50376
1995
1

gen 20103697

N° d'ordre : 1387

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITE

SPECIALITE : MATHEMATIQUES PURES

par

Momo BANGOURA

QUASI-BIGEBRES JACOBIENNES ET GENERALISATIONS DES GROUPES DE LIE-POISSON

Soutenue le 13 janvier 1995 devant la Commission d'Examen :

Président : P. CARTIER, Ecole Normale Supérieure, Paris
Directeur de Recherche : Y. KOSMANN-SCHWARZBACH, Université de Lille I
Rapporteurs : J. H. LU, University of Arizona (USA)
A. MEDINA, Université de Montpellier II
Membres : R. GERGONDEY, Université de Lille I
J. HUEBSCHMANN, Université de Lille I

A la mémoire de mon père,

à ma chère mère à qui je dois tout,

à ma famille et

à mes amis.

REMERCIEMENTS

Je remercie très vivement Madame Y. Kosmann-Schwarzbach qui m'a initié à la théorie des bigèbres de Lie et groupes de Lie-Poisson en me confiant ce sujet. Son aide et ses encouragements m'ont permis de mener à bien ce travail. Je tiens à la remercier non seulement pour ses qualités pédagogiques, mais aussi pour ses qualités sociales.

Je tiens à remercier le Professeur P. Cartier qui a bien voulu présider le jury de cette thèse.

Madame J. H. Lu s'est intéréssée de près à mon travail lors de notre rencontre au printemps 1994 à Paris. Je saisis cette occasion pour lui exprimer ma profonde gratitude pour les séances de travail qu'elle m'a accordées et pour avoir bien voulu juger ce travail.

Je remercie le Professeur A. Medina pour avoir accepté de juger ce travail et pour sa présence à la soutenance de cette thèse.

Je remercie Monsieur R. Gergondey pour l'aide qu'il m'a apporté dans le cadre de la rédaction de cette thèse et pour avoir accepté d'examiner le travail final.

Le Professeur J. Huebschmann en détachement à Bonn a accepté de faire partie du jury de cette thèse en m'honorant de sa présence à la soutenance. Je l'en remercie vivement.

J'exprime ma profonde gratitude à tout le corps professoral de l'U.F.R de Mathématiques de l'Université de Lille I pour avoir assuré ma formation, ainsi qu'aux autorités universitaires de Lille I et de Conakry (Rép. de Guinée) pour l'établissement d'un accord de coopération entre leurs deux Universités, cadre dans lequel j'ai préparé cette thèse.

Mes remerciements vont également à la Mission Française de Coopération et d'Action Culturelle à Conakry (Rép. de Guinée) pour le soutien matériel et financier qu'elle m'a accordé durant la préparation de cette thèse.

Enfin je remercie tous ceux qui, de près ou de loin m'ont apporté, à un moment ou à un autre, leur soutien tant moral que matériel du début à la fin de ce travail.

TABLE DES MATIERES

Chapitre 0 : INTRODUCTION.

Les quasi-algèbres de Hopf ont été introduites par Drinfeld [Dr2] comme généralisations des algèbres de Hopf. Plus précisément une quasi-algèbre de Hopf sur un corps commutatif K est un quadruplet $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi)$, où A est une K-algèbre associative avec unité, $\Delta : A \to A \otimes A$ un homomorphisme d'algèbres, $\varepsilon : A \to K$ un homomorphisme et Φ un élément inversible de $A \otimes A \otimes A$, satisfaisant certaines conditions dont les principales sont l'axiome de quasi-co-associativité

$$(id \otimes \Delta)(\Delta(a)) = \Phi.(\Delta \otimes id)(\Delta(a)).\Phi^{-1}, \quad a \in A$$

et l'identité du pentagone

$$(id \otimes id \otimes \Delta)(\Phi).(\Delta \otimes id \otimes id)(\Phi) = (1 \otimes \Phi).(id \otimes \Delta \otimes id)(\Phi).(\Phi \otimes 1).$$

Comme dans le cas des algèbres de Hopf, Drinfeld définit dans [Dr2], [Dr3], [Dr4] les notions correspondantes de quasi-algèbres de Hopf quasitriangulaires, triangulaires, et introduit une opération nouvelle dans l'étude des quasi-algèbres de Hopf, qu'il appelle le "twisting", que nous préférons appeler ici la modification. La modification consiste à construire une nouvelle quasi-algèbre de Hopf à partir d'une quasi-algèbre de Hopf donnée. Ce qui simplifie beaucoup l'étude des quasi-algèbres de Hopf par rapport aux algèbres de Hopf.

Nous appellerons ici quasi-bigèbres jacobiennes ce que Drinfeld appelle les quasi-bigèbres de Lie. Ce sont les limites classiques des quasi-algèbres de Hopf, les axiomes les définissant se déduisent de ceux de ces dernières en faisant tendre le paramètre de déformation $\hbar$ vers zéro. Dans [Dr3], Drinfeld établit une correspondance biunivoque, à modification près, entre les quasi-algèbres de Hopf quasitriangulaires et leurs analogues classiques, les quasi-bigèbres jacobiennes quasitriangulaires, par le moyen du système des équations de Knizhnik-Zamolodchikov [Dr3], [Dr4], ce qui permet de construire des solutions de l'équation suivante

$$R_{12}\Phi_{312}R_{13}(\Phi_{132})^{-1}R_{23}\Phi_{123} = \Phi_{321}R_{23}(\Phi_{231})^{-1}R_{13}\Phi_{213}R_{12} \quad (\textbf{qYBQ}),$$

appelée équation quasi-Yang-Baxter quantique [Dr3]. Rappelons que, si

$$\Phi = \sum_i X_i \otimes Y_i \otimes Z_i \in A \otimes A \otimes A \quad \text{et} \quad R = \sum_i A_i \otimes B_i \in A \otimes A, \text{ où } A$$

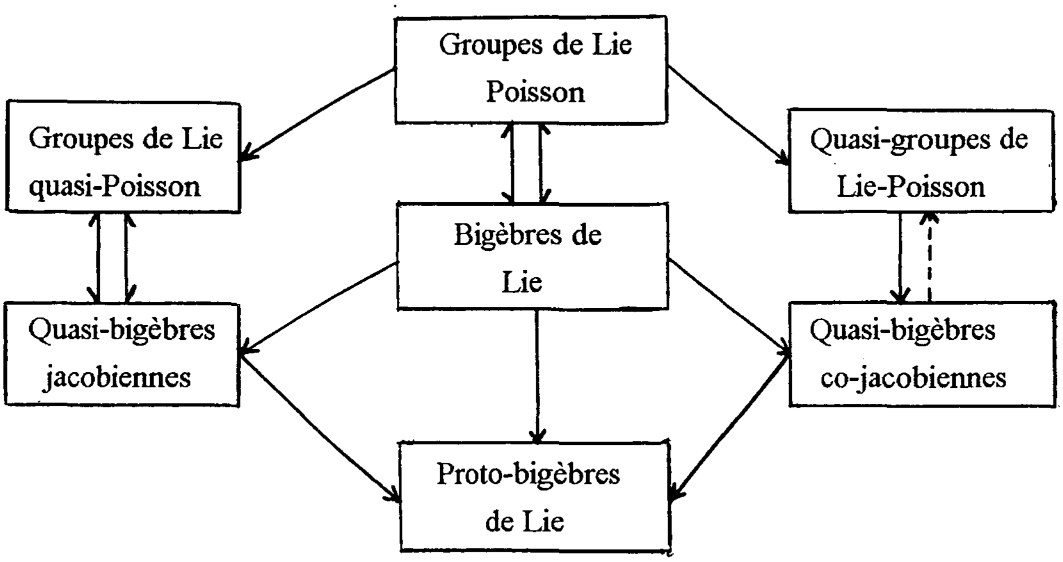
est une quasi-algèbre de Hopf, alors par définition

$$\Phi_{132} = \sum_i X_i \otimes Z_i \otimes Y_i\,, \qquad \Phi_{321} = \sum_i Z_i \otimes Y_i \otimes X_i\,, \qquad \Phi_{213} = \sum_i Y_i \otimes X_i \otimes Z_i\,,$$

$$\Phi_{231} = \sum_i Y_i \otimes Z_i \otimes X_i\,, \qquad \Phi_{312} = \sum_i Z_i \otimes X_i \otimes Y_i\,.$$

$$R_{12} = \sum_i A_i \otimes B_i \otimes 1, \quad R_{13} = \sum_i A_i \otimes 1 \otimes B_i, \quad R_{23} = \sum_i 1 \otimes A_i \otimes B_i.$$

Les quasi-algèbres de Hopf étant des généralisations des algèbres de Hopf, leurs limites classiques, les quasi-bigèbres jacobiennes, sont des généralisations des limites classiques des algèbres de Hopf, les bigèbres de Lie [Dr1]. Ici, nous étudions les diverses généralisations de la notion de bigèbre de Lie et les objets globaux correspondants généralisant la notion de groupe de Lie-Poisson. La notion de quasi-bigèbre jacobienne n'étant pas auto-duale, nous avons considéré l'objet dual, que nous appelons une quasi-bigèbre co-jacobienne, en plus nous considérons la notion plus générale de proto-bigèbre de Lie, dont les quasi-bigèbres jacobiennes et leurs duaux ainsi que les bigèbres de Lie sont des cas particuliers. Nous illustrons tout cela par le diagramme suivant :



Dans le chapitre I, nous faisons un rappel des différents outils de notre travail, notamment le crochet de Nijenhuis-Richardson [N-R], le grand crochet [KS1], [KS2], et les crochets de Schouten, tout en mettant l'accent sur les différentes relations entre eux. Nous insistons surtout sur le grand crochet, qui a l'avantage de simplifier les calculs et démonstrations sur les objets que nous considérons dans la suite. Il a été défini d'abord par Kostant et Sternberg [Ko-S] et introduit dans la théorie des bigèbres de Lie par Lecomte et Roger [L-Ro]. Nous démontrons une formule explicite du grand crochet pour les éléments décomposables dans $\Lambda(F^* \oplus F)$ dont certains cas particuliers ont été établis dans [L-Ro] et dans [KS2].

Dans le chapitre II, nous étudions diverses généralisations des bigèbres de Lie que nous convenons de regrouper sous le nom de quasi-bigèbres de Lie, nom que Drinfeld attribue dans [Dr2], [Dr3] aux seules quasi-bigèbres jacobiennes. Nous étudions la relation d'équivalence sur les quasi-bigèbres jacobiennes, appelée la modification ("twisting" en anglais, [KS2], [Ba-KS]), qui est l'analogue classique de la modification ("twisting", [Dr2]) sur les quasi-algèbres de Hopf et nous établissons le lien avec les couples de Manin. En fait, Drinfeld a prouvé [Dr3], que si (F_0, F) est un couple de Manin, alors tout choix d'un supplémentaire isotrope de F dans F_0 définit sur F une structure de quasi-bigèbre jacobienne et que les structures de quasi-bigèbre jacobienne obtenues par le choix de deux supplémentaires isotropes de F dans F_0 sont équivalentes modulo modification. Nous définissons les structures de quasi-bigèbres jacobiennes exactes et quasitriangulaires, et nous démontrons que toute proto-bigèbre de Lie admet un double qui est muni d'une structure de quasi-bigèbre jacobienne quasitriangulaire. Cette construction du double généralise celle du double classique dans le cas des bigèbres de Lie [Dr1] , [A-KS], [A]. Nous comparons les doubles de quasi-bigèbres jacobiennes équivalentes par modification. La dernière partie du chapitre est consacrée à des exemples.

Dans le chapitre III, nous étudions les groupes de Lie quasi-Poisson; ils ont été définis par Kosmann-Schwarzbach [KS1], [KS2], comme étant les objets globaux correspondant aux quasi-bigèbres jacobiennes. Plus précisément un groupe de Lie quasi-Poisson est un triplet (G, P, φ) où G est un groupe de Lie, P un champ multiplicatif de bivecteurs sur G, "quasi-Poisson" relativement à

$\varphi \in \Lambda^3 T_e G$. Dans [KS2] on démontre l'existence d'une correspondance biunivoque entre les groupes de Lie quasi-Poisson connexes et simplement connexes, et les quasi-bigèbres jacobiennes. Ici, nous définissons la notion de groupe de Lie quasi-Poisson affine généralisant celle de groupe de Lie-Poisson affine introduite par Dazord et Sondaz [Da-So], et étudiée par Lu [Lu], nous établissons le lien entre cette notion et la modification sur les groupes de Lie quasi-Poisson.

Le chapitre IV est consacré à la description de l'objet dual d'un groupe de Lie quasi-Poisson; plus précisément il s'agit de l'objet global correspondant à une quasi-bigèbre co-jacobienne, que nous convenons d'appeler un quasi-groupe de Lie-Poisson. On se sert de la théorie des boucles de Lie [Du], [Ho-St], plus particulièrement des boucles de Lie mono-alternatives à droite [Sa-Mi1], [Sa-Mi2] qui sont munies de façon naturelle d'une connexion linéaire, que nous appelons la connexion canonique, généralisant la connexion classique de Cartan sur les groupes de Lie. Une boucle de Lie est une variété analytique munie d'une loi de composition interne vérifiant toutes les propriétés d'un groupe excepté l'associativité. Dans une boucle de Lie mono-alternative à droite, les crochets commutateur et associateur s'expriment respectivement en fonction de la torsion de la connexion canonique et de sa dérivée covariante. Nous définissons un quasi-groupe de Lie-Poisson comme une boucle de Lie mono-alternative à droite G munie d'une structure de Poisson compatible avec sa loi de composition et d'un élément de $\Lambda^3 T_e^* G$ mesurant dans un certain sens le défaut d'associativité de la loi de composition de G. Nous démontrons que l'espace tangent en l'identité à tout quasi-groupe de Lie-Poisson est une quasi-bigèbre co-jacobienne.

Chapitre I : PRELIMINAIRES.

Dans ce chapitre on rappelle les notions de base et les résultats s'y rapportant, qui seront utilisés dans toute la suite.

1. Crochet de Nijenhuis-Richardson, grand crochet et crochets de Schouten.

Soit F un espace vectoriel de dimension finie sur un corps K, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Désignons par $A^p(F)$, l'espace vectoriel des (p+1)-formes sur F à valeurs dans F et posons

$$A(F) = \bigoplus_{p\geq -1} A^p(F).$$

Pour $\alpha \in A^p(F)$, $\beta \in A^q(F)$ définissons $(i_\beta\alpha) \in A^{p+q}(F)$ par :

$$\left(i_\beta\alpha\right)(x_1,\ldots,x_{p+q+1}) = \sum_\sigma (Sign\,\sigma)\alpha(\beta(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(q+1)}), x_{\sigma(q+2)},\ldots,x_{\sigma(p+q+1)})$$

où σ est une permutation de $\{1,\ldots,p+q+1\}$, telle que $\sigma(1) < \ldots < \sigma(q+1)$, $\sigma(q+2) < \ldots < \sigma(p+q+1)$ et $Sign\,\sigma$ est la signature de σ.

Posons

$$[\alpha,\beta]^F_{N-R} = i_\beta\alpha - (-1)^{pq} i_\alpha\beta.$$

Définition 1.1 : *L'opération* $[.,.]^F_{N-R}$ *ainsi définie est appelée crochet de Nijenhuis-Richardson.*

Dans [N-R], on a le résultat suivant :

Proposition 1.1 : *Le crochet* $[.,.]^F_{N-R}$ *définit une structure d'algèbre de Lie graduée sur* $A(F)$.

Remarquons que sur $A^0(F)$ le crochet de Nijenhuis-Richardson coïncide avec le commutateur des endomorphismes. De plus, on a le résultat suivant :

Lemme 1.1: *Une 2-forme à valeurs vectorielles* $\mu \in A^1(F)$ *satisfait l'identité de Jacobi si et seulement si* $[\mu,\mu]^F_{N-R} = 0$.

Démonstration : Soit $\mu \in A^1(F)$ et x, y, z des éléments de F. En utilisant la définition du crochet $[.,.]^F_{N-R}$ on a :

$$[\mu, \mu]^F_{N-R}(x, y, z) = 2\oint \mu(\mu(x, y), z),$$

où $\oint$ désigne la somme sur les permutations circulaires des éléments x, y, z. D'où le lemme.

Soit $\mu \in A^1(F)$ un crochet d'algèbre de Lie sur F. On définit, une application linéaire de degré 1 de $A(F)$ dans elle-même, δ_μ, par :

$$\begin{aligned}(\delta_\mu \alpha)(x_0,\dots,x_{p+1}) = &\sum_{i=0}^{p+1}(-1)^i ad_{x_i}{}^{\mu}(\alpha(x_0,\dots,\hat{x}_i,\dots,x_{p+1})) \\ &+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\alpha(\mu(x_i,x_j),x_0,\dots,\hat{x}_i,\dots,\hat{x}_j,\dots,x_{p+1})\end{aligned}$$

où $\alpha \in A^p(F)$, $x_0,\dots,x_{p+1} \in F$, le signe $\wedge$ indique l'omission de l'argument et $ad^\mu_x y = \mu(x,y)$, pour $x, y \in F$.

Remarque : On peut définir un tel opérateur pour tout élément $\mu \in A^1(F)$. En général $\delta^2_\mu \neq 0$, et

$$\delta^2_\mu = 0$$

si et seulement si μ définit une structure d'algèbre de Lie sur F [N-R]. Par abus de langage, on dit que δ_μ est l'opérateur cobord associé à $\mu \in A^1(F)$. Soit maintenant F^* le dual de F. Considérons l'algèbre extérieure $\Lambda(F^* \oplus F)$ avec la bigraduation

$$A^{(p,q)}(F) = \Lambda^{q+1}F^* \otimes \Lambda^{p+1}F,$$

où $p \geq -1$, $q \geq -1$ et la graduation

$$A^{(k)}(F) = \bigoplus_{p+q=k} A^{(p,q)}(F),$$

où $k \geq -2$.

Définition 1.2 : *Le grand crochet est la structure d'algèbre de Lie graduée* $[.,.]$ *sur l'espace vectoriel gradué*

$$\Lambda(F^* \oplus F) = \bigoplus_{k \geq -2} A^{(k)}(F)$$

définie par les conditions :

- Si σ *et* σ' *sont tous deux éléments de* $K \oplus F$, *ou de* $K \oplus F^*$, *alors* $[\sigma, \sigma'] = 0$,

- Si $\sigma \in F$ *et* $\sigma' \in F^*$, *alors* $[\sigma, \sigma'] = <\sigma, \sigma'>$, *où* $< . , . >$ *est la dualité naturelle entre* F *et* F^*,

- Si $\sigma \in A^{(k)}(F)$, $\sigma' \in A^{(k')}(F)$ *et* $\sigma'' \in A^{(k'')}(F)$, *alors*

$$[\sigma, \sigma' \wedge \sigma''] = [\sigma, \sigma'] \wedge \sigma'' + (-1)^{kk'} \sigma' \wedge [\sigma, \sigma''].$$

Ainsi l'espace vectoriel $\Lambda(F^* \oplus F) = \bigoplus_{k \geq -2} A^{(k)}(F)$ est muni à la fois d'une structure d'algèbre commutative graduée et d'une structure d'algèbre de Lie graduée, les deux structures étant compatibles. Une telle algèbre est appelée une algèbre de Poisson (voir par exemple [Ko] où le cas Z_2-gradué est traité).

Dans la suite, le crochet ainsi défini jouera un grand rôle dans la démonstration de nombreux résultats. Nous allons établir une formule pour les éléments décomposables dont certains cas particuliers sont établis dans [L-Ro] et dans [KS2].

Proposition 1.2 ([Ba-KS]) : *La formule explicite pour le grand crochet des éléments décomposables dans* $\Lambda(F^* \oplus F)$ *est donnée par :*
Pour $\xi \otimes x \in \Lambda^{q+1} F^* \otimes \Lambda^{p+1} F$, $\xi' \otimes x' \in \Lambda^{q'+1} F^* \otimes \Lambda^{p'+1} F$,

$$\begin{aligned}[\xi \otimes x, \xi' \otimes x'] = {} & (-1)^{p(q'+1)} \sum_{j=0}^{p} (-1)^j (\xi \wedge i_{x_j} \xi') \otimes x_0 \wedge \ldots \wedge \hat{x}_j \wedge \ldots \wedge x_p \wedge x' - \\ & -(-1)^{pq'+q} \sum_{j=0}^{p'} (-1)^j (i_{x'_j} \xi \wedge \xi') \otimes x \wedge x'_0 \wedge \ldots \wedge \hat{x}'_j \wedge \ldots \wedge x'_{p'}\end{aligned}$$

où $i_x \xi$ *désigne le produit intérieur d'une forme* ξ *par un vecteur* x *et* $\wedge$ *désigne l'omission de l'argument*.

Démonstration : Raisonnons par récurrence.

- Pour $p = p' = -1$, q, q' quelconques ou $q = q' = -1$, p, p' quelconques, la formule est évidente.

- Pour $p = p' = q = q' = 0$, la formule est encore vérifiée. En effet pour $\xi \otimes x$, $\xi' \otimes x' \in F^* \otimes F$ on a :

$$[\xi \otimes x,\ \xi' \otimes x'] = <\xi', x> \xi \otimes x' - <\xi, x'> \xi' \otimes x.$$

- Pour $q > 0$, $q' > 0$, $\xi \otimes x \in \Lambda^{q+1} F^* \otimes F$, $\xi' \otimes x' \in \Lambda^{q'+1} F^* \otimes F$ on a :

$$\begin{aligned}[\xi \otimes x,\ \xi' \otimes x'] &= (\xi \wedge i_x \xi') \otimes x' - (-1)^{qq'} (\xi' \wedge i_{x'} \xi) \otimes x \\ &= (\xi \wedge i_x \xi') \otimes x' - (-1)^{q} (i_{x'} \xi \wedge \xi') \otimes x.\end{aligned}$$

Ce qui prouve la formule pour $p = p' = 0$, $q > 0$, $q' > 0$. De même on prouve la formule pour $q = q' = 0$ *et* $p > 0, p' > 0$.

- Supposons vraie la formule pour un certain couple (p, p') quelles que soient les valeurs prises par q et q', et montrons qu'elle reste vraie pour $(p+1,\ p'+1)$, q, q' quelconques.

Pour $\xi \otimes x \in \Lambda^{q+1} F^* \otimes \Lambda^{p+1} F$, $\xi' \otimes x' \in \Lambda^{q'+1} F^* \otimes \Lambda^{p'+1} F$, $x_{p+1}, x'_{p'+1} \in F$ on a :

$$\begin{aligned}
&[\xi \otimes x \wedge x_{p+1},\ \xi' \otimes x' \wedge x'_{p'+1}] \\
&= [\xi \otimes x \wedge x_{p+1},\ \xi' \otimes x'] \wedge x'_{p'+1} \\
&\quad + (-1)^{(p+q+1)(p'+q')} \xi' \otimes x' \wedge [\xi \otimes x \wedge x_{p+1},\ x'_{p'+1}] \\
&= \xi \otimes x \wedge [x_{p+1}, \xi' \otimes x'] \wedge x'_{p'+1} \\
&\quad + (-1)^{(p'+q')} [\xi \otimes x,\ \xi' \otimes x'] \wedge x_{p+1} \wedge x'_{p'+1} \\
&\quad - (-1)^{(p+q+1)(p'+q')} \xi' \otimes x' \wedge [\xi \otimes x,\ x'_{p'+1}] \wedge x_{p+1} \\
&= \xi \otimes x \wedge [x_{p+1}, \xi'] \otimes x' \wedge x'_{p+1} \\
&\quad + (-1)^{(p'+q')+p(q'+1)} \sum_{j=0}^{p} (-1)^j (\xi \wedge i_{x_j} \xi') \otimes x_0 \wedge \ldots \wedge \hat{x}_j \wedge \ldots \wedge x_p \wedge x' \wedge x_{p+1} \wedge x'_{p'+1} \\
&\quad - (-1)^{(p'+q')+pq'+q} \sum_{j=0}^{p'} (-1)^j (i_{x'_j} \xi \wedge \xi') \otimes x \wedge x'_0 \wedge \ldots \wedge \hat{x}'_j \wedge \ldots \wedge x'_{p'} \wedge x_{p+1} \wedge x'_{p'+1} \\
&\quad - (-1)^{(p+q+1)(p'+q')+p-1} \xi' \otimes x' \otimes [\xi,\ x'_{p'+1}] \otimes x \wedge x_{p+1}
\end{aligned}$$

$$= (-1)^{(p+1)(q'+1)}\sum_{j=0}^{p+1}(-1)^j(\xi\wedge i_{x_j}\xi')\otimes x_0\wedge\ldots\wedge\hat{x}_j\wedge\ldots\wedge x_p\wedge x_{p+1}\wedge x'\wedge x'_{p'+1}$$

$$-(-1)^{(p+1)q'+q}\sum_{j=0}^{p'+1}(-1)^j(i_{x'_j}\xi\wedge\xi')\otimes x\wedge x_{p+1}\wedge x'_0\wedge\ldots\wedge\hat{x}'_j\wedge\ldots\wedge x'_{p'}\wedge x'_{p'+1}.$$

La formule est donc démontrée.

Soit $g = (F, \mu)$ une algèbre de Lie, où $\mu : \Lambda^2(F) \to F$ est le crochet de Lie sur F.

Définition 1.3 : *Le crochet de Schouten algébrique est la structure d'algèbre de Lie graduée, $[.,.]^\mu$, sur l'algèbre extérieure, $\Lambda g = \bigoplus_{p\geq -1} \Lambda^{p+1} g$, de g qui :*

(i) s'annule si l'un des arguments est dans K,

(ii) étend le crochet d'algèbre de Lie sur g, et

(iii) satisfait

$$[\sigma, \sigma'\wedge\sigma'']^\mu = [\sigma, \sigma']^\mu\wedge\sigma'' + (-1)^{p(p'+1)}\sigma'\wedge[\sigma, \sigma'']^\mu$$

pour $\sigma\in\Lambda^{p+1}g$, $\sigma'\in\Lambda^{p'+1}g$, $\sigma''\in\Lambda^{p''+1}g$.

En particulier, si $a\in\Lambda^2 F$, alors $[a,a]^\mu$ est l'élément de $\Lambda^3 F$ tel que, pour $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in F^*$,

$$[a,a]^\mu(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = -2\oint <\xi_3, \mu(a\xi_1, a\xi_2)>,$$

où $\oint$ désigne la somme sur les permutations circulaires des indices 1, 2, 3 et a considéré comme application linéaire de F^* dans F est défini par :

$$<\eta, a(\xi)> = a(\xi\otimes\eta) ;$$

ou dans la notation en termes de produits tensoriels triples,

$$[a,a]^\mu = -2([a_{12}, a_{13}] + [a_{12}, a_{23}] + [a_{13}, a_{23}]).$$

Si $a = \sum_i a_i \otimes b_i$, alors par définition,

$$a_{12} = \sum_i a_i \otimes b_i \otimes 1, \qquad a_{13} = \sum_i a_i \otimes 1 \otimes b_i , \qquad a_{23} = \sum_i 1 \otimes a_i \otimes b_i ,$$

$$[a_{12}, a_{13}] = \sum_{i,j} \mu(a_i, a_j) \otimes b_i \otimes b_j, \qquad [a_{12}, a_{23}] = \sum_{i,j} a_i \otimes \mu(b_i, a_j) \otimes b_j,$$

$$[a_{13}, a_{23}] = \sum_{i,j} a_i \otimes a_j \otimes \mu(b_i, b_j).$$

Rappelons à présent la définition du crochet de Schouten sur une variété.

Définition 1.4 : *Soit M une variété de classe C^∞. Le crochet de Schouten est le crochet d'algèbre de Lie graduée $[.,.]_S$ sur l'espace des champs de multivecteurs (tenseurs contravariants antisymétriques) de classe C^∞ sur M,*

$$\Lambda M = \bigoplus_{p \geq -1} \Lambda^{p+1} M,$$

où $\Lambda^{p+1}M$ désigne l'espace des champs de $(p+1)$-vecteurs, qui

(i) s'annule quand les deux arguments sont dans $\Lambda^0 M = C^\infty(M)$,

(ii) étend le crochet de Lie des champs de vecteurs,

(iii) satisfait

$$[\sigma, \sigma' \wedge \sigma'']_S = [\sigma, \sigma']_S \wedge \sigma'' + (-1)^{p(p'+1)} \sigma' \wedge [\sigma, \sigma'']_S ,$$

pour $\sigma \in \Lambda^{p+1}M$, $\sigma' \in \Lambda^{p'+1}M$, $\sigma'' \in \Lambda^{p''+1}M$.

En particulier si la variété M est un groupe de Lie G, les champs de multivecteurs invariants à gauche (resp., à droite) sur G constituent une sous-algèbre de $(\Lambda G, [.,.]_S)$ qui est isomorphe (resp., anti-isomorphe) à $(\Lambda g, [.,.]^\mu)$ où g est l'algèbre de Lie de G et μ le crochet d'algèbre de Lie sur g défini à l'aide des champs de vecteurs invariants à gauche.

2- Relations entre les différents crochets.

Nous allons à présent rappeler les différentes relations entre les crochets définis ci-dessus.

Considérons l'espace, $\Lambda F^* \otimes F$ (resp., $F^* \otimes \Lambda F$), des formes à valeurs vectorielles sur F (resp., F^*). Chacun des deux espaces est une sous-algèbre de $\Lambda(F^* \oplus F)$ et la restriction du grand crochet à ces sous-espaces coïncide, au signe près, avec le crochet de Nijenhuis-Richardson [KS2]. Plus précisement :

- Pour $\xi \in \Lambda^{q+1}F^*$, $\eta \in \Lambda^{q'+1}F^*$, $x, y \in F$ on a :

$$[\xi \otimes x, \eta \otimes y] = -(-1)^{qq'}[\xi \otimes x, \eta \otimes y]^F_{N-R},$$

en particulier pour μ, $\mu' \in \Lambda^2 F^* \otimes F$,

$$[\mu, \mu'] = [\mu, \mu']^F_{N-R}.$$

- Pour $\xi, \eta \in F^*$, $x \in \Lambda^{p+1}F$, $y \in \Lambda^{p'+1}F$,

$$[\xi \otimes x, \eta \otimes y] = (-1)^{pp'}[\xi \otimes x, \eta \otimes y]^{F^*}_{N-R},$$

en particulier pour $\gamma, \gamma' \in F^* \otimes \Lambda^2 F$,

$$[\gamma, \gamma'] = -[\gamma, \gamma']^{F^*}_{N-R}.$$

Lemme 2.1: *Soient F_1, F_2 deux espaces vectoriels de dimensions finies sur le corps K. Soient :*

$$\alpha_1 \in Hom(\Lambda^{q+1}F_1, \Lambda^{p+1}F_1), \quad \alpha_1' \in Hom(\Lambda^{q'+1}F_1, \Lambda^{p'+1}F_1)$$

$$\alpha_2 \in Hom(\Lambda^{q+1}F_2, \Lambda^{p+1}F_2), \quad \alpha_2' \in Hom(\Lambda^{q'+1}F_2, \Lambda^{p'+1}F_2)$$

et ω une application linéaire de F_1 dans F_2 tels que :

$$(\Lambda^{p+1}\omega) \circ \alpha_1 = \alpha_2 \circ (\Lambda^{q+1}\omega)$$

$$(\Lambda^{p'+1}\omega) \circ \alpha_1' = \alpha_2' \circ (\Lambda^{q'+1}\omega).$$

Alors on a :

$$(\Lambda^{p+p'+1}\omega)\circ[\alpha_1,\alpha_1']=[\alpha_2,\alpha_2']\circ(\Lambda^{q+q'+1}\omega).$$

Ce lemme, qui sera utilisé dans le chapitre II, se démontre par récurrence en utilisant les relations entre le grand crochet et le crochet de Nijenhuis-Richardson ou en utilisant la formule de la proposition 1.2 pour les éléments décomposables.

On pose

$$d_\mu=[\mu,\,.],\quad d_\gamma=[\gamma,\,.].$$

Théorème 2.1 ([KS2]) : *Soit* $\mu\in\Lambda^2F^*\otimes F$ *tel que* $[\mu,\mu]=0$. *Alors :*

(i) pour $\sigma,\sigma'\in\Lambda F$ *on a :*

$$[\sigma,[\mu,\sigma']]=[\sigma,\sigma']^\mu$$

(ii) l'opérateur d_μ *est un morphisme d'algèbres de Lie de* $(\Lambda F,[.,.]^\mu)$ *dans* $(F^*\otimes\Lambda F,[.,.])$.

Théorème 2.2 ([KS2]) : *Supposons que* $\mu\in\Lambda^2F^*\otimes F$ *et* $\gamma\in F^*\otimes\Lambda^2F$ *satisfont* $[\mu,\mu]=0$ *et* $[\mu,\gamma]=0$. *Alors :*

(i)
$$d_\mu d_\gamma+d_\gamma d_\mu=0,$$

(ii) l'opérateur d_γ *est une dérivation de dégré 1 de* $(\Lambda F,[.,.]^\mu)$ *et de* $(F^*\otimes\Lambda F,[.,.])$,

(iii) les opérateurs d_μ *(resp.,* d_γ*) et* δ_μ *(resp.,* δ_γ*) sont liés par les relations :*

$$d_\mu\sigma=-\delta_\mu\sigma,$$

$$d_\gamma\sigma=(-1)^q\,\delta_\gamma\sigma,$$

pour $\sigma\in\Lambda^{q+1}F^*\otimes\Lambda^{p+1}F$.

Soit G un groupe de Lie et $g = (F, \mu)$ son algèbre de Lie et soit σ^{λ} (resp., σ^{ρ}) le champ de multivecteurs invariant à gauche (resp., à droite) défini par $\sigma \in \Lambda g$. Alors comme on l'a vu à la fin du paragraphe 1 le crochet de Schouten algébrique et le crochet de Schouten des champs de multivecteurs sur G sont liés comme suit :

$$[\sigma^{\lambda}, \sigma'^{\lambda}]_S = ([\sigma, \sigma']^{\mu})^{\lambda},$$

$$[\sigma^{\rho}, \sigma'^{\rho}]_S = -([\sigma, \sigma']^{\mu})^{\rho}.$$

Chapitre II : STRUCTURES DE QUASI - BIGEBRES DE LIE.

Dans ce chapitre, nous étudions différentes généralisations de la notion de bigèbre de Lie. Nous définissons la notion plus générale de proto-bigèbre de Lie en faisant remarquer que les quasi-bigèbres jacobiennes et leurs objets duaux, les quasi-bigèbres co-jacobiennes, en sont des cas particuliers. Nous définissons une relation d'équivalence sur les quasi-bigèbres jacobiennes, appelée modification ("twisting" en anglais) et nous établissons la correspondance entre les couples de Manin et les classes d'équivalence de quasi-bigèbres jacobiennes modulo modification. Nous démontrons l'existence du double pour chaque proto-bigèbre de Lie donc en particulier pour une quasi-bigèbre jacobienne et nous montrons que ce double est dans tous les cas muni d'une structure de quasi-bigèbre jacobienne quasitriangulaire. Après avoir défini la notion de morphisme de quasi-bigèbres jacobiennes nous interprétons l'injection d'une quasi-bigèbre jacobienne dans son double comme un morphisme de quasi-bigèbres jacobiennes. Puis nous comparons les doubles de quasi-bigèbres jacobiennes équivalentes par modification. Enfin nous déterminons les stuctures de quasi-bigèbres jacobiennes exactes et quasitriangulaires les plus générales sur une algèbre de Lie complexe simple quelconque, sur $gl(2, \mathbf{C})$ et $gl(3, \mathbf{C})$. Certains résultats de ce chapitre figurent déjà dans [Dr2], [Dr3], [KS1], [KS2], [Ba-KS].

1. Proto-bigèbres de Lie, quasi-bigèbres jacobiennes et co-jacobiennes.

1.1 Définitions générales.

Soit F un espace vectoriel de dimension finie sur un corps K, $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Les notations sont celles du chapitre I.

Définition 1.1 : *Un élément de dégré* 1, $M \in A^{(1)}(F)$ *est une structure s'il est de carré nul dans* $(\Lambda(F^* \oplus F), [.,.])$, *i.e.,*

$$[M, M] = 0. \qquad (1)$$

L'élément de dégré un le plus général de $\Lambda(F^* \oplus F)$ s'écrit $M = \mu + \gamma + \varphi + \psi$, où $\mu \in \Lambda^2 F^* \otimes F$, $\gamma \in F^* \otimes \Lambda^2 F$, $\varphi \in \Lambda^3 F$, $\psi \in \Lambda^3 F^*$.

La condition pour que M soit une structure s'écrit :

$$[\mu + \gamma + \varphi + \psi, \ \mu + \gamma + \varphi + \psi] = 0.$$

En tenant compte des bidegrés, on voit que cette condition est équivalente aux suivantes :

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}[\mu, \mu] + [\gamma, \psi] = 0 \\
&\tfrac{1}{2}[\gamma, \gamma] + [\mu, \varphi] = 0 \\
&[\mu, \gamma] + [\varphi, \psi] = 0 \\
&[\mu, \psi] = 0 \\
&[\gamma, \varphi] = 0
\end{aligned} \qquad (2)$$

Définition 1.2 : *Pour F, μ, γ, φ, ψ donnés, satisfaisant les conditions* (2), *on dit que* $(F, \mu, \gamma, \varphi, \psi)$ *est une proto-bigèbre de Lie.*

Remarque : Les proto-bigèbres de Lie ont été d'abord définies dans [KS1] sous le nom de quasi-bigèbres de quasi-Lie.

On voit que si $(F, \mu, \gamma, \varphi, \psi)$ est une proto-bigèbre de Lie, alors $(F^*, \gamma, \mu, \psi, \varphi)$ est aussi une proto-bigèbre de Lie. On peut dire que la notion de proto-bigèbre de Lie est auto-duale. Le cas où $\psi = 0$ conduit à la définition suivante :

Définition 1.3 : *Le quadruplet* $(F, \mu, \gamma, \varphi)$, *avec* $\mu \in \Lambda^2 F^* \otimes F$, $\gamma \in F^* \otimes \Lambda^2 F$ *et* $\varphi \in \Lambda^3 F$ *satisfaisant :*

$$\begin{aligned}
&[\mu, \mu] = 0 \\
&\tfrac{1}{2}[\gamma, \gamma] + [\mu, \varphi] = 0 \\
&[\mu, \gamma] = 0 \\
&[\gamma, \varphi] = 0
\end{aligned} \qquad (3)$$

est appelé une quasi-bigèbre jacobienne.

En utilisant les propriétés du grand crochet, on obtient :

Proposition 1.1 : *Un quadruplet* $(F, \mu, \gamma, \varphi)$ *est une quasi-bigèbre jacobienne si et seulement si F est un espace vectoriel muni d'un crochet* $\mu \in Hom(\Lambda^2 F, F)$, *d'un co-crochet* $\gamma \in Hom(F, \Lambda^2 F)$ *et d'un élément* φ *dans* $\Lambda^3 F$ *tels que :*

(*1.4.1*) $\mathfrak{g} = (F, \mu)$ *est une algèbre de Lie,*

(*1.4.2*) γ *est un 1-cocycle de l'algèbre de Lie* $\mathfrak{g} = (F, \mu)$, *à valeurs dans* $\Lambda^2 F$, *pour l'action adjointe définie par* μ,

(*1.4.3*) $\frac{1}{2}[\gamma, \gamma] + d_\mu \varphi = 0,$

(*1.4.4*) $d_\gamma \varphi = 0\,.$

En explicitant ces conditions, on voit que ce que nous appelons "quasi-bigèbres jacobiennes" coïncide avec les "quasi-bigèbres de Lie" définies par Drinfeld dans [Dr2].

En échangeant les rôles de F et F^*, on est conduit à la définition suivante, correspondant au cas où $\varphi = 0$:

Définition 1.4 *: Le quadruplet* (F, μ, γ, ψ) *avec* $\mu \in \Lambda^2 F^* \otimes F$, $\gamma \in F^* \otimes \Lambda^2 F$ *et* $\psi \in \Lambda^3 F^*$ *satisfaisant :*

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}[\mu, \mu] + [\gamma, \psi] = 0 \\ &[\gamma, \gamma] = 0 \\ &[\mu, \gamma] = 0 \\ &[\mu, \psi] = 0 \end{aligned} \qquad (4)$$

est appelé une quasi-bigèbre co-jacobienne.

Remarques :

a) Dans le cas où $\varphi = \psi = 0$, le triplet (F, μ, γ) avec $\mu \in \Lambda^2 F^* \otimes F$ et $\gamma \in F^* \otimes \Lambda^2 F$ satisfaisant :

$$[\mu, \mu] = 0, \quad [\mu, \gamma] = 0, \quad [\gamma, \gamma] = 0$$

n'est autre qu'une bigèbre de Lie (voir, par exemple, [A]).

b) Si $(F, \mu, \gamma, \varphi)$ est une quasi-bigèbre jacobienne, alors $(F^*, \gamma, \mu, \varphi)$ est une quasi-bigèbre co-jacobienne. Par conséquent ces deux notions sont duales l'une de l'autre et ne sont pas auto-duales, alors que comme nous l'avons vu, les notions de proto-bigèbre de Lie et de bigèbre de Lie sont auto-duales.

1.2 Morphismes de quasi-bigèbres jacobiennes.

Comme pour les bigèbres de Lie, on peut définir les notions de morphisme et d'anti-morphisme pour les quasi-bigèbres jacobiennes et co-jacobiennes.

Définition 1.5 : *Soient* $(F_1, \mu_1, \gamma_1, \varphi_1)$ *et* $(F_2, \mu_2, \gamma_2, \varphi_2)$ *deux quasi-bigèbres jacobiennes et* ω *une application linéaire de* F_1 *dans* F_2. *On dit que* ω *est un morphisme (resp. anti-morphisme) de quasi-bigèbres jacobiennes de* $(F_1, \mu_1, \gamma_1, \varphi_1)$ *dans* $(F_2, \mu_2, \gamma_2, \varphi_2)$ *si :*

(*i*) $\omega \circ \mu_1 = \mu_2 \circ (\Lambda^2 \omega)$,

(*ii*) $\gamma_2 \circ \omega = (\Lambda^2 \omega) \circ \gamma_1$ *(resp.* $\gamma_2 \circ \omega = -(\Lambda^2 \omega) \circ \gamma_1$ *),*

(*iii*) $\varphi_2 = (\Lambda^3 \omega)(\varphi_1)$.

Dans le cas des quasi-bigèbres co-jacobiennes les notions de morphisme et d'anti-morphisme sont définies de façon similaire, la conditon (*iii*) étant remplacée par $\psi_1 = \psi_2 \circ (\Lambda^3 \omega)$.

Remarque : Dans le cas des quasi-bigèbres jacobiennes la condition (*i*) signifie que ω est un morphisme d'algèbres de Lie de (F_1, μ_1) dans (F_2, μ_2).

En utilisant ces définitions, on obtient la

Proposition 1.2 : *Soient* $(F_1, \mu_1, \gamma_1, \varphi_1)$, $(F_2, \mu_2, \gamma_2, \varphi_2)$ *deux quasi-bigèbres jacobiennes et* ω *une application linéaire de* F_1 *dans* F_2. *Alors* ω *est un morphisme de quasi-bigèbres jacobiennes de* $(F_1, \mu_1, \gamma_1, \varphi_1)$ *dans* $(F_2, \mu_2, \gamma_2, \varphi_2)$ *si et seulement si l'application transposée* ${}^t\omega$ *est un morphisme de quasi-bigèbres co-jacobiennes de* $(F_2^*, \gamma_2, \mu_2, \varphi_2)$ *dans* $(F_1^*, \gamma_1, \mu_1, \varphi_1)$.

La démonstration de cette proposition découle d'une simple transposition et de la dualité entre les notions de quasi-bigèbre jacobienne et quasi-bigèbre co-jacobienne.

Ces définitions s'appliqueront dans la suite pour la démonstration de certains résultats, notamment les propositions 3.2, 4.2 et 6.1.

2 . Relation de modification ("twisting") pour les quasi-bigèbres jacobiennes.

Nous allons définir à présent une relation sur les quasi-bigèbres jacobiennes appelée modification ("twisting" en anglais) et montrer que la dite relation est une relation d'équivalence [Dr2], [KS2]. Pour cela nous commençons par énoncer le résultat suivant, contenu dans [Dr2] et énoncé sous cette forme dans [KS1], [KS2] :

Proposition 2.1 : *Soit* $(F, \mu, \gamma, \varphi)$ *une quasi-bigèbre jacobienne et* $f \in \Lambda^2 F$. *Posons*

$$\gamma' = \gamma + d_\mu f \qquad (5)$$

$$\varphi' = \varphi + d_\gamma f - \tfrac{1}{2}[f, f]^\mu \qquad (6)$$

Alors $(F, \mu, \gamma', \varphi')$ *est encore une quasi-bigèbre jacobienne.*

Rappelons que les éléments $d_\mu f$, $d_\gamma f$, $[f, f]^\mu$, considérés comme des applications bilinéaires antisymétriques s'écrivent comme suit :

$$(d_\mu f)(\xi, \eta) = ad^{*\mu}_{f(\eta)}\xi - ad^{*\mu}_{f(\xi)}\eta,$$

$$(d_\gamma f)(\xi, \eta) = ad^{*\gamma}_{\eta} f(\xi) - ad^{*\gamma}_{\xi} f(\eta) + f(\gamma(\xi, \eta)),$$

$$[f, f]^\mu(\xi, \eta) = 2(f(ad^{*\mu}_{f(\xi)}\eta - ad^{*\mu}_{f(\eta)}\xi) - \mu(f(\xi), f(\eta))).$$

Définition 2.1 : *Une quasi-bigèbre jacobienne* $(F, \mu, \gamma', \varphi')$ *est dite liée à* $(F, \mu, \gamma, \varphi)$ *par modification ("twisting") s'il existe* $f \in \Lambda^2 F$ *tel que les relations* (5) *et* (6) *soient vérifiées.*

On note alors $(F, \mu, \gamma', \varphi') \sim (F, \mu, \gamma, \varphi)$ (mod. f).

Proposition 2.2 : *La relation de modification est une relation d'équivalence sur les quasi-bigèbres jacobiennes.*

Démonstration : La réflexivité et la symétrie sont évidentes. Il ne reste plus à montrer que la transitivité. Soient

$$(F,\ \mu,\ \gamma',\ \varphi') \sim (F,\ \mu,\ \gamma,\ \varphi)\,(\text{mod.} f)$$

et

$$(F,\ \mu,\ \gamma'',\ \varphi'') \sim (F,\ \mu,\ \gamma',\ \varphi')\,(\text{mod.} f'),$$

alors

$$\gamma'' = \gamma' + d_\mu(f+f')$$

$$\varphi'' = \varphi + d_\gamma(f+f') - \tfrac{1}{2}[f,f]^\mu - [f,f']^\mu - \tfrac{1}{2}[f',f']^\mu .$$

En utilisant les propriétés du grand crochet, on obtient :

$$(F,\ \mu,\ \gamma'',\ \varphi'') \sim (F,\mu,\gamma,\varphi)\,(\text{mod.}\,(f+f'))\,.$$

D'où la transitivité.

Nous allons maintenant établir le lien entre la relation de modification sur les quasi-bigèbres jacobiennes et les couples de Manin. Pour cela rappelons tout d'abord la définition d'un couple de Manin [Dr3].

Définition 2.2 : *Un couple de Manin consiste en un couple (F_0, F) où F_0 est une algèbre de Lie munie d'un produit scalaire invariant non dégénéré $\ll .\,,.\gg$ et F une sous-algèbre de Lie isotrope de dimension maximale de F_0.*

Lemme 2.1 ([Dr3]): *Si (F_0, F) est un couple de Manin, alors le choix d'un supplémentaire isotrope de F dans F_0 définit sur F une structure de quasi-bigèbre jacobienne.*

Nous verrons plus en détail au paragraphe 4 la réciproque de ce lemme avec la construction du double d'une quasi-bigèbre jacobienne.

Proposition 2.3 ([Dr3]): *Soit (F_0, F_1) un couple de Manin. Alors les structures de quasi-bigèbre jacobienne obtenues par le choix de deux supplémentaires isotropes de F_1 dans F_0 sont équivalentes modulo une modification.*

Démonstration : En effet soient F_2 et F_2' deux sous-espaces isotropes de F_0 tels que $F_0 = F_1 \oplus F_2$ et $F_0 = F_1 \oplus F_2'$. D'après le lemme précédent, à ces deux décompositions de F_0, correspondent deux structures de quasi-bigèbre jacobienne $(F_1, \mu, \gamma, \varphi)$ et $(F_1, \mu, \gamma', \varphi')$. Explicitons à présent les relations entre ces deux structures.

Remarquons tout d'abord que F_2 et F_2' sont isomorphes à F_1^*. Soit j (resp., j') l'isomorphisme de F_2 (resp., F_2') sur F_1^*. Soient π_1 et π_1' les projections respectives de F_0 sur F_1 relativement aux deux décompositions $F_0 = F_1 \oplus F_2$ et $F_0 = F_1 \oplus F_2'$; soient π_2 et π_2' les projections respectives de F_0 sur F_2 et F_2' parallèlement à F_1. Soit k (resp., λ) la projection de F_2 sur F_1 (resp., F_2') parallèlement à F_2' (resp., F_1) dans la décomposition $F_0 = F_1 \oplus F_2'$. On a les relations suivantes :

$$\pi_1 + \pi_2 = 1_{F_0}\ , \quad \pi_1' + \pi_2' = 1_{F_0}, \quad j = j' o \lambda, \quad k = \pi_1\big|_{F_2}, \quad \lambda = \pi_2'\big|_{F_2}$$

$$k + \lambda = 1_{F_2}, \quad \pi_1' = \pi_1 + k o \pi_2, \quad \pi_2' = \lambda o \pi_2 = (1-k) o \pi_2.$$

Désignons par $[.,.]_0$ le crochet de Lie sur F_0 et par μ le crochet de Lie sur F_1. Par construction des deux structures de quasi-bigèbres jacobiennes $(F_1, \mu, \gamma, \varphi)$ *et* $(F_1, \mu, \gamma', \varphi')$, pour $\xi, \eta \in F_1^*$, on a :

$$\gamma(\xi, \eta) = (j o \pi_2)\left[j^{-1}(\xi), j^{-1}(\eta)\right]_0, \qquad \gamma'(\xi, \eta) = (j' o \pi_2')\left[j'^{-1}(\xi), j'^{-1}(\eta)\right]_0,$$

$$\varphi(\xi, \eta) = \pi_1\left[j^{-1}(\xi), j^{-1}(\eta)\right]_0, \qquad \varphi'(\xi, \eta) = \pi_1'\left[j'^{-1}(\xi), j'^{-1}(\eta)\right]_0.$$

En utilisant les relations entre les différentes projections, on obtient :

$$\begin{aligned}\gamma'(\xi, \eta) &= (j' o \pi_2')\left[j'^{-1}(\xi), j'^{-1}(\eta)\right]_0 = (j' \circ \pi_2')\left[(1-k) j^{-1}(\xi), (1-k) j^{-1}(\eta)\right]_0 \\ &= \gamma(\xi, \eta) - ad^{*\mu}_{kj^{-1}(\xi)}\eta + ad^{*\mu}_{kj^{-1}(\eta)}\xi\end{aligned}$$

où $ad^{*\mu}_x = -{}^t(ad^{\mu}_x)$.

Posons $\qquad f = k \circ j^{-1} : F_1^* \to F_1$.

Remarquons que f est antisymétrique, c'est-à-dire que f identifié à un tenseur d'ordre 2 est un élément de $\Lambda^2 F_1$. En effet, par définition $<<j^{-1}(\xi), x>> = <\xi, x>$ pour tout $\xi \in F_1^*$ et tout $x \in F_1$. Pour tout $\xi \in F_1^*$, $j^{-1}(\xi) - f(\xi) \in F_2'$; comme F_2' est isotrope, on a :

$$<< j^{-1}(\xi) - f(\xi), j^{-1}(\eta) - f(\eta) >> = 0, \ \forall \ \xi, \eta \in F_1^*.$$

D'où

$$<\xi, f(\eta)> + <\eta, f(\xi)> = 0 ,$$

i.e., $f \in \Lambda^2 F_1$.

Par ailleurs de ce qui précède, on a

$$(d_\mu f)(\xi, \eta) = -(\delta_\mu f)(\xi, \eta) = ad^{*\mu}_{f(\eta)}\xi - ad^{*\mu}_{f(\xi)}\eta.$$

Ce qui nous permet d'écrire

$$\gamma' = \gamma + d_\mu f, \qquad f \in \Lambda^2 F_1.$$

En utilisant encore une fois les relations entre les différentes projections, on obtient :

$$\begin{aligned}
\varphi'(\xi, \eta) &= \pi_1'\left[j'^{-1}(\xi), j'^{-1}(\eta)\right]_0 = (\pi_1 + k \circ \pi_2)\left[(1-k)j^{-1}(\xi), (1-k)j^{-1}(\eta)\right]_0 \\
&= \varphi(\xi, \eta) - ad^{*\gamma}_\xi f(\eta) + ad^{*\gamma}_\eta f(\xi) + \mu(f(\xi), f(\eta)) + f(\gamma'(\xi, \eta)) \\
&= \varphi(\xi, \eta) + (ad^{*\gamma}_\eta f(\xi) - ad^{*\gamma}_\xi f(\eta) + f(\gamma(\xi, \eta))) + f(ad^{*\mu}_{f(\eta)}\xi - ad^{*\mu}_{f(\xi)}\eta) \\
&\quad + \mu(f(\xi), f(\eta)) \\
&= \varphi(\xi, \eta) + (d_\gamma f)(\xi, \eta) - \tfrac{1}{2}[f, f]^\mu(\xi, \eta)
\end{aligned}$$

i.e., $\qquad \varphi' = \varphi + d_\gamma f - \frac{1}{2}[f, f]^\mu,$

où $[f, f]^\mu$ désigne le crochet de Schouten algébrique de f avec lui-même, considéré comme une application bilinéaire de $\Lambda^2 F_1^*$ dans F_1.

Par conséquent $(F_1, \mu, \gamma', \varphi') \sim (F_1, \mu, \gamma, \varphi)$ (mod. f).

Corollaire : *Les classes d'équivalence de quasi-bigèbres jacobiennes modulo modification sont en correspondance biunivoque avec les couples de Manin.*

3. Quasi-bigèbres jacobiennes exactes et quasitriangulaires.

Définition 3.1 : *Une quasi-bigèbre jacobienne* $(F, \mu, \gamma, \varphi)$ *est dite exacte s'il existe* $a \in \Lambda^2 F$ *tel que*

$$\gamma = d_\mu a. \qquad (7)$$

Remarque : Si $g = (F, \mu)$ est une algèbre de Lie semi-simple, tout 1-cocycle de g est un cobord, donc toute structure de quasi-bigèbre jacobienne sur g est exacte.

Si $(F, \mu, \gamma, \varphi)$ est exacte, alors il existe un élément $a \in \Lambda^2 F$ et un élément ad^μ-invariant $\varphi_1 \in \Lambda^3 F$ tels que :

$$\gamma = d_\mu a, \qquad \varphi = -\tfrac{1}{2}[a,a]^\mu + \varphi_1,$$

et inversement si $a \in \Lambda^2 F$ et $\varphi \in \Lambda^3 F$ sont tels que $\tfrac{1}{2}[a,a]^\mu + \varphi$ est ad^μ-invariant, alors $(F, \mu, d_\mu a, \varphi)$ est une quasi-bigèbre jacobienne exacte. En effet, soit $(F, \mu, \gamma, \varphi)$ une quasi-bigèbre jacobienne exacte; alors par définition $\gamma = d_\mu a$ pour un certain $a \in \Lambda^2 F$. D'une part, par le théorème 2.1 du chapitre I, on a

$$\tfrac{1}{2}[\gamma, \gamma] = d_\mu(\tfrac{1}{2}[a,a]^\mu),$$

et d'autre part on a par définition

$$\tfrac{1}{2}[\gamma, \gamma] = - d_\mu \varphi .$$

Par conséquent,

$$d_\mu(\varphi + \tfrac{1}{2}[a, a]^\mu) = 0,$$

cela signifie que $\varphi + \tfrac{1}{2}[a, a]^\mu$ est ad^μ-invariant. En raisonnant dans le sens inverse, on démontre ainsi la seconde partie de notre affirmation.

Posant $\varphi_1 = \varphi + \tfrac{1}{2}[a, a]^\mu$ on obtient le fait que

$$(F, \mu, \gamma, \varphi) \sim (F, \mu, 0, \varphi_1) \ (\text{mod. } a).$$

D'où

Proposition 3.1 : *Une quasi-bigèbre jacobienne* $(F, \mu, \gamma, \varphi)$ *est exacte si et seulement si elle est équivalente par modification à une quasi-bigèbre jacobienne à co-crochet nul.*

Définition 3.1 : *Une quasi-bigèbre jacobienne* $(F, \mu, \gamma, \varphi)$ *est dite strictement exacte s'il existe* $a \in \Lambda^2 F$ *tel que :*

$$\gamma = d_\mu a, \quad \varphi = -\tfrac{1}{2}[a,a]^\mu . \tag{8}$$

Pour les quasi-bigèbres jacobiennes strictement exactes on a le résultat suivant :

Proposition 3.2 : *Soit* $(F_i, \mu_i, d_{\mu_i} a_i, -\tfrac{1}{2}[a_i,a_i]^{\mu_i})$ $i = 1, 2$, *des quasi-bigèbres jacobiennes strictement exactes. Soit* ω *un morphisme d'algèbres de Lie de* (F_1, μ_1) *dans* (F_2, μ_2) *tel que* $a_2 = (\Lambda^2 \omega)(a_1)$. *Alors* ω *est un morphisme de quasi-bigèbres jacobiennes.*

La démonstration de la proposition 3.2 est une conséquence immédiate du lemme 2.1 du chapitre I.

Soit $r = a + s$ un élément de $F \otimes F$ où a et s désignent respectivement ses parties antisymétrique et symétrique. Déterminons les conditions sur r et $\varphi \in \Lambda^3 F$ pour que $(F, \mu, d_\mu r, \varphi)$ soit une quasi-bigèbre jacobienne.

D'abord remarqons que les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\quad d_\mu r \in F^* \otimes \Lambda^2 F,$

(ii) $\quad d_\mu r = d_\mu a,$

(iii) $\quad d_\mu s = 0.$

Nous supposons désormais que r satisfait ces conditions et nous posons

$$\gamma = d_\mu r .$$

De ce qui précède, il suit que $\tfrac{1}{2}[\gamma,\gamma] + d_\mu \varphi = 0$ si et seulement si $\varphi = -\tfrac{1}{2}[a, a]^\mu + \varphi_1$ où φ_1 est un élément ad^μ-invariant dans $\Lambda^3 F$.

Définition 3.3 : *Soient* $r \in F \otimes F$, $\varphi \in \Lambda^3 F$. *Le couple* (r, φ) *est dit quasi-jacobien si la partie symétrique de* r *est* ad^μ*-invariante et* $(F, \mu, d_\mu a, \varphi)$ *est une quasi-bigèbre jacobienne, où* a *est la partie antisymétrique de* r.

Soit $r = a + s \in F \otimes F$. Comme s est un élément ad^{μ}-invariant, alors $< s, s >^{\mu}$ défini par

$$< s , s >^{\mu} (\xi, \eta, \zeta) = -2 < \zeta , \mu(s\xi , s\eta) >,$$

pour ξ, η, $\zeta \in F^{*}$, où s est considéré comme l'application linéaire de F^{*} dans F définie par $< \eta, s(\xi) > = s(\xi \otimes \eta)$, est un élément ad^{μ}-invariant dans $\Lambda^{3}F$ (voir par exemple [A]). Si $s = \sum_{i} a_i \otimes b_i$, alors

$$< s , s >^{\mu} = -2 \sum_{i} \sum_{j} a_i \otimes a_j \otimes \mu(b_i, b_j),$$

ainsi

$$< s, s >^{\mu} = -2\left[s^{13}, s^{23}\right].$$

L'élément

$$K^{\mu}(r) = \tfrac{1}{2}\left(\left[a, a\right]^{\mu} + < s , s >^{\mu}\right) \qquad (9)$$

dans $\Lambda^{3} F$ est appelé courbure de Schouten de r [KS-Ma], [A].

Ainsi, un couple (r, φ) est quasi-jacobien si et seulement si s et $K^{\mu}(r) + \varphi$ sont ad^{μ}-invariants.

On dira aussi que (r, φ) satisfaisant $d_{\mu}s = 0$ et

$$d_{\mu}(K^{\mu}(r) + \varphi) = 0 \qquad \textbf{(qYBG) (10)}$$

est une solution de l'équation quasi-Yang-Baxter classique généralisée. Si en particulier (r, φ) satisfait les conditions $d_{\mu}s = 0$ et

$$K^{\mu}(r) + \varphi = 0, \qquad \textbf{(qYBC) (11)}$$

on dira que (r, φ) est une solution de l'équation quasi-Yang-Baxter classique.

Evidemment, les solutions de (qYBC) sont tous les couples $(r, -K^{\mu}(r))$, où $r \in F \otimes F$ est à partie symétrique ad^{μ}-invariante, alors que les solutions de (qYBG) sont les couples $(r, -K^{\mu}(r) + \varphi_1)$, où $r \in F \otimes F$ est à partie symétrique ad^{μ}-invariante et φ_1 est un élément ad^{μ}-invariant dans $\Lambda^{3} F$.

Définition 3.4 : *Une quasi-bigèbre jacobienne* $(F, \mu, \gamma, \varphi)$ *est dite quasitriangulaire (resp., triangulaire) s'il existe un élément* $r = a + s$ *de* $F \otimes F$, *dont la partie symétrique* s *est* ad^{μ}*-invariante (resp., nulle), tel que* $\gamma = d_{\mu} a$ *et le couple* (r, φ) *est solution de* (qYBC).

Ainsi, toute structure de quasi-bigèbre jacobienne quasitriangulaire sur $g = (F, \mu)$ est de la forme $(F, \mu, d_{\mu} a, -K^{\mu}(a + s))$, où a est dans $\Lambda^2 F$ et s est un élément symétrique ad^{μ}-invariant dans $F \otimes F$. On remarque qu'une quasi-bigèbre jacobienne quasitriangulaire (resp., triangulaire) est exacte (resp., strictement exacte). Toute bigèbre de Lie quasitriangulaire est quasitriangulaire en tant que quasi-bigèbre jacobienne, et, inversement, une quasi-bigèbre jacobienne quasitriangulaire est une bigèbre de Lie quasitriangulaire si et seulement si la courbure de Schouten associée, $K^{\mu}(r)$, est nulle.

La relation de modification préserve la propriété de quasitriangularité des quasi-bigèbres jacobiennes. En d'autres termes, toute quasi-bigèbre jacobienne équivalente par modification à une quasi-bigèbre jacobienne quasitriangulaire est encore quasitriangulaire.

Proposition 3.3 ([Ba-KS]) : *Une quasi-bigèbre jacobienne* $(F, \mu, \gamma, \varphi)$ *est quasitriangulaire si et seulement si elle est équivalente par modification à une quasi-bigèbre jacobienne à co-crochet nul de la forme* $(F, \mu, 0, -\frac{1}{2} < s, s >^{\mu})$, *où* s *est un élément symétrique* ad^{μ}*-invariant dans* $F \otimes F$.

Démonstration : Lorsque la quasi-bigèbre jacobienne $(F, \mu, 0, -\frac{1}{2} < s, s >^{\mu})$ est modifiée par $a \in \Lambda^2 F$, on obtient $(F, \mu, d_{\mu} a, -K^{\mu}(a + s))$ qui est en fait quasitriangulaire.

Inversement, si $(F, \mu, d_{\mu} a, -K^{\mu}(r))$ est une quasi-bigèbre jacobienne quasitriangulaire, alors

$$(F, \mu, d_{\mu} a, -K^{\mu}(a + s)) \sim (F, \mu, 0, -\tfrac{1}{2} < s, s >^{\mu}) (\mathrm{mod}. a).$$

En particulier, une quasi-bigèbre jacobienne est triangulaire si et seulement si elle est équivalente par modification à la bigèbre de Lie triviale $(F, \mu, 0, 0)$. Un autre cas particulier est le cas où $r = a + s$ est une solution de l'équation de Yang-Baxter classique : la bigèbre de

Lie quasitriangulaire $(F,\ \mu,\ d_\mu a)$ est équivalente comme une quasi-bigèbre jacobienne, à $(F,\ \mu,\ 0, -\frac{1}{2}< s,\ s >^\mu)$.

Proposition 3.4 ([Ba-KS]) : *Si $g = (F\ ,\ \mu)$ est une algèbre de Lie simple complexe, toute structure de quasi-bigèbre jacobienne sur $g = (F,\ \mu)$ est quasitriangulaire.*

Démonstration : Sur une algèbre de Lie simple complexe, g, toute structure de quasi-bigèbre jacobienne est exacte (du fait que sur g tout 1-cocycle est un cobord) et tout élément ad^μ-invariant dans $\Lambda^3 g$ est de la forme $-\frac{1}{2}< s, s >^\mu$ pour un certain élément symétrique ad^μ-invariant s dans $g \otimes g$. De ce qui précède, il suit que toute structure de quasi-bigèbre jacobienne sur une algèbre de Lie simple complexe est quasitriangulaire.

4. Double d'une quasi-bigèbre jacobienne.

Pour définir la notion de double d'une quasi-bigèbre jacobienne, nous allons définir celle plus générale de double d'une proto-bigèbre de Lie, dont les notions de double pour les quasi-bigèbres jacobiennes et co-jacobiennes seront des cas particuliers.

4.1. Structure d'algèbre de Lie du double d'une proto-bigèbre de Lie.

Soit $(F,\ \mu,\ \gamma,\ \varphi,\ \psi)$ une proto-bigèbre de Lie. Interprétons les éléments $\mu \in \Lambda^2 F^* \otimes F$, $\gamma \in F^* \otimes \Lambda^2 F$, $\varphi \in \Lambda^3 F$ et $\psi \in \Lambda^3 F^*$ comme des applications bilinéaires antisymétriques :

$$\mu : \Lambda^2 F \to F, \quad \gamma : \Lambda^2 F^* \to F^*, \quad \varphi : \Lambda^2 F^* \to F, \quad \psi : \Lambda^2 F \to F^*$$

en posant

$$< \zeta, \varphi(\xi, \eta) > = \varphi(\xi, \eta, \zeta) \qquad \text{et} \qquad < z, \psi(x,y) > = \psi(x,y,z)$$

pour x, y, z dans F et ξ, η, ζ dans F^*.

Nous avons le résultat suivant :

Théorème 4.1 ([KS2]) : *Le crochet* M *sur* $\mathcal{F} = F \oplus F^*$ *défini par*

$$M(x, y) = \mu(x, y) + \psi(x, y) \tag{4.1.1}$$

$$M(x, \xi) = -ad_\xi^{*\gamma} x + ad_x^{*\mu} \xi \tag{4.1.2}$$

$$M(\xi, \eta) = \varphi(\xi, \eta) + \gamma(\xi, \eta) \tag{4.1.3}$$

où $ad_x^\mu y = \mu(x, y)$, $ad_x^{*\mu} = -{}^t(ad_x^\mu)$, $ad_\xi^\gamma \eta = \gamma(\xi, \eta)$, $ad_\xi^{*\gamma} = -{}^t(ad_\xi^\gamma)$, *est un crochet d'algèbre de Lie laissant invariant le produit scalaire canonique.*

De façon plus précise, on montre dans [KS2], que les structures de proto-bigèbre de Lie sur un espace vectoriel F sont en correspondance bijective avec les structures d'algèbre de Lie sur l'espace vectoriel $F \oplus F^*$ laissant invariant le produit scalaire canonique.

Définition 4.1 : *L'algèbre de Lie* $(\mathcal{F}, M)$ *est appelé le double de la proto-bigèbre de Lie* $(F, \mu, \gamma, \varphi, \psi)$.

Si $\psi = 0$ (resp., $\varphi = 0$), $(F, \mu, \gamma, \varphi)$ (resp., (F, μ, γ, ψ)) est une quasi-bigèbre jacobienne (resp., co-jacobienne) et $(\mathcal{F}, M)$ est appelé le double de la quasi-bigèbre jacobienne $(F, \mu, \gamma, \varphi)$ (resp., co-jacobienne (F, μ, γ, ψ)). Dans le cas où $\varphi = \psi = 0$, on retrouve le double d'une bigèbre de Lie.

Dans le cas d'une proto-bigèbre de Lie, F et F^* sont des sous-espaces vectoriels isotropes de $\mathcal{F}$, alors que dans le cas d'une quasi-bigèbre jacobienne (resp., co-jacobienne), F (resp., F^*) est une sous-algèbre de Lie isotrope de $\mathcal{F}$ et F^* (resp., F) est tout simplement un sous-espace vectoriel isotrope de $\mathcal{F}$. Ainsi le double de toute proto-bigèbre de Lie est une algèbre de Lie hyperbolique au sens de Medina et Revoy [Me-Re], dont F et F^* sont des sous-espaces vectoriels isotropes. Inversement, toute algèbre de Lie hyperbolique est le double d'une proto-bigèbre de Lie. En effet, Soit (A, $<,>$) une algèbre de Lie hyperbolique de dimension $2m$, c'est-à-dire que la forme bilinéaire $<,>$ sur A est symétrique invariante non dégénérée de signature (m, m). Soit $(a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m)$ une base orthogonale de A, telle que

$$< a_i, a_j > = \delta_{ij}, \quad < a_i, b_j > = 0, \; < b_i, b_j > = -\,\delta_{ij}, \quad \forall i, j \in \{1,\ldots,m\}.$$

Posons

$$A_i = a_i + b_i, \quad B_i = a_i - b_i, \quad i \in \{1,\ldots,m\}.$$

Alors $(A_1,\ldots,A_m, B_1,\ldots, B_m)$ est une base de A telle que

$$< A_i, A_j > = 0, \; < A_i, B_j > = 2\delta_{ij}, \; < B_i, B_j > = 0, \quad \forall i, j \in \{1,\ldots,m\}.$$

Soit F_1 (resp. F_2) le sous-espace vectoriel de A engendré par les A_i (resp. B_i), $i \in \{1,\ldots,m\}$. Ainsi F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels isotropes supplémentaires de A, de dimension m, duaux l'un de l'autre. Par conséquent F_1 et F_2 sont tous deux munis d'une structure de proto-bigèbre de Lie dont A est le double. Remarquons que F_1 (resp. F_2) est une quasi-bigèbre jacobienne si et seulement si la restriction de la forme trilinéaire alternée

$$\omega(a, b, c) = < [a, b], c >, \quad a, b, c \in \text{A}$$

à $\Lambda^3 F_1$ (resp. $\Lambda^3 F_2$) est nulle. Enfin F_1, ou de façon équivalente F_2, devient une bigèbre de Lie si et seulement si les restrictions de la forme trilinéaire ω à $\Lambda^3 F_1$ et à $\Lambda^3 F_2$ sont toutes deux nulles.

L'action co-adjointe associée à la structure d'algèbre de Lie M sur $\boldsymbol{F}$ est donnée par la formule :

$$\begin{aligned} ad^{*M}_{(x,\xi)}(\eta, y) = \gamma(\xi, \eta) + \psi(x, y) + ad^{*\mu}_x \eta - ad^{*\mu}_y \xi \\ + \mu(x, y) + \varphi(\xi, \eta) + ad^{*\gamma}_\xi y - ad^{*\gamma}_\eta x \end{aligned} \qquad (12)$$

pour x, y dans F et ξ, η dans F^*. En effet pour $z \in F$, $\zeta \in F^*$ on a :

$$\begin{aligned}
&\langle ad^{*M}_{(x,\xi)}(\eta, y), \; (z, \zeta)\rangle = -\langle(\eta, y), \; ad^{M}_{(x,\xi)}(z, \zeta)\rangle \\
&= -\langle(\eta, y), \; (\mu(x, z) - ad^{*\gamma}_\zeta x + ad^{*\gamma}_\xi z + \varphi(\xi, \zeta), \; \gamma(\xi, \zeta) - ad^{*\mu}_z \xi + ad^{*\mu}_x \zeta + \psi(x, z))\rangle \\
&= -\langle \eta, \mu(x, z) + \varphi(\xi, \zeta) - ad^{*\gamma}_\zeta x + ad^{*\gamma}_\xi z\rangle - \langle \gamma(\xi, \zeta) + \psi(x, z) - ad^{*\mu}_z \xi + ad^{*\mu}_x \zeta, \; y\rangle \\
&= \langle \gamma(\xi, \eta) + \psi(x, y) - ad^{*\mu}_y \xi + ad^{*\mu}_x \eta, \; z\rangle + \langle \zeta, \mu(x, y) + \varphi(\xi, \eta) - ad^{*\gamma}_\eta x + ad^{*\gamma}_\xi y\rangle \\
&= \langle(\gamma(\xi, \eta) + \psi(x, y) - ad^{*\mu}_y \xi + ad^{*\mu}_x \eta, \; \mu(x, y) + \varphi(\xi, \eta) - ad^{*\gamma}_\eta x + ad^{*\gamma}_\xi y), \; (z, \zeta)\rangle.
\end{aligned}$$

D'où la formule (12).

L'identité de Jacobi pour le crochet M donne explicitement les conditions définissant la proto-bigèbre de Lie. Dans le cas d'une quasi-bigèbre jacobienne $(F, \mu, \gamma, \varphi)$, on a les relations suivantes :

$$\oint \gamma(\gamma(\xi,\eta),\zeta) = -\oint ad^{*\mu}_{\varphi(\xi,\eta)}\zeta \qquad (13)$$

$$\oint \varphi(\gamma(\xi,\eta),\zeta) = \oint ad^{*\gamma}_{\xi}\varphi(\eta,\zeta) \qquad (14)$$

$$ad^{*\mu}_{x}\gamma(\xi,\eta) = \gamma(ad^{*\mu}_{x}\xi,\eta) + \gamma(\xi, ad^{*\mu}_{x}\eta) + ad^{*\mu}_{ad^{*\gamma}_{\eta}x}\xi - ad^{*\mu}_{ad^{*\gamma}_{\xi}x}\eta \qquad (15)$$

$$\left[ad^{*\gamma}_{\xi}, ad^{*\gamma}_{\eta}\right](x) = \varphi(ad^{*\mu}_{x}\xi,\eta) + \varphi(\xi, ad^{*\mu}_{x}\eta) + \mu(\varphi(\xi,\eta),x) + ad^{*\gamma}_{\gamma(\xi,\eta)}x \qquad (16)$$

$$ad^{*\gamma}_{\xi}\mu(x,y) = \mu(ad^{*\gamma}_{\xi}x,y) + \mu(x, ad^{*\gamma}_{\xi}y) + ad^{*\gamma}_{ad^{*\mu}_{y}\xi}x - ad^{*\gamma}_{ad^{*\mu}_{x}\xi}y \qquad (17)$$

$$ad^{*\mu}_{\mu(x,y)} = \left[ad^{*\mu}_{x}, ad^{*\mu}_{y}\right] \qquad (18)$$

pour x , y dans F et ξ,η,ζ dans F^* , où $\oint$ désigne la somme sur les permutations circulaires des éléments ξ, η, ζ.

On a les équivalences suivantes :

- (**13**) et (**16**) sont équivalentes et traduisent l'équation $\frac{1}{2}[\gamma,\gamma] + d_\mu\varphi = 0$,
- (**14**) traduit l'équation $d_\gamma\varphi = 0$,
- (**15**) et (**17**) sont équivalentes et traduisent la condition de cocycle $d_\mu\gamma = 0$,
- (**18**) traduit tout simplement le fait que μ est un crochet de Lie sur F.

4.2 .Structure de quasi-bigèbre jacobienne quasitriangulaire du double d'une proto-bigèbre de Lie.

On a déjà montré que si (F, μ) est une algèbre de Lie, tout élément r dans $F\otimes F$, dont la partie symétrique est ad^{μ}-invariante, définit une quasi-bigèbre jacobienne quasitriangulaire $(F, \mu, d_\mu a, -K^{\mu}(r))$, où a est la partie antisymétrique de r. Appliquons ce résultat au double (F, M) d'une proto-bigèbre de Lie $(F, \mu, \gamma, \varphi, \psi)$.

Soit $(F, \mu, \gamma, \varphi, \psi)$ une proto-bigèbre de Lie. Soit

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} : \boldsymbol{F}^* = F^* \oplus F &\to F \oplus F^* = \boldsymbol{F} \\ (\xi, x) &\to (x, 0) \end{aligned} \qquad (19)$$

Les parties symétrique et antisymétrique de $\boldsymbol{r}$ sont définies respectivement par :

$$\boldsymbol{s}(\xi,x) = \tfrac{1}{2}(x,\xi)\ , \qquad \boldsymbol{a}(\xi,x) = \tfrac{1}{2}(x, -\xi)\ . \qquad (20)$$

Remarquons que $\boldsymbol{s}$ est égale à $\frac{1}{2}s_0$, où s_0 est le produit scalaire canonique sur $\boldsymbol{F}$. Donc d'après la construction de la structure d'algèbre de Lie M sur $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{s}$ est ad^M-invariante, et par conséquent $(\boldsymbol{F}, M, d_M\boldsymbol{a}, -K^M(\boldsymbol{r}))$ est une quasi-bigèbre jacobienne quasitriangulaire.

Déterminons à présent les expressions explicites du co-crochet $\Gamma = d_M\boldsymbol{r} = d_M\boldsymbol{a}$ considéré comme un crochet sur $\boldsymbol{F}^*$ et l'élément correspondant $\Phi = -K^M(\boldsymbol{r})$, où

$$K^M(\boldsymbol{r}) = \tfrac{1}{2}([a,a]^M + \langle s, s\rangle^M)\ .$$

Le crochet sur F^* défini par $d_M\boldsymbol{a}$ est noté $[.,.]^a$ et est donné par [KS-Ma]:

$$[(\xi,x),(\eta,y)]^a = ad^{*M}_{a(\eta,y)}(\xi,x) - ad^{*M}_{a(\xi,x)}(\eta,y),$$

pour $(\xi, x), (\eta, y)$ dans $\boldsymbol{F}^*$. En utlisant la formule (**12**) pour l'action co-adjointe et la définition de $\boldsymbol{a}$, on obtient :

$$[(\xi,x),(\eta,y)]^a = \gamma(\xi,\eta) - \psi(x,y) - \mu(x,y) + \varphi(\xi,\eta) \qquad (21)$$

et

$$\Phi = -K^M(\boldsymbol{r}) = \varphi + \psi \qquad (22)$$

On a ainsi démontré le résultat suivant [Ba-KS]:

Proposition 4.1 : *Toute proto-bigèbre de Lie* $(F, \mu, \gamma, \varphi, \psi)$ *a un double qui est une quasi-bigèbre jacobienne quasitriangulaire,* $(\boldsymbol{F}, M, \Gamma, \Phi)$*, où* $\boldsymbol{F} = F \oplus F^*$ *,* M *est donné par les formules (4.1.1) - (4.1.3),* $\Gamma = d_M\boldsymbol{a}$ *est donné par la formule* (**21**) *et* $\Phi = \varphi + \psi$.

Ce résultat généralise la construction de la structure de bigèbre de Lie quasitriangulaire du double d'une bigèbre de Lie. Pour retrouver cette dernière il suffit de prendre $\varphi = \psi = 0$.

Prenant en compte les définitions de morphisme et d'anti-morphisme de quasi-bigèbres jacobiennes, on obtient [Ba-KS]:

Proposition 4.2 : *Si $(F, \mu, \gamma, \varphi)$ (resp., (F, μ, γ, ψ)) est une quasi-bigèbre jacobienne (resp., co-jacobienne), alors l'injection canonique de F (resp., F^*) dans le double de F est un morphisme (resp., anti-morphisme) de quasi-bigèbres jacobiennes.*

Démonstration : Considérons tout d'abord le cas d'une quasi-bigèbre jacobienne $(F, \mu, \gamma, \varphi)$. En prenant $\psi = 0$ dans les formules (4.1.1), (21) et (22) on a :

$$M(x, y) = \mu(x, y)$$

$$[(\xi,x),(\eta,y)]^a = \gamma(\xi, \eta) - \mu(x, y) + \varphi(\xi, \eta)$$

$$\Phi = -K^M(\boldsymbol{r}) = \varphi.$$

Il est clair que l'injection de F dans $\boldsymbol{F}$ préserve les structures d'algèbre de Lie, φ est appliqué en Φ et la projection de $\boldsymbol{F}^*$ sur F^* (qui est la transposée de l'injection de F dans $\boldsymbol{F}$) envoie $\Gamma = d_M\boldsymbol{a}$ sur γ. Ce qui démontre la première partie de la proposition.

Considérons maintenant le cas d'une quasi-bigèbre co-jacobienne (F, μ, γ, ψ), alors (F^*, γ, μ, ψ) est une quasi-bigèbre jacobienne. En prenant $\varphi = 0$ dans les formules (4.1.3), (21), (22), on a :

$$M(\xi, \eta) = \gamma(\xi, \eta)$$

$$[(\xi,x),(\eta,y)]^a = \gamma(\xi, \eta) - \psi(x, y) - \mu(x,y)$$

$$\Phi = -K^M(\boldsymbol{r}) = \psi.$$

En utilisant le même raisonnement, on voit que l'injection de F^* dans $\boldsymbol{F}$ est un anti-morphisme de quasi-bigèbres jacobiennes.

Ce qui complète la preuve de la proposition.

En particulier, on retrouve le résultat bien connu : Si (F, μ, γ) est une bigèbre de Lie, alors l'injection de F (resp., F^*) dans le double de F, est un morphisme (resp., anti-morphisme) de bigèbres de Lie [A].

4.3. Approche R-matricielle.

Comme dans le cas des bigèbres de Lie, dans le cas quasi, on peut encore définir l'application linéaire de $\boldsymbol{F}$ dans F, $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{s}^{-1}$. Cette application est la différence $\pi_F - \pi_{F^*}$ des projections de $\boldsymbol{F}$ sur F et F^* mais R ne satisfait pas en général l'équation de Yang-Baxter modifiée [STS]. Lorsqu'on identifie $\boldsymbol{F}^*$ avec $\boldsymbol{F}$ par le moyen du produit scalaire canonique, le crochet sur $\boldsymbol{F}^*$ défini par $d_M\boldsymbol{a}$ est identifié avec l'opposé du crochet $[.,.]_R$ sur $\boldsymbol{F}$ défini par R, dans le sens de Semenov-Tian-Shansky [STS], où

$$[(x,\xi),(y,\eta)]_R = \tfrac{1}{2}([R(x,\xi),(y,\eta)]^M + [(x,\xi),(R(y,\eta)]^M).$$

Explicitement $[.,.]_R$ est donné par :

$$[(x,\xi),(y,\eta)]_R = \mu(x,y) - \varphi(\xi,\eta) - \gamma(\xi,\eta) + \psi(x,y),$$

et l'on vérifie ainsi qu'il coïncide avec l'opposé du crochet $[.,.]^a$ donné par la formule (21).

5. Double d'une quasi-bigèbre jacobienne quasitriangulaire.

Supposons que $(F, \mu, \gamma, \varphi)$ est elle-même une quasi-bigèbre jacobienne quasitriangulaire définie par $r = a + s$, où a est dans $\Lambda^2 F$ et s est un élément symétrique ad^{μ}-invariant dans $F \otimes F$. Supposons que s est inversible et posons $R = a \circ s^{-1}$. Alors on peut montrer que l'algèbre de Lie $(\boldsymbol{F}, M)$ est une somme directe.

Proposition 5.1: *Soient I l'identité de F et J_R l'endomorphisme de $F\oplus F$ défini par:*

$$J_R(x,y)=(x-2y_+,x-2y_-)$$

où $y_\pm=\frac{1}{2}(R\pm I)(y)$. *Alors l'application $J_R o(I \oplus s)$ est un morphisme d'algèbre de Lie de (F, M) dans l'algèbre de Lie somme directe de (F, μ) avec elle-même.*

La preuve de cette proposition suit celle du cas des bigèbres de Lie, donnée dans [A-KS].

Il existe une caractérisation des quasi-bigèbres jacobiennes quasitriangulaires en termes d'idéaux dans le double [Dr2]. Pour tout élément r de $F\otimes F$, définissons le sous-espace vectoriel de $F\oplus F^*$

$$a_r=\{(r\xi,\xi);\xi\in F^*\},$$

qui est complémentaire à F. Supposons que la partie symétrique de r est ad^μ-invariante.

Considérons une quasi-bigèbre jacobienne $(F, \mu, d_\mu r, \varphi)$ et soit M la structure d'algèbre de Lie du double F. Alors :

Proposition 5.2 : *Le sous-espace a_r est un idéal dans (F, M) si et seulement si la quasi-bigèbre jacobienne exacte $(F, \mu, d_\mu r, \varphi)$ est quasitriangulaire.*

Démonstration : En utilisant l'expression du crochet défini sur F^* par $d_\mu a$ on voit que, pour $x\in F$ et $\xi,\eta\in F^*$, le crochet $[(x,\xi),(r\eta,\eta)]^M$ est de la forme (z, ζ), où

$$z=\mu(x, r\eta)+ad^{*\gamma}_{\xi}(r\eta)-ad^{*\gamma}_{\eta}x+\varphi(\xi,\eta)$$

et

$$\zeta=ad^{*\mu}_{x-a\xi}\eta-ad^{*\mu}_{s\eta}\xi\ .$$

En utilisant l'ad^μ-invariance de s,

$$ad^\mu_x\circ s=s\circ ad^{*\mu}_x,$$

on obtient la relation

$$z-(r\zeta)=K^{\mu}(r)(\xi,\eta)+\varphi(\xi,\eta),$$

ce qui prouve la proposition.

6. Comparaison des doubles de quasi-bigèbres jacobiennes équivalentes par modification.

Soient (F,μ,γ,φ) et (F,μ,γ',φ') deux quasi-bigèbres jacobiennes équivalentes par modification; soit $f\in\Lambda^2 F$ l'élément de modification, i.e.,

$$\gamma'=\gamma+d_{\mu}f$$

$$\varphi'=\varphi+d_{\gamma}f-\tfrac{1}{2}[f,f]^{\mu}.$$

Soit $\boldsymbol{r}$ l'application linéaire définie par la formule (19) et soient $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{s}$ respectivement ses parties antisymétrique et symétrique. Soient $(\boldsymbol{F},M)$ (resp., (F,M')) le double de la quasi-bigèbre jacobienne (F,μ,γ,φ) (resp., (F,μ,γ',φ')) .

Soit

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}' : \boldsymbol{F}^* = F^*\oplus F &\to F\oplus F^* = \boldsymbol{F}\\ (\xi,x) &\to (x-f(\xi),0)\end{aligned} \qquad (23)$$

Ses parties symétrique et antisymétrique sont respectivement :

$$\boldsymbol{s}'(\xi,x)=\tfrac{1}{2}(x,\xi),\quad \boldsymbol{a}'(\xi,x)=\tfrac{1}{2}(x-2f(\xi),-\xi). \qquad (24)$$

On a le résultat suivant :

Proposition 6.1 : *$(F, M', d_{M'}\boldsymbol{a}', -K^{M'}(\boldsymbol{r}'))$ est une quasi-bigèbre jacobienne quasitriangulaire et l'application*

$$\begin{aligned}\omega : \boldsymbol{F} &\to \boldsymbol{F}\\ (x,\xi) &\to (x+f(\xi),\xi)\end{aligned} \qquad (25)$$

est un isomorphisme de quasi-bigèbres jacobiennes de $(\boldsymbol{F}, M, d_M\boldsymbol{a}, -K^M(\boldsymbol{r}))$ dans $(\boldsymbol{F}, M', d_{M'}\boldsymbol{a}', -K^{M'}(\boldsymbol{r}'))$.

Démonstration : Remarquons tout d'abord que s' est égal à s, donc s' est $\mathrm{ad}^{M'}$-invariant par définition de la structure d'algèbre de Lie M' sur F; par conséquent $(F, M', d_{M'}a', -K^{M'}(r'))$ est une quasi-bigèbre jacobienne quasitrangulaire.

D'autre part il est clair que ω est une bijection de F sur F. Il reste à montrer que ω est un morphisme de quasi-bigèbres jacobiennes (définition 1.5); pour cela il suffit de vérifier que c'est un morphisme d'algèbres de Lie de (F, M) dans (F, M') et que $r' = \omega \circ r \circ {}^t\omega$ (ou de façon équivalente $r' = (\omega \otimes \omega)(r)$). Montrons tout d'abord que $r' = \omega \circ r \circ {}^t\omega$. En effet

$$r'(\xi, x) = (x - f(\xi), 0)$$

$$\omega(x, \xi) = (x + f(\xi), \xi)$$

$${}^t\omega(\xi, x) = (\xi, x - f(\xi)),$$

et

$$\begin{aligned}(\omega \circ r \circ {}^t\omega)(\xi, x) &= (\omega \circ r)(\xi, x - f(\xi)) = \omega(x - f(\xi), 0)\\ &= (x - f(\xi), 0) = r'(\xi, x),\end{aligned}$$

pour tous x dans F et ξ dans F^*. D'où $r' = \omega \circ r \circ {}^t\omega$ qui s'écrit encore sous forme tensorielle $r' = (\omega \otimes \omega)(r)$.

Montrons maintenant que ω est un morphisme d'algèbres de Lie de (F, M) dans (F, M'). En effet :

- Pour $x, y \in F$ on a :

$$\begin{aligned}&(\omega \circ M)(x, y) = \omega(\mu(x, y), 0) = (\mu(x, y), 0),\\ &(M' \circ \Lambda^2 \omega)(x, y) = M'(\omega(x, 0), \omega(y, 0)) = M'((x, 0), (y, 0))\\ &\qquad = (\mu(x, y), 0).\end{aligned}$$

- Pour $x \in F$, $\xi \in F^*$ on a :

$$\begin{aligned}&(\omega \circ M)(x, \xi) = \omega(-ad^{*\gamma}_{\xi} x, ad^{*\mu}_{x} \xi) = (-ad^{*\gamma}_{\xi} x + f(ad^{*\mu}_{x} \xi), ad^{*\mu}_{x} \xi),\\ &(M' \circ \Lambda^2 \omega)(x, \xi) = M'(\omega(x, 0), \omega(0, \xi)) = M'((x, 0), (f(\xi), \xi))\\ &\qquad = (\mu(x, f(\xi)) - ad^{*\gamma'}_{\xi} x, ad^{*\mu}_{x} \xi).\end{aligned}$$

Or, d'après la relation $\gamma' = \gamma + d_\mu f$ et l'expression de $d_\mu f$, on obtient,

$$ad_{\xi}^{*\gamma'} x = ad_{\xi}^{*\gamma} x - f\,(ad_x^{*\mu}\xi) + \mu(x,\ f(\xi)\,),$$

ce qui permet d'écrire

$$(M' \circ \Lambda^2\ \omega)(\,x\,,\ \xi\,) = (-ad_{\xi}^{*\gamma} x + f\,(ad_x^{*\mu}\xi)\,,\ ad_x^{*\mu}\xi\,).$$

- Pour $\xi,\ \eta \in F,^*$ on a :

$$(\omega \circ M)(\,\xi\,,\eta\,) = \omega(\varphi(\xi,\eta),\gamma(\xi,\eta)) = (\varphi(\xi,\eta) + f\,(\gamma(\xi,\eta)),\gamma(\xi,\eta)),$$

$$\begin{aligned}
&(M' \circ \Lambda^2\ \omega)(\xi\,,\ \eta) = M'(\omega(0,\xi),\omega(0,\eta)) = M'((f\,(\xi),\xi),(f\,(\eta),\eta)) \\
&= (\mu(f\,(\xi),f\,(\eta)) + ad_{\xi}^{*\gamma'} f\,(\eta) - ad_{\eta}^{*\gamma'} f\,(\xi) + \varphi'(\xi,\eta),\ \gamma'(\xi,\eta) + ad_{f(\xi)}^{*\mu}\eta - ad_{f(\eta)}^{*\mu}\xi) \\
&= (-\mu(f\,(\xi),f\,(\eta)) + f\,(ad_{f(\xi)}^{*\mu}\eta\ -\ ad_{f(\eta)}^{*\mu}\xi) + ad_{\xi}^{*\gamma} f\,(\eta) - ad_{\eta}^{*\gamma} f\,(\xi) + \varphi'(\xi,\eta),\ \gamma(\xi,\eta)).
\end{aligned}$$

Or, d'après l'expression de $[f\,,f\,]^{\mu}$ considéré comme application de $\Lambda^2 F^*$ dans F,

$$[f\,,f\,]^{\mu}(\xi,\ \eta) =\ 2(f\,(ad_{f(\xi)}^{*\mu}\eta - ad_{f(\eta)}^{*\mu}\xi) - \mu(f\,(\xi),\ \ f\,(\eta))),$$

on obtient,

$$\begin{aligned}
&\varphi'(\xi,\eta) = \varphi(\xi,\eta) + (d_{\gamma} f\,)(\xi,\eta) - \tfrac{1}{2}([f\,,f\,]^{\mu})(\xi,\eta) = \\
&= \varphi(\xi,\eta) + ad_{\eta}^{*\gamma} f\,(\xi)\ -\ ad_{\xi}^{*\gamma} f\,(\eta)\ + f\,(\gamma(\xi,\eta)) - f\,(ad_{f(\xi)}^{*\mu}\eta - ad_{f(\eta)}^{*\mu}\xi) + \mu(f\,(\xi),f\,(\eta)),
\end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$(M' \circ \Lambda^2\ \omega)(\ \xi\,,\ \eta\,) = (\varphi(\xi,\eta) + f\,(\gamma(\xi,\eta)),\gamma(\xi,\eta)).$$

En comparant les valeurs de $\omega \circ M$ et de $M' \circ \Lambda^2\ \omega$, on trouve $\omega \circ M\ = M' \circ \Lambda^2\ \omega$, i.e., ω est un morphisme d'algèbres de Lie de $(\,F, M\,)$ dans $(\,F\,, M'\,)$.

En définitive ω est un morphisme d'algèbres de Lie tel que $\boldsymbol{r}' = (\omega\otimes\omega)(\boldsymbol{r})$. La conclusion découle du lemme 2.1 du chapitre I.

7. Exemples.

Dans ce paragraphe, si $g = (F, \mu)$ est une algèbre de Lie, $(\Lambda^3 g)^{inv}$ (resp. $(V^2 g)^{inv}$), désignera l'espace vectoriel des éléments invariants dans $\Lambda^3 g$ (resp., dans $V^2 g$, le produit tensoriel symétrique). Dans [Dr2], Drinfeld définit une structure de quasi-bigèbre jacobienne exacte (resp., quasitriangulaire) sur g comme la donnée de $\varphi \in (\Lambda^3 g)^{inv}$ (resp., $s \in (V^2 g)^{inv}$). En fait nous avons montré au paragraphe 3 (propositions 3.1 et 3.3) que toute quasi-bigèbre jacobienne exacte (resp., quasitriangulaire) est équivalente par modification à une quasi-bigèbre jacobienne de la forme $(F, \mu, 0, \varphi)$ (resp., $(F, \mu, 0, -\frac{1}{2} < s, s >^{\mu})$) où φ (resp., s) est un élément ad^{μ}-invariant dans $\Lambda^3 F$ (resp., symétrique ad^{μ}-invariant dans $F \otimes F$). Ainsi, la définition des structures de quasi-bigèbres jacobiennes exactes et quasitriangulaires sur une algèbre de Lie donnée g se ramène à la description des éléments de $(\Lambda^3 g)^{inv}$ et de $(V^2 g)^{inv}$.

7.1. Exemples de quasi-bigèbres jacobiennes.

7.1.1. Algèbres de Lie simples : Si $g = (F, \mu)$ est une algèbre de Lie simple complexe, alors, à facteur multiplicatif et modification près, g a une unique structure de quasi-bigèbre jacobienne qui est quasitriangulaire (proposition 3.4). Désignons par t la forme de Killing de g et soit :

$$\varphi(t) = -K^{\mu}(t) = -\tfrac{1}{2} < t, t >^{\mu} = \left[t^{13}, t^{23}\right],$$

qui est un générateur de $(\Lambda^3 g)^{inv}$. Alors $(F, \mu, 0, \varphi(t))$ est une quasi-bigèbre jacobienne quasitriangulaire, de sorte que $(F, \mu, d_{\mu} a, -\frac{1}{2}[a, a]^{\mu} + \varphi(t))$ l'est, pour tout $a \in \Lambda^2 F$. La solution générale de l'équation quasi-Yang-Baxter classique sur g est le couple (r, φ) avec

$$r = a + \lambda t$$

où $a \in \Lambda^2 F$, $\lambda \in \mathbf{C}$, et

$$\varphi = -\tfrac{1}{2}[a, a]^{\mu} + \lambda^2 \varphi(t).$$

7 .1.2. Structures de quasi-bigèbre jacobienne sur $gl(2, \mathbb{C})$: Soit $g = gl(2, \mathbb{C})$ avec sa base canonique (H, K, X, Y) où

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La structure de quasi-bigèbre jacobienne strictement exacte sur $gl(2, \mathbb{C})$ la plus générale est (r, φ) avec

$$r = \lambda_1 H \wedge K + \lambda_2 H \wedge X + \lambda_3 H \wedge Y + \lambda_4 K \wedge X + \lambda_5 K \wedge Y + \lambda_6 X \wedge Y \tag{26}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi = \ & (\lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_6 + \lambda_4\lambda_6) H \wedge K \wedge X \\ & + (\lambda_1\lambda_5 - \lambda_1\lambda_3 + \lambda_3\lambda_6 + \lambda_5\lambda_6) H \wedge K \wedge Y \\ & + (2\lambda_4\lambda_5 - \lambda_2\lambda_5 - \lambda_3\lambda_4 - \lambda_6^2) K \wedge X \wedge Y \\ & + (\lambda_3\lambda_4 + \lambda_2\lambda_5 + \lambda_6^2 - 2\lambda_2\lambda_3) H \wedge X \wedge Y \end{aligned} \tag{27}$$

où les λ_i , $i = 1,\ldots,6$, sont des constantes complexes arbitraires.

Dans ce cas le co-crochet γ considéré comme crochet sur $gl(2, \mathbb{C})^*$ est défini par :

$$\begin{aligned} &\gamma(H^*, K^*) = (\lambda_2 + \lambda_4) Y^* - (\lambda_3 + \lambda_5) X^*, \\ &\gamma(H^*, X^*) = \lambda_2 (H^* - K^*) + (\lambda_1 - \lambda_6) X^*, \\ &\gamma(H^*, Y^*) = -\lambda_3 (H^* - K^*) - (\lambda_1 + \lambda_6) Y^*, \\ &\gamma(K^*, X^*) = (\lambda_1 + \lambda_6) X^* + \lambda_4 (H^* - K^*), \\ &\gamma(K^*, Y^*) = -\lambda_5 (H^* - K^*) - (\lambda_1 - \lambda_6) Y^*, \\ &\gamma(X^*, Y^*) = -(\lambda_3 - \lambda_5) X^* - (\lambda_2 - \lambda_4) Y^* . \end{aligned}$$

Une condition nécéssaire et suffisante pour que r définisse une structure de bigèbre de Lie exacte est donnée par le système suivant :

$$\begin{cases} \lambda_1\lambda_5 - \lambda_1\lambda_3 + \lambda_3\lambda_6 + \lambda_5\lambda_6 = 0 \\ \lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_6 + \lambda_4\lambda_6 = 0 \\ \lambda_4\lambda_5 - \lambda_2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

r satisfera l'équation de Yang-Baxter classique si et seulement si de plus

$$\lambda_2\lambda_5 + \lambda_3\lambda_4 + \lambda_6^2 = 2\lambda_4\lambda_5.$$

$(\vee^2 g)^{inv}$ est bidimensionnel et est engendré par :

$$t_1 = H\otimes H + K\otimes K + X\otimes Y + Y\otimes X$$

et

$$t_2 = H\otimes K + K\otimes H - (X\otimes Y + Y\otimes X).$$

La forme de Killing s'écrit sous la forme

$$t = 2(t_1 - t_2) = 2(H\otimes H + K\otimes K) + 4(X\otimes Y + Y\otimes X) - 2(H\otimes K + K\otimes H).$$

Un calcul montre que

$$< t_1, t_1 >^{\mu} = - < t_1, t_2 >^{\mu} = < t_2, t_2 >^{\mu} = 2X\wedge Y\wedge (H-K).$$

Ainsi, la structure de quasi-bigèbre jacobienne quasitriangulaire la plus générale sur $gl(2, \mathbf{C})$, à modification près, est (r, φ) avec

$$r = \alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2,$$

où les α_i, $i = 1, 2$, sont des constantes complexes arbitraires, et

$$\varphi = -(\alpha_1 - \alpha_2)^2 (X\wedge Y\wedge (H-K)).$$

En particulier si $r = t$, alors

$$\varphi = -16 X\wedge Y\wedge (H-K).$$

7.1.3. Structures de quasi-bigèbre jacobienne sur $gl(3, \mathbf{C})$ **:** Soit $g = gl(3, \mathbf{C})$ avec sa base canonique

$$\begin{array}{lll} H_1 = E_{11}, & H_2 = E_{22}, & H_3 = E_{33} \\ X_1 = E_{12}, & X_2 = E_{23}, & X_3 = E_{13} \\ Y_1 = E_{21}, & Y_2 = E_{32}, & Y_3 = E_{31}. \end{array}$$

Les deux générateurs de $(\vee^2 g)^{inv}$ sont

$$t_1 = \sum_{i=1}^{3} (H_i \otimes H_i + X_i \otimes Y_i + Y_i \otimes X_i)$$

et

$$t_2 = \sum_{i \neq j} H_i \otimes H_j - \sum_{i=1}^{3} (X_i \otimes Y_i + Y_i \otimes X_i).$$

La forme de Killing s'écrit sous la forme :

$$t = 4t_1 - 2t_2 .$$

La structure de quasi-bigèbre jacobienne quasitriangulaire la plus générale sur $gl(3, C)$, à modification près, est (r, φ) avec

$$r = \alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2,$$

où les α_i , $i = 1, 2$, sont des constantes complexes arbitraires, et

$$\varphi = -(\alpha_1 - \alpha_2)^2 (X_1 \wedge Y_1 \wedge (H_1 - H_2) + X_2 \wedge Y_2 \wedge (H_2 - H_3) + X_3 \wedge Y_3 \wedge (H_1 - H_3) + \\ + X_1 \wedge X_2 \wedge Y_3 - X_3 \wedge Y_1 \wedge Y_2).$$

7.2. Exemples de quasi-bigèbres co-jacobiennes.

Des exemples de quasi-bigèbres co-jacobiennes sont fournis par les duaux des quasi-bigèbres jacobiennes. Par conséquent on peut dualiser les structures de quasi-bigèbre jacobienne étudiées dans **7.1** pour obtenir des quasi-bigèbres co-jacobiennes. Nous donnons d'abord un exemple plus naturel.

7.2.1. Structure de quasi-bigèbre co-jacobienne sur l'espace vectoriel réel $sh(n)$ des matrices hermitiennes $n\times n$ de trace nulle : Considérons la décomposition polaire de l'algèbre de Lie réelle $sl(n, \mathrm{C})$ des matrices complexes $n\times n$ de trace nulle, $sl(n, \mathrm{C}) = su(n) \oplus sh(n)$, où $su(n)$ désigne l'algèbre de Lie réelle des matrices anti-hermitiennes $n\times n$ de trace nulle et $sh(n)$ l'espace vectoriel réel des matrices hermitiennes $n\times n$ de trace nulle. Soient γ le crochet de Lie sur $su(n)$ et ψ la restriction à $sh(n)$ du crochet de Lie de $sl(n, \mathrm{C})$, qui est à valeurs dans $su(n)$. Comme $su(n)$

s'identifie au dual $(sh(n))^*$ de $sh(n)$ par l'intermédiaire de la forme bilinéaire non dégénérée définie sur $sl(n, \mathbf{C})$ par

$$< x,\ y > \ = \ \mathrm{Im\ trace}(xy),$$

on peut identifier ψ à un élément de $\Lambda^3 su(n) \cong \Lambda^3 (sh(n))^*$. Par conséquent $(sh(n),\ 0,\ \gamma,\ \psi)$ est une quasi-bigèbre co-jacobienne dont le dual est la quasi-bigèbre jacobienne $(su(n),\ \gamma,\ 0,\ \psi)$ et l'algèbre de Lie réelle $sl(n,\ \mathbf{C})$ en est le double.

Plus généralement la décomposition de Cartan d'une algèbre de Lie semi-simple complexe quelconque de dimension finie définit une structure de quasi-bigèbre jacobienne sur l'un des facteurs et une structure de quasi-bigèbre co-jacobienne sur l'autre, les deux structures étant duales l'une de l'autre.

7.2.2. Structure de quasi-bigèbre co-jacobienne sur un vectoriel E de dimension 4 : Soit E un espace vectoriel sur $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ de dimension 4 dont une base est fournie par les éléments e_1, e_2, e_3, e_4. Définissons un crochet $\mu \in Hom(\Lambda^2 E, E)$, un co-crochet $\gamma \in Hom(\Lambda^2 E^*, E^*)$ et $\psi \in \Lambda^3 E^*$ par :

$$\begin{aligned} &\mu(e_1,e_2) = 2(e_4 - e_3), && \mu(e_1,e_3) = e_1 - e_2, \\ &\mu(e_1,e_4) = -e_1 + e_2 - 2e_4, && \mu(e_2,e_3) = e_1 - e_2 + e_3, \\ &\mu(e_2,e_4) = -e_1 + e_2, && \mu(e_3,e_4) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\gamma(e_1^*,e_2^*) = 0, && \gamma(e_1^*,e_3^*) = e_3^*, && \gamma(e_1^*,e_4^*) = -e_4^*, \\ &\gamma(e_2^*,e_3^*) = -e_3^*, && \gamma(e_2^*,e_4^*) = e_4^*, && \gamma(e_3^*,e_4^*) = e_1^* - e_2^*. \end{aligned}$$

$$\psi = 2e_1^* \wedge e_2^* \wedge (e_3^* + e_4^*) + (e_1^* - e_2^*) \wedge e_3^* \wedge e_4^*,$$

où $(e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^*)$ est la base duale de (e_1, e_2, e_3, e_4).

Alors $(E,\ \mu,\ \gamma,\ \psi)$ est une quasi-bigèbre co-jacobienne. En fait elle est duale à la structure de quasi-bigèbre jacobienne exacte sur $gl(2,\ \mathbf{C})$ de 7.1.2 avec $\lambda_i = 1$, $i = 1,\ldots,4$.

Chapitre III : GROUPES DE LIE QUASI-POISSON

Dans ce chapitre, nous définissons l'objet géométrique correspondant à une quasi-bigèbre jacobienne que nous appelons groupe de Lie quasi-Poisson. Un groupe de Lie quasi-Poisson est un groupe de Lie muni d'un champ multiplicatif de bivecteurs [Lu-We], dont le crochet de Schouten avec lui-même est, dans un certain sens, un cobord. Les groupes de Lie quasi-Poisson sont apparus pour la première fois dans le travail de Kosmann-Schwarzbach [KS1]; comme pour les groupes de Lie-Poisson et les bigèbres de Lie, nous établissons par un résultat de [KS2], une correspondance biunivoque entre les groupes de Lie quasi-Poisson connexes et simplement connexes, et les quasi-bigèbres jacobiennes. Après avoir défini la notion de morphisme de groupes de Lie quasi-Poisson et établi la correspondance avec la notion de morphisme de quasi-bigèbres jacobiennes, nous montrons que le morphisme de groupes de Lie, obtenu en intégrant l'injection canonique d'une quasi-bigèbre jacobienne dans son double, est un morphisme de groupes de Lie quasi-Poisson. Ensuite nous définissons la relation de modification pour les groupes de Lie quasi-Poisson, ainsi que les groupes de Lie quasi-Poisson exacts et affines. Nous mettons en évidence le lien entre groupes de Lie quasi-Poisson équivalents par modification et groupes de Lie quasi-Poisson dont les bivecteurs quasi-Poisson proviennent d'un même champ affine de bivecteurs.

1. Groupes de Lie quasi-Poisson et quasi-bigèbres jacobiennes.

La définition suivante est due à Lu et Weintein [Lu-We] [Lu].

Définition 1.1 : *Un champ de multivecteurs Q sur un groupe de Lie G est dit multiplicatif si, pour tous g et h dans G,*

$$Q(gh) = \lambda_g Q(h) + \rho_h Q(g) \qquad (1)$$

où λ_g (resp., ρ_g) désigne la puissance extérieure de la différentielle de la translation à gauche (resp., à droite) par l'élément g de G.

Définition 1.2 : *Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie g. Un champ de bivecteurs P sur G est dit quasi-Poisson relativement à $\varphi \in \Lambda^3 g$, s'il vérifie les deux conditions suivantes :*

$$\tfrac{1}{2}[P, P]_S = \varphi^\lambda - \varphi^\rho \qquad (2)$$

$$[P, \varphi^\lambda]_S = 0 \qquad (3)$$

où $[.,.]_S$ désigne le crochet de Schouten des champs de multivecteurs sur G défini dans le chapitre I.

Remarques : a) D'après la condition (2), la condition (3) est équivalente à $[P, \varphi^\rho]_S = 0$. Ceci est immédiat en utilisant la relation $[[P, P]_S, P]_S = 0$ qui est une conséquence de l'identité de Jacobi graduée pour le crochet de Schouten.

b) Si P est quasi-Poisson relativement à $\varphi \in \Lambda^3 g$, alors il est quasi-Poisson relativement à $\varphi + \varphi_1$ pour tout élément Ad^G-invariant $\varphi_1 \in \Lambda^3 g$ tel que $[P, \varphi_1^\lambda]_S = 0$.

Définition 1.3 : *Un groupe de Lie quasi-Poisson est un triplet (G, P, φ), où G est un groupe de Lie, P un champ multiplicatif de bivecteurs quasi-Poisson relativement à $\varphi \in \Lambda^3 g$, g étant l'algèbre de Lie de G.*

Il est évident que tout groupe de Lie-Poisson est un groupe de Lie quasi-Poisson; il suffit de prendre $\varphi = 0$.

On définit de manière naturelle les notions de morphisme et d'anti-morphisme de groupes de Lie quasi-Poisson comme suit :

Définition 1.4 : *Soient (G_1, P_1, φ_1) et (G_2, P_2, φ_2) deux groupes de Lie quasi-Poisson et u une application lisse de G_1 dans G_2. On dit que u est un morphisme (resp. anti-morphisme) de groupes de Lie quasi-Poisson de (G_1, P_1, φ_1) dans (G_2, P_2, φ_2) si :*

(*i*) *u est un morphisme de groupes de Lie de G_1 dans G_2,*

(*ii*) $P_2(u(g)) = (\Lambda^2 T_g u)(P_1(g))$ *(resp.,* $P_2(u(g)) = -(\Lambda^2 T_g u)(P_1(g))$ *),* *pour tout g dans G_1,*

(*iii*) $\varphi_2 = (\Lambda^3 T_{e_1} u)(\varphi_1)$, *où e_1 est l'identité de G_1.*

Dans le cas où $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, nous retrouvons les notions de morphisme et d'anti-morphisme de groupes de Lie-Poisson [A].

Soit Q un champ de multivecteurs sur un groupe de Lie G. alors on peut définir les applications suivantes :

$$\rho(Q): G \to \Lambda g$$
$$g \to Q(g).g^{-1} = \rho_g^{-1}Q(g) \quad (4)$$

$$\lambda(Q): G \to \Lambda g$$
$$g \to -g.Q(g^{-1}) = -\lambda_g Q(g^{-1}) \quad (5)$$

Soient

$$\Delta^\rho Q: g \to \Lambda g \quad (6)$$

$$\Delta^\lambda Q: g \to \Lambda g \quad (7)$$

les applications linéaires tangentes respectives à $\rho(Q)$ et à $\lambda(Q)$ en l'identité e de G.

Si Q est multiplicatif, on a $Q(e) = 0$, ce qui entraîne

$$\rho(Q) = \lambda(Q) \quad (8)$$

et par conséquent

$$\Delta^\rho Q = \Delta^\lambda Q \ . \quad (9)$$

Désignons leur valeur commune par ΔQ.

Le résultat suivant établit une correspondance entre les groupes de Lie quasi-Poisson et les quasi-bigèbres jacobiennes :

Théorème 1.1 ([KS2]) : *L'algèbre de Lie d'un groupe de Lie quasi-Poisson* (G, P, φ) *est la quasi-bigèbre jacobienne* $(F, \mu, \gamma, -\varphi)$, *où* $g = (F, \mu)$ *est l'algèbre de Lie de G, et*

$$\gamma = \Delta P. \quad (10)$$

Inversement, il correspond un unique groupe de Lie quasi-Poisson connexe et simplement connexe à chaque quasi-bigèbre jacobienne.

Comme conséquence directe de ce théorème, on démontre la correspondance entre morphismes de groupes de Lie quasi-Poisson et morphismes de quasi-bigèbres jacobiennes.

Corollaire : *Soient u un morphisme (resp., anti-morphisme) de groupes de Lie quasi-Poisson de (G_1, P_1, φ_1) dans (G_2, P_2, φ_2). On désigne par $(F_1, \mu_1, \gamma_1, -\varphi_1)$ et $(F_2, \mu_2, \gamma_2, -\varphi_2)$ les quasi-bigèbres jacobiennes correspondantes. Alors $\omega = T_{e_1}u$ est un morphisme (resp., anti-morphisme) de quasi-bigèbres jacobiennes de $(F_1, \mu_1, \gamma_1, -\varphi_1)$ dans $(F_2, \mu_2, \gamma_2, -\varphi_2)$.*
Inversement à tout morphisme (resp., anti-morphisme) de quasi-bigèbres jacobiennes, il correspond un unique morphisme (resp., anti-morphisme) de groupes de Lie quasi-Poisson connexes et simplement connexes.

La démonstration de ce résultat suit celui du cas des groupes de Lie-Poisson. Elle est basée sur la correspondance entre morphismes de groupes et morphismes d'algèbres de Lie, et la correspondance entre cocycles de groupe et cocycles d'algèbre de Lie.

Ainsi, prenant en compte les définitions de morphisme et d'anti-morphisme de groupes de Lie quasi-Poisson, nous obtenons :

Proposition 1.1 : *Soient $(F, \mu, \gamma, \varphi)$ (resp. (F, μ, γ, ψ)) une quasi-bigèbre jacobienne (resp., co-jacobienne) et (F, M, Γ, Φ) son double. Soient $(G, P_G, -\varphi)$, (resp., $(G^*, P_{G^*}, -\psi)$), $(D, P, -\Phi)$ les groupes de Lie quasi-Poisson connexes et simplement connexes correspondants. Alors l'homomorphisme de groupes de Lie i_G (resp. i_{G^*}) de G (resp. G^*) dans D obtenu en intégrant l'injection canonique de F (resp., F^*) dans* **F**, *est un morphisme (resp., anti-morphisme) de groupes de Lie quasi-Poisson.*

La démonstration de cette proposition découle de la proposition 4.2 du chapitre II et du corollaire du théorème 1.1 du présent chapitre.

Dans l'esprit de la théorie des groupes de Lie-Poisson [Lu-We], nous pouvons dire que (G, P_G) dans le cas jacobien (resp., $(G^*, -P_{G^*})$ dans le cas co-jacobien) est un sous-groupe de Lie quasi-Poisson de (D, P).

2. Relation de modification pour les groupes de Lie quasi-Poisson.

De même que sur les quasi-bigèbres jacobiennes, il existe sur les groupes de Lie quasi-Poisson une relation d'équivalence que nous appellerons la modification ("twisting", en anglais).

Proposition 2.1 ([KS2]) : *Soit* (G, P, φ) *un groupe de Lie quasi-Poisson et soit* $f \in \Lambda^2 \mathfrak{g}$, *où* $\mathfrak{g}$ *est l'algèbre de Lie de* G. *Alors le champ de bivecteurs* P' *sur* G *et l'élément* $\varphi' \in \Lambda^3 \mathfrak{g}$ *tels que*

$$P' = P + f^{\lambda} - f^{\rho} \tag{11}$$

$$\varphi' = \varphi - \delta_{\gamma} f + \tfrac{1}{2}[f, f]^{\mu} \tag{12}$$

où $\gamma = \Delta P$, *définissent un nouveau groupe de Lie quasi-Poisson* (G, P', φ').

Définition 2.1 : *Le groupe de Lie quasi-Poisson* (G, P', φ') *où* P' *et* φ' *sont définis par les formules* **(11)** *et* **(12)** *est dit lié à* (G, P, φ) *par modification .*

Proposition 2.2 : *La relation de modification est une relation d'équivalence sur les groupes de Lie quasi-Poisson .*

La démonstration est similaire à celle de la proposition 2.2 du chapitre II.

Il est clair que les quasi-bigèbres jacobiennes tangentes à des groupes de Lie quasi-Poisson équivalents par modification sont équivalentes.

3. Groupes de Lie quasi-Poisson exacts.

Définition 3.1 : *Un groupe de Lie quasi-Poisson* (G, P, φ) *est dit exact s'il existe un élément* a *dans* $\Lambda^2 \mathfrak{g}$ *et un élément* Ad^G*-invariant* φ_1 *dans* $\Lambda^3 \mathfrak{g}$, *où* $\mathfrak{g}$ *est l'algèbre de Lie de* G, *tels que :*

$$P = a^{\lambda} - a^{\rho} \tag{13}$$

$$\varphi = \varphi_1 + \tfrac{1}{2}[a, a]^{\mu} \tag{14}$$

Ainsi, tout groupe de Lie quasi-Poisson exact est équivalent par modification à un groupe de Lie quasi-Poisson de la forme (G, 0, φ_1) où φ_1 est un élément Ad^G-invariant dans $\Lambda^3 \mathfrak{g}$. De ce qui précède, il suit qu'un groupe de Lie quasi-Poisson est exact si et seulement si la quasi-bigèbre jacobienne tangente est exacte.

Remarquons que $P = a^\lambda - a^\rho$, où $a \in \Lambda^2 \mathfrak{g}$, si et seulement si $\rho(P)$ est un cobord [KS1]. En effet :

$$\rho(P) = \rho(a^\lambda - a^\rho) = \delta^G a \text{ où } (\delta^G a)(g) = Ad^G_g a - a, \; g \in G.$$

Puisque dans un groupe de Lie semi-simple connexe tout 1-cocycle est un cobord, on a le résultat suivant :

Proposition 3.1 : *Toute structure quasi-Poisson multiplicative sur un groupe de Lie semi-simple connexe est exacte.*

Comme dans le cas des quasi-bigèbres jacobiennes, il existe une notion de groupe de Lie quasi-Poisson quasitriangulaire.

Définition 3.2 : *Un groupe de Lie quasi-Poisson* (G, P, φ) *est dit quasitriangulaire s'il existe* $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, *où* $\mathfrak{g}$ *est l'algèbre de Lie de* G, *tel que :*

(3.2.1) la partie symétrique s de r est Ad^G*-invariante,*

(3.2.2) $P = a^\lambda - a^\rho$ *où a est la partie antisymétrique de r,*

(3.2.3) $\varphi = K^\mu(r)$.

La correspondance entre groupes de Lie quasi-Poisson et quasi-bigèbres jacobiennes permet d'énoncer le résultat suivant :

Proposition 3.2 : *Soit* (G, P, φ) *un groupe de Lie quasi-Poisson. Alors* (G, P, φ) *est quasitriangulaire si et seulement si la quasi-bigèbre jacobienne associée est quasitriangulaire.*

En accord avec la proposition 4.1 du chapitre II et le théorème 1.1 du présent chapitre, le double (F, M, Γ, Φ) de toute proto-bigèbre de Lie $(F, \mu, \gamma, \varphi, \psi)$ s'intègre en un unique groupe de Lie quasi-Poisson quasitriangulaire connexe et simplement connexe D dont le champ de bivecteurs quasi-Poisson est défini par

$$P = \boldsymbol{a}^{\lambda} - \boldsymbol{a}^{\rho} ,$$

où $\boldsymbol{a}$ est l'application de $\boldsymbol{F}^*$ dans $\boldsymbol{F}$ définie par la formule (20) du chapitre II. Lorsque l'application $\boldsymbol{a}$ est vue comme un élément de $\Lambda^2\boldsymbol{F}$, ou comme forme bilinéaire sur $\boldsymbol{F}^*$, elle s'écrit sous la forme

$$\boldsymbol{a}(\xi+x,\ \eta+y) = \tfrac{1}{2}\big(<\eta, x> - <\xi, y>\big)$$

pour $\xi+x,\ \eta+y \in \boldsymbol{F}^* \cong F^* \oplus F$. L'élément de $\Lambda^3\boldsymbol{F}$ par rapport auquel P est quasi-Poisson est $-\Phi = -(\varphi + \psi)$. En plus D est un groupe de Lie muni d'une métrique riemannienne bi-invariante [Me], donc un groupe hyperbolique au sens de Medina et Revoy [Me-Re].

On donnera des exemples de groupes de Lie quasi-Poisson au paragraphe 5.

4. Groupes de Lie quasi-Poisson affines.

Nous allons définir ici la notion de groupe de Lie quasi-Poisson affine, qui généralise celle de groupe de Lie-Poisson affine définie dans [Da-So], [Lu]. Rappelons pour cela quelques notions relatives aux champs de multivecteurs affines [Lu], [KS2].

Définition 4.1 : *Un champ de multivecteurs, Q, sur un groupe de Lie G est dit affine si pour tous g, h dans G,*

$$Q(gh) = \lambda_g\, Q(h) + \rho_h\, Q(g) - \lambda_g\, \rho_h\, Q(e)\,. \tag{15}$$

Ainsi, à la fois, les champs multiplicatifs de multivecteurs et les champs de multivecteurs invariants à gauche ou à droite sur G apparaissent comme des types particuliers de champs affines de multivecteurs.

Pour tout champ de multivecteurs Q sur un groupe de Lie G, posons :

$$Q_\rho = Q - (Q(e))^{\rho} \tag{16}$$

$$Q_\lambda = Q - (Q(e))^{\lambda} \tag{17}$$

On a le résultat suivant [Lu] [KS2] :

Proposition 4.1 : *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) Q_ρ *est multiplicatif,*
(ii) Q_λ *est multiplicatif,*
(iii) Q *est affine.*

Proposition 4.2 : *Si* P *est un champ affine de bivecteurs sur un groupe de Lie* G, *quasi-Poisson relativement à* $\varphi \in \Lambda^3 \mathfrak{g}$, *alors les champs multiplicatifs de bivecteurs* P_ρ et P_λ *sont quasi-Poisson relativement au même élément* φ.

La démonstration de cette proposition résulte du lemme suivant :

Lemme 4.1 : *Soient* Q *et* Q' *des champs affines de multivecteurs sur un groupe de Lie* G. *Alors on a :*

$$[Q_\lambda, Q'_\lambda]_S = ([Q, Q']_S)_\lambda \tag{18}$$

$$[Q_\rho, Q'_\rho]_S = ([Q, Q']_S)_\rho . \tag{19}$$

Démonstration : Rappelons tout d'abord que pour deux champs affines de multivecteurs Q et Q', on a [KS2] :

$$\begin{aligned} [Q, Q']_S(e) &= [\Delta^\lambda Q, q'] + [q, \Delta^\lambda Q'] + [q, q']^\mu \\ &= [\Delta^\rho Q, q'] + [q, \Delta^\rho Q'] - [q, q']^\mu . \end{aligned} \tag{20}$$

où l'on a posé $Q(e) = q,\ Q'(e) = q'$.

Comme Q et Q' sont affines et q^λ, q'^λ sont invariants à gauche, alors $[Q, q'^\lambda]_S$ et $[q^\lambda, Q']_S$ sont invariants à gauche ; donc

$$[Q, q'^\lambda]_S = \left([Q, q'^\lambda]_S(e)\right)^\lambda, \qquad [q^\lambda, Q']_S = \left([q^\lambda, Q']_S(e)\right)^\lambda .$$

On a

$$[Q_\lambda, Q'_\lambda]_S = [Q,Q']_S - [Q, q'^\lambda]_S - [q^\lambda, Q']_S + ([q,q']^\mu)^\lambda$$
$$= [Q,Q']_S - \left([Q, q'^\lambda]_S(e) + [q^\lambda, Q']_S(e) - [q, q']^\mu\right)^\lambda.$$

En appliquant la formule (**20**) et la relation $\Delta^\lambda q^\lambda = 0$, on obtient :

$$[Q_\lambda, Q'_\lambda]_S = [Q,Q']_S - \left([\Delta^\lambda Q, q'] + [q,q']^\mu + [q, \Delta^\lambda Q'] + [q, q']^\mu - [q, q']^\mu\right)^\lambda$$
$$= [Q,Q']_S - \left([Q,Q']_S(e)\right)^\lambda = \left([Q, Q']_S\right)_\lambda,$$

ce qui démontre la formule **(18)**. De la même manière, on démontre la formule (19) en se servant de la formule (20), et du fait que le crochet de Schouten d'un champ affine de multivecteurs et d'un champ de multivecteurs invariant à droite est invariant à droite, et de la relation $\Delta^\rho q^\rho = 0$, pour tout q dans $\Lambda\mathfrak{g}$.

Démonstration de la proposition 4.2 : Il suffit de prendre $Q = Q' = P$ dans le lemme **4.1** et de remarquer que $[P,P]_S(e) = 0$ dû au fait que P est quasi-Poisson . On obtient

$$[P_\lambda, P_\lambda]_S = [P, P]_S = [P_\rho, P_\rho]_S .$$

Corollaire : *Soit P un champ affine de bivecteurs sur un groupe de Lie G tel que (G, P_ρ, φ) soit un groupe de Lie quasi-Poisson . Alors P est quasi-Poisson relativement à φ si et seulement si :*

$$[P,P]_S(e) = 0 . \qquad (21)$$

En vue de généraliser la notion de groupe de Lie-Poisson affine définie dans [Da-So] et [Lu], nous allons adopter la définition suivante :

Définition 4.2 : *Un groupe de Lie quasi-Poisson affine est un groupe de Lie G muni d'un champ de bivecteurs P, quasi-Poisson relativement à un élément φ dans $\Lambda^3\mathfrak{g}$, tels que (G, P_ρ, φ) soit un groupe de Lie quasi-Poisson.*

Remarque : La proposition 4.2 permet de remplacer dans la définition 4.2, $(G,\ P_\rho,\ \varphi)$ par $(G,\ P_\lambda,\ \varphi)$.

La proposition suivante montre que pour tout champ affine de bivecteurs P non nécessairement quasi-Poisson, P_λ est quasi-Poisson si et seulement si P_ρ est quasi-Poisson.

Proposition 4.3 : *Soit P un champ affine de bivecteurs sur un groupe de Lie G. Si $(G,\ P_\lambda,\ \varphi)$ est un groupe de Lie quasi-Poisson, alors $(G,\ P_\rho,\ \varphi')$ est un groupe de Lie quasi-Poisson, où*

$$\varphi' = \varphi - \delta_{\gamma_\lambda} P(e) + \tfrac{1}{2}\left[P(e), P(e)\right]^{\mu} \qquad (22)$$

avec $\gamma_\lambda = \Delta P_\lambda$.

Démonstration : Par définition on a

$$P_\lambda = P - (P(e))^{\lambda},$$

$$P_\rho = P - (P(e))^{\rho}.$$

En exprimant P en fonction de P_λ, P_ρ s'écrit sous la forme :

$$P_\rho = P_\lambda + (P(e))^{\lambda} - (P(e))^{\rho}.$$

D'où

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\left[P_\rho, P_\rho\right]_S \\
&= \tfrac{1}{2}\left[P_\lambda, P_\lambda\right]_S + \left[P_\lambda, (P(e))^{\lambda} - (P(e))^{\rho}\right]_S + \tfrac{1}{2}\left(\left[P(e), P(e)\right]^{\mu}\right)^{\lambda} - \tfrac{1}{2}\left(\left[P(e), P(e)\right]^{\mu}\right)^{\rho} \\
&= \varphi^{\lambda} - \varphi^{\rho} + \left(\left[\Delta P_\lambda, P(e)\right]\right)^{\lambda} - \left(\left[\Delta P_\lambda, P(e)\right]\right)^{\rho} + \tfrac{1}{2}\left(\left[P(e), P(e)\right]^{\mu}\right)^{\lambda} - \tfrac{1}{2}\left(\left[P(e), P(e)\right]^{\mu}\right)^{\rho} \\
&= \left(\varphi + \left[\Delta P_\lambda, P(e)\right] + \tfrac{1}{2}\left[P(e), P(e)\right]^{\mu}\right)^{\lambda} - \left(\varphi + \left[\Delta P_\lambda, P(e)\right] + \tfrac{1}{2}\left[P(e), P(e)\right]^{\mu}\right)^{\rho} \\
&= \varphi'^{\lambda} - \varphi'^{\rho}.
\end{aligned}$$

En utilisant les propriétés du crochet de Schouten et le fait que $\left[P_\lambda, \varphi^{\lambda}\right]_S = 0$, on démontre la condition $\left[P_\rho, \varphi'^{\lambda}\right]_S = 0$. En effet, de ce qui précède, on a

$$P_\rho = P_\lambda + p^\lambda - p^\rho,$$

où l'on a posé $P(e) = p$, et la formule (20) permet d'écrire φ'^λ sous la forme

$$\varphi'^\lambda = \varphi^\lambda + \left[P_\lambda, p^\lambda\right]_S + \tfrac{1}{2}\left[p^\lambda, p^\lambda\right]_S.$$

En utlisant le fait que le crochet de Schouten d'un champ de multivecteurs invariant à droite avec un champ de multivecteurs invariant à gauche est nul, on a

$$\begin{aligned}\left[P_\rho, \varphi'^\lambda\right]_S &= \left[P_\lambda, \varphi^\lambda\right]_S + \left(\left[P_\lambda, \left[P_\lambda, p^\lambda\right]_S\right]_S + \left[p^\lambda, \varphi^\lambda\right]_S\right) \\ &\quad + \left(\tfrac{1}{2}\left[P_\lambda, \left[p^\lambda, p^\lambda\right]_S\right]_S + \left[p^\lambda, \left[P_\lambda, p^\lambda\right]_S\right]_S\right) + \tfrac{1}{2}\left[p^\lambda, \left[p^\lambda, p^\lambda\right]_S\right]_S.\end{aligned}$$

En utilisant l'identité de Jacobi graduée du crochet de Schouten et le fait que P_λ est quasi-Poisson relativement à φ, on obtient $\left[P_\rho, \varphi'^\lambda\right]_S = 0$.
En définitive (G, P_ρ, φ') est un groupe de Lie quasi-Poisson.

Définition 4.3 : *On dit que deux champs multiplicatifs de bivecteurs* P_1 et P_2 *proviennent d'un même champ affine de bivecteurs* P *si* $P_1 = -P_\lambda$ et $P_2 = P_\rho$.

Le résultat suivant établit une correspondance entre la relation de modification et la provenance de deux champs multiplicatifs de bivecteurs d'un même champ affine et généralise celui de [Lu] sur les structures de Poisson affines.

Proposition 4.4 : *Si deux groupes de Lie quasi-Poisson* (G, P_1, φ_1) et (G, P_2, φ_2) *sont équivalents par modification, alors il existe un champ affine de bivecteurs* P *sur* G, *tel que* $P_1 = P_\lambda$, $P_2 = P_\rho$.

Inversement, si les champs de bivecteurs de deux groupes de Lie quasi-Poisson proviennent d'un même champ affine de bivecteurs, alors ils sont équivalents par modification, à un élément Ad^G *- invariant de* $\Lambda^3 \mathfrak{g}$ *près.*

Démonstration : Soient $(G,\ P_1,\ \varphi_1)$ et $(G,\ P_2,\ \varphi_2)$ deux groupes de Lie quasi-Poisson équivalents par modification, ce qui implique que

$$P_2 = P_1 + f^\lambda - f^\rho$$

pour un certain f dans $\Lambda^2\mathfrak{g}$. Posons

$$P = P_1 + f^\lambda .$$

P_1 étant multiplicatif, $P(e) = f$; ce qui nous permet d'écrire P_1 et P_2 sous la forme

$$P_1 = P - f^\lambda = P - (P(e))^\lambda = P_\lambda$$

$$P_2 = P - f^\rho = P - (P(e))^\rho = P_\rho .$$

Donc P_1 et P_2 proviennent de P; le caractère affine de P vient du fait que P_1 et P_2 sont multiplicatifs. Ce qui démontre la première partie de la proposition.

Inversement, supposons que $(G,\ P_1,\ \varphi_1)$ et $(G,\ P_2,\ \varphi_2)$ sont deux groupes de Lie quasi-Poisson tels que P_1 et P_2 proviennent d'un même champ affine de bivecteurs P sur G, i.e.,

$$P_1 = P_\lambda \quad \text{et} \quad P_2 = P_\rho .$$

Alors, on a de toute évidence

$$P_2 = P_1 + f^\lambda - f^\rho$$

où $f = P(e)$.

Par ailleurs

$$\tfrac{1}{2}[P_2, P_2]_S = \varphi^\lambda - \varphi^\rho$$

où

$$\varphi = \varphi_1 - \delta_{\gamma_1} f + \tfrac{1}{2}[f, f]^\mu \quad \text{avec} \quad \gamma_1 = \Delta P_1 .$$

D'autre part, comme P_2 est quasi-Poisson relativement à φ_2, on a :

$$\tfrac{1}{2}[P_2, P_2]_S = \varphi_2^\lambda - \varphi_2^\rho .$$

Donc $\varphi_2 - \varphi$ est un élément Ad^G-invariant dans $\Lambda^3 g$. Ce qui achève la démonstration de la proposition.

5. Exemples de groupes de Lie quasi-Poisson.

Une large classe d'exemples de groupes de Lie quasi-Poisson est fournie par les groupes de Lie quasi-Poisson exacts. Si G est un groupe de Lie de dimension finie et g son algèbre de Lie, alors tout élément r dans $\Lambda^2 g$ définit une structure de groupe de Lie quasi-Poisson sur G. Dans ce cas, il suffit de poser

$$P = r^\lambda - r^\rho$$
$$\varphi = \tfrac{1}{2}[r, r]^\mu,$$

où μ désigne le crochet de Lie sur g. Considérons le cas de $GL(2, \mathrm{R})$.

Soit $G = GL(2, \mathrm{R})$ et $g = gl(2, \mathrm{R})$ son algèbre de Lie avec sa base canonique

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La structure quasi-Poisson exacte la plus générale sur $GL(2, \mathrm{R})$ se déduit de celle de $gl(2, \mathrm{R})$. Elle est déterminée par un couple (r, φ) où r et φ sont donnés par les formules **(26)** et (27) du chapitre **II** (φ, pris avec le signe opposé et les λ_i, $i = 1, \ldots, 6$, sont des constantes réelles arbitraires). Considérons le cas particulier où $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_5 = 2$, $\lambda_i = 0$ pour $i \neq 1, 2, 5$. On a :

$$r = 2H\wedge K + 2H\wedge X + 2K\wedge Y,$$

$$\varphi = 4K\wedge H\wedge (X + Y) + 4(K-H)\wedge X\wedge Y.$$

Le champ multiplicatif de bivecteurs défini par r, quasi-Poisson relativement à φ est :

$$P = r^\lambda - r^\rho.$$

Déterminons à présent les crochets quasi-Poisson des fonctions coordonnées sur $GL(2, \mathrm{R})$.

En éffectuant les produits tensoriels de matrices, r s'écrit sous la forme

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Soit

$$\mathrm{g} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

un élément de $GL(2\ ,\ \mathrm{R})$, $ad - bc \neq 0$. Une méthode pour calculer les crochets quasi-Poisson des fonctions coordonnées $a, b, c, d,$ est d'utiliser la notation tensorielle dans le sens de Semenov-Tian-Shansky [STS]:

$$\{\ \mathrm{g} \otimes, \mathrm{g}\ \} = [\ \mathrm{g} \otimes \mathrm{g}\ ,\ r]$$

où

$$\{\ \mathrm{g} \otimes, \mathrm{g}\} = \begin{pmatrix} \{a,a\} & \{a,b\} & \{b,a\} & \{b,b\} \\ \{a,c\} & \{a,d\} & \{b,c\} & \{b,d\} \\ \{c,a\} & \{c,b\} & \{d,a\} & \{d,b\} \\ \{c,c\} & \{c,d\} & \{d,c\} & \{d,d\} \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{g} \otimes \mathrm{g} = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ba & b^2 \\ ac & ad & bc & bd \\ ca & cb & da & db \\ c^2 & cd & dc & d^2 \end{pmatrix},$$

$$[\,\mathrm{g}\otimes\mathrm{g}\,,\,r\,]=\begin{pmatrix} 0 & a(a+b-d)-b(b-c) & a(d-a-b)+b(b-c) & 0\\ -ac & ac-bd & -(a+2b)c+bd & -bd\\ ac & (a+2b)c-bd & -ac+bd & bd\\ 0 & c(a-b+d)+d(a-d) & c(b-a-d)+d(d-a) & 0 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\{\,a\,,\,b\,\}=a(a+b-d)-b(b-c)\,,\quad \{\,a\,,\,c\,\}=-ac,$$

$$\{\,a\,,\,d\,\}=ac-bd\,,\qquad\qquad \{\,b\,,\,c\,\}=-(a+2b)c+bd\,,$$

$$\{\,b\,,\,d\,\}=-bd\,,\qquad\qquad \{\,c\,,\,d\,\}=c(a-b+d)+d(a-d).$$

Chapitre IV : QUASI-GROUPES DE LIE-POISSON.

Dans ce chapitre, nous définissons l'objet dual d'un groupe de Lie quasi-Poisson que nous convenons d'appeler quasi-groupe de Lie-Poisson. Un quasi-groupe de Lie-Poisson est la donnée d'une boucle de Lie G munie d'une structure de Poisson, dont la loi de composition interne vérifiant une certaine associativité faible (mono-alternativité à droite), est un morphisme de Poisson, et d'un élément de $\Lambda^3 T_e^* G$ mesurant dans un certain sens le défaut d'associativité de la loi de G et vérifiant d'autres conditions. Nous rappelons qu'une boucle de Lie est une variété analytique munie d'une loi de composition interne vérifiant toutes les propriétés d'un groupe de Lie exceptée l'associativité, et nous faisons un apperçu général sur la théorie des boucles de Lie [Du] [Ho-St] [Sa-Mi 1,2], notamment la description des différentes structures algébriques sur l'espace tangent en l'identité d'une boucle de Lie (algèbre d'Akivis, hyper-algèbre) et les connexions linéaires définies sur les boucles de Lie locales, qui généralisent la connexion classique de Cartan sur les groupes de Lie (vérifiant $\nabla_X Y = 0$ pour tout champ de vecteurs X, si Y est un champ de vecteurs invariant à gauche), tout groupe de Lie pouvant être considéré comme un espace à connexion linéaire de courbure nulle et de torsion ∇-constante. Enfin nous démontrons que l'espace tangent en l'identité à tout quasi-groupe de Lie-Poisson est une quasi-bigèbre co-jacobienne.

Une partie des résultats de ce chapitre ont été annoncés dans [Ba].

1. Rappels sur les boucles de Lie mono-alternatives à droite.

Nous reprenons les définitions et certains résultats de [Sa-Mi1,2], [Du] et [Ho-St] qui seront utiles pour la suite.

Définition 1.1: *Une boucle est un ensemble G muni d'une opération interne*

$$m : G\times G \to G$$
$$(g,h) \to g.h = m(g,h)$$

admettant un élément neutre e, vérifiant

$$g.e = e.g = g$$

pour tout g dans G, telle que les équations

$$g.a = h, \qquad a.g = h$$

admettent des solutions uniques (notées respectivement $g\backslash h$ et h/g).

Une telle boucle est dite analytique (ou de Lie) si G est une variété analytique et les applications

$$(g, h) \to g.h\,, \qquad (g, h) \to g/h\,, \qquad (g, h) \to h\backslash g$$

sont analytiques.

Ainsi tout groupe de Lie est une boucle de Lie.

Rappelons que si G ne possède pas d'élément neutre, alors on l'appelle tout simplement un quasi-groupe. Ainsi, une boucle peut être définie comme un quasi-groupe admettant un élément neutre.

Définition 1.2 : *Si G est un ensemble sur lequel sont définies localement au voisinage de l'élément neutre e, les trois opérations analytiques*

$$(g, h) \to g.h\,, \qquad (g, h) \to g/h\,, \qquad (g, h) \to h\backslash g$$

vérifiant les propriétés ci-dessus, on dit que G est une boucle de Lie locale.

Remarque: L'unicité des solutions dans une boucle de Lie des équations

$$g.a = h, \qquad a.g = h,$$

signifie que les translations à gauche λ_g et à droite ρ_g sont des difféomorphismes.

L'outil nécéssaire pour la démonstration des principaux résultats sur les boucles de Lie locales est fourni par le lemme suivant :

Lemme 1.1 ([Du]) : *Soit G une boucle de Lie locale d'élément neutre e. Il existe sur un voisinage de e des coordonnées locales nulles en e telles l'expression locale de la loi de compositon soit*

$$x.y = x + y + B(x,y) + r(x,x,y) + s(x,y,y) + \varepsilon(x,y), \qquad (1)$$

où B est bilinéaire antisymétrique, r et s sont trilinéaires et telles que

$$r(x, x, x) + s(x, x, x) \equiv 0,$$

et ε est d'ordre 3 avec

$$\varepsilon(x, 0) \equiv \varepsilon(0, x) \equiv \varepsilon(x, x) \equiv 0.$$

L'espace tangent en l'identité à toute boucle de Lie est muni d'une structure algébrique, généralisant la structure d'algèbre de Lie, et dont les propriétés découlent de celles de la boucle de Lie donnée.

Définition 1.3 : *Une algèbre d'Akivis $(A, [.,.], <.,.,.>)$ est un espace vectoriel A muni d'une application bilinéaire antisymétrique*

$$\begin{aligned} [.,.] : A \times A &\to A \\ (x, y) &\to [x, y] \end{aligned}$$

et d'une application trilinéaire

$$\begin{aligned} <.,.,.> : A \times A \times A &\to A \\ (x, y, z) &\to <x, y, z> \end{aligned}$$

telles que

$$\sum_{\sigma \in S_3} (Sign\,\sigma) < x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)} > \; = \; \oint [[x_1, x_2], x_3] \qquad (2)$$

où S_3 désigne le groupe des permutations de (1, 2, 3), $Sign\,\sigma$ la signature de $\sigma \in S_3$ et $\oint$ désigne la somme sur les permutations circulaires de x_1, x_2, x_3 .

Ainsi toute algèbre de Lie détermine une structure d'algèbre d'Akivis, sur l'espace sous-jacent en prenant $<.,.,.> = 0$.

Exemple : Soit (F, μ, γ, ψ) une quasi-bigèbre co-jacobienne. Posons

$$[x, y] = \mu(x, y),$$

$$<x, y, z> = -\tfrac{1}{2} ad^{*\gamma}_{\psi(y,z)} x \quad .$$

pour $x, y, z \in F$. Alors $(F, \mu, <.,.,.>)$ est une algèbre d'Akivis. Nous obtenons une seconde structure d'algèbre d'Akivis sur F en posant

$$<x, y, z>' = -\tfrac{1}{2} ad^{*\gamma}_{\psi(x,y)} z.$$

Considérons une boucle de Lie locale G. Soit $A = T_eG$ l'espace tangent à la variété G au point e. Posons pour tous $x, y, z \in A$,

$$[x, y] = \tfrac{1}{2}\tfrac{d^2}{dt^2}\big((\alpha(t)\beta(t)) / (\beta(t)\alpha(t))\big)\big|_{t=0} \tag{3}$$

$$<x, y, z> = \tfrac{1}{6}\tfrac{d^3}{dt^3}\big(((\alpha(t)\beta(t))\gamma(t)) / (\alpha(t)(\beta(t)\gamma(t)))\big)\big|_{t=0} \tag{4}$$

où $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)$ sont des courbes de classe C^k $(k \geq 3)$ dans G, passant par le point e avec les vecteurs tangents x, y, z respectivement. Les applications $[.,.]$ et $<.,.,.>$ sont appelées respectivement crochet commutateur et crochet associateur associés à l'opération de G. On a le résultat suivant [Du]:

Proposition 1.1: *Pour toute boucle de Lie locale G, $(A, [.,.], <.,.,.>)$, où $A = T_eG$, $[.,.]$ et $<.,.,.>$ sont définis respectivement par les formules* (**3**) *et* (**4**), *est une algèbre d'Akivis.*

Explicitement, dans des coordonnées locales vérifiant (1), les applications $[.,.]$ et $<.,.,.>$ sont données par les formules suivantes :

$$[x, y] = 2B(x, y), \tag{5}$$

$$\begin{aligned} <x, y, z> = {} & B(B(x, y), z) + B(B(y, z), x) + r(x, y, z) \\ & + r(y, x, z) - s(x, y, z) - s(x, z, y). \end{aligned} \tag{6}$$

Définition 1.4 : *L'algèbre d'Akivis ainsi décrite est appelée algèbre d'Akivis de la boucle de Lie locale G.*

Nous allons définir à présent une classe de boucles de Lie locales avec laquelle nous travaillerons dans la suite.

Définition 1.5: *On dit qu'une boucle de Lie G est mono-alternative à droite si pour tous entiers $k, l \in Z$ et pour tous a, b dans G on a*

$$(ab^k)b^l = ab^{k+l} . \tag{7}$$

Remarques: La formule (7) exprime d'une part une associativité faible de la multiplication définie sur G, d'autre part l'existence d'un inverse à droite pour tout élément g, noté g^{-1}. Par convention on a, pour tout g dans G, $g^0 = e$, $g^{-k} = (g^{-1})^k$, et donc $\rho_g^{-1} = \rho_{g^{-1}}$.

Exemple : Soit G l'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives $n{\times}n$. Posons

$$m(a,b) = \sqrt{ba^2b}$$

pour a et b dans G. Alors (G, m) est une boucle de Lie mono-alternative à droite.

L'ensemble des matrices hermitiennes définies positives $n{\times}n$ est aussi muni d'une structure de boucle de Lie mono-alternative à droite, la multiplication m étant définie comme dans le cas des matrices réelles symétriques définies positives.

Pour les boucles de Lie mono-alternatives à droite, on a :

Lemme 1.2 : *Si G est une boucle de Lie mono-alternative à droite, alors*

$$<x, y, z> + <x, z, y> = 0, \tag{8}$$

pour tous $x, y, z \in T_eG$.

Démonstration : Soit G une boucle de Lie mono-alternative à droite; alors d'après (7) on a

$$(ab)b = a(bb) = ab^2,$$

pour tous a, b dans G. Par la formule (4) on trouve

$$<x, y, y> = 0, \tag{9}$$

pour tous x, y dans T_eG. Ainsi pour tous x, y, z dans T_eG, on a

$$<x, y+z, y+z> = 0.$$

En développant le premier membre de cette égalité en utlisant la trilinéarité du crochet associateur et tenant compte de (9), on obtient

$$<x, y, z> + <x, z, y> = 0,$$

d'où la formule (8).

2. Construction de la connexion canonique.

Nous allons définir des connexions linéaires sur les boucles de Lie locales.

Soit G une boucle de Lie locale. On suppose donnée une famille $t(a,b)_{(a,b)\in G\times G}$ où a et b sont voisins de e dans G et

$$t(a,b) : G \to G$$

est un difféomorphisme local tel que $(a, b, g) \to t(a, b)(g)$ est analytique et $t(a, a) = Id_G$, $t(a, b)(b) = a$ pour tous a, b, g voisins de e dans G. Pour chaque telle famille on obtient une famille d'isomorphismes linéaires

$$p(a,b) : T_bG \to T_aG$$

en posant $p(a,b) = T_b(t(a,b))$. Cette famille satisfait $p(a, a) = Id_{T_aG}$ pour tout a voisin de e dans G. Une telle famille est appelée une famille de transports linéaires sur G. A chaque famille de transports linéaires p on associe une connexion ∇ sur G comme suit [Du], [Ho-St]. Si X et Y sont des champs de vecteurs définis au voisinage de $g \in G$, on pose,

$$(\nabla_X Y)_g = \tfrac{d}{dt}\left(p(\gamma(t), g)^{-1} Y_{\gamma(t)}\right)\Big|_{t=0} \tag{10}$$

où γ est la courbe qui est l'unique solution du système :

$$\begin{cases} \gamma(0) = g \\ \frac{d}{dt}(\gamma(t)) = X_{\gamma(t)} \end{cases}$$

On définit bien ainsi une connexion linéaire sur la variété G [Ho-St].

Lemme 2.1 ([Du]): *On a les formules suivantes*

$$(\nabla_X Y)_g = -(D_1 p)(g, g)(X_g \otimes Y_g) + Y_g'(X_g) \tag{11}$$

$$T(X,Y)_g = (D_1 p)(g,g)(Y_g \otimes X_g - X_g \otimes Y_g) \tag{12}$$

où T désigne la torsion de la connexion ∇, D_1 désigne la dérivée par rapport à la première variable et les champs de vecteurs sont considérés comme des applications d'un ouvert de R^n dans R^n.

Nous avons au moins deux familles naturelles de difféomorphismes liées aux translations à gauche sur une boucle de Lie locale :

$$t_1(a, b)(g) = a(b\backslash g) \tag{13}$$

$$t_2(a, b)(g) = (a/b)g. \tag{14}$$

Dans un groupe de Lie (local) les deux familles coïncident mais dans une boucle de Lie locale, en général, elles sont différentes. En utilisant les formules (11) et (12) on a le résultat suivant :

Théorème 2.1 ([Ho-St]) ([Du]): *Soit $\left(T_eG, [.,.], <.,.,.>\right)$ l'algèbre d'Akivis de la boucle de Lie locale G. Alors la torsion et la courbure des connexions associées aux familles t_1 et t_2 sont données par :*

$$T(X, Y)(e) = -[X_e, Y_e] \qquad \textit{dans les deux cas,} \qquad (15)$$

$$R(X, Y)(Z)(e) = \begin{cases} 0 & \textit{pour } t_1 \\ -<X_e, Y_e, Z_e> + <X_e, Z_e, Y_e> & \textit{pour } t_2 \end{cases} \qquad (16)$$

pour tous champs de vecteurs X, Y, Z définis au voisinage de e.

Dans [Du], on démontre de plus que la courbure de la connexion associée à la famille t_1 est identiquement nulle.

Proposition 2.1 : *Dans une boucle de Lie locale, pour tous champs de vecteurs X, Y, Z définis au voisinage de l'identité, on a :*

$$(\nabla_X T)(Y, Z)(e) = -<X_e, Y_e, Z_e> + <X_e, Z_e, Y_e> \qquad (17)$$

où ∇ *désigne la dérivation covariante par rapport à la connexion associée à la famille* t_1. *En particulier si G est mono-alternative à droite, on a :*

$$<X_e, Y_e, Z_e> = -\tfrac{1}{2}(\nabla_X T)(Y, Z)(e) \qquad (18)$$

Démonstration : Soit G une boucle de Lie locale. Soient X, Y, Z des champs de vecteurs définis au voisinage de e. Les formules (5) et (6) donnent :

$$\begin{aligned} <X_e, Y_e, Z_e> = \ & \tfrac{1}{4}\big[[X_e, Y_e], Z_e\big] + \tfrac{1}{4}\big[[Y_e, Z_e], X_e\big] + r(X_e, Y_e, Z_e) \\ & + r(Y_e, X_e, Z_e) - s(X_e, Y_e, Z_e) - s(X_e, Z_e, Y_e). \end{aligned}$$

Par ailleurs on a :

$$(\nabla_X T)(Y, Z) = \nabla_X\big(T(Y, Z)\big) - T(\nabla_X Y, Z) - T(Y, \nabla_X Z).$$

En utilisant les formules (11) et (12) on obtient :

$$\begin{aligned}
\nabla_X(T(Y,Z))(g) &= -(D_1p)(g,g)(X_g\otimes T(Y,Z)(g)) + (T(Y,Z))'(g)(X_g)\\
&= -(D_1p)(g,g)(X_g\otimes T(Y,Z)(g))\\
&\quad + (D_1(D_1p))(g,g)(X_g\otimes Z_g\otimes Y_g - X_g\otimes Y_g\otimes Z_g)\\
&\quad + (D_1p)(g,g)(Z_g'(X_g)\otimes Y_g - Y_g'(X_g)\otimes Z_g)\\
&\quad + (D_1p)(g,g)(Z_g\otimes Y_g'(X_g) - Y_g\otimes Z_g'(X_g)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T(\nabla_XY,Z)(g) &= -(D_1p)(g,g)(Z_g\otimes (D_1p)(g,g)(X_g\otimes Y_g) - Z_g\otimes Y_g'(X_g))\\
&\quad + (D_1p)(g,g)(((D_1p)(g,g)(X_g\otimes Y_g))\otimes Z_g - Y_g'(X_g)\otimes Z_g),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T(Y,\nabla_XZ)(g) &= -(D_1p)(g,g)(((D_1p)(g,g)(X_g\otimes Z_g))\otimes Y_g - Z_g'(X_g)\otimes Y_g)\\
&\quad + (D_1p)(g,g)(Y_g\otimes (D_1p)(g,g)(X_g\otimes Z_g) - Y_g\otimes Z_g'(X_g)).
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
(\nabla_XT)(Y,Z)(g) &= -(D_1p)(g,g)(X_g\otimes T(X,Y)(g))\\
&\quad + (D_1(D_1p))(g,g)(X_g\otimes Y_g\otimes Z_g - X_g\otimes Z_g\otimes Y_g)\\
&\quad + (D_1p)(g,g)(Z_g\otimes (D_1p)(g,g)(X_g\otimes Y_g))\\
&\quad - (D_1p)(g,g)(((D_1p)(g,g)(X_g\otimes Y_g))\otimes Z_g)\\
&\quad + (D_1p)(g,g)(((D_1p)(g,g)(X_g\otimes Z_g))\otimes Y_g)\\
&\quad - (D_1p)(g,g)(Y_g\otimes (D_1p)(g,g)(X_g\otimes Z_g)).
\end{aligned}$$

En utilisant la formule (1) et l'identité $g = b(b\backslash g)$, nous obtenons un développement limité de $b\backslash g$ à l'ordre 3 (en 0) sous la forme

$$b\backslash g = g - b - \tfrac{1}{2}[b,g] - r(b,b,g) - s(b,b,g) - s(b,g,b) + s(b,g,g) + \dots$$

Ce qui nous permet d'avoir, en utilisant encore la formule (1) :

$$\begin{aligned}
t_1(a,b)(g) &= a - b + g - \tfrac{1}{2}[a,b] + \tfrac{1}{2}[a,g] - \tfrac{1}{2}[b,g] - \tfrac{1}{4}[a,[b,g]]\\
&\quad - r(a,a,b) + r(a,a,g) - r(b,b,g) + s(a,b,b)\\
&\quad - s(a,b,g) - s(a,g,g) + s(a,g,g) - s(b,b,g)\\
&\quad + s(b,g,g) + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p(a,b)(w) &= \tfrac{\partial}{\partial g}\big(t_1(a,b)(g)\big)\Big|_{g=b}(w) \\
&= w + \tfrac{1}{2}[a, w] - \tfrac{1}{2}[b, w] - \tfrac{1}{4}[a, [b, w]] \\
&\quad + r(a, a, w) - r(b, b, w) - s(a, b, w) \\
&\quad - s(a, w, b) + s(a, w, b) + s(a, b, w) \\
&\quad - s(b, b, w) + s(b, w, b) + s(b, b, w) + \ldots \\
&= w + \tfrac{1}{2}[a, w] - \tfrac{1}{2}[b, w] - \tfrac{1}{4}[a, [b, w]] \\
&\quad + r(a, a, w) - r(b, b, w) + s(a, b, w) + s(b, w, b) + \ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(D_1 p)(a, b)(v \otimes w) &= \tfrac{1}{2}[v, w] - \tfrac{1}{4}[v, [b, w]] + r(v, a, w) \\
&\quad + r(a, v, w) + s(v, b, w) + \ldots
\end{aligned}$$

$$(D_1 p)(e, e)(v \otimes w) = \tfrac{1}{2}[v, w],$$

$$(D_1(D_1 p))(a, b)(u \otimes v \otimes w) = r(u, v, w) + r(v, u, w) + \ldots,$$

$$(D_1(D_1 p))(e, e) = r(u, v, w) + r(v, u, w).$$

Tenant compte de tout qui précède, nous obtenons

$$\begin{aligned}
(\nabla_X T)(Y, Z)(e) &= \tfrac{1}{2}[X_e, [Y_e, Z_e]] + \tfrac{1}{4}[Y_e, [Z_e, X_e]] + \tfrac{1}{4}[Z_e, [X_e, Y_e]] \\
&\quad - r(X_e, Y_e, Z_e) - r(Y_e, X_e, Z_e) + r(X_e, Z_e, Y_e) \\
&\quad + r(Z_e, X_e, Y_e).
\end{aligned}$$

D'où

$$(\nabla_X T)(Y, Z)(e) = -< X_e, Y_e, Z_e > + < X_e, Z_e, Y_e >.$$

Ce qui prouve la formule (**17**).

Dans le cas où G est mono-alternative à droite, d'après (**8**) on a

$$< X_e, Z_e, Y_e > = - < X_e, Y_e, Z_e > ,$$

d'où la formule (**18**).

Dans le cas où G est un groupe de Lie on voit bien que la torsion de la connexion canonique définie sur G est ∇-constante et sa courbure est nulle.

Ainsi, tenant compte des formules (15), (16) et (17), la formule (2) exprime la première identité de Bianchi pour la connexion associée à la famille t_1. D'autre part, des formules (15) et (18), on remarque que dans une boucle de Lie locale mono-alternative à droite G, la stucture d'algèbre d'Akivis sur T_eG est complètement déterminée par la torsion de la connexion associée à la famille t_1 et sa dérivée covariante. Ce qui nous conduit à la définition suivante :

Définition 2.1 : *La connexion associée à la famille t_1 est appelée la connexion canonique définie sur la boucle de Lie locale mono-alternative à droite G.*

Remarquons que dans le cas où G est un groupe de Lie, la connexion canonique définie sur G n'est rien d'autre que la connexion classique de Cartan.

Nous allons définir une structure algébrique sur l'espace tangent en l'identité d'une boucle de Lie locale G mono-alternative à droite.

Définition 2.2 ([Sa-Mi1,2]) : *Une hyper-algèbre est un espace vectoriel réel g de dimension finie, muni d'un ensemble d'opérations multilinéaires*

$$<.,.,...;.,.>_m \;:\; g^m \times g \times g \to g, \quad m = 0,\, 1,\, 2,\, ...$$

vérifiant pour tout m

$$< x_1,...,x_m; y,\, z >_m \,=\, -< x_1,...,x_m; z,\, y >_m$$

et satisfaisant les conditions :

$$\left\{\begin{array}{l} \forall\ m \geq 0, 1,...,\ \forall\, r < m,\ \forall\ x_1,...,x_r, x_{r+1},...,x_m, u, v, y, z \in g \\ < x_1,...,x_r, u, v, x_{r+1},...,x_m; y,\, z >_{m+2} - \\ - < x_1,...,x_r, v, u, x_{r+1},...,x_m; y, z >_{m+2} + \\ + \sum_{k=0}^{r} \sum_{\alpha} < x_{\alpha(1)},...,x_{\alpha(k)}, < x_{\alpha(k+1)},...,x_{\alpha(r)}; u, v >_{r-k}, x_{r+1},...,x_m; y, z >_{m-r+k+1} = 0, \end{array}\right. \qquad (19)$$

$$\left\{\begin{array}{l} \forall\, r = 0,1,\ldots,\ \forall\, x_1,\ldots,x_r,u,y,z \in g \\ \oint\limits_{u,y,z}(<x_1,\ldots,x_r,u;y,z>_{r+1} + \\ +\sum\limits_{k=0}^{r}\sum\limits_{\alpha} <x_{\alpha(1)},\ldots,x_{\alpha(k)};<x_{\alpha(k+1)},\ldots,x_{\alpha(r)};y,z>_{r-k},u>_k) = 0 \end{array}\right. \qquad (20)$$

où α est une permutation de (1, ..., r) telle que $\alpha(1)<\ldots<\alpha(k)$, et $\alpha(k+1)<\ldots<\alpha(r)$, et $\oint$ désigne la somme sur les permutations circulaires des éléments u, y, z de g.

Remarquons que toute algèbre de Lie réelle (g, μ) de dimension finie est munie d'une structure d'hyper-algèbre en posant :

$$<.,.>_0 = \mu,$$
$$<.,\ldots,.;.,.>_m = 0, \quad \forall\, m>0.$$

Théorème 2.2 ([Sa-Mi2]) : *Soit G une boucle de Lie locale mono-alternative à droite. Alors T_eG est muni d'une stucture d'hyper-algèbre dont les opérations multilinéaires sont définies par :*

$$\forall\, m = 0,1,\ldots,\quad \forall\, x_1,\ldots,x_m,y,z \in T_eG,$$

$$<x_1,\ldots,x_m;y,z>_m \; = (\nabla^m T)(x_1,\ldots,x_m;y,z) \qquad (21)$$

où ∇^m désigne la dérivation covariante d'ordre m par rapport à la connexion canonique définie sur G et T sa torsion.

Définition 2.3 : *L'hyper-algèbre ainsi définie est appelée l'hyper-algèbre tangente à la boucle de Lie locale mono-alternative à droite G.*

De nombreux résultats de la théorie des groupes de Lie (locaux) et algèbres de Lie s'étendent aux boucles de Lie locales mono-alternatives à droite et aux hyper-algèbres [Sa-Mi2], notamment l'intégrabilité des hyper-algèbres en des boucles de Lie locales mono-alternatives à droite.

Nous allons à présent établir la relation entre les quasi-bigèbres co-jacobiennes réelles de dimension finie et les hyper-algèbres en nous servant de la construction du double d'une quasi-bigèbre co-jacobienne.

Soit (F, μ, γ, ψ) une quasi-bigèbre co-jacobienne réelle de dimension finie. Soit $\boldsymbol{F} = F \oplus F^*$ son double; rappelons que la structure d'algèbre de Lie M sur $\boldsymbol{F}$ est définie comme suit (voir chapitre II) :

$$\begin{aligned} M(x, y) &= \mu(x, y) + \psi(x, y), && x, y \in F, \\ M(x, \xi) &= -ad_{\xi}^{*\gamma} x + ad_x^{*\mu} \xi, && x \in F,\ \xi \in F^*, \\ M(\xi, \eta) &= \gamma(\xi, \eta), && \xi, \eta \in F^*. \end{aligned}$$

Dans le langage de [Sa-Mi2], on peut dire que le couple $(\boldsymbol{F}, F^*)$ est un couple enveloppant de F. Dans la proposition suivante, on montre que sur toute quasi-bigèbre co-jacobienne réelle (F, μ, γ, ψ) existe une structure d'hyper-algèbre. Considérons en effet les opérations multilinéaires $(.,\ldots,.)_m$ définies comme suit :

$$(x_1,\ldots,x_m)_m = \pi_F M(x_1, M(x_2,\ldots,M(x_{m-1},x_m))\ldots) \qquad (22)$$

$$\forall\, x_1,\ldots,x_m \in F, \quad m = 2, 3, \ldots,$$

où π_F *désigne la projection de* $\boldsymbol{F}$ *sur* F*.*

Proposition 2.2 : *Soit* (F, μ, γ, ψ) *une quasi-bigèbre co-jacobienne réelle de dimension finie. Alors sur l'espace vectoriel* F*, une structure d'hyper-algèbre est déterminée de façon unique par les formules itératives*

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall\, y, z \in F, \qquad < y, z >_0 + (y, z)_2 = 0, \\ \forall\, m = 1, 2, \ldots, \ \forall\, x_1, \ldots, x_m, y, z \in F, \\ < x_1, \ldots, x_m ; y, z >_m + (x_1, \ldots, x_m, y, z)_{m+2} + \\ + \sum_{k=1}^{m} \sum_{\alpha} (x_{\alpha(1)}, \ldots, x_{\alpha(k)}, < x_{\alpha(k+1)}, \ldots, x_{\alpha(m)} ; y, z >_{m-k})_{k+1} = 0 \end{array} \right. \qquad (23)$$

où α *est une permutation de* $(1,\ldots, m)$ *telle que* $\alpha(1) < \ldots < \alpha(k)$ *et* $\alpha(k+1) < \ldots < \alpha(m)$*, et* $(.,\ldots,.)_m$ *sont les opérations définies par* (**22**).

Cette proposition est un cas particulier du résultat de [Sa-Mi2] sur la détermination d'une structure d'hyper-algèbre à partir de la décomposition d'une algèbre de Lie en somme directe d'une sous-algèbre de Lie et d'un sous-espace vectoriel. Des calculs explicites donnent pour $m = 0, 1, 2$:

$$< x, y >_0 = -\mu(x, y), \qquad < x; y, z >_1 = ad^{*\gamma}_{\psi(y,z)} x,$$

$$< x_1, x_2; y, z >_2 = ad^{*\gamma}_{ad^{*\mu}_{x_2} \psi(y,z)} x_1 - \mu(x_2, ad^{*\gamma}_{\psi(y,z)} x_1).$$

Ainsi, d'après le théorème d'intégration des hyper-algèbres en des boucles de Lie locales mono-alternatives à droite ([Sa-Mi2]), toute quasi-bigèbre co-jacobienne réelle de dimension finie admet une structure d'hyper-algèbre qui s'intègre en une unique boucle de Lie locale mono-alternative à droite. Ainsi les quasi-bigèbres co-jacobiennes réelles de dimension finie peuvent servir à construire de nombreux exemples de boucles de Lie locales mono-alternatives à droite.

3. Quasi-groupes de Lie-Poisson et quasi-bigèbres co-jacobiennes.

Nous allons à présent définir la notion de quasi-groupe de Lie-Poisson, et établir la correspondance entre les quasi-groupes de Lie-Poisson et les quasi-bigèbres co-jacobiennes.

Définition 3.1 : *Un quasi-groupe de Lie-Poisson est un quadruplet* (G, m, P, ψ) *où :*

(*i*) *(G, m) est une boucle de Lie mono-alternative à droite,*

(*ii*) *P est une structure de Poisson sur la variété G telle que la loi de composition m est un morphisme de Poisson,*

(*iii*) *ψ est un élément de $\Lambda^3 T^*_e G$ tel que*

$$(d\psi^\lambda)(e) = 0,$$

où ψ^λ est l'unique 3-forme ∇-constante associée à ψ, ∇ étant la connexion canonique définie sur G, *(iv)* $(D^{\nabla}T)(e) = d_{\gamma}\psi$, *où* D^{∇} *désigne la différentielle extérieure covariante et* γ *la linéarisation de* P *en l'identité.*

Remarques :

a) Tout groupe de Lie-Poisson est un quasi-groupe de Lie-Poisson. Il suffit de prendre $\psi = 0$.

b) Rappelons que la différentielle extérieure covariante D^{∇} d'une k-forme α à valeurs tensorielles sur une variété M munie d'une connexion linéaire ∇ est définie par la formule suivante :

$$(D^{\nabla}\alpha)(X_0,\dots, X_k) = \sum_{0\le i\le k}(-1)^i(\nabla_{X_i}\alpha)(X_0,\dots,\hat{X}_i,\dots,X_k),$$

où les X_i sont des champs de vecteurs sur M.

c) La compatibilité de P avec m s'exprime par la relation

$$P(gh) = \lambda_g P(h) + \rho_h P(g), \qquad (24)$$

pour tous g, h dans G, où λ_g (resp., ρ_g) désigne la puissance extérieure seconde de la différentielle de la translation à gauche (resp., à droite) par un élément g de G.

d) Comme d'après c), $P(e) = 0$, on peut parler de la linéarisation $\gamma = d_e P$ de P en l'identité [We], définie par :

$$\begin{aligned} d_e P \ : T_e G &\to \Lambda^2 T_e G \\ x &\to (L_X P)(e) \end{aligned} \qquad (25)$$

où X est un champ de vecteurs quelconque tel que $X_e = x$. Le bivecteur P étant de Poisson, la transposée de $d_e P$ définit une structure d'algèbre de Lie sur T_e^*G ([We], [Lu]).

d) On associe à P l'application

$$\rho(P) : G \to \Lambda^2 T_e G \qquad (26)$$

définie par

$$\rho(P)(g) = \rho_g^{-1} P(g). \qquad (27)$$

La différentielle en l'identité de l'application $\rho(P)$ coïncide avec la linéarisation de P en l'identité, i.e,

$$d_e P = T_e(\rho(P)). \tag{28}$$

Proposition 3.1 : *Soit (G, m, P, ψ) un quasi-groupe de Lie-Poisson. Si μ désigne le crochet commutateur sur T_eG induit par m, et si l'on pose $\gamma = d_eP$, alors μ et γ sont liés par la relation :*

$$\gamma(\mu(x, y)) = \mu(x, \gamma(y)) + \mu(\gamma(x), y), \tag{29}$$

pour tous x, y dans T_eG.

Démonstration : Pour tous g, h dans G, la formule (24) permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\rho(P)((\rho_g^{-1} \circ \lambda_g)(h)) &= \rho(P)((gh)g^{-1}) \\
&= \rho^{-1}_{(gh)g^{-1}} P((gh)g^{-1}) \\
&= \rho^{-1}_{(gh)g^{-1}}(\lambda_{gh} P(g^{-1}) + (\rho_g^{-1} \circ \lambda_g)P(h) + (\rho_g^{-1} \circ \rho_h)P(g)) \\
&= -(\rho^{-1}_{(gh)g^{-1}} \circ \lambda_{gh} \circ \lambda_g^{-1})\rho(P)(g) \\
&\quad + (\rho^{-1}_{(gh)g^{-1}} \circ \rho_g^{-1} \circ \lambda_g \circ \rho_h)\rho(P)(h) \\
&\quad + (\rho^{-1}_{(gh)g^{-1}} \circ \rho_g^{-1} \circ \rho_h)P(g).
\end{aligned}$$

Plaçons-nous dans des coordonnées locales vérifiant les conditions du lemme 1.1. Soit $\alpha(t)$, $\beta(t)$ des courbes situées dans un voisinage de l'identité telles que :

$$\alpha(0) = \beta(0) = 0$$

$$\left.\frac{d(\alpha(t))}{dt}\right|_{t=0} = x, \quad \left.\frac{d(\beta(t))}{dt}\right|_{t=0} = y.$$

En utilisant l'expression locale de la loi de composition m et des développements limités à l'ordre 2 (on identifiera e avec 0), nous obtenons :

$$\frac{d}{dt}\frac{d}{ds}\left(\rho(P)((\rho^{-1}_{\alpha(t)} \circ \lambda_{\alpha(t)})(\beta(s)))\right)\Big|_{t=s=0} = \gamma(\mu(x, y)),$$

$$\frac{d}{dt}\frac{d}{ds}\left((\rho^{-1}_{(\alpha(t)\beta(s))(\alpha(t))^{-1}} \circ \lambda_{\alpha(t)\beta(s)} \circ \lambda^{-1}_{\alpha(t)})\rho(P)(\alpha(t))\right)\Big|_{t=s=0} =$$
$$= \mu(y, \gamma(x)),$$

$$\frac{d}{dt}\frac{d}{ds}\left(\left(\rho^{-1}_{(\alpha(t)\beta(s))(\alpha(t))^{-1}} \circ \rho^{-1}_{\alpha(t)} \circ \lambda_{\alpha(t)} \circ \rho_{\beta(s)}\right)\rho(P)(\beta(s))\right)\Big|_{t=s=0} =$$
$$= \mu(x, \gamma(y)),$$

$$\frac{d}{dt}\frac{d}{ds}\left(\left(\rho^{-1}_{(\alpha(t)\beta(s))(\alpha(t))^{-1}} \circ \rho^{-1}_{\alpha(t)} \circ \rho_{\beta(s)}\right)P(\alpha(t))\right)\Big|_{t=s=0} = 0.$$

D'où

$$\gamma(\mu(x, y)) = \mu(x, \gamma(y)) + \mu(\gamma(x), y).$$

Ce qui prouve la formule (29).

Remarque : En utilisant les propriétés du grand crochet, la formule (29) s'écrit encore sous la forme $d_\mu \gamma = 0$ ou $d_\gamma \mu = 0$. Elle exprime que μ est un cocycle pour γ.

Le résultat suivant associe à tout quasi-groupe de Lie-Poisson une quasi-bigèbre co-jacobienne.

Théorème 3.1 : *L'espace tangent en l'identité à tout quasi-groupe de Lie-Poisson (G, m, P, ψ) est muni d'une structure de quasi-bigèbre co-jacobienne (F, μ, γ, ψ) où $F = T_eG$, μ est le crochet commutateur défini à partir de la loi de composition m et $\gamma = d_eP$.*

Inversement, à toute quasi-bigèbre co-jacobienne réelle (F, μ, γ, ψ), il correspond (à isomorphisme près) une unique boucle de Lie locale mono-alternative à droite (G, m) munie d'un champ de bivecteurs P_G s'annulant en l'identité telle que $(T_eG, [\,,\,], d_eP_G, \psi)$ est une quasi-bigèbre co-jacobienne qui coïncide avec celle donnée, où $[\,,\,]$ désigne le crochet commutateur associé à m et d_eP_G la linéarisation de P_G en l'identité.

Démonstration : Soit (G, m, P, ψ) un quasi-groupe de Lie-Poisson et considérons la connexion canonique ∇ définie sur G. Nous savons que sa courbure est nulle et sa torsion T en l'identité coïncide au signe près avec le crochet commutateur μ, c'est-à-dire $T(x, y) = -\mu(x, y)$, pour tous $x, y \in T_eG$. D'après la première identité de Bianchi, on a

$$\oint T(T(X, Y), Z) = -\oint(\nabla_X T)(Y, Z),$$

où $\oint$ désigne la somme sur les permutations circulaires des champs de vecteurs X, Y, Z. D'autre part, par définition de la différentielle extérieure covariante D^{∇}, on a

$$(D^{\nabla}T)(X, Y, Z) = \oint(\nabla_X T)(Y, Z)$$

et par définition du crochet de Nijenhuis-Richardson,

$$[\mu, \mu]^{T_eG}_{N-R}(X_e, Y_e, Z_e) = 2\oint(T(T(X, Y), z))(e).$$

Ainsi l'identité de Bianchi ci-dessus évaluée en l'identité s'écrit sous la forme

$$\tfrac{1}{2}[\mu, \mu]^{T_eG}_{N-R} + (D^{\nabla}T)(e) = 0.$$

Tenant compte de l'identité (chapitre I)

$$[\mu, \mu] = [\mu, \mu]^{T_eG}_{N-R}$$

et de l'hypothèse $(D^{\nabla}T)(e) = d_{\gamma}\psi$ de la définition d'un quasi-groupe de Lie-Poisson, on obtient

$$\tfrac{1}{2}[\mu, \mu] + d_{\gamma}\psi = 0.$$

Par ailleurs P étant de Poisson avec $P(e) = 0$, donc $\gamma = d_eP$ induit d'après ce qui précède une structure d'algèbre de Lie sur T_e^*G, *i.e*,

$$[\gamma, \gamma] = 0.$$

D'après la proposition 3.1, on a :

$$d_\mu \gamma = 0.$$

Enfin rappelons que la différentielle extérieure covariante D^∇ et la différentielle extérieure d_∇ des formes à valeurs tensorielles sur une variété M munie d'une connexion linéaire sont liées par la relation

$$((D^\nabla - d_\nabla)\alpha)(X_0,\dots, X_k) = \sum_{1\le i<j\le k}(-1)^{i+j}\alpha(T(X_i, X_j), X_0,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_k)$$

où α est une k-forme sur M et $\wedge$ désigne l'omission de l'argument. Pour les formes différentielles ordinaires, d_∇ coïncide avec la différentielle de de Rham d. Prenant pour M la boucle de Lie G avec sa connexion canonique et pour α la 3-forme différentielle ∇-constante ψ^λ associée à $\psi(\psi^\lambda(e) = \psi,\ \nabla\psi^\lambda = 0)$, on obtient

$$-(d\psi^\lambda)(X_0,\dots,X_3) = \sum_{1\le i<j\le 3}(-1)^{i+j}\,\psi^\lambda(T(X_i, X_j), X_0,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_3).$$

En évaluant cette égalité en l'identité et tenant compte de la condition $(d\psi^\lambda)(e) = 0$ et de la formule (15), nous obtenons

$$d_\mu \psi = 0.$$

En définitive (F, μ, γ, ψ) est une quasi-bigèbre co-jacobienne.

Inversement soit (F, μ, γ, ψ) une quasi-bigèbre co-jacobienne réelle. Son dual (F^*, γ, μ, ψ) est une quasi-bigèbre jacobienne et d'après la proposition 4.1 du chapitre II, elle admet un double $(F, \mathrm{M}, \Gamma, \Phi)$ qui est muni d'une structure de quasi-bigèbre jacobienne quasitriangulaire. Soient $(G^*, P_{G^*}, -\psi)$ et $(D, P, -\Phi)$ les groupes de Lie quasi-Poisson connexes et simplement connexes correspondant aux quasi-bigèbres jacobiennes (F^*, γ, μ, ψ) et (F, M, Γ, Φ). Soient $\Pi : D \to G^*\backslash D$ la projection naturelle et ϕ la restriction à F de l'application $\Pi\circ\exp : F \to G^*\backslash D$. Alors ϕ est un difféomorphisme d'un voisinage V de 0 dans F dans un voisinage de la classe $\Pi(e)$ dans $G^*\backslash D$ [He]. Posons $G = \exp V$ et introduisons sur G une loi de composition interne définie par

$$m(a, b) = \Pi_G(ab), \tag{30}$$

où ab est le produit dans D des éléments a et b, et Π_G est la projection locale sur G parallèlement à G^*, i.e., dans la décomposition $d = ug$, $d \in D$, $g \in G$, $u \in G^*$. Alors (G, m) est une boucle de Lie locale mono-alternative à droite [Sa-Mi2]. En effet

$$m(m(a, b^k), b^l) = \Pi_G((\Pi_G(ab^k))b^l) = \Pi_G((ab^k)b^l) = \Pi_G(ab^{k+l}),$$

et comme pour b suffisamment proche de e dans G on a $b^{k+l} \in G$,

$$m(a, m(b^k, b^l)) = \Pi_G(a(b^k b^l)) = \Pi_G(ab^{k+l}).$$

Par conséquent

$$m(m(a, b^k), b^l) = m(a, b^{k+l}).$$

Ainsi (G, m) est une boucle de Lie locale mono-alternative à droite telle que $T_eG = F$.

Si l'on désigne par λ_g (resp., ρ_g) la translation à gauche (resp., à droite) par g dans G, on a

$$\lambda_g = \Pi_G \circ L_g, \qquad \rho_g = \Pi_G \circ R_g,$$

où L_g (resp., R_g) désigne la translation à gauche (resp., à droite) par g dans D.

Considérons à présent l'image directe de P par Π_G et désignons-la par P_G, c'est-à-dire

$$P_G(\Pi_G(d)) = (\Lambda^2(T_d\Pi_G))(P(d)), \tag{31}$$

pour $d \in D$. Montrons que P_G est bien défini. En effet, soient $d_1, d_2 \in D$ tels que $\Pi_G(d_1) = \Pi_G(d_2)$, c'est-à-dire $d_2 = ud_1$ pour un certain u dans G^*. En utilisant le fait que P est multiplicatif, nous obtenons :

$$\begin{aligned}(\Lambda^2 T_{d_2}\Pi_G)(P(d_2)) &= (\Lambda^2 T_{d_2}\Pi_G)(P(ud_1)) \\ &= (\Lambda^2 (T_{d_2}\Pi_G))(L_u P(d_1) + R_{d_1}P(u)) \\ &= (\Lambda^2 (T_{d_1}(\Pi_G \circ L_u)))(P(d_1)) + (\Lambda^2 (T_{d_2}\Pi_G))(R_{d_1}P(u)).\end{aligned}$$

Remarquons que

$$\Pi_G \circ L_u = \Pi_G ,$$

et

$$(\Lambda^2 T_{d_2}\Pi_G)(R_{d_1}P(u)) = 0, \quad \text{pour tout } u \text{ dans } G^*.$$

En effet l'identité $\Pi_G \circ L_u = \Pi_G$ est une évidence. D'autre part, d'après la proposition 1.1 du chapitre III, $(G^*, -P_{G^*})$ est un sous-groupe de Lie quasi-Poisson de (D, P), donc $P(u) = -P_{G^*}(u) \in \Lambda^2 T_u G^*$ pour tout u dans G^*. Par ailleurs pour $d = u_1 g_1$, $u_1 \in G^*$, $g_1 \in G$ et pour toute courbe lisse $t \to \alpha(t)$ dans G^* telle que $\alpha(0) = u$, $\frac{d(\alpha(t))}{dt}\big|_{t=0} = X$, on a :

$$\begin{aligned}(T_{ud}\Pi_G)(R_d X) &= \tfrac{d}{dt}\big(\Pi_G((\alpha(t)d))\big)\big|_{t=0} \\ &= \tfrac{d}{dt}\big(\Pi_G((\alpha(t)u_1)g_1)\big)\big|_{t=0} \\ &= \tfrac{d}{dt}(g_1)\big|_{t=0} = 0.\end{aligned}$$

En appliquant ce fait à $P(u)$, nous obtenons :

$$(\Lambda^2 (T_{d_2}\Pi_G))(R_{d_1}P(u)) = 0.$$

Ce qui démontre l'identité $(\Lambda^2 (T_{d_1}\Pi_G))(P(d_1)) = (\Lambda^2 (T_{d_2}\Pi_G))(P(d_2))$; donc P_G est bien défini. Ainsi, P_G peut être défini de façon plus simple comme suit :

$$P_G(g) = (\Lambda^2 (T_g \Pi_G))P(g),$$

pour tout $g \in G$. Il est clair que $P_G(e) = 0$.

Pour montrer que $(T_e G, [\,,\,], d_e P_G, \psi)$ est une quasi-bigèbre co-jacobienne, il suffit de montrer que le crochet commutateur associé à m coïncide avec μ et que $d_e P_G = \gamma$. En effet, identifiant les éléments de G avec les éléments de $V \subset F$ grâce à l'exponentielle et utilisant la formule de Campbell-Hausdorff dans le double, on a par définition,

$$
\begin{aligned}
[x, y] &= \tfrac{1}{2}\tfrac{d^2}{dt^2}\left(\Pi_F((tx)(ty)) - \Pi_F((ty)(tx))\right)\Big|_{t=0} \\
&= \tfrac{1}{2}\tfrac{d^2}{dt^2}\left(\Pi_F\left(tx + ty + \tfrac{1}{2}M(tx, ty) + \ldots\right)\right)\Big|_{t=0} - \\
&\quad - \tfrac{1}{2}\tfrac{d^2}{dt^2}\left(\Pi_F\left(tx + ty + \tfrac{1}{2}M(ty, tx) + \ldots\right)\right)\Big|_{t=0} \\
&= \tfrac{1}{2}\tfrac{d^2}{dt^2}\left(\tfrac{1}{2}t^2\Pi_F(M(x, y)) + \tfrac{1}{2}t^2\Pi_F(M(x, y))\right)\Big|_{t=0} \\
&= \Pi_F(M(x, y)) = \mu(x, y), \quad x, y \in F.
\end{aligned}
$$

D'où $[\,,] = \mu$.

Montrons à présent que γ est la linéarisation de P_G en l'identité. En effet

$$\rho_g^{-1}P_G(g) = ((\Lambda^2\Pi_F)\circ R_g^{-1})((\Lambda^2(T_g\Pi_G))P(g)) = (\Lambda^2\Pi_F)(R_g^{-1}P(g)),$$

pour tout g dans G, où $F = T_eG$. Par différentiation, nous obtenons

$$d_eP_G = (\Lambda^2\Pi_F)\circ d_eP.$$

Mais par la formule (21) du chapitre II, on a

$$d_eP = \Gamma = \gamma - \psi - \mu.$$

D'où

$$d_eP_G = (\Lambda^2\Pi_F)\circ d_eP = \gamma$$

En définitive $(T_eG, [\,,\,], d_eP_G, \psi)$ est une quasi-bigèbre co-jacobienne qui n'est rien d'autre que la quasi-bigèbre co-jacobienne donnée.

Ainsi la seconde partie du théorème **3.1** est l'amorce d'une éventuelle intégration des quasi-bigèbres co-jacobiennes réelles en des quasi-groupes de Lie-Poisson. Précisément pour une intégration complète il reste à définir une structure de Poisson sur G qui soit compatible avec la loi de composition m de G et dont la linéarisation en l'identité est γ. Ceci doit probablement venir de la construction du groupe double.

4. Exemples.

Nous avons déja fait remarquer que tout groupe de Lie-Poisson est un quasi-groupe de Lie-Poisson.

4.1. Exemple trivial : L'ensemble G des matrices symétriques définies positives $n \times n$ muni de sa structure naturelle de boucle de Lie mono-alternative à droite et de la structure de Poisson nulle est un quasi-groupe de Lie-Poisson. Son groupe de Lie quasi-Poisson dual est l'espace vectoriel réel T_e^*G muni de sa structure additive de groupe de Lie et de la structure de Poisson nullle.

Plus généralement, toute boucle de Lie mono-alternative à droite, dont la torsion de la connexion canonique s'annule en l'identité, munie de la structure de Poisson nulle est un quasi-groupe de Lie-Poisson.

4.2. Considérons la décomposition polaire du groupe de Lie réel $SL(2, \mathbf{C})$, i.e.,

$$SL(2,\ \mathbf{C}) = SU(2) \times SHDP(2)$$

où $SHDP(2)$ désigne l'ensemble des matrices hermitiennes définies positives 2×2 de déterminant un. Cette décomposition permet de définir une structure de boucle de Lie mono-alternative à droite sur $SHDP(2)$ par :

$$\begin{aligned} m : SHDP(2) \times SHDP(2) &\to SHDP(2) \\ (a,\ b) &\to \sqrt{ba^2b}\ . \end{aligned}$$

L'espace tangent en l'identité à $SHDP(2)$ est l'espace $sh(2)$ des matrices hermitiennes 2×2 de trace nulle, qui s'identifie au dual de l'algèbre de Lie $su(2)$. Soit ψ l'élément de $\Lambda^3 su(2)$ défini par la restriction à $sh(2)$ du crochet de Lie de $sl(2, \mathbf{C})$. Alors il existe une structure de Poisson P sur $SHDP(2)$ telle que $(SHDP(2), m, P, \psi)$ soit un quasi-groupe de Lie-Poisson. La quasi-bigèbre co-jacobienne tangente est $(sh(2), 0, \gamma, \psi)$ où γ désigne le crochet de Lie sur $su(2)$. Le groupe de Lie quasi-Poisson dual est $(SU(2), 0, \psi)$.

CONCLUSION.

Dans ce travail nous avons étudié diverses généralisations des notions de groupe de Lie-Poisson et de bigèbre de Lie, en montrant que les notions de groupe de Lie quasi-Poisson et de quasi-groupe de Lie-Poisson correspondent respectivement à un affaiblissement de la propriété du champ de bivecteurs d'être de Poisson, et de l'associativité de la loi de groupe dans la définition d'un groupe de Lie-Poisson, alors que les notions de quasi-bigèbre jacobienne et de quasi-bigèbre co-jacobienne correspondent à l'affaiblissement d'une des deux structures d'algèbre de Lie en dualité dans la définition d'une bigèbre de Lie. De plus nous avons montré en quel sens la loi de composition m et le champ de bivecteurs P d'une part et d'autre part la différentielle de Lichnerowicz-Poisson d_P et la différentielle de de Rham d, jouent des rôles duaux. Ce qui nous permet de mettre en parallèle les propriétés des groupes de Lie quasi-Poisson et des quasi-groupes de Lie-Poisson dans le tableau ci-dessous :

<table>
<tr><td colspan="2">Groupe de Lie-Poisson
(G, m, P)

(1) m associative : $\nabla T = 0$ (en particulier $(D^{\nabla}T)(e) = 0$)
(2) m et P compatibles,
(3) P Poisson $[P, P]_S = 0$.</td></tr>
<tr><td>Groupe de Lie quasi-Poisson.
(G, m, P, φ)

(1) m associative :
$\nabla T = 0$ (donc $(D^{\nabla}T)(e) = 0$).
(2) m et P compatibles.
(3') P quasi-Poisson :
$\frac{1}{2}[P, P]_S = \varphi^{\lambda} - \varphi^{\rho}$.
(4) φ satisfait l'identité du pentagone : $(d_P\varphi^{\lambda})(e) = 0$.</td><td>Quasi-groupe de Lie-Poisson.
(G, m, P, ψ)

(1') m quasi-associative :
$(D^{\nabla}T)(e) = d_{\gamma}\psi$.
(2) m et P compatibles.
(3) P Poisson :
$[P, P]_S = 0$.
(4') ψ satisfait l'identité co-pentagone : $(d\psi^{\lambda})(e) = 0$.</td></tr>
</table>

Au niveau infinitésimal, on retrouve les définitions des quasi-bigèbres jacobiennes et co-jacobiennes et la dualité devient encore plus claire.

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">Bigèbre de Lie
(F, μ, γ)

$[\mu, \mu] = 0,$
$[\mu, \gamma] = 0,$
$[\gamma, \gamma] = 0.$</td></tr>
<tr><td>Quasi-bigèbre jacobienne
$(F, \mu, \gamma, \varphi)$

$[\mu, \mu] = 0,$
$[\mu, \gamma] = 0,$
$\frac{1}{2}[\gamma, \gamma] + d_\mu\varphi = 0,$
$d_\gamma\varphi = 0.$</td><td>Quasi-bigèbre co-jacobienne.
(F, μ, γ, ψ)

$\frac{1}{2}[\mu, \mu] + d_\gamma\psi = 0,$
$[\gamma, \mu] = 0,$
$[\gamma, \gamma] = 0,$
$d_\mu\psi = 0.$</td></tr>
</table>

Si les définitions et résultats démontrés concordent avec l'esprit de la théorie des bigèbres de Lie et groupes de Lie-Poisson, des questions restent encore ouvertes notamment l'interprétation algébrique de manière globale du défaut d'associativité de la loi de composition pour les quasi-groupes de Lie-Poisson, l'intégrabilité des quasi-bigèbres co-jacobiennes réelles en des quasi-groupes de Lie-Poisson, la géométrie des groupes de Lie quasi-Poisson et des quasi-groupes de Lie-Poisson, en particulier le lien des nouveaux objets définis avec la théorie des systèmes intégrables ou plus généralement avec la géométrie symplectique.

REFERENCES.

[A] R. Aminou, Bigèbres de Lie et groupes de Lie-Poisson. Thèse Université de Lille, 1988.

[A-KS] R. Aminou et Y. Kosmann-Schwarzbach, Bigèbres de Lie, doubles et carrés, Annales Inst. Henri Poincaré, Série A (Physique Théorique), 49, (4), (1988), 461-478.

[Ba] M. Bangoura, Quasi-groupes de Lie-Poisson, Comptes rendus Acad. Sci. Paris. Série I, 319, (1994) 975-978.

[Ba-KS] M. Bangoura and Y. Kosmann-Schwarzbach, The double of a Jacobian quasi-bialgebra, Lett. Math. Physics. 28, 13-29, 1993.

[Da-So] P. Dazord and D. Sondaz, Groupes de Poisson affines, in Séminaire Sud-Rhodanien à Berkeley, P. Dazord and A. Weinstein eds, Publ. M.S.R.I, Springer 1991, 99-127.

[Dr1] V.G. Drinfeld, Quantum groups, Proc. ICM, Berkeley, 1 (1986), 789-820.

[Dr2] V. G. Drinfeld, Quasi-Hopf algebras, Leningrad Math. J. 1 (6) 1990 1419-1457.

[Dr3] V. G. Drinfeld, Quasi-Hopf algebras and Knizhnik-Zamolodchikov equations, Preprint ITP-89-43E, Kiev, (1989).

[Dr4] V. G. Drinfeld, On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely connected with $Gal(\bar{Q}/Q)$, Leningrad Math. J. 2 (4) 829-860 (1991).

[Du] J. P. Dufour, Introduction aux tissus. Séminaire GETODIM, Université de Montpellier, 1990-1991, 55-76.

[He] S. Helgason, Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Academic Press, New York (1978).

[Ho-St] K. H. Hofmann and K. Strambach, Topological and analytic loops, in Quasigroups and loops. Theory and applications, O. Chen, P. O. Pflugfelder, J.D.H. Smith (eds), Heldermann Verlag, Berlin 1990, Chap. 9.

[KS1] Y. Kosmann-Schwarzbach, Quasi-bigèbres de Lie et groupes de Lie quasi-Poisson, Comptes rendus Acad. Sci. Paris Série I 312, (1991) 391-394

[KS2] Y. Kosmann-Schwarzbach, Jacobian quasi-bialgebras and quasi-Poisson Lie groups, in M. Gotay, J. E. Marsden, and V. Moncrief (eds), Mathematical Aspects of Field Theory (Proc. Seattle 1991), Contemporary Mathematics 132, Amer. Math. Soc., Providence, 1992, pp. 459-489.

[KS-Ma] Y. Kosmann-Schwarzbach and F. Magri, Poisson Lie groups and complete integrability I, Drinfeld bialgebras, dual extensions and their canonical representations, Annales Inst. Henri Poincaré, Série A (Physique Théorique), 49 (4) (1988), 433-460.

[Ko] B. Kostant, Graded manifolds, graded Lie theory, and prequantization, Differential geometrical methods in mathematical physics (Bonn 1975), Lecture Notes Math. 570, Springer 1977, 177-306.

[Ko-S] B. Kostant and S. Sternberg, Symplectic reduction, BRS cohomology and infinite-dimensional Clifford algebras, Ann. Phys. (N.Y.) 176 (1987) 59-113.

[L-Ro] P. Lecomte et C. Roger, Modules et cohomologie des bigèbres de Lie, Comptes rendus Acad. Sci. Paris Série I 310 (1990), 405-410 et 311 (1990), 893-894.

[Lu] J.-H. Lu, Multiplicative and affine Poisson stuctures on Lie groups, Ph. D. Thesis, Univ. Calif. Berkeley 1990.

[Lu-We] J.-H. Lu and A. Weinstein, Poisson Lie groups, dressing transformations, and Bruhat decompositions, J. Diff. Geometry 31 (1990), 501-526.

[Me] A. Medina, Groupes de Lie munis de métriques bi-invariantes, Tôhoku Math. Journal, 37 (1985), 405-421.

[Me-Re] A. Medina et Ph. Revoy, Groupes de Lie-Poisson et double extension, Séminaire GETODIM, Université de Montpellier, 1990-1991, 87-105.

[N-R] A. Nijenhuis and R. W. Richardson Jr., Deformations of Lie algebra structures, J. Math. and Mech. 17 (1) (1967) 89-105.

[Sa-Mi1] L. V. Sabinin and P. O. Mikhéev, On the infinitesimal theory of local analytic loops, Soviet. Math. Dokl. 36 (1988), 345-348.

[Sa-Mi2] L. V. Sabinin and P. O. Mikhéev, Quasigroups and differential geometry, in Quasigroups and loops. Theory and applications, O. Chen, H. O. Pflugfelder, J. D. H. Smith (eds), Heldermann Verlag, Berlin, 1990, Chap. 12.

[STS] M. A. Semenov-Tian-Shansky, What is a classical r-matrix? Funct. Anal. Appl. 17 (4) (1983), 259-272.

[We] A. Weinstein, The local structure of Poisson manifolds, J. Diff. Geometry 18 (1983), 523-557.