

N° d'ordre : 1505

THESE DE DOCTORAT
présentée à
L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE
LILLE
pour obtenir le Grade de
DOCTEUR EN MECANIQUE
par

Eric FABRE

**Explosions et écoulements autosemblables
visqueux et non visqueux en hypersonique.
Théorie - Calcul - Expériences**

Soutenue le 17 mai 1995



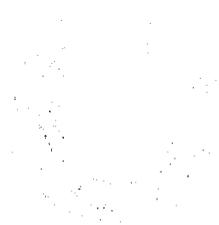
devant la Commission d'examen

Membres du Jury :

Président : M. DYMENT, Professeur à l'U.S.T.L.

Rapporteurs : M. GUIRAUD, Professeur émérite à l'université de Paris VI
M. ZEITOUN, Professeur à l'université de Provence

Membres : M. DESIDERI, Directeur de recherche à l'I.N.R.I.A.
M. JACQUOTTE, Directeur du groupe 6 de la D.R.E.T.
M. LEUCHTER, Adjoint scientifique au directeur de
l'aérodynamique de l'O.N.E.R.A.
M. MERLEN, Professeur à l'U.S.T.L.



A Floriane, Paul et Emilien.

Avant-propos

L'ensemble des recherches contenues dans ce mémoire ont été effectuées à l'Institut de Mécanique des Fluides de Lille (I.M.F.L.), établissement de l'Office National des Etudes et Recherches Aérospatiales (O.N.E.R.A.). Ce travail entre dans le cadre des contrats financés par la Direction des Recherches Etudes et Techniques (D.R.E.T.). Je tiens à remercier les responsables de ces organismes d'avoir soutenu cet axe de recherche et ainsi permis l'élaboration de cette thèse. En particulier, je sais gré à Monsieur Jacquotte, directeur du groupe 6 de la D.R.E.T., qui a bien voulu faire partie du jury.

Je remercie Monsieur Bahurel, directeur de l'I.M.F.L., d'avoir permis la réalisation de cette thèse dans le cadre de mon emploi d'ingénieur. Je tiens ici à souligner l'effort soutenu de l'I.M.F.L. dans le domaine de la formation.

Je sais gré à Monsieur Dymont, professeur à l'Université des Sciences et Techniques de Lille (U.S.T.L.), chef du groupe de Mécanique des Fluides Fondamentale de l'I.M.F.L. qui, après m'avoir enseigné la Mécanique des Fluides durant mon parcours universitaire, a bien voulu participer au jury de la commission d'examen. Je tiens à lui témoigner ma reconnaissance et mon estime.

L'aboutissement de ces recherches est avant tout le fruit d'un travail d'équipe. Qu'il me soit permis d'exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur Merlen, professeur à l'U.S.T.L., collaborateur extérieur à l'I.M.F.L., grâce à qui cette thèse a pu voir le jour. Il n'a ménagé ni son temps ni sa peine pour me permettre de résoudre de nombreux problèmes. Ses encouragements constants et la confiance qu'il m'a témoignée ont largement contribué à la progression de cette étude.

J'adresse mes remerciements à Monsieur Guiraud, professeur émérite à l'Université de Paris 6, d'avoir consacré une grande partie de son temps à examiner en détails ce travail. Ses différentes réflexions ont contribué à approfondir et éclaircir de nombreux aspects de cette thèse. Je lui sais gré d'avoir bien voulu en être rapporteur.

Je remercie également Monsieur Zeitoun, professeur à l'Université de Provence, d'avoir accepté d'être rapporteur de cette thèse et d'avoir ainsi témoigné son intérêt pour ce travail.

Je tiens à remercier Monsieur Désidéri, directeur de recherche à l'I.N.R.I.A. ainsi que Monsieur Leuchter, adjoint scientifique au directeur de l'aérodynamique à l'O.N.E.R.A. pour avoir bien voulu participer au jury.

J'adresse mes remerciements au Bureau d'Etudes et à l'Atelier de l'I.M.F.L. dont les compétences et le savoir faire ont permis l'élaboration de maquettes d'une

grande complexité et ont ainsi contribué à la réussite de la campagne d'essais dans la soufflerie hypersonique de l'O.N.E.R.A. R3Ch. A cette occasion, je remercie les ingénieurs et techniciens de cette installation dont la collaboration a contribué à effectuer des mesures et des visualisations d'une grande qualité.

Qu'il me soit permis de remercier l'ensemble du groupe de Mécanique des Fluides Fondamentale de l'I.M.F.L. et plus particulièrement Monsieur Desse, ingénieur, sans lequel l'adaptation de l'interférométrie aux conditions de la campagne à R3Ch n'aurait pu être menée à bien. Je remercie également Monsieur Debruyne, ingénieur qui, grâce à son soutien, a contribué à l'aboutissement de ce travail. Je tiens également à remercier les membres du groupe informatique et notamment Monsieur Masek pour l'aide qu'il m'a apportée.

Table des matières

Avant-propos	5
Liste des figures	12
Introduction	18
I Calculs d'explosions anisotropes violentes à similitude interne	21
Notations particulières	23
Introduction	25
1 Formulation mathématique: cas des faibles anisotropies	27
1.1 Hypothèses de base	27
1.2 Equations adimensionnées	30
1.3 Forme matricielle et propriétés du système	31
1.4 Forme intrinsèque	34
2 Traitement numérique	39
2.1 Choix des variables d'intégration	39
2.2 Méthode numérique	41
2.3 Cas test	44
2.4 Résultats	47
3 Cas des fortes anisotropies	50
3.1 Cas elliptique	50
3.2 Cas hyperbolique	54
3.3 Couches épaisses	55
Résolution par différences finies	57
Conclusion	59

II	Comparaison entre théorie et expérience	61
	Notations particulières	63
	Introduction	64
4	Modèle théorique et moyens d'essais	65
4.1	Hypothèses	65
4.2	Forme de la solution	66
4.3	Définition des ogives	66
4.4	Mesure des efforts	67
4.5	Mesure de la pression	68
4.6	Température au voisinage du nez	69
4.7	Mesure de la masse volumique	69
5	Résultats	71
5.1	Mesures interférométriques	71
5.1.1	Informations fournies par un interférogramme	71
5.2	Localisation du choc	72
5.3	Coefficients globaux	74
5.4	Pressions	75
5.5	Dépouillement de la masse volumique	77
5.5.1	Méthode de déconvolution pour $\alpha = 0^\circ$	77
5.5.2	Répartition radiale de la masse volumique pour $n = 1$ et $\alpha = 0^\circ$	78
5.5.3	Répartition radiale de la masse volumique pour $n = 2/3$ et $\alpha = 0^\circ$	78
	Conclusion	80
III	Couche limite tridimensionnelle à similitude interne	81
	Notations particulières	83
	Introduction	85
6	Généralités	86
7	Cas de l'écoulement méridien	89
8	Cas des faibles incidences	94
8.1	Equations pour l'écoulement extérieur	97
8.2	Similitude interne en tridimensionnel	97
8.3	Problèmes de raccord	100
8.4	Influence de la masse volumique de raccord	102
8.5	Résumé des résultats	102

9	Exploitation	104
9.1	Choix des coefficients constants	104
9.1.1	Méthode de résolution	105
9.2	Contraintes, décollement	106
9.3	Résultats	108
9.3.1	Calcul de la couche limite pour la configuration expérimentale $M_\infty = 10$	108
9.3.2	Couche limite pour $M_\infty = 12$	115
	Conclusion	120
	Conclusion générale	121
IV	Annexes	125
A	Condition d'existence d'une zone hyperbolique pour le cas test	127
B	Formulation $h g v_o$ pour le problème de l'explosion	128
C	Formulation conservative pour le problème de l'explosion	130
D	Schéma de Mac Cormack	131
E	Méthode de déconvolution pour $\alpha \neq 0^\circ$	132
	Bibliographie	135
	Figures	139

Liste des figures

- Figure 1 :** Explosion ponctuelle axisymétrique et explosion du fil rectiligne infini.
- Figure 2 :** Notations sur le choc et la frontière du vide - Domaines d'application de la conservation de l'énergie.
- Figure 3 :** Structure de l'écoulement - Nature de l'écoulement relatif par rapport à la vitesse de dilatation de la solution.
- Figure 4 :** Forme de choc ne vérifiant pas les conditions de choc fort - Différence entre m_θ et m_ξ .
- Figure 5 :** Effet de Λ sur la forme du choc.
- Figure 6 :** Comparaison des courbes analytique-Fourier pour les fonctions h_c et B_c .
- Figure 7 :** Reconstitution du maillage physique: $n = 0.75$, $k = 1$, $\Lambda = -0.07$.
- Figure 8 :** "Trajectoires": $n = 0.75$, $k = 1$, $\Lambda = -0.07$ pour $K = 4$ et $K = 8$.
- Figure 9 :** Pression et masse volumique adimensionnées: $n = 0.75$, $k = 1$, $\Lambda = -0.07$ pour $K = 4$ et $K = 8$.
- Figure 10 :** Vitesses adimensionnées: $n = 0.75$, $k = 1$, $\Lambda = -0.07$ pour $K = 4$ et $K = 8$.
- Figure 11 :** Comparaison des cartes de pression pour $K = 4$ et $K = 8$: $n = 0.75$, $k = 1$, $\Lambda = -0.07$.
- Figure 12 :** Cartes de masse volumique et du nombre de Mach: $n = 0.75$, $k = 1$, $\Lambda = -0.07$.
- Figure 13 :** Comparaison des trajectoires obtenues avec les formulations $\bar{E} = \frac{1}{F_4} \mathcal{I} + \frac{\partial \hat{S}}{\partial \xi} \Big|_{\zeta} \mathcal{D}_0$ et $\bar{E} = \frac{1}{F_4}$: $n = 0.75$, $k = 1$, $\Lambda = -0.01$.
- Figure 14 :** Influence du terme $\frac{\partial \hat{S}}{\partial \xi} \Big|_{\zeta}$ sur les cartes de pression: $n = 0.75$, $k = 1$, $\Lambda = -0.01$.
- Figure 15 :** Cartes obtenues par la formulation h, g, v_0 : $n = 0.75$, $k = 1$, $\Lambda = -0.07$, $K = 8$.
- Figure 16 :** "Trajectoires" dans le cas de fortes anisotropies pour $K = 16$ et $K = 32$: $n = 0.75$, $k = 1$, $\Lambda = -0.1$.
- Figure 17 :** Approximation de Σ' pour $n = 0.75$, $k = 1$, $\Lambda = -0.1$ et $K = 32$.

- Figure 18 :** Inconnues adimensionnées: $n = 0.75$, $k = 1$, $\Lambda = -0.1$ et $K = 32$.
- Figure 19 :** Effets numériques en forte anisotropie.
- Figure 20 :** Cartes de pression et de masse volumique: $n = 0.75$, $k = 1$, $\Lambda = -0.1$ et $K = 16$.
- Figure 21 :** Cartes de pression et du nombre de Mach pour un problème localement hyperbolique: $n = 0.75$, $k = 1$, $\Lambda = -0.11$ et $K = 16$.
- Figure 22 :** Grandeurs adimensionnées pour un problème localement hyperbolique: $n = 0.75$, $k = 1$, $\Lambda = -0.11$ et $K = 16$.
- Figure 23 :** Cartes de pression pour $n = 0.55$, $n = 0.66$ et $n = 0.75$: $k = 1$, $\Lambda = -0.02$, $K = 16$.
- Figure 24 :** "Trajectoires" pour $n = 0.55$ et $n = 0.75$: $k = 1$, $\Lambda = -0.02$, $K = 16$.
- Figure 25 :** Pression adimensionnée pour $n = 0.55$, $n = 0.66$ et $n = 0.75$: $k = 1$, $\Lambda = -0.02$, $K = 16$.
- Figure 26 :** Masse volumique adimensionnée pour $n = 0.55$, $n = 0.66$ et $n = 0.75$: $k = 1$, $\Lambda = -0.02$, $K = 16$.
- Figure 27 :** Explosion ponctuelle en milieu faiblement compressible: $n = 0.75$, $k = 2$, $\Lambda = -0.07$, $K = 16$, $\gamma = 7$.
- Figure 28 :** Comparaison des cartes de pression obtenues avec la méthode Telenin-caractéristiques et le schéma de Mac Cormack: $n = 0.75$, $k = 1$, $\Lambda = -0.05$.
- Figure 29 :** Comparaison des cartes de pression obtenues avec la méthode Telenin-caractéristiques et le schéma de Mac Cormack: $n = 0.75$, $k = 1$, $\Lambda = -0.11$.
- Figure 30 :** Comparaison des cartes de pression obtenues avec la méthode Telenin-caractéristiques et le schéma de Mac Cormack: $n = 0.55$, $k = 1$, $\Lambda = -0.025$.
- Figure 31 :** Onde de souffle anisotrope consécutive à un tir d'arme.
- Figure 32 :** Résultats de calcul d'une onde de souffle: $n = 0.60$, $k = 2$, $K = 16$.
- Figure 33 :** Notations pour le problème de l'écoulement hypersonique autour d'une ogive élancée: repère lié à la maquette et configuration des maquettes destinées aux pesées.
- Figure 34 :** Estimation des pressions et températures maximales.
- Figure 35 :** Maquettes du cône droit.
- Figure 36 :** Moyens d'essais: installation et maquette en veine.
- Figure 37 :** Mise en œuvre de la méthode optique.
- Figure 38 :** Interférogrammes enregistrés avec les différents montages optiques.
- Figure 39 :** Différence de marche en fonction des teintes observées.
- Figure 40 :** Description des informations contenues dans un interférogramme.

- Figure 41 :** Echelle des teintes - Estimation de l'erreur sur la localisation du choc.
- Figure 42 :** Interférogrammes utilisés pour le relevé de la position du choc sans incidence.
- Figure 43 :** Interférogrammes utilisés pour le relevé de la position du choc avec incidence.
- Figure 44 :** Positions comparées du choc et de la maquette pour $n = 2/3$ et $n = 1$ sans incidence.
- Figure 45 :** Positions comparées du choc et de la maquette pour $n = 3/4$ (sans incidence) sans et avec prise en compte de l'effet de déplacement de la couche limite.
- Figure 46 :** Sens de déplacement du choc avec l'incidence en fonction de n : théories à similitude interne et de Doty et Rasmussen.
- Figure 47 :** Positions comparées du choc et de la maquette pour $n = 1$ et $n = 3/4$ avec incidence.
- Figure 48 :** Coefficients aérodynamiques mesurés.
- Figure 49 :** Coefficients aérodynamiques comparés.
- Figure 50 :** Incidence et dérapage corrigés.
- Figure 51 :** Pressions comparées à incidence géométrique nulle: $n = 2/3$ et $n = 1$.
- Figure 52 :** Prise en compte de l'effet de déplacement de la couche limite pour la comparaison des pressions théoriques et expérimentales pour l'ogive en loi de puissance $3/4$.
- Figure 53 :** Pressions pariétales en incidence pour $n = 2/3$ et $n = 3/4$.
- Figure 54 :** Correction des effets isotropes et anisotropes.
- Figure 55 :** Répartition radiale de la masse volumique: $n = 1$, $\alpha = 0$.
- Figure 56 :** Répartition radiale de la masse volumique: $n = 2/3$, $\alpha = 0$.
- Figure 57 :** Notations pour le dépouillement des interférogrammes relatifs à l'ogive en loi de puissance $n = 3/4$.
- Figure 58 :** Notations pour le problème de la couche limite - Effet de l'incidence sur l'obstacle efficace.
- Figure 59 :** Notations dans le plan méridien - Positions respectives de la couche limite et de la couche d'entropie.
- Figure 60 :** Répartition radiale expérimentale de la masse volumique: $n = 2/3$ et $n = 1$.
- Figure 61 :** Pressions pariétales expérimentales: $n = 2/3$ et $n = 1$.
- Figure 62 :** Interférogramme: $n = 3/4$, $\alpha = 0$. Structure transversale de l'écoulement.
- Figure 63 :** Couche limite axisymétrique pour $T_p = 290K$ et $T_p = 500K$:
 $M_\infty = 9.95$, $T_{i\infty} = 1050K$, $p_{i\infty} = 120b$.

- Figure 64 :** Vitesse orthoradiale adimensionnée pour $T_p = 290K$ et $T_p = 500K$.
- Figure 65 :** Influence de la masse volumique extérieure d'ordre 1 pour $T_p = 290K$:
 $M_\infty = 9.95$, $T_{i\infty} = 1050K$, $p_{i\infty} = 120b$.
- Figure 66 :** Influence de la masse volumique extérieure d'ordre 0 pour $T_p = 290K$:
 $M_\infty = 9.95$, $T_{i\infty} = 1050K$, $p_{i\infty} = 120b$.
- Figure 67 :** Vitesse longitudinale et enthalpie adimensionnées d'ordre 1 pour
 $T_p = 290K$, $T_p = 500K$ et une paroi adiabatique:
 $M_\infty = 9.95$, $T_{i\infty} = 1050K$, $p_{i\infty} = 120b$.
- Figure 68 :** Coefficients de portance comparés: effet de la plage de dépouillement
sur la portance expérimentale - Comparaison des coefficients de por-
tance théoriques et expérimentaux.
- Figure 69 :** Carte de frottement longitudinal τ_p pour $T_p = 290K$ et $T_p = 500K$:
 $M_\infty = 9.95$, $T_{i\infty} = 1050K$, $p_{i\infty} = 120b$ et $\alpha = 0$.
- Figure 70 :** Flux de chaleur q pour $T_p = 290K$ et $T_p = 500K$: $M_\infty = 9.95$,
 $T_{i\infty} = 1050K$, $p_{i\infty} = 120b$.
- Figure 71 :** Carte de frottement longitudinal τ_p pour $T_p = 290K$ et $T_p = 500K$:
 $M_\infty = 9.95$, $T_{i\infty} = 1050K$, $p_{i\infty} = 120b$ et $\alpha = 0.1rad$.
- Figure 72 :** Carte de frottement longitudinal τ_p pour $T_p = 290K$ et $T_p = 500K$:
 $M_\infty = 9.95$, $T_{i\infty} = 1050K$, $p_{i\infty} = 120b$ et $\alpha = 0.084rad$.
- Figure 73 :** Carte de frottement transversal τ_t pour $T_p = 290K$ et $T_p = 500K$:
 $M_\infty = 9.95$, $T_{i\infty} = 1050K$, $p_{i\infty} = 120b$ et $\alpha = 0.1rad$.
- Figure 74 :** Cartes des différents frottements pour le cas d'une paroi adiabatique:
 $M_\infty = 9.95$, $T_{i\infty} = 1050K$, $p_{i\infty} = 120b$ et $\alpha = 0.1rad$.
- Figure 75 :** Couche limite axisymétrique pour $T_p = 1200K$ et $T_p = 3704K$:
 $M_\infty = 12$, $T_{i\infty} = 1490K$, $p_{i\infty} = 400b$.
- Figure 76 :** Vitesse orthoradiale adimensionnée pour $T_p = 1200K$ et $T_p = 3704K$.
- Figure 77 :** Influence de la masse volumique extérieure d'ordre 1:
 $T_p = 3704K$, $M_\infty = 12$, $T_{i\infty} = 1490K$, $p_{i\infty} = 400b$.
- Figure 78 :** Influence de la masse volumique extérieure d'ordre 0:
 $T_p = 3704K$, $M_\infty = 12$, $T_{i\infty} = 1490K$, $p_{i\infty} = 400b$.
- Figure 79 :** Vitesse longitudinale et enthalpie adimensionnées d'ordre 1: $T_p =$
 $1200K$ et $T_p = 3704K$: $M_\infty = 12$, $T_{i\infty} = 1490K$, $p_{i\infty} = 400b$.
- Figure 80 :** Coefficients aérodynamiques globaux: $M_\infty = 12$, $T_{i\infty} = 1490K$,
 $p_{i\infty} = 400b$.
- Figure 81 :** Carte de frottement longitudinal τ_p pour $T_p = 1200K$ et $T_p = 3704K$:
 $M_\infty = 12$, $T_{i\infty} = 1490K$, $p_{i\infty} = 400b$ et $\alpha = 0$.
- Figure 82 :** Flux de chaleur q pour $T_p = 1200K$: $M_\infty = 12$, $T_{i\infty} = 1490K$,
 $p_{i\infty} = 400b$.

- Figure 83 :** Carte de frottement longitudinal τ_p pour $T_p = 1200K$ et $T_p = 3704K$ obtenue avec le calcul de N_m : $M_\infty = 12$, $T_{i\infty} = 1490K$, $p_{i\infty} = 400b$ et $\alpha = 0.1rad$.
- Figure 84 :** Carte de frottement longitudinal τ_p pour $T_p = 1200K$ et $T_p = 3704K$ obtenue avec le calcul de T_m : $M_\infty = 12$, $T_{i\infty} = 1490K$, $p_{i\infty} = 400b$ et $\alpha = 0.1rad$.
- Figure 85 :** Carte de frottement transversal τ_t pour $T_p = 1200K$ et $T_p = 3704K$: $M_\infty = 12$, $T_{i\infty} = 1490K$, $p_{i\infty} = 400b$ et $\alpha = 0.1rad$.

Introduction

Le travail qui est présenté dans ce mémoire met en œuvre une philosophie particulière de l'approche des phénomènes aérodynamiques. Au cours des vingt dernières années, les progrès de l'informatique ont entraîné le développement constant des méthodes numériques de calcul: des codes de plus en plus puissants intègrent directement les équations aux dérivées partielles régissant tel ou tel phénomène. L'attrait des méthodes numériques a peu à peu détourné la recherche en aérodynamique des méthodes analytiques traditionnelles. Pour puissantes et indispensables qu'elles soient, ces techniques numériques ont aussi leurs limites. Depuis une dizaine d'années la confrontation calcul - expérience est devenue la méthode de recherche la plus communément répandue en aérodynamique. Cependant, cette démarche ressemble de plus en plus à une comparaison entre deux méthodes expérimentales: la soufflerie et la "soufflerie numérique". Le besoin de guides théoriques, de points de repère analytiques se fait donc sentir de plus en plus et pas seulement dans les thèmes nouveaux (bifurcations, systèmes dynamiques) mais aussi dans les thèmes récurrents (turbulence, hypersonique).

L'approche analytique moderne allie les techniques anciennes au calcul numérique. Elle ne se présente plus comme une alternative aux méthodes numériques mais comme un éclairage sur des difficultés particulières ou comme un fournisseur de cas tests. Ses relations avec l'expérience sont également étroites, non seulement pour confirmer les résultats mais encore et surtout pour puiser des hypothèses simplificatrices difficiles à déduire de la seule étude des équations locales.

Les trois parties de cette thèse tentent d'illustrer cette démarche et cette imbrication des techniques: numérique, expérience et analyse. Toutes les parties n'aboutissent pas au même succès, toutes soulèvent des questions nouvelles mais l'étendue des résultats obtenus plaide pour un jugement positif sur cette approche encore originale mais qui devrait se développer dans les années à venir. C'est dans cette optique qu'ont été abordés les thèmes contenus dans ce mémoire.

C'est dans les années 1980 qu'a commencé à l'I.M.F.L., l'étude des phénomènes de balistique intermédiaire: il s'agissait de modéliser l'écoulement aérodynamique produit par le tir dans le voisinage de l'arme et plus particulièrement l'onde de bouche résultante. Ces travaux ont donné naissance à la théorie des explosions violentes anisotropes [1]. L'approche de ce problème, très originale, utilise à la fois les méthodes d'analyse asymptotique et celles de la similitude [2]. Ainsi, les paramètres essentiels ont pu être identifiés et surtout, le nombre de variables dont dépend le phénomène a été raisonnablement réduit. Cependant, la résolution numérique des équations mises en évidence alors, n'avait pas été réalisée.

Le début des années 1990 a vu le regain d'intérêt de la D.R.E.T. pour les écoulements hypersoniques. L'analogie entre les explosions intenses et une classe d'écoulements hypersoniques [3] a permis de transposer les méthodes et une partie des résultats du premier domaine vers le second. C'est ainsi qu'a été élaborée une théorie pour décrire les écoulements hypersoniques tridimensionnels, non visqueux, autour d'ogives élancées en loi de puissance, le gaz étant supposé parfait. Les solutions prennent en compte l'effet des faibles incidences et du nombre de Mach amont. En particulier, la position du choc, la pression et les coefficients aérodynamiques sont donnés sous une forme analytique. Afin de pouvoir servir de cas test à des codes de calcul généraux, la théorie développée à l'I.M.F.L. se devait d'être confrontée à l'expérience.

Cette thèse est donc le prolongement logique des recherches menées jusqu'à présent à l'I.M.F.L. puisqu'elle propose une méthode numérique originale de résolution des équations régissant les explosions violentes à similitude interne et qu'elle contient les résultats expérimentaux d'une campagne d'essais réalisée dans la soufflerie hypersonique de l'O.N.E.R.A. R3Ch. Ce travail prolonge également les recherches qui se sont naturellement orientées, ces deux dernières années, vers l'étude des écoulements hypersoniques visqueux afin de compléter les connaissances déjà acquises dans le domaine non visqueux. C'est toujours dans le but d'obtenir des solutions analytiques que les études se sont poursuivies. Ainsi, une couche limite tridimensionnelle à similitude interne a été mise en évidence pour une ogive particulière.

La présentation de ces thèmes a été organisée dans ce mémoire de la manière suivante:

1. La première partie concerne le problème des explosions violentes anisotropes à similitude interne. Elle se décompose ainsi:
 - Le chapitre 1 donne brièvement les hypothèses de base, la forme de la solution et le système d'équations gouvernant le phénomène. Une première phase calculatoire permet alors de réduire le système initial à deux équations aux dérivées partielles, les deux autres devenant différentielles.
 - Le traitement numérique, basé sur une méthode mixte Collocation - Caractéristiques, fait l'objet du chapitre 2. Afin d'en éprouver la fiabilité, nous l'avons mise en œuvre sur un cas test où l'anisotropie est directement reliée à un paramètre unique.
 - Toujours dans le cadre de ce cas test, le chapitre 3 traite des anisotropies plus fortes. On y met en évidence un comportement anormal de la solution. Nous donnons également quelques résultats concernant un problème localement hyperbolique et une configuration en couche épaisse.
 - Pour confirmer le fait que le comportement anormal des solutions fortement anisotropes est à chercher dans la formulation et non dans la méthode numérique, nous avons également mis en œuvre un schéma de Mac Cormack. Dans les cas "réguliers" notre méthode et ce code du type "différences finies" conduisent à des résultats identiques.

2. Dans la deuxième partie, nous exploitons la campagne d'essais effectuée dans la soufflerie hypersonique de l'O.N.E.R.A. R3Ch:
 - Le chapitre 4 décrit le modèle théorique et les moyens d'essais: mesure des pressions, des coefficients aérodynamiques et méthode de visualisation
 - Le chapitre 5 compare théorie et expérience sur les points suivants: localisation du choc, coefficients aérodynamiques, pressions pariétales, masse volumique.
3. La troisième partie concerne la mise en évidence d'une couche limite hypersonique tridimensionnelle à similitude interne pour une ogive particulière:
 - Le chapitre 6 expose les hypothèses et les équations de base.
 - Le cas de l'écoulement méridien est traité dans le chapitre 7: une hypothèse de température de paroi constante et une approximation de la loi de Sutherland permettent d'aboutir à l'existence d'une similitude interne. La solution dans la couche limite ne fait plus intervenir que des fonctions inconnues d'une seule variable, dite de similitude, qui est formée avec la coordonnée normale à la paroi de l'obstacle.
 - En nous inspirant de la forme du modèle pour l'écoulement extérieur et en prolongeant les hypothèses formulées au chapitre 7, on montre que la similitude interne persiste lorsque l'ogive est en faible incidence, c'est à dire lorsque l'écoulement est tridimensionnel.
 - Le chapitre 9 est une exploitation du modèle obtenu: on énonce notamment un critère d'apparition du décollement et on donne les expressions analytiques des contraintes visqueuses et du flux de chaleur à la paroi. On calcule alors la couche limite pour deux valeurs du nombre de Mach amont et différentes températures de paroi.
4. La partie 4 de ce mémoire contient les différentes annexes:
 - L'annexe A donne la condition d'existence d'une zone hyperbolique au voisinage du choc dans le cadre des explosions violentes anisotropes et pour le cas test.
 - L'annexe B fournit la formulation pour pouvoir traiter ce problème lorsque l'anisotropie n'est plus modérée.
 - L'annexe C donne une forme conservative généralisée des équations précédentes.
 - L'annexe D explicite le schéma de Mac Cormack.
 - Enfin, l'annexe E décrit une méthode de déconvolution des interférogrammes relatifs à la deuxième partie, lorsque l'écoulement n'est plus méridien.

Partie I

Calculs d'explosions anisotropes violentes à similitude interne

Notations particulières

a	Variable définie en (1.41)
A	matrice définie en (1.45)
B	variable définie en (1.41)
c	vitesse du son $c^2 = \gamma \frac{p}{\rho}$
C	matrice définie en (1.46)
D	matrice $A^{-1}C$
\mathcal{D}_0	Matrice définie en (1.51)
E	intensité de l'apport d'énergie de l'explosion analogue
\overline{E}	Matrice définie en (2.10)
\mathcal{E}	énergie émise jusqu'à l'instant t
f	variable définie en (1.22)
F_i	$i = 1$ à 4 , fonctions définies en (1.52) et (2.10)
g	variable définie en (1.22)
G_i	$i = 1$ à 4 , fonctions définies respectivement en (1.40)(1.44)(1.47)
h	variable définie en (1.22)
J_i	$i = 1$ à 4 , fonctions définies respectivement en (1.15)
k	indice de symétrie plane ($k = 1$) ou cylindrique ($k = 2$)
K	nombre d'harmoniques retenus dans l'approximation de h et B en série de Fourier
m, m'	$m = \frac{R_0}{R} = \cot g \vartheta$, $m' = \frac{R'_0}{R'} = \cot g \vartheta'$
M	Nombre de Mach relatif défini en (1.30)
O	lieu de l'explosion, origine des coordonnées dans le plan de l'écoulement
p	pression
q_n, q_τ	composantes normale et tangentielles de la vitesse en aval du choc
r	coordonnée polaire dans un plan $x=cste$ (figure 1)
R	position du choc
R'	position de Σ'
S	variable définie par (1.44)
t	temps
u	composante radiale de la vitesse
v	composante orthoradiale de la vitesse
V_∞	Vitesse à l'infini amont dans le cas de l'hypersonique (figure 1-b)
X	Coordonnée sans dimensions définie en (1.6)
ν	exposant de t dans la loi (0.1)
γ	rapport des chaleurs spécifiques
ϵ	loi de répartition azimutale de l'énergie
η	variable définie en (1.22)
ζ	variable définie par (1.31)
ϑ, ϑ'	angles définis figure 2-a et 2-b
Λ	paramètre d'anisotropie du cas test, formule (2.21)
ρ	masse volumique
Σ	surface constituée par le choc
Σ'	surface constituée par la frontière du vide

θ coordonnée polaire (figure 1)
 ξ variable définie par (1.31)

Toute grandeur primée est relative à la frontière du vide ($\nu \neq 0$).

L'indice 0 concerne les grandeurs sans dimensions.

La dérivation d'une fonction f par rapport à la variable μ sera notée f_μ .

Introduction

La théorie des explosions violentes anisotropes a été développée à l'IMFL en 1985 [1] dans le cadre des études de tir d'armes. La présente partie traite de la résolution numérique des équations mises en évidence alors. L'étude a permis de concevoir un programme de calcul résolvant ces équations même lorsque l'anisotropie est suffisante pour rendre le problème localement hyperbolique. Quoique limitée dans ses ambitions pratiques du fait d'une schématisation très poussée du phénomène, cette étude n'en constitue pas moins une avancée originale dans la compréhension de la structure des écoulements internes aux ondes de souffle. Elle permet également d'envisager une méthode d'initialisation des explosions dans les codes de calcul classiques.

On entend par explosion un apport d'énergie, instantané ou non, dans un gaz parfait caractérisé par son rapport des chaleurs spécifiques γ . Le gaz, de masse volumique ρ_∞ est supposé initialement au repos à la pression p_∞ . Si l'apport d'énergie est suffisamment intense, il se forme une onde de choc séparant le milieu non perturbé de l'écoulement produit par l'explosion (figure 1-a). On dira que l'explosion est violente si cette onde de choc vérifie les conditions de "choc fort", c'est à dire si la pression p_∞ est négligeable devant les pressions atteintes dans l'écoulement perturbé, en particulier sur le choc.

On trouvera en [2] la justification théorique et expérimentale du modèle de source ponctuelle d'énergie pour modéliser un tir d'arme. Notons que ce concept signifie la disparition de toute longueur caractéristique de la taille de la source et justifie la prise en compte de l'anisotropie de l'apport d'énergie par une simple fonction de l'azimut θ dans un plan méridien, l'écoulement étant axisymétrique (figure 1-a).

De même on pourra chercher les fondements de l'application de la théorie des explosions violentes à l'hypersonique dans [3], [4], [5], [6]. Rappelons seulement qu'un corps élané placé dans écoulement hypersonique dévie les particules fluides presque sans les ralentir, sauf au voisinage d'un écoulement. On peut ainsi considérer que les particules progressent à vitesse constante V_∞ suivant l'axe Ox du corps (figure 1-b). La transformation $t = \frac{x}{V_\infty}$ permet d'interpréter l'écoulement transversal dans chaque plan $x = cste$ comme l'image de l'écoulement instationnaire produit par la dilatation du piston cylindrique Σ' que constitue la trace de l'obstacle dans ces plans transversaux. Cet écoulement correspond à celui que produit une explosion non instantanée apportant à chaque instant une énergie égale à celle que déploie le piston dans sa dilatation [3], [7], [8]. Dans ce cas, l'énergie est supposée répartie uniformément sur une droite mais émise de façon anisotrope dans tout plan orthogonal à cette droite (figure 1-b). Il peut sembler surprenant que cette anisotropie ne fasse intervenir aucune échelle de longueur. En effet, un obstacle tridimensionnel quelconque est déterminé par une échelle de longueur L , suivant Ox par exemple, et une loi d'évolution du maître couple de la forme $L.F(\theta, x/L)$. Pour que F ne dépende que de θ il faut que la forme du maître couple reste la même quel que soit x : $F(\theta, x/L) = f(x/L)G(\theta)$. C'est ce type de corps que simulent les explosions à

symétrie plane étudiées ici.

Enfin, nous nous placerons exclusivement dans le cas où l'apport d'énergie \mathcal{E} est de la forme:

$$(0.1) \quad \mathcal{E} = Et^\nu$$

où E est une constante et ν un réel positif ou nul. Ce choix pour \mathcal{E} ne conduit pas à une réduction significative du champ d'application de la théorie: en effet, l'explosion instantanée (cas de l'explosion atomique) correspond à $\nu = 0$, le tir d'arme (cas du débit d'énergie constant) à $\nu = 1$. Du point de vue des écoulements hypersoniques, on se limite aux corps dont les dimensions transversales croissent suivant une loi de puissance de x . Quoique particuliers, ces obstacles sont représentatifs d'une large gamme d'ogives. L'avantage de cette restriction est que le système d'équations à trois variables (t, r, θ) régissant le phénomène est alors invariant dans un groupe de transformations à un paramètre. De ce fait, on peut le résoudre dans un sous espace à deux dimensions.

Le chapitre 1 reprend la formulation du problème faite en [1] pour la source ponctuelle faiblement anisotrope, en l'étendant au cas de la source rectiligne.

Le chapitre 2 expose la méthode numérique originale qui a été retenue pour le calcul des solutions du problème. Elle s'apparente à la fois à celle des caractéristiques et à celle de Telenin [9]. En effet, on résout deux des quatre équations du système sur une caractéristique double toujours réelle, et les deux autres en développant la solution, qui est périodique, en série de Fourier. La différence avec une méthode de Telenin vient du fait que le développement n'est pas construit avec l'une des variables locales (eulériennes) mais avec une variable lagrangienne caractéristique de chaque trajectoire. Cette méthode permet principalement de s'affranchir de la nature réelle ou complexe des caractéristiques des deux dernières équations, c'est à dire du fait que le problème soit de type elliptique ou hyperbolique. Physiquement, en prenant l'exemple de l'hypersonique, cela revient à pouvoir traiter indifféremment le cas où l'écoulement transversal est entièrement subsonique et celui où il est partiellement supersonique.

Chapitre 1

Formulation mathématique: cas des faibles anisotropies

1.1 Hypothèses de base

On considère une explosion violente dans un gaz au repos occupant tout l'espace. Le gaz est parfait et non visqueux. La source d'énergie est soit un point O , soit un fil rectiligne infini. Dans le premier cas, l'écoulement est supposé axisymétrique: l'énergie est répartie autour de l'axe privilégié Ox qui est un axe de symétrie de l'écoulement. On peut donc résoudre le problème dans un plan méridien, (Ox, Oz) par exemple, qui sera appelé "plan de l'écoulement" (figure 1-a). Dans le second cas, l'apport d'énergie est réparti de manière uniforme suivant x . L'écoulement est donc plan et orthogonal au fil, le point O représente alors la trace du fil dans le plan de l'écoulement (figure 1-b).

Dans les deux cas l'apport total d'énergie à l'instant t est donné par la formule (0.1). Dans cette formule t peut être le temps physique (cas axisymétrique) ou le temps auxiliaire x/V_∞ (cas plan appliqué à l'hypersonique). On désigne par r, θ les coordonnées polaires dans le plan de l'écoulement (figure 1). La répartition azimutale de l'énergie est $E\epsilon(\theta)t^\nu$ où $0 \leq \theta \leq (3-k)\pi$ avec:

- $k = 1$: explosion du fil;
- $k = 2$: explosion ponctuelle.

Lorsque $k = 1$, l'énergie émise par unité de longueur de fil est:

$$\mathcal{E} = \int_0^{2\pi} E\epsilon(\theta)t^\nu d\theta.$$

Pour $k = 2$, et en tenant compte de la symétrie de révolution autour de Ox , on obtient:

$$\mathcal{E} = 2\pi \int_0^\pi E\epsilon(\theta)t^\nu \sin\theta d\theta.$$

En rapprochant ces expressions de (0.1), la fonction de répartition ϵ doit vérifier la relation suivante:

$$(1.1) \quad \int_0^{(3-k)\pi} \epsilon(\theta)(\sin\theta)^{(k-1)} d\theta = \frac{1}{(2\pi)^{(k-1)}}$$

L'écoulement est régi par les équations suivantes.

$$(1.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} r^k (\sin \theta)^{(k-1)} \rho_t + (\sin \theta)^{(k-1)} (r^k \rho u)_r + r^{(k-1)} (\rho v (\sin \theta)^{(k-1)})_\theta = 0 \\ \rho (ru_t + ruu_r + vu_\theta - v^2) + rp_r = 0 \\ \rho (rv_t + ruv_r + vv_\theta + uv) + p_\theta = 0 \\ r \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right)_t + ru \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right)_r + v \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right)_\theta = 0 \end{array} \right.$$

exprimant respectivement la conservation de la masse, la loi fondamentale de la mécanique suivant une direction radiale et orthoradiale ainsi que la conservation de l'entropie d'une particule. Cette dernière équation exclut toute discontinuité interne à l'écoulement. L'équation de l'onde de choc Σ est mise sous la forme $r = R(t, \theta)$ et on désigne par ω sa vitesse normale de propagation. Avec les notations de la figure 2-a, on peut écrire:

$$(1.3) \quad \omega = R_t(t, \theta) \sin \vartheta.$$

En ce qui concerne la structure de l'écoulement, le cas de l'explosion isotrope [8] a montré que lorsque l'apport d'énergie n'est pas instantané ($\nu \neq 0$), l'écoulement n'est pas continu du choc vers O . Il se forme un domaine centré sur le point O à l'intérieur duquel $\rho = 0$. La limite de ce vide est une frontière matérielle que l'on appelle Σ' . Pour l'explosion anisotrope, on peut penser qu'il en est de même. L'existence de Σ' est d'ailleurs attestée par l'expérience dans le cadre des études de tir [7] où $\nu = 1$ et par les résultats théoriques de l'explosion à faible anisotropie pour $k = 2$ et $\nu = 3$. Ce problème revenant à celui de l'explosion isotrope dans un courant uniforme dont on a calculé une solution analytique approchée [10].

Par analogie avec l'équation du choc, la surface Σ' (figure 2-b) sera donnée par $r = R'(t, \theta)$ et sa vitesse de propagation par:

$$(1.4) \quad \omega' = R'_t(t, \theta) \sin \vartheta'$$

Comme nous l'avons signalé dans l'introduction, les conditions de "choc fort" reviennent à faire disparaître p_∞ du problème. Celui-ci n'est plus caractérisé que par les paramètres physiques suivants:

$$(1.5) \quad E, \rho_\infty, \gamma, \nu, k, \epsilon(\theta)$$

dont seuls les deux premiers sont dimensionnés. Il en découle une similitude interne qui se traduit par la nécessité d'utiliser une des variables pour adimensionner le problème. Les formules aux dimensions fournissent ainsi l'expression de la transformation laissant invariant le problème aux dérivées partielles. En prenant t comme troisième grandeur primaire, le système de trois variables (t, r, θ) se réduit à (X, θ) où X peut être mis sous la forme simple:

$$(1.6) \quad X = \frac{r}{R}.$$

En posant

$$n = \frac{\nu + 2}{k + 3}$$

les formules aux dimensions permettent d'écrire les inconnues du problème de la façon suivante:

$$(1.7) \quad R = \left(\frac{Et^{\nu+2}}{\rho_\infty} \right)^{1/(k+3)} R_0(\theta)$$

$$(1.8) \quad R' = \left(\frac{Et^{\nu+2}}{\rho_\infty} \right)^{1/(k+3)} R_0(\theta) X'(\theta)$$

si Σ' existe. L'expression (1.8) de R' est dictée par le fait que l'on recherche des solutions autosemblables: comme le choc, la forme de la frontière Σ' doit être invariante au cours du temps. Les autres grandeurs sont données par:

$$(1.9) \quad \begin{cases} \rho = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \rho_\infty \rho_0(X, \theta) & p = \frac{2n^2}{\gamma+1} \rho_\infty \frac{r^2}{t^2} p_0(X, \theta) \\ u = \frac{2n}{\gamma+1} \frac{r}{t} u_0(X, \theta) & v = \frac{2n}{\gamma+1} \frac{r}{t} v_0(X, \theta) \end{cases}$$

Les fonctions d'indice 0 sont sans dimensions. Les constantes multiplicatives adimensionnées fonctions de n et γ qui sont introduites dans ces formules sont inspirées par les conditions sur le choc qui servent de conditions initiales au système (1.2). Dans l'hypothèse de "choc fort", on a, en $r = R$ c'est à dire en $X = 1$:

$$(1.10) \quad \frac{\rho}{\rho_\infty} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}, \quad p = \frac{2\rho_\infty}{\gamma+1} \omega^2, \quad q_r = 0, \quad q_n = \frac{2}{\gamma+1} \omega$$

où $q_r = u \cos \vartheta + v \sin \vartheta$ et $q_n = u \sin \vartheta - v \cos \vartheta$ sont les composantes de la vitesse sur la tangente et la normale au choc (figure 2-a).

Comme dans le cas isotrope, on formulera le problème sous forme inverse car on connaît toutes les grandeurs sur Σ . En effet, ce problème apparemment aux conditions initiales se prête mieux à une formulation aux conditions aux limites du fait que la similitude interne suppose l'absence de temps caractéristique. La structure du choc et sa forme est donc une donnée initiale. L'intégration des équations du mouvement se fait du choc vers Σ' , si elle existe, qui est obtenue comme limite pour ρ tendant vers zéro dans le cas général et limite pour $\omega' = u'$ dans les cas particuliers où ρ ne s'annule pas ($n = 1$) [1,7,8].

Si X' est obtenu naturellement comme limite du processus d'intégration, il nous faut trouver une relation permettant de déterminer $\epsilon(\theta)$. La question se pose donc de savoir si la donnée de $R_0(\theta)$ équivaut à celle de $\epsilon(\theta)$.

Dans le cas de l'explosion non instantanée la fermeture du problème est obtenue en écrivant que toute l'énergie émise dans le volume V' (figure 2-c) qui est un dièdre ($k=1$) ou un cône ($k=2$) d'angle θ centré en O , sert à la dilatation du tronçon de Σ' intercepté par cet angle [7][11]. Comme aucune particule ne traverse Σ' et qu'il n'y a pas de transfert de chaleur, on obtient, avec les notations de la figure 2-c:

$$\frac{d}{dt} \int_{V'} e \, dv = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V'} e \, dv = - \int_{\Sigma'} p' \vec{\omega}' \cdot \vec{n}' \, ds$$

où e désigne l'énergie interne par unité de volume dans V' . D'après les hypothèses que nous venons de formuler, la seule variation d'énergie interne provient de la source O . On a donc:

$$(1.11) \quad \nu E t^{\nu-1} \int_0^\theta \epsilon(\phi) (\sin \phi)^{(k-1)} d\phi = \int_0^\theta p' R'^k R'_t (\sin \phi)^{(k-1)} d\phi.$$

Dans le cas particulier de l'explosion instantanée ($\nu = 0$), Σ' se réduit au point O et l'équation précédente n'a donc plus de sens. La répartition azimutale ϵ est alors obtenue par application du principe de la conservation globale de l'énergie dans le volume diédrique ($k = 1$) ou conique ($k = 2$) V de la figure 2-d. Avec les notations de cette figure, on a :

$$(1.12) \quad (2\pi)^{(k-1)} \int_0^\theta E t^\nu \epsilon(\phi) (\sin \phi)^{(k-1)} d\phi = \int_V \left(\frac{p}{\gamma-1} + \rho \frac{u^2 + v^2}{2} \right) dv \\ + \int_0^t \left[\int_{S_1} \left(\frac{\gamma p}{\gamma-1} + \rho \frac{u^2 + v^2}{2} \right) v ds \right] dt.$$

Nous avons donc obtenu les équations de fermeture. La section suivante montrera que la formulation adimensionnée de ces expressions fournit une relation entre R_0 et ϵ . Bien entendu, les développements précédents s'appliquent si Σ' existe: c'est l'hypothèse que nous ferons tout au long de cette partie.

1.2 Equations adimensionnées

Ecrivons le problème pour les inconnues sans dimensions ρ_0 , p_0 , u_0 , v_0 et ϵ . On posera :

$$(1.13) \quad m = \cot g \vartheta = \frac{R_\theta}{R} = \frac{R_{0\theta}}{R_0}.$$

Compte tenu de (1.9), les équations (1.2) donnent le système dépendant des variables X et θ suivant :

$$(1.14) \quad \begin{cases} X \left(u_0 - m v_0 - \frac{\gamma+1}{2} \right) \rho_{0X} + X \rho_0 u_{0X} - m X \rho_0 v_{0X} + (\rho_0 v_0)_\theta = \rho_0 J_1 \\ X \left(u_0 - m v_0 - \frac{\gamma+1}{2} \right) u_{0X} + v_0 u_{0\theta} + \frac{\gamma-1}{2\rho_0} p_{0X} X = J_2 + m_\theta v_0^2 \\ X \left(u_0 - m v_0 - \frac{\gamma+1}{2} \right) v_{0X} + v_0 v_{0\theta} + \frac{\gamma-1}{2\rho_0} (p_{0\theta} - m X p_{0X}) = J_3 \\ X \left(u_0 - m v_0 - \frac{\gamma+1}{2} \right) \left[\frac{p_{0X}}{\rho_0} - \gamma \frac{p_{0\theta}}{\rho_0} \right] + v_0 \left[\frac{p_{0\theta}}{\rho_0} - \gamma \frac{p_{0X}}{\rho_0} \right] = -J_4 \end{cases}$$

Les fonctions J_i sont :

$$(1.15) \quad \begin{cases} J_1 = -(k+1)u_0 - (k-1)v_0 \cot g \theta \\ J_2 = u_0 \left(\frac{\gamma+1}{2n} - u_0 \right) + v_0^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma} c_0^2 - m_\theta v_0^2 \\ J_3 = v_0 \left(\frac{\gamma+1}{2n} - 2u_0 \right) \\ J_4 = - \left(\frac{\gamma+1}{n} - 2u_0 \right) \end{cases}$$

où :

$$c_0^2 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0}.$$

On remarquera que la vitesse du son locale c est liée à c_0 par :

$$(1.16) \quad c^2 = \frac{2n^2(\gamma-1)r^2}{(\gamma+1)^2 t^2} c_0^2.$$

A ce système sont associées les conditions adimensionnées tirées de (1.10):

$$(1.17) \quad \begin{cases} \rho_0(1, \theta) = 1 & p_0(1, \theta) = \frac{1}{1+m^2} = \sin^2 \vartheta \\ u_0(1, \theta) = \frac{1}{1+m^2} = \sin^2 \vartheta & v_0(1, \theta) = -\frac{m}{1+m^2} = -\sin \vartheta \cos \vartheta. \end{cases}$$

Il reste maintenant à exprimer sous forme adimensionnée les équations de fermeture (1.11) et (1.12). Dans le cas général ($\nu \neq 0$), il suffit de reporter les développements (1.9) dans (1.11). On obtient:

$$(1.18) \quad \epsilon(\theta) = \frac{2n^3 R_0^{(k+3)} X'^{(k+3)} p'_0}{(\gamma + 1)\nu}.$$

Dans le cas instantané ($\nu = 0$), la forme adimensionnée de (1.12) est:

$$(1.19) \quad \frac{2(\nu+2)}{5(\gamma+1)\nu} R_0^{k+3}(\theta) (\sin \theta)^{k-1} \int_{X'}^1 G(X, \theta) X^{k+2} dX = \frac{25(\gamma^2-1)}{2(\nu+2)^2} \int_0^\theta \epsilon(\phi) (\sin \phi)^{k-1} d\phi + \int_0^\theta R_0^{k+3}(\phi) \left[\int_{X'}^1 K(X, \phi) X^{k+2} dX \right] (\sin \phi)^{k-1} d\phi +$$

où les fonctions K et G sont définies par:

$$K(X, \theta) = p_0 + \rho_0 u_0^2 + \rho_0 v_0^2, \quad G(X, \theta) = (\gamma p_0 + \rho_0 u_0^2 + \rho_0 v_0^2) v_0.$$

L'équation (1.19) n'a de sens pour $\nu = 0$ que si

$$(1.20) \quad \int_0^1 G(X, \theta) X^{k+2} dX = 0$$

c'est à dire si le flux d'énergie à travers la surface latérale du dièdre ou du cône délimitant le volume V de la figure 2-d est nul. Il est montré en [11] que (1.20) est la forme intégrale sur V de l'équation locale de l'énergie de (1.14) pour $\nu = 0$. Il vient donc pour la fonction de répartition ϵ :

$$(1.21) \quad R_0^{(k+3)}(\theta) \int_0^1 X^{k+2} (p_0 + \rho_0 u_0^2 + \rho_0 v_0^2) dX = \frac{(\gamma^2 - 1)}{2n^2} \epsilon(\theta).$$

Cette équation traduit le fait que la répartition azimutale de l'énergie dans l'écoulement reste à tout instant identique à $\epsilon(\theta)$ si $\nu = 0$ [10,7]. En d'autres termes, cela signifie que, si l'explosion est instantanée, il n'y a pas de transfert d'énergie à travers S_1 (figure 2-d) tant que le choc peut être considéré comme violent. Dans ce cas, les modifications de la répartition d'énergie dans l'écoulement ne peuvent venir que d'un effet de la pression p_∞ lorsque les hypothèses de choc fort ne sont plus justifiées. On peut remarquer que cette dernière équation est une généralisation de celle que l'on obtient dans le cas isotrope où $\epsilon = 1/(2\pi)^k \forall \theta$ [12].

1.3 Forme matricielle et propriétés du système

Posons:

$$(1.22) \quad \begin{cases} \eta = \log X \\ g = u_0 - m v_0 - \frac{\gamma+1}{2} \\ f = \log \rho_0 \\ h = \log p_0 \end{cases}$$

On peut écrire le système (1.14) sous la forme matricielle suivante:

$$(1.23) \quad \begin{aligned} & \begin{bmatrix} g & 1 & 0 & 0 \\ 0 & g & mg & \frac{\gamma-1}{2\gamma}c_0^2 \\ 0 & 0 & g & -\frac{m(\gamma-1)}{2\gamma}c_0^2 \\ \gamma g & 0 & 0 & -g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ g \\ v_0 \\ h \end{bmatrix}_\eta \\ & + \begin{bmatrix} v_0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & v_0 & mv_0 & 0 \\ 0 & 0 & v_0 & \frac{\gamma-1}{2\gamma}c_0^2 \\ \gamma v_0 & 0 & 0 & -v_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ g \\ v_0 \\ h \end{bmatrix}_\theta \\ & = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ J_4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

L'équation caractéristique du système (1.23) s'écrit:

$$(1.24) \quad (g - v_0\varsigma)^2 \left(\frac{\gamma-1}{2}c_0^2(1 + (m + \varsigma)^2) - (g - v_0\varsigma)^2 \right) = 0$$

où:

$$(1.25) \quad \varsigma = \frac{d\eta}{d\theta}.$$

Cette équation a une racine double réelle:

$$(1.26) \quad \varsigma = \frac{g}{v_0}$$

qui correspond à deux familles de caractéristiques confondues. Il est évident, avant même tout développement mathématique, que ces caractéristiques correspondent au faisceau de trajectoires des particules situées sur un rayon $\theta = cste$ avant le passage du choc. On peut d'ailleurs vérifier que leur équation

$$\frac{dr}{u} = \frac{rd\theta}{v} = dt$$

a pour forme adimensionnée l'expression (1.26).

La figure 3-a illustre cette propriété. Nous y avons représenté la structure de l'écoulement à un instant $t = t_{10}$. Les courbes T_i sont les trajectoires réelles des particules se trouvant initialement sur un rayon $\theta = \theta_c$ ayant traversé le choc à des instants antérieurs $t = t_i$. Pour $t = t_{10}$, ces différentes particules sont situées sur une courbe qui est justement la caractéristique définie par (1.26). Notons au passage que cette figure montre que lorsque Σ' existe, elle est le lieu des particules ayant traversé le choc à l'instant initial.

Le fait que les courbes (1.26) soient des caractéristiques réelles doubles ne doit pas surprendre. En effet, la présence de l'équation de la conservation de l'entropie sur une particule dans le système (1.2) fait des trajectoires le lieu où les variations de

cette grandeur sont explicites en fonction du temps grâce à la similitude interne du problème. L'entropie est donc un invariant du problème homogène puisque le second membre provient exclusivement des termes instationnaires. Nous savons aussi que l'entropie n'est pas la seule quantité lagrangienne dans un écoulement compressible non visqueux: l'enthalpie d'arrêt en est une autre. Cette remarque va nous guider dans la recherche de la seconde équation de transport sur la caractéristique double.

Revenons à l'équation (1.24). Les autres caractéristiques sont définies par l'équation du second degré:

$$(1.27) \quad \left(\frac{\gamma-1}{2}c_0^2 - v_0^2\right)\varsigma^2 + (2gv_0 + (\gamma-1)mc_0^2)\varsigma + \frac{\gamma-1}{2}c_0^2(1+m^2) - g^2 = 0.$$

Elles sont réelles lorsque le discriminant est positif ou nul, c'est à dire pour

$$(1.28) \quad \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{2}\right)^2 + v_0^2 - \frac{\gamma-1}{2}c_0^2 \geq 0.$$

Le problème est de type elliptique si ce discriminant est négatif et de type hyperbolique dans le cas contraire.

Les conditions aux limites permettent de déterminer la nature du problème au voisinage du choc. D'après les conditions (1.17), l'inégalité (1.28) s'écrit sur le choc:

$$(1.29) \quad \frac{\gamma+1}{2\gamma} - \sin^2 \vartheta \geq 0.$$

On constate que le signe du premier membre ne dépend ni de k ni de ν mais exclusivement de γ et de la forme du choc. Au voisinage du choc, le problème est donc de type elliptique si $\sin^2 \vartheta > \frac{\gamma+1}{2\gamma}$ et de type hyperbolique si $\sin^2 \vartheta < \frac{\gamma+1}{2\gamma}$. Pour l'air, $\gamma = 1.4$, le problème change de nature pour $\vartheta \simeq 68$ deg. Nous voyons ici que la nature du problème sur le choc est indépendante de la manière dont se fait l'apport d'énergie au cours du temps et du type de symétrie (axiale ou plane). Elle dépend en revanche de la répartition azimutale de cette énergie puisque celle-ci conditionne directement la forme du choc par l'intermédiaire de (1.18) ou (1.21). Du point de vue des écoulements hypersoniques, cela signifie que la forme géométrique de la trace du choc dans un plan orthogonal à V_∞ dépend exclusivement de la géométrie du maître couple du corps.

Le choc étant une surface fermée, il existe nécessairement des points où $\sin^2 \vartheta > \frac{\gamma+1}{2\gamma}$. De ce fait, on peut dire qu'il existe nécessairement une zone elliptique dans l'écoulement. Il se peut même, si la forme de l'onde est peu anisotrope, qu'il n'existe pas de zones hyperboliques; c'est le cas de l'explosion isotrope.

On a pu remarquer que dans de nombreuses équations du problème apparaît la quantité $u_0 - \frac{\gamma+1}{2}$ qui est la forme sans dimensions de la vitesse radiale des particules fluides par rapport au point géométrique défini par $X = cste$ sur lequel elles se trouvent l'instant considéré. En effet, ce point se déplace suivant un rayon avec le mouvement de dilatation du choc à la vitesse XR_t . La vitesse radiale relative d'une particule est donc:

$$u - XR_t = \frac{2n}{\gamma+1} \frac{r}{t} u_0(X, \theta) - XR_t.$$

En tirant parti de la définition de X , il vient:

$$u - XR_t = \frac{2n}{\gamma + 1} \frac{r}{t} \left(u_0(X, \theta) - \frac{\gamma + 1}{2} \right).$$

Introduisons le nombre de Mach relatif M du mouvement des particules fluides dans le plan de l'écoulement par rapport à ce point géométrique. On a:

$$(1.30) \quad M^2 = \frac{2}{(\gamma - 1)c_0^2} \left[\left(u_0 - \frac{\gamma + 1}{2} \right)^2 + v_0^2 \right].$$

On voit que la condition (1.28) s'écrit $M \geq 1$. On a donc $M < 1$ dans un domaine elliptique et $M > 1$ dans un domaine hyperbolique. Pour les écoulements hypersoniques, M représente le nombre de Mach de l'écoulement transversal (cross flow): la nature du problème change lorsque cet écoulement passe de subsonique à supersonique.

La figure 3-b montre le lien entre la nature de cet écoulement et l'existence d'un cône de Mach dans le repère d'origine P lié au mouvement de dilatation du choc. Ce repère est entraîné suivant un rayon à la vitesse XR_t . Dans ce dernier, la vitesse d'une particule est \vec{V}_{rel} . Dans le repère absolu d'origine O , le point P parcourt la courbe Γ (rayon issu de O) invariante par le groupe de transformation qui définit la similitude. Pendant la durée dt le point P s'est déplacé en P' avec $P\vec{P}' = XR_t \vec{e}_r dt$. La particule coïncidant avec P à l'instant considéré, a effectué sur la trajectoire T le déplacement $P\vec{P}'' = \vec{V} dt$. Si le mouvement relatif de la particule est supersonique, on a $V_{rel} > c$ où c est la vitesse locale du son. Dans le repère relatif, il existe alors toujours un cône de Mach M , contenant l'onde de rayon cdt émise en P . Dans le repère absolu, on constate que le cône n'existe pas toujours (cas supersonique 3) si c est de l'ordre de grandeur de V_{rel} et que XR_t est suffisamment petite. On remarque également que la courbe Γ peut être aussi bien intérieure (cas 1) qu'extérieure (cas 2) à la trace de M dans le plan (r, θ) . Si on compare maintenant le cas supersonique 3 et la configuration subsonique, on constate que la seule différence réside dans la position du point P' : dans l'espace physique, le problème est hyperbolique lorsque P' n'est pas contenu dans la sphère de rayon cdt centrée sur la particule matérielle.

1.4 Forme intrinsèque

Nous allons résoudre numériquement les équations (1.23) dans un système de coordonnées orthogonales définies par:

$$(1.31) \quad \begin{cases} d\zeta = g d\eta + v_0 d\theta \\ d\xi = v_0 d\eta - g d\theta \end{cases}$$

d'où:

$$(1.32) \quad \begin{cases} d\eta = \frac{1}{g^2 + v_0^2} (v_0 d\xi + g d\zeta) \\ d\theta = \frac{1}{g^2 + v_0^2} (v_0 d\zeta - g d\xi). \end{cases}$$

Dans ce système de coordonnées, l'équation des courbes données par (1.25) et (1.26) s'écrit:

$$(1.33) \quad d\xi = 0.$$

Nous utiliserons le terme de "trajectoires" pour désigner ces courbes même si nous avons expliqué que (1.26) définit, à un instant donné, le lieu des particules ayant traversé le choc sur un rayon $\theta = cste$.

Puisque m n'est fonction que de θ , on remarque que

$$v_0 m_\xi + g m_\zeta = 0$$

et donc que

$$(1.34) \quad \begin{cases} m_\zeta = \frac{v_0}{g^2 + v_0^2} m_\theta \\ m_\xi = -\frac{g}{g^2 + v_0^2} m_\theta \end{cases}$$

En appliquant ce changement de variable à (1.23), on aboutit à

$$(1.35) \quad (g^2 + v_0^2) f_\zeta + g g_\zeta + v_0 v_{0\zeta} - g^2 \left(\frac{v_0}{g} \right)_\xi = J_1$$

$$(1.36) \quad \frac{\gamma - 1}{2\gamma} c_0^2 v_0 h_\xi + (g^2 + v_0^2) g_\zeta + m(g^2 + v_0^2) v_{0\zeta} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} c_0^2 g h_\zeta = J_2$$

$$(1.37) \quad -\frac{\gamma - 1}{2\gamma} c_0^2 (g + m v_0) h_\xi + (g^2 + v_0^2) v_{0\zeta} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} c_0^2 (v_0 - m g) h_\zeta = J_3$$

$$(1.38) \quad -(g^2 + v_0^2)(h - \gamma f)_\zeta = J_4$$

La dernière équation met en évidence le rôle des trajectoires comme caractéristiques du problème pour le transport de l'entropie des particules. On peut vérifier qu'une combinaison simple de (1.36), (1.37) et (1.38) conduit à:

$$(1.39) \quad \left[\left(u_0 - \frac{\gamma + 1}{2} \right)^2 + v_0^2 + c_0^2 \right]_\zeta = G_3$$

où

$$(1.40) \quad G_3 = \frac{-2}{g^2 + v_0^2} \left\{ \left(u_0 - \frac{\gamma + 1}{2n} \right) \left[u_0 \left(u_0 - \frac{\gamma + 1}{2} \right) + c_0^2 \right] + v_0^2 \left[u_0 + \frac{(\gamma + 1)(n - 1)}{2n} \right] + \frac{(\gamma^2 - 1)(1 - n)}{2n\gamma} c_0^2 \right\}$$

L'expression (1.39) traduit le transport de l'enthalpie d'arrêt sur les trajectoires. Le système mis sous forme intrinsèque fait donc apparaître explicitement le rôle de caractéristique double joué par les courbes (1.26). Si l'anisotropie est suffisamment faible on peut espérer que les "trajectoires" ne retournent pas vers le choc, c'est à dire que g et v_0 ne s'annulent que sur Σ' . On peut alors utiliser le changement de variable suivant:

$$(1.41) \quad \begin{cases} a = \left(u_0 - \frac{\gamma + 1}{2} \right)^2 + v_0^2 + c_0^2 \\ S = h - \gamma f \\ B = \frac{v_0}{g} \end{cases}.$$

Celui-ci permet de mettre à profit le fait que les "trajectoires" sont des caractéristiques doubles et de réduire le système aux dérivées partielles à deux équations. Le problème s'écrit sous la forme suivante:

$$(1.42) \quad A \begin{pmatrix} h \\ B \end{pmatrix}_\xi + C \begin{pmatrix} h \\ B \end{pmatrix}_\zeta = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix}$$

$$(1.43) \quad a_\zeta = G_3$$

$$(1.44) \quad S_\zeta = -\frac{J_4}{g^2 + v_0^2} = G_4$$

où

$$(1.45) \quad A = \begin{bmatrix} B(1 + mB) & -\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{v_0^2}{c_0^2} \\ B^2 + (1 + mB)^2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(1.46) \quad C = \begin{bmatrix} \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{v_0^2}{c_0^2} (1 + B^2) - B(B - m) & -\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{v_0^2}{Bc_0^2} \\ B - (1 + mB)(B - m) & -\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{v_0^2}{c_0^2} \frac{(1+B^2)}{B^2} \end{bmatrix}$$

$$(1.47) \quad \begin{cases} G_1 = \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{B^2}{c_0^2} (J_1 - \frac{J_4}{\gamma} - \frac{J_3}{v_0}) \\ G_2 = \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{B^2}{v_0 c_0^2} (J_2 - \frac{1+mB}{B} J_3) \end{cases}$$

Avec ces nouvelles notations le nombre de Mach relatif à la dilatation d'ensemble M défini par (1.30) s'écrit:

$$(1.48) \quad M^2 = \frac{2g^2}{(\gamma-1)c_0^2} ((1 + mB)^2 + B^2)$$

où g et B sont définis respectivement en (1.22) et (1.41).

Le système (1.42) possède deux caractéristiques qui sont réelles si (1.28) est réalisé, c'est à dire si $M \geq 1$. Leur équation s'écrit alors [1]:

$$(1.49) \quad \frac{d\zeta}{d\xi} = \frac{m(1 + mB - B^2) \pm (1 + B^2)\sqrt{M^2 - 1}}{(1 + mB)^2 + B^2}$$

On peut calculer très facilement le déterminant de A , soit

$$\det A = B^2 \gamma M^2.$$

Cette valeur n'est nulle que si B ou M le sont, c'est à dire si $v_0 = 0$. Ce cas particulier n'existant pas pour de faibles anisotropies, on peut inverser A et écrire le système:

$$\begin{pmatrix} h \\ B \end{pmatrix}_\xi + A^{-1}C \begin{pmatrix} h \\ B \end{pmatrix}_\zeta = A^{-1} \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix}$$

On appellera D la matrice $A^{-1}C$, dont le déterminant est:

$$\det D = \frac{m^2(1 + mB - B^2)^2 + (1 + B^2)^2(1 - M^2)}{((1 + mB)^2 + B^2)^2}.$$

Le rapprochement de cette expression avec (1.49) montre que D est inversible sauf si l'une des caractéristiques a pour équation $d\zeta = 0$, c'est à dire si elle est perpendiculaire à la "trajectoire" au point considéré. Cette possibilité n'existe que dans les zones hyperboliques de l'écoulement: elle caractérise le fait bien connu en théorie des équations aux dérivées partielles qu'il est impossible d'intégrer un système hyperbolique si les conditions initiales sont données sur l'une des caractéristiques. En effet, l'unicité de la solution n'est plus assurée. Dans l'utilisation de ce système, on se bornera à des anisotropies suffisamment faibles pour éviter les zones hyperboliques.

On a:

$$(1.50) \quad \begin{pmatrix} h \\ B \end{pmatrix}_\zeta + \mathcal{D}_0 \begin{pmatrix} h \\ B \end{pmatrix}_\xi = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

où \mathcal{D}_0 est la matrice $C^{-1}A$, inverse de D :

$$(1.51) \mathcal{D}_0 = \frac{1}{d_0} \begin{bmatrix} m((1+mB)^2 + B^2)(1+mB - B^2) & \gamma M^2(1+B^2) \\ \frac{(1+B^2)(M^2-1)}{\gamma M^2}((1+mB)^2 + B^2)^2 & m((1+mB)^2 + B^2)(1+mB - B^2) \end{bmatrix}$$

avec:

$$d_0 = m^2(1+mB - B^2)^2 + (1+B^2)^2(1-M^2).$$

Les fonctions F_i sont:

$$(1.52) \quad \begin{cases} F_1 = \frac{2\gamma}{(\gamma-1)c_0^2 d_0} \left(\nu_1 J_1 + \nu_2 \frac{J_2}{g} + \nu_3 \frac{J_3}{g} + \nu_4 \frac{J_4}{\gamma} \right) \\ F_2 = \frac{1}{g^2 d_0} \left(\beta_1 J_1 + \beta_2 \frac{J_2}{g} + \beta_3 \frac{J_3}{g} + \beta_4 \frac{J_4}{\gamma} \right) \end{cases}$$

avec:

$$\begin{cases} \nu_1 = -\nu_4 = -(1+B^2)((1+mB)^2 + B^2) \\ \nu_2 = 1 + 2mB + (1+m^2)B^2 \\ \nu_3 = B(1+B^2) - m(1+mB - B^2)(1+mB) \\ \beta_1 = -\beta_4 = -m(1+mB - B^2)((1+mB)^2 + B^2) \\ \beta_2 = (1+B^2)(M^2-1)B + m(1+mB - B^2)(1+mB) \\ \beta_3 = mB(1+mB - B^2) - (1+B^2)(M^2-1)(1+mB) \end{cases}$$

On a vu un peu après (1.49) que la condition d'existence de (1.50) est $v_0 \neq 0$ (condition d'inversibilité de A). On peut donc déjà dire que les équations précédentes ne sont pas valables sur les axes de symétrie où v_0 est toujours nul. Les expressions des J_i (1.15) montrent d'ailleurs que J_1 est singulier pour $\theta = 0$ dans le cas de l'explosion ponctuelle ($k = 2$). S'il existe d'autres axes de symétrie ($\theta \neq 0$), on a $B = 0$ sur toute la "trajectoire" et l'équation pour h est obtenue à partir de (1.35), (1.36), (1.38) dans lesquelles on impose $v_0 = m = h_\xi = g_\xi = 0$. Il vient:

$$(1.53) \quad \left(\frac{g^2}{\gamma} - \frac{\gamma-1}{2\gamma} c_0^2 \right) h_\zeta - g v_{0\xi} = J_1 - \frac{J_2}{g} - \frac{J_4}{\gamma},$$

les équations (1.39) pour a et (1.44) pour S restant inchangées.

En dehors des axes de symétrie, il se peut qu'il existe des points où $v_0 = 0$ et en particulier sur Σ' . On sait cependant que d'un point de vue numérique la valeur $v_0 = 0$ ne sera jamais exactement atteinte ce qui signifie que si on exclut les éventuels axes de symétrie, le système (1.50) est parfaitement valable.

Pour conclure cette partie, il reste à donner les conditions sur le choc en coordonnées intrinsèques. Le choc est défini par $X = 1$ ou $\eta = 0$. On a donc, d'après (1.17) et (1.31),

$$(1.54) \quad \begin{cases} d\xi = \frac{\gamma-1}{2} d\theta \\ d\zeta = -\frac{m}{1+m^2} d\theta \end{cases}$$

On en déduit que

$$d\zeta = -\frac{m}{1+m^2} \frac{2}{\gamma-1} d\xi.$$

Avec la convention que $\xi = 0$ sur la "trajectoire" issue du point du choc à $X = 1$ et $\theta = 0$, on trouve:

$$(1.55) \quad \zeta_c(\xi) = -\frac{2}{\gamma-1} \int_0^\xi \frac{m}{1+m^2} d\xi$$

A partir de la première équation de (1.54), on définit également la variable

$$(1.56) \quad \theta_c = \frac{2}{\gamma-1} \xi,$$

valeur de θ sur le choc pour une "trajectoire" donnée. On peut trouver curieux qu'il existe une correspondance biunivoque entre ξ et θ , car cela exclut les configurations pour lesquelles un même rayon couperait plusieurs fois le choc (figure 4-a). Ainsi, il semble que le choix de l'anisotropie de l'écoulement ne puisse être arbitraire. En fait, cette assertion est exacte, car le choix de l'anisotropie ne peut être contradictoire avec l'hypothèse de choc fort. Or, entre les deux points P_1 et P_2 de la figure 4-a, il existe nécessairement un point P_0 pour lequel $\sin \vartheta$ est nul, c'est à dire, d'après (1.3), $\omega = 0$, ce qui est manifestement contraire à l'hypothèse de choc fort.

Une remarque mérite encore d'être faite à propos de (1.55) et (1.56), à savoir que ces formules, particulièrement celle entre ξ et θ , décrivent un paramétrage du choc et non une relation entre ξ et θ dans tout l'écoulement. En notant $m(\theta(\xi, \zeta)) = \hat{m}(\xi, \zeta)$, il serait absurde de poser $\hat{m}_\xi = \frac{2}{\gamma-1} m_\theta$ en se fondant sur (1.56). En effet, la relation correcte est:

$$m_\theta = \hat{m}_\zeta \frac{d\zeta}{d\theta} + \hat{m}_\xi \frac{d\xi}{d\theta}$$

où $\frac{d\zeta}{d\theta}$ et $\frac{d\xi}{d\theta}$ sont données par la dérivation de (1.55) et (1.56). La figure 4-b illustre cette différence de sens entre \hat{m}_ξ et m_θ . Notons que pour éviter d'alourdir les notations, on omettra le symbole $\hat{\quad}$ quand les équations seront implicitement en ξ et ζ .

Nous aurons encore à utiliser sur le choc les relations suivantes:

$$(1.57) \quad \begin{cases} h_c = -\log(1+m^2) & B_c = \frac{2m}{(\gamma-1)(1+m^2)} \\ a_c = \frac{(\gamma+1)^2}{4} & S_c = -\log(1+m^2) \end{cases}$$

qui sont obtenues à partir de (1.17) et de (1.41).

Chapitre 2

Traitement numérique

2.1 Choix des variables d'intégration

Le problème consiste à intégrer le système (1.50), couplé aux équations (1.43) et (1.44). Les conditions initiales sont données sur la courbe (1.55) par les formules (1.57). Enfin, pour repasser dans le système de coordonnées initiales, il faut résoudre simultanément le système (1.32).

La forme des équations (1.43) et (1.44) conduit à choisir les courbes $\xi = cste$ comme lignes de maillage du plan physique. La difficulté consiste à choisir une autre famille de lignes de maillage. Nous devons intégrer le système constitué par (1.50), (1.43) et (1.44) du choc Σ vers la frontière matérielle Σ' si elle existe. C'est donc l'étude des propriétés de Σ' qui va nous guider dans notre recherche.

On peut avant tout remarquer que le second membre de l'équation (1.44) devient singulier à l'approche de Σ' (sauf si $n = 1$) et que l'entropie tend alors vers l'infini. En effet, $u_0 - \frac{\gamma+1}{2}$, v_0 et ρ_0 tendent vers 0. Cela signifie que Σ' est constituée de points que l'on ne peut jamais exactement atteindre. Par ailleurs, on sait que Σ' est le lieu des particules qui ont traversé le choc à l'instant initial, c'est à dire, à l'exclusion du cas $n = 1$, lorsque ω était infini. Ces remarques montrent que l'on peut assimiler Σ' à un ensemble de "puits".

On peut également trouver une équation de Σ' en écrivant qu'elle est une surface matérielle [11]:

$$(2.1) \quad \omega' = R'_t \sin \vartheta' = u' \sin \vartheta' - v' \cos \vartheta'.$$

Compte tenu de (1.8) et (1.9), la forme adimensionnée de (2.1) est

$$(2.2) \quad u'_0 - m'v'_0 - \frac{\gamma+1}{2} = 0.$$

où on a posé

$$(2.3) \quad m' = \frac{R'_\theta}{R'} = \frac{X'_\theta}{X'} + m = \left. \frac{d\eta}{d\theta} \right|_{\Sigma'} + m.$$

A partir (2.2) et (2.3) on peut écrire

$$(2.4) \quad \left(u_0 - mv_0 - \frac{\gamma+1}{2} \right) \Big|_{\Sigma'} - \left. \frac{d\eta}{d\theta} \right|_{\Sigma'} v_0 \Big|_{\Sigma'} = 0$$

soit

$$(2.5) \quad \left. \frac{d\eta}{d\theta} \right|_{\Sigma'} = \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{u_0 - mv_0 - \frac{\gamma+1}{2}}{v_0} = \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{g}{v_0}.$$

Cette expression montre qu'une équation définissant localement Σ' n'existe que si v_0 et $u_0 - \frac{\gamma+1}{2}$ tendent vers zéro dans un rapport fini. On peut remarquer également que les points de Σ' vérifient l'équation des "trajectoires". On en déduit que Σ' est une enveloppe des "trajectoires". Il a d'ailleurs été montré [7] que si Σ' existe, elle est unique.

L'ensemble de ces propriétés montre qu'en prenant $S - S_c$ comme variable et ζ comme inconnue, on substitue à une variable dont la borne supérieure n'est pas connue et peut être dépendante de ξ , une variable unique valable pour toutes les "trajectoires" et variant de zéro à l'infini. De plus nous sommes assurés que le maillage ainsi obtenu ne peut dégénérer qu'en quelques points particuliers qui sont situés à l'infini en $S - S_c$ et que l'on peut donc approcher d'aussi près que l'on veut. D'autre part, la simplicité de (1.44) permet de s'assurer du signe de G_4 : pour parcourir une courbe $\xi = cste$ du choc vers la frontière du vide, il faut décrire des valeurs $S - S_c$ croissantes. Enfin, (1.44) montre que les courbes $\xi = cste$ et $S - S_c = cste$ ne sont confondues que si:

$$g^2 + v_0^2 = 0.$$

Cela se produit en des points qui sont justement situés sur Σ' : la résolution du problème est alors terminée.

Examinons brièvement les alternatives pour le choix de la seconde ligne de maillage. Tout d'abord, la famille des lignes $\zeta = cste$ qui semble naturelle de par la forme de (1.50), est mal adaptée au problème pour les raisons suivantes. Il est vraisemblable que ζ est bornée sur Σ' , ce qui rend problématique l'approche de la surface Σ' : en effet il se peut que l'une des "trajectoires" s'approche très rapidement de Σ' et conduise à choisir pour toutes les autres un pas en ζ tendant vers zéro. Il serait alors impossible de parcourir ces autres "trajectoires" jusqu'à Σ' . On pourrait bien sûr éliminer au fur et à mesure les "trajectoires" qui imposent des pas trop petits, mais rien ne prouve que seule l'approche de Σ' puisse faire tendre le pas vers zéro. D'autre part, nous ne disposons d'aucun critère pour déterminer la valeur à prendre pour le pas.

On peut aussi envisager le choix de a comme nouvelle variable: a_c est constant sur le choc quel que soit θ , ainsi les lignes de maillage seraient directement des "iso- a ". Les équations (1.40) et (1.43) montrent que a tend aussi vers l'infini lorsqu'on s'approche de la frontière du vide: on pourrait donc aussi approcher Σ' d'aussi près que l'on veut. Malheureusement, la complexité de G_3 ne permet pas d'assurer que les "iso- a " ne seront pas confondues avec les "trajectoires". Enfin, dans le cas des fortes anisotropies, nous verrons qu'il est nécessaire d'adopter une formulation dite h, g, v_0 dans laquelle on ne peut conserver qu'une quantité Lagrangienne qui est S .

Pour terminer sur cet aspect, il nous faut faire encore deux remarques. Tout d'abord, nous considérerons, dans un premier temps, des anisotropies suffisamment

faibles pour que g , qui est négatif sur le choc, ne puisse pas de changer de signe: la "trajectoire" s'incurverait alors vers les X croissants et pour g proche de zéro avec v_0 fini l'inconnue auxiliaire B tendrait vers l'infini. Ensuite, nous avons vu que l'équation de Σ' vérifie l'équation des "trajectoires" ce qui signifie que $d\xi$ tend aussi vers zéro: on peut en déduire qu'une seule "trajectoire" au plus atteint réellement Σ' .

2.2 Méthode numérique

Ecrivons les équations (1.50), (1.43) et (1.44) sur chaque courbe ($\xi = cste$) en prenant $\hat{S} = S - S_c$ comme variable. On notera $f_{\hat{S}}$ la dérivée par rapport à \hat{S} . En tirant parti de (1.44) et de la relation

$$(2.6) \quad \left. \frac{\partial}{\partial \xi} \right|_{\zeta} = \left. \frac{\partial}{\partial \xi} \right|_{\hat{S}} + \left. \frac{\partial}{\partial \hat{S}} \right|_{\xi} \left. \frac{\partial \hat{S}}{\partial \xi} \right|_{\zeta},$$

on obtient:

$$(2.7) \quad \begin{pmatrix} h \\ B \end{pmatrix}_S + \bar{E}^{-1} \mathcal{D}_0 \begin{pmatrix} h \\ B \end{pmatrix}_{\xi} = \bar{E}^{-1} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

$$(2.8) \quad a_{\hat{S}} = F_3$$

$$(2.9) \quad \zeta_{\hat{S}} = F_4$$

avec:

$$(2.10) \quad \begin{cases} \bar{E} = \frac{1}{F_4} \mathcal{I} + \left. \frac{\partial \hat{S}}{\partial \xi} \right|_{\zeta} \mathcal{D}_0 \\ F_3 = F_4 G_3 \\ F_4 = \frac{1}{G_4} \end{cases}$$

On voit que pour calculer \bar{E} il faut déterminer $\left. \frac{\partial \hat{S}}{\partial \xi} \right|_{\zeta}$. D'une manière générale on a:

$$d\hat{S} = \left. \frac{\partial \hat{S}}{\partial \xi} \right|_{\zeta} d\xi + \left. \frac{\partial \hat{S}}{\partial \zeta} \right|_{\xi} d\zeta.$$

Ce qui, en tenant compte de (2.9) et du fait que $S_c = S_c(\xi)$ donne:

$$(2.11) \quad d\hat{S} = \left. \frac{\partial \hat{S}}{\partial \xi} \right|_{\zeta} d\xi + \frac{1}{F_4} d\zeta.$$

A chaque pas d'intégration on avance suivant \hat{S} à partir du choc, de la quantité ΔS à ξ constant. On passe donc d'une courbe $S = S_c(\xi) + (n-1)\Delta S$ à une courbe $S = S_c(\xi) + n\Delta S$. Sur ces courbes on a:

$$d\hat{S} = 0.$$

On obtient alors à partir de (2.11):

$$(2.12) \quad \left. \frac{\partial \hat{S}}{\partial \xi} \right|_{\zeta} = -\frac{1}{F_4} \left. \frac{d\zeta}{d\xi} \right|_{\hat{S}}.$$

Pour des anisotropies très faibles, le terme $\frac{d\zeta}{d\xi}\Big|_{\xi}$ est très petit devant 1, car les "iso- \hat{S} " se confondent presque avec les courbes $\zeta = cste$. On peut alors approximer \bar{E} par $\frac{\tau}{F_4}$ ce qui permet de résoudre un système linéaire par rapport aux dérivées en ξ tout au long du calcul. Cette simplification a été utilisée dans une première étape de l'étude [13]. Enfin, d'après (1.32), (1.44) et (1.55), sur chaque courbe $\xi = cste$, les équations de passage aux coordonnées η et θ sont:

$$(2.13) \quad \begin{cases} \frac{d\eta}{d\hat{S}} = -\frac{g}{J_4} & \eta_c = 0 \\ \frac{d\theta}{d\hat{S}} = -\frac{v_0}{J_4} & \theta_c = \frac{2}{\gamma-1}\xi \end{cases}$$

Les conditions initiales du problème sont données par (1.57).

En présence d'un système à résoudre sur chaque trajectoire, la méthode numérique consiste en premier lieu à ramener ce nombre infini d'équations à une valeur finie et la plus petite possible pour une précision donnée. En fait, en dehors des "puits", les fonctions h , B , a , ζ , η , θ sont à variation bornée. De plus, elles sont périodiques en ξ et sont, par exemple, développables en série de Fourier. On remarquera que dans les fonctions F_1 et F_2 intervient la dérivée m_θ . On voit donc que la continuité de la solution dépend de celle de m_θ . Comme nous avons choisi une formulation avec l'entropie, nous devons nous borner au cas où m_θ est continue, c'est à dire où les termes de la série de Fourier de m décroissent au moins suivant le carré de l'inverse de leur rang. Dans une telle conception, le cas où m_θ est discontinu peut être traité comme limite d'un cas continu mais le nombre de termes de Fourier à prendre en compte pour avoir une bonne approximation doit être grand.

Pour l'exposé du principe numérique, limitons nous donc au cas où m est continu. On voit que la précision du problème discret est directement liée à la précision de la discrétisation sur le choc, ce qui constitue l'un des avantages de la représentation intrinsèque.

Sur Σ , on sait que les fonctions h , B et ζ sont périodiques de période 2π suivant la variable $\theta_c = \frac{2}{\gamma-1}\xi$. Elles prennent les valeurs h_j , B_j et ζ_j en des points régulièrement espacés $\theta_{cj} = \frac{2j\pi}{2K+1}$ avec $j = 0 \dots 2K$. L'idée de la méthode est de remplacer les fonctions exactes h , B et ζ par des fonctions approximantes \tilde{h} , \tilde{B} et $\tilde{\zeta}$. Elles sont de la forme:

$$(2.14) \quad \begin{aligned} \tilde{h} &= \sum_{i=0}^K A_i^h \cos i\theta_c + \sum_{i=1}^K B_i^h \sin i\theta_c \\ \tilde{B} &= \sum_{i=0}^K A_i^B \cos i\theta_c + \sum_{i=1}^K B_i^B \sin i\theta_c . \\ \tilde{\zeta} &= \sum_{i=0}^K A_i^\zeta \cos i\theta_c + \sum_{i=1}^K B_i^\zeta \sin i\theta_c \end{aligned}$$

Elles coïncident avec les fonctions exactes aux points θ_{cj} . Les coefficients A_i et B_i sont alors obtenus par la résolution d'un système linéaire. Pour les A_i^h et les B_i^h par exemple, il faut résoudre:

$$(2.15) \quad \begin{pmatrix} \tilde{h}(0) \\ \vdots \\ \tilde{h}(\theta_{cj}) \\ \vdots \\ \tilde{h}(\theta_{c2K}) \end{pmatrix} = [T] \begin{pmatrix} A_0^h \\ \vdots \\ A_K^h \\ B_1^h \\ \vdots \\ B_K^h \end{pmatrix}$$

où les coefficients t_{ji} de la matrice T de dimension $(2K + 1 \times 2K + 1)$ sont

$$\begin{aligned} t_{ji} &= \cos(i\theta_{cj}) \text{ pour } i \leq K \\ t_{ji} &= \sin(i\theta_{cj}) \text{ pour } i > K. \end{aligned}$$

En fait, en tirant parti de l'orthogonalité des fonctions trigonométriques, on peut s'affranchir de résoudre le système linéaire précédent: les coefficients A_i et B_i sont alors donnés par des équations de la forme (2.24) et (2.25). Pour \tilde{h} on obtient:

$$(2.16) \quad \begin{cases} A_0^h = \frac{1}{2K+1} \sum_{k=0}^{2K} \tilde{h}(\theta_{ck}) \\ A_i^h = \frac{2}{2K+1} \sum_{k=0}^{2K} \cos(i\theta_{ck}) \tilde{h}(\theta_{ck}) \\ B_i^h = \frac{2}{2K+1} \sum_{k=0}^{2K} \sin(i\theta_{ck}) \tilde{h}(\theta_{ck}) \end{cases}$$

Rapprochons ces expressions de celles des coefficients a_i et b_i de la serie de Fourier tronquée de h : $h = a_0 + \sum_{i=1}^K a_i \cos i\theta_c + \sum_{i=1}^K b_i \sin i\theta_c$. On a:

$$(2.17) \quad \begin{cases} a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) d\theta \\ a_p = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) \cos(p\theta) d\theta \quad p = 1, K \\ b_p = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) \sin(p\theta) d\theta \quad p = 1, K \end{cases}$$

Il est évident que (2.16) correspond au calcul des intégrales (2.17) par la formule des trapèzes. La formule d'Euler-Mac Laurin montre alors que l'erreur commise est:

$$(2.18) \quad \frac{B_{2(2K+1)+2}}{(2(2K+1)/2)!} (\Delta\theta_c)^{2(2K+1)+2} h^{(2(2K+1)+2)}(\alpha)$$

où $\alpha \in [0, 2\pi]$, $B_{2(2K+1)+2}$ est le nombre de Bernoulli numéro $2(2K+1)+2$ et $h^{(2(2K+1)+2)}$ la $2(2K+1)+2$ ième dérivée de h . Ainsi, en augmentant le nombre de points θ_{cj} on fait tendre autant que l'on veut les sommations (2.16) vers les intégrales (2.17).

On en déduit que \tilde{h} est une approximation de h dont l'ordre de précision est donné par (2.18). La dérivée \tilde{h}_ξ approxime donc h_ξ avec un ordre de précision inférieur de 1 à celle sur h .

Nous venons de montrer que les séries trigonométriques (2.14) sont les approximations des séries de Fourier tronquées des inconnues h , B , et ζ . Soit $K+1$ le nombre de termes donnant la précision requise sur le choc, on écrit alors:

$$\begin{cases} h = \sum_{i=0}^K A_i^h \cos i\theta_c + B_i^h \sin i\theta_c \\ B = \sum_{i=0}^K A_i^B \cos i\theta_c + B_i^B \sin i\theta_c \\ \zeta = \sum_{i=0}^K A_i^\zeta \cos i\theta_c + B_i^\zeta \sin i\theta_c \end{cases}$$

où les coefficients de ces sommes trigonométriques ne sont fonctions que de \hat{S} . Les dérivées h_ξ , B_ξ et ζ_ξ s'obtiennent donc en dérivant les formules précédentes. On procède à la résolution de (2.7) en substituant à h , B , ζ , h_ξ , B_ξ , ζ_ξ les sommes trigonométriques qui leur correspondent. On obtient alors un système différentiel à $3 \times (2K+1)$ fonctions inconnues de \hat{S} . Pour le résoudre il faut choisir $(2K+1)$ valeurs

de ξ ou de θ_c , puis intégrer le système différentiel à $3 \times (2K + 1)$ équations obtenu par une méthode classique, par exemple celle de Runge-Kutta pour permettre la variation du pas. On obtient alors les coefficients de Fourier de h , B et ζ au pas suivant et donc les valeurs de h , B , ζ , h_ξ , B_ξ et ζ_ξ en calculant les sommes trigonométriques correspondantes. Un autre avantage de l'écriture intrinsèque est de ramener le calcul des coefficients A_i^h , B_i^h , A_i^B , B_i^B , A_i^ζ , B_i^ζ à une simple collocation. En effet, les valeurs de ξ sont constantes pendant toute l'intégration alors que dans le système η, θ , les séries de Fourier tronquées auraient dû être écrites en coordonnées locales qui auraient changé de valeurs à chaque pas d'intégration.

Il va sans dire que simultanément et pour chaque valeur de ξ on intègre (2.8). Après chaque pas de calcul les valeurs de p_0 , u_0 , v_0 et ρ_0 sont obtenues à partir de (1.22) et (1.41) par les relations:

$$(2.19) \quad p_0 = e^h \quad \rho_0 = e^{\frac{h-s}{\gamma}} \quad c_0^2 = \gamma e^{\frac{(\gamma-1)h+s}{\gamma}} \quad v_0^2 = \frac{B^2(a-c_0^2)}{B^2+(1+mB)^2}$$

et comme g est négatif, v_0 et B sont de signe contraire, d'où

$$(2.20) \quad v_0 = -\frac{B}{|B|} \sqrt{\frac{B^2(a-c_0^2)}{B^2+(1+mB)^2}} \quad g = \frac{v_0}{B} \quad u_0 = g + \frac{\gamma+1}{2} + mv_0.$$

Enfin l'intégration simultanée de (2.13) permet le passage au maillage physique.

Notons que la méthode s'applique indistinctement dans les zones elliptiques ou hyperboliques. En effet, dans ce dernier cas la condition de Courant-Friedrichs-Lévy est naturellement vérifiée puisque la modification de la solution en un point $(\xi, S - S_c)$ change la valeur de tous les coefficients de la somme trigonométrique et affecte donc nécessairement les points influant sur la valeur de la solution en $(\xi, S - S_c + dS)$. Il s'ensuit que la limitation de cette formulation aux cas purement elliptiques est la conséquence du changement de variable $B = \frac{v_0}{g}$ qui impose que g reste non nul dans le champ et non de la nature des équations. Il n'est donc pas absurde de calculer la solution en $(\xi, S - S_c + dS)$ à partir des valeurs au point $(\xi, S - S_c)$ même si le premier n'est pas dans le cône d'influence du second.

Le système (1.42) étant non linéaire, on peut se demander si le nombre $K + 1$ d'harmoniques retenus sur le choc ne va pas s'avérer insuffisant pour donner une bonne approximation de la solution après plusieurs pas d'intégration. En fait, la convergence de la méthode doit être testée expérimentalement pour chaque cas. Il suffit pour cela de faire varier K jusqu'à ne plus observer de différence entre les solutions numériques.

Pour illustrer de façon concrète la méthode nous allons exposer un cas test qui présente le double avantage de lier l'anisotropie à une constante unique et d'offrir une large gamme de formes de choc conduisant à des cas elliptiques ou mixtes qui seront traités dans le chapitre suivant.

2.3 Cas test

On prend l'équation du choc sous la forme:

$$(2.21) \quad R_0 = 1 + \Lambda^2 - 2\Lambda \cos 2\theta$$

avec:

$$-1 < \Lambda < 0$$

Sur la figure 5, on remarque que les formes obtenues admettent pour axes de symétries $\theta = 0$ et $\theta = \pi/2$. On obtient ainsi:

$$m = 4 \frac{\Lambda \sin 2\theta}{1 - 2\Lambda \cos 2\theta + \Lambda^2}$$

La transformée de Fourier de cette fonction est:

$$(2.22) \quad m = 4 \sum_{i=1}^{\infty} \Lambda^i \sin 2i\theta$$

Dans ces équations la valeur de θ est liée à celle de ξ par (1.56). Pour faciliter l'interprétation physique de la méthode, nous adopterons dans la suite la grandeur θ_c pour repérer chaque courbe $\xi = cste$.

On sait, d'après (1.29) que le problème est entièrement elliptique si:

$$\min \frac{1}{1+m^2} \geq \frac{\gamma+1}{2\gamma}$$

Après calcul du minimum, cette condition conduit à une inéquation du troisième degré en $\mathcal{L} = \Lambda^2$ (annexe A):

$$\mathcal{L}^3 - (4\mathcal{G} + 2)\mathcal{L}^2 + (4\mathcal{G} + 1)\mathcal{L} - \mathcal{G} \leq 0$$

où $\mathcal{G} = \frac{\gamma-1}{16(\gamma+1)}$. Pour $\gamma = 1.4$, Le problème est entièrement elliptique si $-0.1001 < \Lambda < 0$; pour une valeur plus faible de Λ il existe une zone hyperbolique.

On choisit le nombre d'harmoniques K tel que:

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} \Lambda^i \sin 2i\theta_c - \sum_{i=1}^K \Lambda^i \sin 2i\theta_c \right| < \mathcal{P}$$

où \mathcal{P} est un réel positif caractéristique de la précision requise. On cherche la solution en posant pour h , B et ζ :

$$(2.23) \quad h = \sum_{i=0}^K A_i^h \cos 2i\theta_c, \quad B = \sum_{i=1}^K A_i^B \sin 2i\theta_c, \quad \zeta = \sum_{i=0}^K A_i^\zeta \cos 2i\theta_c.$$

Cette forme est imposée par les symétries du problème: le choc admet pour axes de symétries $\theta = 0$ et $\theta = \pi/2$ et R_0 est périodique de période π . Si on se réfère aux conditions (1.17) et à l'expression (1.55), il est aisé de montrer que h_c , B_c , ζ_c admettent également π pour période et que h_c , ζ_c sont paires et B_c impaire.

Les conditions sur le choc (1.57) permettent le calcul des coefficients des séries trigonométriques A_i^h , A_i^B et A_i^ζ sur le choc à partir des fonctions h_c , B_c et ζ_c . On a:

$$\begin{aligned} \text{pour } 0 < i \leq K \\ A_{ic}^h &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} h_c \cos 2i\theta d\theta \\ A_{ic}^B &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} B_c \sin 2i\theta d\theta \\ A_{ic}^\zeta &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \zeta_c \cos 2i\theta d\theta \\ A_{0c}^h &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} h_c d\theta \\ A_{0c}^\zeta &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \zeta_c d\theta. \end{aligned}$$

Nous l'avons vu, pour calculer ces coefficients on utilise les propriétés d'orthogonalité des sinus et cosinus: on choisit $2K + 1$ valeurs de θ_c de telle manière que:

$$\theta_{cj} = \frac{j\pi}{2K + 1}.$$

Pour le support θ_{cj} , $j = 0, \dots, 2K$ on a par exemple pour la fonction h_c :

$$h_c(\theta_{cj}) = A_{0c}^h + \sum_{i=1}^K A_{ic}^h \cos 2i\theta_{cj}.$$

En multipliant cette égalité par $\cos 2pj$ puis en sommant la relation obtenue pour j allant de 0 à $2K$, on obtient :

$$\sum_{j=0}^{2K} h_c(\theta_{cj}) \cos \frac{2\pi pj}{2K + 1} = A_{0c}^h \sum_{j=0}^{2K} \cos \frac{2\pi pj}{2K + 1} + \sum_{i=1}^K A_{ic}^h \left(\sum_{j=0}^{2K} \cos \frac{2\pi ij}{2K + 1} \cos \frac{2\pi pj}{2K + 1} \right).$$

Or,

$$\sum_{j=0}^{2K} \cos \frac{2\pi ij}{2K + 1} \cos \frac{2\pi pj}{2K + 1} = \delta_{i,p} (1 + \delta_{p,0}) \frac{2K + 1}{2}.$$

Il vient,

$$(2.24) \quad \begin{cases} A_{ic}^h &= \frac{2}{2K+1} \sum_{j=0}^{2K} h_c(\theta_{cj}) \cos \frac{2\pi ij}{2K+1} & 1 \leq i \leq K \\ A_{0c}^h &= \frac{1}{2K+1} \sum_{j=0}^{2K} h_c(\theta_{cj}) \end{cases}.$$

De la même façon on montre que les A_{ic}^B et les A_{ic}^ζ sont déterminés par:

$$(2.25) \quad \begin{cases} A_{ic}^\zeta &= \frac{2}{(1+\delta_{i,0})(2K+1)} \sum_{j=0}^{2K} \zeta_c(\theta_{cj}) \cos \frac{2\pi ij}{2K+1} & 0 \leq i \leq K \\ A_{ic}^B &= \frac{2}{2K+1} \sum_{j=0}^{2K} B_c(\theta_{cj}) \sin \frac{2\pi ij}{2K+1} & 1 \leq i \leq K. \end{cases}$$

Ce raisonnement s'applique bien évidemment aussi à l'intérieur de la couche de choc. Ainsi, connaissant les valeurs $[h_j]$, $[B_j]$ et $[\zeta_j]$ de h , B , ζ à $S - S_c = cste$ sur les $2K + 1$ courbes $\xi = cste$, on en déduit les coefficients de Fourier des séries (2.23). Une simple dérivation de (2.23) permet d'accéder à la dérivée de ces grandeurs par rapport à la variable θ_c puis l'utilisation de (2.13) donne la dérivée suivant la variable ξ à \hat{S} constant:

$$(2.26) \quad \begin{aligned} h_\xi &= -\frac{2}{\gamma-1} \left(\sum_{i=1}^K A_i^h 2i \sin 2i\theta_c \right) \\ B_\xi &= \frac{2}{\gamma-1} \left(\sum_{i=1}^K A_i^B 2i \cos 2i\theta_c \right) \\ \zeta_\xi &= -\frac{2}{\gamma-1} \left(\sum_{i=1}^K A_i^\zeta 2i \sin 2i\theta_c \right). \end{aligned}$$

On voit que les dérivées partielles h_ξ , B_ξ , ζ_ξ sont obtenues sur chaque trajectoire par une simple sommation des valeurs $[h_j]$, $[B_j]$ et $[\zeta_j]$ pondérées par la fonction trigonométrique correspondante. Le problème revient donc à intégrer les $K + 1$ systèmes différentiels:

$$(2.27) \quad \begin{pmatrix} h \\ B \end{pmatrix}_{\hat{S}} = \bar{E}^{-1} \begin{pmatrix} F_1(\hat{S}, \theta_{cj}) \\ F_2(\hat{S}, \theta_{cj}) \end{pmatrix} - \bar{E}^{-1} \mathcal{D}_0(\hat{S}, \theta_{cj}) \begin{pmatrix} h_\xi \\ B_\xi \end{pmatrix} (\hat{S}, \theta_{cj})$$

auxquels on joint (2.8) et (2.9) sur chaque "trajectoire", soit $2K + 2$ équations, ainsi que les $2K + 2$ équations (2.13) correspondantes. En tout, nous avons un système à $6(K + 1)$ équations différentielles à intégrer pour \hat{S} variant de 0 à l'infini. On utilise une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.

Il ne faut pas déduire du fait que seules $K + 1$ "trajectoires" sont calculées que la solution n'est pas connue ailleurs. En fait, si l'on appelle A_i^f les coefficients de la série trigonométrique de la grandeur f , on obtient la fonction f par:

$$f = \sum_{i=0}^K A_i^f \cos 2i\theta_c$$

si la fonction est paire, et

$$f = \sum_{i=1}^K A_i^B \sin 2i\theta_c$$

si la fonction est impaire. Les coefficients A_i^f sont obtenus respectivement par:

$$A_i^f = \frac{2}{(1 + \delta_{i,0})(2K + 1)} \sum_{j=0}^{2K} f(\theta_{c_j}) \cos \frac{2\pi i j}{2K + 1}$$

et

$$A_i^B = \frac{2}{2K + 1} \sum_{j=0}^{2K} f(\theta_{c_j}) \sin \frac{2\pi i j}{2K + 1}.$$

Toutes les fonctions constituant la solution sont paramétrées en \hat{S} . En particulier, on peut déterminer ainsi la position du "puits" correspondant à chaque "trajectoire" et connaître précisément la forme de Σ' .

2.4 Résultats

Dans un premier temps, notre objectif est de prouver la fiabilité de l'outil dont nous disposons désormais. Nous présentons donc dans cette section les résultats relatifs à un cas cylindrique ($k = 1$), pour $\nu = 1$ ($n = 0.75$) et pour une valeur de $\Lambda = -0.07$ pour laquelle le problème est entièrement elliptique. Sauf indication contraire, la valeur de γ sera égale à 1.4 pour tous les calculs. Le temps d'intégration sur un SUN sparc station 10 est de 5mn. CPU pour $K = 4$ et de 8mn. pour $K = 8$.

La figure 6 illustre la précision des sommes (2.23) sur le choc pour $\Lambda = -0.07$ et pour ces deux valeurs de K . On peut remarquer que les faibles différences entre la série de Fourier tronquée et la fonction exacte qui sont encore visibles pour $K = 4$ ne sont plus détectables pour $K = 8$. L'expérience numérique montre que plus la précision est bonne sur le choc plus le calcul des trajectoires peut s'approcher des "puits" sans risque de traverser Σ' sous l'effet de l'erreur d'approximation. Ainsi, dans ce problème, l'augmentation de K est plutôt bénéfique à la précision de l'intégration, ce qui n'est pas toujours le cas avec ce type de méthode appliquée à des systèmes non linéaires [9].

La figure 7 présente les différents systèmes de coordonnées évoqués dans cette partie. La figure 7-a montre les trajectoires d'intégration et le sens de la vitesse d'avancement de la résolution en $S - S_c$. Le maillage (ξ, ζ) correspondant permet d'apprécier sur la figure (7-b), la vitesse d'avancement de l'intégration sur chaque trajectoire, les points étant placés tous les 10 pas. Sur les figures 7-c à 7-f on trouve les étapes successives du passage au plan physique de l'écoulement. Sur ce dernier représenté figure 7-f en coordonnées adimensionnées, on peut observer la surface Σ' . On constate que chaque trajectoire aboutit à un puits qui lui est propre, exactement comme dans le cas isotrope. De plus, pour ces anisotropies modérées, on voit que la surface Σ' est constituée exclusivement par l'ensemble des puits qui forment une surface régulière. La figure 8 permet la comparaison des formes de trajectoire obtenues pour $K = 4$ et $K = 8$. On constatera la quasi identité entre les trajectoires calculées au même θ_c pour les deux valeurs de K . Cette remarque atteste la convergence et la bonne précision de la méthode même pour $K = 4$ dans le cas elliptique. Il faut cependant noter la différence de forme obtenue pour la frontière du vide Σ' . Ceci montre que la précision de la représentation en série de Fourier des fonctions h_c et B_c n'est qu'une condition nécessaire au calcul de la solution dans la couche de choc et en particulier à la localisation de Σ' .

Les grandeurs locales calculées sur les trajectoires d'intégration sont tracées sur les figures 9 et 10. Les grandes différences observables d'une trajectoire à l'autre, en particulier pour les pressions et les composantes de la vitesse montrent l'effet considérable de l'anisotropie du choc sur celle de l'écoulement. Les trajectoires $\theta_c = 0.01rd$ et $\theta_c = 1.56rd$ qui sont proches des axes de symétrie offrent des résultats voisins de ceux obtenus en [8] pour l'explosion isotrope. A titre de référence, on rappelle que la pression et la coordonnée radiale adimensionnées p_0 et X sur Σ' dans le cas isotrope sont $p'_0 = 1.0939$ et $X' = 0.8751$.

La figure 11 permet d'apprécier la bonne convergence de la méthode dans l'ensemble du champ. En effet, la différence entre les cartes de pression correspondant à $K = 4$ et $K = 8$ est imperceptible sauf, nous l'avons signalé, en ce qui concerne la localisation de la frontière du vide. La figure 12 présente les cartes de masse volumique et du nombre de Mach relatif donné par (1.30) pour $K = 4$. Il est intéressant de remarquer que la masse volumique possède un comportement analogue à celui mis en évidence dans le cas isotrope: elle tend vers 0 avec une pente infinie dans une zone très proche de Σ' . La figure 9 montre cependant que l'on atteint pas réellement la valeur $\rho_0 = 0$: le calcul s'arrête lorsque $u_0 - \frac{\gamma+1}{2} < 10^{-3}$.

Enfin, les figures 13 et 14 montrent que pour les très faibles anisotropies on peut négliger le terme en $\partial\hat{S}/\partial\xi$ dans l'expression de E (2.10) comme nous l'avons signalé dans la section (2.2). Notons également que les résultats de calcul fournissent respectivement $X' = 0.879$, $p'_0 = 1.0922$ pour la trajectoire $\theta_c = 0.01rd$ et $X' = 0.872$, $p'_0 = 1.0932$ pour la trajectoire $\theta_c = 1.56rd$: lorsque Λ tend vers 0 la solution tend bien vers la solution du cas isotrope.

Comme on l'a vu ci-dessus, l'expérience numérique a mis en évidence un certain nombre d'enseignements qui vont permettre d'améliorer très sensiblement la méthode de résolution. Tout d'abord, nous avons constaté qu'une anisotropie modérée du choc

provoquait un effet considérable sur l'écoulement et notamment sur les trajectoires. Ces dernières deviennent très complexes (figure 8) et une diminution de Λ conduit à envisager des zones où g et v_0 peuvent changer de signe. La formulation du problème avec deux équations aux dérivées partielles suivant $S - S_c$ et ξ pour les inconnues h et B et deux équations différentielles pour a et ζ n'est alors plus adaptée. Pour pouvoir traiter des anisotropies plus importantes on est contraint d'abandonner le changement de variable (1.41) et de résoudre un système à trois équations aux dérivées partielles pour h , g , v_0 et une équation différentielle pour ζ .

Chapitre 3

Cas des fortes anisotropies

3.1 Cas elliptique

Reprenons le système formé par les équations (1.35) à (1.38) et écrivons le sous la forme matricielle:

$$(3.1) \quad A' \begin{pmatrix} h \\ g \\ v_0 \end{pmatrix}_\xi + C' \begin{pmatrix} h \\ g \\ v_0 \end{pmatrix}_\zeta = \begin{pmatrix} J_1 - J_4/\gamma \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix}$$

$$(3.2) \quad S_\zeta = -\frac{J_4}{g^2 + v_0^2} = G_4$$

où

$$(3.3) \quad A' = \begin{bmatrix} 0 & v_0 & -g \\ \frac{\gamma-1}{2\gamma} c_0^2 v_0 & 0 & 0 \\ -\frac{\gamma-1}{2\gamma} c_0^2 (g + m v_0) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(3.4) \quad C' = \begin{bmatrix} \frac{g^2 + v_0^2}{\gamma} & g & v_0 \\ \frac{\gamma-1}{2\gamma} c_0^2 g & g^2 + v_0^2 & m(g^2 + v_0^2) \\ \frac{\gamma-1}{2\gamma} c_0^2 (v_0 - m g) & 0 & g^2 + v_0^2 \end{bmatrix}.$$

Après multiplication de (3.1) par C'^{-1} et le changement de la variable ζ en $\hat{S} = S - S_c$, on obtient:

$$(3.5) \quad \begin{pmatrix} h \\ g \\ v_0 \end{pmatrix}_{\hat{S}} = \bar{E}'^{-1} \begin{pmatrix} F'_1 \\ F'_2 \\ F'_3 \end{pmatrix} - \bar{E}'^{-1} D'_0 \begin{pmatrix} h \\ g \\ v_0 \end{pmatrix}_\xi$$

$$(3.6) \quad \zeta_{\hat{S}} = F_4$$

où les F'_i , \bar{E}' , D'_0 sont donnés en annexe B.

Avec cette formulation, on est contraint de développer non plus trois mais quatre inconnues en serie de Fourier: h, g, v_0, ζ . Pour valider ce nouveau système d'équations nous l'avons d'abord intégré pour $n = 0.75$, $k = 1$, $\Lambda = -0.07$ et $K = 8$ afin de recouper les résultats avec ceux qui ont été obtenus en adoptant la formulation h, B .

C'est dans ce but que nous avons reconstitué les cartes de pression, masse volumique et nombre de Mach sur la figure 15. Elles sont identiques à celles présentées figures 11 et 12. Cependant deux remarques méritent d'être faites:

1. L'intégration numérique de (3.1) est deux fois plus rapide que celle du système formé par (2.7), (2.8) et (2.9). L'explication réside dans le fait que g et v_0 sont des fonctions beaucoup plus régulières que B qui admet des variations importantes (figure 6) même pour des anisotropies modérées. Cela se traduit à deux niveaux: premièrement, le nombre d'harmoniques K nécessaires pour obtenir une précision donnée est beaucoup plus faible quand il s'agit de développer g ou v_0 , deuxièmement, la méthode d'intégration étant à pas variable, elle adopte un pas d'autant plus grand que les variations des inconnues sur une "trajectoire" sont petites.
2. Les cartes de la figure 15 ne font plus apparaître d'oscillations pour la frontière Σ' . La localisation des "puits" est plus rapide et plus précise que lors de l'intégration du système pour h et B . Là encore, c'est le résultat de la plus grande régularité de g et v_0 par rapport à B .

Cependant les problèmes numériques que nous avons cherché à éviter en substituant v_0 et g à B vont se présenter sous une autre forme. Examinons le résultat brut d'un calcul pour lequel $\Lambda = -0.1$ où le problème est encore entièrement elliptique mais déjà fortement anisotrope.

La figure 16 montre l'allure des "trajectoires" calculées. On constate que l'écoulement est très fortement perturbé dans une zone comprise entre $\theta = 0.32$ rad. et $\theta = 1.02$ rad.: elle correspond au domaine où le calcul numérique montre des changements de signe de l'inconnue g , les "trajectoires" s'incurvent pour se diriger de nouveau vers le choc Σ . Observons aussi que certaines courbes $\xi = cste$ se coupent et que d'autres traversent ce que le calcul prend pour la frontière du vide Σ' . La figure correspondant à $K = 32$ confirme ces constatations. Si certaines "trajectoires" aboutissent à leur propre "puits", hypothèse sur laquelle est fondée le calcul de Σ' , d'autres semblent former une enveloppe. Pour éclaircir ce point, nous avons représenté toutes les "trajectoires" calculées sur la figure 17. Elle montre que l'on peut diviser le domaine d'intégration en trois zones (figure 17a): la zone 1 constituée par des "trajectoires" faiblement déviées pour lesquelles le calcul identifie bien le "puits", la 2 contenant les "trajectoires" pour lesquelles a lieu un changement de signe de g et la 3 où l'on retrouve les caractéristiques de la zone 1 même si l'anisotropie provoque des déviations plus importantes. Au voisinage de la frontière entre les domaines 2 et 3 que l'on note $2'$, on trouve des "trajectoires" calculées qui semblent se confondre et pour lesquelles le calcul ne distingue pas le "puits". Les "iso- ξ " issues de $2''$ deviennent très vite perpendiculaires (dans un plan (X, θ)) aux rayons issus de l'origine puis s'incurvent vers le choc. Si on suppose que Σ' est leur enveloppe, on obtient la forme de la figure 17b. Enfin, la zone $2'''$ présente des propriétés identiques à $2'$. La figure 18 représente les variations des grandeurs adimensionnées en fonction de X sur quelques "trajectoires". On voit que la "trajectoire" calculée repérée par $\theta_c = 0.41$ rad. repart vers le choc. Ce comportement n'est évidemment pas admissible car il suppose des

croisements de courbes $\xi = cste$. Envisageons l'étude analytique de cette zone afin d'expliquer ces résultats de calcul et adopter une stratégie correctrice.

Pour cela, exprimons les accroissements des variables d'espace $d\eta$ et $d\theta$ en fonction des accroissements des variables d'intégration $d\hat{S}$ et $d\xi$. D'après (1.32) et l'expression de $d\hat{S}$ en fonction de $d\xi$ et $d\zeta$ (2.11) on a :

$$(3.7) \quad \begin{pmatrix} d\eta \\ d\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{g^2 + v_0^2} \begin{bmatrix} gF_4 & -gF_4 \frac{\partial \hat{S}}{\partial \xi} \Big|_{\zeta} + v_0 \\ v_0 F_4 & -v_0 F_4 \frac{\partial \hat{S}}{\partial \xi} \Big|_{\zeta} - g \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d\hat{S} \\ d\xi \end{pmatrix}.$$

En remplaçant η par X on obtient:

$$(3.8) \quad \begin{pmatrix} dX \\ d\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{g^2 + v_0^2} \begin{bmatrix} XgF_4 & -XgF_4 \frac{\partial \hat{S}}{\partial \xi} \Big|_{\zeta} + Xv_0 \\ v_0 F_4 & -v_0 F_4 \frac{\partial \hat{S}}{\partial \xi} \Big|_{\zeta} - g \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d\hat{S} \\ d\xi \end{pmatrix}.$$

Pour que dX et $d\theta$ deviennent indépendants de $d\xi$ il faut que:

$$\frac{v_0}{g} = F_4 \frac{\partial \hat{S}}{\partial \xi} \Big|_{\zeta} \quad \text{et} \quad \frac{g}{v_0} = -F_4 \frac{\partial \hat{S}}{\partial \xi} \Big|_{\zeta}.$$

On voit que ces deux conditions ne peuvent être obtenues simultanément si g et v_0 sont différents de zéro. On peut donc affirmer que chaque "trajectoire" aboutit à un "puits" et que chaque "puits" correspond à une "trajectoire" unique quoique le calcul ne le détecte pas toujours.

Supposons maintenant que nous nous plaçons sur un rayon ($d\theta = 0$) et excluons le cas où θ devient indépendant de ξ . Alors si on modifie ξ de $d\xi$, on induit une variation $d\hat{S} \neq 0$ et donc une variation de X :

$$dX = \frac{Xd\xi}{v_0}.$$

On constate que si v_0 est suffisamment grand, une erreur numérique faible sur X peut correspondre à une variation importante de ξ . C'est le phénomène auquel on est confronté dans la zone 2 décrite précédemment (figure 19a): une variation dX_2 conduit à un passage de la "trajectoire" issue de 1 à celle issue de 2. Il y a pincement du faisceau de courbes $\xi = cste$. Calculons maintenant la distance entre deux "trajectoires" voisines dans le plan η, θ en fonction de leur distance dans le plan (\hat{S}, ξ) . Si on dote ces plans d'une métrique euclidienne, on a, par le tenseur des dilatations de Cauchy:

$$(3.9) \quad d\eta^2 + d\theta^2 = \frac{(d\hat{S}, d\xi)}{(g^2 + v_0^2)^2} \begin{bmatrix} gF_4 & -gF_4 \frac{\partial \hat{S}}{\partial \xi} \Big|_{\zeta} + v_0 \\ v_0 F_4 & -v_0 F_4 \frac{\partial \hat{S}}{\partial \xi} \Big|_{\zeta} - g \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} gF_4 & -gF_4 \frac{\partial \hat{S}}{\partial \xi} \Big|_{\zeta} + v_0 \\ v_0 F_4 & -v_0 F_4 \frac{\partial \hat{S}}{\partial \xi} \Big|_{\zeta} - g \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d\hat{S} \\ d\xi \end{pmatrix}.$$

En effectuant les produits, et en explicitant $\frac{\partial \hat{S}}{\partial \xi} \Big|_{\zeta}$ on obtient:

$$(3.10) \quad d\eta^2 + d\theta^2 = \frac{F_4^2}{g^2 + v_0^2} \left[d\hat{S}^2 + 2 \frac{1}{F_4} \frac{d\zeta}{d\xi} d\xi d\hat{S} + \left(\frac{1}{F_4^2} + \frac{1}{F_4^2} \left(\frac{d\zeta}{d\xi} \right)^2 \right) d\xi^2 \right].$$

A l'approche des "puits", $g^2 + v_0^2$ tend vers 0 et la fonction F_4 se comporte comme $(g^2 + v_0^2)^2$. On peut donc écrire:

$$(3.11) \quad d\eta^2 + d\theta^2 \sim \frac{1}{g^2 + v_0^2} \left[1 + \left(\frac{d\zeta}{d\xi} \right)^2 \right] d\xi^2$$

On voit que le positionnement précis des "puits" ne peut être obtenu que si $d\xi$ est assez petit. Ainsi le contrôle du pas $d\hat{S}$ n'est pas suffisant. Il faut aussi contrôler $d\xi$ car lorsque l'anisotropie est importante, $\frac{d\zeta}{d\xi}$ devient grand avant que l'on atteigne la frontière Σ' . Cela se produit justement pour de fortes valeurs locales de v_0 . Ainsi, les pincements de "trajectoires" coïncident ils toujours avec des difficultés de localisation des puits, le risque numérique étant de passer d'une "iso- ξ " à l'autre sous l'effet des erreurs de troncature. C'est ce qui explique les croisements obtenus. Pour les faibles anisotropies, ce phénomène se produit dans une zone infime du plan physique car lorsque $g^2 + v_0^2 \rightarrow 0$, $d\zeta \rightarrow 0$ et $d\theta \rightarrow 0$. Il est donc légitime de ne pas pénaliser la rapidité de la méthode par la prise en compte d'un grand nombre d'harmoniques. On comprend cependant que l'approche de Σ' devient problématique pour des valeurs élevées de Λ .

Traduisons cela en ordres de grandeurs lorsque v_0 et g sont quelconques. Ecrivons chacun des termes de (3.10) sous la forme:

$$d\eta^2 + d\theta^2 = t_1 d\hat{S}^2 + t_2 d\hat{S} d\xi + t_3 d\xi^2.$$

Comme $(\frac{\gamma+1}{n} - 2u_0) \sim 1$, on voit que le comportement de F_4 est lié à celui de $g^2 + v_0^2$. En négligeant $(g^2 + v_0^2)^2$ ($(g^2 + v_0^2) \ll 1$) devant $g^2 + v_0^2$, on obtient:

$$(3.12) \quad \begin{aligned} t_1 &\sim (g^2 + v_0^2) \\ t_2 &\sim \frac{d\zeta}{d\xi} \\ t_3 &\sim \frac{1}{g^2 + v_0^2} \left(1 + \left(\frac{d\zeta}{d\xi} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Au voisinage des axes, v_0 et $\frac{d\zeta}{d\xi}$ sont très petits. On a alors $d\eta^2 + d\theta^2 \sim \frac{1}{g^2} d\xi^2$. Cela signifie qu'à un déplacement $d\xi$ (à \hat{S} constant) correspond un déplacement $\Delta = \frac{1}{g^2}$ fois plus grand dans le plan (η, θ) ce qui devient délicat à l'approche de Σ' quand $g \rightarrow 0$. Pour les "trajectoires" issues de la zone 2 de la figure 17 la dérivée $\frac{d\zeta}{d\xi}$ devient grande et à un déplacement $d\xi$ correspond maintenant un déplacement de l'ordre de $10 \times \Delta$ dans le plan (η, θ) . Pour obtenir une précision équivalente à celle atteinte dans le reste de la couche de choc, il faut multiplier en gros le nombre de "trajectoires" par 10. Ainsi, dans cette zone très perturbée, le calcul numérique "saute" d'une "iso- ξ " à l'autre en engendrant d'importantes erreurs sur η et θ (figure 19b).

On voit donc que dans le cas des couches minces il est impératif d'arrêter l'intégration le long d'une courbe $\xi = \xi_i$ sur laquelle g change de signe et sur laquelle $\frac{d\zeta}{d\xi}$ est grand puisque l'on a montré que l'erreur numérique devient considérable. Deux alternatives se présentent alors:

- on continue l'intégration en éliminant la "trajectoire" repérée par $\xi = \xi_i$. On ne peut alors plus utiliser la collocation pour déterminer les coefficients des séries

de Fourier tronquées des différentes inconnues puisqu'elle nécessite un nombre constant de "trajectoire"s réparties à $d\xi = cste$. Il faut donc revenir à la méthode décrite en [13] qui permettrait par ailleurs un maillage en ξ beaucoup plus souple.

- arrêt complet du calcul dès que g change de signe sur une $\xi = cste$. On construit alors une frontière avec les points terminaux de chaque "trajectoire" en l'état de l'intégration (figure 19c). C'est la valeur de la masse volumique sur cette frontière qui permettra d'affirmer si l'approximation définie ci-dessus est proche de Σ' .

Dans le cas de couches minces, c'est la deuxième solution qui a été retenue. En effet, une étude numérique a montré que pour $\gamma = 1.4$ la valeur de la masse volumique sur l'approximation de Σ' est au plus de l'ordre de 0.5 pour les "trajectoires" issues du voisinage de l'axe $\theta = 0$. Les courbes de la figure 18 concernant ρ_0 montrent que l'on a alors déterminé environ 85% de la couche de choc. Il est donc peu intéressant dans cette première approche d'affiner le processus d'intégration pour une zone aussi infime du plan physique. On a ainsi obtenu les cartes de la figure 20.

Notons cependant que cette solution ne s'applique que pour ce type de configuration. En effet, pour des valeurs de n plus faibles, la couche de choc s'épaissit et on peut envisager de rencontrer des puits isolés qui ne seraient pas situés sur Σ' . Dans ce cas, il convient d'adopter la première alternative: il faut continuer l'intégration sur les "trajectoires" sur lesquelles g et v_0 ne sont pas suffisamment proches de zéro. On peut aussi s'attendre à rencontrer des "trajectoires" pour lesquelles g change de signe alors que $\frac{dK}{d\xi}$ reste petit. Ici, il serait inutile d'arrêter la résolution.

Dans le cadre de ce travail et pour les configurations envisagées dans la suite, nous n'avons mis en œuvre que la deuxième alternative.

3.2 Cas hyperbolique

Intéressons nous maintenant à la résolution d'un cas où il existe une zone hyperbolique. D'après la section (2.3), on sait que le problème est localement hyperbolique au voisinage du choc pour $\Lambda < -0.1001$. Afin de ne pas trop pénaliser la résolution numérique du point de vue temps de calcul tout en choisissant une configuration pour laquelle la zone hyperbolique est suffisamment étendue nous fixons $\Lambda = -0.11$. Le nombre d'harmoniques K sera pris égal à 32 pour que la frontière Σ' soit correctement approximée au sens que nous venons de définir.

La figure 21 présente les cartes de pression et du nombre de Mach. Sur cette dernière, la zone hyperbolique située entre $\theta_c = 0.7$ rad. et $\theta_c = 1.07$ rad. est bien visible alors qu'elle n'apparaît pas de manière explicite sur la première. En particulier, il n'y a aucune trace de choc interne: le calcul numérique montre que le nombre de Mach décroît régulièrement de valeurs maximales de l'ordre de 1.1 vers 1 et que ce passage se fait continûment pour toutes les inconnues p_0, ρ_0, u_0, v_0 (figure 22), X et θ . La courbe relative à la masse volumique adimensionnée ρ_0 indique que le calcul a permis d'obtenir la solution pour environ 80% de la couche de choc.

Ces résultats s'appliquent également pour les explosions ponctuelles $k = 2$. Il semble donc que pour cette famille de chocs la présence de zones hyperboliques n'engendrent pas nécessairement de chocs internes.

3.3 Couches épaisses

Après avoir traité des problèmes en couches minces dans les cas elliptiques et mixtes, intéressons nous à l'influence de l'anisotropie lorsque n diminue. Pour cela, choisissons $\Lambda = -0.02$, $k = 1$ et faisons varier n de 0.75 à 0.55. Le temps d'intégration varie de $1mn$ CPU pour $n = 0.75$ à $3mn$ pour la valeur la plus faible.

La figure 23 permet d'apprécier l'influence de n sur les cartes de pression. Comme pour l'explosion isotrope, la couche de choc s'épaissit lorsque n diminue. Il s'ensuit que la variation des pressions du choc vers la frontière du vide est beaucoup plus importante, comme par exemple dans le cas $n = 0.55$. On remarque d'autre part que Σ' se déforme d'autant plus que l'exposant n est petit: elle est quasiment circulaire pour $n = 0.75$ et devient un ellipsoïde pour $n = 0.55$. On peut donc dire que l'effet de l'anisotropie est d'autant plus marqué que n est petit. C'est la raison pour laquelle le cas des couches épaisses est traité dans le cadre des fortes anisotropies même si les valeurs du paramètre caractéristique Λ sont petites.

La figure 24 montre l'épaississement de la couche de choc avec la diminution de n ainsi que la plus grande déviation des trajectoires en couche épaisse. A titre de comparaison, pour $n = 0.64$ et $k = 1$ les résultats de l'explosion isotrope [8] donnent $X' = 0.8389$ et $p'_0 = 1.0364$ alors que pour $n = 0.66$ et $\Lambda = -0.02$ nous obtenons $X' = 0.8214$ et $p'_0 = 1.0339$ en $\theta = \pi/2$. La figure 25 montre l'influence de n sur la pression adimensionnée. En couche mince, la faible anisotropie au niveau du choc entraîne une faible anisotropie de la répartition p'_0 . On constate aussi que pour $n = 0.75$, p_0 croît uniformément de Σ vers Σ' . Lorsque la couche de choc devient plus importante, la répartition p'_0 devient de plus en plus anisotrope et p_0 commence par diminuer avant de redevenir croissante: c'est un comportement analogue à celui constaté pour l'explosion isotrope. On aboutit aux mêmes conclusions lorsqu'on analyse l'évolution le long des trajectoires de la masse volumique adimensionnée ρ_0 (figure 26). Elle tend vers 0 à l'approche de Σ' avec une dérivée infinie pour $n > \frac{2}{\gamma+2}$. Notons que l'on ne peut guère diminuer beaucoup plus la valeur de n puisque l'on sait que dans les configurations proches de l'explosion instantannée ($n = 0.50$) la variable X tend vers zéro et p_0 vers l'infini. Cela signifie que h n'est plus bornée au voisinage de Σ' . Il faut alors reformuler le problème en choisissant la nouvelle inconnue $h^* = \log X^2 p_0$.

On peut aussi simuler des explosions dans des milieux moins compressibles en augmentant la valeur de γ . On obtient donc d'une manière différente des couches épaisses. La figure 27 est constitué des cartes de pression, masse volumique et nombre de Mach calculées pour une explosion ponctuelle ($k = 2$) et une valeur de γ égale à 7 qui est une première approche de la loi de Tait pour l'eau. On a choisi $\Lambda = -0.07$ et $K = 16$. Le maximum de pression est obtenu sur la frontière du vide en $\theta = 0$. Les variations de masse volumique sont extrêmement faibles. Elle atteint un maximum

à environ la moitié de l'épaisseur de la couche de choc. En fait, ρ tend vers zéro dans une zone si proche de Σ' que l'intégration numérique s'arrête avant d'atteindre le domaine de décroissance. On voit que l'augmentation de γ épaissit la couche de choc mais que la solution reste du type $\rho_{0X} \rightarrow \infty$ en Σ' alors que la diminution de n produit le même effet mais avec $\rho_{0X} \rightarrow 0$ sur Σ' . C'est un comportement analogue à celui observé dans le cas isotrope parfaitement incompressible [14].

Résolution par différences finies

Avant de continuer plus avant l'exploitation numérique et analytique de notre modèle, il était souhaitable de le confronter aux résultats obtenus par un code de différences finies. Afin de pouvoir traiter des cas à la fois elliptiques et fortement hyperboliques, la première partie du travail a consisté à exprimer le système (1.14) sous forme conservative:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial \mathcal{F}(U)}{\partial \theta} = \mathcal{G}(U).$$

Il existe en fait plusieurs formulations conservatives différant les unes des autres par le degré en X des fonctions U . Nous en avons donné une en annexe C valable pour les cas plans ($k = 1$) et cylindriques ($k = 2$). Il a été montré [10] que les fonctions U se conservent à la traversée des chocs internes.

Connaissant la physique du phénomène il est évident que le pas ΔX doit se réduire à l'approche de Σ' . Un schéma implicite, stable pour de grandes valeurs de ΔX , n'apporterait donc rien ici. D'après ces considérations nous avons opté pour le schéma de Mac Cormack qui est une méthode de prédiction correction d'ordre deux en X et en θ . Un bref descriptif en est donné en annexe D. Le choix de ΔX est déterminé par la condition de stabilité dite CFL:

$$\kappa \frac{|\Delta X|}{\Delta \theta} \leq 1$$

où κ est la plus grande, en valeur absolue, des valeurs propres de la matrice 4×4 $\frac{\partial \mathcal{F}(U)}{\partial U}$. Même si après de fastidieux calculs, on peut obtenir $\frac{\partial \mathcal{F}(U)}{\partial U}$ en fonction de U , il n'est pas sûr qu'on sache la diagonaliser analytiquement. Le faire numériquement pour chaque valeur θ_i de θ est très coûteux en temps de calcul. Dans ces conditions et compte tenu de notre objectif initial nous avons fixé $\frac{|\Delta X|}{\Delta \theta} \sim 10^{-3}$. Il est certain que ce choix ne nous permettra pas de déterminer l'ensemble de la couche de choc mais il nous permettra de calculer la solution dans un domaine suffisamment important pour pouvoir effectuer quelques comparaisons avec notre précédent code.

Nous avons d'abord déterminé la carte de pression pour une couche mince entièrement elliptique. Les caractéristiques du problème sont:

$$n = 0.75, k = 1, \Lambda = -0.05.$$

Le temps d'intégration de la méthode mixte Telenin-Charactéristiques est de l'ordre de $1mn$. CPU en prenant $K = 16$. Elle permet de déterminer environ les quatre cinquièmes de la couche de choc. La résolution aux deux tiers effectuée par le schéma de Mac Cormack correspond à $120mn$. CPU, temps quasiment invariable à l'égard de la configuration. La figure 28 permet d'apprécier la très bonne adéquation entre les deux méthodes. Les répartitions sont identiques ainsi que l'allure des isobares. Les conclusions sont les mêmes pour les cartes de masse volumique et du nombre de Mach non représentées ici pour ne pas allourdir l'exposé.

Nous avons conservé la même configuration en augmentant le paramètre caractéristique de l'anisotropie du choc: $\Lambda = -0.11$. On sait que dans ce cas l'écoulement est de type mixte (figure 21): il existe une zone hyperbolique. La figure 29 montre une quasi similitude des cartes de pression fournies par les deux méthodes. On constate que le schéma de Mac Cormack confirme le brusque changement de la courbure des isobares au voisinage de l'approximation de la frontière du vide. Il est aussi très intéressant de remarquer que la résolution numérique par différences finies ne fait pas apparaître de chocs internes. C'est une confirmation importante de ce qui avait été signalé précédemment.

Enfin, nous nous sommes orientés vers les couches épaisses en choisissant $n = 0.55$, $k = 1$ et $\Lambda = -0.025$. L'allure des isobares (figure 30) est identique dans les deux cas même si le résultat obtenu avec le schéma de Mac Cormack fait apparaître des lignes plus resserrées. En fait, en diminuant le pas ΔX la configuration donnée par le schéma de Mac Cormack tend vers celle obtenue par notre méthode.

Conclusion

La résolution des équations régissant les explosions violentes anisotropes à similitude interne a été réalisée grâce à une méthode numérique très économique. Ainsi, pour les anisotropies faibles (cas entièrement elliptique), le calcul dure environ $2mn$. sur SUN sparc station 10. De plus, la méthode permet indistinctement le traitement du cas où l'écoulement à l'intérieur du choc est toujours elliptique et celui où il existe des zones hyperboliques.

Sur le plan physique, il apparaît, pour les formes de choc étudiées, que l'existence d'une zone hyperbolique ne conduise pas nécessairement à l'apparition de chocs internes.

Un inconvénient de la formulation adoptée est que le problème est inverse, c'est à dire que l'on résout le système à partir de la donnée du choc, de sorte que pour l'application en hypersonique, l'obstacle Σ' est un résultat du calcul. Cet inconvénient devient un avantage si l'objectif de l'étude est la compréhension des écoulements accompagnant les ondes de souffle. En effet, la nature mathématique du problème et la continuité des solutions sont profondément liées à la forme du choc. Ainsi, l'apparition de discontinuités ou simplement, sur le plan numérique, celle de très grandes vitesses de variation de la solution peut désormais être étudiée finement et corrélée avec les propriétés de l'onde de choc.

En guise de perspectives, nous avons recensé les quelques améliorations que la méthode de calcul devra subir pour faire face à de fortes anisotropies. En particulier, il faudra:

- étudier finement les variations des termes de (3.10) afin de déterminer un critère d'arrêt de l'intégration ou de raffinement du maillage en ξ . Ceci devrait à la fois permettre une amélioration des performances du point de vue du temps de calcul et aussi une localisation plus précise de Σ' ;
- formuler le problème en $h^* = \log X^2 p_0$ de manière à pouvoir traiter de cas proches de l'explosion instantanée pour lesquels une faible anisotropie au niveau du choc entraîne d'importants effets anisotropes dans la couche de choc.

Ces améliorations techniques de la méthode exigent une bonne connaissance de la physique du phénomène, laquelle est désormais accessible grâce au programme et aux expériences numériques en cours. Bien entendu le programme permet le traitement de chocs dissymétriques ainsi que celui de formes d'ondes de souffle obtenues par des expériences de tir d'armes (figure 31) ou des calculs de corps élancés en écoulement hypersonique. On a fourni à titre d'exemple les cartes de pression et de masse volumique (figure 32) obtenues par la méthode mixte Telenin-caractéristiques, le choc Σ ayant été construit à partir d'un relevé de points appartenant à l'onde de souffle représentée sur la figure 31. Cependant, il convient de rappeler que les chocs traités doivent se propager selon une loi puissance du temps pour préserver la similitude interne du problème. Du point de vue pratique, cela restreint un peu le

champ d'application de nos résultats, mais le but primordial de notre étude étant la compréhension de la structure de ces écoulements, cette restriction est largement compensée par la rapidité et le sens physique de la méthode. De plus, les structures d'écoulement ainsi mises en évidence se retrouvent dans des problèmes plus généraux et leur connaissance permettra peut être de mettre au point une méthode de calcul inspirée de celle qui est présentée ici mais qui serait applicable en absence de similitude interne.

Partie II

Comparaison entre théorie et expérience

Notations particulières

C_m	Coefficient de moment de tangage
C_x	Coefficient de traînée
C_z	Coefficient de portance
L	Longueur de l'ogive
M	Nombre de Mach
n	Exposant de la loi de puissance de l'obstacle
r, θ	Coordonnées polaires définies figure 33a
T	Température
u, v, w	Composantes de la vitesse définies figure 33a
x, y, z	Coordonnées cartésiennes définies figure 33a
Y	Distance entre deux faisceaux lumineux
R, R'	Rayons respectifs du choc et de l'obstacle
α	Incidence géométrique
α_0	Incidence naturelle de l'écoulement amont
β_0	Dérapage naturel de l'écoulement amont
α_{cor}	Incidence réelle
δ	Différence de marche entre deux faisceaux lumineux
ϵ	Angle de biréfringence du biprisme de Wollaston
γ	Rapport des chaleurs spécifiques
i	Variable représentative de l'effet d'incidence
λ	Variable adimensionnée définie par $\lambda = \frac{r}{R}$
ρ	Masse volumique
τ	Épaisseur relative de l'obstacle
θ_c	Demi-angle au sommet d'un cône
σ	Angle formé par la pente du choc et la vitesse amont
θ_0	Angle défini figure 50
θ_{exp}	Azimut expérimental défini figure 50b
θ_{th}	Azimut théorique défini figure 50b
$\tilde{\zeta}$	Variable représentative de l'effet de contre pression

Tout symbole accentué est relatif à l'obstacle.

L'indice ∞ désigne des grandeurs concernant l'écoulement amont.

Les termes d'indice 1 caractérisent l'effet du premier ordre de la faible incidence α .

Les termes d'indice 2 caractérisent l'amortissement de l'intensité du choc sous l'effet de p_∞ .

Introduction

L'étude des écoulements hypersoniques est rendue difficile par la variété des phénomènes physico-chimiques mis en jeu: effets des hautes températures, effets visqueux... Les codes de calcul modernes qui permettent la résolution directe des équations de Navier-Stokes par différences ou éléments finis peuvent apporter un certain nombre de réponses à ces problèmes. Ils constituent néanmoins ce que l'on peut appeler une soufflerie numérique dont les résultats se doivent d'être confrontés soit à l'expérience soit à des modèles théoriques de portée certes moins générale mais pouvant constituer des cas tests extrêmement précieux.

L'approche théorique de ce type d'écoulement a commencé dès les années 50 avec D. Van Dyke [15] qui propose des solutions analytiques pour des ogives élancées non émoussées placées sans incidence dans un écoulement hypersonique de gaz parfait non visqueux. Chernyi, Guiraud, et Hayes [4][5][6] ont étendu ces résultats à des obstacles en loi de puissance. Plus tard, Cheng, Doty et Rasmussen [16][17] ont fourni des solutions pour des cônes en incidence.

La théorie à similitude interne développée à l'IMFL [18][19] permet d'estimer les efforts s'exerçant sur des ogives axisymétriques en loi de puissance placées à faible incidence dans un écoulement hypersonique de fluide non visqueux sans effet de gaz réel. Les coefficients aérodynamiques y sont donnés sous forme analytique ce qui permet une discussion théorique sur les effets de la compressibilité du gaz (influence de γ) et sur la forme des ogives. Il était cependant impératif de disposer de résultats expérimentaux afin de corroborer la discussion théorique. En effet, l'existence, pour une famille de corps simples, d'une solution analytique détaillée et corrélée avec des essais représentatifs constitue un cas test complet pour les codes Euler tridimensionnels en gaz thermodynamiquement parfait. Une campagne d'essais a donc été menée dans la soufflerie froide R3Ch de Chalais Meudon.

La comparaison entre théorie et expérience portera sur la position du choc, les coefficients de portance et de moment de tangage ainsi que sur les pressions. La mise en place d'une méthode de visualisation basée sur l'interférométrie directe a aussi permis la mesure de la masse volumique dans la couche de choc.

Chapitre 4

Modèle théorique et moyens d'essais

Une description complète est exposée en [19]. Nous nous bornerons ici à rappeler les résultats essentiels nécessaires à la compréhension de ce travail.

4.1 Hypothèses

On considère l'écoulement hypersonique autour d'un corps de révolution. Avec les notations de la figure 33a, les hypothèses sont les suivantes:

- les ogives sont élancées: $\left(\frac{R}{x}\right)^2 \ll 1$
- on suppose que les conditions de choc fort et de faible incidence sont remplies. Pour les corps élancés cette hypothèse s'écrit:

$$(4.1) \quad \begin{cases} \iota = \frac{\alpha x}{R} \ll 1 \\ \tilde{\zeta} = \frac{x^2}{M_\infty^2 R^2} \ll 1. \end{cases}$$

Les variables ι et $\tilde{\zeta}$ sont respectivement représentatives de l'effet de l'incidence α et de la contre-pression (M_∞ fini).

Dans ces conditions, les équations du problème sont celles de l'hypersonique des petites perturbations. Dans le cas particulier des ogives en loi de puissance de la forme $R' = \frac{\tau L}{2} \left(\frac{x}{L}\right)^n$, il existe des solutions analytiques. Ces dernières ne sont pas applicables au voisinage immédiat du nez émoussé puisque les conditions de corps élancé n'y sont pas remplies et elles ne sont valables que si l'effet aval de cette zone est faible: les lignes de courant issues du nez doivent être confinées dans un domaine très proche de l'obstacle. Cette dernière exigence est réalisée si $2/3 \leq n \leq 1$. On comprend dès lors pourquoi la discussion sur les efforts aérodynamiques ne portera que sur les coefficients de portance et de moment de tangage: il a été montré [18] que la traînée propre du nez peut être du même ordre de grandeur que celle donnée par la théorie analytique ce qui n'est pas le cas pour les autres composantes des efforts.

4.2 Forme de la solution

Dans ces conditions on peut montrer [18][19] que les grandeurs physiques de l'écoulement s'obtiennent sous forme de développements suivant les puissances de ι et $\tilde{\zeta}$. Ils s'inspirent des conditions sur le choc qui, en première approximation sont des fonctions linéaires de ι et $\tilde{\zeta}$. Nous donnons ci-dessous ceux qui nous seront nécessaires pour la discussion.

- Position du choc:

$$(4.2) \quad R(x, \theta) = \frac{\tau L}{2\lambda'_0} \left(\frac{x}{L}\right)^n \left(1 + \iota(\lambda_1 + \tilde{\zeta}\lambda_{12}) \cos \theta + \tilde{\zeta}\lambda_2 + \iota^2(\lambda_{10} + \lambda_{11} \cos 2\theta) + \tilde{\zeta}^2\lambda_{22} + \dots\right)$$

les termes λ'_0 et λ_i sont des constantes qui ne dépendent que de γ et n .

- Pression:

$$(4.3) \quad p(x, r, \theta) = \frac{2n^2}{\gamma+1} \rho_\infty V_\infty^2 \frac{r^2}{x^2} \left(p_0 + \iota(p_1 + \tilde{\zeta}p_{12}) \cos \theta + \tilde{\zeta}p_2 + \iota^2(p_{10} + p_{11} \cos 2\theta) + \tilde{\zeta}^2 p_{22} + \dots\right)$$

les termes p_i sont des fonctions de la seule variable $\lambda = \frac{r}{R}$ qui ne dépendent que de γ et n

- Coefficient de portance:

$$(4.4) \quad C_z = \iota(C_{1z} + \tilde{\zeta}C_{12z})$$

où C_{1z} et C_{12z} sont des constantes ne dépendant que de γ et n .

- Masse volumique:

$$(4.5) \quad \rho(x, r, \theta) = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \rho_\infty \left(\rho_0 + \iota(\rho_1 + \tilde{\zeta}\rho_{12}) \cos \theta + \tilde{\zeta}\rho_2 + \dots\right)$$

les termes ρ_i étant des fonctions de λ et des constantes γ et n .

Les autres grandeurs sont toutes obtenues par des développements de forme analogue.

Les termes d'indice 0 sont relatifs à l'écoulement de base ($\alpha = 0$ et M_∞ infini). Les termes d'indice 1 caractérisent l'effet du premier ordre de la faible incidence α et les termes d'indice 2 celui de l'amortissement de l'intensité du choc sous l'effet de p_∞ (M_∞ grand mais fini). Les résultats théoriques présentés ici sont limités à l'ordre 1 en incidence et en contre pression, cependant, les termes d'ordre 2 (affectés des deux indices) sont mentionnés pour les besoins de la discussion.

4.3 Définition des ogives

On considère des corps axisymétriques en loi de puissance d'équation (figure 33a):

$$(4.6) \quad R' = \frac{\tau L}{2} \left(\frac{x}{L}\right)^n,$$

où τ est l'épaisseur relative de l'obstacle et L sa longueur. On a choisi $\tau = 0.4$ ce qui satisfait à ce que $R_x'^2 \ll 1$ pour $x/L > 0.1$. Compte tenu des caractéristiques de la veine d'expériences (diamètre $350mm$) et des faibles incidences qui doivent être expérimentées, on a opté pour $L = 300mm$. Le choix des exposants n est le suivant:

- $n = 2/3$ car c'est la valeur minimum à partir de laquelle on peut appliquer la théorie à similitude interne;
- $n = 3/4$ ogive pour laquelle on a mis en évidence l'existence d'une couche limite tridimensionnelle à similitude interne;
- $n = 1$ (cône droit) valeur pour laquelle la théorie ne conduit pas à une masse volumique nulle à la paroi.

Pour des raisons évidentes de fabrication, on a décidé de concevoir deux types de maquettes. Les premières sont destinées aux pesées et aux visualisations, les secondes permettent les mesures de pression. On dispose donc en tout de six ogives.

4.4 Mesure des efforts

Afin de permettre une bonne comparaison entre théorie et expérience sur les efforts aérodynamiques, il faut atténuer au mieux les effets de culot. La partie pesée est donc prolongée par une jupe suivant très exactement la loi de puissance de l'avant-corps. Ainsi, une maquette destinée à la pesée de longueur totale $L = 300mm$ se compose de deux parties: l'avant-corps d'une longueur $240mm$ fixé sur la balance et une jupe ($60mm$) vissée sur le dard (figure 33b). Les efforts mesurés sont proches de ceux que l'on aurait obtenus en effectuant la pesée sur la partie comprise entre $x = 0$ et $x = 240mm$ d'une ogive semi-infinie. En négligeant les effets de la contre-pression, ce qui correspond au fait que la pression amont p_∞ est petite devant les pressions atteintes dans la couche de choc, les coefficients aérodynamiques théoriques C_x et C_z ont pour expression [19]:

$$\frac{C_x}{\tau^2} = \frac{1}{2\pi\lambda_0^4\lambda_0'^4}$$

$$\frac{C_z}{\alpha} = -\frac{2np_1'\lambda_0'}{\gamma + 1}.$$

En choisissant S_{ref} comme surface de référence (figure 33b), la portance et la traînée s'écrivent:

$$F_z = \frac{1}{2}\gamma p_\infty M_\infty^2 S_{ref} C_z, \quad F_x = \frac{1}{2}\gamma p_\infty M_\infty^2 S_{ref} C_x.$$

Pour une incidence maximale égale à $\alpha_{max} = 0.1 \text{ rad}$, on obtient:

n	F_x (en N)	F_z (en N)
2/3	10,19	28,70
3/4	9,85	30,48
1	14,95	36,44

Ces ordres de grandeur permettent le choix de la balance dard 72C2 à six composantes. La précision estimée sur les mesures d'efforts est: $\Delta C_z = \Delta C_m = \pm 0.0008$.

4.5 Mesure de la pression

La soufflerie R3Ch est équipée d'un mât pouvant effectuer une rotation de 180° autour de l'axe de symétrie de la maquette pendant la durée de la rafale (10s). On doit donc être capable d'effectuer les acquisitions de manière très rapide. En conséquence, notre choix s'est porté sur des capteurs de type *P.S.I.*, qui, compte tenu de leur petite dimension ont été implantés à l'intérieur de l'ogive, ce qui permet des temps de réponse courts. La soufflerie R3Ch dispose d'une chaîne d'acquisition *P.S.I.* dont l'étendue de mesure est de $\pm 25 \text{ mbars}$. Il a donc fallu déterminer préalablement la répartition des pressions maximales existant sur l'ogive afin de n'utiliser cette chaîne que dans une zone compatible avec ses performances. Les pressions maximales sont localisées à l'intrados ($\theta = \pi$) lorsque l'incidence α est égale à $\alpha_{max} = 0.1 \text{ rad}$ (figure 33a). L'expression de la pression théorique sur le corps est [19]:

$$p' = \frac{2n^2}{\gamma + 1} \gamma p_\infty M_\infty^2 \frac{\tau^2}{4\lambda_0'^2} \left(\frac{x}{L}\right)^{2(n-1)} \left[p_0'^* - p_1'^* + \frac{\tilde{\zeta}_0}{1 + \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{(2-n)8\tilde{\zeta}_0\lambda_{22}}{n}} - 1 \right)} p_2'^* \right]$$

où $\tilde{\zeta}_0$ est la variable représentative des effets de la contre-pression construite avec la position du choc relative à l'écoulement de base: $\tilde{\zeta}_0 = \frac{x^2}{M_\infty^2 R_0^2}$.

La pression génératrice est $p_i = 120 \text{ bars}$ et le nombre de Mach en amont du choc $M_\infty = 9.95$. On en déduit la pression amont $p_\infty = 292 \text{ Pa}$.

Enfin les résultats de calcul de l'explosion isotrope donnent les grandeurs adimensionnées λ_0' , $p_0'^*$, $p_1'^*$, $p_2'^*$. On obtient les courbes de la figure 34a. L'utilisation des *P.S.I.* est envisageable lorsque $p' \leq 5000 \text{ Pa}$. On voit sur ces courbes que cette condition est remplie pour $x/L > 0.1$ environ. En adoptant une marge d'erreur de l'ordre de 10% on obtient l'abscisse minimale à partir de laquelle les mesures *P.S.I.* pourront être effectuées:

- $x > x_{min1} = 48 \text{ mm}$ pour $n = 2/3$;
- $x > x_{min2} = 44 \text{ mm}$ pour $n = 3/4$.

Compte tenu de la possibilité de rotation, les prises de pression sont percées le long d'une génératrice de manière suffisamment propre pour ne pas engendrer de chocs locaux. Dans le domaine compris entre les abscisses $x = 0$ et $x = x_{min}$ on a installé deux prises reliées à des Scanivalves. On peut ainsi espérer obtenir des informations sur l'ordre de grandeur de la pression sur le nez. Les prises *P.S.I.* implantées de $x = x_{min}$ à $x = 240 \text{ mm}$ sont réparties de manière à ce que la différence de pression enregistrée par deux prises successives soit une valeur quasiment constante. En conséquence, sur le cône elles sont espacées régulièrement. La précision estimée pour les mesures de pression est $\Delta P = \pm 40 \text{ Pa}$.

4.6 Température au voisinage du nez

Même si R3Ch est une soufflerie hypersonique froide, les températures atteintes au voisinage du point d'arrêt sont de l'ordre de la température génératrice de l'écoulement amont $T_i = 1050^\circ K$. Se posent donc des problèmes liés à la tenue du matériau utilisé pour la conception des maquettes. Pour estimer cette température on se place hors incidence. Le calcul des pressions dans cette zone peut se faire par une approximation de type Newton [20]:

$$p' = p_\infty + p_\infty \frac{R_x'^2}{1 + R_x'^2} \left[\left(\frac{\gamma + 1}{2} M_\infty^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma+1}} \left(\frac{\gamma + 1}{2\gamma M_\infty^2 - \gamma + 1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} - 1 \right].$$

D'autre part, l'équation d'Hugoniot du choc droit permet de déterminer la masse volumique d'arrêt. On en déduit la masse volumique à la paroi en exprimant que sur le corps qui est une ligne de courant, l'entropie se conserve. La température est obtenue par l'équation de Clapeyron. Les courbes de la figure 34b montrent que T' décroît très rapidement et se stabilise à $550^\circ K$ à $14mm$ du point d'arrêt. Cette température n'est évidemment pas la température réelle, mais elle en donne une valeur approchée réaliste puisqu'à cet endroit la vitesse est faible et les frottements non essentiels. Compte tenu de ces résultats, le choix du matériau s'est porté sur un acier inoxydable. Les maquettes sont évidées de manière à laisser une masse suffisante au bord d'attaque afin d'absorber les transferts de chaleur sans altération de l'émoussement. L'ensemble de ces considérations a permis la conception des maquettes dont une est représentée sur la figure 35. On peut voir sur la figure 36 le caisson de la soufflerie ainsi que le cône droit destiné aux pesées à l'intérieur de la veine.

4.7 Mesure de la masse volumique

Le dernier aspect de cette campagne d'essais est la visualisation de l'écoulement et la mesure de la masse volumique, à l'aide de l'interférométrie différentielle à biprisme de Wollaston en lumière blanche. On en rappelle brièvement le principe. Une vibration lumineuse polarisée dans une certaine direction est décomposée en deux vibrations orthogonales d'amplitudes sensiblement égales à l'aide d'un dispositif biréfringent appelé biprisme de Wollaston. Ce dernier est placé au centre de courbure d'un miroir sphérique situé derrière la veine d'expériences (figure 37a). Le dispositif ainsi réalisé est compensateur car la différence de phase entre les deux vibrations peut être réglée à une valeur initiale arbitraire par translation du biprisme et également autocompensateur, car le biprisme étant fixe, une déviation des rayons lumineux produit, dans l'air et dans le biprisme, des variations de longueur optique qui se compensent [21]. En lumière blanche, on observe des franges colorées dont les teintes se succèdent sensiblement comme celles des échelles de Newton.

Dans le cas des essais effectués dans la soufflerie, les fortes variations de masse volumique induisent de très faibles variations d'indice et ce, même à la traversée du choc, puisque la masse volumique amont est de l'ordre de $2 \times 10^{-2} kg/m^3$. Nous avons donc décidé d'appliquer la méthode de détermination directe de la masse volumique

par interférométrie différentielle, méthode mise au point récemment à l'IMFL [22]. Les faisceaux qui interfèrent sont suffisamment séparés pour que l'un des deux au moins soit placé dans l'écoulement non perturbé. La théorie prévoyant une épaisseur de couche de choc maximale de l'ordre de 14mm , on a fait construire un biprisme de Wollaston en quartz d'angle de taille 18° .

Compte tenu de la grande distance entre la maquette et le miroir sphérique (65cm), les trajets optiques aller et retour ne traversent plus la veine d'expériences rigoureusement au même endroit si l'on adopte le montage de la figure 37a: les interférences ne sont pas bien nettes (figure 38a). On a donc aligné sur l'axe optique du miroir sphérique, la source lumineuse, le condenseur et le biprisme de Wollaston et remplacé le prisme de renvoi du faisceau sur l'objectif par une lame séparatrice. Enfin, pour altérer les réflexions parasites encore visibles sur le cliché de la figure 38b, on a placé la lentille de champ entre la lame séparatrice et le condenseur et incliné légèrement la lame polarisante (figure 37b). Dans ces conditions on obtient l'interférogramme de la figure 38c: la teinte de fond est quasiment uniforme et les couleurs dans la couche de choc sont bien visibles.

L'étalonnage du biprisme de Wollaston a consisté à relier la différence de marche entre deux faisceaux partiels et les teintes rencontrées dans le champ d'observation [21]. On obtient la courbe de la figure 39 qui sera utilisée pour le dépouillement des interférogrammes.

Chapitre 5

Résultats

5.1 Mesures interférométriques

5.1.1 Informations fournies par un interférogramme

Les visualisations ont été effectuées avec les franges horizontales et en teinte de fond uniforme. La figure 40 permet de décrire schématiquement les zones d'interférences rencontrées sur les interférogrammes présentés dans ce travail. La polarisation des deux faisceaux partiels est symbolisée par une flèche pour la polarisation horizontale (appelée dans le texte faisceau *PH*) et un petit cercle pointé pour la polarisation verticale (appelée faisceau *PV*): la distance entre ces deux faisceaux est Y . Sur la partie gauche de la figure, nous avons indiqué par un numéro les interférences se produisant pour une configuration donnée. La partie droite schématise l'interférogramme résultant:

- La frontière 1 correspond à l'abscisse de la pointe du cône noir visible sur tous les interférogrammes. A cet endroit, les deux faisceaux d'interférence sont arrêtés par la maquette. Le rayon du cône à cette abscisse est égal à la moitié du dédoublement entre les deux faisceaux.
- La limite 2 correspond à une abscisse où l'épaisseur de la couche de choc devient égale au dédoublement entre les deux faisceaux. Le dépouillement de la masse volumique d'un interférogramme sera limité entre ces deux frontières.
- Le domaine 3 n'est pas du tout éclairé. Les faisceaux *PH* et *PV* sont tous les deux arrêtés par la maquette. Il n'y a pas d'interférences; il en résulte un triangle noir sur l'interférogramme.
- La zone 5 est éclairée uniquement par le faisceau *PH*. Le faisceau *PV* est arrêté par la maquette; c'est pourquoi elle apparaît en ombré.
- Le domaine 7 est une zone d'interférence à l'extrados de la maquette avec une mesure directe de la variation d'indice de réfraction. Le faisceau *PV* traverse l'écoulement non perturbé et le faisceau *PH* traverse la couche de choc. C'est cette partie de l'interférogramme qui sera dépouillée.

- La zone 8 correspond à une zone d'interférence où la mesure est différentielle; l'épaisseur de la couche de choc devient supérieure au dédoublement entre les deux faisceaux. Cette zone de part et d'autre de la maquette est bien visible sur les interférogrammes de la figure 38.
- Le domaine 9, de forme losangique, est également une zone d'interférence où la mesure est différentielle; on effectue une mesure entre le faisceau PV qui traverse la couche de choc à l'extrados de la maquette et le faisceau PH qui traverse la couche de choc à l'intrados.
- La zone 10 permet une mesure directe de la variation d'indice de réfraction. Il y a interférence entre le faisceau PV qui traverse l'écoulement non perturbé à l'extrados et le faisceau PH qui traverse la couche de choc à l'intrados.
- Enfin, le domaine 12 est constitué par les interférences des faisceaux PH et PV qui traversent tous les deux le même écoulement non perturbé. Il n'y a pas de variation d'indice, la teinte de fond est uniforme.

L'information contenue sur un interférogramme est donc de deux ordres. On obtient à la fois la position de l'onde de choc dans un plan perpendiculaire à l'axe optique et la valeur de la masse volumique par l'intermédiaire des teintes rencontrées. Notons cependant que la technique est limitée par la différence de marche minimale δ_{mini} qui peut être mise en évidence. On peut la déterminer grâce au tableau de la figure 41a. Entre le pourpre et le violet, on a $\delta_{mini} = 30 \times 10^{-9}m$. Cela signifie en particulier que le choc sera détecté par cette technique dès que le faisceau PH aura parcouru une distance h (figure 41b) à l'intérieur de la couche de choc telle que $\Delta n_{choc} \times h = \delta_{mini}$. Le choc sera donc localisé très légèrement en dessous de sa position réelle. De même, on peut calculer la variation minimale $\Delta\rho_{mini}$ qui peut être mise en évidence: la différence de marche δ_{mini} est provoquée par une différence d'épaisseur optique $\Delta E_{mini} = e\Delta n_{mini} = \delta_{mini}/2$ où e est la distance parcourue par un des deux faisceaux à l'intérieur de la couche de choc. La loi de Gladstone-Dale $n - 1 = K \cdot \rho / \rho_s$ relie ρ à n et permet d'écrire $\Delta\rho_{mini} = \frac{\rho_s \delta_{mini}}{2eK}$. Si, pour une valeur de e donnée, les gradients de masse volumique sont plus faibles que $\Delta\rho_{mini}$, ils ne seront pas détectés.

5.2 Localisation du choc

La position des ondes de choc a été relevée à l'intrados et l'extrados pour les trois types d'ogive et pour trois incidences (figures 42 et 43). Afin de valider le dépouillement, on a également déterminé à chaque abscisse la position de la paroi des deux cotés de la maquette. Pour cela, il suffit de mesurer la zone noire 3 (figure 40) et l'un des deux dédoublements. Il suffit alors de comparer l'obstacle donné par la mesure avec celui défini par (4.6).

Position du choc sans incidence On constate sur les figures 44 et 45 que la théorie donne une position du choc plus proche de l'obstacle que l'expérience.

L'erreur correspond à environ 4% de l'épaisseur de la couche de choc et est quasiment invariable à l'égard de la loi de puissance n .

Dans le cas de l'ogive $n = 3/4$ nous avons exploité les résultats de la troisième partie de ce travail afin de prendre en compte les effets visqueux et plus particulièrement l'effet de déplacement de la couche limite. Le calcul de la couche limite à similitude interne effectué dans le cas d'une paroi adiabatique montre que l'épaisseur relative de l'obstacle efficace τ_{eff} est égale à 0.421 ce qui correspond à un épaissement du corps et donc de la couche de choc donnée par le modèle non visqueux de l'ordre de 6.2%. La figure 45b montre que le choc calculé à partir de l'obstacle efficace passe au dessus du choc donné par les interférogrammes. Il ne faut cependant pas oublier que les conditions expérimentales ne sont pas celles de l'adiabaticité et que lorsque la température de paroi diminue, l'épaisseur de déplacement décroît. Compte tenu de la courbe de la figure 34b, nous avons calculé la couche limite relative à une température de paroi égale à $500^\circ K$. Sur la figure 45b, les courbes relatives au choc mesuré et au choc calculé avec prise en compte de l'effet visqueux en paroi froide coïncident très exactement. Cela prouve en particulier que l'épaisseur de déplacement suit bien la même loi en puissance de x que le corps et que l'hypothèse paroi froide correspond bien à la situation dans une soufflerie à rafale de 10s sur une ogive métallique massive. Ces remarques confirment donc l'existence d'une couche limite à similitude interne pour cette ogive, du moins suffisamment loin du nez. De plus, cela montre que les variations de température sur l'avant corps n'affectent pas la similitude interne de la zone dépouillée où les variations de T suivant x peuvent être négligées. On voit cependant ici qu'il est primordial de déterminer plus finement la condition thermique de paroi dans les conditions expérimentales, notamment en mesurant ρ à la paroi.

Pour le cône ($n = 1$) et $\alpha = 0^\circ$ (figure 44b) les mesures coïncident exactement avec les polaires de choc même si on peut remarquer un décalage du choc vers le bas qui résulte en fait d'une légère incidence de l'écoulement amont.

On a vu d'une part que l'écart entre la théorie et l'expérience est de seulement 4% et que d'autre part, ce décalage est entièrement compensé, dans le cas $n = 3/4$, par la prise en compte de la couche limite. Si on regarde le développement de la forme du choc:

$$R(x, \theta) = \frac{\tau L}{2\lambda_0} \left(\frac{x}{L}\right)^n (1 + \varepsilon(\lambda_1 + \tilde{\zeta}\lambda_{12}) \cos \theta + \tilde{\zeta}\lambda_2 + \varepsilon^2(\lambda_{10} + \lambda_{11} \cos 2\theta) + \tilde{\zeta}^2\lambda_{22} + \dots)$$

cela signifie en particulier que le terme isotrope λ_{22} , non calculé à l'heure actuelle, est effectivement très petit devant 1.

Position du choc avec incidence Examinons maintenant la position du choc lorsque α n'est plus nul. La figure 46a montre que la solution du premier ordre prévoit que le décalage du choc change de sens avec n et que λ_1 reste toujours petit devant 1: pour $n > n^*$ le choc devrait se décaler vers le bas lorsque $\alpha > 0$. Il est évident sur la figure 47 que non seulement le choc se déplace toujours vers le haut

(même pour le cône), mais qu'il le fait d'une façon beaucoup plus marquée que ne le prévoit la théorie pour les autres valeurs de n .

En ce qui concerne le cône, les résultats théoriques de Doty et Rasmussen [17] expliquent cette contradiction. Ils ont calculé le déplacement du choc d'ordre 1 sous l'effet de l'incidence et ce, en fonction du paramètre $K = M_\infty \sin \tau$ où τ est le demi angle au sommet du cône. On constate que le choc se déplace vers le haut ($g > 0$) tant que K est inférieur à la valeur critique $K^* = 3.177$. C'est uniquement lorsque $K > K^*$ que le sens de déplacement s'inverse ($g < 0$). Dans les conditions de la campagne expérimentale à R3Ch on a $\tau = 11^\circ.3$ et $M_\infty = 9.95$ soit $K = 1.95$. On est donc dans la gamme de valeurs de la figure 46b où il est prévu que le choc se décale vers le haut conformément aux résultats expérimentaux. Pour mettre en évidence le phénomène décrit figure 46a il aurait fallu que $M_\infty > 15.89$. C'est donc la faiblesse relative de la valeur du nombre de Mach amont qui ne permet pas d'observer le décalage du choc vers le bas.

D'une manière plus générale, on peut reprendre l'explication à l'aide du développement (4.2). Considérons en effet le terme en facteur de ι dans le développement de R : il s'agit de $\lambda_1 + \check{\zeta}\lambda_{12}$. Comme λ_1 est toujours très petit devant 1, il suffit que λ_{12} soit de l'ordre de 1 pour que le terme du second ordre $\check{\zeta}\lambda_{12}$ l'emporte sur le terme du premier ordre λ_1 pour une valeur suffisante de $\check{\zeta}$. Comme l'expérience le montre, λ_{12} est positif, de sorte que le terme global $\iota(\lambda_1 + \check{\zeta}\lambda_{12})$, qui caractérise le décalage du choc dans le plan de symétrie, est positif dans nos trois configurations expérimentales et qu'il est largement supérieur au seul terme $\iota\lambda_1$. Pour parvenir à mettre en évidence l'effet du premier ordre seul, il faudrait que M_∞ soit voisin de 25 afin de réduire suffisamment $\check{\zeta}$. Ceci explique pourquoi l'effet d'ordre 1 est difficile à observer en soufflerie. En revanche, un calcul de type Euler suffisamment précis au voisinage du choc devrait être en mesure de le faire apparaître pour M_∞ suffisamment grand.

5.3 Coefficients globaux

Comme dans l'analyse de la position du choc, reprenons l'équation (4.4) qui donne le développement du coefficient de portance en fonction de la variable ι :

$$(5.1) \quad C_z = \iota(C_{1z} + \check{\zeta}C_{12z}).$$

La figure 48 montre les coefficients aérodynamiques bruts mesurés. Nous avons vu pourquoi le coefficient de traînée n'apparaît pas sur ces courbes. On constate que la dépendance en α des coefficients de portance et de moment de tangage est bien linéaire. On note cependant une légère distorsion des courbes pour les plus grandes valeurs de l'incidence. On limite donc l'analyse à la plage de variation -3° à $+3^\circ$ afin d'éliminer ce phénomène et de garder un nombre suffisant de points pour obtenir ces coefficients par une régression linéaire.

La figure 49 représente les variations de C_z/α et C_m/α en fonction de l'exposant n de la loi de puissance de l'ogive. On note une très bonne coïncidence entre les résultats théoriques et l'expérience puisque l'écart maximum qui se produit pour

le cône est de 4.7% sur la portance. Cela signifie que les coefficients d'ordre 2, en particulier C_{12z} dans (4.4) ont des valeurs absolues comparables à ceux du premier ordre, de sorte que les termes d'ordre 2 des développements de C_z et C_m sont effectivement petits devant les termes d'ordre 1. Comme le prévoit la théorie, on observe expérimentalement (figure 49a), une diminution de portance corrélative à l'augmentation de l'émoussement.

On constate par ailleurs une surestimation du coefficient de portance analytique non visqueux. Pour l'obstacle en loi de puissance $3/4$, on montre que la prise en compte de la couche limite induit une diminution du coefficient de portance. Notons que, pour cette ogive particulière et pour une température de paroi estimée à $500^\circ K$, l'effet de déplacement de la couche limite conduit à une diminution de l'ordre 10% du C_z qui n'est pas entièrement compensée par la contribution des frottements au C_z global. On obtiendrait une portance inférieure à celle mesurée. L'écart entre cette nouvelle estimation et l'expérience serait alors de 4%.

On pourrait également attribuer la diminution de portance à l'apparition d'un décollement d'extrados. Là encore la théorie de la couche limite de la troisième partie vient assurer que ce n'est pas le cas pour l'ogive $n = 3/4$ si l'on ne prend en compte, comme nous l'avons fait, que les incidences inférieures en valeur absolue à 3 degrés. De plus, comme nous le verrons, les mesures de pressions locales ne semblent pas affectées par un décollement.

La faible surestimation théorique du C_z fait apparaître un léger maximum sur la courbe du C_m théorique. En effet cet extremum apparaît sur la courbe représentative du coefficient de moment de tangage C_{mz}/α induit par le C_z théorique seul. La prise en compte de la partie due à la traînée C_{mx} rapproche considérablement les courbes expérimentales et théoriques. L'écart est maximum pour l'ogive en loi de puissance $3/4$, il est égal à 6.3%. Si on tient compte des effets visqueux, ce maximum disparaît et le coefficient de moment de tangage théorique rapporté à l'incidence devient égal à 0.641 contre 0.675 pour la mesure. Malheureusement notre théorie ne permet pas d'effectuer cette correction pour $n = 1$ et $n = 2/3$.

5.4 Pressions

Incidence géométrique nulle Dans un premier temps, on a déterminé pour chaque type de maquette l'ascendance α_0 et le dérapage β_0 naturels de l'écoulement amont. En effet, l'incidence géométrique nulle correspond à une légère incidence et un faible dérapage aérodynamiques. On obtient α_0 et β_0 en écrivant que les pressions théoriques doivent présenter les mêmes amplitudes de variation que les pressions mesurées et que la localisation de l'extrémum doit être identique dans les deux cas. Ce calage permet de corriger les incidences géométriques. L'incidence réelle α_{cor} dans le plan OAC (figure 50a) est la composition de $\alpha + \alpha_0$ et de β_0 :

$$\cos(\alpha_{cor}) = \cos(\alpha + \alpha_0) \cos(\beta_0).$$

L'angle θ_0 permet la distinction entre l'azimut expérimental θ_{exp} et théorique θ_{th}

(figure 50b) avec:

$$\tan \theta_0 = \frac{\tan \beta_0}{\tan(\alpha + \alpha_0)}.$$

Une fois cette correction effectuée, on obtient les courbes des figures 51 et 52a. On peut noter une très bonne concordance entre la mesure et la théorie puisque les écarts entre les deux sont constants et de l'ordre de 7%. Il est intéressant de remarquer que cette différence diminue lorsque l'érousement devient de plus en plus faible c'est à dire pour n croissant: pour le cône ($n = 1$) expérience et modèle coïncident si on ne tient pas compte des écarts imputables à de très légers défauts de surface. La figure 52a montre la répartition des pressions en fonction de θ pour 3 valeurs de x dans le cas $n = 3/4$. En la comparant avec la figure 52b où on tient compte des effets visqueux (Partie 3) pour une température de paroi de l'ordre de $500^\circ K$, on constate que la différence entre théorie et expérience est due à l'effet de déplacement de la couche limite.

Incidences non nulles Considérons maintenant les incidences plus fortes sur les figures 53 et 54a. Cette fois les écarts ne correspondent plus à une simple translation de la courbe théorique et il nous faut faire appel à la formulation analytique de la pression pour expliquer ce phénomène. D'après (4.3), la théorie donne à l'ordre 2:

$$(5.2) \quad p(x, r, \theta) = \frac{2n^2}{\gamma+1} \rho_\infty V_\infty^2 \frac{r^2}{x^2} \left(p_0 + \iota(p_1 + \tilde{\zeta} p_{12}) \cos \theta + \tilde{\zeta} p_2 + \iota^2(p_{10} + p_{11} \cos 2\theta) + \tilde{\zeta}^2 p_{22} + \dots \right)$$

Les différences entre la théorie calculée jusqu'à l'ordre 1 et l'expérience proviennent à la fois des termes à caractère isotrope, p'_0 , p'_2 , p'_{10} et p'_{22} et des termes anisotropes p'_{12} et p'_{11} . Le décalage isotrope, on l'a vu est expliqué pour la plus grande partie par le terme p'_0 . En effet, la figure 52b montre que p'_0 est corrigé par la prise en compte de l'épaisseur de déplacement de la couche limite dans le cas $n = 3/4$ sous l'hypothèse de paroi froide. Ainsi, pour de très faibles incidences la différence entre théorie et expérience est simplement isotrope.

Les différences non isotropes apparaissent pour une incidence plus élevée (figures 53 et 54). Elles sont dues presque exclusivement au terme p'_{11} . En effet, on a vu lors de la discussion portant sur les efforts aérodynamiques que le terme $\tilde{\zeta} C_{12z}$, proportionnel à $\tilde{\zeta} p'_{12}$, est petit devant C_{1z} lui même proportionnel à p'_1 . Si le développement théorique (4.3) est correct, l'erreur résiduelle entre la théorie d'ordre 1 et l'expérience est donc principalement de la forme $\iota^2 p'_{11} \cos 2\theta_{th}$.

Pour vérifier ce résultat on considère par exemple la figure 54a où on isole les courbes relatives à l'abscisse $x = 92mm$ (le raisonnement valant pour toute autre valeur de x). Le terme anisotrope théorique est nul pour $\theta_{exp} = \frac{\pi}{4} + \theta_0$ ou $\frac{3\pi}{4} + \theta_0$ ce qui permet l'évaluation de l'erreur isotrope. Une fois celle-ci annulée, on obtient l'erreur anisotrope (figure 54b). En $\theta_{exp} = \frac{\pi}{2} + \theta_0$, celle-ci doit être égale à $\iota^2 p'_{11}$ d'après (4.3). On peut alors effectuer une estimation de p'_{11} . En ajoutant le terme $\iota^2 p'_{11} \cos 2\theta_{th}$ ainsi estimé à la pression théorique corrigée de l'erreur isotrope (figure 54b), on obtient la figure 54c où les courbes théoriques et expérimentales coïncident parfaitement. On a donc montré que l'écart anisotrope entre le modèle et la mesure est bien de la forme

$p'_{11} \cos 2\theta$. Cette différence n'affecte pas le coefficient de portance car son effet global dans l'intégration sur le corps est nul. Ceci explique pourquoi les valeurs de C_z et de C_m restent bonnes jusqu'à des valeurs de α de l'ordre de 5° , alors que les pressions locales montrent déjà l'influence non négligeable des termes d'ordre 2.

De même, on voit que les termes isotropes sont très sensibles à l'effet de déplacement de la couche limite et on comprend pourquoi la valeur de la traînée non visqueuse peut différer fortement de la traînée réelle. Outre la traînée de frottement elle-même, il faut tenir compte de l'augmentation de l'obstruction sous l'effet de déplacement de la couche limite. Ces différences sont accessibles théoriquement sous l'hypothèse d'une parfaite similitude interne. Cela nécessite non seulement $n = 3/4$, mais encore que la température de paroi soit constante, condition plus difficile à réaliser expérimentalement et qui n'est sans doute pas vérifiée sur la partie avant de la maquette essayée ici. Sans nul doute cependant, le concept de similitude locale peut apporter une plus grande souplesse dans l'utilisation des résultats analytiques mais au prix d'une plus grande difficulté théorique.

Avant de conclure sur ce point, notons que rien dans les mesures de pression ne permet de supposer l'existence d'un décollement. Il se peut comme on le verra en détails dans la partie suivante, que celui-ci existe lorsque $\alpha = 4.7^\circ$ pour $x > 280mm$. Il est donc évident qu'il n'est pas détecté par nos mesures de pression puisque la dernière prise se situe à l'abscisse $x = 232mm$. Notons tout de même qu'un éventuel décollement n'affecterait qu'une zone réduite de la paroi où justement la pression est très voisine de p_∞ , c'est à dire une zone qui contribue peu à la portance. On peut donc dire que du point de vue des mesures d'efforts et de pressions, les essais effectués sont bien significatifs.

5.5 Dépouillement de la masse volumique

Dans un premier temps nous avons choisi de dépouiller la masse volumique autour du cône à incidence nulle pour pouvoir également comparer les résultats expérimentaux à ceux donnés en [18]. On rappelle que la masse volumique théorique est:

$$\rho = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \frac{1}{M_\infty^2 \sin^2 \sigma} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right)^{-1} \rho_\infty \rho_0^*$$

où ρ_0^* est une fonction de $\lambda = \frac{r}{R}$ qui ne dépend que de γ et de n . On se limite aux résultats théoriques du premier ordre, car il a été démontré [18] que les termes d'ordre supérieur ne peuvent être pris en compte que pour $M_\infty \geq 20$ si $\tau = 0.4$.

5.5.1 Méthode de déconvolution pour $\alpha = 0^\circ$

La méthode utilisée pour obtenir la répartition radiale de la masse volumique est celle proposée par Schardin [23]. Brièvement, un rayon r du milieu non homogène est divisé en N couronnes de même épaisseur. On remplace les variations continues de l'indice de réfraction par une succession de couronnes à valeurs constantes séparées

par des discontinuités. La solution du problème est obtenue d'une manière récursive: à chaque pas de calcul, la valeur de l'indice d'une couronne est déduite de celle de la couronne précédente. Le calcul s'effectue donc de l'écoulement extérieur non perturbé vers l'intérieur de la couche de choc, jusqu'à la paroi de la maquette. D'autre part, nous avons montré en (5.1.1) que le saut d'indice sur le choc n'est pas détecté tant que l'épaisseur d'intégration est inférieure à 1/100 de millimètre. Cette incertitude peut nuire à la précision de la méthode récursive. Ainsi, au cours du processus de déconvolution pour obtenir la masse volumique en aval du choc, on introduit la valeur de Δn_{choc} à une ordonnée qui correspond à celle de la position du choc donné par l'interférogramme à laquelle on ajoute 1/100 de mm.

5.5.2 Répartition radiale de la masse volumique pour $n = 1$ et $\alpha = 0^\circ$.

La figure 55a présente tout d'abord la comparaison entre la répartition radiale de la masse volumique obtenue par l'expérience et les calculs [18] et ce pour $x/L = 0.591$. La mesure interférométrique et la courbe théorique sont en accord ce qui montre que la technique qui consiste à imposer la valeur expérimentale de Δn_{choc} semble fiable. La théorie sous-estime très légèrement le saut de masse volumique à la traversée du choc, ainsi que l'amplitude de la variation de ρ dans la couche de choc. Ceci est facilement explicable puisque la théorie prédit une pente de choc plus faible que l'expérience et la valeur du nombre de Mach $M_\infty = 9.95$ nous interdit de prendre en compte les termes d'ordre 2 représentatifs de l'effet de p_∞ . La figure 55b regroupe les résultats du dépouillement à toutes les abscisses choisies et on peut ainsi suivre l'évolution de la répartition radiale de la masse volumique dans la couche de choc. Ces répartitions sont obtenues à l'aide des données fournies dans la zone 6 de l'interférogramme. Lorsqu'on se déplace sur ces courbes de la droite vers la gauche, on passe de la valeur $\rho/\rho_\infty = 1$ à la valeur de ρ/ρ_∞ sur le choc. On peut voir ensuite que la masse volumique augmente dans la couche de choc jusque sur l'obstacle. Le dernier point à gauche de chaque courbe donne la valeur de la masse volumique sur l'obstacle.

5.5.3 Répartition radiale de la masse volumique pour $n = 2/3$ et $\alpha = 0^\circ$

L'interférogramme de l'écoulement sans incidence autour de la maquette 2/3 a été également dépouillé, les résultats sont présentés sur la figure 56a. Les données proviennent de la zone 7 de l'interférogramme. Nous avons choisi cette configuration pour illustrer les précautions à prendre pendant l'enregistrement. Dans ce cas, le biprisme était positionné au centre de courbure du miroir sphérique et la teinte de fond correspondait à la frange centrale blanche. Ainsi, des déviations lumineuses de signe opposés produisent des teintes identiques et il n'est plus possible de connaître le sens de variation de l'indice. La figure 56a montre le dépouillement dans le cas où les déviations lumineuses sont supposées négatives puis positives pour la figure 56b. C'est la théorie qui permet de trancher dans ce cas: la figure 56a correspond à la

réalité. Pour les autres enregistrements ($n = 3/4$ et $n = 1$) nous avons veillé à ne pas nous retrouver devant ce type de configuration.

Conclusion

Le modèle théorique a été comparé avec succès avec les expériences. Les différences apparues peuvent être expliquées par les résultats analytiques et indiquent ceux des termes d'ordre 2 dont l'effet est rapidement décelable. Il apparaît par exemple que le problème d'indice 12 est primordial dans l'évaluation de la position du choc mais négligeable pour celle des pressions sur le corps. En revanche, le terme d'indice 11 se révèle nécessaire à une détermination fine des pressions de paroi dès que l'incidence devient comparable à la pente locale du choc.

Quant à la masse volumique, on a vu que l'impossibilité de prendre en compte l'ordre 2 réduit considérablement la champ de la discussion. Nous avons cependant élaboré une méthode de déconvolution (Annexe E) qui suppose que, pour de faibles incidences, le développement de ρ en petites perturbations est correcte en première approximation:

$$(5.3) \quad \rho = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \frac{1}{M_\infty^2 \sin^2 \sigma} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right)^{-1} \rho_\infty (\rho_0^* + \iota \rho_1^*).$$

La méthode présentée a l'avantage de rester valable même lorsque l'écoulement n'est plus méridien. Si elle peut être mise en œuvre, elle pourra permettre de valider (5.3).

Signalons enfin que cette confirmation de la théorie par l'expérience valide du même coup tous les résultats analytiques non discutés ici, comme l'influence de γ sur les coefficients globaux, les équations des surfaces de courant, la faible influence de p_∞ sur les pressions pariétales et la couche limite, etc... [19][24].

On peut concevoir qu'une solution tridimensionnelle analytique confirmée par l'expérience puisse servir de test à des codes de calcul, dans la mesure bien sûr où on désire les confronter à des réalités et non simplement les comparer entre eux.

Partie III

Couche limite tridimensionnelle à similitude interne

Notations particulières

A, A'	Paramètres d'interaction visqueuse définis dans (7.28)
C	Constante définie par (7.14)
C_{xe}	Coefficient de traînée non visqueuse défini en (9.22)
C'_{xe}	Coefficient de traînée non visqueuse rapporté à l'obstacle efficace (9.24)
C_{xv}	Coefficient de traînée visqueuse (9.14)
C_{ze}	Coefficient de portance non visqueuse défini en (9.25)
C'_{ze}	Coefficient de portance non visqueuse rapporté à l'incidence efficace (9.26)
C_{zv}	Coefficient de portance visqueuse (9.16)
f	Fonction inconnue définie par (7.4)
g	Fonction inconnue définie par (7.4)
h	Enthalpie
I_e, I_{1e}	Constantes de calcul (7.27)(8.26)
K	$\frac{r^2}{R'^2}$
L	Longueur de l'obstacle
M_∞	Nombre de Mach à l'infini amont
n	Exposant de la loi de puissance de l'obstacle
N, N_1	Constantes sans dimensions données par (7.8)(8.10)
p	Pression
\wp	Nombre de Prandtl
q	Flux de chaleur à la paroi (9.17)
r, θ	Coordonnées cylindriques
\Re	Nombre de Reynolds
R, R'	Rayons respectifs du choc et de l'obstacle
s, Y, θ	Coordonnées curvilignes définies figure 58a
T	Température
t	Fonction inconnues définie par (8.6)
u, v, V	Composantes de la vitesse définies figure 58a
x, x_1, y, z	Coordonnées cartésiennes définies figure 58a
α	Incidence
$\bar{\alpha}$	Angle défini figure 58b
α_{eff}	Incidence efficace définie figure 58b
β	Fonction introduite par (7.8)
δ, δ^*	Épaisseur et épaisseur de déplacement de la couche limite
δ_e	Épaisseur de la couche de choc
Δ	Expression (8.11)
η^*, ξ^*	Variables dans la transformation de Lees-Dorotnitsyn (7.4)
γ	Rapport des chaleurs spécifiques
ι	Variable représentative de l'effet d'incidence
μ	Viscosité dynamique
ρ	Masse volumique
τ	Épaisseur relative de l'obstacle
τ_{eff}	Épaisseur relative de l'obstacle efficace

τ_p	Cisaillement longitudinal à la paroi défini en (9.13)
τ_t	Cisaillement transversal à la paroi défini en (9.15)

L'indice 0 est attribué au problème méridien dans le chapitre (7).

L'indice 1 correspond aux grandeurs relatives à l'effet d'incidence.

L'indice eff concerne les grandeurs efficaces, c'est à dire celles qui sont relatives au problème non visqueux, avec prise en compte de l'effet de déplacement de la couche limite.

L'indice c est relatif au choc.

L'indice e désigne l'écoulement extérieur.

L'indice m est attribué aux valeurs caractéristiques de la couche limite.

L'indice p concerne les grandeurs de la couche limite relatives à la paroi de l'obstacle.

La dérivation d'une fonction f par rapport à la variable μ est notée f_μ .

Introduction

Jusqu'à présent, nous avons traité d'écoulements compressibles de fluides parfaits idéaux (explosions violentes, hypersonique des petites perturbations). La partie précédente a montré que l'on dispose d'une solution analytique confirmée par l'expérience pour décrire une classe d'écoulements hypersoniques non visqueux autour d'ogives axisymétriques élancées [25][26]. Il était alors naturel d'essayer d'étendre ce type de solution aux écoulements visqueux pour les corps en loi de puissance.

Les travaux de Mirels et Ellinwood [27] ainsi que ceux de Yasuhara [28] démontrant l'existence d'une solution analytique pour la couche limite à symétrie de révolution se développant sur l'ogive en loi de puissance $3/4$, nous avons cherché s'il n'en était pas de même pour le cas tridimensionnel. Nous montrerons qu'une telle solution analytique existe en utilisant la forme du modèle non visqueux [19], et en prolongeant les hypothèses formulées pour la couche limite axisymétrique [29]. Nous présenterons une méthode originale de résolution des équations mises en évidence qui prend notamment en compte l'évolution de la température dans la couche limite. La théorie alors développée sera exploitée pour deux configurations: l'une expérimentale tirée de la campagne d'essais dans la soufflerie hypersonique de l'ONERA R3Ch, l'autre pour un nombre de Mach $M_\infty = 12$ destinée à évaluer la sensibilité de la couche limite à ce paramètre. Cette solution analytique représente un cas test précieux pour les codes de calcul en hypersonique froid.

Chapitre 6

Généralités

L'air est considéré comme un gaz thermodynamiquement parfait de rapport de chaleurs spécifiques γ . On étudie la couche limite tridimensionnelle se développant autour d'ogives axisymétriques placées à faible incidence en écoulement hypersonique. On désignera par δ et δ^* respectivement l'épaisseur et l'épaisseur de déplacement de la couche limite. Nous nous placerons dans le cas limite où M_∞ tend vers l'infini. En effet, en hypersonique fort, les valeurs de la pression sur l'obstacle pour M_∞ fini mais assez grand sont très voisines de celles obtenues dans ce cas limite [18][30][31].

Avec les notations de la figure 58a, nous écrirons les équations de la couche limite dans le repère $(\vec{O}s, \vec{O}Y, \vec{O}s \wedge \vec{O}Y)$ en fonction des variables s , abscisse curviligne du point de paroi, θ et Y . On pose $r = R'$ sur le corps Σ' . On a alors les relations géométriques suivantes:

$$(6.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = x_1 - \frac{Y R'_{x_1}}{\sqrt{1+R'^2_{x_1}}} \\ \mathcal{R}_{L1} = \frac{(1+R'^2_{x_1})^{3/2}}{R'_{x_1} x_1} \\ m_s = 1 - \frac{Y}{\mathcal{R}_{L1}} \\ m_\theta = r \\ m_Y = 1 \end{array} \right.$$

où \mathcal{R}_{L1} désigne le rayon de courbure longitudinal en x_1 et où les m_i sont les coefficients de la métrique.

Nous nous plaçons dans le cas de corps élancés en loi de puissance d'équation:

$$R' = \frac{\tau L}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^n$$

avec

$$2/3 \leq n \leq 1.$$

Dans ces conditions, l'émoussement est faible et on peut simplifier la métrique dès qu'on s'écarte de l'origine à condition que le corps soit suffisamment élancé. On peut alors poser:

$$(6.2) \quad m_s = 1 \quad m_\theta = r \quad m_Y = 1$$

et confondre s , x_1 et x . Par exemple si $\tau \leq 0.44$ ceci est valable pour $\frac{x}{L} \geq 0.1$. En fait, cette simplification ne découle pas simplement des formules (6.1), mais également de l'étude des dégénérescences des équations de Navier-Stokes où apparaissent non seulement les m_i mais encore leurs dérivées jusqu'à l'ordre 2. Cette analyse, trop longue pour être reproduite ici, montre que le concept de couche limite ne s'applique pas à l'émoussement. Ainsi, comme dans le cas non visqueux, les développements théoriques qui suivent sont valables sous l'hypothèse que l'émoussement est suffisamment faible pour que ses conséquences sur la couche limite en aval soient imperceptibles. Ceci n'a rien d'exceptionnel puisque dans les cas les plus classiques de couches limites à similitude interne, comme celle de Blasius, on fait implicitement ce genre d'hypothèse.

Cependant, dans le cas des corps élancés en hypersonique, une difficulté particulière apparaît dans l'application du concept de couche limite sur la partie élancée de l'obstacle. Sans entrer dans les détails, nous pouvons l'illustrer de la façon suivante. Récapitulons les hypothèses du problème:

- Corps élancé: $R'_x{}^2 \ll 1$,
- Hypersonique fort: $M_\infty^2 R'_x{}^2 \gg 1$,
- Couche limite: $\Re_s \frac{\delta^2(s)}{L^2} \sim 1$ à l'issue de l'émoussement, \Re_s étant le nombre de Reynolds formé avec s et la vitesse au loin.

On sait qu'en hypersonique fort, sur les corps élancés, la pression à la paroi est proportionnelle à $R'_x{}^2$ à condition de négliger l'effet de déplacement de la couche limite. Se pose donc le problème du rapport entre les pentes δ_x et R'_x . Pour pouvoir utiliser la solution du problème non visqueux à l'extérieur de la couche limite, il faut $\delta/L \ll R'_x$, ce qui nécessite que le nombre de Reynolds \Re_s soit très grand. En fait, avec des valeurs réalistes de τ et de M_∞ , on devrait avoir des nombres de Reynolds de l'ordre de 10^8 à l'issue de l'émoussement pour pouvoir considérer que δ_x est négligeable devant R'_x . Dans ce cas, la couche limite n'est plus laminaire et la théorie ci-dessous ne s'applique plus. On est donc contraint d'envisager le cas du couplage de la couche limite avec l'écoulement extérieur. La pression dans la couche limite est alors proportionnelle à $(R'_x + \delta_x^*)^2$.

Avec les hypothèses précédentes et les conventions de la figure 58a, les équations de la couche limite s'écrivent:

$$(6.3) \quad \frac{\partial(\rho Vr)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho ur)}{\partial Y} = 0$$

$$(6.4) \quad \rho \left(V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{v}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} + u \frac{\partial V}{\partial Y} - \frac{R'_x}{r} v^2 \right) = -\frac{\partial p_e}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial Y} \left(r \mu \frac{\partial V}{\partial Y} \right)$$

$$(6.5) \quad \rho \left(V \frac{\partial(rv)}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial \theta} + ur \frac{\partial v}{\partial Y} \right) = -\frac{\partial p_e}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial Y} \left(r \mu \frac{\partial v}{\partial Y} \right)$$

$$(6.6) \quad \rho \left(rV \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial \theta} + ru \frac{\partial H}{\partial Y} \right) =$$

$$\frac{1}{\wp} \frac{\partial}{\partial Y} \left(r^\mu \frac{\partial H}{\partial Y} \right) - \left(\frac{1}{\wp} - 1 \right) \left[\frac{\partial}{\partial Y} \left(r^\mu \frac{\partial \left(\frac{V^2}{2} + \frac{v^2}{2} \right)}{\partial Y} \right) \right]$$

où $H = C_p T + \frac{1}{2}(V^2 + v^2)$ et $p = \mathcal{R} \rho T$, \mathcal{R} étant la constante de l'air. Le nombre de Prandtl \wp est considéré constant. On a, en plus:

$$\frac{\partial p}{\partial Y} = 0.$$

Les conditions aux limites sont:

- Pour $Y \rightarrow \infty$: $V = V_e = V_\infty$, puisque l'écoulement extérieur est donné dans le cadre de la théorie des petites perturbations en hypersonique; On a encore $v = v_e$ et $H = H_e$.
- Pour $Y = 0$: $V = u = v = 0$, et une condition énergétique de paroi: $H = H_p$.

Nous n'aurons pas besoin de conditions en $x = 0$ puisque nous allons chercher des solutions à similitude interne.

Chapitre 7

Cas de l'écoulement méridien

Ce cas est caractérisé par les relations $v = 0$ et $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$. On obtient alors les équations suivantes:

$$(7.1) \quad \frac{\partial(\rho V r)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u r)}{\partial Y} = 0$$

$$(7.2) \quad \rho \left(V \frac{\partial V}{\partial x} + u \frac{\partial V}{\partial Y} \right) = -\frac{dp_e}{dx} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial Y} \left(r \mu \frac{\partial V}{\partial Y} \right)$$

$$(7.3) \quad \rho \left(r V \frac{\partial H}{\partial x} + r u \frac{\partial H}{\partial Y} \right) = \frac{1}{\wp} \frac{\partial}{\partial Y} \left(r \mu \frac{\partial H}{\partial Y} \right) - \left(\frac{1}{\wp} - 1 \right) \left[\frac{\partial}{\partial Y} \left(r \mu \frac{\partial V^2}{\partial Y} \right) \right]$$

où $H = C_p T + \frac{1}{2} V^2$ et $p = \mathcal{R} \rho T$, \mathcal{R} étant la constante de l'air. On a encore

$$\frac{\partial p}{\partial Y} = 0.$$

Etudions les conditions d'existence d'une similitude interne à ce système. Pour cela nous utiliserons la transformation de Lees [27][28][34] telle que:

$$(7.4) \quad \xi^* = \int_0^x \rho_p \mu_p V_\infty R'^2 dx, \eta^* = \frac{V_\infty}{\sqrt{2\xi^*}} \int_0^Y \rho r dy, g = \frac{H}{H_e}, V = V_\infty f_{\eta^*}.$$

Les équations (7.1) à (7.3) deviennent:

$$(7.5) \quad r \rho u = - \left[\left(\sqrt{2\xi^*} f_{\xi^*} + \frac{f}{\sqrt{2\xi^*}} \right) \frac{d\xi^*}{dx} + \sqrt{2\xi^*} f_{\eta^*} \frac{\partial \eta^*}{\partial x} \right]$$

$$(7.6) \quad \frac{\rho_e}{\rho} = \frac{H_e}{h_e} (g - f_{\eta^*}^2) + f_{\eta^*}^2 \text{ le dernier terme étant négligeable en hypersonique}$$

$$(7.7) \quad [NK f_{\eta^* \eta^*}]_{\eta^*} + f f_{\eta^* \eta^*} + 2\beta [g - f_{\eta^*}^2] = 2\xi^* (f_{\eta^*} f_{\xi^* \eta^*} - f_{\xi^*} f_{\eta^* \eta^*})$$

où:

$$(7.8) \quad N = \frac{\rho \mu}{\rho_p \mu_p}, \quad \beta = -\frac{2H_e \xi^*}{C_p T_e \rho_e V_\infty^2} \frac{\partial p_e}{\partial \xi^*}$$

$$(7.9) \quad \frac{1}{\varnothing} [NKg_{\eta^*}]_{\eta^*} + 2 \left(\frac{1}{\varnothing} - 1 \right) [KNf_{\eta^*}f_{\eta^*\eta^*}]_{\eta^*} + fg_{\eta^*} = 2\xi^* (f_{\eta^*}g_{\xi^*} - f_{\xi^*}g_{\eta^*})$$

avec:

$$K = \frac{r^2}{R'^2}.$$

Les conditions aux limites sont:

$$(7.10) \quad \begin{aligned} f = f_{\eta^*} = 0 & , g = g_p \quad \text{pour } \eta^* = 0 \\ f_{\eta^*} = 1 & , g = 1 \quad \text{pour } \eta^* \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Pour qu'il y ait similitude interne, il suffit que:

- N , β et K soient fonctions de η^* exclusivement ou constantes,
- $g_p = cste$.

Cette dernière condition correspond à une température de paroi T_p constante puisque

$$(7.11) \quad g_p = \frac{H_p}{H_e} \simeq \frac{2C_p T_p}{V_\infty^2}.$$

D'autre part, N s'écrit:

$$N = \left(\frac{T_p + S}{T_p^{1/2}} \right) \left(\frac{T^{1/2}}{T + S} \right)$$

où S est une constante voisine de $120^\circ K$ d'après la loi de Sutherland. Si T varie peu dans la couche limite on pourra considérer que N est partout égal à une constante N_m telle que:

$$(7.12) \quad N_m = \left(\frac{T_p + S}{T_p^{1/2}} \right) \left(\frac{T_m^{1/2}}{T_m + S} \right)$$

où T_m est une température caractéristique dans la couche limite. Dans ces conditions, on a:

$$(7.13) \quad \frac{\mu}{\mu_\infty} = C \frac{T}{T_\infty}$$

C étant une constante donnée par:

$$(7.14) \quad C = \left(\frac{T_m}{T_\infty} \right)^{1/2} \left(\frac{T_\infty + S}{T_m + S} \right).$$

La formule (7.13) est une approximation classique de la loi de Sutherland: sa précision, excellente dans la zone proche de la paroi, [35][36] dépend du choix empirique de T_m . Les résultats de Cheng [37] suggèrent le choix suivant:

$$(7.15) \quad \frac{T_m}{T_{i\infty}} = (g_{p0} + 3g_p)/6$$

où $T_{i\infty}$ est la température génératrice de l'écoulement amont et g_{p0} la valeur de g_p dans le cas d'une paroi adiabatique ($\frac{\partial T}{\partial \eta^*}|_{\eta^*=0} = 0$), c'est à dire pour des solutions telles que $\frac{\partial g_p}{\partial \eta^*}|_{\eta^*=0} = 0$ d'après (7.11). Cependant, il est clair que le choix le plus judicieux pour T_m est celui qui approxime de la meilleure manière possible la loi de Sutherland:

$$(7.16) \quad \frac{\mu}{\mu_\infty} = \left(\frac{T}{T_\infty}\right)^{1/2} \left(\frac{T_\infty + S}{T + S}\right) \frac{T}{T_\infty}.$$

En rapprochant cette expression de (7.13), on constate que le choix optimum pour C et donc pour T_m est celui qui minimise l'expression:

$$(7.17) \quad \left\| C - \left(\frac{T}{T_\infty}\right)^{1/2} \left(\frac{T_\infty + S}{T + S}\right) \right\|$$

sur l'étendue de la couche limite. C'est le cas si on prend

$$(7.18) \quad C = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \left(\frac{T}{T_\infty}\right)^{1/2} \left(\frac{T_\infty + S}{T + S}\right) dY.$$

La température caractéristique T_m est tirée de (7.14) et on en déduit N_m par application de (7.12). Notons que N_m correspond effectivement à la moyenne de N dans la couche limite. Nous verrons que ce choix et (7.15) conduisent à des résultats similaires dans le cas de l'écoulement méridien pour des parois froides.

Intéressons nous maintenant au paramètre β . Relions tout d'abord $\rho_p \mu_p$ à la pression extérieure p_e afin de simplifier l'expression de ξ^* donnée en (7.4). D'après (7.13) et la définition de N (7.8), on a:

$$(7.19) \quad \mu_p = C \mu_\infty \frac{T_p}{T_\infty}.$$

Comme $p_p = p_e$, on a $T_p = p_e / \mathcal{R} \rho_p$ ce qui donne:

$$(7.20) \quad \rho_p \mu_p = \frac{C \mu_\infty}{\mathcal{R} T_\infty} p_e.$$

Il vient alors pour ξ^* :

$$(7.21) \quad \xi^* = \frac{C \mu_\infty V_\infty}{\mathcal{R} T_\infty} \int_0^x p_e R'^2 dx.$$

De plus, en remarquant qu'en hypersonique fort le rapport $\frac{H_e}{h_e}$ est très voisin de $\frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2$ qui est très grand devant 1, on obtient pour β la forme plus explicite:

$$(7.22) \quad \beta = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\int_0^x p_e R'^2 dx}{p_e^2 R'^2} \frac{dp_e}{dx}.$$

Comme cette expression ne dépend que de x , il n'y a similitude interne que si β est une constante. C'est bien le cas si R' est en x^n et p_e en x^ν car alors:

$$(7.23) \quad \beta = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\nu}{\nu+2n+1}$$

Or, nous savons que si l'épaisseur effective du corps τ_{eff} croît en x^n , la pression pariétale est donnée de façon satisfaisante, en dehors de la zone de l'émoussement, par une loi en x^ν [18][19], avec

$$(7.24) \quad \nu = 2(n - 1).$$

Par ailleurs:

$$\tau_{eff} = \frac{2}{L}(R' + \delta^*).$$

Il est donc évident que la similitude interne ne sera possible que si δ^* suit également une loi de puissance en x^n . Calculons δ^* .

On a:

$$\int_0^{\delta^*} \rho_e V_\infty r dY = \int_0^\delta (\rho_e V_\infty - \rho V) r dY.$$

On a $r = R' + Y$ en vertu de l'hypothèse de corps élancé et $\frac{H_a}{h_e} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2$. Il vient:

$$(7.25) \quad \frac{\delta^*}{R'} + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta^*}{R'} \right)^2 = \frac{(\gamma-1)\sqrt{2\xi^*}}{2\rho_e V_\infty R'^2} M_\infty^2 \int_0^{\eta_\delta^*} (g - f_{\eta^*}^2) d\eta^* + \frac{\sqrt{2\xi^*}}{\rho_e V_\infty R'^2} \int_0^{\eta_\delta^*} (g - f_{\eta^*}) d\eta^*$$

où η_δ^* est la valeur de η^* au raccord avec l'écoulement extérieur. Les intégrales précédentes sont convergentes puisque g et f_{η^*} tendent vers 1 à l'extérieur de la couche limite. Comme on le fait traditionnellement, on remplace η_δ^* par l'infini et on écrit:

$$(7.26) \quad \frac{\delta^*}{R'} + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta^*}{R'} \right)^2 = \frac{A}{2} I_e + \frac{A'}{2} I'_e$$

où I_e et I'_e sont:

$$(7.27) \quad I_e = \int_0^\infty (g - f_{\eta^*}^2) d\eta^*, \quad I'_e = \int_0^\infty (g - f_{\eta^*}) d\eta^*.$$

La résolution de (7.26) permet d'obtenir:

$$(7.28) \quad \frac{\delta^*}{R'} = \sqrt{1 + A I_e + A' I'_e} - 1.$$

Pour que δ^* suive la même loi de puissance que R' , il faut que A soit constant. On a alors $A' = \frac{2A}{(\gamma-1)M_\infty^2}$. En explicitant ξ^* dans A , on obtient:

$$(7.29) \quad A = (\gamma - 1) \sqrt{\frac{2}{\gamma} \frac{\sqrt{\rho_\infty V_\infty^2}}{p_e} \frac{L^2}{R'^2} M_\infty^2} \sqrt{\frac{C}{\Re_\infty}} \sqrt{\int_0^{x/L} \frac{R'^2}{p_e L^2} d\hat{x}}$$

où $\Re_\infty = \frac{\rho_\infty V_\infty L}{\mu_\infty}$.

Dans le cas où R' et p_e sont en loi de puissance on obtient l'expression

$$(7.30) \quad A = \frac{(\gamma - 1) \sqrt{\rho_\infty V_\infty^2}}{\sqrt{\nu + 2n + 1}} \sqrt{\frac{2}{\gamma}} M_\infty^2 \sqrt{\frac{C}{\Re_\infty}} \frac{L}{R'} \left(\frac{x}{p_e L} \right)^{1/2}$$

qui est elle-même une loi de puissance en $x^{(\frac{1-\nu}{2}-n)}$. Pour qu'il y ait similitude interne il faut donc que:

$$1 - \nu = 2n.$$

En rapprochant cette expression de (7.24), on trouve que la seule valeur de n qui convienne est $n = 3/4$, pour laquelle on a $\nu = -1/2$ et $\beta = \frac{\gamma-1}{4\gamma}$.

Il reste cependant à vérifier que K est indépendant de ξ^* dans ces conditions. Or d'une façon générale:

$$K = \frac{r^2}{R'^2} = 1 + \frac{2Y}{R'}$$

à des termes d'ordre δ^2 près. On peut écrire:

$$r \frac{\partial Y}{\partial \eta^*} = \frac{\sqrt{2\xi^*} \rho_e}{\rho_e V_\infty \rho}.$$

Avec $r = R' + Y$ et à ξ^* constant, on obtient:

$$\left[\frac{1}{2}(Y + R')^2 \right]_0^{\eta_\delta^*} = \frac{\sqrt{2\xi^*}}{\rho_e V_\infty} \int_0^{\eta_\delta^*} \frac{\rho_e}{\rho} d\eta^*.$$

En tenant compte de (7.6) il vient:

$$\frac{Y}{R'} + \frac{1}{2} \left(\frac{Y}{R'} \right)^2 = \frac{(\gamma-1)\sqrt{2\xi^*}}{2\rho_e V_\infty R'^2} M_\infty^2 \int_0^{\eta^*} (g - f_{\eta^*}^2) d\eta^* + \frac{\sqrt{2\xi^*}}{\rho_e V_\infty R'^2} \int_0^{\eta^*} g d\eta^*.$$

Pour $Y = \delta$, on obtient:

$$(7.31) \quad \frac{\delta}{R'} + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{R'} \right)^2 = \frac{(\gamma-1)\sqrt{2\xi^*}}{2\rho_e V_\infty R'^2} M_\infty^2 \int_0^{\eta_\delta^*} (g - f_{\eta^*}^2) d\eta^* + \frac{\sqrt{2\xi^*}}{\rho_e V_\infty R'^2} \int_0^{\eta_\delta^*} g d\eta^*.$$

On constate que la différence entre cette expression et (7.25) est $\frac{\sqrt{2\xi^*}}{\rho_e V_\infty R'^2} \int_0^{\eta_\delta^*} f_{\eta^*} d\eta^*$. δ est donc supérieure à δ^* d'un terme d'ordre $\frac{1}{M_\infty^2}$ près. C'est un résultat classique en hypersonique. Cependant, on remarque que la dernière intégrale de (7.31) n'est pas convergente. On ne peut donc pas y remplacer η_δ^* par l'infini. On définit alors η_δ^* conventionnellement par le critère $\eta^* = \eta_\delta^*$ si $|g - 1| < 0.01$. Notons que pour η_δ^* fixé on peut négliger la seconde intégrale par rapport à la première si $M_\infty^2 \gg 1$. Dès lors, on obtient à des termes d'ordre supérieur près:

$$\frac{\delta}{R'} = \frac{\delta^*}{R'} = \sqrt{1 + AI_e} - 1 \simeq \frac{1}{2} AI_e \text{ en faible interaction visqueuse.}$$

Avec la même approximation on a:

$$K = 1 + A \int_0^{\eta^*} (g - f_{\eta^*}^2) d\eta^*.$$

qui est indépendant de ξ^* puisque A est constant comme l'a montré le calcul de δ^* . En conclusion, nous trouvons que seules les ogives élancées en puissance $n = 3/4$ admettent une solution à similitude interne pour la couche limite axisymétrique, à condition que la température de paroi soit constante et en admettant une approximation linéaire de la loi de Sutherland. Ce résultat a été établi pour la première fois en [38]. Nous allons maintenant montrer que cette propriété s'étend au cas où ces mêmes ogives sont placées à faible incidence, donc en écoulement tridimensionnel.

Chapitre 8

Cas des faibles incidences

De même qu'à l'ordre 0, on tient compte du couplage visqueux-non visqueux. Comme nous le montrerons, la mise en incidence provoque un déplacement d'ordre 1 de l'obstacle efficace qui peut être assimilé à une modification de l'incidence (figure 58b). En notant α_{eff} l'incidence apparente, la variable représentative de l'effet d'incidence est [18][19] :

$$\iota = \frac{\alpha_{eff}}{R_{effx}},$$

R_{effx} étant la pente effective du choc qui tient compte de l'épaisseur de déplacement de la couche limite. On précisera ultérieurement cet aspect, ainsi que la relation entre α_{eff} et α .

L'écoulement extérieur peut alors se mettre sous la forme:

$$\begin{aligned} p_e &= p_{0e} + \iota p_{1e} \cos \theta \\ u_e &= u_{0e} + \iota u_{1e} \cos \theta \\ v_e &= \iota v_{1e} \sin \theta \\ V_e &= V_\infty \\ \rho_e &= \rho_{0e} + \iota \rho_{1e} \cos \theta. \end{aligned}$$

Il est donc raisonnable de chercher la solution pour la couche limite de la même manière:

$$(8.1) \quad \begin{aligned} p &= p_0 + \iota p_1 \cos \theta \\ u &= u_0 + \iota u_1 \cos \theta \\ v &= \iota v_1 \sin \theta \\ V &= V_0 + \iota V_1 \cos \theta \\ \rho &= \rho_0 + \iota \rho_1 \cos \theta \end{aligned}$$

où les grandeurs d'indice 0 et 1 sont des fonctions de x et r .

La méthode des petites perturbations précédente est valable pour tout type d'obstacle élané. Cependant, seul le cas des corps en loi de puissance $n = 3/4$ permet d'envisager une similitude interne pour le problème d'indice 1. En effet, c'est le seul cas où, d'après la section précédente, R_{effx} suit une loi de puissance en première approximation. Cette propriété assure le découplage des problèmes d'indice 0 et 1 pour les équations de la couche limite tridimensionnelle. Dans les autres cas, les équations d'indice 1 contiennent des termes en $\frac{\partial \log \iota}{\partial x}$ non indépendants de ι .

Dans ce cas précis, le découplage des équations assure que la dépendance des fonctions en θ est bien écrite à des termes d'ordre ε^2 près. On obtient ainsi, pour tout θ et ε , les équations (7.1) à (7.3) pour l'indice 0, et les équations suivantes pour l'indice 1:

$$(8.2) \quad \frac{\partial [r(\rho_1 V_0 + \rho_0 V_1)]}{\partial x} + \frac{\partial [r(\rho_1 u_0 + \rho_0 u_1)]}{\partial Y} + \rho_0 v_1 + \frac{r}{4x}(\rho_1 V_0 + \rho_0 V_1) = 0$$

$$(8.3) \quad \rho_0 \left[V_0 \frac{\partial V_1}{\partial x} + u_0 \frac{\partial V_1}{\partial Y} + \frac{V_0 V_1}{4x} \right] + (\rho_0 V_1 + \rho_1 V_0) \frac{\partial V_0}{\partial x} + (\rho_0 u_1 + \rho_1 u_0) \frac{\partial V_0}{\partial Y} \\ = -\frac{dp_1}{dx} - \frac{p_1}{4x} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial Y} \left(\mu_0 r \frac{\partial V_1}{\partial Y} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\mu_1 r \frac{\partial V_0}{\partial Y} \right) \right]$$

$$(8.4) \quad \rho_0 \left[V_0 \frac{\partial (rv_1)}{\partial x} + \frac{rV_0 v_1}{4x} + u_0 r \frac{\partial v_1}{\partial Y} \right] = p_1 + \frac{\partial}{\partial Y} \left(r \mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial Y} \right)$$

$$(8.5) \quad r \rho_0 \left(V_0 \frac{\partial H_1}{\partial x} + u_0 \frac{\partial H_1}{\partial Y} + \frac{V_0 H_1}{4x} \right) + r(\rho_0 V_1 + \rho_1 V_0) \frac{\partial H_0}{\partial x} \\ + r(\rho_0 u_1 + \rho_1 u_0) \frac{\partial H_0}{\partial Y} = \frac{1}{\varphi} \left[\frac{\partial}{\partial Y} \left(r \mu_0 \frac{\partial H_1}{\partial Y} + r \mu_1 \frac{\partial H_0}{\partial Y} \right) \right] \\ - \left(\frac{1}{\varphi} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial Y} \left[r \left(\mu_0 \frac{\partial (V_0 V_1)}{\partial Y} + \mu_1 \frac{\partial (V_0^2/2)}{\partial Y} \right) \right],$$

avec, en plus :

$$\frac{\partial p_1}{\partial Y} = 0.$$

Dans ces équations on a posé:

$$\begin{aligned} H &= H_0 + \varepsilon H_1 \cos \theta & \mu &= \mu_0 + \varepsilon \mu_1 \\ H_0 &= h_0 + \frac{V_0^2}{2} & H_1 &= h_1 + V_0 V_1 \\ h_0 &= \frac{\gamma p_0}{(\gamma-1)\rho_0} & h_1 &= h_0 \left(\frac{p_1}{p_0} - \frac{p_1}{\rho_0} \right) \\ \mu_0 &= \mu_\infty C \frac{T_0}{T_\infty} & \mu_1 &= \mu_\infty C \frac{T_1}{T_\infty} \\ T_0 &= h_0 / C_p & T_1 &= h_1 / C_p. \end{aligned}$$

Le dernier terme du premier membre de (8.2) représente l'effet de la variation de ε avec x pour un corps en loi de puissance $n = 3/4$.

Les conditions aux limites sont:

$$V_1 = u_1 = v_1 = 0 \text{ pour } Y = 0$$

$$V_1 = 0, \quad v_1 = v_{1e}, \quad h_1 = h_{1e} \text{ au loin.}$$

On a de plus une condition énergétique à la paroi: $h_1 = h_{1p}$.

La démarche est désormais la même que dans la section précédente. Nous allons appliquer la transformation de Lees à ces équations. On pose:

$$(8.6) \quad g_1 = \frac{H_1}{H_{0e}}, \quad t_1 = \frac{v_1}{v_{1e}}, \quad f_{1\eta^*} = \frac{V_1}{V_\infty}.$$

Après des calculs fastidieux que nous ne détaillons pas ici, on obtient:

$$(8.7) \quad \frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{p_1}{p_0} \frac{g_1 - 2f_{0\eta^*}f_{1\eta^*}}{(g_0 - f_{0\eta^*}^2)}$$

$$(8.8) \quad r(\rho_0 u_1 + \rho_1 u_0) = -\frac{v_{1e}\sqrt{2\xi^*}}{V_\infty R'} \int_0^{\eta^*} \frac{t_1}{\sqrt{K}} d\eta^* \\ - \left(\frac{\sqrt{2\xi^*}}{4x} + \frac{1}{\sqrt{2\xi^*}} \frac{d\xi^*}{dx} \right) \left(\int_0^{\eta^*} \frac{\rho_1}{\rho_0} f_{0\eta^*} d\eta^* + f_1 \right) \\ - \sqrt{2\xi^*} \frac{d\xi^*}{dx} \frac{\partial}{\partial \xi^*} \left(\int_0^{\eta^*} \frac{\rho_1}{\rho_0} f_{0\eta^*} d\eta^* + f_1 \right)$$

$$(8.9) \quad 2\xi^* f_{0\eta^*} \frac{\partial f_{1\eta^*}}{\partial \xi^*} + \frac{\xi^*}{2x} f_{1\eta^*} f_{0\eta^*} \frac{dx}{d\xi^*} - f_0 f_{1\eta^*\eta^*} - f_{0\eta^*\eta^*} \Delta - \\ 2\xi^* f_{0\eta^*\eta^*} \int_0^{\eta^*} \frac{\partial}{\partial \xi^*} \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} f_{0\eta^*} + f_{1\eta^*} \right) d\eta^* = -\frac{2\xi^*}{\rho_0 V_\infty^2} \frac{dx}{d\xi^*} \left(\frac{dp_1}{dx} + \frac{p_1}{4x} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial \eta^*} (N_0 K f_{1\eta^*\eta^*}) + \frac{\partial}{\partial \eta^*} (N_1 K f_{0\eta^*\eta^*})$$

où:

$$(8.10) \quad N_1 = \frac{\rho_0 \mu_1}{\rho_{0p} \mu_{0p}}$$

et

$$(8.11) \Delta = \frac{2\xi^* v_{1e}}{V_\infty R'} \frac{dx}{d\xi^*} \int_0^{\eta^*} \frac{t_1}{\sqrt{K}} d\eta^* + \left(\frac{1}{2} \frac{d \log x}{d \log \xi^*} + 1 \right) \int_0^{\eta^*} \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} f_{0\eta^*} + f_{1\eta^*} \right) d\eta^*.$$

$$(8.12) \quad 2f_{0\eta^*} t_1 \frac{\partial \log v_{1e}}{\partial \log \xi^*} - f_0 t_{1\eta^*} + \frac{3}{4} \frac{t_1 f_{0\eta^*}}{\sqrt{K}} + 2\xi^* f_{0\eta^*} \frac{\partial t_1}{\partial \xi^*} + \frac{1}{4} t_1 f_{0\eta^*} = \\ \frac{2\xi^* p_1}{\rho_0 v_{1e} R' V_\infty \sqrt{K}} \frac{dx}{d\xi^*} + \frac{\partial}{\partial \eta^*} \left(K N_0 \frac{\partial t_1}{\partial \eta^*} \right)$$

$$(8.13) \quad \frac{1}{2} \frac{d \log x}{d \log \xi^*} f_{0\eta^*} g_1 + 2\xi^* \frac{\partial g_1}{\partial \xi^*} f_{0\eta^*} - f_0 g_{1\eta^*} - \Delta g_{0\eta^*} - \\ 2\xi^* g_{0\eta^*} \int_0^{\eta^*} \frac{\partial}{\partial \xi^*} \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} f_{0\eta^*} + f_{1\eta^*} \right) d\eta^* = \frac{1}{\varphi} \frac{\partial}{\partial \eta^*} (K N_0 g_{1\eta^*} + K N_1 g_{0\eta^*}) \\ - \left(\frac{1}{\varphi} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial \eta^*} \left(2K N_0 \frac{\partial f_{1\eta^*} f_{0\eta^*}}{\partial \eta^*} + K N_1 \frac{\partial f_{0\eta^*}^2}{\partial \eta^*} \right)$$

Rappelons que les équations précédentes sont valables si la couche limite est mince par rapport à la couche de choc. Ainsi, les valeurs de A trop grandes pour vérifier cette condition seront à proscrire.

8.1 Equations pour l'écoulement extérieur

Comme on l'a fait dans le chapitre précédent, on tire parti des équations de l'écoulement extérieur pour exprimer les termes de pression dans (8.9) et (8.12) ainsi que le terme en v_{1e} dans (8.11).

Pour cela, on écrit les équations de l'hypersonique des petites perturbations [19] dans le repère $(\vec{O}s, \vec{O}Y, \vec{O}s \wedge \vec{O}Y)$. L'équation de quantité de mouvement longitudinale donne:

$$(8.14) \quad \rho_e \left(V_e \frac{\partial V_e}{\partial x} + u_e \frac{\partial V_e}{\partial Y} \right) = -\frac{dp_e}{dx} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial Y} \left(r \mu_e \frac{\partial V_e}{\partial Y} \right).$$

On sait que dans la couche de choc d'épaisseur δ_e la vitesse longitudinale est $V_e = V_\infty(1 + R_x^2 w(Y))$ et que les ordres de grandeur pour les composantes radiales et orthoradiales sont:

$$(8.15) \quad \begin{aligned} u_e &\sim \frac{\delta_e}{L} R_x V_\infty, \\ v_e &\sim R_x V_\infty. \end{aligned}$$

En termes d'ordres de grandeur (8.14) devient:

$$O(1) + O(R_x) \sim O(1) + O\left(\frac{L^2}{\Re \delta_e^2}\right).$$

Ainsi, l'écoulement non visqueux existe si $\frac{\delta_e}{L}$ est d'ordre R_x au plus. C'est une des conditions déterminant le domaine de validité des équations pour la couche limite établies dans ce chapitre. On a donc $\rho_e \left(V_e \frac{\partial V_e}{\partial x} + u_e \frac{\partial V_e}{\partial Y} \right) = -\frac{dp_e}{dx}$ hors couche limite. Mais au raccord, u_e est d'ordre $\frac{\delta_e}{L} R_x V_\infty$ et le terme $u_e \frac{\partial V_e}{\partial Y}$ devient négligeable devant 1. Finalement, l'équation de la dynamique longitudinale à écrire au raccord est:

$$(8.16) \quad \rho_e V_e \frac{\partial V_e}{\partial x} = -\frac{dp_e}{dx}.$$

En adoptant une démarche analogue pour l'équation de la dynamique orthoradiale il vient

$$(8.17) \quad \rho_e V_e \frac{\partial(rv_e)}{\partial x} = -\frac{dp_e}{d\theta}.$$

En reportant les développements (8.1), on obtient:

$$(8.18) \quad -\left(\frac{dp_{1e}}{dx} + \frac{p_{1e}}{4x}\right) = \frac{\rho_0 V_\infty^2}{2\xi^*} \frac{d\xi^*}{dx} \beta (g_0 - f_{0\eta^*}^2) \frac{\rho_{1e}}{\rho_{0e}}$$

$$(8.19) \quad p_{1e} = \rho_{0e} V_\infty v_{1e} \frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt{K}} \frac{r}{x}.$$

8.2 Similitude interne en tridimensionnel

On reporte les expressions (8.18) et (8.19) dans le système (8.8) à (8.13) et on obtient:

$$(8.20) \quad \begin{aligned} 2\xi^* f_{0\eta^*} \frac{\partial f_{1\eta^*}}{\partial \xi^*} + \frac{\xi^*}{2x} f_{1\eta^*} f_{0\eta^*} \frac{dx}{d\xi^*} - 2\xi^* f_{0\eta^* \eta^*} \int_0^{\eta^*} \frac{\partial}{\partial \xi^*} \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} f_{0\eta^*} + f_{1\eta^*} \right) d\eta^* \\ - f_0 f_{1\eta^* \eta^*} - f_{0\eta^* \eta^*} \Delta = \beta (g_0 - f_{0\eta^*}^2) \frac{\rho_{1e}}{\rho_{0e}} + \frac{\partial}{\partial \eta^*} (N_0 K f_{1\eta^* \eta^*}) + \frac{\partial}{\partial \eta^*} (N_1 K f_{0\eta^* \eta^*}) \end{aligned}$$

où:

$$(8.21) \quad \Delta = \frac{4x^2 p_{1e}}{3V_\infty^2 R^2 \rho_{0e}} \int_0^{\eta^*} \frac{t_1}{\sqrt{K}} d\eta^* + \frac{5}{4} \int_0^{\eta^*} \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} f_{0\eta^*} + f_{1\eta^*} \right) d\eta^*.$$

$$(8.22) \quad 2 \frac{\partial \log v_{1e}}{\partial \log \xi^*} \left(f_{0\eta^*} t_1 - \frac{\rho_{0e}}{\rho_0} \right) - f_0 t_{1\eta^*} + \frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt{K}} \left(f_{0\eta^*} t_1 - \frac{\rho_{0e}}{\rho_0} \right) + \\ 2\xi^* f_{0\eta^*} \frac{\partial t_1}{\partial \xi^*} + \frac{1}{4} \left(f_{0\eta^*} t_1 - \frac{\rho_{0e}}{\rho_0} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta^*} \left(K N_0 \frac{\partial t_1}{\partial \eta^*} \right)$$

$$(8.23) \quad \frac{f_{0\eta^*} g_1}{4} + 2\xi^* \frac{\partial g_1}{\partial \xi^*} f_{0\eta^*} - f_0 g_{1\eta^*} - \Delta g_{0\eta^*} - 2\xi^* g_{0\eta^*} \int_0^{\eta^*} \frac{\partial}{\partial \xi^*} \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} f_{0\eta^*} + f_{1\eta^*} \right) d\eta^* \\ = \frac{1}{\wp} \frac{\partial}{\partial \eta^*} (K N_0 g_{1\eta^*} + K N_1 g_{0\eta^*}) - \left(\frac{1}{\wp} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial \eta^*} \left(2K N_0 \frac{\partial f_{1\eta^*} f_{0\eta^*}}{\partial \eta^*} + K N_1 \frac{\partial f_{0\eta^*}^2}{\partial \eta^*} \right).$$

Les conditions aux limites à l'ordre 1 sont:

$$t_1 = 1, \quad f_{1\eta^*} = 0, \quad g_1 = \frac{h_{1e}}{H_{0e}} \approx 0 \quad \text{pour } \eta^* \rightarrow \infty \\ t_1 = 0, \quad f_{1\eta^*} = 0, \quad g_1 = g_{1p} = \frac{h_{1p}}{H_{0e}} \quad \text{pour } \eta^* = 0$$

Une condition pour $\xi^* = 0$ est nécessaire également sauf pour les solutions indépendantes de ξ^* s'il en existe.

Or, l'étude des équations montre qu'il peut exister de telles solutions si g_{1p} et N_1 sont constants et si:

$$(8.24) \quad p_{1e} \sim x^{-1/2} \\ \rho_{1e} \sim cte \\ v_{1e} \sim x^{-1/4}$$

La condition $g_{1p} = cste$ conduit à $T_{1p} = cste$, et $N_1 = cste$ est le prolongement logique de $N_0 = cste$ que nous avons posé à l'ordre 0.

Ainsi, l'existence de la similitude interne dans la couche limite est imposée par l'écoulement non visqueux par l'intermédiaire des conditions (8.24). Si l'épaisseur effective du corps est en loi de puissance de x , cet écoulement non visqueux peut être calculé dans le cadre d'une théorie de petites perturbations basée sur l'analogie instationnaire [18][19]. Dans ce cas, les conditions nécessaires (8.24) sont réalisées pour $n = 3/4$. La question est donc de savoir si ces conditions sont suffisantes et dans quelle mesure l'écoulement extérieur donné en [19] convient.

Pour ce faire calculons δ^* à l'ordre 1:

$$\int_0^{\delta^*} \rho_e V_\infty r dY = \int_0^{\delta} (\rho_e V_\infty - \rho V) r dY.$$

On effectue le changement de variable Y en η^* dans le second membre et on pose:

$$\delta^* = \delta_0^* + \iota \delta_1^* \cos \theta.$$

A l'ordre 0 on obtient l'expression (7.28) pour δ_0^* et, en ne retenant que les termes prépondérants, l'ordre 1 donne:

$$(8.25) \quad \frac{\delta_1^*}{R'} = \frac{A}{2\sqrt{1 + A I_{0e}}} I_{1e},$$

avec:

$$(8.26) \quad I_{1e} = \int_0^\infty (g_1 - 2f_{0\eta^*} f_{1\eta^*}) d\eta^*.$$

On voit que $\frac{\delta_1^*}{R'}$ est indépendant de x . Ainsi l'écoulement extérieur [18][19] convient parfaitement à notre étude puisqu'il assure l'existence de la similitude interne pour la couche limite tridimensionnelle. Cette dernière conséquence permet de préciser la relation liant α_{eff} à α . L'équation de l'obstacle efficace est:

$$(8.27) \quad R'_{eff} = R'_{0eff} + \alpha_{eff} \frac{\delta_1^*}{R'_{0effx}} \cos \theta$$

où $R'_{0eff} = \frac{\tau_{eff} L}{2} \left(\frac{x}{L}\right)^{\frac{3}{4}}$ et R'_{0eff} sont respectivement les équations de l'obstacle efficace et du choc sans incidence. En dérivant (8.27) par rapport à x on obtient:

$$(8.28) \quad R'_{effx} = R'_{0effx} + \alpha_{eff} \left(\frac{\delta_1^*}{R'_{0effx}} \right)_x \cos \theta.$$

On sait que la variable d'espace représentative du domaine non visqueux est [18][19]:

$$\hat{\lambda}_e = \frac{r}{R_{0eff}}.$$

Elle varie entre λ'_0 sur l'obstacle effectif et R_{eff}/R_{0eff} sur le choc, en présence d'une incidence. On peut donc écrire:

$$R'_{effx} = R'_{0effx} + \alpha_{eff} \frac{4}{3} \lambda'_0 \frac{\delta_1^*}{R'_{0eff}} \cos \theta.$$

En tirant parti de (8.25) et de l'équation de l'obstacle réel on obtient:

$$(8.29) \quad R'_{effx} = R'_{0effx} + \alpha_{eff} \frac{4}{3} \lambda'_0 \frac{\tau}{\tau_{eff}} \frac{A}{2\sqrt{1+AI_{0e}}} I_{1e} \cos \theta.$$

Ainsi, il existe un repère (\hat{O}, x', z') déduit de (\hat{O}, x, z) par une rotation d'angle $\bar{\alpha} = \alpha_{eff} \frac{4}{3} \lambda'_0 \frac{\tau}{\tau_{eff}} \frac{A}{2\sqrt{1+AI_{0e}}} I_{1e}$ dans lequel l'obstacle efficace est axisymétrique (figure 58b). C'est le même principe qui est utilisé pour le calcul d'une explosion dans un milieu en mouvement uniforme [7]. Connaissant cette rotation, on déduit très facilement la relation:

$$(8.30) \quad \alpha_{eff} = \frac{\alpha}{1 + \frac{4}{3} \lambda'_0 \frac{\tau}{\tau_{eff}} \frac{\delta_1^*}{R'}}.$$

Précisons maintenant la forme de l'écoulement non visqueux. Comme l'incidence est prise en compte sous la forme d'une petite perturbation, on exprime $\hat{\lambda}_e$ comme développement linéaire de son approximation de base λ_e :

$$\hat{\lambda}_e = \lambda_e + \varepsilon \frac{\lambda_e - \lambda'_0}{1 - \lambda'_0} \lambda_1 \cos \theta$$

La variable λ_e a l'avantage de varier entre les bornes fixes λ'_0 et 1.

30
VILLE

On peut alors écrire la pression extérieure sous la forme:

$$(8.31) \quad p_e(\hat{\lambda}_e) = \frac{9}{8(\gamma + 1)} \rho_\infty V_\infty^2 \frac{\tau_{eff}^2}{4\lambda_0'^2} \left(\frac{x}{L}\right)^{-\frac{1}{2}} p_e^*(\lambda_e)$$

avec:

$$p_e^* = p_{0e}^*(\lambda_e) + \imath p_{1e}^*(\lambda_e) \cos \theta,$$

p_{0e}^* et p_{1e}^* sont calculés dans le modèle non visqueux [19].

On voit que la première des conditions (8.24) est réalisée, à des termes d'ordre \imath^2 près:

$$(8.32) \quad p_{1e} = \frac{9}{8(\gamma + 1)} \rho_\infty V_\infty^2 \frac{\tau_{eff}^2}{4\lambda_0'^2} \left(\frac{x}{L}\right)^{-\frac{1}{2}} p_{1e}^*.$$

On vérifie que les deux dernières concernant ρ_{1e} et v_{1e} sont remplies puisque:

$$(8.33) \quad \rho_e = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \rho_\infty (\rho_{0e}^*(\lambda_e) + \imath \rho_{1e}^*(\lambda_e) \cos \theta)$$

$$(8.34) \quad v_e = \frac{3\imath}{2(\gamma + 1)} V_\infty \frac{\tau_{eff}}{2\lambda_0'} \left(\frac{x}{L}\right)^{-\frac{1}{4}} v_{1e}^*(\lambda_e).$$

On vient de montrer que la similitude interne existe et on tire parti des expressions (8.32) à (8.34) pour écrire le système d'équations pour la couche limite à l'ordre 1:

$$(8.35) \quad \frac{f_{1\eta^*} f_{0\eta^*}}{4} - f_0 f_{1\eta^* \eta^*} - f_{0\eta^* \eta^*} \Delta = \beta (g_0 - f_{0\eta^*}^2) \frac{\rho_{1e}}{\rho_{0e}} + \frac{\partial}{\partial \eta^*} (N_0 K f_{1\eta^* \eta^*} + N_1 K f_{0\eta^* \eta^*})$$

$$\text{où } \Delta = \frac{4x^2 \rho_{1e}}{3V_\infty^2 R^2 \rho_{0e}} \int_0^{\eta^*} \frac{t_1}{\sqrt{K}} d\eta^* + \frac{5}{4} \int_0^{\eta^*} \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} f_{0\eta^*} + f_{1\eta^*} \right) d\eta^*.$$

$$(8.36) \quad \frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt{K}} \left(f_{0\eta^*} t_1 - \frac{\rho_{0e}}{\rho_0} \right) - f_0 t_{1\eta^*} = \frac{\partial}{\partial \eta^*} (K N_0 t_{1\eta^*})$$

$$(8.37) \quad \frac{f_{0\eta^*} g_1}{4} - f_0 g_{1\eta^*} - \Delta g_{0\eta^*} = \frac{1}{\wp} \frac{\partial}{\partial \eta^*} (K N_0 g_{1\eta^*} + K N_1 g_{0\eta^*}) - \left(\frac{1}{\wp} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial \eta^*} \left(2K N_0 \frac{\partial f_{1\eta^*} f_{0\eta^*}}{\partial \eta^*} + K N_1 \frac{\partial f_{0\eta^*}^2}{\partial \eta^*} \right).$$

Les conditions aux limites sont inchangées.

8.3 Problèmes de raccord

On voit que le calcul des profils V/V_e , H/H_e , ρ/ρ_e à l'ordre 0 est possible indépendamment de l'écoulement extérieur. En revanche, la résolution de l'ordre 1 exige la connaissance de la masse volumique au raccord. Le calcul montre que le raccord a lieu d'autant plus près de la paroi efficace que le paramètre d'interaction visqueuse A est petit. On ne peut donc pas choisir A aussi petit que l'on veut puisque le modèle non visqueux conduit à $\rho_{0e} = \rho_{1e} = 0$ (figure 59a). On pourrait espérer éviter cette

difficulté en utilisant la correction d'entropie, développée dans [18]. Malheureusement, cette correction appliquée à la paroi effective modifie la loi de puissance de ρ_e et v_{1e} qui deviennent telles que:

$$\begin{aligned}\rho_{1e} &\sim x^{-1/2\gamma} \\ v_{1e} &\sim x^{\frac{2-\gamma}{4\gamma}}\end{aligned}$$

de sorte qu'aucune valeur de γ ne peut assurer les conditions (8.24).

En fait, il faut revenir à la signification de cette correction d'entropie pour trouver la clé du problème. Nous nous limiterons à l'aspect physique des choses, l'aspect mathématique étant développé en [18]. La correction d'entropie consiste à réaffecter à chaque ligne de courant de l'écoulement non visqueux l'entropie réellement acquise au passage du choc. Cette entropie est mal prise en compte par le modèle qui applique dans la zone de l'émoussement les mêmes approximations que dans la zone où le choc est très oblique. La correction s'effectue grâce à une fonction Q qui est toujours très proche de 1 sauf dans le sillage de l'émoussement où elle tend brusquement vers l'infini de façon que $Q\rho_e$ et v_{1e}/Q restent finis. Ce sillage de l'émoussement est appelé couche d'entropie.

Supposons que la couche limite soit suffisamment épaisse pour contenir toutes les lignes de courant issues de l'émoussement (figure 59b). Alors la couche d'entropie non visqueuse n'existe plus et la correction, fondée sur l'hypothèse d'isentropie, n'a plus lieu d'être. Si l'on imagine que suffisamment loin en aval de l'émoussement celui-ci n'a plus d'influence sur le profil de couche limite, ce dernier est entièrement déterminé par l'écoulement non visqueux local. C'est cette hypothèse, la même que celle de Blasius pour la plaque plane en incompressible, que nous faisons ici. En d'autres termes, nous supposons que l'émoussement est suffisamment faible pour qu'une modification de sa forme soit peu influente dans la structure de l'écoulement en aval. A cette condition et pour peu que la couche d'entropie soit absorbée par la couche limite, c'est à dire que le raccordement visqueux-non visqueux se fasse dans la zone d'écoulement II (figure 59b), on peut utiliser le modèle non visqueux sans correction d'entropie sans pour autant que ρ_e soit nulle.

En résumé, A doit être suffisamment petit pour que la couche limite soit mince par rapport à la couche de choc:

$$(8.38) \quad \frac{\delta}{\delta_e} \ll 1 :$$

et suffisamment grand pour que le raccord se fasse hors de la couche d'entropie. Cette dernière condition se traduit simplement par:

$$\frac{v_{1e_{raccord}}^*}{v_{1e_c}^*} \sim 1 :$$

La valeur de la vitesse orthoradiale adimensionnée au raccord doit être du même ordre de grandeur que celle sur le choc.

Malheureusement, ces conditions ne sont pas compatibles entre elles: Une rapide étude numérique à l'ordre 0 montre que (8.38) est vérifiée pour $A < 0.1$ ce qui conduit à effectuer le raccord dans la couche d'entropie. Le modèle non visqueux est

donc inutilisable pour ρ_{0e} et ρ_{1e} et il faut mener une étude numérique expérimentale afin de définir l'influence de ρ_{0e} et ρ_{1e} sur la solution du problème d'ordre 1.

8.4 Influence de la masse volumique de raccord

Le problème consiste à estimer ρ_{0e} et ρ_{1e} et à montrer qu'une légère incertitude sur ces valeurs n'a qu'une faible incidence sur la solution des équations d'ordre 1 dans la couche limite.

La première partie de la réponse s'obtient en constatant qu'en hypersonique fort, l'écoulement extérieur est confiné dans une couche de choc extrêmement mince et qu'il est continu pour le type d'obstacle que l'on considère ici. Il est donc légitime de postuler que la masse volumique au voisinage de l'obstacle efficace est de l'ordre de celle rencontrée en aval du choc. On choisira

$$0.8\rho_c < \rho_{0e} < \rho_c.$$

De plus, ρ_{1e} apparaît dans l'équation (8.35) sous la forme $\beta (g_0 - f_{0\eta}^2) \frac{\rho_{1e}}{\rho_{0e}}$. Ce terme est très petit devant 1 puisque $\beta = 0.071$ et que le reste de l'expression est borné par 1. Cette remarque est confirmée par l'étude des équations établies dans la section (8.1). En effet, ce terme provient du gradient longitudinal de pression d'ordre 1, exprimé par (8.18), qui est d'ordre R_x . On va donc négliger dans un premier temps la masse volumique extérieure d'ordre 1 et vérifier a posteriori la validité de cette approximation en reprenant la résolution pour $\rho_{1e}^* = -0.8$ qui est la valeur maximum atteinte par cette inconnue d'après le modèle non visqueux [19].

Remarquons cependant que cette situation est celle de tout calcul de couche limite qui fournit les profils des inconnues pour des valeurs extérieures données. Nous pouvons donc résoudre les équations, mais il faut renoncer à puiser les valeurs ρ_{0e} et ρ_{1e} du modèle non visqueux qui ne peut fournir que p_{0e} et p_{1e} . Les valeurs de ρ_{0e} et ρ_{1e} doivent être obtenues par d'autres méthodes, en particulier par l'expérience. Sur le plan de la physique, il est bien évident que les propriétés de la couche limite dépendent fortement de la masse volumique extérieure. Les effets de gaz réels dans l'écoulement non visqueux sont donc déterminants. A ce point de vue on peut dire qu'il existe un couplage entre les conditions extérieures et les propriétés de la couche limite. Ainsi, l'hypothèse d'équilibre chimique, souvent faite dans la couche limite du fait des faibles vitesses pariétales ne se justifie que si l'écoulement extérieur est aussi à l'équilibre chimique. Si ce n'est pas le cas, sa relaxation conditionne la couche limite par le biais de ρ_e et la continuité du raccord impose de considérer le gaz dans la couche limite comme hors équilibre. Les conditions d'équilibre ne sont alors atteintes que dans la partie de la couche limite proche de la paroi.

8.5 Résumé des résultats

Les hypothèses de l'hypersonique fort, celle d'une température de paroi constante ainsi que la forme du modèle non visqueux pour la pression [19] (confirmée par l'expérience) ont permis de mettre en évidence l'existence d'une similitude interne

pour la couche limite axisymétrique ($\alpha = 0$) ainsi que pour l'écoulement transversal lié à la composante orthoradiale de la vitesse. Les équations pour $f_{0\eta^*}$, g_0 et t_1 peuvent alors être intégrées indépendamment de la valeur au raccord des grandeurs physiques du domaine de fluide parfait.

Nous avons vu que la forme de la solution pour la masse volumique donnée par le modèle non visqueux ($\rho_e \sim x^0$) permet d'étendre la similitude interne aux autres équations de la couche limite à l'ordre 1. Mais, pour intégrer numériquement les équations différentielles relatives à $f_{1\eta^*}$ et g_1 , il nous faut connaître la valeur de la pression et de la masse volumique au raccord. Pour la première de ces grandeurs, nous utiliserons les résultats donnés en [19]. Pour la seconde, nous allons montrer, à partir de résultats expérimentaux [25][26], que la masse volumique extérieure d'ordre 0 peut effectivement être considérée comme constante à l'égard de x et qu'elle est comprise dans l'intervalle $[0.8\rho_c, \rho_c]$.

Chapitre 9

Exploitation

9.1 Choix des coefficients constants

Reprenons l'ensemble des équations. A l'ordre 0, on a:

$$(9.1) \quad [N_0 K f_{0\eta^* \eta^*}]_{\eta^*}^* + f_0 f_{0\eta^* \eta^*} + 2\beta [g_0 - f_{0\eta^*}^2] = 0$$

$$(9.2) \quad \frac{1}{\wp} [N_0 K g_{0\eta^*}]_{\eta^*}^* + 2 \left(\frac{1}{\wp} - 1 \right) [K N_0 f_{0\eta^*} f_{0\eta^* \eta^*}]_{\eta^*}^* + f_0 g_{0\eta^*} = 0$$

$$(9.3) \quad K_{\eta^*} = A(g_0 - f_{0\eta^*}^2)$$

et à l'ordre 1:

$$(9.4) \quad \frac{f_{1\eta^*} f_{0\eta^*}}{4} - f_0 f_{1\eta^* \eta^*} - f_{0\eta^* \eta^*} \Delta = \beta (g_0 - f_{0\eta^*}^2) \frac{\rho_{1e}}{\rho_{0e}} + \frac{\partial}{\partial \eta^*} (N_0 K f_{1\eta^* \eta^*} + N_1 K f_{0\eta^* \eta^*})$$

$$\text{où } \Delta = \frac{4x^2 p_{1e}}{3V_\infty^2 R^2 \rho_{0e}} \int_0^{\eta^*} \frac{t_1}{\sqrt{K}} d\eta^* + \frac{5}{4} \int_0^{\eta^*} \left(\frac{p_1}{\rho_0} f_{0\eta^*} + f_{1\eta^*} \right) d\eta^*.$$

$$(9.5) \quad \frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt{K}} \left(f_{0\eta^*} t_1 - \frac{\rho_{0e}}{\rho_0} \right) - f_0 t_{1\eta^*} = \frac{\partial}{\partial \eta^*} (K N_0 t_{1\eta^*})$$

$$(9.6) \quad \frac{f_{0\eta^*} g_1}{4} - f_0 g_{1\eta^*} - \Delta g_{0\eta^*} = \frac{1}{\wp} \frac{\partial}{\partial \eta^*} (K N_0 g_{1\eta^*} + K N_1 g_{0\eta^*}) - \left(\frac{1}{\wp} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial \eta^*} \left(2K N_0 \frac{\partial f_{1\eta^*} f_{0\eta^*}}{\partial \eta^*} + K N_1 \frac{\partial f_{0\eta^*}^2}{\partial \eta^*} \right).$$

auxquelles s'ajoutent les conditions en $\eta^* = 0$ et en $\eta^* = \infty$. En plus des valeurs des différentes inconnues au raccord, la résolution de ces équations suppose la connaissance des 3 paramètres: β , A , N . Le premier est entièrement déterminé par le rapport des chaleurs spécifiques γ (7.23). Les deux derniers dépendent de la température caractéristique T_m à l'intérieur de la couche limite. En effet, A est donné par

$$(9.7) \quad A = \sqrt{\frac{1}{\gamma} \frac{(\gamma - 1) 4 \lambda'_0}{\tau_{eff}^2 \sqrt{\frac{9p_{0e}^*}{8(\gamma+1)}}}} M_\infty \sqrt{\frac{C}{\Re_\infty}}$$

où $C = \frac{T_\infty + S}{T_m + S} \left(\frac{T_m}{T_\infty} \right)^{1/2}$ et N par

$$N_m = \frac{T_p + S}{T_m + S} \left(\frac{T_m}{T_p} \right)^{1/2}.$$

La température de paroi est tirée de la définition de g donnée en (7.4):

$$(9.8) \quad T_p = g_p \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2 \right) T_e$$

où M_e est le nombre de Mach à l'extérieur de la couche limite. Ce dernier s'obtient par le biais de la température extérieure grâce à la relation exprimant la conservation de l'enthalpie totale:

$$T_{i\infty} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2 \right) T_e.$$

En développant (7.12) et (9.8) suivant les puissances successives de ε , on obtient:

$$(9.9) \quad \begin{aligned} N_{0m} &= \frac{T_{0p} + S}{T_{0m} + S} \left(\frac{T_{0m}}{T_{0p}} \right)^{1/2} & ; N_{1m} &= N_{0m} \left(\frac{T_{1p}}{2T_{0p}} \frac{T_{0p} - S}{T_{0p} + S} - \frac{T_{1m}}{2T_{0m}} \frac{T_{0m} - S}{T_{0m} + S} \right) \\ T_{0p} &= g_{0p} T_{0e} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2 \right) & ; T_{1p} &= (g_{0p} T_{1e} + g_{1p} T_{0e}) \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2 \right). \end{aligned}$$

On montre facilement que la condition à la limite $g_1 = 0$ en $\eta^* \rightarrow \infty$ conduit à $T_{1e} = 0$. De plus, dans le cas d'une paroi refroidie, on peut supposer que la mise en incidence ne modifie pas la température de paroi ce qui donne $T_{1p} = 0$. Ce n'est pas le cas pour une paroi adiabatique: la condition $g_{1\eta^*}|_{\eta^*=0}$ impliquant nécessairement $T_{1p} \neq 0$.

Malgré ces simplifications, on constate que seul β est déterminée. En effet, l'équation (9.7) indique que A n'est fixé que si on connaît à la fois l'écoulement amont mais aussi l'épaisseur relative de l'obstacle efficace τ_{eff} et C qui sont des résultats du calcul. Cette situation est due au couplage avec l'écoulement extérieur. Nous allons donc devoir mettre en œuvre un algorithme itératif de résolution. Une méthode de point fixe suffira. De même, les grandeurs moyennes de N_0 et N_1 sont des fonctions de T et dépendent donc de la répartition de température dans la couche limite. Nous rappelons au passage que T est liée à la vitesse et à l'enthalpie adimensionnées par les relations:

$$(9.10) \quad \begin{aligned} T_0 &= \left[\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2 \right) (g_0 - f_{0\eta^*}^2) + f_{0\eta^*}^2 \right] T_{0e} \text{ à l'ordre 0} \\ T_1 &= \left[\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2 \right) (g_1 - 2f_{0\eta^*} f_{1\eta^*}) + 2f_{0\eta^*} f_{1\eta^*} \right] T_{0e} \text{ à l'ordre 1.} \end{aligned}$$

Le principe de résolution est le même quel que soit le type de paroi.

9.1.1 Méthode de résolution

La première étape consiste en la détermination de A et N_{0m} par intégrations successives du système d'ordre 0 constitué par les équations (9.1) à (9.3).

On initialise A par:

$$A = \sqrt{\frac{1}{\gamma}} \frac{(\gamma - 1)4\lambda'_0}{\tau^2 \sqrt{\frac{9\rho_{0r}^*}{8(\gamma+1)}}} M_\infty \sqrt{\frac{1}{\mathfrak{R}_\infty}}$$

ce qui signifie que l'on assimile τ_{eff} à τ et que l'on prend $C = 1$. Grâce à (7.14) on obtient une valeur initiale pour T_{0m} et donc pour N_{0m} . On résout alors les équations (9.1) à (9.3) ce qui revient à chercher les valeurs initiales (en $\eta^* = 0$) de $f_{0\eta^*}$ et de g_0 (paroi adiabatique) ou $g_{0\eta^*}$ (paroi froide). Cette intégration fournit en particulier τ_{eff} ainsi que les répartitions de température T_0 et de N_0 . On peut alors aisément calculer la valeur moyenne N_{0m} . Les développements (9.9) relatifs à l'ordre 0 donnent alors T_{0m} . De nouvelles valeurs de C et A sont alors déterminées par application de (7.14) et (9.7) et permettent une nouvelle intégration. Ce processus est répété jusqu'à ce que les suites constituées par les valeurs successives de A et N_{0m} convergent avec une précision fixée à l'avance.

On peut alors intégrer l'équation pour la vitesse orthoradiale adimensionnée t_1 (9.5). A l'ordre 1, le problème est plus simple puisque seul N_{1m} est à déterminer. On choisit $N_{1m} = 0$ au départ, et on résout numériquement le système d'ordre 1 (9.4) à (9.6). On obtient ainsi les évolutions correspondantes de T_1 dans la couche limite. On peut alors calculer la moyenne de N_1 à l'aide du développement relatif à N_{1m} dans (9.9) où N_{0m} , T_{0m} et T_{1m} sont remplacés respectivement par N_0 , T_0 et T_1 . Comme à l'ordre 0, on construit ainsi une suite de valeurs de N_{1m} que l'on peut faire converger autant que l'on veut.

9.2 Contraintes, décollement

Les contraintes visqueuses longitudinale τ_p et transversale τ_t ainsi que le flux de chaleur à la paroi q sont données par les expressions suivantes:

$$(9.11) \quad \begin{aligned} \tau_p &= \left[\mu \frac{\partial V}{\partial Y} \right]_{Y=0} \\ \tau_t &= \left[\mu \frac{\partial v}{\partial Y} \right]_{Y=0} \\ q &= - \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial Y} \right]_{Y=0} \end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de relier ces grandeurs aux dérivées

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^{*2}} \Big|_{\eta^*=0}, \quad \frac{\partial g}{\partial \eta^*} \Big|_{\eta^*=0} \quad \text{et} \quad \frac{\partial t_1}{\partial \eta^*} \Big|_{\eta^*=0}.$$

Nous ne détaillerons le calcul que pour τ_p , la démarche étant la même pour τ_t et q . D'après le changement de variable (7.4) on a

$$(9.12) \quad V = V_\infty f_{\eta^*} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \eta^*}{\partial Y} \Big|_{Y=0} = \frac{\rho_p R' V_\infty}{\sqrt{2\xi^*}},$$

ce qui permet d'écrire

$$\tau_p = \rho_p \mu_p f_{\eta^* \eta^*} \Big|_{\eta^*=0} \frac{R' V_\infty^2}{\sqrt{2\xi^*}}.$$

En tirant parti de la relation (7.20) on obtient:

$$\tau_p = \frac{p_e \mu_\infty C}{\mathcal{R} T_\infty} f_{\eta^* \eta^*} |_{\eta^*=0} \frac{R' V_\infty^2}{\sqrt{2\xi^*}}.$$

En introduisant le paramètre d'interaction visqueuse $A = \frac{(\gamma-1)\sqrt{2\xi^*} M_\infty^2}{R'^2 \rho_e V_\infty}$, le nombre de Reynolds $\mathfrak{R}_\infty = \frac{\rho_\infty V_\infty L}{\mu_\infty}$, on obtient:

$$(9.13) \quad \tau_p = \frac{2}{\tau} (\gamma - 1) \gamma p_\infty \frac{M_\infty^4 C}{A \mathfrak{R}_\infty} f_{\eta^* \eta^*} |_{\eta^*=0} \left(\frac{x}{L} \right)^{-3/4}.$$

τ_p représente la contrainte exercée par le fluide sur l'obstacle dans la direction Ox . Elle induit une force élémentaire dF_{xv} appliquée sur un élément de surface $dS = R' dx d\theta$:

$$dF_{xv} = \tau_p R' dx d\theta$$

qui, par intégration sur la surface de l'ogive donne le coefficient de traînée dû à la viscosité:

$$F_{xv} = 2\pi \int_0^L \tau_x R' dx.$$

En prenant comme surface de référence la surface de culot, on peut calculer le coefficient de traînée correspondant à l'ordre 0:

$$(9.14) \quad \frac{C_{xv}}{\tau^2} = \frac{16(\gamma-1)M_\infty^2 C}{\tau^4 A \mathfrak{R}_\infty} f_{0\eta^* \eta^*} |_{\eta^*=0}.$$

De la même manière, on calcule la contrainte visqueuse transversale induite par la composante orthoradiale de la vitesse v :

$$(9.15) \quad \tau_t = \iota \frac{3(\gamma-1)^2 \tau_{eff}^2}{2(\gamma+1)^2} \frac{1}{\tau^2} \frac{p_{1e}^*}{\lambda_0^2 \rho_{0e}^*} \gamma p_\infty \frac{M_\infty^4 C}{A \mathfrak{R}_\infty} t_{1\eta^* \eta^*} |_{\eta^*=0} \left(\frac{x}{L} \right)^{-1} \sin \theta.$$

La contribution de τ_t à la portance est donnée par le coefficient de portance C_{zv} :

$$(9.16) \quad \frac{C_{zv}}{\alpha_{eff}} = -12 \frac{(\gamma-1)^2 \tau_{eff}}{(\gamma+1)^2} \frac{1}{\tau^3} \frac{p_{1e}^*}{\lambda_0 \rho_{0e}^*} \frac{M_\infty^2 C}{A \mathfrak{R}_\infty} t_{1\eta^* \eta^*} |_{\eta^*=0}.$$

Enfin, le flux de chaleur à la paroi q s'exprime par:

$$(9.17) \quad q = -\frac{1}{\varphi} \frac{1}{\tau} (\gamma-1) \gamma p_\infty \sqrt{\gamma \frac{p_\infty}{\rho_\infty} \frac{M_\infty^5 C}{A \mathfrak{R}_\infty}} g_{\eta^* \eta^*} |_{\eta^*=0} \left(\frac{x}{L} \right)^{-3/4}.$$

Outre les différents coefficients que nous venons de définir, il est possible de formuler un critère d'apparition du décollement dans le plan de symétrie de l'écoulement qui contient la vitesse amont et l'axe Ox . En effet, d'après (9.13), le développement de τ_p suivant ι est le suivant:

$$\tau_p = \frac{2}{\tau} (\gamma-1) \gamma p_\infty \frac{M_\infty^4 C}{A \mathfrak{R}_\infty} \left(\frac{x}{L} \right)^{-3/4} \left(f_{0\eta^* \eta^*} |_{\eta^*=0} + \iota f_{1\eta^* \eta^*} |_{\eta^*=0} \cos \theta \right).$$

Ainsi, dans le plan de symétrie et à l'extrados ($\theta = 0$) τ_t est nul et τ_p devient négatif ou nul si:

$$(9.18) \quad f_{0\eta^*\eta^*}|_{\eta^*=0} + \iota f_{1\eta^*\eta^*}|_{\eta^*=0} \leq 0.$$

C'est le critère d'apparition du décollement qui, en explicitant la variable ι et en utilisant (8.30) devient:

$$(9.19) \quad f_{0\eta^*\eta^*}|_{\eta^*=0} + \frac{2\lambda'_0}{\tau_{eff}} \frac{\alpha}{1 + \frac{4}{3}\lambda'_0 \frac{\tau}{\tau_{eff}} \frac{\delta_1^*}{R'}} \left(\frac{x}{L}\right)^{1/4} f_{1\eta^*\eta^*}|_{\eta^*=0} \leq 0.$$

Pour des valeurs suffisamment grandes de l'incidence ($\alpha > 0$), il apparaît un décollement à l'extrados ($\theta = 0$) pour:

$$(9.20) \quad x \geq \left(\frac{f_{0\eta^*\eta^*}|_{\eta^*=0} \frac{\tau_{eff}}{2\lambda'_0 \frac{\alpha}{1 + \frac{4}{3}\lambda'_0 \frac{\tau}{\tau_{eff}} \frac{\delta_1^*}{R'}}}}{f_{1\eta^*\eta^*}|_{\eta^*=0}} \right)^4 L.$$

Enfin, il n'y a pas de décollement à l'extrados pour:

$$(9.21) \quad \alpha \leq - \frac{f_{0\eta^*\eta^*}|_{\eta^*=0}}{f_{1\eta^*\eta^*}|_{\eta^*=0}} \left(1 + \frac{4}{3}\lambda'_0 \frac{\tau}{\tau_{eff}} \frac{\delta_1^*}{R'} \right) \frac{\tau_{eff}}{2\lambda'_0}.$$

9.3 Résultats

9.3.1 Calcul de la couche limite pour la configuration expérimentale $M_\infty = 10$

Utilisons la théorie qui vient d'être exposée pour calculer la couche limite se développant sur l'ogive en loi de puissance 3/4 dans les conditions expérimentales de la soufflerie hypersonique R3Ch de l'ONERA. On rappelle que les conditions génératrices de l'écoulement infini amont sont:

$$T_{i\infty} = 1050K, \quad p_{i\infty} = 120b.$$

Le nombre de Reynolds est $\Re_\infty = 2.6 \times 10^6$ et le nombre de Mach $M_\infty = 9.95$ ce qui nous fournit une première approximation du paramètre d'interaction visqueuse $A = 0.073$. En ce qui concerne la détermination de la masse volumique au raccord, nous n'avons pas jugé utile de dépouiller les clichés relatifs à l'ogive 3/4: compte tenu des remarques du paragraphe (8.4), une évaluation grossière suffit. Comme nous ne disposons que des dépouillements pour $n = 1$ et $n = 2/3$ sans incidence, nous nous sommes contentés pour estimer ρ_{0e} pour $n = 3/4$. En effet, la campagne d'essais à R3Ch est antérieure à la mise au point à l'IMFL du dépouillement automatique des interférogrammes. Celui-ci nécessite un étalonnage en cours d'essai ce qui n'est plus réalisable dans le cas présent. La seule solution est donc un dépouillement manuel, très coûteux en temps et demandant un apprentissage de la reconnaissance visuelle des couleurs. De la même façon, la température extérieure est estimée à partir des

mesures de pression et de masse volumique sur les ogives en loi de puissance $n = 2/3$ et $n = 1$ dans le cas $\alpha = 0$. Néanmoins, nous avons développé la méthode de déconvolution pour le cas $\alpha \neq 0$ à des fins ultérieures (annexe E).

L'analyse des courbes donnant la répartition radiale expérimentale de la masse volumique (figure 60) nous indique que la variation de cette grandeur du choc vers l'obstacle est de l'ordre de 10%. On prendra donc $\rho_{0e}^* = 0.9 \times \rho_c$. Elle est d'ailleurs quasiment constante à l'égard de x/L comme dans nos hypothèses théoriques. Les mesures de pression pariétale rapportées à des abscisses très voisines (figure 61) montrent que la température extérieure est de l'ordre de 120K. Il est important de noter que selon notre estimation, T_e varie très peu en fonction de x/L ($x/L > 0.1$) puisqu'elle est comprise entre 125K et 110K. L'hypothèse de température extérieure constante est donc parfaitement justifiée suffisamment loin de l'émoussement. En revanche, même en dépouillant l'interférogramme de la figure 62a, nous ne pouvons mesurer la température dans la couche limite. En effet, deux phénomènes se conjuguent:

- Tant que l'épaisseur de couche limite e traversée par le faisceau **1'** est inférieure à une valeur e_{cri} (figure 62b), la différence de marche entre les rayons **1** et **1'** n'est pas détectable par la méthode optique.
- De plus, même en supposant que les gradients de masse volumique sont tels que, pour $e > e_{cri}$, la différence de marche entre les faisceaux **2** et **2'** devienne détectable, la zone de l'interférogramme correspondant à la hauteur δz reste inexploitable à cause de la résolution insuffisante du cliché et de la succession très rapide des couleurs dans l'échelle des teintes.

Nous avons donc choisi de calculer la couche limite pour deux températures de paroi: à l'instant initial, la maquette est à la température ambiante soit $T_p = 290K$. En fin de rafale (10s), cette dernière doit atteindre approximativement 500K.

La vitesse et l'enthalpie adimensionnées d'ordre 0 sont représentées sur la figure 63. Les dérivées à l'origine ($\eta^* = 0$) de ces deux fonctions sont d'autant plus grandes que la température de paroi est faible: l'épaisseur de couche limite diminue avec T_p . On peut aussi remarquer que les variations de la température T_0 et du paramètre N_0 sont d'autant plus marquées que la température de paroi augmente. On comprend dès lors l'importance du choix de N_{0m} dans les configurations de paroi adiabatique.

Un des résultats de l'intégration du système d'ordre 0 est le paramètre d'interaction visqueuse A calculé en tenant compte du couplage. Le tableau suivant présente l'évolution de A au fil des itérations issues de la méthode de point fixe:

Valeurs successives de A	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4
$T_p = 290K$	0.073000	0.068612	0.069887	0.070303	0.070304
$T_p = 500K$	0.073000	0.066223	0.067753	0.068228	0.068230

La convergence est donc extrêmement rapide puisque 5 itérations suffisent pour obtenir une précision de 10^{-6} .

La résolution du système d'ordre 1 est effectuée en deux étapes puisque l'équation pour la vitesse orthoradiale adimensionnée t_1 est découplée des équations relatives à $f_{1\eta^*}$ et g_1 . La figure 64 montre que la dérivée à l'origine est importante (> 2.4). Elle met aussi en évidence une survitesse transversale marquée dans la couche limite. Ce phénomène a également été décrit en [40]. Cependant, pour donner une estimation de la survitesse dimensionnée, il faut déterminer l'incidence efficace α_{eff} ce qui nécessite l'intégration du système différentiel pour la vitesse longitudinale et l'enthalpie adimensionnées d'ordre 1.

Comme nous l'avons suggéré dans le paragraphe (8.4), nous avons tout d'abord testé l'influence de la masse volumique de raccord ρ_{1e}^* pour deux valeurs extrêmes de cette grandeur [19]. La figure 65 montre de manière évidente que la solution est quasi-indépendante de ce paramètre pour une valeur donnée de ρ_{0e}^* . La figure 66 permet d'apprécier l'influence de la masse volumique extérieure d'ordre 0. Les effets sont à peine plus marqués que sur la figure précédente: les écarts entre les deux solutions calculées avec $\rho_{0e}^* = 0.95$ $\rho_{0e}^* = 0.90$ sont de l'ordre de 1.5% aussi bien sur les dérivées à l'origine que sur les extrema. Compte tenu de ces remarques, les calculs ultérieurs ont été effectués avec $\rho_{0e}^* = 0.90$ et $\rho_{1e}^* = 0$. La figure 68 représente la vitesse longitudinale et l'enthalpie adimensionnées d'ordre 1 pour $T_p = 290K$ et $T_p = 500K$. Les variations de la solution s'accroissent avec T_p ce qui laisse présager une apparition du décollement d'autant plus précoce que la température de paroi augmente. Nous y avons également tracé la fonction N_1 qui présente des évolutions très marquées dans le cas de la paroi adiabatique. Le tableau suivant permet de quantifier les remarques que nous venons d'exprimer: il donne les dérivées initiales des différentes inconnues d'ordre 0 et 1. Nous y avons ajouté le cas d'une paroi adiabatique pour lequel la température de paroi atteint la valeur $T_p = 872K$.

	$T_p = 290K$	$T_p = 500K$	$T_p = 872K$
A	0.070304	0.068230	0.064941
C	1.031614	1.011567	0.985114
N_{0m}	1.070886	1.219563	1.447787
T_{0m}	201K	227K	261K
$f_{0\eta^*\eta^*} _{\eta^*=0}$	0.496244	0.480751	0.466631
$g_0 _{\eta^*=0}$	0.275749	0.475430	0.829151
$g_{0\eta^*} _{\eta^*=0}$	0.229262	0.138883	0.
τ_{0eff}	0.410303	0.414509	0.421986
$t_{1\eta^*} _{\eta^*=0}$	2.3980	2.9981	3.9511
N_{1m}	-0.13940	-0.25980	-0.46012
$f_{1\eta^*\eta^*} _{\eta^*=0}$	-1.3023	-1.3554	-1.4437
$g_1 _{\eta^*=0}$	0.	0.	0.1124
$g_{1\eta^*} _{\eta^*=0}$	-0.64798	-0.13554	0.
α_{eff}/α	0.909	0.866	0.782

Signification du paramètre A La lecture de ce tableau amène une première remarque concernant le paramètre d'interaction visqueuse A . En effet, contrairement aux résultats de Mirels [27] et de Yasuhara [28], A est d'autant plus petit que l'épaisseur relative de l'obstacle efficace τ_{eff} augmente. Ceci est dû au fait que les résultats présentés dans ces deux articles sont obtenus avec une hypothèse supplémentaire: le coefficient C est ajusté de manière à ce que $N_{0m} = 1$. Cela signifie en particulier que les auteurs choisissent $T_{0m} = T_p$. L'approximation de la loi de Sutherland (7.13) ainsi obtenue ne tient donc pas compte de la répartition de la température à l'intérieur de la couche limite. Elle est donc optimale près de la paroi mais peut être très mauvaise ailleurs. On peut donc considérer que la méthode que nous proposons constitue, dès l'ordre 0, une amélioration des solutions données en [27] et [28] car en choisissant T_m comme nous l'avons fait, nous avons choisi le N_m constant se rapprochant le plus de N dans l'ensemble de la couche limite. Avec l'hypothèse $N_{0m} = 1$, la résolution des équations d'ordre 0 est évidente:

- On fixe A et on intègre le système constitué par les équations (9.1), (9.2) et (9.3) dans lesquelles $N_0 = 1$.
- On obtient alors en particulier la valeur de τ_{eff} qui, comme le montre (9.3) est une fonction croissante de A .
- L'expression de A étant $A = \sqrt{\frac{1}{\gamma}}(\gamma - 1) \frac{1}{\sqrt{k^2(3/4)^2(1+Al_e)}} \Lambda$ avec $\Lambda = \frac{M_\infty}{\tau^2} \sqrt{\frac{C}{\Re}}$, on calcule Λ et donc C qui sont des fonctions croissantes de A .

La solution obtenue est alors celle qui correspond à une famille de couches limites définies par la valeur particulière de Λ . Dans ces conditions, le paramètre A constitue une mesure de δ_0/R' .

Dans notre méthode, on calcule une couche limite initiale avec une valeur de A correspondant à $\tau_{eff} = \tau$ et $C = 1$. L'écoulement extérieur est donc celui qui existerait en l'absence d'effets visqueux. La résolution de ce problème fournit une valeur τ_{eff} et C . L'écoulement extérieur s'est donc renforcé et la distribution de température dans la couche limite a évolué. Nous calculons alors la couche limite correspondant à ces nouvelles conditions. Le paramètre A mesure donc l'interaction entre la couche limite et l'écoulement extérieur par le biais de τ_{eff} ainsi que l'optimisation de la loi de Sutherland par celui de C . Lorsque la température de paroi croît, C diminue et l'épaisseur de la couche limite augmente ce qui conduit évidemment à une diminution de A .

La contradiction entre nos résultats et ceux de Mirels n'est donc qu'apparente car bien que l'expression mathématique de A soit identique dans les deux cas, sa signification physique est totalement différente.

Influence du choix de T_m Pour approfondir la comparaison de nos résultats avec ceux de la littérature, nous donnons ci-dessous la solution obtenue en utilisant la formule empirique de Cheng (7.15) pour déterminer T_m :

	$T_p = 290K$	$T_p = 500K$	$T_p = 871K$
A	0.068147	0.064501	0.059262
C	0.963214	0.890420	0.789486
N_{0m}	0.999882	1.073507	1.159719
T_{0m}	290K	395K	581K
$f_{0\eta\eta} _{\eta=0}$	0.513191	0.511436	0.518833
$g_0 _{\eta=0}$	0.276190	0.476190	0.829441
$g_{0\eta} _{\eta=0}$	0.236892	0.147431	0.
τ_{eff}	0.409659	0.412887	0.417987
$t_{1\eta} _{\eta=0}$	2.4801	3.1948	4.4138
N_{1m}	-0.016981	-0.016785	0.008245
$f_{1\eta\eta} _{\eta=0}$	-1.3823	-1.5088	-1.7289
$g_1 _{\eta=0}$	0.	0.	0.12509
$g_{1\eta} _{\eta=0}$	-0.68540	-0.46609	0.
δ_1^*/R'	0.08231	0.12308	0.20946
α_{eff}/α	0.91	0.88	0.81

Si à l'ordre 0, les résultats sont comparables à ceux que nous avons présentés, ce n'est pas le cas pour l'ordre 1. Ceci est dû à la valeur du coefficient N_1 qui, calculé avec la valeur de T_{1m} donnée par la loi de Cheng (7.15), reste très voisin de 0. Ceci conduit à une sorte de dégénérescence des équations (9.4) et (9.6) devenues insensibles à l'effet de l'incidence α sur la température. Cette loi doit donc être écartée pour l'écoulement tridimensionnel.

Validité de la solution D'une manière plus générale, il convient de discuter de la validité de nos solutions compte tenu de l'évolution de la température T à l'intérieur de la couche limite. L'existence de la similitude interne est notamment basée sur l'approximation en loi de puissance de la loi de Sutherland ce qui est justifié si les variations de T ne sont pas trop importantes. La figure 63 montre que ce n'est pas le cas pour la paroi adiabatique puisque T passe de la valeur $T_e = 120K$ à $T_p = 872K$. Il est clair sur les figures 63 et 67 que remplacer alors N_0 et N_1 par leur valeur moyenne constante ne peut plus constituer une approximation très précise. Notons tout de même que le calcul fournit des ordres de grandeur précieux en ce qui concerne la température de paroi. Il est évident que la valeur $T_p = 872K$ n'est jamais atteinte dans une soufflerie froide (la tenue du matériau ne serait plus assurée) ce qui signifie que les essais dans ce type d'installation à rafale ne peuvent être représentatifs du cas adiabatique (vol de longue durée).

Après ces remarques d'ordre général, nous allons maintenant tirer parti des résultats contenus dans le tableau récapitulatif de la page 110 en commençant par l'estimation de la vitesse transversale.

Composante transversale de la vitesse La connaissance du rapport de l'incidence efficace à l'incidence réelle permet de quantifier la survitesse orthoradiale

dimensionnée due à t_1 . De la définition de t_1 on tire:

$$v = v_1 \sin \theta = t_1 v_{1e} \sin \theta.$$

En explicitant t et v_{1e} il vient:

$$v = \frac{3\alpha_{eff}}{2(\gamma + 1)} \left(\frac{x}{L}\right)^{1/2} t_1 V_\infty \sin \theta.$$

Le maximum a lieu en $\theta = \pi/2$ et $x/L = 1$. Pour $T_p = 290K$ on obtient:

$$v_{max} = 0.097 \times V_\infty$$

ce qui relativise les conclusions que l'on peut tirer au seul regard de la figure 64.

Coefficients aérodynamiques Intéressons nous maintenant à l'influence de la couche limite sur les coefficients aérodynamiques. On rappelle [19] que le coefficient de traînée donné par le modèle non visqueux est:

$$(9.22) \quad \frac{C_{xe}}{\tau^2} = C_{x0} + \frac{C_{x2}}{M_\infty^2 \tau^2}.$$

Pour l'ogive en loi de puissance 3/4, on obtient:

$$\frac{C_{xe}}{\tau^2} = 0.398.$$

La prise en compte de la couche limite induit un épaissement du corps réel. Il s'ensuit une augmentation de la traînée issue des efforts non visqueux puisque l'écoulement extérieur est alors relatif à l'obstacle efficace. La relation (9.22) devient:

$$(9.23) \quad \frac{C'_{xe}}{\tau_{eff}^2} = C_{x0} + \frac{C_{x2}}{M_\infty^2 \tau_{eff}^2}$$

ce qui, ramené à l'obstacle réel, permet d'écrire:

$$(9.24) \quad \frac{C'_{xe}}{\tau^2} = C_{x0} \frac{\tau_{eff}^2}{\tau^2} + \frac{C_{x2}}{M_\infty^2 \tau^2}.$$

Le coefficient C'_{xe} ainsi calculé est supérieur à C_{xe} d'environ 5% pour $T_p = 290K$ et de 10% dans le cas d'une paroi adiabatique. Pour obtenir le coefficient de traînée global il faut encore ajouter à C'_{xe} la contribution des efforts visqueux donnée par (9.14). Pour les différentes températures de paroi envisagées dans ce paragraphe on obtient le tableau suivant:

	$T_p = 290K$	$T_p = 500K$	$T_p = 872K$
$\frac{C_{xe}}{\tau^2}$	0.398	0.398	0.398
$\frac{C'_{xe}}{\tau^2}$	0.418	0.426	0.441
$\frac{C_{xv}}{\tau^2}$	0.069	0.068	0.067
$\frac{C_x}{\tau^2}$	0.487	0.494	0.509

La part visqueuse représente environ 13% de la traînée totale d'avant corps. Nous n'étendrons pas cette comparaison aux résultats expérimentaux puisque nous avons vu dans la deuxième partie que le modèle non visqueux ne prend pas en compte la traînée propre du nez qui peut être de l'ordre de grandeur de celle donnée par (9.22).

Examinons maintenant le coefficient de portance C_z . Le modèle non visqueux donne:

$$(9.25) \quad \frac{C_{ze}}{\alpha} = 1.907.$$

Comme dans le cas de la traînée, nous allons appliquer cette relation à l'obstacle efficace pour lequel on doit tenir compte de l'incidence efficace α_{eff} . On a alors:

$$(9.26) \quad \frac{C'_{ze}}{\alpha} = \frac{C_{ze}}{\alpha} \frac{\alpha_{eff}}{\alpha}.$$

Le rapport α_{eff}/α étant inférieur à 1, (9.26) montre que la prise en compte de la couche limite induit une perte de portance croissante avec la température de paroi. Ceci pose un problème d'interprétation des résultats expérimentaux car T_p varie au cours du temps pendant la rafale.

Nous avons représenté sur la figure 68a le coefficient de portance tiré de la campagne à R3Ch. Elle montre clairement que ce dernier diminue très sensiblement lorsque la plage de dépouillement s'étend. Il se trouve que le mode opératoire était le suivant: on introduisait la maquette dans la veine à incidence nulle et α variait lentement pendant la durée de la rafale. Aux plus grandes valeurs de l'incidence correspondent donc les températures de paroi les plus fortes. L'expérience confirme la tendance donnée par la présente théorie. La figure 68b montre que la contribution des efforts visqueux donnés par (9.16) ne compense pas entièrement la perte induite par l'effet de déplacement d'ordre 1 de l'obstacle efficace. Même pour $T_p = 290K$, le coefficient global reste inférieur de 4% à la plus grande des deux valeurs expérimentales et de 2.5% à la plus petite. Pour $T_p = 500K$, ces différences s'élèvent respectivement à 9% et 7%. Ainsi la prise en compte théorique de la couche limite induit une perte de portance avec T_p un peu plus importante que l'expérience ne le montre. Ceci peut être en partie expliqué par le fait que le modèle non visqueux tel qu'il est présenté ici, ne tient pas compte des effets non linéaires de l'incidence qui, pour $\alpha \simeq 0.1rad$ ne sont plus nécessairement négligeables [39] et seraient donc légèrement porteurs. On peut également attribuer ces écarts aux hypothèses simplificatrices $T_p = Cste$ et $N = Cste$. Signalons cependant que compte tenu de tous ces facteurs, il faut utiliser les résultats de pesées en soufflerie hypersonique à rafale avec une certaine marge d'incertitude. Celle-ci couvre sans doute largement la fourchette entre nos valeurs théoriques. Cette étude éclaire également la validité de la théorie non visqueuse: elle ne représente bien que les configurations à parois froides.

Contraintes et flux de chaleur Les figures 69 à 74 présentent les cartes des différentes contraintes τ_p et τ_t ainsi que le flux de chaleur à la paroi q . La figure

69 permet d'apprécier l'influence de la température de paroi sur la contrainte longitudinale en l'absence d'incidence: τ_p est sensiblement plus élevée pour la paroi froide. C'est bien ce que nous avons constaté lorsque nous avons étudié le coefficient de traînée. Le flux de chaleur q pour $\alpha = 0$ et $\alpha = 0.1rad$ fait l'objet des cartes de la figure 70. Il est négatif ce qui signifie qu'il y a transfert de chaleur du fluide vers la paroi. Il est intéressant de remarquer l'effet considérable de l'incidence, le flux s'intensifiant de manière très marquée à l'intrados. On constate évidemment que q est d'autant plus grand (en valeur absolue) que la température de paroi est petite.

La figure 71 permet de visualiser la zone de décollement à l'extrados lorsque $\alpha = 0.1rad$. Certes, elle s'atténue lorsque T_p diminue mais pas de manière flagrante. L'application du critère de décollement (9.20) montre d'ailleurs que le décollement apparaît à l'extrados pour $x/L > 0.93$ lorsque $T_p = 290K$ et $x/L > 0.89$ pour $T_p = 500K$. En fait, la diminution de la température de paroi provoque deux effets antagonistes: augmentation de la contrainte longitudinale d'ordre 0 et de l'incidence efficace. Le premier est favorable à la disparition du décollement, le second l'accroît puisqu'il favorise les effets d'ordre 1.

La figure 72 est une illustration du critère de décollement (9.21): pour $\alpha \leq 0.098rad$ soit $5.6deg.$, la couche limite n'est plus décollée lorsque $T_p = 290K$. En revanche, elle l'est à partir de $x/L > 0.96$ soit $x = 287mm$ pour $T_p = 500K$. Ces résultats sont indirectement confirmés par l'expérience puisque aucune indication de la présence de décollement n'est visible sur les mesures de pression. Bien entendu, nous supposons que la température de paroi réelle de l'ogive reste dans la gamme $290K$ à $500K$. Notons qu'à l'apparition d'un décollement, la discussion que nous avons menée sur les coefficients aérodynamiques ne s'applique plus.

La figure 73 représente les cartes de la contrainte transversale. Celle-ci est bien entendue plus importante pour $T_p = 500K$ comme le laissait prévoir la comparaison des valeurs de C_{zv}/α .

Enfin, la figure 74 regroupe ces cartes dans le cas d'une paroi adiabatique (le flux de chaleur q est nul). Le frottement longitudinal d'ordre 0 est atténué par rapport à celui obtenu pour le cas d'une paroi froide (figure 69). Pour $\alpha = 0.1rad$ la couche limite est décollée à l'extrados pour $x/L > 0.99$.

9.3.2 Couche limite pour $M_\infty = 12$

Afin d'évaluer la sensibilité de la couche limite au nombre de Mach, on choisit $M_\infty = 12$ les autres grandeurs de l'écoulement amont devant rester inchangées par rapport à la configuration précédente. Il faut donc choisir les conditions génératrices suivantes:

$$T_{i\infty} = 1490K \text{ et } p_{i\infty} = 400b.$$

On vérifie bien que la température, la pression et la masse volumique amont sont quasiment identiques à celles pour $M_\infty = 9.95$:

$$T_\infty = 50K, p_\infty = 277Pa, \rho_\infty = 0.0193kg/m^3.$$

Le nombre de Reynolds est donc: $\Re_\infty = 2.81 \times 10^6$. On peut alors initialiser le paramètre d'interaction visqueuse par $A = 0.085$. L'épaisseur relative de l'obstacle est $\tau = 0.4$.

Compte tenu du changement de M_∞ , les conditions à la traversée du choc sont différentes de celles obtenues pour $M_\infty = 9.95$. La température extérieure T_e n'est donc plus égale à $120K$. Il nous faut donc estimer à nouveau cette dernière. Dans ce but, nous avons exploité la forme du modèle non visqueux pour la pression pariétale [19]:

$$p' = \frac{2n^2}{\gamma + 1} \gamma p_\infty M_\infty^2 \frac{\tau^2}{4\lambda_0'^2} \left(\frac{x}{L}\right)^{2(n-1)} \left[p_0'^* + \frac{\tilde{\zeta}_0}{1 + \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{(2-n)8\tilde{\zeta}_0\lambda_2}{n}} - 1 \right)} p_2'^* \right]$$

avec $n = 3/4$, et $\tilde{\zeta}_0 = \frac{4\lambda_0'^2}{M_\infty^2 \tau^2} \left(\frac{x}{L}\right)^{2(1-n)}$ les fonctions étoilées ne dépendant que de γ et de n .

D'après la deuxième partie, nous savons que la théorie pour l'écoulement extérieur nous permet aussi d'avoir accès à une bonne approximation de la position du choc :

$$R(x) = \frac{\tau L}{2\lambda_0'} \left(\frac{x}{L}\right)^n \left(1 + \frac{\tilde{\zeta}_0}{1 + \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{(2-n)8\tilde{\zeta}_0\lambda_2}{n}} - 1 \right)} \lambda_2 \right).$$

On obtient alors aisément une estimation de la masse volumique sur le choc par:

$$\frac{\rho_\infty}{\rho_c} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{2}{\gamma - 1} \frac{1}{M_\infty^2 \frac{R_x}{\sqrt{1+R_x^2}}} \right).$$

En prenant en compte une augmentation de l'ordre de 5% de l'épaisseur relative de l'obstacle efficace due aux effets visqueux et en choisissant $\rho_{0e} = 0.9 \times \rho_c$, on obtient une estimation de la température extérieure: $T_e = 150K$. Cette évaluation est parfaitement en accord avec celle qui a été effectuée lors de l'étude de la configuration expérimentale.

Dans le but de comparer ultérieurement notre solution avec d'autres résultats, nous allons calculer la couche limite pour $T_p = 1200K$ et pour le cas d'une paroi adiabatique.

Ordre 0 La figure 75 représente la vitesse et l'enthalpie adimensionnées d'ordre 0 ainsi que les distributions de température T_0 et du paramètre N_0 . On constate que le cas $T_p = 1200K$ est proche de la configuration adiabatique. L'allure des courbes est similaire à celles de la figure 63. On remarque tout de même que le profil de g_0 pour la paroi adiabatique admet de faibles variations. Cela signifie en particulier que la diminution de la vitesse dans la couche limite à l'approche de la paroi est compensée par une augmentation quasi-équivalente de la température T_0 . Cette dernière atteint la valeur $T_p = 1235K$. Si on la compare à $T_p = 872K$ obtenue pour $M_\infty = 9.95$, on vérifie bien que l'échauffement

de la paroi croît avec le nombre de Mach.

L'évolution de la valeur du paramètre A au fil des itérations issues de la méthode de point fixe est consignée dans le tableau suivant:

Valeurs successives de $A \times 10^2$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
$T_p = 1200K$	8.5000	7.5704	7.3008	7.2869	7.2718	7.2716
$T_p = 1235K$	8.5000	7.5698	7.2902	7.2677	7.2462	7.2460

Vitesse transversale Les profils t_1 de la figure 76 mettent en évidence une sur-vitesse transversale dans la couche limite encore plus marquée que pour la configuration expérimentale. La cause en est essentiellement l'effet du choix des températures de paroi puisqu'une résolution pour $M_\infty = 12$ et $T_p = 500K$ permet la comparaison suivante:

M_∞	9.95	12
$t_{1\eta^*} _{\eta^*=0}$	3	2.8
t_{1max}	1.96	1.91

A températures de paroi égales, les variations induites par le nombre de Mach sont de 6% sur la dérivée à l'origine et de 3% sur le maximum. A températures de paroi égales, l'augmentation de M_∞ conduit à une atténuation des variations de t_1 . D'une manière plus générale, c'est l'épaisseur relative de l'obstacle efficace τ_{eff} qui diminue lorsque M_∞ croît. C'est également le cas de l'épaisseur de la couche de choc.

Influence de la masse volumique de raccord De la même manière que nous l'avons fait pour la configuration expérimentale, nous avons testé l'influence de la masse volumique de raccord d'ordre 1 sur la solution adiabatique. Ce point est l'objet de la figure 77 qui confirme la légitimité du choix $\rho_{1e}^* = 0$ quelle que soit la température de paroi. La figure 78 montre que l'influence de ρ_{0e}^* sur la solution d'ordre 1 est du même ordre de grandeur que pour $M_\infty = 9.95$: les écarts entre les solutions calculées avec $\rho_{0e}^* = 0.95$ et $\rho_{0e}^* = 0.9$ sont de l'ordre de 2% en ce qui concerne les extrema des grandeurs $f_{1\eta^*}$, g_1 et de 5% pour les valeurs des dérivées à l'origine. On constate donc que l'impossibilité de déterminer très précisément la valeur de ρ_{0e}^* n'affecte pas la portée des résultats que nous présentons. La figure 79 représente la vitesse longitudinale et l'enthalpie adimensionnées d'ordre 1 calculées avec $\rho_{0e}^* = 0.9$ et $\rho_{1e}^* = 0$ ainsi que l'évolution de N_1 .

Tableau récapitulatif Les résultats de l'intégration complète des équations pour la couche limite sont résumés dans le tableau suivant:

	$T_p = 1200K$	$T_p = 1235K$
A	0.072716	0.072460
C	0.947198	0.945684
N_{0m}	1.583020	1.599617
T_{0m}	312K	314K
$f_{0\eta^*\eta^*} _{\eta^*=0}$	0.446638	0.445964
$g_0 _{\eta^*=0}$	0.805315	0.828882
$g_{0\eta^*} _{\eta^*=0}$	0.008318	0.
τ_{0eff}	0.425291	0.425869
$t_{1\eta^*} _{\eta^*=0}$	4.1944	4.2587
N_{1m}	-0.79415	-0.75338
$f_{1\eta^*\eta^*} _{\eta^*=0}$	-1.3843	-1.4276
$g_1 _{\eta^*=0}$	0.	0.12585
$g_{1\eta^*} _{\eta^*=0}$	-0.015026	0.
δ_1^*/R'	0.28718	0.31203
α_{eff}/α	0.760	0.745

Coefficients aérodynamiques On en tire notamment les différents coefficients aérodynamiques en appliquant les équations (9.24), (9.26), (9.14) et (9.16). On obtient les valeurs suivantes:

	$T_p = 1200K$	$T_p = 1235K$
$\frac{C_{xe}}{\tau^2}$	0.394	0.394
$\frac{C_{xe}'}{\tau^2}$	0.444	0.445
$\frac{C_{xv}}{\tau^2}$	0.075	0.075
$\frac{C_x}{\tau^2}$	0.519	0.520
$\frac{C_{ze}}{\alpha}$	1.907	1.907
$\frac{C_{ze}'}{\alpha}$	1.450	1.421
$\frac{C_{zv}}{\alpha}$	0.016	0.016
$\frac{C_z}{\alpha}$	1.466	1.437

La figure 80 montre que la prise en compte de la couche limite augmente considérablement le coefficient de traînée donné par la théorie non visqueuse. Cet accroissement est d'environ 32% pour les deux configurations calculées. Il est dû pour les 60% aux effets visqueux c'est à dire à la composante C_{xv} . On peut remarquer en comparant ces valeurs de C_x/τ^2 avec celles obtenues pour $M_\infty = 9.95$ que ce coefficient est relativement peu sensible au nombre de Mach. Ce n'est pas du tout le cas du coefficient de portance qui chute dans des proportions de l'ordre de 25% lorsqu'on prend en compte la couche limite. On peut noter là encore, que les efforts visqueux C_{zv} sont très nettement insuffisants pour compenser ce phénomène.

Contraintes et flux de chaleur La figure 81 présente la contrainte longitudinale τ_p pour une incidence nulle. En la comparant à la figure 69, on constate que l'accroissement du nombre de Mach induit un renforcement très marqué de τ_p . Le flux de chaleur q pour une température de paroi de $T_p = 1200K$ (figure 82) est très atténué par rapport à celui présenté sur la figure 70 puisque nous sommes proches d'une configuration de paroi adiabatique.

La figure 83 permet de visualiser le frottement longitudinal τ_p pour une incidence égale à $\alpha = 0.1rad$. Il n'y a sur ces cartes aucune trace de décollement à l'extrados: l'application de (9.21) montre en effet qu'un décollement d'extrados n'apparaît qu'à partir de $\alpha > 0.103rad$. et $\alpha > 0.102rad$. respectivement pour $T_p = 1200K$ et $T_p = 1235K$. Afin de tester l'influence du choix de T_m sur nos solutions et notamment sur le critère d'apparition du décollement, nous avons effectué la résolution en prenant pour T_m la valeur moyenne de la température dans la couche limite. Les cartes du frottement longitudinal τ_p ainsi obtenues sont représentées sur la figure 84. On constate que τ_p est moins sensible aux effets d'ordre 1: l'application de (9.21) indique qu'il n'y a pas de décollement d'extrados si $\alpha < 0.1041rad$. pour $T_p = 1200K$ et si $\alpha < 0.103rad$. pour $T_p = 1235K$. Il semble donc que le choix de l'optimisation de la loi de Sutherland (7.13) notamment dans les configurations de parois adiabatiques devient primordial. Les figures 75 et 79 relatives à N_0 et N_1 montrent d'ailleurs, dans ce cas, la difficulté d'approximer ces deux grandeurs par une constante.

La figure 85 montre le frottement transversal τ_t . Lui aussi, est considérablement accentué par l'augmentation du nombre de Mach.

Conclusion

Notre étude a permis de démontrer l'existence d'une couche limite à similitude interne tridimensionnelle pour l'ogive en loi de puissance $3/4$. Cette avancée théorique a été possible grâce à l'exploitation du modèle non visqueux [18][19] qui explicite la forme du champ aérodynamique pour l'écoulement extérieur.

La méthode que nous proposons permet un choix optimal pour l'approximation de la loi de Sutherland ce qui constitue déjà dans le cas de l'écoulement méridien une amélioration de ce qui est proposé dans la littérature. Les premiers résultats ont dégagé les aspects essentiels suivants:

- Existence d'une incidence effective correspondant à l'effet de déplacement d'ordre 1 de l'obstacle efficace qui induit notamment une perte importante de portance dans les configurations de parois adiabatiques.
- Détermination analytique de la traînée et de la portance de frottements. Si ces derniers ont une forte contribution dans la traînée globale d'avant-corps, ils sont quasiment négligeables pour la portance.
- Formulation d'un critère d'apparition du décollement de la couche limite laminaire. Il est indirectement confirmé par l'expérience puisque la mesure et la théorie sont en accord sur le fait qu'aucun décollement n'a affecté les essais à R3Ch.
- Mise en évidence et quantification de l'effet de la masse volumique extérieure sur l'écoulement tridimensionnel. On l'a vu, l'impossibilité d'utiliser le modèle non visqueux pour déterminer la valeur de la masse volumique au raccord n'affecte pas la qualité des solutions analytiques obtenues.
- Sensibilité de la solution à l'approximation de la loi de Sutherland dans les configurations de parois adiabatiques.

Il est important de signaler que la solution calculée est universelle pour une gamme fixée des paramètres sans dimensions: A , M_∞ , N_0 , et N_1 .

Enfin, un des principaux atouts de cette théorie est de décrire précisément des phénomènes complexes pour une configuration d'obstacle simple et un temps de calcul négligeable: moins de 3mn CPU sur une station SUN "Sparc20" pour la résolution des ordres 0 et 1. Il n'y a donc aucun inconvénient à multiplier les configurations de calcul. Il serait cependant souhaitable de comparer nos résultats avec ceux obtenus avec des codes de calcul plus généraux. La solution analytique que nous avons présentée pourrait alors servir de cas test pour la mise au point d'algorithmes traitant de configurations plus complexes.

Conclusion générale

En guise de conclusion, nous résumerons d'abord les résultats principaux de chacune des trois parties. A la suite de quoi nous tenterons de tracer les perspectives de la méthode inducto-déductive qui nous a guidé et de cette confrontation tripartite: analyse, calcul, expérience.

En ce qui concerne les explosions violentes anisotropes, nous avons mis au point une méthode numérique mixte de collocations-caractéristiques très efficace lorsqu'on traite des anisotropies modérées. Dans ce cas, nous avons constaté la bonne convergence du calcul. Cela nous a permis en particulier de vérifier l'existence de la frontière matérielle Σ' et son unicité.

Pour les anisotropies plus prononcées, la résolution n'est que partielle. Nous avons montré néanmoins que la technique numérique n'est pas en cause puisque pour des cas "réguliers" elle fournit des résultats identiques à ceux obtenus par un schéma du type "différences finies". Le problème est donc théorique: il faut repasser les équations au crible des mathématiques pures et vérifier les hypothèses de chaque étape:

- Il s'agit d'abord de déterminer si les espaces (X, θ) , (ξ, ζ) et (ξ, \hat{S}) sont bien euclidiens.
- Il faut aussi s'assurer que les différentielles locales $d\eta$ et $d\theta$ exprimées en fonction de $d\xi$ et $d\zeta$ sont bien des différentielles totales exactes. Le terme $1/(g^2 + v_0^2)$ est-il un facteur intégrant?

Sur un plan plus physique, il se peut, pour les fortes anisotropies, que la seule donnée de la forme du choc ne suffise pas à assurer l'unicité de la solution et qu'il faille introduire par exemple une répartition de chocs internes. Ce dernier point devrait pouvoir être éclairci par le raffinement du schéma de Mac Cormack existant actuellement en optimisant le choix du pas et en y introduisant le calcul de conditions C.F.L., ce dernier aspect ne concernant que les cas localement hyperboliques.

Une fois ces interrogations levées, nous disposerons d'un outil numérique extrêmement performant puisque très rapide et économe en place mémoire. Nous pourrons l'appliquer hors du cadre du cas test envisagé jusqu'à présent et en particulier au calcul d'ondes de souffle tirées de l'expérience. Il nous sera ainsi possible de relier la forme du choc avec les répartitions d'énergie et de rotationnel dans la couche de choc et d'entamer l'étude fondamentale de ce type d'écoulement.

La seconde partie consacrée à la comparaison entre le modèle théorique et les résultats expérimentaux de la campagne d'essais à R3Ch induit moins d'interroga-

tions. Le modèle a été validé avec succès. La confrontation avec l'expérience a permis d'émettre des hypothèses sur des termes d'ordre 2 relatifs à l'incidence et à la contre-pression. Leur détermination ne pose a priori que des problèmes d'ordre calculatoire et constitue une suite logique et sans difficulté. Notons que ce développement au deuxième ordre n'apparaît désormais plus comme une opération académique mais comme une précision significative décelable par l'expérience. Cette dernière bénéficie maintenant d'une possibilité de dépouillement des interférogrammes en incidence qui apporterait des informations précieuses sur la masse volumique dans la couche de choc.

La troisième partie a montré l'existence d'une couche limite tridimensionnelle à similitude interne pour une ogive particulière. Un tel résultat ne peut être obtenu sans hypothèses simplificatrices. Nous avons d'une part négligé les effets de courbure sur l'ogive, ce qui se justifie par la faible épaisseur de la couche limite en faible interaction visqueuse. D'autre part, nous sommes parti du principe que la zone de l'émoussement, très petite, n'a pas d'effet notable en aval. Enfin, pour permettre l'émergence d'une similitude interne nous avons dû nous limiter aux parois isothermes et à une approximation en loi de puissance de la formule de Sutherland. Cependant, dans ce cas particulier, cet aspect est largement compensé par l'intérêt de nos résultats qui donnent sous une forme analytique la contribution des frottements aux coefficients aérodynamiques et le critère d'apparition du décollement.

Insistons sur le fait que nos résultats sont indirectement confirmés par l'expérience. En effet, la théorie et l'expérience s'accordent sur le fait qu'aucun décollement n'a affecté la campagne d'essais à R3Ch et qu'il y a une perte de portance corrélativement à la mise en incidence. Cette diminution étant d'autant plus importante que la température de paroi est élevée. La comparaison théorie-expérience donne les mêmes coefficients aérodynamiques à 3% près.

Signalons enfin que l'exploitation des mesures de pression et de masse volumique effectuées à R3Ch a prouvé la cohérence des hypothèses formulées à l'égard de la température extérieure et de la masse volumique au raccord.

Sur cette troisième partie, il manque cependant un volet intéressant qui est la comparaison avec un calcul numérique. On ne peut que souhaiter que ce travail soit effectué pour donner toute sa valeur à cette solution.

Au regard de ces conclusions particulières on comprend que l'approche analytique, l'expérience et le calcul numérique sont très intimement liés dans la démarche que nous avons adoptée. L'avantage de ce type de méthode réside dans la complémentarité des trois domaines. Les hypothèses simplificatrices peuvent être tirées de l'expérience ou de l'analyse des équations locales. Elles induisent une réduction raisonnable du nombre de variables ce qui est le cas dans la première partie. Elles peuvent même conduire à des solutions analytiques comme le montre le troisième volet de cette thèse. Ainsi, la résolution du système d'équations résultant revient à l'intégration numérique d'un système différentiel. La convergence numérique est donc assurée et la solution calculée est, avec une précision fixée à l'avance, très proche de la solution exacte du système simplifié. Si le résultat numérique ne coïncide pas avec l'expérience ou montre un comportement anormal il faut en rechercher la cause dans

la formulation mathématique. Notre démarche induit donc d'elle même de nouveaux axes de recherche.

Lorsque la solution analytique est confirmée par l'expérience comme c'est le cas dans la deuxième partie. On dispose alors d'un cas test parfait pour les méthodes numériques. C'est un point de repère dont on connaît parfaitement le domaine de validité puisque les hypothèses sont clairement identifiées.

Enfin, lorsque la comparaison directe avec l'expérience s'avère trop lourde à mettre en œuvre, l'analyse des phénomènes est contrainte à ne pouvoir comparer que des résultats numériques entre eux. L'émergence d'un cas analytique dans une configuration non triviale est alors très utile.

Il convient de rappeler également un point essentiel: une solution analytique, par par essence, est une relation mathématique explicite entre les causes et les effets d'un phénomène. C'est en soi l'outil de base de la compréhension et de la culture scientifique. Le développement du calcul formel informatisé devrait permettre aux chercheurs d'être plus hardis dans l'approche analytique et d'obtenir plus souvent de telles formulations même si elles ne concernent que des cas particuliers.

Partie IV

Annexes

Annexe A

Condition d'existence d'une zone hyperbolique pour le cas test

Nous avons vu dans la section (1.3) que, sur le choc le problème est entièrement elliptique si:

$$\min \frac{1}{1+m^2} \geq \frac{\gamma+1}{2\gamma}.$$

Compte tenu de la forme du choc donnée en (2.21) et de la définition de m (1.13), cette condition s'écrit:

$$(A.1) \quad \frac{\Lambda^2 \sin^2 2\theta}{(1 - 2\Lambda \cos 2\theta + \Lambda^2)^2} \leq \frac{1}{16} \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$$

On définit la fonction \mathcal{F}_Λ :

$$\mathcal{F}_\Lambda(\theta) = \frac{\Lambda^2 \sin^2 2\theta}{(1 - 2\Lambda \cos 2\theta + \Lambda^2)^2}.$$

Cette fonction de la variable θ où Λ est un paramètre est périodique de période π et elle est paire. Son étude sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ montre qu'elle admet un maximum en:

$$\tilde{\theta} = \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{2\Lambda}{1 + \Lambda^2} \right).$$

Notons M ce maximum. Après injection de la valeur $\tilde{\theta}$ dans \mathcal{F} et quelques simplifications, on obtient pour M :

$$M = \Lambda^2 \frac{(1 - \Lambda^2)^2}{(1 - 2\Lambda^2)^2}.$$

En posant $\mathcal{G} = \frac{1}{16} \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$, l'expression (A.1) s'écrit donc:

$$M \leq \mathcal{G}.$$

Si $\Lambda \neq 1/\sqrt{2}$, on obtient:

$$\Lambda^6 - (4\mathcal{G} + 2)\Lambda^4 + (4\mathcal{G} + 1)\Lambda^2 - \mathcal{G} \leq 0.$$

En posant $\mathcal{L} = \Lambda^2$, la condition (A.1) s'écrit sous la forme d'une inéquation du second degré en \mathcal{L} :

$$\mathcal{L}^3 - (4\mathcal{G} + 2)\mathcal{L}^2 + (4\mathcal{G} + 1)\mathcal{L} - \mathcal{G} \leq 0.$$

Annexe B

Formulation h g v_0 pour le problème de l'explosion

Le système d'équations aux dérivées partielles pour les inconnues h , g , v_0 s'écrit:

$$\begin{pmatrix} h \\ g \\ v_0 \end{pmatrix}_{\hat{s}} = E'^{-1} \begin{pmatrix} F'_1 \\ F'_2 \\ F'_3 \end{pmatrix} - E'^{-1} \mathcal{D}'_0 \begin{pmatrix} h \\ g \\ v_0 \end{pmatrix}_{\xi}$$

où

$$\begin{aligned} F'_1 &= \frac{1}{d'_0} \left(\alpha'_1 J_1 + \alpha'_2 J_2 + \alpha'_3 J_3 + \alpha'_4 \frac{J_4}{\gamma} \right) \\ F'_2 &= \frac{1}{d'_0} \left(\beta'_1 J_1 + \beta'_2 J_2 + \beta'_3 J_3 + \beta'_4 \frac{J_4}{\gamma} \right), \\ F'_3 &= \frac{1}{d'_0} \left(\delta'_1 J_1 + \delta'_2 J_2 + \delta'_3 J_3 + \delta'_4 \frac{J_4}{\gamma} \right) \end{aligned}$$

d'_0 étant le déterminant de la matrice \mathcal{D}'_0 :

$$d'_0 = \frac{g^2 + v_0^2}{\gamma} \left((g^2 + v_0^2)^2 - \frac{\gamma - 1}{2} c_0^2 [g^2 + (v_0 - mg)^2] \right).$$

Les α'_i sont donnés par:

$$\begin{cases} \alpha'_1 = (g^2 + v_0^2)^2 & = -\alpha'_4 \\ \alpha'_2 = -g(g^2 + v_0^2) \\ \alpha'_3 = (g^2 + v_0^2)(mg - v_0) \end{cases}$$

les β'_i par:

$$\begin{cases} \beta'_1 = (g^2 + v_0^2) \frac{\gamma - 1}{2\gamma} c_0^2 [m(v_0 - mg) - g] = -\beta'_4 \\ \beta'_2 = \frac{(g^2 + v_0^2)^2}{\gamma} - \frac{\gamma - 1}{2\gamma} c_0^2 v_0 (v_0 - mg) \\ \beta'_3 = \frac{\gamma - 1}{2\gamma} c_0^2 g v_0 - \frac{m}{\gamma} (g^2 + v_0^2)^2 \end{cases}$$

et les δ'_i par:

$$\begin{cases} \delta'_1 = -(g^2 + v_0^2) \frac{\gamma - 1}{2\gamma} c_0^2 (v_0 - mg) = -\delta'_4 \\ \delta'_2 = \frac{\gamma - 1}{2\gamma} g c_0^2 (v_0 - mg) \\ \delta'_3 = \frac{(g^2 + v_0^2)^2}{\gamma} - \frac{\gamma - 1}{2\gamma} c_0^2 g^2 \end{cases}$$

Enfin, la matrice \mathcal{D}'_0 est définie par:

$$\mathcal{D}'_0 = \frac{1}{d'_0} \begin{bmatrix} d'_{11} & d'_{12} & d'_{13} \\ d'_{21} & d'_{22} & d'_{23} \\ d'_{31} & d'_{32} & d'_{33} \end{bmatrix}$$

où

$$\begin{aligned} d'_{11} &= -\frac{\gamma-1}{2\gamma}(g^2 + v_0^2)c_0^2 m(g^2 + mgv_0 - v_0^2) \\ d'_{12} &= v_0(g^2 + v_0^2)^2 \\ d'_{13} &= -g(g^2 + v_0^2)^2 \\ d'_{21} &= \frac{\gamma-1}{2\gamma} \frac{g^2 + v_0^2}{\gamma} c_0^2 \left[(g^2 + v_0^2)(mg + (1 + m^2)v_0) - \frac{\gamma-1}{2} c_0^2 v_0 \right] \\ d'_{22} &= (g^2 + v_0^2) \frac{\gamma-1}{2\gamma} c_0^2 v_0 [m(v_0 - mg) - g] \\ d'_{23} &= -(g^2 + v_0^2) \frac{\gamma-1}{2\gamma} c_0^2 g [m(v_0 - mg) - g] \\ d'_{31} &= \frac{\gamma-1}{2\gamma} \frac{g^2 + v_0^2}{\gamma} c_0^2 \left[\frac{\gamma-1}{2} c_0^2 g - (g + mv_0)(g^2 + v_0^2) \right] \\ d'_{32} &= -(g^2 + v_0^2) \frac{\gamma-1}{2\gamma} c_0^2 v_0 (v_0 - mg) \\ d'_{33} &= (g^2 + v_0^2) \frac{\gamma-1}{2\gamma} c_0^2 g (v_0 - mg) \end{aligned}$$

Quant à la matrice E' , elle est définie de la manière suivante:

$$E' = \frac{1}{F_4} \mathcal{I} + \left. \frac{\partial \hat{S}}{\partial \xi} \right|_{\zeta} \mathcal{D}'_0.$$

Annexe C

Formulation conservative pour le problème de l'explosion

Pour pouvoir appliquer la méthode de Mac Cormack au problème de l'explosion, il faut exprimer le système (2.14) de la partie 1 sous une forme conservative:

$$\begin{cases} \frac{\partial U_1}{\partial X} + \frac{\partial \mathcal{F}_1(U_1, U_2, U_3, U_4)}{\partial \theta} = \mathcal{G}_1(U_1, U_2, U_3, U_4) \\ \frac{\partial U_2}{\partial X} + \frac{\partial \mathcal{F}_2(U_1, U_2, U_3, U_4)}{\partial \theta} = \mathcal{G}_2(U_1, U_2, U_3, U_4) \\ \frac{\partial U_3}{\partial X} + \frac{\partial \mathcal{F}_3(U_1, U_2, U_3, U_4)}{\partial \theta} = \mathcal{G}_3(U_1, U_2, U_3, U_4) \\ \frac{\partial U_4}{\partial X} + \frac{\partial \mathcal{F}_4(U_1, U_2, U_3, U_4)}{\partial \theta} = \mathcal{G}_4(U_1, U_2, U_3, U_4) \end{cases}$$

où les U_i sont fonctions des inconnues adimensionnées p_0 , ρ_0 , u_0 , v_0 :

$$\begin{aligned} U_1 &= Xg\rho_0 \\ U_2 &= X(\rho_0gu_0 + \frac{\gamma-1}{2}p_0) \\ U_3 &= X(\rho_0gv_0 - m\frac{\gamma-1}{2}p_0) , \\ U_4 &= X(gA_0 + \frac{\gamma^2-1}{2}p_0) \end{aligned}$$

avec $A_0 = \gamma p_0 + \rho_0(u_0^2 + v_0^2)$.

Pour calculer numériquement les \mathcal{F}_i et les \mathcal{G}_i , il faut maintenant inverser les relations précédentes en posant $U_i^* = \frac{U_i}{X}$:

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{U_2^* - \frac{\gamma-1}{2}p_0}{U_1^*} \\ v_0 &= \frac{U_3^* + m\frac{\gamma-1}{2}p_0}{U_1^*} \\ \rho_0 &= \frac{u_0 - mv_0 - \frac{\gamma+1}{2}}{U_1^*} \\ p_0 &= \frac{U_2^* - mU_3^* - \frac{\gamma+1}{2}U_1^* + \sqrt{\Delta}}{(1+m^2)\frac{\gamma^2-1}{2}}, \end{aligned}$$

Δ est donné par:

$$\Delta = \left(\rho_0g^2 - \gamma\frac{\gamma-1}{2}(1+m^2)p_0 \right)^2.$$

Annexe D

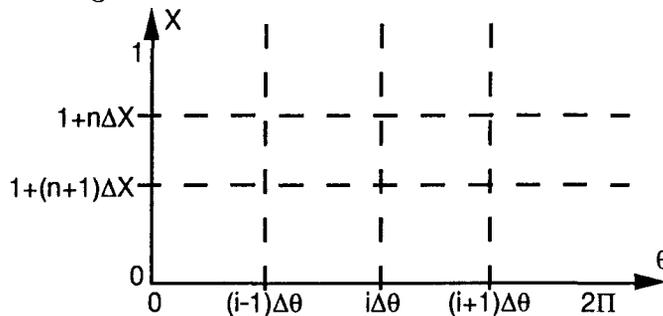
Schéma de Mac Cormack

Soit à résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial \mathcal{F}(U)}{\partial \theta} = \mathcal{G}(U),$$

le domaine d'intégration étant $X \in [0, 1]$ et $\theta \in [0, \pi/2]$.

On considère le maillage suivant:



On note U_i^n la valeur de l'inconnue U en $X_n = 1 + n\Delta X$ ($\Delta X < 0$) et $\theta_i = i\Delta\theta$.
 Connaissant les U_i^n , on veut déterminer les U_i^{n+1} par le schéma de Mac Cormack.
 La première étape consiste à effectuer une prédiction de U_i^{n+1} que l'on note \bar{U}_i^{n+1} et qui est calculée de la manière suivante:

$$\bar{U}_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta X}{\Delta\theta} (\mathcal{F}(U_{i+1}^n) - \mathcal{F}(U_i^n)) + \Delta X \mathcal{G}(U_i^n).$$

Dans un deuxième temps, on effectue une correction qui fournit une deuxième approximation $\bar{\bar{U}}_i^{n+1}$:

$$\bar{\bar{U}}_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta X}{\Delta\theta} (\mathcal{F}(\bar{U}_i^{n+1}) - \mathcal{F}(\bar{U}_{i-1}^{n+1})) + \Delta X \mathcal{G}(\bar{U}_i^{n+1}).$$

La solution au pas $X_{n+1} = 1 + (n+1)\Delta X$ est alors:

$$U_i^{n+1} = \frac{1}{2} (\bar{U}_i^{n+1} + \bar{\bar{U}}_i^{n+1}).$$

Ce schéma est explicite d'ordre 2 à la fois en X grâce à la méthode de prédiction correction et en θ par l'approximation de la dérivée de \mathcal{F} d'abord par une différence à droite puis par une différence à gauche.

Annexe E

Méthode de déconvolution pour $\alpha \neq 0^\circ$

On se propose de formuler une méthode de déconvolution qui tient compte du développement de la solution suivant la variable z . Cette méthode permettra le dépouillement des interférogrammes de la campagne R3Ch pour lesquels l'écoulement n'est plus à symétrie de révolution.

Plaçons-nous d'abord dans le cas où $\alpha = 0$. Avec les notations de la figure 57a, la masse volumique moyenne dans la couche de choc à une côte z suivant la direction y , x étant fixé, est:

$$(E.1) \quad \bar{\rho}_0(z) = \frac{1}{Y_0(z)} \int_0^{Y_0} \rho_0(r) dy.$$

En tenant compte du fait que $r^2 = y^2 + z^2$ et en posant $f(z) = \bar{\rho}_0(z) \sqrt{R_0^2 - z^2}$, on obtient l'équation:

$$(E.2) \quad f(z) = - \int_z^{R_0} \frac{\rho_0(r)r}{\sqrt{r^2 - z^2}} dr.$$

C'est une équation intégrale d'Abel dont la résolution est détaillée en [32]. La solution est:

$$(E.3) \quad \rho_0(r) = - \frac{2}{\pi r} \frac{d}{dr} \int_r^{R_0} \frac{zf(z)}{\sqrt{z^2 - r^2}} dz.$$

Lorsque $\alpha \neq 0$, on cherche l'équation du choc sous la forme $R = R_0 + \iota R_1 \cos \theta_M$ (figure 57b). L'épaisseur de la couche de choc suivant la direction y s'écrit:

$$Y = Y_0 + \iota Y_1 \cos \theta_M.$$

La masse volumique moyenne pour un z fixé est:

$$\bar{\rho}(z) = \frac{1}{Y(z)} \int_z^R \frac{\rho(r, \theta)r}{\sqrt{r^2 - z^2}} dr.$$

En introduisant dans cette expression les développements de R , Y et de ρ , on obtient:

$$\bar{\rho}(z) = \frac{1}{Y_0(z) + \iota Y_1(z) \cos \theta_M} \int_z^{R_0 + \iota R_1 \cos \theta_M} \frac{(\rho_0(r) + \iota \rho_1(r) \cos \theta)r}{\sqrt{r^2 - z^2}} dr.$$

En développant chacun des deux termes du membre de droite suivant les puissances de ε et en ne retenant que ceux d'ordre 1 au plus, il vient:

$$(E.4) \quad \bar{\rho}(z) = \frac{1}{Y_0(z)} \left(1 - \varepsilon \frac{Y_1(z)}{Y_0(z)} \cos \theta_M \right) \left[\int_z^{R_0} \frac{(\rho_0(r) + \varepsilon \rho_1(r) \cos \theta) r}{\sqrt{r^2 - z^2}} dr + \varepsilon R_1 \cos \theta_M \frac{\rho_0(R_0) R_0}{\sqrt{R_0^2 - z^2}} \right].$$

Avec une approximation d'ordre ε^2 et en introduisant $\bar{\rho}_0(z)$, on obtient:

$$(E.5) \quad \bar{\rho}(z) = \bar{\rho}_0(z) + \varepsilon \frac{\rho_0(R_0) R_0 R_1}{Y_0(z) \sqrt{R_0^2 - z^2}} \cos \theta_M - \varepsilon \frac{Y_1(z)}{Y_0(z)} \cos \theta_M \bar{\rho}_0(z) + \varepsilon \frac{1}{Y_0(z)} \int_z^{R_0} \frac{\rho_1(r) \cos \theta r}{\sqrt{r^2 - z^2}} dr.$$

La relation liant Y et z à R^2 est $Y^2 + z^2 = R^2$ ce qui, à l'ordre 1 en ε , donne $Y_0 Y_1 = R_0 R_1$. L'expression de la masse volumique moyenne est donc:

$$(E.6) \quad \bar{\rho}(z) = \bar{\rho}_0(z) + \varepsilon \frac{\rho_0(R_0) Y_1 z}{Y_0 R_0} \cos \theta_M - \varepsilon \frac{Y_1 z}{Y_0 R_0} \bar{\rho}_0(z) + \varepsilon \frac{1}{Y_0(z)} \int_z^{R_0} \frac{\rho_1(r) \cos \theta r}{\sqrt{r^2 - z^2}} dr.$$

En tenant compte de $\cos \theta = \frac{z}{r}$ et en posant:

$$f_1(z) = Y_0(z) \left[\frac{\bar{\rho}(z) - \bar{\rho}_0(z)}{\varepsilon} - \frac{R_1}{Y_0^2(z)} z (\rho_0(R_0) - \bar{\rho}_0(z)) \right],$$

on obtient la relation suivante:

$$\frac{f_1(z)}{z} = \int_z^{R_0} \frac{\rho_1(r)}{\sqrt{r^2 - z^2}} dr.$$

C'est une intégrale d'Abel dont la solution est:

$$(E.7) \quad \rho_1(r) = -\frac{2}{\pi} \frac{d}{dr} \int_r^{R_0} \frac{f_1(z)}{\sqrt{z^2 - r^2}} dz.$$

Ainsi, pour accéder à $\rho_0(r)$ et $\rho_1(r)$ il faut déterminer les fonctions R_0 et R_1 à partir de la position du choc repérée sur deux interférogrammes, l'un pour lequel $\alpha = 0$ et l'autre où $\alpha \neq 0$. Le premier donnera également $\bar{\rho}_0(z)$, le second $\bar{\rho}(z)$. Ce travail permettra de répondre à deux questions:

- La masse volumique est-elle bien de la forme $\rho = \rho_0 + \varepsilon \rho_1 \cos \theta$?
- Dans l'affirmative, on pourra utiliser ρ_0 et ρ_1 pour déterminer la valeur de la masse volumique au raccord ainsi que la température de paroi pour le calcul de la couche limite se développant sur l'ogive en loi de puissance 3/4 dans les conditions de R3Ch.

Bibliographie

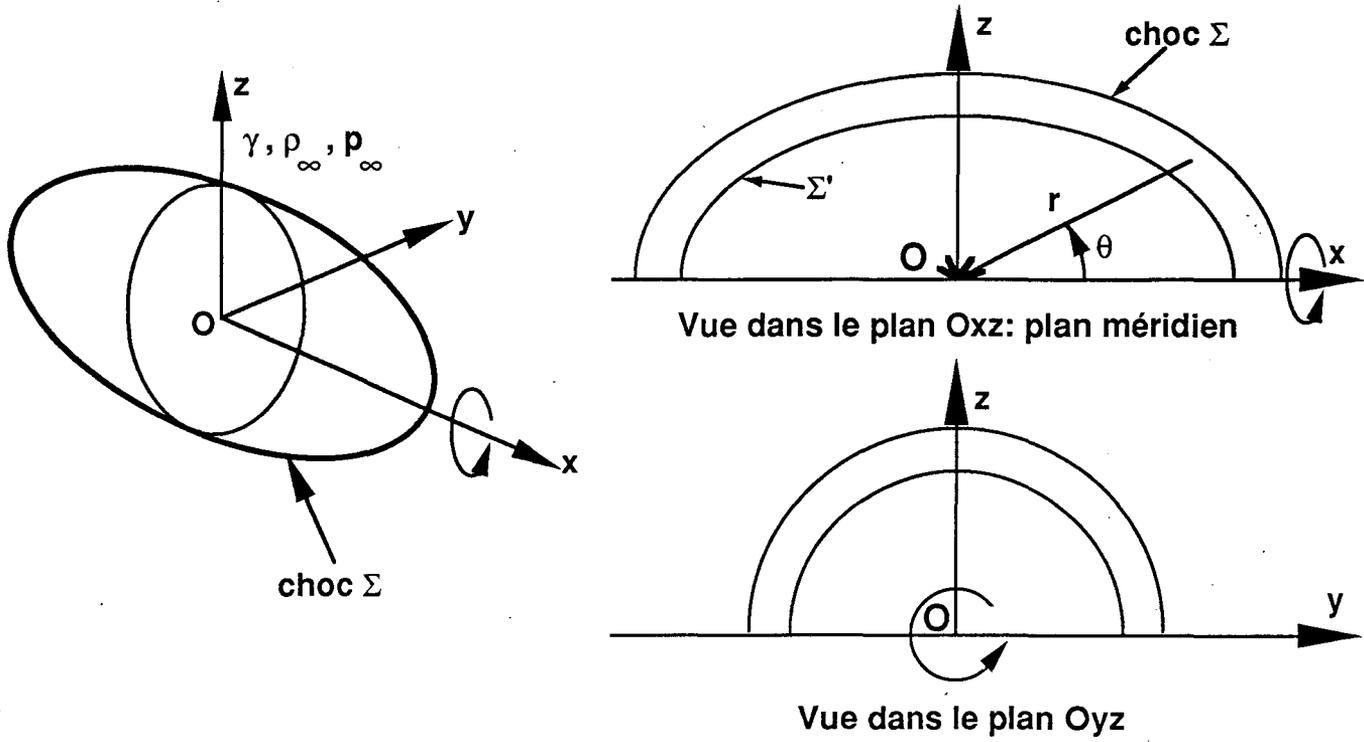
- [1] A. Merlen - A. Dymant. *Théorie des explosions violentes anisotropes*. Rapport IMFL 85/14, 1985.
- [2] A. Merlen - A. Dymant. *Similarity and asymptotic analysis for gun firing aerodynamics*. Journal of Fluid Mechanics, vol. 225, pp. 497-528, 1991.
- [3] A. Merlen. *Perspectives offertes par l'analogie entre les explosions intenses et une classe d'écoulements hypersoniques*. Rapport IMFL 89/06, 1989.
- [4] Wallace D. Hayes, Ronald F. Probstein. *Hypersonic Flow Theory, volume 1, Inviscid flows*. Academic press. New york - London, 1966.
- [5] G. G. Chernyi. *Introduction to Hypersonic flow*. Academic press. New york - London, 1961.
- [6] J. P. Guiraud, D. Vallée and R. Zolver. *Bluntness effects in hypersonic small disturbance theory*. Basic development in Fluid Dynamics, edited by Maurice Holt, volume 1. Academic Press. New York - London, 1965.
- [7] A. Merlen. *Similitude physique et modélisation par explosion équivalente des phénomènes aérodynamiques de balistique intermédiaire*. Thèse de Doctorat d'Etat. Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres Artois, 1988.
- [8] D. Andriamanalina. *Explosion violente d'un fil rectiligne dans un écoulement. Application à l'hypersonique*. Thèse de Doctorat. Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres Artois, 1990.
- [9] M. Holt. *Numerical Methods in Fluid Dynamics* Chap.6, Second revised edition. Springer Verlag. 1984.
- [10] A. Merlen - A. Dymant. *Théorie des explosions violentes anisotropes. Formulation conservative*. Rapport IMFL 86/49, 1986.
- [11] A. Merlen - A. Dymant. *Anisotropic blast waves and explosions in a moving gas*. European Journal of Mechanic, B/Fluids, vol. 11, number 2, pp 161-198, 1992.
- [12] L. Sedov. *Similitude et dimensions en mécanique*. Editions de Moscou, 1972.
- [13] A. Merlen - E. Fabre. *Calculation of intense self-similar anisotropic explosions*. Shock Waves, volume 3, Number 2, 1993.
- [14] V. Korobeïnikov *Doklady Akademii naouk de l'U.R.S.S.*, tome 3, numéro 3, 1956.
- [15] D. Van Dyke. *A study of hypersonic small-disturbance theory*. NACA report number 1194, 1954.

- [16] H. K. Cheng. *Hypersonic flows past a yawed circular cone and other pointed bodies*. Journal of Fluid Mechanics, Vol. 12, 1962, pp. 169-191.
- [17] R. T. Doty - M. Rasmussen. *Approximation for Hypersonic Flow past an Inclined Cone*. AIAA Journal, Vol. 11, Number 9, 1973.
- [18] A. Merlen. *Un modèle analytique d'écoulement autour d'ogives élancées peu émoussées à Mach hypersonique modéré et à faible incidence*. Rapport IMFL 90/10.
- [19] A. Merlen, D. Andriamanalina. *Analytical solutions for hypersonic flow past slender power law bodies at small angle of attack* AIAA Journal, Vol. 30, Number 11, 1992.
- [20] J.P Gilly, L. Rosenthal, Y. Sémézis *Aérodynamique hypersonique*, Gauthier-Villars, 1970.
- [21] G. Gontier: *Interférométrie différentielle à biprisme de Wollaston*. Rapport IMFL Gr 82 27.01.1958.
- [22] J.M. Desse, J.C. Pegneaux: *Détermination directe du champ de masse volumique par interférométrie différentielle ultra-rapide*. Rapport IMFL 90/49, 22.11.1990.
- [23] W. Merzkirch: *Flow visualization*. Academic press, 1974.
- [24] A. Merlen. *Nouveaux développements dans la théorie des petites perturbations en hypersonique*. Actes des journées d'études sur les écoulements hypersoniques du groupement de recherche hypersonique du CNRS. Roscoff, France. 22 au 24 Oct. 1990 paru en Février 1991.
- [25] A. Merlen, E. Fabre, J.M. Desse. *Comparaison théorie-expérience en hypersonique froid*. Actes des journées d'études sur les écoulements hypersoniques du groupement de recherches hypersonique du CNRS. Garchy, France. 5 au 7 Oct. 1992.
- [26] A. Merlen, E. Fabre. *Comparison between an analytical theory and experiment for 3D hypersonic flows*. , 2nd European Fluid Mechanics Conference, EUROMECH, Varsaw, Poland, September 20-24, 1994.
- [27] H. Mirels, J. W. Ellinwood. *Hypersonic viscous interaction theory for slender axisymmetric bodies* AIAA 6th. Aerospace Sciences Meeting, New York (AIAA paper 68-1), 1968.
- [28] M. Yasuhara. *Axisymmetric viscous flow past slender bodies of revolution*. Journal of the Aerospace Sciences, vol. 29, numb 6, pp. 667-679, 1962.
- [29] A. Merlen, E. Fabre. *Couche limite tridimensionnelle à similitude interne en hypersonique*. Actes du 11^e Congrès Français de Mécanique, Vol.2, pp 397-400. Lille-Villeneuve d'Ascq, France. 6 au 10 Sept. 1993.
- [30] A. Merlen. *Théorie des faibles incidences en hypersonique pour les corps axisymétriques en loi de puissance et à émoussement faible* C. R. Acad. Sc. Paris 310, série II,1990. p. 460 -465.

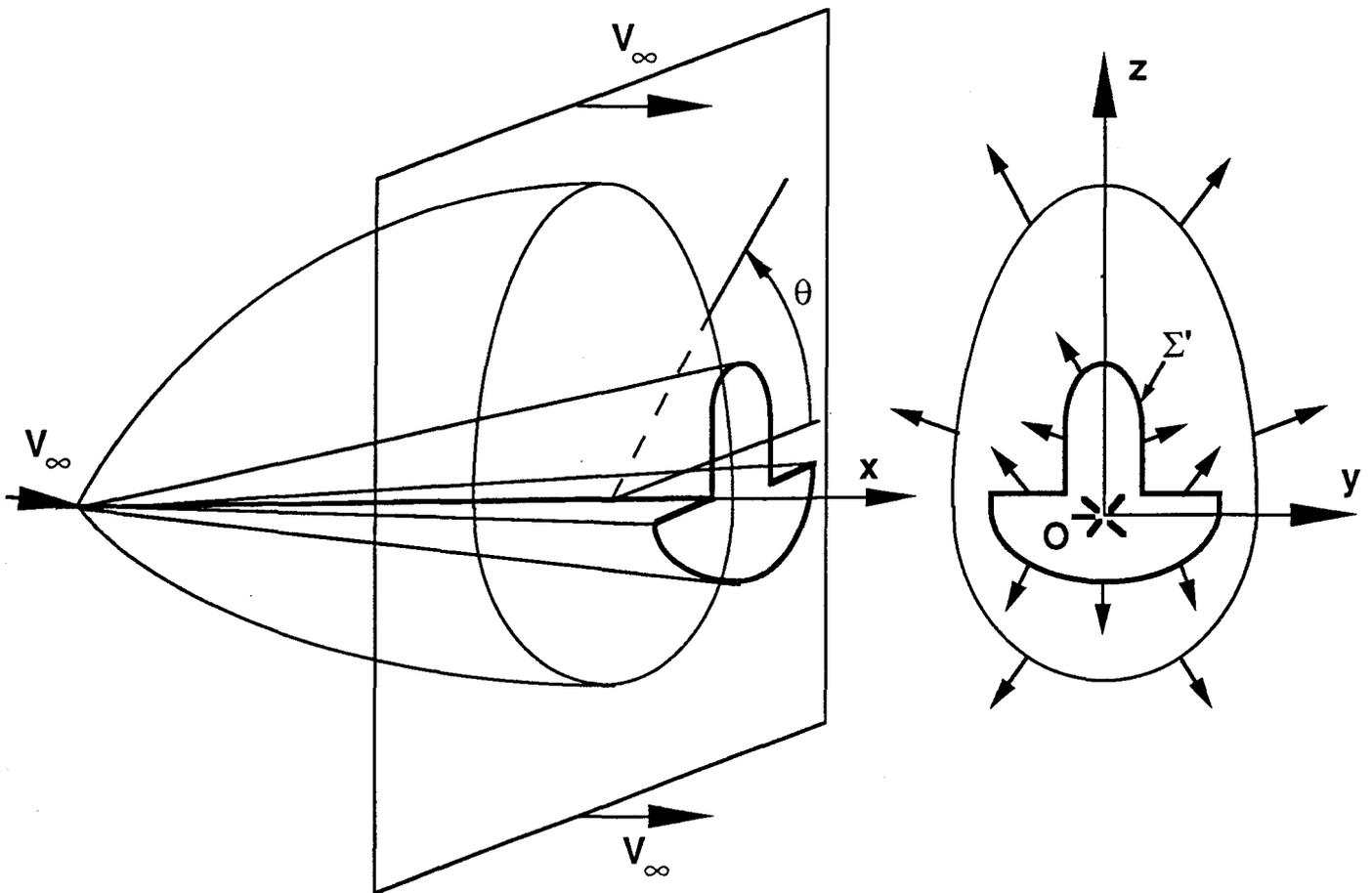
- [31] A. Merlen. *Fonctions de courant en écoulement hypersonique autour d'ogives quasi-pointues et à faible incidence*. C. R. Acad. Sc. Paris 312, série II, 1991. p. 1065 -1070.
- [32] M. Krasnov, A Kissélev, G. Makarenko: *Equations intégrales*. Editions de Moscou.
- [33] A. Merlen, M. Debruyne, E. Fabre, J.M. Desse: *Écoulements hypersoniques. Modélisations et perspectives expérimentales*. Rapport IMFL 91/35.
- [34] L. Lees. *Laminar heat transfer over blunt-nosed bodies at hypersonic flight speeds* Jet Propulsion, Vol. 26, numb 4, pp. 259-269, avril 1956.
- [35] D. R. Chapman and M. W. Rubesin *Temperature and Velocity profiles in the compressible laminar boundary layer with arbitrary distribution of surface temperature* Journal of the aeronautical sciences, vol. 18, pp. 547-565, 1949.
- [36] R. F. Probstein and D. Elliott. *The transverse curvature effect in compressible axially symmetric laminar boundary layers*. Journal of the aeronautical sciences. vol. 23, numb. 3 pp. 208-224, 1956.
- [37] H. K. Cheng et al. *Boundary layer displacement thickness and leading-edge effects in high-temperature hypersonic flow* Journal of the Aerospace Sciences, vol. 28, numb 5, pp. 353-381, 1961.
- [38] Mirels. H. "Hypersonic Flow over Slender Bodies Associated with Power-Law Shocks", *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 7, Academic Press, New York and London, 1962, pp. 1-54.
- [39] E. Fabre, M. Debruyne, A. Merlen, J.M. Desse: *Écoulements hypersoniques: solutions analytiques, comparaison avec l'expérience et calcul d'époussements*. Rapport IMFL 93/02.
- [40] M. Trella, F. Calabria *Three dimensional effects in the hypersonic laminar boundary layer*. AGARDograph 97, Mai 1965.

Figures

Figure 1

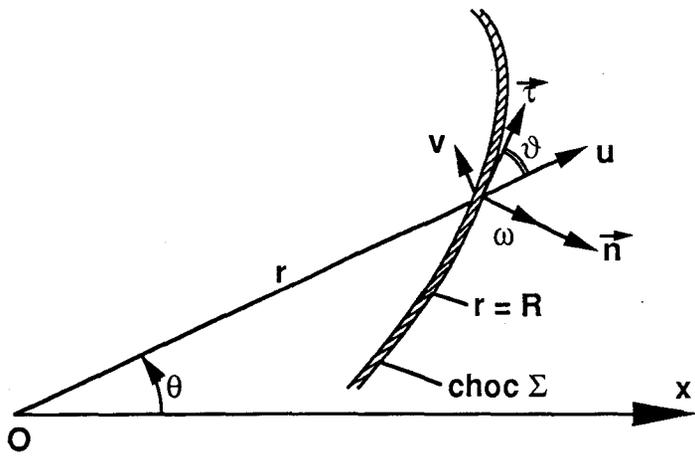


a) Explosion ponctuelle axisymétrique

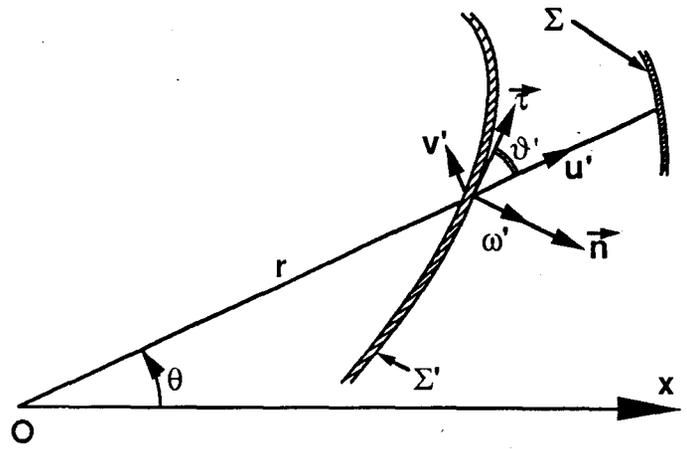


b) Analogie hypersonique et explosion du fil rectiligne infini

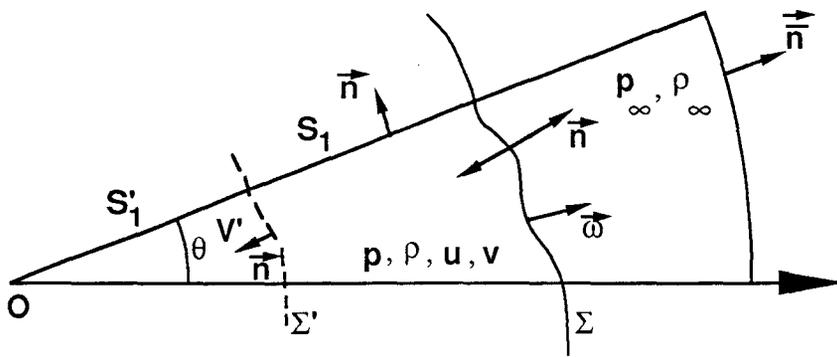
Figure 2



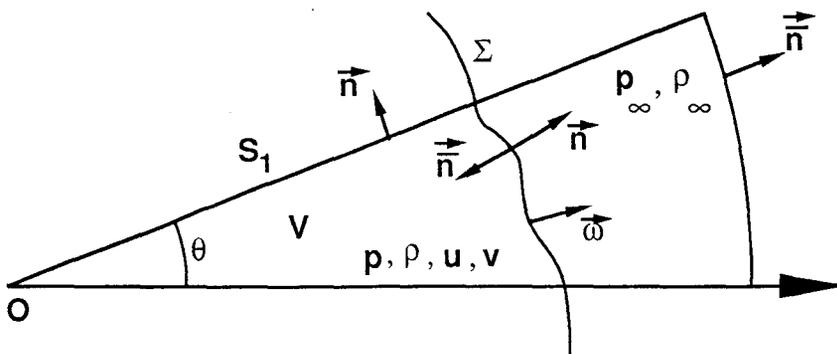
a) Notations sur le choc



b) Notations sur la frontière Σ'



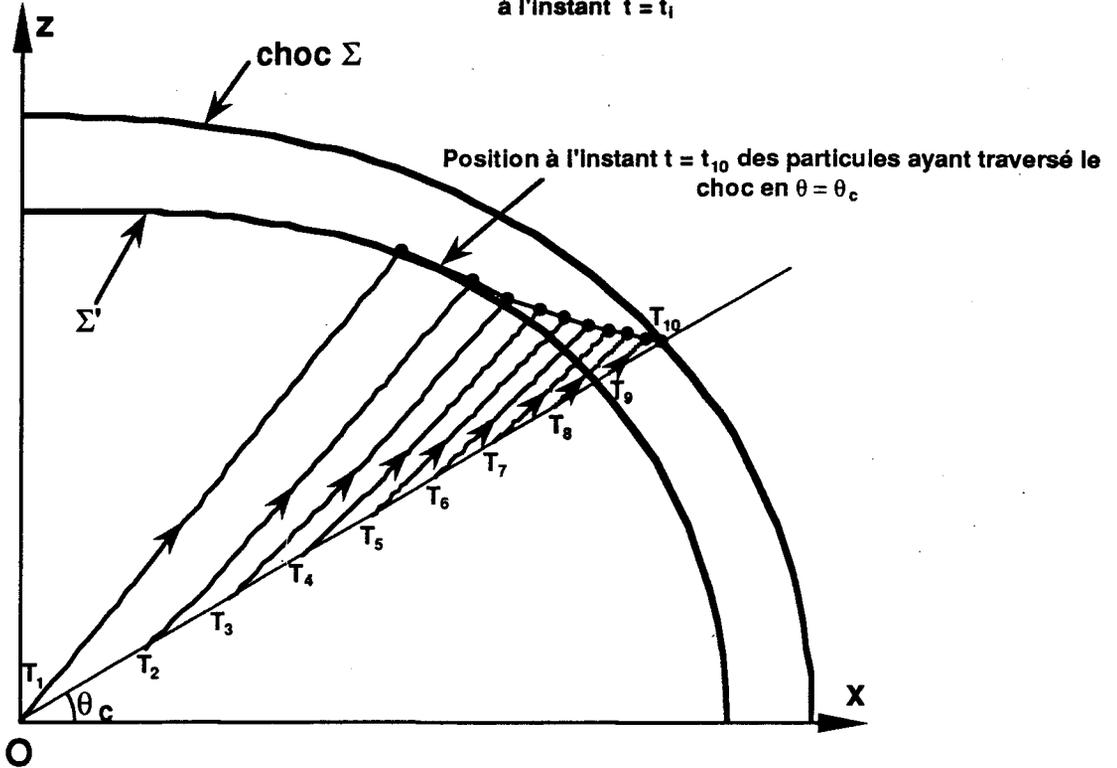
c) Explosion non instantanée ($v \neq 0$)



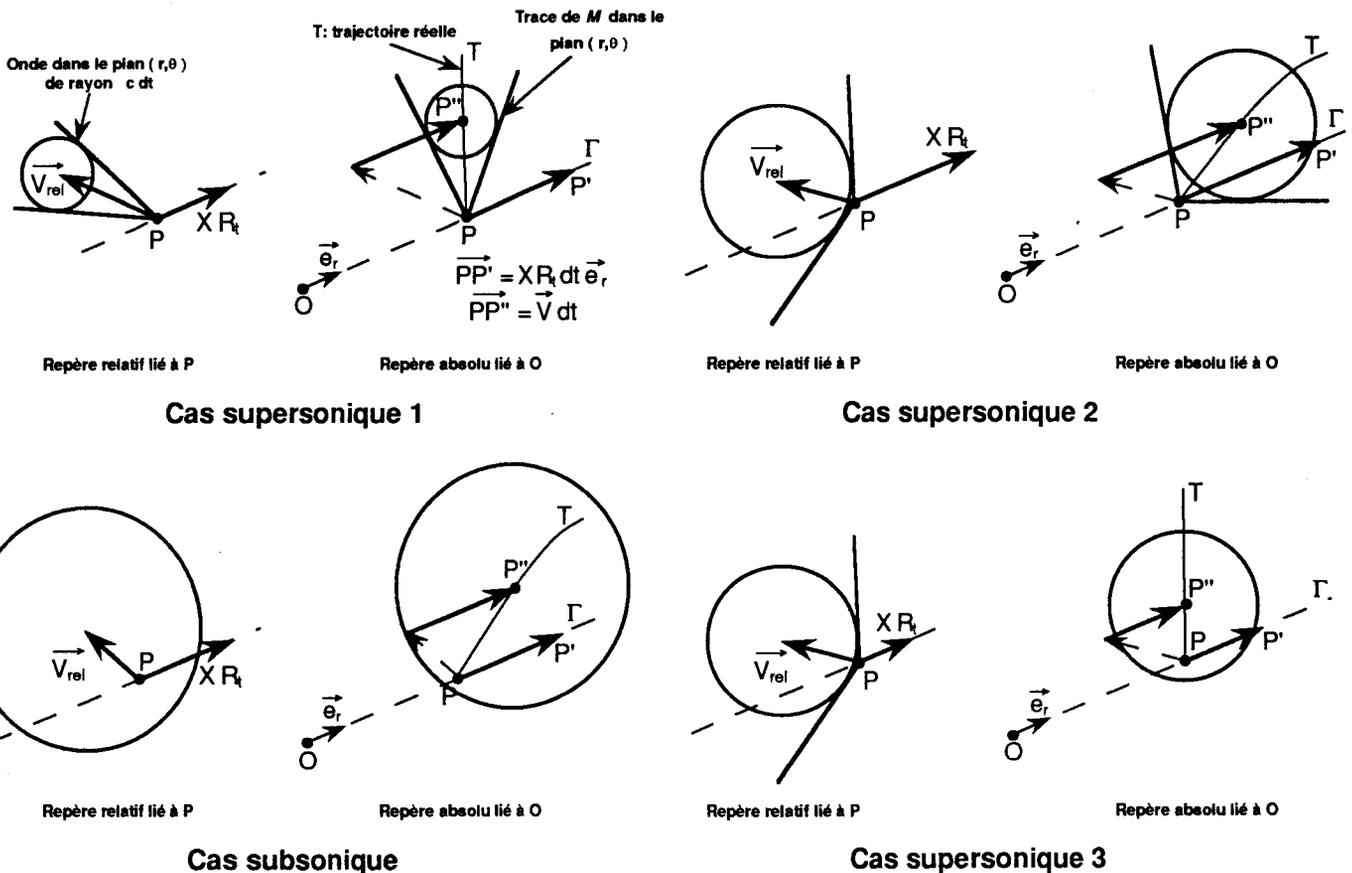
d) Explosion instantanée ($v = 0$)

Figure 3

T_i ($i = 1, 10$): trajectoire de la particule ayant traversé le choc en $\theta = \theta_c$ à l'instant $t = t_i$

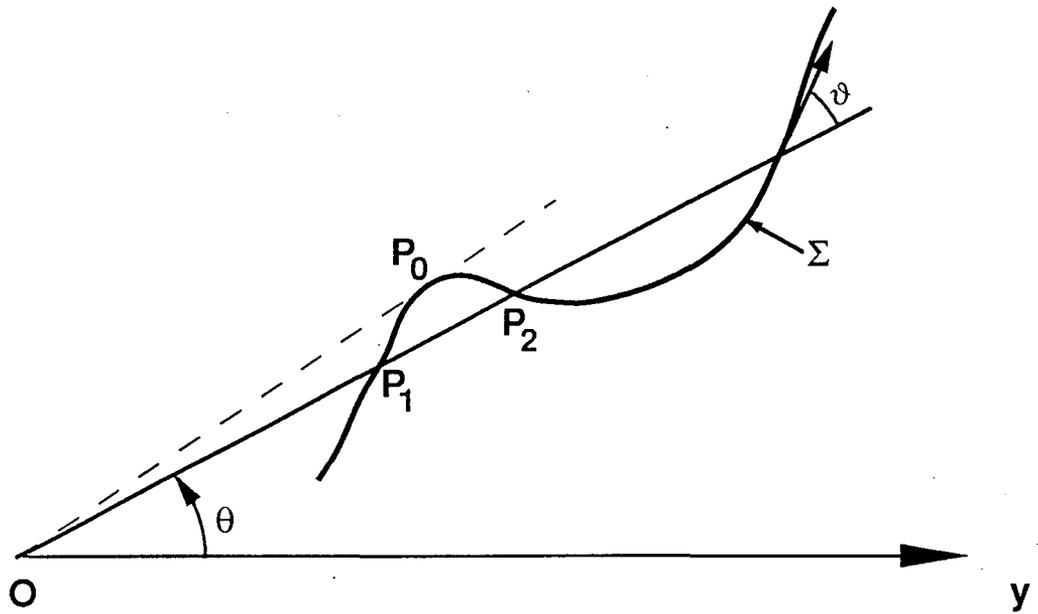


a) Trajectoires des particules et structure de l'écoulement à un instant donné

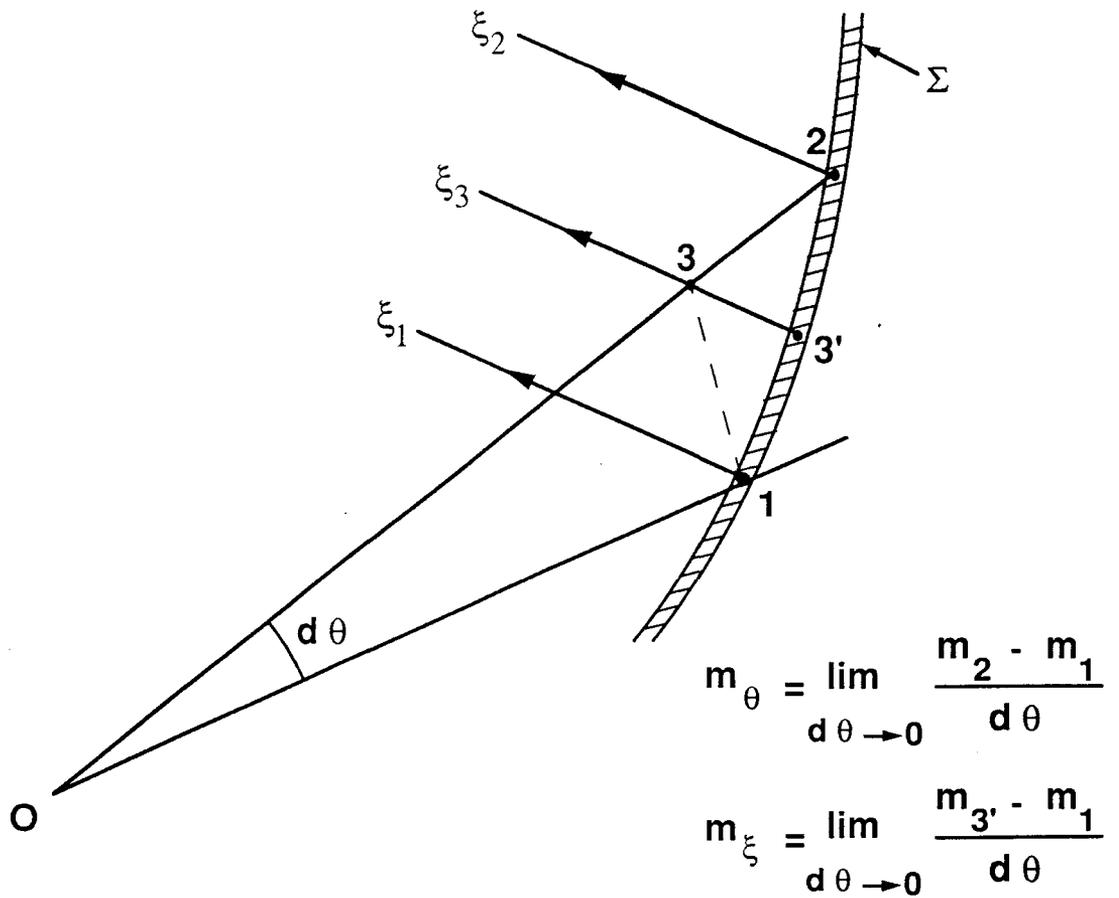


b) Lien entre la nature de l'écoulement et l'existence d'un cône de Mach dans le repère relatif

Figure 4



(a)



b) m_{ξ} et m_{θ}

Figure 5: Effet de Λ sur la forme du choc

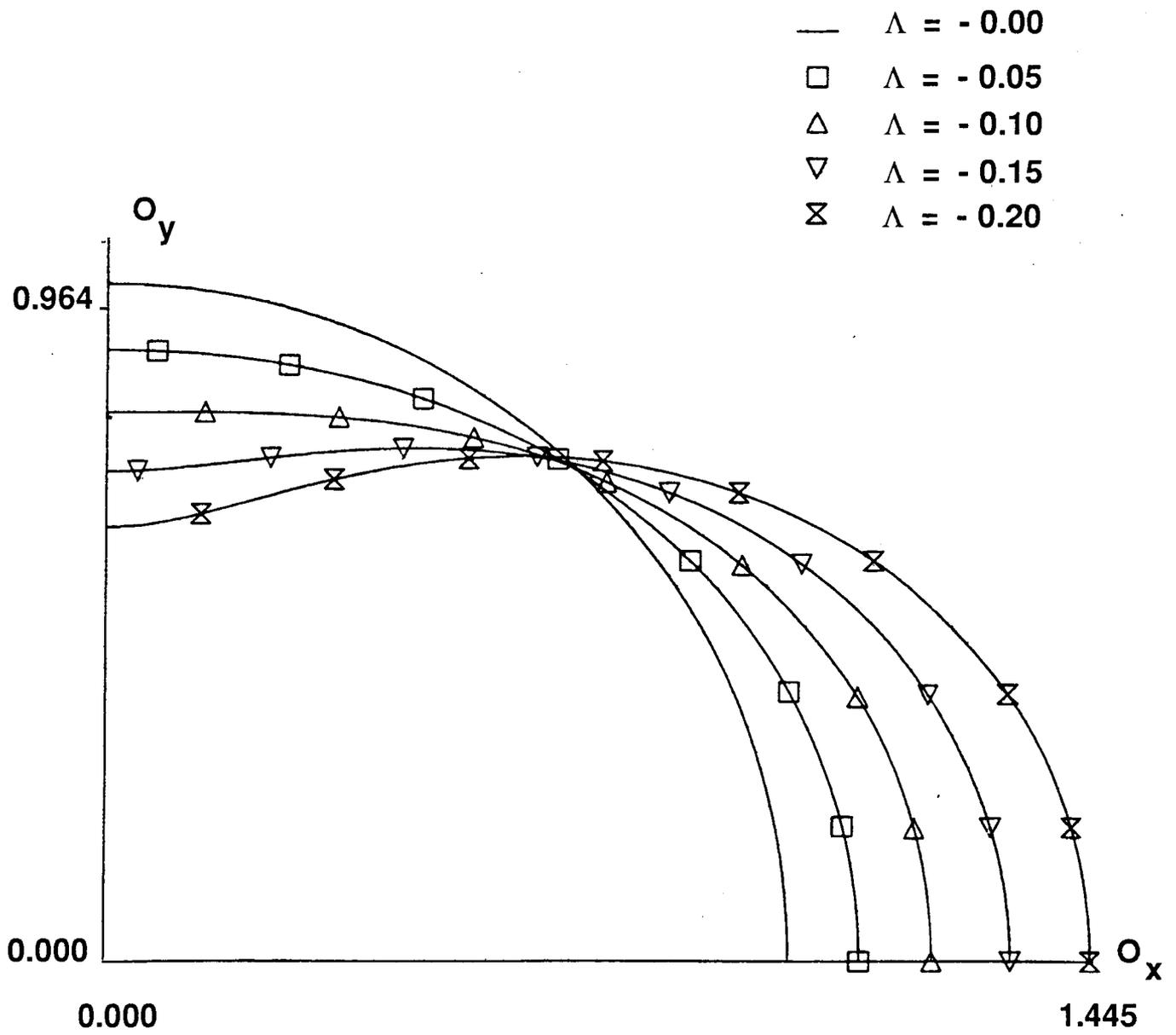


Figure 6: Comparaison des courbes analytique - Fourier

$n=0.75, k=1, \Lambda=-0.07$

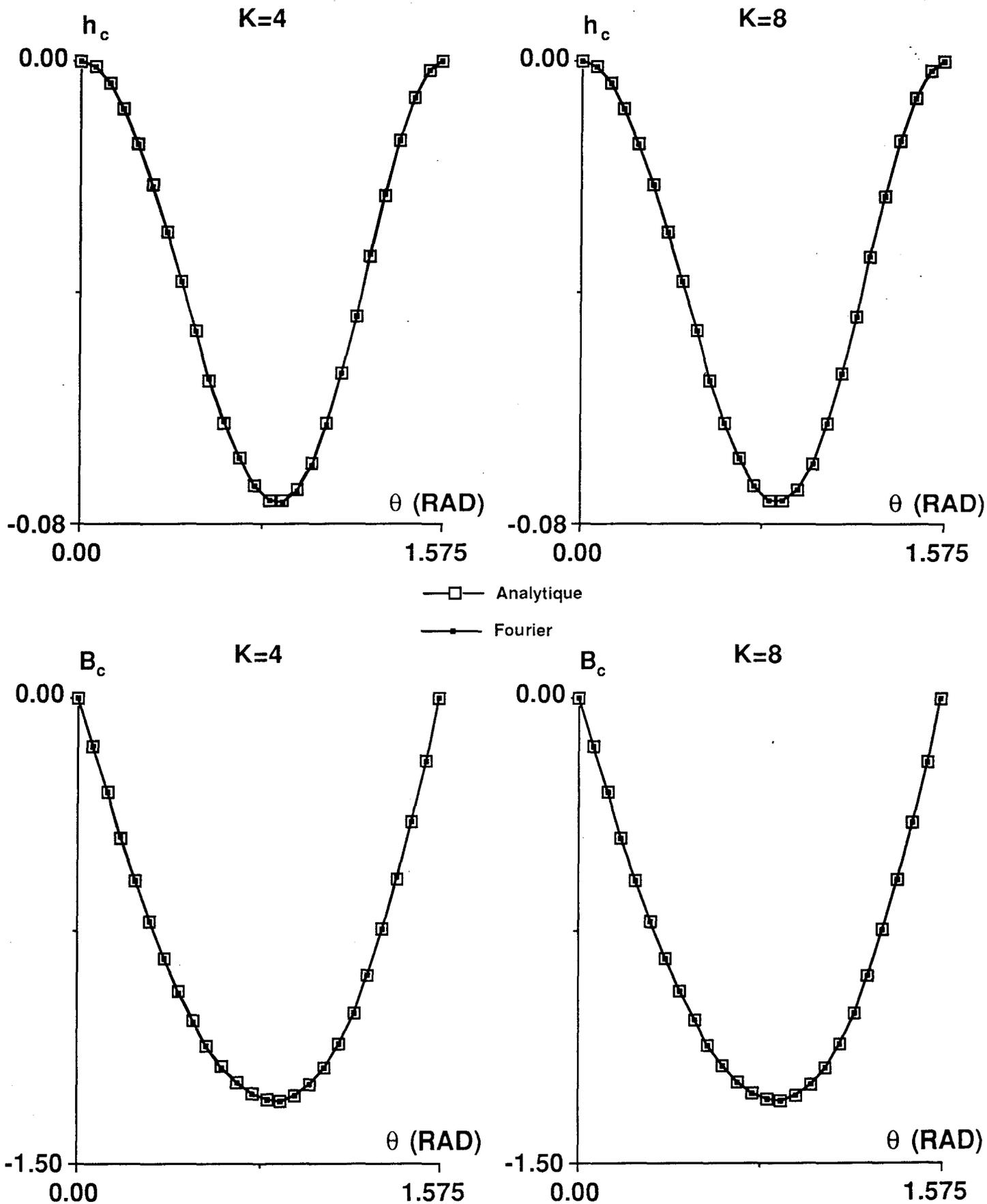
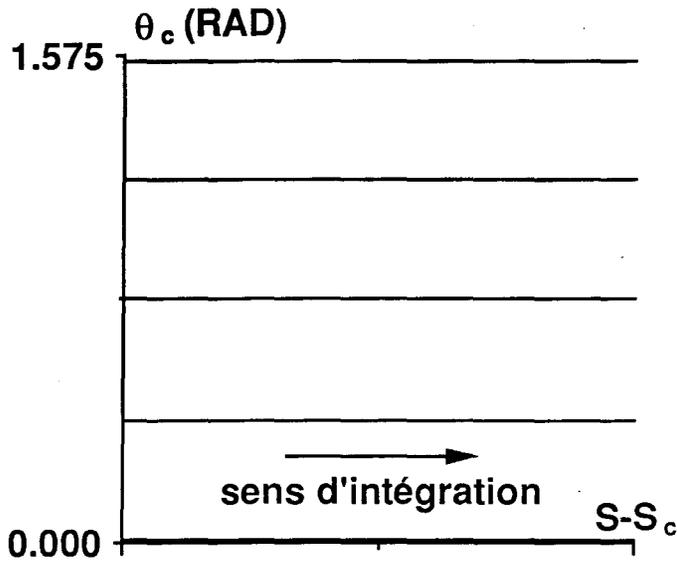
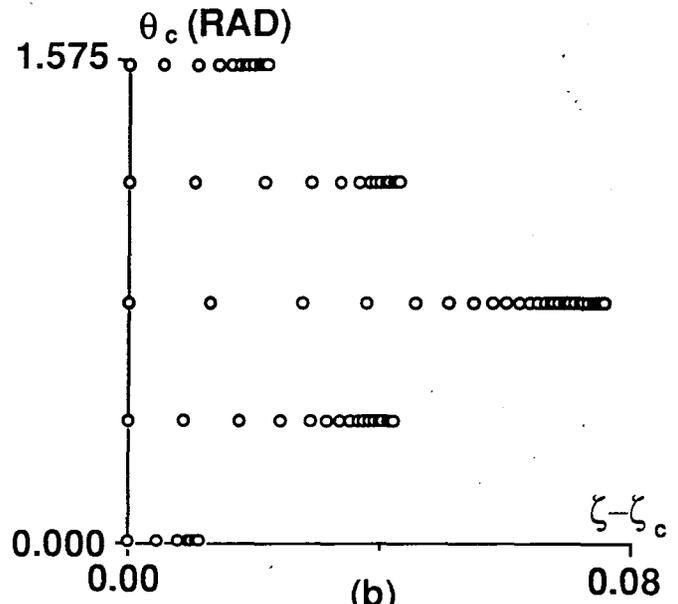


Figure 7: Reconstitution du maillage

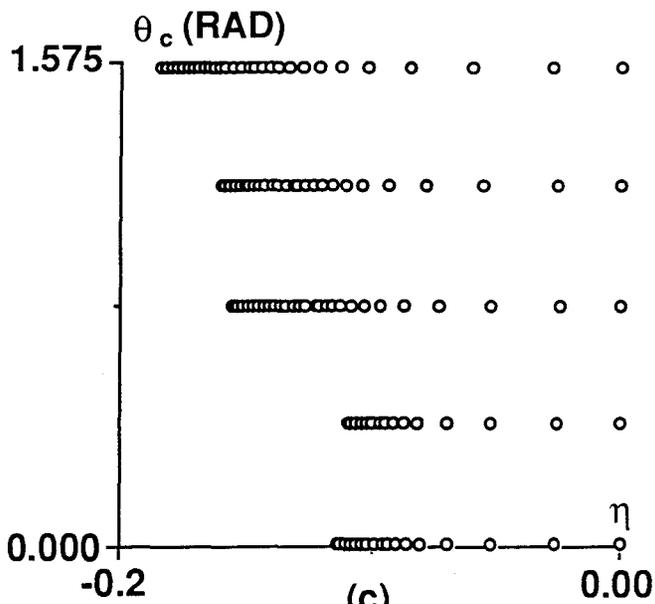
$n=0.75, k=1, \Lambda=-0.07$



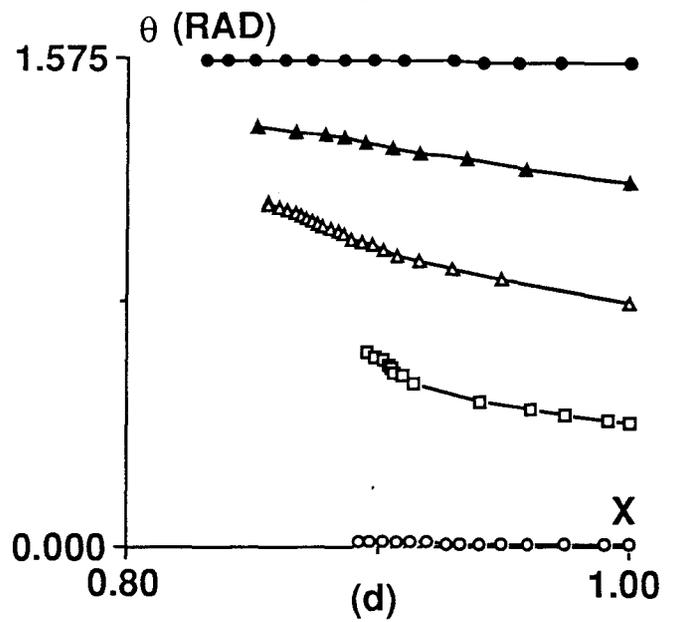
(a)



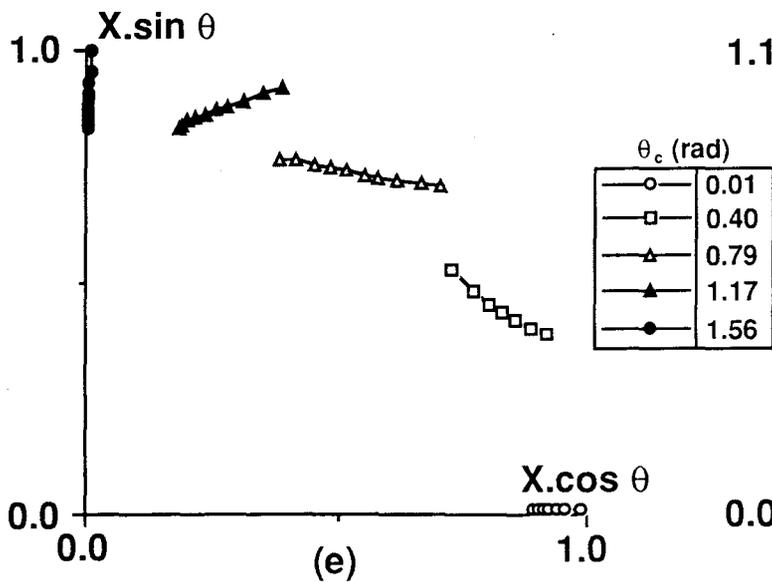
(b)



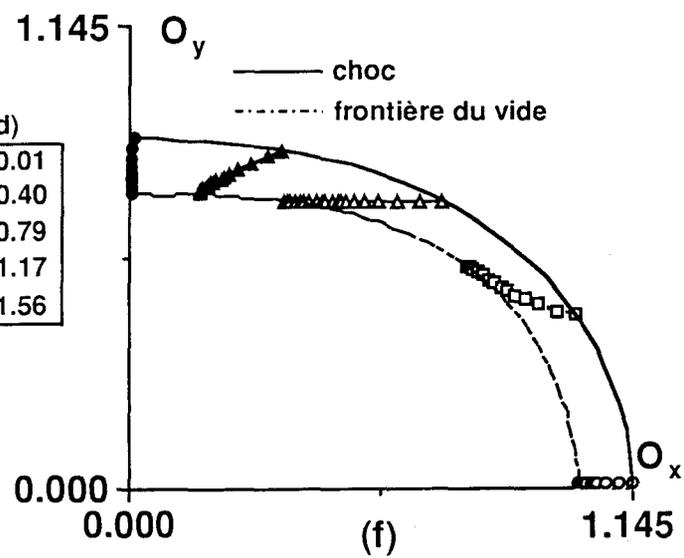
(c)



(d)



(e)



(f)

Figure 8: Trajectoires

$n=0.75, k=1, \Lambda=-0.07$

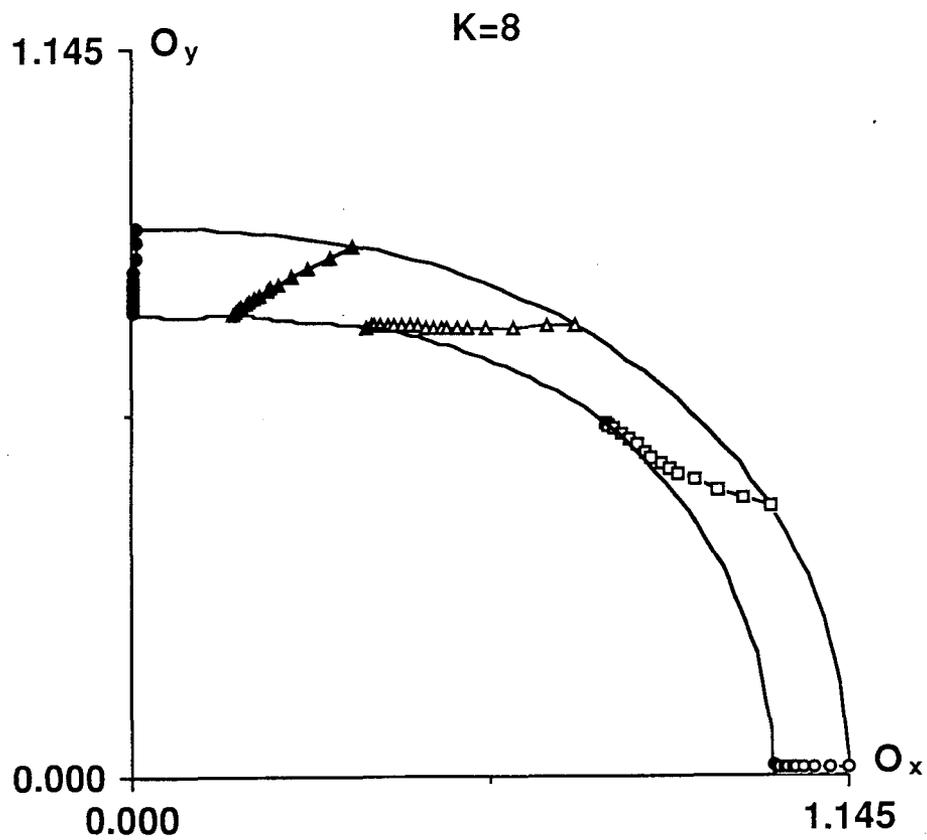
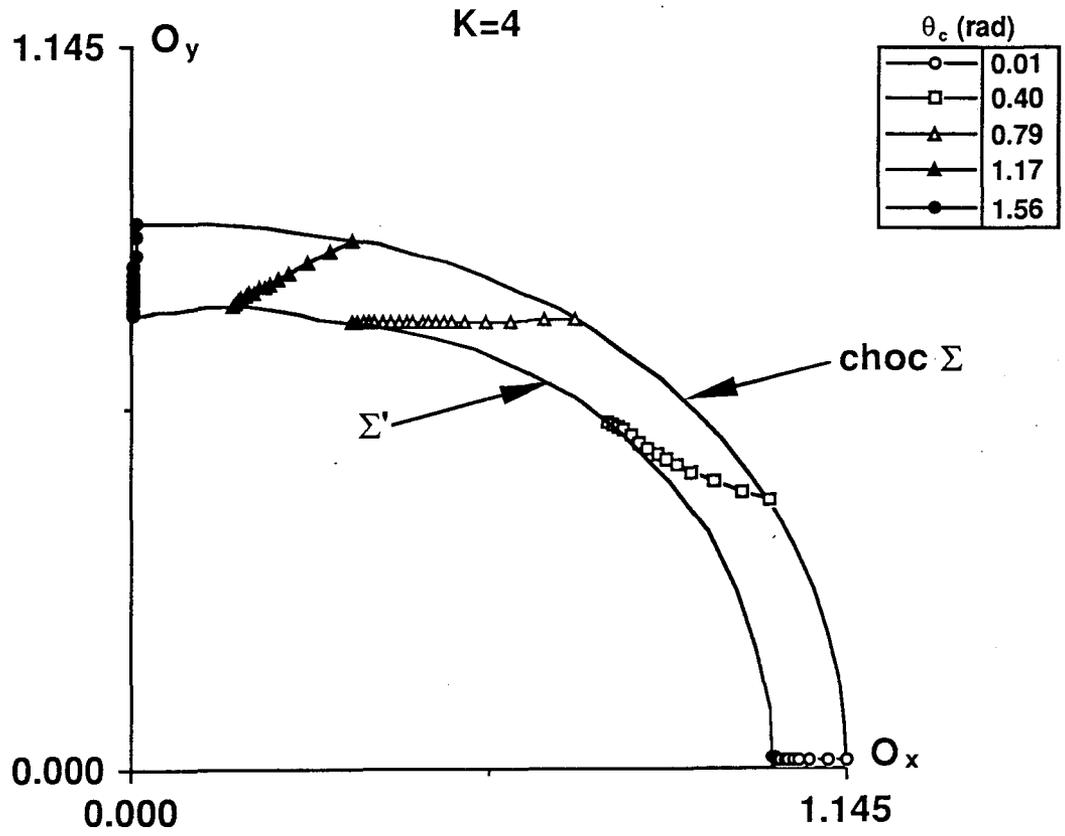


Figure 9: Pression et masse volumique adimensionnées

$n=0.75, k=1, \Lambda=-0.07$

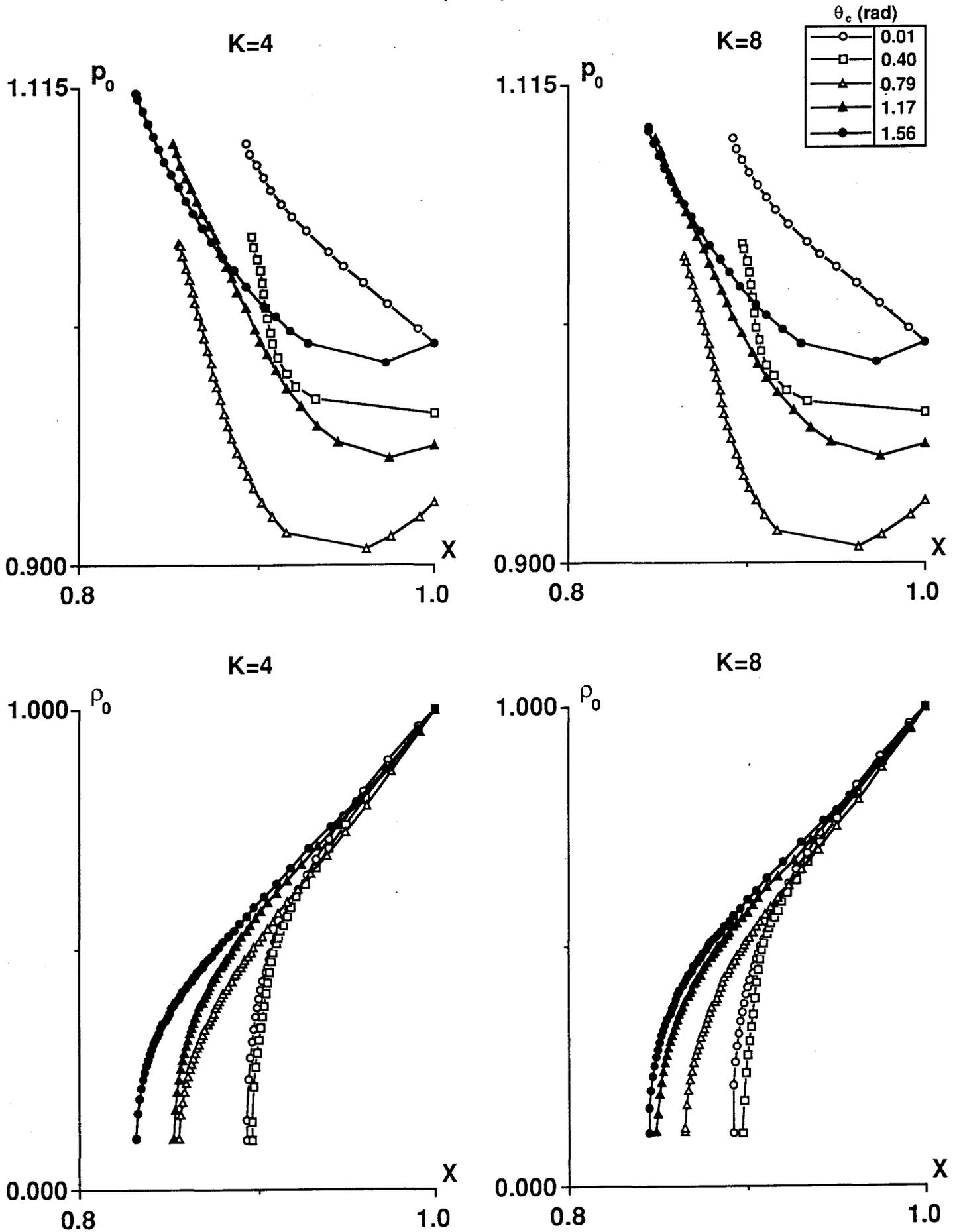


Figure 10: Vitesses adimensionnées

$n=0.75, k=1, \Lambda=-0.07$

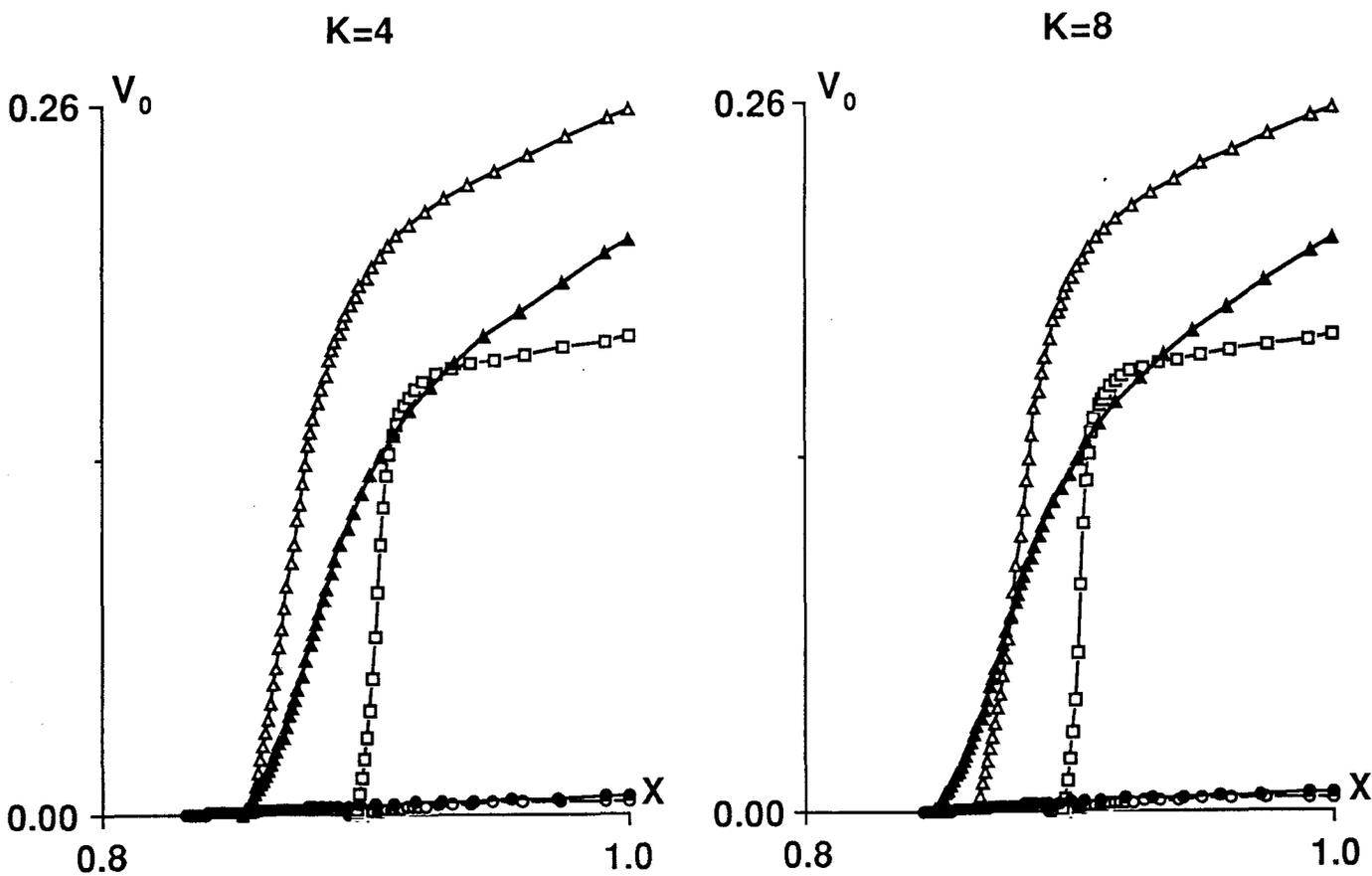
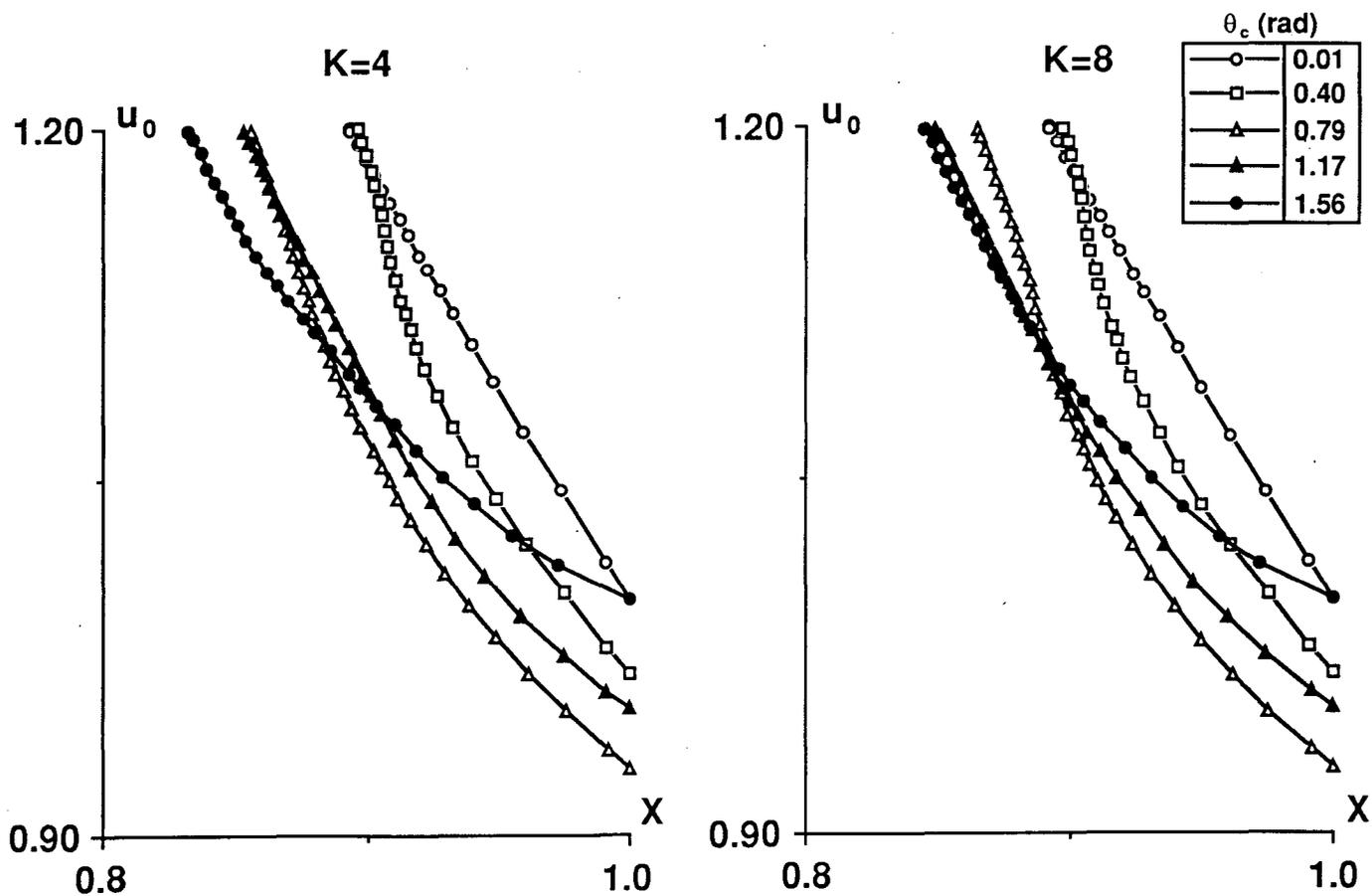


Figure 11: Comparaison du champ de pression

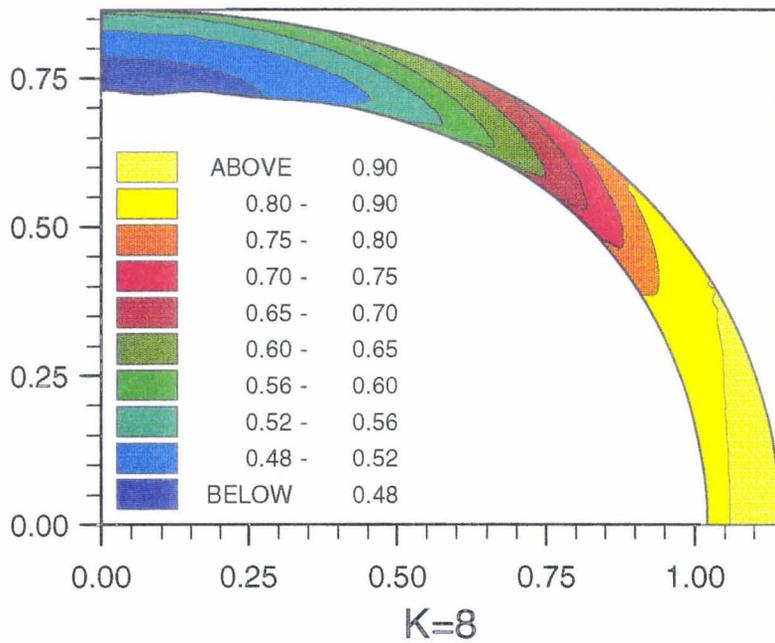
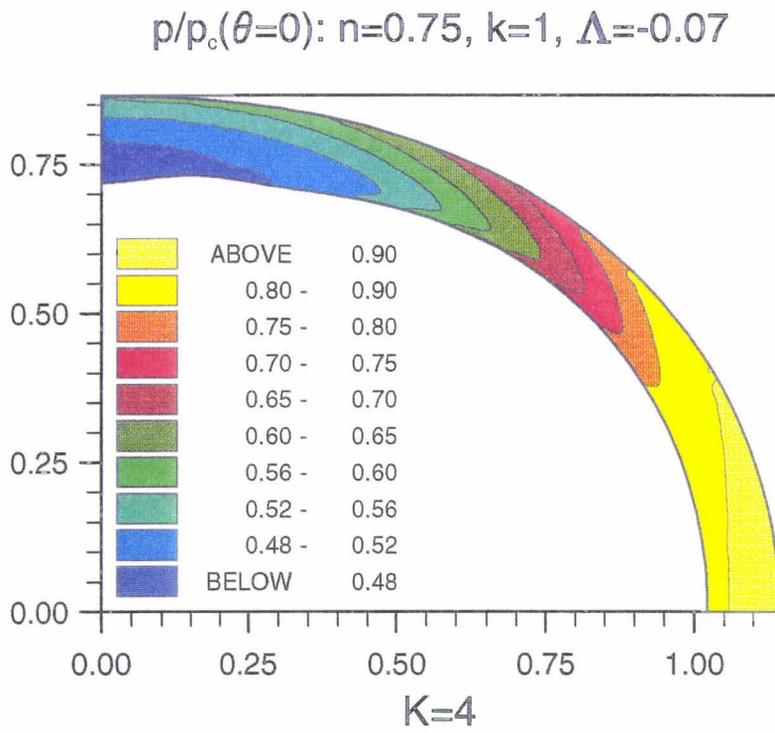
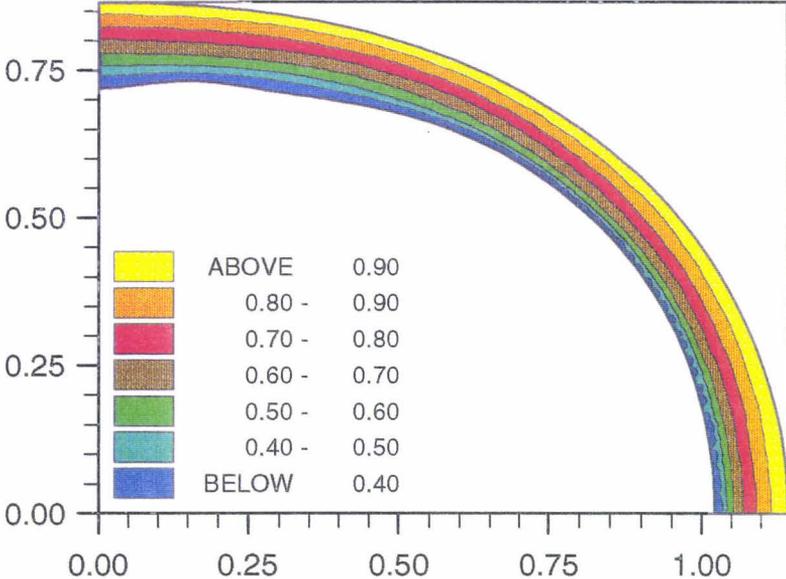


Figure 12: Masse volumique et nombre de Mach

$n=0.75, k=1, \Delta=-0.07, K=4$

Carte de masse volumique



Carte du nombre de Mach

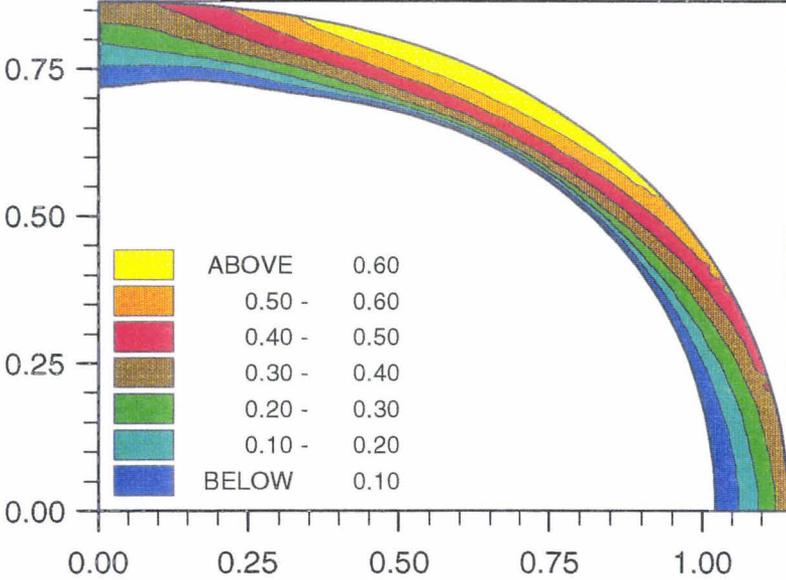


Figure 13: Trajectoires comparées

$n=0.75, k=1, \Lambda=-0.01, K=8$

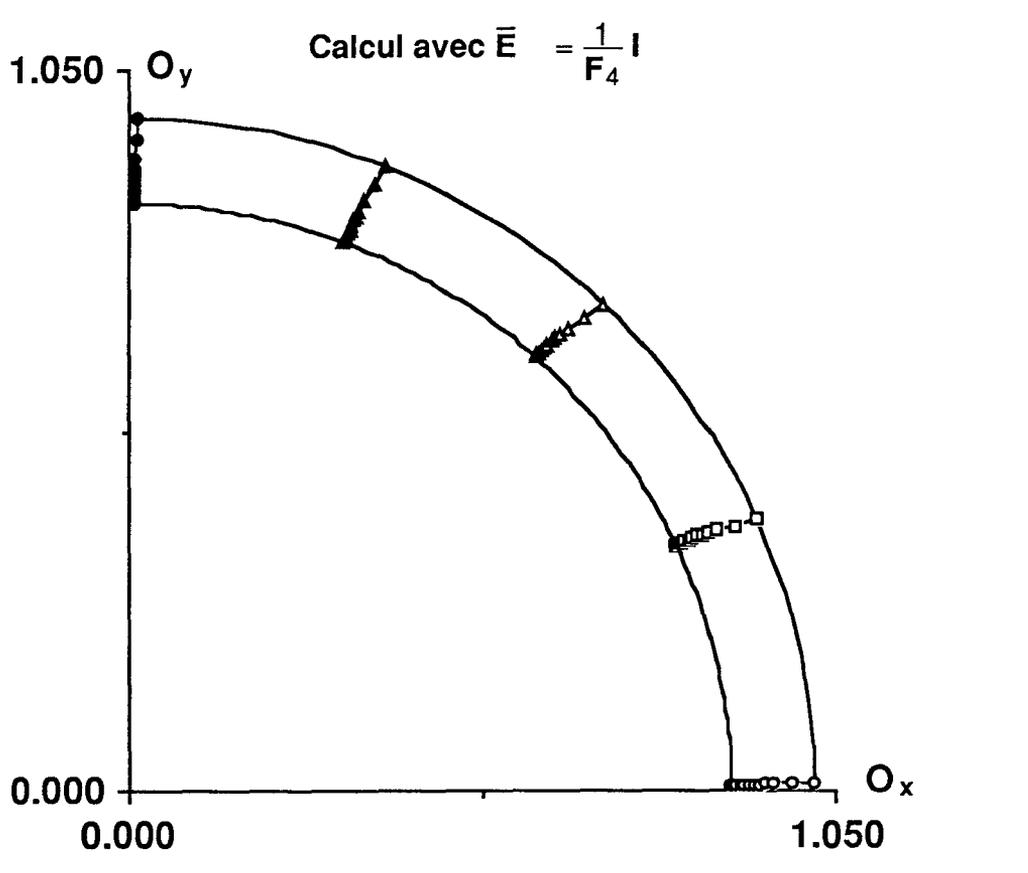
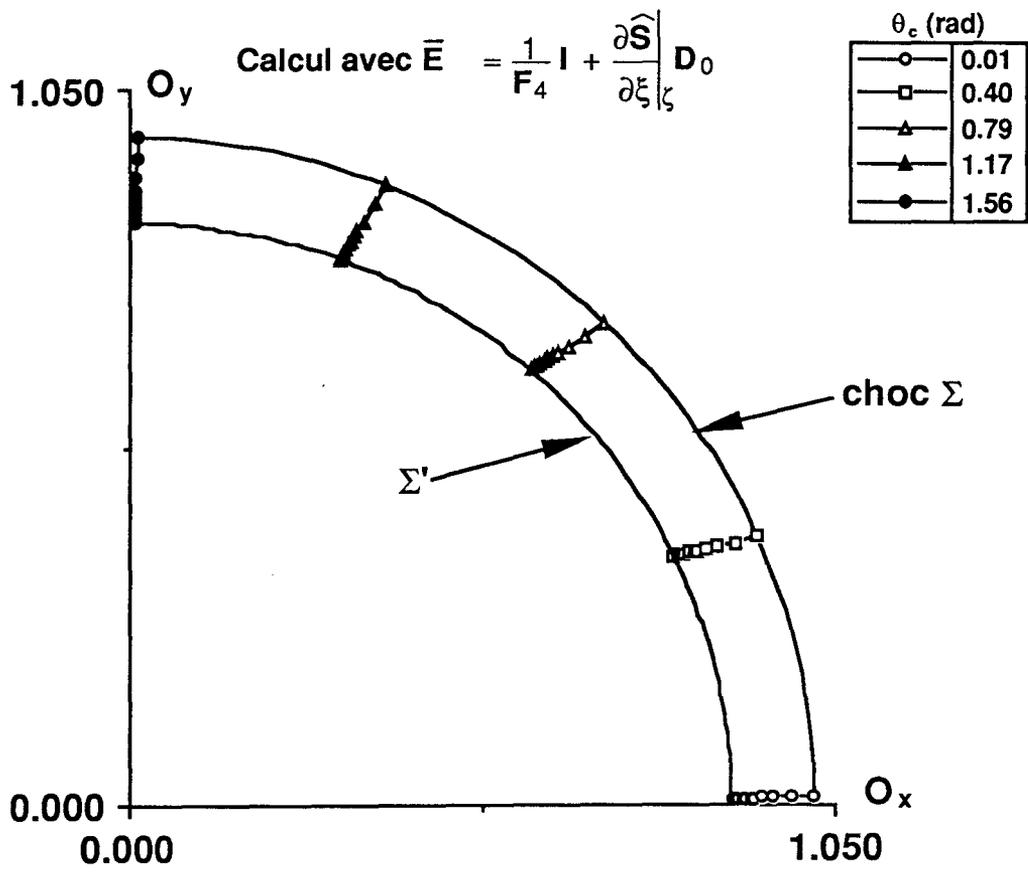
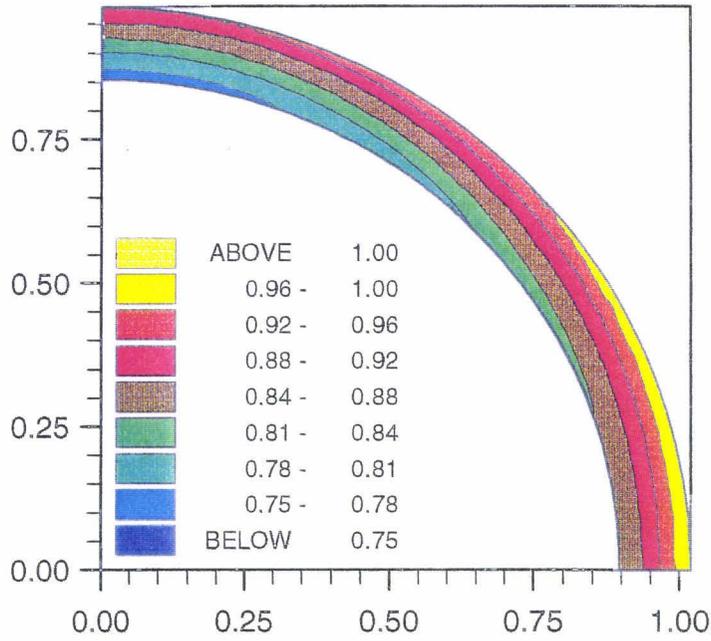


Figure 14: Influence de $\partial \hat{S}/\partial \xi$

$p/p_c(\theta=0)$: $n=0.75$, $k=1$, $\Lambda=-0.01$, $K=8$

Calcul avec le terme $\partial \hat{S}/\partial \xi$



Calcul sans le terme $\partial \hat{S}/\partial \xi$

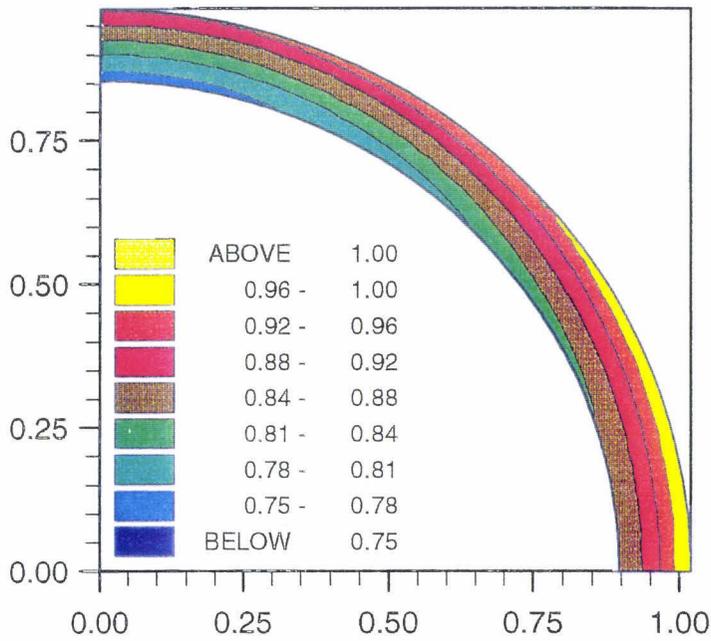


Figure 15: Cartes obtenues par la formulation h, g, v_0

$n=0.75, k=1, \Lambda=-0.07, K=8$

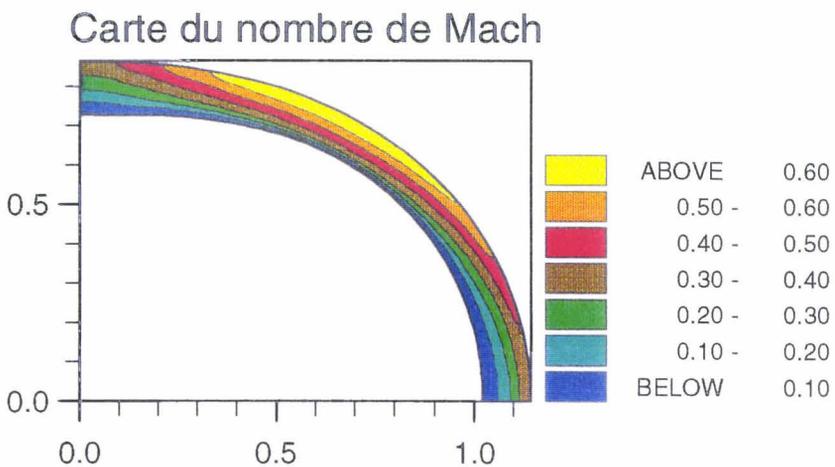
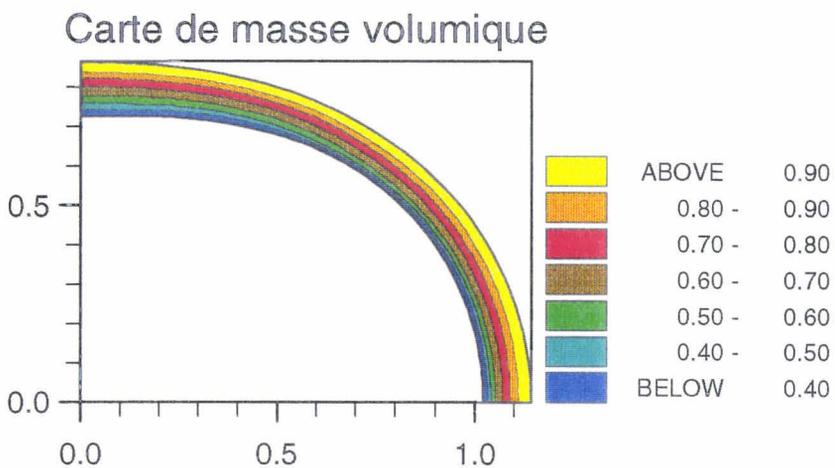
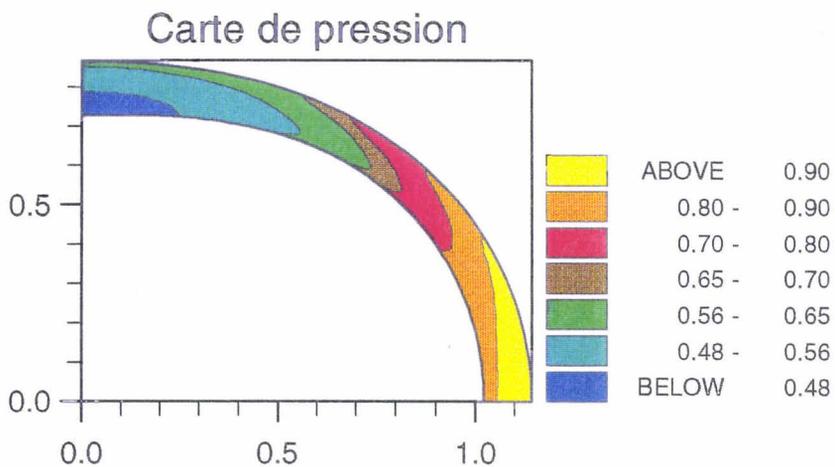


Figure 16: Trajectoires en anisotropie forte

$n=0.75, k=1, \Lambda=-0.1$

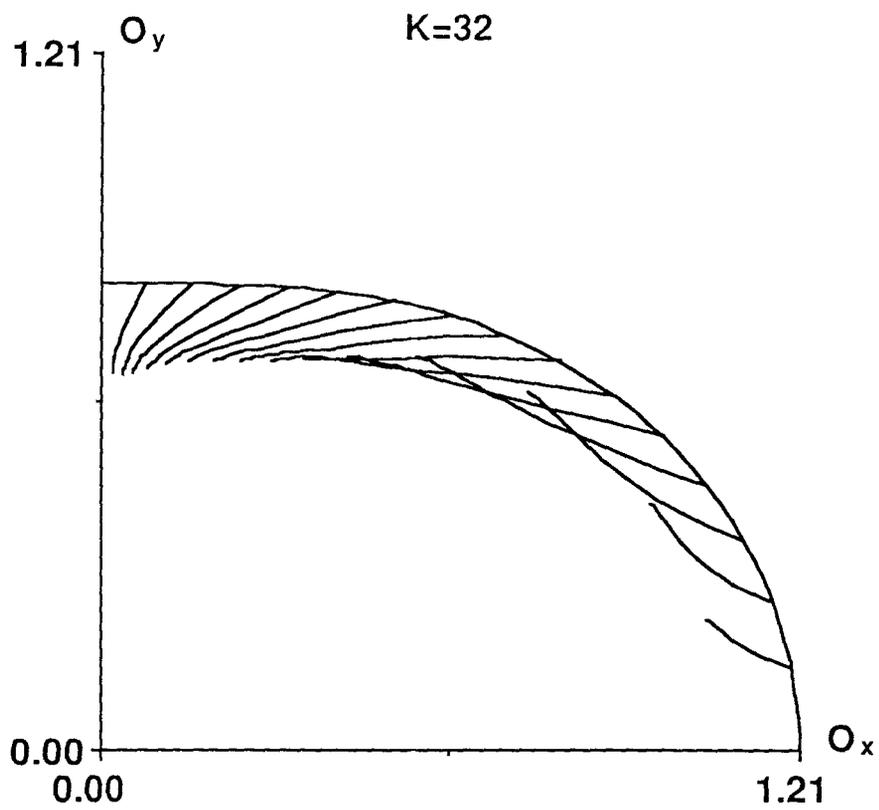
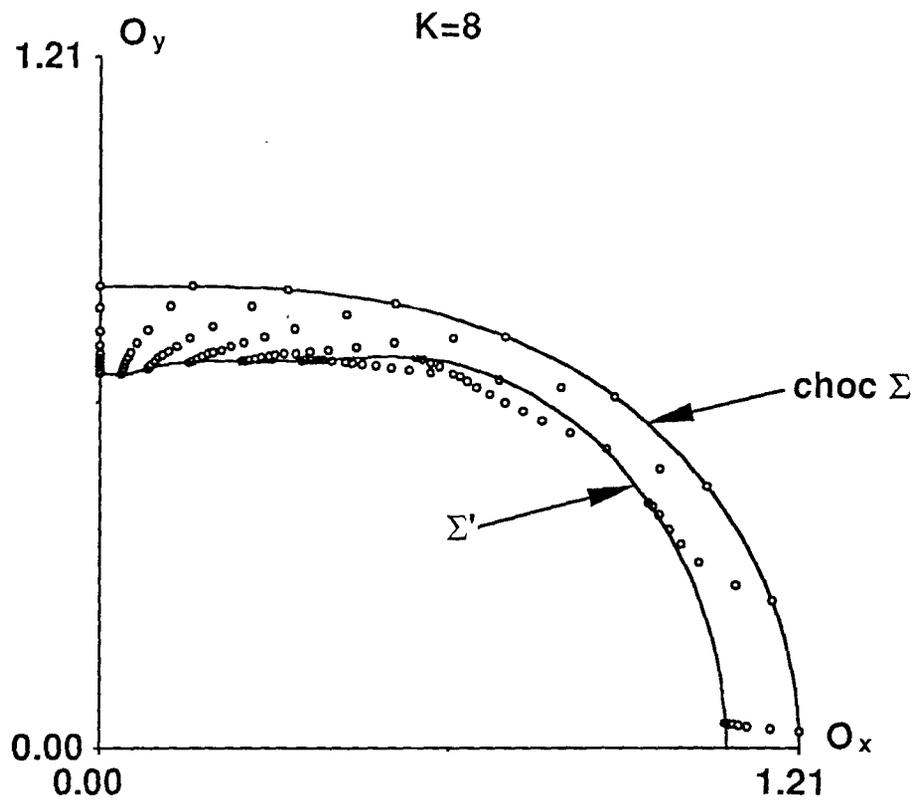


Figure 17: Approximation de Σ'

$n=0.75, k=1, \Lambda=-0.1, K=32$

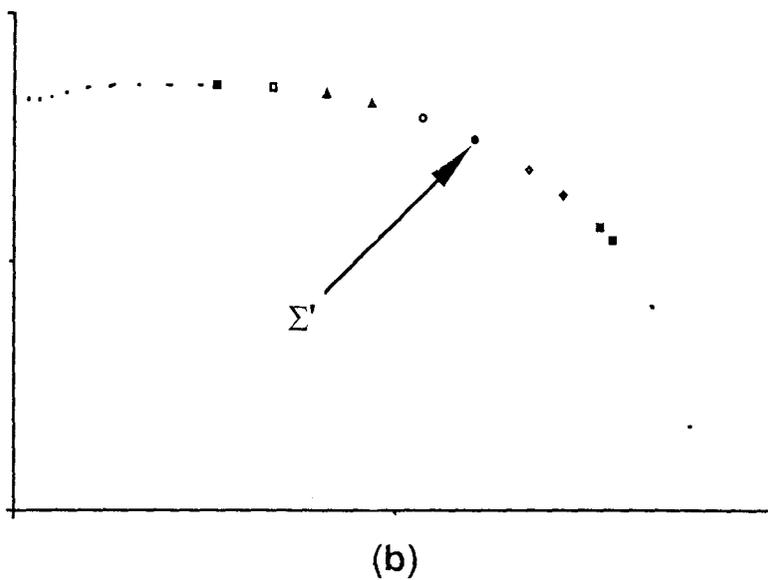
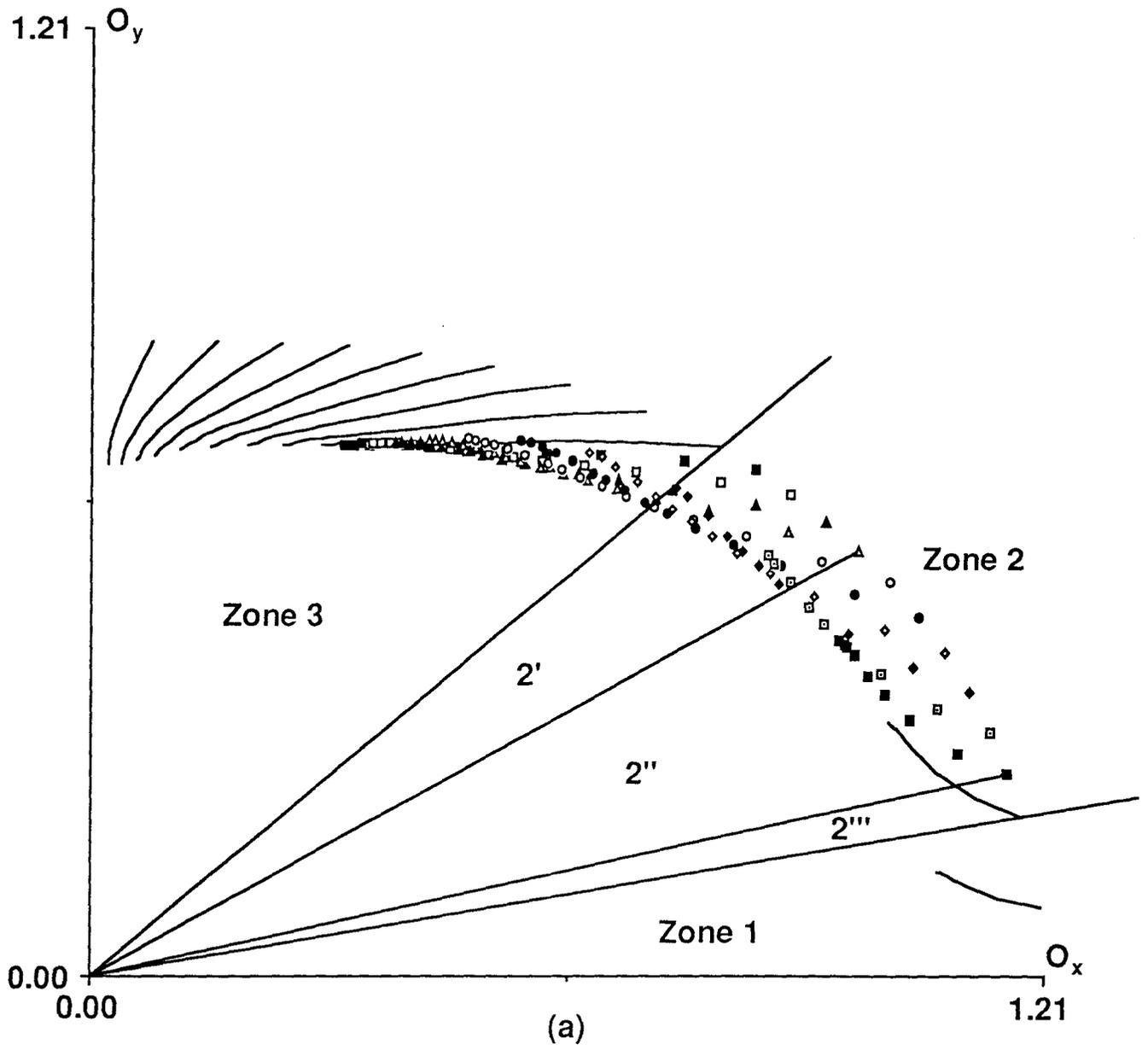


Figure 18: Grandeurs adimensionnées

$n=0.75, k=1, \Lambda=-0.1, K=32$

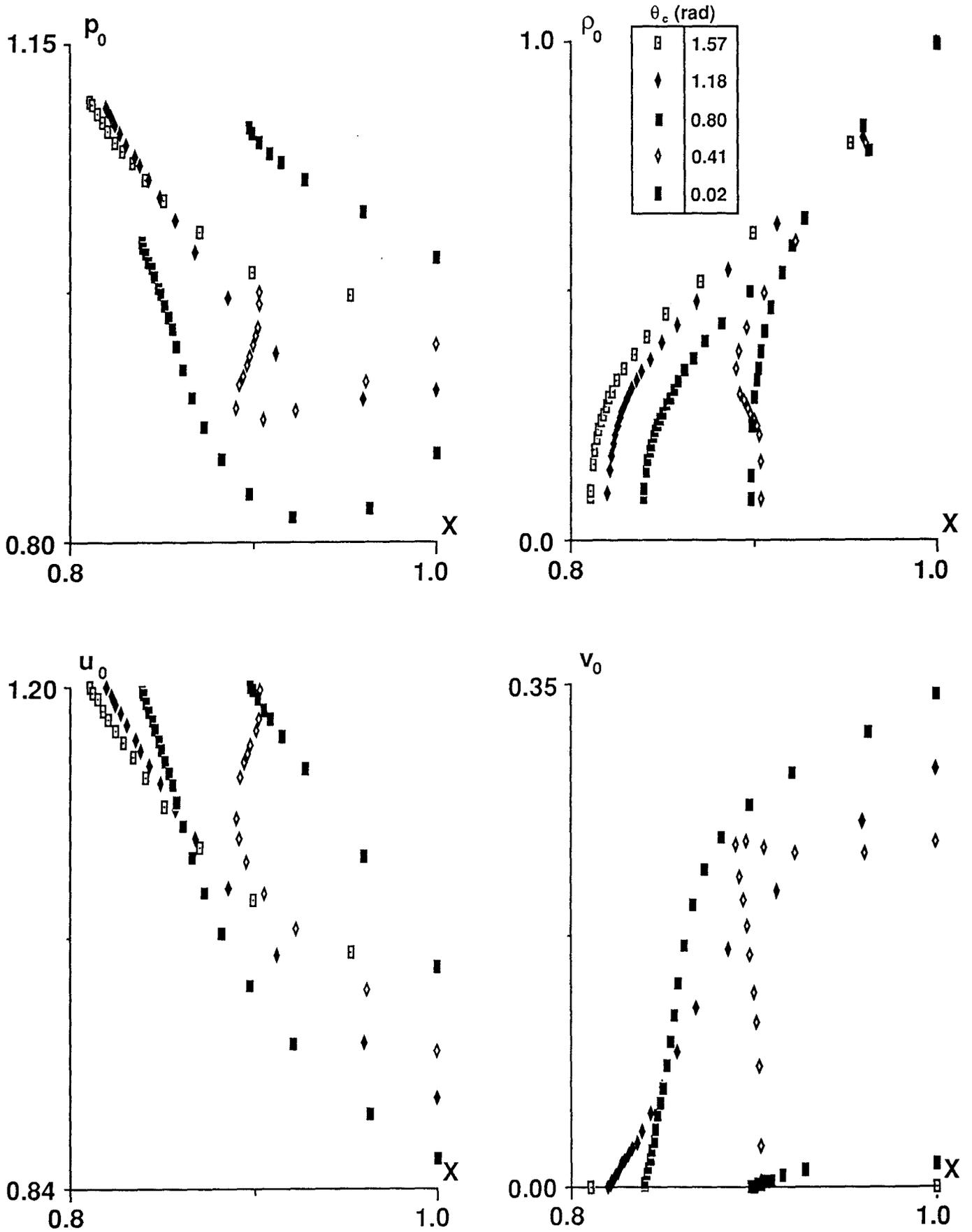
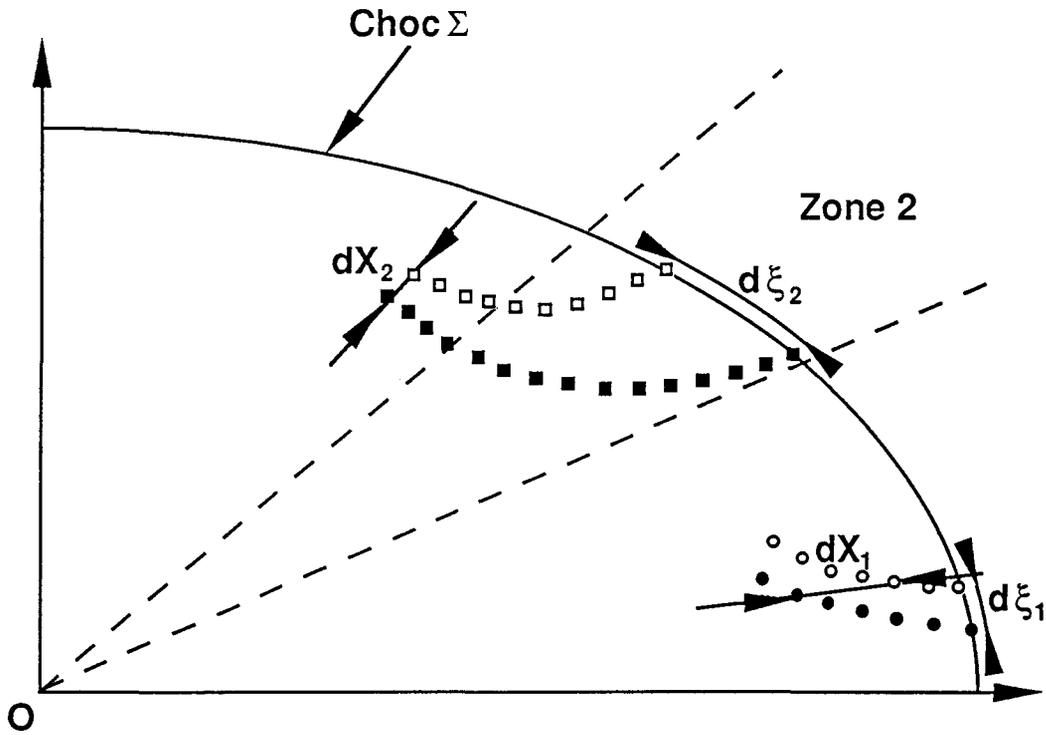
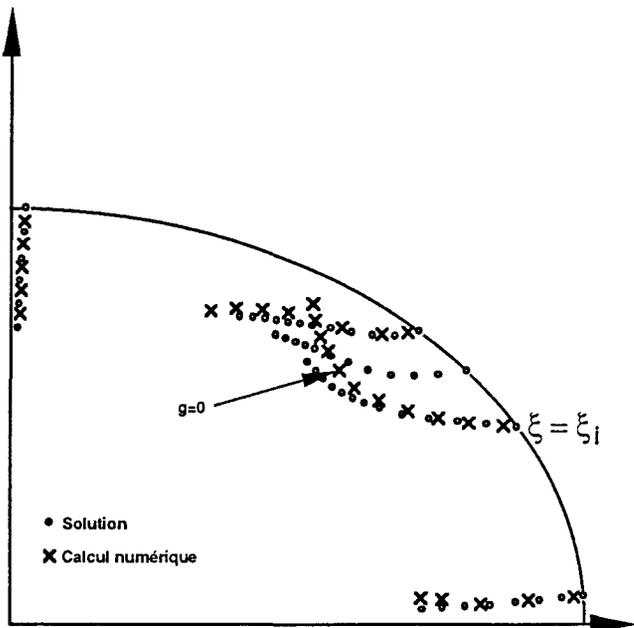


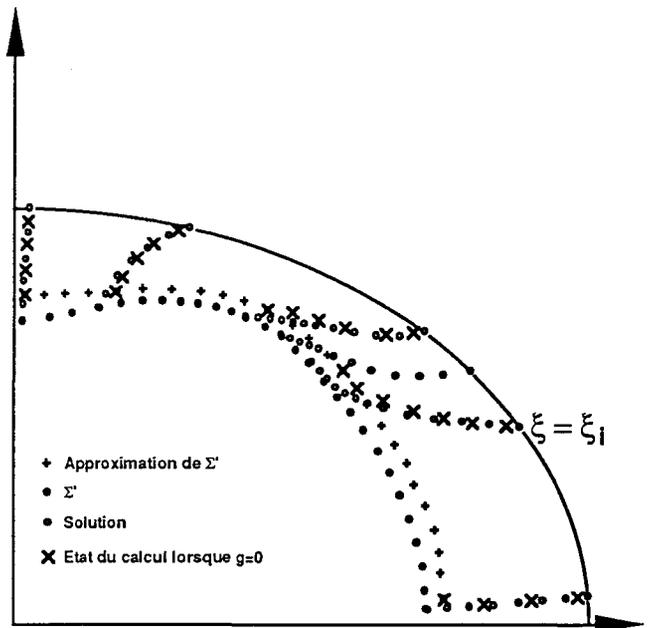
Figure 19: Effet numérique sur les trajectoires et approximation de Σ' en forte anisotropie



(a) Pincement des trajectoires pour v_0 grand



(b) Effet numérique



(c) Approximation de Σ'

Figure 20: Cartes de pression et de masse volumique

$n=0.75, k=1, \Lambda=-0.1, K=16$

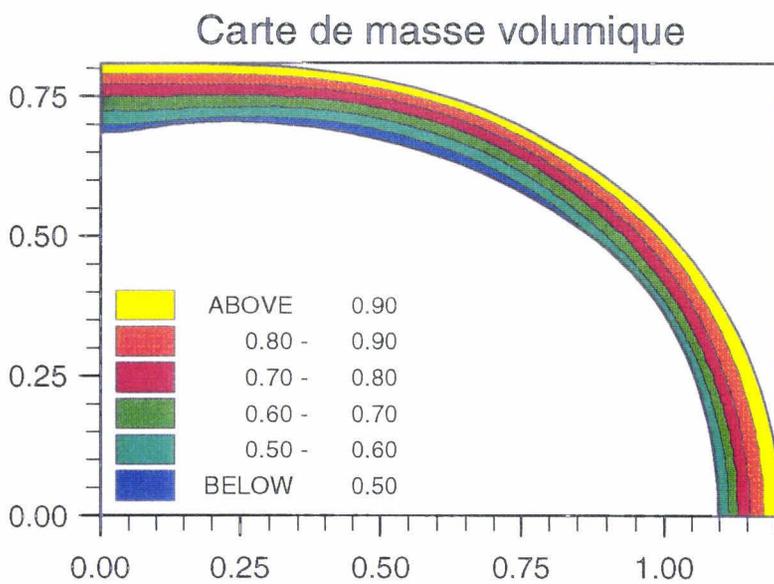
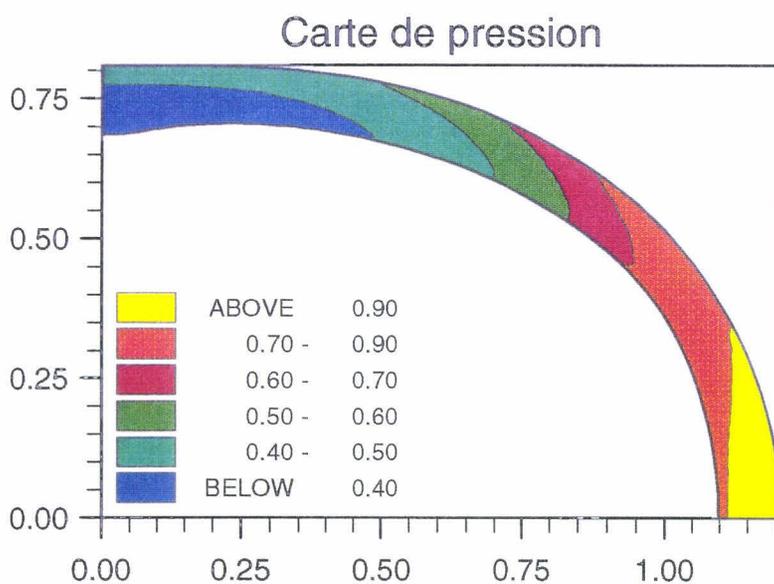


Figure 21: Cartes de pression et du nombre de Mach pour un problème localement hyperbolique

$n=0.75, k=1, \Lambda=-0.11, K=16$

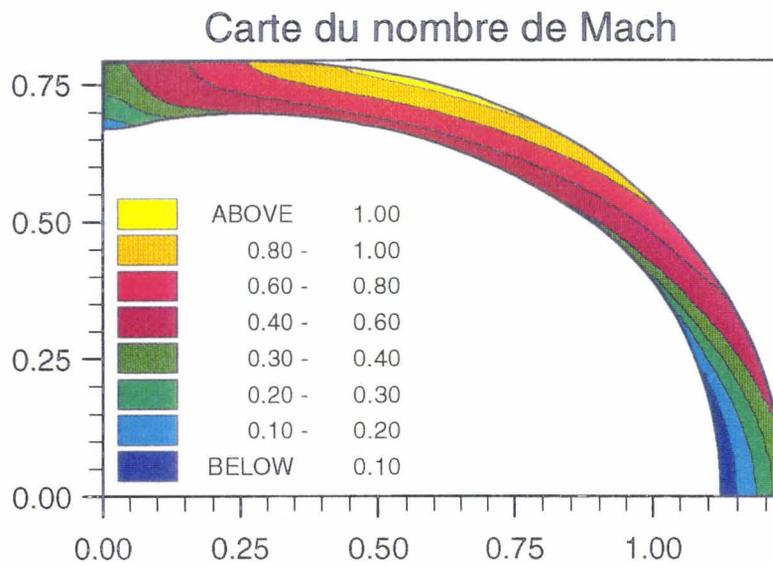
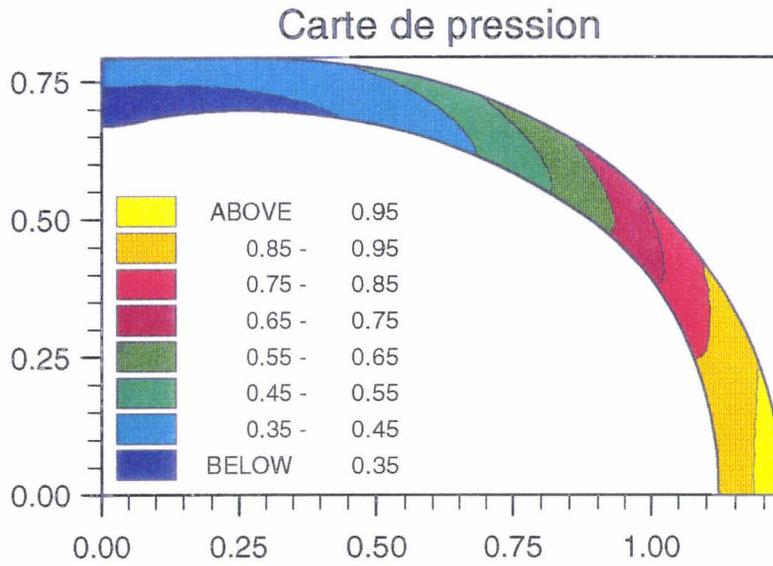


Figure 22: Grandeurs adimensionnées pour un problème localement hyperbolique

$n=0.75, k=1, \Lambda=-0.11, K=16$

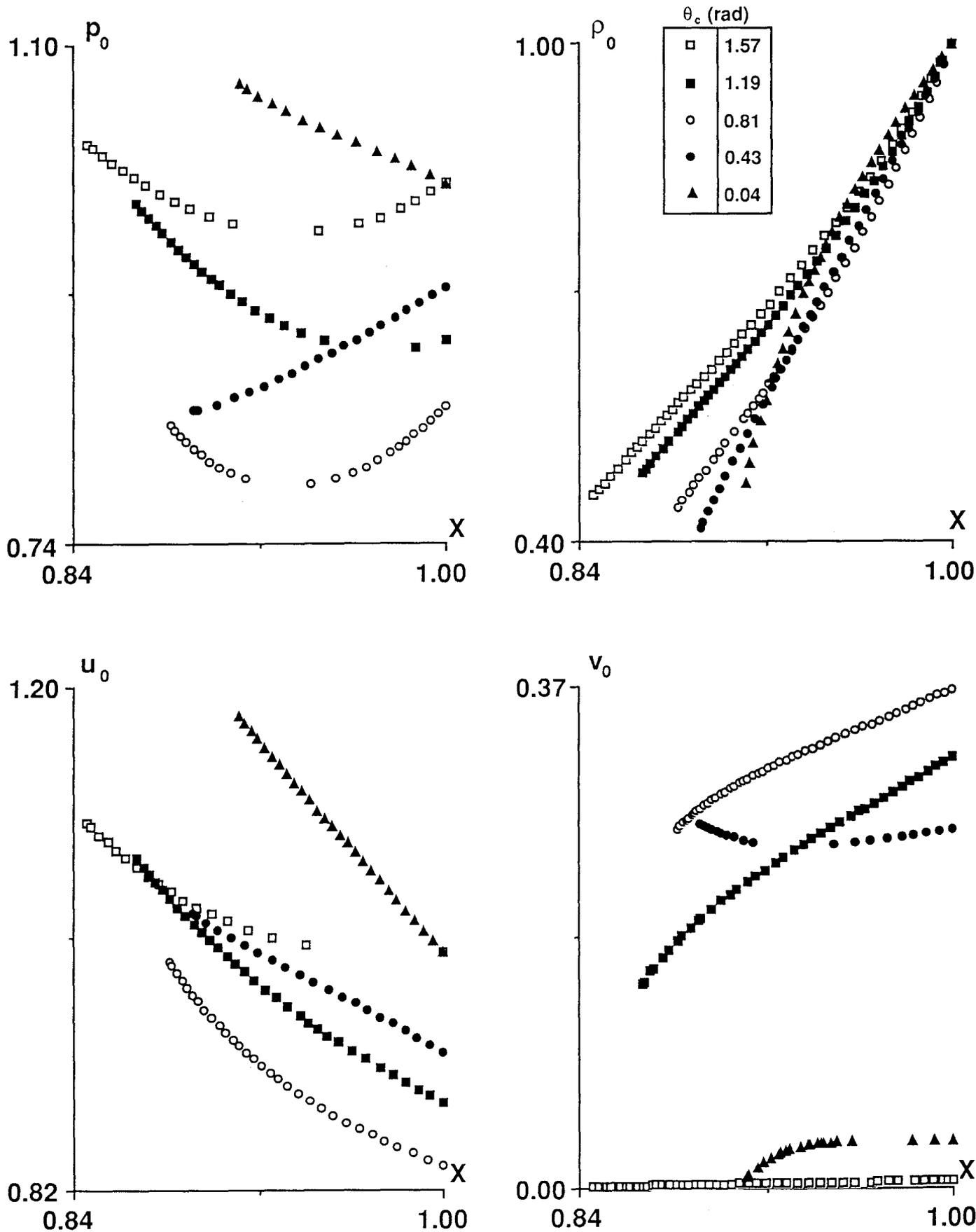


Figure 23: Influence de n sur les cartes de pression

$k=1, \Lambda=-0.02, K=16$

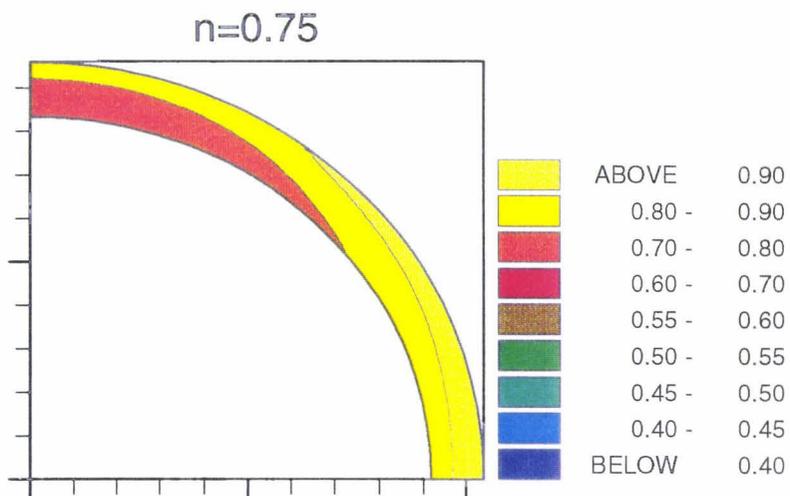
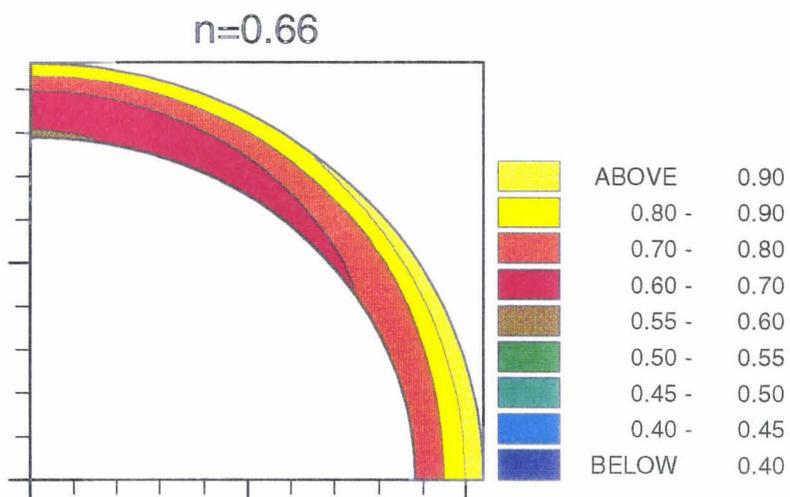
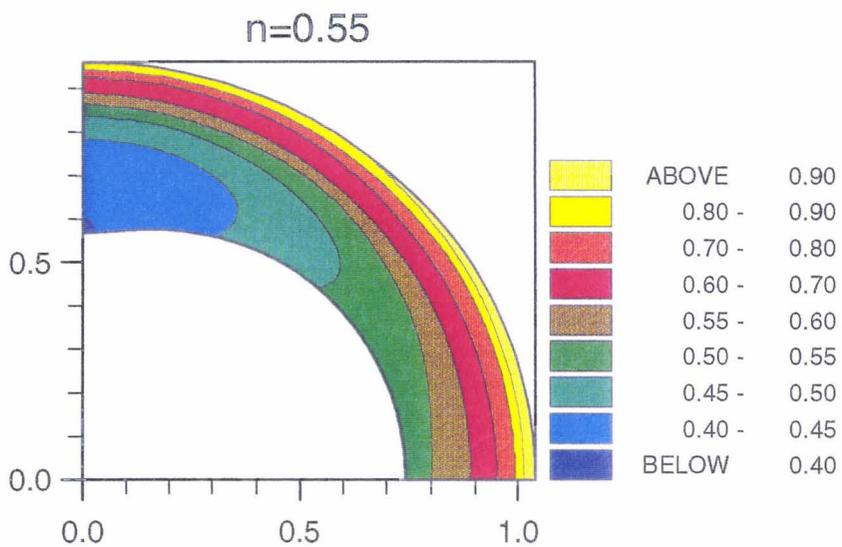


Figure 24: Influence de n sur les trajectoires

$k=1, \Lambda=-0.02, K=16$

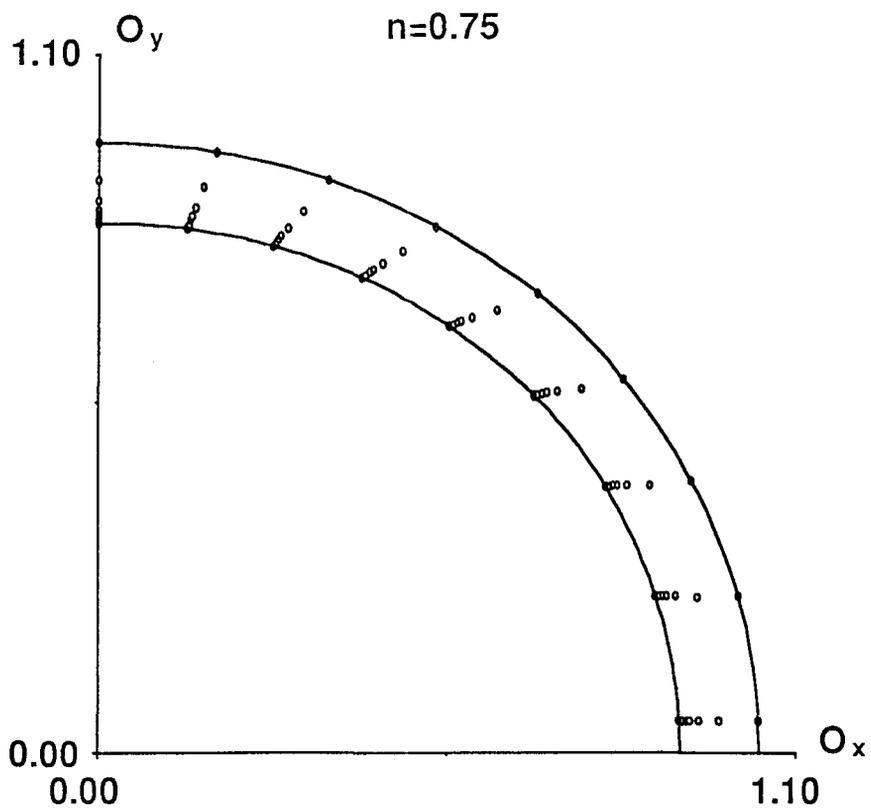
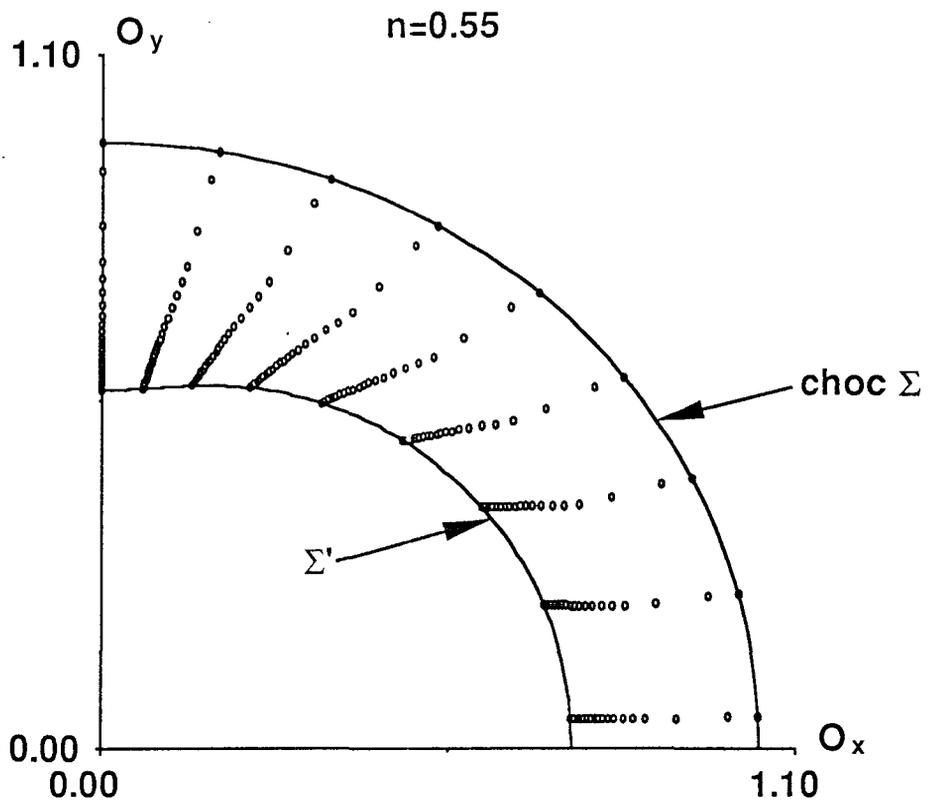


Figure 25: Influence de n sur la pression adimensionnée

$k=1, \Lambda=-0.02, K=16$

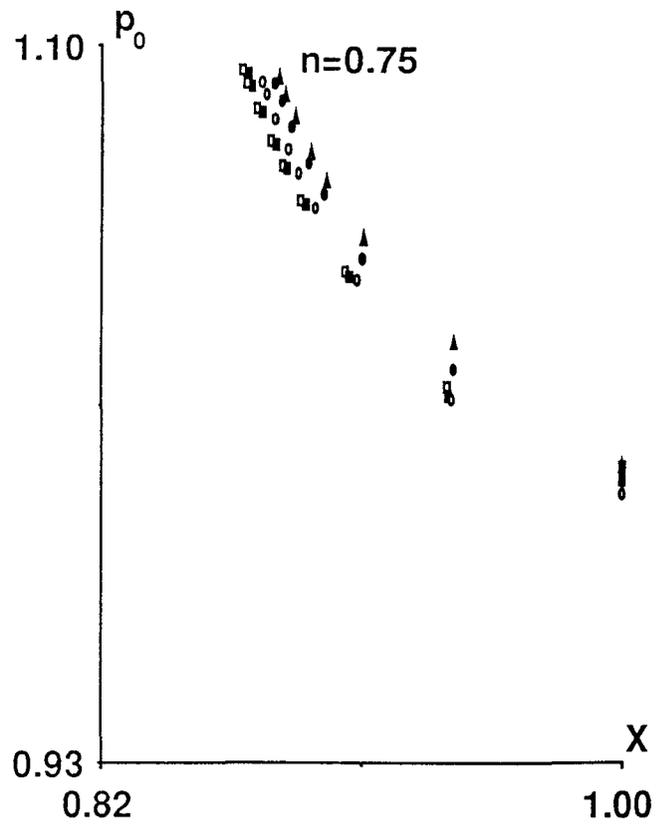
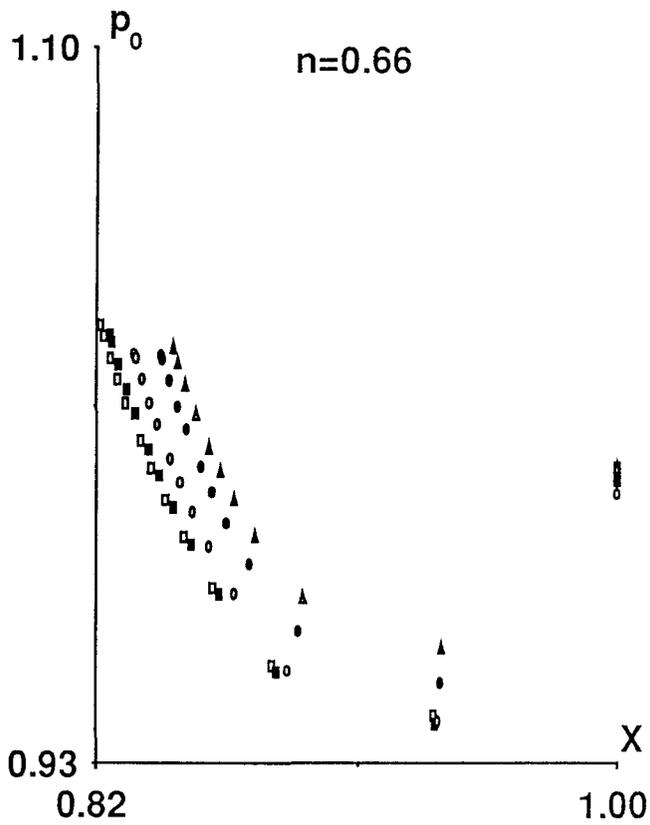
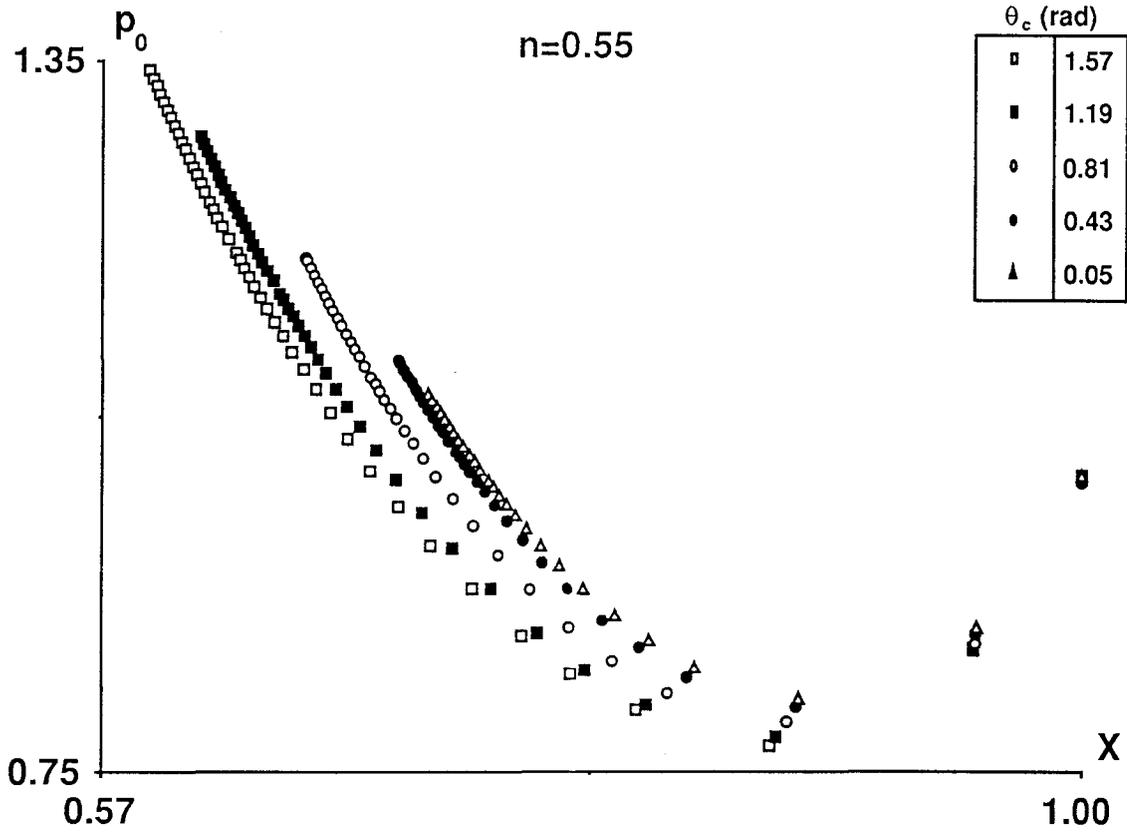


Figure 26: Influence de n sur la masse volumique adimensionnée

$k=1, \Lambda=-0.02, K=16$

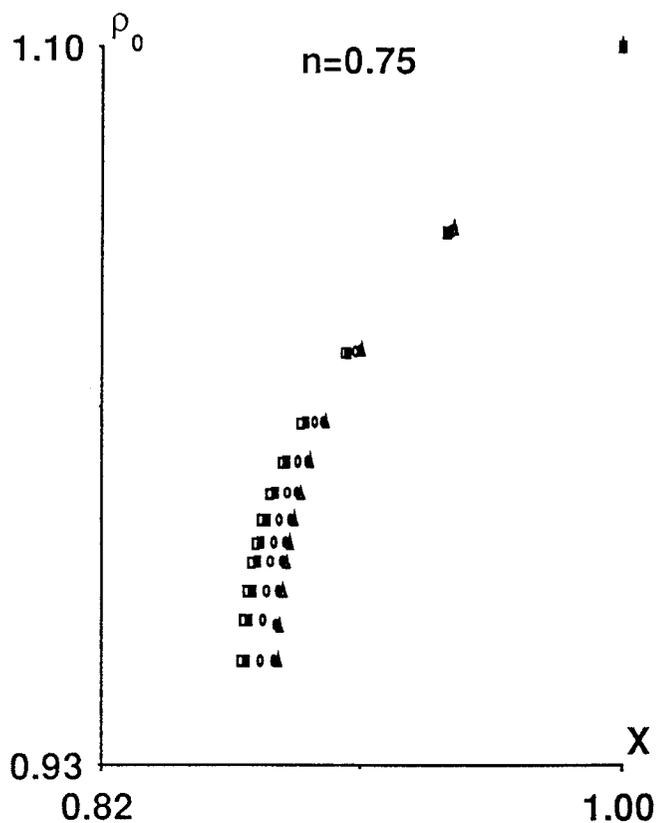
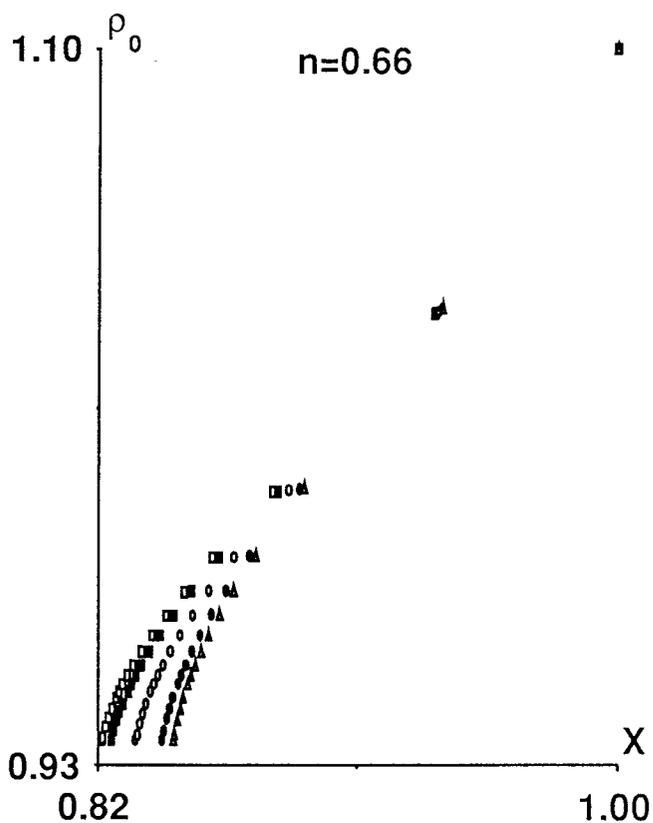
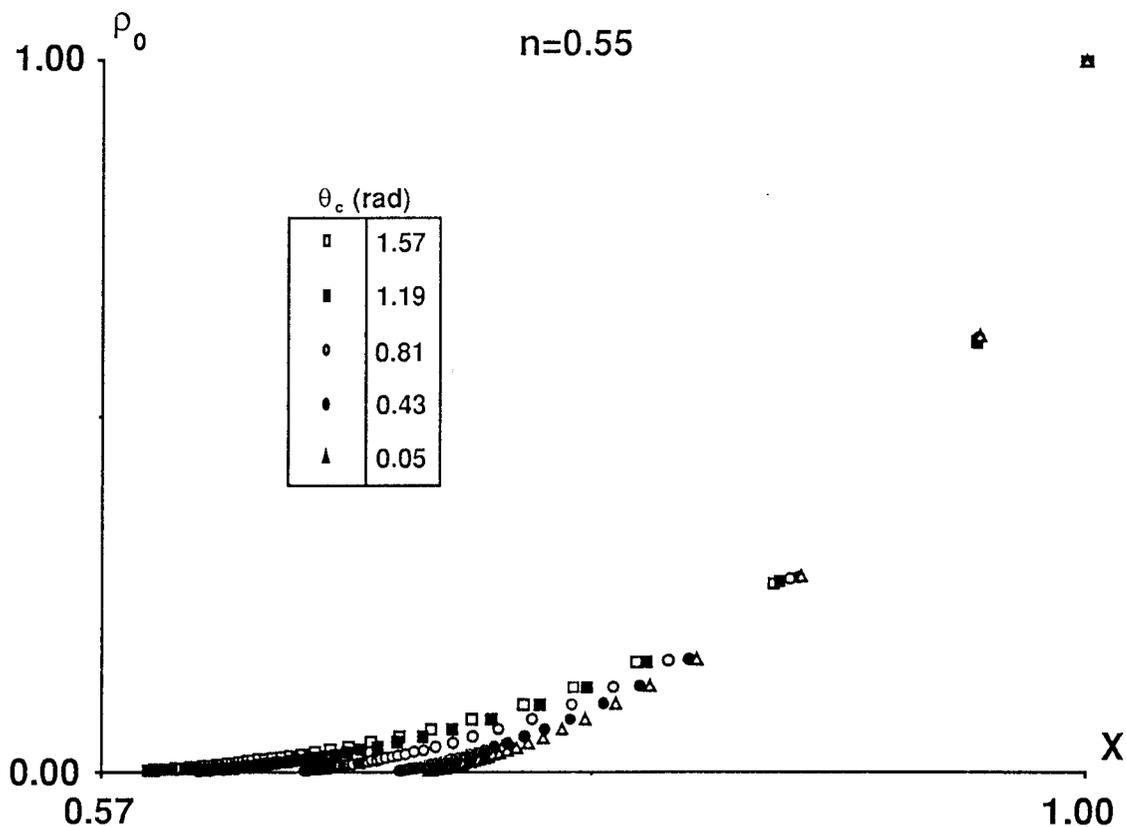


Figure 27: Explosion ponctuelle en milieu faiblement compressible

$n=0.75, k=2, \Lambda=-0.07, K=16, \gamma=7$

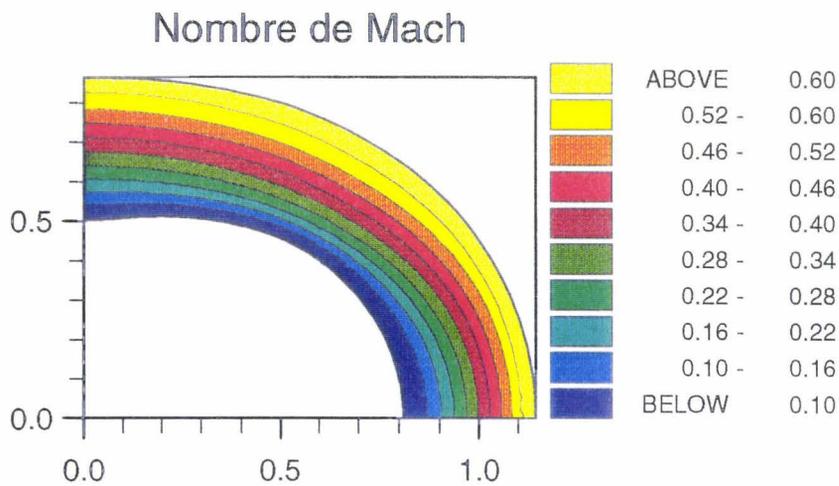
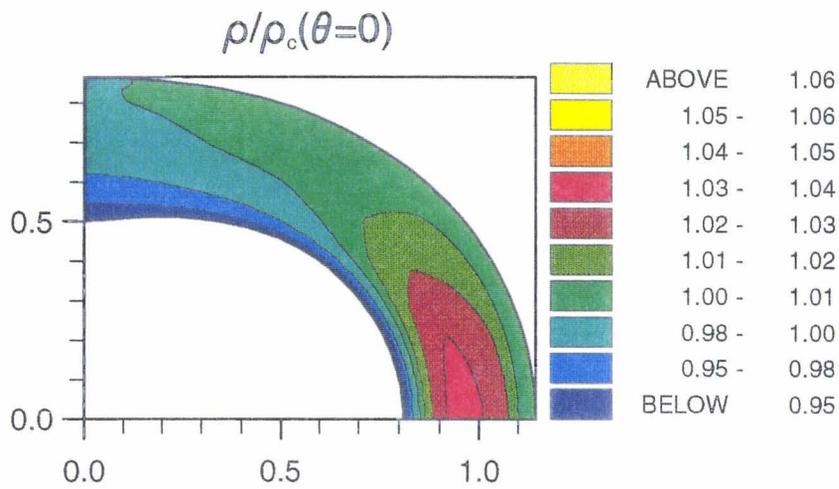
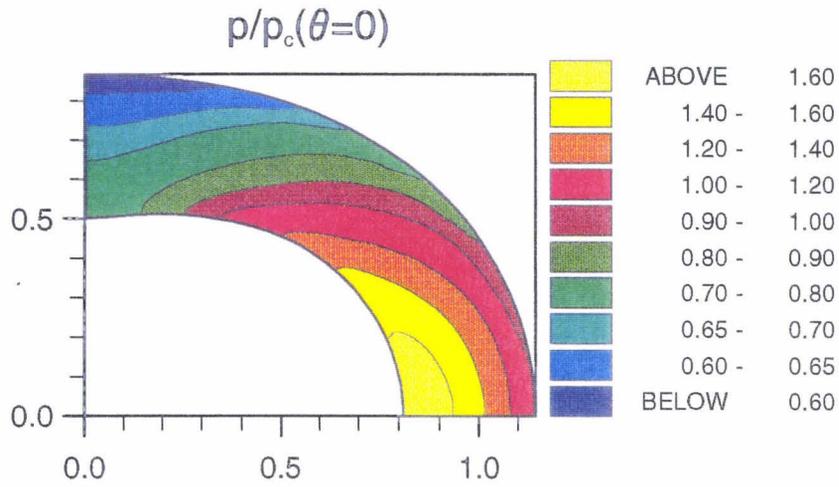
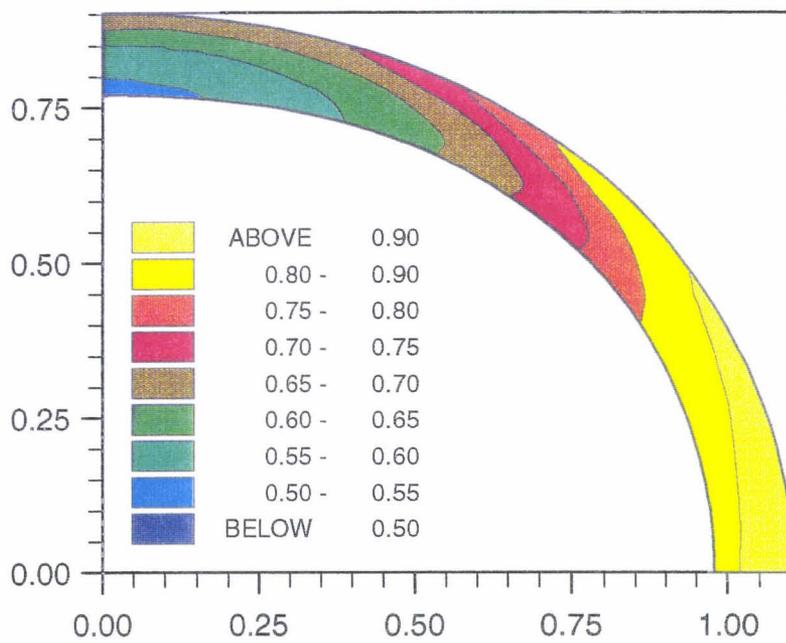


Figure 28: Comparaison Telenin-Mac Cormack en couche mince elliptique

$p/p_c(\theta=0)$: $n=0.75$, $k=1$, $\Lambda=-0.05$

Telenin: $K=16$



Mac Cormack

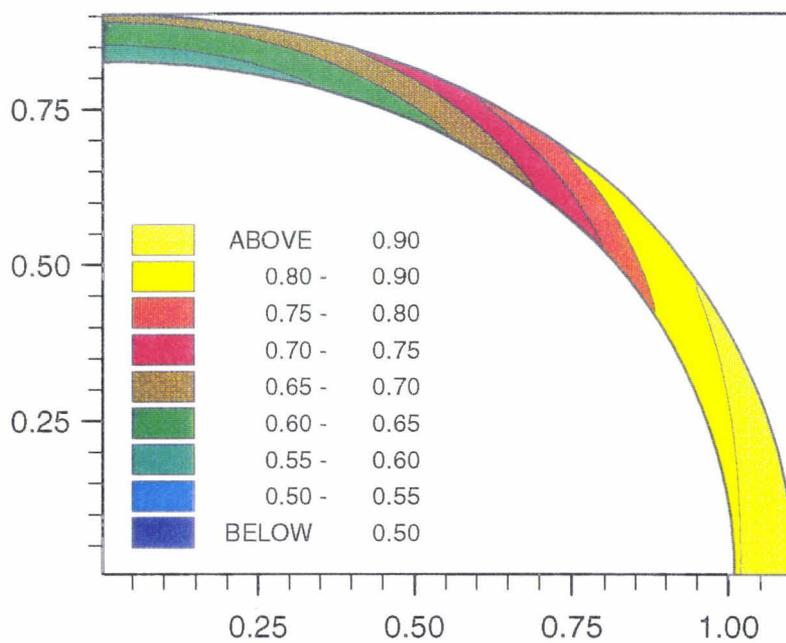
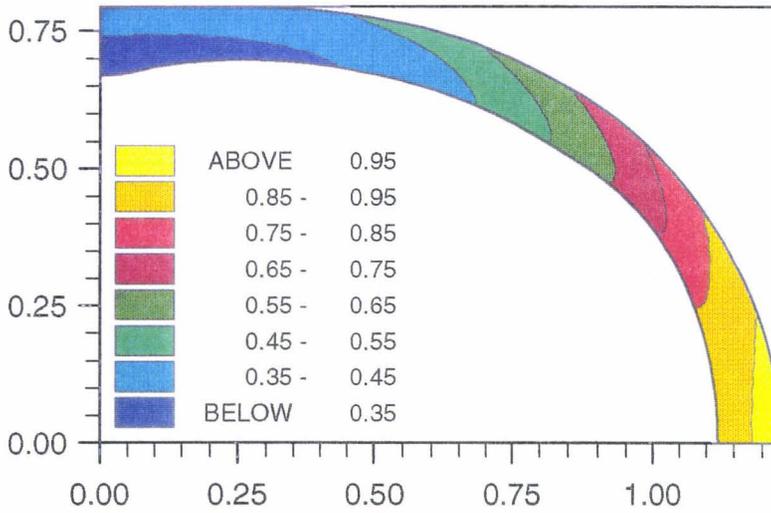


Figure 29: Comparaison Telenin-Mac Cormack en couche mince hyperbolique

$p/p_c(\theta=0)$: $n=0.75$, $k=1$, $\Lambda=-0.11$

Telenin: K=16



Mac Cormack

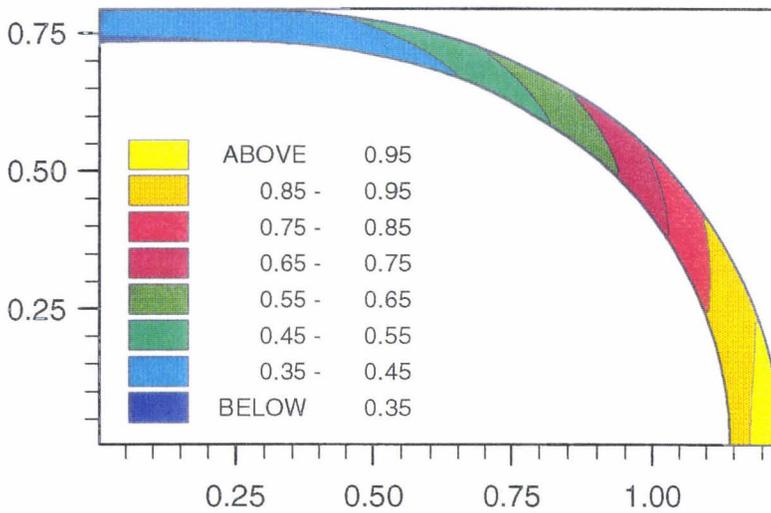
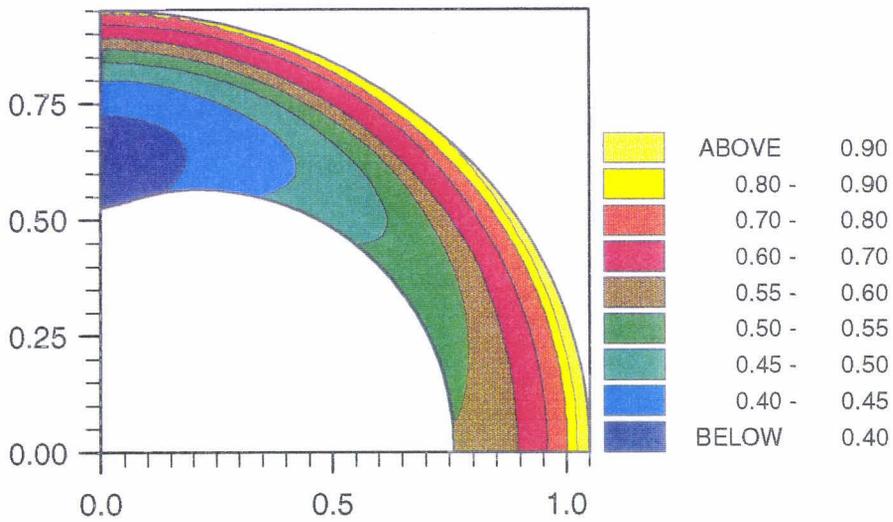


Figure 30: Comparaison Telenin-Mac Cormack en couche épaisse elliptique

$p/p_c(\theta=0)$: $n=0.55$, $k=1$, $\Lambda=-0.025$

Telenin: K=16



Mac Cormack

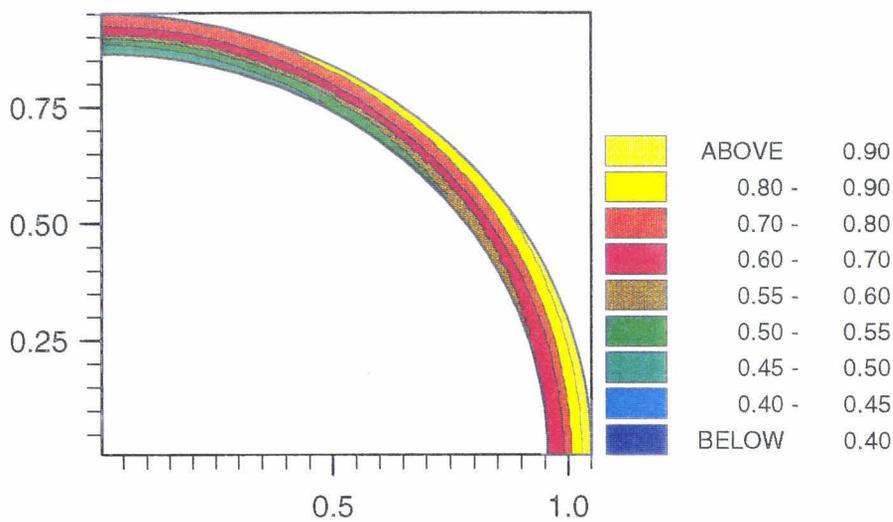


Figure 31: Onde de souffle anisotrope consécutive à un tir d'arme

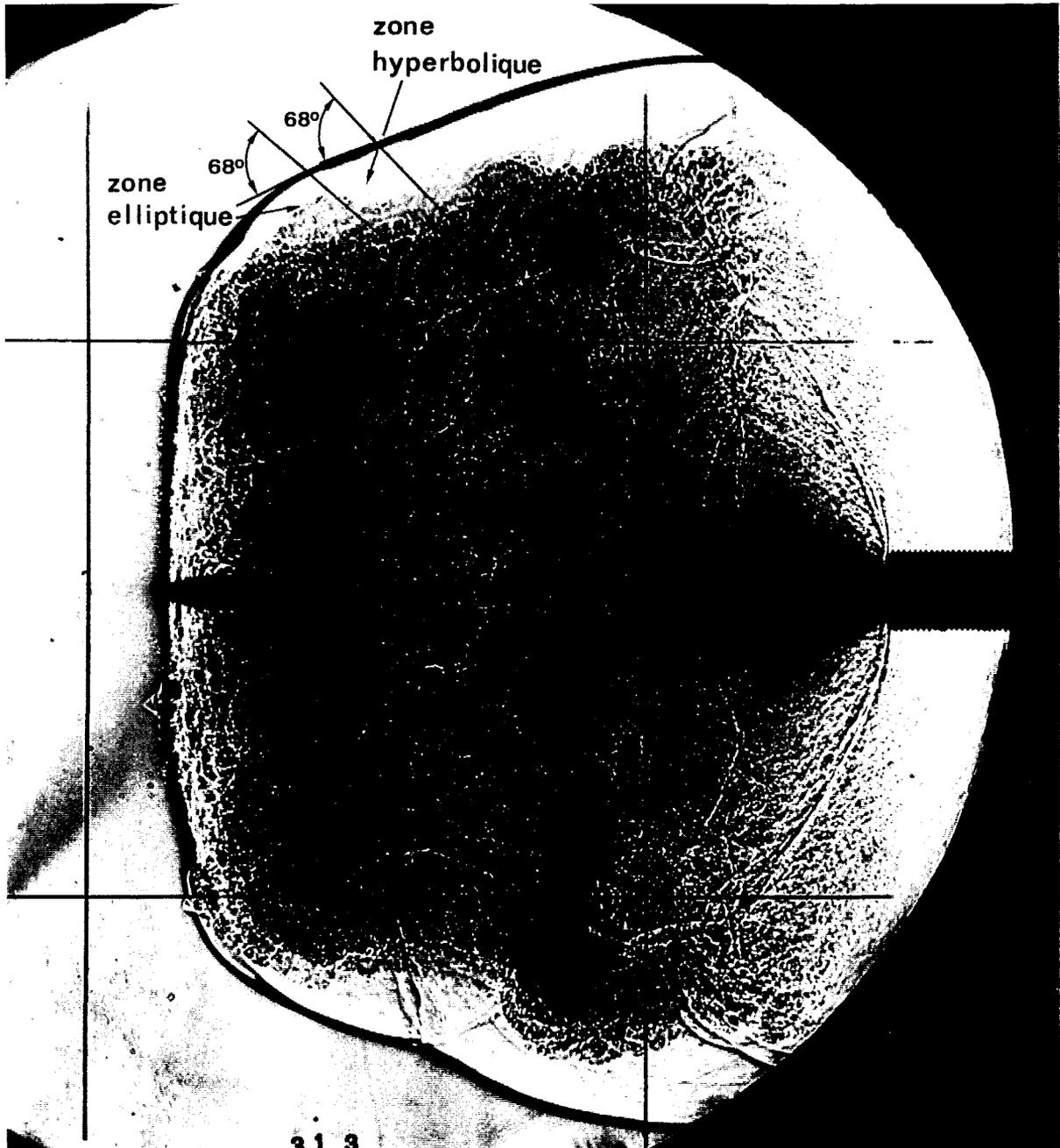


Figure 32: Résultats de calcul d'une onde de souffle

$n=0.60, k=2, K=16$

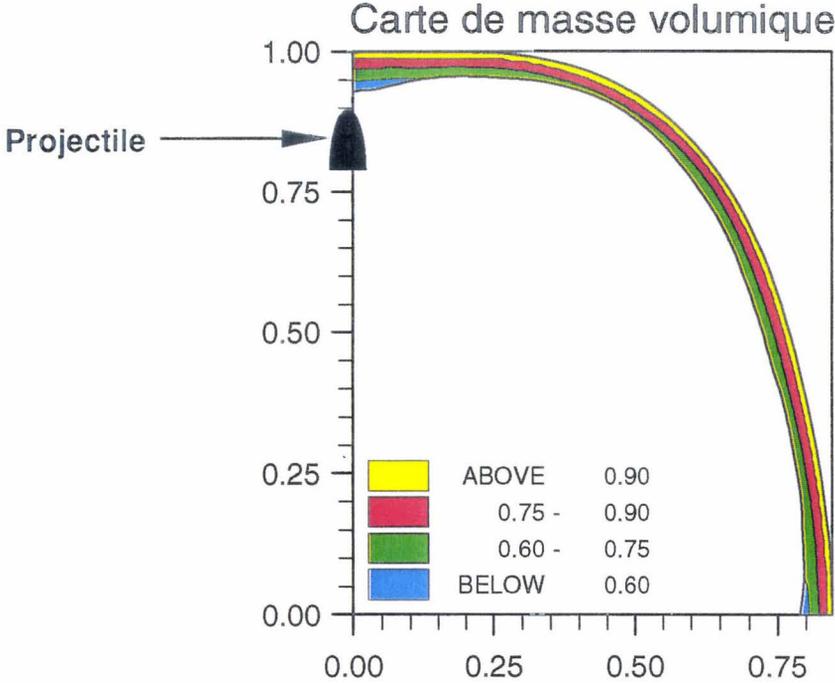
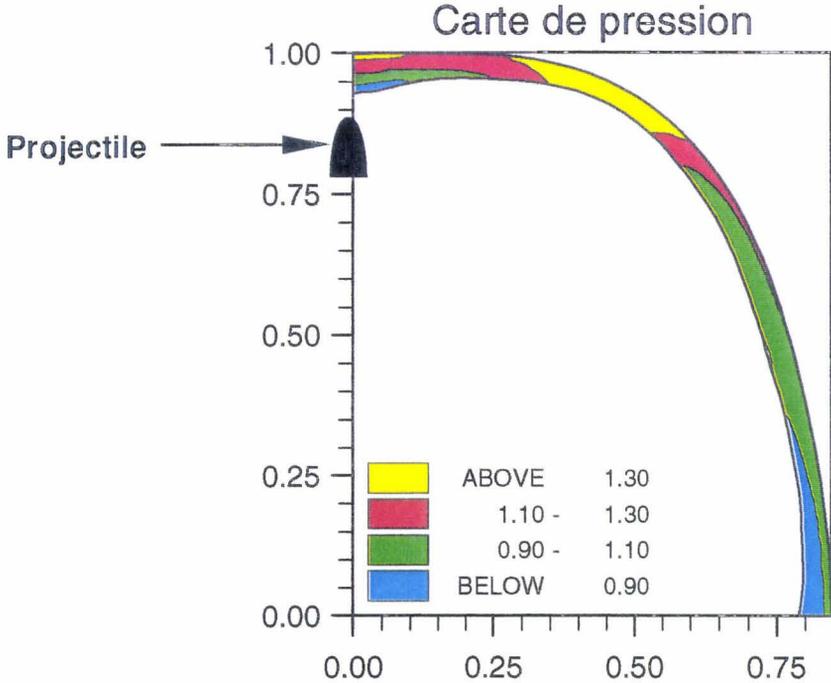
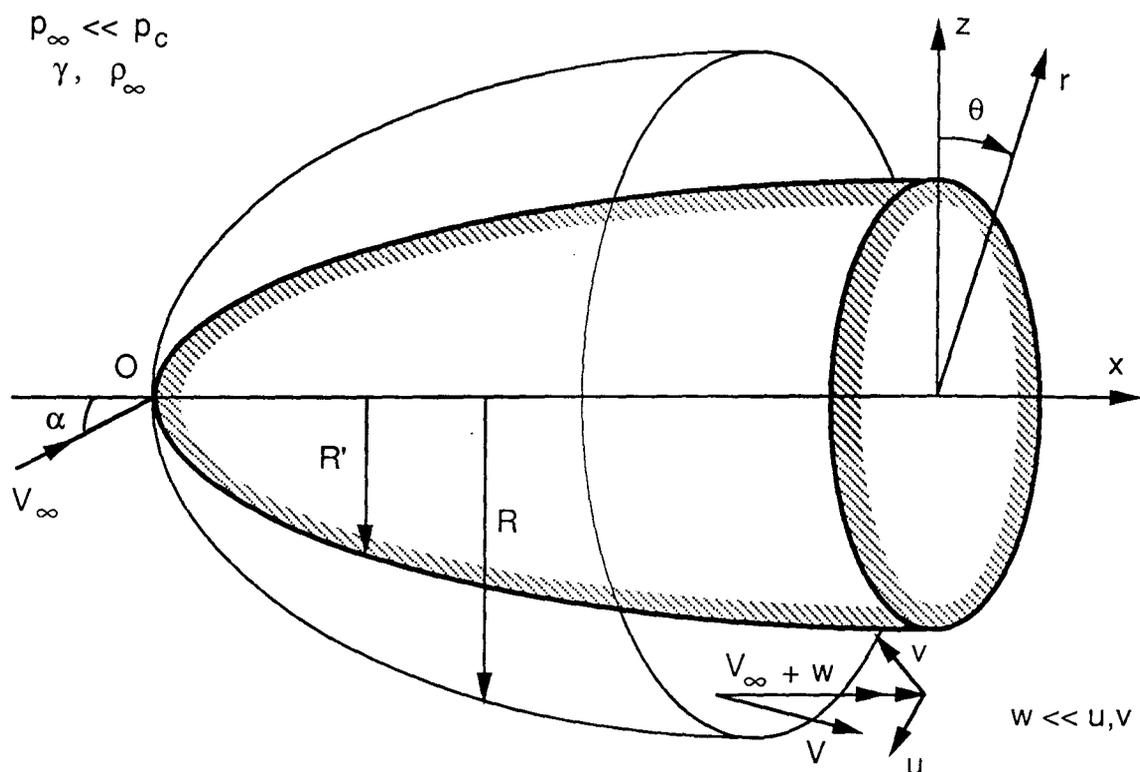
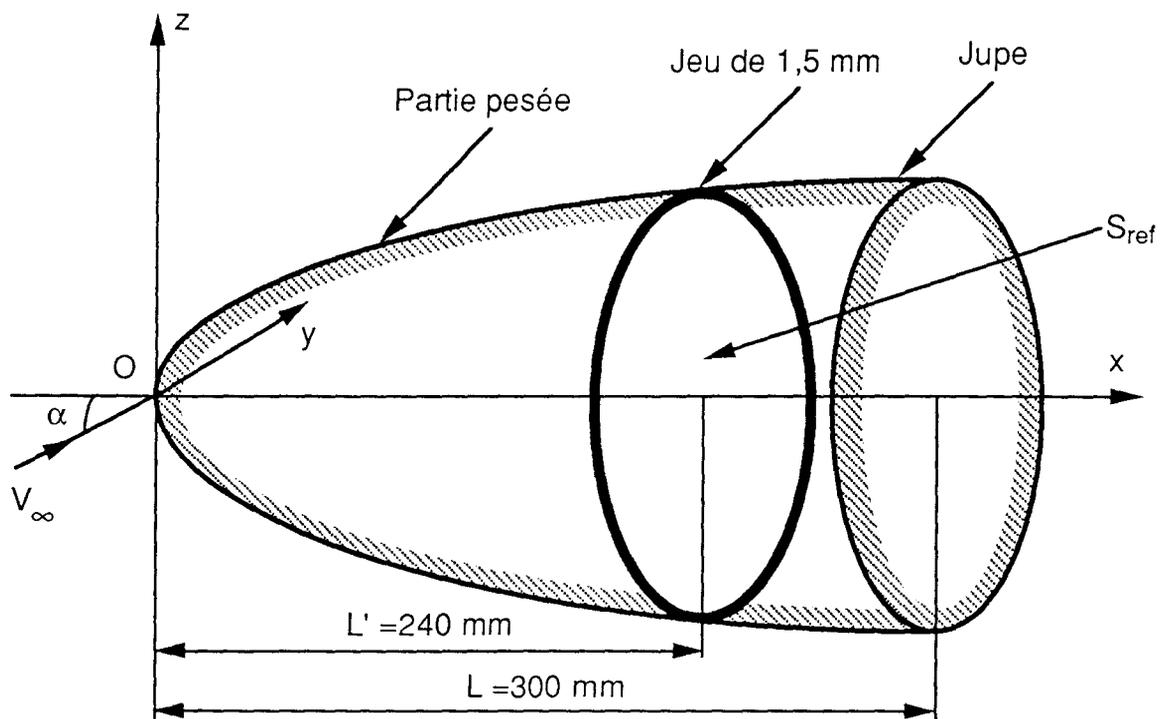


Figure 33

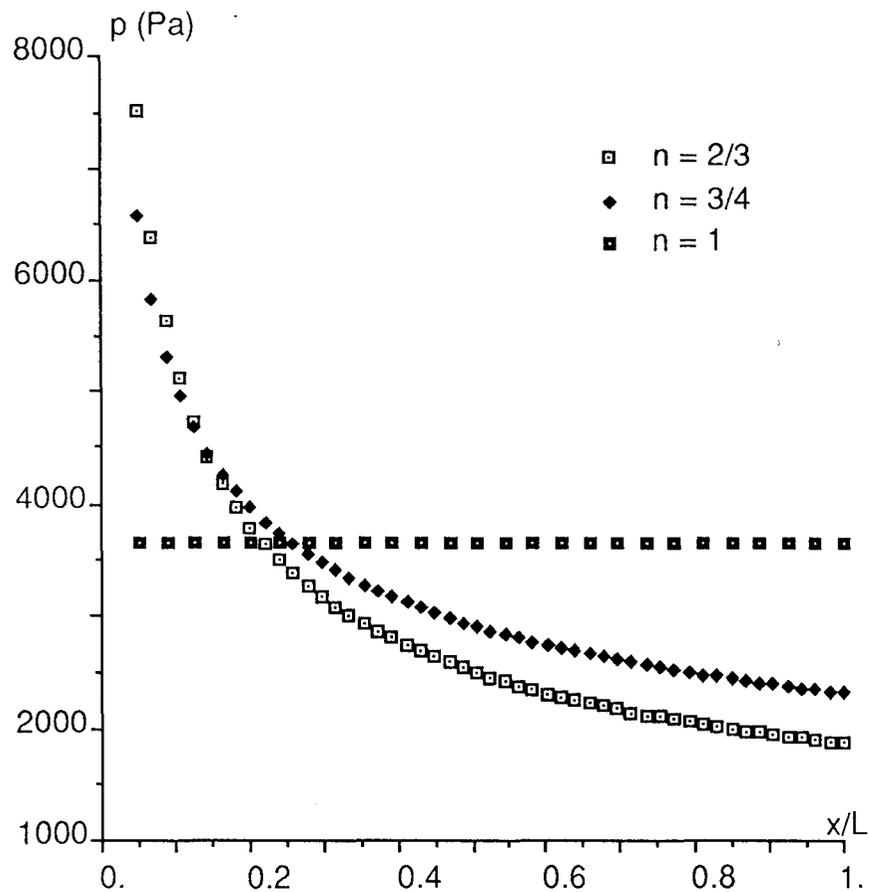


a) Repère lié à la maquette

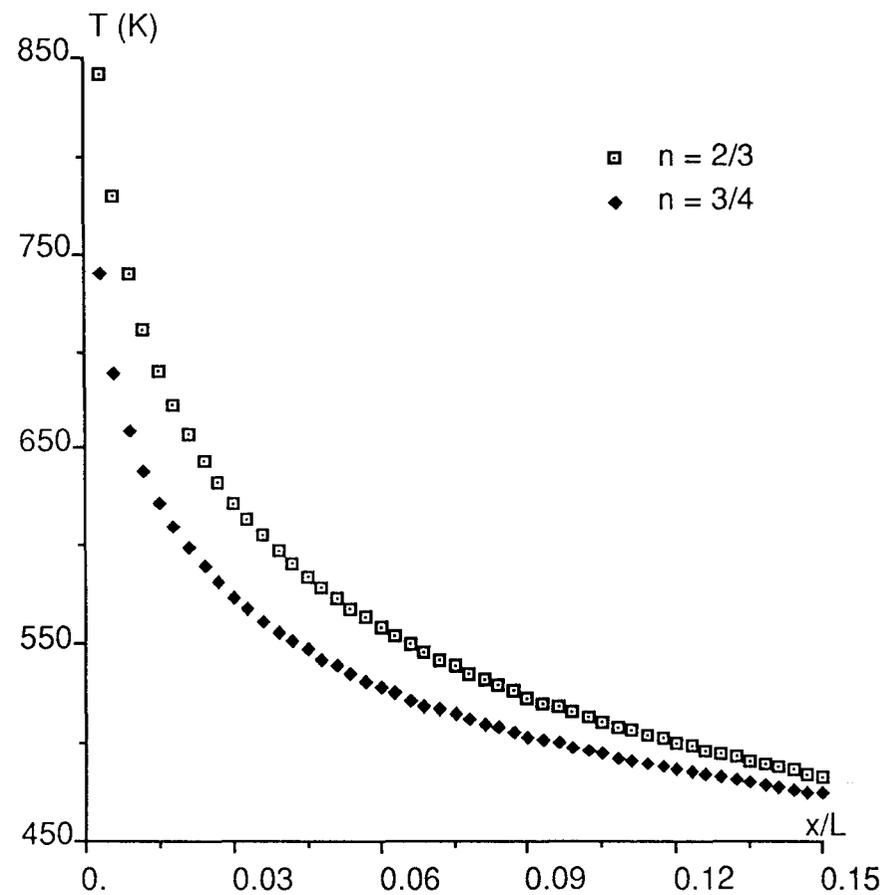


b) Configuration des maquettes destinées aux pesées

Figure 34: Pressions et températures maximales

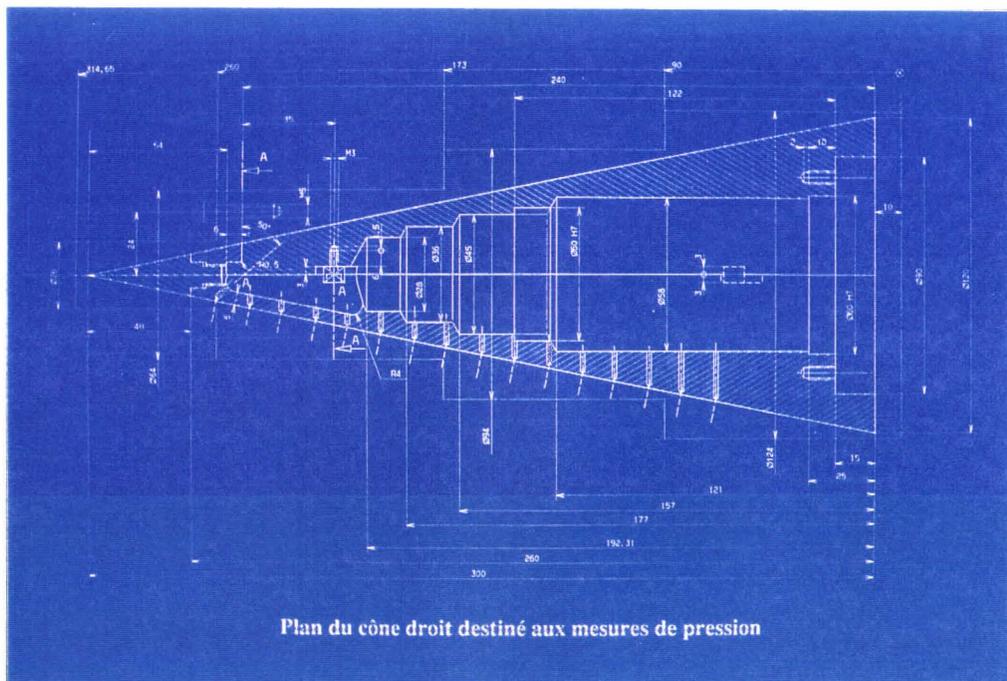


a) Pressions maximales - Incidence: $\alpha = 0.1$ rad.

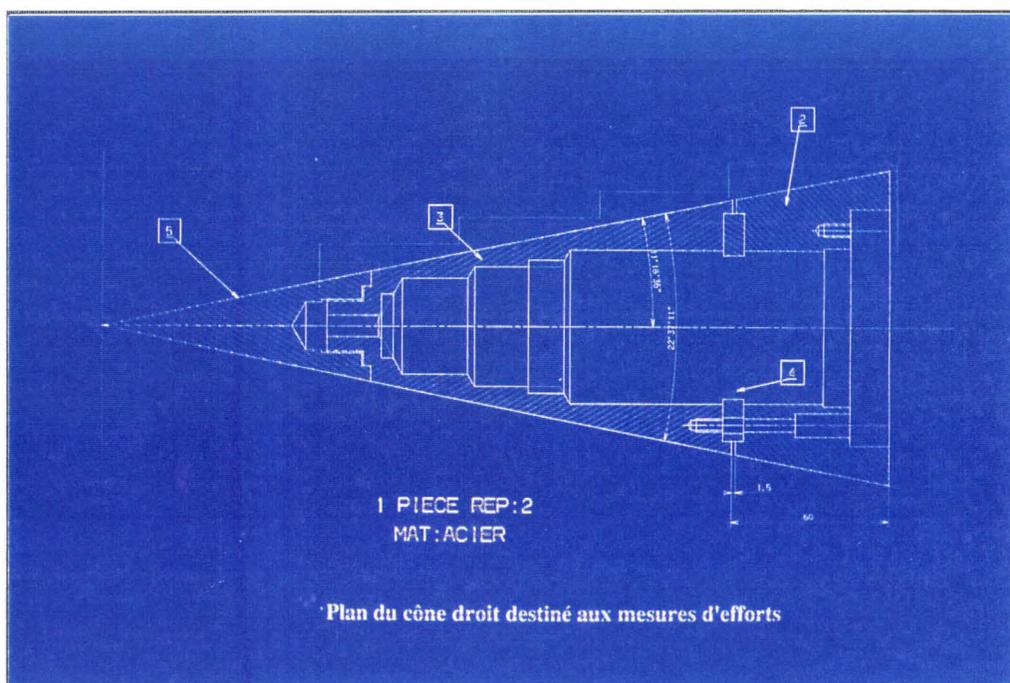


b) Température de paroi

Figure 35: Maquettes du cône droit

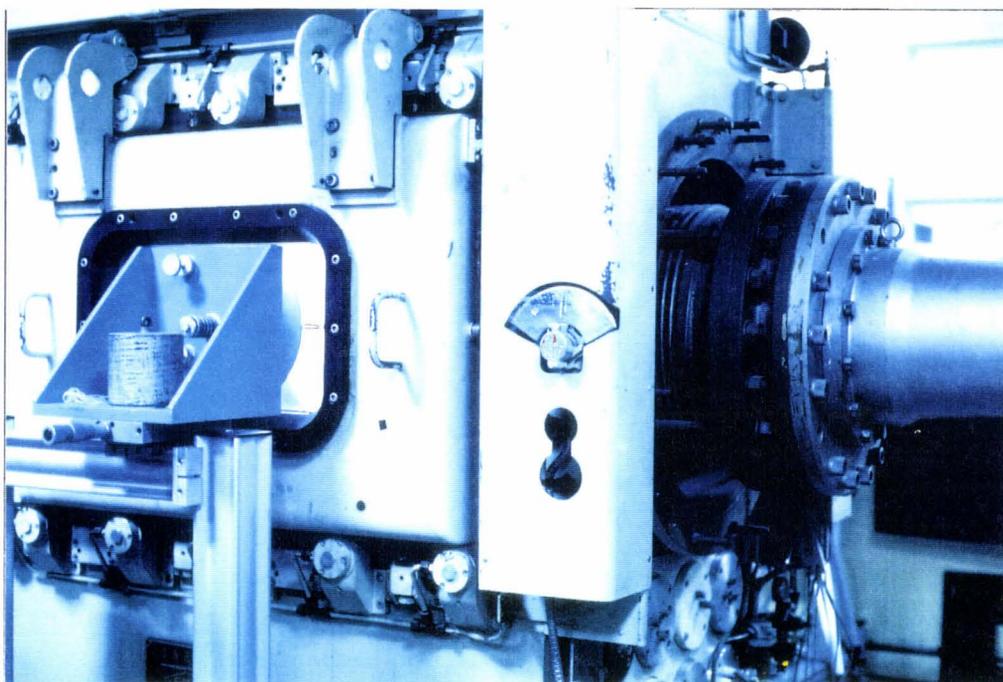


a) Maquette pression

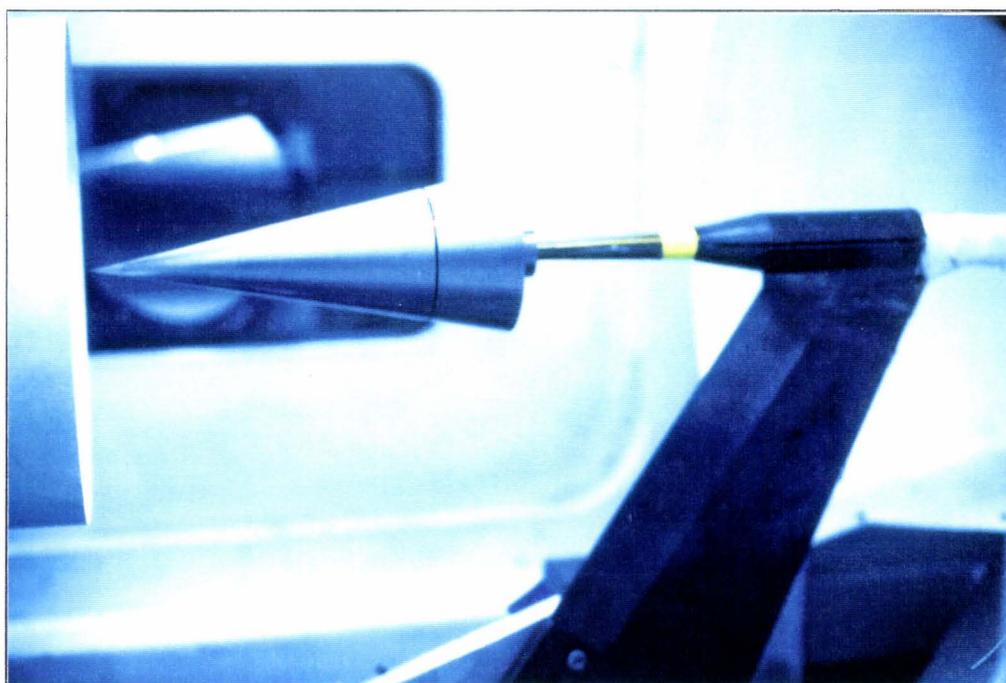


b) Maquette pesée

Figure 36: Moyens d'essais

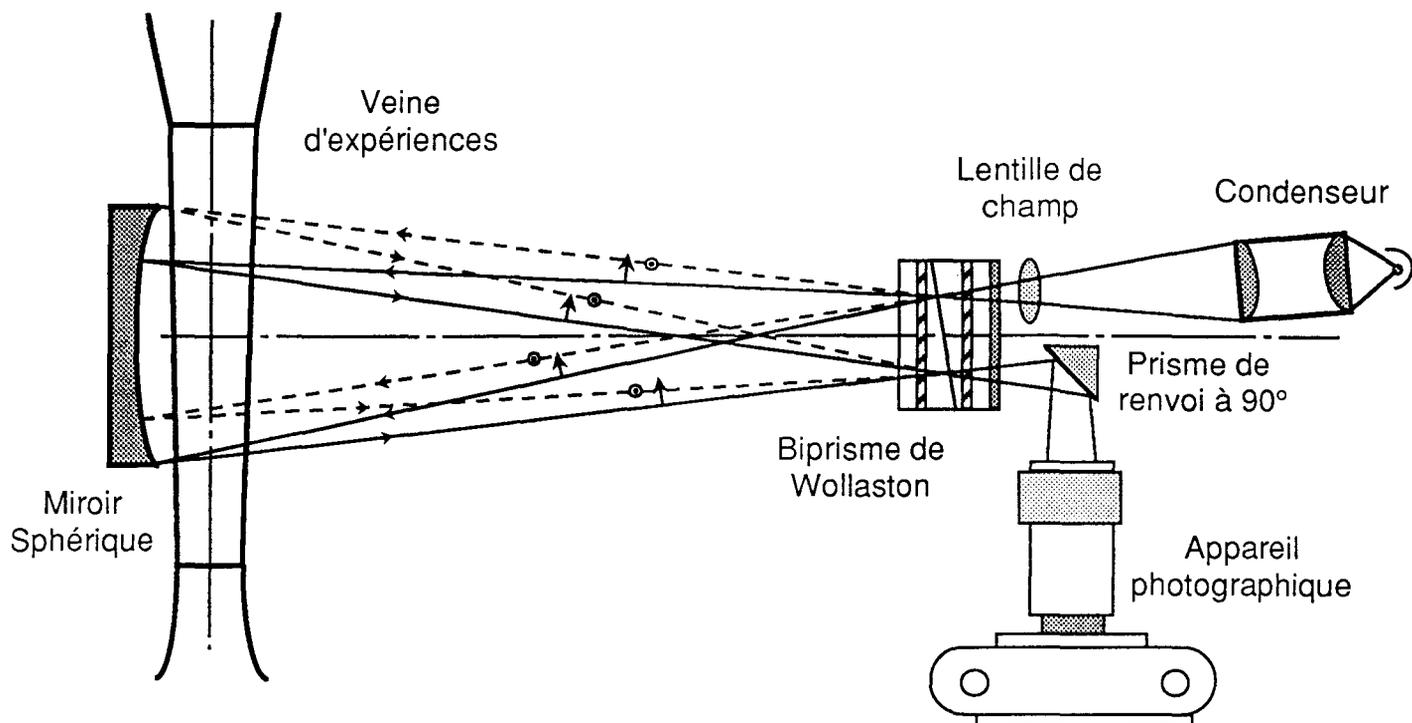


a) Installation

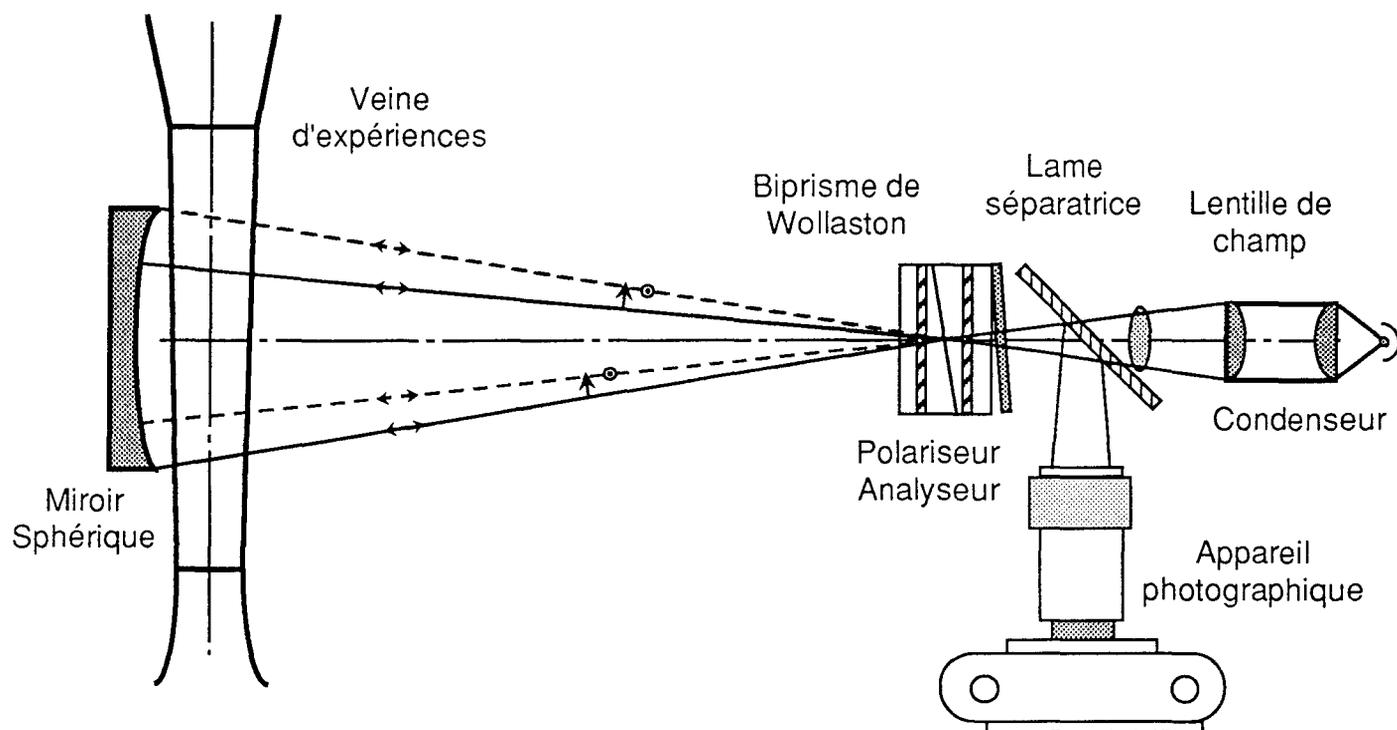


b) Maquette en veine

Figure 37: Mise en œuvre de la méthode optique

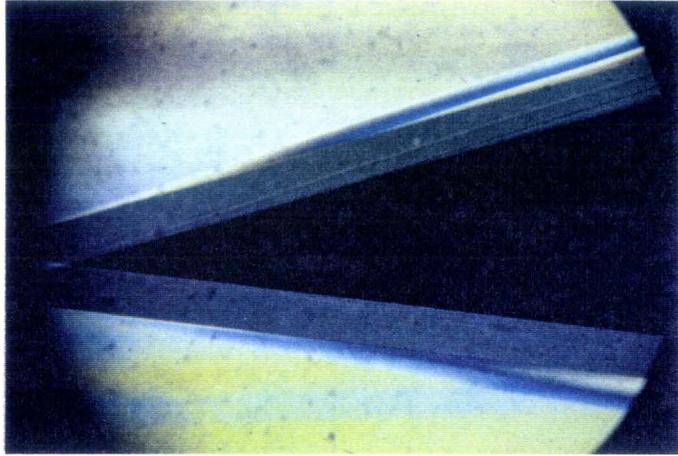


a) Montage optique couramment utilisé à l'IMFL

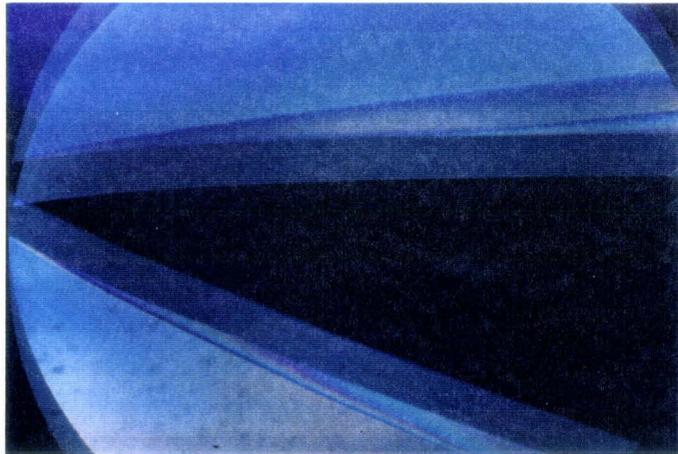


b) Montage optique utilisé à R3 Chalais

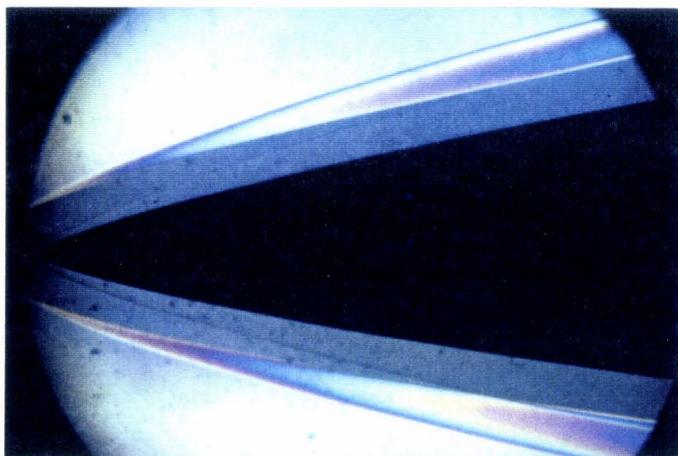
Figure 38



a) Interférogramme enregistré avec le montage figure 37a



b) Interférogramme enregistré avec le montage optique dans l'axe et les réflexions parasites



c) Interférogramme enregistré avec le montage figure 37b

Figure 39: Différence de marche en fonction des teintes observées

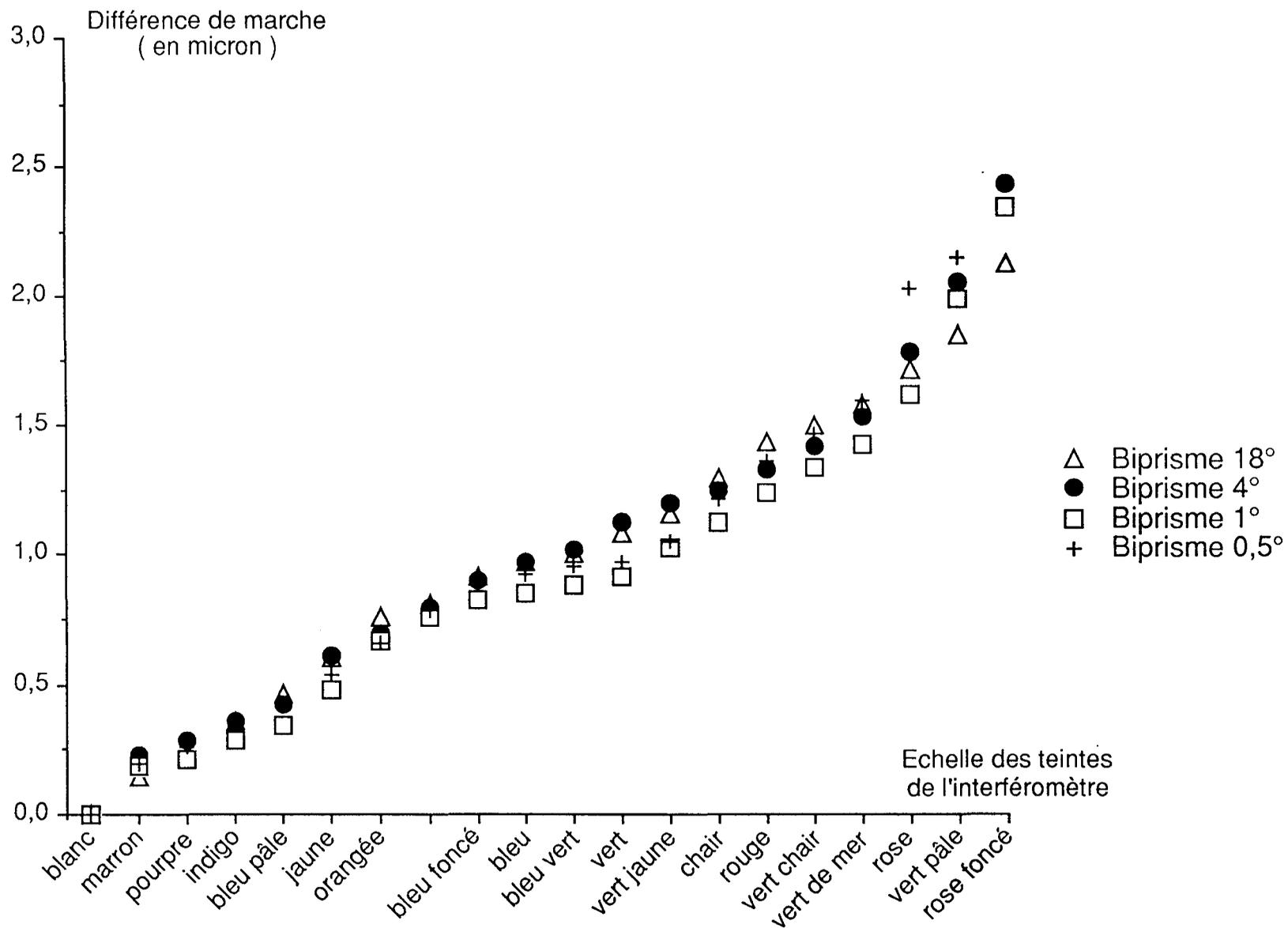


Figure 40: Zones d'interférences rencontrées

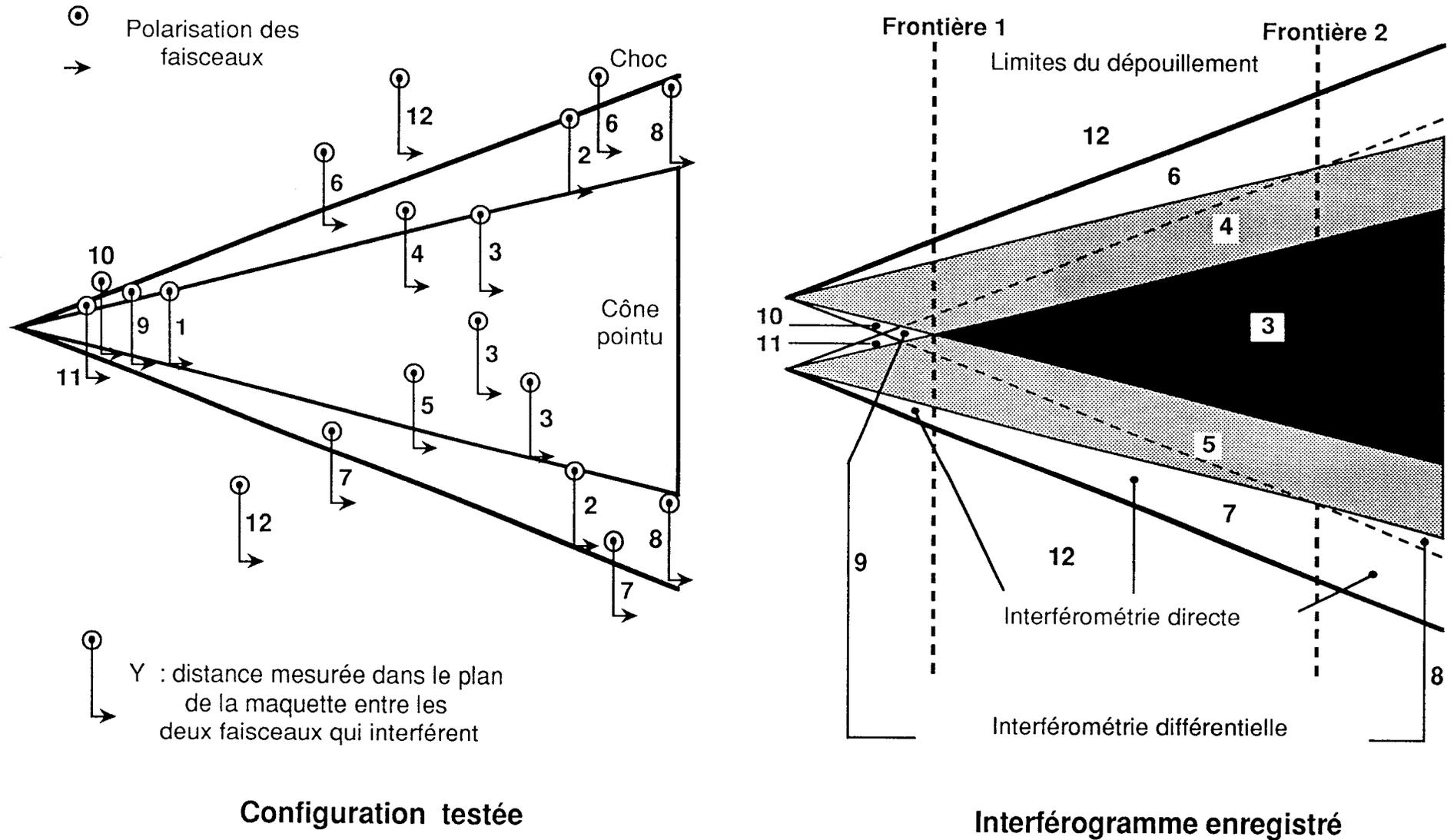
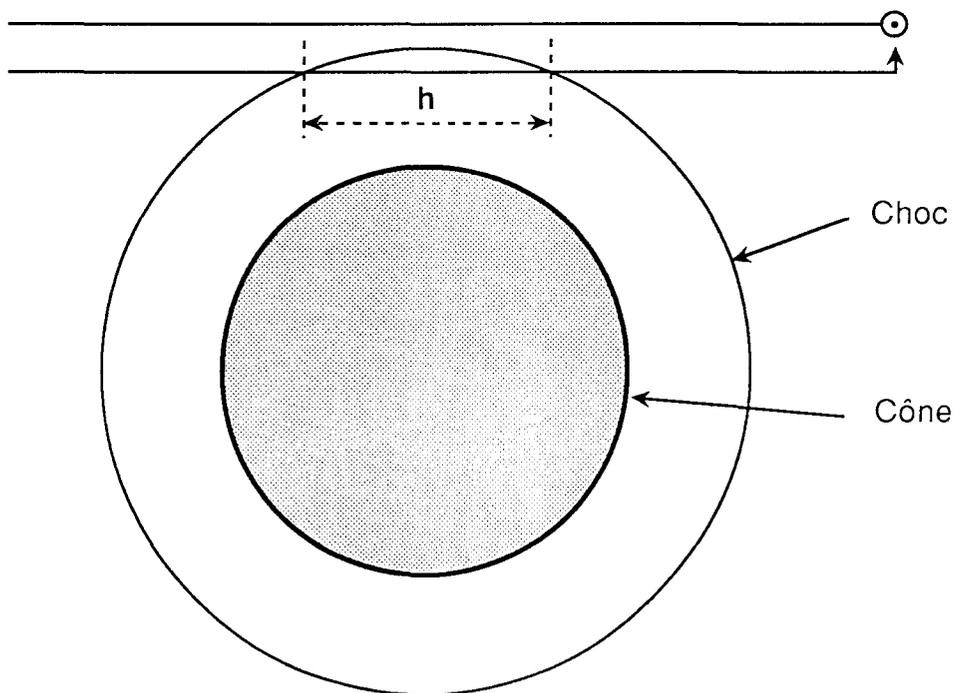


Figure 41

Ordre des teintes	Echelle des teintes de l'interféromètre à biprisme de Wollaston		Echelle des teintes de Newton	
	Teintes	Différence de marche (microns)	Teintes	Différence de marche (microns)
Premier Ordre	Noir	0.00	Noir	0.00
	Gris Bleu	0.095	Gris Lavande	0.097
	Blanc	0.18	Bleu Gris	0.158
			Blanc	0.259
	Jaune	0.30	Jaune Clair	0.306
	Jaune Brun	0.40	Jaune Brun	0.430
Deuxième Ordre	Pourpre	0.53	Rouge Chaud	0.536
	Violet	0.56	Pourpre	0.565
	Bleu	0.60	Indigo	0.589

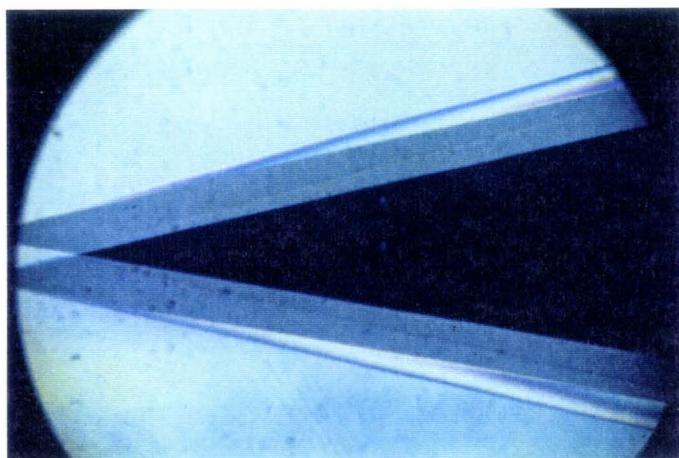
a) Comparaison de l'échelle des teintes polariseur et analyseur croisés



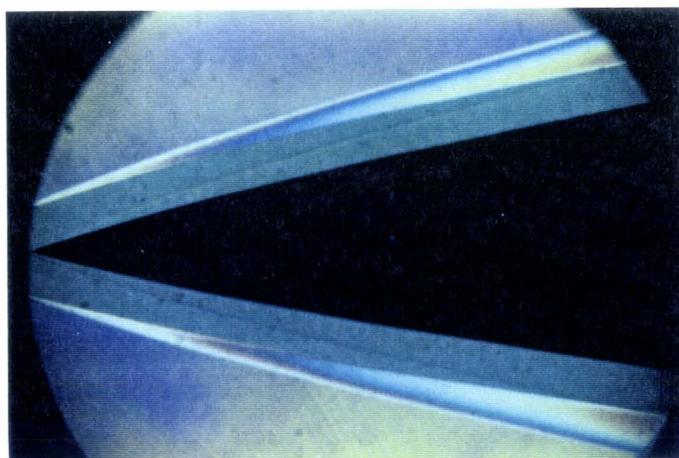
$A x/L = 0.45$, $h = 1.4\text{mm} \Rightarrow$ erreur de $1/100$ mm sur la position verticale du choc

b) Coupe transversale du phénomène

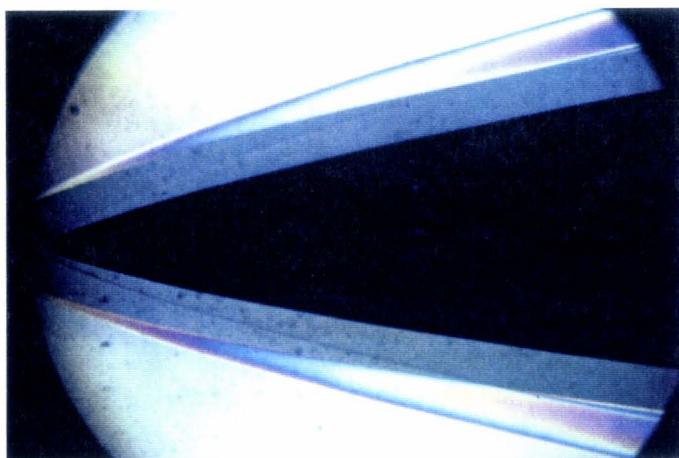
Figure 42: Interférogrammes utilisés pour le relevé de la position du choc ($\alpha=0$)



a) $n = 1$

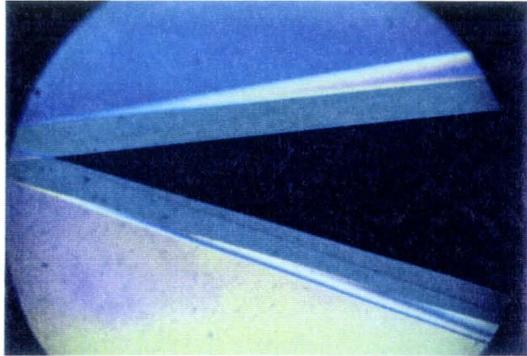


b) $n = 3 / 4$

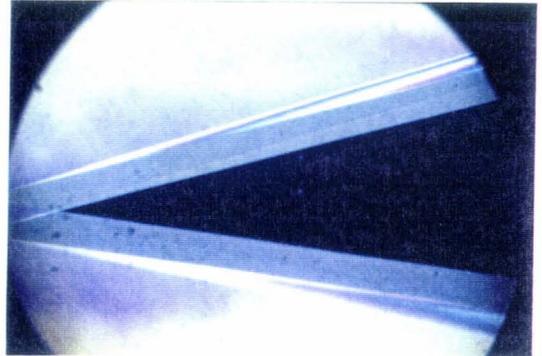


c) $n = 2 / 3$

Figure 43: Interférogrammes utilisés pour le relevé de la position du choc en incidence

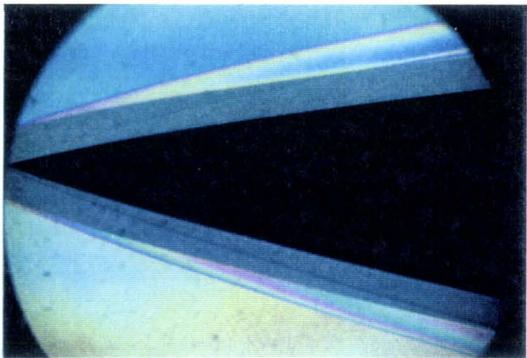


a) $\alpha = 4.4^\circ$

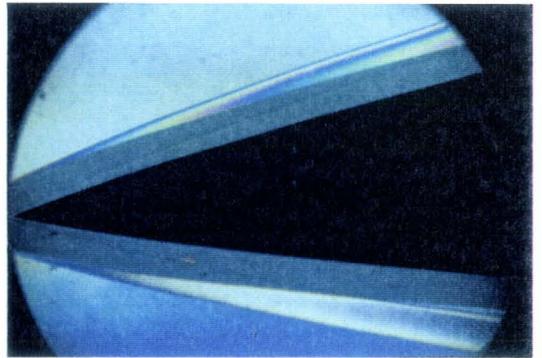


b) $\alpha = -4.54^\circ$

$n = 1$

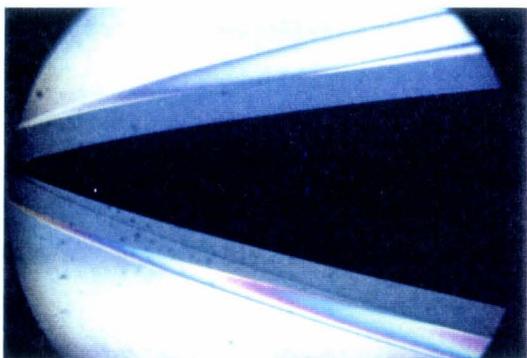


c) $\alpha = 4.37^\circ$

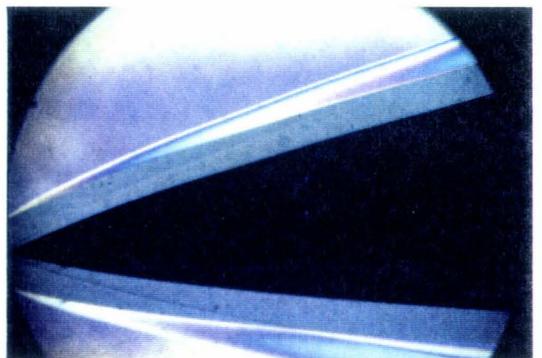


d) $\alpha = -4.64^\circ$

$n = 3 / 4$



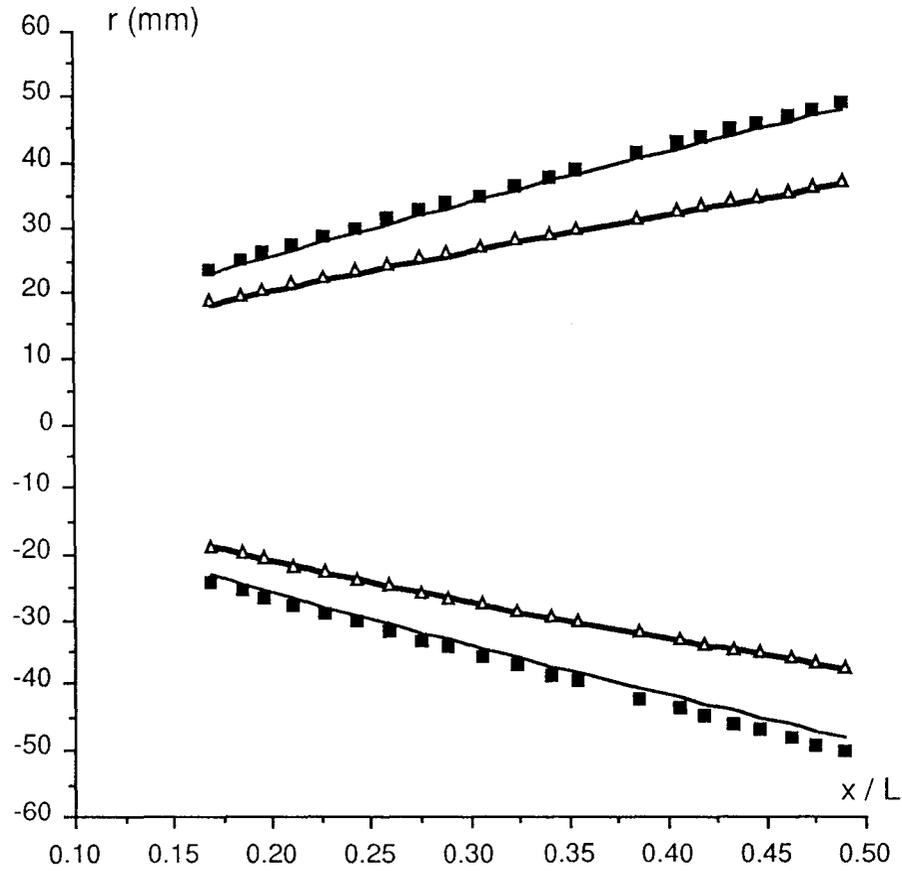
e) $\alpha = 4.32^\circ$



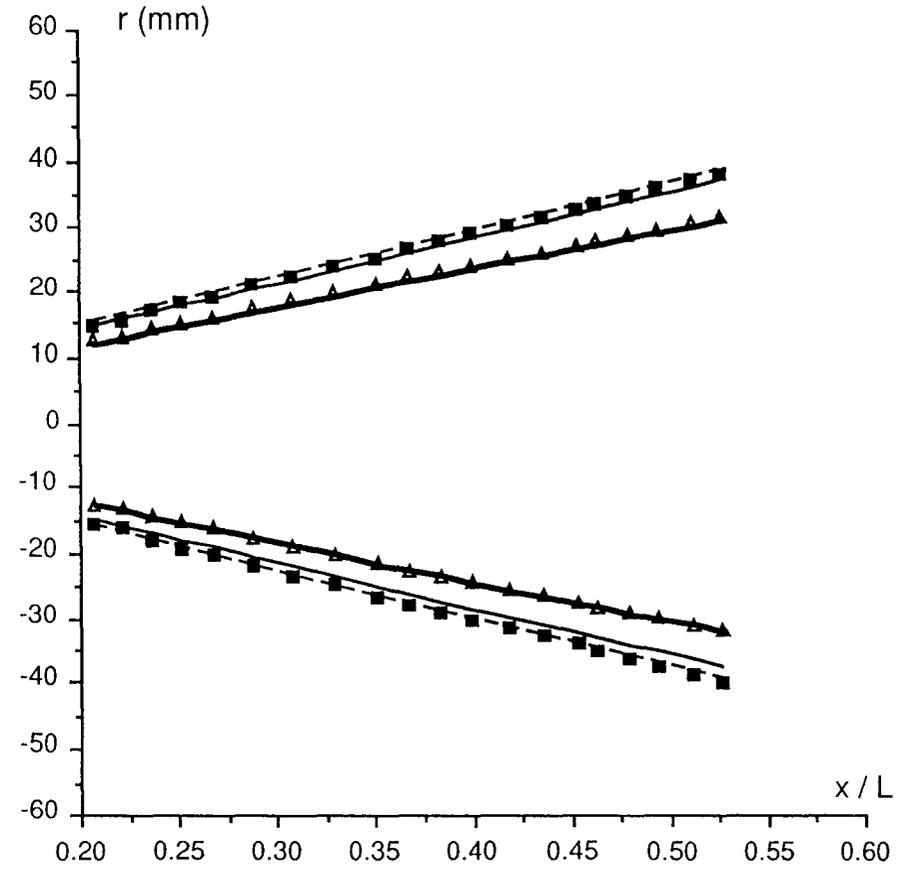
f) $\alpha = -4.75^\circ$

$n = 2 / 3$

Figure 44: Positions comparées du choc et de la maquette



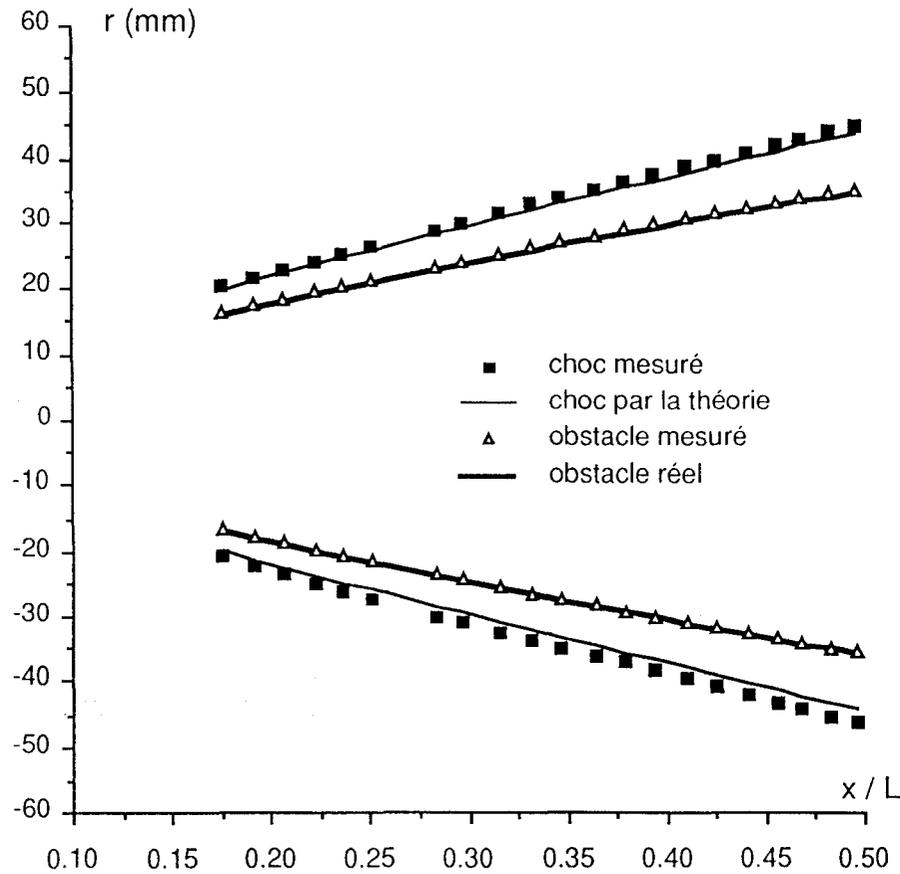
a) $n = 2/3$ $\alpha = 0^\circ$



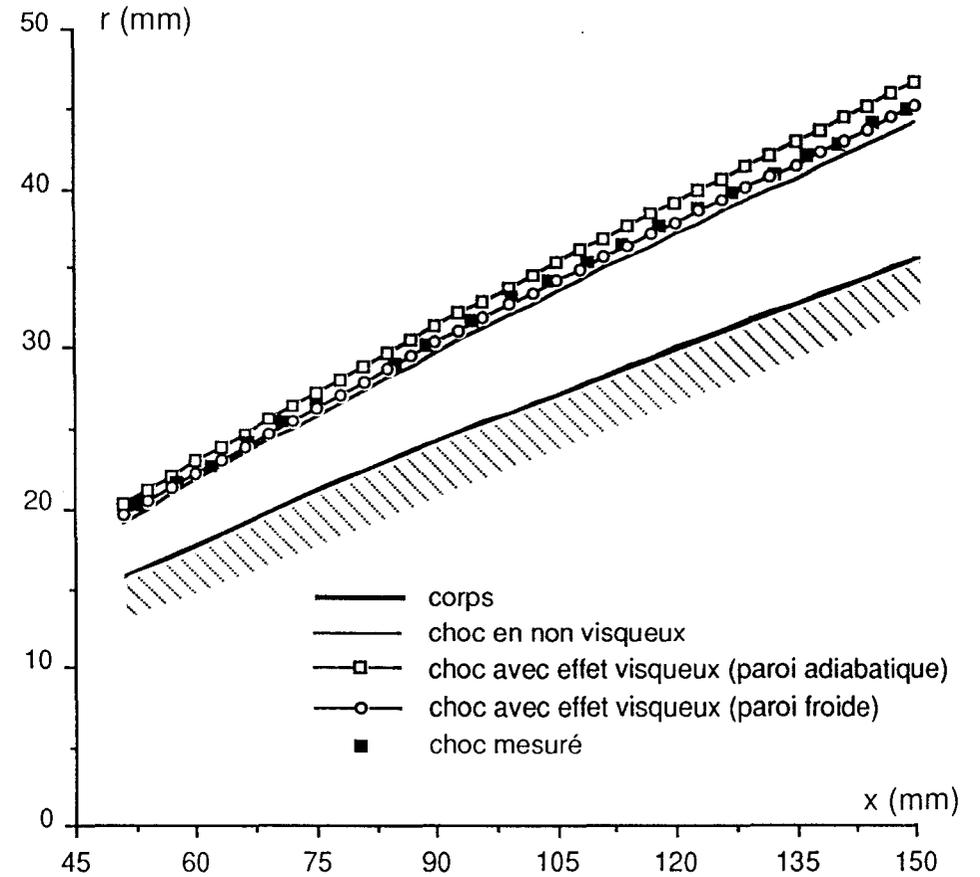
b) $n = 1$ $\alpha = 0^\circ$

■ choc mesuré — choc par la théorie Δ obstacle mesuré — obstacle réel - - - polaire de choc

Figure 45: Positions comparées du choc et de la maquette pour $n=3/4$

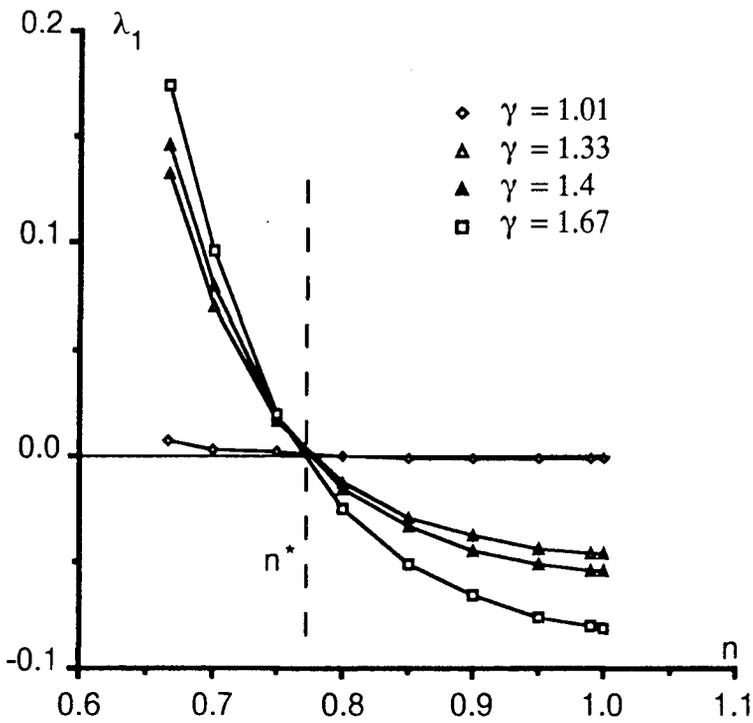


a) Positions comparées du choc et de la maquette
 $n = 3/4$ $\alpha = 0^\circ$

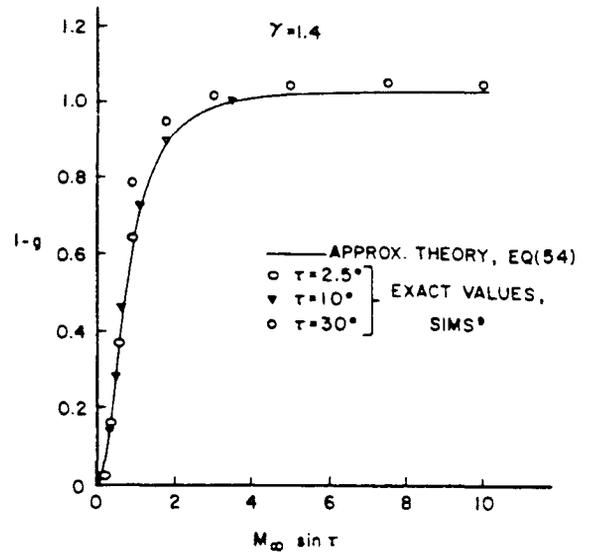


b) Effet de l'épaisseur de déplacement de la
couche limite sur la position du choc

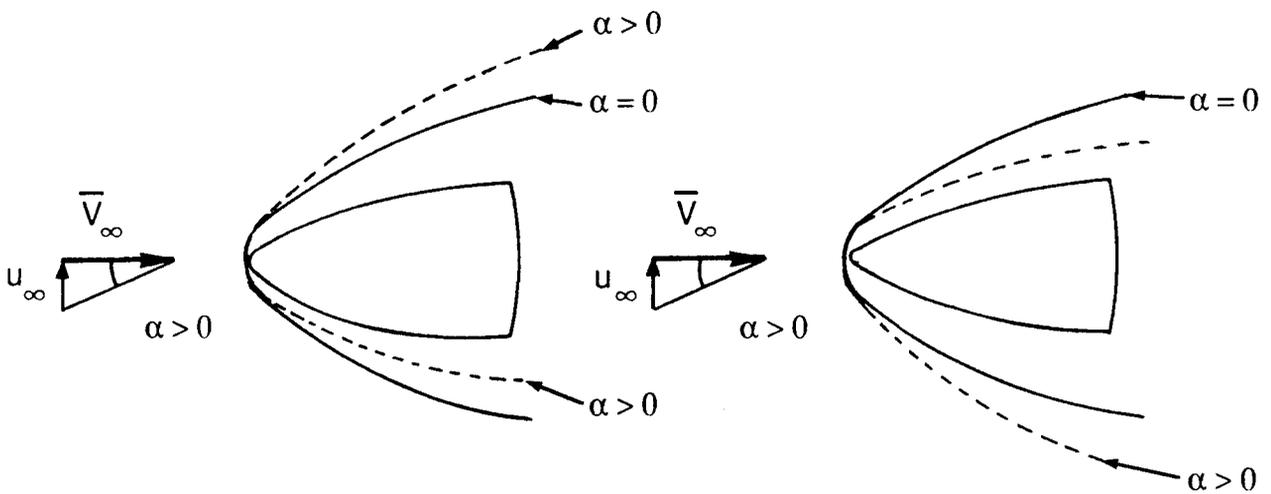
Figure 46: Sens de déplacement du choc avec l'incidence en fonction de n



a) Sens de décalage du choc avec la loi de puissance n par la théorie à similitude interne



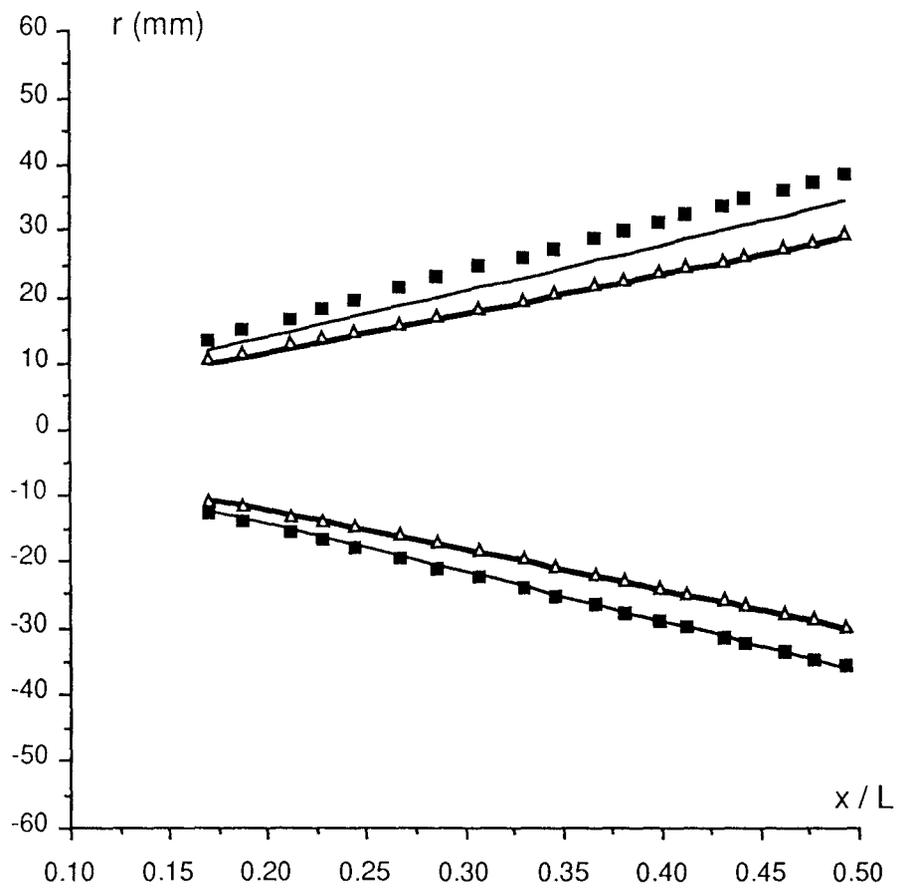
b) Sens de décalage du choc pour n=1 par la théorie de Doty et Rasmussen



cas $\lambda_1 > 0$ ou $g > 0$

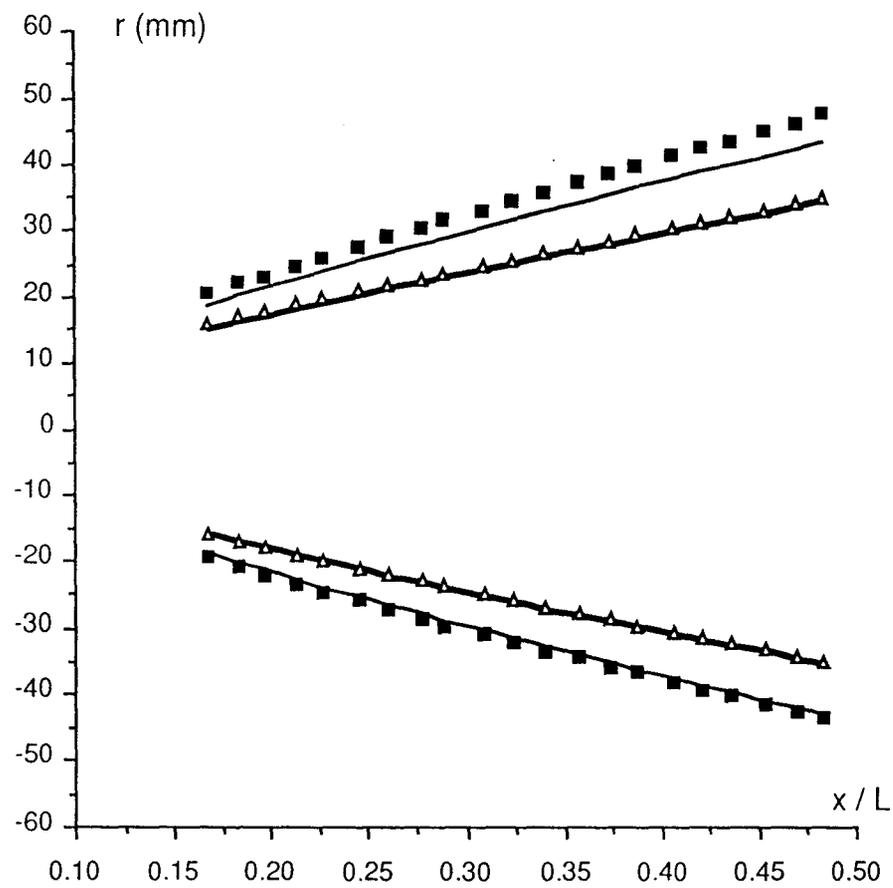
cas $\lambda_1 < 0$ ou $g < 0$

Figure 47: Positions comparées du choc et de la maquette en incidence



a) $n = 1$ $\alpha = 4.4^\circ$

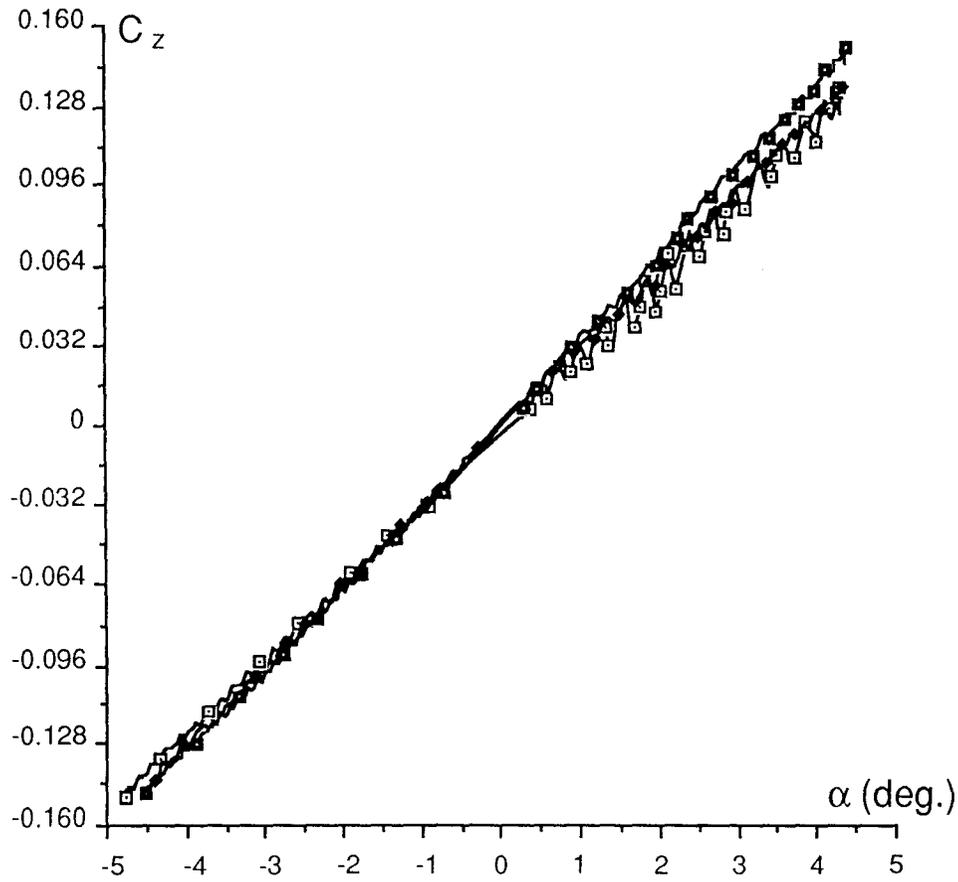
■ choc mesuré — choc par la théorie



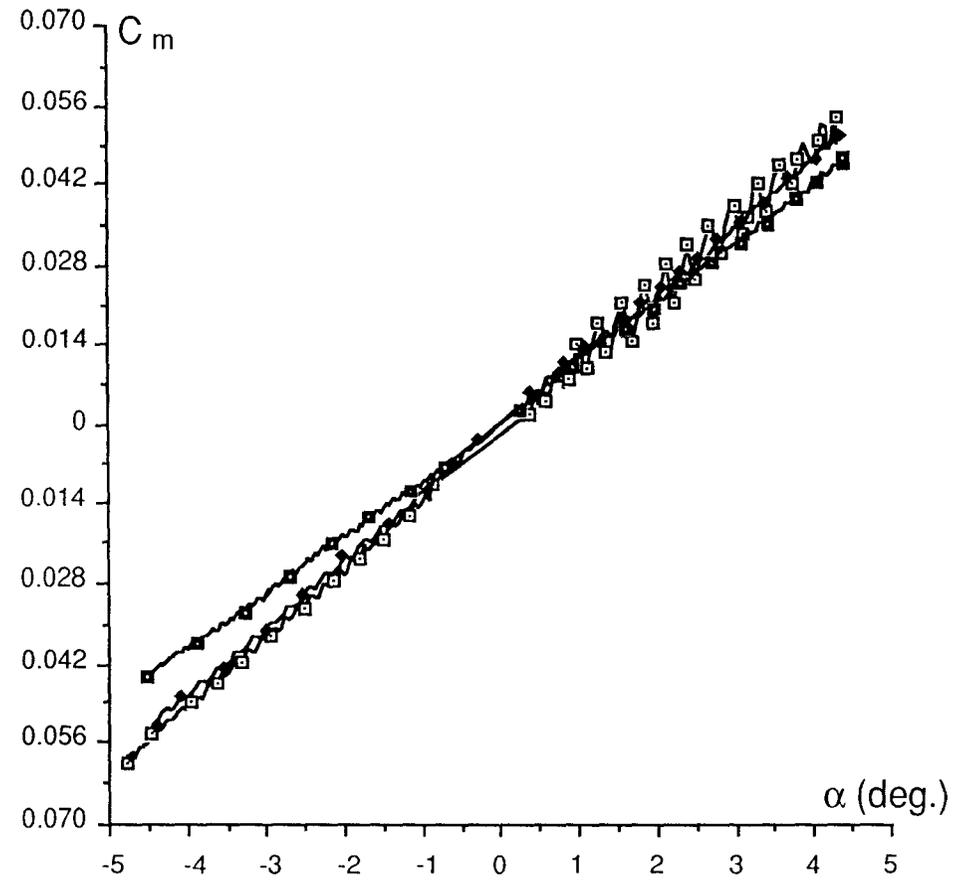
b) $n = 3/4$ $\alpha = 4.37^\circ$

▲ obstacle mesuré — obstacle réel

Figure 48: Coefficients aérodynamiques mesurés



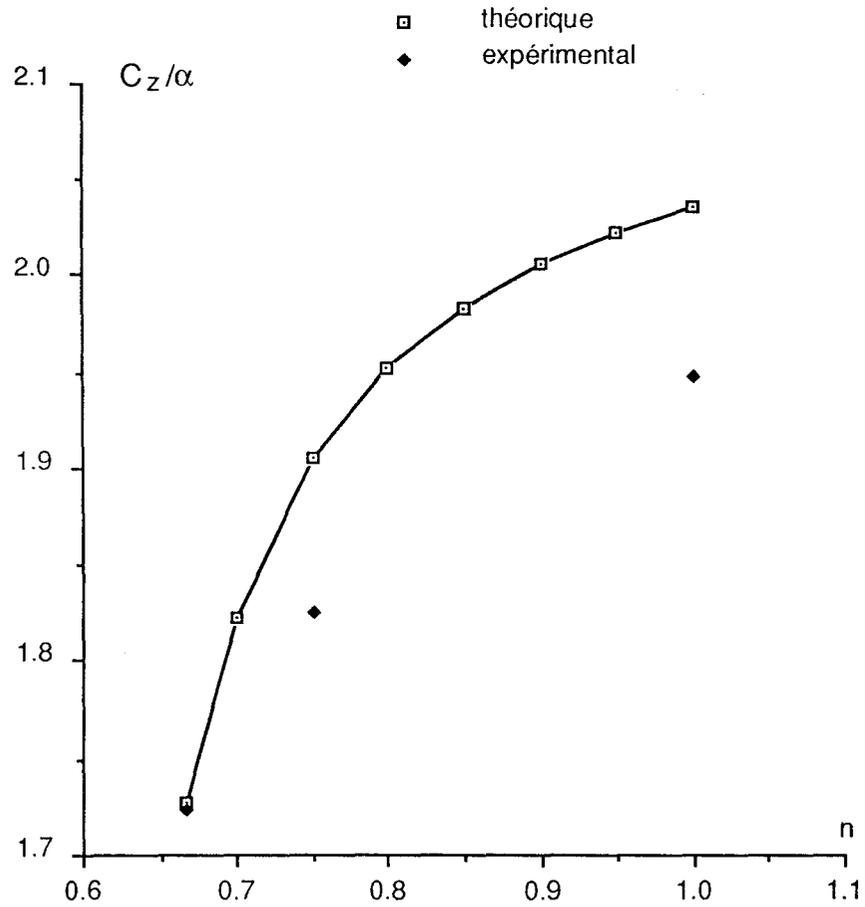
a) Coefficient de portance



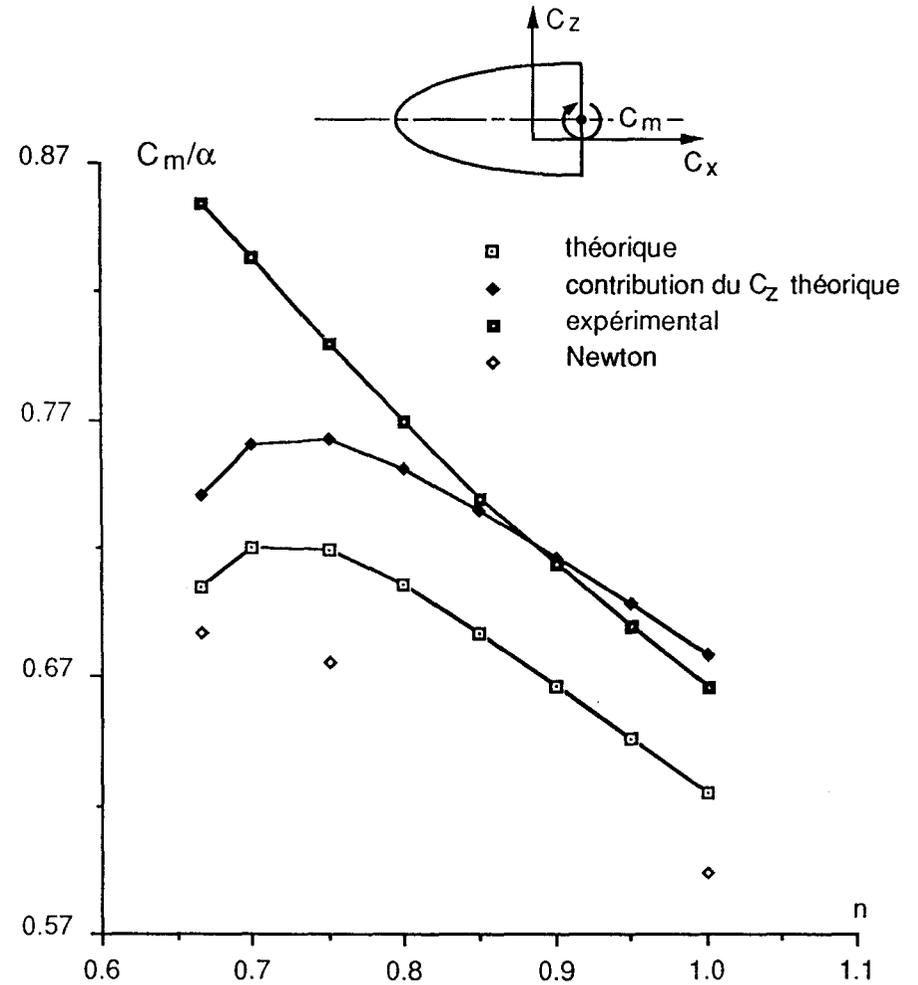
b) Coefficient de moment de tangage

—□— $n=2/3$ —◆— $n=3/4$ —■— $n=1$

Figure 49: Coefficients aérodynamiques comparés

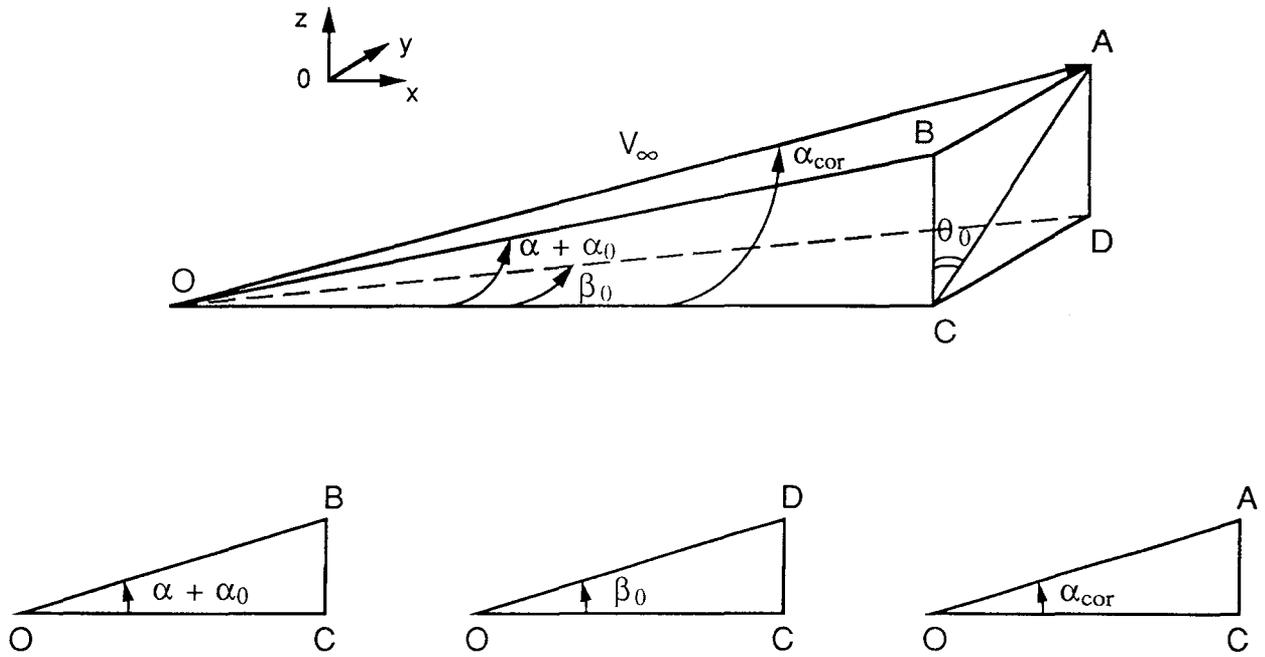


a) Portance

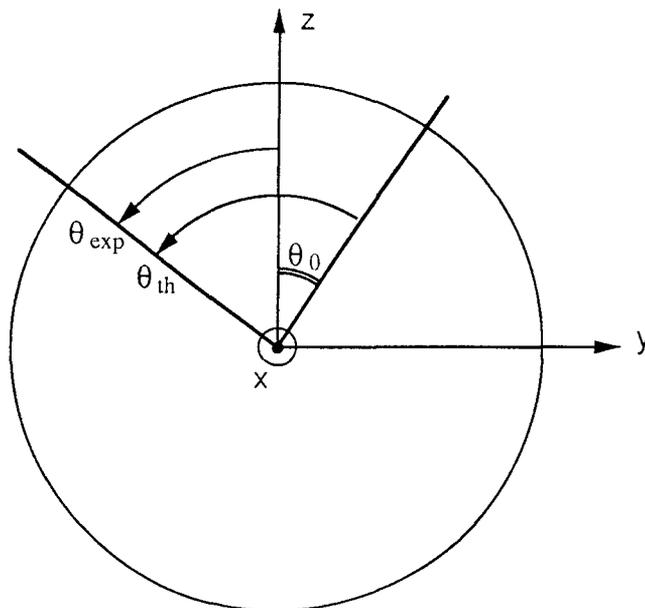


b) Tangage

Figure 50: Incidence et dérapage corrigés

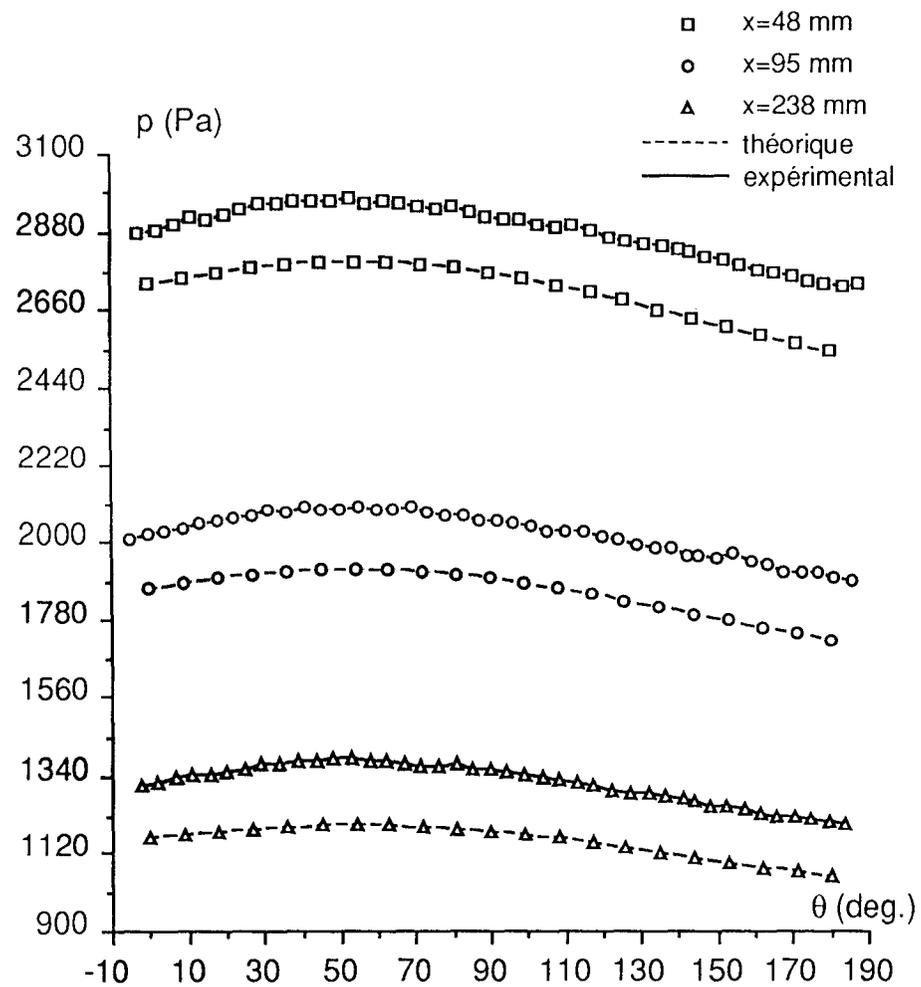


a) Définition de l'incidence et du dérapage



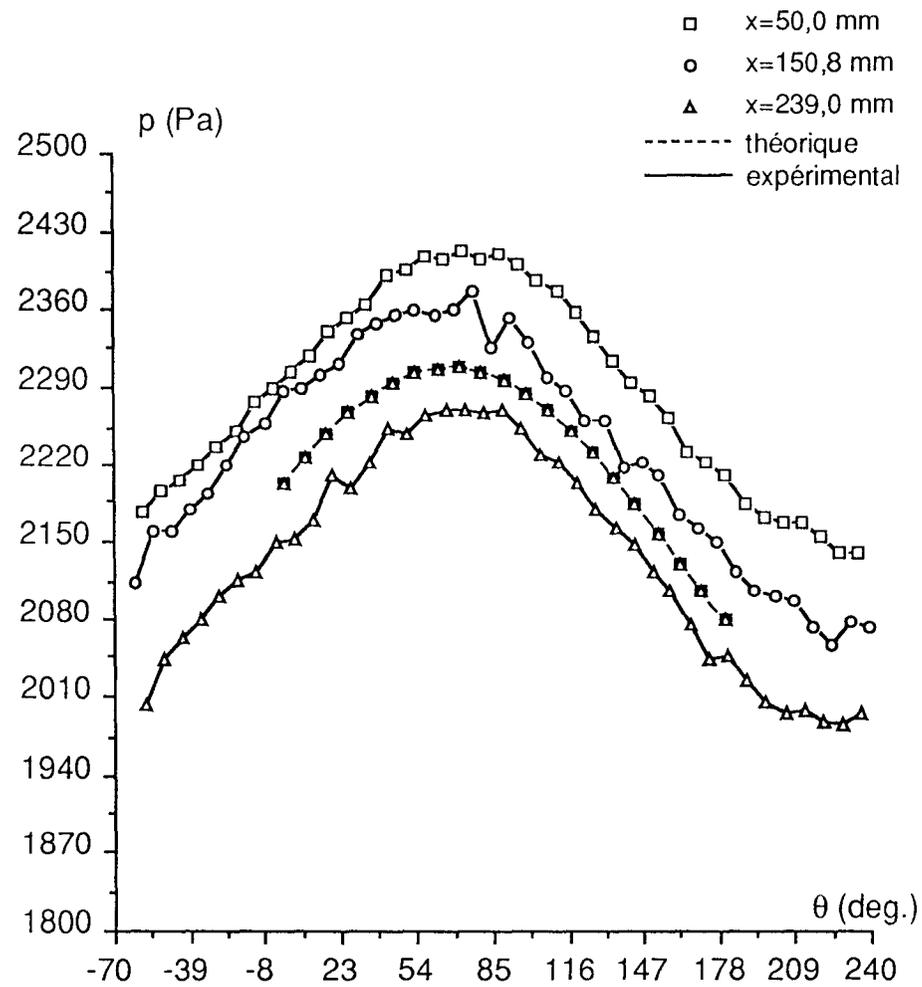
b) Comparaison des repères expérimentaux et théoriques

Figure 51: Pressions comparées à incidence géométrique nulle



a) Maquette n=2/3

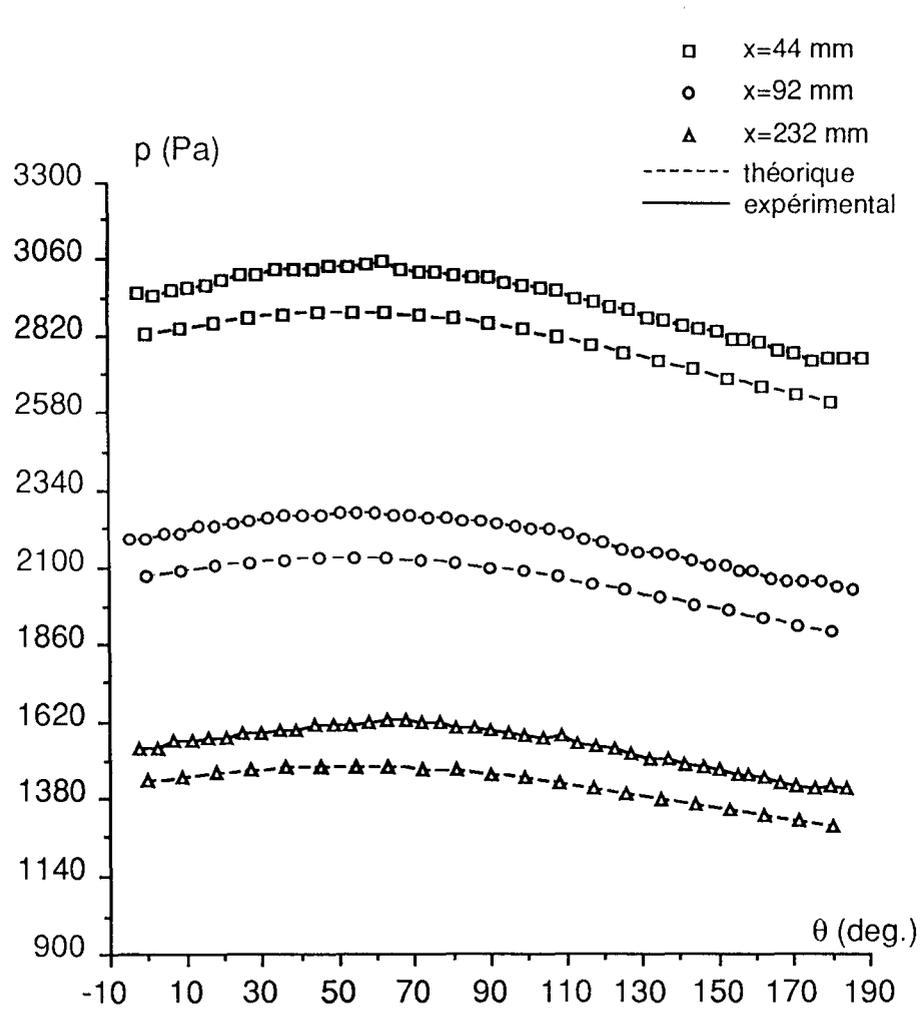
$\alpha_0 = -0.30$ deg., $\beta_0 = 0.40$ deg.



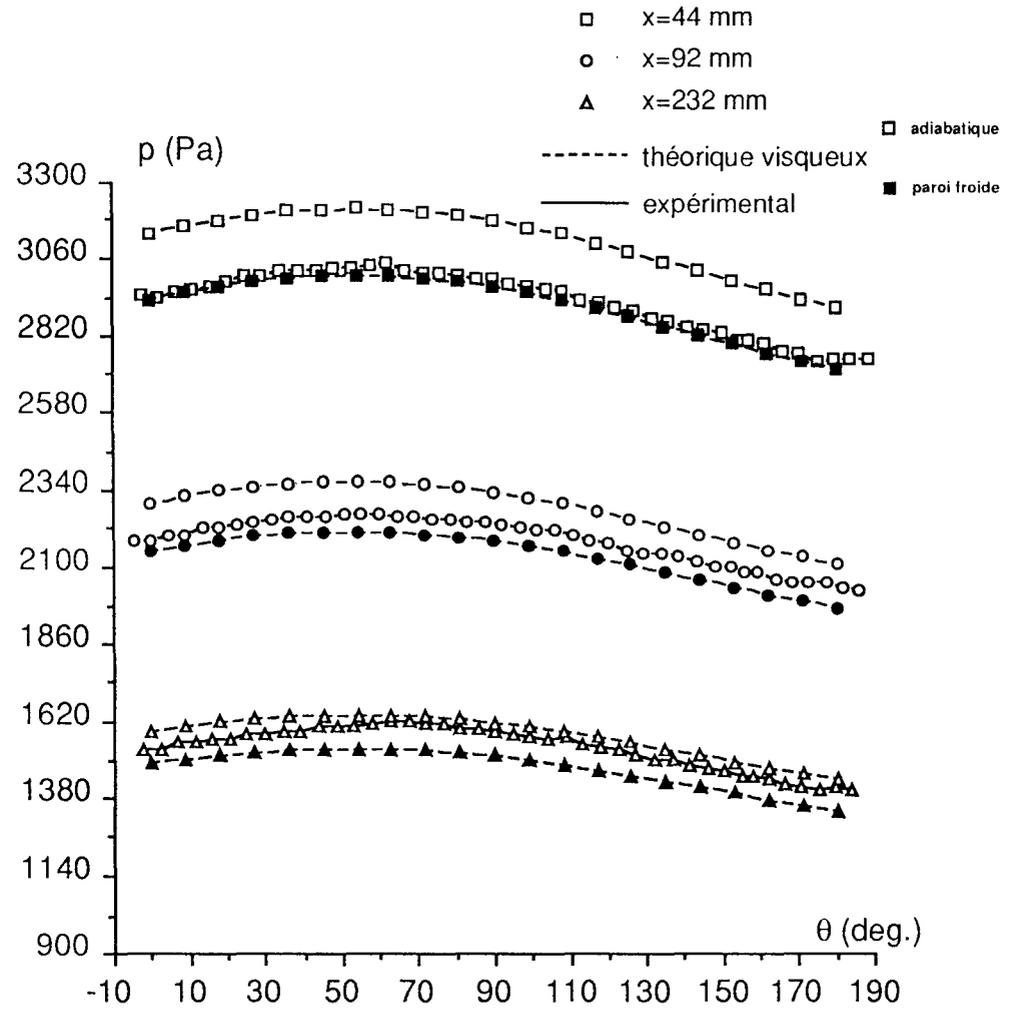
b) Maquette n=1

$\alpha_0 = -0.20$ deg., $\beta_0 = 0.50$ deg.

Figure 52: Prise en compte de l'effet de déplacement



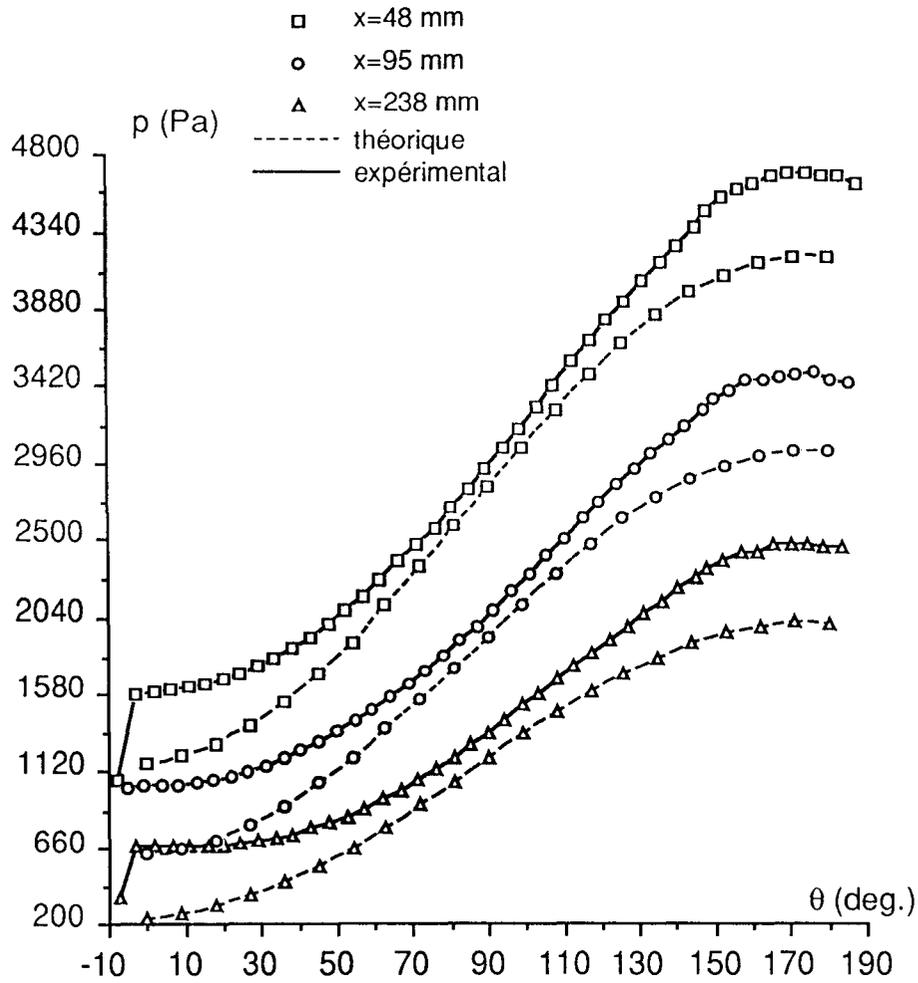
a)



b)

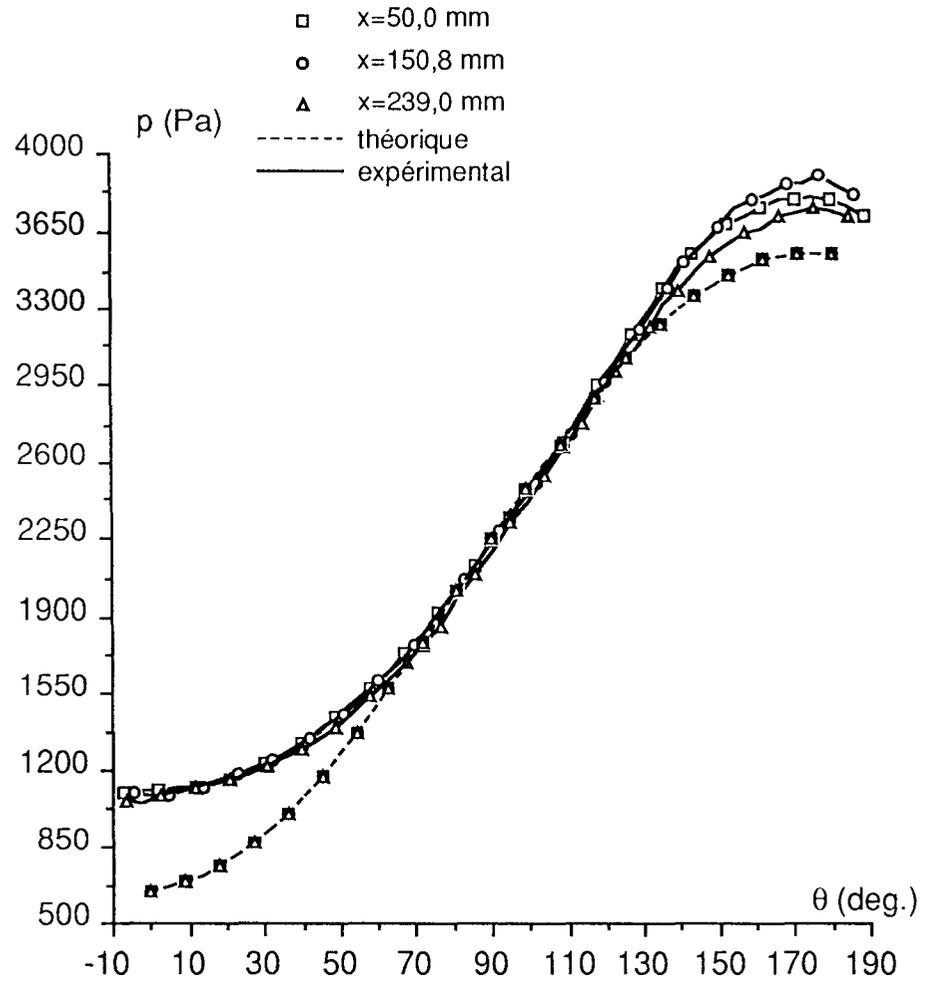
Maquette n=3/4, $\alpha_0 = -0.30$ deg., $\beta_0 = 0.40$ deg.

Figure 53: Répartition de pression en incidence



a) Maquette n=2/3

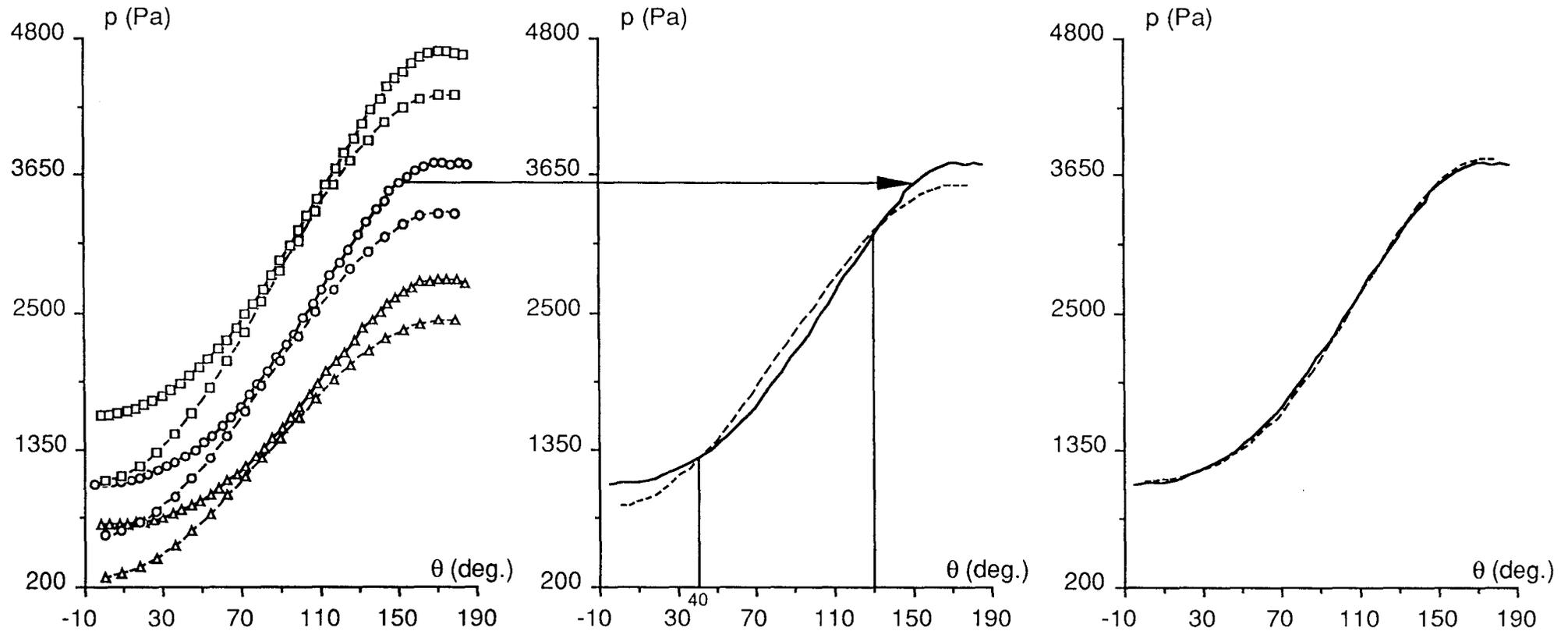
$\alpha + \alpha_0 = 4.70 \text{ deg.}, \beta_0 = 0.40 \text{ deg.}$



b) Maquette n=1

$\alpha + \alpha_0 = 4.80 \text{ deg.}, \beta_0 = 0.50 \text{ deg.}$

Figure 54: Correction des effets isotropes et anisotropes



a) Maquette $n = 3/4$

$\alpha + \alpha_0 = 4.70$ deg., $\beta_0 = 0.40$ deg.

\square $x = 44.0$ mm

\circ $x = 92.0$ mm

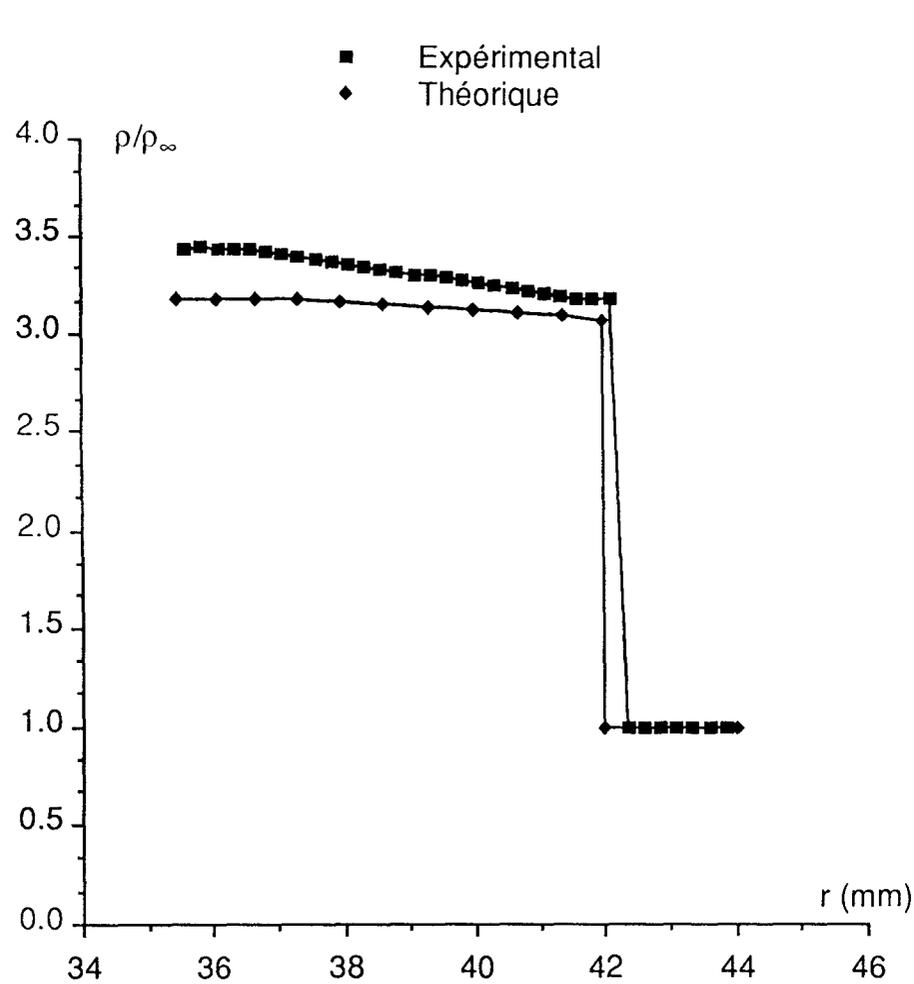
\triangle $x = 232.0$ mm

— expérimental

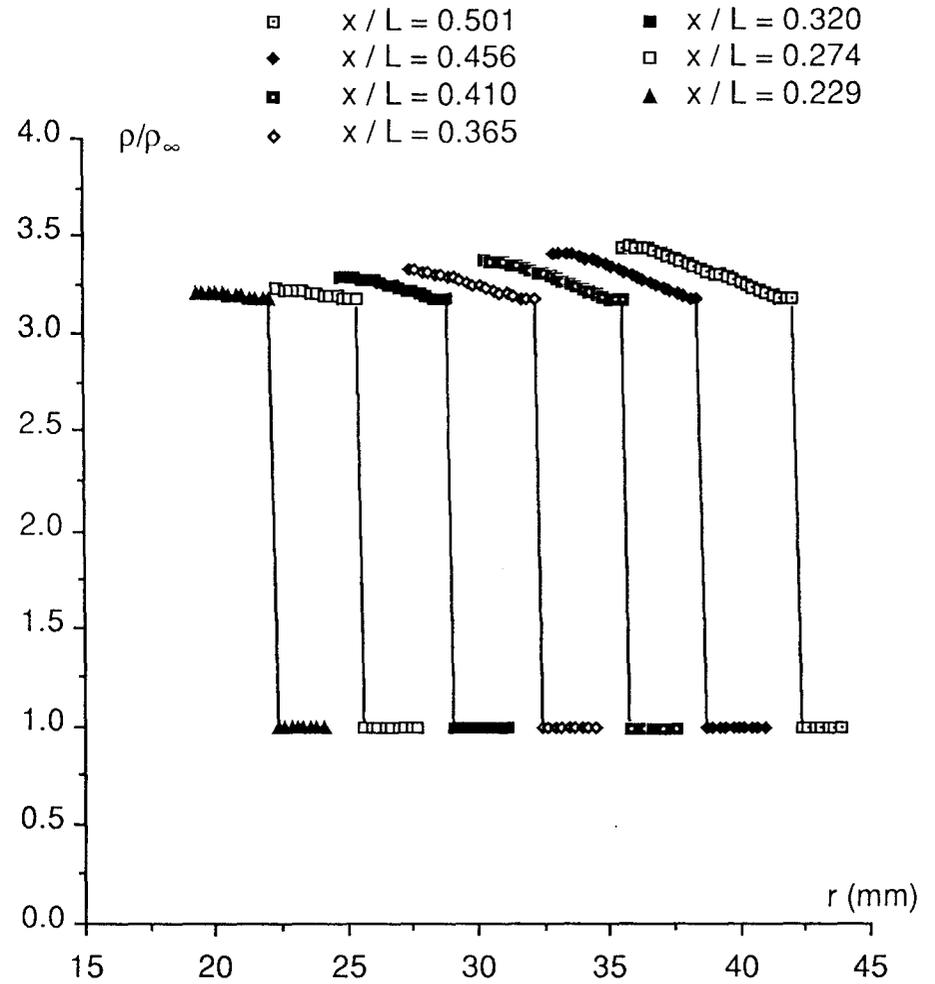
- - - - - théorique

Figure 55: Répartition radiale de la masse volumique

$n = 1$ $\alpha = 0$

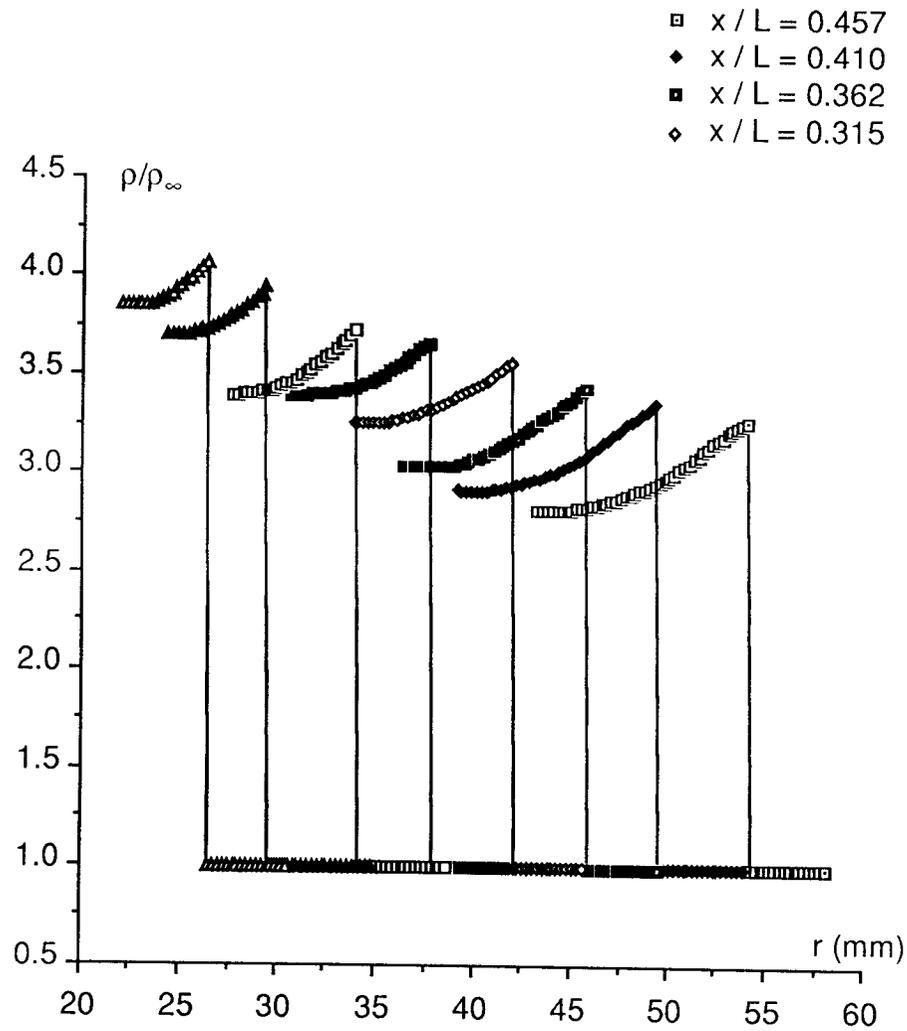


a) Comparaison théorie-expérience en $x/L = 0.591$

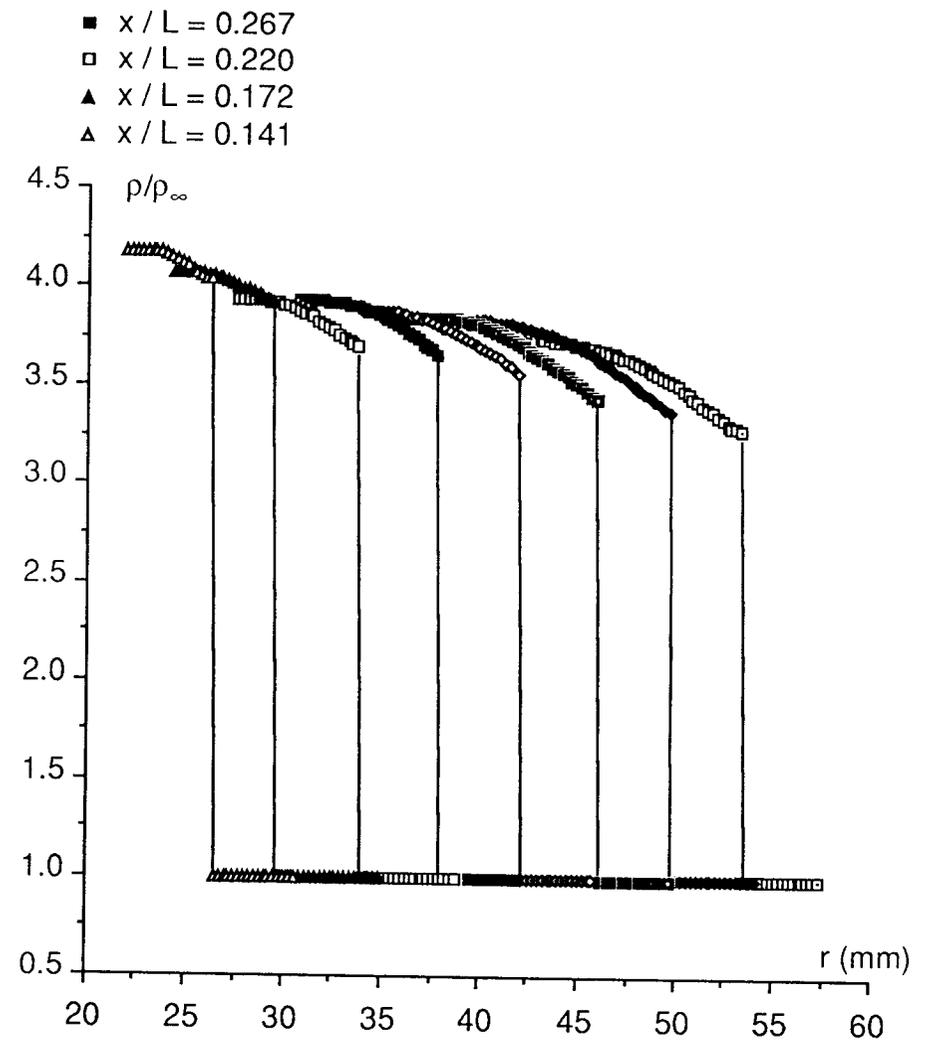


b) Masse volumique expérimentale pour différentes abscisses x

Figure 56: Répartition radiale de la masse volumique $n = 2/3$ $\alpha = 0$

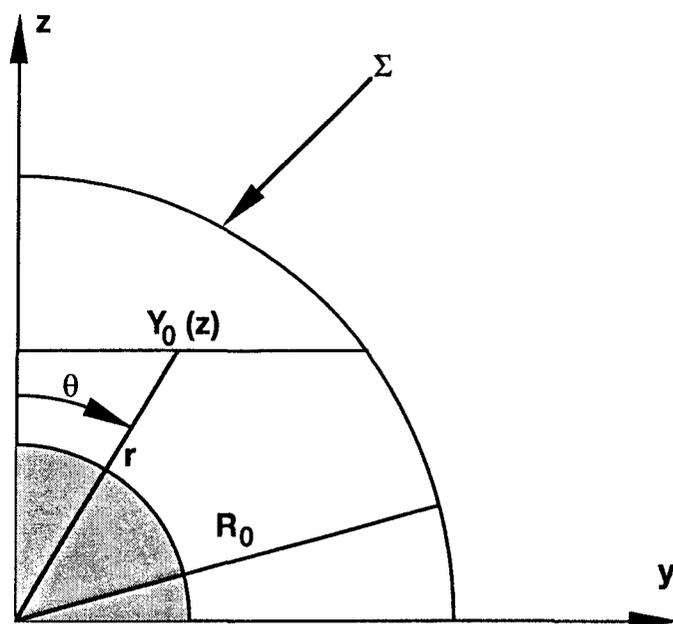


a) Déviation lumineuse comptée négative

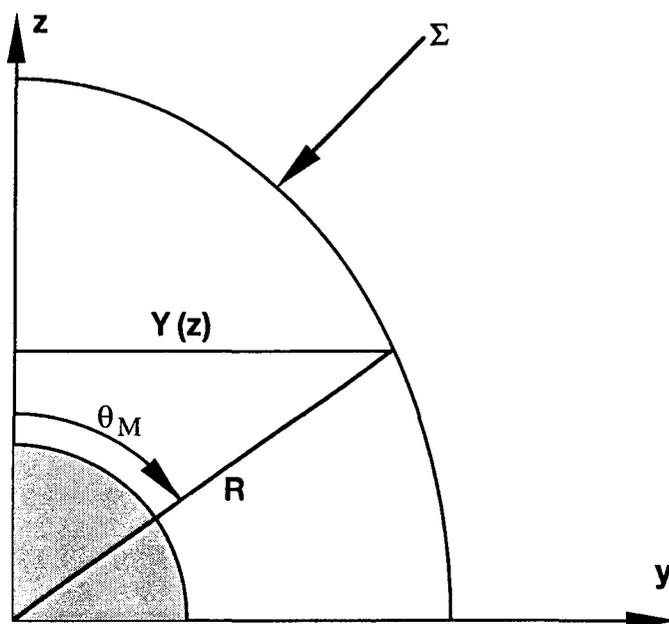


b) Déviation lumineuse comptée positive

Figure 57: Notations pour le dépouillement des interférogrammes

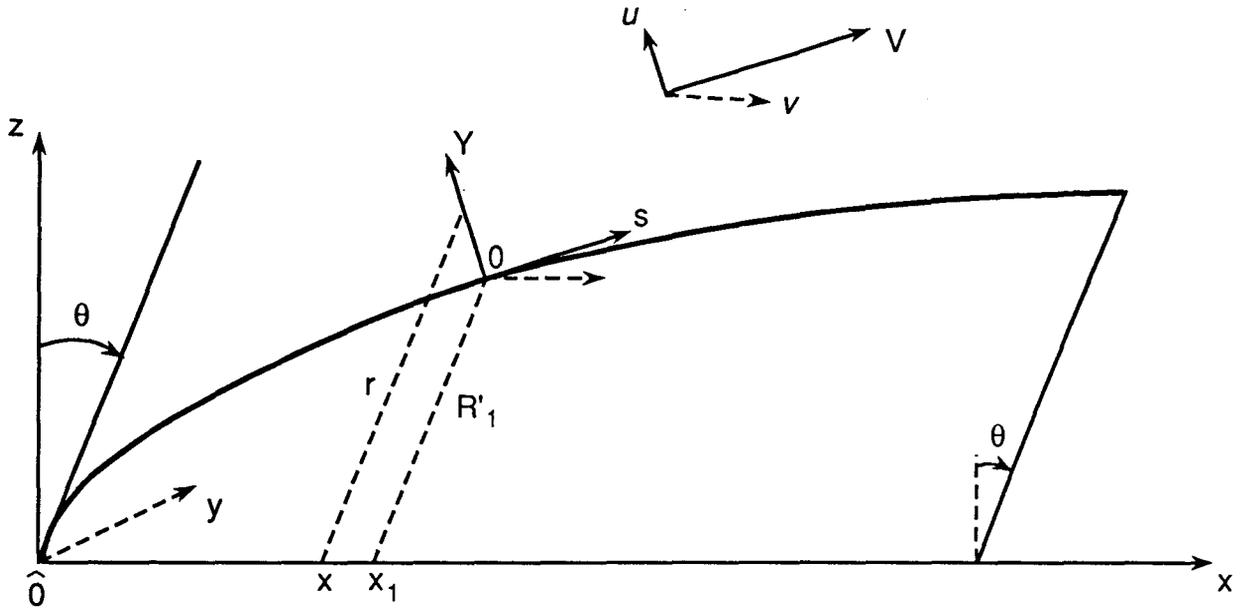


a) $\alpha = 0$

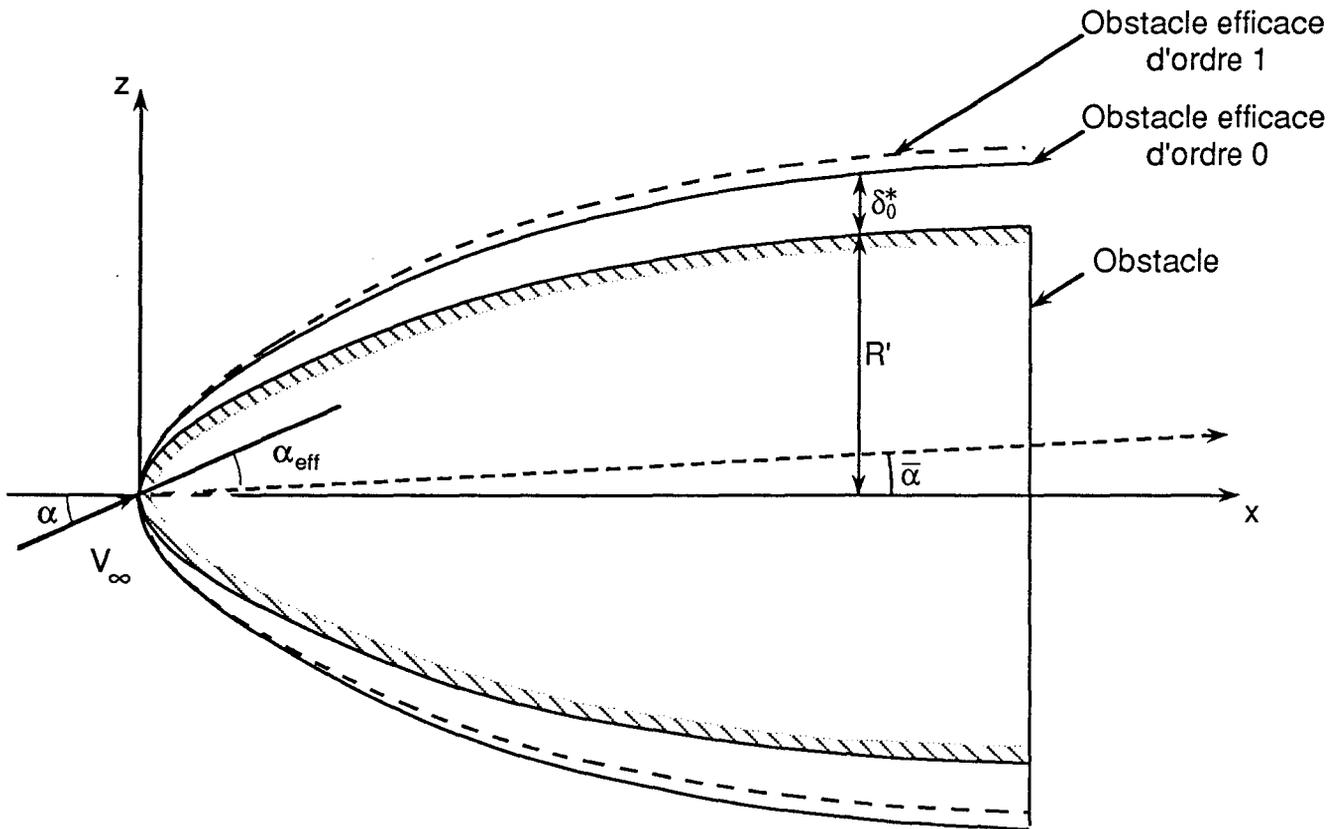


b) $\alpha \neq 0$

Figure 58

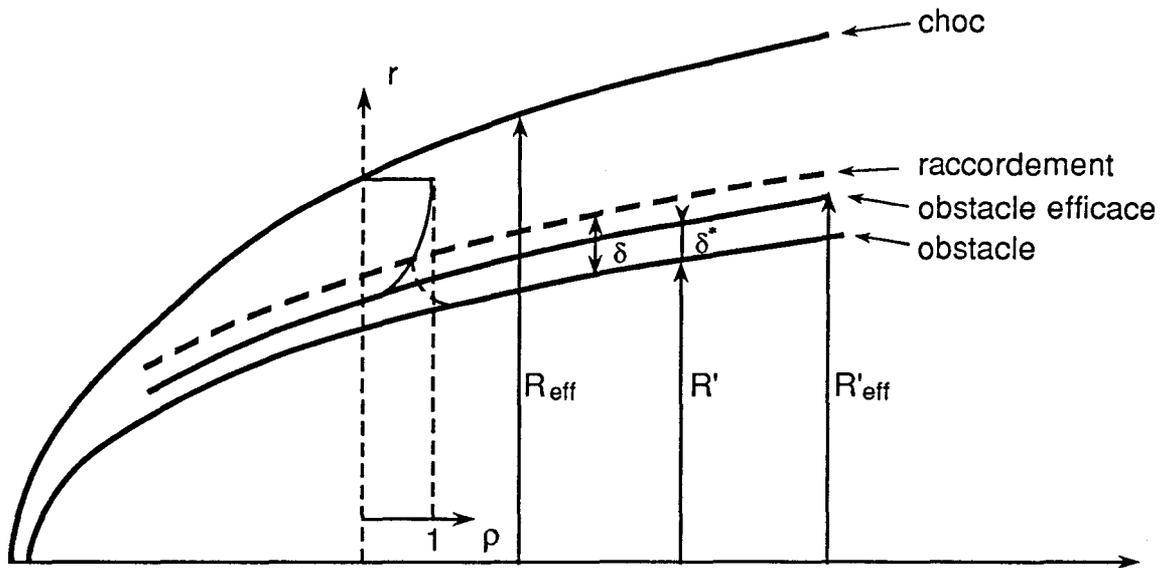


a) Repère

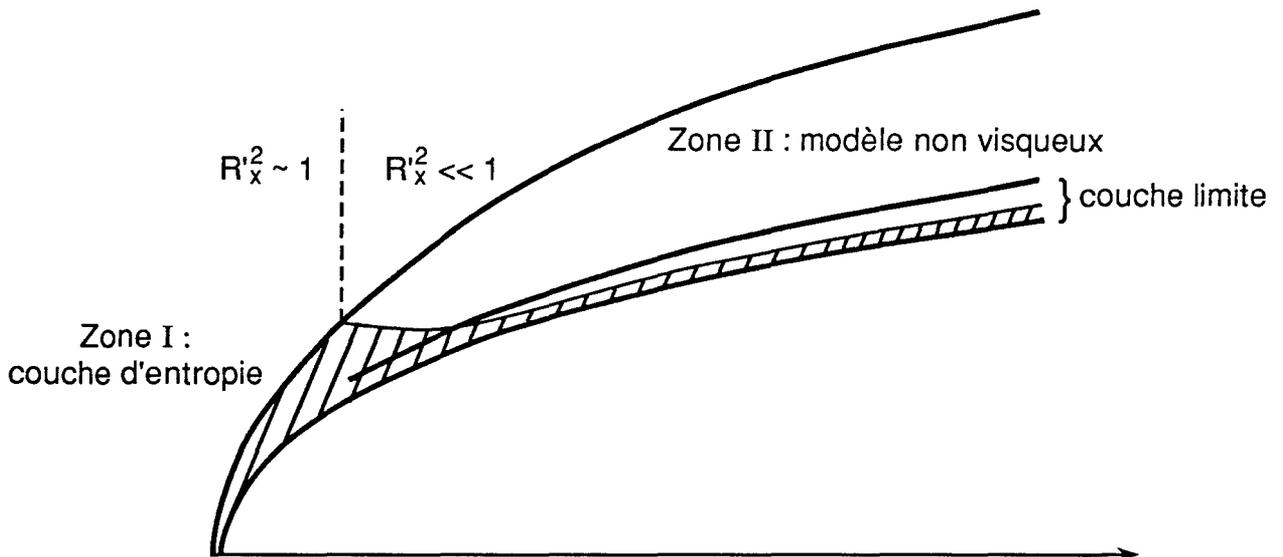


b) Modification de l'incidence

Figure 59

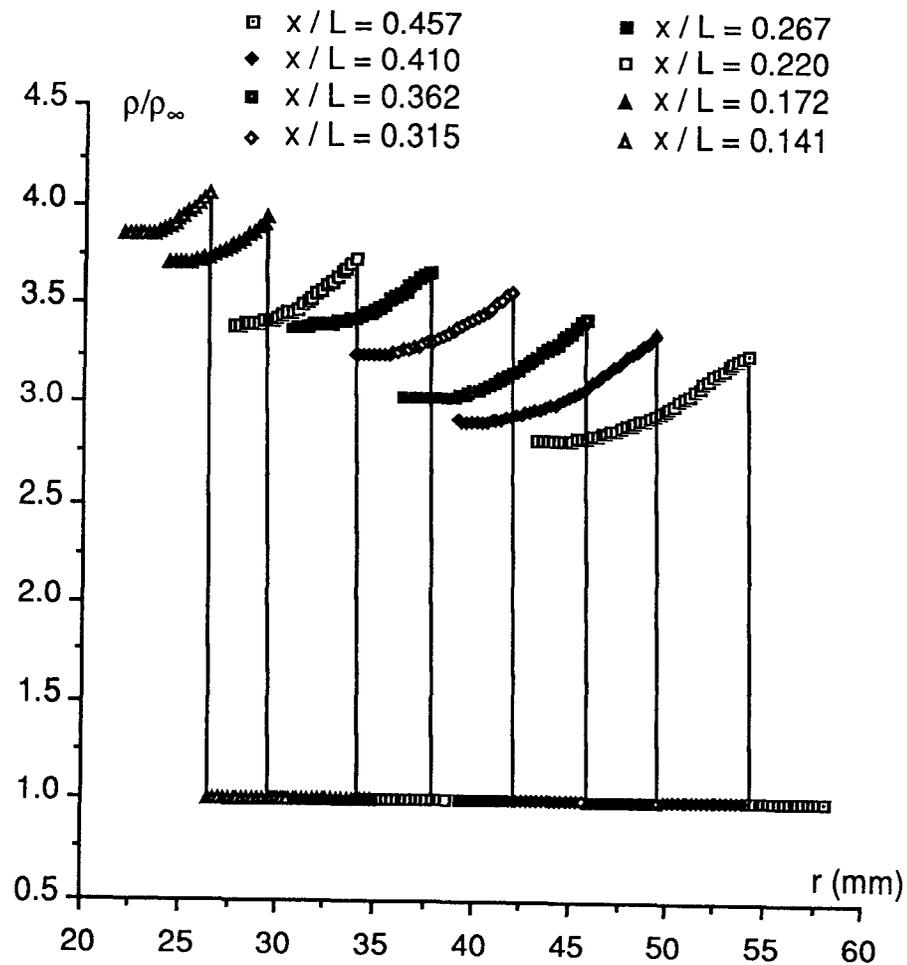


a) Notations dans le plan méridien

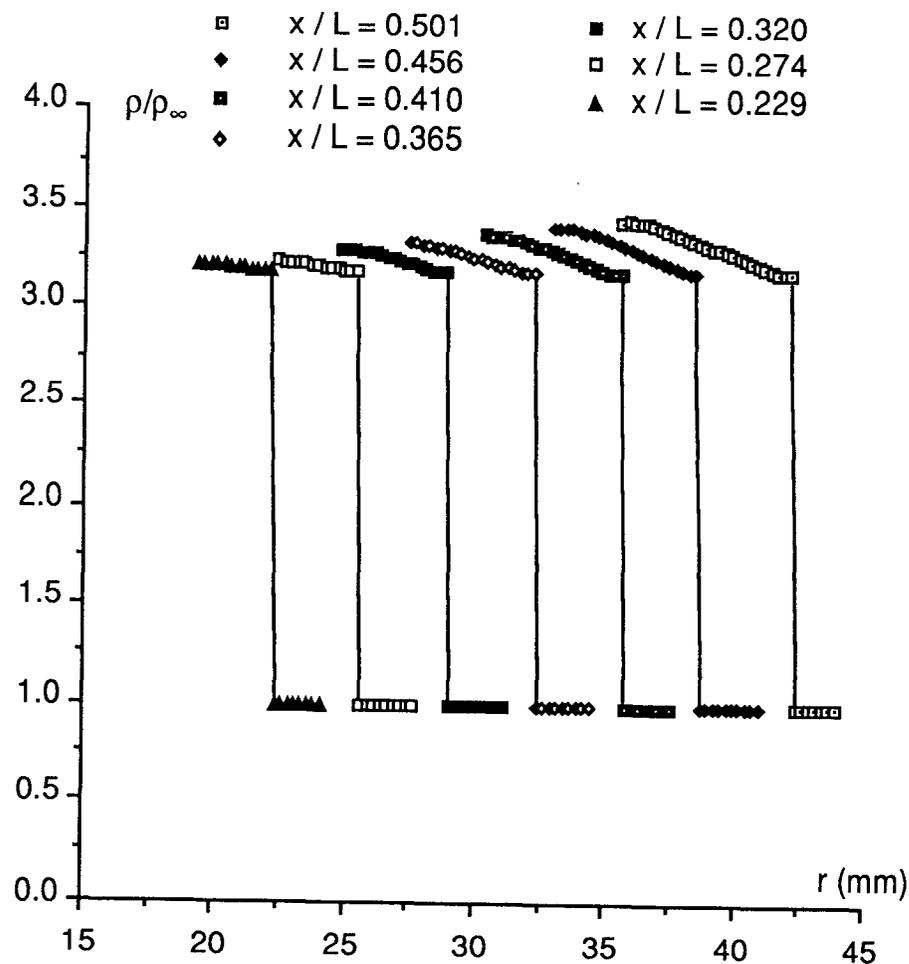


b) Positions respectives de la couche limite et de la couche d'entropie

Figure 60: Répartition radiale expérimentale de la masse volumique ($\alpha = 0$)

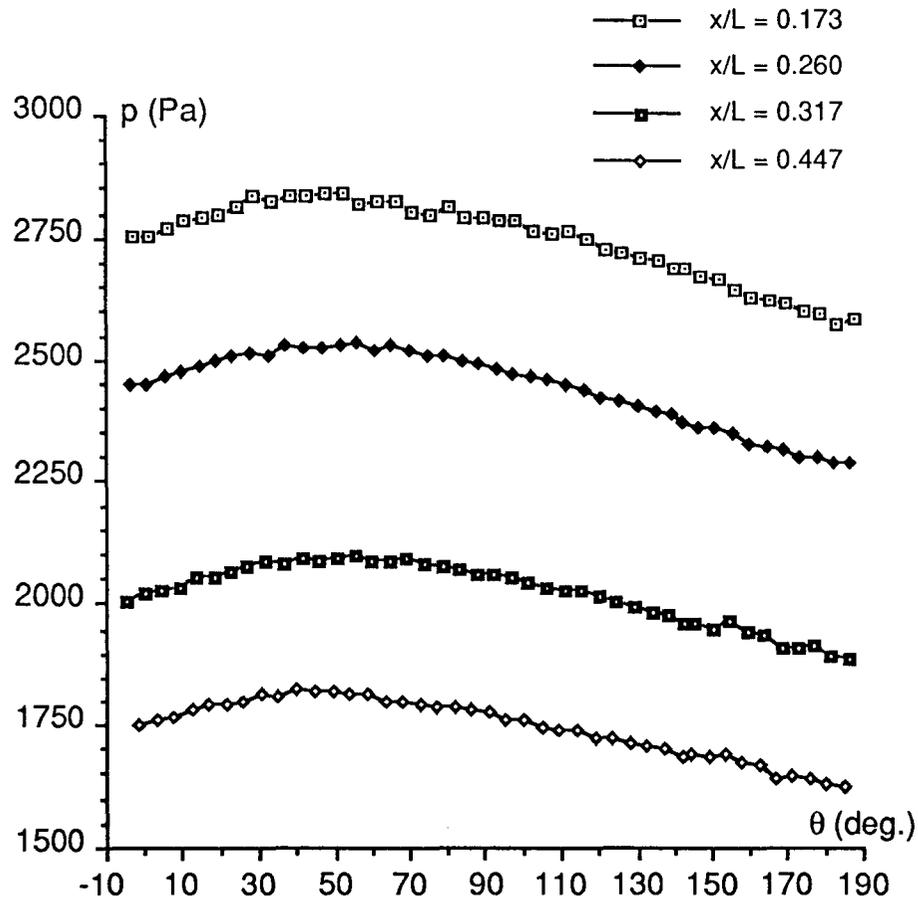


a) $n=2/3$



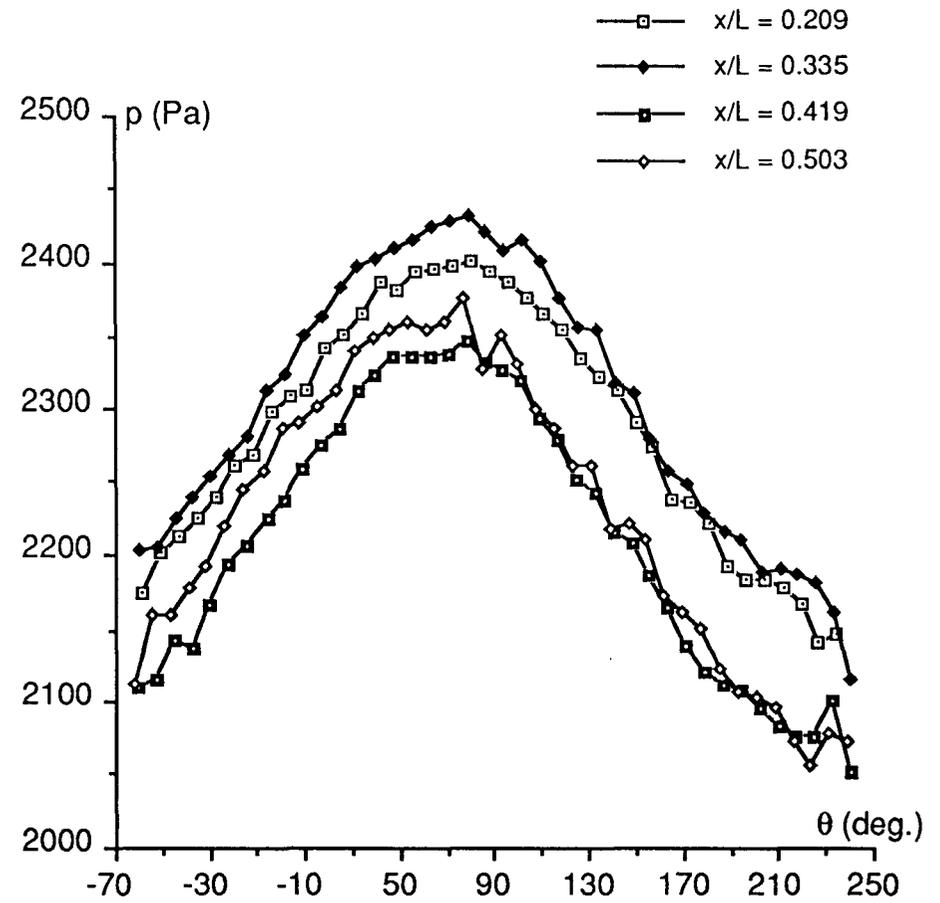
b) $n=1$

Figure 61: Pressions pariétales expérimentales



a) Maquette n=2/3

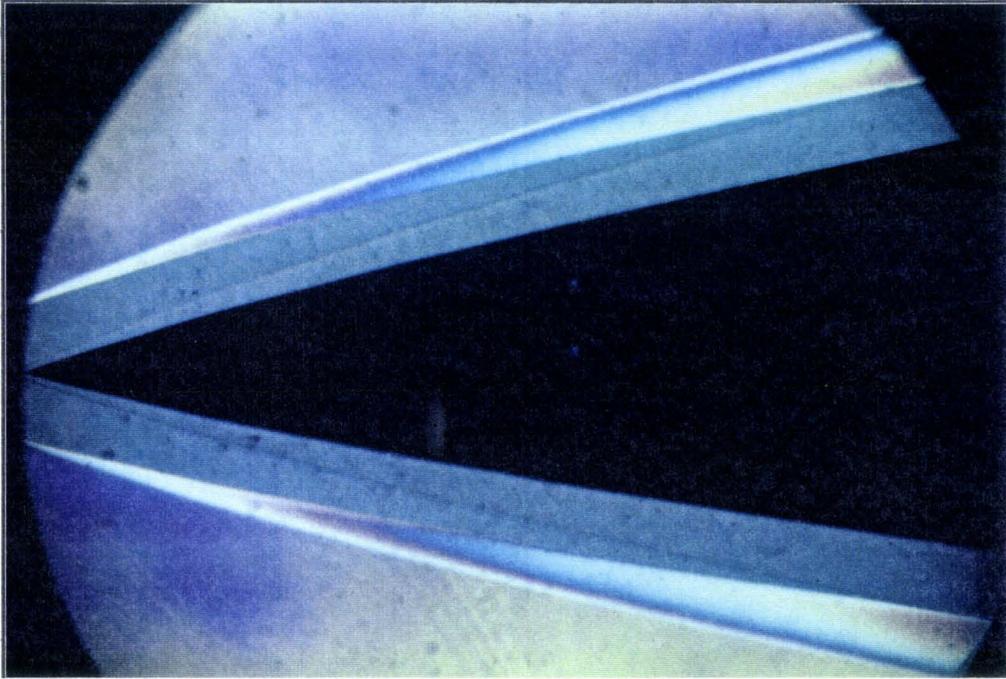
$\alpha_0 = -0.30$ deg., $\beta_0 = 0.40$ deg.



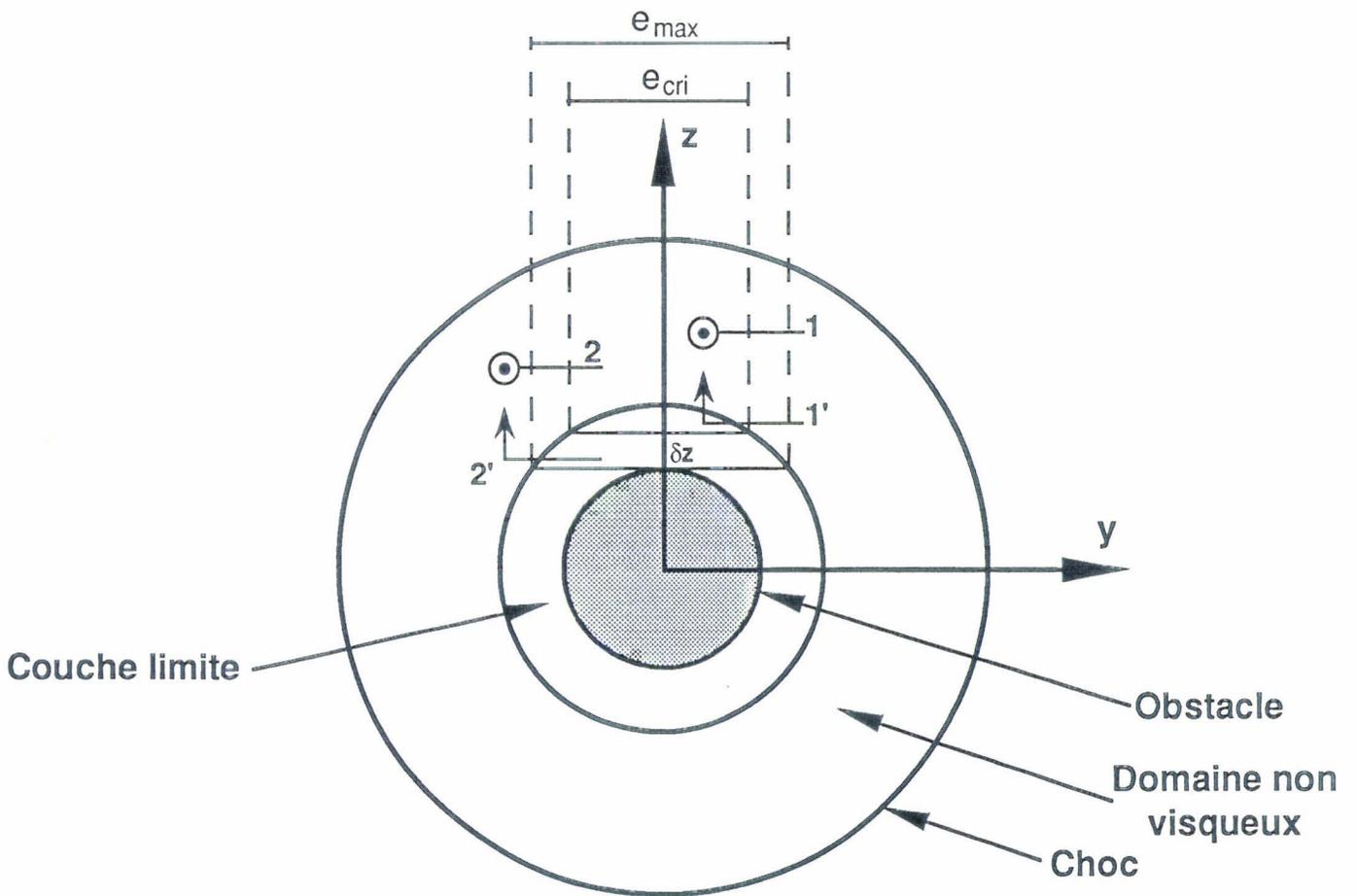
b) Maquette n=1

$\alpha_0 = -0.20$ deg., $\beta_0 = 0.50$ deg.

Figure 62

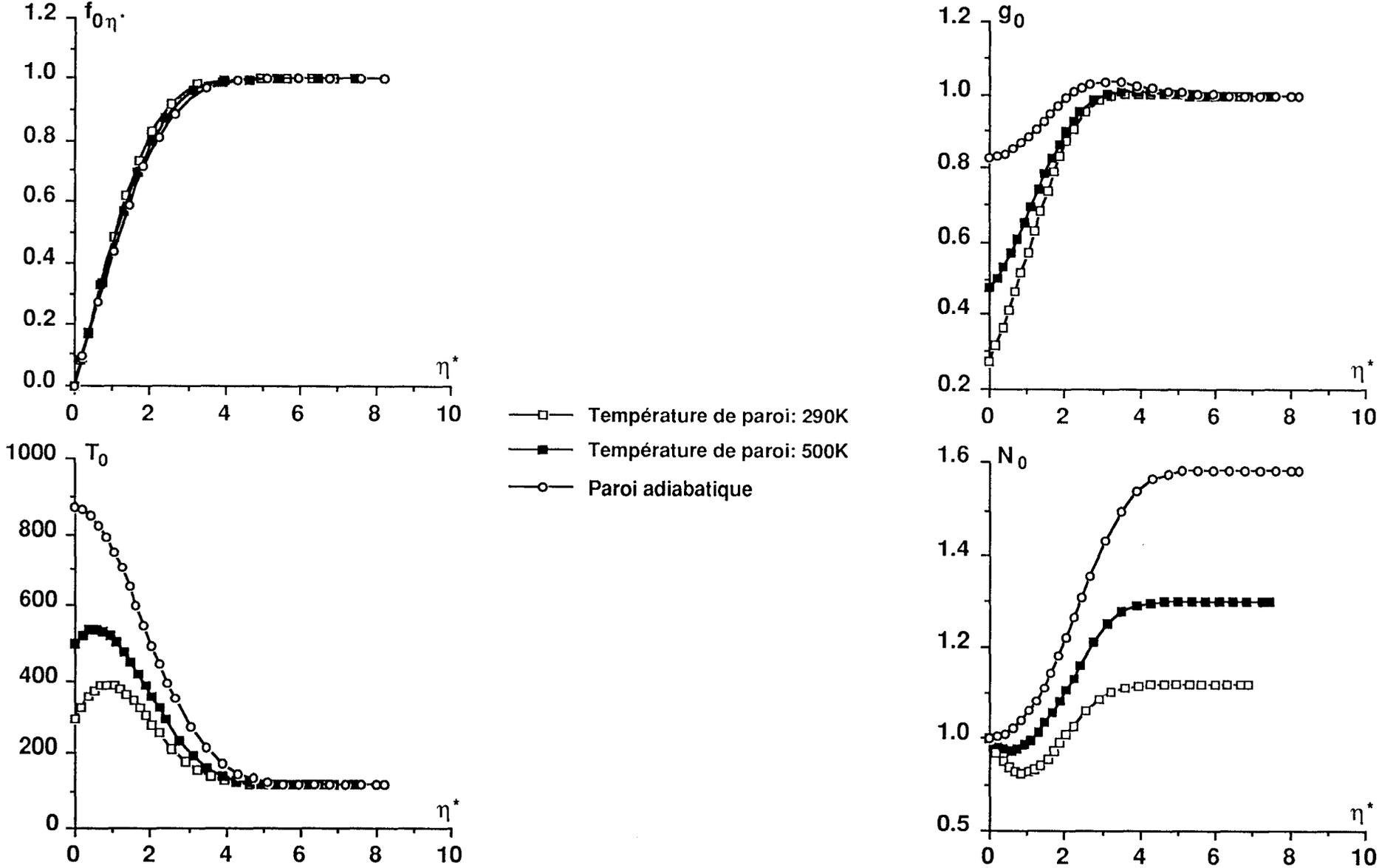


a) Interférogramme: $n=3/4$, $\alpha=0$



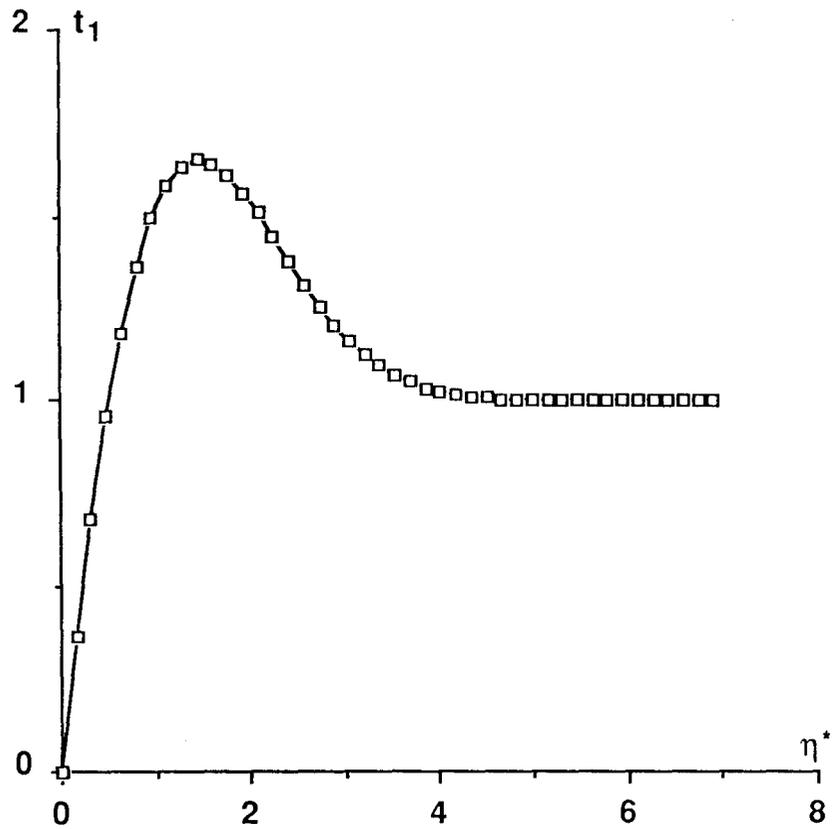
b) Structure transversale de l'écoulement

Figure 63: Résultats d'ordre 0

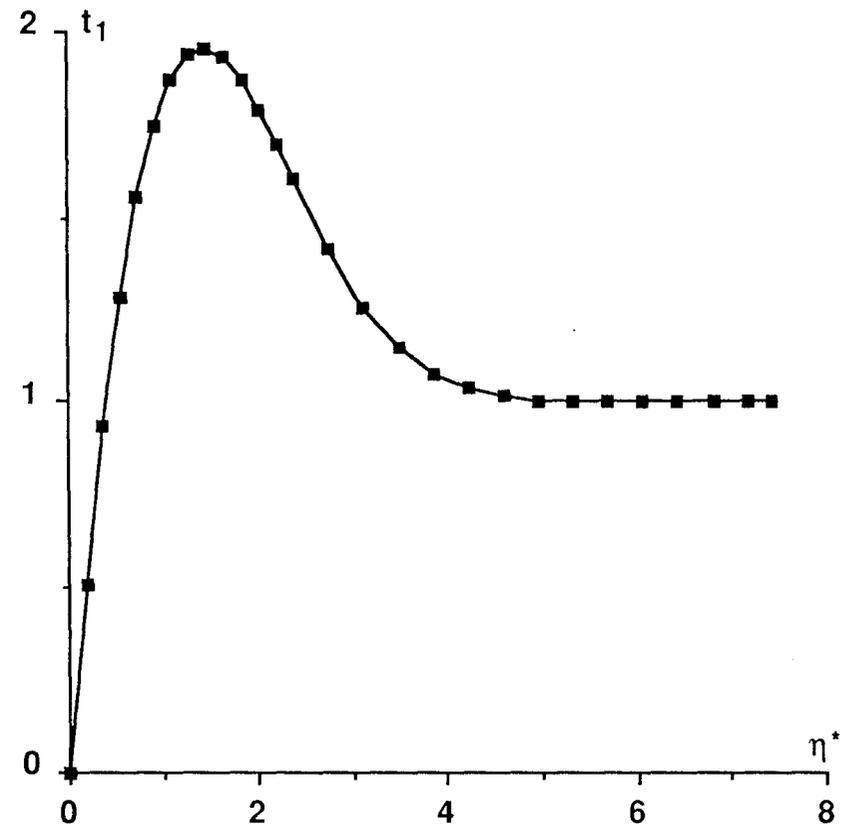


$M_\infty = 9.95$ $T_{i\infty} = 1050 \text{ K}$ $p_{i\infty} = 120 \text{ b}$

Figure 64: Vitesse orthoradiale adimensionnée



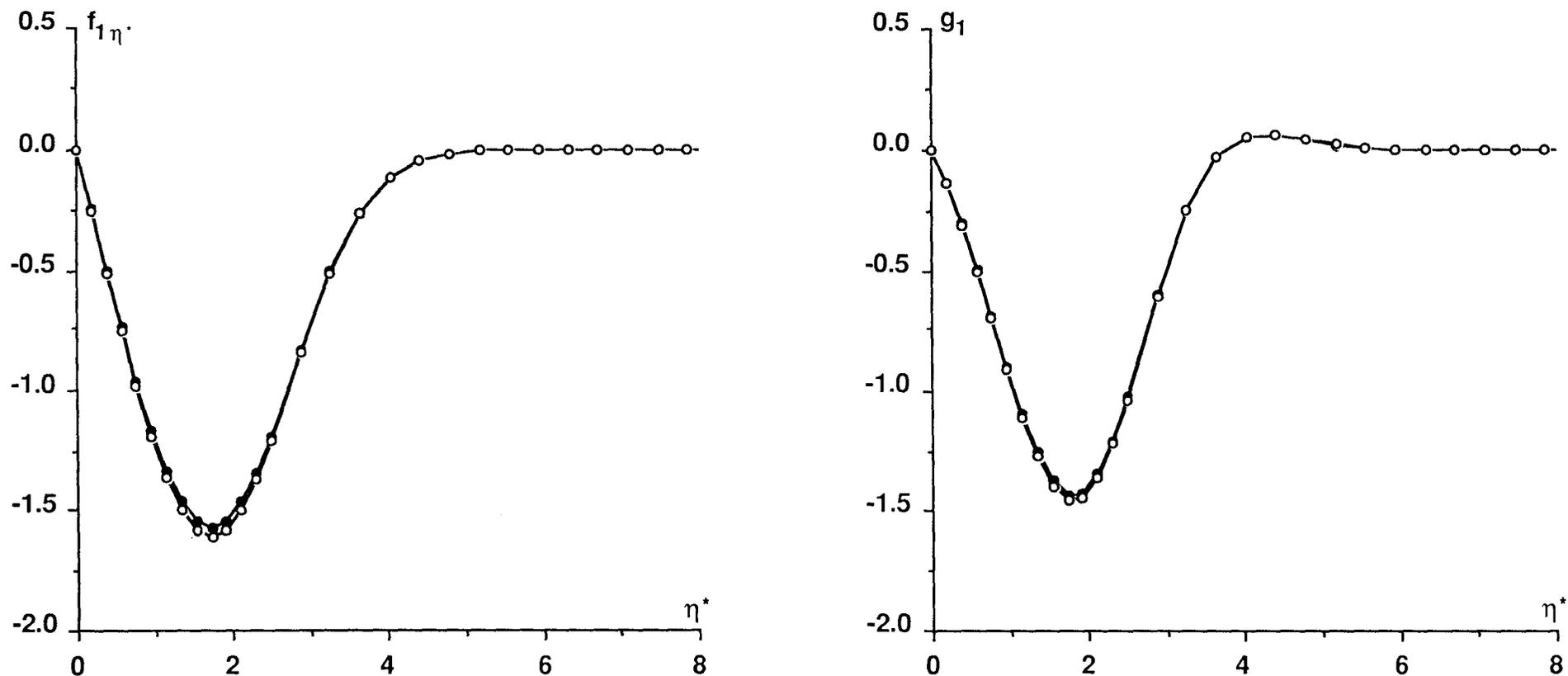
a) Température de paroi: 290K



b) Température de paroi: 500K

$$M_\infty = 9.95 \quad T_{i_\infty} = 1050 \text{ K} \quad \rho_{i_\infty} = 120 \text{ b}$$

Figure 65: Influence de la masse volumique extérieure d'ordre 1 pour une température de paroi de 290K



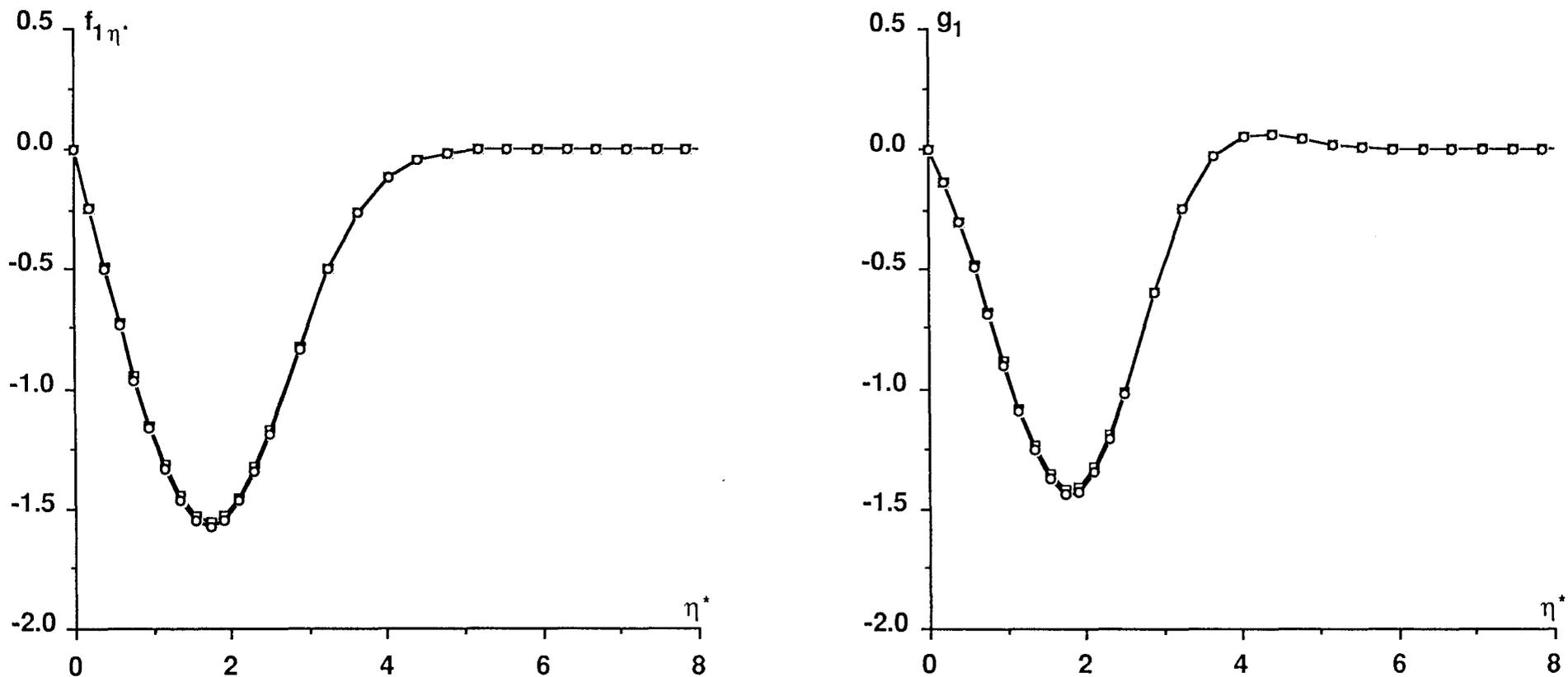
—●— $\rho_{1e}^* = 0$

—○— $\rho_{1e}^* = -0.8$

$\rho_{0e}^* = 0.9$

$M_\infty = 9.95$ $T_{i\infty} = 1050 \text{ K}$ $p_{i\infty} = 120 \text{ b}$

Figure 66: Influence de la masse volumique extérieure d'ordre 0 pour une température de paroi de 290K



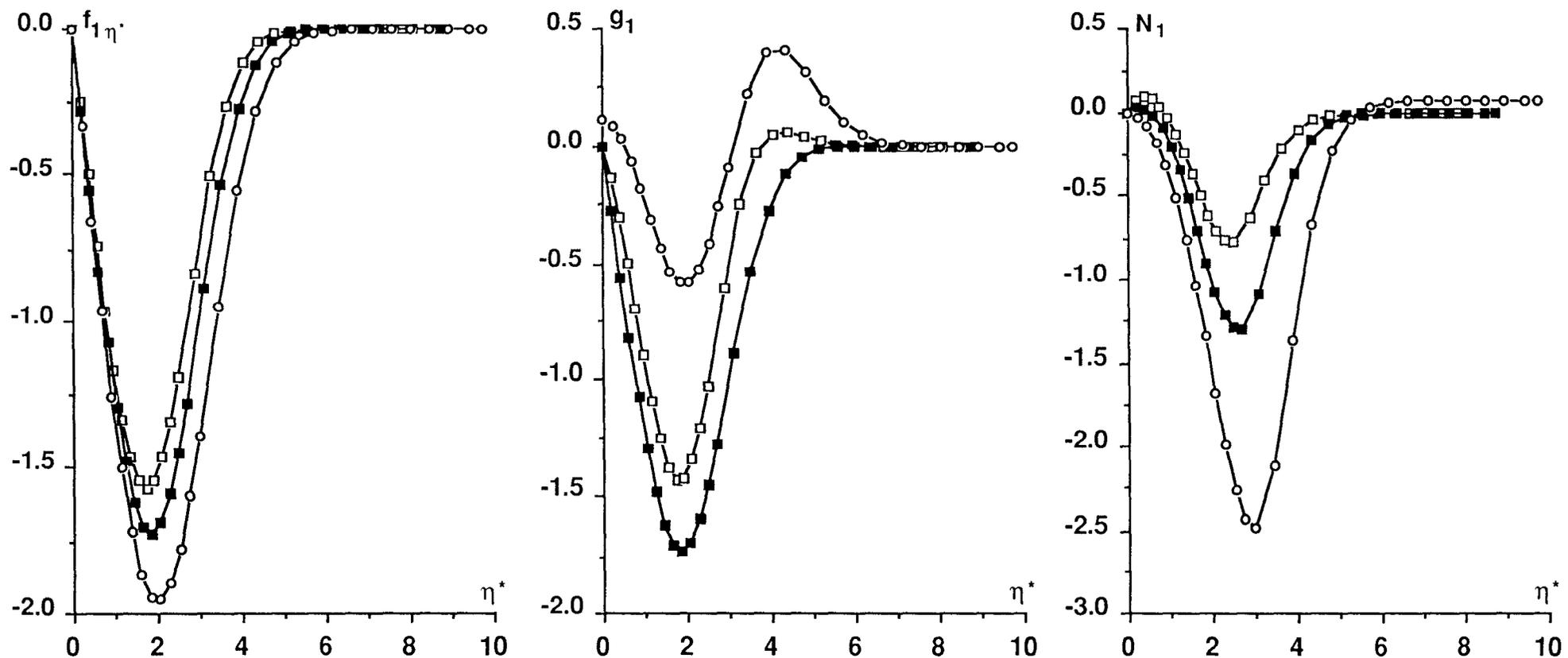
—□— $\rho_{0e}^* = 0.95$ —○— $\rho_{0e}^* = 0.9$

$\rho_{1e}^* = 0$

$M_\infty = 9.95$ $T_{i\infty} = 1050$ K $p_{i\infty} = 120$ b

Figure 67: Vitesse longitudinale et enthalpie adimensionnées d'ordre 1

- Température de paroi: 290K
- Température de paroi: 500K
- Paroi adiabatique



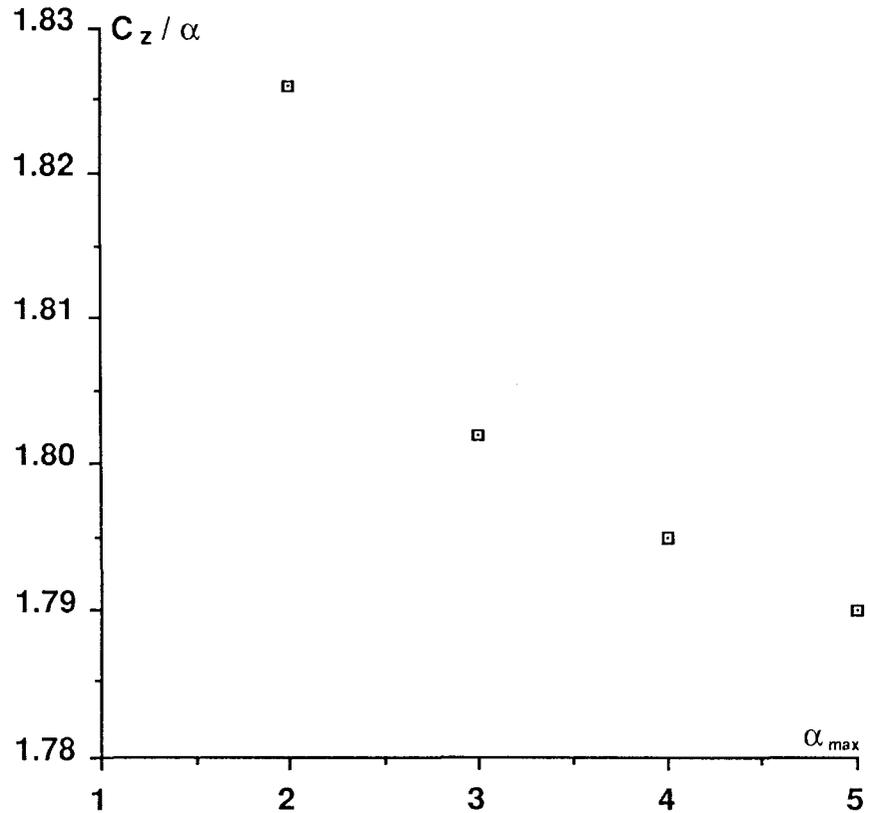
$M_\infty = 9.95$ $T_{i\infty} = 1050 \text{ K}$ $p_{i\infty} = 120 \text{ b}$

$\rho_{0e}^* = 0.9$ $\rho_{1e}^* = 0$

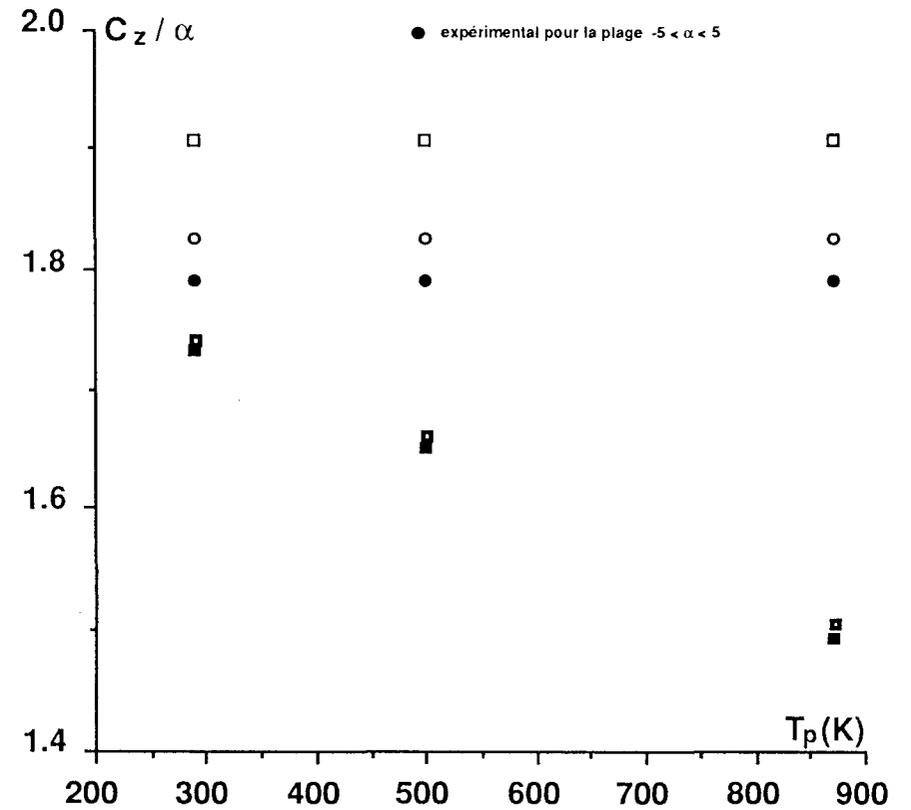
Figure 68: Coefficients de portance comparés

$M_\infty = 9.95$ $T_{i_\infty} = 1050 \text{ K}$ $P_{i_\infty} = 120 \text{ b}$

- modèle non visqueux C_{ze}
- modèle non visqueux appliqué à l'obstacle efficace C'_{ze}
- ▣ coefficient global $C'_{ze} + C_{zv}$
- expérimental pour la plage $-2 < \alpha < 2$
- expérimental pour la plage $-5 < \alpha < 5$



a) Effet de la plage de dépouillement sur la portance expérimentale



b) Comparaison des coefficients de portance

Figure 69: Frottement longitudinal τ_p

$T_{i\infty}=1050K$, $p_{i\infty}=120b$, $M_{\infty}=9.95$, $\alpha=0$

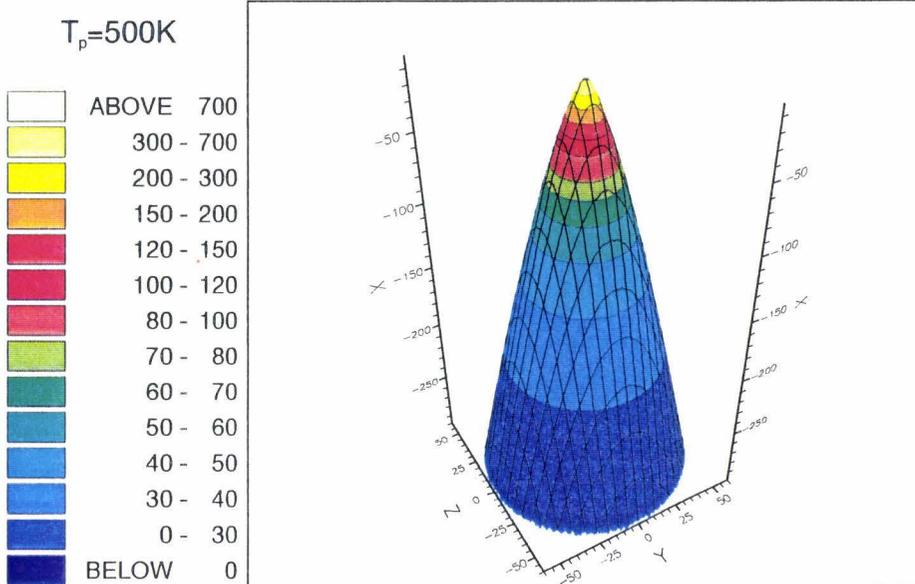
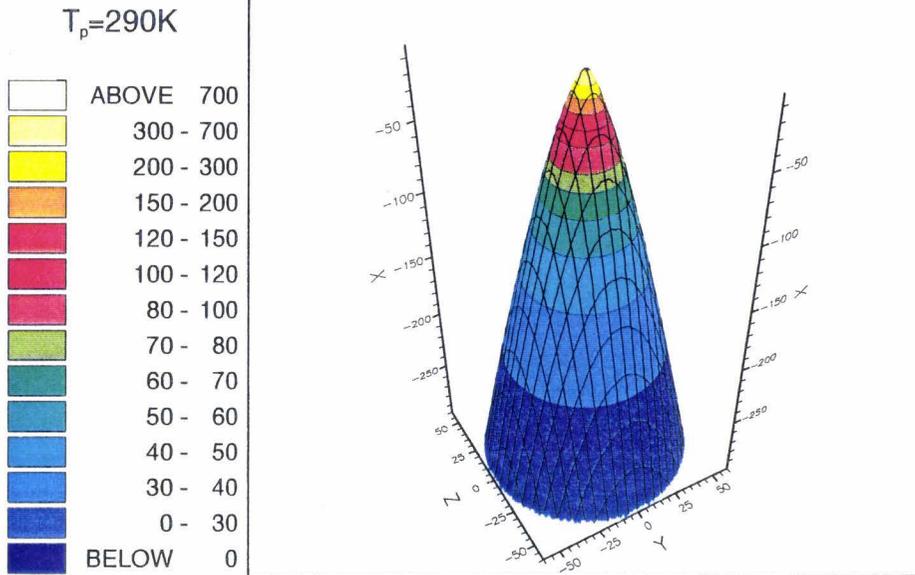
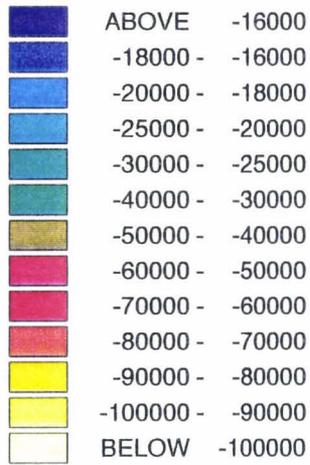
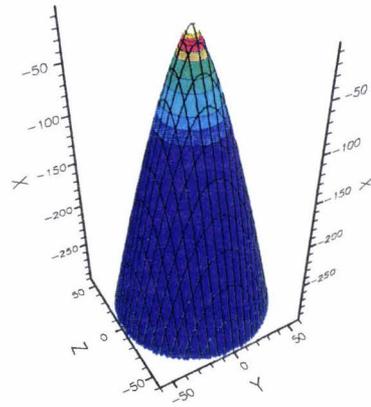
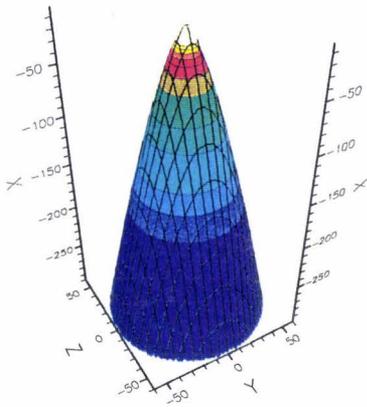


Figure 70: Flux de chaleur q

$T_{i\infty}=1050\text{K}$, $p_{i\infty}=120\text{b}$, $M_{\infty}=9.95$

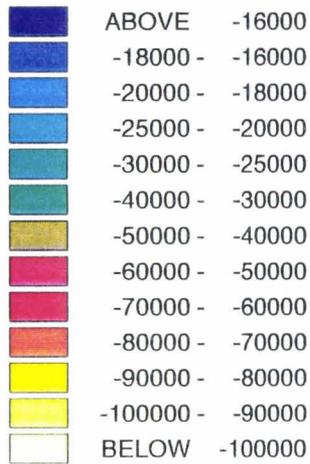
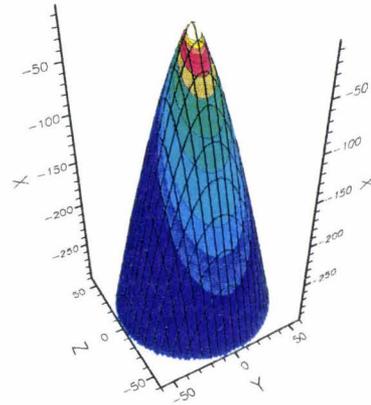
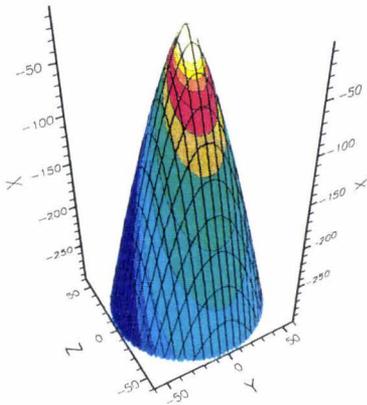
$T_p=290\text{K}$

$T_p=500\text{K}$



$\alpha=0$

$\alpha=0$



$\alpha=0.1(\text{rad.})$

$\alpha=0.1(\text{rad.})$

Figure 71: Frottement longitudinal τ_p

$T_{i\infty}=1050K$, $p_{i\infty}=120b$, $M_{\infty}=9.95$, $\alpha=0.1(\text{rad.})$

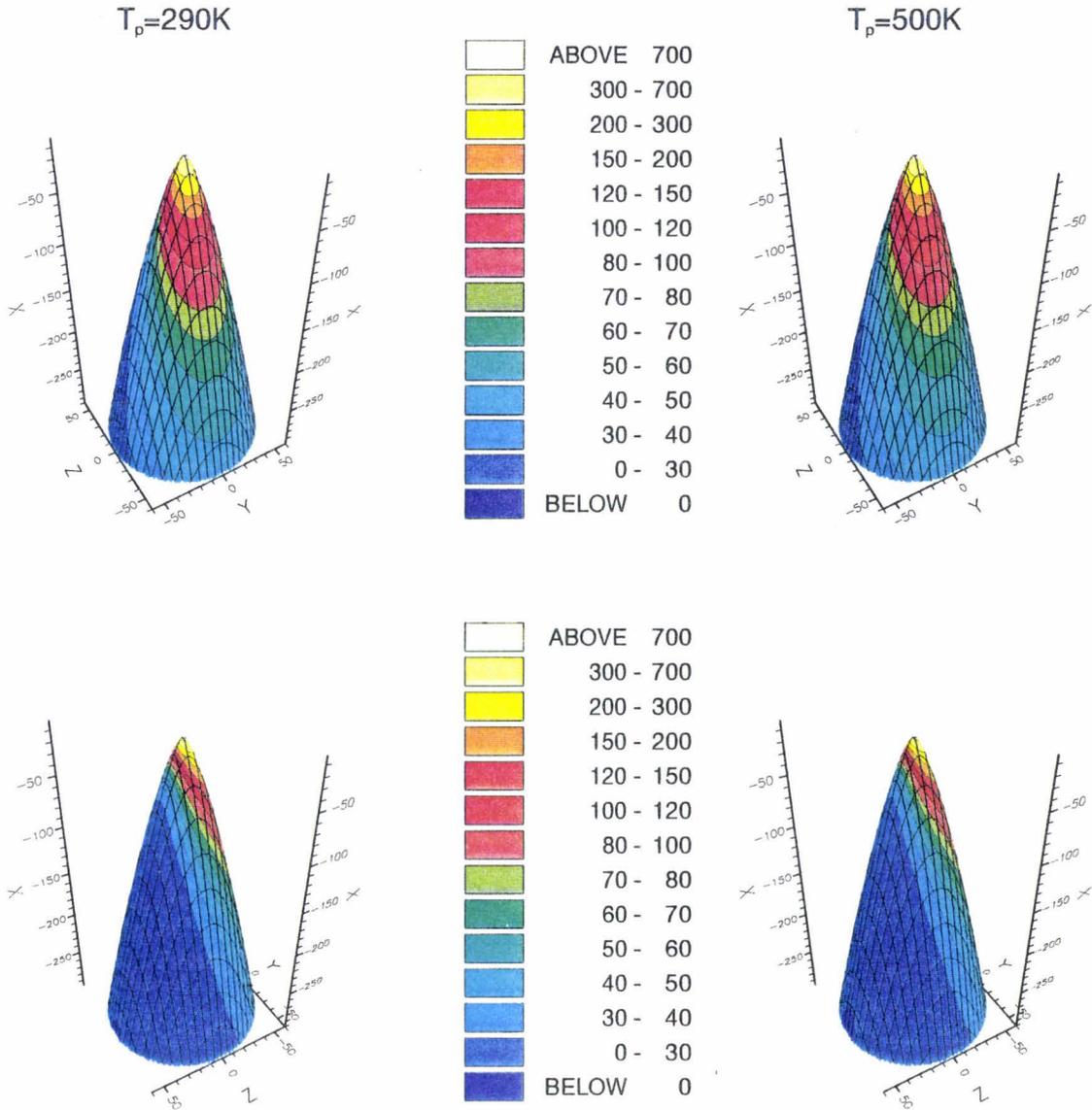


Figure 72: Frottement longitudinal τ_p

$T_{i\infty}=1050K$, $p_{i\infty}=120b$, $M_{\infty}=9.95$, $\alpha=0.098(\text{rad.})$

$T_p=290K$

$T_p=500K$

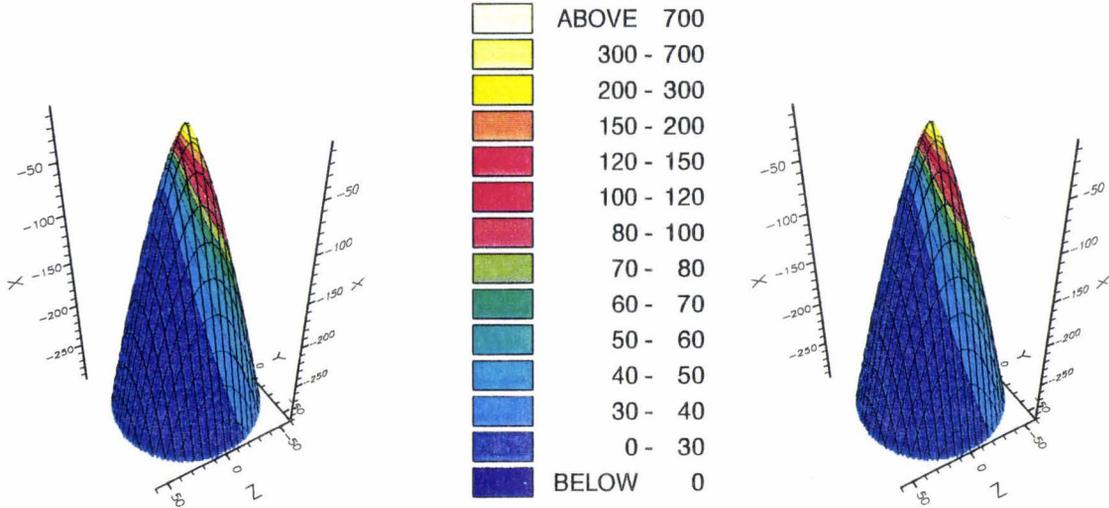
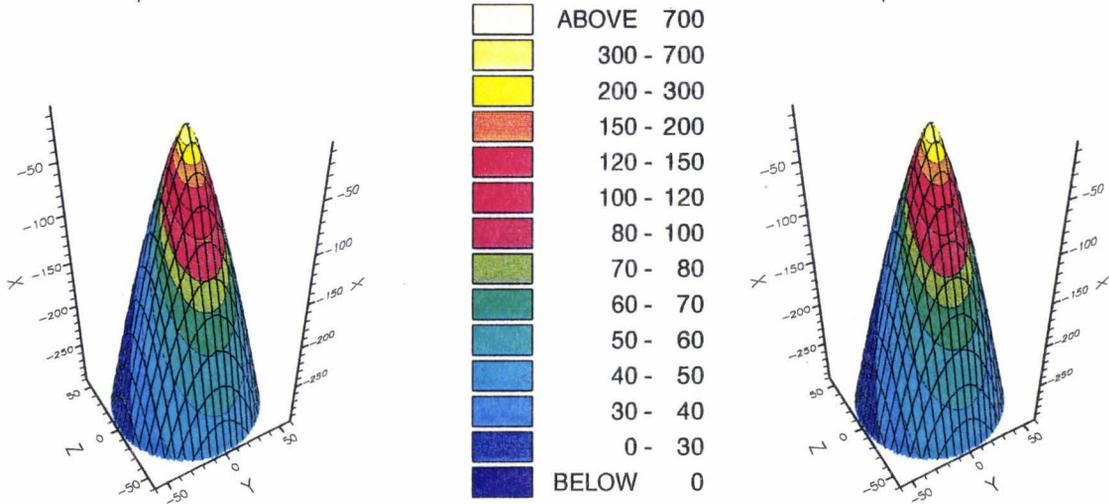


Figure 73: Frottement transversal τ_t

$T_{i\infty}=1050K$, $p_{i\infty}=120b$, $M_{\infty}=9.95$, $\alpha=0.1(\text{rad.})$

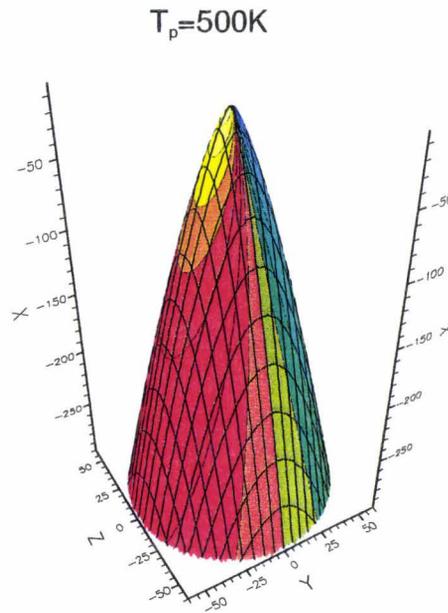
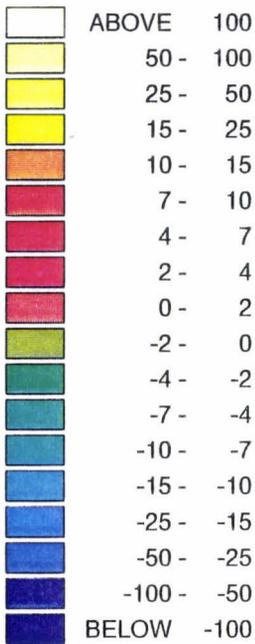
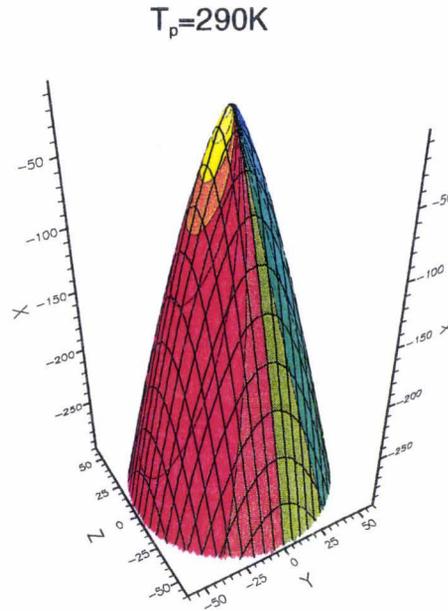
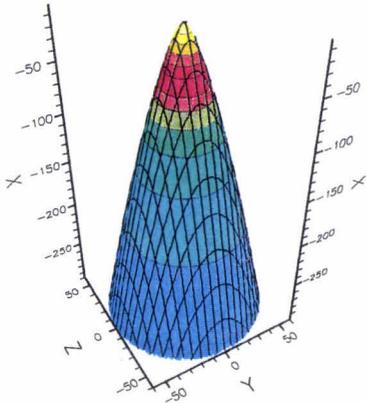
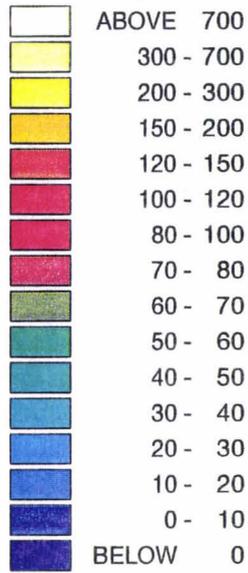


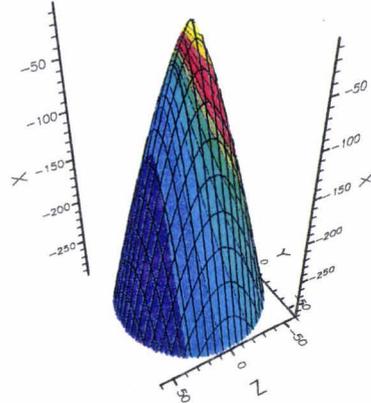
Figure 74: Paroi adiabatique

$T_{i\infty}=1050K, p_{i\infty}=120b, M_{\infty}=9.95$

Contrainte longitudinale τ_p



$\alpha=0$



$\alpha=0.1(\text{rad.})$

Contrainte transversale τ_t ; $\alpha=0.1(\text{rad.})$

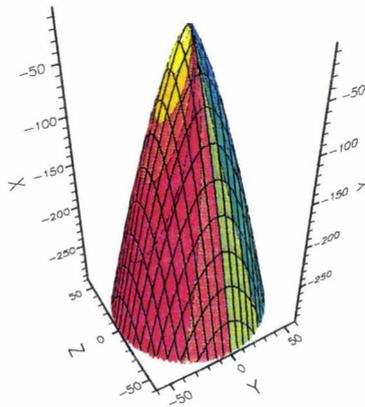
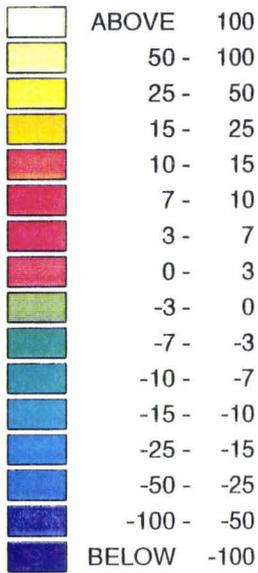
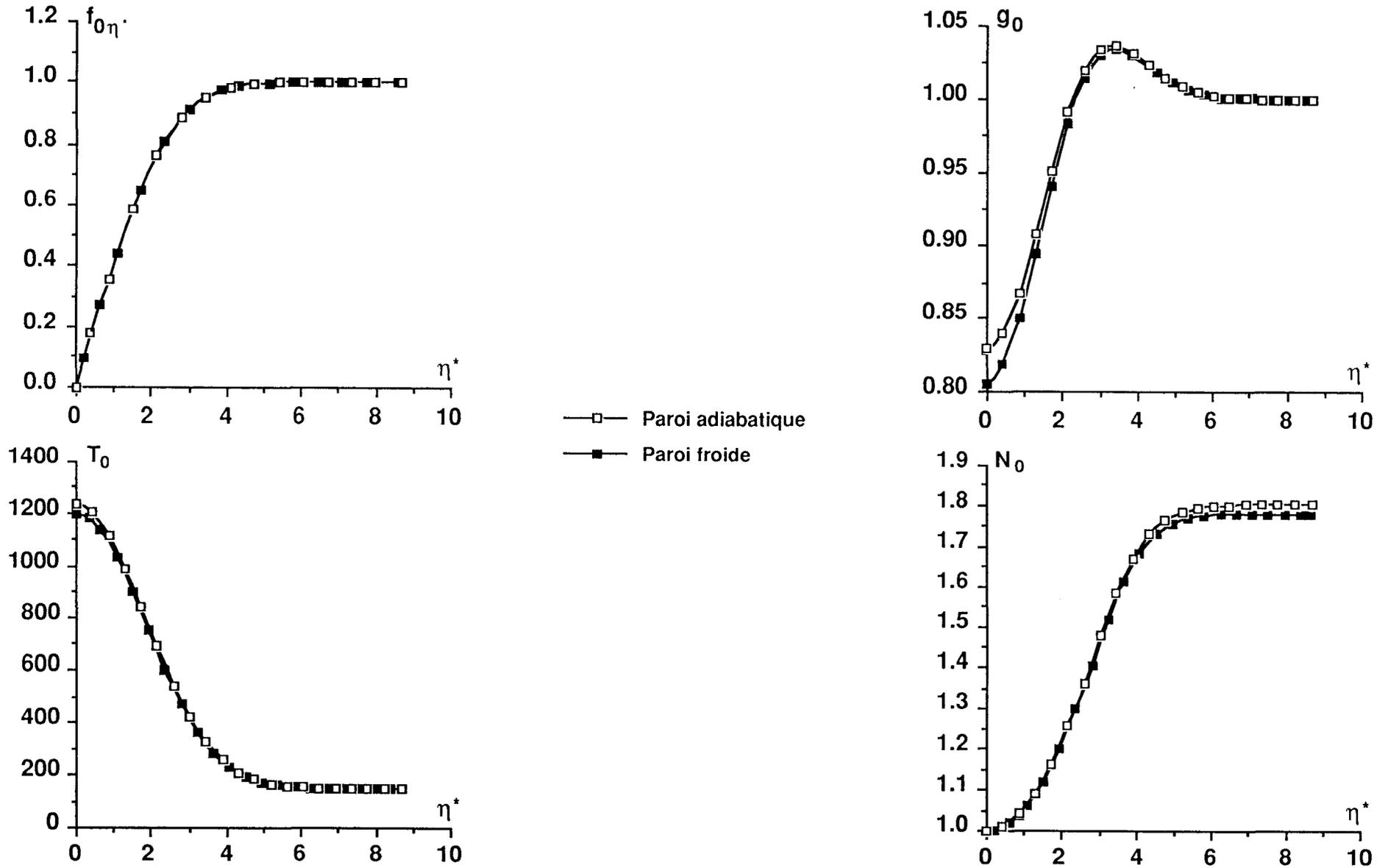
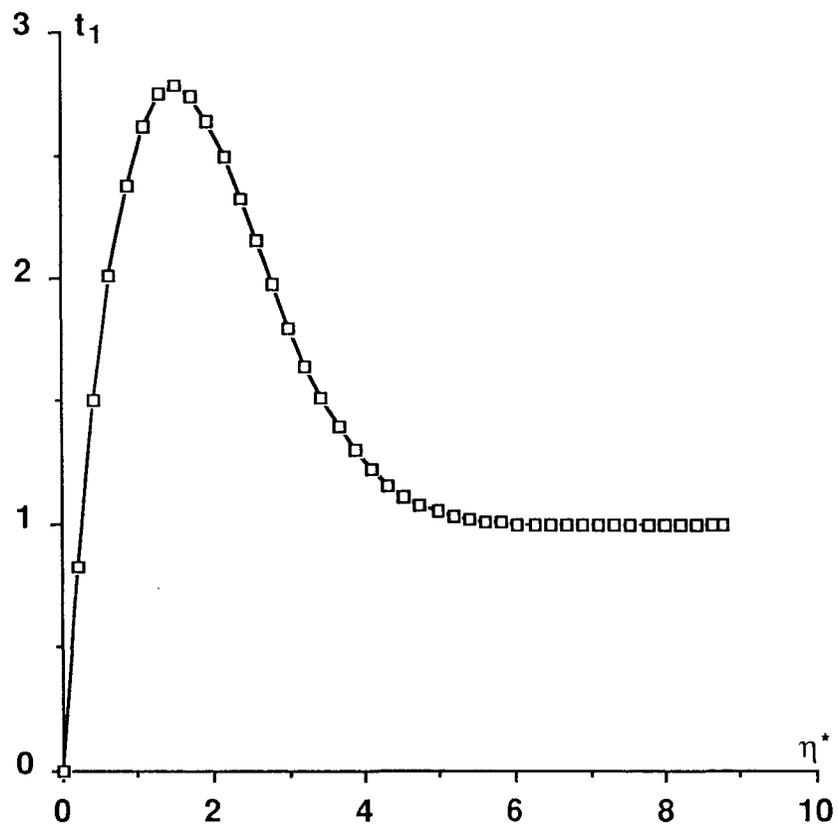


Figure 75: Résultats d'ordre 0

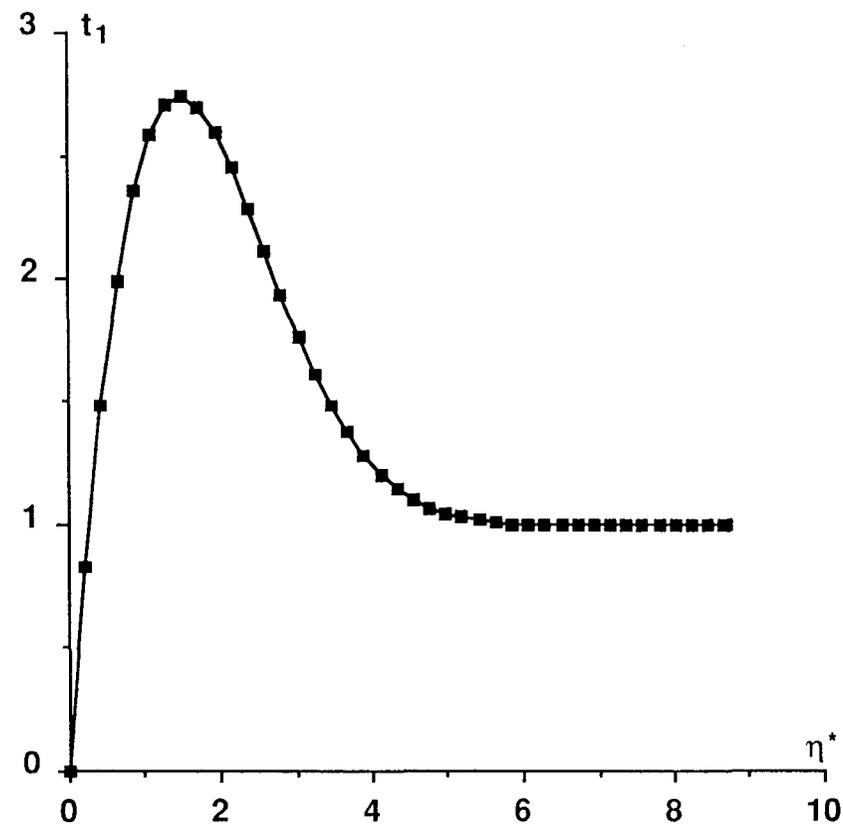


$M_\infty = 12$ $T_{i\infty} = 1490 \text{ K}$ $p_{i\infty} = 400 \text{ b}$

Figure 76: Vitesse orthoradiale adimensionnée



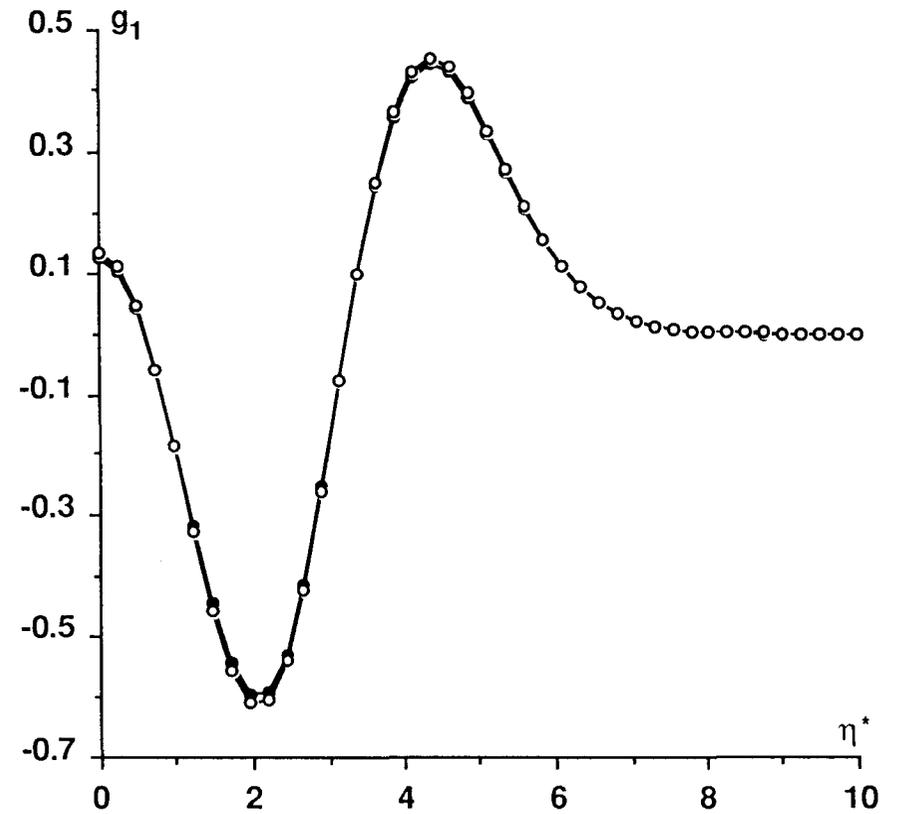
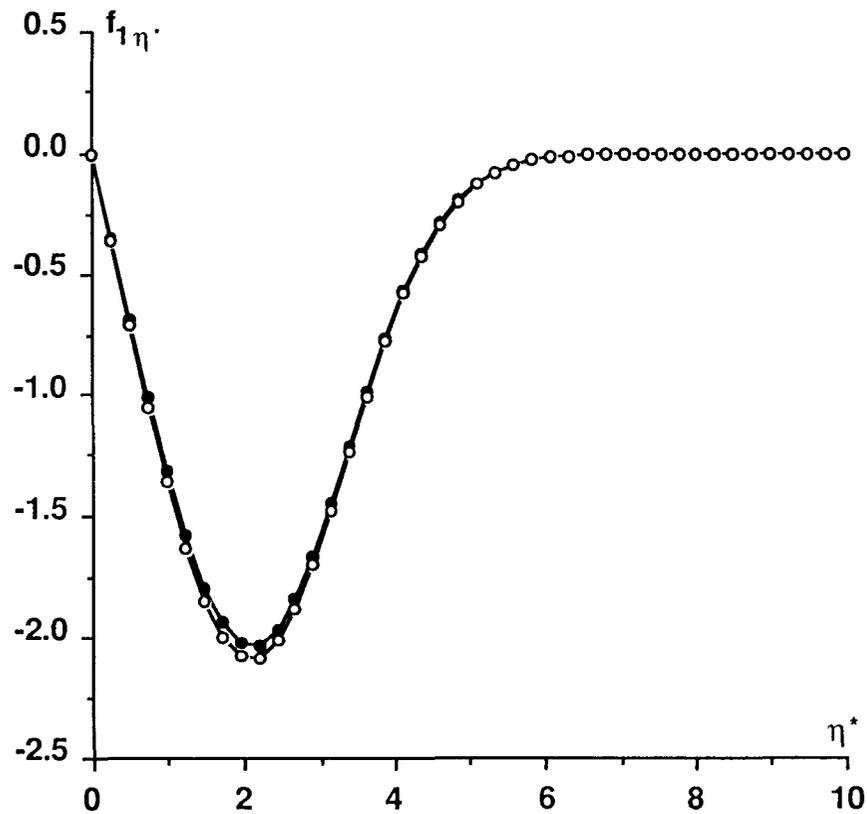
a) Paroi adiabatique



b) Paroi froide

$$M_\infty = 12 \quad T_{i_\infty} = 1490 \text{ K} \quad p_{i_\infty} = 400 \text{ b}$$

Figure 77: Influence de la masse volumique extérieure d'ordre 1 dans le cas adiabatique



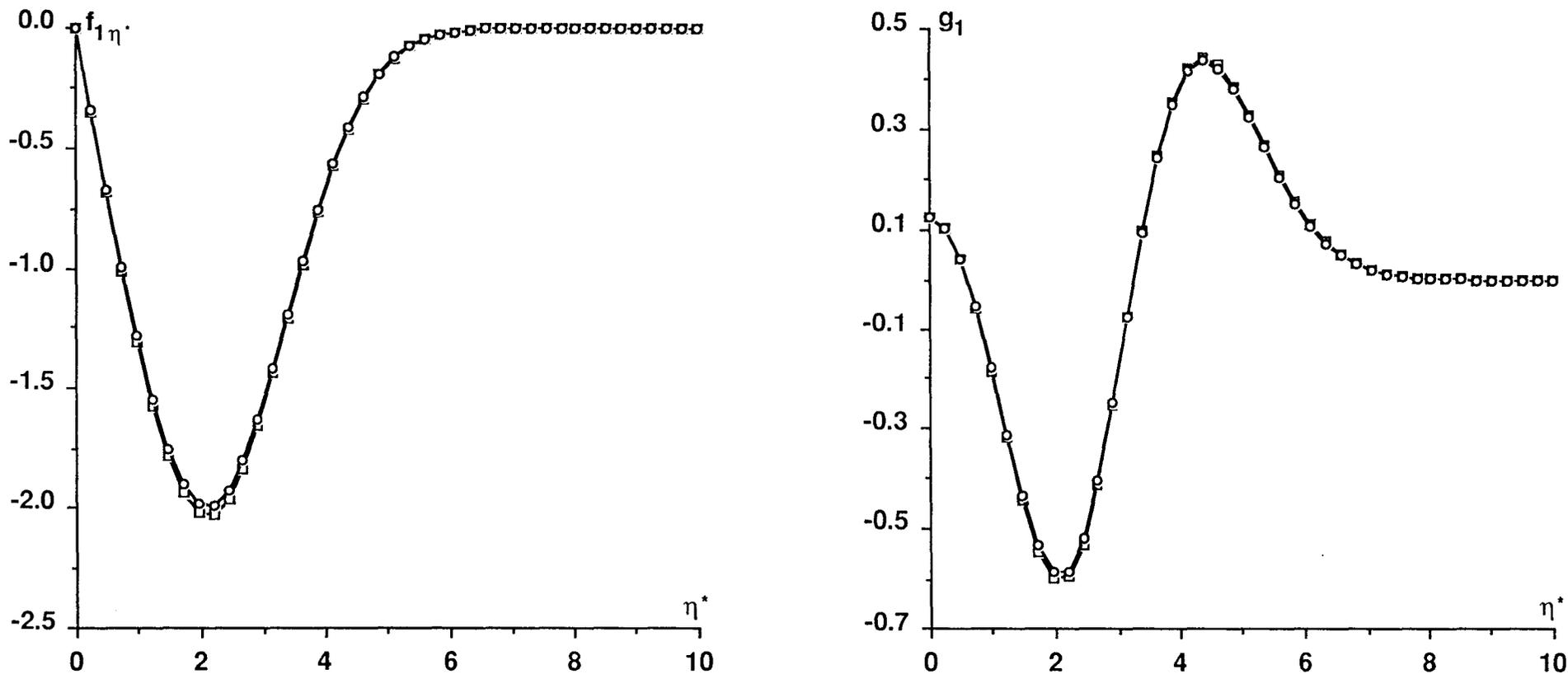
—●— $\rho_{1e}^* = 0$

—○— $\rho_{1e}^* = -0.8$

$\rho_{0e}^* = 0.9$

$M_\infty = 12$ $T_{i\infty} = 1490 \text{ K}$ $p_{i\infty} = 400 \text{ b}$

Figure 78: Influence de la masse volumique extérieure d'ordre 0 dans le cas adiabatique



—□— $\rho_{0e}^* = 0.9$

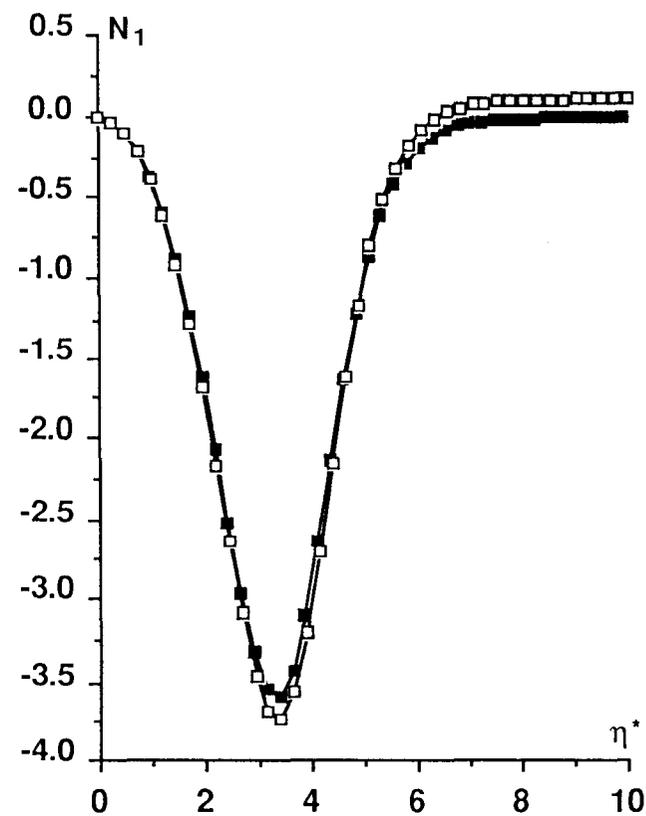
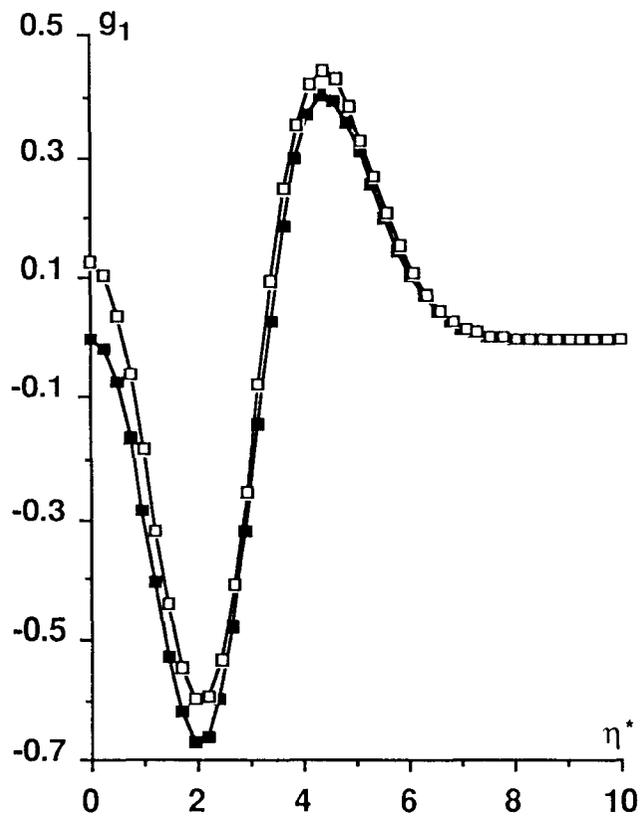
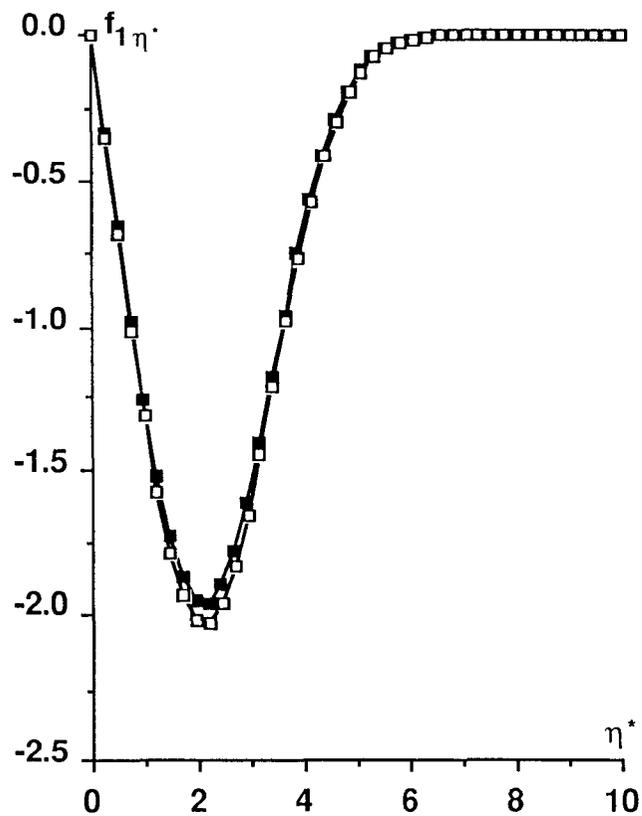
—○— $\rho_{0e}^* = 0.95$

$\rho_{1e}^* = 0$

$M_\infty = 12$ $T_{i\infty} = 1490 \text{ K}$ $p_{i\infty} = 400 \text{ b}$

Figure 79: Vitesse longitudinale et enthalpie adimensionnées d'ordre 1

—□— Paroi adiabatique
 —■— Paroi froide



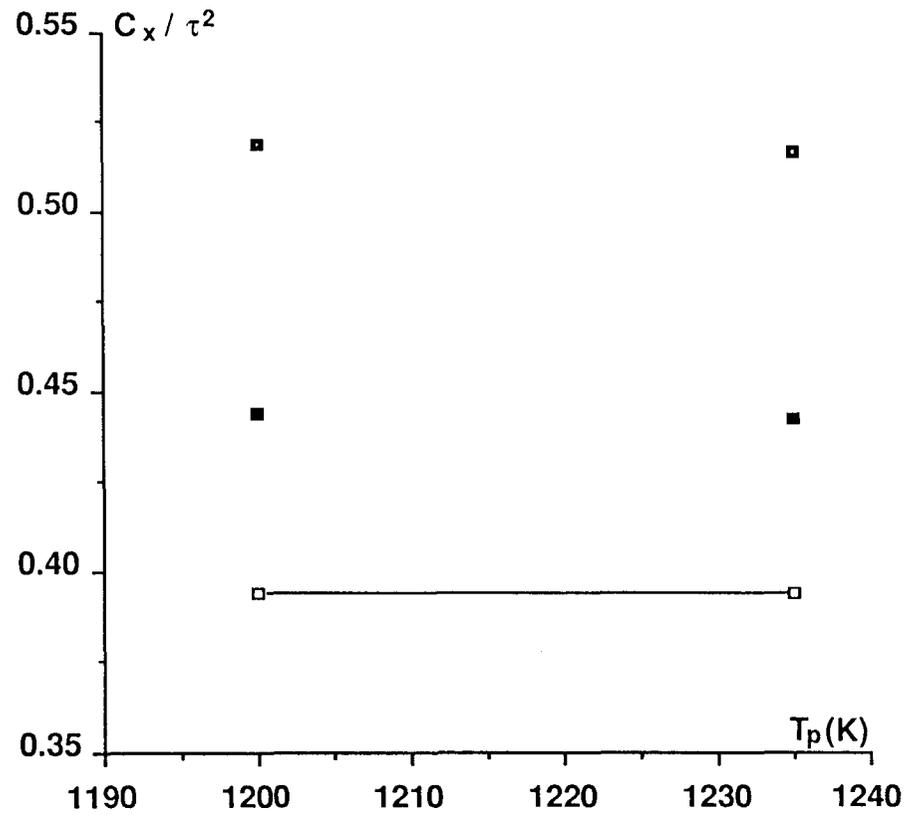
$M_\infty = 12$ $T_{i\infty} = 1490 \text{ K}$ $p_{i\infty} = 400 \text{ b}$

$\rho_{0e}^* = 0.9$ $\rho_{1e}^* = 0$

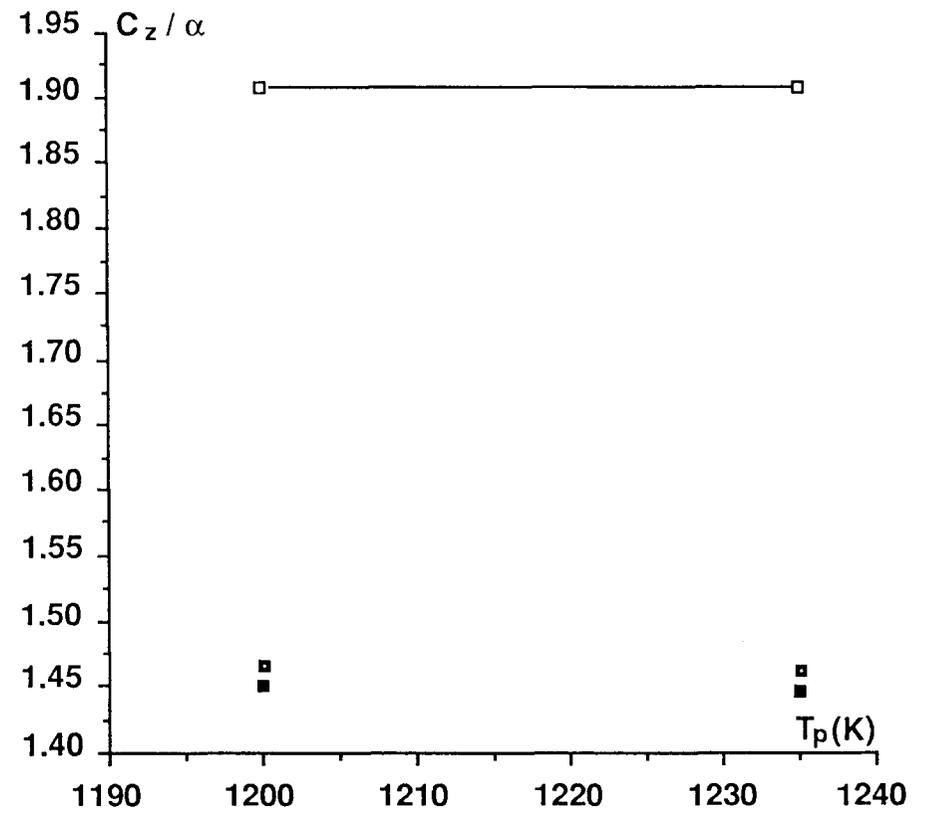
Figure 80: Coefficients aérodynamiques globaux

$$M_{\infty} = 12 \quad T_{i\infty} = 1490 \text{ K} \quad p_{i\infty} = 400 \text{ b}$$

- — modèle non visqueux
- — modèle non visqueux appliqué à l'obstacle efficace
- ▣ — coefficient global



a) Coefficient de traînée

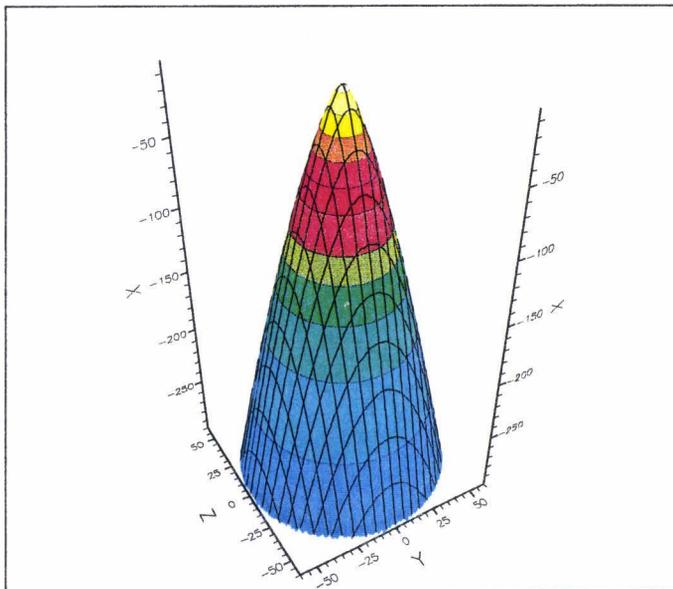
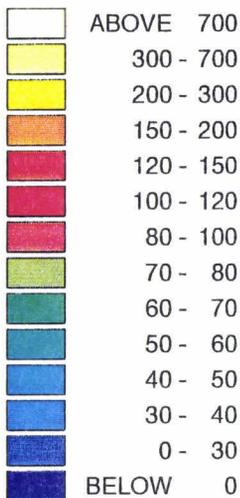


b) Coefficient de portance

Figure 81: Frottement longitudinal τ_p

$T_{i\infty}=1490K, p_{i\infty}=400b, M_{\infty}=12, \alpha=0$

Paroi adiabatique



$T_p=1200K$

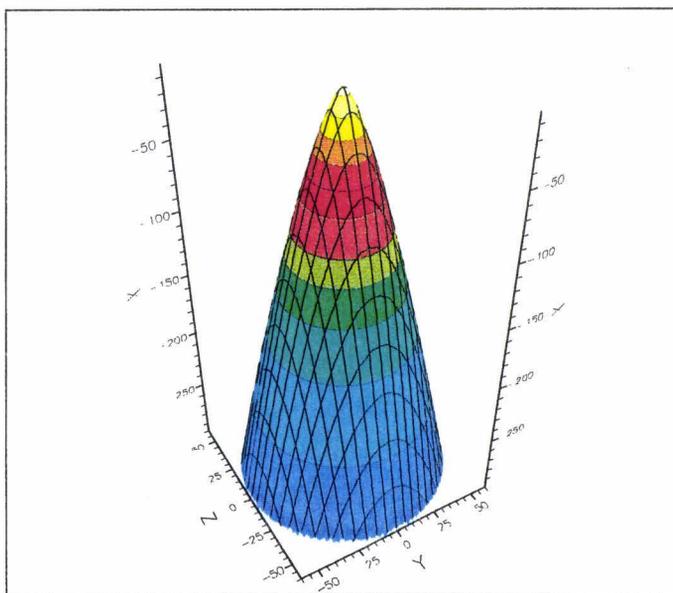
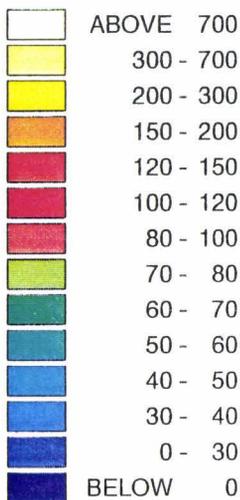


Figure 82: Flux de chaleur q

$T_{i\infty}=1490\text{K}$, $p_{i\infty}=400\text{b}$, $M_{\infty}=12$, $T_p=1200\text{K}$

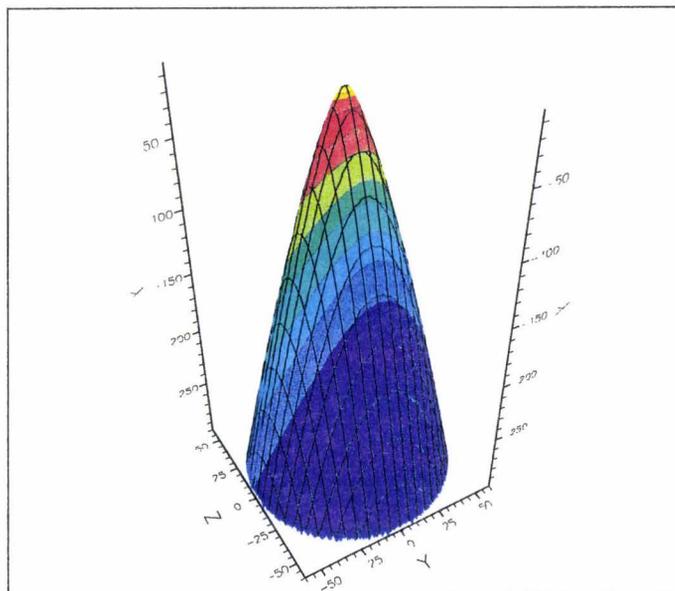
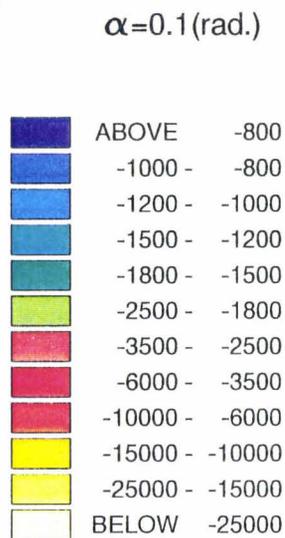
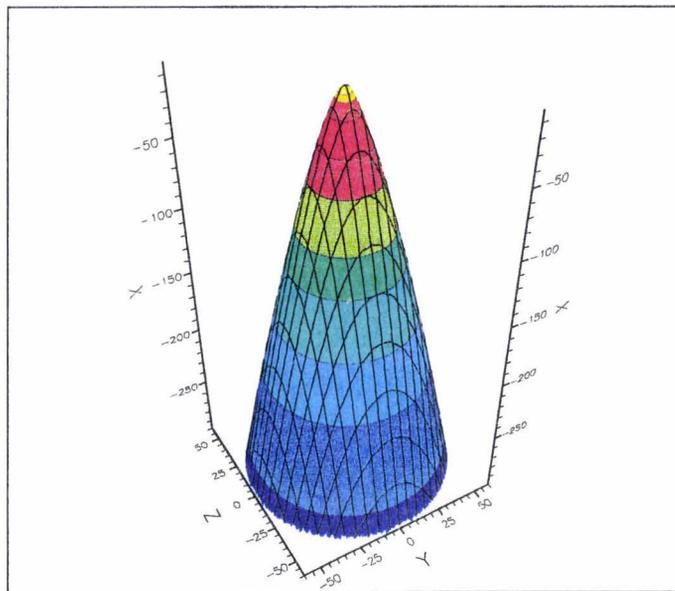
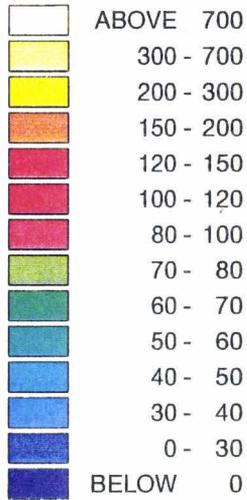
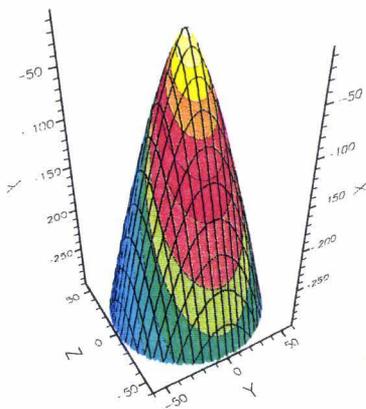


Figure 83: Frottement longitudinal τ_p

$T_{\infty}=1490\text{K}$, $p_{\infty}=400\text{b}$, $M_{\infty}=12$, $\alpha=0.1(\text{rad.})$

Valeur moyenne de N

$T_p=1200\text{K}$



Paroi adiabatique

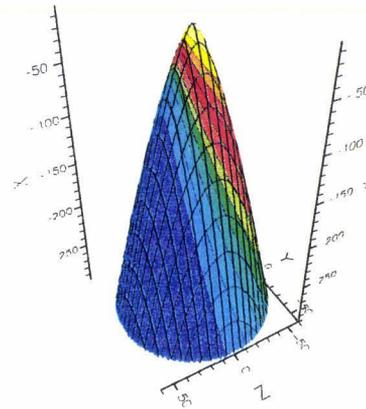
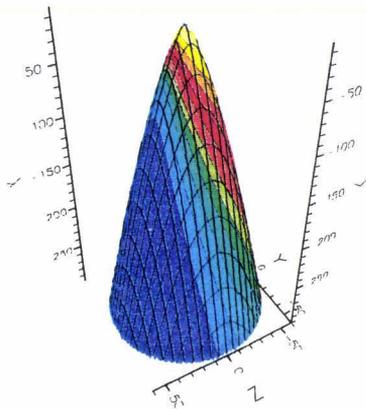
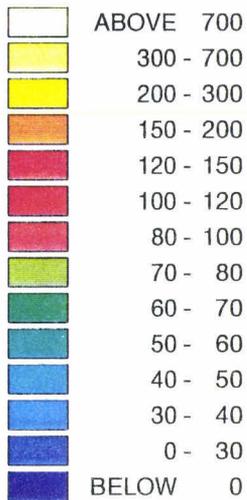
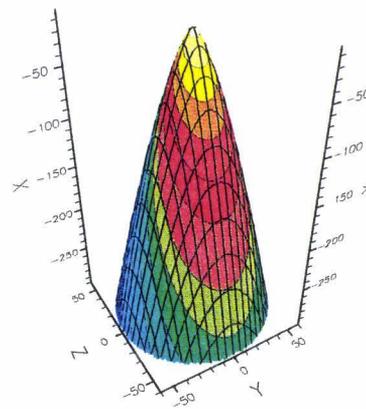


Figure 84: Frottement longitudinal τ_p

$T_{i\infty}=1490\text{K}$, $p_{i\infty}=400\text{b}$, $M_{\infty}=12$, $\alpha=0.1(\text{rad.})$

Valeur moyenne de T

$T_p=1200\text{K}$

Paroi adiabatique

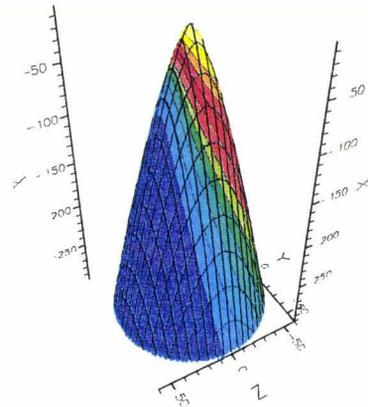
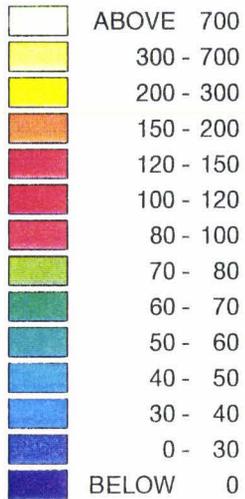
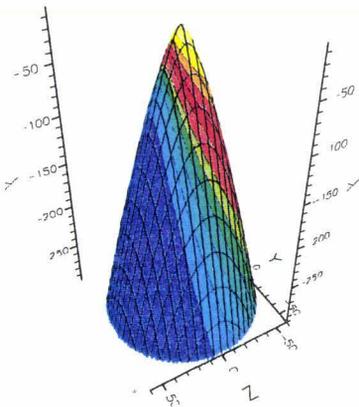
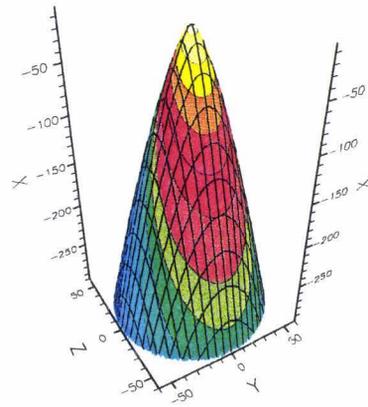
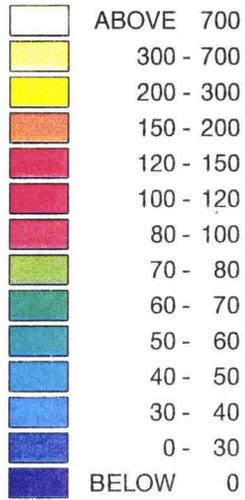
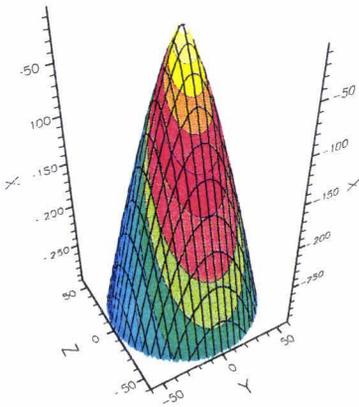
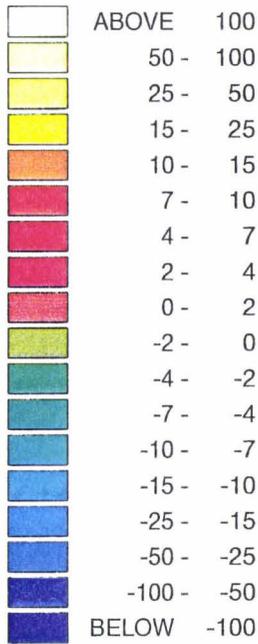
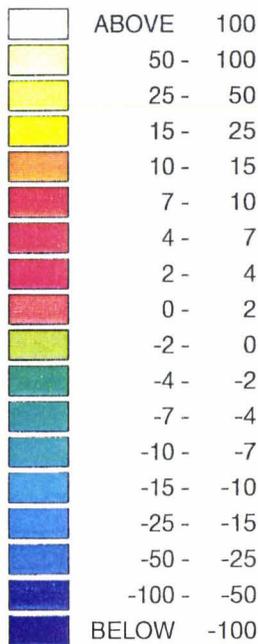
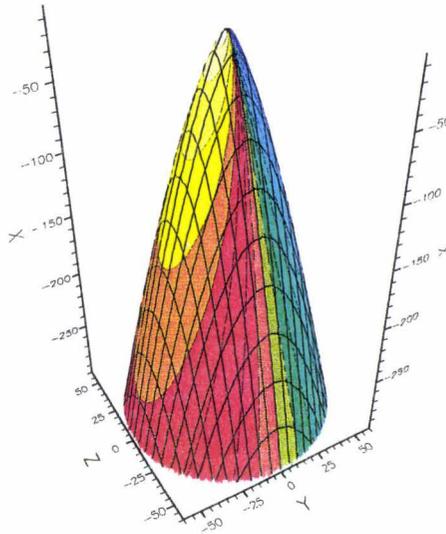


Figure 85: Frottement transversal τ_t

$T_{\infty}=1490K, p_{\infty}=400b, M_{\infty}=12, \alpha=0.1(\text{rad.})$



$T_p=1200K$



Paroi adiabatique

