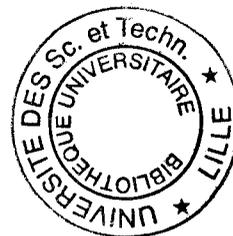


50376  
1994  
331

No: 1414



# THESE

présentée à

l'Université des Sciences et Technologies de Lille

pour obtenir le grade de

Docteur en Productique, Automatique, et Informatique Industrielle

par

**Dimitri LEFEBVRE**

Ingénieur IDN

## COMMANDE PAR PRECOMPENSATION DYNAMIQUE DES SYSTEMES GENERALISES

Travail préparé au:

Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle de Lille

URA CNRS D1440

Ecole Centrale de Lille

Villeneuve d'Ascq, France.

- Président: P.BORNE (Professeur, LAIL, EC Lille)
- Rapporteurs: J.BERNUSSOU (Directeur de recherches, LAAS, Toulouse)  
M.MALABRE (Directeur de recherches, LAN, EC Nantes)
- Examineurs: P.BORNE (Professeur, LAIL, EC Lille)  
J.P. RICHARD (Professeur, LAIL, EC Lille)  
F. ROTELLA (Professeur, ENI, Tarbes)  
J.P. CASSAR (Maître de conférences, Lille 1)

Soutenue le 14 Décembre 1994

à l'Ecole Centrale de Lille

Directeur de thèse: F. ROTELLA (Professeur, ENI, Tarbes)

## Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au Laboratoire d'Automatique et Informatique Industrielle de Lille, à l'Ecole Centrale de Lille.

Je tiens en premier lieu à remercier Frédéric ROTELLA, Professeur à l'ENI de Tarbes et Directeur de Recherches de ces travaux. Par sa disponibilité de tous les instants, par l'intérêt qu'il a motivé en moi, mais aussi par les débats d'idées qu'il a su provoquer, par son ouverture d'esprit, et surtout par une gentillesse et un enthousiasme qu'il n'a jamais compté, il a été mon meilleur soutien: celui des instants de réussite et celui des moments difficiles. A la fois guide et ami, je veux avec ces quelques mots lui exprimer toute ma gratitude.

Qu'il me soit ensuite permis de remercier très vivement, Monsieur le Professeur Pierre BORNE, Directeur Scientifique de l'Ecole Centrale de Lille, pour son accueil toujours chaleureux et pour la confiance qu'il m'a témoigné. Je lui suis très reconnaissant d'avoir accepté d'assurer la Présidence du jury de thèse.

Je tiens à exprimer ma très vive reconnaissance à Messieurs Jacques BERNUS-SOU, et Michel MALABRE, Directeurs de Recherches au C.N.R.S. qui, malgré les lourdes charges qui leur incombent, ont accepté spontanément d'être rapporteurs de ce mémoire. Je les remercie pour l'attention qu'ils ont porté à ces travaux et pour leurs remarques et conseils avisés qui m'ont permis d'approfondir plusieurs points de ce mémoire.

Je tiens également à exprimer toute ma gratitude à Monsieur le Professeur Jean Pierre RICHARD pour avoir accepté de participer à ce jury, mais surtout pour son soutien amical et pour l'intérêt qu'il a toujours porté à ces travaux de recherche.

Qu'il me soit enfin permis de remercier Monsieur Jean Philippe CASSAR pour l'honneur qu'il me fait en acceptant d'être membre de ce jury.

D'autre part, je remercie l'ensemble du personnel du LAIL pour l'ambiance cordiale et chaleureuse qu'il entretient au sein du laboratoire, et j'exprime ma reconnaissance à Mesdemoiselles Muriel SELSIS et Aude GOUBET, ainsi que Messieurs Michel DAMBRINE, Wilfrid PERRUQUETTI, et Wiharjo SUDARNO pour les échanges fructueux que nous avons eu sur divers aspects de l'Automatique. Enfin, que soit remercié "Max", de l'imprimerie de l'Ecole Centrale de Lille, pour sa gentillesse et la qualité des reprographies de ce mémoire ainsi que des autres travaux effectués au cours de ces deux années de thèse.

*... et comment nous garder alors de nous enorgueillir  
de nos théories favorites actuelles qui seront sans doute  
un jour sans importance? Les passions intellectuelles  
honnêtes méritent toujours notre respect.*

S.J. Gould

*à Myriam, Jean, et Muriel*



# Table des matières

<b>Chapitre 1: Introduction</b>	9
<b>1 Modèle d'état généralisé</b>	11
1.1 Définition	11
1.2 Existence et unicité de la solution	12
1.3 Petits détours historiques	12
<b>2 Quelques motivations</b>	13
2.1 Applications dans la théorie des systèmes	13
2.1.1 Linéarisation des systèmes implicites	13
2.1.2 Interconnection de sous-systèmes	14
2.1.3 Commande optimale	15
2.1.4 Inversion de systèmes dont la sortie est spécifiée	15
2.1.5 Perturbations singulières	16
2.1.6 Systèmes à structure variable	16
2.2 Modélisation de processus	17
2.2.1 Circuits électriques	17
2.2.2 Robotique	18
2.2.3 Economie	19
2.2.4 Démographie	19
<b>3 Présentation du mémoire</b>	20
<b>Chapitre 2: Analyse dans l'espace d'état</b>	23
<b>1 Un petit exemple introductif</b>	25
<b>2 Formes canoniques et séparation des dynamiques</b>	29
2.1 Relations d'équivalence	29
2.1.1 Equivalence de matrices et de faisceaux de matrices	29
2.1.2 Equivalence de systèmes	30
2.2 Formes canoniques	31
2.2.1 Forme standard	31
2.2.2 Forme de Smith	32
2.3 Séparation des dynamiques	33

<b>3 Réponse temporelle</b>	35
3.1 Résolution du sous-système exponentiel	35
3.2 Résolution du sous-système impulsionnel	35
3.3 Compatibilité des conditions initiales	36
<b>4 Commandabilité des systèmes généralisés</b>	37
4.1 Atteignabilité	37
4.2 C-commandabilité	37
4.3 R-commandabilité et commandabilité du sous-système rapide	38
4.4 I-commandabilité	39
<b>5 Observabilité des systèmes généralisés</b>	40
5.1 C-observabilité	40
5.2 R-observabilité et observabilité du sous-système rapide	41
5.3 I-observabilité	42
<b>6 Conclusion</b>	43
<b>Chapitre 3: Précompensation dynamique et élimination des modes impulsionnels</b>	45
<b>1 Introduction</b>	47
<b>2 Elimination des discontinuités par retour sur <math>x</math></b>	48
2.1 Retour proportionnel	48
2.2 Retour proportionnel plus dérivé	49
2.2.1 Retour PD et normalisation	49
2.2.2 Retour PD et placement de tous les pôles	50
<b>3 Précompensation dynamique et forme augmentée</b>	51
3.1 Systèmes mono-entrée	51
3.2 Systèmes multi-entrées	54
3.2.1 Construction d'un précompensateur réduit	55
3.2.2 Minimalité du précompensateur	57
3.2.3 Réalisation de $H(s)$ et forme augmentée multi-entrées	59
3.2.4 Résumé de l'algorithme complet	64
<b>4 Exemple</b>	65
<b>5 Structure à l'infini</b>	68
5.1 Détermination de la structure à l'infini	68
5.2 Application à la précompensation	69
<b>6 Conclusion</b>	74

---

<b>Chapitre 4: Placement de pôles et stabilisation</b>	77
<b>1 Introduction</b>	79
<b>2 Stabilisation par retour sur <math>x</math></b>	80
2.1 Placement des modes impulsionnels	80
2.2 Stabilisation d'un système sans mode impulsionnel	81
2.3 Stabilisation d'un système I-commandable	81
2.4 Exemple	82
<b>3 Commandabilité et observabilité de la forme augmentée</b>	84
3.1 Réalisation minimale de $H(s)$	84
3.2 Commandabilité de la forme augmentée mono-entrée	85
3.3 Réalisation minimale de $G(s)H(s)$	86
<b>4 Placement de pôles</b>	87
4.1 Placement des pôles du précompensateur	87
4.2 Placement des pôles du système compensé	88
<b>5 Conclusion</b>	92
<b>Chapitre 5: Observation des systèmes généralisés</b>	95
<b>1 Introduction</b>	97
<b>2 Quelques observateurs pour les systèmes généralisés</b>	98
2.1 Observateurs singuliers	98
2.2 Observateurs de la forme de Smith	99
2.3 Inverse de Moore-Penrose de $C$	101
<b>3 Observation du système compensé</b>	102
3.1 Observation de $z$	103
3.2 Observateur d'ordre plein de $x_1$	104
3.3 Observateur réduit de $x_1$	105
<b>4 Exemple</b>	107
<b>5 Implantation d'un observateur-régulateur</b>	108
<b>6 Conclusion</b>	111

---

<b>Chapitre 6: Découplage des systèmes généralisés</b>	113
<b>1 Introduction</b>	115
<b>2 Découplage des systèmes généralisés</b>	116
2.1 Découplage par retour proportionnel	116
2.2 Découplage par retour proportionnel plus dérivé	118
<b>3 Découplage de la forme augmentée</b>	119
3.1 Découplage par retour d'état	119
3.1.1 CNS de découplage	119
3.1.2 Détermination de la commande	120
3.1.3 Exemple	120
3.2 Découplage par précompensation et retour d'état	121
3.2.1 CNS de découplage	121
3.2.2 Détermination du précompensateur	121
<b>4 Exemple</b>	122
<b>5 Conclusion</b>	125
<b>Chapitre 7: Commande optimale</b>	127
<b>1 Introduction</b>	129
<b>2 Cas des systèmes I-commandables</b>	130
2.1 Elimination des modes impulsionnels	130
2.2 CNS d'existence de la commande optimale	131
2.3 Détermination de $u^*$	133
2.3.1 Simplification du critère	133
2.3.2 Détermination de $w^*$	134
<b>3 Cas général</b>	135
3.1 Précompensation	135
3.2 CNS d'existence de la commande optimale	135
3.3 Détermination de $v^*$	139
<b>4 Conclusion</b>	140

---

<b>Chapitre 8: Exemple</b>	143
1 Description du système	145
2 Calcul de la forme augmentée	145
3 Observation de la forme augmentée	148
4 Découplage de la forme augmentée	149
5 Commande optimale	150
6 Implantation de la commande	151
<b>Conclusion générale</b>	153
<b>Annexe 1: Détermination de la forme standard</b>	157
1 Résultat principal	160
2 Détermination de la forme standard	161
3 Exemple	164
<b>Annexe 2: Procédures MATLAB</b>	167
<b>Notations</b>	179
<b>Bibliographie</b>	181



## 1. INTRODUCTION

L'objectif de ce chapitre est de répondre aux questions les plus élémentaires que le lecteur est en droit de se poser. Qu'est-ce qu'un système généralisé? Pourquoi étudier de tels systèmes?

Ce chapitre regroupe les définitions de base, quelques rappels historiques, et différentes applications concernant les systèmes généralisés. Dans la conclusion nous décrivons sommairement la structure de la suite de notre mémoire.



L'introduction, à la fin des années 50, de la notion de variable interne, a permis de réaliser de nombreux progrès dans la modélisation des processus, notamment grâce au développement d'outils d'analyse et de commande plus performants. La méthode consiste à choisir différentes grandeurs, fonction du temps, comme la vitesse, l'accélération, la masse, ou encore la température, en nombre suffisant pour caractériser le système que l'on veut décrire. Ces variables sont regroupées dans un vecteur noté  $x$ , et le modèle mathématique est obtenu en établissant les relations différentielles ou algébriques qui existent entre les différentes composantes de  $x$ . Le modèle implicite obtenu :

$$\begin{aligned} E(\dot{x}(t), x(t), u(t), t) &= 0, \\ S(x(t), u(t), y(t), t) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

doit être aussi simple que possible, mais cependant assez complet pour traduire le comportement observé du système étudié.

## 1 Modèle d'état généralisé

### 1.1 Définition

Le modèle d'état généralisé correspond à une simplification de l'équation (1), lorsque les relations algébriques ou différentielles qui lient les variables internes sont toutes linéaires à coefficients constants.

On appelle modèle d'état généralisé sous forme continue :

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), & (a) \\ y(t) &= Cx(t), & (b) \end{aligned} \quad (2)$$

et modèle d'état généralisé sous forme discrète :

$$\begin{aligned} Ex_{k+1} &= Ax_k + Bu_k, \\ y_k &= Cx_k. \end{aligned} \quad (3)$$

$x$  est le vecteur de dimension  $n$  des variables internes,  $u$  le vecteur de dimension  $p$  des variables d'entrée,  $y$  le vecteur de dimension  $q$  des variables de sortie,  $E$  une matrice de rang  $r$ .

Ce système est appelé régulier lorsque la matrice  $E$  est carrée et que  $r = n$ . Dans ce cas, la multiplication à gauche de l'équation (2a) par  $E^{-1}$  permet de se ramener à la représentation dans l'espace d'état :

$$\dot{x}(t) = E^{-1}Ax(t) + E^{-1}Bu(t),$$

qui est bien connue, et dont il ne sera pas question ici. On supposera dans la suite que  $r < n$ .

## 1.2 Existence et unicité de la solution

On supposera en outre que le système étudié possède une et une seule solution. L'utilisation de la transformée de Laplace du système ( 2):

$$\begin{aligned}(sE - A)X(s) &= Ex(0) + BU(s), \\ Y(s) &= CX(s),\end{aligned}\tag{4}$$

nous donne une condition nécessaire et suffisante d'existence et d'unicité de la solution dans le cas où les matrices  $E$  et  $A$  sont carrées:

$$\Delta = \det (sE - A) \neq 0.\tag{5}$$

Dans la suite on supposera que  $\Delta$  n'est pas identiquement nul, et on appellera  $d$  le degré de  $\Delta$ . Outre  $n$ , les entiers  $d$  et  $r$  caractérisent la structure du modèle obtenu, et apportent de précieux renseignements sur le comportement du système.

## 1.3 Petits détours historiques

En consultant la bibliographie, on peut être surpris par la multitude de qualificatifs différents utilisés pour faire référence à un même modèle: système généralisé, système singulier, système sous forme descriptive, système algébro-différentiel, ou encore représentation par semi-état. Les motivations des chercheurs, leur culture scientifique, et le contexte dans lequel ils ont mené leurs travaux, sont autant de raisons qui expliquent cette variété. Un bref rappel historique s'impose.

Weierstrass [96] développe, en 1867, la théorie des diviseurs élémentaires du faisceau  $(sE - A)$  dans le cas où  $\Delta$  n'est pas identiquement nul. Il est à l'origine des travaux sur les systèmes généralisés. Kronecker [39] complète, en 1890, ces résultats en traitant le cas  $\Delta = 0$ , et Gantmacher [35] donne, en 1959, l'état de l'art dans le chapitre 12 de *Théorie des Matrices*. Ce n'est cependant que dans les années 70 que débute véritablement l'étude des systèmes généralisés. Les travaux se développent selon deux axes différents.

Dans le domaine fréquentiel, Rosenbrock [70] étudie, en 1974, les propriétés des systèmes linéaires dynamiques, et définit notamment la notion de zéro à l'infini. Quelques années plus tard, en 1978, Verghese [90] présente son doctorat intitulé *Infinite-frequency behavior in generalized dynamical systems*, où il montre comment de tels systèmes peuvent présenter un comportement impulsionnel. En fait, Rosenbrock et Verghese étudient les mêmes systèmes décrits par l'équation ( 2). Le nom choisi par Verghese est motivé par le lien étroit qui existe entre l'étude structurelle de ( 2), et le problème généralisé de recherche des valeurs propres de  $(E, A)$ :  $\lambda Ev = Av$ . Ce qualificatif 'généralisé' insiste, en outre, sur le fait que l'étude des systèmes ( 2) peut être considérée comme une généralisation des problèmes rencontrés avec les systèmes réguliers. D'autres résultats structurels sont développés par Lewis et Ozcaldiran [49], en 1983 et Aplevich en 1991 [2].

Simultanément, une autre série de travaux est menée dans le domaine temporel. Luenberger [55], en 1977, Yip et Sinavec [98], en 1981 parlent de **systèmes sous**

**forme descriptive.** Des notions de commandabilité et d'observabilité sont définies. Ce nom de système sous forme descriptive sera repris par Cobb [22], en 1980, qui montre lui aussi que le système admet des modes impulsionnels. A la même époque, Pandolfi [66] écrit différents articles sur les **systèmes algébro-différentiels**. Il s'agit encore et toujours du même modèle correspondant à l'équation ( 2). Par ailleurs un autre qualificatif est en train de s'imposer: celui de **système singulier**. Dès 1976, Campbell [15] propose: **systèmes différentiels avec des coefficients singuliers**. Ce nom rapidement contracté en systèmes singuliers, repris par la suite par tous les chercheurs qui abordent le problème par le biais des perturbations singulières, devient le titre de l'ouvrage de Dai [27] qui offre un panorama des principaux résultats obtenus à ce jour. Notons pour finir que Newcomb [64], en 1982, motivé par des travaux de modélisation en électricité, introduit la notion de **représentation par semi-état**.

Pour notre part, nous avons retenu le terme de système généralisé. En plus des raisons invoquées plus haut, ce choix traduit notre volonté de se prémunir contre certains abus de langage. La description à l'aide de variables internes est trop souvent associée à la notion d'état, pour ne pas être tenté de les confondre. Ici, et tout au long de ce mémoire, il conviendra de faire la distinction entre  $x$ , qui est l'ensemble des variables internes, et  $Ex$ , qui représente l'état du système.

## 2 Quelques motivations

L'objectif de cette section est de cerner la diversité des applications qui font appel aux systèmes généralisés. Il ne s'agit pas d'en donner une liste exhaustive, mais de montrer, au moyen d'exemples précis, la grande variété de domaines où les systèmes généralisés ont fait leur apparition.

### 2.1 Applications dans la théorie des systèmes

On peut regrouper dans ce premier champ d'applications, différentes méthodes qui bien qu'opérant sur des systèmes réguliers, font apparaître dans leur développement des systèmes généralisés.

#### 2.1.1 Linéarisation de systèmes implicites

La linéarisation de l'équation implicite [73]:

$$f(\dot{x}(t), x(t), u(t)) = 0,$$

autour du point de fonctionnement stationnaire  $(x_0, u_0)$  tel que  $f(0, x_0, u_0) = 0$  conduit à l'équation suivante:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right]_{x_0, u_0} d\dot{x} + \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{x_0, u_0} dx + \left[\frac{\partial f}{\partial u}\right]_{x_0, u_0} du = 0.$$

En définissant:

$$E = \left[ \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right]_{x_0, u_0}, \quad A = - \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{x_0, u_0}, \quad B = - \left[ \frac{\partial f}{\partial u} \right]_{x_0, u_0},$$

on obtient le modèle généralisé:

$$E d\dot{x} = A dx + B du.$$

L'application des méthodes développées pour les systèmes généralisés permet de traiter ce type de problème sans faire d'hypothèse sur la régularité de  $E$ , c'est-à-dire sans tenir compte de la nature du point  $(x_0, u_0)$  où l'on a fait la linéarisation.

### 2.1.2 Interconnection de sous-systèmes

Les systèmes généralisés apparaissent naturellement lorsque l'on considère l'interconnection de plusieurs systèmes réguliers [71,73,82,93].

Considérons  $k$  sous-systèmes décrits dans leur espace d'état  $x_1, \dots, x_k$ , soumis à  $k$  commandes  $v_1, \dots, v_k$ , et pour lesquels on s'intéresse aux  $k$  sorties  $z_1, \dots, z_k$ :

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= F_i x_i + G_i v_i, \quad i = 1, \dots, k, \\ z_i &= H_i x_i + D_i v_i. \end{aligned}$$

Si on considère les vecteurs  $X = (x_1^T, \dots, x_k^T)^T$ ,  $V = (v_1^T, \dots, v_k^T)^T$ , et  $Z = (z_1^T, \dots, z_k^T)^T$ , on obtient:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= FX + GV, \\ Z &= HX + DV, \end{aligned}$$

avec  $F = \text{diag} \{F_i\}$ ,  $G = \text{diag} \{G_i\}$ ,  $H = \text{diag} \{H_i\}$ , et  $D = \text{diag} \{D_i\}$ , pour  $i = 1, \dots, k$ . L'interconnection entre ces différents sous-systèmes, le vecteur d'entrée globale  $U$ , et le vecteur de sortie globale  $V$ , peut être modélisée par:

$$\begin{aligned} V &= KZ + MU + NY, \\ Y &= PZ + QU + RV. \end{aligned}$$

Considérons pour finir le vecteur  $\chi = (X^T, Z^T, V^T, Y^T)^T$ . Ce vecteur vérifie l'équation:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{\chi} &= \begin{pmatrix} F & 0 & G & 0 \\ H & -I & D & 0 \\ 0 & K & -I & N \\ 0 & P & R & -I \end{pmatrix} \chi + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M \\ Q \end{pmatrix} U, \\ Y &= (0 \quad 0 \quad 0 \quad I) \chi, \end{aligned}$$

qui est celle d'un système généralisé.

### 2.1.3 Commande optimale

Considérons le système régulier:

$$\dot{\xi} = F\xi + Gv,$$

pour lequel on veut minimiser le coût quadratique

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \begin{pmatrix} \xi \\ v \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ v \end{pmatrix} dt,$$

avec:

$$\begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{pmatrix}^T \geq 0.$$

Le principe du maximum permet d'écrire la condition nécessaire d'optimalité:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= -F^T \lambda - Q\xi - S^T v, & (a) \\ 0 &= C^T \lambda + S\xi + Rv, & (b) \end{aligned} \tag{6}$$

avec  $\lambda$  le vecteur état adjoint. Dans le cas où la matrice  $R$  est singulière, la commande optimale  $v$  ne peut être isolée dans l'équation (6b). Cependant le système optimal peut toujours être réécrit à l'aide d'un système généralisé [16,73]. Soit  $x = (\xi^T, \lambda^T, v^T)^T$ :

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{x} = \begin{pmatrix} F & 0 & G \\ -Q & -F^T & -S^T \\ S & C^T & R \end{pmatrix} x.$$

### 2.1.4 Inversion de systèmes dont la sortie est spécifiée

Le problème consiste à trouver la commande  $v$ , pour que le système:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + Du, \end{aligned}$$

ait la sortie spécifiée  $y = y_c$ . En considérant le vecteur  $\chi = (x^T, u^T)^T$ , on obtient le système [73]:

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{\chi} = \begin{pmatrix} A & B \\ -C & -D \end{pmatrix} \chi + \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} y,$$

$$Y = (0 \quad I) \chi,$$

dont la solution existe et est unique si la matrice de transfert du système initial est de rang plein [7]. Dans ce cas la sortie  $Y$  est la commande à appliquer en entrée  $u$  du système initial.

### 2.1.5 Perturbations singulières

La méthode des perturbations singulières [16,38,57,71,73,84,93] permet de découpler un système pour lequel des dynamiques différentes ont été mises en évidence. Ces systèmes sont caractérisés par une équation d'état dans laquelle un paramètre  $\epsilon \in [0, 1[$  a été introduit:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \epsilon \dot{x}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u, \\ y &= (C_1 \quad C_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7)$$

Les composantes regroupées dans  $x_1$  sont lentes et évoluent à l'échelle des temps  $T$ . Celles regroupées dans  $x_2$  sont rapides et évoluent à l'échelle des temps dilatée  $\tau = T/\epsilon$ .

Lorsque la matrice  $A_{22}$  est inversible, le modèle est dit sous forme explicite, et on obtient les modèles découplés lents et rapides en écrivant  $\epsilon = 0$ .  $x_2$  s'exprime alors en fonction de  $x_1$  et  $u$ .

Lorsque la matrice  $A_{22}$  est non inversible, le système est dit sous forme implicite, le découplage entre  $x_1$  et  $x_2$  n'est plus possible. et la modélisation doit être reconsidérée. Cependant, on peut également considérer le système (7) comme un système généralisé, pour lequel il existe des outils d'analyse spécifiques.

### 2.1.6 Système à structure variable

Un système généralisé rectangulaire comportant davantage de variables d'état que de relations algebro-différentielles permet de modéliser à l'aide d'une unique équation plusieurs comportements. On appelle ce type de modélisation: système à structure variable. Considérons l'exemple suivant [8]:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} u, \\ y &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x. \end{aligned}$$

Si on interprète la troisième composante de l'état comme une entrée supplémentaire  $e$ , nous obtenons les équations suivantes:

$$\begin{aligned} y_1 &= \dot{u} + e + \dot{e}, \\ y_2 &= e, \end{aligned}$$

qui correspondent à un comportement impulsionnel.

En revanche, si on interprète la seconde composante de l'état comme une entrée supplémentaire  $e$ , nous obtenons les équations suivantes:

$$\begin{aligned} y_1 &= e, \\ \dot{y}_2 + y_2 &= -\dot{u} + e, \end{aligned}$$

qui correspondent à un comportement exponentiel.  
 Dans les deux cas, la relation entrées-sorties est la même:

$$\dot{y}_2 + y_2 - y_1 + \dot{u} = 0.$$

## 2.2 Modélisation de processus

Ce second champ d'applications regroupe différents exemples où les systèmes généralisés apparaissent en tant que modèle de processus.

### 2.2.1 Circuits électriques

La modélisation de circuits électriques est certainement le domaine où les exemples de systèmes généralisés se trouvent en plus grand nombre [8,16,29,50,63,64,73,74,93].  
 Considérons le circuit suivant:

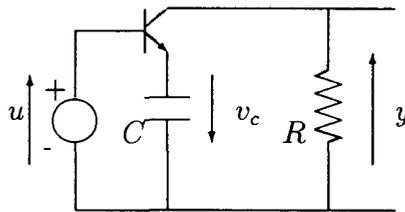


Fig. 1.1: circuit électrique avec transistor

et son schéma équivalent:

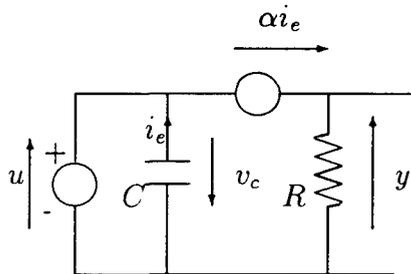


Fig. 1.2: schéma équivalent

Pour étudier les variations de la tension  $y$ , considérons les équations de ce circuit:

$$\begin{aligned} i_e &= C v_c, \\ v_c &= -u, \\ y &= -v_c + \alpha i_e = R \alpha i_e. \end{aligned}$$

En définissant le vecteur des variables internes  $x = (v_c, i_e)^T$ , on obtient:

$$\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u,$$

$$y = (0 \quad R\alpha) \begin{pmatrix} v_c \\ i_e \end{pmatrix}.$$

La non régularité de la matrice  $E$  a une signification physique. En effet, à moins que  $v_c(0) = -u(0)$ , et  $i_e(0) = 0$ , il y aura une impulsion à  $t = 0$ , lorsque l'on met le circuit sous tension.

### 2.2.2 Robotique

Considérons un bras manipulateur, constitué de  $n$  liaisons, qui maintient une charge de masse  $m$  en équilibre.

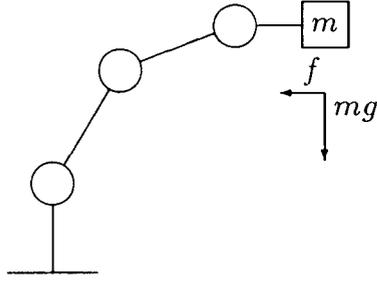


Fig. 1.3: robot manipulateur

Soit  $p$  le vecteur position de la charge  $m$ , et  $q$  le vecteur des variables internes qui définissent l'état du robot. Les équations du mouvement sont obtenues en considérant la force  $f$  que le bras exerce sur la masse.

$$\begin{aligned} M(q)\ddot{q} + G(q, \dot{q}) &= T + J^T(q)f, & (a) \\ m\ddot{p} &= -f - mg, & (b) \\ p &= H(q). & (c) \end{aligned} \quad (8)$$

L'équation (8a) correspond au mouvement du robot, l'équation (8b) à celui de la masse et l'équation (8c) à la liaison robot-masse assurée par une pince bloquante. Précisons d'autre part que  $M(q)$  est la matrice d'inertie du robot,  $G(q, \dot{q})$  est la matrice des forces de Coriolis, centrifuges, et gravitationnelles, et que  $J(q) = \partial H / \partial q$ . En considérant le vecteur  $x = (q^T, p^T, f^T)^T$ , on obtient [56,73]:

$$\begin{pmatrix} M(q) & 0 & 0 \\ 0 & mI & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ddot{x} = \begin{pmatrix} -G(q, \dot{q}) + T + J^T(q)f \\ -f - mg \\ H(q) - p \end{pmatrix}.$$

qui est un système généralisé non linéaire.

### 2.2.3 Economie

Le modèle de Léontief est un modèle dynamique, capable de simuler une activité économique multi-secteurs [16,55,73]. Considérons une entreprise que l'on a divisé en  $n$  secteurs, correspondant à  $n$  unités de production différentes. On appelle  $x_k^i$  la quantité de produit  $i$  relative au  $i$ -ième secteur, produite durant la  $k$ -ième période;  $d_k^i$  est l'objectif de production, en produit  $i$ , durant la  $k$ -ième période, exceptée la quantité de produit  $i$  réinvestie dans la production des autres secteurs;  $p_{ij}$  est la quantité de produit  $i$  que le secteur  $j$  doit posséder pour produire 1 unité de produit  $j$ ;  $t_{ij}$  est la proportion de produit  $j$  qui est utilisée pour produire  $i$  durant la  $k$ -ième période.

En définissant  $x_k = (x_k^1, \dots, x_k^n)^T$ ,  $d_k = (d_k^1, \dots, d_k^n)^T$ ,  $P = (p_{ij})$ , et  $T = (t_{ij})$ , on obtient:

$$x_k = Tx_k + P(x_{k+1} - x_k) + d_k,$$

qui peut être récrit sous la forme:

$$Px_{k+1} = (I + P - T)x_k - d_k.$$

Si un secteur produit une marchandise non réutilisée par les autres secteurs, la colonne correspondante dans la matrice  $P$  est une colonne de 0, et la matrice  $P$  est alors singulière. Le modèle de Léontief correspond dans ce cas à un système généralisé discret.

### 2.2.4 Démographie

Le modèle de Leslie permet de simuler l'évolution de la distribution d'une population partitionnée par tranche d'âge. On suppose connus les taux de naissance et de mortalité, et, en outre, on se donne une distribution initiale des classes d'âge. Le modèle de Leslie est un modèle discret dont chaque pas correspond à une unité de temps  $\Delta t$ , comptée à partir de l'instant initial  $t_0$ . On appelle classe d'âge  $A_i$  l'intervalle  $]i\Delta t, (i+1)\Delta t]$ , pour  $i$  variant entre 0 et  $m-1$  ( $m\Delta t$  est l'âge maximal qu'un individu peut atteindre), et  $k$  l'instant  $t_k = t_0 + k\Delta t$ . On dit qu'un individu appartient à la classe  $A_i$  à l'instant  $k$ , si l'individu est en vie à cet instant et si son âge appartient à l'intervalle  $A_i$ ;  $n_i(k)$  est le nombre d'individus qui appartiennent à la classe  $A_i$  à l'instant  $k$ . On définit, en outre,  $p_i(k)$  le taux de survie, c'est-à-dire la probabilité pour un individu qui appartient à  $A_i$  à l'instant  $k$ , d'appartenir à  $A_{i+1}$  à l'instant  $k+1$ , et  $b_i(k)$  le taux de naissance, c'est-à-dire le nombre moyen de descendants, nés dans l'intervalle  $]k, k+1]$ , d'un individu appartenant à  $A_i$  à l'instant  $k$ .

Soient [16]:

$$n(k) = \begin{pmatrix} n_0(k) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ n_{m-1}(k) \end{pmatrix}, \quad T(k) = \begin{pmatrix} b_1(k) & \dots & \dots & \dots & b_m(k) \\ p_1(k) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & p_{m-1}(k) & 0 \end{pmatrix}.$$

Supposons que l'on connaisse la distribution à l'instant  $k$ , on peut l'estimer à l'instant  $k + 1$ :

$$n(k + 1) = T(k)n(k).$$

Lorsque l'effectif d'une population est modifié par d'autres causes que les naissances et les décès (l'immigration par exemple), le modèle devient:

$$n(k + 1) = T(k)n(k) + f(k + 1).$$

Le modèle de Leslie est le plus souvent utilisé pour estimer la distribution d'une population dans le passé au regard de la distribution présente. Lorsque la matrice  $T$  est régulière ce problème est facilement résolu, dans les autres cas, on a affaire au système généralisé discret:

$$T(k)n(k) = n(k + 1) - f(k + 1).$$

### 3 Présentation du mémoire

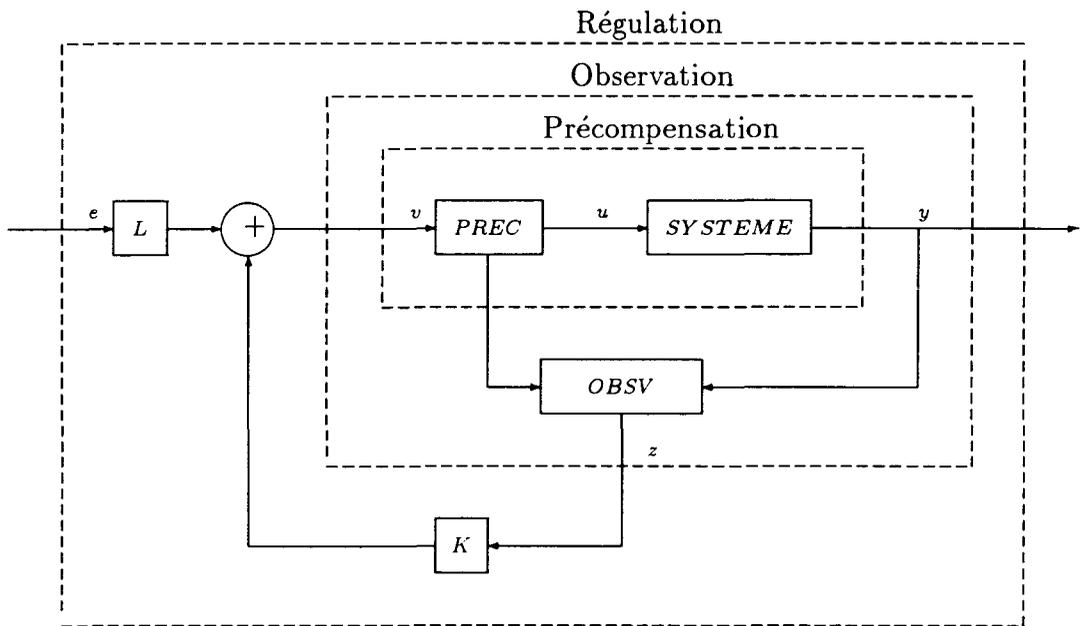
Les diverses applications présentées justifient l'étude de la commande des systèmes généralisés. Mais si différentes classes ont été évoquées: systèmes continus ou discrets, linéaires ou non, stationnaires ou non, nous nous restreindrons uniquement aux systèmes généralisés linéaires stationnaires continus, pour lesquels nous allons développer des méthodes de commande basées sur la notion de précompensation dynamique.

La suite du mémoire est divisée en 7 chapitres. Dans le chapitre 2, les principaux outils d'analyse pour les systèmes généralisés sont rappelés. Différentes formes canoniques sont décrites et exploitées pour séparer les dynamiques présentes dans le modèle initial. En outre, une forme générale de la solution est explicitée. Pour finir, des notions de commandabilité et d'observabilité relatives à chaque type de dynamique sont définies. Le chapitre 3 traite de l'élimination des comportements impulsionnels. La question est la suivante: étant donné un système généralisé, quel régulateur dynamique ou statique faut-il lui adjoindre pour supprimer les comportements impulsionnels? Différentes méthodes sont proposées selon les conditions remplies par le système initial: utilisation d'un retour d'état pour un système dont les modes impulsionnels sont commandables, utilisation d'un précompensateur dynamique dans le cas général. Un algorithme de construction qui minimise l'ordre du régulateur est proposé, et une réalisation du système compensé, appelée forme augmentée, est décrite. Le lien avec la structure à l'infini du système initial est donné. Parce que le système compensé est instable, nous nous intéressons dans le chapitre 4 à la stabilisation par retour d'état, et plus généralement au placement de pôles. Des conditions garantissant la commandabilité et l'observabilité de la forme augmentée sont énoncées, et la commande par retour d'état est décrite. Une telle commande n'est intéressante que dans la mesure où un observateur de l'état peut être réalisé. Cette réalisation fait l'objet du chapitre 5. Des observateurs d'ordre plein et réduit sont proposés. Dans le chapitre 6 nous abordons le problème du

découplage. Une commande par précompensation dynamique plus retour d'état est proposée. Pour les systèmes faiblement couplés, un précompensateur dynamique supplémentaire, construit à l'aide de l'algorithme de structure entrées-sorties de Silverman, est nécessaire. La similarité entre cet algorithme et celui que nous proposons est utilisée afin de détailler un régulateur global qui élimine les comportements impulsionnels et permet le découplage. Le chapitre 7 est consacré aux problèmes de commande optimale à coût quadratique. Les méthodes proposées agissent en trois temps. Elles éliminent les comportements impulsionnels, transforment le critère de façon équivalente, et enfin minimisent le nouveau critère obtenu. Des commandes par retour d'état, ou par précompensation et retour d'état sont appliquées selon les hypothèses vérifiées par le système initial. Dans le chapitre 8 nous présentons un exemple qui illustre les principaux résultats obtenus. Une annexe est consacrée à la présentation des méthodes qui permettent d'obtenir la forme standard.

Dans un souci de clarté, chaque chapitre débute par un bref résumé de son contenu et par une synthèse des principaux résultats ayant trait au sujet abordé. D'autre part, de façon à ce que ces résultats puissent être utilisés très facilement, nous proposons, à la fin de chaque chapitre, des fonctions MATLAB associées à toutes les méthodes que nous présentons au cours de ce mémoire, que ce soit en ce qui concerne la modélisation, l'analyse, ou la conception de régulateurs pour les systèmes linéaires généralisés. Les programmes détaillés de ces fonctions sont regroupés dans un chapitre annexe à la fin du mémoire, et d'un point de vue plus technique les fonctions sont écrites pour la version 3.5 de MATLAB et pour la boîte-à-outils CONTROL, mais l'adaptation aux versions postérieures de MATLAB peut être réalisée sans difficulté.

Pour respecter la forme modulaire de son support informatique, notre mémoire est divisé en un grand nombre de chapitres. Chaque chapitre correspond à un objectif de commande donné, et peut être combiné avec un ou plusieurs autres chapitres de façon à remplir les conditions d'un cahier des charges. Nous verrons s'élargir au fil des pages la structure de commande:



**Fig. 1.4:** structure de commande d'un système généralisé

Certains modules correspondent à des objectifs standards requis de façon quasi permanente. Il en est ainsi de l'élimination des comportements impulsionnels, de la stabilisation, ou encore de l'observation. Ils sont présentés dans les premiers chapitres de ce mémoire. D'autres modules correspondent à des objectifs plus spécifiques. Il s'agit du placement de pôles, du découplage, et de la commande optimale qui sont présentés plutôt en fin de mémoire. Cette liste est bien entendu non exhaustive, et notre vœu le plus cher serait de voir cette boîte-à-outils se compléter au fur et à mesure que des besoins nouveaux apparaîtront.

## 2. ANALYSE DANS L'ESPACE D'ETAT GENERALISE

Dans ce chapitre nous répondons aux questions suivantes. Quelle est l'allure de la réponse temporelle d'un système généralisé? Quelles sont les dynamiques qui interviennent? De quels outils dispose-t-on pour analyser le système?

Les formes canoniques usuelles sont rappelées et exploitées afin de séparer les différentes dynamiques. L'incidence, sur le comportement du système, des modes dynamiques finis, impulsionnels, et non dynamiques est mise en évidence, et les discontinuités qui affectent la réponse temporelle sont explicitées. Les impulsions de Dirac sont introduites pour décrire ces discontinuités. Enfin, différentes notions de commandabilité et d'observabilité sont définies et caractérisées.



## 1 Un petit exemple introductif

Afin de bien comprendre les différences fondamentales qui existent entre un système régulier et un système généralisé, et afin de justifier les outils qui vont être développés plus loin, on débute ce chapitre avec un exemple très simple, de dimension 2. Soit le système:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{x} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u, \\ y &= (1 \ 0) x, \end{aligned} \quad (9)$$

qui correspond aux équations différentielles suivantes:

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= x_1 + u, & (a) \\ 0 &= x_2 + u, & (b) \end{aligned} \quad (10)$$

avec  $x = (x_1 \ x_2)^T$ . En dérivant l'équation (10b), on obtient la réponse temporelle:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -\dot{u}(t) - u(t), \\ x_2(t) &= -u(t). \end{aligned} \quad (11)$$

où interviennent les **dérivées de l'entrée**. En fait  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  correspondent à des combinaisons des dérivées successives de  $u$  à l'instant  $t$  et dépendent uniquement de la valeur de  $u$  et  $\dot{u}$  à cet instant. Il n'y a pas d'effet cumulatif dû à l'intégration de l'entrée. C'est pourquoi  $x(t)$  réagit de façon instantanée aux variations de  $u(t)$ . Un tel système est dit **rapide**. En fait il serait plus exact de dire **infiniment rapide**. En revanche un système régulier présente un effet cumulatif, dû à l'intégration de  $u$ , et ce quelles que soient ses dynamiques. On peut donc le qualifier de **lent** comparativement à un système généralisé. Retenons ces dénominations lente et rapide. On les retrouvera un peu plus loin lorsqu'il s'agira de séparer les différents types de dynamiques qui composent un système généralisé quelconque.

Considérons, pour continuer, une entrée particulière, un échelon à  $t = t_0$ :

$$\begin{aligned} u(t) &= 1, & \text{pour } t \geq t_0, \\ u(t) &= 0, & \text{pour } t < t_0. \end{aligned}$$

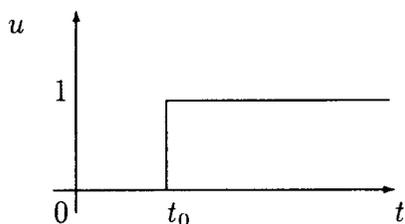


Fig. 2.1: échelon  $u(t)$  à  $t = t_0$

La présence des dérivées de l'entrée dans l'expression analytique de la réponse temporelle est à l'origine de certaines difficultés. Si on récrit  $x_1(t)$  avec l'entrée

précédente, on obtient:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 0, & \text{pour } t < t_0, \\ x_1(t) &= -1, & \text{pour } t > t_0, \end{aligned}$$

et il faut admettre que  $x_1$  n'est pas définie pour  $t = t_0$ .

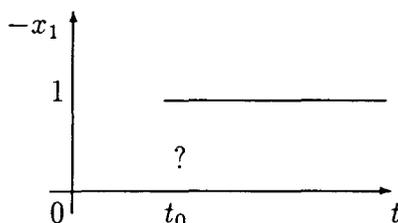


Fig. 2.2: réponse temporelle  $x_1(t)$

Une première conclusion s'impose. Alors que la réponse temporelle d'un système régulier est continue, lorsque l'entrée est continue par morceaux, pour un système généralisé il n'en est rien! La réponse temporelle fait apparaître des **discontinuités**, voire des problèmes de définition aux points où l'entrée est elle-même non dérivable, comme vient de l'illustrer l'exemple précédent.

**Remarque :** la réponse temporelle du système non différentiel  $x = u$  n'est pas continue lorsque l'entrée  $u(t)$  est continue par morceaux mais non continue. Ce système ne peut être qualifié de régulier au sens où l'on a défini ce terme dans la section 1.1 du chapitre 1, car  $r = 0$  et  $n \geq 1$ . Par contre la réponse temporelle du système différentiel régulier  $\dot{x} = Ax + Bu$  est continue lorsque  $u(t)$  est continue par morceaux, et plus généralement  $k + 1$  fois continûment dérivable lorsque  $u$  est  $k$  fois continûment dérivable.

Les discontinuités qui affectent la réponse temporelle, ainsi que les arguments qui suivent vont nous inciter à adopter un autre point de vue.

- Rappelons d'abord que notre modèle doit être aussi proche que possible de l'observation. Lorsque l'on modélise certains phénomènes électriques (décharge de deux condensateurs mis en parallèle) on obtient justement une équation du type (9). Au moment de la commutation on peut observer une **impulsion** caractérisée par une forte tension pendant un très bref instant. Cette impulsion doit apparaître dans la réponse temporelle de (9).
- D'autre part, la théorie des équations différentielles linéaires affirme que le système (9) est de rang 1, et doit de ce fait posséder un degré de liberté. Pour l'instant, la solution obtenue ne possède aucun degré de liberté.
- Un dernier argument consiste à considérer le système (9) comme la limite lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$  de l'équation:

$$\begin{pmatrix} -\epsilon & 1 \\ 0 & -\epsilon \end{pmatrix} \dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u.$$

En considérant la même entrée que précédemment, et en appelant  $x_1(0^-)$ , et  $x_2(0^-)$  les conditions initiales des vecteurs  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$ , on obtient la réponse temporelle suivante:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= e^{-t/\epsilon} x_1(0^-) - \frac{t}{\epsilon^2} e^{-t/\epsilon} x_2(0^-), \\x_2(t) &= e^{-t/\epsilon} x_2(0^-).\end{aligned}$$

pour  $0 \leq t < t_0$ , et:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= e^{-t/\epsilon} x_1(0^-) - \frac{t}{\epsilon^2} e^{-t/\epsilon} x_2(0^-) + e^{-(t-t_0)/\epsilon} - 1 - \frac{1}{\epsilon^2} (t - t_0) e^{-(t-t_0)/\epsilon}, \\x_2(t) &= e^{-t/\epsilon} x_2(0^-) + e^{-(t-t_0)/\epsilon} - 1.\end{aligned}$$

pour  $t \geq t_0$ .

Dans ce qui suit nous allons étudier le comportement limite de la réponse temporelle  $x(t)$ , lorsque  $\epsilon$  tend vers 0. Pour cela nous serons amenés à introduire  $\delta$  la distribution de Dirac. Pour des raisons de simplicité, et bien que cette approche ne soit pas complètement rigoureuse sur le plan mathématique nous traiterons  $\delta$  comme une fonction ordinaire que nous noterons  $\delta(t)$ .

**Définition 2.1:**

$\delta(t)$  est la limite d'une suite de fonctions  $f_n(t)$  qui vérifie:

$$\forall n > 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) dt = 1,$$

et quelque soit  $t \neq 0$ ,  $f_n(t)$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini.

Par abus de langage on écrit souvent:

$$\begin{aligned}\delta(t) &= 0, \quad \forall t \neq 0, \\ \delta(0) &= +\infty,\end{aligned}$$

et:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Considérons la fonction:

$$f(t, \epsilon) = \frac{t}{\epsilon^2} e^{-t/\epsilon}, \quad t \geq 0, \quad \epsilon > 0.$$

Pour montrer que  $f(t, \epsilon)$  tend vers  $\delta(t)$  lorsque  $\epsilon$  tend vers 0, définissons la suite

$$\epsilon_n = \frac{1}{n}, \quad n > 0,$$

et étudions le comportement de la suite de fonctions:

$$\forall n > 0, \quad f_n(t) = n^2 t e^{-nt}, \quad t \geq 0.$$

D'une part pour  $t \neq 0$ ,  $f_n(t)$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini, et d'autre part:

$$\forall n > 0, \int_0^{+\infty} n^2 t e^{-nt} dt = 1.$$

Lorsque  $\epsilon$  tend vers 0 nous avons alors:

$$\frac{t}{\epsilon^2} e^{-t/\epsilon} \rightarrow \delta(t),$$

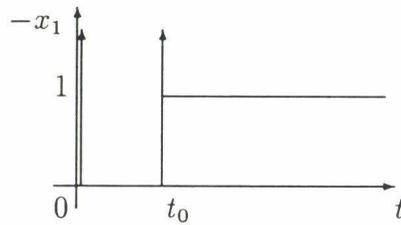
la 'fonction' de Dirac à  $t = 0$ , et de la même façon nous pouvons montrer que:

$$\frac{1}{\epsilon^2} (t - t_0) e^{-(t-t_0)/\epsilon} \rightarrow \delta(t - t_0),$$

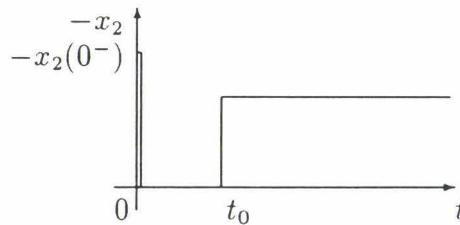
la 'fonction' de Dirac à  $t = t_0$ . La solution limite obtenue est donc de la forme:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -x_2(0^-) \delta(t) - u(t) - \delta(t - t_0) - \dot{u}(t), \\ x_2(t) &= -u(t), \end{aligned}$$

pour tout  $t \geq 0$ . Ainsi,  $x_1(t)$  présente une impulsion aux instants  $t = 0$  et  $t = t_0$ . La présence de la condition initiale  $x_2(0^-)$  assure un degré de liberté à la solution.



**Fig. 2.3:** réponse temporelle  $x_1(t)$  avec modélisation des impulsions



**Fig. 2.4:** réponse temporelle  $x_2(t)$  avec modélisation des discontinuités

En introduisant des 'fonctions' de Dirac dans la réponse temporelle, nous pouvons modéliser les impulsions qui affectent le comportement du système. En outre, on observera des discontinuités sur  $x_2$  à  $t = 0$  pour certaines conditions initiales dites **incompatibles** (ici si  $x_2(0^-) \neq 0$ ).

Pour finir considérons la fonction de transfert du système précédent:

$$Y(s) = C(sE - A)^{-1}BU(s) = -(1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} U(s) = -(1 + s)U(s).$$

La fonction de transfert d'un système généralisé admet une partie **polynomiale** ou **non propre**.

## 2 Formes canoniques et séparation des dynamiques

L'exemple précédent correspond à un système généralisé sans aucun mode dynamique fini. En pratique, la situation est rarement aussi simple. Le modèle obtenu fait le plus souvent intervenir conjointement des modes exponentiels et impulsions. La première étape de notre analyse consiste à séparer les différentes dynamiques, au moyen de transformations et formes équivalentes.

### 2.1 Relations d'équivalence

#### 2.1.1 Equivalence de matrices et de faisceaux de matrices

**Définition 2.2:**

Deux matrices constantes  $A_1$  et  $A_2$  de même dimension  $m * n$  sont dites équivalentes si, et seulement si, il existe deux matrices carrées, constantes, régulières,  $P \in \mathbb{R}^{m*m}$  et  $Q \in \mathbb{R}^{n*n}$  telles que:

$$PA_1Q = A_2.$$

Conformément à cette définition, Gantmacher introduit en 1959 la notion d'équivalence stricte pour les faisceaux de matrices [35].

**Définition 2.3:**

Deux faisceaux de matrices rectangulaires  $sE_1 - A_1$  et  $sE_2 - A_2$ , de même dimension  $m * n$  sont dit strictement équivalents si, et seulement si, il existe deux matrices carrées, constantes, régulières,  $P \in \mathbb{R}^{m*m}$  et  $Q \in \mathbb{R}^{n*n}$  telles que:

$$P(sE_1 - A_1)Q = sE_2 - A_2.$$

Par ailleurs on appelle faisceau régulier un faisceau de matrices qui vérifie la propriété suivante [35]:

**Définition 2.4:**

Un faisceau de matrices carrées  $sE - A$  est régulier si, et seulement si, le déterminant de  $sE - A$  ne s'annule pas identiquement.

Gantmacher propose une forme canonique qui s'applique entre autre à tout faisceau régulier. Quelles que soient les matrices  $A$  et  $E$ , de dimension  $n * n$ , telles que  $|sE - A| \neq 0$ , il existe deux matrices régulières,  $P$  et  $Q$  telles que:

$$P(sE - A)Q = \begin{pmatrix} sI - A_1 & 0 \\ 0 & I - sN \end{pmatrix},$$

où  $A_1$  est de taille  $d * d$ , et  $N$  est une matrice nilpotente de taille  $(n - d) * (n - d)$ , d'indice de nilpotence  $\nu$ , constituée de  $k$  blocs diagonaux:

$$N = \text{diag}\{N_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}\}, \quad i = 1, \dots, k.$$

### 2.1.2 Equivalence de systèmes

S'inspirant des travaux de Gantmacher, H.H. Rosenbrock [70] applique, en 1974, la notion d'équivalence aux systèmes différentiels, et définit l'équivalence stricte entre deux systèmes (en anglais: Restricted System Equivalence ou *rse*).

#### Définition 2.5:

Deux systèmes:

$$\begin{aligned} E_1 \dot{x}(t) &= A_1 x(t) + B_1 u(t), \\ y(t) &= C_1 x(t), \end{aligned}$$

et:

$$\begin{aligned} E_2 \dot{x}(t) &= A_2 x(t) + B_2 u(t), \\ y(t) &= C_2 x(t), \end{aligned}$$

sont strictement équivalents si, et seulement si, il existe  $P$  et  $Q$  deux matrices régulières telles que:

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} sE_1 - A_1 & -B_1 \\ C_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sE_2 - A_2 & -B_2 \\ C_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

La *rse* est reflexive, symétrique, et transitive, de plus elle conserve des propriétés importantes du système (valeurs propres, etc...). Le comportement de deux systèmes, qui sont en *rse*, est identique.

De plus, l'exploitation de la forme canonique proposée par Gantmacher permet de découpler tout système généralisé en deux sous-systèmes indépendants. Quelles que soient les matrices  $E, A, B, C$ , telles que  $|sE - A| \neq 0$ , il existe  $P$  et  $Q$  deux matrices régulières telles que:

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} sE - A & -B \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sI - A_1 & 0 & -B_1 \\ 0 & I - sN & -B_2 \\ C_1 & C_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

#### Remarque

En 1981, G.C. Verghese, B.C. Lévy, et T. Kailath [93] montrent que l'équivalence stricte est inutilement restrictive. En effet, cette approche ne distingue pas les modes non dynamiques du système des modes dynamiques impulsionsnels. Pourtant certains modes entraînés, dus à des relations algébriques entre les variables internes

peuvent être éliminés. On ne conserve que leur contribution dans la matrice de transfert. G.C. Verghese, B.C. Lévy et T. Kailath définissent l'équivalence forte (en anglais: Strong Equivalence ou *se*).

**Définition 2.6:**

Deux systèmes:

$$\begin{aligned} E_1 \dot{x}(t) &= A_1 x(t) + B_1 u(t), \\ y(t) &= C_1 x(t) + D_1 u(t), \end{aligned}$$

et:

$$\begin{aligned} E_2 \dot{x}(t) &= A_2 x(t) + B_2 u(t), \\ y(t) &= C_2 x(t) + D_2 u(t), \end{aligned}$$

sont fortement équivalents si, et seulement si, il existe  $P$  et  $Q$  deux matrices régulières,  $U$  et  $V$  deux matrices telles que  $UE_1 = E_1V = 0$ ,

et:

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ U & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} sE_1 - A_1 & -B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & V \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sE_2 - A_2 & -B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Ce résultat associé à des opérations d'addition ou d'élimination des variables entraînées permet de simplifier la forme canonique précédente. En effet, la matrice  $N$  est creuse. On ne conservera des modes entraînés que leur contribution dans la matrice de transfert.

## 2.2 Formes canoniques

Dans le paragraphe qui suit, et dans le reste du mémoire, les matrices  $E$  et  $A$  sont supposées être carrées de dimension  $n * n$

### 2.2.1 Forme standard

La forme standard correspond à la forme canonique proposée par Rosenbrock [70] suite à des travaux préliminaires de Weierstrass [96]. Pour tout système (2), vérifiant la condition (5), il existe  $P$  et  $Q$  deux matrices carrées, constantes, régulières telles que:

$$\begin{aligned} PEQ &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}, & PAQ &= \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, & PB &= \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \\ CQ &= (C_1 \ C_2), & Q^{-1}x &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (14)$$

$A_1$  est de dimension  $d * d$ ,  $B_1$  et  $C_1$  ont respectivement  $d$  lignes et  $d$  colonnes, et  $N$  de dimension  $(n - d) * (n - d)$ , est une matrice nilpotente d'indice  $\nu$ . Le système

( 2) est strictement équivalent à la forme standard:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_1 x_1 + B_1 u, & (a) \\ y_1 &= C_1 x_1, \\ N \dot{x}_2 &= x_2 + B_2 u, & (b) \\ y_2 &= C_2 x_2, \\ y &= y_1 + y_2. \end{aligned} \tag{15}$$

La détermination pratique de la forme standard est traitée dans l'annexe 1, et a fait l'objet d'une publication lors du premier colloque des étudiants doctorants des Ecoles Centrales [44]. Les méthodes usuelles, basées sur l'étude des espaces propres généralisés sont rappelées, et des résultats originaux sont proposés.

### 2.2.2 Forme de Smith

Une autre forme canonique, utilisant l'équivalence entre  $E$  et sa forme de Smith, peut être proposée. Pour toute matrice carrée  $E$ , il existe  $\tilde{P}$  et  $\tilde{Q}$  deux matrices carrées, constantes, régulières, telles que:

$$\tilde{P}E\tilde{Q} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où  $r$  est, rappelons le, le rang de  $E$ .

En appliquant les transformations  $\tilde{P}$  et  $\tilde{Q}$  au système ( 2), on peut définir:

$$\begin{aligned} \tilde{P}A\tilde{Q} &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, & \tilde{P}B &= \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{pmatrix}, & C\tilde{Q} &= (\tilde{C}_1 \quad \tilde{C}_2), \\ \tilde{Q}^{-1}x &= \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{16}$$

avec  $A_{11}$  une matrice de dimension  $r * r$ ,  $\tilde{B}_1$  une matrice de dimension  $r * p$ , et  $\tilde{C}_1$  une matrice de dimension  $q * r$ . Le système ( 2) est strictement équivalent à sa forme de Smith:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= A_{11}\tilde{x}_1 + A_{12}\tilde{x}_2 + \tilde{B}_1 u, & (a) \\ \tilde{y}_1 &= \tilde{C}_1 \tilde{x}_1, \\ 0 &= A_{21}\tilde{x}_1 + A_{22}\tilde{x}_2 + \tilde{B}_2 u, & (b) \\ \tilde{y}_2 &= \tilde{C}_2 \tilde{x}_2, \\ y &= \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2. \end{aligned} \tag{17}$$

L'obtention de la forme de Smith ne pose aucun problème puisqu'il suffit pour obtenir  $\tilde{P}$  et  $\tilde{Q}$  de déterminer la forme de Smith de  $E$ , c'est-à-dire de transformer  $E$  à l'aide d'opérations élémentaires. Ces opérations sont des permutations de lignes (ou de colonnes), des additions pondérées de lignes (ou de colonnes), et des multiplications de lignes (ou de colonnes) par un scalaire non nul.

De façon à ne pas confondre la forme standard et la forme de Smith, on marquera toujours les matrices  $\tilde{B}_1$ ,  $\tilde{B}_2$ ,  $\tilde{C}_1$ ,  $\tilde{C}_2$ , et les vecteurs  $\tilde{x}_1$ ,  $\tilde{x}_2$ ,  $\tilde{y}_1$ ,  $\tilde{y}_2$  relatifs à la forme de Smith avec un tilde.

### 2.3 Séparation des dynamiques

L'utilisation conjointe des deux formes canoniques permet de séparer les différentes dynamiques présentes dans le système initial.

Débutons cette analyse structurelle en considérant la forme de Smith. L'examen des deux sous-systèmes ( 17a) et ( 17b) obtenus nous montre que les variables internes regroupées dans le vecteur  $\tilde{x}_2$ , peuvent être déterminées uniquement à l'aide d'équations algébriques correspondant à ( 17b) lorsque la matrice  $A_{22}$  est inversible. Les modes associés à ces variables sont entièrement déterminés par les modes associés à  $\tilde{x}_1$ . Ce sont des modes non dynamiques. Le système initial est donc composé de  $r$  modes dynamiques, et de  $n - r$  modes non dynamiques .

$r$ modes dynamiques	{	$d$ modes dynamiques finis
		$r - d$ modes impulsionnels

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}$$

$n - r$ modes non dynamiques
------------------------------

Si l'on s'intéresse maintenant à la forme standard du système initial, on peut constater que cette transformation correspond à une division de ( 2) en deux sous-systèmes couplés uniquement par leurs entrées et leurs sorties. Le premier sous-système associé à  $x_1$  ( 15a) est régulier. Dans ce sous-système sont regroupés les modes dynamiques finis de ( 2). Notons, de plus, qu'un choix approprié des matrices  $P$  et  $Q$  permet d'obtenir la matrice  $A_1$  sous sa forme de Jordan. Dans ce cas le découplage des dynamiques finis est complet. Le second sous-système associé à  $x_2$  ( 15b) regroupe tous les modes non dynamiques finis, c'est-à-dire les modes non dynamiques déjà mis en évidence avec la forme de Smith, et les modes impulsionnels dont il a été question dans l'introduction .

$d$ modes dynamiques finis
----------------------------

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ N\dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$n - d$ autres modes	{	$r - d$ modes impulsionnels
		$n - r$ modes non dynamiques

Le système initial est donc composé de  $d$  modes dynamiques finis, de  $r - d$  modes impulsionnels, et de  $n - r$  modes non dynamiques.

**Remarque: systèmes sans mode impulsionnel**

Les systèmes généralisés, tels que  $r = d$ , c'est-à-dire tels que le rang de  $E$  est égal au degré du déterminant de  $(sE - A)$ , ont une structure simplifiée. De tels systèmes ne comportent pas de mode impulsionnel, et peuvent être considérés comme l'association d'un système dynamique régulier de dimension  $r$ , et d'un système non dynamique de dimension  $n - r$ . Pour obtenir ce résultat démontrons le théorème suivant:

**Théorème 2.1:**

*Le système généralisé ( 2) n'a pas de mode impulsionnel si, et seulement si, la matrice  $A_{22}$  dans la forme de Smith ( 17) est inversible.*

**Démonstration:** le système ( 2) n'a pas de mode impulsionnel si, et seulement si, le degré de  $|sE - A|$  est égal au rang de  $E$  [27]. Or, d'après ( 16):

$$\begin{aligned} \deg |sE - A| &= \deg |s\tilde{P}E\tilde{Q} - \tilde{P}A\tilde{Q}|, \\ &= \deg \left( \det \begin{pmatrix} sI_r - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & -A_{22} \end{pmatrix} \right), \\ &= r \Leftrightarrow A_{22} \text{ inversible. } \quad \square \end{aligned}$$

En utilisant ce résultat, nous pouvons écrire qu'un système généralisé sans mode impulsionnel est strictement équivalent à:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})\tilde{x}_1 + (\tilde{B}_1 - A_{12}A_{22}^{-1}\tilde{B}_2)u, \\ \tilde{x}_2 &= -A_{22}^{-1}A_{21}\tilde{x}_1 - A_{22}^{-1}\tilde{B}_2u, \\ y &= \tilde{C}_1\tilde{x}_1 + \tilde{C}_2\tilde{x}_2. \end{aligned} \tag{18}$$

Ce dernier système est bien l'association d'un système dynamique de dimension  $r$  et d'un système non dynamique de dimension  $n - r$ .

On aurait tout aussi bien pu montrer que l'absence de mode impulsionnel est la condition nécessaire et suffisante pour garantir la nullité de  $N$  dans la forme standard ( 15) de ( 2). D'où:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_1x_1 + B_1u, \\ x_2 &= -B_2u, \\ y &= C_1x_1 + C_2x_2. \end{aligned}$$

Remarquons qu'avec le changement de variables:

$$\begin{aligned} x_1 &= \tilde{x}_1, \quad x_2 = \tilde{x}_2 + A_{22}^{-1}A_{21}\tilde{x}_1, \quad A_1 = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}, \\ B_1 &= \tilde{B}_1 - A_{12}A_{22}^{-1}\tilde{B}_2, \quad B_2 = A_{22}^{-1}\tilde{B}_2, \quad C_1 = \tilde{C}_1 - \tilde{C}_2A_{22}^{-1}A_{21}, \quad C_2 = \tilde{C}_2, \end{aligned}$$

nous retrouvons le résultat précédent. Un système sans mode impulsionnel a donc les caractéristiques suivantes:

- La matrice  $N$  dans la forme standard de ( 2) est nulle. Donc  $x_2$  ne dépend que de  $u$  et non pas de ses dérivées successives:

$$x_2 = -B_2 u.$$

- La matrice  $A_{22}$  dans la forme de Smith de ( 2) est régulière ce qui permet d'exprimer directement  $\tilde{x}_2$  en fonction de  $\tilde{x}_1$  et  $u$ .

L'étude de ces systèmes peut toujours se ramener à l'étude d'un système régulier, mais comme l'ont soulevé les études des systèmes singulièrement perturbés la modélisation de la variable rapide peut présenter des discontinuités au voisinage de la couche limite [16].

### 3 Réponse temporelle

Connaissant maintenant le nombre exact de modes dynamiques finis, impulsionnels et non dynamiques, il est temps de donner l'expression générale de la réponse temporelle. L'utilisation de la forme standard ( 15) permet de séparer les modes dynamiques finis des modes impulsionnels et non dynamiques, et de résoudre chacun des sous-systèmes séparément.

#### 3.1 Résolution du sous-système lent

Le sous-système lent, vérifié par le vecteur  $x_1$ , est régulier, la réponse temporelle correspondante est donc donnée par:

$$x_1(t) = e^{A_1 t} x_1(0) + \int_0^t e^{A_1(t-\tau)} B_1 u(\tau) d\tau. \quad (19)$$

#### 3.2 Résolution du sous-système rapide

Considérons une entrée  $u$ , qui est  $\nu - 1$  fois continûment dérivable en  $]0, +\infty[$ . L'équation ( 15b) dérivée et multipliée par  $N$  un nombre suffisant de fois pour faire apparaître  $N^\nu = 0$  permet d'exprimer la solution  $x_2(t)$  pour  $t > 0$ .

$$\begin{aligned} N\dot{x}_2(t) &= x_2(t) + B_2 u(t), \\ N^2\ddot{x}_2(t) &= N\dot{x}_2(t) + NB_2\dot{u}(t), \\ &\vdots \\ N^\nu x_2^{(\nu)}(t) &= N^{\nu-1} x_2^{(\nu-1)}(t) + N^{\nu-1} B_2 u^{(\nu-1)}(t). \end{aligned}$$

En sommant les  $\nu$  égalités précédentes, on obtient:

$$x_2(t) = - \sum_{i=0}^{\nu-1} N^i B_2 u^{(i)}(t). \quad (20)$$

Que devient la solution pour  $t = 0$ ? Suite aux arguments discutés dans l'introduction, pour pouvoir tenir compte des discontinuités à l'instant initial, et éventuellement

aux points où l'entrée n'est pas continue, il est nécessaire d'introduire les 'fonctions' de Dirac dans la réponse temporelle.

**Remarque :** Nous pouvons considérer le système:

$$N\dot{x}_2(t) = x_2(t) + B_2u(t),$$

comme la limite du système différentiel régulier:

$$(-\epsilon I + N)\dot{x}_2(t) = x_2(t) + B_2u(t), \quad (21)$$

lorsque  $\epsilon$  tend vers 0.

La réponse temporelle du régime transitoire tend vers:

$$x_2(t) = - \sum_{i=0}^{\nu-2} N^{i+1} x_2(0^-) \delta^{(i)}(t),$$

lorsque  $\epsilon$  tend vers 0.

Lorsque le vecteur d'entrée  $u(t)$  est au moins  $\nu - 1$  fois continûment dérivable, la réponse temporelle complète du sous-système impulsionnel est donnée par [13,23, 24,25,27,50,93]:

$$x_2(t) = - \sum_{i=0}^{\nu-2} N^{i+1} x_2(0^-) \delta^{(i)}(t) - \sum_{i=0}^{\nu-1} N^i B_2 u^{(i)}(t). \quad (22)$$

Une expression analogue à ( 22) pourrait être établie pour une entrée admettant des discontinuités ou qui ne serait pas  $\nu - 1$  fois continûment dérivable. Il faudrait dans ce cas introduire la 'fonction' de Dirac au point de discontinuité  $t = t_0$ , et  $\Delta_{t_0}(u^{(i)}(t)) = u^{(i)}(t_0^+) - u^{(i)}(t_0^-)$  le saut de la fonction  $u^{(i)}(t)$  en  $t_0$ , pour  $i = 0, \dots, \nu - 1$ .

### 3.3 Compatibilité des conditions initiales

Parmi toutes les valeurs que peut prendre le vecteur  $x_2(0^-)$ , certaines vont retenir plus particulièrement notre attention, ce sont les **conditions initiales compatibles**. Elles sont telles que la réponse temporelle du système ne présente pas de discontinuité à l'instant initial. Cette condition est remplie si, et seulement si, il y a continuité de  $x_2(t)$  au point  $t = 0$ . Pour une fonction  $u(t)$  qui est  $\nu - 1$  fois continûment dérivable, la valeur  $x_2(t)$  à l'instant  $t = 0^+$  est donnée par:

$$x_2(0^+) = - \sum_{i=0}^{\nu-1} N^i B_2 u^{(i)}(0).$$

On appellera condition initiale compatible du sous-système rapide ( 15b) la valeur  $x_2(0^-)$  telle que  $x_2(0^-) = x_2(0^+)$ , c'est-à-dire telle que:

$$x_2(0^-) = - \sum_{i=0}^{\nu-1} N^i B_2 u^{(i)}(0).$$

L'ensemble des conditions initiales compatibles pour le système ( 2) est donc donné par:

$$I_c = \{x(0^-) \in \mathbb{R}^n, \text{ tel que } x_1(0^-) \in \mathbb{R}^d, \text{ et } x_2(0^-) = - \sum_{i=0}^{\nu-1} N^i B_2 u^{(i)}(0)\}. \quad (23)$$

**Remarque :** notons ici que certains auteurs à l'image de Rosenbrock [70], et plus récemment de Fliess [33] ont adopté une réalisation régulière où apparaissent les dérivées de l'entrée:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + D_0 u + D_1 \dot{u} + \dots + D_{\nu-1} u^{(\nu-1)}. \end{aligned}$$

Cette réalisation conduit à une réponse temporelles sans problème de conditions initiales incompatibles.

## 4 Commandabilité des systèmes généralisés

Les définitions et résultats suivants sont ceux que nous avons le plus souvent rencontrés dans la littérature [4,23,25,27,66,70,90,91,93,98]. Notons toutefois qu'il existe d'autres notions de commandabilité et d'observabilité qui recoupent partiellement ou totalement celles présentées ici.

### 4.1 Atteignabilité

**Définition 2.7:**

*Le vecteur  $w \in \mathbb{R}^n$  est dit atteignable, si il existe une ou des conditions initiales compatibles  $x(0^-) \in I_c$ , une commande  $u$ ,  $\nu-1$  fois continûment dérivable par morceaux, et un instant  $t_1 > 0$  tels que  $x(t_1) = w$ .*

On appelle  $R(x(0^-))$  l'ensemble des états atteignables à partir de  $x(0^-) \in I_c$ , et  $R$  l'ensemble des états atteignables par le système ( 2) pour des conditions initiales compatibles:

$$R = \bigcup_{x(0^-) \in I_c} R(x(0^-)).$$

### 4.2 C-commandabilité

La notion de C-commandabilité concerne la commandabilité complète du système sur  $\mathbb{R}^n$ , c'est-à-dire la commandabilité de tous les modes dynamiques finis et impulsionnels.

**Définition 2.8:**

*Le système ( 2) est dit C-commandable ou commandable si il est commandable sur  $\mathbb{R}^n$ , c'est-à-dire si pour tout instant  $t_1 > 0$ , pour tout*

vecteur de conditions initiales  $x(0^-) \in \mathbb{R}^n$ , et pour tout vecteur  $w \in \mathbb{R}^n$ , il existe une commande  $u$ ,  $\nu - 1$  fois continûment dérivable par morceaux, telle que  $x(t_1) = w$ .

Les propositions suivantes sont équivalentes [25,27,98]:

- le système ( 2) est commandable,
- les sous-systèmes lent ( $x_1$ ) et rapide ( $x_2$ ) de la forme standard ( 15) sont tous deux commandables,
- la matrice  $D_c$  de dimension  $(n^2 * n(n + p - 1))$  est de rang plein  $n^2$ ,

$$D_c = \begin{pmatrix} -A & & & & & & & & B \\ E & -A & & & & & & & B \\ & E & \ddots & & & & & & B \\ & & \ddots & -A & & & & \ddots & \\ & & & E & & & & & B \end{pmatrix}.$$

### 4.3 R-commandabilité et commandabilité du sous-système rapide

La notion de R-commandabilité concerne la commandabilité des modes dynamiques finis du système ( 2), c'est-à-dire la commandabilité du sous-système lent ( 15a) de la forme standard. Rappelons qu'un mode exponentiel  $\lambda_i$  du système ( 2) est commandable si son espace propre est atteignable. D'autre part, la commandabilité du sous-système rapide concerne le système ( 15b).

#### Définition 2.9:

*Le système ( 2) est dit R-commandable si il est commandable sur  $R$ , c'est-à-dire si pour tout instant  $t_1 > 0$ , pour tout vecteur de conditions initiales compatibles  $x(0^-)$ , et si pour tout vecteur  $w \in R$ , il existe une commande  $u$ ,  $\nu - 1$  fois continûment dérivable, telle que  $x(t_1) = w$ .*

Les principales caractérisations de la R-commandabilité sont résumées dans les propositions suivantes qui sont toutes équivalentes [25,27,98]:

- le système ( 2) est R-commandable,
- le sous-système lent ( $x_1$ ) de la forme standard ( 15) est commandable,
- $\sum_{i=0}^{d-1} \text{Im} (A_1^i B_1) = \mathbb{R}^d$ ,
- le rang de  $(sE - A, B)$  est égal à  $n$ , pour tout  $s$ ,
- $\text{Im} (sE - A) + \text{Im} B = \mathbb{R}^n$ , pour tout  $s$ ,
- le rang de la matrice  $(B_1, A_1 B_1, \dots, A_1^{d-1} B_1)$  est égal à  $d$ ,



- $\text{Im } N = \text{Im } \sum_{i=1}^{\nu-1} N^i B_2,$
- $\text{Im } N + \text{Im } B_2 + \text{Ker } N = \mathbb{R}^{n-d},$
- le rang de  $\begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ A & E & B \end{pmatrix} = n + r,$
- il existe une matrice  $K$  telle que le degré de  $\det(sE - (A + BK))$  soit égal à  $r,$
- la matrice  $(A_{22} \quad \tilde{B}_2)$  obtenue avec la forme de Smith de (2) est de rang  $n - r,$
- il existe une matrice  $\tilde{K}_2$  telle que la matrice  $(A_{22} + \tilde{B}_2 \tilde{K}_2)$  dans la forme de Smith (17) soit inversible.

Pour résumer les notions précédentes nous pouvons écrire que:

- la R-commandabilité traduit la capacité à commander le sous-système lent, c'est-à-dire la capacité à déplacer de façon arbitraire les modes dynamiques finis du système (2),
- la commandabilité du sous-système rapide traduit, comme son nom l'indique, la capacité à commander le sous-système rapide,
- la I-commandabilité traduit la capacité à éliminer les modes impulsionsnels, ou plutôt à les transformer en modes exponentiels,

Ces notions s'impliquent les unes les autres selon le schéma:

$$\text{C-commandabilité} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{R-commandabilité} \\ + \\ \text{commandabilité du} \\ \text{sous-système rapide} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{I-commandabilité}$$

## 5 Observabilité des systèmes généralisés

Nous définissons dans cette section les notions de C-observabilité, de R-observabilité, d'observabilité du sous-système rapide, et d'I-observabilité qui sont duales de celles présentées dans la section précédente [23,25,27,98].

### 5.1 C-observabilité

#### Définition 2.11:

*Le système (2) est dit C-observable ou observable si la connaissance de la commande  $u(t)$  et de la sortie  $y(t)$  sur  $[0, +\infty[$  est suffisante pour déterminer la condition initiale  $x(0^-)$ .*

Les propositions suivantes sont équivalentes [25,27,98]:





- $\bigcap_{i=1}^{\nu-1} \text{Ker}(C_2 N^i) = \text{Ker}N$ ,
- $\text{Ker}N \cap \text{Ker}C_2 \cap \text{Im}N = \{0\}$ ,
- le rang de la matrice  $\begin{pmatrix} E & A \\ 0 & E \\ 0 & C \end{pmatrix}$  est égal à  $n + r$ ,
- il existe une matrice  $K$  telle que le degré de  $\det(sE - (A + KC))$  soit égal à  $r$ ,
- la matrice  $(A_{22}^T \quad \tilde{C}_2^T)^T$  obtenue avec la forme de Smith de (2) est de rang  $n - r$ ,
- il existe une matrice  $\tilde{K}_2$  telle que la matrice  $(A_{22} + \tilde{K}_2 \tilde{C}_2)$  dans la forme de Smith (17) soit inversible.

De même que précédemment nous pouvons établir une relation d'ordre entre les différentes notions d'observabilité:

$$\text{C-observabilité} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{R-observabilité} \\ + \\ \text{observabilité du} \\ \text{sous-système rapide} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{I-observabilité}$$

## 6 Conclusion

L'analyse structurelle des systèmes généralisés fait intervenir deux formes canoniques obtenues par transformations équivalentes du système initial (2). D'une part, la forme standard (15) permet de séparer les modes dynamiques finis des modes impulsionnels et non dynamiques. D'autre part, la forme de Smith (17) permet de séparer les modes non dynamiques des modes dynamiques. Nous avons montré que le système (2) est composé de  $d$  modes dynamiques finis,  $n - r$  modes non dynamiques, et  $r - d$  modes impulsionnels. Ce sont ces derniers qui constituent véritablement la spécificité de tels systèmes. Ils se traduisent par des discontinuités dans la réponse temporelle du système.

Pour pouvoir aborder les problèmes de commande et la synthèse d'observateurs, nous avons rappelé les principaux résultats concernant la commandabilité et l'observabilité des systèmes généralisés. Outre les notions de R-commandabilité et de commandabilité du sous-système rapide (respectivement de R-observabilité et d'observabilité du sous-système rapide) qui peuvent apparaître comme des conséquences directes du découplage réalisé par la forme standard, nous avons vu émerger une notion nouvelle: la I-commandabilité (respectivement I-observabilité). Moins forte que la commandabilité du sous-système rapide, la I-commandabilité traduit notre capacité à éliminer les modes impulsionnels par un retour d'état statique.

Nous expliquerons, dans le chapitre suivant, pourquoi cette élimination est au cœur de nos préoccupations, et comment nous pouvons supprimer les comportements impulsionnels par l'ajout d'un précompensateur dynamique lorsque ces modes ne sont pas commandables.

## Procédures MATLAB

*STAND* calcule la forme standard du système généralisé défini par le quadruplet  $(E, A, B, C)$ . La fonction retourne les matrices  $A_1, N, B_1, B_2, C_1, C_2$  et les deux matrices de changement de variables  $P$  et  $Q$ . De la même façon, *SVDFM* calcule la forme de Smith du système. La fonction retourne les matrices  $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, \tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \tilde{C}_1$ , et  $\tilde{C}_2$ , et les matrices de changement de variables  $\tilde{P}$  et  $\tilde{Q}$ .

La fonction *SINSIM* trace la réponse temporelle du système généralisé, ainsi que les conditions initiales.

Les fonctions *RCONT*, *FCONT*, et *ICONT* caractérisent les notions de R-commandabilité, de commandabilité du sous-système rapide, et de I-commandabilité.

nom de la fonction	matrice calculée
<i>RCONT</i>	$[B_1, A_1 B_1, \dots, A_1^{d-1} B_1]$
<i>FCONT</i>	$[B_2, N B_2, \dots, N^{\nu-1} B_2]$
<i>ICONT</i>	$\begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ A & E & B \end{pmatrix}$

Les fonctions *ROBSV*, *FOBSV*, et *IOBSV* caractérisent les notions de R-observabilité, d'observabilité du sous-système rapide, et de I-observabilité.

nom de la fonction	<i>ROBSV</i>	<i>FOBSV</i>	<i>IOBSV</i>
matrice calculée	$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_1 A_1 \\ \vdots \\ C_1 A_1^{d-1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} C_2 \\ C_2 N \\ \vdots \\ C_2 N^{\nu-1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} E & A \\ 0 & E \\ 0 & C \end{pmatrix}$

### 3. PRECOMPENSATEUR DYNAMIQUE ET ELIMINATION DES COMPORTEMENTS IMPULSIONNELS

Dans ce chapitre nous nous penchons sur la principale difficulté propre aux systèmes généralisés: la présence de comportements impulsionnels. Comment éliminer ces discontinuités?

Lorsque les modes impulsionnels sont commandables, une commande par retour sur  $x$  permet de résoudre le problème. Les principaux résultats concernant cette méthode sont rappelés. Dans le cas plus général, où les modes impulsionnels ne sont pas commandables, nous introduisons un précompensateur dynamique dont l'effet consiste à absorber les dérivées de l'entrée. Une forme régulière appelée forme augmentée est bâtie autour de ce précompensateur. D'autre part un algorithme qui minimise la taille du précompensateur est proposé. Enfin, l'élimination des comportements impulsionnels par le biais de ce correcteur dynamique, est détaillée.



# 1 Introduction

Le chapitre précédent a montré que les comportements impulsionnels sont la source de nombreuses difficultés qui peuvent apparaître dans l'analyse ou la commande des systèmes généralisés. Ces discontinuités peuvent heureusement être éliminées. Deux méthodes sont proposées: une commande par retour sur  $x$  (nous évitons d'employer le terme retour d'état puisque  $x$  ne correspond pas vraiment à l'état du système), et une commande par précompensation dynamique, qui constitue la part originale de ce chapitre.

- La commande par retour sur  $x$  peut être soit proportionnelle, soit proportionnelle plus dérivée. Il s'agit de modifier la structure du système en boucle fermée, en déplaçant les modes impulsionnels. Cette commande peut être combinée avec un second retour qui déplace les modes dynamiques finis et assure la stabilisation du système. Cette méthode présente différents inconvénients. Elle ne peut être appliquée qu'avec des systèmes I-commandables dont on a accès aux variables internes. Lorsque cela n'est pas possible, il faut construire un observateur de ces variables, y compris des variables singulières. Nous verrons par la suite (chapitre 5) que cette construction pose un certain nombre de problèmes.

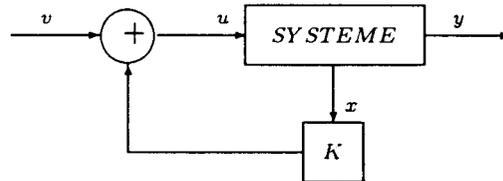


Fig. 3.1: Elimination des discontinuités par retour sur  $x$

- La commande par précompensation dynamique est une commande en boucle ouverte qui supprime les discontinuités en lissant l'entrée grâce à des intégrations successives. En effet, le chapitre 2 nous a montré que les discontinuités apparaissent si l'entrée n'est pas suffisamment dérivable. Une solution simple consiste donc à choisir des entrées suffisamment dérivables, ou à intégrer l'entrée un nombre suffisant de fois avant de l'injecter dans le système, grâce au précompensateur  $H(s)$ . Les inconvénients sont ceux de tous correcteurs en boucle ouverte: à savoir la stabilité du système complet. Cet aspect de la question sera développé dans le chapitre 4, cette partie privilégiant l'algorithme de construction de  $H(s)$ .

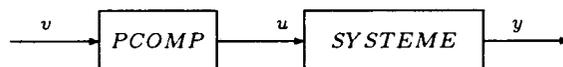


Fig. 3.2: Elimination des discontinuités par précompensation

La première section est consacrée à l'élimination des modes impulsionnels par retour sur  $x$ . Les principaux résultats sont rappelés, ainsi que les hypothèses requises. La seconde section est consacrée à la commande par précompensation dynamique. Cette méthode développée dans un premier temps pour des systèmes mono-entrée, est ensuite étendue aux systèmes multi-entrées, en minimisant la dimension du précompensateur. Ces travaux ont fait l'objet d'une publication lors de la conférence IEEE / SMC93 [45]. Nous détaillons les résultats sur un exemple dans la troisième section. Dans la quatrième section nous montrons comment l'algorithme de précompensation minimal permet de déterminer les pôles à l'infini du système initial avec leur ordre de multiplicité.

## 2 Élimination des discontinuités par retour sur $x$

Nous nous intéressons dans cette partie à deux classes particulières de retours sur  $x$ : le retour proportionnel (P), et le retour proportionnel plus dérivé (PD), et nous rappelons comment ils permettent d'éliminer les modes impulsionnels.

### 2.1 Retour proportionnel

Les résultats qui suivent sont principalement dus à Cobb, Lewis et Armentano [4,23,50]. Il s'agit pour une certaine classe de systèmes généralisés d'éliminer par retour (P) les discontinuités qui peuvent affecter le comportement du système. Le système en boucle fermée pourra alors être considéré comme l'association d'un système dynamique et d'un système entraîné (voir chapitre 2, section 2.3).

Lorsque le système considéré comporte un ou plusieurs modes impulsionnels qui sont tous commandables, il est appelé I-commandable, et d'après les résultats rappelés dans la section 4.4 du chapitre 2, la matrice  $(A_{22}, \tilde{B}_2)$  dans la forme de Smith (17) est de rang  $n - r$ . De ce fait, il existe une commande  $u = \tilde{K}_2 \tilde{x}_2 + v$  telle que la matrice  $(A_{22} + \tilde{B}_2 \tilde{K}_2)$  soit régulière [23,25,27,98]. Considérons une telle commande, le système (2) en boucle fermée est strictement équivalent à:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= (A_{11} - (A_{12} + \tilde{B}_1 \tilde{K}_2)(A_{22} + \tilde{B}_2 \tilde{K}_2)^{-1} A_{21}) \tilde{x}_1 + \\ &\quad (\tilde{B}_1 - (A_{12} + \tilde{B}_1 \tilde{K}_2)(A_{22} + \tilde{B}_2 \tilde{K}_2)^{-1} \tilde{B}_2) v, \\ \tilde{x}_2 &= -(A_{22} + \tilde{B}_2 \tilde{K}_2)^{-1} A_{21} \tilde{x}_1 - (A_{22} + \tilde{B}_2 \tilde{K}_2)^{-1} \tilde{B}_2 v, \\ y &= \tilde{C}_1 \tilde{x}_1 + \tilde{C}_2 \tilde{x}_2. \end{aligned} \tag{24}$$

Ce système (24) est l'association d'un système dynamique de dimension  $r$ , et d'un système non dynamique de dimension  $n - r$ . Définissons:

$$E_{bf} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{bf} = \begin{pmatrix} A_{11} - (A_{12} + \tilde{B}_1 \tilde{K}_2)(A_{22} + \tilde{B}_2 \tilde{K}_2)^{-1} A_{21} & 0 \\ (A_{22} + \tilde{B}_2 \tilde{K}_2)^{-1} A_{21} & I \end{pmatrix}.$$

Pour être complet, nous allons montrer que le système en boucle fermée vérifie toujours l'hypothèse préliminaire d'existence et d'unicité de la solution qui a été énoncée dans le chapitre 1, c'est à dire que le déterminant de  $(sE_{bf} - A_{bf})$  n'est pas identiquement nul. Cette vérification est indispensable car la régularité du faisceau n'est pas conservée par retour sur  $x$ .

**Théorème 3.1:**

*Le déterminant de  $(sE_{bf} - A_{bf})$  est de degré  $r$ .*

**Démonstration:**

$$\begin{aligned}
& \deg |(sE_{bf} - A_{bf})| \\
&= \deg \left| \begin{pmatrix} sI_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_{11} - (A_{12} + \tilde{B}_1 \tilde{K}_2)(A_{22} + \tilde{B}_2 \tilde{K}_2)^{-1} A_{21} & 0 \\ (A_{22} + \tilde{B}_2 \tilde{K}_2)^{-1} A_{21} & I \end{pmatrix} \right|, \\
&= \deg \left| \begin{pmatrix} sI_r - (A_{11} - (A_{12} + \tilde{B}_1 \tilde{K}_2)(A_{22} + \tilde{B}_2 \tilde{K}_2)^{-1} A_{21}) & 0 \\ -(A_{22} + \tilde{B}_2 \tilde{K}_2)^{-1} A_{21} & -I \end{pmatrix} \right|, \\
&= \deg |sI_r - (A_{11} - (A_{12} + \tilde{B}_1 \tilde{K}_2)(A_{22} + \tilde{B}_2 \tilde{K}_2)^{-1} A_{21})|, \\
&= r. \quad \square
\end{aligned}$$

## 2.2 Retour proportionnel plus dérivé

Introduit pour les systèmes singuliers par Langenhop [41], en 1979, le retour (PD) permet de déplacer simultanément les valeurs propres des matrices  $A$  et  $E$ , et de modifier profondément la structure du faisceau  $(E, A)$ . Il permet en outre d'atténuer la sensibilité au bruit, et de changer l'ordre de la dynamique du système [27,42,52,76]. On ne retiendra dans ce paragraphe que les résultats qui concernent directement l'élimination des modes impulsionnels.

Pour Dai, Mukundan et Ayawansa [27,61], il s'agit de déplacer les valeurs propres de  $E$  et de  $A$  afin d'obtenir un système strictement propre en boucle fermée. On appelle normalisation ce type de commande. Toutes les difficultés propres aux systèmes généralisés sont gommées en une seule opération. V.X. Le [42], quant à lui, introduit le retour (PD) uniquement pour supprimer les modes impulsionnels en déplaçant les valeurs propres de  $(E, A)$ .

### 2.2.1 Retour (PD) et normalisation

La notion de normalisation est due à Dai [27]:

**Définition 3.1:**

*Le système (2) est dit normalisable, si il existe une commande  $u = K_1 x - K_2 \dot{x} + v$  telle que le système en boucle fermée soit strictement propre, c'est-à-dire telle que  $\det(E + BK_2) \neq 0$ .*

Dans ce cas nous pouvons écrire:

$$\dot{x} = (E + BK_2)^{-1}(A + BK_1)x + (E + BK_2)^{-1}B_2v.$$

Cette démarche est malheureusement limitée à une classe de systèmes peu étendue, comme le montrent les propositions suivantes qui sont toutes équivalentes [27]:

- le système ( 2) est normalisable,
- le rang de la matrice  $(E, B)$  est égal à  $n$ ,
- le rang de la matrice  $(N, B_2)$  est égal à  $n - d$ ,
- le sous-système rapide ( 15b) de la forme standard de ( 2) est commandable.

Les hypothèses requises pour la normalisation sont encore plus fortes que celles nécessaires dans le paragraphe précédent, car la commandabilité du sous-système rapide entraîne la I-commandabilité (voir le chapitre 2, section 4).

### 2.2.2 Retour (PD) et placement de tous les pôles

V.X. Le [42] introduit un retour (PD) de façon à éliminer les modes impulsionnels, à garantir la régularité en boucle fermée, et à placer l'ensemble des pôles finis en une seule étape. Cette méthode est plus directe que la commande par retour (P) qui nécessite, un intermédiaire supplémentaire: le calcul du système en boucle fermée ( 24) après le premier retour qui élimine les modes impulsionnels. V.X. Le pour sa part raisonne sur la forme standard ( 15) du système ( 2). Soient:

- le gain  $K_1 \in \mathbb{R}^{p \times d}$  qui place arbitrairement les pôles finis de ( 15a) en  $\lambda_1, \dots, \lambda_d$  (voir chapitre 4),
- le gain  $K_2 \in \mathbb{R}^{p \times (n-d)}$  qui élimine les  $r - d$  modes impulsionnels de ( 15b) et les remplace par  $r - d$  pôles finis placés arbitrairement en  $\lambda_{d+1}, \dots, \lambda_r$ ,

Le retour (PD) défini par:

$$K = (K'_1 \quad K_2),$$

avec:

$$K'_1 = (I - K_2(I - sN)^{-1}B_2K_1),$$

réalise simultanément l'élimination des modes impulsionnels et le placement des  $r$  pôles finis.

L'un des inconvénients majeurs du retour (PD) réside dans la conception ou dans la réalisation d'un observateur. D'autre part, lorsque le système n'est pas I-commandable, cette méthode n'est même pas envisageable

### 3 Précompensateur dynamique et forme augmentée

L'introduction d'un précompensateur est motivée par la même exigence que celle évoquée précédemment: éliminer les comportements impulsionsnels. Dans cette section, nous proposons une alternative lorsque le système n'est pas I-commandable, en développant une commande dynamique en boucle ouverte, qui répond aux objectifs annoncés. Un premier précompensateur trivial est proposé. Il donne une solution du problème dans le cas mono-entrée et en outre permet d'expliquer de façon très simple notre démarche. Pour des raisons de dimensionnement, nous montrons que ce précompensateur ne saurait être employé pour un système comportant de nombreuses entrées. Une réduction du nombre d'intégrateurs utilisés est étudiée, et un précompensateur minimal est décrit. Ces résultats ont été présentés lors de la conférence IEEE / SMC93 [45]. Notons que les problèmes de stabilité ne sont pas étudiés dans ce chapitre, mais seront abordés ultérieurement dans le chapitre 4.

#### 3.1 Systèmes mono-entrée

Considérons le système ( 2) sous sa forme standard ( 15), avec  $u$  une fonction  $\nu - 1$  fois continûment dérivable. Pour des conditions initiales compatibles, nous pouvons écrire, d'après l'équation ( 22):

$$x_2 = - \sum_{i=0}^{\nu-1} N^i B_2 u^{(i)}.$$

Définissons  $v$ , une nouvelle entrée, comme étant la  $(\nu - 1)$ -ième dérivée de  $u$ , et le vecteur  $\epsilon$  comme étant  $(u, \dots, u^{(\nu-2)})^T$ . Appelons  $H(s)$  le précompensateur défini par:

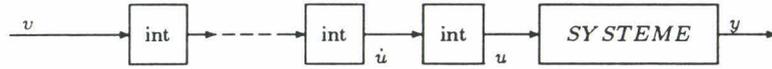
$$U(s) = H(s)V(s), \quad H(s) = \frac{1}{s^{\nu-1}}. \tag{25}$$

$H(s)$  permet de faire disparaître les dérivées de l'entrée dans l'expression de  $x_2$ . Une réalisation du précompensateur ( 25) est donnée par l'équation:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon} &= A_P \epsilon + B_P v, \\ u &= C_P \epsilon, \end{aligned} \tag{26}$$

avec:

$$\begin{aligned} A_P &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(\nu-1) \times (\nu-1)}, & B_P &= \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\nu-1}, \\ C_P &= (1 \ 0 \ \dots \ \dots \ 0) \in \mathbb{R}^{1 \times (\nu-1)}. \end{aligned} \tag{27}$$



**Fig. 3.3:** Précompensateur mono-entrée

Une réalisation du système complet défini par l'addition du précompensateur et du système initial est donnée par:

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{\epsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & B_1 C_P \\ 0 & I & -L_2 \\ 0 & 0 & A_P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \epsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -T_2 \\ B_P \end{pmatrix} v, \quad (28)$$

$$y = C_1 x_1 + C_2 x_2,$$

avec:

$$L_2 = -(B_2 \quad N B_2 \quad \dots \quad N^{\nu-2} B_2), \quad T_2 = -N^{\nu-1} B_2. \quad (29)$$

La seconde ligne du système ( 28) correspond à un ensemble d'équations algébriques, relativement aux vecteurs  $x_2$ ,  $\epsilon$  et à la nouvelle entrée  $v$ . Les modes de  $x_2$  sont entraînés par les modes de  $\epsilon$ . Afin d'alléger l'écriture, on ne conserve dans la réalisation du système complet que l'effet de ces modes entraînés sur les variables de sortie. En définissant le vecteur  $z$  comme étant égal à  $(x_1^T \quad \epsilon^T)^T$ , nous obtenons le système différentiel suivant:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \bar{A}z + \bar{B}v, \\ y &= \bar{C}z + \bar{D}v, \end{aligned} \quad (30)$$

avec:

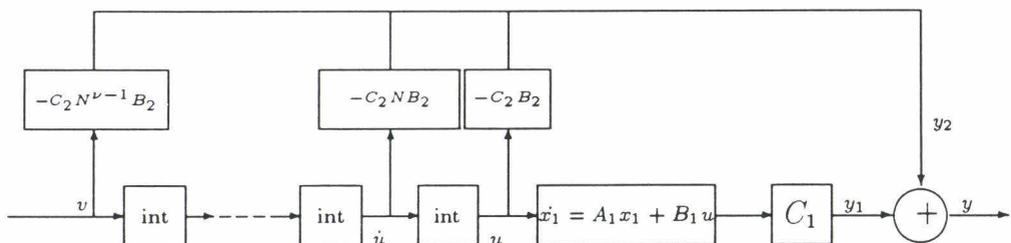
$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 C_P \\ 0 & A_P \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ B_P \end{pmatrix}, \quad \bar{C} = (C_1 \quad C_2 L_2), \quad \bar{D} = C_2 T_2.$$

Le système ( 30), appelé **forme augmentée** de ( 2), est de dimension  $\bar{n} = d + \nu - 1$ .

### Remarques

- **Simulation de systèmes généralisés**

Le précompensateur permet de simuler un système généralisé. Il suffit de simuler le sous-système lent ( 15a) de la forme standard, puis de placer en amont la cascade d'intégrateurs. Les vecteurs  $x_2$  et  $y_2$  sont construits à partir des sorties des différents intégrateurs.



**Fig. 3.4:** Simulation avec le précompensateur mono-entrée

• **Minimalité de  $H(s)$**

Dans le paragraphe suivant nous nous intéresserons à la minimalité du précompensateur dans le cas multi-entrées. Pour le cas mono-entrée nous pouvons déjà donner le résultat suivant:

**Théorème 3.2:**

*Lorsque  $u$  est scalaire, le nombre d'intégrateurs requis pour construire  $H(s)$  est minimal si, et seulement si,  $N^{\nu-1}B_2 \neq 0$ .*

**Démonstration:** le résultat est immédiat, étant donnée l'équation:

$$x_2 = - \sum_{i=0}^{\nu-1} N^i B_2 u^{(i)}.$$

La dérivée  $(\nu-1)$ -ième de  $u$  apparaît dans l'expression de  $x_2$  si, et seulement si,  $N^{\nu-1}B_2 \neq 0$ , et il faut exactement  $\nu-1$  intégrateurs pour la faire disparaître.

□

Remarquons que cette condition se traduit de façon très simple sur les éléments de  $B_2$ :

$$N = \text{diag} \{N_i\}, \quad i = 1, \dots, k,$$

avec  $N_i$  d'indice de nilpotence  $\nu_i$  et  $\nu = \max \nu_i$ . Avec un partitionnement correspondant pour  $B_2$ :

$$B_2 = ((B_2^1)^T \quad \dots \quad (B_2^k)^T)^T,$$

nous avons:

$$N^{\nu-1}B_2 = ((N_1^{\nu-1}B_2^1)^T \quad \dots \quad (N_k^{\nu-1}B_2^k)^T)^T.$$

Supposons que  $\nu = \nu_k$ , dans ce cas la condition  $N^{\nu-1}B_2 \neq 0$  est équivalente à la non nullité du dernier élément de  $B_2^k$ . En effet:

$$\begin{aligned} N_k^{\nu-1}B_2^k &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}^{\nu-1} \begin{pmatrix} \times \\ \vdots \\ \vdots \\ \times \\ b_\nu^k \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \times \\ \vdots \\ \times \\ b_\nu^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_\nu^k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

### 3.2 Systèmes multi-entrées

Afin d'expliquer pourquoi il est nécessaire de réduire l'ordre du précompensateur nous allons, dans un premier temps, appliquer le précompensateur trivial (25) à un système généralisé (2) avec  $p$  entrées. Examinons cette construction sur l'exemple suivant:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{x} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u, \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x. \end{aligned} \quad (31)$$

Ce système est déjà sous forme standard. Les matrices  $A_1$  et  $N$  apparaissent explicitement dans  $A$  et  $E$ . De cette façon on peut obtenir directement la forme augmentée. Avec cet exemple, nous avons  $\nu = 3$ , et  $d = 1$ . Le précompensateur défini comme dans le paragraphe précédent est de dimension 4:

$$U(s) = \frac{1}{s^2} V(s),$$

et la forme augmentée de dimension 5:

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v.$$

Avec cet exemple nous constatons que le précompensateur construit avec le même nombre d'intégrateurs sur chaque composante de  $u$ , nécessite en tout  $p(\nu - 1)$  intégrateurs. La réalisation (26) du précompensateur trivial correspond aux matrices:

$$\begin{aligned} A_P &= \begin{pmatrix} 0 & I_p & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & I_p \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p(\nu-1) \times p(\nu-1)}, & B_P &= \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ I_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p(\nu-1)}, \\ C_P &= (I_p \ 0 \ \dots \ \dots \ 0) \in \mathbb{R}^{1 \times p(\nu-1)}. \end{aligned} \quad (32)$$

La forme augmentée résultante est de dimension  $\bar{n} = d + p(\nu - 1)$ . Le coût pratique de la réalisation augmente proportionnellement au nombre d'entrées. Pour réduire ce coût nous allons montrer que  $p(\nu - 1)$  intégrateurs ne sont pas nécessaires, et

nous allons construire un précompensateur de dimension réduite. Rappelons l'expression de  $x_2$ :

$$x_2 = - \sum_{i=0}^{\nu-1} N^i B_2 u^{(i)},$$

qui fait apparaître les vecteurs  $NB_2\dot{u}$ ,  $N^2B_2\ddot{u}$ ,  $\dots$ ,  $N^{\nu-1}B_2u^{(\nu-1)}$ . Il faut donc au moins  $\text{rang}(NB_2) + \text{rang}(N^2B_2) + \dots + \text{rang}(N^{\nu-1}B_2)$  intégrateurs, et au plus  $\text{rang}(NB_2) + 2*\text{rang}(N^2B_2) + \dots + (\nu-1)*\text{rang}(N^{\nu-1}B_2)$  intégrateurs. En effet, pour construire  $N^iB_2u^{(i)}$  il faut au préalable avoir construit  $N^iB_2u^{(i-1)}$ ,  $\dots$ ,  $N^iB_2\dot{u}$ . D'un autre côté, l'expression de  $N^iB_2u^{(i-1)}$  peut dans certains cas être utile pour former  $N^{i-1}B_2u^{(i-1)}$ , et celle de  $N^iB_2\dot{u}$  peut être utile pour former  $N^{i-1}B_2\dot{u}$ ,  $\dots$ ,  $NB_2\dot{u}$ .

Le problème consiste donc à combiner au mieux les composantes de l'entrée **avant** de les intégrer, c'est-à-dire, à réduire en colonnes la matrice  $M$ :

$$M = \begin{pmatrix} N^{\nu-1}B_2 & \dots & \dots & NB_2 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & N^{\nu-1}B_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-d)(\nu-1)*p(\nu-1)}.$$

Dans ce qui suit nous nous intéressons au problème plus général:

$$X_2(s) = G(s)U(s), \quad G(s) = \sum_{i=0}^{\nu-1} s^i M_i, \quad (33)$$

où  $G(s)$  est une matrice polynomiale de dimension  $(n-d)*p$ , dont les composantes sont des polynômes de degré inférieur ou égal à  $\nu-1$ , et  $(M_i)_{i=0.. \nu-1}$  une séquence de matrices constantes. Cette notation simplifie quelque peu l'écriture des équations, et montre que l'algorithme peut aussi bien être appliqué avec  $M_i = N^iB_2$  pour déterminer  $x_2$ , qu'avec  $M_i = C_2N^iB_2$  pour déterminer  $y_2$ , comme nous le ferons à la fin du chapitre 3.

Nous allons détailler le précompensateur qui réalise la réduction en colonnes de la matrice  $M$ :

$$M = \begin{pmatrix} M_{\nu-1} & \dots & \dots & M_1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & M_{\nu-1} \end{pmatrix}.$$

Nous expliquerons quelles entrées doivent être combinées, et où placer les intégrateurs. Puis nous montrerons que le précompensateur est minimal. Enfin, en appliquant les résultats obtenus aux matrices  $M_i = N^iB_2$ , nous construirons une réalisation du précompensateur, et de la forme augmentée correspondante.

### 3.2.1 Construction d'un précompensateur réduit

La première étape est la suppression des dérivées d'ordre  $\nu-1$  de  $u$ .

**Théorème 3.3:**

Etant donné  $G(s)$  défini par (33), il existe une matrice constante, régulière  $Q_{\nu-1} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ , et une matrice diagonale:

$$H_{\nu-1}(s) = \frac{1}{s} \begin{pmatrix} I_{r_{\nu-1}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{p-r_{\nu-1}} \end{pmatrix},$$

où  $r_{\nu-1}$  désigne le rang de  $M_{\nu-1}$ , telles que:

$$G(s) = G_{\nu-2}(s)H_{\nu-1}^{-1}(s)Q_{\nu-1}^{-1} + M_0.$$

$G_{\nu-2}(s)$  est une matrice polynomiale dont les composantes sont des polynômes de degré inférieur ou égal à  $\nu - 2$ .

**Démonstration:** le résultat repose sur la réduction en colonnes de la matrice  $M_{\nu-1}$ . Il existe une matrice régulière  $Q_{\nu-1} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ , telle que  $M_{\nu-1}Q_{\nu-1} = (R_{\nu-1} \ 0)$ , avec  $R_{\nu-1} \in \mathbb{R}^{(n-d) \times r_{\nu-1}}$  de rang  $r_{\nu-1}$ . Considérant  $G(s)$ , on peut écrire:

$$\begin{aligned} G(s) &= M_0 + (\sum_{i=1}^{\nu-2} s^i M_i Q_{\nu-1} + s^{\nu-1} (R_{\nu-1} \ 0)) Q_{\nu-1}^{-1}, \\ &= M_0 + (\sum_{i=1}^{\nu-2} s^i M_i Q_{\nu-1} H_{\nu-1}(s) + s^{\nu-2} (R_{\nu-1} \ 0)) H_{\nu-1}^{-1}(s) Q_{\nu-1}^{-1}, \end{aligned}$$

avec:

$$H_{\nu-1}^{-1}(s) = s \begin{pmatrix} I_{r_{\nu-1}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{p-r_{\nu-1}} \end{pmatrix}.$$

En définissant:

$$G_{\nu-2}(s) = \sum_{i=1}^{\nu-2} s^i M_i Q_{\nu-1} H_{\nu-1}(s) + s^{\nu-2} (R_{\nu-1} \ 0),$$

nous obtenons le résultat escompté:

$$G(s) = G_{\nu-2}(s)H_{\nu-1}^{-1}(s)Q_{\nu-1}^{-1} + M_0,$$

et toutes les composantes de  $G_{\nu-2}(s)$  sont de degré inférieur ou égal à  $\nu - 1$ .  $\square$

Le produit  $Q_{\nu-1}H_{\nu-1}(s)$  constitue le dernier étage de notre précompensateur. En répétant  $\nu - 1$  fois la décomposition précédente, nous supprimons toutes les composantes polynomiales dans la matrice  $G(s)$ , c'est-à-dire toutes les dérivées de l'entrée. Définissons la séquence  $G_k(s)$  de matrices polynomiales:

$$G_{\nu-1}(s) = G(s),$$

$$G_{k+1}(s) = G_k(s)H_{k+1}^{-1}(s)Q_{k+1}^{-1} + M_0^{k+1}, \quad k = 0, \dots, \nu - 2,$$

avec:

$$G_k(s) = \sum_{i=0}^k s^i M_i^k, \tag{34}$$

et pour tout  $k = 0, \dots, \nu - 1$ ,  $(M_i^k)_{i=0..k}$  une séquence de matrices constantes. Il vient:

$$G(s) = \sum_{j=0}^{\nu-2} (M_0^j \prod_{i=j+1}^{\nu-1} H_i^{-1}(s) Q_i^{-1}) + M_0^{\nu-1}.$$

Soit:

$$H(s) = \prod_{i=1}^{\nu-1} Q_{\nu-i} H_{\nu-i}(s), \quad (35)$$

nous obtenons l'expression suivante pour le produit  $G(s)H(s)$ :

$$G(s)H(s) = \sum_{j=1}^{\nu-1} M_0^j \prod_{i=1}^j Q_{j+1-i} H_{j+1-i}(s) + M_0^0. \quad (36)$$

Pour tout  $i = 1, \dots, \nu - 1$ ,  $H_i(s)$  est une matrice rationnelle propre, et d'après l'équation (36) il en est de même pour le produit  $G(s)H(s)$ . Le système défini par

$$U(s) = H(s)V(s),$$

est un précompensateur dynamique pour le système généralisé

$$X_2(s) = G(s)U(s),$$

comparable au précompensateur trivial (28) obtenu avec les matrices  $A_P$ ,  $B_P$ , et  $C_P$  définies dans l'équation (32). La différence entre les deux précompensateurs est le nombre d'intégrateurs requis pour construire  $H(s)$ . Dans le premier cas il s'agit de  $p(\nu - 1)$  intégrateurs, et dans le second de  $\sum_{i=1}^{\nu-1} r_i$ , avec  $r_i = \text{rang}(M_i^i)$ . Les matrices  $M_i^i$  sont définies après chaque itération de la procédure de construction du précompensateur  $H(s)$  comme étant les matrices des coefficients de plus haut degré dans le développement en série de Laurent de  $G_i(s)$ , la partie polynomiale du transfert  $G(s)$  précompensée par:

$$\prod_{j=1}^{i-1} Q_{\nu-j} H_{\nu-j}(s).$$

Etant donné que pour tout  $i = 1, \dots, \nu - 1$ , nous avons  $r_i \leq p$ , il est évident que cette construction nécessite moins d'intégrateurs que la précédente.

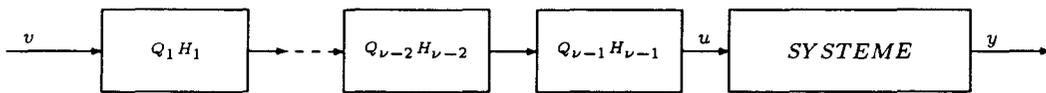


Fig. 3.5: Précompensateur réduit

### 3.2.2 Minimalité du précompensateur

Nous montrerons dans ce qui suit que le précompensateur (35), réalise la réduction en colonnes de la matrice  $M$ , et est minimal.

#### **Théorème 3.4:**

*Le nombre d'intégrateurs requis pour construire le précompensateur (35), c'est-à-dire  $\sum_{i=1}^{\nu-1} r_i$ , est égal à  $h$  le rang de la matrice  $M$ .*

**Démonstration:** procédons par recurrence. Le nombre d'intégrateurs nécessaires à la construction du  $(\nu - 1)$ -ème étage, c'est à dire  $r_{\nu-1}$  vérifie:

$$r_{\nu-1} = \text{rang } M_{\nu-1}.$$

D'autre part:

$$\begin{aligned} \text{rang} \begin{pmatrix} M_{\nu-1} & M_{\nu-2} \\ 0 & M_{\nu-1} \end{pmatrix} &= \text{rang} \left( \begin{pmatrix} M_{\nu-1} & M_{\nu-2} \\ 0 & M_{\nu-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{\nu-1} & 0 \\ 0 & Q_{\nu-1} \end{pmatrix} \right), \\ &= \text{rang} \begin{pmatrix} R_{\nu-1} & 0 & \bar{M}_{\nu-2} & \tilde{M}_{\nu-2} \\ 0 & 0 & R_{\nu-1} & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

avec  $\bar{M}_{\nu-2} \in \mathbb{R}^{(n-d)*r_{\nu-2}}$ , et  $\tilde{M}_{\nu-1} \in \mathbb{R}^{(n-d)*(p-r_{\nu-1})}$ .  $R_{\nu-1}$  est de rang plein en colonnes. Donc:

$$\begin{aligned} \text{rang} \begin{pmatrix} M_{\nu-1} & M_{\nu-2} \\ 0 & M_{\nu-1} \end{pmatrix} &= \text{rang} \begin{pmatrix} \bar{M}_{\nu-2} \\ R_{\nu-1} \end{pmatrix} + \text{rang} \begin{pmatrix} R_{\nu-1} & 0 & \tilde{M}_{\nu-2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ &= \text{rang} R_{\nu-1} + \text{rang} (R_{\nu-1} \quad \tilde{M}_{\nu-2}), \\ &= \text{rang} R_{\nu-1} + \text{rang} M_{\nu-2}^{\nu-2}, \\ &= r_{\nu-1} + r_{\nu-2}. \end{aligned}$$

En répétant cette décomposition sur les matrices:

$$M = \begin{pmatrix} M_{\nu-1} & \dots & \dots & M_i \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & M_{\nu-1} \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, \nu - 2,$$

nous obtenons le résultat désiré.  $\square$

**Théorème 3.5:**

*h est le nombre minimal d'intégrateurs nécessaires pour construire  $H(s)$ .*

**Démonstration:** La minimalité est une conséquence directe des résultats obtenus à partir des moments, et des matrices de Hankel. Utilisées depuis longtemps pour les systèmes réguliers, les matrices de Hankel sont étendues par Christodoudou [17,19, 21] pour les systèmes généralisés. En particulier, il propose différents algorithmes, pour déterminer une réalisation minimale de  $G(s)$ , et il montre que l'ordre d'une telle réalisation est donné par  $h$ , le rang de la matrice  $M$ .  $h$  est le nombre minimal de dérivateurs nécessaires pour réaliser  $G(s)$ , mais  $h$  est aussi le nombre d'intégrateurs nécessaires pour construire  $H(s)$  de telle façon que le produit  $G(s)H(s)$  soit une matrice rationnelle propre. De ce fait le précompensateur (35) est minimal.  $\square$

De plus en ce qui concerne les matrices  $M_0^j$ , nous avons le résultat suivant:

**Théorème 3.6:**

*Pour tout  $j = 0, \dots, \nu - 2$ ,  $M_0^j = (\bar{M}_0^j \quad 0)$ , avec  $\bar{M}_0^j \in \mathbb{R}^{(n-d)*r_{j+1}}$ .*

**Démonstration:** pour tout  $j = 0, \dots, \nu - 2$ :

$$\begin{aligned} G_j(s) &= \sum_{i=0}^j s^i M_i^j = (G_{j+1}(s) - M_0^{j+1})Q_{j+1}H_{j+1}(s), \\ &= (\sum_{i=1}^{j+1} s^i M_i^{j+1})Q_{j+1}H_{j+1}(s). \end{aligned}$$

Mais:

$$H_{j+1}(s) = \text{diag} \left\{ \underbrace{s^{-1}, \dots, s^{-1}}_{r_{j+1}}, 1, \dots, 1 \right\},$$

donc:

$$M_0^j = M_1^{j+1}Q_{j+1}\text{diag}\{1, \dots, 1, 0, \dots, 0\} = (\bar{M}_0^j \quad 0),$$

avec  $\bar{M}_0^j \in \mathbb{R}^{(n-d)*r_{j+1}}$ .  $\square$

Remarquons que le théorème précédent n'est pas vérifié pour  $j = \nu - 1$ . Dans la suite nous conserverons la notation  $\bar{M}_0^j$  pour simplifier l'écriture de certaines expressions.

### 3.2.3 Réalisation de $H(s)$ et forme augmentée multi-entrées

Pour respecter la même méthode que dans le cas mono-entrée nous donnons dans un premier temps une réalisation du précompensateur ( 35), et nous déduisons ensuite la forme augmentée correspondante. Cependant, pour le lecteur désireux de consulter immédiatement les réalisations obtenues, nous donnons *a priori* le résultat de l'algorithme.

Une réalisation, d'ordre  $h$ , du précompensateur ( 35) est donnée par:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon} &= A_P \epsilon + B_P v, \\ u &= C_P \epsilon + D_P v, \end{aligned} \quad (37)$$

avec  $A_P, B_P, C_P$ , et  $D_P$  définis dans l'équation ( 40).

D'autre part, une réalisation, d'ordre  $\bar{n} = d + h$ , de la forme augmentée correspondante, est donnée par:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \bar{A}z + \bar{B}v, \\ y &= \bar{C}z + \bar{D}v, \end{aligned} \quad (38)$$

où les matrices  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$  sont définies dans ( 42).

Nous allons examiner le détail de ces réalisations. Cela permettra notamment de localiser les variables d'état du précompensateur. D'après les notations introduites en ( 34), ( 35), et ( 36):

$$\begin{aligned} X_2(s) &= \sum_{j=0}^{\nu-1} s^j M_j^{\nu-1} U(s), \\ &= \sum_{j=0}^{\nu-1} s^j M_j^{\nu-1} H(s) V(s), \\ &= (\sum_{j=1}^{\nu-2} (\bar{M}_0^j \quad 0) \prod_{i=1}^j Q_{j+1-i} H_{j+1-i}(s) + (\bar{M}_0^0 \quad 0) + M_0^{\nu-1} H(s)) V(s). \end{aligned}$$

Considérons le  $j$ -ième étage de  $H(s)$ , c'est un système dont le vecteur d'entrée est  $u^{j-1}$ , et dont le vecteur de sortie est  $u^j$ , avec pour tout  $j = 1, \dots, \nu - 2$ :

$$U^j(s) = \prod_{i=1}^j Q_{j+1-i} H_{j+1-i}(s) V(s).$$

Si nous partitionnons  $u^j$  de la façon suivante  $((\bar{u}^j)^T \ (\tilde{u}^j)^T)^T$ , avec  $\bar{u}^j$  de dimension  $r_{j+1}$ ,  $v$  de la façon suivante  $(\bar{v} \ \tilde{v})^T$ , avec  $\bar{v}$  de dimension  $r_1$ , et les matrices  $Q_j$  conformément au partitionnement des vecteurs  $u^j$ , nous obtenons:

$$\dot{u} = \begin{pmatrix} Q_{11}^{\nu-1} & Q_{12}^{\nu-1} \\ Q_{21}^{\nu-1} & Q_{22}^{\nu-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}^{\nu-2} \\ \tilde{u}^{\nu-2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \dot{\bar{u}}^1 \\ \dot{\tilde{u}}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11}^1 & Q_{12}^1 \\ Q_{21}^1 & Q_{22}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{v} \\ \tilde{v} \end{pmatrix},$$

où  $Q_{11}^{\nu-1}$  est une matrice de dimension  $p * r_{\nu-1}$ , et  $Q_{11}^1$  une matrice de dimension  $r_2 * r_1$ . Plus généralement, pour tout  $j = 2, \dots, \nu - 2$ , nous avons:

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{u}}^j \\ \dot{\tilde{u}}^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11}^j & Q_{12}^j \\ Q_{21}^j & Q_{22}^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}^{j-1} \\ \tilde{u}^{j-1} \end{pmatrix},$$

où  $Q_{11}^j$  est une matrice de dimension  $r_{j+1} * r_j$ .

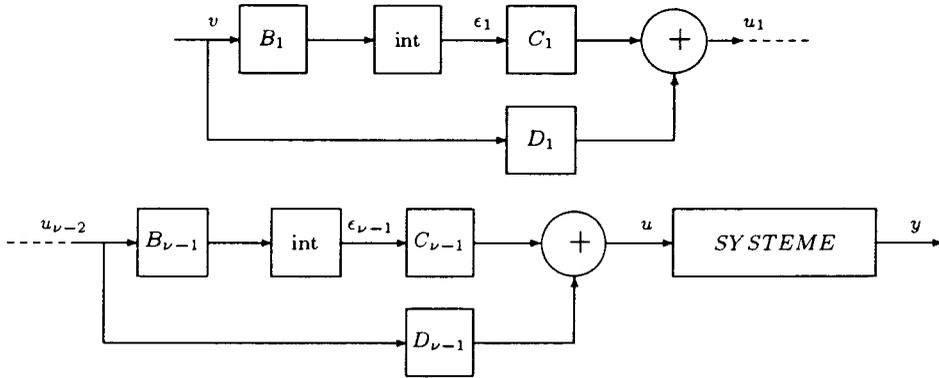
Nous pouvons exprimer  $x_2$  grâce aux différents vecteurs  $\bar{u}^j$ :

$$X_2(s) = M_0^{\nu-1} U(s) + \sum_{j=1}^{\nu-2} (\bar{M}_0^j \ 0) U^j(s) + (\bar{M}_0^0 \ 0) V(s),$$

$$= M_0^{\nu-1} U(s) + \sum_{j=1}^{\nu-2} \bar{M}_0^j \bar{U}^j(s) + \bar{M}_0^0 \bar{V}(s).$$

Définissons maintenant les vecteurs d'état  $\epsilon_j$ :

$$\dot{\epsilon}_1 = \bar{v}, \quad \dot{\epsilon}_j = \bar{u}^{j-1}, \quad j = 2, \dots, \nu - 1.$$



**Fig. 3.6:** Précompensateur minimal

Nous pouvons écrire une réalisation du premier étage du précompensateur:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_1 &= B_p^1 v, \\ u^1 &= C_p^1 \epsilon_1 + D_p^1 v, \end{aligned}$$

avec:

$$B_P^1 = (I_{r_1} \ 0) \in \mathbb{R}^{r_1 \times p}, \quad C_P^1 = \begin{pmatrix} Q_{11}^1 \\ Q_{21}^1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times r_1}, \quad D_P^1 = \begin{pmatrix} 0 & Q_{12}^1 \\ 0 & Q_{22}^1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times p},$$

et plus généralement une réalisation du  $j$ -ième étage, pour  $j = 2, \dots, \nu - 1$ :

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_j &= B_P^j u^{j-1}, \\ u^j &= C_P^j \epsilon_j + D_P^j u^{j-1}, \end{aligned}$$

avec:

$$B_P^j = (I_{r_j} \ 0) \in \mathbb{R}^{r_j \times p}, \quad C_P^j = \begin{pmatrix} Q_{11}^j \\ Q_{21}^j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times r_j}, \quad D_P^j = \begin{pmatrix} 0 & Q_{12}^j \\ 0 & Q_{22}^j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times p}.$$

Une réalisation du précompensateur complet est obtenue en considérant le vecteur  $\epsilon = (\epsilon_{\nu-1}^T, \dots, \epsilon_1^T)^T$ :

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_j &= B_P^j (C_P^{j-1} \epsilon_{j-1} + D_P^{j-1} (C_P^{j-2} \epsilon_{j-2} + \dots + D_P^2 (C_P^1 \epsilon_1 + D_P^1 v) \dots)), \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} J_i^{j-1} \epsilon_i + L_1^{j-1} v, \end{aligned}$$

avec pour tout  $j = 2, \dots, \nu - 1$ , et pour tout  $i = 1, \dots, j - 2$ :

$$\begin{aligned} J_i^{j-1} &= B_P^j (\prod_{k=1}^{j-i-1} D_P^{j-k}) C_P^i, \\ &= Q_{12}^{j-1} (\prod_{k=1}^{j-i-2} Q_{22}^{j-k-1}) Q_{21}^i, \\ J_{j-1}^{j-1} &= B_P^j C_P^{j-1}, \\ &= Q_{11}^{j-1}, \end{aligned}$$

et:

$$\begin{aligned} L_1^{j-1} &= B_P^j (\prod_{k=1}^{j-1} D_P^{j-k}), \\ &= (0 \quad Q_{12}^{j-1} (\prod_{k=1}^{j-2} Q_{22}^{j-k-1})), \\ L_1^0 &= (I_{r_1} \ 0). \end{aligned} \tag{39}$$

D'autre part, en considérant la sortie du précompensateur, c'est-à-dire  $u$ , nous pouvons écrire:

$$\begin{aligned} u &= C_P^{\nu-1} \epsilon_{\nu-1} + D_P^{\nu-1} (C_P^{\nu-2} \epsilon_{\nu-2} + \dots + D_P^2 (C_P^1 \epsilon_1 + D_P^1 v) \dots), \\ &= \sum_{i=1}^{\nu-1} T_i^{\nu-1} \epsilon_i + D_P v, \end{aligned}$$

avec pour tout  $i = 1, \dots, \nu - 2$ :

$$\begin{aligned} T_i^{\nu-1} &= (\prod_{k=1}^{\nu-1-i} D_P^{\nu-k}) C_P^i, \\ &= Q_{12}^{\nu-1} (\prod_{k=i+1}^{\nu-2} Q_{22}^{\nu+i-k-1}) Q_{21}^i, \\ T_{\nu-1}^{\nu-1} &= C_P^{\nu-1}, \\ &= Q_{11}^{\nu-1}, \end{aligned}$$

et:

$$\begin{aligned} D_P &= \prod_{k=1}^{\nu-1} D_P^{\nu-k}, \\ &= (0 \quad Q_{12}^{\nu-1} (\prod_{k=1}^{\nu-2} Q_{22}^{\nu-k-1})). \end{aligned}$$

Nous obtenons la réalisation (37) du précompensateur avec:

$$\begin{aligned} A_P &= \begin{pmatrix} 0 & J_{\nu-2}^{\nu-2} & \dots & J_1^{\nu-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & J_1^1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad B_P = \begin{pmatrix} L_1^{\nu-2} \\ \vdots \\ \vdots \\ L_1^0 \end{pmatrix}, \\ C_P &= (T_{\nu-1}^{\nu-1} \quad \dots \quad T_1^{\nu-1}). \end{aligned} \quad (40)$$

Le dernier point à préciser concerne la réalisation de la forme augmentée (38). On peut dans un premier temps considérer le vecteur augmenté  $(x_1^T \quad x_2^T \quad \epsilon^T)^T$ , mais de la même façon que dans le cas mono-entrée, les modes de  $x_2$  sont entraînés par les modes de  $\epsilon$ . Nous ne conserverons de ces modes que leurs effets sur les variables de sortie, et nous construirons  $x_2$  à partir de  $\epsilon$  et  $v$ :

$$X_2(s) = M_0^{\nu-1} U(s) + \sum_{j=1}^{\nu-2} (\bar{M}_0^j \quad 0) U^j(s) + (\bar{M}_0^0 \quad 0) V(s).$$

Les vecteurs  $u^j$ , pour  $j = 1, \dots, \nu - 2$  s'expriment tous en fonction de  $\epsilon$  et  $v$ :

$$u^j = \sum_{i=1}^j T_i^j \epsilon_i + D_j v,$$

avec pour tout  $j = 1, \dots, \nu - 2$ , et  $i = 1, \dots, j - 1$ :

$$\begin{aligned} T_i^j &= \prod_{k=i+1}^j \begin{pmatrix} 0 & Q_{12}^{i+j+1-k} \\ 0 & Q_{22}^{i+j+1-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{11}^i \\ Q_{21}^i \end{pmatrix}, \\ T_j^j &= \begin{pmatrix} Q_{11}^j \\ Q_{21}^j \end{pmatrix}, \\ D_j &= \prod_{k=1}^j \begin{pmatrix} 0 & Q_{12}^{j+1-k} \\ 0 & Q_{22}^{j+1-k} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nous obtenons:

$$x_2 = L_2 \epsilon + T_2 v,$$

avec  $L_2 = (L_2^{\nu-1}, \dots, L_2^1)$ , et pour tout  $i = 1, \dots, \nu - 2$ :

$$\begin{aligned} L_2^i &= \sum_{j=i}^{\nu-2} (\bar{M}_0^j \quad 0) T_i^j + M_0^{\nu-1} T_i^{\nu-1}, \\ &= \sum_{j=i}^{\nu-2} \bar{M}_0^j Q_{12}^j (\prod_{k=2}^{j-1} Q_{22}^{j+1-k}) Q_{21}^1 + M_0^{\nu-1} Q_{12}^{\nu-1} (\prod_{k=2}^{\nu-2} Q_{22}^{\nu-k}) Q_{21}^1, \\ L_2^{\nu-1} &= M_0^{\nu-1} T_{\nu-1}^{\nu-1}, \\ &= M_0^{\nu-1} Q_{11}^{\nu-1}, \\ T_2 &= \sum_{i=1}^{\nu-2} (\bar{M}_0^i \quad 0) D_i + M_0^{\nu-1} D_P + (\bar{M}_0^0 \quad 0), \\ &= \sum_{i=1}^{\nu-2} \bar{M}_0^i Q_{12}^i (\prod_{k=1}^{i-1} Q_{22}^{i-k}) Q_{21}^1, \\ &\quad + M_0^{\nu-1} (0 \quad Q_{12}^{\nu-1} (\prod_{k=1}^{\nu-2} Q_{22}^{\nu-1-k})) + (\bar{M}_0^0 \quad 0). \end{aligned} \quad (41)$$

En définissant le vecteur augmenté  $z = (x_1^T \quad \epsilon^T)^T$ , nous obtenons la forme augmentée définie par l'équation (38), avec:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \begin{pmatrix} A_1 & B_1 C_P \\ 0 & A_P \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ B_P \end{pmatrix}, \\ \bar{C} &= (C_1 \quad C_2 L_2), \quad \bar{D} = C_2 T_2. \end{aligned} \tag{42}$$

Le précompensateur décrit dans les pages précédentes permet d'éliminer les discontinuités qui affectent le comportement du système. Le système compensé se comporte comme l'association d'un système dynamique de dimension  $\bar{n}$  et d'un système non dynamique de dimension  $n - \bar{n}$ :

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \bar{A}z + \bar{B}v, \\ x_2 &= (0_d \quad L_2)z + T_2v. \end{aligned} \tag{43}$$

### Remarques:

- **Construction directe de  $y_2$**

L'application du même algorithme, avec les matrices  $M_i = -C_2 N^i B_2$ , permet de déterminer le précompensateur minimal nécessaire pour obtenir  $y_2$  sans passer par  $x_2$ . Nous obtenons une autre forme régulière, qui a exactement la même structure que la forme augmentée, mais dont la dimension est réduite. Le nombre d'intégrateurs nécessaires pour construire  $y_2$  est plus petit ou égal au nombre d'intégrateurs nécessaires pour construire  $x_2$  (tout dépend de la matrice  $C_2$ ). Dans de nombreux cas cette seconde forme augmentée sera plus économique que la première. Mais avec la première forme augmentée nous pouvons construire l'état complet  $x_2$ , alors qu'avec la seconde nous pouvons uniquement construire  $C_2 x_2$ .

- **Simulation de systèmes généralisés multi-entrées**

Une autre remarque concerne la simulation qui comme dans le cas mono-entrée peut être réalisée à l'aide du précompensateur et du sous-système lent (15a) de la forme standard de (2).

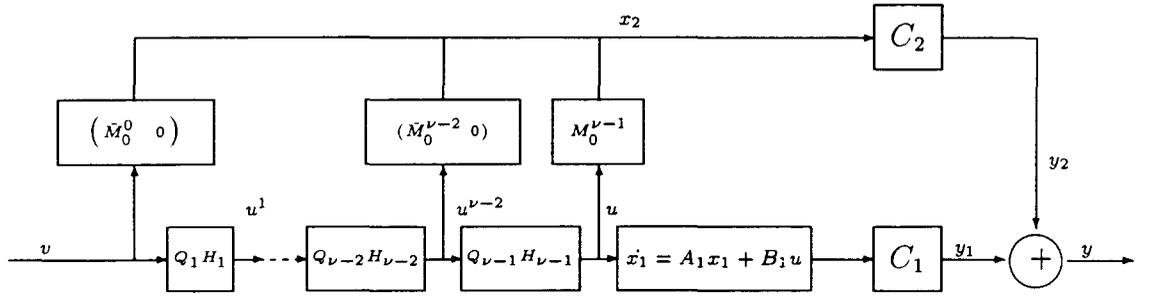


Fig. 3.7: Simulation avec le précompensateur minimal

### 3.2.4 Résumé de l'algorithme complet

On rappelle ici les principales étapes de l'algorithme qui conduisent à la réalisation du précompensateur minimal (35), et de la forme augmentée correspondante:

1. détermination de la forme standard du système considéré,
2. expression de  $x_2$  (resp.  $y_2$ ), à l'aide d'une série de matrices  $M_i^{\nu-1}$ ,
3. détermination du précompensateur  $H(s)$ ,
  - détermination de  $r_{\nu-1}$ , le rang de  $M_{\nu-1}^{\nu-1}$ ,
  - détermination de  $Q_{\nu-1}$ , une matrice de changement de variables, telle que  $M_{\nu-1}Q_{\nu-1}u$  nécessite seulement les  $r_{\nu-1}$  premières composantes de  $u$ ,
  - définition de  $H_{\nu-1}(s)$ , un bloc de  $r_{\nu-1}$  intégrateurs qui sont placés sur les  $r_{\nu-1}$  premières composantes de  $u$ ,
  - application de la transformation  $Q_{\nu-1}H_{\nu-1}(s)$  sur les autres matrices  $M_i^{\nu-1}$ , à l'exception de  $M_0^{\nu-1}$ ,
  - mise en mémoire de  $M_0^{\nu-1}$ ,  $Q_{\nu-1}$ , et  $r_{\nu-1}$ , et reformulation de  $(x_2 - M_0^{\nu-1}u)Q_{\nu-1}H_{\nu-1}$ , (resp.  $(y_2 - M_0^{\nu-1}u)Q_{\nu-1}H_{\nu-1}$ ), selon les puissances croissantes de  $s$ ,
  - retour à l'étape 3 pour supprimer les termes d'ordre  $\nu-2, \nu-3, \dots, 1$ , jusqu'à élimination complète des dérivées successives de  $u$ ,
4. partition des matrices  $Q_i$  à l'aide de  $r_{i+1}$  et  $r_i$ ,
5. détermination des blocs  $J_i^j, L_1^j, T_i^j, D_i$ ,
6. construction de  $A_P, B_P, C_P, D_P, L_2$ , et  $T_2$
7. construction de  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ , et  $\bar{D}$ .

## 4 Exemple

Considérons le système suivant avec deux sorties différentes  $y_a$  et  $y_b$ .

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{x} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u, \\ y_a &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x, \\ y_b &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x. \end{aligned} \quad (44)$$

La sortie  $y_a$  correspond à l'exemple (31) déjà étudié au début du paragraphe 3.2 de ce chapitre. Nous avons obtenu trivialement un système régulier dont l'état était formé de 5 composantes:

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v. \quad (45)$$

Dans ce qui suit, nous allons montrer que nous pouvons réduire l'ordre du précompensateur. Calculons les matrices nécessaires pour construire  $x_2$ :

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad NB_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^2B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Détaillons la construction du précompensateur. D'après ce qui a été écrit dans les pages précédentes, et avec les mêmes notations:

$$G(s) = (M_0^0 H_1^{-1}(s) Q_1^{-1} + M_0^1) H_2^{-1}(s) Q_2^{-1} + M_0^2,$$

et:

$$H(s) = Q_2 H_2(s) Q_1 H_1(s).$$

Les matrices  $Q_2$ ,  $H_2(s)$ ,  $Q_1$ ,  $H_1(s)$  s'obtiennent par réduction en colonnes des matrices  $M_2^2$  et  $M_1^1$  comme le montre le tableau suivant de la page suivante.

Le précompensateur est défini par le produit:

$$H(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{s^2} & -\frac{1}{s} \end{pmatrix}.$$

Le premier étage a pour réalisation:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_1 &= (1 \ 0) v, \\ u^1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \epsilon_1 + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v, \end{aligned}$$

$M_0^2$	$M_1^2$	$M_2^2$	$H(s)$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} s & s \\ 0 & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\Downarrow$ $\begin{pmatrix} s & s \\ s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\swarrow \quad \searrow$	$\begin{pmatrix} 0 & s^2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\Downarrow$ $\begin{pmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\Downarrow$ $\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{Q_2}$  $\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{H_2}$
	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & s \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	
$M_0^1$		$M_1^1$	$H(s)$
	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} s & s \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\Downarrow$ $\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\Downarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{Q_1}$  $\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{H_1}$

et le second:

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_2 &= (1 \ 0) u^1, \\ u &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \epsilon_2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u^1.\end{aligned}$$

Le précompensateur est construit avec deux intégrateurs, et la réalisation obtenue est de la forme:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_2 \\ \dot{\epsilon}_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_2 \\ \epsilon_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v, \\ u &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \epsilon + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v.\end{aligned}$$

Le vecteur  $x_2$  s'exprime en fonction de  $\epsilon$  et de  $v$ :

$$\begin{aligned}x_2 &= - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u^1 - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v, \\ &= - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \epsilon - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v,\end{aligned}$$

et la forme augmentée est de dimension 3:

$$\begin{aligned}\dot{z} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{\epsilon}_2 \\ \dot{\epsilon}_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v, \\ y_a &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} v, \\ y_b &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} z.\end{aligned}\tag{46}$$

Supposons maintenant que l'on veuille uniquement éliminer les impulsions qui apparaissent dans la sortie. Avec la première matrice de sortie, la construction du précompensateur correspondant nécessite 2 intégrateurs. En fait:

$$C_2 B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C_2 N B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 N^2 B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En réappliquant notre algorithme sur ces matrices, nous obtenons le même précompensateur que précédemment, et la même équation d'état.

Mais si nous considérons maintenant la seconde matrice de sortie, la construction du précompensateur correspondant nécessite un unique intégrateur, et la forme augmentée associée à ce précompensateur est de dimension 2. En fait:

$$C_2 B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_2 N B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 N^2 B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le précompensateur est alors défini par le produit:

$$H(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{s} & 0 \end{pmatrix},$$

et nous obtenons la forme augmentée:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{e}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v, \\ y_b &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v. \end{aligned} \tag{47}$$

La réduction du nombre d'intégrateurs est possible car la matrice  $C_2 N^2 B_2$  est nulle.

## 5 Structure à l'infini

Le nombre d'intégrateurs nécessaires et suffisants pour construire le précompensateur que l'on a décrit précédemment résulte de la structure à l'infini du système initial, plus précisément des pôles à l'infini de ce système. On retrouve le nombre et la place de ces intégrateurs ainsi que la forme du précompensateur en appliquant les algorithmes de détermination de la structure à l'infini.

Nous rappellerons l'un de ces algorithmes inspiré des travaux de Verghese [90], Silverman et Kitapçi [81], et Kucera et Descusse [40]. Puis nous montrerons comment cette procédure peut être adaptée au problème de la précompensation. Enfin nous expliciterons le lien entre  $h$ , les indices  $r_i$ , le nombre et les ordres des pôles à l'infini.

### 5.1 Détermination de la structure à l'infini

La structure à l'infini d'un système décrit par le transfert  $G(s)$  est obtenue après transformation à gauche et à droite par une succession d'opérations algébriques regroupées dans deux matrices bipropres.

#### Définition 3.2.:

*Soit  $U(s)$  une matrice carrée, rationnelle, de dimension  $p * p$ .  $U(s)$  est bipropre si, et seulement si, la limite de  $U(s)$  existe lorsque  $s$  tend vers l'infini, et est une matrice inversible.*

Pour tout transfert  $G(s)$  de dimension  $q * p$  et de rang  $r$ , il existe  $V(s)$  et  $U(s)$  deux matrices bipropres telles que:

$$V(s)G(s)U(s) = \begin{pmatrix} \Lambda(s) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

avec:

$$\Lambda(s) = \text{diag} (s^{k_i}), \quad i = 1, \dots, r.$$

Pour tout  $i$  tel que  $k_i > 0$ ,  $G(s)$  admet un pôle à l'infini d'ordre  $k_i$ , et pour tout  $i$  tel que  $k_i < 0$ ,  $G(s)$  admet un zéro à l'infini d'ordre  $-k_i$ .

La détermination de la structure à l'infini qui fait usuellement intervenir des opérations à gauche ( $V(s)$ ) et à droite ( $U(s)$ ) peut être obtenue avec des transformations uniquement à gauche ou uniquement à droite [40]. Nous allons décrire brièvement une procédure qui après réduction en colonnes de la matrice  $G(s)$  permet de déterminer les pôles et zéros à l'infini en utilisant uniquement des opérations à droite.

Supposons dans ce qui suit que  $q > p$ , et désignons par  $g_i(s)$  pour  $i = 1, \dots, p$  les colonnes de la matrice  $G(s)$ . Supposons d'autre part que  $G(s)$  n'a pas de colonne nulle. Chaque colonne peut être développée en série de Laurent:

$$g_i(s) = g_i^{k_i} s^{k_i} + g_i^{k_i-1} s^{k_i-1} + \dots$$

Définissons:

$$G_0 = (g_i^{k_i}), \quad \Lambda(s) = \text{diag} \{s^{k_i}\}, \quad i = 1, \dots, p.$$

En définissant de la même façon que  $G_0$  les matrices  $G_{-1}, G_{-2}, \dots$ , on peut écrire:

$$G(s) = (G_0 + s^{-1}G_{-1} + \dots)\Lambda(s).$$

### Définition 3.3::

*$G(s)$  est réduite en colonnes si, et seulement si,  $G_0$  est de rang plein en colonnes.*

- Lorsque  $G(s)$  est réduite en colonnes, nous pouvons appliquer des résultats similaires à ceux proposés dans [40]:

#### Théorème 3.7::

*$G(s)$  admet un pôle à l'infini d'ordre  $\gamma$  si, et seulement si, il existe  $k_i > 0$  tel que  $k_i = \gamma$ .*

*$G(s)$  admet un zéro à l'infini d'ordre  $\gamma$  si, et seulement si, il existe  $k_i < 0$  tel que  $-k_i = \gamma$ .*

- Lorsque  $G(s)$  n'est pas réduite en colonnes, il existe une séquence de transformations qui agissent sur les colonnes et uniquement sur les colonnes, regroupées dans une matrice bipropre  $U(s)$  telle que  $G(s)U(s)$  soit réduite en colonnes [40]. En développant en série de Laurent le produit  $G(s)U(s)$ :

$$G(s)U(s) = (G_0 + s^{-1}G_{-1} + \dots)\Lambda(s).$$

on peut appliquer le résultat précédent.

## 5.2 Application à la précompensation

Pour un système généralisé, la détermination de la structure à l'infini par la procédure précédente permet de construire un précompensateur minimal qui élimine les discontinuités dans la réponse temporelle en supprimant les pôles infinis. En effet la

matrice  $\Lambda(s)$  permet de localiser les entrées sur lesquelles il va falloir placer des intégrateurs, les ordres  $k_i$  nous renseignent sur le nombre d'intégrateurs à mettre en œuvre pour chaque entrée, et la matrice  $U(s)$  correspond aux différentes combinaisons d'entrées qui vont être utilisées:

$$H(s) = U(s) \begin{pmatrix} \Lambda(s)^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Examinons cette procédure sur l'exemple (44). En ne considérant, pour simplifier l'écriture, que la partie polynomiale du transfert, nous avons  $X_2(s) = G(s)U(s)$  avec:

$$\begin{aligned} G(s) &= \begin{pmatrix} s & s + s^2 \\ 1 & 1 + s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + s^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + s^{-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La matrice  $G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  n'est pas de rang plein en colonnes, donc  $G(s)$  n'est pas réduite en colonnes. Introduisons la matrice bipropre:

$$U_1(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -s^{-1} & 1 \end{pmatrix},$$

il vient alors:

$$\begin{aligned} G(s)U_1(s) &= \begin{pmatrix} -1 & s + s^2 \\ -s^{-1} & 1 + s \\ -s^{-1} & 1 \end{pmatrix}, \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + s^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + s^{-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pour les mêmes raisons que précédemment  $G(s)U_1(s)$  n'est pas réduite en colonnes, il faut introduire une autre séquence d'opérations regroupées dans  $U_2(s)$ :

$$U_2(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s^{-2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons:

$$\begin{aligned} G(s)U_1(s)U_2(s) &= \begin{pmatrix} s^{-1} & s + s^2 \\ s^{-2} & 1 + s \\ s^{-2} - s^{-1} & 1 \end{pmatrix}, \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + s^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + s^{-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} s^{-1} & 0 \\ 0 & s^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

qui est réduite en colonnes. La structure à l'infini de  $G(s)$  est donnée par la matrice:

$$\Lambda(s) = \begin{pmatrix} s^{-1} & 0 \\ 0 & s^2 \end{pmatrix},$$

et correspond à un pôle à l'infini d'ordre 2 et à un zéro à l'infini d'ordre 1.

Notons que pour déterminer le régulateur qui compense les pôles à l'infini, il n'est pas nécessaire de poursuivre la procédure de réduction en colonnes jusqu'à son terme. En effet, faire apparaître les zéros à l'infini ne présente ici aucun intérêt. On peut construire un précompensateur minimal pour supprimer les discontinuités qui affectent la réponse temporelle en arrêtant la procédure une fois que tous les pôles à l'infini ont été recensés avec leur ordre de multiplicité. Dans l'exemple précédent, on peut se contenter de la première étape.

Le précompensateur obtenu correspond alors au transfert:

$$\begin{aligned} H(s) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -s^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s^{-2} \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -s^{-1} & s^{-2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Il s'agit bien du même précompensateur que celui calculé avec notre algorithme pour lequel on a inversé les deux entrées  $v_1$  et  $v_2$ . Le régulateur met en œuvre deux intégrateurs afin de compenser le pôle à l'infini d'ordre 2.

Plus généralement nous pouvons énoncer les deux résultats suivants qui explicitent les relations qui existent entre les indices  $h$ ,  $r_i$ , le nombre, et les ordres des pôles à l'infini.

**Théorème 3.8.:**

*Pour tout  $i = 1, \dots, \nu - 1$ , le nombre d'intégrateurs  $r_{\nu-i}$  nécessaires à la construction du  $i$ -ème étage est égale au nombre de pôles à l'infini d'ordre supérieur ou égal à  $\nu - i$ :*

$$r_{\nu-i} = \sum_{j=1}^i \text{nombre de pôles à l'infini d'ordre } \nu - j.$$

**Démonstration:** pour un transfert polynomial  $G(s)$  développé en série de Laurent:

$$G(s) = \sum_{i=0}^{\nu-1} s^i M_i,$$

nous avons montré dans la démonstration du théorème 3.4 que pour tout  $i = 1, \dots, \nu - 1$  nous avons:

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} M_{\nu-1} & \dots & \dots & M_i \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & M_{\nu-1} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^i r_{\nu-j}$$

D'autre part l'article de Silverman et Kitapci [81] précise la relation qui existe entre ce même développement en série de Laurent et les ordres des pôles à l'infini:

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} M_{\nu-1} & \dots & \dots & M_i \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & M_{\nu-1} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^i (i+1-j) * (\text{nombre de pôles à l'infini d'ordre } \nu-j)$$

En rapprochant ces deux résultats nous obtenons pour tout  $i = 1, \dots, \nu - 1$ :

$$\sum_{j=1}^i r_{\nu-j} = \sum_{j=1}^i (i+1-j) * (\text{nombre de pôles à l'infini d'ordre } \nu-j),$$

soit:

$$\begin{aligned} r_{\nu-i} &= \sum_{j=1}^i r_{\nu-j} - \sum_{j=1}^{i-1} r_{\nu-j}, \\ &= \sum_{j=1}^i (i+1-j) * (\text{nombre de pôles à l'infini d'ordre } \nu-j) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{i-1} (i-j) * (\text{nombre de pôles à l'infini d'ordre } \nu-j), \\ &= \sum_{j=1}^{i-1} (\text{nombre de pôles à l'infini d'ordre } \nu-j) \\ &\quad + (\text{nombre de pôles à l'infini d'ordre } \nu-i), \\ &= \sum_{j=1}^i (\text{nombre de pôles à l'infini d'ordre } \nu-j), \end{aligned}$$

et nous obtenons le résultat souhaité.  $\square$

### Corollaire 3.8:

*Le nombre total d'intégrateurs nécessaires à la construction du précompensateur minimal est égal au nombre total de pôles à l'infini, chacun étant considéré avec son ordre de multiplicité:*

$$h = \sum_{i=1}^{\nu-1} i * (\text{nombre de pôles à l'infini d'ordre } i).$$

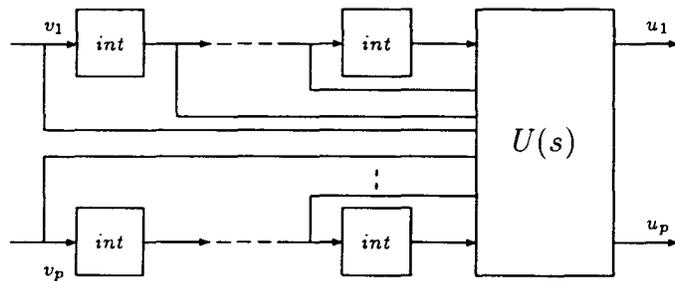
**Démonstration:** étant donné le résultat précédent et la relation:

$$h = \sum_{i=1}^{\nu-1} r_i,$$

le résultat est immédiat.  $\square$

**Remarque:** bien que conduisant à un précompensateur identique, les deux démarches, celle déduite de la réduction en colonnes et celle proposée dans ce mémoire, correspondent à des approches différentes.

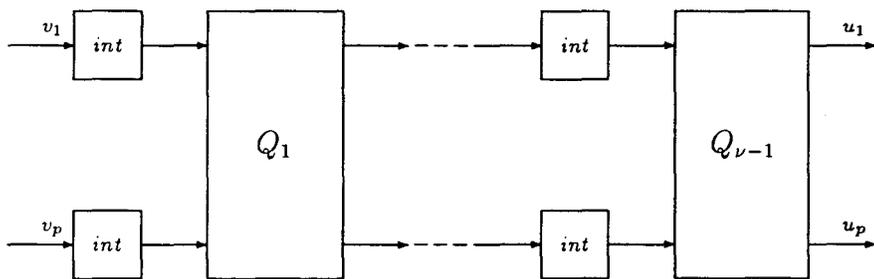
- L'algorithme de réduction inspiré des travaux de Descusse et Kucera permet pour chaque nouvelle entrée  $v$  de déterminer le nombre total d'intégrateurs à mettre en série. Les combinaisons linéaires des signaux utilisés sont ensuite regroupées dans une matrice bipropre  $U(s)$  selon le schéma ci dessous:



**Fig. 3.8:** Précompensateur obtenu par réduction en colonnes

Parce qu'elle est développée à partir d'opérations algébriques sur les matrices rationnelles, cette procédure s'applique aux systèmes généralisés définis par leur matrice de transfert.

- L'algorithme proposé dans ce mémoire concerne lui, à chaque itération, l'ensemble des entrées. On détermine celles sur lesquelles il va falloir placer un intégrateur pour réduire l'ordre des pôles à l'infini.



**Fig. 3.9:** Précompensateur obtenu étage par étage

On a exposé dans la section précédente comment cet algorithme procédait, à partir de la réalisation de la forme standard d'un système généralisé, pour déterminer le précompensateur. Pour un système connu par sa matrice de transfert, il est également applicable étant donné que les matrices nécessaires

à sa mise en œuvre ne sont pas directement les matrices qui apparaissent dans la réalisation mais les produits  $B_2, NB_2, \dots, N^{\nu-1}B_2$ , qui se retrouvent aisément avec le transfert.

D'autre part la description détaillée étage par étage du précompensateur qui résulte de cette procédure permet d'en obtenir immédiatement une réalisation  $y$  compris dans le cas multi-entrées. Dans le chapitre suivant nous montrerons que cette réalisation est à la fois commandable et observable, et que la forme augmentée décrite précédemment est une réalisation du système compensé adaptée à la résolution de nombreux problèmes de commande.

## 6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté différentes méthodes pour éliminer les comportements impulsionnels d'un système généralisé. Pour des systèmes I-commandables, ou dont le sous-système rapide est commandable, une commande par retour sur  $x$  proportionnelle, ou proportionnelle plus dérivée permet de réaliser cette élimination. Il s'agit en fait d'un placement de pôles: on déplace les pôles infinis en des points arbitrairement choisis dans le plan complexe. Dans le cas plus général, où la commandabilité des modes impulsionnels n'est pas garantie, on propose une commande dynamique en boucle ouverte par précompensation de l'entrée. Les composantes de la nouvelle entrée  $v$  sont combinées et intégrées un nombre suffisant de fois pour construire les vecteurs  $NB_2\dot{u}, \dots, N^{\nu-1}B_2u^{(\nu-1)}$ , et une réalisation du système compensé, appelée forme augmentée est proposée. Le vecteur  $x_2$  est explicité en fonction des variables d'état du précompensateur. Afin d'intégrer le précompensateur dans une boucle de régulation complète, il s'agit maintenant d'étudier les caractéristiques de commandabilité et d'observabilité du système compensé, et surtout de construire une commande stabilisante. Ceci est l'objet du chapitre suivant.

### Procédures MATLAB

La fonction *IMPFREE* détermine le retour proportionnel qui élimine les pôles infinis d'un système I-commandable. Les fonctions *DYNAMIC* et *ENTRAIN* isolent respectivement les parties dynamique et non dynamique d'un système sans mode impulsionnel.

L'élimination des discontinuités par précompensation a fait l'objet de trois groupes de procédures selon que l'on utilise un précompensateur trivial, un précompensateur qui minimise le nombre d'intégrateurs nécessaires pour obtenir  $x_2$ , ou un précompensateur qui minimise le nombre d'intégrateurs pour obtenir  $y_2$ . Dans chaque groupe une procédure permet de déterminer le transfert du précompensateur étage par étage, une autre donne une réalisation de  $H(s)$ , une troisième calcule la forme augmentée, et enfin, une dernière détermine les matrices  $L_2$  et  $T_2$  pour construire  $x_2$  ou  $y_2$ .

Précompensateur	Transfert	Réalisation	Forme augmentée	$L_2$ et $T_2$
Trivial	<i>PECTRI</i>	<i>REATRI</i>	<i>FATRI</i>	<i>L2K2TRI</i>
Min. $x_2$	<i>PRECX2</i>	<i>REAX2</i>	<i>FAX2</i>	<i>L2K2X2</i>
Min. $y_2$	<i>PRECY2</i>	<i>REAY2</i>	<i>FAY2</i>	<i>L2K2Y2</i>



## 4. PLACEMENT DE POLES ET STABILISATION

Après avoir éliminé les comportements impulsionnels, le second objectif consiste à choisir les dynamiques du système bouclé, notamment afin d'en assurer la stabilité. Quelles sont les conditions requises, et comment réaliser la commande? Voilà les deux questions auxquelles nous répondons dans ce chapitre.

Lorsque tous les modes dynamiques du système sont commandables, une commande par retour sur  $x$  permet de garantir à la fois l'élimination des comportements impulsionnels et la stabilité en boucle fermée. Lorsque les modes impulsionnels ne sont pas commandables, une commande par précompensation plus retour d'état est proposée. Afin de préciser sous quelles conditions cette commande est réalisable, la commandabilité et l'observabilité du précompensateur et de la forme augmentée sont étudiées.



# 1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la commande par placement de pôles pour les systèmes généralisés. L'objectif est de changer les dynamiques du système en déplaçant de façon arbitraire les pôles dans le plan complexe, pour satisfaire certains critères, le premier étant d'assurer la stabilité en boucle fermée. Avec un développement similaire à celui proposé dans le chapitre 3, nous distinguons deux types de commandes selon les hypothèses que l'on peut valider sur le système initial.

- Pour les systèmes I-commandables, une commande par retour sur  $x$  permet de remplacer les modes impulsionnels par des modes dynamiques finis, c'est-à-dire de déplacer les pôles infinis de  $(E, A)$ . Cette commande a été développée dans la section 2.1 du chapitre 3. Lorsque le système est de plus R-commandable, elle peut être complétée par un second retour qui déplace, les modes dynamiques finis du **système bouclé** (24). Pour les systèmes I et R-commandables la spécification de tous les modes est donc obtenue par un double retour sur  $x$ .

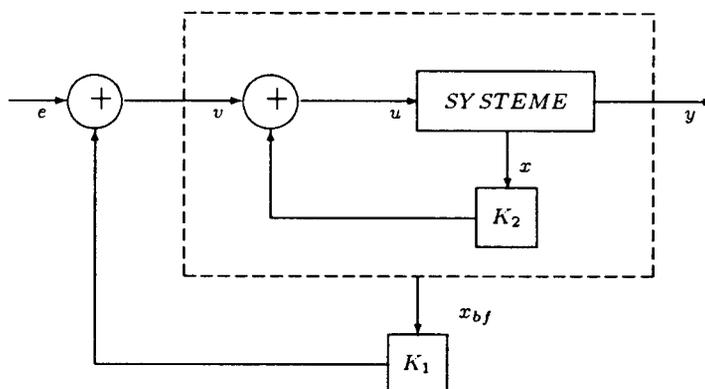


Fig. 4.1: Stabilisation par retour sur  $x$

Les inconvénients restent les mêmes que ceux déjà évoqués précédemment: nécessité d'observer toutes les variables internes du système, et de pouvoir commander tous les modes, y compris les modes impulsionnels.

- Lorsque l'hypothèse de I-commandabilité n'est pas validée, une commande par précompensation dynamique suivie d'un retour sur l'état augmenté  $z$  peut être appliquée. Afin de déterminer sous quelles conditions ce retour d'état permet de commander le système, et sous quelles conditions le vecteur  $z$  peut être observé, il est nécessaire d'étudier la commandabilité et l'observabilité du système compensé.

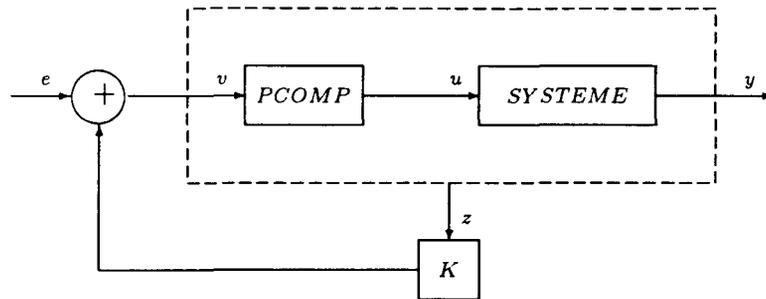


Fig. 4.2: Stabilisation par retour sur  $z$

Le chapitre est structuré conformément à cette introduction. La première partie concerne la commande par retour sur  $x$ . La seconde partie regroupe un certain nombre de résultats préliminaires concernant la commandabilité et l'observabilité du précompensateur et du système compensé. La dernière partie, enfin, est consacrée à la commande du précompensateur et du système compensé. Ce sont les deux dernières sections qui constituent la part originale de ce chapitre.

## 2 Stabilisation par retour sur $x$

Dans cette section, on donne les conditions nécessaires et suffisantes pour commander à l'aide d'un retour sur  $x$  tous les modes dynamiques du système, c'est-à-dire pour éliminer les  $r-d$  modes impulsions, et pour placer arbitrairement les  $d$  pôles finis dans le plan complexe. Nous construisons le retour  $K$  correspondant.

### 2.1 Placement des modes dynamiques finis

Les modes dynamiques finis du système généralisé (2) peuvent être commandés par un retour sur  $x$ , lorsque le système est R-commandable. Cobb et Dai [23,27] proposent deux théorèmes dont la démonstration s'appuie sur les résultats de la section 4.3 du chapitre 2.

#### **Théorème 4.1:**

*Une valeur propre  $\lambda_i$  de la matrice  $A_1$  dans la forme standard (15) peut être placée arbitrairement dans le plan complexe par la commande  $u = K_1 x_1$ , et ce sans modifier la position des autres valeurs propres si, et seulement si,  $\text{Im}(\lambda_i I - A_1) + \text{Im} B_1 = \mathbb{R}^d$ .*

#### **Théorème 4.2:**

*Toutes les valeurs propres  $(\lambda_i)_{i=1..d}$  de la matrice  $A_1$  peuvent être placées arbitrairement dans le plan complexe par la commande  $u = K_1 x_1$  si, et seulement si, le système (2) est R-commandable.*

Notons que lorsque l'on s'intéresse uniquement à la stabilisation du système les hypothèses requises sont moins fortes que celles qui apparaissent dans les deux théorèmes précédents. Dai [27] montre le résultat suivant:

**Théorème 4.3:**

*Le sous système lent ( 15a) de la forme standard est stabilisable si, et seulement si, le rang de  $(sI - A_1 \ B_1)$  est égal à  $d$ , pour tout  $s$  instable.*

Dans la suite nous utilisons de préférence la notion de commandabilité, mais gardons en mémoire la notion de stabilisabilité pour les systèmes qui ne sont pas R-commandables.

## 2.2 Stabilisation d'un système sans mode impulsionnel

Un système généralisé sans mode impulsionnel a une forme standard particulière correspondant à l'équation suivante, comme nous l'avons montré dans la section 2.3 du chapitre 2:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_1 x_1 + B_1 u, & (a) \\ x_2 &= -B_2 u, & (b) \\ y &= C_1 x_1 + C_2 x_2. & (c) \end{aligned} \tag{48}$$

La partie dynamique du système est réduite à  $x_1$ . Supposons que le système ( 48) soit R-commandable, quelque soit le  $d$ -uplet  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_d\} \in \mathcal{C}$  il existe un gain  $K_1$  tel que les valeurs propres de la matrice  $A_1 + B_1 K_1$  soient  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_d\}$ . Lorsque les complexes  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_d\}$  sont choisis avec une partie réelle négative, le système bouclé par la commande  $u = K_1 x_1 + e$  est stable, et a pour expression:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (A_1 + B_1 K_1)x_1 + B_1 e, \\ x_2 &= -B_2 K_1 x_1 - B_2 e, \\ y &= C_1 x_1 + C_2 x_2. \end{aligned}$$

La matrice  $K_1$  peut être calculée en écrivant le système ( 48a) sous forme commandable de Luenberger et en appliquant les méthodes usuelles [9].

## 2.3 Stabilisation d'un système I-commandable

La stabilisation d'un système I-commandable se fait en deux temps. Une première commande permet d'éliminer les modes impulsionnels, et un second retour spécifie l'ensemble des modes dynamiques du système bouclé, c'est-à-dire les  $d$  modes dynamiques finis initiaux plus les  $r - d$  modes impulsionnels transformés en modes dynamiques finis suite au premier retour. Cobb et Dai [23,27] montrent que si le système est I-commandable, **les modes dynamiques finis qui apparaissent après élimination des impulsions sont tous commandables.**

Supposons que le système considéré soit I-commandable, et appliquons les résultats présentés dans la section 2.1 du chapitre 3. Il existe une commande  $u = \tilde{K}_2 \tilde{x}_2 + v$

telle que la forme de Smith du système bouclé soit décrite par l'équation ( 24). En introduisant le changement de variables:

$$\bar{x}_1 = \tilde{x}_1, \quad \bar{x}_2 = \tilde{x}_2 + (A_{22} + \tilde{B}_2 \tilde{K}_2)^{-1} A_{21} \tilde{x}_1,$$

et les nouvelles notations:

$$\bar{A}_1 = A_{11} - (A_{12} + \tilde{B}_1 \tilde{K}_2)(A_{22} + \tilde{B}_2 \tilde{K}_2)^{-1} A_{21},$$

$$\bar{B}_1 = \tilde{B}_1 - (A_{12} + \tilde{B}_1 \tilde{K}_2)(A_{22} + \tilde{B}_2 \tilde{K}_2)^{-1} \tilde{B}_2,$$

$$\bar{B}_2 = (A_{22} + \tilde{B}_2 \tilde{K}_2)^{-1} \tilde{B}_2,$$

$$\bar{C}_1 = \tilde{C}_1 - \tilde{C}_2 (A_{22} + \tilde{B}_2 \tilde{K}_2)^{-1} A_{21},$$

$$\bar{C}_2 = \tilde{C}_2,$$

nous avons:

$$\dot{\bar{x}}_1 = \bar{A}_1 \bar{x}_1 + \bar{B}_1 v, \quad (a)$$

$$\bar{x}_2 = -\bar{B}_2 v, \quad (b)$$

$$y = \bar{C}_1 \bar{x}_1 + \bar{C}_2 \bar{x}_2, \quad (c)$$

(49)

qui n'est rien d'autre que la forme standard de ( 2) bouclé par  $u = \tilde{K}_2 \tilde{x}_2 + v$ .

Si le système initial est de plus R-commandable, il en est de même de ( 49). Quelque soit le  $r$ -uplet  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\} \in \mathcal{C}^r$  il existe un gain  $\bar{K}_1$  tel que les valeurs propres de la matrice  $\bar{A}_1 + \bar{B}_1 \bar{K}_1$  soient  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ . Lorsque les complexes  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$  sont choisis avec une partie réelle négative, le système bouclé par la commande  $v = \bar{K}_1 \bar{x}_1 + e$  est stable, et a pour expression:

$$\dot{\bar{x}}_1 = (\bar{A}_1 + \bar{B}_1 \bar{K}_1) \bar{x}_1 + \bar{B}_1 e,$$

$$\bar{x}_2 = -\bar{B}_2 \bar{K}_1 \bar{x}_1 - \bar{B}_2 e,$$

$$y = \bar{C}_1 \bar{x}_1 + \bar{C}_2 \bar{x}_2.$$

Le gain  $\bar{K}_1$  peut être calculé en écrivant le système ( 49a) sous forme commandable de Luenberger et en appliquant les méthodes usuelles [9].

La commande complète qui élimine les modes impulsionnels et qui spécifie les  $r$  modes dynamiques est donnée par:

$$u = \bar{K}_1 \bar{x}_1 + \tilde{K}_2 \tilde{x}_2 + e = (\bar{K}_1 \quad \tilde{K}_2) \tilde{x} + e.$$

## 2.4 Exemple

Considérons le système ( 44) défini dans la section 4 du chapitre 3,:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u,$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x.$$

Rappelons que pour ce système  $d = 1$ , et  $r = 3$ , il possède donc 2 modes impulsions. D'autre part, il possède un mode exponentiel associé à la valeur propre 2. Un calcul rapide nous montre que le système est I-commandable, car:

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ A & E & B \end{pmatrix} = 7,$$

et par ailleurs il est également R-commandable. Nous pouvons donc appliquer les résultats précédents. Le changement de variable:

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{x},$$

permet de réécrire (44) sous sa forme de Smith:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{\tilde{x}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{x} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u,$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \tilde{x}.$$

Définissons le premier retour chargé d'éliminer les modes impulsions:

$$u = \tilde{K}_2 \tilde{x}_2 + v, \quad \tilde{K}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Après changement de variable, le système en boucle fermée est de la forme:

$$\dot{\bar{x}}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \bar{x}_1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v,$$

$$\bar{x}_2 = -(0 \quad -1)v,$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \bar{x}_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \bar{x}_2.$$

Le système étant R-commandable, les modes de  $\bar{x}_1$  sont tous commandables. Supposons que l'on veuille les placer en  $\{-1, -2, -2\}$ , la commande correspondante est définie par:

$$v = \bar{K}_1 \bar{x}_1 + e, \quad \bar{K}_1 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

et le retour complet sur le système initial:

$$\begin{aligned} u &= \bar{K}_1 \bar{x}_1 + \bar{K}_2 \bar{x}_2 + e, \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \tilde{x} + e, \\ &= \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} x + e. \end{aligned}$$

### 3 Commandabilité et observabilité de la forme augmentée

Dans ce qui suit, nous supposons que l'hypothèse de I-commandabilité n'est pas vérifiée. Les modes impulsions de (2) ne peuvent pas être éliminés par retour sur  $x$ . Nous proposons de commander le système par une précompensation dynamique suivie d'un bouclage sur le système compensé, et donnons les conditions nécessaires et suffisantes pour commander la forme augmentée. Nous montrons dans un premier temps que la réalisation (37) du précompensateur (35) est minimale, c'est à dire commandable et observable, puis nous utilisons ce résultat pour étudier la minimalité de la forme augmentée correspondante (38).

#### 3.1 Réalisation minimale de $H(s)$

**Théorème 4.4:**

*Le système décrit par l'équation (37) est commandable et observable.*

**Démonstration :** nous allons construire la forme de Smith de (35), et nous montrerons que la somme des degrés des dénominateurs qui apparaissent dans cette forme est égale à la dimension de (37). Soit:

$$H(s) = \prod_{i=1}^{\nu-1} Q_{\nu-i} H_{\nu-i}(s) = Q_{\nu-1} \prod_{i=1}^{\nu-1} H_{\nu-i}(s) \bar{Q}_1(s),$$

$\prod_{i=1}^{\nu-1} H_{\nu-i}(s)$  est une matrice diagonale où apparaît le nombre d'intégrateurs à placer sur chaque entrée, la première entrée étant celle à intégrer le plus grand nombre de fois, et la dernière celle à intégrer le plus petit nombre de fois, c'est-à-dire:

$$\prod_{i=1}^{\nu-1} H_{\nu-i}(s) = \begin{pmatrix} s^{-k_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & s^{-k_p} \end{pmatrix},$$

avec  $k_1 > k_2 > \dots > k_p$ . D'autre part:

$$\bar{Q}_1(s) = \prod_{i=1}^{\nu-2} H_i^{-1}(s) \prod_{i=2}^{\nu-1} Q_{\nu-i} H_{\nu-i}(s),$$

et  $Q_{\nu-1}$  sont des matrices unimodulaires. De ce fait,  $\prod_{i=1}^{\nu-1} H_{\nu-i}(s)$  est, à une permutation près, la forme de Smith Mac-Millan de  $H(s)$ , et une réalisation minimale de  $H(s)$  est d'ordre  $h$ .  $\square$

Le système décrit par l'équation ( 37) de dimension  $h$  est donc commandable et observable.

**Remarque:** notons que ce résultat s'applique également à la réalisation du pré-compensateur multi-entrées trivial ( 25) qui nécessite  $p(\nu - 1)$  intégrateurs, c'est-à-dire à l'équation ( 26) dans laquelle les matrices  $A_P$ ,  $B_P$ , et  $C_P$  sont définies par ( 32).

### 3.2 Commandabilité de la forme augmentée mono-entrée

Avant de donner les conditions nécessaires et suffisantes pour obtenir une réalisation minimale de  $G(s)H(s)$ , examinons les problèmes que l'on peut rencontrer en considérant le cas mono-entrée.

#### **Théorème 4.5:**

*La forme augmentée ( 30) est commandable si, et seulement si, le système initial ( 2) est R-commandable.*

**Démonstration:** un rapide calcul permet d'écrire que  $C_P A_P^i B_P = 0$ , pour  $i = 0, \dots, \nu - 3$ , et que  $C_P A_P^{\nu-2} B_P = 1$ . En notant  $C(A, B)$  la matrice de commandabilité de la paire  $(A, B)$ , nous avons:

$$\begin{aligned} C(\bar{A}, \bar{B}) &= \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & B_1 & \dots & A_1^{d-1} B_1 \\ B_P & \dots & A_P^{\nu-2} B_P & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} 0 & C(A_1, B_1) \\ C(A_P, B_P) & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Comme la paire  $(A_P, B_P)$  est commandable, la commandabilité de  $(\bar{A}, \bar{B})$  dépend uniquement de la commandabilité de  $(A_1, B_1)$ .  $\square$

**Remarque :** notons cependant que la forme augmentée n'est pas toujours une forme observable, même si  $(A_1, C_1)$  en est une. En effet, il peut y avoir simplification entre un pôle nul du précompensateur, et un zéro nul du sous-système lent ( 15a) de la forme standard. Dans ce cas la forme augmentée n'est pas observable, comme l'illustre le petit exemple suivant. Soit le système:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{x}_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} u, \\ y &= (1 \quad 1 \quad 1 \quad 0) x, \end{aligned}$$

qui est une réalisation minimale de:

$$G(s) = \frac{2s}{s^2 + 1} + s.$$

Le précompensateur est constitué d'un unique intégrateur  $H(s) = s^{-1}$ . Calculons la forme augmentée:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v,$$

$$y = (1 \quad 1 \quad 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ u \end{pmatrix} + v,$$

qui est commandable mais non observable, donc non minimale. Une réalisation minimale du système précompensé est donnée par:

$$\begin{aligned} \dot{x}_m &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x_m + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} v, \\ y &= (1 \quad -1) x_m + v. \end{aligned}$$

Le problème que l'on vient de souligner est dû au fait que l'on a construit le précompensateur avec des intégrateurs purs. Il y a eu simplification d'un pôle nul avec un zéro du sous-système lent. De façon à supprimer cet inconvénient et à assurer, en plus de cela, la stabilité du régulateur en boucle ouverte on peut développer, avec un algorithme similaire à celui présenté dans le chapitre 3, un précompensateur construit à partir d'opérateurs  $(s + \alpha)^{-1}$ , avec  $\alpha > 0$ , à la place de  $s^{-1}$ . Une telle structure est équivalente à la réalisation (37) bouclée par une commande qui place les pôles dans le plan complexe. Dans la section suivante nous détaillerons cette commande.

### 3.3 Réalisation minimale de $G(s)H(s)$

La simplification d'un pôle du précompensateur par un zéro du sous-système lent est un problème qui peut apparaître également dans le cas multi-entrées. Nous avons le résultat suivant:

**Théorème 4.6:**

*La forme augmentée (38) est commandable et observable si, et seulement si, la réalisation  $(A_1, B_1, C_1)$  est commandable et observable et n'a aucun zéro nul.*

**Démonstration :** soit  $D(s)$  la forme de Smith Mac-Millan de  $G(s)$ , nous avons:

$$\begin{aligned} G(s)H(s) &= U(s)D(s)V(s)Q_{\nu-1} \prod_{i=1}^{\nu-1} H_{\nu-i}(s)\bar{Q}_1(s), \\ &= U(s)D(s) \prod_{i=1}^{\nu-1} H_{\nu-i}(s)\bar{V}(s). \end{aligned}$$

où:

$$\bar{V}(s) = \prod_{i=1}^{\nu-1} H_i^{-1}(s) V(s) Q_{\nu-1} \prod_{i=1}^{\nu-1} H_{\nu-i}(s) \bar{Q}_1(s),$$

et  $U(s)$  sont des matrices unimodulaires. De ce fait,  $D(s) \prod_{i=1}^{\nu-1} H_{\nu-i}(s)$  est, à une permutation près, la forme de Smith Mac-Millan de  $G(s)H(s)$ . Une réalisation minimale de  $G(s)H(s)$  est d'ordre  $d + h$  si, et seulement si:

- $(A_1, B_1, C_1)$  est une réalisation minimale de ( 15a),
- il n'y a pas de simplification entre un pôle de  $H(s)$  et un zéro de  $C_1(sI - A_1)^{-1}B_1$ .  $\square$

**Remarque:** ce résultat s'applique également à la réalisation de la forme augmentée ( 30) obtenue à l'aide du précompensateur trivial.

## 4 Placement de pôles

### 4.1 Placement des pôles du précompensateur

Dans le cas mono-entrée, le précompensateur ( 25) est réalisé sous forme canonique commandable. Les coefficients du polynôme caractéristique apparaissent dans la dernière ligne de la matrice  $A_P$ . Ici tous ces coefficients sont nuls, ce qui signifie que tous les modes du précompensateur le sont aussi. On retrouve le fait que le précompensateur a été construit à partir d'intégrateurs purs.

Pour placer les  $\nu - 1$  modes du précompensateur en  $\lambda_1, \dots, \lambda_{\nu-1}$ , il suffit d'imposer au polynôme caractéristique du système ( 26) bouclé par la commande  $v = K_P \epsilon + e$  l'expression suivante:

$$\begin{aligned} P_{A_P+B_P K_P}(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_{\nu-1}), \\ &= \lambda^{\nu-1} + \alpha_{\nu-2} \lambda^{\nu-2} + \dots + \alpha_0, \end{aligned}$$

et de former le gain  $K_P$ :

$$K_P = (-\alpha_0, \dots, -\alpha_{\nu-2}).$$

Dans le cas multi-entrées, le précompensateur minimal ( 35), n'est, quant à lui, pas réalisé sous forme canonique. Le commander par l'entrée  $v$  suppose donc une transformation préalable, puis l'application des méthodes usuelles. Plutôt que d'introduire ce calcul supplémentaire, nous proposons d'utiliser une autre propriété du précompensateur: l'accès direct à la sortie de chaque étage. Nous allons construire une commande modale étage par étage, très facile à déterminer.

Considérons l'équation d'état du  $j$ -ième étage de dimension  $r_j$ :

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_j &= B_P^j u^{j-1}, \\ u^j &= C_P^j \epsilon_j + D_P^j u^{j-1}, \end{aligned}$$

avec:

$$B_P^j = (I_{r_j} \quad 0), \quad C_P^j = \begin{pmatrix} Q_{11}^j \\ Q_{21}^j \end{pmatrix}, \quad D_P^j = \begin{pmatrix} 0 & Q_{12}^j \\ 0 & Q_{22}^j \end{pmatrix}.$$

Cette réalisation est évidemment commandable, ce que l'on vérifie aisément avec la démonstration de la section 3.1 de ce chapitre, ou en écrivant:

$$C(A_P^j, B_P^j) = B_P^j = (I_{r_j} \quad 0),$$

qui est de rang plein  $r_j$ .

Pour assigner les  $r_j$  pôles de l'étage  $j$  en  $\lambda_1^j, \dots, \lambda_{r_j}^j$ , il suffit de boucler cet étage par la commande:

$$u^{j-1} = K_P^j \epsilon_j, \quad \text{avec } K_P^j = \begin{pmatrix} \Lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et } \Lambda = \text{diag} \{ \lambda_i^j \}, \quad i = 1, \dots, r_j.$$

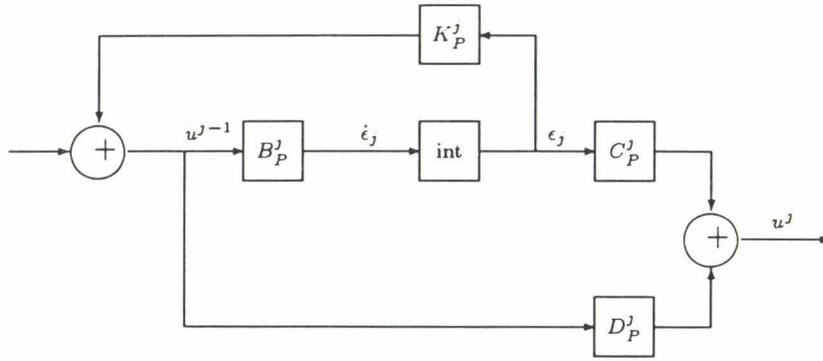


Fig. 4.3: Stabilisation du  $j$ -ième étage

La commande de l'ensemble des modes du précompensateur peut se déterminer de la même manière. Cette commande a l'avantage de ne nécessiter aucun calcul, et l'inconvénient d'augmenter la taille du vecteur d'entrée proportionnellement au nombre d'étages de  $H(s)$ .

## 4.2 Placement des pôles du système compensé

Lorsque la réalisation (30) (resp. (38)) est commandable, on peut concevoir une commande qui spécifie tous les modes dynamiques de la forme augmentée, c'est-à-dire les modes exponentiels du système initial plus les modes introduits par l'adjonction du précompensateur.

Considérons d'abord la forme augmentée mono-entrée (30), obtenue avec le précompensateur trivial (25) qui est commandable à la condition que le sous-système lent (15a) de la forme standard le soit aussi. Le système (30) n'est pas sous forme compagne, mais nous déterminerons la matrice de changement de variables [34] qui permet de se ramener à cette forme canonique, et calculerons la commande complète. Soit  $P_{\bar{A}}(\lambda)$  le polynôme caractéristique de  $\bar{A}$ :

$$P_{\bar{A}}(\lambda) = \det(\lambda I - A_1) \det(\lambda I - A_P) = \lambda^{\nu-1} \det(\lambda I - A_1).$$

Appelons  $(a_0, \dots, a_{d-1})$  les différents coefficients du polynôme caractéristique  $P_{A_1}(\lambda)$ :

$$P_{A_1}(\lambda) = \lambda^d + a_{d-1}\lambda^{d-1} + \dots + a_1\lambda + a_0.$$

et:

$$P_{\bar{A}}(\lambda) = \lambda^{\bar{n}} + a_{d-1}\lambda^{\bar{n}-1} + \dots + a_1\lambda + a_0\lambda^{\nu-1}. \quad (50)$$

Il existe une matrice de changement de variables  $P$  telle que le vecteur  $\bar{z} = P^{-1}z$  vérifie l'équation:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{z}} &= \bar{A}^*\bar{z} + \bar{B}^*v, \\ y &= \bar{C}^*z + \bar{D}v, \end{aligned} \quad (51)$$

avec:

$$\bar{A}^* = P^{-1}\bar{A}P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & -a_0 & \dots & -a_{d-1} \end{pmatrix},$$

$$\bar{B}^* = P^{-1}\bar{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{C}^* = \bar{C}P.$$

Pour placer les  $\bar{n}$  pôles de (51) en  $\lambda_1, \dots, \lambda_{\bar{n}}$ , il suffit d'imposer le polynôme caractéristique du système bouclé par  $v = \bar{K}^*\bar{z} + e$ , sous la forme:

$$\begin{aligned} P_{\bar{A}^* + \bar{B}^*\bar{K}^*}(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_{\bar{n}}), \\ &= \lambda^{\bar{n}} + \alpha_{\bar{n}-1}\lambda^{\bar{n}-1} + \dots + \alpha_0, \end{aligned}$$

et de former le gain  $\bar{K}^*$ :

$$\bar{K}^* = (-\alpha_0, \dots, -\alpha_{\nu-2}, a_0 - \alpha_{\nu-1}, \dots, a_{d-1} - \alpha_{\bar{n}-1}). \quad (52)$$

Il reste à déterminer le changement de variables  $P$ , de façon à obtenir directement le gain  $\bar{K} = \bar{K}^*P^{-1}$  à appliquer sur la forme augmentée (30).

#### Théorème 4.7:

La matrice de changement de variables qui permet d'écrire la forme augmentée (30) sous sa forme canonique (51) est de la forme:

$$P = \begin{pmatrix} & & & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & P_1 & & \vdots & & & \vdots \\ & & & 0 & & & \vdots \\ a_0 & \dots & a_{d-1} & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_0 & \dots & a_{d-1} & 1 \end{pmatrix},$$

avec  $P_1$  la matrice de changement de variables permettant d'écrire le sous-système lent (15a) de la forme standard de (2) sous forme compagne.

**Démonstration** : soient  $P_i$  les différentes colonnes de la matrice  $P$ , les deux relations  $P\bar{A}^* = \bar{A}P$ , et  $P\bar{B}^* = \bar{B}$ , permettent d'écrire:

$$\begin{aligned} P_{\bar{n}-i} &= (\bar{A}^i + a_{d-1}\bar{A}^{i-1} + \dots + a_{d-i}I)\bar{B}, & \text{pour } i = 0, \dots, d, & \quad (a) \\ P_{\bar{n}-i} &= (\bar{A}^i + a_{d-1}\bar{A}^{i-1} + \dots + a_0\bar{A}^{i-d})\bar{B}, & \text{pour } i = d+1, \dots, \bar{n}-1. & \quad (b) \end{aligned} \quad (53)$$

D'autre part en utilisant la structure particulière de  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$ , définie dans la section 3.1 du chapitre 3:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

nous pouvons montrer que:

$$\begin{aligned} \bar{A}^k \bar{B} &= \left( \underbrace{0 \dots 0}_{d+\nu-2-k} \quad 1 \quad \underbrace{0 \dots 0}_k \right)^T, & \text{pour } k < \nu - 1, & \quad (a) \\ \bar{A}^k \bar{B} &= \left( \underbrace{(A_1^{k-\nu+1} B_1)^T}_d \quad \underbrace{0 \dots 0}_{\nu-1} \right)^T, & \text{pour } k \geq \nu - 1, & \quad (b) \end{aligned} \quad (54)$$

En utilisant les relations précédentes et en distinguant deux cas selon que  $d < \nu - 1$ , ou  $d \geq \nu - 1$ , nous déterminons les différentes colonnes de la matrice  $P$ :

**Premier cas:**  $d < \nu - 1$

$$\begin{aligned} P_{\bar{n}-i} &= \left( \underbrace{0 \dots 0}_{d+\nu-2-i} \quad 1 \quad \underbrace{a_{d-1} \dots a_{d-i}}_i \right)^T, & i = 0, \dots, d, \\ P_{\bar{n}-i} &= \left( \underbrace{0 \dots 0}_{d+\nu-2-i} \quad 1 \quad \underbrace{a_{d-1} \dots a_0}_d \quad \underbrace{0 \dots 0}_{i-d} \right)^T, & i = d+1, \dots, \nu-2, \\ P_{\bar{n}-i} &= \left( (P_{\bar{n}-i}^1)^T \quad \underbrace{a_{d+\nu-i-2} \dots a_0}_{d+\nu-i-1} \quad \underbrace{0 \dots 0}_{i-d} \right)^T, & i = \nu-1, \dots, \bar{n}-1, \end{aligned}$$

où  $P_{\bar{n}-i}^1$  est la  $(\bar{n}-i)$ -ième colonne de la matrice de changement de variables  $P_1$  relative à la paire  $(A_1, B_1)$ :

$$P_{\bar{n}-i}^1 = (A_1^{i-\nu+1} + a_{d-1}A_1^{i-\nu} + \dots + a_{d+\nu-i-1}I)B_1.$$

**Second cas:**  $d \geq \nu - 1$

$$P_{\bar{n}-i} = \left( \underbrace{0 \ \dots \ 0}_{d+\nu-2-i} \quad 1 \quad \underbrace{a_{d-1} \ \dots \ a_{d-i}}_i \right)^T, \quad i = 0, \dots, \nu - 2,$$

$$P_{\bar{n}-i} = \left( (P_{\bar{n}-i}^1)^T \quad \underbrace{a_{d+\nu-i-2} \ \dots \ a_{d-i}}_{\nu-1} \right)^T, \quad i = \nu - 1, \dots, d,$$

$$P_{\bar{n}-i} = \left( (P_{\bar{n}-i}^1)^T \quad \underbrace{a_{d+\nu-i-2} \ \dots \ a_0}_{d+\nu-i-1} \quad \underbrace{0 \ \dots \ 0}_{i-d} \right)^T, \quad i = d + 1, \dots, \bar{n} - 1.$$

Dans les deux cas la matrice  $P$  a la structure suivante:

$$P = \begin{pmatrix} & & & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & P_1 & & \vdots & & & \vdots \\ & & & 0 & & & \vdots \\ a_0 & \dots & a_{d-1} & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_0 & \dots & a_{d-1} & 1 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Examinons maintenant le cas multi-entrées, obtenu avec le précompensateur minimal. Lorsque la forme augmentée (38) est commandable, une commande par placement de pôles  $v = Kz + e$  permet de spécifier à la fois les modes dynamiques finis du système (2), et les pôles du précompensateur. Cette commande nécessite le calcul préalable de la forme commandable de Luenberger de (38). Ce calcul ne présente pas de difficulté particulière, mais est relativement long à mettre en œuvre, c'est pourquoi nous ne le rappelons pas ici.

Lorsque la forme augmentée n'est pas commandable, le problème du placement de pôles et de la stabilisation peut néanmoins être résolu en considérant le vecteur d'entrée étendu:

$$u_e = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

On obtient alors la réalisation suivante du système précompensé:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_P \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_P \end{pmatrix} u_e, \\ y &= (C_1 \ C_2 L_2) z + (0 \ C_2 T_2) u_e, \end{aligned} \quad (55)$$

pour laquelle on peut énoncer le théorème suivant:

**Théorème 4.8:**

*La réalisation (55) est commandable si, et seulement si, le sous-système lent (15a) de la forme standard est commandable.*

**Démonstration** : il suffit de calculer la matrice de commandabilité  $C_e$ :

$$C_e = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & A_1 B_1 & 0 & \dots & A_1^{\bar{n}-1} B_1 & 0 \\ 0 & B_P & 0 & A_P B_P & \dots & 0 & A_P^{\bar{n}-1} B_P \end{pmatrix}.$$

Il existe une matrice inversible  $P$  telle que:

$$C_e = \begin{pmatrix} B_1 & \dots & A_1^{\bar{n}-1} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & B_P & \dots & A_P^{\bar{n}-1} B_P \end{pmatrix} P.$$

En rappelant que:

$$A_P = \begin{pmatrix} 0 & J_{\nu-2}^{\nu-2} & \dots & J_1^{\nu-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & J_1^1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

avec pour tout  $j = 2, \dots, \nu - 2$ , et pour tout  $i = 1, \dots, j - 1$ ,  $J_i^{j-1}$  donné par l'équation (39), il est facile de montrer que  $A_P^{\nu-1} = 0$ . De plus, comme  $A_1$  est solution de son polynôme caractéristique, nous avons:

$$\begin{aligned} \text{rang } C_e &= \text{rang} \begin{pmatrix} B_1 & \dots & A_1^{d-1} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & B_P & \dots & A_P^{\nu-2} B_P \end{pmatrix}, \\ &= \text{rang } C(A_1, B_1) + \text{rang } C(A_P, B_P). \end{aligned}$$

Comme la paire  $(A_p, B_p)$  est commandable, nous avons le résultat souhaité.  $\square$   
Dans le cas où l'on utilise la réalisation (55) du système précompensé, la commande agit à deux endroits différents: sur  $v$  avec  $K_P$  pour spécifier les pôles du précompensateur et sur  $u$  avec  $K_S$  pour placer les modes dynamiques finis du système initial.

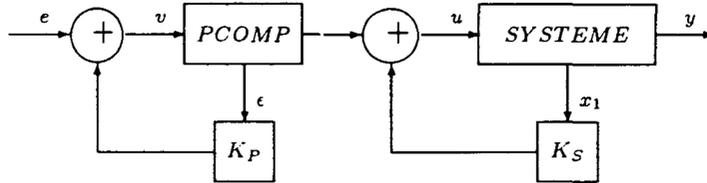


Fig. 4.4: Stabilisation avec retour sur  $u$  et  $v$

## 5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons donné les conditions nécessaires et suffisantes pour que la forme augmentée soit une réalisation minimale du système précompensé. Nous avons donc obtenu des conditions suffisantes pour commander le système compensé à l'aide d'un retour d'état. En outre, nous avons proposé différentes façons d'implanter la commande, soit en calculant la forme commandable de Luenberger, soit en commandant les modes du précompensateur étage par étage.

Nous avons également donné des conditions suffisantes pour observer les variables d'état de la forme augmentée. Dans le chapitre qui suit nous complétons la commande par retour d'état en développant différents observateurs du vecteur  $z$ .

## Procédures MATLAB

Pour déplacer les modes infinis d'un système I-commandable nous utilisons les procédures *IMPFREE*, ainsi que *DYNAMIC* et *ENTRAIN* que nous avons déjà présentées au chapitre précédent.

Pour déplacer les modes dynamiques finis d'un système généralisé sans mode impulsionnel ou de la forme augmentée nous utilisons la procédure *PLACE* de la boîte-à-outils Control. De la même façon les matrices d'observabilité et de commandabilité de la forme augmentée sont obtenues en utilisant les procédures *OBSV* et *CTRB* et les formes observable et commandable de Luenberger sont obtenues en utilisant les procédures *OBSVF* et *CTRBF* de la boîte-à-outils Control.



## 5. OBSERVATION DES SYSTEMES GENERALISES

Le placement de pôles par retour sur  $x$  ou sur  $z$  nécessite soit une hypothèse très forte sur l'accès aux différentes variables internes du système considéré, soit la construction d'un observateur des variables qui ne sont pas directement accessibles. Comment construire un tel observateur?

Le chapitre suivant répond à cette question. Nous rappelons, pour ce faire, les méthodes usuelles qui sont utilisées pour observer les systèmes généralisés, et nous discutons les conditions requises pour pouvoir les appliquer. Nous montrons enfin que l'observation du système compensé  $G(s)H(s)$  requiert des conditions moins restrictives, et nous proposons des observateurs d'ordre plein et réduit pour la forme augmentée.



# 1 Introduction

Le chapitre précédent a montré comment une commande P ou PD par retour sur  $x$  permet d'éliminer les modes impulsionnels et de stabiliser le système lorsque celui-ci est I et R-commandable. Cette démarche n'est toutefois valable que si l'on peut accéder aux variables internes,  $y$  compris celles relatives à la partie singulière du système. Lorsque ces variables ne sont pas directement mesurables, il reste la possibilité de construire un observateur. Le système:

$$\begin{aligned} E_{ob}\dot{w} &= A_{ob}w + B_{ob}u + Gy, \\ \hat{x} &= F_{ob}w + Fy + Hu, \end{aligned}$$

est un observateur pour le système généralisé (2) si  $\hat{x} - x$  tend vers 0, lorsque  $t$  tend vers l'infini. Appelons  $n_{ob}$  la dimension du vecteur  $w$ .

- si le rang de  $E_{ob}$  est égal à  $n_{ob}$  alors l'observateur est dit régulier,
  - si  $n_{ob} = n$ , l'observateur est d'ordre plein,
  - si  $n_{ob} < n$ , l'observateur est d'ordre réduit,
- si le rang de  $E_{ob}$  est inférieur à  $n_{ob}$  alors l'observateur est appelé généralisé.

Dans la première section de ce chapitre nous présentons plusieurs observateurs réguliers, généralisés, d'ordre plein ou réduit, habituellement utilisés avec les systèmes généralisés. Nous soulignons en outre les hypothèses requises par chacun d'entre eux.

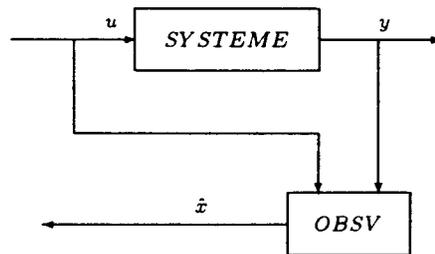
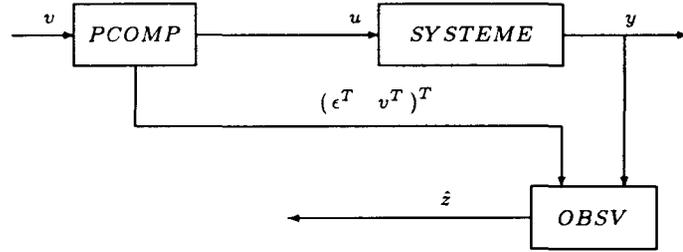


Fig. 5.1: Observation de  $x$

La seconde section est consacrée à l'observation des systèmes généralisés, compensés par  $H(s)$ . Nous expliquons comment construire un observateur de l'état augmenté  $z$ , nous montrons que seul le vecteur  $x_1$  n'est pas accessible à la mesure directe, et nous proposons différents observateurs d'ordre plein ou réduit de  $x_1$ . Ces résultats ont fait l'objet d'une publication lors de la conférence IMACS sur la Modélisation Mathématique en Février 1994 [47].

Fig. 5.2: Observation de  $z$ 

La troisième section traite de l'implantation de l'ensemble observateur-régulateur. Nous expliquons que la présence de la matrice de transmission directe  $\bar{D}$  dans la forme augmentée peut provoquer, pour certains gains de la commande et de l'observateur, l'apparition d'une boucle algébrique non inversible. Nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes sur les gains précédents pour que l'observateur soit compatible avec le régulateur. Ces résultats ont fait l'objet d'une proposition de publication à la revue IEEE, Automatic Control en Juin 1994 [48]. La dernière section est un exemple illustratif. Les trois dernières parties constituent la part originale de ce chapitre.

## 2 Quelques observateurs pour systèmes généralisés

Différents observateurs pour les systèmes généralisés sont présentés dans cette section, la plupart d'entre eux étant déduits de la forme de Smith (17) du système considéré. Rappelons pour mémoire cette forme:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= A_{11}\tilde{x}_1 + A_{12}\tilde{x}_2 + \tilde{B}_1u, & (a) \\ \tilde{y}_1 &= \tilde{C}_1\tilde{x}_1, \\ 0 &= A_{21}\tilde{x}_1 + A_{22}\tilde{x}_2 + \tilde{B}_2u, & (b) \\ \tilde{y}_2 &= \tilde{C}_2\tilde{x}_2, \\ y &= \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2. \end{aligned}$$

### 2.1 Observateurs singuliers

L'observation du vecteur  $x$  à l'aide d'un autre système généralisé est l'idée la plus immédiate que l'on peut tenter de mettre en œuvre pour construire un observateur du système (2). Dai [27] montre que si il existe une matrice  $G$  telle que  $A - GC$  soit stable, alors le système:

$$\begin{aligned} E\dot{w} &= Aw + Bu + G(y - Cw), \\ \hat{x} &= w, \end{aligned} \tag{56}$$

est un observateur singulier pour le système (2). Si cette idée est très facile à développer sur le papier, sa réalisation pratique n'est guère envisageable du fait de la

non inversibilité de la matrice  $E$ . Un observateur singulier nécessite la connaissance des dérivées successives de  $u$  et  $y$ , et est extrêmement sensible aux bruits de mesure dans les hautes fréquences.

## 2.2 Observateurs de la forme de Smith

L'observation de la forme de Smith (17) du système (2) a été développée par de nombreux auteurs [30,31,79,94]. El Tohami *et al* [30] proposent de regrouper les deux dernières lignes de (17) de façon à écrire:

$$\begin{pmatrix} A_{22} \\ \tilde{C}_2 \end{pmatrix} \tilde{x}_2 = - \begin{pmatrix} A_{21} \\ \tilde{C}_1 \end{pmatrix} \tilde{x}_1 - \begin{pmatrix} \tilde{B}_2 u \\ -y \end{pmatrix}.$$

Soit:

$$R = \begin{pmatrix} A_{22} \\ \tilde{C}_2 \end{pmatrix}.$$

Lorsque la matrice  $R$  est de rang plein en colonnes, son inverse de Moore-Penrose [5] est donnée par:

$$R^+ = \left( \begin{pmatrix} A_{22} \\ \tilde{C}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{22} \\ \tilde{C}_2 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} A_{22} \\ \tilde{C}_2 \end{pmatrix}^T.$$

La solution au sens des moindres carrés  $\tilde{x}_2^+$  qui minimise la norme:

$$\| R\tilde{x}_2^+ + \begin{pmatrix} A_{21} \\ \tilde{C}_1 \end{pmatrix} \tilde{x}_1 + \begin{pmatrix} \tilde{B}_2 u \\ -y \end{pmatrix} \|,$$

est donnée par l'équation:

$$\tilde{x}_2^+ = -R^+ \left( \begin{pmatrix} A_{21} \\ \tilde{C}_1 \end{pmatrix} \tilde{x}_1 + \begin{pmatrix} \tilde{B}_2 u \\ -y \end{pmatrix} \right).$$

En introduisant un partitionnement de la matrice  $R^+$ :

$$R^+ = ( R_1^+ \quad R_2^+ ), \quad R_1^+ \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)},$$

et les notations suivantes:

$$S_1 = -R_1^+ A_{21} - R_2^+ \tilde{C}_1, \quad S_2 = -R_2^+ \tilde{B}_2,$$

nous obtenons le système:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= (A_{11} + A_{12}S_1)\tilde{x}_1 + (\tilde{B}_1 + A_{12}S_2)u + A_{12}R_2^+ y, \\ \tilde{x}_2 &= S_1\tilde{x}_1 + S_2u + R_2^+ y, \end{aligned} \tag{57}$$

pour lequel on peut construire un observateur à l'aide des méthodes usuelles.

Pour des systèmes sans mode impulsif Fahmy and O'Reilly [31] exploitent la régularité de la matrice  $A_{22}$  afin d'exprimer  $\tilde{x}_2$  en fonction de  $\tilde{x}_1$  et de  $u$  en utilisant

uniquement la seconde ligne du système ( 17). Ils obtiennent le système ( 18) que l'on rappelle ici:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_1 &= (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})\tilde{x}_1 + (\tilde{B}_1 - A_{12}A_{22}^{-1}\tilde{B}_2)u, \\ \tilde{x}_2 &= -A_{22}^{-1}A_{21}\tilde{x}_1 - A_{22}^{-1}\tilde{B}_2u, \\ y &= (\tilde{C}_1 - \tilde{C}_2A_{22}^{-1}A_{21})\tilde{x}_1 - \tilde{C}_2A_{22}^{-1}\tilde{B}_2u,\end{aligned}\tag{58}$$

et pour lequel on peut déterminer un observateur si la paire

$$(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}, \tilde{C}_1 - \tilde{C}_2A_{22}^{-1}A_{21})$$

est observable.

En outre, lorsque la matrice  $\tilde{C}_1 - \tilde{C}_2A_{22}^{-1}A_{21}$  est de rang plein  $q$  on peut construire un observateur réduit de ( 58) de dimension  $r - q$ .

Cette synthèse peut, sans difficulté, être étendue pour des systèmes I-commandables [4], mais remarquons que le résultat suivant ne concerne qu'une classe de systèmes très étroite. En effet, le prébouclage requis nécessite l'accès *a priori* aux variables du vecteur  $\tilde{x}_2$ , c'est-à-dire avant construction de l'observateur. A l'aide du prébouclage défini dans le chapitre 3, paragraphe 2.1:

$$u = \tilde{K}_2\tilde{x}_2 + v,$$

nous obtenons le système ( 24) pour lequel on exprime la sortie en fonction de  $\tilde{x}_1$  et  $v$ :

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_1 &= (A_{11} - (A_{12} + \tilde{B}_1\tilde{K}_2)(A_{22} + \tilde{B}_2\tilde{K}_2)^{-1}A_{21})\tilde{x}_1 + \\ &\quad (\tilde{B}_1 - (A_{12} + \tilde{B}_1\tilde{K}_2)(A_{22} + \tilde{B}_2\tilde{K}_2)^{-1}\tilde{B}_2)v, \\ \tilde{x}_2 &= -(A_{22} + \tilde{B}_2\tilde{K}_2)^{-1}A_{21}\tilde{x}_1 - (A_{22} + \tilde{B}_2\tilde{K}_2)^{-1}\tilde{B}_2v, \\ y &= (\tilde{C}_1 - \tilde{C}_2(A_{22} + \tilde{B}_2\tilde{K}_2)^{-1}A_{21})\tilde{x}_1 - \tilde{C}_2(A_{22} + \tilde{B}_2\tilde{K}_2)^{-1}\tilde{B}_2v.\end{aligned}\tag{59}$$

Un observateur du système ( 59) peut être construit lorsque la paire:

$$(A_{11} - (A_{12} + \tilde{B}_1\tilde{K}_2)(A_{22} + \tilde{B}_2\tilde{K}_2)^{-1}A_{21}, \tilde{C}_1 - \tilde{C}_2(A_{22} + \tilde{B}_2\tilde{K}_2)^{-1}A_{21})$$

est observable. De la même façon que précédemment, un observateur réduit de dimension  $r - q$  est réalisable lorsque la matrice  $\tilde{C}_1 - \tilde{C}_2(A_{22} + \tilde{B}_2\tilde{K}_2)^{-1}A_{21}$  est de rang plein  $q$ .

Shields [79], quant à lui, reprend l'hypothèse de El Tohami *et al*, à savoir que la matrice  $(A_{22}^T, \tilde{C}_2^T)^T$  est de rang plein en colonnes, et, sans supposer que  $A_{22}$  est inversible, propose de déterminer le vecteur  $\tilde{x}_2$  à partir de  $\tilde{x}_1$ , de  $u$ , et de  $y$  à l'aide d'une injection de la sortie. La démarche est, en partie, analogue à celle présentée dans l'algorithme précédent à la différence que le retour s'effectue maintenant sur la sortie et non plus sur l'état. La matrice  $(A_{22}^T \ \tilde{C}_2^T)^T$  étant de rang plein en colonnes, nous savons qu'il existe une matrice  $H_2$  telle que  $S = A_{22} - H_2\tilde{C}_2$  soit inversible. L'utilisation des deux dernières lignes de l'équation ( 17) et la construction du

vecteur  $H_2y$ , nous permettent d'exprimer  $\tilde{x}_2$  en fonction de  $\tilde{x}_1$ , de  $u$ , et de  $y$ . Nous obtenons le système:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_1 &= (A_{11} - A_{12}S^{-1}(A_{21} - H_2\tilde{C}_1))\tilde{x}_1 - A_{12}S^{-1}H_2y + (\tilde{B}_1 - A_{12}S^{-1}\tilde{B}_2)u, \\ \tilde{x}_2 &= -S^{-1}(A_{21} - H_2\tilde{C}_1)\tilde{x}_1 - S^{-1}H_2y - S^{-1}\tilde{B}_2u, \\ (I + \tilde{C}_2S^{-1}H_2)y &= (\tilde{C}_1 - \tilde{C}_2S^{-1}(A_{21} - H_2\tilde{C}_1))\tilde{x}_1 - \tilde{C}_2S^{-1}\tilde{B}_2u.\end{aligned}\tag{60}$$

- Lorsque la matrice  $A_{22}$  est inversible, il a été démontré [30,79], qu'il en était de même de la matrice  $(I + \tilde{C}_2S^{-1}H_2)$ . On peut déterminer un observateur de  $\tilde{x}_1$  si la paire:

$$(A_{11} - A_{12}S^{-1}(A_{21} - H_2\tilde{C}_1), \tilde{C}_1 - \tilde{C}_2S^{-1}(A_{21} - H_2\tilde{C}_1)),$$

est observable.

- Lorsque les matrices  $A_{22}$ , et  $(I + \tilde{C}_2S^{-1}H_2)$  ne sont pas inversibles, Shields [79] donne les conditions pour construire un observateur réduit de  $\tilde{x}_1$  en ne conservant que certaines lignes de l'équation (60).

Notons que pour l'ensemble des méthodes présentées dans ce paragraphe, l'inconvénient majeur concerne les hypothèses restrictives dont il faut tenir compte. La régularité de  $A_{22}$ , celle de  $(A_{22} \quad \tilde{B}_2)$ , ou encore celle de  $(A_{22}^T \quad \tilde{C}_2^T)^T$  sont indispensables pour transformer le système de façon à faire apparaître un sous-système dynamique régulier, ainsi qu'un sous-système entraîné.

### 2.3 Inverse de Moore-Penrose de $C$

Supposons que le système (2) soit observable, que la matrice  $C$  soit de rang plein  $q$  en lignes, et introduisons une matrice  $C^{(1)}$  telle que:

$$CC^{(1)}C = C.$$

L'équation précédente est la première des quatre propriétés que vérifie l'inverse de Moore-Penrose de la matrice  $C$ . On note  $C^{(1)}$  une matrice qui vérifie cette propriété, de la même façon on noterait  $C^{(2)}$  une matrice qui vérifierait la seconde propriété, etc... Avec cette notation, nous avons donc:

$$C^+ = C^{(1,2,3,4)},$$

où  $C^+$  est l'inverse de Moore-Penrose de  $C$ .

La matrice  $C$  étant supposée de rang plein en lignes, nous pouvons écrire:

$$CC^{(1)} = I,$$

et:

$$x^+ = C^{(1)}y + (I - C^{(1)}C)w,$$

où  $w$  est un vecteur quelconque de  $\mathbb{R}^n$ . Si d'autre part nous définissons la matrice  $L$  telle que  $\text{Im}(L) = \text{Im}(I - C^{(1)}C)$ , nous pouvons simplifier les notations:

$$LL^{(1)} = (I - C^{(1)}C),$$

et:

$$x^+ = C^{(1)}y + Lh,$$

avec  $h = L^{(1)}w$ . En utilisant cette dernière équation et (2) après multiplication par  $L^{(1)}$  ou  $C$ , nous pouvons écrire:

$$L^{(1)}EL\dot{h} = L^{(1)}AC^{(1)}y + L^{(1)}ALh + L^{(1)}Bu - L^{(1)}EC^{(1)}\dot{y},$$

$$CEC^{(1)}\dot{y} = CALh + CAC^{(1)}y + CBu - CEL\dot{h}.$$

Shafai et Carroll [75] montrent que l'observabilité du système (2) permet de déterminer  $L$  tel que  $CL = 0$  et  $L^{(1)}$  tel que  $L^{(1)}EL$  soit une matrice régulière. Après quelques transformations, nous obtenons le système:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{h}} &= \bar{F}^{-1}L^{(1)}AL\bar{h} + (\bar{F}^{-1}L^{(1)}AC^{(1)} - \bar{F}^{-1}L^{(1)}AL\bar{R})y + \bar{F}^{-1}L^{(1)}Bu, \\ \bar{w} &= C\bar{L}AL\bar{h}, \end{aligned} \tag{61}$$

avec:

$$\bar{w} = \bar{S}\dot{y} - (C\bar{L}AC^{(1)} - C\bar{L}AL\bar{R})y - C\bar{L}Bu, \quad \bar{h} = h + \bar{R}y,$$

et:

$$\bar{R} = \bar{F}^{-1}L^{(1)}EC^{(1)}, \quad \bar{L} = I - EL\bar{F}^{-1}L^{(1)}, \quad \bar{F} = L^{(1)}EL, \quad \bar{S} = C\bar{L}EC^{(1)}.$$

La dérivée de  $y$  figure dans l'expression de  $\bar{w}$ , mais une dernière transformation  $z = \bar{h} - K\bar{S}y$ , avec  $K$  à déterminer, permet de supprimer cette difficulté. La mesure de  $y$  et la connaissance de  $u$  nous permettent de construire un observateur pour le système (61) lorsque la paire:

$$(\bar{F}^{-1}L^{(1)}AL, C\bar{L}AL),$$

est observable.

### 3 Observation du système compensé

Dans cette partie, nous proposons différents observateurs pour le système compensé par  $H(s)$ , avec des dynamiques d'ordre de plus en plus bas.

### 3.1 Observation de $z$

Si la paire  $(\bar{A}, \bar{C})$  est observable, il existe un gain  $\bar{K} \in \mathbb{R}^{\bar{n} \times q}$  tel que les valeurs propres de  $\bar{A} - \bar{K}\bar{C}$  soient toutes à partie réelle négative. Le système:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}} &= \bar{A}\hat{z} + \bar{B}v + \bar{K}(\bar{C}z - \bar{C}\hat{z}), \\ &= (\bar{A} - \bar{K}\bar{C})\hat{z} + (\bar{B} - \bar{K}\bar{D})v + \bar{K}y, \end{aligned}$$

est un observateur pour le vecteur  $z$  définie par:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \bar{A}z + \bar{B}v, \\ y &= \bar{C}z + \bar{D}v. \end{aligned}$$

La matrice  $\bar{K}$  est obtenue après avoir calculé la forme observable de Luenberger du système précédent

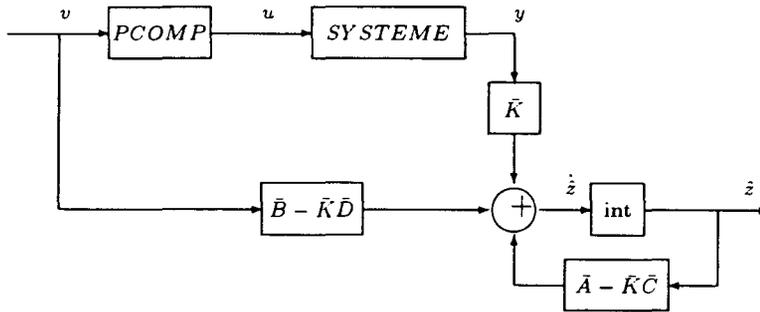


Fig. 5.3: Observateur de  $z$

Nous avons indiqué dans le chapitre 4 que la simplification d'un pôle nul du précompensateur par un zéro nul du sous-système lent (15a) de la forme standard peut faire chuter le rang de la matrice d'observabilité. Dans certains cas, il n'est donc pas possible de construire un observateur de  $z$  à l'aide des seuls vecteurs  $v$  et  $y$ . Mais, par construction, nous savons avoir accès à  $u$ , la sortie du précompensateur. Ce vecteur étant mesurable, nous pouvons considérer le vecteur de sortie étendu:

$$y_e = \begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix}.$$

On obtient alors la réalisation suivante du système compensé:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \begin{pmatrix} A_1 & B_1 C_P \\ 0 & A_P \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ B_P \end{pmatrix} v, \\ y_e &= \begin{pmatrix} C_1 & C_2 L_2 \\ 0 & C_P \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} C_2 T_2 \\ D_P \end{pmatrix} v. \end{aligned} \tag{62}$$

**Théorème 5.1:**

Le système (62) est observable si, et seulement si, le sous-système lent (15a) de la forme standard est observable.

**Démonstration** : il suffit de calculer la matrice d'observabilité  $O_e$ :

$$O_e = \begin{pmatrix} C_1 & \times \\ 0 & C_P \\ C_1 A_1 & \times \\ 0 & C_P A_P \\ \vdots & \vdots \\ C_1 A_1^{\bar{n}-1} & \times \\ 0 & C_P A_P^{\bar{n}-1} \end{pmatrix}.$$

Il existe une matrice inversible  $P$  telle que:

$$O_e = P \begin{pmatrix} C_1 & \times \\ \vdots & \vdots \\ C_1 A_1^{\bar{n}-1} & \times \\ 0 & C_P \\ \vdots & \vdots \\ 0 & C_P A_P^{\bar{n}-1} \end{pmatrix}.$$

En rappelant que  $A_P^{\nu-1} = 0$ , et que  $A_1$  est solution de son polynôme caractéristique, nous avons:

$$\text{rang } O_e = \text{rang} \begin{pmatrix} C_1 & \times \\ \vdots & \vdots \\ C_1 A_1^{d-1} & \times \\ 0 & C_P \\ \vdots & \vdots \\ 0 & C_P A_P^{\nu-1} \end{pmatrix}.$$

Comme la paire  $(A_P, C_P)$  est observable, nous avons le résultat souhaité.  $\square$

Nous pouvons donc toujours construire un observateur de la forme augmentée à l'aide des vecteurs  $u$ ,  $v$  et  $y$  lorsque la paire  $(A_1, C_1)$  est observable.

### 3.2 Observateur d'ordre plein de $x_1$

L'observation de l'état complet  $z$  n'est cependant pas nécessaire. En effet,  $\epsilon$  est directement accessible à travers le précompensateur. Pour le précompensateur trivial (25), les composantes de  $\epsilon$  sont obtenues à la sortie des intégrateurs, et pour le précompensateur minimal (35), elles sont obtenues par combinaison des sorties des différents étages du précompensateur. De ce fait, la seule partie de l'état augmenté  $z$  qu'il est nécessaire d'observer est le vecteur  $x_1$ . Les résultats qui suivent ont été présentés dans [47].

Si la paire  $(A_1, C_1)$  est observable, c'est-à-dire si le système (2) est R-observable, il existe un gain  $K_1 \in \mathbb{R}^{d \times q}$  tel que les valeurs propres de  $A_1 - K_1 C_1$  soient toutes à partie réelle négative. Dans ce cas, le système défini par:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= A_1 \hat{x}_1 + B_1 u + K_1 (y_1 - C_1 \hat{x}_1), \\ &= (A_1 - K_1 C_1) \hat{x}_1 + B_1 u + K_1 y_1, \end{aligned}$$

est un observateur pour le vecteur  $x_1$ . La mesure de  $y_1$  n'est pas directement accessible, puisque la sortie du système est donnée par le vecteur  $y$  et non par  $y_1$ . Toutefois on a vu que la synthèse du précompensateur permet de reconstruire, grâce aux composantes de  $\epsilon$ , le vecteur  $x_2$  et donc le vecteur  $y_2$ . Le vecteur  $y_1$  est donc obtenu par simple différence entre  $y$  et  $y_2$ :

$$y_1 = y - C_2 L_2 \epsilon - C_2 T_2 v.$$

Avec le précompensateur trivial (25), les composantes de  $\epsilon$  sont les dérivées successives de  $u$ , c'est-à-dire les sorties des différents intégrateurs qui composent le précompensateur. Les matrices  $L_2$  et  $T_2$  sont définies par l'équation (29), et  $u = C_P \epsilon$  avec  $C_P$  défini par (27).

Avec le précompensateur minimal, les composantes de  $\epsilon$  ne correspondent plus directement aux dérivées successives de  $u$ , mais sont obtenues par combinaisons linéaires de ces dérivées. Les matrices  $L_2$  et  $T_2$  sont définies par l'équation (41), et  $u = C_P \epsilon + D_P v$  avec  $C_P$  et  $D_P$  définies par (40).

Dans tous les cas un observateur d'ordre plein du vecteur  $x_1$  est donné par l'équation:

$$\dot{\hat{x}}_1 = (A_1 - K_1 C_1) \hat{x}_1 + M_1 (\epsilon^T \quad v^T)^T + K_1 y, \quad (63)$$

avec:

$$M_1 = (B_1 C_P - K_1 C_2 L_2, \quad B_1 D_P - K_1 C_2 T_2) \in \mathbb{R}^{d \times \bar{n}}. \quad (64)$$

Dans le cas du précompensateur trivial, la matrice  $D_P$  n'intervient pas: elle est nulle. Nous obtenons la structure suivante:

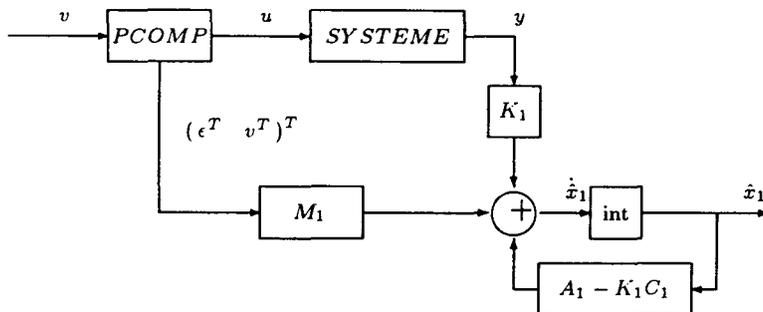


Fig. 5.4: Observateur d'ordre plein de  $x_1$

### 3.3 Observateur réduit de $x_1$

Lorsque la matrice  $C_1$  est de rang plein  $q$ , un observateur réduit d'ordre  $d - q$  de  $x_1$  peut être construit [9]. L'introduction d'une matrice de changement de variables appropriée  $\bar{x}_1 = P_1^{-1} x_1$ , nous permet de transformer le sous-système lent (15a) de la forme standard en:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= \bar{A}_1 \bar{x}_1 + \bar{B}_1 u, \\ y_1 &= (I \quad 0) \bar{x}_1, \end{aligned} \quad (65)$$

avec:

$$\bar{A}_1 = P_1^{-1} A_1 P_1, \quad \bar{B}_1 = P_1^{-1} B_1.$$

Nous partitionnons les matrices  $\bar{A}_1$ , et  $\bar{B}_1$  conformément à la partition de la matrice  $\bar{C}_1 = (I \ 0)$ . Le système ( 65) devient:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_{11} &= \bar{A}_{11}\bar{x}_{11} + \bar{A}_{12}\bar{x}_{12} + \bar{B}_{11}u, \\ \dot{\hat{x}}_{12} &= \bar{A}_{21}\bar{x}_{11} + \bar{A}_{22}\bar{x}_{12} + \bar{B}_{12}u, \\ y_1 &= \bar{x}_{11}.\end{aligned}\tag{66}$$

Le vecteur de sortie du système ( 66) coïncide avec les  $q$  premières composantes de son vecteur d'état, c'est-à-dire avec  $\bar{x}_{11}$ . Ces composantes sont donc directement mesurables au travers de  $y_1$ , et seul un observateur des  $d - q$  dernières composantes de l'état, c'est-à-dire de  $\bar{x}_{12}$ , reste nécessaire pour pouvoir accéder à l'ensemble du vecteur état. Définissons  $g$ , et  $\hat{g}$  une estimation de  $g$ :

$$\begin{aligned}g &= \dot{\hat{x}}_{11} - \bar{A}_{11}\bar{x}_{11} = \bar{A}_{12}\bar{x}_{12} + \bar{B}_{11}u, \\ \hat{g} &= \bar{A}_{12}\hat{\bar{x}}_{12} + \bar{B}_{11}u.\end{aligned}$$

Nous proposons, pour le vecteur  $\bar{x}_{12}$  l'observateur suivant [9]:

$$\dot{\hat{\bar{x}}}_{12} = \bar{A}_{21}\bar{x}_{11} + \bar{A}_{22}\hat{\bar{x}}_{12} + \bar{B}_{12}u + \bar{K}_r(g - \hat{g}).$$

Une dernière transformation est nécessaire pour faire disparaître la dérivée de  $y_1$  présente dans l'expression de  $g$ . A cet effet, nous définissons:  $w = \hat{\bar{x}}_{12} - \bar{K}_r y_1$ . Donc:

$$\dot{w} = \dot{\hat{\bar{x}}}_{12} - \bar{K}_r \dot{y}_1 = \bar{M}w + \bar{N}u + \bar{P}y_1,$$

avec:

$$\begin{aligned}\bar{M} &= \bar{A}_{22} - \bar{K}_r \bar{A}_{12}, \\ \bar{N} &= \bar{B}_{12} - \bar{K}_r \bar{B}_{11}, \\ \bar{P} &= \bar{A}_{21} - \bar{K}_r \bar{A}_{11} + \bar{A}_{22} \bar{K}_r - \bar{K}_r \bar{A}_{12} \bar{K}_r.\end{aligned}$$

Un observateur d'ordre réduit  $d - q$  du vecteur  $x_1$  est donné par l'équation

$$\dot{w} = \bar{M}w + \bar{M}_1 (\epsilon^T \ v^T)^T + \bar{P}y,\tag{67}$$

avec:

$$\bar{M}_1 = (\bar{N}C_P - \bar{P}C_2L_2 \ \bar{N}D_P - \bar{P}C_2T_2) \in \mathbb{R}^{(d-q) \times \bar{n}}.\tag{68}$$

et  $\hat{x}_1$ , l'estimation de  $x_1$ , est définie par :

$$\hat{x}_1 = \underbrace{P_1 \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & K_r \end{pmatrix}}_{Q_1} \begin{pmatrix} w \\ y_1 \end{pmatrix} = P_1 \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & K_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & -C_2L_2 & -C_2T_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ y \\ \epsilon \\ v \end{pmatrix}.$$



Le système ( 70) est commandable et observable. En introduisant le gain  $K_1 = (-1 \ 1)$ , un observateur d'ordre plein de  $x_1$  peut être défini par l'équation ( 63):

$$\dot{\hat{x}}_1 = -\hat{x}_1 + (1 \ -3)\epsilon + (0 \ 1)v + (-1 \ 1)y.$$

Un observateur d'ordre réduit de  $x_1$  peut être défini en utilisant l'équation ( 67). En fait,  $x_1$  peut directement être obtenu en mesurant les différentes sorties du système:

$$x_1 = -(1 \ 0)y - (0 \ 1)\epsilon.$$

Si l'on considère maintenant des observateurs de la forme de Smith de ( 69):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{\tilde{x}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tilde{x} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u,$$

$$y = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{x},$$

nous pouvons émettre les réserves suivantes:

- $\tilde{x}_2$  ne peut être exprimé à l'aide de  $y$  et  $\tilde{x}_1$ . En fait, la matrice:

$$\begin{pmatrix} A_{22} \\ \tilde{C}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

n'est pas de rang plein, et les conditions exprimées dans [30,31,79,94] ne sont pas remplies.

- De plus lorsque le système obtenu est observable, l'ordre minimal ( $r - q$ ) de l'observateur est supérieur à l'ordre minimal ( $d - q$ ) de l'observateur du système compensé.

## 5 Implantation d'un observateur-régulateur

Dans ce dernier paragraphe nous retrouvons notre préoccupation essentielle, à savoir la commande du système ( 2). Nous avons déterminé un observateur des vecteurs  $x_1$  et  $z$  afin de pouvoir appliquer une commande par retour d'état sur  $z$ . Mais la présence d'une matrice de transmission directe dans l'expression de la forme augmentée ( 38) nécessite certaines précautions supplémentaires. En effet la détermination du gain de commande se fait généralement indépendamment de la construction de l'observateur, et peut conduire à un ensemble observateur-régulateur qui ne peut être implanté. Illustrons ce problème à l'aide du petit exemple suivant:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u, \quad (71)$$

$$y = (2 \ 1 \ -2 \ 0)x.$$

La forme augmentée correspondante est donnée par l'équation:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v, \\ y &= (2 \quad 2 \quad 1) z + (-1 \quad 1) v. \end{aligned} \quad (72)$$

Comme précédemment le vecteur  $x_1$  peut directement être reconstruit à partir de la mesure de la sortie  $y$  et de la connaissance de l'entrée  $v$  et du vecteur  $\epsilon$ :

$$x_1 = \frac{1}{2}(y - (2 \quad 1)\epsilon - (-1 \quad 1)v).$$

Supposons que l'on veuille placer les pôles du système (71) en  $\{-2, -2, 0\}$  à l'aide d'un retour d'état. Différents gains de bouclage peuvent être proposés. En particulier les gains  $K_1$  et  $K_2$ :

$$K_1 = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 0 \\ -4 & 2 & -5 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -20 & -25 & -11 \\ 4 & 11 & 4 \end{pmatrix},$$

permettent d'obtenir les mêmes modes en boucle fermée. Pourtant ces deux bouclages conduisent à deux observateurs-régulateurs complètement différents.

- Avec le gain  $K_1$ , nous avons:

$$v = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & -5 & 0 \\ -4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \epsilon \\ v \end{pmatrix} + e,$$

d'où:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} v = - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 10 & -1 \end{pmatrix} \epsilon + e.$$

La commande ne peut être implantée.

- Avec le gain  $K_2$ , et de la même façon, nous obtenons:

$$\begin{pmatrix} 26 & -20 \\ -4 & 10 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} -20 \\ 4 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 15 & 9 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \epsilon + e,$$

c'est-à-dire:

$$v = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \end{pmatrix} y + \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 35 & 15 \\ 23 & 6 \end{pmatrix} \epsilon + \frac{1}{90} \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 2 & 13 \end{pmatrix} e.$$

Dans ce dernier cas la commande peut être implantée à l'aide d'un retour sur  $\epsilon$  et sur  $y$ .

De façon plus générale, nous pouvons énoncer la condition nécessaire et suffisante suivante qui a été proposée dans [48]:

**Théorème 5.2:**

Etant donné le système ( 38), l'observateur réduit d'ordre  $d - q$  et de gain  $K_r$ , et la commande par retour d'état de gain  $K$  sont compatibles si, et seulement si:

$$\det \left( I + K \begin{pmatrix} I_d \\ 0 \end{pmatrix} P_1 \begin{pmatrix} I_q \\ K_r \end{pmatrix} \bar{D} \right) \neq 0,$$

où  $P_1$  est la matrice de changement de variables définie en ( 65).

**Démonstration :** pour obtenir cette condition il suffit de calculer la commande que l'on souhaite implanter:

$$v = K \hat{z} + e = K \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \epsilon \end{pmatrix} + e = K \begin{pmatrix} I_d \\ 0 \end{pmatrix} \hat{x}_1 + K \begin{pmatrix} 0 \\ I_h \end{pmatrix} \epsilon + e.$$

Or

$$\hat{x}_1 = P_1 \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & K_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & -C_2 L_2 & -C_2 T_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{w} \\ y \\ \epsilon \\ v \end{pmatrix}.$$

Donc:

$$v = K \begin{pmatrix} I_d \\ 0 \end{pmatrix} P_1 \begin{pmatrix} 0 & I & -C_2 L_2 & -C_2 T_2 \\ I & K_r & -K_r C_2 L_2 & -K_r C_2 T_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{w} \\ y \\ \epsilon \\ v \end{pmatrix} + K \begin{pmatrix} 0 \\ I_h \end{pmatrix} \epsilon + e.$$

La commande pourra donc être implantée si, et seulement si, la matrice:

$$I - K \begin{pmatrix} I_d \\ 0 \end{pmatrix} P_1 \begin{pmatrix} -C_2 T_2 \\ -K_r C_2 T_2 \end{pmatrix},$$

est inversible. En remarquant que:

$$\begin{pmatrix} -C_2 T_2 \\ -K_r C_2 T_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} I_q \\ K_r \end{pmatrix} \bar{D},$$

nous obtenons le résultat avancé.  $\square$

Sur le schéma fonctionnel suivant, ce problème se traduit par l'apparition d'une boucle algébrique non inversible. Définissons:

$$K_{x_1} = K \begin{pmatrix} I_d \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q_1 = P_1 \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & K_r \end{pmatrix}.$$

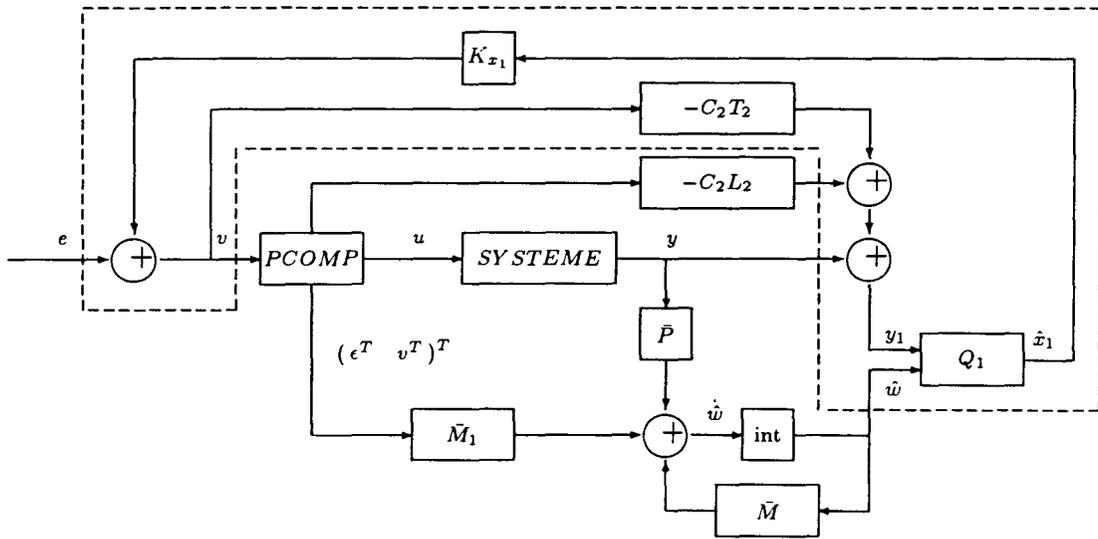


Fig. 5.6: Observateur-régulateur avec retour sur  $x_1$

**Remarque :** une condition suffisante pour pouvoir implanter n'importe quel retour d'état avec n'importe quel observateur est donc:

$$\bar{D} = 0.$$

Lorsque l'ensemble observateur-régulateur n'est pas compatible une méthode simple consiste à augmenter l'ordre du précompensateur. Avec un ordre suffisamment élevé, on pourra toujours se ramener à un précompensateur tel que  $T_2 = 0$ , c'est-à-dire tel que  $\bar{D} = 0$ .

## 6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié la commande des systèmes généralisés (2) du point de vue de l'observation. Des observateurs directs du système initial et des observateurs du système compensé (38) ont été détaillés. Dans le premier cas les techniques mises en œuvre sont plus lourdes, et les conditions requises plus restrictives. L'introduction d'une commande par précompensation dynamique puis retour d'état sur le système compensé nous apparaît d'autant plus justifiée.

Des conditions de compatibilité entre le gain de la commande et le gain de l'observateur ont été précisées. Notons que ce problème d'implantation ne se restreint pas aux systèmes généralisés. Il peut apparaître avec n'importe quelle matrice de transmission directe, et constitue de ce fait une mise en cause du principe de séparation, principe selon lequel la commande et l'observateur peuvent être déterminés indépendamment.

## Procédures MATLAB

La détermination d'observateurs d'ordre plein ou réduit a donné lieu à l'écriture de différentes procédures.

- La procédure *OBFAP* calcule un observateur d'ordre plein de  $x_1$  avec  $d$  modes dynamiques choisis par l'utilisateur. Les différents gains sur la mesure de la sortie, sur l'entrée, et sur le vecteur  $\epsilon$  sont déterminés.
- La procédure *OBFAR* calcule un observateur d'ordre réduit de  $x_1$  avec  $d - q$  modes dynamiques choisis par l'utilisateur. Les différents gains sur  $y$ ,  $v$ , et  $\epsilon$  nécessaires pour former le vecteur d'observation réduit  $w$  sont déterminés, ainsi que les gains sur  $w$ ,  $y$ ,  $v$  et  $\epsilon$  nécessaires pour former le vecteur d'observation complet  $\hat{z}$ .

## 6. DECOUPLAGE DES SYSTEMES GENERALISES

Limiter l'influence de chaque entrée à une seule sortie est un objectif important de la commande des systèmes linéaires multivariables. Dans ce chapitre nous abordons le découplage des systèmes généralisés, et nous répondons aux questions suivantes: à quelles conditions peut-on découpler le système avec un retour proportionnel ou avec un retour proportionnel plus dérivé? A quelles conditions peut-on le faire avec une précompensation dynamique? Comment construire les gains de bouclage?

Nous rappelons les principaux résultats connus et mettons en évidence les analogies qui existent entre notre algorithme et l'algorithme de structure entrées-sorties de Silverman. Nous montrons que notre précompensateur peut être complété en ajoutant un certain nombre d'étages, de façon à obtenir un système compensé découplable par retour d'état.



# 1 Introduction

Pour un système qui possède au moins autant d'entrées que de sorties, le but du découplage est de limiter l'influence de chaque entrée à une seule sortie. Le processus est alors équivalent à un ensemble de systèmes monovariables qui évoluent en parallèle. On qualifie sa commande de non interactive. Dans ce qui suit, on suppose que le nombre d'entrées est strictement égal au nombre de sorties ( $p = q$ ). On rappelle dans la première partie les conditions nécessaires et suffisantes pour découpler un système généralisé avec un retour proportionnel, et celles pour le découpler avec un retour proportionnel plus dérivé. Différentes méthodes pour construire les gains de la commande sont résumées. Dans la seconde partie, qui constitue la part originale de ce chapitre, on s'intéresse plus spécifiquement au découplage du système compensé par  $H(s)$ . Après avoir rappelé les CNS de découplage, deux cas sont envisagés:

- le découplage par retour d'état lorsque la matrice de découplage  $B^*$  est inversible [9,32,36]:

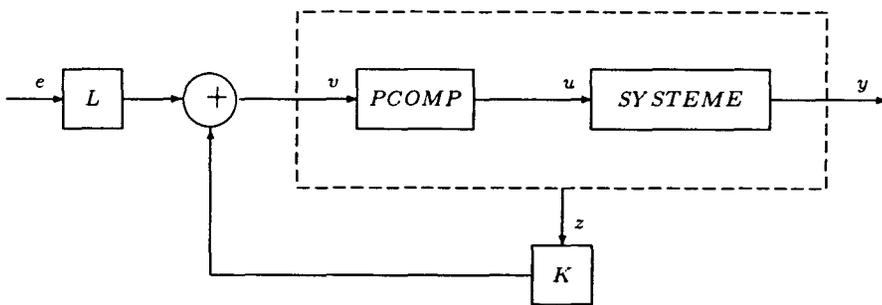


Fig. 6.1: Découplage de la forme augmentée par retour d'état

- le découplage par précompensation additionnelle  $H_d(s)$  plus retour d'état lorsque la matrice  $B^*$  n'est pas inversible, mais que la matrice de transfert est régulière [80,95]:

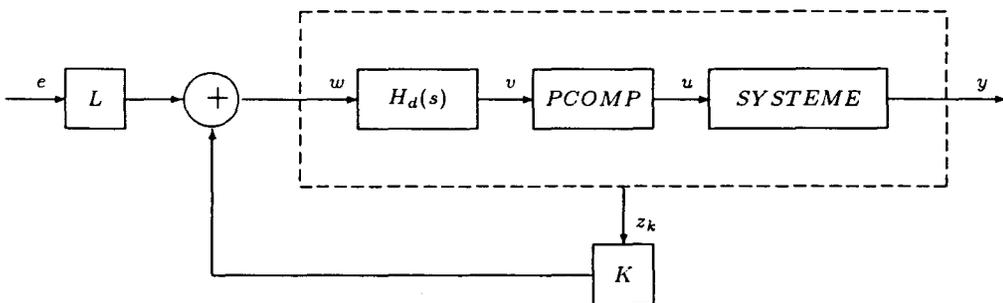


Fig. 6.2: Découplage de la forme augmentée par précompensation et retour d'état

Nous montrons l'analogie qui existe entre notre algorithme de précompensation dynamique et l'algorithme de découplage dynamique et donnons la structure d'un précompensateur unique qui élimine les comportements impulsionnels et découple la forme augmentée. La troisième section est un exemple qui illustre les différents résultats obtenus. Les deux dernières sections constituent la part originale de ce chapitre.

## 2 Découplage des systèmes généralisés

Rappelons la définition d'un système généralisé découplé [27]:

**Définition 6.1:**

*Le système (2) est découplé si sa matrice de transfert est diagonale non singulière.*

### 2.1 Découplage par retour proportionnel

Le découplage par retour proportionnel consiste à déterminer une commande  $u = Kx + Lv$  telle que le système en boucle fermée ait une matrice de transfert diagonale, inversible. Cette méthode de découplage a été étudiée par Dai [27], et surtout par Ailon [1], Paraskevopoulos et Koumboulis [67,68].

A. Ailon donne des conditions nécessaires et suffisantes constructives de découplage, selon que le système initial est I-commandable ou non:

- Pour un système (2) I-commandable qui possède un nombre d'entrées-sorties  $p$  égal à  $n - r$ , il existe une commande  $u = Kx + Lv$  qui découple (2) si, et seulement si:

$$\det \left[ s \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \right] \neq 0.$$

Pour un système I-commandable qui possède un nombre d'entrées-sorties  $p$  supérieur à  $n - r$ , la condition précédente est nécessaire mais non suffisante. Des conditions supplémentaires sont requises sur les lignes de la matrice  $C$  (voir [1]).

- Pour les systèmes qui ne sont pas I-commandables, A. Ailon propose de construire un système de dimension réduite  $k$ , avec  $p \leq k < n$ :

$$\begin{aligned} E_k \dot{x}_k &= A_k x_k + B_k u, \\ y_k &= C_k x_k, \end{aligned} \tag{73}$$

qui soit I-commandable, dont le déterminant soit proportionnel au déterminant du système initial, et qui vérifie:

$$\forall K, \text{ tel que } \det (sE - (A + BK)) \neq 0,$$

il existe un gain  $K_k$  tel que:

$$C(sE - (A + BK))^{-1}B = C_k(sE_k - (A_k + B_kK_k))^{-1}B_k.$$

Le découplage du système initial est assuré si le système de dimension réduite (73) vérifie l'une des deux CNS précédentes selon que  $p$  est égal ou inférieur à  $k - r$ .

Une autre méthode proposée par Paraskevopoulos et Koumboulis [67,68] met en jeu une transformation de l'échelle des temps. D'après l'hypothèse de régularité de  $\Delta$ , nous savons qu'il existe  $\alpha$  tel que  $\det(\alpha E + A) \neq 0$ , ce qui permet d'écrire:

$$\begin{aligned} sEx &= Ax + Bu, \\ \Leftrightarrow (s + \alpha)Ex &= (\alpha E + A)x + Bu, \\ \Leftrightarrow w^{-1}\hat{E}x &= x + \hat{B}u, \end{aligned}$$

avec:

$$\hat{E} = (\alpha E + A)^{-1}E, \quad \hat{B} = (\alpha E + A)^{-1}B, \quad w = (\alpha + s)^{-1}.$$

Découpler le système:

$$\begin{aligned} sEX(s) &= AX(s) + BU(s), \\ Y(s) &= CX(s), \end{aligned} \tag{74}$$

avec la commande:

$$U(s) = KX(s) + LV(s),$$

est équivalent à découpler le système:

$$\begin{aligned} wZ(w) &= \hat{E}Z(w) + \hat{B}E(w), \\ R(w) &= CZ(w), \end{aligned}$$

avec la commande:

$$E(w) = -wKZ(w) + L\Omega(w).$$

Ce dernier système, régulier, est qualifié de système dual de (74). L'introduction du système dual permet de remplacer la détermination d'un retour proportionnel pour le système généralisé par celle d'un retour dérivé pour le système dual.

En se servant du système dual, Paraskevopoulos et Koumboulis introduisent alors une méthode algébrique pour déterminer les gains de bouclage  $K$  et  $L$  et la matrice de transfert en boucle fermée  $G_{bf}$  que l'on souhaite être diagonale:

$$G_{bf} = C(sE - (A + BK))^{-1}BL = \text{diag}(g_i(s)).$$

Découpler le système dual est équivalent à résoudre:

$$P(w)J(w)C(wI - \hat{E})^{-1}\hat{B} = \Gamma + w\Phi(wI - \hat{E})^{-1}\hat{B}, \tag{75}$$

avec:

$$P(w) = \text{diag} \{-w^{-d_i}(g_i(w^{-1} - \alpha))^{-1}\}, \quad J(w) = \text{diag} \{w^{d_i+1}\},$$

$$\Gamma = L^{-1}, \quad \Phi = L^{-1}K.$$

Les indices  $d_i$ , sont les indices de découplage définis par Falb et Wollowitch [32], et dont nous rappelons la signification dans la section 3.1.1 de ce chapitre. Le développement en série de puissances négatives de  $w$  de chaque ligne de (75) permet d'obtenir autant de relations algébriques que nécessaire pour résoudre (75), et pour déterminer  $\Phi$ ,  $\Gamma$ , et  $P(w)$  c'est-à-dire pour déterminer  $K$ ,  $L$ , et  $G_{bf}(s)$ .

**Remarque:** une notion moins forte que la notion de découplage est la notion de découplage asymptotique.

**Définition 6.2:**

*Le système (2) est asymptotiquement découplé si, et seulement si, il est stable, et si  $C(sE - A)^{-1}B$  tend vers une matrice diagonale non singulière, lorsque  $s$  tend vers 0.*

Dai [27] donne des conditions nécessaires et suffisantes pour réaliser un découplage asymptotique. Il existe une commande  $u = Kx + Lv$  telle que le système (2) en boucle fermée soit asymptotiquement découplé si, et seulement si, (2) est stabilisable et:

$$\text{rang} \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} = n + p.$$

Dans ce cas, il existe  $K$  tel que  $(E, A + BK)$  soit stable, et en définissant  $L = -(C(A + BK)^{-1}B)^{-1}$ , on obtient en boucle fermée:

$$\lim C(sE - (A + BK))^{-1}BL = I, \quad \text{lorsque } s \rightarrow 0.$$

## 2.2 Découplage par retour proportionnel plus dérivé

Le découplage par retour proportionnel plus dérivé consiste à déterminer la commande  $u = K_1x + K_2\dot{x} + Lv$  telle que le système en boucle fermée ait une matrice de transfert diagonale, inversible. On appelle retour proportionnel plus dérivé modifié (MPD) un retour proportionnel plus dérivé dont les matrices de gain sur  $x$ , et  $\dot{x}$  sont proportionnelles:

$$u = -K(\alpha x + \dot{x}) + Lv,$$

avec  $\alpha$  tel que  $\det(\alpha E + A) \neq 0$ . Ce type de commande a été utilisée par Dai, Zhou, Shayman, Tarn, Christodoulou, et Mertzios [18,20,27,86]. Nous présentons dans ce qui suit les résultats de Christodoulou et Mertzios qui reprennent les notations introduites par Falb et Wollowitch, et Gilbert [32,36] pour des systèmes réguliers. A l'aide d'une transformation de l'échelle des temps similaire à celle proposée par

Paraskevopoulos et Koumboulis, Christodoulou et Mertzios [18,20] définissent le système:

$$\begin{aligned}\hat{E}z &= x + \hat{B}e, \\ r &= Cz,\end{aligned}\tag{76}$$

avec:

$$\hat{E} = (\alpha E + A)^{-1}E, \quad \hat{B} = (\alpha E + A)^{-1}B,$$

et  $\alpha$  tel que  $\det(\alpha E + A) \neq 0$ . Soient les matrices  $B^*$ , et  $E^*$ :

$$B^* = \begin{pmatrix} c_1 \hat{E}^{d_1} \hat{B} \\ \vdots \\ c_p \hat{E}^{d_p} \hat{B} \end{pmatrix}, \quad E^* = \begin{pmatrix} c_1 \hat{E}^{d_1+1} \\ \vdots \\ c_p \hat{E}^{d_p+1} \end{pmatrix},$$

où  $c_i$  désigne la  $i$ -ième ligne de la matrice  $C$ . Le système (2) peut être découplé par  $u = -K(\alpha x + \dot{x}) + Lv$  si, et seulement si,  $\det B^* \neq 0$ .

Dans ce cas, les matrices de gain  $K$  et  $L$  sont données par:

$$K = -(B^*)^{-1}E^*, \quad L = (B^*)^{-1}.$$

### 3 Découplage de la forme augmentée

#### 3.1 Découplage par retour d'état

##### 3.1.1 CNS de découplage

En définissant la matrice de découplage  $B^*$ , Falb et Wollowitch [32] donnent une condition nécessaire et suffisante pour découpler un système linéaire multivariable, par un retour d'état proportionnel. Appliqué à la forme augmentée (38) le théorème est le suivant:

##### **Théorème 6.1:**

*Il existe une commande  $v = Kz + Le$  qui découple la forme augmentée (38) si, et seulement si,  $\det B^* \neq 0$ .*

*En désignant les lignes de  $B^*$  par  $b_i^*$ , celles de  $\bar{C}$  par  $\bar{c}_i$ , et celles de  $\bar{D}$  par  $\bar{D}_i$ , pour  $i = 1, \dots, p$ , nous avons:*

$$b_i^* = \begin{cases} \bar{c}_i \bar{A}^{d_i} \bar{B}, & \text{si } \bar{D}_i = 0, \\ \bar{D}_i, & \text{si } \bar{D}_i \neq 0, \end{cases}$$

et:

$$d_i = \begin{cases} \min \{k : \bar{c}_i \bar{A}^k \bar{B} \neq 0, & k = 0, \dots, \bar{n} - 1\}, \\ \bar{n} - 1, & \text{si } \bar{c}_i \bar{A}^k \bar{B} = 0 \text{ pour } k = 0, \dots, \bar{n} - 1. \end{cases}$$

**Remarque:** pour faciliter l'implantation informatique de la méthode, on pourra définir par convention:

$$d_i = -1, \text{ si } \bar{D}_i \neq 0.$$

### 3.1.2 Détermination de la commande

Lorsque la matrice  $B^*$  est inversible, le retour d'état qui découple la forme augmentée est donné par:

$$K = -(B^*)^{-1}A^*, \quad L = (B^*)^{-1},$$

et:

$$A^* = (a_i^*), \text{ pour } i = 1, \dots, p,$$

avec:

$$a_i^* = \begin{cases} \bar{c}_i \bar{A}^{d_i+1}, & \text{si } \bar{D}_i = 0, \\ \bar{c}_i, & \text{si } \bar{D}_i \neq 0. \end{cases}$$

La matrice de transfert du système en boucle fermée est alors de la forme:

$$y(s) = \text{diag} \{ \phi_i(s) \} e(s),$$

avec

$$\phi_i(s) = \begin{cases} \frac{1}{s^{d_i+1}}, & \text{si } \bar{D}_i = 0, \\ 1, & \text{si } \bar{D}_i \neq 0, \end{cases}$$

et le diagramme du système bouclé correspond à la figure 6.1.

### 3.1.3 Exemple

Illustrons cette méthode à l'aide de l'exemple (44) du chapitre 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u,$$

$$y_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x,$$

dont la forme augmentée est donnée par (46):

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v,$$

$$y_a = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} v.$$

Le calcul de la matrice de découplage permet d'écrire:

$$B^* = \begin{pmatrix} \bar{c}_1 \bar{B} \\ \bar{D}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} \bar{c}_1 \bar{A} \\ \bar{c}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et la commande complète correspond à:

$$v = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} z + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} e.$$

## 3.2 Découplage par précompensation et retour d'état

### 3.2.1 CNS de découplage

L'utilisation de l'algorithme de structure entrées-sorties défini par Silverman pour inverser les systèmes multivariables [80], permet de découpler les systèmes faiblement couplés [36].

#### Définition 6.3:

*On appelle système faiblement couplé, un système dont la matrice de découplage est non inversible, mais dont la matrice de transfert est régulière.*

Wang [95] propose un algorithme, et énonce un théorème pour découpler les systèmes faiblement couplés. Appliqué à la forme augmentée ( 38), le résultat est le suivant:

#### Théorème 6.3:

*La forme augmentée ( 38) peut être découplée par précompensation dynamique et retour d'état proportionnel si, et seulement si, elle est faiblement couplée.*

### 3.2.2 Détermination du précompensateur

La méthode consiste à réduire en colonnes  $B^*$ , et à intégrer les entrées qui agissent simultanément sur plusieurs sorties différentes. L'algorithme utilise en outre le fait que la matrice de découplage dépend uniquement des relations entrées-sorties du système considéré, et non pas de la réalisation du transfert. En développant en série de Laurent  $\bar{G}(s) = \bar{C}(sI - \bar{A})\bar{B} + \bar{D}$ , il est facile de montrer que:

$$b_i^* = \lim s^{d_i+1} \bar{g}_i(s), \text{ lorsque } s \rightarrow \infty,$$

où  $\bar{g}_i(s)$  représente la  $i$ -ième ligne de  $\bar{G}(s)$ ,  $b_i^*$  représente la  $i$ -ième ligne de  $B^*$ , et:

$$d_i = \min \{k : s^{k+1} \bar{g}_i(s) \neq 0, k = 0, 1, \dots\}.$$

Supposons que  $\text{rang } B^* = p_1 < p$ , il existe une matrice  $P_1$  telle que:

$$B^* P_1 = (t_1 \quad \dots \quad t_{p'_1} \quad t_{p'_1+1} \quad \dots \quad t_{p_1} \quad 0 \quad \dots \quad 0),$$

avec:

- $p'_1$  tel que chaque colonne  $t_1, \dots, t_{p'_1}$  possède au moins deux éléments non nuls,
- $p_1$  tel que chaque colonne  $t_{p'_1+1}, \dots, t_{p_1}$  possède exactement un élément non nul.

Wang montre que  $1 \leq p'_1 \leq p_1$ , et définit:

$$\bar{G}_1(s) = \bar{G}(s) P_1 D_1(s), \quad D_1(s) = \text{diag} \underbrace{\{s^{-1}, \dots, s^{-1}\}}_{p'_1}, 1, \dots, 1\}.$$

L'algorithme est répété sur  $\bar{G}_1(s), \bar{G}_2(s), \dots$ , jusqu'à obtenir  $\bar{G}_k(s)$  dont la matrice de découplage  $B_k^*$  soit inversible. La méthode converge en un nombre fini d'itérations lorsque le système est faiblement couplé, et constitue à ce titre un critère permettant de caractériser de tels systèmes. Le précompensateur complet permettant d'obtenir  $G_k(s)$  est donné par  $H_d(s)$ :

$$y(s) = \bar{G}(s)H_d(s)w(s), \quad H_d(s) = \prod_{i=1}^k P_i D_i(s). \quad (77)$$

Le découplage est achevé en écrivant une réalisation du vecteur état  $z_k$  du système (38) compensé par (77), et en définissant le retour d'état:

$$w = Kz_k + Le, \quad K = -(B_k^*)^{-1}A_k^*, \quad L = (B_k^*)^{-1},$$

de la même façon que dans la section 6.2.1. Le diagramme du système bouclé est alors donné par la figure 6.2.

Le précompensateur  $H(s)$  qui élimine les comportements impulsionnels, et le précompensateur additionnel  $H_d(s)$  qui permet de découpler la forme augmentée (38) sont construits sur le même principe. Dans les deux cas, il s'agit d'une succession d'étages composés chacun d'une matrice de changement de variables et d'un ensemble d'intégrateurs regroupés dans une matrice diagonale. C'est pourquoi il peut être intéressant de traiter conjointement le problème de l'élimination des comportements impulsionnels et celui du découplage, afin de définir un précompensateur global  $H_c(s)$  qui réalise simultanément ces deux objectifs:

$$H_c(s) = H(s)H_d(s) = \prod_{i=1}^{\nu-1} Q_{\nu-i} H_{\nu-i}(s) \prod_{i=1}^k P_i D_i(s).$$

## 4 Exemple

Pour illustrer la méthode précédente, considérons l'exemple suivant avec deux matrices de sortie différentes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u, \quad (78)$$

$$y_a = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x, \quad (a)$$

$$y_b = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x. \quad (b)$$

Notons que les sous-systèmes rapides de (78a) et (78b) sont les mêmes. Le calcul du précompensateur est donc le même dans les deux cas:

$$H(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ s^{-2} & -s^{-1} \end{pmatrix}.$$

Soit  $\bar{G}_a(s)$  la matrice de transfert de (78a) et  $\bar{G}_b(s)$  celle de (78b):

$$\bar{G}_a(s) = \begin{pmatrix} -\frac{2s^2+s-4}{2s^2(s-2)} & \frac{3s-4}{2s(s-2)} \\ \frac{s+4}{s^2(s-2)} & \frac{s-4}{s(s-2)} \end{pmatrix},$$

$$\bar{G}_b(s) = \begin{pmatrix} -\frac{s+1}{s^2(s-2)} & \frac{1}{s(s-2)} \\ -1 + \frac{s+4}{s^2(s-2)} & 1 + \frac{s-4}{s(s-2)} \end{pmatrix}.$$

Les formes augmentées correspondantes sont données par:

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v,$$

$$y_a = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{5}{2} & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} z, \quad (a) \quad (79)$$

$$y_b = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} v. \quad (b)$$

Le système (79a) est commandable, observable, et peut être découplé par retour d'état car la matrice de découplage  $B^*$ :

$$B^* = \begin{pmatrix} \bar{C}_1 \bar{B} \\ \bar{C}_2 \bar{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

est inversible. Le système (78a) peut être découplé à l'aide du précompensateur  $H(s)$ , et du retour d'état  $v = Kz + Le$ , avec

$$K = \begin{pmatrix} -8 & -12 & -4 \\ -4 & -6 & -1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considérons maintenant les autres méthodes de découplage qui opèrent directement sur le système généralisé. Deux inconvénients doivent être soulignés.

- Notons en premier lieu que le système (78a) n'est pas observable, un retour P ou PD portant sur toutes les composantes de  $x$  ne peut donc pas être réalisé.
- De plus le découplage du système dual  $((A + \alpha E)^{-1}E, (A + \alpha E)^{-1}B, C)$  défini dans [18] n'est pas toujours possible. Lorsque l'on étudie les variations de  $\text{cond}^{-1}(A + \alpha E)$ , on peut constater que cette fonction est maximale pour  $\alpha = 0$ .

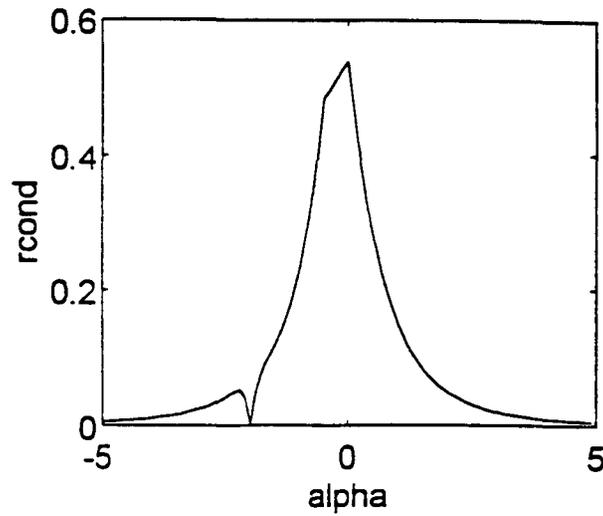


Fig. 6.3: Variation de  $\text{cond}^{-1}(A + \alpha E)$  en fonction de  $\alpha$

Pour cette valeur de  $\alpha$ , le système dual:

$$\hat{E} = A^{-1}E = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ne peut être découpé par un retour d'état car la matrice:

$$\hat{B}^* = \begin{pmatrix} C_1 \hat{B} \\ C_2 \hat{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

n'est pas inversible.

Examinons maintenant le cas d'un système dont la forme augmentée ne peut être découpée. Le système (78b) est commandable, observable, mais:

$$B^* = \begin{pmatrix} \bar{C}_1 \bar{A} \bar{B} \\ \bar{D}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

n'est pas inversible. Un précompensateur additionnel est donc nécessaire. En appliquant l'algorithme présenté dans la section 6.3.2.1., nous obtenons:

$$H_d(s) = \begin{pmatrix} -s^{-1} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit  $\tilde{G}_{1b}(s) = \tilde{G}_b(s)H_d(s)$ :

$$\tilde{G}_{1b}(s) = \begin{pmatrix} \frac{s+1}{s^3(s-2)} & -\frac{1}{s^2(s-2)} \\ \frac{1}{s} - \frac{s+4}{s^3(s-2)} & \frac{s^2-3s+4}{s^2(s-2)} \end{pmatrix}.$$

La matrice de découplage:

$$B_{1b}^* = \begin{pmatrix} \lim_{s \rightarrow \infty} s^3 \bar{g}_1(s) & \lim_{s \rightarrow \infty} s \bar{g}_2(s) \\ \lim_{s \rightarrow \infty} s \bar{g}_2(s) & \lim_{s \rightarrow \infty} s^3 \bar{g}_1(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

est inversible. Le système (78b) peut être découplé à l'aide du précompensateur:

$$H_c(s) = H(s)H_d(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -s^{-3} & s^{-2} - s^{-1} \end{pmatrix},$$

et d'un retour d'état P sur le système compensé.

## 5 Conclusion

Dans ce chapitre ont été rappelées plusieurs méthodes de découplage des systèmes généralisés par retour proportionnel ou retour proportionnel plus dérivé. Nous avons ensuite exposé une méthode de découplage des systèmes généralisés par précompensation dynamique et retour d'état. La condition nécessaire et suffisante pour réaliser le découplage est que la matrice de transfert  $G(s)$  du système initial soit inversible (ou de rang plein en lignes lorsque  $p > q$ ). Dans le cas où cette condition est vérifiée,  $H(s)$  est complété en appliquant l'algorithme de structure entrées-sorties. Le découplage est achevé par retour d'état sur le système compensé.

### Procédures MATLAB

La fonction *DECOU* calcule la matrice de découplage  $B^*$  et les indices de découplage  $d_i$  d'un système avec transmission directe. Le nombre d'entrées est supposé égal au nombre de sorties, et les indices  $d_i$  sont fixés arbitrairement à -1 lorsque  $\bar{D}_i$ , la  $i$ -ième ligne de la matrice  $\bar{D}$  est non nulle.

Lorsque la matrice  $B^*$  est inversible, la fonction *KLSTA* détermine les gains de bouclage  $K$  et  $L$  tels que le retour  $v = Kz + Le$  découple le système (38).

Lorsque la matrice  $B^*$  n'est pas inversible, la fonction *PREDEC* détermine le précompensateur additionnel  $H_d(s)$  qu'il convient d'ajouter pour obtenir un système découplable par retour d'état. La fonction *PREGLO* détermine le précompensateur global  $H_c(s) = H(s)H_d(s)$  résultant, et la fonction *READEC* détermine une réalisation de la forme augmentée précompensée par  $H_d(s)$ .



## 7. COMMANDE OPTIMALE

Afin de répondre à des objectifs de commande plus exigeants que la simple spécification des dynamiques en boucle fermée, et afin d'obtenir les meilleures performances possibles en regard d'un critère donné nous abordons dans ce chapitre les problèmes de commande optimale avec un critère à coût quadratique. Quelles sont les conditions requises pour résoudre un tel problème, et comment le résoudre?

Nous répondons à ces questions en proposant une commande par retour sur  $x$  dans le cas des systèmes I-commandables, et une commande par précompensation dynamique plus un retour d'état sur le système compensé dans le cas des systèmes qui ne sont pas I-commandables.



# 1 Introduction

Jusqu'à présent, si l'on excepte le chapitre consacré au découplage, le vecteur de commande a été déterminé en fonction d'un unique critère: la position souhaitée des pôles du système en boucle fermée dans le plan complexe. Cette méthode reste peu satisfaisante lorsque qu'il s'agit d'obtenir certaines performances comme une réponse en temps minimal ou une consommation minimale d'énergie. En effet, d'une part il n'est pas facile de déduire directement ces performances de la distribution des pôles. D'autre part à une distribution donnée, correspondent souvent plusieurs vecteurs de commande. Prendre en compte ce degré de liberté afin de définir la meilleure commande en regard des performances souhaitées est le principe de la commande optimale, et la raison d'être de ce chapitre.

Dans ce qui suit nous nous limiterons aux problèmes de commande optimale avec un critère à coût quadratique et horizon infini. Considérons le système ( 2) pour lequel on veut minimiser le critère:

$$J = \int_0^{\infty} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} dt.$$

Les matrices du coût  $F$  et  $G$  sont symétriques,  $F$  est définie non négative, et  $G$  définie positive. Conformément au modèle présenté dans le chapitre 3, deux types de résolutions vont être proposées selon que le système initial est I-commandable ou non.

- Pour les systèmes I-commandables sous forme de Smith le problème est résolu en deux temps. Un prébouclage  $u = \tilde{K}\tilde{x} + v$  permet d'éliminer les modes impulsionnels. Le critère  $J$  peut alors être exprimé uniquement en fonction des vecteurs  $\tilde{x}_1$  et  $v$ . Lorsque les matrices du coût sur  $\tilde{x}$  et  $u$  sont symétriques définies positives, il en est de même des matrices du coût sur  $\tilde{x}_1$  et  $v$ . Dans ce cas la détermination d'une commande optimale régulière  $u^*$  pour un système généralisé est remplacée par la détermination d'une commande optimale régulière  $v^*$  pour un système régulier. La commande  $v^*$  qui permet de minimiser le critère est obtenue par résolution d'une équation de Riccati.
- Pour les systèmes qui ne sont pas I-commandables, les comportements impulsionnels sont éliminés en introduisant le précompensateur dynamique  $H(s)$ . Le critère  $J$  peut alors être exprimé en fonction de l'état augmenté  $z$  et de la nouvelle entrée  $v$ . Contrairement au cas des systèmes I-commandables, lorsque les matrices  $F$  et  $G$  sont toutes deux symétriques définies positives, le critère obtenu peut être régulier, ce qui correspond à une matrice  $\tilde{G}$  de coût sur  $v$  symétrique définie positive, ou singulier, ce qui correspond à une matrice  $\tilde{G}$  symétrique définie non négative (mais pas strictement positive).

La première partie de ce chapitre est consacrée aux systèmes I-commandables. Nous éliminons les modes impulsionnels, et rappelons les conditions nécessaires et suffisantes d'existence d'une commande optimale  $u^*$  par retour sur  $x$  qui minimise le critère

$J$ , et nous expliquons les différentes étapes de la résolution. Dans la seconde partie nous nous intéressons au cas général. Après avoir éliminé les comportements impulsionnels par précompensation, et calculé les matrices de coût  $\bar{F}$  et  $\bar{G}$  qui portent sur l'état augmenté  $z$  et sur la nouvelle entrée  $v$ , nous déterminons à quelles conditions la matrice  $\bar{G}$  est symétrique définie positive. Nous montrons que le problème de commande optimale régulière pour un système généralisé est transformé en un problème de commande optimale soit régulière, soit singulière pour un système régulier. Nous achevons la résolution dans le cas régulier. Les résultats originaux de ce chapitre sont rassemblés en fin de première section et dans la seconde section.

## 2 Cas des systèmes I-commandables

Dans cette section nous considérons le système ( 2) sous forme de Smith ( 17), supposé I-commandable, pour lequel on veut minimiser le critère  $J$ .

### 2.1 Elimination des modes impulsionnels

L'élimination des modes impulsionnels par retour sur  $\tilde{x}$  est réalisée en utilisant les résultats développés dans la section 2.1 du chapitre 3. D'après l'hypothèse de I-commandabilité, il existe un gain  $\tilde{K}$  tel que le système ( 2) bouclé par  $u = \tilde{K}\tilde{x} + v$  ne comporte pas de mode impulsionnel. De plus si le système initial a été préalablement transformé sous forme de Smith ( 17), le gain  $\tilde{K} = \tilde{K}_2$  porte uniquement sur  $\tilde{x}_2$ . On obtient en boucle fermée le système:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_1 &= (A_{11} - (A_{12} + \tilde{B}_1\tilde{K}_2)(A_{22} + \tilde{B}_2\tilde{K}_2)^{-1}A_{21})\tilde{x}_1 + \\ &\quad (\tilde{B}_1 - (A_{12} + \tilde{B}_1\tilde{K}_2)(A_{22} + \tilde{B}_2\tilde{K}_2)^{-1}\tilde{B}_2)v, \\ \tilde{x}_2 &= -(A_{22} + \tilde{B}_2\tilde{K}_2)^{-1}A_{21}\tilde{x}_1 - (A_{22} + \tilde{B}_2\tilde{K}_2)^{-1}\tilde{B}_2v, \\ y &= \tilde{C}_1\tilde{x}_1 + \tilde{C}_2\tilde{x}_2.\end{aligned}$$

Introduisons la notation:

$$S = A_{22} + \tilde{B}_2\tilde{K}_2.$$

A partir du changement de variables:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & \tilde{K}_2 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & \tilde{K}_2 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -S^{-1}A_{21} & -S^{-1}\tilde{B}_2 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ v \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ -S^{-1}A_{21} & -S^{-1}\tilde{B}_2 \\ -\tilde{K}_2S^{-1}A_{21} & I - \tilde{K}_2S^{-1}\tilde{B}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ v \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{80}$$

Le critère  $J$  peut être réécrit sous la forme:

$$J = \int_0^\infty \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ v \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \bar{F} & H \\ H^T & \bar{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ v \end{pmatrix} dt,$$

avec:

$$\bar{F} = (I_r \quad -A_{21}^T S^{-T}) F \begin{pmatrix} I_r \\ -S^{-1} A_{21} \end{pmatrix} + (\tilde{K}_2 S^{-1} A_{21})^T G (\tilde{K}_2 S^{-1} A_{21}),$$

$$\bar{G} = (0 \quad -\tilde{B}_2^T S^{-1}) F \begin{pmatrix} 0 \\ -S^{-1} \tilde{B}_2 \end{pmatrix} + (I - \tilde{K}_2 S^{-1} \tilde{B}_2)^T G (I - \tilde{K}_2 S^{-1} \tilde{B}_2),$$

$$H = (I_r \quad 0) F \begin{pmatrix} 0 \\ -S^{-1} \tilde{B}_2 \end{pmatrix}.$$

## 2.2 CNS d'existence de la commande optimale

En remarquant que le changement de variables (80) est de rang plein en colonnes, Dai [27] montre le résultat suivant:

### Théorème 7.1:

*Supposons que les matrices  $F$  et  $G$  soient symétriques définies positives, alors il en est de même des matrices  $\bar{F}$  et  $\bar{G}$ .*

Lorsque  $F$  est définie non négative, on ne peut rien affirmer en ce qui concerne la positivité des matrices  $\bar{F}$  et  $\bar{G}$ . En effet, ces matrices peuvent être soit définies positives, soit définies non négatives, comme le montre l'exemple suivant.

Soit le système:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{\tilde{x}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tilde{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad (81)$$

pour lequel on veut minimiser le critère:

$$J = \int_0^\infty \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} dt.$$

Ce système est I-commandable, et possède un mode impulsionnel que l'on désire supprimer, tout en stabilisant le système en boucle fermée. Le système bouclé par la commande:

$$u = (0 \quad 0 \quad 1) \tilde{x} + v,$$

est décrit par l'équation:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{\tilde{x}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tilde{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} v,$$

et possède deux modes exponentiels en  $-1$  et  $-3$ . D'autre part le changement de variables correspondant à la commande précédente est donné par:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ v \end{pmatrix}.$$

- Lorsque l'on veut minimiser  $J$  avec:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = 1,$$

on obtient:

$$J = \int_0^\infty \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ v \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ v \end{pmatrix} dt.$$

La matrice  $\bar{G} = 1$ , et le critère obtenu est de type régulier.

- Lorsque l'on veut minimiser  $J$  avec:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = 1,$$

on obtient:

$$J = \int_0^\infty \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ v \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ v \end{pmatrix} dt.$$

La matrice  $\bar{G} = 0$ , et le critère obtenu est de type singulier.

Lorsque le système initial est sous forme de Smith, le théorème 7.1 peut être complété par le résultat suivant. Considérons le partitionnement de  $F$ :

$$F = \begin{pmatrix} \tilde{F}_{11} & \tilde{F}_{12} \\ \tilde{F}_{21} & \tilde{F}_{22} \end{pmatrix},$$

avec  $\tilde{F}_{11} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ .

**Corollaire au théorème 7.1:**

*Supposons que  $F$  soit symétrique définie non négative et que  $\tilde{F}_{22}$  et  $G$  soient symétriques définies positives, alors  $\bar{G}$  est symétrique définie positive.*

**Démonstration :** il suffit de constater que:

$$\begin{aligned}\bar{G} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -S^{-1}\tilde{B}_2 \\ I - \tilde{K}_2 S^{-1}\tilde{B}_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -S^{-1}\tilde{B}_2 \\ I - \tilde{K}_2 S^{-1}\tilde{B}_2 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} -S^{-1}\tilde{B}_2 \\ I - \tilde{K}_2 S^{-1}\tilde{B}_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \tilde{F}_{22} & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -S^{-1}\tilde{B}_2 \\ I - \tilde{K}_2 S^{-1}\tilde{B}_2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Comme la matrice:

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -S^{-1}A_{21} & -S^{-1}\tilde{B}_2 \\ -\tilde{K}_2 S^{-1}A_{21} & I - \tilde{K}_2 S^{-1}\tilde{B}_2 \end{pmatrix},$$

est de rang plein en colonnes, il en est de même de la matrice:

$$\begin{pmatrix} -S^{-1}\tilde{B}_2 \\ I - \tilde{K}_2 S^{-1}\tilde{B}_2 \end{pmatrix},$$

et le théorème 7.1 peut être appliqué sur les matrices  $\tilde{F}_{22}$  et  $G$ .  $\square$

Pour conclure et rassembler les différentes conditions que l'on vient de passer en revue, rappelons la condition nécessaire et suffisante d'existence de  $u^*$  énoncée par Cobb [24]:

**Théorème 7.2:**

*Supposons que les matrices  $F$  et  $G$  soient symétriques définies positives.*

*Il existe une commande  $u^*$  par retour sur  $x$  telle que  $J$  soit minimal si, et seulement si, le système (2) est stabilisable et  $I$ -commandable.*

## 2.3 Détermination de $u^*$

Nous supposerons dans ce qui suit que les hypothèses du théorème précédent sont vérifiées et que les matrices  $F$  et  $G$  sont symétriques définies positives. La commande optimale  $v^*$  est obtenue en déterminant:

- une commande  $v = \tilde{K}_1 \tilde{x}_1 + w$  qui décroise le critère  $J$  lorsque cela est nécessaire,
- la commande  $w^*$ , qui minimise le critère décroisé, ce qui donne  $v^*$ , puis  $u^*$ .

### 2.3.1 Simplification du critère

L'expression du critère  $J$  en fonction des vecteurs  $\tilde{x}_1$  et  $v$  peut faire apparaître une matrice  $H$  non nulle. Dans ce cas, il est nécessaire de décroiser le critère avant d'appliquer les résultats usuels. Pour cela considérons la commande  $v = \tilde{K}_1 \tilde{x}_1 + w$  avec:

$$\tilde{K}_1 = -\bar{G}^{-1}H^T,$$

qui conduit au changement de variables:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\bar{G}^{-1}H^T & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ w \end{pmatrix}.$$

Le critère correspondant est donné par:

$$J = \int_0^\infty \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ w \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \tilde{F} & 0 \\ 0 & \bar{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ w \end{pmatrix} dt,$$

avec:

$$\tilde{F} = \bar{F} - H\bar{G}^{-1}H^T.$$

Dai [27] montre que si  $\bar{F}$  est symétrique définie positive, il en est de même de  $\tilde{F}$ , et que si la paire:

$$(\bar{A}_1, \bar{B}_1),$$

avec la même notation que dans la section 2.3 du chapitre 4:

$$\begin{aligned} \bar{A}_1 &= A_{11} - (A_{12} + \tilde{B}_1\tilde{K}_2)S^{-1}A_{21}, \\ \bar{B}_1 &= \tilde{B}_1 - (A_{12} + \tilde{B}_1\tilde{K}_2)S^{-1}\tilde{B}_2, \end{aligned}$$

est stabilisable, il en est de même de la paire:

$$(\bar{A}_1 - \bar{B}_1\bar{G}^{-1}H^T, \bar{B}_1).$$

Il s'agit donc de minimiser le critère  $J$  pour le système:

$$\dot{\tilde{x}}_1 = (\bar{A}_1 - \bar{B}_1\bar{G}^{-1}H^T)\tilde{x}_1 + \bar{B}_1w.$$

### 2.3.2 Détermination de $w^*$

La résolution est achevée en utilisant les résultats usuels de la commande optimale à critère à coût quadratique et horizon infini. La commande  $w^*$  qui minimise le critère  $J$  est définie par:

$$w^* = -\bar{G}^{-1}\bar{B}_1^T M \tilde{x}_1,$$

où  $M$  est solution de l'équation de Riccati:

$$M(\bar{A}_1 - \bar{B}_1\bar{G}^{-1}H^T) + (\bar{A}_1 - \bar{B}_1\bar{G}^{-1}H^T)^T M - M\bar{B}_1\bar{G}^{-1}\bar{B}_1^T M + \tilde{F} = 0.$$

Il vient alors:

$$v^* = -\bar{G}^{-1}(\bar{B}_1^T M + H^T)\tilde{x}_1,$$

et:

$$u^* = -\bar{G}^{-1}(\bar{B}_1^T M + H^T)\tilde{x}_1 + \tilde{K}_2\tilde{x}_2.$$

Si le système initial n'est pas sous forme de Smith, la commande  $u^*$  est obtenue à partir de  $v^*$  en utilisant un changement de variables supplémentaire.

### 3 Cas général

Dans cette section, nous considérons le système ( 2) sous forme standard ( 15). Nous n'émettons aucune hypothèse concernant la I-commandabilité du système, et de la même façon que dans le chapitre 3, nous proposons d'éliminer les comportements impulsionnels par précompensation dynamique, avant de résoudre le problème de commande optimale pour le système compensé ( 38).

#### 3.1 Précompensation

L'élimination des comportements impulsionnels est réalisée en utilisant les résultats du chapitre 3. Nous déterminons notamment le précompensateur ( 35) décrit dans l'espace d'état par l'équation ( 37), et la forme augmentée correspondante ( 38). D'après les équations ( 37) et ( 41), les vecteurs  $x$  et  $u$  peuvent être exprimés en fonction de  $z$  et  $v$ :

$$\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & T_2 \\ 0 & C_P & D_P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \epsilon \\ v \end{pmatrix}.$$

Le critère  $J$  peut être transformé comme suit:

$$J = \int_0^\infty \begin{pmatrix} z \\ v \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & T_2 \\ 0 & C_P & D_P \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & T_2 \\ 0 & C_P & D_P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ v \end{pmatrix} dt,$$

c'est-à-dire:

$$J = \int_0^\infty \begin{pmatrix} z \\ v \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \bar{F} & H \\ H^T & \bar{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ v \end{pmatrix} dt,$$

avec:

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & L_2 \end{pmatrix}^T F \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & L_2 \end{pmatrix} + (0 \ C_P)^T G (0 \ C_P),$$

$$\bar{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ T_2 \end{pmatrix}^T F \begin{pmatrix} 0 \\ T_2 \end{pmatrix} + D_P^T G D_P,$$

$$H = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & L_2 \end{pmatrix}^T F \begin{pmatrix} 0 \\ T_2 \end{pmatrix} + (0 \ C_P)^T G D_P.$$

#### 3.2 CNS d'existence de la commande optimale

Dans ce paragraphe nous donnons les conditions nécessaires et suffisantes qui doivent être vérifiées pour que les matrices  $\bar{F}$  et surtout  $\bar{G}$  soient symétriques définies positives, et pour qu'il existe une commande  $v^*$  qui minimise  $J$ .

**Théorème 7.3:**

Supposons que  $F$  et  $G$  soient symétriques définies positives. La matrice  $\bar{G}$  est symétrique définie positive si, et seulement si, la matrice  $(T_2^T \ D_P^T)^T$  est de rang plein en colonnes.

**Démonstration :** remarquons que si  $F$  et  $G$  sont symétriques définies positives, alors il en est de même de la matrice  $\begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}$ , et:

$$\forall x \neq 0, \quad x^T \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix} x = x^T \begin{pmatrix} F^T & 0 \\ 0 & G^T \end{pmatrix} x > 0.$$

Soit  $x \neq 0$ , calculons:

$$x^T \bar{G} x = x^T \begin{pmatrix} 0 \\ T_2 \\ D_P \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ T_2 \\ D_P \end{pmatrix} x.$$

- Supposons que la matrice  $(0 \ T_2^T \ D_P^T)^T$  soit de rang plein en colonnes, alors:

$$\text{Ker} \begin{pmatrix} 0 \\ T_2 \\ D_P \end{pmatrix} = \{0\},$$

et:

$$\forall x \neq 0, \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ T_2 \\ D_P \end{pmatrix} x \neq 0.$$

Dans ce cas:

$$x^T \bar{G} x = x^T \bar{G}^T x = y^T \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix} y > 0,$$

et  $\bar{G}$  est symétrique définie positive.

- Inversement si la matrice  $(0 \ T_2^T \ D_P^T)^T$  n'est pas de rang plein en colonnes, alors:

$$\exists x \neq 0, \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ T_2 \\ D_P \end{pmatrix} x = 0.$$

Dans ce cas:

$$x^T \bar{G} x = x^T \bar{G}^T x = y^T \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix} y = 0,$$

et  $\bar{G}$  n'est pas symétrique définie positive, ce qui achève la démonstration.  $\square$

**Théorème 7.4:**

Supposons que  $F$  et  $G$  soient symétriques définies positives, alors la matrice  $\bar{F}$  est symétrique définie positive.

**Démonstration :** nous pouvons dans un premier temps énoncer une condition nécessaire et suffisante identique à celle proposée dans le théorème 7.3 La matrice  $\bar{F}$  est symétrique définie positive si, et seulement si, la matrice:

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & L_2 \\ 0 & C_P \end{pmatrix},$$

est de rang plein en colonnes.

Le précompensateur étant minimal, la matrice  $L_2$  est de rang plein en colonnes (sinon certaines composantes de  $\epsilon$  seraient inutiles et le précompensateur ne serait pas minimal), et il en est de même de la matrice:

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & L_2 \\ 0 & C_P \end{pmatrix},$$

ce qui achève la démonstration.  $\square$

Lorsque  $F$  est définie non négative, mais n'est pas définie positive, nous pouvons partitionner cette matrice de la façon suivante:

$$F = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix},$$

avec  $F_{11} \in \mathbb{R}^{d^*d}$ , et déduire les observations qui suivent:

**Corollaire au théorème 7.3:**

*Supposons que  $F$  soit symétrique définie non négative, et que  $G$  et  $F_{22}$  soient symétriques définies positives. Le théorème 7.3 reste valable, la matrice  $\bar{G}$  est symétrique définie positive si, et seulement si, la matrice  $(T_2^T \ D_P^T)^T$  est de rang plein en colonnes.*

**Démonstration :** il suffit de constater que:

$$\bar{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ T_2 \\ D_P \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ T_2 \\ D_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_2 \\ D_P \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} F_{22} & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_2 \\ D_P \end{pmatrix}.$$

La fin de la démonstration est exactement identique à celle du théorème 7.3.  $\square$

**Remarque :** si la matrice  $F_{22}$  n'est pas définie positive mais définie non négative, alors le théorème 7.3 n'est plus vérifié et la matrice  $\bar{G}$  peut être soit définie positive, soit définie non négative.

**Corollaire au théorème 7.4:**

*Supposons que  $G$  soit symétrique définie positive, et  $F$  symétrique définie non négative, alors la matrice  $\bar{F}$  est symétrique définie non négative.*

**Démonstration :** ce résultat s'obtient de la même façon que celui du théorème 7.4.  $\square$

**Remarque :** on ne peut guère être plus précis concernant la positivité de la matrice  $\bar{F}$ . Remarquons simplement que si  $F_{11}$  n'est pas définie positive alors  $\bar{F}$  n'est pas non plus définie positive, alors que si  $F_{11}$  est définie positive et  $F_{22}$  définie non négative on ne peut rien conclure.

Nous pouvons illustrer les différents cas de figure qui peuvent se présenter à l'aide de l'exemple suivant:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u.$$

La forme augmentée correspondante est donnée par:

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} v,$$

et:

$$x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \epsilon + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} v.$$

Nous obtenons la matrice de changement de variables:

$$\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ v \end{pmatrix}.$$

La matrice  $(T_2^T \quad D_P^T)^T$  est de rang plein en colonnes, ce qui va permettre d'appliquer les théorèmes 7.3 et 7.4. Considérons un coût  $G = 1$  et différentes matrices  $F$  (voir le tableau de la page suivante). Les cas:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ et } F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

sont particulièrement intéressants puisqu'ils montrent que la positivité de  $\tilde{G}$  dépend de la place de la valeur propre nulle dans  $F_{22}$ .

$F$	$\bar{F}, \bar{G}$	Résultat appliqué	Commande optimale
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\bar{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \bar{G} = 1$	Th. 7.3, et 7.4	Régulière
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\bar{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \bar{G} = 1$	Cor. 7.3, et 7.4	Régulière
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\bar{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \bar{G} = 0$	Cor. 7.4	Singulière
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\bar{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \bar{G} = 1$	Cor. 7.4	Régulière

Pour conclure, nous pouvons énoncer un résultat analogue à celui du théorème 7.2:

**Théorème 7.5:**

*Supposons que les matrices  $F$  et  $G$  soient symétriques définies positives. Il existe une commande  $v^*$  qui minimise le critère  $J$  si, et seulement si, le système (38) est stabilisable, et la matrice  $(T_2^T \ D_P^T)^T$  est de rang plein en colonnes.*

**Démonstration :** compte tenu de ce qui précède, et de l'hypothèse usuelle de stabilisabilité qui est requise pour optimiser un critère à coût quadratique le résultat est immédiat.  $\square$

### 3.3 Détermination de $v^*$

Supposons que les hypothèses du théorème précédent soient vérifiées, la commande optimale  $v^*$  est obtenue, comme dans le paragraphe 2.3 de ce chapitre, en déterminant:

- une commande  $v = Kz + w$  qui décroise le critère,
- la commande  $w^*$ , qui minimise le critère décroisé, ce qui donne  $v^*$ .

Lorsque la matrice  $\bar{G}$  est définie positive, et ce quelque soit la matrice  $\bar{F}$  (définie positive ou définie non négative), le problème de commande optimale régulière pour

le système généralisé ( 2) a été transformé en un problème de commande optimale régulière pour le système compensé ( 38). Le coût:

$$J = \int_0^{\infty} \begin{pmatrix} z \\ v \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \bar{F} & H \\ H^T & \bar{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ v \end{pmatrix} dt,$$

est croisé ou non selon la structure du précompensateur et les gains  $F$  et  $G$ . Lorsque la matrice  $H$  est non nulle, le critère peut être décroisé à l'aide du bouclage:

$$v = w - \bar{G}^{-1} H^T z,$$

qui conduit au changement de variables:

$$\begin{pmatrix} z \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\bar{G}^{-1} H^T & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}.$$

Il s'agit alors de minimiser le critère:

$$J = \int_0^{\infty} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \tilde{F} & 0 \\ 0 & \tilde{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} dt,$$

avec:

$$\tilde{F} = \bar{F} - H \bar{G}^{-1} H^T,$$

pour le système:

$$\dot{z} = (\bar{A} - \bar{B} \bar{G}^{-1} H^T) z + \bar{B} w.$$

Notons que la matrice  $(I - H \bar{G}^{-1})^T$  est de rang plein en colonnes, donc  $\tilde{F}$  est définie positive (resp. définie non négative) si  $\bar{F}$  est définie positive (resp. définie non négative).

D'autre part, la paire  $(\bar{A} - \bar{B} \bar{G}^{-1} H^T, \bar{B})$  est stabilisable si la paire  $(\bar{A}, \bar{B})$  est stabilisable. La commande  $w^*$  qui permet de minimiser le critère  $J$  est donnée par:

$$w^* = -\bar{G}^{-1} \bar{B}^T M z,$$

où  $M$  est solution de l'équation de Riccati:

$$M(\bar{A} - \bar{B} \bar{G}^{-1} H^T) + (\bar{A} - \bar{B} \bar{G}^{-1} H^T)^T M - M \bar{B} \bar{G}^{-1} \bar{B}^T M + \tilde{F} = 0.$$

La commande  $v^*$  à appliquer sur la forme augmentée ( 38) pour minimiser le critère  $J$  est donc:

$$v^* = -\bar{G}^{-1} (\bar{B} M + H^T) z.$$

## 4 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la commande optimale à coût quadratique et horizon infini.

Pour les systèmes I-commandables une commande  $u^*$  par retour sur  $x$  permet de

minimiser le critère si les matrices  $F$  et  $G$  sont symétriques définies positives. Mais lorsque  $F$  n'est pas strictement positive, le critère obtenu après élimination des comportements impulsionnels peut être de type singulier.

Dans le cas général une commande par précompensation et retour d'état est proposée. Le critère obtenu après précompensation peut être de type régulier ou singulier. Il dépend:

- des matrices initiales du coût  $F$  et  $G$ ,
- de la structure du précompensateur

Il s'agit dans tous les cas de vérifier après élimination des comportements impulsionnels que le critère obtenu est de type régulier.

## Procédures MATLAB

La fonction *NEWCRI* permet de calculer les matrices  $\bar{F}$ ,  $\bar{G}$ , et  $H$  à partir de  $F$  et  $G$  lorsque l'on applique un changement de variables  $P$  sur l'état du système. Dans le cas où la matrice  $H$  n'est pas nulle, la procédure *DECROI* détermine le gain  $K$  de la commande qui décroise le critère.

Notons enfin que la résolution de l'équation de Riccati et que le calcul du gain de la commande qui minimise le critère décroisé est obtenu avec les procédures *LQR* ou *LQR2* de la boîte-à-outils Control.



## 8. EXEMPLE

Ce chapitre présente un exemple récapitulatif où les principaux développements proposés dans ce mémoire sont mis en application. Le calcul du précompensateur, la détermination d'observateurs, le découplage, la commande optimale, et la synthèse de l'observateur-régulateur sont illustrés.



## 1 Description du système

Considérons le système généralisé suivant:

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} \dot{x} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u, \quad (82)$$

$$y = (C_1 \ C_2) x,$$

avec:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, & B_1 &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, & C_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \\ N &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & B_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & C_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (83)$$

Ce système écrit sous forme standard possède 3 modes exponentiels, 3 modes impulsions, et 2 modes entraînés. L'indice de nilpotence de la matrice  $N$  est égal à 3.

## 2 Calcul de la forme augmentée

Calculons les matrices nécessaires pour construire  $x_2$ :

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad NB_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^2B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Détaillons la construction du précompensateur. Il est composé de 2 étages:

$$H(s) = Q_2 H_2(s) Q_1 H_1(s).$$

Les matrices  $Q_2$ ,  $H_2(s)$ ,  $Q_1$ , et  $H_1(s)$  s'obtiennent par réduction en colonnes des matrices  $NB_2$  et  $N^2B_2$  comme le montre le tableau suivant:

$B_2$	$NB_2$	$N^2B_2$	$H(s)$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\Downarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\swarrow \quad \searrow$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\Downarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\Downarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{Q_2}$  $\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{H_2}$
	$M_0^1$	$M_1^1$	$H(s)$
	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\Downarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{Q_1}$

$\Downarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{H_1}$
--	--

Le précompensateur est défini par le produit:

$$H(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{s^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Le premier étage a pour réalisation:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_1 &= (1 \ 0) v, \\ u^1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \epsilon_1 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} v, \end{aligned}$$

et le second:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_2 &= (1 \ 0) u^1, \\ u &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \epsilon_2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u^1. \end{aligned}$$

Le précompensateur est construit avec deux intégrateurs, et la réalisation obtenue est de la forme:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_1 \\ \dot{\epsilon}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v, \\ u &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \epsilon + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v. \end{aligned}$$

Le vecteur  $x_2$  s'exprime en fonction de  $\epsilon$  et de  $v$ :

$$x_2 = - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u^1 - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v,$$

c'est-à-dire:

$$x_2 = - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \epsilon - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v,$$

et la forme augmentée est d'ordre 5 :

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v, \quad (84)$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -4.5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} z.$$

Etant donné que les paires  $(A_1, B_1)$  et  $(A_1, C_1)$  sont respectivement commandables et observables, il est facile de vérifier que la forme augmentée obtenue est elle aussi commandable et observable.

### 3 Observation de la forme augmentée

Dans un premier temps nous appliquons les résultats présentés dans la section 3.2 du chapitre 5, et nous construisons un observateur d'ordre plein du vecteur  $x_1$ . Définissons une matrice  $K_1$  telle que les valeurs propres de  $A_1 - K_1 C_1$  soient négatives, et égales à  $\{-2, -2, -1\}$ . Soit:

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.4 \\ -0.4 & 0.2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

nous avons:

$$A_1 - K_1 C_1 = \begin{pmatrix} -1.8 & 0.4 & 0 \\ 0.4 & -1.2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Un observateur d'ordre 3 du vecteur  $x_1$  est alors défini par:

$$\dot{\hat{x}}_1 = (A_1 - K_1 C_1) \hat{x}_1 + M_1 \begin{pmatrix} \epsilon \\ v \end{pmatrix} + K_1 y,$$

avec:

$$M_1 = (B_1 C_P - K_1 C_2 L_2 \quad B_1 D_P - K_1 C_2 T_2) = \begin{pmatrix} 3.8 & 4.2 & 0 & -3 \\ -1.4 & 0.4 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les résultats présentés dans la section 3.3 du chapitre 5 permettent de diminuer l'ordre de l'observateur. La matrice  $C_1$  est de rang plein  $q = 2$  en lignes. Un observateur d'ordre  $d - q = 1$  peut donc être déterminé. Soit  $P_1$  le changement de variables à appliquer sur  $x_1$  de façon à mesurer directement les  $q$  premières composantes de  $P_1^{-1} x_1$  à l'aide de  $y_1$ :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un observateur d'ordre 1 de  $x_1$  avec un mode égal à  $-1$  est défini comme dans le chapitre 5, section 3.3:

$$\dot{w} = -w + (1 \ 3)\epsilon + (0 \ -3)v,$$

et:

$$\hat{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} w + \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ -5 & -2 \\ 3.5 & 1.5 \end{pmatrix} \epsilon + \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ -2 & 2 \\ 1 & -0.5 \end{pmatrix} y.$$

L'observateur de  $z$  correspondant est donné par:

$$\hat{z} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 2 & -5 & -2 & -2 & 2 \\ -1 & 3.5 & 1.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ \epsilon \\ y \end{pmatrix}.$$

## 4 Découplage de la forme augmentée

Calculons la matrice de découplage  $B^*$ . Les indices de découplage sont égaux à 0, ce qui donne:

$$B^* = \bar{C}\bar{B} = \begin{pmatrix} -2 & -7.5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix},$$

qui est inversible. De ce fait la forme augmentée peut être découplée par le retour d'état  $v = Kz + Lv$ , où:

$$K = -(B^*)^{-1}A^* = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 & -15 & -48 & 42 & -3 \\ -2 & 4 & 12 & -10 & 2 \end{pmatrix},$$

$$L = (B^*)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 & -15 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Utilisons l'observateur réduit précédemment calculé pour déterminer la commande à implanter:

$$v = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 & -15 & -48 & 42 & -3 \\ -2 & 4 & 12 & -10 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 2 & -5 & -2 & -2 & 2 \\ -1 & 3.5 & 1.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ \epsilon \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 & -15 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} e,$$

c'est-à-dire:

$$v = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix} w + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -45 & -42 \\ 10 & 11 \end{pmatrix} \epsilon + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -18 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} y + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 & -15 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} e. \quad (85)$$

## 5 Commande optimale

Dans cette section nous calculons la commande qui permet de minimiser le critère:

$$J = \int_0^\infty \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} dt,$$

avec  $F = I_8$  et  $G = I_2$ . Nous appliquons les résultats du chapitre 7. Les vecteurs  $x$  et  $u$  s'expriment en fonction de  $z$ , et  $v$  grâce à la relation:

$$\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \epsilon \\ v \end{pmatrix},$$

et le critère  $J$  peut être réécrit sous la forme:

$$J = \int_0^\infty \begin{pmatrix} x_1 \\ v \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \bar{F} & H \\ H^T & \bar{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ v \end{pmatrix} dt,$$

avec:

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \bar{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les conditions des théorèmes 7.3.1 et 7.3.2 du chapitre 7 sont vérifiées, donc les matrices  $\bar{G}$  et  $\bar{F}$  sont symétriques définies positives.

La commande qui permet de décroiser le critère est donnée par:

$$v = w - \bar{G}^{-1} H^T z = w - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} z.$$

Il s'agit maintenant de résoudre le problème de commande optimale classique: minimiser le critère:

$$J = \int_0^\infty \begin{pmatrix} x_1 \\ w \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \hat{F} & 0 \\ 0 & \bar{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ w \end{pmatrix} dt,$$

avec:

$$\hat{F} = \bar{F} - H \bar{G}^{-1} H^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

pour le système:

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} w.$$

En résolvant l'équation de Riccati:

$$M(\bar{A} - \bar{B}\bar{G}^{-1}H^T) + (\bar{A} - \bar{B}\bar{G}^{-1}H^T)^T M - M\bar{B}\bar{G}^{-1}\bar{B}^T M + \tilde{F} = 0,$$

nous obtenons le vecteur de commande:

$$w^* = -\bar{G}^{-1}\bar{B}Mz = \begin{pmatrix} -0.71 & -0.25 & 0.06 & -1.60 & -1.90 \\ 0.55 & 0.22 & -0.09 & -1.26 & -0.21 \end{pmatrix} z,$$

et:

$$v^* = -\bar{G}^{-1}(\bar{B}M + H^T)z = \begin{pmatrix} -0.71 & -0.25 & 0.06 & -1.60 & -2.90 \\ 0.55 & 0.22 & -0.09 & -1.26 & 0.79 \end{pmatrix} z,$$

L'utilisation de l'observateur réduit précédemment calculé conduit à la commande:

$$v^* = \begin{pmatrix} -1.28 \\ 1.06 \end{pmatrix} w + \begin{pmatrix} -0.84 & -2.66 \\ -2.09 & 0.5 \end{pmatrix} \epsilon + \begin{pmatrix} 0.57 & -0.89 \\ -0.52 & 0.75 \end{pmatrix} y. \quad (86)$$

## 6 Implantation de la commande

Nous regroupons dans le tableau ci-dessous les gains nécessaires à l'implantation des observateurs-régulateurs correspondant aux commandes (85) et (86).

	Découplage	Commande optimale
$Q_w$	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 24 \\ -6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.28 \\ 1.06 \end{pmatrix}$
$Q_\epsilon$	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -45 & -42 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.84 & -2.66 \\ -2.09 & 0.5 \end{pmatrix}$
$Q_y$	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -18 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.57 & -0.89 \\ -0.52 & 0.75 \end{pmatrix}$
$Q_e$	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 & -15 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

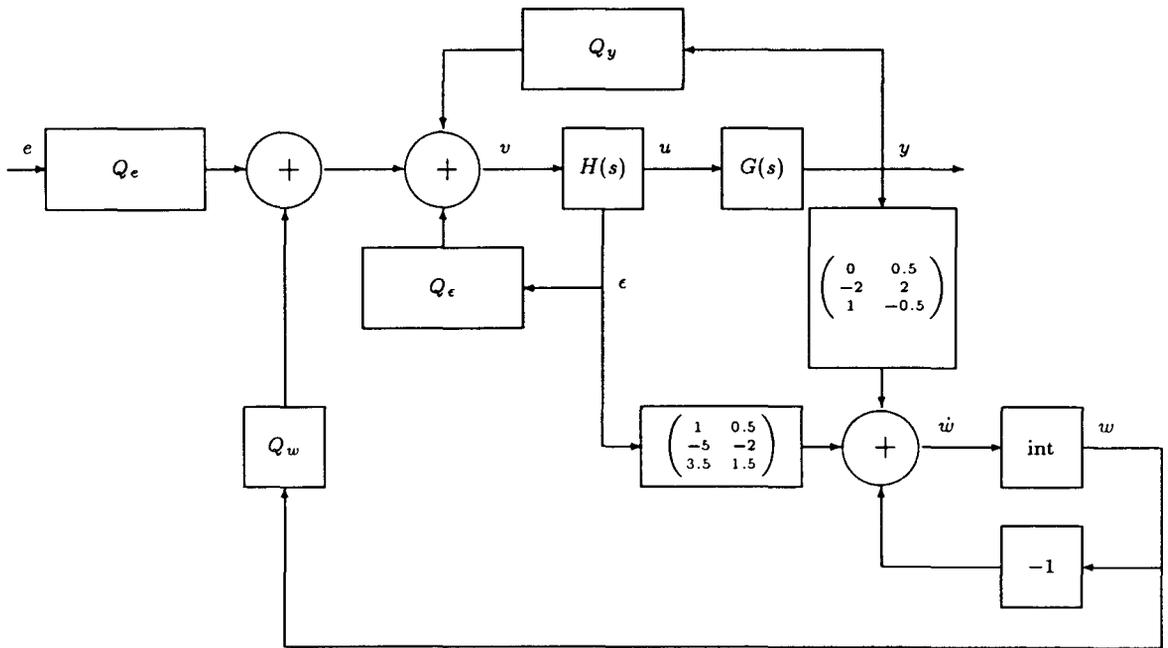


Fig. 8.1: Commande du système ( 84)

CONCLUSION  
GENERALE



Nous avons présenté dans ce mémoire un large éventail de méthodes de commande des systèmes linéaires généralisés en temps continu. Deux points soulignent plus particulièrement l'originalité de notre travail.

- Le dénominateur commun des méthodes proposées est la construction et l'utilisation d'un précompensateur dynamique qui permet:
  - d'éliminer les discontinuités qui affectent la réponse temporelle lorsque l'entrée  $u$  n'est pas suffisamment dérivable,
  - de faire apparaître explicitement les dérivées successives de  $u$ .

Nous détaillons également une réalisation du système compensé dans laquelle on a supprimé les modes entraînés en ne conservant que leurs effets sur la sortie. Cette réalisation est appelée forme augmentée. Des objectifs usuels de commande sont alors développés pour le système compensé.

- Les outils proposés ont été développés simultanément de façon théorique et de façon numérique. Nous avons écrit une bibliothèque de procédures avec le logiciel MATLAB 3.5, dans le but de construire une boîte-à-outils dédiée aux systèmes généralisés. Cette boîte-à-outils, présentée dans l'annexe 2, est modulaire et évolutive.

Reprenons plus en détail les principales contributions de notre travail.

- Le chapitre 2 a souligné l'intérêt des formes canoniques, et plus particulièrement de la forme standard. Nous avons proposé dans l'annexe 1 une détermination originale de cette forme à partir d'un algorithme de triangularisation de la matrice  $E(E + \alpha A)^{-1}$ . Cet algorithme possède l'avantage de ne pas faire appel à l'étude des espaces propres généralisés du faisceau  $(\lambda E - A)$ .
- La principale contribution du chapitre 3 et de l'ensemble de ce travail est l'introduction de la précompensation dynamique. Nous avons d'abord proposé un précompensateur trivial construit avec  $p(\nu - 1)$  intégrateurs puis un précompensateur minimal construit avec  $h$  intégrateurs, et enfin des réalisations du précompensateur et du système compensé. Ce précompensateur assure la continuité des réponses temporelles  $x(t)$  et  $y(t)$  après l'instant initial, et ce quelle que soit l'entrée  $u(t)$ .
- Le chapitre 4 est consacré à l'analyse de la forme augmentée et à la stabilisation des modes dynamiques finis. Nous avons donné notamment les conditions nécessaires et suffisantes pour assurer la commandabilité et l'observabilité de la forme augmentée. De plus, dans le cadre de la commande par placement de pôles, nous avons détaillé le cas mono-entrée, pour lequel nous avons déterminé de façon explicite le gain  $K$  qui permet de placer les pôles dans le plan complexe.

- Lorsque l'on réalise l'asservissement d'un processus réel, on ne peut commander le système par un retour sur le vecteur état qu'après avoir observé ce vecteur. L'objet du chapitre 5 est de proposer des observateurs d'ordre plein et d'ordre réduit du vecteur  $x_1$  et du vecteur  $z$ . L'avantage d'utiliser un précompensateur dynamique est de faire apparaître explicitement les dérivées successives du vecteur  $u$ . Ces dérivées, considérées du point de vue de l'observation comme autant d'entrées supplémentaires, permettent de reconstruire  $x_2$  sans faire d'hypothèses sur la paire  $(A, C)$ . Nous nous sommes également intéressés à l'implantation de l'ensemble régulateur-observateur et avons donné les conditions nécessaires et suffisantes pour combiner un retour d'état de gain  $K$  avec un observateur de gain  $K_r$ .
- Dans les chapitres 6 et 7 nous avons montré comment la précompensation dynamique peut être utilisée pour résoudre des problèmes de commande usuels comme le découplage et la commande optimale avec un critère à coût quadratique. Pour cette dernière nous avons notamment précisé les conditions nécessaires et suffisantes que doit vérifier le précompensateur pour conserver un critère régulier.

Comme nous venons de le rappeler, chaque chapitre apporte sa contribution à un objectif de commande particulier, mais ouvre également de nouvelles perspectives de recherche.

- La construction d'un précompensation dynamique qui satisfera à des objectifs de commande plus exigeants. Nous en avons déjà donné un exemple dans le chapitre 6 en décrivant un précompensateur qui permet de réaliser le découplage dynamique d'un système faiblement couplé. D'autres problèmes de commande pourront être abordés sur le même modèle.
- L'introduction pour des raisons de stabilité de l'opérateur  $(s+\alpha)^{-1}$ , avec  $\alpha > 0$ , à la place de  $s^{-1}$ , dans la synthèse du précompensateur. La construction de ce régulateur et de la forme augmentée correspondante pourra être développée.
- L'étude de la robustesse de la stabilité.
- L'application des méthodes proposées aux systèmes généralisés linéaires échantillonnés.

Signalons enfin que l'approche numérique mérite elle aussi des améliorations et des développements originaux. La boîte-à-outils réalisée avec MATLAB pourra être enrichie afin de proposer à l'utilisateur un plus grand nombre de méthodes propres aux systèmes généralisés. Plus généralement, il faudra imaginer une représentation numérique simple des matrices polynomiales, car elles sont couramment utilisées dans l'analyse des systèmes généralisés et réguliers. La représentation proposée dans les procédures de l'annexe 2 pourra être adoptée.

<p style="text-align: center;">ANNEXE 1: DETERMINATION DE LA FORME STANDARD</p>
---

L'objectif de cette partie est de déterminer la forme standard d'un système généralisé. Les résultats usuels basés sur l'étude des espaces propres généralisés du faisceau  $(sE - A)$  sont rappelés. De plus, nous proposons une autre méthode qui permet de déterminer les matrices  $A_1$ ,  $N$ ,  $P$  et  $Q$ , en calculant la forme de Schur de  $E(A + \alpha E)^{-1}$ .



La plupart des résultats présentés dans ce mémoire nécessitent la transformation préalable du système ( 2) sous sa forme standard ( 15). Les algorithmes usuels reposent sur l'étude des espaces propres généralisés de  $(E, A)$ . Des méthodes ont été développées par Kailath et Verghese [92], et par Lewis et Ozcaldiran [49]. Il s'agit d'une part de déterminer les valeurs propres finies  $\lambda_i$ , et les vecteurs propres associés. Soit:

$$\eta_i = \dim \text{Ker} (\lambda_i E - A).$$

- Les vecteurs propres finis de rang 1,  $v_{ij}^1$  sont définis par:

$$\lambda_i E v_{ij}^1 = A v_{ij}^1, \quad j = 1, \dots, \eta_i.$$

- Les vecteurs propres finis de rang  $k$ ,  $v_{ij}^k$  sont définis par:

$$\lambda_i E v_{ij}^{k+1} = A v_{ij}^{k+1} - E v_{ij}^k, \quad k \geq 1.$$

D'autres part, il faut déterminer les vecteurs propres associés aux valeurs propres dites 'infinies'. Soit:

$$\eta = \dim \text{Ker} E.$$

- Les vecteurs propres infinis de rang 1,  $v_{\infty j}^1$  forment une base de  $\text{Ker} E$ :

$$E v_{\infty j}^1 = 0, \quad j = 1, \dots, \eta.$$

- Les vecteurs propres infinis de rang  $k$ ,  $v_{\infty j}^k$  sont définis par:

$$E v_{\infty j}^{k+1} = A v_{\infty j}^k, \quad k \geq 1.$$

Les matrices de transformation  $P$  et  $Q$  permettant d'obtenir la forme standard sont construites à l'aide des vecteurs propres généralisés:

$$Q = (v_{ij}^k \quad v_{\infty j}^k), \quad P^{-1} = (E v_{ij}^k \quad A v_{\infty j}^k).$$

Des algorithmes numériques stables, utilisant la décomposition  $QZ$  [59] ont été proposés par Van Dooren [87,88]. Dans ce qui suit, nous allons développer une autre méthode [44], qui ne nécessite ni l'utilisation de l'algorithme  $QZ$ , ni la structure d'espace propre généralisé. Comme Campbell, Paraskevopoulos, Koumboulis, Christodoulou, et Mertzios [15,16,18,20,67,68], nous considérerons le déterminant  $(sI - \hat{E})$ , avec  $\hat{E} = E(A + \alpha E)^{-1}$ , et  $\alpha$  une constante telle que  $(A + \alpha E)$  soit régulière, et nous utiliserons un algorithme de triangularisation usuel [11,89]. Les résultats que nous allons développer ont été présentés lors du premier colloque des étudiants doctorants des Ecoles Centrales [44].

# 1 Résultat principal

La méthode que nous proposons substitue la détermination de deux matrices  $R$  et  $S$ , que nous allons définir, à celle des deux matrices de transformation  $P$  et  $Q$ .

## Théoreme A1.1:

Il existe  $P$  et  $Q$  deux matrices régulières telles que:

$$PEQ = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}, \quad PAQ = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

si, et seulement si, il existe deux matrices  $R$  et  $S$ , de dimension  $n * n$ :

$$R = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} P, \quad S = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} P,$$

telles que:

$$(R \quad -S) \begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} = 0.$$

**Démonstration:** la nécessité, comme nous allons le montrer, est immédiate:

$$PEQ = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} PEQ = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix},$$

$$PAQ = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} PAQ = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix},$$

donc:

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} PE = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} PA.$$

En définissant  $R$  et  $S$  conformément à l'énoncé du théorème, nous obtenons le résultat désiré.

Pour montrer la suffisance, nous allons étudier  $\text{Ker} (R \quad -S)$ :

$$R = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} P \Rightarrow RP^{-1} \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix},$$

$$S = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} P \Rightarrow SP^{-1} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix},$$

donc:

$$RP^{-1} \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = SP^{-1} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix},$$

et:

$$(R \quad -S) \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I \\ I & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} = 0. \quad (87)$$

D'après l'équation (87) et la relation  $RA = SE$  nous savons que les vecteurs colonnes de:

$$\begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I \\ I & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix},$$

et ceux de:

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix},$$

sont des éléments de  $\text{Ker} (R \ -S)$ . La régularité de la matrice  $P$  nous permet d'écrire:

$$\text{rang} (R \ -S) = \text{rang} \begin{pmatrix} I & 0 & -A_1 & 0 \\ 0 & N & 0 & -I \end{pmatrix} = n.$$

Donc  $\dim \text{Im} (R \ -S) = n$ , et  $\dim \text{Ker} (R \ -S) = 2n - n = n$ . De plus,

$$\text{rang} \left( \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I \\ I & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} \right) = n,$$

les colonnes de cette matrice constituent une base de  $\text{Ker} (R \ -S)$ . Remarquons que, d'autre part, tous les vecteurs colonnes de la matrice  $(A^T \ E^T)^T$  sont non nuls. En effet, si une colonne était nulle,  $\Delta \neq 0$ , et l'hypothèse de régularité du faisceau  $(sE - A)$  ne serait plus vérifiée. De ce fait, il existe  $Q$  une matrice régulière de dimension  $n * n$ , telle que:

$$\begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I \\ I & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} Q,$$

et:

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I \\ I & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} PAQ \\ PEQ \end{pmatrix},$$

ce qui achève la démonstration.  $\square$

## 2 Détermination de la forme standard

D'après l'hypothèse de régularité de  $\Delta$ , il existe un réel  $\alpha$  tel que  $\det (\alpha E + A) \neq 0$ . En utilisant le résultat précédent nous obtenons les équivalences suivantes:

$$\begin{aligned} RA &= SE, \\ \Leftrightarrow RA + \alpha RE &= SE + \alpha RE, \\ \Leftrightarrow R(A + \alpha E) &= (S + \alpha R)E. \end{aligned}$$

La matrice  $(A + \alpha E)$  est régulière, donc  $R = (S + \alpha R)E(A + \alpha E)^{-1}$ , et:

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} P = \underbrace{\left( \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} \right)}_{\begin{pmatrix} A_1 + \alpha I & 0 \\ 0 & I + \alpha N \end{pmatrix}} PE(A + \alpha E)^{-1}. \quad (88)$$

Le réel  $\alpha$  a été choisi tel que les matrices  $(A_1 + \alpha I)$  et  $(I + \alpha N)$  soient régulières. Reformulons l'équation (88) sous la forme:

$$\begin{pmatrix} (A_1 + \alpha I)^{-1} & 0 \\ 0 & (I + \alpha N)^{-1}N \end{pmatrix} = PE(A + \alpha E)^{-1}P^{-1}, \quad (89)$$

où  $A_1$ ,  $N$ , et  $P$  sont les matrices inconnues. La résolution de (89) peut être achevée en calculant la forme de Schur de  $E(A + \alpha E)^{-1}$ . Il existe  $Q_1$  une matrice régulière telle que  $Q_1 E(A + \alpha E)^{-1} Q_1^{-1} = S_1$ , avec [89], [83], [62]:

$$S_1 = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \times & \dots & \dots & \dots & \times \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \Lambda_k & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ 0 & S_{22} \end{pmatrix}. \quad (90)$$

Les éléments  $(\Lambda_i)_{i=1..k}$  sont des scalaires correspondant aux valeurs propres réelles non nulles de  $E(A + \alpha E)^{-1}$ , ou des matrices de dimension  $2 * 2$  correspondant aux valeurs propres complexes conjuguées de  $E(A + \alpha E)^{-1}$ . Donc  $S_{11}$  regroupe les valeurs propres non nulles de  $E(A + \alpha E)^{-1}$ , et  $S_{22}$  les valeurs propres nulles.

**Théorème A1.2:**

$S_{11}$  est de dimension  $d * d$  et  $S_{22}$  de dimension  $(n - d) * (n - d)$ .

**Démonstration:** soient  $\hat{E} = E(A + \alpha E)^{-1}$ ,  $\hat{A} = A(A + \alpha E)^{-1}$ , et  $k = \det(A + \alpha E)$ . Les matrices  $\hat{A}$  et  $\hat{E}$  vérifient l'équation [16], [15]:

$$\hat{A} = I - \alpha \hat{E},$$

et:

$$\begin{aligned} \Delta &= k \det((sE - A)(A + \alpha E)^{-1}), \\ &= k \det(s\hat{E} - I + \alpha \hat{E}), \\ &= k \det((s + \alpha)\hat{E} - I), \\ &= k \det((s + \alpha)J - I), \end{aligned} \quad (91)$$

où  $J$  représente la forme de Jordan de la matrice  $\hat{E}$ :  $J = \text{diag}\{D_i\}_{i=1..r}$ . Les matrices  $D_i$  sont les blocs de Jordan de dimension  $n_i * n_i$ :

$$D_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix},$$

et  $n_i$  est l'ordre de multiplicité algébrique de la valeur propre  $\lambda_i$ . Soit  $\Delta_i = \det((s + \alpha)D_i - I_{n_i})$ , nous avons:

$$\deg \Delta_i = \begin{cases} n_i, & \text{si } \lambda_i \neq 0, \\ 0, & \text{si } \lambda_i = 0. \end{cases}$$

Puisque  $\deg \Delta = \sum_{\lambda_i} \deg \Delta_i$ , nous obtenons:

$$d = \sum_{\lambda_i \neq 0} n_i.$$

D'après l'équation (90), nous savons que la dimension de  $S_{11}$  est donnée par  $\sum_{\lambda_i \neq 0} n_i$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

Nous appliquons une nouvelle transformation, de façon à obtenir une matrice bloc diagonale  $S_2$ . Il existe  $Q_2$  une matrice régulière telle que [11,89]:

$$Q_2 S_1 Q_2^{-1} = Q_2 Q_1 \hat{E} Q_1^{-1} Q_2^{-1} = S_2,$$

et:

$$S_2 = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \times & \times & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \times & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \Lambda_k & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & \times & \times \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}.$$

La matrice  $Q_2$  peut être partitionnée de la manière suivante:

$$Q_2 = \begin{pmatrix} I & L \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

avec  $L$  la solution de l'équation de Sylvester:

$$L S_{22} - S_{11} L = -S_{12}.$$

La solution existe car les matrices  $S_{11}$  et  $S_{22}$  n'ont pas de valeur propre commune [72]. Définissons  $Q_3 = Q_1 Q_2$ , nous avons montré que:

$$\hat{E} = Q_3^{-1} \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} Q_3 = P^{-1} \begin{pmatrix} (A_1 + \alpha I)^{-1} & 0 \\ 0 & (I + \alpha N)^{-1} N \end{pmatrix} P,$$

où  $T_1$  et  $T_2$  sont deux matrices triangulaires supérieures, dont les dimensions correspondent respectivement aux dimensions de  $A_1$  et  $N$ . nous pouvons écrire:

$$P = Q_3, \quad A_1 = T_1^{-1} - \alpha I, \quad N = T_2(I - \alpha T_2)^{-1},$$

$$Q = (A + \alpha E)^{-1} P^{-1} \begin{pmatrix} A_1 + \alpha I & 0 \\ 0 & I + \alpha N \end{pmatrix}. \quad (92)$$

**Remarque:** la validité du résultat obtenu dépend du conditionnement de la matrice  $(A + \alpha E)$ . Rappelons que:

$$\text{cond}(A + \alpha E) = \|A + \alpha E\| * \|(A + \alpha E)^{-1}\| = \frac{\bar{\sigma}(A + \alpha E)}{\underline{\sigma}(A + \alpha E)},$$

où  $\bar{\sigma}(A + \alpha E)$  est la plus grande valeur singulière de  $(A + \alpha E)$ , et  $\underline{\sigma}(A + \alpha E)$  la plus petite. La matrice  $(A + \alpha E)$  est bien conditionnée si le rapport entre  $\bar{\sigma}$  et  $\underline{\sigma}$  n'est pas trop important. D'un point de vue pratique, il faut déterminer  $\alpha$  de telle façon que le conditionnement de  $(A + \alpha E)$  ne soit pas trop supérieur à 1.

### 3 Exemple

Considérons le système décrit par les matrices suivantes:

$$E = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (93)$$

Dans cet exemple,  $\text{rang } A = 4$ , et en étudiant les variations de  $\text{cond}^{-1}(A + \alpha E)$ , on peut constater que la fonction est maximale au point  $\alpha = 0$ .

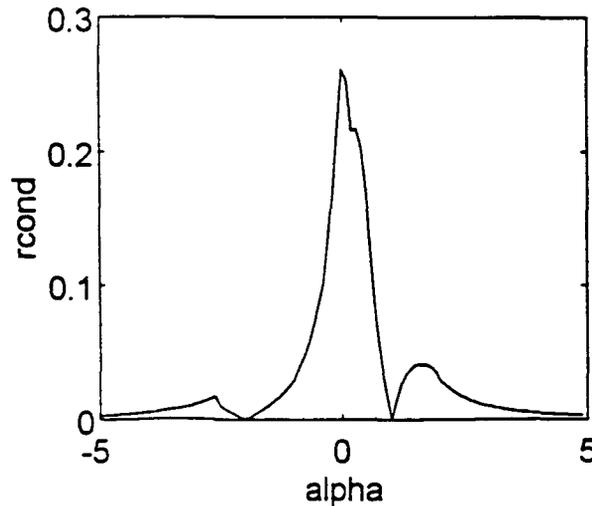


Fig. A1.1: Variation de  $\text{cond}^{-1}(A + \alpha E)$  en fonction de  $\alpha$

Choisissons cette valeur du paramètre, et déterminons la forme de Schur de  $EA^{-1}$ :

$$PEA^{-1}P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0.5 & -1.5 & 0.5 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

avec:

$$P = \begin{pmatrix} -0.7 & -0.7 & -0.7 & 0 \\ 0.7 & -0.7 & 0.7 & -1.4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette équation nous renseigne sur l'ordre du sous-système lent:  $d = 2$ . Les matrices  $A_1$  et  $N$  sont données par  $T_1^{-1}$  et  $T_2$ :

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice de transformation  $Q$  est définie par:

$$Q = A^{-1}P^{-1} \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1.4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.7 & 2.1 & -1 & 0 \\ 0 & 1.4 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et le système ( 93) est équivalent à:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ -1.4 \end{pmatrix} u, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{x}_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u. \end{aligned}$$

## Procédures MATLAB

L'algorithme de détermination de la forme standard que nous proposons ici est celui qui est utilisé par la procédure *STAND*.

Comme nous l'avons souligné un peu plus haut, la validité du résultat dépend du conditionnement de la matrice  $(A + \alpha E)$ , c'est à dire du choix de  $\alpha$ . Différentes procédures ont été développées pour aider l'utilisateur dans ce choix. La procédure *SURALPHA* permet de calculer les valeurs singulières, la valeur du conditionnement et son inverse, lorsque  $\alpha$  décrit l'intervalle  $[\alpha_{min}, \alpha_{max}]$ . Les procédures *TRACPHA*, et *TRACPHA1* exploitent graphiquement les résultats de *SURALPHA*. La fonction *ALPHA*, enfin, détermine la valeur de  $\alpha$  qui maximise  $\text{cond}^{-1}(A + \alpha E)$ .



<p style="text-align: center;">ANNEXE 2: PROCEDURES MATLAB</p>
--

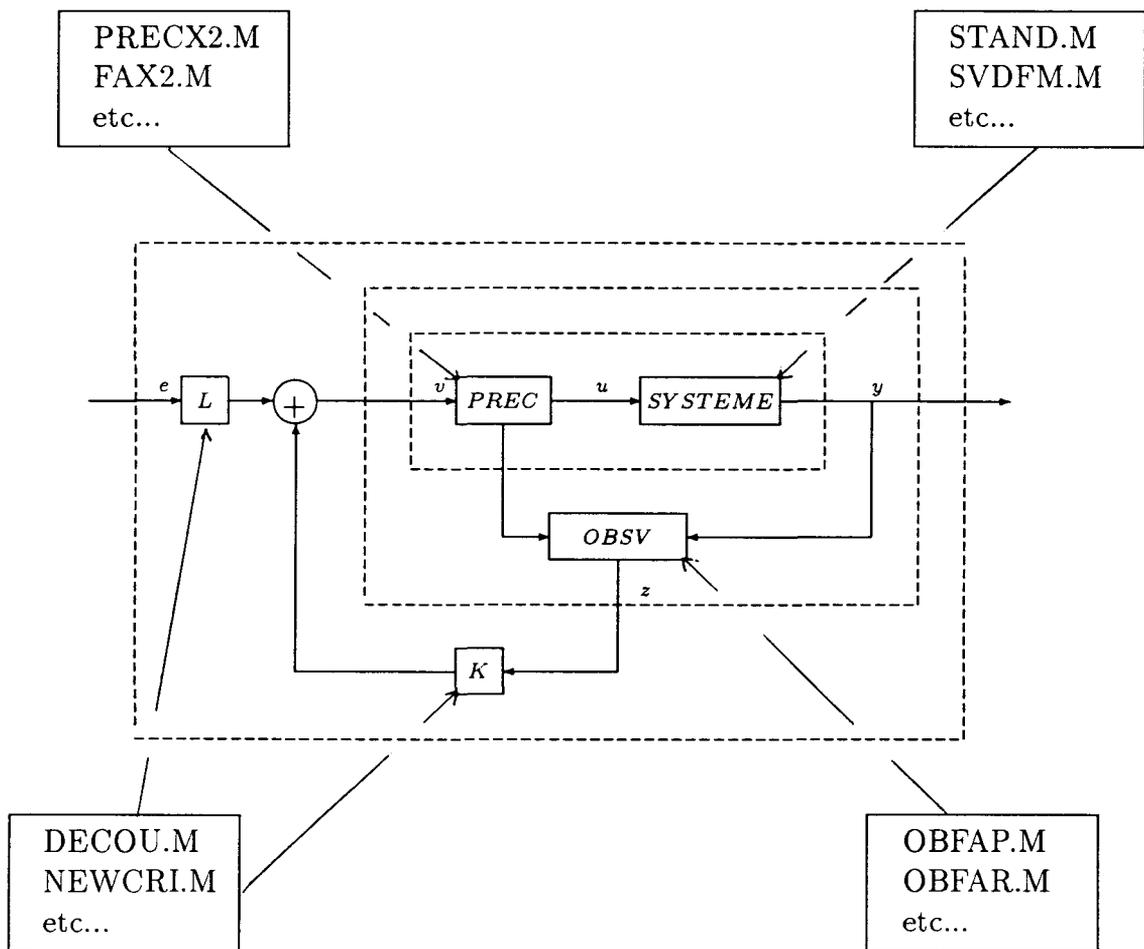
Dans cette annexe nous avons regroupé les différentes procédures introduites dans les chapitres précédents, ainsi qu'un certain nombre de routines utilitaires que nous avons développées. Plutôt que de donner la syntaxe des programmes, ce qui allongerait trop ce mémoire, nous avons préféré présenter:

- la sémantique d'utilisation des procédures,
- un descriptif succinct de leur fonctionnement,
- les autres procédures ou routines qui sont appelées en cours d'utilisation.



Les procédures que nous avons développées peuvent être schématiquement classées en 4 groupes selon le niveau où elles interviennent dans la structure de commande:

- modélisation: en haut à droite,
- précompensation: en haut à gauche,
- observation: en bas à droite
- commande: en bas à gauche.



- $[\alpha, cond] = \mathbf{ALPHA} (E, A, \alpha_{min}, \alpha_{max}, tol)$   
Détermine la valeur de  $\alpha$ , comprise entre  $\alpha_{min}$  et  $\alpha_{max}$  qui maximise le conditionnement de la matrice  $(A + \alpha E)$ , avec une précision au moins égale à  $tol$ . Utilise aussi COND.M.
- $[r] = \mathbf{ARRONDI} (x)$   
Calcule la valeur arrondie de  $x$  et retourne cet entier si  $x$  est proche de sa valeur arrondie (à  $10^{-2}$  près), sinon retourne  $x$ .
- $[B^*, Md_i] = \mathbf{DECOU} (A, B, C, D)$   
Calcule la matrice de découplage  $B^*$  et les indices de découplage  $d_i$  qui sont rangés dans la matrice  $Md_i$ . Lorsque la  $i$ -ième ligne de  $D$  est non nulle, on définit par convention  $d_i = -1$ . Le nombre d'entrées est supposé égal au nombre de sorties.
- $[\tilde{F}, \tilde{G}, K] = \mathbf{DECROI} (\bar{F}, \bar{G}, H)$   
Calcule le retour d'état  $K$  qui permet de décoiser le critère à coût quadratique défini par  $\bar{F}$ ,  $\bar{G}$  et  $H$ :

$$\begin{pmatrix} \tilde{F} & 0 \\ 0 & \tilde{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ K & I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \bar{F} & H \\ H^T & \bar{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ K & I \end{pmatrix}.$$

- $[du] = \mathbf{DNENTR} (t, pas, n)$   
Calcule la dérivée  $n$ -ième au point  $t$  de l'entrée  $u$  définie dans la procédure ENTR, comme la limite d'un taux d'accroissement. Utilise aussi ENTR.M et PASCA.M.
- $[\bar{A}_1, \bar{B}_1, \bar{C}_1] = \mathbf{DYNAMIC1} (E, A, B, C)$   
Isole la partie dynamique d'un système sans mode impulsionnel:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= \bar{A}_1 \tilde{x}_1 + \bar{B}_1 u, \\ y_1 &= \bar{C}_1 \tilde{x}_1. \end{aligned}$$

Utilise aussi SVDFM.M.

- $[\bar{A}_1, \bar{B}_1, \bar{C}_1, \bar{D}_1, P] = \mathbf{DYNAMIC2} (E, A, B, C)$   
Isole la partie dynamique d'un système sans mode impulsionnel, et reporte l'effet des modes entraînés sur la sortie:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= \bar{A}_1 \tilde{x}_1 + \bar{B}_1 u, \\ y &= \bar{C}_1 \tilde{x}_1 + \bar{D}_1 u. \end{aligned}$$

Détermine aussi le changement de variables  $P$  qui permet d'exprimer les modes entraînés en fonction de  $u$  et de  $\tilde{x}_1$ :

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ u \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ u \end{pmatrix}.$$

Utilise aussi SVDFM.M.

- $[u] = \mathbf{ENTR}(t)$   
Définit le vecteur des entrées du système.

- $[\bar{A}_2, \bar{B}_2, \bar{C}_2] = \mathbf{ENTRAIN}(E, A, B, C)$   
Isole la partie entraînée d'un système sans mode impulsionnel

$$\begin{aligned}\tilde{x}_2 &= \bar{A}_2 \tilde{x}_1 + \bar{B}_2 u, \\ y_2 &= \bar{C}_2 \tilde{x}_2.\end{aligned}$$

Utilise aussi SVDFM.M.

- $[\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}] = \mathbf{FA}(A_1, B_1, C_1, C_2, M, Q, \text{ran})$   
Détermine la forme augmentée:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \bar{A}z + \bar{B}v, \\ y &= \bar{C}z + \bar{D}v\end{aligned}$$

associée au précompensateur défini par  $M, Q$  et  $\text{ran}$ .

Utilise aussi REAP.M et L2K2.M.

- $[\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}] = \mathbf{FATRI}(A_1, N, B_1, C_1, C_2)$   
Détermine la forme augmentée associée au précompensateur défini par PREC-TRI:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \bar{A}z + \bar{B}v, \\ y &= \bar{C}z + \bar{D}v\end{aligned}$$

Utilise aussi REATRI.M et L2K2TRI.M.

- $[\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}] = \mathbf{FAX2}(A_1, N, B_1, C_1, C_2)$   
Détermine la forme augmentée associée au précompensateur défini par PRECX2:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \bar{A}z + \bar{B}v, \\ y &= \bar{C}z + \bar{D}v\end{aligned}$$

Utilise aussi REAX2.M et L2K2X2.M.

- $[\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}] = \mathbf{FAY2}(A_1, N, B_1, C_1, C_2)$   
Détermine la forme augmentée associée au précompensateur défini par PRECY2:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \bar{A}z + \bar{B}v, \\ y &= \bar{C}z + \bar{D}v\end{aligned}$$

Utilise aussi REAY2.M et L2K2Y2.M.

- $[C_f] = \mathbf{FCONT}(E, A, B)$   
Détermine la matrice de commandabilité du sous-système rapide:

$$C_f = (B_2 \quad \dots \quad N^{\nu-1}B_2).$$

Utilise aussi STAND.M et NILPOT.M.

- $[O_f] = \mathbf{FOBSV} (E, A, C)$

Détermine la matrice d'observabilité du sous-système rapide:

$$O_f = (C_2^T \quad \dots \quad (C_2 N^{\nu-1})^T)^T.$$

Utilise aussi STAND.M et NILPOT.M.

- $[P] = \mathbf{FRMC} (A)$

Détermine le changement de variables  $P$  tel que:

$$AP = (B \ 0),$$

$B$  est une matrice de rang plein en colonnes qui a le même rang que  $A$ .

- $[C_i] = \mathbf{ICONT} (E, A, B)$

Détermine la matrice de I-commandabilité du sous-système rapide:

$$C_i = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ A & E & B \end{pmatrix}.$$

- $[K, A_{bf}] = \mathbf{IMPFREE} (E, A, B, P)$

Détermine le gain  $K$  de la commande  $u = Kx$  qui élimine les modes impulsions pour un système I-commandable et calcule la matrice en boucle fermée:

$$A_{bf} = A + BK.$$

Les valeurs propres de la matrice  $A_{22}$  sont remplacées par les modes spécifiés dans le vecteur  $P$ .

Utilise aussi ICONT.M et SVDFM.M.

- $[O_i] = \mathbf{IOBSV} (E, A, C)$

Détermine la matrice de I-observabilité du sous-système rapide:

$$O_i = \begin{pmatrix} E & A \\ 0 & E \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

- $[K, L] = \mathbf{KLSTA} (A, C, B^*, Md_i)$

Calcule les gains  $K$  et  $L$  de la commande:

$$u = Kx + Lv,$$

qui découple le système lorsque la matrice de découplage  $B^*$  est inversible.

- $[L_2, T_2] = \mathbf{L2K2} (M, Q, ran)$

Détermine les matrices  $L_2$  et  $T_2$  telles que:

$$x_2 = L_2 \epsilon + T_2 v,$$

et qui correspondent au précompensateur défini par les matrices  $M$ ,  $Q$ , et  $ran$ .

Utilise aussi REA1.M.

- $[L_2, T_2] = \mathbf{L2K2TRI} (N, B_2)$

Détermine les matrices  $L_2$  et  $T_2$  telles que:

$$x_2 = L_2 \epsilon + T_2 v,$$

et qui correspondent au précompensateur défini par PRECTRI.

Utilise aussi PRECTRI.M et L2K2.M.

- $[L_2, T_2] = \mathbf{L2K2X2} (N, B_2)$

Détermine les matrices  $L_2$  et  $T_2$  telles que:

$$x_2 = L_2 \epsilon + T_2 v,$$

et qui correspondent au précompensateur défini par PRECX2.

Utilise aussi PRECX2.M et L2K2.M.

- $[L_2, T_2] = \mathbf{L2K2Y2} (N, B_2, C_2)$

Détermine les matrices  $L_2$  et  $T_2$  telles que:

$$y_2 = L_2 \epsilon + T_2 v,$$

et qui correspondent au précompensateur défini par PRECY2.

Utilise aussi PRECY2.M et L2K2.M.

- $[R] = \mathbf{MATROUND} (A)$

Calcule la valeur arrondie des éléments de la matrice  $A$  et retourne une matrice dont les éléments sont des entiers si les éléments de  $A$  sont proches de leur valeur arrondie (à  $10^{-2}$  près), sinon retourne  $A$ .

Utilise aussi ARRONDI.M.

- $[\bar{F}, \bar{G}, H] = \mathbf{NEWCRI} (F, G, P)$

Détermine la transformation du critère à coût quadratique défini par  $F$  et  $G$  lorsque l'on applique le changement de variables  $P$ :

$$\begin{pmatrix} \bar{F} & H \\ H^T & \bar{G} \end{pmatrix} = P^T \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix} P.$$

- $[\nu] = \mathbf{NILPOT} (N)$

Détermine l'indice de nilpotence de la matrice  $N$ . La fonction retourne 0 si la matrice n'est pas nilpotente.

- $[K_1, A_{1bf}, M_1] = \mathbf{OBFAP} (A_1, B_1, C_1, C_2, L_2, T_2, C_P, D_P, P)$

Construit un observateur d'ordre plein de  $x_1$  lorsque la paire  $(A_1, C_1)$  est observable. Le gain  $K_1$  est déterminé de telle façon que les valeurs propres de:

$$A_{1bf} = A_1 - K_1 C_1,$$

soient celles spécifiées dans le vecteur  $P$ .  $M_1$  est la matrice de gain sur  $\epsilon$  et  $v$ . L'ordre de multiplicité des valeurs propres désirées doit être inférieur ou égal au nombre d'entrées.

Utilise aussi PLACE.M.

- $[K_r, \bar{M}, \bar{M}_1, \bar{P}, \bar{Q}, \bar{Q}_1, \bar{L}] = \mathbf{OBFAR} (A_1, B_1, C_1, C_2, L_2, T_2, C_P, D_P, P)$   
Construit un observateur d'ordre réduit  $d-q$  de  $x_1$  lorsque la paire  $(A_1, C_1)$  est observable, et que la matrice  $C_1$  est de rang plein  $q$ . Le gain  $K_1$  est déterminé de telle façon que les valeurs propres de l'observateur soient celles spécifiées dans le vecteur  $P$ .

–  $(\bar{M}, \bar{M}_1, \bar{P})$  définit l'observateur:

$$\dot{w} = \bar{M}w + \bar{M}_1(\epsilon^T, v^T)^T + \bar{P}y,$$

–  $(\bar{Q}, \bar{Q}_1, \bar{L})$  définit  $\hat{x}_1$ :

$$\hat{x}_1 = \bar{Q}w + \bar{Q}_1(\epsilon^T, v^T)^T + \bar{L}y.$$

L'ordre de multiplicité des valeurs propres désirées doit être inférieur ou égal au nombre d'entrées.

Utilise aussi PLACE.M, FRMC.M.

- $[PAS] = \mathbf{PASCA} (n)$   
Détermine les coefficients du triangle de Pascal jusqu'à l'indice  $n$ .
- $[M, Q, ran] = \mathbf{PRECTRI} (N, B_2)$   
Détermine le précompensateur trivial défini par:

–  $Q$  la matrice qui regroupe les changements de variables,

$$Q = (I_p \quad \dots \quad I_p),$$

–  $M$  la matrice qui permet de construire  $L_2$  et  $T_2$ :

$$M = (B_2 \quad NB_2 \quad \dots \quad N^{\nu-1}B_2),$$

–  $ran$  le nombre d'intégrateurs nécessaires à la construction de chaque étage:

$$ran = (p \quad \dots \quad p).$$

Utilise aussi NILPOT.M.

- $[M, Q, ran] = \mathbf{PRECX2} (N, B_2)$   
Détermine le précompensateur minimal nécessaire à la construction de  $x_2$  avec:

–  $Q$  la matrice qui regroupe les changements de variables,

$$Q = (Q_1 \quad \dots \quad Q_{\nu-1}),$$

–  $M$  la matrice qui permet de construire  $L_2$  et  $T_2$ :

$$M = (M_0 \quad \dots \quad M_{\nu-1}),$$

- $ran$  le nombre d'intégrateurs nécessaires à la construction de chaque étage:

$$ran = (r_1 \quad \dots \quad r_{\nu-1}).$$

Utilise aussi NILPOT.M, FRMC.M.

- $[M, Q, ran] = \mathbf{PRECY2}(N, B_2)$

Détermine le précompensateur minimal nécessaire à la construction de  $y_2$  avec:

- $Q$  la matrice qui regroupe les changements de variables,

$$Q = (Q_1 \quad \dots \quad Q_{\nu-1}),$$

- $M$  la matrice qui permet de construire  $L_2$  et  $T_2$ :

$$M = (M_0 \quad \dots \quad M_{\nu-1}),$$

- $ran$  le nombre d'intégrateurs nécessaires à la construction de chaque étage:

$$ran = (r_1 \quad \dots \quad r_{\nu-1}).$$

Utilise aussi NILPOT.M, FRMC.M.

- $[Q_d, ran_d] = \mathbf{PREDEC}(B^*)$

Calcule le précompensateur dynamique nécessaire pour découpler un système faiblement couplé dont la matrice de découplage définie par  $B^*$  n'est pas inversible.

- $Q_d$  regroupe les matrices de changement de variables,
- $ran_d$  spécifie le nombre d'intégrateurs à placer sur les entrées.

Utilise aussi FRMC.M.

- $[M_g, Q_g, ran_g] = \mathbf{PREGLO}(M, Q, ran, Q_d, ran_d)$

Calcule le précompensateur global qui permet d'éliminer les comportements impulsionnels et de découpler le système compensé par un retour d'état à partir de:

- $(M, Q, ran)$  le précompensateur défini par PRECX2,
- $(Q_d, ran_d)$  le précompensateur défini par PREDEC.

- $[C_s] = \mathbf{RCONT}(E, A, B)$

Détermine la matrice de R-commandabilité du sous-système lent:

$$C_s = (B_1 \quad \dots \quad A_1^{d-1} B_1).$$

Utilise aussi STAND.M.

- $[B_P^1, C_P^1, D_P^1] = \mathbf{REA1} (Q, r, p)$   
Détermine une réalisation d'un étage du précompensateur défini par:
  - $Q$  la matrice de changement de variables,
  - $r$  le nombre d'intégrateurs,
  - $p$  le nombre d'entrées.
- $[\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}] = \mathbf{READEC} (A_1, N, B_1, B_2, C_1, C_2)$   
Calcule une réalisation du système précompensé pour éliminer les comportements impulsionnels et pour permettre le découplage par un retour d'état.  
Utilise aussi PRECX2.M, FAX2.M, DECOU.M, PREDEC.M, PREGLO.M.
- $[A_P, B_P, C_P, D_P] = \mathbf{REAP} (Q, ran)$   
Calcule une réalisation du précompensateur défini par:
  - $Q$  les changements de variables de chaque étage regroupés dans une unique matrice,
  - $ran$  le nombre d'intégrateurs nécessaires à la construction de chaque étage,

Utilise aussi REA1.M.

- $[A_P, B_P, C_P] = \mathbf{REATRI} (N, B_2)$   
Calcule une réalisation du précompensateur trivial défini par PRECTRI:

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon} &= A_P \epsilon + B_P v, \\ u &= C_P \epsilon.\end{aligned}$$

Utilise aussi REAP.M et PRECTRI.M.

- $[A_P, B_P, C_P, D_P] = \mathbf{REAX2} (N, B_2)$   
Calcule une réalisation du précompensateur défini par PRECX2:

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon} &= A_P \epsilon + B_P v, \\ u &= C_P \epsilon + D_P v.\end{aligned}$$

Utilise aussi REAP.M et PRECX2.M.

- $[A_P, B_P, C_P, D_P] = \mathbf{REAY2} (N, B_2, C_2)$   
Calcule une réalisation du précompensateur défini par PRECY2:

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon} &= A_P \epsilon + B_P v, \\ u &= C_P \epsilon + D_P v.\end{aligned}$$

Utilise aussi REAP.M et PRECY2.M.

- $[O_s] = \text{ROBSV} (E, A, C)$

Détermine la matrice de R-observabilité du sous-système lent:

$$O_s = (C_1^T \quad \dots \quad (C_1 A_1^{d-1})^T)^T.$$

Utilise aussi STAND.M.

- $[] = \text{SINSIM} (A_1, N, B_1, B_2, C_1, C_2, x_0, t_i, t_f, pas)$

Simule un système généralisé entre  $t_i$  et  $t_f$  avec une pas égal à  $pas$ . Le système est transformé en un système multi-entrées dont le vecteur d'entrées est donné par:

$$U = (u \quad \dots \quad u^{(\nu-1)}).$$

Utilise aussi ENTR.M, DNENTR.M, LSIM.M, NILPOT.M.

- $[Q, S] = \text{SCHURDIA} (A)$

Détermine la forme réelle bloc diagonale de Schur:

$$A = Q^{-1} S Q,$$

avec:

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ 0 & S_{22} \end{pmatrix}.$$

–  $S_{11}$  ne comporte que des valeurs propres non nulles,

–  $S_{22}$  ne comporte que des valeurs propres nulles.

Utilise aussi ARROND.M.

- $[A_1, N, B_1, B_2, C_1, C_2, P, Q] = \text{STAND} (E, A, B, C)$

Détermine les matrices de changement de variables  $P$  et  $Q$  et les matrices constituantes de la forme standard du système  $(E, A, B, C)$ :

$$P(sE - A)Q = \begin{pmatrix} sI - A_1 & 0 \\ 0 & sN - I \end{pmatrix}, \quad PB = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \quad CQ = (C_1 \quad C_2).$$

Utilise aussi SCHURDIA.M, MATROUND.M et ALPHA.M.

- $[A_1, N, P, Q] = \text{STANDR} (E, A)$

Détermine les matrices de changement de variables  $P$  et  $Q$  et les matrices  $A_1$  et  $N$  de la forme standard du système  $(E, A, B, C)$ :

$$P(sE - A)Q = \begin{pmatrix} sI - A_1 & 0 \\ 0 & sN - I \end{pmatrix}.$$

Utilise aussi SCHURDIA.M, MATROUND.M et ALPHA.M.

- $[A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, \tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2, E_s, U, V] = \text{SVDFM}(E, A, B, C)$   
Détermine les matrices de changement de variables  $U$  et  $V$  et les matrices constituantes de la forme de Smith du système  $(E, A, B, C)$ :

$$({}_sE - A) = U \begin{pmatrix} {}_sE_s - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & -A_{22} \end{pmatrix} V^T, \quad B = U \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{pmatrix}, \quad C = (\tilde{C}_1 \quad \tilde{C}_2) V^T.$$

Utilise aussi SVD.M.

- $[TAB] = \text{SURALPHA}(E, A, \alpha_{min}, \alpha_{max}, tol)$   
Détermine et range dans la matrice  $TAB$ :

- les valeurs singulières,
- le conditionnement,
- l'inverse du conditionnement,
- la valeur rendue par la procédure *RCOND*,

de la matrice  $(A + \alpha E)$ , pour  $\alpha$  qui varie entre  $\alpha_{min}$ , et  $\alpha_{max}$  avec un pas égal à *pas*.

Utilise aussi SVD.M et COND.M.

- $[ ] = \text{TRACPHA}(E, A, \alpha_{min}, \alpha_{max}, pas)$

Trace pour  $\alpha$  qui varie entre  $\alpha_{min}$ , et  $\alpha_{max}$  avec un pas égal à *pas*:

- les valeurs singulières,
- le conditionnement,
- l'inverse du conditionnement,
- la valeur rendue par la procédure *RCOND*,

de la matrice  $(A + \alpha E)$ .

Utilise aussi SURALPHA.M.

- $[ ] = \text{TRACPHA1}(E, A, \alpha_{min}, \alpha_{max}, pas)$

Trace pour  $\alpha$  qui varie entre  $\alpha_{min}$ , et  $\alpha_{max}$  avec un pas égal à *pas* l'inverse du conditionnement de la matrice  $(A + \alpha E)$ .

Utilise aussi SURALPHA.M.

## Notations

$\mathbb{R}$	: corps des réels
$\mathbb{R}^n$	: espace vectoriel de dimension $n$ construit sur le corps des réels
$\mathbb{R}^{q \times p}$	: espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$
$\mathbb{C}$	: corps des complexes
$A^{-1}$	: inverse de la matrice $A$
$A^+$	: inverse de Moore-Penrose de la matrice $A$
$A^T$	: transposée de la matrice $A$
$A^{-T}$	: inverse de la transposée de la matrice $A$
$ A $ ou $\det A$	: déterminant de la matrice carrée $A$
$\ A\ $	: norme 2 de la matrice $A$
$I_n$	: matrice identité de dimension $n \times n$
$\text{cond}(A)$	: conditionnement de la matrice $A$
$\bar{\sigma}(A)$	: plus grande valeur singulière de $A$
$\underline{\sigma}(A)$	: plus petite valeur singulière de $A$
$\text{Im } A$	: image de la matrice $A$ , $\text{Im } A = \{y/y = Ax\}$
$\text{Ker } A$	: noyau de la matrice $A$ , $\text{Ker } A = \{x/Ax = 0\}$
$C(A, B)$	: matrice de commandabilité de la paire $(A, B)$
$O(A, C)$	: matrice d'observabilité de la paire $(A, C)$
$\delta(t - t_0)$	: impulsion de Dirac en $t = t_0$
$\text{deg } P$	: degré du polynôme $P$
$A \oplus B$	: somme directe de deux espaces vectoriels $A$ et $B$ , $(A \cap B = 0)$

## Abbreviations

P	: proportionnel
PD	: proportionnel et dérivé
rse	: équivalence stricte (de deux systèmes différentiels)
se	: équivalence forte (de deux systèmes différentiels)
PCOMP	: précompensateur
OBSV	: observateur
CNS	: condition(s) nécessaire(s) et suffisante(s)



## Bibliographie

- [1] A. Ailon, *Decoupling of square singular systems via proportional state feedback*, IEEE, Trans. Auto. Cont., Vol. 36, no. 1, pp. 95-102, January 1991.
- [2] J.D. Aplevich, *Implicit linear systems*, Springer-Verlag, 1991.
- [3] V.A. Armentano, *Eigenvalue placement for generalized linear systems*, Syst. and Cont. Letters, Vol. 4, no. 4, pp. 199-202, 1984.
- [4] V.A. Armentano, *The pencil  $(sE - A)$  and controllability-observability for generalized linear systems: a geometric approach*, Proc. 23rd IEEE Conf. Dec. and Cont., pp. 1507-1510, Las Vegas, Nevada, December 1984.
- [5] A. Ben-Israel, T.N.E. Greville, *Generalized inverses, theory and applications*, New York, Wiley, 1974.
- [6] D.J. Bender, A.J. Laub, *The linear-quadratic optimal regulator for descriptor systems*, IEEE, Trans. Auto. Cont., Vol. 32, no. 8, pp. 672-688, 1987.
- [7] E.M. Bonilla, M. Malabre, *Solvability and one side invertibility for implicit descriptions*, Proc. 29 th IEEE CDC, Hawa, December 1990.
- [8] E.M. Bonilla, M. Malabre, *Variable structure systems via implicit descriptions*, Proc. ECC91, Grenoble, France, Vol. 1, pp. 403-408, July 1991.
- [9] P. Borne, G. Dauphin-Tanguy, J.P. Richard, F. Rotella, I. Zambettakis, *Com-mande et optimisation des processus*, Technip, Paris, 1990.
- [10] P. Borne, G. Dauphin-Tanguy, J.P. Richard, F. Rotella, I. Zambettakis, *Modélisation et identification des processus*, Technip, Paris, 1992.
- [11] C. Bovely and G.W. Stewart, *An algorithm for computing reducing subspaces by block diagonalization*, SIAM J. Num. Anal., Vol. 16, pp. 359-67, 1979.
- [12] F.M. Brasch, J.B. Pearson *Pole placement using dynamic precompensators*, IEEE, Trans. Auto. Cont., Vol. 15, no. 1, pp. 34-43, February 1970.
- [13] K.E. Brennan, S.L. Campbell L.R. Petzold *Numerical solution of initial-value problems in differential algebraic equations*, Elsevier, 1989.
- [14] S.L. Campbell, C.D. Meyer, Jr. and N.J. Rose, *Application of the Drazin inverse to linear systems of differential equations with singular coefficients*, SIAM J. Appl. Math., Vol. 10, pp. 542-551, 1976.
- [15] S.L. Campbell, *Optimal control of autonomous linear processes with singular matrices in the quadratic cost functional*, SIAM, J. Cont. and Opt., Vol. 14, no. 6, pp. 1093-1106, November 1976.

- 
- [16] S.L. Campbell, *Singular systems of differential equations*, San Fransisco, Pitman, 1980.
- [17] M.A. Christodoulou, B.G. Mertzios, *Realization of singular systems via Markov parameters*, Int. J. Cont. Vol. 42, no. 6, pp. 1433-1441, 1985.
- [18] M.A. Christodoulou, *Decoupling in the design and synthesis of singular systems*, Automatica, Vol. 22, no. 2, pp. 245-149, 1986.
- [19] M.A. Christodoulou, *Realization of singular systems via Markov parameters and moments*, Int. J. Cont., Vol. 45, no. 1, pp. 237-245, 1987.
- [20] M.A. Christodoulou, B.G. Mertzios, *Decoupling and data sensitivity in decoupling systems*, IEE Proceedings, Vol. 135, no. 2, pp. 106-110, March 1988.
- [21] M.A. Christodoulou, B.G. Mertzios, *A simplified realization algorithm for singular systems*, J. Franklin. Inst., Vol. 326, no. 3, pp. 351-360, 1989.
- [22] D. Cobb, *Descriptor variable and generalized singularly perturbed systems: a geometric approach*, Ph. D. Thesis, Department of Electrical Engineering, Univ. of Illinois, 1980.
- [23] D. Cobb, *Feedback and pole-placement in descriptor variable systems*, Int. J. Cont., Vol. 33, no. 6, pp. 1135-1146, 1981.
- [24] D. Cobb, *A further interpretation of inconsistent initial conditions in descriptor-variable systems*, IEEE, Trans. Auto. Cont., Vol. 28, no. 9, pp. 920-922, September 1983.
- [25] D. Cobb, *Controllability, observability, duality for singular systems*, IEEE, Trans. Auto. Cont., Vol. 29, no. 12, pp. 1076-1082, December 1984.
- [26] C. Commault, J. Descusse, J.M. Dion, J.F. Lafay, M. Malabre, *New decoupling invariants: the essential orders*, Int. J. Cont., Vol. 44, no. 3, pp. 689-700, 1986.
- [27] L. Dai, *Singular control systems*, Lecture notes in control and information sciences, Springer-Verlag, 1989.
- [28] N. DeClaris, A. Rindos, *Semi-state analysis of neural networks in Apysia California*, Proc. 27th MSCS, Morgantown, WV, pp. 686-689, 1984.
- [29] B. Dziurla, R.W. Newcomb, *The Drazin inverse and semi-state equations*, Proc. 4th Int. Symp. Math. Theory Networks and Systems, Delft, The Netherlands, pp. 283-289, July 1979.
- [30] M. El Tohami, V. Lovass-Nagy, R. Mukudan , *On the design of observers for generalized state space systems using singular value decomposition*, Int. J. Cont., Vol. 38, no. 3, pp. 673-683, 1983.

- 
- [31] M.M. Fahmy, J. O'Reilly, *Observers for descriptor systems*, Int. J. Cont., Vol. 49, no. 6, pp. 2013-2028, 1989.
- [32] P.L. Falb, W.A. Wollowitch, *Decoupling in the design and synthesis of multi-variable control systems*, IEEE, Trans. Auto. Cont., Vol. 12, no. 6, pp. 651-659, December 1967.
- [33] M. Fliess, *Some basic structural properties of generalized linear systems* Systems and Control Letters, no. 15, pp. 391-396, 1990.
- [34] A. Fossard, *Commande des systèmes multidimensionnels*, Techniques de l'automatisme, Dunod, 1972.
- [35] F.R. Gantmacher, *Theory of matrices*, New York, Chelsea, 1959.
- [36] E.G. Gilbert, *The decoupling of linear systems by state feedback*, SIAM, J. Cont., Vol. 7, pp. 50-63, February 1969.
- [37] L.C.J.M. Gras, H. Nijmeijer, *Decoupling in nonlinear systems: from linearity to nonlinearity*, IEE Proceedings, Vol. 136, no. 2, pp. 53-62, March 1989.
- [38] P.V. Kokotovic, R.E. O'Malley, Jr. and P. Sannuti, *Singular perturbations and order reduction in control theory - an overview*, Automatica, Vol. 12, pp. 123-132, March 1976.
- [39] L. Kronecker, *Algebraische Reduction der schaaren bilinearer Formen*, B. Akad., Berlin, 1890.
- [40] V. Kucera, J. Descusse *On the determination of the structure at infinity of a rational matrix* Rapport interne de l'Ecole Nationale Supérieure de Nantes, 1982.
- [41] C.E. Langenhop, *Controllability and stabilizability of regular singular linear systems with constant coefficients*, Lefschetz Center for Dynamical Systems, Brown Uni., Providence, 1979.
- [42] V.X. Le, *Synthesis of proportionnel plus derivative feedbacks for descriptor systems*, IEEE, Trans. Auto. Cont., Vol. 37, no. 5, pp. 672-675, May 1992.
- [43] G. Lebret, *Contribution à l'étude des systèmes linéaires généralisés: approche géométrique et structurelle*, Thèse de Doctorat, Nantes, France, Septembre 1991.
- [44] D. Lefebvre, F. Rotella, *Détermination de la forme standard pour les systèmes généralisés*, Premier colloque des Doctorants des Ecoles Centrales, Nantes, France, Novembre 1992.

- [45] D. Lefebvre, F. Rotella, *An augmented form for generalized state space systems*, IEEE / SMC'93, Int. Conf. on Systems, Man and Cybernetics, Systems Engineering in the Service of Humans, Vol. 4, pp. 615-620, Le Touquet, France, Octobre 1993.
- [46] D. Lefebvre, F. Rotella, *Observers for single input generalized state space systems*, IMACS Mathmod Conf., Vol. 2, pp. 279-282, Wien, Austria, Février 1994.
- [47] D. Lefebvre, F. Rotella, *PD State feedback*, soumis à IEEE Trans. Aut. Cont. pour publication.
- [48] D. Lefebvre, F. Rotella, *Towards a toolbox for generalized systems*, First Matlab Conf., Cambridge, Massachusetts, U.S.A., Octobre 1993.
- [49] F.L. Lewis, K. Ozcaldiran, *The relative eigenstructure problem and descriptor systems*, SIAM National Meeting, June 1983.
- [50] F.L. Lewis, *A survey of linear singular systems*, Circuits Systems Signal Process, Vol. 5, no. 1, 1986.
- [51] F.L. Lewis, K. Ozcaldiran, *On the regularizability of singular systems*, IEEE, Trans. Auto. Cont., Vol. 35, no. 10, pp. 1156-1160, October 1990.
- [52] F.L. Lewis, V.L. Syrmos, *A geometric theory for derivative feedback*, IEEE, Trans. Auto. Cont., Vol. 36, no. 9, pp. 1111-1115, September 1991.
- [53] V. Lovass Nagy, R.J. Miller, D.L. Powers, *An introduction to the application of the simplest matrix-generalized inverse in systems science*, IEEE, Trans. on Circ. and Syst., Vol. 25, no. 9, pp. 766-771, September 1978.
- [54] D.G. Luenberger, *An introduction to observers*, IEEE, Trans. Auto. Cont., Vol. 19, no. 5, pp. 993-1004, May 1971.
- [55] D.G. Luenberger, A. Arbel, *Singular dynamic Leontief systems*, Econometrica, no. 45, pp. 991-995, 1977.
- [56] N.H. McClamroch, *Singular systems of differential equations as dynamic models for constrained robot systems*, Proc. 24th CDC, pp. 21-28, 1986.
- [57] J.W. Manke, *Solvability of large-scale descriptor systems*, Boeing computer service co., 1978.
- [58] B.G. Mertzios, *Leverrier's algorithm for singular systems*, IEEE, Trans. Auto. Cont., Vol. 29, no.7, pp. 652-653, July 1984.
- [59] C.B. Moler, G.W. Stewart, *An algorithm for generalized eigenvalue problems*, SIAM, J. Numer. Anal., Vol. 10, no. 2, pp. 241-256, April 1973.

- [60] P.C. Muller, M. Hou, *On the observer design for descriptor systems*, IEEE, Trans. Auto. Cont., Vol. 38, no. 11, pp. 1666-1670, November 1993.
- [61] R. Mukundan, W.D. Ayawansa, *Feedback control of singular systems: proportional and derivative feedback of the state*, Int. J. Syst. Sci., Vol. 14, pp. 615-632, 1983.
- [62] F.D. Murnaghan and A. Wintner, *A canonical form for real matrices under orthogonal transformations*, Proc. Nat. Acad. Sci., Vol. 17, pp. 417-20, 1931.
- [63] R.W. Newcomb, *The semi-state description of non-linear time variable circuits*, IEEE, Trans. on Circ. and Syst., Vol. 28, no. 1, pp. 62-71, January 1981.
- [64] R.W. Newcomb, *Semi-state design theory: binary and swept hysteresis*, J. Circuits Syst. Signal Process., Vol. 1, no. 2, pp. 203-216, 1982.
- [65] J. O'Reilly, *Observers for linear systems*, Academic Press, 1983.
- [66] L. Pandolfi, *Controllability and stabilization for linear systems of algebraic and differential equations*, J. Opt. Theory and App., Vol. 30, pp. 601-620, 1980.
- [67] P.N. Paraskevopoulos, *A new design control technique for regular and singular linear multivariable systems*, ECC91 Proceedings, pp. 550-555, July 2-5, 1991, Grenoble, France.
- [68] P.N. Paraskevopoulos, F.N. Koumboulis, *The decoupling of generalized state space systems via state feedback*, IEEE, Trans. Auto. Cont., Vol. 37, no. 1, pp. 148-152, January 1992.
- [69] P.N. Paraskevopoulos, F.N. Koumboulis, *A new approach of the decoupling problem of linear time invariant systems*, J. Franklin Inst., Vol. 329, no. 2, pp. 347-369, 1992.
- [70] H.H. Rosenbrock, *Structural properties of linear dynamical systems*, Int. J. Cont., Vol. 20, no. 2, pp. 191-202, 1974.
- [71] H.H. Rosenbrock, A.C. Pugh, *Contributions to a hierarchical theory of systems*, Int. J. Control, no. 19, pp. 845-911, 1974.
- [72] F. Rotella, P. Borne, *Explicit solution of Sylvester and Lyapunov equations*, Mathematics and computers in Simulation, Vol. 31, pp. 271-281, 1989.
- [73] F. Rotella, *Singular systems*, Concise encyclopedia of modelling and simulation, Pergamon Press, pp. 435-442, 1992.
- [74] S.S. Sastry, C.A. Desoer, *Jump behaviour of circuits and systems*, IEEE, Trans. Circuits Syst., Vol. 28, no. 12, pp. 1109-1123, December 1981.

- [75] B. Shafai, R.L. Carroll, *Design of a minimal order observer for singular systems*, Int. J. Cont., Vol. 45, no. 3, pp. 1075-1081, 1987.
- [76] M.A. Shayman, Z. Zhou, *Feedback control and classification of generalized linear systems*, IEEE, Trans. Auto. Cont., Vol. 32, no. 6, pp. 483-494, June 1987.
- [77] M.A. Shayman, *Pole placement by dynamic compensation for descriptor systems*, Automatica, Vol. 24, no. 2, pp. 279-282, 1988.
- [78] D.N. Shields, *Singular value assignment in the design of observers for discrete time descriptor systems*, Proceedings of the 7th International System Conference, Las Vegas, Nevada, 1990.
- [79] D.N. Shields, *Observers for descriptor systems*, Int. J. Cont., Vol. 55, no. 1, pp. 249-256, 1992.
- [80] L.M. Silverman, *Inversion of multivariable linear systems*, IEEE, Trans. Auto. Cont., Vol. 14, no. 3, pp. 270-276, June 1969.
- [81] L.M. Silverman A. Kitapçı, *System structure at infinity*, Systems and Control Letters, Vol. 3, pp. 123-131, August 1983.
- [82] S.P. Singh, R.W. Liu, *Existence of state equations representation of linear large-scale dynamical systems*, IEEE, Trans. Circuits Theory, Vol. 20, no. 3, pp. 239-246, May 1973.
- [83] G.W. Stewart, *Subroutines for calculating and ordering the eigenvalues of a real upper Hessenberg matrix*, ACC, Trans. Auto. Soft., Vol. 2, pp. 275-80, 1976.
- [84] B. Stott, *Power system response dynamic calculations*, Proc. IEEE, Vol. 67, no. 2, pp. 219-241, February 1979.
- [85] S. Tan, J. Vandewalle, *Observer design for singular systems using canonical forms*, Proceedings of 25th Conf. Decision and Control, pp. 2140-2141, Athens, Greece, December 1986.
- [86] T.J. Tarn, Z. Zhou, M.A. Shayman, *Singular systems: a new approach in the time domain*, IEEE, Trans. Auto. Cont., Vol. 32, no. 1, pp. 42-50, January 1987.
- [87] P. Van Dooren, *The computation of Kronecker's canonical form of a singular pencil*, Lin. Alg. and its Appl., Vol. 27, pp. 103-140, 1979.
- [88] P. Van Dooren, *The generalized eigenstructure problem in linear system theory*, IEEE, Trans. Auto. Cont., Vol. 26, no. 1, pp. 111-129, 1981.
- [89] C.F. Van Loan and G.H. Golub, *Matrix computation*, Baltimore, The Johns Hopkins University Press, 1983.

- [90] G.C. Verghese *Infinite-frequency behavior in generalized dynamical systems*, Ph. D. Thesis, Dept. of Elec. Eng., Stanford University, 1978.
- [91] G.C. Verghese, T. Kailath, *Impulsive behavior in dynamical systems: structure and significance*, Proc. 4th Int. Symp. Math. Theory Networks Syst., pp. 162-168, Delft, The Netherlands, July 1979.
- [92] G.C. Verghese, T. Kailath, *Eigenvector chains for finite and infinite zeros of rational matrices*, 18th IEEE Conf. Decision and Control, December 1979.
- [93] G.C. Verghese, B.C. Levy, T. Kailath, *A generalized state-space for singular systems*, IEEE, Trans. Auto. Cont., Vol. 26, no. 4, pp. 811-830, August 1981.
- [94] B. Verhaegen, P. Van Dooren, *Observers for singular systems*, Syst. and Cont. Letters, Vol. 8, no. 29, pp. 29-37, 1986.
- [95] S.H. Wang, *Design of precompensator for decoupling problems*, Electronics Letters, Vol. 6, no. 23, pp. 739-741, November 1970.
- [96] K. Weierstrass, *Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen*, Monatsh. Akad. Wiss., Berlin, 1867.
- [97] C.W. Yang, H.L. Tan, *Observer design for singular systems with unknown inputs*, Int. J. Cont., Vol. 49, no. 6, pp. 1937-1946, 1989.
- [98] E.L. Yip, R.F. Sincovec, *Solvability, controllability, observability of continuous descriptor systems*, IEEE, Trans. Auto. Cont., Vol. 26, no. 3, pp. 702-706, June 1981.
- [99] E.C. Zeeman, *Duffing's equation in brain modelling*, J. Inst. Math. and its App., pp. 207-214, July 1976.
- [100] S.Y. Zhang, *Generalized functional observer*, IEEE, Trans. Auto. Cont., Vol. 35, no. 6, pp. 733-737, June 1990.

