



*" Il y a plusieurs sortes d'hypothèses, les unes sont vérifiables et une fois confirmées par l'expérience, elles deviennent des vérités fécondes; les autres, sans pouvoir nous induire en erreur, peuvent nous être utiles en fixant notre pensée, d'autres enfin ne sont des hypothèses qu' en apparence et se réduisent à des définitions ou à des conventions déguisées."*

*H. Poincaré*

A mes très chers parents

A mes frères et soeurs

A toute la famille

A tous mes amis

## *Remerciements*

Ce travail a été préparé au Laboratoire d'Acoustique-Ultrasons de la Faculté Libre des Sciences de Lille sous la direction de Monsieur J. POULIQUEN, directeur de recherche au C.N.R.S, je lui suis infiniment reconnaissant de la formation scientifique et pédagogique dont il m'a fait bénéficier, qu'il soit ici sincèrement remercié.

Monsieur le Professeur A. DEFEBVRE, Doyen de la Faculté Libre des sciences, m'a accepté dans son groupe de recherche, avec qui j'ai eu de nombreuses et fructueuses discussions, qu'il soit ici remercié de l'honneur qu'il m'a fait.

Je remercie beaucoup Monsieur le Professeur B. CASTAGNEDE, qui m'a fait l'honneur d'avoir accepté de rapporter sur mon travail, qu'il soit assuré de ma respectueuse considération.

Monsieur le Professeur J. RIPOCHE, me fait l'honneur d'être rapporteur de ce mémoire, je le prie de bien vouloir trouver ici l'expression de mon plus profond respect.

Monsieur le Professeur B. DJAFARI-ROUHANI a bien voulu accepter de juger ce travail par sa participation au jury. Je lui en suis très reconnaissant.

Je voudrais témoigner ici de mon amitié envers les membres du laboratoire et les remercier de leur aide. Je remercie tout particulièrement Monsieur J.P. ROELLY, secrétaire général de la Faculté Libre des Sciences pour sa disponibilité et sa sympathie, ainsi que Monsieur G. TARTARE.

Mes remerciements vont également à tous les camarades de la Faculté Libre de Médecine, et plus spécialement à Monsieur le Professeur G. FORZY pour sa disponibilité et l'aide qu'il m'a fournie.

## Table des matières

## Table des matières

	Page
INTRODUCTION.....	1
Chapitre 1.....	3
ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE.....	3
1. Cohésion et Adhésion.....	3
1.1. Rappels de notions.....	3
1.2. Mouillabilité.....	3
1.3. Forces d'adhésion.....	3
2. Contrôles ultrasonores non destructifs des structures collées.....	5
2.1. Caractérisation de la cohésion.....	5
2.2. Caractérisation de l'adhésion.....	7
Chapitre 2.....	10
PROPAGATION DES ONDES DE RAYLEIGH-SEZAWA.....	10
DANS LES MILIEUX STRATIFIES.....	10
1. Acoustique linéaire. Equations générales.....	10
2. Problème étudié.....	11
3 . Expression des composantes de déplacement dans un milieu.....	11
3.2 . Solutions harmoniques dans un solide.....	13
3.3 . Solutions harmoniques dans un liquide.....	14
4 . Etude du système.....	15
4.1 . Composantes du tenseur des contraintes.....	15
4.2. Conditions de continuité aux interfaces.....	16
4.2.1 . Cas du contact rigide.....	16
4.2.2 . Cas d'un contact glissant.....	17
4.3 . Différents types d'ondes.....	17
5 . Différentes expressions de la dispersion.....	18
5.1- Cas d'un contact rigide.....	18
5.2 . Cas d'un contact glissant.....	21
6 . Calcul des amplitudes de déplacements dans le système.....	22
7 . Energie acoustique de déformation.....	23
Chapitre 3.....	25
ETUDE NUMERIQUE DES PROBLEMES DE COLLAGES.....	25
1. Objectif.....	25
2. Choix du modèle.....	25
3. Organisation du calcul.....	26

3.1. Calcul de la célérité C .....	26
3.2. Calcul des amplitudes et des énergies .....	27
4. Etude du modèle .....	27
4.1. Evolution de la célérité en fonction de $\mu$ .....	27
4.2. Evaluation de la sensibilité à l'adhésion.....	29
4.3. Amplitudes de vibration (fig 4 et 5) .....	32
4.4. Energie.....	35
5. Quelques résultats généraux .....	38
5.1. Cas limites.....	38
5.1.1. En basse fréquence .....	38
5.1.2. En haute fréquence .....	40
5.2. Milieux ne différant que par leur impédance acoustique .....	40
5.3. Cas des milieux extrêmes identiques.....	44
Chapitre 4 .....	47
COMPARAISON DU MODELE DE PILARSKI A NOTRE MODELE .....	47
1. Objectif.....	47
2. Modèle de Pilarski .....	47
3. Expression de la dispersion .....	48
4. Résultats numériques.....	50
5. Conclusion .....	53
Chapitre 5 .....	54
RESOLUTION DU PROBLEME INVERSE : CARACTERISATION DE L'ADHESIF A PARTIR D'UNE COURBE DE DISPERSION EXPERIMENTALE. ....	54
1. Méthode de résolution.....	54
1.1. Méthode de la descente rapide.....	54
1.2. Méthode des gradients conjugués .....	57
1.2.1. Exposé de la méthode .....	57
1.2.2. Difficultés de la méthode .....	59
1.3. Critères d'identification et taux de variations des paramètres. ....	60
1.3.1 Généralités .....	60
1.3.2. Cas du système collé. ....	61
2. Adaptation de la méthode à notre problème ; simulation .....	62
2.1. Procédure choisie .....	62
2.2. Etudes préliminaires. ....	62

2.2.1. Influence des différents paramètres sur la célérité.....	62
2.2.2. Paramètres à identifier .....	65
2.2.3. Présentation du modèle servant à la simulation.....	65
2.2.4. Stabilité de l'algorithme.....	66
2.3. Identification. ....	66
2.3.1. Cas des épaisseurs connues. ....	66
2.3.2. Cas des quatre paramètres inconnus.....	66
2.3.3. Pseudo-mesures bruitées.....	67
2.3.4. Conclusion.....	69
3. Caractérisation de deux échantillons.....	69
3.1. Description des échantillons. ....	69
3.2. Caractérisation de l'échantillon A.....	69
3.3. Caractérisation de l'échantillon B.....	70
 CONCLUSION GENERALE .....	 73
 Annexe 1 .....	 75
 Annexe 2 .....	 76
MODELE DE SCHOENBERG .....	76
1. Modèle de schoenberg .....	76
2. Expression de la dispersion .....	77
3. Résultats numériques.....	81
 Annexe 3 .....	 83
BANC OPTO-ACOUSTIQUE.....	83
1. Principe de la mesure .....	83
2. Fonctionnement.....	83
2.1. Production des ondes de surface .....	83
2.2. Traitement optique.....	83
2.3. Traitement électrique du signal .....	84
 REFERENCES.....	 .....

## INTRODUCTION



## INTRODUCTION

Le collage est devenu une technique d'assemblage moderne et performante. Elle est le fruit des énormes progrès réalisés dans la connaissance des phénomènes physiques mis en jeu et du développement de nouveaux produits.

La notion de performance est apparue avec les premières colles synthétiques (colles phénoliques au début du siècle, colles époxydes lors de la seconde guerre mondiale). Le collage vient maintenant concurrencer les autres techniques que sont le rivetage, le boulonnage et le soudage et il ouvre des perspectives nouvelles.

Les avantages qui en résultent permettent de mieux comprendre son essor et les espoirs qu'il suscite à savoir : la possibilité d'assembler des matériaux différents, la tenue à la fatigue et aux chocs, la rigidité accrue, le gain de poids, etc..Actuellement son développement est encore limité par certaines de ces caractéristiques: sa résistance thermomécanique assez faible; les limitations thermiques: la température ne peut dépasser 200°C pour la plupart des colles.

Les moyens de contrôle non destructifs des défauts d'adhésion restent rares et encore peu fiables. L'acoustique ultrasonore devrait fournir un des moyens parmi d'autres (Rayons X, interférométrie Laser, etc..) pour caractériser l'adhérence et la cohésion des colles.

Le travail présenté ici s'inscrit dans cette ligne; son but est double :

- ◆ Caractériser au moyen d'ondes ultrasonores de Rayleigh-Sezawa l'adhérence des assemblages collés;
- ◆ Déterminer les caractéristiques acoustiques de la colle

Après une brève étude bibliographique des phénomènes de cohésion de la colle et de son adhésion aux surfaces assemblées nous rappellons les études antérieures des structures collées réalisées par ultrasons .

Nous abordons ensuite la mise en équations d'un modèle à trois milieux pour deux types de conditions aux limites : liaisons liquide et solide.

Une étude numérique est ensuite consacrée à l'évaluation de la sensibilité des ondes de Rayleigh-Sezawa aux paramètres qui caractérisent le modèle. Nous calculons:

- ◆ la sensibilité de ces ondes au paramètre sensible à la rigidité de la colle;
- ◆ les amplitudes des déplacements normaux et tangentiels;
- ◆ la répartition de l'énergie

En vue de généralisation nous recherchons les variables réduites pouvant s'introduire. Ensuite les résultats fournis par notre modèle seront comparés à ceux fournis par d'autres modèles, en vue de déterminer les éventuels avantages et inconvénients.

Nous abordons enfin la résolution du problème inverse: retrouver les caractéristiques du modèle à partir de quelques points provenant d'une courbe de dispersion, par la méthode éprouvée des gradients conjugués

La méthode est présentée et appliquée à un modèle pseudo-expérimental. Une procédure est définie pour restituer les paramètres du modèle quand les célérités données par la courbe de dispersion sont exactes ou chargées d'une imprécision.

Enfin, elle sera utilisée à caractériser un échantillon constitué d'une lame de verre collée à l'aide de deux adhésifs différents, sur un substrat de même nature.

En conclusion, nous tenterons de montrer l'intérêt et les éventuelles limites de l'emploi des ondes de Rayleigh-Sezawa pour caractériser l'adhérence.

## Chapitre 1

### ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

# Chapitre 1

## ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

Cette étude sera consacrée au rappel des principaux modèles théoriques élaborés pour expliquer les phénomènes de cohésion et d'adhésion d'une couche de colle élastique ou viscoélastique.

### 1. Cohésion et Adhésion.

#### 1.1. Rappels de notions.

La *cohésion* traduit l'existence de forces particulières entre les molécules de l'adhésif. Suivant la nature de ces forces, on définit deux types d'adhésifs ayant des caractéristiques bien distinctes:

- Les adhésifs thermoplastiques: les molécules sont faiblement liées (forces de Van der Waals) ce qui leur confère une tenue limitée à la température.

- Les adhésifs thermodurcissables: les molécules sont fortement liées ce qui se traduit par une bonne tenue thermomécanique.

L'*adhésion* est un phénomène interfacial dans lequel des forces physiques ou chimiques se créent entre deux surfaces mises en contact. La connaissance des mécanismes fondamentaux de l'adhésion est très importante car elle permet, dans beaucoup de cas, de comprendre la réussite ou non d'un collage. La solidité et la durabilité de l'assemblage collé seront conditionnées par les notions suivantes:

- La mouillabilité des surfaces à coller à l'adhésif choisi.
- Les forces d'adhésion de la colle une fois prise.
- La cohésion de la colle.

#### 1.2. Mouillabilité.

Elle traduit l'aptitude d'un liquide disposé sur un solide à se répandre sur la plus grande surface possible; elle est caractérisée par l'énergie de surface d'un liquide sur un solide.

#### 1.3. Forces d'adhésion.

Si, à ce jour, les mécanismes de la cohésion d'un adhésif sont bien connus, ceux de l'adhésion d'une couche de colle et des éléments à assembler restent un problème non résolu.

De nombreux modèles théoriques ont été proposés pour tenter d'expliquer les phénomènes d'adhésion sans que l'on puisse les synthétiser [1].

- Modèle mécanique:

L'adhésion a longtemps été considérée comme étant un simple problème mécanique, la solidité résultant de la pénétration de la colle dans les aspérités de la surface solide. Cette explication est réaliste dans le cas de supports poreux mais des études ont montré que d'autres facteurs intervenaient, tels que la tension superficielle, l'énergie de surface et la polarisation etc...

- Modèle moléculaire:

L'adhésion est le résultat de liaisons intermoléculaires qui ne se produisent qu'à très faibles distances entre les molécules du polymère et celles du substrat. Ces forces sont connues sous le nom de forces de Van der Waals.

- Modèle électrique:

L'adhésion serait due à l'établissement d'une double couche électrique aux interfaces, les forces étant de nature électrostatique. Cette théorie est valable uniquement pour des matériaux de nature différente (ex. polymères-métal).

- Modèle chimique:

Elle interprète l'adhésion par la formation de liaisons covalentes, ioniques ou métalliques.

- Modèle de diffusion:

Il y a inter-diffusion des matériaux aux deux surfaces en contact. Il convient de noter que cette théorie n'est, en fait, qu'un cas particulier du modèle moléculaire. Elle est particulièrement valable pour des polymères collés ensemble.

- Modèle thermodynamique:

Elle indique l'établissement de liaisons faibles (liaison de Van der Waals) entre les deux surfaces en présence.

Les forces de Van der Waals résultent de la dissymétrie de répartition des charges positives et négatives entraînant la formation de dipôles aussi bien dans l'adhésif que dans le substrat, ce qui favorise leur attraction. L'établissement de ces liaisons très nombreuses semble une des raisons principales de l'adhésion dans beaucoup de cas.

## 2. Contrôles ultrasonores non destructifs des structures collées.

La littérature propose diverses études et procédés de mesures acoustiques pour tenter d'atteindre la cohésion de la colle et l'adhésion des pièces assemblées. Elles sont séparables suivant que les caractéristiques observées sont celles du milieu couplant seul (cohésion) ou dépendent de l'interface " colle-matériau à coller "(adhésion)

### 2.1. Caractérisation de la cohésion

La propagation d'ondes longitudinales semble intéressante puisque seul ce type d'onde se propage dans les adhésifs liquides. Utilisant cette propriété pour contrôler la polymérisation d'un adhésif, WINFREE W. P et PARKER F. R [2] ont mesuré la variation de célérité des ondes longitudinales en fonction de la température pour différents mélanges d'un adhésif; ils ont montré qu'elle dépend linéairement de la température et des proportions du mélange.

GUYOTTC C. H et CAWLEY P [3] se sont intéressés aux fréquences de résonances des modes des ondes de cisaillement d'un système de deux plaques d'épaisseurs  $e_1$  et  $e_2$  ( $e_2 \gg e_1$ ) séparées d'un joint de colle dont l'épaisseur tend vers 0; ces fréquences ont été calculées et mesurées. Ils ont montré que:

- La fréquence de résonance de l'adhésif dépend des adhérents.
- Les modes ont tendance à apparaître par paire quand l'épaisseur de l'adhésif est petite.
- Il y a réduction des fréquences de résonance de tous les modes quand son module de cisaillement diminue et son épaisseur augmente.

Ainsi la connaissance des fréquences de résonance, sous certaines conditions, permet d'évaluer l'épaisseur de la colle et d'en déduire la qualité puisqu'elle est directement liée à son épaisseur.

KNOLLMAN G. C et HARTOG J. J [4] ont excité des ondes de Rayleigh par conversion d'onde de volume sur des couches fines de colle obtenues par érosion d'une lame primitive placée sur un substrat d'aluminium. Deux adhésifs différents réalisés dans les mêmes conditions ont été étudiés. Ils constatent que:

- Le module de cisaillement augmente brutalement avec l'épaisseur de l'adhésif.

- A partir d'une certaine épaisseur  $e_{\text{seuil}}$ , il tend vers une valeur constante indépendante de l'épaisseur du film; à partir de cette valeur  $e_{\text{seuil}}$  on détermine la rigidité du joint de colle.

- Le temps de préparation de l'adhésif influe sur le gradient du module de cisaillement pour de faibles épaisseurs de joint.

D'autres études effectuées par ROKHLINS I, HEFETSH M et ROSEN M [5, 6] utilisent les ondes d'interface dans un mince film de colle localisé entre deux solides semi-infinis. Elles ont montré que ce film présente des propriétés de guidage si le module de cisaillement du film est inférieur à celui des solides, que ces ondes conviennent relativement bien à l'évaluation d'épaisseur du film si cette épaisseur est inférieure au centième de la longueur d'onde de la vibration transversale dans les solides. En dehors de cette condition, des ondes évanescentes peuvent être excitées au niveau de l'interface adhésif-substrat. Leur utilisation reste encore possible si l'atténuation, vu l'énergie rayonnée, n'est pas trop élevée. Ces résultats ont conduit les auteurs à étudier la polymérisation de l'adhésif. Ils ont montré que la qualité de cohésion, le module de cisaillement et le coefficient des pertes élastiques, pour un adhésif donné, sont gouvernés par la présence de micro-défauts de diverses sortes. Un défaut dans la couche entraîne une perte de célérité des ondes, facteur qui intervient directement sur le module de cisaillement en le diminuant.

Pour tenir compte de l'atténuation acoustique de la colle, MURTY G. H [7] a étudié le cas d'une onde longitudinale incidente sur une interface viscoélastique séparant deux milieux solides semi-infinis, dont l'épaisseur reste petite devant la longueur d'onde. Il a supposé que le couplage est décrit par les conditions aux limites suivantes:

◆ Continuité des contraintes

◆ Le vecteur contrainte  $\vec{T}$  est proportionnel à la vitesse de vibration relative des surfaces en contact:  $\vec{T} = k(\vec{V}_1 - \vec{V}_2)$ ; cette relation remplace la continuité des déplacements.

A partir de ce modèle, il définit un paramètre  $\Psi = \frac{\eta c_t}{\mu e + \eta c_t}$  appelé "niveau de collage" ( $\eta$ ,  $\mu$ ,  $c_t$  et  $e$  désignent la viscosité, le coefficient de Lamé, la vitesse transversale et l'épaisseur de la colle). Pour une interface sans colle, le niveau de collage est nul alors que pour un collage complet (colle répartie sur toute l'interface) il est égal à l'unité. Il a montré qu'une interface partiellement collée, absorbe de l'énergie. Par contre, pour  $\Psi = 0$  et  $\Psi = 1$  l'interface n'en absorbe pas. La mesure de l'énergie des ondes réfléchies ou transmises permet donc de "quantifier" l'épaisseur de la colle.

Il a aussi étudié les variations de glissement en fonction de l'angle d'incidence à différentes valeurs de  $\Psi$  et a montré que:

- Si  $\Psi$  augmente le glissement diminue
- Il existe un angle pour lequel le glissement est nul.

Ce modèle permet donc de caractériser la colle et surtout l'adhésion.

Ces quelques études montrent la possibilité de caractériser acoustiquement la cohésion des adhérents par des méthodes non destructives. Rien cependant ne permet de prétendre que l'on dispose encore de l'outil idéal. Les pistes ouvertes ne sont pas encore complètement explorées.

## 2.2. Caractérisation de l'adhésion.

Plusieurs méthodes acoustiques tentent de caractériser les défauts de collages, par la mesure, soit du coefficient de réflexion des ondes de compression ou de cisaillement soit du déplacement des courbes de dispersion des différents modes des ondes de Lamb dans des plaques.

ROSE J. L et THOMAS G. H [8] ont utilisé les ondes ultrasonores de compression possédant un déplacement normal à la surface collée. Par la suite, BOTSCO R. J et ANDERSON R. T [9] en produisant des ondes stationnaires dans des couches multiples ont mesuré les effets cumulés sur l'impédance acoustique à la surface. Ces tests ont offert une méthode d'interprétation relativement facile pour l'inspection non destructive des couches multiples, mais ce type d'étude n'a pas résolu le problème de la caractérisation de l'adhésion. Cela peut s'expliquer par le fait que la variation de l'adhésion ne modifie guère les coefficients de transmission et de réflexion sous incidence normale à la surface collée.

Les composantes de déplacement tangentiel à la surface semblent plus sensibles à l'adhésion, c'est ce qui a orienté les recherches récentes vers l'étude des ondes longitudinales ou transversales sous incidence oblique.

Comme l'adhésion dépend des états des surfaces, elle est donc liée aux conditions aux limites. ROKHLINS I et MARON D [10] ont calculé et mesuré, à basse fréquence, les variations du coefficient de réflexion d'une onde longitudinale à incidence oblique, pour les deux conditions aux frontières suivantes:

- ◆ Contact rigide: continuité des déplacements et des contraintes
- ◆ Contact glissant: continuité des déplacements normaux et des contraintes

Ils ont montré que le coefficient de réflexion d'une interface glissante est souvent supérieur à celui d'une interface rigide.



Par la suite, en considérant une onde transversale sous incidence oblique, PILARSKI A et ROSE J. L [11] ont étudié, dans le cas où l'épaisseur de la colle est négligeable devant la longueur de l'onde dans le milieu incident, la variation du coefficient de réflexion pour deux types de conditions aux frontières:

- ◆ Contact rigide: continuité des déplacements et des contraintes

- ◆ Contact non rigide (intermédiaire): la continuité des contraintes est conservée, mais la continuité des déplacements est remplacée par une relation linéaire liant la différence de déplacements de part et d'autre de l'interface aux composantes du vecteur contrainte, (comparable aux conditions de Murty). Ce modèle permet d'ignorer les caractéristiques acoustiques de la colle.

A partir de ces conditions, il est possible de simuler, pour des valeurs très particulières des coefficients de proportionnalité, les conditions d'un contact rigide et glissant. Ils ont confirmé que les ondes transversales sont plus sensibles à la variation de l'adhésion entre deux matériaux que les ondes longitudinales sous incidence normale.

Pour tester l'aptitude des ondes transversales à détecter l'adhésion, ils ont réalisé un échantillon présentant des régions de bonne et de mauvaise adhésion. Le joint de colle réunissant deux plaques d'aluminium est rendu mal adhérent, par la présence d'une fine couche de Téflon. Ils ont montré que la sensibilité ( maximum d'écart ) de l'onde transversale sous incidence oblique est meilleure de 4 dB que celle de l'onde longitudinale sous incidence normale, différence significative pour les auteurs et cela, à leur avis, ouvre une nouvelle porte à la détection acoustique de l'adhésion.

Par le calcul du coefficient de réflexion de l'onde transversale sous incidence oblique, en fonction d'un paramètre  $k_t$ , traduisant la rigidité du joint de colle, ils montrent que la détection est d'autant plus sensible que la fréquence est élevée.

Pour des conditions aux frontières identiques à celles de PILARSKI, OUAFTOUH M [12] a calculé les courbes de dispersion des six premiers modes des ondes de Lamb. Ses mesures ont montré que les écarts présentés par les modes d'ondes sont trop faibles pour être mis facilement en évidence expérimentalement et que, par conséquent, le contrôle faisant appel aux ondes de Lamb n'est envisageable que pour une épaisseur de colle imposée ce qui n'est pas souvent le cas des joints industriels.

A partir de mesures de réflectivité, LEOMY F [13] a constaté que le collage de deux plaques minces ne peut pas être traité comme un couplage parfait. Chacune des plaques se comporte pratiquement comme indépendante de l'autre, le calcul justifiant le résultat expérimental.

En utilisant des ondes de Lamb, BENEL MOUSTAFA Y [14] a montré que les conditions intermédiaires de PILARSKI simulent bien les mauvaises adhésions. Par ailleurs, il a établi que l'adhésion peut être aussi caractérisée par la position et les valeurs des extremums du coefficient de réflexion d'onde de cisaillement sous incidence oblique

Cette brève étude bibliographique souligne, qu'à ce jour, ce sont les ondes transversales (de déplacement perpendiculaire au plan d'incidence) sous incidence oblique qui se révèlent les plus aptes à caractériser l'adhésion. Par ailleurs, les ondes de Rayleigh [4] sur une couche de colle déposée sur un substrat apparaissent comme une technique intéressante pour caractériser la cohésion de la colle selon son épaisseur.

## Chapitre 2

### PROPAGATION DES ONDES DE RAYLEIGH-SEZAWA DANS LES MILIEUX STRATIFIES .

## Chapitre 2

### PROPAGATION DES ONDES DE RAYLEIGH-SEZAWA DANS LES MILIEUX STRATIFIES .

#### 1. Acoustique linéaire. Equations générales.

En utilisant l'écriture condensée d'Einstein, la loi de Hooke généralisée relie les composantes  $T_{ij}$  du tenseur de contraintes aux composantes  $e_{kl}$  du tenseur de déformation par l'intermédiaire des composantes  $C_{ijkl}$  du tenseur de rigidité suivant la relation:

$$T_{ij} = C_{ijkl} \cdot e_{kl}$$

où

$$e_{kl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \quad (1)$$

$u_k$  est la composante  $k$  du déplacement  $\vec{D}$  ( $u_1, u_2, u_3$ );

$x_k$  la coordonnée  $k$  d'un point dans une *représentation orthonormée*  $Ox_1x_2x_3$ .

La loi fondamentale de la dynamique, appliquée à l'unité de volume, s'écrit:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} \quad (2)$$

Le tenseur de rigidité  $C_{ijkl}$  s'exprime seulement en fonction de  $\lambda$  et  $\mu$ , coefficients de Lamé, pour un milieu isotrope. Dans ce cas, on a les relations classiques :

$$\begin{aligned} C_{llll} &= \lambda + 2\mu \\ C_{llkk} &= \lambda \quad (l, k = 1, 2, 3; l \neq k) \\ C_{lklk} &= C_{lkk l} = \mu \end{aligned} \quad (3)$$

Tous les autres termes du tenseur sont nuls.

Les célérités respectives des ondes de volume longitudinale et transversale sont données par :

$$C_l = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad \text{et} \quad C_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (3')$$

## 2. Problème étudié.

Ce chapitre établit les équations de propagation des ondes ultrasonores de surface [15 à 22] dans les milieux stratifiés constitués de deux couches déposées sur un substrat, conformément à la figure 1. Chaque milieu  $m$ , supposé sans perte et isotrope est caractérisé par son épaisseur  $e_m$ , sa masse volumique  $\rho_m$  et ses coefficients de Lamé  $\lambda_m, \mu_m$ .

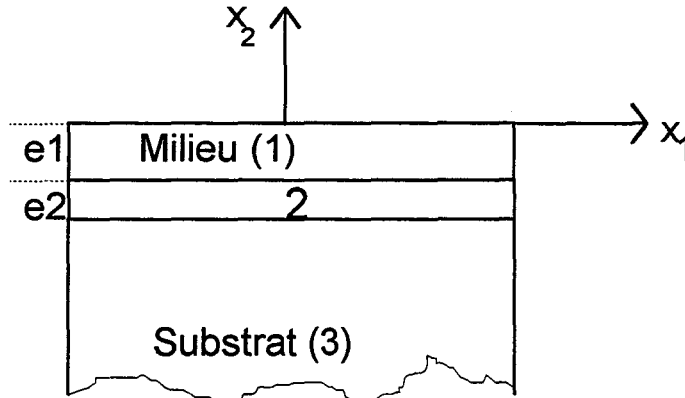


Fig.1 Système stratifié à deux couches.

Nous supposons le vecteur déplacement  $\vec{D}(u_1, u_2, 0)$  contenu dans le plan sagittal défini par la direction de propagation  $Ox_1$  et la normale  $Ox_2$  à l'interface.

## 3 . Expression des composantes de déplacement dans un milieu.

### 3.1 . Equation générale des ondes

L'équation (2) s'écrit:

$$\left(\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\right)_m = \left(C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l}\right)_m \quad (2')$$

où  $u_i$  est la composante  $i$  du déplacement  $\vec{D}(u_1, u_2, 0)$  dans le milieu  $m$  ce qui, en milieu isotrope, se développe en:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = C_t^2 \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) + C_l^2 \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) \quad (4)$$

avec  $i, j = 1, 2$  et  $i \neq j$ .

Pour alléger les notations posons:

$$x_1 = x \quad x_2 = y \quad u_1 = u \quad u_2 = v$$

Comme  $i \neq j$ , les vibrations  $u$  et  $v$  sont solutions du système couplé suivant:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= C_t^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + C_l^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= C_t^2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) + C_l^2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right)\end{aligned}\quad (5)$$

Si nous posons que le vecteur déplacement  $\bar{D}(u, v, 0)$  comporte deux parties: l'une  $\bar{D}_T$  dépendant de  $C_t$  et l'autre  $\bar{D}_L$  dépendant de  $C_l$ , alors:  $\bar{D} = \bar{D}_T + \bar{D}_L$ ; il faut, pour cela, avoir:

$$\frac{\partial^2 u_L}{\partial t^2} = C_l^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0$$

avec

$$\frac{\partial^2 v_L}{\partial t^2} = C_l^2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0$$

Cela aura lieu si: 
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Donc cette "composante" de la solution de célérité  $C_l$  est irrotationnelle. Il en résulte que:

$$\frac{\partial^2 u_L}{\partial t^2} = C_l^2 \left( \frac{\partial^2 u_L}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_L}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 v_L}{\partial t^2} = C_l^2 \left( \frac{\partial^2 v_L}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_L}{\partial y^2} \right)$$

soit: 
$$\frac{\partial^2 \bar{D}_L}{\partial t^2} = C_l^2 \Delta(\bar{D}_L) \quad (5.1)$$

De même, on aura:

$$\frac{\partial^2 u_T}{\partial t^2} = C_t^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0$$

avec

$$\frac{\partial^2 v_T}{\partial t^2} = C_t^2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0.$$

Ce qui impose: 
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Cette "composante" de la solution de célérité  $C_t$  est donc à divergence nulle. Il en résulte que:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_T}{\partial t^2} = C_t^2 \left( \frac{\partial^2 \mathbf{u}_T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_T}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}_T}{\partial t^2} = C_t^2 \left( \frac{\partial^2 \mathbf{v}_T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}_T}{\partial y^2} \right)$$

soit: 
$$\frac{\partial^2 \bar{\mathbf{D}}_T}{\partial t^2} = C_t^2 \Delta(\bar{\mathbf{D}}_T) . \quad (5.2)$$

Les équations (5.1) et (5.2) montrent qu'il existe deux ondes qui se propagent indépendamment l'une de l'autre à des célérités respectives  $C_l$  et  $C_t$ . Dans le cas général des solutions des équations (4), il y a propagation simultanée de l'onde de dilatation (avec variation de volume:  $\text{div} \bar{\mathbf{D}}_L \neq 0$ ) à la célérité  $C_l$  et de l'onde de cisaillement (sans variation de volume:  $\text{div} \bar{\mathbf{D}}_T = 0$ ) à la célérité  $C_t$ .

### 3.2 . Solutions harmoniques dans un solide.

Choisissons des ondes harmoniques progressives de pulsation  $\omega$ , de célérité  $C$  et de nombre d'onde  $k = \omega/C$  se propageant selon  $Ox$ . Les équations (5.1) et (5.2) ayant la même forme:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{g}}{\partial t^2} = C^2 \left( \frac{\partial^2 \mathbf{g}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{g}}{\partial y^2} \right)$$

nous prenons des solutions du type onde plane, où:

$$\mathbf{g} = g(y) e^{j(kx - \omega t)}$$

L'injection de  $g$  dans l'équation donne, après simplification par l'exponentielle:

$$\frac{d^2 g(y)}{dy^2} - (k^2 - \omega^2/C^2)g(y) = 0 .$$

Posons  $\alpha = (k^2 - \omega^2/C^2)^{1/2}$ , l'équation différentielle admet pour solution générale:

$$g(y) = A_1 e^{\alpha y} + B_1 e^{-\alpha y}$$

Les équations (5.1) et (5.2) admettent donc respectivement les solutions suivantes:

$$\begin{aligned}
u_L &= (A e^{ry} + B e^{-ry}) e^{j(kx-\omega t)} \\
v_L &= (A' e^{ry} + B' e^{-ry}) e^{j(kx-\omega t)} \\
u_T &= (C e^{sy} + D e^{-sy}) e^{j(kx-\omega t)} \\
v_T &= (C' e^{sy} + D' e^{-sy}) e^{j(kx-\omega t)}
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\text{où} \quad r = (k^2 - \omega^2/C^2)^{1/2} \quad s = (k^2 - \omega^2/C_t^2)^{1/2} \quad k = \omega/C \tag{6'}$$

La composante  $\bar{D}_L$  étant irrotationnelle ( $\frac{\partial u_L}{\partial y} = \frac{\partial v_L}{\partial x}$ ), les coefficients doivent vérifier les relations:

$$A' = -j(r/k)A, \quad B' = j(r/k)B$$

De même, la condition de divergence nulle pour la composante  $\bar{D}_T$  ( $\frac{\partial u_T}{\partial x} + \frac{\partial v_T}{\partial y} = 0$ ) impose:

$$C' = -j(k/s)C; \quad D' = j(k/s)D$$

La solution générale de l'onde qui se propage dans un solide m étant:

$$u_m = u_{Lm} + u_{Tm}; \quad v_m = v_{Lm} + v_{Tm}$$

devient alors:

$$u_m = [A_m e^{r_m y} + B_m e^{-r_m y} + C_m e^{s_m y} + D_m e^{-s_m y}] e^{j(kx-\omega t)} \tag{7}$$

$$v_m = -j[(r_m/k)(A_m e^{r_m y} - B_m e^{-r_m y}) + (k/s_m)(C_m e^{s_m y} - D_m e^{-s_m y})] e^{j(kx-\omega t)}$$

où  $A_m$ ,  $B_m$ ,  $C_m$  et  $D_m$  sont des constantes d'intégration. Les conditions aux limites permettent de les calculer.

### 3.3 . Solutions harmoniques dans un liquide.

Si le liquide n'a pas de viscosité ( $\mu = 0 \Rightarrow C_t = 0$ ); les seules ondes qui se propagent sont des ondes de dilatation (composante  $\bar{D}_L$  de la solution) et donc:

$$u = u_L; \quad v = v_L$$

En éliminant  $u_T$  et  $v_T$  de l'équation (7), c'est à dire les solutions en (sy), nous obtenons:



$$\begin{aligned} u &= (A e^{ry} + B e^{-ry}) e^{j(kx-\omega t)} \\ v &= -j(r/k)[A e^{ry} - B e^{-ry}] e^{j(kx-\omega t)} \end{aligned} \quad (8)$$

avec  $r=(k^2-\omega^2/C_0^2)^{1/2}$ ,  $C_0$  désignant la célérité du son dans le liquide.

#### 4 . Etude du système.

##### 4.1 . Composantes du tenseur des contraintes.

Contenues dans le plan sagittal, elles sont données, pour chaque milieu  $m$  d'après (1) et (3) par:

$$\begin{aligned} T_{yy_m} &= 2\mu_m \frac{\partial v_m}{\partial y} + \lambda_m \left( \frac{\partial u_m}{\partial x} + \frac{\partial v_m}{\partial y} \right) \\ T_{xy_m} &= \mu_m \left( \frac{\partial u_m}{\partial y} + \frac{\partial v_m}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

En injectant dans (9) les valeurs des composantes  $u_m$ ,  $v_m$  des déplacements déduites de (7) et (8) elles deviennent:

$$T_{yy_m} = -j[\alpha_m(A'_m e^{r_m y} + B'_m e^{-r_m y}) + \beta_m(C'_m e^{s_m y} + D'_m e^{-s_m y})] e^{j(kx-\omega t)} \quad (10)$$

$$T_{xy_m} = [\Gamma_m(A'_m e^{r_m y} - B'_m e^{-r_m y}) + \alpha_m(C'_m e^{s_m y} - D'_m e^{-s_m y})] e^{j(kx-\omega t)}$$

en introduisant les notations suivantes:

$$\begin{aligned} A'_m &= A_m/k & B'_m &= B_m/k & C'_m &= C_m/s_m & D'_m &= D_m/s_m \\ h^2_m &= \omega^2/C_{1m}^2 = k^2 - r^2_m & \alpha_m &= 2\mu_m r^2_m - \lambda_m h^2_m & \beta_m &= 2\mu_m k s_m \end{aligned} \quad (11)$$

$$\Gamma_m = 2\mu_m k r_m \quad \delta_m = \mu_m(k^2 + s^2_m) = \alpha_m$$

En effet, d'après (3') et (6')

$$\delta = \mu(2k^2 - \omega^2/C_t^2)$$

$$\alpha = 2\mu(k^2 - \omega^2/C_l^2) - \lambda\omega^2/C_l^2 = 2\mu k^2 - \omega^2(\lambda + 2\mu)/C_l^2 = 2\mu k^2 - \rho\omega^2$$

$$= \mu(2k^2 - \omega^2\rho/\mu) = \mu(2k^2 - \omega^2/C_t^2) = \delta$$

Bien entendu, *pour un milieu liquide*,  $\mu_m = 0$ , les termes en  $C'_m$ ,  $D'_m$  disparaissent et comme d'après (11):

$$\alpha_m = -\lambda_m h_m^2 = -\rho_m C_0^2 \omega^2 / C_0^2 = -\rho_m \omega^2$$

$$\Gamma_m = 0$$

les contraintes deviennent:

$$T_{yy_m} = j\rho_m \omega^2 (A'_m e^{r_m y} + B'_m e^{-r_m y}) e^{j(kx - \omega t)} \quad (9')$$

$$T_{xy_m} = 0$$

**Remarque:** Le report des constantes d'intégration  $A'_m, B'_m, \dots$  dans les composantes de déplacements amène à exprimer (7) et (8) comme suit:

$$u_m = [k(A'_m e^{r_m y} + B'_m e^{-r_m y}) + s_m(C'_m e^{s_m y} + D'_m e^{-s_m y})] e^{j(kx - \omega t)} \quad (8')$$

$$v_m = -j[r_m(A'_m e^{r_m y} - B'_m e^{-r_m y}) + k(C'_m e^{s_m y} - D'_m e^{-s_m y})] e^{j(kx - \omega t)}$$

les termes  $C'_m$  et  $D'_m$  disparaissant pour le fluide.

#### 4.2. Conditions de continuité aux interfaces.

Deux solides, à face plane, disposés l'un au-dessus de l'autre peuvent être:

- 1 - sans contact mécanique (fine couche d'air entre les deux surfaces)
- 2 - contact glissant (couche mince de liquide liant les deux surfaces)
- 3 - contact rigide (couche de colle durcie liant les deux surfaces).

Nous n'étudierons que les cas 2 et 3 où seulement les ondes de Rayleigh et Rayleigh-Sezawa peuvent exister. La prise progressive de la colle se traduira par des variations de ses coefficients de Lamé.

##### 4.2.1 . Cas du contact rigide.

A l'interface  $m$  d'altitude  $h_m$  séparant les milieux d'indice  $m$  et  $m+1$ ,

- les déplacements sont continus:

$$[u(y = h_m)]_m = [u(y = h_m)]_{m+1}$$

$$[v(y = h_m)]_m = [v(y = h_m)]_{m+1}$$

soit pour  $m=1$  d'après (8') :

$$\begin{aligned}
& ke^{r_1 h_1} A'_1 + ke^{-r_1 h_1} B'_1 + s_1 e^{s_1 h_1} C'_1 + s_1 e^{-s_1 h_1} D'_1 - ke^{r_2 h_1} A'_2 - ke^{-r_2 h_1} B'_2 - s_2 e^{s_2 h_1} C'_2 - s_2 e^{-s_2 h_1} D'_2 = 0 \\
& r_1 e^{r_1 h_1} A'_1 - r_1 e^{-r_1 h_1} B'_1 + ke^{s_1 h_1} C'_1 - ke^{-s_1 h_1} D'_1 - r_2 e^{r_2 h_1} A'_2 + r_2 e^{-r_2 h_1} B'_2 - ke^{s_2 h_1} C'_2 + ke^{-s_2 h_1} D'_2 = 0
\end{aligned} \tag{12.1}$$

- les contraintes sont continues:

$$\begin{aligned}
& [T_{yy}(y = h_m)]_m = [T_{yy}(y = h_m)]_{m+1} \quad - \\
& [T_{xy}(y = h_m)]_m = [T_{xy}(y = h_m)]_{m+1}
\end{aligned}$$

pour  $m=1$  nous aurons d'après (10) :

$$\begin{aligned}
& \alpha_1 e^{r_1 h_1} A'_1 + \alpha_1 e^{-r_1 h_1} B'_1 + \beta_1 e^{s_1 h_1} C'_1 + \beta_1 e^{-s_1 h_1} D'_1 - \alpha_2 e^{r_2 h_1} A'_2 - \alpha_2 e^{-r_2 h_1} B'_2 - \beta_2 e^{s_2 h_1} C'_2 - \beta_2 e^{-s_2 h_1} D'_2 = 0 \\
& \Gamma_1 e^{r_1 h_1} A'_1 - \Gamma_1 e^{-r_1 h_1} B'_1 + \alpha_1 e^{s_1 h_1} C'_1 - \alpha_1 e^{-s_1 h_1} D'_1 - \Gamma_2 e^{r_2 h_1} A'_2 + \Gamma_2 e^{-r_2 h_1} B'_2 - \alpha_2 e^{s_2 h_1} C'_2 + \alpha_2 e^{-s_2 h_1} D'_2 = 0
\end{aligned} \tag{12.2}$$

De plus, à la surface libre ( $y=0$ ), les contraintes sont nulles:

$$\begin{aligned}
& [T_{yy}(y=0)]_1 = [T_{xy}(y=0)]_1 = 0 \text{ soit} \\
& \alpha_1 A'_1 + \alpha_1 B'_1 + \beta_1 C'_1 + \beta_1 D'_1 = 0 \\
& \Gamma_1 A'_1 - \Gamma_1 B'_1 + \alpha_1 C'_1 - \alpha_1 D'_1 = 0
\end{aligned} \tag{12.3}$$

et dans le substrat, l'onde doit s'évanouir quand  $y$  tend vers  $-\infty$  ce qui entraîne  $B'_3 = D'_3 = 0$ . (12.4)

#### 4.2.2 . Cas d'un contact glissant.

En contact glissant les mêmes relations existent pour les déplacements normaux seulement et les contraintes, la contrainte  $T_{xy}$  étant toutefois nulle.

#### 4.3 . Différents types d'ondes.

On peut distinguer trois cas auxquels nous donnerons des appellations inspirées du nom des auteurs ayant étudié ces types d'ondes dans les cas simples de système monocouche. Nous parlerons:

1er cas : d'ondes de type Rayleigh (O.R.), si  $r_m$  et  $s_m$  sont des valeurs réelles,

$$C < C_{tm} < C_{lm} \quad \forall m .$$

2ème cas : d'ondes de type Rayleigh-Sezawa ( O.R-Se.), si  $s_m$  est imaginaire pur et  $r_m$  réel,

$$C_{tm} < C < C_{lm}, \forall m \text{ différent du substrat.}$$

3ème cas : d'ondes de Sezawa (O.Se), si  $s_m$  et  $r_m$  sont imaginaires purs,

$$C_{tm} < C_{lm} < C \forall m \text{ différent du substrat.}$$

## 5. Différentes expressions de la dispersion.

### 5.1- Cas d'un contact rigide.

L'application de ces conditions de passage (12.1 à 4) au système étudié donne un groupe de dix équations à dix inconnues. Afin que puissent exister des solutions non triviales, nous devons annuler le déterminant du tableau 1.

$A'_1$	$B'_1$	$C'_1$	$D'_1$	$A'_2$	$B'_2$	$C'_2$	$D'_2$	$A'_3$	$C'_3$
$\alpha_1$	$\alpha_1$	$\beta_1$	$\beta_1$	0	0	0	0	0	0
$\Gamma_1$	$-\Gamma_1$	$\alpha_1$	$-\alpha_1$	0	0	0	0	0	0
$ke^{r_1h_1}$	$ke^{-r_1h_1}$	$s_1e^{s_1h_1}$	$s_1e^{-s_1h_1}$	$-ke^{r_2h_1}$	$-ke^{-r_2h_1}$	$-s_2e^{s_2h_1}$	$-s_2e^{-s_2h_1}$	0	0
$r_1e^{r_1h_1}$	$-r_1e^{-r_1h_1}$	$ke^{s_1h_1}$	$-ke^{-s_1h_1}$	$-r_2e^{r_2h_1}$	$r_2e^{-r_2h_1}$	$-ke^{s_2h_1}$	$ke^{-s_2h_1}$	0	0
$\alpha_1e^{r_1h_1}$	$\alpha_1e^{-r_1h_1}$	$\beta_1e^{s_1h_1}$	$\beta_1e^{-s_1h_1}$	$-\alpha_2e^{r_2h_1}$	$-\alpha_2e^{-r_2h_1}$	$-\beta_2e^{s_2h_1}$	$-\beta_2e^{-s_2h_1}$	0	0
$\Gamma_1e^{r_1h_1}$	$-\Gamma_1e^{-r_1h_1}$	$\alpha_1e^{s_1h_1}$	$-\alpha_1e^{-s_1h_1}$	$-\Gamma_2e^{r_2h_1}$	$\Gamma_2e^{-r_2h_1}$	$-\alpha_2e^{s_2h_1}$	$\alpha_2e^{-s_2h_1}$	0	0
0	0	0	0	$ke^{r_2h_2}$	$ke^{-r_2h_2}$	$s_2e^{s_2h_2}$	$s_2e^{-s_2h_2}$	$-ke^{r_3h_2}$	$-s_3e^{s_3h_2}$
0	0	0	0	$r_2e^{r_2h_2}$	$-r_2e^{-r_2h_2}$	$ke^{s_2h_2}$	$-ke^{-s_2h_2}$	$-r_3e^{r_3h_2}$	$-ke^{s_3h_2}$
0	0	0	0	$\alpha_2e^{r_2h_2}$	$\alpha_2e^{-r_2h_2}$	$\beta_2e^{s_2h_2}$	$\beta_2e^{-s_2h_2}$	$-\alpha_3e^{r_3h_2}$	$-\beta_3e^{s_3h_2}$
0	0	0	0	$\Gamma_2e^{r_2h_2}$	$-\Gamma_2e^{-r_2h_2}$	$\alpha_2e^{s_2h_2}$	$-\alpha_2e^{-s_2h_2}$	$-\Gamma_3e^{r_3h_2}$	$-\alpha_3e^{s_3h_2}$

= 0

Tableau 1.

où chaque lignes du déterminant se définit par:

- annulation des contraintes à la surface libre : lignes 1 et 2
- continuité des déplacements au contact des milieux 1-2 : lignes 3 et 4
- continuité des contraintes au contact des milieux 1-2 : lignes 5 et 6
- continuité des déplacements au contact des milieux 2-substrat : lignes 7 et 8
- continuité des contraintes au contact des milieux 2-substrat : ligne 9 et 10

Si nous posons :

$$\begin{aligned}
P_m &= \frac{Cl_m}{C}; \quad Q_m = \frac{Ct_m}{C}; \quad R_m = Q_m \sqrt{Q_m^2 - 1}; \quad S_m = P_m \sqrt{P_m^2 - 1} \\
T_m &= -\lambda_m + 2\mu_m(P_m^2 - 1); \quad U_m = 2\mu_m S_m; \quad V_m = 2\mu_m R_m \\
W_m &= \mu_m(2Q_m^2 - 1); \quad X_m = 2\pi \sqrt{1 - \frac{1}{P_m^2}}; \quad Y_m = 2\pi \sqrt{1 - \frac{1}{Q_m^2}}
\end{aligned} \tag{13}$$

les coefficients intervenant dans le tableau 1 deviennent alors:

$$\begin{aligned}
r_m &= kS_m/P_m^2 \quad s_m = kR_m/Q_m^2 \quad \alpha_m = k^2 T_m/P_m^2 = k^2 W_m/Q_m^2 \\
\beta_m &= k^2 V_m/Q_m^2 \quad \Gamma_m = k^2 U_m/P_m^2 \\
X_{mj} &= r_m h_j = X_m \frac{h_j}{\Lambda} \quad Y_{mj} = s_m h_j = Y_m \frac{h_j}{\Lambda} .
\end{aligned} \tag{14}$$

où  $\Lambda$  désigne la longueur d'onde ( $k = 2\pi/\Lambda$ )

L'annulation du déterminant subsiste quand on multiplie tous les termes d'une ligne ou d'une colonne par un même nombre. Utilisons cette propriété pour simplifier, en multipliant:

les lignes 3,4,7 et 8 par  $k$ ; les colonnes 1 et 2 par  $\frac{P_1^2}{k^2}$ , 5 et 6 par  $\frac{P_2^2}{k^2}$ ...

les colonnes 3 et 4 par  $\frac{Q_1^2}{k^2}$ , 7 et 8 par  $\frac{Q_2^2}{k^2}$ ...

les colonnes 9 et 10 par des exponentielles correspondantes d'arguments de signes opposés.

Après les transpositions suivantes pour les coefficients des exponentielles:

$$\begin{aligned}
r_m &\Rightarrow S_m \quad s_m \Rightarrow R_m \quad \beta_m \Rightarrow V_m \quad \Gamma_m \Rightarrow U_m \\
k &\Rightarrow P_m^2 \text{ dans les colonnes } r_m \text{ ou } Q_m^2 \text{ dans les colonnes } s_m \\
\alpha_m &\Rightarrow T_m \text{ dans les colonnes } r_m \text{ ou } W_m \text{ dans les colonnes } s_m
\end{aligned} \tag{15}$$

le déterminant prend alors l'allure donnée au tableau 2.

$A'_1$	$B'_1$	$C'_1$	$D'_1$	$A'_2$	$B'_2$	$C'_2$	$D'_2$	$A'_3$	$C'_3$
$T_1$	$T_1$	$V_1$	$V_1$	0	0	0	0	0	0
$U_1$	$-U_1$	$W_1$	$-W_1$	0	0	0	0	0	0
$P_1^2 e^{X_{11}}$	$P_1^2 e^{-X_{11}}$	$R_1 e^{Y_{11}}$	$R_1 e^{-Y_{11}}$	$-P_2^2 e^{X_{21}}$	$-P_2^2 e^{-X_{21}}$	$-R_2 e^{Y_{21}}$	$-R_2 e^{-Y_{21}}$	0	0
$S_1 e^{X_{11}}$	$-S_1 e^{-X_{11}}$	$Q_1^2 e^{Y_{11}}$	$-Q_1^2 e^{-Y_{11}}$	$-S_2 e^{X_{21}}$	$S_2 e^{-X_{21}}$	$-Q_2^2 e^{Y_{21}}$	$Q_2^2 e^{-Y_{21}}$	0	0
$T_1 e^{X_{11}}$	$T_1 e^{-X_{11}}$	$V_1 e^{Y_{11}}$	$V_1 e^{-Y_{11}}$	$-T_2 e^{X_{21}}$	$-T_2 e^{-X_{21}}$	$-V_2 e^{Y_{21}}$	$-V_2 e^{-Y_{21}}$	0	0
$U_1 e^{X_{11}}$	$-U_1 e^{-X_{11}}$	$W_1 e^{Y_{11}}$	$-W_1 e^{-Y_{11}}$	$-U_2 e^{X_{21}}$	$U_2 e^{-X_{21}}$	$-W_2 e^{Y_{21}}$	$W_2 e^{-Y_{21}}$	0	0
0	0	0	0	$P_2^2 e^{X_{22}}$	$P_2^2 e^{-X_{22}}$	$R_2 e^{Y_{22}}$	$R_2 e^{-Y_{22}}$	$P_3^2$	$R_3$
0	0	0	0	$S_2 e^{X_{22}}$	$-S_2 e^{-X_{22}}$	$Q_2^2 e^{Y_{22}}$	$-Q_2^2 e^{-Y_{22}}$	$S_3$	$Q_3^2$
0	0	0	0	$T_2 e^{X_{22}}$	$T_2 e^{-X_{22}}$	$V_2 e^{Y_{22}}$	$V_2 e^{-Y_{22}}$	$T_3$	$V_3$
0	0	0	0	$U_2 e^{X_{22}}$	$-U_2 e^{-X_{22}}$	$W_2 e^{Y_{22}}$	$-W_2 e^{-Y_{22}}$	$U_3$	$W_3$

Tableau 2.

Sous cette forme, son calcul numérique n'est possible que dans la mesure où tous ses termes sont réels. Aussi, nous le réécrivons sous une forme plus générale (tableau 3), par introduction de fonctions hyperboliques qui se transposent aisément en fonctions trigonométriques si les arguments  $X_{mj}$  et  $Y_{mj}$  deviennent imaginaires purs. On effectue pour cela les combinaisons suivantes des colonnes:  $Col1 \Rightarrow \frac{1}{2} (Col1+Col2)$        $Col2 \Rightarrow \frac{1}{2} (Col1-Col2)$       (16)

$$Col3 \Rightarrow \frac{1}{2} (Col3+Col4) \quad Col4 \Rightarrow \frac{1}{2} (Col3-Col4), \text{ etc...}$$

Nous obtenons alors la forme définitive du déterminant :

$T_1$	0	$V_1$	0	0	0	0	0	0	0
0	$U_1$	0	$W_1$	0	0	0	0	0	0
$P_1^2 \text{ch}X_{11}$	$P_1^2 \text{sh}X_{11}$	$R_1 \text{ch}Y_{11}$	$R_1 \text{sh}Y_{11}$	$-P_2^2 \text{ch}X_{21}$	$-P_2^2 \text{sh}X_{21}$	$-R_2 \text{ch}Y_{21}$	$-R_2 \text{sh}Y_{21}$	0	0
$S_1 \text{sh}X_{11}$	$S_1 \text{ch}X_{11}$	$Q_1^2 \text{sh}Y_{11}$	$Q_1^2 \text{ch}Y_{11}$	$-S_2 \text{sh}X_{21}$	$-S_2 \text{ch}X_{21}$	$-Q_2^2 \text{sh}Y_{21}$	$-Q_2^2 \text{ch}Y_{21}$	0	0
$T_1 \text{ch}X_{11}$	$T_1 \text{sh}X_{11}$	$V_1 \text{ch}Y_{11}$	$V_1 \text{sh}Y_{11}$	$-T_2 \text{ch}X_{21}$	$-T_2 \text{sh}X_{21}$	$-V_2 \text{ch}Y_{21}$	$-V_2 \text{sh}Y_{21}$	0	0
$U_1 \text{sh}X_{11}$	$U_1 \text{ch}X_{11}$	$W_1 \text{sh}Y_{11}$	$W_1 \text{ch}Y_{11}$	$-U_2 \text{sh}X_{21}$	$-U_2 \text{ch}X_{21}$	$-W_2 \text{sh}Y_{21}$	$-W_2 \text{ch}Y_{21}$	0	0
0	0	0	0	$P_2^2 \text{ch}X_{22}$	$P_2^2 \text{sh}X_{22}$	$R_2 \text{ch}Y_{22}$	$R_2 \text{sh}Y_{22}$	$P_3^2$	$R_3$
0	0	0	0	$S_2 \text{sh}X_{22}$	$S_2 \text{ch}X_{22}$	$Q_2^2 \text{sh}Y_{22}$	$Q_2^2 \text{ch}Y_{22}$	$S_3$	$Q_3^2$
0	0	0	0	$T_2 \text{ch}X_{22}$	$T_2 \text{sh}X_{22}$	$V_2 \text{ch}Y_{22}$	$V_2 \text{sh}Y_{22}$	$T_3$	$V_3$
0	0	0	0	$U_2 \text{sh}X_{22}$	$U_2 \text{ch}X_{22}$	$W_2 \text{sh}Y_{22}$	$W_2 \text{ch}Y_{22}$	$U_3$	$W_3$

Tableau 3

L'équation de dispersion obtenue par annulation de ce déterminant général permettra de calculer les différents modes d'ondes de Rayleigh-Sezawa dans la structure étudiée.

Vu la forme implicite de cette équation et la complexité des calculs nécessaires pour la recherche de ses racines, la méthode de résolution à utiliser ne peut être que numérique. Nous cherchons la célérité  $C$  qui apparaît dans les coefficients ( $P, Q, R, \dots$ ) pour des altitudes réduites  $h/\Lambda$  et donc d'épaisseurs de couches dont on impose les valeurs numériques.

## 5.2 . Cas d'un contact glissant.

L'application de ces conditions de passage aux milieux stratifiés à deux couches donne un système de huit équations à huit inconnues ( $A'_1, B'_1, C'_1, D'_1, A'_2, B'_2, A'_3, C'_3$ ) les coefficients  $C'_2$  et  $D'_2$  relatifs au liquide disparaissent (termes en  $s$ ).

Les divers déterminants relatifs à ce type de contact peuvent se déduire des précédents en supprimant leurs colonnes 7 et 8 ( $C'_2, D'_2$ ) et les lignes 3 et 7 qui expriment la continuité des composantes longitudinales  $u$ . Nous aboutissons ainsi de proche en proche au déterminant (Tableau 4) où nous notons aussi la disparition des termes en  $U_2=2\mu_2.S_2$  ( $\mu_2=0$ )

$$\begin{vmatrix} T_1 & 0 & V_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U_1 & 0 & W_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_1 \text{sh} X_{11} & S_1 \text{ch} X_{11} & Q_1^2 \text{sh} Y_{11} & Q_1^2 \text{ch} Y_{11} & -S_2 \text{sh} X_{21} & -S_2 \text{ch} X_{21} & 0 & 0 \\ T_1 \text{ch} X_{11} & T_1 \text{sh} X_{11} & V_1 \text{ch} Y_{11} & V_1 \text{sh} Y_{11} & -T_2 \text{ch} X_{21} & -T_2 \text{sh} X_{21} & 0 & 0 \\ U_1 \text{sh} X_{11} & U_1 \text{ch} X_{11} & W_1 \text{sh} Y_{11} & W_1 \text{ch} Y_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_2 \text{sh} X_{22} & S_2 \text{ch} X_{22} & S_3 & Q_3^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T_2 \text{ch} X_{22} & T_2 \text{sh} X_{22} & T_3 & V_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & U_3 & W_3 \end{vmatrix} = 0$$

Tableau 4

Remarque:

Quelle que soit la valeur de la célérité de propagation de l'onde, le déterminant est toujours réel ( les colonnes sont soit réelles ou imaginaires pures).

## 6 . Calcul des amplitudes de déplacements dans le système.

La célérité  $C$  étant connue par annulation du déterminant (tableau 3 ou 4) il est maintenant possible de calculer les amplitudes des composantes parallèles  $u_m$  et perpendiculaires  $v_m$  des vecteurs déplacements  $\vec{D}_m$  des divers milieux à partir du déterminant tableau 3 non simplifié, ce qui correspond pour

les colonnes 9 et 10 au tableau 
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ P_3^2 e^{X_{32}} & R_3 e^{Y_{32}} \\ S_3 e^{X_{32}} & Q_3^2 e^{Y_{32}} \\ T_3 e^{X_{32}} & V_3 e^{Y_{32}} \\ U_3 e^{X_{32}} & W_3 e^{Y_{32}} \end{vmatrix}$$
 . Il faut pour cela, résoudre les

systèmes d'équations données par les conditions aux limites et reliant les constantes d'intégration  $A'_m, B'_m, C'_m, D'_m \dots$  des solutions (8').

Il est commode de normaliser tous ces termes par rapport à l'amplitude de la composante perpendiculaire à la surface, quand  $y = 0$ .

Les diverses composantes s'écrivent alors:

$$u_m = \left[ k(A'_m e^{r_m y} + B'_m e^{-r_m y}) + s_m(C'_m e^{s_m y} + D'_m e^{-s_m y}) \right] e^{j(kx - \omega t)}$$

$$v_m = -j \left[ r_m(A'_m e^{r_m y} - B'_m e^{-r_m y}) + k(C'_m e^{s_m y} - D'_m e^{-s_m y}) \right] e^{j(kx - \omega t)} \quad (8')$$

pour le substrat:  $B'_3 = D'_3 = 0$

La partie réelle de ces composantes est donnée par:

$$\Re(u_m) = \left[ k(A'_m e^{r_m y} + B'_m e^{-r_m y}) + s_m(C'_m e^{s_m y} + D'_m e^{-s_m y}) \right] \cos(kx - \omega t)$$

$$= U_m(y) \cos(kx - \omega t) \quad (17)$$

$$\Re(v_m) = \left[ r_m(A'_m e^{r_m y} - B'_m e^{-r_m y}) + k(C'_m e^{s_m y} - D'_m e^{-s_m y}) \right] \sin(kx - \omega t)$$

$$= V_m(y) \sin(kx - \omega t)$$

où  $U_m(y)$  et  $V_m(y)$  sont les amplitudes de déplacements

Maintenant que la célérité  $C$  est supposée connue  $r_m$  et  $s_m$  s'écrivent:

$$r_m = k \sqrt{1 - \frac{C^2}{C_{l_m}^2}} \quad \text{et} \quad s_m = k \sqrt{1 - \frac{C^2}{C_{t_m}^2}}$$

A partir du déterminant généralisé (tableau 3), les amplitudes de déplacements dans les couches deviennent :



$$\begin{aligned}
 U_m(y) &= k(A_m \operatorname{chr}_m y + B_m \operatorname{shr}_m y) + s_m(C_m \operatorname{chs}_m y + D_m \operatorname{shs}_m y) \\
 V_m(y) &= r_m(A_m \operatorname{shr}_m y + B_m \operatorname{chr}_m y) + k(C_m \operatorname{shs}_m y + D_m \operatorname{chs}_m y) \quad (18)
 \end{aligned}$$

où  $A_m$ ,  $B_m$ ,  $C_m$ ,  $D_m$  sont les constantes d'intégration.

## 7. Energie acoustique de déformation.

L'énergie acoustique de déformation, par unité de volume, dans un milieu, est donnée par la relation:

$$W = 1/2 C_{ijkl} e_{kl} e_{ij} \quad (19)$$

qui devient, si le milieu est isotrope (3):

$$W = 1/2 \lambda e_{ii} \delta_{ij} e_{ij} + \mu e_{ij}^2 \quad (20)$$

où  $\delta_{ij}$  désigne le symbole de Kronecker .

(20) s'explique en :

$$W = \frac{1}{2} \lambda_m (e_{11} + e_{22})_m^2 + \mu_m (e_{11}^2 + 2e_{12}^2 + e_{22}^2)_m \quad (20')$$

$$\text{avec } e_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad e_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad \text{et} \quad e_{22} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

Dans les différents cas traités, les amplitudes et les énergies sont fonction d'exponentielles réelles ou de sinus et de cosinus. Ainsi:

♦ pour le cas *d'ondes de type Rayleigh*, les amplitudes et les énergies sont exprimées par des exponentielles réelles;

♦ pour celui *d'ondes de Rayleigh-Sezawa*, les amplitudes et les énergies comportent des exponentielles fonction de  $r_m$  et des sinus et cosinus fonction de  $s_m$ ;

♦ et celui *d'ondes de Sezawa*, les amplitudes et les énergies sont exprimées par des cosinus et des sinus.

Pour le substrat, les amplitudes et les énergies sont, dans tous les cas, exprimées par des exponentielles réelles.

Utilisant les composantes réelles des déplacements et prenant la valeur moyenne temporelle de (20') on obtient:

$$\begin{aligned} \langle W \rangle_m &= \frac{\lambda_m}{4} (r_m^2 - k^2)^2 L_m^{+2} + \frac{\mu_m}{2} (k^2 L_m^+ + k s_m M_m^+)^2 + \\ &\frac{\mu_m}{2} (r_m^2 L_m^+ + k s_m M_m^+)^2 + \frac{\mu_m}{4} (2k r_m L_m^- + (k^2 + s_m^2) M_m^-)^2 \end{aligned} \quad (21)$$

avec les notations suivantes:

$$L_m^\pm = A'_m e^{r_m y} \pm B'_m e^{-r_m y} \quad M_m^\pm = C'_m e^{s_m y} \pm D'_m e^{-s_m y} \quad (22)$$

$$\text{où } L_m^+ = A_m \text{chr}_{m,y} + B_m \text{shr}_{m,y}; \quad L_m^- = A_m \text{shr}_{m,y} + B_m \text{chr}_{m,y}$$

$$M_m^+ = C_m \text{chs}_{m,y} + D_m \text{shs}_{m,y}; \quad M_m^- = C_m \text{shs}_{m,y} + D_m \text{chs}_{m,y} \quad (22')$$

**Remarque:** cas d'un contact glissant

Les amplitudes et l'énergie dans le milieu 2 peuvent être déduites de (18) et (21). En effet les coefficients  $C'_2$  et  $D'_2$  relatifs au liquide disparaissent et (18) devient :

$$U_2(y) = k(A_2 \text{chr}_{2,y} + B_2 \text{shr}_{2,y})$$

$$V_2(y) = r_2(A_2 \text{shr}_{2,y} + B_2 \text{chr}_{2,y})$$

de même pour  $\mu_2=0$  (21) donne

$$\langle W \rangle_2 = \frac{\lambda_2}{4} (r_2^2 - k^2)^2 L_2^{+2} \quad (23)$$

$$\text{où } L_2^+ = A_2 \text{chr}_{2,y} + B_2 \text{shr}_{2,y}$$

Pour le milieu (1) et (3) les relations définies précédemment (17; 18 et 21) restent valables

Les constantes d'intégration sont déterminées par la résolution du système linéaire associé au déterminant du tableau 4

## Chapitre 3

### ETUDE NUMERIQUE DES PROBLEMES DE COLLAGE

## Chapitre 3

### ETUDE NUMERIQUE DES PROBLEMES DE COLLAGE

#### 1. Objectif

L'objectif global de ce chapitre est l'application des résultats précédents à l'étude de l'adhésion-cohésion.

Il nous faut tout d'abord choisir le modèle à étudier, c'est à dire définir les natures du substrat, de la colle et de la lame collée et préciser les paramètres retenus susceptibles d'être significatifs pour représenter la liaison par collage. Le choix du modèle doit permettre une réalisation expérimentale ultérieure que les résultats de cette étude théorique devraient guider.

Ensuite, compte tenu des impératifs du modèle choisi, nous devons réaliser un programme de calcul permettant de tracer des courbes de dispersion, d'amplitudes et d'énergie en chaque point du système en fonction des paramètres significatifs retenus et l'appliquer à notre modèle.

Puis, à partir des résultats numériques nous définirons un coefficient de sensibilité de l'adhésion aux ondes concernées (les ondes de surface ou de R-S) et nous déterminerons les zones de sensibilité maximale.

Enfin nous établirons quelques résultats plus généraux malgré la difficulté due au grand nombre de paramètres irréductibles.

#### 2. Choix du modèle

Les matériaux adhésifs disponibles sur le marché sont nombreux et de natures variées [ colles phénoliques, colles époxydes, cyanoacrylate etc.....]

Malheureusement aucune table de caractéristiques ne donne les paramètres acoustiques permettant de réaliser un modèle calculable en vue d'évaluer l'aptitude des ondes de Rayleigh-Sezawa à détecter l'adhésion. Pour pallier cet inconvénient majeur, nous avons imaginé le système simple suivant.

Une lame de plexiglas d'épaisseur  $e_1=100 \mu\text{m}$  est fixée par une lame de colle d'épaisseur  $e_2=10 \mu\text{m}$  à un substrat d'aluminium, les caractéristiques du plexiglas et de l'aluminium étant bien connues (Tableau 5). La colle sera constituée par le monomère du plexiglas (métacrylate d'éthyle) qui durcira par polymérisation progressive et prendra les caractéristiques du plexiglas solide.

Cette polymérisation peut être obtenue par insolation aux rayons ultraviolets: le modèle étudié pourra donc être réalisé expérimentalement.

Pour simplifier, nous avons négligé la viscosité du monomère liquide ( $\mu$  est réel) et nous avons admis que la polymérisation se réalisait à masse volumique  $\rho$  et à coefficient de Lamé  $\lambda$  constants. Nous savons que ce dernier coefficient a une faible influence sur la célérité des ondes de Rayleigh et Rayleigh-Sezawa [23] (annexe 1).

En d'autres termes, vouloir étudier l'évolution de la célérité à une fréquence donnée, au fur et à mesure de la polymérisation, revient à calculer vitesse, amplitudes et énergie en fonction de  $\mu$  [ $0 < \mu < \mu_m$ ]  $\mu = 0$  correspondant à la condition glissante : " colle liquide ";  $\mu = \mu_m$  étant la valeur maximale égale à celle du plexiglas solide (polymérisation achevée).

Nous admettons que la colle reste homogène et quelle ne subit aucune variation de propriété à proximité des surfaces d'aluminium et du plexiglas. Cette hypothèse est simplificatrice compte tenu de l'article de KNOLLMAN.G.G et HARTOG.J [4].

Matériaux	$\lambda$ en MPa	$\mu$ en MPa	$\rho$ en kg/m <sup>3</sup>
Plexiglas	5447	1483	1180
"Colle"	5447	$0 \leq \mu \leq 1483$	1180
Aluminium	55200	25900	2700

Tableau 5

Le programme de calcul de la célérité  $C$  des ondes de Rayleigh et Rayleigh-Sezawa devra donc nous permettre de calculer son évolution soit, à fréquence donnée, en fonction du coefficient  $\mu$  [ $0 < \mu < \mu_m$ ], soit, à valeur de  $\mu$  donné, en fonction de la fréquence .

### 3. Organisation du calcul

#### 3.1. Calcul de la célérité $C$

Dans tous les cas, nous fixons le nombre de milieux, les caractéristiques constantes de chaque milieu  $m$ : masse volumique  $\rho_m$ , les coefficients de Lamé  $\lambda_m$ ,  $\mu_m$  et les épaisseurs des couches  $e_m$ . Puis selon que nous calculons,  $C=f(\mu_2)$  ou  $C=f(F)$ , nous fixons la fréquence  $F$  ou la valeur retenue de  $\mu_2$ . Enfin, nous fixons les bornes de variations de la célérité recherchée et de la variable indépendante ( $\mu$  ou  $F$ ).

Alors une fois les paramètres précédents fixés ( $\rho_m$ ,  $\lambda_m$ ,  $\mu_m$ ,  $e_m$ ,  $F$ ) le déterminant du tableau 3 ou du tableau 4 selon la nature du contact n'est plus fonction que de la célérité  $C$  cherchée. Le principe de l'algorithme est simple; par balayage entre les bornes choisies, avec un pas de variation convenable, les valeurs voisines  $C_1$  et  $C_2$  pour lesquelles le déterminant change de signe

sont calculées. Ensuite, l'intervalle  $\Delta C = C_1 - C_2$  est réduit de telle façon que  $\Delta C \leq \varepsilon$ ,  $\varepsilon$  précision choisie égale à 0,001 m/s.

Compte tenu des bornes entre lesquelles  $C$  varie plusieurs solutions peuvent être trouvées, correspondant à différents modes qui seront numérotés par ordre croissant de célérité.

Une fois ce calcul achevé, les courbes  $C=f(\mu)$  à  $F$  donné, ou  $C=f(F)$  à  $\mu$  donné peuvent être tracées.

### 3.2. Calcul des amplitudes et des énergies

La méthode du calcul des amplitudes est exposée au chapitre 2 § 6.

Pour un mode donné,  $C$  étant connu, la résolution du système d'équations correspondant au tableau 3 (ou 4) où les colonnes 9 et 10 n'ont pas été simplifiées par les exponentielles, donne la valeur des coefficients  $A'_m$ ,  $B'_m$ ,..... Toutes les amplitudes sont normalisées en choisissant l'amplitude transversale pour  $y=0$  égale à l'unité.

Alors, les formules (18) donnent en chaque point d'ordonnée  $y$  ou  $h/\Lambda$  les amplitudes  $U_m$  et  $V_m$ .

L'énergie sera calculée en fonction de  $y$  ou mieux de  $h/\Lambda$  par la relation (21) compte tenu de (22) ou (22') et l'énergie à la surface libre  $y=0$  choisie comme unité.

## 4. Etude du modèle

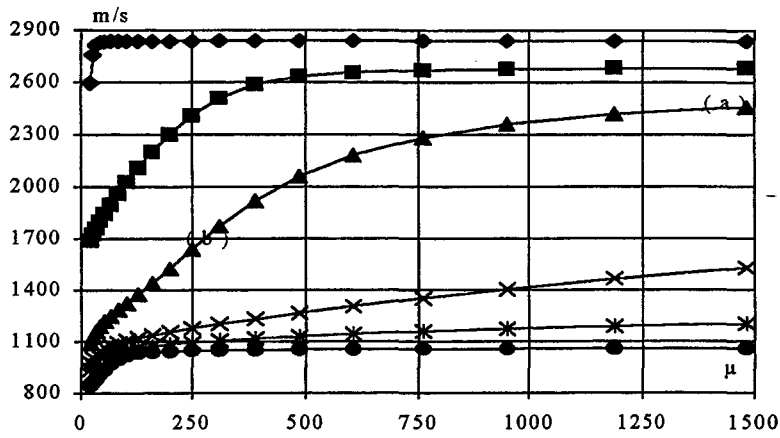
### 4.1. Evolution de la célérité en fonction de $\mu$

Les courbes de dispersion sont tracées pour les trois premiers modes à différentes fréquences portées en paramètres (fig 2a, 2b, 2c).

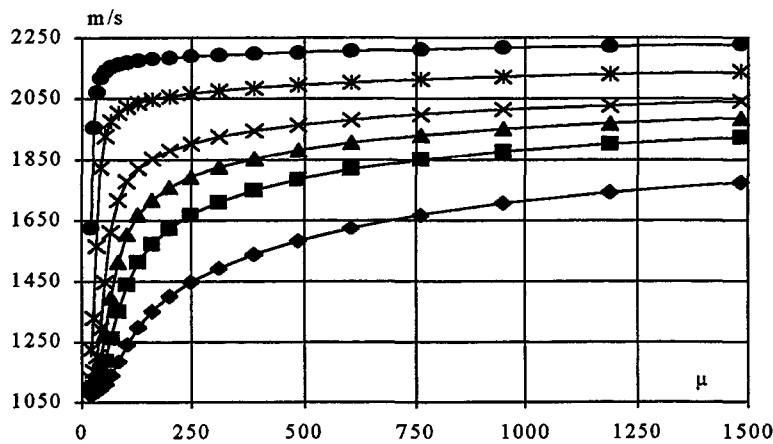
Les courbes (fig 2b', 2c') relatives aux modes 2 et 3 détaillent la région correspondant à  $0 < \mu < 200$ .

Ces courbes montrent, pour chaque mode, l'existence d'une fréquence  $F$  où la variation de célérité est importante et cette fréquence augmente avec l'ordre du mode. (4MHz en mode 1, 9MHz en mode 2 et 12MHz en mode 3)

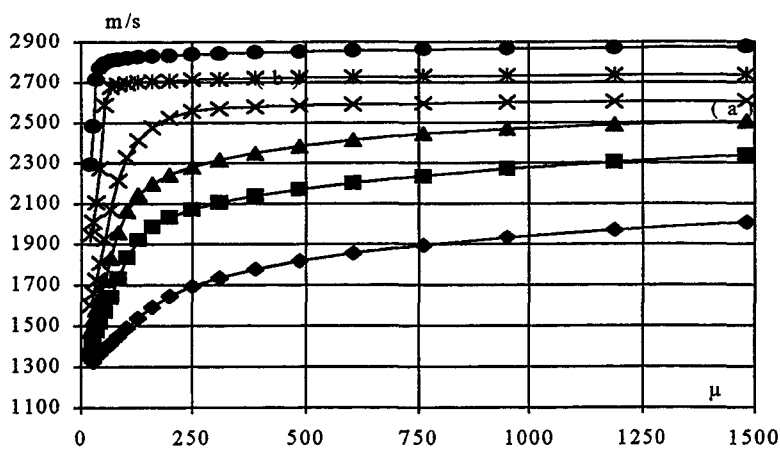
Chaque courbe peut comporter les trois types d'ondes (O.R, O.R-S et O.S) qui se succèdent et se raccordent sans accident de pente.



a) Mode 1

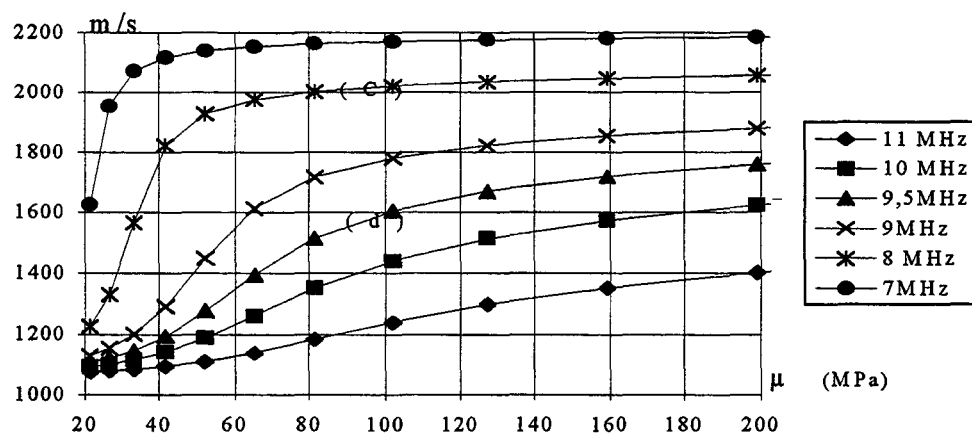


b) Mode 2

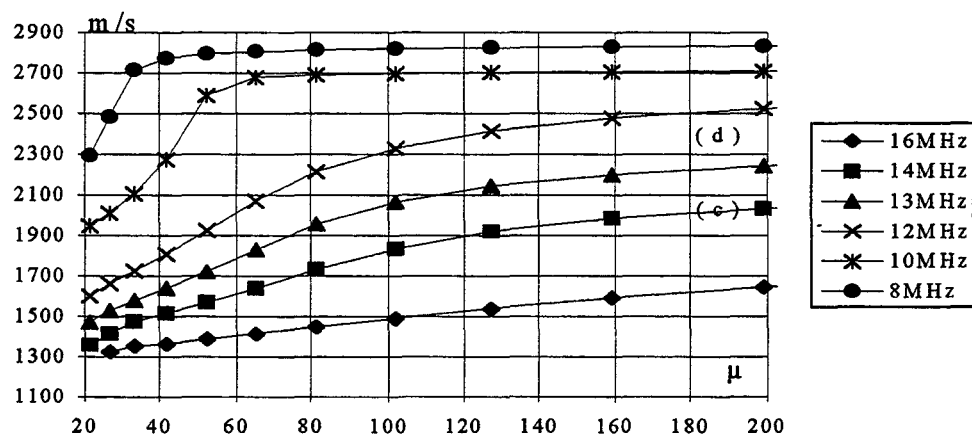


c) Mode 3

Fig. 2 Célérity en fonction de  $\mu$  (MPa)



b') Mode 2 détail



c') Mode 3 détail

Fig. 2 Célérité en fonction de μ (MPa)

#### 4.2. Evaluation de la sensibilité à l'adhésion

Pour évaluer l'aptitude des ondes de Rayleigh et Rayleigh-Sezawa à caractériser la variation de l'adhérence nous allons introduire le coefficient  $\sigma$  défini par la relation :

$$\sigma = \frac{C_{\max} - C_{\min}}{C_{\max} + C_{\min}} \cdot 2$$



Pour chacun de ces trois modes, nous avons calculé les courbes de dispersion en fonction de la fréquence pour différentes valeurs de l'épaisseur  $e_2$  de la colle.

Les courbes (fig 3) donnent l'évolution de  $\sigma$  en fonction du produit Fréquence x épaisseur  $e_1$  (MHz x  $\mu\text{m}$ ) et selon la valeur du paramètre  $e_2/e_1$  exprimée en % .

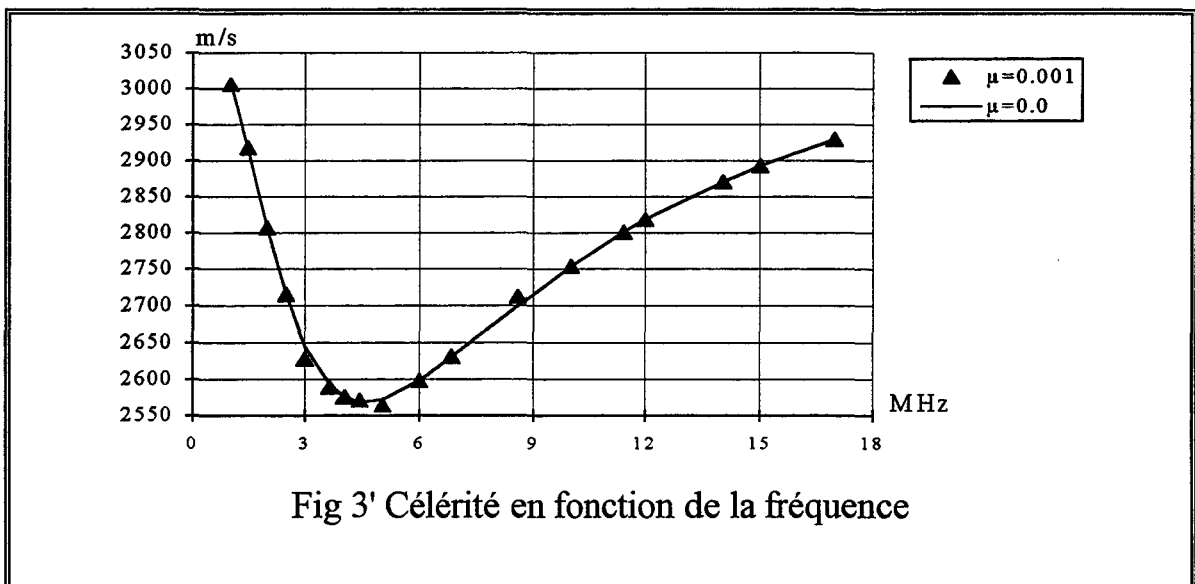
Ces courbes montrent:

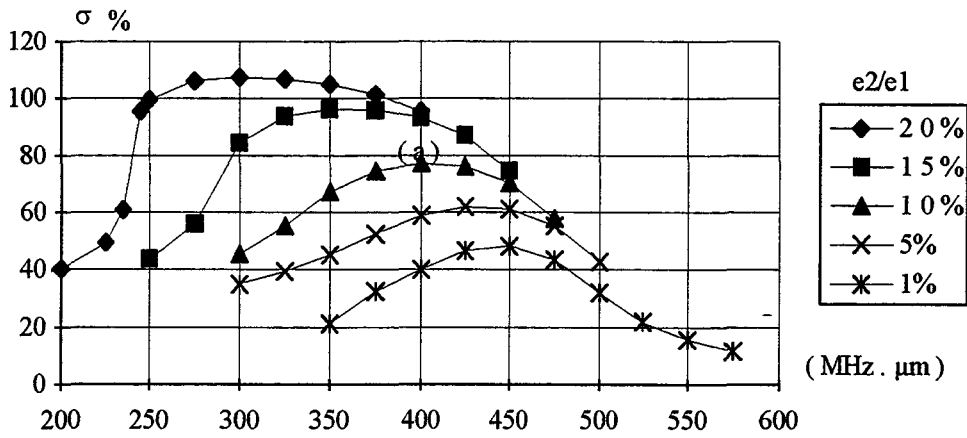
- la très grande sensibilité du 1er mode qui est supérieure à 100%
- une croissance de sensibilité avec l'épaisseur de colle

**Remarques :**

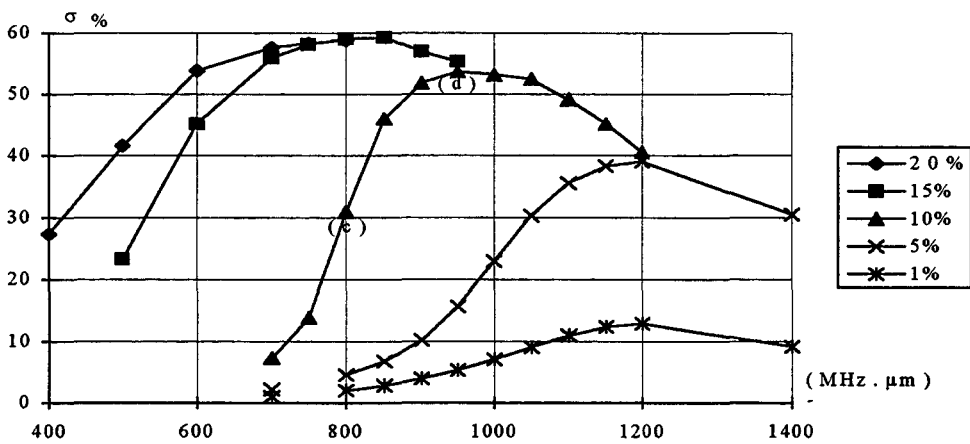
- Comparées aux résultats fournis par la bibliographie[12, 14] ces valeurs calculées à partir de notre modèle, sont beaucoup plus importantes. Dans les deux cas ces variations de célérité correspondent au passage d'un contact glissant à un contact rigide c'est à dire à la variation de l'adhésion. Il est donc clair que les ondes de surface semblent beaucoup plus sensible à ce phénomène que les ondes de volume.

- Le programme de calcul adapté au contact rigide (annulation du tableau 3), ne convient pas en principe au contact glissant ( $\mu=0$ ). Cependant si nous imposons  $\mu=0,001$  la courbe de dispersion obtenue avec ce programme coïncide assez bien [au pire à 1% près à l'abord du minimum (3MHz) et à 0,5% près dans la région d'inflexion (8MHz)] avec celle calculée par le programme spécifique du contact glissant (annulation du déterminant tableau 4) (fig3').

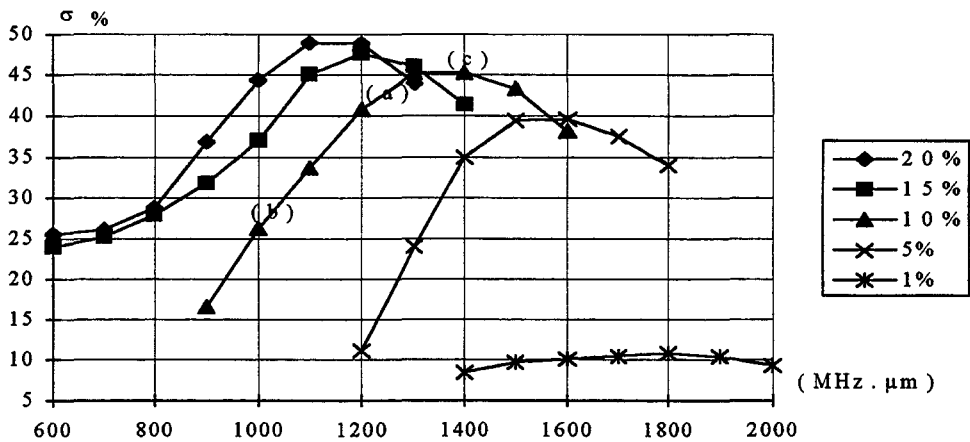




a) Mode 1.



b) Mode 2.



c) Mode 3.

Fig.3. Sensibilité  $\sigma$  en fonction de  $F \cdot e_1$  (MHz  $\cdot$   $\mu\text{m}$ ).

$$\sigma = 2 \cdot (C_{\max} - C_{\min}) / (C_{\max} + C_{\min})$$

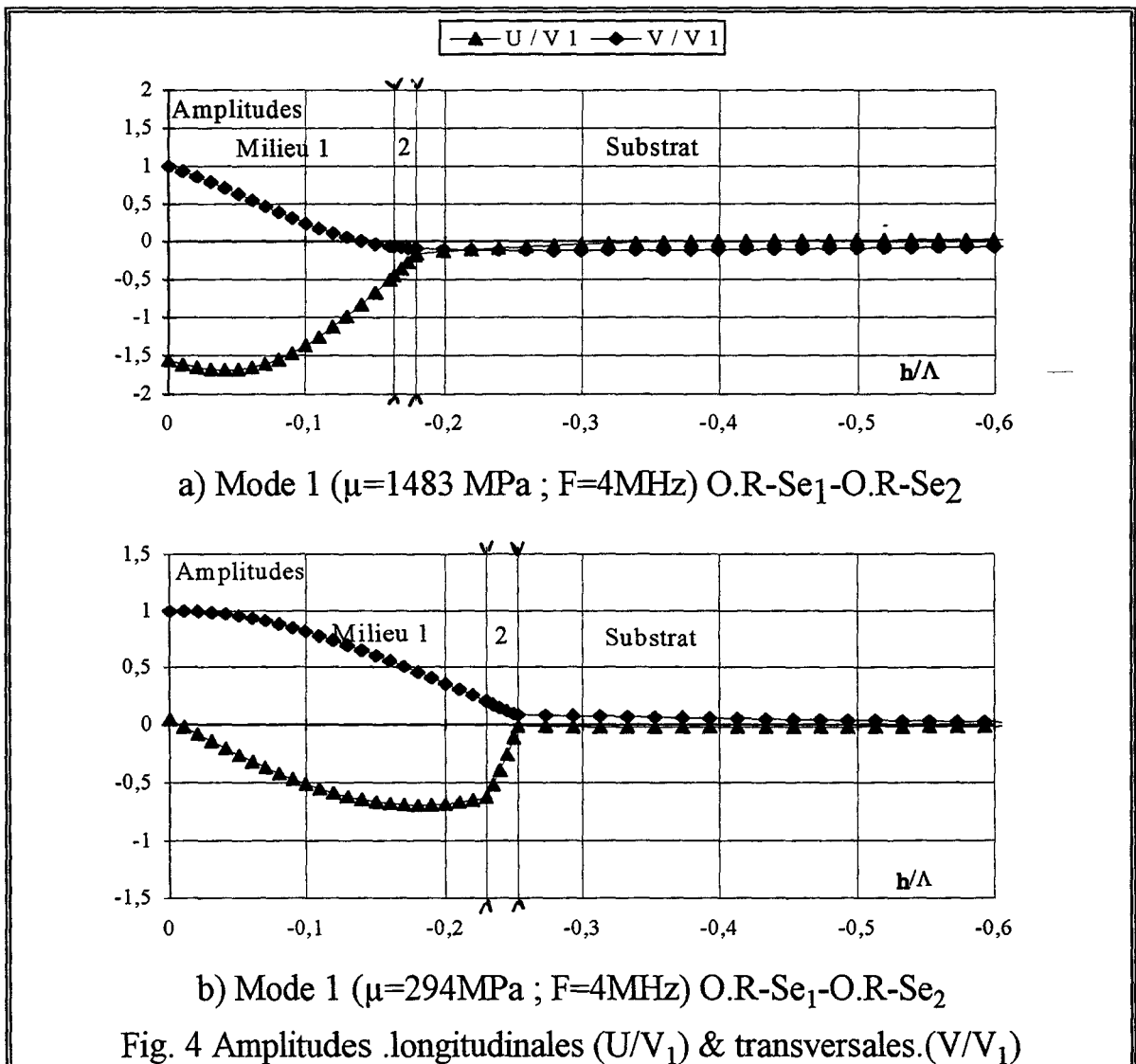
**Remarque:** Les points ( ) correspondant aux points où les amplitudes et les énergies ont été calculées.

### 4.3. Amplitudes de vibration (fig 4 et 5)

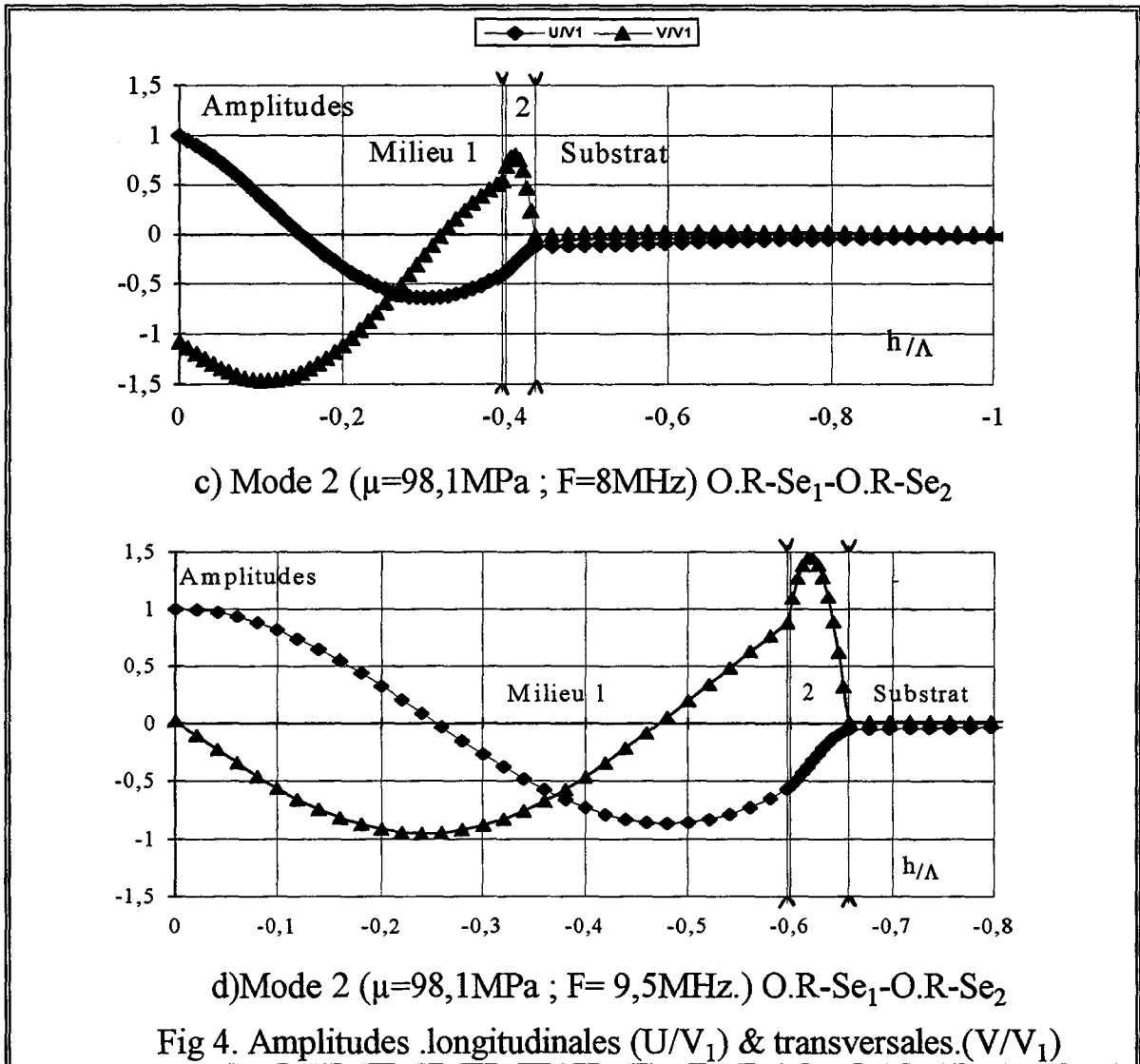
Les abscisses correspondent aux altitudes reduites  $h/\Lambda$  et les ordonnées aux amplitudes longitudinales  $U/V_1$  et transversales  $V/V_1$  ramenées à l'amplitude transversale  $V_1$  de la surface libre. La région indiquée par des flèches désigne la lame de colle.

Les amplitudes sont calculées pour les régions où la sensibilité est maximale ou proche du maximum. La nature des ondes dans le milieu 1 et 2 a été précisée sur les légendes des figures. Voici le détail:

*Mode 1*:  $F=4\text{MHz}$  (fig4a et 4b). Les points de calculs choisis : a) [ $F=4\text{MHz}$ ;  $\mu=1483\text{MPa}$ ] et b) [ $F=4\text{MHz}$ ;  $\mu=294\text{MPa}$ ] sont reportés sur la fig 2a; le premier est relatif à la partie de la courbe à faible pente, il y correspond des amplitudes du milieu 2 relativement faibles comparées à celles du milieu 1; le second est relatif à la région de pente maximale, les amplitudes longitudinales ont des valeurs comparables dans les milieux (1) et (2). Les amplitudes dans le substrat sont négligeables.

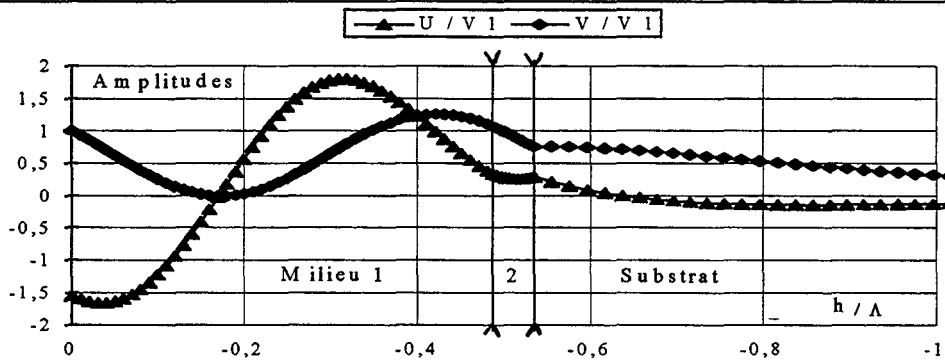


*Mode 2:* (fig 4c et 4d). Les points c) [ $F=8\text{MHz}$ ;  $\mu=98,1\text{MPa}$ ] et d) [ $F=9,5\text{MHz}$ ,  $\mu=98,1\text{MPa}$ ] sont transcrits sur la figure 2b'. Ici, dans ces deux cas, les amplitudes longitudinales dans la colle (milieu 2) sont significatives. Dans le second cas correspondant au maximum de sensibilité, les amplitudes dans le milieu 2 dépassent celles du milieu 1. Là encore, les amplitudes dans le substrat restent négligeables.

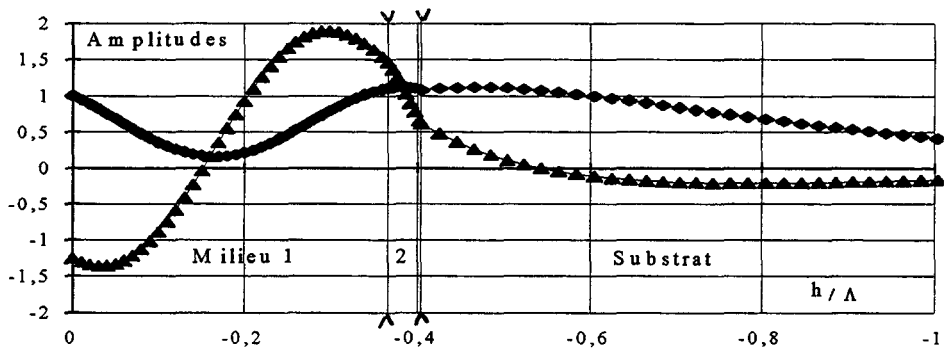


*Mode 3:* (fig 5), les points a) [ $F=12,5\text{MHz}$ ,  $\mu=1483,5\text{MPa}$ ] et

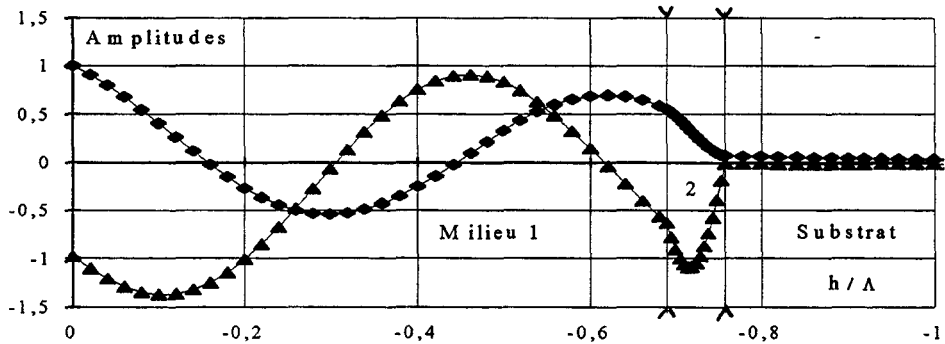
b) [ $F=10\text{MHz}$ ,  $\mu=490,5\text{MPa}$ ] correspondent aux régions plates des courbes (fig 2); les amplitudes dans la colle restent faibles par rapport à celles dans le milieu 1: le système est peu sensible aux variations de  $\mu$  donc aux variations de durcissement de la colle. Ici par contre , les amplitudes dans le substrat ne sont plus négligeables .



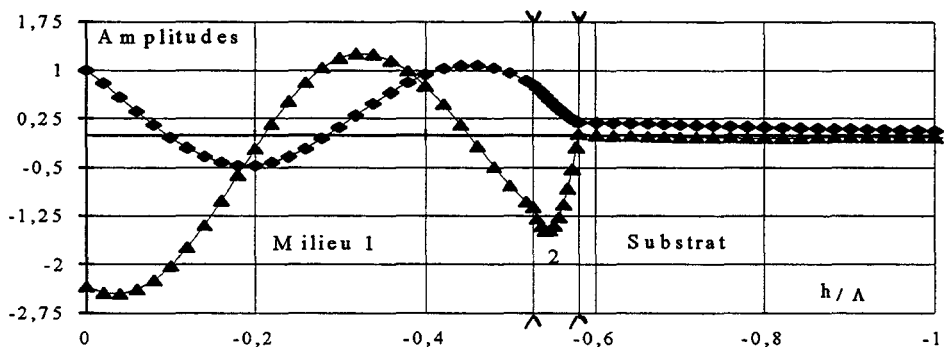
a) Mode 3 ( $\mu=1483\text{MPa}$  ;  $F=12,5\text{MHz}$ ) O.Se<sub>1</sub>-O.Se<sub>2</sub>



b) Mode 3 ( $\mu=490,5\text{MPa}$  ;  $F=10\text{MHz.}$ ) O.R-Se<sub>1</sub>-O.Se<sub>2</sub>



c) Mode 3 ( $\mu=196,2\text{MPa}$  ;  $F=14\text{MHz}$ ) O.R-Se<sub>1</sub>-O.R-Se<sub>2</sub>



d) Mode 3 ( $\mu=196,2\text{MPa}$  ;  $F=12,5\text{MHz}$ ) O.R-Se<sub>1</sub>-O.Se<sub>2</sub>

Fig 5. Amplitudes .longitudinales (U/V<sub>1</sub>) & transversales (V/V<sub>1</sub>)

Tout au contraire pour les courbes c) [ $F=14\text{MHz}$ ,  $\mu=196,2\text{MPa}$ ] et d) [ $F=12,5\text{MHz}$ ,  $\mu=196,2\text{MPa}$ ] région de pente non nulle, les amplitudes présentent dans la colle un maximum et ont des valeurs comparables à celles du milieu 1. Là, contrairement aux deux cas précédents, les amplitudes dans le substrat restent très faibles .

Ces considérations semblent établir une certaine corrélation entre la pente des courbes  $C=f(\mu)$  et les valeurs des amplitudes, principalement longitudinales, dans le milieu 2. Ce fait invite à penser que l'obtention de grandes amplitudes dans la colle est une situation privilégiée de détection de défaut de cohésion de la colle.

#### **Remarques**

- Au changement de milieu, dans tous ces cas nous avons un raccordement des courbes d'amplitudes.

- Un mauvais raccordement serait signe d'une perte de précision dans le calcul de la célérité.

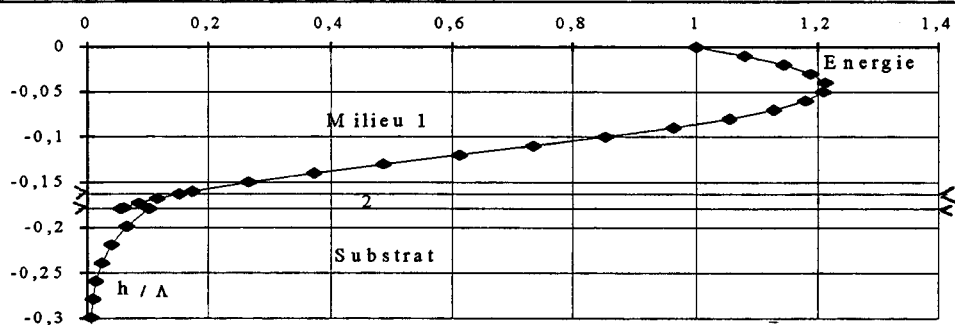
#### 4.4. Energie

Le mode de représentation est quelque peu changé: sont ici portées en abscisses les énergies  $w$  et en ordonnées les profondeurs exprimées en longueurs d'ondes ( $h/\Lambda$ ) (milieu 2 indiqué par des flèches)).

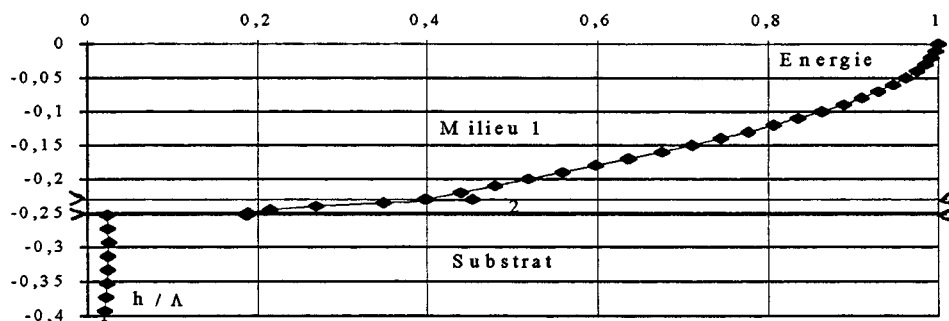
Les énergies (Fig 6a à d et 7a à d) sont calculées pour les mêmes valeurs de  $F$  et de  $\mu$  que pour les amplitudes. Les conclusions restent les mêmes. Un maximum de variation de  $C=f(\mu_2)$  est souvent corrélé à un maximum d'amplitude et d'énergie dans le milieu 2 (Exemple: comparaison des figures 6c et d avec figures 4c et d)

#### **Remarque .**

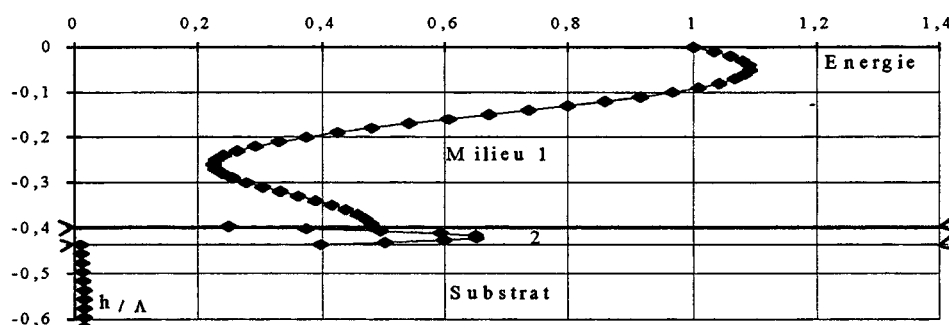
- Les énergies sont fonction des dérivées des déplacements [eq 20']; à déplacement nul, l'énergie peut prendre des valeurs significatives et même maximales (fig 5c et fig 7d) : dans le milieu 2, à l'interface colle-substrat, les amplitudes sont nulles mais l'énergie est maximale.



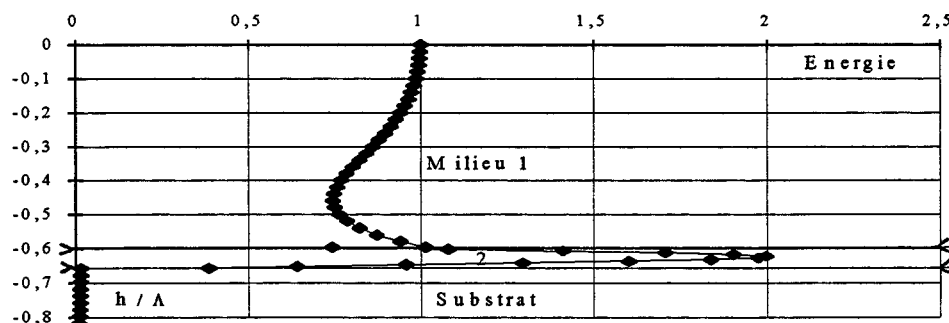
a) Mode 1 ( $\mu=1483,3\text{MPa}$  ;  $F=4\text{MHz}$ ) O.R- $\text{Se}_1$ -O.R- $\text{Se}_2$



b) Mode 1 ( $\mu=294,3\text{MPa}$  ;  $F=4\text{MHz}$ ) O.R- $\text{Se}_1$ -O.R- $\text{Se}_2$

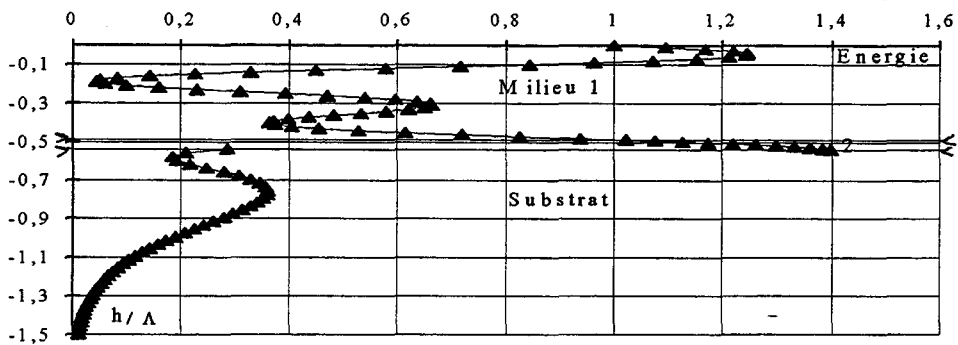


c) Mode 2 ( $\mu=98,1\text{MPa}$  ;  $F=8\text{MHz}$ ) O.R- $\text{Se}_1$ -O.R- $\text{Se}_2$

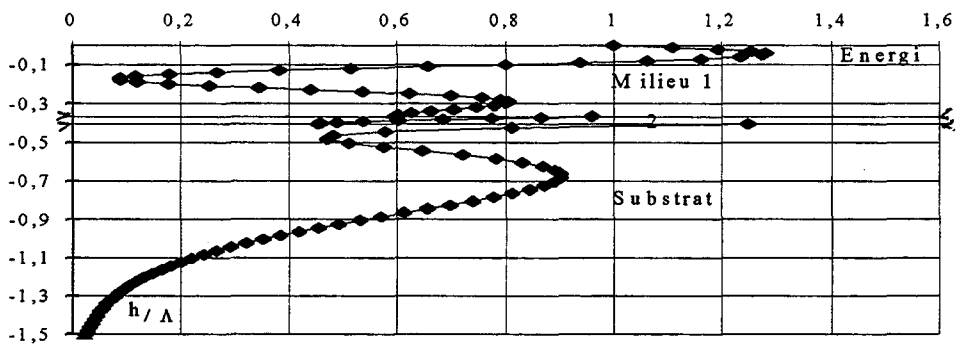


d) Mode 2 ( $\mu=98,1\text{ MPa}$  ;  $F=9,5\text{MHz}$ ) O.R- $\text{Se}_1$ -O.R- $\text{Se}_2$

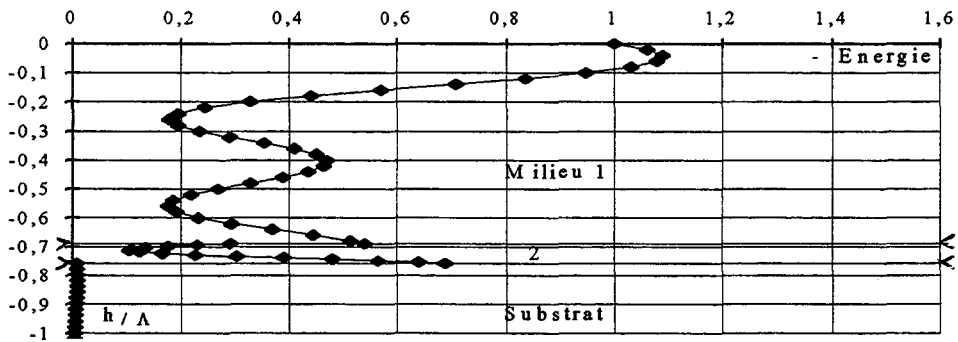
Fig 6. Energie en fonction de  $h/\Lambda$



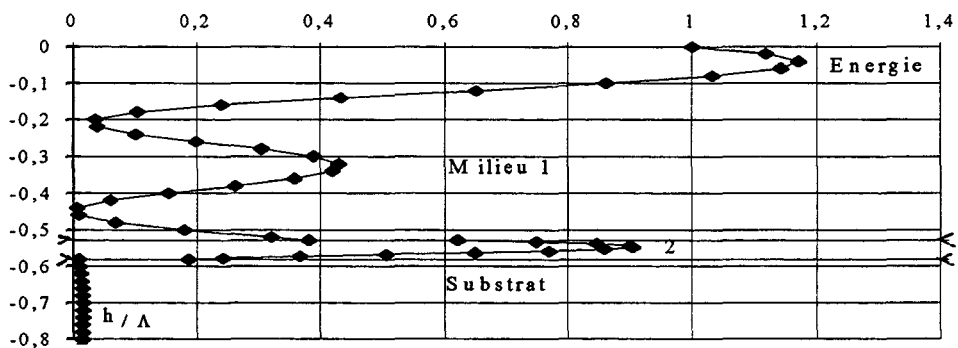
a) Mode 3 ( $\mu=1483,3\text{MPa}$  ;  $F=12,5\text{MHz}$ )  $\text{O.Se}_1\text{-O.Se}_2$



b) Mode 3 ( $\mu=490,5\text{MPa}$  ;  $F=10\text{MHz}$ )  $\text{O.R-Se}_1\text{-O.Se}_2$



c) Mode 3 ( $\mu=196,2\text{MPa}$  ;  $F=14\text{MHz}$ )  $\text{O.R-Se}_1\text{-O.R-Se}_2$



d) Mode 3 ( $\mu=196,2\text{MPa}$  ;  $F=12,5\text{MHz}$ )  $\text{O.R-Se}_1\text{-O.Se}_2$

Fig 7. Energie en fonction de  $h/\Lambda$



## 5. Quelques résultats généraux

Le nombre de variables restant important, il est difficile de traiter l'ensemble des cas, nous essaierons, cependant de mettre en relief quelques résultats plus généraux.

### 5.1. Cas limites

#### 5.1.1. En basse fréquence

Modifions le déterminant (tableau 1) en faisant apparaître dans chacun des termes la quantité  $\omega$ . Puisque  $k=\omega/C$ , posons à partir de (6') et (11):

$$\begin{aligned}
 r_m &= \omega \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{c_{1m}^2}} = \omega \cdot r'_m; & s_m &= \omega \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{c_{tm}^2}} = \omega \cdot s'_m \\
 \alpha_m &= \omega^2 \left[ (\lambda_m + 2\mu_m) \left( \frac{1}{c^2} - \frac{1}{c_{1m}^2} \right) - \frac{\lambda_m}{c^2} \right] = \omega^2 \alpha'_m \\
 \beta_m &= \omega^2 \frac{2\mu_m}{c} \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{c_{tm}^2}} = \omega^2 \beta'_m; & \gamma_m &= \omega^2 \frac{2\mu_m}{c} \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{c_{1m}^2}} = \omega^2 \gamma'_m
 \end{aligned} \tag{24}$$

En remplaçant les coefficients  $\alpha_m, \gamma_m, \beta_m, r_m, s_m$  et  $k$  par leurs valeurs en fonction de  $\omega, \alpha'_m, \gamma'_m, \beta'_m, r'_m, s'_m$ , divisant par  $\omega$  toutes les colonnes et les lignes 1, 2, 5, 6, 9 et 10 et faisant tendre les exponentielles vers 1, quand  $\omega$  tend vers 0 on obtient la forme (tableau 6).

$$\begin{bmatrix}
 \alpha'_1 & \alpha'_1 & \beta'_1 & \beta'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \gamma'_1 & -\gamma'_1 & \alpha'_1 & -\alpha'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & s'_1 & s'_1 & -\frac{1}{c} & -\frac{1}{c} & -s'_2 & -s'_2 & 0 & 0 \\
 r'_1 & -r'_1 & \frac{1}{c} & -\frac{1}{c} & -r'_2 & r'_2 & -\frac{1}{c} & \frac{1}{c} & 0 & 0 \\
 \alpha'_1 & \alpha'_1 & \beta'_1 & \beta'_1 & -\alpha'_2 & -\alpha'_2 & -\beta'_2 & -\beta'_2 & 0 & 0 \\
 \gamma'_1 & -\gamma'_1 & \alpha'_1 & -\alpha'_1 & -\gamma'_2 & \gamma'_2 & -\alpha'_2 & \alpha'_2 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & s'_2 & s'_2 & -\frac{1}{c} & -s'_3 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & r'_2 & -r'_2 & \frac{1}{c} & -\frac{1}{c} & -r'_3 & -\frac{1}{c} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha'_2 & \alpha'_2 & \beta'_2 & \beta'_2 & -\alpha'_3 & -\beta'_3 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma'_2 & -\gamma'_2 & \alpha'_2 & -\alpha'_2 & -\gamma'_3 & -\alpha'_3
 \end{bmatrix} = 0$$

Tableau 6

Effectuons les combinaisons suivantes des colonnes et des lignes:

$$\text{Col.1} \Rightarrow \frac{1}{2} (\text{Col.1} + \text{Col.2}) ; \text{Col.2} \Rightarrow \frac{1}{2} (\text{Col.1} - \text{Col.2})$$

$$\text{Col.3} \Rightarrow \frac{1}{2} (\text{Col.3} + \text{Col.4}) ; \text{Col.4} \Rightarrow \frac{1}{2} (\text{Col.3} - \text{Col.4}), \text{ etc...}$$

et transposons les colonnes 2 et 3 ; 6 et 7 puis dans une dernière étape, remplaçons:

$$\text{Lin.5} \Rightarrow \text{Lin.1} - \text{Lin.5} ; \text{Lin.6} \Rightarrow \text{Lin.2} - \text{Lin.6}$$

$$\text{Lin.9} \Rightarrow \text{Lin.9} - \text{Lin.5} ; \text{Lin.10} \Rightarrow \text{Lin.10} - \text{Lin.6}$$

Nous obtenons le déterminant du tableau 7

$$\begin{bmatrix} \alpha'_1 & \beta'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma'_1 & \alpha'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{c} & s'_1 & 0 & 0 & -\frac{1}{c} & -s'_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r'_1 & \frac{1}{c} & 0 & 0 & -r'_2 & -\frac{1}{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha'_2 & \beta'_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma'_2 & \alpha'_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{c} & s'_2 & 0 & s'_2 & \frac{1}{c} & s'_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r'_2 & \frac{1}{c} & r'_3 & \frac{1}{c} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha'_3 & \beta'_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma'_3 & \alpha'_3 \end{bmatrix} = 0$$

Tableau 7

qui se développe facilement par la méthode de Cramer en:

$$D = \left( \frac{\beta'_1}{c} - \alpha'_1 \cdot s'_1 \right) \left( \frac{\gamma'_1}{c} - \alpha'_1 \cdot r'_1 \right) \left( \frac{\beta'_2}{c} - \alpha'_2 \cdot s'_2 \right) \left( \frac{\gamma'_2}{c} - \alpha'_2 \cdot r'_2 \right) \left[ \alpha'^2_3 - \beta'_3 \cdot \gamma_3 \right]$$

Si C est différent de  $C_{t1}, C_{l1}, C_{t2}$  et  $C_{l2}$  les quatre premiers termes du produit sont différents de zéro. En effet, tenons compte de (24), nous aurons:

$$\begin{aligned} \frac{\beta'_1}{c} - \alpha'_1 \cdot s'_1 &= \rho_1 \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{c_{t1}^2}} & ; & \quad \frac{\beta'_2}{c} - \alpha'_2 \cdot s'_2 = \rho_2 \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{c_{t2}^2}} \\ \frac{\gamma'_1}{c} - \alpha'_1 \cdot r'_1 &= \rho_1 \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{c_{l1}^2}} & ; & \quad \frac{\gamma'_2}{c} - \alpha'_2 \cdot r'_2 = \rho_2 \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{c_{l2}^2}} \end{aligned} \quad (25)$$

et donc le déterminant s'annule si :

$$\left[ \alpha'_3{}^2 - \beta'_3 \cdot \gamma'_3 \right] = 0 \quad (26)$$

L'équation (26) n'est autre que l'équation de Rayleigh du milieu 3. En effet

en posant :  $\eta = \frac{c}{c_{t3}}$  et  $\xi = \frac{c_{t3}}{c_{l3}}$  et injectant les valeurs de (24) dans (26) nous aurons l'équation classique de Rayleigh pour le milieu 3:

$$\eta^6 - 8\eta^4 + 8(3 - 2\xi^2)\eta^2 - 16(1 - \xi^2) = 0$$

Ainsi, pour les basses fréquences, la célérité de l'onde de surface, tend vers celle de l'onde de Rayleigh du substrat.

### 5.1.2. En haute fréquence

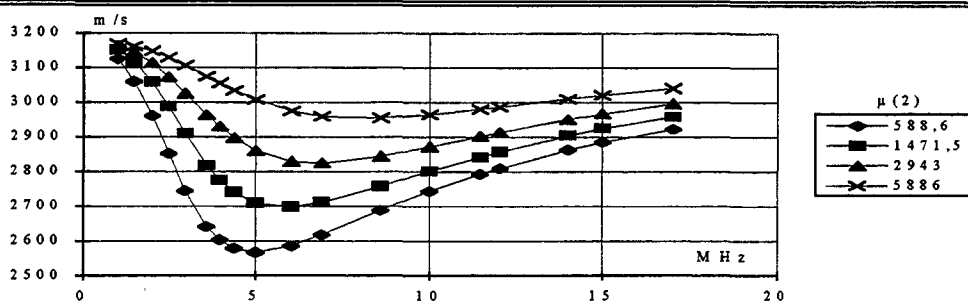
Les termes du déterminant au tableau 3 (chapitre 2 §3) fonction d'exponentielle complexes, se développent en cosinus et sinus ne tendant pas vers une valeur limite, si la fréquence tend vers l'infini. Il ne nous a pas été possible de trouver une célérité limite. Nous avons pensé que les calculs numériques pourraient peut être éclairer cette question. Pour cela, nous avons tracé quelques courbes de dispersion pour une série de valeurs de  $\mu$  (fig 8a,b,c,d) du système verre/colle/verre ( $\mu$  de la colle est pris arbitraire). Nous retrouvons aux basses fréquences la célérité de Rayleigh du substrat; par contre, en hautes fréquences les termes du déterminant changent d'ordre de grandeur et cela introduit une perte de précision qui rend impossible le calcul de la célérité dans cette région. Par le calcul des énergies, (fig 9a,b,c,d) l'onde est localisée dans la couche de colle.

### 5.2. Milieux ne différant que par leur impédance acoustique

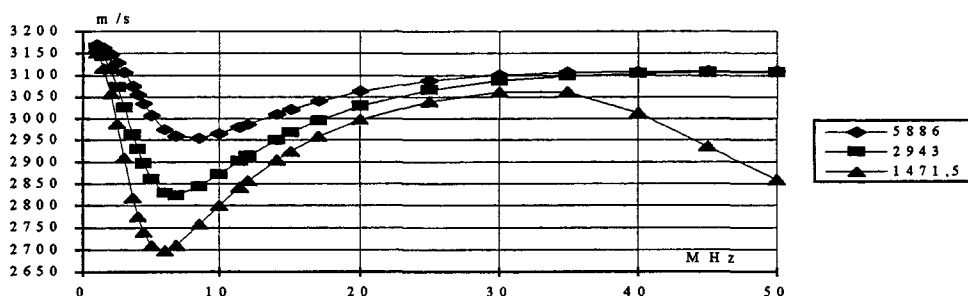
Entre deux milieux extrêmes identiques 1 et 3 on introduit un liant 2 dont les coefficients de Lamé et la masse volumique sont proportionnels à ceux des milieux extrêmes, avec un coefficient K de proportionnalité :

$$K = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

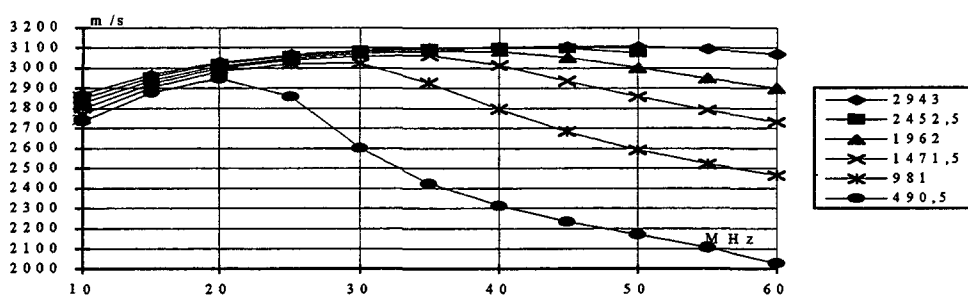
D'après (3') tous les milieux ont mêmes célérités longitudinales  $C_l$  et transversales  $C_t$  mais diffèrent toutefois par leurs impédances acoustiques:  $z_{ac} = \rho C$  qui sont dans ce même rapport K (à cause de  $\rho$ )



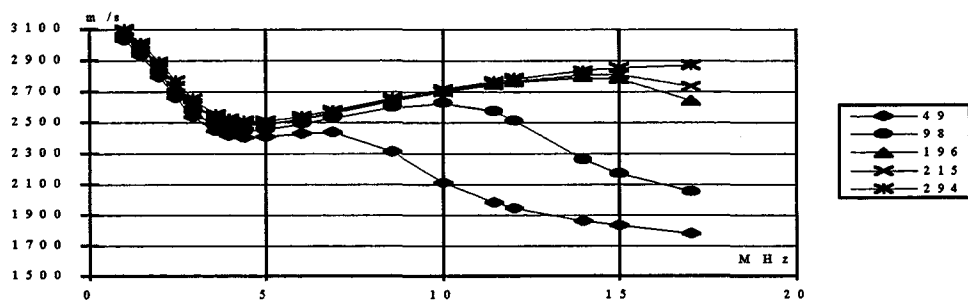
8 a



8 b



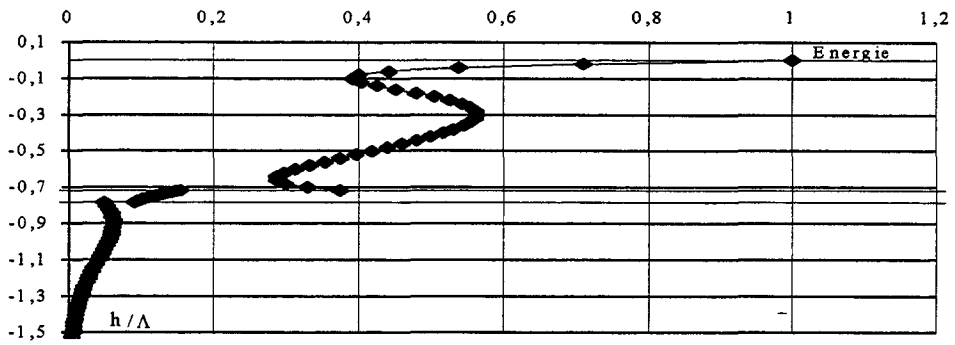
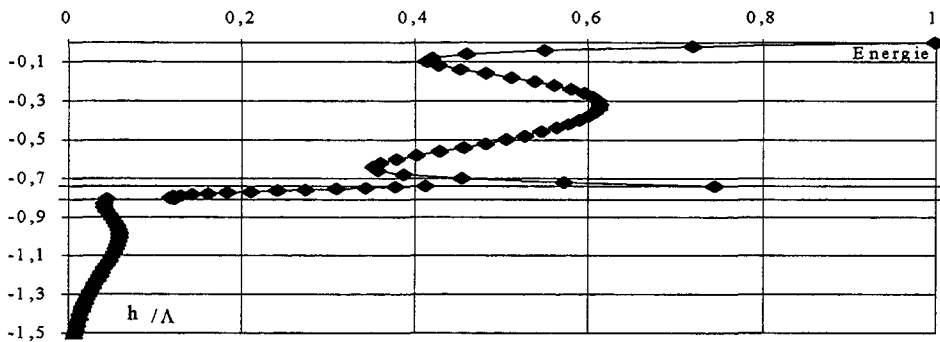
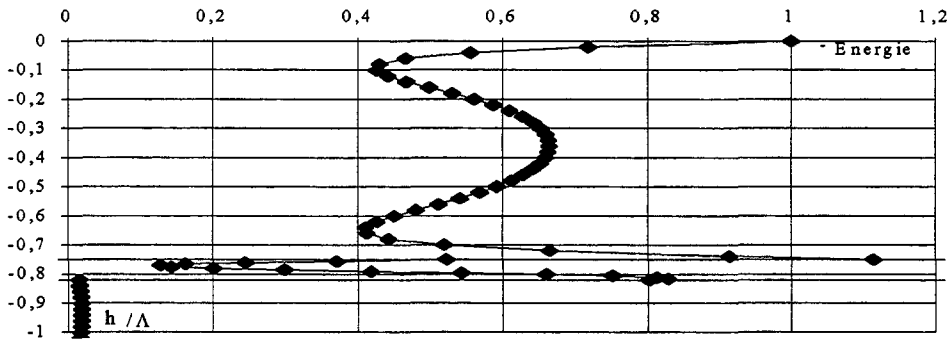
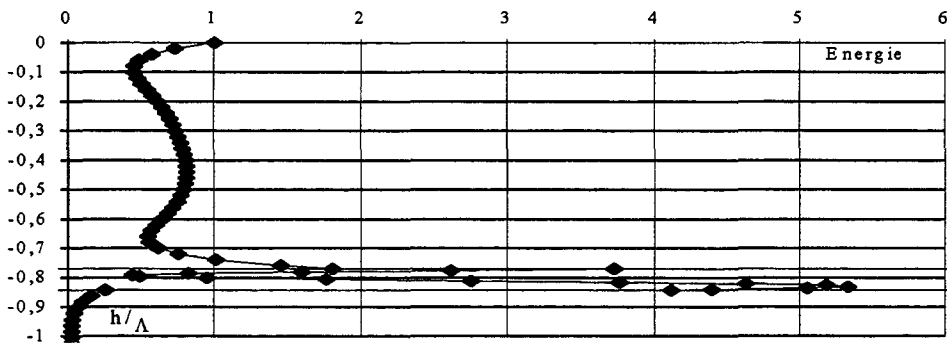
8 c



8 d

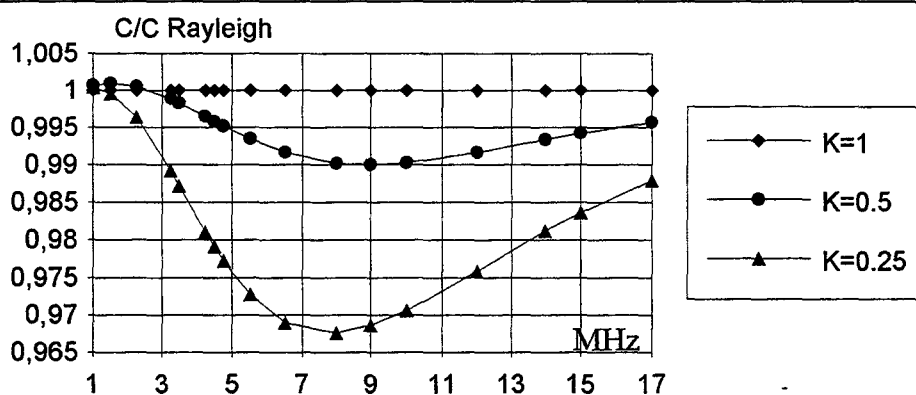
Fig 8. Célérity en fonction de la fréquence ( $\mu_2$  en MPa)

( $\lambda_1 = \lambda_3 = 26487 \text{ MPa}$  ;  $\lambda_2 = 5447 \text{ MPa}$  ;  $\mu_1 = \mu_3 = 29430 \text{ MPa}$  ;  $\rho_1 = \rho_3 = 2500 \text{ kg/m}^3$   
 $\rho_2 = 1180 \text{ kg/m}^3$  ;  $e_1 = 150 \mu\text{m}$  ;  $e_2 = 50 \mu\text{m}$ )

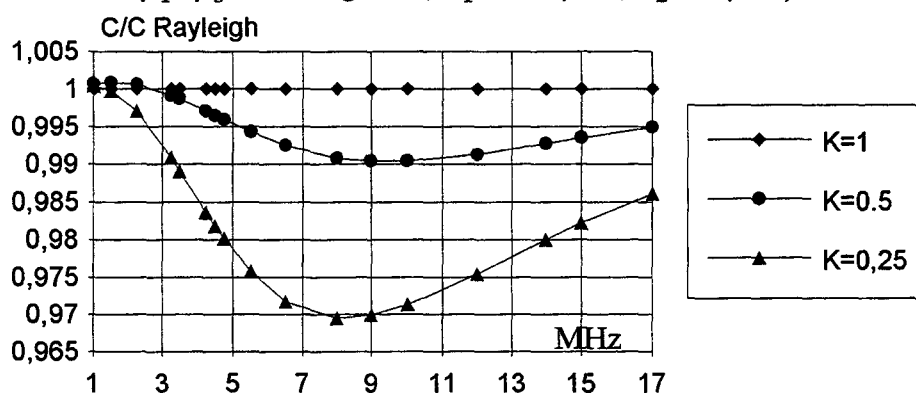
(a)  $F=15\text{MHz}$  ;  $\mu=3924\text{MPa}$ (b)  $F=15\text{MHz}$  ;  $\mu=981\text{MPa}$ (c)  $F=15\text{MHz}$  ;  $\mu=294\text{MPa}$ (d)  $F=15\text{MHz}$  ;  $\mu=196,2\text{MPa}$ Fig 9. Energie en fonction de  $h/\Lambda$

Nous avons calculé ( fig 10a et b) les courbes de dispersion de célérité ( normalisées par rapport à celle des ondes de Rayleigh dans le substrat) pour un système semblable au triplet verre/colle/verre avec le coefficient de proportionnalité  $K$  comme paramètre. Elles montrent que plus  $K$  diminue, c'est à dire plus le milieu intermédiaire a une impédance faible, plus la dispersion augmente ( rappelons que  $K=1$  correspond aux trois milieux identiques)

La figure 10b différente peu de la figure 10a bien que  $\lambda_1=\lambda_3$  ait été multiplié par un facteur 4 (58860MPa au lieu de 14715). Cela montre à nouveau, la très faible influence de ce paramètre sur la célérité de l'onde de Rayleigh-Sezawa. Pour  $F=1\text{MHz}$ , toutes les courbes passent par  $C/C_{\text{Rayleigh}}=1$  ce qui vérifie la limite trouvée en basse fréquence: la célérité de l'onde de Rayleigh dans le substrat.



(a) Célérité en fonction de la fréquence à différentes valeurs de  $K$   
système de départ (  $\mu_1=\mu_3=29430\text{MPa}$  ;  $\lambda_1=\lambda_3=14715\text{MPa}$   
 $\rho_1=\rho_3=2500\text{kg/m}^3$  ;  $e_1=150\ \mu\text{m}$  ;  $e_2=10\ \mu\text{m}$  )



(b) Célérité en fonction de la fréquence à différentes valeurs de  $K$   
système de départ (  $\mu_1=\mu_3=29430\text{MPa}$  ;  $\lambda_1=\lambda_3=58860\text{MPa}$   
 $\rho_1=\rho_3=2500\text{kg/m}^3$  ;  $e_1=150\ \mu\text{m}$  ;  $e_2=10\ \mu\text{m}$  )

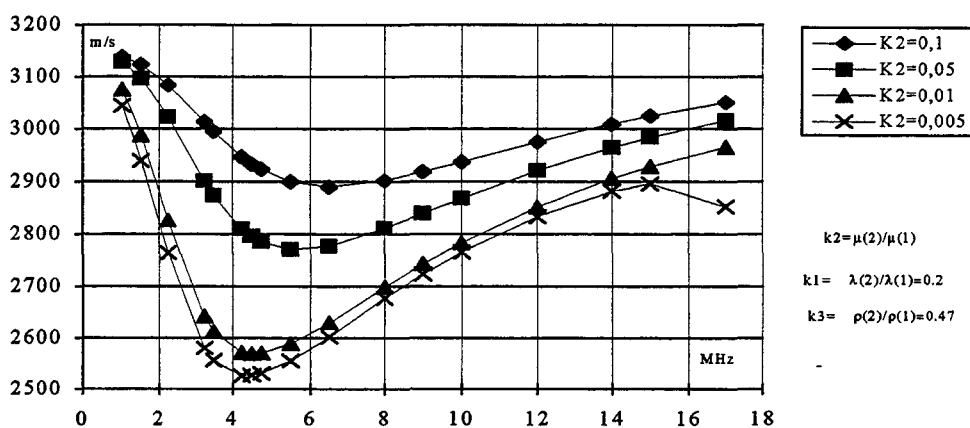
Fig 10. Célérité en fonction de la fréquence

### 5.3. Cas de milieux extrêmes identiques

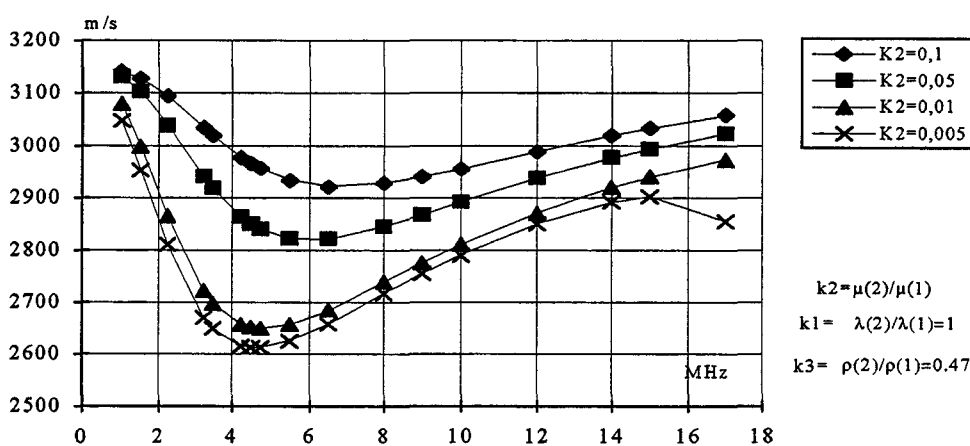
Plus généralement il n'y a pas de coefficient de proportionnalité identique  $K$  pour les paramètres acoustiques de la colle par rapport à ceux de milieux assemblés mais des coefficients divers

$$K_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \neq K_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1} \neq K_3 = \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

Le facteur important dans cette étude étant  $\mu$  et donc ici  $K_2$ , nous avons étudié deux types d'assemblage verre/colle/verre et acier/colle/acier dont nous avons représenté (fig 11a et b et 12a et b) les courbes de dispersion pour divers valeurs de  $K_2$  variant de 0,005 à 0,1 (facteur 20), en adoptant  $K_3=0,47$  et deux valeurs de  $K_1$  [0,2 et 1].



(a)

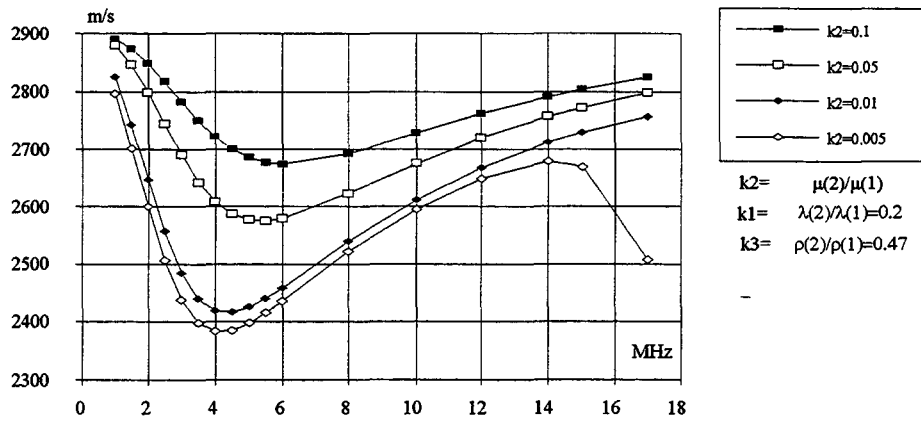


(b)

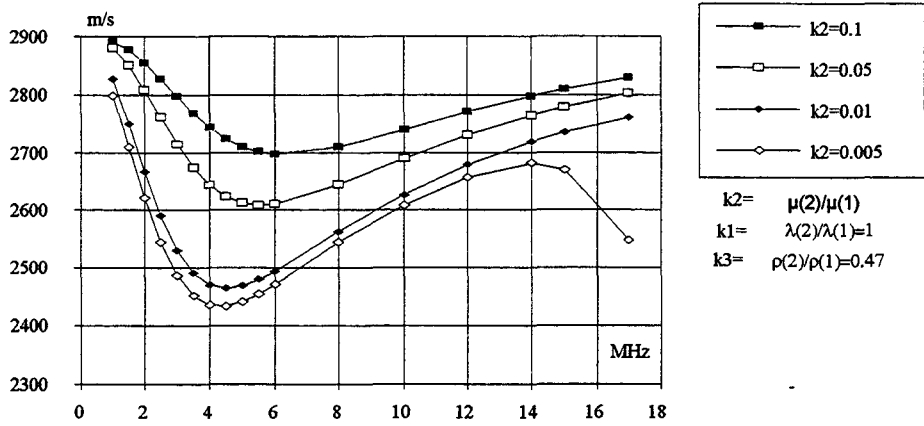
Fig 11. Célérité en fonction de la fréquence pour des paramètres réduits pour le système (Verre/Colle/Verre)

$$(\lambda_1 = \lambda_3 = 26487 \text{MPa} ; \mu_1 = \mu_3 = 29430 \text{MPa})$$

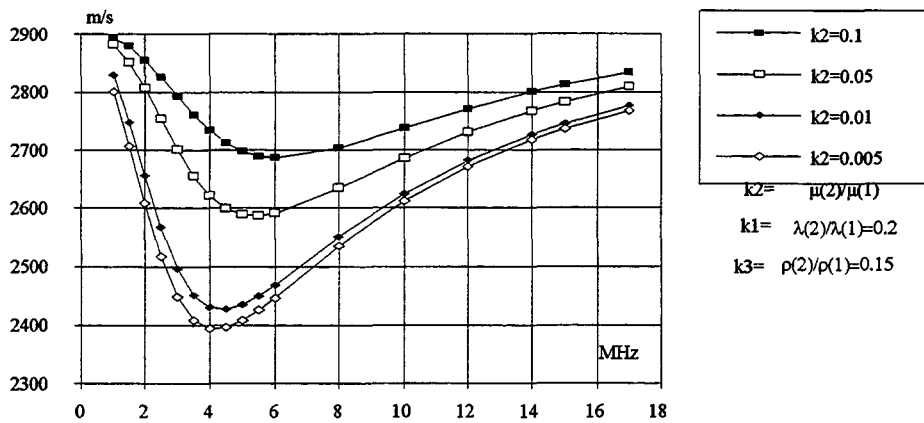
$$\rho_1 = \rho_3 = 2500 \text{kg/m}^3 ; e_1 = 150 ; e_2 = 10 \text{ }\mu\text{m}$$



(a)



(b)



(c)

Fig 12. Célérité en fonction de la fréquence pour des paramètres réduits pour le système (acier/colle/acier)

$$(\lambda_1 = \lambda_3 = 107910 \text{ MPa} ; \mu_1 = \mu_3 = 78480 \text{ MPa})$$

$$\rho_1 = \rho_3 = 8000 \text{ kg/m}^3 ; e_1 = 150 ; e_2 = 10 \text{ } \mu\text{m}$$



Ces courbes montrent que  $K_1$  et  $K_2$  jouent sur la dispersion l'efficacité de  $K_1$  étant toutefois faible (comme la comparaison des graphes a et b l'établit).

Par ailleurs faisant varier la densité:  $K_3=0.15$  (fig 12c) on constate (fig 12a et c) que la densité et  $K_3$  jouent peu dès que  $K_2 > 0.005$ . Par contre pour  $K_2 = 0.005$  et aux fréquences élevées ( $> 14\text{MHz}$ ) cette densité joue fortement.

Enfin bien entendu la nature des milieux collés joue fortement sur la courbe de dispersion.

## Chapitre 4

### COMPARAISON DU MODELE DE PILARSKI A NOTRE MODELE

## Chapitre 4

### COMPARAISON DU MODELE DE PILARSKI A NOTRE MODELE

#### 1. Objectif

Nous reprenons le calcul des courbes de dispersions du premier mode en utilisant le modèle de Pilarski, ces nouveaux résultats seront comparés à ceux fournis par notre modèle, en vue de déterminer les éventuels avantages et inconvénients.

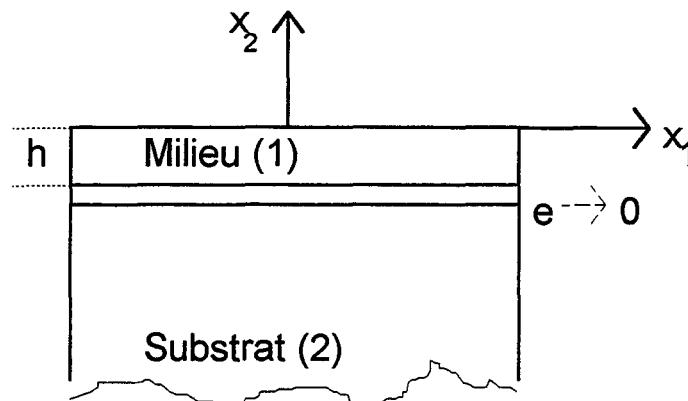


Fig 13 Système stratifié à une couche (épaisseur de la colle  $\rightarrow 0$ )

#### 2. Modèle de Pilarski (fig 13)

Pour caractériser un contact entre deux solides séparés par une couche de colle d'épaisseur très faible devant la longueur d'onde dans la lame (milieu 1), Pilarski [11] a négligé les caractéristiques de la colle et introduit deux paramètres à ajuster  $k_t$  et  $k_n$ .

Pilarski pose, en effet, en utilisant les notations du chapitre 2 à l'interface d'altitude  $h$ :

- la continuité des contraintes:

$$[T_{xy}(y=h)]_1 = [T_{xy}(y=h)]_2 \quad (27.1)$$

$$[T_{yy}(y=h)]_1 = [T_{yy}(y=h)]_2$$

- une relation linéaire liant les composantes du vecteur contrainte à la différence des composantes de déplacements de part et d'autre de l'interface:

Pour les composantes longitudinales:

$$[T_{xy}(y = h)]_1 = k_t[u_1(y = h) - u_2(y = h)]$$

Pour les composantes transversales:

$$[T_{yy}(y = h)]_1 = k_n[v_1(y = h) - v_2(y = h)] \quad (27.2)$$

$k_n, k_t$  s'expriment en  $N/m^3$ . et caractérisent l'adhérence. En effet :

◆ Lorsque  $k_n$  et  $k_t$  tendent vers  $\infty$ , le contact est rigide et tous les déplacements sont continus (adhérence parfaite).

◆ Au contraire, si  $k_n$  et  $k_t$  tendent vers zéro, les contraintes normale et tangentielle s'annulent, les deux solides ne sont pas liés (décollement total).

◆ Si seul  $k_t$  tend vers zéro la contrainte de cisaillement s'annule: c'est la condition de glissement. D'après Pilarski cela devrait modéliser les défauts d'adhésion ( $k_t$  joue sur la dispersion de célérité)

◆ Si seul  $k_n$  tend vers zéro, nous décrivons un contact qui ne transmet pas la contrainte normale (sans interprétation physique).

A ces conditions précédentes, doivent s'ajouter l'annulation des contraintes à la surface libre et l'évanouissement de l'onde dans le substrat quand  $y$  tend vers  $-\infty$ .

### 3.Expression de la dispersion

A partir des équations (8') et (10) du chapitre 2 paragraphe 4 auxquelles nous appliquons les conditions de Pilarski (27.1 et 27.2) pour le système à deux milieux, nous obtenons le groupe de six équations à six inconnues suivant:

$$\alpha_1 A'_1 + \alpha_1 B'_1 + \beta_1 C'_1 + \beta_1 D'_1 = 0$$

$$\Gamma_1 A'_1 - \Gamma_1 B'_1 + \alpha_1 C'_1 - \alpha_1 D'_1 = 0$$

$$(k - \frac{\Gamma_1}{k_t})e^{r_1 h} A'_1 + (k + \frac{\Gamma_1}{k_t})e^{-r_1 h} B'_1 + (s_1 - \frac{\alpha_1}{k_t})e^{s_1 h} C'_1 + (s_1 + \frac{\alpha_1}{k_t})e^{-s_1 h} D'_1 - k e^{r_2 h} A'_2 - s_2 e^{s_2 h} C'_2 = 0$$

$$(r_1 - \frac{\alpha_1}{k_n})e^{r_1 h} A'_1 - (r_1 + \frac{\alpha_1}{k_n})e^{-r_1 h} B'_1 + (k - \frac{\beta_1}{k_n})e^{s_1 h} C'_1 - (k + \frac{\beta_1}{k_n})e^{-s_1 h} D'_1 - r_2 e^{r_2 h} A'_2 - k e^{s_2 h} C'_2 = 0$$

$$\alpha_1 e^{r_1 h} A'_1 + \alpha_1 e^{-r_1 h} B'_1 + \beta_1 e^{s_1 h} C'_1 + \beta_1 e^{-s_1 h} D'_1 - \alpha_2 e^{r_2 h} A'_2 - \beta_2 e^{s_2 h} C'_2 = 0$$

$$\Gamma_1 e^{r_1 h} A'_1 - \Gamma_1 e^{-r_1 h} B'_1 + \alpha_1 e^{s_1 h} C'_1 - \alpha_1 e^{-s_1 h} D'_1 - \Gamma_2 e^{r_2 h} A'_2 - \alpha_2 e^{s_2 h} C'_2 = 0$$

En comparant à l'étude précédente donnée au chapitre 2 seules les équations 3 et 4 sont changées. Pour que des solutions non triviales existent le déterminant du tableau 8 doit s'annuler.

$A'_1$	$B'_1$	$C'_1$	$D'_1$	$A'_2$	$C'_2$	
$\alpha_1$	$\alpha_1$	$\beta_1$	$\beta_1$	0	0	
$r_1$	$-r_1$	$\alpha_1$	$-\alpha_1$	0	0	
$(k - \frac{\Gamma_1}{k_t})e^{r_1 h}$	$(k + \frac{\Gamma_1}{k_t})e^{-r_1 h}$	$(s_1 - \frac{\alpha_1}{k_t})e^{s_1 h}$	$(s_1 + \frac{\alpha_1}{k_t})e^{-s_1 h}$	$-k e^{r_2 h}$	$-s_2 e^{s_2 h}$	
$(r_1 - \frac{\alpha_1}{k_n})e^{r_1 h}$	$-(r_1 + \frac{\alpha_1}{k_n})e^{-r_1 h}$	$(k - \frac{\beta_1}{k_n})e^{s_1 h}$	$-(k + \frac{\beta_1}{k_n})e^{-s_1 h}$	$-r_2 e^{r_2 h}$	$-k e^{s_2 h}$	= 0
$\alpha_1 e^{r_1 h}$	$\alpha_1 e^{-r_1 h}$	$\beta_1 e^{s_1 h}$	$\beta_1 e^{-s_1 h}$	$-\alpha_2 e^{r_2 h}$	$-\beta_2 e^{s_2 h}$	
$\Gamma_1 e^{r_1 h}$	$-\Gamma_1 e^{-r_1 h}$	$\alpha_1 e^{s_1 h}$	$-\alpha_1 e^{-s_1 h}$	$-\Gamma_2 e^{r_2 h}$	$-\alpha_2 e^{s_2 h}$	

Tableau 8

L'annulation du déterminant subsiste quand on multiplie tous les termes d'une ligne ou d'une colonne par un même nombre. Utilisons cette propriété pour simplifier, en multipliant:

♦ les lignes 3, 4, par  $k$

♦ les colonnes 1 et 2 par  $\frac{P_1^2}{k^2}$ , 5 par  $\frac{P_2^2}{k^2}$

♦ les colonnes 3 et 4 par  $\frac{Q_1^2}{k^2}$ , 6 par  $\frac{Q_2^2}{k^2}$

♦ les colonnes 5 et 6 par des exponentielles correspondantes d'arguments de signes opposés.

le déterminant prend alors l'allure donnée au tableau 9 en utilisant les transpositions (15). Sous cette forme, son calcul numérique n'est possible que dans la mesure où tous ses termes sont réels. Aussi, nous le réécrivons sous une forme plus générale (tableau 10), par introduction de fonctions hyperboliques qui se transposent aisément en fonctions trigonométriques si les arguments  $X_{mj}$  et  $Y_{mj}$  deviennent imaginaires purs.

Effectuons pour cela les combinaisons suivantes des colonnes:

$$\text{Col1} \Rightarrow \frac{1}{2} (\text{Col1} + \text{Col2}) ; \text{Col2} \Rightarrow \frac{1}{2} (\text{Col1} - \text{Col2})$$

$$\text{Col3} \Rightarrow \frac{1}{2} (\text{Col3} + \text{Col4}) ; \text{Col4} \Rightarrow \frac{1}{2} (\text{Col3} - \text{Col4}).$$

$$\begin{vmatrix}
 T_1 & T_1 & v_1 & v_1 & 0 & 0 \\
 U_1 & -U_1 & w_1 & -w_1 & 0 & 0 \\
 (P_1^2 - \frac{k}{k_t} U_1) e^{r_1 h} & (P_1^2 + \frac{k}{k_t} U_1) e^{-r_1 h} & (R_1 - \frac{k}{k_t} W_1) e^{s_1 h} & (R_1 + \frac{k}{k_t} W_1) e^{-s_1 h} & -P_2^2 & -R_2 \\
 (S_1 - \frac{k}{k_n} T_1) e^{r_1 h} & -(S_1 + \frac{k}{k_n} T_1) e^{-r_1 h} & (Q_1^2 - \frac{k}{k_n} V_1) e^{s_1 h} & -(Q_1^2 + \frac{k}{k_n} V_1) e^{-s_1 h} & -S_2 & -Q_2^2 \\
 T_1 e^{r_1 h} & T_1 e^{-r_1 h} & V_1 e^{s_1 h} & V_1 e^{-s_1 h} & -T_2 & -V_2 \\
 U_1 e^{r_1 h} & -U_1 e^{-r_1 h} & W_1 e^{s_1 h} & -W_1 e^{-s_1 h} & -U_2 & -W_2
 \end{vmatrix} = 0$$

Tableau 9

$$\begin{vmatrix}
 T_1 & 0 & v_1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & U_1 & 0 & w_1 & 0 & 0 \\
 P_1^2 \operatorname{ch} X_{11} - \frac{k}{k_t} U_1 \operatorname{sh} X_{11} & P_1^2 \operatorname{sh} X_{11} - \frac{k}{k_t} U_1 \operatorname{ch} X_{11} & R_1 \operatorname{ch} Y_{11} - \frac{k}{k_t} W_1 \operatorname{sh} Y_{11} & R_1 \operatorname{sh} Y_{11} - \frac{k}{k_t} W_1 \operatorname{ch} Y_{11} & P_2^2 & R_2 \\
 S_1 \operatorname{sh} X_{11} - \frac{k}{k_n} T_1 \operatorname{ch} X_{11} & S_1 \operatorname{ch} X_{11} - \frac{k}{k_n} T_1 \operatorname{sh} X_{11} & Q_1^2 \operatorname{sh} Y_{11} - \frac{k}{k_n} V_1 \operatorname{ch} Y_{11} & Q_1^2 \operatorname{ch} Y_{11} - \frac{k}{k_n} V_1 \operatorname{sh} Y_{11} & S_2 & Q_2^2 \\
 T_1 \operatorname{ch} X_{11} & T_1 \operatorname{sh} X_{11} & V_1 \operatorname{ch} Y_{11} & V_1 \operatorname{sh} Y_{11} & T_2 & V_2 \\
 U_1 \operatorname{sh} X_{11} & U_1 \operatorname{ch} X_{11} & W_1 \operatorname{sh} Y_{11} & W_1 \operatorname{ch} Y_{11} & U_2 & W_2
 \end{vmatrix} = 0$$

Tableau 10

Remarque: Ce déterminant reste toujours réel quelle que soit la célérité de l'onde de surface.

#### 4. Résultats numériques

A partir de ce modèle nous avons développé un programme de calcul dont les paramètres d'entrée sont maintenant les constantes  $k_n$ ,  $k_t$  et les caractéristiques acoustiques. La démarche de calcul des célérités est la même que celle décrite au chapitre 3 paragraphe 3.

Schoenberg [24] (Annexe 2) indique que dans le cas d'une couche solide (un milieu 2) localisée entre deux milieux (1) et (3) on peut écrire les

$$\text{coefficients } k_n \text{ et } k_t: \quad k_t = \frac{\mu_2}{e_2} \quad k_n = \frac{E_2}{e_2} = 2.k_t(1 + \sigma)$$

où  $\mu_2$ ,  $E_2$ ,  $\sigma_2$  et  $e_2$  représentent le coefficient de Lamé, le module d'Young, le coefficient de Poisson et l'épaisseur du milieu 2. Ces relations ne sont vérifiées que si l'épaisseur du milieu 2 est très petite devant la longueur d'onde dans le milieu 1.

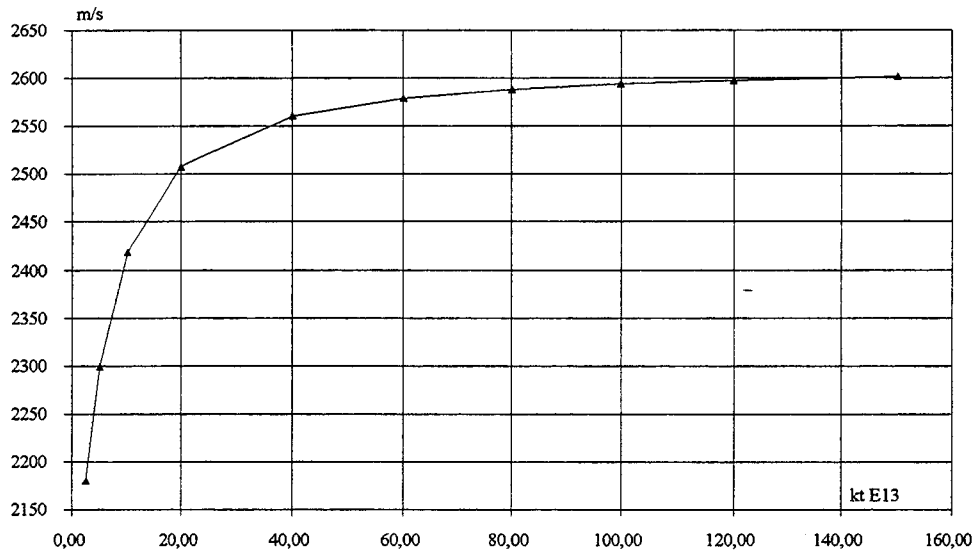
Avec ce choix nous calculons en fonction de  $k_t$  la célérité des ondes pour un système constitué d'une lame de plexiglas collée à un substrat d'aluminium (le tableau 5 chapitre 3 § 2 donne les caractéristiques acoustiques) pour des épaisseurs de colle de 1 et 10 $\mu\text{m}$  et pour  $\sigma_2=0,3$ ; nous obtenons les courbes de la fig13' a et b.

Le report sur un même graphique de ces résultats et de ceux donnés par notre modèle décrit au chapitre 3 fournit les courbes de célérité en fonction de  $\mu$  ou  $k_t$  des (fig13" a et b).

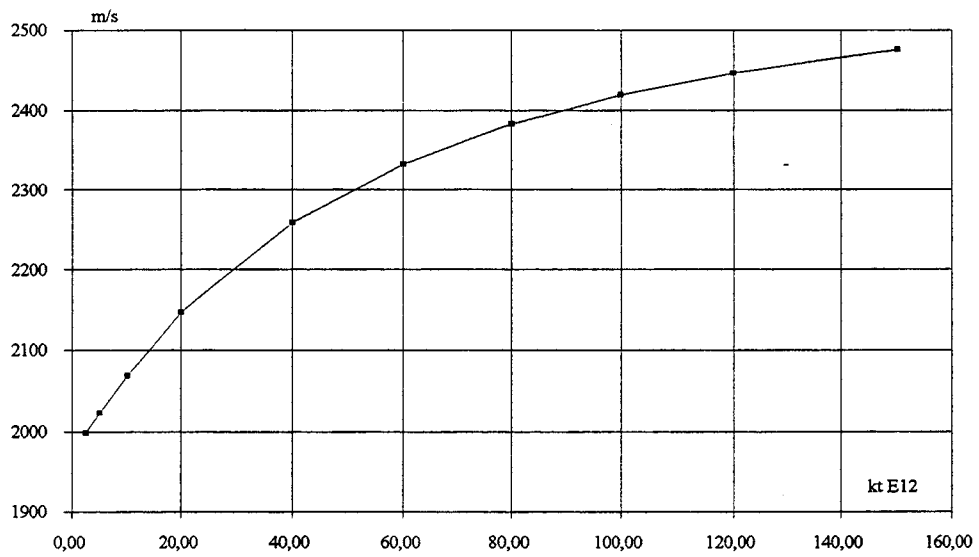
Pour une épaisseur de 10  $\mu\text{m}$  et pour de faibles valeurs de  $\mu$  ces courbes s'éloignent largement . Par contre, pour une épaisseur de colle de 1  $\mu\text{m}$ , elles sont sensiblement superposables.

## 5. Conclusion

Pour des couches de colles extrêmement minces (ici 1 $\mu\text{m}$ ) notre modèle et celui de Pilarski donnent des résultats semblables. Au contraire, pour des épaisseurs de colles épaisses (ici 10 $\mu\text{m}$ ) le modèle de Pilarski s'éloigne du nôtre. En effet, augmenter l'épaisseur c'est diminuer les valeurs de  $k_t$  et  $k_n$  donc changer la nature du contact; alors que notre modèle suppose un contact parfait et ne prévoit que l'écart entre contacts rigide et glissant.



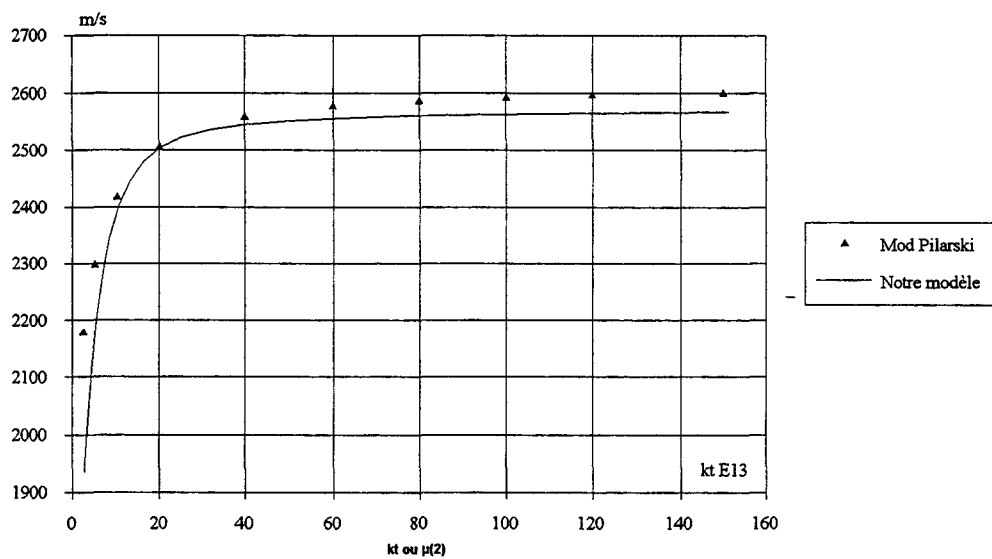
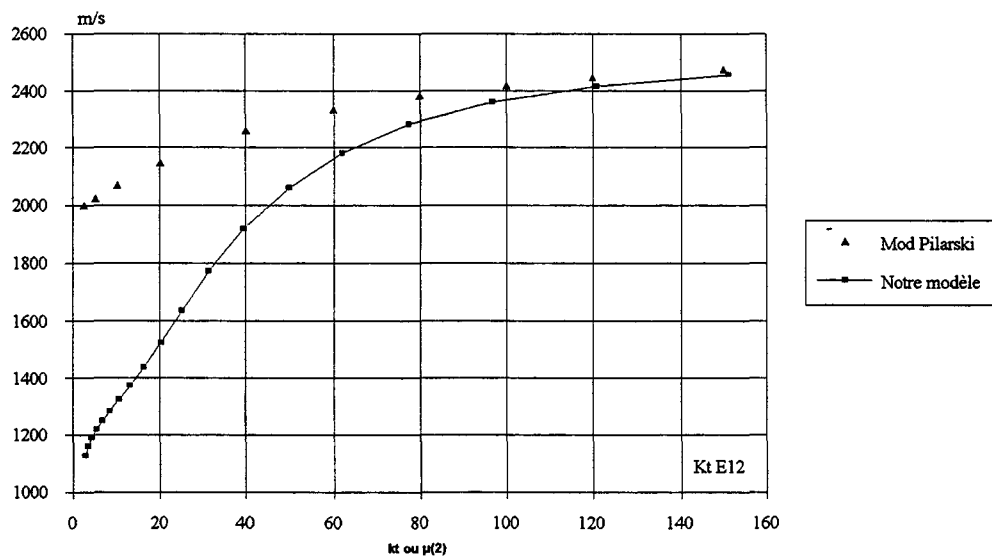
a)  $F=4\text{MHz}$  :  $e=1\mu\text{m}$



b)  $F=4\text{MHz}$  :  $e=10\mu\text{m}$

Fig 13' Célérité en fonction de  $k_t$



a)  $F=4\text{MHz}$  ;  $e=1\mu\text{m}$ b)  $F=4\text{MHz}$  ;  $e=10\mu\text{m}$ Fig 13" Célérité en fonction de  $\mu$  ou  $k_t$

## Chapitre 5

RESOLUTION DU PROBLEME INVERSE: CARACTERISATION  
DE L'ADHESIF A PARTIR D'UNE COURBE DE DISPERSION  
EXPERIMENTALE.

## Chapitre 5

### RESOLUTION DU PROBLEME INVERSE: CARACTERISATION DE L'ADHESIF A PARTIR D'UNE COURBE DE DISPERSION EXPERIMENTALE.

Le but de ce chapitre est de déterminer les caractéristiques mécaniques des milieux constitutifs d'un système collé, dont on a relevé au laboratoire la courbe de dispersion  $C = f(F)$ .

Le problème direct consiste à déterminer l'existence ou non d'une célérité pour une fréquence imposée à partir de constantes mécaniques connues de chaque milieu. Il nous faut inverser la procédure (problème inverse). Au moyen de traitements numériques appropriés incluant des approximations inévitables, et éventuellement en imposant des contraintes sur les constantes physiques cherchées pour qu'elles restent dans des domaines réalistes, il nous faut déterminer les valeurs à donner aux paramètres inconnus pour que la courbe  $C = f(F)$  calculée à partir de la méthode exposée au chapitre 3 passe, au mieux, par les points expérimentaux.

Plusieurs méthodes de résolutions de systèmes d'équations non linéaires existent. Nous utiliserons la méthode des gradients conjugués qui a fait ses preuves et qui est depuis longtemps utilisée au laboratoire. A l'origine, elle a été développée par HESTENES et STIEFEL [25] pour des fonctions quadratiques appliquées à la résolution des systèmes d'équations linéaires. Ensuite, FLETCHER et REEVES [26], l'ont étendue à des fonctions non quadratiques pour la résolution des systèmes d'équations non linéaires. Elle est essentiellement une extension de la méthode de convergence dite de la descente rapide [27]. C'est une méthode itérative qui consiste à minimiser une fonction décrivant l'écart entre points calculés et points expérimentaux.

#### 1. Méthode de résolution.

##### 1.1. Méthode de la descente rapide.

La courbe de dispersion de célérité, définie de manière implicite, est connue en NE points de mesure relevés en fonction de la fréquence. Désignons par  $CE_j$  les célérités expérimentales pour  $j$  variant de 1 à NE; cette courbe peut être assimilée à une fonction dépendant de NP paramètres, et être ainsi représentée dans un espace à NP dimensions .

Le modèle théorique précédemment défini est fonction des paramètres  $p_i$  ( $\lambda, \mu, \rho, e$ )  $1 \leq i \leq NP$  qui caractérisent les propriétés des couches et du substrat. Mais si ce modèle décrit de façon convenable la réalité expérimentale il peut exister néanmoins des paramètres intervenant dans la fonction réelle et dont le modèle ne tient pas compte. On définit par  $Cc_j$  la valeur de la célérité

calculée à partir du modèle en chacun des points, pour des valeurs initiales  $(p_i)_0$  des paramètres choisis arbitrairement mais réalistes compte tenu des milieux constituant notre système.

Les valeurs des célérités expérimentales  $CE_j$  et calculées  $Cc_j$  seront évidemment différentes; nous les assimilons respectivement à des points de deux courbes, l'une expérimentale et l'autre calculée, fonctions des paramètres  $p_i$  définis précédemment.

On évalue l'écart entre chaque point calculé et le point correspondant déterminé expérimentalement, par l'écart quadratique initial  $(D_j)_0$ .

$$(D_j)_0 = (Cc_j - CE_j)^2 \quad (28)$$

En fait, on s'intéresse à la somme des "écarts quadratiques" respectifs pour tous les points, donnée par:

$$(D)_0 = \sum_{j=1}^{NE} (D_j)_0 \quad (29)$$

où  $D = D(p_1, p_2 \dots p_i \dots p_{np})$  et l'indice zéro indique l'ordre d'itération.

Le problème consiste alors à calculer, à l'itération suivante, les nouvelles valeurs  $(p_i)_1$  des paramètres qui minimiseront cette fonction  $D_1 \dots$

Le choix de minimiser la fonction "écarts quadratiques", est lié à la méthode des gradients conjugués qui s'applique avec le maximum d'efficacité aux fonctions quadratiques à valeurs minimales nulles.

Dans ce cas, il faut déterminer, d'une part la direction dans laquelle devra s'effectuer la recherche de chaque nouvelle valeur des paramètres  $p_i$  et d'autre part, le pas convenable à adopter. Pour cela, il est nécessaire d'étudier le comportement en un point  $j$  de la fonction  $D_j$  pour des variations  $dp_i$  des paramètres  $p_i$ . Développons  $D_j$  au second ordre :

$$D_j(p_i + dp_i) = D_j(p_i) + \sum_{i=1}^{NP} \frac{\partial D_j}{\partial p_i} dp_i + \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^{NP} \frac{\partial^2 D_j}{\partial p_i^2} dp_i^2 + 2 \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{NP} \frac{\partial^2 D_j}{\partial p_i \partial p_j} dp_i dp_j \right] \quad (30)$$

Les équations (29) puis (28) nous donnent:

$$\frac{\partial D_j}{\partial p_i} = 2 [Cc_j - CE_j] \frac{\partial Cc_j}{\partial p_i} \quad (31)$$

et

$$\frac{\partial D}{\partial p_i} = 2 \sum_{j=1}^{NE} [C c_j - C E_j] \frac{\partial C c_j}{\partial p_i} \quad (32)$$

On montre alors que la direction de coefficients directeurs  $u_i = \partial D / \partial p_i$  est la direction de montée la plus rapide, qu'on appelle habituellement gradient de la fonction D. Le gradient négatif est donc la direction de la descente la plus rapide qui s'écrit :

$$\text{dir}_i = -\frac{\partial D}{\partial p_i} = -2 \sum_{j=1}^{NE} (C c_j - C E_j) \frac{\partial C c_j}{\partial p_i} \quad (33)$$

où les termes  $\partial C c_j / \partial p_i$  sont appelés coefficients de sensibilité de la fonctionnelle D au paramètre  $p_i$ . Chaque nouvelle composante estimée  $(p_i)_n$ , à l'itération n, s'écrit :

$$(p_i)_n = (p_i)_{n-1} + (k)_n (U_i)_n = (p_i)_{n-1} - (k)_n \left( \frac{\partial D}{\partial p_i} \right)_n \quad (34)$$

Le vecteur  $\vec{P}$  (vecteur colonne des composantes  $p_i$  estimées) s'écrit

$$\left( \vec{P} \right)_n = \left( \vec{P} \right)_{n-1} + (k)_n \left( \vec{U} \right)_n = \left( \vec{P} \right)_{n-1} - (k)_n \left[ \vec{\text{grad}}(D) \right]_n \quad (35)$$

où  $(k)_n$  représente le pas optimal minimisant D dans la direction  $(U_i)_n$ .

$$D(\vec{P})_n = D \left[ \left( \vec{P} \right)_{n-1} + (k)_n \left( \vec{U} \right)_n \right]$$

Une fois la direction de recherche définie, la fonction D ne dépend que de la variable unique  $(k)_n$ , distance qu'il faut parcourir avant de changer de direction de recherche; sa valeur optimale sera déterminée par une recherche monodimensionnelle; compte tenu de la relation (34), la recherche de k à l'itération n est la recherche d'un maximum sur la droite. On se contente d'une approximation, en approchant la droite par un polynôme du second degré en k et on cherche la valeur de k qui maximise ce polynôme.

La méthode de la descente rapide, aussi appelée méthode du gradient simple par opposition à la méthode des gradients conjugués, est basée sur le fait que l'approximation linéaire obtenue par le calcul, fournit une approximation valable pour une distance positive dans une direction proche de la direction de la descente la plus rapide. Deux questions peuvent se poser:

- Quelle assurance a-t-on que les pas de variation choisis ne soient pas trop grands et ainsi deviennent des pas de montée ?

- Si les pas choisis sont vraiment des pas de descente, pourquoi n'est-il pas désirable de prendre des pas plus grands, dans cette direction, en faveur du désir de descendre aussi loin que possible avec un petit volume de calcul ?

C'est pourquoi HESTENES et STIEFEL ont cherché la façon de se déplacer le long d'une direction de descente et ont mis au point la méthode des gradients conjugués, appliquée à la minimisation de fonctions liées à la solution d'un système de N équations linéaires et qu'ensuite FLETCHER et REEVES ont étendu cette méthode à des fonctions non quadratiques .

## 1.2. Méthode des gradients conjugués

### 1.2.1. Exposé de la méthode

La relation (29) peut s'écrire sous la forme vectorielle :

$$D(\vec{P} + \Delta \vec{P}) = D(\vec{P}) + \text{grad} D(\vec{P}) \cdot \Delta \vec{P} + \frac{1}{2} (\Delta \vec{P})^T \cdot H \cdot \Delta \vec{P} \quad (36)$$

Avec  $\Delta \vec{P}$  : vecteur colonne variation des paramètres

$(\Delta \vec{P})^T$  son transposé

H : Matrice carrée (NP, NP) des dérivées secondes (appelée Hessien)

Posons

$$\Delta D = D(\vec{P} + \Delta \vec{P}) - D(\vec{P}) \quad (37)$$

donc :

$$\Delta D = \text{grad} D(\vec{P}) \cdot \Delta \vec{P} + \frac{1}{2} (\Delta \vec{P})^T \cdot H \cdot \Delta \vec{P} \quad (38)$$

En minimisant  $D(\vec{P})$ ,  $\Delta D$  devient maximal à travers la relation (37) et donc sa dérivée s'annule .

$$\frac{\partial(\Delta D)}{\partial \Delta \vec{P}} = 0 = \text{grad} D(\vec{P}) + H \cdot \Delta \vec{P} \quad (39)$$

ainsi

$$\Delta \vec{P} = -H^{-1} \cdot \text{grad} D(\vec{P}) \quad (40)$$

Cette dernière relation conduit à l'inversion du Hessien qui, souvent dans la pratique, est mal défini; dans ce cas, on peut utiliser une matrice arbitraire définie positive qui, à chaque itération, est modifiée de façon à tendre vers le Hessien inversé.

La méthode des gradients conjugués procède de la façon suivante .

Désignons par  $(\vec{P})_0$  et  $(\text{grad } D)_0$  les vecteurs paramètres et gradients initiaux; la première direction de recherche est donnée par le gradient simple

$$(\vec{\text{dir}})_0 = -(\text{grad } D)_0 \quad (41)$$

A l'itération (n-1) on connaît le gradient  $(\text{grad } D)_{n-1}$ , la direction de recherche  $(\vec{\text{dir}})_{n-1}$  et le vecteur paramètre  $(\vec{P})_{n-1}$ ; le vecteur paramètre  $(\vec{P})_n$  sera calculé à partir de ces deux derniers et du pas  $(k)_n$  par la relation :

$$(\vec{P})_n = (\vec{P})_{n-1} + (k)_n (\vec{\text{dir}})_{n-1} \quad (42)$$

où  $(k)_n$  est le pas optimal minimisant D; il est déterminé par une recherche monodimensionnelle dans la direction  $(\vec{\text{dir}})_{n-1}$ .

Le vecteur  $(\vec{P})$  étant déterminé, ceci permettra de calculer des gradients dans de nouvelles directions.

$$(\text{grad } D)_n = \left[ \frac{\partial D(\vec{P})}{\partial \vec{P}} \right]_{(\vec{P})_n} \quad (43)$$

On en déduit un facteur  $\beta$  donné par :

$$\beta_{n-1} = \frac{(\text{grad } D)_n^2}{(\text{grad } D)_{n-1}^2} \quad (44)$$

et ainsi on définit la nouvelle direction de recherche par:

$$(\vec{\text{dir}})_n = -(\text{grad } D)_{n-1} + \beta_{n-1} (\vec{\text{dir}})_{n-1} \quad (45)$$

Remarquons que la nouvelle direction de recherche  $(\vec{\text{dir}})_n$  n'est plus la direction du gradient négatif  $-(\text{grad } D)_{n-1}$  comme dans (41) mais celle calculée à partir de la relation (45).

On peut montrer que les gradients successifs sont orthogonaux et que les directions successives sont conjuguées par rapport à H, c'est-à-dire que pour deux itérations successives n-1 et n, les vecteurs gradients correspondants sont tels que  $(\text{grad } D)_{n-1} \cdot (\text{grad } D)_n = 0$  et que les directions vérifient  $(\vec{\text{dir}})_{n-1}^T \cdot H \cdot (\vec{\text{dir}})_n = 0$

Prenons un exemple à deux dimensions (Fig.14) en considérant la fonction écart quadratique.

Les courbes isodistances sont des ellipses centrées sur le point 4 représentant le point optimal recherché.

A partir du point initial 1 on calcule la direction du gradient  $(\vec{\text{dir}})_1$  et par une recherche monodimensionnelle sur cette direction on détermine le meilleur point, le point 2. On calcule le gradient négatif  $-(\vec{\text{gradD}})_2$  en ce point et on déduit le coefficient  $\beta_{n-1}$  à partir de la relation (44). La direction  $(\vec{\text{dir}})_2$  sera construite par l'algorithme de FLETCHER et REEVES et passe par le centre de l'ellipse car  $(\vec{\text{dir}})_1$  et  $(\vec{\text{dir}})_2$  sont conjugués, la recherche monodimensionnelle sur  $(\vec{\text{dir}})_2$  aboutit au minimum 4.

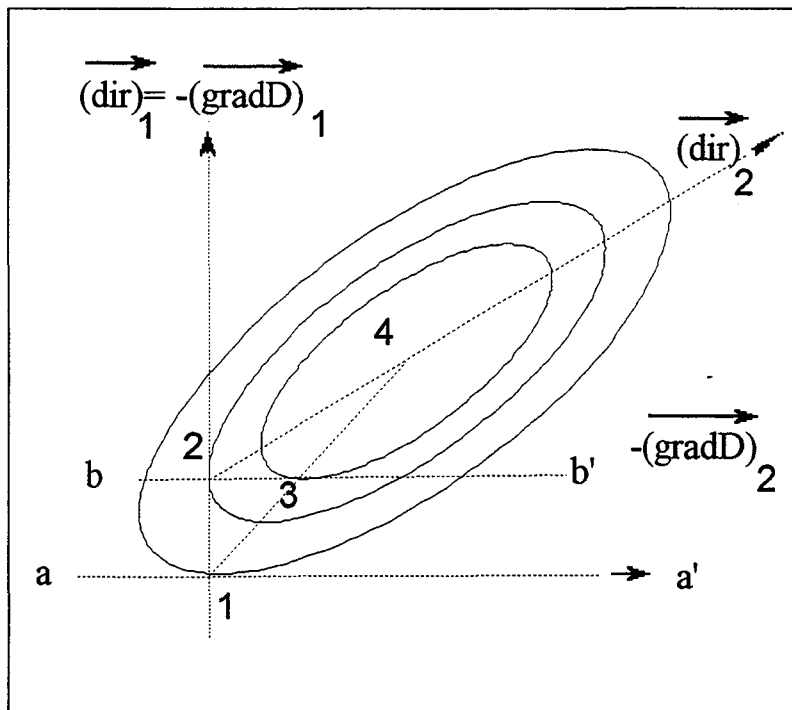


Fig.14

Si la fonction n'est pas quadratique,  $(\vec{\text{dir}})_2$  ne passe pas par le point 4 ; mais par un autre point, à partir duquel il faut recommencer les opérations précédentes.

Comme la plupart des autres procédures itératives, la méthode des gradients conjugués ne peut pas distinguer un minimum local du minimum principal. En général, le meilleur qui puisse être attendu est la convergence sûre vers le bas de n'importe quelle vallée dans laquelle a eu lieu le départ. La procédure usuelle pour des problèmes avec des minimums locaux est de recommencer la méthode avec d'autres points de départ.



### 1.2.2. Difficultés de la méthode

Quoique cette méthode présente un avantage significatif par son degré de convergence et sa stabilité par rapport aux autres méthodes existantes (descente rapide, méthode variationnelle) [28, 29], elle ne garantit pas toujours une solution unique même si elle génère toujours des directions de descente.

Au cours des travaux antérieurs sur des systèmes multicouches de verre trempé, monocouche Cr/Acier ou une couche d'eau surmontant une couche de P.V.C. déposée sur un substrat d'aluminium [30, 31, 32, 33], les auteurs ont rencontré les difficultés suivantes :

- le nombre des points expérimentaux doit être suffisant mais pas excessif (en relation avec le nombre de paramètres à ajuster simultanément)
- la nature, le nombre, l'ordre et les taux de variations des paramètres qu'on essaie d'ajuster simultanément peuvent avoir une influence.
- On peut trouver des solutions parfaitement adaptées et physiquement absurdes. Pour l'éviter on impose des contraintes au processus en précisant, par exemple, des valeurs plausibles des épaisseurs ou des densités.

Néanmoins, une validation de la méthode est faisable à partir d'une courbe théorique  $C=f(F)$  dite "pseudo-expérimentale" dont on connaît les valeurs exactes des paramètres acoustiques et géométriques qui doivent être retrouvés.

### 1.3. Critères d'identification et taux de variations des paramètres.

#### 1.3.1 Généralités

Si dans un espace de dimension NP, la fonction D dépendant des coordonnées  $p_i$  :

$$D = D(p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_{NP})$$

est continue et dérivable en tout point, la différentielle dD s'exprime au premier ordre par :

$$dD = \sum_{i=1}^{NP} \frac{\partial D}{\partial p_i} dp_i + O(dp_i^2) \quad (46)$$

$\partial D / \partial p_i$  : élément du vecteur gradient quand tous les  $p_j$  ( $i \neq j$ ) sont constants.

Si  $p_{i0}$  est le paramètre le moins actif sur D (ou auquel D est le moins sensible) c'est-à-dire tel que :

$$\partial D / \partial p_{i0} < \partial D / \partial p_i \quad \forall i \neq i_0$$

L'équation (46) peut s'écrire :

$$dD = \frac{\partial D}{\partial p_{i0}} \sum_{i=1}^{NP} \left[ dp_{i0} + \frac{\frac{\partial D}{\partial p_i}}{\frac{\partial D}{\partial p_{i0}}} dp_i \right] \quad (\text{avec } i \neq i_0) \quad (46')$$

Posant  $\tau = dp_{i0}/p_{i0}$ ,  $\varepsilon_{pi} = dp_i/p_i$  et choisissant des variations  $\Delta p_i$  et  $\Delta p_{i0}$  produisant la même variation  $\Delta D$ , il vient :

$$\frac{\frac{\partial D}{\partial p_i}}{\frac{\partial D}{\partial p_{i0}}} = \frac{\text{grad}_{p_i}(D)}{\text{grad}_{p_{i0}}(D)} \approx \frac{dp_{i0}}{dp_i} \approx \frac{\tau \cdot p_{i0}}{\varepsilon_{pi} \cdot p_i} \approx \frac{\Delta p_{i0}}{\Delta p_i}$$

si l'on admet que les variations  $\Delta p$  sont suffisamment petites pour être identifiées aux différentielles. Les variations relatives  $\varepsilon_{pi}$  et  $\tau$  sont alors liées par :

$$\varepsilon_{pi} = \tau \frac{p_{i0}}{p_i} \frac{\text{grad}_{p_{i0}}(D)}{\text{grad}_{p_i}(D)} \quad (47)$$

Avec ces choix de  $\Delta p_i$  et  $\Delta p_{i0}$  (46') se transforme en

$$dD = \frac{\partial D}{\partial p_{i0}} \sum_{i \neq i_0}^{NP} \left[ dp_{i0} + \frac{\Delta p_{i0}}{\Delta p_i} dp_i \right]$$

Pour minimiser  $dD$  il est préférable que  $\Delta p_{i0}/\Delta p_i \approx 1$ ; soit d'après (47)  
 $\varepsilon_{pi} \approx \tau p_{i0}/p_i$ .

### 1.3.2. Cas du système collé.

Nous choisissons comme critère de minimisation l'écart quadratique moyen  $E_c$  donné par :

$$E_c = \sum_{j=1}^{NE} \frac{(Cc_j - CE_j)^2}{NE} = \frac{D}{NE} \quad (48)$$

La variation relative  $\varepsilon_{pi}$  (46), s'explique comme suit :

$$\varepsilon_{pi} = \tau \frac{\sum_{j=1}^{NE} (Cc_j - CE_j) \frac{\frac{\partial Cc_j}{\partial p_{i0}}}{p_{i0}}}{\sum_{j=1}^{NE} (Cc_j - CE_j) \frac{\frac{\partial Cc_j}{\partial p_i}}{p_i}} \quad (49)$$

Nous imposons une variation de 10 % à l'un des paramètres  $p_j$  et nous calculons les valeurs prises par la célérité  $Cc_j$  et le coefficient de sensibilité  $s(p_i)$  au paramètre  $p_i$  à la fréquence  $F_j$  par :

$$s(p_i) = \frac{\frac{\partial Cc_j}{\partial p_i}}{p_i} \quad (50)$$

où 
$$\frac{\partial Cc_j}{\partial p_i} = \frac{Cc_j(p_i + \Delta p_i) - Cc_j(p_i)}{\Delta p_i}$$

## 2. Adaptation de la méthode à notre problème ; simulation

### 2.1. Procédure choisie

La meilleure manière d'adapter et de tester la méthode des gradients conjugués à notre système est l'étude d'une simulation. A partir d'un système à trois milieux de propriétés voisines du système à caractériser (tableau 9), nous calculons la courbe de dispersion dans la gamme de fréquences des mesures (problème direct). Sur cette courbe nous choisissons un certain nombre de points que nous considérerons comme des valeurs expérimentales (points ici appelés pseudo-expérimentaux) à partir desquelles nous ferons l'identification. Nous pourrions ainsi comparer les résultats aux valeurs réelles que nous devrions retrouver.

### 2.2. Etudes préliminaires.

#### 2.2.1. Influence des différents paramètres sur la célérité.

Les paramètres du substrat sont supposés connus, aussi nous n'étudions que l'influence des paramètres de la lame collée ( $\mu_1, \lambda_1, e_1, \rho_1$ ) et de l'adhésif ( $\mu_2, \lambda_2, e_2, \rho_2$ ). Pour cela, nous avons tracé les courbes  $C=f(F)$  pour des variations de  $\pm 10\%$  de  $\mu_2$  et  $e_2$  de l'adhésif et  $+10\%$  des autres paramètres (Figures 15 et 16).

Dans chaque cas, nous constatons que pour chaque milieu il existe un domaine de fréquences où la célérité des O.R.S. est sensible à la variation des paramètres. Ainsi, pour des fréquences moyennes elle est sensible aux paramètres de l'adhésif et en haute fréquence à ceux de la lame. Par ailleurs

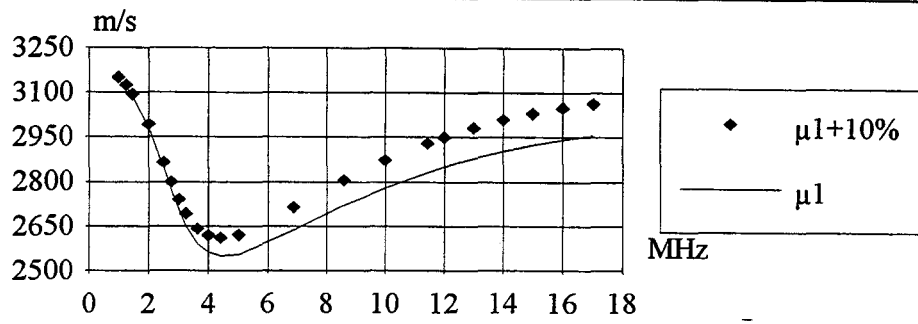
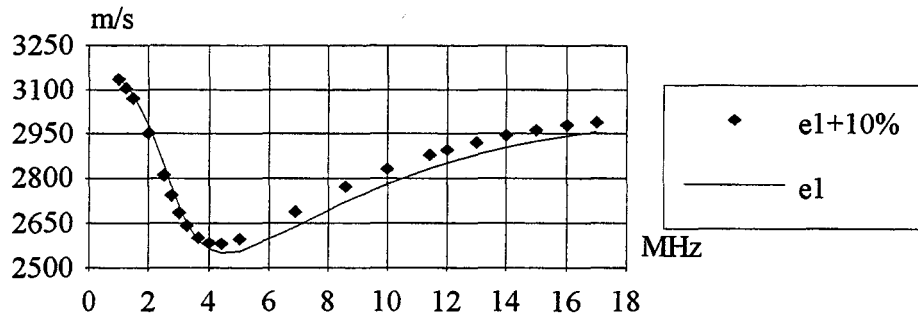
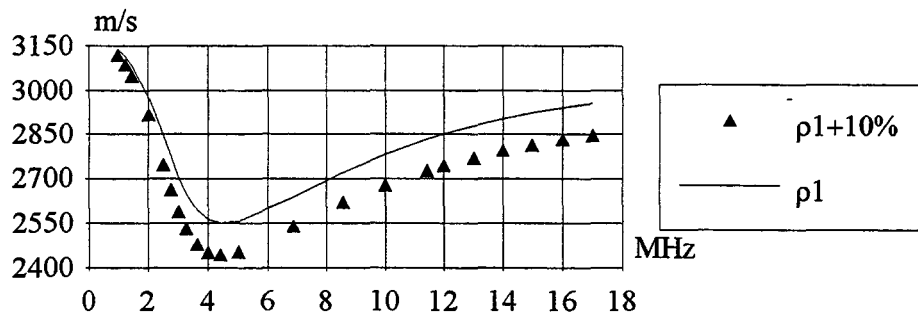
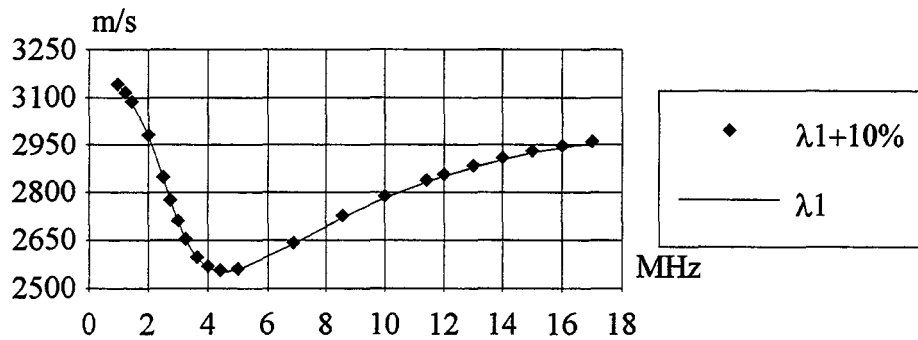
(a)  $\mu_1=30,411\text{GPa}$ (b)  $e_1=150\ \mu\text{m}$ (c)  $\rho_1=2530\ \text{kg/m}^3$ (d)  $\lambda_1=26,487\ \text{GPa}$ 

Fig 15 Sensibilité de la célérité aux paramètres de la lame

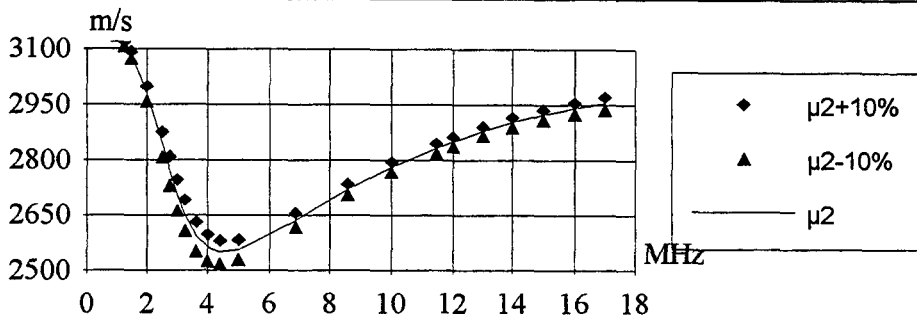
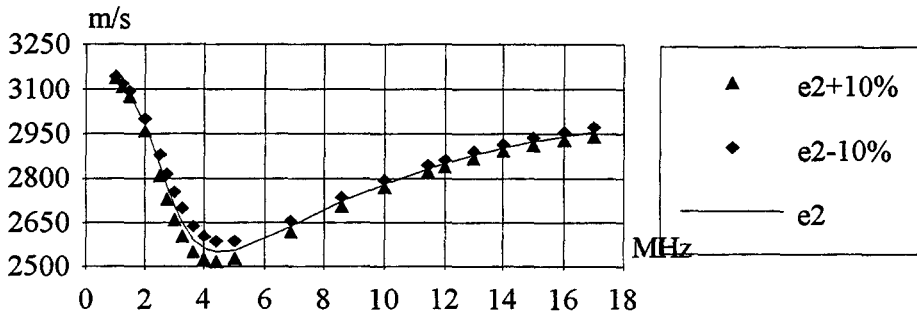
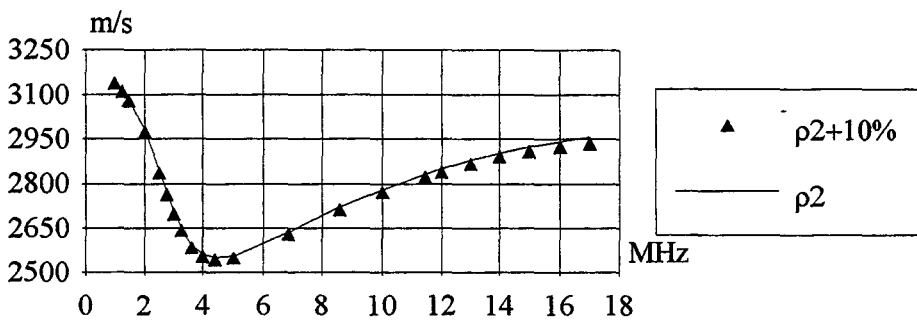
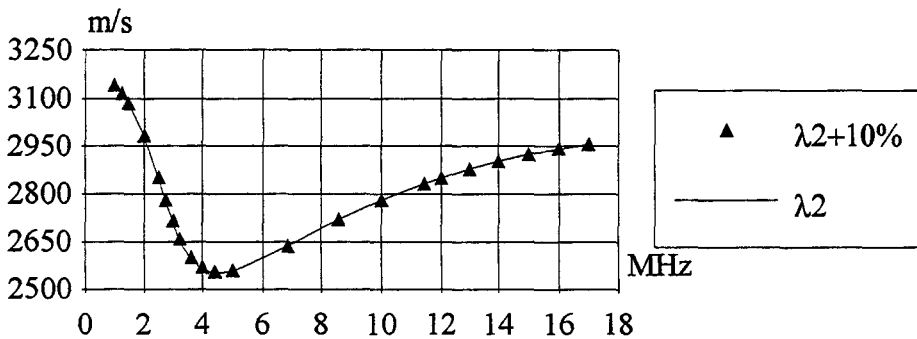
(a)  $\mu_2 = 2,943 \text{ GPa}$ (b)  $e_2 = 50 \mu\text{m}$ (c)  $\rho_2 = 1180 \text{ kg/m}^3$ (d)  $\lambda_2 = 5,445 \text{ GPa}$ 

Fig 16 Sensibilité de la célérité aux paramètres de l'adhésif

les influences de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  restent extrêmement faibles ce qui justifie le choix de notre modèle (cf Chap.3 § 2).

### 2.2.2. Paramètres à identifier

Notre modèle constitué d'une couche collée à un substrat semi-infini, comporte 11 paramètres se répartissant ainsi :

- trois paramètres pour le substrat : ( $\lambda_3, \mu_3, \rho_3$ )
- huit paramètres pour les couches : ( $\lambda_m, \mu_m, \rho_m, e_m$ ) ( $m=1, 2$ )

Toutes les masses volumiques  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  sont mesurables et connues. Les paramètres du substrat  $\lambda_3$  et  $\mu_3$  sont obtenus par vélocimétrie des ondes acoustiques de volume. De plus, nous laissons constants les paramètres ayant peu d'influence sur les ondes de Rayleigh-Sezawa, à savoir  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .

Notre programme de calcul comprendra donc 11 paramètres dont 4 à identifier c'est-à-dire les deux épaisseurs  $e_1, e_2$  et les deux coefficients de Lamé  $\mu_1$  et  $\mu_2$  de la lame et de l'adhésif.

### 2.2.3. Présentation du modèle servant à la simulation.

Les caractéristiques du modèle utilisé pour notre simulation sont regroupées au tableau 9.

	$\lambda$ (GPa)	$\mu$ (GPa)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$e$ ( $\mu$ m)
Lame	26,487	30,411	2530	150
Adhésif	5,445	2,943	1180	50
Substrat	26,487	30,411	2530	$\infty$

Tableau 9

A partir de ces valeurs, la courbe de dispersion du premier mode est donnée à la figure 17 où nous choisissons cinq points pseudo-expérimentaux (tableau 10) reportés sur la courbe correspondante .

N°	1	2	3	4	5
F (MHz)	2,5	3,5	4,5	6	12
c (m/s)	2809,84	2568,65	2519,71	2572,85	2837,40

Tableau 10

#### Remarques :

- Les points à plus basses fréquences sont inutilisés ici; ils seraient utiles pour caractériser le substrat si c'était nécessaire.
- Les valeurs des célérités correspondent exactement aux valeurs calculées.

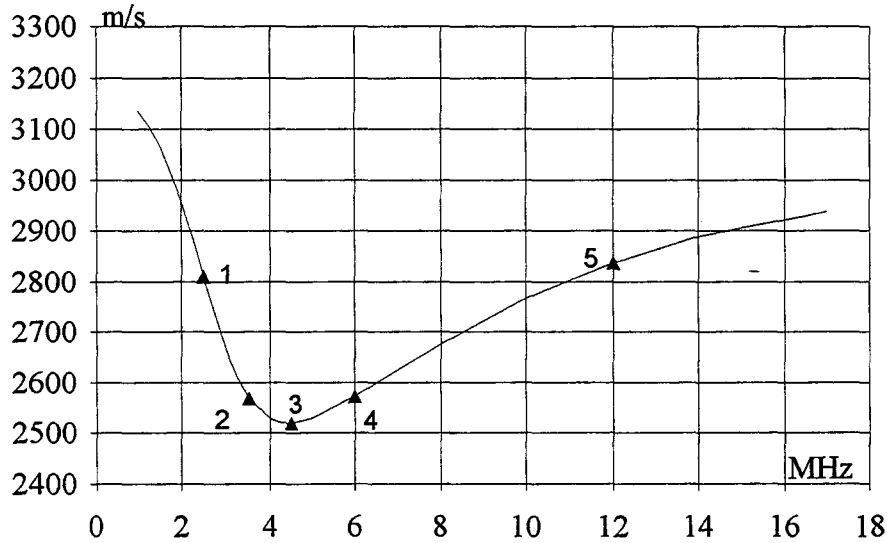


Fig 17 Célérité en fonction de la fréquence  
et points pseudo-expérimentaux

#### 2.2.4. Stabilité de l'algorithme.

En prenant pour l'identification les valeurs exactes du modèle comme valeurs initiales, nous vérifions que le calcul ne diverge pas c'est-à-dire que les valeurs finales restent pratiquement celles de départ puisqu'elles sont exactes.

Les calculs sont effectués sur les quatre paramètres en même temps et pour les cinq points expérimentaux du tableau 11. Les valeurs exactes sont conservées. L'écart  $E_c$  reste inférieur à  $10^{-3} \text{ (m/s)}^2$ .

### 2.3. Identification.

#### 2.3.1. Cas des épaisseurs connues.

Les épaisseurs de la lame et de l'adhésif sont des grandeurs géométriques habituellement mesurables. Dans cette hypothèse seul  $\mu_1$  et  $\mu_2$  restent à identifier. Les valeurs initiales choisies sont les valeurs exactes diminuées de 10%;  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont identifiés en même temps en choisissant les points expérimentaux n° 1 à 4 du tableau 10. L'opération est faite en deux fois c'est-à-dire que les résultats du premier calcul servent de valeurs de départ pour le second.

La restitution est excellente,  $\mu_1$  est retrouvé à 0,02 % et  $\mu_2$  à 0,3 % avec l'écart  $E_c$  égal à  $4,45 \text{ (m/s)}^2$ .

### 2.3.2. Cas des quatre paramètres inconnus.

L'identification globale des quatre paramètres à la fois à l'aide des cinq points expérimentaux ne donne aucun résultat: Le système diverge et arrive à un moment donné à l'arrêt avec la mention "division par zéro" c'est pourquoi nous sommes arrivés à la procédure suivante, en deux étapes, qui donne de bons résultats.

#### Première étape :

Pour des valeurs initiales supérieures de 10 % aux valeurs exactes les paramètres sont identifiés un à un dans l'ordre suivant :  $\mu_2$ ,  $\mu_1$ ,  $e_2$ ,  $e_1$ . Les résultats de la ou des identifications précédentes servent de nouvelles valeurs initiales. Chaque paramètre est identifié dans sa zone de sensibilité :

- Pour  $e_1$  et  $\mu_1$ ,  $5 \text{ MHz} < F < 15 \text{ MHz}$ , points n°4 et 5 (Fig. 15a, b)
- Pour  $e_2$  et  $\mu_2$ ,  $2 \text{ MHz} < F < 5 \text{ MHz}$ , points n°1, 2 et 3 (Fig. 16a, b)

Les paramètres ainsi identifiés sont retrouvés à mieux que 1% (tableau12).

#### Deuxième étape :

En utilisant les valeurs précédemment trouvées pour valeurs initiales, nous identifions maintenant les quatre paramètres sur les cinq points pseudo-expérimentaux. Les résultats regroupés au tableau 13 montrent une restitution à quelques millièmes près ; la plus grande erreur est de 3,4 millième.

MILIEUX	Paramètres ajustés	Valeur du modèle	Valeur initiale	Valeur finale	Précision %	Ecart (m/s) <sup>2</sup>
LAME	$\mu(\text{GPa})$	30,41	33,4	30,46	0,2	5,8
	$e(\mu\text{m})$	150	165	150,3	0,2	4,38
ADHESIF	$\mu(\text{GPa})$	2,943	3,24	2,95	0,7	1,14
	$e(\mu\text{m})$	50	55	50,2	0,4	0,51

Tableau 12. Identification d'un seul paramètre

MILIEUX	Paramètres	Valeur du modèle	Valeur initiale	Valeur finale	Précision %	Ecart (m/s) <sup>2</sup>
LAME	$\mu(\text{GPa})$	30,41	30,46	30,45	+0,13	0,5
	$e(\mu\text{m})$	150	150,3	149,76	-0,16	
ADHESIF	$\mu(\text{GPa})$	2,943	2,95	2,948	+0,17	
	$e(\mu\text{m})$	50	50,2	50,17	+0,34	

Tableau 13. Identification simultanée des paramètres



### 2.3.3. Pseudo-mesures bruitées.

En fait, toute mesure physique est entachée d'une imprécision. Un même système physique étudié dans les mêmes conditions donnera, aux mêmes fréquences de mesure, fréquences définies par un synthétiseur donc très stables, des valeurs de célérités évoluant dans une bande que définit l'imprécision. La célérité mesurée, à la fréquence  $F_1$  aura une valeur  $C_1 \pm \varepsilon C_1$ , où  $\varepsilon$  désigne l'imprécision dépendant de l'appareil de mesure.

Pour simuler ce fait, nous modifierons les valeurs des célérités pseudo-expérimentales du tableau 10 en leur ajoutant  $\pm \varepsilon\%$ , les points 1 et 5 resteront inchangés puisque leur influence sur les caractéristiques de l'adhésif sont faibles et que la précision des mesures en HF effectuées par notre banc de mesure est meilleure. Comme en général ce banc permet des précisions supérieures au pourcent nous prendrons  $\varepsilon=1\%$ . Nous avons étudié les configurations du tableau 13'. La configuration 0, - $\varepsilon$ , + $\varepsilon$ , 0, 0 signifie que les valeurs de célérité aux points 1, 4 et 5 n'ont pas été modifiées tandis que celles aux point 2 et 3 ont été respectivement diminuées et augmentées de 1%.

On remarquera que d'une ligne à la suivante la célérité d'un seul point a été modifiée. Globalement l'erreur maximale sur  $\mu_1$  est de 2% tandis que celle sur  $\mu_2$  peut facilement atteindre le double. Jamais les résultats ne deviennent incohérents. Mais ces résultats postulent pour des mesures avec une imprécision ne dépassant pas 1%.

L'évolution de ces résultats semble assez aléatoire aussi il est difficile de trouver une corrélation entre l'évolution des imprécisions des mesures et celle des paramètres identifiés.

N°	Configuration	Ecart relatif en %			
		$\mu_1$	$e_1$	$\mu_2$	$e_2$
1	0,0,0,0,0	0	0	0	0
2	0,- $\varepsilon$ ,0,0,0	+0,3	-1,3	-2	-0,06
3	0,- $\varepsilon$ ,- $\varepsilon$ ,0,0	+0,8	-1,4	-4,6	-0,4
4	0,- $\varepsilon$ ,- $\varepsilon$ ,- $\varepsilon$ ,0	-0,4	-1,17	-4,6	-0,16
5	0,+ $\varepsilon$ ,- $\varepsilon$ ,- $\varepsilon$ ,0	-1,3	-1,3	+0,8	-1,1
6	0,+ $\varepsilon$ ,- $\varepsilon$ ,+ $\varepsilon$ ,0	+1	-0,8	+0,6	+0,3
7	0,- $\varepsilon$ ,- $\varepsilon$ ,+ $\varepsilon$ ,0	+2	-1,4	-4,6	+1,3

Tableau 13'

### 2.3.4. Conclusion.

Ces résultats montrent la possibilité de caractériser un système à trois milieux à partir d'une courbe de dispersion mesurée. Nous allons maintenant l'utiliser pour traiter des mesures réalisées au laboratoire.

## 3. Caractérisation de deux échantillons.

### 3.1. Description des échantillons.

Les deux échantillons sont constitués d'une lame de verre d'épaisseur voisine de 150  $\mu\text{m}$  (lame couvre-objet de microscope) de 20 mm de large et de 60 mm de long. Le substrat est un bloc de verre; il a les mêmes dimensions, à l'exception de l'épaisseur qui est de 20 mm.

#### Echantillon A

Lame de verre recouverte d'une fine couche d'aluminium déposée par évaporation sous vide pour la rendre réfléchissante (contrainte imposée par le banc de mesure). Elle est collée au substrat par un adhésif cyanolith-gel. L'épaisseur de colle mesurée est voisine de 50  $\mu\text{m}$ . (l'épaisseur de la colle est obtenue en faisant la différence de l'épaisseur totale de l'échantillon et les épaisseurs relatives de la lame et du substrat)

#### Echantillon B

La géométrie et la nature de cet échantillon sont identiques à l'échantillon A à la nature près de l'adhésif. Il s'agit d'un adhésif Norland utilisé en optique NOA68 dont le durcissement est commandé par lumière ultraviolette. Avant insolation, le système est laissé au repos dans l'obscurité pendant 24 heures sous charge. Ceci a permis d'obtenir une épaisseur de colle régulière d'environ 16  $\mu\text{m}$ .

Les mesures de célérité sont effectuées dans la gammes de 1 à 17 MHz à l'aide d'un banc opto-acoustique (annexe 3) basé sur le principe du knife-edge [34], leur précision est généralement supérieure à 1 %.

Les points de mesures sont reportés (figures 18 et 19) et rassemblés dans les tableaux 14 et 16.

### 3.2. Caractérisation de l'échantillon A.

La célérité a été mesurée à 7 fréquences, dont les valeurs sont données au tableau 14.

N°	1	2	3	4	5	6	7
F (MHz)	1,468	3,630	4,404	6,87	8,583	11,434	16,998
c (m/s)	3087,3	2673	2613	2644	2737,4	2826	2937,2

Tableau 14

La procédure d'identification a été menée en deux étapes suivant la méthode décrite au paragraphe 2.3.2. de ce chapitre.

Pour la lame et le substrat, les valeurs initiales choisies sont les mêmes ; elles sont déduites de mesures de la vitesse des ondes de Rayleigh sur le substrat. Les épaisseurs sont celles mesurées directement. Les valeurs  $\mu_2$  et  $\lambda_2$  sont des valeurs plausibles.

Les points expérimentaux 2, 3 et 4 servent à l'identification de  $\mu_2$  et  $e_2$  et les points 5 et 6 à celle de  $\mu_1$  et  $e_1$ . La deuxième étape d'identification simultanée de tous les paramètres est faite sur les points 2 à 7 inclus.

Le tableau 15 récapitule les valeurs initiales et les valeurs finales. L'écart global moyen peut sembler important ( $37,7 \text{ (m/s)}^2$ ). Il correspond à une différence moyenne ( $\sqrt{\text{Ecart}}$ ) entre les célérités calculées à partir des paramètres identifiés et les célérités mesurées d'environ 6 m/s, valeurs comparables aux imprécisions de mesures aux plus basses fréquences. La courbe (Fig.18) illustre le résultat en montrant les points de mesure et la courbe calculée à partir des paramètres identifiés.

MILIEUX	Valeur initiale $\mu$ (GPa)	Valeur finale $\mu$ (GPa)	Valeur initiale $e$ ( $\mu\text{m}$ )	Valeur finale $e$ ( $\mu\text{m}$ )	Ecart ( $\text{m/s}^2$ )
LAME	30,41	29,27	150	150,5	37,7
ADHESIF	3,24	4,14	50	50,19	

Tableau 15. Ajustement des paramètres sur une courbe expérimentale (Echantillon A)

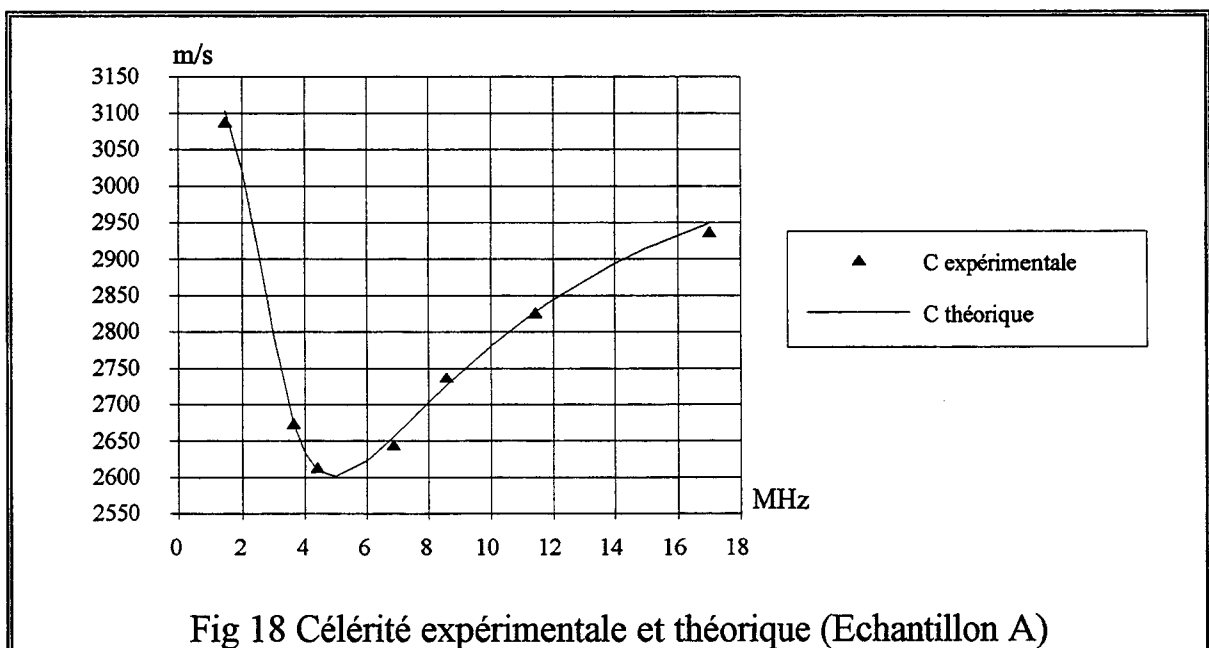


Fig 18 Célérité expérimentale et théorique (Echantillon A)

### 3.3. Caractérisation de l'échantillon B

Les célérités mesurées sont données au tableau 16.

N°	1	2	3	4	5	6
F (MHz)	1,468	2,330	3,633	6,870	11,434	16,998
c (m/s)	3190,2	3016,2	2693,5	2732	2825,6	2949,5

tableau 16

Le choix des valeurs initiales est fait comme pour l'échantillon A et l'identification utilise la même méthode.

Les points 1, 2 et 3 servent pour identifier  $\mu_2$  et  $e_2$  et les points 4 et 5 pour  $\mu_1$  et  $e_1$ .

Enfin, l'identification finale est faite à partir de 6 points.

Le tableau 17 récapitule les valeurs initiales et les valeurs trouvées. Ici les mesures sont moins bonnes, l'écart est plus important  $448 \text{ (m/s)}^2$ , il correspond à une différence moyenne d'environ 21 m/s.

MILIEUX	Valeur initiale $\mu$ (GPa)	Valeur finale $\mu$ (GPa)	Valeur initiale e( $\mu\text{m}$ )	Valeur finale e( $\mu\text{m}$ )	Ecart $(\text{m/s})^2$
LAME	30,41	29,206	152	150,5	448
ADHESIF	1,96	1,223	16	16,12	

Tableau 17. Ajustement des paramètres sur une courbe expérimentale (Echantillon B)

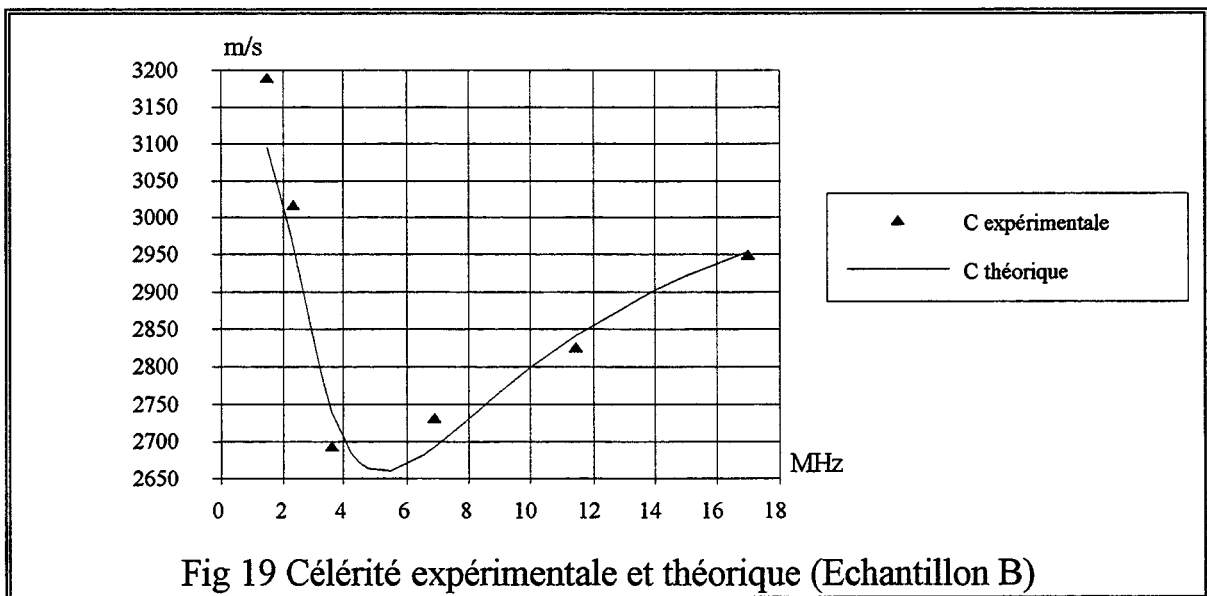


Fig 19 Célérité expérimentale et théorique (Echantillon B)

La courbe de la figure 19 montre la courbe théorique obtenue à l'aide des paramètres identifiés et les points de mesure. L'accord est incontestablement moins bon que l'échantillon A

Le modèle décèle bien la différence entre les deux adhésifs utilisés par la valeur de  $\mu_2$ :

Ech. A : cyanolith-gel :  $\mu = 4,14$  GPa

Ech. B : NAO68 :  $\mu = 1,22$  GPa

**Remarque:** Nous donnons (tableau 18) la nature des ondes dans le modèle de simulation et les échantillons mesurés :

	Cl <sub>1</sub> (m/s)	Ct <sub>1</sub> (m/s)	Cl <sub>2</sub> (m/s)	Ct <sub>2</sub> (m/s)	Milieu1	Milieu2
Modèle	5874,5	3467	3092	1579,3	O.R	O.R.S
Echantillon A	5807,4	3401,5	3410,4	1873,1	O.R	O.R.S
Echantillon B	5790,7	3387,2	2585,7	1017,8	O.R	O.R.S

Tableau18

*CONCLUSION GENERALE*

## *CONCLUSION GENERALE*

Une étude bibliographique nous a permis de préciser les notions de cohésion et d'adhésion et de recenser les différentes théories non unifiées qui tentent d'expliquer ces phénomènes. Elle a aussi permis de faire le point sur des tentatives antérieures de caractérisation par ultrasons des collages et de remarquer la sensibilité limitée de ces méthodes.

Ensuite, nous avons établi pour les O.R.Se les équations permettant de calculer la célérité, les amplitudes de déplacements, et la répartition de l'énergie de déformation dans un système constitué de trois milieux isotropes sans perte qui représente une lame collée sur un substrat. Deux types de conditions aux frontières différentes sont considérées : liaison liquide et liaison solides (contact glissant, contact rigide). Les différents type d'onde de surface existant dans ce système sont considérés .

Le modèle à trois milieux est constitué par une lame de plexiglas assemblée à un substrat d'aluminium à l'aide du monomère du plexiglas dont le durcissement est représenté par l'évolution du coefficient de Lamé  $\mu$ . Célérité , amplitudes et énergie ont été calculées numériquement en fonction de  $\mu$  pour les trois premiers modes des ondes de surface existant dans le système. A partir des variations de célérité selon la nature glissant et rigide ( $\mu=\mu_{max}$ ) nous définissons un coefficient de sensibilité  $\sigma$  dont nous étudions l'évolution avec la fréquence , l'épaisseur relative de la colle pour les trois premiers modes. Le coefficient de sensibilité  $\sigma$  peut dépasser 100% : ce qui laisse envisager une grande sensibilité de ce type d'onde à déceler les variations de caractéristiques de la colle, phénomène attaché une concentration de l'énergie dans l'adhésif.

Pilarski a développé un modèle pour l'étude de l'adhésion qui introduit d'autres conditions de passage et néglige l'épaisseur de la colle. Nous avons montré que pour des couches très minces notre traitement donne les mêmes résultats que celui de Pilarski; sous un formalisme différent, les notions physiques restent identiques.

En vue de caractériser l'adhésif et donc d'atteindre sa cohésion, nous avons résolu le problème inverse. Il consiste à trouver les caractéristiques des différents milieux constituant le système, à partir d'une courbe de dispersion mesurée. A l'aide d'une simulation nous montrons comment retrouver avec une excellente précision les paramètres significatifs concernant la lame collée et l'adhésif. Nous étudions aussi l'influence des imprécisions sur les mesures . La méthode reste parfaitement compatible avec des mesures à 1%.

Enfin, nous traitons des mesures faites sur deux échantillons semblables , une lame de verre collée sur un bloc de verre, mais pour lesquels l'épaisseur et la nature de l'adhésif diffèrent. La résolution du problème inverse révèle la différence de colle (variation de  $\mu_2$  de 340%). Il reste difficile de prétendre atteindre la cohésion ou l'adhésion

Pour l'échantillon épais, les mesures sont plus précises et l'identification excellente. Pour l'échantillon mince l'imprécision des mesures est plus grande, ce qui rejailit sur l'identification.

Dans le premier cas serait-on plus sensible à la cohésion et dans le second cas à l'adhésion?. Nous serions tenté de répondre par l'affirmative. Pour avancer une réponse avec plus de certitude il est indispensable de disposer de tout un ensemble de mesures réalisées sur des échantillons où la nature et l'épaisseur de la colle diffèrent ainsi que le traitement des surfaces à assembler. Nous avons réalisé une méthode d'analyse pour traiter ces mesures. Il est possible que notre modèle à la lumière des résultats expérimentaux doive être affiné: soit en tenant compte des pertes dans l'adhésif, soit en modélisant celui-ci par un système à trois couches, les couches extrêmes de contact traduisant l'adhésion, la partie centrale plus épaisse définissant la cohésion.



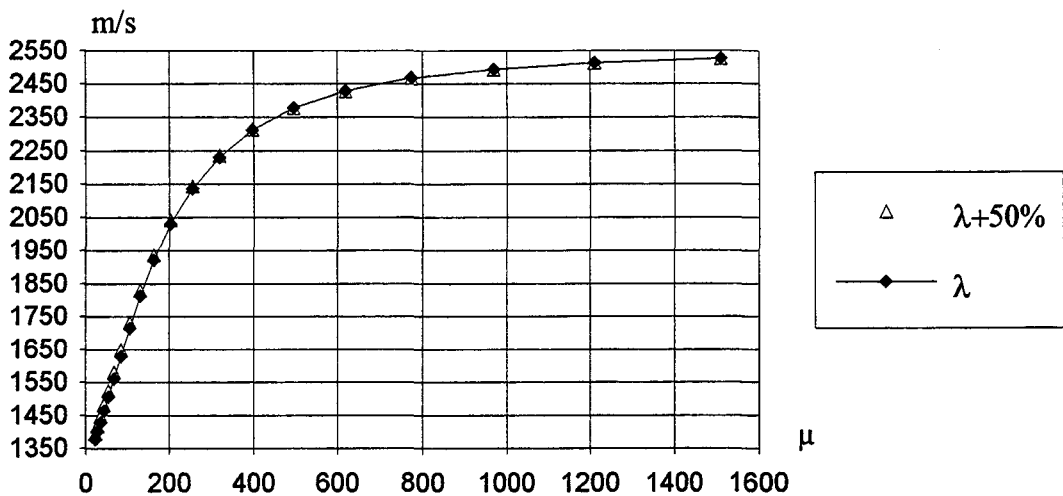
## ANNEXE 1

## ANNEXE 1

L'objet de cette annexe est de vérifier que le coefficient de Lamé  $\lambda$  de la colle joue peu sur la dispersion de célérité. Pour cela nous avons calculé à une fréquence de 4 MHz le premier mode pour deux valeurs de  $\lambda$  ( $\lambda$  et  $\lambda+50\%$ ) pour un système à trois milieux (le tableau 19 donne ses caractéristiques acoustiques) les courbes obtenues sont données (fig 20). Leur superposition justifie largement l'approximation retenue.

Matériaux	$\lambda$ en MPa	$\mu$ en MPa	$\rho$ en kg/m <sup>3</sup>	e en $\mu\text{m}$
Plexiglas	5447	1483	1180	100
"Colle"	5447	$0 \leq \mu \leq 1483$	1180	10
Aluminium	55200	25900	2700	$\infty$

Tableau 19

fig 20: Célérité en fonction de  $\mu$  ( $\mu$  en MPa : F=4MHz)

*Annexe 2*  
MODELE DE SCHOENBERG

## Annexe 2

### MODELE DE SCHOENBERG

Dans cette annexe nous voulons étudier l'influence de l'adhésion sur la propagation des ondes de Rayleigh-Sezawa. Pour cela, nous considérons les conditions aux limites de Schoenberg.M [23].

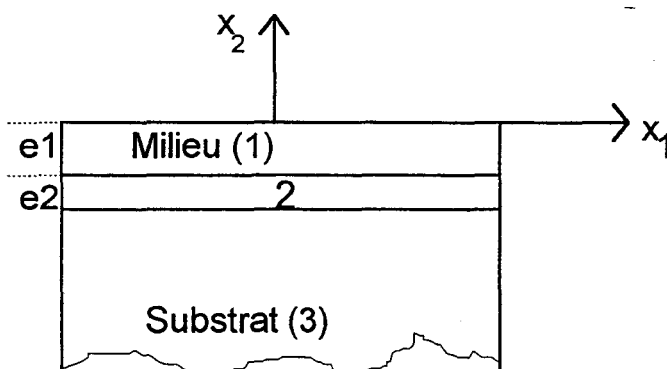


Fig 21. Système stratifié à deux couches.

#### 1. Modèle de Schoenberg (fig 21)

Pour caractériser un mauvais contact entre deux solides, Schoenberg .M a supposé qu'il y a toujours continuité des contraintes à travers l'interface  $m$  ( $m=1, 2$ ) mais qu'en plus il existe, en chaque point, une relation entre le vecteur contrainte  $\bar{T}$  et le vecteur saut de déplacement  $\Delta \bar{u}$  défini comme le vecteur différence des déplacements de part et d'autre de l'interface  $m$ .

Il suppose qu'en chaque point de l'interface  $m$  le vecteur contrainte est une fonction analytique du vecteur saut de déplacement de telle sorte que l'annulation de l'un des deux vecteurs entraîne l'annulation de l'autre

Il pose, en effet, en utilisant les notations du chapitre 2 à l'interface  $m$  d'altitude  $h_m$  séparant le milieu  $m$  et  $m+1$  :

- la continuité des contraintes

$$\left[ T_{yx}(y = h_m) \right]_m = \left[ T_{yx}(y = h_m) \right]_{m+1} \quad (51.1)$$

$$\left[ T_{yy}(y = h_m) \right]_m = \left[ T_{yy}(y = h_m) \right]_{m+1}$$

- une relation linéaire entre les composantes du vecteur contrainte et la différence de composantes de déplacements de part et d'autre de l'interface

Pour les composantes longitudinales

$$\left[ T_{yx}(y = h_m) \right]_m = k_{tm} [u_m(y = h_m) - u_{m+1}(y = h_m)]$$

Pour les composantes transversales (51.2)

$$\left[ T_{yy}(y = h_m) \right]_m = k_{nm} [v_m(y = h_m) - V_{m+1}(y = h_m)]$$

où  $k_{nm}$ ,  $k_{tm}$  sont des paramètres qui s'expriment en  $N/m^3$  et caractérisent l'adhésion à l'interface  $m$ . En effet en prenant des valeurs infinies pour ces paramètres, on retrouve le cas d'un contact rigide et en faisant tendre  $k_{tm}$  vers zéro tout en gardant  $k_{nm}$  infini on obtient le cas du contact glissant. Lorsque  $k_{tm}$  et  $k_{nm}$  tendent tous deux vers zéro les contraintes normale et tangentielle deviennent nulles et on obtient alors la situation où on a un décollement total entre les deux solides.

Dans le cas où l'épaisseur du milieu 2 est faible, Schoenberg montre que :

$$k_n = \frac{E_2}{e_2} \quad k_t = \frac{\mu_2}{e_2}$$

où  $E_2$ ,  $\mu_2$ ,  $e_2$  sont respectivement le module d'Young, le coefficient de Lamé et l'épaisseur du milieu 2.

A ces conditions doivent s'ajouter l'annulation des contraintes à la surface libre et l'évanouissement de l'onde dans le substrat quand  $y$  tend vers  $-\infty$ .

## 2. Expression de la dispersion

A partir des équations (8') et (10) du chapitre 2 paragraphe 4 auxquelles nous appliquons les conditions de schoenberg (51.1 et 51.2) pour le système étudié à trois milieux, nous obtenons le groupe de dix équations à dix inconnues suivant

$$\alpha_1 A'_1 + \alpha_1 B'_1 + \beta_1 C'_1 + \beta_1 D'_1 = 0$$

$$\gamma_1 A'_1 - \gamma_1 B'_1 + \alpha_1 C'_1 - \alpha_1 D'_1 = 0$$

$$\left(k - \frac{\gamma_1}{kt_1}\right)e^{r_1 h_1} A'_1 + \left(k + \frac{\gamma_1}{kt_1}\right)e^{-r_1 h_1} B'_1 + \left(s_1 - \frac{\alpha_1}{kt_1}\right)e^{s_1 h_1} C'_1 + \left(s_1 + \frac{\alpha_1}{kt_1}\right)e^{-s_1 h_1} D'_1 - k e^{r_2 h_1} A'_2 - k e^{-r_2 h_1} B'_2 - s_2 e^{s_2 h_1} C'_2 - s_2 e^{-s_2 h_1} D'_2 = 0$$

$$\left(r_1 - \frac{\alpha_1}{kn_1}\right)e^{r_1 h_1} A'_1 - \left(r_1 + \frac{\alpha_1}{kn_1}\right)e^{-r_1 h_1} B'_1 + \left(k - \frac{\beta_1}{kn_1}\right)e^{s_1 h_1} C'_1 - \left(k + \frac{\beta_1}{kn_1}\right)e^{-s_1 h_1} D'_1 - r_2 e^{r_2 h_1} A'_2 + r_2 e^{-r_2 h_1} B'_2 - k e^{s_2 h_1} C'_2 + k e^{-s_2 h_1} D'_2 = 0$$

$$\alpha_1 e^{r_1 h_1} A'_1 + \alpha_1 e^{-r_1 h_1} B'_1 + \beta_1 e^{s_1 h_1} C'_1 + \beta_1 e^{-s_1 h_1} D'_1 - \alpha_2 e^{r_2 h_1} A'_2 - \alpha_2 e^{-r_2 h_1} B'_2 - \beta_2 e^{s_2 h_1} C'_2 - \beta_2 e^{-s_2 h_1} D'_2 = 0$$

$$\gamma_1 e^{r_1 h_1} A'_1 - \gamma_1 e^{-r_1 h_1} B'_1 + \alpha_1 e^{s_1 h_1} C'_1 - \alpha_1 e^{-s_1 h_1} D'_1 - \gamma_2 e^{r_2 h_1} A'_2 + \gamma_2 e^{-r_2 h_1} B'_2 - \alpha_2 e^{s_2 h_1} C'_2 + \alpha_2 e^{-s_2 h_1} D'_2 = 0$$

$$\left(k - \frac{\gamma_2}{kt_2}\right)e^{r_2 h_2} A'_2 + \left(k + \frac{\gamma_2}{kt_2}\right)e^{-r_2 h_2} B'_2 + \left(s_2 - \frac{\alpha_2}{kt_2}\right)e^{s_2 h_2} C'_2 + \left(s_2 + \frac{\alpha_2}{kt_2}\right)e^{-s_2 h_2} D'_2 - k e^{r_3 h_2} A'_3 - s_3 e^{s_3 h_2} C'_3 = 0$$

$$\left(r_2 - \frac{\alpha_2}{kn_2}\right)e^{r_2 h_2} A'_2 - \left(r_2 + \frac{\alpha_2}{kn_2}\right)e^{-r_2 h_2} B'_2 + \left(k - \frac{\beta_2}{kn_2}\right)e^{s_2 h_2} C'_2 - \left(k + \frac{\beta_2}{kn_2}\right)e^{-s_2 h_2} D'_2 - r_3 e^{r_3 h_2} A'_3 - k e^{s_3 h_2} C'_3 = 0$$

$$\alpha_2 e^{r_2 h_2} A'_2 + \alpha_2 e^{-r_2 h_2} B'_2 + \beta_2 e^{s_2 h_2} C'_2 + \beta_2 e^{-s_2 h_2} D'_2 - \alpha_3 e^{r_3 h_2} A'_3 - \beta_3 e^{s_3 h_2} C'_3 = 0$$

$$\gamma_2 e^{r_2 h_2} A'_2 - \gamma_2 e^{-r_2 h_2} B'_2 + \alpha_2 e^{s_2 h_2} C'_2 - \alpha_2 e^{-s_2 h_2} D'_2 - \gamma_3 e^{r_3 h_2} A'_3 - \alpha_3 e^{s_3 h_2} C'_3 = 0$$

Pour que des solutions non triviales existent le déterminant du tableau 20 doit s'annuler.

$A'_1$	$B'_1$	$C'_1$	$D'_1$	$A'_2$
$\alpha_1$	$\alpha_1$	$\beta_1$	$\beta_1$	0
$\gamma_1$	$-\gamma_1$	$\alpha_1$	$-\alpha_1$	0
$(k - \frac{\gamma_1}{kt_1})e^{r_1 h_1}$	$(k + \frac{\gamma_1}{kt_1})e^{-r_1 h_1}$	$(s_1 - \frac{\alpha_1}{kt_1})e^{s_1 h_1}$	$(s_1 + \frac{\alpha_1}{kt_1})e^{-s_1 h_1}$	$-ke^{r_2 h_1}$
$(r_1 - \frac{\alpha_1}{kn_1})e^{r_1 h_1}$	$-(r_1 + \frac{\alpha_1}{kn_1})e^{-r_1 h_1}$	$(k - \frac{\beta_1}{kn_1})e^{s_1 h_1}$	$-(k + \frac{\beta_1}{kn_1})e^{-s_1 h_1}$	$-r_2 e^{r_2 h_1}$
$\alpha_1 e^{r_1 h_1}$	$\alpha_1 e^{-r_1 h_1}$	$\beta_1 e^{s_1 h_1}$	$\beta_1 e^{-s_1 h_1}$	$-\alpha_2 e^{r_2 h_1}$
$\gamma_1 e^{r_1 h_1}$	$-\gamma_1 e^{-r_1 h_1}$	$\alpha_1 e^{s_1 h_1}$	$-\alpha_1 e^{-s_1 h_1}$	$-\gamma_2 e^{r_2 h_1}$
0	0	0	0	$(k - \frac{\gamma_2}{kt_2})e^{r_2 h_2}$
0	0	0	0	$(r_2 - \frac{\alpha_2}{kn_2})e^{r_2 h_2}$
0	0	0	0	$\alpha_2 e^{r_2 h_2}$
0	0	0	0	$\gamma_2 e^{r_2 h_2}$

$B'_2$	$C'_2$	$D'_2$	$A'_3$	$C'_3$
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
$-ke^{-r_2 h_1}$	$-s_2 e^{s_2 h_1}$	$-s_2 e^{-s_2 h_1}$	0	0
$r_2 e^{-r_2 h_1}$	$-ke^{s_2 h_1}$	$ke^{-s_2 h_1}$	0	0
$-\alpha_2 e^{-r_2 h_1}$	$-\beta_2 e^{s_2 h_1}$	$-\beta_2 e^{-s_2 h_1}$	0	0
$\gamma_2 e^{-r_2 h_1}$	$-\alpha_2 e^{s_2 h_1}$	$\alpha_2 e^{-s_2 h_1}$	0	0
$(k + \frac{\gamma_2}{kt_2})e^{-r_2 h_2}$	$(s_2 - \frac{\alpha_2}{kt_2})e^{s_2 h_2}$	$(s_2 + \frac{\alpha_2}{kt_2})e^{-s_2 h_2}$	$-ke^{r_3 h_2}$	$-s_3 e^{s_3 h_2}$
$-(r_2 + \frac{\alpha_2}{kn_2})e^{-r_2 h_2}$	$(k - \frac{\beta_2}{kn_2})e^{s_2 h_2}$	$-(k + \frac{\beta_2}{kn_2})e^{-s_2 h_2}$	$-r_3 e^{r_3 h_2}$	$-ke^{s_3 h_2}$
$\alpha_2 e^{-r_2 h_2}$	$\beta_2 e^{s_2 h_2}$	$\beta_2 e^{-s_2 h_2}$	$-\alpha_3 e^{r_3 h_2}$	$-\beta_3 e^{s_3 h_2}$
$-\gamma_2 e^{-r_2 h_2}$	$\alpha_2 e^{s_2 h_2}$	$-\alpha_2 e^{-s_2 h_2}$	$-\gamma_3 e^{r_3 h_2}$	$-\alpha_3 e^{s_3 h_2}$

= 0

Tableau 20

L'annulation du déterminant subsiste quand on multiplie tous les termes d'une ligne ou d'une colonne par un même nombre. Utilisons cette propriété pour simplifier, en multipliant:

- ♦ les lignes 3,4,7 et 8 par  $k$ ; les colonnes 1 et 2 par  $\frac{P_1^2}{k^2}$ , 5 et 6 par  $\frac{P_2^2}{k^2}$ ...

◆ les colonnes 3 et 4 par  $\frac{Q_1^2}{k^2}$ , 7 et 8 par  $\frac{Q_2^2}{k^2}$ ...

◆ les colonnes 9 et 10 par des exponentielles correspondantes d'arguments de signes opposés.

Le déterminant prend alors l'allure donnée au tableau 20' en utilisant les transpositions (15). Sous cette forme, son calcul numérique n'est possible que dans la mesure où tous ses termes sont réels. Aussi, nous le réécrivons sous une forme plus générale (tableau 20''), par introduction de fonctions hyperboliques qui se transposent aisément en fonctions trigonométriques si les arguments  $X_{mj}$  et  $Y_{mj}$  deviennent imaginaires purs. on effectue pour cela les combinaisons suivantes des colonnes:  $Col1 \Rightarrow \frac{1}{2} (Col1+Col2)$  ;  $Col2 \Rightarrow \frac{1}{2} (Col1-Col2)$

$Col3 \Rightarrow \frac{1}{2} (Col3+Col4)$  ;  $Col4 \Rightarrow \frac{1}{2} (Col3-Col4)$ , etc...

$T_1$	$T_1$	$V_1$	$V_1$	0
$U_1$	$-U_1$	$W_1$	$-W_1$	0
$(P_1^2 - \frac{k}{kt_1} U_1) e^{X_{11}}$	$(P_1^2 + \frac{k}{kt_1} U_1) e^{-X_{11}}$	$(R_1 - \frac{k}{kt_1} W_1) e^{Y_{11}}$	$(R_1 + \frac{k}{kt_1} W_1) e^{-Y_{11}}$	$-P_2^2 e^{X_{21}}$
$(S_1 - \frac{k}{kn_1} T_1) e^{X_{11}}$	$-(S_1 + \frac{k}{kn_1} T_1) e^{-X_{11}}$	$(Q_1^2 - \frac{k}{kn_1} V_1) e^{Y_{11}}$	$-(Q_1^2 + \frac{k}{kn_1} V_1) e^{-Y_{11}}$	$-S_2 e^{X_{21}}$
$T_1 e^{X_{11}}$	$T_1 e^{-X_{11}}$	$V_1 e^{Y_{11}}$	$V_1 e^{-Y_{11}}$	$-T_2 e^{X_{21}}$
$U_1 e^{X_{11}}$	$-U_1 e^{-X_{11}}$	$W_1 e^{Y_{11}}$	$-W_1 e^{-Y_{11}}$	$-U_2 e^{X_{21}}$
0	0	0	0	$(P_2^2 - \frac{k}{kt_2} U_2) e^{X_{22}}$
0	0	0	0	$(S_2 - \frac{k}{kn_2} T_2) e^{X_{22}}$
0	0	0	0	$T_2 e^{X_{22}}$
0	0	0	0	$U_2 e^{X_{22}}$

0	0	0	0	0	= 0
0	0	0	0	0	
$-P_2^2 e^{-X_{21}}$	$-R_2 e^{Y_{21}}$	$-R_2 e^{-Y_{21}}$	0	0	
$S_2 e^{-X_{21}}$	$-Q_2^2 e^{Y_{21}}$	$Q_2^2 e^{-Y_{21}}$	0	0	
$-T_2 e^{-X_{21}}$	$-V_2 e^{Y_{21}}$	$-V_2 e^{-Y_{21}}$	0	0	
$U_2 e^{-X_{21}}$	$-W_2 e^{Y_{21}}$	$W_2 e^{-Y_{21}}$	0	0	
$(P_2^2 + \frac{k}{kt_2} U_2) e^{-X_{22}}$	$(R_2 - \frac{k}{kt_2} W_2) e^{Y_{22}}$	$(R_2 + \frac{k}{kt_2} W_2) e^{-Y_{22}}$	$P_3^2$	$R_3$	
$-(S_2 + \frac{k}{kn_2} T_2) e^{-X_{22}}$	$(Q_2^2 - \frac{k}{kn_2} V_2) e^{Y_{22}}$	$-(Q_2^2 + \frac{k}{kn_2} V_2) e^{-Y_{22}}$	$S_3$	$Q_3^2$	
$T_2 e^{-X_{22}}$	$V_2 e^{Y_{22}}$	$V_2 e^{-Y_{22}}$	$T_3$	$V_3$	
$-U_2 e^{-X_{22}}$	$W_2 e^{Y_{22}}$	$-W_2 e^{-Y_{22}}$	$U_3$	$W_3$	

Tableau 20'

$T_1$	0	$V_1$	0	0
0	$U_1$	0	$W_1$	0
$P_1^2 chx_{11} - \frac{k}{kt_1} U_1 shx_{11}$	$P_1^2 shx_{11} - \frac{k}{kt_1} U_1 chx_{11}$	$R_1 chy_{11} - \frac{k}{kt_1} W_1 shy_{11}$	$R_1 shy_{11} - \frac{k}{kt_1} W_1 chy_{11}$	$-P_2^2 chx_{21}$
$S_1 shx_{11} - \frac{k}{kn_1} T_1 chx_{11}$	$S_1 chx_{11} - \frac{k}{kn_1} T_1 shx_{11}$	$Q_1^2 shy_{11} - \frac{k}{kn_1} V_1 chy_{11}$	$Q_1^2 chy_{11} - \frac{k}{kn_1} V_1 shy_{11}$	$-S_2 shx_{21}$
$T_1 chx_{11}$	$T_1 shx_{11}$	$V_1 chy_{11}$	$V_1 shy_{11}$	$-T_2 chx_{21}$
$U_1 shx_{11}$	$U_1 chx_{11}$	$W_1 shy_{11}$	$W_1 chy_{11}$	$-U_2 shx_{21}$
0	0	0	0	$P_2^2 chx_{22} - \frac{k}{kt_2} U_2 shx_{22}$
0	0	0	0	$S_2 shx_{22} - \frac{k}{kn_2} T_2 chx_{22}$
0	0	0	0	$T_2 chx_{22}$
0	0	0	0	$U_2 shx_{22}$

0	0	0	0	0	0	= 0
0	0	0	0	0	0	
$-P_2^2 shx_{21}$	$-R_2 chy_{21}$	$-R_2 shy_{21}$	0	0	0	
$-S_2 chx_{21}$	$-Q_2^2 shy_{21}$	$-Q_2^2 chy_{21}$	0	0	0	
$-T_2 shx_{21}$	$-V_2 chy_{21}$	$-V_2 shy_{21}$	0	0	0	
$-U_2 chx_{21}$	$-W_2 shy_{21}$	$-W_2 chy_{21}$	0	0	0	
$P_2^2 shx_{22} - \frac{k}{kt_2} U_2 chx_{22}$	$R_2 chy_{22} - \frac{k}{kt_2} W_2 shy_{22}$	$R_2 shy_{22} - \frac{k}{kt_2} W_2 chy_{22}$	$P_3^2$	$R_3$		
$S_2 chx_{22} - \frac{k}{kn_2} T_2 shx_{22}$	$Q_2^2 shy_{22} - \frac{k}{kn_2} V_2 chy_{22}$	$Q_2^2 chy_{22} - \frac{k}{kn_2} V_2 shy_{22}$	$S_3$	$Q_3^2$		
$T_2 shx_{22}$	$V_2 chy_{22}$	$V_2 shy_{22}$	$T_3$	$V_3$		
$U_2 chx_{22}$	$W_2 shy_{22}$	$W_2 chy_{22}$	$U_3$	$W_3$		

Tableau 20"

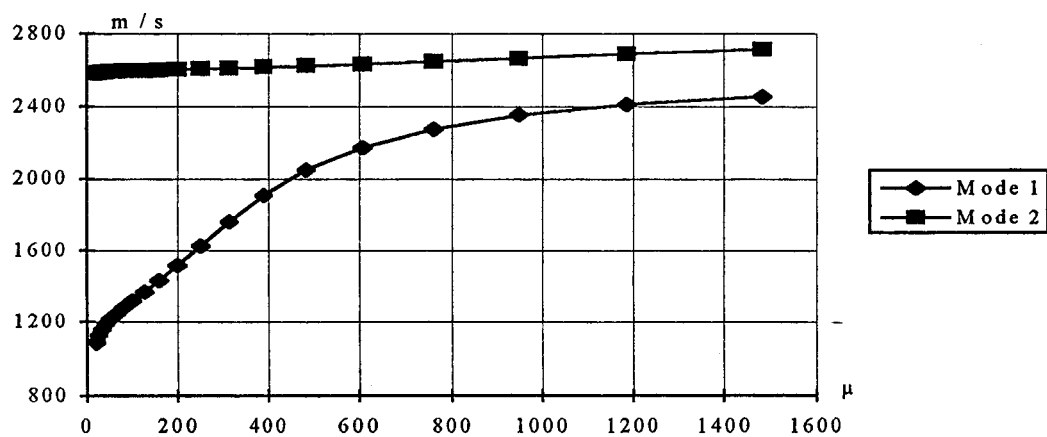


### 3. Résultats numériques

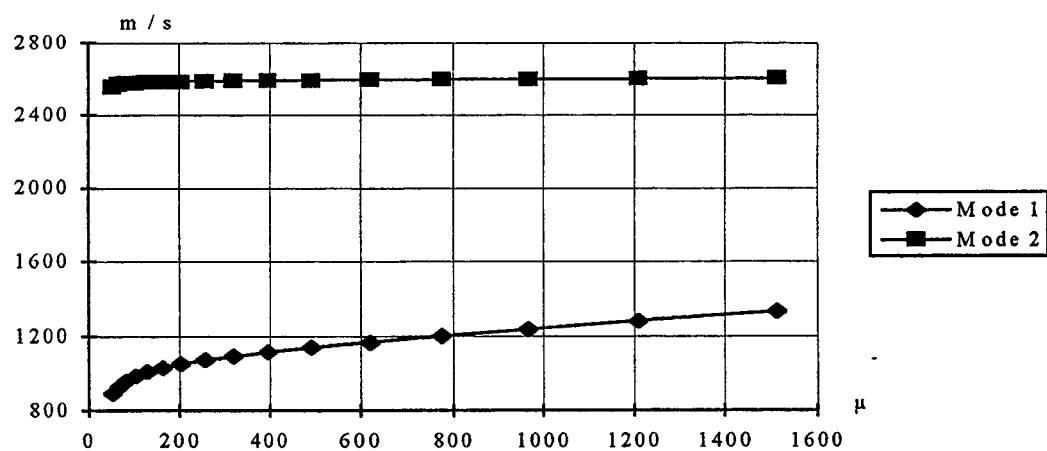
A partir de ce modèle, nous avons développé un programme de calcul dont les paramètres d'entrée sont maintenant les valeurs de  $k_{tm}$ ,  $k_{nm}$  relatives à chaque interface  $m$  et les paramètres acoustiques du système à trois milieux. Notre étude a été menée sur le système plexiglas/colle /aluminium (ses caractéristiques acoustiques et géométriques sont données au tableau 5 chapitre 3 § 2). Pour caractériser le degré d'adhésion de la colle, nous avons envisagé quelques cas particuliers :

- pour des valeurs de  $k_{t1}$ ,  $k_{n1}$  (relative à l'interface plexiglas-colle) et  $k_{t2}$ ,  $k_{n2}$  (relative à l'interface colle-aluminium) de  $10^{16}$  N/m<sup>3</sup> prises comme paramètres, nous avons calculé l'évolution de la célérité en fonction de  $\mu_2$  pour les deux premiers modes (fig22a). Nous avons retrouvé exactement les calculs effectués au chapitre 3 § 4, ensuite pour étudier l'influence de l'adhésion sur les O.R-S, nous avons tracé pour le même système l'évolution de la célérité en fonction de  $\mu_2$  pour quelques valeurs de  $k_{t1}$ ,  $k_{n1}$  et  $k_{t2}$ ,  $k_{n2}$  (fig22 b et c)

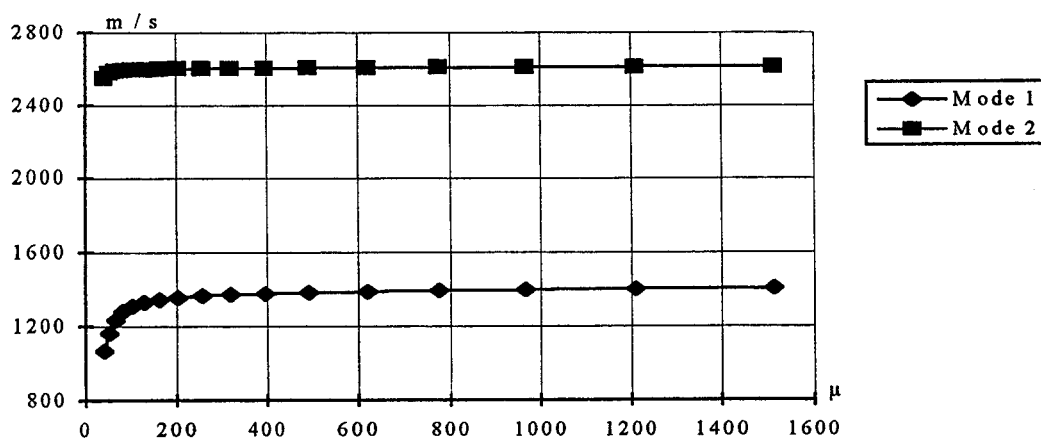
Selon le cas les courbes sont modifiées d'une façon significative, nous pouvons donc conclure que ce type d'ondes est sensible à la qualité d'adhésion telle que vue par Schoenberg.



$$a) K_{t1} = k_{n1} = K_{t2} = k_{n2} = 10^{16}$$



$$b) k_{t1} = 10^{16} ; k_{t2} = 10^{10} ; k_{n1} = 2 \cdot k_{t1} ; k_{n2} = 2 \cdot k_{t2}$$



$$c) k_{t1} = 10^{10} ; k_{n1} = 2 \cdot k_{t1} ; k_{t2} = 10^{16} ; k_{n2} = 2 \cdot k_{t2}$$

Fig 22. Célérity en fonction de  $\mu$

( $\mu$  en MPa ;  $F=4\text{MHz}$  ;  $k_t, k_n$  en  $\text{N/m}^3$ ).

Annexe 3

BANC OPTO-ACOUSTIQUE

## Annexe 3

### BANC OPTO-ACOUSTIQUE

#### 1. Principe de la mesure

La mesure de la célérité des ondes de surface sur un échantillon présentant un "bon" poli optique, est obtenu par l'interaction d'un faisceau de lumière cohérente avec l'onde de surface. Un faisceau laser convenablement mis en forme interroge la surface sur laquelle l'onde se propage. La mesure de la phase acoustique permet de calculer la longueur d'onde, donc la célérité de l'onde. Le schéma du banc de mesure présenté (fig.23), utilise le procédé dénommé "Knife-Edge"

#### 2 Fonctionnement

##### 2.1. Production des ondes de surface

Ces ondes sont produites par un transducteur composé d'électrodes métalliques interdigitées (peignes) déposées sur un substrat piézoélectrique, ou ferroélectriques, (fig.24) excité à sa fréquence propre par un synthétiseur de fréquence suivi d'un amplificateur. L'application d'une tension électrique sur un transducteur crée un champ électrique qui donne naissance à des compressions et dilatations au voisinage de la surface libre de l'échantillon ce qui crée les ondes de surface. Ces ondes sont transférées à l'échantillon par une couche d'huile silicone qui réalise le couplage mécanique (fig.25) par la seule composante perpendiculaire de l'onde transmise par l'huile. Les longueurs d'ondes de la vibration sur l'émetteur et sur l'échantillon doivent être voisines.

##### 2.2. Traitement optique

Le faisceau laser qui interroge la surface de l'échantillon doit avoir une dimension inférieure au quart de la longueur d'onde  $\Lambda$  ce qui avant focalisation par la lentille  $L_1$  nécessite son expansion. Sa section est rendue carrée par le diaphragme (D). Ce faisceau se réfléchit alors sur l'échantillon dont la surface est "plissée" par la propagation de l'onde acoustique inclinant ainsi la portion illuminée d'un angle  $\theta_m$  qui agit comme un miroir tournant et dévie le faisceau réfléchi d'un angle  $2.\theta_m$  (fig.26) . La lentille  $L_2$  de focale  $f_2$  reprend le faisceau et produit dans son plan focal un déplacement  $d=2.\theta_m.f_2$  (fig.27) sur l'écran à bord mince (Knife-Edge) placé dans le plan conjugué du diaphragme (D) ce qui se traduit par une modulation d'amplitude dont la phase est celle de l'onde de surface au point illuminé. Un photomultiplicateur (P.M) reçoit ce faisceau modulé. Le signal utile très faible est noyé dans un fond continu intense ce qui nécessite un traitement électrique du signal délivré par le P.M.

### 2.3. Traitement électrique du signal

Le photomultiplicateur reçoit et délivre un signal de la forme :

$$S \cos (2\pi Ft - 2\pi x/\Lambda) \quad (52)$$

avec F: fréquence du synthétiseur

$\Lambda$ :longueur de l'onde acoustique

x: déplacement de la table

S : amplitude du signal

La célérité des ondes de surface est :  $V=F.\Lambda$ . Il nous reste à déterminer  $\Lambda$ . Pour cela on effectue le produit de ce signal (52) avec celui du synthétiseur à l'aide d'un démodulateur en anneau:

$$S' \cos 2\pi Ft \cdot S \cos (2\pi Ft - 2\pi x/\Lambda) = 0.5 S' S \{ \underbrace{\cos (4\pi Ft - 2\pi x/\Lambda)}_{\text{HF}} + \underbrace{\cos (2\pi x/\Lambda)}_{\text{TBF}} \}$$

Une amplification basse fréquence élimine la composante haute fréquence HF, et ne retient que le terme de phase utile  $\cos 2\pi x/\Lambda$  ( ou  $x=V_e.t$ ,  $V_e$ : vitesse de translation de l'échantillon). Un régulateur de niveau d'amplitudes permet une correction de variation de réflectance de l'échantillon et un filtre diminue le niveau de bruit du signal utile

Pour obtenir  $\Lambda$ , on mesure la distance L pour un nombre N de périodes et  $\Lambda=L/N$ . A chaque passage à zéro, un ordinateur enregistre la position de la table de déplacement. La valeur cherchée de L est donnée par la différence entre position finale et position initiale (connue à  $\pm 2 \mu\text{m}$ ). En fait pour éviter de déclencher sur un passage à zéro dû au bruit, on choisit une tension de seuil voisine de zéro mais supérieure au niveau de bruit (0.01)

## SCHEMA DU BANC DE MESURE

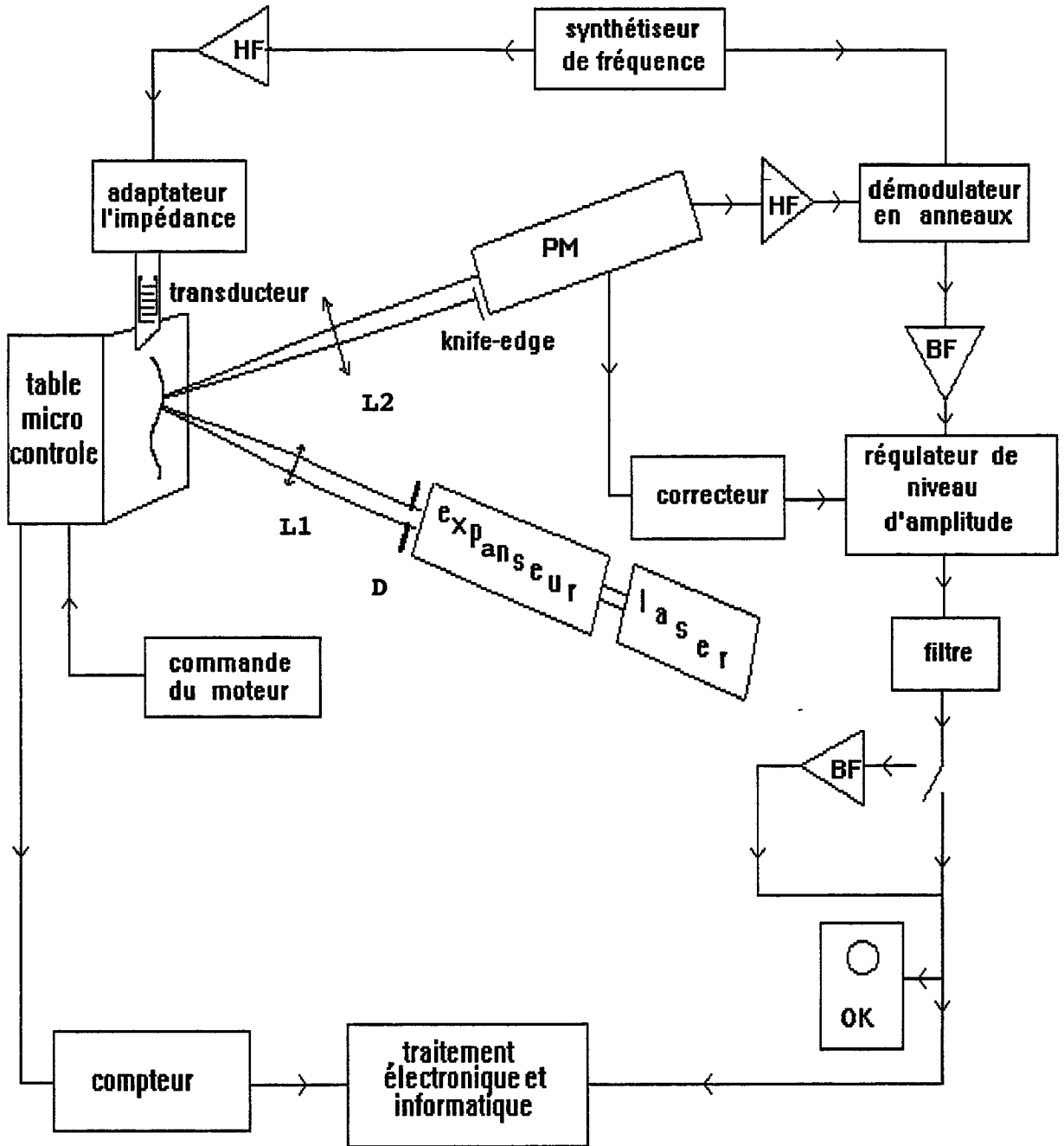


Fig 23



Transducteur

Fig 24

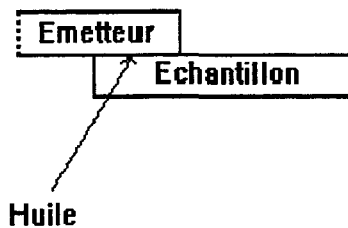


Fig 25 -

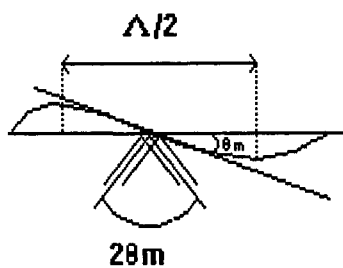
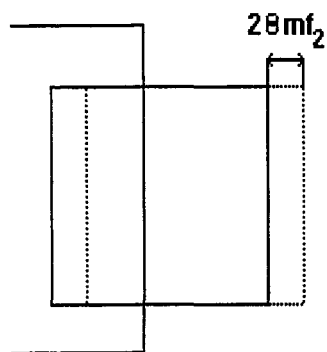


Fig 26



— avant l'inclinaison de la surface  
 ---- après l'inclinaison de la surface

Fig 27

## REFERENCES



## REFERENCES

- [1] COUVRAT.P. :  
Le collage moderne, Hermès 1990
- [2] WINFREE.W.P and PARKER.F.R. :  
Ultrasonic characterization of changes in viscoelastic properties of epoxy during cure.  
Rev.Prog.Quant. NDE.4A.(1985)1203.
- [3] GUYOTT.C.C.H and CAWLEY.P. :  
The ultrasonic vibration characteristics of adhesive joints.  
J. Acoust. Soc Am.83(2)(1988)632..640.
- [4] KNOLLMAN.G.C. and HARTOG.J.J. :  
Shear modulus gradients in adhesive interfaces as determined by means of ultrasonic Rayleigh waves.  
J.Appl.Phys 53(3)(1982)1516..1524
- [5] ROKHLIN.S.I, HEFETS.M. AND ROSEN.M. :  
An ultrasonic interface-wave method for predicting the strength of adhesive bonds  
J.Appl.Phys51(7)(1980)3579..3582
- [6] ROKHLIN.S.I, HEFETS.M. AND ROSEN.M. :  
An ultrasonic interface-wave method for predicting the strength of adhesive bonds  
J.Appl.Phys52(4)(1981)2847..2851
- [7] MURTY.G.H. :  
Reflection, transmission and attenuation of elastic waves at a loosely-bonded interface of two half space.Geophys.  
J.R.Astr.Soc.44(1976)389..404
- [8] ROSE.J.L AND THOMAS.G.H. :  
The fisher linear discriminant function for adhesive bond strength prediction.  
Britschj.of NDT 21(3)(1979)135.
- [9] BOTSCO.R.J. AND ANDERSON.R.T. :  
Ultrasonic impedance plane analysis of aerospace laminates adhesive.  
Age 27(2)(1981)22.

- [10] ROKHLIN.S.I AND MARON.D. :  
 Study of adhesive bonds using low-frequency obliquely incident ultrasonic waves.  
 J.Acoust.Soc.Am.80(2)(1986)585..590.
- [11] PILARSKI.A. AND ROSE .J.L. :  
 A transverse-wave ultrasonic oblique-incidence technique for interfacial weakness detection in adhesive bonds.  
 J.Appl.Phys 63(2)(1988)300..307
- [12] OUAFTOUH.M. :  
 Modélisation de la propagation ultrasonore au niveau de joints collés  
 Application au contrôle de la qualité d'adhérence.  
 Thèse d'université Valenciennes, (1990).
- [13] LEOMY.F. :  
 Contribution à la caractérisation d'assemblages collés ou soudés au moyen du coefficient de réflexion d'un faisceau acoustique polarisé longitudinalement ou transversalement.  
 Thèse d'université, Paris 7, (1990).
- [14] BENEL MOUSTAFA.Y. :  
 Etude de la propagation des ondes ultrasonores dans un milieu multicouche. Application à l'évaluation non destructive de collages.  
 Thèse d'université, Compiègne, (1990)
- [15] MARADUDIN. :  
 Surface acoustics waves . Non equilibrium phonon dynamics.  
 Plenum Press, New York (1985).
- [16] FARNELL and al. :  
 Elastic wave propagation in thin layers.  
 Phys. Acoust. vol 9(1972), Masson Editeur
- [17] BOGDANOV and al. :  
 Existence of a surface wave in a system comprising a layer and half-space.  
 Sov. Phys. Acoust. 15,10,(1969).
- [18] THIERSTEN. :  
 Elastic surface waves guided by thin films.  
 J. Appl. Phys.40,2,770(1969)
- [19] RAYLEIGH.L. :  
 On waves propagated along the plane surface of an elastic solid.  
 Proc. London Math.Soc.,17(1885),4..11 ou scientific papers, 2, 44..447  
 Cambridge University Press, London, 1900.

- [20] VIKTOROV.I.A. :  
Rayleigh and Lamb waves, Plenum press, New york(1967)
- [21] SEZAWA.K and KANAI K. :  
Discontinuity in the dispersion of Rayleigh waves.  
Bull. Earthquake Research Inst.Tokyo 13,(1935)237..244.
- [22] SEZAWA.K and KANAI.K. :  
The M2 Seismic waves  
Bull. Earthquake Research Inst.Tokyo 13,(1935)750..756.
- [23] J.POULIQUEN et B.ZOUHRI  
Aptitude des ondes de Rayleigh-sezawa à caractériser l'adhérence.  
J. de Phy, C 5, V.4 (1994) 753...756
- [24] SCHOENBERG. M. :  
Elastic behavior across linear slip interfaces.  
J.Acoust. Soc . Amer 68(5) (1980)1516..1521
- [25] HESTENES M.R. and STIEFFEL.E. :  
Method of conjugate gradients for solving linear systems.  
J. Res. Nat Bur. Standards, 49(1952)409..430.
- [26].FLETCHER.R.and REEVES.C.M.:  
Fonction minimization by conjugate gradients.  
Computer Journal, Vol 7 2(1964).
- [27] BECKENBACH.E.F.:  
Mathématiques modernes pour l'ingénieur, tome1, Dunod Ed.(1965).
- [28] LADSON.L.S and AL. :  
The conjugate gradient methode for optimal control problems.  
I.E.E.E. Transaction on automatic control Vol 1c-12, N°2, (1967)
- [29] SIBONY M. et MARDON.J.CL. :  
Analyse numérique I, systèmes lineaires et non lineaires.  
Ed.HERMANN Paris(1984)
- [30] ROUSSEAU.J. :  
Etude d'ondes de type Rayleigh sur des milieux stratifiés.  
Thèse de 3ème cycle, Lille I (1979).
- [31] HAW.G. :  
Dispersion de vitesse d'ondes de Rayleigh sur des verres trempés.  
Thèse de Docteur-ingénieur, Lille I(1983).

[32] CHENNI.B.:

Evaluation non destructive d'acier chromé par dispersion de célérité d'ondes de Rayleigh.

Thèse d'université, Lille I, (1988).

[33] MOUKALA.L.M.:

Evaluation non destructive des milieux stratifiés par dispersion de célérité d'ondes de Stoneley-Scholte, Simulation de fonds marins.

Thèse d'université, Lille I, (1992).

[34] WHITMAN.R.L and KORPEL.A.:

Probing of Acoustic surface perturbations by coherent light .

Appl. opt. Vol.8, N°8, (1969) 1567...1576

