N°7, pp.973-981, July 1990
- [11] M.D.Deshpande, M.C. Bailey: "Input Impedance of Microstip Antennas". IEEE AP Vol.30, N°4, pp.645-650, July 1982

- [12] H. Legay , J.M. Floc'h, J. Citerne, G. Piton: "Etude théorique et expérimentale d'antennes plaques alimentées par couplage de proximité à une ligne microruban". Ann. Télécommun., 45, N°3-4, 1990
- [13] S.Assailly, C.Terret, J.P. Daniel: "Spectral Domain Approach Applied to Open Resonators: Application to Microstrip Antennas". Electronics Letters, Vol.24, N°2, January 1988.
- [14] E.H. Newman, P.T. Tulyathan: " Analysis of Microstrip Antennas Using Moment Methods". IEEE AP Vol.29, N°1, pp. 47-53, January 1981
- [15] H.A. Atwater: "Simplified Design Equations for Microstrip Line Parameters". Microwave Journal, pp.109-115, November 1989
- [16] K.C.Gupta, Ramesh Garg, I.J.Bahl: "Microstrip Lines and Slotlines". Artech 1979.
- [17] B. Roudot: " Analyse d'antennes imprimées par une approche dans le domaine spectral". Thèse de 3ème cycle, Université de Rennes I, 1985
- [18] H.Y Yang *et al.*: "Efficient Evaluation of Spectral Integrals in the Moment Method Solution of Microstrip Antennas and Circuits". IEEE AP Vol.38, N°7, pp.1127-1130, July 1990
- [19] N.K. Das, D.M. Pozar: "Full-Wave Spectral-Domain Computation of Material, Radiation, and Guided Wave Losses in Infinite Multilayered Printed Transmission Lines". IEEE MTT Vol.39, N°1, pp.54-63, January 1991
- [20] D.M. Pozar, S.M. Voda: " A Rigorous Analysis of a Microstrip Fed Patch Antenna". IEEE AP Vol.35, N°12, pp.1343-1350, December 1987
- [21] E.O Hammersdat, F.Bekkadal: " A Microstrip Handbook". ELAB Report, University of Trondheim, Norway 1975, pp.98-110.
- [22] Y.T. Lo, D.Solomon, W.F. Richards: "Theory and experiment on Microstrip Antennas". IEEE AP Vol.27, N°2, pp.137-145, March 1979

## CHAPITRE DEUXIEME

# CHAPITRE DEUXIEME

## **II-1 INTRODUCTION**

Les difficultés relatives à l'application de l'approche dans le domaine spectral ont été répertoriées et étudiées dans le premier chapitre. Cette méthode ayant, au travers d'une implantation numérique, révélé de bonnes potentialités quant à la précision des résultats obtenus, nous nous sommes dans ce chapitre donné pour but de simuler des circuits microrubans de formes quelconques.

En effet, la description de résonateurs rectangulaires ou circulaires par la méthode de la cavité [1], voire par la théorie des lignes [2], permet une prédiction relativement précise de leurs caractéristiques (à condition toutefois que soient définis leurs domaines de validité). De façon similaire, les caractéristiques des lignes de propagation microruban classiques, depuis longtemps accessibles par le biais de relations empiriques [3], n'imposent en pratique pas le recours à des programmes lourds et coûteux.

La simulation de structures plus complexes n'est cependant pas accessible à ces méthodes: les phénomènes de couplage entre éléments ne peuvent par exemple qu'être difficilement analysés. Il en va de même de la prise en compte des discontinuités.

L'étude de structures microruban par la méthode des équations intégrales et introduction de fonctions de base définies par sous-domaines, a été utilisée sur l'exemple simple du dipôle imprimé en 1984 [4] dans le domaine réel. Cette étude a suscité de nombreux travaux concernant la simulation de résonateurs décrits à l'aide de fonctions de base définies sur des domaines constituant chacun une fraction de la surface totale des conducteurs, tant dans le domaine réel [5][6] que dans le domaine transformé de Fourier [7][8][9].

L'utilisation de fonctions de base définies par sous domaine de formes différentes a d'abord permis une économie sensible de l'effort numérique à fournir pour la simulation de problèmes électromagnétiques. Ainsi, Splitt et Maradovitz [9] résolvent le problème du résonateur rectangulaire alimenté par une ligne microruban, en employant sur la surface du résonateur des fonctions de base du type de celles décrites au premier chapitre (définies sur la surface du résonateur), tandis que des fonctions de base triangulaire à base rectangulaire (*rooftop*) décomposent le courant sur la ligne d'alimentation.

L'accroissement des performances des calculateurs a ensuite offert au concepteur la possibilité de décomposer ces conducteurs en fonctions de base élémentaires, c'est à dire identiques mais occupant des espaces différents. Même si la grande majorité des travaux publiés jusqu'à récemment concernent uniquement l'analyse de discontinuités microruban élémentaires (sauts de

géométrie, coudes, fins de ligne, résonateurs,...[10][11][12]), cette façon de procéder révèle de réelles potentialités.

Nous présentons dans ce chapitre une étude détaillée de l'analyse de circuits microruban multipôles de forme quelconque s'appuyant sur une telle décomposition.

## **II-2 CHOIX DES FONCTIONS DE BASE**

Dans le cadre de cette étude, nous avons utilisé des fonctions de base triangulaires (**figure II-1**) ne préfigurant absolument pas le circuit étudié. Ces fonctions de base constituent un bon compromis entre la simplicité des calculs et la précision des résultats.

A ce niveau il est utile de préciser, pour des fonctions définies par sous domaine, quels sont les critères présidant à ce choix. La fonction de base doit nécessairement vérifier les conditions de continuité liés à la présence physique du courant sur le conducteur; ce qui impose:

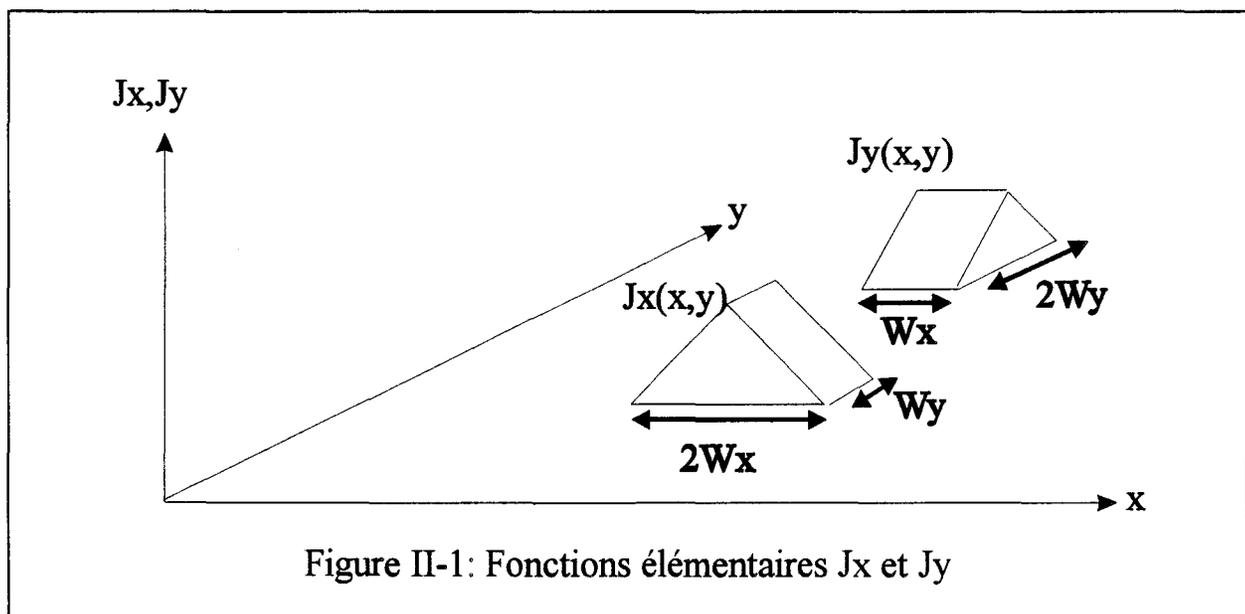
- après la résolution du problème, la continuité de la densité de courant totale  $J_x$  (respectivement  $J_y$ ) suivant la direction  $Ox$  (resp.  $Oy$ ); ceci afin d'éviter d'introduire un phénomène non physique d'accumulation de charges locales.

- l'annulation du courant  $J_x$  (resp.  $J_y$ ) sur un bord parallèle à  $Oy$  (resp.  $Ox$ )

Les fonctions de base élémentaires de type *rooftop*  $J_x(x,y)$  et  $J_y(x,y)$  vérifient ces conditions. Centrées à l'origine du repère  $(O,x,y)$ , elles ont pour expression:

$$J_x(x,y) = \begin{cases} 1 + \frac{x}{W_x} & \text{si } -W_x < x < 0 \text{ et } |y| \leq \frac{W_y}{2} \\ 1 - \frac{x}{W_x} & \text{si } 0 < x < W_x \text{ et } |y| \leq \frac{W_y}{2}; \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$J_y(x,y) = \begin{cases} 1 + \frac{y}{W_y} & \text{si } -W_y < y < 0 \text{ et } |x| \leq \frac{W_x}{2} \\ 1 - \frac{y}{W_y} & \text{si } 0 < y < W_y \text{ et } |x| \leq \frac{W_x}{2}; \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (\text{II-1})$$

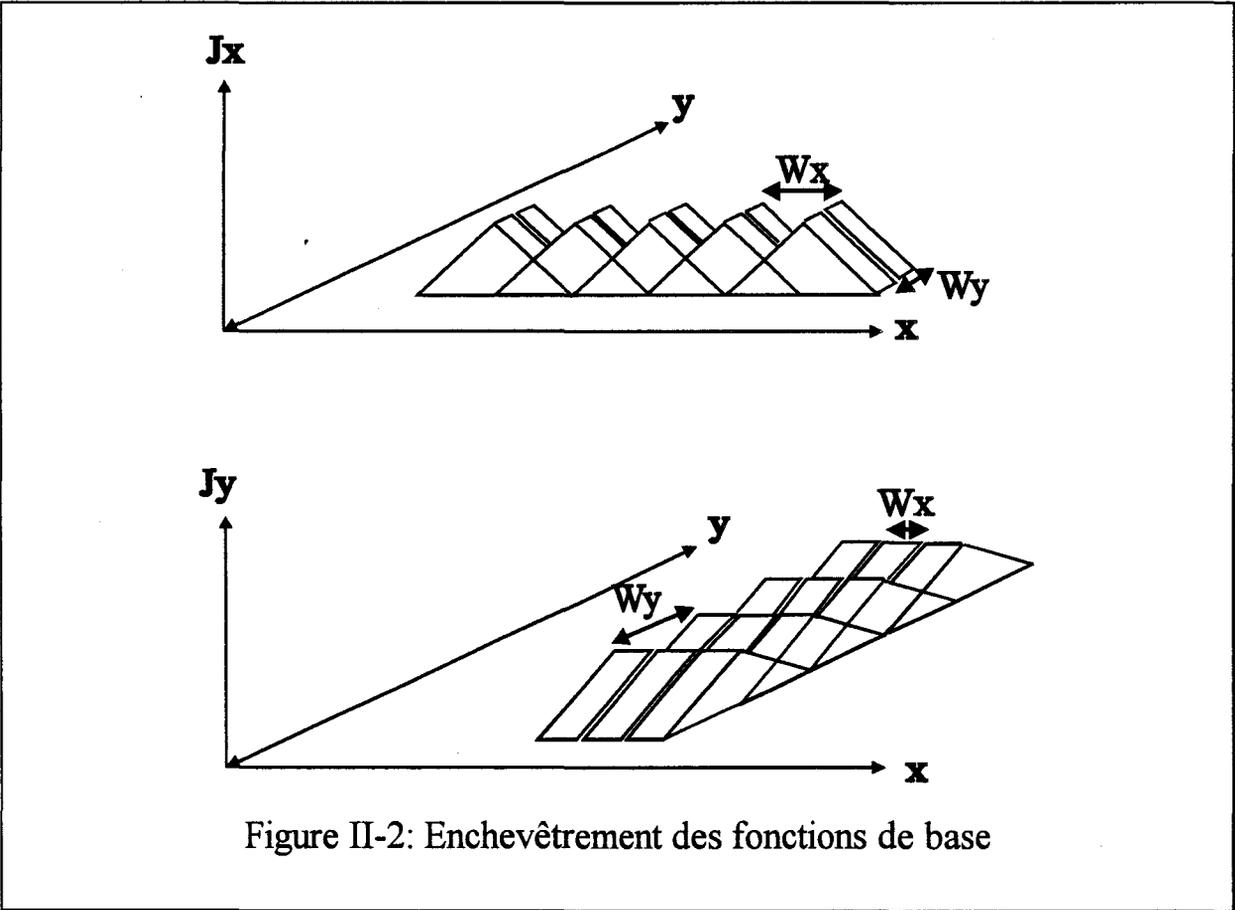


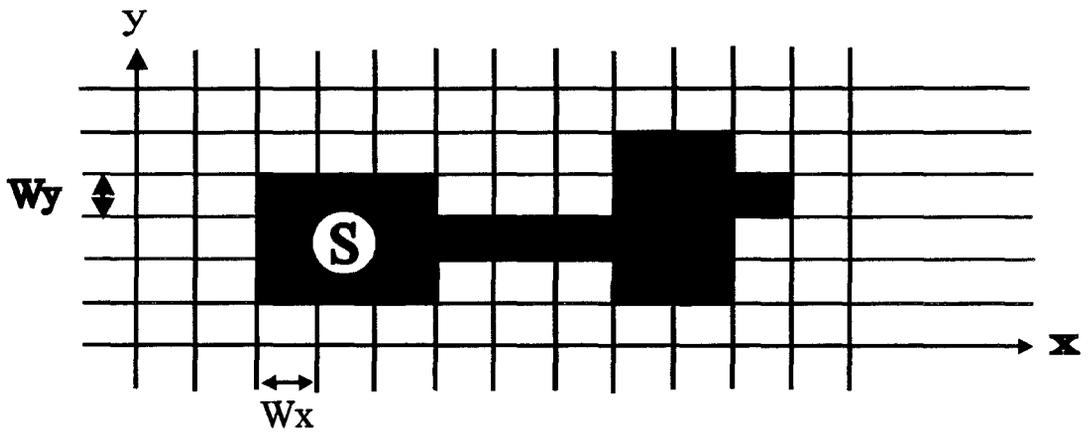
Afin de satisfaire à la première condition, la densité de courant présente sur une surface de forme quelconque doit être décomposée par un assemblage régulier de fonctions de base enchevêtrées (**figure II-2**). Chaque fonction de base

$J_x$  et  $J_y$ , définie sur deux cellules élémentaires du quadrillage, est placée de façon à ce que toutes occupent l'ensemble de la surface  $S$ .

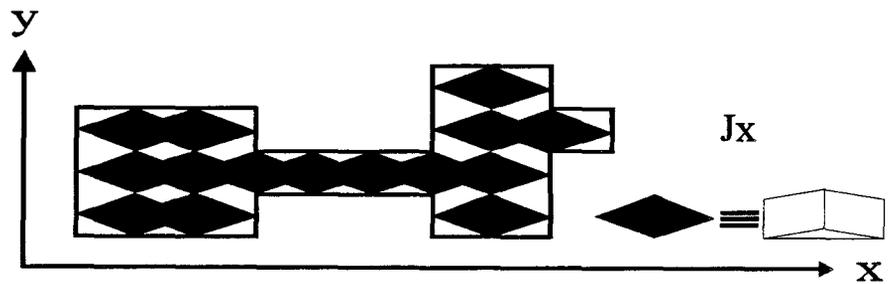
La deuxième condition, comme nous le voyons sur l'exemple traité **figure II-3**, où chaque fonction de base est représentée par un losange, est toujours respectée. En effet, la nullité du courant perpendiculaire à un bord du conducteur est vérifiée de part l'absence même de fonction de base adjacente.

Dans cet exemple, la largeur de l'élément central est égale à la largeur d'une case élémentaire du quadrillage. Pour cette raison, il n'est pas possible d'introduire des fonctions de base traduisant le courant  $J_y$ . Ceci n'est pas critique dès lors que les dimensions d'une cellule élémentaire sont faibles devant la longueur d'onde guidée  $\lambda_g$  [7].

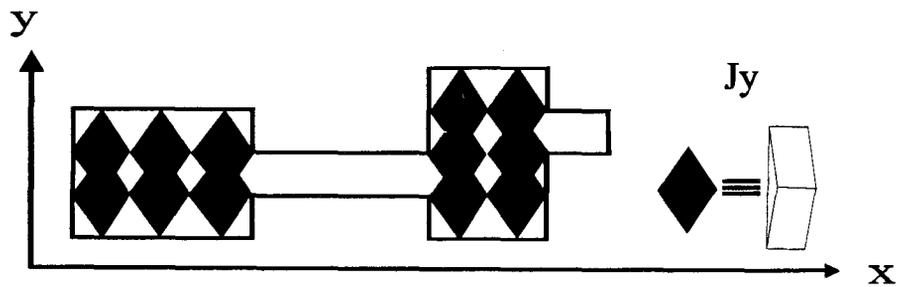




a) surface complexe à analyser



b) décomposition en fonctions de base  $J_x$



c) décomposition en fonctions de base  $J_y$

Figure II-3 Décomposition en fonctions de base élémentaires

## II-3 PROBLEMES NUMERIQUES LIES A L'UTILISATION DE FONCTIONS DE BASE TRIANGULAIRES.

L'emploi de fonctions de base définies par sous domaine ouvre à l'approche dans le domaine spectral un champ d'application plus large, et permet d'analyser des circuits plaqués de forme arbitraire. On conçoit aisément que les capacités de calcul nécessaires à la résolution de problèmes complexes peuvent rapidement devenir prohibitives. En effet, la finesse du quadrillage nécessaire à l'étude d'un circuit dépend non seulement de ses dimensions par rapport à la longueur d'onde guidée mais encore de sa forme spécifique [13].

De fait, la diminution des dimensions du quadrillage accroît très rapidement les capacités de calcul à mettre en oeuvre.

- par l'augmentation du nombre de fonctions de base que cela implique pour décrire géométriquement la structure étudiée.

- par l'étalement du spectre à prendre en considération lors du calcul des intégrants des termes de réaction lorsque les dimensions des fonctions de base diminuent.

Avant d'aborder la phase d'exploitation de nos codes de calcul, nous précisons ici l'ensemble des problèmes numériques spécifiquement attachés à l'emploi de fonctions de base définies par sous-domaine, ainsi que les solutions retenues.

II-3-1 MISE EN EVIDENCE DE LA TOPOLOGIE DE LA MATRICE DE REACTION:

Le terme général  $Z_{ij}$  de la matrice  $[z]$  du système I-30 est défini de la même façon qu'au premier chapitre par le calcul de la réaction entre la fonction de base  $j$  à la fonction de test  $i$  (I-31):

$$\begin{aligned} Z_{i,j} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{E}_j(\alpha, \beta) \cdot \bar{J}_i^*(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{G}(\alpha, \beta) \bar{J}_j(\alpha, \beta) \cdot \bar{J}_i^*(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (\text{II-2})$$

Dans le cas d'une fonction de base  $J_X$  centrée au point  $(x_b, y_b)$  et d'une fonction de test  $J_X$  centrée au point  $(x_t, y_t)$ , ce terme s'écrit:

$$Z_{XX_{t,b}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{XX}(\alpha, \beta) J_X(\alpha, \beta) J_X^*(\alpha, \beta) e^{-j((x_b - x_t)\alpha + (y_b - y_t)\beta)} d\alpha d\beta \quad (\text{II-3})$$

avec  $J_X(\alpha, \beta)$  transformée de la fonction  $J_X(x, y)$  centrée au point  $O$  de coordonnées  $(0, 0)$ .

Ce terme  $Z_{XX}$  ne dépend que de la position relative de la fonction de base par rapport à la fonction de test. L'arrangement régulier des cellules sur le quadrillage de dimensions  $W_x, W_y$  permet d'écrire:

$$Z_{XX_{t,b}} = Z_{XX}(mW_x, nW_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{XX}(\alpha, \beta) J_X(\alpha, \beta) J_X^*(\alpha, \beta) e^{-j(mW_x\alpha + nW_y\beta)} d\alpha d\beta$$

$(m, n) \in Z^2 \quad (\text{II-4})$

Il n'a donc, pour l'ensemble des décalages de valeurs  $mW_x$  et  $nW_y$ , qu'à être calculé qu'une seule fois.

Le calcul des termes de réaction entre fonctions différentes ( $J_x$  et  $J_y$ ) s'obtient de la même façon. Il est cependant nécessaire, puisque les centres des fonctions de test et de base ne peuvent se superposer, d'y ajouter un terme de décalage constant:

$$Z_{xy}(mW_x, nW_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{xy}(\alpha, \beta) J_y(\alpha, \beta) J_x^*(\alpha, \beta) e^{-j((m-\frac{1}{2})W_x\alpha + (n+\frac{1}{2})W_y\beta)} d\alpha d\beta$$

(II-5)

Les autres termes admettent pour expressions:

$$Z_{yx}(mW_x, nW_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{yx}(\alpha, \beta) J_x(\alpha, \beta) J_y^*(\alpha, \beta) e^{-j((m+\frac{1}{2})W_x\alpha + (n-\frac{1}{2})W_y\beta)} d\alpha d\beta$$

$$Z_{yy}(mW_x, nW_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{yy}(\alpha, \beta) J_y(\alpha, \beta) J_y^*(\alpha, \beta) e^{-j(mW_x\alpha + nW_y\beta)} d\alpha d\beta$$

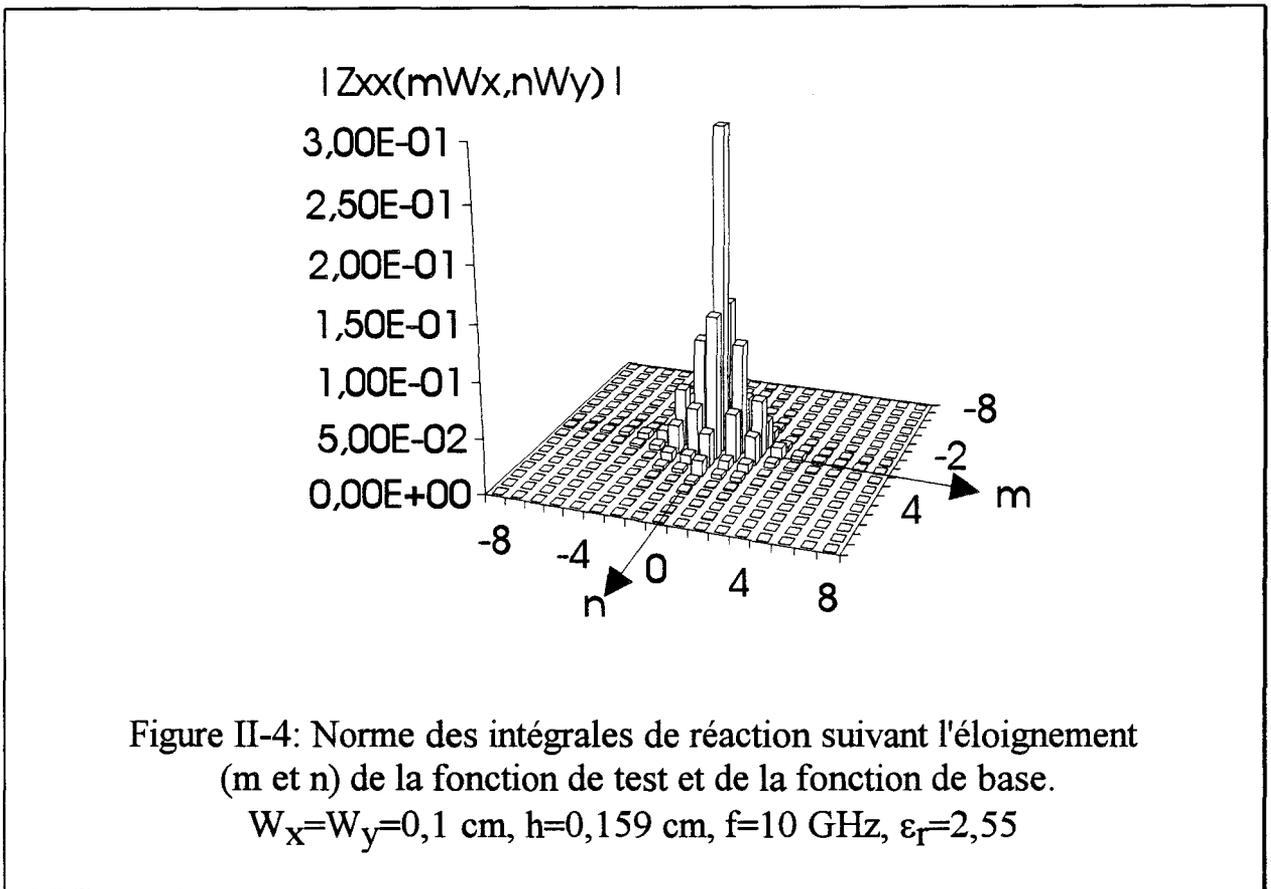
(II-6)

Afin d'illustrer les propriétés de la matrice de réaction nous considérons maintenant le cas typique du terme  $Z_{xx}(mW_x, nW_y)$ . La **figure II-4** montre l'évolution de la norme de  $Z_{xx}(mW_x, nW_y)$ , calculée par intégration dans le plan complexe  $k\rho$ , suivant les valeurs prises par le couple  $(m, n)$  correspondant chacune à un décalage entre fonctions de base et de test.

Il apparaît que le terme  $|Z_{xx}(mW_x, nW_y)|$  décroît rapidement lorsque  $|m|$  et  $|n|$  croissent, de façon à ce qu'il est possible de négliger, dans la construction de la

matrice  $[Z]$ , l'apport des fonctions de base seulement éloignées de quelques cellules élémentaires de la fonction de test.

Ainsi, et quelque soit l'étendue et la topologie du circuit à modéliser, un nombre limité de termes de réaction suffit à la construction complète de la matrice  $[Z]$ .



### II-3-2 Etallement du spectre des fonctions de base

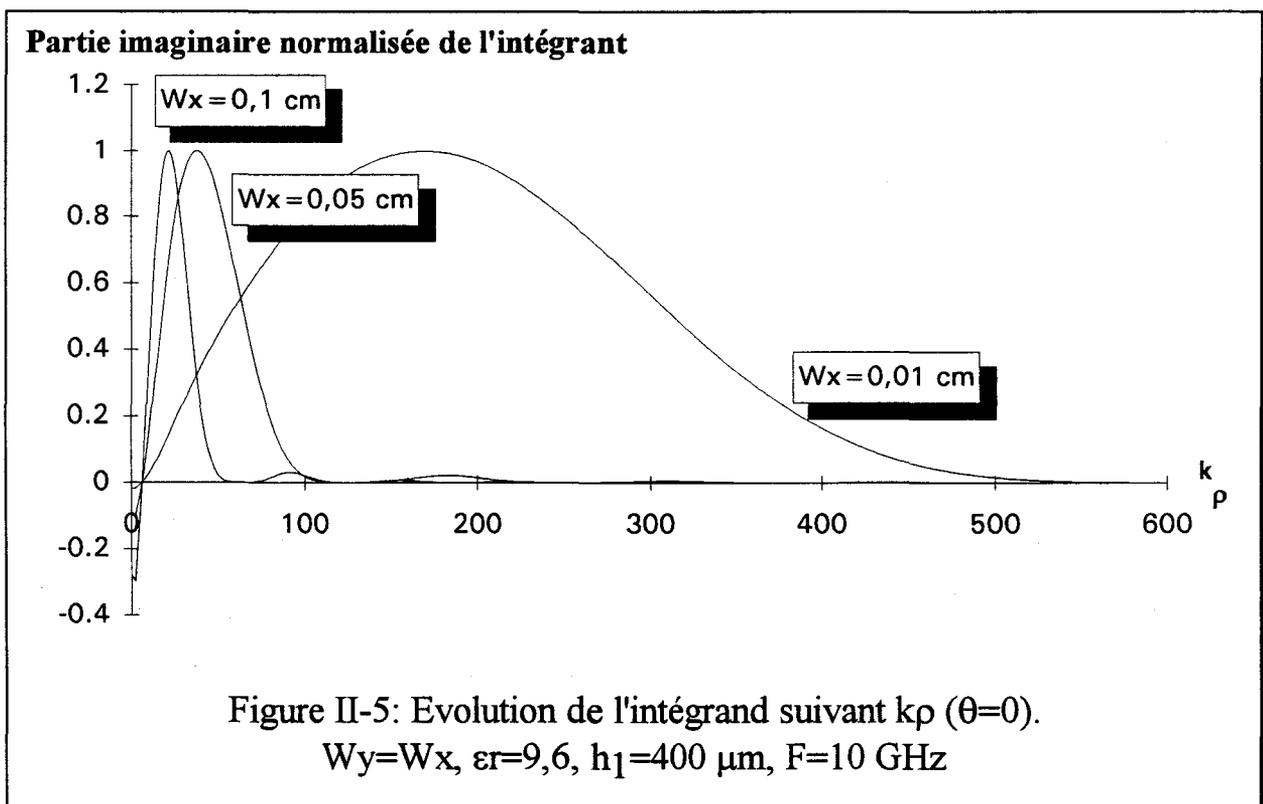
L'intégration des termes de réaction, effectuée comme précédemment sur un parcours dans le plan complexe des variables  $\alpha$  et  $\beta$ , nécessite le changement de repère en coordonnées cylindriques, pour les raisons décrites au paragraphe I-4. Dans le cas d'une fonction de base  $J_x$  et d'une fonction de test  $J_x$ , l'intégrale prend la forme suivante:

$$Z_{xx_{t,b}}(mW_x, nW_y) = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} G_{xx}(k\rho \cos(\theta), k\rho \sin(\theta)) J_x(k\rho \cos(\theta), k\rho \sin(\theta)) J_x^*(k\rho \cos(\theta), k\rho \sin(\theta)) e^{-j(m_x k\rho \cos(\theta) + nW_y k\rho \sin(\theta))} k\rho dk\rho d\theta$$

(II-7)

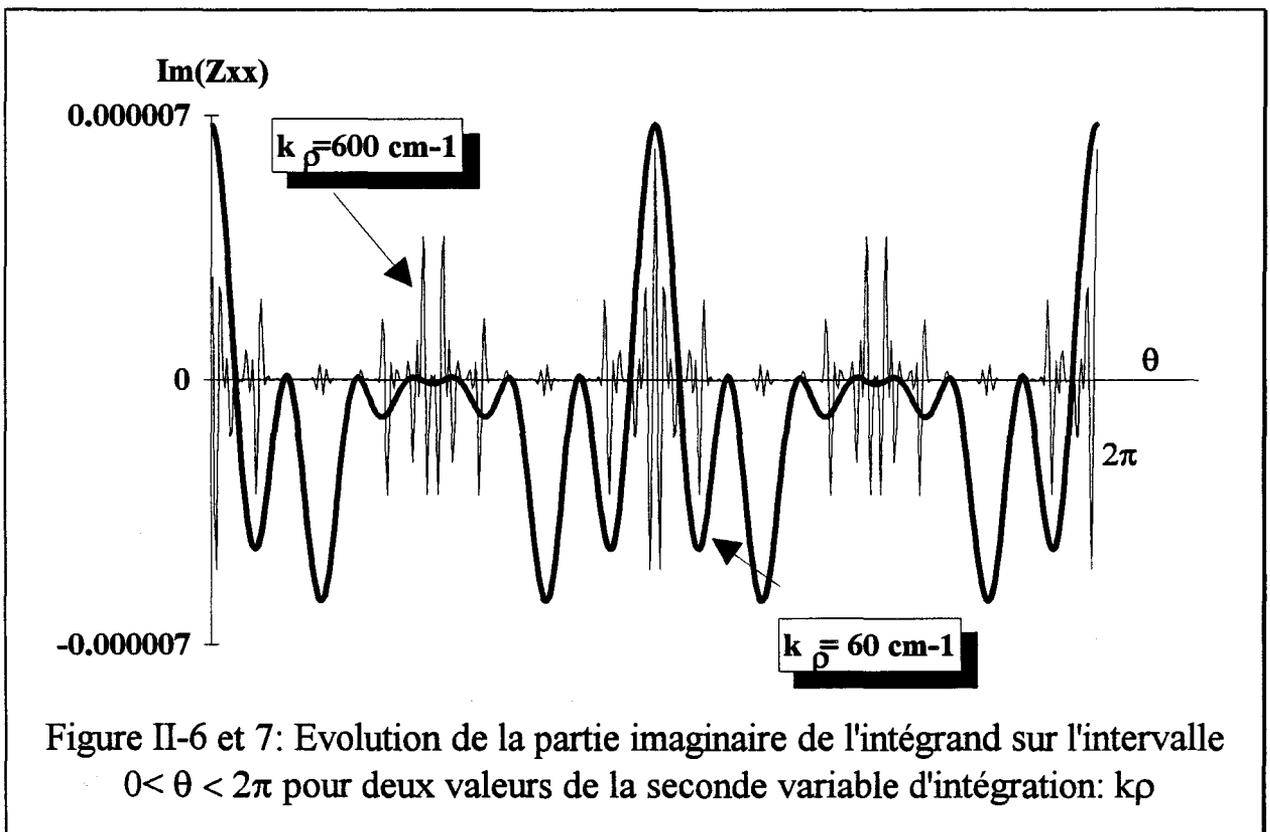
Nous déterminons, comme dans le cas des fonctions de base entières, les valeurs de  $k\rho$  permettant la convergence des intégrales. Nous traçons pour cela **figure II-5** la partie imaginaire de l'intégrand pour différentes valeurs de la largeur d'une fonction de base  $W_x$ , en prenant comme parcours l'axe réel du plan complexe  $k\rho$ , et en fixant  $\theta=0$ . L'étalement du spectre lorsque les dimensions des fonctions de base diminuent impose la poursuite de l'intégration vers des valeurs de  $k\rho$  données empiriquement par la relation:

$$k\rho_{\max} = \sup\left(\frac{12}{W_x}, \frac{12}{W_y}\right) \quad (\text{II-8})$$



Les faibles valeurs de  $W_x$  amènent donc à poursuivre l'intégration vers d'importantes valeurs de  $k_p$  et provoquent alors de très rapides oscillations de l'intégrand suivant l'angle  $\theta$ , dûes essentiellement à l'évolution de l'argument de la fonction exponentielle, et ceci d'autant plus sensiblement que la valeur du décalage ( $m$  et  $n$ ) augmente.

La **figure II-6 et 7** montre, pour deux valeurs de  $k_p$  (60 et 600  $\text{cm}^{-1}$ ) et pour un décalage entier entre fonctions de base et de test  $m=n=3$ , l'évolution de l'intégrand suivant  $\theta$  appartenant à l'intervalle  $[0, 2\pi]$ . Les oscillations sont telles qu'elles rendent extrêmement difficile la détermination des termes  $Z_{ij}$ . Ainsi le calcul des termes de réaction associés à des fonctions de base de dimensions inférieures au millimètre mènent avec cette méthode d'intégration à des temps de calcul prohibitifs, de l'ordre de la dizaine d'heures sur station de travail HP-735. Cette difficulté est levée par l'application d'une autre méthode d'intégration, objet du paragraphe suivant.



## II-4 CALCULS DES INTEGRALES PAR UNE TRANSFORME DE FOURIER RAPIDE

### II-4-1 MISE EN OEUVRE

L'intégrale de l'équation (II-7) a, de par la présence du terme exponentiel lié aux décalages des fonctions de base définies par sous domaines, la forme d'une transformée de Fourier:

$$Z_{xx}(mW_x, nW_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A_{xx}(\alpha, \beta) e^{-j(mW_x\alpha + nW_y\beta)} d\alpha d\beta \quad (\text{II-9})$$

N'ayant besoin de connaître les valeurs de l'intégrale  $Z_{xx}$  que pour des valeurs régulièrement espacées de  $W_x$  et de  $W_y$ , il est possible d'appliquer l'algorithme de Cooley-Tuckey [14] au calcul de la transformé de Fourier rapide. Cet algorithme permet, à condition de prendre:

$$\Delta\alpha = \frac{2\pi}{MW_x}; \Delta\beta = \frac{2\pi}{NW_y} \quad (\text{II-10})$$

et de rendre périodique de périodes:

$$T_\alpha = M\Delta\alpha; T_\beta = N\Delta\beta \quad (\text{II-11})$$

la fonction  $A_{xx}(\alpha, \beta)$ , d'approcher la valeur de l'intégrale (II-9) par la somme:

$$Z_{xx}(mW_x, nW_y) \cong \frac{4\pi^2}{MNW_x W_y} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} A_{xx}(k\Delta\alpha, l\Delta\beta) e^{-2\pi j(\frac{mk}{M} + \frac{nl}{N})} \quad (\text{II-12})$$

avec:  $0 \leq m \leq M$ ;  $0 \leq n \leq N$ ;  $A_{xx}(k\Delta\alpha + T_\alpha, l\Delta\beta + T_\beta) = A_{xx}(k\Delta\alpha, l\Delta\beta)$

où  $M, N$  sont des puissances de deux.

L'avantage de cet algorithme réside dans le fait qu'il suffit d'évaluer la fonction  $A_{XX}(k\Delta\alpha, l\Delta\beta)$  pour chaque valeur du couple  $(k, l)$  pour accéder à l'ensemble des valeurs de  $Z_{XX}(mW_x, nW_y)$ . Dans ce cas, le spectre lié aux ondes de surface adopte une configuration discrète, et le problème du franchissement de la branche de coupure évoqué au paragraphe I-4 ne se pose plus.

L'algorithme utilisé repose sur la "périodisation" et l'échantillonnage des fonctions  $A_{XX}$  dans le domaine spectral, et de  $Z_{XX}$  dans l'espace géométrique. Une première contrainte, liée au recouvrement éventuel du spectre de  $A_{XX}(k\Delta\alpha, l\Delta\beta)$  et du "spectre" de  $Z_{XX}(mW_x, nW_y)$  doit être considérée.

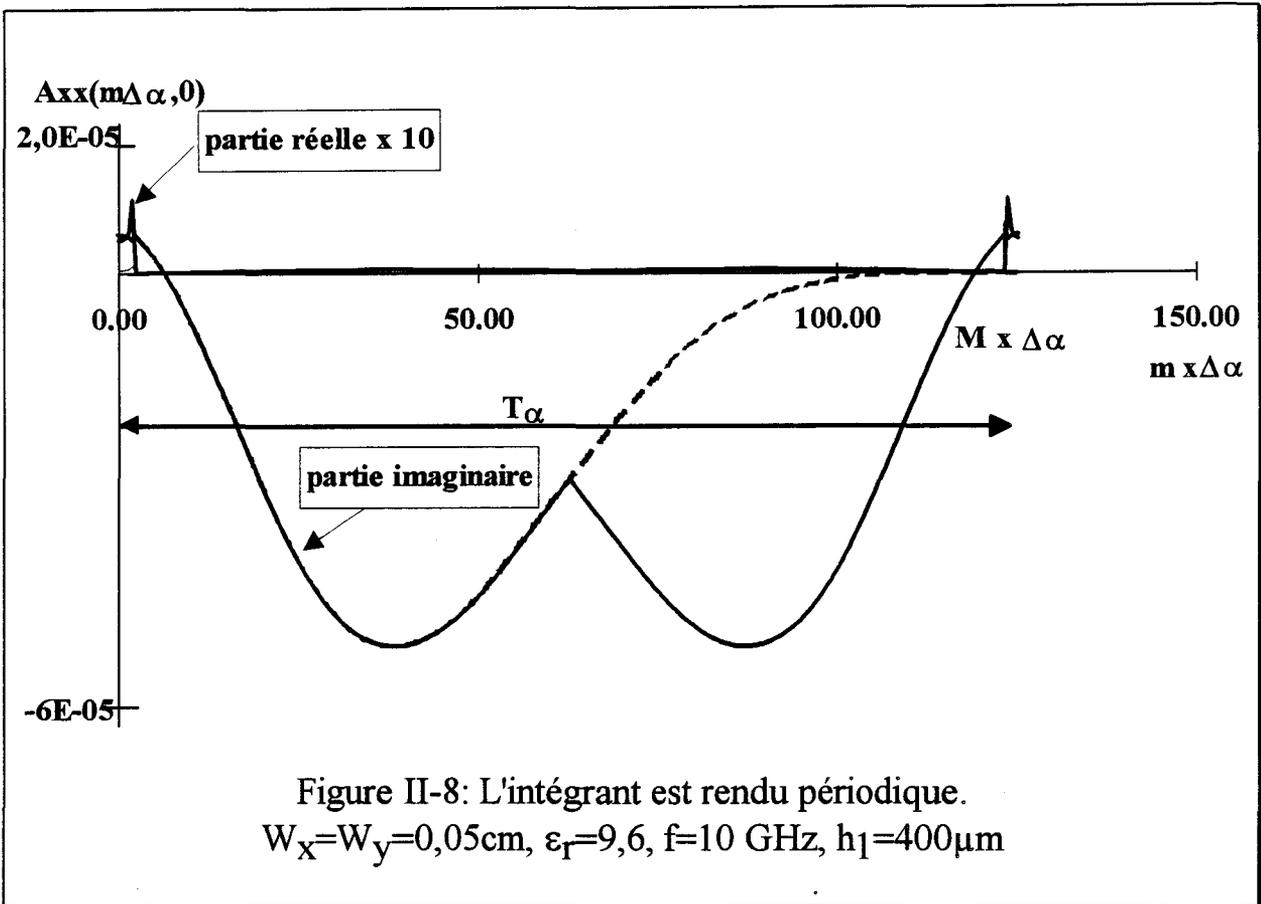
Nous avons montré précédemment figure II-4 que les fonctions  $Z_{XX}(mW_x, nW_y)$ , de période  $T_x = MW_x = 2^r W_x$  et  $T_y = NW_y = 2^s W_y$  décroissent très rapidement suivant  $M$  et  $N$ . De fait la contrainte sur le recouvrement de  $Z_{XX}$  n'est pas critique, et seule celle relative au recouvrement du spectre de  $A_{XX}(k\Delta\alpha, l\Delta\beta)$  pose problème.

#### II-4-2 RECOUVREMENT DES SPECTRES DE L'INTEGRANT ET CONVERGENCE DES CALCULS D'INTEGRATION PAR TRANSFORMEE RAPIDE

Les périodes  $T_\alpha$  et  $T_\beta$  de  $A_{XX}(k\Delta\alpha, l\Delta\beta)$  ne dépendent que du choix de  $W_x$  et de  $W_y$ , donc du quadrillage employé pour décrire le modèle d'étude dans l'espace géométrique:

$$T_\alpha = \frac{2\pi}{W_x}, \quad T_\beta = \frac{2\pi}{W_y} \quad (\text{II-13})$$

La **figure II-8** représente l'évolution de  $A_{XX}(\alpha, \beta)$  périodisée.



On voit sur cet exemple que la période  $T_\alpha$ , trop courte induit un phénomène de recouvrement du spectre.

Afin de rendre cette période plus importante, nous considérons les valeurs prises par  $Z_{xx}$  pour des décalages inférieurs aux décalages élémentaires et posons:

$$W'_x = \frac{W_x}{k}; \quad W'_y = \frac{W_y}{k} \quad (\text{II-14})$$

de cette façon, le calcul des termes:

$$Z_{xx}(rW'_x, sW'_y) = Z_{xx}\left(\frac{rW_x}{k}, \frac{sW_y}{k}\right) \quad (\text{II-15})$$

nous permet d'obtenir les termes  $Z_{xx}$  pour des nombre entiers de décalages ( $mW_x, nW_y$ ), tout en ayant:

$$T'_\alpha = \frac{2\pi}{W'_x} = \frac{2\pi k}{W_x} = kT_\alpha; \quad T'_\beta = kT_\beta \quad (\text{II-16})$$

Les termes supplémentaires  $Z_{xx}(\frac{rW_x}{k}, \frac{sW_y}{k})$  pour des rapports  $r/k$  et  $s/k$  non entiers sont laissés de côté après le calcul de transformée rapide.

La détermination de la valeur à donner au nouveau paramètre  $k$  dépend des périodes choisies dans l'espace transformé. Celles-ci ( $T'_\alpha$  et  $T'_\beta$ ) doivent être égales à (cf. paragraphe II-3):

$$T'_\alpha = T'_\beta = 2 k\rho_{\max}$$

et comme (II-8):

$$k\rho_{\max} = \sup\left(\frac{12}{W_x}, \frac{12}{W_y}\right) \quad (\text{II-17})$$

nous en déduisons:

$$\boxed{k \cong 4} \quad (\text{II-18})$$

Nous montrons **figure II-9** l'évolution de la fonction  $A_{xx}(m\Delta'_\alpha, n\Delta'_\beta)$  sur la période  $T'_\alpha$  pour cette valeur de  $k$  et vérifions que le recouvrement de spectre permet une intégration précise dans ce cas. Les périodicités spatiales  $T'_x$  et  $T'_y$  prennent alors les valeurs:

$$T'_x = \frac{T_x}{k}; \quad T'_y = \frac{T_y}{k} \quad (\text{II-19})$$

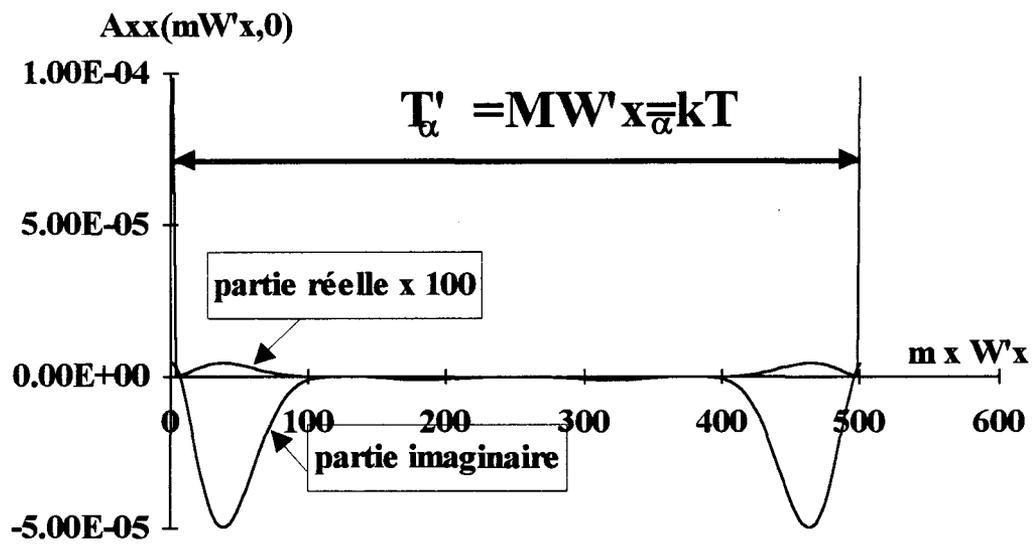


Figure II-9: Périodisation de la fonction  $A_{xx}$ .  $k=4$ .  
 $W_x=W_y=0,05\text{cm}$ ,  $\epsilon_r=9,6$ ,  $f=10\text{ GHz}$ ,  $h_1=400\mu\text{m}$

## II-5 MODELISATION DE L'ALIMENTATION

### II-5-1 DESCRIPTION DU MECANISME D'EXCITATION

Le régime forcé nécessite la définition du second membre de l'équation I-30:

$$\begin{array}{ccc} \left[ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right] & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ Z_{i,j} & \begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ I_N \end{array} & = \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ V_N \end{array} \\ N \times N & N \times 1 & N \times 1 \end{array} \quad (\text{II - 20})$$

Chaque composante  $V_i$  du second membre résulte de la réaction entre un courant de source  $J_s$  et un courant de test placé sur la plaque conductrice. La dimension de ce vecteur est égale au nombre de fonctions de base sur la plaque. Dans le cadre de l'utilisation de fonctions de base définies par sous-domaines, le calcul de nombreuses composantes  $V_i$  peut être évité par une autre solution au problème posé par la modélisation de l'excitation.

Celle utilisée ici repose toujours sur l'application du principe de réaction. En considérant comme source une fonction élémentaire de courant  $J_x$  sur la ligne microruban d'excitation, on calcule la tension induite par la distribution de courant sur la plaque ou le circuit, aux bornes de cette fonction appelée fonction d'excitation (**figure II-10**) [5]. Cette tension est, dans le modèle théorique, imposée; de sorte que le second membre  $[V]$  de l'équation matricielle (II-20)

s'écrit en mettant simplement à 1 le terme du vecteur d'excitation correspondant à la fonction de base d'excitation ( $J_{\text{excitation}}$ ):

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ V_j = 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II} - 21)$$

Dans ces conditions nous pouvons écrire dans l'espace transformé:

$$V_j = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^{\text{Nombre de fonctions de base}} \vec{E}_i \cdot \vec{J}_{\text{excitation}}^* d\alpha d\beta = 1 \quad (\text{II}-22)$$

où  $E_i$  représente le champ diffracté par chaque fonction de base  $i$

Soit (dans le domaine réel):

$$V_j = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^{\text{Nombre de fonctions de base}} \vec{E}_i(x, y) \cdot \vec{J}_{\text{excitation}}^*(x, y) dx dy = 1 \quad (\text{II}-23)$$

Le calcul de la différence de potentiel créée au niveau de la fonction test d'excitation peut s'effectuer en introduisant deux approximations:

a) Le champ électrique diffracté par la distribution de courant sur le circuit est constant sur la largeur  $2 W_x$  de la fonction test d'excitation.

b) Ce champ électrique total est principalement orienté suivant la direction de la ligne microruban d'excitation soit, ici, la direction Ox.

On impose alors sur la fonction d'excitation le champ:

$$E_{x_{\text{total}}}(x, y) = \text{cte} = \frac{1}{W_x W_y} \quad (\text{II-24})$$

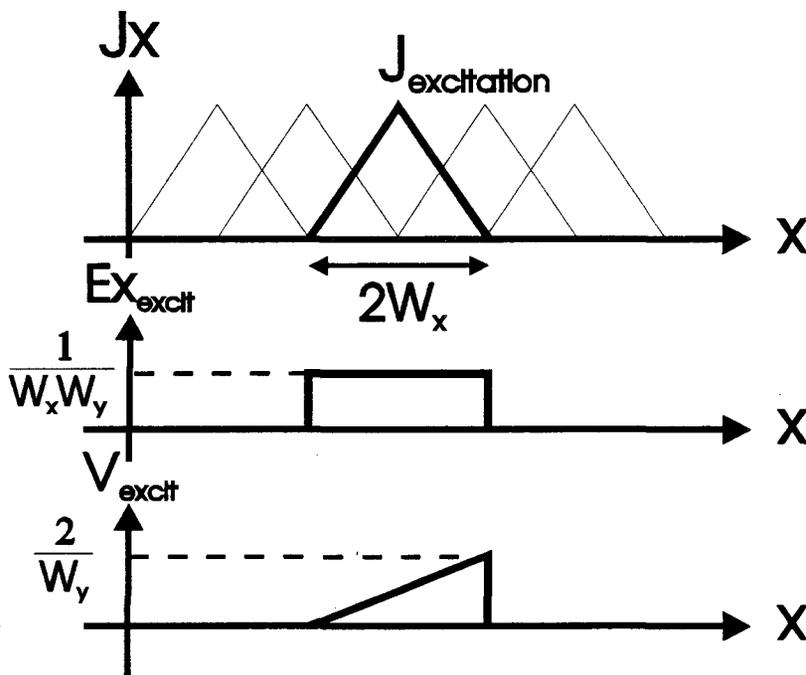


Figure II-10: Modélisation du dispositif d'excitation

La différence de potentiel créée aux bornes de la fonction d'excitation est alors égale à (figure II-10):

$$V_{\text{excit}} = \int_{-W_x}^{W_x} E_x dx = \frac{2}{W_y} \quad (\text{II-25})$$

Après résolution du problème en régime forcé et obtention des coefficients de pondération des fonctions de base (et plus particulièrement du coefficient  $I_{\text{excitation}}$  de la fonction de base d'excitation), l'impédance d'entrée s'exprime en fonction du courant présent au niveau de la fonction test d'excitation par le rapport:

$$Z_e = \frac{V_x}{I} = \frac{2}{I_{\text{excitation}} W_y^2} = Z_e^+ + Z_e^- \quad (\text{II-26})$$

La **figure II-11** reproduit, à partir du modèle d'étude, le schéma obtenu dans le cadre de la théorie des lignes, ainsi que le schéma équivalent basses fréquences. L'impédance d'entrée  $Z_e$ , donnée par l'expression (II-26), est égale suivant ces schémas à la somme des impédances ramenées ( $Z_e^+$  et  $Z_e^-$ ) par la ligne microruban de part et d'autre des plans AA' et BB'

Ligne microruban d'excitation

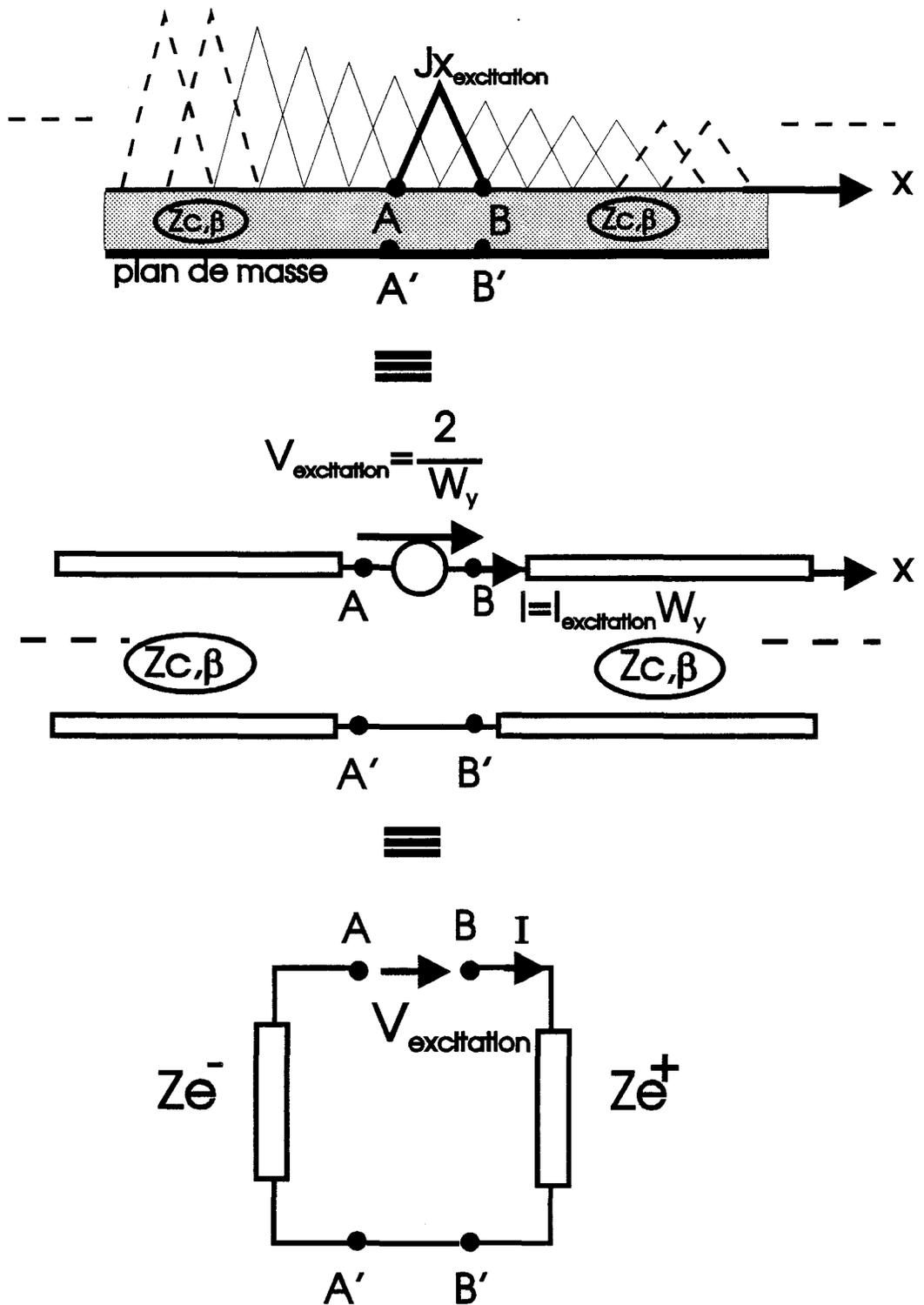


Figure II-11: Description du dispositif d'excitation

## II-5-2 DETERMINATION DE L'IMPEDANCE D'ENTREE D'UN DIPOLE

On détermine théoriquement l'impédance d'entrée d'un dipôle en insérant dans la ligne microruban d'accès une fonction d'excitation comme décrit **figure II-12**.

L'impédance  $Z$  présentée aux bornes du générateur de tension est égale à la somme des impédances ramenées par la ligne microruban de chaque côté du générateur.

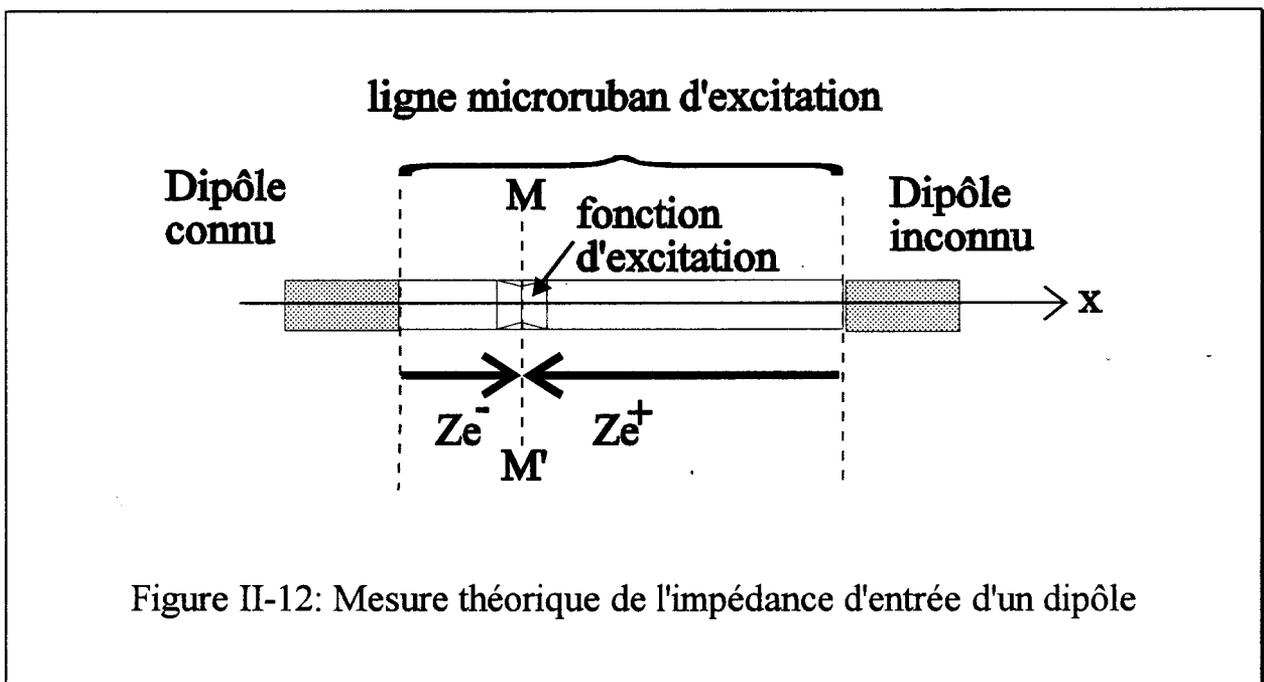


Figure II-12: Mesure théorique de l'impédance d'entrée d'un dipôle

En plaçant par exemple sur le côté gauche du plan d'excitation (figure II-12) une impédance connue, la valeur de l'impédance d'entrée du dipôle étudié dans le plan du générateur est égale à:

$$Z_e^+ = Z - Z_e^- \quad (\text{II-27})$$

Il est donc nécessaire de connaître la valeur de l'impédance  $Z_e^-$  dans le plan  $MM'$ . La détermination de l'impédance d'entrée du dipôle dans le plan de l'excitation s'effectue grâce à deux expériences [16] (**figure II-13**):

a) Le dipôle à caractériser est placé d'un côté du générateur, tandis qu'un pseudo circuit ouvert, constitué d'un arrêt brusque de la ligne microruban, est branché de l'autre côté. Dans ce cas:

$$Z = Z_a = Z_e^+ + Z_e^- = Z_{co_{MM'}} + Z_{d_{MM'}} \quad (\text{II-28})$$

avec  $Z_{co_{MM'}}$  impédance ramenée du *stub* dans le plan  $MM'$

b) Deux circuits ouverts identiques sont placés de part et d'autre du générateur:

$$Z_b = Z_e^+ + Z_e^- = 2Z_{co_{MM'}} \quad (\text{II-29})$$

L'impédance d'entrée du dipôle étudié s'exprime alors dans le plan  $MM'$  par:

$$Z_{d_{MM'}} = Z_a - \frac{Z_b}{2} \quad (\text{II-30})$$

Afin de ne pas perturber la mesure de l'impédance ramenée par le dipôle, et d'améliorer la précision sur la détermination de  $Z_d$ , il est souhaitable d'avoir  $Z_{co_{MM'}}$  aussi faible que possible, ce qui impose:

$$l \cong \frac{\lambda_g}{4} \quad (\text{II-31})$$

Cette méthode est très pratique à mettre en oeuvre, mais elle présente les désavantages suivants:

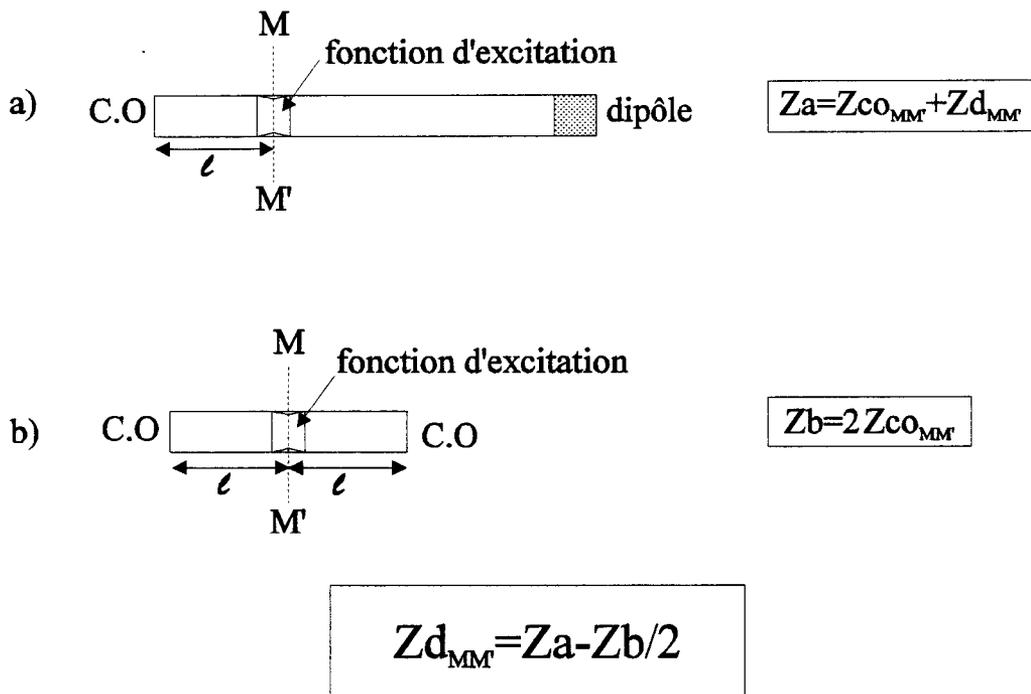


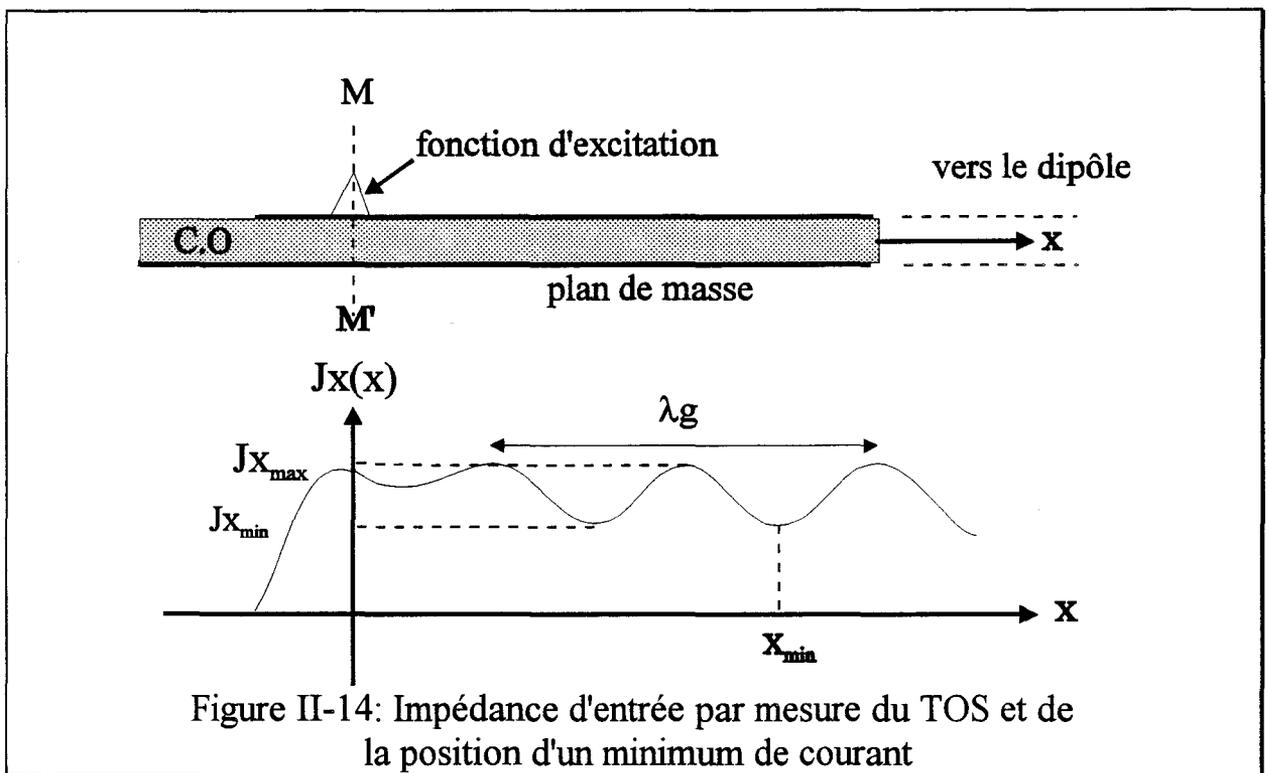
Figure II-13: Utilisation d'un circuit ouvert d'étalonnage

a) Il est nécessaire de conduire 2 expériences avant d'arriver au résultat final

b) Lors d'une étude fréquentielle, la structure d'étude doit être modifiée constamment pour remplir la condition  $\ell = \lambda_g / 4$ .

c) Enfin, cette méthode est, comme nous le verrons au paragraphe II-6-2 (figure II-21), peu précise pour les structures que nous avons considérées, et ne donne de bons résultats que lorsque les approximations utilisées au paragraphe II-5 dans le calcul de la tension de court-circuit sont valides [16], c'est à dire lorsque la fréquence ou les dimensions des cellules du quadrillage sont faibles.

Une autre méthode utilisée par Katehi [4] et permettant d'obtenir de meilleurs résultats consiste à mesurer sur la ligne d'excitation le TOS et la position d'un minimum de courant (**figure II-14**), afin de construire sur l'abaque de Smith le point représentant l'impédance normalisée du dipôle. Katehi montre que dans cette configuration, la présence du *stub* ne perturbe pas l'évolution du coefficient de réflexion sur la ligne entre le générateur et le dipôle.



Il est cependant nécessaire d'introduire entre le générateur et le dipôle une ligne microruban d'excitation de longueur minimale égale à  $\lambda_g$  et d'utiliser des fonctions de base assez fines; ceci pour permettre, après résolution et détermination des coefficients des fonctions de base [16], une mesure précise de la position d'un minimum de courant et de la longueur d'onde guidée par la ligne, en dehors des zones perturbées proches du dipôle et du générateur. Un autre inconvénient réside dans le fait qu'il est difficile d'implanter ce type de mesure dans le code numérique sans nuire à la généralité des géométries pouvant être analysées.

## II-6 REALISATION DE TERMINAISONS - ADAPTEES NUMERIQUES

Afin de rapprocher les conditions de simulation des conditions expérimentales, il nous a semblé opportun de définir numériquement une charge adaptée.

La réalisation de terminaisons adaptées numériques offre une excellente solution aux problèmes de détermination de l'impédance d'entrée d'un dipôle en fournissant une impédance de référence égale à l'impédance caractéristique de la ligne. L'introduction de terminaisons adaptées numériques permet de plus de déterminer, comme dans le cas de dispositifs expérimentaux, les paramètres de transfert théoriques de circuits microruban multipôles. D'autres méthodes existent pour accéder à ces paramètres, parmi lesquelles il faut citer: la méthode de l'excitation symétrique [18], ou celle de la charge variable [6]. Ces méthodes présentent le défaut qu'il est nécessaire de conduire plusieurs expériences avant de connaître les paramètres de transfert de la structure étudiée et de plus alourdissent souvent le système matriciel final, ou rendent difficile son élaboration automatique au sein du code numérique.

Afin de garder à notre application numérique toute sa généralité, nous avons développé une méthode de simulation originale de terminaisons adaptées qui ne nécessite pas d'imposer une relation locale du type [17]:

$$W_y * J = \frac{V}{Z_c} \quad (\text{II-32})$$

,ou encore d'introduire des fonctions de base semi-infinies qui décrivent analytiquement le comportement d'une ligne microruban sur laquelle se propage

une onde progressive [13][10][8]. La méthode que nous proposons repose simplement sur la simulation de lignes microruban d'extension infinie, à l'aide de fonctions de base triangulaires, et peut être facilement implantable dans une formulation classique de la méthode des moments.

## II-6-1 MISE EN OEUVRE ET EXEMPLE D'APPLICATION

II-6-1-1 Mise en oeuvre: Pour adapter l'extrémité de la ligne microruban montrée **figure II-15a**, nous considérerons qu'elle est de longueur infinie vers les  $x$  positifs. Pour arriver à ce résultat en employant un nombre fini de fonctions de base, on ajoute à l'extrémité de la ligne quelques fonctions de base simulant le comportement réel d'une ligne d'extension infinie (**figure II-15b**). Ce comportement est connu: en supposant un unique mode se propageant dans la direction  $Ox$  sur une ligne non dissipatrice, les densités de courant  $J_x$  et  $J_y$  sont de la forme:

$$\bar{J}_{x,y}(x,y) = \bar{J}_{x,y}(0,y) e^{-2\pi j \left(\frac{x}{\lambda_g}\right)} \quad (\text{II-33})$$

avec  $\lambda_g$  longueur d'onde guidée de l'onde progressive pour le mode considéré. Les coefficients de pondération des fonctions de base ajoutées sur la ligne doivent donc vérifier cette équation et présenter un module constant. Ces coefficients sont exprimés de façon récurrente à l'aide de la relation (II-33) et sont reliés au coefficient de la fonction de base -baptisée fonction d'attache-, située à la frontière entre la terminaison adaptée et le système étudié. Aucune fonction de test n'est donc ajoutée sur la terminaison adaptée et la taille du système matriciel à résoudre reste constante.

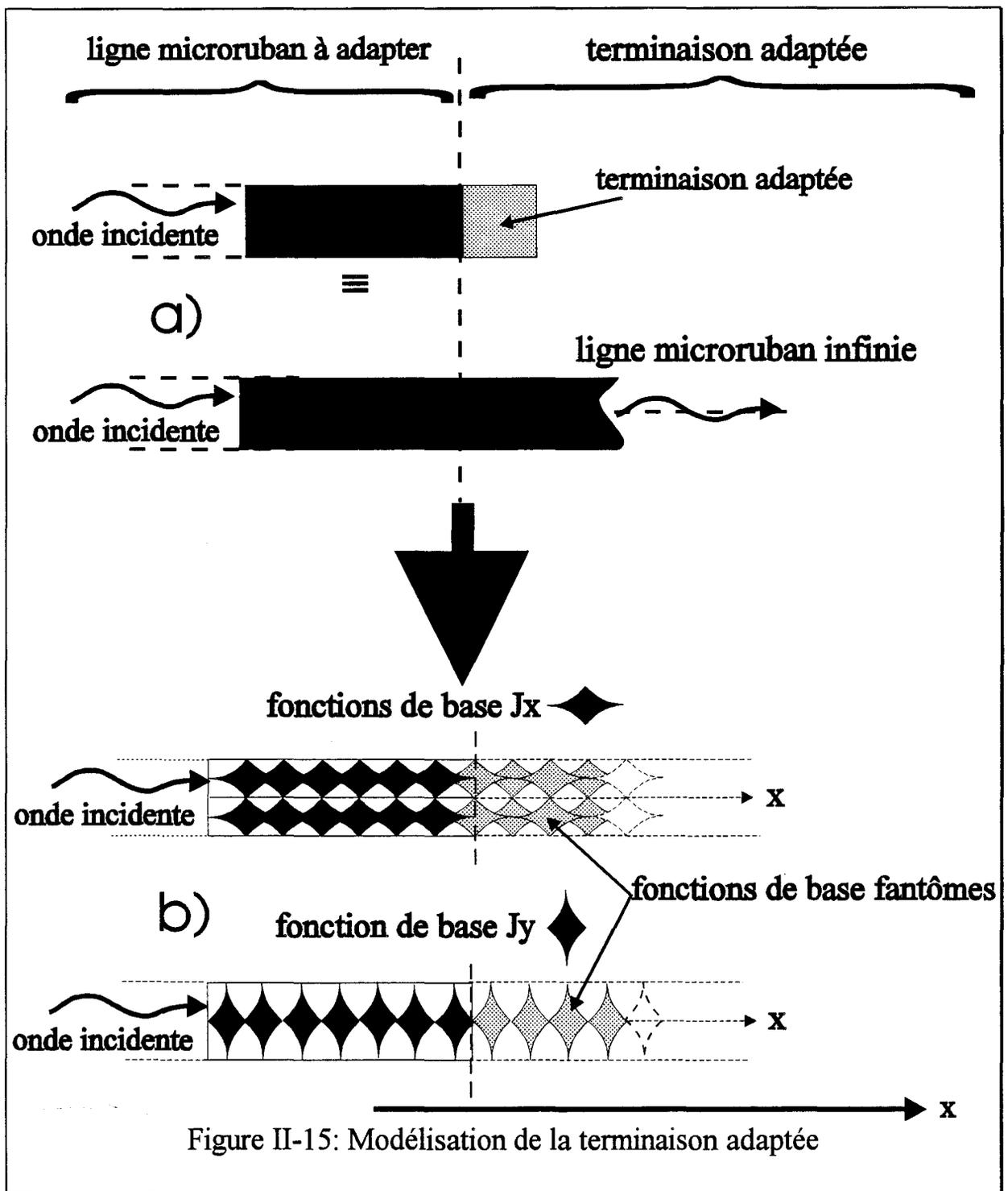
Le champ électrique diffracté par les fonctions de base de la terminaison adaptée participe au champ électrique total en tout point du système. Celle-ci est équivalente à la densité de courant d'une onde progressive sans support matériel. L'absence de fonction de test sur la terminaison adaptée justifie que nous appelions désormais fonctions de base "fantômes", les fonctions de base introduites sur la terminaison adaptée.

II-6-1-2 Exemple d'application: Nous traitons **figure II-16** l'exemple complet de l'adaptation d'une ligne microruban par quatre fonctions de base fantômes. Dans cet exemple, la largeur de la ligne microruban à adapter est égale, comme sur la figure II-15, à deux cellules élémentaires du quadrillage.

Le modèle théorique utilisé se compose donc de deux rangées de fonctions de base  $J_x$  selon la direction  $Ox$ , et d'une rangée de fonctions de base  $J_y$  suivant  $Oy$ . Le système matriciel II-20 est transformé de façon à ce que les coefficients de pondération des fonctions de base fantômes vérifient la relation (II-33) traduisant la présence d'une onde progressive:

$$\begin{aligned}
 I_{A_i} &= I_{A(i-1)} e^{-2\pi j \frac{W_x}{\lambda_g}} \\
 I_{B_i} &= I_{B(i-1)} e^{-2\pi j \frac{W_x}{\lambda_g}} \\
 I_{C_i} &= I_{C(i-1)} e^{-2\pi j \frac{W_x}{\lambda_g}}
 \end{aligned} \quad (\text{II-34})$$

Ces relations permettent par récurrence de relier les coefficients de pondération de chaque fonction de base fantôme à la fonction d'attache correspondante:  $A_0$ ,  $B_0$  ou  $C_0$  (figure II-16).



Dans la matrice de réaction seules les colonnes relatives aux fonctions de base d'attache sont modifiées par la présence des terminaisons adaptées. L'écriture de la nullité du champ tangent diffracté par l'ensemble des fonctions de base d'indice  $j$  (fonctions de base fantômes sur la terminaison adaptée incluses) sur chaque fonction de test indicée  $i$  mène au système matriciel:



$$\begin{aligned}
Z'_{i,A0}=(a) &= Z_{i,A0} + Z_{i,A1} e^{-2\pi j \frac{W_x}{\lambda_g}} + Z_{i,A2} e^{-4\pi j \frac{W_x}{\lambda_g}} + \dots + Z_{i,A4} e^{-8\pi j \frac{W_x}{\lambda_g}} \\
Z'_{i,B0}=(b) &= Z_{i,B0} + Z_{i,B1} e^{-2\pi j \frac{W_x}{\lambda_g}} + Z_{i,B2} e^{-4\pi j \frac{W_x}{\lambda_g}} + \dots + Z_{i,B4} e^{-8\pi j \frac{W_x}{\lambda_g}} \\
Z'_{i,C0}=(c) &= Z_{i,C0} + Z_{i,C1} e^{-2\pi j \frac{W_x}{\lambda_g}} + Z_{i,C2} e^{-4\pi j \frac{W_x}{\lambda_g}} + \dots + Z_{i,C4} e^{-8\pi j \frac{W_x}{\lambda_g}}
\end{aligned}$$

Dans ces relations  $Z_{i,j}$  représente la réaction entre la fonction de test  $i$  et la fonction de base  $j$ . Les termes  $Z_{i,j}$  tendent rapidement vers zéro lorsque les fonctions de test et de base s'éloignent (figure II-4). De fait, les expressions (a), (b) et (c) convergent rapidement vers une valeur limite lorsque le nombre de fonctions de base fantômes constituant la terminaison adaptée augmente.

Nous avons tracé **figure II-17** l'évolution de l'impédance d'entrée d'une terminaison adaptée suivant le nombre de fonctions fantômes ajoutées (pour chaque rangée). Ce calcul à été effectué en plaçant un générateur de tension entre deux lignes de longueur infinie. L'impédance présentée au générateur est alors théoriquement égale à deux fois celle ramenée par une terminaison adaptée. Nous constatons sur cet exemple que la terminaison adaptée numérique obtenue est d'une grande efficacité, puisqu' avec quelques fonctions de base fantômes (4-5), le régime de propagation en onde progressive est obtenu sur la ligne microruban (**figure II-18**). La partie réelle de l'impédance présentée par une terminaison adaptée est quasiment égale à l'impédance caractéristique de la ligne. La partie imaginaire est quant à elle proche de zéro. Le coefficient de réflexion de la terminaison adaptée est lui aussi satisfaisant: -30,4dB.

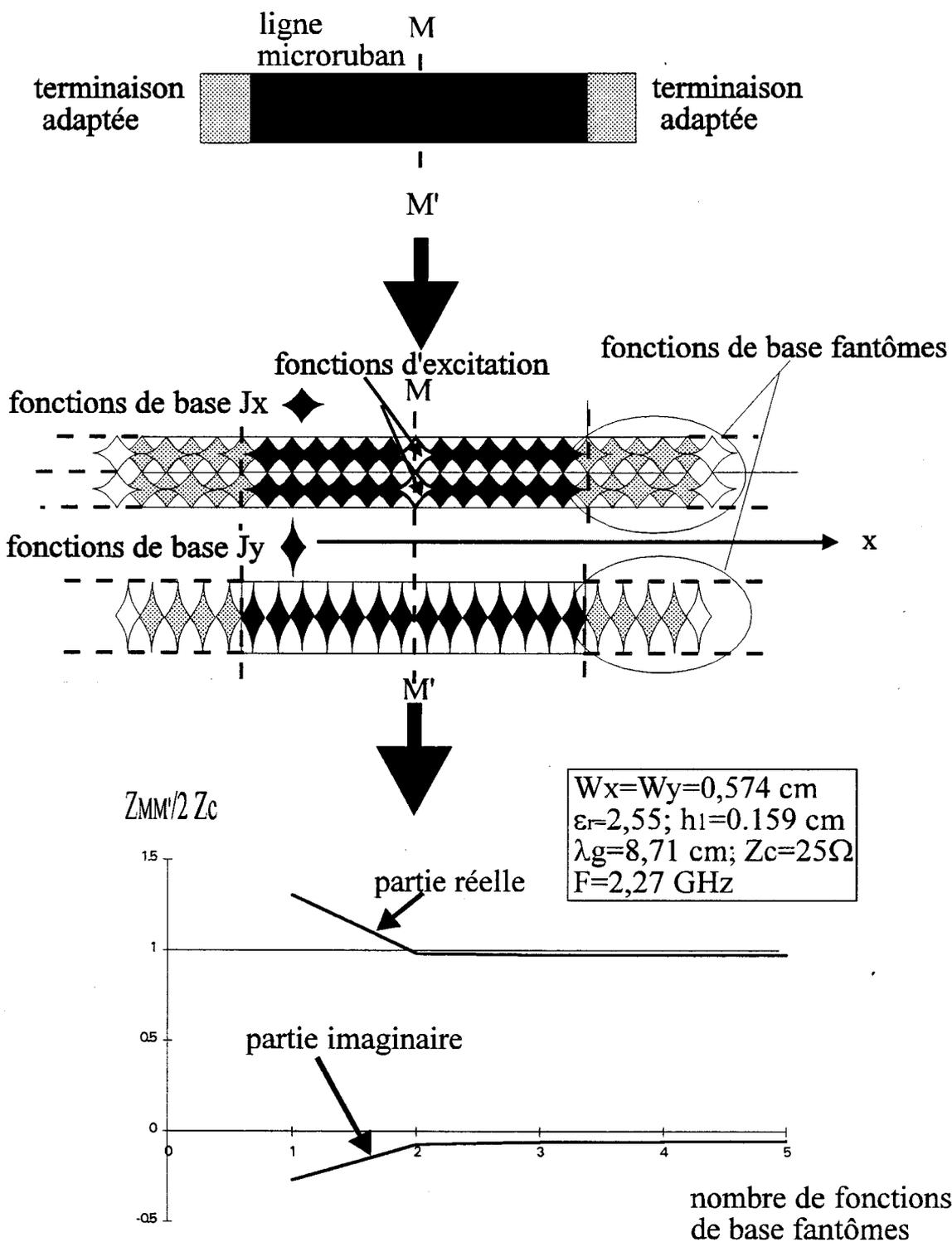
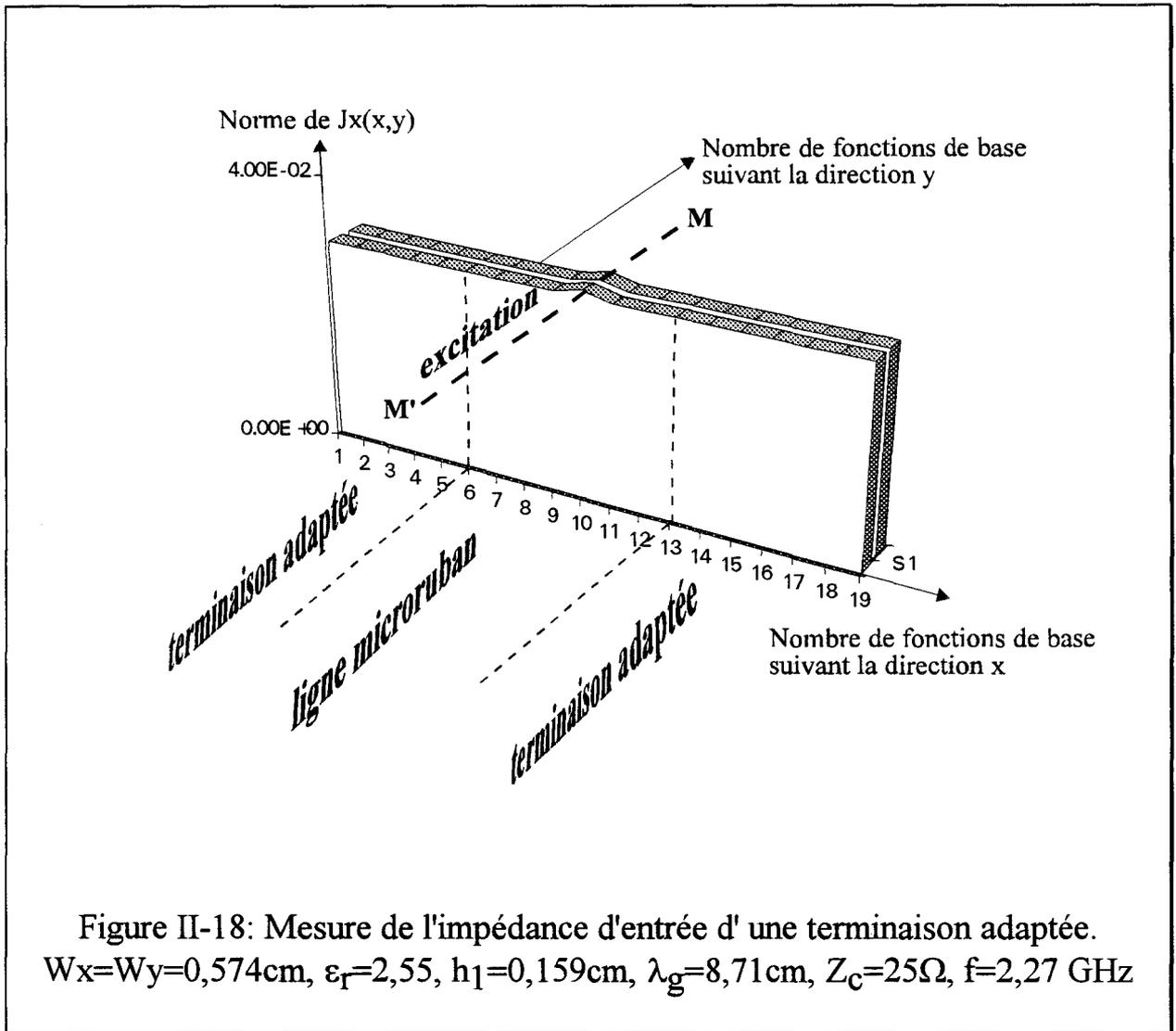
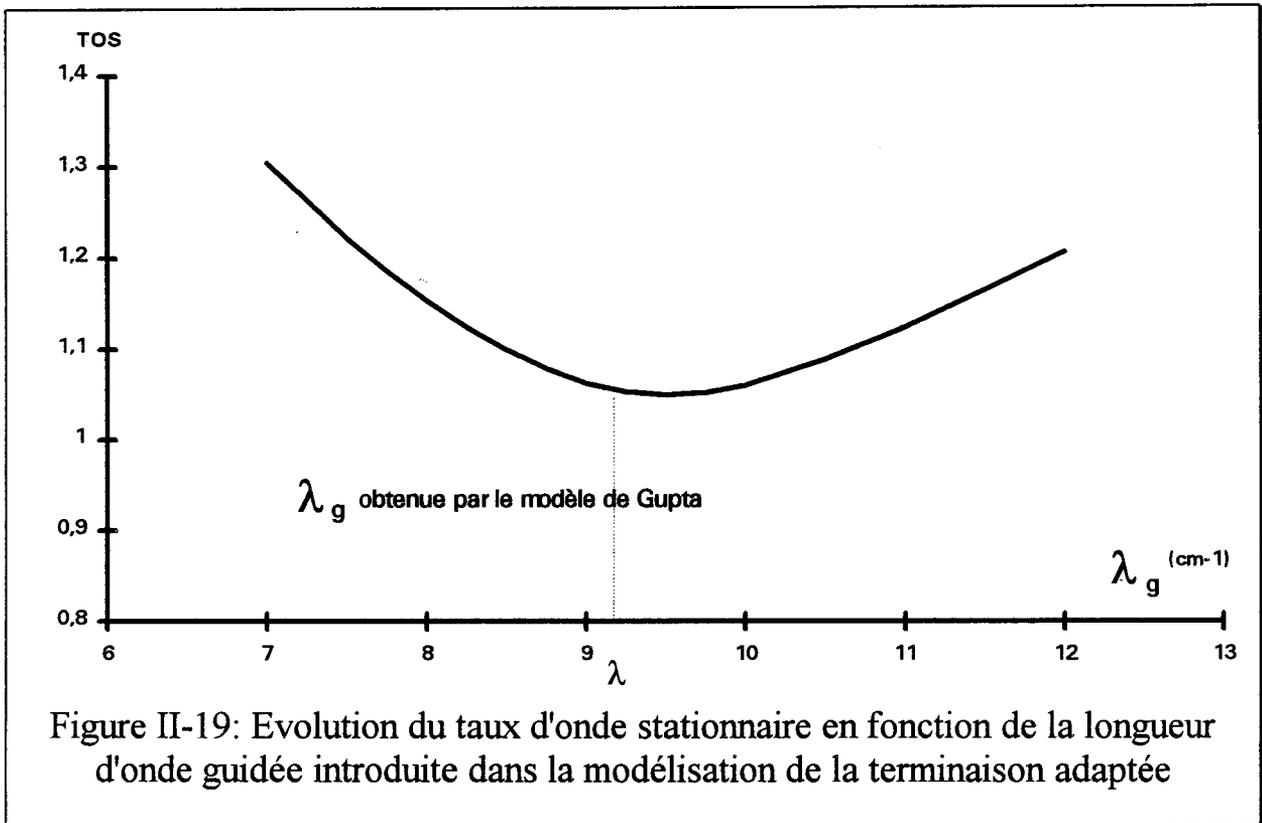


Figure II-17: Convergence de l'impédance réduite de la terminaison adaptée suivant le nombre de fonctions de base fantômes.



La terminaison adaptée que nous avons décrit repose sur la simulation d'une ligne de longueur infinie et il n'est pas utile pour sa réalisation de connaître son impédance caractéristique  $Z_c$ . Seule la longueur d'onde guidée de la ligne doit être déterminée avant la formation du système matriciel II-35, et nous voyons **figure II-19** que la précision à apporter à cette valeur n'est pas critique, puisque le TOS reste inférieur à 1,1 pour une variation de  $\lambda_g$  supérieure à 10%. Le calcul de la longueur d'onde guidée de la ligne peut pour cette raison être réalisé par l'application d'un modèle empirique [19], pouvant être inclu dans le code numérique.



## II-6-2 APPLICATION A LA DETERMINATION DE L'IMPEDANCE D'ENTREE D'UN DIPOLE

La détermination de l'impédance d'entrée d'un dipôle s'effectue en utilisant la méthode décrite figure II-13 (expérience a) ), mais en remplaçant le circuit ouvert par une terminaison adaptée (**figure II-20**). L'impédance présentée au dispositif d'excitation et dont nous calculons la valeur est alors égale à:

$$Z = Z_c + Z_{d_{MM'}} \quad (\text{II-36})$$

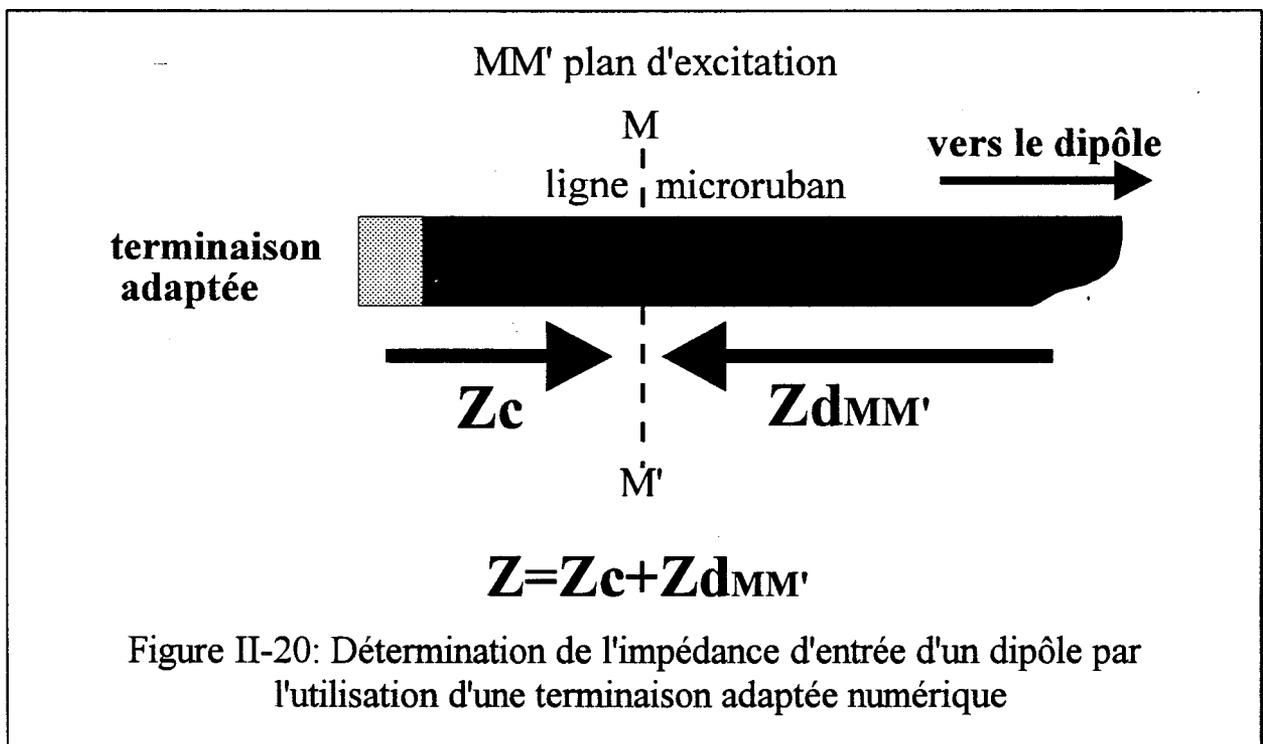
La simple connaissance de  $Z_c$  permet donc d'accéder à la valeur de l'impédance ramenée par le dipôle au plan  $MM'$ .

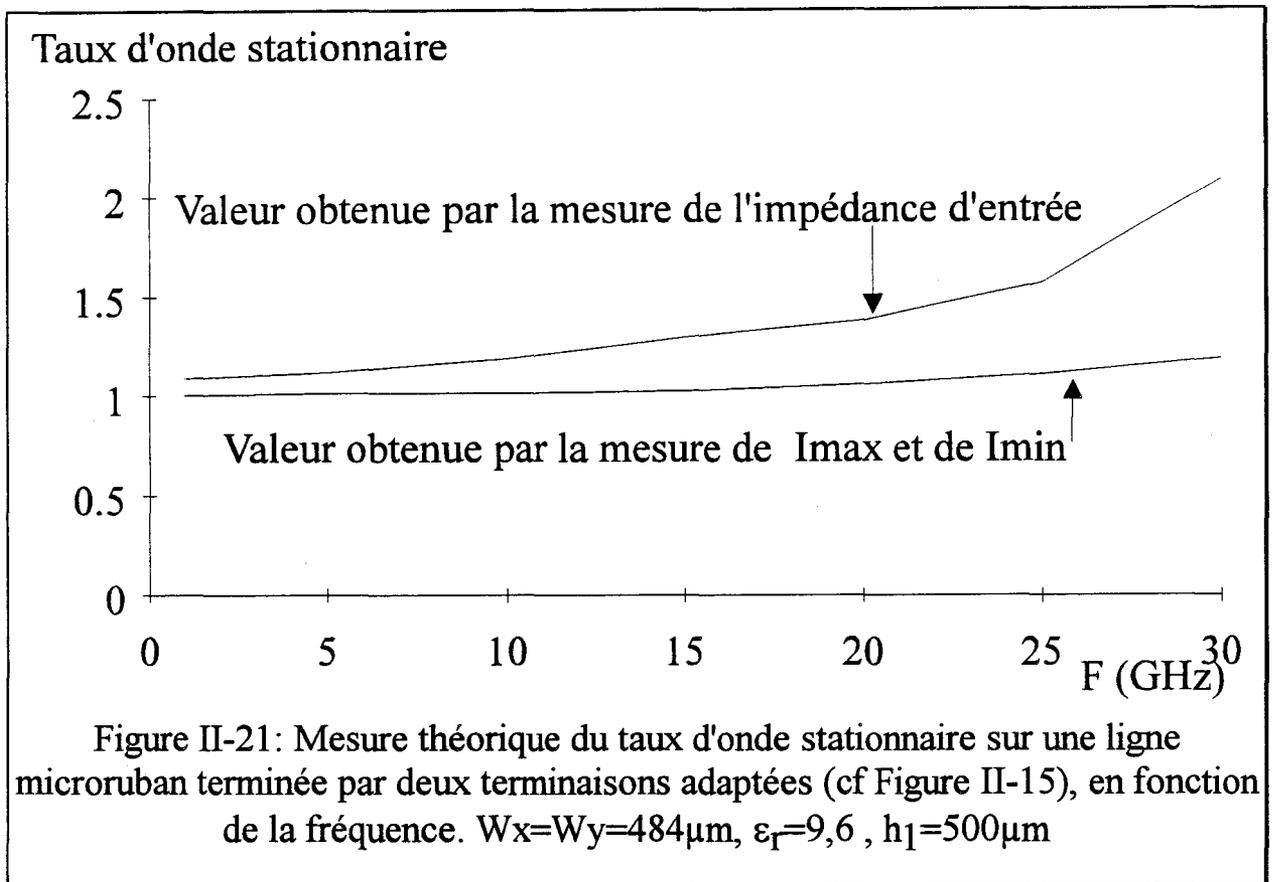
Comme nous l'avons indiqué en conclusion du paragraphe II-5-2, la détermination de l'impédance d'entrée d'un dipôle par l'application de la loi d'Ohm au niveau de la fonction test d'excitation ne donne de bons résultats qu'en basses fréquences. Il est beaucoup plus précis d'identifier la valeur de l'impédance d'entrée à l'aide de la théorie des lignes, par la mesure du taux d'ondes stationnaires.

Pour vérifier cette assertion, nous avons tracé **figure II-21** l'évolution du taux d'ondes stationnaires ramené par une terminaison adaptée pour chacune des deux méthodes et constatons la dégradation de la détermination de l'impédance d'entrée par la formule (II-26) lorsque la fréquence croît. D'autres simulations nous ont suggéré une relation empirique entre la longueur d'onde guidée par la structure et la taille maximale d'une cellule élémentaire du quadrillage, ceci pour une détermination de l'impédance d'entrée avec une précision de l'ordre de 10%:

$$W_{X_{\max}} = \frac{\lambda_g}{15} \quad (\text{II-37})$$

L'utilisation de terminaisons adaptées dans la définition d'une structure d'étude permet, sous réserve de considérer des accès microruban monomodes, le calcul des paramètres S d'un multipôle comme il est fait expérimentalement. La façon dont nous les avons modélisées permet de plus d'adapter n'importe quelle structure de propagation planaire, sans faire référence à son impédance caractéristique, ni à la façon dont elle est définie. La connaissance de l'impédance caractéristique des différents accès d'un multipôle demeure naturellement nécessaire à l'expression des paramètres de transfert.





### II-6-3 DETERMINATION DES PARAMETRES DE TRANSFERT DE QUADRIPOLES:

La détermination des paramètres de transfert d'un quadripôle s'effectue en considérant l'évolution des densités de courant sur les accès en ligne microruban. Les accès 1 et 2 ont respectivement pour impédance caractéristique  $Z_{c1}$  et  $Z_{c2}$ . Des terminaisons adaptées numériques sont placées sur chaque accès du quadripôle et des fonctions test d'excitation sont disposées sur une des lignes microruban. Lorsque l'on s'éloigne des perturbations liées aux discontinuités du quadripôle, les densités de courant sur la ligne sont associées à un système d'onde quasi-TEM, ce qui permet l'identification des paramètres de transfert par le biais de la théorie des lignes. Le schéma équivalent correspondant à l'expérience numérique est représenté **figure II-22**.

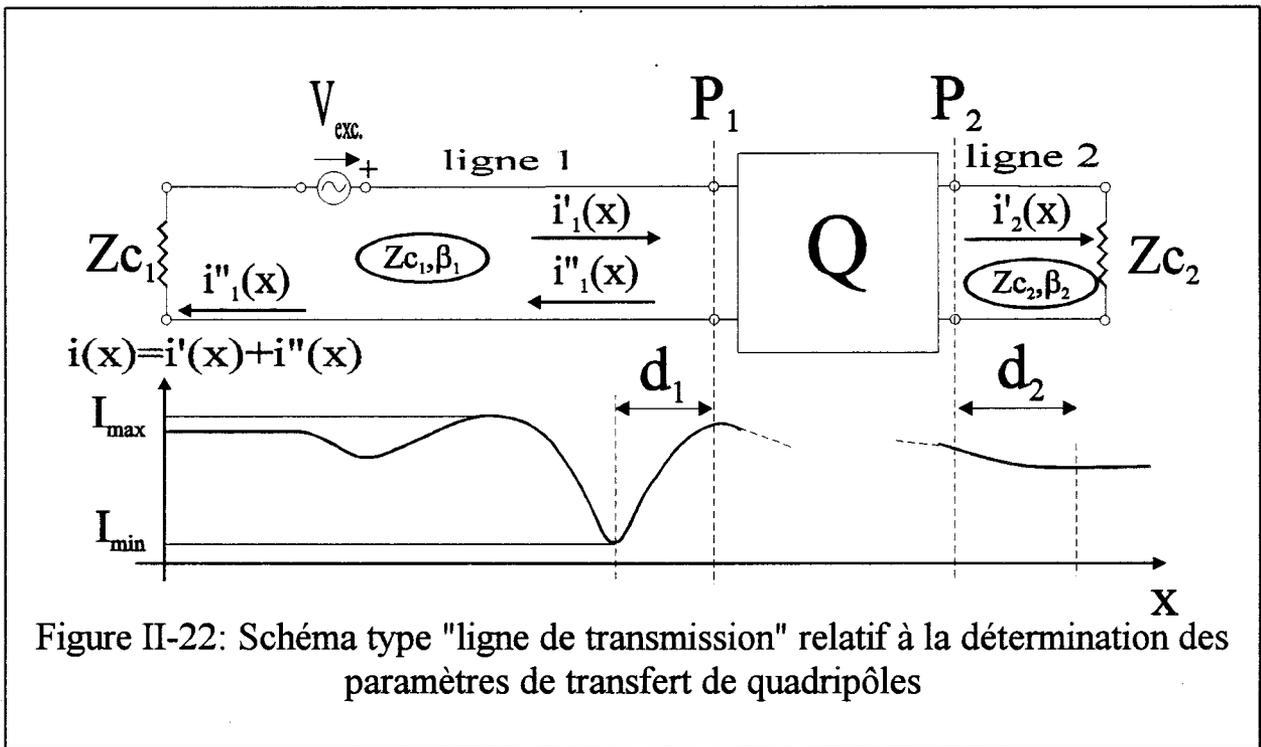


Figure II-22: Schéma type "ligne de transmission" relatif à la détermination des paramètres de transfert de quadripôles

Le paramètre  $S_{11}$  peut être déduit comme précédemment de la mesure de l'impédance d'entrée du quadripôle au niveau de l'excitation; ou bien de la mesure du taux d'onde stationnaire  $S$  sur la ligne  $L_1$ . Dans ce dernier cas, la position d'un minimum de courant sur  $L_1$  détermine la phase de  $S_{11}$ :

$$|S_{11}| = \frac{S - 1}{S + 1}; \quad S = \frac{I_{\max}}{I_{\min}}$$

$$\arg(S_{11}) = \arg \left( e^{-4\pi j \frac{d_1}{\lambda_{g1}}} \right) \quad (\text{II-38})$$

où  $d_1$  est la distance séparant un minimum de courant du plan de référence  $P_1$ . Le paramètre  $S_{21}$  est quant à lui déduit de la mesure du courant sur la ligne  $L_2$  en dehors des perturbations apportées par le quadripôle. Sa norme est égale à:

$$|S_{21}| = \frac{2 |i'_2|}{I_{\max} + I_{\min}} \sqrt{\frac{Z_{c2}}{Z_{c1}}} \quad (\text{II-39})$$

La phase de  $S_{21}$  est quant à elle déduite de la phase du signal  $i'_1$  au plan  $P_1$ , et de la phase de  $i'_2$  au plan  $P_2$ . Sur le noeud de courant, la phase de  $i'_1$  est égale à la phase du courant total  $i'_1+i''_1$ . Elle est aussi égale à la phase du coefficient de pondération de la fonction de base située au noeud de courant:

$$\arg(S_{21}) = \arg(i'_2) - \arg(i_{1(NC)}) - 2\pi \left( \frac{L_1}{\lambda_{g1}} + \frac{L_2}{\lambda_{g2}} \right) \quad (\text{II-40})$$

où  $d_2$  est la distance séparant le plan de référence  $P_2$  de l'endroit arbitraire où s'effectue la mesure de  $i'_2$ , en dehors des perturbations proches du quadripôle (cf. figure II-22).

La méthode de détermination des paramètres de transfert décrite ci-dessus est directement extensible aux circuits comportant un nombre quelconque d'accès. Le nombre de paramètres de transfert déterminés par cette méthode est égal pour chaque calcul aux nombres d'accès du circuit.

## **II-7 METHODE ASYMPTOTIQUE**

Nous avons vu au paragraphe II-4 que la lente convergence du calcul des intégrales de réaction imposait dans nombre de cas l'utilisation d'un calcul de transformée de Fourier discrète. *A priori* beaucoup plus rapide que l'intégration dans le plan complexe, son efficacité et sa fiabilité sont remise en question dès que l'on aborde la bande K, lorsque les faibles dimensions des cellules mènent à des spectres élargis de l'intégrant; ou lorsque l'on prétend analyser finement l'influence des modes de surface.

Pour conserver les avantages propres à l'utilisation d'algorithmes de FFT, nous avons adapté les méthodes de développements asymptotiques utilisés dans les analyses 1D.

La méthode asymptotique présentée ici calcule la valeur des intégrales de réaction  $Z_{ij}$  en deux temps:

- Intégration de la partie asymptotique de l'intégrand par une transformée de Fourier rapide.
- Intégration du reste de l'intégrand dans le plan complexe des variables  $\alpha$  et  $\beta$ .

Cette méthode allie les avantages des deux méthodes d'intégration: rapidité pour la FFT et précision pour l'intégration dans le plan complexe. Les transformées de Fourier des fonctions de base triangulaires s'expriment en termes de sinus et cosinus, il n'est donc pas possible d'isoler une expression asymptotique de l'intégrand complet, ni de calculer l'intégrale asymptotique une fois pour toutes. Il est néanmoins possible d'utiliser ce calcul, à géométrie ( $W_x$  et  $W_y$ ) et permittivités fixées, pour une fréquence de travail quelconque. La séparation de la fonction dyadique de Green (cf. §I-2-3, relation (I-26) ) en deux termes:

$$[G] = [G - G_A] + [G_A] \quad (\text{II-41})$$

où  $G_A(\alpha, \beta)$  représente la fonction de Green asymptotique, permet le calcul de l'intégrale de réaction  $Z_{ij}$  ( $i$  fonction de test,  $j$  fonction de base):

$$Z_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} J_j(\alpha, \beta) J_i^*(\alpha, \beta) G(\alpha, \beta) d\alpha d\beta = \chi_1 + \chi_2 \quad (\text{II-42})$$

$$\chi_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} J_j(\alpha, \beta) J_i^*(\alpha, \beta) [G(\alpha, \beta) - G_A(\alpha, \beta)] d\alpha d\beta \Rightarrow \text{plan complexe}$$

$$\chi_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} J_j(\alpha, \beta) J_i^*(\alpha, \beta) G_A(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \Rightarrow \text{FFT}$$

Lors du calcul de la fonction de Green asymptotique  $G_A(\alpha, \beta)$ , l'on considère:

$$\text{a) } \lim_{\alpha, \beta \rightarrow \pm\infty} (\gamma_i^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \varepsilon_r k_o^2) = \alpha^2 + \beta^2 \quad (\text{II-43})$$

$$\text{b) } \lim_{\alpha, \beta \rightarrow \pm\infty} \coth(\gamma_1 h_1) = 1$$

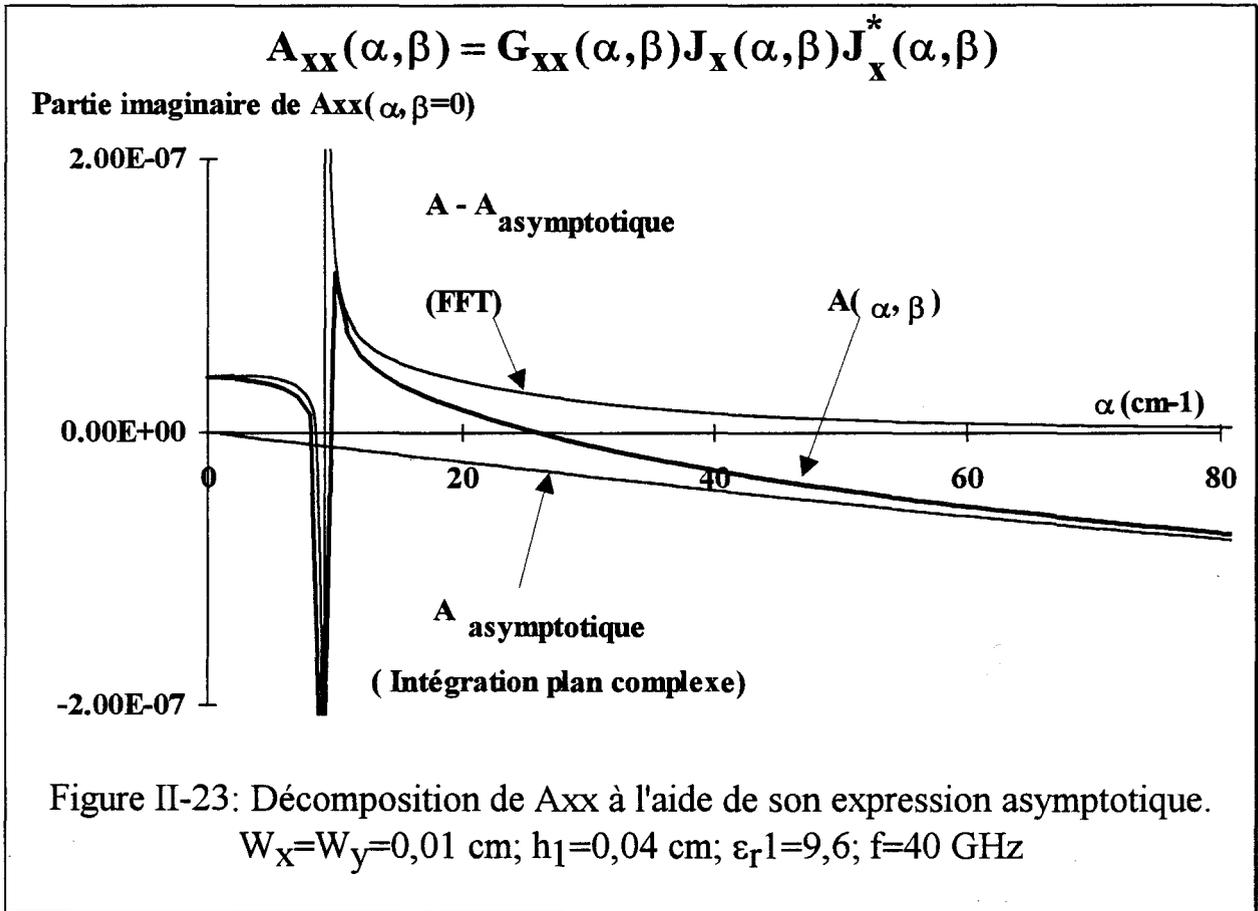
Les composantes de la fonction dyadique de Green asymptotique ont été choisies de manière à ne pas présenter de fluctuations liées aux pôles et branche de coupure de l'intégrant complet en  $\gamma=0$ , grâce à la relation a). Les pôles ayant ainsi été rejetés à l'origine, nous avons ajouté aux expressions de la fonction de Green asymptotique les fonctions  $\text{th}(\alpha\chi)$  et  $\text{th}(\beta\chi)$ , de sorte qu'elles présentent une limite finie en  $\alpha=\beta=0$ :

$$G_{A_{xx}}(\alpha, \beta) = G_{A_{yy}}(\beta, \alpha) = \frac{\alpha^2}{j\omega(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}} + j \frac{\omega\mu_o\beta^2 \text{th}(\alpha\chi)\text{th}(\beta\chi)}{2(\alpha^2 + \beta^2)^{3/2}}$$

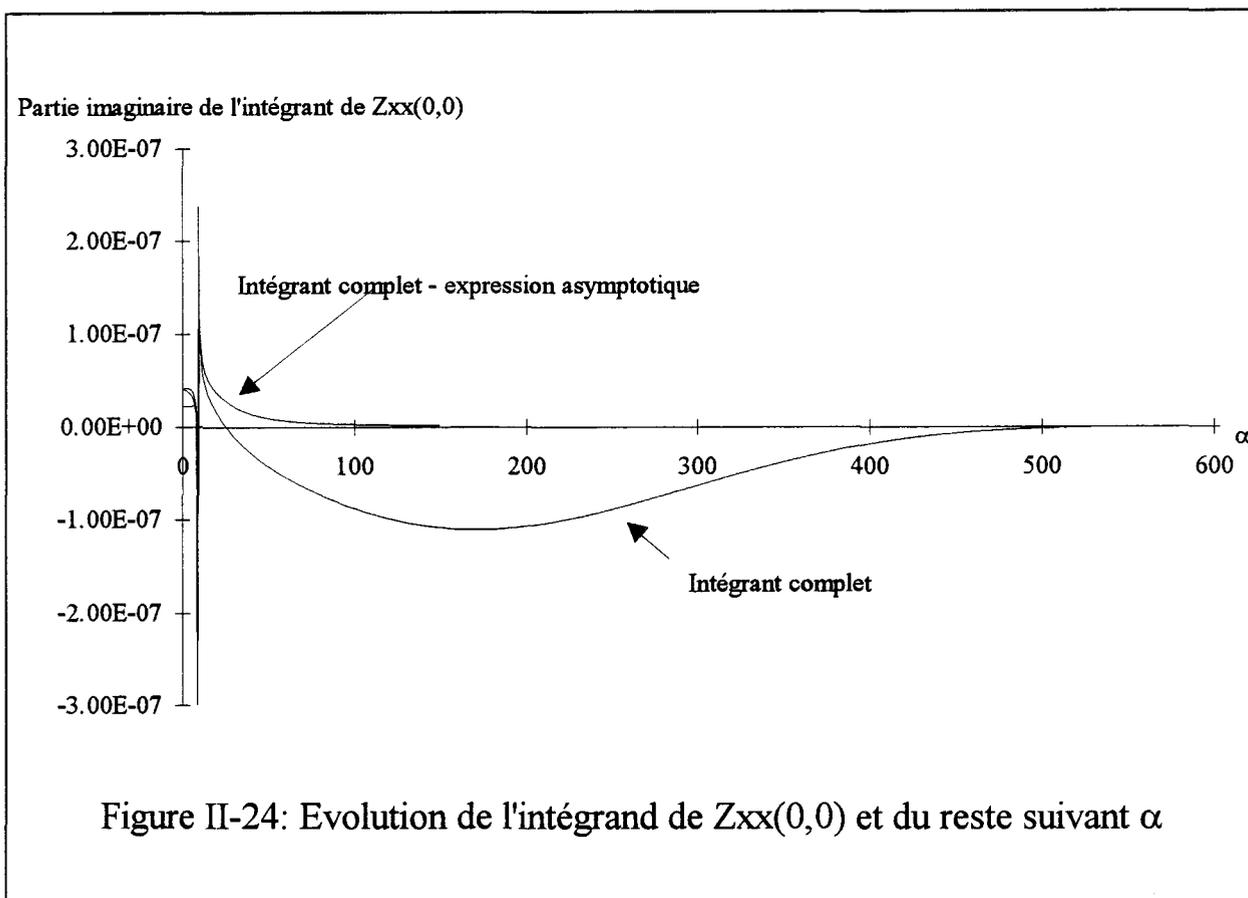
$$G_{A_{xy}}(\alpha, \beta) = G_{A_{yx}}(\alpha, \beta) = \frac{\alpha\beta}{j\omega(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}} - j \frac{\omega\mu_o\alpha\beta \text{th}(\alpha\chi)\text{th}(\beta\chi)}{2(\alpha^2 + \beta^2)^{3/2}}$$

(II-44)

Dans le cas d'une fonction de test  $J_x$  superposée avec une fonction de base  $J_x$ , nous montrons **figure II-23** l'évolution de l'intégrand complet  $A_{xx}(\alpha, \beta)$ , ainsi que son expression asymptotique, et leur différence, suivant la valeur de la variable  $\alpha$ .



La partie asymptotique de l'intégrand définie par l'équation II-41 présente bien une évolution très peu accidentée sur tout l'intervalle d'intégration. Son intégration est de ce fait extrêmement rapide et précise par une transformée de Fourier discrète. Le reste de l'intégrand (intégrand-partie asymptotique) présente quant à lui les mêmes perturbations que l'intégrand complet au voisinage du pôle. La convergence du calcul d'intégration dans le plan complexe est néanmoins amplement facilitée par une abscisse de convergence  $k\rho_{max}$ , de quatre à cinq fois moins importante que pour l'intégrand complet (**figure II-24**).



De fait, et en vertu du critère de convergence (II-60), l'application de cette méthode asymptotique d'intégration mène à des temps de calcul de 20 à 30 fois inférieurs à ceux (proportionnels à  $k\rho^2_{\max}$ ) rencontrés lors du calcul unique d'intégrales par un parcours dans le plan complexe, et ceci avec une précision équivalente.

## II-8 VALIDATION DE L'ANALYSE SUR DES GEOMETRIES COMPLEXES

Afin de valider nos codes de calcul basés sur l'utilisation de fonction de base définies par sous-domaine, nous avons considéré différents éléments de circuits de géométries complexes, mais aussi des discontinuités élémentaires.

### II-8-1 ANALYSE DE RESONATEURS RECTANGULAIRES EN REGIME LIBRE

Les résonateurs rectangulaires présentés dans le cadre de la validation de notre programme utilisant des fonctions de base définies sur toute la surface du conducteur (cf. § I-7), sont maintenant réexaminés par le biais d'une décomposition en fonction de base triangulaires (*rooftop*). Dans ce second cas, nous avons utilisé 10 fonctions de base par dimension. Les paramètres d'intégration sont choisis de façon à respecter les critères de convergence.

Le tableau 1 de la **figure II-25** compare les fréquences de résonance obtenues pour chaque type de décomposition, tandis que le tableau 2 regroupe les résultats relatifs au coefficient de qualité. Les dimensions  $l_x$  et  $l_y$  des différents résonateurs, les caractéristiques des substrats (permittivité et épaisseur  $h_1$ ) et références bibliographiques sont quant à elles indiquées dans le tableau 3.

Tableau 1	Mode	Fr expérimentale	Fr théorique (entières)	Fr théorique (triangulaires)
structure A	[1,0]	1,53 GHz	1,55 GHz	1,56 GHz
structure B	[0,1]	2,23 GHz	2,27 GHz	2,27 GHz
structure C	[1,0]	8,61 GHz	8,61 GHz	8,59 GHz
structure D	[1,0]	4,01 GHz	4,04 GHz	4,05 GHz

Tableau 2	Mode	$Q$ expérimental	$Q$ théorique (entières)	$Q$ théorique (sous-domaines)
structure A	[1,0]	97_10	105	102
structure B	[0,1]	44_6	49	51
structure C	[1,0]	10,4	12,1	9,7
structure D	[1,0]	56	51,6	53
structure D	[0,1]	87	92,2	91

	$W_x$	$W_y$	$h_l$	permittivité	références
structure A	6 cm	4 cm	0,146 cm	2,56	[9]
structure B	4 cm	6 cm	0,146 cm	2,56	[9]
structure C	1 cm	1,5 cm	0,158 cm	2,35	[17]
structure D	2,2572 cm	3,078 cm	0,0810 cm	2,54	

figure II-25: Comparaison des résultats obtenus en régime libre pour les deux types de fonctions de base.

Il apparait à l'examen de ces résultats une grande similitude dans les valeurs obtenues pour la fréquence de résonance, ainsi que pour le coefficient de qualité, lorsque nous les comparons aux valeurs déterminées expérimentalement, quelque soit le type de fonctions de base utilisé.

Signalons toutefois que l'utilisation d'une transformée de Fourier discrète dans le cas de fonction de base triangulaires permet de réduire sensiblement les temps de calcul, et ceux-ci restent de ce fait comparables à ceux obtenus pour une décomposition en fonction de base entières et ceci malgré la taille très différente des systèmes matriciels à résoudre.

## II-8-2 ANALYSE DE RESONATEURS DE SURFACE COMPLEXE EN REGIME LIBRE

Pour mettre en évidence de façon plus pertinente l'intérêt et la fiabilité du programme utilisant des fonctions de base définies par sous-domaine, nous avons analysé le comportement d'éléments résonnants difficilement descriptibles dans un

repère cartésien rectangulaire et vérifions pour cela le comportement multimodal d'un résonateur microruban de forme pentagonale en régime libre.

La discrétisation nécessaire à la simulation d'un résonateur dépend d'une manière générale de sa forme et du mode de résonance considéré. Afin de préciser de façon empirique la discrétisation nécessaire, nous étudions successivement trois modes de résonance du résonateur pentagonal [20], et ce pour deux quadrillages différents.

La **figure II-26** résume l'expérience. Il est reporté sur l'histogramme, pour chaque mode étudié, les valeurs obtenues pour la fréquence de résonance en fonction du maillage (A ou B) utilisé. Les écarts obtenus en pourcentage entre valeurs expérimentales et théoriques sont reportés au-dessus de chaque barre de l'histogramme. On vérifie alors naturellement que la précision obtenue est bien tributaire de l'ordre de résonance du système, et qu'un quadrillage peu précis (quadrillage A) n'est pas capable de modéliser les évolutions spatiales rapides des densités de courant aux modes de résonance supérieurs. L'application d'un quadrillage fin amène cependant à un système matriciel final important (#700 variables pour le quadrillage B), dont le calcul du déterminant prend un temps de calcul important. La recherche des zéros de ce déterminant n'est d'ailleurs pas facilitée par la perte de précision imposée, pour la méthode du pivot de Gauss utilisée ici, par la dimension du système matriciel; et ce dernier exemple constitue un cas limite.

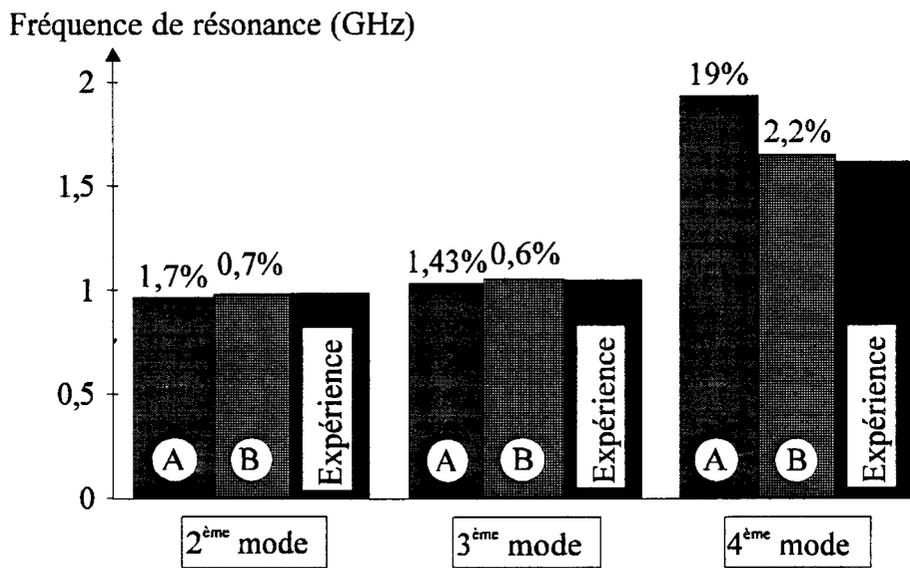
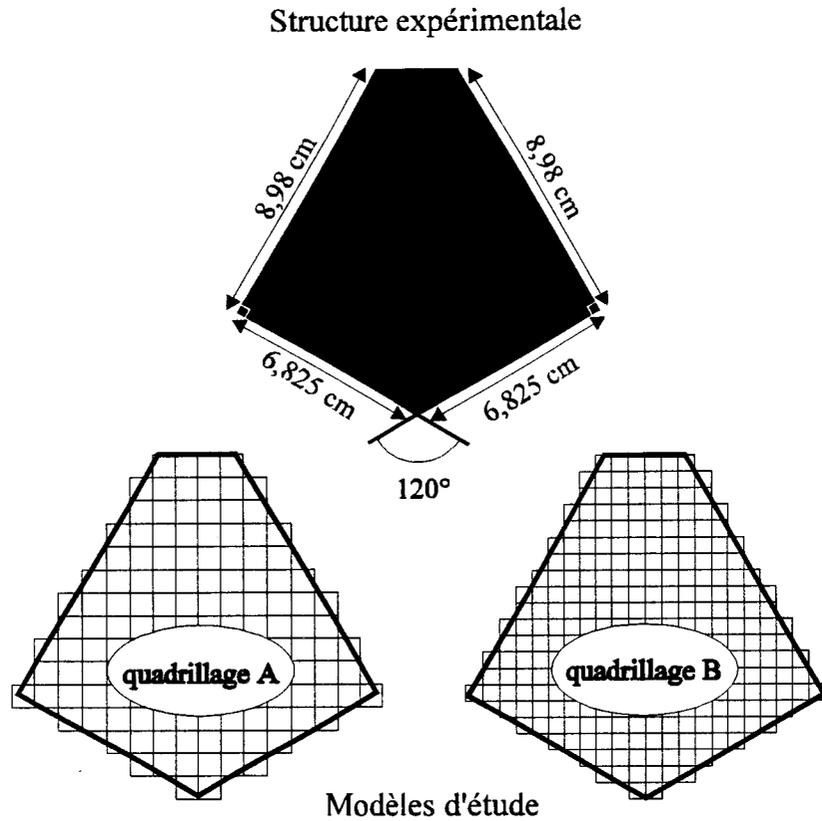


Figure II-26: Etude en régime libre du résonateur microruban pentagonal. Influence du niveau de discrétisation sur la précision des résultats obtenus [20].

$\epsilon_1=2,55\epsilon_0$ ;  $\text{tg}\delta=0,001$ ;  $h_1=0,32$  cm

### II-8-3 ETUDE DE RESONATEURS EN REGIME FORCE

Dans une deuxième étape nous avons cherché à valider notre analyse en considérant le comportement en régime forcé.

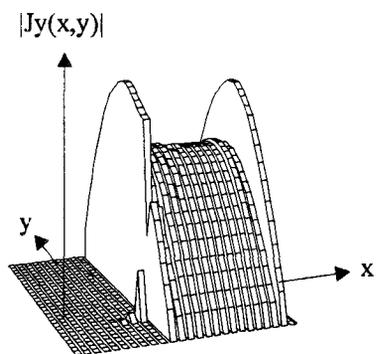
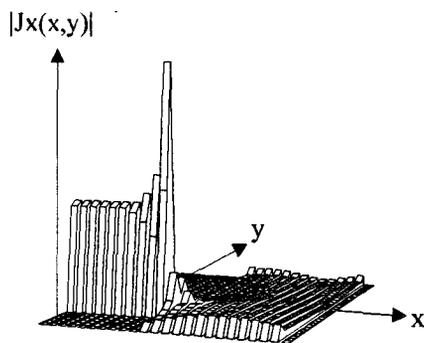
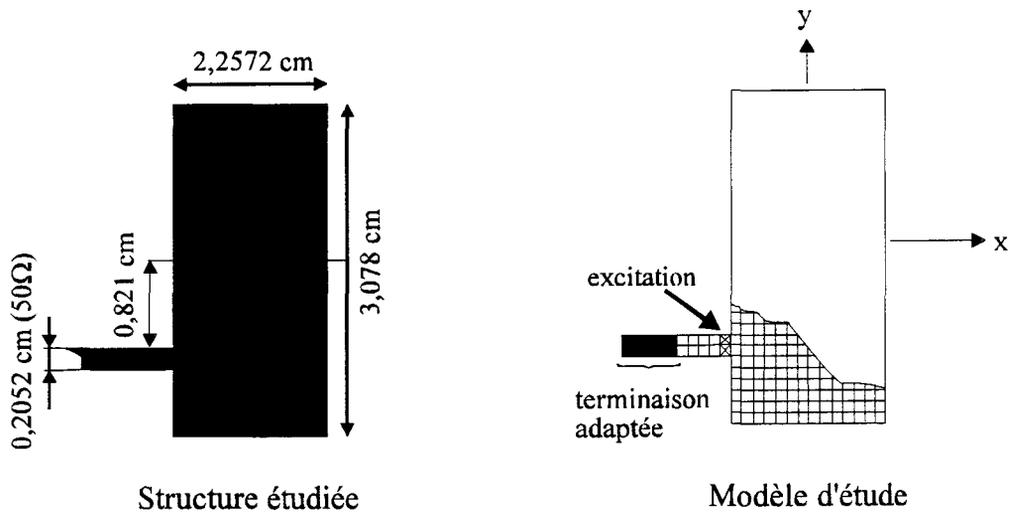
Nous présentons **figure II-27** et **II-28** deux exemples typiques de résultats, le premier relatif à un résonateur rectangulaire que nous avons fabriqué et mesuré, le second à un résonateur semi-circulaire [21].

En ce qui concerne le résonateur rectangulaire (figure II-27), l'utilisation de fonctions de base entières ou définies par sous-domaine fournit des résultats en excellent accord avec les valeurs expérimentales.

Pour cette position de l'excitation, nous mettons en évidence deux fréquences de résonance à 3 et 4 GHz correspondants respectivement aux modes  $TM_{10}$  et  $TM_{01}$ .

A titre d'illustration nous avons également représenter la répartition des densités de courant pour ce dernier mode.

Dans le cas du résonateur semi-circulaire (figure II-28), les résultats demeurent satisfaisant pour les deux modes de résonance considérés bien que la structure se prête mal à une discrétisation dans un repère cartésien. L'utilisation de fonctions de base triangulaires permet en conséquence l'analyse en régime forcé de structures complexes, pourvu que la finesse du quadrillage permette une modélisation précise des conducteurs. Nous présentons pour le premier mode étudié l'évolution spatiale des densités de courant sur les conducteurs.



Norme des densités de courant  $J_x(x,y)$  et  $J_y(x,y)$  à 3 GHz.(mode(0,1))

- expérience
- † théorie (fonctions triangulaires)
- théorie (fonctions modales)

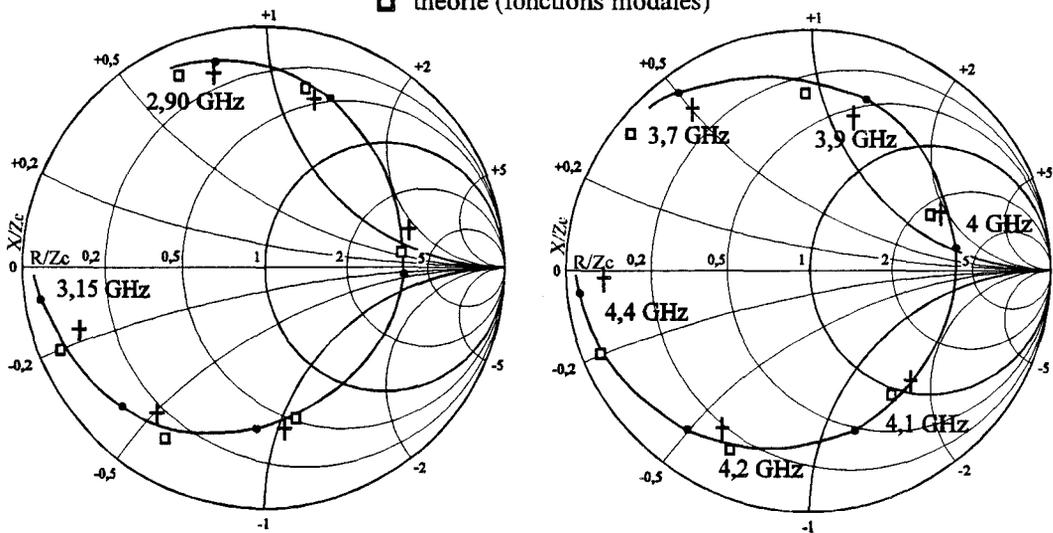
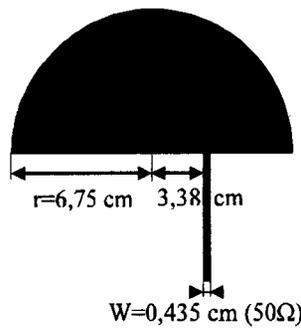
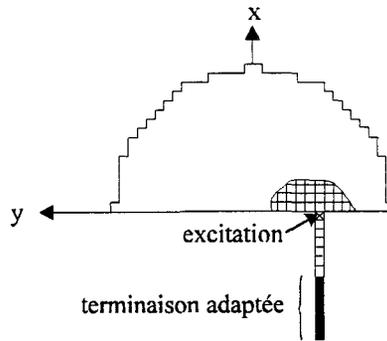


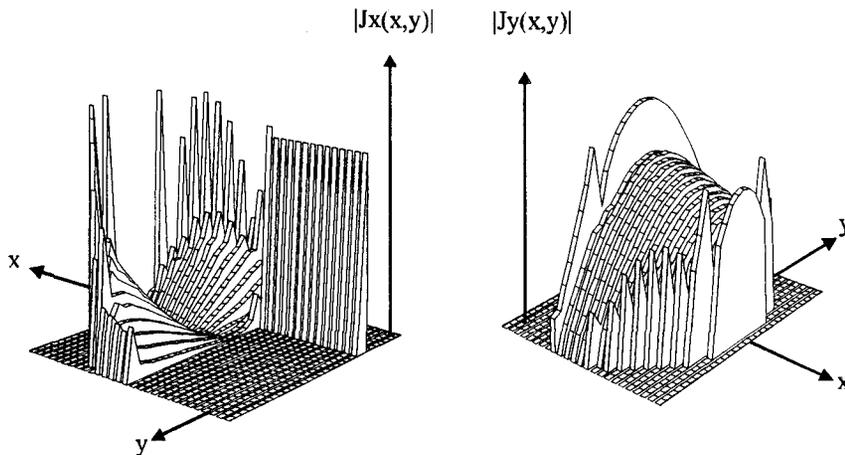
Figure II-27: Simulation d'un résonateur rectangulaire et comparaison des résultats théoriques et expérimentaux pour les deux types de fonctions de base.  $\epsilon_1=2,54\epsilon_0$ ;  $\text{tg}\delta=0,001$ ;  $h_1=0,0810$  cm



Structure étudiée



Modèle d'étude



Norme des densités des courants  $J_x(x,y)$  et  $J_y(x,y)$  à 802 MHz

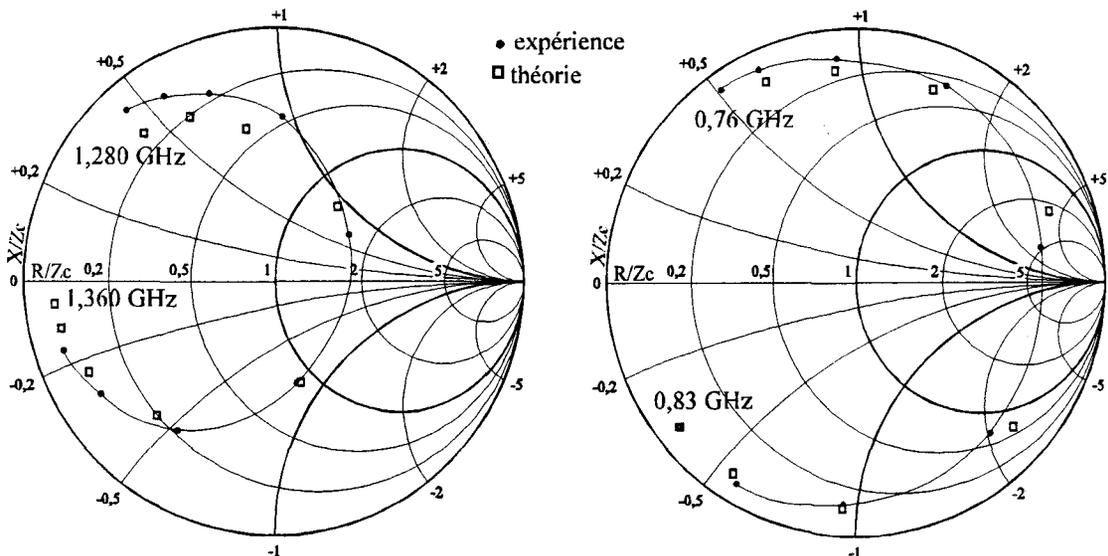


Figure II-28: Simulation d'un résonateur semi-circulaire et comparaison des impédances d'entrées théoriques et expérimentales [21].

$$\epsilon_1=2,62\epsilon_0; \text{tg}\delta=0,001; h_1=0,159 \text{ cm}$$

## II-8-4: ANALYSE DE MULTIPLES:

Un autre intérêt de l'analyse que nous avons développée, notamment par l'adjonction d'une charge adaptée numérique, est qu'elle nous permet de simuler le comportement de circuits élémentaires dans des conditions proches des conditions expérimentales. Pour illustrer cet aspect nous considérons d'abord l'exemple simple d'une discontinuité constituée par un coude microruban.

### II-8-4-1 Simulation d'un coude en structure microruban

Nous représentons **figure II-29** la simulation d'un coude droit de ligne microruban de largeur 0,3 cm déposé sur un substrat Duroïd de permittivité relative égale à 4,5 et d'épaisseur 0,159 cm. Les conducteurs ont été grossièrement discrétisés par l'emploi de deux fonctions de base sur une largeur de ligne. La présence de la terminaison adaptée suivant la direction  $y$  permet, en supposant qu'un mode quasi-TEM se propage en dehors de la zone perturbée, l'accès aux paramètres de transfert de la structure, par l'analyse des densités de courant présentes sur les accès comme décrit précédemment. Nous retrouvons, malgré la simplicité du modèle d'étude, les mesures effectuées avec une bonne précision sur toute la bande de fréquence [22].

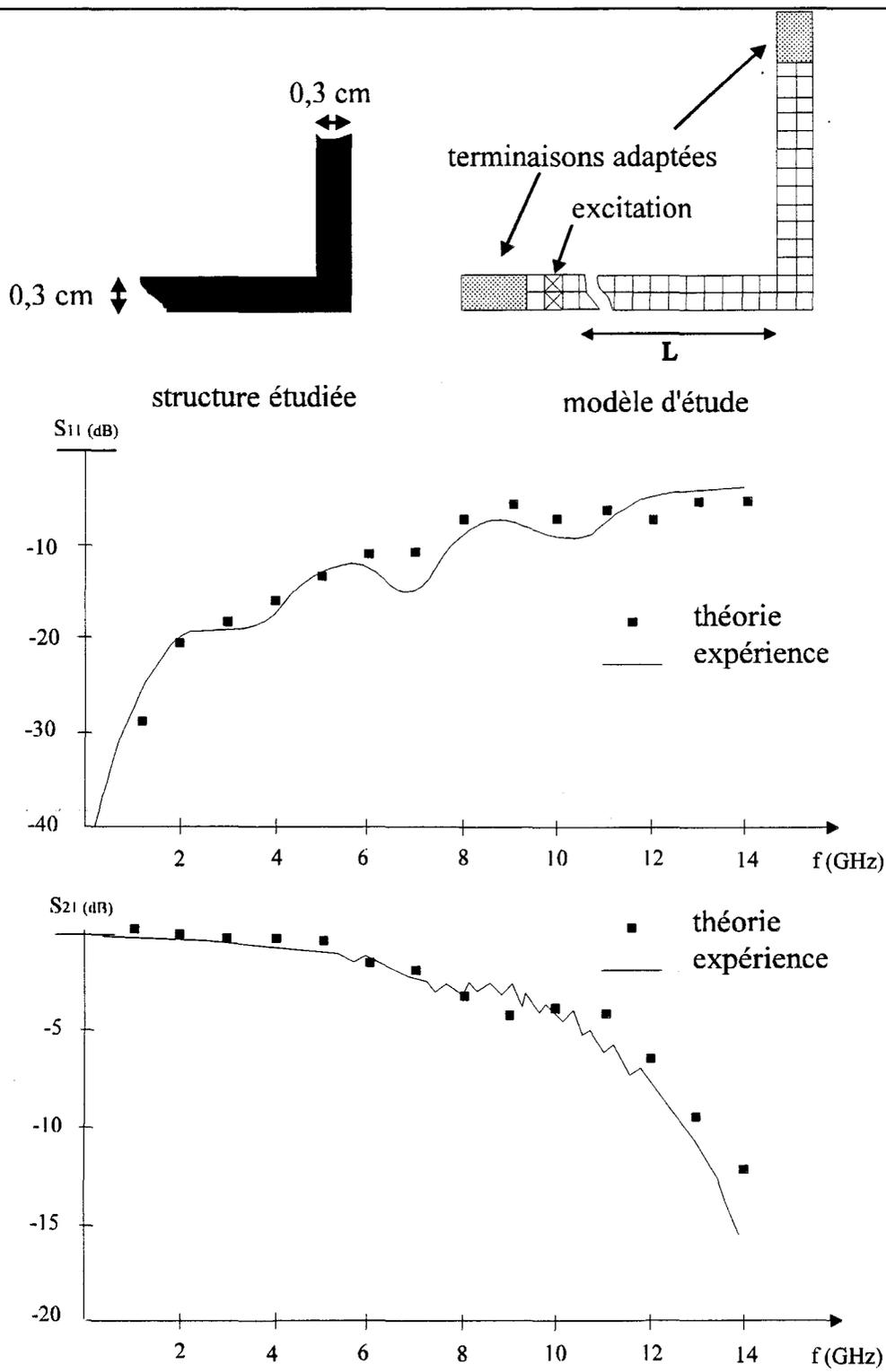


Figure II-29: Simulation d'une discontinuité coudée microruban et confrontation des résultats expérimentaux [22] et théoriques.  
 $W_x=W_y=0,15$  cm;  $\epsilon_1=4,5 \epsilon_0$ ;  $h_1=0,159$  cm

#### II-8-4-2 Simulation d'une ligne microruban à méandre

Le comportement d'un circuit résulte essentiellement de l'interaction entre des discontinuités élémentaires, caractérisées par leur matrice de répartition. En général, l'analyse d'un dispositif revient à "chainer" ces discontinuités élémentaires par l'intermédiaire de tronçons de lignes monomodes, grâce à la théorie des lignes.

Lorsque les discontinuités élémentaires sont proches et en interaction, cette méthode classique est mise en défaut. Au contraire, le code de calcul que nous avons élaboré, comprenant les effets dus aux couplages et aux pertes par rayonnement aux discontinuités, se prête particulièrement à l'analyse de ces circuits. Pour illustrer cette assertion nous avons étudié le cas d'une ligne à méandre. Cette structure présente des caractéristiques - couplage fort entre ligne, coudes successifs très rapprochés- , qui ne peuvent être correctement simulés par l'approche classique. La **figure II-30** montre le modèle d'étude proposé ainsi que la densité de courant  $J_x$  obtenue à la fréquence de 16 GHz. Les paramètres de transfert de la structure sont ici définis dans les plans de raccordement du méandre avec les deux lignes microrubans d'accès; la mesure de ces paramètres est effectuée comme précédemment par l'étude des densités de courant sur ces accès. Notre analyse rend à nouveau parfaitement compte des résultats expérimentaux [23]. Le temps de calcul associé à la détermination de  $S_{11}$  et de  $S_{21}$  pour chaque fréquence est de l'ordre d'une demi-heure sur une station de travail HP-735 équipée d'un processeur HP-PA-RISC cadencé à une fréquence d'horloge de 99 MHz, tandis que la mémoire vive nécessaire au stockage de la matrice de réaction  $[Z]$  est à peu près égale à 40 M-octets.

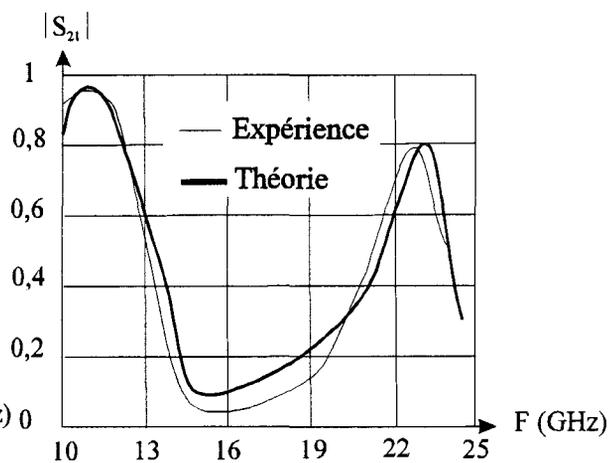
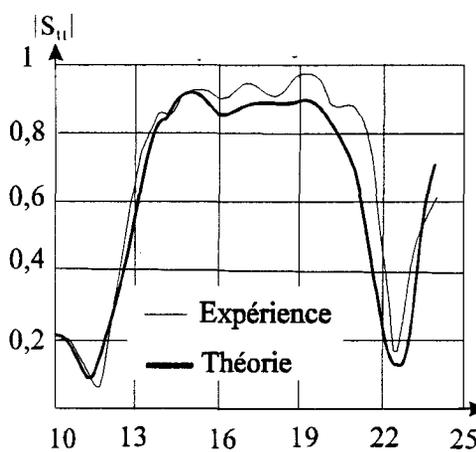
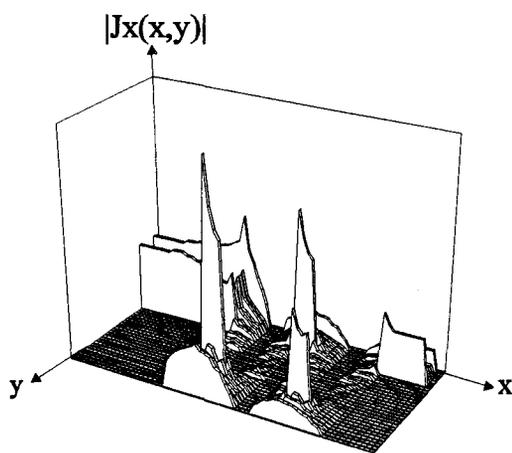
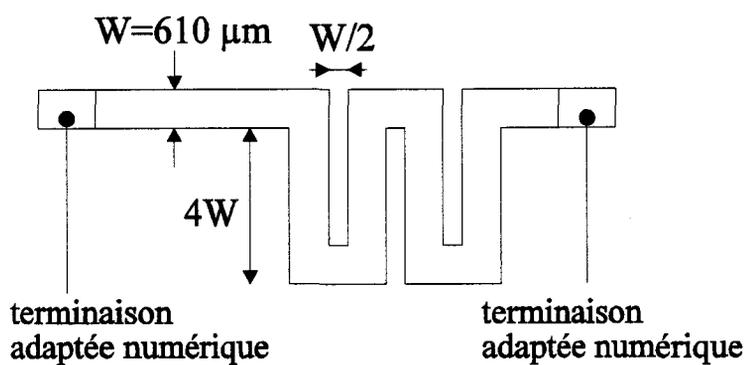


Figure II-30: Simulation d'un double méandre en ligne microruban et comparaison avec les résultats expérimentaux [23]. hauteur du substrat:  $h_1=635\mu\text{m}$ ,  $\epsilon_r=9,978$ .

## II-9 CONCLUSION

Nous avons décrit, dans les deux premiers chapitres de cette thèse, un formalisme théorique permettant la simulation de circuits microruban multicouches. L'utilisation de fonctions de base définies par sous-domaines, ou fonctions de base élémentaires, a permis de simuler des conducteurs de forme arbitraire.

L'introduction d'un modèle simple et performant pour l'excitation par une ligne microruban, ainsi que le développement de terminaisons adaptées numériques, a permis une extension du formalisme à l'étude en régime forcé d'éléments de circuit microrubans multi-accès de forme complètement arbitraire, tels que résonateurs rectangulaires, semi-circulaires et discontinuité de lignes microrubans.

Bien sûr, le régime libre, permettant une simulation du comportement propre des circuits, bénéficie lui aussi des potentialités d'une décomposition des conducteurs en surfaces élémentaires comme nous l'avons montré sur le résonateur pentagonal.

Le programme issu de notre étude constitue donc un outil de choix pour le concepteur de circuits intégrés micro-ondes, intégrant dans les calculs les pertes par rayonnement dans l'espace libre (pour les structures ouvertes), par rayonnement d'ondes de surface, ainsi que les pertes dans le substrat diélectrique.

Lorsque les épaisseurs de métallisations sont faibles devant l'épaisseur de peau, les pertes par effet Joule dans les conducteurs peuvent être prépondérantes. Il nous est apparu nécessaire d'inclure ces pertes dans notre analyse, ainsi que les

phénomènes de conduction propres à l'utilisation des nouveaux matériaux supraconducteurs à haute température critique.

De fait, nous présentons dans le troisième chapitre de cette thèse une étude relative à une meilleure évaluation des pertes induites à l'intérieur des conducteurs et proposons une modification de l'approche dans le domaine spectral propre à la prise en compte de ces phénomènes. Ce formalisme est appliqué à la caractérisation des matériaux supraconducteurs.

## BIBLIOGRAPHIE RELATIVE AU DEUXIEME CHAPITRE

[1] A.G. Derneryd, A.G. Lind: "Extended Analysis of Rectangular Microstrip Resonator Antennas". IEEE AP Vol.27, N°6, pp.846-849, November 1979

[2] J.Pribetich, P. Kennis, P.Pribetich: "Modelling Microstrip Resonators With a Dielectric Protective Layer For Biomedical Applications". MOTL Vol.3, N°5, pp.177-181, May 1990.

[3] Reinmut K. Hoffmann: "Handbook of Microwave Integrated Circuits". Artech House 1987.

[4] P.B. Katehi, N.G. Alexopoulos: " On the Modeling of Electromagnetically Coupled Microstrip Antennas - The Printed Strip Dipole". IEEE AP Vol.32, N°11, pp.1179-1186, November 1984

[5] P.B. Katehi, N.G. Alexopoulos: " Frequency- Dependent Characteristics of Microstrip Discontinuities in Millimeter-Wave Integrated Circuits". IEEE MTT Vol.33, N°10, pp.1029-1035, October 1985

[6] M. Drissi, V. Fouad Hanna, P. Lepeltier, J.Citerne: " Analyse de discontinuités rayonnantes sur ligne microruban au moyen d'équations intégrales". Ann. Télécommun., 43, N°5-6, pp.246-250, 1988

[7] R.W. Jackson, D.M. Pozar: "Full-Wave Analysis of Microstrip Open-End and Gap Discontinuities". IEEE MTT Vol.33, N°10, pp.1036-1042, October 1985

[8] N.H.L. Koster, R.H. Jansen: " The Microstrip Step Discontinuity: A Revised Description". IEEE MTT Vol.34, N°2, pp.213-223, February 1986

[9] G. Splitt, M. Davidovitz: "Guidelines for Design of Electromagnetically Coupled Microstrip Antennas on Two-Layer Substrates". IEEE AP Vol.38, N°7, pp. 1136-1140, July 1990

[10] R.W. Jackson: " Full-Wave, Finite Element Analysis of Irregular Microstrip Discontinuities". IEEE MTT Vol.37, N°1, pp.81-89, January 1989

[11] J.R. Mosig: " Arbitrary Shaped Microstrip Structures and Their Analysis with a Mixed Potential Integral Equation". Vol.36, N°2, pp.314-323, February 1988

- [12] S.C. Wu *et al.*: " A Rigorous Dispersive Characterization of Microstrip Cross and T Junctions". IEEE MTT Vol.38, N°12, pp.1837-1844, December 1990
- [13] D.M. Pozar, S.M. Voda: " A Rigorous Analysis of a Microstrip Fed Patch Antenna". IEEE AP Vol.35, N°12, pp.1343-1350, December 1987
- [14] J.W.Cooley, J.W. Tukey. "An Algorithm for the machine calculation of complex Fourier series". Math. Comput., USA (Avril 1965) ,19, pp.297-301.Algorithme de Cooley-Tuckey.
- [15] M. Davidovitz, Y.T. Lo: " Rigorous Analysis of a Circular Patch Antenna Excited by a Microstrip Transmission Line". IEEE AP Vol.37, N°8, pp.949-958, August 1989
- [16] G.Splitt: "A Rapid Method for Arbitrary Microstrip Structures Using the FFT-Algorithm". 20th EMC proceedings, 10-13 September 1990, pp.1481-1486.
- [17] H.A. Ghali, J.Citerne, M. Drissi, V. Fouad Hanna: "Simulation numérique sur une large bande de fréquence d'une charge adaptée en vue de la caractérisation des discontinuités planaires". 7èmes Journées Nationales Microondes, Résumés des conférences, pp.319-320.
- [18] W.P.Harokopus, P.B. Katehi: " Characterization of Microstrip Discontinuities on Multilayer Dielectric Substrates Including Radiation Losses". IEEE MTT Vol.37, N°12,pp.2058-2065, December 1989
- [19] H.A. Atwater: "Simplified Design Equations for Microstrip Line Parameters". Microwave Journal, pp.109-115, November 1989
- [20] Y. Suzuki, T. Chiba: " Computer Analysis for Arbitrary Shaped Microstrip Antenna with Multiterminals". IEEE AP Vol.32, N°6, pp.585-590, June 1984
- [21] Y.T.Solomon, W.F. Richards,:"Theory and Experiment on Microstrip Antennas". IEEE AP-27 ,N°2 ,March 1979, pp.137-145.
- [22] N. Feix, M. Lalande, A. Reinex, B. Jecko: " Harmonical Characterization of a Microstrip Discontinuity by a Time Frequency Method". 19th EMC Digest 1989
- [23] J. Sercu, N. Faché, F. Libbrecht, D. de Zutter: "Full Wave Space-Domain Analysis of Open Microstrip Discontinuities Including the Singular Current-Edge Behavior". IEEE MTT Vol.41, N°9, September 1993, pp.1581-1588.

[24] S. Assailly: "Contribution à l'étude des antennes imprimées multicouches par une approche dans le domaine spectral. Application au couplage". Thèse de Doctorat de l'Université. Université de Rennes I. 27 Avril 1990

[25] B. Roudot: "Analyse d'antennes imprimées par une approche dans le domaine spectral". Thèse 3ème cycle. Université de Rennes. Juillet 1985

## CHAPITRE TROISIEME

# CHAPITRE TROISIEME

## III-1 INTRODUCTION

Depuis l'avènement en 1987 des supraconducteurs à haute température critique, les physico-chimistes n'ont cessé de proposer de nouveaux matériaux supraconducteurs, avec pour principal critère d'obtenir des températures de transition de plus en plus élevées. Ces matériaux à base d'oxyde de cuivre, tels que le YBaCuO ou le YBaCuO ont des températures critique proches de 100 K.

Des résultats annoncés récemment [1], et non encore confirmés, font état de températures critiques proches de l'ambiante.

Lorsque que l'on envisage l'utilisation de ces matériaux supraconducteurs sous forme de films minces, pour réaliser des circuits passifs microondes, les problèmes rencontrés sont liés à une maîtrise imparfaite des dépôts et de la gravure. De ce fait, la caractérisation des matériaux supraconducteurs, par exemple par des méthodes de cavité résonante [2][3], ne permet pas de définir les propriétés de ces films dans les conditions réelles d'utilisation.

Dans cette optique la caractérisation des films supraconducteurs au moyen de résonateurs plaqués, en prenant en compte les caractéristiques du substrat

diélectrique, et du supraconducteur à l'issu du processus de réalisation, constitue une réponse plus appropriée aux impératifs imposés par l'ingénierie des circuits.

Ce troisième chapitre s'inscrit dans ce contexte: notre objectif est de proposer un outil d'aide à la caractérisation de films supraconducteurs basé sur l'analyse de résonateurs plaqués à partir des codes de calcul présentés dans les deux premiers chapitres.

Cette approche inclut dans l'analyse du circuit étudié les pertes par rayonnement dans l'espace libre situé au-dessus de la structure, ainsi que les pertes liées à la propagation d'onde de surface dans l'épaisseur du diélectrique. En considérant une permittivité complexe pour ce matériau, les pertes par effet Joule dans le diélectrique sont prises elles aussi en compte.

Dans le cas de structures résonantes ouvertes, la valeur du coefficient de qualité est essentiellement fixée par les pertes par rayonnement, ceci explique que les concepteurs de circuits se satisfont de modélisations simplifiées pour prendre en compte l'influence des pertes métalliques.

La conception de circuits monolithiques micro-ondes travaillant à des fréquences élevées ou comportant, pour des impératifs technologiques, des épaisseurs et des largeurs de métallisations réduites, nécessite par contre la prise en compte des pertes liées au caractère non parfait des conducteurs. Il en est de même pour les résonateurs encapsulés par un boîtier métallique et déposés sur un substrat diélectrique à très faibles pertes, pour lesquels le coefficient de qualité devient essentiellement tributaire des caractéristiques des conducteurs.

L'approche dans le domaine spectral est *a priori* mal adaptée au traitement des phénomènes internes aux conducteurs. En effet, la décomposition du champ

électromagnétique en ondes TE/z et TM/z au sein de la structure ne peut s'effectuer dans le domaine transformé de Fourier que pour des couches de matériaux empilées et d'extension infinie selon les directions parallèles aux interfaces diélectriques, propriétés que ne vérifient évidemment pas (excepté le plan de masse) les conducteurs définissant la topologie du circuit. Nous avons donc modifié cette approche en lui adjoignant la notion d'impédance de surface; ajoutant ainsi une relation locale supplémentaire entre le champ électrique tangent aux conducteurs et la densité de courant superficielle.

Auparavant, précisons comment nous pouvons inclure cette notion dans le schéma général de la résolution de problèmes électromagnétiques à l'aide de l'approche dans le domaine spectral.

## **III-2 APPROCHE DANS LE DOMAINE SPECTRAL ET IMPEDANCE DE SURFACE**

### **III-2-1 PRISE EN COMPTE DES PERTES CONDUCTEURS AU MOYEN DE L'IMPEDANCE DE SURFACE**

Le champ électrique tangent à une surface métallique n'est nul qu'à condition de considérer un conducteur de conductivité infinie. En réalité, il existe un champ électrique tangent à cette surface. Nous l'appellerons champ électrique résiduel  $E_r$ .

Dans la version classique ou simplifiée de l'approche dans le domaine spectral, ce champ est ignoré en imposant au champ électrique tangent total, somme des contributions  $\vec{E}_{P_i}(x,y,0)$  au champ électrique générées par chacune des fonctions de base  $J_i(x,y)$  et du champ électrique d'excitation  $\vec{E}_s(x,y,0)$ , une valeur nulle (N nombre de fonctions de base):

$$\bar{E}_r(x, y, 0) = \sum_{i=1}^N \bar{E}_{Pr,i}(x, y, 0) + \bar{E}_s(x, y, 0) = \bar{0} \quad (\text{III-1})$$

Dans ce cas, le champ électrique  $\bar{E}_{Pr,i}(x, y, 0)$  s'exprime en fonction de la densité surfacique de courant sur la plaque  $\bar{J}_p(x, y, 0)$ .

Lorsque que les pertes conducteurs sont considérées, le champ électrique résiduel  $E_r$  peut être directement associé à la densité volumique du courant dans le conducteur, et obéit dans l'espace réel à la relation locale définissant l'impédance de surface  $Z(x, y)$ :

$$\bar{E}_r(x, y) = Z(x, y) \bar{J}_p(x, y) = Z(x, y) \int_{-t}^0 \bar{J}_v(x, y, z) dz \quad (\text{III-2})$$

d'où:

$$Z(x, y) = \frac{\bar{E}_r(x, y, 0)}{\bar{J}_p(x, y)} = \frac{\bar{E}_r(x, y, 0)}{\int_{-t}^0 \bar{J}_v(x, y, z) dz} \quad (\text{III-3})$$

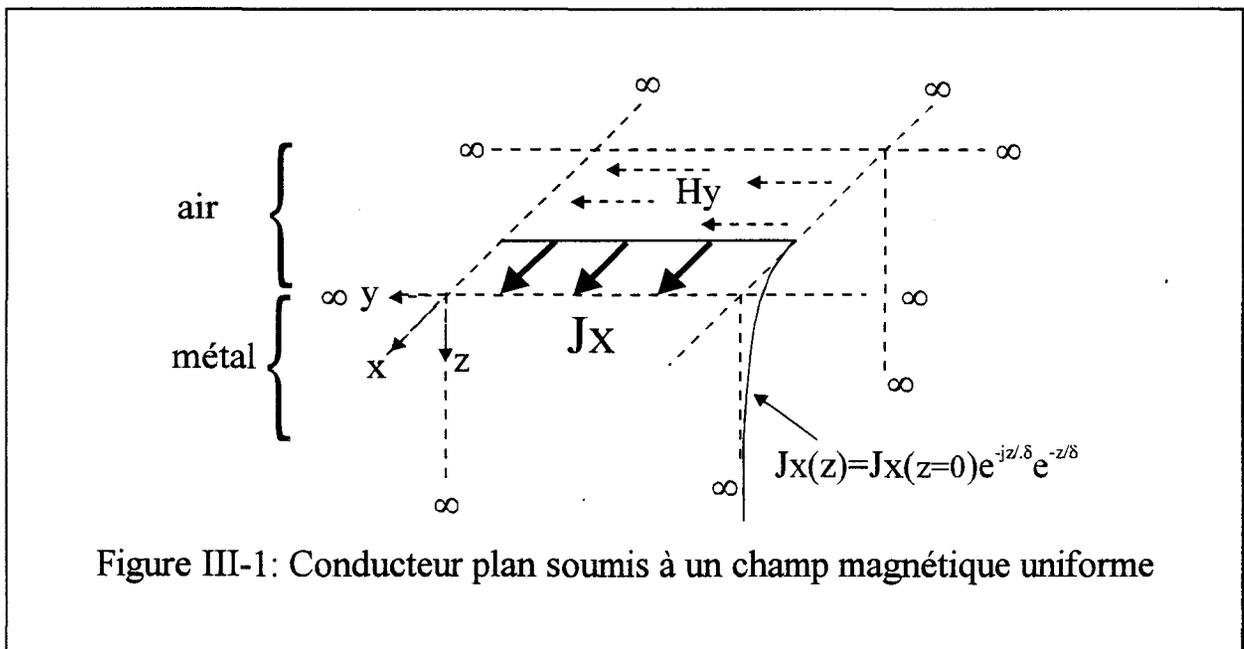
avec  $\bar{J}_v(x, y, z)$  densité volumique de courant parallèle à  $\bar{E}_r$ ,  $t$  épaisseur du conducteur.  $Z(x, y)$  à la dimension d'une impédance et est appelée impédance surfacique. Elle dépend de la géométrie du conducteur.

La prise en compte du champ résiduel  $\bar{E}_r$  s'effectue en première approximation dans l'espace transformé [5] en considérant  $Z(x, y)$  constant suivant  $x$  et  $y$ . La modification de la fonction de Green (I-13) dans le domaine spectral nous mène alors à la formulation suivante:

$$\begin{pmatrix} E_x(\alpha, \beta) \\ E_y(\alpha, \beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{xx} - Z & G_{xy} \\ G_{yx} & G_{yy} - Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_x(\alpha, \beta) \\ J_y(\alpha, \beta) \end{pmatrix} \quad (\text{III-4})$$

### III-2-2 CALCUL DE L'IMPEDANCE DE SURFACE D'UN CONDUCTEUR METALLIQUE

C'est au niveau de l'estimation de l'impédance de surface que sont introduites les principales approximations. Dans le cas simple d'un conducteur occupant un demi-espace et éclairé par une onde plane monochromatique, l'impédance de surface peut être calculée analytiquement. Nous rappelons ici brièvement les étapes et hypothèses essentielles conduisant ce calcul.



Considérons **figure III-1** une interface plane métal-air excitée par une onde plane monochromatique telle que:

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, y, z, t) &= \vec{x} E_x(z) e^{+j\omega t} \\ \vec{H}(x, y, z, t) &= \vec{y} H_y(z) e^{+j\omega t} \end{aligned} \quad (\text{III-5})$$

En multipliant chaque membre de l'équation de Maxwell-Faraday par la conductivité  $\sigma$  du matériau,

$$\text{Rot } \sigma \vec{E} = -\sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{III-6})$$

le rotationnel de l'expression (III-6) s'écrit (en négligeant le courant de déplacement):

$$\text{Rot}(\text{Rot } \sigma \vec{E}) = -\sigma \mu \frac{\partial}{\partial t} \text{Rot } \vec{H} = -\sigma j \omega \mu \vec{J} \quad (\text{III-7})$$

Il vient facilement en régime harmonique une expression solution de (III-7) pour la densité volumique de courant de conduction  $J_x(z)$ :

$$\Delta \vec{J}_x(z) - j \omega \mu \sigma \vec{J}_x(z) = \vec{0} \quad (\text{III-8})$$

La résolution de cette équation dans le cadre du problème posé mène à [4]:

$$\vec{J}_x(z) = \vec{J}_x(z=0) e^{-j \frac{z}{\delta}} e^{-\frac{z}{\delta}} \quad (\text{III-9})$$

Cette formule permet de définir la pénétration superficielle du courant dans le métal, exprimée par le biais de l'épaisseur de peau:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}} \quad (\text{III-10})$$

Dans ces conditions, l'impédance de surface, obtenue par intégration (III-3) du courant  $J_x(z)$  pour  $z$  appartenant à  $[0, +\infty[$ , prend la forme:

$$Z = R_s + jX_s; R_s = X_s = \frac{1}{\sigma\delta} \quad (\text{III-11})$$

D'autres études [5][6] ont permis de dériver des formules pour une épaisseur  $t$  quelconque du conducteur. L'impédance de surface est dans ce cas égale à:

$$Z = \sqrt{\frac{j\omega\mu_0}{\sigma}} \coth(\sqrt{j\omega\mu_0\sigma} t) \quad (\text{III-12})$$

Les formules (III-11) et (III-12), établies dans le cas d'un métal ( $\sigma$  réel), sont applicables aux matériaux supraconducteurs ( $\sigma$  complexe).

### III-2-3 EXPLOITATION DE L'IMPEDANCE DE SURFACE

La notion d'impédance de surface doit néanmoins être employée avec précaution: il est en effet des cas où celle-ci ne traduit qu'imparfaitement les situations réellement rencontrées sur des structures planaires [7]. Nous avons représenté **figure III-2** plusieurs cas limite de structures microruban, avec différents rapports de la largeur  $W$  sur la hauteur du substrat  $W/h$  et épaisseurs de conducteur  $t$ .

Pour le premier cas ( cas a ), l'épaisseur du conducteur de la ligne est très faible par rapport à la profondeur de pénétration du champ électromagnétique  $\delta$  ( $t \ll \delta$ ). Dans ce cas, les faces supérieures et inférieures du conducteur sont couplées et le champ électromagnétique est présent dans toute son épaisseur. L'impédance de surface obtenue au moyen de l'expression III-12 constitue alors une bonne approximation pour la prise en compte des pertes conducteur. Sa valeur se rapproche d'ailleurs, pour des épaisseurs de conducteur très faibles, de celle de l'expression quasi-statique:

$$Z_s = \frac{1}{\sigma t} \quad (\text{III-13})$$

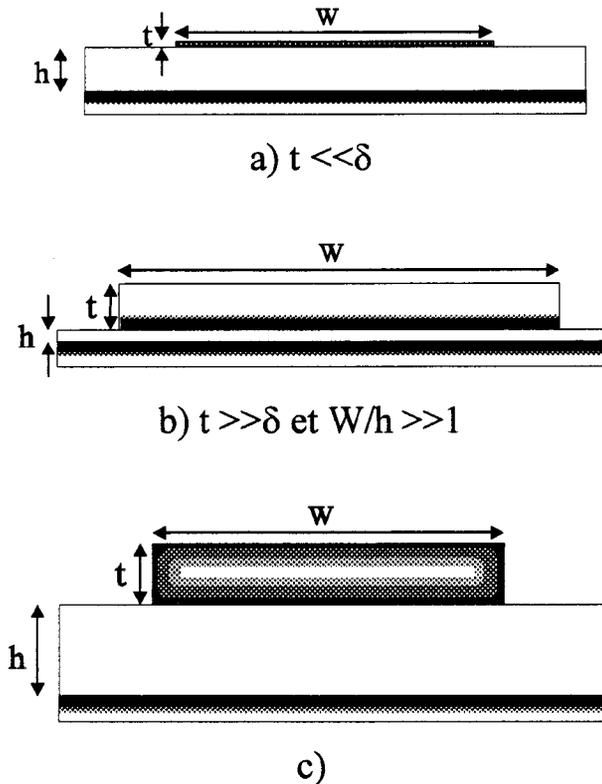


Figure III-2: Cas limites concernant la validité d'une modélisation des pertes conducteurs par l'impédance de surface.

Pour vérifier cette assertion, nous avons réalisé un résonateur constitué d'une fine couche d'or de  $0,1\mu\text{m}$  d'épaisseur et comparé l'évolution de son impédance d'entrée théorique et expérimentale.

Nous avons utilisé, pour la réalisation du résonateur, un substrat diélectrique en duroïd de permittivité relative  $\epsilon_r=2,54$  fabriqué par la firme Rogers. L'impédance d'entrée de ces résonateurs a été mesurée comme décrit au chapitre I en étalonnant la référence des phases sur un bout de ligne microruban de longueur égale à celle de la ligne d'excitation du résonateur, de façon à obtenir les impédances dans le plan de connexion de la plaque P.

La simulation de ces structures a été effectuée pour les deux modes considérés au moyen de fonctions de base triangulaires (cf. chap.II). L'impédance de surface est calculée par la formule III-12. La conductivité de la fine couche d'or a été fixée à  $4,610^5 \text{S/cm}$ .

L'examen des lieux des impédances d'entrées dans l'abaque de Smith (**figure III-3**) montre qu'un bon accord théorie-expérience est obtenu pour chaque mode, et permet de valider l'emploi de la formule (III-12) pour la simulation de résonateurs microruban ouverts comportant des conducteurs minces et de largeur comparable à la longueur d'onde guidée.

Dans le deuxième cas de figure ( figure III-2) ( cas b ), l'épaisseur de la couche conductrice est arbitrairement grande devant la profondeur de pénétration des champs ( $t \gg \delta$ ), et l'épaisseur du substrat est très faible devant la largeur de la ligne ( $W/h \gg 1$ ). On montre alors [7][26] que le champ électromagnétique est confiné sous la face inférieure du ruban, et que la face supérieure en est découplée. Pour ce type de structure, la configuration du champ électromagnétique à l'intérieur du conducteur permet de nouveau l'usage de la formule III-12; la valeur obtenue pour l'impédance de surface est alors celle d'un plan conducteur infiniment épais. Cette situation se rencontre, par exemple, pour des résonateurs constitués d'un segment de ligne microruban d'impédance caractéristique très faible, fonctionnant à des fréquences telles que  $t \gg \delta$ .

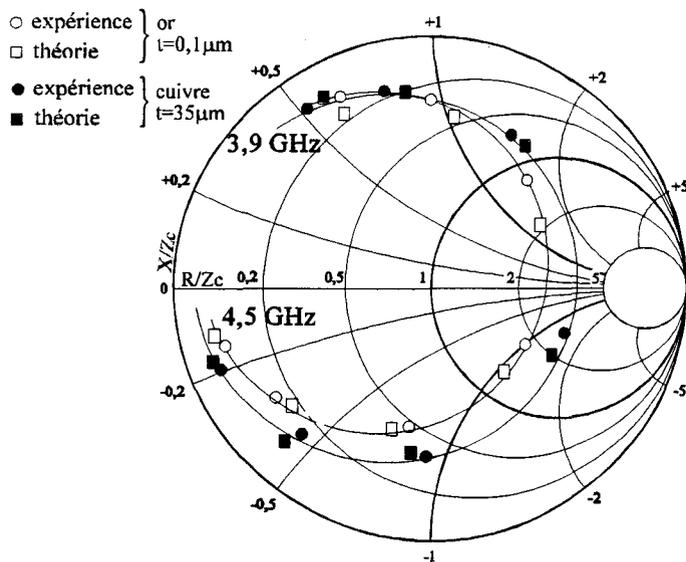
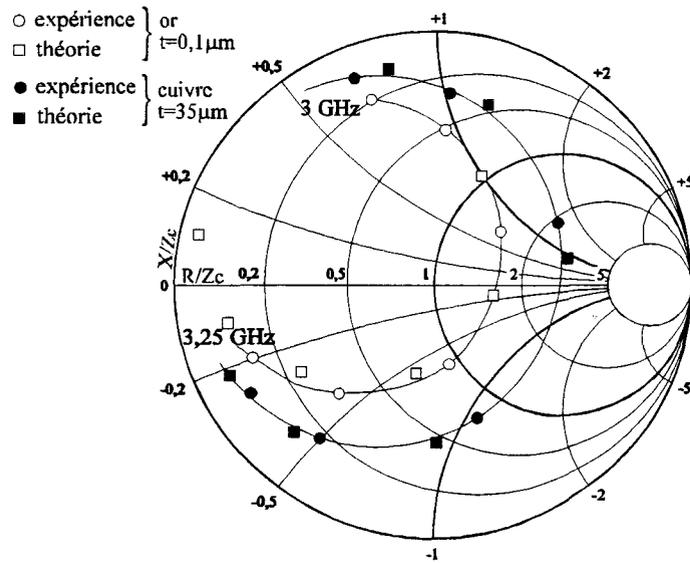
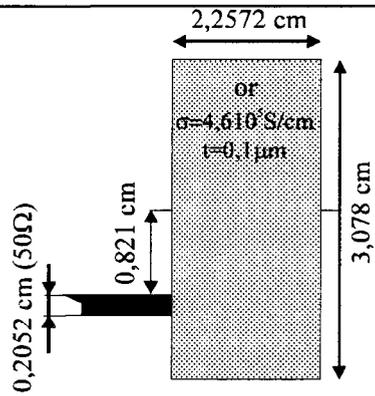


Figure III-3: Simulation des pertes conductrices d'un résonateur. Comparaison des résultats théoriques (A.D.S + impédance de surface) et expérimentaux.  
 $\epsilon_r=2,54$ ;  $h=0,0795$  cm.

L'impédance de surface d'un conducteur soumis à la présence d'un plan de masse peut donc, dans certaines conditions, prendre une valeur double de celle du même conducteur isolé. Reza Faraji-Dana et Y. Leonard Chow [7] font d'ailleurs remarquer qu'à hautes fréquences et pour des conducteurs larges, épais et très rapprochés du plan de masse, la densité de courant du plan de masse se concentre sous le conducteur et adopte une configuration identique à celle de la face inférieure du ruban. La résistance linéique de ces lignes de propagation peut alors approcher une valeur quatre fois supérieure à celle du même conducteur isolé du plan de masse.

Le troisième cas de figure ( cas c ) est le plus souvent rencontré: une ligne microruban présente une hauteur de substrat habituelle (  $0,1 < W/h < 10$  ) et le conducteur a une épaisseur plusieurs fois égale à l' épaisseur de peau. Ce type de structure est largement rencontrée car elle correspond, en ce qui concerne le rapport  $W/h$ , à des impédances caractéristiques habituelles; tandis qu'un ruban épais permet aux concepteurs de minimiser les pertes conducteurs. La figure III-2 montre que le champ électromagnétique adopte la forme d'une couronne dans une section droite du conducteur. L'impédance de surface calculée par la formule III-12 est dans ce cas largement surévaluée et ne peut pas être utilisée telle quelle.

Pour pallier à cet inconvénient, nous présentons dans le paragraphe suivant une définition de l'impédance de surface équivalente, calculée à partir de la détermination du champ électromagnétiques à l'intérieur des conducteurs métalliques ou supraconducteurs.

### **III-3 DEFINITION D'UN FACTEUR DE FORME POUR LA PRISE EN COMPTE DE RUBANS METALLIQUES OU SUPRACONDUCTEURS**

Nous présentons dans ce paragraphe une analyse du champ électromagnétique présent à l'intérieur des conducteurs. Cette étude nous permettra de calculer des coefficients de pondération propres à prendre en compte de façon plus précise les pertes métalliques ou supraconducteurs.

#### **III-3-1 RAPPELS SUR LA SUPRACONDUCTIVITE ET APPROXIMATIONS EMPLOYEES**

##### **III-3-1-1 Historique et généralités**

Certains matériaux à l'état condensé présentent, au dessous d'une certaine température critique  $T_c$ , une résistivité nulle. Ce phénomène, découvert fortuitement en 1911 sur le mercure par H. Kammerlingh Onnes, est appelé supraconductivité. La première interprétation théorique de la supraconductivité date de 1957, ce qui valut à ses trois auteurs, J.Bardeen,L.N.Cooper et J.R. Schrieffer, le prix Nobel en 1972.

La faible valeur des températures critiques pour les métaux et alliages ( $T_c < 23$  Kelvins) a longtemps limité les applications de la supraconductivité. Cependant, la découverte récente d'une nouvelle famille de matériaux supraconducteurs par K.A Müller et J.G.Bednorz (prix Nobel 1987) a relancé de manière spectaculaire les travaux dans ce domaine: des températures de transition supérieures de quelques dizaines de Kelvins à la température d'ébullition de l'azote (77 K) permettent d'élargir considérablement le champ d'application de ces nouveaux matériaux, notamment dans le domaine de l'électronique micro-onde.

En appliquant un champ magnétique à un matériau supraconducteur maintenu à une température inférieure à  $T_c$ , on observe que le matériau retourne à son état normal pour une valeur du champ supérieure à un seuil  $B_c$ . Ce champ critique suit une loi représentée, avec une bonne approximation, par l'équation:

$$B_c = B_{c0} \left( 1 - \frac{T}{T_c} \right)^2 \quad (\text{III-14})$$

dans laquelle  $B_{c0}$  est une grandeur caractéristique du matériau. Ce phénomène constitue une limitation des supraconducteurs quant aux puissances pouvant être mises par exemple en jeu par des structures de propagation. A l'existence de ce champ critique  $B_c$  peut être associée l'existence d'une densité volumique de courant critique  $J_c$ . Les effets de bord existant le long d'une ligne de propagation microruban laissent ainsi supposer qu'ils sont responsables de la dégradation des caractéristiques de systèmes supraconducteur pour des puissances élevées [19]. Ces non-linéarités ne sont cependant pas prises en compte dans cette étude, ce qui revient à ne considérer que des signaux d'amplitudes faibles.

Les expériences de W.Meissner et R.Oshsenfeld en 1933 ont eu pour but de statuer sur la nature de la résistivité nulle des matériaux supraconducteurs. Il convenait à cette époque de déterminer si l'état supraconducteur d'un matériau était simplement caractérisé par une conductivité infinie. Les expériences de Meissner et Oshsenfeld montrent que l'état supraconducteur est entièrement caractérisé par la relation de milieu ( $B_{in}$  champ magnétique interne au supraconducteur):

$$\vec{B}_{in} = \vec{0} \quad (\text{III-15})$$

, alors que le champ magnétique interne à un conducteur parfait n'est théoriquement soumis qu'à:

$$\vec{B}_{in} = \vec{C}te \quad (III-16)$$

Tout se passe donc comme si un matériau supraconducteur était un diamagnétique parfait. Après la découverte de l'effet Meissner, F. et H. London ont proposé d'adjoindre aux équations de Maxwell des relations de milieu afin de rendre compte de cet effet et de la conductivité infinie dans un supraconducteur. Les frères London reprennent l'hypothèse de Goster et Casimir qu'une partie des porteurs de charge de densité  $n_s$  constante ( à une température donnée inférieure à  $T_c$ ) forme un fluide non-visqueux, *i.e* pour lequel aucune "force de frottements" n'intervient. Appliquant la relation fondamentale de la dynamique à l'un de ces porteurs il apparaît que [20] si la quantité:

$$\text{rot}(\vec{v}) + \frac{q\vec{B}_{in}}{m} \quad (III-17)$$

$v$ : vitesse du porteur supraconducteur

$m$ : masse du porteur supraconducteur

prend à un instant une valeur nulle; alors elle est constante. L'hypothèse des frères London consiste précisément à admettre que:

$$\text{rot}(\vec{v}) + \frac{q\vec{B}_{in}}{m} = \vec{0} \quad (III-18)$$

d'où les 2 équations de London:

$$\begin{aligned} \text{rot}(\vec{J}_{in}) &= -\frac{\vec{B}_{in}}{\lambda^2 \mu_0} \\ \frac{\partial \vec{J}_{in}}{\partial t} &= \frac{1}{\mu_0 \lambda^2} \vec{E}_{in} \end{aligned} \quad (III-19)$$

où:

$$\lambda = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 q^2 n_s}} \quad (\text{III-20})$$

est un paramètre, homogène à une longueur, connu sous le nom d'épaisseur de pénétration de London.

L'équation différentielle vérifiée par le champ magnétique à l'intérieur d'un supraconducteur s'obtient en combinant (III-19) avec l'équation de Maxwell-Ampère et s'écrit (en négligeant le courant de déplacement):

$$\Delta \vec{B}_{in} = \frac{1}{\lambda^2} \vec{B}_{in} \quad (\text{III-21})$$

L'analyse de la topographie de  $B_{in}$  au voisinage de la surface plane d'un supraconducteur (avec la même topologie que dans la figure III-1) permet d'écrire  $B_{in}$  sous la forme:

$$B_{in}(z) = B(0) e^{-\frac{z}{\lambda}} \quad (\text{III-22})$$

Le champ s'atténue donc exponentiellement: à une profondeur de quelques dizaines ou quelques centaines d'Angströms, il est pratiquement nul et l'effet Meissner est alors total.

Lors d'une étude en régime harmonique, il est courant de traduire phénoménologiquement l'existence du courant constitué des porteurs supraconducteurs par le biais d'une conductivité complexe  $\sigma = \sigma_1 - j\sigma_2$ . Dans le cadre du modèle physique de Goster et Casimir,  $\sigma_1$  est associé aux électrons

normaux, tandis que  $\sigma_2$  traduit la présence des paires d'électrons constituant le supracourant  $J_{sc}$ .

De nombreux modèles empiriques existent pour la modélisation de cette conductivité complexe. Nous adopterons dans ce travail le modèle le plus populaire parmi la communauté des électroniciens: le modèle à deux fluides; ainsi que son extension récente [18][21] en un modèle à trois fluides.

Les nouveaux supraconducteurs à base d'oxyde de cuivre présentent une anisotropie liée à leur structure cristalline, encore mal quantifiée [12]. Nous la négligerons dans cette étude. Cependant, la méthode de caractérisation que nous proposons reste essentiellement applicable dans le cas anisotrope.

Les impuretés présentes dans tout cristal, les défauts, hétérogénéités et vortex seront aussi négligés, ainsi que les phénomènes d'hystérésis propres à certains cristaux supraconducteurs.

En résumé, nous ne considérerons que les films supraconducteurs isotropes, linéaires et homogènes, uniquement définis par leur conductivité complexe en fonction de la température, au travers de modèles analytiques macroscopiques.

Le concept d'impédance de surface décrit au paragraphe III-2 est directement applicable au cas des matériaux supraconducteurs, au travers de la formule III-12, dans laquelle  $\sigma$  est une grandeur complexe. Dans ce cas, l'épaisseur de peau  $\delta$ , donnée par l'expression III-10, prend aussi une valeur complexe. L'épaisseur de peau dans l'état supraconducteur est alors égale à l'inverse de la partie réelle de l'inverse de  $\delta$ , et correspond, dans le cadre de l'approximation  $\sigma_1 \ll \sigma_2$ , à l'épaisseur de pénétration de London  $\lambda$  [12].

### III-3-1-2 Le modèle à deux fluides

Le concepteur en électronique hyperfréquences a besoin, pour la simulation de circuits microruban supraconducteurs, de modèles simples pour la description de la conductivité complexe  $\sigma = \sigma_1 - j\sigma_2$  du matériau supraconducteur, laissant de côté toute interprétation microscopique approfondie, laquelle nécessite l'utilisation d'une théorie quantique. Le modèle à deux fluides, proposé par Goster et Casimir et s'appuyant sur la vision théorique de London permet, grâce à l'utilisation de trois paramètres, d'exprimer les composantes réelles et imaginaires de la conductivité en fonction de la température:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_{nc} \left( \frac{T}{T_c} \right)^4 \\ \sigma_2 &= \frac{1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^4}{\omega \mu \lambda^2(0)}\end{aligned} \quad (\text{III-23})$$

- avec:
- $T_c$  température critique ou de transition
  - $\sigma_{nc}$  conductivité normale à une température immédiatement supérieure à  $T_c$
  - $\lambda(0)$  profondeur de pénétration de London à  $T=0^\circ\text{K}$

Ce modèle est couramment accepté par la communauté scientifique comme une bonne description phénoménologique des propriétés de conduction des matériaux supraconducteurs dans les limites suivantes:

- $T < 0,9 T_c$
- $f$  fréquence  $< f_{\text{gap}}$  où  $f_{\text{gap}}$ , de l'ordre du terahertz, est la fréquence pour laquelle il y a franchissement de la largeur de la bande interdite.

Pour ce modèle, la densité électronique totale  $n$  est indépendante de la température et représente la somme des densités d'électrons dans l'état supraconducteur  $n_s$  et dans l'état normal  $n_n$ :

$$n = n_s + n_n = \text{cte}(T) \quad (\text{III-24})$$

Les densités d'électrons  $n_s$  et  $n_n$  sont données par les relations de Goster-Casimir:

$$\frac{n_s}{n} = 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^4 \quad (\text{III-25})$$

$$\frac{n_n}{n} = \left( \frac{T}{T_c} \right)^4$$

Le calcul de la densité volumique de courant  $J = J_s + J_n$  s'effectue après résolution de l'équation de Drüde-Lorentz pour la vitesse moyenne  $\bar{V}_s$  et  $\langle \bar{V}_n \rangle$  de chaque type de porteur. Les électrons supraconducteurs sont libres d'interactions avec leur environnement, il en résulte:

-pour les électrons supraconducteurs:  $m \frac{\partial \bar{v}_s}{\partial t} = -q\bar{E} \quad (\text{III-26})$

-pour les électrons normaux:  $m \frac{\partial \langle \bar{v}_n \rangle}{\partial t} + m \frac{\langle \bar{v}_n \rangle}{\tau_n} = -q\bar{E} \quad (\text{III-27})$

avec:  $q$  charge électrique élémentaire

$\tau_n$  temps de relaxation des électrons normaux

$m$  masse de l'électron

### III-3-2 DESCRIPTION DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE DANS UNE SECTION DROITE DU CONDUCTEUR

Nous proposons ici une détermination plus rigoureuse de calcul de l'impédance de surface par une description plus précise de la répartition du courant au sein de la section droite du conducteur imprimé. Cette analyse s'appuie sur la technique de séparation de variables associées à une méthode des moments [24]. Pour ce problème résolu dans la section droite du ruban, nous adopterons un nouveau système d'axe.

Le calcul de l'impédance de surface du conducteur supérieur de la structure microruban représentée **figure III-4** est lié par l'expression de la puissance stockée ou perdue en son sein à la distribution de courant  $\bar{J}(x,y)$ . Le courant dans le conducteur résulte de l'application d'un champ électrique d'excitation et peut, pour des largeurs de rubans très inférieures à la longueur d'onde guidée  $\lambda_g$ , être facilement identifié à sa seule composante longitudinale  $\bar{J}_z(x,y)$ .

#### II-3-2-1 Formalisme

Le champ d'excitation  $E_z$  est en première approximation supposé uniforme, constant, et ne comporte qu'une seule composante  $E_z$ . Nous ne considérerons aucune dépendance des grandeurs électriques suivant l'axe de propagation  $Oz$ . Le champ électromagnétique peut alors s'écrire:

$$[E_i, H_i](x, y, z) = [E_i, H_i]_0(x, y) e^{-j\beta z} \quad (\text{III-28})$$

Cette approximation est couramment acceptée par la communauté scientifique [25] dans le cadre d'une détermination des pertes par conduction. Wheeler [4] l'utilise et remarque que la présence même du diélectrique peut être ignorée.

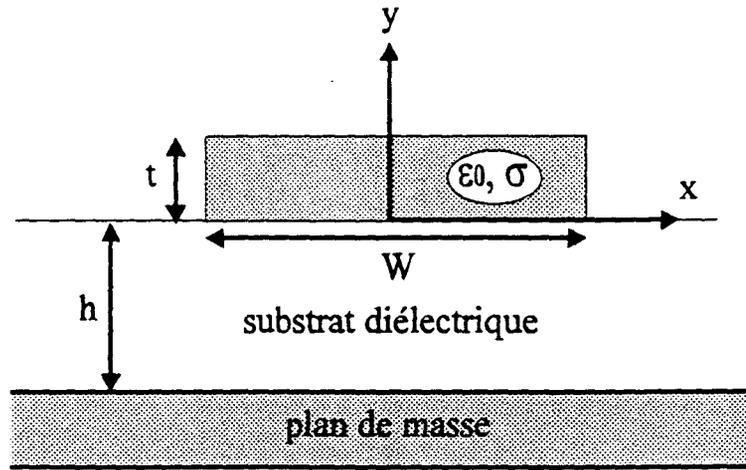


Figure III-4: Structure microruban étudiée

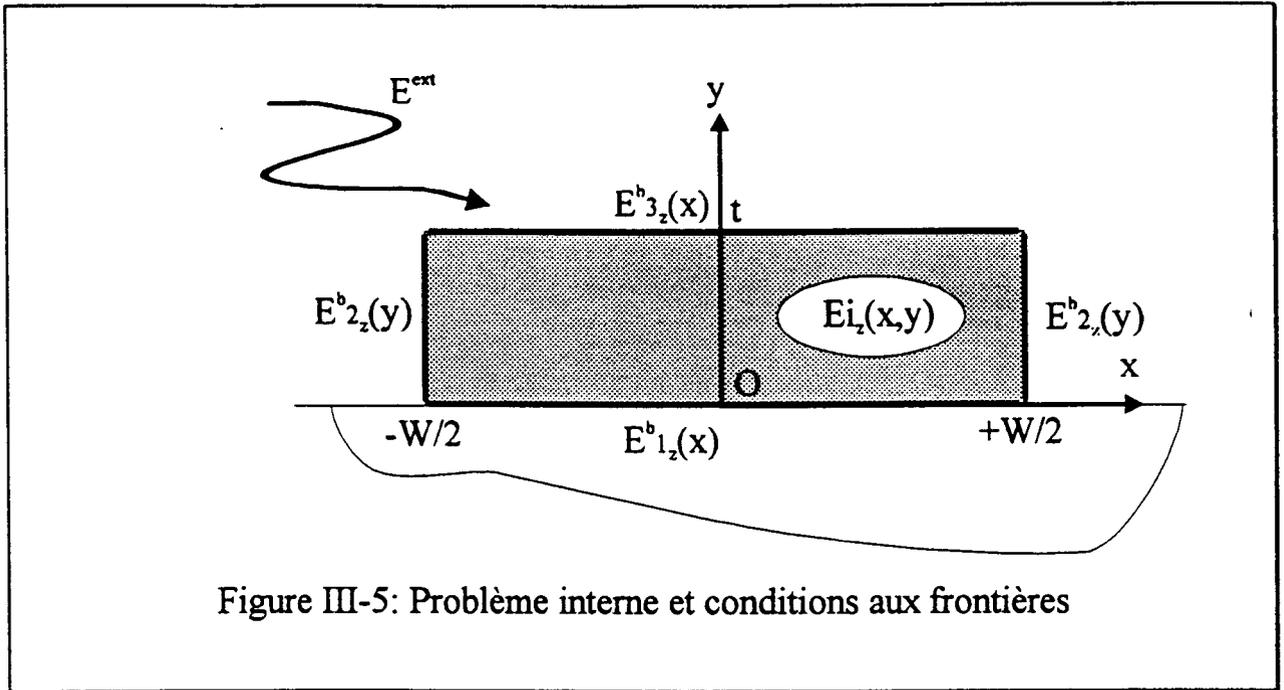
Le champ électrique interne au conducteur  $\bar{E}_z^i(x,y)$  obéit à l'équation:

$$\nabla^2 E_z^i(x,y) = j\omega\mu_0\sigma E_z^i(x,y) \quad (\text{III-29})$$

avec comme conditions aux limites sur les bords du ruban (cf. **figure III-5**):

$$E_z^i(x,y) = \begin{cases} E_{1z}^b(x) & y = 0, -W/2 \leq x \leq W/2 \\ E_{2z}^b(x) & x = \pm W/2, 0 \leq y \leq t \\ E_{3z}^b(x) & y = t, -W/2 \leq x \leq W/2 \end{cases} \quad (\text{III-30})$$

Le champ électrique  $\bar{E}_{iz}^b(x,y)$  sur les bords  $B_1, B_2, B_3$  du ruban conducteur est inconnu et résulte de la superposition du champ externe d'excitation et du champ créé par la densité de courant  $\bar{J}_z(x,y)$ .



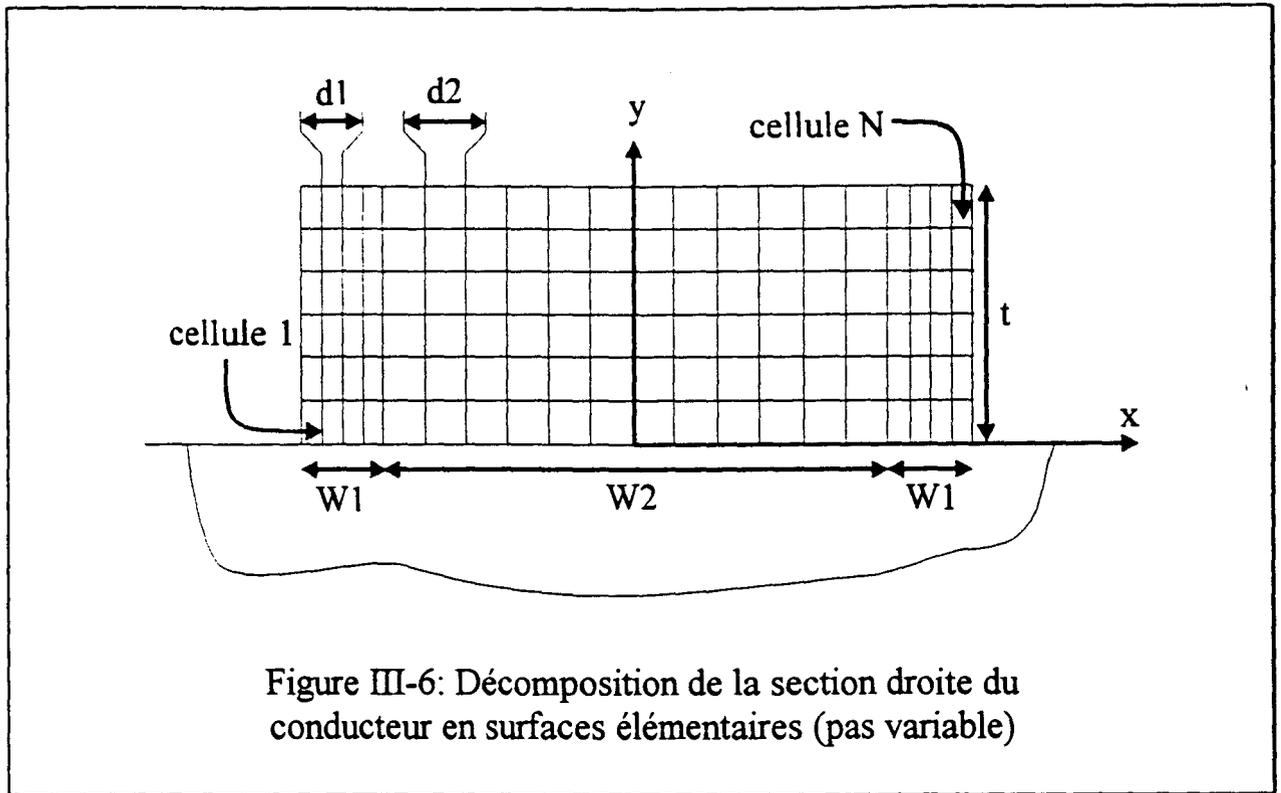
En utilisant la fonction de Green  $g(x,y,x',y')$  donnée dans l'annexe C [24], ce champ est exprimé par la relation:

$$E_z^b(x,y) = E_z^{\text{ext}} + \int_{-W/2}^{W/2} \int_0^t J_z(x',y') g(x,y,x',y') dx' dy' \quad (\text{III-31})$$

Soit, en introduisant la conductivité  $\sigma$  du matériau:

$$E_z^b(x,y) = E_z^{\text{ext}} + \int_{-W/2}^{W/2} \int_0^t \sigma E_z^i(x',y') g(x,y,x',y') dx' dy' \quad (\text{III-32})$$

La résolution simultanée des équations III-29 et III-31 nous permet de déterminer la répartition du champ électrique interne  $E_z^i$ . Pour ce faire, la section droite du conducteur est divisée en surfaces élémentaires. Afin de mieux décrire l'évolution des grandeurs au voisinage des bords du ruban, et d'optimiser les temps de calcul nécessaires à la résolution du problème, les surfaces élémentaires seront choisies plus petites dans les régions proches des effets de bord (cf. **figure III-6**).



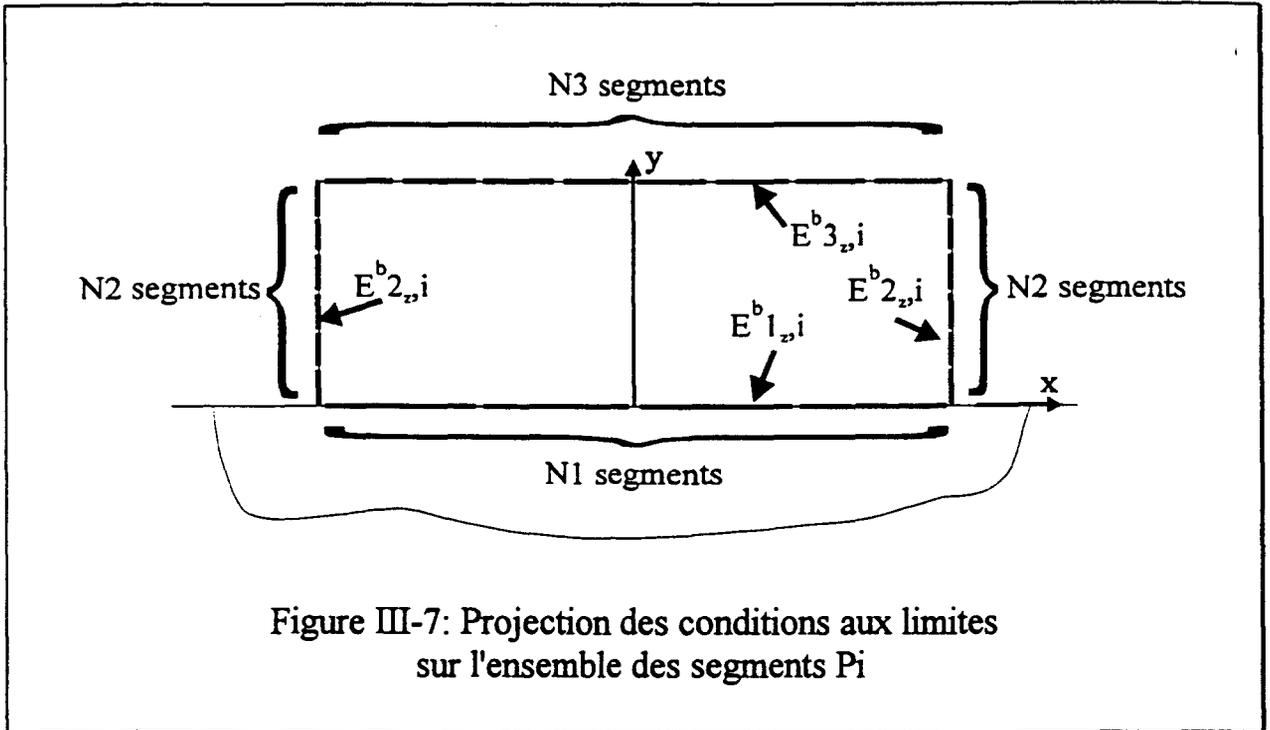
La solution de l'équation différentielle (III-29) peut s'écrire en terme d'une somme de fonctions orthogonales définies sur la section droite du conducteur. Les coefficients inconnus de ces fonctions sont alors exprimés par le biais de la valeur du champ électrique au bord du conducteur,  $E^b$ . La projection des conditions aux limites sur un ensemble de fonctions de base  $P_i$  nous permet d'écrire:

$$E_{zk}^b(x \text{ ou } y) = \sum_{i=1}^{N_k} E_{zk,i}^b P_i(x \text{ ou } y); \quad k=1,2,3 \quad (\text{III-33})$$

Les fonctions de base  $P_i$  décomposent chaque frontière métal-diélectrique en autant de segments sur lesquels le champ électrique  $E^b$  est constant:

$$P_i = \begin{cases} 1 & \text{sur le } i^{\text{ème}} \text{ segment} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (\text{III-34})$$

Le champ  $E^b$  est maintenant approché par un vecteur de  $N_T$  éléments dont chaque composante est égale à  $E^b_{zk,i}$  (figure III-7). Le nombre total de segments  $N_T$  est quant à lui égal  $N_1+2N_2+N_3$ , où  $N_1, N_2, N_3$  correspondent respectivement au nombre de segments définis sur les frontières 1, 2 et 3.



Le champ électrique au centre de chaque surface élémentaire peut de cette façon être exprimé en fonction de la valeur du vecteur  $(E^b_z)$  par la relation matricielle ( $[A]$  est donnée dans l'annexe D):

$$\begin{matrix} (E_z^i) & = & [A] & (E_z^b) \\ \text{N} \times 1 & & \text{N} \times \text{N}_T & \text{N}_T \times 1 \end{matrix} \quad (\text{III-35})$$

L'équation (III-31) peut de même être discrétisée en considérant les contributions élémentaires au champ  $E^b_z$  du champ  $E^i_z$  présent sur chaque surface élémentaire:

$$\begin{matrix} (E_z^b) & = & (E_z^{\text{ext}}) & + & [B] & (E_z^i) \\ \text{N}_T \times 1 & & \text{N}_T \times 1 & & \text{N}_T \times \text{N} & \text{N} \times 1 \end{matrix} \quad (\text{III-36})$$

En combinant ces deux dernières équations, nous écrivons le système permettant, pour un champ d'excitation donné, de déterminer la valeur du champ électrique  $E_z^b$  en tout point du bord du conducteur:

$$\begin{matrix} ([I] & - & [B] & [A]) & (E_z^b) & = & (E_z^{ext}) \\ N_T \times N_T & & N_T \times N & N \times N_T & N_T \times 1 & & N_T \times 1 \end{matrix} \quad (\text{III-37})$$

où  $[I]$  est la matrice identité de dimension  $N_T \times N_T$ . La dernière étape consiste en la résolution numérique du système (III-37), permettant d'aboutir à la répartition du champ électrique à l'intérieur du ruban.

### III-3-2-2 Calcul de l'impédance de surface équivalente $Z_s$

Une fois déterminée la répartition du champ électrique interne au conducteur  $E_{iz}(x,y)$ , il est facile d'exprimer le champ magnétique  $H_{ix}(x,y)$  et  $H_{iy}(x,y)$  déduit de l'équation de Maxwell-Faraday:

$$\begin{aligned} H_{ix} &= \frac{-1}{j\omega\mu_0} \frac{\partial E_{iz}}{\partial y} \\ H_{iy} &= \frac{-1}{j\omega\mu_0} \frac{\partial E_{iz}}{\partial x} \end{aligned} \quad (\text{III-38})$$

L'impédance de surface telle qu'elle est définie au § III-2 peut être exprimée dans le cas d'un conducteur de largeur  $W$ , d'épaisseur  $t$ , et de longueur  $L$  par le rapport [27]:

$$Z = \frac{2\langle P \rangle}{|I|^2} W \quad (\text{III-39})$$

avec  $\langle P \rangle$  puissance moyenne dissipée dans le volume du conducteur  
 I courant véhiculé par une section droite  $S=W.t$  du conducteur

Le terme de puissance  $\langle P \rangle$  est le flux du vecteur de Poynting à travers la surface englobant une longueur L unitaire du conducteur. Il est égal, en vertu du principe de conservation de l'énergie, à l'accroissement des énergies électrique  $W_e$  et magnétique  $W_m$  contenues dans le conducteur, auxquelles il faut ajouter les pertes par effet Joule:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \oint_S \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{2} \iiint_V j\omega(\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^* - \mathbf{D}^* \cdot \mathbf{E}) dv + \frac{1}{2} \iiint_V \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* dv \quad (\text{III-40})$$

$$\langle P \rangle = P_a + jQ$$

En introduisant la permittivité complexe du matériau (cas supraconducteur), on peut exprimer les parties réelle et imaginaire (par unité de longueur L):

$P_a$  puissance active dissipée dans le conducteur:

$$P_a = \frac{1}{2} \iint_S \sigma_1 |\mathbf{E}|^2 ds \quad (\text{III-41})$$

Q représente le bilan des puissances réactives liées aux énergies électriques et magnétiques. Dans le cas d'un matériau supraconducteur, le calcul de la puissance réactive nécessite que l'on détermine la répartition du champ électrique au sein du ruban, et ce d'autant plus que l'effet Meissner limite l'influence de l'énergie magnétique  $W_m$ . Dans ces conditions:

$$Q = \frac{\omega \mu_0}{2} \iint_S |H|^2 ds + \left( \frac{\sigma_2}{2} - \frac{\epsilon_0 \omega}{2} \right) \iint_S |E|^2 ds = 2\omega (W_m - W_e) \quad (\text{III-42})$$

Les parties réelles et imaginaires de l'impédance de surface équivalente sont alors exprimées par les relations:

$$R_s = \frac{2W P_a}{|I|^2}; \quad X_s = \frac{2W Q}{|I|^2} \quad (\text{III-43})$$

avec:

$$|I|^2 = \left| \iint_S \sigma E_z ds \right|^2$$

### III-3-2-3 Définition d'un facteur de forme

La détermination de l'impédance de surface équivalente d'un conducteur par le calcul de la répartition du champ électrique interne permet d'introduire dans notre analyse de circuits microruban métalliques ou supraconducteurs une impédance de surface déterminée plus précisément qu'avec un modèle analytique. La notion de facteur de forme, introduite pour le calcul d'impédances de surface, se justifie principalement par le principe de similitude [24] permettant d'identifier les caractéristiques des conducteurs ayant en commun les paramètres normalisés suivants (P fréquence normalisée):

$$\frac{W}{t}, \frac{W}{h}, P = \left( \frac{t}{\delta} \right) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{W}{t}} \quad (\text{III-44})$$

La généralisation de notre analyse aux matériaux supraconducteurs ne permet plus d'utiliser la même définition de la fréquence normalisée P et nous n'emploierons

donc pas ces paramètres. Nous définissons par contre un facteur de forme pour la partie réelle et imaginaire de l'impédance de surface par les rapports [34]:

$$K_r = \frac{R_s}{R_{so}}, K_i = \frac{X_s}{X_{so}} \quad (\text{III-45})$$

$R_{so}$  et  $X_{so}$  sont ici les parties réelle et imaginaire obtenues par le calcul classique de l'impédance de surface (III-12). Cette approche, limitée au calcul de  $K_r$ , a été utilisée avec succès [26] sur des lignes microruban et coplanaires à conducteurs métalliques. Nous l'emploierons ici à la caractérisation des matériaux supraconducteurs.

#### III-3-2-4: Validation du calcul de l'impédance de surface équivalente

##### a) Cas de rubans métalliques

Le calcul de l'impédance de surface équivalente a déjà donné dans une précédente étude [26] un facteur de forme basé sur l'évaluation de la puissance active dissipée dans le ruban métallique de lignes microruban.

Nous avons défini dans ce rapport la partie imaginaire de ce facteur de forme, relativement à la puissance réactive stockée dans le ruban, et donc à la partie imaginaire de l'impédance de surface équivalente.

Sur la courbe représentée **figure III-8**, nous traçons les valeurs de  $K_r$  et de  $K_i$  à 10 GHz pour un ruban en cuivre de largeur  $W=50\mu\text{m}$ , suivant son épaisseur normalisée  $t/\delta$  ( $\delta=0,72\mu\text{m}$ ). La hauteur du substrat a été choisie de façon à ce que le rapport  $W/h=1$ . Ces courbes sont accompagnées des valeurs obtenues par l'approche statique du problème de l'impédance de surface par la formule (III-13):

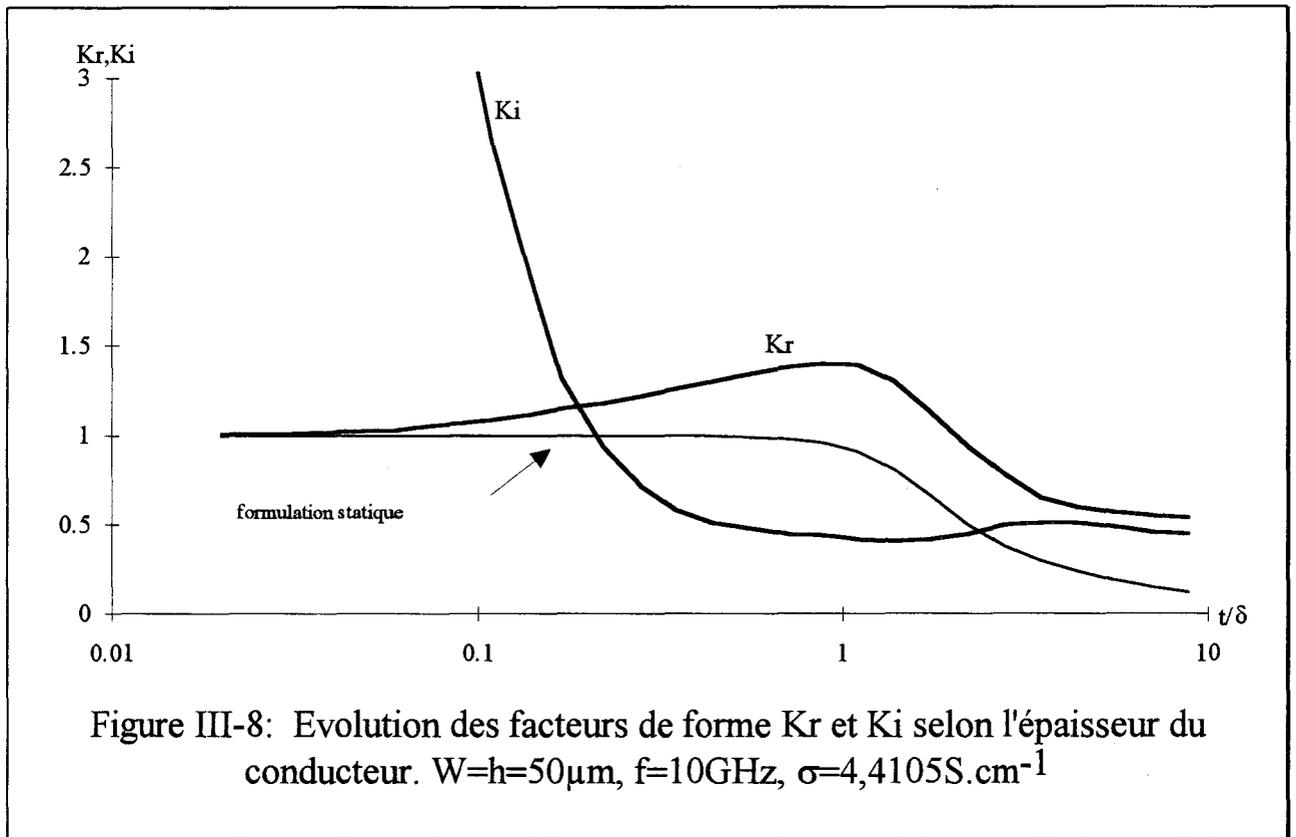
$$Z_s = \frac{1}{\sigma t} \quad (\text{III-46})$$

Pour des épaisseurs  $t$  très faibles ( $t \ll \delta$ ), les valeurs prises par la partie réelle de l'impédance de surface calculée au moyen des trois formulations (facteurs de forme, formule statique (III-46) et formule dynamique simplifiée (III-12) ) sont théoriquement égales. Nous vérifions figure III-8 qu'il en est bien ainsi puisque le facteur de forme  $K_r$  tend vers 1 lorsque  $t$  tend vers zéro.

Le facteur de forme relatif à la partie imaginaire,  $K_i$ , tend vers des valeurs infinies lorsque  $t$  tend vers zéro: ce comportement est imputable au fait que la réactance du ruban n'est pas nulle même lorsque  $t$  est très faible. Cette réactance est due aux effets de bord dans la direction  $Ox$  responsables du champ magnétique interne  $H_y(x,y)$  ( formule (III-38) ). La partie imaginaire de l'impédance de surface, placée au dénominateur de l'expression (III-45), tend quant à elle vers zéro avec  $t$ .

Lorsque l'épaisseur du conducteur augmente, la formulation statique donne les mêmes résultats que l'approche dynamique, mais ne correspond pas aux valeurs trouvées pour  $K_r$ .

Le courant prend, lorsque l'épaisseur  $t$  du conducteur augmente encore ( $t \gg \delta$ ) la forme d'une couronne dans la section droite du conducteur. L'impédance de surface obtenue au moyen de la formule (III-12) est dans ce cas surévaluée d'un facteur 2 (cf. figure III-2-c) et les facteurs de forme  $K_r$  et  $K_i$  sont approximativement égaux à 1/2.



En conclusion, les valeurs obtenues grâce à notre analyse numérique de l'impédance de surface équivalente dans le cas du métal coïncident avec celles déduites de formules analytiques pour des valeurs extrêmes de l'épaisseur du ruban  $t$  ( $t \ll \delta$  ou  $t \gg \delta$ ). La formule (III-12), amplement utilisée dans la littérature, donne quant à elle de bons résultats en ce qui concerne la résistance de surface lorsque  $t$  est très inférieure ( $t/\delta < 0,1$ ) à l'épaisseur de pénétration du champ électromagnétique  $\delta$ , mais ne convient pas dans les cas où  $t \gg \delta$  et  $W/h$  proche de l'unité. Ces cas sont, rappelons-le, les plus fréquemment rencontrés en pratique.

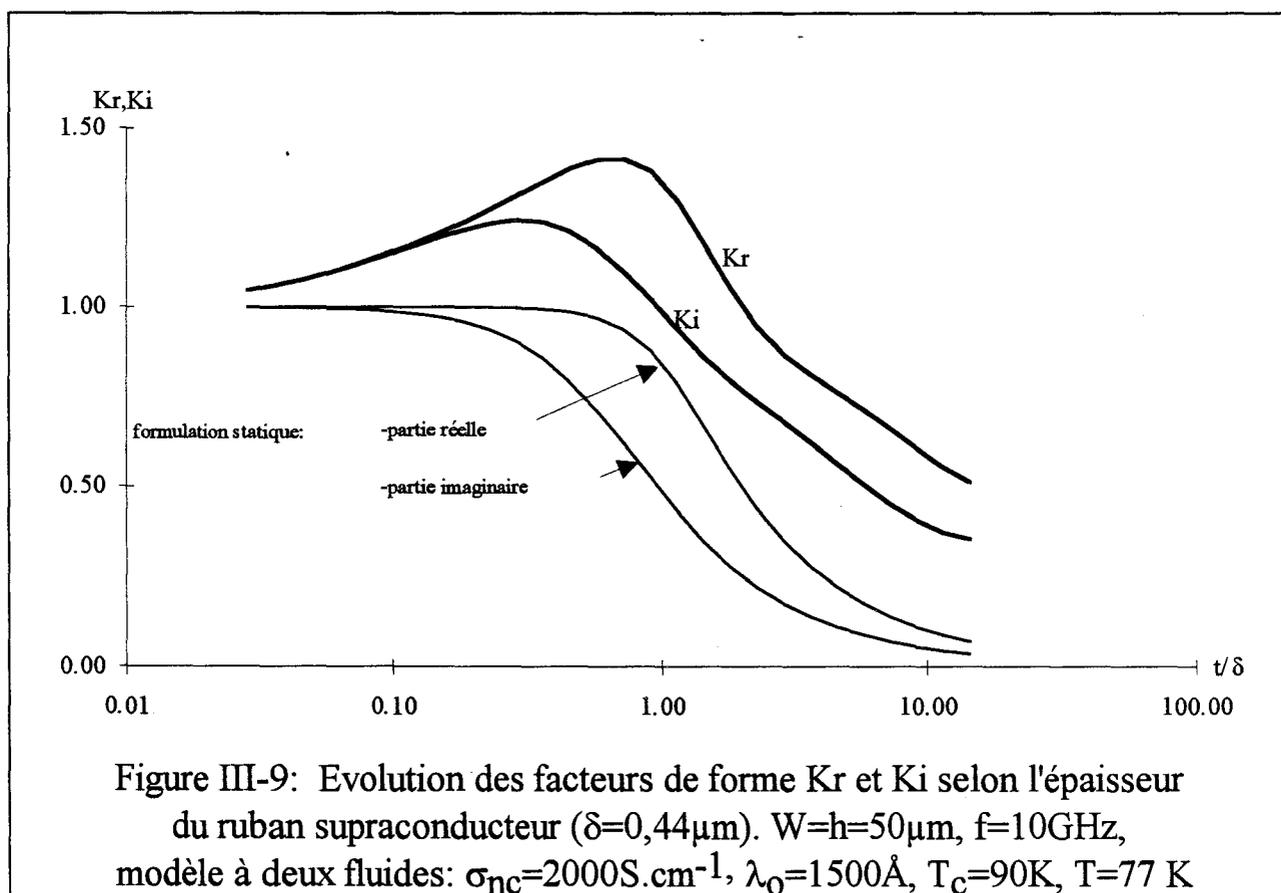
### b) Cas des matériaux supraconducteurs

Nous avons, de la même façon que précédemment, effectué une étude du comportement des facteurs de forme  $K_r$  et  $K_i$  selon l'épaisseur du ruban supraconducteur. Dans cette partie, la conductivité du matériau supraconducteur est

calculée à la température de 77K à partir du modèle à deux fluides avec comme paramètres:  $\sigma_{nc}=2000 \text{ Scm}^{-1}$ ,  $\lambda_0=1500 \text{ \AA}$ , et  $T_c=90\text{K}$ .

La courbe présentée **figure III-9** comprend les deux facteurs de forme, ainsi que les valeurs obtenues à partir de l'expression statique (III-46), pour une ligne microruban de rapport  $W/h=1$  ( $W=50\mu\text{m}$ ) à 10 GHz ( $\delta=0,44\mu\text{m}$ ).

Le raisonnement appliqué dans le cas de rubans métalliques reste valable pour des rubans supraconducteurs. Ainsi, nous retrouvons pour les facteurs de forme  $K_r$  et  $K_i$  la même allure générale que la courbe de  $K_r$  dans le cas du métal (figure III-8). Nous constatons que les formulations analytiques, données par les formules (III-11) et (III-12), ne donnent de bons résultats que pour  $t/\delta < 0,1$  ; tandis les facteurs  $K_r$  et  $K_i$  tendent bien vers 0,5 lorsque l'épaisseur du ruban augmente.



calculée à la température de 77K à partir du modèle à deux fluides avec comme paramètres:  $\sigma_{nc}=2000 \text{ Scm}^{-1}$ ,  $\lambda_0=1500 \text{ \AA}$ , et  $T_c=90\text{K}$ .

La courbe présentée **figure III-9** comprend les deux facteurs de forme, ainsi que les valeurs obtenues à partir de l'expression statique (III-46), pour une ligne microruban de rapport  $W/h=1$  ( $W=50\mu\text{m}$ ) à 10 GHz ( $\delta=0,44\mu\text{m}$ ).

Le raisonnement appliqué dans le cas de rubans métalliques reste valable pour des rubans supraconducteurs. Ainsi, nous retrouvons pour les facteurs de forme  $K_r$  et  $K_i$  la même allure générale que la courbe de  $K_r$  dans le cas du métal (figure III-8). Nous constatons que les formulations analytiques, données par les formules (III-11) et (III-12), ne donne de bons résultats que pour  $t/\delta < 0,1$  ; tandis les facteurs  $K_r$  et  $K_i$  tendent bien vers 0,5 lorsque le rapport  $t/\delta$  tend vers 10.

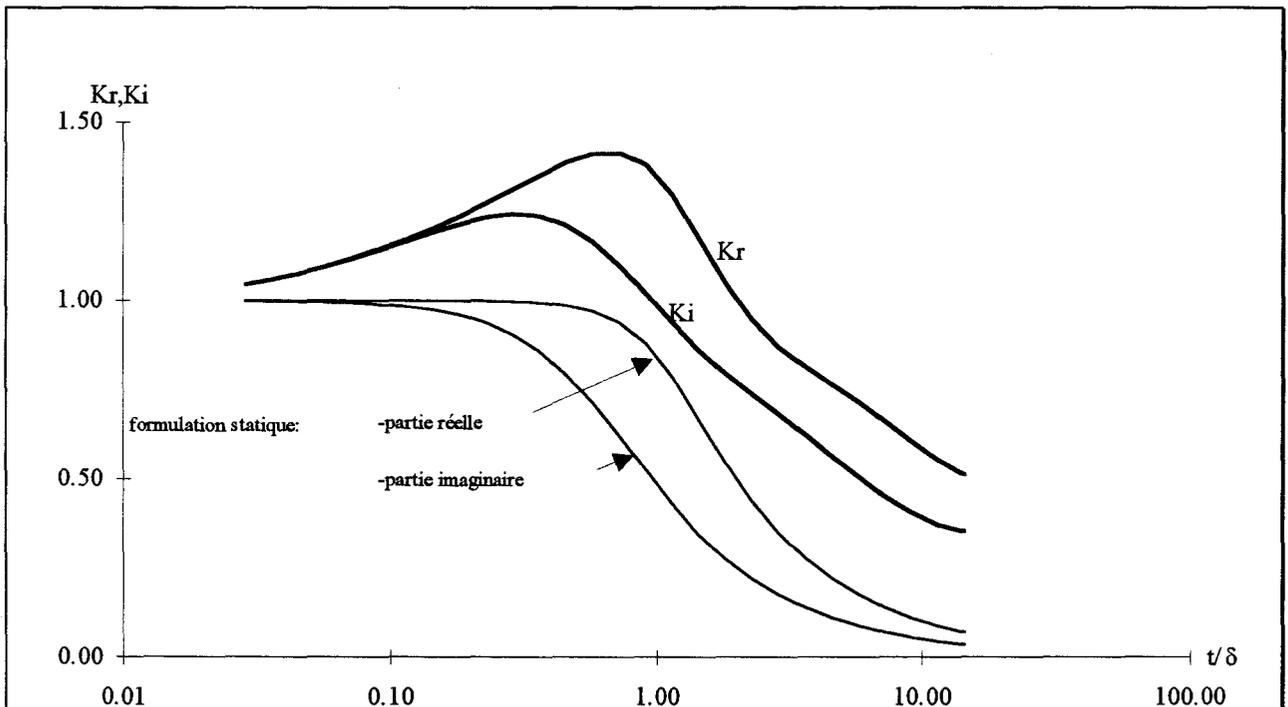
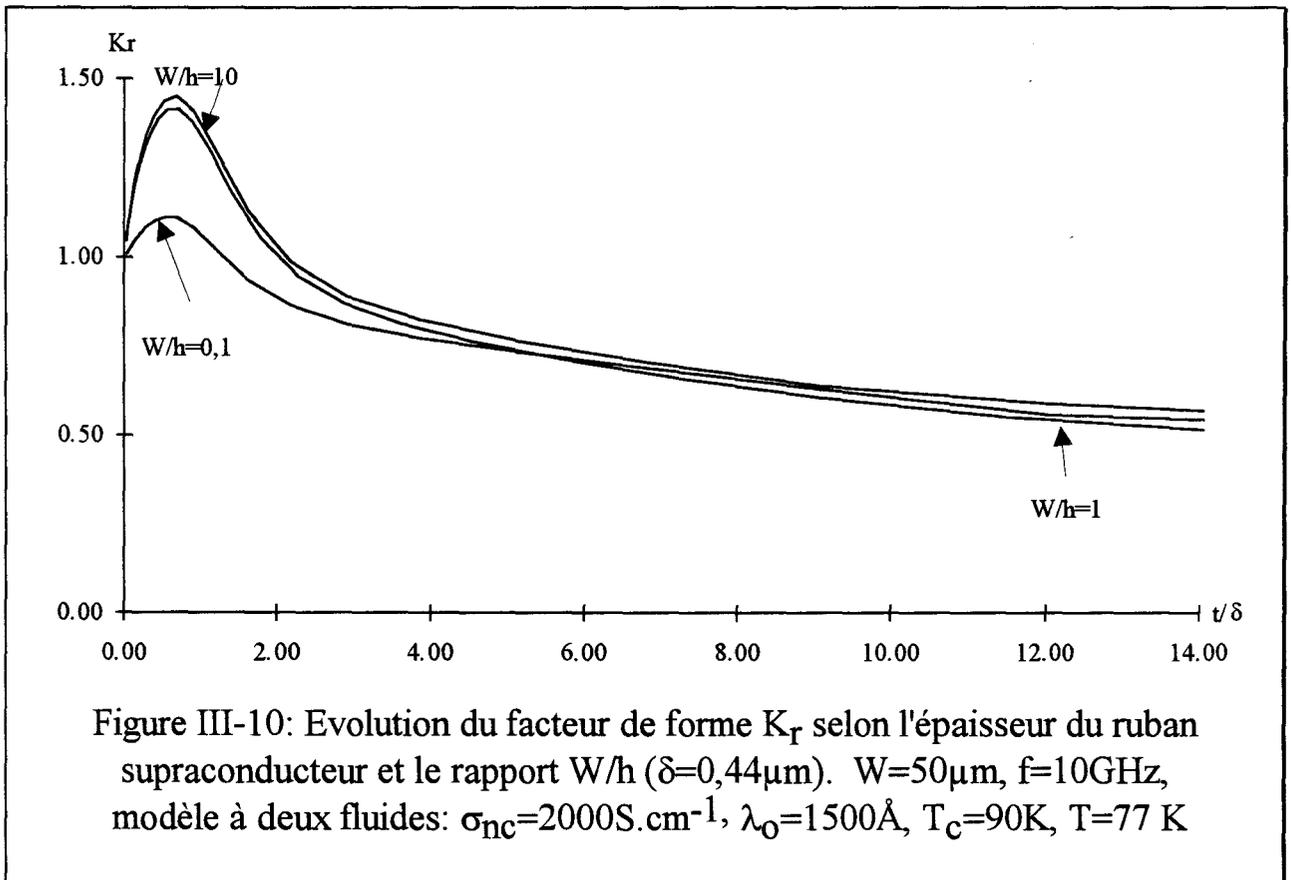


Figure III-9: Evolution des facteurs de forme  $K_r$  et  $K_i$  selon l'épaisseur du ruban supraconducteur ( $\delta=0,44\mu\text{m}$ ).  $W=h=50\mu\text{m}$ ,  $f=10\text{GHz}$ , modèle à deux fluides:  $\sigma_{nc}=2000\text{S.cm}^{-1}$ ,  $\lambda_0=1500\text{\AA}$ ,  $T_c=90\text{K}$ ,  $T=77 \text{ K}$

Les facteurs de forme  $K_r$  et  $K_i$  dépendent aussi de la distance au plan de masse et plus particulièrement du rapport  $W/h$ . Nous avons tracé **figure III-10** et **figure III-11** l'évolution de ces facteurs suivant l'épaisseur  $t$  du ruban supraconducteur et ceci pour différentes valeurs du rapport  $W/h$ . Afin de pouvoir exploiter ces résultats pour des valeurs habituellement rencontrées du rapport  $W/h$ , nous avons calculé les facteurs de forme de trois structures de rapport  $W/h$  respectivement égaux à 1, 10 et  $1/10$ . Nous constatons que la valeur du maximum local dépend de  $W/h$ , mais surtout que les facteurs de forme sont presque indépendants de ce rapport pour des épaisseurs  $t$  supérieures à  $3\delta$ .



La présence du plan de masse n'influe sur la configuration du champ électromagnétique et donc sur les facteurs de forme de l'impédance de surface que pour des rapports  $W/h$  grands. Nous avons vu au paragraphe III-2 que pour des

valeurs importantes du rapport  $W/h$  et pour une grande épaisseur du ruban supraconducteur le champ électromagnétique dans la section droite du conducteur prend l'allure d'une onde plane pénétrant dans un demi-espace. Pour un éloignement important du conducteur au plan de masse, soit pour un rapport  $W/h$  faible, le champ électromagnétique sur la face supérieure tend par contre à devenir le symétrique de celui de la face inférieure [24], et l'impédance de surface équivalente s'approche de celle d'un ruban épais isolé, *i.e*  $Z_0/2$ .

Il est important de pouvoir déterminer à partir de quelle hauteur  $h$  du substrat ce phénomène survient. Nous avons dans ce but tracé **figure III-12** l'évolution des facteurs de forme  $K_r$  et  $K_i$  d'un ruban supraconducteur d'épaisseur égale à  $10 \delta$  ( $\delta=0,44\mu\text{m}$ ), et de largeur  $W=30\mu\text{m}$  selon le rapport  $W/h$ . Pour des valeurs de  $W/h$  habituellement rencontrées, ces facteurs de forme varient peu avec  $W/h$  et sont proches de  $1/2$  (**figure III-13, cas A**,  $k_r=0,52$  et  $K_i=0,36$ ). Pour des valeurs  $W/h$  plus élevés ( $W/h=40$ ), les facteurs de forme évoluent vers l'unité. Nous obtenons au point B de la courbe les valeurs  $k_r=0,82$ , et  $K_i=0,72$ . Dans ce cas, la présence du plan de masse parfait concentre le champ électromagnétique sur la face inférieure du ruban supraconducteur. Ceci est bien illustré par la distribution du module du champ électrique (**figure III-13 cas B**).

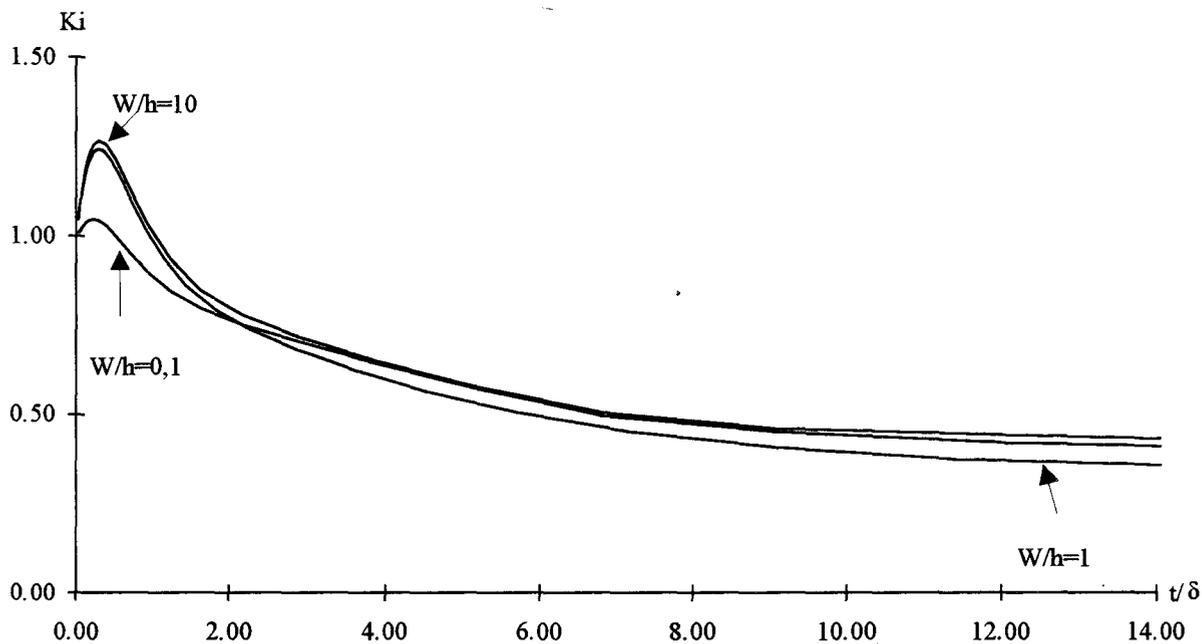


Figure III-11: Evolution du facteur de forme  $K_i$  selon l'épaisseur du ruban supraconducteur et le rapport  $W/h$  ( $\delta=0,44\mu\text{m}$ ).  $W=50\mu\text{m}$ ,  $f=10\text{GHz}$ , modèle à deux fluides:  $\sigma_{nc}=2000\text{S.cm}^{-1}$ ,  $\lambda_0=1500\text{\AA}$ ,  $T_c=90\text{K}$ ,  $T=77\text{K}$

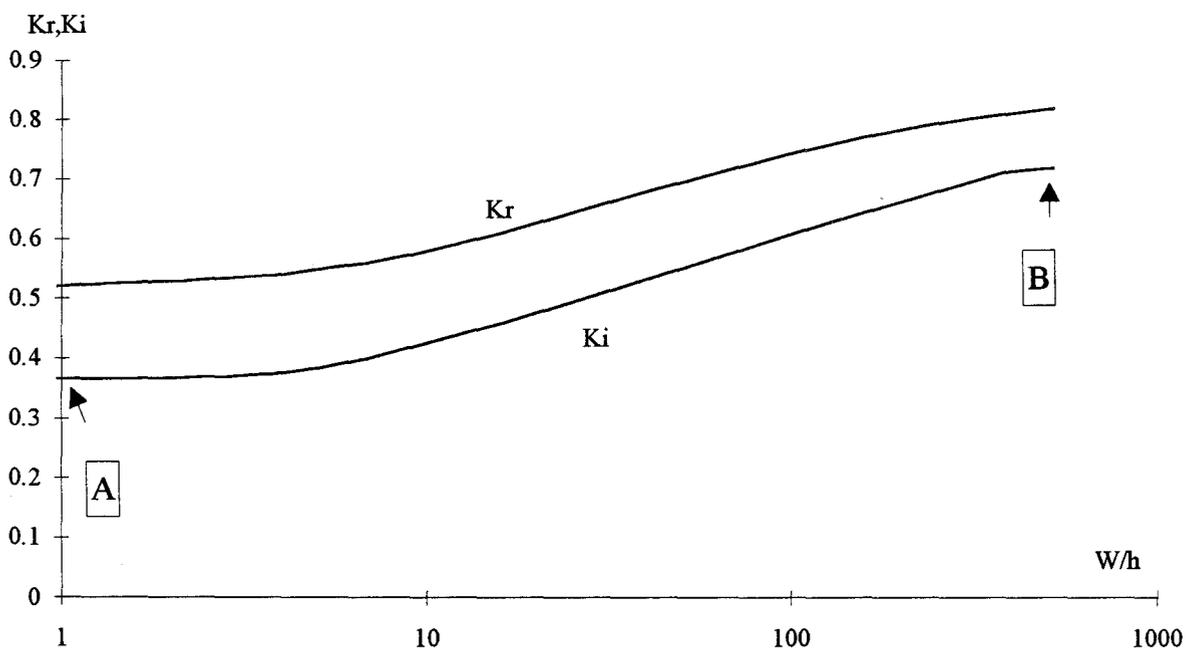
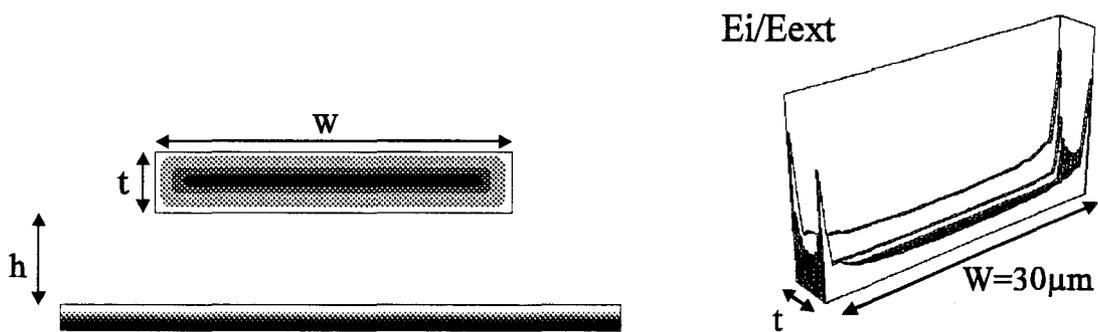
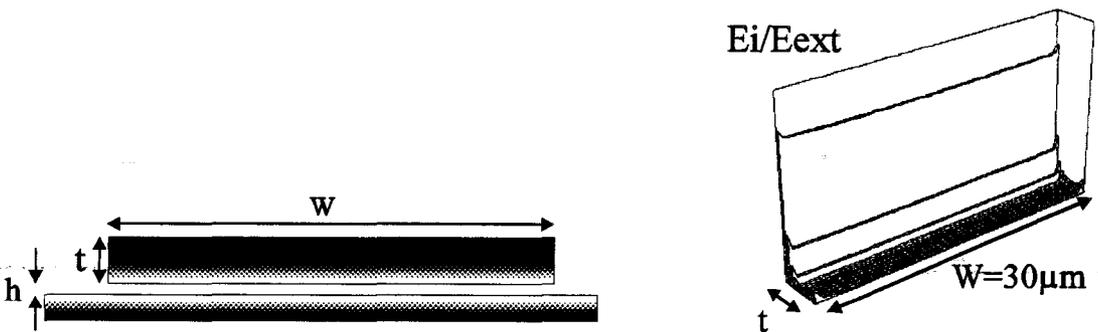


Figure III-12: Evolution des facteurs de forme  $K_r$  et  $K_i$  pour un ruban supraconducteur de largeur  $W=30\mu\text{m}$  et d'épaisseur  $t=4,4\mu\text{m}$  en fonction de la hauteur du substrat. modèle à deux fluides:  $\sigma_{nc}=2000\text{S.cm}^{-1}$ ,  $\lambda_0=1500\text{\AA}$ ,  $T_c=90\text{K}$ ,  $T=77\text{K}$



**Cas A ( $W/h=1$ )  $K_r=0,52$ ,  $K_i=0,36$**



**Cas B ( $W/h=50$ )  $K_r=0,82$ ,  $K_i=0,72$**

Figure III-13: Distribution du module du champ électrique pour un ruban éloigné (cas A) ou rapproché (cas B) du plan de masse.  $t=4,4\mu\text{m}$ ,  $f=10\text{GHz}$ .  
modèle à deux fluides:  $\sigma_{nc}=2000\text{S}\cdot\text{cm}^{-1}$ ,  $\lambda_0=1500\text{\AA}$ ,  $T_c=90\text{K}$ ,  $T=77\text{K}$

## III-4 APPLICATION A LA CARACTERISATION DES MATERIAUX SUPRACONDUCTEURS

### III-4-1 RAPPEL SUR LES METHODES DE CARACTERISATION HABITUELLES

Nous nous proposons, dans cette partie, d'appliquer l'analyse théorique développée dans cette thèse à la caractérisation des matériaux supraconducteurs.

La caractérisation des matériaux supraconducteurs s'effectue le plus souvent par la mesure des performances d'une cavité métallique ou d'un résonateur diélectrique [11][12][13] (**figure III-14**) dont une ou plusieurs parois est constituée du matériau supraconducteur testé.

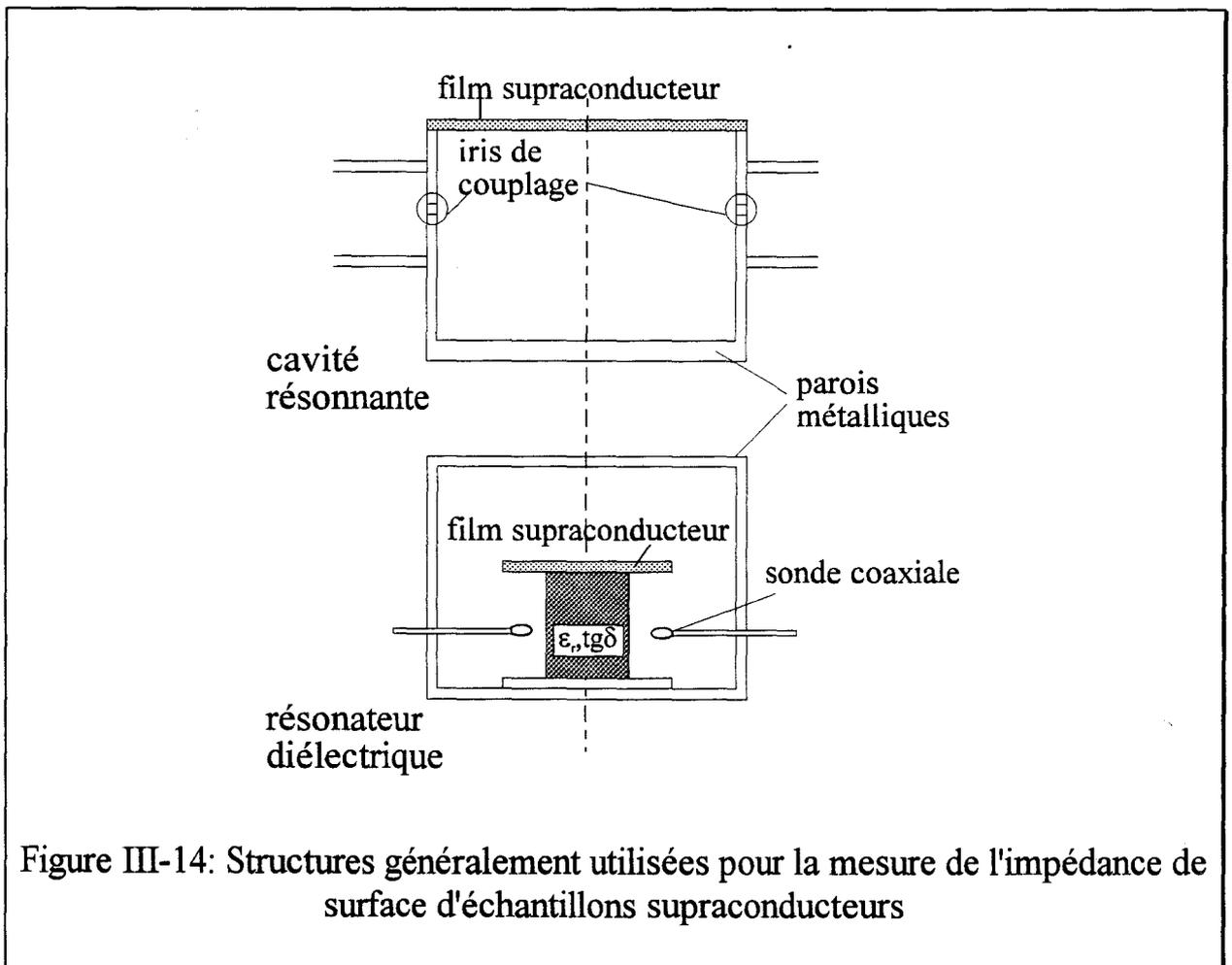


Figure III-14: Structures généralement utilisées pour la mesure de l'impédance de surface d'échantillons supraconducteurs

Dans le cas de la cavité cylindrique , le coefficient de qualité, défini comme le rapport de l'énergie stockée dans la structure par unité de temps sur la puissance dissipée, s'écrit [39]:

$$Q = \frac{\omega W}{P_d} = \frac{\omega W}{P_{CU} + P_{SC}} \quad (\text{III-47})$$

W: énergie maximale stockée dans la cavité

$\omega$ : pulsation de résonance

$P_d$ : puissance dissipée dans les parois

$P_{CU}$ : puissance dissipée dans les parois métalliques

$P_{SC}$ : puissance dissipée dans les parois supraconductrices

Il s'exprime en fonction du champ électrique interne à la cavité  $\vec{E}$  et du champ magnétique  $\vec{H}_t$  tangent aux parois métalliques de résistance de surface  $R_{SCU}$  ou supraconductrices de résistance de surface  $R_{SSC}$  par le rapport:

$$Q = \frac{\omega \epsilon \int_V |\vec{E}|^2 dv}{R_{SCU} \int_{S_{CU}} |\vec{H}_t|^2 ds + R_{SSC} \int_{S_{SC}} |\vec{H}_t|^2 ds} \quad (\text{III-48})$$

Ces champs sont obtenus après la résolution analytique des conditions de résonance de la cavité et s'expriment dans ce cas en fonction de Bessel cylindriques. Une première expérience sans échantillon supraconducteur permet de déterminer  $R_{SCU}$ , tandis qu'une seconde où est placée une paroi supraconductrice donne accès à la résistance de surface de l'échantillon supraconducteur  $R_{SSC}$  et ce avec une précision de l'ordre de 0,1 m $\Omega$ .

La détermination de la partie imaginaire de l'impédance de surface  $X_s$  est plus difficile. Plusieurs méthodes permettant cette mesure ont été récemment présentées [13]. Elles utilisent une expression théorique de la fréquence de résonance et du coefficient de qualité d'une cavité ou d'un résonateur diélectrique cylindrique, obtenue par une méthode des perturbations.

D'autres méthodes de caractérisation de matériaux supraconducteurs existent, parmi lesquelles il faut citer celle développée à l'IEMN. Elle consiste à mesurer le coefficient de transmission d'une onde au travers un milieu stratifié composé du film supraconducteur et du substrat diélectrique dans un guide d'onde rectangulaire [14][15]. Une autre méthode repose sur les résultats issus d'un résonateur en structure microruban [16][17].

Dans ce dernier exemple, la fréquence de résonance du résonateur microruban, ainsi que son coefficient de qualité, sont comparés aux valeurs obtenues théoriquement. L'ajustement des courbes théoriques aux courbes expérimentales permet l'identification de grandeurs macroscopiques telles que l'impédance de surface ou la conductivité complexe.

Les mesures exécutées jusqu'à présent sur de nombreux échantillons supraconducteurs révèlent la forte dépendance de leurs caractéristiques physiques aux choix technologiques retenus lors de leurs dépôt [18]. L'étude de résonateurs microruban supraconducteurs présente de ce fait l'avantage d'appréhender l'ensemble film supraconducteur- substrat diélectrique dans les conditions réelles de conception et d'utilisation.

La méthode des perturbations est généralement utilisée, dans les méthodes de caractérisation, pour quantifier les pertes sur les surfaces conductrices et supraconductrices d'une cavité fermée. Cette méthode est à notre avis mal

adaptée dans le cas d'un résonateur supraconducteur en structure microruban. L'exclusion du champ magnétique à l'intérieur du supraconducteur (effet Meissner), l'inductance cinétique du film supraconducteur *a priori* élevée, la faible valeur de la partie réelle de la conductivité à basse température sont difficilement assimilables à de légères perturbations par rapport au cas d'un conducteur idéal de conductivité réelle infinie. Ceci justifie une analyse théorique plus complète, qui permet la détermination des paramètres des matériaux supraconducteurs en ajustant ces valeurs théoriques aux valeurs expérimentales.

### III-4-2 PRESENTATION DE LA STRUCTURE EXPERIMENTALE

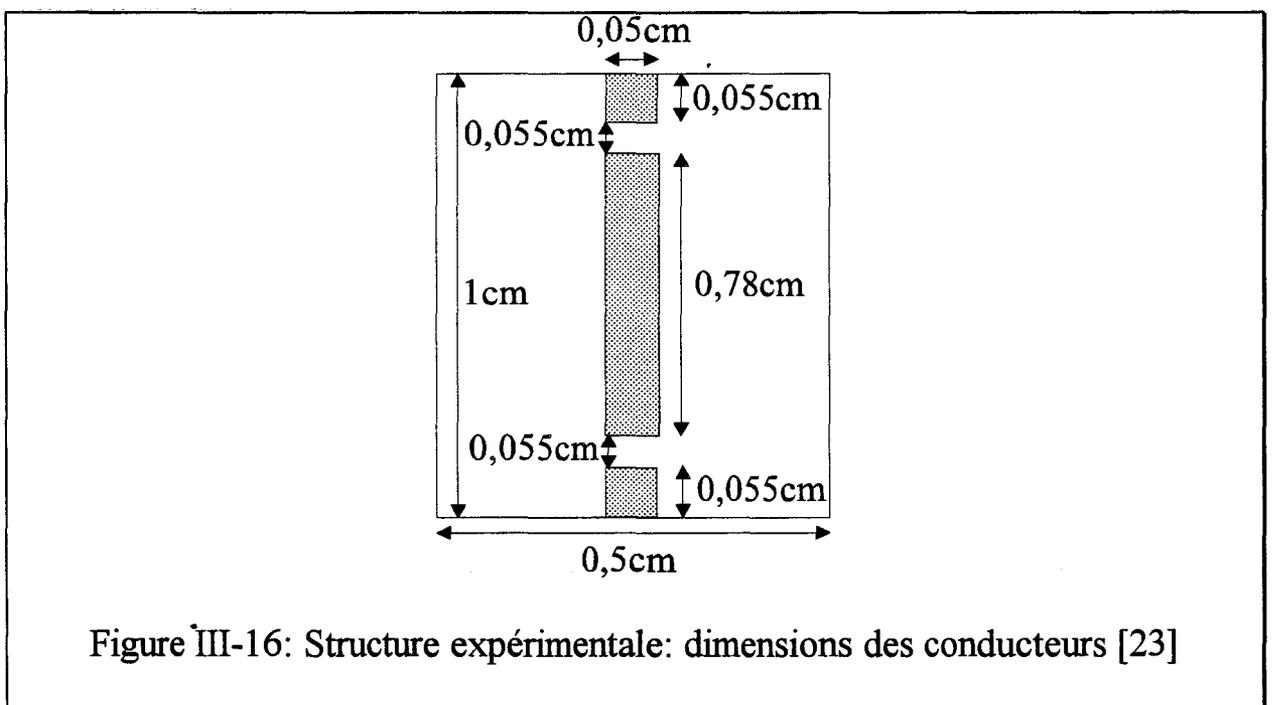
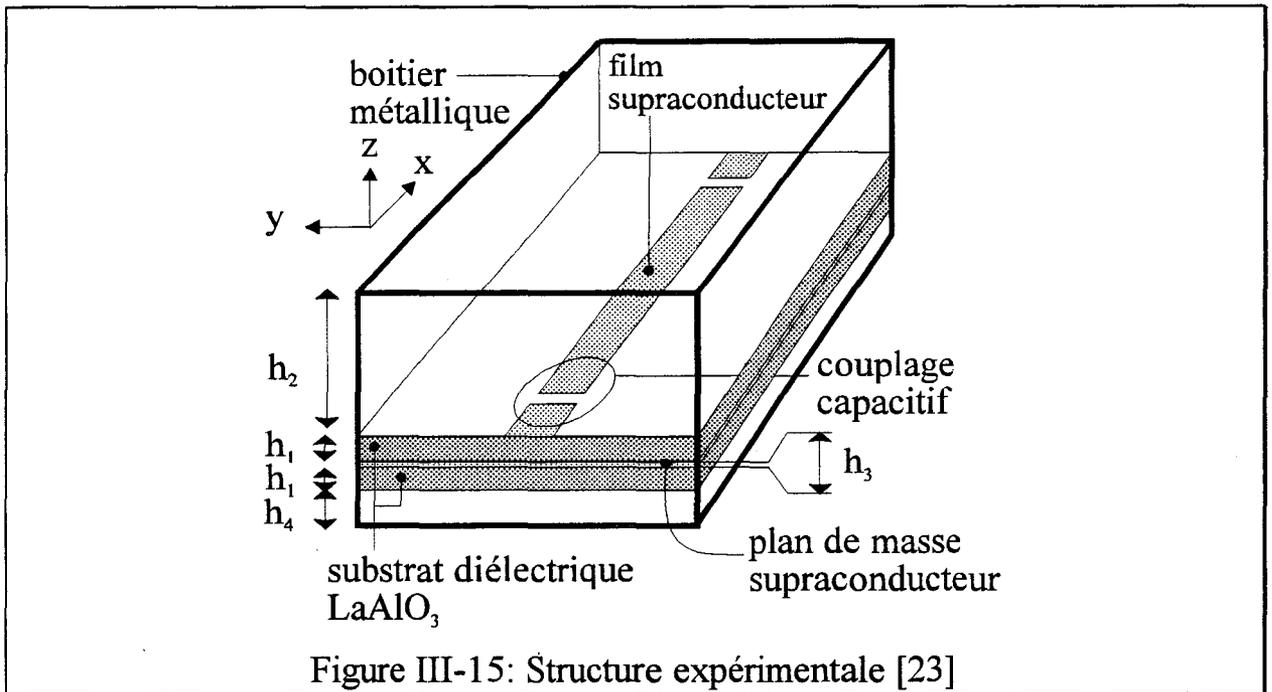
Dans le but d'accéder à une meilleure détermination possible des caractéristiques des matériaux supraconducteurs, il est nécessaire de considérer une structure expérimentale facilement descriptible théoriquement.

Pour valider notre démarche, notre choix s'est porté sur des résultats mesurés en 1991 au laboratoires Dupont de Nemours, qui concernent la fréquence de résonance et le coefficient de qualité de résonateurs droits microruban à 5 GHz [23], excités par un couplage capacitif lâche et encapsulés dans un boîtier métallique en cuivre. Deux matériaux supraconducteurs à haute température critique sont considérés: YBaCuO(123) et TlBaCaCuO(2212).

Chaque résonateur supraconducteur est réalisé (**figure III-15 et III-16**) par empilement de deux substrats sur lesquels sont déposés un plan de masse et un ruban supraconducteurs. Les films, déposés par épitaxie, révèlent à l'analyse par diffraction de rayons X un haut degré d'alignement sur la structure cristalline du substrat [23], est une bonne homogénéité dans l'orientation suivant l'axe c du substrat diélectrique LaAlO<sub>3</sub> (correspondant à la direction z de la figure III-15).

Les épaisseurs des films supraconducteurs constituant le résonateur et le plan de masse sont de 10000 Å pour le TlBaCaCuO et de 3500 Å pour l'YBaCuO.

Les deux grandeurs mesurées (fréquence de résonance et coefficient de qualité) du résonateur chargé s'obtiennent facilement et avec précision par l'intermédiaire du paramètre de transfert  $S_{21}$  entre les deux accès.



Les coefficients de qualité en charge des résonateurs expérimentaux sont tracés **figure III-17** en fonction de la température. A basse température, les coefficients de qualité sont élevés ( entre 15000 et 22000 ) mais ne décroissent pas de la même manière avec la température. Alors que le résonateur en YBaCuO voit son coefficient de qualité se dégrader continuellement jusqu'à 90 K, celui du résonateur en TlBaCaCuO reste pratiquement constant sur une large plage de température et s'effondre entre 85 et 95 Kelvins.

La fréquence de résonance expérimentale de chaque résonateur est reportée sur la figure **III-18** sous une forme normalisée:

$$f_N(T) = \frac{f(T) - f_0}{f_0} \quad (\text{III-49})$$

avec  $f_0$  valeur asymptotique de la fréquence de résonance lorsque T tend vers zéro. La fréquence de résonance est beaucoup moins sensible aux variations de température que le coefficient de qualité, et ne décroît franchement que pour des valeurs de T proches de la température critique.

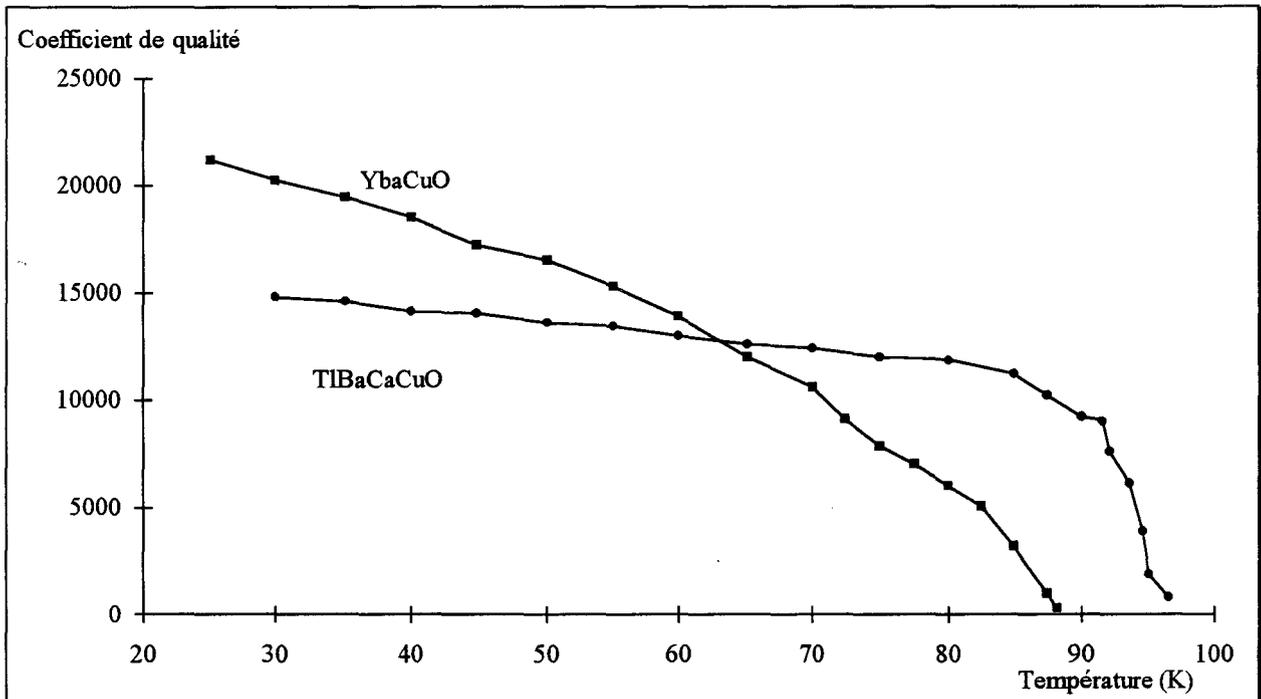


Figure III-17 : Coefficients de qualité expérimentalement obtenus pour chacun des résonateurs en fonction de la température [23].

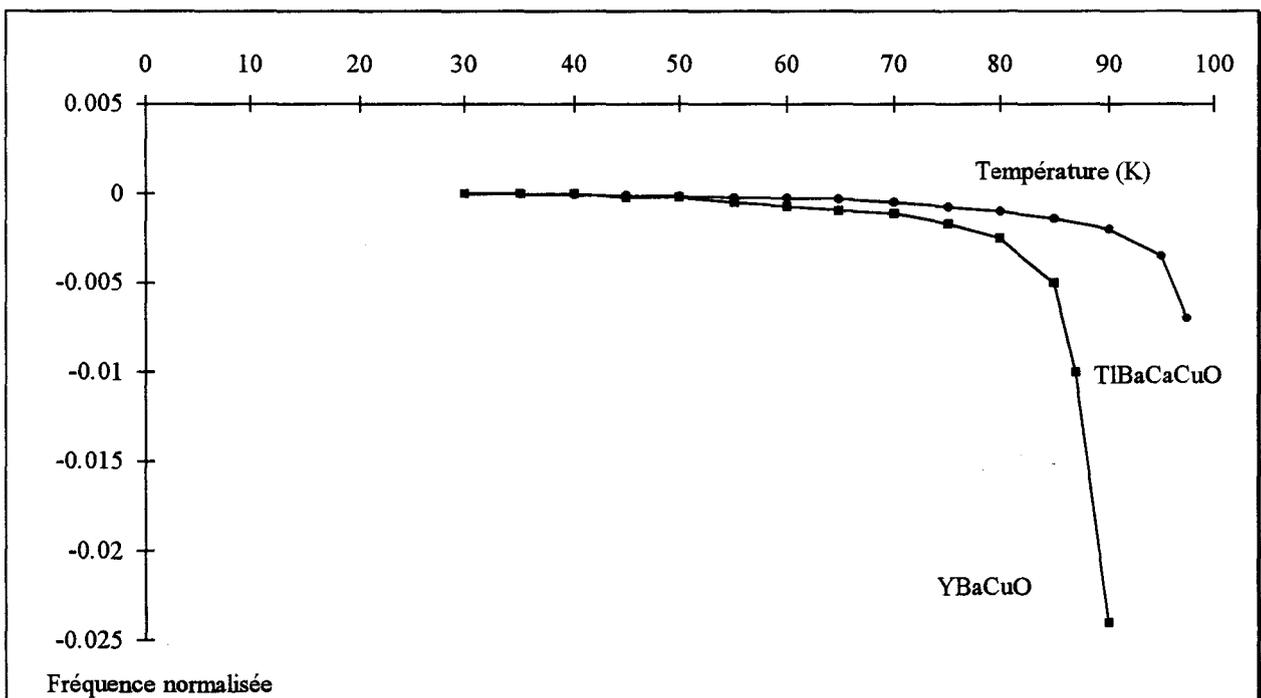


Figure III-18: Mesure du glissement de la fréquence de résonance normalisée en fonction de la température pour chacun des résonateurs [23].

### III-4-3 MODELISATION DU DISPOSITIF EXPERIMENTAL

La modélisation des résonateurs expérimentaux repose, pour des raisons numériques lors du processus d'ajustement, sur une décomposition du courant sur le résonateur en fonctions de base entières, définies sur toute sa surface.

La prise en compte des flancs métalliques verticaux du boîtier ne peut, d'autre part, s'effectuer dans le domaine transformé de Fourier qu'en considérant des courts-circuits électriques parfaits. Dans ce cas, la structure théorique est équivalente à une structure périodique, et le spectre des intégrants prend la forme d'une série de Fourier [28][29]. Les temps de calcul en sont considérablement réduits ( de l'ordre de 20 fois moins).

#### III-4-3-1 Prise en compte des paramètres électriques

Le film supraconducteur qui constitue le résonateur proprement dit est modélisé par l'impédance de surface équivalente déduite de l'analyse exposée au paragraphe III-3. Elle s'écrit en fonction des facteurs de forme  $K_r$  et  $K_i$  et des parties réelle et imaginaire de l'impédance de surface par l'expression:

$$Z_{s_{\text{éq}}} = K_r R(Z_{s_0}) + j K_i I(Z_{s_0}) \quad (\text{III-50})$$

avec  $Z_{s_0}$  l'impédance de surface calculée au moyen de l'équation (III-12):

$$Z_{s_0} = \sqrt{\frac{j\omega\mu_0}{\sigma}} \coth(\sqrt{j\omega\mu_0\sigma} t) \quad (\text{III-51})$$

où  $\sigma$  est la conductivité complexe du matériau supraconducteur,  $t$  son épaisseur

Le plan de masse supraconducteur est traité comme une couche diélectrique supplémentaire (couche indiquée 3) dans le calcul de la fonction de Green, la valeur de sa permittivité relative complexe est calculée à partir de la conductivité  $\sigma$ :

$$\epsilon_{r3} = \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0}\right) \quad (\text{III-52})$$

Les pertes sur les faces métalliques horizontales supérieure et inférieure du boîtier sont quant à elles simulées par l'adjonction de milieux à pertes dans le calcul de la fonction de Green, par l'intermédiaire de l'impédance de surface d'un conducteur en volume (formule III-12 avec  $t$  infini).

Le schéma pour le calcul de la fonction de Green (cf. §I-2-3) est représenté **figure III-19**.

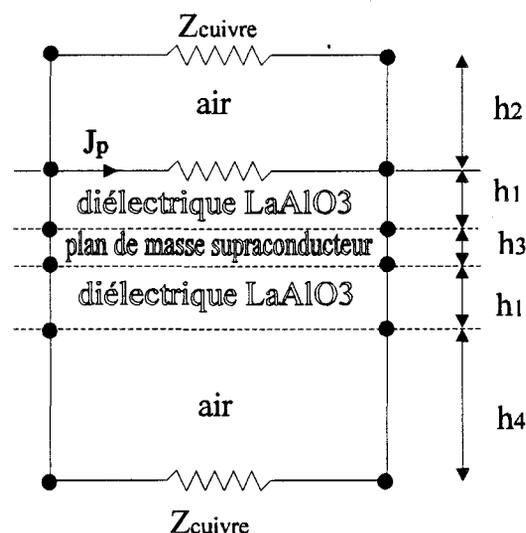


Figure III-19: Schéma pour le calcul de la fonction de Green du résonateur supraconducteur

Les pertes du substrat diélectrique peuvent jouer un rôle significatif lors de la détermination du coefficient de qualité de la structure. Ces pertes nécessitent d'être quantifiées. Nous montrons **figure III-20** une mesure de ce paramètre à 5GHz effectuée par E. Mage des laboratoires de recherche Thomson [30]. La tangente de perte du substrat décroît pour des températures de plus en plus basses vers de très faibles valeurs et se stabilise aux alentours de 50K. Le matériau diélectrique LaAlO<sub>3</sub> est connu pour être relativement neutre chimiquement, et conserver ses propriétés au cours du temps [31]. Nous avons pour cette raison fixée la valeur de  $\text{tg}\delta$  à la valeur asymptotique mesurée à basse température:  $\text{tg}\delta=2,510^{-6}$ . Cette valeur n'influe pas sur le résultat des mesures du coefficient de qualité en charge du résonateur.

angle de pertes ( $\mu\text{rad}$ )

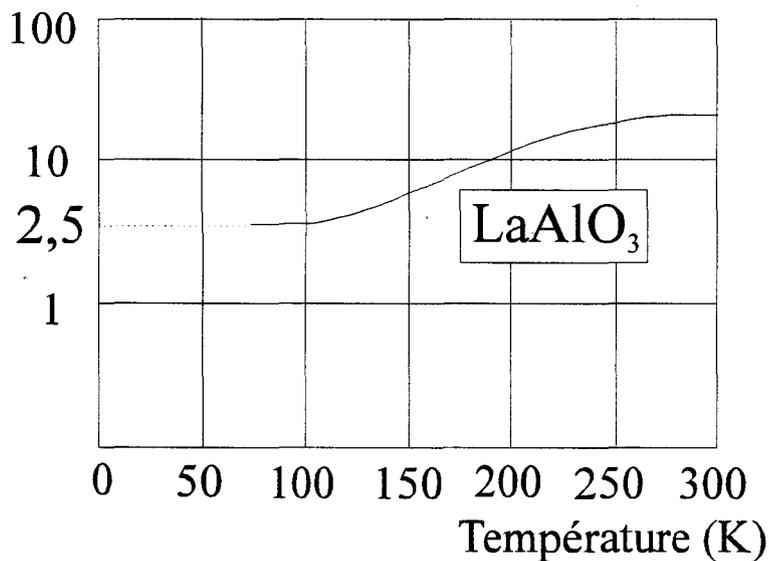


Figure III-20: Mesure de l'angle de perte du matériau LaAlO<sub>3</sub> en fonction de la température.

### III-4-3-2 Influence des paramètres géométriques

#### a) hauteur du boîtier

La présence du plan métallique supérieur du boîtier, placé à une hauteur  $h_4$  du ruban supraconducteur, perturbe les caractéristiques du résonateur. Nous avons reproduit **figure III-21** l'influence de ce boîtier en cuivre sur la fréquence de résonance et le coefficient de qualité en régime libre du résonateur en YBaCuO . Pour ce tracé, la conductivité complexe est calculée par l'intermédiaire du modèle à deux fluides à 77K, avec les paramètres suivants:  $\sigma_{nc}=2000 \text{ Scm}^{-1}$ ,  $\lambda_0=1500 \text{ \AA}$ , et  $T_c=90\text{K}$ . La tangente de perte du substrat a été fixée à une valeur de  $2,5\mu\text{rad}$ . L'impédance de surface du plan métallique en cuivre est calculée pour une conductivité égale à  $\sigma_m=5,810^5\text{S.cm}^{-1}$ .

La fréquence de résonance du système décroît naturellement lorsque la hauteur du boîtier croît, et converge plus rapidement que le coefficient de qualité. Ce dernier se stabilise pour une hauteur  $h_2$  égale à 7-8 mm à une valeur légèrement inférieure à  $1/\text{tg}\delta= 400000$ . Nous en déduisons que les pertes métalliques de la face supérieure du boîtier sont négligeables vis à vis des pertes par effet Joule dans le matériau diélectrique LaAlO<sub>3</sub>, et donc, *a fortiori*, vis à vis des autres pertes.

#### b) Influence du dispositif de couplage

Le coefficient de qualité propre du résonateur  $Q_0$  peut être directement calculé par une simulation en régime libre ( **figure III-22**).

Le coefficient de qualité obtenu expérimentalement est global. Il inclut nécessairement la présence des lignes d'accès et du dispositif d'excitation (figure III-16).

La modélisation d'une charge adaptée , présentée au paragraphe II-6, permet de simuler, en régime libre, la structure expérimentale, en y incluant le dispositif d'excitation.

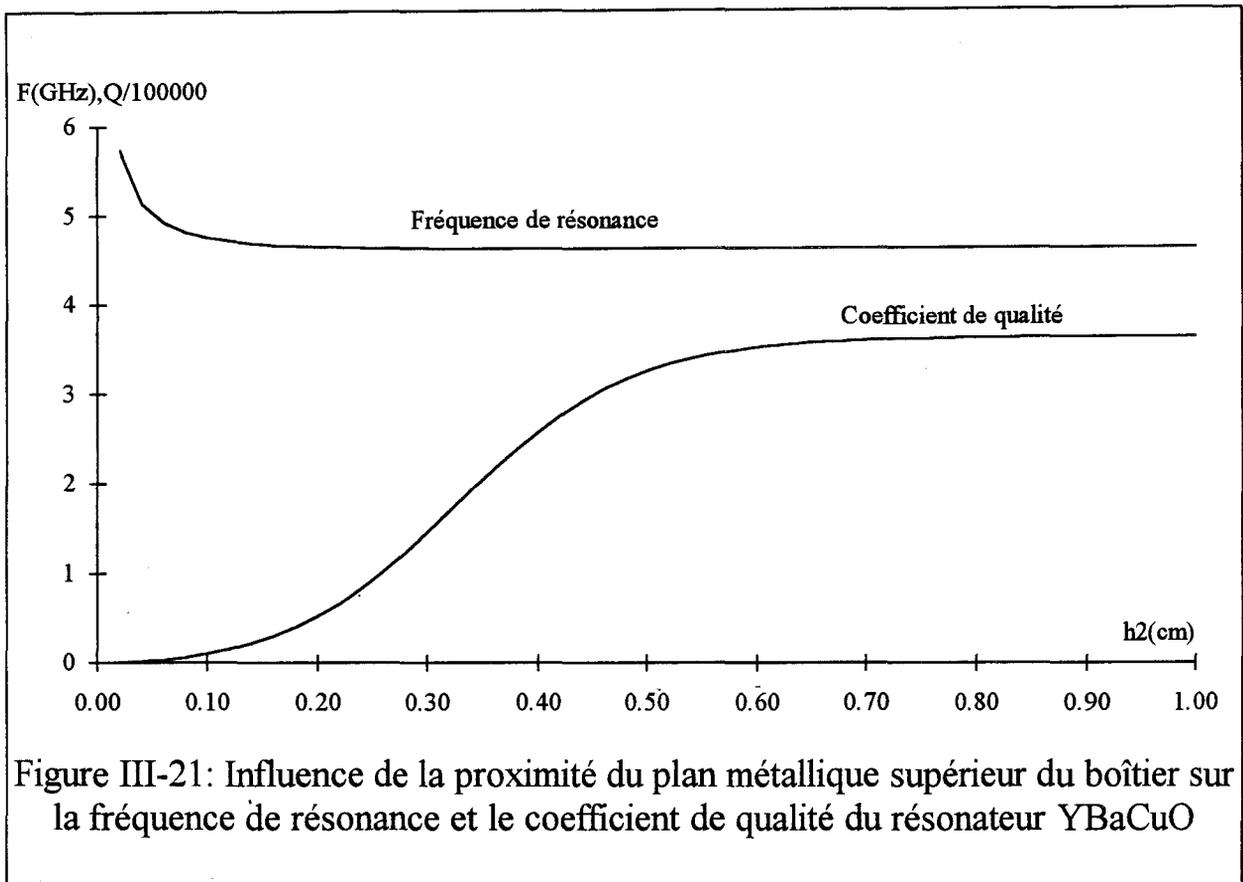


Figure III-21: Influence de la proximité du plan métallique supérieur du boîtier sur la fréquence de résonance et le coefficient de qualité du résonateur YBaCuO

Par cette méthode, le coefficient de qualité obtenu  $Q_L$  est directement comparable au coefficient de qualité en charge expérimental.

Afin de préciser l'influence des dispositifs de couplage, nous définissons un coefficient de qualité équivalent  $Q_\beta$  par la relation:

$$\frac{1}{Q_L} = \frac{1}{Q_o} + \frac{1}{Q_\beta} \quad (\text{III-53}) \quad \text{soit: } Q_\beta = \frac{Q_L Q_o}{Q_o - Q_L} \quad (\text{III-54})$$

Le coefficient de qualité relatif aux pertes par couplage au dispositif de mesure  $Q_{\beta}$  est représenté **figure III-23** pour quelques largeurs du *gap*. Les faibles valeurs trouvées pour  $Q_{\beta}$  expliquent que ce phénomène soit le premier responsable de la dégradation du coefficient de la qualité de la structure.

L'effet du couplage diminue naturellement lorsque la largeur du *gap* croit, et dans ce cas  $Q_{\beta}$  augmente. Pour la largeur de *gap* ( $g=550\mu\text{m}$ ) de la structure expérimentale, il est de l'ordre de 27000. L'expérience numérique précédente, menée pour des conducteurs constitués de différents matériaux, confirme cette valeur de  $Q_{\beta}$ . La présence du boîtier métallique n'intervient pas non plus sur  $Q_{\beta}$ , lorsqu'il est suffisamment éloigné du résonateur.

Nous utiliserons cette valeur de  $Q_{\beta}$  pour corriger, à l'aide de la formule (III-53), le coefficient de qualité à vide déterminé en régime libre, et obtenir le coefficient en charge  $Q_L$  lors du processus d'identification des paramètres supraconducteurs.

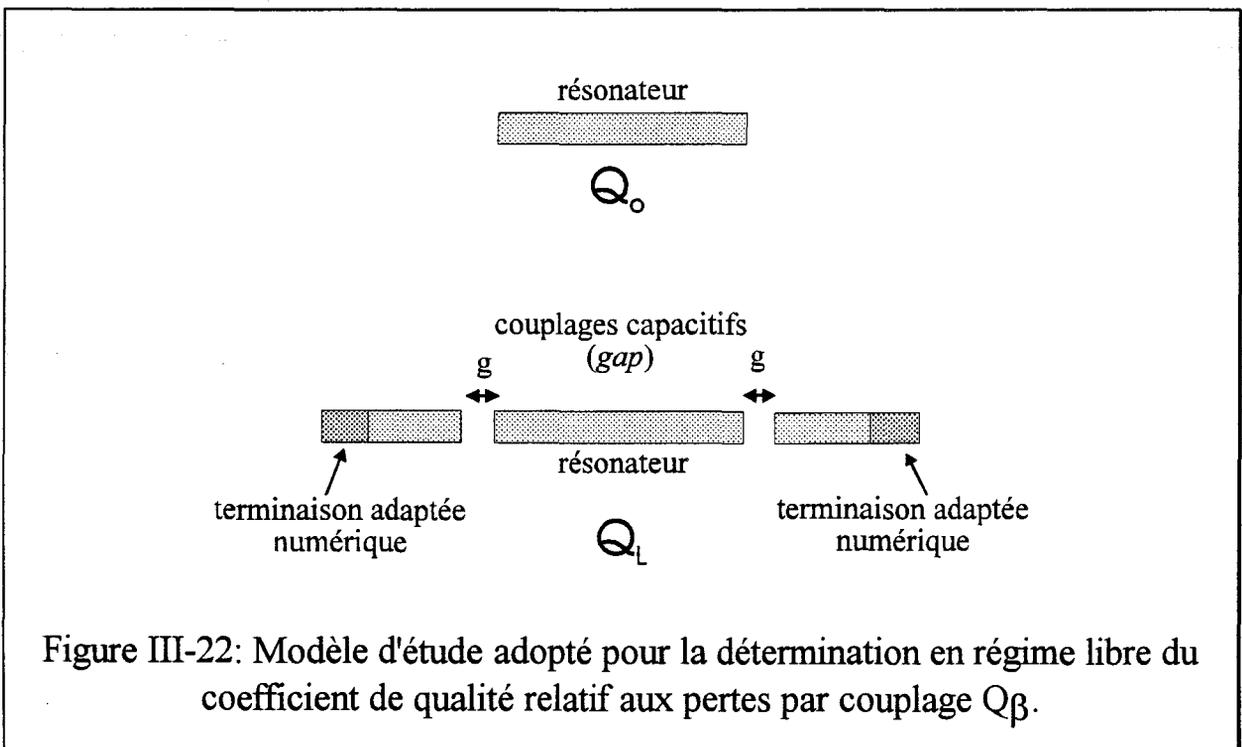
Le coefficient de qualité relatif aux couplages capacitifs  $Q_{\beta}$  peut aussi, lorsque l'on a accès aux valeurs des éléments localisés du schéma équivalent en  $\pi$  des couplages, s'obtenir par l'étude de la transmittance en tension du schéma équivalent du résonateur chargé.

Cette étude a été menée **figure III-24**, où l'on considère un résonateur déposé sur un substrat MgO de permittivité  $\epsilon_r=9,6$  et d'épaisseur  $500\mu\text{m}$ . Les valeurs des capacités  $C_p$  et  $C_g$  du schéma en  $\pi$  des couplages capacitifs du résonateur sont déterminées à partir d'abaques [42].

La comparaison des résultats obtenus par la méthode des moments et par l'utilisation d'un schéma équivalent montre une bonne concordance dans les évolutions de  $Q_{\beta}$ .

Afin de quantifier l'influence de la largeur du résonateur sur le coefficient de qualité  $Q\beta$ , nous traçons l'évolution de ce paramètre en fonction de la largeur du *gap*  $g$ , et ceci pour deux valeurs  $W$ . Nous constatons figure III-24 que la largeur  $W$  du résonateur influe considérablement sur  $Q\beta$ , puisque celui ci semble prendre des valeurs inversement proportionnelles à  $W$ . Comme précédemment, le coefficient de qualité  $Q\beta$  croit de façon exponentielle avec la largeur du couplage capacitif  $g$ , ceci quelque soit  $W$ .

Remarquons enfin que la largeur du *gap* résulte d'un compromis permettant d'obtenir d'une part un coefficient de qualité en charge suffisamment élevé, tout en autorisant d'autre part un niveau de puissance transmis suffisant.



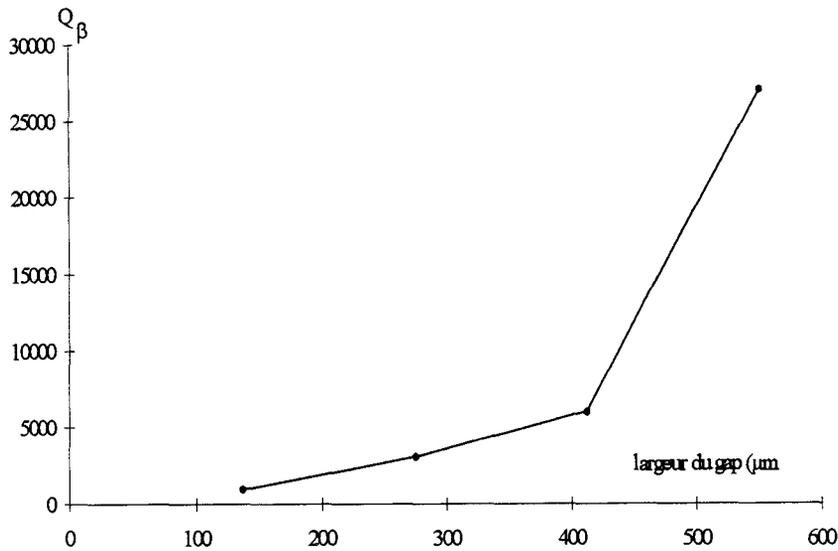


Figure III-23: Influence de la largeur du *gap* sur la valeur du coefficient de qualité relatif aux pertes par couplage  $Q_{\beta}$ .

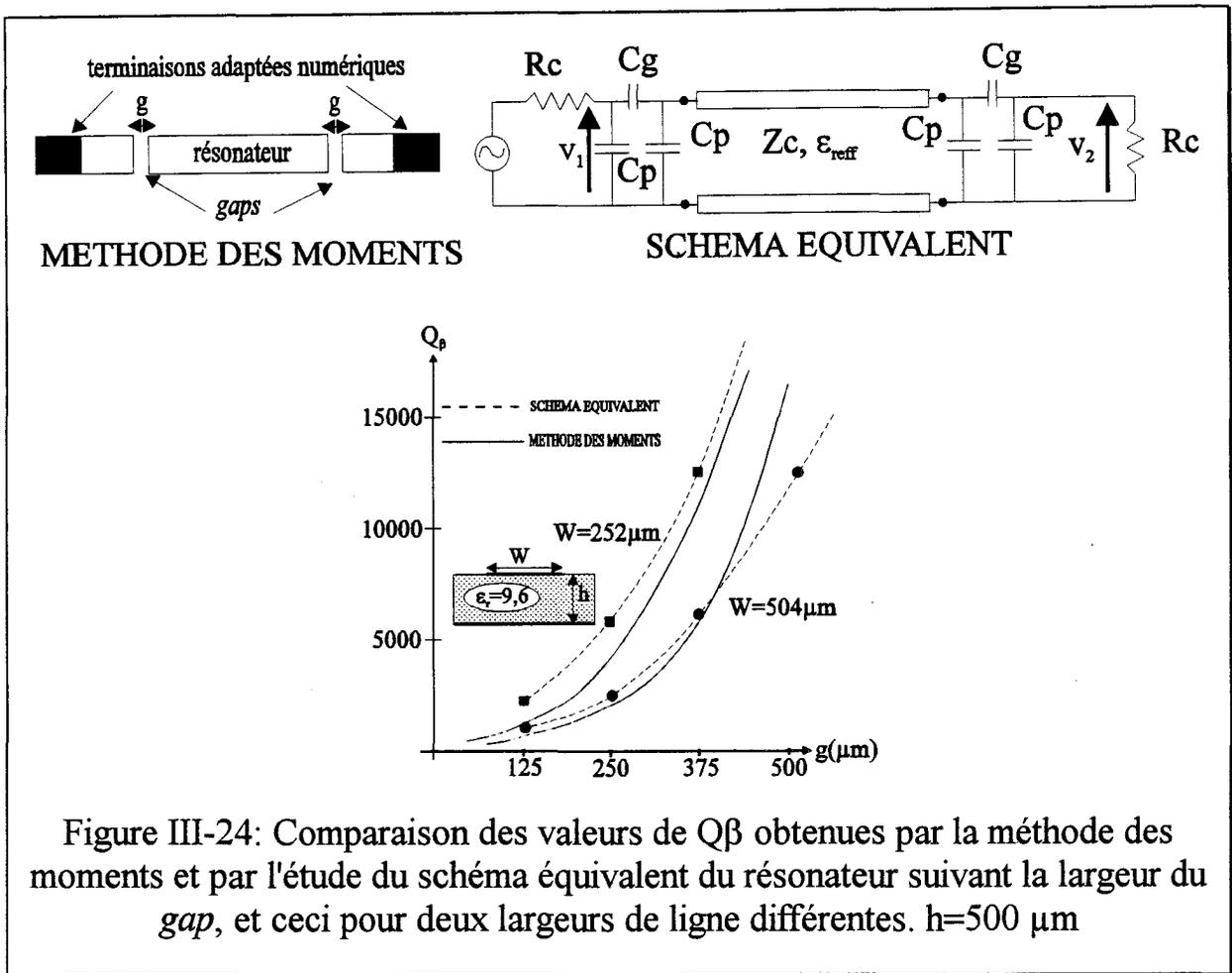
### III-4-4 DETERMINATION DES PARAMETRES DU MODELE A DEUX FLUIDES

#### III-4-4-1 Précisions sur la méthode d'ajustement

a) Méthode d'ajustement: L'ajustement des résultats théoriques aux résultats expérimentaux s'opère au terme d'une séquence automatique de minimisation d'une fonction d'erreur  $E(\chi_1, \chi_2, \chi_3, \dots)$  calculée par la méthode des moindres carrés sur la courbe du coefficient de qualité en charge  $Q(T)$  ou sur la fréquence de résonance normalisée  $f_N(T)$ . Chaque paramètre  $\chi$  inconnu du modèle à deux fluides injecté dans le programme subit une variation de part et d'autre de sa valeur initiale  $\chi_0$ ; les erreurs obtenues dans chaque cas sur la courbe expérimentale nous donne trois points par lesquels passe univoquement une courbe d'équation:

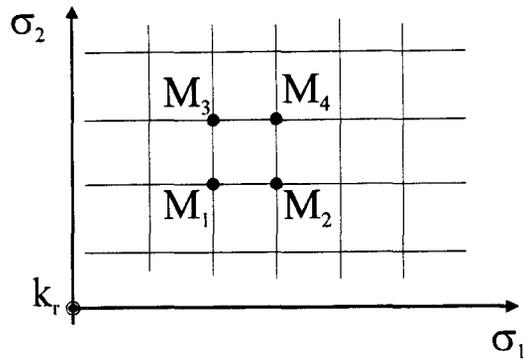
$$E(\chi) = a\chi^2 + b \quad (\text{III-55})$$

Une nouvelle valeur initiale  $\chi'_0$  pour  $\chi$  est calculée au sommet de la parabole et l'on applique la même procédure au paramètre suivant. Cette séquence est répétée jusqu'à la convergence de tous les paramètres  $\chi_i$ .



b) Calcul des facteurs de forme  $K_r$  et  $K_i$ : Le calcul des facteurs de forme est trop long pour être incorporé au processus d'ajustement des courbes, lorsque la conductivité complexe  $\sigma$  du matériau supraconducteur évolue. Pour résoudre ce problème il suffit, pour une géométrie donnée, de calculer auparavant la valeur des facteurs de forme  $K_r$  et  $K_i$  sur un ensemble de points régulièrement espacés dans le plan de la conductivité complexe, comme il est montré **figure III-25**. les valeurs de  $K_r$  et de  $K_i$  sont ensuite interpolées suivant les valeurs de  $\sigma_1$  et de  $\sigma_2$  par une courbe d'équation:

$$K_{r,i} = a\sigma_1 + b\sigma_2 + c\sigma_1\sigma_2 + d \quad (\text{III-56})$$



$$k_r = a \sigma_1 + b \sigma_2 + c \sigma_1 \sigma_2 + d$$

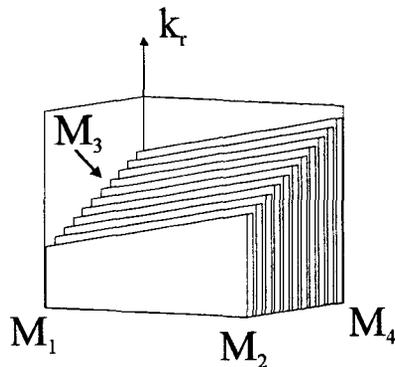


Figure III-25: Interpolation des valeurs de  $K_r$  et de  $K_i$  à partir de valeurs précalculées dans le plan de la conductivité complexe.  
Exemple du facteur de forme  $K_r$

Les valeurs des paramètres  $a, b, c, d$  sont calculés à partir des valeurs précalculées les plus proches de  $K_r$  et de  $K_i$ .

#### III-4-4-2 Résultats

Avec les hypothèses décrites plus haut, le bilan des pertes du résonateur comporte:

- les pertes par couplage au dispositif de mesure
- les pertes dans les conducteurs (supraconducteur ou métal)
- les pertes diélectriques dans le matériau  $\text{LaAlO}_3$

A basse température, et dans le cadre du modèle à deux fluides, les pertes supraconductrices disparaissent ( $\sigma_1 \rightarrow 0$ ) et les pertes sur la face supérieure du boîtier métallique ne sont pas capables (figure III-21) de limiter le coefficient de qualité du système aux valeurs trouvées expérimentalement. Ces pertes résiduelles sont rejetées sur la tangente de perte du substrat. Les paramètres à déterminer sont donc:  $\lambda_0$ ,  $\sigma_{nc}$ ,  $T_c$  et la valeur de la tangente de perte du substrat supposée indépendante de la température:  $\text{tg } \delta$ . Le dispositif de couplage et les pertes diélectriques définissent seuls, à basse température, le coefficient de qualité:

$$\frac{1}{Q_0} = \text{tg} \delta + \frac{1}{Q_\beta} \quad (\text{III-57})$$

où  $Q_0$  est la valeur asymptotique du coefficient de qualité en charge expérimental  $Q_L$  lorsque la température tend vers zéro.

La température de transition a quant à elle été fixée à la valeur déterminée par l'expérimentateur [23], soit 90K pour l'YBaCuO et 101K pour le TlBaCaCuO. Il ne reste plus à déterminer que la profondeur de pénétration  $\lambda_0$  et la conductivité à l'état normal  $\sigma_{nc}$  pour chacun de ces matériaux.

#### a) Ajustement de la fréquence de résonance

La fréquence de résonance est très peu sensible aux variations de la partie réelle de  $\sigma$ ; de fait, un ajustement de la fréquence de résonance théorique pour la détermination de  $\sigma_{nc}$  ne semble pas judicieuse. La fréquence de résonance théorique est par contre tributaire de la valeur de  $\sigma_2$ , et permet une détermination de la profondeur de pénétration  $\lambda_0$ . Cette étude est menée **figure III-26** et **III-27** dans les cas de l'YBaCuO et du TlBaCaCuO. Nous avons pour ces courbes fixé  $\sigma_{nc}$  à la valeur standard de 3000 S.cm<sup>-1</sup>.

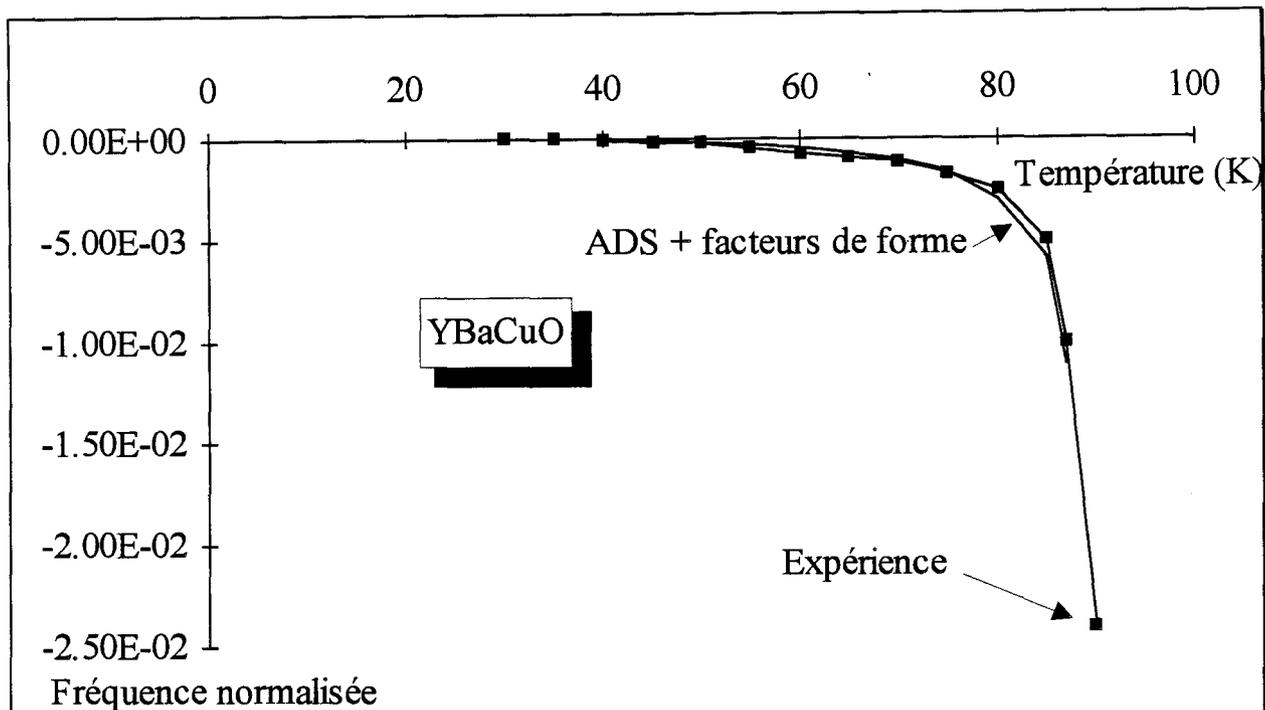


Figure III-26: Ajustement de la courbe théorique de la fréquence de résonance d'un résonateur YBaCuO en vue de l'obtention de la profondeur de pénétration de London. La valeur trouvée pour  $\lambda_0$  est égale à  $\lambda_0=4080\text{\AA}$

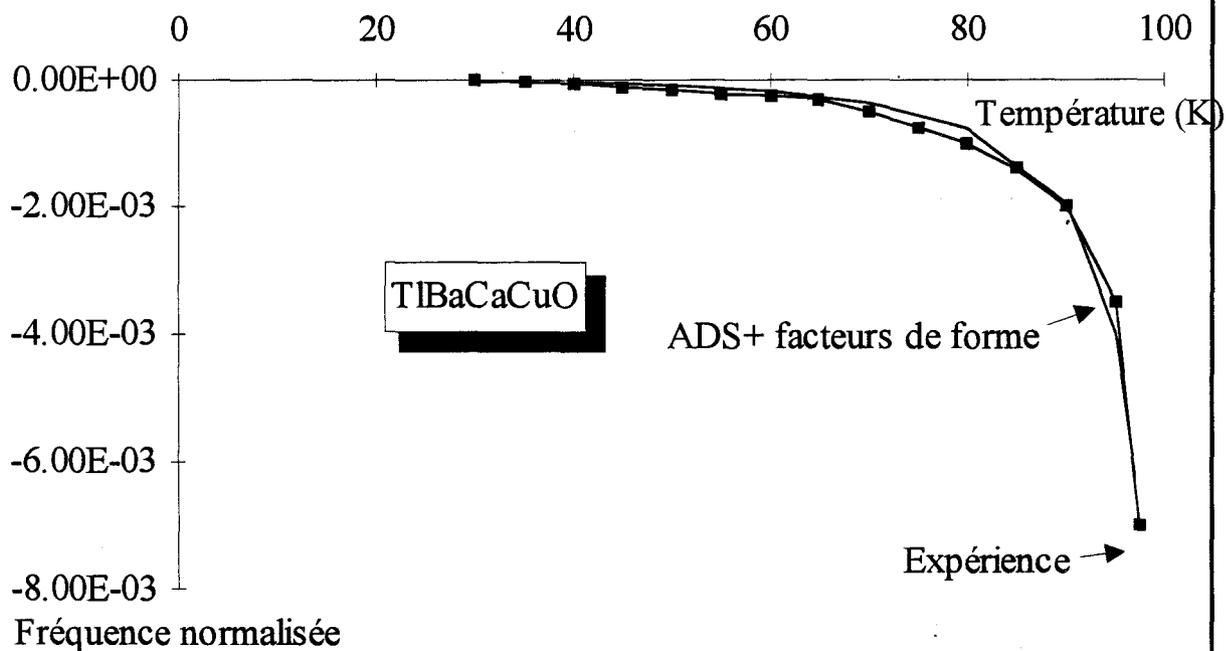


Figure III-27: Ajustement de la courbe théorique de la fréquence de résonance d'un résonateur TlBaCaCuO en vue de l'obtention de la profondeur de pénétration de London. La valeur trouvée pour  $\lambda_0$  est égale à  $\lambda_0=6114\text{\AA}$

Dans le cas de l'YBaCuO, la longueur de pénétration  $\lambda_0$  -trouvée égale à  $\lambda_0=4080\text{\AA}$ -, est plus importante que celle généralement admise dans la littérature. Elle est par contre inférieure à la valeur obtenue par C.Wilker ( $6800\text{\AA}$ ) avec l'utilisation d'une méthode des perturbations sur les mêmes résultats expérimentaux.

Dans le cas du matériau supraconducteur le moins connu, le TlBaCaCuO, la valeur trouvée est égale à  $\lambda_0=6120\text{\AA}$ . Cette valeur est par contre plus élevée que celle trouvée par les expérimentateurs ( $4700\text{\AA}$ ), et peut témoigner des défauts cristallins du supraconducteur.

#### b) Ajustement du coefficient de qualité

Le coefficient de qualité en charge est naturellement sensible à la partie réelle de la conductivité complexe  $\sigma$ , ce qui permet de déterminer la valeur de la conductivité normale  $\sigma_{nc}$ . L'ajustement du coefficient de qualité en charge peut s'effectuer en utilisant la valeur de  $\lambda_0$  déterminée comme précédemment au moyen de la fréquence de résonance. Cet ajustement du coefficient de qualité peut aussi être réalisé sur l'ensemble des paramètres, en incluant  $\lambda_0$ .

Les paramètres de l'YBaCuO sont ainsi déterminés **figure III-28**. La longueur de pénétration  $\lambda_0$  obtenue est plus importante que celle trouvée précédemment. Elle est dans ce cas très proche de la valeur trouvée par C.Wilker. La conductivité à l'état normal du supraconducteur,  $\sigma_{nc}$ , égale à  $1600 \text{ S.cm}^{-1}$ , confirme par contre les valeurs précédemment mesurées sur ce matériau [32][33].

Coefficient de qualité en charge

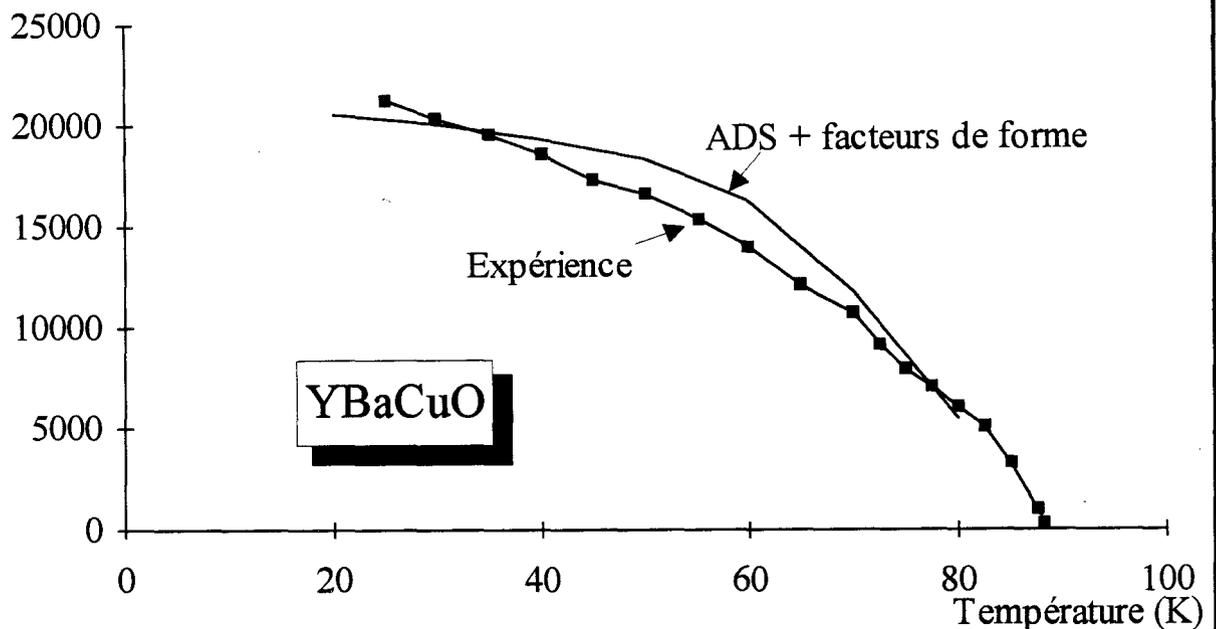


Figure III-28: Ajustement du coefficient de qualité en charge d'un résonateur YBaCuO pour l'obtention des paramètres du modèle à deux fluides ainsi que de la tangente de perte du substrat diélectrique:  
 $tg\delta=11,710^{-6}$ ,  $\lambda_0=7178\text{\AA}$ ,  $\sigma_{nc}=1605\text{S.cm}^{-1}$ ,  $T_c=91\text{K}$

Coefficient de qualité en charge

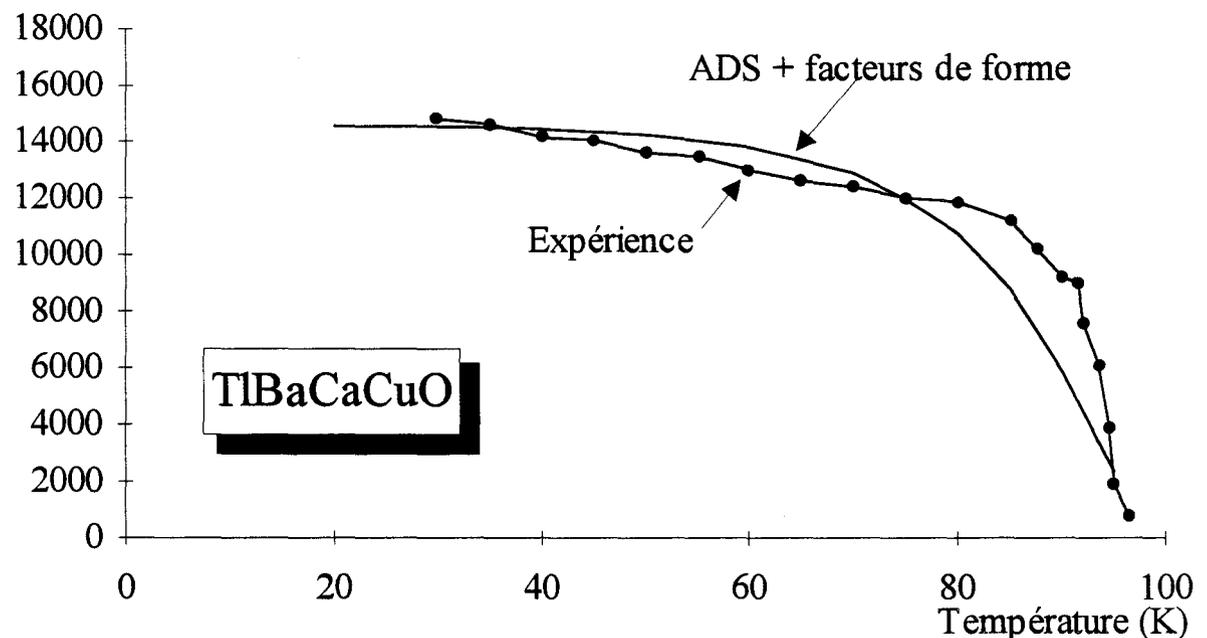


Figure III-29: Ajustement du coefficient de qualité en charge d'un résonateur TlBaCaCuO pour l'obtention des paramètres du modèle à deux fluides ainsi que de la tangente de perte du substrat diélectrique:  
 $tg\delta=30,210^{-6}$ ,  $\lambda_0=5920\text{\AA}$ ,  $\sigma_{nc}=5519\text{S.cm}^{-1}$ ,  $T_c=100\text{K}$

	ADS+IMPEDANCE DE SURF.			Valeurs Publiées		
	$\lambda_0$ (Å)	$\sigma_{nc}$ (S/cm)	T <sub>c</sub> (K)	$\lambda_0$ (Å)	$\sigma_{nc}$ (S/cm)	T <sub>c</sub> (K)
YBaCuO	7180	1600	91	1500-8000	2000-5000	90
TlBaCaCO	5920	5520	100	2200	2000-5000	90-110

Tableau III-30 Résultats relatifs au modèle à deux fluides

La même étude a été effectuée pour le supraconducteur moins connu au thallium. (**figure III-29**) La profondeur de pénétration à 0 K est de nouveau plus importante que celle obtenue par l'ajustement de la fréquence de résonance, avec une valeur de  $\lambda_0=5920\text{Å}$ . La conductivité normale est pour ce supraconducteur trois fois plus élevée que pour l'YBaCuO ( $\sigma_{nc}=5520\text{S.cm}^{-1}$ ) mais reste dans l'ordre de grandeur des valeurs habituellement rencontrées [40][41]. Les résultats sont consignés dans le **tableau III-30**.

La tangente de perte du substrat diélectrique déterminée, dans le cadre du modèle à deux fluides, au moyen de l'équation (III-57) est différent suivant le type de résonateur considéré (11,7 $\mu\text{rad}$  pour l'YBaCuO, 30,2 $\mu\text{rad}$  pour le TlBaCaCuO). Les deux expériences ayant été conduites de la même façon, sur des structures identiques et à la même fréquence, il suffit de poser l'hypothèse que les substrats ne présentent pas de disparités dues, par exemple, à une dégradation de leurs caractéristiques durant le dépôt et la gravure des supraconducteurs, pour en conclure qu'une partie des pertes à basse température provient de ces mêmes supraconducteurs, et justifier l'emploi d'un nouveau modèle phénoménologique à trois fluides pour traduire la présence de pertes résiduelles à basse température dans les milieux supraconducteurs à haute température critique.

## III-4-5 DETERMINATION DES PARAMETRES DU MODELE A TROIS FLUIDES

### III-4-5-1 Présentation du modèle à trois fluides

A la lumière des expériences effectuées récemment sur la mesure de la résistance de surface  $R_s$ , il apparaît que même les meilleurs échantillons de matériaux supraconducteurs à haute température critique, déposés par croissance épitaxiale, présentent à basse température une conductivité réelle non nulle:  $\sigma_1 \neq 0$  [18][21]. La présence de cette conductivité résiduelle à basse température  $\sigma_{res}$  est en contradiction avec l'image habituelle de l'état supraconducteur (à laquelle correspondent les matériaux tels que NbN ou Mg); et infirme donc les prédictions du modèle à deux fluides.

L'origine de cette conductivité résiduelle reste obscure. Parmi les raisons principalement évoquées, il faut citer: la présence d'impuretés, de défauts cristallins, ou quelque inhomogénéité, surtout pour les supraconducteurs en volume. Cependant, même les meilleurs films, déposés par croissance épitaxiale, très purs et parfaitement orientés, présentent une conductivité résiduelle mesurable. (remarquons, même si G.Müller écrit [21]: "... la réduction des pertes de ces matériaux aux fréquences micro-ondes semble difficile, sinon impossible.", qu'à notre connaissance personne ne met véritablement en cause les qualités intrinsèques de ces nouveaux matériaux; la présence de pertes résiduelles n'étant imputée qu'à des insuffisances technologiques).

Quoi qu'il en soit, la permittivité relative complexe de ces matériaux doit obéir au principe de causalité entre champ et excitation électriques. Ses parties réelle et imaginaire se soumettent donc aux équations de Kramer-Kronig:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r(\omega) &= \varepsilon'(\omega) - j \varepsilon''(\omega) \\ \varepsilon'(\omega) &= 1 + \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon''(\xi)}{\xi - \omega} d\xi \quad (\text{III - 58}) \\ \varepsilon''(\omega) &= -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon'(\xi) - 1}{\xi - \omega} d\xi\end{aligned}$$

La permittivité complexe déduite du modèle à deux fluides [22]:

$$\varepsilon_r(\omega) = \left(1 - \frac{\omega_s^2}{\omega^2} - \frac{\omega_n^2 \tau_n^2}{\omega^2 \tau_n^2 + 1}\right) - j \frac{\omega_n^2 \tau_n}{\omega(\omega^2 \tau_n^2 + 1)} \quad (\text{III-59})$$

ne vérifie pas ces relations.

Pour remédier à cette situation, il faut considérer le cas limite où, dans le modèle de Drüde-Lorentz, un temps moyen de relaxation  $\tau_s$ , associé aux électrons appairés dans l'état supraconducteur, tend vers une valeur infinie:

$$\lim_{\tau_s \rightarrow +\infty} \left( m \frac{\partial \langle \bar{v}_s \rangle}{\partial t} + m \frac{\langle \bar{v}_s \rangle}{\tau_s} = -q \bar{E} \right) \cong m \frac{\partial \langle \bar{v}_s \rangle}{\partial t} \quad (\text{III-60})$$

Il en résulte ainsi théoriquement qu'aucun matériau supraconducteur ne peut être considéré absolument sans pertes.

Le modèle à trois fluides, proposé par G.Mullër en 1992 repose sur l'étude d'un ensemble de résultats de mesure d'impédance de surface montrant clairement la présence d'une conductivité résiduelle irréductible. Pratiquement indépendante de la température, elle est modélisable par l'adjonction d'une densité constante

d'électrons non appairés (dans l'état normal)  $n_{res}$ , limitant à basse température la conductivité réelle totale à la valeur:

$$\sigma_{res} = \frac{n_{res} q^2 \tau_n}{m(\omega^2 \tau_n^2 + 1)} \quad (\text{III-61})$$

Pour ce modèle, le nombre total d'électrons  $n = n_s + n_n + n_{res}$  est une constante de la température et représente l'ensemble des électrons appairés  $n_s$  (état supraconducteur), normaux  $n_n$ , et "normaux non appairables"  $n_{res}$ . Ces nombres sont toujours reliés par les relations de Goster-Casimir (III-25).

La conductivité complexe  $\sigma$  est alors exprimée par les relations:

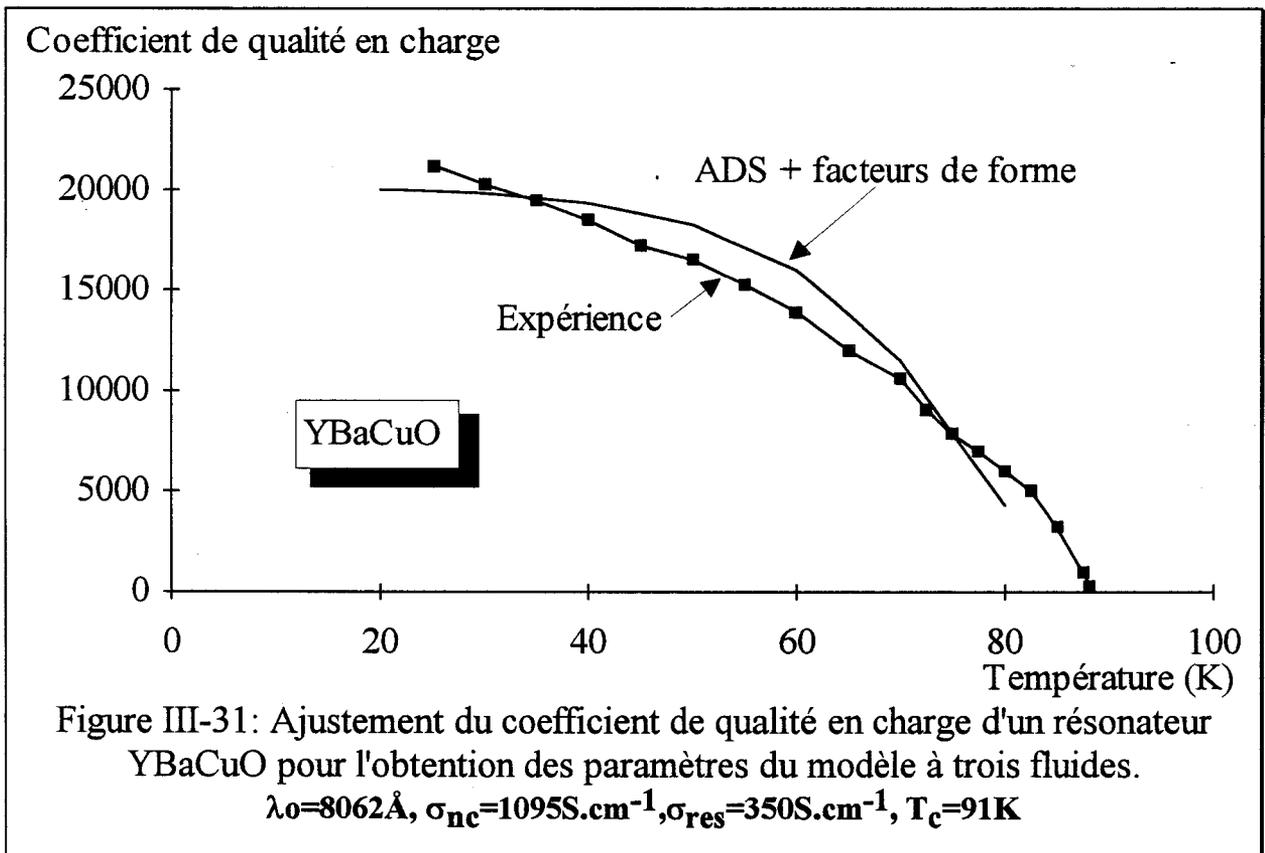
$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_1 - j\sigma_2 \\ \sigma_1 &= (\sigma_{nc} - \sigma_{res}) \left( \frac{T}{T_c} \right)^4 + \sigma_{res} \quad (\text{III - 62}) \\ \sigma_2 &= \frac{1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^4}{\omega \mu \lambda^2(0)} \end{aligned}$$

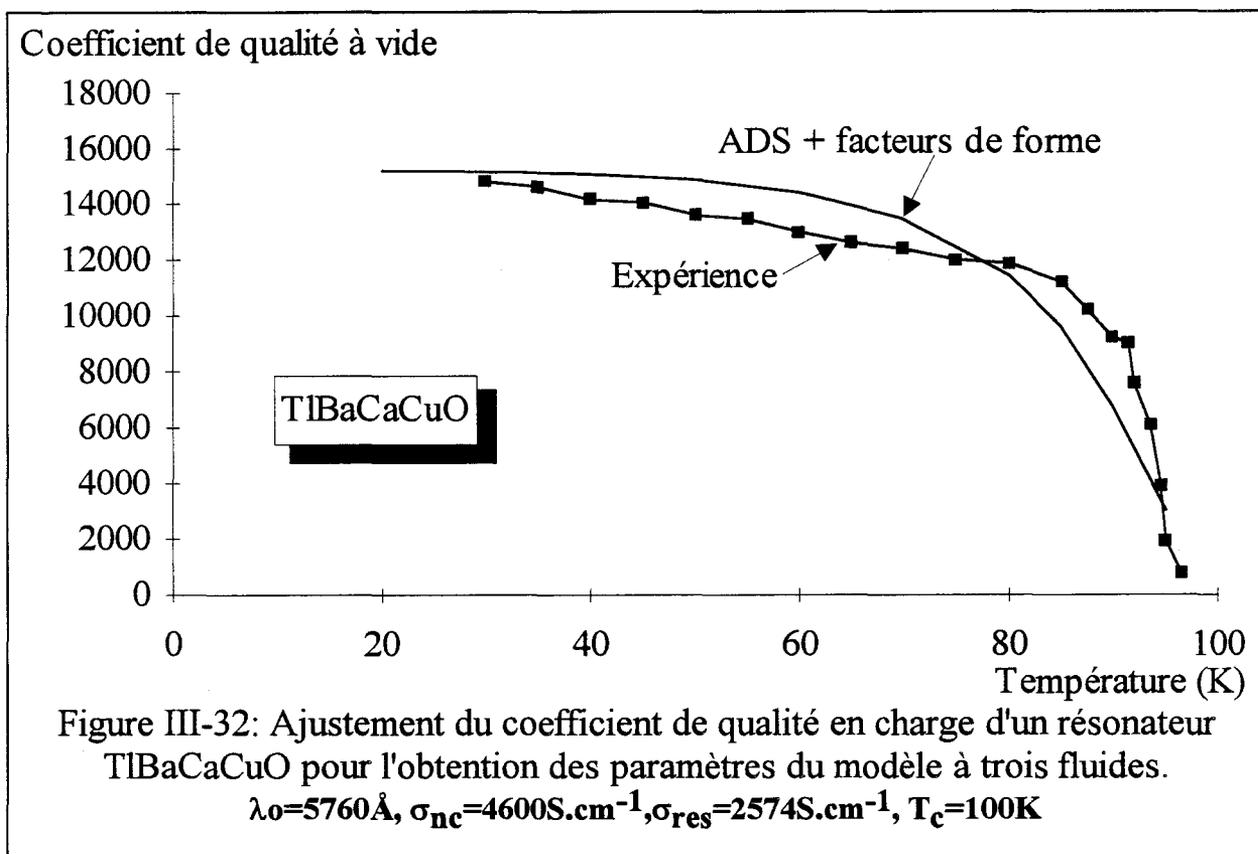
L'impédance de surface à  $0^\circ\text{K}$ , calculée dans le cas d'un supraconducteur en volume, mène alors à  $(\sigma_1 \ll \sigma_2)$  [21]:

$$\begin{aligned} Z_{S_0} &= \lim_{T \rightarrow 0^\circ\text{K}} (Z_S(T)) = R_{S_0} + jX_{S_0} \\ R_{S_0} &\cong \frac{\omega^2 \mu_0^2 \lambda_0^3 \sigma_{res}}{2}; \quad X_{S_0} = \omega \mu_0 \lambda_0 \end{aligned} \quad (\text{III-63})$$

### III-4-5-2 Résultats

L'application du modèle à trois fluides nécessite de déterminer la conductivité résiduelle  $\sigma_{res}$ , mais aussi de préciser à basse température l'influence respective des pertes résiduelles supraconductrices et de la tangente de perte du substrat. Nous nous sommes appuyés sur des mesures récentes de la tangente de perte du substrat  $\text{LaAlO}_3$  (cf. III-4-3-1) et fait évoluer à basse température la conductivité résiduelle  $\sigma_{res}$  jusqu'à obtenir l'égalité des coefficients de qualité théorique et expérimentaux. La détermination des autres paramètres du modèle à trois fluides,  $\lambda_0, \sigma_{nc}$  et  $T_c$  est représentée **figure III-31** dans le cas de l' $\text{YBaCuO}$ , **figure III-32** dans celui du  $\text{TlBaCaCuO}$ . Elle conduit au **tableau III-33**, où sont regroupés les résultats de caractérisation.





	ADS+IMPEDANCE DE SURF.			Valeurs Publiées		
	$\lambda_0$ (Å)	$\sigma_{nc}$ (S/cm)	$\sigma_{res}$ (S/cm)	$\lambda_0$ (Å)	$\sigma_{nc}$ (S/cm)	$R_{so}$ (mΩ)
YBaCuO	7460	1100	350	1500-8000	1000-6000	0,1-1
TlBaCaCO	5760	4600	2570	2200	1000-3000	0,1-1

Tableau III-33 Résultats relatifs au modèle à trois fluides

Les paramètres déjà obtenus a l'aide du modèle à deux fluides sont essentiellement retrouvés dans le cadre du modèle à trois fluides.

Les conductivités résiduelles ont été trouvée égale à  $350\text{S.cm}^{-1}$  dans le cas de l'YBaCuO, et à  $2600\text{S.cm}^{-1}$  dans la cas du TlBaCaCuO. Ces valeurs semblent très élevées et peuvent, si l'irréductibilité de la conductivité résiduelle se confirme, constituer une limitation aux potentialités de ce type de matériau.

La densité volumique d'électrons "non appairables"  $n_{res}$  et la densité totale d'électrons  $n$  du modèle à trois fluides sont respectivement proportionnelles aux conductivités  $\sigma_{res}$  et  $\sigma_{nc}$ . Pour un échantillon de matériau supraconducteur YBaCaCuO, Y.Kobayashi [21] propose une valeur de 0,18 au taux d'électrons non appairables défini par le rapport:

$$\tau = \frac{n_{res}}{n} = \frac{\sigma_{res}}{\sigma_{nc}} \quad (\text{III-64})$$

Nous obtenons, pour notre part, une valeur  $\tau=0,32$  dans le cas de l'YBaCuO, et une valeur de  $\tau$  égale à  $\tau=0,56$  dans le cas du supraconducteur au thallium TlBaCaCuO.

### III-4-6 RESULTATS SUR D'AUTRES STRUCTURES EXPERIMENTALES

Nous nous sommes également intéressés à des résultats de mesure obtenus au sein de l'IEMN [35][36]; ils concernent deux résonateurs ouverts de type microruban. Ces deux résonateurs sont composés d'un film mince d'YBaCuO déposé sur un substrat MgO. Ils sont excités par des couplages capacitifs d'environ 250 $\mu$ m de largeur. Les cellules de mesure en laiton sont placées, sans boîtier, dans le cryostat.

#### III-4-6-1 Résonateur 6 GHz sur film F18361

Ce résonateur comporte un plan de masse supraconducteur provenant du même dépôt que le conducteur supérieur. Le contact du plan de masse à la cellule de mesure s'opère mécaniquement au moyen de deux brides, suivant le schéma ci-dessous (**figure III-34**):

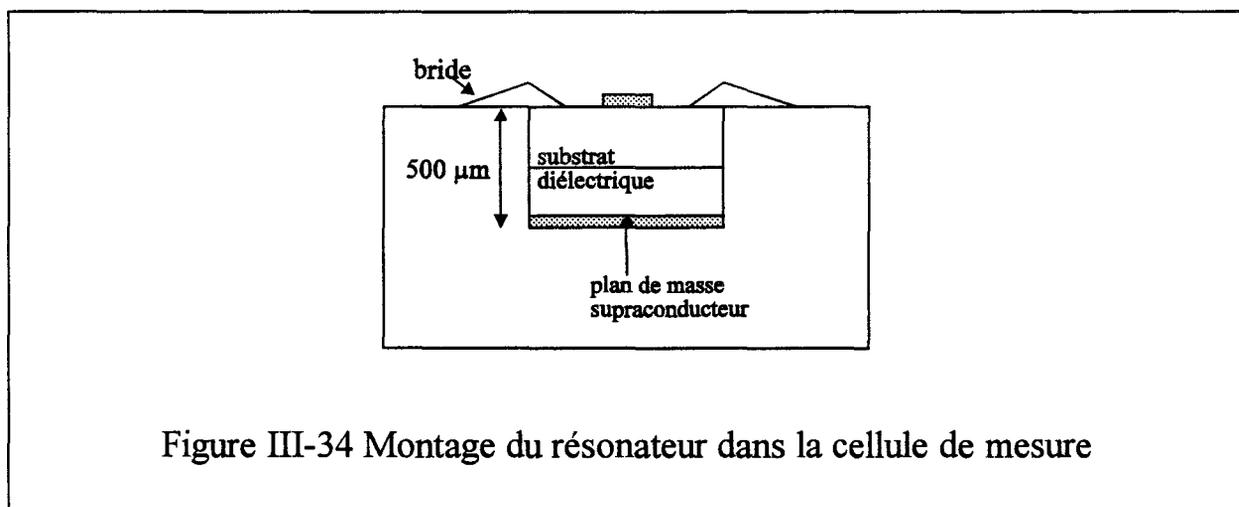
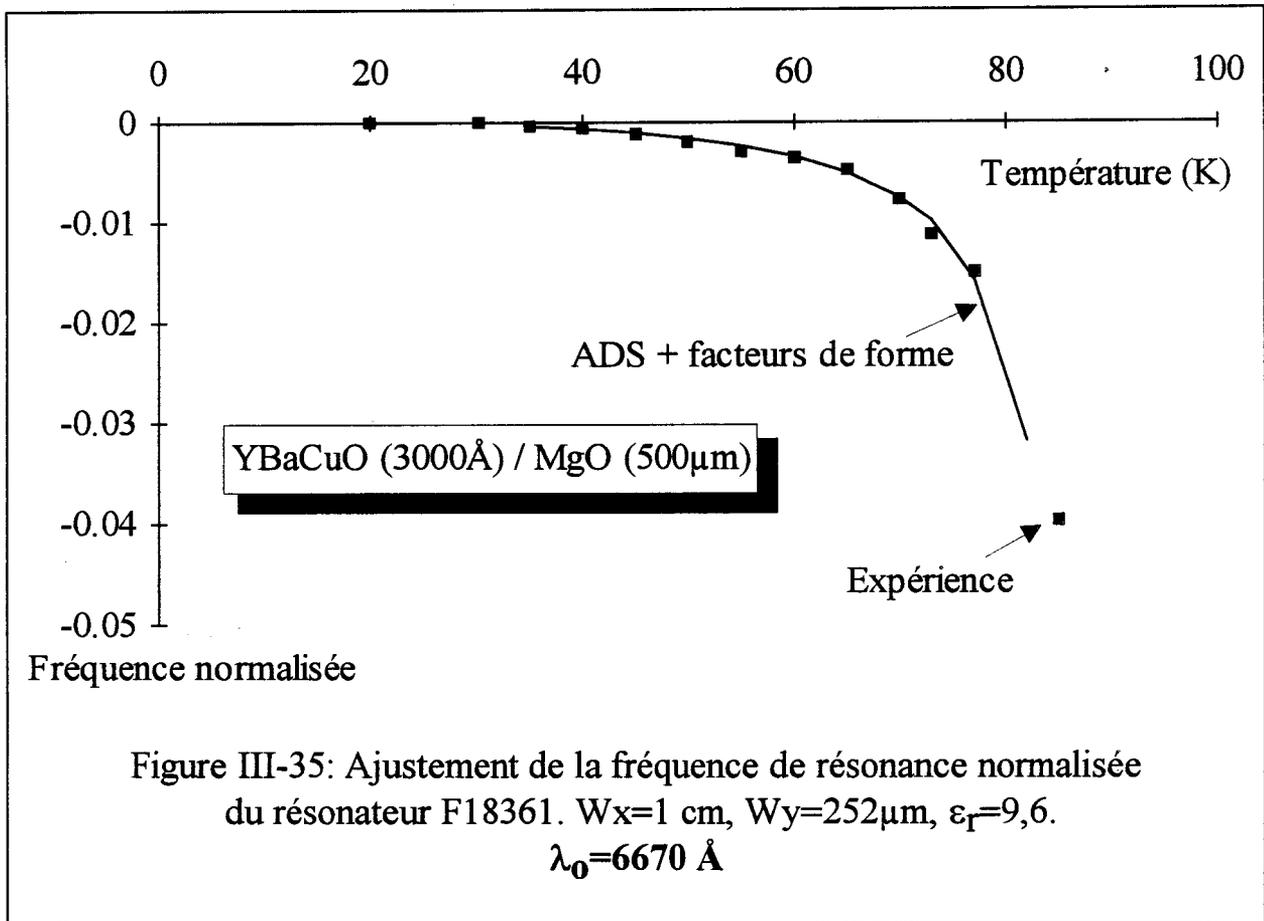


Figure III-34 Montage du résonateur dans la cellule de mesure

La longueur du résonateur est égale à 1 cm, l'épaisseur des deux couches de substrat diélectrique sont chacune de 250 $\mu$ m. La largeur de la ligne est de 252 $\mu$ m. Les pertes métalliques de la cellule en laiton, large de 14 mm, sont prises en compte par l'intermédiaire de la fonction de Green.

La fréquence de résonance normalisée de ce résonateur est représentée sur la **figure III-35**. L'ajustement de cette courbe par notre analyse théorique fournit la longueur de pénétration de London, trouvée égale à  $\lambda_0=6670\text{\AA}$ .



L'ajustement du coefficient de qualité de la structure nécessite, comme précédemment, de préciser l'influence des pertes autres que les pertes conducteurs. Dans ce cas, c'est à dire en l'absence de boîtier, le rayonnement du résonateur est pris en compte dans l'analyse par la fonction de Green calculée, comme au premier chapitre, pour un demi-espace supérieur constitué par de l'air.

Dans le **tableau III-36** sont regroupées les valeurs du coefficient de qualité total de la structure en présence et en l'absence du boîtier, en tenant compte du couplage  $Q_\beta=3850$  et des pertes diélectriques évaluées à  $\text{tg}\delta=110^{-4}$  pour un

résonateur parfait (CCE) de dimensions identiques au résonateur supraconducteur.

	avec boîtier	sans boîtier
Coefficient de qualité total	2400	150

Figure III-36: Coefficient de qualité total avec et sans boîtier

Nous constatons que le coefficient de qualité théorique de la structure sans boîtier est principalement limité par le rayonnement dans l'espace libre à une valeur inférieure au coefficient de qualité expérimental à basse température. Ce rayonnement est donc limité dans le dispositif expérimental par la présence du cryostat.

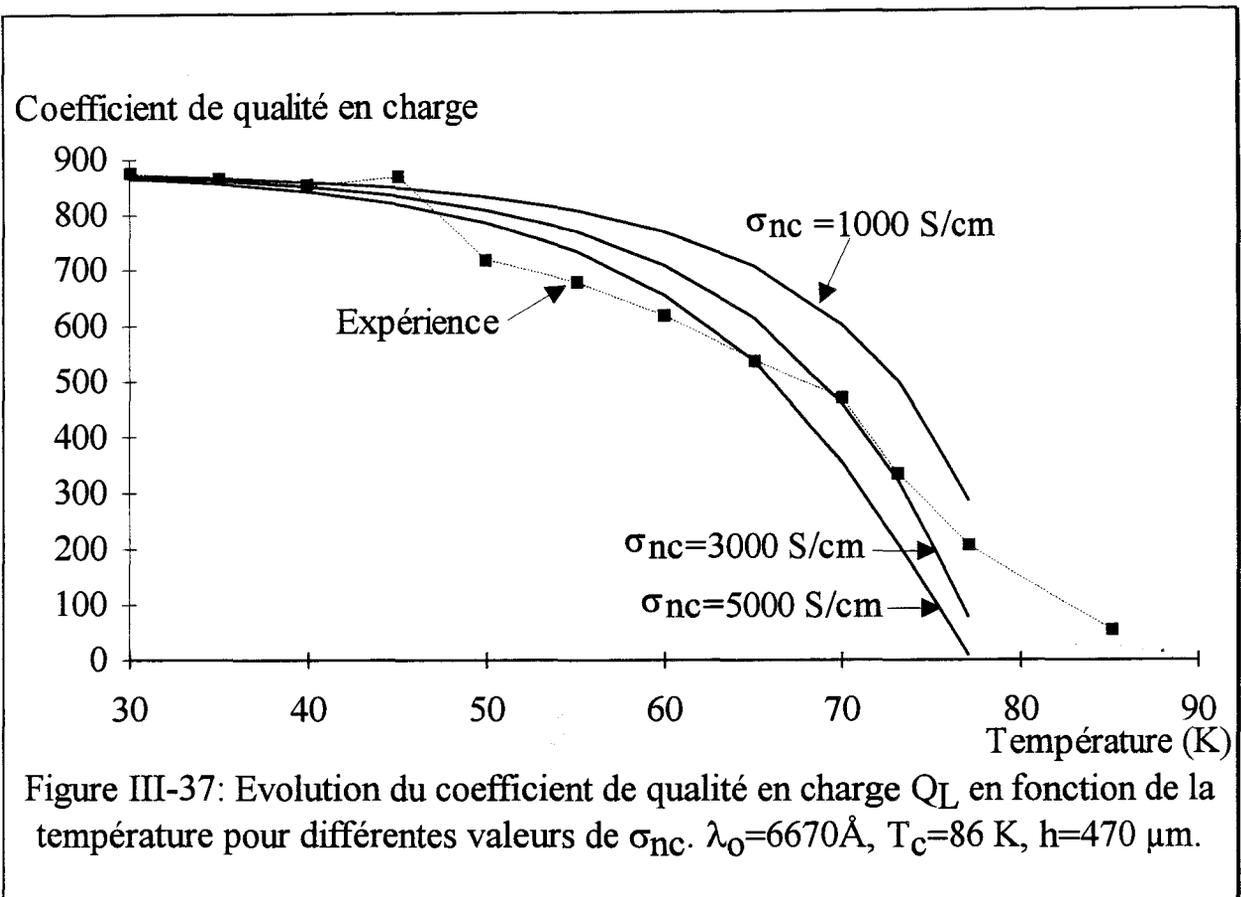
Nous présentons sur la **figure III-37** une étude de la sensibilité de la méthode de caractérisation à la conductivité normale  $\sigma_{nc}$ .

Nous tracons sur cette figure les résultats théoriques obtenus pour trois valeurs de la conductivité normale  $\sigma_{nc}$ . Pour une structure entourée d'un boîtier, le coefficient de qualité à basses températures résulte de la valeur imposée à la tangente de perte du substrat diélectrique. L'évolution générale de la courbe expérimentale entre 50 et 75 K correspond mieux au cas  $\sigma_{nc}=1000\text{S/cm}$  qu'aux autres cas considérés. Les valeurs expérimentales sont cependant trop faibles pour pouvoir employer la procédure de caractérisation décrite plus haut.

#### III-4-6-2 Résonateur 8 GHz sur film L327

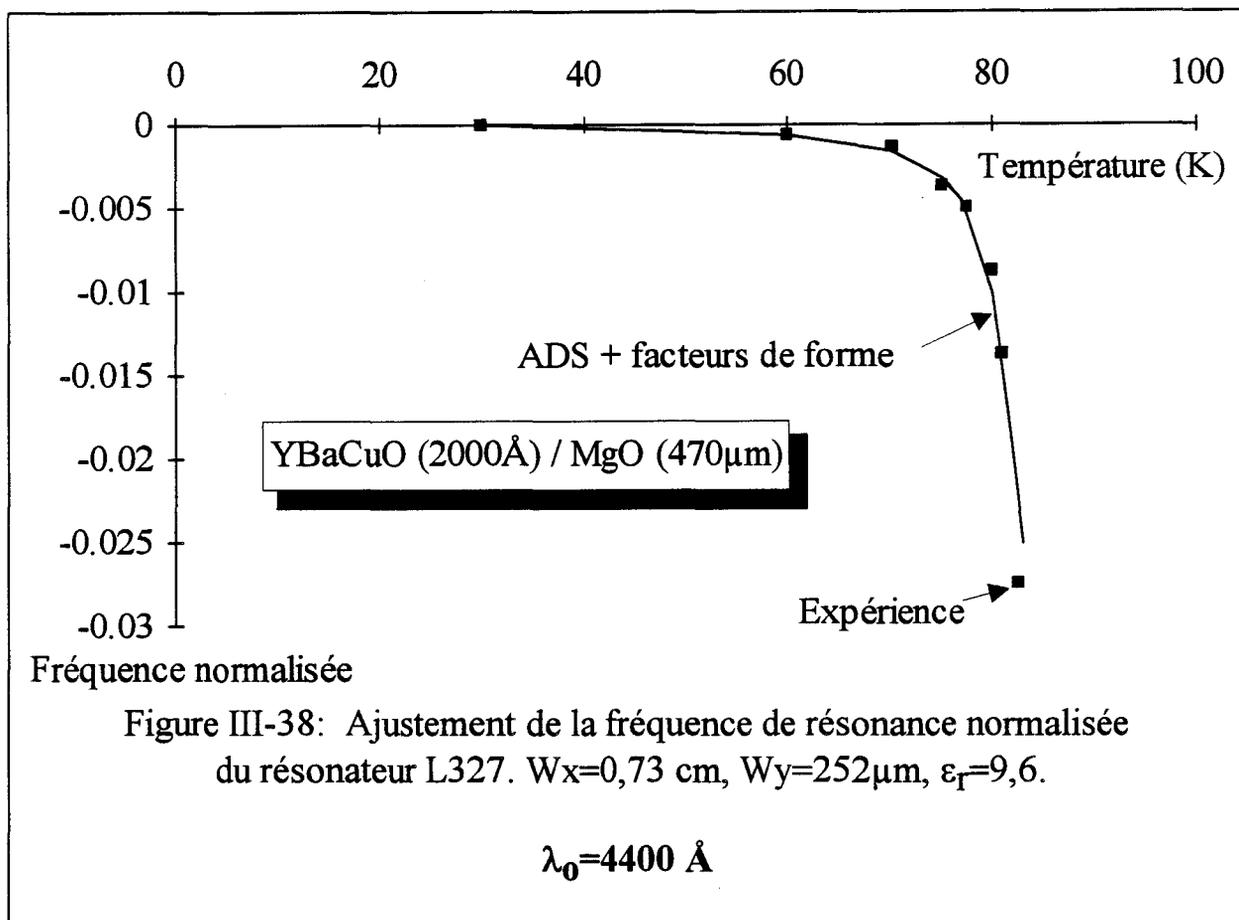
Ce résonateur a été conçu avec un plan de masse en or évaporé sous vide sur une épaisseur d'environ  $1\mu\text{m}$  [36]. L'épaisseur du ruban supraconducteur est de  $0,2\mu\text{m}$ , la longueur de résonance de  $0,73\text{ cm}$ , la température de transition  $T_c$

est approximativement égale à 86 K. La largeur de la ligne, de 250 $\mu\text{m}$  dans un premier temps, est réduite dans un deuxième temps à 100 $\mu\text{m}$ .



La détermination de la profondeur de pénétration de London, effectuée par ajustement de la fréquence normalisée du résonateur, donne (figure III-38) la valeur  $\lambda_0=4450\text{\AA}$ .

Les pertes par rayonnement du résonateur sont tributaires de la largeur de la ligne. Pour cette raison, lors de l'étude expérimentale, cette largeur a été réduite de 250 $\mu\text{m}$  à 100  $\mu\text{m}$ . Le tableau III-39 regroupe les valeurs théoriques obtenues pour les coefficients de qualité de la structure ouverte, ainsi que le coefficient de qualité relatif aux couplages capacitifs, et ce pour les deux largeurs de la ligne.



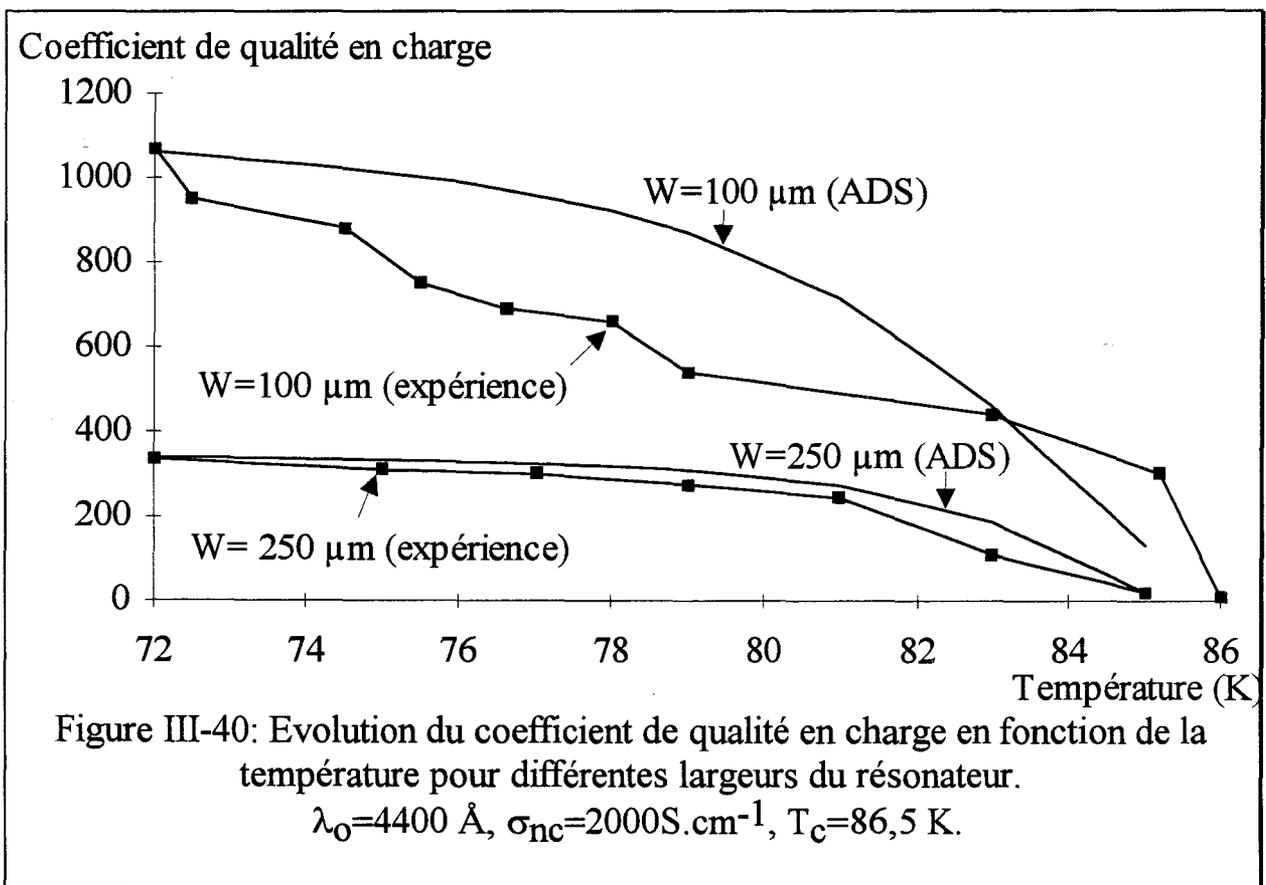
	W=100 $\mu\text{m}$	W=250 $\mu\text{m}$
$Q_\beta$	5560	3240
$Q_{\text{rayonnement}}$	352	138

Figure III-39: Coefficients de qualité relatifs aux pertes par rayonnement et aux couplages capacitifs pour les deux largeurs de ligne.

Dans ce tableau, nous constatons que la largeur de la ligne influence naturellement [37][38] sur les pertes par rayonnement. Il en est de même avec le coefficient  $Q_\beta$ , pour lequel nous obtenons une valeur double lorsque la largeur de la ligne est réduite à 100  $\mu\text{m}$ .

Nous traçons sur la **figure III-40** l'évolution des coefficients de qualité des deux structures en fonction de la température. Comme précédemment, les valeurs

du coefficient de qualité expérimental à basses températures a dans chaque cas permis une évaluation de la tangente de perte du substrat. Les pertes étrangères aux rubans supraconducteurs (pertes diélectriques, par rayonnement dans le cryostat) semblent limiter le coefficient de qualité total jusqu'à des valeurs élevées de la température, c'est à dire proche de  $T_c$ . Le modèle à deux fluides n'est, pour ces températures, plus valable (cf. III-3-1-2). Les courbes expérimentales sont cependant assez bien vérifiées en utilisant la valeur de  $\lambda_0=4400\text{\AA}$  déterminée grâce à la fréquence de résonance, et une conductivité normale standard de 2000 S/cm.



### III-5 CONCLUSION

L'objectif de ce troisième chapitre consistait à proposer une méthode de caractérisation des films minces supraconducteurs déposés sur un substrat diélectrique. Rappelons brièvement les motivations de cette étude. La fabrication de motifs microruban supraconducteurs s'opère par le dépôt, puis par la gravure des matériaux déposés. La sensibilité des caractéristiques du ruban obtenu aux procédures technologiques employées est connue. Contrairement à la technique de mesure par cavité résonante, la caractérisation des films minces supraconducteurs par la mesure du coefficient de qualité et de la fréquence de résonance de résonateurs microruban permet la connaissance du matériau à l'issue de toutes les étapes technologiques, gravure comprise.

Dans ce but, il fallait développer un outil numérique pouvant prendre en compte avec une précision maximale les différents phénomènes de pertes. Il ne nous restait, à l'issue du deuxième chapitre, qu'à traiter le cas des pertes conducteurs.

Après avoir effectué dans ce chapitre une étude critique des cas où l'impédance de surface convient au traitement des pertes métalliques, nous présentons une analyse numérique du champ électromagnétique présent au sein des conducteurs. Cette analyse repose sur une méthode de séparation des variables associée à une méthode des moments (*point matching technique*). Elle nous permet l'accès au bilan des puissances et à l'impédance de surface équivalente de barreaux métalliques ou supraconducteurs.

Un nouveau facteur de forme géométrique, relatif à la partie imaginaire de l'impédance de surface équivalente, est ensuite défini. Quelques résultats typiques sont présentés.

L'application du formalisme à la caractérisation des matériaux supraconducteurs s'opère par le biais de modèles simples pour la conductivité complexe dont nous déterminons les paramètres par ajustement des courbes théoriques aux courbes expérimentales. Les valeurs trouvées pour le cas de deux résonateurs différents: YBaCuO et TlBaCaCuO, sont de l'ordre de grandeur des valeurs habituellement publiées. Les profondeurs de pénétration du champ électromagnétique à  $T=0K$ , ou profondeurs de London, sont néanmoins plus importante que celles généralement acceptées dans la littérature. Ces valeurs, proches de celles déterminées par l'expérimentateur, peuvent provenir des défauts de cristallisation des supraconducteurs, ou de leur pollution par les produits réactifs de gravure.

Les pertes par effet Joule dans le substrat diélectrique n'expliquent pas les relativement faibles valeurs expérimentales du coefficient de qualité en charge trouvées à basse température. L'introduction d'un nouveau modèle pour la conductivité, le modèle à trois fluides, permet la prise en compte à basse température des pertes résiduelles des supraconducteurs à haute température critique. Dans ce cas un nouveau paramètre est déterminé: la conductivité résiduelle, définie comme la valeur asymptotique de la partie réelle de la conductivité du supraconducteur lorsque la température tend vers zéro. Les valeurs trouvées pour ce dernier paramètre sont elles-aussi proches des valeurs publiées précédemment.

## BIBLIOGRAPHIE RELATIVE AU TROISIEME CHAPITRE

- [1] M.Laguës *et al.*, Science, 262,1850, 1993 et J.L. Tholence *et al.* Phys. Letter A, 184, 215, 1994.
- [2] Maryline Guilloux-Viry: "Croissance épitaxiale et caractérisation de films minces supraconducteurs à haute température critique déposés *in-situ* par pulvérisation cathodique ou ablation laser". Thèse de l'Université de Rennes-I. 23 janvier 1991
- [3] M.S. Dilorio, A.C.Anderson, B.-Y. Tsaur: " rf surface resistance of Y-Ba-Cu-O thin films". Phys. Rev. B, vol. 38, N°10, pp.7019-7022, October 1988.
- [4] H. A. Wheeler: " Formilas for the Skin Effect". Proceeding of the I.R.E, pp.412-424, September 1942
- [5] J.M. Ponds, C.M. Krowne,W.L. Carter: " On the Application of Complex Resistive Boundary Conditions to Model Transmission Lines Consisting of Very Thin Superconductors". IEEE *trans. on Magn.* Vol.37, N°1, pp.181-189, January 1989
- [6] R. A. Pucel, D.J. Massé, C.P. Hartwig: " Losses in Microstrip". IEEE MTT Vol.16, N°6, pp.342-350, June 1968
- [7] R.Faraji-Dana, Y.L. Chow: " The Current Distribution and AC Resistance of a Microstrip Structure". IEEE MTT Vol.38, N°9, pp.1268-1277, September 1990
- [8] A.A. Golubov *et al.*: " Microwave conductivity of YBa<sub>2</sub>Cu<sub>3</sub>O<sub>6.9</sub> single crystals near T<sub>c</sub>". Physica C 213 (1993) pp.139-144
- [9] M.S. Schmidt *et al.*: "Measured Performance at 77 K of Superconducting Microstrip Resonators and Filters". IEEE MTT Vol.39, N°9, pp.1475-1479, September 1991
- [10] D.Nghiem, J.T. Williams, D.R. Jackson: " A General Analysis of Propagation Along Multiple-Layer Superconducting Stripline and Microstrip Transmission Lines". IEEE MTT Vol.39, N°9, pp.1553-1565, September 1991
- [11] I. Sankawa, M. Sato, T. Konaka, M. Kobayashi, K. Ishihara: " Microwave Surface Resistance Studies of YBa<sub>2</sub>Cu<sub>3</sub>O<sub>7</sub> Single Crystal". Japanese Journal of Applied Physics Vol. 27, September 1988, pp. L1637-L1638

[12] S. Revenaz : " Absorption d'un rayonnement microonde dans des couches minces supraconductrices à haute température critique de  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$ ". Thèse de Doctorat de l'Université Joseph Fourier- Grenoble I. 30 Mars 1992.

[13] Y. Kobayashi, T. Imai, H. Kayano : " Microwave Measurement of Temperature and Current Dependences of Surface Impedance for High-Tc Superconductors". IEEE MTT Vol.39, N°9, pp.1530-1538, September 1991

[14] F. Mehri : Thèse de Doctorat de l'Université (à paraître).

[15] R.E Glover, M. Tinkham: " Conductivity of Superconducting Thin Films for Photon Energies between 0,3 and 40 kTc". Phys. Rev., Vol.108, N°2, October 15, 1957.

[16] J. Talvacchio, G.R. Wagner: " High-Tc film development for electronic applications". SPIE Vol. 1292, Superconductivity Applications for Infrared and Microwave Devices (1990).

[17] D.E. Oates, A.C. Anderson, D.M. Sheen, S.M. Ali: " Stipline Resonator Measurement of  $Z_s$  Versus  $H_{ff}$  in  $\text{YBaCuO}$  Thin Films". IEEE MTT Vol.39, N°9, pp.1522-1529, September 1991.

[18] G. Müller *et al.*: "Survey of Microwave Surface Impedance Data of High-Tc Superconductors- Evidence for Nonpairing Charge Carriers". Journal of Superconductivity Vol.3, N°3, pp.235-242, 1990.

[19] S. Safavi-Naeini, R.Faradji-Dana, Y.L. Chow: " Studies of edge current Densities in Regular and Superconducting microstrip lines of finite thickness". IEE proceedings-H Vol.140,N°5, pp361-366, October 1993.

[20] J.P Pérez, R. Carles, R. Fleckinger: " Electromagnétisme. Vide et milieux matériels". Masson, Paris 1991.

[21] Y. Kobayashi, T.Imai : " Phenomenological Description of Conduction Mechanism of High-Tc Superconductors by Three-Fluid Model". IEICE Transactions Vol. E 74, N°7, pp.1986-1991, July 1991.

[22] K.K. Mei, G.C. Liang: " Electromagnetics of Superconductors". IEEE MTT Vol.39, N°9, pp.1545-1552, September 1991.

[23] C. Wilker *et al.*: " 5 GHz High-Temperature-Superconductor Resonators with High Q and Low Power Dependence up to 90K". IEEE MTT Vol.39, pp.1462-1467, September 1991.

- [24] R.Faraji-Dana, Y.L.Chow: " The Current Distribution and AC Resistance of a Microstrip Structure". IEEE MTT Vol.38, N°9, pp.1268-1277, September 1990.
- [25] P.Waldow, I.Wolff: " The Skin Effect at High Frequency". IEEE MTT Vol.33, N°10, pp.1076-1082, October 1985
- [26] D.Kinowski: " Etude comparative de l'approche dans le domaine spectral et d'une formulation par éléments finis pour la simulation de dispositifs microondes et optroniques". Thèse de Doctorat de l'Université des Sciences et Technologies de Lille, le 18 décembre 1992.
- [27] R.E Colin: " Field Theory of Guided Waves". Mc Graw-Hill Book Company, New-York, 1960.
- [28] Tatsuo Itoh: "Analysis of Microstrip Resonators". IEEE MTT Vol.22, N°11, pp.946-952, November 1974
- [29] C.DELABIE: " Contribution à l'étude des résonateurs plaqués pour circuits microondes".Mémoire de DEA à l'USTL, Villeneuve d'Ascq, le 13 Juillet 1990.
- [30] Communication personnelle avec le Dr E.Mage (Thomson Orsay)
- [31] E. Belohoubek *et al.*: "HighTemperature Superconducting Comonents for Microwave Systems". Appl. Superconductivity, Vol.1, N°10-12, pp.1555-1573, 1993.
- [32] Y.Kobayashi, H.Kayano: " An Improved Dielectric Resonator Method for Surface Impedance Measurement of High-Tc Superconductors". IEEE MTT-S Digest, pp.1031-1034, 1992.
- [33] A.A. Gobulov *et al.*: " Microwave conductivity of YBa<sub>2</sub>Cu<sub>3</sub>O<sub>6.9</sub> single crystals near T<sub>c</sub>". Physica C. 213, (1993), pp.139-144.
- [34] C.Delabie, Y.Delplanque, P.Pribetich, P.Kennis: " Equivalent Surface Impedance of Superconducting and Regular Strips for Moment Method Analysis of Planar Circuits". 24th Europ. Microw. Conf., Cannes, 5-8 Sept.1994.
- [35] C.Delabie, F. Mehri, D. Chauvel, D. Chambonnet, J.C. Carru, Y. Crosnier:" CAD Modelling and Characterization of a Superconducting Planar Microwave Resonator Using Complex Conductivity Measurements". 24th Europ. Microw. Conf., Cannes, 5-8 Sept.1994.

[36] D. Chauvel: " Mise en oeuvre de techniques de mesures cryogéniques pour la caractérisation hyperfréquences de circuits supraconducteurs à haute T<sub>c</sub>. Application aux résonateurs planaires et conception d'oscillateurs à transistors HEMT refroidis". Thèse de Doctorat de l'Université des Sciences et des Technologies de Lille, 23 Novembre 1993.

[37] E.Belohoubek, E. Denlinger: " Loss considerations for Microstrip Resonators". IEEE MTT, vol.23, N°6, pp.522-526, June 1975.

[38] A.Gopinath: " Maximum Q-factor of Microstrip Resonators".IEEE MTT, Vol.29, N°2, pp.128-131, February 1981.

[39] J.S.Martens, J.B.Beyer, D.S.Ginley: "Microwave surface resistance of YBaCuO superconducting films". Appl. Phys.Lett. 52(21), 23 May 1988, pp.1822-1824

[40] D.R. Harshman, A.P. Mills: " Concerning the nature of high-T<sub>c</sub> superconductivity: Survey of experimental properties and implications for interlayer coupling". Physical Review B, Vol.45, N°18, pp.10684-10712, May 1992

[41] W.L. Holstein et al.: " Preparation and characterization of Tl<sub>2</sub>Ba<sub>2</sub>CaCu<sub>2</sub>O<sub>8</sub> films on (100) LaAlO<sub>3</sub>". IEEE Magnetics, Vol.27, N°2, pp.1568-1572, March 1991.

[42] R.K. Hoffmann: "Handbook of Microwave Integrated Circuits". Artech House, 1987

## CONCLUSION GENERALE

Notre objectif consistait à développer un code numérique propre à simuler des circuits microrubans de forme quelconque, et d'inclure dans cette analyse une modélisation précise des pertes conducteurs, en vue d'une application à la caractérisation des pertes supraconductrices.

Nous avons rappelé dans le premier chapitre les principales étapes de la mise en oeuvre de l'Approche dans le Domaine Spectral dans le cas simple du résonateur microruban rectangulaire. Ceci a permis de nous familiariser aux problèmes posés par le régime libre, -où le résonateur évolue selon son comportement propre-, et par le régime forcé déterministe; notamment en ce qui concerne les parcours dans le plan complexe des variables d'intégration.

La précision des résultats obtenus pour l'évolution fréquentielle de l'impédance d'entrée aussi bien que pour la fréquence de résonance et le coefficient de qualité nous a amenés à reconsidérer au deuxième chapitre la décomposition de la densité de courant sur la plaque, de façon à pouvoir traiter le cas de résonateurs de surface quelconque.

Dans ce but, une décomposition des conducteurs en éléments de courant élémentaires permet d'approcher le modèle d'étude à la structure étudiée. Une décomposition en fonctions de base triangulaires à base rectangulaire (fonctions de base de type *rooftop*) régulièrement disposées sur un quadrillage autorise l'utilisation d'algorithmes rapides (FFT) pour le calcul des intégrales de réaction, et ainsi d'obtenir des temps de calcul convenables pour des résultats précis.

L'utilisation de terminaisons adaptées numériques présente de nombreux avantages pour la détermination théorique des paramètres de transferts des multipôles.

Nous avons présenté un formalisme original permettant la modélisation de terminaisons sans réflexion basé sur la simulation de lignes de longueur infinie à l'aide de fonctions de base fantômes. L'application de cette technique à la détermination de l'impédance d'entrée d'un dipôle ou aux paramètres S de multipôles est présentée.

La simulation d'éléments de circuits de complexité moyenne, tels que le double méandre microruban, et autres discontinuités microruban, peut ainsi être effectuée sur les mini-ordinateurs de type "station de travail", avec un temps de calcul d'environ une heure par point de fréquence.

En termes généraux, les performances de la simulation dépendent de l'efficacité de la description des conducteurs par les fonctions de base. Nous présentons l'étude en régime libre du résonateur pentagonal, difficilement descriptible dans un repère cartésien, et vérifions que la précision obtenue sur les résultats se solde dans ce cas par une quantité importante de fonctions de base, et ce d'autant plus que l'ordre de la résonance est élevé.

Le régime forcé d'une antenne semi-circulaire, décomposée en fonctions de base triangulaires, confirme cet état de choses. Les résultats dans ce cas sont bons.

Après avoir effectué au troisième chapitre une étude critique portant sur la fiabilité des résultats obtenus lors du calcul des pertes métalliques par l'utilisation de l'impédance de surface, nous présentons une analyse numérique qui permet de préciser la répartition du champ électromagnétique au sein du ruban.

Quelques résultats typiques sont présentés. Nous disposons dès cet instant d'un outil capable de prendre en compte l'ensemble des phénomènes de pertes présentes dans les structures microruban.

Dans le cas d'un ruban métallique, le calcul de la puissance active dissipée dans le conducteur suffit en général pour définir un facteur de forme qui corrige et améliore la fiabilité des résultats obtenus, par l'approche dans le domaine spectral, au moyen de l'impédance de surface.

Lors de notre étude nous avons affiné cette analyse en définissant deux facteurs de forme, l'un pour la résistance, l'autre pour la réactance, ce qui suppose le calcul des puissances active et réactive.

L'application de ce formalisme à la caractérisation des matériaux supraconducteurs s'opère par le biais d'un modèle à deux fluides dont nous déterminons les paramètres par ajustement des courbes théoriques aux courbes expérimentales (fréquence de résonance expérimentale et coefficient de qualité). Les valeurs trouvées pour le cas de deux résonateurs différents: YBaCuO et TlBaCaCuO, sont de l'ordre de grandeur de celles habituellement publiées. Les pertes par effet Joule dans le substrat diélectrique n'expliquent pas les résultats expérimentaux du coefficient de qualité en charge à basse température. L'introduction d'un nouveau modèle pour la conductivité, le modèle à trois fluides, prend en compte à basse température les pertes résiduelles des supraconducteurs à haute température critique. Dans ce cas un nouveau paramètre est déterminé: la conductivité résiduelle, définie comme la valeur asymptotique de la partie réelle de la conductivité du supraconducteur lorsque la température tend vers zéro. Les résultats concernant ce dernier paramètre sont eux-aussi proches des valeurs publiées.

A ce stade, par rapport à l'objectif que nous nous étions fixé, à savoir proposer un outil d'aide à la caractérisation de matériaux supraconducteurs, l'étude de faisabilité a été réalisée. Pour que cette méthode de caractérisation puisse se pérenniser il importe de mener une comparaison aussi exhaustive que possible entre résultats théoriques et expérimentaux.



Cela suppose de mieux intégrer les conditions expérimentales réelles, mais aussi de mieux connaître certaines caractéristiques physiques, par exemple l'évolution des pertes diélectriques avec la température.

En conclusion, nous avons présenté dans ce mémoire une méthode complète de simulation de circuits planaires, prenant en compte l'ensemble des pertes: pertes dans les matériaux isolants, pertes par rayonnement dans l'espace libre et par génération d'ondes de surface, et enfin pertes conducteurs.

Une décomposition des densités de courant sur les conducteurs en fonctions de base élémentaires a permis de traiter des circuits microruban de forme quelconque et nous présentons les résultats de simulation de structures de forme diverses ( résonateur pentagonal, rectangulaire, semi-circulaire et discontinuités microruban).

Les limitations de cette méthode sont, comme pour toute méthode numérique, liées au matériel informatique disponible. L'Approche dans le Domaine Spectral conserve cependant sur la plupart des autres méthodes numériques l'avantage de présenter un développement analytique important, grâce à l'utilisation d'une fonction de Green. Ceci se traduit naturellement par des contraintes numériques moindres.

L'accroissement des performances des calculateurs doit permettre dans l'avenir d'adapter les formulations présentées dans ce mémoire au cas de structures de topologies plus complexes, notamment pour les circuits multiniveaux regroupant des lignes planaires de type différents.

## ANNEXE A

### Calcul de la fonction de Green pour substrats anisotropes

Pour le milieu anisotrope considéré, le vecteur excitation électrique  $\vec{D}$  s'écrit:

$$\vec{D} = \varepsilon_{xx} E_x \bar{x} + \varepsilon_{yy} E_y \bar{y} + \varepsilon_{zz} E_z \bar{z}$$

comme  $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy}$ , employons l'écriture plus synthétique suivante:

$$\vec{D} = \varepsilon_t \vec{E}_t + \varepsilon_{\perp} \vec{E}_z; \text{ avec } \vec{E}_t = E_x \bar{x} + E_y \bar{y}$$

avec  $\varepsilon_t = \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy}$  et  $\varepsilon_{\perp} \neq \varepsilon_z$ .

Avec cette écriture, l'équation de Maxwell-Ampère devient:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = j\omega \varepsilon_t \vec{E}_t + j\omega \varepsilon_{\perp} \vec{E}_z$$

ou encore:

$$\vec{\nabla}_t \times \vec{H}_t + \bar{z} \times \left( \frac{\delta \vec{H}_t}{\delta z} - \vec{\nabla}_t H_z \right) = j\omega (\varepsilon_t \vec{E}_t + \bar{z} \varepsilon_{\perp} E_z)$$

de sorte que:

$$\begin{cases} \vec{\nabla}_t \times \vec{H}_t = j\omega \varepsilon_{\perp} E_z \bar{z} & (\text{A - 1a}) \\ \vec{\nabla}_t H_z - \frac{\delta \vec{H}_t}{\delta z} = j\omega \varepsilon_t \bar{z} \times \vec{E}_t & (\text{A - 1b}) \end{cases}$$

L'équation de Maxwell-Faraday:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega \mu_0 \vec{H}$$

donne quant à elle:

$$\left( \vec{\nabla}_t + \bar{z} \frac{\delta}{\delta z} \right) \times (\vec{E}_t + \bar{z} E_z) = -j\omega \mu_0 (\vec{H}_t + \bar{z} H_z)$$

qu'il est possible d'écrire par le système:

$$\begin{cases} \vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t = -j\omega\mu_0 H_z \vec{z} & (A-2a) \\ \vec{\nabla}_t E_z - \frac{\delta \vec{E}_t}{\delta z} = -j\omega\mu_0 \vec{z} \times \vec{H}_t & (A-2b) \end{cases}$$

En prenant la divergence transverse de (1b); on obtient:

$$\vec{\nabla}_t^2 H_z - \frac{\delta}{\delta z} \vec{\nabla}_t \cdot \vec{H}_t = j\omega\epsilon_t \vec{\nabla}_t \cdot (\vec{z} \times \vec{E}_t)$$

soit:

$$\vec{\nabla}_t^2 H_z - \frac{\delta}{\delta z} (\vec{\nabla}_t \cdot \vec{H}_t) = -\omega^2 \mu_0 \epsilon_t H_z \quad (A-3)$$

L'équation du flux magnétique nous donne par ailleurs:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

d'où:

$$\vec{\nabla}_t \cdot \vec{H}_t = -\frac{\delta H_z}{\delta z} \quad (A-4)$$

En exprimant (A-3) à l'aide de (A-4); nous obtenons:

$$\vec{\nabla}_t^2 H_z + \frac{\delta^2}{\delta z^2} H_z = -\omega^2 \mu_0 \epsilon_t H_z$$

En éliminant la solution triviale  $H_z=0$  (onde TE/z); cette équation permet d'écrire dans l'espace transformé:

$$\text{ONDE TE/z: } \gamma_z^2 = \alpha^2 + \beta^2 - k_t^2 ; \quad k_t^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_t$$

Calculons maintenant la divergence transverse de (A-2b):

$$\vec{\nabla}_t^2 E_z - \frac{\delta}{\delta z} (\vec{\nabla}_t \cdot \vec{E}_t) = -\omega^2 \mu_0 \epsilon_{\perp} E_z \quad (A-5)$$

L'équation de Maxwell-Gauss; dans un milieu exempt de charge d'espace; devient:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$$

d'où:

$$\vec{\nabla}_t \cdot \vec{E}_t = -\frac{\epsilon_{\perp}}{\epsilon_t} \frac{\delta E_z}{\delta z} \quad (\text{A-6})$$

En exprimant (A-5) à l'aide de (A-6), nous obtenons:

$$\vec{\nabla}_t^2 E_z + \frac{\epsilon_{\perp}}{\epsilon_t} \frac{\delta^2}{\delta z^2} E_z = -\omega^2 \mu_0 \epsilon_{\perp} E_z$$

En supposant  $E_z$  non nul (onde TM/z), nous arrivons dans le domaine transformé à:

ONDE TM/z: $\gamma_z^2 = (\epsilon_t / \epsilon_{\perp})(\alpha^2 + \beta^2) - k_t^2$ ; $k_t^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_t$
---

## ANNEXE B

### Expressions des fonctions de base $J_{pi}(x,y)$ dans l'espace transformé de Fourier:

Les fonctions de base  $J_x$  et  $J_y$  ont pour expressions dans l'espace réel:

$$J_{xa_{r,s}} = \cos\left(2(r-1)\pi\frac{y}{W_y}\right) \cos\left((2s-1)\pi\frac{x}{W_x}\right)$$

$$J_{xb_{r,s}} = \cos\left(2(r-1)\pi\frac{y}{W_y}\right) \sin\left(2s\pi\frac{x}{W_x}\right)$$

$$J_{xc_{r,s}} = \sin\left(2r\pi\frac{y}{W_y}\right) \cos\left((2s-1)\pi\frac{x}{W_x}\right)$$

$$J_{xd_{r,s}} = \sin\left(2r\pi\frac{y}{W_y}\right) \sin\left(2s\pi\frac{x}{W_x}\right)$$

$$J_{ya_{r,s}} = \cos\left((2r-1)\pi\frac{y}{W_y}\right) \cos\left(2(s-1)\pi\frac{x}{W_x}\right)$$

$$J_{yb_{r,s}} = \cos\left((2r-1)\pi\frac{y}{W_y}\right) \sin\left((2s-1)\pi\frac{x}{W_x}\right)$$

$$J_{yc_{r,s}} = \sin\left(2r\pi\frac{y}{W_y}\right) \cos\left(2(s-1)\pi\frac{x}{W_x}\right)$$

$$J_{yd_{r,s}} = \sin\left(2r\pi\frac{y}{W_y}\right) \sin\left((2s-1)\pi\frac{x}{W_x}\right)$$

Leurs transformées de Fourier, calculées par application de la formule I-2, sont égales à:

$$\begin{aligned}
\bar{J}_{xa_{r,s}}(\alpha,\beta) &= \frac{1}{2\pi}(S_1 + S_2)(S_3 + S_4) & \bar{J}_{ya_{r,s}}(\alpha,\beta) &= \frac{1}{2\pi}(S_7 + S_8)(S_9 + S_{10}) \\
\bar{J}_{xb_{r,s}}(\alpha,\beta) &= \frac{1}{2\pi j}(S_1 + S_2)(S_5 - S_6) & \bar{J}_{yb_{r,s}}(\alpha,\beta) &= \frac{1}{2\pi j}(S_7 + S_8)(S_3 - S_4) \\
\bar{J}_{xc_{r,s}}(\alpha,\beta) &= \frac{1}{2\pi j}(S_7 - S_8)(S_3 + S_4) & \bar{J}_{yc_{r,s}}(\alpha,\beta) &= \frac{1}{2\pi j}(S_{11} - S_{12})(S_9 + S_{10}) \\
\bar{J}_{xd_{r,s}}(\alpha,\beta) &= \frac{-1}{2\pi}(S_7 - S_8)(S_5 - S_6) & \bar{J}_{yd_{r,s}}(\alpha,\beta) &= \frac{-1}{2\pi}(S_{11} - S_{12})(S_3 - S_4)
\end{aligned}$$

avec:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{\sin\left(\frac{W_y}{2}(A_y + \beta)\right)}{A_y + \beta}; & S_2 &= \frac{\sin\left(\frac{W_y}{2}(-A_y + \beta)\right)}{-A_y + \beta}; & S_3 &= \frac{\sin\left(\frac{W_x}{2}(B_x + \alpha)\right)}{B_x + \alpha} \\
S_4 &= \frac{\sin\left(\frac{W_x}{2}(-B_x + \alpha)\right)}{-B_x + \alpha}; & S_5 &= \frac{\sin\left(\frac{W_x}{2}(C_x + \alpha)\right)}{C_x + \alpha}; & S_6 &= \frac{\sin\left(\frac{W_x}{2}(-C_x + \alpha)\right)}{-C_x + \alpha} \\
S_7 &= \frac{\sin\left(\frac{W_y}{2}(B_y + \beta)\right)}{B_y + \beta}; & S_8 &= \frac{\sin\left(\frac{W_y}{2}(-B_y + \beta)\right)}{-B_y + \beta}; & S_9 &= \frac{\sin\left(\frac{W_x}{2}(A_x + \alpha)\right)}{A_x + \alpha} \\
S_{10} &= \frac{\sin\left(\frac{W_x}{2}(-A_x + \alpha)\right)}{-A_x + \alpha}; & S_{11} &= \frac{\sin\left(\frac{W_y}{2}(C_y + \beta)\right)}{C_y + \beta}; & S_{12} &= \frac{\sin\left(\frac{W_y}{2}(-C_y + \beta)\right)}{-C_y + \beta}
\end{aligned}$$

et:

$$A_x = 2(s-1)\pi/W_x$$

$$A_y = C_y = 2r\pi/W_y$$

$$B_x = (2s-1)\pi/W_x$$

$$B_y = 2r\pi/W_y$$

$$C_x = 2s\pi/W_x$$

$$C_y = 2r\pi/W_y$$

## ANNEXE C

### Fonction de Green

### Matrice [A] et [B]

L'équation différentielle à résoudre dans le conducteur s'écrit:

$$\frac{\partial^2 E_z^i(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z^i(x,y)}{\partial y^2} = j\omega\mu_0\sigma E_z^i(x,y) \quad (C-1)$$

avec comme condition aux frontières:

$$E_z^i(x,y) = \begin{cases} E_{z1}^f(x) \text{ en } y = 0; |x| \leq \frac{W}{2} \\ E_{z2}^f(y) \text{ en } x = \pm \frac{W}{2}; 0 \leq y \leq t \\ E_{z3}^f(x) \text{ en } y = t; |x| \leq \frac{W}{2} \end{cases}$$

On applique le théorème de superposition; cherchons  $e_z(x,y)$  solution de (C-1) avec pour conditions:

$$e_z(x,0) = e_z(x,t) = 0 \quad \forall x \in \left[-\frac{W}{t}, \frac{W}{t}\right]$$
$$e_z\left(\frac{W}{2}, y\right) = e_z\left(-\frac{W}{2}, y\right) = E_{z2}^f(y) \quad \forall y \in [0, t]$$

Posons  $e_z(x,y) = f(x)g(y)$ . Il vient:

$$\frac{f''}{f} + \frac{g''}{g} = j\omega\mu_0\sigma$$

Soit:

$$\begin{cases} f'' + mf = 0 \\ g'' + pg = 0 \end{cases} \quad \text{avec:} \quad -(m+p) = j\omega\mu_0\sigma$$

$$* g''(y) + pg(y) = 0 \quad \text{avec } g(0) = g(t) = 0$$

On montre aisément que les solutions telles que  $p < 0$  et  $p = 0$  ne sont pas envisageables, donc  $p > 0$ . Soit  $\mu \in \mathbb{R}^{+*}$  tel que  $\mu^2 = p$ , alors:

$$g(y) = a \cos(\mu y) + b \sin(\mu y)$$

La condition  $g(0) = 0$  impose:  $a = 0$ . Une solution de l'équation différentielle s'écrit alors:

$$g(y) = \sin(k\pi y/t)$$

$$* f''(x) + mf(x) = 0 \quad \text{avec: } m = -[(k\pi/t)^2 + j\omega\mu\sigma] \quad m = j^2\mu_k^2$$

La solution générale s'écrit:

$$f(x) = a \cos(j\mu_k x) + b \sin(j\mu_k x)$$

Les fonctions  $e_z(x, y)$ , de la forme  $f(x)g(y)$ , sont donc:

$$e_{zk}(x, y) = [a_k \cos(j\mu_k x) + b_k \sin(j\mu_k x)] \sin\left(\frac{k\pi}{t} y\right)$$

Cherchons à déterminer les  $a_k$  et  $b_k$  solution du problème, de sorte que:

$$e_z(x, y) = \sum_{k=1}^{+\infty} e_{zk}(x, y)$$

$$\text{quelque soit } y, \quad e_z\left(\pm \frac{W}{2}, y\right) = E_{z2}^f(y) \Rightarrow b_k = 0$$

$$\text{donc:} \quad E_{z2}^f(y) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \operatorname{ch}\left(\mu_k \frac{W}{2}\right) \sin\left(\frac{k\pi}{t} y\right)$$

Soit  $\tilde{E}_{z2}^f(y)$  la fonction impaire de période  $2t$  égale à  $E_{z2}^f(y)$  sur  $[0,t]$ :

$$\forall y \in [0,t], \tilde{E}_{z2}^f(y) = -E_{z2}^f(y)$$

On prolonge par périodicité:

$$E_{z2}^f(y) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin\left(\frac{k\pi}{t}y\right)$$

avec:

$$A_k = \frac{1}{t} \int_{-t}^t E_{z2}^f(y) \sin\left(\frac{k\pi y'}{t}\right) dy' = \frac{2}{t} \int_0^t E_{z2}^f(y') \sin\left(\frac{k\pi y'}{t}\right) dy'$$

$$\text{et} \quad a_k = \frac{A_k}{\text{ch}\left(\mu_k \frac{W}{2}\right)}$$

Finalement, il vient:

$$e_z(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{t} \frac{\text{ch}(\mu_k x)}{\text{ch}\left(\mu_k \frac{W}{2}\right)} \sin\left(\frac{k\pi}{t}y\right) \int_0^t E_{z2}^f(y) \sin\left(\frac{k\pi}{t}y'\right) dy'$$

où:

$$\mu_k^2 = \left(\frac{k\pi}{t}\right)^2 + j\omega\mu\sigma$$

La solution générale du problème interne s'écrit:

$$E_z^i(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{t} \frac{\text{ch}(\mu_{kx} x)}{\text{ch}\left(\mu_{kx} \frac{W}{2}\right)} \sin\left(\frac{k\pi}{t}y\right) \int_0^t E_{z2}^f(y') \sin\left(\frac{k\pi}{t}y'\right) dy'$$

$$+ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{W} \frac{\text{sh}\mu_{ky}(t-y)}{\text{sh}(\mu_{ky}t)} \cdot \sin \frac{k\pi}{W} \left(x + \frac{W}{2}\right) \cdot \int_{-W/2}^{W/2} E_{z1}^f(x') \sin \frac{k\pi}{W} \left(x' + \frac{W}{2}\right) dx'$$

$$+ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2 \operatorname{sh}(\mu_{ky} y)}{W \operatorname{sh}(\mu_{ky} t)} \cdot \sin \frac{k\pi}{W} \left( x + \frac{W}{2} \right) \cdot \int_{-W/2}^{W/2} E_{z3}^f(x') \sin \frac{k\pi}{W} \left( x' + \frac{W}{2} \right) dx'$$

$$\text{avec: } \mu_{kx}^2 = \left( \frac{k\pi}{t} \right)^2 + j\omega\mu\sigma \quad \text{et} \quad \mu_{ky}^2 = \left( \frac{k\pi}{W} \right)^2 + j\omega\mu\sigma$$

La projection des conditions aux limites sur un ensemble de fonctions de base  $P_i$  s'exprime sous la forme:

$$E_{zk}^f(x \text{ ou } y) = \sum_{i=1}^{N_k} E_{zk,i}^f \cdot P_i(x \text{ ou } y); \quad k=1, 2 \text{ ou } 3$$

Les fonctions  $P_i$  sont telles que:

$$P_i = \begin{cases} 1 & \text{sur le } i^{\text{ème}} \text{ segment} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

La discrétisation de la section droite du ruban, associée à cette projection des conditions aux limites permet d'écrire:

$$E_z^i(x_m, y_m) = \sum_{i=1}^{N_1} E_{z1,i}^f A_{1i}(x_m, y_m, x_i, x_{i+1}) \\ + \sum_{i=1}^{N_2} E_{z2,i}^f A_{2i}(x_m, y_m, y_i, y_{i+1}) + \sum_{i=1}^{N_3} E_{z3,i}^f A_{3i}(x_m, y_m, x_i, x_{i+1})$$

avec:

$$A_{li} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sin \left[ \frac{k\pi}{W} \left( x_m + \frac{W}{2} \right) \right] \frac{\operatorname{sh}(\mu_{ky}(t - y_m))}{\operatorname{sh}(\mu_{ky} t)} \cdot \frac{\left[ \cos \frac{k\pi}{W} \left( x_i + \frac{W}{2} \right) - \cos \frac{k\pi}{W} \left( x_{i+1} + \frac{W}{2} \right) \right]}{k\pi / 2}$$

$$A_{2i} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{k\pi}{t} y_m\right) \frac{\text{ch}\left(\mu_{kx} x_m\right)}{\text{ch}\left(\mu_{kx} \frac{W}{2}\right)} \cdot \frac{\left[ \cos\left(\frac{k\pi}{t} y_i\right) - \cos\left(\frac{k\pi}{t} y_{i+1}\right) \right]}{k\pi / 2}$$

$$A_{3i} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sin\left[\frac{k\pi}{W} \left(x_m + \frac{W}{2}\right)\right] \frac{\text{sh}\left(\mu_{ky} y_m\right)}{\text{sh}\left(\mu_{ky} t\right)} \cdot \frac{\left[ \cos\frac{k\pi}{W} \left(x_i + \frac{W}{2}\right) - \cos\frac{k\pi}{W} \left(x_{i+1} + \frac{W}{2}\right) \right]}{k\pi / 2}$$

L'équation intégrale suivante:

$$E_z^f = E_z^{\text{ext}} + \int_S \sigma g(x, y, x', y') E_z^i(x', y') dx' dy'$$

devient dans ces conditions:

$$E_z^f(x_i, y_i) = E_z^{\text{ext}} + \sum_{m=1}^N \sigma g(x_i, y_i, x_m, y_m) E_{z_m}^i S_m$$

$S_m$  correspond à l'aire de la  $n^{\text{ième}}$  division interne.

La fonction de Green  $g$  de notre problème s'identifie au cas d'une ligne de courant située au dessus d'un plan de masse à pertes, elle s'exprime par [\*]:

$$g(x_i, y_i, x_m, y_m) = \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{\sqrt{(x_i - x_m)^2 + (y_i - y_m)^2}}{\sqrt{(x_i - x_m)^2 + (y_i + y_m)^2}}\right) + \int_0^{+\infty} \frac{-2e^{-\lambda y_m}}{u_0 + u_2} e^{-u_0 y_i} \cos\lambda(x_i - x_m) d\lambda$$

avec:

$$u_0 = \sqrt{\lambda^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0}$$

$$u_2 = \sqrt{\lambda^2 + j\omega\mu_0\sigma}$$

[\*] J.R Wait: "Electromagnetic Waves in Stratified Media". Pergamon Press, 1970.

## **BIBLIOGRAPHIE PERSONNELLE**

## **BIBLIOGRAPHIE PERSONNELLE**

C.Delabie, P.Pribetich, P.Kennis: "Modélisation de Structures supraconductrices à Haute Température Critique: Application aux résonateurs". 3<sup>èmes</sup> Journées de la Matière Condensée, 2-4 Septembre 1992, Lille.

C.Delabie, P.Pribetich, P.Kennis: "Outil d'Aide à la Caractérisation des Matériaux Supraconducteurs à Hautes Température Critique aux Fréquences Micro-ondes". 8<sup>èmes</sup> Journées Nationales Microondes, 12-14 Mai 1993, Brest.

C.Delabie, F.Mehri, D. Chauvel, J.C. Carru, Y.Crosnier, P.Kennis: "Impédance de Surface Equivalente de Films Supraconducteurs. Application à la Caractérisation". 3<sup>èmes</sup> Journées de Caractérisation Microondes et Matériaux. Brest. 19-23 Octobre 1994.

C.Delabie, P.Pribetich, P.Kennis: "An Accurate Analysis of High Tc superconducting Microstrip Resonators by two and Three-Fluid Model". MIOP'93, 25-27 May 1993. Fairground Sindelfingen, West Germany.

C.Delabie, F. Mehri, D. Chauvel, D. Chambonnet, C. Belouet, J.C. Carru, Y. Crosnier: " CAD Modelling and Characterization of a Superconducting Planar Microwave Resonator Using Complex Conductivity Measurements". 24th Europ. Microw. Conf., Cannes, 5-8 Sept. 1994.

C.Delabie, Y.Delplanque, P.Pribetich, P.Kennis: " Equivalent Surface Impedance of Superconducting and Regular Strips for Moment Method Analysis of Planar Circuits". 24th Europ. Microw. Conf., Cannes, 5-8 Sept. 1994.

C.Delabie, Y.Delplanque, P.Pribetich, P.Kennis: "Matched loads Simulation Using Ghost Basis Functions for Moment Method Analysis: Applications to Microwave Planar Circuits". MOTL Vol.13, N°7, pp.632-737, Septembre 1994.

Cette étude a pour objectif de développer un code numérique propre à simuler des circuits microruban de forme quelconque, et d'inclure dans cette analyse une modélisation précise des pertes conducteurs, en vue d'une application à la caractérisation des pertes supraconductrices.

Nous avons rappelé dans le premier chapitre les principales étapes de la mise en oeuvre de l'Approche dans le Domaine Spectral dans le cas simple du résonateur microruban rectangulaire. La bonne précision des résultats obtenus nous a amenés à reconsidérer au deuxième chapitre la décomposition de la densité de courant au moyen de fonctions de base définies par sous-domaines, afin de pouvoir traiter des structures de forme quelconque.

Nous présentons dans ce chapitre un formalisme original permettant la modélisation de terminaisons sans réflexion basées sur la simulation de lignes de longueur infinie à l'aide de fonctions de base "fantômes". L'application de cette technique à la détermination de l'impédance d'entrée d'un dipôle ou aux paramètres S de multipôles est présentée.

Dans le troisième chapitre nous présentons une analyse numérique qui nous permet de préciser la répartition du champ électromagnétique au sein d'un ruban métallique ou supraconducteur.

Cette analyse permet de définir une impédance de surface équivalente en effectuant les bilans de puissances active et réactive au sein du ruban. Quelques résultats typiques sont présentés. Nous disposons dès cet instant d'un outil capable de prendre en compte l'ensemble des phénomènes de pertes présentes dans les structures microruban.

L'application de ce formalisme à la caractérisation des matériaux supraconducteurs s'opère en procédant par ajustement des courbes théoriques et expérimentales. Quatre résonateurs différents en YBaCuO et TlBaCaCuO ont été étudiés. Les paramètres des modèles à deux et trois fluides sont déterminés pour la conductivité complexe des matériaux supraconducteurs. Nous obtenons dans chaque cas des valeurs proches de celles précédemment mesurées par d'autres méthodes sur les mêmes échantillons.