N° d'ordre : 1549

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE
FLANDRES ARTOIS

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

par

Laurent BISIAUX

GRADE ET INVARIANT DE TOOMER D'UNE APPLICATION.

Soutenue le 3 juillet 1995 devant la commision d'examen :

A. DUVAL, Professeur, Université de Lille (Présidente)
Y. FÉLIX, Professeur, Université de Louvain-la-Neuve (Rapporteur)
J.-M. LEMAIRE, Professeur, Université de Nice (Rapporteur)
J.-C. THOMAS, Professeur, Université de Lille (Directeur de thèse)
D. TANRÉ, Professeur, Université de Lille (Examinateur)

Remerciements.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Jean-Claude Thomas qui a dirigé mes recherches avec une extrême compétence. Ses suggestions, ses questions et ses encouragements sont à la base de la plupart des résultats obtenus. Sans son précieux support et sa grande disponibilité, ce travail n'aurait pas été accompli.

Je remercie très vivement Yves Félix, Stephen Halperin et Jean-Michel Lemaire pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail en acceptant de juger cette thèse.

Anne Duval et Daniel Tanré me font l'honneur de participer au jury ; qu'ils veuillent bien trouver ici l'expression de ma sincère gratitude.

Mes remerciements vont également à Sonia Ghorbal et Pascal Lambrechts qui m'ont accueilli avec beaucoup d'hospitalité et de gentillesse lors de mes séjours à l'université de Louvain-La-Neuve.

Enfin, je n'oublie ni mes parents qui m'ont aidé moralement et financièrement durant mes études, ni Delphine qui m'a soutenu constamment et à qui je dédie cette thèse.

Table des matières.

0 Introduction

Le travail que nous présentons ici s'inscrit dans un domaine largement étudié durant les 25 dernières années : Nous cherchons à préciser la structure d'algèbre de Hopf des lacets sur un espace X à partir d'informations sur des caractères de finitude pour X.

Plus précisément, si X est un espace topologique muni d'un point de base x_0 ; l'espace ΩX des lacets de Moore pointés sur X est un monoïde topologique pour la composition des lacets. Il est défini par :

$$\Omega X = \{\omega : [0,t] \to X \text{ continue telle que } \omega(0) = \omega(t) = x_0\}.$$

En outre, pour tout espace topologique X et pour tout corps $\mathbb{K}$, nous pouvons considérer l'objet algébrique $H_*(X, \mathbb{K})$ appelé *homologie* de X qui supporte des structures d'espace vectoriel gradué et de coalgèbre graduée. En particulier, $H_*(\Omega X, \mathbb{K})$ est une algèbre graduée dont la multiplication provient de la composition des lacets ; cette structure d'algèbre est compatible avec la structure de coalgèbre : $H_*(\Omega X, \mathbb{K})$ est une *algèbre de Hopf.*

Plus généralement, dans la suite, nous nous intéresserons au cas d'une application $f : Y \to X$ entre espaces topologiques 1-connexes de types finis (l'homologie est finiment engendrée en chaque degré). A une telle application sont classiquement associés les invariants homotopiques suivants :

Définition 0.1 : La *catégorie de Lusternik-Schnirelmann de l'application* f est le plus petit entier $m \leq \infty$ tel que Y peut être recouvert par $m+1$ ouverts U_i qui vérifient la condition : la restriction de f à chaque U_i est homotopiquement nulle.

Dans le cas où $f = id : X \to X$, nous retrouvons la définition de la catégorie de Lusternik-Schnirelmann de l'espace X.

Remarque 0.2 :

(i) $\text{cat}(f) = 0$ si et seulement si f est homotope à l'application nulle.

(ii) $\text{cat}(X) = 0$ si et seulement si X a le type d'homotopie d'un point. ($f = id_X$)

(iii) $\text{cat}(X) = 1$ si et seulement si X est un co-H-espace.

Définition 0.3 : La *fibre homotopique* de f est le produit fibré : $F = Y \times_f PX$; elle est munie d'une opération canonique :

$$\begin{cases} (Y \times_f PX) \times \Omega X & \rightarrow & \Omega X \\ ((y,\gamma),\omega) & \rightarrow & (y, \gamma * \omega) \end{cases}$$

appelée *opération d'holonomie.*

En particulier, pour tout corps de coefficients $\mathbb{K}$, cette application induit une unique structure de $H_*(\Omega X;\mathbb{K})$-module sur $H_*(F;\mathbb{K})$ que nous appelerons *module d'holonomie.*

D'autre part, en géométrie algébrique, il est classique d'associer à un module gradué M sur une algèbre graduée A les invariants numériques suivants :

Définition 0.4 : Le grade du A-module M :

$$\text{grade}_A M = \inf\{k | \text{Ext}_A^{k,*}(M,A) \neq 0\}.$$

Si $M = \mathbb{K}$ est un A-module trivial, nous retrouvons la

Définition 0.5 : La profondeur de l'algèbre A est définie par :

$$\text{prof}(A) = \inf\{k | \text{Ext}_A^{k,*}(\mathbb{K},A) \neq 0\}.$$

Lorsque $f : Y \rightarrow X$ désigne une application de fibre homotopique F, la structure de $H_*(\Omega X;\mathbb{K})$-module sur $H_*(F;\mathbb{K})$ permet de définir :

Définition 0.6 : le *grade* de l'application f :

$$\text{grade}_{\mathbb{K}}(f) = \text{grade}_{H_*(\Omega X;\mathbb{K})}(H_*(F;\mathbb{K})).$$

Dans la suite, nous nous placerons toujours sur un corps quelconque $\mathbb{K}$ et nous écrirons souvent grade(f) au lieu de $\text{grade}_{\mathbb{K}}(f)$, $H_*(X)$ au lieu de $H_*(X;\mathbb{K})$...

Si $f = id : X \rightarrow X$, alors $H_*(F) = \mathbb{K}$ en tant que $H_*(\Omega X)$-module trivial et nous retrouvons la définition de la profondeur de $H_*(\Omega X)$.

En 1989, Y. Félix, S. Halperin, J.-M. Lemaire et J.-C. Thomas ont établi un lien entre invariant algébrique et invariant homotopique :

Théorème de la profondeur : [8] *Si X est un espace topologique simplement connexe tel que chaque $H_i(X;\mathbb{K})$ soit finiment engendré, alors pour tout corps de coefficients $\mathbb{K}$:*

$$\operatorname{prof}(H_*(\Omega X;\mathbb{K})) \leq \operatorname{cat}(X).$$

Ce résultat a aussi été démontré quelques années plus tard (1992) dans le cas relatif :

Théorème du grade : [18] : *Si $f : Y \to X$ est une application continue entre espaces topologiques 1-connexes de types finis alors pour tout corps $\mathbb{K}$:*

$$\operatorname{grade}_{\mathbb{K}}(f) \leq \operatorname{cat}(f).$$

Ces deux théorèmes s'inscrivent bien dans le cadre de recherche évoqué en début d'introduction ; ils permettent en effet, d'une part de préciser la structure d'algèbre de Hopf de $H_*(\Omega X)$ à partir d'informations topologiques sur la "finitude" de X, d'autre part de préciser la structure de $H_*(\Omega X)$-module du module d'holonomie $H_*(F)$ grâce à des informations topologiques sur la "finitude" de f.
Le caractère essentiel des invariants profondeur et grade dans ces deux types d'étude apparaît notamment dans les articles [12], [13], [17], [19], [15], [29] et [14].

Dans cette thèse, nous cherchons, modulo une hypothèse supplémentaire, à affiner les théorèmes du grade et de la profondeur en remplaçant la catégorie de Lusternik-Schnirelmann par l'invariant de Toomer (cf 2.2.3) $e_{\mathbb{K}}(f)$ qui vérifie :

$$\operatorname{cup}_{\mathbb{K}}(f) \leq e_{\mathbb{K}}(f) \leq \operatorname{cat}(f),$$

où $\operatorname{cup}(f)$ désigne la *cup-longueur de f* (i.e. la longueur maximale d'un cup-produit non-nul dans l'image de l'application induite par f en cohomologie). Pour cela, nous définissons la notion d'application d'évaluation d'une application f (Déf. 2.3.1) ; notre résultat s'énonce alors :

Théorème I : *Si $f : Y \to X$ est une application continue entre espaces topologiques 1-connexes de types finis et si $ev_f \neq 0$ alors pour tout corps $\mathbb{K}$:*

$$\operatorname{grade}_{\mathbb{K}}(f) \leq e_{\mathbb{K}}(f).$$

Dans le cas particulier où $f = id : X \to X$, nous retrouvons le

Théorème A : ([2]) *Si X est un espace topologique 1-connexe de type fini tel que $ev_X \neq 0$, alors pour tout corps $\mathbb{K}$:*

$$\mathrm{prof}(H_*(\Omega X;\mathbb{K})) \leq e_{\mathbb{K}}(X).$$

Remarque 0.7 : Ces théorèmes améliorent les théorèmes du grade et de la profondeur pour les raisons suivantes :

(i) $e_{\mathbb{K}}(f)$ est plus facile à calculer que $\mathrm{cat}(f)$.

(ii) $e_{\mathbb{K}}(f)$ minore $\mathrm{cat}(f)$.

(iii) Au moment où nous écrivons, nous ne savons pas s'il existe un espace X de L.S. catégorie finie tel que la condition $ev_X \neq 0$ ne soit pas vérifiée. En outre, le théorème A apparaît comme une vraie amélioration de l'inégalité "prof $\leq$ cat" ; en effet, dans [32], les auteurs donnent l'exemple d'un espace X pour lequel $e_{\mathbb{Q}}(X) = 2$ et $\mathrm{cat}(X) = 3$. Remarquons aussi ([10]) qu'il existe des espaces pour lesquels $\mathrm{cat}(X) = \infty$ et $e_{\mathbb{Q}}(X) = 2$.

Dans la dernière partie de ce travail, nous montrons que dans nos deux théorèmes, les cas d'inégalité stricte et d'égalité peuvent tous deux se produirent (la différence entre les deux invariants est parfois infinie). Cette section contient aussi des résultats découlant du théorème I. Nous déduisons en particulier les propositions suivantes :

Proposition (4.3.5) : *Si $f : Y \to X$ est une application continue de fibre homotopique F entre espaces topologiques 1-connexes de types finis avec X elliptique d'évaluation non nulle, alors, pour tout corps de coefficients $\mathbb{K}$,*

1) $\mathrm{pg}(H_*(\Omega X)) - \mathrm{cr}_{H_*(\Omega X)}(H_*(F)) \leq e(X)$.

2) *Si de plus $H_*(F)$ est un $H_*(\Omega X)$-module finiment engendré alors*

$$\mathrm{pg}(H_*(F)) + \mathrm{grade}_{H_*(\Omega X)}(H_*(F)) \leq e(X).$$

(La croissance polynomiale pg, la croissance cr et la notion d'ellipticité seront définies dans la quatrième partie.)

Proposition (4.5.8) : *Si $f : Y \to X$ est une application continue de fibre homotopique F entre espaces topologiques 1-connexes de types finis avec*

1) $(\Omega f)_* : H_*(\Omega Y) \to H_*(\Omega X)$ *est injective,*

2) $ev_f \neq 0$,

alors

$$\mathrm{grade}_{H_*(\Omega X)}(H_*(F)) = \mathrm{prof}(H_*(\Omega X)) \leq e(f)$$

En particulier, si $\mathrm{prof}(H_*(\Omega Y)) = \mathrm{gldim}(H_*(\Omega Y))$ *alors on obtient un "pseudo mapping theorem" :*

$$\text{M-cat}(Y) \leq e(X).$$

(Nous définirons l'invariant M-cat dans la quatrième partie).

Le texte s'organise de la manière suivante : Dans une première partie, nous mettons en place les conventions et outils nécessaires. Les invariants sont alors définis dans une seconde partie, puis le théorème I est démontré dans la troisième partie. Enfin, nous consacrons une quatrième partie à des exemples et applications.

1 Notations et rappels.

1.0 Conventions.

$\mathbb{K}$ désigne un corps quelconque et nous écrirons $- \otimes -$ et Hom(-,-) au lieu de $-\otimes_{\mathbb{K}}-$ et $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(-,-)$.

Un espace vectoriel gradué est une famille $M = \{M_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Un élément $x \in M$ est un élément dans un certain M_i. Nous dirons alors que x est de degré i et nous noterons $|x| = i$.

Une application linéaire $f : M \to N$ de degré k est une famille d'applications linéaires $f_i : M_i \to N_{i+k}$.

Une *différentielle* dans M est une application linéaire $d : M \to M$ de degré -1 telle que $d^2 = 0$, et l'espace vectoriel gradué quotient $H(M, d) = ker(d)/im(d)$ est appelé *homologie* de M (noté souvent $H(M)$).

La *suspension* de (M, d) est l'espace vectoriel gradué différentiel *(EVGD)* $s(M, d)$ défini par $(sM)_i = M_{i-1}$ et $s(dx) = -d(sx)$.

Un morphisme $\phi : (M, d) \to (N, d)$ est une application linéaire de degré 0 $\phi_i : M_i \to N_i$, commutant aux différentielles. Il induit $H(\phi) : H(M) \to H(N)$. Si $H(\phi)$ est un isomorphisme, ϕ est appelé *quasi-isomorphisme* et est noté $M \xrightarrow{\simeq} N$.

Nous utiliserons la convention $M^i = M_{-i}$. Nous aurons alors $d : M^i \to M^{i+1}$ et $(sM)^i = M^{i+1}$.

Le produit tensoriel d'espaces vectoriels gradués est défini par :

$$(M \otimes N)_n = \oplus_{i+j=n} M_i \otimes N_j.$$

Si $f : M \to M'$ et $g : N \to N'$ sont des applications linéaires de degrés respectifs k et l, alors $f \otimes g : M \otimes N \to M' \otimes N'$ est l'application linéaire de degré $k + l$ définie par:

$$(f \otimes g)(x \otimes y) = (-1)^{|x|\cdot|g|} f(x) \otimes g(y).$$

En particulier, $(M, d_M) \otimes (N, d_N)$ est l'espace vectoriel gradué $M \otimes N$ muni de la différentielle $d_M \otimes id_N + id_M \otimes d_N$.

Une *algèbre graduée differentielle (ADG)*, est une algèbre graduée (associative) $A = \{A_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ avec unité $1 \in A_0$ et munie d'une différentielle satisfaisant $d(xy) = (dx)y + (-1)^{|x|}x(dy)$ (d est une dérivation). Il s'ensuit que l'image $\mathrm{Im}(d)$ est un idéal de la sous-algèbre graduée du noyau $\mathrm{Ker}(d)$. $H(A)$ possède donc une structure d'algèbre graduée : *l'algèbre d'homologie* de A.

Un morphisme $\phi : (A,d) \to (B,d)$ d'ADG est un morphisme d'EVGD qui préserve les produits et l'unité ; ainsi, $H(\phi)$ est un morphisme d'algèbres graduées. Si $H(\phi)$ est un isomorphisme, alors ϕ est un *quasi-isomorphisme* d'ADG (noté $\xrightarrow{\simeq}$).

Nous distinguons deux sous-classes importantes parmi les ADG: Une *algèbre de cochaînes* est une ADG de la forme (A,d) avec $A = \{A^i\}_{i\geq 0}$ et une *algèbre de chaînes* est une ADG de la forme (A,d) avec $A = \{A_i\}_{i\geq 0}$. Nous noterons respectivement ADG^* et ADG_* ces deux sous-classes.

Un *module gradué différentiel (MGD) (à gauche)* sur une ADG (A,d), est un EVGD (M,d) muni d'une application linéaire de degré zéro $A \otimes M \to A$, $a \otimes m \mapsto a.m$, telle que $(aa').m = a.(a'.m)$, $1.m = m$ et $d(a.m) = da.m + (-1)^{|a|}a.dm$.

Un *morphisme de (A,d)-modules* est une application linéaire $\phi : (M,d) \to (N,d)$ telle que $\phi(a.m) = (-1)^{|a|.\phi}a.\phi(m)$.

Définissons maintenant une *coalgèbre graduée différentielle (CGD)*. C'est un espace vectoriel gradué différentiel (C,d) muni de deux morphismes; la *co-multiplication* $\Delta : (C,d) \to (C,d) \otimes (C,d)$ et la *co-unité* $\epsilon : (C,d) \to \mathbb{K}$ tels que les diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\Delta} & C\otimes C \\ {\scriptstyle\Delta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id_C\otimes\Delta} \\ C\otimes C & \xrightarrow{\Delta\otimes id_C} & C\otimes C\otimes C \end{array} \qquad \text{(coassociativité)}$$

et

$$\begin{array}{ccccc} C\otimes C & \xleftarrow{\Delta} & C & \xrightarrow{\Delta} & C\otimes C \\ {\scriptstyle\epsilon\otimes id_C}\downarrow & & \| & & \downarrow{\scriptstyle id_C\otimes\epsilon} \\ \mathbb{K}\otimes C & \cong & C & \cong & C\otimes\mathbb{K} \end{array} \qquad \text{(condition de co-unité)}$$

commutent.
En outre, la différentielle est une codérivation : Ceci est exprimé par la commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "d"'] & C\otimes C \arrow[d, "d\otimes id + id\otimes d"] \\ C \arrow[r, "\Delta"] & C\otimes C \end{tikzcd}$$

(Avec la convention de Koszul rappelée en début de paragraphe : $(d\otimes id)(x\otimes y) = dx\otimes y$ et $(id\otimes d)(x\otimes y) = (-1)^{|x|}x\otimes dy$.)

Un *morphisme de CGD* est un morphisme de $\mathbb{K}$-EVGD $f : C \to D$ tel que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C\otimes C \arrow[r, "f\otimes f"] & D\otimes D \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\epsilon_C"'] & D \arrow[d, "\epsilon_D"] \\ & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

Une *coalgèbre coaugmentée* est une coalgèbre $(C, \Delta_C, \epsilon_C)$ munie d'un morphisme de coalgèbres de degré zéro $\eta_C : \mathbb{K} \to C$ (la *coaugmentation*). Nous noterons $\bar{C} = \operatorname{coker}\, \eta_C$.

Si C est coaugmentée, $C \cong \mathbb{K}\oplus\bar{C}$ en tant qu'espaces vectoriels ; la diagonale réduite $\bar{\Delta}$ est alors définie de manière unique par $\Delta x = \bar{\Delta}x + 1\otimes x + x\otimes 1$.

Un élément $x \in \bar{C}$ est dit *primitif* si $\bar{\Delta}x = 0$.

Un *morphisme de coalgèbres coaugmentées* est un morphisme de coalgèbres $f : C \to D$ tel que $f\circ\eta_C = \eta_D$.

Supposons maintenant que $((C,d), \Delta_C, \epsilon_C)$ est une CGD sur $\mathbb{K}$. Un *C-comodule gradué différentiel (à gauche)* (N, d_N, Δ_N) est un $\mathbb{K}$-EVGD (N, d_N) muni d'un morphisme de $\mathbb{K}$-EVGD de degré zéro, $\Delta_N : N \to C\otimes N$, tel que les diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\Delta_N"] \arrow[d, "\Delta_N"'] & C\otimes N \arrow[d, "\Delta_C\otimes id_N"] \\ C\otimes N \arrow[r, "id_N\otimes\Delta_N"] & C\otimes C\otimes N \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} N \arrow[r, equal] \arrow[d, "\eta_C\otimes id_N"'] & N \arrow[d, equal] \\ C\otimes N \arrow[r, "\epsilon_C\otimes id_N"] & \mathbb{K}\otimes N \end{tikzcd}$$

commutent. En outre, la différentielle doit vérifier le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\Delta_N} & C \otimes N \\ d_N \downarrow & & \downarrow id_C \otimes d_N + d_C \otimes id_N \\ N & \xrightarrow{\Delta_N} & C \otimes N \end{array}$$

Un *morphisme de C-comodules gradués différentiels à gauche* est un morphisme de degré zéro $f : M \to N$ de $\mathbb{K}$-EVGD tel que $\Delta_N \circ f = (id_C \otimes f) \circ \Delta_M$.

Nous appelerons *algèbre de Hopf* $(A, \Delta, \epsilon, \eta, \mu)$, une coalgèbre coaugmentée munie d'une multiplication associative $\mu : A \otimes A \to A$ qui est un morphisme de coalgèbres. Cette condition, souvent appelée condition de Hopf, s'exprime par la commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} (A \otimes A) \otimes (A \otimes A) & \xrightarrow{\mu \otimes \mu} & A \otimes A \\ \Delta_{A \otimes A} \downarrow & & \downarrow \Delta_A \\ A \otimes A & \xrightarrow{\mu} & A \end{array}$$

(Notons que, si (C, Δ_C) et (D, Δ_D) sont des coalgèbres, on définit une diagonale sur le produit tensoriel en posant $\Delta_{C \otimes D} = (1 \otimes T \otimes 1)(\Delta_C \otimes \Delta_D)$ où $T(x \otimes y) = (-1)^{|x||y|} y \otimes x$).

1.1 Les T-modèles.

Rappelons que, si V est un espace vectoriel gradué, on note

$$TV = \mathbb{K} \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus (V \otimes V \otimes V) \oplus \ldots$$

l'algèbre tensorielle sur V.

Définition 1.1.1 :

(i) Un *modèle libre* dans la catégorie des algèbres de cochaînes ou *T-modèle* d'une ADG* A est un quasi-isomorphisme $(TV, d) \xrightarrow{\simeq} A$ dans lequel $V = \{V^i\}_{i \geq 1}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel gradué.

(ii) Un *modèle libre* ou *T-modèle* d'un espace topologique X est un T-modèle de l'ADG* $C^*(X)$ des cochaînes singulières sur X.

Proposition 1.1.2 : [16](prop.4.2 et cor.2 du Th.5)

(i) une ADG A possède un T-modèle simplement connexe si et seulement si* $H^{<0}(A) = 0, H^0(A) = \mathbb{K}$ *et* $H^1(A) = 0$.

Si ces conditions sont satisfaites, et si chaque $H^i(A)$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel finiment engendré, alors* TV *peut être choisi de type fini (i.e. fini en chaque degré).*

(ii) Un espace simplement connexe X *de* $\mathbb{K}$*-type fini admet un T-modèle* (TV, d)*, dans lequel*

$$Im(d) \subset (TV)^+.(TV)^+$$

(On dit alors que le T-modèle est minimal)

□

Lemme 1.1.3 : [16](lemma 4.3) *Si* (TV, d) *est un T-modèle 1-connexe (i.e.* $H^0(TV) = \mathbb{K}$*,et* $H^1(TV) = 0$*) alors il existe une décomposition en somme directe* $V = \oplus_{i\geq 1} V(i)$ *telle que*

$$d : V(i) \to T(\oplus_{j<i} V(j)).$$

□

Proposition 1.1.4 : [16](prop.4.6) *Si* $(TV, d) \xrightarrow{\simeq} (A, d_A)$ *est un T-modèle 1-connexe de l'ADG* (A, d_A)*, et si* M *est un A-module tel que* $H^{<n}(M) = 0$*, alors il existe un quasi-isomorphisme de MGD de la forme*

$$(TV \otimes W, d) \xrightarrow{\simeq} M$$

avec $W = \{W^i\}_{i\geq n}$*. Si en outre,* $H(M)$ *et* TV *sont des* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de type fini, alors* W *peut aussi être choisi de type fini.*

□

Remarque 1.1.5 : Si $Y \to X$ est une application continue de fibre homotopique F, l'application induite sur les cochaînes singulières fait de $C^*(Y)$

un $C^*(X)$-module. Nous pouvons alors appliquer la proposition précédente avec

$$TV \xrightarrow{\simeq} C^*(X) \text{ et } TV \otimes W \xrightarrow{\simeq} C^*(Y).$$

Nous avons alors la

Proposition 1.1.6 : [16](cor.3 du Th.5) *Sous les hypothèses de la remarque précédente, le modèle libre $TV \otimes W \xrightarrow{\simeq} C^*(Y)$ peut être choisi de telle sorte que*

$$d : W \to (TV)^+ \otimes W.$$

(On dit alors que $TV \otimes W$ est minimal).

□

Proposition 1.1.7 : [16](prop.4.7) *Si (TV, d) est un modèle libre 1-connexe et si $(TV \otimes W, d)$ est un (TV, d)-module tel que $W = \{W^i\}_{i \geq n}$, alors W est de la forme $W = \oplus_{j \geq 0} W(j)$ avec*

$$d : W(j) \to TV \otimes (\oplus_{i<j} W(i)).$$

□

Nous nous intéressons maintenant au T-modèle d'une application. Pour cela, remarquons que l'on peut construire les coproduits :

$$A \xrightarrow{\alpha} A \sqcup B \xleftarrow{\beta} B$$

dans la catégorie des algèbres graduées. De plus, si $B = TV$, $A \sqcup TV \cong \oplus_{k=0}^{\infty} A \otimes (V \otimes A)^{\otimes k}$ en tant que A-modules.
Si (A, d) et (B, d) sont des ADG alors il existe une ADG unique, de la forme $(A \sqcup B, d)$ telle que α et β soient des morphismes d'ADG. C'est le coproduit d'ADG de (A, d) et (B, d).

Définition 1.1.8 : Une *extension* est un morphisme d'ADG de la forme

$$(A, d) \xrightarrow{i} (A \sqcup TV, d)$$

où

(i) i est l'inclusion

(ii) V peut être écrit comme l'union $V = \cup_{k=0}^{\infty} V(k)$ d'une famille $V(0) \subset V(1) \subset ...$ de sous-espaces vectoriels gradués.

(iii) $d : V(0) \to A$ et $d : V(k) \to A \sqcup TV(k-1)$, $k \geq 1$.

Nous pouvons maintenant énoncer la :

Proposition 1.1.9 : [20](prop.3.1) *Tout morphisme* $(A, d) \xrightarrow{f} (B, d)$ *se factorise en*

$$(A, d) \xrightarrow{i} (A \sqcup TV, d) \xrightarrow{m \simeq} (B, d) \qquad (*)$$

où i est une extension et m est un quasi-isomorphisme surjectif d'ADG ((*) est un (A, d)-modèle de f).

□

Soit une ADG* (TV, d), nous avons alors la proposition d'existence suivante :

Proposition 1.1.10 : *Il existe un quasi-isomorphisme :*

$$(TV \otimes (\mathbb{K} \oplus sV), \delta) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{K}.$$

$(TV \otimes (\mathbb{K} \oplus sV), \delta)$ *est appelé clôture acyclique de l'algèbre* (TV, d).

Démonstration : Rappelons d'abord que l'isomorphisme $s : V \xrightarrow{\cong} sV$ s'étend en un isomorphisme

$$s : T^+V \xrightarrow{\cong} TV \otimes sV$$

donné par

$$s : v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_k \mapsto (-1)^{|v_1|+...+|v_{k-1}|}(v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_{k-1}) \otimes sv_k.$$

La multiplication à gauche fait de $TV \otimes (\mathbb{K} \oplus sV)$ un module sur l'algèbre graduée TV, et ce module est la somme directe de TV et $TV \otimes sV$. Nous étendons la différentielle d dans TV en une application linéaire de degré 1 sur $TV \otimes (\mathbb{K} \oplus sV)$ en posant pour tous les $v \in V$ et $b \in TV$:

$$\delta(b \otimes sv) = (-1)^{|b|} bv \otimes 1 - (-1)^{|b|} b.s(dv) + db \otimes sv$$

(Ceci est fait en écrivant que $\delta s + sd = id$).
Définissons

$$\epsilon : TV \otimes (\mathbb{K} \oplus sV) \to \mathbb{K}$$

par $\epsilon(1) = 1$ et $\epsilon = 0$ sur $T^+V \oplus (TV \otimes sV)$.

Lemme 1.1.11 :

(i) $(TV \otimes (\mathbb{K} \oplus sV), \delta)$ est un (TV, d)-module à gauche.

(ii) ϵ est un quasi-isomorphisme de (TV, d)-modules.

Démonstration du lemme :

(i) Posons $M = TV \otimes (\mathbb{K} \oplus sV)$. Pour $a \in TV$ et $x \in M$, nous voulons montrer que :

$$d(x.a) = dx.a + (-1)^{|x|}x.da.$$

Soit $x = b \otimes sv$, d'une part

$$\delta(ab \otimes sv) = (-1)^{|ab|}ab.v + (-1)^{|a|+|b|+1}ab.s(dv) + da.b \otimes sv + (-1)^{|a|}a.db \otimes sv.$$

D'autre part,

$$da.(b \otimes sv) = (da.b) \otimes sv$$

et

$$(-1)^{|a|}(a.\delta(b \otimes sv)) = (-1)^{|a|}((-1)^{|b|}a.bv + (-1)^{|b|+1}a.bs(dv) + a.db \otimes sv).$$

Ceci permet de conclure à l'égalité annoncée.

(ii) Soit $z = a + b \otimes sv$, un cocycle dans $T^+V \oplus (TV \otimes sV)$. Montrons que c'est aussi un cobord.

$$0 = \delta z = da + (-1)^{|b|}bv + (-1)^{|b|+1}b.s(dv) + db \otimes sv.$$

D'où $da = -(-1)^{|b|}bv$ puis,

$$\begin{aligned} s(da) &= -(-1)^{|b|}s(bv) \\ &= -(-1)^{|b|}(-1)^{|b|}b \otimes sv \\ &= -b \otimes sv \end{aligned}$$

Ceci implique :

$$\begin{aligned} z &= a - s(da) \\ &= \delta s a. \end{aligned}$$

□

1.2 Algèbre homologique.

1.2.1 modules semi-libres.

Supposons que (A,d) est une ADG et soit (M,d_M) et (N,d_N) des (A,d)-modules. On rappelle qu'un morphisme de (A,d)-modules ou *application A-linéaire* (de degré i) est une application linéaire $f : N \to M$ (de degré i) telle que $f(a.n) = (-1)^{i.|a|}a.(f(n))$. Ces applications A-linéaires $(\mathrm{Hom}_A(N,M),D)$ forment un sous-espace vectoriel gradué différentiel de $(\mathrm{Hom}(N,M),D)$ avec la différentielle

$$Df = d_M \circ f - (-1)^{|f|} f \circ d_N.$$

De même, si (Q,d_Q) est un (A,d)-module à droite, alors $(Q \otimes_A M, D')$ est le module quotient $(Q,d_Q) \otimes (M,d_M)/(q.a \otimes m - q \otimes a.m)$.
Les foncteurs $\mathrm{Hom}_A(-,-)$ et $-\otimes_A-$ ne préservent pas les quasi-isomorphismes. Nous allons donc introduire les résolutions semi-libres qui sont les analogues différentielles des résolutions projectives.

Définition 1.2.1.0 : Un module gradué M sur une algèbre graduée A est appelé *A-libre* si il est de la forme $M \cong A \otimes V$ avec V espace vectoriel gradué.

Définition 1.2.1.1 :

(i) Un (A,d)-module (P,d) est une *extension semi-libre* d'un (A,d)-module (M,d) s'il peut s'écrire comme l'union d'une famille de (A,d)-sous-modules $P(-1) \subset P(0) \subset ...$, tels que $P(-1) = (M,d)$ et chaque $P(k)/P(k-1)$, $k \geq 0$, soit A-libre sur une base de cycles. Si $M = 0$, (P,d) est un *(A,d)-module semi-libre.*

(ii) Soit $f : (M,d) \to (N,d)$, un morphisme de (A,d)-modules. Une *résolution semi-libre* de f est une extension semi-libre (P,d) de (M,d) muni d'un quasi-isomorphisme de (A,d)-modules $(P,d) \xrightarrow{\simeq} (N,d)$ se restreignant à f sur (M,d).

(iii) Une *résolution semi-libre* d'un (A, d)-module (N, d) est une résolution semi-libre de $0 \to (N, d)$.

Nous pouvons alors énoncer la

Proposition 1.2.1.2 : [20](prop.2.1 et prop.2.4)

(i) Tout morphisme $f : (M, d) \to (N, d)$ de (A, d)-modules admet une résolution semi-libre $(Q, d) \xrightarrow{\simeq} (N, d)$. En particulier, tout (A, d)-module admet une résolution semi-libre.

(ii) Si (P, d) est un (A, d)-module semi-libre, alors $Hom_A(P, -)$ préserve les quasi-isomorphismes.

(iii) Si $(A, d) \xrightarrow{\simeq} (B, d)$ est un quasi-isomorphisme d'ADG, alors les MGD $Hom_A(P, N)$ et $Hom_B(P, N)$ sont aussi quasi-isomorphes.

□

Exemple 1.2.1.3 : La construction acyclique sur (TV, d) définie en 1.1.10 par

$$(TV \otimes (\mathbb{K} \oplus sV), \delta) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{K}$$

est un (TV, d)-module semi-libre (Il suffit d'appliquer la proposition 1.1.7).

1.2.2 Le foncteur $\mathcal{E}$xt différentiel.

Rappelons d'abord brièvement que, si R est un anneau, on utilise les résolutions projectives ([3]) pour calculer $\mathrm{Ext}_R(-, -)$, le foncteur dérivé de $\mathrm{Hom}_R(-, -)$:

$$\mathrm{Ext}_R^{p,q}(M, N) = H^{p+q}(\mathrm{Hom}_R(P_p, N), D)$$

où $P_* \xrightarrow{\simeq} M$ est une résolution projective du R-module M (qui permet de définir la différentielle D).
Dans le cadre différentiel, il est classique de définir l'analogue $\mathcal{E}xt^*$ du foncteur $\mathrm{Ext}^{*,*}$:

Définition 1.2.2.1 : Si (M, d_M) et (N, d_N) sont des (A, d)-modules à droite, et si $(P, d_P) \xrightarrow{\simeq} (M, d_M)$ est une (A, d)-résolution semi-libre, alors

$$\mathcal{E}xt^*_{(A,d)}((M, d_M), (N, d_N)) = H^*(\mathrm{Hom}_{(A,d)}((P, d_P), (N, d_N), D)).$$

Il résulte de 1.2.1.2 (ii) le

Lemme 1.2.2.2 : *Cette définition est indépendante du choix de P.*

$\square$

La proposition 1.2.1.2 implique la

Remarque 1.2.2.3 : Soit $A \xrightarrow{\simeq} B$ un quasi-isomorphisme de $\mathbb{K}$-ADG augmentées. Nous pouvons alors identifier $\mathcal{E}xt_A(\mathbb{K}, A)$ avec $\mathcal{E}xt_B(\mathbb{K}, B)$ via les isomorphismes:

$$\mathcal{E}xt_A(\mathbb{K}, A) \xrightarrow{\cong} \mathcal{E}xt_A(\mathbb{K}, B) \xleftarrow{\cong} \mathcal{E}xt_B(\mathbb{K}, B).$$

1.3 La Bar construction.

Une *ADG augmentée* est une ADG, (A, d) munie d'un morphisme $\epsilon_A : (A, d) \to \mathbb{K}$ (l'*augmentation*). L'idéal $\bar{A}$ =ker ϵ_A est *l'idéal d'augmentation.* Désignons $(s\bar{A})^{\otimes k}$ par $T^k(s\bar{A})$ et le produit tensoriel d'éléments $sa_i \in s\bar{A}$ par $[sa_1|...|sa_k] \in T^k(s\bar{A})$.
La *bar construction acyclique* sur l'ADG augmentée (A, d) est alors le (A, d)-module à gauche $B(A, A) = (A \otimes T(s\bar{A}), D)$ dans lequel

(i) $T(s\bar{A}) = \oplus_{k=0}^{\infty} T^k(s\bar{A})$.

(ii) $D = D_1 + D_2$ (définies ci-dessous).

La bar construction acyclique peut être munie de l'augmentation

$$\epsilon : B(A, A) \to \mathbb{K}$$

définie par

$$\epsilon(a \otimes 1) = \epsilon_A(a) \text{ et } \epsilon(A \otimes T^k(s\bar{A})) = 0, \quad k \geq 1.$$

Plus généralement, si (M,d) est un (A,d)-module à droite et (N,d) un (A,d)-module à gauche, Nous pouvons définir

$$B(M,A,N)=(M,d)\otimes_A B(A,A)\otimes_{\mathbb{K}}(N,d)=(M\otimes T(s\bar{A})\otimes N,D)$$

avec $D=D_1+D_2$ telle que

$$\begin{aligned} D_1(m[sa_1|...|sa_k]n) &= dm[sa_1|...|sa_k]n \\ &\quad -\sum_{i=1}^{k}(-1)^{\epsilon_i}m[sa_1|...|sda_i|...|sa_k]n \\ &\quad +(-1)^{\epsilon_{k+1}}m[sa_1|...|sa_k]dn \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} D_2(m[sa_1|...|sa_k]n) &= (-1)^{|m|}ma_1[sa_2|...|sa_k] \\ &\quad +\sum_{i=2}^{k}(-1)^{\epsilon_i}m[sa_1|...|sa_{i-1}a_i|...|sa_k]n \\ &\quad -(-1)^{\epsilon_k}m[sa_1|...|sa_{k-1}]a_kn. \end{aligned}$$

avec $\epsilon_i=|m|+\sum_{j<i}|sa_j|$.

Conventions :

1) Nous écrirons
$$BA=B(\mathbb{K},A,\mathbb{K})$$
et
$$B(M,A)=B(M,A,\mathbb{K}).$$

2) Nous pouvons bigraduer $B(M,A,N)$ par
$$(B(M,A,N))^{p,q}=(B^p(M,A,N))^{p+q}=(M\otimes T^p(s\bar{A})\otimes N)^{p+q}.$$

Lemme 1.3.1 : [20](lemma 4.3) *Avec les notations précédentes,*

(i) ϵ est un quasi-isomorphisme.

(ii) Si $(\bar{A},d)$ est $\mathbb{K}$-semi-libre, alors $B(A,A)$ est (A,d)-semi-libre.

$\square$

Lemme 1.3.2 : [20](example 4.6) *Si A est une $\mathbb{K}$-ADG, alors BA est une CGD pour le coproduit :*

$$\Delta_{BA} : \left\{ \begin{array}{lll} B^n A & \rightarrow & \bigoplus_{r+s=n} B^r A \otimes B^s A \\ [sa_1|...|sa_n] & \mapsto & \sum_{j=0}^{n} [sa_1|...|sa_j] \otimes [sa_{j+1}|...|sa_n] \end{array} \right.$$

$\square$

Lemme 1.3.3: *Avec les notations précédentes, $B(M,A)$ est un BA-comodule à droite pour l'opération :*

$$\Delta_{B(M,A)} = id_M \otimes \Delta_{BA}.$$

Démonstration : Ecrire la condition de comodule pour $B(M,A)$ revient à écrire la condition de coassociativité pour BA.

$\square$

2 Les invariants.

2.1 Grade d'une application et profondeur d'un espace.

Soit $f : Y \to X$, une application continue entre espaces topologiques 1-connexes de types finis. Supposons X pointé en x_0 et notons PX l'espace des chemins de X d'extrémité x_0. Nous noterons F la *fibre homotopique de* f définie comme le produit fibré :

$$F = Y \times_f PX,$$

où $PX \to X$ est l'évaluation d'un chemin en son origine. Ceci implique :

Définition 2.1.0 : La fibre homotopique de l'application f est :

$$F = \{(y, \gamma) \in Y \times PX | f(y) = \gamma(0)\}.$$

La composition des chemins permet de définir une opération de l'espace des lacets ΩX sur F :

Définition 2.1.1 : Nous appelerons *opération d'holonomie* associée à f l'action :

$$\begin{cases} (Y \times_f PX) \times \Omega X & \to & \Omega X \\ ((y, \gamma), \omega) & \to & (y, \gamma * \omega) \end{cases}$$

Remarque 2.1.2 : Dans le cas particulier où

$$F = p^{-1}\{x_0\} \to Y \xrightarrow{p} X$$

est une fibration de base X pointée par x_0, désignons par $l : F \to Y \times_p PX$, l'application envoyant y sur (y, c_{x_0}) où c_{x_0} désigne le chemin constant en x_0. L'injection canonique $F \times \Omega X \to Y \times_p PX$ se factorise à homotopie près par F fournissant ainsi un morphisme $\nu : F \times \Omega X \to F$ appelé *opération d'holonomie* de p. Il existe alors une équivalence d'homotopie $F \simeq Y \times_f PX$ et l'isomorphisme

$$H_*(F) \cong H_*(Y \times_X PX)$$

induit pour tout corps de coefficients une structure de $H_*(\Omega X)$ module à droite sur $H_*(F)$ que nous appelerons *module d'holonomie.*

$\square$

Proposition 2.1.3 : [43]*L'opération d'holonomie $\nu : F \times \Omega X \to F$ est une opération du monoïde ΩX sur l'espace F.*

$\square$

Remarque 2.1.4 : Dans le cas de la fibration des chemins $\Omega X \to PX \to X$, l'opération d'holonomie $\nu : \Omega X \times \Omega X$ se réduit à la composition des lacets.

$\square$

Remarque 2.1.5 : $\nu|_{\{*\}\times\Omega X} : \Omega X \to F$ s'identifie au connectant $\delta : \Omega X \to F$ de la suite de Puppe.

$\square$

Définition 2.1.6 :

(ii) Si M est A-module, on définit

$$\mathrm{grade}_A(M) = \inf\{k|\mathrm{Ext}_A^{k,*}(M,A) \neq 0\}.$$

(ii) Nous appelerons *grade de f* l'invariant

$$\mathrm{grade}(f) = \mathrm{grade}_{H_*(\Omega X)}(H_*(F)).$$

Remarque 2.1.7 : D'après l'isomorphisme ([3]) :

$$\mathrm{Ext}_A(M,A) \cong (\ \mathrm{Tor}^A(M,A^\vee))^\vee,$$

nous pouvons identifier

$$\mathrm{grade}_A(M) = \inf\{k|\ \mathrm{Tor}^A_{k,*}(M,A^\vee) \neq 0\}.$$

$\square$

Définition 2.1.8 :

(i) On définit la *profondeur* d'une algèbre A :

$$\mathrm{prof}(A) = \inf\{k | \mathrm{Ext}_A^{k,*}(\mathbb{K}, A) \neq 0\}.$$

(ii) En particulier, $\mathrm{prof}(H_*(\Omega X)) = \inf\{k | \mathrm{Ext}_{H_*(\Omega X)}^{k,*}(\mathbb{K}, H_*(\Omega X)) \neq 0\}$.

Si $f = id : X \to X$, la fibre homotopique F est réduite à un point et on retrouve la définition de la profondeur de $H_*(\Omega X)$ comme grade du module trivial $\mathbb{K}$.

Remarque 2.1.9 : Si M est un A-module libre nous obtenons (par définition) :

$$\mathrm{grade}_A(M) = 0$$

□

Lemme 2.1.10 : *Si la dimension d'un A-module M est non nulle et finie, alors*

$$\mathrm{grade}_A(M) = \mathrm{prof}(A).$$

Démonstration : Soit x de degré maximum dans M, alors, pour des raisons de degré, $A.x = 0$ et $\mathbb{K}x$ est un sous A-module de M. Nous avons alors une suite exacte courte :

$$0 \to \mathbb{K}x \to M \to N \to 0$$

avec $\dim(N) = \dim(M) - 1$. D'où une longue suite exacte en cohomologie :

$$\begin{array}{ccccccc}
\ldots & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_A^{m-1}(N, A) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_A^{m-1}(M, A) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_A^{m-1}(\mathbb{K}, A) \\
 & & & & & & \downarrow \\
\ldots & \longleftarrow & \mathrm{Ext}_A^{m}(\mathbb{K}, A) & \longleftarrow & \mathrm{Ext}_A^{m}(M, A) & \longleftarrow & \mathrm{Ext}_A^{m}(N, A)
\end{array}$$

Supposons maintenant comme hypothèse de récurrence que $\mathrm{prof}(A) = m$ et $\mathrm{grade}_A(N) = m$; par suite,

$$0 \to \mathrm{Ext}_A^m(N, A) \neq 0 \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^m(M, A) \longrightarrow \ldots$$

Il en résulte que $\mathrm{Ext}_A^m(M, A) \neq 0$ et, tous les précédents étant nuls,

$$\mathrm{grade}_A(M) = m.$$

Enfin, La récurrence "démarre" bien : si dim $M = 1$, le lemme est vrai par définition.

□

Lemme 2.1.11 : *Soit $f \ : Y \to X$, une application continue entre espaces topologiques 1-connexes (de fibre homotopique F). Si le morphisme*

$$\partial_* \ : H_*(\Omega X) \to H_*(F)$$

induit par le connectant de la suite de Puppe $\nu|_{\{*\}\times\Omega X} \ : \Omega X \to F$ est nul, alors :

$$\mathrm{grade}_{H_*(\Omega X)}(H_*(F)) = \inf(\mathrm{prof}(H_*(\Omega X)), \mathrm{grade}_{H_*(\Omega X)}(H_+(F))).$$

Démonstration : Il existe une décomposition d'espaces vectoriels :

$$H_*(F) = \mathbb{K} \oplus H_+(F),$$

où $H_+(F)$ désigne l'homologie réduite de la fibre homotopique. $H_+(F)$ est bien un sous module du module d'holonomie, mais ceci n'est pas automatiquement vérifié pour $\mathbb{K}$. Pour montrer que l'égalité précédente est vraie en tant que $H_*(\Omega X)$-modules, il suffit de remarquer que, sous nos hypothèses, $H_*(\Omega X)$ agit trivialement sur $H_0(F, \mathbb{K}) = \mathbb{K}$ puisque le morphisme :

$$\partial_* \ : H_*(\Omega X) \to H_*(F)$$

est nul. La somme annoncée est donc une somme de $H_*(\Omega X)$-module et, puisque Ext commute aux sommes directes :

$$\mathrm{grade}_{H_*(\Omega X)}(H_*(F)) = \inf(\mathrm{prof}(H_*(\Omega X)), \mathrm{grade}_{H_*(\Omega X)}(H_+(F))).$$

□

2.2 L.S. catégorie et invariant de Toomer.

Si on note Δ^{n-1} le $(n-1)$-simplexe standard

$$\Delta^{n-1} = \{(t_1, ...t_n) \in \mathbb{R}^n | t_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{n} t_i = 1\}.$$

Les opérateurs face $\alpha_j : \Delta^{n-2} \to \Delta^{n-1}$, $1 \leq j \leq n-1$, sont définis par $\alpha_j(t_1, ...t_{n-1}) = (t_1, ..., t_{j-1}, 0, t_j, ..., t_{n-1})$. Le *joint* $A_1 * A_2 * ... * A_n$ de n espaces topologiques pointés $(A_1, *), (A_2, *), ..., (A_n, *)$ est alors défini par

$$A_1 * A_2 * ... * A_n = \frac{(A_1 \times A_2 \times ... \times A_n) \times \Delta^{n-1}}{\sim}$$

où pour tout j,

$$((a_1, ..., a_j, ..., a_n), \alpha_j(t)) \sim ((a_1, ..., *, ..., a_n), t).$$

$A_1 * A_2 * ... * A_n$ est l'ensemble des "barycentres"

$$t_1 a_1 + t_2 a_2 + ... + t_n a_n$$

où $t_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^n t_i = 1$, le tout soumis à la condition : $\sum_{i=1}^n t_i a_i = \sum_{i=1}^n t'_i a_i$ si pour chaque i soit $t_i = t'_i$ soit $a_i = *$.
Soit A un espace. Le joint itéré $(n-1)$ fois de l'espace A avec lui même est noté $\overset{n}{*} A$. Notons $p_{ij} = A^i \to A^{i-1}$, $1 \leq j \leq i \leq n$, l'application définie par

$$p_{ij}(a_1, ..., a_i) = (a_1, ..., \hat{a}_j, ..., a_i).$$

On a alors :

$$\overset{n}{*} A = \frac{\cup_{1 \leq i \leq n} A^i \times \Delta^i}{\sim}$$

avec $(a, \alpha_j(t)) \sim (p_{ij}(a), t)$, $a \in A^i$.
Notons $J_n = \overset{n}{*} \Omega X$. La composition à droite par un lacet définit une action de ΩX sur J_n :

$$J_n \times \Omega X \to J_n$$

$$(\sum t_i g_i, g) \to \sum t_i g_i g.$$

Désignons alors par $\Omega X P(n-1)$ l'espace des orbites pour cette action. Nous obtenons une fibration $\Omega X \to J_n \to \Omega X P(n-1)$ représentée par une application classifiante

$$\Omega X P(n-1) \xrightarrow{p_{n-1}} B\Omega X \simeq X.$$

Convertissons p_{n-1} en fibration ; nous obtenons un diagramme de fibrations:

$$\begin{array}{ccccccc}
\Omega X = J_1 & \longrightarrow & J_2 & \longrightarrow \ldots & J_n & \xrightarrow{k_n} & J_{n+1} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\Omega XP(0) & \longrightarrow & \Omega XP(1) & \longrightarrow \ldots & \Omega XP(n-1) & \longrightarrow & \Omega XP(n) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
X & = & X & = \ldots & X & = & X
\end{array}$$

Remarquons que J_n est normalement inclus dans J_{n+1}. Lorsque n tend vers l'infini, $J(\infty) = \cup_n J_n$ est contractile ([35]). Il en résulte des équivalences d'homotopie

$$\Omega XP(\infty) \simeq B\Omega X \simeq X.$$

Proposition 2.2.1 : ([25]) *Soit X un espace normal bien pointé, alors* $\mathrm{cat}(X) \leq n$ *si et seulement si la fibration $p_n : \Omega XP(n) \to X$ a une section homotopique.*

□

De même, si $f : Y \to X$ est une application continue entre espaces topologiques 1-connexes de fibre homotopique F, nous avons le produit fibré suivant :

$$\begin{array}{ccc}
Y \times_X \Omega XP(n) & \longrightarrow & \Omega XP(n) \\
{\scriptstyle j_n}\downarrow & & \downarrow \\
Y & \xrightarrow{f} & X
\end{array}$$

Proposition 2.2.2 : *Si X est un espace normal bien pointé, alors* $\mathrm{cat}(f) \leq n$ *si et seulement si j_n admet une section homotopique.*

□

Définition 2.2.3 :

(i) $e(f) \leq n$ si et seulement si j_n est injective en cohomologie. $e(f)$ est appelé *invariant de Toomer de f.*

(ii) Si $f = id_X$, nous obtenons une définition de *l'invariant de Toomer de X* dont nous verrons (2.2.6) qu'elle est équivalente à celle donnée par [42] : $e(X) \leq n$ si et seulement si $\Omega XP(n) \to X$ est injective en cohomologie.

Il vient donc immédiatemment la

Proposition 2.2.4 :

(i) $e(f) \leq \mathrm{cat}(f)$.

(ii) *Si* $f = id_X$, *nous retrouvons le résultat de* [42] : $e(X) \leq \mathrm{cat}(X)$.

□

Nous allons maintenant interpréter algébriquement l'invariant de Toomer. f induit $\bar{f} : C^*X \to C^*Y$ et nous pouvons choisir

$$\phi : (TV, d) \xrightarrow{\simeq} C^*X,$$

un T-modèle minimal des cochaînes singulières sur X. Puis, $\bar{f}$ faisant de $C^*(Y)$ un $C^*(X)$-module, il existe (1.1.4 et 1.1.6) un modèle minimal :

$$C^*(Y) \xleftarrow{\simeq} (TV \otimes W, d).$$

Le théorème 1 de [5] affirme que $(TV/T^{>n}V)$ et $C^*(\Omega XP(n))$ ont même modèle minimal ; donc,

$e(f)$ est le plus petit entier n tel qu'il existe un homomorphisme d'espaces vectoriels différentiels l rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} (TV, d) & \xrightarrow{\tilde{f}} & (TV \otimes W, d) \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle l} \\ (TV/T^{>n}V, \bar{d}) & \longrightarrow & C^*(Y \times_X \Omega XP(n)) \end{array}$$

En considérant le diagramme précédent en cohomologie, il vient la

Propriété 2.2.5 : $e(f)$ *est le plus grand entier* n *tel qu'il existe une classe de cohomologie non nulle dans* $H^*(TV)$ *représentée par un cocycle dans* $T^{\geq n}V$ *dont l'image par* $\tilde{f}^*$ *soit non nulle.*

□

Cette propriété nous permet de faire quelques remarques évidentes :

Remarque 2.2.6 : Si $f = id : X \to X$, on retrouve ([2] prop.2.6) l'invariant de Toomer $e(X)$ qui peut se calculer comme le plus grand entier k tel qu'il existe une classe non triviale dans $H^*(TV)$ représentée par un cocycle dans $T^{\geq k}V$.

□

Remarque 2.2.7 :

$$\mathrm{cup}(f) \leq e(f) \leq \inf(e(X), e(Y)),$$

où $\mathrm{cup}(f)$ désigne la cup longueur de f i.e. la longueur maximale d'un cup-produit non nul dans Im $(H^*(f))$. En particulier, si $f = id : X \to X$,

$$\mathrm{cup}(X) \leq e(X).$$

□

Remarque 2.2.8 :

$$e(f) = 0 \text{ si et seulement si } H^+(f) = 0$$

et

$$e(X) = 0 \text{ si et seulement si } H^+(X) = 0.$$

□

2.3 L'application d'évaluation.

Définition 2.3.1 :

(i) Soient (A, d_A) une $\mathbb{K}$-ADG et (M, d_M) un (A, d_A)-MGD. On définit *l'application d'évaluation de* M :

$$ev_M : \mathcal{E}xt_A(\mathbb{K}, M) \to H^*(M)$$

de la manière suivante : soit $\alpha \in \mathcal{E}xt_A(\mathbb{K}, M)$; α est représenté par un cocycle $f : P \to M$ où P est une résolution semi-libre de $\mathbb{K}$. On pose alors $ev_M(\alpha) = [f(z)]$ où z est un cocycle représentant 1 dans P.

(ii) On notera ev_A l'application d'évaluation de l'algèbre (A, d_A) considérée comme un A-module sur elle même.

(iii) Soit X un espace topologique, nous appelerons *application d'évaluation de* X et nous noterons ev_X, l'application d'évaluation ev_{C^*X} des cochaînes sur X.

(iv) Soit $f : Y \to X$, une application continue entre espaces topologiques, Nous définissons *l'application d'évaluation de* f par :

$$ev_f = f^* \circ ev_X.$$

(f^* désigne l'application induite par f en cohomologie.)

Des interprétations topologiques de l'application d'évaluation sont données dans [39] et [22].

3 Preuve du théorème I.

Soit $f : Y \to X$, une application continue entre espaces topologiques 1-connexes de types finis.
Nous pouvons alors former le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}xt_{C^*X}(\mathbb{K}, C^*X) & \xrightarrow{\hat{f}} & \mathcal{E}xt_{C^*X}(\mathbb{K}, C^*Y) \\ {\scriptstyle ev_X} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle ev_Y} \\ H^*(X) & \xrightarrow{f^*} & H^*(Y) \end{array}$$

qui est commutatif puisqu'il opère de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccccc} [g] & \longrightarrow & [f \circ g] & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ [g(1)] & \longrightarrow & [(f \circ g)(1)] & = ev_f(g) \end{array}$$

L'énoncé de notre théorème s'écrit alors :

Théorème I : *Si $f : Y \to X$ est une application continue entre espaces topologiques 1-connexes de types finis et si $ev_f \neq 0$, alors pour tout corps $\mathbb{K}$,*

$$\mathrm{grade}_{\mathbb{K}}(f) \leq e_{\mathbb{K}}(f).$$

Remarque 3.0 : Si $f = id : X \to X$, on retrouve le Théorème A de [2].

Démonstration : Elle s'articule en trois parties. Nous établissons d'abord quelques lemmes ; nous construisons ensuite une suite spectrale dans laquelle grade(f) apparaît naturellement au niveau E_2. Enfin, nous montrons comment lire $e(f)$ dans l'aboutissant de cette suite spectrale.

3.1 Quelques lemmes.

Lemme 3.1.1 : *Soit A, une ADG et N un A-MGD à droite. Il existe alors un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués différentiels :*

$$\mathrm{Hom}_A(V \otimes A, N) \cong \mathrm{Hom}(V, N).$$

Démonstration : Dans la suite, nous utiliserons les notations :

$$\nu : N \otimes A \rightarrow N,$$

l'opération de A-module,
i, l'inclusion $V \rightarrow V \otimes A$ définie par

$$i(v) = id_V \otimes 1(v) = v \otimes 1 \ ;$$

et nous identifierons V et $V \otimes \mathbb{K}$, N et $N \otimes \mathbb{K}$.
Si μ_A désigne la multiplication de l'algèbre A, $V \otimes A$ possède une structure de A-module à droite naturellement définie par :

$$\nu_{V \otimes A} : (V \otimes A) \otimes A \overset{id_V \otimes \mu_A}{\longrightarrow} V \otimes A.$$

Définissons

$$\rho : \mathrm{Hom}_A(V \otimes A, N) \rightarrow \mathrm{Hom}(V, N)$$

par

$$\rho(f) = f \circ i$$

et

$$\alpha : \mathrm{Hom}(V, N) \rightarrow \mathrm{Hom}_A(V \otimes A, N)$$

par

$$\alpha(g) = \nu \circ (g \otimes id_A).$$

Vérifions que α et ρ sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre.

$$\begin{aligned}
\alpha \circ \rho(f) &= \nu \circ ((f \circ i) \otimes id_A) \\
&= \nu \circ (f \circ (id_V \otimes 1) \otimes id_A) \\
&= f \circ (id_V \otimes id_A) \\
&= f
\end{aligned}$$

puisque f est A-linéaire.
Remarquons qu'il peut paraître plus clair de travailler sur les éléments. Nous préférons travailler sur les flèches car la démonstration du lemme suivant sur les coalgèbres s'obtiendra alors en "renversant" les flèches. Ainsi, l'assertion précédente peut se résumer en remarquant que le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} V\otimes \mathbb{K}\otimes A & \xrightarrow{(id_V\otimes 1)\otimes id_A} & V\otimes A\otimes A & \xrightarrow{f\otimes id_A} & N\otimes A \\ \| & & \downarrow id_V\otimes A & & \downarrow \nu_N \\ V\otimes A & = & V\otimes A & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

est commutatif (la commutativité du carré gauche est la condition d'unité, celle du carré droit exprime la linéarité de f).
D'autre part,

$$\begin{aligned} \rho\circ\alpha(g) &= (\nu\circ(g\otimes id_A))\circ(id_V\otimes 1) \\ &= \nu\circ(g\otimes 1) \\ &= g. \end{aligned}$$

Il suffit en effet d'utiliser que $n.1 = n$ pour tout $n\in N$. Ce qui peut encore se traduire par la commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} N\otimes \mathbb{K} & \xrightarrow{id_N\otimes 1} & N\otimes A \\ \cong\downarrow & & \downarrow \nu \\ N & = & N \end{array}$$

Montrons maintenant que α et ρ commutent aux différentielles. Si D désigne la différentielle sur

$$\mathrm{Hom}_{(A,d_A)}((A,d_A)\otimes(V,d_V),(N,d_N))$$

et D', la différentielle sur

$$\mathrm{Hom}((V,d_V),(N,d_N)),$$

alors (1.2.1)

$$Df = f\circ(d_V\otimes id_A + id_V\otimes d_A) - (-1)^{|f|} d_N\circ f$$

et

$$D'g = g\circ d_V - (-1)^{|g|} d_N\circ g.$$

On vérifie alors facilement :

$$\begin{aligned} \rho(Df) &= d_N\circ f\circ(id_V\otimes 1) - (-1)^{|f|} f\circ(d_V\otimes id_A + id_V\otimes d_A)\circ(id_V\otimes 1) \\ &= d_N\circ f\circ(id_V\otimes 1) - (-1)^{|f|} f\circ(d_V\otimes 1 + id_V\otimes(d_A\circ 1)) \\ &= d_N\circ f\circ(id_V\otimes 1) - (-1)^{|f|} f\circ(d_V\otimes 1). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} D'(\rho f) &= d_N \circ f \circ (id_V \otimes 1) - (-1)^{|f|} f \circ (id_V \otimes 1) \circ d_V \\ &= d_N \circ f \circ (id_V \otimes 1) - (-1)^{|f|} f \circ (d_V \otimes 1). \end{aligned}$$

Ainsi, $\rho(Df) = D'(\rho f)$. De plus, ρ étant bijectif, il est inutile de vérifier l'égalité $D(\alpha g) = \alpha(D'g)$ qui est automatiquement vraie.

$\square$

Dans le paragraphe 1.2.1, nous avons défini les applications A-linéaires. Nous pouvons de même définir pour une CGD C et pour deux C-comodules gradués différentiels (M, d_M) et (N, d_N) la notion de C-colinéarité. Nous appellerons *application C-colinéaire* ou morphisme de C-comodules gradués différentiels (1.0), une application $f : M \to N$ telle que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\Delta_M} & M \otimes C \\ f\downarrow & & \downarrow f \otimes id_C \\ N & \xrightarrow{\Delta_N} & N \otimes C. \end{array}$$

commute.
Le sous-EVGD de $(\mathrm{Hom}(M,N), D)$ constitué des applications C-colinéaires de M dans N sera noté $(\mathrm{Hom}^C(M,N), D)$.

Lemme 3.1.2 : *Soient C, une CGD et M un C-comodule à droite. Il existe alors un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués différentiels :*

$$\mathrm{Hom}^C(M, V \otimes C) \cong \mathrm{Hom}(M, V).$$

Démonstration : Nous utiliserons les notations :

ϵ_C : $C \to \mathbb{K}$, la co-unité,
Δ_C : $C \to C \otimes C$, la codiagonale,
Δ_M : $M \to M \otimes C$, l'opération de comodule.

$V \otimes C$ est un C-comodule à droite par l'opération :

$$\Delta_{V \otimes C} : V \otimes C \xrightarrow{id_V \otimes \Delta_C} V \otimes C \otimes C.$$

Définissons
$$\beta : \mathrm{Hom}^C(M, V \otimes C) \to \mathrm{Hom}(M, V)$$
par
$$\beta(f) = (id_V \otimes \epsilon_C) \circ f$$
et
$$\mu : \mathrm{Hom}(M, V) \to \mathrm{Hom}^C(M, V \otimes C)$$
par
$$\mu(g) = (g \otimes id_C) \circ \Delta_M.$$
Vérifions que β et μ sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre.

$$\begin{aligned} \beta \circ \mu(g) &= (id_V \otimes \epsilon_C) \circ (g \otimes id_C) \circ \Delta_M. \\ &= (g \otimes \epsilon_C) \circ \Delta_M \\ &= g \end{aligned}$$

puisque le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\Delta_M} & M \otimes C \\ \| & & \downarrow_{id_M \otimes \epsilon_C} \\ M & \xrightarrow{\cong} & M \otimes \mathbb{K} \end{array}$$

(C'est la condition de co-unité).
Inversement,

$$\mu \circ \beta(f) = (((id_V \otimes \epsilon_C) \circ f) \otimes id_C) \circ \Delta_M.$$

Comme dans le lemme précédent, $\mu \circ \beta(f) = f$ provient de la C-colinéarité de f et de la condition de co-unité qui s'expriment par la commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{f} & V \otimes C & = & V \otimes C \\ \Delta_M \downarrow & & \downarrow \Delta_{V \otimes C} & & \| \\ M \otimes C & \xrightarrow{f \otimes id_C} & V \otimes C \otimes C & \xrightarrow{(id_V \otimes \epsilon_C) \otimes id_C} & V \otimes \mathbb{K} \otimes C \end{array}$$

Montrons maintenant que β commute à la différentielle. Si D désigne la différentielle sur $\mathrm{Hom}^C(M, V \otimes C)$ et D' la différentielle sur $\mathrm{Hom}(M, V)$, alors :

$$\begin{array}{rcl} \beta(Df) & = & (id_V \otimes \epsilon_C) \circ (d_V \otimes id_C + id_V \otimes d_C) \circ f \\ & & -(-1)^{|f|}(id_V \otimes \epsilon_C) \circ f \circ d_M \\ & = & \beta(f) \circ d_M - (-1)^{|f|}(d_V \otimes \epsilon_C) \circ f \\ & & +(id_V \otimes (\epsilon_C \circ d_C)) \circ f \end{array}$$

or $\mathrm{Im}(d_C) \subset C^+$ et $\epsilon_C(C^+) = 0$. Donc

$$\begin{array}{rcl} \beta(Df) & = & \beta(f) \circ d_M - (-1)^{|f|}(d_V \otimes \epsilon_C) \circ f \\ & = & \beta(f) \circ d_M - (-1)^{|f|} d_V \circ (id_V \otimes \epsilon_C) \circ f \\ & = & \beta(f) \circ d_M - (-1)^{|f|} d_V \circ \beta(f) \\ & = & D'(\beta f). \end{array}$$

Ainsi, comme dans le lemme précédent, l'isomorphisme commute à la différentielle.

□

Dans le paragraphe 3.2, nous définissons une suite spectrale dans laquelle grade(f) apparaît au niveau E_2. La lecture de grade(f) résulte d'une suite d'isomorphismes établis dans les corollaires 3.1.4 et 3.1.5, puis dans le paragraphe 3.2.2. Aussi, pour une meilleure lisibilité de la preuve, nous joignons le schéma récapitulatif suivant :

Schéma 3.1.3 : Si $M_1 = H_*(F)$ et $A = M_2 = H_*(\Omega X)$, nous établirons que :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}^{p,q}(B(M_1, A), M_2) & \xrightarrow{\cong} & (\mathrm{Hom}^{BA}(B(M_1, A), B(M_2, A)))^{p,q} \\ {\scriptstyle 3.1.4\ \cong}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle \cong\ 3.1.5} \\ \mathrm{Hom}_A^{p,q}(B(M_1, A, A), M_2) & & \mathrm{Hom}^{p,q}_{B^\vee A}(B^\vee(M_2, A), B^\vee(M_1, A)) \\ \Downarrow{\scriptstyle \text{donne en cohomologie}} & & \downarrow{\scriptstyle \cong\ 3.2.2.1} \\ \mathrm{Ext}^{p,q}_{H_*(\Omega X)}(H_*(F), H_*(\Omega X)) & & \mathrm{Hom}^{p,q}_{(TV,d_2)}(((TV \otimes (\mathbb{K} \oplus sV), \delta_2), (TV \otimes W, d_2)) \\ {\scriptstyle 3.1.5\ \text{et}\ 3.2.2.1\ \cong}\downarrow & & {\scriptstyle \text{donne en cohomologie}}\Downarrow \\ E_2^{p,q} & \cong & \mathcal{E}xt^{p,q}_{(TV,d_2)}(\mathbb{K}, (TV \otimes W, d_2)) \end{array}$$

Corollaire 3.1.4 : *Soient A, une ADG ; M_1 et M_2 deux A-modules. Alors*

$$\oplus_{m\geq 0}(\mathrm{Hom}^{BA}(B^{m+p}(M_1,A),B^m(M_2,A)))^{p+q} \cong \mathrm{Hom}_A^{p+q}(B^p(M_1,A,A),M_2).$$

Démonstration : Pour obtenir l'isomorphisme annoncé avec la graduation totale, il suffit d'appliquer :

le lemme 3.1.1 avec $\begin{array}{l} A \rightsquigarrow A \\ V \rightsquigarrow B(M_1,A) \\ N \rightsquigarrow M_2 \end{array}$

puis le lemme 3.1.2 avec $\begin{array}{l} C \rightsquigarrow BA \\ V \rightsquigarrow M_2 \\ M \rightsquigarrow B(M_1,A). \end{array}$

Voyons maintenant que cet isomorphisme préserve le premier degré. C'est évident pour le premier morphisme :

$$\mathrm{Hom}_A^{p+q}(B^p(M_1,A,A),M_2) \xrightarrow{\rho} \mathrm{Hom}^{p+q}(B^p(M_1,A),M_2)$$

qui est en fait une restriction (3.1.1).

La seconde étape (3.1.2)

$$\mathrm{Hom}^{p+q}(B^p(M_1,A),M_2) \xrightarrow{\mu} \oplus_{m\geq 0}(\mathrm{Hom}^{BA}(B^{m+p}(M_1,A),B^m(M_2,A)))^{p+q}$$

transforme une application $\mathbb{K}$-linéaire en une application $BA = T(s\bar{A})$-co-linéaire. Ceci influe sur la longueur des mots :

soit $g : M_1 \otimes T^p(s\bar{A}) \longrightarrow M_2$, alors

$$\begin{aligned} \mu(g) &= (g \otimes id_{BA}) \circ \Delta_{B(M_1,A)} \\ &= (g \otimes id_{BA}) \circ (id_{M_1} \otimes \Delta_{BA}) \end{aligned}$$

g n'étant définie que sur les mots de longueur p, ceci revient à calculer pour tout $m \geq 0$,

$$M_1 \otimes T^{m+p}(s\bar{A}) \xrightarrow{id_{M_1}\otimes\Delta_{BA}} M_1 \otimes T^p(s\bar{A}) \otimes T^m(s\bar{A}) \xrightarrow{g\otimes id_{BA}} M_2 \otimes T^m(s\bar{A}).$$

□

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le

Corollaire 3.1.5 : *Si $Y \to X$ est une application continue de fibre homotopique F,*

$$\mathrm{Ext}^{p,q}_{H_*(\Omega X)}(H_*(F), H_*(\Omega X)) \cong \mathcal{E}xt^{p,q}_{B^\vee(H_*(\Omega X))}(\mathbb{K}, B^\vee(H_*(F), H_*(\Omega X))).$$

Démonstration : Remarquons d'abord que $\mathcal{E}xt$ n'a pas été défini comme un objet bigradué. La bigraduation annoncée apparaîtra naturellement au cours de la preuve.

Si nous choisissons M_1, A et M_2 sans différentielles dans le corollaire précédent, la résolution de M_1 :

$$B(M_1, A, A) \xrightarrow{\simeq} M_1$$

permet de calculer $\mathrm{Ext}^{p,q}_A(M_1, M_2)$ grâce à $\mathrm{Hom}^{p+q}_A(B^p(M_1, A, A), M_2)$. Ainsi, l'homologie de

$$\oplus_{m\geq 0}(\mathrm{Hom}^{BA}(B^{m+p}(M_1, A), B^m(M_2, A)))^{p+q}$$

calcule

$$\mathrm{Ext}^{p,q}_A(M_1, M_2).$$

Notons maintenant $M_1 = M$ et choisissons $M_2 = A$. $\mathrm{Ext}^{p,q}_A(M, A)$ est alors calculé par l'homologie de

$$\oplus_{m\geq 0}(\mathrm{Hom}^{BA}(B^{m+p}(M, A), B^m(A, A)))^{p+q}$$

qui, par passage au dual, est isomorphe à

$$\oplus_{m\geq 0}\mathrm{Hom}^{p+q}_{B^\vee A}((B^m(A, A))^\vee, (B^{m+p}(M, A))^\vee).$$

Or

$$B^\vee(A, A) = T(s\bar{A})^\vee \otimes A^\vee \xrightarrow{\simeq} \mathbb{K}$$

donc, d'après 1.1.7, $B^\vee(A, A)$ est $B^\vee A$-semi-libre. Ceci implique

$$\mathrm{Ext}^{p,q}_A(M, A) \cong \mathcal{E}xt^{p,q}_{B^\vee A}(\mathbb{K}, B^\vee(M, A)).$$

Il suffit alors de remplacer M par $H_*(F)$ et A par $H_*(\Omega X)$ pour obtenir le résultat annoncé.

□

3.2 La suite spectrale.

3.2.1 Construction.

Nous voulons maintenant construire une suite spectrale (E_i, D_i^S) telle que

$$E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}^{p,q}_{H_*(\Omega X)}(H_*(F), H_*(\Omega X))$$

et d'aboutissant

$$\mathcal{E}xt_{C^*X}(\mathbb{K}, C^*Y).$$

Pour cela, considérons les T-modèles :

$$\begin{array}{ccc} C^*(X) & \longrightarrow & C^*(Y) \\ \simeq\uparrow & & \uparrow\simeq \\ (TV, d) & & (TV \otimes W, d) \end{array}$$

et filtrons

$$A = (\mathrm{Hom}_{TV}((TV \otimes (\mathbb{K} \oplus sV), \delta), (TV \otimes W, d), D)$$

par

$$F^p(A) = \{f \in A | f(T^m V \otimes (\mathbb{K} \oplus sV)) \subset T^{\geq m+p} V \otimes W,\ m \geq 0\}.$$

Nous avons évidemment $F^{p+1} \subset F^p$.

Montrons que $DF^p \subset F^p$. Pour cela, rappelons d'abord que la différentielle D sur A s'écrit

$$Df = f \circ \delta - (-1)^{|f|} d \circ f.$$

De plus, comme TV est minimal,

$$\delta(a \otimes sv) = (-1)^{|a|} av \otimes 1 - (-1)^{|a|} a.s(d_2 v + d_3 v + \ldots) + da \otimes sv.$$

(où $d = d_2 + d_3 + \ldots$, avec $d_i : T^m V \to T^{m+i-1} V$)
Si $a \in T^k V$, alors $va \in T^{k+1}(V)$ et $da \in T^{\geq k+1} V$.
D'autre part, si on pose

$$\begin{array}{rcl} d_2 v & = & \sum_i v^i_{2,1} . v^i_{2,2}, \\ d_3 v & = & \sum_i v^i_{3,1} . v^i_{3,2} . v^i_{3,3}, \\ \ldots & & \end{array}$$

alors,

$$\begin{aligned}
a.s(d_2v + d_3v + ...) &= a.s(\textstyle\sum_i v^i_{2,1}.v^i_{2,2}) \\
&\quad + a.s(\textstyle\sum_i v^i_{3,1}.v^i_{3,2}.v^i_{3,3}) + ... \\
&= \textstyle\sum_i (-1)^{|v^i_{2,1}|} a.v^i_{2,1}.(sv^i_{2,2}) \\
&\quad + \textstyle\sum_i (-1)^{|v^i_{3,1}|+|v^i_{3,2}|} a.v^i_{3,1} v^i_{3,2}.(sv^i_{3,3}) + ...
\end{aligned}$$

d'où, $a.s(dv) \in T^{\geq k+1}V \otimes (\mathbb{K} \oplus sV)$.

Enfin, la minimalité de $TV \otimes W$ implique $d \circ f \in F^{p+1}$ et donc,

$$DF^p \subset F^{p+1}.$$

Les premiers termes de la suite spectrale vérifient alors

$$E_0^{p,q} = \{f \in A^{p+q} | f(T^m V \otimes (\mathbb{K} \oplus sV)) \subset T^{m+p}V \otimes W,\ m \geq 0\}$$

avec $D_0^S = 0$;

$$E_1^{p,q} = E_0^{p,q} \text{ et } E_1^{p,q} \xrightarrow{D_1^S} E_1^{p+1,q}.$$

Soit $f \in E_1^{p,q}$,

$$f : T^m V \otimes (\mathbb{K} \oplus sV) \to T^{m+p}V \otimes W$$

Calculons $D_1^S f : T^m V \otimes (\mathbb{K} \oplus sV) \to T^{m+p+1}V \otimes W$ qui est défini comme le connectant de la longue suite exacte associée à la courte suite exacte de complexes :

$$0 \longrightarrow F^{p+1}A^{p+q} \longrightarrow F^p A^{p+q} \longrightarrow E_0^{p,q} \longrightarrow 0$$

Dans notre cas,

$$Df(T^m V \otimes (\mathbb{K} \oplus sV)) \subset T^{\geq m+p+1}V \otimes W.$$

Ceci implique que, pour obtenir D_1^S, il suffit de ne considérer que les parties quadratiques des différentielles, c'est à dire de remplacer d par d_2 et δ par δ_2 dans l'expression de D ($\delta_i : T^m V \otimes (\mathbb{K} \oplus sV) \to T^{m+i-1}V \otimes (\mathbb{K} \oplus sV)$).
De plus, il est clair d'après l'expression de δ que la différentielle δ_2 obtenue est alors la différentielle de la construction acyclique à partir de (TV, d_2).
Ainsi,

$$E_2^{p,q} = \mathcal{E}xt^{p+q}_{(TV,d_2)}(\mathbb{K}, (TV \otimes W, d_2)). \tag{3.2.1}$$

L'aboutissant de la suite spectrale est :

$$\mathcal{E}xt_{(TV,d)}(\mathbb{K}, (TV \otimes W, d)).$$

3.2.2 Lecture du grade.

Si on désigne par $B^\vee(-) = \mathrm{Hom}(B(-), \mathbb{K})$ le dual de la bar construction, alors, d'après [16] (4.10),

$$TV \simeq C^*X \simeq B^\vee(C_*(\Omega X))$$

et

$$TV \otimes W \simeq C^*Y \simeq B^\vee(C_*(F), C_*(\Omega X)).$$

D'après la remarque (1.2.2.3), nous avons donc un isomorphisme :

$$\mathcal{E}xt_{(TV,d)}(\mathbb{K}, (TV \otimes W, d)) \cong \mathcal{E}xt_{B^\vee(C_*(\Omega X))}(\mathbb{K}, B^\vee(C_*(F), C_*(\Omega X))).$$

Nous cherchons maintenant à prouver le

Lemme 3.2.2.1 :

$$E_2^{p,q} \cong \mathcal{E}xt^{p,q}_{B^\vee(H_*(\Omega X))}(\mathbb{K}, B^\vee(H_*(F), H_*(\Omega X))).$$

Démonstration : D'après la remarque (1.2.2.3), il suffit de prouver que:

$$(TV, d_2) \simeq B^\vee(H_*(\Omega X))$$

et

$$(TV \otimes W, d_2) \simeq B^\vee(H_*(F), H_*(\Omega X)))$$

pour obtenir l'isomorphisme (non bigradué).

Les filtrations $T^{\leq k}V^\vee$ et $W^\vee \otimes T^{\leq k}V^\vee$ sur $(TV^\vee, d^\vee)$ et $(W^\vee \otimes TV^\vee, d^\vee)$ induisent des suites spectrales (E'^i, d'^i) et (E''^i, d''^i).
Il existe alors([16] (Theorem V)(ii)) des isomorphismes

$$B(H_*(\Omega X)) \cong E'^1 \tag{3.2.2.2}$$

et

$$B(H_*(F), H_*(\Omega X)) \cong E''^1. \tag{3.2.2.3}$$

D'autre part, nous avons les identifications évidentes pour tout $k \geq 0$:

$$(E'^0_{k,*}, d'^0) = \bigotimes^k (V^\vee, d_V^\vee)$$

et

$$(E''^0_{k,*}, d''^0) = (W^\vee, d_W^\vee) \otimes \bigotimes^k (V^\vee, d_V^\vee)$$

qui donnent les isomorphismes :

$$T^k(H(V^\vee)) \cong E'^1_{k,*}$$

et

$$H(W^\vee) \otimes T^k(H(V^\vee)) \cong E''^1_{k,*}.$$

Ici, les parties linéaires des différentielles étant nulles, nous obtenons :

$$E''^1_{k,*} \cong T^k(V^\vee) = E'^0$$

et

$$E''^1_{k,*} \cong W^\vee \otimes T^k V^\vee = E''^0.$$

Il reste à observer que $d'^1 = d_2^\vee$.
En effet, $d_k : T^iV \to T^{i+k-1}V$ donc $d_k^\vee : T^{i+k-1}V^\vee \to T^iV^\vee$. (Si $f \in T^{i+k-1}V^\vee$, $d_k^\vee(f) = f \circ d_k$).
Ici $d_1 = 0$ implique $d_1^\vee = 0$. D'autre part, $d'^1 : T^pV^\vee \to T^{p-1}V^\vee$ est un quotient de $d^\vee$; ainsi, $d'^1 = d_2^\vee$. Nous obtenons donc $(E'^1, d'^1) \cong (TV^\vee, d_2^\vee)$.
D'où, d'après (3.2.1), $(TV, d_2) \cong B^\vee(H_*(\Omega X))$.
De même, on montre que $(TV \otimes W, d_2) \cong B^\vee(H_*(F), H_*(\Omega X))$.

Il reste à vérifier que l'isomorphisme annoncé respecte la bigraduation. Pour cela, rappelons les deux isomorphismes suivants([16] (Theorem V(i)) :

$$sH_+(\Omega X) \xrightarrow{\cong} H_*(V^\vee) = V^\vee$$

et

$$H_*(F) \xrightarrow{\cong} H_*(W^\vee) = W^\vee,$$

qui permettent d'écrire les identifications :

$$\oplus_{m\geq 0}\mathrm{Hom}^{p+q}_{B^\vee H_*(\Omega X)}(B^m(H_*(\Omega X),H_*(\Omega X))^\vee, B^{m+p}(H_*(F),H_*(\Omega X))^\vee)$$

$$\cong$$

$$\oplus_{m\geq 0}\mathrm{Hom}^{p+q}_{B^\vee H_*(\Omega X)}(T^m(sH_+(\Omega X)^\vee\otimes H^*(\Omega X),T^{m+p}(sH_+(\Omega X))^\vee\otimes H^*(F))$$

$$\cong$$

$$\oplus_{m\geq 0}\mathrm{Hom}_{(TV,d_2)}((T^mV\otimes(\mathbb{K}\oplus sV),\delta_2),(T^{m+p}V\otimes W,d_2)).$$

L'isomorphisme suivant est alors clair :

$$\mathcal{E}xt^{p,q}_{(TV,d_2)}(\mathbb{K},(TV\otimes W,d_2))\cong\mathcal{E}xt^{p,q}_{B^\vee(H_*(\Omega X))}(\mathbb{K},B^\vee(H_*(F),H_*(\Omega X))).$$

Il résulte du corollaire 3.1.5 et de 3.2.1 que :

$$E_2^{p,q}\cong\mathrm{Ext}^{p,q}_{H_*(\Omega X)}(H_*(F),H_*(\Omega X)).$$

D'où, d'après la définition 2.1.6,

Lemme 3.2.2.4 :

$$\mathrm{grade}(f)=\inf\{p|E_2^{p,q}\neq 0\}.$$

□

3.3 Conclusion.

3.3.1 Convergence de la suite spectrale.

Rappelons d'abord que si A est une ADG et que M et N sont deux A-MGD, on définit :

$$\mathcal{T}or^A(M,N)=H(P\otimes_A N,D),$$

où D est la différentielle donnée dans le paragraphe 1.0 et P une résolution semi-libre de M. Ce $\mathcal{T}or$ différentiel possède des propriétés semblables au $\mathcal{E}xt$ différentiel défini en 1.2.2.

Lemme 3.3.1.1 : *La suite spectrale définie en 3.2.1 converge.*

Démonstration : Nous utiliserons le cap-produit défini par :

$$\cap : C_{p+q}(X) \times C^p(X) \to C_q(X)$$

qui, pour $c \in C^p(X)$ et $z \in C_{p+q}(X)$ est défini par :

$$g(z \cap c) = c \cup g(z), \qquad \forall g \in C^q(X).$$

Nous avons alors la propriété [26] (24.20) : $\cap$ fait de C_*Y un C^*Y-module à droite. Ici, $Y \xrightarrow{f} X$ fait de C^*Y un C^*X-module à droite ; d'où :

$$C_*Y \text{ est un } C^*X\text{-module.}$$

D'autre part, avec les notations usuelles, il existe un isomorphisme [3] :

$$\mathcal{E}xt_A(M, N^\vee) \cong (\mathcal{T}or^A(M,N))^\vee.$$

Ici,

$$\mathcal{E}xt_{C^*X}(\mathbb{K}, C^*Y) \cong (\mathcal{T}or^{C^*X}(\mathbb{K}, C_*Y))^\vee.$$

Cet isomorphisme est équivalent à :

$$\mathcal{E}xt_{TV}(\mathbb{K}, TV \otimes W) \cong (\mathcal{T}or^{TV}(\mathbb{K}, TV^\vee \otimes W^\vee))^\vee.$$

Or, $V^\vee \cong sH_+(\Omega X)$ (cf 3.2.2) et

$$H_{n-1}(\Omega X) = (sH(\Omega X))_n,$$

d'où, comme X est 1-connexe,

$$(T^p(sH_+(\Omega X)) \otimes W^\vee)_k = 0 \quad \text{dès que } p > k.$$

Nous avions (cf 3.2.1) la filtration sur :

$$A = (\mathrm{Hom}_{TV}((TV \otimes (\mathbb{K} \oplus sV), \delta), (TV \otimes W, d), D) :$$

$$F^p(A) = \{f \in A | f(T^mV \otimes (\mathbb{K} \oplus sV)) \subset T^{\geq m+p}V \otimes W,\ m \geq 0\}$$

qui donne une filtration de

$$B = (TV \otimes (\mathbb{K} \oplus sV)) \otimes_{TV} (TV^\vee \otimes W^\vee) :$$

$$F_p(B) = (T^mV \otimes (\mathbb{K} \oplus sV)) \otimes_{TV} (T^{\geq m+p}V^\vee \otimes W^\vee).$$

La remarque précédente permet de conclure que cette filtration est bornée en chaque degré k :

$$B = F_{0,k} \supset F_{1,k-1} \supset ... \supset F_{l,k-l} = 0$$

dès que $l > k$. Ceci implique ([33]) que la suite spectrale converge.

□

3.3.2 Lecture de $e(f)$.

Rappelons que nous avons supposé $f^* \circ ev_X \neq 0$. D'après (1.2.2.3), ceci est équivalent à $f^* \circ ev_{TV} \neq 0$ dans le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}xt_{TV}(\mathbb{K}, TV) & \xrightarrow{\hat{f}} & \mathcal{E}xt_{TV}(\mathbb{K}, TV \otimes W) \\ {\scriptstyle ev_{TV}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle ev_{TV \otimes W}} \\ H^*(TV) & \xrightarrow{f^*} & H^*(TV \otimes W) \end{array}$$

Il existe donc une classe $[g] \neq 0$ dans $\mathcal{E}xt_{TV}(\mathbb{K}, TV)$ telle que, dans le diagramme commutatif suivant,

$$\begin{array}{ccc} [g] & \longrightarrow & [f \circ g] \\ \downarrow & & \downarrow \\ [g(1)] & \longrightarrow & [(f \circ g)(1)] \end{array}$$

$[g(1)] = [\beta]$ et $[(f \circ g)(1)] = [\alpha]$ soient non nulles.

Supposons maintenant que $\beta \in T^{\geq l}V$. Il vient alors immédiatement, puisque f est TV-linéaire : $\alpha \in T^{\geq l}V \otimes W$.

Il suffit alors d'utiliser la propriété 2.2.5 de l'invariant de Toomer de f pour conclure :

$$e(f) \geq l.$$

Remarquons enfin que $(f \circ g)(1) \in T^{\geq l}V \otimes W$ implique que $f \circ g$ représente une classe non nulle dans $E_\infty^{l,*}$ (i.e. $D(f \circ g) = 0$). $D(f \circ g) = 0$ implique $D_2^S(f \circ g) = 0$. D'où, $f \circ g$ "vit" dans $E_2^{l,*}$.
Ainsi, d'après (3.2.2.4),

$$e(f) \geq l \geq \text{grade}(f). \qquad \square$$

4 Exemples et applications.

4.1 Calculs dans le cas absolu.

Dans quelques exemples, nous utilisons les modèles de Sullivan définis dans [41]. Les propriétés classiques de ces modèles sont développées dans [28].

Exemple 4.1.1 : $\text{prof}(H_*(\Omega X)) < e(X)$.
Si $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $X = \mathbb{C}P^n$ admet pour modèle de Sullivan l'algèbre libre $(\Lambda(x,y),d) = (\Lambda V, d)$ avec $|x| = 2, |y| = 2n+1, dx = 0$ et $dy = x^{n+1}$.
$e(X)$ étant la longueur maximale d'un cocycle non trivial, nous obtenons :

$$e(X) = n.$$

D'autre part, d'après [7] (prop. 3.2),

$$\text{prof}(H_*(\Omega X)) = \dim V^{\text{impair}} = 1.$$

$\square$

Exemple 4.1.2 : $\text{prof}(H_*(\Omega X)) = e(X)$.
$\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $X = Sp(5)/SU(5)$ est de dimension 31 et admet pour modèle de Sullivan :

$$(\Lambda V, d) = (\Lambda(\beta_6, \beta_{10}, \gamma_{11}, \gamma_{15}, \gamma_{19}), d),$$

avec $d\beta_6 = d\beta_{10} = 0$, $d\gamma_{11} = \beta_6^2$, $d\gamma_{15} = \beta_6\beta_{10}$ et $d\gamma_{19} = \beta_{10}^2$.
Ceci implique ([7](prop. 3.2)),

$$\text{prof}(H_*(\Omega X)) = \dim V^{\text{impair}} = 3.$$

Pour le calcul de $e(X)$, il nous faut rappeler qu'une algèbre graduée H^* est dite *à dualité de Poincaré* si elle vérifie les conditions :

(i) $\dim H < \infty$. On notera alors $\text{fdim}\, H = n = \sup\{k | H^k \neq 0\}$, *la dimension formelle* de H.

(ii) $\dim H^n = 1$; $H^n = \omega\mathbb{K}$. ω est appelé *classe fondamentale.*

(iii) L'application $H^i \otimes H^{n-i} \to \mathbb{K}$ qui à $x \otimes y$ associe $\lambda_{x,y}$ tel que $xy = \lambda_{x,y}\omega$ est une forme bilinéaire non dégénérée.

Nous utilisons maintenant un théorème ([27]) qui affirme que si V et $H^*(\Lambda V, d)$ sont de dimensions finies, alors $H^*(\Lambda V, d)$ est une algèbre à dualité de Poincaré, puis un lemme de [6] selon lequel $e(X)$ peut être lu en longueur des mots sur la classe fondamentale (ici en degré 11+15+19-5-9=31 ([9])).

Un calcul montre que $\gamma_{11}\beta_{10}^2 - \gamma_{15}\beta_6\beta_{10}$ représente une classe non nulle dans $H^*(X)$; d'où :

$$e(Sp(5)/SU(5)) = 3.$$

□

Remarque 4.1.3 : Nous noterons $\mathrm{cup}_{\mathbb{K}}(X)$ la *cup-longueur* de X (i.e. la longueur maximale d'un cup-produit non nul dans $H^*(X, \mathbb{K})$). [2](lemma 2.7) permet d'affirmer que

$$\mathrm{cup}_{\mathbb{K}}(X) \leq e_{\mathbb{K}}(X);$$

pourtant, on ne peut espérer améliorer le théorème A en

$$\mathrm{prof}(H_*(\Omega X; \mathbb{K})) \leq \mathrm{cup}_{\mathbb{K}}(X)$$

puisque $\mathrm{cup}_{\mathbb{Q}}(Sp(5)/SU(5)) = 2 < \mathrm{prof}(H_*(\Omega X; \mathbb{Q})) = 3$.

En effet, il suffit de calculer la cohomologie de $Sp(5)/SU(5)$ qui est définie par générateurs et relations par :

$$H = \frac{\Lambda(x, y, a, b)}{(x^2, y^2, xy, ax, ay + bx, by, ba)}$$

avec $|x| = 6$, $|y| = 10$, $|a| = 21$ et $|b| = 25$.

Cependant, l'inégalité "prof $\leq$ cup" est vraie pour les espaces formels ; en effet, ils vérifient "cup $= e$" (une algèbre différentielle graduée commutative (au sens gradué) (A, d) est dite formelle si (A, d) et $(H(A, d), 0)$ ont même modèle minimal).

□

Lemme 4.1.4 : *Soit X et Y deux espaces topologiques 1-connexes. Alors*

$$\mathrm{prof}(X \vee Y) = 1.$$

Démonstration : $H_*(\Omega(X \vee Y)) = H_*(\Omega X) \sqcup H_*(\Omega Y) = A \sqcup B$. En effet, en théorie des modèles d'Adams Hilton ([1]),

$$(T(V \oplus W), D) = (TV, d) \sqcup (TW, d').$$

Puis, d'après [31], si A et B sont des $\mathbb{K}$-algèbres connexes non triviales, nous avons la courte suite exacte de $A \sqcup B$-modules :

$$0 \to A \sqcup B \to (A \sqcup B) \otimes_A \mathbb{K} \oplus (A \sqcup B) \otimes_B \mathbb{K} \to \mathbb{K} \to 0$$

qui fait apparaître un élément non nul dans

$$\mathrm{Ext}^{1,0}_{H_*(\Omega(X \vee Y))}(\mathbb{K}, H_*(\Omega(X \vee Y))).$$

([21]).

$\square$

4.2 Calculs dans le cas relatif.

Exemple 4.2.1 : grade$(f) = e(f) = 0$.

Soit une application continue $f : Y \to X$ de fibre homotopique F. Si f est homotope à l'application nulle, alors

$$e(f) = 0$$

et F a le type d'homotopie de $\Omega X \times Y$. Par suite, $H_*(F)$ est un $H_*(\Omega X)$-module libre, d'où :

$$\mathrm{grade}(f) = 0.$$

$\square$

Exemple 4.2.2 : Condition nécessaire pour qu'une application $Y \xrightarrow{f} X$ d'évaluation $ev_f \neq 0$ admette une fibre homotopique finie.

Soit $f : Y \to X$ de fibre homotopique F. Supposons que $\dim H_*(F; \mathbb{K}) < \infty$ et $ev_f \neq 0$; alors (2.1.9)

$$\mathrm{grade}(f) = \mathrm{prof}(H_*(\Omega X)).$$

D'où :

$$\text{prof}(H_*(\Omega X)) \leq e(f) \leq \min(e(X), e(Y)).$$

□

Exemple 4.2.3 : grade$(f) = 0 < 1 = e(f)$.
$\mathbb{K} = \mathbb{F}_s$. Considérons

$$S^m\{p^r\} \to S^m \overset{\times p^r}{\to} S^m,$$

où $S^m\{p^r\}$ désigne la fibre homotopique de $S^m \overset{\times p^r}{\to} S^m$.
D'après [4](lemma 11.3), $H_*(S^m\{p^r\}, \mathbb{F}_s)$ est un $H_*(\Omega S^m, \mathbb{F}_s)$-module libre engendré par 1 et v avec $|v| = 2n+1$.
Ceci implique (2.1.9) :

$$\text{grade}_{H_*(\Omega S^m)}(H_*(S^m\{p^r\})) = 0.$$

D'autre part, f étant non nulle en cohomologie, nous obtenons d'après 2.2.7 :

$$0 < e(f) = e(S^m) = 1.$$

□

Exemple 4.2.4 : grade$(f) = 0 < r = e(f)$.
$\mathbb{K} = \mathbb{Q}$. Soient X un espace 1-connexe et $\alpha \in H_{2n}(X, \mathbb{Q})$. Alors, d'après la théorie de l'obstruction, $\alpha = [f]$, avec $f : X \to K(\mathbb{Q}, 2n)$. En outre, $H^*(K(\mathbb{Q}, 2n)) = \mathbb{K}[y]$ avec $|y| = 2n$, $f^*(y) = \alpha$. Supposons que $\alpha^{r+1} = 0$ et $\alpha^r \neq 0$, alors

$$e(f) = r.$$

Il nous faut maintenant rappeler que, si X n'a qu'un nombre fini de groupes d'homotopie non nuls, alors ΩX est un système de Postnikov stable à r étages ([38], [24]). En outre, si ΩX est un système de Postnikov stable à r étages, alors l'algèbre de Hopf $H_*(\Omega X)$ est p-résoluble ([38]) ; puis, d'après [24](lemma 3), tout module M de grade fini sur une algèbre de Hopf p-résoluble G a un grade nul.

Appliquons ceci à $f : X \to K(\mathbb{Q}, 2n)$. Nous obtenons : grade$(f) \leq e(f) = r < \infty$ implique :

$$\text{grade}(f) = 0.$$

$\square$

Exemple 4.2.5 : grade(f) fini et $e(f) = \infty$.

Soient $\mathbb{K}$ un corps, G un groupe topologique et $P \xrightarrow{p} B$ un G-fibré principal. Alors P s'identifie à la fibre homotopique de l'application classifiante

$$B \xrightarrow{k_G} BG$$

et, de plus, l'opération d'holonomie de $\Omega BG = G$ s'identifie à l'action (libre) de G sur P. Il en résulte que dans tous les cas où il existe une section de $P \xrightarrow{p} B$,

$$\text{grade}(k_G) = 0.$$

D'autre part,

$$H^*(BG) = \mathbb{K}[c_1, ..., c_r] \xrightarrow{k_G^*} H^*(B),$$

avec $|c_i|$ pair. Im k_G^* est appelé anneau caractéristique du fibré. Remarquons qu'on peut écrire $H_*(BG) = H_*((\Lambda(c_1, ..., c_r), 0)$ et que tous les cocycles sont envoyés sur des cocycles par k_G^*. Ceci entraîne :

$$e(k_G) = \text{cup}(\text{Im }(k_G^*)) = \text{nil }(\text{Im}_+(k_G^*)) \leq \text{cup}(H^*(B)).$$

(Im_+ désigne l'idéal d'augmentation).

En particulier, si G est un groupe de Lie compact connexe de tore maximal T, nous avons la fibration :

$$G/T \to BT \xrightarrow{f} BG$$

où $f = Bi$ ($i \ : T \hookrightarrow G$) on a $e(f) = \infty$. En effet,

(1) $H^*(BT) = \mathbb{K}[t_1, ...t_r]$, avec r =dim(T) et $|t_i| = 2$.

(2) $H^*(BG) = (\mathbb{K}[t_1, ..., t_r])^{W(G)} = \mathbb{K}[c_1, ..., c_r]$
   $((\mathbb{K}[t_1, ..., t_r])^{W(G)}$ désigne les invariants par le groupe de Weyl).

En outre, Im $f^* = \mathbb{K}[c_1, ...c_r]$, d'où :

$$e(f) = \infty.$$

D'autre part, $G = \Omega BG$ opère sur G/T par translation à gauche et, comme dim $H_*(G/T) < \infty$,

$$\text{grade}(f) = \text{prof}(H_*(\Omega BG)) = \text{prof}(\Lambda P_G) = \dim P_G$$

(P_G désigne l'espace des primitifs de G).

□

Exemple 4.2.6 : Fixons un corps $\mathbb{K}$ et considérons la projection :

$$A \vee B \xrightarrow{p} A.$$

Dans la suite, nous travaillerons à homotopie près et les signes d'égalité seront souvent utilisés pour indiquer des équivalences d'homotopie. L'application p est définie par

$$p(x) = x \text{ si } x \in A,$$
$$p(x) = * \text{ si } x \in B.$$

Nous pouvons alors calculer la fibre homotopique F :

$$F = \{(x, \gamma) | x \in A \vee B, \gamma \in PA, \gamma(0) = p(x), \gamma(1) = *\}.$$

D'où, $F = PA \cup T$ avec

$$\begin{aligned} T &= \{(b, \omega), \omega \in \Omega A, b \in B\} \\ &= B \times \Omega A. \end{aligned}$$

puis, $F = PA \cup (B \times \Omega A)$.
Avant de contracter PA au point base, remarquons que $PA \cap (B \times \Omega A) = \{*\} \times \Omega A$. Ceci implique :

$$F = \frac{B \times \Omega A}{\{*\} \times \Omega A}.$$

L'holonomie sur la fibre homotopique est induite par la composition des lacets (2.1.1) :

$$\frac{B \times \Omega A}{\{*\} \times \Omega A} \times \Omega A \xrightarrow{\nu} \frac{B \times \Omega A}{\{*\} \times \Omega A}.$$

Pour calculer le grade de $H_*(F)$, remarquons que le connectant de la suite de Puppe :

$$\partial = \nu|_{\{*\}\times\Omega A} : \{*\} \times \Omega A \to F$$

est nul. Ceci implique (2.1.11) :

$$\mathrm{grade}_{H_*(\Omega A)}(H_*(F)) = \inf(\mathrm{prof}(H_*(\Omega A)), \mathrm{grade}_{H_*(\Omega A)}(H_+(F)).$$

Dans le cas particulier où $B = \vee_\alpha S^{n_\alpha}$, nous sommes dans le cas d'un attachement cellulaire simple ; Y. Félix et J.-C. Thomas ([23]) ont montré qu'alors $H_+(F)$ est libre. Ainsi, d'après 2.1.9,

$$\mathrm{grade}(p) = 0.$$

□

Exemple 4.2.7 : Soit F, la fibre homotopique de l'inclusion :

$$X \vee Y \overset{i}{\hookrightarrow} X \times Y.$$

Alors, homotopiquement,

$$\begin{array}{rcl} F & = & \{(u, (\gamma_X, \gamma_Y)) | \gamma_X \in PX, \gamma_Y \in PY, u \in X \vee Y, (\gamma_X, \gamma_Y)(0) = u\} \\ & = & (PX \times \Omega Y) \cup_{\Omega X \times \Omega Y} (\Omega X \times PY) \\ & = & (C\Omega X \times \Omega Y) \cup_{\Omega X \times \Omega Y} (\Omega X \times C\Omega Y) \\ & = & \Omega X * \Omega Y \\ & = & \Sigma(\Omega X \wedge \Omega Y) \end{array}$$

(d'après un résultat de Ganea ([25], [43])).
Remarquons que, de plus, l'opération d'holonomie :

$$(\Omega X * \Omega Y) \times (\Omega X \times Y) \to \Omega X * \Omega Y$$

est la composition des lacets sur chacun des facteurs du joint (2.1.1). Il résulte alors de notre théorème que, si $ev_i \neq 0$,

$$\mathrm{grade}_{H_*(\Omega(X\times Y))}(H_*(\Sigma(\Omega X \wedge \Omega Y))) \leq \inf(e(X), e(Y)).$$

$\square$

4.3 Croissance du module d'holonomie.

Avant de décrire cette prochaine application, nous donnons brièvement quelques définitions.

Définition 4.3.1 : Un CW complexe simplement connexe X est dit $\mathbb{K}$-*elliptique* s'il satisfait les conditions suivantes :

(i) $\mathrm{cat}(X) < \infty$.

(ii) Chaque $H_i(X;\mathbb{K})$ est finiment engendré.

(iii) Il existe un entier N et une constante C tels que

$$\dim H_r(\Omega X;\mathbb{K}) \leq Cr^N, \qquad r = 1, 2, \ldots$$

Remarque 4.3.2 : A. Murillo ([39]) a démontré que si X est un espace tel que $\dim(\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}) < \infty$; alors, X est $\mathbb{Q}$-elliptique si et seulement si $ev_X \neq 0$.

Définition 4.3.3 : Soit un $\mathbb{K}$-EVG $E = \oplus_i E_i$, on dit que E a une *croissance polynomiale égale à* r et on note $\mathrm{pg}(E) = r$ s'il existe des constantes c et C telles que :

$$cn^r \leq \sum_{i=0}^{n} \dim E_i \leq Cn^r.$$

Définition 4.3.4 : Si A est une ADG qui possède une croissance polynomiale (en tant qu'EVG), et si M est un A-MGD, on appelle *croissance* de M et on note

$$\mathrm{cr}_A(M) = \sup_{\alpha \in M} \mathrm{pg}(A\alpha).$$

Nous pouvons maintenant énoncer la

Proposition 4.3.5 : *Si $f\ : Y \to X$ est une application continue entre espaces topologiques 1-connexes de fibre homotopique F avec X elliptique d'évaluation non nulle, alors, pour tout corps de coefficients $\mathbb{K}$,*

1) $\mathrm{pg}(H_*(\Omega X)) - \mathrm{cr}_{H_*(\Omega X)}(H_*(F)) \leq e(X)$.

2) Si de plus $H_*(F)$ est un $H_*(\Omega X)$-module finiment engendré alors

$$\mathrm{pg}(H_*(F)) + \mathrm{grade}_{H_*(\Omega X)}(H_*(F)) \leq e(X).$$

Démonstration : La condition X elliptique entraîne que $H_*(\Omega X)$ admet une croissance polynomiale. Nous obtenons donc, d'après [14](lemma 4.3),

$$\mathrm{prof}(H_*(\Omega X)) - \mathrm{cr}(H_*(F)) \leq \mathrm{grade}(f) \leq \mathrm{prof}(H_*(\Omega X)).$$

L'égalité $\mathrm{pg}(H_*(\Omega X)) = \mathrm{prof}(H_*(\Omega X))$ ([11]) et la version absolue du théorème I permettent de conclure la première partie de la proposition.
La deuxième affirmation est immédiate si on remarque ([14](Theorem C)) que

$$\mathrm{pg}(H_*(F)) + \mathrm{grade}_{H_*(\Omega X)}(H_*(F)) = \mathrm{prof}(H_*(\Omega X)).$$

En effet, il suffit encore d'appliquer le cas absolu du théorème I pour obtenir l'inégalité annoncée.

$\square$

4.4 Fibre homotopique d'un attachement cellulaire simple.

Lemme 4.4.1 : *Soit $Y \xrightarrow{f} Y \cup_\phi (\vee_\alpha e^{n_\alpha}) = X$ un attachement cellulaire de fibre homotopique F. Nous avons le résultat : Si* $\mathrm{prof}(H_*(\Omega X)) \geq 2$ ou $\mathrm{prof}(H_*(\Omega X)) = 0$ *alors* $\mathrm{grade}(f) = 0$.

Démonstration : Nous noterons $H_*(F) = H$ et $H_*(\Omega X) = G$. Pour des raisons de degré, l'homologie réduite de F, notée H_+ est un sous-G-module de H et nous pouvons former la courte suite exacte de G-modules :

$$0 \to H_+ \to H \to H/H_+ \to 0$$

($H/H_+ = \mathbb{K}$ est un G-module trivial).
Cette courte suite exacte donne naissance à une longue suite exacte de cohomologie :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Ext}_G^{n-1}(H_+,G) & \longleftarrow & \dots & & \\
\downarrow & & & & \\
\mathrm{Ext}_G^n(\mathbb{K},G) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_G^n(H,G) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_G^n(H_+,G) \\
& & & & \downarrow \\
& & \dots & \longleftarrow & \mathrm{Ext}_G^{n+1}(\mathbb{K},G)
\end{array}$$

D'autre part, d'après [23], $H_+ = G \otimes V$ est un module libre donc (2.1.9)

$$\mathrm{Ext}_G^n(H_+,G) = 0, \quad n > 0,$$

$$\mathrm{Ext}_G^0(H_+,G) \cong \mathrm{Hom}_G(H_+,G) \cong \mathrm{Hom}(V,G).$$

D'où, si $n \geq 2, \mathrm{Ext}_G^n(\mathbb{K},G) \cong \mathrm{Ext}_G^n(H,G)$.
Étudions le cas $n = 1$.

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Ext}_G^0(H_+,G) & \longleftarrow & \mathrm{Ext}_G^0(H,G) & \longleftarrow & \mathrm{Ext}_G^0(\mathbb{K},G) & \longleftarrow & 0 \\
\downarrow & & & & & & \\
\mathrm{Ext}_G^1(\mathbb{K},G) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_G^1(H,G) & \longrightarrow & 0 & &
\end{array}$$

Nous obtenons donc, si $\mathrm{prof}(G) \geq 2$, les isomorphismes

$$\mathrm{Ext}_G^0(H,G) \cong \mathrm{Ext}_G^0(H_+,G) \cong \mathrm{Hom}(V,G).$$

Or $\mathrm{Hom}(V,G) \neq 0$, donc

$$\mathrm{grade}_G H = 0.$$

Si $\mathrm{prof}(G) = 1$, l'observation de la suite spectrale ne permet pas de conclure dans le cas général. Cependant, l'indétermination peut parfois être levée "à la main" (cf exemple 4.4.2).
Enfin, si $\mathrm{prof}(G) = 0$, Il suffit de considérer l'injection

$$0 \to Ext_G^0(\mathbb{K},G) \neq 0 \to \mathrm{Ext}_G^0(H,G) \to \dots$$

pour conclure que $\mathrm{Ext}_G^0(H,G) \neq 0$ et donc

$$\mathrm{grade}_G H = 0.$$

□

Exemple 4.4.2 : $\mathrm{grade}(f) = 0 < e(f) = 1$.

Soit $\mathbb{K}$ un corps quelconque. Considérons

$$F \to P^n(p^r) = S^{n-1} \cup_{p^r} e^n \xrightarrow{f} S^n$$

où $f =$ "pinching map" ([4]). Nous avons encore :

$$0 < e(f) \leq e(S^m) = 1.$$

Ici, $G = H_*(\Omega S^n) = T(u)$ avec $|u| = n - 1$. On montre classiquement que prof$(G) = 1$. Nous sommes donc dans le cas "douteux" du lemme précédent. Pourtant, d'après [4], il existe une courte suite exacte :

$$0 \to H_*(\Omega S^n) \to H_*(F) \to \mathbb{K} \to 0$$

qui donne une longue suite exacte de cohomologie :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Ext}^0_G(G,G) & \xleftarrow{i} & \mathrm{Ext}^0_G(H,G) & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & \ldots \\ \partial\downarrow & & & & & & \\ \mathrm{Ext}^1_G(\mathbb{K},G) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1_G(H,G) & \longrightarrow & \ldots & & \end{array}$$

avec $\mathrm{Ext}^0_G(G,G) \cong \mathrm{Hom}_G(G,G) \cong G$.
Nous cherchons maintenant à calculer explicitement $\mathrm{Ext}^1_G(\mathbb{K},G)$ grâce à la résolution de $\mathbb{K}$:

$$0 \to T(u) \otimes su \to T(u) \to \mathbb{K} \to 0.$$

Un simple calcul montre que toutes les applications $T(u)$-linéaires f de $T(u) \otimes su$ dans $T(u)$ sont des cocycles et que f est un cobord s'il existe un élément g dans $T(u)$ tel que $u.g = f(su)$. Or nous pouvons toujours écrire $f(su) = u.g$ sauf si $f(su) = 1$. D'où : $\mathrm{Ext}^1_G(\mathbb{K},G) \cong \{su\}$.
Ceci permet de décrire l'application ∂ : à $g \in G \cong \mathrm{Ext}^0_G(G,G)$, on associe 0 si $g \in T^+(u)$ et su si $g = 1$.
Ceci implique Im $i =$ ker $\partial = T^+(u) \neq 0$. Or, i étant injective, $\mathrm{Ext}^0_G(H,G) \neq 0$ et

$$\mathrm{grade}_G H = 0.$$

□

4.5 Calculs et résultats utilisant la structure de coalgèbre.

Pour les notions de base sur les algèbres de Hopf, nous utiliserons sans référence explicite les articles [36] et [38].

Plaçons nous sur un corps quelconque $\mathbb{K}$. Nous pouvons affirmer que, l'opération d'holonomie

$$\nu \ : F \times \Omega X \to F$$

provenant de la géométrie ; l'application induite en homologie :

$$\nu_* \ : H_*(F) \otimes H_*(\Omega X) \to H_*(F)$$

est un homomorphisme de coalgèbres et donc préserve les primitifs.
Or,

$$P(H_*(F) \otimes H_*(\Omega X)) = PH_*(F) \oplus PH_*(\Omega X),$$

donc,

$$\begin{cases} \nu(\mathbb{K} \otimes PH_*(\Omega X)) & \subset & PH_*(F), \\ \nu(PH_*(F) \otimes \mathbb{K}) & \subset & PH_*(F). \end{cases}$$

Considérons la restriction de ν_* à $\mathbb{K} \otimes H_*(\Omega X)$:

$$\partial_* \ : H_*(\Omega X) \to H_*(F)$$

qui est un homomorphisme de degré 0 respectant les primitifs.
Si nous supposons en outre que dim $PH_*(F) < \infty$, alors il existe un entier n tel que

$$\partial_*((PH_*(\Omega X))_{>n}) = 0.$$

Donc, si $\alpha \in (PH_*(\Omega X))_{>n}$, alors $\nu(\alpha \otimes 1) = 0$. Ceci entraîne le

Lemme 4.5.1 : *Si $\alpha \in (PH_*(\Omega X))_{>n}$ et $x \in PH_*(F)$ alors $\nu(\alpha \otimes x) \in PH_*(F)$.*

Démonstration : Il suffit d'écrire que la codiagonale est un morphisme de coalgèbres (nous noterons toutes les codiagonales Δ).

$$\Delta(\nu(\alpha \otimes x)) = (\nu \otimes \nu) \circ T \circ (\Delta \otimes \Delta)(\alpha \otimes x).$$

(où $T(a \otimes b) = (-1)^{|a||b|} b \otimes a$).
Puis, α et x étant primitifs,

$$\begin{aligned}
\Delta(\nu(\alpha\otimes x)) &= (\nu\otimes\nu)\circ T((\alpha\otimes 1+1\otimes\alpha)\otimes(x\otimes 1+1\otimes x)) \\
&= (\nu\otimes\nu)(\alpha\otimes x\otimes 1\otimes 1+\alpha\otimes 1\otimes 1\otimes x \\
&\quad +(-1)^{|\alpha||x|}1\otimes x\otimes\alpha\otimes 1+1\otimes 1\otimes\alpha\otimes x) \\
&= \nu(\alpha\otimes x)\otimes 1+1\otimes\nu(\alpha\otimes x),
\end{aligned}$$

puisque $\alpha \in (PH_*(\Omega X))_{>n}$

$\square$

Notons I, l'idéal engendré par $(PH_*(\Omega X))_{>n}$ dans $H_*(\Omega X)$. Il est facile de voir que I est un idéal de Hopf i.e. :

$$\begin{cases} \mu(I\otimes A+A\otimes I)\subset I \\ \Delta(I)\subset I\otimes A+A\otimes I \end{cases}$$

($A = H_*(\Omega X)$; μ désigne la multiplication dans l'algèbre A).
Nous pouvons donc considérer l'homomorphisme d'algèbres de Hopf suivant :

$$H_*(\Omega X) \xrightarrow{p} H_*(\Omega X)/I.$$

Soit H le Hopf noyau de p défini par :

$$H = \{\alpha \in H_*(\Omega X) | \Delta\alpha - \alpha\otimes 1 \in H_*(\Omega X)\otimes I\} \ ;$$

rappelons que H est une sous algèbre de Hopf normale de $H_*(\Omega X) = G$ et qu'une sous algèbre normale H d'une algèbre de Hopf G vérifie $H_+G = GH_+$ ([36]).
Notons $G//H = G/I$. Alors :

(i) $G \cong H \otimes G//H$ en tant que H-module à gauche et $G//H$-module à droite ([36]).

(ii) H est primitivement engendré ([29]).

(iii) $PH_*(F)$ est un H-module.

Nous avions supposé que dim $PH_*(F) < \infty$ d'où :

$$\text{grade}_H(PH_*(F)) = \text{prof}(H);$$

enfin, d'après [15], si G est elliptique,

$$\text{prof}(G) = \text{prof}(H) + \text{prof}(G//H).$$

Ceci entraîne la :

Proposition 4.5.2 : *Soit $Y \to X$, une application continue de fibre homotopique F telle que :*

(i) $G = H_*(\Omega X)$ *est elliptique,*

(ii) dim $PH_*(F) < \infty$,

alors, si H désigne le Hopf noyau défini précédemment,

$$\text{grade}_H(PH_*(F)) = \text{prof}(H) = \text{prof}(G) - \text{prof}(G//H).$$

$\square$

Supposons maintenant que G est une algèbre de Hopf graduée connexe et que H est une sous algèbre de Hopf normale ; alors $G//H$ est une algèbre de Hopf. Sous ces hypothèses, nous prouverons la

Proposition 4.5.3 : *Si*

(i) $G//H = \mathbb{K}[x]$,

(ii) M est un G-module sur lequel x opère librement ($M \xrightarrow{\times x} M$ est injective),

alors

$$\text{grade}_G(M) \geq \text{prof}(H)$$

Démonstration : Considérons la courte suite exacte d'algèbres de Hopf ([36]) :

$$H \to G \to G//H$$

à laquelle on associe classiquement la suite spectrale de Hoschild-Serre :

$$E^2_{p,q} = \mathrm{Tor}_p^{G//H}(\mathbb{K}, \mathrm{Tor}_q^H(M, G^\vee)) \Longrightarrow \mathrm{Tor}^G_{p+q}(M, G^\vee).$$

D'autre part, $G//H = \mathbb{K}[x]$ opèrant librement sur M, il existe un isomorphisme :

$$\mathrm{Tor}_p^{G//H}(\mathbb{K}, \mathrm{Tor}_q^H(M, G^\vee)) \cong \mathrm{Tor}_p^{G//H}(M, \mathrm{Tor}_q^H(\mathbb{K}, G^\vee)).$$

Alors d'après 2.1.9,

$$\mathrm{Tor}_p^{G//H}(M, \mathrm{Tor}_q^H(\mathbb{K}, G^\vee)) = 0 \quad \text{si } p > 0,$$

et $E^2_{0,q} = E^\infty_{0,q}$. Il en résulte que :

$$\begin{aligned} \mathrm{Tor}_q^G(M, G^\vee) &= M \otimes_{G//H} \mathrm{Tor}_q^H(\mathbb{K}, G^\vee) \\ &= M \otimes_{G//H} \mathrm{Tor}_q^H(\mathbb{K}, (H \otimes G//H)^\vee) \end{aligned}$$

puis, $G//H$ étant de type fini, $(H \otimes G//H)^\vee = H^\vee \otimes (G//H)^\vee$. Enfin, H opère trivialement sur $G//H$ d'où :

$$\mathrm{Tor}_q^G(M, G^\vee) = M \otimes_{G//H} \mathrm{Tor}_q^H(\mathbb{K}, H^\vee) \otimes (G//H)^\vee,$$

et

$$\mathrm{grade}_G(M) \geq \mathrm{prof}(H).$$

□

Nous proposons maintenant une application de ce résultat qui permet d'obtenir des grades arbitrairement grands.

Exemple 4.5.4 : Plaçons nous sur un corps $\mathbb{K}$ fixé. Soit F la fibre homotopique de l'inclusion :

$$X \overset{i}{\hookrightarrow} X \times Y.$$

Alors, homotopiquement,

$$\begin{aligned} F &= \{(x, (\gamma_X, \gamma_Y) = \gamma) | x \in X, \gamma_X \in PX, \gamma_Y \in PY, \gamma(0) = x, \gamma(1) = *\} \\ &= PX \times \Omega Y \\ &= \Omega Y \end{aligned}$$

Nous pouvons alors identifier l'opération d'holonomie :

$$F \times \Omega(X \times Y) \to F$$

à

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \Omega Y \times (\Omega X \times \Omega Y) & \longrightarrow & F \\ (\omega, (\omega_X, \omega_Y)) & \longmapsto & \omega * \omega_Y \end{array} \right.$$

En effet, d'après 2.1.4, la "vraie" holonomie est :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} (X \times_i P(X \times Y)) \times \Omega(X \times Y) & \longrightarrow & (X \times_i P(X \times Y)) \\ ((x, (\gamma_X, \gamma_Y)), (\omega_X, \omega_Y)) & \longmapsto & (x, (\gamma_X * \omega_X, \gamma_Y * \omega_Y)) \end{array} \right.$$

Si nous posons $G = H_*(\Omega(X \times Y)) = H_*(\Omega X) \otimes H_*(\Omega Y)$, $M = H_*(F)$ et $H = H_*(\Omega X)$ avec $Y = S^3$, alors :

$$\begin{aligned} G &= H \otimes H_*(\Omega S^3) \\ &= H \otimes T(u) \\ &= H \otimes \mathbb{K}(u), \end{aligned}$$

(avec $|u| = 2$).
Il est alors clair que u opère librement sur $M = H_*(F) = H_*(\Omega Y) = \mathbb{K}(u)$ puisque

$$\left\{ \begin{array}{ccc} H_*(\Omega Y) \otimes H_*(G) & \longrightarrow & H_*(\Omega Y) \\ (u^k, \beta \otimes u^l) & \longmapsto & u^{k+l} \end{array} \right.$$

Il résulte donc de la proposition précédente que :

$$\mathrm{grade}_{H_*(\Omega(X \times Y))} H_*(F) \geq \mathrm{prof}(H_*(\Omega X)).$$

Si nous supposons en outre que $X = S^5 \times ... \times S^5$ (produit de n sphères), alors, $\mathrm{prof}(H_*(\Omega X)) = n = e(X)$. Or, $ev_i = i^* \circ ev_{X \times Y} \neq 0$; donc :

$$\mathrm{prof}(H_*(\Omega X)) \leq \mathrm{grade}(i) \leq e(i) \leq e(X),$$

d'où :

$$\mathrm{grade}(i) = e(i) = n.$$

□

Avant d'énoncer la dernière proposition, rappelons trois définitions :

Définition 4.5.5 : La *dimension globale* d'une ADG A est définie par :

$$\text{gldim } A = \sup\{k | \text{Ext}_A^{k,*}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) \neq 0\}.$$

Soit B^* une ADG de T-modèle (TV, d). Considérons un modèle libre de la projection naturelle p :

$$\begin{array}{ccc} TV & \xrightarrow{j} & TV \sqcup TW \\ & \overset{p}{\searrow} & \downarrow \simeq \\ & & TV/T^{>m}V \end{array}$$

Définition 4.5.6 : [30] M-cat(B) est le plus petit entier m tel que j admette une rétraction de TV-module à gauche. Si X est un espace topologique, on notera M-cat(X)=M-cat$(C^*(X))$.

Dans la preuve de la proposition suivante, nous utiliserons aussi la notion de *produit tensoriel complété* qui se définit comme suit :

Définition 4.5.7 : $(\text{Hom}(M, N)\hat{\otimes}P)^i = \prod_s \oplus_t \text{Hom}(M^s, N^{s+i-t}) \otimes P^t$.

Proposition 4.5.8 : *Si $f \ : Y \to X$ est une application continue entre espaces topologiques 1-connexes de fibre homotopique F avec*

1) $(\Omega f)_* \ : H_*(\Omega Y) \to H_*(\Omega X)$ est injective,

2) $ev_f \neq 0$,

alors

$$\text{grade}_{H_*(\Omega X)}(H_*(F)) = \text{prof}(H_*(\Omega X)) \leq e(f)$$

En particulier, si $\text{prof}(H_*(\Omega Y)) = \text{gldim}(H_*(\Omega Y))$ *alors on obtient un "pseudo mapping theorem" :*

$$\text{M-cat}(Y) \leq e(X).$$

Démonstration : La condition (1) implique que la suite spectrale de Serre de la fibration

$$\Omega Y \to \Omega X \to F$$

dégénère au terme E^2 ([40]) d'où

$$H_*(\Omega X) = H_*(\Omega Y) \otimes H_*(F) \text{ et } H_*(F) = \mathbb{K} \otimes_{H_*(\Omega Y)} H_*(\Omega X).$$

Or, $G = H_*(\Omega X)$ est un $H = H_*(\Omega Y)$-module libre et donc on a les isomorphismes de coalgèbres graduées :

$$H_*(F) \cong \mathbb{K} \otimes_H G \cong G//H.$$

Donc, si $P_* \xrightarrow{\simeq} \mathbb{K}$ est une résolution du corps $\mathbb{K}$ par des H-modules libres (à droite) alors $P_* \otimes_H G \xrightarrow{\simeq} \mathbb{K} \otimes_H G = G//H$ est une résolution de $G//H$ par des G-modules libres (à droite). On en déduit les isomorphismes d'espaces vectoriels gradués :

$$\mathrm{Ext}_G(G//H, G) \cong \mathrm{Ext}_H(\mathbb{K}, G) \cong \mathrm{Ext}_H(\mathbb{K}, H)\hat{\otimes} G//H.$$

(Ils résultent de l'isomorphisme $\mathrm{Hom}_G(P \otimes_H G, -) \cong \mathrm{Hom}_H(P, -)$ et de la courte suite exacte d'algèbres de Hopf $H \to G \to G//H$.)
Donc,

$$\mathrm{grade}_G(G//H) = \mathrm{prof}(H).$$

Or, d'après notre théorème,

$$\mathrm{prof}(H) \leq e(f).$$

Ceci démontre la première assertion.

Si on suppose en outre que $\mathrm{prof}(H_*(\Omega Y)) = \mathrm{gldim}(H_*(\Omega Y))$, alors, d'après [8](theorem A) on a que

$$\mathrm{prof}(H_*(\Omega Y)) = \text{M-cat}(Y),$$

d'où la dernière partie de la proposition.

$\square$

Bibliographie

[1] J. F. ADAMS and P. J. HILTON, On the chain algebra of a loop space, Comment. Math. Helvetici **30** (1956), pp. 305-330.

[2] L. BISIAUX, Depth and Toomer's invariant, *Soumis pour publication.*

[3] CARTAN EILENBERG, Homological algebra, *Princeton Mathematical Series*, 19 (1993).

[4] F. R. COHEN, J. C. MOORE and J. A. NEISENDORFER, Torsion in homotopy groups, *Annals of Math.* (2) **109** (1979), pp. 121-168.

[5] J.-P. DOERAENE, Type d'homotopie mod p des espaces de Ganea, *Séminaire de Mathématique (N.S.), Université Catholique de Louvain-La-Neuve,* Rapport **116** (1987), pp. 147-172.

[6] Y. FÉLIX and S. HALPERIN, Rational L.-S. category and its applications, *Trans. Amer. Math. Soc.* **273** (1982), pp. 1-37.

[7] Y. FÉLIX, S. HALPERIN, C. JACOBSSON, C. LÖFWALL and J.-C. THOMAS, The radical of the homotopy Lie algebra, *Amer. J. of Math.* **110** (1988), pp.301-322.

[8] Y. FÉLIX, S. HALPERIN, J.-M. LEMAIRE and J.-C. THOMAS, Mod p loop space homology, *Inventiones Math.* **95** (1989), pp. 247-262.

[9] Y. FÉLIX, S. HALPERIN and J.-C. THOMAS,Gorenstein spaces, *Advances in Math.* **71** (1988), pp.92-112.

[10] Y .FÉLIX, S. HALPERIN and J.-C. THOMAS, LS catégorie et suite spectrale de Milnor-Moore (une nuit dans le train), *Bull. Soc. Math. France* **111** (1983), pp. 89-96.

[11] Y. FÉLIX, S. HALPERIN and J.-C. THOMAS, Hopf algebras of polynomial growth, *J. of Algebra* **125** (1989), pp.408-417.

[12] Y. FÉLIX, S. HALPERIN and J.-C. THOMAS, Loop space homology of spaces of LS category one and two, *Math.Ann.* **287** (1990), pp. 377-386.

[13] Y. FÉLIX, S. HALPERIN and J.-C. THOMAS, Engel elements in the homotopy Lie algebra, *J.Algebra* **144** (1991), pp. 67-78.

[14] Y. FÉLIX, S. HALPERIN and J.-C. THOMAS, Lie algebras of polynomial growth, *J. London Math. Soc.* (2) **43** (1991), pp. 556-566.

[15] Y. FÉLIX, S. HALPERIN and J.-C. THOMAS, Elliptic Hopf Algebras, *J. London Math. Soc.* (2) **43** (1991), pp. 545-555.

[16] Y. FÉLIX, S. HALPERIN and J.-C. THOMAS, Adams' cobar equivalence, *Trans.Amer.Math.Soc.*, **329** (1992), pp. 531-549.

[17] Y. FÉLIX, S. HALPERIN and J.-C. THOMAS, Torsion in loop space homology, *J.reine angew. math.* **432** (1992), pp. 77-92.

[18] Y. FÉLIX, S. HALPERIN and J.-C. THOMAS, The category of a map and the grade of a module, *Israël J. Math.* **78** (1992), pp. 177-196.

[19] Y. FÉLIX, S. HALPERIN and J.-C. THOMAS, Elliptic spaces II, *Enseign. Math.* **39** (1993) pp. 25-32.

[20] Y. FÉLIX, S. HALPERIN and J.-C. THOMAS, Differential graded algebras in topology, *Handbook of algebraic topology, Elsevier Science, North Holland.*(To appear)

[21] Y. FÉLIX, J.-M. LEMAIRE, On the Pontryagin algebra of the loops on a space with a cell attached, *International J. of Math.* **2** (1991), pp. 429-438.

[22] Y. FÉLIX, J.-M. LEMAIRE and J.-C. THOMAS, L'application d'évaluation, les groupes de Gottlieb duaux et les cellules terminales, *Journal of pure and applied algebra* **91** (1994), pp. 143-164.

[23] Y. FÉLIX et J.-C. THOMAS, module d'holonomie d'une fibration, *Bull. Soc. Math. France,* **113** (1985), pp. 255-258.

[24] Y. FÉLIX et J.-C. THOMAS, On the homology of Postnikov fibres, *Proceedings of the Amer. Math. Soc.*, **118** (1) (1993), pp.255-258.

[25] T. GANEA, Lusternik-Schnirelmann category and strong category, *Illinois J. Math.* **11** (1967), pp.417-427.

[26] M.J. GREENBERG, Lectures on algebraic topology, *W.A. Benjamin*, (1966).

[27] S. HALPERIN, Finiteness in the minimal models of Sullivan, *Trans. Amer. Math. Soc.* **230** (1977), pp. 173-199.

[28] S. HALPERIN, Lectures on minimal models, *Mémoire de la Société Mathématique de France (N.S.)* **9/10** (1983).

[29] S. HALPERIN, Primitive subspaces of Hopf algebras of finite depth, *Math. Ann.* **287** (1990), pp. 387-390.

[30] S. HALPERIN and J.-M. LEMAIRE, Notions of category in differential algebra, *in Algebraic Topology - Rational Homotopy. Proceedings of a conference held in Louvain-la-Neuve, Belgium, May 2-6,1986.Editor: Y.Felix. Lecture Notes in Mathematics*, Vol **1318**, *Springer-Verlag*, (1988), pp. 138-154.

[31] J.-M. LEMAIRE, Algèbres connexes et homologie des espaces de lacets, Lecture Notes in Mathematics **422** (1974), *Springer-Verlag.*

[32] J.-M. LEMAIRE and F. SIGRIST, Sur les invariants d'homotopie rationnelle liés à la L.S. catégorie, *Comment. Math. Helvetici,* **56** (1981), pp. 103-122.

[33] J. MAC CLEARY, User's guide to spectral sequences, *Publish or perish*, (1983).

[34] J. MILNOR, Construction of universal bundles.I, *Ann. of Math.*, **63** (1956), pp. 272-284.

[35] J. MILNOR, Construction of universal bundles.II, *Ann. of Math.*, **63** (1956), pp. 430-436.

[36] J. MILNOR et J.-C. MOORE, On the structure of Hopf algebras, *Annals of Math.* (2) **(2) 81** (1965), pp.211-264.

[37] J.-C. MOORE, Algèbre homologique et homologie des espaces classifiants, *Séminaire Cartan 1959/60, exposé 7, Paris.*

[38] J. C. MOORE and L. SMITH, Hopf algebras and multiplicative fibrations, Amer. J. Math. **90** (1968), pp. 752-780.

[39] A. MURILLO, On the evaluation map, *Trans. Amer. Math. Soc.* **339** (1993), pp. 611-622.

[40] J.-P. SERRE, Homologie singulière des espaces fibrés. Applications, *Annals of Math.* (2) **54** (1951), pp.425-505.

[41] D. SULLIVAN, Infinitesimal computations in topology, *Publ. Math. I.H.E.S.* **47** (1977), pp.269-331.

[42] G.H. TOOMER, Lusternik-Schnirelmann category and the Moore spectral sequence, *Math. Z.* **138** (1974) pp. 123-143.

[43] G. WHITEHEAD, Elements of homotopy theory, *Graduate texts in math.* (1978), Springer Verlag.