N° d'ordre : 1367

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

par

Abdelaziz CHAOUECH

Auto-applications holomorphes propres de domaines de $\mathbf{C}^n$

Soutenue le 26 septembre 1994 devant la Commission d'Examen :

Président : G. CŒURÉ, Université de Lille I
Rapporteurs : B. COUPET, Université de Provence
J.J. LŒB, Université d'Angers
Examinateurs : F. BERTELOOT, Université de Lille I
A.M. CHOLLET, Université de Lille I
V. THILLIEZ, Université de Lille I

N° d'ordre : 1367

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

par

Abdelaziz CHAOUECH

Auto-applications holomorphes propres de domaines de C^n

Soutenue le 26 septembre 1994 devant la Commission d'Examen :

Président : G. CŒURÉ, Université de Lille I
Rapporteurs : B. COUPET, Université de Provence
J.J. LŒB, Université d'Angers
Examinateurs : F. BERTELOOT, Université de Lille I
A.M. CHOLLET, Université de Lille I
V. THILLIEZ, Université de Lille I

A la mémoire de mon père et de ma sœur Amina,

A ma mère,

A mes sœurs et mes frères,

François Berteloot a dirigé ma thèse. Je le remercie chaleureusement de sa très grande disponibilité et de son aide permanente dans l'apprentissage des techniques et méthodes de l'Analyse Complexe. Je me permets de lui exprimer toute ma reconnaissance.

Je remercie vivement Gérard Cœuré qui me fait l'honneur de présider le jury.

Bernard Coupet et Jean-Jacques Lœb ont bien voulu rapporter sur mon travail, je les en remercie.

Anne-Marie Chollet et Vincent Thilliez ont suivi mon travail avec intérêt, je les remercie de participer à ce jury.

Je remercie les étudiants, enseignants et chercheurs de l'U.F.R. de Mathématiques et, plus particulièrement, Christine Sacré pour la sympathie qu'elle m'a témoignée.

Raymonde Bérat s'est chargée, avec compétence et gentillesse, de la dactylographie de ce mémoire. Je la remercie chaleureusement.

Je remercie également le personnel de reprographie de l'U.F.R. de Mathématiques.

A.

INTRODUCTION

Une application $g : D \to G$ où ($D \subset \mathbf{R}^n$ et $G \subset \mathbf{R}^N$) est propre si l'image réciproque $g^{-1}(K)$ de tout compact K de G est un compact de D. Ainsi, une telle application, si elle se prolonge par continuité à $\overline{D}$, transforme le bord de D en le bord de G. Rappelons quelques résultats de base sur les applications holomorphes propres. Soient Ω_1 et Ω_2 deux domaines de $\mathbf{C}^n$ ($n \geq 1$) et soit $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ une application holomorphe propre. Cette application est fermée car propre et continue, ouverte car propre et holomorphe. Elle est donc surjective. Les images réciproques des points de Ω_2 sont finies, car ce sont des ensembles analytiques compacts dans Ω_1. Le lieu de branchement de f, c'est-à-dire l'ensemble $V_f =: \{z \in \Omega_1 : \det f'(z) = 0\}$, est un ensemble analytique de Ω_1 et l'on montre qu'il existe une fonction holomorphe dans Ω_2 dont l'ensemble des zéros est exactement $f(V_f)$. Plus généralement, un théorème de Remmert stipule que l'image par f de tout ensemble analytique de Ω_1 est un ensemble analytique de Ω_2. Pour tout point w appartenant à $\Omega_2 \setminus f(V_f)$ le nombre des images réciproques de w est fini et indépendant de w. Il s'ensuit que l'application $f : \Omega_1 \setminus f^{-1}[f(V_f)] \to \Omega_2 \setminus f(V_f)$ est un revêtement fini, et le théorème de monodromie montre que f est bijective dès lors que l'on a $V_f = \emptyset$ et Ω_2 simplement connexe. On trouve des preuves élémentaires de ces propriétés dans le livre de W. Rudin [17], chap. XV.

Parmi les applications holomorphes propres, celles dont le domaine d'arrivée coïncide avec le domaine source occupent une place particulière, nous les appelerons auto-applications holomorphes propres. Ainsi, il est bien connu qu'une auto-application holomorphe propre du disque unité de $\mathbf{C}$ est un produit de Blaschke fini :

$$f : \Delta \to \Delta \text{ holomorphe propre } \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbf{R},\ \exists \alpha_j \in \Delta$$

$$f(z) = e^{i\theta} \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{\alpha_j - z}{1 - \overline{\alpha}_j z} \right).$$

De même pour le bi-disque de $\mathbf{C}^2$.

$$f : \Delta \times \Delta \to \Delta \times \Delta \text{ holomorphe propre } \Leftrightarrow f = (B_1, B_2)$$

où B_j ($j = 1, 2$) est un produit de Blaschke fini.

En 1974, H. Alexander [1] a mis en évidence un phénomène nouveau et typique de la situation multidimensionnelle.

Théorème (H. Alexander) **:** *Toute application holomorphe propre de la boule unité de* $\mathbf{C}^n$ $(n > 1)$ *dans elle-même est un automorphisme.*

La démonstration originale d'Alexander était ardue car il ne disposait pas de théorème de prolongement C^∞ au bord pour les applications holomorphes **propres**. Mais, comme nous le verrons plus loin, les travaux de S. Bell [5] sur les problèmes de prolongement ont considérablement simplifié l'abord de ces questions et la preuve du théorème d'Alexander est maintenant standard. Ainsi les exemples de la boule de $\mathbf{C}^2$ et du bi-disque laissent penser que la "régularité" du bord est une obstruction au branchement des auto-applications holomorphes propres en dimension $n > 1$. La conjecture suivante a été émise :

Conjecture : *Soit* Ω *un domaine borné à bord lisse de* $\mathbf{C}^n$ $(n > 1)$*. Alors toute auto-application holomorphe propre de* Ω *est un automorphisme de* Ω*.*

Cette conjecture n'est actuellement vérifiée que pour certaines classes de domaines pseudo-convexes bornés. De façon vague, les démonstrations reposent sur un principe commun : lorsque l'application f se prolonge différentiablement au bord on peut étudier l'interaction de l'annulation du Jacobien de f et de la forme de Levi en un point du bord. Ainsi, lorsque la structure de l'ensemble des points de faible pseudoconvexité n'est pas trop compliquée, il est possible d'en déduire certaines informations sur la structure du lieu de branchement V_f de f . Grosso-modo, la "taille" du lieu de branchement est limitée par celle de l'ensemble des points de faible pseudoconvexité. Puisque le lieu de branchement croît lorsque l'on remplace f par une itérée, le contrôle a priori de "taille" de V_f peut, dans certains cas, conduire à la conclusion que $V_f = \emptyset$. Alors, si le domaine est simplement connexe, l'application f est un automorphisme. Notons que lorsque le domaine n'est pas simplement connexe, la conclusion demeure valable dès que la frontière est régulière, comme le montre un résultat de S. Pinchuk [16].

Passons maintenant en revue les principaux résultats obtenus dans cette direction. Les domaines que nous considérerons sont connus pour satisfaire la "condition R" c'est-à-dire que le projecteur de Bergman préserve la régularité au bord. Les travaux de Bell et Catlin [7] nous apprennent que les applications holomorphes propres entre de tels domaines se prolongent différentiablement à la frontière. Tout d'abord, K. Diederich et J.E. Fornaess [12] ont montré qu'une application holomorphe propre entre domaines à bords lisses ne peut brancher en un point de stricte pseudoconvexité ; ils en déduisent le résultat général suivant :

Théorème (K. Diederich-J.E. Fornaess): *Soient Ω_1 et Ω_2 deux domaines bornés de $\mathbf{C}^n$ à frontière de classe C^∞. Si Ω_1 est strictement pseudoconvexe, alors toute application holomorphe propre $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ se prolonge de façon C^∞ et sans brancher à $\overline{\Omega}_1$ et Ω_2 est strictement pseudonconvexe, si de plus Ω_2 est simplement connexe f est un biholomorphisme.*

Le résultat d'Alexander apparaît donc comme un cas particulier de ce théorème. Notons que S. Bell a montré dans [6] que toute application holomorphe propre d'un domaine de Reinhardt borné et complet sur un autre se prolonge holomorphiquement au travers de la frontière du domaine source. Il est facile d'en déduire le théorème d'Alexander. Pour les domaines strictement pseudoconvexes à bord C^2 les théorèmes de prolongement tombent en défaut. Néanmoins, en utilisant un procédé de dilatation [16], S. Pinchuk ramène cette situation à celle de la boule. En utilisant le résultat d'Alexander il en déduit le théorème suivant :

Théorème (S. Pinchuk) : *Soit $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ $(n > 1)$ un domaine strictement pseudoconvexe, borné à bord C^2, alors toute application holomorphe propre de Ω dans lui-même est un automorphisme.*

Les méthodes évoquées ci-dessus ne se généralisent pas aux points de faible pseudoconvexité. Néanmoins, pour certains domaines faiblement pseudoconvexes et de type fini, la conjecture énoncée plus haut a reçu une réponse positive.

Pour les domaines de type fini, il est posible de définir une application $\tau : b\Omega \to \mathbf{N}$ qui satisfait les propriétés suivantes :

1) τ est semi-continue supérieurement (s.c.s.) ;

2) τ est invariante par biholomorphisme local ;

3) pour toute auto-application holomorphe propre f de Ω se prolongeant différentiablement au bord, et pour tout $p \in b\Omega$, on a : $\tau(\rho) \geq \tau(f(\rho))$ et, en outre, $\tau(\rho) = \tau(f(\rho))$ si et seulement si $p \notin \overline{V_f}$ (voir [15], page 291).

La fonction τ mesure en fait l'ordre d'annulation du déterminant de Levi de la frontière de Ω. Elle permet donc de "stratifier" l'ensemble des points de faible pseudoconvexité. Lorsque cette stratification a de bonnes propriétés, la propriété 3) permet à nouveau de contrôler la taille de V_f. Par exemple, les domaines pseudoconvexes à frontière analytique réelle sont de type fini ([13]) et, de plus, l'analyticité réelle "rigidifie" la stratification par le type car certaines composantes sont des ensembles analytiques réels. C'est en se basant sur cette observation que Bell et Bedford ont établi le résultat suivant [2].

Théorème (E. Bedford-S. Bell) **:** *Soit $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ $(n > 1)$ un domaine borné faiblement pseudoconvexe, à frontière réelle analytique. Alors toute application holomorphe propre de Ω dans lui-même est un automorphisme.*

Notons que la question reste ouverte pour les domaines de type fini à bord lisse, même dans $\mathbf{C}^2$.

Pour certains domaines le problème peut être résolue sans hypothèse de régularité. Ainsi F. Berteloot et S. Pinchuk ont récemment établi le résultat suivant [11].

Théorème (F. Berteloot-S. Pinchuk) **:** *Parmi les domaines de Reinhardt complet de $\mathbf{C}^2$ le bi-disque est le seul à admettre des auto-applications holomorphes propres qui ne soient pas des automorphismes.*

Ils établissent également une classification des applications holomorphes propres entre les domaines de Reinhardt complets de $\mathbf{C}^2$. Pour les domaines de Reinhardt pseudoconvexes et de type fini dans $\mathbf{C}^n$ $(n > 1)$, Y. Pan a exploité l'invariance du domaine par l'action de $(S^1)^n$ et les propriétés de τ pour montrer que le lieu de branchement est nécessairement contenu dans les hyperplans de coordonnées. Il en déduit le résultat suivant [15].

Théorème (Y. Pan) **:** *Soit $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ $(n > 1)$ un domaine de Reinhardt borné pseudoconvexe à bord lisse. Si l'ordre d'annulation du déterminant de Levi de Ω est fini en tout point de $b\Omega$ (ce qui est le cas si $b\Omega$ est de type fini), alors toute application holomorphe propre $f : \Omega \to \Omega$ est un automorphisme.*

Dans ce mémoire, nous présenterons deux travaux portant sur ces questions. Nous donnons d'abord une preuve simplifiée du théorème de Y. Pan. Dans le second, nous traitons le cas d'une classe de domaines non bornés. Nous établissons le résultat suivant :

Théorème 1. *Soit $P(z,\bar{z})$ un polynôme sous-harmonique et sans terme harmonique. Soit Ω un domaine de $\mathbf{C}^2$ définie par $\Omega =: \{(w,z) \in \mathbf{C}^2 : \mathrm{Re}\, w + P(z,\bar{z}) < 0\}$. Alors toute application holomorphe propre de Ω dans lui-même est un automorphisme.*

Le principe de base de la démonstration est analogue à celui utilisé par Y. Pan. Nous exploitons simultanément la finitude du type de la frontière et l'existence d'un groupe à un parammètre d'automorphismes du domaine afin de préciser la structure du lieu de branchement de l'application. Cependant, comme les domaines que nous considérons sont non bornés et présentent moins de symétries que les domaines de Reinhardt, de nouvelles difficultés surgissent. En particulier, il est impossible d'établir directement que le lieu de branchement possède au plus un nombre fini de composantes connexes. Ces obstacles sont surmontés grâce à une étude locale précise de l'application au voisinage de certains points du bord. Quelques résultats de nature plus générale se détachent de cette étude. Par exemple, la proposition 2.1 décrit la structure de certains biholomorphismes locaux préservant des hypersurfaces rigides analytiques réelles et le théorème 2, énoncé ci-dessus, fournit quelques éléments pour une éventuelle classification des applications holomorphes propres entre domaines rigides polynomiaux de $\mathbf{C}^2$.

Théorème 2. *Soient Ω_1 et Ω_2 deux domaines de la forme $\Omega_j = \{(w,z) \in \mathbf{C}^2 : \mathrm{Re}\, w + P_j(z,\overline{z}) < 0\}$ où P_1 et P_2 appartiennent à $\mathcal{P}$. Soit $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ une application holomorphe propre telle que :*

1) $f = (f_1, f_2)$ se prolonge en un biholomorphisme local d'un voisinage U_1 de l'origine de $\mathbf{C}^2$ sur un autre, noté U_2.

2) $f_2(w,0) \equiv 0$ et $f_1(0,0) = 0$.

Alors on se trouve dans l'un des trois cas suivants :

i) $f_1(w,z) = \Gamma w; (\Gamma > 0)$ et $f_2(w,z) = f_2(z)$.

ii) $f_1(w,z) = \Gamma w; (\Gamma > 0)$ et $P_2(z,\overline{z}) = P_2(|z|,|z|)$.

iii) $f_1(w,z) = \frac{\Gamma w}{1+i\lambda w}$; $(\Gamma > 0, \lambda \in \mathbf{R}^*)$ et $P_2(z,\overline{z}) = M|z|^{2m}$ avec $M > 0$, $m \in \mathbf{N}^*$.

B.
LE CAS DES DOMAINES DE REINHARDT PSEUDOCONVEXES ET DE TYPE FINI :
Une preuve élémentaire d'un résultat de Y. Pan

L'objet de cette partie est de simplifier la démonstration du théorème de Y. Pan évoqué dans l'introduction en évitant d'étudier le comportement "générique" du lieu de branchement de l'application holomorphe propre f près de $b\Omega$. Commençons par préciser quelques notations et rappeler quelques faits bien connus.

Soit $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ $(n > 1)$ un domaine de Reinhardt borné, pseudoconvexe à bord lisse. Définissons $(b\Omega)^*$ par :

$$(b\Omega)^* = \{\eta \in b\Omega \mid \eta_1 \dots \eta_n \neq 0\}, \text{ et posons pour tout } \eta \in (b\Omega)^* :$$
$$T_\eta = \{(e^{i\theta_1}\eta_1, e^{i\theta_2}\eta_2, \dots, e^{i\theta_n}\eta_n); \theta_j \in \mathbf{R}\}.$$

Soit $f : \Omega \to \Omega$ une application holomorphe propre, on désigne par f^k la k$^{\text{ième}}$ itérée de f et, on notera encore f le prolongement C^∞ de f à $b\Omega$ (cf. [5]).

Pour toute fonction r, de classe C^∞ et définissante pour Ω, on pose :

$$\Lambda_r = -\det \begin{bmatrix} 0 & r_{\overline{z}_j} \\ r_{z_i} & r_{z_i\overline{z}_j} \end{bmatrix}$$

Pour tout $p \in b\Omega$, on désigne par $\tau(p)$ le plus petit entier naturel m pour lequel existe un opérateur T, tangentiel au bord d'ordre m, tel que $T\Lambda_r(p) \neq 0$. Ainsi τ satisfait les propriétés suivantes :

1) τ est indépendant de la fonction définissante choisie.

2) τ est semi-continue supérieurement (s.c.s.).

3) τ est invariant par biholomorphisme.

4) $\forall p \in b\Omega$ on a : $\tau(p) \geq \tau(f(p))$ et, en outre, $\tau(p) = \tau(f(p))$ si et seulement si $p \notin \overline{V_f}$ (voir [15], page 291).

Le théorème de Y. Pan résultera des deux lemmes suivants :

Lemme 1.- *Soit $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ $(n > 1)$ un domaine borné pseudoconvexe à bord lisse tel que τ soit fini sur $b\Omega$. Soit $f : \Omega \to \Omega$ une application holomorphe propre se prolongeant différentiablement à $b\Omega$. Si $V_{f^k} = V_{f^{k+1}}$ pour un certain entier k alors $V_f = \emptyset$.*

Lemme 2.- *Soit $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ $(n > 1)$ un domaine de Reinhardt borné, pseudoconvexe à bord lisse et tel que τ soit fini sur $b\Omega$. Alors, on a : $V_f \subset \{z_1 \dots z_n = 0\}$ pour toute application holomorphe propre $f : \Omega \to \Omega$.*

Preuve du théorème : La suite (V_{f^k}) est croissante. Puisque d'après le lemme 2, on a $V_{f^k} \subset \{z_1 \dots z_n = 0\}$ pour tout k, cette suite est stationnaire. Le lemme 1 montre qu'alors V_f est vide et, d'après un résultat de Pinchuk [16], cela entraîne l'injectivité de f. ∎

Preuve du lemme 1 : On peut sans perte de généralité supposer que $k = 1$, on a alors $V_f = V_{f^2} = V_f \cup f^{-1}(V_f)$ et donc $f^{-1}(V_f) \subset V_f$. Supposons V_f non vide et posons $K_s = \overline{f^{-s}(V_f)} \cap b\Omega$ où $f^{-s}(V_f) = (f^s)^{-1}(V_f)$. La famille $(K_s)_{s\geq 0}$ est une suite décroissante de compacts contenus dans $b\Omega$. Ces compacts sont non vides car sinon l'on aurait $f^{-s}(V_f) \Subset \Omega$ puis, f^s étant surjective, $V_f \subset f^s(f^{-s}(V_f)) \Subset \Omega$, ce qui n'est pas. Ainsi $\bigcap_{s\geq 0} K_s \neq \emptyset$. Considérons $\tilde{K}_s =: f^{-s}(\overline{V_f}) \cap b\Omega$; puisque l'on a $K_s \subset \tilde{K}_s$, on peut trouver $a \in \bigcap_{s\geq 0} \tilde{K}_s$. En d'autres termes : $\exists a \in b\Omega$ tel que $\forall s \geq 0$, $f^s(a) \in \overline{V_f} \cap b\Omega$. La suite d'entiers $\tau[f^s(a)]$ est alors strictement décroissante ce qui est absurde. ∎

Preuve du lemme 2 : D'après [5], f et donc $\det f'$, se prolongent différentiablement à $\overline{\Omega}$. Le principe du maximum appliqué à la restriction de la fonction $(z_1 \dots z_n)$ à V_f montre qu'il suffit d'établir que $\overline{V_f} \cap b\Omega \subset \{z_1 z_2 \dots z_n = 0\}$. Si $\eta \in (b\Omega)^* \cap \overline{V_f}$, alors $\tau(\eta) > \tau(f(\eta))$. Par ailleurs, $\det f'$ n'étant pas identiquement nul dans Ω, le théorème d'unicité de Pinchuk garantit l'existence d'une suite $(\eta_k)_{k\geq 1}$ sur T_η telle que $\det f'(\eta_k) \neq 0$ et $\lim \eta_k = \eta$. Ainsi, $\tau(\eta) = \tau(\eta_k) = \tau(f(\eta_k))$ pour tout $k \geq 1$ et, τ étant s.c.s., $\tau(f(\eta)) \geq \tau(\eta)$. Ceci est absurde donc $\overline{V_f} \cap (b\Omega)^* = \emptyset$. ∎

Remarque : L'argument élémentaire suivant permet d'éviter de recourir au théorème d'unicité. On se ramène au cas d'une fonction identiquement nulle sur T_η en remplaçant la fonction ϕ de départ par un produit fini de certaines de ses "translatées" : $\tilde{\phi}(z) = \prod_{k=1}^{N} f(e^{i\theta_{1k}} z_1, \dots, e^{i\theta_{nk}} z_n)$. Le bord du domaine Ω étant régulier, il existe un voisinage V de η et un réel $u_0 > 0$ tels que l'on ait, après une permutation des variables, $(V \cap T_\eta) + (u, 0, \dots, 0) \subset \Omega$ pour tout $u \in]0, u_0]$ (ou $[-u_0, 0[$). Pour tout $\tilde{\eta} \in V \cap T_\eta$, la fonction $z \mapsto \tilde{\phi}(z, \tilde{\eta}_2, \dots, \tilde{\eta}_n)$ est identiquement nulle sur la couronne $\{|\tilde{\eta}_1| \leq |z| \leq |\tilde{\eta}_1| + u_0\}$ (ou $\{|\tilde{\eta}_1| - u_0 < |z| < |\tilde{\eta}_1|\}$) puisque nulle sur le cercle $\{|z| = |\tilde{\eta}_1|\}$. Il s'ensuit que $\tilde{\phi}$ est nulle sur la variété totalement réelle maximale $\{(V \cap T_\eta) + (u_0, 0, \dots, 0)\}$ et cela suffit pour conclure.

C.
LE CAS DES DOMAINES POLYNOMIAUX RIGIDES DE C^2

Nous donnons ici les preuves des théorèmes 1 et 2 énoncés en introduction. Nous adoptons la notation suivante : $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des polynômes sous-harmoniques et sans termes harmoniques sur $\mathbf{C}$.

1. La structure du lieu de branchement.

L'objet de cette partie est d'établir la proposition suivante qui décrit le lieu de branchement des applications holomorphes propres du type de celles considérées dans cet article.

Proposition 1.1. *Soient Ω_1 et Ω_2 deux domaines de $\mathbf{C}^2$ de la forme :*

$\Omega_j = \{(w,z) \in \mathbf{C}^2 : \operatorname{Re} w + P_j(z,\bar{z}) < 0\}$ *où P_1 et P_2 appartiennent à $\mathcal{P}$.*

Soit $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ une application holomorphe propre alors il existe une suite $(z_n)_n$ de nombres complexes telle que :

$$V_f = \cup_{n \in N}\{(w, z_n) : \operatorname{Re} w < -P_1(z_n, \bar{z}_n)\}.$$

La démonstration de cette proposition repose essentiellement sur les deux lemmes énoncés ci-dessous. Le premier précise la structure locale de $\overline{V}_f \cap b\Omega_1$. Le second exhibe des fonctions p.s.h. négatives de Ω_1 et Ω_2 qui serviront à déduire la structure de V_f de celle de $\overline{V}_f \cap b\Omega_1$.

Lemme 1.2. *Soit $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ une application holomorphe propre satisfaisant les hypothèses de la proposition 1.1 et soit (w_0, z_0) un point de $b\Omega_1$.*

Si l'on a $(w_0, z_0) \in \overline{V}_f \cap b\Omega_1$ et $\lim\limits_{(w,z) \to (w_0,z_0)} [|f_1(w,z)| + |f_2(w,z)|] < +\infty$

alors l'ensemble $\{(w, z_0)$ tel que $\operatorname{Re} w < -P_1(z_0, \bar{z}_0)\}$ est contenu dans V_f.

Lemme 1.3. *Soit $\Omega =: \{(w,z) \in \mathbf{C}^2 : \operatorname{Re} w + P(z,\bar{z}) < 0\}$ où $P \in \mathcal{P}$. Alors il existe une fonction p.s.h. $\sigma : \Omega \to]-\infty, 0[$, telle que* $\lim\limits_{(|w|+|z|) \to +\infty} \sigma(w,z) = -\infty$. *De plus, pour toute suite de nombres complexes $(z_n)_{n \leq 1}$, tout $a \notin \{z_n ; n \geq 1\}$ et tout $(w_a, a) \in \Omega$, la fonction σ peut être assujettie à satisfaire les conditions suivantes :*

1) $\sigma(w_a, a) \neq -\infty$.

2) $\forall n \geq 1$, $\forall (w_n, z_n) \in b\Omega$, $\lim\limits_{(w,z)\to(w_n,z_n)} \sigma(w,z) = -\infty$.

(Dans ce cas la fonction σ prend ses valeurs dans $[-\infty, 0[$).

Commençons par donner la **preuve de la proposition 1.1.** Supposons V_f non vide. Soit

$$A = \{(w_0, z_0) \in \overline{V}_f \cap b\Omega_1 : \varliminf_{(w,z)\to(w_0,z_0)} [|f_1(w,z)| + |f_2(w,z)|] < +\infty\}$$

et A_2 la projection de A sur le plan de la variable z. Le lemme 1.2 montre que A_2 est localement fini. En effet, si cela n'était pas, l'ensemble analytique V_f contiendrait une famille de demi-plans de la forme $\{(w, z_p) : \mathrm{Re}\, w < -P_1(z_p, \bar{z}_p\}$, (z_p) étant convergente modulo extraction. Ces demi-plans s'accumuleraient nécessairement sur un demi-plan de la même forme. On en déduirait facilement que $V_f = \Omega_1$ ce qui est impossible. Ainsi A_2 est dénombrable et nous noterons $(z_n)_{n\geq 1}$ la suite ordonnée de ses éléments.

Soit $\mathcal{C}$ une composante connexe de V_f. Nous achèverons la démonstration en montrant que $\mathcal{C}$ coïncide avec un demi-plan de la forme
$\{(w, z_n) : \mathrm{Re}\, w < -P_1(z_n, \bar{z}_n)\}$ où $z_n \in A_2$. Pour cela, procédons par l'absurde et supposons qu'il existe $(w_a, a) \in \mathcal{C}$ tel que $a \notin \{z_n, n \geq 1\}$.

Soit σ_1 une fonction p.s.h. et négative sur Ω_1 associée par le lemme 1.3 à la suite $(z_n)_{n\geq 1}$ et au point (w_a, a). D'après le même lemme, il existe également une fonction σ_2, p.s.h. négative sur Ω_2 et telle que $\lim\limits_{(|w|+|z|)\to+\infty} \sigma_2(w,z) = -\infty$. Considérons alors la fonction $\tilde{\sigma}$ définie par $\tilde{\sigma} =: \exp(\sigma_1 + \sigma_2 \circ f)$. Cette fonction est p.s.h. sur Ω_1 et prend ses valeurs dans [0,1]. De plus, elle satisfait les propriétés suivantes :

1) $0 \leq \lim\limits_{\substack{(|w|+|z|)\to+\infty \\ (w,z)\in\mathcal{C}}} \tilde{\sigma}(w,z) \leq \lim\limits_{(|w|+|z|)\to+\infty} e^{\sigma_1(w,z)} = 0.$

2) Si $(w_n, z_n) \in \overline{\mathcal{C}} \cap b\Omega_1$ et $z_n \in A_2$ alors on a

$$0 \leq \lim_{\substack{(w,z)\to(w_n,z_n) \\ (w,z)\in\mathcal{C}}} \tilde{\sigma}(w,z) \leq \lim_{(w,z)\to(w_n,z_n)} e^{\sigma_1(w,z)} = 0.$$

3) Si $(w_0, z_0) \in \overline{\mathcal{C}} \cap b\Omega_1$ et $z_0 \notin A_2$ alors par définition de A, on a : $\lim\limits_{(w,z)\to(w_0,z_0)} [|f_1(w,z)| + f_2(w,z)] = +\infty$ et donc

$$0 \leq \lim_{\substack{(w,z)\to(w_0,z_0) \\ (w,z)\in\mathcal{C}}} \tilde{\sigma}(w,z) \leq \lim_{(w,z)\to(w_0,z_0)} e^{\sigma_2\circ f(w,z)} = 0.$$

Il résulte des conditions 1), 2) et 3) et du principe du maximum que la restriction de $\tilde{\sigma}$ à C est identiquement nulle. Ceci est absurde puisque, par construction, $\tilde{\sigma}(w_a, a) > 0$. La preuve de la proposition est donc achevée. ■

Preuve du lemme 1.3.

Notons $2m$ le degré du polynôme P et posons

$$Q_{z_n}(z, \bar{z}) =: P(z + z_n, \bar{z} + \bar{z}_n) - 2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{2m} \frac{1}{j!}\frac{\partial^j P}{\partial z^j}(z_n, \bar{z}_n) z^j - P(z_n, \bar{z}_n).$$

L'automorphisme de $\mathbf{C}^2$ défini par $\Phi_{z_n}(w, z) = (w', z')$ où $w' = w - 2\sum_{j=1}^{2m} \frac{\partial^j P}{\partial z^j}(z_n, \overline{z}_n) z^j - P(z_n, z_n)$ et $z' = z + z_n$ réalise un biholomorphisme du domaine $\Omega_{z_n} =: \{(w, z) : \mathrm{Re}\, w + Q_{z_n}(z, \bar{z}) < 0\}$ sur Ω.

Le polynôme Q_{z_n} étant sous-harmonique et sans terme harmonique, sa partie homogène de plus haut degré l'est également, nous la noterons H_{z_n}.

Pour $\varepsilon > 0$ fixé, on vérifie sans peine qu'il existe $a > 0$ tel que $H_{z_n}(z, \bar{z}) - Q_{z_n}(z, \bar{z}) < a + \varepsilon |z|^{2m}$ pour tout $z \in \mathbf{C}$. Ainsi $\overline{\Omega}_{z_n}$ est contenu dans un domaine D_{z_n} défini par :
$D_{z_n} =: \{(w, z) : \mathrm{Re}(w - a) + H_{z_n}(z; \bar{z}) - \varepsilon |z|^{2m} < 0\}$. D'après E. Bedford et J.E. Fornaess ([3], Main theorem), il existe une fonction g_{z_n} holomorphe sur D_{z_n} et continue sur $\overline{D}_{z_n}$ satisfaisant les propriétés suivantes : pour $(w, z) \in \overline{D}_{z_n}$ et $N_n \in \mathbf{N}$ assez grand on a

i) $B_n(|w - a| + |z|^{2m}) \leq |g_{z_n}(w, z)|^{N_n} \leq A_n(|w - a| + |z|^{2m})$ où A_n et B_n sont des constantes strictement positives.

ii) $\arg g_{z_n}(w, z) \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

Soit g la fonction ainsi obtenue lorsque $z_n = 0$.

En posant $\sigma = \log\left|\frac{1}{K}\left[1 - \left(\frac{\alpha g - 1}{\alpha g + 1}\right)\right]\right|$ où $\alpha > 0$ est assez petit et $K > 0$ est assez grand, on obtient une fonction p.s.h. dans Ω prenant ses valeurs dans $]-\infty, 0[$ et telle que $\lim\limits_{(|w|+|z|) \to +\infty} \sigma(w, z) = -\infty$.

Nous terminons en modifiant la fonction σ de façon à obtenir une fonction p.s.h. négative sur Ω prenant la valeur $-\infty$ sur les droites complexes $\{z = z_n\}$.

Posons, à cet effet, $\tilde{h}_{z_n}(w, z) = \frac{B_n z^{2m}}{g_{z_n}^{N_n}(w, z)}$, on définit ainsi une fonction holomorphe de module strictement inférieur à 1 sur D_{z_n}. La fonction $h_{z_n} =: \tilde{h}_{z_n} \circ \Phi_{z_n}^{-1}$ est alors holomorphe au voisinage de $\overline{\Omega}$ et satisfait les propriétés suivantes :

i) $\forall (w,z) \in \overline{\Omega}, |h_{z_n}(w,z)| < 1$.

ii) $\forall (w,z) \in \overline{\Omega}$, on a $h_{z_n}(w,z) = 0$ si et seulement si $z = z_n$.

Choisissons une suite $\lambda_n > 0$ telle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \log |h_{z_n}(w_a, a)| > -\infty$; alors $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \log |h_{z_n}(w,z)|$ définit une fonction p.s.h. négative sur Ω et la fonction

$$\sigma = \log \left| \frac{1}{K} \left[1 - \left(\frac{\alpha g - 1}{\alpha g + 1} \right) \right] \right| + \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \log |h_{z_n}|$$

remplit les conditions requises. ∎

Preuve du lemme 1.2.

Soit $\left((w_n, z_n)\right)_{n \geq 1}$ une suite de points de Ω_1 qui converge vers un point (w_0, z_0) de $b\Omega_1$. Si $\underline{\lim} [|f_1(w_n, z_n)| + |f_2(w_n, z_n)|] < +\infty$ alors, l'application f étant propre, la suite $(f(w_n, z_n))_{n \geq 1}$ converge vers un point (w_0', z_0') de $b\Omega_2$ après une éventuelle extraction. Le bord de Ω_2 étant de type fini, un résultat de F. Berteloot [9] montre que l'application f se prolonge continûment à $\overline{\Omega}_1$ sur un voisinage de (w_0, z_0). (On notera qu'aucune hypothèse globale sur Ω_2 n'est nécessaire, comme cela est précisé dans [9]). Nous aurons également besoin de la différentiabilité du prolongement de f, celle-ci découle des résultats de [8].

Pour tout $p \in b\Omega_j$, ($j = 1$ ou 2), on note $\tau(p)$ l'ordre d'annulation du déterminant de Levi de $b\Omega_j$ en p. Plus précisément, pour toute fonction ρ, définissante locale de $b\Omega_j$ en p, on pose $\Lambda_\rho = -\det \begin{bmatrix} 0 & \rho_{\bar{z}_k} \\ \rho_{z_i} & \rho_{z_i \bar{z}_k} \end{bmatrix}$ et $\tau(p)$ est le plus petit entier m pour lequel existe un opérateur T, tangentiel au bord d'ordre m, tel que $T\Lambda_\rho(p) \neq 0$.

Ainsi, τ satisfait les propriétés suivantes :

1) τ est indépendant de la fonction définissante choisie.

2) τ est semi-continue supérieurement (s.c.s.).

3) τ est invariant par biholomorphisme.

4) $\forall p \in b\Omega$ on a $\tau(p) \geq \tau(f(p))$ et, en outre, $\tau(p) = \tau(f(p))$ si et seulement si $p \notin \overline{V}_f$.

Nous sommes maintenant en mesure de terminer la preuve du lemme. Il suffit d'établir que $J_f(w_0 + it, z_0)$ est identiquement nul au voisinage de $t = 0$. Si cela n'était pas, on trouverait une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_n t_n = 0$ et $J_f(w_0 + it_n, z_0) \neq 0$.

Pour tout $n \geq 1$, on aurait alors $\tau[f(w_0 + it_n, z_0)] = \tau[(w_0 + it_n, z_0)] = \tau(w_0, z_0)$ et τ étant s.c.s, $\tau(w_0, z_0) \leq \tau(f(w_0, z_0))$. Comme, par ailleurs, on a $\tau(f(w_0, z_0)) \leq \tau(w_0, z_0)$, il en résulterait que $\tau(f(w_0, z_0)) = \tau(w_0, z_0)$ et donc que $J_f(w_0, z_0) \neq 0$, ce qui est contraire aux hypothèses.

2. Étude de certains biholomorphismes locaux.

Nous étudions ici les biholomorphismes locaux échangeant deux germes d'hypersurfaces analytiques réelles, rigides et de type finis. Nous supposons en outre que ces biholomorphismes préservent une droite complexe transverse aux hypersurfaces. La proposition suivante résume les résultats de cette partie.

Proposition 2.1. *Soit $f = (f_1, f_2)$ un biholomorphisme local d'un voisinage V de l'origine dans $\mathbf{C}^2$ sur un autre et tel que $f_1(0,0) = 0, f_2(w,0) \equiv 0$.*

Soient deux hypersurfaces H_1 et H_2 définies par :

$$H_1 = \{\rho_1(w,z) =: \operatorname{Re} w + \varphi(z,\bar{z}) = 0\}.$$
$$H_2 = \{\rho_2(w,z) =: \operatorname{Re} w + \Psi(z,\bar{z}) = 0\}.$$

où φ et Ψ sont des fonctions analytiques réelles sous-harmoniques définies au voisinage de l'origine, telles que : $\frac{\partial^k \varphi}{\partial z^k}(0,0) = 0$, $\frac{\partial^k \Psi}{\partial z^k}(0,0) = 0$ pour tout $k \geq 0$ et $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial \bar{z}}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial \bar{z}}$ s'annulent à un ordre fini en 0. On suppose que $f(H_1 \cap V) \subset H_2$. Alors :

a) f_1 ne dépend que de w.

b) Si, de plus, $f_1(w) = \Gamma w$ $(\Gamma > 0)$ alors :

$f_*\left(i\frac{\partial}{\partial w}\right) = i\Gamma\frac{\partial}{\partial w} + B(z)\frac{\partial}{\partial z}$ où B est une fonction holomorphe en z telle que $B(0) = 0$ et $B'(0) = i\beta$, $\beta \in \mathbf{R}$. La fonction B est identiquement nulle si et seulement si $B'(0) = 0$.

Preuve de a).

Notons u et v les parties réelles et imaginaires de la variable w. Soit $A(v,z) =: (-\varphi(z) + iv, z)$ un paramétrage de H_1. Le champ de vecteurs L défini par $L =: -\frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial w} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}$ est tangent à H_1 et donc $L(\rho_2 \circ f) \equiv 0$ sur $H_1 \cap V$. En posant $g(w,z) = \frac{\partial}{\partial w}(\rho_2 \circ f) = \frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial w} + \frac{\partial}{\partial w}(\Psi \circ f_2)$, on obtient :

$$(1) \qquad (-\frac{\partial \varphi}{\partial z}) \cdot (g \circ A) + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial z} \circ A + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \circ (f_2 \circ A) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial z} \circ A\right] \equiv 0$$

au voisinage de $v = 0$, $z = 0$.

La démonstration consiste à dériver (1) par rapport à z à un ordre arbitraire.

Commençons par quelques préliminaires. En observant que, d'après la définition de A, l'on a

$$\frac{\partial}{\partial z}(\bar{f}_2 \circ A) = -(\frac{\partial \bar{f}_2}{\partial \bar{w}} \circ A) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial z}(f_2 \circ A) = -(\frac{\partial f_2}{\partial w} \circ A) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} + (\frac{\partial f_2}{\partial z} \circ A)$$

on obtient

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial^j \Psi}{\partial z^j} \circ (f_2 \circ A)\right] = \left[\frac{\partial^{j+1}\Psi}{\partial z^{j+1}} \circ (f_2 \circ A)\right]\left[\frac{\partial f_2}{\partial z} \circ A\right] - \frac{\partial \varphi}{\partial z}\left[(\frac{\partial f_2}{\partial w} \circ A) \cdot \frac{\partial^{j+1}\Psi}{\partial z^{j+1}} \circ (f_2 \circ A) + (\frac{\partial \bar{f}_2}{\partial \bar{w}} \circ A)\frac{\partial^{j+1}\Psi}{\partial \bar{z}\partial z^j} \circ (f_2 \circ A)\right].$$

On montre maintenant par récurrence que

$$(3) \quad \frac{\partial^k}{\partial z^k}\left[\frac{\partial \Psi}{\partial z} \circ (f_2 \circ A)\right] = \left[\frac{\partial^{k+1}\Psi}{\partial z^{k+1}} \circ (f_2 \circ A)\right]\left[\frac{\partial f_2}{\partial z} \circ A\right]^k + \sum_{j=1}^{k}\left[g_j(\frac{\partial^j \Psi}{\partial z^j} \circ (f_2 \circ A)) + h_j \frac{\partial^j \varphi}{\partial z^j}\right].$$

Les fonctions g_j et h_j sont analytiques réelles au voisinage de $(0,0)$ mais nous ne cherchons pas à les expliciter.

Pour $k = 1$, il s'agit de la formule (2) avec $j = 1$ et $g_1 \equiv 0$. En utilisant (2), on voit immédiatement que

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\sum_{j=1}^{k} g_j(\frac{\partial^j \Psi}{\partial z^j} \circ (f_2 \circ A)) + h_j \frac{\partial^j \varphi}{\partial z^j}\right] = \sum_{j=1}^{k+1} \tilde{g}_j(\frac{\partial^j \Psi}{\partial z^j} \circ (f_2 \circ A)) + \tilde{h}_j \frac{\partial^j \varphi}{\partial z^j}.$$

Il reste donc à noter que :

$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{\left[\frac{\partial^{k+1}\Psi}{\partial z^{k+1}} \circ (f_2 \circ A)\right]\left[\frac{\partial f_2}{\partial z} \circ A\right]^k\right\} = \left[\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial^{k+1}\Psi}{\partial z^{k+1}} \circ (f_2 \circ A))\right]\left[\frac{\partial f_2}{\partial z} \circ A\right]^k + \left[\frac{\partial^{k+1}\Psi}{\partial z^{k+1}} \circ (f_2 \circ A)\right]\left[\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial f_2}{\partial z} \circ A)^k\right].$$

D'autre part, une récurrence immédiate donne :

$$(4)\qquad \frac{\partial^k}{\partial z^k}\left[\frac{\partial f_1}{\partial z}\circ A\right] = \left(\frac{\partial^{k+1} f_1}{\partial z^{k+1}}\circ A\right) + \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial^j \varphi}{\partial z^j}\right) l_j.$$

Là encore, les l_j sont des fonctions que nous n'explicitons pas. En utilisant l'hypothèse $f_2(w,0)\equiv 0$, on tire de (3) et (4) :

$$(5)\qquad \frac{\partial^k}{\partial z^k}\left[\frac{\partial \Psi}{\partial z}\circ (f_2\circ A)\right](iv,0)\equiv 0, \quad \text{pour } \ k\geq 0;$$

$$(6)\qquad \frac{\partial^k}{\partial z^k}\left[\frac{\partial f_1}{\partial z}\circ A\right](iv,0) = \frac{\partial^{k+1} f_1}{\partial z^{k+1}}(iv,0) \text{ pour } \ k\geq 0.$$

En appliquant $\frac{\partial^k}{\partial z^k}$ à l'équation (1) et en tenant compte de (5), (6), on trouve alors $\frac{\partial^{k+1} f_1}{\partial z^{k+1}}(iv,0)\equiv 0$ pour $k\geq 0$, ce qui établit a).

Passons maintenant à la **preuve de b)**.

Nous utiliserons des champs de vecteurs holomorphes tangents aux hypersurfaces H_j, ce qui désignera ici des champs de la forme $a(w,z)\frac{\partial}{\partial w} + b(w,z)\frac{\partial}{\partial z}$ où les fonctions a, b sont holomorphes et dont les parties réelles sont des champs tangents au sens usuel. Rappelons que cette classe de champs de vecteurs est stable par image directe par un biholomorphisme ainsi que par crochet de Lie. La proposition suivante, extraite de [4], sera utile à la démonstration. Pour la commodité de lecteur, nous en donnerons la preuve à la fin de cette partie.

Proposition 2.2. *Soit $\vec{X} = h(w,z)\frac{\partial}{\partial z}$ un champ de vecteur holomorphe tangent à H_2 défini au voisinage de l'origine et non identiquement nul. Alors la partie homogène de plus bas degré de h en z est égale à $i\beta z$ ($\beta\in\mathbf{R}^*$) et celle de Ψ à $M|z|^{2m}$, avec $M>0$ et $m\in\mathbf{N}^*$.*

Notons $f(w,z) =: (\Gamma w, f_2(w,z))$ et considérons le champ de vecteur holomorphe tangent à H_2 c'est-à-dire $f_*(i\frac{\partial}{\partial w}) =: A(w,z)\frac{\partial}{\partial w} + B(w,z)\frac{\partial}{\partial z}$.

On a $\left[f_*(i\frac{\partial}{\partial w})\right]_{f(w,z)} = i\frac{\partial f_1}{\partial w}\frac{\partial}{\partial w} + i\frac{\partial f_2}{\partial w}\frac{\partial}{\partial z}$

d'où

$$(7)\qquad B(\Gamma w, f_2(w,z)) = i\frac{\partial f_2}{\partial w}(w,z) \text{ et } A\equiv i\Gamma.$$

Puisque $\Gamma i\frac{\partial}{\partial w}$ est tangent à H_2, $B(w,z)\frac{\partial}{\partial z}$ l'est également.

Supposons B non identiquement nul. Alors en appliquant la proposition 2.2 aux champs $B(w,z)\frac{\partial}{\partial z}$ et $\left[i\frac{\partial}{\partial w}, B(w,z)\frac{\partial}{\partial z}\right] = i\frac{\partial B}{\partial w}\frac{\partial}{\partial z}$, on voit que le développement de B est de la forme suivante :

$$(8) \qquad B(w,z) = (i\beta z + \sum_{k\geq 2} b_k^0 z^k) + \alpha w(z + \sum_{k\geq 2} b_k^1 z^k) + \sum_{q\geq 2} c_q w^q (z + \sum_{k\geq 2} b_k^q z^k),$$

où β et α sont des réels qui ne sont respectivement nuls que si $B \equiv 0$ ou $\frac{\partial B}{\partial w} \equiv 0$.

Ecrivons le développement de $f_2(w,z)$ sous la forme suivante.

$$(9) \qquad f_2(w,z) = (az + \sum_{k\geq 2} a_k^0 z^k) + w(bz + \sum_{k\geq 2} a_k^1 z^k) + w^2(cz + \sum_{k\geq 2} a_k^2 z^k) + \sum_{q\geq 3} w^q (d_q z + \sum_{k\geq 2} a_k^q z^k).$$

En identifiant les termes en z puis en wz dans chacun des deux membres de (7), on obtient : $ib = i\beta a$ et $2ic = i\beta b + \alpha\Gamma a$ puis donc $b = \beta a$ et $c = \gamma a$, où $\gamma = \frac{1}{2}(\beta^2 - i\alpha\Gamma)$.

Traduisons maintenant l'inclusion $f(H_1) \subset H_2$:

$$(10) \qquad \Psi[f_2(-\varphi + iv, z)] \equiv \Gamma\varphi(z, \bar{z}).$$

Les termes de degré 1 en z dans $f_2(-\varphi + iv, z)$ proviennent de :

$$az + b(-\varphi + iv)z + c(-\varphi + iv)^2 z + \sum_{q\geq 3} d_q(-\varphi + iv)^q z.$$

La partie de degré 1 en z dans $f_2(-\varphi + iv, z)$ est donc égale à :
$az(1 + \beta iv - \gamma v^2 + o(v^2))$.

D'après la proposition 2.2, la partie homogène de plus bas degré dans Ψ est égale à $B|z|^{2m}$ ($B > 0$). Par symétrie, celle de φ est égale à $A|z|^{2m}$ ($A > 0$). L'identité des termes de degré $2m$ en z dans (10) donne alors :

$B|a|^{2m}|z|^{2m}|1 + \beta iv - \gamma v^2 + o(v^2)|^{2m} \equiv \Gamma A|z|^{2m}$, d'où :

$$|1 + \beta iv - \gamma v^2 + o(v^2)|^2 \equiv 1,$$

et donc : $(\beta^2 - 2\gamma)v^2 + o(v^2) = i\alpha\Gamma v^2 + o(v^2) \equiv 0$.

Il s'ensuit que $\alpha = 0$ et donc $\frac{\partial B}{\partial w} \equiv 0$. Ceci achève la preuve de la proposition 2.1.

Nous terminons cette partie en donnant la démonstration du proposition 2.2. Cette dernière résulte de la lemme technique suivant :

Lemme 2.3. *Soit $Q(z,\bar{z})$ un polynôme à valeurs réelles homogène de degré $2m$, sans terme harmonique, et soit $(\lambda, k) \in \mathbf{R} \times \mathbf{N}$.*

1) Si $\operatorname{Im}\left(z^k \frac{\partial Q}{\partial z}\right) = \lambda \operatorname{Re}\left(z^k \frac{\partial Q}{\partial z}\right)$; alors :

i) Si $k = 1$, on a $Q = M|z|^{2m} (M > 0)$ et $\lambda = 0$.

ii) Si $k \neq 1$ on a $Q \equiv 0$.

2) Si $\operatorname{Re}\left(z^k \frac{\partial Q}{\partial z}\right) = 0$, alors $Q = 0$.

Commençons par la **preuve du lemme 2.3.**

Notons :

$$Q = \sum_{\substack{p+q=2m \\ p,q\geq 1}} A_{pq} z^p \bar{z}^q \quad \text{et } Q_1 = \frac{\partial Q}{\partial z}.$$

On a alors, en posant $l = k - 1$,

$$z^k Q_1 = \sum_{\substack{p+q=2m \\ p,q\geq 1}} pA_{pq} z^{p+l} \bar{z}^q$$

et

$$\bar{z}^k \bar{Q}_1 = \sum_{\substack{p+q=2m \\ p,q\geq 1}} qA_{pq} z^p \bar{z}^{q+l}.$$

On a, par hypothèse :

$$\frac{1}{2i}(z^k Q_1 - \bar{z}^k \overline{Q}_1) = \frac{\lambda}{2}(z^k Q_1 + \bar{z}^k \overline{Q}_1)$$

ou encore :

$$\sum_{\substack{p+q=2m \\ p,q\geq 1}} p(1-\lambda i) A_{pq} z^{p+l} \bar{z}^q = \sum_{\substack{p+q=2m \\ p,q\geq 1}} q(1+\lambda i) A_{pq} z^p \bar{z}^{q+l}. \tag{11}$$

Lorsque $k \neq 1$ (i.e. $l \neq 0$), on voit directement sur (11) que $Q \equiv 0$. En effet, si $p_0 = \min\{p \in [1, 2m-1]$ tels que $A_{p,q} \neq 0,\ q + p = 2m\}$ alors les termes de plus petit degré en z de chacun des deux membres de (11) sont respectivement égaux à $p_0(1-\lambda i)A_{p_0q_0}z^{p_0+l}\bar{z}^{q_0}$ et $q_0(1+\lambda i)A_{p_0q_0}z^{p_0}\bar{z}^{q_0+l}$; où $q_0 = 2m - p_0$.

Lorsque $k = 1$ (i.e. $l = 0$) (11) devient :

$$\sum_{\substack{p+q=2m \\ p,q\geq 1}} [p(1-\lambda i) - q(1+\lambda i)]A_{pq}z^p\bar{z}^q \equiv 0,$$

d'où $A_{pq} = 0$ pour $p \neq q$ et, si $Q \not\equiv 0, \lambda = 0$.

Ceci établit la première assertion. La seconde s'obtient de façon analogue.

Preuve de la proposition 2.2.

Soit Q la partie homogène de plus bas degré dans le développement de Ψ au voisinage de l'origine. En vertu des hypothèses sur Ψ, $Q(z,\bar{z})$ est un polynôme de degré $2m$ sous-harmonique et sans terme harmonique.

Donnons à w (et $\bar{w}$) le poids $2m$ et à z (et $\bar{z}$) le poids 1. Ainsi le poids d'un monôme $\omega^{k_1}\bar{w}^{k_2}z^{q_1}\bar{z}^{q_2}$ est égal à $(k_1+k_2)2m + (q_1+q_2)$.

Soit $B(w,z)$ la partie homogène de plus bas poids dans le développement de h au voisinage de $(0,0)$. Le champ $h(w,z)\frac{\partial}{\partial z}$ est holomorphe tangent à H_2 c'est-à-dire :

$$\text{(13)} \qquad \operatorname{Re}\left[h(-\Psi(z,\bar{z}) + iv, z)\frac{\partial\Psi}{\partial z}(z,\bar{z})\right] \equiv 0.$$

En notant $Q_1 = \frac{\partial Q}{\partial z}$, et en collectant les termes de plus bas degré en z dans (13), on obtient :

$$\text{(14)} \qquad \operatorname{Re}[B(-Q+iv,z)Q_1] \equiv 0.$$

Supposons que B soit de poids q où $q \in \{0,\ldots,2m-1\}$. On a donc $B(w,z) = \gamma z^q$ où $\gamma = \alpha + i\beta \neq 0$ et (14) donne : $\alpha \operatorname{Re}(z^q Q_1) = \beta \operatorname{Im}(z^q Q_1)$. Le lemme 2.3 montre alors que $q = 1$, $\alpha = 0$ et $Q = M|z|^{2m}$.

Si maintenant B est de degré $q \geq 2m$, on a
$B(w,z) = b_0 z^q + b_1 w z^{q-2m} + \ldots + b_s w^s z^{q-2ms}$ l'équation (14) devient :

$$\text{(15)} \qquad \operatorname{Re}\left[Q_1\left(b_0 z^q + b_1 z^{q-2m}(-Q+iv) + \ldots + b_s z^{q-2ms}(-Q+iv)^s\right)\right] \equiv 0.$$

Supposons d'abord $s > 0$, en derivant s fois l'équation (15) par rapport à v, on obtient :

$$\operatorname{Re}\left[b_s s! i^s z^{q-2ms} Q_1\right] \equiv 0 \text{ et le lemme 2.3 montre que :}$$

$$(16) \qquad Q = M|z|^{2m}; q = 2ms + 1 \text{ et } b_s s! i^s = i\lambda, \text{ où } \lambda \in \mathbf{R}^*.$$

Dérivons maintenant $(s-1)$ fois l'équation (15) par rapport à v, on obtient :

$$\operatorname{Re}\left\{\left[b_{s-1} i^{s-1}(s-1)! z^{q-2m(s-1)} + b_s i^{s-1} s! (-Q + iv) z^{q-2ms}\right] Q_1\right\} \equiv 0$$

d'où, en tenant compte de (16) :

$$\operatorname{Re}\left[b_{s-1} i^{s-1}(s-1)! z^{2m}(mM|z|^{2m}) - \lambda m M^2 |z|^{4m} + \lambda i v (mM|z|^{2m})\right] \equiv 0.$$

On a alors $\lambda m \cdot M^2 = 0$, ce qui est absurde puisque $b_s \neq 0$. Lorsque $s = 0$, la contradiction découle immédiatement du lemme 2.3. Ceci termine la preuve de la proposition 2.2.

3. Applications holomorphes propres entre domaines polynomiaux rigides et fixant une droite complexe.

Dans cette partie, nous étudions la forme des applications holomorphes propres entre deux domaines polynomiaux rigides de $\mathbf{C}^2$ qui fixent une droite de la forme $\{z = \text{cte}\}$ non contenue dans le lieu de branchement. Nous établissons la proposition suivante.

Proposition 3.1. *Soient Ω_1 et Ω_2 deux domaines de la forme :* $\Omega_j = \{(w,z) \in \mathbf{C}^2 : \operatorname{Re} w + P_j(z,\bar{z}) < 0\}$ *où P_1 et P_2 appartiennent à $\mathcal{P}$.*

Soit $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ une application holomorphe propre telle que :

1) $f = (f_1, f_2)$ se prolonge en un biholomorphisme local d'un voisinage U_1 de l'origine de $\mathbf{C}^2$ sur un autre, noté U_2.

2) $f_2(w, 0) \equiv 0$ et $f_1(0,0) = 0$.

Alors l'une des trois possibilités suivantes est vérifiée :

i) $f_1(w,z) = \Gamma w; (\Gamma > 0)$ et $f_2(w,z) = f_2(z)$.

ii) $f_1(w,z) = \Gamma w; (\Gamma > 0)$ et $P_2(z,\bar{z}) = P_2(|z|,|z|)$.

iii) $f_1(w,z) = \frac{\Gamma w}{1+i\lambda w}$; $(\Gamma > 0$ et $\lambda \in \mathbf{R}^*)$ et $P_2(z,\bar{z}) = M|z|^{2m} + Q$ avec $M > 0$, $m \in \mathbf{N}^*$ et $Q \equiv 0$ ou Q ne contient que des termes de degré $> 2m$.

La forme précise des applications qui font l'objet de cette proposition sera donnée par le théorème 2 (cf. § 4).

Dans cette partie, nous adoptons les notations suivantes :

Soit $P(z,\bar{z}) \in \mathcal{P}$, $P(z,\overline{z})$ peut s'écrire sous la forme $P(z,\overline{z}) = \sum_{l=m}^{N} |z|^{2l} \operatorname{Re} V_l(z)$ où $V_l(z) = \sum_{j=0}^{N_l} \alpha_{jl} z^j$. Notons alors

$$\begin{aligned} V(z) &=: V_m(z). \\ V^*(z) &=: V(z) - V(0). \\ W(z) &=: z\frac{\partial V}{\partial z}(z). \end{aligned}$$

Lorsque la partie homogène de plus bas degré de P n'est pas équilibrée (et donc $\operatorname{Re} V(0) = 0$) on dira que $P \in \tilde{\mathcal{P}}$, "est équilibrée" veut dire "est de la forme $M|z|^{2m}$, $M \in \mathbf{R}^*$, $m \in \mathbf{N}^*$".

La proposition résultera des deux lemmes techniques suivants :

Lemme 3.2. *Soient $\gamma \in \mathbf{R}$, $P(z,\overline{z}) \in \mathcal{P}$ et $A(z)$ une fonction holomorphe nulle à l'origine.*

Si les termes de la forme $|z|^{2m}z^p$ ou $|z|^{2m}\overline{z}^q$ où $(p,q \geq 0)$ sont identiquement nuls dans l'expression

$$(*) \qquad -\gamma P(z,\overline{z}) + \operatorname{Re}\left(A(z)\cdot\frac{\partial P}{\partial z}(z,\overline{z})\right),$$

on a alors :

$$A(z) = z\frac{(2\gamma - m\bar{a})V^*(z) + 2m\cdot a \operatorname{Re} V(0)}{W(z) + m(V^*(z) + 2\operatorname{Re} V(0))}, \quad \textit{avec } a = A'(0).$$

Lemme 3.3. *Soit $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ une application holomorphe propre satisfaisant les hypothèses de la proposition et soit $\vec{X} = f_*(i\frac{\partial}{\partial w})$.*

Supposons que sur un voisinage U_2 de l'origine le champ $\vec{X}$ soit donné par : $\vec{X}_{(w,z)} =: A(w)\frac{\partial}{\partial w} + B(z)(aw+b)\frac{\partial}{\partial z}$, où $(a,b) \in \mathbf{C}^2$, A étant une fonction entière et B une fraction rationnelle. Alors B est un polynôme holomorphe.

Ces deux lemmes seront démontrés ultérieurement.

Commençons par montrer que f_1 est de la forme générale $f_1 = \frac{\Gamma w}{1+i\lambda w}$ où $\Gamma > 0$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. D'après la proposition 2.1, on a $f_1(w,z) = f_1(w)$. Notons $D =: \{w \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} w < 0\}$; f étant un biholomorphisme local au voisinage de l'origine, d'après la proposition 1.1, on a $J_f(w,0) \neq 0$ pour tout $w \in D$. Donc f_1 est un biholomorphisme local sur D. D'autre part, f_1 est une application holomorphe propre de D sur lui-même et donc f_1 est un revêtement fini de D sur lui-même. Comme D est simplement connexe, f_1 est donc un automorphisme de D. Il s'ensuit que $f_1(w) = \frac{\Gamma w}{1+i\lambda w}$ où $\Gamma > 0$ et $\lambda \in \mathbf{R}$ puisque $f_1(0) = 0$.

Passons maintenant à la preuve de i) et ii). D'après ce qui précède, si $\lambda = 0$, on a $f_1(w) = \Gamma w$, $(\Gamma > 0)$. Notons dans ce cas $f = (\Gamma w, f_2(w,z))$ et considérons le champ $f_*(i\frac{\partial}{\partial w})$. C'est un champ de vecteurs holomorphe défini sur U_2 et tangent à $b\Omega_2$. D'après la proposition 2.1, $f_*(i\frac{\partial}{\partial w})$ est de la forme
$\left[f_*(i\frac{\partial}{\partial w})\right]_{(w,z)} = i\Gamma\frac{\partial}{\partial w} + B(z)\frac{\partial}{\partial z}$, où B est une fonction holomorphe dans un voisinage de l'origine, et on a $B(z) = i\beta z + \cdots (\beta \in \mathbf{R})$ avec $\beta \neq 0$ si et seulement si $B \not\equiv 0$.

D'autre part, on a $\left[f_*(i\frac{\partial}{\partial w})\right]_{f(w,z)} = i\Gamma\frac{\partial}{\partial w} + i\frac{\partial f_2}{\partial w}(w,z)\frac{\partial}{\partial z}$,

d'où $(B \circ f_2)(w,z) = i\frac{\partial f_2}{\partial w}(w,z)$.

Si $B \equiv 0$, alors $\frac{\partial f_2}{\partial w}(w,z) \equiv 0$ et $f_2(w,z) = f_2(z)$ ce qui correspond au cas i). Supposons maintenant $B \not\equiv 0$. Puisque $i\Gamma\frac{\partial}{\partial w}$ est tangent à $b\Omega_2$, $B(z)\frac{\partial}{\partial z}$ l'est également.

Cela se traduit par : $\operatorname{Re}\left(B(z)\frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{Re} w + P_2(z,\bar{z}))\right) = 0$ pour tout (w,z) tel que $\operatorname{Re} w + P_2(z,\bar{z}) = 0$ ou encore par :

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{Re}[B(z).\frac{\partial P_2}{\partial z}(z,\bar{z})] = 0, \quad \text{pour } z \text{ assez voisin de l'origine.}$$

D'après le lemme 3.2, on a alors, $B(z) = i\beta m z\frac{V^*(z)+2\operatorname{Re} V(0)}{W(z)+m(V^*(z)+2\operatorname{Re} V(0))}$.

Or, d'après le lemme 3.3, B est un polynôme et, comme $d^oV^* = d^oW$, on a $B(z) = i\beta z, \beta \in \mathbf{R}^*$.

L'équation (1) devient $\operatorname{Re}\left[i\beta z \cdot \frac{\partial P_2}{\partial z}(z,\bar{z})\right] = 0$, ce qui entraîne $P_2(z,\bar{z}) = P_2(|z|,|z|)$ puisque

$$\operatorname{Re}\left[i\beta z\frac{\partial}{\partial z}\sum_{p,q\geq 1} A_{pq}z^p\overline{z}^q\right] = \frac{i\beta}{2}\sum_{p,q\geq 1} A_{pq}(p-q)z^p\overline{z}^q.$$

Pour la preuve de iii), nous allons montrer que si $\lambda \neq 0$, alors $P_2(z,\overline{z})$ n'appartient pas à $\tilde{\mathcal{P}}$. Nous procédons par l'absurde et supposons que $P_2(z,\overline{z}) \in \tilde{\mathcal{P}}$. Rappelons qu'au voisinage de l'origine, on a

$$f(w,z) = (f_1(w), f_2(w,z))$$
$$f^{-1}(w,z) = (F_1(w), F_2(w,z))$$

avec $f_1(w) = \frac{\Gamma w}{1+i\lambda w}$ et $F_1(w) = \frac{w}{\Gamma - i\lambda w}$.

Considérons le champ de vecteurs holomorphe

$$\vec{X} = f_*(i\frac{\partial}{\partial w}) =: A(w,z)\frac{\partial}{\partial w} + B(w,z)\frac{\partial}{\partial z}.$$

On a

$$\vec{X}_{f(w,z)} = i\frac{\partial f_1}{\partial w}\frac{\partial}{\partial w} + i\frac{\partial f_2}{\partial w}\frac{\partial}{\partial z}$$

d'où $A(w,z) = i(\frac{\partial f_1}{\partial w} \circ F)(w) = \frac{i}{\Gamma}(\Gamma - i\lambda w)^2$. Les champs $\vec{X}$ et $i\frac{\partial}{\partial w}$ sont holomorphes tangents (dans le sens évoqué juste avant la proposition 2.2) à $b\Omega_2$ donc les crochets de Lie $\left[\vec{X}, i\frac{\partial}{\partial w}\right]$ et $\left[[\vec{X}, i\frac{\partial}{\partial w}], i\frac{\partial}{\partial w}\right]$ le sont également.

Or, on a $[\vec{X}, i\frac{\partial}{\partial w}] = 2\frac{\lambda i}{\Gamma}(\Gamma - \lambda i w)\frac{\partial}{\partial w} + i\frac{\partial B}{\partial w}\frac{\partial}{\partial z}$
et $\left[[\vec{X}, i\frac{\partial}{\partial w}], i\frac{\partial}{\partial w}\right] = 2\frac{\lambda^2 i}{\Gamma}\frac{\partial}{\partial w} - \frac{\partial^2 B}{\partial w^2}\frac{\partial}{\partial z}$.

Puisque $2i\frac{\lambda^2}{\Gamma}\frac{\partial}{\partial w}$ est tangent à $b\Omega_2$, $\frac{\partial^2 B}{\partial w^2}\frac{\partial}{\partial z}$ l'est également. Comme par hypothèses, $P_2 \in \tilde{\mathcal{P}}$, la proposition 2.2 montre alors que $\frac{\partial^2 B}{\partial w^2} \equiv 0$. On a ainsi :

$B(w,z) = A_1(z) \cdot w + A_0(z)$ où A_0 et A_1 sont deux fonctions holomorphes au voisinage de l'origine.

Le champ $\vec{X}$ étant holomorphe tangent à $b\Omega_2$, on a :

$$\mathrm{Re}(\vec{X}(\mathrm{Re}\, w + P_2(z,\bar{z}))) \equiv 0 \quad \text{pour tout} \quad (w,z) \quad \text{tel que} \quad \mathrm{Re}\, w + P_2(z,\overline{z}) = 0$$
$$\text{c'est-à-dire } \mathrm{Re}[\frac{i}{2\Gamma}(\Gamma - i\lambda w)^2 + (A_1(z)\cdot w + A_0(z))\frac{\partial P_2}{\partial z}(z,\overline{z})] \equiv 0$$

pour $w = -P_2(z,\overline{z}) + iv$, (z,v) variant dans un voisinage de $(0,0)$ dans $\mathbf{C} \times \mathbf{R}$. Cela se traduit par :

$$(1) \qquad v\left(-\frac{\lambda^2}{\Gamma}P_2(z,\bar{z}) + \mathrm{Re}\left[iA_1(z)\cdot\frac{\partial P_2}{\partial z}(z,\overline{z})\right]\right)$$
$$-\lambda P_2(z,\overline{z}) + \mathrm{Re}\left[(A_0(z) - A_1(z)P_2(z,\overline{z}))\frac{\partial P_2}{\partial z}(z,\bar{z})\right] \equiv 0$$

et l'on en déduit :

$$(2) \qquad -\frac{\lambda^2}{\Gamma}P_2(z,\overline{z}) + \mathrm{Re}[iA_1(z)\cdot\frac{\partial P_2}{\partial z}(z,\overline{z})] \equiv 0.$$

et

$$(3) \qquad -\lambda P_2(z,\bar{z}) + \mathrm{Re}[(A_0(z) - A_1(z)P_2(z,\overline{z}))\frac{\partial P_2}{\partial z}(z,\overline{z})] \equiv 0.$$

Désignons par $H_{2m}(z,\overline{z})$ la partie homogène de plus bas degré dans $P_2(z,\overline{z})$. De (2), on tire : Re $\left[iA_1(0)\frac{\partial H_{2m}}{\partial z}(z,\overline{z})\right] \equiv 0$. Ceci, d'après le lemme 2.3, entraîne $A_1(0) = 0$. On peut alors appliquer le lemme 3.2 à l'équation (2) et en déduire que :

$$(4) \qquad A_1(z) = -i\left(\frac{2\lambda^2}{\Gamma} + im\overline{a}_1\right) z\cdot\frac{V^*(z)}{W(z)+mV^*(z)} \quad \text{où} \quad a_1 = A_1'(0).$$

(on a utilisé le fait que $\mathrm{Re}\, V(0) = 0$ puisque $P_2 \in \tilde{\mathcal{P}}$).

D'autre part, $B(f_1(w), f_2(w,z)) = i\frac{\partial f_2}{\partial w}(w,z)$ donc $B(0,0) = 0$ puisque $f_2(w,0) \equiv 0$ et $f_1(0) = 0$. On a donc $A_0(0) = 0$. En observant que les termes de la forme $|z|^{2m}z^p$ ou $|z|^{2m}\overline{z}^q$ du membre gauche de (3) ne peuvent provenir que de $-\lambda P_2(z,\overline{z}) + \mathrm{Re}\left[A_0(z)\frac{\partial P_2}{\partial z}(z,\overline{z})\right]$, on peut à nouveau utiliser le lemme 3.2 et obtenir

$$(5) \qquad A_0(z) = (2\lambda - m\overline{a}_0)z\frac{V^*(z)}{W(z)+mV^*(z)} \quad \text{où} \quad a_0 = A_0'(0).$$

En définitive $f_*\left(i\frac{\partial}{\partial w}\right)$ est donné par :

$$(6) \qquad f_*(i\frac{\partial}{\partial w}) = \frac{i}{\Gamma}(\Gamma - \lambda iw)^2\frac{\partial}{\partial w} + (aw+b)z\frac{V^*(z)}{W(z)+mV^*(z)}\frac{\partial}{\partial z}$$

où a et b sont des constantes complexes. Nous pouvons donc appliquer le lemme 3.3 et en déduire que $z\frac{V^*(z)}{W(z)+mV^*(z)}$ est un polynôme holomorphe. Comme V^* et W ont même degré, ce polynôme est de la forme αz, $\alpha \in \mathbf{C}$. De (4) et (5), on tire alors :

$$(7) \qquad A_0(z) = a_0 z \quad \text{et} \quad A_1(z) = a_1 z$$

Pour terminer, nous revenons à l'identité (2). Tenant compte de (7), on a :

$$(8) \qquad -\frac{\lambda^2}{\Gamma}P_2(z,\overline{z}) + \mathrm{Re}[ia_1 z\frac{\partial P_2}{\partial z}(z,\overline{z})] \equiv 0.$$

Posons $P_2(z,\overline{z}) = \sum_{p,q\geq 1} A_{pq} z^p \overline{z}^q$; en reportant dans (8), on obtient :

$$(9) \qquad \sum_{p,q\geq 1} A_{pq} \left[-2\frac{\lambda^2}{\Gamma} - (p+q)\operatorname{Im} a_1 + i(p-q)\operatorname{Re} a_1 \right] z^p \overline{z}^q \equiv 0.$$

Comme $\lambda \neq 0$ par hypothèse, on obtient facilement de (9) que P_2 est homogène c'est-à-dire $P_2 = H_{2m}$. Tenant compte de (7), l'identité (3) devient alors

$$(10) \qquad -\lambda H_{2m}(z,\bar{z}) + \operatorname{Re}[z(a_0 - a_1 H_{2m}(z,\overline{z}))\frac{\partial H_{2m}}{\partial z}(z,\overline{z})] \equiv 0.$$

On en déduit que :

$$(11) \qquad -\lambda H_{2m}(z,\overline{z}) + \operatorname{Re}\left(a_0 z \frac{\partial H_{2m}}{\partial z}(z,\overline{z}) \right) \equiv 0$$

et

$$(12) \qquad H_{2m}(z,\overline{z}) \operatorname{Re}\left(a_1 z \frac{\partial H_{2m}}{\partial z}(z,\overline{z}) \right) \equiv 0.$$

D'après le lemme 2.3, (12) force H_{2m} a être équilibré. Ce qui est absurde.

Preuve du lemme 3.2.

On pose

$$A(z) = z(a + S(z)) \quad \text{où} \quad S(z) = \sum_{k=2}^{+\infty} a_k z^{k-1}.$$

En tenant compte des notations adoptées, les termes de la forme $|z|^{2m} z^p$ ou $|z|^{2m}\overline{z}^q$ $(p, q \geq 0)$ dans $(*)$ ne peuvent provenir que de :

$$(1) \qquad -\gamma(|z|^{2m} \operatorname{Re} V(z)) + \operatorname{Re}\left[A(z) \cdot \frac{\partial}{\partial z}(|z|^{2m} \operatorname{Re} V(z)) \right].$$

Par ailleurs, on a :

$$(2) \qquad A(z) \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left(|z|^{2m} \operatorname{Re} V(z) \right) = |z|^{2m}(a + S)\left(m \operatorname{Re} V + \frac{1}{2} W \right)$$

et

$$(3) \quad \operatorname{Re}\left[(a+S)\left(m \operatorname{Re} V + \frac{1}{2} W \right) \right] = (\operatorname{Re} a + \frac{S + \overline{S}}{2})\times$$
$$\left(m \left(\frac{V^* + \overline{V}^*}{2} + \operatorname{Re} V(0) \right) + \frac{1}{4}(W + \overline{W}) \right) + (i \operatorname{Im} a + \frac{S - \overline{S}}{2})(\frac{W - \overline{W}}{4}).$$

Les termes harmoniques de (3) sont :

$$2\operatorname{Re}\Big[\frac{S}{4}(mV^* + 2m\operatorname{Re}V(0) + W) \ +\frac{a}{4}W + \frac{m}{2}(\operatorname{Re}a)\cdot V^* + m\frac{(\operatorname{Re}a)\operatorname{Re}V(0)}{2}\Big]$$
$$=: 2\operatorname{Re}[K(z)].$$

Donc les termes de la forme $|z|^{2m}z^p$ ou $|z|^{2m}\overline{z}^q$ $(p, q \geq 0)$ dans (1) sont : $|z|^{2m}\operatorname{Re}[-\gamma V(z) + 2K(z)]$. Par hypothèse, ils sont identiquement nuls, d'où :

$$(4) \qquad -\gamma V(z) + 2K(z) = -\gamma V(0) + 2K(0).$$

En remplaçant K par son expression et V par $V^* + V(0)$ dans (4), on obtient :

$$(5) \qquad \frac{S}{2}(mV^* + 2m\operatorname{Re}V(0) + W) + \frac{a}{2}W + V^*(m\operatorname{Re}a - \gamma) = 0$$

ou encore :

$$S(z) = -\frac{2(m\operatorname{Re}a - \gamma)V^*(z) + aW(z)}{W(z) + mV^*(z) + 2m\operatorname{Re}V(0)}.$$

Puisque $A(z) = z(a + S(z))$, on a donc :

$$A(z) = z\frac{(2\gamma - m\overline{a})V^*(z) + 2ma\operatorname{Re}V(0)}{W(z) + mV^*(z) + 2m\operatorname{Re}V(0)} \quad \text{où} \quad a = A'(0). \qquad \blacksquare$$

Preuve du lemme 3.3.

Supposons que B ait des pôles.

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des pôles de B dans Ω_2, c'est-à-dire $S = \Omega_2 \cap (B^{-1}(\infty))$.

Soient z_1 un élément de S, w_1 un nombre complexe tel que $(w_1, z_1) \in S$ et, en outre, $aw_1 + b \neq 0$. (Ce dernier choix est toujours possible quitte à faire une translation en $\operatorname{Im} w_1$).

Soit (w_0, z_0) un point fixé dans $U_2 \setminus f(V_f)$; puisque $\Omega \setminus (f(V_f) \cup S)$ est connexe et dense dans Ω_2, il existe un chemin continu $\gamma : [0,1] \to \Omega_2$ tel que : $\gamma(0) = (w_0, z_0)$; $\gamma(1) = (w_1, z_1)$ et $\forall t \in [0,1[, \gamma(t) \notin f(V_f) \cup \mathcal{S}$.

L'application f étant holomorphe propre, $f : \Omega_1 \setminus f^{-1}[f(V_f)] \to \Omega_2 \setminus f(V_f)$ est un revêtement fini, il existe donc $\tilde{\gamma} : [0,1[\to \Omega_1 \setminus V_f$ un relèvement de γ par f c'est-à-dire $\forall t \in [0,1[, (f \circ \tilde{\gamma})(t) = \gamma(t)$.

Par hypothèse, au voisinage de l'origine le champ de vecteurs holomorphes $\vec{X} = f_*\left(i\frac{\partial}{\partial w}\right)$ est de la forme : $\vec{X}_{(w,z)} = A(w)\frac{\partial}{\partial w} + B(z)(aw+b)\frac{\partial}{\partial z}$ où A est une fonction entière et B est une fraction rationnelle.

L'existence du relèvement $\tilde{\gamma}$ permet de prolonger holomorphiquement $f_*(i\frac{\partial}{\partial w})$ le long de $\gamma([0,1[)$ en un champ $\overrightarrow{X}$ tel que

$$\forall t \in [0,1[: \vec{X}_{\gamma(t)} = \left[f_*(i\frac{\partial}{\partial w})\right]_{\gamma(t)} = i\frac{\partial f_1}{\partial w}(\tilde{\gamma}(t))\frac{\partial}{\partial w} + i\frac{\partial f_2}{\partial w}(\tilde{\gamma}(t))\frac{\partial}{\partial z}.$$

Par ailleurs, puisque $\gamma([0,1[) \subset \Omega_2 \setminus \mathcal{S}$, le champ $A(w)\frac{\partial}{\partial w} + B(z)(aw+b)\frac{\partial}{\partial z}$ est également un prolongement de $\vec{X}$ le long de $\gamma([0,1[)$.

Par unicité du prolongement, on a donc :

$$(2) \qquad \forall t \in [0,1[, i\frac{\partial f_1}{\partial w}(\tilde{\gamma}(t)) = A(\gamma_1(t))$$

et

$$(3) \qquad \forall t \in [0,1[: i\frac{\partial f_2}{\partial w}(\tilde{\gamma}(t)) = B(\gamma_2(t))(a\gamma_1(t)+b) \text{ où } \gamma = (\gamma_1, \gamma_2).$$

Comme $(aw_1 + b) \neq 0$, on déduit immédiatement de (3) que $|B(z_1)| < +\infty$ ce qui est impossible. ■

4. Preuve des théorèmes 1 et 2.

Preuve du théorème 2. On se place dans le cas iii) de la proposition 3.1. La partie homogène de plus bas degré de P_2 est égale à $M|z|^{2m}$ ($M > 0$) et comme le montre un calcul élémentaire celle de P_1 est aussi égale à $M'|z|^{2m}$ ($M' > 0$). Notons $2k$ le degré du polynôme P_2 et H_{2k} sa partie homogène de plus haut degré, il nous faut montrer que $k = m$.

Nous utiliserons pour cela la méthode de dilatation des coordonnées. Considérons à cet effet la suite de points de Ω_1 : $(-\frac{1}{n} + \frac{i}{\lambda}, 0)$, la suite de points de Ω_2 : $f(-\frac{1}{n} + \frac{i}{\lambda}, 0) = (-\frac{i\Gamma}{\lambda} - \frac{n\Gamma}{\lambda^2}, 0)$ et deux suites de dilatations $(S_n)_n$ et $(\Delta_n)_n$ définies par :

$$S_n(w,z) =: \left(nw, zn^{\frac{1}{2m}}\right).$$

$$\Delta_n(w,z) =: \frac{\lambda^2}{\Gamma}\left(\frac{w}{n}, \frac{z}{n^{\frac{1}{2k}}}\right).$$

Soit h l'application holomorphe propre de Ω_1 sur Ω_2 donnée par :

$$h : \Omega_1 \to \Omega_2$$
$$(w,z) \mapsto f(w + \frac{i}{\lambda}, z) + \left(\frac{\Gamma i}{\lambda}, 0\right).$$

On définit alors une suite d'applications holomorphes propres $(F_n)_n$ de $S_n(\Omega_1)$ sur $\Delta_n(\Omega_2)$ par $F_n = \Delta_n \circ h \circ S_n^{-1}$.

On vérifie sans peine que :

1) $F_n(w,z) = \left(\frac{1}{w}, \frac{\lambda^2}{\Gamma} n^{-\frac{1}{2k}} f_2(\frac{w}{n} + \frac{i}{\lambda}, zn^{-\frac{1}{2m}})\right)$.

2) Pour tout n : $F_n(w,0) = (\frac{1}{w}, 0)$ et $F_n(-1,0) = (-1,0)$.

3) Pour tout n, la multiplicité de F_n est égale à celle de f.

4) $S_n(\Omega_1)$ converge vers $D_1 =: \{(w,z) \in \mathbf{C}^2 : \operatorname{Re} w + M'|z|^{2m} < 0\}$.

5) $\Delta_n(\Omega_2)$ converge vers $D_2 =: \{(w,z) \in \mathbf{C}^2 : \operatorname{Re} w + (\frac{\Gamma}{\lambda})^{2k-1} H_{2k}(z,\overline{z}) < 0\}$.

D'autre part, d'après ([10], Lemme 2.3) et après une éventuelle extraction, la suite $(F_n)_n$ converge uniformément sur tout compact de D_1 vers une application holomorphe : $F : D_1 \to D_2$ telle que :

a) $F(w,z) = (\frac{1}{w}, F_2(w,z))$.

b) $F_2(w,0) \equiv 0$.

Admettons momentanément que pour w, fixé, $F_2(w,\cdot)$ est surjective finie. Il en va alors de même pour F. Montrons que F est propre. Posons :

$$\rho_1(w,z) =: \operatorname{Re} w + M'|z|^{2m}$$
$$\rho_2(w,z) =: \operatorname{Re} w + (\frac{\Gamma}{\lambda})^{2k-1} H_{2k}(z,\overline{z}).$$

On a :

$$D_1 = \{(w,z) \in \mathbf{C}^2 : \rho_1(w,z) < 0\}$$
$$D_2 = \{(w,z) \in \mathbf{C}^2 : p_1(w,z) < 0\}$$

sur D_2, on définit la fonction $\sigma(w,z) =: \sup_{F(u,v)=(w,z)} \rho_1(u,v)$. Puisque F est surjective et finie σ est p.s.h. et strictement négative sur D_2.

Supposons qu'il existe une suite $(w_n, z_n)_n$ de points de D_1 qui converge vers un point de bD_1 et telle que $(F(w_n,z_n))_n$ converge vers un point de D_2. Deux cas sont à distinguer. Commençons par supposer que la limite de (w_n, z_n) est finie, soit (w_0, z_0) cette limite et soit (w_1, z_1) la limite de $(F(w_n,z_n))_n$. On a : $\sigma(F(w_n,z_n)) \geq \rho_1(w_n,z_n)$, et puisque σ est (s.c.s) $\sigma(w_1,z_1) \geq \rho_1(w_0,z_0) = 0$. Ce qui est absurde puisque σ est strictement négative. Supposons maintenant que $(|w_n| + |z_n|) \to +\infty$, $(w_n, z_n)_n$ étant dans D_1 on a $|w_n| \to +\infty$ et d'après a)

$F(w_n, z_n) \to (0, z)$, par hypothèse $(0, z) \in D_2$ donc il existe $N \in \mathbf{N}^*$ tel que pour $n \geq N$: $(0, z) \in \Delta_n(\Omega_2)$. Comme F_n est propre, il existe $(u, v) \in S_n(\Omega_1)$ tel que $F_n(u, v) = (0, z)$, d'après 1) ceci est impossible. Nous avons donc montré que F est propre. Etablissons maintenant que $m \geq k$.

Soit $(w_n, 0)$ une suite de points de D_1 qui converge vers un point $(w_0, 0)$ de bD_1 où $w_0 \neq 0$. La suite $(F(w_n, 0))_n$ converge vers le point $(\frac{1}{w_0}, 0)$ de bD_2, le bord de D_2 étant de type fini, on sait d'après [9] que l'application F se prolonge continûment à $\overline{D}_1$ sur un voisinage de $(w_0, 0)$, et d'après Bell et Catlin [8] F se prolonge différentiablement à $\overline{D}_1$ sur un voisinage de $(w_0, 0)$. Donc si τ_1 (respectivement τ_2) désigne la fonction type de bD_1 (respectivement de bD_2) alors :

$$\tau_1(w_0, 0) \geq \tau_2(F(w_0, 0)) = \tau_2(\frac{1}{w_0}, 0),$$

d'où $m \geq k$.

Ceci termine la preuve du théorème 2.

Montrons maintenant que pour w fixé, $F_2(w, \cdot)$ est finie.

On vérifie facilement que :

$$S_n(\Omega_1) =: \{(w, z) \in \mathbf{C}^2 : \operatorname{Re} w + M'|z|^{2m} + Q_n(z, \overline{z}) < 0\}.$$

et

$$\Delta_n(\Omega_2) =: \{(w, z) \in \mathbf{C}^2 : \operatorname{Re} w + (\frac{\Gamma}{\lambda})^{2k-1} H_{2k}(z, \overline{z}) + \tilde{Q}_n(z, \overline{z}) < 0\}$$

où $Q_n(z, \overline{z})$ et $\tilde{Q}_n(z, \overline{z})$ sont des polynômes qui convergent uniformément sur tout compact de $\mathbf{C}$ vers le polynôme nul.

Soit $w \in \mathbf{C}^*$, un point fixé tel que $\operatorname{Re} w < 0$. On notera :

$$\Omega_{n,w} =: \{z \in \mathbf{C} : M'|z|^{2m} + Q_n(z, \overline{z}) < -\operatorname{Re} w\}.$$

$$D_{n,w} =: \{z \in \mathbf{C} : (\frac{\Gamma}{\lambda})^{2k-1} H_{2k}(z, \overline{z}) + \tilde{Q}_n(z, \overline{z}) < -\frac{\operatorname{Re} w}{|w|^2}\}.$$

$$\Omega_{\infty,w} =: \{z \in \mathbf{C} : M'|z|^{2m} < -\operatorname{Re} w\}.$$

$$D_{\infty,w} =: \{z \in \mathbf{C} : (\frac{\Gamma}{\lambda})^{2k-1} H_{2k}(z, \overline{z}) < -\frac{\operatorname{Re} w}{|w|^2}\}.$$

$$\Delta(0, R) =: \{z \in \mathbf{C} : |z| < R\}.$$

$F_n =: (\frac{1}{w}; F_{n,2})$ la suite d'applications holomorphes propre de $S_n(\Omega_1)$ sur $\Delta_n(\Omega_2)$.

Soit $R > 0$ tel que $\mathrm{Re}\, w + R^{2m} > 0$. Pour n assez grand, on a $\Omega_{n,w} \cap \{|z| = R\} = \emptyset$, on en déduit que la composante connexe de l'origine de $\Omega_{n,w}$ est contenue dans $\{|z| < R\}$. Notons $\Omega^0_{n,w}$ cette composante, il est clair que $\Omega^0_{n,w}$ converge vers $\Omega_{\infty,w}$. La composante connexe, $D^0_{n,w}$, de l'origine dans $D_{n,w}$ coïncide avec $F_n(\Omega^0_{n,w})$. En observant que $D_{\infty,w}$ est connexe (étoilé par rapport à l'origine) on vérifie facilement que $D^0_{n,w}$ converge vers $D_{\infty,w}$.

Ainsi la suite d'applications holomorphes propres

$$\begin{aligned} h_n : \Omega^0_{n,w} &\to D^0_{n,w} \\ z &\mapsto F_{n,2}(w,z) \end{aligned}$$

est telle que (modulo extraction)

1) $h_n(0) = 0, \forall n$.

2) h_n est de multiplicité finie.

3) h_n converge vers $F_2(w,\cdot) : \Omega_{\infty,w} \to D_{\infty,w}$ uniformément sur tout compact, et il existe $R > 0$ tel que $\Omega^0_{n,w} \subset \{|z| < R\}$ pour tout n.

On en déduit par des arguments standards que $F_2(w,\cdot)$ est surjective et finie (cf. Appendice).

Preuve du théorème 1 :

Nous supposons $V_f \neq \emptyset$ et montrons que cela conduit à une contradiction, nous procédons en trois étapes.

1ère étape : Il existe deux automorphismes de $\mathbf{C}^2$, φ_1 et φ_2 tels que l'application $\tilde{f} = \varphi_1^{-1} \circ f \circ \varphi_2$ satisfait les hypothèses du théorème 2.

Pour tout $z \in \mathbf{C}$, notons π_z le demi-plan $\{(w,z) : w \in \mathbf{C}\} \cap \Omega$, et désignons par f^n la n$^{\text{ième}}$ itérée de f. Comme V_f est supposé non vide, la proposition 1.1 assure l'existence d'un demi-plan π_{z_0} contenu dans V_f. En utilisant l'inclusion $f^{-1}(V_{f^n}) \subset V_{f^{n+1}}$ et le fait que, toujours d'après la proposition 1.1, V_{f^n} est une réunion de demi-plan, on construit par récurrence une suite $(z_n)_n$ de nombres complexe telle que :

i) $\forall n \geq 1 : \pi_{z_n} \subset V_{f^n}$.

ii) $\forall n \geq 1 : f(\pi_{z_{n+1}}) \subset \pi_{z_n}$.

On observera pour cela que : si $(w_{n+1}, z_{n+1}) \in f^{-1}(\pi_{z_n}) \cap \pi_{z_{n+1}}$ alors $f(\pi_{z_{n+1}}) \subset \pi_{z_n}$. En effet, dans le cas contraire, w_{n+1} serait un zéro isolé de $f_2(w, z_{n+1}) - z_n$ et (w_{n+1}, z_{n+1}) serait un zéro isolé de $f_2(w,z) - z_n$ puisque $f^{-1}(\pi_{z_n})$ est contenu dans une réunion de demi-plan π_z.

Notons τ_n la valeur de τ sur le bord de π_{z_n}. Il résulte de ii) et des propriétés de τ que la suite $(\tau_n)_{n\geq 1}$ est croissante. Comme les valeurs de τ sont entières et majorées par le degré de P. Il existe $n_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que $\tau_{n_0+1} = \tau_{n_0}$. Pour fixer les idées, nous supposons que $n_0 = 1$. Alors $f(\pi_{z_2}) \subset \pi_{z_1}$ et, puisque $\tau_2 = \tau_1$, $\pi_{z_2} \not\subset V_f$. Quitte à composer f avec des translations $(w,z) \mapsto (w + it_0, z)$, on peut supposer que f induit un difféomorphisme local sur $b\Omega$ au voisinage de $(-P(z_2), z_2)$ et que $f(-P(z_2), z_2) = (-P(z_1), z_1)$. Définissons les automorphismes de $\mathbf{C}^2$, φ_1 et φ_2, par :

$$\varphi_j(w,z) = (w', z')$$

où

$$\begin{cases} w' = w - P(z_j, \overline{z}_j) - 2\displaystyle\sum_{i=1}^{2m} \frac{1}{i!}\frac{\partial^i P}{\partial z^i}(z_j, \overline{z}_j) z^i. \\ z' = z + z_j. \end{cases}$$

Ils induisent des automorphismes de Ω_j sur Ω où

$$\Omega_j =: \{(w,z) \in \mathbf{C}^2 : \operatorname{Re} w + Q_j(z, \overline{z}) < 0\},$$

$$Q_j(z,\overline{z}) = P(z + z_j, \overline{z} + \overline{z}_j) - P(z_j, \overline{z}_j) - 2\operatorname{Re}\sum_{i=1}^{2m} \frac{\partial^i P}{\partial z^i}(z_j, \overline{z}_j) z^i.$$

Par construction, l'application $\tilde{f} = \varphi_1^{-1} \circ f \circ \varphi_2$ est propre de Ω_2 sur Ω_1, fixe la droite complexe $z = 0$ et l'origine $(0,0)$. D'après [14], $\tilde{f}$ se prolonge en un biholomorphisme local au voisinage de $(0,0)$.

2ème étape : V_f est contenu dans une réunion d'au plus $(2m) = \deg P$ droites complexes.

Soit $\tilde{f}$ l'application fournie par la première étape. D'après le théorème 2, deux cas sont à distinguer. Commençons par supposer que $\tilde{f}$ est de la forme $(\Gamma w, \tilde{f}_2(z))$. Alors $\tilde{f}_2$ est une fonction entière telle que $\tilde{f}_2(0) = 0$ et $\frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial z}(0) = \lambda \neq 0$. L'inclusion $\tilde{f}(b\Omega_2) \subset b\Omega_1$ se traduit au voisinage de l'origine par l'identité :

$$(1) \qquad \Gamma Q_2(z,\overline{z}) = Q_1 \circ \tilde{f}_2(z)$$

Décomposons les polynômes Q_1 et Q_2 sous la forme suivante

$$Q_j(z,\overline{z}) = \overline{z}^{k_j}[h_j(z) + \overline{z}R_j(z,\overline{z})]$$

où $k_j \in \mathbf{N}^*$, h_j est un polynôme holomorphe et R_j un polynôme en $z, \overline{z}$.

En identifiant les termes de plus bas degré en $\overline{z}$ dans (1), on obtient :

$$(3) \qquad \Gamma \overline{z}^{k_2} h_2(z) = \overline{\lambda}^{k_1} \overline{z}^{k_1} h_1(\tilde{f}_2(z)).$$

On déduit alors de (3) que $k_1 = k_2 =: k$ et

$$(4) \qquad \Gamma h_2(z) = \overline{\lambda}^{k} h_1 \circ \tilde{f}_2(z).$$

Ceci montre que le nombre de zéros de $\frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial z}$ est majoré par le degré de h_2 et donc par $2m$. Il s'ensuit que $V_{\tilde{f}}$ est constitué d'au plus $2m$ demi-plans de la forme π_z. Il en va de même pour V_f, puisque les automorphismes φ_1 et φ_2 échangent ce type de demi-plans.

Il nous reste à envisager le cas où Q_1 ne dépend que de $|z|$. Considérons l'application holomorphe propre de Ω_1 sur lui-même définie par $g =: \varphi_1^{-1} \circ f \circ \varphi_1$.

Si $(w_0, z_0) \in \overline{V}_g \cap b\Omega_1$, alors d'après la proposition 1.1, on a $\pi_{z_0} \subset V_g$. Quitte à composer g avec une translation $(w,z) \to (w+iy, z)$, on peut supposer que g se prolonge différentiablement au voisinage de (w_0, z_0). Alors pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on a :

$$(5) \qquad \{(w_0, e^{it}z_0), t \in [-\varepsilon, \varepsilon]\} \subset \overline{V}g \cap b\Omega_1.$$

En effet, sinon, on trouverait une suite $(t_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $\lim_n t_n = 0$ et $Jg(w_0, e^{it_n}) \neq 0$.

Pour tout $n \geq 1$: on aurait alors $\tau[g(w_0, e^{it_n}z_0)] = \tau(w_0, e^{it_n}z_0) = \tau(\omega_0, z_0)$ et τ étant s.c.s., $\tau(w_0, z_0) \leq \tau(g(w_0, z_0))$. Comme, par ailleurs, $\tau(g(w_0, z_0)) \leq \tau(w_0, z_0)$, il en résulterait que $\tau(g(w_0, z_0)) = \tau(w_0, z_0)$ et donc que $Jg(w_0, z_0) \neq 0$, ce qui est contraire aux hypothèses.

Donc si $z_0 \neq 0$, (5) contredit la proposition 1.1, donc $V_g = \pi_0$ ou encore $V_f = \pi_{z_1}$.

3ème étape : Conclusion.

D'après la 2ème étape, les lieux de branchement V_{f^n} ont au plus $2m$ composantes connexes. Comme $V_{f^{n+1}} = V_{f^n} \cup f^{-1}(V_{f^n}) \supset V_{f^n}$, il s'ensuit que la suite $(V_{f^n})_n$ est stationnaire.

On supposera sans perte de généralité que $V_f = V_{f^2}$, ce qui signifie que $f^{-1}(V_f) \subset V_f$. Notons $\pi_1, \ldots, \pi_N$ les composantes connexes de V_f. Puisque $f^{-1}(\pi_j)$ est un ensemble analytique dans Ω contenu dans V_f il existe $\sigma(j) \in \{1, \ldots, N\}$ tel que $\pi_{\sigma(j)} \subset f^{-1}(\pi_j)$, on voit alors facilement que f induit une permutation sur $\{\pi_1, \ldots, \pi_N\}$. Alors $f^{N!}(\pi_1) \subset \pi_1$ et donc, d'après la preuve du lemme 1.2, $\pi_1 \not\subset V_{f^{N!}}$. Ainsi $V_f = \emptyset$ et, Ω étant simplement connexe, f est un automorphisme.

APPENDICE

Notations et définitions.

Une suite de domaines $(D_n)_n$ de $\mathbf{C}$ converge vers un ouvert D de $\mathbf{C}$ si et seulement si : pour tout compact K de $\mathbf{C}$:

$$\begin{cases} K \subset D \Rightarrow K \subset D_n & \text{pour } n \text{ assez grand} \\ K \subset \mathbf{C} \setminus \bar{D} \Rightarrow K \subset \mathbf{C} \setminus D_n & \text{pour } n \text{ assez grand} \end{cases}$$

On note :

Δ le disque unité de $\mathbf{C}$.

$\Delta(a, \varepsilon)$ le disque de centre $a \in \mathbf{C}$ et de rayon $\varepsilon > 0$.

Proposition. *Soient $(w_n)_n$ et $(\Omega_n)_n$ deux suites de domaines de $\mathbf{C}$ telles que : $(w_n) \subset \Delta(0, R)$ pour un certain $R > 0$, w_n converge vers Δ et Ω_n vers un ouvert Ω de $\mathbf{C}$.*

Soit $f_n : w_n \to \Omega_n$ une suite d'applications holomorphes propres telle que :

1) $\forall n \geq 1, f_n(0) = 0$.

2) $\forall n \geq 1$, la multiplicité de f_n est finie et indépendante de n.

3) $(f_n)_n$ converge uniformément sur les compacts de Δ vers une application $f : \Delta \to \Omega$.

Alors f est surjective et finie.

Preuve de la proposition : Commençons par montrer que f est surjective. Notons m la multiplicité commune des applications f_n et notons V_{f_n} le lieu de branchement de f_n ; $V_{f_n} =: \{z \in w_n : f_n'(z) = 0\}$.

Pour tout $n \geq 1$, l'application

$$f_n : w_n \setminus f_n^{-1}[f_n(V_{f_n})] \to \Omega_n(V_{f_n})$$

est un revêtement à m feuillets.

La construction suivante est classique. Pour tout $z_0 \in \Omega_n \setminus f_n(V_{f_n})$, il existe m fonctions holomorphes $U_{1,n}(z), \ldots, U_{m,n}(z)$ définies sur un voisinage V_0 de z_0 et telles que $f^{-1}(z) =: \{U_{1,n}(z), \ldots, U_{m,n}(z)\}$ pour tout z dans V_0. On définit le polynôme $P_n(u, z)$ par :

$$\forall u \in \mathbf{C}, \forall z \in \Omega_n \setminus f_n(V_{f_n}) : P_n(u, z) = \Pi_{j=1}^{m}(u - u_{j,n}(z)).$$

On vérifie facilement que $P_n(u,z) = u^m + P_{n,1}(z)u^{m-1} + \ldots + P_{n,0}(z)$ où les $P_{n,j}(z)$ sont des fonctions holomorphes bornées sur $\Omega_n \setminus f_n(V_{f_n})$. Ainsi les $P_{n,j}$ sont en fait holomorphes sur Ω_n et, par construction :

$$\forall z \in \Omega_n, \forall u \in \mathbf{C} : f_n(u) = z \Leftrightarrow P_n(u,z) = 0.$$

Puisque la suite de domaines $(w_n)_n$ est uniformément bornée, les suites $(P_{n,k})_n$ sont uniformément bornées sur les compacts de Ω, et le théorème de Montel montre que $(P_{n,k})_n$ converge vers P_k pour la topologie de la convergence uniforme sur sur les compacts de Ω, après une éventuelle extraction.

Pour tout $z \in \Omega$ et pour tout $u \in \mathbf{C}$, on notera :

$$P(u,z) =: u^m + P_1(z)u^{m-1} + \ldots + P_m(z).$$
$$E_z =: \{u \in \mathbf{C} : P(u,z) = 0\}.$$

La surjectivité de f résulte du fait suivant que l'on établira plus loin.

Pour tout $z \in \Omega$

$$(*) \quad \begin{cases} \text{i)} E_z \subset \overline{\Delta} \\ \text{ii)} E_z \cap \Delta \neq \emptyset \end{cases}$$

En effet, soit $z_0 \in \Omega$ et soit $u_0 \in E_{z_0} \cap \Delta$. On a $P(u_0, z_0) = 0$, puisque $P_k(\cdot, z_0)$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbf{C}$ vers $P(\cdot, z_0)$ d'après le théorème d'Hurwitz, il existe une suite $u_n \in \Delta(u_0, \frac{1}{n})$ et une suite d'entiers $k(n)$ telle que : $P_{k(n)}(u_n, z_0) = 0$, ceci est équivalent à $f_{k(n)}(u_n) = z_0$. Ainsi $f(u_0) = z_0$ et donc f est surjective.

Montrons maintenant que f est finie. Soit z_0 un point de Ω et soit U_0 un élément de $f(z_0)$. Sur Δ on définit :

$$\varphi(u) =: f(u) - z_0$$
$$\varphi_n(u) =: f_n(u) - z_0.$$

On a : $\varphi(u_0) = 0$ et $\varphi \not\equiv 0$, d'après le théorème d'Hurwitz, pour $\varepsilon > 0$ assez petit il existe une suite $(U_n)_n \subset \Delta(u_0, \varepsilon)$ telle que :

$\varphi_n(u_n) = 0$ c'est-à-dire $f_n(u_n) = z_0$. Comme pour n assez grand, $z_0 \in \Omega_n$, on en déduit que $f^{-1}(z_0) \subset f_n^{-1}(z_0)$. Ce qui montre que f est finie.

Nous terminons par la preuve de $(*)$. Commençons par établir l'assertion i). Nous procédons par l'absurde, supposons qu'il existe un point $z_0 \in \Omega$ tel que $E_{z_0} \not\subset \overline{\Delta}$.

Soit $u_0 \in E_{z_0} \setminus \overline{\Delta}$, puisque $u_0 \not\subset \overline{\Delta}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\Delta(u_0, \varepsilon) \subset \mathbf{C} \setminus w_n$ pour n assez grand. Par ailleurs, $z_0 \in \Omega_n$ et donc $P_n(u, z_0) \neq 0$ sur $\Delta(u_0, \varepsilon)$, pour n grand. Le théorème d'Hurwitz montre que ceci est impossible puisque $P(u_0, z_0) = 0$.

Passons maintenant à la preuve de ii).

Supposons l'existence d'un point z_0 de Ω tel que $E_{z_0} \cap b\Delta \neq \emptyset$. Soit u_0 un élément fixé de $E_{z_0} \cap b\Delta$, u_0 est un zéro de $P(\cdot, z_0)$ dont nous notons $m(z_0)$ la multiplicité. Montrons que pour tout $z \in \Omega$, u_0 est un zéro de $P(\cdot, z)$ de multiplicité supérieure ou égale à $m(z_0)$.

Pour tout $z \in \Omega$, $P(\cdot, z)$ peut s'écrire sous la forme : $P(u, z) =: (u - u_0)^{m(z)} \cdot \tilde{P}(u, z)$ avec $m(z) \geq 0$ et $\tilde{P}(u_0, z) \neq 0$.

Soit $z_1 \in \Omega$ tel que $m(z_1) = \min_{z \in \Omega} m(z); m(z_1) \geq 0$. Posons :

$$Q(U, z) =: \frac{P(U, z)}{(u - u_0)^{m(z_1)}} \ ; \ Q \in \mathcal{O}(\mathbf{C} \times \Omega).$$

Soit φ une fonction sous-harmonique pic pour $\overline{\Delta}$ en u_0. Sur Ω, on considère la fonction définie par :

$$\sigma(z) =: \sup \varphi(u)_{\{u \in \mathbf{C} | Q(u,z) = 0\}},$$

σ est sous-harmonique sur Ω. Etablissons maintenant que $m(z_1) = m(z_0)$. Si $m(z_1) < m(z_0)$, alors $\sigma(z_0) = 1$ et le principe du maximum montre que $\sigma \equiv 1$, ceci implique que $Q(u_0, z_1) = 0$ et ce qui est absurde. Ainsi pour tout $z \in \Omega$, u_0 est un zéro de $P(\cdot, z)$ d'ordre supérieur ou égal à $m(z_0)$. Nous terminons maintenant la preuve de ii). Supposons qu'il existe $z_0' \in \Omega$ tel que $E_{z_0'} \subset b\Delta$, d'après ce que l'on vient d'établir on aurait $E_z \subset b\Delta$ pour tout $z \in \Omega$, ceci est impossible, puisque $0 \in E_0$ ($f_n(0) = 0$ pour tout n).

BIBLIOGRAPHIE

[1] **ALEXANDER, H.,** *Holomorphic mappings from the ball and polydisc,* Math. Ann. **209**, 249-256 (1974).

[2] **BEDFORD, E., BELL, S.,** *Proper self-maps of weakly pseudoconvex domains,* Math. Ann. **261**, 47-49 (1982).

[3] **BEDFORD, E., FORNAESS, J.E.,** *A construction of peak functions on weakly pseudoconvex domains,* Ann. of Math., **107**, 555-568 (1978).

[4] **BEDFORD, E., PINCHUK, S.,** *Domains in $\mathbb{C}^2$ with non compact holomorphic automorphism groups,* Math. USSR Sbornik, **63**, 141-151 (1989).

[5] **BELL, S.,** *Boundary behaviour of proper holomorphic mappings between non-pseudoconvex domains,* Math. Ann. **106**, 639-643 (1984).

[6] **BELL, S.,** *The Bergman kernel function and proper holomorphic mappings,* Trans. Amer. Math. Soc. Vol. **270**, 685-691 (1982).

[7] **BELL, S., CATLIN, D.,** *Boundary regularity of proper holomorphic mappings,* Duke Math. J. **49**, 385-396 (1982).

[8] **BELL, S., CATLIN, D.,** *Regularity of CR mappings,* Math. Z. **199**, 357-368 (1988).

[9] **BERTELOOT, F.,** *A remark on local continuous extension of proper holomorphic mappings* , Contemporary Mathematics, Vol. **137**, 79-83 (1992).

[10] **BERTELOOT, F.,** *Characterization of models in $\mathbb{C}^2$ by their automorphism groups* , Int. Jour. Math. (to appear).

[11] **BERTELOOT, F., PINCHUK, S.,** *Proper holomorphic mappings between bounded complete Reinhardt domains in $\mathbb{C}^2$*, Math. Z. (to appear).

[12] **DIEDERICH, K., FORNAESS, J.E.,** *Proper holomorphic images of strictly pseudoconvex domains,* Math. Ann. **259**, 279-286 (1982).

[13] **DIEDERICH, K., FORNAESS, J.E.,** *Pseudoconvex domains with real-analytic boundary,* Ann. of Math. **107**, 371-384 (1978).

[14] **DIEDERICH, K., FORNAESS, J.,** *Proper holomorphic mappings between real analytic pseudoconvex dmains in* $\mathbb{C}^n$, Math. Ann. **282**, 681-700 (1988).

[15] **PAN, Y.,** *Proper holomorphic self-mappings of Reinhardt domains*, Math. Z. **208**, 289-295 (1991).

[16] **PINCHUK, S.,** *On proper maps of strictly pseudoconvex domains*, Sib. Math. J. **15**, 909-917 (1974).

[17] **RUDIN, W.,** *Function theory in the unit ball of* $\mathbb{C}^n$, (Springer Verlag, 1980).

Résumé

Nous présentons deux travaux concernant les auto-applications holomorphes propres de domaines de $\mathbf{C}^n$. Le premier porte sur les domaines de Reinhardt pseudoconvexes et de type fini, nous donnons une preuve élémentaire d'un résultat de Y. Pan : "toute auto-application holomorphe propre d'un domaine de Reinhardt à bord lisse pseudoconvexe et de type fini dans $\mathbf{C}^n$ est un automorphisme". Ce résultat est, à ce jour, le seul de cette nature concernant les domaines de type fini.

Le second traite le cas des domaines polynomiaux rigides de $\mathbf{C}^2$, c'est-à-dire les domaines de la forme : $\{(w,z) \in \mathbf{C}^2 : \mathrm{Re}\, w + P(z,\bar{z}) < 0\}$ où P est un polynôme sous-harmonique et sans terme harmonique. On notera que ces domaines ne sont pas bornés et ne sont en général pa équivalents à des domaines bornés. On obtient deux théorèmes m; le premier montre qu'une auto-application holomorphe propre d'un domaine polynômial rigide de $\mathbf{C}^2$ est un automorphisme ; le second fournit quelques éléments pour une éventuelle classification des applications holomorphes propres entre de tels domaimnes, plus précisément nous caractérisons les applications holomorphes propres entre deux domaines polynomiaux rigides de $\mathbf{C}^2$ qui fixent une droite de la forme $\{z = cte\}$ non contenue dans le lieu de branchement.