

N° d'ordre: 1518

Université des Sciences et Technologies de Lille

THESE DE DOCTORAT

Préparée au

Laboratoire de Mécanique de Lille
Unité de Recherche Associée au C.N.R.S. 1441
Département Sols et Structures

ECOLE CENTRALE DE LILLE

sous le titre:

**ETUDE NUMERIQUE D'ELEMENTS DE
PLAQUES ET COQUES MINCES ET EPAISSES
POUR DES APPLICATIONS EN GENIE CIVIL**

par

KADDAH Fouad

Ingénieur de l'Ecole Centrale de Lyon
Enseignant Chercheur à l'Ecole des Hautes Etudes Industrielles

Pour l'obtention du titre de

DOCTEUR EN MECANIQUE

Thèse soutenue le 24 mai 1995 devant le jury composé de:

Président:

D. WEICHERT Professeur à l'Université des Sciences et Technologies de Lille.

Rapporteurs:

R. M. COURTADE Professeur à l'Université Claude Bernard - Lyon I, I.U.T. A
S. AIVAZZADEH Professeur des Universités, Institut Supérieur de l'Automobile et des Transports de Nevers.

Examineurs:

P. GEOFFROY Ingénieur de recherche à l'Institut de Mécanique des Fluides de Lille.
S. HARIRI Maître assistant à l'Ecole des Mines de Douai.

Directeur de la thèse:

I. SHAHROUR Professeur à l'Ecole Centrale de Lille.



A Amal, Samar et Gada
A ma mère, mes frères et soeurs
A la mémoire de mon père
A ma fille défunte
A la paix

Avant propos

Ce travail a été réalisé au laboratoire sols-structures de l'Ecole centrale de Lille. Il m'est très difficile d'exprimer en quelques mots ma profonde reconnaissance à Monsieur le professeur Isam Shahrour, Directeur du laboratoire et Directeur de la thèse pour l'aide précieuse tant scientifique que morale pour l'aboutissement de ce travail. Ses encouragements et ses conseils ont toujours été pour moi le plus grand soutien.

Monsieur D. Weichert professeur à l'Ecole Universitaire d'Ingénieurs de Lille m'a fait le plus grand honneur de présider le jury, je lui adresse mes sincères remerciements.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Madame R. M. Courtade, professeur à l'Université Claude Bernard (I.U.T. A) d'avoir accepté de rapporter ce travail.

J'adresse mes vifs remerciements à Monsieur S. Aivazzadeh Professeur à ISAT Nevers d'avoir accepté de rapporter ce travail.

Monsieur S. Hariri, Maître assistant à l'Ecole des Mines de Douai, m'a fait le plus grand plaisir de participer au jury et d'examiner ce travail, je tiens à le remercier.

Que Monsieur P. Geoffroy, Ingénieur de recherche à l'Institut de Mécanique des Fluides de Lille, trouve ma profonde reconnaissance d'être examinateur de ce travail et pour ses remarques pertinentes.

Je n'oublie pas l'aide importante fournie par mes collègues de l'Ecole des Hautes Etudes Industrielles en particulier, J.P. Godard, J.M. Mairie, B. Dumont, D. Marhabi, A. Madcadi, D. Dubois, J. Turner et mes collègues du Laboratoire H.Mroueh et M. Zaher. Grand merci à mon ami et collègue W. Chehade pour son aide et son réconfort moral

Enfin le sacrifice, la patience et l'affection manifestés par ma femme et mes enfants tout le long de mon travail ont été pour moi un élan irrésistible devant les nombreux obstacles rencontrés.

SOMMAIRE

Résumé	1
Abstract	2
INTRODUCTION GENERALE	3
CHAPITRE I ETUDE DES PLAQUES EN FLEXION	5
I.1 Hypothèse cinématique de Mindlin-Reissner	5
-Composantes du tenseur des déformations	6
I.2 Principe des travaux virtuels	6
-Travail virtuel des forces intérieures	7
-Travail virtuel des forces d'inertie	8
I.3 Loi de comportement	8
-Relations entre les composantes de flexion	9
-Comportement pour les composantes du cisaillement transversal	10
I.4 Discrétisation	14
I.4.1 Elément Mitc4	14
-Approximation de la géométrie et des variables cinématiques	14
-Matrice de rigidité élémentaire	15
-Matrice de masse élémentaire	19
-Vecteur force élémentaire	19
I.4.2 Elément Mitc8	19
CHAPITRE II VALIDATION DES ELEMENTS PLAQUES	22
II.1 Chargements statiques	22
II.1.1 Plaques isotropes	22
-Plaque carrée	22
-Plaques biaises	25
II.1.2 Plaques composites	26
-Plaque carrée multicouche simplement appuyée	26
-Plaque stratifiée	27
II.1.3 Plaques sur appuis élastiques	28
-Plaque épaisse	28
-Plaque mince	29
II.2 Vibration libre	30

II.2.1	Plaque isotrope	30
	-Plaque console	30
II.2.2	Plaque multicouche	30
	-Effet de l'épaisseur de la plaque	30
	-Effet du degré d'orthotropie et des séquences d'empilement	31
	-Effet de l'orientation des fibres	31
II.3	Application à l'analyse du comportement dynamique d'une plaque sur appuis ponctuels	32
CHAPITRE III ETUDE DES COQUES		35
III.1	Analyse bibliographique	35
III.2	Choix d'une approche	38
III.2.1	Cinématique des coques	39
	-Champ de déplacement - Hypothèse de Mindlin-Reissner	39
III.2.2	Champ des déformations de la coque	39
	-Composantes de déformations membrane - flexion	40
	-Composantes du cisaillement transversal	41
	-Déformation normale suivant l'épaisseur	42
III.2.3	Principe des travaux virtuels	42
III.2.4	Loi de comportement	43
	-Relations contraintes déformations dans le plan	44
	-Relations contraintes déformations du cisaillement transversal	45
III.3	Modélisation par éléments finis	48
III.3.1	Elément Mitc4	49
	-Approximation de la géométrie et des variables cinématiques	49
	-Matrice de rigidité élémentaire	52
	-Matrice de masse élémentaire	55
	-Travail des forces extérieures	56
III.3.2	Elément Mitc9	56
CHAPITRE IV VALIDATION DES ELEMENTS COQUES		61
IV.1	Coques isotropes	61
	-Structure plissée console sous charge linéique	61
	-Poutre caisson en torsion	61
	-Cylindre pincé avec diaphragmes	62

-Etude d'une tour de refroidissement	63
IV.2 Plaques dissymétriques	64
-Plaque stratifiée orthotrope	64
-Plaque multicouche	65
IV.3 Test en dynamique d'un assemblage de plaques	66
IV.4 Application à l'étude d'un radier à bêtes périphériques	67
CONCLUSION GENERALE	70
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	72
ANNEXE A GEOMETRIE DES SURFACES	77
ANNEXE B CALCUL DES EFFORTS RESULTANTS	82

Résumé

La modélisation des plaques et des coques se rencontre dans l'étude de nombreuses structures en génie civil. Ce travail a pour objectif de valider des éléments de plaques et coques minces et épaisses, isotropes et multicouches, afin de traiter une large classe de problèmes dans ce domaine.

Le cadre formel s'appuie sur la théorie de Mindlin-Reissner; les phénomènes de blocage observés avec les structures très minces sont traités par la technique des champs de substitutions.

Deux éléments plaques et deux éléments coques ont été étudiés et introduits dans un code de calcul développé à cet égard. De nombreux tests de validation en statique et en dynamique ont été effectués avec ces éléments. Ils ont porté sur différents aspects tel que l'élançement, le degré d'anisotropie, la capacité des éléments à décrire des champs de déformations et des contraintes complexes, les problèmes de jonctions et des raccords. Quelques applications d'intérêts pratiques ont été abordées et ont permis de mettre en évidence la fiabilité des modèles élaborés.

MOTS CLES

PLAQUES, COQUES, ELEMENTS FINIS, MULTICOUCHES, DYNAMIQUE, EPAIS, BLOCAGE, APPUIS ELASTIQUES.

Abstract

Plates and shells are frequently used in civil engineering structures. This work is intended to study thin and thick shell and plate finite elements for various applications in civil engineering.

Theoretical framework lies on the Mindlin-Reissner theory, locking phenomena are overcome by the assumed strain fields method.

Two plate elements and two shell elements have been studied and implemented in a computer program. Various validation tests were performed in order to study some aspects such as anisotropy, capacity to predict complex strain and stress fields and junction between shells. Finally, these elements are used in some practical applications.

INTRODUCTION GENERALE

Les plaques et les coques sont des éléments de structures très répandus en génie civil. On les rencontre dans de nombreuses structures, notamment, les dalles et les parois, les coupoles, les réservoirs, les enceintes de réacteurs, les tours de refroidissement, les barrages, les ponts courbes et les couvertures. Compte tenu de la complexité de la modélisation de ces éléments, de nombreux modèles ont été proposés et l'ingénieur praticien se trouve confronté à un problème délicat, celui du choix de l'élément approprié pour la résolution d'un problème donné.

Les plaques et les coques utilisées en génie civil présentent certaines particularités de calcul et de modélisation. En effet, la résistance de ces structures exige généralement une épaisseur relativement importante. Cette exigence est encore justifiée par le besoin d'un enrobage correct des aciers et des granulats et par une bonne isolation thermique et acoustique. Les problèmes posés dans l'étude des structures mixtes nécessitent la modélisation des coques multicouches. Le calcul des ouvrages de fondation requiert la modélisation du sol environnant. Enfin, la prise en compte des effets sismiques et des autres effets dynamiques comme le vent et les chocs ou les explosions nécessitent une étude en vibration libre.

Le comportement des plaques et de coques épaisses est fortement influencé par l'effet de l'effort tranchant. Cet effet est encore plus important si ces structures sont faites de matériaux composites. De ce fait, la théorie de Love-Kirchhoff n'est pas souvent convenable à l'étude de ce genre de structures. La théorie de Mindlin-Reissner qui prend en compte de manière approchée les déformations dues à l'effort tranchant semble plus adéquate et plus convenable. Toutefois, la discrétisation basée sur cette théorie, doit être bien élaborée au risque d'aboutir au blocage en cisaillement, dans le cas des structures très minces. La modélisation des surfaces courbes peut conduire à un autre type de blocage dit, blocage en membrane. Par conséquent, un élément fiable, efficace et sûr, doit être libre de ces deux types de blocage à la fois.

Le travail présenté dans cette thèse constitue une contribution à la modélisation par éléments finis de plaques et coques isotropes et multicouches dans les domaines statiques et dynamiques, avec la possibilité de prendre en compte des appuis élastiques. L'objectif est de valider des éléments plaques et coques pouvant servir à traiter de nombreuses structures de génie civil. Les modèles proposés sont basés sur la théorie de Mindlin-Reissner, les phénomènes de blocages sont traités par

l'utilisation des champs de substitution. Le présent rapport se décompose en quatre chapitres :

Le premier chapitre comporte un rappel des éléments théoriques nécessaires à la formulation d'un problème de plaque en flexion. La discrétisation est effectuée à l'aide des éléments Mitc4 et Mitc8.

Le deuxième chapitre comporte une présentation des tests de validation en statique et en dynamique des éléments plaques. Il se termine par une application sur l'étude en vibration libre d'une plaque avec appuis ponctuels.

Le troisième chapitre comporte une présentation des éléments coques. Après une analyse des différentes approches utilisées dans la modélisation des coques, on décrit les éléments qui ont servi à la discrétisation, à savoir, les éléments Mitc4 et Mitc9.

Le dernier chapitre contient les tests de validation des éléments coques décrits au troisième chapitre et une application en statique portant sur le calcul d'un radier bêche. Une conclusion clôturera ce travail.

CHAPITRE I

ETUDE DES PLAQUES EN FLEXION

Ce chapitre comporte des éléments sur la formulation du problème de flexion de plaque en utilisant la théorie de Mindlin-Reissner. La discrétisation est effectuée à l'aide de deux éléments basés sur la technique des champs de substitution. Il s'agit de l'élément Mitc4 proposé par Bathe et Dvorkin (1985) et de l'élément Mitc8 qui a été déduit de l'élément coque Mitc8 des mêmes auteurs (Bathe et Dvorkin 1986). Le premier élément a été publié pour le calcul des plaques linéaires isotropes dans le domaine statique, et le second, pour le calcul des coques isotropes à comportements linéaire ou non linéaire. Nous les étendons aux cas des plaques isotropes et composites en statique et en dynamique et aux plaques sur appuis élastiques.

I.1 Hypothèse cinématique de Mindlin-Reissner

L'hypothèse de Mindlin et Reissner suppose que tout élément normal au plan moyen de la plaque se comporte comme un solide rigide (Figure 1.1). En se plaçant dans les cas de petits déplacements et d'une plaque sous sollicitations de flexion, on peut écrire :

$$\{u_M\} = \{u_m\} + z\{\theta\} \wedge \{k\} \quad (1.1a)$$

$$\{u_m\} = w(x,y)\{k\} \quad (1.1b)$$

m et M sont situés respectivement sur la surface moyenne et dans l'épaisseur, $\{u_m\}$ et $\{u_M\}$ sont les vecteurs déplacements des points m et M; $\{\theta\}$ et $\{k\}$ représentent respectivement le vecteur rotation et le vecteur normal unitaire au plan moyen. En projetant la relation (1.1a) sur les axes du système des coordonnées et en tenant compte de la relation (1.1b) nous avons:

$$\begin{Bmatrix} U(x,y,z) \\ V(x,y,z) \\ W(x,y,z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z\theta_Y(x,y) \\ -z\theta_X(x,y) \\ w(x,y) \end{Bmatrix} \quad (1.2)$$

U, V, W sont les composantes du vecteur déplacement au point M. La relation (1.2) fait apparaître trois inconnues cinématiques : une translation et deux

rotations, qui représentent respectivement la flèche de la plaque et les rotations de la normale autour des axes x et y du plan moyen.

Composantes du tenseur des déformations

A partir du champ de déplacements (1.2), on peut calculer le tenseur de déformations. Pour les composantes de flexion ϵ_f on trouve :

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_Y}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_X}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_Y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_X}{\partial x} \end{Bmatrix} = z \{\chi\} \quad (1.3)$$

où $\{\chi\}$ représente le vecteur des courbures.

Les composantes du cisaillement transversal s'écrivent sous la forme:

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_Y + \frac{\partial W}{\partial x} \\ -\theta_X + \frac{\partial W}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (1.4)$$

Pour les plaques très minces, les déformations de cisaillement (γ_{xz} γ_{yz}) deviennent négligeables et on retrouve l'hypothèse de Love Kirchhoff : tout segment normal au plan moyen avant déformation demeure normal à la déformée de ce plan après déformation . La relation (1.4) implique que ces composantes sont constantes dans l'épaisseur. Dans ce cas les contraintes σ_{xz} et σ_{yz} ne respectent pas les conditions aux limites sur les faces supérieure et inférieure. Pour corriger cette situation, on introduit des facteurs de correction afin de mieux prendre en compte la variation réelle de ces contraintes.

I.2 Principe des travaux virtuels

Considérons une plaque occupant un domaine volumique V de frontière $\Gamma = \Gamma_a + \Gamma_c$ (figure 1.2) où Γ_a est la surface qui réunit les faces supérieure et inférieure, $\Gamma_c = C \cup [-h/2 \quad h/2]$ représente la surface latérale de la plaque. On

suppose que la courbe C est la réunion de deux courbes C_f et C_u sur lesquelles sont imposées respectivement les forces et les variables cinématiques .

Considérons un champ de déplacement virtuel δu cinématiquement admissible ($\delta u=0$ sur C_u); le principe des travaux virtuels donne :

$$\delta w_i = \delta w_j + \delta w_e \quad (1.5)$$

Le premier membre représente le travail virtuel des forces intérieures; les termes du second membre représentent respectivement les travaux virtuels des forces d'inerties et des forces extérieures.

Travail virtuel des forces intérieures

Le travail virtuel des forces intérieures est donné par l'expression :

$$\delta w_i = \iiint_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dv \quad (1.6)$$

En remplaçant les relations (1.3) et (1.4) dans la relation (1.6) et en intégrant dans l'épaisseur on obtient :

$$\delta w_i = \iint_A \langle \delta \chi \rangle \{M_f\} dA + \iint_A \langle \delta \gamma \rangle \{T\} dA \quad (1.7)$$

où $\{M_f\}$ et $\{T\}$ sont les vecteurs qui regroupent respectivement les efforts flexionnels et de cisaillement transversal par unité de longueur. Ils sont donnés par les expressions suivantes :

$$\{M_f\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} z \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (1.8)$$

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} T_{xz} \\ T_{yz} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (1.9)$$

Ces efforts sont visualisés sur la figure (1.3).

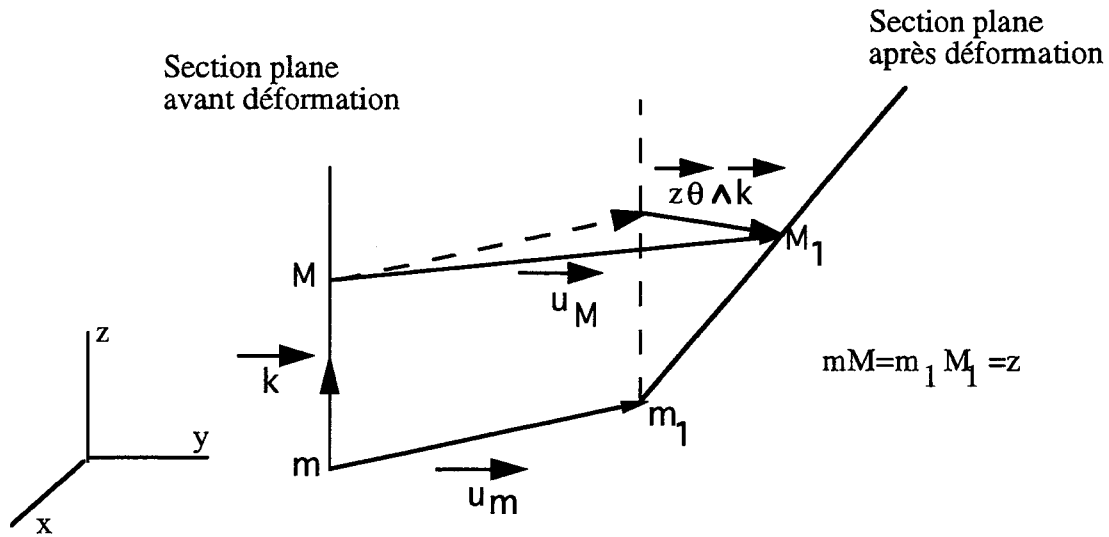


Figure 1.1 - Champ de déplacement dans une plaque.

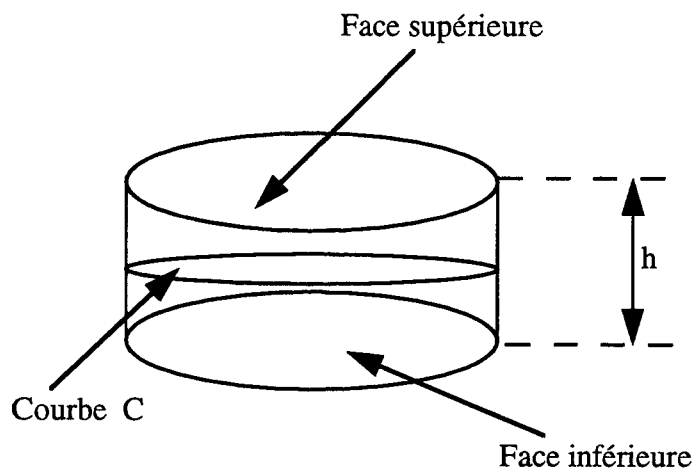


Figure 1.2 - Description d'une plaque

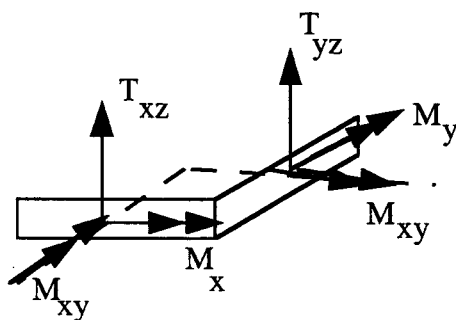


Figure 1.3 Efforts résultants

Les équations d'équilibre donnent les relations suivantes :

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = T_{xz} \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = T_{yz}$$

Travail virtuel des forces d'inertie

D'après le principe de d'Alembert, le travail virtuel des forces d'inertie s'écrit sous la forme :

$$\delta w_j = - \iiint_V \rho (\ddot{u}_M \delta u_M + \ddot{v}_M \delta v_M + \ddot{w}_M \delta w_M) dV \quad (1.11)$$

En remplaçant les relations (1.2) dans la relation (1.11) et après intégration dans l'épaisseur, on obtient :

$$\delta w_j = - \iint_A [\rho_M \ddot{w} \delta w + \rho_F (\ddot{\theta}_x \delta \theta_x + \ddot{\theta}_y \delta \theta_y)] dA \quad (1.12)$$

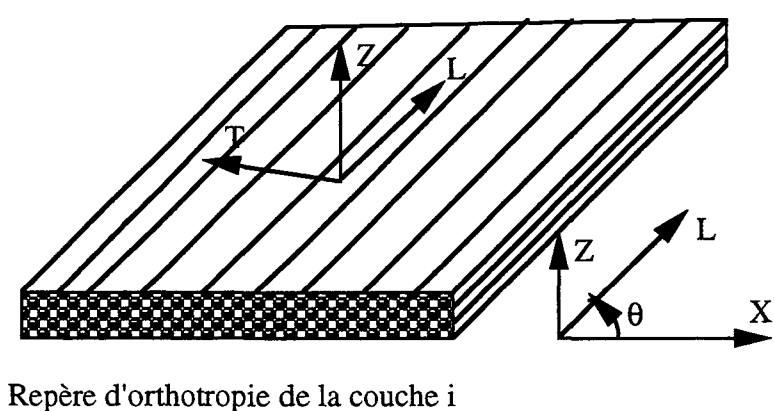
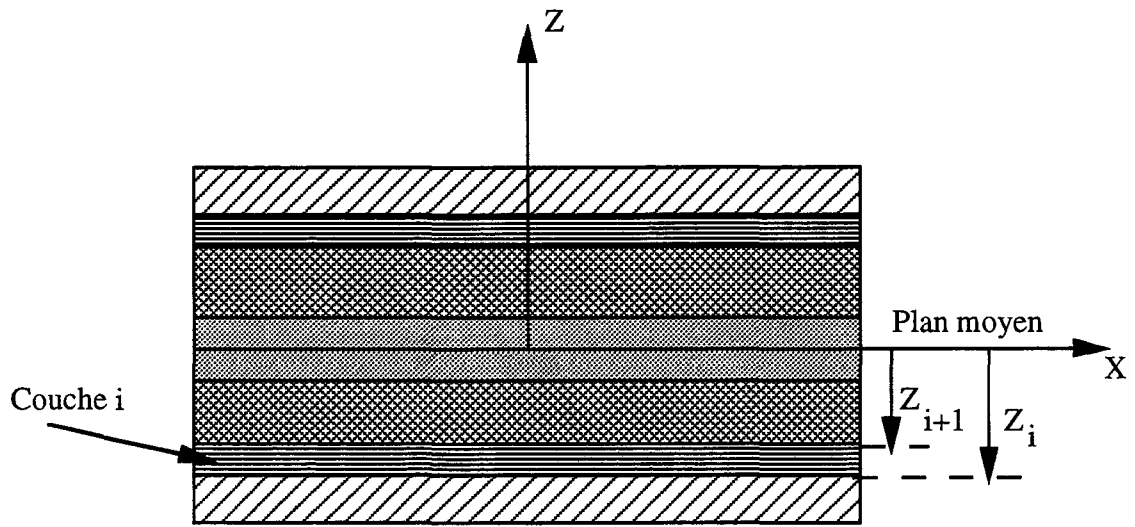
$$\text{ou } \rho_M = \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz, \quad \rho_F = \int_{-h/2}^{h/2} \rho z^2 dz.$$

I.3 Loi de comportement

On considère une plaque présentant une symétrie matérielle par rapport à son plan moyen. On suppose qu'elle est constituée par un empilement de couches orthotropes ayant l'axe z comme axe d'orthotropie. Chaque couche est définie par l'angle θ entre l'axe L et l'axe des x et par les cotes z_i et z_{i+1} de ses faces supérieure et inférieure par rapport au plan moyen (Fig 1.4).

Étant donné la symétrie matérielle par rapport au plan moyen, ce dernier est le plan neutre (un effort de flexion ne produit pas de déformation de membrane dans ce plan, et réciproquement, un effort de membrane n'y produit pas de courbure).

Dans la suite de ce travail, on suppose que le comportement de chaque couche est basé sur l'hypothèse des contraintes planes et d'anisotropie plane, et que les couches sont en parfaite adhérence.



Repère d'orthotropie de la couche i

Figure 1.4 - Plaque multicouche

Relations entre les composantes de flexion

La relation contraintes - déformations entre les composantes de flexion d'une couche s'écrit sous la forme :

$$\{\sigma_f\} = [H]\{\epsilon_f\} = z[H]\{\chi\} \quad (1.13)$$

$$[H] = [Q]^t [H_L] [Q] \quad (1.14)$$

H_L est la matrice de comportement de la couche dans le repère d'orthotropie. Elle est donnée par :

$$[H_L] = \begin{bmatrix} \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} & \frac{\nu_{LT}E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} & 0 \\ \frac{\nu_{LT}E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} & \frac{E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{LT} \end{bmatrix}$$

La symétrie de la matrice de souplesse implique la relation $\frac{\nu_{LT}}{E_L} = \frac{\nu_{TL}}{E_T}$.

Q est la matrice de passage entre le repère d'orthotropie de la couche et le repère cartésien .

$$[Q] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & cs \\ s^2 & c^2 & -cs \\ -2cs & 2cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad c = \cos \theta \quad s = \sin \theta$$

En remplaçant la relation (1.13) dans la relation (1.8), on obtient :

$$\{M\} = \left(\int_{-h/2}^{h/2} z^2 [H] dz \right) \{\chi\} = [H_f] \{\chi\} \quad (1.15)$$

comme les caractéristiques sont constantes par couche, l'expression de H_f est donnée par :

$$[H_f] = \sum_{i=1}^{nc} \int_{z_i}^{z_{i+1}} z^2 [H^i] dz = \sum_{i=1}^{nc} 1/3(z_{i+1}^3 - z_i^3) [H^i]$$

où nc est le nombre des couches de la plaque. Pour un matériau isotrope on a :

$$[H^i] = \begin{bmatrix} E/1-\nu^2 & E\nu/1-\nu^2 & 0 \\ E\nu/1-\nu^2 & E/1-\nu^2 & 0 \\ 0 & 0 & E/2(1+\nu) \end{bmatrix}$$

ce qui donne la forme classique de $[H_f]$:

$$[H_f] = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$$

où $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ est la rigidité à la flexion de la plaque.

Comportement pour les composantes du cisaillement transversal

La relation de comportement entre les composantes de cisaillement transversales est donnée par :

$$\{\tau\} = [H_\tau] \{\gamma\} \quad (1.16)$$

$\{\gamma\}$ est donné par la relation (1.4)

$$[H_\tau] = [Q_1]^t [H_{LT}] [Q_1] \quad (1.17)$$

$$[H_{LT}] = \begin{bmatrix} G_{LZ} & 0 \\ 0 & G_{TZ} \end{bmatrix}$$

$$[Q_1] = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}$$

La relation (1.16) indique que les contraintes du cisaillement transversales sont discontinues à l'interface entre couches. Cette discontinuité est physiquement inacceptable et elle sera évitée par la recherche d'une distribution des contraintes

de cisaillement basée sur les équations de l'équilibre locale (Owen et Figueiras 1983; Batoz et Dhatt 1990, Noor et Peters 1989). En remplaçant la relation (1.16) dans la relation (1.9) on obtient :

$$\{T\} = \left(\int_{-h/2}^{h/2} [H_\tau] dz \right) \{\gamma\} = [H_c] \{\gamma\} \quad (1.18)$$

$$[H_c] = \sum_{i=1}^{nc} \int_{z_i}^{z_{i+1}} [H_\tau^i] dz = \sum_{i=1}^{nc} (z_{i+1} - z_i) [H_\tau^i]$$

Pour un matériau isotrope on a:

$$[H_\tau^i] = \begin{bmatrix} E/2(1+\nu) & 0 \\ 0 & E/2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad \forall i$$

ce qui implique la forme classique de $[H_c]$:

$$[H_c] = Gh \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Comme nous venons de le signaler au (I.1) l'hypothèse de Mindlin-Reissner nécessite l'introduction de coefficients de correction permettant de tenir compte de la distribution réelle des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur. Dans le cas des plaques isotropes, le facteur couramment employé est 5/6. Ce facteur est obtenu par comparaison de la densité d'énergie de déformation de cisaillement obtenue, d'une part, par la théorie d'élasticité, et, d'autre part, à partir des contraintes de cisaillement induites par la théorie de Mindlin-Reissner (Cohen 1978; Reissner 1945).

Certains auteurs (Mindlin 1951; Mindlin et al 1966) ont préféré le calcul du facteur correcteur à partir des considérations dynamiques (équivalence de fréquence propre associée au mode de vibration en cisaillement transversal ou vitesse de propagation d'ondes de flexion). Le facteur employé dans ce cas est égal à $\pi^2/12$.

Pour les plaques composites, deux facteurs de correction sont généralement introduits : Owen et Figueiras (1983) ont fixé ces facteurs en partant des équations de l'équilibre locale et en adoptant l'hypothèse de la flexion cylindrique

suivant deux directions orthogonales. Batoz et Dhatt (1990) ont eu une démarche similaire. En abandonnant l'hypothèse précédente, ils aboutissent à une matrice de comportement faisant apparaître ces facteurs de correction de manière implicite. Notre démarche s'inscrit dans le même cadre. Elle est basée sur les hypothèses suivantes :

(i)-équivalence de la densité d'énergie de cisaillement déduite, d'une part, de la théorie de l'élasticité tridimensionnelle, et, d'autre part de la théorie des plaques de Mindlin-Reissner;

(ii)-utilisation des équations de l'équilibre locale .

soit U_1 la densité surfacique d'énergie de déformation en cisaillement transversal obtenue par la théorie de l'élasticité :

$$U_1 = 1/2 \int_{-h/2}^{h/2} \langle \tau \rangle [H_\tau]^{-1} \{ \tau \} dz \quad (1.19)$$

Soit U_2 la même quantité déduite de la théorie des plaques :

$$U_2 = 1/2 \langle \gamma \rangle \{ T \} = 1/2 \langle T \rangle [H_c]^{-1} \{ T \} \quad (1.20)$$

Les équations de l'équilibre locale donnent:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = 0$$

En intégrant ces équations dans l'épaisseur et en utilisant les conditions aux limites $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$ pour $z = -h/2$, on obtient :

$$\sigma_{xz} = - \int_{-h/2}^z \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \right) dz \quad (1.21)$$

$$\sigma_{yz} = - \int_{-h/2}^z \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) dz$$

Les relations (1.13) et (1.15) donnent :

$$\{\sigma_f\} = z[H(z)]\{\chi\} = z[A(z)]\{M\} \quad (1.22)$$

$$[A(z)] = [H(z)][H_f]^{-1} \quad (1.23)$$

En remplaçant la relation (1.22) dans les relations (1.21), on obtient :

$$\{\tau(z)\} = [D_1(z)]\{T\} + [D_2(z)]\{\lambda\} \quad (1.24)$$

où:

$$\langle \lambda \rangle = \left\langle \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} \quad \frac{\partial M_y}{\partial x} \quad \frac{\partial M_x}{\partial y} \right\rangle$$

$$[D_1(z)] = \int_{-h/2}^z -z/2 \begin{bmatrix} A_{11} + A_{33} & A_{13} + A_{32} \\ A_{31} + A_{23} & A_{22} + A_{33} \end{bmatrix} dz$$

$$[D_2(z)] = - \int_{-h/2}^z z/2 \begin{bmatrix} A_{11} - A_{33} & A_{13} - A_{32} & 2A_{12} & 2A_{31} \\ A_{31} - A_{23} & A_{33} - A_{22} & 2A_{32} & 2A_{21} \end{bmatrix} dz$$

A_{ij} sont les éléments de la matrice $A(z)$ définie par (1.23). En remplaçant la relation (1.24) dans (1.19), on obtient :

$$U_1 = \frac{1}{2} \langle \langle T \rangle \quad \langle \lambda \rangle \rangle \begin{bmatrix} [C_{11}] & [C_{12}] \\ [C_{12}]^t & [C_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{T\} \\ \{\lambda\} \end{Bmatrix} \quad (1.25)$$

$$[C_{11}] = \int_{-h/2}^{h/2} [D_1(z)]^t [H_\tau]^{-1} [D_1(z)] dz$$

$$[C_{12}] = \int_{-h/2}^{h/2} [D_1(z)]^t [H_\tau]^{-1} [D_2(z)] dz$$

$$[C_{22}] = \int_{-h/2}^{h/2} [D_2(z)]^t [H_\tau]^{-1} [D_2(z)] dz$$

En posant que U_1 est égale à U_2 , on obtient :

$$\langle \langle T \rangle \rangle \langle \langle \lambda \rangle \rangle \begin{bmatrix} [C_{11}] - [H_c]^{-1} & [C_{12}] \\ [C_{12}]^t & [C_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{T\} \\ \{\lambda\} \end{Bmatrix} = 0$$

Pour la vérification de cette condition, Batoz et Dhatt ont proposé :

$$[C_{11}] = [H_c]^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad [H_c] = [C_{11}]^{-1} \quad (1.26)$$

Cette hypothèse consiste à négliger les composantes du vecteur λ devant celles du vecteur T .

Finalement la relation de comportement en cisaillement transversal est donnée par la matrice H_c définie par la relation (1.26).

I.4 Discrétisation

Nous présentons dans ce paragraphe une discrétisation basée sur l'élément Mitc4 (Bathe et Dvorkin 1985). Cet élément est un quadrilatère à quatre noeuds identique à l'élément Q4 classique pour le comportement en flexion. Le comportement en cisaillement transversal est introduit en utilisant un champ de substitution (Hinton et Huang 1986).

I.4.1 Élément Mitc4

Approximation de la géométrie et des variables cinématiques

La géométrie et les variables cinématiques peuvent être approximées par:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^4 h_k(r,s) \begin{Bmatrix} x_k \\ y_k \end{Bmatrix} \quad (1.27)$$

$$\begin{Bmatrix} W \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^4 h_k(r,s) \begin{Bmatrix} W_k \\ \theta_{xk} \\ \theta_{yk} \end{Bmatrix} \quad (1.28)$$

La relation (1.28) peut s'écrire encore sous la forme :

$$W = \langle N_w \rangle \{ \hat{u} \}$$

$$\langle N_w \rangle = \langle \quad h_k \quad 0 \quad 0 \quad \rangle \quad k=1 \text{ à } 4$$

$\langle \hat{u} \rangle = \langle \quad w_k \quad \theta_{Xk} \quad \theta_{Yk} \quad \rangle$ représente le vecteur de déplacement et de rotation aux noeuds de l'élément.

$$\begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = [N_\theta] \{ \hat{u} \}$$

$$[N_\theta] = \begin{bmatrix} 0 & h_k & 0 \\ 0 & 0 & h_k \end{bmatrix}$$

Les fonctions (h_k) , $k=1$ à 4 , sont les fonctions d'interpolation de l'élément Q4.

Matrice de rigidité élémentaire

La matrice de rigidité élémentaire est obtenue à partir de l'expression du travail virtuel des forces intérieures à l'échelle élémentaire. D'après (1.7) on peut écrire:

$$\delta w_i^e = \iint_{A^e} \langle \delta \chi \rangle \{ M_f \} dA + \iint_{A^e} \langle \delta \gamma \rangle \{ T \} dA \quad (1.29)$$

Le premier terme représente la contribution de la flexion, le second représente la contribution du cisaillement transversal. En utilisant les relations (1.3) et (1.28), on peut écrire:

$$\{ \chi \} = [B_f] \{ \hat{u} \} \quad (1.30)$$

la matrice B_f est donnée par :

$$[B_f] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial h_k}{\partial x} \\ 0 & -\frac{\partial h_k}{\partial y} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial h_k}{\partial x} & \frac{\partial h_k}{\partial y} \end{bmatrix} \quad k=1,4$$

En remplaçant la relation (1.30) dans la relation (1.29), on obtient la matrice de rigidité K_f qui représente la contribution des termes de flexion. Cette matrice est donnée par l'expression :

$$[K_f] = \iint_{A^e} [B_f]^t [H_f] [B_f] dA \quad (1.31)$$

Le remplacement direct de la relation (1.28) dans (1.4) conduit quand la plaque devient très mince à un blocage en cisaillement (Onate et al 1992). Pour traiter ce phénomène, plusieurs techniques sont utilisées : la technique de l'intégration réduite et sélective, la formulation mixte, l'utilisation de l'hypothèse de Kirchhoff sous forme discrète, l'utilisation d'un champ de substitution (Hinton et Huang 1986). La technique de l'intégration réduite et sélective améliore le comportement mais introduit des modes parasites. La formulation mixte exige une certaine cohérence dans l'approximation des variables. L'utilisation de l'hypothèse de Kirchhoff limite le champ d'application de l'élément aux plaques minces. Afin de surmonter ce phénomène de blocage, nous avons utilisé la méthode proposée par Bathe et Dvorkin qui consiste à utiliser le champs de substitution suivant :

$$\gamma_{rt} = \frac{1}{2}(1+s)\gamma_{rt}^A + \frac{1}{2}(1-s)\gamma_{rt}^C \quad (1.32)$$

$$\gamma_{st} = \frac{1}{2}(1+r)\gamma_{st}^D + \frac{1}{2}(1-r)\gamma_{st}^B$$

Les points A , B , C , D sont représentés dans la figure (1.5)

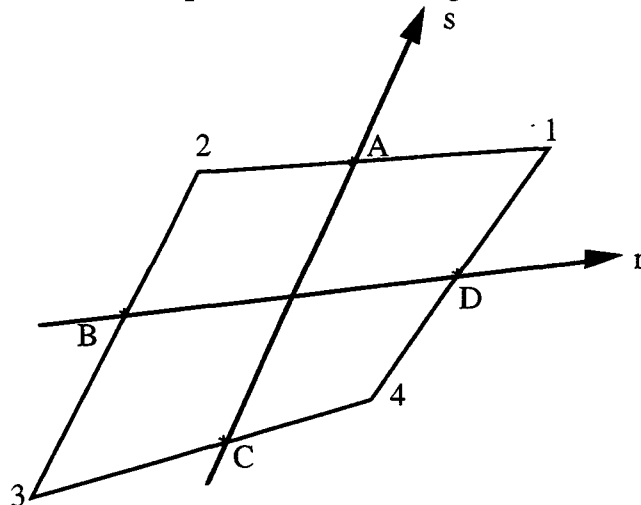


Figure 1.5 : Élément Mitc4, points d'interpolation des composantes de cisaillement transversal.

Les composantes covariantes aux points A, B, C et D sont déterminées directement à partir des relations reliant les déformations aux déplacements (chapitre 3 et annexe A) :

$$\begin{aligned}\gamma_{rt} &= \frac{h}{2} (\{a_1\}^t (\{\theta\} \wedge \{k\}) + \frac{\partial W}{\partial r}) \\ \gamma_{st} &= \frac{h}{2} (\{a_2\}^t (\{\theta\} \wedge \{k\}) + \frac{\partial W}{\partial s})\end{aligned}\quad (1.33)$$

Les vecteurs a_1 et a_2 sont donnés dans l'annexe A.

Les relations (1.32) permettent de satisfaire l'hypothèse de Love Kirchhoff, sans entraîner le blocage en cisaillement (Batoz et Dhatt 1990).

Le passage des composantes covariantes aux composantes cartésiennes est fournie par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\gamma_{xz} &= \gamma_{rt} \sqrt{a^{11}} \frac{2}{h} \sin \beta - \gamma_{st} \sqrt{a^{22}} \frac{2}{h} \sin \alpha \\ \gamma_{yz} &= -\gamma_{rt} \sqrt{a^{11}} \frac{2}{h} \cos \beta + \gamma_{st} \sqrt{a^{22}} \frac{2}{h} \cos \alpha\end{aligned}$$

α et β sont les angles qui font respectivement $\{a_1\}$ et $\{a_2\}$ avec l'axe des x .

En remplaçant γ_{rt} et γ_{st} par leurs valeurs tirées de (1.32) et en explicitant le calcul des quantités $a^{\alpha\beta}$ (annexe A), on obtient les relations reliant les composantes du cisaillement transversal aux déplacements aux noeuds :

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = [B_c] \{ \hat{u} \} \quad (1.34)$$

La matrice B_c est donnée par l'expression:

$$[B_c] = [\tilde{Q}] [\tilde{B}_c]$$

où :



$$[\tilde{Q}] = \frac{2}{h} \begin{bmatrix} \sin \beta \sqrt{a^{11}} & -\sin \alpha \sqrt{a^{22}} \\ -\cos \beta \sqrt{a^{11}} & \cos \alpha \sqrt{a^{22}} \end{bmatrix}$$

$$[\tilde{B}_c] = \begin{bmatrix} B_{11}^k & B_{12}^k & B_{13}^k \\ B_{21}^k & B_{22}^k & B_{23}^k \end{bmatrix}$$

$$B_{11}^k = \frac{h}{4}(1+s)h_{k,r}^A + \frac{h}{4}(1-s)h_{k,r}^C$$

$$B_{12}^k = -\frac{h}{4}(1+s)h_k^A a_{1Y}^A - \frac{h}{4}(1-s)h_k^C a_{1Y}^C$$

$$B_{13}^k = \frac{h}{4}(1+s)h_k^A a_{1X}^A + \frac{h}{4}(1-s)h_k^C a_{1X}^C$$

$$B_{21}^k = \frac{h}{4}(1+r)h_{k,s}^D + \frac{h}{4}(1-r)h_{k,s}^B$$

$$B_{22}^k = -\frac{h}{4}(1+r)h_k^D a_{2Y}^D - \frac{h}{4}(1-r)h_k^B a_{2Y}^B$$

$$B_{23}^k = \frac{h}{4}(1+r)h_k^D a_{2X}^D + \frac{h}{4}(1-r)h_k^B a_{2X}^B$$

a_{1X} , a_{1Y} , a_{1Z} sont les composantes du vecteur a_1 ; a_{2X} , a_{2Y} , a_{2Z} sont celles du vecteur a_2 .

En remplaçant la relation (1.34) dans le travail virtuel des forces intérieures, on obtient la matrice de rigidité K_c qui représente la contribution du cisaillement transversal. Celle-ci est donnée par l'expression :

$$[K_c] = \iint_{A^e} [B_c]^t [H_c] [B_c] dA \quad (1.35)$$

Les matrices K_f et K_c sont calculées numériquement en utilisant un schéma de Gauss à quatre points.

Matrice de masse élémentaire

La matrice de masse élémentaire est obtenue à partir du travail virtuel des forces d'inertie. En remplaçant la relation (1.28) dans la relation (1.11), on obtient :

$$\delta w_j^e = -\langle \delta \hat{u} \rangle [M] \{ \hat{u} \} \quad (1.36)$$

[M] est la matrice de masse cohérente de l'élément. Elle est donnée par :

$$[M] = \iint_{A^e} (\rho_M \{N_w\} \langle N_w \rangle + \rho_F [N_\theta]^t [N_\theta]) dA \quad (1.37)$$

Vecteur force élémentaire

Soit p la pression appliquée sur la face supérieure ou inférieure de la plaque, le travail virtuel de cette force vaut :

$$\delta w_c^e = \iint_{A^e} p \delta w dA \quad (1.38)$$

En remplaçant la relation (1.28) dans la relation (1.38), on obtient le vecteur force élémentaire :

$$\{r\} = \iint_{A^e} p \{N_w\} dA$$

I.4.2 Élément Mitc8

Dans ce paragraphe, on donne une brève description de l'élément plaque Mitc8 déduit de l'élément coque Mitc8 de Bathe et Dvorkin (1986). Cet élément est identique à l'élément Q8 classique pour le comportement en flexion; le cisaillement transversal est introduit selon la démarche adoptée pour l'élément Mitc4.

On se limite à la présentation des schémas d'interpolation pour les composantes du cisaillement transversal dans le système des coordonnées (r,s). Ces composantes sont données par les relations suivantes:

$$\varepsilon_{rt} = \sum_{i=1}^4 h_i^{rt} \varepsilon_{rt}^i + \frac{1}{2} h_5^{rt} (\varepsilon_{rt}^{RA} + \varepsilon_{rt}^{RB}) \quad (1.39a)$$

$$\epsilon_{st} = \sum_{i=1}^4 h_i^{st} \epsilon_{st}^i + \frac{1}{2} h_5^{st} (\epsilon_{st}^{SA} + \epsilon_{st}^{SB}) \quad (1.39b)$$

Les points d'interpolation sont illustrés dans la figure (1.6)

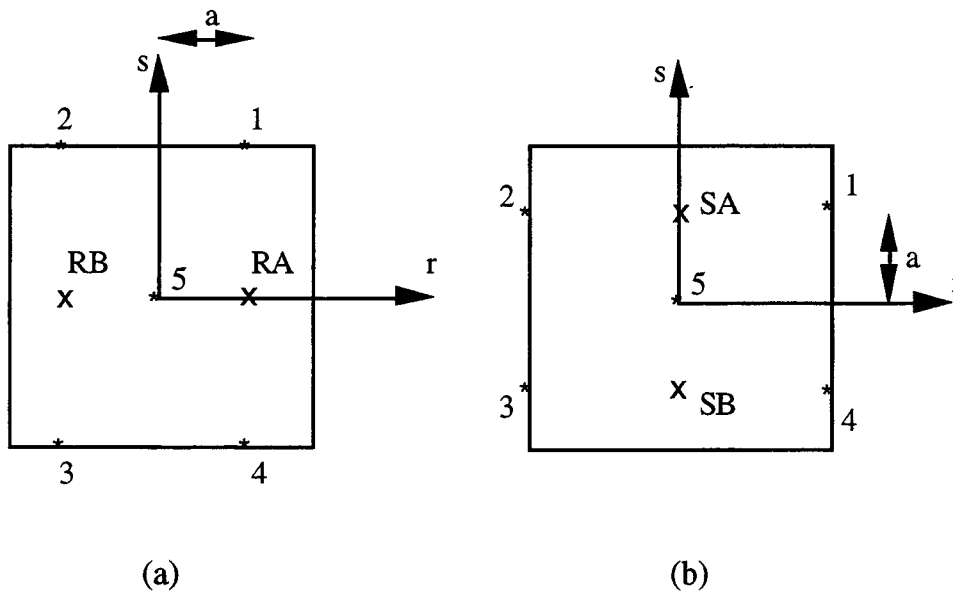


Figure 1.6 - Élément Mitc8

a) Points utilisés pour l'interpolation de ϵ_{rt}

b) Points utilisés pour l'interpolation de ϵ_{st}

Les composantes ϵ_{rt}^i , ϵ_{rt}^{RA} , ϵ_{rt}^{RB} , ϵ_{st}^i , ϵ_{st}^{SA} , ϵ_{st}^{SB} sont calculées directement à partir des formules d'interpolation des déplacements pour l'élément Q8 et des relations (1.33).

Les fonctions d'interpolation ($(h_i^{rt}, h_i^{st}; i = 1 \text{ à } 5)$) sont données par :

$$h_1^{rt} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{r}{a}\right) (1 + s) - \frac{1}{4} h_5^{rt}$$

$$h_2^{rt} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{r}{a}\right) (1 + s) - \frac{1}{4} h_5^{rt}$$

$$h_3^{rt} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{r}{a}\right) (1-s) - \frac{1}{4} h_5^{rt}$$

$$h_4^{rt} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{r}{a}\right) (1-s) - \frac{1}{4} h_5^{rt}$$

$$h_5^{rt} = \left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) (1-s^2)$$

$$h_1^{st} = \frac{1}{4} (1+r) \left(1 + \frac{s}{a}\right) - \frac{1}{4} h_5^{st}$$

$$h_2^{st} = \frac{1}{4} (1-r) \left(1 + \frac{s}{a}\right) - \frac{1}{4} h_5^{st}$$

$$h_3^{st} = \frac{1}{4} (1-r) \left(1 - \frac{s}{a}\right) - \frac{1}{4} h_5^{st}$$

$$h_4^{st} = \frac{1}{4} (1+r) \left(1 - \frac{s}{a}\right) - \frac{1}{4} h_5^{st}$$

$$h_5^{st} = \left(1 - \left(\frac{s}{a}\right)^2\right) (1-r^2)$$

avec :

$$a = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

D'autres éléments plaques à huit noeuds utilisant le schéma d'interpolation précédent ont été publiés. Parmi ces éléments nous citons l'élément Quad8* de Hinton et Huang (1986) et l'élément CL8 de Polit, Touratier et Lory (1994). La différence entre les éléments précédents et Mitc8 réside dans la base polynomiale utilisée par les fonctions d'interpolation.

En appliquant la démarche suivie pour l'élément Mitc4, on obtient la matrice de rigidité due au cisaillement transversal. Dans ce cas, l'intégration des termes de la matrice de rigidité nécessite l'utilisation de neufs points de Gauss.

CHAPITRE II

VALIDATION DES ELEMENTS PLAQUES

Les éléments plaques présentés dans le chapitre I ont été introduits dans un programme de calcul développé au cours de ce travail. Il traite les plaques et coques isotropes et multicouches. En analyse statique, il traite des chargements mécaniques et thermiques. En analyse dynamique, il permet la recherche des modes propres et pulsations propres en utilisant l'algorithme d'itérations par sous-espace (Bathe 1982).

Le programme permet aussi de modéliser les plaques et les coques sur appuis élastiques, la raideur des appuis peut être introduite sous forme discrète ou consistante. La zone de contact est déterminée d'après un calcul itératif.

Dans un premier temps, des tests de validation en statique ont été effectués sur des plaques homogènes et isotropes. Ensuite ils ont été étendus aux plaques stratifiées et multicouches ainsi qu'aux plaques sur appuis élastiques. La dernière partie de ce chapitre est consacrée aux tests de validation en dynamique sur de plaques isotropes et composites et à l'étude du comportement en vibrations d'une plaque sur appuis ponctuels.

II.1 Chargements statiques

Trois séries de tests ont été effectuées. La première a concerné des tests sur des plaques carrées ou biaises. La seconde a porté sur des plaques multicouches et stratifiées; la dernière a comporté des tests sur des plaques sur appuis élastiques.

II.1.1 Plaques isotropes

Plaque Carrée

Le premier test a été effectué sur une plaque carrée. Deux cas sont envisagés : (i) une plaque simplement appuyée sur son contour et uniformément chargée et (ii) une plaque encastree sur son contour et chargée au centre par une force concentrée. Les caractéristiques géométriques et mécaniques de cette plaque sont données dans la

figure (2.1a). Pour ces deux cas, on dispose des solutions analytiques (Timoshenko 1959) représentées dans le tableau (2.1) :

Plaque carrée	Flèche au centre	Moment au centre	Moment d'encastrement
Plaque appuyée charge uniforme q	$0,00406qa^4/D$	$0,047qa^2$	
Plaque encadrée charge au centre P	$0,0056Pa^2/D$		$0,1257P$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

est la rigidité à la flexion de la plaque.

Tableau 2.1 : solutions analytiques d'une plaque carrée

En raison de la symétrie, on modélise un quart de la plaque. Les conditions aux limites sont les suivantes :

pour la plaque appuyée :

$$w = 0 \text{ sur BD et CD;} \\ \theta_X = 0 \text{ sur AB et } \theta_Y = 0 \text{ sur AC}$$

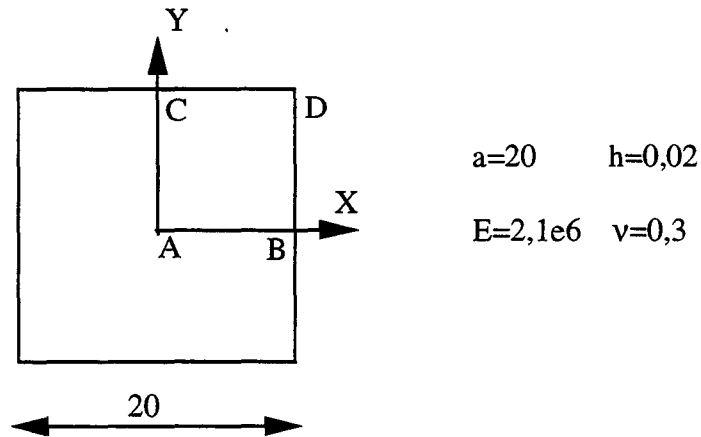
pour la plaque encadrée:

$$w = \theta_X = \theta_Y = 0 \text{ sur BD et CD;} \\ \theta_X = 0 \text{ sur AB et } \theta_Y = 0 \text{ sur AC}$$

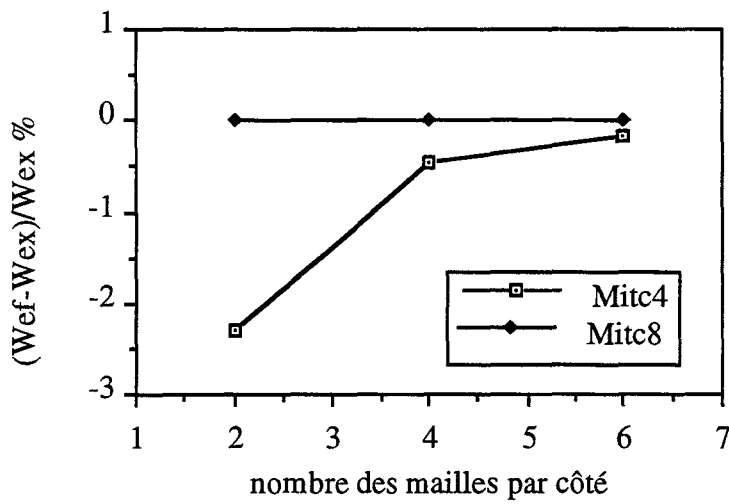
Les figures (2.1b) et (2.1c) montrent les résultats obtenus avec les éléments Mitc4 et Mitc8 pour la plaque simplement appuyée. On observe une convergence très rapide avec l'élément Mitc8 sur la flèche: l'erreur est inférieure à 0,2% pour un maillage de 2x2 éléments. La flèche donnée par l'élément Mitc4 est aussi satisfaisante, l'écart est de 0,5% avec un maillage de 4x4 éléments. Pour le calcul du moment au centre, les deux éléments donnent de bons résultats avec un écart inférieur à 0,5% pour un maillage en 4x4 éléments.

Les figures (2.2a) et (2.2b) montrent les résultats obtenus avec les deux éléments pour la plaque encadrée. On observe une convergence très rapide de l'élément Mitc8 : l'erreur sur la flèche est inférieure à 1% pour un maillage de 2x2 éléments, et inférieure à 3% sur le moment d'encastrement pour 4x4 éléments.

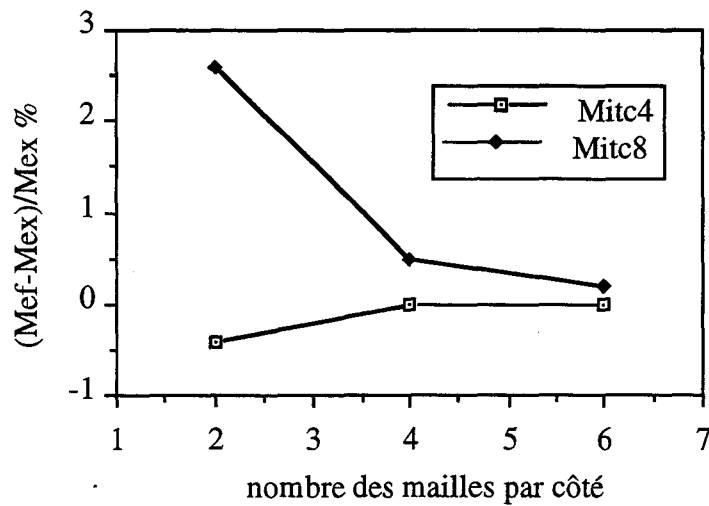
Pour l'élément Mitc4, la convergence sur la flèche est bonne avec une erreur voisine de 4% pour un maillage de 4x4 éléments. La convergence sur le moment d'encastrement est très lente : l'erreur est proche de 20% avec 6x6 éléments.



(a)



(b)



(c)

Figure 2.1 : Tests des éléments Mitc4 et Mitc8 sur une plaque carrée simplement appuyée et chargée uniformément.

a) Caractéristiques géométriques et mécaniques

b) Flèche au centre

c) Moment au centre.

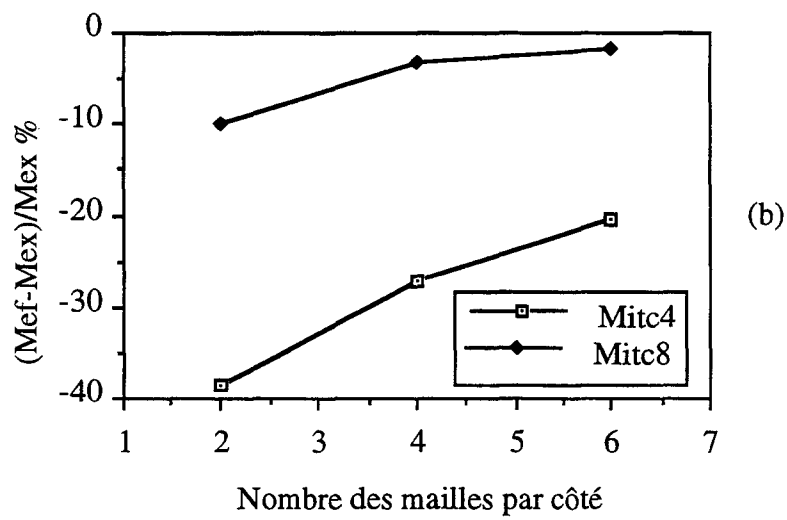
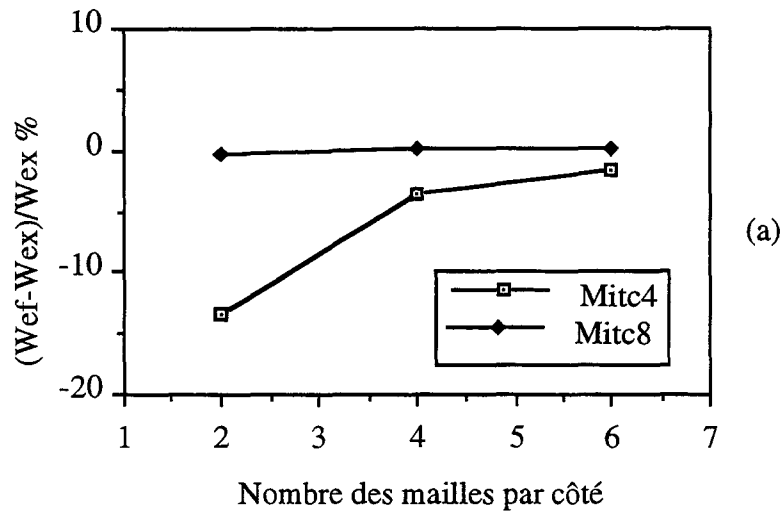


Figure 2.2 Tests des éléments Mitc4 et Mitc8 sur une plaque carrée encastree et chargée au centre par une force concentrée.
 a) Flèche au centre
 b) Moment d'encastrement

Plaques biaises

Nous présentons dans ce paragraphe deux tests sur des plaques biaises losanges dont les caractéristiques géométriques et mécaniques sont données dans la figure (2.3). Le premier cas est celui d'une plaque biaise à 60° soumise à une charge uniformément répartie. On suppose qu'elle est simplement appuyée sur deux côtés opposés et libre sur les deux autres côtés. La solution de référence (tableau 2.2) a été obtenue par différences finies (Razzaque 1973).

Le second test concerne une plaque biaise à 30° simplement supportée sur ses bords et uniformément chargée. La solution de référence (tableau 2.2) a été proposée par Morley (1963). Ce test constitue un cas sévère puisque le moment fléchissant comporte une singularité au niveau de l'angle obtus.

Charge uniforme	Flèche au centre	Moment M_y au centre	Moment minimal au centre	Moment maximal au centre
Plaque à 60°	$0,007945qL^4/D$	$0,09589qL^2$		
Plaque à 30°	$0,408 \cdot 10^{-3}qL^4/D$		$1,08 \cdot 10^{-2}qL^2$	$1,91 \cdot 10^{-2}qL^2$

Tableau 2.2 : Solutions de référence pour les plaques biaises à 60° et à 30°

Les figures (2.3) et (2.4) montrent les résultats obtenus avec les éléments Mitc4 et Mitc8. Pour la plaque à 60° , on constate que l'élément Mitc8 converge rapidement sur la flèche avec une erreur inférieure à 1% pour un maillage de 4×4 éléments. Sa convergence sur le moment est également bonne avec une erreur inférieure à 1% pour un maillage de 8×8 éléments. L'élément Mitc4 montre dans ce cas une convergence plus lente avec une erreur sur la flèche et sur le moment de l'ordre de 5% pour un maillage de 8×8 éléments.

Pour la plaque à 30° , les deux éléments convergent lentement. On observe un meilleur comportement d'ensemble de l'élément Mitc4, notamment pour le calcul du moment minimal. Pour un maillage de 14×14 éléments, l'erreur moyenne donnée par l'élément Mitc8 est de 3%, alors que celle de l'élément Mitc4 est de 5%.

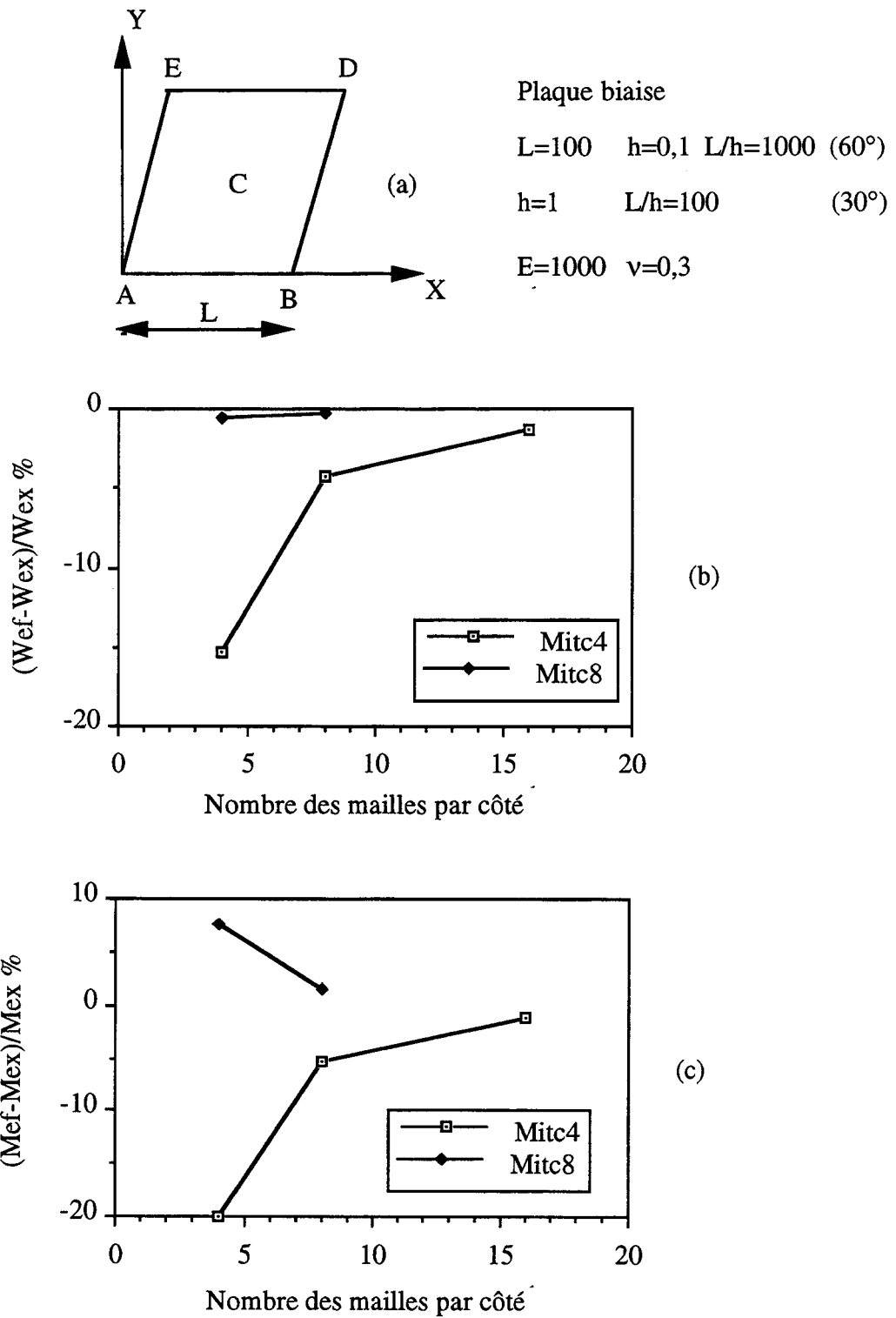
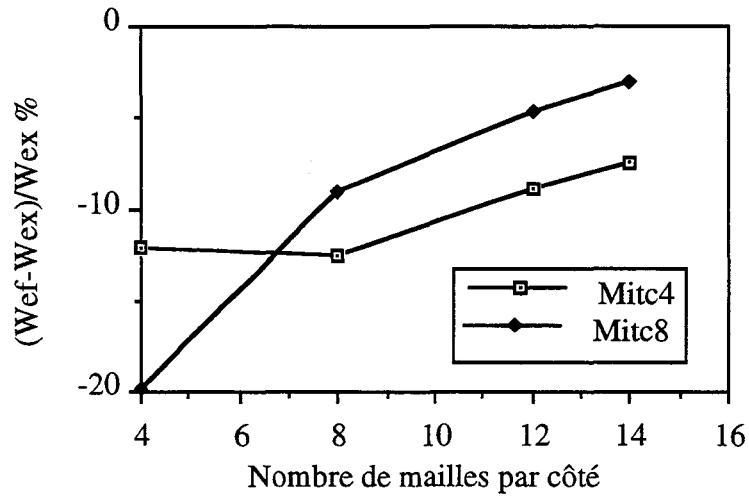
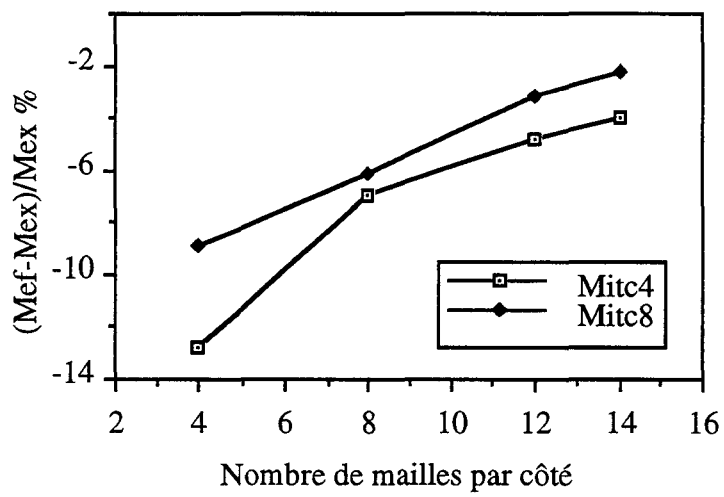


Figure 2.3 - Tests des éléments Mitc4 et Mitc8 sur une plaque biaisée à 60° et uniformément chargée.

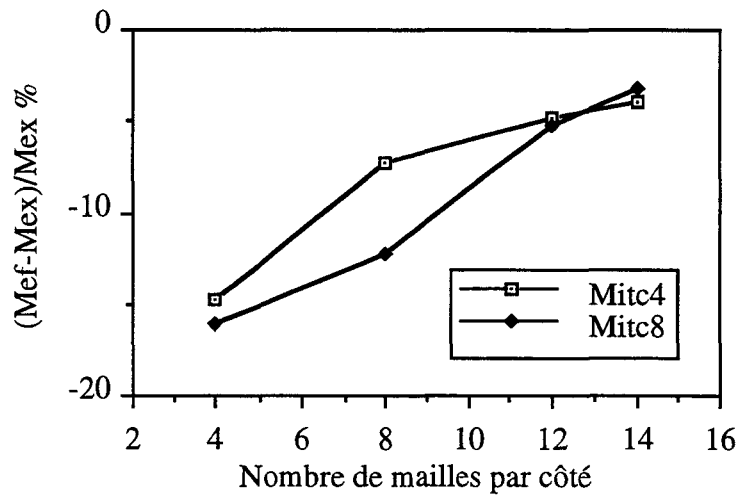
- a) Caractéristiques géométriques et mécaniques
- b) Flèche au centre
- c) Moment M_y au centre



(a)



(b)



(c)

Figure 2.4 Tests des éléments Mitc4 et Mitc8 sur une plaque biaisée à 30° et uniformément chargée.

- a) Flèche au centre
- b) Moment maximum au centre
- c) Moment minimum au centre

II.1.2 Plaques composites

Nous présentons dans ce paragraphe des tests sur deux plaques composites : une plaque multicouche et une plaque stratifiée.

Plaque carrée multicouche simplement appuyée

On considère une plaque simplement appuyée et soumise à une charge doublement sinusoïdale. On étudie deux séquences d'empilement des couches : la première séquence est de trois couches $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ et la seconde est de neuf couches $0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ$. Les caractéristiques mécaniques des couches sont représentées dans la figure (2.5).

On dispose pour ce test d'une solution de référence basée sur l'élasticité 3D (Pagano et Hatfield 1972). Les tableaux (2.3) et (2.4) montrent une comparaison des résultats des éléments Mitc4 et Mitc8 avec la solution de référence. Nous y avons également joint les résultats obtenus par Lardeur et Batoz (1989). Une analyse de ces résultats montre que l'élément Mitc8 donne de bons résultats dans le cas de trois couches avec les grands élancements : l'erreur constatée sur la flèche et les contraintes normales est proche de 2% pour $a/h=50$. Pour les faibles élancements ($a/h=4$), on observe un écart important par rapport à la solution de référence qui atteint 45% sur les contraintes normales et 8% sur la flèche. Pour la plaque avec neuf couches, on observe la même tendance avec des erreurs moins importantes dans le cas des faibles élancements : l'erreur est de 24% sur les contraintes normales et de 5% sur la flèche. Les contraintes de cisaillement (voir les relations (1.24) du chapitre I) sont relativement bien calculées pour les deux séquences d'empilement et pour les différentes valeurs de l'élancement. En effet, l'erreur moyenne observée est de l'ordre de 10%. Elle s'atténue avec la diminution de l'épaisseur et l'augmentation du nombre des couches. Il est à noter que l'élément DST (Lardeur et Batoz 1989) donne parfois pour ces contraintes une erreur de l'ordre 200% pour la séquence de trois couches.

En ce qui concerne l'élément Mitc4, on observe un comportement similaire à celui de l'élément Mitc8 mais avec des meilleurs résultats sur la flèche, notamment dans le cas des faibles élancements : l'erreur est de 6% avec trois couches et de 2,5% avec neuf couches.

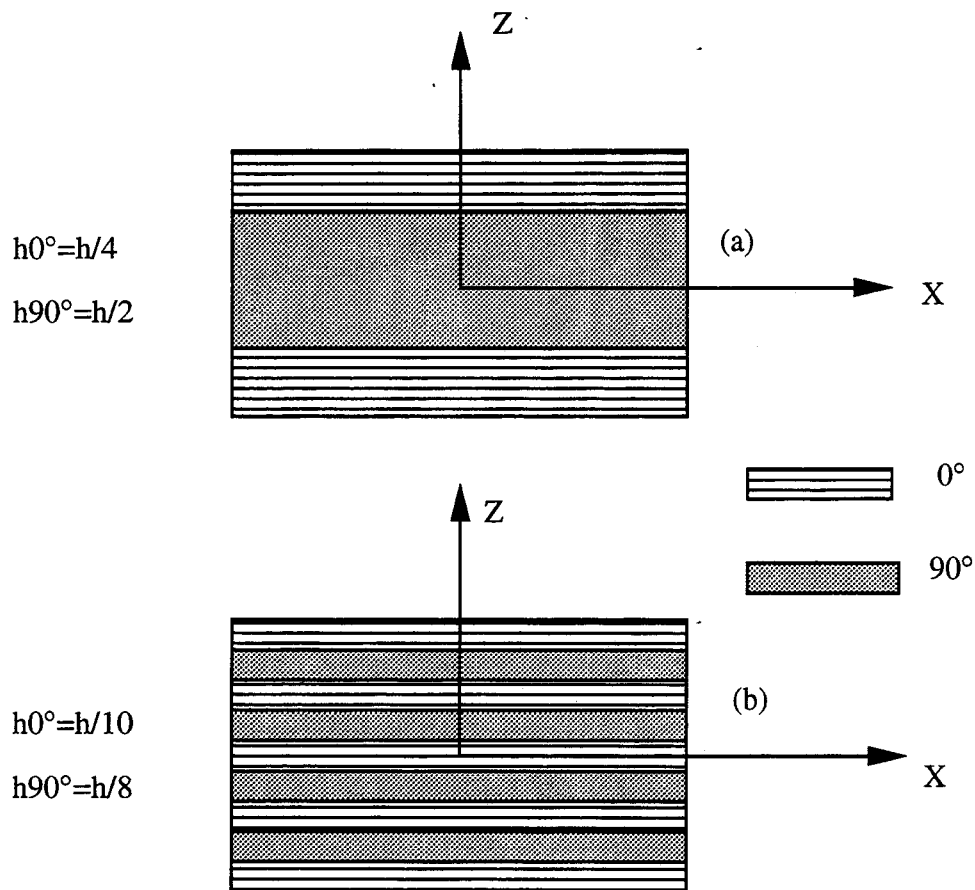
On note globalement une certaine sensibilité des éléments à l'anisotropie qu'elle soit locale ($EL/ET=25$) ou globale (rigidité différente suivant x et y). Cette sensibilité est

importante quand l'élanement est faible et concerne davantage les contraintes normales que les déplacements. Par ailleurs, on remarque que l'augmentation du nombre des couches se traduit par un comportement global se rapprochant de l'isotropie : en effet l'écart de rigidité entre les deux directions x et y se réduit et les deux coefficients k_1 et k_2 sont presque identiques (0,67).

Plaque stratifiée

Le deuxième cas étudié est celui d'une plaque carrée stratifiée constituée par l'empilement de trois couches orthotropes. Nous regardons dans ce test l'effet de l'anisotropie provenant du changement des caractéristiques entre le coeur et la peau.

La plaque est supposée carrée, simplement appuyée et uniformément chargée. Ses caractéristiques mécaniques et géométriques sont données dans la figure (2.6). La solution de référence a été proposée à partir d'une analyse tridimensionnelle (Srinivas 1973). On fournit également à titre de comparaison, les résultats obtenus par Owen et Figueiras (1983) et Lardeur et Batoz (1989). Le tableau (2.5) montre les résultats donnés par les différents éléments et par la solution de référence. On observe des résultats proches entre les éléments Mitc4 et Mitc8 et la solution de référence pour $C=1$ et $C=10$. En effet, l'erreur est proche de 1,5% sur la flèche et de 2,5% sur la contrainte maximale. Pour $C=50$, le résultat de la flèche est très bon, mais la contrainte maximale est sous-estimée avec une erreur de l'ordre de 15%. On note que l'élément Hétérosis fournit pratiquement les mêmes résultats que les éléments Mitc4 et Mitc8; l'élément DST donne généralement de bons résultats sauf pour $C=10$ où on constate une erreur de l'ordre de 10 % sur la contrainte maximale.



Caractéristiques géométriques et mécaniques :

$a=1000$ $a/h=4 ; 10 ; 50 ; 10000$

$E_L = 25$ $E_T = 1$ $G_{LT} = 0,5$ $G_{LZ} = 0,5$

$G_{TZ} = 0,2$ $\nu_{LT} = 0,25$ $\nu_{TZ} = 0,25$

Figure 2.5 Plaque carrée multicouche

a) Empilement de trois couches 0 /90/0

b) Empilement de neuf couches 0/90/0/90/0/90/0/90/0

a/h	Modèle	$\bar{\sigma}_x$ (a/2, a/2, -h/2)	$\bar{\sigma}_y$ (a/2, a/2, -h/4)	$\bar{\sigma}_{xz}$ (0 a/2 0)	$\bar{\sigma}_{yz}$ (a/2 0 0)	\bar{W} (a/2 a/2 0)
4	DST 10x10 *	0,518	0,296	0,202	0,422	4,49
4	Mitc4 8x8	0,343	0,711	0,25	0,284	4,76
4	Mitc8 8x8	0,4	0,74	0,252	0,293	4,85
4	Elasticité 3D *	0,72	0,66	0,219	0,292	4,491
10	DST 10x10 *	0,549	0,253	0,213	0,409	1,727
10	Mitc4 8x8	0,473	0,411	0,326	0,17	1,74
10	Mitc8 8x8	0,53	0,439	0,326	0,184	1,839
10	Elasticité 3D *	0,559	0,403	0,301	0,196	1,709
50	DST 10x10*	0,494	0,331	0,16	0,436	1,067
50	Mitc4 8x8	0,532	0,2747	0,36	0,118	1,029
50	Mitc8 8x8	0,5515	0,284	0,3624	0,127	1,057
50	Elasticité 3D *	0,539	0,276	0,337	0,141	1,031
10000	Mitc4 8x8	0,535	0,2676	0,3626	0,1158	0,997
10000	Mitc8 8x8	0,54	0,27	0,365	0,1217	1
10000	Elasticité 3D *	0,539	0,269	0,339	0,138	1

facteurs de correction du cisaillement transversal : $k_1=0,57$ $k_2=0,882$

$$\bar{W} = W \frac{\pi^4 Q}{12S^4 h q_0} \quad S = \frac{a}{h} \quad Q = 4G_{LT} + \frac{E_L + E_T(1 + 2\nu_{TZ})}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}}$$

$$(\bar{\sigma}_x \quad \bar{\sigma}_y) = \frac{1}{q_0 S^2} (\sigma_x \quad \sigma_y) \quad (\bar{\sigma}_{xz} \quad \bar{\sigma}_{yz}) = \frac{1}{q_0 S} (\sigma_{xz} \quad \sigma_{yz})$$

Tableau 2.3: Validation des éléments Mitc4 et Mitc8 sur une plaque carrée avec trois couches 0 / 90 / 0.

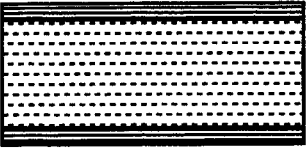
(*) Valeurs tirées de : Lardeur et Batoz (1989)

S	modèle	$\bar{\sigma}_x$ (a/2, a/2, -h/2)	$\bar{\sigma}_y$ (a/2, a/2, -2h/5)	$\bar{\sigma}_{xz}$ (0, a/2, 0)	$\bar{\sigma}_{yz}$ (a/2, 0, 0)	\bar{W} (a/2, a/2, 0)
4	DST 10x10*	0,547	0,419	0,225	0,231	4,242
4	Mitc4 8x8	0,468	0,507	0,239	0,24	4,176
4	Mitc8 8x8	0,52	0,548	0,242	0,246	4,267
4	Elasticité 3D*	0,684	0,628	0,223	0,223	4,079
10	DST 10x10*	0,541	0,425	0,219	0,257	1,526
10	Mitc4 8x8	0,5075	0,4612	0,257	0,22	1,513
10	Mitc8 8x8	0,556	0,498	0,26	0,227	1,594
10	Elasticité 3D*	0,551	0,477	0,247	0,213	1,512
50	DST 10x10	0,541	0,447	0,19	0,263	1,020
50	Mitc4 8x8	0,534	0,43	0,269	0,2068	1,018
50	Mitc8 8x8	0,548	0,4416	0,2712	0,21	1,038
50	Elasticité 3D*	0,539	0,433	0,258	0,219	1,021
10000	Mitc4 8x8	0,535	0,428	0,27	0,206	1
10000	Mitc8 8x8	0,54	0,4323	0,2712	0,2089	1
10000	Elasticité 3D*	0,539	0,431	0,259	0,219	1

Facteurs de correction : $k_1=0,67$ $k_2=0,666$

Tableau 2.4 : Validation des éléments Mitc4 et Mitc8 sur une plaque carrée avec neuf couches 0/90/0/90/0/90/0/90/0.

(*) Valeurs citées dans Lardeur et Batoz (1989)

<p>Matériaux :</p> <p>Caractéristiques de la peau :</p> $E_L = 3,4156 \quad E_T = 1,7931 \quad G_{LT} = 1$ $G_{ZT} = 1,015 \quad G_{LZ} = 0,608 \quad \nu_{LT} = 0,44$ <p>Caractéristiques du coeur :</p> <p>mêmes modules que la peau divisés par un facteur $C=1, 10$ et 50.</p> <p>facteurs correcteurs :</p> $C=1, k_1=k_2=0,833$ $C=10, k_1=k_2=0,3525$ $C=50, k_1=k_2=0,09385$	 <p>Caractéristiques géométriques: Epaisseur des peaux=$0,1h$ Epaisseur du coeur=$0,8h$ $l/h=10$</p>
--	--

$$\bar{W} = W \frac{G_{LT}(\text{coeur})}{hq} \quad \bar{\sigma}_x = \frac{\sigma_x}{q}$$

Figure 2.6 : Caractéristiques de la plaque stratifiée

C	modèle	\bar{W} (1/2,1/2)	$\bar{\sigma}_x$ (1/2,1/2,-4h ⁺ /10)	$\bar{\sigma}_x$ (1/2,1/2,-4h ⁻ /10)	$\bar{\sigma}_x$ (1/2,1/2,-h/2)
1	DST 6X6 *	180,88	27,48	27,48	34,34
1	Hétérosis 4x4**	183,99	28,98	28,98	36,22
1	Mitc4 8x8	181,2	28,48	28,48	35,60
1	Mitc8 8x8	183,87	28,66	28,66	35,83
1	Elasticité 3D***	181,05	28,45	28,45	35,94
10	DST 6x6*	41,92	4,71	47,06	58,82
10	Hétérosis 4x4**	41,92	4,87	48,73	65,23
10	Mitc4 8x8	41,98	5,048	50,48	63,10
10	Mitc8 8x8	42,53	5,12	51,2	64,04
10	Elasticité 3D***	41,91	4,86	48,61	65,08
50	DST 6x6*	16,65	1,06	53,05	66,32
50	Hétérosis 4x4**	16,85	0,93	46,65	58,31
50	Mitc4 8x8	16,85	0,927	46,375	57,96
50	Mitc8 8x8	16,97	0,943	47,15	58,95
50	Elasticité 3D***	16,75	0,74	37,15	66,90

Tableau 2.5 : Déplacements et contraintes de la plaque carrée stratifiée

(*) Lardeur et Batoz 1989 (**) Owen et Figueiras 1983

(***) Srinivas 1973

II.1.3 Plaques sur appuis élastiques

Nous étudions dans ce paragraphe deux cas de plaques sur appuis élastiques. On rencontre ce type de liaison par exemple dans le calcul des radiers et dallages où le sol de fondation est modélisé par des appuis élastiques.

Plaque épaisse

Le premier test concerne une plaque carrée soumise à une charge uniforme et reposant sur un sol élastique; la surface d'impact de la charge est un carré centré de $0,5 \times 0,5 \text{ m}^2$ (Figure 2.7a). Le sol de fondation développe une réaction proportionnelle au tassement; le coefficient de proportionnalité est le module de réaction du sol (K).

La solution de référence a été proposée par Shi et al (1994). Elle est fondée sur la théorie des plaques de Mindlin-Reissner et consiste en la superposition de trois solutions élémentaires. La première résulte de l'étude d'une plaque, soumise au même chargement et possédant les conditions d'appuis suivantes : Effort tranchant $T=0$; moment de torsion $M_{xy}=0$; rotation dans le plan $(n, z) \theta=0$, n étant la normale extérieure au bord de la plaque.

Les deux autres solutions sont celles d'une plaque dont deux côtés opposés sont soumis aux conditions d'appuis définies précédemment et les deux autres sont sollicités par deux moments de flexion inconnus. La solution est obtenue chaque fois par un développement en double série de Fourier; les moments inconnus sont déterminés par les conditions de bords libres après superposition des différentes solutions élémentaires.

On modélise le quart de la plaque avec un maillage de 10×10 éléments Mitc4 ou Mitc8. La figure (2.8a) montre les résultats obtenus. On observe un très bon accord entre les éléments Mitc4 et Mitc8 et la solution de référence avec un écart au centre inférieur à 2%.

La figure (2.8b) montre l'évolution de la contrainte normale sur la face inférieure en fonction de la variable x . Les résultats obtenus avec les éléments Mitc4 et Mitc8 sont presque identiques ce qui prouve que la convergence est atteinte. L'écart maximal par rapport à la solution de référence est de 9% et se situe au centre de la plaque. Cet écart peut être attribué à la différence d'approximation utilisée dans les deux simulations.

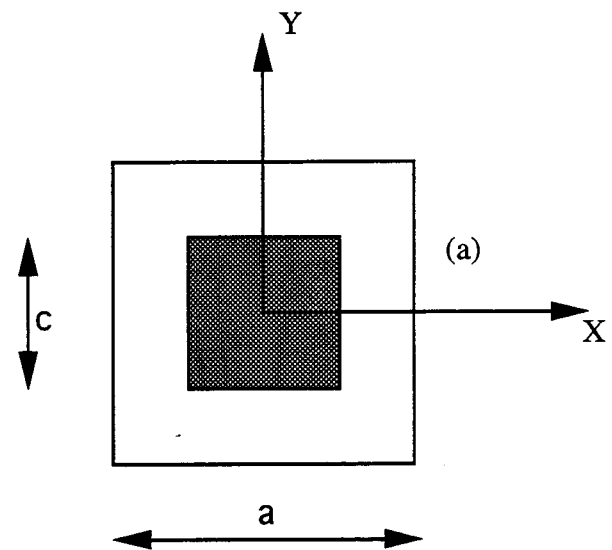
Caractéristiques de la plaque épaisse :

$$a=1\text{m} \quad c=0,5\text{m} \quad h=0,4\text{m}$$

$$E=300\text{e}6 \text{ N/m}^2 \quad \nu=0,35 \quad K=50\text{e}6\text{N/m}^3$$

Chargement:

$q=1\text{N/m}^2$ appliquée sur le carré centré de côté $c=0,5\text{m}$



Caractéristiques de la plaque mince :

$$a=2,5\text{m} \quad h=0,12\text{m}$$

$$E=2\text{e}6\text{T/m}^2 \quad \nu=0,25 \quad K=7864\text{T/m}^3$$

$$P=100\text{T}$$

Valeurs adimensionnelles :

$$w=W/a \quad p=Pa/D \quad k=Ka^4/D=1000$$

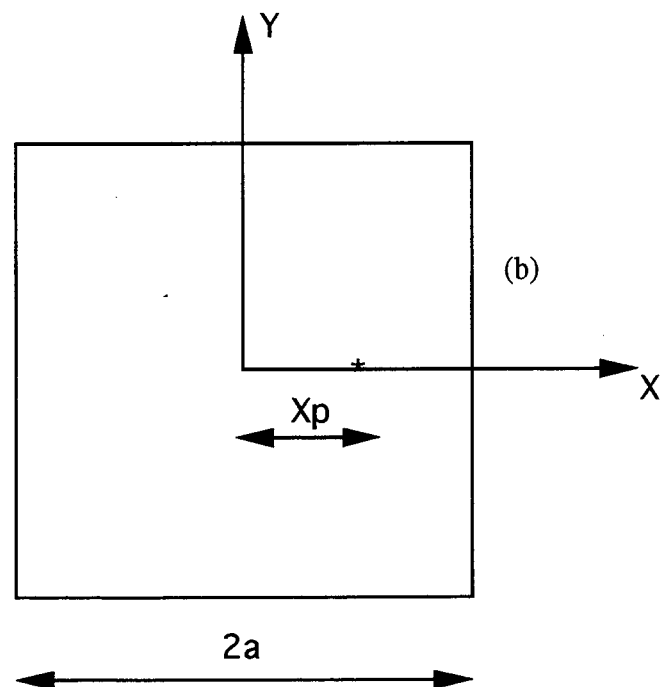
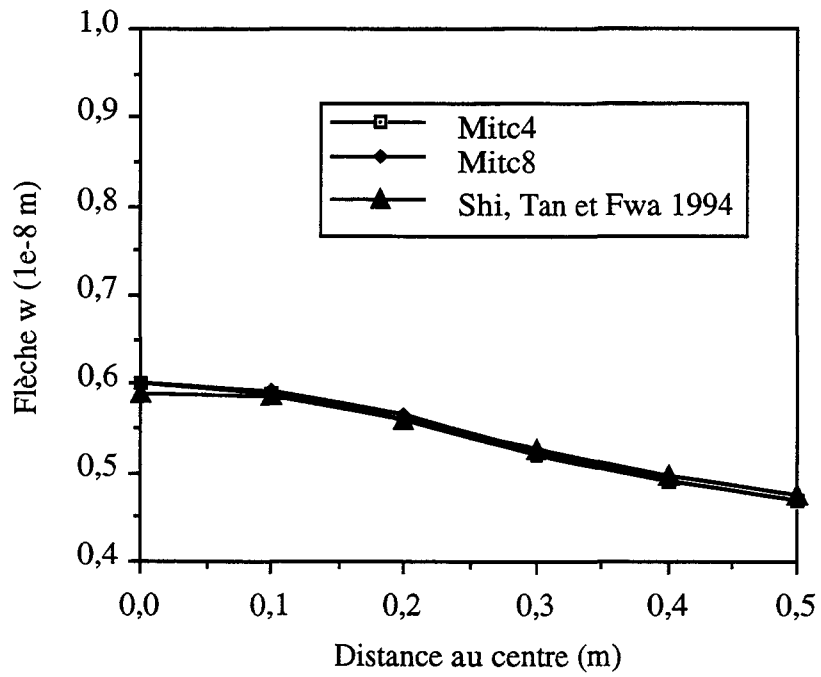


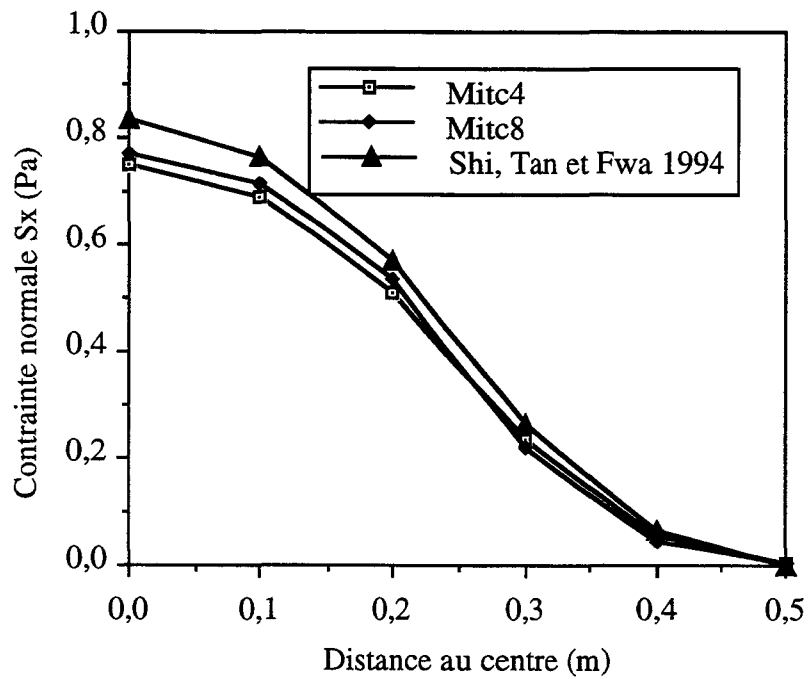
Figure 2.7 : Plaques carrées sur appuis élastiques

a) Plaque épaisse soumise à une charge uniforme appliquée sur un carré centré

b) Plaque mince soumise à une force concentrée appliquée sur l'axe des x



(a)



(b)

Figure 2.8 Validation des éléments Mitc4 et Mitc8 sur une plaque épaisse sur appuis élastiques.

a) Evolution de la flèche le long de l'axe des x

b) Evolution de la contrainte normale le long de l'axe des x

Plaque mince

On étudie dans ce cas une plaque carrée mince sur appuis élastiques dont les caractéristiques géométriques et mécaniques sont illustrées dans la figure (2.7b). Elle est sollicitée par une force concentrée d'intensité $100T$ située sur l'axe x à une distance X_p du centre.

Ce problème a été traité par Celep (1988) en utilisant la méthode de Galerkin et en choisissant comme fonctions de base les modes propres d'une poutre libre.

Nous avons modélisé la moitié de la plaque avec un maillage de 20×10 éléments. Les figures (2.9a) et (2.9b) comparent les flèches obtenues avec l'élément Mitc4 et la solution de référence. On observe un bon accord qualitatif entre les deux résultats mais l'élément Mitc4 donne une solution plus souple que la solution de référence. Pour expliquer cette différence, une deuxième simulation a été effectuée avec un maillage comportant peu d'éléments et pour une force appliquée au centre. Les résultats de cette simulation sont plus proche de la solution de référence, ceci montre que cette dernière comportait un faible nombre d'éléments d'approximation. Les figures (2.10a et 2.10b) montrent les courbes délimitant les zones de contact entre la plaque et le sol. Quand la charge se trouve au centre, cette zone est délimitée par un cercle de rayon égal à $0,49a$ et de centre confondu avec la position de la charge. En déplaçant cette dernière vers la droite, le cercle précédent subit une translation dans la même direction. Au fur et à mesure que la charge se rapproche du bord la zone de contact se réduit et la plaque a tendance à tourner autour de son bord. Cette conclusion est en bon accord avec la solution de référence.

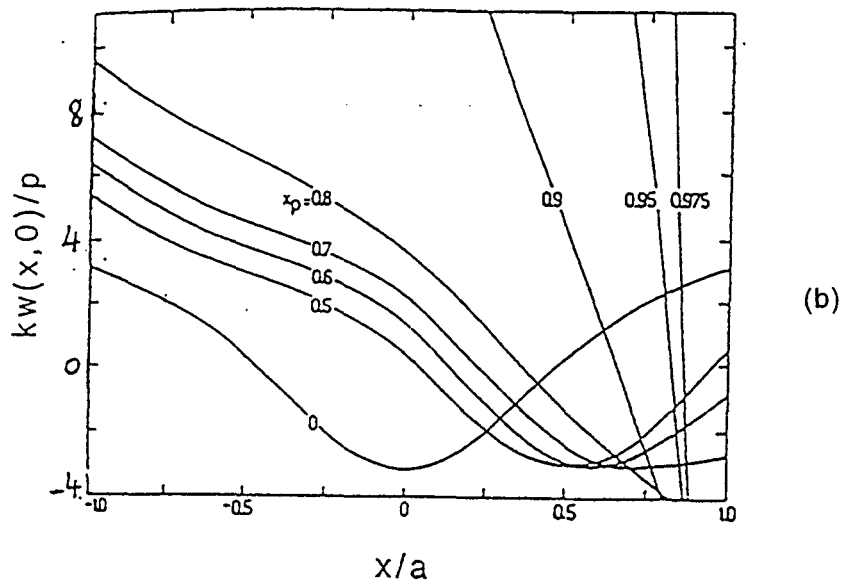
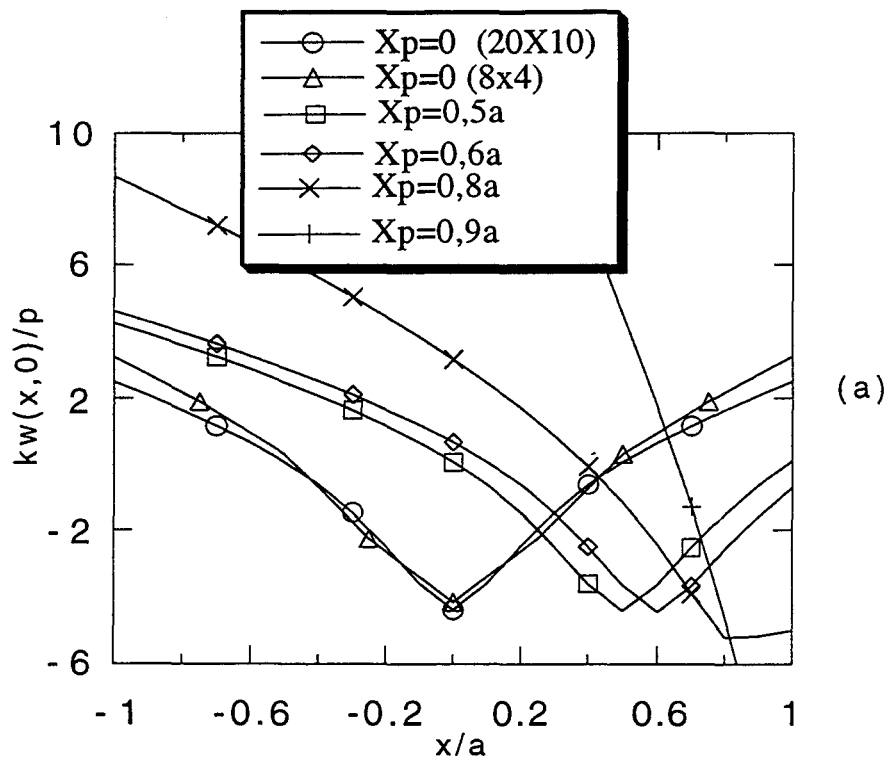


Figure 2.9 : Evolution de la flèche le long de l'axe x pour une plaque carrée mince sur appuis élastiques soumise à une force concentrée située sur l'axe x
 a) Solution de l'élément Mitc4.
 b) Solution de référence

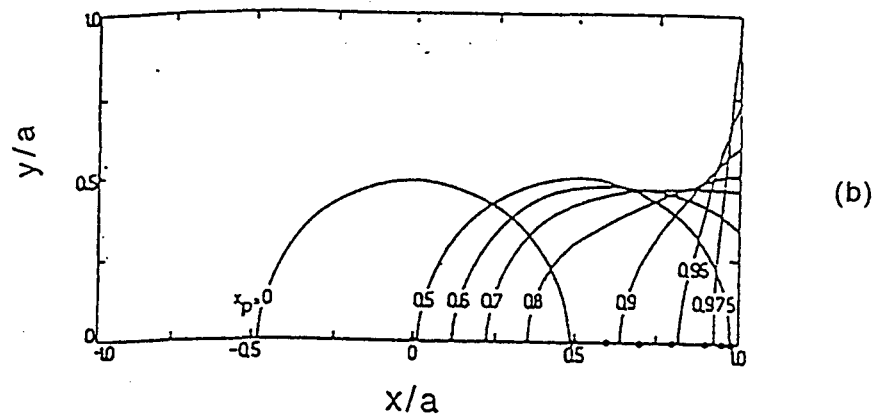
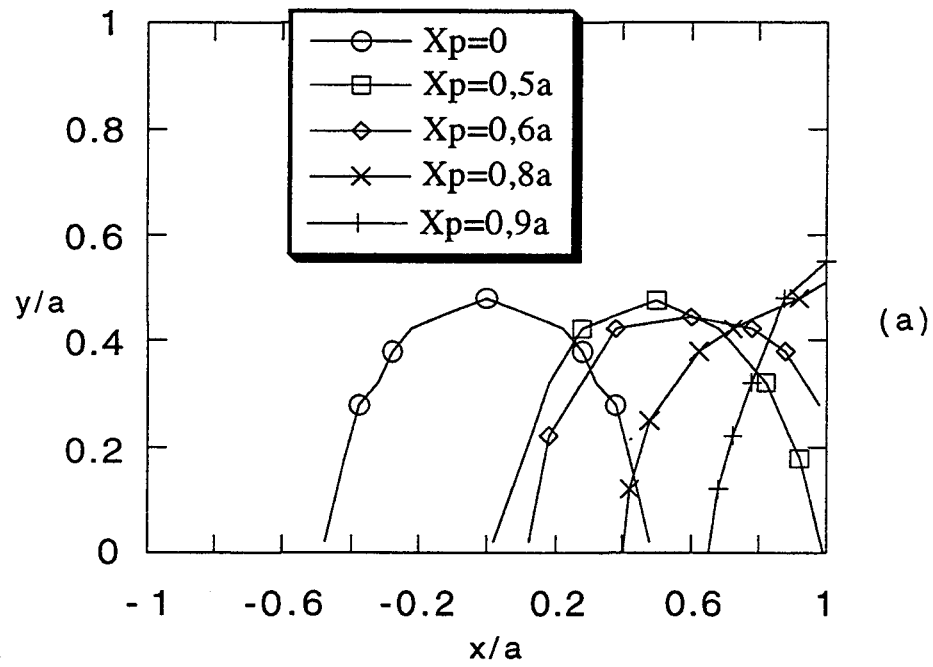


Figure 2.10 : Evolution de la zone de contact pour une plaque carrée mince sur appuis élastiques soumise à une force concentrée située sur l'axe x
 a) Solution de l'élément Mitc4.
 b) Solution de référence

II.2 Vibration libre

Cette partie comporte des tests de validation de l'élément Mitc4 sur le comportement en vibration libre des plaques isotropes et multicouches, et une étude dynamique d'une plaque sur appuis ponctuels rigides.

II.2.1 Plaque isotrope

Plaque console

Il s'agit d'une plaque en console dont les caractéristiques géométriques et mécaniques sont données dans la figure (2.11). On étudie cette plaque pour deux géométries: carré et biais à 15°.

Ce problème a été traité par une approximation de champ de déplacements par des polynômes en x , y et z (Mc Gee 1992). Les tableaux (2.6) et (2.7) montrent les valeurs de six premières fréquences, obtenues avec l'élément Mitc4 et la solution de référence. On constate une parfaite concordance entre les deux solutions. L'erreur observée est inférieure à 1% pour la plaque carrée et inférieure à 2% pour la plaque bise. Ce test prouve l'efficacité de l'élément Mitc4 à prédire des modes élevés, pour une plaque située à la limite de validité de la théorie des plaques modérément épaisses.

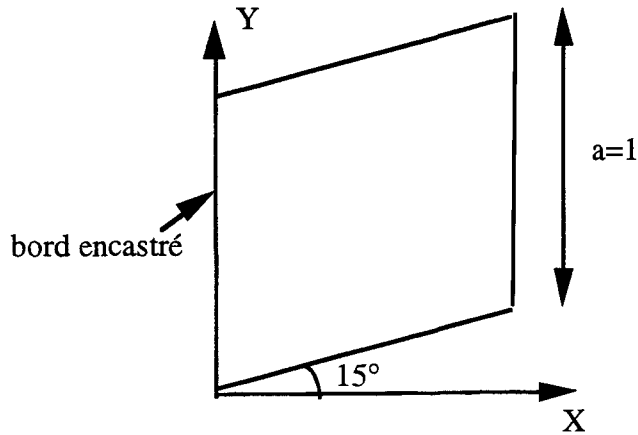
II.2.2 Plaque multicouche

Dans cet exemple, on considère une plaque simplement appuyée dont les caractéristiques sont données dans la figure (2.12). L'objectif de ce test est d'analyser l'influence sur la pulsation fondamentale d'un certain nombre de paramètres, à savoir: les dimensions de la plaque, les séquences d'empilement, le degré d'orthotropie des couches et l'orientation des fibres.

Effet de l'épaisseur de la plaque

Dans le premier volet du test qui concerne l'effet de l'épaisseur, on dispose de deux solutions de référence basées sur des théories de plaques d'ordre supérieur : la première est une solution par éléments finis proposée par Mallikarjuna et Kant (1989) et la seconde est une solution analytique due à Reddy et Phan (1985)

Etude vibratoire d'une plaque losange



$a=b=1 \quad b/h=5$

$E=1 \quad \nu=0.3 \quad \rho=1$

valeur adimensionnelle de la pulsation propre :

$\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$

$D = Eh^3 / 12(1 - \nu^2)$

Fig 2.11: Caractéristiques de la plaque console

	mode1	mode2	mode3	mode4	mode5	mode6
MC GEE 1992	3,36	7,4	10,95	17,76	22,64	24,13
MITC4 12x12	3,342	7,39	10,93	17,745	22,714	24,15

Tableau 2.6 : Validation de Mitc4 sur une plaque carrée console
calcul des six premiers modes propres.

	mode1	mode2	mode3	mode4	mode5	mode6
MC GEE 1992	3,47	7,55	11,04	18,3	21,81	25,65
MITC4 12x12	3,438	7,54	11,016	18,27	21,87	26,12

Tableau 2.7 : Validation de Mitc4 sur une plaque console biaise - angle de biais 15°
calcul des six premiers modes propres.

La plaque est supposée carrée et constituée par un empilement de quatre couches de même épaisseur avec des fibres orientées respectivement à $0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$. Les analyses ont été effectuées pour trois valeurs de l'épaisseur ($a/h=4; 5$ et 10)

Le tableau (2.8) montre les résultats obtenus par les différents modèles. On observe une bonne concordance entre les résultats obtenus avec l'élément Mitc4 et les solutions de référence. L'écart maximal (2%) a été obtenu pour la plus grande épaisseur.

Le tableau (2.8) montre également la solution obtenue avec la théorie de Love-Kirchhoff. On constate dans ce cas que l'erreur atteint 90% avec les faibles élancements ce qui signifie que les effets de l'effort tranchant et de l'inertie de rotation sont loin d'être négligeables. On observe une erreur toujours importante (de l'ordre de 22%) quand l'épaisseur diminue ($a/h=10$). Ceci montre que cette théorie, valable uniquement pour les plaques très minces, n'est pas adaptée à ce genre de problèmes.

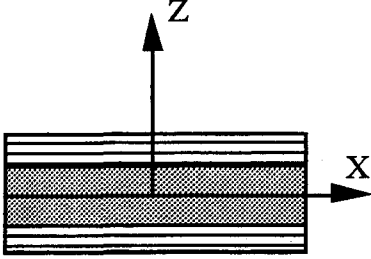
Effet du degré d'orthotropie et des séquences d'empilement

Dans le deuxième volet du test, la valeur de l'épaisseur est fixée à $a/5$. On étudie les trois séquences suivantes: trois couches $0^\circ/90^\circ/0^\circ$; cinq couches $0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ$ et neuf couches $0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ$. Les solutions de référence sont la solution par éléments finis de Mallikarjuna et Kant (1989) et la solution basée sur l'élasticité 3D (Noor 1973).

Le rapport des modules (E_1/E_2) varie de 3 à 40. Les tableaux (2.9a), (2.9b) et (2.9c) montrent un bon accord entre les résultats obtenus par l'élément Mitc4 et les solutions de référence. En effet, un écart maximal de 4% est observé pour un degré d'orthotropie élevé et pour un faible nombre des couches. L'écart se réduit sensiblement si on augmente le nombre des couches. La théorie de Love-Kirchhoff donnent des écarts très importants notamment quand le rapport des modules augmente et ses résultats sont insensibles à l'augmentation du nombre des couches.

Effet de l'orientation des fibres

On s'intéresse dans le dernier volet à une plaque rectangulaire de rapports $a/b=1,5$ et $a/h=10$. Elle est constituée par l'empilement de trois couches à fibres orientées suivant le schéma $\theta/-\theta/\theta$; l'angle θ prend les valeurs: 30° , 45° et 60° .

<p>Caractéristiques géométriques et mécaniques :</p> <p>$a=b=1000$</p> <p>$E1=40 \quad E2=1 \quad \nu_{12}=0,25$</p> <p>$G_{12}=0,6 \quad G_{13}=0,6 \quad G_{23}=0,5$</p> <p>$\rho=1$</p>	 <p>Séquence d'empilement des couches :</p> <p>0/90/90/0</p>
--	--

Valeur adimensionnelle de la pulsation propre :

$$\bar{\omega} = (\omega a^2 / h) \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$$

Figure 2.12 : Test dynamique d'une plaque carrée multicouche- caractéristiques géométriques et mécaniques.

Coefficients correcteurs : $k_1=0,8081 \quad k_2=0,7116 \quad k_{12}=0$

a/h	4	5	10
Mallikarjuna et Kant 1989	9,258	10,74	15,09
Théorie classique des plaques*	17,907	18,215	18,65
Mitc4 (8X8)	9,31	10,807	15,26
Reddy et Phan (1985)*	9.497	10.989	15.27

Tableau 2.8: Validation de l'élément Mitc4 sur une plaque carrée multicouche- effet de l'épaisseur sur la pulsation fondamentale.

(*) Valeurs tirées de Mallikarjuna et Kant (1989)

$$a=b=1000 \quad a/h=5$$

Caractéristiques du matériau inchangées

valeur adimensionnelle de la pulsation :

$$\bar{\omega} = \omega \sqrt{\frac{\rho h^2}{E_2}}$$

E1/E2	3	10	20	30	40
Mallikarjuna et Kant 1989	0,26126	0,32528	0,37253	0,39884	0,41521
Théorie classique des plaques *	0,29198	0,41264	0,5404	0,64336	0,73196
Mitc4 (8X8)	0,2689	0,3329	0,375	0,39807	0,413
Noor (1973)	0,26474	0,3284	0,3824	0,41089	0,43006

(a)

E1/E2	3	10	20	30	40
Mallikarjuna et Kant 1989	0,26255	0,33621	0,39192	0,42482	0,44695
Théorie classique des plaques*	0,29198	0,41264	0,5404	0,64336	0,73196
Mitc4 (8X8)	0,27	0,3438	0,399	0,4319	0,454
Noor (1973)	0,26587	0,34089	0,39792	0,43140	0,45374

(b)

E1/E2	3	10	20	30	40
Mallikarjuna et Kant 1989	0,26298	0,34035	0,40107	0,43755	0,4622
Théorie classique des plaques*	0,29198	0,41264	0,54043	0,64336	0,73196
Mitc4 (8X8)	0,2674	0,3448	0,4052	0,4413	0,4656
Noor (1973)	0,2664	0,34432	0,40547	0,44210	0,46679

(c)

Tableau 2.9 : Validation de Mitc4 sur la plaque carrée multicouche, effet du rapport des modules d'Young et du nombre des couches sur la pulsation fondamentale

a) trois couches 0°/90°/0°

b) cinq couches 0°/90°/0°/90°/0°

c) neuf couches 0°/90°/0°/90°/0°/90°/0°/90°/0°

E_1/E_2	3	10	20	30	40
k1	0,7969	0,7989	0,7994	0,7995	0,7996
k2	0,8556	0,8191	0,7739	0,7407	0,7162
k12	0	0	0	0	0

(a)

E_1/E_2	3	10	20	30	40
k1	0,8281	0,8352	0,8368	0,8373	0,8376
k2	0,8005	0,7406	0,7148	0,7042	0,6984
k12	0	0	0	0	0

(b)

E_1/E_2	3	10	20	30	40
k1	0,8344	0,842	0,8438	0,8444	0,8447
k2	0,8088	0,7847	0,7767	0,7737	0,7721
k12	0	0	0	0	0

(c)

Tableau 2.9bis : Valeurs des coefficients correcteurs en fonction du rapport des modules et du nombre des couches

a) trois couches 0/90/0

b) cinq couches 0/90/0/90/0

c) neuf couches 0/90/0/90/0/90/0/90/0

Caractéristiques géométriques et mécaniques :

$$a=1500 \quad b=1000$$

Mêmes caractéristiques des matériaux que dans les cas précédents.

$$a/h=10$$

Séquence d'empilement $\theta/-\theta/\theta$

valeur adimensionnelle de la pulsation :

$$\bar{\omega} = \omega \left(\sqrt{\frac{\rho h^2}{E_2}} \right) \times 100$$

θ	k_1	k_2	k_{12}
30°	0,7039	0,726	4,437
45°	0,7112	0,7112	3,872
60°	0,726	0,7039	4,437

Tableau 2.10a : Valeurs des coefficients correcteurs du cisaillement transversal en fonction de l'orientation des fibres.

$\theta/-\theta/\theta$	30/-30/30	45/-45/45	60/-60/60
Mallikarjuna et Kant 1989	20,656	23,088	24,774
Mitc4	20,763	23,24	24,66

Tableau 2.10b : Validation de Mitc4 sur une plaque rectangulaire multicouche - effet de l'orientation des fibres sur la pulsation fondamentale.

Le tableau (2.10b) montrent les résultats obtenus avec l'élément Mitc4 et la solution par éléments finis de Mallikarjuna et Kant (1989). On observe que l'écart est de l'ordre de 1% obtenu pour un angle des fibres de 45°.

Cette étude montre un bon comportement de l'élément Mitc4, en comparaison avec des solutions fondées sur des théories d'ordre supérieur qui sont censées être plus performantes que la théorie de Mindlin-Reissner.

II.3 Application à l'analyse du comportement dynamique d'une plaque sur appuis ponctuels

L'application qui suit concerne une étude dynamique d'une plaque carrée reposant sur des appuis ponctuels et possédant différentes conditions de bord. Ce type d'applications peut concerner les planchers champignons et les semelles sur pieux.

La configuration des appuis ponctuels est schématisée dans la figure (2.13), leur espacement est défini par un paramètre α qui varie entre 0 et 1.

Le premier cas traité concerne une plaque carrée mince ($h/a=0,001$). Dans un premier temps, nous avons analysé le comportement d'une plaque avec un appui central et à bords libres, appuyés ou, encastrés. Dans un deuxième temps, une plaque à bords libres avec quatre appuis ponctuels a été analysée pour deux valeurs de α (0,2 et 0,6). Nous disposons pour ce problème d'une solution de référence proposée par Liew et al (1994). Il s'agit d'une solution semi-analytique basée sur la construction des fonctions de déplacements et sur la minimisation de la fonctionnelle de Lagrange.

La plaque est discrétisée avec un maillage en 20x20 éléments. Les tableaux (2.11) et (2.12) donnent une comparaison des huit premières pulsations obtenues avec l'élément Mitc4 et la solution de référence. On observe une parfaite concordance entre ces deux solutions avec un écart inférieur à 1,5%.

Étude paramétrique

Dans ce qui suit nous présentons une étude paramétrique sur l'influence de l'épaisseur, des conditions de bord et de la position des appuis ponctuels sur les fréquences propres de la plaque.

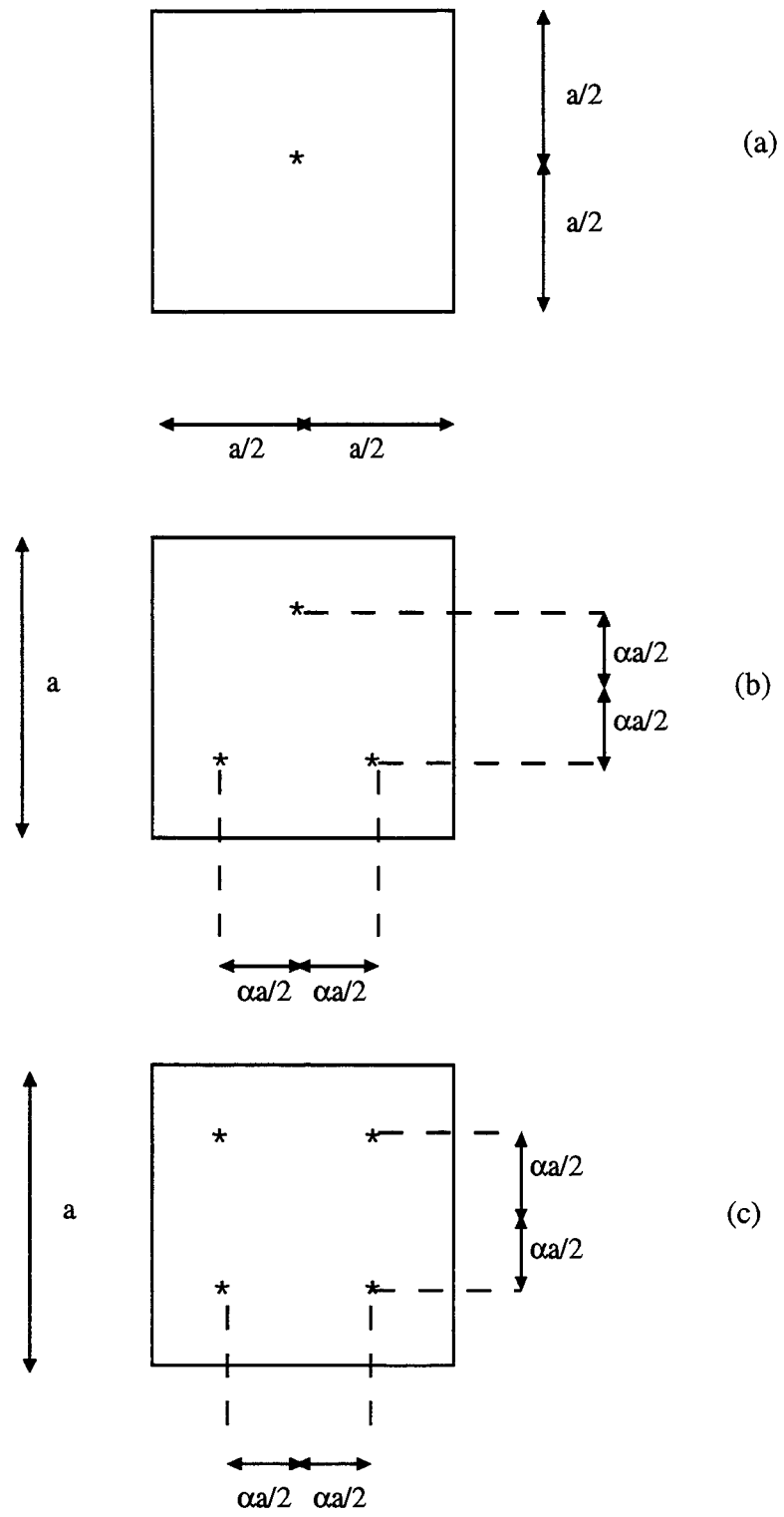


Figure 2.13 : Plaque carrée avec appuis internes
 a) un appui central
 b) trois appuis ponctuels
 c) quatre appuis ponctuels

Paramètre de fréquence	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8
Mitc4	2,813	3,37	4,913	8,73	8,73	11,6	15,49	15,49
solution de référence	2,831	3,367	4,899	8,7	8,7	11,7	15,27	15,27

(a)

Paramètre de fréquence	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8
Mitc4	12,46	12,46	13,39	19,95	25,29	32,76	32,76	37,821
Solution de référence	12,34	12,34	13,53	19,74	24,67	32,08	32,08	37,71

(b)

Paramètre de fréquence	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8
Mitc4	18,66	18,66	20,15	27,53	34,11	42,53	42,53	48,53
Solution de référence	18,35	18,35	20,22	27,05	32,89	41,25	41,25	47,80

(c)

Tableau 2.11 Comparaison des huit premières fréquences pour une plaque carrée mince avec un appui central :

- a) bords libres
- b) bords appuyés
- c) bords encastés

Paramètre de fréquence:

$$\lambda = \omega \left(\frac{a}{2}\right)^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$$

Paramètre de fréquence	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8
Mitc4	3,322	3,411	3,411	4,055	4,91	9,42	9,42	13,39
Solution de référence	3,327	3,478	3,48	4,217	4,899	9,407	9,408	13,37

(a)

Paramètre de fréquence	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8
Mitc4	4,91	5,789	8,118	8,118	11,894	11,894	12,85	13,788
Solution de référence	4,899	5,756	8,095	8,096	11,96	11,96	13	14,01

(b)

Tableau 2.12 : Comparaison des huit premières fréquences pour une plaque carrée mince à bords libres avec quatre appuis ponctuels :
a) paramètre de position $\alpha=0,2$
b) paramètre de position $\alpha=0,6$

(i) Influence de l'épaisseur et des conditions de bord

La plaque est supposée carrée reposant sur un appui central. Nous envisageons trois valeurs de l'épaisseur : $h/a=0,001$, $0,1$ et $0,2$ et nous admettons que les bords peuvent être libres, encastés ou appuyés. Les tableaux (2.13a, 2.13b, 2.13c) montrent les fréquences propres obtenues par l'élément Mitc4 en utilisant le même maillage que dans le cas précédent. On observe une diminution du paramètre de fréquence avec l'augmentation de l'épaisseur. Cette diminution est plus importante dans le cas des bords rigides. Ces résultats peuvent être expliquées de la manière suivante : les fréquences propres augmentent avec l'épaisseur mais le paramètre de fréquence garde une valeur constante tant que la plaque est relativement mince. Quand l'épaisseur atteint une valeur tels que les effets de l'effort tranchant et de l'inertie de rotation cessent d'être négligeables, les fréquences augmentent moins fort à cause de la déformabilité supplémentaire apportée par l'effort tranchant ce qui fait que le paramètre de fréquence se met à décroître. Il apparaît d'après ce qui précède que les effets de l'effort tranchant et de l'inertie de rotation sont plus importants quand les bords sont rigides.

(ii) Influence conjuguée de l'épaisseur, de la position des appuis internes et des conditions des bords

On suppose que la plaque possède trois et quatre appuis ponctuels. Elle peut être libre et appuyée sur ses bords. On envisage deux valeurs de l'épaisseur: $h/a=0,001$ et $0,1$ et on fait varier la position des appuis internes en donnant à α des valeurs allant de $0,1$ à $0,6$. Les figures (2.14 a, 2.14b, 2.15a et 2.15b) donnent l'évolution des trois premières fréquences propres. On observe comme dans le cas précédent une diminution du paramètre de fréquence avec l'augmentation de l'épaisseur. On remarque une différence de comportement selon que la plaque est libre ou appuyée. En effet; quand la plaque est libre et possède trois appuis, la première fréquence augmente jusqu'à une certaine valeur de α et au delà elle commence à décroître; les effets sur cette fréquence, de l'effort tranchant et de l'inertie de rotation semblent s'estomper avec l'augmentation de la distance entre appuis. Par contre, les deux autres fréquences augmentent avec l'augmentation de la distance entre les appuis. Pour la plaque libre avec quatre appuis, les fréquences augmentent avec α mais on note une légère rechute ou un certain infléchissement pour les écartements importants. Dans ce cas, les effets de l'effort tranchant et de l'inertie de rotation ne semblent pas affecter sensiblement la première fréquence quand l'écartement des appuis devient très important. Pour la plaque à bords appuyés avec trois ou quatre appuis, les trois fréquences présentent un pic dont la position semble indépendante

de l'épaisseur. Ces pics sont la preuve qu'une augmentation de l'écartement des appuis ne conduit pas nécessairement à l'augmentation des fréquences de vibrations. En effet, on peut observer une certaine assouplissement dans le comportement de la plaque à partir d'une certaine valeur de α .

h/a	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8
0,001	2,813	3,37	4,913	8,73	8,73	11,6	15,49	15,49
0,1	2,56	3,19	4,75	8,035	8,035	9,51	14,02	14,02
0,2	2,066	2,93	4,36	6,92	6,92	7,13	11,43	11,43

(a)

h/a	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8
0,001	12,45	12,45	13,39	19,95	25,29	32,76	32,76	37,82
0,1	9,98	11,23	11,23	17,07	21,46	26,5	26,5	26,86
0,2	6,87	9,31	9,31	13,32	16,28	18,6	19,37	19,37

(b)

h/a	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8
0,001	18,66	18,66	20,16	27,53	34,11	42,53	42,53	48,53
0,1	14,14	15,72	15,72	22	26,27	31,61	31,61	31,77
0,2	9,376	11,68	11,68	15,68	18	20,33	21,3	21,3

(c)

Tableau 2.13 : Comparaison des huit premières pulsations propres pour une plaque carrée avec un appui central et avec différentes valeurs du rapport h/a.

a) bords libres

b) bords appuyés

c) bords encastés

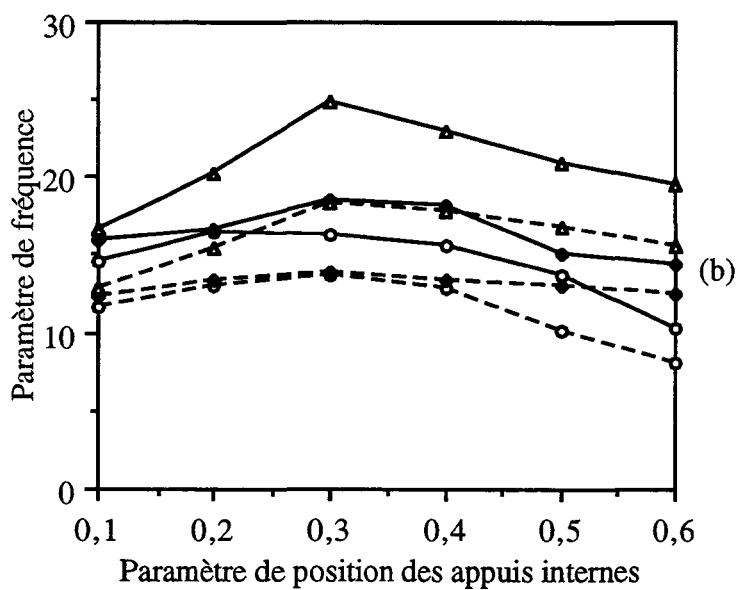
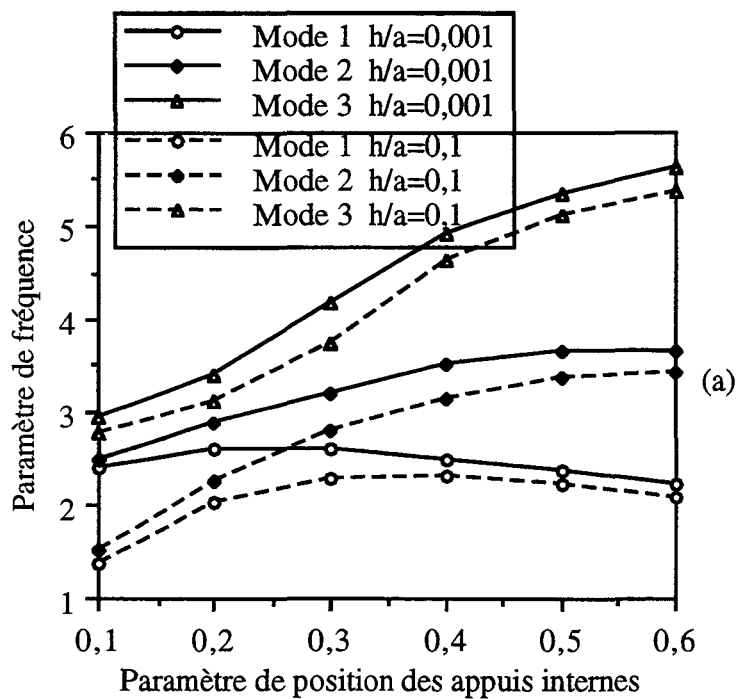


Fig 2.14 : Plaque carrée avec trois appuis internes - évolution des trois premières fréquences en fonction de l'épaisseur et de la position des appuis:
 a) les bords sont libres
 b) les bords sont appuyés.

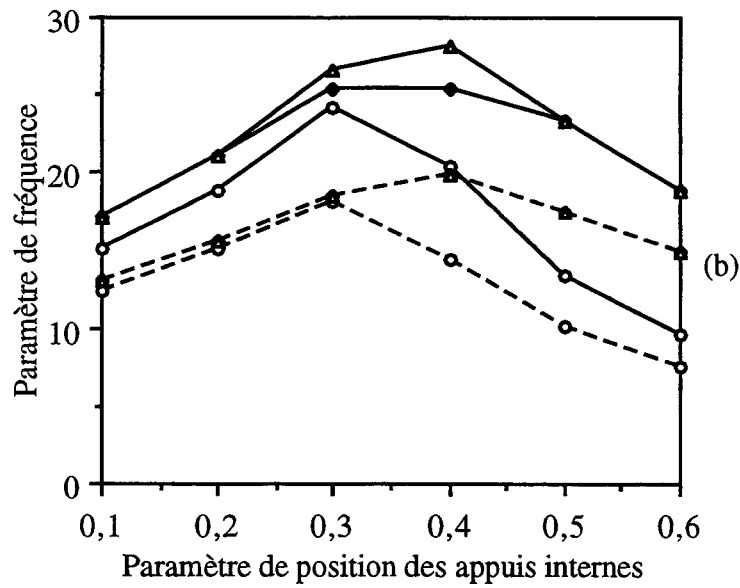
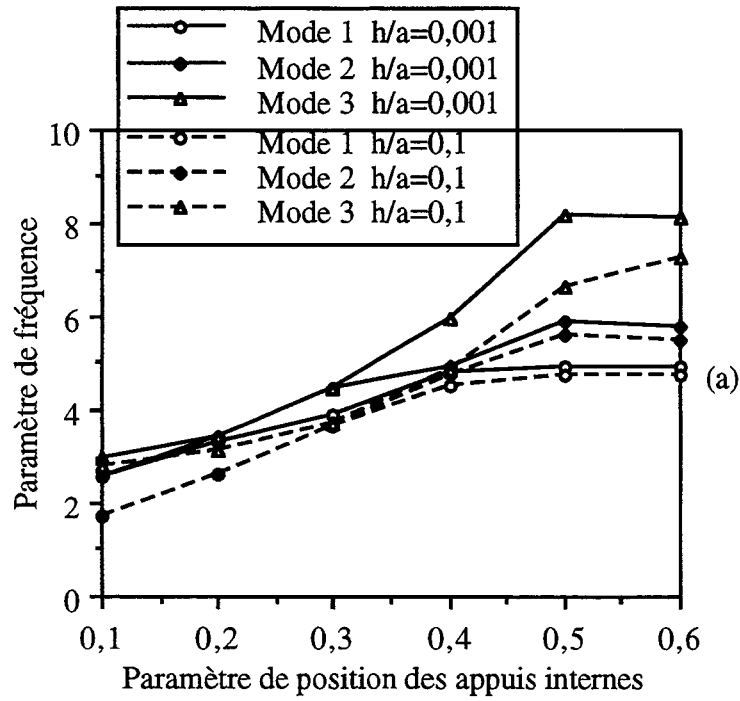


Fig 2.15 : Plaque carrée avec quatre appuis internes - évolution des trois premières fréquences en fonction de l'épaisseur et de la position des appuis
 a) les bords sont libres
 b) les bords sont appuyés.

CHAPITRE III

ETUDE DES COQUES

Ce chapitre comporte des éléments pour la modélisation par éléments finis des coques de forme générale. Après une analyse bibliographique des approches théoriques utilisées dans la modélisation des coques, on décrit la méthodologie adoptée dans ce travail et les éléments de discrétisation retenus.

III.1 Analyse bibliographique

Le développement des éléments coques est directement lié à l'approche théorique utilisée et à la formulation variationnelle adoptée (déplacement, mixte, hybride). On peut citer trois approches théoriques distinctes :

(i)-l'approche par éléments tridimensionnels dégénérés ou non;

(ii)-l'approche par facettes planes;

(iii)-l'approche par éléments de coques courbes.

L'approche par éléments tridimensionnels consiste à modéliser la coque par un assemblage d'éléments tétraèdres ou hexaèdres. Afin de modéliser les structures de forme complexe, des éléments isoparamétriques courbes ont été employés (Irons et Ahmad 1980). L'utilisation sans modification de ce type d'éléments présente de sérieuses difficultés (Zienkiewicz et Taylor 1991, Gallager 1976). En effet, pour aboutir à des résultats précis, le nombre d'éléments utilisés doit être élevé ce qui conduit à des problèmes numériques de très grande taille. Une autre difficulté apparaît dans l'étude des coques minces, le calcul peut conduire à un système d'équations mal conditionné car les coefficients de rigidité correspondant au déplacement transversal sont beaucoup plus grands que ceux correspondant aux déplacements longitudinaux. Enfin des erreurs sont introduites dans l'analyse car l'énergie de déformation correspondant aux contraintes normales dans l'épaisseur est erronée.

Les difficultés précédentes sont surmontées par le concept du modèle tridimensionnel dégénéré introduit par Ahmad et al (1970). Dans cette approche on suppose que la normale à la surface moyenne reste droite et inextensible. De même, la contrainte normale dans la direction de l'épaisseur est négligeable: Ces hypothèses ont été

utilisées au chapitre I dans la formulation des éléments plaques. Ce concept a l'avantage de la généralité et d'étendre le formalisme des éléments isoparamétriques utilisés dans les milieux bidimensionnels aux éléments coques. En effet, la géométrie, les déplacements et les rotations de la surface moyenne sont interpolés comme dans l'analyse d'un milieu continu classique. Malheureusement, cette simplicité de modélisation se heurte à des difficultés inhérentes aux coques minces : en plus du risque de blocage en cisaillement soulevé au chapitre I, vient s'ajouter un risque de blocage en membrane. Ce dernier apparaît surtout dans une description curviligne pour le champ de déplacements et se traduit par une domination artificielle des termes de flexion par ceux de membrane. En effet, si des approximations non cohérentes sont utilisées, l'annulation des déformations de membrane quand ces dernières sont négligeables ou nulles (flexion simple) a pour effet de restreindre les composantes de déplacements résultant de la flexion.

L'approche par facettes planes consiste à remplacer la géométrie de la coque par un assemblage d'éléments plans dont les noeuds sont situés sur la surface moyenne. L'élément coque résultant est constitué par la superposition d'un élément de flexion et d'un élément de membrane, le couplage étant réalisé par le passage aux degrés de liberté globaux. Beaucoup d'éléments dans la littérature ont été construits suivant cette modélisation. On peut citer par exemple les éléments DKT18 et DST18 (Batoz et Dhatt 1992) où la partie membrane est décrite par l'élément triangulaire T3 et la partie flexion par les éléments DKT (Batoz, Bathe et Ho 1980) et DST (Lardeur 1990). Cette approche est très attrayante par sa simplicité. En effet, elle permet d'étendre directement le calcul des plaques au calcul des coques, de même il suffit de peu de données pour décrire la géométrie de la coque. Elle se prête aussi bien au calcul des structures plissées. On peut très bien dans ce cas, superposer à l'élément Mitc4 étudié au chapitre I l'élément de membrane Q4. Cette approche présente d'autres avantages, notamment la bonne convergence des résultats et la bonne représentation des modes rigides. Les avantages précédents s'accompagnent d'un certain nombre d'inconvénients. En effet, la polygonisation de la coque nécessite un maillage relativement fin pour assurer une bonne convergence, si non, on a une déviation par rapport à la géométrie réelle. De même, cette polygonisation crée des arêtes artificielles responsables de l'apparition des sollicitations parasites. Ces dernières s'atténuent normalement avec la finesse du maillage. L'assemblage en un noeud du réseau d'éléments coplanaires nécessite l'introduction d'une rigidité fictive pour la rotation normale, si non, des singularités risquent d'apparaître au niveau de la matrice globale. Cette rigidité fictive peut être évitée par la construction d'éléments de membrane possédant des degrés de liberté de rotation (drilling rotations). On peut citer dans ce domaine, les travaux d'Allman (1984, 1988), Bergan et Felippa (1985,

1986), Ibrahimbéovic, Taylor et Wilson (1990), Ibrahimbéovic Frey et Reborá (1993). Cette approche, tout en évitant l'introduction de la rigidité fictive, améliore considérablement le comportement membranaire de l'élément. Elle permet aussi une connexion aisée de la coque à d'autres éléments de structures, par exemple, les problèmes rencontrés dans l'étude des coques avec raidisseurs, des jonctions colonne-plaque et mur-poutre. Cependant, il est important de s'assurer qu'un élément construit suivant cette technique est libre de tout blocage en membrane. En effet, il était constaté un certain blocage en membrane (vitesse de convergence lente) dans des problèmes où la flexion est importante (Carpenter, Stolarsky et Belytschko, 1985; Nygard (1986); Aminpour (1992)).

L'approche par éléments de coques courbes est en général décrite dans le cadre de la théorie classique des coques; nous distinguons en général deux modèles:

(i)-le modèle dit de Koiter-Sanders (Koiter 1960,1966 et 1970; Sanders 1963) basé sur les hypothèses de Love-Kirchhoff. Ce modèle a été utilisé par plusieurs auteurs (Argyris 1986, Bernadou 1986, Cowper, Lindberg et Olson 1971);

(ii)-le modèle dit de Reissner-Nagdi où l'influence des déformations de cisaillement transversal est prise en compte (Nagdi 1957, 1963 et 1972; Reissner 1952, 1969 et 1974). Ce modèle sert de base pour construire des éléments courbés où les hypothèses de Kirchhoff sont prises sous forme discrète (Batoz 1977, Batoz et Dhatt 1978, Dhatt 1970 et Wempner 1968).

La formulation de ces éléments est élégante, mais délicate. On peut exprimer le champ de déplacement de deux façons :

(i)-par les composantes curvilignes de déplacements de la surface moyenne, elle même définie analytiquement par le rayon vecteur $R(r,s)$. Cette solution permet de modéliser la surface moyenne avec exactitude sans introduire d'arêtes artificielles aux frontières, mais ne permet généralement pas l'exacte représentation des modes rigides. De même le risque de blocage en membrane est élevé si les approximations des déplacements ne sont pas cohérentes;

(ii)-par les composantes cartésiennes des déplacements de la surface moyenne, elle même définie par une fonction $Z=Z(x,y)$ par rapport au plan de référence (x,y) . Cette solution permet une exacte représentation des modes rigides, mais fait apparaître, des arêtes artificielles aux frontières, à cause de l'idéalisation de la surface par une forme prédéterminée.

D'un point de vue pratique, ces éléments sont d'un emploi laborieux (spécification très lourde des données). Ils nécessitent souvent une description analytique de la coque, et ne se prêtent pas, ou mal, au calcul des intersections des coques.

Au vu des difficultés, certains chercheurs ont proposés des simplifications en utilisant une approche intermédiaire entre les approches par facettes planes et les éléments courbes. Il s'agit de la théorie des coques surbaissées (shallow shells) ou théorie de Marguerre (Marguerre 1938) où chaque élément coque est décrit par un petit déplacement normal à partir d'un plan de référence.

Les deux approches curviligne et cartésienne décrites précédemment s'appliquent à la théorie des coques surbaissées. L'approche curviligne est très peu recommandée, car la solution peut converger vers une solution différente de la vraie solution, si la coque est profonde; par contre l'approche cartésienne converge vers la bonne solution que la coque soit profonde ou quasi plate (Frey et Jirousek 1992). Cependant, malgré la popularité de l'approche cartésienne, un blocage en membrane peut apparaître à cause de la géométrie initiale courbe, il peut être traité par la méthode de la décomposition modale (Ibrahimbégovic et Frey 1994; Chahrouh 1991).

III.2 Choix d'une approche

La méthodologie suivie dans ce travail est basée sur l'approche du solide tridimensionnel dégénéré et sur la description isoparamétrique (description cartésienne). La formulation variationnelle adoptée est une formulation en déplacement, les phénomènes de blocage en cisaillement et en membrane sont traités par l'emploi des champs de substitution. Les contraintes, les déformations et les relations de comportement sont exprimées dans la base paramétrique, que la coque soit isotrope ou composite. Cette démarche, utilisée dans le cas d'un matériau isotrope (Basar et Ding 1990), s'avère originale dans le cas des coques multicouches.

Après une description sommaire du champ de déplacements en utilisant l'hypothèse de Mindlin-Reissner, on donne les composantes du tenseur de déformation. Ensuite on présente la construction des relations contraintes-déformations et le calcul des facteurs de correction de cisaillement. La discrétisation est effectuée à l'aide de deux éléments: l'élément Mitc4 (Dvorkin et Bathe 1984) et l'élément Mitc9 (Bucalem et Bathe 1993). Ces éléments ont été publiés pour le calcul des coques isotropes dans les domaines linéaire et non linéaire sous chargement statique. Dans ce travail, on propose de les étendre aux coques composites sous sollicitations statiques et

dynamiques et sur appuis élastiques. La programmation de ces éléments fait intervenir cinq degrés de liberté par noeud : les trois composantes du déplacement (U, V, W) de la surface moyenne et les rotations (α et β) de la normale. Dans le cas d'intersection des coques, les noeuds situés aux arêtes communes possèdent six degrés de liberté au lieu de cinq. Ce procédé quoique délicat sur le plan informatique, évite l'utilisation d'une rigidité fictive.

Le calcul des matrices et vecteurs élémentaires se fait par intégration numérique dans le plan et suivant l'épaisseur. Cette démarche quoique peu économique a le mérite de la généralité car aucune hypothèse ne sera faite sur la variation des composantes de déformation et sur la loi de comportement.

III.2.1 Cinématique des coques

Champ de déplacement - Hypothèse de Mindlin Reissner

Il s'agit de l'hypothèse énoncée au premier chapitre pour les plaques. En se plaçant en petits déplacements, nous avons (Figure 3.1) :

$$\{u_M\} = \{u_m\} + z\{\theta\} \wedge \{n\} = \{u_m\} + t \frac{h}{2} \{\theta\} \wedge \{n\} \quad (3.1)$$

Les points m et M sont situés respectivement sur la surface moyenne et dans l'épaisseur de la coque. Ils sont reliés par la relation : $\{mM\} = z\{n\}$, $\{n\}$ étant le vecteur unitaire normal au plan moyen en m., $\{u_M\}$ et $\{u_m\}$ représentent respectivement les vecteurs déplacements aux points M et m ; $\{\theta\}$ est le vecteur rotation de la normale à la coque en m; t est la coordonnée paramétrique de l'épaisseur, elle varie entre -1 et +1.

La relation (3.1) implique que cinq paramètres sont nécessaires pour définir l'état cinématique d'une coque: les trois composantes (u, v, w) du vecteur déplacement au point m dans le repère cartésien (O X Y Z) et les deux rotations (α , β) de la normale $\{n\}$ autour de deux axes appartenant au plan tangent à la surface moyenne. La définition de ces axes sera précisée plus loin .

III.2.2 Champ des déformations de la coque

Le champ des déformations est défini par ses composantes covariantes dans la base paramétrique (g_1, g_2, g_3):

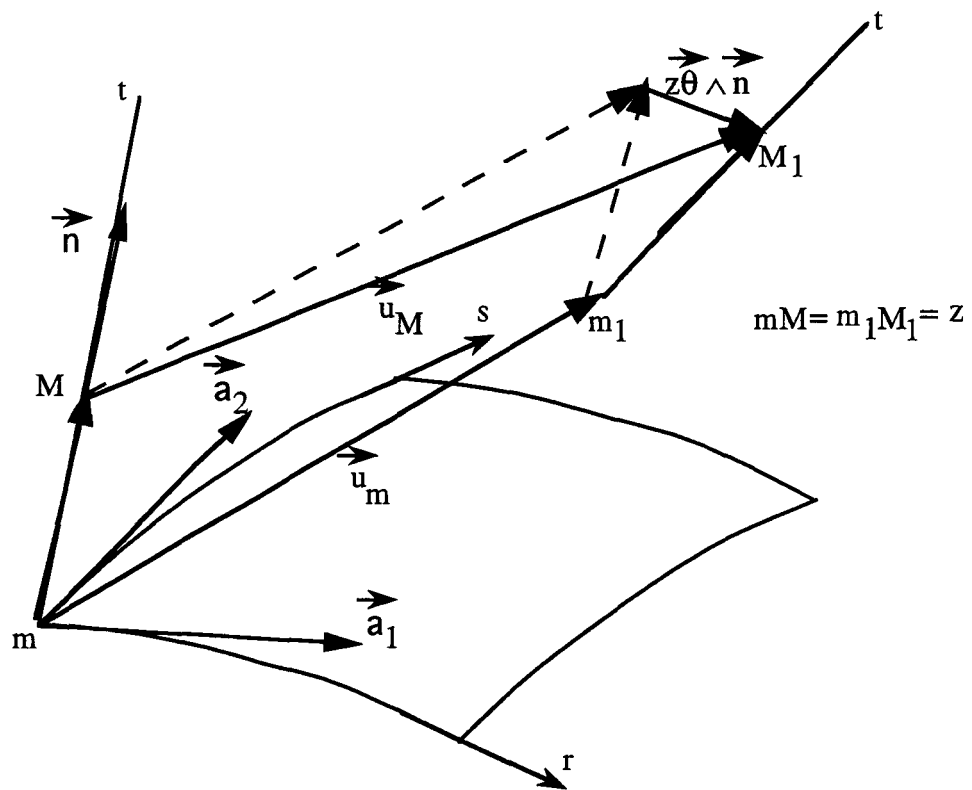


Figure 3.1 : Déplacements des points de la coque.

$$\varepsilon = \varepsilon_{ij} g^i \otimes g^j \quad (3.2)$$

Les composantes ε_{ij} sont définies par (Sédov 1975) :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} ((g_{ij})_1 - (g_{ij})_0) \quad (3.3)$$

Les indices i et j varient de 1 à 3 ($1 \equiv r$, $2 \equiv s$, $3 \equiv t$), r et s sont les coordonnées paramétriques de la surface moyenne. Les termes $(g_{ij})_1$ et $(g_{ij})_0$ désignent respectivement les composantes covariantes du tenseur métrique dans les configurations déformée et initiale:

$$\{g_i\}_1 = \{g_i\}_0 + \{u_M\}_{,i} \quad (3.4)$$

En remplaçant la relation (3.4) dans la relation (3.3) et en négligeant les termes du second ordre en u_M , on obtient :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[\{g_i\}^t \{u_M\}_{,j} + \{g_j\}^t \{u_M\}_{,i} \right] \quad (3.5)$$

Les vecteurs g_i dans la relation (3.5) sont ceux de la configuration initiale.

Composantes de déformations membrane - flexion

En s'intéressant aux composantes de déformations dans le plan, nous avons :

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left[\{g_\alpha\}^t \{u_M\}_{,\beta} + \{g_\beta\}^t \{u_M\}_{,\alpha} \right] \quad (3.6)$$

Les indices α et β varient de 1 à 2.

En remplaçant la relation (3.1) dans la relation précédente on obtient :

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\{g_\alpha\}^t \{u_m\}_{,\beta} + \{g_\beta\}^t \{u_m\}_{,\alpha} \right) + \frac{1}{2} z \left(\{g_\alpha\}^t \cdot (\{\theta\} \wedge \{n\})_{,\beta} + \{g_\beta\}^t \cdot (\{\theta\} \wedge \{n\})_{,\alpha} \right) \quad (3.7)$$

Si la coque est de faible épaisseur, les termes de second ordre en z deviennent négligeables:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta} + z\chi_{\alpha\beta} \quad (3.8)$$

$$e_{\alpha\beta} = 1/2 \left(\{a_\alpha\}^t \cdot \{u_m\}_{,\beta} + \{a_\beta\}^t \cdot \{u_m\}_{,\alpha} \right) \quad (3.9)$$

Le tenseur ($e_{\alpha\beta}$) représente le premier tenseur de déformation de la surface moyenne, il caractérise la déformation d'extension.

$$\chi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\{a_\alpha\}^t \cdot (\{\theta\} \wedge \{n\})_{,\beta} + \{a_\beta\}^t \cdot (\{\theta\} \wedge \{n\})_{,\alpha} \right) + \frac{1}{2} \left(\{n\}_{,\alpha} \cdot \{u_m\}_{,\beta} + \{n\}_{,\beta} \cdot \{u_m\}_{,\alpha} \right) \quad (3.10)$$

$\chi_{\alpha\beta}$ représente le second tenseur de déformation de la surface moyenne, il caractérise la déformation de flexion.

Dans le cas d'une plaque en flexion, il n'y a pas d'extension de la surface moyenne, et la normale reste inchangée :

$$e_{\alpha\beta} = 0 \quad \{n\}_{,\alpha} = 0 \quad \{n\}_{,\beta} = 0$$

$$\chi_{\alpha\beta} = 1/2 \left(\{a_\alpha\}^t \cdot (\{\theta\} \wedge \{n\})_{,\beta} + \{a_\beta\}^t \cdot (\{\theta\} \wedge \{n\})_{,\alpha} \right) \quad (3.11)$$

Les relations(3.11) sont identiques aux relations (1.3) du chapitre I.

Composantes du cisaillement transversal

Les composantes du cisaillement transversal sont données par :

$$2\varepsilon_{\alpha 3} = \gamma_{\alpha 3} = \{g_\alpha\}^t \cdot \{u_M\}_{,3} + \{g_3\}^t \cdot \{u_M\}_{,\alpha} \quad (3.12)$$

D'après (3.1) on peut écrire:

$$\{u_M\}_{,\alpha} = \{u_m\}_{,\alpha} + z(\{\theta\} \wedge \{n\})_{,\alpha} \quad (3.13)$$

$$\{u_M\}_{,3} = h / 2 \{\theta\} \wedge \{n\} \quad (3.14)$$

En remplaçant les relations (3.13) et (3.14) dans la relation (3.12), on obtient:

$$\gamma_{\alpha 3} = h / 2 \left(\{a_\alpha\}^t \cdot (\{\theta\} \wedge \{n\}) + \{n\}^t \cdot \{u_m\}_{,\alpha} \right) \quad (3.15)$$

La relation (3.15) conduit à des contraintes de cisaillement transversal incompatibles avec les conditions aux limites sur les faces supérieure et inférieure de la coque. Pour remédier à cette situation, nous suivons le raisonnement utilisé au chapitre I, en faisant appel à des coefficients de correction.

Déformation normale suivant l'épaisseur

La relation (3.1) implique qu'un segment normal au plan moyen est inextensible :

$$\epsilon_{33} = \{g_3\}^t \cdot \{u_M\}_{,3} = 0 \quad (3.16)$$

III.2.3 Principe des travaux virtuels

Considérons une coque élastique délimitée par une surface S constituée d'une partie (S_u) soumise à des déplacements imposés et d'une autre partie (S_f) soumise à des forces imposées :

$$S = S_u \cup S_f \quad S_u \cap S_f = \{\emptyset\}$$

Soit δu un champ des déplacements virtuels cinématiquement admissible définie sur la coque: $\delta u = 0$ sur (S_u). D'après le principe des travaux virtuels :

$$\delta w_i = \delta w_e + \delta w_j \quad (3.17)$$

Le premier membre représente le travail des forces intérieures, le second membre représente la somme des travaux des forces extérieures et des forces d'inertie.

Le travail des forces intérieures est donnée par :

$$\delta w_i = \iiint_V S^{ij} \delta \epsilon_{ij} dv \quad (3.18)$$

S^{ij} représente les composantes contravariantes du tenseur des contraintes, $\delta \epsilon_{ij}$ représente les composantes covariantes du tenseur des déformations du champ de déplacement virtuel.

$$\delta \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\{g_i\}^t \cdot \{\delta u_M\}_{,j} + \{g_j\}^t \cdot \{\delta u_M\}_{,i}) \quad (3.19)$$

Le travail des actions extérieures s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \delta w_e = & \iiint_V \rho g \{i_g\}^t \cdot \{\delta u_M\} dv + \iint_S -p \{n\}^t \cdot \{\delta u_s\} ds + \\ & \sum_{i=1}^p \{F_i\}^t \cdot \{\delta u_{mi}\} + \{M_i\}^t \cdot \{\delta \theta_i\} + \iiint_V (S^{\alpha\beta})_{th} \delta \epsilon_{\alpha\beta} dv \end{aligned} \quad (3.20)$$

Les termes du second membre représentent respectivement les travaux virtuels du poids propre, des forces surfaciques, des actions concentrées et des forces d'origine thermique.

Le travail des forces d'inerties peut s'exprimer sous la forme :

$$\delta W_j = \iiint_V -\rho \{\gamma_M\}^t \cdot \{\delta u_M\} dv \quad (3.21)$$

γ_M représente le vecteur accélération au point M .

III.2.4 Loi de comportement

La coque est supposée constituée de matériaux isotropes ou multicouches; dans ce dernier cas chacune des couches est constituée de matériaux renforcés de fibres orientées d'un angle θ par rapport à l'axe local g_1 de la couche (Figure 3.2). La normale $\{n\}$ à la surface moyenne constitue un axe d'orthotropie pour l'ensemble des couches.

On définit pour chaque couche trois repères :

(i)-le repère d'orthotropie (l, t, n) dans lequel les contraintes normales sont découplées des déformations de cisaillement et inversement,

(ii)-le repère (t₁, t₂, n) qui joue le rôle du repère (x, y, z) utilisé dans les plaques pour le calcul des facteurs de correction du cisaillement,

-le repère paramétrique (g₁,g₂,g₃) dans lequel sont exprimées les contraintes et les déformations intervenant dans le principe des travaux virtuels.

Les vecteurs t₁ et t₂ sont définis de la manière suivante :

$$\{t_1\} = \frac{\{g_1\}}{\|\{g_1\}\|} = \frac{\{g_1\}}{\sqrt{g_{11}}} \quad (3.22)$$

$$\{t_2\} = \{n\} \wedge \{t_1\} \quad (3.23)$$

Relations contraintes déformations dans le plan

On se place dans l'hypothèse des contraintes planes : s³³ = 0

Les relations reliant les contraintes (s¹¹,s²²,s¹²) aux déformations (ε₁₁,ε₂₂,ε₁₂) en un point d'une couche sont données par la matrice H telle que :

$$\begin{Bmatrix} s^{11} \\ s^{22} \\ s^{12} \end{Bmatrix} = [H] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

La matrice H tient compte des caractéristiques mécaniques de la couche dans le repère d'orthotropie et de l'orientation de ce dernier par rapport au repère (t₁,t₂, n).

En utilisant les matrices de passage entre les différents repères, on a :

$$[H] = [T_{CF}]^t [\tilde{H}_L] [T_{CF}] \quad (3.25)$$

$$[\tilde{H}_L] = [Q]^t [H_L] [Q] \quad (3.26)$$

Les matrices H_L et Q ont été définies au chapitre I, la matrice T_{CF} est exprimée par :

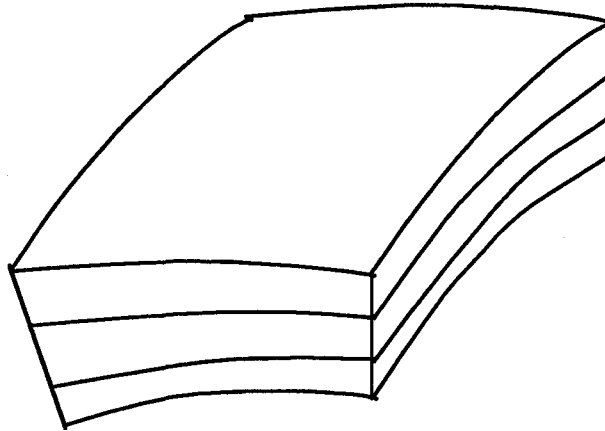


Figure 3.2a : Coque constituée de trois couches.

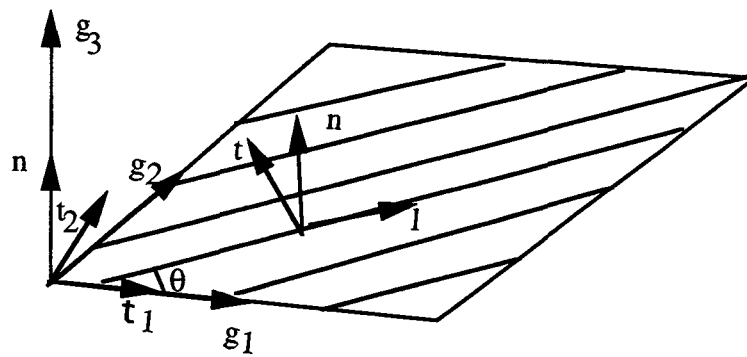


Figure 3.2b : Repères associés à une couche.

$$[T_{CF}] = \begin{bmatrix} A^2 & C^2 & A*C \\ B^2 & D^2 & B*D \\ 2*A*B & 2*C*D & A*D+C*B \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

où:

$$A = \{g^1\}^t \{t_1\} \quad B = \{g^1\}^t \{t_2\}$$

$$C = \{g^2\}^t \{t_1\} \quad D = \{g^2\}^t \{t_2\}$$

Si on suppose que le matériau est isotrope et sujet à des variations thermiques, les relations (3.24) deviennent:

$$S^{\alpha\beta} = \frac{2G\nu}{1-\nu} g^{\alpha\beta} g^{\lambda\mu} \varepsilon_{\lambda\mu} + 2G g^{\alpha\lambda} g^{\beta\mu} \varepsilon_{\lambda\mu} - \frac{E}{1-\nu} \lambda_L g^{\alpha\beta} T \quad (3.28)$$

$T(r, s, t) = \frac{T_{sup}(r, s) + T_{inf}(r, s)}{2} + \frac{t}{2} (T_{sup}(r, s) - T_{inf}(r, s))$, où T_{sup} et T_{inf} sont respectivement la variation de température sur les faces supérieure et inférieure de la coque. λ_L est le coefficient de dilatation linéaire du matériau.

Relation contraintes déformations de cisaillement transversal

Ces relations sont définies par la matrice H_C tel que :

$$\begin{Bmatrix} S^{13} \\ S^{23} \end{Bmatrix} = [H_C] \begin{Bmatrix} \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} \quad (3.29)$$

$$[H_C] = [T_C]^t [\tilde{H}_{LT}] [T_C] \quad (3.30)$$

$$[\tilde{H}_{LT}] = [Q_1]^t [H_{LT}] [Q_1] \quad (3.31)$$

Les matrices H_{LT} et Q_1 ont été définies au chapitre I, la matrice T_C est définie par :

$$[T_C] = \begin{bmatrix} (\{g^1\}^t \{t_1\})(\{g^3\}^t \{n\}) & (\{g^2\}^t \{t_1\})(\{g^3\}^t \{n\}) \\ (\{g^1\}^t \{t_2\})(\{g^3\}^t \{n\}) & (\{g^2\}^t \{t_2\})(\{g^3\}^t \{n\}) \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Les éléments diagonaux de la matrice \tilde{H}_{LT} seront multipliés par les coefficients correctifs k_1 et k_2 définis ci dessous.

Calcul des coefficients correcteurs

Le calcul des coefficients k_1 et k_2 est semblable au calcul effectué au paragraphe(I.3). Pour cela on néglige l'effet de la courbure et on admet l'hypothèse de la flexion cylindrique (Owen et Figueiras 1983, Vlachoutsis 1992).

On s'intéresse tout d'abord à la flexion dans le plan (x, z) ; cherchons la position z_n du plan neutre par rapport au plan moyen. L'effort normal N_x étant nul, on peut écrire :

$$\int_{-h/2}^{h/2} H_{11}(z - z_n) dz = 0 \quad (3.33)$$

car :

$$\sigma_x = H_{11}(z - z_n)\chi_1 = H_{11}(z - z_n) \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \quad (3.34)$$

H_{11} est tiré de la relation (1.14) du chapitre I.

$$z_n = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} z H_{11} dz}{\int_{-h/2}^{h/2} H_{11} dz} \quad (3.35)$$

La relation reliant le moment fléchissant à la contrainte σ_x est donnée par :

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x (z - z_n) dz \quad (3.36)$$

En remplaçant les relations (3.34) et (3.35) dans la relation (3.36) on obtient :

$$M_x = \chi_1 R_1 \quad (3.37)$$

$$R_1 = \int_{-h/2}^{h/2} H_{11}(z-z_n)^2 dz \quad (3.38)$$

En tenant compte de l'hypothèse de la flexion cylindrique ($\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0$), l'équilibre locale donne :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (3.39)$$

En intégrant la relation (3.39) dans l'épaisseur et en utilisant les relations (3.34) et (3.37), on obtient :

$$\sigma_{xz} = - \int_{-h/2}^z \frac{1}{R_1} \frac{\partial M_x}{\partial x} H_{11}(z-z_n) dz = \frac{T_{xz}}{R_1} g_1(z) \quad (3.40)$$

$$g_1(z) = - \int_{-h/2}^z H_{11}(z-z_n) dz \quad (3.41)$$

$$U_1 = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} \gamma_{xz} dz = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\sigma_{xz}^2}{G_{xz}} dz = \frac{1}{2} \frac{T_{xz}^2}{R_1^2} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{g_1^2}{G_{xz}} dz \quad (3.42)$$

$$U_2 = \frac{1}{2} T_{xz} \gamma_{xz} \quad (3.43)$$

Le coefficient de correction k_1 est donné par :

$$T_{xz} = k_1 \left(\int_{-h/2}^{h/2} G_{xz} dz \right) \gamma_{xz} = k_1 \bar{G}_{xz} \gamma_{xz} \quad (3.44)$$

$$\bar{G}_{xz} = \int_{-h/2}^{h/2} G_{xz} dz \quad (3.45)$$

En remplaçant la relation (3.44) dans la relation (3.43) on obtient :

$$U_2 = \frac{1}{2} \frac{T_{xz}^2}{k_1 \bar{G}_{xz}} \quad (3.46)$$

En comparant U1 à U2, on trouve pour le coefficient k1:

$$k_1 = \frac{R_1^2}{\overline{G}_{xz} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{g_1^2}{G_{xz}(z)} dz} \quad (3.47)$$

Par un raisonnement analogue, on peut déterminer le deuxième coefficient correcteur:

$$k_2 = \frac{R_2^2}{\overline{G}_{yz} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{g_2^2}{G_{yz}(z)} dz} \quad (3.48)$$

avec:

$$z_{n1} = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} z H_{22} dz}{\int_{-h/2}^{h/2} H_{22} dz}, \quad R_2 = \int_{-h/2}^{h/2} H_{22} (z - z_{n1})^2 dz, \quad g_2(z) = - \int_{-h/2}^z H_{22} (z - z_{n1}) dz$$

$$\overline{G}_{yz} = \int_{-h/2}^{h/2} G_{yz} dz.$$

Pour un matériau isotrope, on retrouve $k_1 = k_2 = \frac{5}{6}$ et la relation (3.29) devient :

$$S^{\alpha 3} = 5 / 6 G g^{\alpha \beta} g^{33} \gamma_{\beta 3}$$

Les coefficients correcteurs calculés dans ce paragraphe sont valables pour un empilement des couches quelconque.

III.3 Modélisation par éléments finis

Nous présentons dans ce paragraphe une discrétisation en utilisant l'élément Mitc4 (Dvorkin et Bathe 1984) et l'élément Mitc9 (Bucalem et Bathe 1993). On décrit en détail la formulation de l'élément Mitc4 et on donne la démarche pour la formulation de l'élément Mitc9.

III.3.1 Élément Mitc4

L'élément Mitc4 est un élément à quatre noeuds non nécessairement coplanaires et à cinq degrés de liberté par noeud. Le comportement en membrane et en flexion est identique à l'élément classique Q4. Le comportement en cisaillement transversal est basé sur la construction d'un champ de substitution en utilisant le schéma de l'élément Mitc4 plaque. Par conséquent, l'élément Mitc4 coque est identique à l'élément Mitc4 plaque quand il est appliqué à une plaque en flexion.

Approximation de la géométrie et des variables cinématiques

Soit m un point appartenant à un élément, de coordonnées (X, Y, Z) , on peut écrire :

$$\begin{aligned} X(r, s) &= \sum_{k=1}^4 h_k(r, s) X_k \\ Y(r, s) &= \sum_{k=1}^4 h_k(r, s) Y_k \\ Z(r, s) &= \sum_{k=1}^4 h_k(r, s) Z_k \\ \{n\} &= \sum_{k=1}^4 h_k(r, s) \{n^k\} \end{aligned} \quad (3.49)$$

(X_k, Y_k, Z_k) représentent les coordonnées du noeud k de l'élément. $\{n^k\}$ représente la normale unitaire à la surface moyenne au noeud k ; le calcul de ce vecteur sera précisé par la suite; h_k est la fonction d'interpolation associée au noeud k .

Soit M un point situé dans l'épaisseur, on a d'après (3.49):

$$\begin{Bmatrix} X(r, s, t) \\ Y(r, s, t) \\ Z(r, s, t) \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^4 h_k(r, s) \begin{Bmatrix} X_k \\ Y_k \\ Z_k \end{Bmatrix} + \frac{th}{2} \sum_{k=1}^4 h_k(r, s) \begin{Bmatrix} n_x^k \\ n_y^k \\ n_z^k \end{Bmatrix} \quad (3.50)$$

Calcul de la normale

Les vecteurs tangents aux lignes des coordonnées de la surface au noeud k sont donnés par:

$$\{a_1^k\} = \frac{\partial X}{\partial r}(r_k, s_k, 0)\{i\} + \frac{\partial Y}{\partial r}(r_k, s_k, 0)\{j\} + \frac{\partial Z}{\partial r}(r_k, s_k, 0)\{k\} \quad (3.51)$$

$$\{a_2^k\} = \frac{\partial X}{\partial s}(r_k, s_k, 0)\{i\} + \frac{\partial Y}{\partial s}(r_k, s_k, 0)\{j\} + \frac{\partial Z}{\partial s}(r_k, s_k, 0)\{k\}$$

$\{i\}$, $\{j\}$ et $\{k\}$ sont les vecteurs unitaires du système d'axes (O, X, Y, Z).

Le vecteur normal unitaire est donné par :

$$\{n_e^k\} = \frac{\{a_1^k\} \wedge \{a_2^k\}}{\|\{a_1^k\} \wedge \{a_2^k\}\|} \quad (3.52)$$

Ce vecteur est généralement discontinu quand on passe d'un élément à un autre. Pour obtenir une approximation de ce vecteur, on effectue une moyenne des vecteurs normaux aux éléments entourant le noeud k:

$$\{n^k\} = \frac{\sum_e \{n_e^k\}}{\left| \sum_e \{n_e^k\} \right|} \quad (3.53)$$

L'approximation des grandeurs cinématiques est donnée d'après (3.1) par l'expression:

$$\{u_M\} = \sum_{k=1}^4 h_k \{u^k\} + \frac{th}{2} \sum_{k=1}^4 h_k (\{\theta\} \wedge \{n\})^k \quad (3.54)$$

avec:

$$(\{\theta\} \wedge \{n\})^k = -\alpha_k \{e_2^k\} + \beta_k \{e_1^k\} \quad (3.55)$$

α_k et β_k représentent la rotation de la normale $\{n^k\}$ autour des deux vecteurs orthonormés $\{e_1^k\}$ et $\{e_2^k\}$ appartenant au plan tangent à la coque au noeud k. Du fait que ces vecteurs ne sont pas uniques, un des choix possibles, consiste à passer par une matrice de rotation QR (Batoz et Dhatt 1992) définie de la manière suivante:

$$[QR] = \begin{bmatrix} c + \frac{1}{1+c} (n_Y^k)^2 & -\frac{1}{1+c} n_X^k n_Y^k & n_X^k \\ -\frac{1}{1+c} n_X^k n_Y^k & c + \frac{1}{1+c} (n_X^k)^2 & n_Y^k \\ -n_X^k & -n_Y^k & n_Z^k \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

avec:

$$c = \{n^k\}^t \{k\} = n_Z^k$$

Cette matrice représente la matrice de passage du repère cartésien au repère nodal au noeud k:

$$[QR]\{i\} = \{e_1^k\} \quad [QR]\{j\} = \{e_2^k\} \quad [QR]\{k\} = \{n^k\}$$

Dans le cas particulier où le vecteur $\{n^k\}$ est opposé au vecteur $\{k\}$, on trouve $c = -1$, on prend alors pour QR l'expression :

$$[QR] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

En projetant la relation (3.54) sur les axes du système cartésien, on obtient :

$$\begin{Bmatrix} U(r,s,t) \\ V(r,s,t) \\ W(r,s,t) \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^4 h_k \begin{Bmatrix} U^k \\ V^k \\ W^k \end{Bmatrix} + \frac{th}{2} \sum_{k=1}^4 h_k \left(-\alpha_k \begin{Bmatrix} e_{2X}^k \\ e_{2Y}^k \\ e_{2Z}^k \end{Bmatrix} + \beta_k \begin{Bmatrix} e_{1X}^k \\ e_{1Y}^k \\ e_{1Z}^k \end{Bmatrix} \right) \quad (3.57)$$

ou, sous une forme équivalente :

$$\begin{Bmatrix} u_M \\ v_M \\ w_M \end{Bmatrix} = [N] \{ \hat{u} \}$$

avec :

$$[N] = \begin{bmatrix} h_k & 0 & 0 & -\frac{th}{2} h_k e_{2x}^k & \frac{th}{2} h_k e_{1x}^k \\ 0 & h_k & 0 & -\frac{th}{2} h_k e_{2y}^k & \frac{th}{2} h_k e_{1y}^k \\ 0 & 0 & h_k & -\frac{th}{2} h_k e_{2z}^k & \frac{th}{2} h_k e_{1z}^k \end{bmatrix}$$

$$\langle \hat{u} \rangle = \langle \dots \dots | U_k; V_k; W_k; \alpha_k; \beta_k | \dots \dots \rangle \quad k=1 \text{ à } 4$$

Ce vecteur regroupe les degrés de liberté de l'élément.

Matrice de rigidité élémentaire

On décompose le travail virtuel des forces intérieures en deux parties : la première représente la contribution des efforts de membrane et de flexion, et la seconde concerne la contribution des efforts de cisaillement transversal.

$$\iiint_{v^e} s^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv = \iiint_{v^e} s^{\alpha\beta} \delta \varepsilon_{\alpha\beta} dv + \iiint_{v^e} s^{\alpha 3} \delta \gamma_{\alpha 3} dv \quad (3.58)$$

La partie membrane-flexion s'écrit:

$$\iiint_{v^e} s^{\alpha\beta} \delta \varepsilon_{\alpha\beta} dv = \iiint_{v^e} \left\langle \delta \varepsilon_{11} \quad \delta \varepsilon_{22} \quad \delta \gamma_{12} \right\rangle \begin{Bmatrix} s^{11} \\ s^{22} \\ s^{12} \end{Bmatrix} dv \quad (3.59)$$

D'après les relations (3.7) et (3.57), on peut écrire :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = [B_{mf}] \{ \hat{u} \} \quad (3.60)$$

La matrice de déformation $[B_{mf}]$ est donnée par l'expression :

$$[\mathbf{B}_{mf}] = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}^k & \mathbf{B}_{12}^k & \mathbf{B}_{13}^k & \mathbf{B}_{14}^k & \mathbf{B}_{15}^k \\ \mathbf{B}_{21}^k & \mathbf{B}_{22}^k & \mathbf{B}_{23}^k & \mathbf{B}_{24}^k & \mathbf{B}_{25}^k \\ \mathbf{B}_{31}^k & \mathbf{B}_{32}^k & \mathbf{B}_{33}^k & \mathbf{B}_{34}^k & \mathbf{B}_{35}^k \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

$$\mathbf{B}_{11}^k = h_{k,r} g_{1x} \quad \mathbf{B}_{12}^k = h_{k,r} g_{1y} \quad \mathbf{B}_{13}^k = h_{k,r} g_{1z}$$

$$\mathbf{B}_{14}^k = -\frac{th}{2} h_{k,r} \{g_1\}^t \{e_2^k\} \quad \mathbf{B}_{15}^k = \frac{th}{2} h_{k,r} \{g_1\}^t \{e_1^k\}$$

$$\mathbf{B}_{21}^k = h_{k,s} g_{2x} \quad \mathbf{B}_{22}^k = h_{k,s} g_{2y} \quad \mathbf{B}_{23}^k = h_{k,s} g_{2z}$$

$$\mathbf{B}_{24}^k = -\frac{th}{2} h_{k,s} \{g_2\}^t \{e_2^k\} \quad \mathbf{B}_{25}^k = \frac{th}{2} h_{k,s} \{g_2\}^t \{e_1^k\}$$

$$\mathbf{B}_{31}^k = h_{k,s} g_{1x} + h_{k,r} g_{2x} \quad \mathbf{B}_{32}^k = h_{k,s} g_{1y} + h_{k,r} g_{2y} \quad \mathbf{B}_{33}^k = h_{k,s} g_{1z} + h_{k,r} g_{2z}$$

$$\mathbf{B}_{34}^k = -\frac{th}{2} (h_{k,s} \{g_1\}^t \{e_2^k\} + h_{k,r} \{g_2\}^t \{e_2^k\}) \quad \mathbf{B}_{35}^k = \frac{th}{2} (h_{k,s} \{g_1\}^t \{e_1^k\} + h_{k,r} \{g_2\}^t \{e_1^k\})$$

La relation contrainte-déformation s'exprime sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} s^{11} \\ s^{22} \\ s^{12} \end{Bmatrix} = [\mathbf{H}][\mathbf{B}_{mf}]\{\hat{u}\} \quad (3.62)$$

En remplaçant les relations (3.60) et (3.62) dans (3.59), on obtient la matrice de rigidité correspondant aux efforts de membrane et de flexion :

$$[\mathbf{K}_{mf}] = \iiint_{v^e} [\mathbf{B}_{mf}]^t [\mathbf{H}] [\mathbf{B}_{mf}] dv \quad (3.63)$$

Le travail des efforts de cisaillement transversal s'écrit sous la forme :

$$\iiint_{v^e} s^{\alpha 3} \delta \gamma_{\alpha 3} dv = \iiint_{v^e} \langle \delta \gamma_{13} \quad \delta \gamma_{23} \rangle \begin{Bmatrix} s^{13} \\ s^{23} \end{Bmatrix} dv \quad (3.64)$$

Pour contrôler le blocage en cisaillement, Bathe et Dvorkin (1984) proposent d'utiliser le champ de substitution utilisé pour l'élément plaque Mitc4 :

$$\gamma_{13} = \frac{1}{2}(1+s)\gamma_{13}^A + \frac{1}{2}(1-s)\gamma_{13}^C \quad (3.65)$$

$$\gamma_{23} = \frac{1}{2}(1+r)\gamma_{23}^D + \frac{1}{2}(1-r)\gamma_{23}^B$$

Les termes γ_{13}^A γ_{13}^C γ_{23}^D γ_{23}^B sont calculés à partir des relations (3.15) et (3.57) aux points A, B, C, D. Ces points ont été définis au chapitre I.

En remplaçant chaque terme par sa valeur dans (3.65) on obtient l'expression :

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} = [B_c] \{ \hat{u} \} \quad (3.66)$$

La matrice B_c a la forme suivante:

$$[B_c] = \begin{bmatrix} B_{c11}^k & B_{c12}^k & B_{c13}^k & B_{c14}^k & B_{c15}^k \\ B_{c21}^k & B_{c22}^k & B_{c23}^k & B_{c24}^k & B_{c25}^k \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

$$B_{c11}^k = \frac{1}{2}(1+s)h_{k,r}^A g_{3x}^A + \frac{1}{2}(1-s)h_{k,r}^C g_{3x}^C$$

$$B_{c12}^k = \frac{1}{2}(1+s)h_{k,r}^A g_{3y}^A + \frac{1}{2}(1-s)h_{k,r}^C g_{3y}^C$$

$$B_{c13}^k = \frac{1}{2}(1+s)h_{k,r}^A g_{3z}^A + \frac{1}{2}(1-s)h_{k,r}^C g_{3z}^C$$

$$B_{c14}^k = \frac{-h}{4}((1+s)h_k^A \{a_1^A\}^t \{e_2^k\} + (1-s)h_k^C \{a_1^C\}^t \{e_2^k\})$$

$$B_{c15}^k = \frac{h}{4}((1+s)h_k^A \{a_1^A\}^t \{e_1^k\} + (1-s)h_k^C \{a_1^C\}^t \{e_1^k\})$$

$$B_{c21}^k = \frac{1}{2}(1+r)h_{k,s}^D g_{3x}^D + \frac{1}{2}(1-r)h_{k,s}^B g_{3x}^B$$

$$B_{c22}^k = \frac{1}{2}(1+r)h_{k,s}^D g_{3y}^D + \frac{1}{2}(1-r)h_{k,s}^B g_{3y}^B$$

$$\mathbf{B}_{c23}^k = \frac{1}{2}(1+r)h_{k,s}^D g_{3z}^D + \frac{1}{2}(1-r)h_{k,s}^B g_{3z}^B$$

$$\mathbf{B}_{c24}^k = \frac{-h}{4}((1+r)h_k^D \{a_2^D\}^t \{e_2^k\} + (1-r)h_k^B \{a_2^B\}^t \{e_2^k\})$$

$$\mathbf{B}_{c25}^k = \frac{h}{4}((1+r)h_k^D \{a_2^D\}^t \{e_1^k\} + (1-r)h_k^B \{a_2^B\}^t \{e_1^k\})$$

La relation contrainte-déformation donne :

$$\left\{ \begin{matrix} s_{23}^{13} \\ s_{23} \end{matrix} \right\} = [\mathbf{H}_c][\mathbf{B}_c]\{\hat{u}\} \quad (3.68)$$

D'où l'expression de la matrice de rigidité due au cisaillement transversal :

$$[\mathbf{K}_c] = \iiint_{v^e} [\mathbf{B}_c]^t [\mathbf{H}_c][\mathbf{B}_c] dv \quad (3.69)$$

Matrice de masse élémentaire

Le travail virtuel des forces d'inertie s'écrit sous la formé :

$$\delta W_j^e = -\iiint_{v^e} \rho \left\{ \delta \mathbf{u}_M \right\}^t \{ \gamma_M \} dv \quad (3.70)$$

En remplaçant la relation (3.57) dans (3.70), on obtient:

$$\delta W_j^e = -\langle \delta \hat{u} \rangle [\mathbf{M}] \{ \ddot{\hat{u}} \} \quad (3.71)$$

avec:

$$[\mathbf{M}] = \iiint_{v^e} \rho [\mathbf{N}]^t [\mathbf{N}] dv \quad (3.72)$$

$[\mathbf{M}]$ est la matrice de masse cohérente de l'élément.

Travail des forces extérieures

Le travail des forces extérieures est donné par :

$$\delta w_e = \{\delta \hat{u}\}^t (\{R_p\} + \{R_g\} + \{R_{th}\}) \quad (3.73)$$

Les termes du second membre de (3.73) représentent respectivement la contribution des forces surfaciques, du poids propre et des contraintes thermiques :

$$\{R_p\} = \iint_{s^e} -p \{N_p\} \sqrt{a} dr ds$$

$$\langle N_p \rangle = \left\langle \begin{array}{ccccc} n_x h_k & n_y h_k & n_z h_k & 0 & 0 \end{array} \right\rangle$$

$$\{R_g\} = \iiint_{v^e} \rho g \{\tilde{R}_g\} dv$$

$$\langle \tilde{R}_g \rangle = \left\langle \begin{array}{ccccc} i_{gx} h_k & i_{gy} h_k & i_{gz} h_k & g_1 & g_2 \end{array} \right\rangle$$

$$g_1 = -\frac{th}{2} h_k (\{i_g\}^t \{e_2^k\})$$

$$g_2 = \frac{th}{2} h_k (\{i_g\}^t \{e_1^k\})$$

$\{i_g\}$ est le vecteur directeur de la pesanteur, ρg représente le poids volumique du matériau constituant la coque.

$$\{R_{th}\} = \iiint_{v^e} \frac{E\lambda_L}{1-\nu} [B_{mf}]^t \begin{Bmatrix} Tg^{11} \\ Tg^{22} \\ Tg^{12} \end{Bmatrix} dv$$

III.3.2 Élément Mitc9

Les éléments à faible ordre d'interpolation tel que l'élément Mitc4 nécessitent un maillage fin pour modéliser correctement la géométrie, et souffrent d'une convergence lente (formulation déplacement) dans le cas où les efforts de membranes sont prépondérants. Afin d'améliorer la modélisation tant géométrique

que mécanique, des éléments d'ordre supérieurs ont été proposés tels que les éléments à huit, neuf, douze et seize noeuds (Bathe et Bolourchi 1980). Ces éléments sont bons sur le plan de la représentation géométrique, mais ils doivent s'affranchir des blocages en cisaillement et en membrane (Bathe et Dvorkin 1986, Huang et Hinton 1986, Stolarski et Belytschko 1982). Ce dernier type de blocage n'affecte pas l'élément Mitc4.

Pour remédier au blocage en membrane, différentes approches sont utilisées. Parmi les plus connues, on peut citer la technique de l'intégration réduite et sélective, la formulation mixte, la décomposition modale, et l'utilisation d'un champ de substitution. La technique de l'intégration réduite et sélective améliore le comportement dans certains cas mais introduit de modes parasites. En revanche, elle ne peut pas être appliquée en présence de couplage entre les termes de membrane et de flexion. A cela s'ajoute le risque de blocage quand les conditions aux limites sont très rigides. La formulation mixte quoique intéressante dans la prédiction des sollicitations exige une certaine cohérence dans la représentation des sollicitations et des déplacements. Des travaux récents (Ibrahimbegovic, Taylor et Wilson 1990, Ibrahimbegovic et Wilson 1991) utilisant des principes variationnels mixtes modifiés, ont aboutis à des éléments de membranes robustes libres de blocage moyennant une certaine modification.

L'utilisation des champs de substitution pour les composantes de déformation est une technique très suivie à l'heure actuelle : Huang et Hinton (1986) ont développé un élément à neuf noeuds en se servant d'un champs de substitution pour les composantes de membrane après leur séparation de celles de flexion dans un système de coordonnées cartésiennes locales; Bathe et Dvorkin (1986) ont utilisé des interpolations mixtes des composantes tensorielles dans le plan pour l'élément Mitc8. Jank et Pinsky(1987) ont de leur part construit un élément à neuf noeuds doté d'un champ de substitution pour les composantes covariantes de déformation dans le plan

L'élément Mitc9 proposé par Bucalem et Bathe (1993) pour le calcul non linéaire des coques est basé sur la technique des champs de substitution. Nous présentons brièvement, ci-après, la construction de cet élément. Il s'agit d'un élément à neuf noeuds identique à l'élément Q9 pour l'interpolation des variables cinématiques. Sa matrice de rigidité est construite à partir des champs de substitution adéquats aussi bien pour les composantes dans le plan que pour les composantes de cisaillement transversal.

Interpolation des composantes ϵ_{rr} et ϵ_{rt}

Les composantes de déformation sont définies par interpolation de leurs valeurs calculées aux points de la figure (3.3a). Cette interpolation est linéaire suivant r et quadratique suivant s :

$$\epsilon_{rr}(r, s, t) = \sum_{i=1}^6 \tilde{h}_{ir}(r, s) \epsilon_{rr}^i(r_i, s_i, t)$$

$$\epsilon_{rt}(r, s) = \sum_{i=1}^6 \tilde{h}_{ir}(r, s) \epsilon_{rt}^i(r_i, s_i)$$

Les fonctions d'interpolation associées sont:

$$\tilde{h}_{1r} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{r}{a}\right) \left(\frac{s}{b}\right) \left(1 + \frac{s}{b}\right)$$

$$\tilde{h}_{2r} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{r}{a}\right) \left(\frac{s}{b}\right) \left(1 + \frac{s}{b}\right)$$

$$\tilde{h}_{3r} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{r}{a}\right) \left(\frac{s}{b}\right) \left(\frac{s}{b} - 1\right)$$

$$\tilde{h}_{4r} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{r}{a}\right) \left(\frac{s}{b}\right) \left(\frac{s}{b} - 1\right)$$

$$\tilde{h}_{5r} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r}{a}\right) \left(1 - \left(\frac{s}{b}\right)^2\right)$$

$$\tilde{h}_{6r} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r}{a}\right) \left(1 - \left(\frac{s}{b}\right)^2\right)$$

Interpolation des composantes ϵ_{ss} et ϵ_{st}

On utilise pour ces composantes le schéma inverse du schéma précédent: l'interpolation est linéaire suivant s et quadratique suivant r . Les points d'interpolations sont donnés dans la figure (3.3b) :

$$\epsilon_{ss}(r, s, t) = \sum_{i=1}^6 \tilde{h}_{is}(r, s) \epsilon_{ss}^i(r_i, s_i, t)$$

$$\epsilon_{st}(r, s) = \sum_{i=1}^6 \tilde{h}_{is}(r, s) \epsilon_{st}^i(r_i, s_i)$$

Les fonctions d'interpolation associées sont:

$$\tilde{h}_{1s} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{s}{a}\right) \left(\frac{r}{b}\right) \left(\frac{r}{b} + 1\right)$$

$$\tilde{h}_{2s} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{s}{a}\right) \left(\frac{r}{b}\right) \left(\frac{r}{b} - 1\right)$$

$$\tilde{h}_{3s} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{s}{a}\right) \left(\frac{r}{b}\right) \left(\frac{r}{b} - 1\right)$$

$$\tilde{h}_{4s} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{s}{a}\right) \left(\frac{r}{b}\right) \left(\frac{r}{b} + 1\right)$$

$$\tilde{h}_{5s} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{s}{a}\right) \left(1 - \left(\frac{r}{b}\right)^2\right)$$

$$\tilde{h}_{6s} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{s}{a}\right) \left(1 - \left(\frac{r}{b}\right)^2\right)$$

Interpolations des composantes ϵ_{rs}

Dans ce cas on utilise les quatre points de la figure (3.3c), par conséquent l'interpolation est bilinéaire suivant r et s.

$$\epsilon_{rs}(r, s, t) = \sum_{i=1}^4 \tilde{h}_{irs}(r, s) \epsilon_{rs}^i(r_i, s_i, t)$$

Les fonctions d'interpolation sont:

$$\tilde{h}_{1rs} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{r}{a}\right) \left(1 + \frac{s}{a}\right)$$

$$\tilde{h}_{2rs} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{r}{a}\right) \left(1 + \frac{s}{a}\right)$$

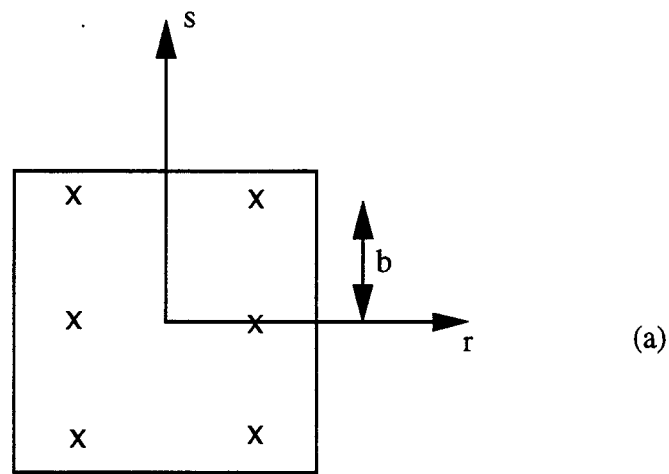
$$\tilde{h}_{3rs} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{r}{a}\right) \left(1 - \frac{s}{a}\right)$$

$$\tilde{h}_{4rs} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{r}{a}\right) \left(1 - \frac{s}{a}\right)$$

Les composantes des déformations aux points d'interpolation sont calculées à partir des relations (3.7) et (3.15) et des formules d'interpolation de type (3.57) utilisant les fonctions d'interpolation de l'élément Q9.

La construction des matrices et vecteurs élémentaires est effectuée selon la démarche utilisée pour l'élément Mitc4. L'intégration numérique est effectuée avec $3 \times 3 \times 2$ points dans les directions r, s, et t.

Malgré l'absence des preuves théoriques à l'heure actuelle sur le bon comportement de cet élément, les tests de validation que nous présentons dans le chapitre IV montrent sa haute performance.



$$a = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$b = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

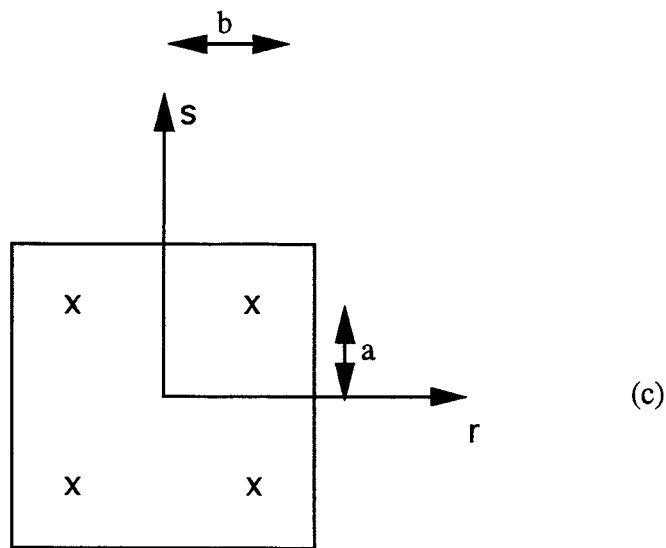
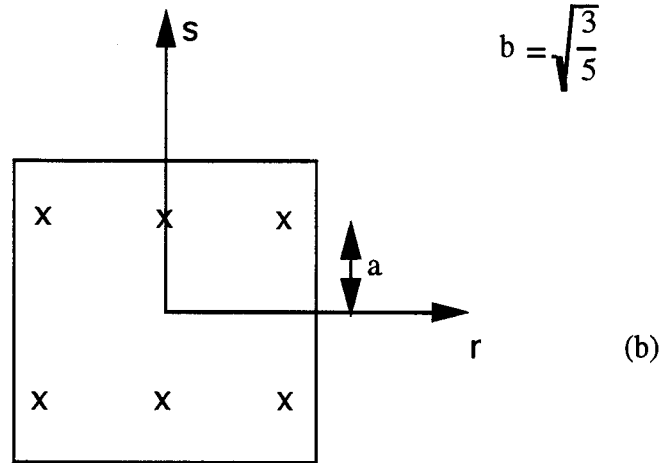


Figure 3.3 : Elément Mitc9, points d'interpolations des composantes du tenseur de déformation

a) composantes ϵ_{rr} et ϵ_{rt}

b) composantes ϵ_{ss} et ϵ_{st}

c) composantes ϵ_{rs}

CHAPITRE IV

VALIDATION DES ELEMENTS COQUES

Les éléments Mitc4 et Mitc9 ont été introduits dans le code décrit au chapitre II. Dans un premier temps, des tests ont été effectués sur des coques homogènes. Ensuite, ils ont été étendus aux plaques composites présentant des dissymétries matérielles ou géométriques. En deuxième partie nous présentons l'analyse dynamique d'une structure formée par un assemblage de plaques, le chapitre se termine par l'étude d'un système de fondation en radier-bêche.

IV.1 Coques isotropes

Structure plissée console sous charge linéique

Il s'agit d'une structure composée par un assemblage de deux plaques rectangulaires faisant chacune un angle de 30° avec le plan horizontal. Les caractéristiques géométriques et mécaniques sont données dans la figure (4.1). Deux cas de chargement ont été étudiés :

- (i) une densité linéique de force verticale,
- (ii) une densité linéique de force horizontale.

La solution de référence est une solution par éléments finis (Ibrahimbegovic, Frey et Rebora 1993) basée sur une formulation variationnelle non conventionnelle du milieu continu classique et sur l'utilisation d'un champ de rotation indépendant. Le tableau (4.1) montre le déplacement du point A obtenu avec l'élément Mitc4, la solution de référence, la théorie des poutres et une solution par éléments finis (Bernadou 1989). On observe une très bonne concordance entre le résultat de l'élément Mitc4 et les autres solutions. En effet, l'erreur maximale par rapport à la solution de référence est de l'ordre de 1,2%.

Poutre caisson en torsion

Le deuxième exemple porte sur l'étude d'une poutre caisson en torsion. Les caractéristiques géométriques et mécaniques sont données dans la figure (4.2). Le moment de torsion appliqué est introduit sous forme de flux cisaillement. La solution de référence résulte de la moyenne de plusieurs logiciels d'éléments finis (Afnor 1990). Un maillage de quatre vingts éléments Mitc4 est utilisé, soit 10×2 mailles pour chaque plaque. Le tableau (4.2) montre les déplacements et les

Structure plissée en console

Caractéristiques géométriques et mécaniques :

$$L=1,26 \quad B=1 \quad h=0,124 \quad \alpha=30^\circ$$

$$E=3e7 \quad \nu=0$$

$$\text{Chargement : } p_z=1000 \quad q_y=1000$$

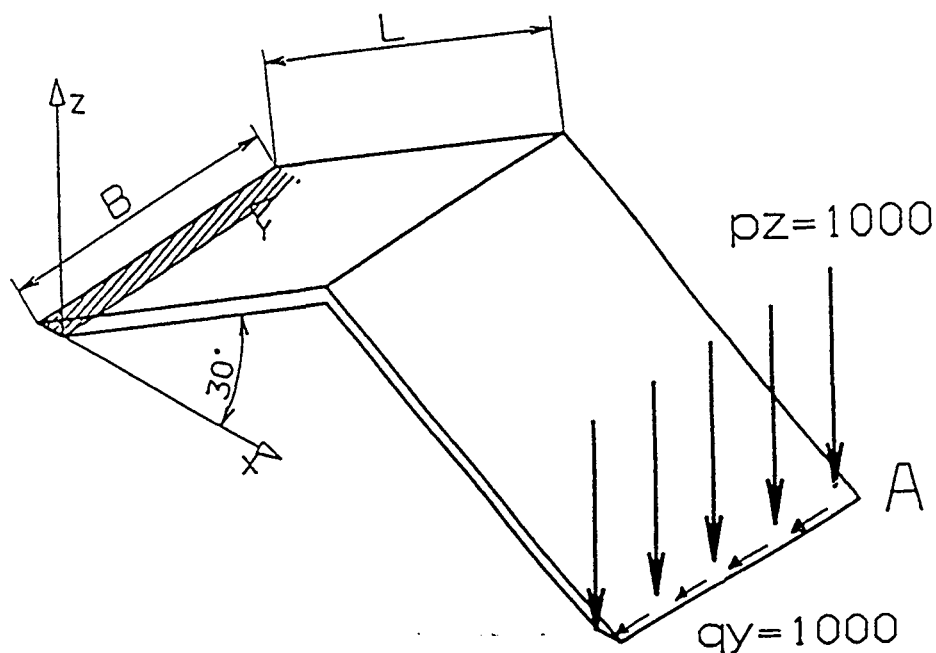


Figure 4.1 : Caractéristiques géométriques et mécaniques de la plaque plissée

Modèle	Maillage	Charge p_z $U_A \cdot 10^4$	Charge p_z $W_A \cdot 10^4$	Charge q_y $V_A \cdot 10^4$	Charge q_y $W_A \cdot 10^4$
Solution de référence	6×3	-1817	-8349	-1362	-542
Mitc4	6×3	-1816,8	-8345	-1345,7	-542,8
Théorie des poutres		-1817	-8395		
poutres avec effort tranchant		-1817	-8407		
Bernadou (89)	6×3	-1817	-8372		

Tableau 4.1 : Validation de Mitc4 sur une structure plissée, déplacement du point A.

$l=1\text{m}$ $b=0,1\text{m}$ épaisseur = $0,005\text{m}$

$E = 2,1 \times 10^{11} \text{N/m}^2$ $\nu = 0,3$

Chargement

Moment de torsion : $M_t = 10\text{N} \times \text{m}$

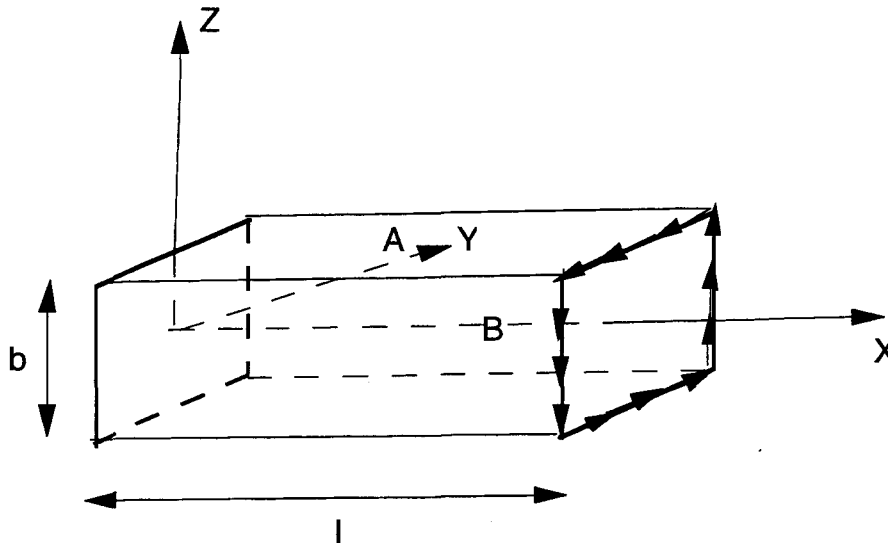


Figure 4.2 : Caractéristiques de la poutre caisson.

		Solution de référence	Mitc4
A(0,5/0/0,05)	$v(\text{m})$	$-0,617\text{e-}6$	$-0,616\text{e-}6$
	$\theta_x(\text{rd})$	$0,123\text{e-}4$	$0,123\text{e-}4$
	$\sigma_{xy}(\text{Pa})$	$-0,11\text{e}6$	$-0,11\text{e}6$
B(0,8/-0,05/0)	$W(\text{m})$	$-0,987\text{e-}6$	$-0,986\text{e-}6$
	$\theta_x(\text{rd})$	$0,197\text{e-}4$	$0,197\text{e-}4$
	$\sigma_{xz}(\text{Pa})$	$-0,11\text{e}6$	$-0,108\text{e}6$

Tableau 4.2 : Test de validation de Mitc4 sur une poutre caisson en torsion - déplacements et contraintes aux points A et B.

contraintes aux points A et B obtenus par l'élément Mitc4 et la solution de référence. On observe un bon accord entre les deux solutions. En effet, l'écart maximal constaté est inférieur à 0,5% sur les déplacements et à 2% sur les contraintes.

Cylindre pincé avec diaphragmes

Il s'agit d'un cylindre sollicité par deux forces diamétralement opposées et qui repose à ses extrémités sur deux diaphragmes rigides dans leur plan. Les caractéristiques géométriques et mécaniques sont données dans la figure (4.3). La solution de référence est une solution analytique basée sur la théorie de Kirchhoff (Lindberg et al, 1969).

Ce test constitue un des tests les plus sévères pour vérifier la capacité d'un élément de coque à décrire des champs de déformations de membrane complexes avec une part importante de flexion sans extension de la surface moyenne. Il est souvent utilisé pour vérifier l'absence de blocage en membrane pour des éléments coques.

Un huitième de la coque est modélisé avec des éléments Mitc4 ou Mitc9. Les conditions aux limites sont données dans la figure 4.3. Les tableaux (4.3a, 4.3b, 4.3c) montrent les résultats obtenus avec les éléments Mitc4 et Mitc9 pour le déplacement transversal en C, le déplacement axial en D et l'effort normal circonférentiel en C. Nous avons également inclus dans ces tableaux les résultats obtenus par les éléments Q8-48, DKQ24 et Q4 γ 24 (Batoz et Dhatt 1992). Ce dernier élément est semblable à l'élément Mitc4 mais il est construit avec une intégration explicite dans l'épaisseur et possède six degrés de liberté par noeud.

En ce qui concerne l'élément Mitc9, la convergence est rapide sur les déplacements: on obtient pratiquement les valeurs de référence avec un maillage de 8x8 éléments. Pour le même maillage, l'effort normal au point de Gauss le plus proche du point C donne une valeur inférieure de 17% à la valeur de référence. Un calcul direct au noeud donne une valeur 20% supérieure à cette dernière.

Les figures (4.4a et 4.4b) montrent l'évolution de l'effort normal et du moment fléchissant circonférentiel le long du côté DC, obtenue avec l'élément Mitc9 avec le maillage de 8x8 éléments. On observe un gradient très important pour ces sollicitations au voisinage du point C.

On note que l'élément Mitc4 converge très lentement mais d'une manière monotone sur les déplacements et sur l'effort normal. Avec un maillage de 20x20 éléments, les

Cylindre pincé avec diaphragmes

Caractéristiques géométriques et mécaniques

$L=6\text{m}$ $R=3\text{m}$ $h=0,03\text{m}$ $E=3\text{e}10\text{ N/m}^2$ $\nu=0,3$

Chargement:

$P=1\text{N}$

Conditions aux limites :

$U=V=\beta=0$ sur AD $W=\beta=0$ sur AB

$V=\alpha=0$ sur BC $U=\beta=0$ sur CD

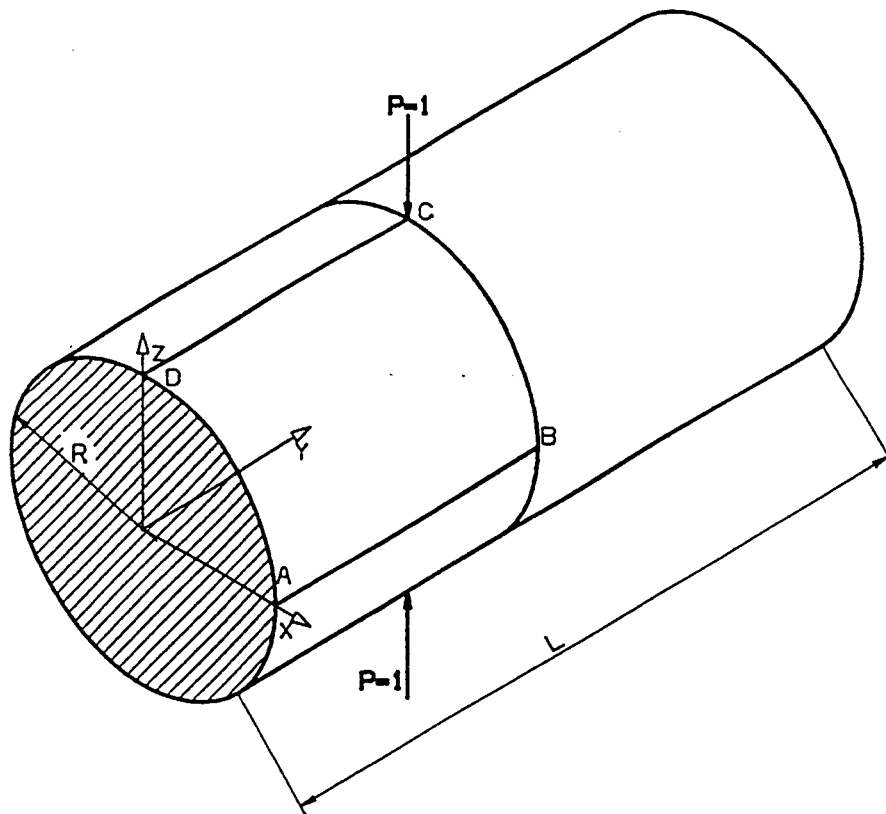


Figure 4.3 : Cylindre pincé avec diaphragmes rigides soumis à deux forces diamétralement opposées.

$\bar{W}_C = \frac{Eh}{P} W_C$ Valeur de référence : 164,24					
Modèle	4X4	8X8	12X12	16X16	20X20
Q4γ24	60,93	121,95	143,37		
DKQ24	101,24	154,84	164,95		
Q8_48	151,67	161,05			
MITC4	62,01	122,4	143,85	152,8	157
MITC9	158,31	164,25			

Tableau 4.3a : Test de validation des éléments Mitc4 et Mitc9 sur un cylindre pincé-déplacement du point C dans la direction de la charge.

$\bar{V}_D = \frac{Eh}{P} V_D$ Valeur de référence : 4,114					
Modèle	4X4	8X8	12X12	16X16	20X20
Q4γ24	3,98	4,19	4,16		
DKQ24	5,96	4,44	4,26		
Q8_48	3,78	4,11	4,11		
MITC4	3,97	4,21	4,17	4,15	4,138
MITC9	3,816	4,106			

Tableau 4.3b : Test de validation des éléments Mitc4 et Mitc9 sur un cylindre pincé-déplacement du point D suivant l'axe du cylindre.

$\bar{N}_{11C} = \frac{RN_{11C}}{P}$ Valeur de référence : 18,6					
Modèle	4X4	8X8	12X12	16X16	20X20
Q4γ24	1,83	10,98	14,58		
DKQ24	8,83	17,65	20,32		
MITC4 *	5,09	11,09	14,7	16,76	17,91
MITC9 *	9,93	15,54			

Tableau 4.3c : Test de validation des éléments Mitc4 et Mitc9 sur un cylindre pincé-effort normal circonférentiel en C.

(*) Valeur calculée au point de Gauss le plus proche du point C

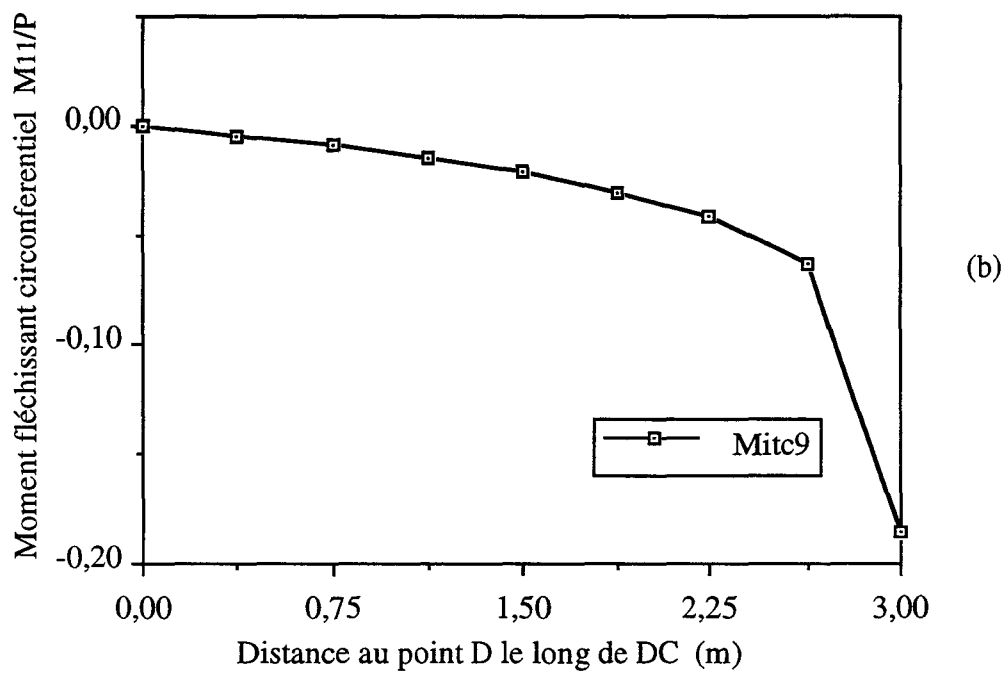
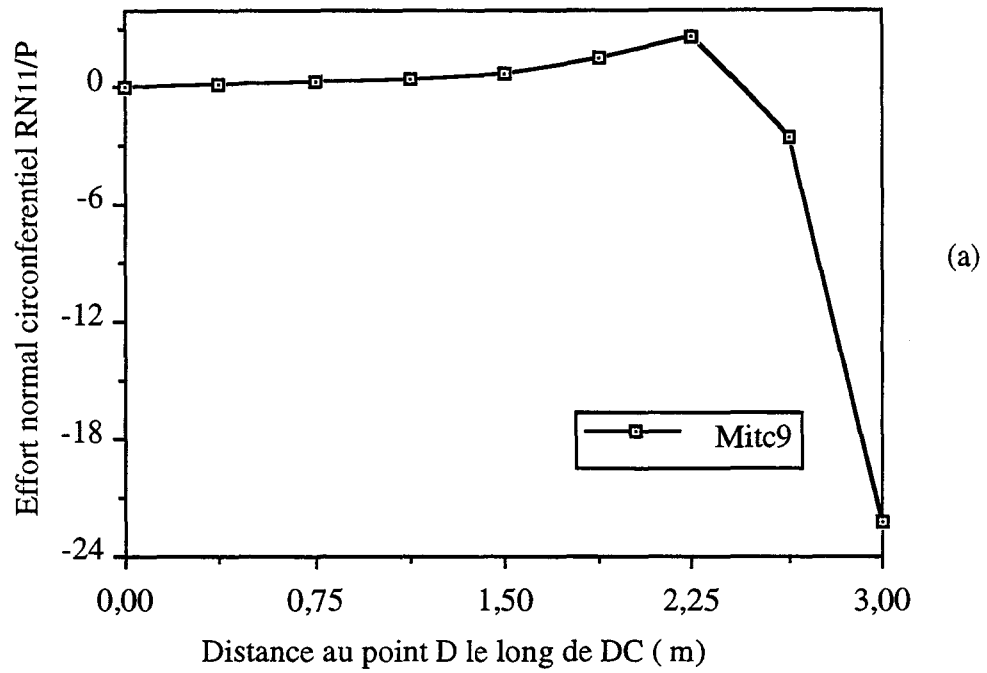


Figure 4.4 : Test de l'élément Mitc9 sur un cylindre pincé soumis à deux forces diamétralement opposées.
 a) Effort normal circonférentiel le long de DC
 b) Moment fléchissant circonférentiel le long de DC

erreurs sur le déplacement et l'effort normal en C sont respectivement de 4,5% et 3,7%. Ce comportement de l'élément Mitc4 peut s'expliquer par la faiblesse bien connue de l'élément Q4 à bien prédire les efforts membranaires et par une rigidité importante à la flexion dans ce cas.

Etude d'une tour de refroidissement

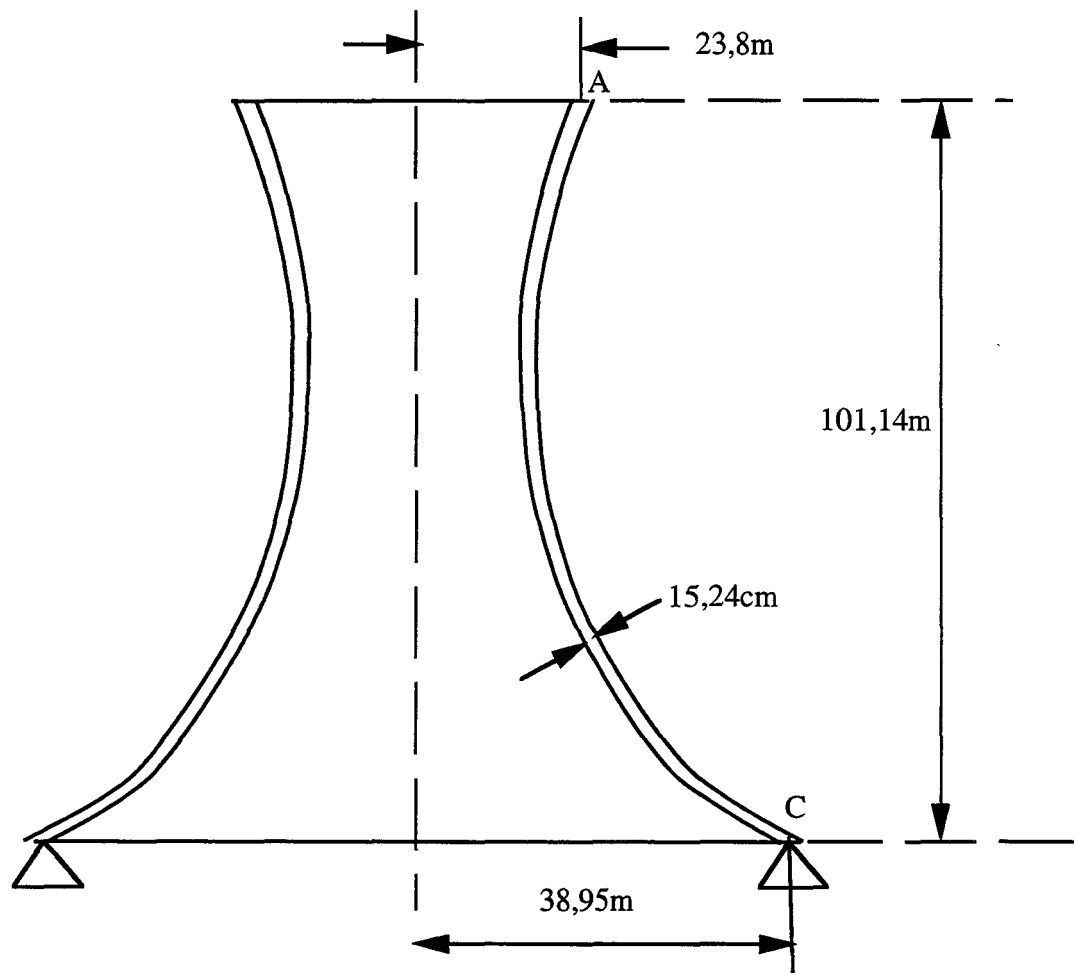
Dans cette section, nous allons tester le programme sur un problème de tour de refroidissement en béton armé articulée à sa base. Les caractéristiques géométriques de la tour sont données dans la figure (4.5). Le béton est considéré comme un milieu élastique linéaire caractérisé par un module d'Young de $211 \times 10^5 \text{ kN/m}^2$ et un coefficient de poisson de 0,2. Le coefficient de dilatation et le poids volumique sont fixés respectivement à $12 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ et 24 kN/m^3 .

Ce problème fût traité par Fonder (1972) et Larsen (voir référence précédente) pour le cas poids propre, et Frey et al (1974) pour le poids propre et pour un chargement thermique correspondant à une distribution uniforme de température ($\theta = 50^\circ\text{C}$). Les résultats de ces travaux seront utilisés comme référence.

Nous avons modélisé un quart de la tour avec deux maillages. Le premier comporte une discrétisation avec l'élément Mitc4 comportant 30 éléments suivant la méridienne avec une progression géométrique de 1,15 appliquée sur la zone étendue de la base à la gorge, et 18 éléments suivant le parallèle; soit au total 540 éléments de maillage.

Le second maillage contient 19 éléments Mitc9 suivant la méridienne avec la même progression géométrique et 8 éléments suivant le parallèle, soit au total 152 éléments.

Le tableau 4.4a montre les déplacements et les rotations aux points A et C obtenus par les différents modèles pour le cas du poids propre. On observe un bon accord entre les résultats donnés par l'élément Mitc9 et la solution de référence hormis la rotation θ_A où la solution obtenue par l'élément Mitc9 est plus proche de celle de Larsen. L'écart constaté sur θ_A (18%) peut être attribué au maillage. L'élément Mitc4 donne dans ce cas une solution très précise pour le déplacement vertical au point A. pour les autres déplacements, on observe un écart par rapport à la solution de référence de 21% sur u_A , 68% sur θ_A et de 6% sur θ_C . Ces écarts peuvent être attribués aux erreurs d'approximation géométrique introduites avec l'élément Mitc4 et à l'insuffisance du maillage en tête de la tour. La figure 4.6a montre les



Equation canonique de la méridienne:

$$X^2 - 0,18 Y^2 = (21,424)^2$$

Figure 4.5 : Tour de refroidissement-caractéristiques géométriques.

Modèle	$U_{Ax}10^4$ (m)	$V_{Ax}10^2$ (m)	$\theta_{Ax}10^6$ (rad)	$\theta_{Cx}10^5$ (rad)
Frey et al	1,2	-0,521	5,019	-8,33
Fonder	1,233	-0,521		-8,86
Larsen	1,194	-0,521	4,398	-8,23
Mitc4	1,45	-0,522	8,45	-7,82
Mitc9	1,19	-0,521	4,13	-8,22

Tableau 4.4a : Validation des éléments Mitc4 et Mitc9 sur une tour de refroidissement-déplacements en tête et en pied de la tour sous le poids propre.

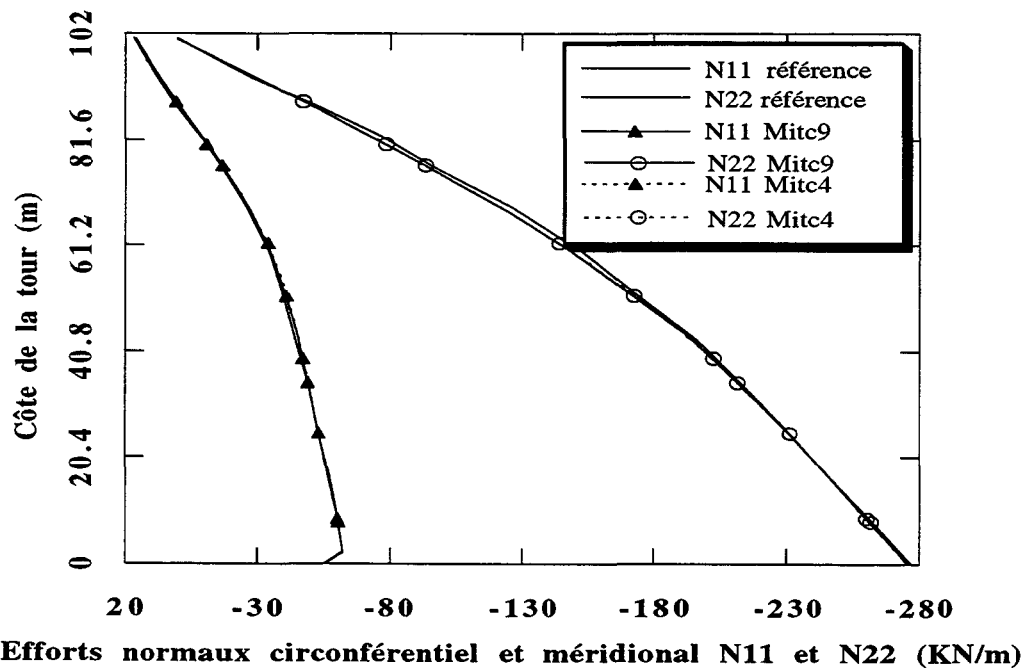
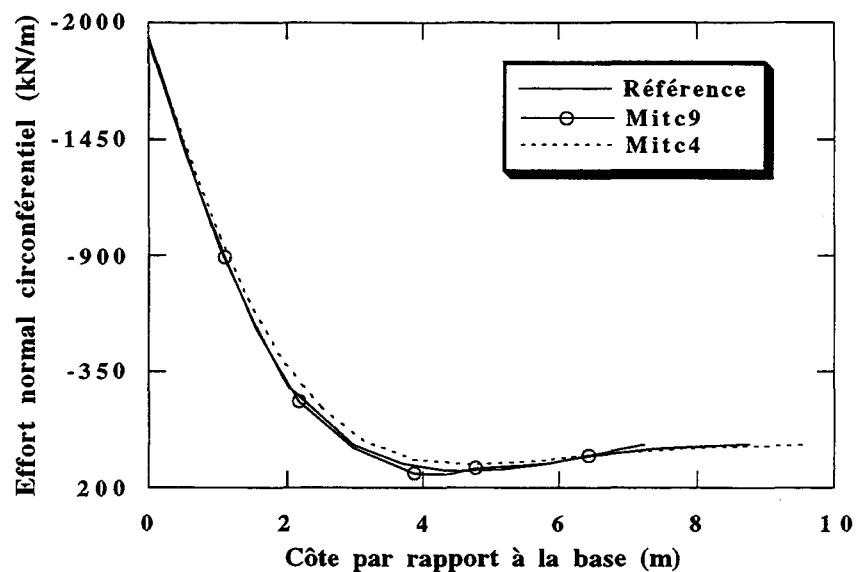


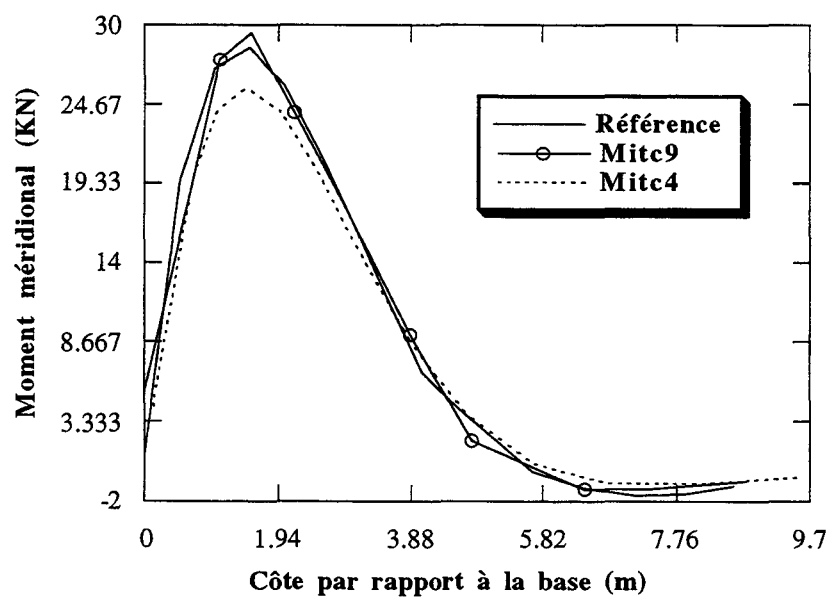
Figure 4.6a : Validation des éléments Mitc4 et Mitc9 sur une tour de refroidissement-efforts normaux sous le poids propre.

Modèle	$U_A \times 10^2$ (m)	$V_A \times 10$ (m)	$\theta_A \times 10^5$ (rad)	$\theta_C \times 10^2$ (rad)
Frey et al	1,428	0,69	0	1,292
Mitc4	1,428	0,69	1,6	1,2
Mitc9	1,428	0,69	0,0432	1,29

Tableau 4.4b : Validation des éléments Mitc4 et Mitc9 sur une tour de refroidissement-déplacements en tête et en pied sous une élévation de température.



(b)



(c)

Figure 4.6 : Validation des éléments Mitc4 et Mitc9 sur une tour de refroidissement sous charge thermique.

b) évolution de l'effort normal circonferentiel
c) évolution du moment fléchissant méridional

sollicitations obtenues avec les éléments Mitc4 et Mitc9 et la solution de référence pour le cas du poids propre. On observe un bon accord entre les trois solutions avec un écart maximal de 2%.

Le tableau (4.4b) montre les déplacements et les rotations aux points A et C pour le cas de charge thermique. On observe un bon accord entre les éléments Mitc4 et Mitc9 et la solution de référence sauf pour la rotation en A. Cet écart est attribué à l'insuffisance du maillage en tête de la tour et il est plus important avec l'élément Mitc4 qu'avec l'élément Mitc9. Les figures 4.6b et 4.6c montrent une comparaison des sollicitations obtenues par les trois solutions pour le chargement thermique. On observe la même allure de variation avec un bon accord sur les valeurs maximales. En effet, les écarts entre les résultats de l'élément Mitc9 et la solution de référence sont de l'ordre de 1% sur l'effort normal circonférentiel et de 3,5% sur le moment méridional. Les écarts avec l'élément Mitc4 sont de 2,5% sur l'effort normal et de 11,5% sur le moment méridional.

IV.2 Plaques dissymétriques

Deux cas de plaques composites sont étudiés dans ce paragraphe. Il s'agit de plaques présentant une dissymétrie résultant d'une variation de l'épaisseur, ou de l'orientation des fibres des couches disposées de part et d'autre du plan moyen.

Plaque stratifiée orthotrope

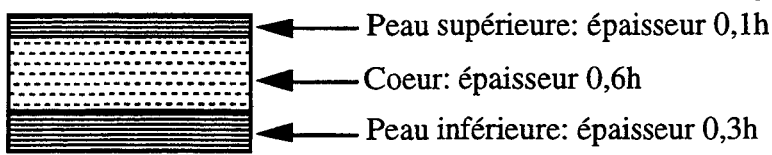
La plaque est simplement appuyée sur ses quatre côtés et soumise à une charge uniformément répartie. Les caractéristiques mécaniques et géométriques sont données dans la figure (4.7).

Pour ce test, nous disposons d'une solution de référence donnée par Srinivas (1973). Il s'agit d'une solution analytique basée sur la théorie de l'élasticité. Le tableau (4.5) montre les résultats obtenus avec l'élément Mitc4, la solution de référence et une solution obtenue à l'aide de l'élément Héterosis (Owen et Figueiras, 1983). On constate un bon accord entre les résultats de l'élément Mitc4 et de Owen et Figueiras avec un écart inférieur à 1,5%. L'écart entre les résultats de l'élément Mitc4 et la solution de référence est inférieur à 1% sur la flèche. Il est de l'ordre de 1,8% sur la contrainte en face supérieure et de 11% sur la contrainte en face inférieure.

Plaque stratifiée carrée soumise à une charge uniforme

Caractéristiques géométriques et mécaniques :

$a/h=10$



Caractéristiques mécaniques de la peau :

$E_L = 3,4156 \quad E_T = 1,7931 \quad G_{LT} = 1$

$G_{ZT} = 1,015 \quad G_{LZ} = 0,608 \quad \nu_{LT} = 0,44$

Le rapport entre les modules des peaux et du coeur est fixé à 10.

Coefficients correcteurs : $k_1=k_2=0,245$

Figure 4.7 : Plaque stratifiée - caractéristiques géométriques et mécaniques.

	\bar{W}	σ_x / q au centre de la plaque					
		Face supérieure	Peau sup interface	coeur Interface sup	coeur Interface inf	Peau inf Interface	Face inférieure
calcul exact	34,549	63,756	50,236	5,0409	-0,3360	-3,4028	-43,771
plaque mince	25,342	67,06	56,199	5,6199	-0,8973	-8,973	-41,56
Owen et Figueiras 1983	34,921	63,504	53,218	5,3218	-0,8497	-8,497	-39,354
Mitc4 coque	34,7	62,66	52,5	5,25	-0,838	-8,38	-38,83

Tableau 4.5 : Validation de l'élément Mitc4 sur une plaque stratifiée soumise à une charge uniforme-flèche et contrainte au centre.

La valeur adimensionnelle de la flèche est :

$$\bar{W} = W \frac{G_{LT}(\text{coeur})}{hq}$$

Plaque multicouche

Les tests ont été effectués sur deux séries de plaques multicouches. Dans la première série, on étudie le comportement des panneaux simplement appuyés sur les quatre côtés avec des conditions supplémentaires sur les déplacements dans le plan moyen. Les nappes des fibres sont orientées alternativement par rapport à l'axe x de la plaque; les couches ont toutes la même épaisseur. La plaque est soumise à un chargement doublement sinusoïdale. Ses caractéristiques géométriques et mécaniques sont données dans la figure (4.8). Deux séquences d'empilement des couches ont été examinées, à savoir deux couches $(-\theta/+ \theta)$ et six couches $(-\theta/+ \theta/- \theta/+ \theta/- \theta/+ \theta)$.

Un maillage de 16x16 éléments Mitc4 a été adopté pour la plaque complète. Les conditions aux limites sont:

$$W=V=0 \quad \text{sur AB et CD}$$

$$W=U=0 \quad \text{sur AD et CB}$$

La solution de référence est une solution en double séries basée sur la théorie de Love-Kirchhoff (Leissa et Whitney 1969). Nous avons également comparée notre solution à celle de Geoffroy et Girard (1993) obtenue à l'aide de l'élément coque dégénéré à huit noeuds avec intégration réduite. Le tableau (4.6) montre les résultats de la flèche au centre. On observe un très bon accord entre les trois solutions avec un écart maximal inférieur à 1,8%.

La deuxième série concerne une plaque à plis croisés respectivement à 0° et 90° . Elle est simplement appuyée et soumise au cas de charge précédent. Deux séquences d'empilement ont été considérées : deux couches $(0^\circ/90^\circ)$ et quatre couches $(0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ)$.

Les caractéristiques mécaniques sont données dans la figure (4.9). Les conditions aux limites sont les suivantes:

$$W=U=0 \quad \text{sur AB et CD}$$

$$W=V=0 \quad \text{sur AD et CB}$$

Plaque carrée simplement appuyée à plis alternés

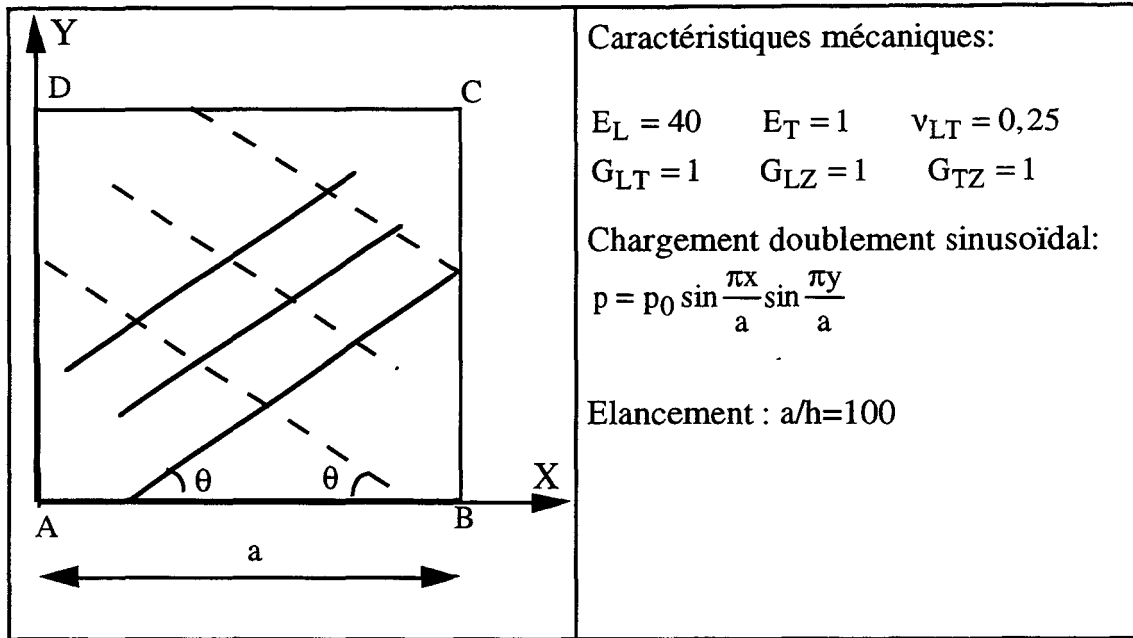


Figure 4.8 : Plaque multicouche à plis alternés - caractéristiques géométriques et mécaniques.

Deux couches: $-\theta/\theta$ $k_1=k_2=0,833$				
θ	0°	15°	30°	45°
\bar{W} (analytique)	2,704	4,271	4,838	4,667
\bar{W} (Geoffroy et Girard)	2,723	4,291	4,858	4,688
\bar{W} (Mits4)	2,70	4,27	4,847	4,69

Tableau 4.6a : Validation de l'élément Mits4 sur une plaque simplement appuyée avec deux couches à plis alternés - flèche au centre pour différentes orientations des fibres.

Six couches: $-\theta/+\theta/-\theta/+\theta/-\theta/+\theta$ $k_1=k_2=0,833$				
θ	0°	15°	30°	45°
\bar{W} (analytique)	2,704	2,377	1,819	1,622
\bar{W} (Geoffroy et Girard)	2,723	2,4	1,84	1,64
\bar{W} (Mits4)	2,70	2,382	1,84	1,65

Tableau 4.6b : Validation de l'élément Mits4 sur une plaque simplement appuyée avec six couches à plis alternés - flèche au centre pour différentes orientations des fibres.

$$\bar{W} = W \frac{E_T h^3}{p_0 a^4} \times 10^3$$

Plaque carrée simplement appuyée à plis croisés

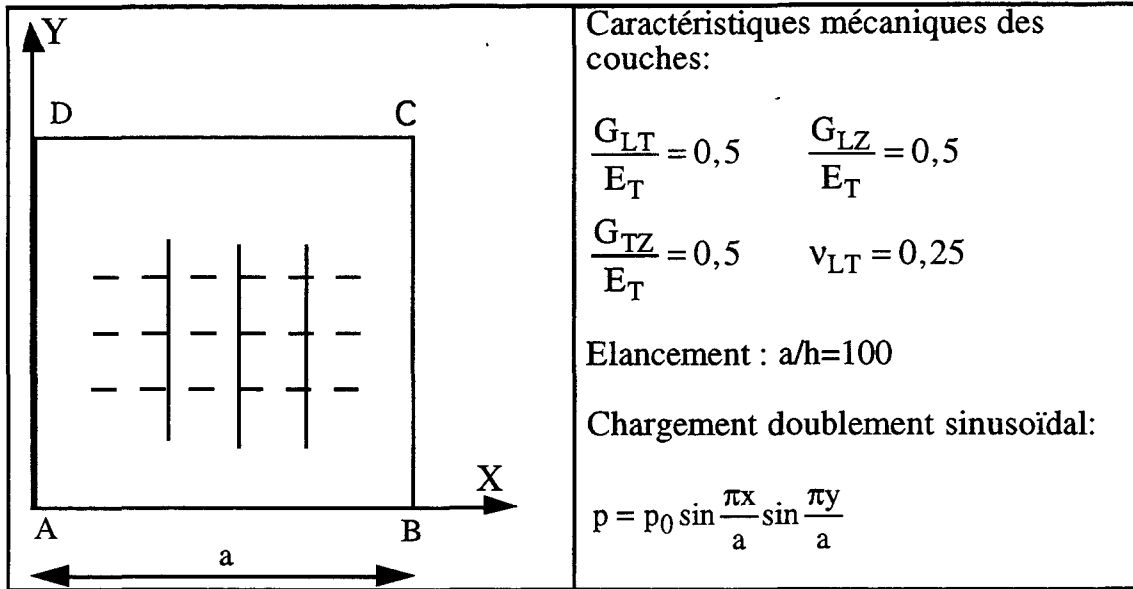


Figure 4.9 : Plaque multicouche à plis croisés à 0° et 90°- caractéristiques géométriques et mécaniques.

Deux couches : 0°/90°				
E_L/E_T	10	20	30	40
\bar{W} (analytique)	1,589	1,194	0,959	0,802
\bar{W} (Geoffroy et Girard)	1,59	1,197	0,964	0,807
\bar{W} (Mits4)	1,588	1,193	0,959	0,802

Tableau 4.7a : Validation de l'élément Mits4 sur une plaque avec deux couches à plis croisés à 0° et 90°- flèche au centre en fonction du rapport des modules.

Quatre couches : 0°/90°/0°/90°				
E_L/E_T	10	20	30	40
\bar{W} (analytique)	1,017	0,608	0,434	0,337
\bar{W} (Geoffroy et Girard)	1,021	0,613	0,438	0,341
\bar{W} (Mits4)	1,016	0,608	0,434	0,338

Tableau 4.7b : Validation de l'élément Mits4 sur une plaque avec quatre couches à plis croisés à 0° et 90°- flèche au centre en fonction du rapport des modules.

$$\bar{W} = W \frac{E_T h^3}{p_0 a^4} \times 10^2$$

E_L/E_T	10	20	30	40
k1	0,74875	0,65053	0,59299	0,55727
k2	0,74875	0,65053	0,59299	0,55727

(a)

E_L/E_T	10	20	30	40
k1	0,70615	0,67439	0,66207	0,65555
k2	0,70615	0,67439	0,66207	0,65555

(b)

Tableau 4.7bis : Plaque carrée dissymétrique à plis croisés, valeurs des coefficients correcteurs en fonction du rapport des modules et du nombre des couches

a) deux couches 0/90

b) quatre couches 0/90/0/90

La solution de référence est comme dans le test précédent due à Leissa et Whitney (1969). Le maillage utilisé est celui du test précédent. Les résultats sont donnés dans le tableau (4.7). On observe l'influence du rapport E_L/E_T (E_L et E_T designent respectivement le module d'Young dans le sens des fibres et dans le sens perpendiculaire) et du nombre des couches sur le comportement de la plaque. On constate un très bon accord entre les trois solutions avec des écarts inférieurs à 1%.

IV.3 Test en dynamique d'un assemblage de plaques

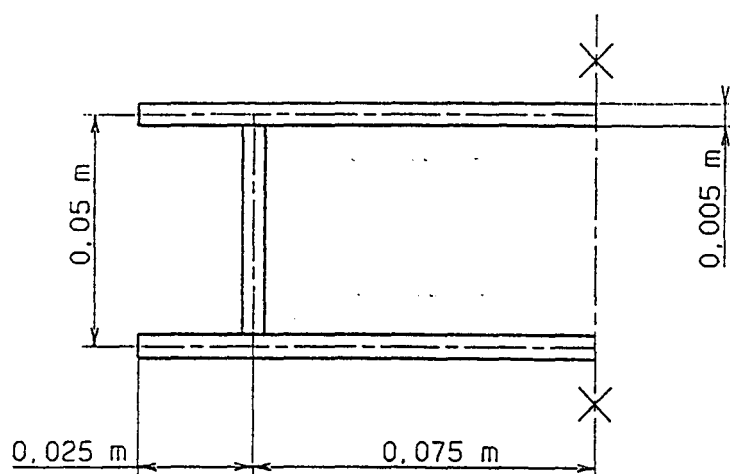
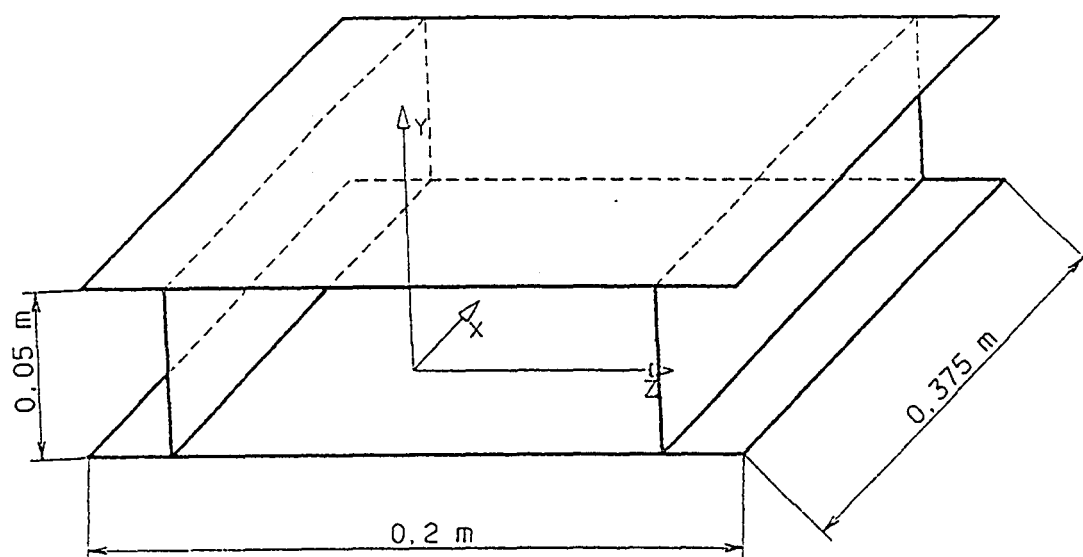
On présente dans ce paragraphe un test en vibrations libres sur une structure formée par un assemblage de plaques. Les caractéristiques géométriques et mécaniques de la structure étudiée sont données dans la figure (4.10). Elle est supposée non appuyée ce qui implique la présence de six modes de corps rigide.

Un maillage en 240 éléments Mitc4 est adopté: 8x10 éléments pour les plaques supérieure et inférieure et 4x10 éléments pour les plaques entretoises. Le paramètre de décalage appliqué (le shifting) dans l'algorithme d'itérations par sous espace est égal à -1000.

La solution de référence est obtenue par la moyenne des résultats de plusieurs codes de calcul (Afnor 1990). Ce test a fait aussi l'objet de vérification expérimentale dont les résultats sont donnés par l'Afnor.

Le tableau (4.8) montre les fréquences des six premiers modes avec déformation obtenus par l'élément Mitc4 et par la solution de référence ainsi que les valeurs données par l'expérimentation. On note un bon accord entre les résultats obtenus avec l'élément Mitc4 et la solution de référence. En effet, l'écart maximal est de l'ordre de 7% sur la sixième fréquence.

Les mesures expérimentales s'accordent relativement bien avec les solutions précédentes hormis la deuxième fréquence. En effet, on observe un écart de l'ordre de 12% entre l'élément Mitc4 et l'expérimentation et de l'ordre de 9% entre la solution de référence et cette dernière. Cet écart peut être dû à un problème d'expérimentation.



$$E=2,1e11\text{Pa} \quad \nu=0,3$$

$$\rho=7800\text{kg/m}^3$$

Figure 4.10 : Structure composée d'un assemblage de plaques-caractéristiques géométriques et mécaniques.

	mode1 Hz	mode2 Hz	mode3 Hz	mode4 Hz	mode5 Hz	mode6 Hz
résultat experimental	606	760	865	944	1113	1144
solution de référence	584	826	855	911	1113	1136
MITC4	598	848,7	894	954	1153	1214

Tableau 4.8 : Test en dynamique de l'élément Mitc4 sur un assemblage de plaques-
valeurs des six premières fréquences propres.

IV.4 Application à l'étude d'un radier à bêtes périphériques

Présentation

Dans cette section, on présente une application des éléments coques à l'analyse du comportement d'un système de fondation utilisé dans les habitations légères. Il s'agit d'un système d'un radier renforcé par des bêtes (Figure 4.11). Ce type de fondation est généralement soumis à deux types de charges: une charge uniformément répartie agissant sur le radier et des charges linéiques appliquées sur les bêtes.

L'analyse du comportement de ce type de fondation a été effectuée avec des hypothèses simplificatrices en considérant une modélisation plane de la partie centrale du radier. Cet type analyse ne tient pas compte de l'effet tridimensionnel qui peut être important dans ce cas (Shahrour et al 1989). Pour analyser l'effet tridimensionnel, nous proposons d'assimiler le radier et ses bêtes à un assemblage de plaques; l'interaction entre le radier et le sol a été modélisée par des appuis élastiques.

Modélisation

Le modèle de référence est constitué d'un radier carré de 10m de côté et de 12cm d'épaisseur reposant sur quatre bêtes périphériques de 70cm de hauteur et de 20cm d'épaisseur. On suppose que le béton est élastique linéaire caractérisé par un module d'élasticité de 12e3MPa et un coefficient de Poisson de 0,25. Le sol de fondation est caractérisé par un module de réaction de 50000kN/m³. Les charges agissant sur le radier et sur les bêtes ont été prises égales respectivement à 1,5kPa et 40kN/ml.

Un quart de la structure a été modélisé en utilisant un maillage en 560 éléments Mitc4. Les figures 4.12 et 4.13 montrent la déformée de l'ensemble ainsi que le tassement et la rotation de la bêche. On observe une rotation importante de cette dernière vers l'intérieur mobilisant la butée du sol. Cette rotation est maximale dans la zone centrale et commence à diminuer au delà de 2,20m du bord. Le tassement est important sous la bêche et à l'inverse de la rotation elle augmente en s'approchant du bord (1,2mm dans la zone centrale et 1,5mm au bord).

Analyse du comportement global

Les déplacements opérés par la bêche montrent que le comportement du radier est plan dans la zone centrale et qu'à une certaine distance du bord, il devient tridimensionnel. Ceci est dû aux gradients de rotation et de tassement de la bêche au voisinage du bord. Ils ont pour effet de mobiliser la torsion du radier et de la bêche dans cette zone.

Pour étayer notre observation nous avons réporté dans les figures 4.14a, 4.14b et 4.14c les sollicitations subies par le radier dans la zone centrale, à $L/10$ et $L/20$ du bord (L étant la longueur du radier). On observe un moment important à sa jonction avec la bêche résultant de la mobilisation de la butée du sol (figure 4.14a) et qui augmente au voisinage du bord (fig 4.14b) à cause de la torsion subie par la bêche. La figure (4. 15b) qui montre les sollicitations de la bêche dans cette zone confirme cette analyse. Le moment en travée est aussi important et augmente au voisinage du bord à cause de la torsion subie par le radier (figure 4.14c). Cette étude nous permet de conclure donc que l'effet du bord devient négligeable au delà d'une distance de l'ordre de 2,20m et que dans cette zone du radier une analyse bidimensionnelle de type déformation plane semble suffisante. Ceci est d'ailleurs confirmée en observant la figure (4.16), où on compare le moment agissant dans la zone centrale du radier au moment obtenu par une analyse en déformation plane.

Etude du Comportement de la zone centrale

Le mécanisme de déformation montre que le comportement de la zone centrale du radier dépend de la rigidité du radier, des dimensions de la bèches et de la nature du sol. Nous allons ci-après, analyser l'influence de ces facteurs sur le comportement du radier-bêche. Les figures 4.13 et 4.17 montrent les résultats obtenus. On constate qu'une augmentation de la longueur du radier de 100% n'a pas beaucoup d'effet sur son comportement; qu'une augmentation de la hauteur de la bêche de 42% a pour effet d'augmenter de 70% le moment à la jonction entre le radier et la bêche et de

baisser de 13% le moment maximal en travée. Ce changement s'explique par l'augmentation du moment des forces de butée sur la bêche. En effet, malgré la chute de rotation de la bêche de 54% et une chute de son tassement de 9%, le moment des forces en question augmente puisqu'il est proportionnel au carré de la hauteur.

Ces figures montrent également qu'une augmentation de l'épaisseur du radier de 67% a pour effet d'augmenter sa raideur. En effet, la rotation de la bêche diminue, et par conséquent, le moment sur appui (52%); le moment en travée va à son tour augmenter (120%) suite à la diminution d'une part du moment sur appui et d'autre part de la flèche du radier. Enfin, Un défaut de compactage ($K=5000\text{kN/m}^3$) se traduit par une forte augmentation de la rotation de la bêche (540%) et de son tassement (630%). Étant donné que le module du sol a été divisé par 10, le moment à la jonction entre le radier et la bêche chute de l'ordre de 34,5%. Le moment en travée subit une très forte augmentation (170%) à cause d'une part de la diminution du moment sur appui et d'autre part à la baisse des forces de réactions du sol; il s'atténue plus lentement dans le radier.

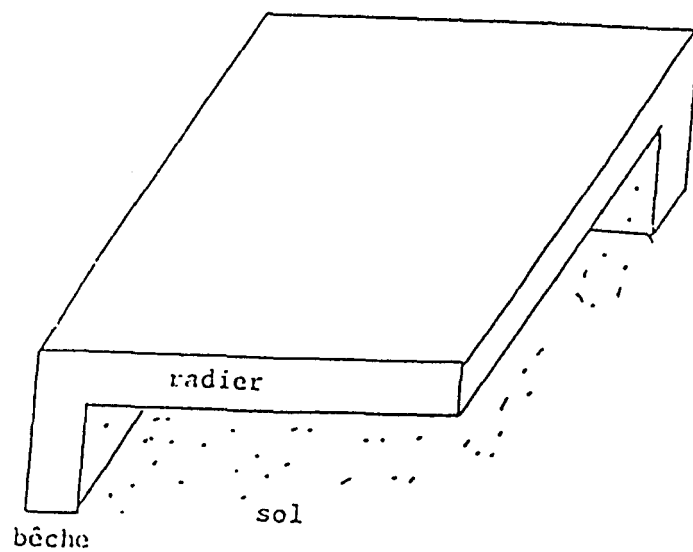


Figure 4.11a : Schéma d'ensemble du radier-bêche

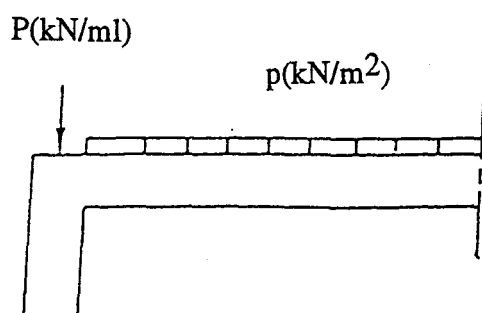


Figure 4.11b : Charges appliquées sur le radier-bêche.

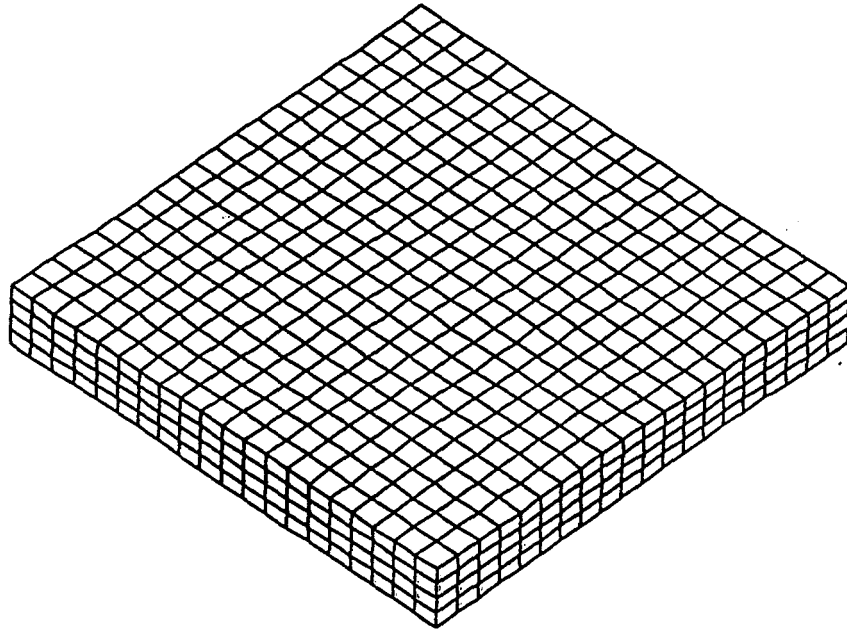


Figure 4.12a : Maillage du radier-bêche.

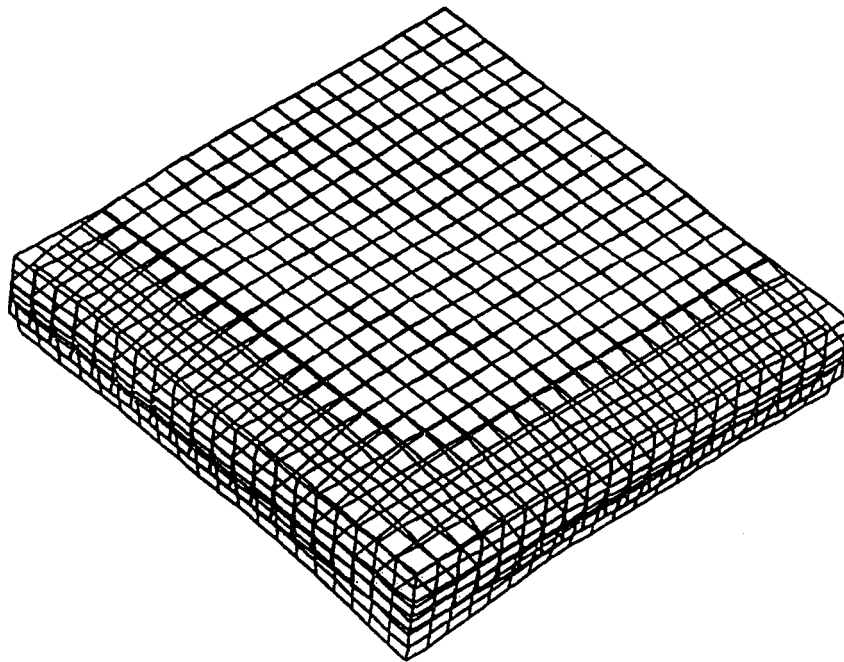
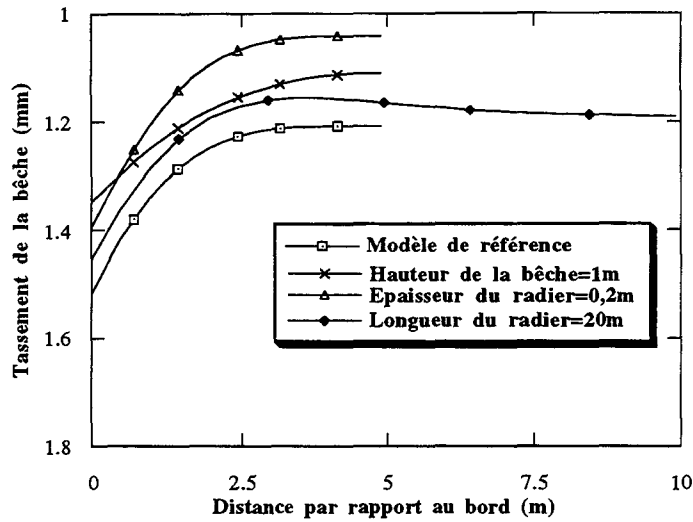
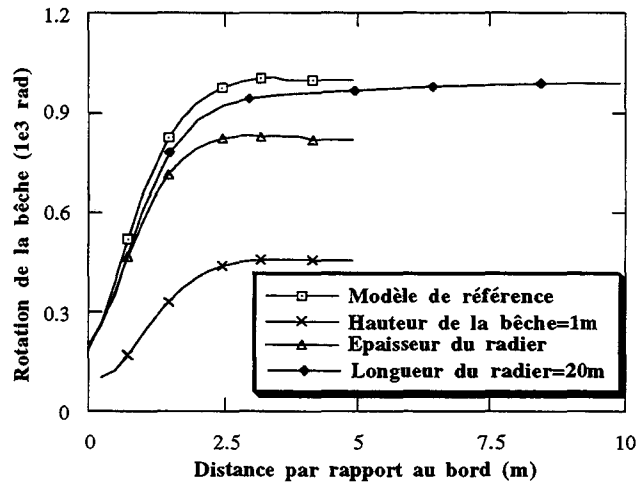


Figure 4.12b : Déformée du radier-bêche.



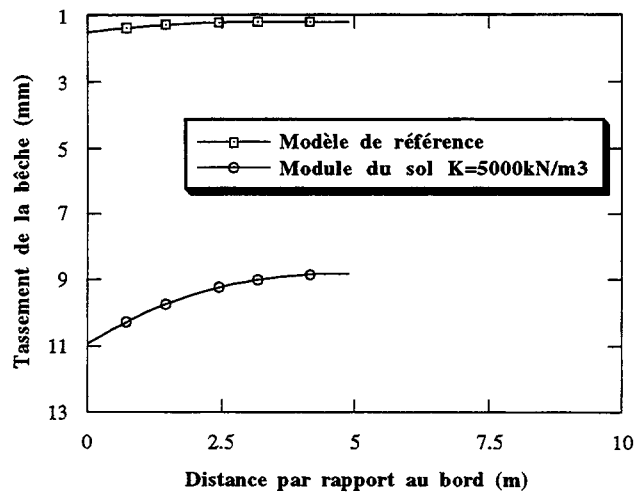
(a)



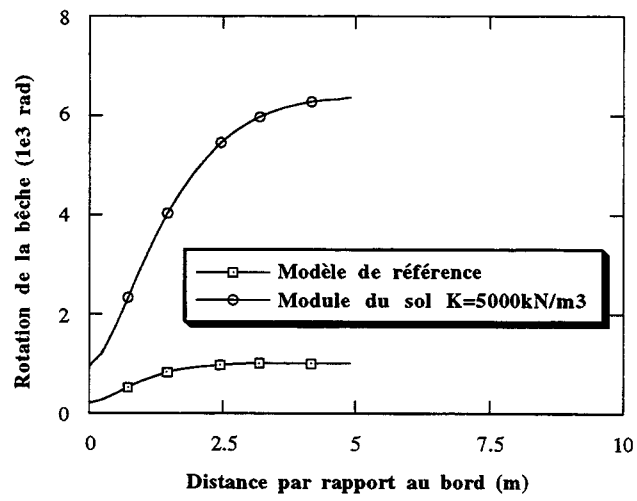
(b)

Figure 4.13 : Etude de l'influence de divers paramètres sur le comportement du radier-bêche.
a) tassement en fonction de la distance au bord;
b) rotation en fonction de la distance au bord.

Modèle de référence : Hauteur de la bêche=0,7m; épaisseur du radier=0,12m
module de réaction du sol=50000kN/m³; longueur du radier=10m, épaisseur de la bêche=0,2m.

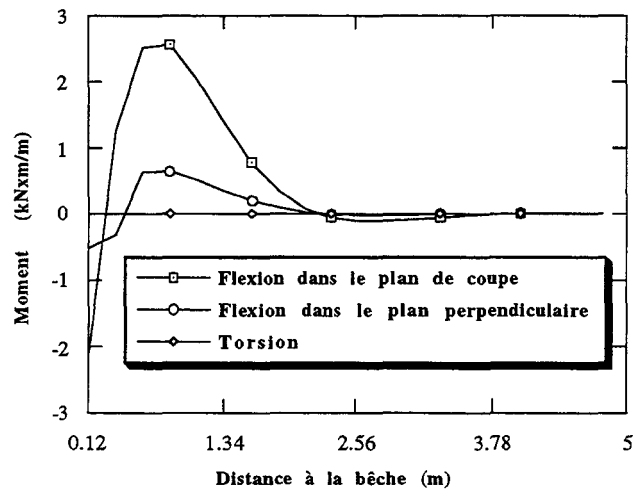


(c)

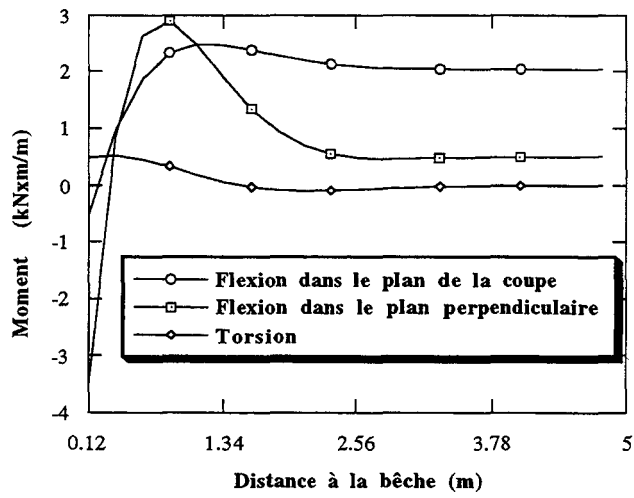


(d)

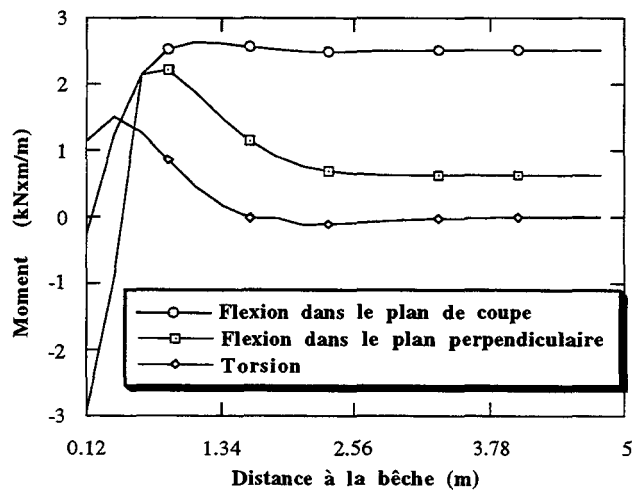
Figure 4.13 - Influence d'un défaut de compactage.
 (c) tassement en fonction de la distance au bord
 (d) rotation en fonction de la distance au bord.



(a)

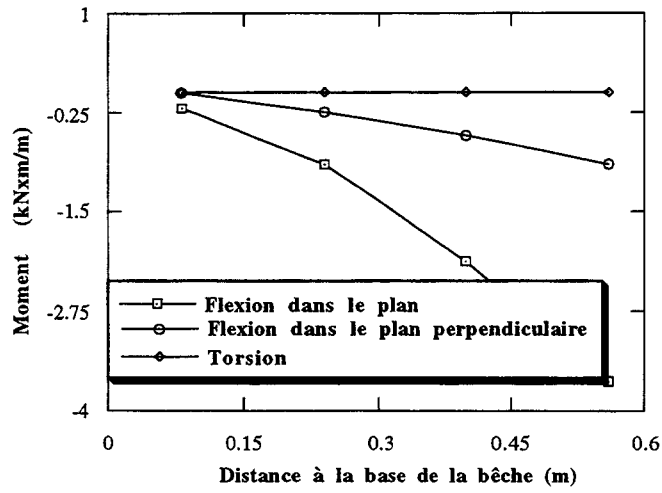


(b)

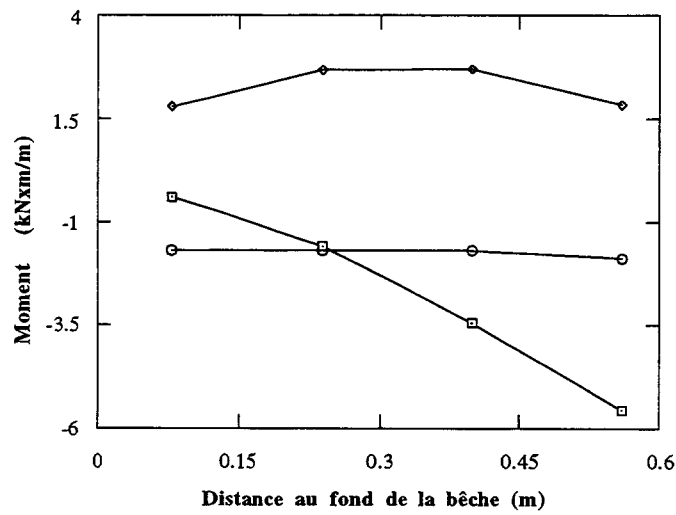


(c)

Figure 4.14 : Distribution des efforts dans le radier
a) zone centrale
b) zone située à $L/10$ du bord
c) zone située à $L/20$ du bord.



(a)



(b)

Figure 4.15 : Distribution des efforts dans la bêche.
a) zone centrale.
b) zone située à L/10 du bord.

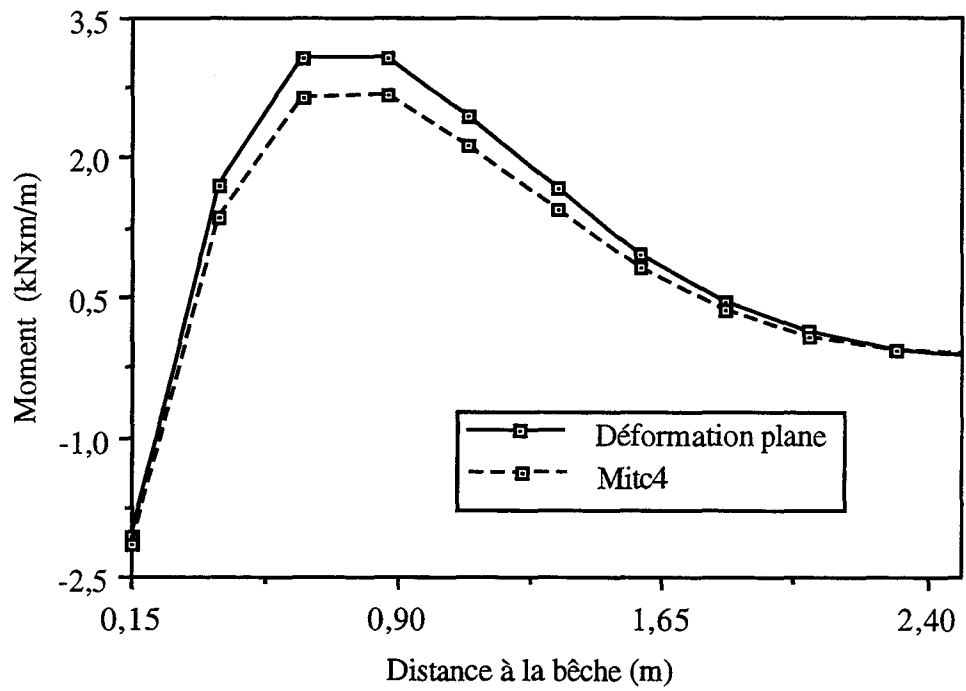


Figure 4.16 : Confrontation modélisation plane - Élément Mitc4 dans la zone centrale.

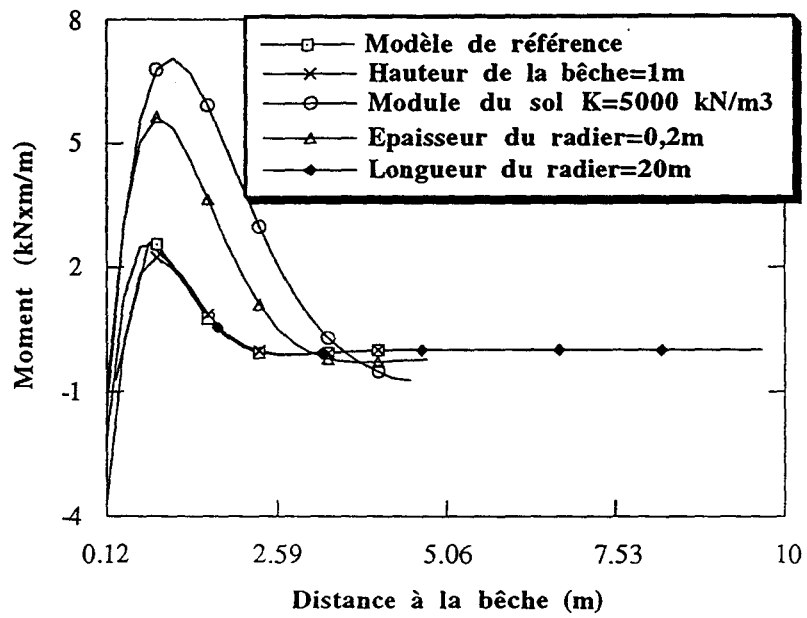


Figure 4.17 : Étude de l'influence de divers paramètres sur la distribution du moment.

CONCLUSION GENERALE

Ce travail a été entrepris dans le but d'étudier et de valider des éléments plaques et coques destinés au calcul des structures minces et épaisses rencontrées en génie civil. Dans cet objectif, nous avons étudié et programmé deux éléments plaques : les éléments Mitc4 et Mitc8, et deux éléments coques : les éléments Mitc4 et Mitc9. Ces éléments ont fait l'objet de nombreux tests de validation en statique et dynamique sur des plaques et coques isotropes et multicouches et sur des plaques avec appuis élastiques. Ces tests ont porté sur différents aspects tels que l'élançement, le degré d'anisotropie, la capacité des éléments à décrire de champs de déformations et de contraintes complexes, le problème de jonctions et de raccords. Ils ont montré la capacité des modèles utilisés à résoudre une large classe de problèmes rencontrés en génie civil. Ils ont permis également de vérifier la démarche adoptée, en particulier le bon choix des facteurs de correction du cisaillement transversal et la bonne stratégie utilisée dans la programmation des éléments. Une analyse de ces tests permet de tirer un certain nombre de commentaires :

- L'élément Mitc4 est un bon élément de flexion, qui a donné de résultats satisfaisants avec les plaques isotropes et composites, en statique et en vibration libre. Les tests effectués sur des plaques très minces n'ont pas révélés de blocage en cisaillement. Sa faiblesse réside dans une convergence lente quand le gradient des efforts résultants est important. Avec l'élément Mitc8, des bons résultats ont été obtenus avec les plaques isotropes et composites et aucun blocage en cisaillement n'a été observé. En revanche, les tests effectués sur les plaques composites épaisses ont montré parfois une surestimation de la flèche, l'écart a été d'autant plus important que la plaque est fortement anisotrope.

- En ce qui concerne l'élément Mitc4 coque, les résultats sont satisfaisants d'une manière générale, surtout dans les problèmes où la flexion est importante. L'élément est libre de tout blocage en cisaillement et en membrane. Le test sur le cylindre pincé a fait apparaître une convergence lente qui ne peut pas être attribuée à un blocage en membrane. On l'attribue plutôt à une faible capacité de cet élément à décrire de fort gradient des sollicitations accompagné d'une importante rigidité à la flexion. Enfin, le test sur la tour de refroidissement a montré la nécessité d'un maillage fin pour décrire correctement la géométrie. Pour ce qui est de l'élément Mitc9, les tests effectués ont été très satisfaisants. Ils montrent que cet élément est prometteur.

En conclusion de ce travail, nous mettons l'accent sur les différentes possibilités de simulation offertes par les modèles développés. Ces possibilités ont été illustrées à travers les applications traitées, notamment l'étude de l'aspect tridimensionnel du radier-bêche et le comportement dynamique d'une plaque avec appuis ponctuels.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Ahmad, S., Irons, B.M., Zienkiewicz, O.C., (1970)** "Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements". *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 2, pp 419-451
- Alleman, D.J., (1984)** "A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity problems". *Comp. Struct.*, Vol. 19, pp 1-8.
- Alleman, D.J., (1988)** "A quadrilateral finite element including vertex rotations for plane elasticity problems". *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 26, pp 717-739.
- Aminpour, M.A., (1992)** "An assumed-stress hybrid 4-node shell element with drilling degrees of freedom". *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 33, pp 19-38.
- Argyris, J.H., Mlejnek, H.P., (1986)** "Die methode der finite element". Band I, II, III, Viewg, Ed.
- Basar, Y., and Ding, Y., (1990)** "Theory and Finite-element formulation for shell structures undergoing finite rotations, *Advances in the theory of plates and shells*". Edited by G. Z. Voyiadjis and D. Karamanlidis, Elsevier Science Publishers B. V. Amsterdam, pp 3-26.
- Basar, Y., (1993)** "Modelling of shells, Part 1, Tensor Analysis-Bending Theory". *Cahiers de Mecanique, Ecole Universitaire d'Ingénieurs de Lille*.
- Bathe, K.J. and Bolourchi, S., (1980)** "A geometric and materiel non linear plate and shell element". *Computers & structures*, Vol. 11, pp 23-48, Pergamon Press Ltd.
- Bathe, K.J., (1982)** "Finite element procedures in engineering analysis". Prentice-Hall.
- Bathe, K.J., Dvorkin, E., (1985)** "A four - node plate bending element based on Mindlin-Reissner plate theory and a mixed interpolation". *Int J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 21, pp 367-383.
- Bathe, K.J., Dvorkin, E., (1986)** "A formulation of general shell elements - the use of mixed interpolation of tensorial components" *Int J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 22, pp 697-722.
- Batoz, J.L., (1977)** "Analyse non lineaire des coques minces élastiques de formes arbitraires par éléments triangulaires courbés". Thèse de Doctorat es sciences, Département de Génie civil, Université Laval, Québec.
- Batoz, J.L., Dhatt, G., (1978)** "Eléments triangulaires simples avec hypothèse de Kirchhoff-Love sous forme discrète pour l'analyse linéaire et non linéaire des plaques, coques surbaissées et coques profondes". *Congrès du GAMNI, Paris 17-11/1-12*.
- Batoz, J.L., Bathe, K.J., Ho, L.W., (1980)** "A study of three-node triangular plate bending elements". *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 15, pp 1771-1812.
- Batoz, J.L., Dhatt, G., (1990)** "Modélisation des structures par éléments finis". Volume 2, Plaques et poutres, Hermès.

- Batoz, J.L., Dhatt, G., (1992)** "Modélisation des structures par éléments finis". Volume 3, Coques, Hermès.
- Bergan, P.G. and Felippa, C.A., (1985)** "A triangular membrane element with rotational degrees of freedom". *Comp. Methods. Appl. Mech.*, Vol. 50, pp 25-60, .
- Bergan, P.G., Felippa, C.A., (1986)** "Efficient Implementation of a triangular membrane with drilling freedoms". Chap. 5 : Finite element methods for plate and shell structures, Vol. 1, Hughes and Hinton Eds, pp 128-152.
- Bernadou, M., (1986)** "Some finite element approximations of thin shell problems, in Finite Element Methods for Plate and Shell Structures". Vol. 1, Element Technology (Hughes et Hinton Eds), Pineridge Press, pp 62-84.
- Bernadou, M., Foyolle, S., Léné, F., (1989)** "Numerical Analysis of junctions between the plates". *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 74, pp 307-326.
- Bucalem, M.L., and Bathe, K.J., (1993)** "Higher-order Mitc general shell elements, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 36, pp 3729-3754.
- Carpenter, N., Stolarsky, M., Belytschko, T., (1985)** "A flat triangular shell element with improved membrane interpolation". *Communications in Applied Numerical Methods*, Vol. 1, pp 161-168.
- Celep, Z., (1988)** "Rectangular plates resting on tensionless elastic foundation". *Journal of Eng. Mechanics*, Vol. 114, pp 2083-2092.
- Chahrour, I., (1991)** "Contribution à l'analyse non-linéaire matérielle et géométrique des coques en béton armé". Thèse de doctorat en génie civil présentée devant l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon.
- Cohen, G.A., (1978)** "Transverse shear stiffness of laminated anisotropic shells". *CMAME*, Vol. 13, pp 205-220.
- Cowper, G.R., Lindberg, G.M., Olson, M.D., (1971)** "Comparaison of two high precision triangular finite elements of arbitrary deep shells". *Proc., Third Conf. on Matrix Methods in Struct. Mech.*, WPAFB, pp 277-344.
- Dhatt, G., (1970)** "An efficient triangular shell element". *AIAA*, Vol. 8, N° 11, pp 2100-2102.
- Dvorkin, E.N., Bathe, K.J., (1984)** "A continuum mechanics based four-node shell element for general nonlinear analysis". *Eng. Comput.*, Vol. 1, pp 77-88.
- Fonder G.A., (1972)** "A doubly curved quadrilateral element for thin elastic shells of revolution". Ph. D. dissertation, Dep. Civ. Eng., Univ. of California, Berkeley.
- Frey, F., Rondal, J., Fourneaux, N., (1974)** "Application de la methode des éléments finis à la résolution des problèmes de structure de l'ingenieur civil". Extrait de *Memoires C.E. R. E. S.* (nouvelle série), n° 48 Juillet.
- Frey F., Jirousek, J., (1992)** "Structures tridimensionnelles à parois minces". Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne.
- Gallager, R.H., (1976)** "Introduction aux éléments finis". Editions pluralis.

Geoffroy, G., Girard, R., (1993) "Modélisation de structures composites par éléments finis de coque dégénérés". *Revue Européenne des Eléments Finis*, Vol. 2, pp 357-376.

Guide de Validation des logiciels de calcul des structures, **SFM, Afnor (1990)**.

Hinton, E., Huang, H.C., (1986) "A family of quadrilateral Mindlin plate elements with substitute shear strain fields". *Comput. Struct.*, Vol. 23, pp 409-431.

Huang, H.C., and Hinton, E., (1986) "A new nine node degenerated shell element with enhanced membrane and shear interpolation". *Int. J. Numer. Methods. Eng.*, Vol 22, pp 73-92.

Ibrahimbegovic A., Taylor R.L., Wilson, E.L., (1990) "A robust quadrilateral membrane finite element with drilling degrees of freedom", *Int. j. numer. methods eng.*, 30, 445-457.

Ibrahimbegovic A., Wilson, E.L., (1991) "Thick shell and solid finite elements with independent rotation fields". *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 31, pp 1393-1414.

Ibrahimbegovic, A., Frey, F., Reborá, B., (1993) "Une approche unifiée de la modélisation des structures complexes : les éléments finis avec degré de liberté de rotation". *Revue Européenne des Eléments Finis*, Vol. 2, pp 257-286.

Ibrahimbegovic, A., Frey, F., (1994) "Stress resultant geometrically non-linear shell theory with drilling rotations. Part III : linearized kinematics". *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 37, pp 3659-3683.

Irons, B., Ahmad, S., (1980) "Techniques of finite elements". Ellis Horwood, (John Wiley).

Jang, J., Pinsky, P. M., (1987) "An assumed covariant strain based 9-node shell element, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 24, pp 2389-2411.

Koiter, W. T., (1960) "A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells", *Proc. Symp. on theory of thin Elastic Shells*, North-Holland, 12-33.

Koiter, W.T., (1966) "On the nonlinear theory of thin elastic shells". *Proc. Konink. Ned. Akad. Wetensch. Ser. B69 (1)* pp 1-54.

Koiter, W. T., (1970) "On the foundation of the linear theory of thin elastic shells". *Proc. Konink. Ned. Akad. Wetensch.*, B73, pp 169-197.

Lardeur, P., Batoz, J.L., (1989) "Composite plate analysis using a new discrete shear triangular finite element". *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 27, pp 343-359.

Lardeur, P., (1990) "Développement et évaluation de deux nouveaux éléments finis de plaques et coques composites avec influence du cisaillement transversal". Thèse de Doctorat, Univers. de Technologie de Compiègne.

Leissa, A.W., Whitney, J.M., (1969) "Analysis of heterogeneous anisotropic plates". *J. of Applied Mechanics*, Vol. 36.

- Liew, K.M., Xiang, Y., Kitipornchai, S., Lim, M.K., (1994)** "Vibration of Mindlin plates on point supports using constraint functions" *Journal of Eng. Mechanics*, Vol. 120, pp 499-513.
- Lindberg, G.M., Olson, M.D., Cowper, G.R., (1969)** "New developments in the finite element analysis of shells". *Q. Bull. Div. Eng. and Nat. Aeronautical Establishment, National Research Council of Canada*, Vol. 4.
- Mallikarjuna and Kant, T., (1989)** "Free vibration of symmetrically laminated plates using a higher-order theory with Finite element technique". *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 28, pp 1875-1889.
- Marguerre, K., (1938)** "Zur theorie der gekrümmten platte grosser formänderung". *Proc. 5th Int. Cong. Appl. Mech.*, Berlin, pp 93-101.
- Mc Gee, O.G., (1992)** "On the three-dimensional vibration Analysis of simultaneously skewed and twisted cantilevered parallelepipeds". *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 33, pp 1383-1411.
- Mindlin R.D., (1951)** "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates". *JAM*, Vol. 18, pp 31-38.
- Mindlin R. D., (1966)** Schacknow, A., Deresiewicz, H., "Flexural vibrations of rectangular plates, *JAM*, Vol. 23, N° 78, pp 431-436.
- Morley, L. S. D., (1963)** "Skew plates and structures". Pergamon. Oxford.
- Naghdi, P.M., (1957)** "On the theory of thin elastic shells". *Q. Appl. Math.*, Vol. 14, pp 369-380.
- Naghdi, P.M., (1963)** "Foundations of elastic shell theory, in progress in solid Mechanics". Vol. IV, Chapter 1 (ed. I. N. Sneddon and R. Hill), North-Holland.
- Naghdi, P.M., (1972)** "The theory of shells and plates, *Handbuch der Physik*". Vol. VI, A2 (Flügge Ed.), Springer Verlag, Berlin.
- Noor, A.K., (1973)** "Free vibrations of multilayered composite plates", *AIAA J.*, 11, 1038-1039.
- Noor, A.K., and Peters, J.M., (1989)** "A posteriori estimates for shear correction factors in multilayered composite cylinders". *Journal of Eng. Mechanics*, Vol. 115, pp 1225-1244.
- Nygaard, M.K., (1986)** "The free formulation for non linear finite element formulation with applications to shells". Report No. 86-2, Division of Structural Mechanics, The Norwegian institute of technology, Trondheim, Norway, Dec.
- Onate, C., Zinkiewicz, O.C., Suarez, B., and Taylor, R.L., (1992)** "A general methodology for deriving shear constrained Reissner-Mindlin plate elements" *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol 33, pp 345-367.
- Owen, D.R.J., Figueiras, J.A., (1983)** "Anisotropic elasto-plastic finite element analysis of thick and thin plates and shells". *Int. J. Numer. Methods Eng*, Vol. 19, pp 541-566.

- Pagano N.J., Hatfield S.J., (1972)** "Elastic behavior of multilayered bidirectional". AIAA J., Vol. 10, pp 931-933.
- Polit, O., Touratier, M., and Lory, P., (1994)** "A new eight-node quadrilateral shear-bending plate finite element". Int. J. Numer Methods Eng., Vol. 37, pp 387-411.
- Razzaque, A., (1973)** "Program for triangular bending elements with derivative smoothing". Int. J. Numer. methods Eng., Vol. 6, pp 333-343.
- Reddy J. N., Phan N. D., (1985)** "Stability and vibration of isotropic and laminated plates according to a higher-order shear deformation theory". J. Sound Vib., Vol 98, 157-170
- Reissner E., (1945)** "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates" JAM, Vol. 12, pp 69-77.
- Reissner E., (1952)** "Stress-strain relations in the theory of thin elastic shells". J. Math. Phys., Vol. 31, pp 109-119.
- Reissner E., (1969)** "On finite symmetrical deformations of thin shells of revolution". JAM, Vol. 36, pp 267-270.
- Reissner E., (1974)** "Linear and nonlinear theory of shells, in Thin Shell Structures". (Fung and Sechler Eds.), Prentice Hall, pp 29-44.
- Sanders, J.L., (1963)** "Nonlinear theories for thin shells". Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 21, N° 1, pp 21-36.
- Sedov, L. (1975)** "Mécanique des milieux continus". Tomes 1 et 2, Editions Mir, Moscou.
- Shahrour, I., Lemaire, M., Malbranque, G., Buisson, R., Vanoosthuyse, P., (1989)** "Modélisation et Étude du comportement des radiers à bèches périphériques" Annales de l'institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics.
- Shi, X.P., Tan, S.A., Fwa, T.F., (1994)** "Rectangular thick plate with free edges on Pasternak foundation". Journal of Eng. Mechanics, Vol. 120, pp 971-988.
- Srinivas, S., (1973)** "A refined analysis of composite laminates". JSV, Vol. 30, N° 4, pp 495-507.
- Stolarski, H., Belytschko, T., (1982)** "Membrane locking and reduced integration for curved elements". ASME, J. Appl. Mech., Vol. 49, pp 172-176.
- Timoshenko, S., Woinowsky-Krieger, S., (1959)** "Théorie des plaques et coques". Dunod.
- Vlachoutsis, S., (1992)** "Shear correction factors for plates and shells". Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 33, p 1537-1552.
- Wempner, G.A., Oden, J.T., Kross, D.A., (1968)** "Finite element analysis of thin shells". Engng. Mech. Div., Proc. ASCE, Vol. 94, EM6, pp 1273-1294.
- Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., (1991)** "The Finite Element Method". Fourth Edition, Mc Graw Hill Company, Vol. 2.

ANNEXE A

GEOMETRIE DES SURFACES

Description géométrique des coques

Définitions

Une coque est définie par une surface courbe appelée surface moyenne (longueur L , largeur B , rayon de courbure minimum R_{\min}) et une épaisseur h telle que $h < \min(L, B, R_{\min})$. Valeurs typiques :

$$h / R_{\min} < 1/16 \quad h / L < 1/4$$

Tenseur métrique de la surface

La surface moyenne d'une coque est décrite par deux coordonnées paramétriques non nécessairement orthogonales r et s . En tout point m de cette surface, on peut définir la base paramétrique $\{a_1\}\{a_2\}\{n\}$, par (Batoz et Dhatt 1992) :

$$\begin{aligned} \{a_1\} &= \frac{\partial\{om\}}{\partial r} \\ \{a_2\} &= \frac{\partial\{om\}}{\partial s} \quad (A.1) \\ \{n\} &= \frac{\{a_1\} \wedge \{a_2\}}{|\{a_1\} \wedge \{a_2\}|} \end{aligned}$$

$\{n\}$ étant le vecteur normal à la surface moyenne en m .

La métrique de la surface est caractérisée par un tenseur, appelé le tenseur métrique dont les composantes covariantes sont données par (Batoz et Dhatt1992) :

$$a_{\alpha\beta} = \{a_\alpha\}^t \{a_\beta\} \quad (A.2)$$

(dans tout le texte les lettres grecques prennent les valeurs 1 ou 2)

En écriture matricielle nous avons:

$$[a_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

A cette base covariante on associe une autre base dite la base contravariante, (Batoz et Dhatt 1992) par les relations:

$$\{a^\alpha\} = a^{\alpha\beta} \{a_\beta\} \quad (\text{A.4})$$

$[a^{\alpha\beta}]$ étant la matrice inverse de la matrice $[a_{\alpha\beta}]$:

$$[a^{\alpha\beta}] = 1/a \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

$$a = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{12}$$

a est le déterminant de $[a_{\alpha\beta}]$

Les éléments de la base covariante et de la base contravariante sont liés par les relations :

$$\{a^\alpha\} \{a_\lambda\} = \delta_\lambda^\alpha \quad (\text{A.6})$$

δ_λ^α étant le symbole de kronecker

De même nous avons :

$$\{a^\alpha\}^t \cdot \{n\} = 0 \quad (\text{A.7})$$

Calcul de l'élément de surface

Par définition, l'élément de surface est donné par:

$$dA = (\{a_1\} \wedge \{a_2\})^t \cdot \{n\} dr \cdot ds$$

$$\text{or: } (\{a_1\} \wedge \{a_2\})^t \cdot \{n\} = \sqrt{a}$$

$$\text{soit: } dA = \sqrt{a} \cdot dr \cdot ds \quad (\text{A.8})$$

Tenseur des courbures de la surface

La courbure d'une surface est associée au taux de variation du vecteur normal $\{n\}$ sur cette surface. On la caractérise par le tenseur des courbures défini par ses composantes covariantes (Basar 1993):

$$b_{\alpha\beta} = \{n\}^t \cdot \{a_{\beta}\}_{,\alpha} = \{n\}^t \cdot \{a_{\alpha}\}_{,\beta} = -\{a_{\alpha}\}^t \cdot \{n\}_{,\beta} = -\{a_{\beta}\}^t \cdot \{n\}_{,\alpha} \quad (\text{A.9})$$

En faisant appel aux composantes contravariantes du tenseur métrique, on peut définir par la procédure habituelle le représentant mixte du tenseur des courbures par :

$$b_{\alpha}^{\beta} = a^{\beta\lambda} b_{\lambda\alpha} \quad (\text{A.10})$$

On a en outre les relations suivantes (formules de Weingarten) :

$$\{n\}_{,\alpha} = -b_{\alpha}^{\lambda} \cdot \{b_{\lambda}\} = -b_{\alpha\lambda} \{a^{\lambda}\} \quad (\text{A.11})$$

Une surface est souvent caractérisée par sa courbure moyenne et sa courbure gaussienne définies respectivement par (Basar 1993) :

$$H = 1/2 \cdot b_{\alpha}^{\alpha}$$

$$K = \frac{b}{a} = \frac{\det[b_{\alpha\beta}]}{\det[a_{\alpha\beta}]} \quad (\text{A.12})$$

b , étant le déterminant de la matrice $[b_{\alpha\beta}]$

Si $K=0$, la surface est dite parabolique; elle est elliptique si $K>0$ et enfin hyperbolique si $K<0$.

Description de la base covariante en un point de l'épaisseur

Soit M un point situé dans l'épaisseur de la coque, défini par son vecteur position :

$$\{oM\} = \{om\} + z\{n\} = \{om\} + t.h/2\{n\} \quad (A.13)$$

ou $t \in [-1, +1]$ est la coordonnée paramétrique de l'épaisseur.

Par définition, la base covariante en ce point est déterminée par :

$$\{g_\alpha\} = \frac{\partial\{oM\}}{\partial\alpha} = \{oM\}_{,\alpha} \quad (A.14)$$

D'après (A.11) nous avons:

$$\{g_\alpha\} = \{a_\alpha\} - t.h/2b_\alpha^\lambda\{a_\lambda\} = \mu_\alpha^\lambda\{a_\lambda\} \quad (A.15)$$

$$\{g_3\} = \frac{\partial\{oM\}}{\partial t} = h/2\{n\} \quad (A.16)$$

On remarque que:

$$\{g_\alpha\}^t \cdot \{n\} = 0 \quad (A.17)$$

Calcul de l'élément de volume

Par définition, l'élément de volume est donné par la relation:

$$dv = (\{g_1\} \wedge \{g_2\}) \cdot \{g_3\} \cdot dr \cdot ds \cdot dt = (\{g_1\} \wedge \{g_2\}) \cdot \{n\} \cdot dr \cdot ds \cdot dz$$

or:

$$(\{g_1\} \wedge \{g_2\}) \cdot \{n\} = \sqrt{\tilde{g}}.$$

En utilisant (A.8) et (A.15) nous avons:

$$\sqrt{\tilde{g}} = \sqrt{a} \cdot \det[\mu_\alpha^\lambda] = \mu \sqrt{a} \quad (A.18)$$

où:

$$\mu = \det[\mu_{\alpha}^{\lambda}] = 1 - 2zH + z^2K \quad (\text{A.19})$$

Finalement on a pour l'élément de volume dv l'expression :

$$dv = \mu \sqrt{a} dr. ds. dz \quad (\text{A.20})$$

Base contravariante en un point de l'épaisseur

En tout point M de l'épaisseur, on peut définir une base contravariante de la même manière que la base contravariante de la surface :

$$\{g^{\alpha}\} = g^{\alpha\beta} \cdot \{g_{\beta}\} \quad (\text{A.21})$$

$$\{g^3\} = \frac{2}{h} \{n\} = g^{33} \{g_3\} \quad (\text{A.22})$$

La matrice $[g^{\alpha\beta}]$ représentant contravariant du tenseur métrique de la coque est obtenue comme $a^{\alpha\beta}$ par:

$$[g^{\alpha\beta}] = [g_{\alpha\beta}]^{-1} \quad (\text{A.23})$$

$$[g_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{g_1\}^t \cdot \{g_1\} & \{g_1\}^t \cdot \{g_2\} \\ \{g_1\}^t \cdot \{g_2\} & \{g_2\}^t \cdot \{g_2\} \end{bmatrix} \quad (\text{A.24})$$

$$g^{33} = \frac{1}{g_{33}} = \frac{4}{h^2} \quad (\text{A.25})$$

Les relations suivantes sont vérifiées :

$$\{g^i\}^t \cdot \{g_j\} = 0 \quad \text{si } i \neq j \quad (\text{A.26})$$

$$\{g^i\}^t \cdot \{g_j\} = 1 \quad \text{si } i = j \quad (\text{A.27})$$

ANNEXE B

CALCUL DES EFFORTS RESULTANTS

Les éléments de réduction des sollicitations appliquées sur la face $r=cste$ se réduisent à :

$$\{R_1\} = \{N^{(1)}\} \sqrt{a_{22}} ds \quad (B.1) \quad \text{effort résultant}$$

$$\{M_1\} = \{M^{(1)}\} \sqrt{a_{22}} ds \quad (B.2) \quad \text{moment résultant}$$

$\{N^{(1)}\}$ $\{M^{(1)}\}$ sont des efforts physiques par unité de longueur

On définit de façon analogue les éléments de réduction sur la face $s=cste$, soit:

$$\{R_2\} = \{N^{(2)}\} \sqrt{a_{11}} dr \quad (B.3) \quad \text{effort résultant}$$

$$\{M_2\} = \{M^{(2)}\} \sqrt{a_{11}} dr \quad (B.4) \quad \text{moment résultant}$$

$\{N^{(2)}\}$ $\{M^{(2)}\}$ sont des efforts physiques par unité de longueur

En projetant ces efforts sur la base covariante de la surface (a_1, a_2, n) nous avons:

$$\{N^{(\alpha)}\} = N^{(\alpha 1)} \{a_{(1)}\} + N^{(\alpha 2)} \{a_{(2)}\} + q^{(\alpha)} \{n\} \quad (B.5)$$

$$\{M^{(\alpha)}\} = M^{(\alpha 1)} \{a^{(2)}\} - M^{(\alpha 2)} \{a^{(1)}\} \quad (B.6)$$

$$\{a_{(\alpha)}\} = \{a_\alpha\} / \sqrt{a_{\alpha\alpha}} \quad (B.7)$$

$$\{a^{(\alpha)}\} = \{a^\alpha\} / \sqrt{a^{\alpha\alpha}} \quad (B.8)$$

$N^{(11)}$ $N^{(22)}$ $N^{(12)}$ $N^{(21)}$ sont des efforts membranaires par unité de longueur;

$q^{(1)}$ $q^{(2)}$ sont des efforts de cisaillement transversal par unité de longueur;

$M^{\langle 11 \rangle}$ $M^{\langle 22 \rangle}$ sont des moments fléchissants par unité de longueur;

$M^{\langle 12 \rangle}$ $M^{\langle 21 \rangle}$ sont des moments de torsion par unité de longueur.

Tous ces efforts sont des efforts physiquement interprétables.

D'une manière générale les efforts appliqués sur la face $\theta^\alpha = \text{cste}$ avec,

$$\theta^1 = r \quad \theta^2 = s$$

sont:

$$\{N^{\langle \alpha \rangle}\} \sqrt{a_{\beta\beta}} d\theta^\beta = \{N^\alpha\} \sqrt{a} d\theta^\beta \quad (\text{B.9})$$

$$\{M^{\langle \alpha \rangle}\} \sqrt{a_{\beta\beta}} d\theta^\beta = \{M^\alpha\} \sqrt{a} d\theta^\beta \quad (\text{B.10})$$

où:

$$\{N^\alpha\} = \{N^{\langle \alpha \rangle}\} \sqrt{a^{\alpha\alpha}} \quad (\text{B.11})$$

$$\{M^\alpha\} = \{M^{\langle \alpha \rangle}\} \sqrt{a^{\alpha\alpha}} \quad (\text{B.12})$$

Les efforts précédemment introduits sont des efforts intermédiaires faciles à relier aux composantes contravariantes du tenseur des contraintes. En projetant ces efforts sur la base paramétrique de la surface nous avons :

$$\{N^\alpha\} = N^{\alpha\beta} \{a_\beta\} + q^\alpha \{g_3\} \quad (\text{B.13})$$

$$\{M^\alpha\} = M^{\alpha\rho} \{n\} \wedge \{a_\rho\} \quad (\text{B.14})$$

soit:

$$N^{\langle \alpha\beta \rangle} = N^{\alpha\beta} \sqrt{a_{\beta\beta} / a^{\alpha\alpha}} \quad (\text{B.15})$$

$$q^{\langle \alpha \rangle} = q^\alpha \sqrt{g_{33} / a^{\alpha\alpha}} \quad (\text{B.16})$$

$$M^{(\alpha 1)} = M^{\alpha 1} \sqrt{a_{11} / a^{\alpha\alpha}} \quad (\text{B.17})$$

$$M^{(\alpha 2)} = M^{\alpha 2} \sqrt{a_{22} / a^{\alpha\alpha}} \quad (\text{B.18})$$

Relations entre les efforts résultants et les contraintes

Par définition nous pouvons écrire:

$$\{N^\alpha\} \sqrt{a} d\theta^\beta = \int_{-h/2}^{h/2} \{T^\alpha\} \sqrt{g_{\beta\beta}} d\theta^\beta dz \quad (\text{B.19})$$

(Batoz et Dhatt 1992; Basar 1993)

où $\{T^\alpha\}$ est le vecteur contrainte agissant sur la face $\theta^\alpha = \text{cste}$

$$\{M^\alpha\} \sqrt{a} d\theta^\beta = \int_{-h/2}^{h/2} \{n\} \wedge \{T^\alpha\} \sqrt{g_{\beta\beta}} d\theta^\beta dz \quad (\text{B.20})$$

or:

$$\{T^\alpha\} = S^{ij} \{g_i\} \otimes \{g_j\} \cdot \{g^\alpha\} / \sqrt{g^{\alpha\alpha}} \quad (\text{B.21})$$

En remplaçant (B.13) (B.14) et (B.21) dans (B.19) et (B.20) et par identification des termes, on obtient :

$$N^{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \mu \mu_\rho^\beta S^{\alpha\rho} dz \quad (\text{B.22})$$

$$q^\alpha = \int_{-h/2}^{h/2} \mu S^{\alpha 3} dz \quad (\text{B.23})$$

$$M^{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \mu \mu_\rho^\beta S^{\alpha\rho} z dz \quad (\text{B.24})$$

on remarque que dans le cas général :

$$N^{\alpha\beta} \neq N^{\beta\alpha}$$

$$M^{\alpha\beta} \neq M^{\beta\alpha}$$

Relations entre $M^{\alpha\beta}$ et $N^{\alpha\beta}$ dans le cas d'une coque de faible épaisseur

Quand la coque est supposée mince, on peut écrire en première approximation :

$$\mu_{\rho}^{\beta} \approx \delta_{\rho}^{\beta}$$

par conséquent:

$$M^{\alpha\beta} \approx M^{\beta\alpha} \approx \int_{-h/2}^{h/2} \mu S^{\alpha\beta} z dz \quad (\text{B.25})$$

L' expression (B.22) devient:

$$N^{\alpha\beta} = \tilde{N}^{\alpha\beta} - b_{\rho}^{\beta} M^{\alpha\rho} \quad (\text{B.26})$$

avec:

$$\tilde{N}^{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \mu S^{\alpha\beta} dz \quad (\text{B.27})$$

Relations efforts résultants - déformations dans le cas d'un matériau isotrope

On se place dans l'approximation suivante :

$$g^{\alpha\beta} \approx a^{\alpha\beta}$$

$$\tilde{N}^{\alpha\beta} \approx \int_{-h/2}^{h/2} S^{\alpha\beta} dz \quad M^{\alpha\beta} \approx \int_{-h/2}^{h/2} S^{\alpha\beta} z dz \quad q^{\alpha} \approx \int_{-h/2}^{h/2} S^{\alpha\beta} dz \quad (\text{B.28})$$

Les relations contraintes - déformations deviennent :

$$S^{\alpha\beta} = 2 \frac{G\nu}{1-\nu} a^{\alpha\beta} a^{\lambda\mu} \varepsilon_{\lambda\mu} + 2Ga^{\alpha\lambda} a^{\beta\mu} \varepsilon_{\lambda\mu} - \frac{E}{1-\nu} \lambda_L T a^{\alpha\beta} \quad (\text{B.29})$$

avec:

$$T = \frac{T_{\text{sup}} + T_{\text{inf}}}{2} + \frac{t}{2}(T_{\text{sup}} - T_{\text{inf}})$$

λ_L représente le coefficient de dilatation linéaire du matériau.

$$S^{\alpha\beta} = \frac{5}{6} G a^{\alpha\beta} g^{33} \gamma_{\beta 3} \quad (\text{B.30})$$

or:

$$\varepsilon_{\lambda\mu} = e_{\lambda\mu} + z \chi_{\lambda\mu}$$

En remplaçant les relations (B.29) (B.30) dans (B.28), on obtient (Basar 1993) :

$$\tilde{N}^{\alpha\beta} = D H^{\alpha\beta\lambda\mu} e_{\lambda\mu} - \frac{Eh}{1-\nu} \lambda_L a^{\alpha\beta} \left(\frac{T_{\text{sup}} + T_{\text{inf}}}{2} \right) \quad (\text{B.31})$$

$$M^{\alpha\beta} = B H^{\alpha\beta\lambda\mu} \chi_{\lambda\mu} - \frac{Eh^2}{12(1-\nu)} a^{\alpha\beta} \lambda_L (T_{\text{sup}} - T_{\text{inf}}) \quad (\text{B.32})$$

$$q^\alpha = \frac{5}{6} G h g^{33} a^{\alpha\beta} \gamma_{\beta 3} \quad (\text{B.33})$$

où :

$$H^{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{1-\nu}{2} \left(a^{\alpha\lambda} a^{\beta\mu} + a^{\alpha\mu} a^{\beta\lambda} + \frac{2}{1-\nu} a^{\alpha\beta} a^{\mu\lambda} \right) \quad (\text{B.34})$$

$$D = \frac{Eh}{1-\nu^2} \quad B = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (\text{B.35})$$

A partir de ces relations et en utilisant (B.25) à (B.27) il est facile de passer au calcul des efforts physiquement interprétables qui sont donnés par (B.15) à (B.18).

Remarque :

Dans le cas des coques multicouches les résultats du calcul seront fournis sous forme des contraintes agissant sur les faces supérieure et inférieure de chacune des couches.

