

T  
n° d'ordre : 1566

gen 20103821  
**THÈSE**

présentée à



50376  
1995  
159

**L'Université des Sciences et Technologies de Lille**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ**

*Spécialité* : Productique : Automatique et Informatique Industrielle

par

**Vlady BOULET**

Ingénieur I.S.E.N.

**CONTRIBUTION A LA DÉTERMINATION  
DE POINTS CIBLES DE MOBILES  
EN DÉPLACEMENT SOUS CONTRAINTES**

*Soutenue le 15 septembre 1995 devant le jury d'examen composé de :*

Mme	M. BAYART	Président
MM	P. PENEL	Rapporteur
	D. WILLAEYS	Rapporteur
	P.Y. ARQUES	Examineur
	P. BORNE	Examineur
	E. PARIS	Examineur
	P. VANHEEGHE	Examineur

Thèse dirigée par M. le Professeur P. BORNE et M. P. VANHEEGHE, préparée au  
Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle de Lille  
(L.A.I.L. U.R.A. - C.N.R.S. D1440), Ecole Centrale de Lille, I.S.E.N.

*à mes parents,  
en mémoire de mes grands-parents.*

## Avant-propos

*Que Madame Mireille Bayart, Professeur au L.A.I.L.- Lille I soit remerciée pour l'intérêt qu'elle a porté à cette thèse en acceptant la présidence du jury d'examen.*

*Monsieur Patrick Pénel, Professeur à l'Université de Toulon et du Var et Monsieur Didier Willaëys, Professeur à l'Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis ont suivi en permanence l'évolution du projet (dans la joie et la bonne humeur et parfois sous le soleil méditerranéen). Ils m'ont fait l'honneur d'être les rapporteurs de cette thèse : je leur exprime ici ma profonde gratitude.*

*L'éloignement géographique de Monsieur Etienne Paris, Adjoint Etude au C.T.S.N./L.S.A. de la D.C.N. Toulon ne l'a pas empêché de me faire le plaisir de participer à ce jury, qu'il en soit remercié. Monsieur Pierre-Yves Arquès, Professeur à l'Université de Toulon et du Var est également associé à ce dernier.*

*Mes plus vifs remerciements vont à Monsieur Pierre Borne, directeur scientifique de l'Ecole Centrale de Lille pour m'avoir porté une attention bienveillante en dirigeant mes travaux. Conseiller hors pair en commande optimale, il a toujours su être à mon écoute malgré la lourdeur de ses responsabilités. Son énergie et sa simplicité ont été d'un grand recours lors des quelques moments de découragement, je lui exprime ma plus profonde reconnaissance.*

*Comment ne pas associer à ce dernier, Monsieur Philippe Vanheeghe, Responsable du département Signaux et Systèmes de l'Institut Supérieur d'Electronique du Nord qui a su me «tirer» du soleil tropézien pour engager une collaboration amicale et finalement aboutir à cette thèse. Il a su allier à la rigueur du travail, le plaisir de la table. Que Cécile en soit aussi remerciée.*

*Emmanuel Druon et Emmanuel Duflos ont également travaillé sur le projet à l'origine de nos trois thèses. Nos travaux ont abouti à des approches novatrices et complémentaires qui n'auraient pu exister sans la profonde amitié qui nous lie. Qu'ils soient remerciés entre autres pour l'aide informatique et le travail de synthèse bibliographique (ils se reconnaîtront).*

*Je remercie la D.R.E.T., la D.C.N. et le C.N.R.S. pour le financement de mes travaux.*

*J'exprime ma profonde reconnaissance à Maurice Schumann, Président de la Fondation Norbert Ségard, pour m'avoir accordé, à titre exceptionnel, deux bourses de Recherche.*

*Je suis touché par la confiance que m'a accordée Monsieur Jean-Noël Decarpigny, directeur de l'I.S.E.N. Que Monsieur Michel Lannoo, Directeur de Recherche soit associé à ces remerciements.*

## Préface

- 1995 - Permettez moi, chers lecteurs, en guise de préface de célébrer le tricentenaire de la mort de Jean de la Fontaine, en lui dédiant la fable qui suit. Nous l'intitulerons « *Les Mouettes et les Poissons* ».

Une famille de mouettes, affamées suite à un long périple, s'approche d'un banc de poissons. S'étant toutes concertées, elles décident de se rassasier en s'attribuant chacune un poisson. Le Commandant Cousteau, à bord de sa Calypso, traverse le banc de poissons et observe la scène en la filmant. Quand soudain, une mouette coquette et friande du prêt-à-porter français, s'empare du bonnet de Cousteau ...

Moralité ou « *de l'utilité pour Cousteau de lire ce mémoire* » : Apprenez mon bon ami Cousteau que mieux vaut prévoir le comportement d'une mouette car sinon tant pis pour votre bonnet.

Nous conseillons dorénavant au Commandant :

- d'estimer la destination des mouettes en se posant la question suivante : suis-je la cible d'une mouette ?

- si oui, d'estimer le temps de vol de la mouette pour penser à enfoncer son bonnet au moment de la rencontre.

- d'étudier par quelle route la mouette va l'atteindre afin d'assouvir sa curiosité intellectuelle d'explorateur.

- de se poser la question suivante durant le commentaire du film, s'il n'est pas la cible d'une mouette : pour une mouette donnée, quel est le poisson destiné à être son repas d'un instant ?

Laissons à présent la parole à Philippe Vanheege pour formaliser (plus sérieusement) cette fable :

Fixons le contexte de l'étude qui a fait l'objet du développement du travail de recherche présenté dans ce mémoire de thèse.

Nous nous plaçons dans le contexte de  $n$  points se déplaçant dans un plan, indépendamment ou non les uns des autres. Nous nous intéressons au problème de l'évolution spatiale d'un ou plusieurs mobiles cherchant à rallier un des  $n$  points du plan. Les informations dont nous disposons sont celles dont dispose un observateur à l'instant  $t$  et ayant enregistré la cinématique de l'évolution de la situation spatiale de l'instant initial  $t_0$  à l'instant  $t$  avec  $t_0 < t$ .

L'étude s'intéresse aux couples (point, mobile)  $(P_i, M_j)$  et tente d'apporter une réponse aux questions suivantes :

- pour un couple  $(P_i, M_j)$ , le mobile  $M_j$  va-t-il atteindre le point  $P_i$  ?
- si le mobile  $M_j$  atteint le point  $P_i$ , nous notons  $P_i = P_c = C$ , combien de temps met-il à atteindre ce point cible  $C$ , appelé aussi cible  $C$  ?
- si le mobile  $M_j$  atteint le point cible  $C$ , par quelle route va-t-il rallier sa cible ?
- si pour le couple  $(P_i, M_j)$ , la réponse à la première question est non, la question se reformule ainsi : existe-t-il un indice  $i$  tel que  $i = c$  et  $P_i = P_c = C$  pour que la réponse à la première question soit oui ?

Pour pouvoir restreindre notre champ d'investigation à la construction d'une solution au problème précédent, plusieurs hypothèses sont formulées, à savoir :

- le nombre de points  $P_i$  est fini et connu.
- le nombre de mobiles  $M_j$  est fini et connu.
- le mobile se déplace à vitesse constante.
- un point se déplace à vitesse constante et celle-ci demeure très faible devant la vitesse du mobile.
- le mobile est guidé par une loi de navigation proportionnelle et la cible est fixée au départ.

Les informations cinématiques caractéristiques de l'évolution de la situation spatiale sont fournies à notre observateur par l'intermédiaire de senseurs qui ont certaines caractéristiques par rapport aux résultats qu'ils fournissent.

N.B. : L'observateur peut être un point  $P_i$ . La preuve : Cousteau traverse le banc de poissons tout en filmant la scène et se trouve être par la même occasion la cible d'une mouette.

Les différents paramètres du problème décrits ci-dessus (nombre de mobiles, de points, distances, vitesses, caractéristiques des senseurs...) sont quantifiés dans ce mémoire lorsque cela est nécessaire.

La construction d'une solution au problème a fait l'objet de trois thèses :

- la thèse de Emmanuel DUFLOS a pour but d'apporter une contribution à la solution en étudiant, dans une approche modélisatrice, les lois de guidage et en mettant en évidence des caractéristiques cinématiques de ces lois [DUF 95].

- la thèse de Emmanuel DRUON a pour but d'apporter une contribution à la solution en étudiant les apports de la logique floue à la résolution du problème [DRU 95].

- la thèse de Vlady BOULET, présentée dans ce mémoire, a pour but d'apporter une contribution à la solution en étudiant les aspects commandes.

## Principales notations

$M$  : mobile

$C$  : point cible ou cible

$P_i$  : point  $i$  ou point cible potentielle  $i$  ou encore cible potentielle  $i$  ( $P_i = C_i$ )

$r$  : distance entre le mobile  $M$  et la cible  $C$ ,  $r = MC$

$\mathbf{u}$  : vecteur unitaire,  $\mathbf{MC} = r \mathbf{u}$

$\mathbf{v}$  : vecteur unitaire orthogonal à  $\mathbf{u}$  (sens direct)

$\mathbf{V}_M, \mathbf{V}_C$  : vecteur vitesse du mobile  $M$  de norme  $V_M$ , vecteur vitesse de la cible  $C$  de norme  $V_C$

$\mathbf{V}_R$  : vecteur vitesse relative mobile-cible ( $\mathbf{V}_R = \mathbf{V}_M - \mathbf{V}_C$ ) et  $V_{Ru} = -\mathbf{V}_R \cdot \mathbf{u}$

$\delta_M$  : angle entre  $\mathbf{V}_M$  et  $\mathbf{MC}$

$\delta_C$  : angle entre  $\mathbf{V}_C$  et  $\mathbf{MC}$

$\Gamma_C$  : vecteur accélération de la cible  $C$

$\Gamma_M$  : vecteur accélération du mobile  $M$

$\mathbf{U}$  : vecteur accélération relative mobile-cible ( $\mathbf{U} = \Gamma_M - \Gamma_C$ )

$U$  : vecteur commande dans l'espace d'état (accélération relative mobile-cible)

$\Gamma_{MN}$  : vecteur accélération normale du mobile  $M$

$\Gamma_{CN}$  : vecteur accélération normale de la cible  $C$

$\Gamma_M^v$  : accélération latérale du mobile  $M$ , projection de  $\Gamma_M$  sur  $\mathbf{v}$

$\Gamma_M^u$  : accélération longitudinale du mobile  $M$ , projection de  $\Gamma_M$  sur  $\mathbf{u}$

$t_f$  : temps de vol du mobile  $M$

$\theta = t_f - t$  temps de vol restant du mobile  $M$

$\gamma$  : angle entre la référence fixe et le vecteur vitesse  $\mathbf{V}_M$  du mobile  $M$

$\eta$  : angle entre la référence fixe et le vecteur  $\mathbf{MC}$  (angle de visée)

$A$  : constante de navigation proportionnelle classique

$\mu$  : coefficient de navigation proportionnelle classique (C.N.P.C.) avec  $\mu = A - 1$

$a$  : constante de navigation proportionnelle vraie

N.P.C. : sigle de la navigation proportionnelle classique

N.P.V. : sigle de la navigation proportionnelle vraie

# Table des matières

<b>Préface</b> .....	4
<b>Principales notations</b> .....	7
<b>Introduction générale</b> .....	13
<b>Chapitre I : Etude de synthèse sur les lois de guidage classiques</b> .....	16
I.1. Notions générales .....	17
I.1.1. Définition d'une loi de guidage .....	17
I.1.2. Définition de la commande d'un mobile .....	18
I.1.3. Notations employées dans le guidage plan .....	19
I.1.3.1. Paramètres cinématiques .....	19
I.1.3.2. Conditions cinématiques initiales et finales .....	21
I.1.4. Objectif et performances d'une loi de guidage .....	21
I.1.4.1. Expression mathématique de l'objectif des lois de guidage .....	21
I.1.4.2. Critères d'évaluation des performances des lois de guidage .....	21
I.2. Définition des principales lois de guidage classiques .....	22
I.2.1. La navigation proportionnelle plane .....	22
I.2.2. La navigation proportionnelle classique .....	22
I.2.3. La navigation proportionnelle vraie .....	24
I.2.4. La navigation proportionnelle vraie généralisée .....	25
I.3. La navigation proportionnelle classique .....	27
I.3.1. Equations cinématiques .....	27
I.3.2. Problème lié à l'intégration des équations cinématiques .....	27
I.3.3. Capacité à provoquer la rencontre selon Guelman .....	27
I.3.3.1. Comportement de $V_{Ru}$ et $V_{Rv}$ .....	27
I.3.3.2. Définitions.....	29
I.3.3.3. Solution particulière du système différentiel définissant la trajectoire.....	30
I.3.3.4. Etude de la rencontre .....	30
I.3.3.5. Conclusion et comparaison avec la méthode de Becker .....	31
I.3.4. Evolution de l'accélération du mobile .....	31
I.4. La navigation proportionnelle classique et ses singularités .....	33
I.4.1. La N.P.C. proche de la collision .....	33
I.4.1.1. Conditions pour obtenir la rencontre .....	33
I.4.1.2. Etude de l'accélération du mobile .....	35
I.4.2. La poursuite pure .....	37
I.4.2.1. Equation de la trajectoire .....	37
I.4.2.2. Etude de la rencontre .....	38
I.4.2.3. Etude de l'accélération du mobile .....	38

I.4.2.4. Expression de $t_f$ .....	39
I.4.3. La poursuite avec avance.....	39
I.4.3.1. Equation de la trajectoire .....	39
I.4.3.2. Etude de la rencontre .....	40
I.4.3.3. Etude de l'accélération du mobile.....	41
I.4.4. La collision .....	42
I.4.4.1. Equation de la trajectoire .....	42
I.4.4.2. Etude de la rencontre .....	42
I.4.4.3. Etude de l'accélération du mobile .....	43
I.5. La navigation proportionnelle vraie de type 1 .....	43
I.5.1. Capacité à provoquer la rencontre .....	43
I.5.2. Evolution de l'accélération du mobile .....	43
I.6. La navigation proportionnelle vraie de type 2 .....	44
I.6.1. Capacité à provoquer la rencontre .....	44
I.6.2. Evolution de l'accélération du mobile.....	45
I.6.3. N.P.V.2 dépendante des conditions initiales .....	48
I.6.4. Comparaison entre la N.P.V.1 et la N.P.V.2 .....	49
I.7. La navigation proportionnelle vraie généralisée .....	50
I.7.1. Les enjeux de cette famille de lois selon Ghose.....	50
I.7.2. Commentaires sur les lois de N.P.V.G. ....	51
I.8. Conclusion : confrontation des lois de N.P.V., N.P.V.G. et N.P.C. ....	52

## **Chapitre II : Caractérisation d'atteinte de la cible d'un mobile par étude de la commande** .....54

II.1. Scénario de guidage .....	56
II.1.1. Description du scénario et notations .....	56
II.1.2. Notion de phases de guidage initiale et finale .....	56
II.1.3. Critères de minimisation .....	57
II.1.4. Phases optimales initiale et finale du guidage du mobile .....	58
II.2. Présentation de la commande optimale .....	59
II.2.1. Introduction .....	59
II.2.2. Position du problème .....	60
II.3. Modélisation mathématique .....	62
II.3.1. Le scénario de guidage : modèle d'état .....	62
II.3.2. Formulation de la loi de guidage optimale .....	64
II.3.2.1. Choix d'une fonction coût .....	64
II.3.2.2. Résolution analytique générale.....	64
II.3.2.3. Résolution analytique du problème .....	66
II.3.2.4. Etude de deux cas particuliers .....	68
II.3.3. Estimation du temps de vol restant .....	69
II.3.3.1. Introduction .....	69
II.3.3.2. Estimation du temps de vol restant.....	69
II.3.3.3. Estimation du temps de vol restant par la méthode de Riggs ..	72

II.4. Retour vers la loi de navigation proportionnelle vraie .....	74
II.4.1. Passage en coordonnées polaires .....	74
II.4.2. Hypothèse de faibles angles de visée .....	74
II.4.3. Hypothèse sur la vitesse relative .....	75
II.4.4. Comportement du coefficient autoadaptatif .....	77
II.4.4.1. Cas général .....	77
II.4.4.2. Cas particuliers .....	77
II.5. Modélisation de la commande optimale de chaque phase .....	78
II.5.1. Bilan des hypothèses simplificatrices .....	78
II.5.2. Commandes optimales appropriées aux phases de guidage .....	78
II.5.2.1. Phase de guidage finale optimale .....	78
II.5.2.2. Phase de guidage initiale optimale .....	79
II.6. Ecart « commande appliquée - commande optimale » .....	80
II.6.1. Introduction .....	80
II.6.2. Etude de $U$ : la commande appliquée .....	80
II.6.2.1. Comportement lors de la phase finale .....	81
II.6.2.2. Comportement lors de la phase de guidage initiale .....	82
II.6.3. Etude de $\Delta c$ .....	83
II.6.3.1. Comportement lors de la phase finale .....	83
II.6.3.2. Comportement lors de la phase de guidage initiale .....	84
II.6.4. Conclusion sur l'étude de $\Delta c$ .....	84
II.7. Outils de simulation .....	85
II.7.1. Traitement des données .....	85
II.7.2. Filtrage de Kalman .....	86
II.7.2.1. Modèle d'état des trajectoires de type N.P.C .....	86
II.7.2.2. Initialisation du filtre de Kalman .....	87
II.7.2.3. Etude à $V_C \ll V_M$ .....	88
II.8. Simulations .....	88
II.8.1. Scénario de guidage. Analyse des conditions initiales .....	88
II.8.2. Détection de et par simulation des paramètres cinématiques .....	90
II.8.2.1. Influence de $\delta_{M0}$ .....	90
II.8.2.2. Influence de la constante $A$ de N.P.C. ....	92
II.8.3. Simulation de la commande .....	92
II.8.4. Simulation du temps de vol restant .....	94
II.8.5. Simulation du coefficient autoadaptatif .....	95
II.8.5.1. Simulation de $\zeta(t)$ .....	95
II.8.5.2. Simulation de $k_j(t)$ .....	96
II.8.6. Simulation de la commande optimale .....	97
II.8.6.1. Simulation de $\Delta c$ lors de la phase $\phi_2 : \Delta c_2$ .....	97
II.8.6.2. Simulation $\Delta c$ lors de la phase $\phi_1 : \Delta c_1$ .....	98
II.8.7. Conclusion .....	99

<b>Chapitre III : Caractérisation de la cible d'un mobile parmi un nombre fini de cibles potentielles</b> .....	100
III.1. Formalisation du problème inverse .....	101
III.1.1. Retour sur la préface .....	101
III.1.2. Le problème inverse .....	101
III.1.3. Formalisation du problème inverse .....	101
III.2. Etude cinématique de l'environnement multicible .....	102
III.2.1. Environnement d'étude .....	102
III.2.1.1. Equations cinématiques .....	102
III.2.1.2. Définition de $\Theta_i$ .....	105
III.2.1.3. Définition de $\vartheta_i$ .....	106
III.2.2. La N.P.C. vers un point et vue d'un autre .....	106
III.2.3. Etude de la trajectoire du mobile vue de la cible .....	108
III.2.3.1. Etude comportementale de $\Theta_c^T$ .....	108
III.2.3.2. Etude de la direction asymptotique à la rencontre .....	109
III.2.4. Division de l'espace d'environnement .....	110
III.2.4.1. Subdivision engendrée par les tangentes à la trajectoire .....	110
III.2.4.2. Subdivision complémentaire .....	112
III.2.5. Etude comportementale de $\Theta_i^T$ .....	112
III.2.5.1. Evolution de $\eta_i(t)$ .....	112
III.2.5.2. Evolution de $\delta_{Mi}(t)$ .....	113
III.2.5.3. Evolution de $r_i(t)$ .....	115
III.2.5.4. Evolution de $a_i(t)$ .....	115
III.3. Etude de la commande dans le problème inverse .....	117
III.3.1. Etude de la commande vue de la cible .....	117
III.3.2. Etude comportementale de $\Theta_{iT}$ .....	117
III.3.3. Etude comportementale de $\vartheta_i^T$ .....	118
III.3.3.1. Comportement de $U_i$ .....	118
III.3.3.2. Comportement de $\hat{U}_i$ .....	119
III.3.3.3. Comportement de $\Delta C_i$ .....	125
III.4. Critères discriminant la cible des points $P_i$ .....	128
III.4.1. Réduction de l'espace d'environnement .....	128
III.4.2. Comportement de $\vartheta_i^T$ dans l'espace réduit .....	128
III.4.3. Conclusion .....	130
III.5. Simulations .....	130
III.5.1. Outil de simulation .....	130
III.5.2. Scénario de guidage .....	131
III.5.3. Simulations $\Theta_i$ et $\hat{\Theta}_i$ en phase finale .....	132
III.5.3.1. Simulations de $a_i$ et $\delta_{Mi}$ .....	132
III.5.3.2. Simulations de $V_{Rui}$ et $\eta_i$ .....	133
III.5.4. Simulations de $\vartheta_i$ .....	133
III.5.4.1. La commande en phase finale .....	133
III.5.4.2. La commande en phase de guidage initiale.....	134
III.6. Perspective : Détection de la cible par la logique floue .....	136

<b>Conclusion générale.....</b>	<b>138</b>
<b>Bibliographie.....</b>	<b>141</b>
<b>Annexe : A propos de la navigation proportionnelle classique .....</b>	<b>145</b>

# Introduction générale

La fable présentée dans la préface et qui illustre le contexte de l'étude se fait l'écho d'un problème plus général de stratégie.

Deux entités s'affrontent en vue de remporter un enjeu précis. Chaque entité évolue suivant sa propre stratégie qui fixe son comportement. La difficulté que rencontre chaque entité est l'évaluation de la stratégie de l'adversaire tout en masquant ses propres intentions. Ainsi, la fable fait apparaître un problème de poursuite dont l'enjeu de l'attaquant (la mouette) est la minimisation de la distance qui le sépare de l'attaqué (le poisson ou même Cousteau). Notons que l'enjeu de l'attaqué s'oppose à l'enjeu précédent par une maximisation de la distance de séparation. Chaque entité cherche à masquer ses propres intentions et ainsi une mouette décide de surprendre Cousteau, qui faute de temps ne parvient pas à adopter sa propre stratégie en vue de sauvegarder son bonnet.

Plus sérieusement, l'enjeu d'un mobile  $M_j$  est d'atteindre une cible  $C$  parmi les  $n$  points  $P_i$ . Cherchant à atteindre sa cible tout en masquant ses intentions, le mobile emprunte une trajectoire non triviale, la trajectoire étant imposée par une loi de guidage. La stratégie cinématique du mobile repose sur la loi de guidage et il est crucial pour chaque point  $P_i$  de prévoir le comportement du mobile  $M_j$  afin d'adopter un comportement de défense vis-à-vis de cet attaquant.

Deux visions du problème s'opposent et dépendent du point de vue où le problème est observé.

L'approche la plus communément rencontrée dans la littérature repose sur une vision du problème faite depuis le mobile afin d'élaborer une stratégie pour atteindre la cible : nous parlons alors d'un *problème direct*. L'approche se situant au niveau du mobile, elle est basée sur la commande à appliquer à ce dernier afin de rallier la cible dans les meilleures conditions possibles. Différents critères peuvent être utilisés pour parfaire la stratégie d'attaque. Ils ont pour objectif d'élaborer une loi de guidage du mobile, la plus astucieuse possible. Les premiers travaux se situent durant la Seconde Guerre Mondiale [YUA 48] et privilégient souvent un critère de nature cinématique. L'enjeu du mobile, obéissant à ce type de critère, est la minimisation de la distance de passage terminale mobile-cible [MUR 66]. Les lois de guidage qui en découlent sont appelées *lois de guidage classiques*. Deux décennies plus tard, le développement de la théorie de la commande optimale permet de privilégier plusieurs critères de minimisation afin d'élaborer de nouvelles lois de guidage dites avancées ([BRY 69],[LIN 91]). Les lois de navigation proportionnelle apparues initialement comme lois de guidage classiques sont de nos jours encore employées, elles ont l'avantage de posséder certaines propriétés optimales.

L'autre vision du problème, apparemment jamais rencontrée dans la littérature et faisant l'originalité de ce mémoire, est réalisée depuis l'ensemble des points  $P_i$  vers lequel se dirige un mobile  $M_j$ . Nous parlons alors d'un *problème inverse* par opposition au problème direct. Notre objectif est d'anticiper la stratégie cinématique du mobile vue de l'ensemble des points  $P_i$  et donc de prévoir la destination du mobile en répondant aux questions introduites lors de la préface. L'objectif sera atteint lorsqu'une méthode basée sur l'aspect commande du problème fournira une réponse aux questions posées.

Le **premier chapitre** de ce mémoire présente une étude de synthèse sur les lois de guidage classiques. Ce chapitre fait suite à l'hypothèse fondamentale du problème, à savoir le mobile est guidé par une loi de navigation proportionnelle. Cette loi de guidage fait partie d'une famille de lois de guidage classiques fréquemment rencontrée dans la littérature sous diverses dénominations. Par souci de clarté, nous présentons une étude de synthèse critique sur les lois de guidage classiques avec un souci d'unification des notations. Deux classes dans cette famille de loi de guidage apparaissent : la *navigation proportionnelle classique* et la *navigation proportionnelle vraie*. Seule la navigation proportionnelle classique présente l'avantage d'avoir l'assurance de la rencontre entre le mobile et la cible pour des conditions initiales quelconques. Nous retiendrons cette classe de loi de navigation proportionnelle dans la suite du mémoire.

Le **deuxième chapitre** se place dans le contexte du problème direct. Nous recherchons une caractérisation d'atteinte de la cible d'un mobile, le mobile étant soumis à une loi de navigation proportionnelle classique et ce par étude de la commande optimale. L'étude de la commande optimale permet de montrer que la commande du mobile soumis à une loi de guidage

dite classique présente des caractéristiques optimales suivant des critères qui seront définis. A partir de ce constat, nous créons une variable de commande basée sur la différence entre les expressions de la commande du mobile et de la commande optimale suivant des critères donnés. L'étude du comportement de cette variable apparaît comme une caractérisation d'atteinte de la cible du mobile.

Le **troisième chapitre** se place dans le contexte du problème inverse et a pour but de caractériser, parmi un nombre fini de cibles potentielles, la cible d'un mobile soumis à une loi de navigation proportionnelle classique. Basé sur le comportement des variables de commande introduites dans le problème direct mais maintenant vues des cibles potentielles, ce chapitre montre le caractère unique du comportement des variables du problème direct et retrouve ce comportement dans le problème inverse lorsque l'observation est faite depuis la cible du mobile : la détection de la cible du mobile en découle donc immédiatement.

Afin d'illustrer les comportements théoriques des variables du problème, la fin de chaque chapitre donne lieu à une étape de **simulations**. Nous traitons les paramètres du problème replacés dans la réalité, c'est à dire dans un univers bruité. Le filtrage de Kalman étendu discret est présenté pour la résolution de problèmes liés aux bruits de mesure générés par les senseurs de position et de vitesse.

# Chapitre I : Etude de synthèse sur les lois de guidage classiques

## Introduction

L'étude de la cible d'un mobile qui se déplace sans intervention humaine nécessite la maîtrise de la notion de « guidage ». Ce terme, trop général au premier abord, regroupe de nombreuses disciplines avec de très larges champs d'applications. La démarche que nous décidons d'entreprendre est axée sur l'étude des lois de guidage de base, à savoir les *Lois de Guidage Classiques* (L.G.C.). La maîtrise de ces lois nous apparaît essentielle pour une bonne compréhension de la notion de guidage en général. La principale difficulté que rencontre toute personne intéressée par ces lois de guidage repose dans la disparité des notations utilisées dans la littérature. Les nombreuses publications concernant ce sujet ont pour but d'être utilisées dans diverses applications, elles peuvent alors provoquer chez le lecteur une certaine gêne dans la compréhension des propriétés et de la finalité de ces lois.

L'étude qui suit se présente comme une étude de synthèse critique sur les L.G.C. avec un souci d'unification des notations. Le lecteur concerné par ce domaine d'étude peut y trouver la formalisation mathématique des principales lois avec l'assurance d'avoir ou non le point de rencontre suivant certaines conditions. Une comparaison sur l'efficacité des différentes lois clôt le chapitre.

## I.1. Notions générales

### I.1.1 Définition d'une loi de guidage

Un mobile aérien guidé, comme tout mobile guidé, est un mobile qui quitte un point de lancement et qui est supposé arriver plus tard sur, ou à proximité d'un point de rendez-vous appelé point cible ou cible. Le guidage d'un mobile peut donc être défini comme suit :

**définition 1:** *Le guidage d'un mobile selon [CAR 89] est l'ensemble des opérations qui permet à ce mobile d'atteindre un point cible et ce en dépit de l'intervention de toutes sortes de perturbations pouvant être de nature aléatoire. L'ensemble des positions successives du mobile s'appelle la trajectoire.*

L'intervention de perturbations aléatoires ne permet pas de limiter la définition du guidage à la simple expression de son objectif : rejoindre le point cible. En effet, la prise en compte de perturbations telles que les perturbations atmosphériques agissant sur le système physique qu'est le mobile, génère un certain nombre de contraintes à respecter lors du guidage. Trois grandes classes de contraintes peuvent être définies : les contraintes cinématiques, les contraintes de précision et les contraintes dynamiques. Nous envisageons succinctement chacune de ces contraintes pour comprendre leurs répercussions sur le guidage du mobile.

*Les contraintes cinématiques :* un mobile guidé vers sa cible voit son centre de gravité  $G$  suivre une trajectoire qui le conduit à proximité du point cible. Si, par exemple, la trajectoire ainsi définie est trop longue, il se peut que le mobile ne puisse jamais atteindre le point cible par simple manque de carburant.

*Les contraintes de précision :* la connaissance du milieu extérieur au mobile est nécessaire au guidage. En effet, il est évident que la position du point cible doit être connue pour pouvoir atteindre celui-ci. Cette connaissance du milieu extérieur se fait en fait par l'intermédiaire de capteurs (appelés aussi senseurs) qui donnent une image déformée dite bruitée, de la réalité. La position du point cible n'est donc jamais connue de façon exacte.

*Les contraintes dynamiques :* le mobile est sans cesse soumis à un certain nombre de forces qui peuvent rendre son comportement instable autour de  $G$ . Cette instabilité peut avoir des répercussions directes sur le mouvement de  $G$  lui-même. Il convient donc de gérer cette instabilité. Le pilotage constitue l'ensemble des opérations visant à stabiliser le comportement du mobile autour de  $G$ .

Nous pouvons distinguer sommairement deux phases lors de la réalisation du guidage d'un mobile.

La première phase, que nous notons phase 1, consiste à étudier le problème simplifié où le mobile est modélisé par son centre de gravité  $G$ . Pour cela, nous négligeons toutes les perturbations pouvant intervenir et nous supposons parfaitement connues toutes les variables qui nous sont utiles (i.e. toutes les mesures sont faites par l'intermédiaire de capteurs parfaits). Il s'agit de déterminer un ensemble de contraintes cinématiques qui permet d'imposer au point  $G$  une trajectoire telle qu'en un temps fini,  $G$  et  $C$  soient confondus : cette situation est appelée la rencontre (ou interception) entre les points  $G$  et  $C$ . **L'ensemble de ces contraintes cinématiques caractérise une loi de guidage.**

La seconde phase, appelée phase 2, consiste à déterminer toutes les actions physiques, aérodynamiques, automatiques et autres qui permettent au centre de gravité  $G$  du mobile physique de suivre une trajectoire moyenne la plus proche possible de celle déterminée dans la phase 1.

### ***1.1.2 Définition de la commande d'un mobile***

Pour imposer un mouvement particulier à un mobile, il suffit de lui appliquer une accélération par l'intermédiaire d'une force dirigée dans la direction voulue.

***définition 2*** : La commande du mobile à un instant donné est définie comme l'accélération fournie au mobile à ce même instant lui imposant une variation de trajectoire déterminée à l'avance.

Autrement dit, nous agissons sur l'accélération du mobile pour lui faire suivre la trajectoire déterminée par l'ensemble des contraintes cinématiques. Physiquement, cette action sur l'accélération se fait par l'intermédiaire d'actionneurs situés sur le mobile.

Seule la phase 1 est étudiée dans ce chapitre. Nous supposons de plus que le mobile  $M$  peut avoir connaissance de son environnement sans aide extérieure :  $M$  est alors dit en autoguidage. Sous cette contrainte, en ne raisonnant que sur des points matériels, nous proposons une étude de synthèse sur les L.G.C.

**Remarque** : Le qualificatif « classiques » pour les lois de guidage s'oppose au qualificatif « optimales » utilisé lorsque nous nous intéressons aux lois de guidage qui trouvent leur origine dans l'application des principes de la commande optimale et donc dans la minimisation d'une fonction coût bien définie. Ce problème d'interception optimale fait l'objet de l'étude du prochain chapitre.

### I.1.3 Notations employées dans le guidage plan

#### I.1.3.1 Paramètres cinématiques

Le guidage en trois dimensions n'est pas utilisé tel quel dans la pratique. Pour faciliter l'implémentation selon [CAR 89], il est préférable d'effectuer le guidage dans deux plans perpendiculaires indépendants, liés au mobile. Un repère orthonormé, attaché au mobile, est utilisé de telle sorte qu'un axe puisse être matérialisé par l'axe longitudinal du mobile. Cet axe est nommé  $(Gx)$ . Les deux autres axes sont définis selon la configuration physique du mobile, ils sont nommés  $(Gy)$  et  $(Gz)$ . La situation géométrique et la situation cinématique sont projetées sur les plans  $(Gxy)$  et  $(Gxz)$ . Nous réalisons le guidage des projections de  $M$  et  $C$  dans chaque plan. L'étude des lois de guidage peut alors se limiter à une étude en deux dimensions.

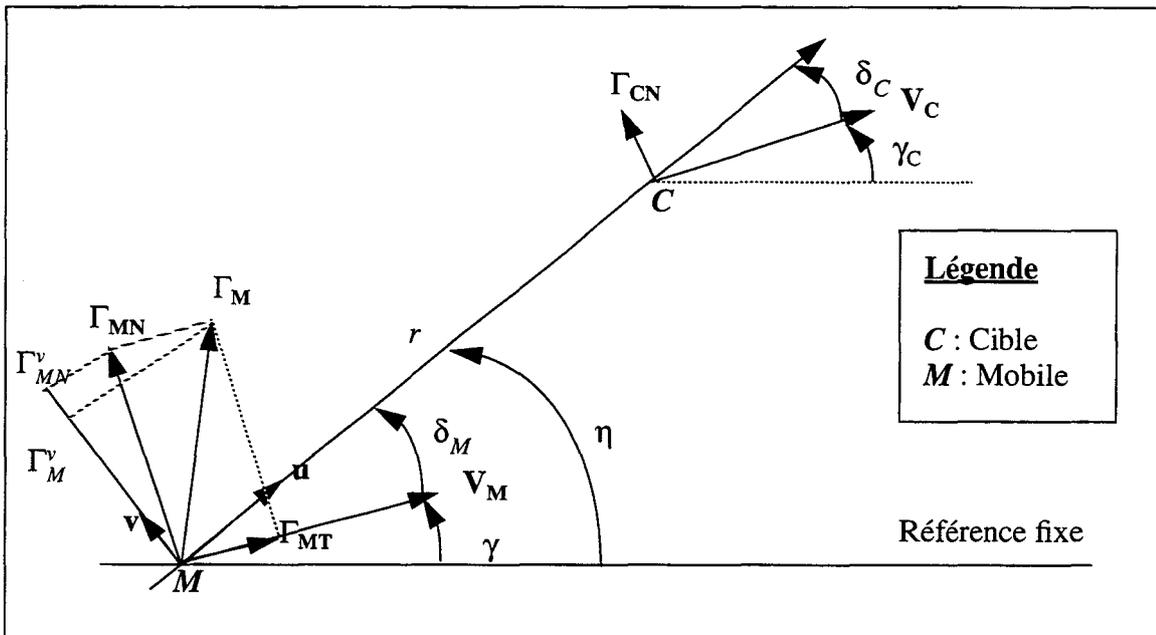


figure I.1 Description cinématique de la position relative entre  $M$  et  $C$  dans le plan

Pour les raisons énoncées au paragraphe précédent, le mobile est assimilé à son centre de gravité  $G$  qui est référencé par la lettre  $M$ . Nous lui appliquons un vecteur vitesse  $V_M$  dont la norme est notée  $V_M$ . Le point cible est référencé par la lettre  $C$  et nous lui appliquons un vecteur vitesse  $V_C$  dont la norme est notée  $V_C$ .

Sur la figure I.1,  $\delta_M$  fait référence à l'angle entre  $V_M$  et la droite  $(MC)$  appelée ligne de visée mobile-cible. De même,  $\delta_C$  fait référence à l'angle entre  $V_C$  et la droite  $(MC)$ .  $\gamma$  et  $\gamma_C$  font respectivement référence à l'angle que fait la référence fixe avec chacun des vecteurs  $V_M$  et  $V_C$ . Il existe les relations suivantes entre ces angles :

$$\eta = \gamma + \delta_M, \quad (I.1)$$

$$\eta = \gamma_C + \delta_C. \quad (I.2)$$

Nous avons les équations générales :

$$\mathbf{MC} = r \cdot \mathbf{u}, \quad (I.3)$$

$$\mathbf{V}_C - \mathbf{V}_M = \dot{r} \cdot \mathbf{u} + r \cdot \dot{\eta} \cdot \mathbf{v}. \quad (I.4)$$

Nous posons  $\mathbf{V}_R$  le vecteur vitesse relative, la différence  $\mathbf{V}_M - \mathbf{V}_C$ . Nous décidons par la suite de raisonner sur la projection de l'opposé de  $\mathbf{V}_R$  ( $-\mathbf{V}_R$ ) sur les axes  $(M, \mathbf{u})$  et  $(M, \mathbf{v})$ , d'où :

$$V_{Ru} = \dot{r} = (\mathbf{V}_C - \mathbf{V}_M) \cdot \mathbf{u} = V_C \cos \delta_C - V_M \cos \delta_M, \quad (I.5)$$

$$V_{Rv} = r \dot{\eta} = (\mathbf{V}_C - \mathbf{V}_M) \cdot \mathbf{v} = -V_C \sin \delta_C + V_M \sin \delta_M, \quad (I.6)$$

$$\Gamma_C - \Gamma_M = \mathbf{u} \cdot (\ddot{r} - r \cdot \dot{\eta}^2) + \mathbf{v} \cdot (r \cdot \ddot{\eta} + 2\dot{r}\dot{\eta}). \quad (I.7)$$

avec

- $\Gamma_C$  : vecteur accélération de la cible,
- $\Gamma_M$  : vecteur accélération du mobile,
- $\mathbf{U} = \Gamma_M - \Gamma_C$  : vecteur accélération relative mobile-cible,
- $\Gamma_{MN}$  : vecteur accélération normale du mobile,
- $\Gamma_{CN}$  : vecteur accélération normale de la cible,
- $\Gamma_M^v$  : accélération latérale du mobile, projection de  $\Gamma_M$  sur l'axe de vecteur directeur  $\mathbf{v}$ ,
- $\Gamma_M^u$  : accélération longitudinale du mobile, projection de  $\Gamma_M$  sur l'axe de vecteur directeur  $\mathbf{u}$ .

Si l'on se réfère à la description générale du problème que nous désirons traiter, le point cible n'a pas un comportement quelconque : son vecteur vitesse est constant en direction et en module.

**définition 3** : Nous appelons point cible non manoeuvrant un point cible dont le vecteur vitesse  $V_C$  est constant en direction et en module :  $\Gamma_C = \Gamma_{CN} = 0$ .

Lorsque  $C$  est non manoeuvrant, la référence fixe orientée selon le vecteur vitesse de la cible donne :

$$\delta_C = \eta. \quad (I.8)$$

Les équations (I.5) et (I.6) ont alors la forme suivante :

$$V_{Ru} = \dot{r} = -V_M \cos \delta_M + V_C \cos \eta, \quad (\text{I.9})$$

$$V_{Rv} = r\dot{\eta} = V_M \sin \delta_M - V_C \sin \eta. \quad (\text{I.10})$$

### ***1.1.3.2 Conditions cinématiques initiales et finales***

Il est nécessaire d'introduire quelques notations couramment utilisées par la suite. L'instant auquel le mobile débute sa trajectoire est noté  $t_0$  et appelé *instant initial*. L'instant auquel il termine sa trajectoire est noté  $t_f$  et appelé *instant final* (ou *instant d'interception*). A l'instant  $t_0$ , les valeurs des paramètres cinématiques sont indexées par  $0$ . A l'instant  $t_f$ , les valeurs des paramètres cinématiques sont indexées par  $f$ .

### ***1.1.4 Objectif et performances d'une loi de guidage***

#### ***1.1.4.1 Expression mathématique de l'objectif des lois de guidage***

Le principal objectif des lois de guidage est de permettre la rencontre des points  $M$  et  $C$ . En utilisant les notations du paragraphe précédent, la rencontre a lieu théoriquement lorsque la distance  $MC$  s'annule. De cette remarque triviale, nous pouvons extraire ce que nous appelons l'expression mathématique de l'objectif des L.G.C. :

$$\exists t_f < \infty \text{ tel que } r(t_f) = 0. \quad (\text{I.11})$$

#### ***1.1.4.2 Critères d'évaluation des performances des lois de guidage***

Une loi de guidage est définie par un ensemble de contraintes cinématiques qui permet au point  $M$  de rencontrer le point  $C$  en un temps fini. Toute trajectoire satisfaisant ces conditions est considérée comme admissible d'un point de vue mathématique. La prise en compte des limitations techniques et mécaniques permet alors de faciliter le choix de la loi de guidage. Nous retenons par la suite deux limitations.

La première est une contrainte de type temporel. Le guidage d'un mobile se faisant par propulsion, celui-ci nécessite du carburant dont la quantité est limitée. La notion de temps fini se trouve par conséquent liée à la quantité de carburant dont dispose le mobile. Une loi qui permettrait une rencontre en dix ans pour un mobile devant, par exemple, se rendre d'Europe en Amérique serait une solution acceptable d'un point de vue mathématique mais très certainement inacceptable d'un point de vue technique.

Une seconde limitation technique importante se situe au niveau des capacités qu'a le mobile à changer de direction. Pour imposer une trajectoire ou un changement de trajectoire à un mobile, il suffit de lui fournir une accélération : la commande du mobile. Or, l'accélération à fournir au mobile à un instant donné est nécessairement finie car la force qui va la générer est elle-même finie. De plus, la capacité de la structure du mobile à supporter des accélérations normales élevées est elle-même limitée. Toutes les trajectoires qui à un instant donné imposent une accélération infinie ou trop élevée sont à exclure.

Deux critères d'évaluation des performances des lois de guidage peuvent être énoncés. Le premier consiste à estimer le temps  $t_f$  nécessaire pour obtenir l'intersection des trajectoires de  $M$  et  $C$  (temps d'interception). Le second critère consiste à estimer l'accélération nécessaire au mobile pour décrire sa trajectoire. Nous tenons à appliquer par la suite ces critères aux L.G.C.

## I.2. Définition des principales lois de guidage classiques

### I.2.1 La navigation proportionnelle plane

**définition 4** : La Navigation Proportionnelle (N.P.) dans le plan est définie comme la loi de guidage qui impose au mobile  $M$  d'avoir à chaque instant une accélération définie par :

$$\Gamma_M^v = -a\dot{r}\dot{\eta} \quad \text{avec } a > 2. \quad (\text{I.12})$$

Il existe dans la littérature plusieurs définitions de lois de N.P. qui dépendent de la direction du vecteur accélération  $\Gamma_M$  (est-il purement latéral ou purement normal ?) et de la manière dont est réalisée la condition (I.12) (le paramètre  $a$  est-il constant ou dépend-il du temps ?).

### I.2.2 La navigation proportionnelle classique

**hypothèse 1** : Le vecteur vitesse du mobile  $M$  est supposé constant en module et il est possible d'agir directement sur  $\Gamma_{MN}$ .

Dans ces conditions, l'accélération totale du mobile est purement normale et égale à  $\Gamma_{MN}$  avec

$$\Gamma_{MN} = V_M \dot{\gamma}. \quad (\text{I.13})$$

Puisque l'accélération est purement normale,  $\Gamma_M^v = \Gamma_{MN}^v$  et dans ces conditions, la relation (I.12) s'écrit :

$$\Gamma_{MN}^v = -a\dot{r}\dot{\eta}. \quad (\text{I.14})$$

Le module de l'accélération totale  $\Gamma_{MN}$  est donc encore égal à :

$$\Gamma_{MN} = \frac{\Gamma_{MN}^v}{\cos \delta_M} = \frac{-a\dot{r}\dot{\eta}}{\cos \delta_M}. \quad (\text{I.15})$$

En égalant les expressions (I.13) et (I.15) de  $\Gamma_{MN}$ , nous obtenons la relation suivante entre  $\dot{\gamma}$  et  $\dot{\eta}$  :

$$\dot{\gamma} = \frac{-a\dot{r}}{V_M \cos \delta_M} \dot{\eta}. \quad (\text{I.16})$$

$a$  est choisi tel qu'à chaque instant :

$$A = \frac{-a\dot{r}}{V_M \cos \delta_M}, \quad (\text{I.17})$$

où  $A$  est une constante. Les relations (I.16) et (I.15) s'écrivent alors respectivement :

$$\dot{\gamma} = A\dot{\eta}, \quad (\text{I.18})$$

$$\Gamma_{MN} = AV_M\dot{\eta}. \quad (\text{I.19})$$

Il est alors possible d'énoncer la définition suivante :

**définition 5** : La Navigation Proportionnelle Classique (N.P.C.) est définie par la loi de guidage qui impose au mobile de suivre une trajectoire à  $V_M$  constant et dont l'accélération en chaque point est définie par l'équation (I.19) (cf. figure I.2). La constante  $A$  est appelée constante de N.P.C.

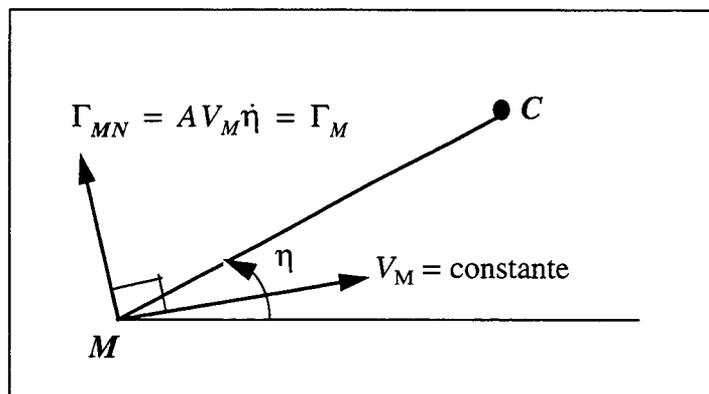


figure I.2 Principe de la N.P.C.

Remarques :

- Dans la littérature anglo-saxonne, il est fait référence à cette loi sous la dénominati-

tion « loi de navigation proportionnelle pure ».

• Il faut nécessairement que  $a > 2$  pour avoir rencontre entre  $M$  et  $C$ . Nous allons étudier par la suite cette loi plus en détail afin de dégager des conditions sur  $A$ .

### 1.2.3 La navigation proportionnelle vraie

**hypothèse 2 :** L'accélération est supposée purement latérale (i.e. colinéaire au vecteur  $\mathbf{v}$  et  $\Gamma_M = \Gamma_M^v \mathbf{v}$ ). Le module du vecteur vitesse n'est donc plus constant. Nous supposons pouvoir agir directement sur la composante  $\Gamma_M^v$  donc sur l'accélération  $\Gamma_M$ . Contrairement à la N.P.C., le coefficient  $a$  est supposé ici constant.

La relation (I.12) s'écrit alors :

$$\Gamma_M = -a\dot{r}\dot{\eta}. \quad (\text{I.20})$$

**définition 6 :** La Navigation Proportionnelle Vraie de type 1 (N.P.V.1) est définie comme la loi de guidage qui impose au mobile de suivre une trajectoire dont l'accélération en chaque point est purement latérale et définie par l'équation (I.20) (cf. figure I.3). Le paramètre  $a$  est constant, il est appelé constante de N.P.V. et il est pris strictement supérieur à 2.

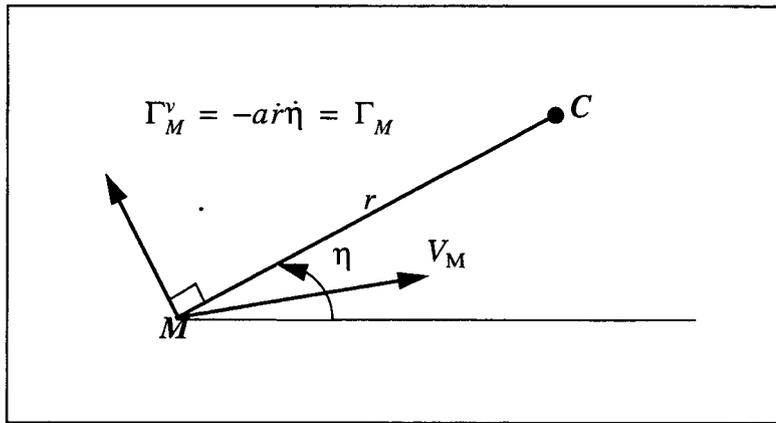


figure I.3 Principe de la N.P.V.1.

La plupart des publications traitant de la navigation proportionnelle vraie ne prennent pas exactement cette définition. L'expression (I.20) est usuellement remplacée par l'une des expressions suivantes :

$$\Gamma_M = -a\dot{r}(t_0)\dot{\eta}, \quad (\text{I.21})$$

ou encore :

$$\Gamma_M = c\dot{\eta}, \quad (\text{I.22})$$

avec  $c$  une constante positive.

Cette dernière définition trouve son origine dans l'approche historique de l'étude de la loi. En effet, les premières publications sur le sujet supposent une situation initiale proche de celle de la collision :  $\dot{r}(t)$  varie peu. La définition (I.21) se trouve donc justifiée. L'étude faite dans [MUR 66] se place d'ailleurs dans ce cadre.

La plupart des publications choisissent néanmoins cette définition même lorsque les conditions initiales sont éloignées d'une situation de collision. Ainsi, Guelman dans [GUE 76] étudie la capacité de la navigation proportionnelle vraie à provoquer une rencontre pour des conditions initiales quelconques lorsque le point cible est non manoeuvrant. Il suppose néanmoins la situation initiale proche de celle de la collision. Sans étude préalable, cette capacité à provoquer la rencontre ne semble pas être vérifiée pour toutes les conditions initiales possibles. Néanmoins, du fait de son importance dans la littérature, cette approche de la N.P.V. donne lieu à la définition de la navigation proportionnelle vraie de type 2.

**définition 7 :** *La Navigation Proportionnelle Vraie de type 2 (N.P.V.2) est définie comme la loi de guidage qui impose au mobile de suivre une trajectoire dont l'accélération en chaque point est purement latérale et définie par l'équation (I.21) ou (I.22) (cf figure I.4). Dans le premier cas, la N.P.V.2 est dite dépendante des conditions initiales.*

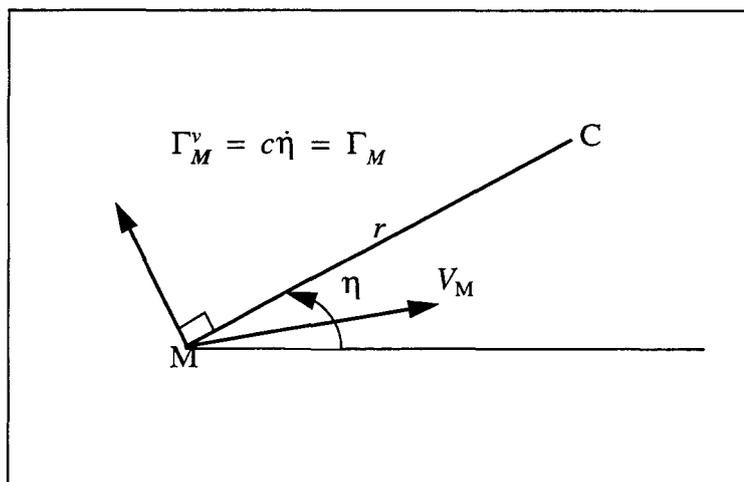


figure I.4 Principe de la N.P.V.2.

### I.2.4 La navigation proportionnelle vraie généralisée

La N.P.V.2 ne permet pas la rencontre entre  $M$  et  $C$  pour des conditions initiales quelconques. L'ensemble des conditions initiales admissibles est en fait très restreint. Afin d'agrandir cet ensemble, nous introduisons une nouvelle hypothèse qui sera justifiée par la suite. Elle se trouve à l'origine de la définition des lois dites de navigation proportionnelle vraie généralisée selon [SHU 88]. Nous nous limitons à la définition de la navigation proportionnelle généralisée de type 1.

**hypothèse 3** : L'accélération totale est continuellement orthogonale à une droite fixe qui fait un angle  $\psi$  avec la droite (MC).

Suite à cette hypothèse, nous énonçons la définition suivante :

**définition 8** : La Navigation Proportionnelle Vraie Généralisée de type 1 (N.P.V.G.1) est définie comme la loi de guidage qui sous l'hypothèse 3 impose à la trajectoire du mobile des accélérations longitudinale et latérale définies par :

$$\Gamma_M^u = c_1 \dot{\eta} \text{ et } \Gamma_M^v = c_2 \dot{\eta} \text{ avec } c_1 \text{ et } c_2 \text{ des constantes.} \quad (\text{I.23})$$

Remarque : L'accélération totale est alors définie par :

$$\Gamma_M = c \dot{\eta}, \quad (\text{I.24})$$

$c$  étant définie par :

$$c_1 = c \cos \psi \text{ et } c_2 = c \sin \psi. \quad (\text{I.25})$$

Le principe des lois de N.P.V.G. est décrit figure I.5.

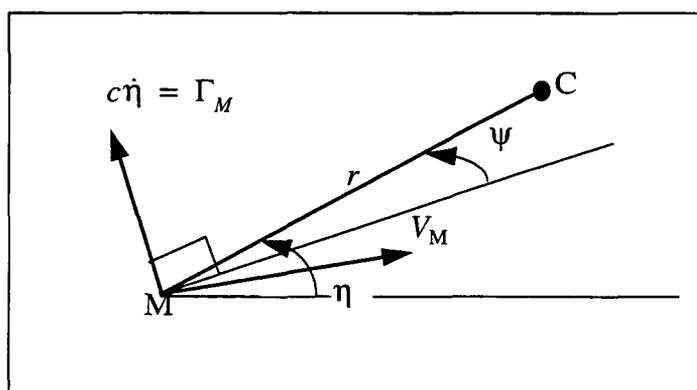


figure I.5 Principe des lois de N.P.V.G.

La définition des principales L.G.C. répertoriées sous forme de classes étant achevée, il nous reste à étudier leurs performances en terme de capacité à provoquer la rencontre en un temps fini et en terme de variations de l'accélération au cours de la trajectoire (cf I.1.4.2).

Ce document se présentant sous la forme d'une étude de synthèse, les principaux résultats ne sont pas démontrés. Néanmoins, certaines notions sont parfois développées comme « les secteurs normaux » lors de l'étude de la N.P.C. Lorsqu'un résultat est la conséquence de l'utilisation de notions mathématiques appartenant à un domaine particulier, il nous semble utile de les intégrer au document afin de familiariser le lecteur avec celles-ci.

### I.3. La navigation proportionnelle classique

#### I.3.1 Equations cinématiques

Les équations cinématiques sont définies par (I.9) et (I.10).

De plus, la définition de la N.P.C. implique que la relation (I.18) soit satisfaite. Soit, puisque

$$\eta = \delta_M + \gamma \quad :$$

$$\dot{\delta}_M = (1 - A) \dot{\eta}. \quad (I.26)$$

Nous notons :

$$\mu = A - 1. \quad (I.27)$$

le paramètre  $\mu$  est appelé *coefficient de N.P.C.* (C.N.P.C.).

La trajectoire de N.P.C. est alors définie par les équations (I.9), (I.10) et (I.26).

#### I.3.2 Problème lié à l'intégration des équations cinématiques

La littérature concernant la N.P.C. dévoile une difficulté majeure liée à cette loi. Cette difficulté repose sur la recherche d'une forme intégrée explicite ou même implicite des équations de la trajectoire (I.9), (I.10) et (I.26). Cette intégration explicite a néanmoins été réalisée en 1990 par Becker dans [BEC 90]. Ce résultat, s'il fait indéniablement avancer l'étude de cette loi de guidage, est néanmoins lourd et difficile à manipuler puisque la solution est donnée sous forme de séries infinies convergentes (cf Annexe : à propos de la navigation proportionnelle classique).

Nous préférons présenter la plupart des résultats issus d'une analyse géométrique et qualitative des équations différentielles qui régissent le mouvement (méthodes de Guelman). Les principaux résultats de Becker sont rappelés et comparés à ceux de Guelman. Une synthèse de la démarche de Becker se trouve en annexe.

#### I.3.3 Capacité à provoquer la rencontre selon Guelman dans [GUE 71]

##### I.3.3.1 Comportement de $V_{Ru}$ et $V_{Rv}$

En intégrant l'équation (I.26) entre  $t_0$  et  $t$ , il vient :

$$\delta_M = k_0 - \mu\eta \text{ avec } k_0 = \delta_{M0} + \mu\eta_0. \quad (I.28)$$

Les équations (I.9) et (I.10) s'écrivent sous la forme :

$$\dot{r} = V_{Ru}(\eta), \quad (I.29)$$

$$r\dot{\eta} = V_{Rv}(\eta). \quad (I.30)$$

En appliquant (I.28),  $V_{Ru}(\eta)$  et  $V_{Rv}(\eta)$  sont définis par :

$$V_{Ru}(\eta) = -V_M \cos(k_0 - \mu\eta) + V_C \cos\eta, \quad (I.31)$$

$$V_{Rv}(\eta) = V_M \sin(k_0 - \mu\eta) - V_C \sin\eta. \quad (I.32)$$

On appelle  $p$  le rapport des vitesses du mobile  $M$  et de la cible  $C$  :

$$p = \frac{V_M}{V_C}. \quad (I.33)$$

Les fonctions  $V_{Ru}(\eta)$  et  $V_{Rv}(\eta)$  normalisées par rapport à  $V_C$  s'écrivent :

$$V_{Ru}^N(\eta) = -p \cos(k_0 - \mu\eta) + \cos\eta, \quad (I.34)$$

$$V_{Rv}^N(\eta) = p \sin(k_0 - \mu\eta) - \sin\eta. \quad (I.35)$$

Nous notons  $\eta_{ui}$  et  $\eta_{vj}$  avec  $(i, j) \in \mathbf{Z}^2$ , les racines successives et respectives des équations (I.34) et (I.35). Trois lemmes rendent compte du comportement de ces racines :

**lemme 1 :** ([GUE 71]) Si  $p > 1$  et si  $\mu \geq 1$  alors les racines  $\eta_{ui}$  et  $\eta_{vj}$  sont alternées sur l'axe des réels :

$$\eta_{ui} < \eta_{vj} < \eta_{u(i+1)} < \eta_{v(j+1)}. \quad (I.36)$$

**lemme 2 :** ([GUE 71]) Si  $p > 1$  et si  $\mu \geq 1$  alors :

$$V_{Ru}^N(\eta_{vj}) \cdot \frac{d}{d\eta}(V_{Rv}^N(\eta_{vj})) > 0. \quad (I.37)$$

**lemme 3 :**

Si  $V_{Ru}^N(\eta_{vj}) < 0$  alors  $\frac{d}{d\eta}(V_{Rv}^N(\eta_{vj})) < 0$  donc  $V_{Rv}^N(\eta)$  est décroissante sur  $[\eta_{ui}, \eta_{u(i+1)}]$ .

Si  $V_{Ru}^N(\eta_{vj}) > 0$  alors  $\frac{d}{d\eta}(V_{Rv}^N(\eta_{vj})) > 0$  donc  $V_{Rv}^N(\eta)$  est croissante sur  $[\eta_{ui}, \eta_{u(i+1)}]$ .

**preuve du lemme 3 :**

Le lemme 1 signifie simplement que l'indice  $j$  des racines de  $V_{Rv}^N(\eta)$  compte le nombre de

changements de signe de  $V_{Ru}^N(\eta)$ . En utilisant cette remarque et l'ordre entre les racines établi par l'équation (I.36), le lemme 2 permet d'obtenir directement le résultat. Le comportement général de  $V_{Ru}^N(\eta)$  et  $V_{Rv}^N(\eta)$  et donc de  $V_{Ru}(\eta)$  et  $V_{Rv}(\eta)$  est représenté figure I.6.

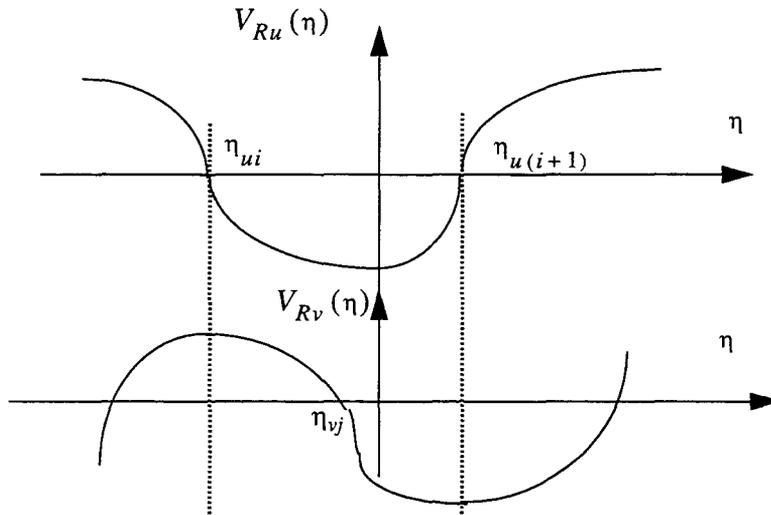


figure I.6 Comportements de  $V_{Ru}(\eta)$  et  $V_{Rv}(\eta)$  en N.P.C.

Avant d'énoncer le théorème permettant de rendre compte de la capacité qu'a la N.P.C. à provoquer la rencontre, la connaissance de certaines définitions et d'un théorème est nécessaire afin de décrire la rencontre.

### I.3.3.2 Définitions dans [NEM 60] et [GUE 71]

D'après les équations (I.29) à (I.32), les fonctions  $V_{Ru}$  et  $V_{Rv}$  peuvent s'écrire sous la forme  $V_{Ru}(r, \eta)$  et  $V_{Rv}(r, \eta)$ .

**définition 9** : Soit dans un repère polaire de centre  $C$ , le rayon d'angle  $\eta_c$ . La direction définie par  $\eta_c$  est dite critique si :

$$\lim_{r \rightarrow 0, \eta \rightarrow \eta_c} \left( \frac{V_{Ru}(r, \eta)}{V_{Rv}(r, \eta)} \right) = 0. \quad (\text{I.38})$$

**définition 10** : Un secteur angulaire  $(C, \eta_1, \eta_2) = \sigma$  est appelé domaine normal si :

- il ne contient qu'une et une seule direction critique,
- la fonction  $r(t)$  est strictement monotone dans  $\sigma$ .

**définition 11** : Un secteur angulaire normal  $\sigma$  est dit de type I si toutes les trajectoires qui coupent ses rayons frontières :

- entrent dans  $\sigma$  lorsque  $t$  croît avec  $\dot{r} < 0$  dans  $\sigma$
- sortent de  $\sigma$  lorsque  $t$  croît avec  $\dot{r} > 0$  dans  $\sigma$ .

**théorème 1** : Si, lorsque  $t$  croît, une trajectoire entre dans un domaine normal de type I alors :

- elle reste dans ce domaine normal,
- elle tend vers l'origine asymptotiquement à la direction critique.

### 1.3.3.3 Solution particulière du système différentiel définissant la trajectoire

Il est immédiat que toute direction constante  $(C, \eta_c)$  (i.e. une droite) vérifiant :

$$V_{Ru}(\eta_c) = 0 \text{ et } V_{Rv}(\eta_c) \neq 0, \quad (\text{I.39})$$

est solution particulière du système (I.29) et (I.30).

### 1.3.3.4 Etude de la rencontre

**lemme 4** : ([GUE 71]) Si  $p > 1$  et si  $\mu \geq 1$ , les secteurs angulaires  $(C, \eta_{u_i}, \eta_{u_{(i+1)}})$  sont des domaines normaux de type I. Les rayons définis par  $\eta_{v_j}$  en sont les directions critiques.

Pour l'étude d'une trajectoire, les domaines normaux de type I peuvent encore être subdivisés en deux sous-types :  $\sigma^1$  et  $\sigma^{-1}$  :

- $\sigma^1$  est un domaine normal dans lequel  $\dot{r} > 0$ ,
- $\sigma^{-1}$  est un domaine normal dans lequel  $\dot{r} < 0$ .

L'application directe de la définition 11 nous amène à la conclusion suivante : une trajectoire débutant dans un domaine normal  $\sigma^1$  quittera  $\sigma^1$  lorsque  $t$  croît, une trajectoire débutant dans un domaine normal  $\sigma^{-1}$  restera dans  $\sigma^{-1}$  lorsque  $t$  croît.

**lemme 5** : ([GUE 71]) Si  $p > 1$  et si  $\mu \geq 1$ , les domaines normaux de type I  $(C, \eta_{u_i}, \eta_{u_{(i+1)}})$  sont alternativement de type  $\sigma^1$  et de type  $\sigma^{-1}$ .

Nous pouvons alors énoncer le théorème qui décrit les capacités de la N.P.C. à provoquer la rencontre.

**théorème 2** : ([GUE 71]) Un mobile commandé par une loi de N.P.C. avec  $p > 1$  et  $\mu \geq 1$ , rencontrera le point cible  $C$  pour toutes les conditions initiales  $(r_0, \eta_0)$  possibles sauf pour un nombre fini d'entre elles. Au moment de la rencontre, le mobile arrive asymptotiquement à une droite de direction polaire  $(C, \eta_f)$  déterminée par les conditions initiales.

**preuve :**

Toutes les directions critiques  $(C, \eta_{vj})$  vérifient les conditions (I.39) et sont donc des trajectoires de N.P.C. Ce sont des courbes intégrales particulières. Si les conditions initiales imposent de se placer sur une de ces courbes intégrales, alors le mobile  $M$  suit une trajectoire rectiligne le long de cette direction et atteint  $C$  si et seulement si  $\dot{r} < 0$ .

Supposons maintenant que les conditions initiales, en position et en vitesse, n'imposent pas de se placer sur une direction critique. Il découle des lemmes 4 et 5 que si une trajectoire débute dans un domaine normal  $(C, \eta_{ui}, \eta_{u(i+1)})$  de type  $\sigma^1$ , alors elle quitte ce domaine pour entrer dans le domaine normal de type  $\sigma^{-1}$  qui lui est juxtaposé. Le point  $M$  rencontre le point  $C$  asymptotiquement à la direction critique du domaine normal de type  $\sigma^{-1}$ .

Si, au contraire, la trajectoire débute dans un domaine normal de type  $\sigma^{-1}$  alors elle reste dans ce domaine normal. Le point  $M$  rencontre le point  $C$  asymptotiquement à la direction critique que celui-ci contient.

**Remarque :** Le théorème montre que la rencontre est possible même si le mobile s'éloigne de la cible  $C$  à l'instant initial.

### ***1.3.3.5 Conclusion et comparaison avec la méthode de Becker dans [BEC 90]***

Il est théoriquement possible d'atteindre la cible  $C$  pour pratiquement n'importe quelles conditions initiales si le rapport des vitesses  $p$  est supérieur à 1 et le C.N.P.C.  $\mu$  est supérieur ou égal à 1. Le théorème 2 donne alors la direction de la rencontre.

La méthode de Becker, décrite en annexe, permet d'aboutir à ce résultat de façon plus directe et plus précise. Il faut néanmoins mettre en oeuvre une méthode de résolution mathématique plus lourde.

Nous pouvons à présent faire une synthèse de l'évolution de l'accélération du mobile selon les méthodes de Guelman et Becker.

### ***1.3.4 Evolution de l'accélération du mobile***

Etant donnée la définition de la N.P.C., l'accélération du mobile  $M$  est directement proportionnelle à  $\dot{\eta}$ . L'étude des variations de l'accélération découle de celles de  $\dot{\eta}$ .

**théorème 3** : ([GUE 71]) Si, le long de la trajectoire, on a :

$$\frac{dV_{Rv}}{dt}(\eta) < V_{Ru}(\eta), \quad (I.40)$$

alors la fonction  $\dot{\eta}$  est une fonction décroissante du temps.

Corollaire : Si  $p > 1$  et si

$$\frac{(A-2)}{2} V_M > V_C, \quad (I.41)$$

alors  $\dot{\eta}$  est une fonction décroissante du temps au voisinage de la rencontre.

Remarque : Si  $A > 4$  alors (I.41) est toujours réalisée.

**théorème 4** : Si le mobile  $M$  débute sa trajectoire dans un domaine  $\sigma^{-1}$  avec  $V_M > \sqrt{2}V_C$  alors le module de l'accélération et donc la valeur absolue de la fonction  $\dot{\eta}$  décroîtront strictement vers zéro.

**preuve** :

Appliquer l'unique théorème démontré dans [GUE 73] au cas d'une cible non manoeuvrante.

La méthode de Becker donnée en annexe permet de retrouver ces résultats de façon plus précise.

Deux paramètres apparaissent primordiaux dans l'étude de la N.P.C. :  $A$  et  $\delta_M$ . La variation des autres paramètres dépendant de la variation de  $A$  et  $\delta_M$ , il apparaît intéressant d'étudier maintenant la N.P.C. quand ces deux paramètres ont des comportements singuliers :

- Proche de la collision ( $a$  et  $A$  sont constants et  $\delta_M$  est proche de zéro) : la constante de N.P.C. notée  $A$  est reliée au coefficient  $a$  défini en (I.12) par l'égalité (I.17). Dans cette égalité,  $A$  est dans le cas général constant alors que  $a$  est variable. Toutes les variables cinématiques étant des fonctions continues du temps, nous pouvons supposer que, proche de la rencontre, l'angle  $\delta_M$  varie peu et que  $\dot{r} = V_{Ru}$  est presque constant. Dans ces conditions, nous pouvons faire l'hypothèse que  $A$  et  $a$  sont constants (voir l'équation (I.17)). Ces hypothèses vont permettre d'étudier plus finement la rencontre entre le mobile  $M$  et la cible  $C$ .

- Cas singulier lorsque la constante  $A$  de N.P.C. est égale à 1 ( $\mu = 0$ ).
- Cas singulier lorsque la constante  $A$  de N.P.C. est infinie ( $\mu = \infty$ ).

## I.4. La navigation proportionnelle classique et ses singularités

### I.4.1 La N.P.C. proche de la collision

#### I.4.1.1 Conditions pour obtenir la rencontre

A proximité de la rencontre, il est possible d'écrire :

$$\eta = \eta_f + \Delta\eta, \quad (\text{I.42})$$

$$\delta_M = \delta_{M_f} + \Delta\delta_M, \quad (\text{I.43})$$

avec  $\Delta\eta$  et  $\Delta\delta_M$  infiniment petits.

remarque :  $\delta_{M_f} = 0$  à la rencontre dans le cas particulier où la vitesse du point cible est nulle.

Les équations (I.29) et (I.30) permettent d'écrire l'équation différentielle suivante en tout point autre que celui de la rencontre :

$$\frac{dr}{r} = \frac{V_{Ru}}{V_{Rv}} d\eta, \quad (\text{I.44})$$

qui en s'intégrant donne :

$$r = r_0 e^{\int_{(\eta_f + \Delta\eta_1)}^{(\eta_f + \Delta\eta_2)} \frac{V_{Ru}}{V_{Rv}} d\eta} \quad \text{avec } \Delta\eta_2 < \Delta\eta_1. \quad (\text{I.45})$$

**proposition 1** : Si  $V_{Ru} < 0$  alors il y a rencontre si et seulement si  $a > 1$ .

**preuve** :

La condition  $V_{Ru} < 0$  sur un intervalle contenant  $t_f$  est une condition nécessaire pour obtenir la rencontre. En effet,  $r$  étant positif par définition, si  $r(t_f)$  s'annule, il est nécessaire que  $r(t)$  soit décroissante et  $V_{Ru} < 0$  sur un intervalle contenant  $t_f$ .

A l'instant de la rencontre,  $V_{Rv} = 0$  et nécessairement :

$$V_M \sin \delta_{M_f} = V_C \sin \eta_f. \quad (\text{I.46})$$

En introduisant les expressions (I.42) et (I.43) de  $\eta$  et  $\delta_M$  dans l'équation différentielle (I.10) et en utilisant un développement de Taylor d'ordre 1 de la fonction sinus en  $\delta_M = \delta_{M_f} + \Delta\delta_M$ ,

nous avons compte-tenu de l'égalité (I.46) :

$$V_{Rv} \equiv (\Delta \delta_M) V_M \cos \delta_{Mf} - (\Delta \eta) V_C \cos \eta_f. \quad (\text{I.47})$$

De plus, en intégrant l'équation (I.26) entre deux instants quelconques :

$$\Delta \delta_M = (1 - A) \Delta \eta. \quad (\text{I.48})$$

L'expression (I.48) de  $\Delta \delta_M$  appliquée à l'expression (I.47) de  $V_{Rv}$  donne compte-tenu de l'expression (I.17) de  $A$  :

$$V_{Rv} \equiv \Delta \eta (a - 1) V_{Ru}. \quad (\text{I.49})$$

En supposant  $V_{Ru}$  constant et en introduisant son expression (I.49) dans l'expression (I.45) de  $r$ , cette dernière devient :

$$r \equiv r_0 e^{\frac{(\ln(\Delta \eta_2) - \ln(\Delta \eta_1))}{a-1}}. \quad (\text{I.50})$$

Le comportement de  $r$  à la rencontre est donné lorsque  $\Delta \eta_2$  tend vers zéro. D'après (I.50), la convergence de  $r$  vers zéro est assurée si et seulement si  $a > 1$ .

*Corollaires :*

- Si à la rencontre,  $\delta_{Mf} = \eta_f = 0$  et si  $a > 1$ , la relation (I.17) entre  $a$  et  $A$  implique :

$$A > 1 - \frac{V_C}{V_M}, \quad (\text{I.51})$$

- Si à la rencontre,  $\eta_f = (\pm\pi)/2$ , la condition  $a > 1$  impose :

$$A > 1, \quad (\text{I.52})$$

- Si à la rencontre les conditions sont telles que  $\delta_{Mf} = 0$  et  $\eta_f = \pi$ , la condition  $a > 1$  impose :

$$A > 1 + \frac{V_C}{V_M}. \quad (\text{I.53})$$

Ces quelques cas particuliers montrent l'influence de la direction de rencontre sur la valeur du C.N.P.C.

**1.4.1.2 Etude de l'accélération du mobile**

Les conditions pour obtenir la rencontre étant étudiées, une analyse de l'accélération est nécessaire. La définition (I.19) de l'accélération impose une analyse préalable de  $\dot{\eta}$ .

**proposition 2 :** Proche de la collision, les variations de  $\dot{\eta}$  en fonction du temps sont données par l'expression :

$$\dot{\eta} = \dot{\eta}_0 \left(1 - \frac{t}{t_f}\right)^{a-2}. \quad (I.54)$$

De plus  $\dot{\eta}$  s'annule si et seulement si  $a > 2$  et  $r = 0$ .

**preuve :**

Si  $V_{Ru}$  est constant sur un intervalle de temps contenant  $t_f$  et si l'on pose  $\theta = t_f - t$  alors l'expression de  $r$  en fonction du temps est égale à :

$$r = V_{Ru} (t - t_f) = -V_{Ru} \theta. \quad (I.55)$$

La composante selon  $\mathbf{v}$  de  $\mathbf{U}$  de l'expression (I.7) est rendue égale à la valeur de  $\Gamma_{MN}^v$  donnée par (I.14). En utilisant l'expression (I.55) de  $r$  et en intégrant le résultat obtenu entre les instants  $t$  et  $t_f$ , nous aboutissons à l'expression (I.54) des variations temporelles de  $\dot{\eta}$ .

La condition nécessaire et suffisante énoncée dans la proposition est une conséquence immédiate de l'annulation des expressions (I.54) et (I.55).

**Remarques :**

- Nous retrouvons la condition  $a > 2$  énoncée lors de la définition de la N.P.
- Sous les hypothèses de l'étude, la situation de collision n'a lieu qu'au moment de la rencontre. Proche de la collision, une condition nécessaire et suffisante pour obtenir la rencontre avec une accélération normale finie est  $a \geq 2$ .

**preuve :**

Le résultat est immédiat suite à la proposition 2.

- Si  $a > 2$ , alors  $\Gamma_{MN}$  est nulle à la rencontre.
- Si  $a = 2$ ,  $\Gamma_{MN}$  est constant sur toute la trajectoire.
- Enfin si  $a < 2$ ,  $\Gamma_{MN}$  est infinie à la rencontre.

Le coefficient  $a$  influence donc le comportement final de l'accélération. Nous nous proposons

de montrer comment les conditions initiales agissent sur la valeur de l'accélération en fin de trajectoire. Pour cela, nous notons  $\delta_{Mc}$  la valeur de  $\delta_M$  qui pour un  $\eta_0$  donné permet de se trouver en situation de collision. Nous appelons  $\Delta\delta_M$  l'écart entre  $\delta_{M0}$  et  $\delta_{Mc}$  :

$$\delta_{M0} = \delta_{Mc} + \Delta\delta_M. \quad (I.56)$$

Si à un instant initial proche de la collision,  $\Delta\delta_M$  est faible, puisque  $V_{Ru}$  est à peu près constant, nous pouvons écrire (avec  $t_0 = 0$ ) :

$$r_0 \cong -V_{Ru}t_f \quad (I.57)$$

**proposition 3** : Lorsque les conditions initiales sont proches de la collision, l'expression temporelle de l'accélération normale est :

$$\Gamma_{MN} = \frac{aV_M}{t_f} \Delta\delta_M \left(1 - \frac{t}{t_f}\right)^{a-2}. \quad (I.58)$$

**preuve :**

A l'instant initial  $t_0 = 0$ , d'après (I.10) et (I.56) :

$$V_{Rv0} = r_0\dot{\eta}_0 = -V_C \sin\eta_0 + V_M \sin(\delta_{Mc} + \Delta\delta_M). \quad (I.59)$$

Lorsque les conditions initiales sont proches d'une situation de collision, nous avons les expressions (I.54) de  $\dot{\eta}$ , (I.56) de  $\delta_{M0}$  et (I.57) de  $r_0$ . En utilisant un développement de Taylor à l'ordre 1 de la fonction sinus en  $\delta_{M0} = \delta_{Mc} + \Delta\delta_M$ , et en supposant à l'instant initial d'après (I.46) que  $V_M \sin\delta_{Mc} \cong V_C \sin\eta_0$ , l'égalité (I.59) donne une expression de  $\dot{\eta}_0$ , à savoir :

$$\dot{\eta}_0 = -\frac{V_M \cos\delta_{Mc}}{V_{Ru}t_f} \Delta\delta_M. \quad (I.60)$$

En introduisant la valeur (I.60) de  $\dot{\eta}_0$  et l'expression (I.54) de  $\dot{\eta}$  dans la définition (I.19) de l'accélération normale, nous avons l'expression (I.58) de cette même accélération, sachant que  $a$  et  $A$  sont reliés par la relation (I.17).

Ce cas singulier de la N.P.C. qui consiste à se placer proche de la collision nous a permis de poser quelques hypothèses afin d'étudier plus finement la rencontre entre le mobile  $M$  et la cible  $C$ .

Nous réalisons à présent une étude de la N.P.C. pour des constantes de N.P.C. singulières. Nous retenons trois cas :  $\mu = 0$  (avec  $\delta_{M0} = 0$  et  $\delta_{Mc} \neq 0$ ) et  $\mu = \infty$ .

### I.4.2 La poursuite pure : $\mu = 0$ et $\delta_{M0} = 0$

Lorsque  $\mu = 0$  dans (I.26) et (I.27) avec  $\delta_{M0} = 0$ , alors tout le long de la trajectoire  $\delta_M = 0$ . L'interprétation géométrique est simple : le vecteur  $\mathbf{V}_M$  pointe constamment vers la cible  $C$ . La définition de cette loi de guidage est connue sous la dénomination de poursuite pure ou "courbe du chien" d'après [CAR 89]. Dans ces conditions, les équations (I.9) et (I.10) deviennent :

$$\dot{r} = -V_M + V_C \cos \eta, \quad (\text{I.61})$$

$$r\dot{\eta} = -V_C \sin \eta. \quad (\text{I.62})$$

#### I.4.2.1 Equation de la trajectoire

**proposition 4** : Lorsque  $\eta_0 \neq l\pi$  ( $l \in \mathbf{Z}$ ), l'équation de la trajectoire est donnée par l'expression :

$$r(\eta) = \frac{r_0 \sin \eta_0}{2 \left(\text{tg} \frac{\eta_0}{2}\right)^p} \frac{\left(\sin \frac{\eta}{2}\right)^{p-1}}{\left(\cos \frac{\eta}{2}\right)^{p+1}}. \quad (\text{I.63})$$

Si en revanche,  $\eta_0 = l\pi$  ( $l \in \mathbf{Z}$ ) alors la trajectoire est une droite.

**preuve :**

Le rapport entre les équations (I.61) et (I.62) en tout point de la trajectoire sauf à la rencontre donne :

$$\frac{dr}{r} = \frac{p - \cos \eta}{\sin \eta} d\eta. \quad (\text{I.64})$$

En intégrant l'équation différentielle (I.64) et, en supposant que  $\eta_0 \neq l\pi$  ( $l \in \mathbf{Z}$ ), nous obtenons l'équation de la trajectoire (I.63).

Si en revanche,  $\eta_0 = l\pi$  ( $l \in \mathbf{Z}$ ), le mobile se trouve dès le début de sa trajectoire en situation où  $\mathbf{V}_R$  est colinéaire à  $\mathbf{u}$ . La courbe intégrale du système (I.61) et (I.62) est particulière : il s'agit d'une trajectoire rectiligne avec  $\dot{\eta} = 0$  ( $\eta$  est par conséquent constant).

### I.4.2.2 Etude de la rencontre

A la rencontre,  $r = 0$ .

- Si  $\eta_0 \neq l\pi$  ( $l \in \mathbf{Z}$ ), d'après l'expression (I.63),  $r$  s'annule si  $\eta = 2l\pi$  avec  $p > 1$ .

La direction pour la rencontre est unique.

- Si  $\eta_0 = l\pi$ , d'après le paragraphe précédent, la trajectoire du mobile est une droite d'angle polaire  $\eta = l\pi$ . Il n'existe donc cette fois que deux directions possibles pour la rencontre.

Une loi de guidage de type poursuite pure impose le nombre de directions possibles pour la rencontre au maximum égal à deux : ce qui est fort limitatif en comparaison de la N.P.C. avec le C.N.P.C. supérieur à 1. Les conditions pour obtenir la rencontre étant définies, il reste à étudier le comportement de l'accélération.

### I.4.2.3 Etude de l'accélération du mobile

**proposition 5** : Lorsque  $\eta_0 \neq l\pi$  ( $l \in \mathbf{Z}$ ) l'accélération normale du mobile est donnée par l'expression suivante :

$$\Gamma_{MN} = -\frac{4V_M V_C \left(\operatorname{tg} \frac{\eta_0}{2}\right)^p \left(\cos \frac{\eta}{2}\right)^{p+2} \left(\sin \frac{\eta}{2}\right)^{2-p}}{(r_0 \sin \eta_0)}. \quad (\text{I.65})$$

L'accélération tend vers zéro au moment de la rencontre si et seulement si  $1 < p < 2$ .

Elle est simplement finie si  $p = 2$ .

**preuve :**

En introduisant les équations (I.62) et (I.63) dans (I.19), nous retrouvons après plusieurs simplifications la forme (I.65) de l'accélération normale. Il faut signaler que le calcul est long et fastidieux à mettre en oeuvre.

Lorsque  $\eta_0 \neq l\pi$  ( $l \in \mathbf{Z}$ ), la rencontre a lieu pour  $\eta = 2l\pi$  ( $l \in \mathbf{Z}$ ) et  $p > 1$  (voir I.4.2.2).

En considérant (I.65), l'accélération tend vers zéro au moment de la rencontre si et seulement si  $2 - p$  est strictement positif donc si et seulement si  $p < 2$ .

Si  $p = 2$  alors le terme  $\left(\sin \frac{\eta}{2}\right)^{2-p}$  est égal à l'unité et l'accélération finale est égale à :

$$\Gamma_{MNf} = -\frac{2V_M^2 \left(\operatorname{tg} \frac{\eta_0}{2}\right)^2}{(r_0 \sin \eta_0)}. \quad (\text{I.66})$$

Il est intéressant de noter qu'il est possible de déterminer une expression du temps final  $t_f$  en fonction des conditions initiales.

#### I.4.2.4 Expression de $t_f$

**proposition 6 :** Un mobile  $M$  débutant sa trajectoire à l'instant  $t_0 = 0$  avec une vitesse telle que  $p > 1$  et des conditions initiales telles que  $\eta_0 \neq l\pi$  ( $l \in \mathbf{Z}$ ), rencontre le point cible  $C$  à l'instant  $t_f$  défini par :

$$t_f = \frac{r_0 \sin \eta_0}{2V_C} \left( \frac{(\operatorname{tg}(\frac{\eta_0}{2}))^{-1}}{p-1} + \frac{(\operatorname{tg}(\frac{\eta_0}{2}))}{p+1} \right). \quad (\text{I.67})$$

#### preuve :

L'équation (I.10) permet d'obtenir une expression de la différentielle  $dt$ . En intégrant cette différentielle et en introduisant l'expression (I.63) de  $r$  dans le résultat de l'intégration, nous obtenons l'expression (I.67) du temps final  $t_f$ .

#### I.4.3 La poursuite avec avance : $\mu = 0$ et $\delta_{M0} \neq 0$

Lorsque  $\mu = 0$  dans (I.26) et avec  $\delta_{M0} \neq 0$ , alors tout le long de la trajectoire nous avons :

$$\delta_M = \delta_{M0}. \quad (\text{I.68})$$

L'interprétation géométrique est simple : le vecteur  $\mathbf{V}_M$  fait un angle constant avec le vecteur  $\mathbf{u}$ . Nous retrouvons la définition d'une loi de guidage connue : la poursuite avec avance [CAR 89]. Dans ces conditions, les équations (I.9) et (I.10) deviennent :

$$\dot{r} = -V_M \cos \delta_{M0} + V_C \cos \eta, \quad (\text{I.69})$$

$$r\dot{\eta} = -V_C \sin \eta + V_M \sin \delta_{M0}. \quad (\text{I.70})$$

##### I.4.3.1 Equation de la trajectoire selon [LOC 55]

#### proposition 7 :

- Lorsque  $(p \sin \delta_{M0})^2 < 1$ , l'équation de la trajectoire est donnée par l'expression :

$$r = r_0 \left( \frac{\sin \eta - p \sin \delta_{M0}}{\sin \eta_0 - p \sin \delta_{M0}} \right)^{\frac{p \cos \delta_{M0}}{\sqrt{1 - (p \sin \delta_{M0})^2}} - 1} \left( \frac{1 - p \sin \delta_{M0} \sin \eta_0 + \cos \eta_0 \sqrt{1 - (p \sin \delta_{M0})^2}}{1 - p \sin \delta_{M0} \sin \eta + \cos \eta \sqrt{1 - (p \sin \delta_{M0})^2}} \right)^{\frac{p \cos \delta_{M0}}{\sqrt{1 - (p \sin \delta_{M0})^2}}} \quad (I.71)$$

• Lorsque  $p \sin \delta_{M0} = 1$ , l'équation de la trajectoire est donnée par l'expression :

$$r = r_0 \left( \frac{1 - \sin \eta_0}{1 - \sin \eta} \right) e^{p \cos \delta_{M0} \left[ \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\eta_0}{2} \right) - \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\eta}{2} \right) \right]} \quad (I.72)$$

• Lorsque  $(p \sin \delta_{M0})^2 > 1$ , l'équation de la trajectoire conduit à une spirale s'enroulant un nombre infini de fois autour de la cible. Le mobile n'atteint donc pas la cible.

**Preuve :**

Le rapport entre les équations (I.69) et (I.70) en tout point de la trajectoire sauf à la rencontre donne :

$$\frac{dr}{r} = \frac{\cos \eta - p \cos \delta_{M0}}{p \sin \delta_{M0} - \sin \eta} d\eta \quad (I.73)$$

En intégrant l'équation différentielle (I.73) lorsque  $(p \sin \delta_{M0})^2 < 1$ , nous obtenons l'équation de la trajectoire (I.71). Lorsque  $p \sin \delta_{M0} = 1$ , l'équation différentielle (I.73) devient :

$$\frac{dr}{r} = \frac{\cos \eta - p \cos \delta_{M0}}{1 - \sin \eta} d\eta \quad (I.74)$$

Nous obtenons suite à l'intégration l'équation (I.72).

### I.4.3.2 Etude de la rencontre

A la rencontre,  $r = 0$  :

• Si  $(p \sin \delta_{M0})^2 < 1$ , d'après l'expression (I.71),  $r$  s'annule lorsque  $\sin \eta = p \sin \delta_{M0}$  soit  $\eta_f = \arcsin(p \sin \delta_{M0})$  ou  $\eta_f = \pi - \arcsin(p \sin \delta_{M0})$  avec  $p > 1$ . Si  $(p \sin \delta_{M0})^2 < 1$  et  $\eta_0 = \arcsin(p \sin \delta_{M0})$  ou  $\eta_0 = \pi - \arcsin(p \sin \delta_{M0})$  alors la trajectoire du mobile est une droite d'angle polaire  $\eta = \eta_0$  d'après (I.70).

• Si  $p \sin \delta_{M0} = 1$ , d'après (I.72),  $r$  s'annule lorsque  $\sin \eta_0 = 1$  : la trajectoire du mobile est une droite d'angle polaire  $\eta_0 = (2l + 1) \frac{\pi}{2}$ .

La condition de rencontre pour la poursuite avec avance dans les cas non triviaux (trajectoire rectiligne) est donc unique :  $p > 1$  avec la limite maximale pour  $\delta_{M0}$  fixée par la condition  $(p \sin \delta_{M0})^2 < 1$ .

Les conditions pour obtenir la rencontre étant définies, il reste à étudier le comportement de l'accélération.

### 1.4.3.3 Etude de l'accélération du mobile selon [LOC 55]

**proposition 8 :** Soit  $\Gamma_{MNf}$  l'accélération à la rencontre, lorsque  $\sin \eta = p \sin \delta_{M0}$  :

- -1-  $\Gamma_{MNf}$  tend vers zéro lorsque  $\frac{p \cos \delta_{M0}}{\sqrt{1 - (p \sin \delta_{M0})^2}} < 2$ ,

- -2-  $\Gamma_{MNf}$  est infinie lorsque  $\frac{p \cos \delta_{M0}}{\sqrt{1 - (p \sin \delta_{M0})^2}} > 2$ ,

- -3-  $\Gamma_{MNf}$  est finie lorsque  $\frac{p \cos \delta_{M0}}{\sqrt{1 - (p \sin \delta_{M0})^2}} = 2$

Pour obtenir la rencontre avec l'accélération normale finie, il faut que :

$$p \leq \frac{2}{\sqrt{1 + 3 (\sin \delta_{M0})^2}} \quad (I.75)$$

**preuve :**

En introduisant (I.70) et (I.71) dans (I.19), nous retrouvons les conditions -1-, -2- et -3- à la rencontre lorsque  $\sin \eta = p \sin \delta_{M0}$ . La condition sur  $p$  pour obtenir la rencontre se déduit de -1- et -3-.

**Remarques :**

- La condition sur  $p$  pour obtenir la rencontre avec l'accélération normale finie lors d'une poursuite avec avance est plus contraignante que pour la poursuite pure ( $p \leq 2$ ).

- L'accélération peut demeurer finie aussi longtemps que  $1 < p \leq 2$ , à condition de choisir convenablement  $\delta_{M0}$  en vérifiant l'équation (I.75). Néanmoins elle est infinie lorsque  $p > 2$ .

#### 1.4.4 La collision : $\mu = \infty$

$\mu = \infty$  dans la définition de la N.P.C. avec une accélération finie impose  $\eta$  nulle.

##### 1.4.4.1 Equation de la trajectoire

Cette loi de navigation impose à la ligne de visée de demeurer constante tout le long de la trajectoire. Dans ces conditions, les équations (I.9) et (I.10) deviennent :

$$\dot{r} = -V_M \cos \delta_M + V_C \cos \eta, \quad (\text{I.76})$$

$$0 = -V_C \sin \eta + V_M \sin \delta_M. \quad (\text{I.77})$$

La vitesse relative est constamment colinéaire au vecteur  $\mathbf{u}$ . Suite à l'intégration de (I.76), nous obtenons :

$$r = r_0 + (V_C \cos \eta - V_M \cos \delta_M) t, \quad (\text{I.78})$$

avec  $\delta_M$  et  $\eta$  constants et :

$$\delta_M = \delta_{M0} = \arcsin \left( \frac{\sin \eta}{p} \right). \quad (\text{I.79})$$

D'après (I.78) et (I.79), nous aboutissons à une poursuite avec avance entraînant une trajectoire rectiligne.

D'après (I.79) :

$$\cos \delta_{M0} = \sqrt{1 - \left( \frac{\sin \eta}{p} \right)^2}. \quad (\text{I.80})$$

L'équation de la trajectoire (I.78) devient :

$$r = r_0 + \left( V_C \cos \eta - V_M \sqrt{1 - \left( \frac{\sin \eta}{p} \right)^2} \right) t. \quad (\text{I.81})$$

Nous sommes donc en situation de collision tout le long de la trajectoire. La loi de guidage correspondante s'appelle la loi de guidage en collision.

##### 1.4.4.2 Etude de la rencontre

La rencontre peut avoir lieu lorsque l'expression (I.81) peut s'annuler. L'annulation se produit lorsque l'expression entre parenthèses est négative, soit  $p > 1$ .

### I.4.4.3 Etude de l'accélération du mobile

Suite à la définition de la collision ( $\eta$  nulle) et celle de l'accélération normale (I.19), nous en déduisons que l'accélération normale est nulle sur toute la trajectoire du mobile.

## I.5. La navigation proportionnelle vraie de type 1 d'après [DHA 93]

Contrairement à la loi de N.P.C., la loi de N.P.V.1 impose de commander le mobile par son accélération latérale selon la définition 6. Nous proposons dans ce qui suit, une synthèse des principaux résultats sur la N.P.V.1 en terme de capacité à provoquer la rencontre et en terme d'accélération nécessaire pour provoquer celle-ci. Cette loi de guidage, beaucoup moins étudiée que la loi de N.P.V.2 présentée par la suite est cependant implémentée dans certains systèmes réels selon [FOS 84]. Les résultats suivants découlent d'une étude n'utilisant pas de notions particulières comme pouvaient l'être les secteur normaux lors de l'étude de la N.P.C. Les résultats vont être énoncés directement et vont mener à une étude comparative entre la N.P.V.1 et la N.P.V.2.

### I.5.1 Capacité à provoquer la rencontre

**théorème 5 :** ([DHA 93]) Une condition nécessaire pour que la rencontre entre un mobile  $M$  commandé par une N.P.V.1 et le point cible  $C$  ait lieu est que les vitesses initiales  $V_{Ru0}$  et  $V_{Rv0}$  vérifient :

$$V_{Rv0} = 0 \text{ et } V_{Ru0} < 0 \text{ si } a \leq 1, \quad (I.82)$$

$$V_{Rv0}^2 \leq (a - 1) V_{Ru0}^2 \text{ et } V_{Ru0} < 0 \text{ si } a > 1. \quad (I.83)$$

Appelons  $(P_{R0})$  le plan des conditions initiales pour  $V_{Ru0}$  et  $V_{Rv0}$ . La condition (I.83) définit dans le plan  $(P_{R0})$  un sous-espace  $(P_{r1})$  appelé plan de rencontre de la N.P.V.1. Ce plan de rencontre, représenté figure I.7 est comparé par la suite avec celui de la N.P.V.2.

### I.5.2 Evolution de l'accélération du mobile

**proposition 9 :** ([DHA 93]) Si  $a > 2$ , l'accélération latérale le long d'une trajectoire de N.P.V.1 a la forme suivante :

$$|\Gamma_M^v| = \frac{a|V_{Rv0}|}{r_0} \left( \frac{\left(1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2a-2}\right) V_{Ru0}^2}{a-1} + V_{Ru0}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{a-2} \quad (I.84)$$

D'après l'expression (I.84) de l'accélération latérale, le mobile  $M$  rencontre le point  $C$  si et seulement si  $a > 2$ .

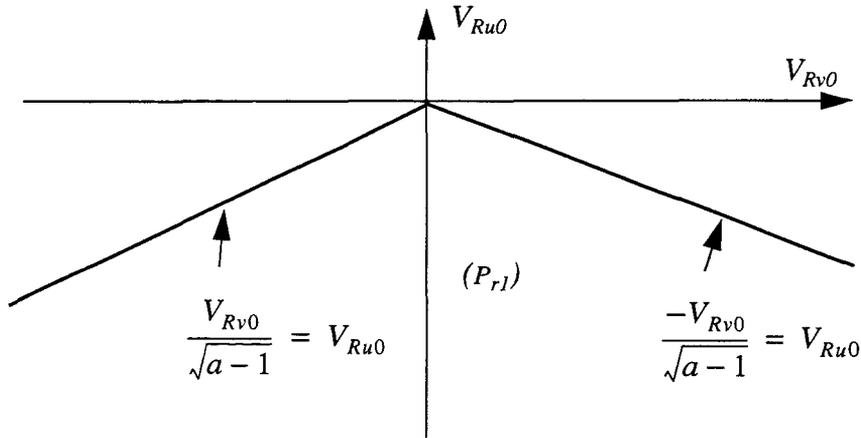


figure I.7 Plan de rencontre de la N.P.V.1.

## I.6. La navigation proportionnelle vraie de type 2

La N.P.V.2 est très peu implémentée mais est néanmoins la plus étudiée des L.G.C. La raison repose sur la possibilité de trouver une solution implicite aux équations différentielles définissant la trajectoire. Les principales propriétés de cette loi sont énoncées dans ce qui suit. Elles permettent de comprendre les avantages de la N.P.V.2 sur la N.P.V.1.

### I.6.1 Capacité à provoquer la rencontre dans [GUE 76]

Le mobile  $M$  suit une trajectoire de N.P.V.2 dans laquelle l'accélération est définie en tout point par l'équation (I.22) que nous rappelons ici :

$$\Gamma_M = c\dot{\eta} \quad (\text{I.85})$$

Le principal résultat concernant la capacité de cette loi à provoquer la rencontre est donné par le théorème suivant :

**théorème 6** : ([GUE 76]) Dans l'espace  $(P_{R0})$  des conditions initiales possibles pour les vitesses  $V_{Ru0}$  et  $V_{Rv0}$ , soit le disque  $(D_{r1})$  d'équation :

$$(V_{Ru0} + c)^2 + V_{Rv0}^2 \leq c^2. \quad (\text{I.86})$$

La rencontre entre le mobile  $M$  et le point cible  $C$  se produit en un temps fini si et seulement si les vitesses initiales  $V_{Ru0}$  et  $V_{Rv0}$  du mobile appartiennent au disque ( $D_{r1}$ ). Le disque ( $D_{r1}$ ) est alors appelé disque de rencontre.

Si les conditions initiales sont satisfaisantes :  $V_{Ru0}$  et  $V_{Rv0}$  appartiennent au disque ( $D_{r1}$ ). Les valeurs des différentes variables du problème à l'instant final sont regroupées dans le théorème suivant :

**théorème 7 :** ([GUE 76]) Sous la condition que le théorème 6 soit vérifié, à l'instant  $t_f$  de la rencontre les quantités suivantes peuvent être définies :

$$t_f = \left( \frac{-r_0}{V_{Ru0}} \right) \left( 1 - \left( \frac{V_{Rv0}^2}{V_{Ru0}(V_{Ru0} + 2c) + V_{Rv0}^2} \right) \right), \quad (I.87)$$

$$V_{Ruf} = -c + \sqrt{(c + V_{Ru0})^2 + V_{Rv0}^2}, \quad (I.88)$$

$$\eta_f = \eta_0 + 2 \operatorname{sign}(\dot{\eta}_0) \operatorname{atg} \left( \sqrt{- (V_{Ru0} + c) + \frac{\sqrt{(c + V_{Ru0})^2 + V_{Rv0}^2}}{(V_{Ru0} + c)} + \sqrt{(c + V_{Ru0})^2 + V_{Rv0}^2}} \right). \quad (I.89)$$

Remarque : La fonction  $\operatorname{sign}(x)$  est égale à +1 si  $x$  est positif et -1 si  $x$  est négatif.

### 1.6.2 Evolution de l'accélération du mobile dans [GUE 76]

L'accélération latérale donc totale d'une N.P.V.2 est proportionnelle à  $\dot{\eta}$ . Les performances en terme d'accélération sont définies par l'étude de  $\dot{\eta}$ . Les principaux résultats concernant cette étude sont présentés ci dessous.

**théorème 8 :** ([GUE 76]) Dans l'espace ( $P_{R0}$ ) des conditions initiales possibles pour les vitesses  $V_{Ru0}$  et  $V_{Rv0}$ , soit le disque ( $D_s$ ) d'équation :

$$(V_{Ru0} + c)^2 + V_{Rv0}^2 \leq \left( \frac{c}{2} \right)^2. \quad (I.90)$$

Si le couple ( $V_{Ru0}, V_{Rv0}$ ) appartient au cercle ( $D_{r1}$ ) et

- -1- se trouve à l'intérieur du disque ( $D_s$ ), alors  $\lim_{t \rightarrow t_f} |\dot{\eta}| = \infty$ ,
- -2- se trouve sur la circonférence du cercle ( $D_s$ ) alors :

$$\lim_{t \rightarrow t_f} \dot{\eta} = \frac{\dot{\eta}_0}{(\mu_1)^2} \text{ avec } \mu_1 = \frac{(V_{Ru0} + c)}{|V_{Rv0}|} \mp \sqrt{\left(\frac{(V_{Ru0} + c)}{|V_{Rv0}|}\right)^2 + 1}}{2 \sqrt{\left(\frac{(V_{Ru0} + c)}{|V_{Rv0}|}\right)^2 + 1}}, \quad (I.91)$$

- -3-  $n$  n'appartient pas au disque ( $D_s$ ) alors  $\lim_{t \rightarrow t_f} \dot{\eta} = 0$ .

Seuls les cas 2 et 3 de ce théorème peuvent mener à une implémentation. Le résultat peut encore être précisé par l'étude complète des variations de  $\dot{\eta}$ .

Considérons dans l'espace ( $P_{R0}$ ), le disque ( $D_d$ ) d'équation :

$$(V_{Ru0} + c)^2 + V_{Rv0}^2 \leq \left(\frac{2c}{3}\right)^2. \quad (I.92)$$

Soient les zones du plan ( $P_{R0}$ ) définies par :

- zone I :  $V_{Ru0} > -c/2$ ,  $(V_{Ru0}, V_{Rv0}) \notin D_d$  et  $(V_{Ru0}, V_{Rv0}) \in D_{r1}$ ,
- zone II :  $V_{Ru0} > -c/2$ ,  $(V_{Ru0}, V_{Rv0}) \in D_d$ ,
- zone III :  $(V_{Ru0}, V_{Rv0}) \in D_s$ ,
- zone IV :  $V_{Ru0} < -c/2$ ,  $(V_{Ru0}, V_{Rv0}) \notin D_s$  et  $(V_{Ru0}, V_{Rv0}) \in D_d$ ,
- zone V :  $V_{Ru0} < -c/2$ ,  $(V_{Ru0}, V_{Rv0}) \notin D_d$  et  $(V_{Ru0}, V_{Rv0}) \in D_{r1}$

Pour une meilleure visualisation, ces 5 zones sont représentées figure I.8.

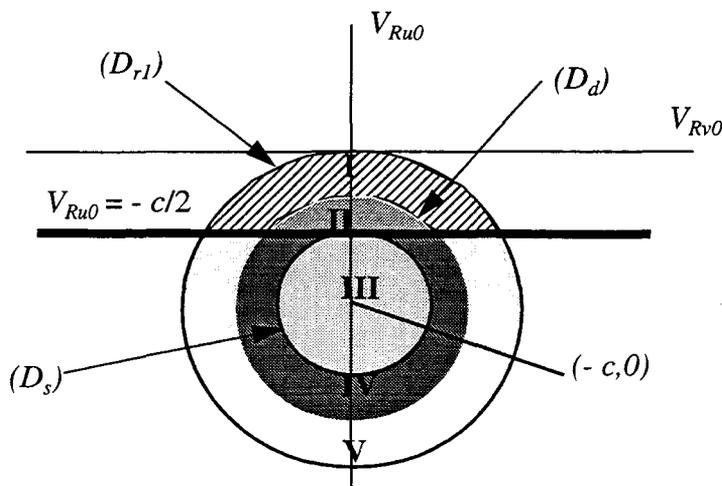


figure I.8 Représentation des différentes zones de comportement de  $\dot{\eta}$

Les variations de  $\dot{\eta}$  en fonction du temps dans les précédentes zones sont énoncées ci-dessous.

**théorème 9 :** ([GUE 76]) Si les conditions initiales  $(V_{Ru0}, V_{Rv0})$  appartiennent au disque  $(D_{r,1})$  et si :

- $(V_{Ru0}, V_{Rv0})$  appartiennent à la zone I, alors

$\dot{\eta}_f = 0, \ddot{\eta}_f = 0$  et  $\text{sign}(\ddot{\eta}) = -\text{sign}(\dot{\eta}_0)$ :  $\eta$  est donc strictement monotone.

- $(V_{Ru0}, V_{Rv0})$  appartiennent à la zone II, alors

$\dot{\eta}_f = 0, \ddot{\eta}_f = -\text{sign}(\dot{\eta}_0) \infty$  et  $\text{sign}(\ddot{\eta}) = -\text{sign}(\dot{\eta}_0)$ :  $\eta$  est donc strictement monotone.

- $(V_{Ru0}, V_{Rv0})$  appartiennent à la zone III, alors

$\dot{\eta}_f = \infty, \ddot{\eta}_f = -\text{sign}(\dot{\eta}_0) \infty$  et  $\text{sign}(\ddot{\eta}) = \text{sign}(\dot{\eta}_0)$ :  $\eta$  est donc strictement monotone.

- $(V_{Ru0}, V_{Rv0})$  appartiennent à la zone IV, alors

$\dot{\eta}_f = 0, \ddot{\eta}_f = -\text{sign}(\dot{\eta}_0) \infty$  et  $\text{sign}(\ddot{\eta}_0) = \text{sign}(\dot{\eta}_0)$ :  $\eta$  admet un extremum.

- $(V_{Ru0}, V_{Rv0})$  appartiennent à la zone V, alors

$\dot{\eta}_f = 0, \ddot{\eta}_f = 0$  et  $\text{sign}(\ddot{\eta}_0) = \text{sign}(\dot{\eta}_0)$ :  $\eta$  admet un extremum.

Afin de mieux visualiser ces comportements, ceux-ci sont représentés figure I.9.

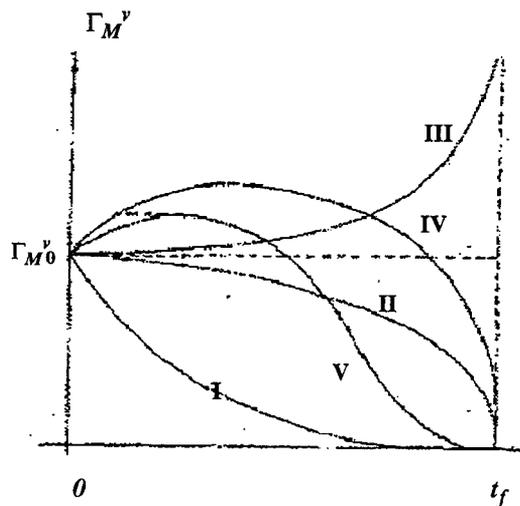


figure I.9 Comportement de l'accélération en fonction de la zone d'appartenance de  $(V_{Ru0}, V_{Rv0})$  ([GUE 76]).

### I.6.3 N.P.V.2 dépendante des conditions initiales selon [GUE 76]

La constante  $c$  est proportionnelle à  $V_{Ru0}$  et peut être écrite :

$$c = -aV_{Ru0}. \quad (I.93)$$

Le premier résultat de l'étude menée par Guelman dans [GUE 76] est qu'il ne peut y avoir rencontre que si :

$$a > 1/2. \quad (I.94)$$

Le second résultat concerne l'ensemble des conditions initiales menant à une rencontre. Cet ensemble est défini dans le théorème qui suit.

**théorème 10** : ([DHA 93]) Dans l'espace  $(P_{R0})$  des conditions initiales possibles pour les vitesses  $V_{Ru0}$  et  $V_{Rv0}$ , soit le sous-espace  $(P_{r2})$  défini par :

$$-V_{Ru0} \geq \frac{|V_{Rv0}|}{\sqrt{2a-1}}. \quad (I.95)$$

La rencontre entre  $M$  et  $C$  se produit en un temps fini si et seulement si les vitesses initiales  $V_{Ru0}$  et  $V_{Rv0}$  du mobile appartiennent à  $(P_{r2})$ . Le sous-espace  $(P_{r2})$  est appelé plan de rencontre de la N.P.V.2 dépendante des conditions initiales.

Introduisons la définition (I.93) dans l'expression (I.86) du disque de rencontre. Compte tenu de l'inégalité (I.94) appliquée à la constante  $c$ , la condition de rencontre du théorème 6 devient celle définie par (I.95). Le demi plan  $(P_{r2})$  est représenté figure I.10.

Le comportement de l'accélération dans les différentes zones précédemment définies est donné en remplaçant  $c$  par son expression (I.93). Nous avons :

- zone I :  $3 < a$  ,
- zone II :  $2 < a \leq 3$ ,
- zone III :  $2/3 < a \leq 2$  ,
- zone IV :  $3/5 < a \leq 2/3$  ,
- zone V :  $1/2 < a \leq 3/5$  .

Les variations de l'accélération sont alors les mêmes que celles définies dans le théorème 9.

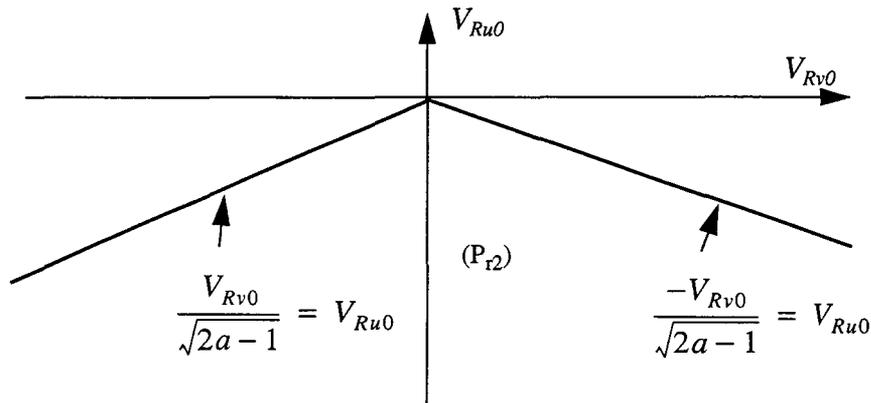


figure I.10 Plan de rencontre de la N.P.V.2 dépendant des conditions initiales

#### I.6.4 Comparaison entre la N.P.V.1 et la N.P.V.2 dans [DHA 93]

Il est intéressant de comparer les performances de la N.P.V.1 et de la N.P.V.2 en terme de capacité à provoquer la rencontre en fonction des conditions initiales. La comparaison entre la N.P.V.1 et la N.P.V.2 dépendante des conditions initiales ne pose pas de problèmes particuliers puisque la N.P.V.2 est une N.P.V.1 dans laquelle la fonction du temps  $V_{Ru}$  est remplacée par sa valeur à l'instant initial. Il est donc possible de comparer les performances de chaque loi pour une même valeur de la constante de N.P.V.

En revanche, la comparaison entre la N.P.V.1 et la N.P.V.2 indépendante des conditions initiales pose problème. En effet, dans la définition de la N.P.V.2 indépendante des conditions initiales, la vitesse  $V_{Ru}$  n'apparaît à aucun moment. Il est donc impossible de faire une étude comparative immédiate. Le problème peut néanmoins être contourné moyennant un artifice de notations.

##### I.6.4.1 Comparaison entre la N.P.V.1 et la N.P.V.2 dépendante des conditions initiales

La capacité à provoquer la rencontre pour les lois de guidage étudiées jusqu'à présent dépend de la position de  $V_{Ru0}$  et  $V_{Rv0}$  dans le plan  $(P_{R0})$  des conditions initiales possibles. Dans le cas de la N.P.V.1,  $V_{Ru0}$  et  $V_{Rv0}$  doivent appartenir au sous-espace  $(P_{r1})$  défini par (I.83). Dans le cas de la N.P.V.2 dépendante des conditions initiales,  $V_{Ru0}$  et  $V_{Rv0}$  doivent appartenir au sous-espace  $(P_{r2})$  défini par (I.95).

La comparaison des définitions (I.83) et (I.95) de ces deux sous-espaces montre que le sous-espace  $(P_{r1})$  est strictement inclus dans le sous-espace  $(P_{r2})$ . La N.P.V.2 dépendante des conditions initiales est donc plus à même à provoquer la rencontre que la N.P.V.1.

### 1.6.4.2 Comparaison entre la N.P.V.1 et la N.P.V.2 indépendante des conditions initiales

La comparaison des deux lois amène à formuler différemment l'accélération pour chaque loi. L'accélération de la N.P.V.2 indépendante des conditions initiales peut s'écrire :

$$\Gamma_M^v = \Gamma_M = \left( \frac{c}{V_{Ru0}} \right) V_{Ru0} \dot{\eta}, \text{ avec } c \text{ constante positive.} \quad (I.96)$$

L'accélération de la N.P.V.1 explicitée par (I.20) s'écrit :

$$\Gamma_M^v = \Gamma_M = \left( \frac{c}{V_{Ru0}} \right) V_{Ru} \dot{\eta}, \text{ avec } c \text{ constante positive.} \quad (I.97)$$

La constante de N.P.V. à considérer est maintenant  $\left( -\frac{c}{V_{Ru0}} \right)$ . L'introduction de cette valeur de la constante dans la définition de  $(P_{r1})$ , le sous-espace de  $(P_{R0})$  qui mène à une rencontre, conduit à un disque  $(D_{r2})$  de centre  $(0, -\frac{c}{2})$  et de rayon  $\frac{c}{2}$ . Dans le cas de la N.P.V.2 indépendante des conditions initiales, le sous-espace de  $(P_{R0})$  qui mène à une rencontre est le disque  $(D_{r1})$  défini au théorème 6. Cette fois encore le sous-espace  $(D_{r2})$  est inclus dans le sous-espace  $(D_{r1})$ . La N.P.V.2 indépendante des conditions initiales est plus à même à provoquer la rencontre que la N.P.V.1.

Les conditions initiales qui mènent à la rencontre sont donc limitées par rapport à la N.P.C. Si le C.N.P.C. est strictement supérieur à un et si le rapport des vitesses  $p$  est supérieur ou égal à un, tout le plan  $(P_{R0})$  est solution sauf la demi-droite  $V_{Ru0} \geq 0, V_{Rv0} = 0$ . Pour tous ces points, la condition pour avoir une rencontre avec une accélération finie ne dépend que du C.N.P.C. alors que dans les lois de N.P.V.1 et N.P.V.2, cette condition dépend encore des conditions initiales. Le sous-espace des conditions initiales qui permet d'obtenir effectivement une rencontre entre le mobile  $M$  et le point cible  $C$  est par là même encore réduit. Cette limitation est à l'origine de l'introduction des lois de N.P.V.G.

## I.7. La navigation proportionnelle vraie généralisée

### 1.7.1 Les enjeux de cette famille de lois selon Ghose dans [GHO 94]

Les lois dites de N.P.V.G. sont définies au paragraphe I.2.4. L'utilisation de cette famille de lois de guidage impose à l'accélération d'être toujours orthogonale à une droite qui fait un angle fixe  $\psi$  avec la droite  $(MC)$ . L'accélération n'est donc plus purement latérale : les accélérations longitudinale et latérale sont définies par (I.23) et (I.25).

Nous n'allons pas étudier en détail cette classe de lois de guidage mais essayer d'établir son origine et sa contribution dans le problème de rencontre du mobile avec un point cible.

Considérons le disque de rencontre ( $D_{r1}$ ) de la N.P.V.2 indépendante des conditions initiales. Une solution possible pour permettre une rencontre pour des points qui ne sont pas dans ce disque consiste simplement à déplacer celui-ci pour qu'il englobe les conditions initiales désirées: il suffit de faire subir au centre du disque une transformation géométrique.

Soit  $D$  le centre du disque ( $D_{r1}$ ) et  $O_i$  l'origine du plan ( $P_{R0}$ ), nous faisons subir une rotation d'angle  $\psi$  au segment  $[O_i D]$  de longueur  $c$ . Il se pose alors la question suivante : quelle action est nécessaire au niveau de la commande du mobile pour obtenir un tel déplacement du disque de rencontre ? Les projections de  $c$  sur les axes  $(O_i, V_{Rv0})$  et  $(O_i, V_{Ru0})$  introduisent les mêmes constantes que celles définies par les égalités (I.25). Déplacer la zone de convergence par le biais d'une rotation d'angle  $\psi$  consiste à imposer une accélération qui est toujours orthogonale à une droite qui fait un angle fixe  $\psi$  avec la droite  $(MC)$ . L'idée directrice qui permet d'augmenter les sous-espaces de rencontre, est donc de paramétrer la direction d'application de l'accélération afin de paramétrer les sous-espaces de rencontre des lois de N.P.V. En faisant ensuite varier le paramètre, nous pouvons espérer augmenter le sous-espace des conditions initiales qui va mener à la rencontre.

### ***1.7.2 Commentaires sur les lois de N.P.V.G.***

Il existe un nombre relativement élevé de définitions des lois de N.P.V.G. Toutes permettent indéniablement une augmentation, par rapport aux lois de N.P.V.1 et N.P.V.2, du sous-espace de  $(P_{R0})$  qui permet une rencontre entre le mobile et le point cible. Néanmoins les développements récents des lois de N.P.V.G. n'ont pas encore abordé de façon approfondie le problème de l'accélération nécessaire à la rencontre. L'expérience des lois de N.P.V. peut nous permettre de supposer qu'il est probable qu'une telle étude réduise le sous-espace des conditions initiales permettant une rencontre effective pour un mobile physique. La N.P.C. reste donc supérieure aux lois de N.P.V. et de N.P.V.G. Elle leur reste même supérieure sur plusieurs points donnant lieu à la conclusion de ce premier chapitre.

## I.8. Conclusion : confrontation des lois de N.P.V., N.P.V.G. et N.P.C.

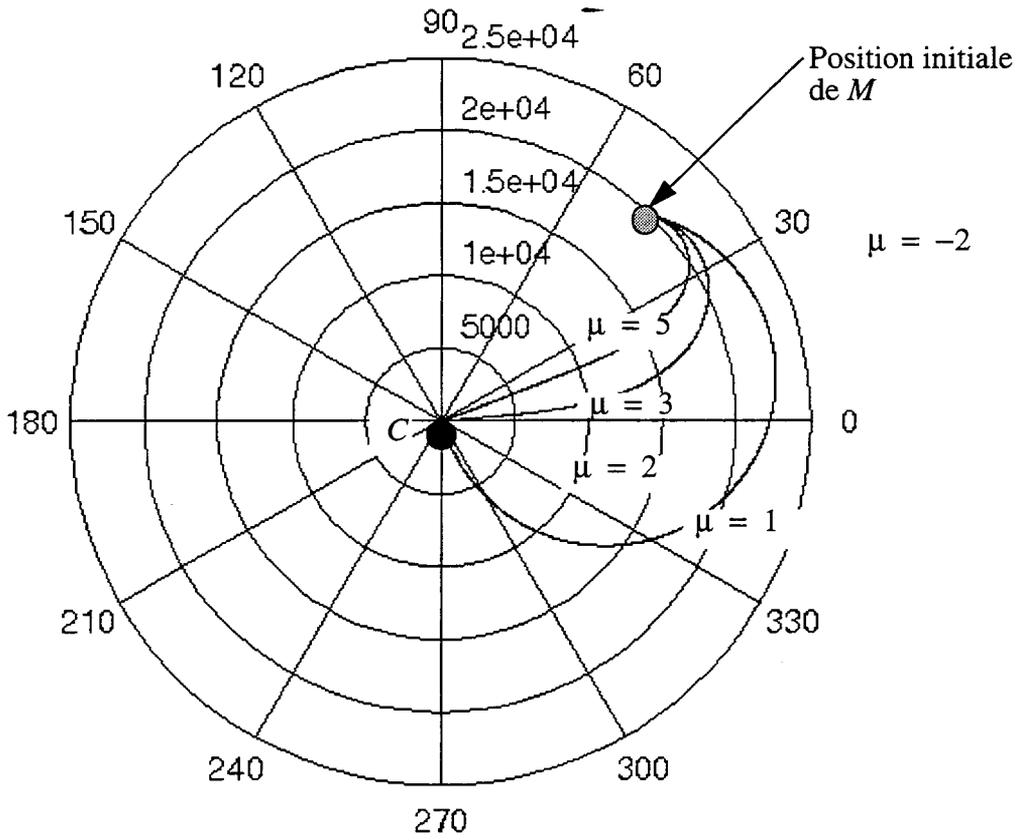
Une première confrontation des trois grandes classes de L.G.C. a permis de faire apparaître la supériorité de la loi de N.P.C. sur les autres lois en ce qui concerne la capacité à provoquer la rencontre en fonction des conditions initiales. Cette supériorité peut être étendue à d'autres domaines de comparaison possibles.

Le principal avantage des lois de N.P.V., qu'elles dépendent ou non des conditions initiales, a longtemps été la possibilité de trouver une expression implicite relativement simple de la trajectoire. Cette possibilité permettait d'avoir accès aux variations de l'accélération durant toute la durée de la trajectoire et à tous les paramètres caractérisant la rencontre y compris l'expression du temps nécessaire pour obtenir celle-ci dans le cas de la N.P.V.2. Dans le cas de la N.P.C., l'expression de la trajectoire peut maintenant être donnée sous la forme d'une série infinie. Cette expression, lourde à manipuler et devant être tronquée lors de toute implémentation existe néanmoins. La N.P.V. semble donc perdre une grande partie de ce qui a longtemps fait son attrait par rapport à la N.P.C.

Le principal inconvénient de la N.P.V. est de ne pas provoquer la rencontre pour toutes les conditions initiales possibles. La rencontre est même limitée à une vitesse  $V_{Ru0}$  négative, ce qui n'est pas le cas de la N.P.C. De plus, des variations importantes de la vitesse (accélération et décélération) sont nécessaires au cours d'une trajectoire de N.P.V. la rendant souvent inimplémentable selon [SHU 90]. Enfin, le fait que l'accélération soit bornée dépend des conditions initiales contrairement, là encore, à la N.P.C. pour laquelle seule la valeur du C.N.P.C. influence le caractère borné de l'accélération. Tous ces inconvénients font qu'en pratique les lois de N.P.V. sont dans la plupart des cas inutilisables sauf si, bien sûr, nous nous trouvons proche d'une situation de collision au début de la trajectoire.

Les lois de N.P.V.G. augmentent le sous-espace des conditions initiales qui permettent la rencontre. Celui-ci exclut néanmoins encore certaines zones de l'espace ( $P_{Ro}$ ) selon [SHU 90]. De plus, le caractère borné de l'accélération réduira vraisemblablement encore ce sous-espace.

Toutes ces raisons font que nous considérons par la suite le mobile  $M$  commandé par une loi de N.P.C. Afin de mieux visualiser les trajectoires que nous allons traiter par la suite, certaines d'entre elles sont représentées figure I.11. Ces trajectoires ont été générées par intégration numérique des équations différentielles (I.9), (I.10) et (I.26). Cette intégration est réalisée sous MATLAB à l'aide de la procédure d'intégration numérique de Runge Kutta 4,5 détaillée dans [HAC 71].



$$\begin{array}{lll}
 V_M = 800 \text{ m.s}^{-1} & V_C = 20 \text{ m.s}^{-1} & p = 40 \\
 r_0 = 20000 \text{ m} & \eta_0 = 45^\circ & \delta_{M_0} = 120^\circ
 \end{array}$$

figure I.11 Trajectoires de N.P.C. dans le repère polaire de centre C.

## Chapitre II : Caractérisation d'atteinte de la cible d'un mobile par étude de la commande

### Introduction

La famille des lois de navigation proportionnelle, introduite dans le chapitre précédent, est la mieux adaptée pour le guidage de mobiles à grande vitesse vers des cibles peu manoeuvrantes et sous des conditions de lancement restreintes (conditions proches de la collision). La navigation proportionnelle classique est désormais choisie pour le guidage du mobile vers la cible pour des conditions initiales quelconques éloignées de la collision.

Le chapitre précédent a permis d'introduire la famille des lois de navigation proportionnelle de façon cinématique, telle qu'elle a été conçue et ce, bien avant le développement de la théorie de la commande optimale dans les années 1960. En 1969, Bryson et Hô dans [BRY 69] ont utilisé la théorie de la commande optimale afin de montrer que la navigation proportionnelle vraie est une loi de guidage optimale qui minimise la distance de passage terminale mobile-cible lorsque le mobile est proche de la collision. Sous des conditions éloignées de la collision, la navigation proportionnelle perd ses performances optimales : de nouvelles lois de guidage optimales dites avancées sont alors élaborées dans [LIN 91].

Le but de ce chapitre est de mettre en oeuvre une caractérisation d'atteinte d'une cible  $C$  par un mobile  $M$  à l'aide de comportements liés à la commande du mobile. Les liens qui existent entre la commande du mobile qui est soumis à une loi de N.P.C. et l'expression de la commande optimale suivant des critères bien définis donnent lieu à une étude précise.

Le scénario de guidage est décomposé en deux phases : la première existant lorsque les conditions initiales sont éloignées de la collision, la seconde dite phase de guidage finale lorsque le mobile se trouve proche de la collision.

Nous introduisons la théorie de la commande optimale appliquée à ce scénario de guidage : il s'agit de déterminer la commande optimale à appliquer au mobile  $M$  pour qu'il rejoigne la cible  $C$ . Ceci implique une modélisation mathématique du scénario de guidage dans un espace d'état et l'introduction d'un critère de minimisation appelé fonction coût. Pour cela, nous associons à chaque phase du scénario une fonction coût dépendant du critère de minimisation choisi pour cette phase. Nous explicitons alors la commande optimale durant ces phases et nous retrouvons, proche de la collision, la N.P.V.2 dont les propriétés optimales avaient été énoncées par Bryson et Hô.

A ce stade de l'étude, nous introduisons la variable de commande  $\Delta c$  représentative de l'écart entre la commande du mobile et celle qui est optimale suivant le critère de minimisation choisi pour une phase donnée. Le comportement de cette variable, durant la phase finale, conduit à l'étude de la différence entre deux navigations proportionnelles. Nous aboutissons ainsi à un comportement distinctif d'un mobile  $M$  soumis à une loi de N.P.C. et atteignant la cible  $C$ . L'originalité de cette étude réside dans le fait que la N.P.C. est également employée durant la phase de guidage initiale, lorsque les conditions initiales sont éloignées de la collision. Dans un tel cas, la loi de guidage du mobile n'est plus optimale suivant le critère de minimisation défini pour cette phase et  $\Delta c$  conduit à une étude de l'écart de la commande du mobile par rapport au cas optimal. C'est l'étude de cet écart durant les deux phases de guidage qui guide notre recherche sur la caractérisation d'atteinte d'une cible  $C$  par un mobile  $M$ .

La simulation d'un tel scénario de guidage et des commandes mises en jeu clôt ce chapitre avec les conclusions qui s'imposent.

## II.1. Scénario de guidage

### II.1.1 Description du scénario et notations

Nous sommes en présence d'un mobile  $M$  se dirigeant vers une cible  $C$ . Le but de ce chapitre est de faire une étude de l'interception optimale mobile-cible suivant certains critères de minimisation. La description du scénario de guidage du mobile est identique à celle du chapitre précédent. Pour la suite de l'étude, les notations utilisées sont les mêmes que celles définies au I.1.3.

Ce problème de guidage d'un mobile vers une cible nécessite la définition de la commande à appliquer au mobile afin de rallier la cible. Nous appelons  $U$  le vecteur commande qui est en fait le vecteur accélération relative du mobile par rapport à la cible. Nous distinguons l'accélération cinématique explicitée à l'aide des paramètres cinématiques de l'accélération supplémentaire dite dynamique à appliquer au mobile pour contrer les perturbations et pour rallier la consigne considérée qui est l'accélération cinématique.

***hypothèse 1*** : La cible n'est pas manoeuvrante et  $\Gamma_C = \Gamma_{CN} = 0$  suite à la définition 3 de I.1.3

Suite à l'hypothèse 1:

$$U = \Gamma_M \quad (II.1)$$

L'hypothèse d'une cible non manoeuvrante est néanmoins restrictive d'après quelques exemples de la littérature ([SIN 71],[GUE 72], [GUE 73], [ARB 69], [RUS 89], [LAN 91]).

***hypothèse 2*** : Nous considérons une vitesse de cible très petite devant celle du mobile ( $V_C \ll V_M$ ). Dans une première approximation, nous considérons la vitesse de la cible nulle ( $V_C = 0$ ).

L'hypothèse 2 permet d'obtenir un scénario particulier mais plus réaliste suite à la restriction imposée par l'hypothèse 1.

### II.1.2 Notion de phases de guidage initiale et finale

L'étude de synthèse sur les lois de guidage classiques nous permet d'affirmer que le guidage d'un mobile vers une cible revient à amener le mobile vers la cible dans des conditions de collision, c'est-à-dire à diriger le vecteur vitesse relative mobile-cible vers la cible. Dans le cas d'un point cible vérifiant l'hypothèse 2, la condition de collision a lieu quand le vecteur vitesse du mobile pointe sur la cible. Ce bref aperçu du comportement du mobile qui consiste à se diriger vers la cible et à se placer dans des conditions proches de la situation de collision montre

l'importance des conditions initiales du scénario par rapport aux conditions de collision.

Ainsi, la recherche d'un guidage optimal conduit à envisager une phase de guidage initiale précédant une phase de guidage finale selon [LEM 73] et [LIN 85]. Durant cette phase de guidage initiale, la navigation doit être telle qu'elle présente le mobile dans des conditions favorables au déroulement de la phase finale, tout en minimisant la dépense d'énergie due aux manoeuvres du mobile. La principale préoccupation qui doit guider la recherche d'une phase de guidage initiale repose sur l'analyse de l'angle  $\delta_M$  initial représentant le dépointage initial du vecteur vitesse du mobile par rapport à la ligne de visée. En effet, les conditions de collision impliquent un angle  $\delta_M$  faible pour un mobile se dirigeant vers un point cible de vitesse nulle. Plus l'angle initial  $\delta_M$  est grand, plus le mobile est éloigné de la condition de collision, donc de la phase de guidage finale : il est donc nécessaire d'étudier plus en détail la phase de guidage initiale.

### ***II.1.3 Critères de minimisation***

De nombreux critères de minimisation peuvent être explicités pour la recherche d'une commande optimale. Néanmoins, il ne faut pas perdre de vue que les plus usités représentent un intérêt certain dans l'implémentation d'un système de guidage. Nous ne proposons pas ici une liste exhaustive de critères mais nous examinons simplement les plus rencontrés dans la littérature et présentant un certain intérêt pour la poursuite de l'étude ([RIS 68], [AXE 70], [NAZ 76], [STO 76], [RIG 79], [BAK 84]).

#### **Critère « énergétique » :**

Une phase de guidage optimale implique la recherche d'un critère de minimisation à appliquer à la commande du mobile donc à l'accélération cinématique. Il est d'ailleurs important de noter l'influence de l'accélération du mobile sur un critère d'optimisation. Notre intérêt s'est porté sur un critère de type « énergétique » défini par l'intégrale du carré de l'accélération du mobile. Cette expression regroupe certains facteurs significatifs lors de l'implémentation du système de guidage. Ce terme est en fait proportionnel à l'énergie dépensée par la commande et sa minimisation peut être considérée comme une contrainte imposée sur l'accélération afin d'obtenir une loi de guidage prévenant les excès de commande parfois difficilement supportés par le mobile. De plus, l'action du carré appliqué sur l'accélération permet de donner une égale importance aux valeurs positives et négatives de l'accélération.

#### **Critère de précision :**

Un deuxième critère de minimisation particulièrement important dans la recherche d'une loi de

guidage optimale doit prendre en compte l'assurance d'avoir la rencontre mobile-cible la plus proche possible, donc d'avoir une distance de passage terminale la plus faible possible. Cette condition de minimisation assure ainsi la précision du guidage.

**Critère temporel :**

Un critère fondamental pour la poursuite de l'étude est une estimation du temps d'interception mobile-cible :  $t_f$ . Nous verrons par la suite qu'il est utile d'avoir une estimation du temps d'interception par un critère de minimisation temporelle.

***II.1.4 Phases optimales initiale et finale du guidage du mobile***

Suite à la définition des principaux critères de minimisation, nous pouvons à présent les inclure dans la réflexion générale de la recherche d'une commande optimale durant la phase de guidage initiale et la phase de guidage finale.

Au cours de la phase de guidage initiale, il s'agit essentiellement de guider le mobile de telle sorte que, moyennant la dépense d'énergie la plus faible possible, il puisse rattraper rapidement le dépointage initial par rapport à la situation de collision, suivre les évolutions significatives de la cible, et seulement elles, et arriver finalement avec le minimum d'erreur de traînage (écart par rapport à la présentation idéale de collision).

La phase de guidage initiale diffère notablement de la phase finale, au cours de laquelle le mobile doit pouvoir contrer le plus rapidement possible tout mouvement de la cible, qu'il s'agisse d'évolutions continues ou de petits mouvement plus ou moins erratiques, sous peine d'engendrer des distances de passage prohibitives. Il faut néanmoins préciser que notre domaine d'étude se limite à des cibles non manoeuvrantes et de vitesse faible par rapport à celle du mobile, cette hypothèse éliminant tous les problèmes de distances de passage prohibitives.

Lors de la phase de guidage finale, la précision est requise pendant tout le vol, la dépense «énergétique» étant secondaire. Dans le cas de la phase initiale, la précision n'est requise que dans les derniers instants mais la dépense «énergétique» doit être minimale.

En résumé, pour la phase de guidage initiale, le meilleur guidage optimal est donc celui qui limite les évolutions du mobile à grande distance (critère «énergétique» minimal) au détriment de la précision. La phase de guidage finale améliore progressivement la précision à mesure que le mobile se rapproche de la cible, au détriment du critère «énergétique».

## II.2. Présentation de la commande optimale

Les principales notions théoriques relatives à la commande optimale rappelées ci-après sont tirées essentiellement des ouvrages de P. BORNE et al ([BOR 90], [BOR 93]) et [BAB 85].

### II.2.1 Introduction

Le problème général de la détermination d'une commande optimale d'un processus peut se résumer comme suit :

*Un processus étant donné et défini par son modèle, trouver parmi les commandes admissibles celle qui permet à la fois :*

- *de vérifier des conditions initiales et finales données ;*
- *de satisfaire diverses contraintes imposées ;*
- *d'optimiser un critère choisi.*

Cette définition appelle quelques commentaires :

*• toute recherche de commande, et a fortiori de commande optimale, nécessite la manipulation d'expressions mathématiques et en particulier de celles caractérisant l'évolution du processus, c'est-à-dire de son modèle. Le choix du modèle s'avère donc primordial. Trop simple, il ne caractérisera pas suffisamment bien le processus, et inutilement sophistiqué, il conduira à des calculs très complexes.*

Le modèle de notre problème se limite au guidage d'un mobile assimilé à un point matériel  $G$  représentant le centre de gravité du mobile et sans constante de temps. Aucune relation dynamique n'est mise en jeu. La vitesse du mobile et celle de la cible sont supposées constantes. Les équations liées à la cinématique et notamment la commande sont rappelées au I.1.3. Nous négligeons les bruits pouvant apparaître comme des perturbations au guidage.

*• la commande est en général soumise à diverses contraintes liées à sa réalisation, elle-même liée au matériel disponible au niveau de la mise en oeuvre.*

La principale contrainte à retenir dans notre problème est une saturation éventuelle de l'accélération du mobile. Une contrainte liée à la consommation de carburant impliquerait un travail sur la dynamique du problème.

- *les variables caractéristiques du processus peuvent être soumises à diverses con-*

*traintes liées aux saturations, à la sécurité, à la construction ...*

Notre problème n'imposera pas de contraintes aux variables d'états.

- *les états initiaux et finaux du processus peuvent également être soumis à diverses contraintes liées aux conditions de départ et à l'objectif à atteindre.*

Les états initiaux de notre problème sont fixés. Concernant le mobile, il s'agit de l'angle de visée initial  $\eta_0$  et du dépointage du vecteur vitesse par rapport à la ligne de visée initiale  $\delta_{M0}$ . La vitesse de la cible étant faible devant celle du mobile, nous pouvons poser en première approximation que la vitesse de la cible est nulle. Concernant les conditions finales, nous avons le choix entre l'état final libre et le temps d'interception fixé, entre l'état final imposé et le temps d'interception libre et entre des conditions aux limites liant l'état final et le temps d'interception par une relation.

- *le critère à optimiser doit correspondre à l'expression d'un choix étudié avec soin, il peut être lié aux valeurs de l'état et de la commande prises à des instants donnés, lié à une intégrale d'une fonction de ces variables sur un intervalle de temps fixé ou non, ou les deux à la fois.*

Suite à l'étude faite au II.1.3 sur les critères de minimisation, nous employons le critère de précision qui est la distance de passage terminale. Ce critère est lié aux valeurs finales de l'état sans intervention de la commande. Nous employons également le critère «énergétique» qui est lié à l'intégrale du carré de la commande sur un intervalle de temps fixé (de l'instant initial au temps final d'interception, temps qui peut être estimé par le critère de minimisation temporel).

- *l'existence d'une commande satisfaisant un objectif donné suppose que le processus est commandable, hypothèse qui sera faite implicitement de façon systématique.*

## II.2.2 Position du problème

Le processus étudié est décrit dans l'espace d'état sous la forme :

$$\dot{x} = f(x, U, t) , \quad (\text{II.2})$$

où  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ ,  $t \in \mathcal{R}$  désigne le temps,  $x \in \mathcal{R}^n$  le vecteur **état**,  $U \in \mathcal{R}^l$  le vecteur **commande** (en italique dans l'espace d'état).

La fonction  $f(.)$  est la fonction d'**évolution** de  $\mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^l \times \mathcal{R}$  dans  $\mathcal{R}^n$ .

Nous pouvons définir le critère à minimiser appelé aussi fonction coût  $J$  :

$$J = g(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} r(x, U, t) dt \quad (\text{II.3})$$

La fonctionnelle  $J$  comprend :

- La partie intégrale  $\int_{t_0}^{t_f} r(x, U, t) dt$  dépendant de  $x(t)$  et de  $U(t)$ .
- Une partie dépendant de l'état final, au temps  $t_f$ , quand il n'est pas imposé.

Nous construisons ensuite le **Hamiltonien** du système appelé encore fonction de Pontryagin :

$$H = \lambda^T f(x, U, t) - r(x, U, t), \quad (\text{II.4})$$

avec  $f$  et  $r$  définis par les équations (II.2) et (II.3) et  $\lambda$  le vecteur adjoint.

Nous appliquons le principe du maximum pour déterminer l'expression de la commande optimale en fonction du vecteur d'état et du vecteur adjoint. La minimisation de la fonction coût  $J$  correspondant à la maximisation du Hamiltonien, la condition d'optimalité est exprimée par :

$$\hat{H} = \max H(U), \text{ soit ici } \frac{\partial H}{\partial U} = 0 \text{ (avec maximum)}. \quad (\text{II.5})$$

Les équations de Pontryagin qui suivent vont permettre de résoudre le système adjoint :

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}. \quad (\text{II.6})$$

Le système composé des équations d'état et des équations adjointes est intégré de façon analytique ou par intégration numérique. Les conditions de transversalité nous aident à résoudre le problème si toutes les variables ne sont pas imposées. Dans notre cas :

- L'état final  $x(t_f) = x_f$  fixé et le temps  $t_f$  libre impliquent comme équations de transversalité :

$$\hat{H}(t_f) = \frac{\partial g}{\partial t} \Big|_{t_f}. \quad (\text{II.7})$$

- L'état final  $x(t_f)$  libre et le temps  $t_f$  fixé impliquent :  $\lambda_i(t_f) = -\frac{\partial g}{\partial x_i}$  à l'instant  $t_f$ .

Nous obtenons la loi de commande optimale en fonction de l'état initial. L'expression de la commande en boucle fermée est obtenue en remplaçant l'instant initial  $t_0$  par l'instant courant

$t$  et  $t_f$  par le temps restant pour l'interception  $\theta = t_f - t$ .

Il faut noter que dans le cas d'un critère quadratique et d'équations vectorielles d'état linéaires, les propriétés des systèmes linéaires permettent la recherche d'une commande optimale en boucle fermée à partir de la solution de l'équation de Riccati matricielle. Nous verrons par la suite, dans la formulation mathématique de notre problème, l'utilité de cette méthode.

## II.3. Modélisation mathématique

### II.3.1 Le scénario de guidage : modèle d'état

Considérons un scénario de guidage où un mobile  $M$  et une cible  $C$  sont situés dans un repère fixe  $(O, X, Y)$  représenté sur la figure II.1 de la même façon que dans [RIG 79].

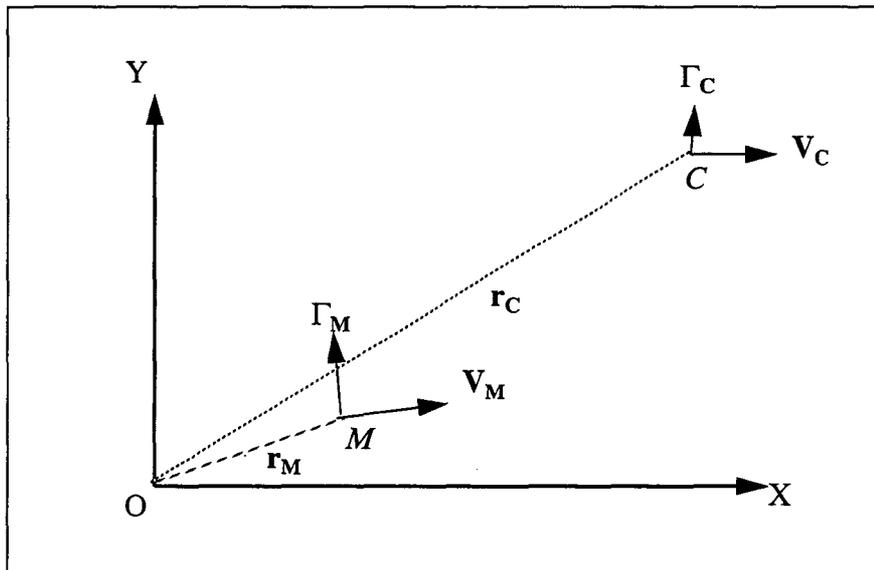


figure II.1 Scénario de guidage en coordonnées cartésiennes

Soient dans le repère  $(O, X, Y)$  :

$r_M, V_M, \Gamma_M$  : les vecteurs position, vitesse et accélération du mobile  $M$  relatifs au repère fixe  $(O, X, Y)$ .

$r_C, V_C, \Gamma_C$  : les vecteurs position, vitesse et accélération de la cible  $C$  relatifs au repère fixe  $(O, X, Y)$ .

Nous définissons un vecteur d'état  $x$  de dimension 4 ayant pour composantes :

- $x_1$  : la position relative de la cible par rapport au mobile dans la direction X,

$$x_1 = x_C - x_M = r_{Cx} - r_{Mx} \quad (\text{II.8})$$

- $x_2$  : la position relative de la cible par rapport au mobile dans la direction Y,

$$x_2 = y_C - y_M = r_{Cy} - r_{My} \quad (\text{II.9})$$

- $x_3$  : la vitesse relative de la cible par rapport au mobile dans la direction X,

$$x_3 = \dot{x}_1 = V_{Cx} - V_{Mx} \quad (\text{II.10})$$

- $x_4$  : la vitesse relative de la cible par rapport au mobile dans la direction Y,

$$x_4 = \dot{x}_2 = V_{Cy} - V_{My} \quad (\text{II.11})$$

Les dérivées des variables d'état donnent :

$$\dot{x}_1 = x_3 \quad (\text{II.12})$$

$$\dot{x}_2 = x_4 \quad (\text{II.13})$$

- $\dot{x}_3$  : l'accélération relative de la cible par rapport au mobile dans la direction X,

$$\dot{x}_3 = \Gamma_{Cx} - \Gamma_{Mx} \quad (\text{II.14})$$

- $\dot{x}_4$  : l'accélération relative de la cible par rapport au mobile dans la direction Y,

$$\dot{x}_4 = \Gamma_{Cy} - \Gamma_{My} \quad (\text{II.15})$$

Suite à l'hypothèse 1, la cible n'est pas manoeuvrante et  $\Gamma_{Cx} = \Gamma_{Cy} = 0$ . L'accélération de la cible dans les directions X et Y est nulle et les vitesses sont constantes en module et en direction dans les directions X et Y.

Suite à l'hypothèse 2,  $V_C = 0$  donc  $V_{Cx} = V_{Cy} = 0$ .

Nous établissons maintenant les équations d'état avec  $U$  le vecteur commande. Les équations (II.12), (II.13), (II.14) et (II.15) définissent un système d'équations qui compte tenu des hypothèses 1 et 2 peut s'écrire sous forme d'équation d'état avec  $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$  :

$$\dot{x} = Ax + BU, \quad (\text{II.16})$$

où :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; U = \begin{bmatrix} \Gamma_{Mx} \\ \Gamma_{My} \end{bmatrix}$$

***hypothèse 3 :*** Une hypothèse implicite a été faite en définissant le vecteur commande  $U$  comme l'accélération du mobile. En effet, cette définition implique que le guidage du mobile est limité au mouvement d'un point matériel le représentant. Le mobile répond ainsi instantanément à la commande qui est définie complètement sur les deux axes  $X$  et  $Y$ .

### II.3.2 Formulation de la loi de guidage optimale

#### II.3.2.1 Choix d'une fonction coût

Afin de modéliser mathématiquement les critères de minimisation explicités au II.1.4, nous introduisons pour la recherche de la commande optimale une fonction coût pondérée prenant en compte à la fois le critère de précision et le critère «énergétique» selon [BAK 84] et [CAR 89]. Nous appelons  $J$  la fonction coût :

$$J = \frac{1}{2} x^T(t_f) S_f x(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} U^T R U dt, \quad (\text{II.17})$$

$$\text{où : } S_f = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; R = \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}. \quad (\text{II.18})$$

Les coefficients de pondération  $\alpha$  et  $\beta$  permettent de privilégier tantôt le critère de précision, tantôt le critère «énergétique», ceci dépendant de la nature de la phase d'évolution (phase de guidage initiale ou finale).

#### II.3.2.2 Résolution analytique générale (détermination d'un bouclage optimal)

Etant données la fonction coût (II.17) et l'équation d'état linéaire (II.16), l'expression de la commande optimale peut être déterminée en résolvant l'équation matricielle de Riccati, compte tenu des rappels théoriques explicités au II.2.2 ([BOR 90], [RIG 79]).

Pour cela, nous construisons le Hamiltonien du système, d'après (II.4) :

$$\hat{H} = \lambda^T A x + \lambda^T B U - \frac{1}{2} U^T R U . \quad (\text{II.19})$$

D'après (II.5),

$$\frac{\partial \hat{H}^T}{\partial U} = -R U + B^T \lambda = 0 . \quad (\text{II.20})$$

D'après (II.6),

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial \hat{H}^T}{\partial x} = -A^T \lambda . \quad (\text{II.21})$$

D'après (II.20), nous obtenons la commande optimale  $\hat{U}$  :

$$\hat{U} = R^{-1} B^T \lambda . \quad (\text{II.22})$$

D'après (II.16), (II.21) et (II.22), le système d'équations d'état s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B R^{-1} B^T \\ 0 & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} . \quad (\text{II.23})$$

Nous notons  $\phi(t, t_0)$  la matrice de transition associée. Un partitionnement en blocs 4 x 4 de la matrice  $\phi(t, t_0)$  permet d'écrire la solution de ce système sous la forme :

$$\begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = \phi(t, t_0) \begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11}(t, t_0) & \phi_{12}(t, t_0) \\ \phi_{21}(t, t_0) & \phi_{22}(t, t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_0 \end{bmatrix} . \quad (\text{II.24})$$

En portant  $x_f$  et  $\lambda_f$  tirés de (II.24) dans la condition de transversalité  $\lambda_f = -S_f x_f$ , car l'état final  $x_f$  est libre et  $t_f$  fixé, il vient :

$$\lambda_0 = -\left[ \phi_{22}(t_f, t_0) + S_f \phi_{12}(t_f, t_0) \right]^{-1} \left[ \phi_{21}(t_f, t_0) + S_f \phi_{11}(t_f, t_0) \right] x_0 \quad (\text{II.25})$$

Soit, pour  $t_f$  donné, la relation :

$$\lambda_0 = K(t_0) x_0 . \quad (\text{II.26})$$

Un calcul d'optimalité à partir d'un instant  $t$  quelconque pris comme origine donnerait la même expression formelle. Il en résulte que la solution optimale est telle qu'il existe une matrice  $n \times n$ ,  $K(t)$  telle que :

$$\forall t, \lambda(t) = K(t)x(t), \quad (\text{II.27})$$

$$K(t) = -\left[\phi_{22}(t_f, t) + S_f \phi_{12}(t_f, t)\right]^{-1} \left[\phi_{21}(t_f, t) + S_f \phi_{11}(t_f, t)\right]. \quad (\text{II.28})$$

D'après (II.22), cette approche nous donne directement une structure de la commande optimale en boucle fermée :

$$\hat{U} = R^{-1} B^T K x. \quad (\text{II.29})$$

### II.3.2.3 Résolution analytique du problème

Le système d'équations d'état (II.23) donne :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix}. \quad (\text{II.30})$$

Ce système d'équations permet d'exprimer  $x$  et  $\lambda$  en fonction des conditions initiales et de la matrice de transition associée. La solution du système peut être explicitée à l'aide du partitionnement de la matrice de transition associée comme le montre l'expression (II.24). Nous obtenons :

$$\phi_{11}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{II.31})$$

$$\phi_{12}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{t^3}{6\beta} & 0 & -\frac{t^2}{2\beta} & 0 \\ 0 & -\frac{t^3}{6\beta} & 0 & -\frac{t^2}{2\beta} \\ -\frac{t^2}{2\beta} & 0 & \frac{t}{\beta} & 0 \\ 0 & -\frac{t^2}{2\beta} & 0 & \frac{t}{\beta} \end{bmatrix}, \quad (\text{II.32})$$

$$\phi_{21}(t) = 0, \quad (\text{II.33})$$

$$\phi_{22}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -t & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -t & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{II.34})$$

Sachant que  $\phi(t_f, t) = \phi(t_f - t) = \phi(\theta)$  avec  $\theta = t_f - t$ , nous explicitons  $K(t)$  à l'aide de (II.28), (II.18), (II.31), (II.32), (II.33) et (II.34) :

$$K(t) = \frac{-3\theta\beta}{3\frac{\beta}{\alpha} + \theta^3} \begin{bmatrix} \theta^{-1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \theta^{-1} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \theta \end{bmatrix}. \quad (\text{II.35})$$

L'expression (II.29) de la commande optimale appliquée au problème donne :

$$\hat{U} = \frac{3\theta}{3\frac{\beta}{\alpha} + \theta^3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \theta \end{bmatrix} x. \quad (\text{II.36})$$

Cette solution suppose le temps final  $t_f$  fixé. De ce fait, pour assurer l'optimalité du problème,  $t_f$  doit être connu a priori ou alors être estimé correctement durant le vol. Nous revenons par la suite sur ce point qui paraît essentiel dans l'élaboration de la commande optimale.

**En résumé :** La théorie de la commande optimale nous a permis de faire apparaître un bouclage optimal  $K$  sur l'état  $x$  puisque le gain  $K$  est calculé indépendamment de l'état  $x$ . La loi de guidage optimale est donnée par les deux composantes de l'accélération du mobile selon (II.36), à savoir :

$$\hat{U}_x = \Gamma_{Mx} = k_1 x_1 + k_2 x_3, \quad (\text{II.37})$$

$$\hat{U}_y = \Gamma_{My} = k_1 x_2 + k_2 x_4, \quad (\text{II.38})$$

avec :

$$k_1 = \frac{3\theta}{3\frac{\beta}{\alpha} + \theta^3}, \quad (\text{II.39})$$

et

$$k_2 = \theta k_1. \quad (\text{II.40})$$

#### II.3.2.4 Etude de deux cas particuliers

• **Cas particulier 1** : Nous modifions la fonction coût en la limitant au critère de précision (minimisation de la distance de passage terminale).

Ce cas particulier impose  $R$  proche de zéro, donc  $\beta$  doit tendre vers zéro sans être nul. En effet, l'expression (II.22) de la commande optimale présente un cas singulier si  $R = 0$  (non inversibilité de  $R$ ) qui entraînerait une commande optimale infinie. La minimisation de la distance de passage terminale implique l'annulation de l'expression  $\frac{1}{2} x^T(t_f) S_f x(t_f)$  donc d'après (II.18) l'annulation des deux premières composantes de  $x(t_f)$ . Nous aboutissons à l'annulation de la distance de passage terminale.

L'application de l'expression (II.36) de la commande optimale à ce cas particulier revient à faire tendre  $\beta$  vers zéro. L'expression (II.39) est alors modifiée pour devenir :

$$k_1 = \frac{3}{\theta^2}. \quad (\text{II.41})$$

• **Cas particulier 2** : Nous modifions la fonction coût en la limitant au critère de type «énergétique». Nous imposons la distance de passage terminale nulle ( $x_1(t_f) = x_2(t_f) = 0$ ).

Nous retrouvons finalement le cas particulier 1 où il faut faire tendre  $\beta$  vers zéro.

Ces deux cas particuliers sont identiques et imposent une distance de passage terminale nulle. Que l'on minimise uniquement le critère de précision ou le critère «énergétique», nous aboutissons à l'expression d'une commande optimale identique au cas général avec  $k_1 = \frac{3}{\theta^2}$ .

### II.3.3 Estimation du temps de vol restant $\theta$

#### II.3.3.1 Introduction

L'élaboration de la commande optimale précédente nécessite la connaissance du temps de vol restant  $\theta$ , donc de l'instant d'interception  $t_f$ . A partir de la position initiale de la cible et de celle du mobile, il est nécessaire de poser certaines hypothèses afin d'avoir une estimation de  $\theta$ . Nous exposons ici plusieurs méthodes de résolution, les résultats sont comparés par la suite.

Il est commun de rencontrer dans la littérature des problèmes de commande de mobile en un temps minimal ([BOU 69], [ELS 84], [BOR 90], [LAB 92], [BEN 92]). Ces problèmes font apparaître en général l'expression d'une commande de type « bang-bang » lorsque cette dernière peut saturer. Notre première méthode consiste à nous placer dans le cas du scénario de guidage explicité au II.3.1 et à établir l'expression du temps minimal d'interception d'après le principe du maximum.

Les autres méthodes abandonnent le côté optimal du problème pour établir des expressions de  $\theta$  pouvant paraître plus réalistes selon [RIG 79] et [LIN 91].

#### II.3.3.2 Estimation du temps de vol restant par le principe du maximum

Nous cherchons une expression de l'instant d'interception  $t_f$  par la méthode basée sur le principe du maximum (instant d'interception minimal).

Pour résoudre ce problème, nous reprenons le modèle d'état défini au II.3.1. L'expression générale de l'accélération normale d'un mobile est  $\Gamma_{MN} = V_M \dot{\gamma}$  avec  $\gamma$  l'angle entre le vecteur vitesse  $V_M$  et l'axe  $OX$ . Nous définissons une cinquième composante au vecteur d'état. En posant  $\gamma = x_5$  et la commande  $U = \dot{\gamma}$ , les dérivées des variables d'état données par les relations (II.12), (II.13), (II.14) et (II.15) donnent :

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_3 = -V_{Mx} = -V_M \cos x_5, \quad (\text{II.42})$$

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_4 = -V_{My} = -V_M \sin x_5, \quad (\text{II.43})$$

$$\dot{x}_3 = -\Gamma_{MNx} = V_M U \sin x_5, \quad (\text{II.44})$$

$$\dot{x}_4 = -\Gamma_{MNy} = -V_M U \cos x_5, \quad (\text{II.45})$$

avec l'équation supplémentaire :

$$\dot{x}_5 = U. \quad (\text{II.46})$$

La vitesse linéaire  $V_M$  constante est supposée donnée.

La recherche d'un instant d'interception minimal implique la définition d'une fonction coût  $Q$  :

$$Q = \int_0^{t_f} dt. \quad (\text{II.47})$$

Soit  $\lambda$  le vecteur adjoint dans l'espace d'état ayant comme composantes  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  et  $\lambda_5$ . Le Hamiltonien d'après (II.4) s'exprime par :

$$H = \lambda_1 \dot{x}_1 + \lambda_2 \dot{x}_2 + \lambda_3 \dot{x}_3 + \lambda_4 \dot{x}_4 + \lambda_5 \dot{x}_5 - 1. \quad (\text{II.48})$$

D'après (II.6) :

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial}{\partial x_1} H = 0, \quad (\text{II.49})$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial}{\partial x_2} H = 0, \quad (\text{II.50})$$

$$\dot{\lambda}_3 = -\frac{\partial}{\partial x_3} H = -\lambda_1 - \lambda_4 V_M U, \quad (\text{II.51})$$

$$\dot{\lambda}_4 = -\frac{\partial}{\partial x_4} H = -\lambda_2 + \lambda_3 V_M U, \quad (\text{II.52})$$

$$\dot{\lambda}_5 = -\frac{\partial}{\partial x_5} H = U (\lambda_1 V_M \sin \gamma - \lambda_2 V_M \cos \gamma) + U^2 (\lambda_4 V_M \sin \gamma + \lambda_3 V_M \cos \gamma). \quad (\text{II.53})$$

Le problème peut être résolu par les techniques classiques de recherche de commande optimale. Toutefois dans le cas présent, compte tenu du fait que la vitesse est bornée, il est évident que le temps minimum pour une valeur de  $\eta$  initiale donnée sera toujours supérieur ou égal au cas où dans la configuration initiale le vecteur vitesse du mobile est dirigé vers la cible et le reste lors de l'évolution. Le module du vecteur vitesse étant fixé et égal à  $V_M$ , nous avons dans ce cas pour  $t_0 = 0$  :

$$t_f \geq t_{fmin}. \quad (\text{II.54})$$

Si nous notons  $r_0$  la distance initiale mobile-cible :

$$t_{fmin} = \frac{r_0}{V_M}. \quad (\text{II.55})$$

L'égalité n'étant possible que dans le cas précédemment cité.

Avec  $|V| \leq V_M$ , en l'absence de contraintes sur  $U = \dot{\gamma}$ , le système partant d'une configuration initiale, le vecteur vitesse du mobile pointera instantanément vers la cible pour se ramener au cas précédent.

Si maintenant  $|U| \leq \dot{\gamma}_M$  ( $|U|$  borné), compte tenu de l'expression du Hamiltonien, le temps minimum sera obtenu en saturant la contrainte. De façon triviale, l'évolution de  $\gamma$  ne pourra se faire qu'en tendant à pointer vers la cible (ce qui impliquerait  $\dot{\gamma}$  constant)

Si nous faisons l'hypothèse d'un mobile soumis à une loi de N.P.C., nous avons :

$$\Gamma_{MN} = V_M \dot{\gamma} = A V_M \dot{\eta}, \quad (\text{II.56})$$

$$\dot{\delta}_M = (1 - A) \dot{\eta}. \quad (\text{II.57})$$

avec la vitesse linéaire  $V_M$  supposée constante et de ce fait,  $\Gamma_M = \Gamma_{MN}$ .

Nous pouvons remarquer que si  $\dot{\gamma} = 0$  (pointage fixe et nécessairement vers la cible), on a d'après (II.56),  $\dot{\eta} = 0$  d'où d'après (II.57),  $\dot{\delta}_M = 0$ . Dans ce cas, la navigation proportionnelle est une collision ( $\dot{\eta} = 0$ ) et elle se confond avec la commande optimale à temps minimum.

D'après (II.55), nous pouvons donner une expression du temps de vol minimum  $\theta = t_f - t$  en exprimant le problème de commande optimale en boucle fermée :

$$\theta = \frac{r}{V_M}. \quad (\text{II.58})$$

Cette première expression optimale de  $\theta$  que nous appelons  $\theta_1$  obtenue suite à l'application du principe du maximum impose au vecteur vitesse du mobile de pointer sur la cible ( $\delta_M = 0$  suite à l'hypothèse 2), ce qui était évident a priori. En effet, si l'on intègre  $V_{Ru} = \dot{r}$  considéré constant d'un instant  $t$  à l'instant  $t_f$ , nous avons :

$$V_{Ru} = V_{Ru0}, \quad (\text{II.59})$$

$$\int_t^{t_f} V_{Ru0} dt = V_{Ru0} (t_f - t) = V_{Ru0} \theta, \quad (\text{II.60})$$

or :

$$\int_t^{t_f} V_{Ru} dt = \int_t^{t_f} \dot{r} = -r, \quad (\text{II.61})$$

d'où :

$$\theta = -\frac{r}{V_{Ru0}}. \quad (\text{II.62})$$

D'après (I.5), suite à l'hypothèse 2 et pour  $V_M$  constant,  $V_{Ru} = \dot{r}$  est constant lorsque  $\delta_M = 0$  :  $V_{Ru0} = -V_M$ . Nous retrouvons ainsi :

$$\theta_1 = \frac{r}{V_M}. \quad (\text{II.63})$$

Cette expression du temps de vol minimal implique  $V_{Ru} = \dot{r}$  constant, ce qui n'est évidemment pas toujours le cas, notamment lorsque le vecteur vitesse du mobile ne pointe pas sur la cible initialement. Nous reprenons alors l'expression (II.62) du temps de vol sans les propriétés optimales qui imposent à  $V_M$  de pointer sur la cible et nous posons :

$$\theta_2 = -\frac{r}{V_{Ru}} = \frac{\theta_1}{\cos \delta_M}. \quad (\text{II.64})$$

Remarque : La deuxième expression obtenue devient équivalente à la première lorsque  $\delta_M = 0$ , c'est-à-dire lorsque nous traitons le cas optimal.

A présent, nous cherchons une troisième estimation de  $\theta$  appelée  $\theta_3$  en utilisant l'accélération du mobile. Nous proposons une brève présentation de la méthode de Riggs proposée dans [RIG 79] qui est immédiatement appliquée à notre problème.

### II.3.3.3 Estimation de $\theta$ par la méthode de Riggs dans [RIG 79]

Riggs propose une méthode d'estimation du temps de vol faisant intervenir l'accélération du mobile. Pour cela, la nouvelle expression du temps de vol restant durant la phase de guidage finale devra être similaire à l'expression optimale  $\theta_1$  (le vecteur vitesse pointant sur la cible,  $V_{Ru}$  est constant). Cependant, durant la phase de guidage initiale, lorsque les conditions initiales sont éloignées de la collision,  $V_{Ru}$  est proche de zéro et l'expression (II.64) de  $\theta_2$  n'a plus de sens. Il faut alors raisonner sur une expression liée à l'accélération du mobile.

Riggs propose un algorithme simplifié permettant l'estimation du temps de vol  $\theta_3$  comme suit :

$$\theta_3 = \frac{r}{(-V_{Ru} + \bar{\Gamma}_u \theta_3)}, \quad (\text{II.65})$$

avec  $\Gamma_u$  la projection de  $\Gamma_C - \Gamma_M$  sur la ligne de visée et  $\bar{\Gamma}_u$  une estimée de l'accélération moyenne de  $\Gamma_u$  de l'instant considéré à l'instant d'interception.

$\theta_3$  est donc équivalent à  $\theta_1$ , proche de la collision ( $\theta_3$  tend vers zéro et  $-V_{Ru} + \bar{\Gamma}_u \theta_3 \cong -V_{Ru0}$ ). Lorsque les conditions initiales sont éloignées de la collision,  $-V_{Ru} + \bar{\Gamma}_u \theta_3 \cong \bar{\Gamma}_u \theta_3$  car  $V_{Ru}$  est proche de zéro.

Nous explicitons la méthode de calcul de  $\theta_3$  :

- Trouver une estimation de la moyenne  $\bar{\Gamma}_u$  de  $\Gamma_u$
- Résoudre (II.65),  $\theta_3$  est solution d'une équation du second degré :

$$\theta_3 = \frac{2r}{-V_{Ru} + \sqrt{V_{Ru}^2 + 4\bar{\Gamma}_u r}}, \quad (\text{II.66})$$

- Procédé itératif si  $\bar{\Gamma}_u$  est fonction de  $\theta_3$ .

La méthode de Riggs se simplifie lorsque l'on pose comme hypothèse que le mobile est soumis à une N.P.C. Il en découle une expression immédiate de la projection  $\Gamma_u$  de l'accélération relative du mobile par rapport à la cible, sur la ligne de visée. Nous obtenons :

$$\Gamma_u = \Gamma_{MN} \sin \delta_M, \quad (\text{II.67})$$

d'où :

$$\bar{\Gamma}_u(t) = \frac{1}{\theta_3} \int_{t_i}^{t_f} \Gamma_{MN} \sin \delta_M(t) dt, \quad (\text{II.68})$$

avec  $\Gamma_{MN}$  vérifiant l'expression (II.56).

## II.4. Retour vers la loi de navigation proportionnelle vraie

### II.4.1 Passage en coordonnées polaires

Explicitons à présent en coordonnées polaires les équations d'état du problème en nous inspirant de la figure I.1. Le nouveau repère (M,X,Y) de la figure II.2 est tel que  $\mathbf{MX} = \mathbf{OX}$  et  $\mathbf{MY} = \mathbf{OY}$ , avec (O,X,Y) le repère en coordonnées cartésiennes de la figure II.1.

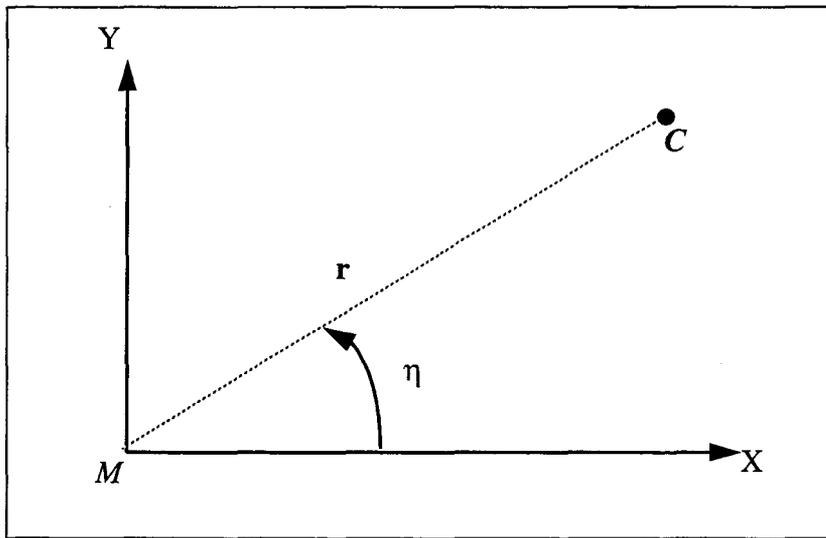


figure II.2 Scénario de guidage en coordonnées polaires

Les notations employées au II.1.1 restent encore valides dans ce nouveau repère.

(II.8), (II.9), (II.10) et (II.11) explicitées en coordonnées cartésiennes deviennent en coordonnées polaires :

$$x_1 = r \cos \eta, \quad (\text{II.69})$$

$$x_2 = r \sin \eta, \quad (\text{II.70})$$

$$x_3 = \dot{x}_1 = \dot{r} \cos \eta - r \sin \eta \dot{\eta}, \quad (\text{II.71})$$

$$x_4 = \dot{x}_2 = \dot{r} \sin \eta + r \cos \eta \dot{\eta}. \quad (\text{II.72})$$

### II.4.2 Hypothèse de faibles angles de visée

**hypothèse 4 :** Définissons à présent le système de coordonnées (O,X,Y) de telle sorte qu'en coordonnées polaires, l'angle de visée  $\eta$  demeure faible durant le déroulement du scénario.

Cette hypothèse est extrêmement importante et peut être fautive dans le cas de mobiles et de cibles évoluant à forte vitesse avec de brusques changements d'accélération. L'hypothèse 1 interdit toute accélération à la cible. L'hypothèse 4 risque donc d'être fautive lorsque l'accélération du mobile peut varier fortement, notamment lorsque le dépointage initial du vecteur vitesse du mobile par rapport à la ligne de visée initiale ( $\delta_{M0}$ ) est important (phase de guidage initiale).

En utilisant l'hypothèse de faibles angles de visée  $\eta$  (hypothèse 4) et compte tenu du fait que pour des raisons physiques  $\dot{\eta}$  reste petit (nous nous interdisons de brusques changements d'accélération), les équations (II.69), (II.70), (II.71) et (II.72) deviennent :

$$x_1 \cong r, \quad (\text{II.73})$$

$$x_2 \cong r\eta, \quad (\text{II.74})$$

$$x_3 = \dot{x}_1 \cong \dot{r}, \quad (\text{II.75})$$

$$x_4 = \dot{x}_2 \cong \dot{r}\eta + r\dot{\eta}. \quad (\text{II.76})$$

### II.4.3 Hypothèse sur la vitesse relative

**hypothèse 5 :** Supposons maintenant constante la projection sur la ligne de visée de la vitesse relative du mobile par rapport à la cible ( $V_{Ru} = \dot{r} = V_{Ru0}$ ).

Suite à l'hypothèse 5 et à l'expression (II.75), nous avons :

$$\dot{x}_3 = 0 \quad (\text{II.77})$$

(II.77) signifie que l'accélération du mobile projetée sur  $OX$  est nulle. Or, l'hypothèse 4 implique  $OX = MX \cong MC$ . L'accélération du mobile le long de la ligne de visée est donc nulle.

Suite à l'hypothèse 5, nous pouvons utiliser l'expression du temps de vol restant  $\theta$  donnée par (II.62). Les équations d'état (II.73), (II.74), (II.75) et (II.76) deviennent :

$$x_1 \cong r, \quad (\text{II.78})$$

$$x_2 \cong r\eta = -V_{Ru0}\theta\eta, \quad (\text{II.79})$$

$$x_3 \cong \dot{r} = V_{Ru0}, \quad (\text{II.80})$$

$$x_4 \cong \dot{r}\eta + r\dot{\eta} = V_{Ru0}\eta + V_{Ru0}\theta\dot{\eta}. \quad (\text{II.81})$$

La loi de guidage optimale approximée suite aux hypothèses 4 et 5 est donnée d'après (II.37) et (II.38) par les deux composantes de l'accélération du mobile, à savoir :

$$\hat{U}_x = \Gamma_{Mx} \cong 0, \quad (\text{II.82})$$

$$\hat{U}_y = \Gamma_{My} = k_1 x_2 + k_2 x_4 \cong -k_2 V_{Ru0} \theta \dot{\eta}, \quad (\text{II.83})$$

avec :

$$k_2 = \frac{3\theta^2}{3\frac{\beta}{\alpha} + \theta^3}, \quad (\text{II.84})$$

d'où :

$$\hat{U}_y = \frac{-3\theta^3}{3\frac{\beta}{\alpha} + \theta^3} V_{Ru0} \dot{\eta}. \quad (\text{II.85})$$

***En résumé :*** Le passage en coordonnées polaires et la formulation des hypothèses 4 et 5 ont permis de simplifier l'expression de la commande optimale en linéarisant le problème ([RIS 68], [AXE 70], [NAZ 76], [HOL 90]). Nous aboutissons à l'expression d'une commande optimale à une seule composante  $\hat{U}_y$  et d'après les simplifications, cette composante est perpendiculaire à la ligne de visée :

$$\hat{U}_y = \hat{\Gamma}_{My} = \Gamma_M^v, \quad (\text{II.86})$$

et

$$\hat{U}_y = -\zeta(t) V_{Ru0} \dot{\eta}, \quad (\text{II.87})$$

avec  $\zeta(t)$  donné par :

$$\zeta(t) = \frac{3\theta^3}{3\frac{\beta}{\alpha} + \theta^3}. \quad (\text{II.88})$$

L'expression finale de la commande appartient à la famille des lois de navigation proportionnelle étudiée dans le premier chapitre. Il s'agit d'une loi de navigation proportionnelle vraie de type 2 (N.P.V.2) car  $V_{Ru} = V_{Ru0}$  et autoadaptative car le coefficient réduit  $\zeta(t)$  varie avec  $\theta$ ,

le temps de vol restant. Le coefficient autoadaptatif dépend également des coefficients de pondération  $\alpha$  et  $\beta$  privilégiant le critère de minimisation «énergétique» et le critère de précision.

**hypothèse 6 :** La vitesse du mobile est constante en module. L'accélération du mobile n'a donc pas de composante tangentielle mais uniquement une composante normale  $\Gamma_{MN}$ .

Suite à l'hypothèse 6 :

$$\hat{\Gamma}_M = \hat{\Gamma}_{MN}, \quad (\text{II.89})$$

$$\hat{\Gamma}_M^v = \hat{\Gamma}_{MN}^v. \quad (\text{II.90})$$

## II.4.4 Comportement du coefficient autoadaptatif

### II.4.4.1 Cas général

Dans le cas général, le coefficient autoadaptatif  $\zeta(t)$  varie avec  $\theta$ , le temps de vol restant.

- Quand  $t$  est nul et si le temps d'interception  $t_f$  est grand,  $\zeta(t)$  tend vers 3.
- Quand  $t$  tend vers  $t_f$ ,  $\zeta(t)$  tend vers 0.

Si nous désirons minimiser le critère «énergétique» et le critère de précision, la loi optimale est une N.P.V.2 autoadaptative avec un coefficient réduit tendant vers zéro à la rencontre. Cependant la distance de passage est minimisée et peut ne pas être nulle. Pour cette raison, il est préférable d'étudier plus en détail les cas particuliers énoncés au II.3.2.4, où l'on privilégie tantôt le critère «énergétique», tantôt le critère de précision, avec une distance de passage terminale nulle.

### II.4.4.2 Cas particuliers

Il s'agit de ceux énoncés au II.3.2.4. Le coefficient  $\zeta(t)$  n'est plus autoadaptatif mais constant et égal à 3. Si nous ne désirons pas minimiser les deux critères simultanément, la loi optimale est une N.P.V.2 de constante  $a$  égale à 3 ( $V_{Ru}$  étant constant).

## II.5. Modélisation de la commande optimale de chaque phase

### II.5.1 Bilan des hypothèses simplificatrices

A partir d'un scénario de guidage où un mobile  $M$  doit rallier une cible  $C$  de «façon optimale», le problème traité en deux dimensions nous a permis d'obtenir une loi de guidage optimale avec une commande à deux composantes  $(\hat{U}_x \hat{U}_y)$ . L'expression générale obtenue peut être qualifiée de loi de navigation optimale (ou avancée). Seules les hypothèses 1, 2 et 3 ont été posées pour la résolution du problème. Ces hypothèses imposent une cible non manoeuvrante et aboutissent à la modélisation du mobile en un point matériel : son centre de gravité.

L'introduction des hypothèses 4 et 5 a réduit le problème à une dimension. Nous obtenons une commande optimale perpendiculaire à la ligne de visée et appartenant à la famille des lois de navigation proportionnelle vraie (N.P.V.2). Pour cela, les hypothèses ont imposé aux angles de visée de demeurer faibles et à la projection sur la ligne de visée de la vitesse relative du mobile par rapport à la cible d'être constante.

Finalement, l'hypothèse 6 d'une vitesse du mobile constante entraîne une accélération du mobile normale sans composante tangentielle.

### II.5.2 Commandes optimales appropriées aux phases de guidage

A ce stade de l'étude de la commande optimale, nous avons émis plusieurs hypothèses qui aboutissent à une loi de navigation proportionnelle vraie. Nous cherchons maintenant à définir plus précisément les phases de guidage énoncées au II.1.4 en leur destinant une commande optimale particulière. De ce fait, la définition d'une phase de guidage entraîne des propriétés qui seront vérifiées suivant les hypothèses simplificatrices énoncées précédemment pour l'élaboration de la commande optimale.

#### II.5.2.1 Phase de guidage finale optimale

**Définition :** Nous appelons phase de guidage finale, la phase d'évolution du mobile durant laquelle toutes les hypothèses énoncées précédemment sont vérifiées. Cette phase est donc caractérisée par  $V_{Ru}$  constant et par de faibles angles de visée. Elle se produit lorsque les conditions de vol sont dites « proches de la collision ».

**Conséquence 1 :** La phase de guidage finale optimale se produit quand la commande du mobile est optimale durant cette phase. Elle vérifie toutes les hypothèses précédentes et la commande optimale conduit à une N.P.V.2 autoadaptative.

**Conséquence 2 :** La phase de guidage finale optimale peut privilégier le critère de précision d'après II.1.4. La modélisation mathématique de ce choix conduit au cas particulier II.4.4.2 où la loi optimale est une N.P.V.2 de coefficient  $a$  égal à 3.

### II.5.2.2 Phase de guidage initiale optimale

**Définition :** Nous appelons phase de guidage initiale, la phase d'évolution du mobile durant laquelle seules les hypothèses 1, 2 et 3 énoncées précédemment sont vérifiées. Cette phase n'est donc pas caractérisée par  $V_{Ru}$  constant et les angles de visée peuvent être importants. Elle se produit dans des conditions de vol dites «éloignées de la collision».

**Conséquence 1 :** La phase de guidage initiale optimale se produit quand la commande du mobile est optimale durant cette phase. Elle vérifie les hypothèses 1, 2 et 3 et la commande optimale conduit à une loi de navigation avancée dont la commande a deux composantes.

**Conséquence 2 :** La phase de guidage initiale optimale peut privilégier le critère «énergétique» par rapport au critère de précision d'après II.1.4. La modélisation mathématique de ce choix conduit à l'expression d'une commande optimale à deux composantes définies par (II.37) et (II.38). Les gains du bouclage optimal sont définis par (II.39) et (II.40) . Le rapport  $\frac{\beta}{\alpha}$  est élevé dans ce cas.

**Conséquence 3 :** La phase de guidage initiale optimale peut privilégier, à l'extrême, uniquement le critère «énergétique». La modélisation mathématique de ce choix conduit à l'expression d'une commande optimale à deux composantes définies par (II.37) et (II.38). Les gains du bouclage optimal sont définis par (II.40) et (II.41) (cf II.3.2.4).

A ce niveau de l'étude de l'interception optimale, nous pouvons constater que la commande optimale explicitée lors de la phase de guidage finale aboutit à la famille des lois de navigation proportionnelle vraie (N.P.V.2). Ayant posé comme hypothèse le mobile soumis à une loi de navigation proportionnelle classique (N.P.C.), le premier chapitre a montré l'intérêt d'une telle loi. Il apparaît intéressant, à présent, de réaliser une comparaison entre la commande appliquée au mobile et celle que l'on obtiendrait si le mobile obéissait aux critères de minimisation choisis. Une variable représentant l'écart commande appliquée-commande optimale peut être considérée comme une « mesure » de l'écart entre une loi de guidage classique (N.P.C.) et une loi de guidage avancée quand le mobile se situe dans la phase éloignée de la collision ou comme une « mesure » de l'écart entre deux lois de navigation proportionnelle quand le mobile se situe proche de la collision.

## II.6. Ecart « commande appliquée - commande optimale »

### II.6.1 Introduction

Le mobile est soumis à une loi de navigation proportionnelle classique (N.P.C.). L'étude de l'interception optimale nous a permis d'explicitier les commandes optimales à appliquer au mobile suivant certains critères de minimisation. A présent, nous désirons étudier la différence de comportement du mobile lorsqu'on lui applique tantôt une N.P.C tantôt une loi optimale. Nous pouvons mettre en oeuvre deux méthodes. Nous appelons  $U$ , la commande d'une loi de navigation proportionnelle classique guidant  $M$  vers  $C$  et  $\hat{U}$ , la commande optimale suivant certains critères de minimisation.

- **Première méthode** :  $U$  implique une variation de la cinématique du point  $M$  représentative de la loi de N.P.C.  $\hat{U}$  implique aussi une variation de la cinématique du point  $M$  différente de la précédente. Etudier la différence de comportement du mobile suite à l'application des commandes  $U$  ou  $\hat{U}$  peut revenir à l'étude des deux trajectoires qu'impliquent ces deux commandes. L'étude de la différence entre ces deux trajectoires n'est pas triviale et est peu intéressante.

- **Seconde méthode** : Nous supposons un mobile  $M$  évoluant vers une cible  $C$  suivant une loi de N.P.C. A partir des données cinématiques représentatives de l'évolution du mobile, nous calculons  $U$  impliqué par les variations de la cinématique. La commande optimale  $\hat{U}$  correspondant à cette cinématique peut également être calculée. Nous introduisons alors une variable de commande  $\Delta c$  représentative de la différence de comportement entre la loi de N.P.C.  $U$  et la commande optimale  $\hat{U}$  :

$$\Delta c = U - \hat{U}. \quad (\text{II.91})$$

- **But** : Après la recherche des comportements particuliers de  $U$  et  $\hat{U}$  caractérisant le fait qu'un mobile  $M$  rejoigne la cible  $C$ , nous espérons trouver aussi à travers la variable  $\Delta c$  un comportement particulier.

### II.6.2 Etude de $U$ : la commande appliquée

Nous appelons  $U$  la commande appliquée au mobile  $M$  afin qu'il rejoigne la cible  $C$ .  $U$  appartient à la famille des lois de navigation proportionnelle classique (N.P.C.). Suite au premier chapitre qui montre l'importance de cette loi, nous rappelons ici l'expression de  $U$  :

$$U = \Gamma_{MN} = AV_M \dot{\eta}. \quad (\text{II.92})$$

L'expression (II.92) limite la commande  $U$  à l'accélération normale du mobile, la définition de la loi de N.P.C. imposant la vitesse du mobile constante en module.

Nous pouvons faire correspondre à cette commande, sa projection sur la perpendiculaire à la ligne de visée. Nous aboutissons à une N.P.V.1 ( $V_{Ru}$  non constant) :

$$U^v = \Gamma_{MN}^v = \Gamma_{MN} \cos \delta_M = -a V_{Ru} \dot{\eta}, \quad (\text{II.93})$$

avec :

$$a = A \frac{V_M \cos \delta_M}{-V_{Ru}}. \quad (\text{II.94})$$

remarque : d'après (I.5) et (II.94), si  $V_C = 0$  alors  $a = A$ .

Les équations cinématiques qui régissent la N.P.C. sont les équations (I.3) à (I.7) avec celle relative à la définition de la N.P. :

$$\dot{\delta}_M = (1 - A) \dot{\eta}. \quad (\text{II.95})$$

Regardons à présent les comportements de  $\Gamma_{MN}$  et  $\Gamma_{MN}^v$  suivant la phase de guidage où nous nous plaçons.

### II.6.2.1 Comportement lors de la phase finale

D'après [CAR 89], dans des conditions proches de la collision, comme le montre la figure II.3, nous avons la relation :

$$|\delta_{M0} - \delta_{Mc}| < 15^\circ. \quad (\text{II.96})$$

Si l'on suppose la vitesse de la cible faible devant celle du mobile, nous négligeons  $\delta_{Mc}$  et nous avons approximativement :

$$|\delta_{M0}| < 15^\circ. \quad (\text{II.97})$$

remarque : La figure II.3 ne représente pas le cas de figure où la vitesse de la cible est faible devant celle du mobile. A l'extrême, lorsque  $V_C = 0$ , les points  $I$  et  $C_0$  sont confondus et nous avons  $\delta_{Mc} = 0$ .

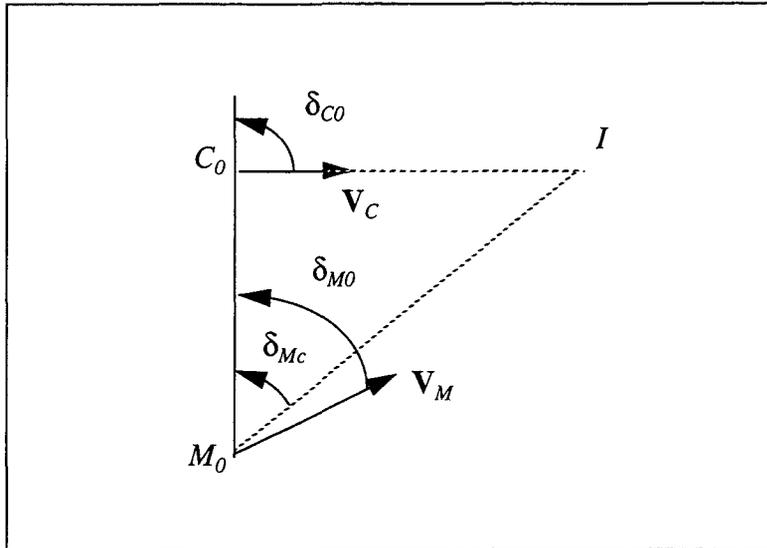


figure II.3 Conditions proches de la collision

D'après (II.93) et (II.97), proche de la collision,  $\Gamma_{MN}$  et  $\Gamma_{MN}^v$  sont équivalents. En phase finale, il est équivalent de commander le mobile soit par l'accélération normale soit par la projection de l'accélération normale sur la ligne de visée :

$$\Gamma_{MN} \cong \Gamma_{MN}^v \quad (\text{II.98})$$

Le comportement de  $\Gamma_{MN}$ , proche de la collision, est étudié dans le premier chapitre au I.4.1.2 et aboutit à une convergence vers zéro.

### II.6.2.2 Comportement lors de la phase de guidage initiale

Nous sommes dans des conditions éloignées de la collision. La figure II.4 tente de montrer graphiquement le comportement des commandes  $\Gamma_{MN}$  et  $\Gamma_{MN}^v$ . La figure résume les constatations faites dans le chapitre précédent à propos de la N.P.C. et de la N.P.V.1. Commander le mobile par l'intermédiaire de  $\Gamma_{MN}$  assurera la convergence vers la cible en un temps fini. Il n'en est pas de même pour  $\Gamma_{MN}^v$ , commande pour laquelle la convergence vers la cible dépendra des conditions initiales. En effet, avec les éléments donnés, nous ne pouvons pas certifier que l'interception sera réalisée dans un temps acceptable en commandant  $\Gamma_{MN}^v$ . La figure II.4 nous montre que dans certains cas, d'après les conditions initiales, la direction de  $\Gamma_{MN}^v$  par rapport à  $\Gamma_{MN}$  est très éloignée du point d'impact, ceci n'assurant pas la collision.

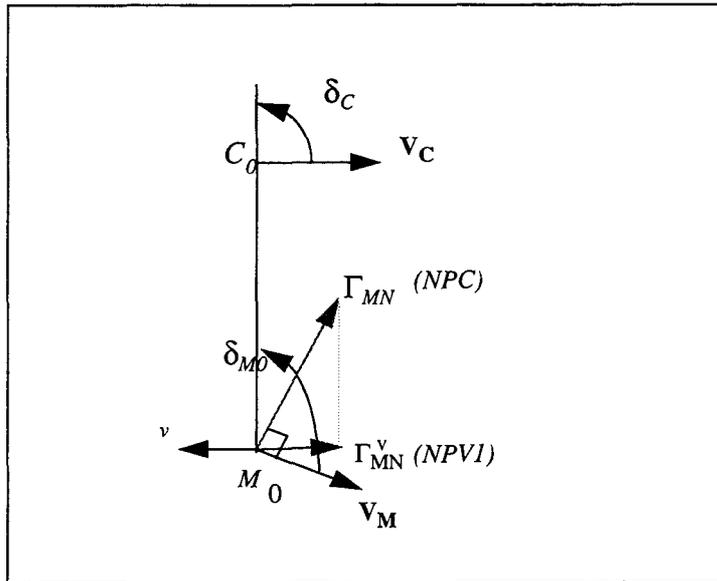


figure II.4 Conditions éloignées de la collision

### II.6.3 Etude de $\Delta c$

Nous choisissons de traiter en premier lieu le cas de la phase finale, du fait de sa singularité et des conclusions immédiates qui en découlent.

#### II.6.3.1 Comportement lors de la phase finale

Le comportement de  $\Delta c$  se résume d'après (II.87) et (II.98) à la différence entre deux lois de navigation proportionnelle vraie. Deux cas peuvent être traités :

- D'après (II.93) et la conséquence 1 du paragraphe II.5.2.1,  $\Delta c$  est la différence entre une N.P.V.2 ( $V_{Ru}$  constant et égale à  $V_M$  si  $V_C$  est nulle) et une N.P.V.2 à coefficient autoadaptatif :

$$\Delta c = -(a - \zeta(t)) V_{Ru0} \dot{\eta}. \quad (\text{II.99})$$

- D'après la conséquence 2 du paragraphe II.5.2.1,  $\Delta c$  est la différence entre une N.P.V.2 ( $V_{Ru}$  constant et égale à  $V_M$  si  $V_C$  est nulle) et une N.P.V.2 à coefficient constant égal à 3

$$\Delta c = -(a - 3) V_{Ru0} \dot{\eta}. \quad (\text{II.100})$$

**Conclusion :** Dans les deux cas, suite au comportement de  $\zeta(t)$  décrit au II.4.4.1 et au comportement de  $\dot{\eta}$  décrit au I.4.1.2, nous pouvons conclure sur la décroissance de  $\Delta c$  vers zéro au cours de l'évolution du mobile  $M$  vers la cible  $C$ .

### II.6.3.2 Comportement lors de la phase de guidage initiale

L'étude de  $\Delta c$  durant la phase de guidage initiale apparaît plus délicate. En effet, nous ne pouvons plus raisonner sur les accélérations projetées sur la ligne de visée : la convergence vers la cible dans un cas général n'est pas toujours assurée, ceci dépendant des conditions initiales.  $\Delta c$  est donc la différence entre  $\Gamma_{MN}$  et  $\hat{\Gamma}_{MN}$  reconstitué à partir des deux composantes  $\hat{U}_x = \hat{\Gamma}_{MNx}$  et  $\hat{U}_y = \hat{\Gamma}_{MNy}$  de la commande optimale :

$$\Delta c = AV_M \dot{\eta} - \hat{\Gamma}_{MN}, \quad (\text{II.101})$$

avec :

$$\hat{\Gamma}_{MN} = \sqrt{\hat{U}_x^2 + \hat{U}_y^2}. \quad (\text{II.102})$$

$\hat{U}_x$  et  $\hat{U}_y$  sont donnés par les expressions (II.37) à (II.40) dans le cas général où le critère de précision et le critère «énergétique» sont pris en considération.

**Conclusion :** *Le comportement de  $\Delta c$  durant la phase de guidage initiale n'a plus le caractère trivial montré lors de la phase finale. Des simulations devront être effectuées pour étudier plus en détail le comportement de cette variable de commande. Néanmoins, suivant les critères de minimisation qui seront privilégiés, le comportement de  $\Delta c$  devra progressivement durant l'évolution du mobile se rapprocher de celui de la phase finale.*

### II.6.4 Conclusion sur l'étude de $\Delta c$

La phase de guidage initiale précède la phase finale caractérisée par un  $\Delta c$  tendant vers zéro. L'étude de  $\Delta c$  durant la phase de guidage initiale consiste à amener  $\Delta c$  vers la valeur du  $\Delta c$  initial de la phase finale. Il faut cependant remarquer que nous pouvons ne pas choisir les mêmes critères de minimisation pour les différentes phases. Dans cette configuration, il existe une discontinuité des valeurs de  $\Delta c$  au passage d'une phase à l'autre. La variable  $\Delta c$  étant purement artificielle, la discontinuité n'implique pas de problèmes liés à la réalisation du système de guidage.

Le comportement de  $\Delta c$  résume en fait l'aspect optimal du guidage du mobile. Plus le mobile se rapproche de sa cible, plus son guidage revêt des propriétés optimales caractérisées par une variable de commande artificielle qui tend vers zéro : variable  $\Delta c$  représentative de l'écart par rapport à l'optimalité.

## II.7. Outils de simulation

### II.7.1 Traitement des données

La fin du premier chapitre a été consacrée à des simulations de trajectoires théoriques de navigation proportionnelle par intégration directe des équations cinématiques. En réalité, des capteurs transmettent les données cinématiques de la trajectoire du mobile. Ces données comportent des bruits de mesure : nous disposons alors d'une «trajectoire» bruitée. Le traitement de notre problème est basé sur des données cinématiques de la trajectoire d'un mobile soumis à une loi de N.P.C. Ces données comportant un bruit de mesure, une technique de filtrage de Kalman est mise en oeuvre pour obtenir une estimation satisfaisante des paramètres cinématiques. A partir de ces données estimées, nous pouvons alors calculer  $\Delta c$  comme nous le montre le synoptique de la figure II.5.

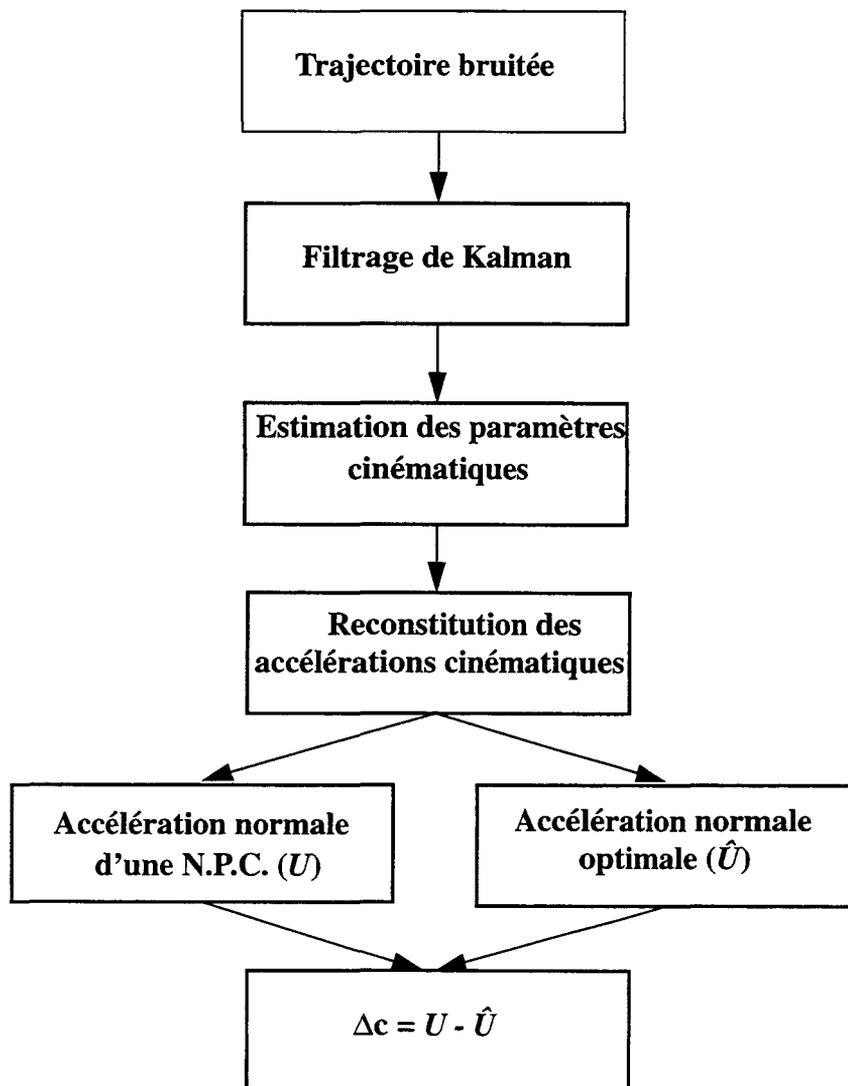


figure II.5 Synoptique du traitement des données

## II.7.2 Filtrage de Kalman

Le but du problème est d'estimer les éléments de la cinématique d'un mobile soumis à une loi de N.P.C. Ce type de problème a déjà été étudié dans [DEL 83] et un modèle d'état a été proposé. La mise en oeuvre de l'algorithme est détaillée dans [DUF 95], seul le modèle d'état est utilisé ici ainsi que le principe d'initialisation du filtre. Notons que les variables d'état utilisées pour l'élaboration du filtre sont totalement indépendantes de celles employées pour l'élaboration de la commande optimale lors des paragraphes précédents.

### II.7.2.1 Modèle d'état des trajectoires de type N.P.C

Soit le vecteur d'état  $x$  de coordonnées  $x = [x_1, \dots, x_7]^T$  dont les composantes sont définies par :

$$x_1 = \frac{\pi}{2} - \eta, \quad (\text{II.103})$$

$$x_2 = \dot{x}_1, \quad (\text{II.104})$$

$$x_3 = \frac{1}{r}, \quad (\text{II.105})$$

$$x_4 = \frac{\dot{r}}{r}, \quad (\text{II.106})$$

$$x_5 = V_M, \quad (\text{II.107})$$

$$x_6 = \Gamma_T = \frac{dV_M}{dt}, \quad (\text{II.108})$$

$$x_7 = A - 1 = \mu. \quad (\text{II.109})$$

Nous supposons disposer de mesures bruitées de l'angle de visée  $\eta$ , de la distance  $r$  et de la vitesse du mobile  $V_M$ . Nous pouvons déduire des équations (I.9), (I.10) et (II.95), pour un point cible  $C$  avec  $V_C = 0$ , un modèle d'état continu, non linéaire et d'ordre 7 des trajectoires de N.P.C. Ce modèle d'état s'écrit d'après [DEL 83] et [SIN 70] :

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (\text{II.110})$$

$$\dot{x}_2 = x_6 x_2 / x_5 + (x_7 - 1) x_4 x_2, \quad (\text{II.111})$$

$$\dot{x}_3 = -x_3 x_4, \quad (\text{II.112})$$

$$\dot{x}_4 = x_6 x_4 / x_5 - x_4^2 - x_7 x_2^2, \quad (\text{II.113})$$

$$\dot{x}_5 = x_6, \quad (\text{II.114})$$

$$\dot{x}_6 = -a_\Gamma x_6 + \omega_\Gamma, \quad (\text{II.115})$$

$$\dot{x}_7 = -a_\mu x_7 + \omega_\mu. \quad (\text{II.116})$$

où  $a_\mu$  et  $a_\Gamma$  sont des constantes caractérisant l'inverse de la durée d'une évolution de la variable considérée et  $\omega_\Gamma$  et  $\omega_\mu$  des bruits blancs. Le modèle de mesure associé est d'après [DEL 83] :

$$z_1 = x_1 + v_\eta, \quad (\text{II.117})$$

$$z_2 = x_3 - x_3^2 v_r, \quad (\text{II.118})$$

$$z_3 = x_3 + v_v, \quad (\text{II.119})$$

avec  $v_\eta$ ,  $v_r$  et  $v_v$  les bruits de mesure sur l'angle de visée, la distance et la vitesse. Le vecteur  $z$  de coordonnées  $z = [z_1, z_2, z_3]^T$  est le vecteur de mesure. Dans la suite, nous supposons tous les bruits stationnaires, gaussiens et centrés. Cette hypothèse simplificatrice permet de simuler le modèle précédent en mettant en oeuvre un filtre de Kalman étendu, c'est-à-dire linéarisé autour d'un point de fonctionnement puisque le modèle d'état est non linéaire ([BOR 90], [LAB 82], [DUV 91], [PAP 91]). Notons que dans ce filtre de Kalman, le modèle d'état est continu alors que le modèle de mesure est discret de période  $T_e = 0.05$  s : nous parlons de filtrage de Kalman étendu discret. Notons également que l'équation (II.118) résulte d'une linéarisation décrite dans [DEL 83]. Ces linéarisations rendent le filtre très sensible aux valeurs d'initialisation : l'initialisation se pose donc comme un problème crucial.

### II.7.2.2 Initialisation du filtre de Kalman par la méthode des moindres carrés

Le principal défaut du filtre à initialisation quelconque est son manque de rapidité à converger vers la solution. Ce défaut vient du fait que le filtre résulte d'une linéarisation autour de la solution. En effet, le caractère adaptatif du filtre de Kalman permet en fait d'effectuer une linéarisation autour de l'estimation précédente et ainsi de converger peu à peu vers la solution réelle par minimisation de l'erreur moyenne [LAB 82]. Le vecteur d'état initial est donc pris comme première estimation de la solution. Dès lors, plus ce dernier est éloigné de la solution finale, plus

le filtre est long à converger. Dans notre cas, il convient de faire l'initialisation la plus précise possible.

Pour cela, nous allons considérer que les mesures de l'angle de visée, de la distance et de la vitesse du mobile évoluent au cours du temps comme des polynômes du second degré. Les coefficients de ces polynômes permettent d'accéder directement à la valeur de l'estimée de sa dérivée première et de sa dérivée seconde au temps  $t = 0$ . Il faut remarquer qu'en cas d'initialisation quelconque, le début des estimations ne peut être utilisé pour résoudre notre problème. Nous utilisons ce temps pour la détermination des coefficients des polynômes grâce à  $N$  premières mesures traitées suivant un algorithme déterminé dans [DUF 95]. Il faut choisir aussi  $N$  et l'instant  $t = 0$  parmi les  $N$  échantillons de mesure de telle sorte que l'estimation initiale soit la plus précise possible compte tenu des erreurs de mesure et de l'erreur intrinsèque due à la modélisation par un second ordre.

L'étude réalisée avec ce type d'initialisation met en valeur le gain obtenu par rapport à une initialisation quelconque : le transitoire a disparu et l'initialisation du filtre est quasi-exacte.

### *II.7.2.3 Etude à $V_C \ll V_M$*

Typiquement, dans les applications qui nous intéressent, la vitesse de la cible n'est pas nulle mais elle est très faible devant la vitesse du mobile :  $V_C \ll V_M$ .

Nous émettons l'hypothèse réaliste que les résultats obtenus dans le cadre d'une vitesse de cible nulle le sont encore dans le cadre d'une étude à vitesse de cible non nulle mais faible. Dans toutes les simulations qui ont été réalisées, cette hypothèse n'a jamais été mise en défaut.

## **II.8. Simulations**

### *II.8.1 Scénario de guidage. Analyse des conditions initiales*

Nous définissons le scénario de guidage par les conditions initiales du mobile et de la cible ainsi que par les caractéristiques de la loi de navigation. Le mobile et la cible sont caractérisés dès l'engagement du scénario par un triplet de données cinématiques initiales  $(r_0, \delta_{M0}, \eta_0)$  représentées sur la figure II.6 avec :

- $r_0$ , la distance initiale entre le mobile et la cible,
- $\delta_{M0}$ , le dépointage initial entre le vecteur vitesse du mobile et la ligne de visée,
- $\eta_0$ , l'angle de visée initial.

La vitesse de la cible est prise nulle. Le mobile  $M$  se déplace avec une vitesse constante en module de  $800 \text{ m.s}^{-1}$ . Le mobile  $M$  est soumis à une loi de N.P.C. de constante  $A$  pouvant être comprise entre 3 et 5 selon [ZAR 94].

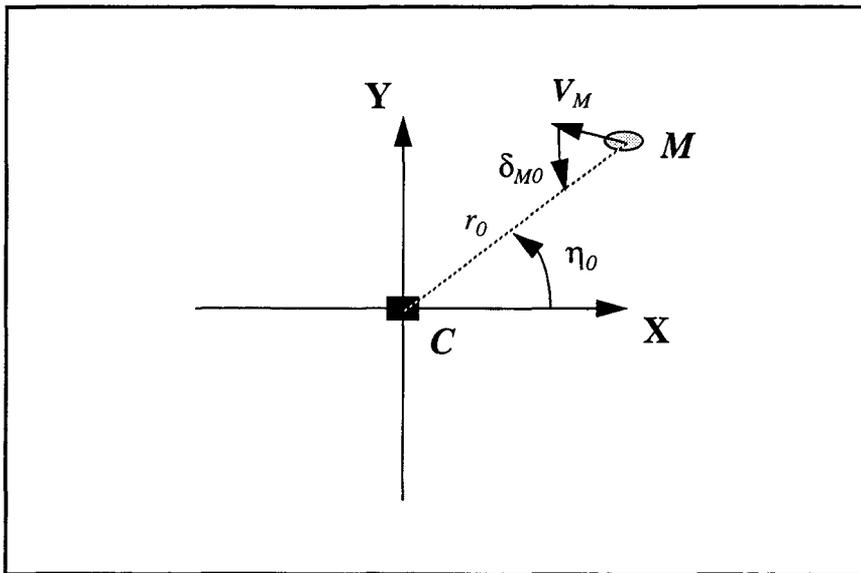


figure II.6 Conditions initiales du scénario

Des senseurs recueillent des données bruitées qui sont traitées par le filtre précédemment cité afin d'avoir une estimation des données cinématiques suivantes :  $r(t)$ ,  $\delta_M(t)$ ,  $\eta(t)$ ,  $\dot{r}(t)$  et  $A$

Nous construisons un scénario de simulation de telle sorte que les phases de guidage initiale et finale soient représentées. Soit  $\phi$ , la phase de guidage totale du mobile. Nous appelons  $\phi_1$  la phase de guidage initiale et  $\phi_2$  la phase de guidage finale. Si les conditions initiales sont telles que seules les hypothèses 1, 2 et 3 sont vérifiées, nous sommes éloignés de la collision et la phase de guidage commence par  $\phi_1$ . Dans ce cas :

$$\phi = \phi_1 + \phi_2. \quad (\text{II.120})$$

Si les conditions initiales sont telles que toutes les hypothèses (de 1 à 6) sont vérifiées, la phase de guidage se limite à  $\phi_2$ , nous sommes proches de la collision. Dans ce cas :

$$\phi = \phi_2. \quad (\text{II.121})$$

Seule l'analyse des hypothèses 4 et 5 nous permettra de détecter la phase  $\phi_2$ . Une étude de la variation des paramètres cinématiques est alors nécessaire.

## II.8.2 Détection de $\phi_1$ et $\phi_2$ par simulation des paramètres cinématiques

### II.8.2.1 Influence de $\delta_{M0}$

Soit le triplet de conditions initiales  $(r_0, \delta_{M0}, \eta_0)$ . La position initiale du mobile par rapport à la cible fixe  $r_0$  et  $\eta_0$ . Nous posons  $r_0 = 15$  km,  $\eta_0 = \frac{\pi}{4}$ . La valeur initiale du dépointage de  $V_M$  par rapport à la ligne de visée initiale ( $\delta_{M0}$ ) impose la nature de la phase dans laquelle évolue le mobile. Ainsi si  $\delta_{M0} < 15^\circ$ , d'après [CAR 89], les conditions initiales sont proches de la collision et  $\phi = \phi_2$ , sinon  $\phi = \phi_1 + \phi_2$ . Nous allons tenter de détecter les phases  $\phi_1$  et  $\phi_2$  en fonction de  $\delta_{M0}$ . Nous fixons dans un premier temps la constante  $A$  à 3. L'analyse de l'influence de la constante  $A$  sur les phases  $\phi_1$  et  $\phi_2$  est le but de la prochaine étude.

remarque : La phase  $\phi_2$  est détectée par la vérification des hypothèses 4 et 5, à savoir :

- $\eta$  varie peu :  $\dot{\eta} \cong 0$  découle de  $\delta_M$  proche de zéro d'après (I.10) pour un point cible de vitesse nulle.
- $V_{Ru}$  constant :  $-V_{Ru} \cong V_M$  découle de  $\delta_M$  proche de zéro d'après (I.9) pour un point cible de vitesse nulle.

La simulation des variations de  $\delta_M(t)$  en fonction de  $\delta_{M0} = \delta_M(t_0)$  afin de détecter  $\phi_1$  et  $\phi_2$  semble primordiale. Il est nécessaire de définir un critère de détection de  $\phi_2$ . Notre choix s'est porté sur une distance de détection minimale  $d\phi_2$  fixée à  $\delta_M = 15^\circ$  d'après [CAR 89]. Ainsi lors de la simulation de  $\delta_M$ ,  $\phi_2$  sera détectée, comme nous le montre la figure II.7, lorsque  $\delta_M$  sera au moins égal à  $15^\circ$ , soit 0.26 rad.

Commentaires sur la simulation représentée figure II.7 :

- Pour un  $\delta_{M0}$  de départ de l'ordre de 0.6 rad ( $35^\circ$ ), nous constatons que 12 kilomètres avant l'impact (3 kilomètres après le début de la simulation), le mobile entre dans la phase finale avec des conditions proches de la collision.
- Un  $\delta_{M0}$  de départ de l'ordre de 1.5 rad ( $\delta_{M0} = 86^\circ$ ) permet d'avoir un guidage final à peu près à mi-course (8 kilomètres avant l'impact).

La figure II.8 montre les variations de  $-V_{Ru}$  en fonction de  $\delta_{M0}$ . D'après (I.9) avec  $V_C = 0$ , l'entrée du mobile en phase finale impose  $-V_{Ru}$  quasiment constant et égale à  $V_M$  ( $800 \text{ m.s}^{-1}$ ). La distance de détection minimale  $d\phi_2$  fixée à  $\delta_M = 15^\circ$  aboutit à  $-V_{Ru}$  considéré comme constant à peu près 4 % en dessous de sa valeur finale.

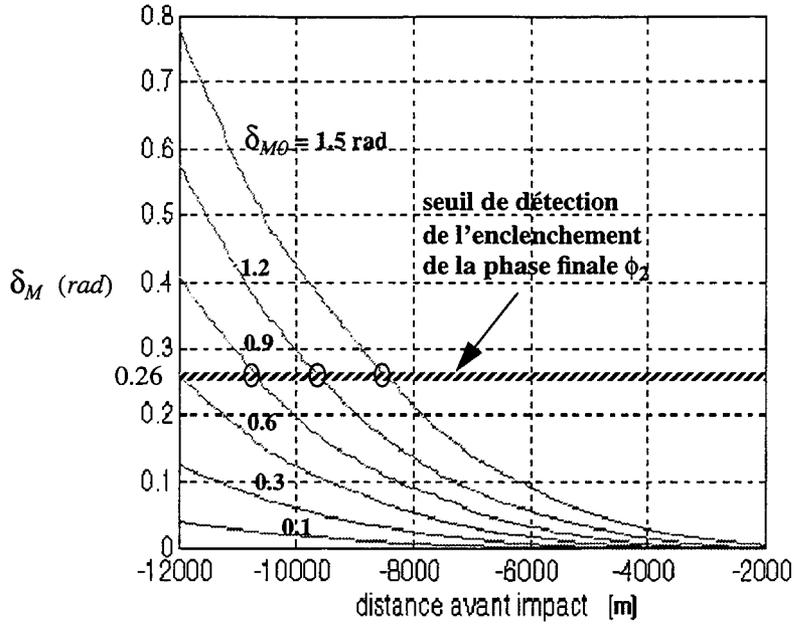


figure II.7 Variations de  $\delta_M$  en fonction de  $\delta_{MO} = \delta_M(t_0)$

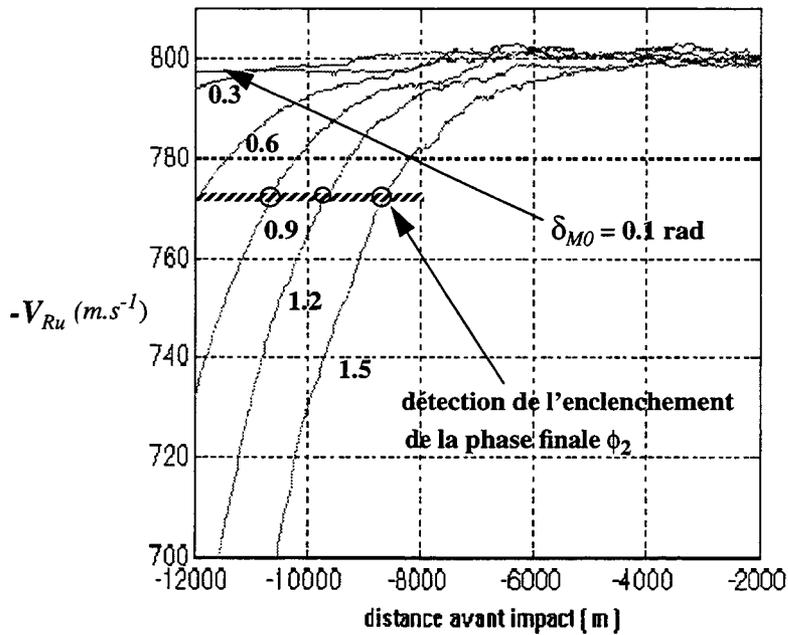


figure II.8 Variations de  $-V_{Ru}$  en fonction de  $\delta_{MO} = \delta_M(t_0)$

### II.8.2.2 Influence de la constante $A$ de N.P.C.

L'objet de cette étude est d'analyser l'influence de la constante de N.P.C. sur la distance de détection minimale de la phase  $\phi_2$  appelée  $d\phi_2$  et étudiée précédemment. La simulation de  $\delta_M$  reste identique. D'après [ZAR 94], [CAR 89] et [LIN 91] il est commun d'employer la N.P.C. avec  $A$  compris entre 3 et 5. Nous réalisons alors une simulation plus générale faisant varier  $A$  entre 3 et 5. Pour chaque valeur de  $\delta_{M0}$ , nous calculons  $d\phi_2$  comme précédemment. Nous pouvons ainsi visualiser sur la figure II.9 la variation de  $d\phi_2$  en fonction de  $\delta_M(t_0)$  et ce pour les différentes valeurs de  $A$ .

#### Commentaires sur la simulation représentée figure II.9 :

- Un palier parasite apparaît à  $d\phi_2 = 14$  km pour  $\delta_M(t_0)$  compris entre 0 et 0.5 rad. Ce palier est en fait dû à l'initialisation du filtre de Kalman pendant le premier kilomètre qui rend tout calcul impossible. Pour  $\delta_M(t_0)$  compris entre 0 et 0.26 rad, nous reconstituons un palier à  $d\phi_2 = 15$  kms. Ceci signifie que pour ces valeurs de  $\delta_M(t_0)$ , le mobile est dès le départ en phase de guidage finale et  $\phi = \phi_2$  ( $d\phi_2 = 15$  km).

- La distance de détection  $d\phi_2$  varie presque linéairement sur une gamme donnée de variation de  $\delta_{M0}$ . Plus  $\delta_M(t_0)$  est grand, c'est à dire plus les conditions initiales sont éloignées de la collision alors plus la phase finale  $\phi_2$  devient petite. Ainsi pour  $A = 3$  et  $\delta_{M0} = 1.5$  rad, nous obtenons une phase finale  $\phi_2$  de l'ordre de 8 kilomètres (à peu près à mi-course). La distance  $d\phi_2$  est de l'ordre de 13 kilomètres lorsque  $\delta_{M0} = 0.5$  rad.

- Lorsque le coefficient  $A$  croît, la distance de détection  $d\phi_2$  croît également. A l'extrême, si aucune limite n'est fixée au coefficient  $A$ , la phase finale intervient presque instantanément. Nous retrouvons la propriété de la collision observée pour une N.P.C. dont le coefficient  $A$  tend vers l'infini. Dans ce cas, pour des valeurs de  $\delta_{M0}$  très éloignées de la collision, nous observons une rotation quasi-instantanée du vecteur vitesse vers la cible pour obtenir une trajectoire de collision. Il faut cependant noter que pour des raisons techniques, l'implémentation d'une N.P.C. au coefficient infini entraînerait une accélération initiale insupportable pour le mobile. Nous nous limitons donc à une gamme donnée réaliste pour les valeurs de  $A$ .

### II.8.3 Simulation de la commande

L'enjeu des simulations visualisées sur la figure II.10 est d'étudier les conditions d'équivalence entre la commande de la N.P.C. et sa projection sur la ligne de visée (N.P.V.1) afin d'illustrer les commentaires du II.6.2.

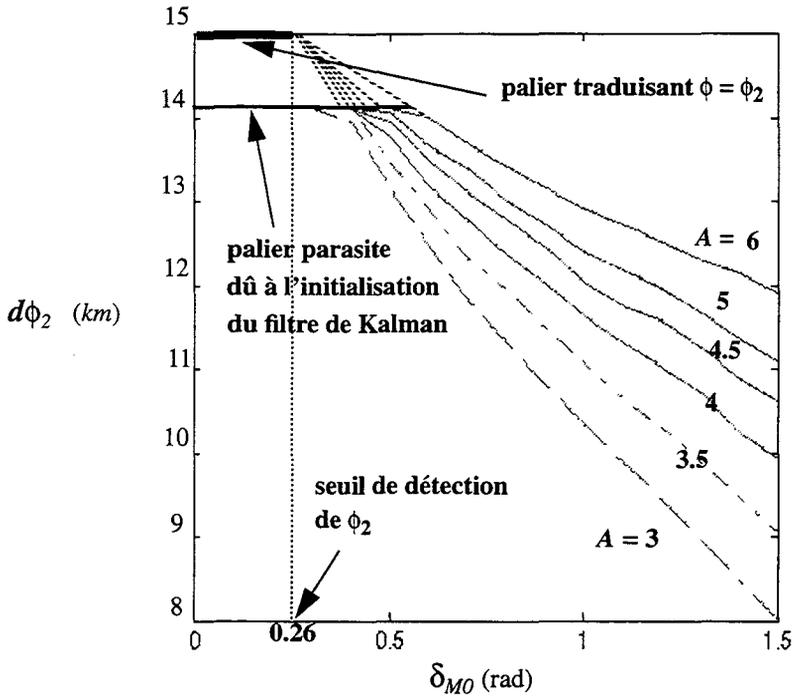


figure II.9 Influence de  $A$  sur la distance minimale de détection  $d\phi_2$

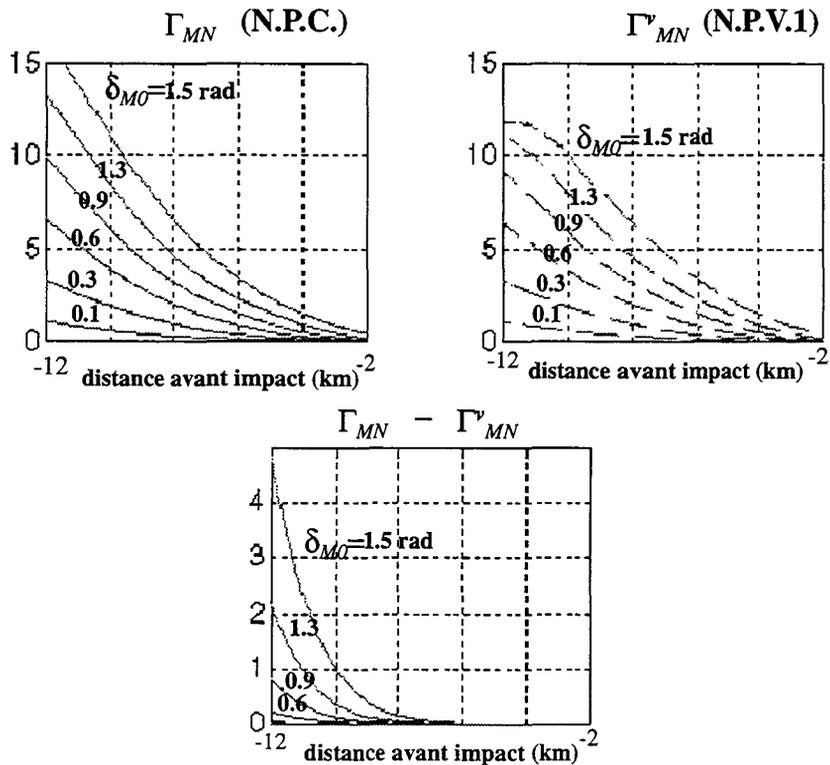


figure II.10 Comparaison entre la N.P.C. et la N.P.V.1

Commentaire sur les simulations représentées figure II.10: La différence entre les deux accélérations ( $\Gamma_{MN} - \Gamma_{MN}^v$ ) est proche de zéro pour  $\delta_M(t_0)$  inférieur à 0.3 rad. Ceci montre l'équivalence entre  $\Gamma_{MN}$  et  $\Gamma_{MN}^v$  durant la phase finale ( $\delta_M(t_0)$  inférieur à 0.26 rad).

### II.8.4 Simulation du temps de vol restant $\theta$

L'étude de l'estimation du temps de vol faite au II.3.3 nous a permis d'expliciter trois expressions dont une faisant suite à l'application du principe du maximum. Nous nous proposons à présent de simuler ces expressions sachant que celle qui est la plus proche de la réalité n'est pas forcément l'expression optimale.

La simulation de la figure II.11 représente les différentes estimations du temps de vol dans le cas où  $A = 3$  avec  $\delta_{M0} = 1.5$  rad. D'après la figure II.9, nous obtenons la phase finale  $\phi_2$  presque à mi-course (8 kilomètres avant l'impact).

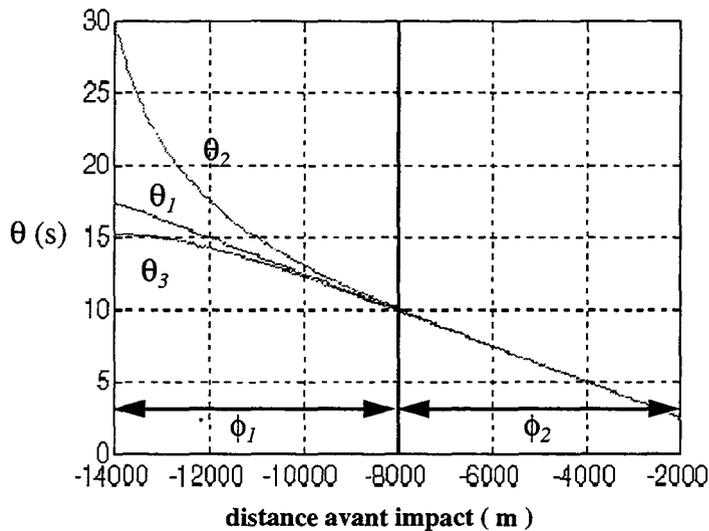


figure II.11 Estimations du temps de vol

Les différentes estimations sont équivalentes durant la phase terminale.  $\theta_1$  qui représente le temps de vol minimal est une fonction linéaire devant être plus petite que les autres estimations. Nous constatons au début de la simulation que l'estimation de  $\theta_3$  est légèrement inférieure à celle de  $\theta_1$ . Cette anomalie est due à l'imprécision du modèle d'estimation du temps de vol par Riggs. Néanmoins, l'estimation de  $\theta_3$  semble acceptable et proche de  $\theta_1$ . Il faut noter par ailleurs que l'une de nos hypothèses de travail est la vitesse du mobile constante en module, hypothèse vraisemblablement restrictive dans la méthode de Riggs.

Par la suite, nous nous limitons aux estimations de  $\theta_1$  et  $\theta_2$  lors des simulations.

## II.8.5 Simulation du coefficient autoadaptatif

### II.8.5.1 Simulation de $\zeta(t)$

L'expression du coefficient autoadaptatif  $\zeta(t)$  est donnée dans le paragraphe II.4.3. Ce coefficient est explicité en fonction du temps de vol restant  $\theta$ . Pour cette raison, les simulations qui suivent (figure II.12, figure II.13 et figure II.14) traitent chacune deux cas correspondant aux deux premières méthodes d'estimation du temps de vol restant. Les conditions initiales de ces simulations sont les mêmes qu'au II.8.4. Nous marquons par un trait pointillé vertical la limite des phases  $\phi_1$  et  $\phi_2$  à peu près à mi-course (8 kilomètres avant l'impact). Nous mettons en oeuvre une étude globale du comportement de  $\zeta(t)$  durant les deux phases. Cependant ce coefficient n'est utilisé tel quel que durant la phase finale, le prochain paragraphe montre l'utilité de simuler le comportement de  $k_1(t) = \frac{\zeta(t)}{\theta^2}$ , variable uniquement employée durant la phase initiale.

Commentaires sur les simulations représentées figure II.12 : Le coefficient autoadaptatif est simulé avec le rapport  $\frac{\beta}{\alpha}$  variant de 1 à 500, donc prenant des valeurs très importantes. Ce cas de figure privilégie, lors du guidage du mobile, le critère énergétique jugé primordial lors de la phase initiale  $\phi_1$ . Nous constatons dans un cas général que les valeurs du coefficient autoadaptatif diminuent au fur et à mesure que le rapport  $\frac{\beta}{\alpha}$  augmente. Pour un rapport  $\frac{\beta}{\alpha}$  particulier, le coefficient autoadaptatif varie d'une valeur comprise entre 1 et 3 vers zéro. Pour les deux estimations de  $\theta$ , le comportement de  $\zeta(t)$  est identique durant la phase  $\phi_2$ , ceci étant dû à l'équivalence entre les estimations du temps de vol restant durant cette phase. Néanmoins l'influence du critère énergétique est primordiale durant la phase  $\phi_1$  et nous constatons au début des simulations de légères différences de comportement du coefficient autoadaptatif selon l'estimation du temps de vol restant.

Commentaires sur les simulations représentées figure II.13 : Le coefficient autoadaptatif est simulé avec le coefficient  $\frac{\beta}{\alpha}$  variant de 0.1 à 5, donc prenant des valeurs très faibles. Ce cas de figure privilégie, lors du guidage du mobile, le critère de précision jugé primordial lors de la phase finale  $\phi_2$ . Nous constatons dans un cas général que les valeurs du coefficient autoadaptatif tendent à être constantes et égales à 3 lorsque le rapport  $\frac{\beta}{\alpha}$  tend vers zéro. Une chute brutale du coefficient autoadaptatif vers zéro a lieu peu avant la collision. A l'extrême, lorsque  $\beta$  prend la valeur zéro, nous sommes en présence d'une fonction coût qui minimise uniquement la distance de passage terminale. Le coefficient autoadaptatif devient alors constant et égal à 3, ceci étant en accord avec l'étude faite au II.4.4.2. Il est important de remarquer que dans ce cas de figure, l'estimation du coefficient autoadaptatif est la même quelque soit l'estimation du temps de vol restant et ce lors des deux phases de guidage.

Nous concluons en rappelant que le coefficient  $\zeta(t)$  ne nous est utile tel quel que durant la phase finale qui elle-même privilégie le critère de précision (minimisation de la distance de passage terminale avec  $\beta$  tendant vers zéro).  $\zeta(t)$  maintenu constant et égal à trois nous semble une excellente approximation quelles que soient les estimations du temps de vol restant.

### II.8.5.2 Simulation de $k_1(t)$

La variable  $k_1(t)$  caractérise la phase initiale et est explicitée par l'équation (II.39). Cette variable peut être exprimée en fonction du coefficient autoadaptatif donné par l'équation (II.88) :  $k_1(t) = \frac{\zeta(t)}{\theta^2}$ . Lors de la phase initiale (qui s'achève dans ces simulations huit kilomètres avant l'impact), nous privilégions le critère énergétique en imposant d'importantes valeurs au rapport  $\frac{\beta}{\alpha}$ .

Commentaires sur les simulations représentées figure II.14 :  $k_1(t)$  prend de faibles valeurs et peut être approximé à une valeur proche de 0.01 lorsque  $\frac{\beta}{\alpha}$  tend vers 500, quelle que soit l'estimation du temps de vol restant. Si nous privilégions à l'extrême uniquement le critère énergétique en imposant nulle la distance de passage terminale, nous aboutissons à la conséquence 3 du II.5.2.2. Ce cas implique une simulation de  $k_1(t) = \frac{3}{\theta^2}$  donc de  $k_1(t) = \frac{\zeta(t)}{\theta^2}$  lorsque  $\frac{\beta}{\alpha}$  tend vers zéro. Il est intéressant de noter que les variations de  $\frac{\beta}{\alpha}$  n'influencent que partiellement  $k_1(t)$  durant la phase initiale.

remarque : Concernant l'étude de  $\Delta c$ , il apparaît judicieux de choisir les critères de minimisation extrêmes pour les différentes phases impliquant  $\zeta = 3$  lors de la phase  $\phi_2$  et  $k_1 = \frac{3}{\theta^2}$  lors de la phase  $\phi_1$ . Ce choix permettra d'établir une équivalence entre l'expression de  $\Delta c$  durant  $\phi_1$  mais employée durant  $\phi_2$  et l'expression de  $\Delta c$  durant  $\phi_2$ , lorsque le mobile se trouve proche de la collision. Dans ce cas, nous n'observons pas de discontinuité de  $\Delta c$  à la limite des deux phases.

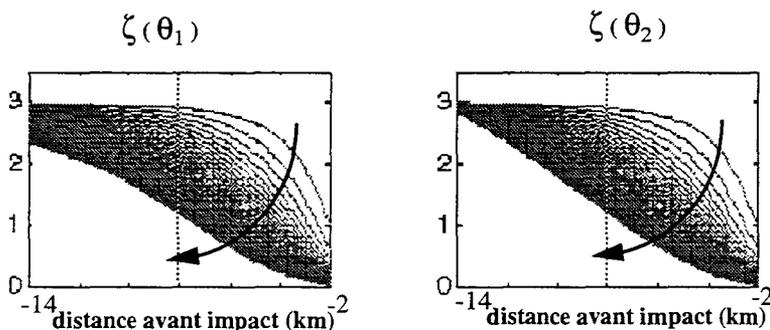


figure II.12 Estimation de  $\zeta(\theta)$  avec  $\frac{\beta}{\alpha}$  variant entre 1 et 500

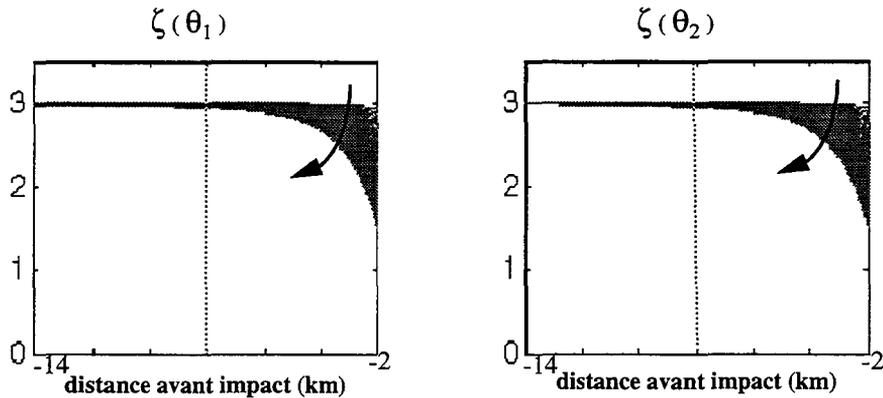


figure II.13 Estimation de  $\zeta(\theta)$  avec  $\frac{\beta}{\alpha}$  variant entre 0.1 et 5

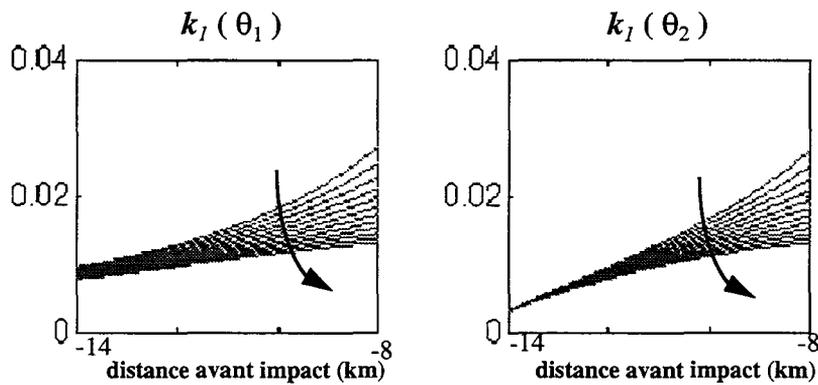


figure II.14 Estimation de  $k_l(\theta)$  avec  $\frac{\beta}{\alpha}$  variant entre 0.1 et 500

## II.8.6 Simulation de la commande optimale

### II.8.6.1 Simulation de $\Delta c$ lors de la phase $\phi_2$ : $\Delta c_2$

Nous nous plaçons dans les mêmes conditions de simulation qu'au II.8.4 afin d'avoir une séparation des phases à mi-course du parcours du mobile. La figure II.15 visualise  $U$ ,  $\hat{U}$  et  $\Delta c$  durant la phase finale. Nous notons que  $\Delta c_2$ , l'expression de  $\Delta c$  durant la phase finale  $\phi_2$ , n'est plus valide au cours de la phase initiale  $\phi_1$ . En effet, nous n'observons pas une convergence vers zéro de  $\Delta c_2$  durant  $\phi_1$ , comme prévoit l'analyse faite au II.6.3.1.

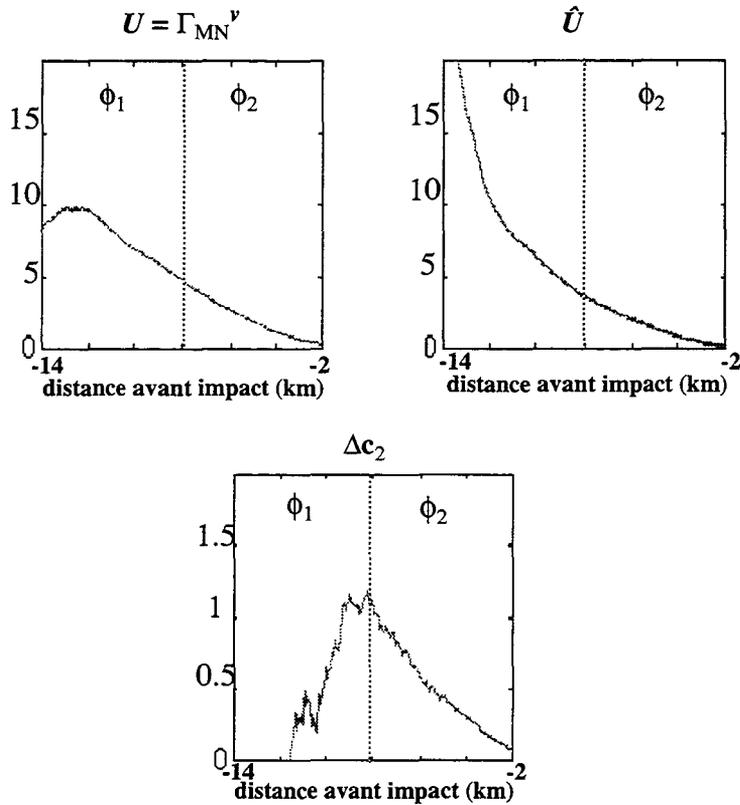


figure II.15 Simulation des variables de commande explicitées en phase finale

### II.8.6.2 Simulation $\Delta c$ lors de la phase $\phi_1$ : $\Delta c_1$

La simulation de  $\Delta c_1$  :  $\Delta c$  durant la phase initiale  $\phi_1$ , nécessite l'estimation du temps de vol restant. Les simulations de  $\Delta c_1$  représentées sur la figure II.16 sont réalisées pour les deux estimations du temps de vol restant avec un rapport  $\frac{\beta}{\alpha}$  proche de zéro. Le but de ces simulations est d'obtenir un comportement de  $\Delta c_1$  convergeant vers la valeur initiale de  $\Delta c_2$  durant la phase finale. Nous désirons donc avoir une expression de  $\Delta c_1$  qui fait évoluer progressivement cette variable vers la valeur initiale de  $\Delta c_2$ . Seule la deuxième estimation du temps de vol restant représente ce cas de figure avec une décroissance progressive vers zéro sans changement de monotonie.

La figure II.17 montre l'équivalence entre l'expression de  $\Delta c_1$  employée durant la phase finale et l'expression de  $\Delta c_2$  durant cette même phase (continuité des  $\Delta c$  entre les deux phases) et ce pour un rapport  $\frac{\beta}{\alpha}$  tendant vers zéro. Cette équivalence n'a pas lieu lorsque le rapport  $\frac{\beta}{\alpha}$  devient trop important, d'après la remarque faite au II.8.5.2.

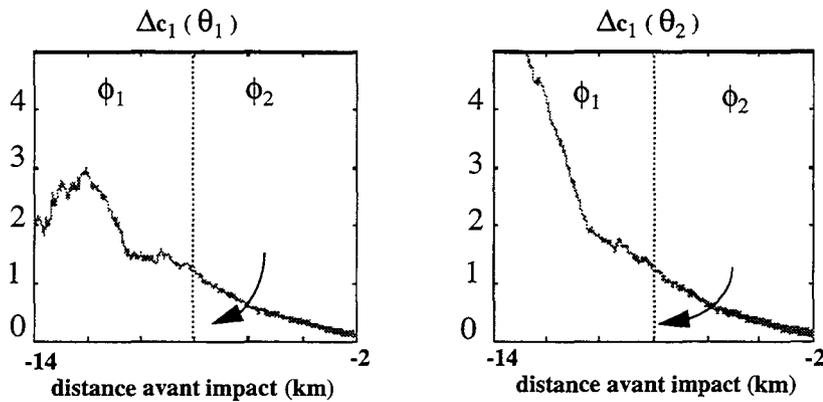


figure II.16 Simulations de  $\Delta c_1(\theta_i)$  avec  $\frac{\beta}{\alpha}$  tendant vers zéro

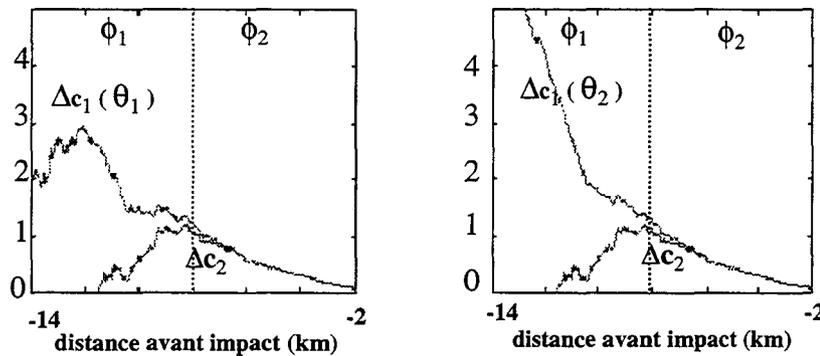


figure II.17 Comparaisons entre  $\Delta c_1(\theta_1)$ ,  $\Delta c_1(\theta_2)$  et  $\Delta c_2$

### II.8.7 Conclusion

Ce chapitre a mis en évidence le comportement de divers aspects de la commande d'un mobile  $M$  afin qu'il rejoigne la cible  $C$  et ce quelles que soient les conditions initiales d'engagement du scénario de guidage. Nous avons créé et simulé une variable  $\Delta c$  représentant l'écart de commande du mobile par rapport à des cas optimaux. La décroissance vers zéro de cette variable apparaît comme une caractérisation d'atteinte de la cible  $C$ .

Nous nous plaçons à présent dans un environnement multicible vers lequel évolue le mobile  $M$ . Nous espérons utiliser l'étude de la caractérisation d'atteinte menée dans ce chapitre afin d'identifier dès le début de l'évolution du mobile la cible de ce mobile située dans l'environnement multicible donné.

## Chapitre III : Caractérisation de la cible d'un mobile parmi un nombre fini de cibles potentielles

### Introduction

Le chapitre précédent a considéré un problème mettant en jeu un mobile  $M$  évoluant vers sa cible  $C$  suivant une loi de N.P.C. Le problème reposait sur la recherche d'une caractérisation d'atteinte de la cible par étude de la commande du mobile. La résolution du problème a introduit une variable de commande  $\Delta c$ , représentative de l'écart de la commande du mobile par rapport à la commande optimale sous certains critères de minimisation.

L'enjeu de ce chapitre est de répondre aux questions imposées par le cahier des charges de la préface : il s'agit de détecter la cible d'un mobile soumis à une loi de N.P.C. et évoluant vers un nombre fini de cibles potentielles. Nous nous plaçons au niveau de chaque cible potentielle et nous étudions le comportement de la variable  $\Delta c$  vue de ces cibles potentielles. Nous montrons qu'il est possible de retrouver parmi les différents comportements de la variable  $\Delta c$  vue de chaque cible potentielle, la caractérisation d'atteinte de la cible étudiée dans le problème précédent. La détection de la cible du mobile en découle immédiatement.

## III.1. Formalisation du problème inverse

### III.1.1 Retour sur la préface

Nous rappelons brièvement l'étude générale présentée dans la préface. Par souci de simplification, nous limitons le nombre de mobiles  $M_j$  à un seul ( $j = 1$ ) et ce mobile est noté  $M$ . Il évolue vers  $N$  points  $P_i$  ( $1 \leq i \leq N$ ). Existe-t-il parmi les  $N$  points  $P_i$ , la cible  $C$  du mobile  $M$ ? Nous parlons alors d'environnement multicible, où chaque point  $P_i$  apparaît être une cible potentielle vers laquelle évolue le mobile  $M$ . Par abus de langage, nous notons  $C_i$  pour  $P_i$ .

Les informations dont nous disposons sont celles dont dispose à l'instant  $t$  un observateur ayant enregistré la cinématique de l'évolution de la situation spatiale de l'instant  $t_0$  à l'instant  $t$  avec  $t_0 < t$ . La caractérisation de la cible  $C$  du mobile  $M$  parmi les  $N$  cibles potentielles  $C_i$ , sachant que le mobile  $M$  est soumis à une loi de N.P.C., doit se faire dans un délai raisonnable, inférieur bien évidemment à  $t_f - t_0$ ,  $t_f$  désignant l'instant de la collision.

### III.1.2 Le problème inverse

Avant d'étudier le problème inverse auquel nous sommes confrontés, il nous semble utile de rappeler la nature du problème direct étudié jusqu'à présent.

**définition 1:** Nous appelons problème direct, le problème qui consiste à guider le mobile  $M$  vers la cible  $C$  suivant une loi de navigation proportionnelle classique (N.P.C.). La commande du mobile est reconstituée à partir des données cinématiques du problème (trajectoires du mobile et de la cible).

**définition 2:** Nous appelons problème inverse, le problème qui consiste à caractériser la cible  $C$  du mobile  $M$  parmi un nombre fini de cibles potentielles  $C_i$ . L'observateur suppose à chaque instant que chaque cible potentielle  $C_i$  est la cible du mobile et adapte la réalité cinématique du problème à cette hypothèse. Le mobile est donc supposé suivre une loi de N.P.C. vers la cible  $C$  mais cette loi est vue de chaque cible potentielle  $C_i$ .

### III.1.3 Formalisation du problème inverse

La modélisation du problème inverse conduit à un système ( $\Sigma$ ) composé du mobile  $M$ , de l'ensemble des points  $P_i$  et de la trajectoire de N.P.C. de  $M$ .

Soit  $\Theta_i$ , l'ensemble des observations de la cinématique de l'évolution de la situation spatiale faites depuis les points  $P_i$  ( $1 \leq i \leq N$ ). Le sous-ensemble  $\Theta_c$  représente la trajectoire de N.P.C.

du mobile  $M$  vue de la cible  $C$  ( $C = P_c$ ), l'indice  $c$  symbolisant la cible du mobile. Les caractéristiques de ce sous-ensemble sont celles d'une loi de N.P.C. vers un point et vue de ce point, elles sont définies dans le premier chapitre.

Soit  $\vartheta_i$ , l'ensemble des variables de commande vues des points  $P_i$  et reconstituées à partir de la cinématique de l'ensemble  $\Theta_i$ . Le sous-ensemble  $\vartheta_c$  est constitué des variables de commande  $U_c$ ,  $\hat{U}_c$  et  $\Delta c_c$ , l'indice  $c$  symbolisant la cible du mobile. Ces variables ont été étudiées dans le deuxième chapitre traitant du problème direct : elles n'étaient pas indicées et étaient notées  $U$ ,  $\hat{U}$  et  $\Delta c$ . Ce sous-ensemble représente la caractérisation d'atteinte de la cible  $C$  du problème direct.

La technique de résolution du problème inverse se résume à trouver  $c$  parmi les valeurs admissibles de l'indice  $i$ . Pour cela, à partir de l'étude comportementale de  $\vartheta_i$ , il s'agit de retrouver l'étude comportementale de  $\vartheta_c$  étudiée dans le chapitre précédent et solution du problème direct caractérisant la cible du mobile.

### III.2. Etude cinématique de l'environnement multicible

#### III.2.1 Environnement d'étude

##### III.2.1.1 Equations cinématiques

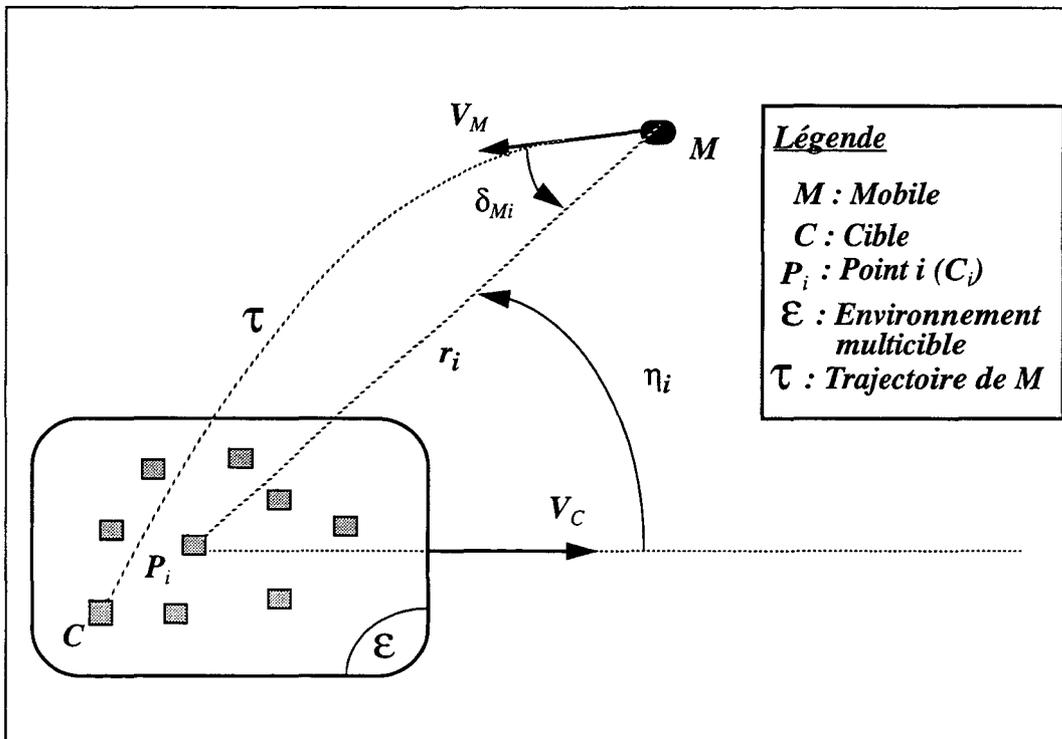


figure III.1 Cinématique vue de l'environnement multicible

Soit  $\mathcal{E}$  l'environnement multicible vers lequel évolue le mobile  $M$ . Cet environnement est composé de  $N$  points  $P_i$  apparaissant comme  $N$  cibles potentielles ( $C_i$ ). Le mobile  $M$  évolue vers la cible  $C$  suivant une loi de N.P.C. :  $\mathcal{T}$  est appelé la trajectoire de  $M$ .

Les équations cinématiques liées au mouvement de  $M$  étant explicitées à partir de la cible du mobile dans le problème direct, nous les explicitons à présent à partir de chaque point  $P_i$ . Les paramètres cinématiques représentant la position du mobile  $M$  par rapport au point  $P_i$  sont indicés par  $i$  (figures III.1 et III.2). Dans ces conditions, d'après la figure III.2,  $\delta_{Mi}$  fait référence à l'angle entre  $\mathbf{V}_M$  et la droite  $(MC_i)$ . De même  $\delta_{Ci}$  fait référence à l'angle entre  $\mathbf{V}_{Ci}$  et la droite  $(MC_i)$ .  $\gamma_i$  et  $\gamma_{Ci}$  font respectivement référence à l'angle que fait la référence fixe avec chacun des vecteurs  $\mathbf{V}_M$  et  $\mathbf{V}_{Ci}$ . Il existe les relations suivantes entre ces angles :

$$\eta_i = \gamma_i + \delta_{Mi}, \quad (\text{III.1})$$

$$\eta_i = \gamma_{Ci} + \delta_{Ci}. \quad (\text{III.2})$$

Nous avons les équations générales :

$$\mathbf{MC}_i = r_i \cdot \mathbf{u}_i. \quad (\text{III.3})$$

$\mathbf{MC}_i$  étant la ligne de visée mobile-cible  $i$ .

$$\mathbf{V}_{Ci} - \mathbf{V}_M = \dot{r}_i \cdot \mathbf{u}_i + r_i \cdot \dot{\eta}_i \cdot \mathbf{v}_i. \quad (\text{III.4})$$

Nous posons  $\mathbf{V}_{Ri}$  le vecteur vitesse relative, la différence  $\mathbf{V}_M - \mathbf{V}_{Ci}$ .

Nous décidons par la suite de raisonner sur la projection de l'opposé de  $\mathbf{V}_{Ri}$  ( $-\mathbf{V}_{Ri}$ ) sur les axes  $(M, \mathbf{u}_i)$  et  $(M, \mathbf{v}_i)$ , ce qui donne :

$$V_{Rui} = \dot{r}_i = (\mathbf{V}_{Ci} - \mathbf{V}_M) \cdot \mathbf{u}_i = V_{Ci} \cos \delta_{Ci} - V_M \cos \delta_{Mi}, \quad (\text{III.5})$$

$$V_{Rvi} = r_i \dot{\eta}_i = (\mathbf{V}_{Ci} - \mathbf{V}_M) \cdot \mathbf{v}_i = -V_{Ci} \sin \delta_{Ci} + V_M \sin \delta_{Mi}. \quad (\text{III.6})$$

Les points  $P_i$  sont supposés se déplacer en ligne droite à vitesse constante  $V_c$  en module : les points  $P_i$  sont alors non manoeuvrants (accélération nulle). Dans ces conditions,  $\delta_{Ci} = \eta_i$ . Les équations (III.5) et (III.6) deviennent :

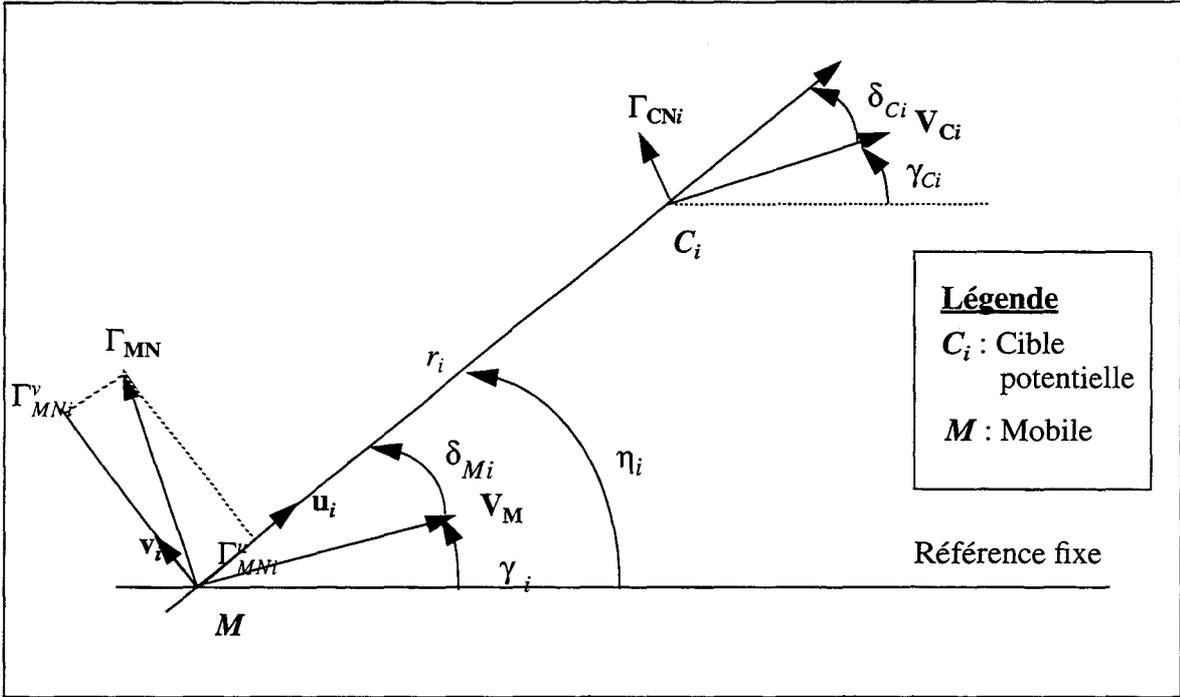


figure III.2 Description cinématique de la position relative entre  $M$  et un point  $P_i$  appelé aussi cible potentielle  $C_i$

$$V_{Rui} = \dot{r}_i = (\mathbf{V}_{C_i} - \mathbf{V}_M) \cdot \mathbf{u}_i = V_C \cos \eta_{Ci} - V_M \cos \delta_{Mi}, \quad (\text{III.7})$$

$$V_{Rvi} = r_i \dot{\eta}_i = (\mathbf{V}_{C_i} - \mathbf{V}_M) \cdot \mathbf{v}_i = -V_C \sin \eta_{Ci} + V_M \sin \delta_{Mi}, \quad (\text{III.8})$$

$$\mathbf{U}_i = \Gamma_{MN} - \Gamma_{CNi} = \Gamma_{MN}, \quad (\text{III.9})$$

avec

- $\Gamma_{CNi}$  : vecteur accélération de la cible  $i$  de vitesse constante (accélération nulle car la cible  $i$  est non manoeuvrante),
- $\Gamma_{MN}$  : vecteur accélération du mobile de vitesse constante (orthogonal au vecteur vitesse  $\mathbf{V}_M$  et donc indépendant de la cible  $i$ ),
- $\mathbf{U}_i$  : vecteur accélération relative mobile-cible  $i$  (= vecteur accélération du mobile)
- $\Gamma_{MNi}^v$  : accélération latérale du mobile, projection de  $\Gamma_{MN}$  sur l'axe de vecteur directeur  $\mathbf{v}_i$ ,
- $\Gamma_{MNi}^u$  : accélération longitudinale du mobile, projection de  $\Gamma_{MN}$  sur l'axe de vecteur directeur  $\mathbf{u}_i$ .

La N.P.C. étant définie à partir de la cible, nous avons :

$$\dot{\delta}_{Mc} = (1 - A_c) \dot{\eta}_c, \quad (\text{III.10})$$

avec  $A_c$  la constante de N.P.C.

La N.P.C. définissant le mouvement d'un mobile vers sa cible et vu de cette cible, nous transposons cette définition vue d'un point  $P_i$  :

$$\dot{\delta}_{Mi} = (1 - A_i) \dot{\eta}_i, \quad (\text{III.11})$$

avec  $A_i$  le paramètre de la N.P.C. vu du point  $P_i$  et constant vu de la cible. La variation de ce paramètre étant inconnue pour l'instant, nous l'appelons paramètre de N.P.C. instantané et le notons :  $A_i(t)$

Remarque : L'hypothèse de points  $P_i$  non manœuvrants se déplaçant dans une direction donnée à vitesse constante se justifie lorsque la vitesse de ces points est très faible devant celle du mobile, comme nous l'avons postulé lors de la préface. Nous simplifions l'étude en posant désormais la vitesse des points  $P_i$  nulle et nous poursuivons l'étude présentée dans [DEL 83] où la notion d'environnement multicible est ébauchée avec les variations du paramètre de N.P.C. instantané. Cette hypothèse sur la vitesse des points  $P_i$  permet de simplifier l'étude de la trajectoire de N.P.C., complexe dans le cas général.

Les équations (III.7) et (III.8) s'écrivent :

$$\dot{r}_i = -V_M \cos \delta_{Mi}, \quad (\text{III.12})$$

$$r_i \dot{\eta}_i = V_M \sin \delta_{Mi}. \quad (\text{III.13})$$

Remarque : Si l'on se réfère à la relation (I.17) entre  $a$  et  $A$  du problème direct (notés  $a_c$  et  $A_c$  dans le problème inverse), nous avons :

$$A_i = \frac{-a_i \dot{r}_i}{V_M \cos \delta_{Mi}}. \quad (\text{III.14})$$

D'après (III.12) :

$$A_i = a_i. \quad (\text{III.15})$$

### III.2.1.2 Définition de $\Theta_i$

Les équations cinématiques du problème inverse font apparaître les variables cinématiques relatives à la position du mobile  $M$  par rapport aux points  $P_i$ . L'ensemble des observations de la cinématique de l'évolution de la situation spatiale faites depuis les points  $P_i$  est appelé  $\Theta_i$  suite

à la formalisation du problème inverse (III.1.3).

Soit  $\Theta_i^T$ , le vecteur observation des positions relatives de  $M$  par rapport à  $P_i$  sous l'hypothèse du mobile  $M$  soumis à une loi de N.P.C. :  $\Theta_i^T = (\eta_i, r_i, \delta_{M_i}, a_i)$ .

### III.2.1.3 Définition de $\vartheta_i$

Soit  $\vartheta_i$ , l'ensemble des variables de commande vues des points  $P_i$ . La commande est liée à l'accélération dite cinématique du mobile et peut être reconstituée à partir de l'ensemble des observations de la cinématique  $\Theta_i$ . Nous reprenons les notations des variables de commande utilisées au II.6. Nous notons :

- $U_i$  : la commande du mobile suivant une loi de N.P.C. vue du point  $P_i$
- $\hat{U}_i$  : la commande optimale suivant certains critères de minimisation vue du point  $P_i$ ,
- $\Delta c_i$  : la différence entre la commande et la commande optimale vue du point  $P_i$ .

Si l'on se réfère à l'expression de l'accélération normale d'une loi de N.P.C. vue dans les chapitres précédents et à l'expression (III.15), la commande  $U_i$  est donnée par :

$$U_i = A_i V_M \dot{\eta}_i = a_i V_M \dot{\eta}_i . \quad (\text{III.16})$$

D'après le deuxième chapitre, la commande optimale  $\hat{U}_i$  peut être approximée proche de la collision et sous les conditions de minimisation de la distance de passage terminale par l'expression :

$$\hat{U}_i = -3 V_{Rui} \dot{\eta}_i = -3 \dot{r}_i \dot{\eta}_i . \quad (\text{III.17})$$

La variable  $\Delta c_i$ , représentative de la différence entre la commande du mobile et la commande optimale s'écrit :

$$\Delta c_i = U_i - \hat{U}_i . \quad (\text{III.18})$$

Dans le cas général, nous appelons  $\vartheta_i^T$  le vecteur observation des variables de commande vues des points  $P_i$  :  $\vartheta_i^T = (U_i, \hat{U}_i)$ . La variable  $\Delta c_i$  est une combinaison linéaire des composantes du vecteur  $\vartheta_i^T$ . L'analyse du comportement des variables de commande nécessite la connaissance des variations du vecteur  $\Theta_i^T$  et de sa dérivée  $\dot{\Theta}_i^T$ .

### III.2.2 La N.P.C. vers un point et vue d'un autre

Le mobile  $M$  décrit la trajectoire de N.P.C.  $\mathcal{T}$  (cf figure III.3). Vue de  $P_l$ , le paramètre  $A_l$  de

N.P.C. est supposé connu et constant. Nous appelons  $A_2$  le paramètre de N.P.C. vu du point  $P_2$ . La courbure  $\rho$  de la trajectoire est indépendante du point où elle est regardée. L'accélération normale d'un mobile en fonction de la courbure est donnée par la relation :

$$\Gamma_{MN} = \rho V_M^2. \quad (\text{III.19})$$

Dans le cas d'une loi de N.P.C., il vient d'après la figure III.3 :

- Vue de  $P_1$  :

$$\Gamma_{MN} = A_1 V_M \dot{\eta}_1, \quad (\text{III.20})$$

- Vue de  $P_2$  :

$$\Gamma_{MN} = A_2 V_M \dot{\eta}_2. \quad (\text{III.21})$$

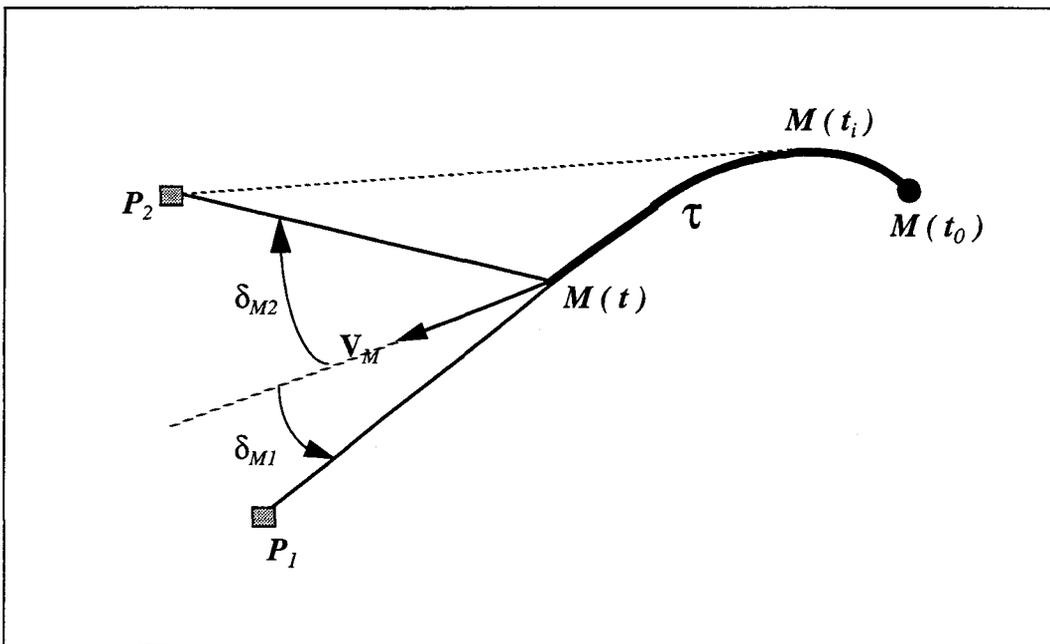


figure III.3 N.P.C. vers  $P_1$  et vue de  $P_2$

D'après (III.20) et (III.21) :

$$A_1 \dot{\eta}_1 = A_2 \dot{\eta}_2. \quad (\text{III.22})$$

D'après (I.10), (III.15) et (III.22) avec  $V_C = 0$  :

$$a_1 \frac{\sin \delta_{M1}}{r_1} = a_2 \frac{\sin \delta_{M2}}{r_2}. \quad (\text{III.23})$$

N'ayant pour l'instant aucune idée sur la variation du paramètre  $a_2$  de N.P.C. instantané, nous considérons l'instant  $t_{collision}$  où, au cours de la trajectoire  $\tau$ , le vecteur vitesse  $V_M$  pointe sur

le point  $P_2$ . Considérons la N.P.C. vue de  $P_2$ . Au voisinage de  $M ( t_{collision} )$ , l'angle  $\delta_{M_2}$  s'anule et change de signe. Le premier membre de l'équation (III.23) étant constant à un moment donné, il est nécessaire d'avoir :

$$\begin{aligned} a_2 ( M_i^- ) &= + \infty, \\ a_2 ( M_i^+ ) &= - \infty. \end{aligned}$$

Ceci est impossible physiquement.

Le comportement singulier du paramètre  $a_2$  de N.P.C. instantané vu de  $P_2$  permet ainsi de discriminer la cible d'un ensemble de point  $P_i$ , le paramètre  $a_1$  de N.P.C. instantané vu de la cible  $P_1$  étant par définition constant.

Il est intéressant de constater à ce niveau de l'étude que les comportements discriminant la cible du mobile dépendent de la position des cibles potentielles par rapport à la trajectoire  $\mathcal{T}$  du mobile. En effet, dans le cas présent, l'évolution infinie du paramètre  $a_2$  dépend de l'éventualité pour le point  $P_2$  d'être pointé par le vecteur vitesse du mobile au cours de sa trajectoire. Nous pressentons la nécessité de réaliser une division de l'environnement d'étude autour de la trajectoire du mobile. Ainsi, la subdivision dans laquelle se trouve un point  $P_i$  entraîne un comportement spécifique des composantes du vecteur  $\Theta_i^T$ . Cette analyse comportementale de  $\Theta_i^T$  pour les différentes valeurs de  $i$  correspondant à une subdivision précise a pour but de discriminer la cible de l'ensemble des points  $P_i$ . L'analyse de  $\Theta_i^T$ ,  $\dot{\Theta}_i^T$  et  $\vartheta_i^T$  doit dégager le plus grand nombre possible de critères discriminant la cible de l'ensemble des points  $P_i$ , critères essentiellement basés sur les aspects commande du problème.

### III.2.3 Etude de la trajectoire du mobile vue de la cible

L'étude théorique qui suit se place dans la phase finale d'évolution du mobile, proche de la collision. Des simulations en fin du chapitre vérifient les propriétés démontrées lors de la phase finale. Le comportement des variables lors de la phase initiale sera observé uniquement par le biais des simulations.

#### III.2.3.1 Etude comportementale de $\Theta_c^T$

Suite à la définition de  $\Theta_c^T$  du III.2.1.2, nous avons :  $\Theta_c^T = (\eta_c, r_c, \delta_{Mc}, a_c)$ .

L'étude comportementale des variables du vecteur  $\Theta_c^T$  nécessite la définition d'intervalles de valeurs pour certaines variables afin d'appréhender des situations réalistes. Ainsi, il est commun d'employer une constante de N.P.C.  $a_c$  comprise entre 3 et 6 selon [ZAR 94]. Nous nous situons dans la phase finale et  $\delta_{Mc}$  est inférieur à  $20^\circ$  selon [CAR 89]. Nous nous limitons à des valeurs initiales positives pour  $\delta_{Mc}$  ( $\delta_{Mc}(t_0) > 0$ ). L'étude se fait avec une vitesse de cible nulle.

- **Etude de  $a_c$**  :  $a_c$  est par définition constant, sa valeur est comprise entre 3 et 6.

• **Etude de  $\delta_{Mc}$**  : Les variations de  $\delta_{Mc}$  sont données par (III.10). La dérivée de  $\delta_{Mc}$  est opposée à celle de  $\eta_c$  car  $a_c$  est compris entre 3 et 6. L'étude de la dérivée nécessite la connaissance du signe de  $\dot{\eta}_c$ . Proche de la collision, les variations de  $\dot{\eta}_c$  en fonction du temps sont données par l'expression (I.54) obtenue dans le premier chapitre. Nous en déduisons que lorsque  $a_c > 2$ ,  $\dot{\eta}_c$  est strictement monotone sur l'intervalle  $[t_0, t_f]$ , qu'il conserve le même signe sur cet intervalle et qu'il converge vers zéro quand  $t$  tend vers  $t_f$ .  $\delta_{Mc}$  est donc strictement monotone sur l'intervalle  $[t_0, t_f]$ .  $\delta_{Mc}(t_0)$  pris positif,  $\delta_{Mc}$  tend alors vers zéro, prend cette valeur au moment de la collision suite à la définition de la N.P.C. appliquée à une cible de vitesse nulle selon [CAR 89].  $\delta_{Mc}$  est donc strictement décroissante sur l'intervalle  $[t_0, t_f]$

• **Etude de  $\eta_c$**  : Suite aux variations de  $\delta_{Mc}$  et à l'équation (III.10),  $\eta_c$  est strictement positif sur  $[t_0, t_f]$ .  $\eta_c$  croît donc de  $\eta_c(t_0)$  à  $\eta_c(t_f)$  sur l'intervalle  $[t_0, t_f]$ . Nous définissons  $\eta_c(t_f)$  par la suite.

• **Etude de  $r_c$**  : Par intégration du rapport des deux membres des équations (III.12) et (III.13) et compte tenu de l'équation (III.10), nous aboutissons à l'expression de  $r_c(t)$  :

$$r_c(t) = r_c(t_0) \left( \frac{\sin \delta_{Mc}(t)}{\sin \delta_{Mc}(t_0)} \right)^{\frac{1}{(a_c-1)}} \quad (III.24)$$

$\delta_{Mc}(t)$  est une fonction décroissante du temps et tend vers zéro quand  $t$  tend vers  $t_f$ . De ce fait, comme la fonction sinus est une fonction croissante sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  et comme  $\sin \delta_{Mc}$  est décroissante sur  $[t_0, t_f]$ ,  $r_c(t)$  décroît de la valeur  $r_c(t_0)$  jusque zéro sur  $[t_0, t_f]$ .

### III.2.3.2 Etude de la direction asymptotique à la rencontre appelée direction critique

Suite à l'étude de la capacité de la N.P.C. à provoquer la rencontre faite dans le premier chapitre au (I.3.3), nous envisageons maintenant le cas où la vitesse de la cible est nulle. L'objectif est de définir précisément la direction critique vers laquelle tend le mobile asymptotiquement en fin de trajectoire.

$V_{Ru}(\eta)$  et  $V_{Rv}(\eta)$  sont définis par :

$$V_{Ru}(\eta) = -V_M \cos(k_0 - \mu\eta), \quad (III.25)$$

$$V_{Rv}(\eta) = V_M \sin(k_0 - \mu\eta), \quad (III.26)$$

avec  $k_0 = \delta_{Mc}(t_0) + \mu\eta_c(t_0)$ .

Nous notons  $\eta_{ui}$  et  $\eta_{vj}$  avec  $(i, j) \in \mathbf{Z}^2$ , les racines successives et respectives des équations (III.25) et (III.26) :

$$\eta_{ui} = \frac{1}{a_c - 1} (k_0 - \frac{\pi}{2} - i\pi), \quad (\text{III.27})$$

$$\eta_{vj} = \frac{1}{a_c - 1} (k_0 - j\pi), \quad (\text{III.28})$$

avec  $a_c = \mu_c + 1$ .

Suite aux définitions 10 et 11 du paragraphe I.3.3.2, il s'agit de montrer que la trajectoire étudiée est toujours contenue dans un domaine normal de type I.

$\dot{r}_c(t) < 0$  sur toute la durée de la trajectoire. Il existe donc un instant où la trajectoire entre dans un domaine normal de type I. Ce domaine est défini par le secteur angulaire  $(C, \eta_{ui}, \eta_{u(i+1)})$ . Le rayon défini par  $\eta_{vj}$  à l'intérieur du secteur en est la direction critique. D'après le premier chapitre, pour montrer que la trajectoire est entièrement contenue dans un domaine normal de type I, c'est-à-dire dans un secteur angulaire  $(C, \eta_{ui}, \eta_{u(i+1)})$ , il suffit de montrer que quelle que soit la valeur de  $\eta_c(t_0)$ , il existe un entier relatif  $i$  tel que :

$$\eta_{ui} < \eta_c(t_0) < \eta_{u(i+1)}. \quad (\text{III.29})$$

Il est alors possible de montrer que l'indice  $i = -1$  convient pour les conditions initiales utilisées dans le problème. La direction critique étant donnée pour  $j = 0$ , nous notons  $\eta_{cf}$  la direction critique vers laquelle tend asymptotiquement le mobile :

$$\eta_{cf} = \eta_{v0} = \eta_c(t_0) + \frac{\delta_{Mc}(t_0)}{a_c - 1}. \quad (\text{III.30})$$

Nous constatons que seules les conditions initiales sur  $\delta_{Mc}(t)$  et  $a_c$  fixent la variation de l'angle de visée durant l'évolution du mobile sous l'hypothèse d'une loi de N.P.C.

### III.2.4 Division de l'espace d'environnement

#### III.2.4.1 Subdivision engendrée par les tangentes à la trajectoire

Nous définissons une subdivision de l'espace autour de la trajectoire du mobile engendrée par les tangentes à la trajectoire. La construction de cette subdivision permet ainsi de repérer l'ensemble des points  $P_i$  pointés à un moment donné par le vecteur vitesse du mobile. Ceci nous renvoie à la singularité constatée lors de l'étude de la N.P.C. vers un point mais vue d'un autre, à savoir l'excursion de type  $+\infty/-\infty$  du paramètre de N.P.C. instantané. Nous appelons évolu-

tion discriminante de type 1 cette singularité qui discrimine la cible de l'ensemble des points  $P_i$ . Cette subdivision a la particularité d'annuler le second membre de l'équation (III.13) et ce grâce au changement de signe de  $\delta_{Mi}(t)$  à l'instant où le point  $P_i$  se trouve en situation de « collision » ( $\dot{\eta}_i = 0$ ) sans rencontre ( $r_i \neq 0$ ).

La construction de la subdivision commence par la définition de la tangente initiale ( $T_0$ ) à la trajectoire  $\tau$  du mobile. Cette droite est portée par le vecteur vitesse du mobile à l'instant initial  $t_0$  : la pente de la trajectoire à l'instant initial est égale à  $tg(\eta_c(t_0) - \delta_{Mc}(t_0))$ . Il est ensuite nécessaire de définir la tangente finale ( $T_f$ ) à la trajectoire. Cette droite a fait l'objet de l'étude précédente et elle est définie par son angle polaire  $\eta_{cf}$  précisé par l'équation (III.30).

Nous pouvons enfin définir l'espace ( $\Gamma$ ) engendré par les tangentes à la trajectoire. Il est constitué par l'ensemble des droites passant par un point de la trajectoire et dont le coefficient directeur varie continûment et de façon monotone entre  $tg(\eta_c(t_0) - \delta_{Mc}(t_0))$  et  $tg(\eta_{cf})$  d'après [DUF 95]. Dans le cas présent, l'espace ( $\Gamma$ ) est défini comme la réunion des demi-plans de frontière ( $T_0$ ) et ( $T_f$ ), contenant la trajectoire  $\tau$  et en dehors de la concavité de  $\tau$  (figure III.4).

Nous appelons ( $\mathcal{S}$ ), le sous-espace de ( $\Gamma$ ) délimité par les droites ( $T_0$ ), ( $T_f$ ) et la trajectoire  $\tau$ . Il est montré dans [DUF 95] que l'intersection des tangentes à la trajectoire a lieu uniquement dans l'espace ( $\mathcal{S}$ ) appelé sous-espace d'intersection des tangentes (figure III.4).

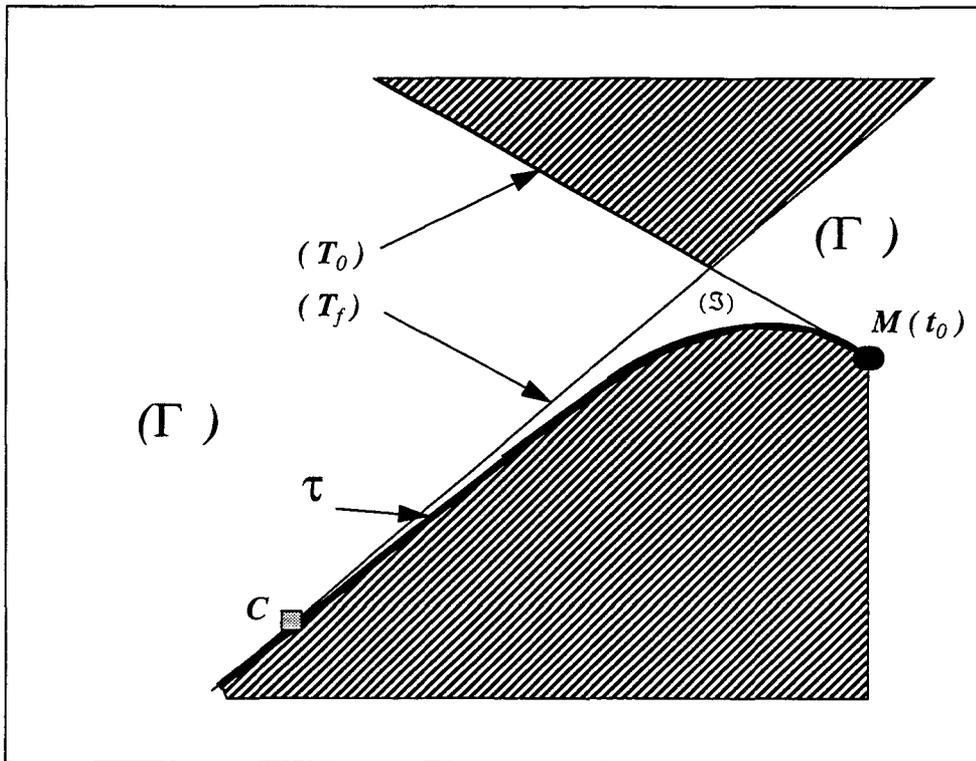


figure III.4 Subdivisions de l'espace d'environnement

### III.2.4.2 Subdivision complémentaire à $(\Gamma)$

Nous appelons  $(\bar{\Gamma})$ , la subdivision complémentaire à  $(\Gamma)$  pour laquelle la situation de « collision » sans rencontre ne peut pas avoir lieu. L'équation (III.13) impose donc un signe constant à  $\dot{\eta}_i$  ainsi que l'équation (III.11) pour  $\delta_{M_i}$ . Cette zone est représentée par des hachures sur la figure III.4.

Nous constatons que chaque subdivision construite entraîne des singularités sur les variables cinématiques. Le but du prochain paragraphe est de faire une étude comportementale de ces variables selon la subdivision où l'observateur est placé.

### III.2.5 Etude comportementale de $\Theta_i^T$

#### III.2.5.1 Evolution de $\eta_i(t)$

Les variations de  $\eta_i(t)$  sont données par l'étude du signe de sa dérivée. Une étude géométrique permet de résoudre le problème en comparant les coefficients directeurs de la droite  $(P_i M)$  et de la tangente en  $M$ , avec  $M$  un point de la trajectoire. Nous nous limitons aux résultats de l'étude réalisée pour les deux subdivisions précédentes.

- Les points  $P_i$  appartenant à  $(\Gamma) - (\mathfrak{S})$  permettent l'annulation de  $\dot{\eta}_i(t)$  une seule fois. Ceci entraîne un unique changement de monotonie de  $\eta_i(t)$ . Les points  $P_i$  appartenant à  $(\mathfrak{S})$  permettent l'annulation de  $\dot{\eta}_i(t)$  deux fois, suite à la possibilité d'intersection de deux tangentes. Les points  $P_i$  de  $(\mathfrak{S})$  entraînent un double changement de monotonie de  $\eta_i(t)$ .

- Les points  $P_i$  appartenant à  $(\bar{\Gamma})$  imposent un signe constant à  $\dot{\eta}_i(t)$ . Ceci entraîne une stricte monotonie de  $\eta_i(t)$ .

$(\Gamma) - (\mathfrak{S})$  se décompose en deux sous-espaces :  $(\Gamma_1)$  et  $(\Gamma_2)$  de telle sorte que pour tous les points  $P_i$  de  $(\Gamma_2)$ , le coefficient directeur de la droite  $P_i M(t_0)$  soit supérieur au coefficient directeur de la tangente en  $M(t_0)$  (cf figure III.5).

$(\bar{\Gamma})$  se décompose en deux sous-espaces :  $(\bar{\Gamma}_{ic})$ , l'espace complémentaire à  $(\Gamma)$  situé à l'intérieur de la concavité (indice *ic*) et  $(\bar{\Gamma}_{ec})$  l'espace complémentaire à  $(\Gamma)$  situé à l'extérieur de la concavité (indice *ec*) (cf figure III.5).

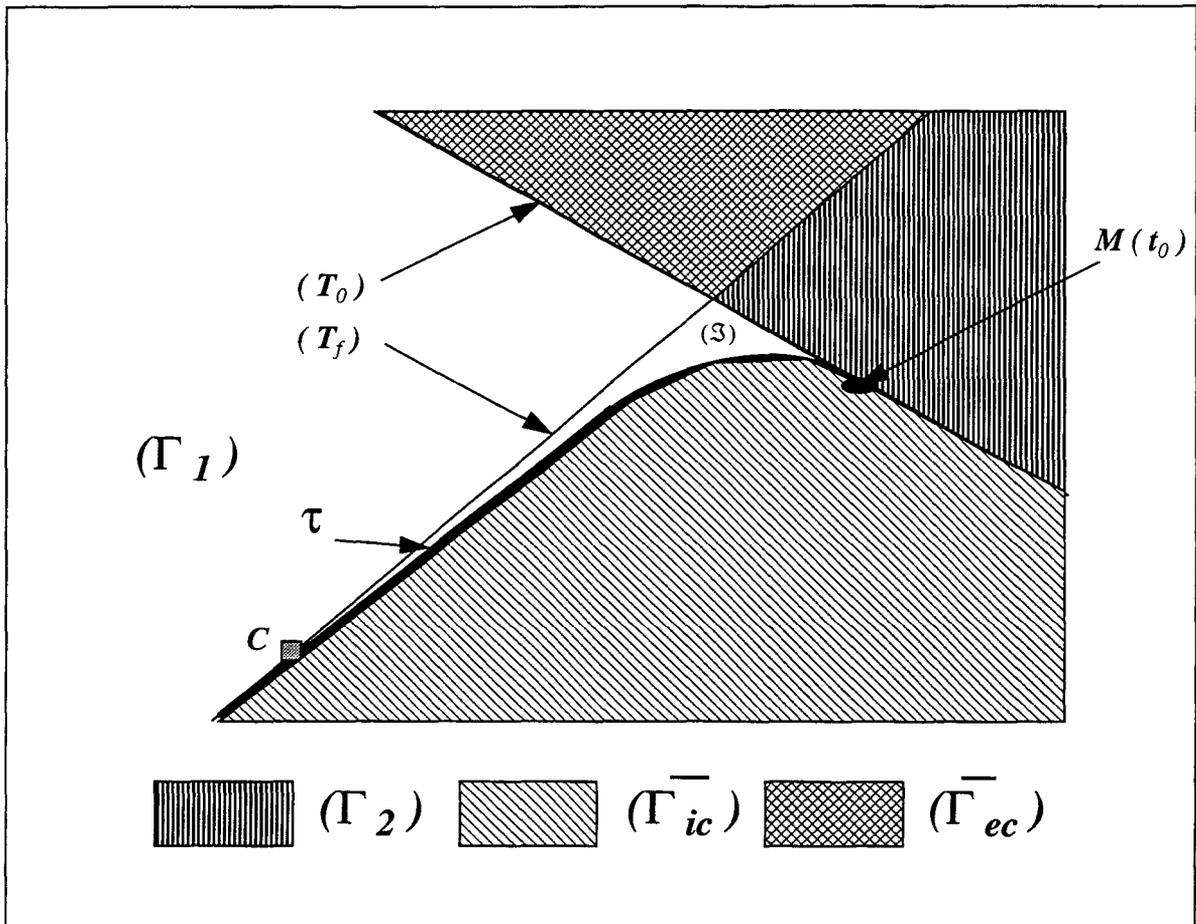


figure III.5 Décomposition de l'espace d'environnement en subdivisions

Il a été montré dans [DUF 94] et [DUF 95] :

- Si  $P_i \in (\Gamma_1)$  :  $\eta_i(t)$  est décroissant en début de trajectoire puis croissant,
- Si  $P_i \in (\Gamma_2)$  :  $\eta_i(t)$  est croissant en début de trajectoire puis décroissant,
- Si  $P_i \in (S)$  :  $\eta_i(t)$  est croissant en début de trajectoire, décroissant puis de nouveau croissant,
- Si  $P_i \in (\bar{\Gamma}_{ic})$  :  $\eta_i(t)$  est croissant,
- Si  $P_i \in (\bar{\Gamma}_{ec})$  :  $\eta_i(t)$  est décroissant.

### III.2.5.2 Evolution de $\delta_{Mi}(t)$

Un raisonnement géométrique aboutit à l'égalité suivante :

$$\delta_{Mi} = \delta_{Mc} + \eta_i - \eta_c. \quad (\text{III.31})$$

Nous dérivons l'équation (III.31) et appliquons les relations (III.10) et (III.15) pour obtenir :

$$\dot{\delta}_{Mi} = \dot{\eta}_i - a_c \dot{\eta}_c. \quad (\text{III.32})$$

Nous déduisons un éventuel changement de monotonie de  $\delta_{Mi}(t)$  lorsque le second membre de l'équation (III.32) s'annule. Ce changement de monotonie ne peut se produire que lorsque  $\dot{\eta}_i(t)$  et  $\dot{\eta}_c(t)$  sont de même signe. L'étude précédente permet d'avancer que le changement de monotonie de  $\delta_{Mi}(t)$  n'a lieu que lorsque  $P_i \in (\bar{\Gamma}_{ic})$ .

Il a été montré dans [DUF 94] et [DUF 95] :

- Si  $P_i \in (\bar{\Gamma}_{ic})$ ,  $\delta_{Mi}(t)$  change une seule fois de monotonie pour avoir le sens de variation de  $\eta_i(t)$  en fin de trajectoire.  $\delta_{Mi}(t)$  est donc décroissant puis croissant.  $\delta_{Mi}(t)$  est de signe constant et positif si  $\delta_{Mc}(t_0) \geq 0$ .

- Si  $P_i \in (\phi_{ec})$  avec  $\phi_{ec} = \bar{\Gamma}_{ec} \cup \Gamma$  alors  $\delta_{Mi}(t)$  est strictement décroissant :

Si  $P_i \in (\Gamma_1)$  alors il y a changement de signe au moment de la situation de «collision» sans rencontre :  $\delta_{Mi}(t)$  est de signe positif avant la situation de collision si  $\delta_{Mc}(t_0) \geq 0$ .

Si  $P_i \in (\Gamma_2)$  alors il y a passage de  $\delta_{Mi}(t)$  par  $-\pi$  à la situation de «collision» sans rencontre :  $\delta_{Mi}(t)$  est de signe négatif si  $\delta_{Mc}(t_0) \geq 0$ .

Si  $P_i \in (\bar{\Gamma}_{ec})$  alors  $\delta_{Mi}(t)$  est de signe négatif si  $\delta_{Mc}(t_0) \geq 0$ .

Nous donnons ci-après les intervalles d'étude des valeurs de  $\delta_{Mi}(t)$  retenues pour chaque subdivision :

- Si  $P_i \in (\Gamma_1)$  alors  $-\frac{\pi}{2} < \delta_{Mi}(t) < \frac{\pi}{2}$ ,
- Si  $P_i \in (\Gamma_2)$  alors  $-\frac{3\pi}{2} < \delta_{Mi}(t) < -\frac{\pi}{2}$ ,
- Si  $P_i \in (\bar{\Gamma}_{ec})$  alors  $-\pi < \delta_{Mi}(t) < 0$ ,
- Si  $P_i \in (\bar{\Gamma}_{ic})$  alors  $0 < \delta_{Mi}(t) < \frac{\pi}{2}$ .

### III.2.5.3 Evolution de $r_i(t)$

Les variations de  $r_i(t)$  sont données par le signe de la dérivée de  $r_i(t)$ . D'après (III.12),  $\dot{r}_i(t)$  s'annule lorsque :

$$\delta_{M_i}(t) = (2p+1) \frac{\pi}{2} \text{ avec } p \in \{0; -1\}. \quad (\text{III.33})$$

D'après (III.31), une condition sur  $\eta_i(t)$  caractérisant un éventuel changement de variation de  $r_i(t)$  donne :

$$\eta_i(t) = \eta_c(t) - \delta_{M_c}(t) + (2p+1) \frac{\pi}{2}. \quad (\text{III.34})$$

Suite au paragraphe III.2.3.1 sur le comportement de  $\eta_c(t)$  et  $\delta_{M_c}(t)$ , un encadrement de ces deux variables donne :

$$0 \leq \delta_{M_c}(t) \leq \delta_{M_c}(t_0), \quad (\text{III.35})$$

$$\eta_c(t_0) \leq \eta_c(t) \leq \eta_{cf}. \quad (\text{III.36})$$

Nous possédons finalement un encadrement de valeurs concernant  $\eta_i(t)$  pour qu'il puisse y avoir changement de monotonie de  $r_i(t)$  :

$$(2p+1) \frac{\pi}{2} + \eta_c(t_0) - \delta_{M_c}(t_0) \leq \eta_i(t) \leq (2p+1) \frac{\pi}{2} + \eta_{cf} \text{ avec } p \in \{0; -1\}. \quad (\text{III.37})$$

L'encadrement de valeurs dépendant des conditions initiales, dès le début de la trajectoire nous pouvons considérer les points  $P_i$  pour lesquels l'encadrement (III.37) est vérifié et donc prévoir un changement de monotonie pour  $r_i(t)$ .

### III.2.5.4 Evolution de $a_i(t)$ selon [DUF 94]

Deux comportements singuliers caractérisent  $a_i(t)$ . Le premier comportement que nous avons appelé critère discriminant de type 1 est caractérisé par l'excursion de type  $+\infty/-\infty$  si le point  $P_i$  appartient à l'espace  $(\Gamma)$  engendré par les tangentes à la trajectoire.

Le deuxième comportement singulier que nous appelons critère discriminant de type 2 a lieu lorsque nous nous situons proche de la collision, vers la fin de la trajectoire. En effet, la trajectoire de N.P.C. tendant à devenir une droite d'angle polaire  $\eta_{cf}$ , la courbure tend à devenir nulle donc l'accélération normale aussi. D'après (III.21),  $a_i(t)$  doit tendre vers zéro à condition que  $\dot{\eta}_i(t) \neq 0$ . Deux cas se présentent :

- Si  $P_i \in (\Gamma)$  :  $a_i(t)$  doit tendre vers zéro à condition que  $\dot{\eta}_i(t) \neq 0$ , donc après l'excursion de type  $+\infty/-\infty$ .

- Si  $P_i \in (\bar{\Gamma})$  :  $a_i(t)$  tend vers zéro en fin de trajectoire.

Concernant la monotonie de  $a_i(t)$ , il a été montré dans [DUF 94] :

- Si  $P_i \in (\bar{\Gamma}_{ic})$  :  $a_i(t)$  est une fonction décroissante vers zéro.

- Si  $P_i \in (\phi_{ec})$  avec  $\phi_{ec} = \bar{\Gamma}_{ec} \cup \Gamma$ ,  $a_i(t)$  est une fonction croissante vers zéro.

Si  $P_i \in (\Gamma)$ , nous observons une excursion de type  $+\infty/-\infty$ . Si  $P_i \in (\bar{\Gamma}_{ec})$  alors  $a_i(t) \leq 0$ .

Un récapitulatif du comportement de  $\delta_{Mi}(t)$  et  $a_i(t)$  suivant la position du point  $P_i$  dans l'environnement multicible est donné par la figure III.6.

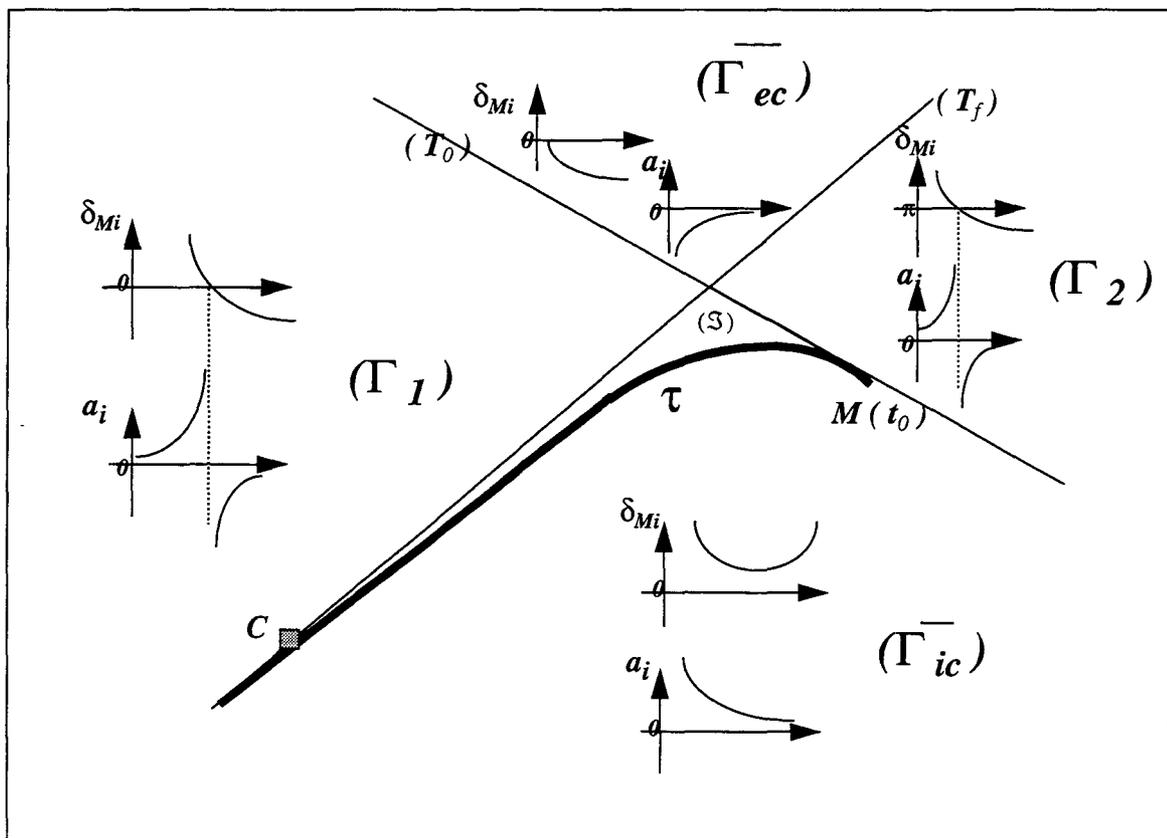


figure III.6 Récapitulatif du comportement de  $\delta_{Mi}(t)$  et  $a_i(t)$

### III.3. Etude de la commande dans le problème inverse [BOU 94b]

#### III.3.1 Etude de la commande vue de la cible ( $\vartheta_C^T$ )

Il s'agit en fait de mener une étude précise sur le comportement des composantes de  $\vartheta_C^T$ . Pour cela, l'analyse du comportement de certaines composantes de  $\dot{\Theta}_C^T$  est nécessaire. L'étude a en fait été réalisée dans le deuxième chapitre au (II.6) pour les variables  $U$ ,  $\hat{U}$  et  $\Delta c$  appelées  $U_c$ ,  $\hat{U}_c$  et  $\Delta c_c$  dans le problème inverse. Ces variables énoncées dans le problème direct permettent de caractériser la cible. Pour cela, l'étude menée proche de la collision a nécessité la connaissance du comportement d'une variable de  $\dot{\Theta}_C^T$ , à savoir :  $\dot{\eta}_c$ . La convergence vers zéro de cette variable a permis de conclure sur la convergence également vers zéro des composantes de  $\vartheta_C^T$  et donc de  $\Delta c_c$ .

En revanche, l'étude menée pour des conditions initiales éloignées de la collision a été réalisée par le biais de simulations pour  $\Delta c_c$ . L'annexe concernant l'étude de la N.P.C. selon Becker a permis de dégager une étude comportementale de  $\eta_c$  dans des conditions générales pouvant être éloignées de la collision. Des secteurs angulaires délimitent les zones où il peut y avoir changement de monotonie de  $\eta_c$ , pour avoir finalement une évolution strictement monotone vers  $\eta_{cf}$ , proche de la collision.

D'une façon générale, le deuxième chapitre conclut sur le comportement de  $\Delta c$  éloigné de la collision en montrant que cette variable converge progressivement vers le comportement étudié lors de la phase finale, à savoir vers zéro.

#### III.3.2 Etude comportementale de $\dot{\Theta}_i^T$

Nous rappelons les variables de  $\vartheta_i^T$  exprimées au III.2.1.3 :

$$U_i = A_i V_M \dot{\eta}_i = a_i V_M \dot{\eta}_i \quad (\text{III.38})$$

$$\hat{U}_i = -3 V_{Rui} \dot{\eta}_i = -3 \dot{r}_i \dot{\eta}_i, \quad (\text{III.39})$$

$$\Delta c_i = U_i - \hat{U}_i. \quad (\text{III.40})$$

D'après (III.38) et (III.39), nous sommes amenés à étudier le comportement de  $\dot{\eta}_i$  et  $\dot{r}_i$ , composantes de  $\dot{\Theta}_i^T$ .

- **Etude de  $\dot{r}_i(t)$**  : Nous rappelons l'expression de la vitesse relative vue du point  $P_i$  :

$$\dot{r}_i = -V_M \cos \delta_{Mi} . \quad (\text{III.41})$$

Les variations de la vitesse relative dépendant du signe de sa dérivée, nous avons :

$$\ddot{r}_i = V_M \sin \delta_{Mi} \dot{\delta}_{Mi} . \quad (\text{III.42})$$

$\dot{r}_i(t)$  change donc de monotonie lorsque :  $\delta_{Mi} = 0 [\pi]$  ou  $\dot{\delta}_{Mi} = 0$ .

Les variations de  $\dot{r}_i(t)$  dépendent de la subdivision de l'espace d'environnement dans laquelle se trouve le point  $P_i$ . Les résultats de l'étude sont résumés par les figures III.7 et III.8.

• **Etude de  $\dot{\eta}_i(t)$**  : Le problème est d'expliciter la dérivée de  $\dot{\eta}_i(t)$  en fonction des composantes de  $\Theta_i^T$ , dont les variations sont connues. Pour cela, les équations cinématiques (III.11), (III.12) et (III.13) sont reprises et traitées de la façon suivante : (III.13) est dérivé pour obtenir une nouvelle relation sur laquelle sont appliqués (III.11) et (III.12). Nous aboutissons à l'expression de  $\ddot{\eta}_i(t)$  suivante :

$$\ddot{\eta}_i = (2 - a_i) \frac{\cos \delta_{Mi}}{\sin \delta_{Mi}} \dot{\eta}_i^2 \quad \text{si } \delta_{Mi} \neq 0 [\pi], \quad (\text{III.43})$$

$$\ddot{\eta}_i = \frac{\dot{\delta}_{Mi}}{r_i} \quad \text{si } \delta_{Mi} = 0, \quad (\text{III.44})$$

$$\ddot{\eta}_i = -\frac{\dot{\delta}_{Mi}}{r_i} \quad \text{si } \delta_{Mi} = \pi . \quad (\text{III.45})$$

$\dot{\eta}_i(t)$  change de monotonie lorsque :  $a_i = 2$  ou  $\delta_{Mi} = \frac{\pi}{2} [\pi]$ .

Il faut noter que la condition  $\dot{\eta}_i = 0$  est équivalente à  $\delta_{Mi} = 0 [\pi]$  d'après (III.13) avant la rencontre. Lorsque  $\delta_{Mi} = 0 [\pi]$ , le signe de  $\dot{\eta}_i(t)$  dépend de celui de  $\dot{\delta}_{Mi}$  d'après (III.44) et (III.45).

Les variations de  $\dot{\eta}_i(t)$  dépendent de la subdivision de l'espace d'environnement dans laquelle se trouve le point  $P_i$ . Les résultats de l'étude sont résumés par les figures III.7 et III.8.

### III.3.3 Etude comportementale de $\vartheta_i^T$

#### III.3.3.1 Comportement de $U_i$

L'accélération normale d'un mobile étant indépendante du point d'observation (cf III.2.2), l'expression (III.38) de la commande  $U_i$  possède un comportement indépendant du point d'ob-

servation. Nous en déduisons que  $U_i = U_c$ , avec  $U_c$  l'accélération d'une loi de N.P.C. vue de la cible :

$$U_i = A_i V_M \dot{\eta}_i = A_c V_M \dot{\eta}_c . \quad (\text{III.46})$$

Nous sommes renvoyés à l'étude comportementale de  $U_c$  du III.3.1.

### III.3.3.2 Comportement de $\hat{U}_i$

Nous étudions à présent la dérivée de l'expression (III.39). Cette dérivée fait apparaître  $\dot{r}_i$ , que nous remplaçons par la dérivée de l'expression (III.12) et  $\dot{\eta}_i$  est remplacé par l'équation (III.43). Nous aboutissons à l'expression suivante :

$$\frac{\partial \hat{U}_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (-3\dot{r}_i \dot{\eta}_i) = 3V_M \dot{\eta}_i^2 \sin \delta_{Mi} \chi(a_i, \delta_{Mi}) \quad \text{si } \delta_{Mi} \neq 0 [\pi], \quad (\text{III.47})$$

$$\frac{\partial \hat{U}_i}{\partial t} = -3\dot{r}_i \frac{\dot{\delta}_{Mi}}{r_i} \quad \text{si } \delta_{Mi} = 0 , \quad (\text{III.48})$$

$$\frac{\partial \hat{U}_i}{\partial t} = 3\dot{r}_i \frac{\dot{\delta}_{Mi}}{r_i} \quad \text{si } \delta_{Mi} = \pi , \quad (\text{III.49})$$

avec :

$$\chi(a_i, \delta_{Mi}) = (2 - a_i) \left( \frac{\cos \delta_{Mi}}{\sin \delta_{Mi}} \right)^2 - (1 - a_i). \quad (\text{III.50})$$

$\hat{U}_i$  change de monotonie lorsque  $\chi(a_i, \delta_{Mi})$  s'annule, soit lorsque :

$$a_i = \frac{(2 - tg^2 \delta_{Mi})}{(1 - tg^2 \delta_{Mi})}. \quad (\text{III.51})$$

Une étude graphique de la recherche des extrema de  $\hat{U}_i$  semble plus pratique et plus élégante. Cette étude est liée à la recherche d'intersections éventuelles entre les courbes représentatives des fonctions  $a_i(t)$  et  $\alpha_i(t)$  avec :

$$\alpha_i(t) = \frac{2 - tg^2 \delta_{Mi}(t)}{1 - tg^2 \delta_{Mi}(t)}. \quad (\text{III.52})$$

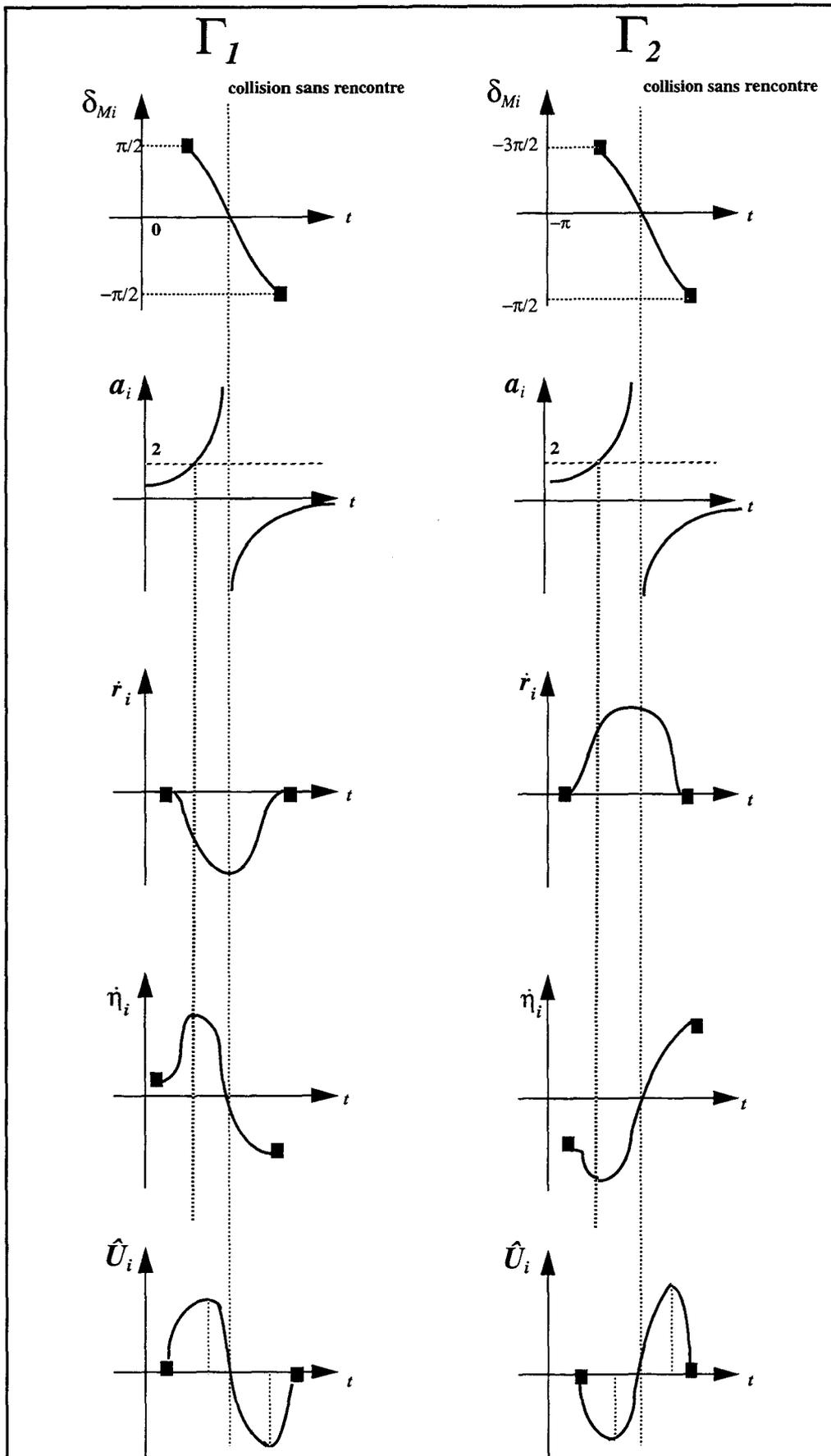


figure III.7 Evolutions cinématiques dans  $(\Gamma) - (\mathcal{S})$

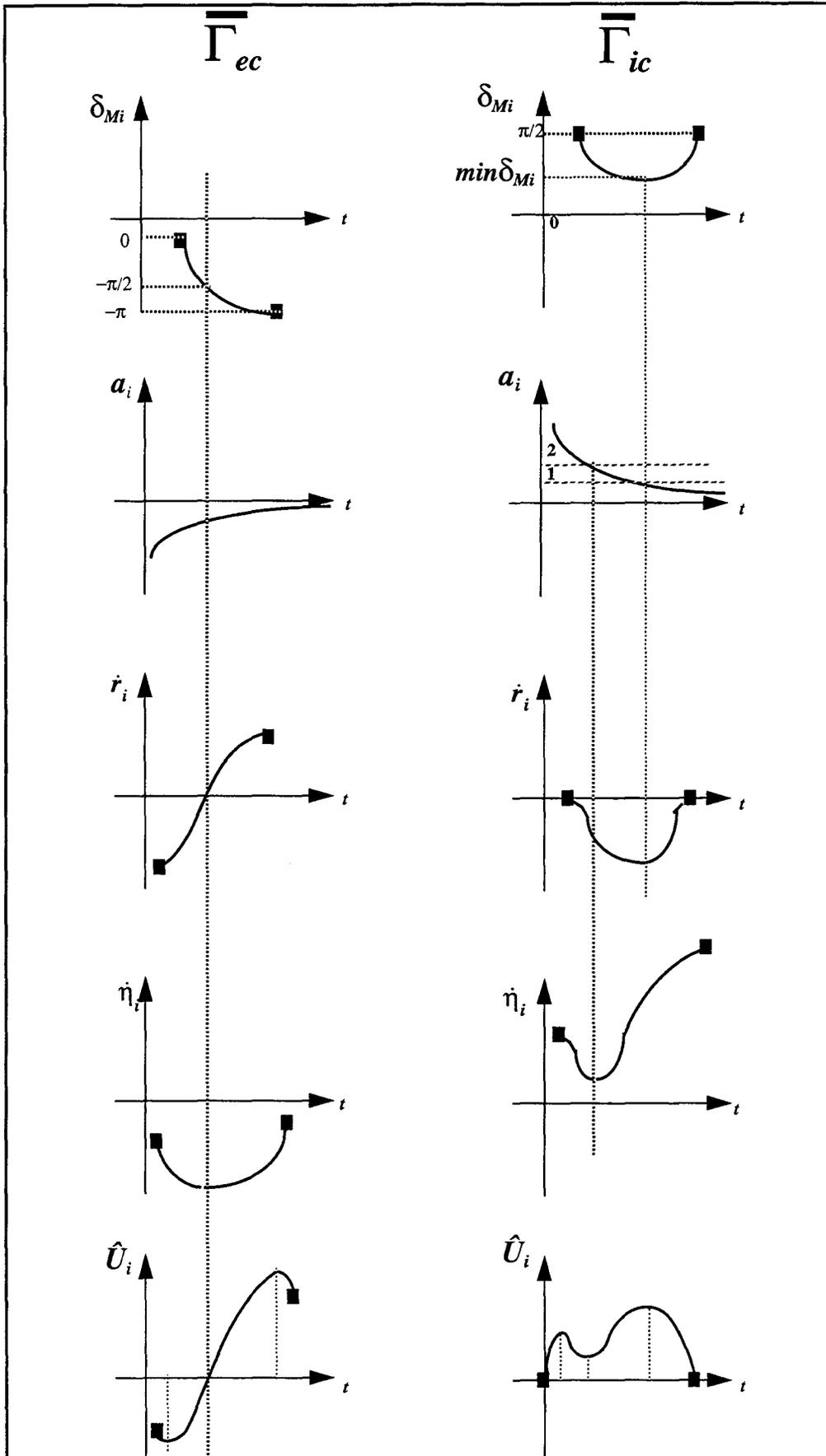


figure III.8 Evolutions cinématiques dans  $(\overline{\Gamma})$

• **Extrema de  $\hat{U}_i$  dans  $\Gamma_1$ :** (figure III.9). Si  $P_i \in (\phi_{ec})$  avec  $\phi_{ec} = \bar{\Gamma}_{ec} \cup \Gamma$  alors  $\delta_{Mi}(t)$  est strictement décroissant d'après III.2.5.2. Nous plaçons en abscisses les valeurs de  $\delta_{Mi}$  prises au cours du temps pour les points  $P_i$  appartenant à la zone  $\Gamma_1$ . Nous prenons comme intervalle de valeurs pour  $\delta_{Mi} : -\frac{\pi}{2} < \delta_{Mi}(t) < \frac{\pi}{2}$  (cf III.2.5.2) et nous traçons la fonction  $\alpha_i[\delta_{Mi}(t)]$  définie par :

$$\alpha_i(\delta_{Mi}(t)) = \frac{2 - tg^2\delta_{Mi}(t)}{1 - tg^2\delta_{Mi}(t)}, \quad (III.53)$$

avec  $-\frac{\pi}{2} < \delta_{Mi}(t) < \frac{\pi}{2}$  de telle sorte que  $\delta_{Mi}(t_0) = \frac{\pi}{2}$ . L'expression de  $\delta_{Mi}(t)$  n'étant pas connue de façon analytique, nous étudions la courbe représentative de  $\alpha_i[\delta_{Mi}(t)]$ .

Nous superposons au précédent tracé celui de  $a_i[\delta_{Mi}(t)]$ . Nous n'avons pas d'expression analytique de cette fonction, nous notons néanmoins l'excursion de type  $+\infty/-\infty$  du paramètre de N.P.C. instantané  $a_i(t)$  au moment de la collision sans rencontre ( $\delta_{Mi}(t_{collision}) = 0$  dans la zone  $\Gamma_1$ ). Notons que les courbes sont fonctions de  $\delta_{Mi}(t)$ , elles sont donc orientées avec le temps. Nous lisons l'évolution de ces courbes de la droite vers la gauche ( $\delta_{Mi}(t_0) = \frac{\pi}{2}$  et  $\delta_{Mi}(t)$  est décroissant).

• Si  $a_i(t_0) > 1$ , d'après la figure III.9, une intersection entre les deux courbes est possible avant la situation de «collision» sans rencontre : ceci correspond à la détection du premier extremum de la commande optimale  $\hat{U}_i$  ( nous lisons la courbe de la droite vers la gauche).

• Si  $a_i(t_0) < 1$ , deux intersections entre les deux courbes sont possibles avant la situation de «collision» sans rencontre : elles correspondent aux deux premiers extrema de  $\hat{U}_i$ .

Seule une intersection entre les deux courbes est possible après la situation de «collision» sans rencontre. Cet extremum de  $\hat{U}_i$  correspond dans ce cas à une valeur de  $\delta_{Mi}$  voisine de  $-\frac{\pi}{4}$ .

La figure III.9 représente le cas où  $a_i(t_0) > 1$  et visualise les deux extrema de  $\hat{U}_i$  dans la zone  $\Gamma_1$  pour  $-\frac{\pi}{2} < \delta_{Mi}(t) < \frac{\pi}{2}$ . La représentation des variations de  $\hat{U}_i$ , dans le cas précis où  $a_i(t_0) > 1$ , est donnée par la figure III.7.

• **Extrema de  $\hat{U}_i$  dans  $\Gamma_2$ :** la recherche des extrema de  $\hat{U}_i$  dans la zone  $\Gamma_2$  se déduit de l'étude précédente.  $\delta_{Mi}(t)$  est strictement décroissant dans cette zone d'après III.2.5.2 et  $-\frac{3\pi}{2} < \delta_{Mi}(t) < -\frac{\pi}{2}$ . Le comportement de  $\delta_{Mi}(t)$  pour les points  $P_i$  appartenant à la zone  $\Gamma_2$  est le même que pour les points  $P_i$  appartenant à la zone  $\Gamma_1$ , à un décalage de  $-\pi$  près pour les valeurs. La situation de collision sans rencontre dans la zone  $\Gamma_2$  ne se produit donc plus pour  $\delta_{Mi}(t_{collision}) = 0$  mais pour  $\delta_{Mi}(t_{collision}) = -\pi$ . Il suffit de reprendre la simulation représentée sur la figure III.9 et opérer une translation de  $-\pi$  pour les valeurs de  $\delta_{Mi}(t)$  situées sur

l'abscisse. L'extremum de  $\hat{U}_i$ , après la situation de «collision» sans rencontre, correspond dans ce cas à une valeur de  $\delta_{Mi}$  voisine de  $-\frac{5\pi}{4}$  dans la zone  $\Gamma_2$ . La représentation des variations de  $\hat{U}_i$ , dans le cas précis où  $a_i(t_0) > 1$ , est donnée par la figure III.7. Nous constatons que le comportement de  $\hat{U}_i$  dans la zone  $\Gamma_2$  est identique au signe près à celui de  $\hat{U}_i$  dans la zone  $\Gamma_1$  (symétrie des comportement par rapport à l'axe des abscisses).

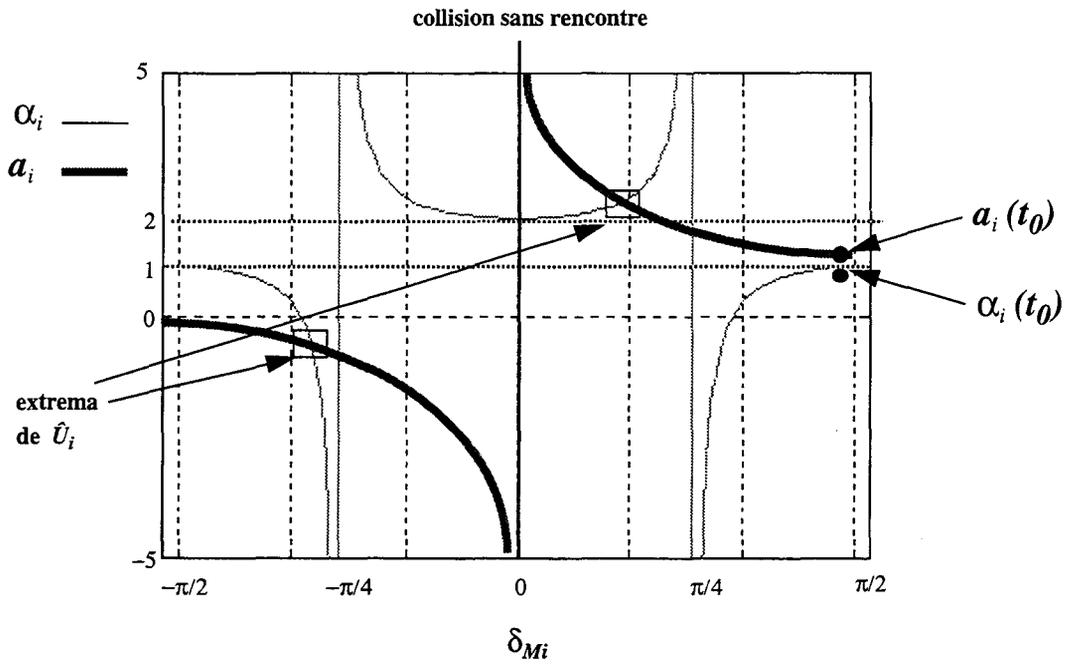


figure III.9 Intersections de  $a_i[\delta_{Mi}(t)]$  avec  $\alpha_i[\delta_{Mi}(t)]$  dans  $\Gamma_1$

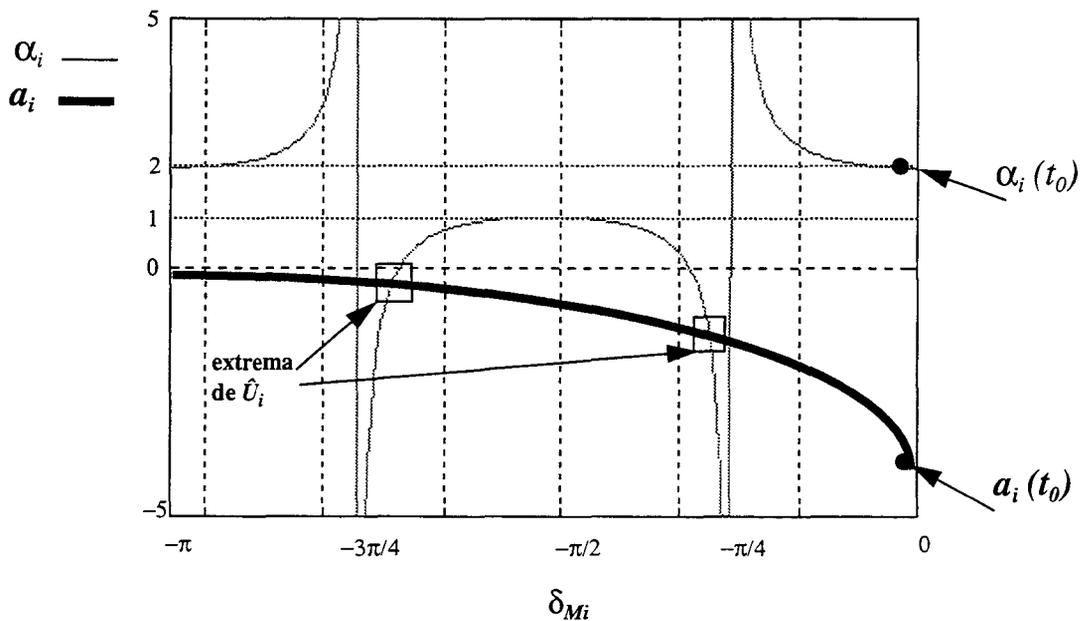


figure III.10 Intersections de  $a_i[\delta_{Mi}(t)]$  avec  $\alpha_i[\delta_{Mi}(t)]$  dans  $(\bar{\Gamma}_{ec})$

• **Extrema de  $\hat{U}_i$  dans  $(\bar{\Gamma}_{ec})$ :** (figure III.10). La figure III.10 fait apparaître deux intersections possibles entre la courbe représentative de  $\alpha_i[\delta_{Mi}(t)]$  et celle de  $a_i[\delta_{Mi}(t)]$ . Ces deux intersections correspondant aux deux extrema possibles de  $\hat{U}_i$  dans la zone  $(\bar{\Gamma}_{ec})$  correspondent à des valeurs de  $\delta_{Mi}$  voisines de  $-\frac{\pi}{4}$  et  $-\frac{3\pi}{4}$ . La représentation des variations de  $\hat{U}_i$ , dans le cas précis où  $P_i$  appartient à la zone  $(\bar{\Gamma}_{ec})$ , est donnée par la figure III.8.

• **Extrema de  $\hat{U}_i$  dans la zone  $(\bar{\Gamma}_{ic})$ :** (figure III.11). La fonction  $\delta_{Mi}(t)$  n'est pas strictement monotone dans la zone  $(\bar{\Gamma}_{ic})$  et possède un extremum pour  $a_i(t) = 1$  (cf figure III.8). Les valeurs de  $\delta_{Mi}(t)$  sont prises entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ . Nous traçons les courbes représentatives des fonctions  $\alpha_i[\delta_{Mi}(t)]$  et  $a_i[\delta_{Mi}(t)]$ . Concernant la courbe représentative de  $a_i[\delta_{Mi}(t)]$ , elle décroît vers zéro d'après les études précédentes et passe par la valeur 1 quand  $\delta_{Mi}$  passe par son extremum ( $min \delta_{Mi}$ ) (cf figure III.8). Plusieurs cas se présentent :

**Cas 1** (cf figure III.11) :  $a_i(t_0) < 2$ . Seule une intersection est possible entre la courbe représentative de  $\alpha_i[\delta_{Mi}(t)]$  et celle représentative de  $a_i[\delta_{Mi}(t)]$ . Nous en déduisons l'extremum de  $\hat{U}_i$  qui correspond à une valeur de  $\delta_{Mi}$  supérieure à  $\frac{\pi}{4}$ .

**Cas 2** (cf figure III.11) :  $a_i(t_0) > 2$ . Aucune intersection n'est possible entre les courbes lorsque  $\delta_{Mi}$  est compris entre  $\frac{\pi}{2}$  et  $min_2(\delta_{Mi})$  avec  $\delta_{Mi}(t)$  décroissant. Ensuite nous retrouvons le cas 1. Le cas 2 correspond donc à un extremum pour  $\hat{U}_i$ .

**Cas 3** (cf figure III.11) :  $a_i(t_0) > 2$ . Deux intersections sont possibles entre les courbes lorsque  $\delta_{Mi}$  est compris entre  $\frac{\pi}{2}$  et  $min_3(\delta_{Mi})$  avec  $\delta_{Mi}(t)$  décroissant. Ensuite nous retrouvons le cas 1. Le cas 3 correspond donc à trois extrema pour  $\hat{U}_i$  (cf figure III.8).

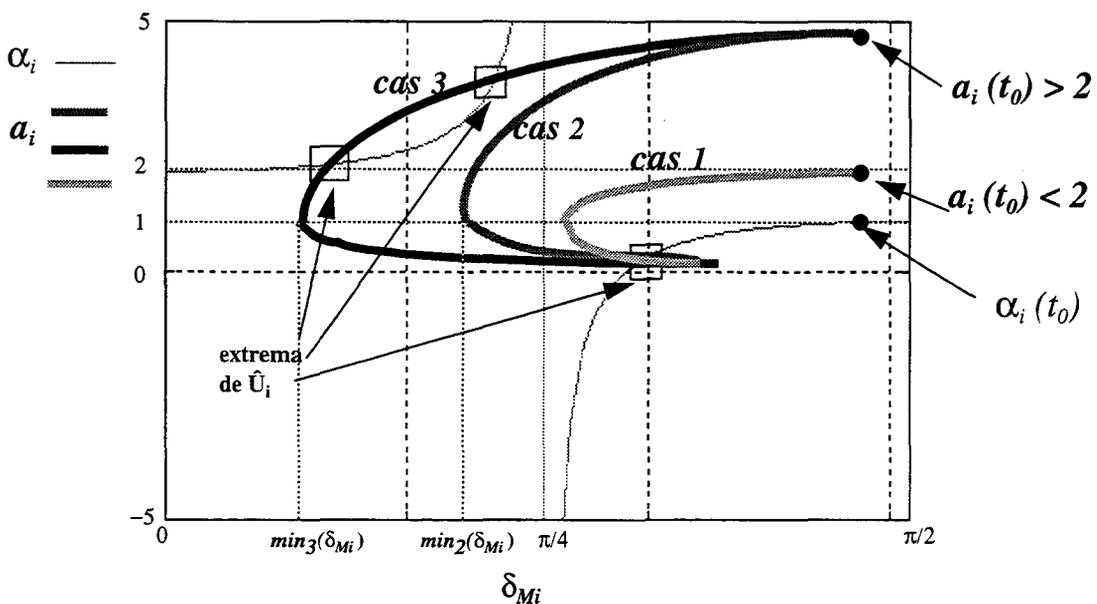


figure III.11 Intersections de  $a_i[\delta_{Mi}(t)]$  avec  $\alpha_i[\delta_{Mi}(t)]$  dans  $(\bar{\Gamma}_{ic})$

### III.3.3.3 Comportement de $\Delta c_i$

$\Delta c_i$  est donné par l'expression (III.40), à savoir :

$$\Delta c_i = U_i - \hat{U}_i. \quad (\text{III.54})$$

D'après (III.38), (III.39) et (III.40):

$$\Delta c_i = -\dot{\eta}_i (a_i V_M + 3\dot{r}_i). \quad (\text{III.55})$$

Suite au comportement de  $U_i$  étudié au III.3.3.1. ( $U_i = U_c$ ), nous avons aussi comme relation:

$$\Delta c_i = U_c - \hat{U}_i. \quad (\text{III.56})$$

Les variations de  $\Delta c_i$  nécessitant une connaissance précise de la dérivée de  $a_i$ , nous allons uniquement nous limiter à l'étude du signe de  $\Delta c_i$  et à son comportement lors de la phase finale. Le but de l'étude étant de dégager des comportements qui discriminent la cible des points  $P_i$ , l'information sur le signe de  $\Delta c_i$  pourra être perçue comme suffisante pour la poursuite de l'étude.

$\Delta c_i$  change de signe lorsque  $\dot{\eta}_i(t) = 0$  ou  $a_i V_M + 3\dot{r}_i = 0$ . La deuxième condition revient à étudier les intersections possibles entre la courbe représentative de  $a_i$  et celle représentative de  $h_i = -3 \frac{\dot{r}_i}{V_M}$  soit,  $h_i = 3 \cos \delta_{Mi}$ .

• **Changement de signe de  $\Delta c_i$  dans la zone  $\Gamma_I$  :**  $\dot{\eta}_i(t) = 0$  lors de la situation de «collision» sans rencontre. Néanmoins,  $a_i$  prenant une valeur infinie à l'instant  $t_{collision}$ , l'expression (III.55) de  $\Delta c_i$  prend une forme indéterminée. Pour lever l'indétermination, nous utilisons l'expression (III.56) et obtenons :  $\Delta c_i(t_{collision}) = U_c(t_{collision})$ . La figure III.12 montre les possibilités d'intersection entre les courbes représentatives de  $a_i$  et de  $h_i$ .

D'après la figure III.12, s'il existe  $t_1$  et  $t_2$  tels que entre  $t_1$  et  $t_2$  la courbe représentative de  $a_i$  est sous la courbe représentative de  $h_i$  : d'après (III.55), le signe de  $\Delta c_i$  est opposé à celui de  $\dot{\eta}_i$ . Nous sommes dans la configuration avant la situation de collision sans rencontre : d'après la figure III.7, le signe de  $\dot{\eta}_i(t)$  est positif donc  $\Delta c_i$  est négatif. Notons que ce cas de figure n'existe pas lorsque  $a_i(t_0) > 3$  (cf figure III.12).

Après la situation de collision sans rencontre, la courbe représentative de  $a_i$  est sous la courbe représentative de  $h_i$  : d'après (III.55), le signe de  $\Delta c_i$  est opposé à celui de  $\dot{\eta}_i$  et donc d'après la figure III.7, le signe de  $\Delta c_i$  est positif.

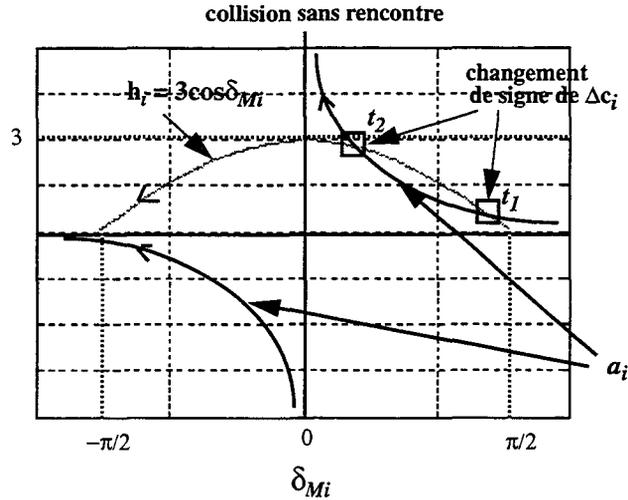


figure III.12 Intersections de  $a_i[\delta_{Mi}(t)]$  avec  $h_i[\delta_{Mi}(t)]$  dans  $\Gamma_I$

Lors de la phase finale,  $U_c$  tend vers zéro d'après III.3.1. D'après (III.56), proche de la collision,  $\Delta c_i$  a le comportement opposé à  $\hat{U}_i$  (cf figure III.13).

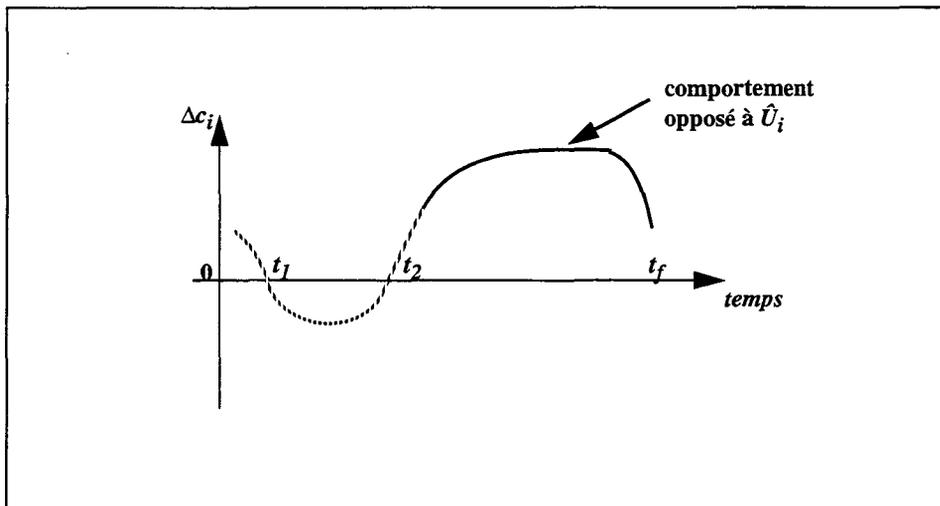


figure III.13 Comportement de  $\Delta c_i$  dans la zone  $\Gamma_I$

- **Changement de signe de  $\Delta c_i$  dans les zones  $\Gamma_2$  et  $\bar{\Gamma}_{ec}$**  : le comportement de  $\Delta c_i$  est opposé à celui de la zone  $\Gamma_I$ , suite à la figure III.7.

- **Changement de signe de  $\Delta c_i$  dans la zone  $\bar{\Gamma}_{ic}$**  : la zone  $\bar{\Gamma}_{ic}$  impose une évolution de  $\delta_{Mi}(t)$  qui n'est pas monotone. La figure III.7 représente les évolutions au cours du temps de  $\delta_{Mi}(t)$  et  $a_i(t)$  : nous rappelons ces évolutions sur la figure III.14. Du fait du changement de monotonie de  $\delta_{Mi}(t)$ , les représentations de  $h_i[\delta_{Mi}(t)]$  et  $a_i[\delta_{Mi}(t)]$  apparaissent inélégantes et difficiles à exploiter. De ce fait, nous proposons sur la figure III.14 les représentations simplifiées au cours du temps de  $h_i(t)$  et  $a_i(t)$ .

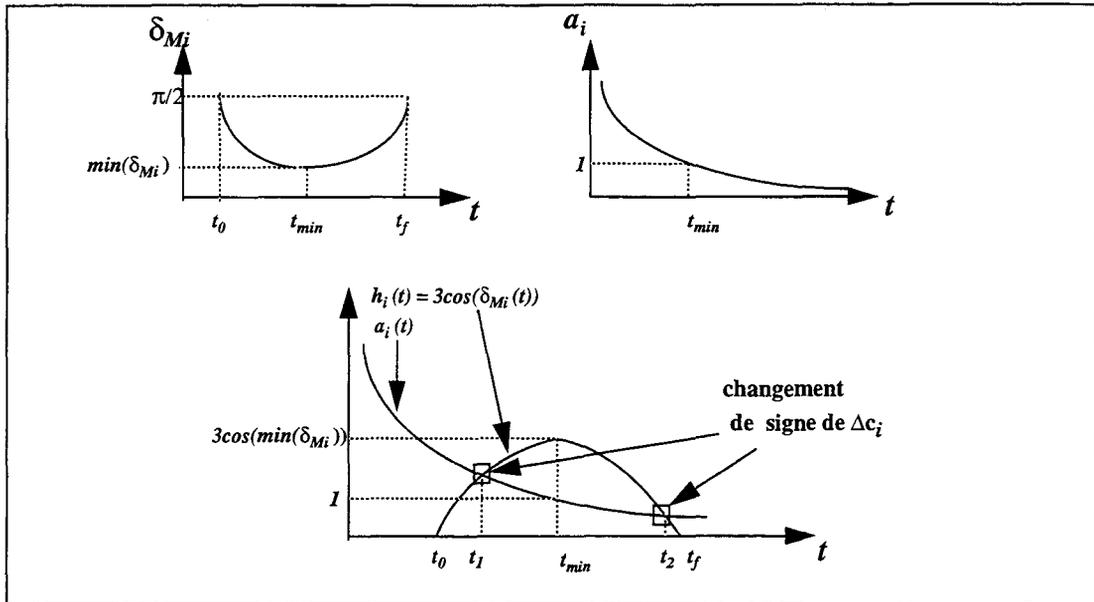


figure III.14 Intersections de  $a_i(t)$  avec  $h_i(t)$  dans  $\bar{\Gamma}_{ic}$

D'après la figure III.14, l'existence de  $t_1$  (avec  $t_1 > t_0$ ) avant le minimum de  $\delta_{Mi}(t)$  à l'instant  $t_{min}$  a lieu lorsque :

$$3 \cos(\min(\delta_{Mi})) > 1. \quad (III.57)$$

Ceci correspond à l'inégalité suivante :

$$\min(\delta_{Mi}) < \arccos\left(\frac{1}{3}\right). \quad (III.58)$$

Un raisonnement calqué sur l'étude précédente permet de montrer qu'il peut exister  $t_1$  et  $t_2$  tels que entre  $t_1$  et  $t_2$  la courbe représentative de  $a_i$  est sous la courbe représentative de  $h_i$  : d'après (III.55), le signe de  $\Delta c_i$  est opposé à celui de  $\dot{\eta}_i$  et donc d'après la figure III.7,  $\Delta c_i$  est de signe négatif. Lors de la phase finale,  $U_c$  tend vers zéro d'après III.3.1. D'après (III.56), proche de la collision,  $\Delta c_i$  a le comportement opposé à  $\dot{U}_i$  (cf figure III.15).

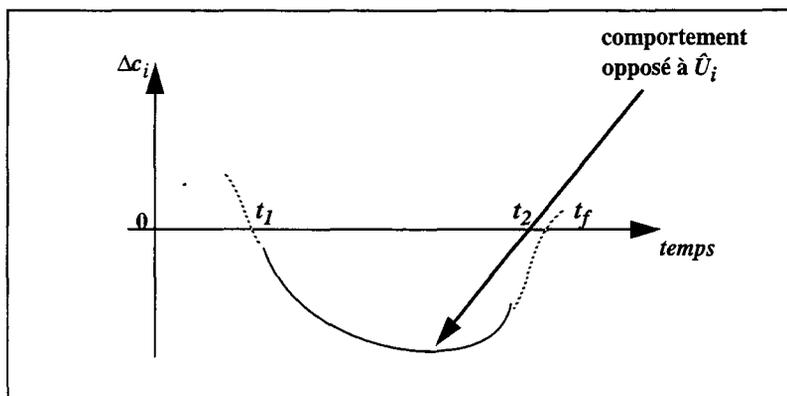


figure III.15 Comportement de  $\Delta c_i$  dans la zone  $\bar{\Gamma}_{ic}$

### III.4. Critères discriminant la cible des points $P_i$

#### III.4.1 Réduction de l'espace d'environnement

L'étude de la commande dans le problème inverse menée dans le paragraphe précédent a permis de subdiviser la totalité de l'espace d'environnement et de dégager des comportements distinctifs des variables de  $\vartheta_i^T$  suivant la position de  $P_i$  dans l'espace d'environnement.

Il apparaît improbable que l'ensemble des points  $P_i$  puisse appartenir à la totalité de l'espace subdivisé. Nous décidons de réduire l'étude du problème inverse à une partie de l'espace d'environnement qui semble la plus réaliste. En effet, l'hypothèse faite sur la vitesse des points  $P_i$  très faible devant celle du mobile permet de réduire le domaine d'étude dès le début du scénario. Si nous nous reportons à l'environnement d'étude décrit au III.2.1 et si nous considérons la distance entre deux points  $P_i$  faible devant la distance initiale du mobile par rapport à l'environnement multicible repéré par son centre de gravité, deux sous-espaces apparaissent.

Ces sous-espaces sont appelés  $(\Gamma_1)$  et  $(\bar{\Gamma}_{ic})$  et leur réunion forme l'environnement multicible dans une première approximation. Nous pouvons remarquer que le sous-espace  $(\Gamma_1)$  est d'autant plus grand que le dépointage initial du vecteur vitesse du mobile par rapport à sa cible est grand.

#### III.4.2 Comportement de $\vartheta_i^T$ dans l'espace réduit

Suite à l'approximation de l'espace d'environnement faite au paragraphe précédent, nous considérons l'environnement multicible réduit aux zones  $(\Gamma_1)$  et  $(\bar{\Gamma}_{ic})$ . Ces zones impliquent des encadrements de valeurs pour  $\delta_{Mi}(t)$  énoncés au III.2.5.2 que nous rappelons ici :

- Si  $P_i \in (\Gamma_1)$ , alors nous prenons  $-\frac{\pi}{2} < \delta_{Mi}(t) < \frac{\pi}{2}$ ,

- Si  $P_i \in (\bar{\Gamma}_{ic})$ , alors nous prenons  $0 < \delta_{Mi}(t) < \frac{\pi}{2}$ .

Nous faisons une seconde approximation à présent sur les valeurs de  $\delta_{Mi}(t)$  à l'intérieur de  $(\Gamma_1)$  et  $(\bar{\Gamma}_{ic})$ . Nous appelons  $(\Phi_{ec})$ , le sous-espace réduit de  $(\Gamma_1)$  (à l'extérieur de la concavité de la trajectoire du mobile) et  $(\Phi_{ic})$ , le sous-espace réduit de  $(\bar{\Gamma}_{ic})$  (à l'intérieur de la concavité de la trajectoire du mobile) de telle sorte que l'encadrement des valeurs de  $\delta_{Mi}(t)$  devienne :

- Si  $P_i \in (\Phi_{ec})$  alors  $P_i \in (\Gamma_1)$  avec  $-\frac{\pi}{4} < \delta_{Mi}(t) < \frac{\pi}{4}$ .

- Si  $P_i \in (\Phi_{ic})$  alors  $P_i \in (\bar{\Gamma}_{ic})$  avec  $0 < \delta_{Mi}(t) < \frac{\pi}{4}$ .

Si nous nous reportons aux figures III.9 et III.11, nous en déduisons que nous réduisons approximativement l'étude de  $\hat{U}_i$  entre ses extrema. Cette approximation est bien entendu valable dans la mesure où l'environnement multicible respecte la configuration réduite du paragraphe précédent :  $\delta_{Mi}(t)$  est relativement faible et vérifie l'encadrement de valeurs donné précédemment. Seules les simulations données par la suite permettront de vérifier ces approximations.

Nous appelons cible potentielle de type I, un point  $P_i$  appartenant au sous-espace  $(\Phi_{ic})$  et cible potentielle de type II, un point  $P_i$  appartenant au sous-espace  $(\Phi_{ec})$ . La figure III.16 présente graphiquement l'évolution de  $\hat{U}_i$  en fonction de la position du point  $P_i$ .

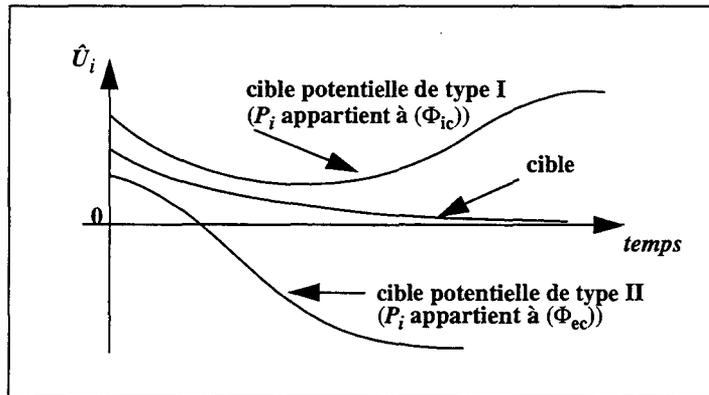


figure III.16 Evolution de  $\hat{U}_i$  en fonction de la position du point  $P_i$

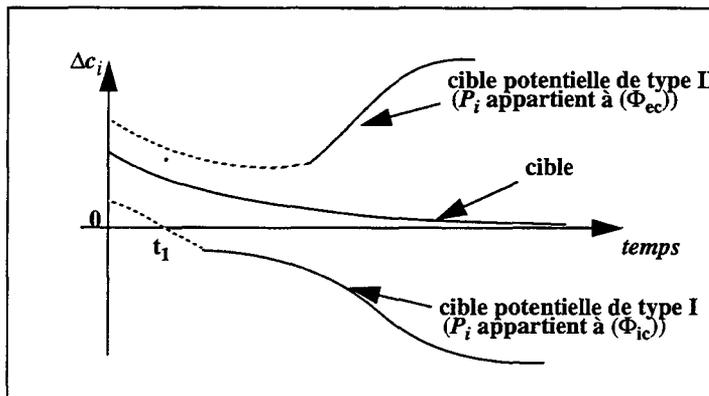


figure III.17 Evolution de  $\Delta c_i$  en fonction de la position du point  $P_i$

Concernant l'évolution de  $\Delta c_i$  dans le sous-espace  $(\Phi_{ec})$ , si nous faisons l'hypothèse de  $a_i(t_0) > 3$ , d'après III.3.3.3,  $\Delta c_i$  est toujours positif et tend à avoir le comportement opposé à  $\hat{U}_i$  (cf figure III.17). Dans le sous espace  $(\Phi_{ic})$ , d'après III.3.3.3, si la condition (III.58) d'existence de  $t_1$  donc d'un changement de signe de  $\Delta c_i$  est réalisée, alors  $\Delta c_i$  devient négatif et a le comportement opposé à  $\hat{U}_i$  proche de la collision. Les conditions sur  $\delta_{Mi}(t)$  imposées par la réduction de l'environnement multicible entraînent la disparition de  $t_2$  d'après la figure III.14. La figure III.17 présente graphiquement l'évolution de  $\Delta c_i$  en fonction de la position du point  $P_i$ .

### III.4.3 Conclusion

A partir du problème inverse général, l'espace d'environnement est subdivisé en sous-espaces dans lesquels les points  $P_i$  ont des comportements cinématiques distincts. Nous en avons déduit des comportements distincts relatifs aux variables de commande :  $U_i, \hat{U}_i, \Delta c_i$ .

La réduction de l'espace d'environnement, suite à une vision plus réaliste du scénario d'approche de la cible d'un mobile soumis à une loi de N.P.C., permet de dégager deux types de points  $P_i$  : les cibles potentielles de type I et les cibles potentielles de type II.

L'étude simultanée des variables de commande  $\hat{U}_i$  et  $\Delta c_i$  se résume ainsi :

- Convergence vers zéro des paramètres de commande vus de la cible du mobile.
- Convergence et passage par zéro de  $\hat{U}_i$  pour les cibles potentielles de type II ainsi que de  $\Delta c_i$  pour les cibles potentielles de type I.

La recherche de la cible du mobile par l'étude de critères discriminants liés à la commande du mobile se résume à la détection d'un passage par zéro des paramètres de commande d'après [BOU 93] et [BOU 94a].

L'étape suivante est axée sur la simulation des paramètres du problème dans la réalité, c'est-à-dire dans un univers bruité. Nous reprenons le modèle de filtre de Kalman étendu discret qui a été présenté au chapitre précédent afin de résoudre le problème lié aux bruits de mesure générés par les senseurs de position et de vitesse.

## III.5. Simulations

### III.5.1 Outil de simulation

Le chapitre précédent axé sur la caractérisation d'atteinte de la cible d'un mobile s'est placé dans un scénario réaliste où il fallait résoudre le problème lié aux bruits de mesure générés par les senseurs de position et de vitesse (II.7.2). L'utilisation d'un modèle de filtre de Kalman étendu discret s'est révélée insuffisante car très sensible aux valeurs d'initialisation. Une méthode basée sur un algorithme de moindres carrés étudiée précisément dans [DUF 95] a été réalisée sur 101 périodes d'échantillonnage, la meilleure valeur initiale estimée étant la valeur milieu, soit la cinquantième mesure. Dans ces conditions, les variances obtenues, en ce point milieu, pour l'estimée du coefficient  $A$  de navigation proportionnel et  $\delta_M$  sont respectivement de 0.01 et de  $3.24 \cdot 10^{-6} \text{ rad}^2$ , valeurs qui permettent une convergence rapide du filtre.

Cependant, l'utilisation dans le problème inverse de ce modèle de filtre, appliqué à chaque point  $P_i$  pose problème dans certains cas. Le principal défaut de ce filtre de Kalman est de ne pas suivre l'évolution discriminante de type 1, à savoir l'excursion de type  $+\infty/-\infty$  du paramètre de N.P.C. instantané. Le filtre est alors amené à générer une trajectoire d'estimation fautive de  $\delta_{Mi}$  relative au mobile  $M$ . Pour pallier cet inconvénient, il serait nécessaire de mener une étude beaucoup plus poussée sur le filtrage de Kalman, afin de suivre certaines évolutions à saut infini. Ceci n'étant pas l'objet de notre étude, nous réalisons alors un filtre corrigé décrit dans [DUF 95].

Il faut remarquer que pour initialiser le filtre, une estimation du coefficient de navigation proportionnelle est possible par la méthode des moindres carrés. Cette méthode d'estimation introduit un retard d'estimation de 50 périodes d'échantillonnage comme nous l'avons expliqué auparavant. Le résultat de l'estimation par moindres carrés est comparé à celui du filtre de Kalman et nous réalisons une correction a posteriori de la manière suivante. Si l'écart entre les deux estimations dépasse un certain seuil, nous recommençons l'estimation par filtrage de Kalman au point considéré. Pour cela, nous initialisons la variable d'état correspondant au coefficient de navigation proportionnelle avec la valeur de l'estimée par moindres carrés. Nous obtenons alors des courbes d'estimation a posteriori des coefficients  $A_i$  de navigation proportionnelle et de  $\delta_{Mi}$ .

### III.5.2 Scénario de guidage

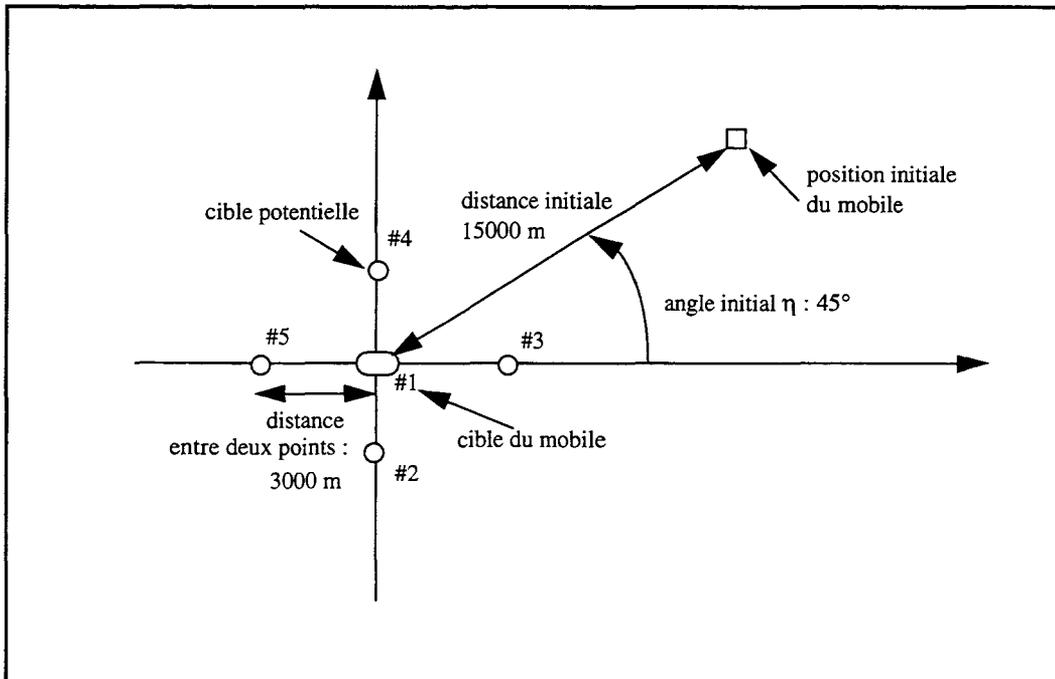


figure III.18 Scénario de simulation de référence

Nous pouvons définir différents scénarii de guidage, nous retenons celui présenté par la figure III.18. L'intérêt d'un tel schéma de simulation est que la cible du mobile est située au centre, permettant ainsi d'avoir deux cibles potentielles de type I et II. Pour l'ensemble des simulations effectuées, le module de la vitesse du mobile est fixé à  $800 \text{ m.s}^{-1}$ . La vitesse des points est prise nulle. La constante de navigation proportionnelle du mobile vue de la cible est fixée à 4.

### III.5.3 Simulations de $\Theta_i$ et $\dot{\Theta}_i$ en phase finale

#### III.5.3.1 Simulations de $a_i$ et $\delta_{Mi}$

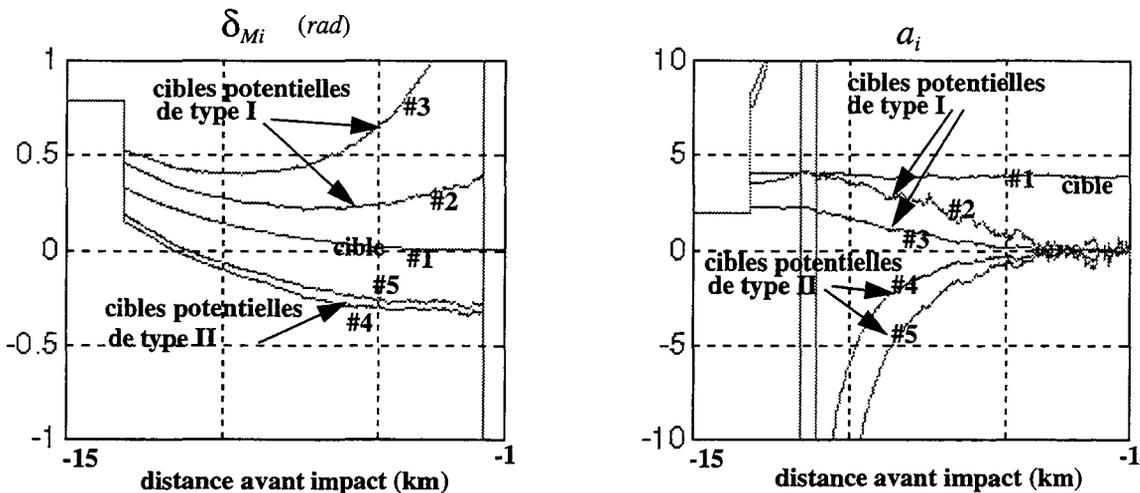


figure III.19 Simulations du paramètre instantané de N.P.C. et de l'angle de dépointage vues des points  $P_i$

Nous nous plaçons en phase finale du guidage avec un dépointage initial du vecteur vitesse du mobile par rapport à la ligne de visée mobile-cible de  $0.5 \text{ rad}$ , soit  $28^\circ$  ( $\delta_{Mc}(t_0) = 0.5 \text{ rad}$ ); ceci étant en accord avec les simulations faites au chapitre précédent.

L'angle de dépointage du vecteur vitesse du mobile par rapport à la cible tend vers zéro, la vitesse de la cible étant prise nulle. La constante de N.P.C. est correctement estimée à 4 durant l'évolution du mobile.

Les points  $P_2$  et  $P_3$  appelés cibles potentielles de type I ont un angle de dépointage positif durant l'évolution du mobile avec un extremum au même instant que la vitesse relative (cf simulations suivantes). Le paramètre de N.P.C. associé à ces points décroît progressivement vers zéro.

Les points  $P_4$  et  $P_5$  appelés cibles potentielles de type II ont un angle de dépointage qui s'anule au moment de la «collision» sans rencontre. Ce moment correspond à une excursion de

type  $+\infty/-\infty$  du paramètre de N.P.C. instantané, ce paramètre décroissant ensuite progressivement vers zéro.

### III.5.3.2 Simulations de $V_{Rui}$ et $\dot{\eta}_i$

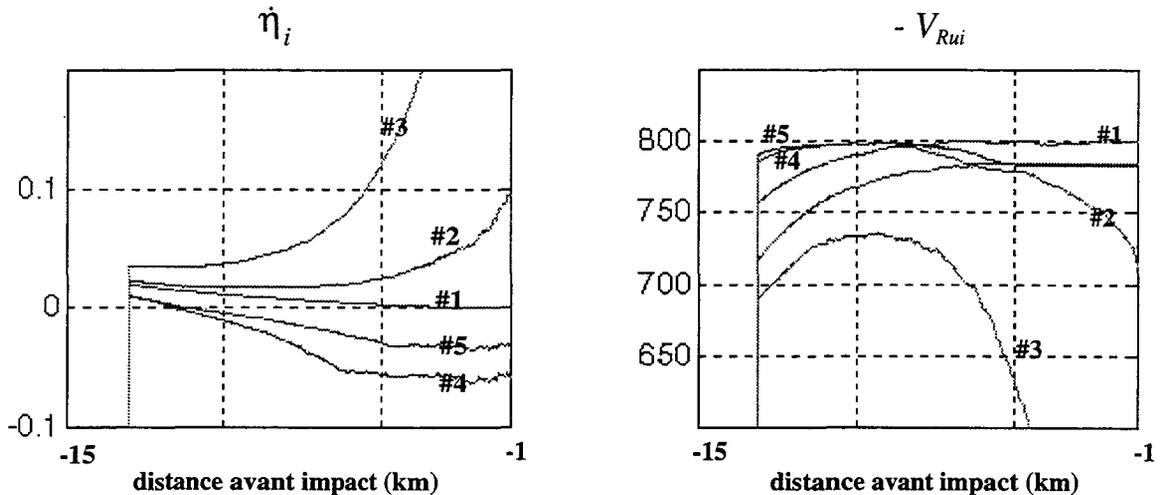


figure III.20 Simulations de la variation de la ligne de visée et de la vitesse relative vues des points  $P_i$

Le comportement de la variation de la ligne de visée est grossièrement identique à celui de l'angle de dépointage avec un passage par zéro pour les cibles potentielles de type II ( $P_4$  et  $P_5$ ) au moment de la situation de «collision» sans rencontre. La variation de la ligne de visée vue de la cible tend vers zéro au cours de l'évolution du mobile.

L'opposé de la vitesse relative  $V_{Rui}$  (vue de la cible) tend progressivement vers la vitesse du mobile :  $800 \text{ m.s}^{-1}$ , la vitesse de la cible étant prise nulle.

La vitesse relative concernant les cibles potentielles de type I (points  $P_2$  et  $P_3$ ) admet un extremum lorsque le dépointage en admet un aussi.

La vitesse relative concernant les cibles potentielles de type II (points  $P_4$  et  $P_5$ ) admet un extremum au moment de la situation de «collision» sans rencontre.

### III.5.4 Simulations de $\vartheta_i$

#### III.5.4.1 La commande en phase finale : $\hat{U}_i$ et $\Delta c_i$

- Comportement de  $\hat{U}_i$  : proche de la collision,  $\hat{U}_i = -3\dot{r}_i\dot{\eta}_i$ . Le comportement sur la figure III.21 est en accord avec l'étude théorique qui a abouti à la figure III.16.

• Comportement de  $\Delta c_i$  (figure III.21) : nous retrouvons le comportement opposé à  $\hat{U}_i$  tel qu'il a été montré dans le paragraphe précédent et visualisé sur la figure III.17.

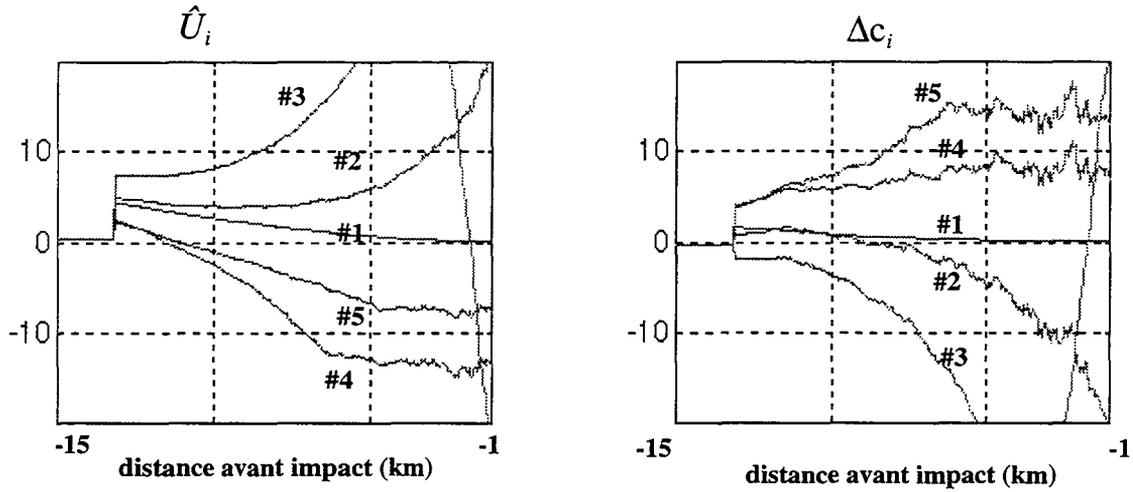


figure III.21 Simulations de la commande optimale et de l'écart commande appliquée - commande optimale vues des points  $P_i$

Concernant les points  $P_4$  et  $P_5$ , la simulation des paramètres instantanés  $a_4$  et  $a_5$  de N.P.C. reproduite sur la figure III.19 montre que leurs valeurs initiales sont supérieures à 3. La simulation de  $\Delta c_i$  concernant ces points confirme alors le résultat de l'étude faite au III.4.2, à savoir  $\Delta c_i$  est positif lorsque  $a_i(t_0) > 3$ .

Concernant le point  $P_2$ ,  $\Delta c_i$  (pour  $i = 2$ ) change de signe pour devenir négatif à un instant  $t_1$ . L'existence de ce passage par zéro à l'instant  $t_1$  a lieu lorsque la condition (III.58) est réalisée, à savoir  $\min(\delta_{M_i})$  inférieur à environ  $70^\circ$ . Les simulations de  $\delta_{M_i}(t)$  reportées sur la figure III.19 montrent bien que  $\min(\delta_{M_2}) \cong 0.25rad$ , soit environ  $15^\circ$ .

Concernant le point  $P_3$ , nous n'observons pas le passage par zéro à l'instant  $t_1$ . L'instant initial  $t_0$  du scénario est dans ce cas supérieur à  $t_1$  (cf figure III.14).

### III.5.4.2 La commande en phase de guidage initiale : $\hat{U}_i$ et $\Delta c_i$

Nous reprenons les conditions de simulation du chapitre précédent explicitées au II.8.6.2. L'enjeu de cette nouvelle étude est de reprendre les expressions de  $\Delta c$  explicitées dans des conditions éloignées de la collision ( $\Delta c_1$ ) et proches de la collision ( $\Delta c_2$ ) selon [BOU 94b]. Nous effectuons une simulation dans le problème inverse de  $\Delta c_1$  et  $\Delta c_2$  avec des conditions initiales éloignées de la collision. Nous rappelons que le comportement de  $\Delta c_1$  simulé dans des conditions éloignées de la collision et vu de la cible est caractérisé par une décroissance vers zéro. La simulation de la figure III.23 représente  $\Delta c_1$  vu des points  $P_i$  ( $\Delta c_{1_i}$ ) avec des conditions ini-

tiales éloignées de la collision. Nous appelons  $\Delta c_{2i}$ , le comportement proche de la collision de  $\Delta c$  vu des points  $P_i$  mais avec les conditions initiales éloignées de la collision. La simulation de  $\Delta c_{2i}$  est identique aux précédentes, mais cette fois-ci  $\delta_{Mi}(t_0)$  est égale à 1.5 rad (86°). D'après les résultats du chapitre précédent, la phase de guidage initiale éloignée de la collision a lieu approximativement jusqu'à mi-course du parcours du mobile.

La simulation de l'expression de  $\Delta c_i$  explicitée proche de la collision mais employée avec des conditions initiales éloignées de la collision ( $\Delta c_{2i}$ ) montre la difficulté de discerner la cible du point  $P_2$ . Il faut attendre environ cinq kilomètres avant l'impact avant d'observer le passage par zéro de  $\Delta c_{2i}$  (avec  $i = 2$ ).

En revanche, la simulation de l'expression de  $\Delta c_i$  explicitée éloignée de la collision et employée avec des conditions initiales éloignées de la collision ( $\Delta c_{1i}$ ) permet de discerner plus rapidement la cible du point  $P_2$ . Cette simulation montre le passage par zéro de  $\Delta c_{1i}$  deux kilomètres avant l'annulation de  $\Delta c_{2i}$ , soit une estimation de la cible du mobile sept kilomètres avant l'impact (avec  $i = 2$ ).

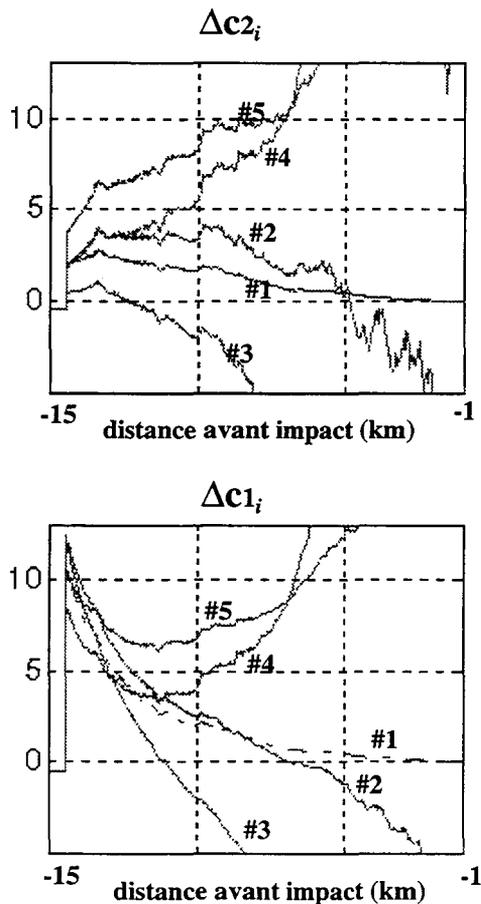


figure III.22 Simulations de l'expression de  $\Delta c_i$  éloignée et proche de la collision avec des conditions initiales éloignées de la collision

L'étape suivante propose une méthode de détection de la cible du mobile basée sur la technique de la logique floue. Nous nous limitons à une présentation générale, une étude complète est néanmoins réalisée dans [DRU 95]. Plusieurs articles traitant du problème inverse de ce chapitre ont employé cette méthode de détection ([BOU 93], [BOU 94a], [DRU 94]).

### III.6. Perspective : Détection de la cible par la logique floue [DRU 95]

Le problème consiste à estimer par la logique floue, le plus rapidement possible, la cible d'un mobile évoluant vers un environnement multicible. La logique floue, largement utilisée dans des applications telles que l'estimation et la décision ([TER 92],[BOU 91]), semble particulièrement convenir à la résolution de ce problème.

L'algorithme flou utilisé après l'initialisation du filtre de Kalman est déterminé de façon à obtenir une estimation rapide et fiable de la cible d'un mobile, en utilisant différents paramètres significatifs du problème. Nous retenons trois paramètres dont le comportement vu de la cible permet de discriminer cette dernière :

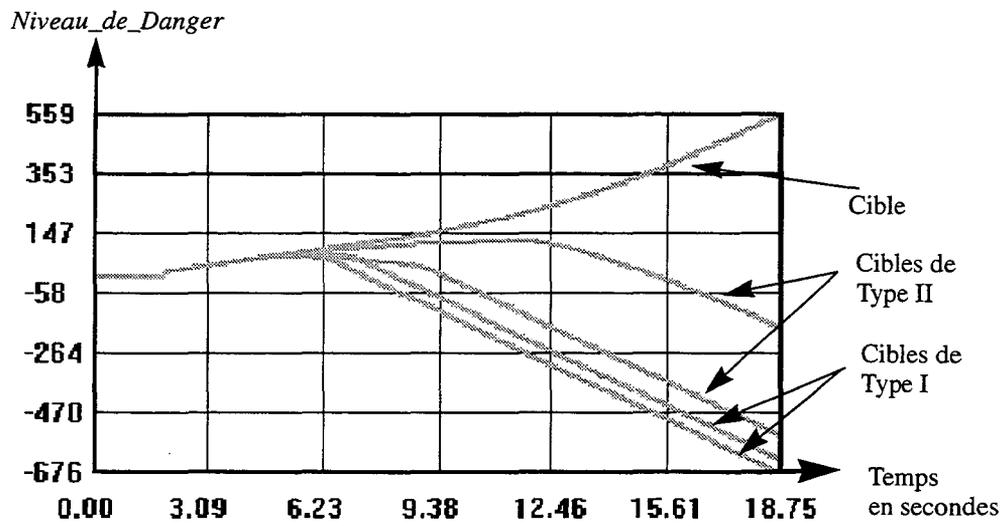
- L'angle de dépointage  $\delta_{Mi}$  dont l'évolution est grossièrement similaire à celle du paramètre de commande optimale  $\hat{U}_i$ .
- La variable artificielle  $\Delta c_i$  dont l'évolution est opposée à  $\hat{U}_i$ .
- Le paramètre de N.P.C. instantané  $a_i$ , constant vu de la cible.

L'analyse du comportement de ces trois paramètres a permis de classer les points en deux classes : cibles potentielles de type I et II. Le comportement des deux premiers paramètres vus de la cible du mobile est caractérisé par une convergence vers zéro, le troisième paramètre restant constant. En se basant sur les différents résultats énoncés au cours des différents chapitres, il nous est possible de définir les différentes tâches que l'algorithme doit effectuer. D'une part, il doit pouvoir mettre en valeur les différents types de comportements explicités auparavant. D'autre part, il doit être capable de fusionner les résultats obtenus de façon à obtenir une estimation unique de la cible du mobile.

Des variables de "niveau de danger" sont définies pour chaque point considéré comme cible potentielle. Ces variables évoluent dynamiquement par l'intermédiaire d'algorithmes flous et sont utilisées pour estimer la cible la plus probable vers laquelle se dirige le mobile.

La figure III.23 illustre, pour un scénario de guidage donné, l'évolution des variables de «niveau de danger» assimilées à chaque cible potentielle. Cette visualisation graphique faite au cours de l'évolution du mobile permet de distinguer progressivement la cible du mobile, et ce

de façon conviviale.



**Conditions de simulation (vues de la cible)**

$$r_c(t_0) = 15000 \text{ m} ; \delta_{Mc}(t_0) = 28^\circ 6 ; a_c = 4 ; V_M = 800 \text{ m.s}^{-1} ; V_c = 15 \text{ m.s}^{-1}$$

figure III.23 Evolution des niveaux de danger obtenue par simulation

## Conclusion générale

### Synthèse sur la démarche suivie et les résultats obtenus :

L'objectif de ce mémoire étant de répondre aux questions du cahier des charges explicité lors de la préface, nous nous efforçons à présent d'entreprendre une démarche de synthèse des réponses apportées au problème en insistant sur les principaux apports de cette thèse.

La question fondamentale concernant le comportement d'un mobile évoluant vers un environnement multicible était de savoir par quelle route le mobile ralliait la cible. Une hypothèse non moins fondamentale reposait sur l'emploi d'une loi de guidage célèbre appelée loi de navigation proportionnelle. La trajectoire du mobile étant la conséquence de la loi de guidage employée, le premier apport du mémoire, par le biais du **premier chapitre**, réside dans une étude de synthèse sur les lois de guidage classiques. La synthèse bibliographique a fait apparaître de nombreuses publications concernant les lois de guidage classiques avec une nette prédominance de la famille des lois de navigation proportionnelle. Après avoir répertorié les différentes lois de navigation proportionnelle sous forme de classes et unifié les notations, il fallait caractériser les performances de ces lois en terme de capacité à provoquer la rencontre en un temps fini et en terme de variations de l'accélération au cours de la trajectoire. De cette étude de synthèse, deux classes de navigation proportionnelle sont apparues. La première appelée *navigation proportionnelle vraie* impose au mobile des variations de vitesse, parfois importantes et la rendant ainsi inimplémentable. La rencontre du mobile avec la cible dépendant dans ce cas des conditions initiales, la deuxième classe appelée *navigation proportion-*

*nelle classique* est préférée à la première en terme de capacité à provoquer la rencontre pour la plupart des conditions initiales. Elle impose une vitesse constante au mobile, ceci la rendant plus facile à implémenter. La finalité du premier chapitre repose sur la décision d'imposer au mobile une trajectoire faisant suite à une loi de navigation proportionnelle classique.

Afin de savoir si un point de l'environnement multicible est la cible d'un mobile, il fallait étudier la cinématique du problème vue de la cible (le problème direct) et trouver des propriétés fondamentales permettant de la caractériser. La contribution à la solution du problème en étudiant les aspects commandes nous a amené à introduire la théorie de la commande optimale dans le **deuxième chapitre**. L'introduction d'une fonction coût à minimiser pour expliciter l'expression de la commande optimale a privilégié un premier critère de type «énergétique», important lorsque le mobile est en phase de guidage initiale avec des conditions éloignées de la collision. Le second critère de minimisation fut un critère de précision afin de minimiser la distance de passage terminale lorsque le mobile se trouve en phase finale de guidage, proche de la collision. Ce second critère renvoie à l'enjeu de l'élaboration d'une loi de guidage classique. L'application de la théorie de la commande optimale à cette fonction coût nous a permis d'établir une expression générale de la commande optimale. Nous avons alors posé les hypothèses relatives à la phase de guidage finale, lorsque le mobile est proche de la collision et les avons appliquées à l'expression générale de la commande optimale pour aboutir à une expression simplifiée faisant partie de la famille des lois de navigation proportionnelle. Le résultat primordial qui nous est apparu est que la famille des lois de navigation proportionnelle dites lois de guidage classiques et servant de commande au mobile revêt des caractéristiques optimales sous certaines conditions. L'originalité de l'étude fut alors la création d'une variable de commande appelée  $\Delta c$  et caractérisant l'écart de commande entre la commande du mobile qui est une loi de navigation proportionnelle classique et la commande optimale suivant certains critères de minimisation. Cette variable aboutit à l'étude de la différence entre deux lois de navigations proportionnelles, proche de la collision. L'analyse de son comportement d'abord d'un point de vue théorique, puis par le biais de simulations, a permis de constater une convergence vers zéro: caractéristique fondamentale de la rencontre avec sa cible d'un mobile soumis à une loi de navigation proportionnelle classique. Il est à noter que l'étude de la commande optimale répond par la même occasion à la question relative au temps d'interception et propose plusieurs méthodes d'estimation du temps de vol du mobile.

Le deuxième chapitre basé sur le problème direct entre un mobile et sa cible a permis de trouver une caractérisation d'atteinte de la cible par une étude de la commande. Le **troisième chapitre** était axé sur le problème inverse, lorsque nous nous plaçons au niveau des différents points de l'environnement multicible afin d'en déduire la cible d'un mobile. Pour cela, l'apport de ce mémoire dans le domaine de la commande a été d'étudier les variables de commande relatives au problème direct et explicitées vues des différents points de l'environnement multi-

cible. La formalisation du problème inverse a conduit à l'étude de la navigation proportionnelle classique vers un point et vue d'un autre. Des critères discriminant le point cible des autres points sont alors apparus suivant la position du point d'observation par rapport à la trajectoire du mobile. Une étude complète de la cinématique du problème ainsi que de la commande vue de différents points a opéré une division de l'espace d'environnement en subdivisions particulières. Des comportements distinctifs pour les variables de commande du problème ont été montrés suivant la subdivision de l'espace dans laquelle se trouve le point d'observation. Le caractère unique du comportement des variables vues de la cible d'un mobile a pu ainsi être démontré et des simulations sont à l'appui pour confirmer les résultats théoriques. La phase de simulation a recréé alors un univers bruité afin d'appréhender des situations réalistes où l'observation de la cinématique est déformée par l'emploi de senseurs de position et de vitesse. Nous avons alors employé un filtrage de Kalman étendu discret comme remède aux bruits de mesure. Le dernier chapitre a conclu sur le bilan de l'ensemble des caractéristiques de la commande d'un mobile permettant de discriminer la cible des points de l'environnement multicible. En guise de perspectives, nous signalons l'existence de travaux relatifs à la détection de la cible par emploi de la logique floue et ce grâce à une fusion de données en rapport notamment avec les variables de commande étudiées dans ce mémoire.

### **Perspective :**

L'étude de la commande dans notre problème s'est placée dans le contexte d'une première approche novatrice. Il nous était alors apparu nécessaire de travailler sur le sujet à l'aide de paramètres de commande basiques, bâtis uniquement à l'aide de la cinématique du problème, afin de chercher des caractéristiques fondamentales. Nous avons alors parlé d'accélération cinématique du mobile pour la commande par opposition à l'accélération dite dynamique faisant intervenir des données dynamiques comme la masse du mobile qui décroît au cours de son évolution en fonction de la consommation du carburant. Une perspective est donc d'élargir le problème en intégrant entre autres la relation fondamentale de la dynamique et des perturbations dynamiques afin d'étudier leur influence sur les paramètres introduits dans ce rapport. Nous sommes cependant conscient que cette étude ne pourra avoir d'utilité que si l'on connaît précisément certaines caractéristiques des mobiles comme leur consommation en carburant, les capacités à changer brutalement d'accélération ...

## Bibliographie

- [ARB 69] ARBENZ K., « Proportional navigation on nonstationary targets », *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol. AES-6, n. 4, pp. 455-457, july 1970.
- [AXE 70] AXELBAND E.I., HARDY F.W., « Quasi-optimum proportional navigation », *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. AC-15, n. 6, pp. 620-626, dec. 1970.
- [BAB 85] BABARY J.P., PELCZEWSKI W., *Commande optimale des systèmes continus déterministes*, Masson, 1985.
- [BAK 84] BAKER R.A., MITCHELL J.R., « A comparison of four missile guidance laws », *16<sup>th</sup> Southeastern Symp. Syst. Theory*, pp. 216-220, 1984.
- [BAS 56] BASS J., *Cours de Mathématiques*, Masson, 1956.
- [BEC 90] BECKER K., « Closed-form solution of pure proportional navigation », *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol. AES- 26, n. 3, pp. 526-533, 1990.
- [BEN 92] BEN-ASHER J.Z., « Minimum-effort interception of multiple targets », *J. Guidance*, vol. 16, n. 3, pp. 600-602, july 1992
- [BOR 90] BORNE P., DAUPHIN-TANGUY G., RICHARD J.P., ROTELLA F., ZAMBETTAKIS I., *Commande et optimisation des processus*, Technip, 1990.
- [BOR 93] BORNE P., DAUPHIN-TANGUY G., RICHARD J.P., ROTELLA F., ZAMBETTAKIS I., *Analyse et régulation des processus industriels*, Technip, 1993.
- [BOU 69] BOUDAREL R., DELMAS J., GUICHET P., *Commande optimale des processus. T.4 : Méthodes variationnelles et leurs applications*, Dunod, 1969.
- [BOU 91] BOUCON B., *Actes du colloque Intelligence Artificielle et Sciences Humaines*, Lyon, 1991.
- [BOU 93] BOULET V., DRUON E., WILLAEYS D., VANHEEGHE P., « Target estimation using fuzzy logic », *Proc. IEEE Int. Conf. Syst. Man Cybern.*, vol. 4, pp. 674-679, Le Touquet, oct. 1993.
- [BOU 94a] BOULET V., DRUON E., DUFLOS E., BORNE P., WILLAEYS D., VANHEEGHE P., « Target estimation techniques », *Proc. Symp. Math. Mod.*, vol. 2, pp 277-278, Vienna, feb. 1994.
- [BOU 94b] BOULET V., DRUON E., DUFLOS E., VANHEEGHE P., BORNE P., « Optimal control in estimation problems », *Proc. IEEE Int. Conf. Syst. Man Cybern.*, vol. 3, pp. 2658-2662, San Antonio, oct. 1994.

- [BRY 69] BRYSON A. E., HO Y. C., *Applied Optimal Control*, Waltham, MA : Blaisdell, 1969.
- [CAR 89] CARPENTIER R., *Guidage des avions et des missiles aérodynamiques*, Cours de l'Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, 1989.
- [DEL 83] DELLERY B., *Modélisation et caractérisation de la trajectoire d'un mobile manoeuvrant dans le cadre du problème de la poursuite*, Thèse de doctorat 3<sup>ème</sup> cycle, Université d'Aix Marseille, 1983.
- [DHA 93] DHAR A., GHOSE D., « Capture region for a realistic TPN guidance law », *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol. AES- 29, n. 3, pp. 995-1003, 1993.
- [DRU 94] DRUON E., DUFLOS E., BOULET V., VANHEEGHE P., WILLAEYS D., «An estimation environment», *Proc. IEEE Int. Conf. Syst. Man Cybern.*, vol. 3, pp. 2550-2555, San Antonio, 1994.
- [DRU 95] DRUON E., *Application de la logique floue à la détermination de points de rencontre entre mobiles sous contraintes*, Thèse de doctorat, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, 1995.
- [DUF 94] DUFLOS E., DRUON E., BOULET V., ARQUES P.Y., « Considerations about pure proportional navigation », *Proc. IEEE Int. Conf. Syst. Man Cybern.*, vol. 3, pp. 2556-2560, San Antonio, oct. 1994.
- [DUF 95] DUFLOS E., *Contribution à la modélisation des lois de guidage : caractérisation d'un point cible prédéfini ou non*, Thèse de doctorat, Université de Toulon et du Var, 1995.
- [DUV 91] DUVAUX P., *Traitement du signal*, Hermès, 1991.
- [ELS 84] EL-SALAM I. A., EL-RAHIM M. M. A. A. « Minimum time flight policy of guided missile », *Proceedings of NAECON*, vol. 3, pp. 1416-1421, 1984.
- [FOS 84] FOSSIER M.W., « The development of radar homing missiles », *J. Guidance, Contr. Dyn.*, vol. 7, n. 6, pp. 641-651, nov.- dec. 1984.
- [GHO 94] GHOSE D., « On the generalization of true proportional navigation », *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol. AES-30, n. 2, pp. 229-237, 1994.
- [GUE 71] GUELMAN M., « A qualitative study of proportional navigation », *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol. AES-7, n. 4, pp. 637-643, july 1971.
- [GUE 72] GUELMAN M., « Proportional navigation with a maneuvering target », *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol. AES-8, n. 3, pp. 364-371, may 1972.
- [GUE 73] GUELMAN M., « Missile acceleration in proportional navigation », *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol. AES-9, n. 3, pp. 462-463, may 1973.

- [GUE 76] GUELMAN M., « The closed-form solution of true proportional navigation », *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol. AES-12, n. 4, pp. 472-482, 1976.
- [HAC 71] HACQUES G., *Mathématiques pour l'informatique. T.1 : Algorithmique numérique*, Colin, 1971.
- [HOL 90] HOLDER F.J., SYLVESTER V.B., « An analysis of modern versus classical homing guidance », *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol. AES-26, n. 4, pp. 599-606, july 1990.
- [LAB 82] LABARRERE M., KRIEF J.P., GIMONET B., *Le filtrage et ses applications*, Cepadues, 1982.
- [LAB 92] LABROCHE J.P., COATANTIEC J., « Approche théorique du guidage-pilotage d'un projectile par jets commutés », *Revue Technique Thomson-CSF*, vol. 24, n. 1, pp. 21-53, mars 1992.
- [LAN 91] LANK G. W., « Discrete optimal guidance for high-order missile and maneuvering target », *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol. AES- 27, n. 6, pp. 870-872, nov. 1991.
- [LEM 73] LEMOINE M., TOUET B., PELTIER J.P., « Optimisation du préguidage d'un véhicule à phase terminale autoguidée », *Note technique ONERA*, n. 5, 1973.
- [LIN 91] LIN C.F., *Modern navigation, guidance, and control processing*, Prentice Hall, 1991.
- [LIN 85] LIN C.F., « Optimal missile midcourse and terminal guidance and control law design », *Proceedings of NAECON*, vol. 1, pp. 1-5, 1985.
- [LOC 55] LOCKE A.S., *Guidance*, Princeton N.J. : Van Nostrand, 1955.
- [MUR 66] MURTAUGH S.A., CRIEL H.E., « Fundamentals of proportional navigation », *IEEE Spectrum*, vol. 3, pp. 75-85, dec. 1966.
- [NAZ 76] NAZAROFF G.J., « An optimal terminal guidance law », *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. AC-21, n. 3, pp. 407-408, june 1976.
- [NEM 60] NEMITSKIJ V.V., STEPANOV V.V., *Qualitative theory of differential equation*, Princeton University Press, 1960.
- [PAP 91] PAPOULIS A., *Probability random variables and stochastic processes*, Mc Graw-Hill, 1991.
- [RIG 79] RIGGS T.L., « Linear optimal guidance for short range air-to-air missiles », *Proceedings of NAECON*, vol. 2, pp. 757-764, 1979.
- [RIS 68] RISHEL R.W., « Optimal terminal guidance of an air-to-surface missile », *J. Spacecraft*, vol. 5, n. 6, pp. 649-654, june 1968.

- [RUS 89] RUSNAK I., MEIR L., « Optimal guidance for acceleration constrained missile and maneuvering target », *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol. AES-26, n. 4, pp. 618-624, july 1990.
- [SHU 88] SHUKLA U.S., MAHAPATRA P.R., « Generalized linear solution of proportional navigation », *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol. AES-24, n. 3, pp. 231-238, may 1988.
- [SHU 90] SHUKLA U.S., MAHAPATRA P.R., « The proportional navigation dilemma : pure or true ? », *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol. AES-26, n. 2, pp. 382-392, march 1990.
- [SIN 70] SINGER R.A., « Estimating optimal tracking filter performance for manned maneuvering targets », *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol. AES-6, n. 4, pp. 473-483, july 1970.
- [SIN 71] SINGER R.A., MONZINGO R.A., « Application of optimal tracking to goal-seeking attack vehicles », *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. AC-16, n. 1, pp. 63-66, feb. 1971.
- [STO 76] STOCKUM L.A., WEIMER F.C., « Optimal and suboptimal guidance for a short-range homing missile », *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol. AES-12, n. 3, pp. 355-361, may 1976.
- [TER 92] TERANO T., ASAI K., SUGENO M., *Fuzzy systems theory and its applications*, Academic Press, 1992.
- [YUA 48] YUAN L.C.L., « Homing and navigational courses of automatic target seeking devices », *J. Appl. Phys.*, vol. 19, pp. 1122-1128, dec. 1948.
- [ZAR 94] ZARCHAN P., *Tactical and Strategic Missile Guidance*, vol.157, AIAA Tactical Missiles Series, 1994.

## Annexe : A propos de la navigation proportionnelle classique

### A. Equation de la trajectoire selon Becker

L'équation de la trajectoire donne lieu à un théorème dont la provenance et la signification seront mieux compris suite à la définition de quelques notions mathématiques. Les notations employées ici sont les mêmes que celles introduites par Guelman dans le premier chapitre au I.3.3.1. L'approche de Becker est basée sur une étude mathématique de la navigation proportionnelle à l'aide de fonctions complexes.

Considérons la fonction complexe  $F(z)$  définie par :

$$F(z) = \frac{\cos z - p \cos(k_0 - \mu z)}{p \sin(k_0 - \mu z) - \sin z} = \frac{V_{Ru}(z)}{V_{Rv}(z)}, \quad (\text{a.1})$$

avec  $z$  le complexe défini par  $z = \eta + iy$  ( $i^2 = -1$ ).

**proposition a.1** : ([BEC 90]) Si  $p > 1$  et si  $\mu \geq 1$ , la fonction  $F$  possède une infinité de pôles simples et tous réels. Ils sont donc égaux à  $\eta_{vj}$ .  $R_j$  le résidu de la fonction  $F$  en  $\eta_{vj}$  est explicité par :

$$R_j = \lim_{z \rightarrow \eta_{vj}} (z - \eta_{vj}) F(z) = \frac{p \cos(k_0 - \mu \eta_{vj}) - \cos \eta_{vj}}{\mu p \sin(k_0 - \mu \eta_{vj}) + \cos \eta_{vj}} > 0. \quad (\text{a.2})$$

**preuve** :

Voir [GUE 71] pour la preuve qu'il y a une infinité de pôles réels puis [BEC 90] pour le reste.

Les racines  $\eta_{vj}$  sont ordonnées par valeurs absolues croissantes. Soit  $N$  l'ensemble des entiers classés de la façon suivante :

$$|\eta_{v1}| < |\eta_{v2}| < \dots < |\eta_{vm}| < |\eta_{v(m+1)}| < \dots \text{ avec } m \in N. \quad (\text{a.3})$$

**Proposition a.2** : ([BEC 90]) Les pôles  $\eta_{vj}$  ont les propriétés suivantes :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |\eta_{vm}| = \infty, \quad (\text{a.4})$$

$$\eta_{v1} = 0 \text{ si et seulement si } k_0 = n\pi \quad n \in \mathbf{Z}. \quad (\text{a.5})$$

**preuve :**

Le dénominateur de  $F(z)$  est une fonction holomorphe sur l'ensemble des complexes. Une fonction holomorphe ne pouvant avoir un nombre infini de zéros dans un domaine fermé, on a nécessairement (a.4) d'après [BAS 56].

Si  $k_0 = n\pi$  alors le dénominateur de  $F$  s'écrit :

$$-p \sin(\mu\eta) - \sin\eta. \quad (\text{a.6})$$

Il est immédiat que si  $\eta = 0$  alors (a.6) s'annule et donc  $\eta_{v1} = 0$ . Inversement, si  $\eta = 0$  le dénominateur s'annule si et seulement si  $\sin k_0 = 0$  et donc si et seulement si  $k_0 = n\pi$ . (a.5) est donc démontré.

En utilisant ces résultats il est possible d'exprimer l'équation de la trajectoire sous forme d'une série infinie convergente.

**Théorème a.1 :** ([BEC 90]) *L'équation polaire de la trajectoire d'un mobile suivant une loi de N.P.C. avec  $p > 1$  et  $\mu \geq 1$  a, dans le repère polaire de centre C, la forme suivante :*

$$r(\eta) = r_0 e^{F(0)(\eta-\eta_0)} \prod_{m=1}^{\infty} \left( \left| \frac{\eta-\eta_{vm}}{\eta_0-\eta_{vm}} \right|^{R_m} e^{\frac{R_m}{\eta_{vm}}(\eta-\eta_0)} \right) \text{ si } \eta_{v1} \neq 0 \text{ et } \eta_0 \neq \eta_{vm}, \quad (\text{a.7})$$

$$r(\eta) = r_0 \left| \frac{\eta}{\eta_0} \right|^{R_1} \prod_{m=2}^{\infty} \left( \left| \frac{\eta-\eta_{vm}}{\eta_0-\eta_{vm}} \right|^{R_m} e^{\frac{R_m}{\eta_{vm}}(\eta-\eta_0)} \right) \text{ si } \eta_1 = 0 \text{ et } \eta_0 \neq \eta_{vm}. \quad (\text{a.8})$$

Cette solution analytique met en évidence l'importance des racines de  $V_{Rv}(\eta)$  comme le montre [GUE 71] lors de son analyse qualitative des équations différentielles définissant la trajectoire. Une des conditions d'écriture de (a.7) et (a.8) est que  $\eta_0 \neq \eta_{vm}$ . Il est intéressant de préciser à quel moment il est possible de rencontrer cette situation.

**proposition a.3 :** *Une condition nécessaire et suffisante pour que  $\eta_{vm} = \eta_0$  lorsque  $r_0 \neq 0$  est que  $V_R$  soit colinéaire à  $u$  à l'instant  $t_0$  (situation de collision dès le début de la trajectoire).*

**preuve :**

*condition nécessaire :* Si  $\eta_{vm} = \eta_0$  alors d'après (I.35) :

$$V_{Rv}^N(\eta_0) = p \sin(\delta_{M0}) - \sin\eta_0 = 0, \quad (\text{a.9})$$

$\mathbf{V}_R$  est donc colinéaire à  $\mathbf{u}$  à l'instant  $t_0$ .

*condition suffisante* : Si  $\mathbf{V}_R$  colinéaire à  $\mathbf{u}$  en  $t = t_0$  et que  $r_0 \neq 0$  alors nécessairement  $V_{Rv}^N(\eta_0) = 0$  et donc il existe  $m$  entier relatif tel que  $\eta_{vm} = \eta_0$ . D'après la preuve du théorème, la trajectoire est une droite et la rencontre n'a lieu que si  $\dot{r} < 0$ .

Nous supposons par la suite que les conditions initiales sont telles que l'on ne soit pas en situation de collision à l'instant initial ( $\eta_{vm} \neq \eta_0$ ). A partir de l'étude précédente, Becker réussit à donner dans [BEC 90], de nouveau sous la forme d'une série infinie convergente, une forme explicite de  $\dot{\eta}$  donc de l'accélération en fonction de  $\eta$ .

## B. Expression de l'accélération

Considérons la fonction  $H$  définie par :

$$H(\eta) = \frac{r\dot{\eta}}{V_C}. \quad (\text{a.10})$$

La fonction complexe associée est notée  $H(z)$ . La dérivée de cette fonction par rapport à  $z$  est notée  $H'(z)$ . Enfin, lorsque  $\eta_{v1} = 0$ , la fonction  $Q(z)$  est définie par :

$$Q(z) = \frac{H(z)}{z}. \quad (\text{a.11})$$

**proposition a.4** : ([BEC 90])  $H(0)$ ,  $\frac{H'(0)}{H(0)}$  et  $Q(0)$  ont les formes explicites suivantes :

$$H(0) = p \sin k_0 \text{ si } \eta_{v1} \neq 0, \quad (\text{a.12})$$

$$\frac{H'(0)}{H(0)} = -\frac{p\mu \cos k_0 + 1}{p \sin k_0} \text{ si } \eta_{v1} \neq 0, \quad (\text{a.13})$$

$$Q(0) = -\mu p \cos k_0 - 1 \text{ si } \eta_{v1} = 0. \quad (\text{a.14})$$

Le théorème rendant compte des variations de  $\dot{\eta}$  peut maintenant être énoncé.

**Théorème a.2** : ([BEC 90]) Supposons  $p > 1$  et  $\mu \geq 1$  et posons  $p_m(\eta)$  égale à :

$$p_m(\eta) = \text{sign}\left(1 - \frac{\eta}{\eta_{vm}}\right) \left|1 - \frac{\eta}{\eta_{vm}}\right|^{1-R_m} \left|1 - \frac{\eta_0}{\eta_{vm}}\right|^{R_m} e^{\frac{\eta - R_m(\eta - \eta_0)}{\eta_{vm}}}. \quad (\text{a.15})$$

Les variations de  $\dot{\eta}$  en fonction de  $\eta$  sont alors données par :

$$\dot{\eta}(\eta) = \frac{V_C}{r_0} H(0) e^{\frac{H'(0)}{H(0)} \eta - F(0) (\eta - \eta_0)} \prod_{m=1}^{\infty} P_m(\eta) \text{ si } \eta_{v1} \neq 0, \quad (\text{a.16})$$

$$\dot{\eta}(\eta) = \frac{V_C}{r_0} Q(0) |\eta_0|^{R_1} \text{sign}(\eta) |\eta|^{1-R_1} \prod_{m=2}^{\infty} P_m(\eta) \text{ si } \eta_{v1} = 0. \quad (\text{a.17})$$

### B.1 Interprétation

Ces résultats permettent de retrouver de façon plus directe et plus précise ceux énoncés par Guelman dans [GUE 71] pour obtenir la rencontre.

**proposition a.5 :** Si  $p > 1$ ,  $\mu \geq 1$ , et si  $\eta_0$  appartient à l'intervalle  $[\eta_{v(m-1)}, \eta_{v(m+1)}]$  avec  $\eta_0 \neq \eta_{vl}$  ( $l \in \{m-1, m, m+1\}$ ), alors la rencontre aura lieu pour  $\eta$  égale à  $\eta_{vm}$ .

**preuve :**

Sous les conditions énoncées dans cette proposition, d'après les égalités (a.16) et (a.17), il est immédiat que le signe de  $\dot{\eta}$  ne change pas dans l'intervalle  $[\eta_{vm}, \eta_{v(m+1)v}]$  et qu'il alterne d'intervalle en intervalle. La fonction  $\eta$  est donc strictement monotone sur chaque intervalle  $[\eta_{vm}, \eta_{v(m+1)v}]$ , et si  $\eta$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[\eta_{v(m-1)v}, \eta_{vm}]$ , elle est strictement décroissante sur l'intervalle  $[\eta_{vm}, \eta_{v(m+1)v}]$ . Par conséquent, si  $\eta_0$  appartient à l'intervalle  $[\eta_{v(m-1)v}, \eta_{v(m+1)v}]$ ,  $\eta$  converge vers  $\eta_{vm}$ . De plus, comme  $R_m > 0$  (voir (a.2)) alors il est immédiat en considérant (a.7) et (a.8) que  $r$  s'annule.

### B.2 Valeur finale de l'accélération

Supposons que la trajectoire évolue vers l'angle polaire  $\eta_{vm}$  défini dans la proposition a.5. Le comportement de l'accélération au moment de la rencontre est soumis aux conditions énoncées dans la proposition suivante :

**Proposition 6.a :** Supposons que la proposition 5.a soit satisfaite. La valeur de l'accélération au moment de la rencontre est égale à :

- $\dot{\eta}_f = 0$  si et seulement si  $R_m < 1$ .
- $|\dot{\eta}_f| = \infty$  si et seulement si  $R_m > 1$ .
- $0 < |\dot{\eta}_f| < \infty$  si et seulement si  $R_m = 1$ .

**preuve :**

Le résultat est une conséquence directe du théorème a.2. Ce résultat peut être précisé par une étude sur  $R_m$ .

**proposition 7.a :** ([BEC 90]) *Le résidu  $R_m$  est tel que  $R_m < 1$  si et seulement si :*

$$(\mu-1)p > \frac{-2 \cos(\eta_{vm})}{\cos(k_0 - \mu\eta_{vm})}. \quad (a.18)$$

**proposition 8.a :** *Une condition suffisante pour que (a.18) soit réalisée est que :*

$$(\mu-1)p > 2. \quad (a.19)$$

**preuve :**

La preuve est immédiate quand on remarque que l'on a toujours  $|\cos(k_0 - \mu\eta_{vm})| > |\cos(\eta_{vm})|$  (voir [BEC 90]).

**Remarque :** La condition (a.19) est équivalente à la condition (I.41).

La trajectoire et le comportement de l'accélération en tout point de la trajectoire sont maintenant parfaitement définis. La N.P.C. apparaît comme une loi de guidage très puissante puisqu'elle permet d'atteindre la cible pour pratiquement toutes les conditions initiales possibles. De plus, en choisissant convenablement le C.N.P.C., il est toujours possible d'avoir une accélération qui tend vers zéro au moment de l'impact.

L'inconvénient de l'étude qui précède repose dans la lourdeur des expressions de la trajectoire et de l'accélération. Néanmoins, dans le cas où le coefficient de N.P.C. est rationnel, ces expressions se simplifient.

### **C. Cas d'un coefficient de N.P.C. rationnel**

Le coefficient de N.P.C. est supposé de la forme :

$$\mu = \frac{d}{f} \text{ avec } (d, f) \in \mathbf{Z}^2. \quad (a.20)$$

Le dénominateur de la fonction  $F$  est cette fois périodique de période  $2f\pi$ . Il admet  $2d$  racines distinctes  $\eta_{vj}$  dans l'intervalle  $[0, 2\pi)$ . Les autres se déduisent de celles-ci modulo  $2\pi$ .

$$\eta_{v(m \pm 2f)} = \eta_{vm} + 2f\pi \text{ avec } m \in \{1, \dots, 2d\}. \quad (\text{a.21})$$

Remarque : la notation  $[0, 2\pi)$  signifie que la valeur  $2\pi$  n'appartient pas à l'intervalle considéré.

Le comportement de  $r$  et de l'accélération en fonction de  $\eta$  sont alors définis par les résultats des propositions suivantes.

**proposition 9.a** : ([BEC 90]) Lorsque le C.N.P.C. est rationnel i.e. de la forme (a.20), l'équation de la trajectoire est donnée par :

$$r(\eta) = r_0 \prod_{m=1}^{2d} \left| \frac{\sin\left(\frac{\eta - \eta_{vm}}{2f}\right)}{\sin\left(\frac{\eta_0 - \eta_{vm}}{2f}\right)} \right|^{R_m} \quad \text{si } \mu \neq 1, \quad (\text{a.22})$$

$$r(\eta) = r_0 e^{\frac{2p(\eta - \eta_0) \sin k_0}{(1 + 2p \cos k_0 + p^2)}} \prod_{m=1}^2 \left| \frac{\sin\left(\frac{\eta - \eta_{vm}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\eta_0 - \eta_{vm}}{2}\right)} \right|^{R_m} \quad \text{si } \mu = 1. \quad (\text{a.23})$$

Nous posons :

$$K(\eta) = \frac{2p(\eta - \eta_0) \sin k_0}{(1 + 2p \cos k_0 + p^2)}, \quad (\text{a.24})$$

$$\text{et } \varepsilon_m = \text{sign}\left(\sin\left(\frac{\eta_{vm} - \eta}{2}\right)\right). \quad (\text{a.25})$$

**proposition 10.a** : Les variations de  $\dot{\eta}$  et donc de l'accélération en fonction de  $\eta$  sont données par les expressions suivantes :

$$\frac{V_C}{r_0} e^{\frac{H'(0)}{H(0)} \eta} \prod_{m=1}^{2d} \frac{\left| \sin\left(\frac{\eta_{vm} - \eta}{2f}\right) \right|^{1-R_m} \varepsilon_m}{\sin\left(\frac{\eta_{vm}}{2f}\right)} \left| \sin\left(\frac{\eta_0 - \eta_{vm}}{2f}\right) \right|^{R_m} e^{\frac{\eta}{2f} \cotan\left(\frac{\eta_{vm}}{2f}\right)} \quad \text{si } \mu \neq 1 \text{ et } \eta_0 \neq 0, \quad (\text{a.26})$$

$$2 \frac{V_C}{r_0} Q(0) \sin\left(\frac{\eta}{2f}\right) \prod_{m=1}^{2d} \varepsilon_m \frac{\left| \sin\left(\frac{\eta_{vm}-\eta}{2f}\right) \right|^{1-R_m}}{\sin\left(\frac{\eta_{vm}}{2f}\right)} \left| \sin\left(\frac{\eta_0-\eta_{vm}}{2f}\right) \right|^{R_m} e^{\frac{\eta}{2f} \cot g\left(\frac{\eta_{vm}}{2f}\right)},$$

si  $\mu \neq 1$  et  $\eta_0 = 0$ . (a.27)

$$\dot{\eta} = \frac{V_C}{r_0} e^{\left(\frac{H'(0)}{H(0)}\eta - K(\eta)\right)} \prod_{m=1}^2 \frac{\left| \sin\left(\frac{\eta_{vm}-\eta}{2}\right) \right|^{1-R_m} \varepsilon_m}{\sin\left(\frac{\eta_{vm}}{2}\right)} \left| \sin\left(\frac{\eta_0-\eta_{vm}}{2}\right) \right|^{R_m} e^{\frac{\eta}{2} \cot g\left(\frac{\eta_{vm}}{2}\right)},$$

si  $\mu = 1$  et  $\eta_0 \neq 0$ . (a.28)

$$\dot{\eta} = \frac{2V_C}{r_0} Q(0) \sin\left(\frac{\eta}{2}\right) e^{(-K(\eta))} \prod_{m=1}^2 \frac{\left| \sin\left(\frac{\eta_{vm}-\eta}{2}\right) \right|^{1-R_m} \varepsilon_m}{\sin\left(\frac{\eta_{vm}}{2}\right)} \left| \sin\left(\frac{\eta_0-\eta_{vm}}{2}\right) \right|^{R_m} e^{\frac{\eta}{2} \cot g\left(\frac{\eta_{vm}}{2}\right)},$$

si  $\mu = 1$  et  $\eta_0 = 0$ . (a.29)

