50376 n° d'ordre : 1496 **1995**

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

gen 20103822

LABORATOIRE DE MECANIQUE DE LILLE GROUPE FIABILITE DES STRUCTURES



THESE DE DOCTORAT

Spécialité : Mécanique

Présentée Par :

Mostapha BOULBIBANE

Sujet :

APPLICATION DE LA THEORIE D'ADAPTATION AUX MILIEUX ELASTOPLASTIQUES NON-STANDARDS : CAS DES GEOMATERIAUX

APPLICATION OF SHAKEDOWN THEORY TO NON-ASSOCIATIVE ELASTOPLASTIC MEDIA : CASE OF GEOMATERIALS

Soutenue le 22 mai 1995 devant le jury composé de :

Mr F. D.	ARVE	Institut de Mécanique de Grenoble	Rapporteur
Mr G. D	E SAXCE	Faculté Polytechnique de Mons (BELGIQUE)	«
Mr L. R.	AAD	Université de Fairbanks Alaska (U.S.A.)	«
Mr I. SH	HARHOUR	Ecole Centrale de Lille	Président
Mr R. S (CHMIDT	Université de Wuppertal (ALLEMAGNE)	Examinateur
Mr D. W	/EICHERT	EUDIL-USTL	«

à Mohamed BOULBIBANE et zakia MEHILA

à mes frères et soeurs

REMERCIEMENTS ****************

Le travail qui fait l'objet de ce mémoire a été mené au Département de Mécanique de l'Ecole Universitaire d'Ingénieurs de Lille (E.U.D.I.L.), à l'Université des Sciences et Technologies de Lille (U.S.T.L.) sous la direction de Monsieur D. WEICHERT, professeur et directeur de département de mécanique.

Il m'a été très agréable de travailler avec Monsieur D. WEICHERT. Sa grande patience et sa disponibilité, malgré ses nombreuses activités et responsabilités, ont été pour moi inestimables et déterminantes. Ses qualités professionnelles et humaines m'ont profondément marqué. Qu'il veuille bien trouver ici ma sincère gratitude.

Monsieur F. DARVE, Professeur à I.M.G. et Directeur de l'Ecole de Mécanique de Grenoble, a bien voulu accepter avec gentillesse, en dépit de ses charges multiples, d'être rapporteur de ce travail, et de me faire profiter de sa grande expérience. Je lui en suis profondément reconnaissant.

Monsieur G. DE SAXCE, Professeur à l'institut de mécanique de Mons Belgique, a accepté de participer et d'en être rapporteur. Ses indications judicieuses m'ont aidé à le rendre plus complet. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

J'adresse mes vifs remerciements à Monsieur L. RAAD, Professeur à l'université de Fairbanks Alaska (U.S.A.), qui malgré ses lourdes charges a accepté d'être rapporteur de ce travail et m'a fait profiter de ses précieuses remarques.

Monsieur I. SHARHOUR, Professeur à l'école centrale de Lille, qui m'a fait le grand honneur de présider le jury de cette thèse. Qu'il trouve ici l'expression de toute ma reconnaissance et de mon profond dévouement.

Je remercie aussi Monsieur **R. SCHMIDT**, Professeur à l'université de Wuppertal Allemagne, qui a bien voulu participer à ce jury et de me faire profiter de son expérience.

Je tiens également à remercier mes collèges et amis Chercheurs qui tout au long de ces années de recherche m'ont apporté leur soutien amical. Je cite tout particulièrement M. ABOUTAYEB, N. BENSEDDIQ, H. GIESE, A. GROSS-WEEGE et tous les autres sans oublier le personnel du service de reproduction qui a assuré le tirage de ce mémoire.

SOMMAIRE

RESUME

ABSTRACT

PRINCIPALES NOTATIONS

INTRODUCTION

1	Présentation générale	1
2	Historique	2
3	Cadre et hypothèses de travail	5
4	Résumé des chapitres	6

CHAPITRE I

APERÇU SUR LA PLASTICITE EN MECANIQUE DES SOLS

1.1	Introduction	. 8
1.2	Les éléments constitutifs de la plasticité classique	. 8
	1.2.1 Critère d'écoulement	. 9
	1.2.2 Hypothèse de partition	9
	1.2.3 Règle d'écoulement et notion de stabilité des matériaux	10
1.3	Modèle de plasticité non associée	12
	1.3.1 Interprétation expérimentale	13
	1.3.2 Relation constitutive élastoplastique	17
1.4	Critères de rupture	20
1.5	Résumé du chapitre	23

CHAPITRE II

CHARGES CYCLIQUES ET ANALYSE D'ADAPTATION

2.1	Introduction	24
2.2	Phénomènes cycliques	24
2.3	Théorie d'adaptation	28
	2.3.1 Rappel des définitions et hypothèses de base	28
	2.3.2 Enoncé du théorème statique d'adaptation	
	(théorème de MELAN)	30
	2.3.3 Enoncé du théorème cinématique d'adaptation	
	(théorème de KOITER)	37
2.4	Coefficient de sécurité à l'adaptation	38
2.5	Domaine d'adaptation	39
2.6	Résumé du chapitre	43

CHAPITRE III

EXTENSION DU THEOREME STATIQUE D'ADAPTATION

3.1	Introduction	44
3.2	Théorie d'adaptation pour certains matériaux non-standards 3.2.1 Domaine de chargement 3.2.2 Démonstration du théorème	44 46 47
3.3	Formulation discrétisée du théorème d'adaptation	52
3.4	Charge d'adaptation pour loi associée et non associée	53
3.5	Résumé du chapitre	55

CHAPITRE IV

FORMULATION EN ELEMENTS FINIS APPROCHE PAR PROGRAMMATION MATHEMATIQUE

PARTIE I

4.1 Introduction	56
4.2 Formulation du problème	56
4.2.1 Principe du minimum de l'énergie complémentaire	56
4.2.2 Discrétisation à l'aide de fonction de contraintes	57
4.2.3 Conditions limites statiques pour la fonction d'Airy	61
4.3 Phase plastique	65
4.3.1 Détermination du champ de contraintes résiduelles	65
4.3.2 Détermination du multiplicateur de charge limite	
par programmation non-linéaire	65

PARTIE II METHODE INCREMENTALE NON LINEAIRE

4.4 Formulation incrémentale du problème	67
4.4.1 Discrétisation	69
4.4.2 Résolution des systèmes d'équations non linéaires	71
4.5 Résumé du chapitre	74

CHAPITRE V

APPLICATIONS NUMERIQUES AUX

PROBLEMES GEOTECHNIQUES

5.1	Introduction	76
5.2	Modèle de sol-structure	77
	5.2.1 Effet du maillage	78
	5.2.2 Adaptation et analyse limite en déformation plane	80
	5.2.3 Effet de module de Young et de l'épaisseur de la	
	couche d'Asphalte sur la charge d'adaptation	85

5.3	Analyse lim	nite et adaptation en contrain	te plane		. 89
5.4	Validation of	de l'approche par une méthoo	le incrémentale		. 96
CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES					103
REFERENCES			105		
AN	NEXE A				112
AN	NEXE B				118

RESUME

On s'intéresse dans cette étude au comportement des ouvrages sous chargements variables et répétés telles que les voies routières et ferroviaires. Un calcul incrémental qui suivrait pas à pas l'ensemble des cycles de chargement est naturellement très coûteux. La théorie d'adaptation comble cette carence et permet de définir le domaine des charges limites dans lequel la variation des charges ne provoque que des déformations réversibles (charges pour lesquelles la réponse de la structure reste élastique). C'est là l'intérêt pratique de cette méthode, puisqu'au lieu de faire un calcul incrémental sur l'ensemble d'histoire des charges, on obtient directement une réponse valable pour toutes les charges comprises dans ce domaine.

Cependant, Les théorèmes limites statique et cinématique d'adaptation appliqués dans leur forme originale aux matériaux standards (règle d'écoulement associée), ne sont pas à priori valables pour les matériaux non-standards (e.g. matériaux frottants) où en général les taux de déformation plastique ne dérivent pas de la surface d'écoulement (règle d'écoulement non-associée). Cette non associativité due au frottement est introduite comme une correction ou modification du théorème statique d'adaptation de base. La démonstration de ce dernier repose sur l'existence d'une surface convexe, enveloppe des règles d'écoulement locales et sur une généralisation du principe du travail maximal de Hill. A cet égard une forme particulière de critère de plasticité et de la règle d'écoulement est utilisée.

L'algorithme numérique nécessaire à la résolution des problèmes aux limites par la méthode des éléments finis, mettant en oeuvre le théorème statique d'adaptation, est basé sur le principe de minimisation de l'énergie complémentaire (M.E.F. statiquement admissible utilisant la méthode d'interpolation polynomiale bicubique d'Hermite) et sur un processus d'optimisation sous contraintes non-linéaires. Ce dernier a pour but d'estimer les charges limites pour plusieurs directions de chargement tout en veillant à ce que le critère d'écoulement ne soit pas violé en tout point de la structure. Pour un matériau non-standard on démontre que la charge limite dépend en fait d'une résistance résiduelle liée à la non-associativité de la règle d'écoulement ; de plus cette charge est inférieure à celle d'un matériau standard.

MOTS-CLES

Elastoplasticité - Mécanique des Sols - Règle d'Ecoulement Non-Associée - Adaptation (Shakedown) - Méthodes des Eléments Finis Statiquement admissibles - Optimisation .

ABSTRACT

This study concerns the stability of structures, as pavements and railroads, subjected to loads varying in time in a non proportional manner within prescribed limits. An incremental method that would follow step by step the totality of cycles of loading is naturally very expensive. Shakedown theory fulfils this default and allows to define the limit load domain in which the variation of loads provokes only reversible deformations (loads in order that the reply of the structure remains elastic). It is there the interest practices of this method, since instead to make an incremental calculation on the totality of loads history, we obtains directly a valid reply for all loads within this domain.

Whilst the static and kinematic shakedown theorems in their original form apply to materials satisfying the normality condition for plastic flow, they are a priori not valid for frictional materials such soils, where in general plastic strain rates are not normal to the yield surface. This non-associativeness due to friction is introduced as a correction or modification to the basic shakedown theorem. The demonstration of this extension rests on the existence of a convex yield surface, applicable local flow rules conditions and a generalisation of the principle of the maximal work (Hill's principle).

The discretization of the shakedown formulation was applied using finite element analysis and optimization techniques. In the finite element formulation, a variational procedure based on minimizing the complementary energy (bicubic Hermite Polynomial) was implemented. The maximum load factors for shakedown were obtained by using an optimization process with non-linear constraints. This last has for purpose to estimate limit loads for several directions of loading such that the yield conditions are not violated everywhere and the structure remains purely elastic for future loads. It was shown, that the shakedown limit for non-associative materials was lower than that for associative materials.

KEYS WORDS

Elastoplasticity - Soils Mechanics - Non-Associated Flow Rule - Shakedown - Finite Elements Methods - Optimisation .

PRINCIPALES NOTATIONS

.

Les contraintes de compression sont négatives		
$F(\sigma,R)$	Fonction de charge ou critère d'écoulement	
$Q(\sigma)$	Potentiel plastique	
$\mathcal{O}_{\alpha}(t)$	Charges généralisées	
Ε	Module de Young	
ν	Coefficient de Poisson	
dλ	Multiplicateur plastique	
R	Paramètre d'écrouissage	
Н	Module d'écrouissage	
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Contraintes principales	
$\tilde{\epsilon}^{p}$	Tenseur de déformations plastiques	
٤°	Tenseur de déformations élastiques	
$\tilde{\epsilon}^{r}$	Tenseur de déformations résiduelles	
ğ	Taux de contraintes	
ε ε	Taux de déformations	
ξ	Energie de déformation élastique	
õ	Tenseur de contraintes actuelles	
$\tilde{\mathbf{Q}}^{(s)}$	Tenseur de contraintes admissibles	
α	Facteur de charge	
<u>6</u>	Contraintes résiduelles indépendantes du temps	
ę	Tenseur de contraintes résiduelles	
Φ	Fonction de contrainte d'AIRY	
R	Domaine de chargement	
[L]	Tenseur de compliance	
$[D^{ep}]$	Matrice élasto-plastique	
[C]	Matrice contenant les paramètres des équations de contraintes	
[f]	Matrice de flexibilité	
Π	Energie complémentaire	
Π	Energie complémentaire augmentée	
[λ]	Les multiplicateurs de Lagrange	
L(x,a,b)	Lagrangien Augmenté	
φ	Angle de frottement	
Ψ	Angle de dilatance	
С	Cohésion	

INTRODUCTION

INTRODUCTION

1 – PRESENTATION GENERALE

Pour le calcul des ouvrages de génie civil, on s'attache de plus en plus à tenir compte de l'interaction sol-structure. En ce qui concerne le sol, ses caractéristiques mécaniques, les différentes sollicitations auxquelles il est soumis et les conditions aux limites, sont autant de variables à prendre en compte dans les calculs. La maîtrise de son comportement est une science qui possède son importance car elle conditionne la longévité de l'ouvrage.

L'un des problèmes fondamentaux auxquels est confronté le mécanicien des sols consiste à déterminer si le matériau sol restera stable sous l'action de charges déterminées par la nature de l'ouvrage de Génie Civil qu'il considère. Les calculs sont traditionnellement menés en admettant que le massif concerné est dans sa totalité, soit en équilibre élastique, soit en équilibre limite plastique. Pour prévoir l'équilibre limite plastique, le mécanicien des sols utilise la méthode de l'analyse limite qui permet de déterminer les charges limites monotones après lesquelles l'écoulement du sol aura lieu. Cependant celle-ci montre ses limites lorsque le chargement devient variable ou même cyclique.

De part sa généralité, la théorie d'adaptation (Shakedown) est à priori le moyen le mieux adapté au traitement de ces problèmes difficiles. Elle permet de prévoir la nondéfaillance des structures sous chargements variables indépendamment des conditions qui y règnent initialement, et de plus en ne possédant qu'une information minimale sur le trajet de chargement lui-même.

Cette théorie, considérée comme une généralisation de l'analyse limite, permet en effet de caractériser globalement la charge limite ou la charge potentiellement supportable par une structure soumise à une histoire de charges variables évoluant entre des limites prescrites. Par ailleurs, elle précise sous quelles conditions l'accumulation des déformations plastiques reste limitée telle que la structure réagisse de façon purement élastique après un cycle de déformations plastiques initiales.

2 – HISTORIQUE

Depuis les travaux de BLEICH [5], l'étude des structures élasto-plastiques sous chargements variables a connu d'importants développements. MELAN [58] est le premier à avoir donné une appréhension générale du phénomène d'adaptation sous forme d'un théorème, abondamment cité dans la littérature comme "théorème de MELAN" ou encore "théorème statique d'adaptation. La démonstration et l'aménagement de ce dernier n'ont été donné que plus tard par SYMONDS & PRAGER [93], SYMONDS [94] et KOITER [42].

Mais ce n'est qu'en 1960, que le pas décisif a été franchi par KOITER [43] qui introduit les bases de la théorie moderne des charges limites en définissant le coefficient de sécurité à l'adaptation ; ceci lui permet d'obtenir une majoration du travail de déformations plastiques. Ces résultats sont développés par NAYROLES [65] qui utilise les récents résultats en analyse convexe de MOREAU [63] et de ROCKAFELLAR [80]. SALENÇON [86] fait une synthèse des travaux antérieurs en vue d'une application en mécanique des sols. Il définit le concept du processus de chargement à plusieurs paramètres. Par la suite, DEBORDES & NAYROLES [18] proposent une théorie originale des familles de domaines d'adaptation et présentent une méthode de calcul par sous-structuration. DEBORDES [19] place la théorie des charges limites dans le cadre de l'élasto-plasticité asymptotique.

Dans sa forme classique cette théorie des charges limites repose sur trois hypothèses fondamentales :

- les changements de géométrie sont négligeables jusqu'à la charge limite,
- le domaine des contraintes admissibles est convexe,
- l'écoulement obéit à la règle de normalité.

En théorie de calcul à la rupture, comme en théorie des charges limites, la recherche du convexe des chargements potentiellement supportables se fait classiquement par deux méthodes : l'approche statique et l'approche cinématique.

L'utilisation de l'approche statique donne une approximation par l'intérieur et nécessite l'exhibition d'un champ de contraintes statiquement admissibles. Cette approche a été choisie par PRAGER [75] en vue d'une extension du théorème d'adaptation aux cas des sollicitations thermiques. L'étude de l'influence de la contrainte thermique sur le module de Young et sur la limite élastique du matériau a été donnée par KÖNIG [44] et GROSS-WEEGE & WEICHERT [37]. L'extension du théorème d'adaptation aux cas des sollicitations dynamiques a suscité un intérêt particulier chez certains auteurs. On peut citer à titre d'exemple, pour l'approche statique, CERADINI [9], et pour l'approche cinématique CORRADI & MAIER [13] et CERADINI [10].

L'effet de l'écrouissage cinématique a été étudié en premier par MELAN [59]. Cette étude a été poursuivie par MANDEL [57] qui utilise le modèle du matériau standard généralisé (M.S.G.), développé auparavant par HALPHEN & NGUYEN QUOC SON [38]. Ces auteurs ont traité l'écrouissage cinématique illimité. Mais KÖNIG [46] constate que l'hypothèse de l'écrouissage illimité conduit à l'impossibilité de prédire la non adaptation par déformations plastiques cumulées, et que seule la plasticité alternée peut causer la défaillance de la structure. Toutefois, l'écrouissage cinématique limité est proposé par WEICHERT & GROSS-WEEGE [98] au moyen d'une condition d'écoulement simplifiée à deux surfaces et par l'emploi du modèle (M.S.G.).

Le premier à s'intéresser au comportement des structures géométriquement nonlinéaires est MAIER [56]. Il montre au moyen de la dualité entre l'approche statique et l'approche cinématique que le changement de configuration - effets géométriques du second ordre - affecte les équations d'équilibre. Cette étude à été poursuivi et appliquée aux structures discrètes, en utilisant une formulation matricielle simplifiée par KÖNIG [46], KÖNIG & SIEMASKO [48]. NGUYEN QUOC SON & GARY [67] mettent en évidence le risque de déstabilisation du processus d'adaptation par le phénomène de rochet (accumulation de déformations plastiques de manière cyclique). Dans le cadre de la mécanique des milieux continus WEICHERT [96, 97] tient compte de l'influence des non-linéarités géométriques en utilisant les approches statique et cinématique. Il présente dans un contexte particulier, l'étude des petites évolutions au voisinage d'une configuration déformée de référence, et montre l'intérêt des approximations cinématiques proposées par CASEY [8].

La généralisation des théorèmes limites aux comportements des matériaux frottants a fait l'objet de certains travaux. MAIER [54] montre les liaisons entre l'approche statique et l'approche cinématique au moyen de la dualité en programmation linéaire, avec la prise en compte des lois non-associées. Il définit les coefficients de sécurité des systèmes discrétisés en linéarisant la condition d'écoulement et le potentiel plastique. Par la suite, DE SAXCE & FENG [23] montrent la possibilité de se rapprocher de la solution exacte au moyen de l'approche statique en introduisant le modèle du matériau standard implicite. Cette démarche leur permet d'étendre la règle de normalité au comportement dissipatif des problèmes de contact frottant. Récemment, WEICHERT & RAAD [99] donnent une extension du théorème d'adaptation à une certaine classe de géomatériaux élastiques parfaitement-plastiques avec des coefficients d'élasticité variables.

La description matricielle d'un comportement mécanique, basée sur la discrétisation en éléments finis et sur la linéarisation de la condition d'écoulement est attribuée à MAIER [55], CORRADI & ZAVELANI-ROSSI [14]. Ils utilisent le concept de programmation linéaire et donnent un outil numérique permettant la détermination des coefficients de sécurité pour des structures bi-et tridimensionnelles. Le théorème de Melan est présenté comme étant un problème de programmation linéaire et celui de Koiter comme son dual. DE SAXCE [22] montre à partir du concept de dissipation moyenne, la dualité des deux approches statique et cinématique au sens de l'analyse convexe. KAMENJARZH & WEICHERT [41] expriment au moyen de la dualité la borne du coefficient de sécurité à l'adaptation, en considérant le cas particulier de la surface d'écoulement sphérique. Une analyse détaillée du théorème d'adaptation incluant l'accommodation à un chargement prescrit aussi bien comme la nonadaptation et la défaillance incrémentale d'une structure est due à SAWCZUK [88]. Il donne en utilisant l'approche cinématique, un critère d'effondrement incrémental et montre que, dans le cas du critère d'écoulement linéaire, l'inégalité peut être intégrée dans le temps. Les définitions et les hypothèses de bases des théorèmes d'adaptation ont été illustrées par des applications numériques pour les treillis, les plaque et les coques cylindriques par KÖNIG [45], SIEMAZSKO & KÖNIG [90] et TSAU & al. [95]. L'analyse de défaillance incrémentale a été réduite au problème d'analyse limite pour un corps non homogène. Cette méthode, utilisant des variables généralisées, est basée fondamentalement sur le concept de la surface de charge fictive (surface dans l'espace de contraintes limitée par la région admissible des auto-contraintes). En outre, elle permet d'utiliser une méthode approximative des procédures classiques d'analyse limite pour résoudre les problèmes d'adaptation des plaques circulaires et coques cylindriques ALWIS & GRUNDY [1].

Depuis le développement des gros moyens de calcul, de nombreux auteurs ont eu l'idée d'automatiser les longs calculs auxquels donnaient lieu les méthodes statique et cinématique en utilisant en particulier la méthode des éléments finis. On peut citer à titre d'exemple, pour la méthode statique, BELYTSCHKO & HODGE [3], BELYTSCHKO [4], KÖNIG & NGUYEN [47] et pour la méthode cinématique PALGEN & NGUYEN [70], MORELLE & NGUYEN DANG HUNG [61] et MORELLE [62].

Pour la méthode statique, on discrétise l'espace des champs de contraintes statiquement admissibles et on approche le convexe des contraintes admissibles par un polygone convexe. On est alors amené à la résolution d'un problème de programme non-linéaire avec contraintes. L'application de cette méthode a permis d'évaluer la borne inférieure de la charge limite d'adaptation d'un certain nombre de problèmes en mécaniques de sols sous l'hypothèse de la règle d'écoulement associée par RAAD & al. [76, 77, 78] et GIESE [34], et en mécanique des structures par WEICHERT & GROSS-WEEGE [98]. Quoiqu'elle ait l'avantage de réduire le temps de calcul, elle présente des difficultés liées à la technique de programmation non-linéaire.

La seconde donne une approximation par l'extérieur et nécessite un choix judicieux des surfaces de glissement, afin d'obtenir des résultats satisfaisants, ce qui est analytiquement difficile et numériquement coûteux. Pour ces problèmes, la discrétisation du problème est plus simple, mais la solution du problème à résoudre peut entraîner des difficultés de convergence des algorithmes de résolution.

L'étude de l'influence de certains paramètres sur la charge limite d'adaptation en mécanique des sols a fait l'objet de plusieurs travaux numériques. RAAD & al. [76, 77] montrent que la variation des paramètres mécaniques (tels que l'angle de frottement et la cohésion) ainsi que la variation de la température et de l'épaisseur de la couche d'asphalte, influent considérablement sur la valeur de la charge limite d'adaptation. GOLDSCHEIDER [35], PANDE & ABDULLAH [71], COLLINS & CLIFFE [12] et JONHSON & SHERCLIFF [40] précisent à leur tour que cette charge dépend fortement du type de contact sol-structure ainsi que de leurs caractéristiques mécaniques.

3 – CADRE ET HYPOTHESES DE TRAVAIL

Les théorèmes généraux (statique et cinématique) de la théorie de l'adaptation sont fondés sur une loi d'écoulement du type associée, ou bien, plus généralement, si l'on veut tenir compte de l'écrouissage, sur le principe du travail maximal généralisé. Ce type de loi trouve un fort appui dans le fait qu'il permet d'établir les théorèmes d'unicité et, par là, de fournir un sens physique aux solutions fondées sur les schémas grossièrement simplifiés.

Pourtant, l'hypothèse que la loi d'écoulement est associée, n'est pas vérifiée par l'expérience dans le cas des sols (LADE & al. [51], DESAI & HASHEMI [20], DESAI & SIRIWARDANE [21]). Toutefois, l'application de cette théorie sur un tel matériau, muni de la loi de normalité ne reflète pas sa résistance et sa fiabilité réelles vis-à-vis des charges qu'il aura à supporter, ce qui nous incite à l'étendre aux comportements non-standards.

L'intégration de l'analyse d'adaptation dans un code de calcul repose sur la méthode des éléments finis statiquement admissibles (RYBICKI & SCHMIT [84], BELYTSCHKO [4], WEICHERT & GROSS-WEEGE [34]) et sur la programmation mathématique. Cette dernière

consiste à déterminer les multiplicateurs de charges limites garantissant la non-violation du critère d'écoulement. Elle nécessite :

- un champ de contraintes purement élastiques sous chargement donné,

- un champ d'auto-contraintes (contraintes résiduelles).

Pour cela nous introduisons dans la formulation des problèmes plans le principe de minimisation de l'énergie complémentaire, qui fait usage d'une fonctionnelle exprimée en fonction de dérivées secondes de la fonction d'Airy Φ en tant qu'inconnue de base aux noeuds. Ce principe nous permet en effet d'obtenir des champs de contraintes (élastiques et résiduelles) qui satisferont les équations d'équilibre et les conditions aux limites.

La détermination des multiplicateurs de charges limites assurant la non défaillance par déformations plastiques progressives ou accumulées dans plusieurs directions de chargement, nous permet de définir le domaine d'évolution des charges pour lequel on vérifie qu'une quelconque histoire de charges ne peut conduire à la déstabilisation du processus d'adaptation.

Dans le cadre de validation des résultats, ces domaines de charges limites sont en effet comparés à ceux obtenus par la méthode incrémentale. Nous avons choisi dans notre étude une méthode incrémentale basée essentiellement sur la méthode des rigidités symétriques. Ceci permet notamment, d'avoir une écriture adéquate de la loi constitutive incrémentale, et des gains intéressants en espace et en temps de calcul.

4 – RESUME DES CHAPITRES

Le premier chapitre présente un aperçu et un bref historique de la plasticité en mécanique des sols, donne divers types de critère de plasticité utilisés par la suite, et consacre quelques lignes à l'une des raisons de la non application de la règle de normalité.

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation et l'interprétation des théorèmes statique et cinématique d'adaptation pour les matériaux parfaitement plastiques, en montrant les rôles de la convexité et de la normalité. Par la suite, nous montrons d'une façon décisive les conséquences de l'adaptation sur le champ de déformations plastiques en introduisant la notion de coefficient de sécurité à l'adaptation (KOITER [43]).

Dans le chapitre 3, nous nous sommes d'abord attachés à mettre en place les hypothèses nécessaires et le cadre théorique global, dans lequel se situe l'ensemble de notre

démarche. Ensuite, nous proposons une extension générale du théorème statique d'adaptation avec la prise en compte de la loi d'écoulement non-associée. Par l'utilisation des deux critères d'écoulement de Mohr-Coulomb et Drucker-Prager, nous exprimons les multiplicateurs de charges limites via la méthode de programmation mathématique. En dernier, nous présentons une comparaison entre les charges limites dans le cas associé et non-associé.

Le quatrième chapitre montre la mise en oeuvre pratique des développements précédents dans un code de calcul en éléments finis, dont la formulation est basée sur le principe de minimisation de l'énergie complémentaire. Le problème de détermination des multiplicateurs de charges limites est résolu par un processus d'optimisation non linéaire en utilisant la méthode du Lagrangien Augmenté (PIERRE & LOWE [73]). Par la suite, nous proposons une loi constitutive incrémentale pour les matériaux non-standards. Cette dernière est fondée sur la supposition que le matériau non-standard est équivalent à un autre matériau standard muni d'une modification de la direction de dépendance contrainte/déformation à la règle d'écrouissage (modified stress/strain direction dependent hardening/softening rule ; voir : PANDE & PIETRUSZCZAK [72]), ce qui permet d'avoir un nouvel algorithme basé sur un opérateur symétrique, à l'inverse de la matrice tangente conventionnelle.

Le cinquième chapitre est consacré aux applications numériques telles que l'influence des paramètres élastiques et plastiques sur la charge limite d'adaptation. Ensuite, nous montrons la sensibilité des domaines limites d'adaptation au caractère non associatif de la loi d'écoulement. Enfin, pour donner des appréciations claires et précises sur la validité des résultats obtenus, nous comparons ces résultats à ceux obtenus par la méthode incrémentale, notamment pour les critères d'écoulements de Mohr-Coulomb et Drucker-Prager. CHAPITRE I

APERCU SUR LA PLASTICITE

EN MECANIQUE DES SOLS

APERCU SUR LA PLASTICITE EN MECANIQUE DES SOLS

1.1 - INTRODUCTION

La modélisation théorique d'un sol peut être effectuée par différentes méthodes, chacune faisant appel à une loi effort-déformation particulière qui nécessite l'introduction d'un certain nombre de paramètres.

Nous examinons tout d'abord dans ce chapitre le comportement qualitatif d'un milieu frottant, en ne retenant cependant que les caractéristiques qui nous paraissent essentielles. Nous rappellerons ensuite les principales tentatives qui ont été faites pour décrire ce milieu par une loi de plasticité non-associée. Celles-ci ne prétend pas être complète, étant donné la profusion de modèles théoriques existants. Enfin, dans la dernière partie, nous proposerons certains critères d'écoulement appropriés aux sols suivis d'une simple comparaison.

1.2 – LES ELEMENTS CONSTITUTIFS DE LA PLASTICITE CLASSIQUE

La théorie de la plasticité s'est développée à partir des constatations expérimentales faites sur les métaux et souvent reprises par les mécaniciens du sol pour simuler leur comportement. Ainsi, trois facettes différentes sont nécessaires pour la formulation de la loi constitutive, justifiée par la nature des phénomènes physique et basée sur l'hypothèse des déformations infinitésimales :

- ♦ critère d'écoulement,
- ♦ hypothèse de partition,
- ♦ règle d'écoulement et notion de stabilité des matériaux.

1.2.1 – Critère d'écoulement

Le critère d'écoulement permet de préciser quand les déformations plastiques sont susceptible de se produire. Cette éventualité dépend de la position de la contrainte dans l'espace des contraintes ainsi que de la direction de l'incrément de contrainte. En outre, l'évolution de cette surface de charge au cours de la sollicitation dépend de l'histoire antérieure, par l'intermédiaire d'un certain nombre de paramètres d'écrouissage R qui sont associés d'une façon ou d'une autre, au travail plastique W^p, et à l'histoire de déformation plastique \mathcal{E}_{ij}^{p} . L'expression analytique de cette surface peut donc s'écrire :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}_{ii}, \mathbf{R}) = \mathbf{0} \quad . \tag{1.1}$$

L'isotropie impose que la frontière du domaine soit invariante par changement de repère, la fonction F ne dépend donc que des trois invariants du tenseur de contrainte σ_{ii} :

$$F(J_1, J_2, J_3, R) = 0 (1.2a)$$

où,

$$J_{1} = \sigma_{ii} , \qquad (1.2b)$$

$$J_{2} = \frac{1}{2} \sigma_{ii} \sigma_{ii} , \qquad (1.2c)$$

$$J_{3} = \frac{1}{3}\sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki} \ .$$

1.2.2 – Hypothèse de partition

Les matériaux granulaires se comportent comme un assemblage de particules solides de telle sorte que les déformations proviennent alors essentiellement de la modification de la structure granulaire. Le serrage et le désenchevêtrement des grains sont deux mécanismes fondamentaux des déformations irréversibles (SALENÇON [86]). Ces mécanismes sont associés au glissement relatif de particules en contact.

Les théories classiques supposent l'existence d'un domaine élastique. Or, pour les milieux granulaires, lors d'un premier chargement, les déformations irréversibles apparaissent à tous les stades de la déformation. L'évolution vers l'état critique étant progressive et continue. Cependant, une loi de comportement appropriée - qui pourrait être alors considérée comme une généralisation possible des relations de Prandtl-Reuss applicables pour tout le trajet de charge - s'énonce ainsi :

Quand un matériau, soumis à des charges, atteint sa limite plastique, il se déforme tout en engendrant des déformations plastiques et élastiques. Ces dernières sont reliées aux incréments de contraintes par la relation de Hooke généralisée :

$$\dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}^{\bullet} \tag{1.3}$$

où, $\dot{\sigma}_{ij}$, $\dot{\epsilon}^{*}_{kl}$ et D_{ijkl} sont respectivement l'incrément de contrainte, de déformation élastique et le tenseur d'élasticité. Ainsi, la partition des incréments de déformations totales $\dot{\epsilon}_{ij}$ en déformations élastiques (réversibles) $\dot{\epsilon}^{*}_{kl}$ et plastiques (irréversibles) $\dot{\epsilon}^{p}_{ij}$ est justifiée par la nature des phénomènes physiques et par l'hypothèse des petites déformations et petits déplacements :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}^{\circ} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}^{P} \quad . \tag{1.4}$$

1.2.3 – Règle d'écoulement et notion de stabilité des matériaux

Comme nous l'avons dit au § 1.2.1, le franchissement du seuil de plasticité (ou de la surface de charge), correspond à l'apparition des déformations permanentes, c'est-à-dire quand la contrainte actuelle est située sur la surface de charge et a tendance à sortir de cette surface. On calcule les déformations plastiques à partir de la relation suivante :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}$$
(1.5)

avec :

$$(\dot{\epsilon}_{ij}^{p} \neq 0) \text{ s'il y a charge :}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F(\mathfrak{g}, R) = 0 \\ et \\ \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F(\mathfrak{g}, R) = 0 \\ et \\ \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F(\mathfrak{g}, R) = 0 \\ et \\ \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} < 0 \end{array} \right.$$

$$(1.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} < 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} < 0 \end{array} \right.$$

où $d\lambda \ge 0$ est le multiplicateur plastique qui fixe la norme de la déformation plastique et $\partial F/\partial \sigma_{ii}$ précise sa direction.

Le principe du "travail maximal" est une hypothèse introduite par Hill (1950) et s'énonce comme suit :

Soit en un point un tenseur des contraintes σ_{ij} tel que $F(\sigma_{ij}, R) = 0$ (R paramètres d'écrouissage). Soit $\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}$ est le tenseur de vitesse des déformations plastiques correspondant. Si σ_{ij}^{s} est le tenseur des contraintes vérifiant $F(\sigma_{ij}^{s}, R) < 0$ (Fig. 1.1) et si :

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{s}) \dot{\varepsilon}_{ij}^{p} \ge 0 \qquad \forall \quad \sigma_{ij}^{s}$$
(1.7)

alors le matériau obéit au principe du travail maximal.

La validité du principe du travail maximal (1.7) implique que :

- la surface d'écoulement portée dans l'espace des contraintes soit convexe,
- les déformations plastiques soient dirigées suivant la normale extérieure à la surface de charge F(σ_{ii}, R).

On dit alors que la loi d'écoulement est associée ou que la règle de normalité s'applique.





En relation étroite avec ce principe, on peut énoncer également le postulat de **D**RUCKER [27, 28, 29] :

$$d^2 W = \dot{\sigma}_{ii} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \ge 0 \tag{1.8}$$

où $\dot{\sigma}_{ij}$ est l'incrément de contrainte sur la surface de charge causant l'écoulement plastique. La relation (1.8) définit la condition de stabilité des matériaux :

- ♦ si la loi d'écoulement est associée, la condition $d^2W \ge 0$ est satisfaite quelle que soit la direction $\dot{\sigma}_{ii}$ et la matériau est inconditionnellement stable,
- ♦ sinon, le matériau est stable pour $d^2W \ge 0$ et instable pour $d^2W < 0$.

1.3 – MODELE DE PLASTICITE NON-ASSOCIEE

L'hypothèse que le critère d'écoulement et le potentiel plastique s'expriment par la même fonction (règle d'écoulement associée), n'est pas vérifiée par l'expérience dans le cas des sols LADE [49], LADE & al. [51], BACKER & DESAI [2], FRANTZISKONIS & al. [32]. On est amené à remplacer cette hypothèse, commode au point de vue de la théorie mathématique, par une autre, moins restrictive, qui pourrait mieux s'adapter au comportement réel des sols. Une généralisation, à cet égard, est de supposer que le critère d'écoulement $F(\sigma_{ij}) = 0$ et le potentiel plastique $Q(\sigma_{ij})$, représentés par deux fonctions distinctes, tel que :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{P} = d\lambda \frac{\partial Q(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}$$

On parle alors d'une loi d'écoulement non-associée. Ce phénomène de non-associativité exigé par certains matériaux peut être expliqué comme suit :

Considérons une surface d'écoulement F dans l'espace de contraintes (Fig. 1.2). Soit un incrément de contrainte arbitraire $\dot{\sigma}_{ij}$ appliqué à un point A sur cette surface, engendrant une déformation plastique dont la direction dépend du gradient de F. En supposant que la théorie classique de plasticité s'applique, on peut dire que l'incrément $\dot{\epsilon}_{ij}^{p}$ est normal à cette surface.



Fig. 1.2 Schématisation du comportement non-associé pour un matériau frottant.

Remarquons que pour les matériaux frottants, les déformations plastiques dues au frottement apparaissent en plus $\dot{\epsilon}_{ij}^{fp}$. La superposition des deux incréments de déformations $\dot{\epsilon}_{ij}^{p}$ et $\dot{\epsilon}_{ij}^{fp}$, donne un incrément de déformation résultant $\dot{\epsilon}_{ij}^{rp}$ qui ne sera pas à son tour normal à la surface d'écoulement F. Lorsque $\dot{\epsilon}_{ij}^{rp}$ coïncide avec $\dot{\epsilon}_{ij}^{p}$, la vitesse des déformations plastiques est normale à la fonction de charge. La règle de normalité est respectée. L'écoulement est accompagné par un changement de volume. Lorsque $\dot{\epsilon}_{ij}^{rp}$ coïncide avec $\dot{\epsilon}_{ij}^{fp}$, la déformation se fait par glissement pure et sans changement de volume. La règle de normalité n'est alors plus valable. De ce fait, on peut dire que le principe du travail maximal et la condition de stabilité ne sont pas a priori satisfaits. Par conséquent, les lois constitutives basées sur la plasticité associée ne peuvent pas décrire convenablement le comportement réel des matériaux frottants.

1.3.1 – Interprétation expérimentale

L'expérience montre que la formulation de la relation constitutive basée sur la supposition d'une loi d'écoulement associée n'est pas conforme au comportement observé (POOROOSHASB & al. [74]. La figure (1.3) illustre des déviations de la normalité quand la variation volumique plastique est prise en compte.

Les travaux de LADE & DUNCAN [50] faits dans le but d'étudier l'influence des chemins de contraintes sur la réponse du sable montrent également un comportement non-associé de la loi d'écoulement. Ils suggèrent que dans le plan octaedral, les composantes déviatoriques du tenseur d'incrément de déformations plastiques sont normales à la projection de la surface d'écoulement sur ce plan (Fig. 1.4). Une autre étude comparable, qui arrive à la même conclusion (MIURA & al. [60]), montre que même pour un faible rapport de contrainte moyenne - déviateur de contrainte, le sable exhibe aussi un comportement non-associé.

Il est intéressant de citer à cet effet la démonstration de LADE & al. [51] qui a permis d'établir l'évidence expérimentale relativement à la stabilité / instabilité des matériaux granulaires. Après un essai triaxial en compression sur un sable dense exposé à un certain chemin de contraintes, le matériau se dilate durant le cisaillement, et suivant une règle d'écoulement non-associée, une stabilité est obtenue dans tous les cas jusqu'à la rupture (Fig. 1.5b).

Quand à l'essai non-drainé, un recours à l'analyse de la direction de l'incrément de déformation dans le plan (p - q) aboutit également au rejet de la règle de normalité. Dans un tel essai, la variation de volume est nulle, ce qui suppose que l'incrément de déformation volumique totale soit normal à l'axe hydrostatique partout au cours du chargement. Comme le montre la figure 1.6, une compression de volume est caractérisée par un incrément de déformation dirigé dans le sens positif de l'axe hydrostatique et, dans le cas contraire, une dilatance volumique correspond à un vecteur dirigé vers l'origine des coordonnées. Le fait que la pression interstitielle augmente toujours montre que la déformation plastique se produit tout au long du chemin de contrainte effective. La surface de charge s'agrandit (déformation volumique plastique négative), ce qui nécessite que la surface ait une inclinaison relative par rapport au chemin de contrainte effective.



Fig. 1.3 Résultats de POOROOSHASB & al. [74].



Fig. 1.4 Résultats de LADE & DUNCAN [50].



Fig. 1.5 Essai de LADE & al. [51]: (a) Courbes expérimentales; (b) chemin de contrainte poursuivi et direction de déformation plastique mesurée.



Fig. 1.6 Evaluation de l'allure de surface de charge et de potentiel plastique pour un chemin de contrainte non-drainé (LADE & al. [51]).

- Retour sur le postulat de Drucker

Il est intéressant de citer à ce propos, les travaux de (MANDEL 1964, 1966) qui montrent que la condition donnée par l'expression (1.8) n'était pas une condition nécessaire, notamment pour tous les systèmes mécaniques analogiques comportant des patins à frottement de Coulomb, dont les sols font naturellement partie. Il met en évidence la stabilité des matériaux non-standards en se basant sur le fait même s'il existe des zones où $d^2W < 0$ (physiquement le matériau est instable dans cette région), la stabilité de ces derniers peut être assurée par d'autres zones qui sont stables et par les conditions aux limites.

Il convient toutefois de signaler que les résultats tels que ceux obtenus par LADE & al. [51] que nous avons commentés ci-dessus, montrent qu'en condition drainée le matériau se comporte de manière stable jusqu'à la rupture, bien que la loi d'écoulement soit non-associée. Par contre l'instabilité a été obtenue en condition non drainée sur le même sable avant la rupture. Cela montre bien que, pour les matériaux granulaires, le postulat de Drucker n'est qu'une condition suffisante pour la stabilité.

1.3.2 – Relation constitutive élastoplastique

Compte tenu des remarques précédentes (§ 1.3), il est apparu nécessaire d'étendre la théorie de plasticité au cas non-associé dans lequel le potentiel plastique Q et la fonction d'écoulement F sont définis séparément. Ainsi, la déformation plastique est obtenue par l'intermédiaire d'une relation d'écoulement non-associée :

$$F(\mathfrak{g}, \mathbf{R}) = 0, \qquad \dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \qquad d\lambda \ge 0 \quad . \quad (1.9)$$

Pour définir complètement la relation constitutive, il faut alors calculer le multiplicateur plastique ($d\lambda$), soit en fonction de (dg), soit en fonction de (dg) (DARVE [15], DARVE & al. [16], SOLOMIN & al. [91]). Ceci se fait par application de la condition de compatibilité qui indique que le la contrainte est et reste sur la surface F(g, R) = 0 au cours de chargement :

$$dF = 0 \implies \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}\right) \dot{\sigma}_{ij} + \left(\frac{\partial F}{\partial R}\right) \left(\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_{ij}^{P}}\right) \dot{\varepsilon}_{ij}^{P} = 0 \quad . \tag{1.10}$$

Nous supposons que le paramètre d'écrouissage R n'évolue que si la plastification a lieu.

En substituant l'équation (1.9) dans (1.10), on obtient :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}\right)\dot{\sigma}_{ij} + \left(\frac{\partial F}{\partial R}\right)\left(\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_{ij}^{p}}\right)d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} = 0 \quad .$$
(1.11)

Le module d'écrouissage H est défini par la relation :

$$H = -\left(\frac{\partial F}{\partial R}\right) \left(\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_{ij}^{p}}\right) \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} , \qquad (1.12)$$

compte tenu de l'équation (1.12), l'équation (1.10) devient :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}\right)\dot{\sigma}_{ij} - Hd\lambda = 0 \quad . \tag{1.13}$$

En se basant sur l'hypothèse de partition (§1.2), nous pouvons écrire :

$$\dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}^{*} = D_{ijkl} (\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^{p}). \qquad (1.14)$$

Des équations (1.13) et (1.14), $d\lambda$ peut s'écrire :

$$d\lambda = \frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl}}{H + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{sr}} D_{srpq}} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{pq}} \dot{\varepsilon}_{kl} \qquad \text{pour} \quad F = 0 \quad , \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} \ge 0 \quad . \tag{1.15}$$

En remplaçant l'expression de $(d\lambda)$ dans l'équation (1.14), la relation incrémentale contrainte-déformation pour un matériau élastoplastique écrouissable est obtenue ainsi :

$$\dot{\sigma}_{ij} = D^{ep}_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} \tag{1.16}$$

où $D_{\scriptscriptstyle ijkl}^{\scriptscriptstyle ep}$ est le tenseur de la relation constitutive élastoplastique donné par :

$$D_{ijkl}^{ep} = \begin{cases} D_{ijkl} - \frac{D_{ijab}}{H} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ab}} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{sr}} D_{srkl} \\ H + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{mn}} D_{mnpq} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{pq}} \\ D_{ijkl} & , \text{ pour } F < 0 ; \text{ ou } F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ab}} \dot{\sigma}_{ij} < 0 \end{cases}$$
(1.17)

Notons que dans ce cas, la matrice D_{ijkl}^{ep} est non symétrique. Pour plus de détails, cette non symétrie est traitée dans le chapitre 4.

L'équation (1.16) est équivalente à :

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = A^{ep}_{ijkl} \,\dot{\sigma}_{kl} \tag{1.18a}$$

avec :

où :

$$A_{ijkl}^{ep} = \begin{cases} L_{ijkl} + \frac{1}{H} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} & \text{, pour } F = 0, \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} \ge 0 \\ L_{ijkl} & \text{, pour } F < 0 & \text{; ou } F = 0, \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0 \end{cases}$$
(1.18b)

$$L_{ijkl} = D_{ijkl}^{-1}$$
 (1.18c)

Pour un matériau parfaitement plastique (c.a.d. que $\frac{\partial F}{\partial R} = H = 0$), la loi de comportement est simplement :

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = L_{ijkl}\dot{\sigma}_{kl} + d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}}$$
 avec $d\lambda \ge 0$ indéterminé (1.19)

1.4 – CRITERES DE RUPTURE

Les récents résultats expérimentaux concernant la forme de la surface de charge (critère d'écoulement), obtenus à partir d'essais vrai-triaxiaux, ont montré que le critère de Mohr-Coulomb était une bonne approximation du comportement limite pour les matériaux frottants $(\phi \neq 0)$. Ainsi, les surfaces de charge à utiliser devraient s'approcher de cette forme de surface donnée dans l'espace des contraintes principales $(\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \sigma_3)$ par :

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = 2C\cos\phi - (\sigma_1 + \sigma_3)\sin\phi \qquad (1.20)$$

où ϕ , C sont respectivement l'angle de frottement interne et la cohésion.

Du fait que la contrainte principale intermédiaire n'intervient pas directement dans sa formulation, ce critère possède des points singuliers qui compliquent mathématiquement la modélisation.

Afin de modifier la forme irrégulière de la pyramide (Fig. 1.7), une approximation de la loi de Mohr-Coulomb a été présentée par DRUCKER & PRAGER [30]. Il s'agit donc d'une extension du critère de Von-Mises aux sols. Cette extension permet en effet la prise en compte de l'influence de la contrainte hydrostatique sur l'écoulement :

$$F(\sigma_{ii}) = J_{2D}^{1/2} + \beta J_1 - k = 0$$
(1.21)

où $J_1 = \sigma_{ii}$, $J_{2D} = \frac{1}{2}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}$ sont les deux invariants du tenseur des contraintes (σ'_{ij} désigne les composantes du déviateur), β et k étant les constantes du matériau et qui ont le même rôle significatif que, respectivement, tan ϕ et la cohésion dans le critère de Mohr-Coulomb.

Toutefois, dans les problèmes de déformations planes on remarque qu'à l'état limite, le critère généralisé de Von-Mises se ramène à celui de Mohr-Coulomb. En revanche, au dessous de l'état limite les deux critères peuvent donner des prédictions différentes pour la réponse du sol. L'équation (1.21) représente un cône circulaire droit (Fig. 1.7), dans lequel s'inscrit la pyramide de Mohr-Coulomb pour n'importe quelle section, si on choisit :

$$\beta = \frac{2\sin\phi}{\sqrt{3}(3-\sin\phi)} , \qquad k = \frac{6C\cos\phi}{\sqrt{3}(3-\sin\phi)}$$
(1.22a)

ou encore :

$$\beta = \frac{2\sin\phi}{\sqrt{3}(3+\sin\phi)} , \qquad k = \frac{6C\cos\phi}{\sqrt{3}(3+\sin\phi)}. \qquad (1.22b)$$



Fig. 1.7 Représentation géométrique des surfaces d'écoulement de Mohr-Coulomb et Drucker-Prager dans l'espace des contraintes principales.

Une des difficultés majeure réside dans la dilatance excessive préditée par les modèles basés directement sur le critère de type associé. Toutefois, d'après JAMES & BRANSBY [39], des résultats satisfaisants sont obtenus en considérant une idéalisation d'un sol avec un angle de dilatation Ψ constant ($0 \le \Psi \le \phi$) (Fig. 1.8). Le sol est donc traité comme ayant :

- une fonction de charge de Coulomb (angle ϕ),

- un potentiel plastique de Coulomb différent de la fonction de charge, défini par l'angle de dilatation $\psi \neq \phi$ ou, de manière équivalente, par la cohésion C_{O} :

$$\dot{\varepsilon}_1 = d\lambda(1 + \sin\psi)$$
, $\dot{\varepsilon}_2 = 0$, $\dot{\varepsilon}_3 = -d\lambda(1 - \sin\psi)$ (1.23a)

$$C_{o} = C \tan \psi / \tan \phi \tag{1.23b}$$



Fig. 1.8 Matériau de Coulomb avec angle de dilatation ψ (représentation de Mohr).

Les travaux DRUCKER & al. [31] ont permis aussi de franchir cette difficulté par la modification de la surface conique de plasticité parfaite - ou pyramide comme le critère de Mohr-Coulomb - en une surface convexe de type fermé "cap" écrouissable (Fig. 1.9) ; ceci permet d'obtenir une contractance volumique par application de la règle de normalité.



Fig. 1.9 Critère d'écoulement de Drucker, Gibson et Henkel dans l'espace $\sqrt{J_{2D}} - J_1$.

Par ailleurs, une autre amélioration a été apportée par l'utilisation de la densité actuelle comme variable d'état pour définir des "cap" surfaces successives (Fig. 1.10). Ce modèle à écrouissage isotrope constitue une représentation plus réaliste du comportement des sols, bien que les résultats expérimentaux de HENKEL (1958) montrent que sa structure est encore trop simple pour décrire correctement les essais triaxiaux. Par conséquent, plusieurs extensions et modifications du "Cap" modèle ont été proposées pour les matériaux géologiques (ROSCOE & BURLAND (1958) ; SCHOFIELD & WROTH (1958) ; DIMAGGIO & SANDLER (1971) ; LADE (1979) ; SANDLER & RUBIN (1979)).



Fig. 1.10 Modèle plastique du "Cap".

1.5 – RESUME DU CHAPITRE

Nous avons essayé de dégager à travers ce chapitre une loi qui, sous certaines conditions, permet de décrire, par un formalisme simple, le comportement des matériaux frottants depuis les déformations réversibles jusqu'à la rupture. Les différentes comparaisons que nous avons effectuées avec l'expérience ont permis de montrer que la loi peut décrire ces expériences avec une bonne approximation, sous réserve que l'écoulement plastique soit considéré non associé au critère. Nous nous sommes enfin fixé comme objectif la construction d'un modèle de sol non associé muni des critères de plasticité de Mohr-Coulomb et Drucker-Prager.

CHAPITRE II

CHARGES CYCLIQUES

 $\mathcal{E}\mathcal{T}$

ANALYSE D'ADAPTATION
CHARGES CYCLIQUES

ET

ANALYSE D'ADAPTATION

2.1 – INTRODUCTION

La théorie d'adaptation que nous allons présenter dans ce chapitre permet de prévoir la non-défaillance des structures sous chargements variables indépendamment des conditions qui y règnent initialement et de plus en ne possédant qu'une information minimale sur le trajet de chargement lui-même.

2.2 – PHENOMENES CYCLIQUES

Il est généralement connu que lors des sollicitations cycliques, les matériaux présentent des réponses que l'on peut schématiser par la figure 2.1. L'expérience montre que la réponse d'un système constitué d'un matériau élasto-plastique soumis à un trajet de chargement dont les bornes sont extérieures à son domaine d'élasticité initial peut, après une phase de comportement élaso-plastique, devenir purement élastique. C'est ce phénomène, lié à l'apparition d'un champ d'auto-contraintes ou contraintes résiduelles, que nous appelons adaptation (Fig. 2.1 (c), Fig. 2.2 (a)).

Lorsque le comportement du système n'est pas élastique et que celui-ci ne s'adapte pas sous un chargement variable dans le temps, le caractère irréversible des déformations plastiques laisse prévoir plusieurs types de comportement : Le premier type de comportement se traduit par une accumulation continuelle de déformations plastiques (Fig. 2.1a). Ce phénomène est appelé rochet ou défaillance incrémentale (cf. KÖNIG [46], SIEMASZKO & KÖNIG[90]). Le système est alors mis hors d'usage par déformations excessives.

Dans le deuxième type de comportement les déformations plastiques restent bornées, mais varient continuellement dans le temps. C'est le phénomène de l'accommodation ou plasticité alternée. Un tel comportement ne peut être supporté par un système que s'il subit un petit nombre de cycles de chargement. En effet, l'alternance des déformations plastiques conduit à sa rupture après quelques dizaines de cycles (Fig. 2.1 (b)).

Le comportement rhéologique des matériaux granulaires en conditions drainée et nondrainée dépend essentiellement de la valeur moyenne du rapport déviateur/ contrainte moyenne (p/q) au cours des cycles. Ceci peut se traduire, soit par l'accumulation de la déformation volumique dans le cas drainé, soit par l'augmentation progressive de la pression interstitielle et la diminution de la résistance dans le cas non drainé, jusqu'à la liquéfaction LUONG & SIDANER [53] (Fig. 2.3)).

Finalement, on peut dire que la non-adaptation d'un corps matériel soumis à un chargement cyclique, présente une situation dans laquelle la défaillance est plus probable. La théorie d'adaptation telle qu'elle a été définie initialement par (BLEICH [5], MELAN [58]), nous procure les moyens de savoir si la déformation plastique totale, comme résultat de l'accumulation des déformations plastiques subséquentes au sein du matériau, peut rester limitée (adaptation) ou bien croître indéfiniment.



Fig. 2.1 Phénomènes cycliques.



Fig. 2.2 Diverses réponses d'une structure élasto-plastique aux

chargements cycliques (SIEMASZKO & KÖNIG [90]).



Fig. 2.3 Comportement d'un sable soumis à

des sollicitations cycliques (LUONG & SIDANER [53]).

2.3 – THEORIE D'ADAPTATION

Les formulations classiques de la théorie de l'adaptation s'ouvrent généralement sur le célèbre théorème de MELAN. Ce théorème utilise la propriété de convexité du domaine élastique et introduit la fonction d'énergie totale de déformation élastique qui joue le rôle de norme énergétique. On donne ici les théorèmes limites (statique et cinématique) qui permettent d'encadrer, au sens de l'énergie, la solution d'un problème de plasticité donné, en choisissant dans une classe de champs de contrainte ou de déformation particuliers, les champs les plus proches de la solution. La présentation adoptée est celle de KOITER [43] à laquelle on pourra d'ailleurs se reporter pour plus de détails.

2.3.1 – Rappel des définitions et hypothèses de base

On considère un corps matériel B, élastique parfaitement plastique standard, de volume Ω et de surface $\Gamma_u \cup \Gamma_{\sigma}$, soumis à des sollicitations extérieures évoluant d'une façon quelconque et indépendamment, l'une de l'autre, entre des limites prescrites :

• des forces de volumes :	f	dans Ω ,
• des forces de surfaces :	$\overline{\mathrm{T}}$	sur $\Gamma_{\!\sigma}$,
• des déplacements imposés	: u	sur Γ_{u} .

L'application de ces charges s'effectue dans des conditions quasi-statiques de telle sorte que les effets dynamique sont négligeables.

En appliquant le principe des travaux virtuels qui énonce : "Pour tous les champs cinématiquement admissibles, le travail virtuel des actions extérieures est égal au travail des actions intérieures", nous obtiendrons :

$$\int_{\Omega} \overline{f}_{i} \dot{u}_{i} d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \overline{T}_{i} \dot{u}_{i} d\Gamma = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} d\Omega , \qquad (2.1)$$



Sous l'hypothèse des petits déplacements et déformations, on suppose la décomposition additive du champ de déformation totale en deux parties élastique et plastique, respectivement:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}^{\circ}_{ij} + \dot{\varepsilon}^{P}_{ij}$$
(2.2a)

avec

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{*} = L_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl}$$
(2.2b)

et L_{ijkl} est le tenseur de Hooke qui obéit aux relations suivantes :

$$L_{ijkl} = L_{jikl} = L_{ijlk} = L_{klij}$$
, (2.2c)

tandis que :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = \begin{cases} d\lambda \frac{\partial F(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} & \text{si } F = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial F(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} \ge 0 \\ 0 & \text{si } F < 0 \quad \text{ou} \quad F = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial F(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} < 0 \end{cases}$$

$$(2.3)$$

où $\dot{\epsilon}^{P}_{ij}$ désigne le champ de taux de déformation plastique.

On suppose que le matériau obéit au postulat de Drucker et satisfait donc la relation de convexité :

$$\begin{cases} (\sigma_{ij} - \sigma^{s}_{ij}) \dot{\varepsilon}^{p}_{ij} \ge 0 \\ = 0 \qquad \text{seulement si } \dot{\varepsilon}^{p}_{ij} = 0 \end{cases}$$
(2.4)

pour σ_{ij}^{s} quelconque qui ne viole pas le critère d'écoulement, c'est-à-dire qui satisfait à $F(\sigma_{ij}^{s}) \leq 0$.

2.3.2 – Enoncé du théorème statique d'adaptation (théorème de MELAN)

On dit que le corps matériel \boldsymbol{B} s'adapte sous des sollicitations variables et répétées (\bar{f}_i, \bar{T}_i) - c'est-à-dire que son comportement après un certain nombre de cycles de charges initiales devient purement élastique - s'il existe un champ de contraintes résiduelles indépendant du temps $\bar{\rho}$ telle que sa superposition avec le champ de contraintes purement élastiques constitue un champ de contraintes sûr :

$$\sigma_{ii}^{s} = \sigma_{ij}^{e}(t) + \overline{\rho}_{ij}$$
(2.5)

qui ne viole pas le critère d'écoulement en tout point du domaine et pour toutes les combinaisons possibles des sollicitations à l'intérieur des limites prescrites :

$$F(\sigma_{ii}^{e}(t) + \overline{\rho}_{ii}) < 0 \tag{2.6}$$

En revanche, il n'y aura pas adaptation s'il n'existe aucun champ de contraintes résiduelles indépendant du temps (t) et tel que l'on ait :

$$F(\sigma_{ij}^{e}(t) + \overline{\rho}_{ij}) \leq 0 \quad , \tag{2.7}$$

en tout point du corps matériel et pour toutes combinaisons possibles des sollicitations.

A noter qu'à tout instant (t) de l'histoire du chargement et en tout point du domaine, le champ de contraintes élastiques doit vérifier les conditions suivantes :

$$\sigma_{ij,j}^{\bullet} + \overline{f}_{i} = 0$$
 dans Ω (2.7a)

$$n_j \sigma_{ij}^e = \overline{T}_i$$
 sur Γ_σ (2.7b)

$$\mathbf{u}_{i}^{e} = \overline{\mathbf{u}}_{i}$$
 sur Γ_{u} (2.7c)

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{\bullet} = 1/2 \left(\partial \boldsymbol{u}_{i,j}^{\bullet} + \partial \boldsymbol{u}_{j,i}^{\bullet} \right) \qquad \text{dans } \boldsymbol{\Omega} \qquad (2.7d)$$

$$\varepsilon_{ij}^{\circ} = L_{ijkl} \sigma_{kl}^{\circ}$$
 dans Ω (2.7e)

et que le champ de contraintes résiduelles est en auto-équilibre :

$$\overline{\rho}_{ij,j} = 0 \qquad \text{dans } \Omega \qquad (2.8a) n_j \overline{\rho}_{ij} = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_{\sigma} \qquad (2.8b)$$

où, **n** représente le vecteur normal unitaire extérieur à la surface Γ .

D'après la définition du champ de contraintes résiduelles, on peut encore écrire :

$$\rho_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{e} \qquad \varepsilon_{ij}^{r} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{e} \qquad u_{i}^{r} = u_{i} - u_{i}^{e} , \qquad (2.9a)$$

$$\varepsilon_{ij}^{r} = L_{ijkl} \rho_{kl}, \qquad (2.9b)$$

$$\varepsilon_{ij}^{P} + \varepsilon_{ij}^{r} = \frac{1}{2} (u_{i,j}^{r} + u_{j,i}^{r}), \qquad (2.9c)$$

où, u, u^r et u^e sont respectivement les champs de déplacements actuel, résiduel et élastique.

Les équations (2.9) montrent que le champ de déformations résiduelles dans le corps matériel à l'instant t, est le champ de déformation qui subsiste dans le volume Ω après décharge totale à l'instant t. Ce dernier dérive en effet d'un champ de déplacement compatible avec des données aux limites cinématiques nulles (SALENÇON [87]).

En suivant le raisonnement de DEBODES & NAYROLES [18], nous remarquons que par la présence d'une tel champ de contraintes résiduelles indépendant du temps, le domaine élastique contient une boule de rayon r centrée à l'origine. Le principe du travail maximal montre alors :

$$\mathbf{r} \left| \dot{\varepsilon}_{ij}^{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, t) \right| \le \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) \dot{\varepsilon}_{ij}^{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, t)$$
(2.10)

Donc, si le corps s'adapte, l'intégrale :

$$\int_{0}^{+\infty} \int_{\Omega} \left| \dot{\varepsilon}_{ij}^{P}(\mathbf{x},t) \right| d\Omega dt$$
(2.11)

est bornée. Alors, le champ de déformations plastiques $\mathcal{E}_{ij}^{p}(\mathbf{x},t)$ tend vers une limite lorsque le temps t tend vers l'infini, c'est-à-dire qu'il existe un champ $\hat{\mathcal{E}}_{ij}^{p}(\mathbf{x})$ tel que :

$$\int_{\Omega} \left| \varepsilon_{ij}^{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, t) - \hat{\varepsilon}_{ij}^{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) \right| d\Omega$$
(2.12)

tend vers zéro lorsque t tend vers l'infini.

- Démonstration du théorème

a) Première méthode

Pour préciser la forme de ces applications ci-dessus, on introduit une énergie de déformation élastique fictive ξ correspondant aux contraintes auto-équilibrées $(\rho_{ij} - \overline{\rho}_{ij})$, où, ρ_{ij} est le champ de contraintes résiduelles actuelles à chaque étape du programme de chargement et $\overline{\rho}_{ij}$ est celui des contraintes résiduelles indépendant du temps (cf. KOITER [43], MANDEL [57], WEICHERT & GROSS-WEEGE [98]).

Soit l'énergie de déformation élastique fictive ξ , définie positive est introduite par :

$$\xi = 1/2 \int_{\Omega} (\rho_{ij} - \overline{\rho}_{ij}) L_{ijkl} (\rho_{kl} - \overline{\rho}_{kl}) d\Omega$$
(2.13a)

avec

$$\rho_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{\circ} \qquad \overline{\rho}_{ij} = \sigma_{ij}^{\circ} - \sigma_{ij}^{\circ} \qquad (2.13b)$$

où, σ_{ii} est l'état de contraintes actuelles et σ_{ii}^{s} l'état de contraintes de sécurité.

La dérivée de ξ par rapport au temps donne :

$$\frac{d\xi}{dt} = \int_{\Omega} (\rho_{ij} - \overline{\rho}_{ij}) L_{ijkl} \dot{\rho}_{kl} d\Omega$$
(2.14a)

$$\dot{\xi} = \int_{\Omega} (\rho_{ij} - \overline{\rho}_{ij}) \dot{\varepsilon}_{ij}^{r} d\Omega . \qquad (2.14b)$$

Par décomposition de la déformation totale :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}^{r} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}^{e} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}^{p} \quad , \qquad (2.15)$$

et en substituant l'équation (2.15) dans (2.14b), on obtient :

$$\dot{\xi} = \int_{\Omega} (\rho_{ij} - \overline{\rho}_{ij}) \left(\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}^{e}_{ij} - \dot{\varepsilon}^{p}_{ij} \right) d\Omega$$
(2.16a)

$$\dot{\xi} = -\int_{\Omega} (\rho_{ij} - \overline{\rho}_{ij}) \dot{\varepsilon}_{ij}^{p} d\Omega + \int_{\Omega} (\rho_{ij} - \overline{\rho}_{ij}) (\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^{e}) d\Omega$$
(2.16b)

Compte tenu des relations (2.13b), l'expression (2.16b) prend la forme suivante :

$$\dot{\xi} = -\int_{\Omega} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{s}) \dot{\varepsilon}_{ij}^{p} d\Omega + \int_{\Omega} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{s}) (\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^{s}) d\Omega \quad , \qquad (2.17)$$

et en appliquant le théorème de divergence au second membre de l'équation (2.17), on obtient :

$$\begin{split} &\int_{\Omega} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{s}) (\dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}_{ij}^{e}) d\Omega = \int_{\Omega} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{s}) (\dot{u}_{i,j} - \dot{u}_{i,j}^{e}) d\Omega \\ &= -\int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} - \sigma_{ij,j}^{s}) (\dot{u}_{i} - \dot{u}_{i}^{e}) d\Omega \\ &+ \int_{\Gamma} n_{j} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{s}) (\dot{u}_{i} - \dot{u}_{i}^{e}) d\Gamma = 0. \end{split}$$
(2.18)

Finalement l'expression (2.17) prend la forme suivante :

$$\dot{\xi} = -\int_{\Omega} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{*}) \dot{\varepsilon}_{ij}^{p} d\Omega \qquad (2.19)$$

L'utilisation de l'inégalité (2.4), qui correspond à la validité du principe du travail maximal, implique que $\dot{\xi}$ est toujours négative chaque fois les déformations apparaissent et nulle seulement si $\dot{\epsilon}^{p} = 0$. On voit clairement à partir de l'expression (2.13a) que la forme quadratique ξ ne peut jamais devenir négative, elle doit donc s'annuler au bout d'un certain temps T. Ce qui implique que les déformations plastiques tendent vers des valeurs fixes, et le corps matériel s'adapte s'il existe un champ de contraintes résiduelles $\overline{\rho}$ telles que les variations des sollicitations ne provoquent plus que des déformations réversibles.

b) Deuxième méthode

Dans cette partie, nous supposons que le corps matériel est soumis à des cycles de charges. Pour une telle situation, il est clair que $\sigma_{ij}^{e}(t)$ est une fonction cyclique et qu'elle dépend de la valeur instantanée des charges extérieures :

$$\sigma_{ii}^{e}(t) = \sigma_{ii}^{e}(t+T) \quad . \tag{2.20}$$

Du fait de la nature cyclique des charges, les distributions de contraintes, $\sigma_{ij}(t)$ et $\sigma_{ij}(t+T)$, sont en équilibre avec les mêmes charges extérieures. Ceci implique que le champ de contrainte $(\sigma_{ij}(t) - \sigma_{ij}(t+T))$ est auto-équilibré ou en équilibre avec des charges extérieures nulles :

$$0 = \int_{\Omega} (\sigma_{ij}(t) - \sigma_{ij}(t+T)) (\dot{\varepsilon}_{ij}(t) - \dot{\varepsilon}_{ij}(t+T)) d\Omega$$
(2.21)

où $\dot{\epsilon}_{_{ij}}$ désigne le champ de taux de déformation totale.

Par substitution de l'équation (2.2a) dans l'équation (2.21) on obtient :

$$0 = \int_{\Omega} (\sigma_{ij}(t) - \sigma_{ij}(t+T)) \left(\dot{\varepsilon}_{ij}^{e}(t) - \dot{\varepsilon}_{ij}^{e}(t+T)\right) d\Omega$$

+
$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij}(t) - \sigma_{ij}(t+T)) \left(\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}(t) - \dot{\varepsilon}_{ij}^{p}(t+T)\right) d\Omega$$
 (2.22)

et en utilisant la relation (2.2b) on déduit :

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij}(t) - \sigma_{ij}(t+T)) \left(\dot{\varepsilon}_{ij}^{e}(t) - \dot{\varepsilon}_{ij}^{e}(t+T)\right) d\Omega =$$

$$\int_{\Omega} L_{ijkl} (\sigma_{ij}(t) - \sigma_{ij}(t+T)) \left(\dot{\sigma}_{kl}(t) - \dot{\sigma}_{kl}(t+T)\right) d\Omega =$$

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\Omega} L_{ijkl} (\sigma_{ij}(t) - \sigma_{ij}(t+T)) \left(\sigma_{kl}(t) - \sigma_{kl}(t+T)\right) d\Omega$$
(2.23)

La substitution de l'équation (2.23) dans (2.22) donne :

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\Omega} L_{ijkl} \left(\sigma_{ij}(t) - \sigma_{ij}(t+T) \right) \left(\sigma_{kl}(t) - \sigma_{kl}(t+T) \right) d\Omega$$

+
$$\int_{\Omega} \left(\sigma_{ij}(t) - \sigma_{ij}(t+T) \right) \left(\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}(t) - \dot{\varepsilon}_{ij}^{p}(t+T) \right) d\Omega$$
(2.24)

Sous l'hypothèse que le matériau obéit au principe du travail maximal de Hill (l'inégalité fondamentale, sur laquelle dépend la convexité de la surface limite et la règle d'écoulement), on aura :

$$(\sigma_{ij}(t) - \sigma_{ij}^{s}) \dot{\varepsilon}_{ij}^{p}(t) \ge 0$$

$$(\sigma_{ij}(t+T) - \sigma_{ij}^{s}) \dot{\varepsilon}_{ij}^{p}(t+T) \ge 0$$

$$(2.25)$$

L'addition des deux inéquations de l'expression (2.25), nous donne :

$$(\sigma_{ii}(t) - \sigma_{ii}(t+T)) (\dot{\varepsilon}_{ii}^{p}(t) - \dot{\varepsilon}_{ii}^{p}(t+T)) \ge 0.$$
(2.26)

Compte tenu de l'inéquation (2.26), l'expression (2.24) devient finalement :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\int_{\Omega}L_{ijkl}(\sigma_{ij}(t) - \sigma_{ij}(t+T))(\sigma_{kl}(t) - \sigma_{kl}(t+T))\mathrm{d}\Omega$$

$$= -\int_{\Omega}(\sigma_{ij}(t) - \sigma_{ij}(t+T))(\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}(t) - \dot{\varepsilon}_{ij}^{p}(t+T))\mathrm{d}\Omega \leq 0.$$
(2.27)

Du fait que la matrice des coefficients élastiques L_{ijkl} est définie positive, on en déduit que la forme quadratique suivante est non négative et nulle seulement quand $(\sigma_{ij}(t) = \sigma_{ij}(t + T))$:

$$\xi(\sigma_{ij}(t), \sigma_{ij}(t+T)) = \int_{\Omega} L_{ijkl}(\sigma_{ij}(t) - \sigma_{ij}(t+T) (\sigma_{kl}(t) - \sigma_{kl}(t+T)) d\Omega$$
(2.28)

Des équations (2.13b) et (2.20) il résulte que :

$$\sigma_{ij}(t) - \sigma_{ij}(t+T) = (\sigma_{ij}^{e}(t) - \sigma_{ij}^{e}(t+T)) + (\rho_{ij}(t) - \rho_{ij}(t+T))$$

$$= (\rho_{ij}(t) - \rho_{ij}(t+T))$$
(2.29a)

et

$$\xi(\sigma_{ij}(t), \sigma_{ij}(t+T)) = \xi(\rho_{ij}(t), \rho_{ij}(t+T))$$
(2.29b)

En n'importe quel point de la structure, ξ ne peut pas devenir négative, d'où l'existence d'un temps repéré par un nombre (n) de cycles, de telle sorte que pour t > nT on a :

 $(\sigma_{ij}(t) - \sigma_{ij}(t+T)) (\dot{\varepsilon}_{ij}^{P}(t) - \dot{\varepsilon}_{ij}^{P}(t+T)) = 0.$ (2.30)

Autrement dit, en tenant compte de l'hypothèse du travail maximal de Hill, on en déduit que la dérivée temporelle de la forme quadratique est strictement négative.

Donc, on peut conclure en suivant le raisonnement précédent que le travail dissipé est borné. Le champ de contraintes résiduelles, qui en est une projection dans un espace de dimension fini, possède également une limite, ce qui donne une condition suffisante d'adaptation.

2.3.3 – Enoncé du théorème d'adaptation cinématique (théorème de KOITER)

KOITER [43] a précisé qu'un corps matériel élastique parfaitement plastique standard ne s'adapte pas, si pour toute histoire de vitesse de déformation plastique admissible $\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}(t)$ dans l'intervalle (0 < t < T) et pour n'importe quelle combinaison de charges généralisées $\mathscr{G}_{\alpha}(t)$, à l'intérieur des limites prescrites, la relation suivante est valable :

$$\int_{0}^{T} \mathscr{D}_{\alpha}(t) \dot{u}_{\alpha 0}(t) dt > \int_{0}^{T} dt \int_{\Omega} D(\dot{\varepsilon}_{ij0}^{p}) d\Omega \qquad (2.31)$$

D'autre part, il a montré que ce même corps matériel s'adaptera, s'il existe un nombre k > 1 tel que, pour toute histoire de vitesse de déformation admissible $\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}(t)$ dans l'intervalle 0 < t < T, et pour toute combinaison de charge $\mathscr{O}_{\alpha}(t)$ à l'intérieur des limites prescrites, la relation donnée par :

$$k\int_{0}^{T} \mathscr{O}_{\alpha}(t) \dot{u}_{\alpha 0}(t) dt \leq \int_{0}^{T} dt \int_{\Omega} D(\dot{\varepsilon}_{ij0}^{p}) d\Omega$$
(2.32)

où, la valeur maximale de k représente le coefficient de sécurité garantissant l'adaptation du corps matériel. A noter que dans les expressions (2.31, 2.32), la vitesse de déformation plastique admissible est limitée par l'exigence que,

$$\Delta \varepsilon_{ij0}^{p} = \int_{0}^{T} \dot{\varepsilon}_{ij}^{p}(t) dt$$
(2.33)

pourrait constituer une distribution de déformation cinématiquement admissible. Il est donc exigé que $\Delta \epsilon_{ij}^{P}$ soit une dérivée symétrique d'un champ de déplacement incrémental $\Delta u_{\alpha 0}$, satisfaisant les conditions aux limites cinématiques. L'énergie dissipée en travail plastique, associée à cette vitesse de déformation plastique admissible, est donnée par :

$$W_{int} = \int_{0}^{T} dt \int_{\Omega} \sigma_{ij}(t) \dot{\varepsilon}_{ij}^{p}(t) d\Omega = \int_{0}^{T} dt \int_{\Omega} D(\dot{\varepsilon}_{ij0}^{p}) d\Omega \quad .$$
(2.34)

2.4 – COEFFICIENT DE SECURITE A L'ADAPTATION

Le coefficient de sécurité à l'adaptation a été introduit par KOITER [43] pour montrer d'une façon décisive les conséquences de l'adaptation sur le champ de déformations plastiques.

Supposons qu'il soit possible de trouver un coefficient de valeur α , dit coefficient de sécurité à l'adaptation, tel que :

$$\alpha(\sigma_{ij}^{s}) = \alpha(\sigma_{ij}^{e} + \overline{\rho}_{ij}) \qquad \text{avec} \quad \alpha > 1$$
(2.35)

soit un état de contrainte admissible.

De l'hypothèse de validité du principe du travail maximal, on déduit :

$$(\sigma_{ii} - \alpha \sigma_{ii}^{s}) \dot{\varepsilon}_{ii}^{p} \ge 0 \tag{2.36a}$$

ce qui donne :

$$\alpha(\sigma_{ij} - \sigma^{s}_{ij}) \dot{\varepsilon}^{p}_{ij} \ge (\alpha - 1)\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}^{p}_{ij}$$
(2.36b)

ou encore :

$$\frac{\alpha}{(\alpha-1)} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{s}) \dot{\varepsilon}_{ij}^{p} \ge \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^{p}$$
(2.36c)

En substituant l'expression (2.36c) dans l'équation (2.19), on obtient :

$$\dot{\xi}^{p} = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}^{p}_{ij} d\Omega \leq -\frac{\alpha}{\alpha - 1} \dot{\xi}$$
(2.37)

En intégrant entre (T_0) temps de début des déformations plastiques et (T), il résulte que :

$$\xi^{p} \leq \frac{\alpha}{\alpha - 1} (\xi |_{T0} - \xi |_{T})$$

$$\leq \frac{\alpha}{\alpha - 1} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \overline{\rho}_{ij} L_{ijkl} \overline{\rho}_{ij}. \qquad (2.38)$$

cette quantité est indéterminée pour $\alpha = 1$, ce qui signifie que pour ce cas, la non adaptation aura lieu, sinon pour tout ($\alpha > 1$) l'énergie dissipée par déformation plastique entre (T_0 et T) reste bornée de fait que ($\xi|_{T_0}$) est finie et positive.

2.5 – DOMAINE D'ADAPTATION

Dans la plupart des situations pratiques, on ne connaît pas le trajet de chargement d'un système sur un intervalle de temps infini. Mais on connaît généralement le processus de chargement et les bornes entre lesquelles peuvent varier ces chargements. C'est pourquoi, à part le cas des chargements périodiques, on est amené à raisonner sur des domaines de chargement (cf. MORELLE & NGUYEN DANG HUNG [61], MORELLE [62]).

On dit qu'il y aura adaptation dans le domaine de chargement suivant :

$$\Re = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \chi_i P_i, \quad \chi_i \in \left[\chi_i^-, \chi_i^+ \right] \right\}$$
(2.39)

si et seulement s'il y a adaptation dans le domaine $\overline{\mathfrak{R}}$, enveloppe convexe du domaine \mathfrak{R} , défini par :

$$\overline{\mathfrak{R}} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \chi_{i} P_{i}, \quad \chi_{i} = \chi_{i}^{-} \text{ ou } \chi_{i}^{+} \right\}$$
(2.40)

où P et χ_i sont respectivement les charges externes et les multiplicateurs de charges.

Chaque élément P de \Re peut être écrit sous forme :

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{\theta}_{i} \, \boldsymbol{\wp}_{i} \tag{2.41}$$

où

$$\sum_{i=1}^{m} \theta_{i} = 0, \quad \theta_{i} \ge 0 \quad \forall i$$
(2.42)

avec $m = 2^n$ et les \mathcal{O}_i , les points de $\overline{\mathfrak{R}}$, sont les points anguleux de \mathfrak{R} . La figure 2.5 représente le domaine de variation des charges dans le cas dimensionnel.



Fig. 2.5 Domaine de variation des charges.

A présent, nous faisons un tour d'horizon de plusieurs résultats numériques, afin d'expliciter la notion de domaines d'adaptation de certaines structures mécaniques soumises à des charges variables. Les premiers résultats numériques incluant le théorème statique d'adaptation ont été donnés par BELYTSCHKO [4] qui a montré, en considérant l'exemple d'une plaque munie d'un trou et soumise à deux charges biaxiales variables, que le domaine d'adaptation dépasse le domaine limite des charges élastiques.

La même approche a été utilisée par PANDE & ABDULLAH [71] pour l'étude du comportement d'une semelle de fondation soumise à trois charges variables et répétées V, H, M (Fig. 2.6). Les résultats montrent la dépendance des domaines limites d'adaptation de la valeur de la cohésion des matériaux. Par ailleurs, on remarque que pour les trois cas considérés, ces domaines d'adaptation restent inférieurs à ceux obtenus par la méthode de défaillance incrémentale. TSAU & al. [95] ont aboutit à leur tour à un domaine d'adaptation par la supposition d'une corrélation parfaite entre deux charges P et Q. Cette corrélation a permis en effet de réduire l'espace de charge tridimensionnel à un autre bidimensionnel. Toutefois, nous constatons que l'état limite d'adaptation (indépendant du chemin de chargement) diffère distinctement des états limites élastique et de rupture (sous chargement proportionnel) (Fig. 2.7). Cette différence montre à quel degré, on peut améliorer le domaine de sécurité et de serviabilité d'un système, sous la supposition que les états limites ne dépendent pas du chemin de charge.











Portique à 3 étages





2.6 - RESUME DU CHAPITRE

A travers ce chapitre nous avons montré que l'adaptation d'un corps matériel sous sollicitations variables et répétées, implique l'existence d'une limite pour le champ de contraintes résiduelles et que l'énergie dissipée par déformations plastiques reste bornée. En fait, l'existence d'un champ de contraintes résiduelles indépendant du temps garantit l'existence d'un noyau élastique vital pour la structure. C'est la notion de "sanctuaire d'élasticité" développée par NAYROLES & WEICHERT [66]. Toutefois, on peut se demander si la validité du principe du travail maximal, qui est évidemment une condition suffisante pour l'établissement des théorèmes d'adaptation (cas des matériaux élastiques parfaitement plastiques standards), représente aussi une condition nécessaire à ce but. Il reste donc à voir si, avec certaines données supplémentaires, on peut obtenir une extension plus adaptée au comportement réel des matériaux non standards.

CHAPITRE III

EXTENSION DU THEOREME STATIQUE D'ADAPTATION

EXTENSION DU THEOREME STATIQUE D'ADAPTATION

3.1 – INTRODUCTION

Dans le présent chapitre, nous proposons une extension du théorème statique d'adaptation aux matériaux dont le critère d'écoulement et le potentiel plastique ne sont pas représentés par la même fonction. La loi de comportement développée dans le chapitre 1, nous procure l'outil adéquat pour la formulation du problème. Nous abordons l'extension de ce théorème en utilisant l'expression de l'énergie de déformation, et en s'appuyant sur la construction Q-surface qui permet d'obtenir la validité du principe du travail maximal pour toute contrainte-test située à l'intérieur d'un domaine convexe.

3.2 – THEORIE D'ADAPTATION POUR CERTAINS MATERIAUX NON-STANDARDS

Les théorèmes généraux de la théorie d'adaptation sont fondés sur une loi d'écoulement du type associée, ou bien, plus généralement, si l'on veut tenir compte de l'écrouissage, sur le principe du travail maximal généralisé. Ce type de loi trouve un fort appui dans le fait qu'il permet d'établir les théorèmes d'unicité et, par là, de fournir un sens physique aux problèmes fondés sur les schémas grossièrement simplifiés.

Pourtant, l'hypothèse que le critère d'écoulement et le potentiel plastique s'expriment par la même fonction, n'est pas vérifiée par l'expérience dans le cas des sols. On est amené à remplacer cette hypothèse, commode au point de vue de la théorie mathématique, par une autre, moins restrictive, qui pourrait mieux s'adapter au comportement réel des sols. (voir à ce sujet les articles de RADENKOVIC [79], PALMER [69], BLEICH [6], MROZ [64].) Le travail consiste à déterminer la charge limite d'adaptation pour les matériaux nonstandards d'après le théorème de la borne inférieure "statique". Pour cela, nous faisons les hypothèses simplificatrices suivantes :

- matériau isotrope,
- chargement quasi-statique,
- critère de plasticité convexe $F(\sigma)$.

Le mode de construction de la surface Q enveloppe convexe de toutes les fonctions Q satisfaisant la condition (1.7), a été donné par PALMER [69]. La figure 3.1 représente géométriquement cette construction.

Pour chaque état de contrainte σ_{ij} de la surface $F(\sigma_{ij}) = 0$ dans l'espace des contraintes, on trace les hyperplans orthogonaux à toutes les directions permises pour la vitesse de déformation plastique en ce point. L'intersection de l'ensemble de ces hyperplans compose une enveloppe convexe Q dont la surface est entièrement à l'intérieur de la surface d'écoulement.

A noter que l'enveloppe Q déterminée par l'intersection de ces hyperplans à l'extérieur de la surface d'écoulement F est écartée de l'étude. Ceci vient du fait que l'existence d'un état de contrainte à l'extérieur de la surface d'écoulement n'a pas de sens physique.

A partir de cette construction on constate que pour tout état de contrainte σ_{ij}^{s} satisfaisant la condition $Q(\sigma_{ij}^{s}) \leq 0$, le produit scalaire des deux vecteurs $(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{s})$ et $(\dot{\epsilon}_{ij}^{p})$ est toujours positif, d'où la validité du principe du travail maximal. Autrement dit :

$$\forall \sigma_{ij}$$
 tel que $F(\sigma_{ij}) = 0$, $\exists \sigma_{ij}^s$ tel que $Q(\sigma_{ij}^s) \le 0$ (3.1a)

avec :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}}, \qquad d\lambda \ge 0$$
 (3.1b)

on obtient :

$$(\sigma_{ij} - \sigma^{s}_{ij}) \dot{\varepsilon}^{p}_{ij} \ge 0 \qquad . \tag{3.1c}$$



Fig. 3.1 Construction de Q-surface (PALMER [69]).

3.2.1 – Domaine de chargement

Considérons à présent le corps matériel B constitué d'un matériau élasto-plastique non-standard, soumis à un chargement variable entre des limites fixées :

$$\overline{f}^{-}(x) \leq \overline{f}(x,t) \leq \overline{f}^{+}(x)$$
 dans Ω , $\overline{T}^{-}(x) \leq \overline{T}(x,t) \leq \overline{T}^{+}(x)$ sur Γ_{σ} (3.2)

L'application de ces charges s'effectue dans des conditions quasi-statiques de telle sorte que les effets dynamiques sont négligeables. Les déformations et déplacements sont supposés petits.



On suppose qu'à tout instant (t) de l'histoire du chargement, la solution de ce problème existe, tel que le système d'équations suivant soit vérifié en tout point du domaine :

$\sigma_{ij,j}^{\bullet} + \overline{f}_{i} = 0$	dans Ω	(3.3a)
$n_{j}\sigma_{ij}^{e} = \overline{T}_{i}$	sur Γ_{σ}	(3.3b)
$\varepsilon_{ij}^{e} = 1/2(\partial u_{i,j}^{e} + \partial u_{j,i}^{e})$	dans Ω	(3.3c)
$\mathbf{u}_{i}^{\bullet} = \overline{\mathbf{u}}_{i}$	sur Γ_{u}	(3.3d)
$\boldsymbol{\epsilon}_{_{ij}}^{^{\mathbf{c}}}=\boldsymbol{L}_{_{ijkl}}\boldsymbol{\sigma}_{_{kl}}^{^{\mathbf{c}}}$	dans Ω	(3.3e)

Si, pour le corps matériel B, soumis à des charges évoluant entre les limites prescrites (3.2), on peut trouver un champ de contraintes résiduelles indépendant du temps $\overline{\rho}_{ij}$, tel que la somme de ces contraintes résiduelles et des contraintes élastiques est un état de contrainte sûr en tous points :

$$\sigma_{ij}^{s} = \sigma_{ij}^{e} + \overline{\rho}_{ij}$$
(3.4a)

avec :

$$\begin{array}{ll} \operatorname{div} \overline{\rho}_{ij} = 0 & \operatorname{dans} \Omega & (3.4b) \\ n_{j} \ \overline{\rho}_{ij} = 0 & \operatorname{sur} \Gamma_{\sigma} & (3.4c) \\ Q(\sigma^{\bullet}_{ii} + \overline{\rho}_{ii}) \leq 0 & \operatorname{dans} \Omega & (3.4d) \end{array}$$

alors, le corps matériel s'adaptera à tout programme de chargement respectant les limites prescrites, et la réponse du corps matériel tendra vers une réponse purement élastique.

3.2.2 – Démonstration du théorème

Sous les suppositions mentionnées ci-dessus, l'application du théorème d'adaptation statique aux matériaux frottants peut être montré en commençant par la forme quadratique :

$$\xi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\rho_{ij} - \overline{\rho}_{ij}) A^{ep}_{ijkl}(\rho_{kl} - \overline{\rho}_{kl}) d\Omega$$
(3.5)

avec

$$\rho_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{*} , \qquad \overline{\rho}_{ij} = \sigma_{ij}^{*} - \sigma_{ij}^{*}$$
(3.6)

où σ_{ij} et σ_{ij}^{e} sont l'état réel de contrainte dépendant du temps dans le solide B et l'état fictif de contraintes de référence dans B^{e} , respectivement, différent de B seulement par le fait qu'il répond aux sollicitations d'une façon purement élastique. ρ_{ij} est l'état de contrainte résiduelle dépendant du temps.

A noter que la matrice de souplesse élasto-plastique :

$$A_{ijkl}^{ep} = \begin{cases} L_{ijkl} + \frac{1}{H} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} & \text{pour} \quad F = 0, \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} \ge 0 \\ L_{ijkl} & \text{pour} \quad F < 0 \quad ; \quad \text{ou} \quad F = 0, \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0 \end{cases}$$
(3.7)

est positive dans le cas d'un chargement plastique si le module plastique H est supérieur à une quantité $H > H_{ar}$ (LORET, [52]) :

$$H_{cr} = 1/2 \left\{ \left[\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{sr}} L_{srpq}^{-1} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{pq}} \right) \left(\frac{\partial Q}{\partial \sigma_{sr}} L_{srpq}^{-1} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{pq}} \right) \right]^{1/2} - \frac{\partial F}{\partial \sigma_{sr}} L_{srpq}^{-1} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{pq}} \right\} \ge 0 \quad (3.8)$$

Vu l'équation (3.5), la dérivée de ξ par rapport au temps devient :

$$\dot{\xi} = \int_{\Omega} (\rho_{ij} - \overline{\rho}_{ij}) L_{ijkl} \dot{\rho}_{kl} d\Omega$$

$$+ \int_{\Omega} (\rho_{ij} - \overline{\rho}_{ij}) \left[\frac{1}{H} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{sr}} L_{srpq}^{-1} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{pq}} \right] L_{ijkl} \dot{\rho}_{kl} d\Omega$$
(3.9)

D'autre part, on définit les déformations induites par les contraintes résiduelles :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{r} = L_{ijkl}\dot{\rho}_{kl} \tag{3.10}$$

ce qui permet d'écrire :

$$\dot{\xi} = \int_{\Omega} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{s}) \dot{\varepsilon}_{ij}^{r} d\Omega$$

$$+ \int_{\Omega} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{s}) \left[\frac{1}{H} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{sr}} L_{srpq}^{-1} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{pq}} \right] \dot{\varepsilon}_{ij}^{r} d\Omega$$
(3.11)

A partir de la définition suivante :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}^{\bullet} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}^{r} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}^{p} \tag{3.12}$$

on déduit :

$$\dot{\xi} = \int_{\Omega} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{s}) (\dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}_{ij}^{e} - \dot{\epsilon}_{ij}^{p}) d\Omega$$

$$+ \int_{\Omega} \left[\frac{1}{H} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{sr}} L_{srpq}^{-1} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{pq}} \right] (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{s}) (\dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}_{ij}^{e} - \dot{\epsilon}_{ij}^{p}) d\Omega$$
(3.13)

A noter que le champ d'incrément de déformations $(\dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}_{ij}^{e})$ est un champ cinématiquement admissible, ce qui permet d'écrire en utilisant le théorème des travaux virtuels

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{*}) (\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^{*}) d\Omega = 0.$$
(3.14)

Compte tenu de l'expression (3.14), on obtient :

$$\dot{\xi} = -\int_{\Omega} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{s}) \dot{\varepsilon}_{ij}^{p} d\Omega$$

$$-\int_{\Omega} \left[\frac{1}{H} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{sr}} L_{srpq}^{-1} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{pq}} \right] (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{s}) \dot{\varepsilon}_{ij}^{p} d\Omega$$
(3.15)

L'équation (3.15) peut être écrite finalement sous la forme :

$$\dot{\xi} = \dot{\xi}_{\rm I} + \dot{\xi}_{\rm II} \tag{3.16a}$$

avec

$$\dot{\xi}_{I} = -\int_{\Omega} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{s}) \dot{\varepsilon}_{ij}^{p} d\Omega$$
(3.16b)

et

$$\dot{\xi}_{II} = -\int_{\Omega} \left[\frac{1}{H} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{sr}} L_{srpq}^{-1} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{pq}} \right] (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{s}) \dot{\varepsilon}_{ij}^{p} d\Omega.$$
(3.16c)

A partir de l'expression (3.16 a), on peut dire que le corps matériel B s'adapte, si l'une des deux possibilités est vérifiée :

• Premièrement, en supposant l'existence d'un champ de contrainte σ_{ij}^{s} vérifiant la condition donnée par la construction de Q-surface (§ 3.2), telle que le produit $(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{s}) \dot{\varepsilon}_{ij}^{p}$ est toujours positif, on a $\dot{\xi}_{I} \leq 0$.

Deuxièmement, dans l'hypothèse où le module d'écrouissage H est positif, la quantité donnée entre crochet est positive pour tout état de chargement actif. Ceci implique suite à l'utilisation de l'identité précédente que $\dot{\xi}_{II}$ est aussi négative.

En effet, si on considère le cas particulier d'un matériau isotrope à l'état de déformation plane, obéissant au critère de plasticité de type Mohr-Coulomb :

$$F = \left(\frac{1+\sin\phi}{2}\right)\sigma_1 - \left(\frac{1-\sin\phi}{2}\right)\sigma_3 - C\cos\phi = 0$$
(3.17)

De même, on pourrait écrire pour une loi d'écoulement non associée le potentiel plastique :

$$Q = \left(\frac{1+\sin\psi}{2}\right)\sigma_1 - \left(\frac{1-\sin\psi}{2}\right)\sigma_3 - C_{Q}\cos\psi = 0$$
(3.18)

telles que :

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_1} = 1/2(1 + \sin \phi)$$
, $\frac{\partial F}{\partial \sigma_3} = -1/2(1 - \sin \phi)$ (3.19a)

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma_1} = 1/2(1 + \sin \psi)$$
, $\frac{\partial Q}{\partial \sigma_3} = -1/2(1 - \sin \psi)$ (3.19b)

Compte tenu des équations (3.19), et par utilisation du tenseur d'élasticité :

$$L_{ij} = \frac{(1+\nu)(1-\nu)}{E} \begin{bmatrix} 1 & \frac{-\nu}{1-\nu} & 0\\ & 1 & 0\\ sym & \frac{2}{1-\nu} \end{bmatrix}$$
(3.20)

E et v étant respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson.

On constate que la valeur entre crochet dans l'expression (3.16c) s'identifie à une valeur positive pour tout angle de frottement et de dilatance :

$$\left[\frac{1}{H}\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left\{\frac{1}{4}(1+\sin\phi)(1+\sin\psi)+\frac{(1-2\nu)}{4}(1-\sin\phi)(1-\sin\psi)\right\}\right].$$
(3.21)

A partir de là, on conclut que $\dot{\xi}$ est égale à zéro seulement pour $\dot{\epsilon}^{p} = 0$ et par ailleurs elle est négative. Ceci prouve que l'évolution des déformations plastiques doit cesser d'augmenter au-delà d'un certain temps (T). En conséquence, le corps matériel s'adapte pour un tel champ de contraintes résiduelles $\overline{\rho}$ et que les variations des sollicitations ne provoquent plus que des déformations réversibles.

• En revanche, si le module d'écrouissage H est négatif, l'adaptation peut avoir lieu seulement si :

$$\left|\dot{\xi}_{I}\right| > \left|\dot{\xi}_{II}\right|$$
 est vérifié.

Enfin, nous rappelons que pour H = 0 (absence d'écrouissage), le terme ξ_{II} est identique à zéro. Ceci vient du fait que la matrice élasto-plastique A_{ijkl}^{ep} est remplacée par L_{ijkl} . Dans ce cas la démonstration du théorème d'adaptation prend la forme simplifiée (voir démonstration classique de KOITER [43]).

3.3 – FORMULATION DISCRETISEE DU THEOREME D'ADAPTATION

Dans cette partie l'analyse d'adaptation des structures est présentée, moyennant une discrétisation préalable, comme un problème de programmation mathématique. On se réfère en particulier aux travaux de KÖNIG & NGUYEN DANG HUNG [47] qui utilisent la méthode des éléments finis pour la formulation des problèmes d'adaptation.

En effet, l'analyse d'adaptation, qui se présente en général comme un problème de mécanique du milieu continu, a bien souvent besoin, pour fournir des solutions, de la discrétisation préalable. C'est d'ailleurs la même exigence qui se pose pour la plupart des problèmes d'analyse limite, pour lesquels la discrétisation conduit à des problèmes de programmation mathématique.

Pour cela on discrétise la structure en (Ne) éléments et par l'utilisation de l'approche statique on exprime les sollicitations en fonction du multiplicateur des charges ; au lieu d'imposer la vérification de la condition donnée par la construction Q-surface dans tout le domaine on se limite à l'imposer dans certains points de la structure (NFP points-tests) et l'on obtient ainsi un nombre fini d'inéquations non linéaires. L'addition de la condition de maximum pour le multiplicateur des charges α nous conduit à résoudre un problème de programmation non linéaire (P.N.L) dont la solution fournit le chargement limite :

$$\alpha_{\rm sD} = \max \, \alpha \tag{3.22a}$$

soumis à:

$$\alpha \ge 0 \tag{3.22b}$$

$$\sum_{i=1}^{\text{NFP}} C_i \ \overline{\rho}_i = 0 \tag{3.22c}$$

$$\sum_{i=1}^{NFP} Q(\alpha\sigma^{\circ} + \overline{\rho}) \le 0 \qquad \forall P \in \Re \qquad (3.22d)$$

avec α comme fonction objective à optimiser et le potentiel plastique comme condition supplémentaire non linéaire ; C est le système d'équation de contraintes et NFP représente le nombre de points-tests dans la structure, autrement dit le nombre de contraintes utilisées dans le processus d'optimisation basé sur l'algorithme LPNLP (PIERRE & LOWE [73]).

La détermination de l'ensemble du multiplicateur des charges pour plusieurs directions de chargement (voir § 2.5), nous permet de définir le domaine d'évolution des charges pour lequel on vérifie qu'une quelconque histoire de charges ne peut conduire à la déstabilisation du processus d'adaptation.

3.4 - CHARGE D'ADAPTATION POUR LOIS ASSOCIEE ET NON-ASSOCIEE

Nous avons voulu situer la charge limite d'adaptation d'un matériau muni d'une règle d'écoulement non-associée par rapport à la charge limite de ce matériau muni de la même fonction de charge et d'une règle d'écoulement associée. Notons par α_{sD} et α_{sD}^0 les multiplicateurs de charges limites à l'état associé et non-associé, respectivement. En se basant sur la construction Q-surface donnée par la figure 3.1, et du fait que le critère d'écoulement est le même dans le cas associé et non-associé, on peut affirmer que le champ statique solution du problème non-associé est également admissible pour le problème associé (voir à ce sujet les articles de PALMER [69], CHEN [11], DRESCHER & DETOURNAY [24]). A partir de ces conditions nous pouvons écrire que :

$$\alpha_{\rm SD} \ge \alpha_{\rm SD}^0 \quad . \tag{3.23}$$

On est amené dans cette étude à déterminer les multiplicateurs de charges limites pour chaque critère d'écoulement en utilisant le problème de programmation (3.22), La démarche à suivre consiste à introduire le convexe local des contraintes admissibles correspondant à chaque critère d'écoulement :

- cas associé CRITERE DE MOHR-COULOMB

$$\sigma_{3} - \sigma_{1} \tan^{2}(\pi/4 + \phi/2) - 2C \tan(\pi/4 + \phi/2) < 0$$
(3.24)

où σ_1 et σ_3 désignent respectivement les contraintes principales majeure et mineure.

CRITERE DE DRUCKER-PRAGER

$$J_{2D}^{1/2} + \beta J_1 - k < 0 \tag{3.25}$$

L'expression (3.25) peut être réduite à la condition d'écoulement de Mohr-Coulomb dans le cas de déformation plane (DRUCKER & PRAGER [30]) :

$$S_{22} = -2\beta J_{2D}^{1/2}$$
(3.26a)

Ainsi,

$$J_{1} = \frac{3}{2}(\sigma_{1} + \sigma_{3}) - 3\beta J_{2D}^{1/2}$$
(3.26b)

et

$$J_{2D} = \left[\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) \right]^2 / (1 - 3\beta^2)$$
 (3.26c)

En substituant les équations (3.26b) et (3.26c) dans (3.25), on obtient :

$$3\beta \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + (1 - 3\beta^2) J_{2D}^{1/2} - k < 0$$
(3.27)

L'inéquation (3.27) devient identique à (3.24), si :

$$C = \frac{k}{(1 - 12\beta^2)^{1/2}}, \quad \frac{3\beta}{(1 - 12\beta^2)^{1/2}} = \sin\phi \quad \text{et} \quad \frac{(1 - 12\beta^2)^{1/2}}{(1 - 3\beta^2)^{1/2}} = \cos\phi \quad (3.28)$$

CRITERE PARABOLIQUE

$$(\sigma_{3} - \sigma_{1})^{2} + 2C(\sigma_{1} - \sigma_{3})\tan\phi + 2C^{2}\tan^{2}\phi < 0$$
(3.29)

– cas non-associé

Pour toutes combinaisons possibles de contraintes $\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \sigma_3$, pouvant causer l'écoulement, et sous l'hypothèse que l'angle de dilatation ψ varie entre ($0 \le \psi \le \phi$), on a choisi la construction des potentiels plastiques de la façon suivante:

MOHR-COULOMB

$$\sigma_{3} - \sigma_{1} \tan^{2}(\pi/4 + \psi/2) - 2C_{0} \tan(\pi/4 + \psi/2) \le 0$$
 (3.30a)

avec

$$C_{Q} = C \tan \psi / \tan \phi \tag{3.30b}$$

DRUCKER-PRAGER

$$\frac{1}{k} \|\mathbf{S}\| + \mathbf{S}_{m} \tan \phi - \mathbf{C} \le 0 \tag{3.31}$$

On sait que pour une loi d'écoulement non associée, l'incrément de déformation plastique est donné par l'expression suivante :

$$\dot{\varepsilon}^{\rm p} = \dot{\varepsilon}^{\rm p}_{\rm m} + \dot{\varepsilon}^{\rm p}_{\rm d} \tag{3.32a}$$

avec

$$\dot{\varepsilon}_{m}^{p} = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial S_{m}} = d\lambda \tan \psi$$
 et $\dot{\varepsilon}_{d}^{p} = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial S} = \frac{d\lambda}{k} \frac{S}{\|S\|}$ (3.32b)

d'autre part, en déformation plane, on obtient :

$$\dot{\varepsilon}_{z}^{p} = 0 \implies \dot{\varepsilon}_{d}^{p} + \frac{\dot{\varepsilon}_{m}^{p}}{3} = d\lambda \left(\frac{S_{z}}{k\|S\|} + \frac{\tan\psi}{3}\right) = 0$$
 (3.33a)

$$(3S_z + k \|S\| \tan \psi) = 0$$
 (3.33b)

En tenant compte de (3.33b), l'inéquation (3.31) devient finalement :

$$3S_{z} + k^{2} \tan \psi \left[C - S_{m} \tan \phi \right] \le 0$$
(3.34)

que nous écrivons pour la commodité sous la forme :

$$3[S_{z} + \vartheta - \chi \mu S_{m}] \le 0$$
(3.35a)

avec :

$$\vartheta = \frac{k^2 C \tan \psi}{3}$$
, $\chi = \frac{k^2 \tan^2 \phi}{3}$ et $\mu = \frac{\tan \psi}{\tan \phi}$ (3.35b)

3.5 – RESUME DU CHAPITRE

Dans ce chapitre, nous avons montré que pour le matériau non-standard, l'application du théorème statique d'adaptation se ramène, comme pour le matériau standard, à la recherche d'existence d'un champ de contraintes résiduelles auto-équiblibrées indépendant du temps. La construction d'une surface équipotentielle convexe à l'intérieure de la surface d'écoulement nous a permis non seulement de dégager des axiomes définissant le cadre d'application du principe de travail maximal mais aussi de démontrer sous quelles conditions la dissipation plastique reste bornée. Par la suite, nous avons montré que la détermination des multiplicateurs de charges limites revient à formuler des problèmes de programmation mathématique. CHAPITRE IV

FORMULATION PAR ELEMENTS FINIS

.

FORMULATION DU PROBLEME D'ADAPTATION PAR M. E. F.

PARTIE I

PROGRAMMATION MATHEMATIQUE

4.1 – INTRODUCTION

La mise en oeuvre du théorème statique d'adaptation repose sur la méthode des éléments finis statiquement admissibles et sur la méthode de programmation mathématique. Cette dernière consiste à maximiser le facteur de charge tout en veillant à ce que le critère d'écoulement soit respecté en tout point de la structure. La résolution du problème de l'analyse à l'adaptation sous contraintes utilise la méthode dite du LAGRANGIEN AUGMENTE proposée par PIERRE & LOWE [73], et nécessite:

- un champ de contraintes purement élastiques sous chargement donné,

- un champ de contraintes résiduelles auto-équilibrées.

Pour cela on utilise la méthode des éléments finis en terme de contraintes basée sur le principe de minimisation de l'énergie complémentaire (GALLAGHER & DHALLA [33]). Celle-ci utilise les fonctions de contraintes pour la construction de la fonction d'énergie complémentaire et représente un dual algébrique à la méthode d'éléments finis en déplacement. Cette méthode a été utilisée, entre autre, par BELYTSCHKO & HODGE [3] et WEICHERT & GROSS-WEEGE [98], respectivement pour l'étude de l'analyse limite et de l'adaptation des structures métalliques.

4.2 – FORMULATION DU PROBLEME 4.2.1 – Principe du minimum de l'énergie complémentaire

Le principe du minimum de l'énergie complémentaire constitue un fondement variationnel de la formulation directe des souplesses des éléments. Cette méthode utilise les forces aux noeuds (aux frontières) pour inconnues dans la formulation des équations d'éléments finis. L'énergie complémentaire Π_c d'une structure est donnée par la somme de l'énergie complémentaire de déformation (U^{*}) et du potentiel (V^{*}) des forces de frontière agissant dans les déplacements imposés ; c'ést-à-dire que l'on a :

$$\Pi_{c} = \mathbf{U}^{*} + \mathbf{V}^{*}. \tag{4.1}$$

Nous rappelons que cette énergie complémentaire peut avoir une valeur stationnaire :

$$\delta \Pi_c = \delta U^* + \delta V^* = 0 \quad , \tag{4.2}$$

si parmi les états de contraintes satisfaisant les conditions d'équilibre et les conditions aux limites, un état de contraintes qui satisfait également les équations de contraintes-déformations (loi de Hooke) (équation 3.3).

Notons que dans le cas d'élasticité linéaire Π_c est minimum à l'équilibre :

$$\delta^2 \Pi_c = \delta^2 U^* + \delta^2 V^* \ge 0 \quad . \tag{4.3}$$

Il en suit après remplacement de déplacement virtuel par un état virtuel de contraintes, imposé sur l'état de déplacement réel existant dans la formulation variationnelle, donne une énergie complémentaire de la forme suivante :

$$\Pi_{c} = 1 / 2 \int_{\Omega} \sigma[L] \sigma \, d\Omega - \int_{\Gamma_{u}} \overline{T} \, \overline{u} \, d\Gamma$$
(4.4)

où la première intégrale du second membre est U^* et la deuxième est $-V^*$. La frontière Γ_u est la frontière sur laquelle les déplacements \overline{u} sont imposés, et \overline{T} représente les tractions de frontière correspondantes.

4.2.2 – Discrétisation à l'aide de fonction de contraintes

Une solution pratique pour définir des champs de contraintes qui satisfassent aux équations d'équilibre consiste en utilisation de fonctions potentielles, ou fonctions de contraintes. Ces fonctions sont des expressions qui, dérivées selon certaines règles, donnent des composantes de contraintes qui vérifient automatiquement les conditions d'équilibre. L'état
de contraintes planes n'admet qu'une seule de ces fonctions, appelée fonction de contrainte d'Airy.

Fonction de contrainte d'AIRY

Nous avons choisi pour la disctrétisation du problème la fonction de contraintes d'AIRY $\Phi = \Phi(x, y)$ dont la définition est la suivante :

$$\sigma_{x} = \frac{\partial^{2} \Phi}{\partial y^{2}} = \Phi_{,yy} , \quad \sigma_{y} = \frac{\partial^{2} \Phi}{\partial x^{2}} = \Phi_{,xx} , \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^{2} \Phi}{\partial x \partial y} = -\Phi_{,xy}$$
(4.5)

En absence des forces de volume, l'équilibre dans le volume Ω prend la forme suivante:

$$\Phi_{,yyx} - \Phi_{,xyy} = 0$$

$$-\Phi_{,xyx} + \Phi_{,xxy} = 0$$
 dans Ω (4.6)

L'équation cinématique aura lieu si la condition de compatibilité est satisfaite.

$$\varepsilon_{x,yy} + \varepsilon_{y,xx} - 2\varepsilon_{xy,xy} = 0. \tag{4.7}$$

Compte tenu de la loi de Hooke et de la définition de la fonction de contraintes d'Airy, l'équation (4.7) s'écrit :

$$\frac{1}{E} \left[\left(\sigma_{x,yy} - v \sigma_{y,yy} \right) + \left(-v \sigma_{x,xx} + \sigma_{y,xx} \right) - 2(1+v) \sigma_{xy,xy} \right] = 0$$

$$\sigma_{x,yy} - v \sigma_{y,yy} - v \sigma_{x,yy} + \sigma_{y,xx} - 2 \sigma_{xy,xy} - 2 v \sigma_{xy,xy} = 0$$

$$\Phi_{yyyy} - v \Phi_{y,xyy} - v \Phi_{y,yxx} + \Phi_{xxxx} + 2 \Phi_{xyxy} + 2 v \Phi_{y,xyx} = 0$$

$$\Phi_{yyyy} + \Phi_{y,xxx} + 2 \Phi_{xyxy} = 0.$$
(4.8)

et connaissant l'identité suivante :

$$\Delta(.) = (.)_{,xx} + (.)_{yy}$$

$$\Delta\Delta(.) = (.)_{,xxxx} + (.)_{,yyyy} + 2(.)_{,xxyy}$$

(4.9)

on obtient l'équation biharmonique suivante :

$$\Delta \Delta \Phi = 0. \tag{4.10}$$

De ce fait, n'importe quel champ de contrainte qui dérive de la fonction Φ étant une solution de l'équation différentielle (4.10), doit satisfaire l'équation d'équilibre statique, le critère de compatibilité, et minimise l'énergie complémentaire Π_c .

Afin d'éviter les complexités de l'analyse concernant les valeurs aux noeuds des fonctions de contraintes d'AIRY, on ne tient compte que du premier terme de l'expression (4.4). Le second terme sera pris en considération dans le paragraphe § 4.2.3 sous forme d'équations de contraintes. Ainsi, en contraintes planes, l'énergie complémentaire de déformation $(\Pi_c = U^*)$ s'écrit :

$$\Pi_{c} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left[\sigma_{x}, \sigma_{y}, \tau_{xy} \right] \left[L \right] \left\{ \begin{matrix} \sigma_{x} \\ \sigma_{y} \\ \tau_{xy} \end{matrix} \right\} t \, d\Gamma$$
(4.11)

Compte tenu de l'équation (4.5), on obtient :

$$\Pi_{c} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left[\Phi_{,yy} \Phi_{,xx} - \Phi_{,xy} \right] \left[L \right] \begin{cases} \Phi_{,yy} \\ \Phi_{,xx} \\ -\Phi_{,xy} \end{cases} t d\Gamma.$$
(4.12)

L'écriture du champ des fonctions de contraintes sous forme analogues aux fonctions de déformées, nous donne :

$$\boldsymbol{\Phi} = [\mathbf{N}] \{ \boldsymbol{\Phi}^{\circ} \}^{\mathrm{T}}$$
(4.13)

Ainsi, le vecteur des dérivées secondes peut s'écrire :

$$\left[\Phi_{,yy} \Phi_{,xx} - \Phi_{,xy} \right]^{\mathrm{T}} = \left[N \right]^{\tilde{r}} \left\{ \Phi^{\mathrm{e}} \right\}^{\mathrm{T}}$$

$$(4.14)$$

En substituant l'équation (4.14) dans l'expression de l'énergie complémentaire de déformation, on obtient :

$$\Pi_{c} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \{\Phi^{c}\} [N]^{T} [L] [N]^{T} \{\Phi^{c}\}^{T} t d\Gamma = \frac{1}{2} \{\Phi^{c}\}^{T} [f^{c}] \{\Phi^{c}\}$$
(4.15a)

où

$$\left[\mathbf{f}^{\bullet}\right] = \int_{\Gamma} \left[\mathbf{N}\right]^{\mathsf{w}} \left[\mathbf{L}\right] \left[\mathbf{N}\right]^{\mathsf{w}} \mathbf{t} \, d\Gamma$$
(4.15b)

avec $[f^{e}]$ est la matrice de flexibilité élémentaire.

Nous avons vu que dans la formulation des problèmes de contraintes planes, l'énergie complémentaire fait usage d'une fonctionnelle exprimée en fonction de dérivées secondes de la fonction de contraintes d'Airy Φ en tant qu'inconnue de base aux noeuds : la continuité de Φ et de ses dérivées premières au passage des frontières des éléments est donc impérative. Ce phénomène peut se ramener à celui de la flexion des plaques minces (Fig. 4.1), pour lequel le déplacement transversal w doit satisfaire à la même forme d'équations différentielles que Φ .

$$\begin{cases} w \equiv \Phi \\ \frac{E t^{3}}{12(1-v^{2})} \equiv \frac{1}{E} \end{cases}$$
(4.16)

Pour assurer les conditions citées ci-dessus, nous avons choisi une formule d'interpolation polynomiale bicubique d'Hermite qui assure les déplacements à compatibilité inter-éléments d'une part, et possède tous les états de déformation uniforme d'autre part BOGNER & al. [7].

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} a_{ij} \mathbf{x}^{i} \mathbf{y}^{j}.$$
(4.17)

Les 16 inconnues (a_{ij}) de l'expression (4.17) sont remplacées par le vecteur (Φ_{ij}) . Ce dernier regroupe non seulement les valeurs de Φ mais aussi les dérivées premières $\Phi_{,x}$ et $\Phi_{,y}$ et les dérivées secondes $\Phi_{,xy}$ dans les 4 noeuds de chaque élément (voir annexe A).



Fig. 4.1 Interpolation d'Hermite par polynôme bicubique.

4.2.3 – Conditions aux limites statiques pour la fonction d'Airy

Pour définir les équations de contraintes restituant la continuité des déplacements aux frontières, il est important de spécifier cette continuité en un certain nombre de points le long de ces frontières, autrement dit, d'établir cette continuité en identifiant les fonctions de contraintes aux noeuds communs.





$$\sigma_{nn}^{A} = \sigma_{nn}^{B} \Longrightarrow \left(\frac{\partial^{2} \Phi}{\partial t^{2}}\right)^{A} = \left(\frac{\partial^{2} \Phi}{\partial t^{2}}\right)^{B}$$

$$\sigma_{nt}^{A} = \sigma_{nt}^{B} \Longrightarrow \left(\frac{\partial^{2} \Phi}{\partial n \partial t}\right)^{A} = \left(\frac{\partial^{2} \Phi}{\partial n \partial t}\right)^{B}$$
(4.18)

Les deux conditions sont valables pour chaque côté des deux éléments voisins A et B (se conférer à l'annexe A pour plus de détails). De même on a :

$$\Phi^{A} = \Phi^{B}$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)^{A} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)^{B}$$

$$(4.19)$$

L'exigence de mettre en interconnexion les éléments dans le but de retenir une formulation valide du minimum de l'énergie complémentaire est due à la continuité des contraintes normales et de cisaillement le long de la frontière de chaque élément.

Considérons à présent un exemple de contraintes planes dont lequel les contraintes $\sigma_y(x)$ et $\tau_{xy}(x)$ agissent sur un élément dont un côté est parallèle à l'axe des x (Fig. 4.3). En tout point de ce côté on a :

$$\frac{\partial^2 \Phi^{i-j}}{\partial x^2} = \sigma_y(x). \tag{4.20}$$

En intégrant deux fois la relation (4.20), et en évaluant les constantes d'intégration en fonction des valeurs de Φ et de $\partial \Phi / \partial x = \Phi_x$ aux extrémités, on obtient :

$$-\Phi_{,xi} + \Phi_{,xj} = \int_{0}^{x} \sigma_{y}(x) dx$$

$$-\Phi_{i} + \Phi_{j} - a\Phi_{,xi} = \int_{0}^{x} dx \int_{0}^{x} \sigma_{y}(x) dx$$

$$(4.21)$$

La présence de la contrainte de cisaillement le long du côté (i-j), nous donne :

$$\Phi_{,yi} - \Phi_{,yj} = \int_{0}^{j} \tau_{xy}(x) \, dx \qquad (4.22a)$$

avec

$$-\Phi_{,xy_i} = \tau_{xy} (x = 0)$$
 , $-\Phi_{,xy_j} = \tau_{xy} (x = a)$. (4.22b)



Fig. 4.3 Contraintes normale et de cisaillement réparties sur un côté d'un élément.

Par l'addition de toutes ces équations provenant des opérations relatives à toutes les conditions aux limites, nous formons un système pour l'ensemble des équations de contraintes. Ainsi pour (r) conditions de contraintes et (n) degrés de liberté, nous obtenons :

$$\left[C_{rxn}^{e}\right]\left\{\Phi_{nxl}^{e}\right\} = \left\{p_{rxl}^{e}\right\}$$

$$(4.23)$$

où $\{p_{rxl}^{e}\}\$ est le vecteur des charges extérieures résultant à partir de l'intégration de la surface de tractions Γ_{σ} le long de frontière de chaque élément (GALLAGHER & DALLA [33]).

L'énergie complémentaire totale (Π_c) pour une structure à (Ne) éléments est donnée par :

$$\Pi_{c} = \sum_{e=1}^{Ne} \Pi_{c}^{e} = \frac{1}{2} \{ \Phi \}^{\mathrm{T}} [\mathbf{f}] \{ \Phi \}$$

$$(4.24)$$

où [f] est la matrice de souplesse globale, et $\{\Phi\}$ est le vecteur global des fonctions de contraintes. De même on a :

$$[C] \{ \Phi \} = \{ p \}$$
(4.25)

qui représente le système d'équations de contraintes globales, et la matrice [C] contient les coefficients des équations de contraintes.

Pour tenir compte de ces équations de contraintes dans la formulation de l'énergie complémentaire, nous introduisons la notion des multiplicateurs de Lagrange. Ceci nous permet d'obtenir la fonctionnelle augmentée :

$$\overline{\Pi}_{c} = \frac{\{\Phi\}^{T}}{2} [f] \{\Phi\} + \{\lambda\}^{T} [C] \{\Phi\} - \{\lambda\}^{T} \{p\}$$
(4.26)

où, λ est le multiplicateur de Lagrange.

Ainsi, la première variation par rapport à Φ et λ donne le système d'équations suivant:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f} & \mathbf{C}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Phi} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} . \tag{4.27}$$

Nous remarquons tout de suite que la partition inférieure est tout simplement constituée du système des équations de contraintes. Dans ce cas, nous pouvons résoudre ces équations directement par partition si [f] n'est pas singulière. La partition supérieure donne :

$$\{\Phi\} = -[f]^{-1}\{C\}^{T}\{\lambda\}$$
(4.28)

et la partition inférieure donne :

$$\{\lambda\} = (\{C\}[f]^{-1}\{C\}^{T})^{-1}(-\{p\}).$$
(4.29)

La substitution de $\{\lambda\}$ par sa valeur dans l'équation (4.28) nous permet de déterminer les paramètres de la fonction de contrainte $\{\Phi\}$. Ces paramètres seront utilisés à leur tour pour la détermination des contraintes élastiques aux 4 points de Gauss en utilisant les expressions de contraintes (équations 4.5).

4.3 – PHASE PLASTIQUE 4.3.1 – Détermination du champ de contraintes résiduelles

Une fois que la solution élastique est déterminée, nous discrétisons le champ de contraintes résiduelles de la même manière que le champ de contraintes élastiques (formulation proposée par KÖNIG & NGUYEN [47]), de telle sorte que ce champ de contraintes résiduelles doit satisfaire les conditions d'équilibre suivantes :

$$\overline{\rho}_{ij,j} = 0$$
 et $\overline{\rho}_{ij} n_j = 0$. (4.30)

Afin de calculer ces contraintes résiduelles auto-équilibrées, nous formulons à nouveau le système d'équations de contraintes avec forces de surface nulles, on obtient donc :

$$[C] \{ \Phi \} = 0 \quad . \tag{4.31}$$

La résolution de ce système d'équations (équations de contraintes sous conditions d'équilibre homogènes) a été simplifiée en utilisant la méthode d'élimination de Gausss-Jordan (STIEFEL [92]).

$$[C] \{\Phi\} = 0 \implies [C_1 \ C_2] \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = 0$$
(4.32)

du fait que $\left[C_{1}^{-1}\right]$ existe, on a :

$$\left\{\Phi_{1}\right\} = -\left[C_{1}^{-1}\right]\left[C_{2}\right]\left\{\Phi_{2}\right\} \Longrightarrow \left\{\Phi\right\} = J\left\{\Phi_{2}\right\} = \begin{bmatrix}-\left[C_{1}^{-1}\right]\left[C_{2}\right]\\I\end{bmatrix}\left\{\Phi_{2}\right\} \qquad (4.33)$$

qui représente le champ de contraintes résiduelles.

4.3.2 – Détermination du multiplicateur de charge limite par programmation non-linéaire

Nous avons vu dans le chapitre précédent, que l'utilisation du théorème statique d'adaptation sous la forme discrétisée mène à la résolution d'un problème de programmation non linéaire dont la solution fournit le chargement limite.

Ce chargement limite est obtenu par un processus d'optimisation (LPNLP) sous contraintes. Ces dernières qui sont dans notre cas des contraintes d'inégalité, sont respectivement introduites, ainsi que leurs gradients analytiques, dans les subroutines FXNS et GRAD (voir annexe B). En effet, cette technique, déjà utilisée par GIESE [34], nous amène à constituer la fonction de Lagrange optimisée :

$$L(x,a,b) = f(x) + \sum_{i} a_{i}(A_{i} - p_{i}(x)) + \sum_{j} b_{j}(B_{j} - q_{j}(x))$$
(4.34)

où f(x) représente la fonction objective, $(A_i - p_i(x))$ les contraintes d'égalités et $(B_i - q_i(x))$ les contraintes d'inégalités.

Afin d'obtenir une bonne convergence des solutions et d'éviter la violation de la condition d'écoulement, nous introduisons les paramètres de pénalités W_1 , W_2 et W_3 qui augmentent au fur et à mesure avec le processus d'optimisation (cf. PIERRE & LOWE [73] pour plus de détails). Ainsi, on obtient le Lagrangien augmenté :

$$L_{a}(x,a,b) = L(x,a,b) - W_{1}\sum_{i} (A_{i} - p_{i}(x))^{2} - W_{2}\sum_{j} (B_{j} - q_{j}(x))^{2} - W_{3}\sum_{k} (B_{k} - q_{k}(x))^{2}$$
(4.35)

qui sera dans notre cas de la forme suivante :

$$L_{a}(\Phi,\lambda,\alpha) = \alpha - \sum_{i}^{r} \lambda_{i} q_{i}(\Phi,\alpha) - w_{2} \sum_{j}^{m} q_{j}^{2}(\Phi,\alpha) - w_{3} \sum_{k}^{n} q_{k}^{2}(\Phi,\alpha).$$
(4.36)

Avec un nombre r de contraintes d'inégalités, égal au nombre de points-tests (NFP) dans le cas de l'analyse limite et à (2*NFP) dans le cas d'adaptation. λ_i , m et n sont respectivement les multiplicateurs de Lagrange, le nombre de contraintes d'inégalité active $(q_i(x) \ge B_i)$, et non active $(q_k(x) < B_k)$. A noter que le processus itératif s'arrête lorsque la valeur de Lagrangien augmenté est inférieure à la valeur 1.E-4.

Dans le cas particulier de Mohr-Coulomb, la contrainte d'inégalité est donnée par :

$$q_{i}(\Phi,\alpha) = \sigma_{3} - \sigma_{1} \tan^{2}(\pi/4 + \psi/2) - 2C_{Q} \tan(\pi/4 + \psi/2)$$
(4.37a)

avec

$$\Phi = \alpha \Phi^{\circ} + \Phi^{r}$$
 ou $\sigma = \alpha \sigma^{\circ} + \overline{\rho}$ (4.37b)

où (Φ) représente les paramètres de la solution élasto-plastique qui sont composés d'une part de la contribution purement élastique ($\alpha \Phi^{\circ}$) et d'autre part de la contribution résiduelle (Φ^{r}).

PARTIE II

METHODE INCREMENTALE

NON LINEAIRE

4.4 – FORMULATION INCREMENTALE DU PROBLEME

L'analyse élasto-plastique des problèmes aux limites par la méthode des éléments finis conduit souvent à exprimer la loi du comportement du matériau sous une forme incrémentale.

Soient (**n**) et (**n**+1) deux états de charges consécutifs, ($\sigma_{ij}^{n}, \varepsilon_{ij}^{n}$ et u_{i}^{n}) sont les variables statiques et cinématiques connues en **n** (Fig. 4.4). En supposant que l'incrément de charge reste petit, les inconnues à l'état de charge (**n**+1) $\sigma_{ij}^{n+1}, \varepsilon_{ij}^{n+1}$ et u_{i}^{n+1} peuvent être exprimées comme suit :

$$\sigma_{ij}^{n+1} = \sigma_{ij}^{n} + \Delta \sigma_{ij}$$

$$\varepsilon_{ij}^{n+1} = \varepsilon_{ij}^{n} + \Delta \varepsilon_{ij}$$

$$u_{i}^{n+1} = u_{i}^{n} + \Delta u_{i}$$
(4.38)

où Δ signifie une quantité incrémentale entre l'état (**n**) et (**n**+1); ($\Delta \sigma_{ij}, \Delta \epsilon_{ij}$ et Δu_i) sont les inconnues de base entre deux états de charges consécutifs.

Connaissant la matrice D_{ijkl}^n à l'état de charge (**n**), la relation incrémentale constitutive reliant $\Delta \sigma_{ij}$ et $\Delta \epsilon_{ij}$ peut être écrite sous la forme :

$$\Delta \sigma_{ij}^{n+1} = D_{ijkl}^n \Delta \varepsilon_{kl}^{n+1} \quad . \tag{4.39}$$



Fig. 4.4 Présentation d'un corps à l'état de chargement n et n+1.

En appliquant le principe des travaux virtuels à l'état de charge (n+1) qui énonce que, pour tous les champs cinématiquement admissibles, le travail virtuel des actions extérieures est égale au travail virtuel des actions intérieures :

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^{n} \delta \varepsilon_{ij}^{n+1} d\Omega = \int_{\Omega} \overline{f}_{i}^{n+1} \delta u_{i}^{n+1} d\Omega + \int_{\Gamma} \overline{T}_{i}^{n+1} \delta u_{i}^{n+1} d\Gamma.$$
(4.40)

En utilisant l'équation (4.38), l'équation (4.40) peut être écrite sous la forme :

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij}^{n} + \Delta \sigma_{ij}) \delta(\Delta \varepsilon_{ij}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \overline{f}_{i}^{n+1} \, \delta(\Delta u_{i}) \, d\Omega + \int_{\Gamma} \overline{T}_{i}^{n+1} \delta(\Delta u_{i}) \, d\Gamma \quad (4.41)$$

ou encore :

$$\int_{\Omega} \Delta \sigma_{ij} \delta(\Delta \varepsilon_{ij}) \, d\Omega = \delta(\Delta W) - \int_{\Omega} \sigma_{ij}^{n} \delta(\Delta \varepsilon_{ij}) \, d\Omega$$
(4.42a)

avec

$$\delta(\Delta W) = \int_{\Omega} \overline{f}_{i}^{n+1} \delta(\Delta u_{i}) \, d\Omega + \int_{\Gamma} \overline{T}_{i}^{n+1} \delta(\Delta u_{i}) \, d\Gamma.$$
(4.42b)

En utilisant la relation constitutive donnée par l'équation (4.39), l'équation (4.42a) devient :

$$\int_{\Omega} D_{ijkl}^{n} \Delta \varepsilon_{kl} \,\delta(\Delta \varepsilon_{ij}) \,d\Omega = \delta(\Delta W) - \int_{\Omega} \sigma_{ij}^{n} \,\delta(\Delta \varepsilon_{ij}) d\Omega \tag{4.43}$$

ou encore en notation matricielle :

$$\int_{\Omega} \delta\{\epsilon\} [D]^{n} \{\Delta\epsilon\} d\Omega = \int_{\Omega} \delta\{\Delta u\}^{T} \{\overline{f}\}^{n+1} d\Omega + \int_{\Gamma} \delta\{\Delta u\}^{T} \{\overline{T}\}^{n+1} d\Gamma - \int_{\Omega} \delta\{\Delta\epsilon\}^{T} \{\sigma\}^{n} d\Omega$$

$$(4.44)$$

A noter que l'équation (4.44) représente le principe de travail virtuel à l'état de charge (n+1).

4.4.1 – Discrétisation

Le domaine Ω est divisé en un nombre finis d'éléments. On fait l'hypothèse qu'une approximation du déplacement à l'intérieur de chaque élément peut être exprimée par :

$$\{\Delta \mathbf{u}\} = [\mathbf{N}]\{\Delta \mathbf{u}^{\circ}\} \tag{4.45}$$

où

 $\{\Delta u^{e}\}$ représente les déplacements aux noeuds ;

[N] est la matrice des fonctions d'interpolation.

Le tenseur de déformation est donné par :

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial (\Delta u_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial (\Delta u_j)}{\partial x_i} \right) \qquad (4.46)$$

En combinant les deux équations (4.45) et (4.46), la relation déformation-déplacement s'écrit :

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\Delta u^{\circ}\}$$
(4.47)

où [B] est la matrice contenant les dérivées des fonctions d'interpolation.

En tenant compte des équations (4.45) et (4.47), l'expression du travail virtuel à l'état de charge (n+1) s'écrit :

$$\delta\{\Delta u\}^{\mathrm{T}}(\int_{\Omega} [B]^{\mathrm{T}}[D]^{\mathrm{n}}[B]d\Omega\{\Delta u\}) =$$

$$\delta\{\Delta u\}^{\mathrm{T}}(\int_{\Omega} [N]\{\overline{f}\}^{\mathrm{n+1}}d\Omega + \int_{\Gamma} [N]^{\mathrm{T}}\{\overline{T}\}^{\mathrm{n+1}}d\Gamma)$$

$$\{\overline{Q}_{0}\}^{\mathrm{n}} = \int_{\Omega} [B]^{\mathrm{T}}\{\sigma\}^{\mathrm{n}}d\Omega \qquad (4.48)$$

Après réarrangement des termes, on obtient :

$$\delta\{\Delta u\}^{\mathrm{T}}[\mathbf{K}]^{\mathrm{n}}\{\Delta u\} = \delta\{\Delta u\}^{\mathrm{T}}\left(\{\overline{\mathbf{Q}}\}^{\mathrm{n+1}} - \{\overline{\mathbf{Q}}_{0}\}^{\mathrm{n}}\right)$$
(4.49a)

$$[K]^{n} = \int_{\Omega} [B]^{T} [D]^{n} [B] d\Omega \qquad (4.49b)$$

$$\left\{\overline{Q}\right\}^{n+1} = \int_{\Omega} \left[N\right] \left\{\overline{f}\right\}^{n+1} d\Omega + \int_{\Gamma} \left[N\right]^{T} \left\{\overline{T}\right\}^{n+1} d\Gamma$$
(4.49c)

$$\left\{\overline{Q}_{0}\right\}^{n} = \int_{\Omega} \left[B\right]^{T} \left\{\sigma\right\}^{n} d\Omega \qquad (4.49d)$$

Dans l'équation (4.49b), $[K]^n$ représente la matrice de rigidité à l'état de charge (n), $\{\overline{Q}\}^{n+1}$ le vecteur des charges extérieures à l'état de charge (n+1), et $\{\overline{Q}_0\}^n$ le vecteur de charge équilibré à l'état (n). La différence $\{\overline{Q}\}^{n+1} - \{\overline{Q}_0\}^n$ représente la partie nécessaire pour équilibrer le système à l'état (n+1).

En répétant la même procédure et en assemblant des rigidités de tous les éléments, nous obtenons le système globale suivant :

$$[K]{\Delta u} = {\overline{R}}^{n+1} - {\overline{R}}_0^n$$
(4.50a)

avec

$$[K] = \sum_{i=1}^{N_{e}} [K]_{i}^{n}$$
(4.50b)

$$\left\{\overline{\mathbf{R}}\right\}^{n+1} = \sum_{i=1}^{Ne} \left\{\overline{\mathbf{Q}}\right\}_{i}^{n+1}$$
(4.50c)

$$\left\{\overline{R}_{0}\right\}^{n} = \sum_{i=1}^{Ne} \left\{\overline{Q}_{0}\right\}_{i}^{n}$$
(4.50d)

où N_e représente le nombre total d'éléments dans le système.

4.4.2 – Résolution des systèmes d'équations non linéaires

Dans le chapitre 1, consacré à l'étude à l'élasto-plasticité, nous avons vu qu'une hypothèse de base de cette théorie était constituée par la décomposition de l'incrément de déformation de l'incrément de déformation en une partie élastique (réversible) et une partie plastique (irréversible). L'existence d'irréversibilités plastiques implique la non linéarité de la relation (1.16).

En effet, il existe plusieurs méthodes concernant la résolution des systèmes non linéaires (voir : DARVE & LABANICH [17], ZIENKIEWICZ & al. [101], DESAI & HASHMI [20]). La majorité de ces algorithmes conduit à résoudre un système d'équations linéaires à chaque itération.

Un autre point est également délicat à prendre en compte dans le cadre de l'élastoplasticité non-associée $(F \neq Q)$: il s'agit de la non-symétrisation de la matrice élastoplastique D^{ep} .

Etant donné la complexité de cette matrice non symétrique, nous avons choisi pour la résolution des systèmes d'équations une méthode basée sur la formulation d'une matrice de rigidité symétrique, développée avant par PANDE & PIETTRUSZCZAK [72]. Dans leur développement, ils proposent un outil numérique dans lequel la réponse d'un matériau non standard est construite d'une manière équivalente à celui d'un matériau standard avec modification de la règle d'écrouissage dépendant de la direction contrainte/déformation (material with associated flow rule and a modified stress/strain direction hardening rule).

Soit un matériau élasto-plastique" réel" non standard ayant la fonction de charge :

$$\mathbf{F}_{\mathbf{m}} = (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{R}) = \mathbf{0} \tag{4.51}$$

et le potentiel plastique :

$$Q(\sigma) = g(\sigma) - \text{const} = 0 \tag{4.52}$$

Les déformations plastiques sont alors obtenues en utilisant l'équation du potentiel plastique :

$$\dot{\varepsilon}^{\rm p} = d\lambda \frac{\partial g(\underline{\sigma})}{\partial \underline{\sigma}} \tag{4.53}$$

où d λ représente la constante de proportionnalité, et R le paramètre d'écrouissage qui est fonction de la déformation plastique.

Il est postulé qu'un matériau équivalent au matériau réel peut exister tel que :

$$\begin{cases} F_{re} = f(\mathfrak{g}) - h(R) = 0 \\ \dot{\mathfrak{g}} = d\lambda_{re} \frac{\partial g(\mathfrak{g})}{\partial \mathfrak{g}} + [D]^{-1} d\mathfrak{g} \\ g(\mathfrak{g}) \neq f(\mathfrak{g}) \end{cases} = \begin{cases} F_{eq} = g(\mathfrak{g}) - c(\tilde{R}) = 0 \\ \dot{\mathfrak{g}} = d\lambda_{eq} \frac{\partial g(\mathfrak{g})}{\partial \mathfrak{g}} + [D]^{-1} d\mathfrak{g} \\ \dot{\mathfrak{g}} \end{cases}$$
(4.54)

où les suffixes "re" et "eq" sont utilisés pour identifier les fonctions relatives aux matériaux réel et équivalent, respectivement ; \tilde{R} est le paramètre d'écrouissage dépendant de (SSD).

Pour un processus de chargement ($f(\sigma) = h$ et df > 0), la condition de compatibilité (ou cohérence) pour le matériau réel est alors définie par la relation suivante :

$$\left(\frac{\partial F_{R}}{\partial g}\right)\dot{g} + \left(\frac{\partial F_{R}}{\partial R}\right)\left(\frac{\partial R}{\partial g^{P}}\right)\dot{g}^{P} = 0 \quad .$$
(4.55)

En tenant compte des équations (4.53) et (4.55), on peut écrire :

$$\mathbf{H}_{re} = -\frac{\partial F_{re}}{\partial R} \left\{ \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}_{P}^{P} \right\}^{T} \frac{\partial g(\sigma)}{\partial \sigma}$$
(4.56)

où H_{re} désigne le module d'écrouissage.

En reportant la relation contrainte-déformation (éq. 1.14) dans l'équation (4.55), nous obtenons la constante de proportionnalité pour la matériau réel :

$$d\lambda_{R} = \frac{\left\{\frac{\partial F_{R}}{\partial g}\right\}^{T} [D] \dot{\varepsilon}}{H_{R} + \left\{\frac{\partial F_{R}}{\partial g}\right\}^{T} [D] \frac{\partial g(g)}{\partial g}}.$$
(4.57)

De même pour le matériau équivalent on obtient :

$$d\lambda_{eq} = \frac{\left\{\frac{\partial g(\underline{\sigma})}{\partial \underline{\sigma}}\right\}^{T} [D] \underline{\dot{\varepsilon}}}{H_{eq} + \left\{\frac{\partial g(\underline{\sigma})}{\partial \underline{\sigma}}\right\}^{T} [D] \frac{\partial g(\underline{\sigma})}{\partial \underline{\sigma}}} \qquad (4.58)$$

Puisque $d\lambda_{e}$ devrait être égale à $d\lambda_{p}$, on obtient :

$$H_{eq} = \frac{\left[H_{e}\left\{\frac{\partial g(\sigma)}{\partial \sigma}\right\}^{T} + \left\{\frac{\partial F_{e}}{\partial \sigma}\right\}^{T}[D]\frac{\partial g(\sigma)}{\partial \sigma}\left\{\frac{\partial g(\sigma)}{\partial \sigma}\right\}^{T} - \left\{\frac{\partial g(\sigma)}{\partial \sigma}\right\}^{T}[D]\frac{\partial g(\sigma)}{\partial \sigma}\left\{\frac{\partial g(\sigma)}{\partial \sigma}\right\}^{T}\right][D]\dot{g}}{\left\{\frac{\partial F_{e}}{\partial \sigma}\right\}^{T}[D]\dot{g}}$$

Finalement, la matrice élasto-plastique complète pour le matériau équivalent peut être écrite sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} D^{ep} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} D \end{bmatrix} \frac{\partial g(\sigma)}{\partial \sigma} \left\{ \frac{\partial g(\sigma)}{\partial \sigma} \right\}^{T} \begin{bmatrix} D \end{bmatrix}}{H_{eq}} + \left\{ \frac{\partial g(\sigma)}{\partial \sigma} \right\}^{T} \begin{bmatrix} D \end{bmatrix} \frac{\partial g(\sigma)}{\partial \sigma}$$
(4.60)

qui est symétrique avec $H_{eq} = H_{eq}(\dot{\xi})$.

Ceci rend la matrice de rigidité [K] (éq. 4.50a) reliant les forces nodales $\{\overline{R}\}^{n+1} - \{\overline{R}_0\}^n$ aux déplacements nodaux $\{\Delta u\}$ aussi symétrique dans la formulation en éléments finis.

Or, la relation présentée par l'équation (4.59) dépend de la direction de la vitesse de déformation, ce qui présente pour nous un problème de choix de direction pour le calcul numérique. Cependant, pour s'affranchir de cette difficulté qui n'est pas notre sujet d'étude, nous avons considéré un problème de déformation plane sous condition non drainée, telles que :

$$\dot{\varepsilon}_3 = 0 \tag{4.61}$$

$$\dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 + \dot{\varepsilon}_3 = 0$$

Ainsi, la substitution des équations (3.19) et (4.61) dans l'équation (4.59), permet de simplifier l'expression du module d'écrouissage du matériau équivalent :

$$H_{eq} = (\sin\phi - \sin\psi) \frac{E(1 - 3\nu)}{2(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \qquad (4.62)$$

qui représente dans ce cas un scalaire indépendant de la direction de déformation. Ceci nous a permis en effet de réduire le temps de calcul de la matrice élasto-plastique symétrique (4.60) en utilisant le code de calcul développé par OWEN & HINTON [68].

4.5 – RESUME DU CHAPITRE

Au cours de ce chapitre, nous avons montré que la discrétisation du problème d'adaptation nous conduit à résoudre un problème de programmation mathématique dont la solution nous fournit le chargement limite. La résolution du problème nécessite alors :

- la solution d'un problème élastique correspondant aux mêmes conditions limites que le problème posé;

- la construction d'un champ de contraintes résiduelles auto-équilibré et indépendant du temps.

Ces problèmes sont résolus par l'utilisation d'éléments finis statiquement admissibles dont la formulation est basée sur le principe du minimum de l'énergie complémentaire.

La formulation retenue débauche alors sur un problème de programmation mathématique sous contraintes non-linéaires (LPNLP ; voir PIERRE & LOWE [73]) qui consiste à maximiser le multiplicateur de charge tout en veillant à ce que le critère de plasticité ne soit pas violé nulle part.

Dans le but de valider les charges limites obtenus par l'approche citée ci-dessus, nous avons également développé une méthode de calcul pas-à-pas. Cette méthode est fondée sur la supposition que le matériau non-standard est équivalent à un autre matériau standard muni d'une modification de la direction de dépendance contrainte/déformation à la règle d'écrouissage, ce qui permet d'obtenir une matrice tangente symétrique à l'inverse de la matrice tangente conventionnelle. CHAPITRE V

APPLICATIONS NUMERIQUES

яих

PROBLEMES GEOTECHNIQUES

APPLICATIONS NUMERIQUES

AUX

PROBLEMES GEOTECHNIQUES

5.1 - INTRODUCTION

La mise en oeuvre numérique a été réalisée dans un code de calcul en éléments finis, développé initialement par GROSS-WEEGE [36] pour l'étude des plaques et coques, puis amélioré par GIESE [34] pour le calcul élastique parfaitement plastique des massifs de sols. Dans ce chapitre, nous présentons le travail d'insertion de la nouvelle approche, présentée au chapitre 3, dans ce code de calcul. Afin d'examiner la qualité d'implantation, nous considérons quatre séries d'exemples :

* La première série d'exemples à pour but d'établir une comparaison entre les charges limites obtenus par les trois critères d'écoulement Mohr-Coulomb, Drucker-Prager et Parabolique.

* Par la deuxième série nous montrons l'influence de certains paramètres comme le module de Young et l'épaisseur de la couche d'asphalte sur la charge limite d'adaptation.

* La troisième série d'exemples porte sur la recherche des domaines d'adaptation pour un essai de cisaillement direct, ainsi que l'influence des propriétés mécaniques des sols tels que l'angle de frottement, la dilatance et la cohésion.

* La quatrième série d'exemples a pour but la validation des domaines d'adaptation par une méthode incrémentale dont l'algorithme est basé sur la méthode de la rigidité symétrique développée au chapitre précédent.

Dans la mesure du possible, nous présenterons d'autres exemples d'application pour des cas de problèmes pratiques avec ou sans possibilité de comparaison. Pour l'ingénieur, le multiplicateur de charge limite constitue une bonne estimation du coefficient de sécurité pour la charge appliquée. Par ailleurs, il est possible d'envisager des séries de tests pour l'évaluation numériques des facteurs de la capacité portante. Il est intéressant de calculer les coefficients de poussée et de butée et de traiter le cas des fondations enfouies. Ces travaux peuvent être des applications directes du présent travail.

5.2 – MODELE DE SOL-STRUCTURE

Dans la première série d'exemples nous considérons le problème de la capacité portante d'un massif de sol. Ce problème même dans le cas les plus simples est intéressant à plusieurs titres. En effet, c'est un problème pratique, il se pose lorsqu'il s'agit de réaliser des ouvrages de natures différentes telles que les routes et les voies ferrées...



Fig. 5.1 Chaussée sous chargement variable et répété (déformation plane).

Dans cette étude, nous limiterons notre analyse au sols secs, non pesants ($\gamma = 0$), et à comportement élastique parfaitement plastique. La supposition d'un tel comportement selon (ZIENKIEWICZ & al. [101]) ne prévoit pas certes une bonne représentation des déformations subi par le matériau, mais donne une bonne approximation de la charge de défaillance. A noter que nous avons retenu cette supposition seulement pour simplifier l'analyse et la comparaison entre les différents critères d'écoulement.

Pour des raisons de symétrie du chargement et de la géométrie, nous ne considérons dans cette première série que la moitié de la chaussée. La figure (5.1) illustre les conditions aux limites considérées.

5.2.1 – EFFET DU MAILLAGE

Dans le calcul par éléments finis, il est connu que la finesse du maillage joue un rôle important sur les résultats de la simulation. Afin d'analyser l'influence du maillage sur les résultats obtenus et de définir la maillage adéquat selon l'angle de frottement interne, nous avons considéré trois maillages:

- * Maillage à 9 éléments avec 45 points-tests ;
- * Maillage à 12 éléments avec 57 points-tests ;
- * Maillage à 20 éléments avec 89 points-tests.

Sachant que ceux-ci ne correspondent pas forcement aux points de Gauss et aux noeuds des éléments (Fig. 5.2 (a)).



Fig. 5.2 (a) Différents maillages

Le calcul a été mené vis-à-vis l'analyse limite et l'adaptation en utilisant le critère de Mohr-C. Les résultats ainsi obtenus montrent qu'en analyse limite la convergence est atteinte quelque soit l'angle de frottement (figure 5.2 (b)). Toutefois pour l'adaptation nous constatons que pour un angle de frottement inférieur à 20° la réponse est la même pour les trois maillages.

En revanche pour un angle de frottement supérieur à 20° une légère perturbation de l'ordre de $(6\% \le \text{ERR} \le 9.2\%)$ est constatée. D'où plusieurs interprétations peuvent être avancées :

- Soit par la présence des zones de concentration de contraintes ;

- Soit par l'augmentation de nombre de contraintes dans le processus d'optimisation qui est proportionnel au nombre de points de tests choisi pour évaluer le critère d'écoulement.



Fig. 5.2 (b) Effet du maillage.

Etant donné que la solution du problème de référence présente un champ de contraintes statiquement admissibles et que le nombre d'itération nécessaire pour obtenir la convergence de l'optimisation augmente avec le nombre d'éléments, nous avons choisi pour ce qui suit le maillage à 9 éléments dans le but de minimiser les coûts de calculs.

5.2.2 - ADAPTATION ET ANALYSE LIMITE EN DEFORMATION PLANE

Les présents tests servent à évaluer et à comparer les facteurs de charges limites obtenus par l'utilisation des trois critères d'écoulement, à commencer par celui de Mohr-Coulomb (M-C), Drucker-Prager extérieur (D-P Ex), Drucker-Prager Intérieur (D-P In) et Parabolique (Parab). Pour cela nous avons optimisé ces facteurs de charges (α) sur 45 points-tests et pour chaque combinaison de paramètres :

a) La pression (P) varie d'une manière quelconque entre $0 \le P \le P^*$ (où P^{*} désigne la charge limite, Adaptation).

b) La pression (P) varie d'une manière proportionnelle (Analyse limite).

A noter que nous avons considéré dans tous ces exemples le maillage et les conditions aux limites de la figure 5.3.



Fig. 5.3 Maillage et conditions aux limites

Nous constatons d'après les résultats du tableau (1) et les figures (5.4) et (5.5(a) et (b)) que l'évolution des facteurs de charges en analyse limite ($\alpha_{AL} = \frac{P_{Analyse Limite}}{P_{elastique}}$) et en adaptation

 $(\alpha_{sD} = \frac{P_{shakedown}}{P_{elastique}})$ sont des fonctions linéaires croissantes identiques pour ($\phi = 10^{\circ}$) et différentes pour ($\phi = 30^{\circ}$).

N.B.: 1 inch =2.54 cm 1 psi =6.89 kPa



Fig. 5.4 Calcul à l'analyse limite et à l'adaptation pour un sol standard ($\phi = 10^{\circ}$).

Angle de frottement	Mohr-C	Drucker-P In	Drucker-P Ex	Parab
Φ=10°	α _{AL} =1.154*C	αal=1.294*C	αal=1.537*C	αal=0.98*C
	α _{sp} =1.154*C	α _{sd} =1.294*C	α _{sp} =1.537*C	αsd=0.98*C
Φ=30°	α _{AL} =2.773*C	α _{al} =2.576*C	α _{AL} =9.272*C	α _{al} =0.99*C
	α _{sD} =2.004*C	α _{sD} =1.943*C	α _{sp} =4.002*C	αsd=0.99*C

Tableau 1: Relation entre les facteurs de charges et la cohésion en analyse limite et en adaptation.



Fig. 5.5 (a) Calcul à l'analyse limite pour un sol standard ($\phi = 30^{\circ}$).



Fig. 5.5 (b) Calcul à l'adaptation pour un sol standard ($\phi = 30^{\circ}$).

Afin de mieux schématiser cette différence, nous avons fait varier progressivement l'angle de frottement interne en maintenant une cohésion constante (C=10 psi).

Les résultats de la figure (5.6) montrent clairement l'évolution de la charge limite en fonction de l'angle de frottement. De plus, nous constatons une bifurcation entre les deux méthodes de calcul, notamment pour les deux critères d'écoulement (Mohr-Coulomb et Drucker-Prager) à partir d'un certain angle de frottement ($\phi > 21^\circ$).

En revanche, nous constatons que pour le critère parabolique les facteurs de charges limites en adaptation et en analyse limite sont confondus. Ceci correspond en effet aux résultats déjà obtenus par RAAD & al. [78], et qui peut être expliqué par le fait que le critère n'admet pas de forte pression moyenne souvent à l'origine des variations de volume. A partir de la comparaison illustrée dans la figure (5.6), on constate également que par l'utilisation des deux critères d'écoulement, l'écart entre les charges limites devient de plus en plus important au fur et à mesure que l'angle de frottement augmente. On peut dire que cet écart est vraisemblablement du à l'existence de zones de concentration de contraintes plus au moins importantes au-delà d'un certain angle de frottement.



Fig. 5.6 Facteurs de charges limites en analyse limite et en adaptation pour plusieurs critères d'écoulements.

5.2.3 – EFFET DU MODULE DE YOUNG ET DE L'EPAISSEUR DE LA COUCHE D'ASPHALTE SUR LA CHARGE D'ADAPTATION

Dans cette partie nous étudions l'influence de certains paramètres mécaniques sur le comportement des sols. Pour cela nous considérons une structure composée de deux couches et soumise à une pression (P=5.0 psi) (la première étant une couche d'asphalte, la seconde est celle d'un sol frottant non pesant). Les tableaux 2 et 3 résument les données pour les deux couches choisies pour l'étude de l'effet du module de Young ainsi que l'épaisseur de la couche d'asphalte sur la charge limite d'adaptation. A noter que nous avons considéré dans tous ces exemples le maillage et les conditions aux limites de la figure 5.3.

	Couche d'asphalte					Couche de Sol			
	E ₁	H1	ν_1	C ₁	φ1	E ₂	V ₂	C ₂	φ ₂
	(10 ⁶ psi)	(in)		(psi)		psi)		(psi)	
	0.5								
Cas A1	1.0	15.	0.25	100.	35°	3000	0.47	3.0	0°
	1.5								
	3.0								
	0.5								
Cas A2	1.0	15.	0.25	500.	35°	3000	0.47	3.0	0°
	1.5								
	3.0								

Tableau 2: Propriétés matérielles pour un système à multicouche

Les résultats portés sur la figure (5.7 (a)), montrent qu'une augmentation du module de Young de la couche d'asphalte à faible cohésion, engendre une diminution de la charge limite d'adaptation. En revanche, pour la couche d'asphalte à forte cohésion (Fig. 5.7 (b)), cette variation entraîne une augmentation de la charge limite d'adaptation. Il convient toutefois de signaler que les résultats obtenus par RAAD & al. [77] montrent aussi cette influence, notamment en ce qui concerne les couches d'asphalte à forte cohésion. Nous en déduisons que la charge limite d'adaptation peut être largement augmentée par l'introduction d'une couche de sol améliorée soit par le compactage, soit par le renforcement du sol à l'aide de déchets industriels ou autres matériaux.



(a)



Fig. 5.7 (a) et (b) Influence de module de Young sur la charge limite.

	Couche d'asphalte					Couche de Sol			
	E	H ₁	ν_1	Cı	φ1	E ₂	V ₂	C ₂	φ ₂
	10 ⁶ (psi)	(in)		(psi)		(psi)		(psi)	
		4.							
Cas B1	1.5	6.	0.25	200.	35°	3000	0.47	3.0	0°
		9.							
		15.							
		4.							
Cas B2	1.5	6.	0.25	200.	35°	20000	0.47	20.0	0°
		9.							
		15.							

Tableau 3:	Propriétés	matérielles	pour une	couche d	'asphalte.
------------	------------	-------------	----------	----------	------------



(a)



(b)

Fig. 5.8 (a) et (b) Influence de l'épaisseur de la couche d'asphalte sur la charge limite.

A partir des résultats représentés par les figures (5.8 (a) et (b)), nous pouvons en conclure que la charge limite d'adaptation augmente avec l'épaisseur de la couche d'asphalte. Par ailleurs, nous constatons qu'au delà d'une certaine épaisseur (H=15 inch), cette charge limite à tendance d'être peu influencée par l'épaisseur, c'est pourquoi il nous semble ni rentable ni économique d'augmenter trop cette épaisseur.

5.3 – ANALYSE LIMITE ET ADAPTATION EN CONTRAINTE PLANE

Afin d'examiner directement l'influence de degré de la non-associativité sur l'étendu du domaine d'adaptation des structures sous charges variables et répétées, nous avons simulé un essai de cisaillement sur un sable dont la géométrie élémentaire et les conditions aux limites sont données par la figure 5.10. En effet, le choix de simuler un tel essai repose sur le fait que le phénomène de dilatance se manifeste d'une façon plus importante surtout en présence des contraintes de cisaillement.



Fig. 5.9 Essai de cisaillement direct.

Dans ce problème nous avons testé plusieurs maillages, et nous avons remarqué que l'affinage de maillage augmente le temps de calcul sans pour autant améliorer la solution audelà d'un certain nombre d'éléments. Ce qui nous a poussé à choisir 6 éléments pour cette simulation. Nous avons donc optimisé le problème sur 40 points-tests pour déterminer le domaine des charges limites.

L'étude est menée vis-à-vis de deux critères d'écoulement :

- critère de Mohr-Coulomb;

- critère de Drucker-Prager.

Chaque critère définit un domaine limite de variation de charges. Ce domaine englobe tous les points de charges limites et à l'intérieur duquel on a adaptation. Le domaine est obtenu de la façon suivante : pour les différents multiplicateurs de charges, définissant le domaine de charge \Re , nous calculons, à l'aide du processus d'optimisation, le facteur de sécurité dans une direction donnée du domaine de charges. La répétition de cette détermination dans plusieurs directions (balayage) permet d'obtenir le domaine d'adaptation pour lequel la condition d'adaptation est vérifiée.

Nous avons envisagé pour l'étude de cette simulation les deux cas de charges suivants:

- La charge axiale P et la charge tangentielle T varient d'une manière quelconque entre les limites $0 \le P \le P^*$, $0 \le T \le T^*$ (où P^{*} et T^{*} désignent les charges limites), (deux paramètres de charges "adaptation").

- La charge P et la charge T varient d'une manière proportionnelle (chargement proportionnel " analyse limite").

Pour tous ces exemples, nous avons considéré le maillage et les conditions aux limites de la figure ci-dessous. Les propriétés du sol sont prises égales à :

 $E = 12000.0 \text{ kN/m}^2$, v = 0.3, $C = 17.32 \text{ kN/m}^2$,

 $\phi = 30^{\circ}, \qquad 0^{\circ} \le \psi \le 30^{\circ} \qquad \gamma = 0.$



Nombre total de conditions aux limites : 17

40 points-tests



Fig. 5.10 Maillage et conditions aux limites.

Les résultats obtenus en utilisant les deux critères d'écoulement (Mohr-Coulomb et Drucker-Prager), pour chaque valeur de (ψ) comprise entre 0 et ϕ , sont représentés par les figures (5.11 et 5.12). Seule la comparaison entre les domaines obtenus par l'analyse limite et l'adaptation est considérée.



Fig. 5.11 Domaines d'adaptation d'un modèle élasto-plastique non-standard utilisant le critère de Mohr-Coulomb.

En effet, ces résultats montrent que pour un matériau non-standard $\Psi \neq \phi$, la charge limite pour un mécanisme de défaillance correspond en effet à une résistance résiduelle liée à la non-associativité de la règle d'écoulement. Par ailleurs, cette charge est inférieure à celle donnée par un matériau standard $\Psi = \phi$ quelle que soit la direction du chargement.



Fig. 5.12 Domaines d'adaptation d'un modèle élasto-plastique non-standard utilisant le critère de Drucker-Prager.
Pour le cas associé (ou non-associé), on remarque que les charges limites définis par l'analyse limite et l'adaptation sont confondus lorsque la direction de chargement (θ) est comprise entre 0° et 50°. Cet aspect est peut être dû à l'accroissement des contraintes normales.

En revanche, pour une direction de chargement $(50^\circ \le \theta \le 90^\circ)$, on constate une différence entre les deux domaines. Toutefois, cette différence est moins marquée par l'utilisation du critère de Drucker-Prager que par le critère de Mohr-Coulomb. Par conséquent, on peut dire que la dilatance influence considérablement le comportement du sol, surtout par la présence dominante des contraintes de cisaillement.

La représentation, dans les deux figures (5.13 et 5.14) schématise les domaines décalés d'adaptation et d'analyse limite en 2D, fonctions des charges (P^*, T^*) variables, obtenus pour des valeurs fixes d'angle de frottement et de dilatance. Nous relions ensuite entre eux les points issus de la même direction d'optimisation.



Fig. 5.13 Amplitude de la non-associativité quantifiée par l'angle ψ critère de Mohr-Coulomb.



Fig. 5.14 Amplitude de la non-associativité quantifiée par l'angle ψ critère de Drucker-Prager.

5.4 - VALIDATION DE L'APPROCHE PAR UNE METHODE INCREMENTALE

Afin de montrer l'efficacité de notre approche, nous avons mené une étude comparative avec une méthode incrémentale sous un chargement proportionnel et dont l'algorithme est basé sur un opérateur symétrique (chapitre 4). Pour cela, nous avons considéré la modélisation de la structure présentée par la figure ci-dessous. Cette dernière est soumise à un processus de chargement (P, T), qui représentent respectivement l'intensité de la force axiale et tangentielle. La recherche du domaine des charges limites pour les deux critères d'écoulement (Mohr-Coulomb et Drucker-Prager) s'effectue d'une manière analogue à celle traitée dans l'application précédente. Les caractéristiques mécaniques du matériau sont :

$E = 12000.0 \text{ kN/m}^2$	$\phi = 30^{\circ}$
v = 0.3	$\gamma = 0$
$C = 17.32 \text{ kN/m}^2$	$\psi = 20^\circ$, 30°



Fig. 5.15 Maillage et conditions aux limites.

Nous constatons que les résultats obtenus par la méthode de dissipation bornée (méthode de l'analyse limite et de l'adaptation) restent inférieurs à ceux obtenus par la méthode incrémentale, ce qui permet de garantir une meilleure sécurité (Fig. 5.16 et Fig. 5.17).

Dans une première conclusion, nous pouvons dire que le domaine de charges limites dans le cas non-associé est inférieur à celui du cas associé quelle que soit la direction du chargement. Ceci vient du fait que le champ statique, solution du problème non-associé, est également admissible pour le problème associé, comme nous l'avons vu au chapitre 3.



Fig. 5.16 Comparaison entre plusieurs méthodes de calcul ; modèle élasto-plastique non-standard utilisant le critère de Mohr-Coulomb.

Nous constatons également que les résultats des méthodes de calculs utilisées sont peu différents. Cette différence est moins significative par l'utilisation du critère de Drucker-Prager. Nous pensons que celle-ci est peut être due :

- Soit à l'influence de la contrainte intermédiaire ;
- Soit à la formulation par éléments finis utilisée dans les différents codes de calcul.

En effet, la méthode incrémentale repose sur la formulation en éléments finis cinématiquement admissible, qui est différente à celle utilisée dans la méthode de dissipation bornée (méthode de l'analyse limite et de l'adaptation). Celle-ci repose sur la minimisation de l'énergie complémentaire et sur la programmation mathématique. Quoique les résultats obtenus soient admissibles, nous pensons qu'il est souhaitable d'utiliser la méthode d'éléments finis "hybride" afin d'obtenir des résultats qui se rapprochent les uns aux autres.



Fig. 5.17 Comparaison entre plusieurs méthodes de calcul ; modèle élasto-plastique non-standard utilisant le critère de Drucker-Prager.

Nous avons voulu montrer par cette série d'exemples l'étendu des domaines d'adaptation pour certains matériaux standards. Pour cela, nous avons considéré différentes valeurs de la cohésion (C = 17.32, 25.0 et 40.0 kN/m²) ainsi que différents angles de frottement ($\phi = 0^{\circ}, 15^{\circ}$), (Fig. 5.18 et 5.19). Nous constatons que les domaines d'adaptation obtenus par les deux critères d'écoulements (Mohr-Coulomb et de Drucker-Prager) sont peu différents pour un angle de frottement ($\phi = 0^{\circ}$) quelle que soit la valeur de la cohésion et que cette différence devient plus significative au fur et à mesure que l'angle de frottement augmente.



Fig. 5.18 Domaines d'adaptation pour un sol standard ($\phi = 0^{\circ}$).





Fig. 5.19 Domaines d'adaptation pour un sol standard ($\phi = 15^{\circ}$).

Les figures (5.20 et 5.21) reflètent une représentation des domaines d'adaptation en faux 3-D et donnent une idée de quelle façon les deux paramètres plastiques (ϕ , C) peuvent apporter des contributions importantes dans l'amélioration des domaines de charges limites. A cet égard on peut accorder une préférence relative au critère de Drucker-Prager.



Fig. 5.20 Influence de l'angle de frottement sur le domaine d'adaptation pour un sol standard de Mohr-Coulomb.



Fig. 5.21 Influence de l'angle de frottement sur le domaine d'adaptation pour un sol standard de Drucker-Prager.

CONCLUSIONS

 \mathcal{ET}

PERSPECTIVES

CONCLUSIONS

ET

PERSPECTIVES

Nous rappelons que l'objectif principal de notre travail est une contribution à l'étude de l'adaptation des matériaux non-standards sous sollicitations variables et répétées. Pour cela, nous avons établi, par l'application du théorème statique d'adaptation, une nouvelle approche pour le calcul des charges limites de ces matériaux. Nous avons pris en considération, dans cette approche, le caractère non-associé de la règle d'écoulement.

Les modèles issus de la plasticité associée ne peuvent pas décrire convenablement le comportement des matériaux non-standards, pour lesquels le phénomène de dilatance avant la rupture est très important. Ainsi, pour tenir compte de ce phénomène de dilatance, nous avons supposé que la déformation plastique est perpendiculaire à une fonction de potentiel plastique différente de la fonction de charge à une constante additive près.

La construction de Q-surface que nous avons adopté, développée initialement par PALMER [69], nous a permis d'obtenir, d'une part, la validité du principe du travail maximal pour toute contrainte-test située à l'intérieur d'un domaine convexe, et d'autre part, une démonstration du premier théorème statique par une démarche totalement analogue à celle qui est employée par la théorie classique.

L'approche proposée, repose sur la méthode des éléments finis statiquement admissibles et sur la méthode de programmation mathématique. Cette dernière consiste à déterminer les multiplicateurs de charges limites qui garantissent l'adaptation de la structure, en exigeant qu'en tout point de celle-ci, l'énergie dissipée par déformations plastiques soit bornée. Pour cela, elle nécessite un minimum d'information sur l'histoire de chargement et demande :

- une solution purement élastique du problème de référence,

- un champ de contraintes résiduelles auto-équilibrées indépendant du temps,

- un processus d'optimisation, qui a pour but de déterminer le multiplicateur de charge assurant la non-violation du critère d'écoulement en tout point de la structure. L'application de cette approche, combinée à une résolution numérique par des techniques du "Lagrangien augmenté", s'est révélée très fructueuse dans le calcul des charges limites de nombreux problèmes pratiques. Nous avons montré toute la souplesse de cette approche qui a permis un traitement numérique simple en utilisant les critères d'écoulement de MOHR-COULOMB et de DRUCKER-PRAGER. Elle est facilement transportable à tout critère de rupture en particulier à ceux dont on connaît l'expression analytique de leur fonction d'écoulement.

Au vu des différents tests numériques effectués, il apparaît que la sensibilité de la solution à la non associativité est variable suivant les problèmes, mais à priori suffisamment significative pour être prise en compte dans les calculs. Nous avons également montré l'influence de certains paramètres mécaniques tels que l'angle de frottement et la cohésion sur l'étendu du domaine d'adaptation. A la lumière de ces résultats, et après examen des deux critères d'écoulement cités ci-dessus, nous pouvons accordé une préférence relative au critère de DRUCKER-PRAGER. L'utilisation d'une méthode de calcul incrémental basée sur la symétrisation de la matrice tangentielle PANDE & PIETRUSZCZAK [72], nous a permis notamment d'avoir une écriture adéquate de la loi constitutive incrémentale, et des gains intéressants en espace mémoire et en temps de calcul. A noter que nous ne l'avons employée que pour vérifier la validité des domaines obtenus par la méthode de la dissipation bornée.

Cependant, pour ces problèmes non-standards nous ne disposons pas de résultats expérimentaux qui permettent de donner des appréciations claires et précises sur la validité des résultats obtenus. L'analyse est un point de départ important pour l'application du théorème statique d'adaptation en mécanique des sols, notamment pour la prédiction des charges de défaillance des sols - structures sous chargements variables et répétées.

L'analyse a été limitée dans notre cas aux mécanismes de défaillances bidimensionnels, par conséquent, il serait intéressant de l'étendre aux mécanismes de défaillances tridimensionnels, et à d'autres matériaux tels que, les roches et les sols gelés. Ainsi, nous pouvons dégager quelques axes importants pour des futures recherches :

- Validation expérimentale des domaines des charges limites ;
- Effet de chargement cyclique sur la pression des pores ;
- Inclusion d'inertie et du fluage dans l'analyse de la réponse élastique pour une histoire de chargement prescrit;
- La prise en compte du caractère anisotrope du comportement des sols ;
- L'utilisation de la méthode d'éléments finis hybride peut donner une meilleure estimation de la charge d'adaptation.

REFERENCES

•

REFERENCES

- [1] ALWIS, W. A. M., GRUNDY, P., "On the Carrying Capacity of Rectangular Plates Under moving loads," Int. J. Mech. Sci. vol. 27, No. 3, pp. 187-197, 1985.
- [2] BAKER, R., DESAI, C. S., "Consequences of Deviatoric Normality in Plasticity With Isotropic Strain Hardening," Int. J. Num. Analyt. Methods in Geomech., vol. 6, N°. 3, pp. 383-390, 1982.
- [3] **BELYTSCHKO, T., HODGE, P. G.**, "Plane Stress Limit Analysis by Finite Elements," Proc. ASCE, J. of Eng. Mech. Div., vol. 96, EM 6, pp.931-944, 1970.
- [4] **BELYTSCHKO, T.,**"Plane Stress Shakedown Analysis by Finite Elements," Int. J. Mech. Sci. vol. 14, pp. 619-625, 1972.
- [5] **BLEICH, H.**, "Ueber die Bemessung Statisch unbestimmter Stahltragwerke Unter Berücksichtigung des Elastisch-Plastischen Verhaltes des Baustoffes," Bauingenieur, vol. 19/20, p. 261, 1932.
- [6] BLEICH, H., "On Uniqueness in Ideally Elastoplastic Problems in Case of Nonassociated Flow Rules," Transaction of ASME, Series E, J. App. Mech., vol. 94, pp. 983-987, 1972.
- [7] **BOGNER, F. K., FOX, R. L., SCHMIT, L. A.**,"The Generation of Inter-Element-Compatible Stiffness and Mass Matrices by the Use of Interpolation Formulas," Proc. of Conf. on Matrix Methods in Struct. Mech., Dayton, o., AFFDL-TR pp. 66-80, 1965.
- [8] CASEY, J., "Approximate Kinematical Relations in Plasticity", Int. J. Solids Structures, vol. 21, N° 7, pp. 671-682, 1985.
- [9] **CERADINI, G.**, "Sull'adattamento dei Corpi Elasto-plastici Sogetti ad Azioni Dinamiche," Giorale del Genio Civile, 4/5, 239-250, 1969.
- [10] CERADINI, G., "Dynamic Shakedown in Elastic-platic bodies," J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE 106 (3), pp. 481-498, 1980.
- [11] CHEN, W. F., "Limit Analysis and Soil Plasticity," Elsevier, 1975.
- [12] COLLINS, I. F., CLIFFE, P. F., "Shakedown in Frictional Materials Under Moving Surface Loads," Int. J. For Num. and Analyt. Meth. in Geomechanics 11, pp. 409-420, 1987.
- [13] CORRADI, L., MAIER, G., "Dynamic Inadaptation for Elastic-Perfectly Plastic Continua", J. Mech. Phys. Solids, 22, pp. 401-413, 1974.

- [14] CORRADI, L., ZAVELANI-ROSSI, A., "A Linear Programming Approach to Shakedown of Structures," Computer Methods in Appl. Mech. Eng., vol. 3, pp. 37-53, 1974.
- [15] **DARVE, F.,**"Formulation Incrémentale des Lois Rhélogiques," Thèse de doctorat d'état. Université de Grenoble, 1978.
- [16] DARVE, F., BOULON, M., CHAMBON, R., "Loi Rhélogique Incrémentale des Sols," J. de méc. vol. 17, N° 5, pp. 679-716, 1978.
- [17] DARVE, F., LABANICH, S.,"Incremental Constitutive Law for Sands and Clays: Simulation of Monotonic and Cyclic Tests," Int. J. Num. Analy. Meth. Geomech., vol. 6, No. 2, pp. 243-275, 1982.
- [18] **DEBORDES, O., NAYROLES, B.**, "Sur la Théorie et le Calcul à l'Adaptation des Structures Elastoplastiques", J. de Mécanique, vol. 15, N° 1, pp. 1-53, 1976.
- [19] **DEBORDES, O.**,"Contibution à la Théorie et au Calcul de l'Elastoplasticité Asymptotique," Thèse de Doctorat d'Etat. Université Aix-Marseille, 1977.
- [20] DESAI, C. S., HASHMI, Q. S. E., "Analysis, Evaluation and Implementation of a nonassociative Model for Geologic Materials," Int. J. Plasticity, vol. 5, pp. 392-420, 1989.
- [21] DESAI, C. S., SIRIWARDANE, H. J., "A Concept of Correction Function to Account for Nonassociative Characteristics of Geologic Media," Int. J. Num. Analyt. Meth. in Geomech., vol. 4, pp. 377-387, 1980.
- [22] DE SAXCE, G., "Sur Quelques Problèmes de Mécanique des Solides Considérés Comme Matériaux à potentiels Convexes," Thèse de Doctorat, Coll. Pub. Fac. Sci. Appl., 118, université de Liège, 1989.
- [23] DE SAXCE, G., FENG, Z. Q., "New Inequality and Functional for Contact with Friction : the Implicit Standard Material Approach," Mech. Struct. & Mach., 19 (3), pp. 301-325, 1991.
- [24] DRESCHER A., DETOURNAY E., "Limit load in Translational Failure Mechanisms for Associative and Non-associative materials," Géotechnique 43, No. 3, pp. 443-456, 1993.
- [25] DRUCKER, D. C., "Limit Analysis of two and three Dimensional Soil Mechanics Problems," J. Mech. Phys. Solids, 1, pp. 217-226, 1953.
- [26] DRUCKER, D. C., "Coulomb Friction, Plasticity and Limit Loads," J. Appl. Mech. 21, pp. 71-74, 1953.
- [27] **DRUCKER, D. C.**, "On Uniqueness in the Theory of Plasticity," Quart. Appl. Math., vol. 14, pp. 35-42, 1956.

- [28] **DRUCKER, D. C.,** "A Definition of Stable Inelastic Material," Jour. Appl. Mech. vol. 26, pp.101-106, 1959.
- [29] **DRUCKER, D. C.**, "On the Postulate of Stability of Materials in the Mechanics of Continua," J. Mechanique, 3, pp. 235-249, 1964.
- [30] DRUCKER, D. C., PRAGER, W., "Soil Mechanics and Plastic Analysis of Limit Design," Quart. of Appl. Math., vol. 10, No. 2, pp. 157-165, 1952.
- [31] DRUCKER, D. C., GIBSON, R. E., HENKEL, D. J., "Soil Mechanics and Working -Hardening Theories of Plasticity," Transactions of the ASCE 122, pp. 338-346, 1957.
- [32] FRANTZISKONIS, G. N., DESAI, C. S., SOMASUNDARAM, S., "Constitutive Model for Nonassociative Behavior," J. of Engg. Mech., ASCE, vol. 112, No. 9, 1986.
- [33] GALLAGHER, R. H., DHALLA, A. K., "Direct Flexibility Finite Element Elastoplastic Analysis", Englewood Cliffs, New Jersey, U.S.A, 1975.
- [34] **GIESE, H.**, "On The Application of Shakedown-Theory in Soil Mechanics," Institut für Mechanik, Ruhr-Universität Bochum, 1988.
- [35] GOLDSCHEIDER, M., "Shakedown and Incremental Collapse in Dry Sand Bodies," Proc. of Dynamical Methods in Soil and Rock Mech. Karlsruhe, Deutschland 2, 1977.
- [36] **GROSS-WEEGE, J.**, "Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken, "Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik N°58, Ruhr-Universität Bochum, 1988.
- [37] GROSS-WEEGE, J., WEICHERT, D., "Elastic-plastic Shells under Variable Mechanical and Thermal Loads," int. J. Mech. Sci., vol.34, No. 11, pp.863-880, 1992.
- [38] HALPHEN, B., NGUYEN, Q. S., "Sur les Matériaux Standards Généralisés", J. de Mécanique, vol. 14, N°1, pp. 39-63, 1975.
- [39] JAMES, R. G., BRANSBY, P. L., "A Velocity Field for Some Passive Earth Pressure Problems," Géotechnique 21, 1, pp. 61-83, 1971.
- [40] JOHNSON, K. L., SHERCLIFF, H. R., "Shakedown of 2-Dimensional Asperities in Sliding Contact," Int. J. Mech. Sci. vol. 34, pp. 375-394, 1992.
- [41] **KAMENJARZH, J., WEICHERT, D.**,"On Kinematic Upper Bounds for the Safety Factor in Shakedown Theory," Int. J. of Plasticity, vol. 8, pp. 1-11, 1992.
- [42] KOITER, W. T., "Some Remarks on Plastic Shakedown Theorems," Proc. 8th Int. Cong. Appl. Mech., n°1, Istambul, p. 220, 1952.
- [43] KOITER, W. T., "General Theorems for Elastic-Plastic Solids. in: Progress in Solid Mechanics (Eds. I.N. SNEDDON and R. HILL), North Holland, Amsterdam, pp. 165-221, 1960.

[44]	KÖNIG, J. A., "A Shakedown Theorem for Temperature Dependent Elastic Moduli", Bull. Ac, Pol. Sci., Ser. Sci. Techn. 17, pp. 161-165, 1969.
[45]	KÖNIG, J. A., "Stability of the Incremental Collapse," In: Inelastic Structures Under variable Loads (Eds. C. Polizzotto, A. Sawczuk), pp. 329-344, COGRAS, Palermo, 1984.
[46]	KÖNIG, J. A., "Shakedown of Elastic-Plastic Structures," PWN-Polish Scientific Publishers Warszawa Elsevier, 1987.
[47]	KÖNIG, J. A., NGUYEN DANG HUNG,"A Finite Element Formulation for Shakedown Problems Using a Yield Criterion of the Mean," Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 8, 179, 1976.
[48]	KÖNIG, J. A., SIEMASZKO, A., "Strainhardening Effects in Shakedown Processes", Ing. Archiv, 58, pp. 58-66, 1988.
[49]	LADE, P. L., "Elasto-plastic Stress-Strain Theory for Cohesionless Soil with Curved Yield Surfaces," Int. J. Solids Structures, vol. 13, pp. 1019-1035, 1977.
[50]	LADE, P. L., DUNCAN, J. M., "Stress Path Independent Behavior of Cohesionless Soil," J. Geotech. Eng. Div., ASCE, vol. 102, GT 1, pp. 51-68, 1976.
[51]	LADE, P. L., NELSON, R. B., MARVIN ITO, Y., "Instability of Granular Materials with Nonassociated Flow," J. of Eng. Mech., vol. 114, No. 12, pp. 2173-2191, 1988.
[52]	LORET, B., "Elastoplasticité à simple potentiel," Manuel de Rhéologie des Géomatériaux, Presse E.N. de Pont et Chaussee de Paris, 1987.
[53]	LUONG, M.P, SIDANER, F., "Phénomènes cycliques dans les milieux pulvérulents," Revue Française de Géotechnique. 10, pp. 39-53, 1980.
[54]	MAIER, G., "Shakedown Theory in perfect Elastoplasticity with associated and non- associated Flow-Laws: Finite Element, Linear Programming Approach," Mecanica, vol. IV, 3, pp. 1-11, 1969.
[55]	MAIER, G., "A Matrix Structural Theory of Piecewise Linear Elastoplasticity with Interacting Yield Planes," Meccanica, vol. 5, pp.54-66, 1970.
[56]	MAIER, G., "A Shakedown Matrix Theory Allowing for Work Hardening and Second Order Geometric Effect, Int. Symp. on Foundations of Plasticity, pp. 417-433, 1972.
[57]	MANDEL, J., "Adaptation D'une Structure Ecrouissable," Mech. Res. Comm., vol.3, 1976.
[58]	MELAN, E., "Theorie Statisch Unbestimmter Systeme aus Ideal-plastischem Baustoff," Sitber. Akad. Wiss. Wien, IIa, vol. 145, 1936, pp. 195-218, 1936.
[59]	MELAN, E., "Zur Plastizität des räumlichen Kontinuums", Ing. Arch. 9, pp. 116-126, 1938.

Références

- [60] MIURA, N., MURATA, H., YASUFUKU, N., "Stress-Strain Characteristics of Sand in a particlecrushing Region," Soils and Found., vol. 24, No. 1, pp. 77-89, 1984.
- [61] MORELLE, P., NGUYEN D. H., "Etude Numérique de l'Adaptation Plastique des Plaques et Coques de Révolution par les Eléments finis d'Equilibre," J. Méc. Théo. Appl., 2, pp. 567-599, 1983.
- [62] MORELLE, P., "Structural Shakedown Analysis by Dual Finite-Element Formulations," Eng. Struct., vol. 6, pp. 70-79, 1984.
- [63] MOREAU, J. J., "Fonctionnelles Convexes," Séminaire sur les Equations aux Dérivées Partielles, Collège de France, Paris, 1966.
- [64] MROZ, Z., "Non-associated Flow Laws in Plasticity, "J. of Mec., 2, pp. 21-42, 1963.
- [65] NAYROLES, B., "Essai de Théorie Fonctionnelle des Structures Rigides Plastiques Parfaites," J1. Mec., vol. 9, n°3, pp. 491-506, 1970.
- [66] NAYROLES, B., WEICHERT, D., "La Notion de Sanctuaire D'élasticité et L'adaptation des Structures," C. R. Acad. Sci. Paris, t. 316, série II, pp. 1493-1498, 1993.
- [67] NGUYEN, Q. S., GARY, G., "Flambage par Déformations plastiques Accumulées sous Charges Cycliques Additionnelle," j. de Méc. Thér. et Appl. 2, pp. 351-373, 1983.
- [68] OWEN, D. R. J., HINTON, E., "Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice," Pineridge Press Swansea, U.K, 1986.
- [69] **PALMER. A. C.**, "A Limit Theorem for Materials with non-associated Flow Laws," Journal de Mécanique, vol. 5, N° 2, pp. 217-222, 1966.
- [70] **PALGEN,L., NGUYEN, D. H.**,"Shakedown Analysis by Displacement Method and Equilibrium Finite Elements," Transactions of the CSME, vol. 6, No. 1, pp. 34-40, 1980-1981.
- [71] **PANDE, G. N., ABDULLAH, W. S.**, "Shakedown of elasto-plastic Continnua with Special Reference to Soil-Rock Structures," Int. Symp. on Soils under Cyclic and Transient Loading, Swansea, pp. 739-746, 1980.
- [72] **PANDE, G. N., PIETRUSZCZAK, S.**, "Symmetric Tangential Stiffness Formulation for non-associated Plasticity," Computers and Geotechnics 2, pp. 89-99, 1986.
- [73] **PIERRE, D. A., LOWE, M. J.**,"Mathematical Programming via Augmented Lagrangians," London: Addison-Wesley, 1975.
- [74] POOROOSHASB, H. B., HOLUBEC, I., SHERBOURNE, A. N., "Yielding and Flow of Sand in Triaxial Compression," Canadian Geotechnical Journal, Part I (1966), vol. 4, No. 3, pp. 179-190, 1966, Part II and III, vol. 4, No. 4, pp. 376-397, 1967.

- [75] PRAGER, W., "Shakedown in Elastic, Plastic Media Subjected to Cycles of Load and Temperature, "Symposium, Brown University - Providence, R.I., U.S.A. pp. 239-244, 1957.
- [76] RAAD, L., WEICHERT, D., NAJIM, W., "Stability of Multilayer Systems Under Repeated Loads," In. Transportation Research Record, 1207, TRB, National Research Council, Washigton, D.C, pp. 181-186, 1988.
- [77] **RAAD, L., WEICHERT, D., HAIDAR, A.**, "Shakedown and Fatigue of Pavements with Granular Bases,"In: Transportation Research Record, 1227, Washington, D.C, 1989.
- [78] **RAAD, L., WEICHERT, D., HAIDAR, A.**, "Analysis of Full-Depth Asphalt Concrete Pavements Using Shakedown Theory," In: Transportation Research Record, 1227, Washington, D.C pp. 53-65, 1989.
- [79] **RADENKOVIC, D.,**"Théorèmes Limites pour un Matériaux de Coulomb à Dilatation non Standardisée," C. R. Ac. Sc. Paris, 252, pp. 4103-4104, 1961.
- [80] ROCKAFELLAR, R. T., "Convex Analysis," Princeton University Press, 1970.
- [81] **ROWE, P. W.**, "The Stress-Dilatancy Relation for Static Equilibrium of an Assembly of Particles in Contact," Geotechnique. London, 1961.
- [82] ROWE, P. W., "Displacement and Failure Modes of Model Offshore Gravity Platforms Founded on Clay," Conf. Offshore Europe 75, Pub. Spearhead publications, 1975.
- [83] **ROWE, P. W.**, "Model Studies of Gravity Structures Founded on Clay," Proc. Conf. Behaviour of Offshore Structures, (BOSS), 1976.
- [84] **RYBICKI, E. F., SCHMIT, L. A.**,"An Incremental Complementary Energy Method of Nonlinear Stress Analysis," AIAA Journal, vol. 8, No. 10, pp.1805-1812, 1970.
- [85] SALENCON, J., "Un Exemple de non Validité de la Théorie Classique des Charges Limites pour un Système non Standard," Int. Symp. on Found. of Plasticity, Varsovie, pp. 32-39, 1972.
- [86] SALENCON, J., "Théorie de la Plasticité pour les Applications à la Mécanique des Sols," Eyrolles, Paris, 1974.
- [87] SALENCON, J., "Calcul à la Rupture et Analyse Limite," Presse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 1983.
- [88] SAWCZUK, A. "Shakedown of Elasto-Plastic Structures," Nuclear Eng. and Design, vol. 28, pp. 121-136, 1974.
- [89] SHARP, R. W., "Pavement Design based on Shakedown Analysis. In: Transportation Research Record 1022, TRB, National Research Council, Washington, D.C., pp. 99-107, 1985.

- [90] SIEMASZKO, A., KÖNIG, J. A., "Analysis of Stability of Incremental Collapse of Skeletal Structures," J. Struct. Mech., vol. 13, pp. 301-321, 1985.
- [91] SOLOMIN, V. I., SHIROKOV, N., KOPEIKIN, V. S., "Stress-Strain Relationship of cohesionless Soil based on the non associated Flow Rule," Proc. Fourth Int. Conf. Methods in Geomechanics, Edmonton, Alberta, Canada, 1982.
- [92] STIEFEL, E., "Note on Jordan Elimination, Linear Programming and Tchebycheff Approximation," Numer. Math. Bd. 2, pp. 1-17, 1960.
- [93] SYMOND, P. S., PRAGER, W., "Elastic-Plastic Analysis of Structures Subjected to Loads Varying Arbitrarily Between Prescribed Limits," J. of Appl. Mech., pp. 315-323, 1950.
- [94] SYMOND, P. S., "Shakedown in Continuous Media," J. of Applied Mech., vol. 18 N°. 85, 1951.
- [95] TSAU, Y. W., ROSS, B. C., BRUCE, E., "Limit State Sensitivity of Strucural Frames Subjected to Cyclic Forces," J. of Struct. Engineering, vol. 116, No. 10, pp. 2825-2841, 1990.
- [96] WEICHERT, D., "Elastic-plastic Structures Under Variable Loads at Small Strains and Moderate Rotations," Lecture Notes in Engineering, 19, Finite Rotations in Structural Mechanics, Proceeding of the Euromech Colloquium 197 Jablonna, Poland, Springer-Verlag, 1985.
- [97] WEICHERT, D., "On the Influence of Geometrical Nonlinearities on the Shakedown of Elastic-plastic Structures," Int. J. Plasticity, vol. 2, n°2, pp. 135-148, 1986.
- [98] WEICHERT, D., GROSS-WEEGE, J., "The Numerical Assessment of Elastic -Plastic Sheets Under Variable Mechanical and Thermal Loads Using a Simplified Two-Surface Yield Condition," Int. J. Mech. Sci.Vol .30, N°10 pp. 757-767, 1988.
- [99] WEICHERT, D., RAAD, L., "Extension of the Static Shakedown-theorem to Certain Class of Materials with Variable Elastic Coefficients," Mech. Res. Comm., vol. 19 (6), 1992.
- [100] ZIENKIEWICZ, O. C., HUMPHESON, C., LEWIS, R. W., "Associated and Nonassociated Visco-plasticity and Plasticity in Soil Mechanics," Géotechnique 25, N°.4, pp. 671-689, 1975.
- [101] ZIENKIEWICZ, O. C., LEWIS, R. W., NORRIS, V. A., HUMPHESON, C.," Numerical Analysis for Foundation of Offshore Structures with Special Reference to Progressive Deformation," Society of Petrolem Eng. of AIME, SPE 5760, 1976.
- [102] ZIENKIEWICZ, O. C., CHANG, C. T., HINTON, E., MROZ, Z., NORRIS, V., "Soil Behaviour Under Repeated Loads, Research at Swansea for Numerical Methods in Eng., University College of Swansea, U.K. 1979.

ANNEXES

•

ANNEXE A

Dans notre cas, comme il est nécessaire de satisfaire à la fois la fonction de contraintes et ses dérivées le long des frontières, nous avons utilisé la formule d'interpolation polynomiale d'Hermite. GALLAGHER & DHALLA [33] l'ont également utilisé pour l'étude de la flexion des plaques.

$$\Phi(\zeta,\eta) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \left[H_{oi}(\zeta) H_{oj}(\eta) \Phi_{ij} + H_{1i}(\zeta) H_{oj}(\eta) \Phi_{,xij} + H_{oi}(\zeta) H_{1j}(\eta) \Phi_{,yij} + H_{1i}(\zeta) H_{1j}(\eta) \Phi_{,xyij} \right]$$
(A.1)

avec :

$$\begin{aligned} H_{01}(\zeta) &= 1 - 3\zeta^{2} + 2\zeta^{3} & H_{01}(\eta) = 1 - 3\eta^{2} + 2\eta^{3} \\ H_{02}(\zeta) &= 3\zeta^{2} - 2\zeta^{3} & H_{02}(\eta) = 3\eta^{2} - 2\eta^{3} \\ H_{11}(\zeta) &= a(\zeta - 2\zeta^{2} + \zeta^{3}) & H_{11}(\eta) = b(\eta - 2\eta^{2} + \eta^{3}) \\ H_{12}(\zeta) &= a(-\zeta^{2} + \zeta^{3}) & H_{12}(\eta) = b(-\eta^{2} + \eta^{3}) \end{aligned}$$
(A.2)

où $\zeta = \frac{x}{a}$ et $\eta = \frac{y}{b}$. Nous rappelons que les H_i représentent ici les fonctions d'interpolations.

Pour tenir compte des conditions aux frontières dans la formulation de l'énergie complémentaire, nous avons utilisé les équations de contraintes. En effet, ces dernières doivent également tenir compte de la continuité inter-éléments. Afin d'illustré la méthode de détermination de ces équations de contraintes, nous considérons l'exemple de la figure cidessous :



Fig. A.1

La détermination des quantités revenant à chaque côté de l'élément, se fait de la manière suivante :

<u>Côté 11-21</u>

$$\int_{0}^{a} \sigma_{y}(x) dx = -\Phi_{,x}^{11} + \Phi_{,x}^{21}$$

$$\int_{00}^{ax} \sigma_{y}(x) dx = -\Phi^{11} + -a\Phi_{,x}^{11} + \Phi^{21}$$
(A.3)
$$\int_{0}^{a} \tau_{xy}(x) dx = \Phi_{,y}^{11} - \Phi_{,y}^{21}$$

<u>Côté 21-22</u>

.

1.

$$\int_{0}^{b} \sigma_{x}(y) dy = -\Phi_{,y}^{21} + \Phi_{,y}^{22}$$

$$\int_{0}^{by} \sigma_{x}(y) dy = -\Phi^{21} + -b \Phi_{,y}^{21} + \Phi^{22}$$

$$\int_{0}^{b} \tau_{xy}(y) dy = \Phi_{,x}^{21} - \Phi_{,x}^{22}$$
(A.4)

La répétition de cette opération pour l'ensemble des côtés de l'élément, nous permet ainsi de déterminer les équations de contraintes.

- 113 -

Nous proposons dans ce qui suit le développement de l'expression (A.1) avec les fonctions d'interpolations. Par la suite, nous donnons les expressions de contraintes σ_x, σ_y et τ_{xy} calculées selon l'équation (4.5).

$$\Phi = (1 - 3\zeta^{2} - 3\eta^{2} + 2\zeta^{3} + 2\eta^{3} + 9\zeta^{2}\eta^{2} - 6\zeta^{3}\eta^{2} - 6\zeta^{2}\eta^{3} + 4\zeta^{3}\eta^{3})\Phi^{11} + (\zeta - 2\zeta^{2} + \zeta^{3} - 3\zeta\eta^{2} + 2\zeta\eta^{3} + 6\zeta^{2}\eta^{2} - 4\zeta^{2}\eta^{3} - 3\zeta^{3}\eta^{2} + 2\zeta^{3}\eta^{3})a\Phi^{11}_{,x} + (\eta - 2\eta^{2} + \eta^{3} - 3\zeta^{2}\eta + 2\zeta^{3}\eta + 6\zeta^{2}\eta^{2} - 3\zeta^{2}\eta^{3} - 4\zeta^{3}\eta^{2} + 2\zeta^{3}\eta^{3})b\Phi^{11}_{,y} + (\zeta\eta - 2\zeta\eta^{2} - 2\zeta^{2}\eta + \zeta\eta^{3} + \zeta^{3}\eta + 4\zeta^{2}\eta^{2} - 2\zeta^{2}\eta^{3} - 2\zeta^{3}\eta^{2} + \zeta^{3}\eta^{3})ab\Phi^{11}_{,xy}$$

$$+ (3\zeta^{2} - 2\zeta^{3} - 9\zeta^{2}\eta^{2} + 6\zeta^{2}\eta^{3} + 6\zeta^{3}\eta^{2} - 4\zeta^{3}\eta^{3})\Phi^{21} + (-\zeta^{2} + \zeta^{3} + 3\zeta^{2}\eta^{2} - 2\zeta^{2}\eta^{3} - 3\zeta^{3}\eta^{2} + 2\zeta^{3}\eta^{3})a\Phi^{21}_{,x} + (3\zeta^{2}\eta - 2\zeta^{3}\eta - 6\zeta^{2}\eta^{2} + 3\zeta^{2}\eta^{3} + 4\zeta^{3}\eta^{2} - 2\zeta^{3}\eta^{3})b\Phi^{21}_{,y} + (-\zeta^{2}\eta + \zeta^{3}\eta + 2\zeta^{2}\eta^{2} - \zeta^{2}\eta^{3} - 2\zeta^{3}\eta^{2} + \zeta^{3}\eta^{3})ab\Phi^{21}_{,xy}$$

$$+ (9\zeta^{2}\eta^{2} - 6\zeta^{2}\eta^{3} - 6\zeta^{3}\eta^{2} + 4\zeta^{3}\eta^{3})\Phi^{22} + (-3\zeta^{2}\eta^{2} + 2\zeta^{2}\eta^{3} + 3\zeta^{3}\eta^{2} - 2\zeta^{3}\eta^{3})a\Phi^{22}_{,x} + (-3\zeta^{2}\eta^{2} + 3\zeta^{2}\eta^{3} + 2\zeta^{3}\eta^{2} - 2\zeta^{3}\eta^{3})b\Phi^{22}_{,y} + (\zeta^{2}\eta^{2} - \zeta^{2}\eta^{3} - \zeta^{3}\eta^{2} + \zeta^{3}\eta^{3})ab\Phi^{22}_{,xy}$$

$$+ (3\eta^{2} - 2\eta^{3} - 9\zeta^{2}\eta^{2} + 6\zeta^{2}\eta^{3} + 6\zeta^{3}\eta^{2} - 4\zeta^{3}\eta^{3})\Phi^{12} + (3\zeta\eta^{2} - 2\zeta\eta^{3} - 6\zeta^{2}\eta^{2} + 4\zeta^{2}\eta^{3} + 3\zeta^{3}\eta^{2} - 2\zeta^{3}\eta^{3})a\Phi^{12}_{,x} + (-\eta^{2} + \eta^{3} + 3\zeta^{2}\eta^{2} - 3\zeta^{2}\eta^{3} - 2\zeta^{3}\eta^{2} + 2\zeta^{3}\eta^{3})b\Phi^{12}_{,y} + (-\zeta\eta^{2} + \zeta\eta^{3} + 2\zeta^{2}\eta^{2} - 2\zeta^{2}\eta^{3} - \zeta^{3}\eta^{2} + \zeta^{3}\eta^{3})ab\Phi^{12}_{,xy}$$

(A.5)

$$\sigma_{\mathbf{x}} = \Phi_{,yy} = \frac{1}{b^{2}} \Big[\left(-6 + 12\eta + 18\zeta^{2} - 36\zeta^{2}\eta - 12\zeta^{3} + 24\zeta^{3}\eta \right) \Phi^{11} \\ + \left(-4 + 6\eta + 12\zeta^{2} - 8\zeta^{3} - 18\zeta^{2}\eta + 12\zeta^{3}\eta \right) a \Phi_{,x}^{11} \\ + \left(-6\zeta + 12\zeta\eta + 12\zeta^{2} - 6\zeta^{3} - 24\zeta^{2}\eta + 12\zeta^{3}\eta \right) b \Phi_{,y}^{11} \\ + \left(-4\zeta + 6\zeta\eta + 8\zeta^{2} - 4\zeta^{3} - 12\zeta^{2}\eta + 6\zeta^{3}\eta \right) a b \Phi_{,xy}^{11}$$

$$+ (6 - 12\eta - 18\zeta^{2} + 12\zeta^{3} + 36\zeta^{2}\eta - 24\zeta^{3}\eta)\Phi^{21} + (-2 + 6\eta + 6\zeta^{2} - 4\zeta^{3} - 18\zeta^{2}\eta + 12\zeta^{3}\eta)a \Phi^{21}_{,x} + (6\zeta - 12\zeta\eta - 12\zeta^{2} + 6\zeta^{3} + 24\zeta^{2}\eta - 12\zeta^{3}\eta)b \Phi^{21}_{,y} + (-2\zeta + 6\zeta\eta + 4\zeta^{2} - 2\zeta^{3} - 12\zeta^{2}\eta + 6\zeta^{3}\eta)ab \Phi^{21}_{,xy}$$

+
$$(18\zeta^{2} - 12\zeta^{3} - 36\zeta^{2}\eta + 24\zeta^{3}\eta)\Phi^{22}$$

+ $(-6\zeta^{2} + 4\zeta^{3} + 18\zeta^{2}\eta - 12\zeta^{3}\eta)a\Phi^{22}_{,x}$
+ $(-6\zeta^{2} + 6\zeta^{3} + 12\zeta^{2}\eta - 12\zeta^{3}\eta)b\Phi^{22}_{,y}$
+ $(2\zeta^{2} - 2\zeta^{3} - 6\zeta^{2}\eta + 6\zeta^{3}\eta)ab\Phi^{22}_{,xy}$

$$+ (-18\zeta^{2} + 12\zeta^{3} + 36\zeta^{2}\eta - 24\zeta^{3}\eta)\Phi^{12} + (-12\zeta^{2} + 8\zeta^{3} + 18\zeta^{2}\eta - 12\zeta^{3}\eta)a \Phi^{12}_{,x} + (6\zeta^{2} - 6\zeta^{3} - 12\zeta^{2}\eta + 12\zeta^{3}\eta)b \Phi^{12}_{,y} + (4\zeta^{2} - 4\zeta^{3} - 6\zeta^{2}\eta + 6\zeta^{3}\eta)a b \Phi^{12}_{,xy}$$

(A.6)

$$\sigma_{y} = \Phi_{,xx} = \frac{1}{a^{2}} \left[\left(-6 + 12\zeta + 18\eta^{2} - 36\zeta\eta^{2} - 12\eta^{3} + 24\zeta\eta^{3} \right) \Phi^{11} + \left(-4 + 6\zeta + 12\eta^{2} - 8\eta^{3} - 18\zeta\eta^{2} + 12\zeta\eta^{3} \right) a \Phi_{,x}^{11} + \left(-6\eta + 12\zeta\eta + 12\eta^{2} - 6\eta^{3} - 24\zeta\eta^{2} + 12\zeta\eta^{3} \right) b \Phi_{,y}^{11} + \left(-4\eta + 6\zeta\eta + 8\eta^{2} - 4\eta^{3} - 12\zeta\eta^{2} + 6\zeta\eta^{3} \right) a b \Phi_{,xy}^{11} + \left(-4\eta + 6\zeta\eta + 8\eta^{2} - 4\eta^{3} - 12\zeta\eta^{2} + 6\zeta\eta^{3} \right) a b \Phi_{,xy}^{11} + \left(-4\eta + 6\zeta\eta + 8\eta^{2} - 4\eta^{3} - 12\zeta\eta^{2} + 6\zeta\eta^{3} \right) a b \Phi_{,xy}^{11} + \left(-4\eta + 6\zeta\eta + 8\eta^{2} - 4\eta^{3} - 12\zeta\eta^{2} + 6\zeta\eta^{3} \right) a^{2} b \Phi_{,xy}^{11} + \left(-4\eta + 6\zeta\eta + 8\eta^{2} - 4\eta^{3} - 12\zeta\eta^{2} + 6\zeta\eta^{3} \right) a^{2} b \Phi_{,xy}^{11} + \left(-4\eta + 6\zeta\eta + 8\eta^{2} - 4\eta^{3} - 12\zeta\eta^{2} + 6\zeta\eta^{3} \right) a^{2} b \Phi_{,xy}^{11} + \left(-4\eta + 6\zeta\eta + 8\eta^{2} - 4\eta^{3} - 12\zeta\eta^{2} + 6\zeta\eta^{3} \right) a^{2} b \Phi_{,xy}^{11} + \left(-4\eta + 6\zeta\eta + 8\eta^{2} - 4\eta^{3} - 12\zeta\eta^{2} + 6\zeta\eta^{3} \right) a^{2} b \Phi_{,xy}^{11} + \left(-4\eta + 6\zeta\eta + 8\eta^{2} - 4\eta^{3} - 12\zeta\eta^{2} + 6\zeta\eta^{3} \right) a^{2} b \Phi_{,xy}^{11} + \left(-4\eta + 6\zeta\eta + 8\eta^{2} - 4\eta^{3} - 12\zeta\eta^{2} + 6\zeta\eta^{3} \right) a^{2} b \Phi_{,xy}^{11} + \left(-4\eta + 6\zeta\eta + 8\eta^{2} - 4\eta^{3} - 12\zeta\eta^{2} + 6\zeta\eta^{3} \right) a^{2} b \Phi_{,xy}^{11} + \left(-4\eta + 6\zeta\eta + 8\eta^{2} - 4\eta^{3} - 12\zeta\eta^{2} + 6\zeta\eta^{3} \right) a^{2} b \Phi_{,xy}^{11} + \left(-4\eta + 6\zeta\eta + 8\eta^{2} - 4\eta^{3} - 12\zeta\eta^{2} + 6\zeta\eta^{3} \right) a^{2} b^{2} b^{2} + \left(-4\eta + 6\zeta\eta + 8\eta^{2} - 4\eta^{3} - 12\zeta\eta^{2} + 6\zeta\eta^{3} \right) a^{2} b^{2} b^{2} + \left(-4\eta + 6\zeta\eta + 8\eta^{2} + 4\eta^{3} + 6\zeta\eta^{3} \right) a^{2} b^{2} b^{2} + \left(-4\eta + 6\zeta\eta + 8\eta^{2} + 4\eta^{3} + 6\zeta\eta^{3} \right) a^{2} b^{2} b^{2} + \left(-4\eta + 6\zeta\eta + 8\eta^{2} + 4\eta^{3} + 6\zeta\eta^{3} \right) a^{2} b^{2} b^{2} + \left(-4\eta + 6\zeta\eta + 8\eta^{2} + 4\eta^{3} + 6\zeta\eta^{3} \right) a^{2} b^{2} b^{2} + \left(-4\eta + 6\zeta\eta + 8\eta^{2} + 4\eta^{3} + 6\zeta\eta^{3} \right) a^{2} b^{2} b^{2} + \left(-4\eta + 6\zeta\eta + 8\eta^{2} + 6\zeta\eta^{3} \right) a^{2} b^{2} b^{2} + \left(-4\eta + 6\zeta\eta + 8\eta^{2} + 6\zeta\eta^{3} \right) a^{2} b^{2} b^{2} + \left(-4\eta + 6\zeta\eta + 6\zeta\eta^{3} \right) a^{2} b^{2} b^{2} + \left(-4\eta + 6\zeta\eta + 8\eta^{2} + 6\zeta\eta^{3} \right) a^{2} b^{2} b^{2} + \left(-4\eta + 6\zeta\eta + 8\eta^{2} + 6\zeta\eta^{3} \right) a^{2} b^{2} b^{2} + \left(-4\eta + 6\zeta\eta + 6\zeta\eta^{3} \right) a^{2} b^{2} b^{2} + \left(-4\eta + 6\zeta\eta + 6\zeta\eta^{3} \right) a^{2} b^{2} b^{2} + \left(-4\eta + 6\zeta\eta + 6\zeta\eta + 6\zeta\eta + 6\zeta\eta^{3} \right) a^{2} b^{2$$

+
$$(6-12\zeta - 18\eta^{2} + 12\eta^{3} + 36\zeta\eta^{2} - 24\zeta\eta^{3})\Phi^{21}$$

+ $(-2+6\zeta + 6\eta^{2} - 4\eta^{3} - 18\zeta\eta^{2} + 12\zeta\eta^{3})a\Phi^{21}_{,x}$
+ $(6\eta - 12\zeta\eta - 12\eta^{2} + 6\eta^{3} + 24\zeta\eta^{2} - 12\zeta\eta^{3})b\Phi^{21}_{,y}$
+ $(-2\eta + 6\zeta\eta + 4\eta^{2} - 2\eta^{3} - 12\zeta\eta^{2} + 6\zeta\eta^{3})ab\Phi^{21}_{,xy}$

$$+ (18\eta^{2} - 12\eta^{3} - 36\zeta\eta^{2} + 24\zeta\eta^{3})\Phi^{22} + (-6\eta^{2} + 4\eta^{3} + 18\zeta\eta^{2} - 12\zeta\eta^{3})a\Phi^{22}_{,x} + (-6\eta^{2} + 6\eta^{3} + 12\zeta\eta^{2} - 12\zeta\eta^{3})b\Phi^{22}_{,y} + (2\eta^{2} - 2\eta^{3} - 6\zeta\eta^{2} + 6\zeta\eta^{3})ab\Phi^{22}_{,xy}$$

$$+ (-18\eta^{2} + 12\eta^{3} + 36\zeta\eta^{2} - 24\zeta\eta^{3})\Phi^{12} + (-12\eta^{2} + 8\eta^{3} + 18\zeta\eta^{2} - 12\zeta\eta^{3})a \Phi^{12}_{,x} + (6\eta^{2} - 6\eta^{3} - 12\zeta\eta^{2} + 12\zeta\eta^{3})b \Phi^{12}_{,y} + (4\eta^{2} - 4\eta^{3} - 6\zeta\eta^{2} + 6\zeta\eta^{3})ab \Phi^{12}_{,xy}$$

(A.7)

۲

.

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= -\Phi_{,xy} = -\frac{1}{ab} \Big[\Big(36\zeta\eta - 36\zeta^2\eta - 36\zeta\eta^2 + 36\zeta^2\eta^2 \Big) \Phi^{11} \\ &\quad + \Big(-6\eta + 6\eta^2 + 24\zeta\eta - 24\zeta\eta^2 - 18\zeta^2\eta + 18\zeta^2\eta^2 \Big) a \Phi^{11}_{,x} \\ &\quad + \Big(-6\zeta + 6\zeta^2 + 24\zeta\eta - 18\zeta\eta^3 - 24\zeta^2\eta + 18\zeta^2\eta^2 \Big) b \Phi^{11}_{,y} \\ &\quad + \Big(1 - 4\eta - 4\zeta + 3\eta^2 + 3\zeta^2 + 16\zeta\eta - 12\zeta\eta^2 - 12\zeta^2\eta + 9\zeta^2\eta^2 \Big) \ ab \Phi^{11}_{,xy} \end{aligned}$$

$$+ (-36\zeta\eta + 36\zeta\eta^{2} 36\zeta^{2}\eta - 36\zeta^{2}\eta^{2})\Phi^{21} + (12\zeta\eta - 12\zeta\eta^{2} - 18\zeta^{2}\eta + 18\zeta^{2}\eta^{2})a \Phi^{21}_{,x} + (6\zeta - 24\zeta\eta - 6\zeta^{2} + 18\zeta\eta^{2} + 24\zeta^{2}\eta - 18\zeta^{2}\eta^{2})b \Phi^{21}_{,y} + (-2\zeta + 8\zeta\eta + 3\zeta^{2} - 6\zeta\eta^{2} - 12\zeta^{2}\eta + 9\zeta^{2}\eta^{2})a b \Phi^{21}_{,xy}$$

$$+ (36\zeta\eta - 36\zeta\eta^{2} - 36\zeta^{2}\eta + 36\zeta^{2}\eta^{2})\Phi^{22} + (-12\zeta\eta + 12\zeta\eta^{2} + 18\zeta^{2}\eta - 18\zeta^{2}\eta^{2})a\Phi^{22}_{,x} + (-12\zeta\eta + 18\zeta\eta^{2} + 12\zeta^{2}\eta - 18\zeta^{2}\eta^{2})b\Phi^{22}_{,y} + (4\zeta\eta - 6\zeta\eta^{2} - 6\zeta^{2}\eta + 9\zeta^{2}\eta^{2})ab\Phi^{22}_{,xy}$$

$$+ (-36\zeta\eta + 36\zeta\eta^{2} + 36\zeta^{2}\eta - 36\zeta^{2}\eta^{2})\Phi^{12} + (6\eta - 6\eta^{2} - 24\zeta\eta + 24\zeta\eta^{2} + 18\zeta^{2}\eta - 18\zeta^{2}\eta^{2})a \Phi^{12}_{,x} + (12\zeta\eta - 18\zeta\eta^{2} - 12\zeta^{2}\eta + 18\zeta^{2}\eta^{2})b \Phi^{12}_{,y} + (-2\eta + 3\eta^{2} + 8\zeta\eta - 12\zeta\eta^{2} - 6\zeta^{2}\eta + 9\zeta^{2}\eta^{2})a b \Phi^{12}_{,xy}$$

(A.8)

ANNEXE B

1 SUBROUTINE FXNS

L'introduction de la condition d'écoulement dans cette subroutine du programme d'optimisation LPNLP, exprimée en terme de contraintes principales, représente une condition de contrainte d'inégalité non linéaire. En effet, cette subroutine calcul les valeurs actuelles de la fonction d'écoulement FI(I) pour chaque point-test.

Connaissant la relation entre les contraintes et le facteur de charge (α)

$$\sigma_{x} = \alpha \sigma_{x}^{e} + \rho_{x}^{e} , \quad \sigma_{y} = \alpha \sigma_{y}^{e} + \rho_{y} , \quad \tau_{xy} = \alpha \tau_{xy}^{e} + \rho_{xy}$$
(B.1)

où σ_x° , σ_y° et τ_{xy}° sont les contraintes élastiques calculées en annexe A.

Les contraintes principales (max. et min.) sont calculées par l'expression suivante :

$$\sigma_{1,3} = \frac{1}{2} \left(\sigma_x + \sigma_y \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y \right)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$
(B.2)

2 SUBROUTINE GRAD

Dans cette subroutine les gradients de la fonction d'écoulement sont calculés analytiquement par l'intermédiaire des dérivées partielles. Les fonctions d'écoulements FI(I) sont données en termes des contraintes principales σ_1 et σ_3 , lesquelles sont fonction de σ_x , σ_y et τ_{xy} . Ces contraintes dépendent à leurs tour des paramètres de fonction de contrainte XG(J) pour la structure chargé et XA(J) pour les contraintes résiduelles dans la structure non chargé. La matrice CC calculée par la procédure d'élimination de Gauss-Jordan (STIEFEL [99]) est multipliée par les paramètres indépendants X(J).

$$GI(I,K) = \frac{\partial FI(I)}{\partial X(K)} = \frac{\partial FI(I)}{\partial \sigma_1} * \frac{\partial \sigma_1}{\partial XA(J)} * \frac{\partial XA(J)}{\partial X(K)} + \frac{\partial FI(I)}{\partial \sigma_3} * \frac{\partial \sigma_3}{\partial XA(J)} * \frac{\partial XA(J)}{\partial X(K)}$$
(B.3)
avec $\frac{\partial XA(J)}{\partial X(K)} = CC(J,NNB+K)$ (B.4)

Connaissant σ_x , σ_y et τ_{xy} (voir Annexe A), les dérivées $\frac{\partial \sigma}{\partial XA(J)}$ peuvent être

exprimées comme suit:

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial XA(J)} = \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_x} * \frac{\partial \sigma_x}{\partial XA(J)} + \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_y} * \frac{\partial \sigma_y}{\partial XA(J)} + \frac{\partial \sigma_1}{\partial \tau_{xy}} * \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial XA(J)}$$
(B.5)

$$\frac{\partial \sigma_3}{\partial XA(J)} = \frac{\partial \sigma_3}{\partial \sigma_x} * \frac{\partial \sigma_x}{\partial XA(J)} + \frac{\partial \sigma_3}{\partial \sigma_y} * \frac{\partial \sigma_y}{\partial XA(J)} + \frac{\partial \sigma_3}{\partial \tau_{xy}} * \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial XA(J)}$$
(B.6)

CALCUL DE
$$\frac{\partial FI(I)}{\partial \sigma}$$
 POUR LES TROIS CRITERES:

Cas associé (a) **MOHR-COULOMB**

La mise en équilibre limite du sol avec l'hypothèse de Mohr-Coulomb indique que la ligne de glissement générale fait un angle de $(\pi/4 + \phi/2)$ avec la direction de contrainte principale majeure.

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = 2C\cos\phi - (\sigma_1 + \sigma_3)\sin\phi$$

$$\sigma_{3} = \frac{(1 + \sin \phi)}{(1 - \sin \phi)} \sigma_{1} - \frac{2C \cos \phi}{(1 - \sin \phi)} = \frac{(1 + \sin \phi)^{2}}{\cos^{2} \phi} \sigma_{1} - \frac{2C \cos \phi (1 + \sin \phi)}{\cos^{2} \phi}$$
$$= \frac{(1 + \sin \phi)^{2}}{\cos^{2} \phi} \sigma_{1} - \frac{2C (1 + \sin \phi)}{\cos \phi}$$

on sait que :

$$\frac{(1+\sin\phi)}{\cos\phi} = \frac{(\cos\phi/2 + \sin\phi/2)^2}{(\cos^2\phi/2 - \sin^2\phi/2)} = \tan(\pi/4 + \phi/2)$$

Finalement, on obtient :

$$\sigma_{3} - \sigma_{1} \tan^{2}(\pi/4 + \phi/2) - 2C \tan(\pi/4 + \phi/2) < 0$$
(B.7)

$$\frac{\partial FI(I)}{\partial \sigma_1} = \tan^2(\pi/4 + \phi/2)$$
(B.8a)

$$\frac{\partial FI(I)}{\partial \sigma_3} = -1 \tag{B.8b}$$

DRUCKER-PRAGER

$$F(\sigma_{ij}) = J_{2D}^{1/2} + \beta J_1 - k < 0$$
(B.9a)

avec :

$$\beta = \frac{2\sin\phi}{\sqrt{3}(3+\sin\phi)} , \quad k = \frac{6C\cos\phi}{\sqrt{3}(3+\sin\phi)}$$
(B.9b)

$$\beta = \frac{2\sin\phi}{\sqrt{3}(3-\sin\phi)} , \qquad k = \frac{6C\cos\phi}{\sqrt{3}(3-\sin\phi)}$$
(B.9c)

$$\mathbf{J}_{2D} = \frac{1}{6} \left(\left(\boldsymbol{\sigma}_{1} - \boldsymbol{\sigma}_{2} \right)^{2} + \left(\boldsymbol{\sigma}_{2} - \boldsymbol{\sigma}_{3} \right)^{2} + \left(\boldsymbol{\sigma}_{3} - \boldsymbol{\sigma}_{1} \right)^{2} \right)$$
(B.9e)

$$\sigma_2 = v(\sigma_1 + \sigma_3)$$

$$\frac{\partial FI(I)}{\partial \sigma_1} = \beta(1+\nu) + \frac{((\sigma_1 - \sigma_3) - 2\nu(\sigma_1 + \sigma_3)(1-\nu) + \sigma_1)}{2.45\sqrt{J_{2D}}}$$
(B.10)

$$\frac{\partial FI(I)}{\partial \sigma_3} = \beta(1+\nu) + \frac{((\sigma_3 - \sigma_1) - 2\nu(\sigma_1 + \sigma_3)(1-\nu) + \sigma_3)}{2.45\sqrt{J_{2D}}}$$
(B.10)

1

.

CRITERE PARABOLIQUE

$$\frac{\partial FI(I)}{\partial \sigma_1} = -2(\sigma_3 - \sigma_1) + 2C\tan(\phi)$$

$$\frac{\partial FI(I)}{\partial \sigma_3} = 2(\sigma_3 - \sigma_1) + 2C\tan(\phi)$$
(B.11)

(b) <u>Cas non-associe</u> MOHR-COULOMB

$$0 \le \psi \le \phi \tag{B.12}$$

$$C_{g} = C \tan \psi / \tan \phi$$
 (B.12)

$$\frac{\partial FI(I)}{\partial \sigma_1} = \tan^2(\pi/4 + \psi/2)$$

$$\frac{\partial FI(I)}{\partial \sigma_3} = -1$$
(B.13)

DRUCKER-PRAGER

$$\vartheta = \frac{k^2 \operatorname{Ctan} \psi}{3}$$
, $\chi = \frac{k^2 \tan^2 \phi}{3}$ et $\mu = \frac{\tan \psi}{\tan \phi}$ (B.14)

Nous avons considéré pour l'état de contraintes planes :

$$\frac{\partial FI(I)}{\partial \sigma_1} = (1/3 + \chi \mu)$$

$$\frac{\partial FI(I)}{\partial \sigma_3} = -(2/3 - \chi \mu)$$
(B.15)

et pour l'état de déformations planes :

$$\frac{\partial FI(I)}{\partial \sigma_1} = \frac{\partial FI(I)}{\partial \sigma_3} = (1 - 2\nu) + (1 + \nu)\mu\chi$$
(B.16)



Fig. B.1 Représentation du cercle de Mohr ; critère d'écoulement Mohr-Coulomb.



Fig. B.2 Critère parabolique dans l'espace $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.



Fig. B.3 Critère parabolique dans le plan (σ, τ) . Comparaison avec le critère de Coulomb.

SUBROUTINE FXNS



"Shakedown" veut dire adaptation. Nombre de contrainte d'inégalité FI(I) pour une structure testée en 45 points-tests: En analyse limite = 45 En adaptation (Shakedown) = 90.

SUBROUTINE GRAD



٠



Subroutine (SPANG) est appelée pour calculer les contraintes (σ_x, σ_y et τ_{xy}) en utilisant les expressions des dérivées de la fonction de contrainte d'Airy données en (A6, A7, A8). Les paramètres de contraintes (XG) sont déterminés pour une structure chargée et (XA) pour une structure non chargée.
- CC: Matrice calculée par la procédure d'élimination de Gauss-Jordan
- GIA: Gradient analytique globale
- GI: Gradient analytique élémentaire
- NFP: Nombre de points-tests dans la structure.
- NNB: nombre total de conditions aux limites.
- NXA: Nombre de variables
- NXU: Nombre de variables indépendantes
- XG: vecteur contenant les paramètres de contraintes totales.
- XA: vecteur contenant les paramètres de contraintes résiduelles.
- XAE: vecteur contenant les paramètres de contraintes élastiques.

