

GASIN 376  
5376 991  
994  
1  
STL

55376  
1994  
1

# THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

par

Pascal HONVAULT



## Ensembles de modules maximum des domaines rigides de $C^2$

*Soutenue le 3 février 1994 devant la Commission d'Examen :*

Président : A.M. CHOLLET, Université de Lille I

Rapporteurs : L. BOUTET DE MONVEL, Université de Paris VI

J. CHAUMAT, Université de Paris XI

Examineurs : F. BERTELOOT, Université de Lille I

G. CŒURÉ, Université de Lille I

L. GRUSON, Université de Lille I





55376  
1994  
1

55376  
1994  
1

N° d'ordre : 1272

# THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

par

Pascal HONVAULT



## Ensembles de modules maximum des domaines rigides de $C^2$

*Soutenue le 3 février 1994 devant la Commission d'Examen :*

Président : A.M. CHOLLET, Université de Lille I

Rapporteurs : L. BOUTET DE MONVEL, Université de Paris VI

J. CHAUMAT, Université de Paris XI

Examineurs : F. BERTELOOT, Université de Lille I

G. CŒURÉ, Université de Lille I

L. GRUSON, Université de Lille I



*Monsieur le Professeur G. Cœuré a dirigé ma thèse. Je le remercie chaleureusement de sa constante disponibilité et de son aide permanente dans l'apprentissage des techniques et méthodes de l'Analyse Complexe. Je me permets de lui exprimer ma profonde gratitude.*

*Madame A.-M. Chollet, avec qui j'ai eu des discussions fructueuses, m'a aidé et encouragé. Je la remercie vivement d'avoir accepté la présidence du jury.*

*L. Boutet de Monvel et J. Chaumat ont montré l'intérêt qu'ils portent à mon travail en acceptant d'en être les rapporteurs. Leurs remarques et critiques fécondes m'ont permis d'améliorer la rédaction finale, je les en remercie sincèrement.*

*L'orientation de mes recherches a été fortement influencée par les travaux de J.P. Rosay et E.L. Stout ; je les remercie pour les discussions fructueuses que j'ai eues avec eux lors de leurs séjours à Lille.*

*Je remercie également les étudiants, enseignants et chercheurs de l'U.F.R. et plus particulièrement F. Berteloot, V. Thilliez et Ch. Sacré pour la sympathie qu'ils m'ont témoignée.*

*Enfin, je remercie chaleureusement Madame R. Bérat qui a dactylographié, avec beaucoup de gentillesse et de dévouement, le manuscrit, ainsi que le personnel de reprographie de l'U.F.R. de Mathématiques.*



## Introduction

Soit  $\Omega$  un domaine pseudoconvexe  $\mathbf{C}^n$ ,  $n > 1$  et  $\Psi$  une fonction définie dans  $\overline{\Omega}$ , et holomorphe dans  $\Omega$ .

Il est intéressant d'étudier le sous-ensemble  $E$  du bord de  $\Omega$  où  $\Psi$  atteint le maximum de son module.

Duchamp et Stout en 1981 [D-S], et Jordan [ $I_1$ ] en 1985 ont décrit la structure de  $E$  lorsque  $\Omega$  est strictement pseudoconvexe.

En ce qui concerne la régularité de  $E$ , le résultat suivant de A. Nagel et J.P. Rosay [N-R] en 1991 est le point de départ de notre travail :

**Théorème [N-R].-** *Soit  $\Omega \subset \mathbf{C}^n$  un domaine strictement pseudoconvexe, à bord réel analytique, et  $\Psi$  une fonction holomorphe dans  $\Omega$ , de classe  $C^2$  jusqu'au bord de  $\Omega$ . Soit  $E$  une sous-variété du bord de  $\Omega$ , de dimension  $n$  et classe  $C^1$ . Si  $E$  est le lieu où  $\Psi$  atteint son module maximum, alors  $\Psi$  se prolonge analytiquement à travers  $E$  et  $E$  est réel analytique.*

L'objet de notre travail est d'étudier le cas où  $\Omega$  est faiblement pseudoconvexe et  $E$  de classe  $C^\infty$ .

Rappelons quelques notations et définitions qui seront utilisés dans la suite.

### Notations :

$\mathcal{O}(\Omega)$  : ensemble des fonctions holomorphes dans un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbf{C}^n$ .

$A^k(\Omega)$  : ensemble des fonctions holomorphes dans  $\Omega$ , de classe  $C^k$  dans un voisinage de  $cl(\Omega)$  ( $0 \leq k \leq \omega$ ).

$T_p(S)$  : espace tangent réel au point  $p$  à une sous-variété  $S$  de  $\mathbf{C}^n$ .

$T_p^{\mathbf{C}}(S)$  : espace tangent complexe au point  $p$  à une sous-variété  $S$  de  $\mathbf{C}^n$ .

$b\Omega$  : frontière de  $\Omega$ .

$\bar{z}$  : conjugaison complexe.

$cl(\Omega)$  : adhérence de  $\Omega$ .

$C_c^\infty$  : fonctions indéfiniment différentiables à supports compacts.

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}.$$

### Définitions :

— *Variété totalement réelle* : une variété  $E$  de  $\mathbf{C}^n$  est dit “totalement réelle” si  $T_p(E) \cap J\{T_p(E)\} = \{0\}$  pour tout  $p \in E$ ,  $J$  étant la structure complexe pour  $T_p(\mathbf{C}^n)$ .

— *Variété génératrice* : une variété  $E$  de  $\mathbf{C}^n$  est “génératrice” si l’enveloppe linéaire complexe de  $T_p(E)$  est  $\mathbf{C}^n$ , pour tout  $p \in E$ .

— *ensemble de module maximum* : un sous-ensemble  $E \subset b\Omega$  est un “ $A^k$  ensemble de module maximum” ( $0 \leq k \leq \omega$ ) s’il existe une fonction  $\Psi$  de  $A^k(\Omega)$  telle que  $|\Psi|_E = 1$  et  $|\Psi| < 1$  sur  $c\Omega \setminus E$ .

Dans le cas où  $\Omega$  est strictement pseudoconvexe, Th. Duchamp et E.L. Stout [D-S] ont montré que, si une sous-variété  $E$  de dimension  $n$  de  $b\Omega$ , de classe  $C^s$  ( $s \geq 2$ ), est un  $A^k$  ensemble de module maximum ( $k \geq 2$ ), alors  $E$  est totalement réelle. De plus, toujours dans le cas strictement pseudoconvexe, il est démontré par A. Jordan [I.1] qu’un  $A^k$  ensemble de module maximum ( $k \geq 2$ ) est localement contenu dans une sous-variété totalement réelle de dimension  $n$  du bord.

Nous verrons, au § 2.2, qu’il n’en est rien dans le cas où  $\Omega$  est faiblement pseudoconvexe.

Signalons aussi que E.M. Chirka [C] a généralisé le résultat de [I<sub>1</sub>] en codimension supérieure à 1, pour des variétés génératrices de  $\mathbf{C}^n$  généralisant les domaines strictement pseudoconvexes.

On sait aussi caractériser les ensembles de module maximum en termes de “feuilletages par des sous-variétés d’interpolation”, dont nous rappelons la définition et les principales propriétés.

**Définition.** Une sous-variété  $M$  de  $b\Omega$  est dit “d’interpolation” si, pour tout point  $p$  de  $M$ , on a :  $T_p(M) \subset T_p^{\mathbf{C}}(b\Omega)$ .

Les sous-variétés d’interpolations analytiques tiennent leur importance du résultat suivant :

**Théorème [B.S] :** Soit  $\Omega$  un domaine strictement pseudoconvexe borné de  $\mathbf{C}^n$  ( $b\Omega$  de classe  $C^3$ ). Alors  $M$  est une sous-variété d’interpolation analytique si et seulement si toute fonction réelle-analytique sur  $M$  est la restriction à  $M$  d’une fonction holomorphe dans un voisinage de  $cl(\bar{\Omega})$ .

Le lien avec les ensembles de module maximum se trouve dans le résultat suivant de Th. Duchamp et L. Stout.

**Théorème [D-S] :** *Soit  $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ , un domaine strictement pseudoconvexe et borné,  $b\Omega$  de classe  $C^r$  ( $r \geq 2$ ), et  $E$  un  $A^2$  ensemble de module maximum de classe  $C^s$  ( $s \geq 2$ ), de dimension  $n$ , de  $b\Omega$ . Alors  $E$  est feuilleté, de manière unique, par des sous-variétés d'interpolation compactes.*

*Réciproquement, si  $E$  est une sous-variété totalement réelle, fermée, réelle analytique de  $b\Omega$ , admettant un feuilletage réel-analytique par des sous-variétés d'interpolation de dimension  $n - 1$ , alors  $E$  est localement un  $A^\omega$  ensemble de module maximum.*

Des caractérisations des ensembles de module maximum par des propriétés de la forme de Levi ont été obtenu par Jordan et Boutet de Monvel.

**Théorème [I.2] :** *Soit  $\Omega \subset \mathbf{C}^n$  un domaine strictement pseudoconvexe à frontière réelle analytique ( $n \geq 3$ ), et  $E$  une sous-variété totalement réelle, réelle analytique, de dimension  $n$  de  $b\Omega$ . Alors  $E$  est localement un  $A^\omega$  ensemble de module maximum si et seulement si la forme de Lévi de  $b\Omega$  en  $p$  est diagonalisable dans une base de  $T_p(M) \cap T_p^{\mathbf{C}}(b\Omega)$ , pour tout  $p \in E$ .*

**Théorème [I-BM] :** *Soient  $\Omega$  un domaine strictement pseudoconvexe de  $\mathbf{C}^n$  à frontière analytique réelle et  $E$  une sous-variété analytique réelle de  $b\Omega$  telle que  $E$  n'est pas  $\mathbf{C}$ -tangente en tous les points de  $E$ . Alors  $E$  est localement un ensemble de module maximum pour  $\mathcal{O}[cl(\Omega)]$  si et seulement si  $\mathcal{L}(\xi, \eta)$  est réel pour toutes les sections  $\xi, \eta$  de  $T(E) \cap T^{\mathbf{C}}(b\Omega)$ .*

Ces résultats tombent en défaut pour les domaines faiblement pseudoconvexes, comme le montrent les exemples suivants :

**Exemple 1 :** Un ensemble de module maximum qui est une sous-variété réelle analytique, de dimension 2, dans le bord lisse d'un domaine pseudoconvexe de  $\mathbf{C}^2$ , mais qui n'est pas totalement réel en un point de faible pseudoconvexité.

$\tilde{\Omega} = \{(\tilde{z}, \tilde{w}) \in \mathbf{C}^2 / \operatorname{Re} \tilde{w} + |\tilde{z}|^2 < 0\}$  est strictement pseudoconvexe, et est une réalisation biholomorphe de la boule euclidienne de  $\mathbf{C}^2$ .

$\tilde{E} = \{(\tilde{z}, \tilde{w}) \in \mathbf{C}^2 / \tilde{w} = -|\tilde{z}|^2 + i\sigma(\tilde{z})\}$  où  $\sigma$  est réelle analytique, de valuation 1, est une sous-variété totalement réelle de  $b\tilde{\Omega}$ , réelle analytique, de

dimension 2, au voisinage de l'origine. D'après [D-S],  $\tilde{E}$  est le  $A^\omega$  ensemble de module maximum d'une fonction  $\tilde{\Psi}$  holomorphe dans un voisinage de  $(0, 0)$ .

L'application  $(z, w) \mapsto (\tilde{z} = z^2, \tilde{w} = w)$  transforme  $\Omega = \{(z, w) \in \mathbf{C}^2 / \operatorname{Re}(w) + |z|^4 < 0\}$  en  $\tilde{\Omega}$ , et  $E = \{(z, w) \in \mathbf{C}^2 / w = -|z|^4 + i\sigma(z^2)\}$  en  $\tilde{E}$ .

Ici,  $E$  n'est pas totalement réelle à l'origine, alors que  $E$  est le  $A^\omega$  ensemble de module maximum de  $\Psi$  définie par :  $\Psi(z, w) = \tilde{\Psi}(z^2, w)$ .

**Exemple 2 :** Une sous-variété totalement réelle, réelle analytique, de dimension 2, dans le bord d'un domaine lisse admet toujours un feuilletage par des courbes analytiques d'interpolations. Une telle sous-variété est donc un ensemble de module maximum en chaque point de forte pseudo-convexité d'après le théorème de [D-S].

L'exemple suivant montre qu'il n'en est rien dans le cas faiblement pseudoconvexe.

Soit  $\Omega = \{\operatorname{Re}(w) + |z|^4 < 0\} \subset \mathbf{C}^2$  et les deux sous-variétés totalement réelles de  $b\Omega$  :

$$E_1 \begin{cases} \operatorname{Re}(w) + |z|^4 = 0 \\ \operatorname{Re}(z) = (1 + \sqrt{2})y \end{cases} \quad E_2 \begin{cases} \operatorname{Re}(w) + |z|^4 = 0 \\ \operatorname{Re}(z) = (1 - \sqrt{2})y \end{cases} \quad \text{où } y = \operatorname{Im}(z).$$

L'image par  $\phi : (z, w) \mapsto (\tilde{z} = z^2, \tilde{w} = w)$  de  $E_1 \cup E_2$  est la sous-variété totalement réelle  $\tilde{E} \begin{cases} \operatorname{Re} \tilde{w} + |\tilde{z}|^2 = 0 \\ \operatorname{Re}(\tilde{z}) = \tilde{y} \end{cases}$  de  $b\tilde{\Omega}$ , où  $\tilde{\Omega} = \{(\tilde{z}, \tilde{w}) \in \mathbf{C}^2 / \operatorname{Re} \tilde{w} + |\tilde{z}|^2 < 0\}$ .

D'autre part,  $\tilde{E}$  est le  $A^\omega$  ensemble de module maximum de la fonction  $\tilde{\Psi}(\tilde{z}, \tilde{w}) = e^{\tilde{w} - i\tilde{z}^2}$ , puisque, sur  $b\tilde{\Omega} : \begin{cases} \tilde{w} = -|\tilde{z}|^2 + i\tilde{v} \\ \tilde{z} = \tilde{y} + t + i\tilde{y} \end{cases}$  et  $|\tilde{\Psi}|/b\tilde{\Omega} = e^{-t^2}$ .

Ainsi,  $E_1 \cup E_2$  est un  $A^\omega$  ensemble de module maximum pour la fonction  $\tilde{\Psi} \circ \phi$ .

Montrons que  $E_1$  (de même que  $E_2$ ) n'est pas un  $A^\omega$  ensemble de module maximum.

Sinon, il existerait  $\Psi \in A^\omega(\Omega)$  telle que  $|\Psi|/E_1 = 1$  et  $|\Psi|/cl(\Omega \setminus E_1) < 1$ . Or, la fonction  $\hat{\Psi}(z, w) = \Psi(z, w) \cdot \Psi(-z, w)$  a pour module 1 sur  $E_1$  et se factorise à travers  $\phi : \hat{\Psi} = h \circ \phi$  où  $h \in A^\omega(\tilde{\Omega})$ .

Comme  $\phi(E_1) = \tilde{E} \cap \{\operatorname{Re} \tilde{z} \geq 0\}$  et  $\phi(E_2) = \tilde{E} \cap \{\operatorname{Re} \tilde{z} \leq 0\}$ , que  $|h|^2 - 1$  est

analytique et s'annule sur un  $1/2$  espace fermé, il s'ensuit qu'elle s'annule sur  $\tilde{E}$ . Ainsi,  $\hat{\Psi}$ , et par conséquent  $\Psi$  a pour module 1 sur  $E_1 \cup E_2$  : ce qui est absurde.

En admettant provisoirement le théorème principal (cf. Théorème 3), on peut même dire que  $E_1$  (ainsi que  $E_2$ ) n'est pas un  $A^\infty$  ensemble de module maximum, car :

$$T_0(E_1) \cap T_0^{\mathbf{C}}(b\Omega) = \{w = 0, \operatorname{Re} z = 0\}, \Delta P(i) \neq 0 \text{ en notant } P(z) = |z|^4,$$

et le vecteur de translation ( $w = i, z = 0$ ) n'appartient pas à

$$T_0(E_1) \begin{cases} \operatorname{Re} w = 0 \\ \operatorname{Im} w = (\sqrt{2} - 1) \operatorname{Re} z. \end{cases}$$

Dans ce travail, nous généralisons le théorème de [N-R] à des domaines faiblement pseudo-convexes particuliers de  $\mathbf{C}^2$  : les domaines rigides.

**Définition.** Une hypersurface  $\Sigma$  est dite "rigide en  $p$ " ( $p \in \Sigma$ ) s'il existe un vecteur  $u \neq 0$  transverse à  $T_p^{\mathbf{C}}(\Sigma)$  tel que, localement,  $\Sigma$  soit invariante sous l'action du groupe additif  $\mathbf{R} \cdot u$ .

En prenant comme coordonnées locales, pour  $\mathbf{C}^2$ ,  $z$  dans  $T_p^{\mathbf{C}}(\Sigma)$  et  $w$  dans  $\mathbf{C} \cdot u$  ( $\mathbf{R} \cdot u$  étant identifié à  $\operatorname{Re} w = 0$ ),  $\Sigma$  a une équation locale du type :  $\operatorname{Re}(w) + P(z) = 0$  où  $P$  s'annule à l'ordre 1 (on supposera que  $P$  n'est pas identiquement nul).

Un domaine  $\Omega$  est dit "rigide en  $p$ ",  $p \in b\Omega$ , lorsque  $b\Omega$  est rigide en  $p$ . Comme tout ce qui suit est local, on écrira simplement " $\Omega$  est rigide" pour :  $\Omega$  est rigide en  $p$  (supposé égal à 0). Comme  $\Omega$  est supposé pseudoconvexe, on peut écrire  $P(z) = P_{2k}(z) + \mathcal{O}(z^{2k+1})$  où  $P_{2k}$  est un polynôme homogène sous-harmonique de degré  $2k$ . On dit, dans ce cas, que  $\Omega$  est de type  $2k$  (à l'origine).

Dans le **chapitre I**, nous construisons un invariant qui généralise la forme de Lévi, et qui permet de caractériser les sous-variétés totalement réelles de dimension 2, réelles analytiques, qui sont des  $A^\omega$  ensemble de module maximum dans le bord d'un domaine rigide réel analytique de type  $2k$  ( $k \geq 2$ ). Cet invariant explique ainsi pourquoi l'exemple 1 n'est pas un ensemble de module maximum bien que la sous-variété soit totalement réelle et de dimension égale à 2.

Dans le **chapitre II**, on s'inspire de l'idée directrice de [N-R] qui consiste à montrer qu'en un point de forte pseudoconvexité, un ensemble de module

maximum est un ensemble de réflexion. Cette propriété est rappelée au départ du chapitre II. Ceci permet, à l'aide du théorème de "l'edge of the wedge" de Baouendi-Trèves [B-T] de prolonger à travers  $E$  la fonction holomorphe  $\Psi$  dont le module vaut 1 sur  $E$ . La réelle analyticité de  $E$  est alors assurée par le théorème des fonctions implicites.

La situation est plus compliquée en un point de faible pseudoconvexité ; dans ce chapitre, nous construirons une réflexion dans un cône ouvert de sommet  $(0, 0)$ . Cette "pseudo-réflexion" ne permet pas de prolonger directement, avec le théorème de l'edge of the wedge, la fonction  $\Psi$  holomorphiquement à travers  $E$ , et encore moins de montrer que  $E$  est réelle analytique.

Dans le **chapitre III**, nous mettons en œuvre une technique de disques analytiques qui permet, à l'aide de la pseudo-réflexion, de prolonger analytiquement  $\Psi$  à travers  $E$ .

Ainsi,  $E$  devient une sous-variété de contact entre deux hypersurfaces analytiques réelles ; la réelle analyticité de  $E$  résulte alors d'un théorème de B. Malgrange [M], qui est une des conséquences de son théorème de préparation  $C^\infty$ . Nous donnons une preuve directe de cette réelle analyticité, n'utilisant que le théorème préparatoire de Weirstrass, dans le **chapitre IV**.

## CHAPITRE 1

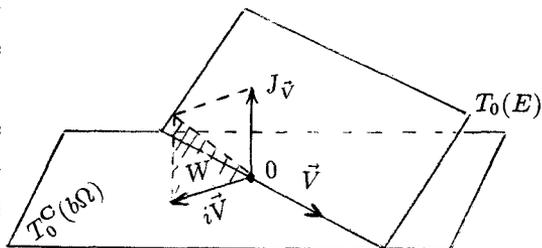
## Ensembles de module maximum réel analytique des domaines rigides.

**1.1.** On sait [D-S], [N-R], qu'une sous-variété génératrice  $E$ , totalement réelle et de classe  $C^2$  d'une hypersurface analytique réelle  $\Sigma$  de  $\mathbf{C}^2$  est, en chaque point de stricte pseudo-convexité, un ensemble de module maximum local pour  $A^\omega$ . L'introduction a montré que cette propriété peut être mise en défaut en un point de faible pseudoconvexité.

Dans ce chapitre, nous construisons un invariant plus fin que la forme de Lévi, qui, dans le cas des hypersurfaces rigides  $\Sigma$  de  $\mathbf{C}^2$ , permet de caractériser les sous-variétés  $E$ , totalement réelles et analytiques, qui sont des ensembles de module maximum pour  $A^\omega$  aux points de faible pseudoconvexité.

**1.2. Présentation de l'invariant.** Soit  $u$  un vecteur directeur de la translation, repérée dans  $T_0(\Sigma)$ , qui laisse  $\Sigma$  invariante. On suppose que  $E$  n'est pas tangente à  $u$ .  $E$  est alors un graphe au-dessus de  $T_0^{\mathbf{C}}(\Sigma)$  : ainsi,  $E = \{j(z) = (z, j_1(z)), z \in T_0^{\mathbf{C}}(\Sigma)\}$ . En supposant  $E$  analytique réel, il en est de même pour  $j$ .  $T_0(E) \cap T_0^{\mathbf{C}}(\Sigma)$  est de dimension 1 : soit  $v$  un vecteur directeur de cet espace.

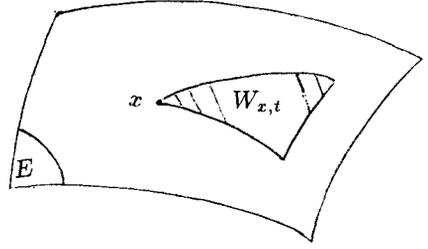
On plonge maintenant  $T_0^{\mathbf{C}}(\Sigma)$  dans son complexifié  $\mathbf{C} \otimes T_0^{\mathbf{C}}(\Sigma)$  comme sous-espace totalement réel, c'est-à-dire que  $T_0^{\mathbf{C}}(\Sigma)$  sera identifié à  $\mathbf{R}^2$  par  $[\mathbf{R}v] \times [\mathbf{R}iv]$ . On note  $J$  la nouvelle structure complexe introduite. On considère maintenant le simplexe de  $\mathbf{C} \otimes T_0^{\mathbf{C}}(\Sigma)$  défini par :



$$W = \{Tiv + \tau Jv ; 0 \leq \tau \leq T \leq 1\}.$$

Le prolongement holomorphe de  $j$  à  $\mathbb{C} \otimes T_0^{\mathbb{C}}(\Sigma)$  sera encore noté  $j$ .

Alors, pour tout  $x$  dans  $E$ , on note  $W_{x,t}$  l'image par  $j$  de  $j^{-1}(x) + tW$  : c'est un simplexe de sommet  $x$  dans  $(\Sigma)$ .



Soit  $(dm)$  l'image par  $j$  de la mesure de Lebesgue  $dT.d\tau$  sur  $W$ , et  $\mathcal{L}$  le prolongement holomorphe à  $M$  de la restriction de la forme de Lévi de  $(\Sigma)$  à  $E$  (considérée ici comme fonction scalaire).

On introduit :

$$(1) \quad : \tilde{\mathcal{L}}(x, t) = \int_{W_{x,t}} \mathcal{L}(x + X) \cdot dm(X)$$

Si on note encore  $\mathcal{L}$  l'expression de la forme de Lévi dans la carte locale  $j : T^{\mathbb{C}}(\Sigma) \rightarrow E$ ,  $z \mapsto x$ , on obtient alors :

$$(1') \quad : \int_{tW} \mathcal{L}(z + Tiv + \tau Jv) d\tau dT.$$

Soit  $x$  et  $y$  les coordonnées de  $z$  dans le repère  $(iv, v)$ .  $\mathcal{L}(z)$  devient une fonction réelle analytique notée encore  $\mathcal{L}(x, y)$ , et (1') s'écrit sous la forme :

$$(1'') \quad \int_{tW} \mathcal{L}(x + T, y + i\tau) d\tau dT.$$

En remplaçant  $v$  par  $\rho v$  dans (1'), puis dérivant et intégrant en  $\rho$ , on obtient :

$$(1''') \quad \tilde{\mathcal{L}}(z, t) = \int_0^1 \left[ \frac{d}{d\rho} \int_{tW} \mathcal{L}(z + \rho Tiv + \rho\tau Jv) d\tau dT \right] d\rho + \frac{1}{2} t^2 \cdot \mathcal{L}(z)$$

soit :

$$\tilde{\mathcal{L}}(z, t) = t^2 \left[ \frac{1}{2} \mathcal{L}(z) + \int_0^t \int_W (T \frac{\partial}{\partial iv} + \tau \frac{\partial}{\partial Jv}) \mathcal{L}(z + \rho Tiv + \rho\tau Jv) dT d\tau d\rho \right].$$

L'intérêt de cette formule est de mettre en évidence une perturbation de la forme de Lévi qui sera fondamentale dans le résultat principal de ce chapitre (remarquons qu'ici, la forme de Lévi de  $(\Sigma)$  est :  $\Delta P(z)$ .)

**Théorème 1.**  $(\Sigma)$  étant supposé rigide et de type  $2k$  en 0, et  $E$  sous-variété génératrice, totalement réelle et réelle-analytique de  $(\Sigma)$ , contenant l'origine, alors :

a) si  $E$  est tangent à  $u$ , alors  $E$  n'est pas génériquement un  $A^\omega$  ensemble de module maximum. Plus précisément, c'est le cas si  $\frac{\partial^{2k} P}{\partial y^{2k}}(0) \neq 0$ .

b) si  $E$  n'est pas tangent à  $u$ , alors :

- si  $T_{2k} \operatorname{Re} \tilde{\mathcal{L}}(z, t)$  garde un signe constant pour  $t \neq 0$ , alors  $E$  est un  $A^\omega$  ensemble de module maximum pour  $\Omega$ .
- si  $T_{2k} \operatorname{Re} \tilde{\mathcal{L}}(z, t)$  change de signe, alors  $E$  n'est pas un  $A^\omega$  ensemble de module maximum pour  $\Omega$ . ( $T_{2k}$  désigne le polynôme de Taylor d'ordre  $2k$  sur les variables  $z$  et  $t$ ).

**Remarque :** L'appellation d'invariant est justifiée par le fait qu'un biholomorphisme entre deux domaines rigides de type  $2k$  échange les ensemble de module maximum ; donc le signe de  $T_{2k} \operatorname{Re} \tilde{\mathcal{L}}(z, t)$  est, au sens large, invariant par biholomorphisme.

### 1.3. Equation de $E$ .

$E$  est définie, au voisinage de 0, par deux équations réelles indépendantes, réelles analytiques

$$E \begin{cases} \rho_1(z, w) = \operatorname{Re}(w) + P(z, \bar{z}) = 0 \\ \rho_2(z, w) = 0 \end{cases} \quad \text{avec } d\rho_1 \wedge d\rho_2(0) \neq 0.$$

Le développement limité de  $\rho_2$  à l'ordre 1 en 0 donne :

$$\rho_2(z, w) = a \operatorname{Re}(z) + b \operatorname{Im}(z) + c \operatorname{Im}(w) + \sigma_2(z, \operatorname{Im} w)$$

grâce à  $\rho_1$ .

C'est-à-dire :  $\rho_2(z, w) = \operatorname{Re}(\alpha z) + c \operatorname{Im}(w) + \sigma_2(z, \operatorname{Im} w)$  pour un complexe  $\alpha \neq 0$  convenable (car  $E$  est totalement réelle).

On peut aussi, pour la simplicité des calculs, supposer  $\alpha = 1$ , quitte à effectuer le changement de coordonnées  $\begin{cases} w = w' \\ \alpha z = z' \end{cases}$ , ce qui ne change pas la nature de  $P$ .

D'où finalement :

$$(2) \quad E \begin{cases} \operatorname{Re}(w) + P(z, \bar{z}) = 0 \\ \operatorname{Re}(z) + c \operatorname{Im}(w) + \sigma_2(z, \operatorname{Im} w) = 0 \end{cases}$$

avec  $\sigma_2$  nulle à l'ordre 1,  $C^\infty$  ou  $C^\omega$  suivant  $E$ .

Au moyen du changement de coordonnées

$$\begin{cases} z = z' + iKw' \\ w = w' \end{cases} \quad \text{avec} \quad K = 1 + c,$$

on peut donc supposer que

$$\Omega : \operatorname{Re} w + P(z + iKw, \overline{z + iKw}) < 0, K \in \mathbb{R}$$

Ainsi, en appliquant le théorème des fonctions implicites,  $E$  est l'intersection de  $b\Omega$  avec l'hypersurface :  $\operatorname{Im}(w) = \operatorname{Re}(z) + \sigma_2(z, \bar{z})$  où  $\sigma_2$  est analytique réelle et s'annule à l'ordre 1 à l'origine.

On posera :  $\sigma = \operatorname{Re} z + \sigma_2$ , de sorte que  
 $E : w = -P(z + iKw, \overline{z + iKw}) + i\sigma(z, \bar{z})$ .

#### 1.4. Preuve du théorème 1.

On cherche les couples  $(P, E)$  pour que  $E$  soit le  $A^\omega$  ensemble de module maximum d'une fonction de  $A^\omega(\Omega)$  dans un voisinage de l'origine.

Soit  $F$  cette fonction ; elle s'écrit  $F = e^{iG}$  au voisinage de  $(0, 0)$ , et  $g = G/E$  est une fonction analytique réelle dont les courbes de niveaux définissent un feuilletage de  $E$  par des sous-variétés d'interpolation de  $b\Omega$  de dimension 1.

Réciproquement, si  $g$ , non singulière à l'origine, est une fonction analytique réelle sur  $E$ , elle se prolonge d'une manière unique en une fonction holomorphe  $G$  dans un voisinage de l'origine ; et il s'agit de savoir si  $\operatorname{Im} G > 0$  dans  $\operatorname{cl}(\Omega)/E$  ou non.

Soit  $\phi : (z, w) \mapsto (\eta, \xi)$  la solution holomorphe, dans un voisinage de 0, du système aux inconnues  $(\eta, \xi)$  :

$$(3) \quad \begin{cases} w + \xi + 2P(z + iKw, \eta - iK\xi) = 0 \\ w - \xi = 2i\sigma(z, \eta) \end{cases}$$

On a :  $\phi(z, w)/E = (\bar{z}, \bar{w})$ .

On peut prendre  $(z, \bar{z})$  comme coordonnées locales sur  $E$  ; ainsi, toute fonction  $g$  réelle sur  $E$  peut s'écrire  $g(z, \bar{z})$  et, si  $g$  est réelle-analytique,  $G(z, w) = g(z, \eta(z, w))$  est le prolongement holomorphe de  $g$ .

• Pour  $\alpha(t)$  convenable, à valeurs réelles,  $\gamma_{z,w}(t) = (z, w + it + \alpha(t))$  où  $(z, w) \in E$  définit un feuilletage transverse à  $E$  dans  $b\Omega$ .

Soit  $L(t) = g[z, \eta(z, w + it + \alpha(t))]$ , toujours avec  $(z, w) \in E$ . Il s'agit d'étudier le signe de  $\text{Im } L(t)$  lorsque les courbes de niveau de  $g$  définissent un feuilletage de  $E$  par des variétés d'interpolations, et lorsque  $t$  décrit un voisinage de 0.

**Lemme 1.**  $\alpha(t) = t \cdot \mathcal{O}_{2k-1}(z, w, t)$ .

$$\alpha'(t) = K(P_z + P_{\bar{z}})_{[z+iK(w+it+\alpha(t))]} + \mathcal{O}_{4k-2}(z, w, t).$$

**Preuve :**

$$(z, w + it + \alpha(t)) \in b\Omega \Leftrightarrow \text{Re}(w + it + \alpha(t)) + P[z + iKw + iK(it + \alpha(t))] = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha(t) + P[z + iKw + iK(it + \alpha(t))] - P[z + iKw] = 0.$$

ce qui donne la première égalité.

Dérivant par rapport à  $t$ , on obtient la seconde. ■

**Lemme 2.**  $g$  définit un feuilletage de  $E$  par des variétés d'interpolation si et seulement si :

$$\frac{g_z}{\frac{P_z}{1+2iKP_z} + i\sigma_z} = -\frac{g_{\bar{z}}}{\frac{P_{\bar{z}}}{1-2iKP_{\bar{z}}} - i\sigma_{\bar{z}}}$$

sur  $E$ .

( $g$  est évalué en  $(z, \bar{z})$ , et  $P$  en  $(z + iKw, \overline{z + iKw})$  avec  $(z, w) \in E$ ).

**Preuve :** Le feuilletage défini par  $g$  admet pour feuilles

$$\mathcal{F}_C \begin{cases} \text{Re } w + P(z + Kiw) = 0 \\ \text{Im } w = \sigma(z) \\ g(z, \bar{z}) = C \in \mathbf{R} \end{cases}$$

L'espace tangent à  $\mathcal{F}_C$  est :

$$T_{\mathcal{F}_c} \begin{cases} (i) \quad \frac{dw + d\bar{w}}{2} + P_z \cdot (dz + Kidw) + P_{\bar{z}}(d\bar{z} - iKd\bar{w}) = 0. \\ (ii) \quad \frac{dw - d\bar{w}}{2i} = d\sigma \\ (iii) \quad g_z dz + g_{\bar{z}} d\bar{z} = 0. \end{cases}$$

L'espace tangent complexe à  $b\Omega$  est :

$$(iv) \quad T_{b\Omega}^{\mathbb{C}} \quad : \quad \frac{dw}{2} + P_z(dz + Kidw) = 0.$$

$\mathcal{F}_C$  est une sous-variété d'interpolation de  $b\Omega$  si et seulement si  $T_{\mathcal{F}_C} \subset T_{b\Omega}^{\mathbb{C}}$ .

$$(ii) \Rightarrow d\bar{w} = dw - 2i(\sigma_z dz + \sigma_{\bar{z}} d\bar{z})$$

on remplace dans (i) :

$$dw\left(\frac{1}{2} + KiP_z\right) = [dw - 2i(\sigma_z dz + \sigma_{\bar{z}} d\bar{z})]\left(\frac{1}{2} - KiP_{\bar{z}}\right) + P_z dz + P_{\bar{z}} d\bar{z} = 0$$

d'où, en utilisant (iv) :

$$dz \left[ -\frac{P_z}{\frac{1}{2}iKP_z}(1 + KiP_z) + P_z - 2i\sigma_z\left(\frac{1}{2} - KiP_{\bar{z}}\right) \right] + d\bar{z} \cdot \left[ p_{\bar{z}} - 2i\sigma_{\bar{z}}\left(\frac{1}{2} - KiP_{\bar{z}}\right) \right] = 0.$$

Enfin, en remplaçant dans (ii)  $d\bar{z}$  par  $-\frac{g_z}{g_{\bar{z}}}dz$ , on trouve le résultat.  $\blacksquare$

Soit  $\lambda(z, \bar{z})$  la valeur commune des rapports du lemme 2 ( $\lambda(z, \bar{z}) \in i\mathbf{R}$ ).

**Lemme 3.**  $L'(t) = i\lambda[z, \eta(z, w + it + \alpha(t))] \cdot [1 + \mathcal{O}_{2k}(z, w, t)]$ .

**Preuve :**  $L(t) = g[z, \eta(z, w + it + \alpha(t))]$

donc  $L'(t) = g_{\bar{z}}[z, \eta, w + it + \alpha(t)] \cdot \eta_w(z, w + it + \alpha(t)) \cdot (i + \alpha'(t))$ .

$$\text{Mais (3)} \quad \Rightarrow \begin{cases} 1 + \xi_w + 2[p_z \cdot iK + p_{\bar{z}} \cdot (\eta_w - iK\xi_w)] = 0. \\ 1 - \xi_w = 2i\sigma_{\bar{z}} \cdot \eta_w \end{cases}$$

d'où, en résolvant :

$$\eta_w(z, w) = -\frac{1}{\frac{P_{\bar{z}}}{1-2iKP_{\bar{z}}} - i\sigma_{\bar{z}}} \cdot \frac{1 + iK(P_z - P_{\bar{z}})}{1 - 2iK \cdot P_{\bar{z}}}$$

donc  $L'(t) = \lambda[z, \eta(z, w + it + \alpha(t))] \times \frac{1+iK(P_z-P_{\bar{z}})}{1-2iKP_{\bar{z}}} \cdot (i + \alpha'(t))$  d'où le résultat en utilisant le lemme 1.  $\blacksquare$

### Calcul de $\lambda$ :

Si on pose  $z = x + iy$ , alors  $\sigma$  et  $y$  forment un système de coordonnées locales sur  $E$ ; la valeur de  $\lambda$ , donnée par le lemme suivant, est exprimée dans ces coordonnées.

**Lemme 4.** Soit  $Q(\sigma, y) = \left[ 2\Delta P - K \left( \frac{P_z^2}{2} + \Delta P + \frac{P_{\bar{z}^2}}{2} \right) \right]_{((1-K)\sigma, y)}$ .

Alors  $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1\sigma + \dots + \lambda_{2k-1}\sigma^{2k-1} + 2\lambda_0 \int_0^y Q(\sigma, Y) dY + \mathcal{O}_{2k}(z)$ , avec  $\lambda_j \in i\mathbf{R}$ .

**Preuve :** Soit  $A = \frac{P_z}{1+2iKP_z} + i\sigma_z$ .

D'après le lemme 2, on a :  $dg = \lambda(Adz - \bar{A}d\bar{z})$  et

$$(4) \quad ddg = 0 = d\lambda \wedge (Adz - \bar{A}d\bar{z}) + \lambda d(Adz - \bar{A}d\bar{z}).$$

Comme  $A = P_z + i\sigma_z + \mathcal{O}_{2k}(z)$ , on a :

$$Adz - \bar{A}d\bar{z} = P_z dz - P_{\bar{z}} d\bar{z} + i d\sigma + \mathcal{O}_{2k}(z)$$

$$\text{et } d(Adz - \bar{A}d\bar{z}) = dP_z \wedge dz - dP_{\bar{z}} \wedge d\bar{z} + \mathcal{O}_{2k-1}(z).$$

Or  $w = -P(z + Kiw) + i\sigma(z)$ , donc  $dw = id\sigma + \mathcal{O}_{2k-1}$  (avec  $\sigma = \frac{z+\bar{z}}{2} + \dots$ )  
et

$$\begin{aligned} dP_z &= P_{z^2}(dz + Kidw) + P_{z\bar{z}}(d\bar{z} - Kid\bar{w}) = [P_{z^2}(1 - \frac{K}{2}) - \frac{K}{2}P_{z\bar{z}}]dz \\ &+ [P_{z\bar{z}}(1 - \frac{K}{2}) - \frac{K}{2}P_{z^2}]d\bar{z} + \mathcal{O}_{2k-1}(z). \end{aligned}$$

Par conséquent :  $d(Adz - \bar{A}d\bar{z}) = 2i[2\Delta P - K(\frac{P_z^2}{2} + \Delta P + \frac{P_{\bar{z}^2}}{2})]d\sigma \wedge dy$ .

Par abus de notations, on écrira  $\Delta P$ ,  $P_{z^2}$  et  $P_{\bar{z}^2}$  à la place de  $\Delta P_{2k}$ ,  $(P_{2k})_{z^2}$  et  $(P_{2k})_{\bar{z}^2}$ .

L'équation (4) devient :

$$d\lambda \wedge d\sigma - 2\lambda[2\Delta P - K(\frac{P_z^2}{2} + \Delta P + \frac{P_{\bar{z}^2}}{2})]dy \wedge d\sigma + \mathcal{O}_{2k-1} = 0.$$

$P$  est calculé en  $z + Kiw = z - K\sigma + \mathcal{O}_{2k}(z)$ ; donc  $\text{Re}(z + Kiw)$  est équivalent à  $(1-K)\sigma$  et  $\text{Im}(z + Kiw)$  est équivalent à  $y$ .

Le lemme résulte alors du développement en série de  $\lambda$  en  $\sigma$  et  $y$ . ■

**Lemme 5.-** Pour  $(z, w) \in E$ , on a :

$$\sigma[z, \eta(z, w + it + \alpha(t))] = \sigma(z, \bar{z}) + t + \mathcal{O}_{2k}(z, w, t).$$

$$\eta[z, w + it + \alpha(t)] = \bar{z} + 2t + \sigma(z, w, t).$$

**Preuve :** L'examen de la différentielle de  $(\eta, \xi)$  à l'origine, obtenue à partir des relations (2), montre que :

$$\begin{cases} d\xi = -dw \\ d\eta = -dz - 2idw \end{cases}$$

donc que :

$$\begin{cases} \eta = -z - 2iw + o(z, w) \\ \xi = -w + o(z, w) \end{cases}$$

Ces estimations, reportées dans (3), fournissent :

$$i\sigma(z, \eta) = w + \mathcal{O}_{2k}(z, w).$$

On déduit de ceci et du lemme 1 que, pour  $(z, w)$  dans  $E$  :

$$i\sigma[z, \eta(z, w + it + \alpha(t))] = i\sigma(z, \bar{z}) + it + \mathcal{O}_{2k}(z, w, t).$$

Le lemme 5 en résulte immédiatement. ■

**Fin de la démonstration du théorème 1 :** D'après le lemme 4, on a :

$$\lambda(z, \eta(\cdot)) = \sum_1^{2k-1} \lambda_j \sigma^j(z, \eta(\cdot)) + 2\lambda_0 \int_0^{\frac{z-\eta(\cdot)}{2i}} Q(\sigma(z, \eta(\cdot))) Y dY.$$

Si  $(\cdot) = w + it + \alpha(t)$ , on obtient à partir du lemme 5 :

$$\lambda(z, \eta(\cdot)) = \Sigma \lambda_j [\sigma(z, \bar{z}) + t]^j + 2\lambda_0 \int_0^{y+it} Q(x+t, Y) dY + \mathcal{O}_{2k}(z, w; t).$$

Ainsi, d'après le lemme 3, on a :

$$\text{Im } L'(t) = 2i\lambda_0 \text{Im} \int_0^{y+it} Q(x+t, Y) dY + \mathcal{O}_{2k}(z, w, t).$$

Puisque  $Q$  est holomorphe et  $Q(x+t, Y)$  est réel pour  $Y$  dans  $[0, y]$ , on a :

$$\text{Im } L'(t) = 2i\lambda_0 \text{Im} \int_y^{y+it} Q(x+t, Y) dY + \mathcal{O}_{2k}(z, w, t).$$

Enfin, après le changement de variable  $Y = y + i\tau$ , on obtient :

$$(5) \quad \text{Im } L(t) = 2i\lambda_0 \text{Re} \int_0^t \left[ \int_0^T Q(x+T, y+i\tau) d\tau \right] dT + \mathcal{O}_{2k+1}(z, w, t).$$

On peut maintenant conclure :

\* Si  $E$  est tangent à  $u$ , ce qui se traduit par  $c = 0$  (ou  $K = 1$ ), on a  $Q(\sigma, Y) = 1/2P_{y^2}(0, Y)$  d'après la définition du lemme 4.

Donc si  $P = ay^{2k} + \dots$  avec  $a \neq 0$ , on obtient  $\text{Im } L(t) = 2i\lambda_0 a \cdot \text{Re}(y + it)^{2k} + \mathcal{O}_{2k+1}$ , qui change de signe.

\* Si  $E$  n'est pas tangent à  $u$ , ce qui se traduit par  $c \neq 0$ , on peut prendre  $c = -1$  quitte à effectuer le changement de variables :  $w = w'$ ,  $z = -cz'$  et à changer  $P$ ; mais alors  $K = 0$  et  $Q(\sigma, Y) = 2\Delta P(\sigma, Y)$  par définition de  $Q$ .

Les équations (2) de  $E$  donnent :  $T_0^C(b\Omega) = \{w = 0\}$ ,  $T_0(E) = \{\text{Re } w = 0; \text{Im } w = \text{Re } z\}$

d'où :  $T_0^C(b\Omega) \cap T_0(E) = \mathbf{R} \cdot v$  où  $v = (-i, 0)$

et :  $(x + T, y + i\tau) = (x, y) + T(1, 0) + \tau(0, i) = z + T \cdot iv + \tau \cdot Jv$ .

L'expression (5) est alors identique à  $\tilde{\mathcal{L}}(z, t)$  comme l'indique la relation (1''), ce qui achève la démonstration. ■

### Exemples :

Lorsque  $P$  est de degré 4, on a :  $P(z) = \alpha z^3 \bar{z} + \beta z^2 \bar{z}^2 + \bar{\alpha} z \bar{z}^3$  avec  $\beta \in \mathbf{R}$  et  $2\beta - 3|\alpha| \geq 0$  puisque  $P$  est sous-harmonique.

On a :  $\Delta P = 3\alpha_z^2 + 4\beta_{z\bar{z}} + 3\bar{\alpha}\bar{z}^2 = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$  avec

$$\begin{cases} A = 6 \text{Re } \alpha + 4\beta \\ B = -12 \text{Im } \alpha \\ C = -6 \text{Re } \alpha + 4\beta \end{cases}$$

Plaçons-nous dans le cas où  $E$  n'est pas tangent à  $u$ ,  $E$  peut être défini par  $w = -P(z) + i(\text{Re } z + \sigma_2(z))$ .

On trouve, par application du théorème 1, que  $E$  est un  $A^\omega$  ensemble de module maximum pour  $\Omega$  si la partie homogène d'ordre 4 de  $\text{Re} \int_0^t \Delta P(x + T, y + i\tau) d\tau dT$  ne change pas de signe pour  $t \neq 0$ ,

c'est-à-dire si : 
$$\frac{A - C/3}{4} \cdot t^2 + \frac{2(Ax + By)}{3} \cdot t + \frac{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2}{2}$$

garde un signe constant pour  $t \neq 0$ .

La décomposition en carrés de cette forme quadratique donne :

$$\frac{A}{2} \left[ x + \frac{B}{A}y + \frac{2}{3}t \right]^2 + \frac{AC - B^2}{2A} \cdot y^2 + \frac{A - C/3}{4} \cdot t^2.$$

Comme  $A > 0$ ,  $B^2 - AC \leq 0$  cette expression a un signe constant ( $> 0$ ) lorsque  $3A - C > 0$ . Ainsi  $E$  est un ensemble de module maximum pour  $\Omega$  si

$$\beta + 3 \operatorname{Re} \alpha > 0.$$

Reprenons maintenant l'exemple 2 de l'introduction à la lumière des résultats du théorème I;  $b\Omega : \operatorname{Re} w + |z|^4 = 0$ ,  $E = b\Omega \cap \{\operatorname{Re} z = (1 + \sqrt{2}) \operatorname{Im} z\}$ .

$E$  est tangent à  $u$  car  $u = (0, i) \in T_0(E) \begin{cases} \operatorname{Re} w = 0 \\ \operatorname{Re} z = (1 + \sqrt{2}) \operatorname{Im} z \end{cases}$  et  $\frac{\partial^4 P}{\partial y^4} \neq 0$  puisque  $P = |z|^4$ . Le théorème 1 entraîne donc que  $E$  n'est pas un  $A^w$  ensemble de module maximum.

Par contre,  $E = \{w = -|z|^4 + i \operatorname{Re} z\}$  est un  $A^w$  ensemble de module maximum pour  $\Omega = \{\operatorname{Re} w + |z|^4 < 0\}$ .

## CHAPITRE 2

## Pseudo-réflexion

## 2.1. Introduction.

**Définition :** Soit  $E \subset \mathbf{C}^n$ . Un coin  $W^+$  d'arête  $E$  est un ensemble obtenu de la manière suivante : Soit  $\Gamma$  un cône ouvert non vide de  $\mathbf{C}^n$  et  $r > 0$ . On pose alors :  $W^+ = \{x + \gamma \in \mathbf{C}^n, x \in E, \gamma \in \Gamma, |\gamma| < r\}$ .

Le coin opposé  $W^-$  est donné par :

$$W^- = \{x - \gamma \in \mathbf{C}^n, x \in E, \gamma \in \Gamma, |\gamma| < r\}.$$

**Définition :** Une ensemble  $E$  de  $\mathbf{C}^n$  est un "ensemble de réflexion" s'il existe deux coins opposés  $W^+$  et  $W^-$  d'arête  $E$ , et deux  $n$ -uples fonctions  $f_1, \dots, f_n$  holomorphes dans  $W^+$ , et  $g_1, \dots, g_n$  holomorphes dans  $W^-$ , de classe  $C^1$  dans les adhérences telles que :  $df_1 \wedge \dots \wedge df_n \neq 0$  et  $f_j = \bar{g}_j$  sur  $E$ .

Rappelons le résultat suivant de Nagel et Rosay [N.R.] (proposition 3) :

Soit  $\Omega$  un domaine de  $\mathbf{C}^n$ ,  $E \subset b\Omega$ , tels que  $b\Omega$  soit strictement pseudo-convexe et réel analytique dans un voisinage de  $E$ . Supposons qu'il existe un voisinage  $U$  de  $E$  et une fonction  $\Psi$  de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) dans  $cl(\bar{\Omega}) \cap U$ , holomorphe dans  $\Omega \cap U$ , telle que  $|\Psi| = 1$  sur  $E$  et  $|\Psi| < 1$  dans  $cl(\bar{\Omega}) \cap U$ .

Alors il existe un voisinage  $V$  de  $E$  et des fonctions  $g_1, \dots, g_n$  de classe  $C^{k-1}$  dans  $cl(\bar{\Omega}) \cap V$ , holomorphes dans  $\Omega \cap V$ , telles que  $g_j = \bar{z}_j$  sur  $E$ . Si  $k \geq 2$ , il s'ensuit que  $E$  est un ensemble de réflexion.

La démonstration de ce résultat repose, d'une part, sur le fait que  $\mathcal{M} = \{(X, \xi) \in \mathbf{C}^2 \times \mathbf{P}_1(\mathbf{C}) / X \in b\Omega, \xi = \partial\rho\}$  (où  $\rho$  est la fonction définissante de  $\Omega$ ) est totalement réelle si et seulement si la forme de Levi de  $b\Omega$  est partout non dégénérée. D'autre part, elle fait intervenir la propriété bien connue suivante qui ne dépend pas de la pseudo-convexité. Nous aurons à l'utiliser par la suite, aussi nous en donnons une démonstration pour la commodité du lecteur :

**Proposition 1.** Soit  $S$  une hypersurface de classe  $C^1$  dans  $\mathbf{C}^n$ , et  $E$  une sous-variété de classe  $C^1$  de  $S$ . Si  $E$  est un ensemble de module maximum pour

une fonction  $\Psi$  holomorphe d'un côté de  $S$  (le problème est local) et de classe  $C^1$  jusqu'au bord, alors  $\ker d\Psi = T^{\mathbb{C}}(S)$  le long de  $E$ .

**Preuve :** Plaçons-nous par exemple en  $0 \in E$  et supposons que  $\Psi(0) = 1$ .

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f = |\Psi|^2 - 1$ .

Comme  $f$  est plurisousharmonique négative, nulle en 0, on a :  $df(0) \neq 0$ , d'après le lemme de Hopf, et donc :  $d\Psi(0) \neq 0$ .

Et puisque  $f$  admet en 0 un maximum relatif :  $\ker df(0) = T_{(0)}S$ .

De  $df(0) = \partial f(0) + \bar{\partial}f(0)$ , on déduit que :  $\ker \partial f(0) = \ker d\Psi = T_{(0)}^{\mathbb{C}}S$ . ■

Nagel et Rosay déduisent l'analyticité de  $E$  de la propriété de réflexion décrite plus haut ; rappelons les idées directrices de leur raisonnement, ce qui éclairera la suite.

Soit  $W^- \subset \Omega \cap V$  un coin d'arête  $E$ , et  $\tilde{\Psi}$  la fonction définie dans  $W^+$  par :  $\tilde{\Psi}(X) = \frac{1}{\Psi(\bar{g}^{-1}(X))}$  ; (il faut évidemment vérifier que  $\bar{g}(W^-)$  contient  $W^+$ ).

$\Psi$  et  $\tilde{\Psi}$ , holomorphes respectivement dans  $W^+$  et  $W^-$ , de classe  $C^1$  jusqu'au bord, coïncident sur  $E$ . Le théorème de l'edge of the wedge permet de conclure que  $\Psi$  se prolonge analytiquement dans un voisinage de  $E$  et que  $E$  est réel-analytique par le théorème des fonctions implicites.

Comme on l'a dit plus haut, la stricte pseudoconvexité joue un rôle fondamental dans la méthode suivie. Dans le paragraphe suivant, nous construisons une réflexion appropriée en un point de faible pseudoconvexité.

## 2.2. Pseudo-réflexion à travers une sous-variété génératrice et totalement réelle de $\mathbb{C}^2$ qui est un ensemble de module maximum pour $A^\infty$ .

Nous étudions la propriété de réflexion dans le cas des domaines rigides de  $\mathbb{C}^2$  de type  $2k$  à l'origine.

Soit  $b\Omega$  l'hypersurface rigide et analytique réelle dans  $\mathbb{C}^2$ , de type  $2k$  à l'origine, bord de l'ouvert  $\Omega : \operatorname{Re} w + P(z) < 0$ .

$E$  est une sous-variété dans  $b\Omega$ , totalement réelle et  $C^\infty$ , de dimension 2,

passant par l'origine. On a vu, au paragraphe 1.3, que  $E$  pouvait être défini par :

$$(4) : \quad E \begin{cases} \operatorname{Re} w + P(z) = 0 \\ \operatorname{Re} z + c \operatorname{Im} w + \sigma_2(\operatorname{Im} w, z) = 0 \end{cases} \quad \text{où } \sigma_2, \text{ de classe } C^\infty \text{ s'annule à l'ordre 1.}$$

On suppose que  $E$  est l'ensemble de module maximum d'une fonction  $\Psi \in A^\infty(\Omega)$ . Alors, d'après la proposition 1, on a, puisque  $\ker \partial\Psi = \ker \partial\rho$  :

$$\frac{\Psi_z}{\Psi_w}(z, w) = 2.P'_z(z) \quad \text{le long de } E.$$

Dans la suite, on posera :  $g(z, w) = \frac{\Psi_z}{\Psi_w}(z, w)$  qui est dans  $A^\infty(\Omega)$ . On a donc :

$$(5) \quad g|_E = 2.P_z.$$

Si  $F$  est une fonction  $C^\infty$ ,  $F_k$  désignera la partie homogène de degré  $k$  de son polynôme de Taylor à l'origine, et  $\mathcal{O}_k$  désignera une fonction  $C^\infty$  qui s'annule à l'ordre  $k-1$  à l'origine, ou une différentielle dont les coefficients s'annulent à l'ordre  $k-1$ .

**Proposition 2.** *Soit  $F(z, z')$  holomorphe dans un voisinage de 0 de  $\mathbb{C}^2$  telle que  $F = \mathcal{O}_{2k-1}$  et  $(F_{2k-1})'_{z'}(1, -1) \neq 0$ .*

*Soit  $g$  dans  $A^\infty(\Omega)$  telle que :  $g(z, w) = F(z, \bar{z})$  sur  $E$ . Alors il existe un cône  $S$  défini par :  $0 \leq |w| < \varepsilon_0|z|$  tel que l'équation  $F(z, z') = g(z, w)$  admette une unique solution dans un voisinage  $V$  de l'origine vérifiant :*

- (i)  $z'$  est de la forme :  $z' = (-z + 2icw)[1 + k(z, w)]$  dans  $S \cap cl(\bar{\Omega})$ .
- (ii)  $z'$  est de classe  $C^1$  dans  $V$ ,  $k(0, 0) = 0$ , et  $z'$  admet des dérivées partielles d'ordre 2 bornées dans  $V - \{z = 0\}$ .
- (iii)  $z'$  est holomorphe dans  $S \cap \Omega$ .
- (iv)  $z'/E \cap S = \bar{z}$ .

**Preuve :**

- Commençons par établir que  $g$  est de la forme :  $g(z, w) = F(z, -z + 2icw) + \mathcal{O}_{2k}(z, w)$ . Puisque, sur  $E$  :  $-z + 2icw = \bar{z} + \mathcal{O}_2(z, \operatorname{Im} w)$ , la restriction à  $E$  de  $g(z, w) - F(z, -z + 2icw)$  est égale à  $F(z, -z + 2icw + \mathcal{O}_2) - F(z, -z + 2icw)$ .

Comme  $F = \mathcal{O}_{2k-1}$ , le développement de Taylor à l'origine jusqu'à l'ordre  $2k - 1$  de  $g(z, w) - F(z, -z + 2icw)$  est donc nul sur  $E$ ; comme  $E$  est un ensemble d'unicité pour les fonctions holomorphes, ce développement est identiquement nul. On peut donc poser

$$g(z, w) - F(z, -z + 2icw) = \mathcal{O}_{2k}(z, w).$$

- On introduit la fonction  $b(z, w) = \frac{1}{z^{2k-1}} \cdot \mathcal{O}_{2k}(z, w) \cdot \chi(\frac{w}{z})$ , où  $\mathcal{O}_{2k} \in A^\infty(\Omega)$  est définie ci-dessus, et  $\chi \in C_c^\infty(\mathbf{C})$  vaut 1 dans le voisinage de l'origine :  $|t| < \varepsilon_0$ . Soit enfin  $S$  le cône :  $0 \leq |w| < \varepsilon_0 \cdot |z|$ .

Considérons la fonction  $G(z, t, k)$ , holomorphe dans un voisinage de  $\mathbf{C}^3$ , définie par :

$$G(z, t, k) = \frac{1}{z^{2k-1}} \cdot [F(z, (-z + 2icw)(1+k)) - F(z, -z + 2icw)] \quad (w = t \cdot z).$$

D'après le premier point, l'équation en  $k$  :

$$F(z, (-z + 2icw)(1+k)) = g(z, w) \quad (*)$$

est équivalente dans  $S \cap \Omega$  à :

$$G(z, \frac{w}{z}, k) = b(z, w). \quad (**)$$

Comme  $G(z, t, 0) = 0$  et  $G'_k(0, 0, 0) = (F_{2k-1})'_z(1, -1) \neq 0$ , le théorème des fonctions implicites assure l'existence d'une fonction  $\Phi$  holomorphe dans un voisinage de l'origine de  $\mathbf{C}^3$  telle que  $(**)$  admette une unique solution  $k$  de la forme :  $k(z, w) = b(z, w) \cdot \Phi(z, \frac{w}{z}, b(z, w))$ , à condition que  $z, \frac{w}{z}, b(z, w), k(z, w)$  soient assez voisins de 0, ce qui est réalisé pour  $z$  et  $\varepsilon_0$  assez petit. Il est clair que  $k$  est  $C^\infty$  dans un voisinage de l'origine diminué du plan  $z = 0$ . Le fait que  $b(z, w)$  soit en facteur se justifie par le fait que  $G(z, t, 0) = 0$ .

Etablissons maintenant les propriétés de différentiabilité de  $z'$ . On pose  $k(0, w) = 0$ . De la relation :

$$z' = (-z + 2icw) \left[ 1 + \frac{\mathcal{O}_{2k}(z, w)}{z^{2k-1}} \chi\left(\frac{w}{z}\right) \Phi \right]$$

où  $\Phi$  désigne pour simplifier la fonction  $\Phi(z, \frac{w}{z}, b(z, w))$ , on déduit que :

$$dz' = \frac{\mathcal{O}_{2k+1}}{z^{2k}} (\chi \cdot \Phi) + \frac{\mathcal{O}_{2k+1}}{z^{2k}} + d(-z + 2icw)$$

$$d^2 z' = \frac{\mathcal{O}_{2k+1}}{z^{2k+1}}(\chi \cdot \Phi) + \frac{\mathcal{O}_{2k+1}}{z^{2k}} d(\chi \cdot \Phi) + \frac{\mathcal{O}_{2k+1}}{z^{2k-1}} d^2(\chi \cdot \Phi)$$

$$\text{or : } d(\chi \cdot \Phi) = \frac{\mathcal{O}_1 \cdot \chi' \cdot \Phi}{z^3} + \chi \cdot d\Phi.$$

$$d^2(\chi \cdot \Phi) = \Phi \left( \frac{\chi' \mathcal{O}_1 + \chi'' \mathcal{O}_1}{z^3} \right) + \frac{\chi' \mathcal{O}_1}{z^2} d\Phi + \chi d^2 \Phi$$

Par ailleurs, un calcul dual donne :

$$d\Phi = \frac{\mathcal{O}_1}{z^2} + \frac{\mathcal{O}_{2k}\chi}{z^{2k}} + \frac{\mathcal{O}_{2k+1}}{z^{2k+1}} \chi'.$$

$$d^2 \Phi = \frac{\mathcal{O}_1}{z^3} + \frac{\mathcal{O}_{2k}}{z^{2k+1}} \chi + \frac{\mathcal{O}_{2k+1}}{z^{2k+2}} \chi' + \frac{\mathcal{O}_{2k+2}}{z^{2k+3}} \chi''$$

Il en résulte :

$$d(\chi \cdot \Phi) = \frac{\mathcal{O}_{2k+1}}{z^{2k+2}} \cdot \tilde{\chi} \left( \frac{w}{z} \right)$$

$$d^2(\chi \cdot \Phi) = \frac{\mathcal{O}_{2k+1}}{z^{2k+3}} \cdot \tilde{\chi} \left( \frac{w}{z} \right)$$

$\tilde{\chi}$  désigne une fonction  $C^\infty$  à support compact, telle que  $\text{supp } \tilde{\chi} \subset \text{supp } \chi$ .

Ainsi  $dz'$  est continue et s'annule sur le plan  $z = 0$  et  $d^2 z'$  est continue et borné en dehors de ce plan.

Enfin, l'équation (\*) admet comme solution évidente  $z' = \bar{z}$  par hypothèse.

Or, sur  $E : \bar{z} = (-z + 2icw)(1 + \tilde{k}(z, w))$  avec  $\tilde{k}(z, w) = \frac{-2ick \text{Re}(w) + \mathcal{O}_2(\text{Im } w, z)}{-z + 2icw}$ .

Comme  $\tilde{k}$  tend vers 0 à l'origine sur  $E \cap S$ , il résulte de l'unicité que  $z' = \bar{z}$  sur  $E \cap S$ . ■

**Proposition 3.** Soit  $\Omega$  un domaine rigide de  $\mathbf{C}^2$ , de type  $2k$  à bord réel analytique. On suppose que  $T_0(E) \cap T_0^{\mathbf{C}}(b\Omega)$  n'est pas dans le cône tangent à l'origine aux zéros de la forme de Lévi, et que  $E$  est un  $A^\infty(\Omega)$  ensemble de module maximum, totalement réel et générateur.

Il existe alors un cône  $S : 0 \leq |w| < \varepsilon_0 |z|$ , et un difféomorphisme  $f$  de classe  $C^1$  dans un voisinage de l'origine, tels que :

- (i)  $f$  est holomorphe dans  $\Omega \cap S$ .
- (ii)  $\bar{f} = id$  sur  $E \cap S$ .
- (iii)  $f$  a des dérivées partielles d'ordre 2 bornées en dehors de  $z = 0$ .
- (iv) La matrice jacobienne de  $f$  à l'origine est  $\begin{bmatrix} -1 & 2ic \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ .

**Preuve :**

L'hypothèse suivant laquelle  $T_0(E) \cap T_0^{\mathbf{C}}(b\Omega)$  n'est pas dans le cône tangent à l'origine aux zéros de la partie principale de la forme de Levi de  $b\Omega$  se traduit sur  $P$  par la condition  $\Delta P_{2k}(i) \neq 0$ .

On peut donc appliquer la proposition 2 à  $g(z, w) = \frac{\Psi'_z}{\Psi'_w}(z, w)$  et  $F(z, z') = 2 \cdot P'_z(z, z')$  (cf. (5)). On considère l'application  $f : (z, w) \mapsto (z', w' = -w - 2P(z, z'))$  où  $z'$  est la solution de l'équation  $F(z, z') = g(z, w)$  décrite par la proposition 2, ce qui est licite puisque, par hypothèse,  $(F_{2k-1})'_{z'}(1, -1) = \frac{2}{(i)^{2k-2}} \cdot \Delta F_{2k}(i) \neq 0$ . ■

## CHAPITRE 3

## Disques analytiques

$\Omega$  est à nouveau un domaine rigide de  $\mathbf{C}^2$  à bord réel analytique de  $\mathbf{C}^2$  à l'origine.  $E$  est encore une sous-variété totalement réelle, génératrice et  $C^\infty$ , dans  $b\Omega$  et contenant l'origine.

Le but de ce chapitre est d'établir le résultat suivant :

**Théorème 2.** *On suppose que  $T_0(E) \cap T_0^{\mathbf{C}}(b\Omega)$  n'appartient pas au cône tangent à l'origine des zéros de la forme de Lévi de  $b\Omega$ , et que  $E$  n'est pas tangent au vecteur de translation de  $T_0(b\Omega)$  laissant  $b\Omega$  invariante.*

*Si  $E$  est l'ensemble de module maximum d'une fonction  $\Psi$  de  $A^\infty(\Omega)$ , alors  $\Psi$  se prolonge analytiquement dans un voisinage de 0.*

## 3.1. Un théorème de prolongement analytique.

L'idée est de construire une famille de disques analytiques dont les bords restent dans la région où  $\Psi$  est holomorphe, et dont les centres décrivent un voisinage de l'origine. On rappelle qu'un disque analytique  $D$  de  $\mathbf{C}^n$  est une application holomorphe, du disque unité  $\Delta$  de  $\mathbf{C}$ , dans  $\mathbf{C}^n$ , continue jusqu'au bord. Par définition, le bord  $bD$  de ce disque est l'image de  $b\Delta$  par  $D$ , et son centre est  $D(0)$ .

**Proposition 4.** *Soit  $B$  un domaine de  $\mathbf{C}^n$ ,  $t_0 \in [0, 1[$  et  $t \mapsto D_t$  une famille de disques analytiques de  $\mathbf{C}^n$ , réelle-analytique par rapport à  $t \in [t_0, 1]$ , telle que :*

- (i)  $D_{t_0} \subset B$ .
- (ii)  $bD_t \subset B$ .
- (iii)  $0 \in bB$  et  $bB$  est lisse au voisinage de 0.
- (iv)  $d = \text{dist}(bD_1, bB) > \text{dist}(c, 0)$  où  $c = D_1(0)$  et  $c(t) = D_t(0)$  restent dans  $B$ .

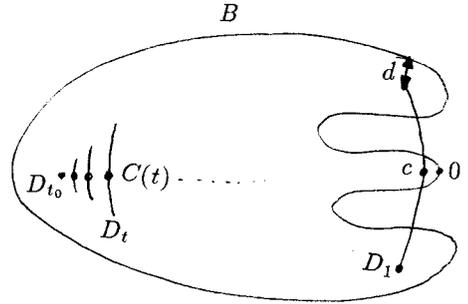
*On suppose, de plus, que  $c$  est assez voisin de l'origine pour que  $B(c, d) \cap B$  soit connexe,  $B(c, d)$  désignant la boule de centre  $c$  et de rayon  $d$ .*

*Alors toute fonction  $\Psi \in \mathcal{O}(B)$  se prolonge analytiquement dans un voisinage de l'origine.*

**Démonstration :**

Soit  $g$  dans  $\mathcal{O}(B)$ .

La fonction  $gD_t(\xi)$ , holomorphe dans  $\Delta$  au voisinage de  $\{|\xi| = 1\}$ , se prolonge dans  $\{|\xi| < 1\}$  si et seulement si :  $\int_{|\xi|=1} gD_t(\xi) \cdot \xi^{-(n+1)} \cdot d\xi = 0$  pour tout  $n = -1, -2, \dots$ . Or,  $t \mapsto \int_{|\xi|=1} gD_t(\xi) \cdot \xi^{-(n+1)} \cdot d\xi$  est analytique réelle, et est nulle au voisinage de  $t_0$ , donc est nulle partout.



Par conséquent,  $g \circ Dt/b\Delta$  se prolonge en une fonction holomorphe dans  $\Delta$  qui sera notée  $g_t$ , pour tout  $t \in [t_0, 1]$ .

On a évidemment :  $g_t/b\Delta = g/bD_t$  pour tout  $t \in [t_0, 1]$ , et  $g_t = g \circ D_t$  pour  $t$  voisin de  $t_0$ .

Notons  $g^{(n)}(a)$  le polynôme homogène de degré  $n$  dans le développement de Taylor de  $g$  en un point  $a$  de  $B$ .

Comme  $t \mapsto g^{(n)}(c(t)) - (g^{(n)})_t(0)$  est analytique réelle et nulle dans un voisinage de  $t_0$ , on en déduit que :  $g^{(n)}(c(t)) = (g^{(n)})_t(0)$  pour tout  $t \in [t_0, 1]$ .

Par conséquent :

$$\begin{aligned} |g^{(n)}(c)| &= |(g^{(n)})_{t=1}(0)| \leq \sup_{b\Delta} |(g^{(n)})_{t=1}| \\ &= \sup_{bD_1} |g^{(n)}| \leq \frac{M}{d^n} \text{ pour une constante } M \text{ convenable} \end{aligned}$$

Ainsi, si  $c$  est assez voisin de l'origine, pour que  $B(c, d) \cap B$  soit connexe, les hypothèses (iii) et (iv) entraînent que  $g$  se prolonge holomorphiquement à la boule  $B(c, d)$ , de centre  $c$ , de rayon  $d$ . ■

**3.2. L'ouvert  $B$  adapté au problème.**

On utilise les coordonnées avec lesquelles  $b\Omega$  et  $E$  sont décrits à la fin du paragraphe 1.3.

Comme  $E$  n'est pas tangent à  $(0, i)$ ,  $E$  peut être défini par :  $w = -P(z) + i[\operatorname{Re} z + \sigma_2(z)]$  où  $\sigma_2$  s'annule à l'ordre 1 (i.e.  $c = -1$ ). Pour chaque  $\varepsilon$  et

$\alpha$  positifs, on considère la courbe  $\ell_{\varepsilon, \alpha}$  de  $E$  décrite par le point  $a(t)$  de coordonnées :  
 $(0 \leq t \leq 1)$

$$a_1(t) = i\varepsilon(1 + t + t\alpha - it\alpha) \quad a_2(t) = i(\varepsilon t\alpha + \sigma_2(a_1)) - P(a_1).$$

Remarquons que l'argument principal de  $a_1$  est :  $\arctan\left(\frac{1+t+t\alpha}{t\alpha}\right)$  et que cette quantité est proche de  $\frac{\pi}{2}$  lorsque  $\alpha$  est petit (indépendamment de  $\varepsilon$ ).

Puisque  $T_0(E) \cap T_0^{\mathbb{C}}(b\Omega)$  n'est pas dans le cône tangent à l'origine aux zéros de la forme de Lévi de  $b\Omega$ , les points de  $\ell_{\varepsilon, \alpha}$  sont de stricte pseudo-convexité pour  $\varepsilon$  et  $\alpha$  assez petits. On note  $\ell''_{\varepsilon, \alpha}$  la courbe obtenue en changeant  $\alpha$  en  $-\alpha$  ; ses points seront notés  $a'(t)$ .

Soit  $A = \bigcup_{|\alpha| < \alpha_0} \ell_{\varepsilon}$  et  $\Gamma = \{(T_1, T_2) \in \mathbb{C}^2 / 0 < \frac{1}{10}|T_1| < \operatorname{Re} T_2 < |T_2| < 2 \cdot |T_1| < 8\varepsilon\alpha_0\}$ .

Comme  $A$  est une région de stricte pseudoconvexité pour  $\varepsilon$  et  $\alpha_0$  assez petits, le théorème de [N-R] assure que  $\Psi$  se prolonge holomorphiquement à un voisinage de  $A$  et que  $\sigma$  y est réelle analytique. Soit  $\omega$  un tel voisinage.

On notera :  $W = A + \Gamma$ .

**Lemme 6.** *Pour  $\varepsilon$  et  $\alpha_0$  assez petit,  $W$  est contenu dans  $\overline{f(\Omega \cap S)} - cl(\Omega)$ .*

**Preuve :** Un élément de  $W$  s'écrit :  $(a_1 + T_1, a_2 + T_2)$  avec  $a \in A$  et  $T \in \Gamma$ .

- $\operatorname{Re}(a_2 + T_2) + P(a_1 + T_1) = \operatorname{Re}(T_2) + P(a_1 + T_1) - P(a_1)$   
 $\geq \operatorname{Re}(T_2) + \mathcal{O}_{2k-1}(\varepsilon) \cdot |T_1|$   
 $> |T_1| \cdot \left[\frac{1}{10} + \mathcal{O}_{2k-1}(\varepsilon)\right] > 0$  pour  $\varepsilon$  assez petit.

donc  $W \subset \mathbb{C}^2 - cl(\Omega)$ .

- Montrons que  $f^{-1}(\overline{W}) \subset \Omega \cap S$ ; on rappelle que  $f$  est le difféomorphisme construit dans la proposition 3.

On a :

$$\begin{aligned} f^{-1}(\overline{a+T}) &= f^{-1}(\overline{a}) + df^{-1}(\overline{a}) \cdot \overline{T} + \mathcal{O}_2(T) \\ &= a + df^{-1}(0)(\overline{T}_1, \overline{T}_2) + \mathcal{O}_2(T) + \mathcal{O}_1(a)\mathcal{O}_1(T) \end{aligned}$$

En effet,  $a$  est dans  $E \cap S$ , donc  $f^{-1}(\overline{a}) = a$  d'après la proposition 3. De plus, on sait que les dérivées partielles d'ordre 2 de  $f$  sont bornées dans un voisinage de l'origine, ce qui justifie le reste  $(R_1, R_2) = \mathcal{O}_2(T) + \mathcal{O}_1(a)\mathcal{O}_1(T)$ .

D'autre part, la proposition 3 donne :  $df^{-1}(0) = \begin{bmatrix} -1 & -2i \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  (on rappelle que  $c = -1$ ).

Ainsi :  $f^{-1}(\overline{a+T}) = (a_1, a_2) + (-\overline{T_1} - 2i\overline{T_2}, -\overline{T_2}) + (R_1, R_2)$ .

En notant ses coordonnées  $(z', w')$ , on a :

$$\operatorname{Re}(w') + P(z') = -\operatorname{Re} T_2 + P(a_1 - \overline{T_1} - 2i\overline{T_2} + R_1) - P(a_1) + \operatorname{Re}(R_2).$$

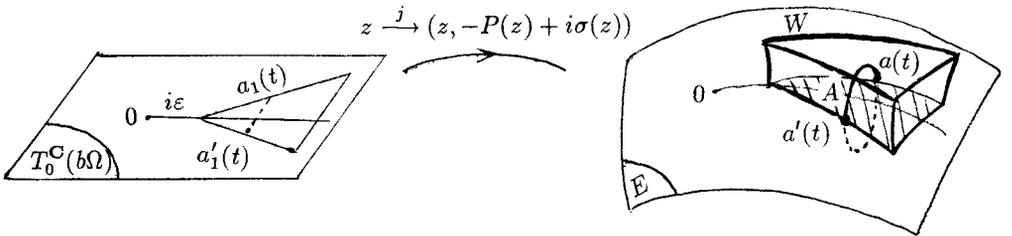
Si  $T$  est dans  $\Gamma$ , on obtient :

$$\operatorname{Re} w' + P(z') \leq |T_1|[-1/10 + \mathcal{O}(\varepsilon)] < 0$$

et 
$$\left| \frac{w'}{z'} \right| = \left| \frac{a_2 - \overline{T_2} + R_2}{a_1 - \overline{T_1} - 2i\overline{T_2} + R_1} \right| \leq \frac{\alpha_0 + \mathcal{O}(\varepsilon) + \mathcal{O}(\alpha_0)}{1 + \mathcal{O}(\alpha_0)}.$$

Ceci établit le lemme pour  $\varepsilon$  et  $\alpha_0$  assez petit. Dans la suite,  $\alpha_0$  est ainsi fixé. ■

En vue d'appliquer la proposition 4, on définit :  $B = \Omega \cup \omega \cup W$ . Considérons la fonction  $h(z, w) = \frac{1}{\Psi[f^{-1}(z, w)]}$ , holomorphe sur  $W$  d'après les lemmes 6 et proposition 3. Elle coïncide avec  $\Psi$  sur  $A$  puisque  $A$  est contenu dans  $E \cap S$  et que sur  $E \cap S$ , on a :  $\Psi \cdot \overline{\Psi} = 1$  et  $f^{-1}|_{E \cap S} = \overline{id}$  d'après la proposition 3. Comme on peut choisir  $\omega$  de telle sorte que  $\omega \cap W$  soit connexe et comme  $A$  est totalement réel et de dimension 2,  $h$  et  $\Psi$  coïncident sur  $\omega \cap W$ . Ainsi on peut définir une fonction holomorphe  $\tilde{\Psi}$  sur  $B$  par :  $\tilde{\Psi} = \Psi$  sur  $\Omega \cup \omega$  et  $\tilde{\Psi} = h$  sur  $W$ . Pour appliquer la proposition 4 à  $\tilde{\Psi} = g$  et  $B$ , il reste à construire une famille de disques analytiques répondant aux conditions de cette proposition.



### 3.3. Disques analytiques adaptés au problème.

Nous aurons besoin du résultat suivant :

**Lemme 7.** *Soit  $\Delta$  le disque unité de  $\mathbf{C}$  et  $\gamma'$  un arc connexe, fermé de  $b\Delta$ , distinct de  $b\Delta$ . Soit  $R > 0$  et  $K$  un compact de  $\hat{\Delta}$ .*

*Pour tout  $\xi_1$  dans  $K$  et tout  $L$  dans  $\mathbf{C}$ ,  $|L| \leq \mathbf{R}$ , il existe une fonction entière  $\varphi_{L,\xi_1}$  telle que :*

$$|\varphi_{L,\xi_1}| < \frac{1}{4\alpha_0} \text{ sur } \gamma' \text{ et } \varphi_{L,\xi_1}(\xi_1) = L.$$

*De plus, les fonctions  $\varphi_{L,\xi_1}$  sont bornées dans leur ensemble sur tout compact de  $\mathbf{C}$ .*

**Preuve :** Le théorème de Runge assure l'existence d'une fonction entière  $f$  vérifiant  $|f/K - 1| \leq \frac{1}{2}$  et  $|f/\gamma'| \leq \frac{1}{8R\alpha_0}$ .

Les fonctions  $\varphi_{L,\xi_1} = \frac{L \cdot f}{f(\xi_1)}$  conviennent. ■

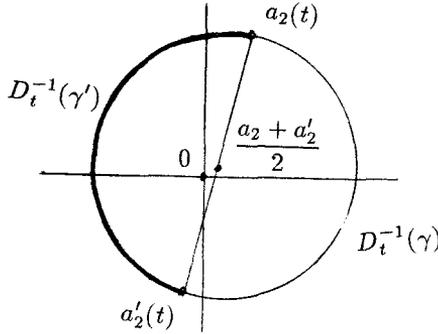
On cherche maintenant les disques analytiques  $D_t$  sous la forme :  $(g_t(w), w)$ . Le point  $a(t) = (a_1(t), a_2(t))$  est défini au début du paragraphe 3.2 avec  $\alpha = \alpha_0$ , et la fonction  $g_t$  par :

$$g_t(w) = a_1(t) + (w - a_2(t)) \left[ \frac{a'_1 - a_1}{a'_2 - a_2}(t) + (w - a'_2(t)) \cdot A(w) \right].$$

Comme  $\frac{a'_1 - a_1}{a'_2 - a_2}(t) = \frac{-2i\epsilon t \alpha_0(1-i)}{-2i\epsilon t \alpha_0(1+\mathcal{O}(\epsilon))}$ , cette fonction est bien définie.

$A(w)$  est une fonction holomorphe dans le disque de diamètre  $[a_2(t), a'_2(t)]$ , définie par :  $A(w) = \frac{1}{\epsilon} \cdot \varphi \left( \frac{2w - (a_2 + a'_2)}{a_2 - a'_2} \right)$ , où  $\varphi$  est holomorphe sur le disque unité fermé.

On remarque que  $g(a_2(t)) = a_1(t)$  et  $g(a'_2(t)) = a'_1(t)$ .



Comme il a déjà été remarqué au paragraphe 3.2, les points  $a(t)$  et  $a'(t)$  sont dans une région de stricte pseudoconvexité de  $b\Omega$  où  $E$  est réelle analytique d'après le théorème de [N-R]. Les fonctions  $a_1(t)$  et  $a'_1(t)$  sont évidemment réelles analytiques en  $t$ , ainsi que  $a_2(t)$  et  $a'_2(t)$  car  $\sigma_2$  l'est en  $a_1(t)$  et  $a'_1(t)$ . Ainsi, les disques  $D_t$  dépendent analytiquement du paramètre  $t$ .

On notera  $\gamma$  (resp.  $\gamma'$ ) l'image par  $D_t$  de la demi-circonférence "gauche" de diamètre  $[a_2(t), a'_2(t)]$  (resp. "droite").

### Choix de $\varphi$ et des centres des disques $D_t$ .

Commençons par remarquer que  $a_2(0) = i\sigma_2(i\varepsilon) - P(i\varepsilon)$  et qu'ainsi,  $D_{t=0}$  dégénère au point  $a(0)$  situé dans  $\omega$ . Il existe donc  $t_0(\varepsilon)$  dans  $]0, 1]$  tel que  $D_t$  soit contenu dans  $\omega$  pour  $t \in [0, t_0(\varepsilon)]$ . On pose  $\tilde{c}(t) = \frac{a_2 + a'_2}{2}(t) + \xi_t \cdot \frac{a_2 - a'_2}{2}(t)$  où  $\xi_t = t \cdot \xi_1 + i(1 - t)$ ,  $\xi_1$  étant choisi ultérieurement dans l'intérieur  $\overset{\circ}{\Delta}$  du disque unité  $\Delta$  de  $\mathbf{C}$ .

Pour  $t \in [t_0(\varepsilon), 1]$ ,  $\xi_t$  décrit un segment fermé dans  $\Delta$  et  $\tilde{c}(t)$  reste dans le disque de diamètre  $[a_2(t), a'_2(t)]$ . Il existe donc une famille  $\tau_t$  d'automorphismes du disque  $\Delta$ , dépendant analytiquement de  $t$ , telle que  $\tau_t(0) = t \cdot \xi_1 + i(1 - t)$ . Le point  $c(t) = (g_t(\tilde{c}(t)), \tilde{c}(t))$  est alors le centre de la famille de disques  $D_t \left[ \frac{a_2 + a'_2}{2}(t) + \tau_t(0) \cdot \frac{a_2 - a'_2}{2}(t) \right]$ .

Choisissons  $\xi_1 = -\frac{a_2 + a'_2}{a_2 - a'_2}(1) + i \cdot \delta(\varepsilon)$  avec  $\varepsilon > \delta(\varepsilon) > 0$ .

On a :

$$(1) \quad |\xi_1| \leq \mathcal{O}(\varepsilon) + \delta(\varepsilon)$$

D'autre part :

$$\tilde{c}(t) - a_2(t) = \frac{a'_2 - a_2}{2}(t)(1 - \xi_t) = \frac{a'_2 - a_2}{2}(t)[1 - t \cdot \xi_1 - i(1 - t)]$$

$$(2) \quad g(\tilde{c}(t)) = \frac{a_1 + a'_1}{2}(t) + \xi_t \cdot \frac{a_1 - a'_1}{2}(t) - \left( \frac{a_2 - a'_2}{2} \right)^2 (t) \cdot (1 - \xi_t)^2 \frac{1}{\varepsilon} \cdot \varphi(\xi_t).$$

Soit  $L_\varepsilon = \frac{\frac{a_1 + a'_1}{2}(1) + \xi_1 \cdot \left( \frac{a_1 - a'_1}{2} \right)(1)}{\left( \frac{a_2 - a'_2}{2} \right)^2 (1) \cdot (1 - \xi_1)^2} \cdot \varepsilon$ . Lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, les nombres  $L_\varepsilon$

sont bornés dans leur ensemble, on note  $R$  un majorant des  $L_\varepsilon$ . Dans la suite, on supposera  $|\xi_1| < \frac{1}{4}$  (cf. (1)) et on choisit pour  $\varphi$  la fonction  $\varphi_{L_\varepsilon, \xi_1}$  fournie par le lemme 7, où  $\gamma' = \{e^{i\theta}; \theta \in [\pi, 2\pi]\}$  et  $K = \{\xi_1; |\xi_1| \leq \frac{1}{4}\}$ .

Ainsi, les fonctions  $\varphi$  sont bornées dans leur ensemble et on a, par construction :  $g(\tilde{c}(1)) = 0$  et  $|\varphi/\gamma| \leq \frac{1}{4\alpha_0}$ .

Dans ces conditions, le centre  $c(1) = (0, \tilde{c}(1)) = (0, i\delta(\varepsilon) \cdot \frac{a_2 - a'_2}{2}(1))$  est dans  $\Omega$ , vu que  $i\delta(\varepsilon) \cdot \frac{a_2 - a'_2}{2}(1)$  est équivalent à  $-\delta(\varepsilon)\varepsilon\alpha_0$ .

De plus, lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, la distance de  $c(1)$  à l'origine est infiniment petite par rapport à  $\delta(\varepsilon)$ ; la boule de centre  $c(1)$  et de rayon  $\delta(\varepsilon)$  contiendra donc l'origine, et cette boule aura une intersection connexe avec  $\Omega$  pour  $\delta(\varepsilon)$  assez petit. Dans la suite,  $\delta(\varepsilon)$  est ainsi fixé.

Ainsi, les disques  $D_t$  et leurs centres  $c(t)$  sont complètement déterminés.

### Quelques estimations utiles pour la suite :

On omet la variable  $t$ , lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, pour simplifier les notations. Rappelons que :  $g(w) - g(a_2) = (w - a_2) \left[ \frac{a'_1 - a_1}{a'_2 - a_2} + (w - a'_2)A(w) \right]$  où  $A = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \varphi \left( \frac{2w - (a_2 + a'_2)}{a_2 - a'_2} \right)$  et  $\frac{a'_1 - a_1}{a'_2 - a_2} = 1 - i + \mathcal{O}(\varepsilon)$ .

$$(3) \quad |g(w) - g(a_2)| \leq |w - a_2| \cdot [\sqrt{2} + \frac{1}{2} + \mathcal{O}(\varepsilon)] \text{ sur } (\gamma').$$

$$(4) \quad |g(w) - g(a_2)| \geq |w - a_2| \cdot [\sqrt{2} - \frac{1}{2} + \mathcal{O}(\varepsilon)] \text{ sur } (\gamma').$$

$$(5) \quad |g(w) - g(a_2)| = |w - a_2| \cdot \mathcal{O}(1) \text{ sur } (\gamma).$$

$$(6) \quad g(\tilde{c}) = \frac{a_1 + a'_1}{2} + \xi_t \cdot \left( \frac{a_1 - a'_1}{2} \right) - \left( \frac{a_2 - a'_2}{2} \right)^2 \cdot (1 - \xi_t)^2 \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \varphi(\xi_t).$$

$$(7) \quad g(\tilde{c}) = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

$$(8) \quad g(\tilde{c}) - a_1 = \varepsilon \alpha_0 t \cdot \mathcal{O}(1)$$

$$(9) \quad \tilde{c} - a_2 = \frac{a'_2 - a_2}{2} \cdot (1 - \xi_t) = \frac{a'_2 - a_2}{2} \cdot [1 - \xi_t - i(1 - t)]$$

**Lemme 8.**  $(\gamma)$  est contenu dans  $\Omega \cup \omega$ .

**Preuve :** Evaluons le signe de  $H = \operatorname{Re}(w) + Pg(w)$  pour  $w \in (\gamma)$ .

On a :

$$\begin{aligned} H &= \operatorname{Re}(w - a_2) + P[a_1 + g(w) - g(a_2)] - P(a_1) \\ &\leq \operatorname{Re}(w - a_2) + \|dP\|_{[a_1, g(w)]} \cdot |g(w) - g(a_2)| \\ &\leq [\cos \theta + \mathcal{O}(\varepsilon^{2k-1})] \cdot |w - a_2| \quad \text{d'après (5),} \end{aligned}$$

où  $w - a_2 = |w - a_2| \cdot e^{i\theta}$ ,  $\theta \in \left[ \operatorname{Arg} \left( \frac{a_2 - a'_2}{2} \right) + \frac{\pi}{2}, \operatorname{Arg} \left( \frac{a_2 - a'_2}{2} \right) + \frac{3\pi}{2} \right]$ .

Mais  $\frac{a_2 - a'_2}{2} = \varepsilon t \alpha_0 [i(1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) + \mathcal{O}(\varepsilon^{2k-1})]$  donc  $\operatorname{Arg} \left( \frac{a_2 - a'_2}{2} \right)$  est proche de  $\frac{\pi}{2}$ .

Ainsi,  $H$  est négatif sur plus de la moitié de  $(\gamma)$  à partir de  $a_2$ . On opère de même avec  $a'_2$ . ■

**Lemme 9.**  $(\gamma')$  est contenu dans  $W$ .

**Preuve :**  $(g(w), w) = (g(w) - g(a_2), w - a_2) + a$ .

Montrons que  $(T_1 = g(w) - g(a_2), T_2 = w - a_2)$  est dans  $\Gamma$  si  $w$  est dans  $\gamma'$ , on rappelle que :

$$\Gamma = \{(T_1, T_2) \in \mathbf{C}^2 / 0 < \frac{1}{10}|T_1| < \operatorname{Re} T_2 < |T_2| < 2|T_1| < 8\varepsilon \alpha_0\}. \quad \blacksquare$$

$$\operatorname{Re} T_2 - \frac{1}{10}|T_1| \geq |w - a_2| \cdot [\cos \theta - \frac{1}{10}(\sqrt{2} + \frac{1}{2} + \mathcal{O}(\varepsilon))]$$

d'après (3).

Ainsi,  $\operatorname{Re} T_2 > \frac{1}{10} |T_1|$  sur plus de la moitié de  $(\gamma')$  à partir de  $a_2$  ;

On opère de même avec  $a'_2$ .

D'autre part :  $|\frac{T_2}{T_1}| \leq \frac{1}{\sqrt{2-\frac{1}{2}+\mathcal{O}(\varepsilon)}} < 2$  d'après (4) et  $|T_1| < 4\varepsilon\alpha_0$  d'après (3).

Après les lemmes 8 et 9, il reste à montrer, pour pouvoir appliquer la proposition 4, que les centres  $c(t)$  sont dans  $\Omega$  pour  $t \in [t_0, 1]$ , ce qui se vérifie en deux étapes.

**Lemme 10.**  $c(t) = D_t(0) \in \Omega$  pour  $t \in [t_0, \frac{3}{4}]$ .

**Preuve :**

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \tilde{c}(t) + Pg(\tilde{c}(t)) &= \operatorname{Re}[\tilde{c}(t) - a_2(t)] + Pg(\tilde{c}(t)) - P(a_1) \\ &= \varepsilon t \alpha_0 [1 - t + t \operatorname{Im} \xi_1 + \mathcal{O}(\varepsilon)] \text{ d'après (7), (8) et (9).} \end{aligned}$$

cette expression est bien négative sur  $[t_0, \frac{3}{4}]$  pour  $\varepsilon$  assez petit. ■

**Lemme 11.**  $D_t(0) \in \Omega$  pour  $t \in [\frac{3}{4}, 1]$ .

**Preuve :** Notons  $l(t)$  l'expression  $\operatorname{Re} \tilde{c}(t) + Pg\tilde{c}(t)$ . On étudie le signe de sa dérivée sur  $[\frac{3}{4}, 1]$ .

Comme  $\tilde{c}(t) = \frac{a_2+a'_2}{2}(t) + \xi_t \cdot \frac{a_2-a'_2}{2}(t)$ , on a :

$$\begin{aligned} \tilde{c}'(t) &= \left[ i \frac{\sigma_2(a_1) + \sigma_2(a'_1)}{2} - \frac{P(a_1) + P(a'_1)}{2} \right]'_t \\ &\quad + (\xi_1 - i) \left[ i(\varepsilon t \alpha_0 + \frac{\sigma_2(a_1) - \sigma_2(a'_1)}{2}) - \frac{P(a_1) - P(a'_1)}{2} \right] \\ &\quad + [t\xi_1 + (1-t)i] \cdot \left[ i(\varepsilon t \alpha_0 + \frac{\sigma_2(a_1) - \sigma_2(a'_1)}{2}) - \frac{P(a_1) - P(a'_1)}{2} \right]'_t \\ &= \varepsilon \alpha_0 (2t - 1) + 2it\varepsilon \alpha_0 \cdot \xi_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

D'autre part :  $[g\tilde{c}(t)]'_t = \mathcal{O}(\varepsilon)$  d'après (6). On estime ici  $\varphi'$  avec la formule de Cauchy et le lemme 7,  $\xi_t$  décrivant un compact de  $\Delta$  pour  $t \in [\frac{3}{4}, 1]$ .

Ainsi,  $[Pg\tilde{c}(t)]'_t = [P'g\tilde{c}(t)] \cdot [g\tilde{c}(t)]'_t = \mathcal{O}(\varepsilon^{2k})$ .

D'où  $l'(t) = \varepsilon \alpha_0 [2t - 1 - 2t \operatorname{Im} \xi_1 + \mathcal{O}(\varepsilon)]$ .

Comme  $|\xi_1| < \frac{1}{4}$ ,  $l'(t)$  est strictement positif sur  $[\frac{3}{4}, 1]$ .

Comme  $l(1)$  est négatif ( $c(1) \in \Omega$ ), on en déduit que  $l(t)$  est strictement négatif sur  $[\frac{3}{4}, 1]$ . ■

Ainsi, la proposition 4 permet de prolonger la fonction  $\Psi$ , qui prend son module maximum sur  $E$ , analytiquement dans un voisinage de l'origine. Le théorème 3 est établi.

## CHAPITRE 4

Régularité de  $E$ .

$E$  est maintenant définie par les deux équations réelles-analytiques

$$(1) \quad \rho_1(z, w) = \operatorname{Re}(w) + P(z) = 0$$

$$(2) \quad \rho_2(z, w) = |\Psi(z, w)|^2 - 1 = 0$$

car  $\Psi$  est holomorphe dans un voisinage de  $(0, 0)$ .

Mais ceci ne suffit pas à affirmer que  $E$  est elle-même réelle analytique, car les deux hypersurfaces définies par (1) et (2) sont tangentes à l'origine. En effet, en différentiant par rapport à  $z$  la relation :  $|\Psi(z, -P(z) + i\sigma(z))|^2 - 1 = 0$ , on obtient :  $\Psi'_w \cdot \bar{\Psi} - \Psi \cdot \bar{\Psi}'_w / E = 0$  grâce à  $\frac{\Psi'_z}{\Psi_w} / E = 2.P'_z(z)$ .

Ce qui donne en  $(0, 0)$  :  $\Psi'_w(0) - \bar{\Psi}'_w(0) = 0$ , d'où, compte tenu de

$$d\rho_1(0) = \frac{1}{2}(dw + d\bar{w})$$

$$\text{et} \quad d\rho_2(0) = d\Psi(0) + d\bar{\Psi}(0) = \Psi'_w(0) \cdot (dw + d\bar{w}),$$

$$d\rho_1(0) \wedge d\rho_2(0) = 0.$$

Nous allons voir que, malgré tout,  $E$  est bien réelle analytique :

**Théorème 4.** *Soit  $\Omega$  une domaine rigide, réel analytique de  $\mathbf{C}^2$ ,  $S = b\Omega$ , et  $\Psi \in A^\infty(\Omega)$  qui atteint le maximum de son module sur  $E$ , sous-variété  $C^\infty$ , totalement réelle et génératrice de  $S$ . On suppose que  $T_0(E) \cap T_0^{\mathbf{C}}(b\Omega)$  n'appartient pas au cône tangent à l'origine des zéros de la forme de Lévi de  $b\Omega$ , et que  $E$  n'est pas tangent au vecteur de translation de  $T_0(b\Omega)$  laissant  $b\Omega$  invariante. Alors  $E$  est réelle analytique.*

**Preuve :** Les équations (1) et (2) de  $E$  définissent un germe analytique  $X_0$  en 0 dans  $\mathbf{R}^4$ , de dimension 2, et  $X_0$  contient  $E$  qui est une variété  $C^\infty$  de dimension 2. La proposition 3.11 de [M] nous permet de conclure que  $E$  est une variété analytique. ■

Il nous semble intéressant de donner une autre démonstration du théorème 4, qui n'utilise que le théorème préparatoire de Weierstrass, alors que la proposition 3.11 résulte du théorème préparatoire de Malgrange pour les fonctions  $C^\infty$ .

Nous savons que l'équation en  $t$  :

$$(3) \quad \operatorname{Re} \log \Psi(z, -P(z) + it) = 0$$

a une solution  $C^\infty$  et une seule  $t = \sigma(z)$  au voisinage de 0.

Il s'agit de montrer que cette solution est réelle-analytique, ce qui démontrera le théorème 4 puisque  $E$  est aussi définie par

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(w) = -P(z) \\ \operatorname{Im}(w) = \sigma(z) \end{cases}$$

Comme  $\operatorname{Re} \log \Psi(0, it)$  n'est pas identiquement nulle, on déduit du théorème préparatoire de Weierstrass que l'équation (3) est équivalente localement à

$$t^N + a_1(z, \bar{z})t^{N-1} + \dots + a_{N-1}(z, \bar{z})t + a_N(z, \bar{z}) = 0$$

où les  $a_i$  sont analytiques réels et nuls en 0.

**Proposition 5.** *Si l'équation en  $X$  :  $X^N + a_1(x, y)X^{N-1} + \dots + a_N(x, y) = 0$ , à coefficients  $a_i$  nuls en 0 et réels analytiques, admet une unique solution  $X = \sigma(x, y)$  réelle  $C^\infty$ , alors cette solution est réelle analytique.*

**Preuve :** Commençons par démontrer par récurrence sur  $N$  le :

**Lemme 12.** *Si  $P(X) = X^N + a_1(x, y)X^{N-1} + \dots + a_N(x, y)$  a un seul zéro  $X = \sigma(x, y)$  réel, alors ce zéro s'écrit sous la forme :  $\sigma(x, y) = H \left( x^{\frac{1}{M}}, \left( \frac{y}{x^m} \right)^{\frac{1}{M'}} \right)$  où  $H$  est réelle analytique et  $m, M, M'$  entiers (les  $a_i$  sont réels analytiques et nuls en 0).*

C'est évident pour  $N = 1$  et  $N = 2$ , à cause de l'unicité du zéro.

Supposons le lemme vrai jusqu'au rang  $N - 1$  ( $N \geq 3$ ).

On peut supposer  $a_1 = 0$ , quitte à effectuer la translation  $X = Y - \frac{a_1(x, y)}{N}$  et on écrit  $a_i$  ( $i \geq 2$ ) sous la forme :

$$a_i(x, y) = y^{m_i} \cdot [d^{\alpha_i}(1 + \theta(x)) + y \cdot a'_i(x, y)]$$

où  $m_i \in \mathbf{N}$  et  $\alpha_i \in \mathbf{N}^*$ .

En posant  $y = x^m \cdot z$ , pour  $m \geq \sup \alpha_i$ , on obtient :

$$P = Y^N + \sum_{i=2}^N x^{\alpha_i + m \cdot m_i} \cdot z^{m_i} [1 + 0(x) + x^{m - \alpha_i} z a'_i(x, x^m z)] Y^{N-i}.$$

On effectue le changement de variables  $Y = y^\alpha \cdot Z$  où  $\alpha = \inf(\frac{m_i}{i})$ . On a alors :

$$P = (x^m \cdot z)^{\alpha N} \left[ Z^N + \sum_{i=2}^N x^{m(m_i - i\alpha) + \alpha_i} \cdot z^{m_i - i\alpha} (1 + 0(x) + x^{m - \alpha_i} \cdot z \cdot a'_i(x, x^m z)) Z^{N-i} \right]$$

On pose maintenant  $\beta = \inf \left\{ \frac{\alpha_i}{i} / m_i - i\alpha = 0 \right\}$  et on effectue le nouveau changement de variables  $Z = x^\beta \cdot T$  : ce qui donne :

$$\begin{aligned} P &= x^{(m\alpha + \beta)N} \cdot z^{\alpha N} \cdot \left[ T^N + \sum_{i=2}^N x^{i[m(\frac{m_i}{i} - \alpha) + \frac{\alpha_i}{i} - \beta]} \cdot z^{m_i - i\alpha} (1 + 0(x) + x^{m - \alpha_i} \cdot z \cdot a'_i(x, x^m z)) T^{N-i} \right] \\ &= x^{(m\alpha + \beta)N} \cdot z^{\alpha N} \cdot Q \text{ où } Q = T^N + \sum_{i=2}^N a''_i(x, z) \cdot T^{N-i} \end{aligned}$$

Comme tous les exposants qui interviennent dans  $a''_i$  sont positifs rationnels, on peut écrire :  $a''_i(x, z) = A_i \left( x^{1/M}, \left( \frac{y}{x^m} \right)^{1/M'} \right)$  où  $A_i$  est réelle-analytique,  $M$  et  $M'$  entiers.

D'autre part, par choix de  $\alpha$  et  $\beta$ , il y a au moins un  $a''_i$  vérifiant  $a''_i(0, 0) \neq 0$ .

Donc  $Q(T, 0, 0) = T^N + a''_2(0, 0) \cdot T^{N-2} + \dots + a''_{i_0}(0, 0) \cdot T^{N-i_0} + \dots + a''_N(0, 0)$  avec  $a''_{i_0}(0, 0) \neq 0$ .

Par hypothèse, ce polynôme a une racine réelle unique  $\gamma$ , et cette racine est au plus d'ordre  $N - 2$  (sinon, on aurait  $\gamma = 0$  racine d'ordre  $N$  : ce qui est absurde car  $a''_{i_0}(0, 0) \neq 0$ ).

En appliquant le théorème préparatoire de Weirstrass à  $Q$  au point  $(\gamma, 0, 0)$ , on obtient une factorisation du type :

$Q(T) = R((T) \cdot \varphi$  où  $\deg(R) \leq N - 2$  et  $\varphi(\gamma, 0, 0) \neq 0$ . Ici, les coefficients de  $R$  sont réels analytiques en  $\left( x^{1/M}, \left( \frac{y}{x^m} \right)^{1/M'} \right)$ . En appliquant l'hypothèse de récurrence à ce polynôme, on voit que son unique zéro réel  $\frac{\sigma(x, y) + \frac{\alpha_1(x, y)}{y^\alpha x^\beta}}{y^\alpha x^\beta}$  est de la forme :  $H \left( (x^{1/M})^{1/\tilde{M}}, \left( \frac{y}{x^m} \right)^{1/M'} \right)^{1/\tilde{M}'}$ .

$\sigma(x, y)$  peut donc encore s'écrire sous la forme du lemme. ■

• Il reste à démontrer le :

**Lemme 13.** *Si  $\sigma(x, y)$  est  $C^\infty$  au voisinage de  $(0, 0)$ , et s'écrit sous la forme :  $\sigma(x, y) = H(x^{1/M}, (\frac{y}{x^m})^{1/M'})$  pour  $|x| < r, |\frac{y}{x^m}| < r$ , alors  $\sigma$  est réelle analytique en  $(0, 0)$ .*

Comme auparavant,  $H$  est ici réelle analytique en 0, et  $m, M, M'$  entiers.

En posant  $\begin{cases} x^{1/M} = u \\ (\frac{y}{x^m})^{1/M'} = v \end{cases}$ , on a :  $H(u, v) = \sigma(u^M, u^{Mm} \cdot v^{M'})$  pour  $u, v$  voisins de 0.

C'est-à-dire, en notant respectivement  $(a_{\alpha\beta})$  et  $(b_{pq})$  les coefficients du développement de Taylor de  $H$  et  $\sigma$  en 0 :  $\sum a_{\alpha\beta} \cdot u^\alpha \cdot v^\beta = \sum_{M\rho + Mmq + M'_q \leq A} b_{pq} \cdot u^{M\rho + Mmq} \cdot v^{M'_q} + \sigma_A(u, v)$ .

En différentiant  $\alpha$  fois par rapport à  $u$ , et  $\beta$  fois par rapport à  $v$ , on trouve en  $(0, 0)$  :

$$a_{\alpha\beta} \cdot \alpha! = \sum_{\substack{M\rho + Mmq = \alpha \\ M'_q = \beta}} b_{pq} \cdot p!q!$$

D'où  $\frac{\beta}{M'} = q$  et  $\frac{\alpha}{M} - \beta \cdot \frac{m}{M'} = p \in \mathbb{N}$ .

Par conséquent,  $H(x^{1/M}, (\frac{y}{x^m})^{1/M'}) = \sum a_{\alpha\beta} \cdot x^{\frac{\alpha}{M} - \beta \frac{m}{M'}} \cdot y^{\frac{\beta}{M'}}$  se prolonge en une fonction  $\tilde{\sigma}$  réelle-analytique en  $(0, 0)$ .

Cette fonction  $\tilde{\sigma}$  est un zéro du polynôme  $P$  pour  $|x| < r$  et  $|\frac{y}{x^m}| < r$ ; comme  $P$  est à coefficients réels analytique,  $\tilde{\sigma}$  est un zéro du polynôme  $P$  dans un voisinage de l'origine; enfin  $P$  étant supposé n'avoir qu'un seul zéro dans un voisinage de l'origine, les germes à l'origine  $\sigma$  et  $\tilde{\sigma}$  coïncident. ■

## RÉFÉRENCES

- [B-T] BAOUENDI M.S. & TREVES F., *About holomorphic extension of CR Functions on real hypersurfaces in Complex space*, Duke Math. Journal Vol. 51, N° 1, 1984.
- [BM-I] BOUTET de MONVEL L. & IORDAN A., *Sur les feuilletages C tangents des sous-variétés du bord d'une variété complexe*, (Preprint 1992).
- [B-S] BURNS P., STOUT L., *Extending functions from submanifolds of the boundary*, Duke Math. J. 43, 391-404 (1976).
- [C] CHIRKA E.M., *A property of maximal modulus sets*, Preprint.
- [D-S] DUCHAMP Th. & STOUT E.L., *Maximum modulus sets*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 31, 3 (1981), 37-69.
- [I1] IORDAN A., *Ensemble de module maximal dans des domaines pseudoconvexes*, C.R. Acad. Sc. Paris 300, sér.1, 19 (1985), 655-656.
- [I2] IORDAN A., *A characterization of totally real generic submanifolds of strictly pseudoconvex boundaries in  $C^n$  admitting a local foliation by interpolation manifolds*, Math. Ann. 288 (1990), n° 3, 505-510.
- [M] MALGRANGE B., *Ideals of differentiable functions*, Oxford University Press (1966).
- [N-R] NAGEL A. & ROSAY J.P., *Maximum modulus sets and reflexions sets*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 41, (1991) n° 2, 431-466.







## RÉSUMÉ

Ce travail a pour objet : l'étude des sous-variétés  $E$  d'un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{C}^2$ , "rigide" et faiblement pseudo-convexe qui sont des ensembles de module maximum.

Lorsque  $E$  est transverse au vecteur de translation  $u$ , laissant  $\Omega$  invariant, la construction d'un nouvel invariant permet de caractériser le fait que  $E$  soit un ensemble de module maximum ou non ; lorsque  $E$  est tangent à  $u$ ,  $E$  n'est pas génériquement un ensemble de module maximum.

Lorsque la frontière de  $\Omega$  est réelle analytique, il est établi que la fonction qui prend son module maximum sur  $E$  se prolonge holomorphiquement au voisinage de  $E$ , ce qui force l'analyticité de  $E$ .