

gen 20105335

50376  
1995  
273

T

N° d'ordre :

# THESE

présentée à

12  
2

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir le grade de

i

## DOCTEUR DE L'UNIVERSITE

en Productique : Automatique et Informatique Industrielle

par

**Moncef TAGINA**

Ingénieur Centrale Lille

# APPLICATION DE LA MODELISATION BOND GRAPH A LA SURVEILLANCE DES SYSTEMES COMPLEXES

Soutenue le 7 Novembre 1995 devant le jury d'examen

- M. P. BORNE : Président
- M. M. LEBRUN : Rapporteur
- M. J. RAGOT : Rapporteur
- Mme. G. DAUPHIN-TANGUY : Examineur, Directeur de thèse
- M. J. Ph. CASSAR : Examineur, Directeur de thèse
- M. M. STAROSWIECKI : Examineur
- M. M. KSOURI : Examineur
- M. Ph. DESODT : Invité



*A ma famille*  
*A Maha*

## AVANT PROPOS

Le travail que nous présentons dans ce mémoire a été effectué au Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle de Lille (LAIL) à l'Ecole Centrale de Lille et au Laboratoire de Productique de l'Ecole des Mines de Douai sous la direction de Madame G. DAUPHIN-TANGUY et de Monsieur J.Ph. CASSAR.

Nous sommes particulièrement reconnaissant à Madame G. DAUPHIN-TANGUY, Professeur à l'Ecole Centrale de Lille et Directeur du LAIL, et à Monsieur J.Ph. CASSAR, Maître de conférences à l'Université des Sciences et Technologies de Lille. Leur amabilité, leurs conseils et la qualité de leurs rapports humains nous ont permis d'achever dans les meilleures conditions les travaux entrepris.

Nous remercions vivement le Professeur P. BORNE, Directeur scientifique de l'Ecole Centrale de Lille, pour nous avoir fait l'honneur de présider notre jury de thèse.

Nous sommes redevable à Messieurs les Professeurs M. LEBRUN et J. RAGOT pour l'honneur qu'ils nous font en acceptant d'examiner ce travail et d'être les rapporteurs de cette thèse.

Monsieur le Professeur M. STAROSWIECKI a suivi avec bienveillance et intérêt notre travail. Nous sommes très honoré qu'il ait accepté de participer à notre jury et nous l'en remercions.

Malgré l'éloignement géographique, Monsieur M. KSOURI, Professeur à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis et Directeur du Laboratoire d'Analyse et de Commande des Systèmes, a accepté de participer à notre jury. Qu'il reçoive ici nos très vifs remerciements.

Nous tenons à remercier Monsieur Ph. DESODT Responsable du Laboratoire d'Automatique et d'Electronique de l'Ecole des Mines de Douai pour l'honneur qu'il nous fait en participant à notre jury.

Nous voudrions adresser une pensée amicale aux membres du LAIL, au personnel du département Productique de l'Ecole des Mines de Douai, au personnel de l'Ecole Centrale de Lille et spécialement à l'équipe Bond Graph et l'équipe Commande (Philippe, David, Janette, Stéphane, Jean-Marc, Laurent, Wajdi, François) pour la bonne humeur et la sympathie qu'ils entretiennent au laboratoire.

Enfin, nous remercions très sincèrement Monsieur M. VANGREVENINGE pour la reprographie de ce mémoire.

# Sommaire

<b>Introduction</b> .....	3
 <b>Chapitre I</b>	
Objectifs pour la surveillance.....	7
I-1 Introduction.....	7
I-2 Rôle de la surveillance .....	8
I-2-1 Détection .....	8
I-2-2 Localisation et diagnostic .....	8
I-3 Les approches de la surveillance.....	9
I-3-1 Décomposition d'un système de surveillance.....	9
I-3-2 Estimation des paramètres.....	10
I-3-3 Estimation d'état.....	10
I-4 Génération des Relations de Redondance Analytique (RRA) .....	10
I-4-1 Existence de la redondance analytique .....	11
I-4-2 Approche structurelle.....	12
I-4-3 Matrice de transfert.....	14
I-4-3-1 Modèle entrées-sorties.....	15
I-4-3-2 Blocs de transfert interconnectés.....	16
I-4-4 Espace de parité.....	16
I-5 Résidus structurés.....	18
I-6 Cahier des charges.....	20
I-7 Importance du modèle .....	21
I-8 Modélisation bond graph.....	22
I-8-1 Introduction .....	22
I-8-2 Présentation du modèle .....	23

I-8-2-1 Les variables de la modélisation bond graph.....	23
I-8-2-2 La structure de jonction et les composants.....	24
I-8-2-3 Représentation graphique.....	27
I-8-2-4 Représentation matricielle.....	28
I-8-3 Modèles mathématiques issus d'un modèle bond graph.....	30
I-9 Conclusion.....	31
<b>Chapitre II</b>	
Approche analytique pour la surveillance.....	33
II-1 Introduction.....	33
II-2 Représentation matricielle issue du bond graph.....	34
II-3 Méthode par substitution.....	37
II-4 Approche par projection.....	38
II-4-1 Conditions d'existence de $\mathcal{N}$ .....	38
II-4-2 Recherche de la matrice $\mathcal{N}$ .....	38
II-4-2-1 Préliminaire mathématique.....	38
II-4-2-2 Principe de la détermination de $\mathcal{N}$ .....	40
II-5 Approche analytique de détermination de $\mathcal{N}$ .....	44
II-5-1 Présentation de la méthode.....	44
II-5-2 Résolution du système d'équations.....	45
II-6 Comparaison.....	49
II-6-1 Comparaison des méthodes de projection et de substitution.....	49
II-6-2 Comparaison des deux méthodes de détermination de $\mathcal{N}$ .....	51
II-6-2-1 Points communs.....	51
II-6-2-2 Points différents.....	51
II-6-2-3 Tableau récapitulatif.....	52
II-7 Conclusion.....	53

**Chapitre III**

Approche structurelle pour la surveillance.....	55
III-1 Introduction.....	55
III-2 Surveillance à partir de la représentation matricielle.....	55
III-2-1 Génération de RRA à partir de la représentation matricielle.....	56
III-3-2 Aide au placement de capteurs.....	63
III-3 Surveillance à partir de la représentation graphique.....	64
III-3-1 Génération de RRA à partir de la représentation graphique.....	64
III-2-1-1 Matrice de transfert.....	65
III-2-1-2 Parcours des chemins causaux.....	69
III-3-2 Matroïdes et placement de capteurs.....	80
III-3-2-1 Surveillance par la théorie des cycles [MAQU 94].....	81
III-2-2-2 Matroïdes.....	82
III-2-2-3 Application au bond graph.....	86
III-4 Surveillabilité.....	89
III-4-1 Surveillabilité à partir de la matrice de transfert.....	89
III-4-2 Surveillabilité à partir du modèle bond graph.....	92
III-5 Conclusion.....	95

**Chapitre IV**

Extension aux systèmes comportant des multiports et aux systèmes non linéaires.....	97
IV-1 Introduction.....	97
IV-2 Systèmes comportant des multiports linéaires.....	98
IV-2-1 Définitions.....	98
IV-2-2 Méthodes analytiques.....	98
IV-2-3 Méthodes structurelles.....	102
IV-2-3-1 Matrice de transfert.....	102
IV-2-3-2 Parcours des chemins causaux.....	103
IV-2-3-3 Substitution.....	105

IV-2-4 Conclusion .....	107
IV-3 Systèmes non linéaires.....	107
IV-3-1 Méthodes analytiques .....	107
IV-3-2 Méthodes structurelles.....	108
IV-3-2-1 Parcours des chemins causaux.....	108
IV-3-2-2 Substitution .....	110
IV-3-3 Intérêt et limitation de la méthode.....	113
IV-4 Conclusion.....	113
<b>Conclusion.....</b>	<b>115</b>
<b>Bibliographie.....</b>	<b>117</b>
<b>Annexes.....</b>	<b>129</b>
Annexe A .....	129
Annexe B .....	139
Annexe C .....	143



## INTRODUCTION

L'automatisation des procédés a permis des gains spectaculaires en productivité et en qualité des produits. Force est pourtant de constater que ces performances sont, maintenant, limitées par le fait que les processus industriels, par leur complexité, sont de plus en plus sensibles aux défaillances. Pour assurer la disponibilité et la fiabilité de ces processus, une procédure de détection et de localisation des défaillances doit être établie.

Notre travail consiste à détecter et localiser les défaillances qui peuvent affecter les capteurs et les actionneurs du processus étudié. Pour ce faire, nous générons un ensemble de relations de redondance analytique (RRA), qui sont des relations ne faisant intervenir que des variables et des paramètres connus et qui expriment une différence entre l'information issue du système et celle délivrée par un modèle de référence. Ces relations de redondance ne sont satisfaites que si le comportement du système est cohérent avec son modèle. Le choix du modèle est une étape importante et difficile car de la qualité du modèle dépend la qualité des relations de redondance et par conséquent celle du système de surveillance. Plusieurs types de modèles tels que l'équation d'état, la matrice de transfert, le modèle structurel et le schéma bloc ont été utilisés dans ce but.

Le présent travail entre dans le cadre d'une étroite collaboration entre deux équipes de recherche du Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle de Lille (LAIL). La première équipe, dirigée par le professeur Geneviève Dauphin-Tanguy, s'intéresse à la modélisation bond graph et à son application dans les différents domaines de l'automatique. La deuxième équipe, dirigée par le professeur Marcel Staroswiecki, s'implique dans la surveillance des processus complexes. De ce rapprochement des deux équipes, est née l'idée d'utiliser les bond graphs pour la surveillance.

Au début, nous avons pensé à transposer les méthodes existantes à la modélisation bond graph pour pouvoir l'utiliser, quand c'est nécessaire, sans transformation du modèle disponible. Nous n'avons pas cherché un substitut aux méthodes précédentes, qui d'ailleurs ont montré leur efficacité, mais nous avons tendu à élargir l'horizon de l'utilisation de la modélisation bond graph. Ensuite, nous avons réfléchi à trouver des méthodes de génération de relations de redondance analytique avec les outils spécifiques de la modélisation bond graph ce qui permettrait une éventuelle implantation de nos résultats sur le logiciel ARCHER, développé au sein de l'équipe bond graph.

A l'ensemble des relations de redondance que nous générons, nous associons une structure de signatures des pannes pour la caractérisation et la localisation des défaillances. Cependant, malgré le grand nombre de relations de redondance, un ensemble de pannes différentes peuvent présenter la même signature et ne sont, par conséquent, pas localisables. Il est très utile de reconnaître à l'avance cet ensemble de pannes car ceci permet de reconsidérer l'architecture d'instrumentation du système pour qu'elle réponde aux exigences du cahier des charges. Nous avons étudié ce problème de surveillabilité et nous avons élaboré des résultats permettant de répondre à ces besoins.

Dans le premier chapitre de ce mémoire, nous présentons, en premier lieu, les objectifs de la surveillance en mettant l'accent sur son rôle, le principe des relations de redondance, la spécification de la surveillance et le cahier des charges. Nous exposons, par la suite, la modélisation bond graph sous ses deux formes graphique et matricielle.

Dans le deuxième chapitre, nous nous intéressons de près à l'approche par projection orthogonale et nous déterminons l'expression analytique de la matrice de projection permettant de générer les relations de redondance. Nous comparons, par la suite, nos résultats à ceux des méthodes existantes.

Le troisième chapitre se consacre à l'approche structurelle. Il explicite des méthodes de génération de relations de redondance par l'étude d'un couplage dans la structure du système et la construction d'une chaîne alternée associée à ce couplage. Nous retrouvons les mêmes résultats directement sur la forme graphique du bond graph et nous établissons un algorithme de génération de RRA. Nous élaborons aussi, des résultats concernant la surveillabilité et nous utilisons la théorie des matroïdes pour montrer qu'il est possible de transposer des résultats découverts par la théorie des graphes aux bond graphs.

Enfin, dans le quatrième chapitre, nous présentons une extension des résultats que nous avons établis dans les deux chapitres précédents aux systèmes comportant des éléments multiports et aux systèmes non linéaires.

# CHAPITRE I

## Objectifs pour la surveillance

I-1 Introduction .....	7
I-2 Rôle de la surveillance .....	8
I-3 Les approches de la surveillance .....	9
I-4 Génération des Relations de Redondance Analytique (RRA) .....	10
I-5 Résidus structurés .....	18
I-6 Cahier des charges .....	20
I-7 Importance du modèle.....	21
I-8 Modélisation bond graph.....	22
I-9 Conclusion.....	31

# Objectifs pour la surveillance

## I-1 Introduction

Ce premier chapitre introduit les notions fondamentales pour la surveillance des processus industriels complexes et présente la modélisation bond graph que nous utiliserons dans les chapitres suivants dans le but de surveiller des systèmes physiques.

Après avoir montré le rôle de la surveillance, nous exposons les différentes méthodes utilisées dans la génération de relations de redondance analytique. Nous présentons, par la suite, les résidus structurés ainsi que leur utilisation pour la détection et la localisation des défaillances. Ensuite, le cahier des charges et l'importance du modèle pour la surveillance mettront en évidence le cadre de notre étude. Enfin, nous présentons l'outil de modélisation bond graph que nous utiliserons tout le long de notre travail pour détecter et localiser des défaillances, contrairement aux travaux de recherches effectués jusque là et qui n'exploitent pas toute l'information qu'offre le modèle bond graph et passent à une représentation du système en schéma bloc pour en générer un graphe d'événements [LUCA 93], ou qui utilisent cette modélisation juste pour étudier la commandabilité et l'observabilité du système [VERG 94].

## **I-2 Rôle de la surveillance**

Les processus industriels sont de plus en plus complexes, et par conséquent, de plus en plus exposés aux défaillances. Pour une meilleure fiabilité et une meilleure disponibilité de ces processus, une procédure de surveillance doit être établie.

Le rôle de cette procédure est de pouvoir détecter les défaillances ainsi que les localiser et émettre un diagnostic les concernant [STAR 92][STAR 94].

### **I-2-1 Détection**

La détection consiste à décider entre deux hypothèses  $H_0$  (le système est en mode de fonctionnement normal) et  $H_1$  (le système est en mode de fonctionnement anormal ou défaillant). Cette décision est obtenue par comparaison du fonctionnement réel avec ce qu'il devrait être sous l'hypothèse de fonctionnement normal (cela suppose que l'on dispose d'un modèle du fonctionnement normal obtenu par apprentissage ou d'une manière analytique). Le résultat de la procédure de détection est une alarme signifiant que le modèle de fonctionnement n'est pas pertinent pour décrire le fonctionnement réel du système surveillé.

### **I-2-2 Localisation et diagnostic**

La localisation consiste à décider entre  $n$  hypothèses  $H_{1,i}$  (la défaillance est au niveau de l'élément  $i$ ). La localisation et le diagnostic conduisent à comparer le fonctionnement réel avec ce qu'il devrait être sous certaines hypothèses de défaillance (cela suppose que l'on dispose des modèles de certains fonctionnements défaillants).

"Localiser" circonscrit la défaillance à un sous-ensemble de composants du système surveillé : capteur(s), actionneur(s), équipement(s) de la partie commande ou la partie opérative, etc.

"Diagnostiquer" fournit des paramètres qui caractérisent la défaillance : instant d'apparition, amplitude.

Ces procédures de détection et de localisation constituent des éléments du système de surveillance dont le but est de transformer la base de données brute (ensemble de données directement disponibles produites par les capteurs qui équipent le processus, les interfaces opérateurs et les résultats des algorithmes de décision) en une base de données validée (preuve de la cohérence des données) et enrichie (ajout d'informations relatives aux causes des incohérences détectées au cours de la validation et d'estimations des différents paramètres et variables à surveiller) (figure 1.1).

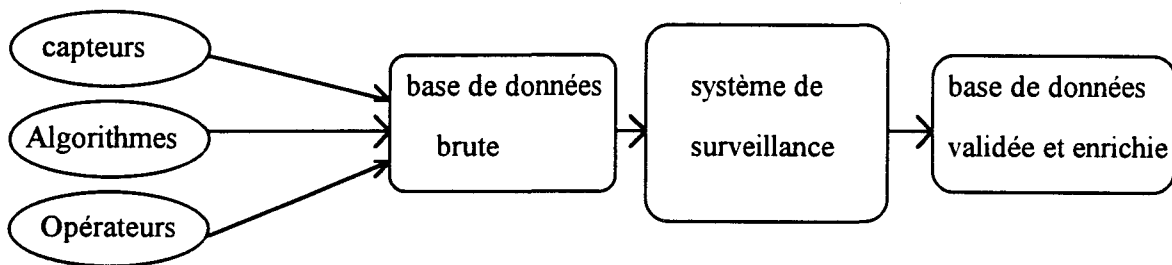


figure 1.1. Rôle du système de surveillance.

### **I-3 Les approches de la surveillance**

Pour la surveillance des processus industriels, deux grandes familles de méthodes sont utilisées. La première englobe les méthodes sans modèle, telle que la reconnaissance des formes [DUBU 90][VOLL 76][PAO 89][FREL 93]. La deuxième famille, à laquelle nous nous intéressons dans notre étude, regroupe les méthodes avec modèle.

#### **I-3-1 Décomposition d'un système de surveillance**

Le système de surveillance se décompose en deux parties : la première est dédiée à la génération d'un ensemble de résidus (ensemble de fonctions de variables et paramètres connus) et la deuxième à la décision. La génération de résidus s'effectue en comparant les données brutes aux données délivrées par le modèle. Dans cette étape on distingue trois grandes classes fondées respectivement sur l'estimation des paramètres, l'estimation de l'état et la redondance qui peut être physique (utilisation de plusieurs capteurs pour la mesure d'une même variable)

[POTT 77] [CHOW 80][EVAN 70] ou analytique. La deuxième étape est fondée sur la théorie de la décision et l'analyse des données.

Nous présentons succinctement les deux premières approches. La redondance analytique fera l'objet du paragraphe suivant où les différentes méthodes de générations sont rappelées.

### **I-3-2 Estimation des paramètres**

Les signaux d'entrée et de sortie du système sont utilisés pour estimer les différentes valeurs des paramètres du modèle analytique. Les écarts entre les valeurs estimées et les valeurs de référence constituent des résidus qui seront analysés par la théorie de la décision [ISER 84][GERT 88][PARK 90][CECC 91][SPRO 92][STEI 94].

### **I-3-3 Estimation d'état**

Les techniques d'estimation d'état utilisent les données de la base de données brute pour estimer les sorties du système. Celles ci sont comparées aux sorties réelles : tout écart entre la valeur mesurée de la sortie et la valeur réelle de la sortie constitue un résidu.

Il existe deux classes d'approches, la première estime d'abord le vecteur d'état (observateur de Luenberger [LUEN 71][FRAN 87][FRAN 88], filtre de Kalman [WILL 76][CLAR 78][CLAR 82]) puis en déduit l'estimation des sorties par application de l'équation de mesure. L'autre approche utilise des observateurs qui estiment directement les sorties, ou plus généralement toute combinaison des variables d'état dont on connaît le comportement théorique en fonctionnement normal [BEAR 71][MAGN 91].

## **I-4 Génération des Relations de Redondance Analytique (RRA)**

A partir de l'ensemble des informations disponibles sur un système (commandes, mesures, modèle de l'instrumentation à surveiller ...), il est possible de générer un ensemble de



relations reliant des variables dont la valeur est connue, compte tenu de l'instrumentation. Ces relations qui expriment une redondance analytique ne sont satisfaites que si le comportement réel du système est cohérent avec celui issu du modèle de fonctionnement normal [CASS 94a][CASS 94b].

En d'autres termes, le modèle général de l'installation peut s'écrire sous la forme :

$$f(x, x_0, u, y, \theta) = 0 \quad (1)$$

où  $f$  est un vecteur de contraintes pouvant relier l'état  $x$ , l'état initial  $x_0$ , les consignes ou commandes  $u$ , les mesures  $y$  et un ensemble de paramètres regroupés dans le vecteur  $\theta$ .

Un ensemble de relations de redondance analytique peut s'écrire sous la forme :

$$g(u, y, \theta) = 0. \quad (2)$$

Cette relation est vérifiée quand le modèle reproduit exactement le fonctionnement du système et que celui-ci n'est soumis à aucune perturbation ni aucun bruit. En réalité, l'instrumentation et la connaissance que nous avons du système fournissent un vecteur de résidus :

$$r = g(u, y, \theta). \quad (3)$$

Les procédures de détection et d'isolation de défaillances se basent sur l'analyse de ce vecteur de résidus.

#### **I-4-1 Existence de la redondance analytique**

La condition d'existence d'une redondance analytique est étroitement liée à la caractérisation des sous-systèmes. Un sous-système est un couple  $(F_i, Q(F_i))$  où  $F_i$  est un ensemble de contraintes (composantes du vecteur  $f$  du paragraphe précédent) agissant sur l'ensemble des variables  $Q(F_i)$ .

$Q(F_i)$  peut être scindé en deux sous-ensembles correspondant aux variables connues et inconnues (respectivement  $Q_c(F_i)$  (composantes du vecteur  $(u^t \ y^t \ \theta^t)^t$ ) et  $Q_w(F_i)$  (composantes du vecteur  $(x^t \ x_0^t)^t$ ).

Le sous-système  $(F_i, Q(F_i))$  peut être caractérisé par le nombre de solutions (ou trajectoires) pour  $Q_w(F_i)$  pouvant être obtenues à partir de  $Q_c(F_i)$ . Le système est dit déterminé si la solution est unique, dans le cas contraire le système est dit sous-déterminé.

Un système déterminé  $(F_i, Q(F_i))$ , pour lequel il existe un sous-ensemble de contraintes  $\Phi \subset F_i$  agissant sur le même ensemble de variables inconnues et tel que  $(\Phi, Q(\Phi))$  soit déterminé est dit sur-déterminé. Un système déterminé qui n'est pas sur-déterminé est dit juste déterminé [DECL 91].

Un système sur-déterminé  $(F_i, Q(F_i))$  peut inclure plusieurs sous-systèmes juste-déterminés. Chacun d'eux conduit à une solution pour  $Q_w(F_i)$ . La compatibilité du système impose que toutes les solutions soient égales, ce qui conduit à la redondance analytique.

Les relations de redondance analytique (composantes du vecteur  $g$ ) seront donc déduites des sous-systèmes sur-déterminés. La première étape dans la procédure de génération de relations de redondance est la mise en évidence de ces sous-systèmes. La deuxième étape est la génération proprement dite.

## I-4-2 Approche structurelle

Pour les systèmes complexes de grande dimension, décrits par un modèle qualitatif, quantitatif, statique, dynamique, linéaire, non linéaire...etc, une approche structurelle permet de définir des conditions d'existence de relations de redondance analytique.

La structure est décrite par un ensemble de variables  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , un ensemble de contraintes  $F = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$  et une fonction binaire définie par :

$$S : F \times V \rightarrow \{0, 1\}$$

$$(f_i, v_j) \rightarrow S(f_i, v_j) = 1 \text{ ssi la contrainte } f_i \text{ s'applique sur la variable } v_j, 0 \text{ sinon.}$$

Cette description conduit à un graphe biparti constitué des ensembles de variables et de contraintes, un arc relie une contrainte  $f_i$  à une variable  $v_j$  si  $S(f_i, v_j) = 1$ . La recherche de relations de redondance analytique devient équivalente à la recherche de sous-systèmes sur-déterminés dans le graphe biparti [DECL 91][STAR 89].

**Définition : couplage dans un graphe biparti [BERG 57] :**

Soit  $(A, B, E)$  un graphe biparti où  $A$  et  $B$  désignent deux ensembles de variables et  $E$  l'ensemble des arêtes les reliant.

Un couplage est un ensemble de couples  $(a \in A, b \in B)$  tels que :

- Il existe  $e \in E$  reliant  $a$  à  $b$ .
- Les projections de ce couplage dans  $A$  et  $B$  sont injectives (en d'autres termes toute variable dans  $A$  ou  $B$  n'apparaît, au plus, que dans un seul couple).

De plus, si toutes les variables apparaissent dans le couplage, celui-ci est dit complet.

Un couplage recouvrant l'un des deux ensembles est dit maximal par rapport à cet ensemble [MURO 87].

Comme on s'intéresse aux solutions (trajectoires) de  $Q_w(F)$ , le graphe biparti de la structure qui va être considéré se réduira aux variables inconnues de  $V : G_w(F, V, S_w)$ .

**Proposition [DECL 91] :**

L'existence d'un couplage maximal par rapport à  $V$  sur le graphe  $G_w(F, V, S_w)$  est une condition nécessaire pour que le système  $(F, Q(F))$  soit déterminé.

Dans [DULM 59] on montre que tout système de relations peut être décomposé d'une manière unique en sous-systèmes sous, juste et sur-déterminés. Seule la partie sur-déterminée du système permet de générer des relations de redondance analytique.

Le problème de trouver des relations de redondance analytique revient donc à considérer le graphe biparti associé à la structure du système, ensuite à le décomposer en sous-systèmes sous, juste et sur-déterminés [DULM 59] [MINO 86], et chercher un couplage maximal par rapport aux variables inconnues dans le sous-système sur-déterminé.

Ce couplage maximal, qui peut se traduire par une chaîne alternée (figure 1.2), donne la séquence de calcul à suivre pour générer les RRA.

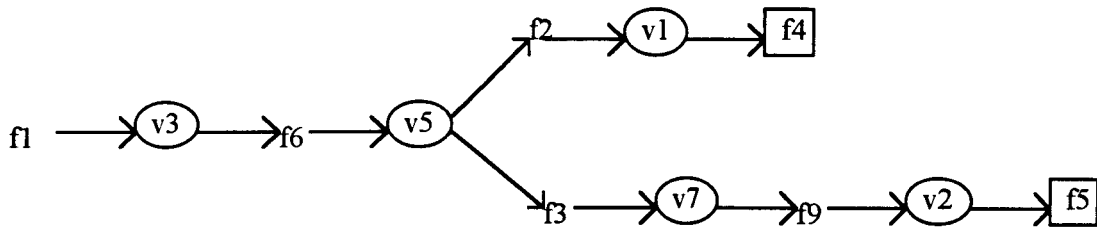


figure 1.2. Exemple de chaîne alternée.

$f_i \longrightarrow (v_j)$  signifie que la contrainte  $f_i$  est utilisée pour exprimer la variable inconnue  $v_j$  en fonction des variables connues.

$(f_k)$  signifie que dans la contrainte  $f_k$  toutes les variables inconnues peuvent être exprimées en fonction des variables connues ce qui conduit à une relation de redondance analytique.

#### Remarque :

Dans le cas d'un système surdéterminé, il n'existe pas un couplage maximal unique par rapport aux variables inconnues et tout couplage conduit à une forme particulière des relations de redondance analytique mais le nombre de relations indépendantes reste inchangé.

### I-4-3 Matrice de transfert

Les matrices de transfert constituent des modèles polynomiaux linéaires reliant les entrées et les sorties du système. Ils peuvent être utilisés aussi bien dans le cas discret [GERT 93] (polynôme en  $z$ ) que dans le cas continu [VISW 87][DING 90] (polynôme en  $s$ ).

### I-4-3-1 Modèle entrées-sorties

La relation de transfert peut s'écrire sous la forme :

$$Y(s) = G_u(s)U(s) + G_d(s)D(s) \quad (4)$$

où  $Y(s)$ ,  $U(s)$  et  $D(s)$  désignent respectivement les transformées de Laplace du vecteur sortie du système, de son vecteur entrée et le vecteur englobant les défaillances et l'ensemble des bruits et perturbations.  $G_u(s)$  et  $G_d(s)$  sont des matrices de transfert dont les termes sont des fonctions en  $s$ .

L'expression (4) traduit un ensemble de relations de redondance analytique donné par :

$$Y(s) - G_u(s)U(s) = 0 \quad (5)$$

Le vecteur des résidus s'exprime par :

$$R(s) = Y(s) - G_u(s)U(s) = G_d(s)D(s) \quad (6)$$

#### Remarques :

- Si (4) est exprimée sous forme fractionnaire :

$$Y(s) = \frac{G(s)}{H(s)}U(s) + \frac{V(s)}{H(s)}D(s) \quad (7)$$

avec  $H(s)$  matrice diagonale polynomiale, alors (5) et (6) peuvent s'écrire sous la forme polynomiale :

$$H(s)Y(s) - G(s)U(s) = 0 \quad (8)$$

$$R(s) = H(s)Y(s) - G(s)U(s) = V(s)D(s) \quad (9)$$

- Le nombre de résidus obtenus est égal à la dimension du vecteur sortie  $y$ . Une combinaison de ces résidus en vue d'en engendrer d'autres peut être intéressante.

- Cette formulation directe ne présente d'intérêt que lorsque les matrices de transfert obtenues sont stables. Dans le cas contraire,  $G_U(s)$  doit être factorisée.

#### I-4-3-2 Blocs de transfert interconnectés

Dans le cas de systèmes linéaires de grandes dimensions, une représentation en blocs dynamiques interconnectés peut être d'un grand intérêt.

On peut représenter ces systèmes par des équations matricielles dans le domaine symbolique ( $s$  ou  $z$ ) sous la forme suivante :

$$M(s)Inc(s) + N(s)U(s) + P(s)Y(s) = 0 \quad (10)$$

où  $M(s)$ ,  $N(s)$  et  $P(s)$  sont des matrices polynomiales en  $s$  (en  $z$  dans le cas discret) et  $Inc(s)$ ,  $U(s)$  et  $Y(s)$  désignent respectivement les vecteurs des variables inconnues, les entrées et les sorties du système.

Une méthode pour générer des relations de redondance analytique est de multiplier l'équation (10) par une matrice  $W(s)$  orthogonale à  $M(s)$ , telle que  $W(s).M(s) = 0$  [COCQ 93].

#### I-4-4 Espace de parité

La méthode de l'espace de parité, d'abord développée par [SATI 78] pour la navigation inertielle, a été généralisée par Chow et Willsky [CHOW 80] [CHOW 84] de manière à exploiter la redondance analytique que renferment les équations d'état lorsqu'elles sont écrites sur un horizon suffisamment grand.

On part de la représentation d'état discrète (11) (le résultat peut être transposé pour une représentation continue en utilisant les dérivées successives de la sortie) .

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Ed(k) \quad (11a)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) + Fd(k) \quad (11b)$$

avec  $x(k)$ ,  $y(k)$ ,  $u(k)$  et  $d(k)$  désignant respectivement le vecteur état de dimension  $n$ , le vecteur sortie de dimension  $m$ ,  $u(k)$  le vecteur commande et  $d(k)$  le vecteur de dimension  $p$ , englobant les défaillances et les perturbations à l'instant  $k$ .

$A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont les matrices définissant le comportement nominal du système.  $E$  et  $F$  expriment l'influence des défaillances et des perturbations sur le comportement de celui-ci.

L'équation (11b) est écrite sur une fenêtre temporelle de longueur  $t$  :

$$\begin{aligned}
 y(k) &= Cx(k) + Du(k) + Fd(k) \\
 y(k+1) &= C(Ax(k) + Bu(k) + Ed(k)) + Du(k+1) + Fd(k+1) \\
 y(k+2) &= C(A(Ax(k) + Bu(k) + Ed(k)) + Bu(k+1) + Ed(k+1)) + Du(k+2) + Fd(k+2) \quad (12) \\
 y(k+t) &= CA^t x(k) + CA^{t-1} Bu(k) + \dots + CBu(k+n-1) + CA^{t-1} Ed(k) + \dots + CEd(k+n-1) \\
 &\quad + Du(k+t) + Fd(k+t).
 \end{aligned}$$

Ce qui peut s'écrire sous une forme contractée :

$$y(k, k+t) = \text{OBS}(A, C, t)x(k) + \text{COM}(B, D, t)u(k, k+t) + \text{COM}(E, F, t)d(k, k+t) \quad (13)$$

avec  $v(k, k+t) = (v^t(k)v^t(k+1)v^t(k+2)\dots v^t(k+t))^t$  pour  $v$  dans  $\{y, u, d\}$ .

$\text{OBS}(A, C, t)$  et  $\text{COM}(B, D, t)$  sont respectivement la matrice d'observabilité et la matrice de commandabilité étendues à l'ordre  $t$ . Elles s'écrivent :

$$\text{OBS}(A, C, t) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^t \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \text{COM}(B, D, t) = \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ CB & D & 0 & 0 & 0 \\ CAB & CB & D & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ CA^{t-1}B & \dots & CAB & CB & D \end{bmatrix}.$$

$\text{COM}(E, F, t)$  est construite de la même manière que  $\text{COM}(B, D, t)$ .

L'élimination du vecteur état  $x(k)$  de l'équation (13) fournit une relation entre les variables connues. Cette élimination s'effectue en projetant l'équation (13) dans l'espace vectoriel orthogonal à  $\text{OBS}(A, C, t)$  (espace de parité).

Il faut donc trouver une matrice de projection  $W$  telle que  $W.OBS(A,C,t) = 0$ . L'existence de  $W$  nécessite que le nombre de lignes de la matrice d'observabilité soit supérieur à son rang. Le théorème de Cayley Hamilton assure que cette condition est toujours vérifiée pour une valeur de  $t$  suffisamment grande.

Les relations de redondance analytique et le vecteur des résidus ont la forme suivante :

$$W.y(k,k+t) - W.COM(B,D,t)u(k,k+t) = 0 \quad (14a)$$

$$r(k+t) = W.y(k,k+t) - W.COM(B,D,t)u(k,k+t) = W.COM(E,F,t)d(k,k+t) \quad (14b)$$

**Remarques :**

- Le nombre de relations de redondance analytique linéairement indépendantes est égal à la dimension de l'espace de parité (égal à  $m$  [GERT 89]).

- La fenêtre temporelle doit être suffisamment grande pour pouvoir générer des relations de redondance analytique, toutefois, elle ne doit pas être trop grande car cela augmente considérablement le temps de réponse des résidus par rapport aux défaillances et engendre l'accroissement du délai de détection.

## I-5 Résidus structurés

Une relation de redondance analytique exprime qu'une fonction des variables connues (résidu de la relation) doit être nulle quand le mode de fonctionnement du système est normal [CASS 94b]. Cependant, le résidu est en général différent de zéro et ceci à cause du modèle qui ne traduit pas fidèlement le comportement réel du système.

Deux possibilités se présentent :

(i) Le résidu est différent de zéro à cause des bruits de mesure ou des imperfections au niveau de la modélisation, le fonctionnement du système est toutefois normal.



(ii) Le résidu est différent de zéro à cause d'une anomalie de comportement de l'un des éléments à surveiller. Le fonctionnement n'est plus normal et on doit détecter une défaillance.

La procédure de décision a un double rôle : détecter la défaillance (indiquer laquelle des deux possibilités précédentes est la plus probable) et la localiser.

La procédure de décision peut traiter globalement le vecteur des résidus pour tester son appartenance ou sa non-appartenance au domaine de fonctionnement normal. Ce premier test indique la présence d'une défaillance. La direction du vecteur des résidus est ensuite comparée aux différentes directions de panne pour déterminer l'élément en cause dans la défaillance.

Une deuxième approche consiste à diviser cette procédure en deux étapes :

(i) Le traitement individuel de chaque résidu pour déceler un changement de valeur moyenne. Les méthodes sont celles de la théorie de la décision [SAPO 78] ou du traitement de signal appliqué à la détection de rupture [BASS 87]. Ce traitement appliqué au vecteur des résidus fournit un vecteur binaire de cohérence dont les termes égaux à 1 indiquent les résidus pour lesquels une défaillance a été détectée.

(ii) Pour la localisation de la défaillance détectée, le vecteur binaire de cohérence doit être comparé aux différentes signatures de pannes ainsi qu'à la signature du fonctionnement normal [GERT 88].

### **Définition :**

A chaque variable  $c$  à surveiller est associée un vecteur binaire déduit directement du vecteur des résidus et dont les termes égaux à 1 correspondent aux résidus associés à des relations de redondance analytique faisant intervenir  $c$ .

Ce vecteur binaire est la signature de la panne affectant  $c$ .

### **Exemple :**

Considérons le système de relations de redondance analytique suivant :

$$g_1(\text{Se}, \text{De}, \text{Df}) = 0 \quad (15a)$$

$$g_2(\text{De}, \text{Df}) = 0 \quad (15b)$$

$$g_3(\text{Se}, \text{Df}) = 0 \quad (15c)$$

où Se, De et Df sont des variables à surveiller. Le vecteur  $r$  des résidus a pour termes :

$$r_1 = g_1(\text{Se}, \text{De}, \text{Df}) \quad (16a)$$

$$r_2 = g_2(\text{De}, \text{Df}) \quad (16b)$$

$$r_3 = g_3(\text{Se}, \text{Df}) \quad (16c)$$

Les signatures des pannes correspondants aux différentes variables à surveiller sont données par le tableau binaire suivant (tableau 1):

	Se	De	Df
r1	1	1	1
r2	0	1	1
r3	1	0	1

tableau 1.

Le vecteur de cohérence  $(1 \ 0 \ 1)^t$  correspond à une panne au niveau de Se.

### Remarque :

Il est possible d'envisager des signatures de plusieurs pannes affectant le système à la fois. Pour ce faire, il faut avoir suffisamment de relations de redondance analytique pour avoir des signatures distinctes pour les différents cas de panne possibles.

## I-6 Cahier des charges

L'origine d'une défaillance dans un processus industriel n'est pas facile à déterminer. On peut distinguer des défaillances au niveau des capteurs ou un changement de paramètres

physiques (changement de la valeur de la résistance à cause d'une variation de température) ou un dysfonctionnement au niveau des composants ou des actionneurs.

Le cahier des charges doit répondre à trois questions [STAR 94] :

1/ Définition des objectifs : que veut-on surveiller ?

2/ Définition des critères : comment évaluera-t-on la qualité du système conçu ?

3/ Définition des contraintes : quelles sont les limites que doit respecter le système conçu ?

Dans une première étape, le cahier des charges doit spécifier les causes de défaillance et définir parmi elles celles qui devraient être prises en compte.

Ensuite, le cahier des charges fixe les critères de qualité concernant la détection (fausse alarme, non détection, délai de détection) et la localisation.

Enfin, le concepteur du système de surveillance doit être en mesure de définir une architecture d'instrumentation optimale (vis à vis de contraintes de coût, de disponibilité de base de données brute incomplète...), en respectant le cahier des charges de surveillance.

Dans le cadre de notre travail, nous poserons comme cahier des charges :

**La détection et la localisation des défaillances au niveau des capteurs et actionneurs quand on dispose d'un modèle bond graph du système à surveiller.**

## **I-7 Importance du modèle**

Le choix du modèle est très important et constitue une étape délicate dans la procédure de génération de relations de redondance analytique car la qualité du modèle affecte considérablement celle des RRA. Le modèle doit reproduire le plus fidèlement possible le comportement réel du système pour éviter les problèmes du genre :

- Fausses alarmes.

- Défaillances non détectées.
- Résidus biaisés.

De plus, la nature du modèle impose, en quelque sorte, la méthode de génération de relations de redondance analytique. En effet, à partir d'une modélisation fonctionnelle d'un système, on ne peut utiliser des méthodes de génération de résidus supposant un modèle comportemental !

Parfois, le modèle offre la possibilité de passage à d'autres formes de représentation de systèmes (ex : passage d'une représentation d'état à une matrice de transfert). Si ce passage peut être intéressant dans certains cas, il engendre une perte d'information dans d'autres, et cette information perdue peut affecter le système de surveillance.

Il est donc plus utile de développer des méthodes de génération de relations de redondance analytique à partir du modèle disponible.

## **I-8 Modélisation bond graph**

### **I-8-1 Introduction**

Le bond graph est un outil de modélisation des systèmes dynamiques, il se base sur le transfert de puissance entre les différentes parties du système considéré et décrit sa décomposition physique en sous-systèmes et en composants.

Cet outil de modélisation a été créé par Paynter en 1961 [PAYN 61] et développé ensuite par Karnopp et Rosenberg [KARN 83][ROSE 83], Thoma [THOM 75][THOM 91] et Breedveld [BREE 84].

Le bond graph constitue un outil de modélisation unifié, applicable à tous les domaines de la physique (électricité, mécanique, hydraulique,...), permettant par conséquent de faciliter considérablement l'étude des systèmes composés, multidomaines.

Le formalisme bond graph met en évidence la structure et le comportement du système en n'utilisant qu'un nombre réduit de composants, offrant, par conséquent, une grande facilité de construction du modèle. Aussi faut-il noter que le modèle bond graph permet de passer à d'autres formes de modélisation (schéma bloc, équation d'état, matrice de transfert,...) [BORN 92].

La modélisation bond graph a été utilisée dans des problèmes de commande, de simulation et d'analyse structurelle, elle a donné des résultats très intéressants [BORN 92] [SUEU 90] [RAHM 93].

Dans cette partie, nous présenterons succinctement le modèle bond graph sous ses formes graphique et matricielle.

## **I-8-2 Présentation du modèle**

### **I-8-2-1 Les variables de la modélisation bond graph**

Les variables généralisées de la modélisation bond graph sont les variables de puissance, l'effort "e" et le flux "f" dont le produit exprime la puissance transmise par le lien, et les variables d'énergie, le moment "p" et le déplacement "q" définies à partir des variables de puissance par :

$$p = \int e dt .$$

$$q = \int f dt .$$

Les deux variables d'énergie constituent des variables d'état. La connaissance de ces variables au niveau des composants dynamiques (cf paragraphe suivant), permet de connaître l'état de tout le système considéré [BORN 92].

L'intérêt de ces quatre variables, outre la description de l'état du système, est qu'elles ont une signification physique quel que soit le domaine d'étude. Le tableau 2 présente quelques

exemples de domaines, mais on pourrait l'étendre à la chimie, la thermique, la thermodynamique, l'acoustique ...etc.

Système physique	variable d'effort "e"	variable de flux "f"	Moment généralisé "p"	Déplacement généralisé "q"
Electrique	tension	intensité	impulsion de tension	charge électrique
Hydraulique	pression	débit volumique	impulsion de pression	volume
Pneumatique	pression	débit volumique	impulsion de pression	volume
Mécanique de translation	force	vitesse	impulsion	déplacement
Mécanique de rotation	couple	vitesse angulaire	impulsion angulaire	angle

tableau 2.

### I-8-2-2 La structure de jonction et les composants

Nous proposons de présenter les éléments de la modélisation bond graph à partir d'un exemple d'un système physique composé d'un moteur à courant continu, d'un embrayage, d'un réducteur, d'un frein et d'une charge dynamique (figure 1.3) et son modèle bond graph (figure 1.4).

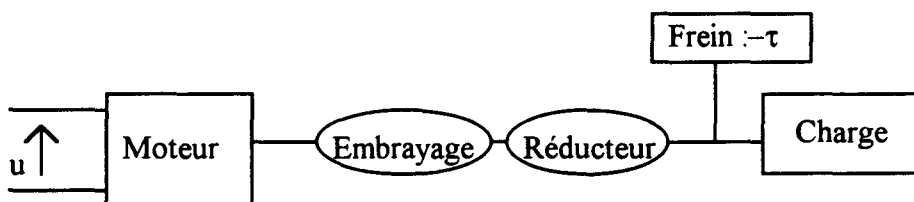


figure 1.3. Schéma d'un système électromécanique.

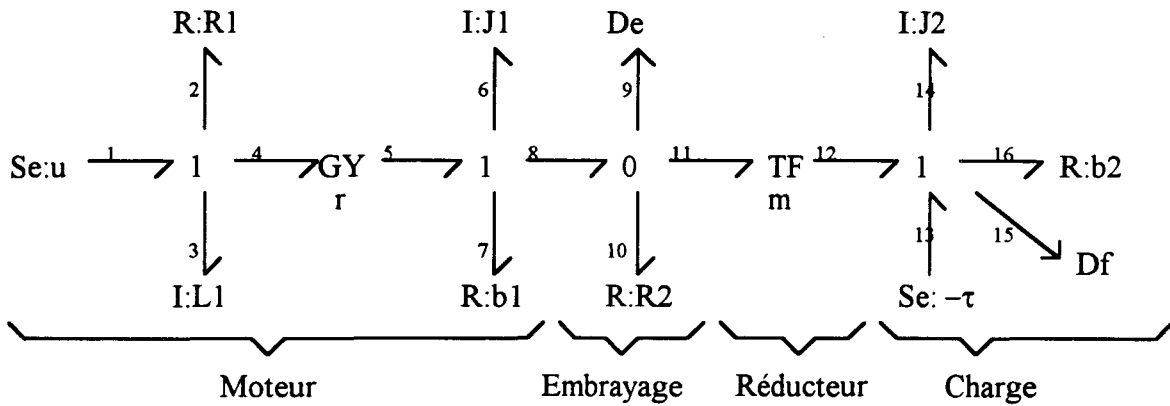


figure 1.4. Le modèle bond graph du système électromécanique.

Le modèle bond graph fait apparaître des jonctions de types "0", "1", "TF" et "GY" auxquelles sont reliés des composants. Les caractéristiques de ces jonctions sont données par :

- La jonction 0 : elle exprime que l'effort est commun à tous les liens qui y sont connectés et que la somme algébrique des flux circulant dans ces liens est nulle.

$$\begin{array}{ccc}
 & e_2 \uparrow f_2 & \\
 \frac{e_1}{f_1} \rightarrow & 0 & \leftarrow \frac{e_3}{f_3}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 e_1 = e_2 = e_3 \\
 f_1 - f_2 - f_3 = 0
 \end{array}$$

- La jonction 1 : c'est la jonction duale de la jonction 0, elle exprime que le flux est commun à tous les liens qui y sont connectés et que la somme algébrique des efforts portés par ces liens est nulle.

$$\begin{array}{ccc}
 & e_2 \uparrow f_2 & \\
 \frac{e_1}{f_1} \rightarrow & 1 & \leftarrow \frac{e_3}{f_3}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 f_1 = f_2 = f_3 \\
 e_1 - e_2 - e_3 = 0
 \end{array}$$

- La jonction TF : elle exprime des relations de proportionnalité liant les flux entre eux et les efforts entre eux.

$$\begin{array}{ccc}
 \frac{e_1}{f_1} \rightarrow & \frac{TF}{m} & \leftarrow \frac{e_2}{f_2}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 e_1 = m e_2 \\
 f_2 = m f_1, \text{ où } m \text{ est le module du TF}
 \end{array}$$

- La jonction GY : elle exprime des relations de proportionnalité croisées flux-effort.

$$\begin{array}{ccc} e1 & & e2 \\ f1 \nearrow & \text{GY} & \nwarrow f2 \\ & r & \end{array} \quad \begin{array}{l} e1 = rf2 \\ e2 = rf1, \text{ où } r \text{ est le module du GY} \end{array}$$

Parmi les éléments de la modélisation bond graph nous notons des sources d'effort : la tension de commande  $u$  et le frein  $-\tau$ . Nous remarquons aussi la présence d'éléments dissipatifs d'énergie : la résistance du moteur, les frottements au niveau de l'embrayage et les pertes par frottements au niveau de la charge. Nous constatons, enfin, des éléments inertiels : la self-inductance de l'induit, les inerties du moteur et de la charge. Nous avons placé un capteur d'effort pour mesurer le couple au niveau de l'embrayage et un capteur de flux pour mesurer la vitesse de rotation de la charge [TAGI 94]. Il existe d'autres éléments bond graph qui sont les sources de flux et les éléments capacitifs. Les caractéristiques de ces éléments sont données par :

- L'élément "R" : élément résistif qui exprime une perte de puissance (par effet Joule : résistance, frottement,...), il fait intervenir une relation liant le flux et l'effort :  $\Phi_R(e, f) = 0$ .
- L'élément "I" : élément inertiel qui stocke de l'énergie (magnétique, cinétique), il fait intervenir une relation du type :  $\Phi_I(\int e dt, f) = 0$ .
- L'élément "C" : élément capacitif qui stocke de l'énergie (électrique, potentielle), il fait intervenir une relation du type :  $\Phi_C(e, \int f dt) = 0$ .
- L'élément "Se" : source d'effort.
- L'élément "Sf" : source de flux.
- L'élément "De" : capteur d'effort.
- L'élément "Df" : capteur de flux.



Système physique	élément dissipatif "R"	élément de stockage "I"	élément de stockage "C"
Electrique	résistance	inductance	capacité
Hydraulique	résistance hydraulique	inductance hydraulique	capacité hydraulique
Pneumatique	résistance pneumatique	inductance pneumatique	capacité pneumatique
Mécanique translation	amortisseur frottement	masse	ressort
Mécanique rotation	frottement	moment d'inertie	ressort

tableau 3.

### I-8-2-3 Représentation graphique

Nous avons observé que les éléments de la structure de jonction sont reliés entre eux et aux composants par des demi flèches (ou lien ou "bond") : "—▷" pointant selon le sens de propagation de la puissance.

Les capteurs de flux et d'effort sont reliés à la structure de jonction par des flèches complètes "→" indiquant l'absence de transfert de puissance. Il s'agit uniquement d'un transfert d'information représenté par un signal.

Le modèle bond graph peut être augmenté par l'ajout de la causalité (trait perpendiculaire au lien, indiquant le sens de propagation (en termes d'entrée-sortie) du flux et de l'effort au sein du système). La causalité oriente aussi les relations sous formes intégrales  $f = \frac{1}{I} \int e dt$  ou dérivée  $e = I \frac{df}{dt}$  pour un élément I par exemple. Dans le premier cas la causalité est dite intégrale, elle est dite dérivée dans le second.

### I-8-2-4 Représentation matricielle

Le modèle bond graph peut être considéré comme une structure de jonction reliée à quatre modules (figure 1.5) [ROSE 83][BORN 92][SUEU 90] :

- Sources.
- Capteurs.
- Module dissipatif.
- Module de stockage.

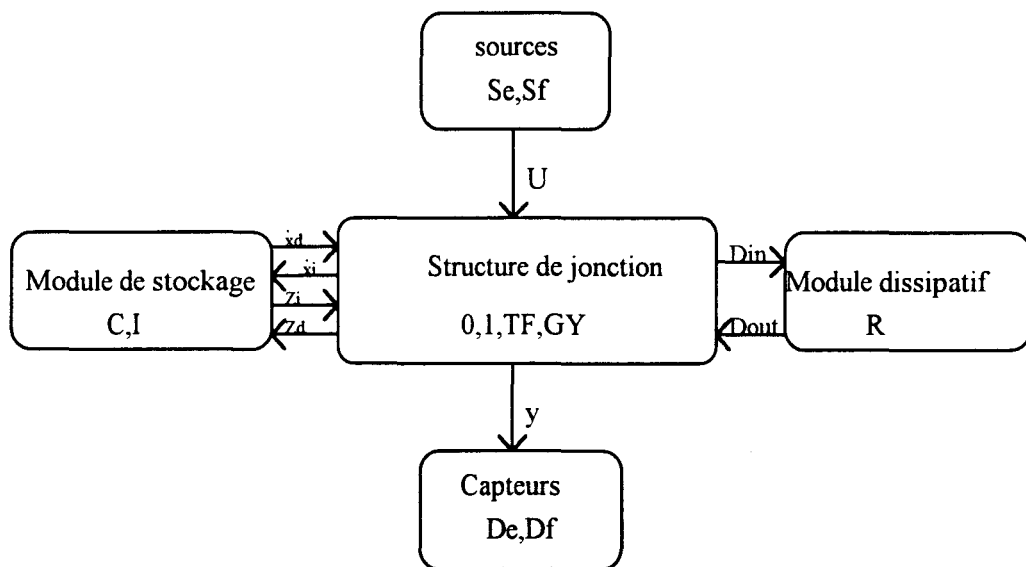


figure 1.5. Décomposition du modèle bond graph en structure de jonction et quatre modules

Les vecteurs associés à cette représentation sont :

$X$  : le vecteur état (composé de variables  $p$  sur les éléments  $I$  et  $q$  sur les éléments  $C$ ) scindé en  $x_i$  et  $x_d$ , les vecteurs associés aux composants en causalité intégrale et dérivée.

$\dot{X}$  : la dérivée par rapport au temps du vecteur état (variables  $e$  sur les  $I$  et  $f$  sur les  $C$ ).

$Z$  : le complémentaire de  $\dot{X}$  (variables  $f$  sur les  $I$  et  $e$  sur les  $C$ ) scindé en  $Z_i$  et  $Z_d$ .

$U$  : vecteur entrée (sources).

$Y$  : vecteur sortie (capteurs).

$D_{in}$  : entrée du module dissipatif "R".

$D_{out}$  : sortie du module dissipatif "R".

Cette représentation permet de construire la matrice "S" telle que :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ Z_d \\ D_{in} \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_i \\ \dot{x}_d \\ D_{out} \\ U \end{bmatrix} \quad (15)$$

S possède  $(n_c+n_s)$  lignes où  $n_c$  et  $n_s$  sont respectivement le nombre de composants (I, R ou C) et de capteurs (s pour "sensors") dans le système. La matrice S ne dépend pas de la linéarité du système et on la construit dans tous les cas sous cette forme, même si les matrices  $S_{ij}$  peuvent être des fonctions non linéaires des variables.

Dans le cas linéaire, quelques relations peuvent être énoncées :

$$D_{out} = L.D_{in} \quad (16a)$$

$$Z_i = H(s) \dot{x}_i \quad (16b)$$

$$Z_d = H'(1/s) \dot{x}_d \quad (16c)$$

où L, H(s), H'(1/s) sont des matrices carrées; s et 1/s sont les opérateurs de dérivation et d'intégration par rapport au temps. Dans le cas d'éléments 1-ports, ces matrices sont diagonales et inversibles. Quand le système comporte des éléments multiports, il est toujours possible de construire ces matrices qui ne sont plus diagonales et généralement non-inversibles.

### Exemple :

Pour le système représenté dans le paragraphe précédent, et en considérant le modèle bond graph affecté d'une causalité dérivée, les différents vecteurs clés et la matrice de structure s'écrivent :

$$\dot{x}_d = [e_3, e_6, e_{14}]^t; \dot{x}_i = [ ]; Z_i = [ ]; U = [u, -\tau]^t; Y = [De, Df]^t; D_{in} = [f_2, f_7, f_{10}, e_{16}]^t;$$

$$D_{out} = [e_2, e_7, e_{10}, f_{16}]^t; Z_d = [f_3, f_6, f_{14}]^t.$$

$$\begin{matrix} f_3 \\ f_6 \\ f_{16} \\ f_2 \\ f_7 \\ f_{10} \\ e_{16} \\ De \\ Df \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/r & 0 & 0 & 1/r & 1/r & 0 & 0 & 0 \\ -1/r & 0 & 0 & -1/r & 0 & 0 & 0 & 1/r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r & 0 & 0 & 1/r & 1/r & 0 & 0 & 0 \\ -1/r & 0 & 0 & -1/r & 0 & 0 & 0 & -1/r & 0 \\ -1/r & 0 & 0 & -1/r & 0 & 0 & -1/m & 1/r & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1/m & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} e_3 \\ e_6 \\ e_{14} \\ e_2 \\ e_3 \\ e_{10} \\ f_{16} \\ U \\ -\tau \end{matrix} \quad (17)$$

La modélisation bond graph permet le passage à d'autres formes de représentations de systèmes [BORN 92] ainsi que l'analyse structurelle des systèmes [SUEU 90][RAHM 93]. Nous exposons ces possibilités en annexe A.

### I-8-3 Modèles mathématiques issus d'un modèle bond graph

La modélisation bond graph permet le passage à d'autres formes de modélisation ce qui permet d'utiliser les méthodes de surveillances présentées dans les paragraphes I-3 et I-4. Les méthodes de passages du bond graph aux autres formes de représentation des systèmes sont explicitées dans l'annexe A. Nous rappelons, cependant, les différents modèles mathématiques qui peuvent être obtenus à partir d'un bond graph ainsi que les principes de base de son obtention :

- La matrice de transfert : Les termes de la matrice de transfert sont les transmittances reliant les différentes entrées (sources) aux sorties (capteurs). Chaque transmittance peut être calculée directement à partir du modèle bond graph grâce à la généralisation de la règle de Shannon-Mason [BROW 72].
- L'équation d'état : Le vecteur état décrit dans le paragraphe précédent est composé de variables  $p$  sur les éléments I et  $q$  sur les éléments C. Les matrices A, B, C et D de l'équation d'état sont déterminées en regardant les différents chemins dans le bond graph, qui relient les éléments dynamiques (I et C) entre eux et aux éléments R, ainsi que les chemins qui relient ces éléments aux sources et aux capteurs [BORN 92].

- Le schéma bloc : il est obtenu en constituant des blocs exprimant une proportionnalité correspondant aux éléments R, TF et GY et des blocs de dérivation et d'intégration correspondant aux éléments I et C. La structure de jonction détermine la manière de relier ces différents blocs [BORN 92].

## **I-9 Conclusion**

Ce chapitre a présenté, dans une première étape, les notions fondamentales pour la surveillance des processus industriels complexes, et les méthodes de générations de relations de redondance analytique avec modèle dans la seconde.

Ensuite, le principe de la détection et de la localisation de défaillances à partir des résidus structurés a été présentée. Cette méthode sera utilisée dans la suite de ce travail pour évaluer la qualité des relations de redondance analytique qui seront générées.

Enfin, le cahier des charges a fixé le cadre de notre travail : détection et localisation des défaillances au niveau des capteurs et des actionneurs quand on dispose d'un modèle bond graph que nous utiliserons pour générer directement les résidus.

## CHAPITRE II

### Approche analytique pour la surveillance

II-1 Introduction .....	33
II-2 Représentation matricielle issue du bond graph.....	34
II-3 Méthode par substitution .....	37
II-4 Approche par projection .....	38
II-5 Approche analytique de détermination de $\eta$ .....	44
II-6 Comparaison .....	49
II-7 Conclusion.....	53

# Approche analytique pour la surveillance

## II-1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons une approche analytique pour la génération de relations de redondance. Nous allons nous intéresser plus particulièrement à la représentation matricielle issue d'un modèle bond graph ne comportant que des éléments 1-ports.

Cette méthode repose sur la projection des relations décrivant le système physique dans un espace vectoriel orthogonal à celui engendré par les variables inconnues. Le résultat de cette projection est un ensemble de relations ne faisant intervenir que des variables connues. La difficulté majeure de cette méthode réside dans la détermination d'une matrice de projection polynomiale.

Dans la première partie de ce chapitre, nous présentons un modèle matriciel issu d'une représentation bond graph. Dans la deuxième partie, nous exposons la méthode de génération de relations de redondance par substitution et nous montrons qu'elle représente un cas particulier de la méthode de projection que nous exposons dans la partie suivante. Ensuite, nous rappelons une méthode récursive de construction de la matrice de projection. Cette méthode est applicable à tous les modèles matriciels polynomiaux. Nous montrons, dans la partie suivante, une approche analytique pour déterminer la matrice de projection dans le cas d'un modèle matriciel issu d'une représentation bond graph. Enfin, nous comparons ces deux méthodes entre elles et avec la méthode par substitution.

## II-2 Représentation matricielle issue du bond graph

Dans le chapitre I, nous avons montré que la structure du modèle bond graph admet une représentation matricielle (relation(15)), qui explicite les liens entre les différentes variables de flux et d'effort dans le système.

Quelques relations supplémentaires concernant cette matrice de structure S peuvent être énoncées :

$$S_{11} = -S_{11}^t \quad (18a) \text{ (où } t \text{ désigne l'opérateur de transposition)}$$

$$S_{22} = -S_{22}^t \quad (18b)$$

$$S_{33} = -S_{33}^t \quad (18c).$$

Les différentes variables du bond graph peuvent être regroupées dans un seul vecteur V défini par :

$$V = \left[ Z_i^t \dot{x}_d^t D_{out}^t U^t \dot{x}_i^t Z_d^t D_{in}^t Y^t \right]^t \quad (19)$$

où les différents vecteurs constitutifs de V sont définis dans le chapitre précédent .

En définissant la matrice M par [S -I], la relation (15) s'écrit :

$$M.V = 0 \quad (20).$$

Les relations du type entrée-sortie, écrites pour tous les composants (R, C et I) du bond graph conduisent aux relations (16) qui peuvent être utilisées pour définir une matrice M' décrivant le comportement des composants et telle que  $M'.V = 0$  (21), avec

$$M' = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & 0 & -H(1/s) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & 0 & 0 & -H'(s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 & 0 & 0 & 0 & -L & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$



où  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  représentent des matrices identités de tailles convenables et  $0$  représente une matrice nulle de dimensions convenables.

A partir de (20) et (22), on peut construire une matrice  $\mathcal{M}$  exprimant des relations de structure et de comportement et telle que  $\mathcal{M}.V = 0$  (23) [TAGI 94].

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{M}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & -I_1 & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & 0 & -I_2 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & 0 & 0 & -I_3 & 0 \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & 0 & 0 & 0 & -I_4 \\ I_1 & 0 & 0 & 0 & -H(1/s) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & 0 & 0 & -H'(s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 & 0 & 0 & 0 & -L & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \\ (6) \\ (7) \end{matrix} \quad (24)$$

Cette matrice constitue un modèle polynomial du système. Ses lignes expriment des relations qui sont au nombre de  $2n_c + n_s$  où  $n_c$  désigne le nombre de composants et  $n_s$  le nombre de capteurs.

**Proposition :**

Les lignes de la matrice  $\mathcal{M}$  sont indépendantes et le système d'équations exprimé par  $\mathcal{M}$  est sur-déterminé s'il y a au moins un capteur. Sinon, il est juste-déterminé.

**Preuve :**

La matrice  $\mathcal{M}$  comporte  $2n_c + n_s$  lignes donc exprime  $2n_c + n_s$  relations entre les variables du système dont seulement  $2n_c$  variables sont inconnues (les flux et efforts correspondant aux composants R, C et I).

\* Dans la matrice  $\mathbf{M}'$ , les trois matrices identités assurent l'indépendance linéaire de toutes ses lignes.

\* La matrice  $I_4$  du 4<sup>ième</sup> bloc lignes assure l'indépendance linéaire de la famille des blocs lignes (4, 5, 6, 7).

\* Comme  $S_{33}$  est antisymétrique alors sa diagonale est nulle. Il s'en suit qu'aucune ligne du bloc lignes 3 ne peut être construite à partir de la famille (4, 5, 6, 7) d'où l'indépendance linéaire de la famille (3, 4, 5, 6, 7).

\*  $S_{22}$  et  $S_{11}$  sont antisymétriques, et un raisonnement similaire au précédent conduit à l'indépendance linéaire de toutes les lignes de la matrice  $\mathcal{M}$ .

Il y a donc  $2n_c + n_s$  relations indépendantes pour déterminer les  $2n_c$  variables inconnues. On peut prendre n'importe quelles  $2n_c$  relations parmi les  $2n_c + n_s$  disponibles, pour exprimer les variables inconnues en fonctions des variables connues. Le résultat sera injecté dans les  $n_s$  relations restantes conduisant à  $n_s$  relations de redondance analytique linéairement indépendantes.

Si  $n_s > 1$  alors le système est sur-déterminé, sinon, il est juste déterminé et il n'existe pas de RRA.

**Remarque :**

Etant donné un modèle bond graph, la représentation matricielle correspondante conduit à un système d'équations qui n'admet pas de sous-système sous-déterminé. En d'autres termes, la modélisation bond graph est cohérente et n'engendre pas de variables non calculables.

La matrice  $\mathcal{M}$  peut être scindée en deux sous-matrices  $\mathcal{M}_C$  et  $\mathcal{M}_W$  correspondant respectivement aux variables connues  $C = [U^t \ Y^t]^t$  et inconnues  $W = [Z_i^t \ \dot{x}_d^t \ D_{out}^t \ \dot{x}_i^t \ Z_d^t \ D_{in}^t]^t$ .

$$\mathcal{M}_W = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & -I_1 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & -I_2 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & -I_3 \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & 0 & 0 & 0 \\ I_1 & 0 & 0 & -H(1/s) & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & 0 & -H'(s) & 0 \\ 0 & 0 & I_3 & 0 & 0 & -L \end{bmatrix}, \quad \mathcal{M}_C = \begin{bmatrix} S_{14} & 0 \\ S_{24} & 0 \\ S_{34} & 0 \\ S_{44} & -I_4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

### II-3 Méthode par substitution

La matrice  $m$  est scindée en  $m_C$  et  $m_W$ . La décomposition de la relation (22) engendre la relation :  $m_C.C + m_W.W = 0$  (26).

Dans l'approche par substitution, on cherche à trouver un sous-système juste-déterminé pour construire un couplage maximal sur les variables inconnues.

Partons de la relation (26) :  $m_C.C + m_W.W = 0$ , le principe de l'approche par substitution est d'extraire une sous-matrice  $M_{W_i}$ , inversible, de  $m_W$  et de l'utiliser pour la détermination de l'ensemble des variables inconnues. L'ensemble des lignes restantes de  $m$  constitue la matrice  $m_{W_r}$ . Nous avons donc :

$$m_W = \begin{bmatrix} M_{W_i} \\ M_{W_r} \end{bmatrix} \text{ et } m_C = \begin{bmatrix} M_{C_i} \\ M_{C_r} \end{bmatrix}. \quad (27)$$

La relation (26) se scinde donc en deux relations :

$$M_{W_i}W + M_{C_i}C = 0. \quad (28.a)$$

$$M_{W_r}W + M_{C_r}C = 0. \quad (28.b)$$

La relation (28.a) sert à exprimer les variables inconnues en fonction des variables connues :

$$W = -(M_{W_i})^{-1}M_{C_i}C. \quad (29)$$

En substituant le vecteur  $W$  par l'expression (29) dans la relation (28.b) on obtient un ensemble de relations de redondance décrit par :

$$[-M_{W_r}(M_{W_i})^{-1}M_{C_i} + M_{C_r}]C = 0. \quad (30)$$

#### **Remarque :**

Le choix des lignes de  $m$  qui constituent la sous-matrice  $M_{W_i}$  n'est pas unique. Chaque ensemble de lignes conduit à une forme particulière des relations de redondance.

## **II-4 Approche par projection**

Notre but est de trouver une matrice  $\mathcal{N}$ , polynomiale en  $s$ , telle que :

$$\mathcal{N} \cdot \mathcal{M}_{\mathbf{W}} = 0 \quad (31).$$

En multipliant l'équation (26) par la matrice  $\mathcal{N}$  on obtient l'ensemble de relations de redondance analytique décrit par :  $\mathcal{N} \cdot \mathcal{M}_{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{C} = 0$  (32).

### **Remarque :**

La matrice de projection  $\mathcal{N}$  n'est pas unique puisque toute matrice obtenue par combinaison linéaire des lignes de  $\mathcal{N}$  répond à la question.

### **II-4-1 Conditions d'existence de $\mathcal{N}$**

$\mathcal{M}_{\mathbf{W}}$  est une matrice polynomiale de dimension  $(2n_{\mathbf{C}} + n_{\mathbf{S}}, n_{\mathbf{S}})$ .

Le rang de  $\mathcal{M}_{\mathbf{W}}$ , calculé indépendamment de  $s$ , est noté  $r$ . La proposition du paragraphe II-2 montre que  $r = 2n_{\mathbf{C}}$ .

Les  $2n_{\mathbf{C}}$  colonnes indépendantes de  $\mathcal{M}_{\mathbf{W}}$ , définissent un sous module libre de dimension  $2n_{\mathbf{C}}$  sur l'anneau des polynômes à coefficients réels [QUEY 86].

$\mathcal{N}$  possède  $n_{\mathbf{S}}$  lignes de dimension  $2n_{\mathbf{C}} + n_{\mathbf{S}}$ . Celles ci définissent le module supplémentaire à  $\mathcal{M}_{\mathbf{W}}$ .

$\mathcal{N}$  est donc de rang plein égal à  $n_{\mathbf{S}}$  [COCQ 89].

### **II-4-2 Recherche de la matrice $\mathcal{N}$**

#### **II-4-2-1 Préliminaire mathématique**

##### **Théorème [GANT 59] :**

Soit  $A(s) = [a_{ij}(s)]$  une matrice polynomiale en  $s$  (où  $s$  est l'opérateur de Laplace) de dimension  $(a_1, a_2)$ . Le degré  $a$  de  $A$  est égal au degré maximal de tous les polynômes  $a_{ij}(s)$ .

$$a = \max_{i,j}(\text{degré } a_{ij}(s))$$

La matrice polynomiale  $A(s)$  peut être exprimée sous la forme d'un polynôme de degré  $a$  à coefficients matriciels réels :

$$A(s) = \sum_{i=0}^a A_i s^i \quad (33)$$

$A_i$  ( $i = 0 \dots a$ ) est une matrice réelle de dimension  $(a_1, a_2)$ .

Soit  $B_a(s) = [1 \ s \ \dots \ s^a]^t$  et soit  $A^* = [A_0 \ A_1 \ \dots \ A_a]$ .  $A^*$  est la matrice réelle de coefficients (matriciels) du polynôme  $A(s)$ . Elle est de dimension  $(a_1, (a+1).a_2)$ .

La matrice  $A(s)$  peut s'écrire sous la forme :  $A(s) = A^*.B_a(s)$  (34).

**Propriété :**

Soit  $M(s)$  et  $N(s)$  deux matrices de degrés respectifs  $m$  et  $n$  et de dimensions respectives  $(m_1, m_2)$  et  $(n_1, n_2)$ .

Si  $m_2 = n_1$  alors le produit  $M(s).N(s)$  a un sens. C'est une matrice polynomiale  $R(s)$  de degré maximum  $m + n$  et de dimension  $(m_1, n_2)$ .

La matrice  $R^*$  est définie par  $R^* = M^*.N_m^*$  (35) où  $N_m^*$  désigne la matrice bande diagonale définie de la manière suivante :

$$N_m^* = \begin{bmatrix} N_0 & N_1 & \dots & N_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N_0 & N_1 & \dots & N_n & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & N_0 & N_1 & \dots & N_n \end{bmatrix} \quad (36)$$

Cette matrice  $N_m^*$  est de dimension  $((m+1).n_1, (m+n+1).n_2)$ .

Dans le cas de la matrice  $\mathcal{M}_W$ , le degré est inférieur ou égal à 2. Le degré est égal à 1 s'il n'y a pas d'élément en causalité intégrale ( $H(1/s) = [ \ ]$ ), dans le cas contraire,  $H(1/s)$  n'est pas  $[ \ ]$  et en multipliant la matrice  $\mathcal{M}_W$  par  $s$ , pour éliminer  $1/s$ , on obtient une matrice de degré 2.

### II-4-2-2 Principe de la détermination de $\mathcal{N}$

Nous cherchons la matrice  $\mathcal{N}$  de rang plein  $n_s$ , telle que :  $\mathcal{N} \cdot \mathcal{M}_W = R(s) = 0$ . Or un polynôme matriciel est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls. Les coefficients de  $R(s)$  forment la matrice  $R^*$  définie par la matrice suivante :

$$R^* = \mathcal{N}^* \cdot \mathcal{M}_W^* \cdot \mathcal{N} \quad (37)$$

$n$  est le degré de la matrice  $\mathcal{N}$ . Ce degré est a priori inconnu. Les différentes matrices intervenant dans cette expression dépendent de  $n$  et sont donc inconnues.

Dans [COCQ 89], les auteurs exposent une méthode récursive pour la détermination de  $\mathcal{N}^*$ . Le principe de l'algorithme présenté est de rechercher les lignes de  $\mathcal{N}$  par degré croissant, la condition d'arrêt est la détermination de  $n_s$  vecteurs lignes indépendants. L'algorithme de détermination de la matrice  $\mathcal{N}^*$ , présenté dans [COCQ 89] est rappelé en annexe B. Cette méthode est applicable à tous les modèles matriciels polynomiaux.

#### Exemple :

Considérons le système physique représentant la suspension d'un quart de véhicule et composé d'une masse  $M_1$ , d'un ressort de suspension de raideur  $k_1$ , d'un amortisseur de constante  $b_1$  et d'une roue de masse  $M_1$  et de raideur  $k_2$  (figure 2.1).

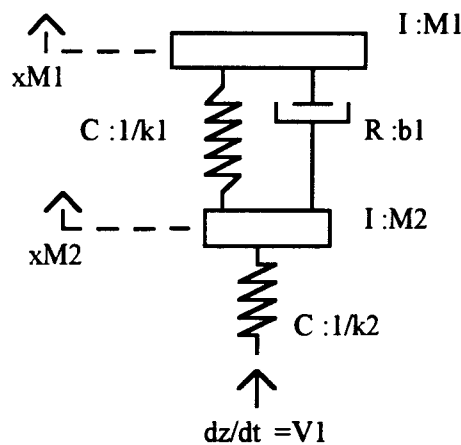


figure 2.1. Suspension d'un 1/4 de véhicule

L'entrée du système, supposée mesurée, est la dérivée du profil de la route  $dz/dt$ . La gravité agit sur les deux masses engendrant les forces  $F_1$  et  $F_2$ .

Deux capteurs de flux ( $Df_1$  et  $Df_2$ ) mesurent respectivement les vitesses de  $M_1$  et  $M_2$ . Un capteur d'effort ( $De_1$ ) mesure la force appliquée à l'amortisseur. Les variables mesurées par ces trois capteurs constituent les sorties de ce système.

Le modèle bond graph associé à ce système est représenté (figure 2.2). Il est affecté d'une causalité dérivée. L'utilisation de ce type de causalité est d'un grand intérêt pour la surveillance car elle permet de dépasser les problèmes dus aux conditions initiales qui, en général, ne sont pas disponibles.

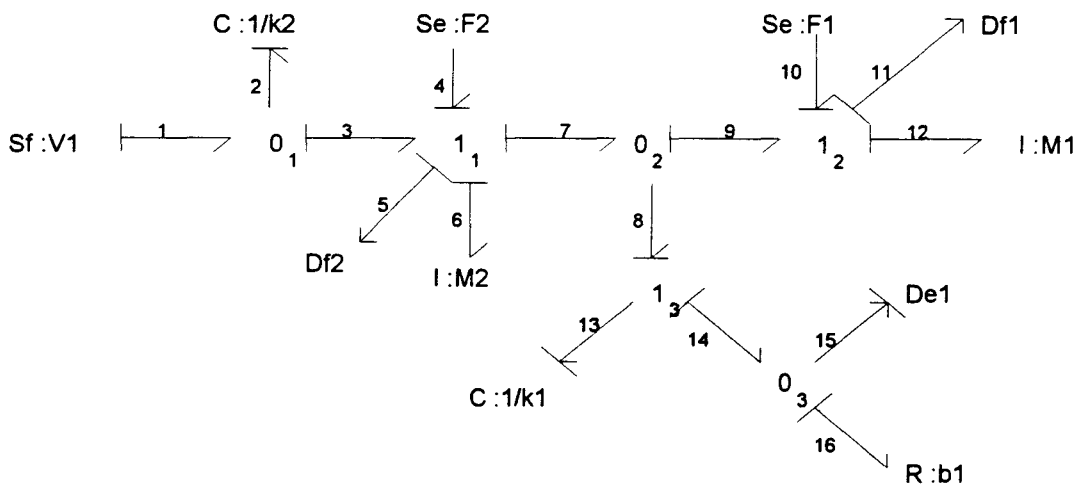


figure 2.2. Modèle bond graph de la suspension d'un 1/4 de véhicule

$$m_W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -M1s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -M2s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -s/k1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -s/k2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b1 \end{bmatrix}$$

Comme le modèle bond graph ne comporte pas d'élément en causalité intégrale ( $H(1/s) = [ ]$ ), le degré de la matrice  $m_W$  est 1. Nous pouvons donc écrire :

$$m_W = m_{W0} + m_{W1}.s \quad (38)$$

avec :

$$m_{W0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b1 \end{bmatrix} \quad m_{W1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -M1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -M2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/k1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/k2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On désire déterminer la matrice de projection  $\mathcal{N}$ . Nous appliquons l'algorithme récursif présenté dans l'annexe B et nous obtenons les matrices constituantes de  $\mathcal{N}$  :  $\mathcal{N}_0$ ,  $\mathcal{N}_1$  et  $\mathcal{N}_2$  définies par :



$$n_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -b1 & -1 & -b1 & b1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$n_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/k1 & 0 & 0 & -1/k1 & 0 & 0 & 1/k1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/k2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/k2 & 1/k2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$n_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -M1/k1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M1/k1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -M1/k2 & -M2/k2 & 0 & 0 & 0 & 0 & M1/k2 & M2/k2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le degré de  $n$  et par conséquent le nombre de matrices constituantes  $n_i$  sont a priori inconnus, c'est en appliquant l'algorithme que nous les découvrons.

$m_C$  est définie par :

$$m_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En calculant les différents termes de l'égalité :  $n.m_C.C = 0$ , on obtient les trois relations de redondance analytique définies par :

$$De_1 + b1Df_1 - b1Df_2 = 0 \tag{39.a}$$

$$Df_2 - (1 + Ms^2 / k1)Df_1 + (s / k1)F_1 + (s / k1)De_1 = 0 \quad (39.b)$$

$$V_1 + s / k2(F_1 + F_2) - (Ms^2 / k2)Df_1 - (1 + M2s^2 / k2)Df_2 = 0. \quad (39.c)$$

Lors de la détermination des composantes  $n_0$ ,  $n_1$  et  $n_2$  de  $n$ , nous avons dû résoudre un système linéaire d'équations dont les inconnues sont les termes des matrices  $n_0$ ,  $n_1$  et  $n_2$ . Pour ce faire, nous étions contraints de fixer un certain nombre de termes. C'est le choix de ces quelques termes qui a conduit à la forme actuelle des relations (39), un autre choix aurait donné d'autres relations.

## II-5 Approche analytique de détermination de $n$

Dans cette partie, nous déterminons analytiquement l'expression de la matrice de projection  $n$  orthogonale à  $m_W$ . La détermination de  $n$  n'est possible que grâce à la forme très particulière de la matrice  $m_W$ , que nous rappelons ci-dessous.

$$m_W = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & -I_1 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & -I_2 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & -I_3 \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & 0 & 0 & 0 \\ I_1 & 0 & 0 & -H(1/s) & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & 0 & -H'(s) & 0 \\ 0 & 0 & I_3 & 0 & 0 & -L \end{bmatrix} \quad (23)$$

Pour que  $n$  existe il faut que le système soit sur-déterminé, en d'autres termes il faut que le nombre de capteurs soit supérieur ou égal à 1 (voir proposition dans le paragraphe II-2).

### II-5-1 Présentation de la méthode

Le principe de cette méthode est de scinder la matrice  $n$  en sous-matrices correspondant aux différentes composantes de la matrice  $m$ . Ensuite, on effectue le produit de  $n$  par les blocs colonnes de  $m_W$ .

Définissons  $\mathcal{N}$  comme :  $\mathcal{N} = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \ N_5 \ N_6 \ N_7]$ . Les sous-matrices  $N_i$  ( $i=1,2,\dots,7$ ) ont les dimensions respectives  $(n_s, n_i)$ ,  $(n_s, n_d)$ ,  $(n_s, n_R)$ ,  $(n_s, n_s)$ ,  $(n_s, n_i)$ ,  $(n_s, n_d)$  et  $(n_s, n_R)$ , où  $n_i$ ,  $n_d$  et  $n_R$  sont respectivement les dimensions de  $(x_i$  and  $Z_i)$ ,  $(x_d$  and  $Z_d)$  et  $(D_{in}$  and  $D_{out})$  et  $n_s$  est le nombre de capteurs.

Il y a  $n_s(2n_c+n_s)$  inconnues, qui représentent les termes des sous matrices  $N_i$ , ( $n_c$  est le nombre de composants,  $n_c = n_i + n_d + n_R$ ).

comme  $\mathcal{N}$  est choisie orthogonale à la matrice  $\mathcal{M}_W$ , il s'ensuit  $\mathcal{N} \cdot \mathcal{M}_W = 0$  ce qui conduit au système d'équations matricielles (40) :

$$N_1 S_{11} + N_2 S_{21} + N_3 S_{31} + N_4 S_{41} + N_5 = 0 \quad (40.a)$$

$$N_1 S_{12} + N_2 S_{22} + N_3 S_{32} + N_4 S_{42} + N_6 = 0 \quad (40.b)$$

$$N_1 S_{13} + N_2 S_{23} + N_3 S_{33} + N_4 S_{43} + N_7 = 0 \quad (40.c)$$

$$-N_1 - N_5 H(1/s) = 0 \quad (40.d)$$

$$-N_2 - N_6 H'(s) = 0 \quad (40.e)$$

$$-N_3 - N_7 L = 0 \quad (40.f)$$

## II-5-2 Résolution du système d'équations

Le système d'équations (40), permet de déterminer un ensemble de  $2n_c n_s$  termes parmi les  $n_s(2n_c+n_s)$  inconnus. Pour résoudre ce système d'équations, nous devons choisir  $n_s^2$  termes comme paramètres. Nous pouvons donc prendre  $N_4$  de dimension  $n_s \times n_s$  que nous choisissons inversible de dimension  $n_s$ . Les éléments de cette matrice constituent les degrés de liberté de cette méthode de projection. Ces éléments peuvent être choisis de manière à optimiser des critères associés à la procédure de détection et localisation des défaillances tels que des critères de direction [GERT 93], des propriétés de robustesse [PATT 93] ou des critères de sensibilité et de robustesse [STAR 93].

La résolution du système d'équations (40) conduit à :

$$N_1 = -\Psi N_4 \Lambda L (\Omega \Phi H'(s) S_{21} + S_{31}) \Delta H(1/s) + N_4 (S_{42} \Phi H'(s) S_{21} + S_{41}) \Delta H(1/s) \quad (41.a)$$

$$N_3 = -\Psi N_4 \Lambda L \quad (41.b)$$

$$N_4 = N_4 \quad (41.c)$$

$$N_5 = \Psi N_4 \Lambda L (\Omega \Phi H'(s) S_{21} + S_{31}) \Delta - N_4 (S_{42} \Phi H'(s) S_{21} + S_{41}) \Delta \quad (41.d)$$

$$N_6 = (\Psi N_4 \Lambda L \Omega - N_4 S_{42}) \Phi \quad (41.e)$$

$$N_7 = \Psi N_4 \Lambda \quad (41.f)$$

où :

$$\Delta = (I - H(1/s) S_{11})^{-1}$$

$$\Phi = (I - H'(s) S_{21} \Delta H(1/s) S_{12} - H'(s) S_{22})^{-1}$$

$$\Omega = S_{31} \Delta H(1/s) S_{12} + S_{32}$$

$$\Psi = (L \Omega \Phi H'(s) (S_{21} \Delta H(1/s) + S_{32}) + L (S_{31} \Delta H(1/s) S_{13} + S_{33}) - I)^{-1}$$

$$\Lambda = S_{42} \Phi H'(s) S_{21} \Delta H(1/s) S_{13} + S_{41} \Delta H(1/s) S_{12} + S_{42} \Phi H'(s) S_{23} + S_{43}$$

Les matrices  $\Delta$ ,  $\Phi$ ,  $\Omega$ ,  $\Psi$  et  $\Lambda$  de dimensions respectives  $(n_j, n_j)$ ,  $(n_d, n_d)$ ,  $(n_R, n_d)$ ,  $(n_R, n_R)$  et  $(n_s, n_R)$  sont obtenue lors de la résolution du système d'équations matricielles (40). La méthode de résolution consiste à exprimer  $N_1$ ,  $N_2$  et  $N_3$  en fonction des matrices  $N_5$ ,  $N_6$  et  $N_7$  à partir des équations (40.d), (40.e) et (40.f) et injecter ce résultat dans les trois premières équations pour obtenir un système réduit que nous résolvons par la même méthode : la substitution.

Le choix d'une matrice  $N_4$  inversible assure l'indépendance des relations de redondances analytique obtenues.

Ces relations de redondance sont données par :  $\mathcal{N} \cdot \mathcal{M} \cdot C = 0$  (42), ce qui conduit à :

$$\begin{bmatrix} N_1 S_{14} + N_2 S_{24} + N_3 S_{34} + N_4 S_{44}, -N_4 \end{bmatrix} C = 0 \quad (43).$$

Soit  $\Gamma$  la matrice définie par :  $N_1 S_{14} + N_2 S_{24} + N_3 S_{34} + N_4 S_{44}$ , alors l'expression précédente (43) devient :  $\Gamma U - N_4 Y = 0$  (44).

**Remarque :**

Si on prend la matrice  $N_4$  comme étant égale à la matrice identité, alors on retrouve l'expression de la matrice de transfert (44).

**Exemple :**

Nous considérons le même exemple que dans le paragraphe précédent. Comme il n'y a pas d'élément en causalité intégrale alors :  $N_1 = N_5 = [ ]$ . Les matrices  $N_2$ ,  $N_3$ ,  $N_4$ ,  $N_6$  et  $N_7$  ont pour dimensions respectives (3, 4), (3, 1), (3, 3), (3, 4) et (3, 1).

Le système d'équations se réduit à :

$$N_2 S_{22} + N_3 S_{32} + N_4 S_{42} + N_6 = 0 \quad (45.a)$$

$$N_2 S_{23} + N_3 S_{33} + N_4 S_{43} + N_7 = 0 \quad (45.b)$$

$$-N_2 - N_6 H'(s) = 0 \quad (45.c)$$

$$-N_3 - N_7 L = 0 \quad (45.d)$$

avec :

$$S_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, S_{23} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, S_{32} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0], S_{33} = [0], S_{42} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, S_{43} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$H'(s) = \begin{bmatrix} M_1 s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s/k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s/k_2 \end{bmatrix} \text{ et } L = [b_1].$$

Pour résoudre ce système d'équations, nous procédons comme nous l'avons exposé précédemment. La substitution de  $N_2$  et  $N_3$  dans (43.a) et (43.b) par leurs expressions obtenues par (43.c) et (43.d) conduit à un système réduit à deux équations matricielles dont les

inconnues sont  $N_6$  et  $N_7$ . Pour faciliter les calculs, nous posons  $\Pi = (S_{42} + S_{43}LS_{32})[I - H'(s)(S_{22} + S_{23}LS_{32})]^{-1}$ .

Ceci donne :

$$\Pi = \frac{1}{\text{Det}} \begin{bmatrix} b_1(s/k_1 + M_2.s^3/k_1k_2) & b_1M_1.s^3/k_1k_2 & b_1(1+(M_1+M_2).s^2/k_2) & -b_1M_1.s^2/k_1 \\ s/k_2 + b_1.s^2/k_1k_2 & s/k_2 + b_1.s^2/k_1k_2 + M_1.s^3/k_1k_2 & M_1.s^2/k_2 & -1 - b_1.s/k_1 - M_1.s^2/k_1 \\ s/k_2 + b_1.s^2/k_1k_2 & s/k_2 + b_1.s^2/k_1k_2 + M_1.s^3/k_1k_2 & M_1.s^2/k_2 & -1 - b_1.s/k_1 - M_1.s^2/k_1 \end{bmatrix}$$

avec :

$$\text{Det} = 1 + b_1.s/k_1 + (M_1/k_1 + M_1/k_2 + M_2/k_2).s^2 + (b_1M_1/k_1k_2 + b_1M_2/k_1k_2).s^3 + M_1M_2.s^4/k_1k_2$$

d'où :

$$N_6 = -N_4\Pi \quad (46.a)$$

$$N_7 = -N_4(\Pi H'(s)S_{23} - S_{43}) \quad (46.b)$$

$$N_3 = N_4(\Pi H'(s)S_{23} - S_{43})L \quad (46.c)$$

$$N_2 = N_4\Pi H'(s) \quad (46.d)$$

ce qui conduit à l'ensemble de relations de redondance analytique suivant :  $\Gamma U - N_4 Y = 0$ ,

avec :  $\Gamma = (N_4\Pi H'(s)S_{24} + N_4(\Pi H'(s)S_{23} - S_{43})LS_{34})$ .

Ces relations de redondance peuvent s'écrire sous la forme :

$$N_4((1/\text{Det})T.U - Y) = 0 \quad (47)$$

avec :

$$T = \begin{bmatrix} b_1M_1s^2/k_1 & -b_1(1+M_2s^2/k_2)/k_2 & b_1M_1s^3/k_1k_2 \\ 1+b_1s/k_1 & (1+M_2s^2/k_2)s/k_1 + (1+b_1s/k_1)s/k_1 & (1+b_1s/k_1)s/k_2 \\ 1+b_1s/k_1 + M_1s^2/k_1 & (1+b_1s/k_1)s/k_2 & (1+b_1s/k_1 + M_1s^2/k_1)s/k_2 \end{bmatrix} \quad (48)$$

La matrice  $N_4$  permet de faire des combinaisons linéaires des relations obtenues par (47) pour en générer d'autres.

## II-6 Comparaison

### II-6-1 Comparaison des méthodes de projection et de substitution

Dans l'approche de projection, nous partons de la relation (28) pour aboutir à l'expression des relations de redondance définies par la relation (30) :

$$[-M_{W_r}(M_{W_i})^{-1}M_{C_i} + M_{C_r}].C = 0. \quad (30)$$

Ce même résultat peut être obtenue par la méthode de projection, pour cela, il suffit de prendre une matrice de projection sous la forme :  $\mathcal{N} = [-M_{W_r}(M_{W_i})^{-1} \quad I]$  et effectuer le produit à gauche avec la relation (28.b). [COCQ 93]

Nous pouvons donc considérer l'approche par substitution comme un cas particulier de la méthode de projection.

#### **Remarques :**

- La difficulté d'utiliser l'approche par substitution comme un cas particulier de la méthode de projection et de construire ainsi une matrice de projection  $\mathcal{N}$ , réside dans la détermination de la matrice inversible  $M_{W_i}$  et dans le calcul de son inverse pour des systèmes de grande dimension.

- Dans le cas de notre exemple, les matrices  $M_{W_i}$ ,  $M_{W_r}$ ,  $M_{C_i}$  et  $M_{C_r}$  peuvent facilement être déterminées :

$$M_{Wi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -M1s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -M2s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -s/k1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -s/k2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b1 \end{bmatrix}$$

$$M_{Wr} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{Ci} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M_{Cr} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Dans le cas d'une matrice obtenue à partir d'un modèle bond graph, la matrice  $M_{Wi}$  a une forme qui se prête bien aux manipulations algébriques.

- Cette méthode nécessite l'inversion d'une matrice de dimension (10, 10) alors que la méthode de projection présentée dans le paragraphe précédent ne nécessite que l'inversion d'une matrice de dimension (4, 4) grâce à la décomposition de la matrice de projection en sous-matrices  $N_j$ .



- Le choix de la matrice  $M_{\mathcal{W}_i}$  n'est pas unique, et particulièrement dans le cas d'un modèle matriciel issu d'une représentation bond graph. En effet, d'après la proposition dans le paragraphe II-2, n'importe quel ensemble de  $2n_c$  lignes répond à la question, ce qui permet d'obtenir différentes relations de redondance.

## II-6-2 Comparaison des deux méthodes de détermination de $\mathcal{N}$

### II-6-2-1 Points communs

Les deux approches de détermination de la matrice de projection conduisent à des matrices de même dimension (s'il est évident que les deux matrices ont le même nombre de colonnes, le fait qu'elles aient le même nombre de lignes n'est vrai que parce que ces méthodes génèrent un ensemble de relations de redondance analytique indépendantes). Dans les deux cas, la génération d'autres relations de redondance analytique s'effectue par des combinaisons linéaires des différentes lignes de la matrice de projection  $\mathcal{N}$ .

De plus, les deux méthodes nécessitent la résolution d'un système linéaire d'équations pour la détermination des termes des matrices constituantes de la matrice de projection, même si ces équations sont réelles dans le cas de la première méthode et polynomiale dans le cas de la deuxième.

### II-6-2-2 Points différents

La grande différence entre les deux méthodes de détermination de la matrice de projection réside dans le concept de base. En effet, la première méthode utilise un algorithme récursif qui admet comme condition d'arrêt la construction d'un certain nombre de lignes polynomialement indépendantes et orthogonales à la matrice  $\mathcal{M}_{\mathcal{W}}$ , alors que la deuxième méthode se base sur une approche analytique se traduisant par la résolution d'un système linéaire d'équations matricielles.

La deuxième différence réside dans la manière de décomposer la matrice de projection. Dans la première méthode, la matrice  $\mathcal{N}$  est écrite sous forme d'un polynôme matriciel de degré inconnu. Le nombre des matrices constituantes de  $\mathcal{N}$  est inconnu mais la dimension de ces matrices est semblable à celle de  $\mathcal{N}$ . Pour la deuxième méthode, la matrice de projection est scindée en sous-matrices de petites tailles facilitant ainsi leur manipulation. Il est toutefois à noter que les matrices constituantes, correspondant à la première méthode sont réelles, alors que les sous-matrices de  $\mathcal{N}$  dans la deuxième approche sont polynomiales.

De plus, contrairement à la première approche qui se prête bien à une programmation numérique (sous le logiciel MATLAB par exemple), pour déterminer des matrices réelles, la deuxième approche donne une expression formelle de la matrice de projection et se prête bien à une programmation symbolique (sous le logiciel MATHEMATICA par exemple).

Enfin, la première méthode est applicable à n'importe quel modèle matriciel alors que la deuxième méthode suppose que le modèle est issu d'une représentation bond graph et qu'il a, par suite, une forme bien appropriée aux différents calculs effectués. La modélisation bond graph facilite l'utilisation de la première méthode puisque la matrice  $\mathcal{M}_{\mathcal{W}}$  est de degré inférieur ou égal à deux.

### II-6-2-3 Tableau récapitulatif

Les différents résultats présentés dans les deux paragraphes précédents peuvent être résumé dans le tableau suivant (tableau 4) :

	Méthode [COCQ 89]	Nouvelle méthode
Nature de l'algorithme	Récuratif	Analytique
Matrice de connaissance	Quelconque	Issue d'un modèle bond graph
Type du système d'équations	Linéaire réel	Linéaire polynomial
Taille des matrices utilisées	= Taille des matrices de connaissance et de projection	Petite par rapport à celle des matrices de connaissance et de projection
Nombre de matrices constituantes de $\mathcal{n}$	Inconnu a priori	Connu d'avance
Nombre de RRA générées	= Nombre de capteurs	= Nombre de Capteurs
Moyen d'obtention d'autres RRA	Combinaison des lignes de $\mathcal{n}$	Combinaison des lignes de $\mathcal{n}$
Programmation	Numérique (MATLAB)	Symbolique (MATHEMATICA)

tableau 4.

Selon le type de modèle matriciel et de la taille des matrices mises en jeu, l'une ou l'autre des deux méthodes exposées peut être mieux appropriée.

## **II-7 Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons rappelé la méthode de détermination d'une matrice de projection telle qu'elle a été présentée dans [COCQ 93]. Cette méthode se basant sur un algorithme récursif présente un certain nombre d'inconvénients tels que la récursivité et l'ignorance, a priori, de la quantité de calcul à effectuer pour la détermination de la matrice de projection.

Nous avons exposé, par la suite, une approche analytique, se basant sur la résolution d'un système linéaire d'équations matricielles. La solution de ce système conduit à la

construction de la matrice de projection. Cette méthode présente, par ailleurs, l'inconvénient de n'être applicable que pour des modèles matriciels issus d'une modélisation bond graph.

La comparaison des deux méthodes montre qu'elles ont un certain nombre de points communs, malgré la différence de leur conception. De plus, ces deux approches peuvent se rattacher à la méthode de substitution puisqu'elle n'est qu'un cas particulier de la projection.

## **CHAPITRE III**

### **Approche structurelle pour la surveillance**

III-1 Introduction.....	55
III-2 Surveillance à partir de la représentation matricielle .....	56
III-3 Surveillance à partir de la représentation graphique .....	64
III-4 Surveillabilité .....	89
III-5 Conclusion .....	95

# Approche structurelle pour la surveillance

## III-1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons rappelé que la modélisation bond graph permettait de passer à des modèles de représentation mathématiques des systèmes d'où la possibilité d'utilisation des méthodes classiques pour la surveillance.

Le but de ce troisième chapitre est de montrer que le modèle bond graph, grâce à l'ensemble d'informations qu'il fournit, peut être utilisé directement pour générer des relations de redondance analytique sans passage par d'autres formes de représentation de systèmes.

Nous allons, dans ce chapitre explorer l'approche structurelle dans le but de détecter et localiser les défaillances et d'optimiser le placement des capteurs dans le système pour mieux assurer ces deux tâches.

Nous commencerons par présenter la génération des relations de redondance analytique à partir de la représentation graphique et nous montrerons leur utilisation dans la détection et la localisation des pannes. Nous exposerons, par la suite la théorie des matroïdes et son intérêt dans la transposition des résultats de surveillance de la théorie des graphes à la théorie des bond graphs. Une troisième partie sera consacrée à la génération de résidus à partir de la représentation matricielle d'un modèle bond graph. Enfin, nous introduirons la notion de surveillabilité pour déceler directement sur le modèle bond graph les variables qui ont la même signature de pannes.

## III-2 Surveillance à partir de la représentation matricielle

Dans le chapitre précédent, nous avons construit la matrice  $\mathcal{M}$ , dont nous rappelons la forme ci-dessous, qui exprime des relations de structure et de comportement. C'est cette matrice que nous utilisons dans cette partie pour la génération de relations de redondance qui seront utilisées pour la détection et la localisation de défaillances.

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{M}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & -I_1 & 0 & 0 & 0 & (1) \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & 0 & -I_2 & 0 & 0 & (2) \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & 0 & 0 & -I_3 & 0 & (3) \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & 0 & 0 & 0 & -I_4 & (4) \\ I_1 & 0 & 0 & 0 & -H(1/s) & 0 & 0 & 0 & (5) \\ 0 & I_2 & 0 & 0 & 0 & -H'(s) & 0 & 0 & (6) \\ 0 & 0 & I_3 & 0 & 0 & 0 & -L & 0 & (7) \end{bmatrix} \quad (24)$$

### III-2-1 Génération de RRA à partir de la représentation matricielle

A partir du modèle polynomial exprimé par la matrice  $\mathcal{M}$ , il est possible de définir un modèle structurel dont la caractéristique est de signaler l'existence de liens entre les variables du système sans pour autant les expliciter. Ce modèle est caractérisé par une matrice binaire  $\mathcal{M}^S$  dont les colonnes correspondent aux variables et les lignes aux relations les reliant. Un 1 dans la position  $(i, j)$  exprime la présence de la variable correspondante à la colonne  $j$  dans la relation  $i$ .

Dans la matrice  $\mathcal{M}$ , on remplace tous les termes non nuls par 1 ce qui conduit au modèle structurel  $\mathcal{M}^S$  du système étudié.

#### Remarque :

Le modèle structurel  $\mathcal{M}^S$  obtenu à partir de la matrice  $\mathcal{M}$  constitue une représentation minimale car toute autre relation issue du modèle bond graph constitue une combinaison linéaire de lignes de  $\mathcal{M}$ .

L'application de l'approche structurale, présentée au premier chapitre, au modèle  $\mathcal{M}^S$  indique la séquence de calcul à suivre sur la matrice  $\mathcal{M}$  pour exprimer les variables inconnues en fonction des variables connues. Ce résultat est injecté dans les relations restantes de  $\mathcal{M}$  et engendre un ensemble de relations de redondance analytique.

### Exemple :

Considérons le système de suspension d'un quart de véhicule, représenté dans la figure 2.1 et dont le modèle bond graph associé est représenté en figure 2.2. Nous rappelons les vecteurs clé associés à cette représentation matricielle :

$$\begin{aligned} \dot{x}_d &= [e_{12}, e_6, f_{13}, f_2]^t; \dot{x}_i = []; Z_i = []; U = [V_1, F_1, F_2]^t; y = [De_1, Df_1, Df_2]^t; \\ D_{in} &= [f_{16}]; D_{out} = [e_{16}]; \\ Z_d &= [f_{12}, f_6, e_{13}, e_2]^t. \end{aligned}$$

Le vecteur contenant toutes les variables est :

$$V = [e_{12}, e_6, f_{13}, f_2, e_{16}, V_1, F_1, F_2, f_{12}, f_6, e_{13}, e_2, f_{16}, De_1, Df_1, Df_2]^t.$$

La matrice polynomiale  $\mathcal{M}$ , exprimant des relations structurales et des entrée-sorties au niveau des composants s'écrit :

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -M_1s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -M_2s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -s/k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -s/k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (r1) \\ (r2) \\ (r3) \\ (r4) \\ (r5) \\ (r6) \\ (r7) \\ (r8) \\ (r9) \\ (r10) \\ (r11) \\ (r12) \\ (r13) \end{matrix} \quad (49)$$



d'où le modèle structurel  $\mathcal{M}^S$  :

$$\mathcal{M}^S = \begin{matrix} \left[ \begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] & \begin{matrix} (r1) \\ (r2) \\ (r3) \\ (r4) \\ (r5) \\ (r6) \\ (r7) \\ (r8) \\ (r9) \\ (r10) \\ (r11) \\ (r12) \\ (r13) \end{matrix} \end{matrix} \quad (50)$$

Dans la matrice  $\mathcal{M}^S$  on cherche un couplage par rapport aux variables inconnues. Ce couplage se traduit par la chaîne alternée (figure 3.1) qui indique la séquence de calcul à suivre, dans le modèle  $\mathcal{M}$ , pour exprimer les variables inconnues en fonction des variables à surveiller.

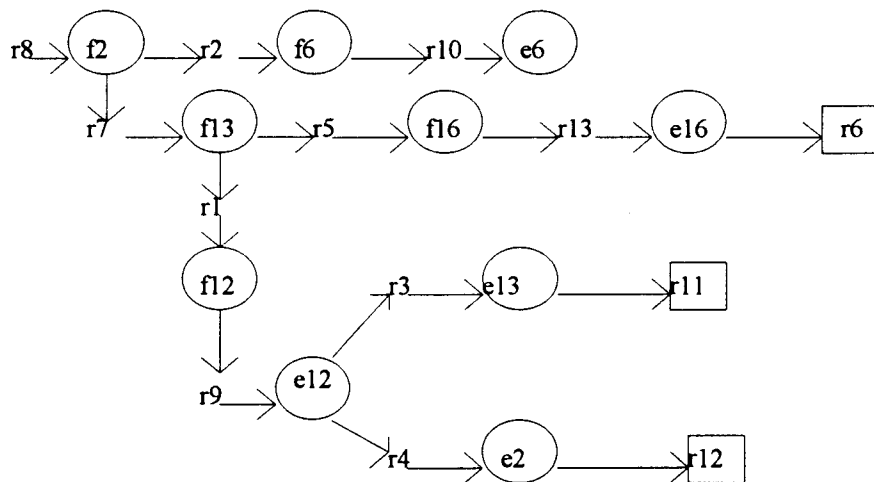


figure 3.1. Chaîne alternée associée à un couplage maximal dans  $\mathcal{M}^S$ .

Le parcours de cette chaîne conduit à :

$$r_8 \rightarrow f_2 = V_1 - Df_2$$

$$r_2 \rightarrow f_6 = Df_2$$

$$r_{10} \rightarrow e_6 = M_2 s Df_2$$

$$r_7 \rightarrow f_{13} = Df_2 - Df_1$$

$$r_5 \rightarrow f_{16} = Df_2 - Df_1$$

$$r_{13} \rightarrow e_{16} = b_1(Df_2 - Df_1)$$

$$r_6 \rightarrow b_1(Df_2 - Df_1) - De_1 = 0 \quad (51)$$

$$r_1 \rightarrow f_{12} = Df_1$$

$$r_9 \rightarrow e_{12} = M_1 s Df_1$$

$$r_{11} \rightarrow \left(1 + \frac{b_1}{k_1} s\right) Df_2 - \left(1 + \frac{M_1}{k_1} s^2 + \frac{b_1}{k_1} s\right) Df_1 + \frac{s}{k_1} F_1 = 0 \quad (52)$$

$$r_4 \rightarrow e_{16} = M_1 s Df_1 - M_2 s Df_2 - F_1 - F_2$$

$$r_{12} \rightarrow V_1 + \frac{s}{k_2} (F_1 + F_2) - \left(1 + \frac{M_2}{k_2} s^2\right) Df_2 - \frac{M_1}{k_2} s^2 Df_1 = 0 \quad (53)$$

L'ensemble des signatures correspondant au système d'équations de redondance analytique (51), (52) et (53) est regroupé dans le tableau 5.

De <sub>1</sub>	Df <sub>1</sub>	Df <sub>2</sub>	V <sub>1</sub>	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>
1	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0
0	1	1	1	1	1

tableau 5

Le couplage choisi, engendre des relations de redondance analytique conduisant à des signatures semblables pour des causes de pannes différentes (Df<sub>1</sub>, Df<sub>2</sub>) et (V<sub>1</sub>, F<sub>2</sub>).

Ce système de RRA n'est pas efficace pour l'isolation. Pour l'améliorer, la génération d'autres relations de redondance (par le choix d'un autre couplage ou par combinaison linéaire de (51), (52) et (53) s'avère nécessaire.

### Simulation :

Pour simuler les résidus, nous procédons comme suit :

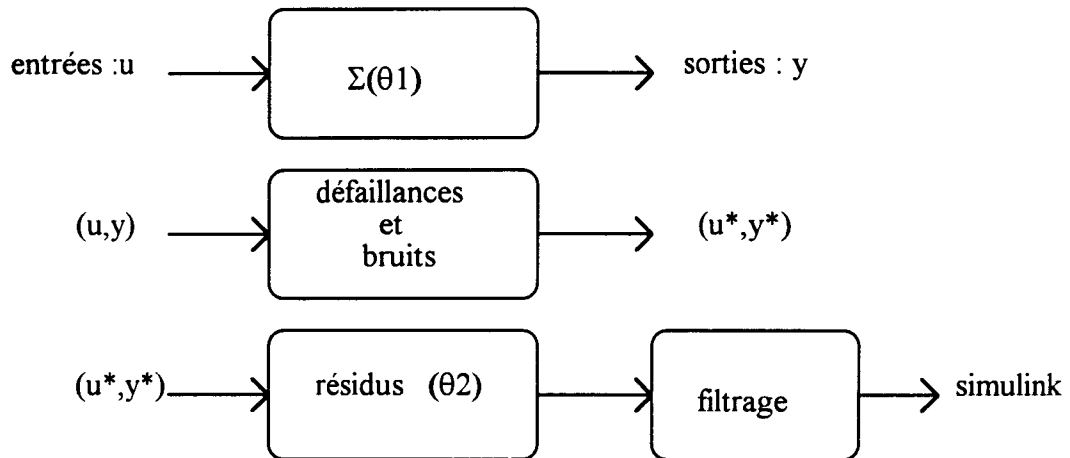


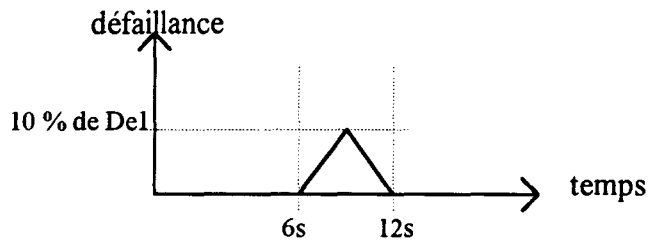
figure 3.2. Procédure de simulation des résidus

On détermine les entrées et les sorties du système en utilisant un modèle avec un ensemble de paramètres  $\theta_1$ . On ajoute à  $(u, y)$  un certain ensemble de bruits (signal sinusoïdal de faible amplitude et de haute fréquence ainsi qu'un bruit blanc) et de défaillances (figure 3.3) pour obtenir les entrées  $u^*$  et les sorties  $y^*$  qui seront utilisées dans la simulation. Les résidus sont obtenus à partir d'un modèle avec un ensemble de paramètres  $\theta_2$  légèrement différent de  $\theta_1$  pour exprimer l'écart entre le système réel et son modèle (tableau 6). Les résidus sont filtrés (grâce à un filtre du premier ordre de gain unité et de constante de temps  $\tau = 0.2$  s) et simulés sur le logiciel MATLAB 4.0 et SIMULINK 1.2c pour Windows. Le filtre choisi permet de lisser les résidus sans trop changer leurs allures de manière à ne pas éliminer l'effet des défaillances.

	M1 (kg)	M2 (kg)	k1 (Nm-1)	k2 (Nm-1)	b1 (Nsm-1)
$\theta 1$	300	75	11.8e3	11.8e4	1884
$\theta 2$	303	75	11.7e3	11.7e4	1884

tableau 6.

Pour les résidus 1, 2 et 3 correspondant aux relations de redondance analytique (51), (52) et (53) nous avons simulé une défaillance sur  $De_1$  comme le montre la figure 3.3 :

figure 3.3. Allure de la défaillance sur  $De_1$ 

L'intérêt d'utiliser une défaillance ayant cette forme, pour effectuer les simulations, est qu'elle peut intervenir aussi bien sous une forme proportionnelle que dérivée (échelon).  $F_1$  et  $F_2$  correspondent à des forces constantes et  $V_1$  représente une entrée sinusoïdale qui décrit les irrégularités de la route. Le résultat obtenu est représenté dans la figure 3.4 :

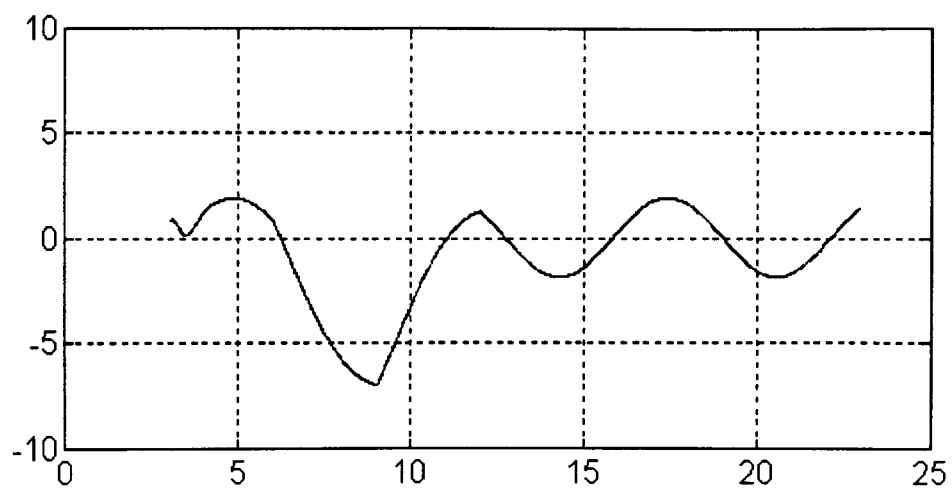


figure 3.4.a. Résidu 1.

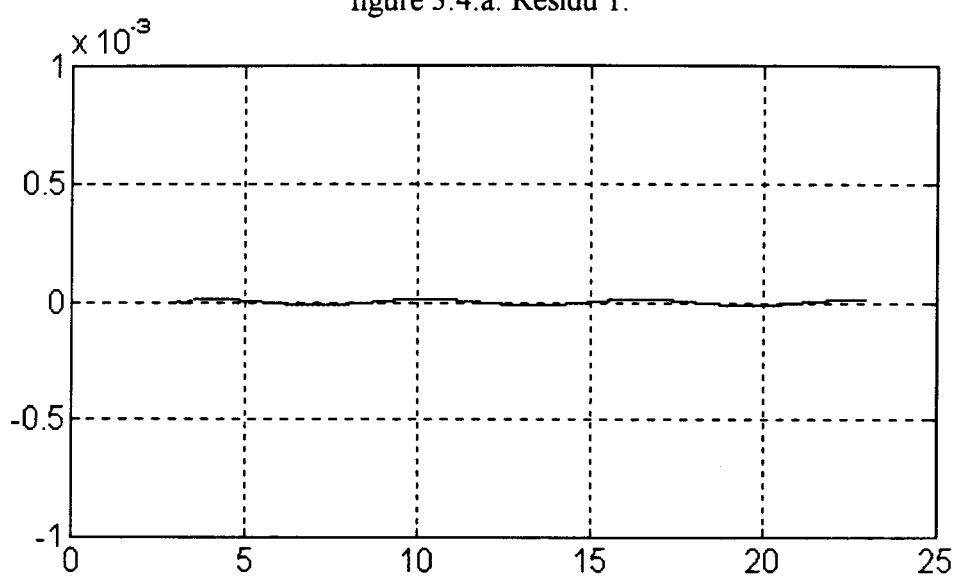


figure 3.4.b. Résidu 2.

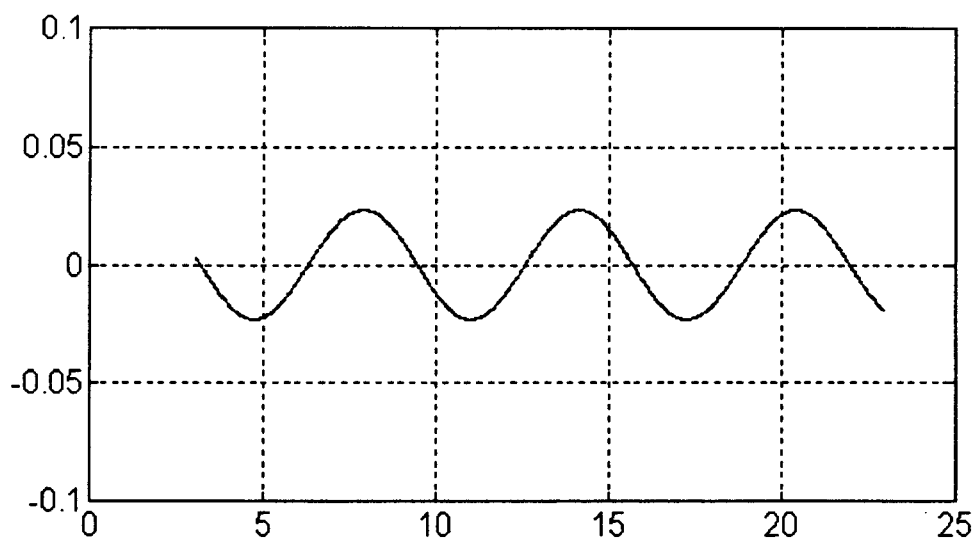


figure 3.4.c. Résidu 3.

Nous constatons que le résidu 1 présente un écart notable par rapport à sa valeur moyenne dans l'intervalle de temps [6s, 12s], alors que les résidus 2 et 3 restent inchangés, ce qui conduit à une signature binaire égale à (1 0 0)<sup>t</sup>. Le tableau 5 permet d'identifier la panne et de l'associer à  $De_1$ .

### II-3-2 Aide au placement de capteurs

Dans le chapitre précédent, nous avons montré que la matrice  $\mathcal{M}$  peut être scindée en deux sous matrices  $\mathcal{M}_C$  et  $\mathcal{M}_W$  correspondant respectivement aux variables connues  $C = [U^t Y^t]^t$  et inconnues  $W = [Z_i^t \dot{x}_d^t D_{out}^t \dot{x}_i^t Z_d^t D_{in}^t]^t$  :

$$\mathcal{M}_W = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & -I_1 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & -I_2 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & -I_3 \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & 0 & 0 & 0 \\ I_1 & 0 & 0 & -H(1/s) & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & 0 & -H'(s) & 0 \\ 0 & 0 & I_3 & 0 & 0 & -L \end{bmatrix}, \quad \mathcal{M}_C = \begin{bmatrix} S_{14} & 0 \\ S_{24} & 0 \\ S_{34} & 0 \\ S_{44} & -I_4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

La recherche d'un couplage, pour exprimer les variables inconnues en fonction des variables à surveiller s'effectue sur la matrice  $\mathcal{M}_W$ .

Puisqu'on cherche à générer des relations de redondance analytique sous une forme dérivée, dans le but d'éliminer l'effet des conditions initiales du système, on impose certains couplages :

- La relation :  $Z_i = H(1/s)\dot{x}_i$  doit être utilisée sous la forme :  $\dot{x}_i = H^{-1}(1/s)Z_i$  ce qui revient à imposer le couplage sur la matrice  $H(1/s)$  dans le graphe biparti associé à  $\mathcal{M}_W$ .
- La relation :  $Z_d = H'(s)\dot{x}_d$  doit être utilisée telle qu'elle est, le couplage est donc imposé sur  $I_2$  dans le graphe biparti associé à  $\mathcal{M}_W$  comme le montre la figure 3.5.

On construit un couplage maximal en respectant ces deux contraintes (figure 3.5) et on aboutit à une condition suffisante pour assurer la calculabilité de tout le système. Cette condition est l'existence d'un couplage maximal sur  $\begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{41} \end{bmatrix}$ .

$$\mathcal{M}_W = \begin{bmatrix}
 S_{11} & S_{12} & S_{13} & -I_1 & 0 & 0 \\
 S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & \cancel{I_2} & 0 \\
 S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & \cancel{I_3} \\
 S_{41} & S_{42} & S_{43} & 0 & 0 & 0 \\
 I_1 & 0 & 0 & -H(1/s) & 0 & 0 \\
 0 & \cancel{I_2} & 0 & 0 & -H'(s) & 0 \\
 0 & 0 & \cancel{I_3} & 0 & 0 & -L
 \end{bmatrix}$$

figure 3.5. Couplage sur la matrice  $\mathcal{M}_W$

**Remarques :**

- La matrice  $S_{41}$  est directement reliée au placement des capteurs. La condition suffisante que nous venons d'énoncer, aide au choix de placement des capteurs.
- La condition suffisante n'est pas nécessaire car l'étude est faite sur un couplage particulier et non pas dans le cas général d'un couplage maximal quelconque.

**III-3 Surveillance à partir de la représentation graphique**

**III-3-1 Génération de RRA à partir de la représentation graphique**

Il existe deux méthodes de génération de relations de redondance analytique à partir de la représentation bond graph, la première se base sur la notion de matrice de transfert et la deuxième repose sur les relations structurelles au niveau des jonctions et des composants.

### II-2-1-1 Matrice de transfert

Dans l'annexe A, nous avons présenté le passage d'une modélisation bond graph à une représentation du système sous forme de matrice de transfert  $M_T(s)$  où  $s$  est l'opérateur de Laplace.

Cette matrice, dont les termes sont les différentes transmittances reliant les sorties aux entrées, obtenues en utilisant la généralisation de la règle de Shannon-Mason, exprime un ensemble de relations de redondance analytique linéairement indépendantes.

Des combinaisons linéaires des relations de transfert obtenues permettent d'engendrer d'autres relations de redondance ce qui conduit à l'amélioration de la capacité de détection et de localisation des défaillances de notre système de surveillance.

Cette méthode est facile à appliquer et n'exige pas l'affectation d'une causalité particulière au modèle bond graph.

#### Exemple :

Considérons le système physique représentant la suspension d'un quart de véhicule représenté dans la figure 2.1.

L'entrée du système, supposée mesurée, est la vitesse de la roue  $dz/dt$ , engendrée par les irrégularités de la route. La gravité agit sur les deux masses engendrant les forces  $F_1$  et  $F_2$ . Deux capteurs de flux ( $Df_1$  et  $Df_2$ ) mesurent respectivement les vitesses de  $M_1$  et  $M_2$ . Un capteur d'effort ( $De_1$ ) mesure la force appliquée à l'amortisseur. Les variables mesurées par ces trois capteurs constituent les sorties de ce système.

Les boucles causales ainsi que leurs gains (définis en annexe A) sont représentés dans ce tableau 8.



boucle	gain
M <sub>1</sub> -k <sub>1</sub>	(M <sub>1</sub> /k <sub>1</sub> )s <sup>2</sup>
M <sub>1</sub> -k <sub>2</sub>	(M <sub>1</sub> /k <sub>2</sub> )s <sup>2</sup>
M <sub>2</sub> -k <sub>2</sub>	(M <sub>2</sub> /k <sub>2</sub> )s <sup>2</sup>
k <sub>1</sub> -b <sub>1</sub>	(b <sub>1</sub> /k <sub>1</sub> )s

tableau 8.

La matrice de transfert s'écrit :

$$\begin{bmatrix} D_{e1} \\ D_{f1} \\ D_{f2} \end{bmatrix} = \frac{1}{D(s)} \begin{bmatrix} b_1 M_1 s^2 / k_1 & -b_1 s(1 + M_2 s^2 / k_2) / k_1 & b_1 M_1 s^3 / k_1 k_2 \\ 1 + b_1 s / k_1 & (1 + M_2 s^2 / k_2) s / k_1 + (1 + b_1 s / k_1) s / k_1 & s(1 + b_1 s / k_1) / k_2 \\ 1 + b_1 s / k_1 + M_1 s^2 / k_1 & s(1 + b_1 s / k_1) / k_2 & s(1 + b_1 s / k_1 + M_1 s^2 / k_1) / k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (54)$$

avec :

$$D(s) = 1 + \frac{M_2 s^2}{k_2} + \frac{M_1 s^2}{k_2} + \frac{M_1 s^2}{k_1} + \frac{b_1 s}{k_1} + \frac{b_1 s}{k_1} \left( \frac{M_2 s^2}{k_2} + \frac{M_1 s^2}{k_2} \right) + \frac{M_1 M_2 s^4}{k_1 k_2}$$

Les signatures associées aux trois relations de redondance analytique (dont la définition est présentée dans le premier chapitre), exprimées par la matrice de transfert (54), sont représentées dans le tableau 9 :

De <sub>1</sub>	Df <sub>1</sub>	Df <sub>2</sub>	V <sub>1</sub>	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>
1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1

tableau 9.

Les défaillances affectant l'un des trois capteurs sont localisées puisque chaque capteur a une signature différente de celles des autres variables à surveiller.

Si on suppose que  $F_1$  et  $F_2$  ne sont pas sujets à des défaillances, alors les différentes signatures des variables à surveiller deviennent distinctes l'une des autres et la localisation est possible. Dans le cas contraire (cas où  $F_1$  représente le "lâcher de masse" intervenant en cas de freinage du véhicule sous forme d'une force extérieure modulable), il faut faire des combinaisons linéaires de ces trois relations pour en obtenir d'autres où  $V_1$ ,  $F_1$  et  $F_2$  n'y figurent pas à la fois. Dans certains cas, la localisation n'est pas possible et dans ce cas il faudrait changer l'architecture d'instrumentation (voir paragraphe III-4 de ce même chapitre).

### **Simulation :**

Nous procédons comme précédemment pour simuler les résidus 4, 5 et 6 correspondant aux relations de redondance analytique (54). Nous simulons une défaillance affectant  $De_1$  comme le montre la figure 3.3.

Les résultats obtenus sont présentés dans la figure 3.5 :

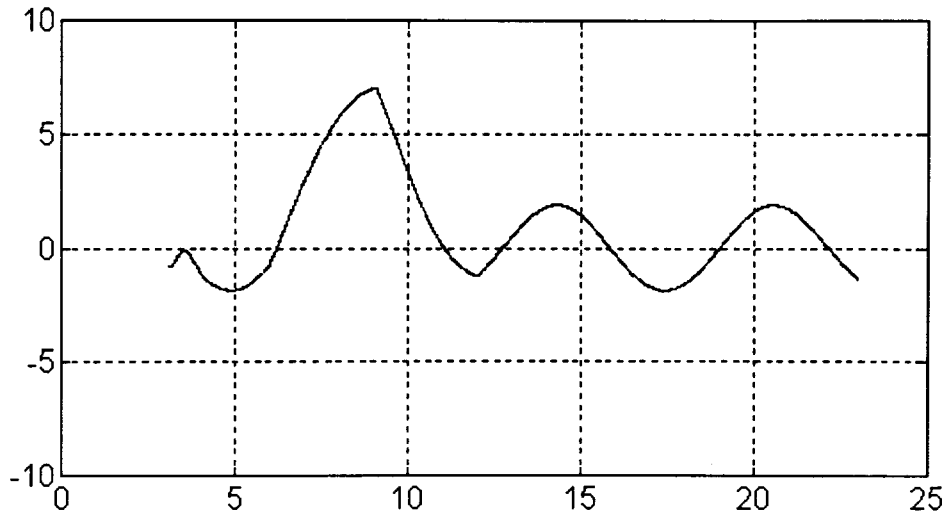


figure 3.5.a. Résidu 4.

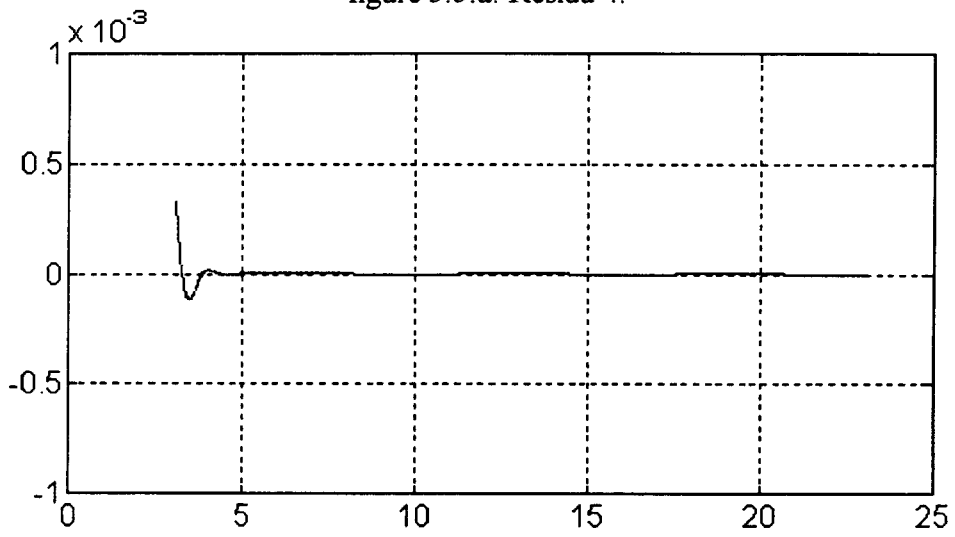


figure 3.5.b. Résidu 5.

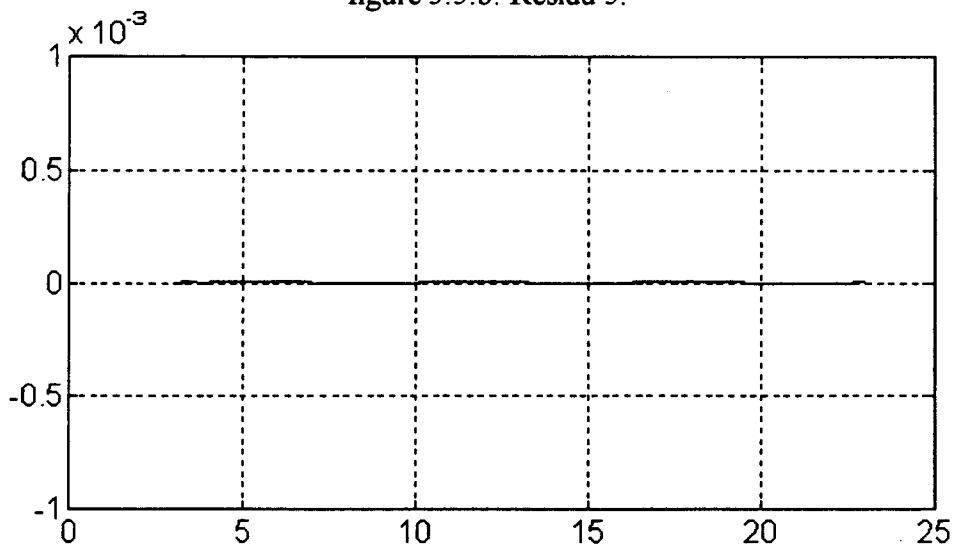


figure 3.5.c. Résidu6.

Le résidu 4 présente un écart notable par rapport à sa valeur moyenne, dans l'intervalle de temps [6s 12s], alors que les résidus 5 et 6 restent inchangés. Les oscillations correspondent aux incertitudes sur les paramètres. Les résidus 5 et 6 sont robustes par rapport aux défaillances affectant  $De_1$ .

Le vecteur binaire associé à cette panne est  $(1\ 0\ 0)^t$  ce qui correspond bien, dans le tableau 9, à la signature de la panne de  $De_1$ . Cet ensemble de résidus permet donc d'assurer, en pratique, la détection et la localisation des défaillances affectant  $De_1$ .

### **II-2-1-2 Parcours des chemins causaux**

Le bond graph est un outil de modélisation très avantageux par rapport à d'autres formes de représentation de système car il explicite aussi bien la structure que le comportement du système. Au niveau de la structure de jonction (jonctions 0, 1, TF et GY), plusieurs relations entre les différents flux et efforts parcourant le système peuvent être établies.

Prenons à titre d'exemple une jonction 0, ses relations constitutives expriment que les liens reliés à cette jonction sont soumis au même effort et que la somme algébrique des flux circulant dans ces liens est nulle, ce qui correspond à une conservation de la puissance à une jonction.

Partant de cette somme et en exprimant les variables qui y figurent en fonction des variables à surveiller, on aboutit à des relations de redondance analytique.

Pour exprimer une variable inconnue en fonction des variables connues, l'étude des chemins causaux la reliant aux sources et aux capteurs constitue une méthode pratique et facile à appliquer. De plus elle donne l'ensemble des relations constitutives des jonctions et les relations régissant le comportement des composants à utiliser.

Le point de départ pour la génération de relations de redondance analytique peut appartenir à la structure de jonction (jonctions 0, 1, TF et GY) aussi bien qu'à l'ensemble des

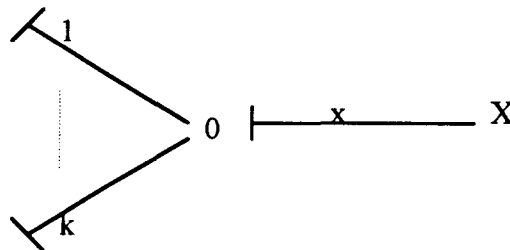
composants (R, C et I). En effet, chaque composant est régi par une équation reliant l'effort auquel il est soumis au flux qui le traverse et cette équation peut être utilisée pour la génération de RRA. Cependant, nous allons montrer que partir de cette équation revient à choisir la jonction à laquelle se rattache le composant comme point de départ.

**Proposition :**

Partir de l'équation régissant le comportement du composant X dans {R, C, I}, pour générer une relation de redondance analytique, revient à choisir la jonction à laquelle se rattache cet élément X.

**Preuve :**

Sans perte de généralité, on peut considérer que l'élément X est connecté à une jonction du type 0.



La causalité affectée au bond graph ne change en rien la démonstration.

L'élément X de type R, C ou I a une transmittance du type {R, 1/Cs, Is}, à cause de la causalité qui lui est affectée.

Pour la jonction 0, la relation constitutive reliant les flux s'écrit :

$$a_x f_x + \sum_1^k a_i f_i = 0, \text{ où } a_x \text{ et } a_i \text{ valent } \pm 1 \text{ selon l'orientation de la demi-flèche du lien par}$$

rapport à la jonction 0.

Pour exprimer les variables inconnues en fonction des variables à surveiller on passe par la relation régissant le comportement de X :

$e_x = X.f_x$  à cause de la causalité

et on aboutit à la relation :

$$a_x e_x + X \sum_1^k a_i f_i = 0.$$

Si on part de l'élément X on a :

$$\begin{aligned} e_x &= X.f_x \\ &= -\frac{1}{a_x} X. \sum_1^k a_i f_i \end{aligned}$$

d'où la relation :

$$e_x + X. \sum_1^k \frac{a_i}{a_x} f_i = 0$$

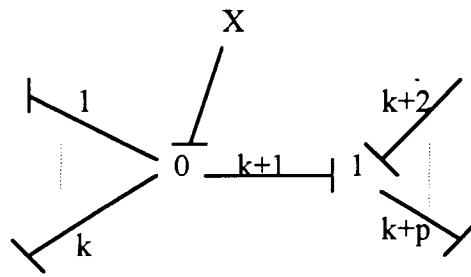
ce qui est équivalent à la relation obtenue en partant de la jonction 0.

**Proposition :**

Une jonction  $J_1$  reliée à une jonction  $J_2$  connectée à un élément X dans  $\{R, C, I\}$ , engendre une relation de redondance analytique équivalente à celle générée en partant de la dite jonction  $J_2$ .

**Preuve :**

Nous supposons que  $J_1$  est une jonction 0 et  $J_2$  une jonction 1. Sans aucune perte de généralité, on peut affecter au bond graph la causalité suivante :



- Si on part de la jonction 1, la relation constitutive reliant les efforts est :

$$a_{k+1} e_{k+1} + \sum_{j=k+2}^{k+p} a_j e_j = 0$$

pour déterminer les variables inconnues (flux et efforts dans le système) en fonction des variables à surveiller (sources et capteurs), on est amené à passer par :

$$e_{k+1} = e_x = X \cdot f_x \text{ où } X \text{ désigne indifféremment l'élément et sa transmittance.}$$

La relation constitutive de la jonction 0 reliant les flux exprimée par :

$$a_x f_x + \sum_{i=1}^k a_i f_i = 0$$

devient :

$$X \left( \sum_{i=1}^k a_i f_i \right) + \left( \sum_{j=k+2}^{k+p} a'_j e_j \right) = 0.$$

- Si on part de la jonction 0 on a :

$$a_x f_x + \sum_{i=1}^{k+1} a_i f_i = 0$$

Pour exprimer les variables inconnues en fonction des variables à surveiller, nous devons passer par l'élément X ce qui donne :

$$X f_x = e_x = e_{k+1}$$

pour la jonction 1 la relation reliant les efforts s'écrit :

$$a_{k+1}e_{k+1} + \sum_{j=k+2}^{k+p} a_j e_j = 0$$

d'où :

$$\left( \sum_{j=k+2}^{k+p} a_j e_j \right) + X \left( \sum_i^k a'_i f_i \right) = 0.$$

C'est une relation équivalente à celle obtenue en partant de la jonction 1.

**Remarque :**

L'inversion des rôles des jonctions 0 et 1 dans la proposition précédente, conduit à une proposition similaire qui se démontre de la même manière.

A partir de ces deux propositions, on peut se limiter à la génération de relations de redondance analytique à partir de la structure de jonction, mieux encore, on peut restreindre la recherche des points de départ à l'un des deux types de jonctions 0 ou 1, si les conditions de la proposition précédente sont satisfaites.

Pour fixer le type de jonction à considérer, il est intéressant de voir la nature des variables à surveiller. Si parmi ces variables, la majorité se rattache à l'effort alors le choix de la jonction 1 paraît plus judicieux, sinon c'est la jonction 0 qu'il faut utiliser dans la procédure de génération.

Une procédure de génération de relations de redondance analytique, directement à partir du bond graph, peut être énoncée :

- 1/ A partir des variables à surveiller choisir un type de jonction.
- 2/ Choisir une jonction de ce type.
- 3/ Ecrire la relation constitutive et exprimer les variables inconnues en fonction des variables à surveiller en suivant les chemins causaux.



4/ passer à la jonction suivante et appliquer l'étape 3 jusqu'à l'obtention de suffisamment de relations de redondance analytique (jusqu'à l'obtention de signatures différentes pour les différentes variables ou épuisement des jonctions).

**Remarque :**

En parcourant les chemins causaux, quand on arrive à une jonction 0 (respectivement jonction 1) reliée à un capteur d'effort (respectivement de flux), on connaît la valeur de l'effort (respectivement flux) pour tous les éléments connectés à cette jonction indépendamment de leur causalité.

**Exemple :**

Reprenons l'exemple de la suspension d'un quart de véhicule, étudié au paragraphe précédent (figure 2.1). Le modèle bond graph associé (figure 2.2) fait apparaître trois variables d'effort ( $Se : F_1, Se : F_2, De_1$ ) et trois variables de flux ( $Sf : V_1, Df_1, Df_2$ ). Comme on ne surveille pas les deux sources d'effort,  $Se : F_1, Se : F_2$ , et que la jonction  $0_2$  n'est reliée à aucun élément du type R, C ou I, le type de jonction 0 pour la génération des relations de redondance analytique paraît plus adapté.

Pour la jonction  $0_1$ , la relation constitutive est :

$$f_1 - f_2 - f_3 = 0 .$$

Le parcours des différents chemins causaux donne :

$$f_1 = V_1$$

$$f_3 = Df_2 \text{ (comme le flux dans } M_2 \text{ est mesuré par le capteur}$$

$$Df_2 \text{ alors on peut écrire : } f_3 = Df_2)$$

$$f_2 = (s/k_2) e_2$$

$$\begin{aligned}
&= s/k_2(e_6+e_7-F_2) \\
&= -sF_2/k_2 + s/k_2(M_2sDf_2 + e_9), \\
&= M_2s^2Df_2/k_2-sF_2/k_2 +s/k_2(M_1sDf_1-F_1) \\
&=M_2s^2Df_2/k_2-sF_2/k_2 +M_1s^2Df_1/k_2-sF_1/k_2
\end{aligned}$$

Une fois les variables inconnues exprimées en fonction des variables à surveiller, la relation devient :

$$V_1 + s/k_2 (F_1+F_2)- (1+M_2s^2/k_2)Df_2 - (M_1s^2/k_2)Df_1 = 0. \quad (55)$$

Pour la jonction 0<sub>2</sub>, la relation constitutive est :

$$f_7 - f_8 - f_9 = 0 .$$

Le parcours des différents chemins causaux donne :

$$f_7 = Df_2$$

$$f_9 = Df_1$$

$$\begin{aligned}
f_8 &= f_{13} \\
&= (s/k_1) e_{13} \\
&= s/k_1(e_8 - e_{14}) \\
&= s/k_1(e_9 - De_1) \\
&= s/k_1(e_{12} - F_1 - De_1) \\
&= s/k_1(M_1sDf_1 - F_1 - De_1)
\end{aligned}$$

Une fois les variables inconnues exprimées en fonction des variables à surveiller, la relation devient :

$$(s/k_1)F_1 + (s/k_1)De_1 + Df_2 - (1+M_2s^2/k_2)Df_1 = 0. \quad (56)$$

Pour la jonction  $O_3$ , la relation constitutive est :

$$f_{14} - f_{16} = 0 \quad (f_{15} = 0 \text{ car le capteur d'effort est supposé parfait}).$$

Le parcours des différents chemins causaux donne :

$$\begin{aligned} f_{14} &= f_{13} \\ &= s/k_1(M_1 s Df_1 - F_1 - De_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{16} &= (1/b_1)e_{16} \\ &= (1/b_1)De_1 \end{aligned}$$

Une fois les variables inconnues exprimées en fonction des variables à surveiller, la relation devient :

$$(s/k_1 + 1/b_1)De_1 - (M_1 s^2/k_1)Df_1 + (s/k_1)F_1 = 0. \quad (57)$$

Les signatures associées aux relations de redondance analytique exprimées par les relations (55), (56) et (57) sont regroupées dans le tableau 10.

$De_1$	$Df_1$	$Df_2$	$V_1$	$F_1$	$F_2$
0	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0

tableau 10.

Une fois de plus, on constate que les défaillances affectant l'un des trois capteurs sont localisées puisque chaque capteur a une signature différente de celles des autres variables à surveiller.

$V_1$  et  $F_2$  continuent à avoir des signatures semblables ce qui empêche de localiser les défaillances affectant l'une de ces deux variables.

Si on devait assurer la localisation pour ces deux variables, une combinaison linéaire des trois relations de redondance analytique pourrait en générer une quatrième où  $V_1$  et  $F_2$  n'y figurent pas à la fois. Dans le cas où cette combinaison linéaire s'avèrerait inefficace car elle éliminerait les deux variables en même temps, l'ajout d'un quatrième capteur devient nécessaire.

### **Simulation :**

Nous procédons de la même manière que pour la matrice de transfert, pour simuler les résidus 4, 5 et 6 correspondant aux relations de redondance analytique (55), (56) et (57).

Nous simulons une défaillance affectant  $De_1$  comme le montre la figure 14. Les résultats sont présentés dans la figure 3.6 :

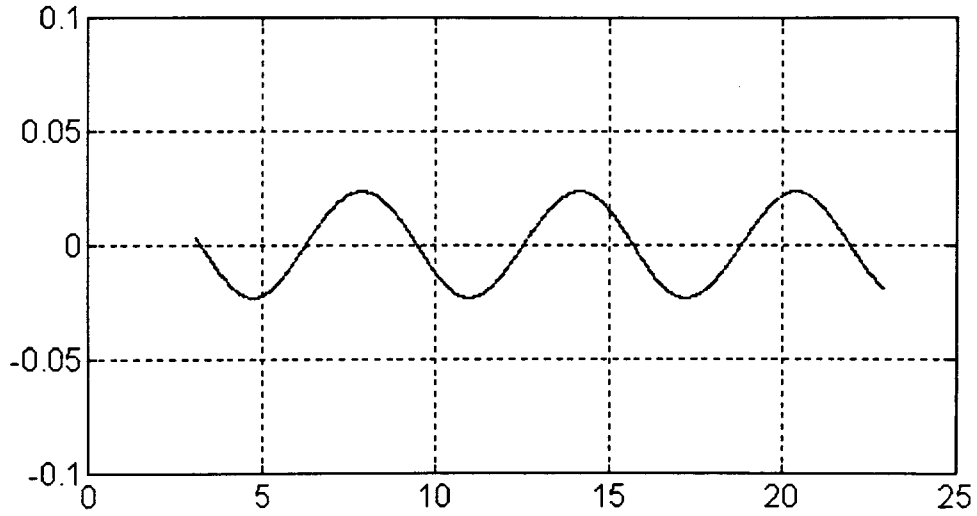


figure 3.6.a. Résidu 7.

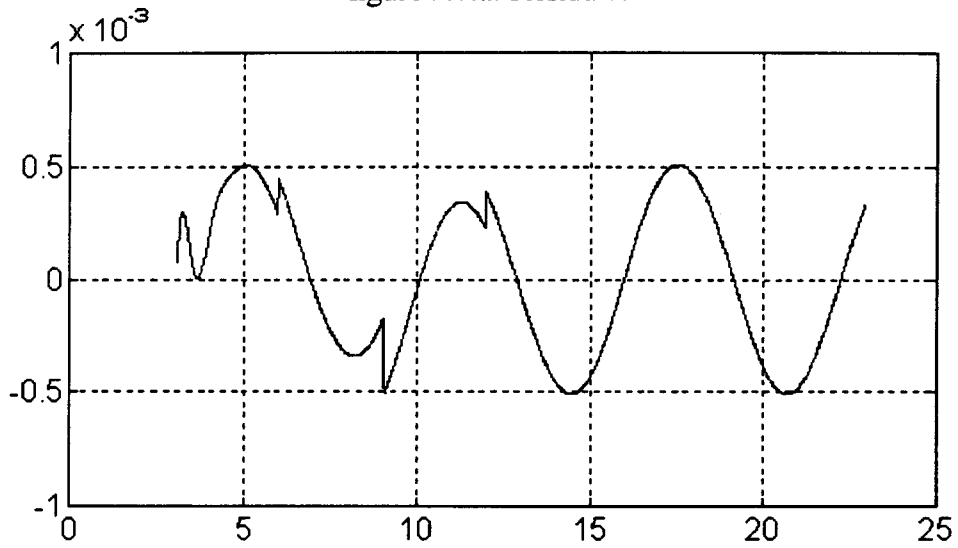


figure 3.6.b. Résidu 8.

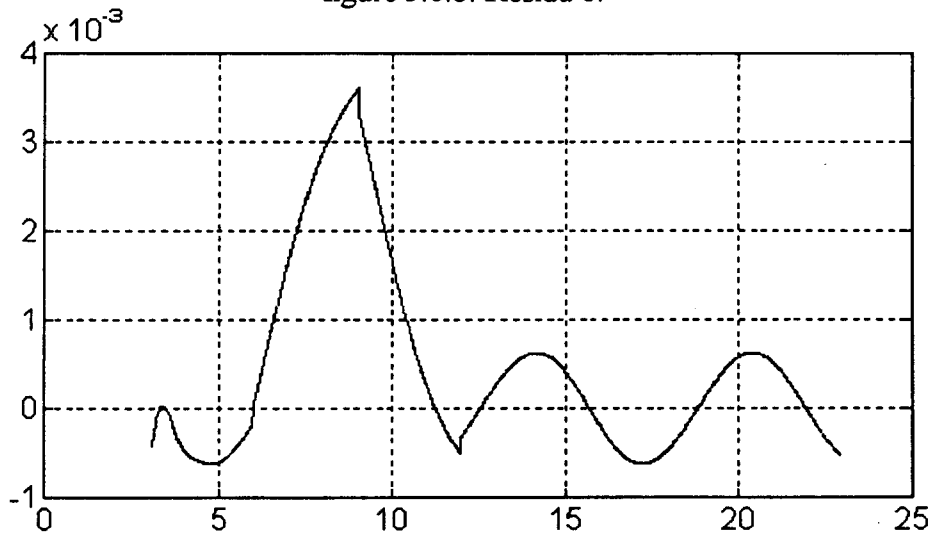


figure 3.6.c. Résidu 9.

Nous constatons que le premier résidu ne montre aucun écart notable par rapport à sa valeur moyenne, alors que les résidus 7 et 8 présentent des anomalies dans l'intervalle de temps [6s, 12s]. La signature théorique de la panne est égale à  $(0 \ 1 \ 1)^t$  et le tableau 10 permet de localiser cette défaillance et l'associer à  $De_1$ . Cependant, la signature pratique est  $(0 \ 0 \ 1)^t$  car le résidu 8 est peu sensible. Ceci permet de réécrire les signatures en tenant compte de la sensibilité des différents résidus. Nous constatons que malgré cette modification apportée au résidu 8, la localisation reste possible.

### Remarques :

- Le résidu 6 est plus sensible à la panne de  $De_1$  que le résidu 5 car dans ce dernier résidu,  $De_1$  n'intervient que d'une manière dérivative et avec un coefficient de  $1/k_1$  alors que dans le premier,  $De_1$  intervient d'une manière proportionnelle avec un coefficient de  $1/b_1$  ( $> 1/k_1$ ) et d'une manière dérivative avec le coefficient  $1/k_1$ .

- Les relations de redondance analytique, générées à partir des jonctions 1 s'écrivent :

$$(k_2/s)V_1 + F_1 + F_2 - (k_2/s + M_2s)Df_2 - M_1sDf_1 = 0.$$

$$(k_1/sb_1 + 1)De_1 - M_1sDf_1 + F_1 = 0.$$

Ce qui correspond, à un facteur de proportionnalité près, aux relations (20) et (22). La relation (21) obtenue à partir d'une jonction 0 qui n'est pas reliée à un élément R, C ou I a donné une relation qui ne peut être obtenue à partir d'une jonction 1.

- En affectant aux jonctions des fonctions du type `rel_const0` (respectivement `rel_const1`) et `som_alg0` (respectivement `som_alg1`) qui expriment respectivement une égalité entre efforts (respectivement flux) et une somme algébrique nulle de flux (respectivement d'efforts); en affectant aux composants des fonctions type `comp_I`, `comp_C` et `comp_R`, et en affectant aux sources et capteurs des fonctions de mesure : `mes_D` et `mes_S`, on arrive à construire une chaîne alternée traduisant les chemins empruntés pour construire les RRAs (voir chapitre 1). Pour obtenir la relation (56), par exemple, la chaîne alternée peut s'écrire sous la

forme présentée dans (figure 3.7). Nous constatons que nous partons d'un ensemble de capteurs et de sources pour arriver à une relation au niveau de la jonction  $O_2$ .

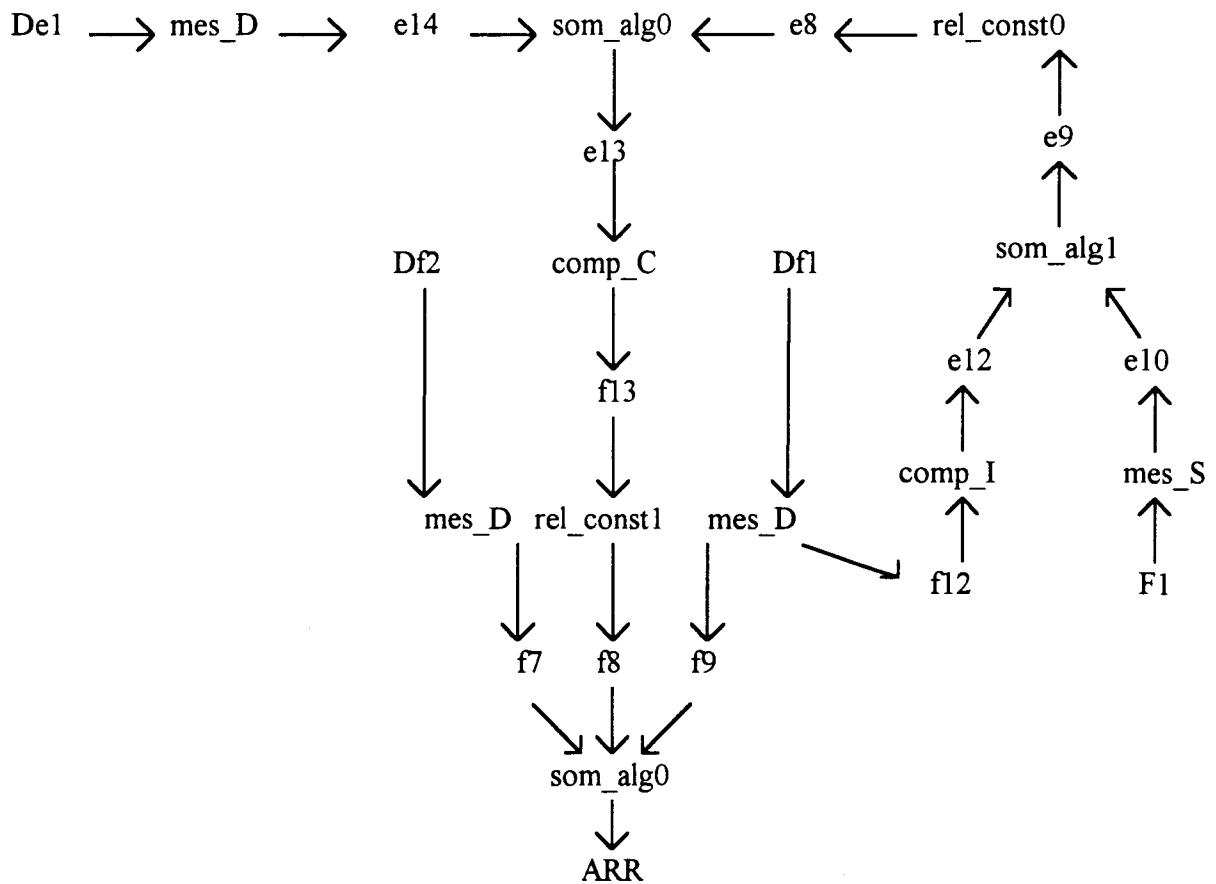


figure 3.7. Chaîne alternée correspondant au parcours des chemins causaux.

Conclusion :

Le parcours des chemins causaux n'est qu'un couplage particulier qui respecte la causalité du modèle et qui conduit à une chaîne alternée particulière qui utilise la bonne relation du type  $rel\_const0$  ou  $rel\_const1$ .

**III-3-2 Matroïdes et placement de capteurs**

Dans cette partie, nous utilisons la théorie des matroïdes pour concevoir un moyen de transposer des résultats déjà découverts par la théorie des graphes à la modélisation bond graph. Parmi ces résultats, nous allons nous intéresser plus particulièrement à ceux concernant

le placement de capteurs dans un système à surveiller, obtenus à partir de l'étude des cycles dans un modèle graphique du système.

Nous commençons par présenter quelques résultats sur le placement des capteurs par la théorie des cycles. Ensuite, nous définissons les matroïdes que nous utilisons comme outil pour transposer ces résultats à un modèle bond graph. Nous noterons que l'étude des cycles dans un modèle bond graph revient à utiliser le squelette du bond graph sans considérer les composants.

### **III-3-2-1 Surveillance par la théorie des cycles [MAQU 94]**

Un graphe peut être décrit de plusieurs manières. Une possibilité consiste à utiliser la matrice des cycles fondamentaux de ce graphe [BERG 83]. Disposant de cette matrice, il est possible par combinaison linéaire, d'engendrer une nouvelle matrice décrivant tous les cycles possibles d'un graphe donné. L'analyse de cette dernière matrice permet de classer les variables en variables mesurées estimables, variables mesurées non estimables, variables non mesurées déductibles, variables non mesurées non déductibles [TURB 92].

Cette analyse repose sur quatre règles :

Règle I : Une variable mesurée est estimable si et seulement si elle n'intervient que dans des cycles où au moins deux variables sont mesurées.

Règle II : Une variable mesurée est non estimable si et seulement si elle appartient au moins à un cycle où elle est la seule variable mesurée.

Règle III : Une variable non mesurée est déductible si et seulement si elle n'intervient que dans des cycles comportant au moins une variable mesurée.

Règle IV : Une variable non mesurée est non déductible si et seulement si elle appartient au moins à un cycle où aucune variable n'est mesurée.



Des algorithmes, se basant sur les quatre règles précédentes, permettent de classer les variables du système étudié et optimiser le placement des capteurs, selon des contraintes de coût ou de fiabilité imposée [TURB 92], [LUON 94], [RAGO 90].

### III-2-2-2 Matroïdes

#### Définition :

Soit  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  un ensemble fini de  $n$  éléments, on appelle matroïde sur  $E$  un couple  $\mathbf{M} = [E, \mathbf{F}]$  où  $\mathbf{F}$  est une famille de parties de  $E$  vérifiant :

- $\emptyset \in \mathbf{F}$ ,  $F \in \mathbf{F}$  et  $F' \subset F \Rightarrow F' \in \mathbf{F}$ .
- Pour tout  $A \subset E$ , si  $F \in \mathbf{F}$  et  $F' \in \mathbf{F}$  sont deux sous ensembles maximaux de  $A$  (dans le sens de l'inclusion) alors  $|F| = |F'|$ .

Cette définition peut être énoncée différemment, en effet l'ensemble des axiomes suivants permet de définir un matroïde par ses caractéristiques (cardinalité des sous-ensembles, bases, stigmes, rang, clôture ...) [MINO 86] [MURO 87] [RECS 89].

#### Axiome : Interdépendance :

$\mathbf{M} = [E, \mathbf{F}]$  est un matroïde si et seulement si :

- $\emptyset \in \mathbf{F}$ ,  $F' \subset F \Rightarrow F' \in \mathbf{F}$ .
- Si  $F_p$  ( $|F_p| = p$ ) et  $F_{p+1} \in \mathbf{F}$  ( $|F_{p+1}| = p+1$ ) alors il existe un élément  $e \in F_{p+1}$  tel que  $F_p + e \in \mathbf{F}$ .

#### Axiome : Bases :

$\mathbf{M} = [E, \mathbf{F}]$  est un matroïde si et seulement si  $\mathbf{F} = \{F / F \in B \text{ pour un } B \in \mathbf{B}\}$  où la sous famille  $\mathbf{B}$ , ensemble de base, vérifie :

- $\mathbf{B} \neq \emptyset$ , et aucun élément de  $\mathbf{B}$  n'est strictement inclus dans un autre.

• Si  $B_1 \in \mathbf{B}$ ,  $B_2 \in \mathbf{B}$  et  $e_1 \in B_1$ , alors il existe  $e_2 \in B_2 / B_1 - e_1 + e_2 \in \mathbf{B}$  (c'est l'axiome d'échange).

### Axiome : Stigmes :

Un sous ensemble dépendant (lié) minimum pour l'inclusion est appelé un stigme du matroïde  $\mathbf{M} = [E, \mathbf{F}]$ .

$\mathbf{M} = [E, \mathbf{F}]$  est un matroïde si et seulement si  $\mathbf{F} = \{F / \forall S \in \mathbf{S}, S \not\subset F\}$  où la famille  $\mathbf{S}$ , famille des stigmes, vérifie :

- $\mathbf{S} \neq \emptyset$ , et aucun élément de  $\mathbf{S}$  n'est strictement inclus dans un autre.
- Si  $S_1 \in \mathbf{S}$ ,  $S_2 \in \mathbf{S}$  et  $e \in S_1 \cap S_2$ , alors  $S_1 \cup S_2 - e$  contient un élément de  $\mathbf{S}$ .

### Axiome : Rang :

Pour  $A \subset E$ , la cardinalité d'un sous ensemble indépendant maximal dans  $E$  est appelée rang de  $A$ .  $r(A) = \max_{(F \in \mathbf{F}, F \subset A)} |F| = \max_{(F \in \mathbf{F})} |F \cap A|$ .

Si  $\mathbf{M} = [E, \mathbf{F}]$  est un matroïde, la fonction rang vérifie :

- $r(\emptyset) = 0$ .
- $A \subset B \Rightarrow r(A) \leq r(B)$ .
- $r(A) + r(B) \geq r(A \cup B) + r(A \cap B)$  (sous modularité).

### Axiome : Clôture :

La clôture d'un ensemble  $A \subset E$  quelconque, notée  $cl(A)$ , est le plus grand sous ensemble  $S$  contenant  $A$  tel que  $r(A) = r(S)$ .

L'opérateur "cl" sur les sous ensembles de  $E$  est l'opération de clôture d'un matroïde  $\mathbf{M} = [E, \mathbf{F}]$  si et seulement si elle vérifie :

- $A \subset B \Rightarrow cl(A) \subset cl(B)$ .
- $\forall A \subset E, A \subset cl(A) = cl(cl(A))$ .
- Si  $e' \in cl(A + e)$  et  $e' \notin cl(A)$  alors  $e \in cl(E - e)$

**Exemples :**

Les deux exemples suivants permettent de mieux illustrer la notion de matroïde dans les domaines de l'algèbre linéaire et de la théorie des graphes.

**1 Matroïdes matriciels****Définition :**

Un matroïde matriciel est engendré par les colonnes d'une matrice donnée dans un corps ou dans l'anneau des entiers. Un ensemble de colonnes est indépendant s'il est linéairement indépendant.

**Remarque :**

Le rang du matroïde matriciel est le rang de la matrice qui lui est associée.

**Intersection de deux matroïdes matriciels :**

Soit  $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$  une matrice réelle  $m \times n$ , la sous matrice  $A_1$  étant constituée par les  $m_1$  premières lignes, la sous matrice  $A_2$  par les  $m_2$  dernières lignes ( $m_1 + m_2 = m$ ). On cherche un sous ensemble de colonnes de  $A$  à la fois indépendant dans  $A_1$  et indépendant dans  $A_2$  et de cardinalité maximale. Ceci revient à la recherche d'un sous ensemble indépendant de cardinalité maximale dans l'intersection des deux matroïdes  $\mathbf{M}_1$  et  $\mathbf{M}_2$  associés aux matrices  $A_1$  et  $A_2$ .

## 2 Matroïdes graphiques :

### Définition :

Considérons  $G = (V, E)$ . Un ensemble d'arêtes est indépendant s'il ne contient pas de cycles. On définit donc le matroïde graphique associé à  $G$  à l'aide de cette propriété.

### Définition :

Un matroïde obtenu à partir d'un graphe est dit graphique. Un matroïde dont le dual (annexe C) est obtenu à partir d'un graphe est dit co-graphique.

### Exemple :

Considérons un graphe  $G = (V, E)$  et le matroïde  $M(G)$  qui lui est associé. La clôture  $cl(A)$  d'un sous ensemble d'arêtes  $A \subset V$  est constituée par les éléments de  $A$  plus toutes les arêtes  $e$  telles qu'il existe un cycle passant par  $e$  dont les autres arêtes sont dans  $A$ . Pour le graphe présenté dans la figure 3.8, la boucle  $e_4$  appartient à la clôture de n'importe quel sous ensemble d'arêtes. Si  $e_6 \in A$ , alors l'arête  $e_7$  appartient nécessairement à  $cl(A)$ . Enfin, la clôture de  $A = \{e_1, e_2\}$  est l'ensemble  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ . La clôture d'une forêt maximale (voir annexe) est l'ensemble de toutes les arêtes.

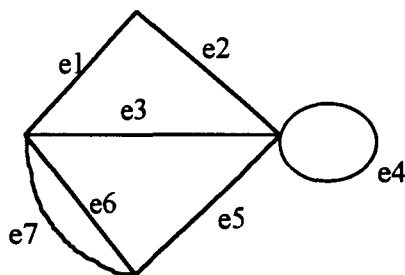


figure 3.8. Graphe G.

### III-2-2-3 Application au bond graph

Dans ce paragraphe, nous présentons des théorèmes (démontrés dans [BIRK 90]) permettant de trouver des propriétés comparables pour les graphes et le bond graph d'un même système. Ces propriétés sont utilisées pour trouver des résultats, sur le bond graph, équivalents à ceux trouvés, dans le paragraphe précédent, à partir des graphes. Le matroïde d'un bond graph est défini par les cycles du modèle bond graph que nous présentons dans la propriété suivante [BIRK 90].

#### Propriété :

Au niveau d'une jonction 1 (respectivement 0), reliée à  $n$  liens, un cycle de flux (respectivement d'effort) est constitué de toute paire de liens. Au niveau d'une jonction 0 (respectivement 1), reliée à  $n$  liens, un cycle de flux (respectivement d'effort) est constitué de tout ensemble de  $n-1$  liens (annexe C).

#### Définition :

Un bond graph  $B$  est graphique s'il y a un graphe  $G$  tel que  $\mathbf{M}(B) \cong \mathbf{M}(G)$  ( $\mathbf{M}(B)$  est isomorphe à  $\mathbf{M}(G)$ ). Si  $G$  est un tel graphe alors  $G$  et  $B$  sont associés, on note  $B = B(G)$  ou  $G = G(B)$ . D'une façon duale, s'il existe un graphe  $G$  tel que  $\mathbf{M}(B) \cong \mathbf{M}^*(G)$  alors  $B$  est co-graphique,  $G$  et  $B$  sont dits co-associés.

#### Remarque :

Si un bond graph  $B$  n'est pas graphique alors il ne représente pas un système physique.

**Théorème :**

Soit  $B$  un bond graph et  $G$  un graphe qui lui est associé, alors les matroïdes de cycles  $\mathbf{M}(B)$  et  $\mathbf{M}(G)$ , respectivement de  $B$  et  $G$ , ont des représentations standards identiques quand les bases des cycles sont ordonnées selon l'isomorphisme entre  $\mathbf{M}(B)$  et  $\mathbf{M}(G)$ .

Cette série de théorèmes et de définitions, établit l'existence d'un lien bijectif entre les cycles d'un graphe et ceux du bond graph associé. Il découle que les résultats exposés dans III-3-2-1 peuvent être retrouvés sur le bond graph. Pour ce faire, il suffit de définir, sur le modèle bond graph, les cycles qui correspondent à ceux d'un graphe associé au même système. La correspondance entre les ensembles des cycles du graphe et ceux du bond graph est faite par le biais des matroïdes (annexe C).

Comme les arcs d'un graphe ne sont porteurs que d'une seule variable alors que les liens du bond graph véhiculent deux variables (flux et effort), il est naturel de définir deux graphes et d'étudier deux ensembles de cycles.

Les cycles correspondant aux flux sont construits d'une manière duale à ceux correspondant aux efforts.

**Exemple :**

La structure du modèle bond graph correspondant au système de la figure 2.1 est représenté dans la figure 3.9 :

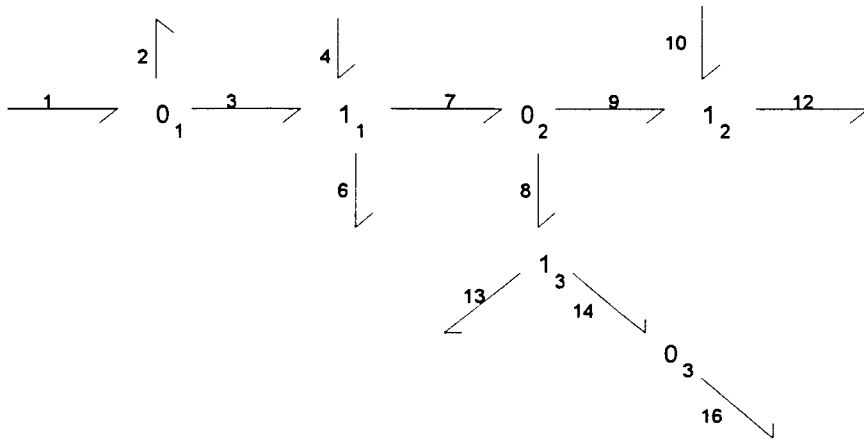


figure 3.9 Structure du modèle bond graph..

L'ensemble des cycles fondamentaux de flux est donné par :

$\{f_1f_2, f_1f_3, f_2f_3, f_3f_4, f_3f_6, f_3f_7, f_4f_6, f_4f_7, f_6f_7, f_7f_8, f_7f_9, f_8f_9, f_8f_{13}, f_8f_{14}, f_{13}f_{14}, f_9f_{10}, f_9f_{12}, f_{10}f_{12}\}$ .

L'ensemble des cycles fondamentaux d'efforts est donné par :

$\{e_1e_2, e_1e_3, e_2e_3, e_3e_4e_6, e_3e_4e_7, e_3e_6e_7, e_4e_6e_7, e_7e_8, e_7e_9, e_8e_9, e_8e_{13}, e_8e_{14}, e_{13}e_{14}, e_9e_{10}, e_9e_{12}, e_{10}e_{12}, e_{14}e_{16}\}$ .

Les compositions des cycles fondamentaux en engendrent d'autres. Selon les variables à surveiller, on applique à ces deux ensembles de cycles les quatre règles définies dans III-3-2-1.

L'analyse de ces cycles, en tenant compte des quatre règles, peut aider à choisir l'emplacement de capteurs. Dans le cas de notre exemple on constate que toutes les variables interviennent dans des cycles fondamentaux où au moins une variable est connue.

## III-4 Surveillabilité

### III-4-1 Surveillabilité à partir de la matrice de transfert

**Définition :**

La surveillabilité d'une variable est la possibilité de localiser une défaillance affectant cette variable.

Il ne faut pas confondre cette notion avec l'observabilité d'un système dont nous rappelons la définition :

**Définition :**

Un système est dit observable si il existe  $t_1 > 0$  tel que la mesure  $y$  sur l'intervalle  $[0 t_1]$  permet de déduire l'état initial  $x(0)$ .

Un système peut être observable mais non surveillable, en effet, le système de la suspension d'un quart de véhicule (figure 2.1) est observable (les outils bond graph de l'analyse structurelle exposés dans l'annexe A permettent de le vérifier), cependant, les deux sources de flux et d'effort  $V_1$  et  $F_2$  ont les même signatures (tableaux 5, 9 et 10).

Nous allons proposer une méthode pour l'étude de la surveillabilité.

**Proposition :**

Si le nombre de capteurs est strictement supérieur à 1 alors toutes les sorties des capteurs sont surveillables.



**Preuve :**

S'il n'y a qu'un seul capteur alors la relation de transfert relie la sortie de ce capteur aux sources du système. Comme cette relation de transfert constitue une base de RRA alors toute autre relation de redondance est proportionnelle à la relation de transfert et fait donc intervenir les mêmes variables (sources et capteur). Toutes ces variables auront la même signature et ne sont donc pas surveillables.

S'il y a deux capteurs ou plus, la matrice de transfert constitue une base de relations de redondance analytique permettant de localiser les défaillances capteurs car la signature de chaque capteur est différente des signatures des autres variables (tableau 11) :

capteurs	sources
1 0 ... 0	1 1 ... 1
0 1 ... 0	1 1 ... 1
0 ... 1	1 1 ... 1

tableau 11

Pour la suite on va supposer qu'il y a  $p$  ( $p > 1$ ) capteurs. Nous nous intéressons donc à la surveillabilité des sources.

S'il n'y a qu'une seule source alors toutes les variables sont surveillables, en effet, la matrice de transfert fournit des signatures différentes pour les différentes variables. Nous supposons donc qu'il y a  $m$  ( $m > 1$ ) sources.

**Remarque :**

Dans le cas  $p \geq m$ , si la matrice de transfert est de rang plein alors toutes les sources peuvent être exprimées en fonction des sorties. Ces nouvelles relations de redondance permettent d'avoir des signatures différentes pour les sources. Dans [RAHM 95] on montre

une méthode de détermination du rang de la matrice de transfert directement à partir d'un modèle bond graph.

**Proposition :**

Etant donnés  $p$  capteurs  $D_j, j = 1 \dots p$ ,  $m$  sources  $S_i, i = 1 \dots m$  et la matrice de transfert  $M_T(s) = [t_{ij}]$ . Une condition nécessaire et suffisante pour que toute défaillance affectant  $S_k$  ( $k$

dans  $\{1, \dots, m\}$ ) soit localisable est que le vecteur  $\begin{bmatrix} t_{1k} \\ \vdots \\ t_{pk} \end{bmatrix}$  ne soit proportionnel à aucun vecteur

colonne  $\begin{bmatrix} t_{1i} \\ \vdots \\ t_{pi} \end{bmatrix}$  de  $M_T(s)$  ( $i \neq k$ ).

**Preuve :**

- Condition suffisante.

Les relations données par la matrice de transfert s'écrivent :

$$D_1 = t_{11}S_1 + t_{12}S_2 + \dots + t_{1m}S_m \quad (58)$$

$$D_2 = t_{21}S_1 + t_{22}S_2 + \dots + t_{2m}S_m \quad (59)$$

$$D_p = t_{p1}S_1 + t_{p2}S_2 + \dots + t_{pm}S_m \quad (60)$$

$\forall a, b = 1 \dots p, a \neq b$  on a :

$$t_{bk}D_a - t_{ak}D_b = \sum_{j=1, j \neq k}^m w(a,b)_j S_j \quad (61)$$

pour un  $j$  donné,  $w(a,b)_j$  peut être nul mais l'ensemble  $\{w(a,b)_j\}$  pour  $(a,b)$  décrivant tous les couples dans  $\{1, \dots, p\}$  ne peut être égal à  $\{0\}$  car il impliquerait une proportionnalité entre les

vecteurs colonnes  $\begin{bmatrix} t_{1k} \\ \vdots \\ t_{pk} \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} t_{1j} \\ \vdots \\ t_{pj} \end{bmatrix}$  ce qui contredit l'hypothèse.

L'ensemble des relations (61) pour  $(a,b)$  décrivant tous les couples dans  $\{1, \dots, p\}$  permet de localiser une défaillance sur  $S_k$ . En effet,  $S_k$  est la seule source ayant une signature nulle pour cet ensemble de relations.

- Condition nécessaire.

Si deux sources  $S_k$  et  $S_j$  ont les mêmes signatures alors l'ensemble  $\{w(a,b)_j\}$  pour  $(a,b)$  décrivant tous les couples dans  $\{1, \dots, p\}$  est égal à  $\{0\}$  ce qui implique une proportionnalité entre les deux vecteurs colonnes correspondant à  $S_k$  et  $S_j$ . La condition est donc nécessaire.

**Corollaire :**

Si deux colonnes sont proportionnelles, on ne peut éliminer la source correspondante à la première, dans une relation de redondance analytique, sans éliminer la seconde.

**Remarque :**

- La génération d'autres relations de redondances en utilisant la méthode exprimée par la relation (61) permet d'avoir une matrice de signatures faisant intervenir des zéros sur toute la diagonale. Si on applique la même méthodes plusieurs fois on arrive à avoir plus de zéros dans la structure et on augmente par conséquent la distance entre les signatures ce qui permet une meilleure localisation des défaillances.

### III-4-2 Surveillabilité à partir du modèle bond graph

Le but de ce paragraphe est de proposer une méthode pour distinguer les variables surveillables des variables non surveillables à partir d'un modèle bond graph avant même de générer les relations de redondance analytique.

L'idée est de voir comment se manifeste une proportionnalité entre les colonnes sur le modèle bond graph.

**Théorème :**

Les deux colonnes  $i$  et  $j$  d'une matrice de transfert obtenue à partir d'un bond graph sont proportionnelles si :

1/ Le chemin causal parcouru pour aller de n'importe quelle source  $S_k$  au capteur  $D_i$  contient le chemin causal parcouru pour aller de cette même source au capteur  $D_j$  (ou inversement).

2/ Les éléments du chemin  $S_k-D_i$  ne figurant pas dans  $S_k-D_j$  n'apparaissent dans aucune boucle causale quand on enlève le chemin  $S_k-D_j$  du bond graph.

**Preuve :**

Dans la matrice de transfert, l'élément  $t_{ij}$  est obtenu par la formule :

$$\frac{\sum_k T_k^{ij}(s)D_k^{ij}(s)}{D(s)}$$

où :

$T_k^{ij}(s)$  est le gain du  $k^{\text{ième}}$  chemin causal reliant la sortie  $S_j$  au capteur  $D_i$ .

$D_k^{ij}(s)$  est le déterminant du bond graph réduit (§II-3-3).

$D(s)$  est le déterminant du bond graph.

Pour avoir une proportionnalité entre deux colonnes  $\begin{bmatrix} t_{1k} \\ \vdots \\ t_{pk} \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} t_{1j} \\ \vdots \\ t_{pj} \end{bmatrix}$  de la matrice de

transfert, il faut trouver un terme  $a(s)$  tel que :  $\forall i = 1 \dots p, t_{ik} = a(s)t_{ij}$ .

Ce qui revient à :

$$\frac{\sum_k T_k^{ik}(s)D_k^{ik}(s)}{D(s)} = a(s) \cdot \frac{\sum_k T_k^{ij}(s)D_k^{ij}(s)}{D(s)}$$

d'où :

$$\sum_k T_k^{ik}(s)D_k^{ik}(s) = a(s) \cdot \sum_k T_k^{ij}(s)D_k^{ij}(s)$$

Pour atteindre le capteur  $i$ , partant de la source  $k$ , on doit suivre le même chemin parcouru en partant de la source  $j$  pour atteindre le même capteur. Le chemin  $S_k-D_i$  peut contenir d'autres éléments du bond graph, ce qui constitue  $a(s)$ , mais ces éléments ne doivent pas perturber  $D_k^{ij}(s)$ . En d'autres termes, en enlevant le  $k^{\text{ième}}$  chemin causal  $S_k-D_j$ , les éléments intervenant dans  $a(s)$  ne doivent pas intervenir dans des boucles causales.

**Exemple :**

Dans le modèle bond graph du système de suspension d'un quart de véhicule présenté dans la figure 2.2, on voit que pour aller de la source  $F_2$  à n'importe quel capteur on emprunte le même chemin que si on partait de la source  $V_1$  en passant d'abord par l'élément capacitif  $k_2$  (figures 3.10, 3.11 et 3.12). La colonne correspondante à  $F_2$  est donc proportionnelle à celle qui correspond à  $V_1$  avec un facteur de proportionnalité de  $s/k_2$ , comme le montre la matrice de transfert (19).

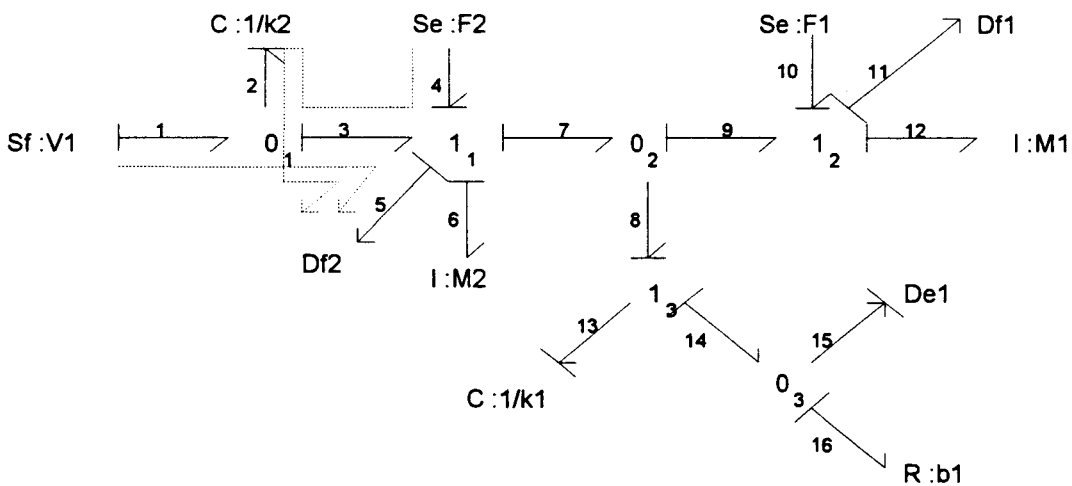


figure 3.10. Chemins V1-Df2 et F2-Df2.

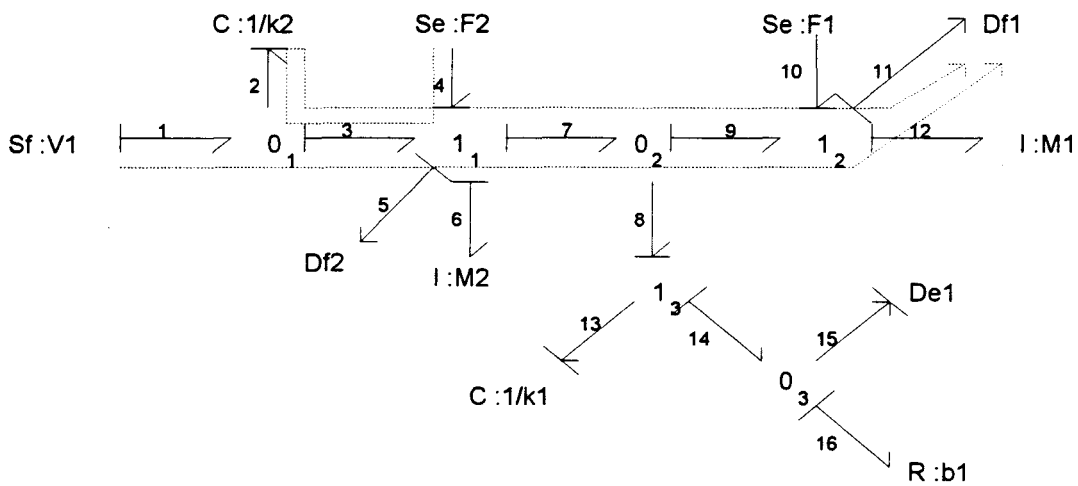


figure 3.11. Chemins V1-Df1 et F2-Df1

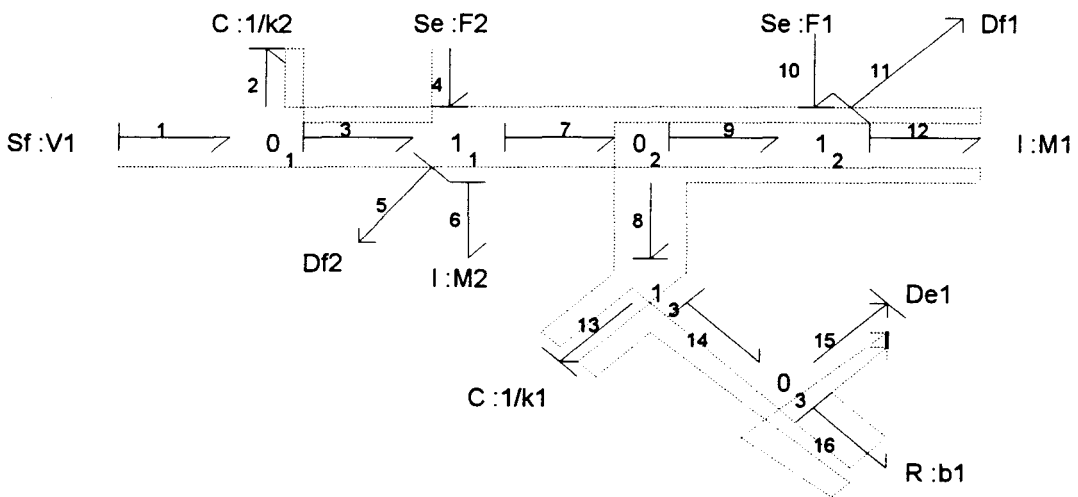


figure 3.12. Chemins V1-De1 et F2-De1.

### III-5 Conclusion

Le bond graph est un outil de modélisation riche en informations qui peut servir pour la détection et la localisation de défaillances. Il offre à la surveillance une représentation qui se prête bien aux méthodes classiques de génération de relations de redondance analytique et qui peut être très avantageuse quand l'approche structurale est mise en jeu.

La modélisation bond graph, dans ses deux formes graphique et matricielle, permet même de générer directement des résidus nécessaires à la conception d'un système de surveillance.

Un autre avantage, d'utiliser la modélisation bond graph pour la surveillance, s'est dégagé en étudiant la théorie des matroïdes, grâce à la passerelle qu'elle a créée entre les graphes et les bond graphs. Cet avantage réside en la possibilité de transposer les résultats concernant l'optimisation d'une architecture d'instrumentation par l'étude des cycles du graphe associé au système au bond graph.

Finalement, nous avons montré que l'analyse de la structure du bond graph permettait de déceler les variables à surveiller qui présentent les mêmes signatures vis-à-vis des pannes ce qui permet d'améliorer la stratégie de positionnement des capteurs.

## **CHAPITRE IV**

### **Extension aux systèmes comportant des éléments multiports et aux systèmes non linéaires**

IV-1 Introduction.....	97
IV-2 Systèmes comportant des multiports linéaires .....	98
IV-3 Systèmes non linéaires .....	107
IV-4 Conclusion .....	113



## **Extension aux systèmes comportant des éléments multiports et aux systèmes non linéaires**

### **IV-1 Introduction**

Dans ce chapitre, nous étendons les résultats définis pour des systèmes linéaires modélisés par bond graphs et ne comportant que des composants 1-port aux systèmes non linéaires et aux systèmes comportant des multiports.

Pour chacun des deux types de modèles, nous appliquons l'approche structurelle ainsi que l'approche analytique. Les caractéristiques de ces modèles peuvent empêcher l'utilisation de l'une ou l'autre des deux approches. Dans l'approche structurelle, la procédure de génération de relations de redondance analytique par parcours de chemins causaux, décrite dans le chapitre II peut être modifiée pour couvrir le cas de modèles comportant des éléments multiports ainsi que les systèmes non linéaires.

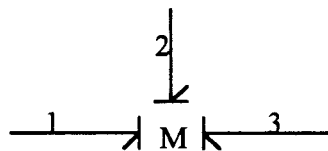
## IV-2 Systèmes comportant des multiports linéaires

### IV-2-1 Définitions

#### Définition : composant multiport

Un composant multiport est un élément R, C ou I ayant plus d'un lien d'entrée-sortie. Toute sortie dépend de l'ensemble des entrées.

#### Exemple :



M est un élément R, C ou I et on a la relation :  $f_i = \Phi(e_1, e_2, e_3)$  pour  $i = 1, 2, 3$ .

#### Définition :

On appelle matrice de transmittance, la matrice de transfert qui relie les sorties de l'élément multiport à ses entrées.

#### Remarque :

La matrice de transmittance est une matrice carrée, de dimension  $m$  (où  $m$  est le nombre de liens de l'élément multiport). Cette matrice peut être réelle ou polynomiale de degré 1. Elle n'est généralement pas inversible à cause des caractéristiques de l'élément multiport.

### IV-2-2 Méthodes analytiques

La matrice  $\mathcal{M}$  représente un système linéaire sur-déterminé. Par conséquent, il existe une matrice de projection  $\mathcal{N}$  telle que  $\mathcal{N} \cdot \mathcal{M} \cdot \mathcal{W} = 0$ . Comme nous l'avons présenté dans le chapitre

II, la matrice de projection peut être définie de deux manières différentes. La première méthode repose sur un algorithme récursif et la deuxième sur la résolution d'un système d'équations matricielles.

**Exemple :**

Considérons le système triphasé comportant trois résistances  $R$ , trois sources de tension  $E1$ ,  $E2$  et  $E3$  ainsi que trois inductances  $L$  (figure 4.1) :

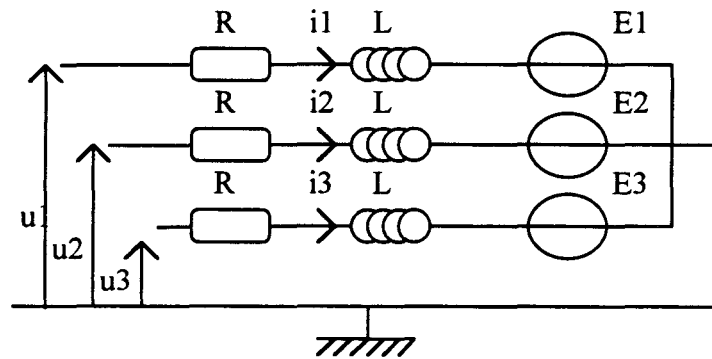


figure 4.1. Exemple d'un système triphasé.



Les entrées sont les trois tensions  $u1$ ,  $u2$  et  $u3$ . Les sorties sont les courants dans les différentes branches :  $i1$ ,  $i2$  et  $i3$ , mesurés respectivement par  $Df1$ ,  $Df2$  et  $Df3$ .

L'élément multi port I est caractérisé par l'équation :

$$\begin{bmatrix} i1 \\ i2 \\ i3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3L} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi1 \\ \Phi2 \\ \Phi3 \end{bmatrix} \quad (62)$$

où  $\Phi_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) désignent les flux magnétiques définis par :  $\Phi_i = \int v_i dt$ , où  $v_i$  est la tension dans chaque branche de l'élément multiport I.

Le bond graph associé à ce système physique est représenté dans la figure 4.2. Nous avons affecté à ce modèle la causalité intégrale dictée par la relation non-inversible qui régit le comportement de l'élément multiport (relation(62)).

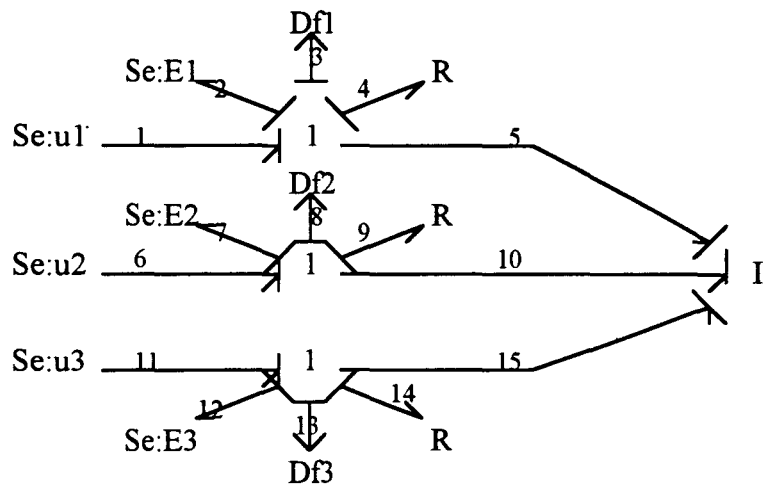


figure 4.2. Modèle bond graph du système triphasé

Dans le cas de cet exemple, les matrices  $\mathcal{M}_W$  et  $\mathcal{M}_C$  sont définies par :

$$\mathcal{M}_W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2/3L_s & 1/3L_s & 1/3L_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3L_s & -2/3L_s & 1/3L_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/3L_s & 1/3L_s & -2/3L_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R \end{bmatrix}$$

$$m_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Une matrice de projection, obtenue par l'algorithme récursif, peut s'écrire sous la forme :

$$n = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 2R & -R & -R & -3Ls-2R & R & R & 3Ls & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -R & 2R & -R & R & -3Ls-2R & R & 0 & 3Ls & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -R & -R & 2R & R & R & -3Ls-2R & 0 & 0 & 3Ls & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Les relations de redondance, obtenues par la multiplication de la relation  $m_W.W + m_C.C = 0$  par la matrice  $n$ , s'écrivent sous la forme :

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 2 & -1 & -1 & 3Ls+2R & -R & -R \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 2 & -1 & -R & 3Ls+2R & -R \\ 1 & 1 & -2 & -1 & -1 & 2 & -R & -R & 3Ls+2R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u1 \\ u2 \\ u3 \\ E1 \\ E2 \\ E3 \\ Df1 \\ Df2 \\ Df3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (63)$$

### IV-2-3 Méthodes structurelles

Pour les systèmes comportant des éléments multiports, les approches exposées dans les chapitres précédents restent valables [TAGI 95]. La généralisation de la règle de Mason aux modèles bond graphs renfermant des éléments multiports permet de déterminer la matrice de transfert directement du modèle bond graph du système. La matrice de structure peut être définie d'une manière analogue à ce qui a été présenté dans le chapitre III.

#### IV-2-3-1 Matrice de transfert

Dans [KUBI 95.a] et [KUBI 95.b], est exposée une généralisation de la règle de Mason pour la détermination directe de relations entrées-sorties dans un modèle bond graph comportant des éléments multiports. Cette méthode repose sur le parcours causal du bond graph en définissant de nouvelles classes de boucles et de chemins :

Classe 0 : la boucle (ou le chemin causal) ne touche pas l'élément multiport.

Classe I : la boucle (ou le chemin causal) passe par les liens de l'élément multiport dans un seul sens.

Classe II : la boucle (ou le chemin causal) passe par les liens de l'élément multiport dans les deux sens. Dans cette classe on distingue différents types (type  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  où  $i$  est le nombre de liens de l'élément multiport mis en jeu).

La combinaison de ces classes peut engendrer d'autres classes hybrides, et la manipulation de toutes les boucles et des différents chemins aboutit à la détermination de la matrice de transfert.

#### Exemple :

Considérons le système triphasé présenté dans la figure 4.1. Le système est équilibré en courant et en tension ce qui se traduit par :  $i_1 + i_2 + i_3 = 0$  et  $u_1 + u_2 + u_3 = 0$ . Les trois sources de tension sont telles que  $E_1 + E_2 + E_3 = 0$ .

Dans le modèle bond graph présenté dans la figure 4.2 nous distinguons :

Trois boucles causales de classe II, type 1 et dont le gain vaut :  $-2R/3Ls$ .

Trois boucles causales de classe II, type 2 et dont le gain vaut :  $R^2/9L^2s^2$ .

Deux boucles causales de classe II, type 3 et dont le gain vaut :  $R^3/27L^3s^3$ .

En calculant les numérateurs des différentes transmittances, nous devons tenir compte des boucles disjointes aux chemins empruntés pour atteindre un capteur partant d'une source. Ceci peut engendrer un certain nombre de simplifications. La matrice de transfert coresspondant à ce système est définie par :

$$\begin{bmatrix} Df1 \\ Df2 \\ Df3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3L(s + \frac{R}{L})} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u1 \\ u2 \\ u3 \\ E1 \\ E2 \\ E3 \end{bmatrix} \quad (64)$$

#### IV-2-3-2 Parcours des chemins causaux

L'élément multiport peut être considéré comme une jonction reliant les différents flux et efforts portés par les liens de cet élément. Au lieu de partir des jonctions liées à l'élément multiport et de le traverser par la suite, ce qui ferait intervenir plusieurs variables en même temps à chaque fois que nous parcourons l'élément multiport, nous partons systématiquement de ce composant. De cette manière, nous n'écrivons la relation entre les différents flux et efforts qu'une seule fois [TAGI 95].

La procédure de génération de relations de redondance analytique, décrite dans le chapitre précédent, peut être modifiée pour inclure le cas de modèles comportant des éléments multiports linéaires :

1/ Ecrire les relations au niveau des éléments multiports et exprimer les variables inconnues en fonction des variables à surveiller en suivant les chemins causaux.

2/ Si le nombre de RRA obtenues n'est pas suffisant, alors choisir un type de jonction, en fonction de la nature des variables à surveiller.

3/ Choisir une jonction de ce type qui ne soit pas directement liée à l'élément multiport (sinon on obtient une relation de redondance déjà trouvée).

4/ Ecrire la relation constitutive et exprimer les variables inconnues en fonction des variables à surveiller en suivant les chemins causaux.

5/ Passer à la jonction suivante dans le même type, sinon à l'autre type de jonction et appliquer l'étape 4 jusqu'à l'obtention de suffisamment de relations de redondance analytique.

### Exemple :

Dans l'exemple du système électrique triphasé représenté dans la figure 4.1, on écrit la relation au niveau de l'élément multiport :

$$\begin{bmatrix} i1 \\ i2 \\ i3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3L} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi1 \\ \Phi2 \\ \Phi3 \end{bmatrix}$$

ce qui se traduit par :

$$s \begin{bmatrix} Df1 \\ Df2 \\ Df3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3L} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u1 - E1 - R.Df1 \\ u2 - E2 - R.Df2 \\ u3 - E3 - R.Df3 \end{bmatrix} \quad (65)$$

car :  $v_j = u_j - E_j - R.Df_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ).

Les jonctions restantes sont directement liées à l'élément multiport. Pour générer d'autres relations de redondance, nous effectuerons des combinaisons linéaires des relations trouvées.



### IV-2-3-3 Substitution

La matrice  $\mathcal{M}$  renfermant l'ensemble de l'information concernant le modèle bond graph du système physique peut être définie de la même manière que dans le cas de modèles ne renfermant pas d'éléments multiports (voir chapitre III). La différence se trouve au niveau des matrices  $H(1/s)$ ,  $H'(s)$  et de  $L$  qui ne sont plus diagonales mais présentent des blocs matrices correspondant aux différents éléments multiports et qui, dans la plupart des cas, ne sont pas de rang plein. La proposition énoncée dans II-2 ne suppose aucune particularité des matrices  $H(1/s)$ ,  $H'(s)$  et  $L$ . Tous les résultats restent donc valables.

#### Exemple :

Pour l'exemple du système électrique triphasé représenté dans la figure 4.2, les vecteurs clés sont définis par :

$$\dot{x}_i = [e_5 \ e_{10} \ e_{15}], \quad \dot{x}_d = [ \ ], \quad Z_i = [f_5 \ f_{10} \ f_{15}], \quad Z_d = [ \ ], \quad D_{in} = [f_4 \ f_9 \ f_{14}], \quad D_{out} = [e_4 \ e_9 \ e_{14}],$$

$$U = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ E_1 \ E_2 \ E_3], \quad Y = [Df_1 \ Df_2 \ Df_3].$$

La matrice  $\mathcal{M}$  s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2/3Ls & 1/3Ls & 1/3Ls & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3Ls & -2/3Ls & 1/3Ls & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3Ls & 1/3Ls & -2/3Ls & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} r1 \\ r2 \\ r3 \\ r4 \\ r5 \\ r6 \\ r7 \\ r8 \\ r9 \\ r10 \\ r11 \\ r12 \\ r13 \\ r14 \\ r15 \end{matrix}$$

**Remarque :**

La matrice  $H(1/s)$  décrivant les relations entrée-sortie au niveau du multiport est de dimension 3 et de rang 2.

Une chaîne alternée associée à cette matrice est décrite figure 4.3 :

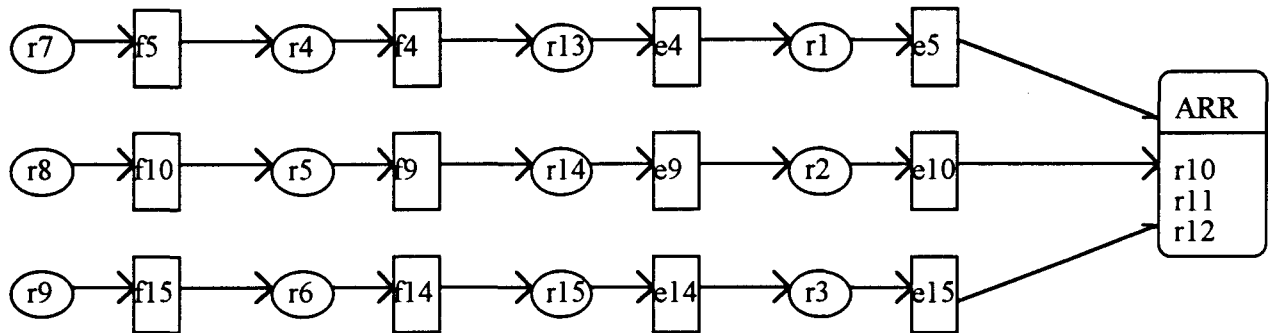


figure 4.3. Chaîne alternée associée à un couplage sur  $m$ .

Les relations de redondance analytique obtenues en parcourant cette chaîne alternée sont définies par :

$$Df1 - (2/3Ls)(u1 - E1 - R.Df1) + (1/3Ls)(u2 - E2 - R.Df2) + (1/3Ls)(u3 - E3 - R.Df3) = 0. (66)$$

$$Df2 + (1/3Ls)(u1 - E1 - R.Df1) - (2/3Ls)(u2 - E2 - R.Df2) + (1/3Ls)(u3 - E3 - R.Df3) = 0. (67)$$

$$Df3 + (1/3Ls)(u1 - E1 - R.Df1) + (1/3Ls)(u2 - E2 - R.Df2) - (2/3Ls)(u3 - E3 - R.Df3) = 0. (68)$$

En tenant compte des relations entre les différentes tensions  $u_i$  et  $E_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), on aboutit à des relations semblables à celles données par la matrice de transfert.

Le choix d'une autre chaîne alternée conduit à des relations de redondance analytique ayant une forme différente.

**Remarque :**

Ces relations sont semblables à celles obtenues, dans le paragraphe précédent, en appliquant la méthode de projection. Toute combinaison linéaire des lignes de la matrice de

projection engendre une ligne orthogonale à la matrice  $\mathcal{M}_W$  et conduit à une relation de redondance ayant une autre forme.

#### **IV-2-4 Conclusion**

Les éléments multiports offrent de grandes possibilités à la modélisation bond graph et permettent de représenter des phénomènes physiques complexes. L'intégration de tels éléments dans un modèle bond graph n'affecte pas la possibilité de générer des relations de redondance analytiques et toutes les méthodes présentées dans les deux chapitres précédents restent valables.

### **IV-3 Systèmes non linéaires**

Les différentes méthodes de génération de relations de redondance analytique supposent des modèles linéaires à l'exception de l'approche structurale développée dans [DECL 91][STAR 89]. Pour les autres méthodes, il est possible d'envisager une linéarisation au voisinage d'un point de fonctionnement. Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à des modèles bond graph non linéaires et nous appliquons la théorie présentée dans les deux chapitres précédents. Quand c'est nécessaire, nous distinguons trois types de non-linéarité : à cause de la structure, à cause des composants et à cause de la structure et des composants.

#### **IV-3-1 Méthodes analytiques**

Pour appliquer l'approche par projection, il est nécessaire de distinguer le cas où la non-linéarité n'affecte que la structure et le cas où elle affecte les composants. Dans le premier cas, il est toujours possible de construire la matrice  $\mathcal{M}$  car la matrice de structure (chapitre I relation (15)) ne suppose pas la linéarité du système. Cependant, en plus des termes égaux à 0, 1, -1 ou

les modules des transformateurs et des gyrateurs, nous observons des termes non linéaires fonctions d'un certain nombre de paramètres. L'application de l'une des deux méthodes de construction de la matrice de projection conduit au résultat et à la génération de relations de redondance analytique. Dans le deuxième cas, la recherche d'une matrice de projection qui s'applique à l'ensemble des relations n'est plus possible. Cependant, certaines relations, issues de la structure sont linéaires et nous pouvons chercher un sous-système sur-déterminé dans cet ensemble de relations. La génération de relations de redondance est possible quand il existe une relation directe entre les sorties et les entrées sans passage par un élément non linéaire. Nous pouvons généraliser l'approche par projection en cherchant une matrice  $\mathcal{N}$  comportant des fonctions non linéaires et dont la composition avec  $\mathcal{M} \cdot \mathcal{W}$  donne une matrice nulle. Les relations de redondance analytique sont données par :  $\mathcal{N} \circ \mathcal{M} \cdot \mathcal{C} = 0$  (où  $\circ$  désigne l'opérateur composition).

#### **Remarque :**

Trouver des matrices orthogonales pour la composition n'est pas un exercice facile, l'utilisation de cette méthode est donc très difficile.

### **IV-3-2 Méthodes structurelles**

Pour les systèmes non linéaires, la transformée de Laplace ne peut être appliquée et nous ne pouvons pas parler de matrice de transfert. Les approches structurelles que nous utiliserons pour la génération de relations de redondance analytique sont le parcours des chemins causaux et la substitution.

#### **IV-3-2-1 Parcours des chemins causaux**

Dans le cadre de la méthode de génération de relations de redondance analytique par le parcours des chemins causaux, que nous avons présentée dans le chapitre III, aucune hypothèse concernant la linéarité du système n'intervient. Le parcours des chemins causaux

reste toujours applicable même dans le cas de non-linéarité dans la structure, il suffit de considérer les modules des transformateurs comme des fonctions de certains paramètres et non plus comme des termes constants. Toutefois, pour la proposition postulant que le fait de partir d'une jonction 0 comportant un composant R, C ou I, reliée directement à une jonction 1, donnerait une relation de redondance proportionnelle à celle obtenue en partant de la jonction 1 n'est plus vrai dans le cas de non linéarité du composant R, C ou I. Dans ce cas, la procédure à suivre est de choisir un type de jonction selon les variables mises en jeu et si les relations de redondance générées ne sont pas suffisantes, on utilise les autres jonctions.

La procédure de génération de relations de redondance analytique, décrite dans le chapitre II et modifiée dans le paragraphe précédent couvre le cas de modèles comportant des éléments non linéaires.

### Exemple :

Considérons l'exemple de la suspension d'un quart de véhicule dans lequel nous supposons la non linéarité de tous les composants. Nous supposons que la causalité affectée au modèle est dictée par les relations non linéaires régissant le comportement des composants.

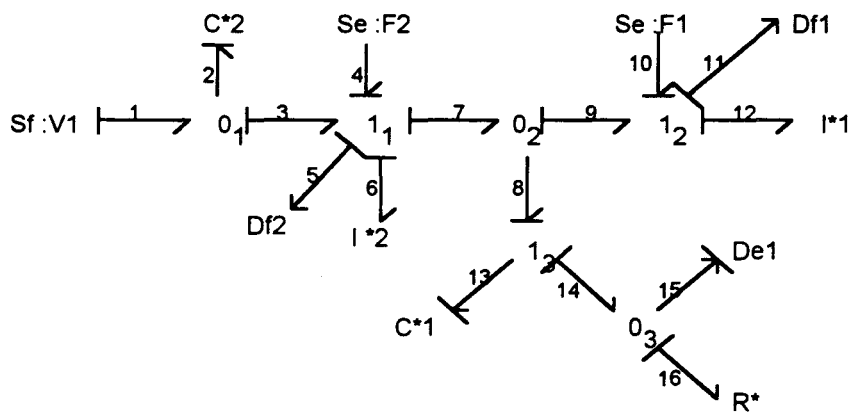


figure 4.4. modèle non linéaire de la suspension d'un quart de véhicule.

Les relations non linéaires au niveau des composants sont définies par :

$$e_{12} = \Phi_{I^*1}(df_{12}/dt), e_6 = \Phi_{I^*2}(df_6/dt), f_{13} = \Phi_{C^*1}(de_{13}/dt), f_2 = \Phi_{C^*2}(de_2/dt),$$

$$e_{16} = \Phi_{R^*}(f_{16}).$$

Au niveau de la jonction  $0_1$ , nous pouvons écrire :  $f_1 - f_2 - f_3 = 0$ .

En parcourant les différents chemins causaux se rattachant aux variables concernées, nous obtenons :

$$f_1 = V_1.$$

$$f_3 = Df_2.$$

$$f_2 = \Phi_C * 2 (de_2 / dt).$$

$$\text{Avec } e_2 = e_3 = e_6 + e_7 - F_2.$$

$$\text{Or } e_6 = \Phi_I * 2 (df_6 / dt) \text{ et } f_6 = Df_2.$$

$$\text{Et } e_7 = e_9 = e_{12} - F_1. \text{ Et comme } e_{12} = \Phi_I * 1 (df_{12} / dt) \text{ avec } f_{12} = Df_1.$$

Il s'ensuit :

$$V_1 - \Phi_C * 2 (d(\Phi_I * 2 (dDf_2 / dt) + \Phi_I * 1 (dDf_1 / dt) - F_1 - F_2) / dt) - Df_2 = 0. \quad (69)$$

De la même manière, en partant des jonctions  $0_2$  et  $0_3$ , nous obtenons les relations de redondance analytique suivantes :

$$Df_2 - \Phi_C * 1 (d(\Phi_I * 1 (dDf_1 / dt) - F_1 - De_1 / dt) - Df_1) = 0. \quad (70)$$

$$De_1 - \Phi_R * \Phi_C * 1 (d(\Phi_I * 1 (dDf_1 / dt) - F_1 - De_1) / dt) = 0. \quad (71)$$

### Remarque :

Si nous remplaçons les fonctions non linéaires  $\Phi$  par la transmittance des composants nous retrouvons les relations de redondance (55), (56) et (57) générés dans le chapitre III.

#### IV-3-2-2 Substitution

La construction de la matrice de structure du modèle bond graph ne suppose aucune hypothèse de linéarité des composants. Dans le cas non linéaire, les matrices  $H(1/s)$ ,  $H'(s)$  et  $L$

n'ont plus de sens. Cependant, les relations au niveau des composants, bien que non linéaires, peuvent être exploitées. Il est donc possible de définir la matrice  $\mathcal{M}^S$  et imposer des contraintes sur le couplage que nous cherchons à construire sur un sous-système sur-déterminé pour respecter la non linéarité de certains composants.

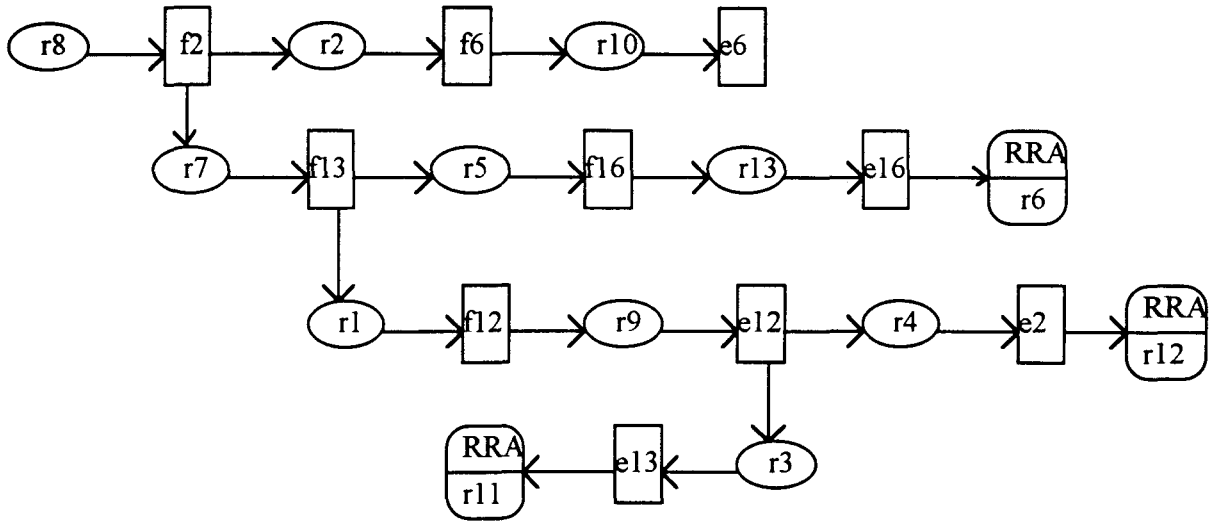
### Exemple :

La matrice de structure  $\mathcal{M}^S$  associée au modèle bond graph de la figure 4.4 est définie

par :

$$\mathcal{M}^S = \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cccccccccccccccc} e_{12} & e_6 & f_{13} & f_2 & e_{16} & V_1 & F_1 & F_2 & f_{12} & f_6 & e_{13} & e_2 & f_{16} & De_1 & Df_1 & Df_2 \end{array} \right. \\ \left. \begin{array}{l} \begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \\ \begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \\ \begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \\ \begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \\ \begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \\ \begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \\ \begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \\ \begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \\ \begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \\ \begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \\ \begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \\ \begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \end{array} \right. \begin{array}{l} (r1) \\ (r2) \\ (r3) \\ (r4) \\ (r5) \\ (r6) \\ (r7) \\ (r8) \\ (r9) \\ (r10) \\ (r11) \\ (r12) \\ (r13) \end{array} \end{array}$$

Les éléments représentés en gras indiquent une contrainte sur le couplage à cause de la non linéarité des composants [CASS 94b]. Une chaîne alternée, respectant ces contraintes, est donnée par :


 figure 4.5. Chaîne alternée associée à un couplage sur  $\mathcal{M}^S$ .

Ce qui se traduit par :

$$r8 \rightarrow f2 = V1 - Df2.$$

$$r2 \rightarrow f6 = Df2.$$

$$r10 \rightarrow e6 = \Phi_{I*2}(dDf2/dt)$$

$$r7 \rightarrow f13 = Df2 - Df1.$$

$$r5 \rightarrow f16 = Df2 - Df1.$$

$$r13 \rightarrow e16 = \Phi_{R*}(Df2 - Df1).$$

$$r6 \rightarrow De1 - \Phi_{R*}(Df2 - Df1) = 0. \quad (72)$$

$$r1 \rightarrow f12 = Df1.$$

$$r9 \rightarrow e12 = \Phi_{I*1}(dDf1/dt).$$

$$r10 \rightarrow e2 = \Phi_{I*1}(dDf1/dt) + \Phi_{I*2}(dDf2/dt) - F1 - F2.$$

$$r12 \rightarrow V1 - Df2 - \Phi_{C*2}(d(\Phi_{I*1}(dDf1/dt) + \Phi_{I*2}(dDf2/dt) - F1 - F2)dt) = 0. \quad (73)$$

$$r3 \rightarrow e13 = \Phi_{I*1}(dDf1/dt) - \Phi_{R*}(Df2 - Df1) - F1.$$



$$r_{11} \rightarrow Df_2 - Df_1 - \Phi_C * 2(d(\Phi_I * 1(dDf_1/dt) - \Phi_R * (Df_2 - Df_1) - F_1)/dt) = 0. \quad (74)$$

### Remarques :

- En remplaçant les fonctions non linéaires décrivant le comportement des composants par des transmittances linéaires nous obtenons les relations de redondance analytique (51), (52) et (53) obtenues dans le chapitre III.

- La causalité des composants non linéaires ne peut pas être choisie arbitrairement, elle est dictée par la fonction régissant le comportement du composant et qui, en général, n'est pas bijective.

### IV-3-3 Intérêt et limitation de la méthode

Dans le cas de systèmes non linéaires, l'application de la méthode structurale pour la génération de RRA reste possible. Quand la non-linéarité ne touche que la structure (module de transformation non linéaire ...etc.), il est toujours possible de construire la matrice de connaissance  $m$  et de lui appliquer l'approche analytique. Dans les autres cas de non-linéarité, cette démarche n'est pas applicable.

### IV-4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étendu certains résultats présentés dans les chapitres II et III dans le cas de systèmes comportant des composants multiports linéaires et de systèmes non linéaires. D'autres résultats, notamment la matrice de transfert et la matrice de projection, n'ont plus de sens dans le cas de systèmes non linéaires.

Pour la méthode de génération de relations de redondance analytique basée sur le parcours des chemins causaux, nous avons montré que le principe reste le même et nous avons

énoncé une procédure générale englobant les cas de systèmes comportant des éléments multiports linéaires et de systèmes non linéaires.

## CONCLUSION

L'analyse de la démarche suivie pour faire de la surveillance des processus complexes à partir d'une modélisation bond graph montre que le point de départ était la matrice de connaissance  $\mathcal{M}$  qui implique des relations de structure et des relations de comportement des composants. En effet, cette matrice constitue le premier lien effectué entre les deux domaines de recherche des deux équipes : bond graph et surveillance. Cette passerelle nous a permis, en premier lieu d'appliquer une approche par projection, similaire à celle utilisée dans l'espace de parité. La recherche d'une matrice dont le noyau serait l'espace engendré par les variables inconnues a conduit à la détermination analytique de la matrice de projection  $\mathcal{N}$ . Forts des résultats que nous avons établis en nous basant sur la représentation matricielle d'un modèle bond graph, nous avons exploré la possibilité de retrouver les mêmes résultats à partir d'une approche structurelle en explorant les différents concepts utilisés pour la génération de relations de redondance analytique tels que la partition d'un système de relations en sous-systèmes sous-déterminé, juste-déterminé et sur-déterminé, la recherche d'un couplage maximal dans un sous-système sur-déterminé et la construction d'une chaîne alternée ont été appliqués à la matrice  $\mathcal{M}$  qui a joué le rôle de matrice de structure.

Ensuite, nous avons pensé à générer des relations de redondance analytique directement à partir de la représentation graphique du modèle bond graph, profitant ainsi de la richesse qu'offre cette modélisation et notamment la notion de causalité. L'utilisation de règles déjà établies en analyse structurelle nous a beaucoup aidés à élaborer un algorithme de génération de relations de redondance.

Notre effort a été récompensé, non seulement par la découverte de méthodes directes de génération de relations de redondance analytique, mais aussi par la généralisation de ces méthodes aux systèmes non linéaires et aux systèmes comportant des éléments multiports, couvrant ainsi la majeure partie des processus rencontrés dans l'industrie. De plus, nous avons élaboré des règles de surveillabilité permettant de savoir, à l'avance, si plusieurs variables à

surveiller ont la même signature ce qui permet de reconsidérer l'architecture d'instrumentation avant de l'implanter, satisfaisant ainsi le cahier des charges au moindre coût.

Nous avons testé nos résultats sur différents exemple de systèmes physiques et nous avons effectué la simulation des résidus générés pour nous assurer de la qualité du système de surveillance conçu. Les résultats obtenus sont très encourageants et valident un certain nombre de méthodes qui peuvent être implantées sur le logiciel ARCHER, développé à l'Ecole Centrale de Lille au sein de l'équipe bond graph.

Pour résumer, nous pouvons assurer que, outre son utilisation dans l'analyse structurelle et la simulation, la modélisation bond graph peut apporter à la surveillance un outil riche et facile à manipuler qui viendrait compléter la panoplie des modèles utilisés dans ce domaine.

Nous pensons à poursuivre nos recherches dans ce domaine pour pouvoir répondre aux questions suivantes :

- La génération de relations de redondance analytique sous les contraintes d'un cahier des charges et particulièrement des contraintes de placement de capteurs.
- L'extension de la surveillance au niveau des composants du modèle bond graph en utilisant l'exploration des chemins causaux passant par ces composants.
- La maîtrise de la non-linéarité des composants dans la génération de relations de redondance.
- La simplification de la méthode de génération des relations de redondance analytique, aussi bien dans le cas d'un système linéaire que dans le cas d'un système non linéaire ou comportant des multiports, pour intégrer un module de surveillance dans le logiciel ARCHER.
- L'exploitation de la théorie des matroïdes pour transposer d'autres résultats de surveillance et notamment des résultats concernant le placement des capteurs.

## Bibliographie

[BASS 87] : Basseville, M ; Benveniste, A ; Moustakides, G ; Rougée, A.

*Detection and Diagnosis of Changes in the Eigenstructure of non Stationary Multivariable Systems.*

Automatica n°23, pp 479-489, 1987.

[BEAR 71] : Beard, R.V.

*Failure Accomodation in Linear Systems Through Self-Reorganization.*

Ph.D dissertation, MIT, Dep, Aero.Astro Cambridge, février 1971.

[BERG 57] : Berge, C.

*Two Theorems in Graph Theory.*

Proceedings of National Academy of Science. Vol 43, pp 842-844, 1957.

[BIRK 90] : Birkett, S.H.

*Combinatorial Analysis of Dynamical Systems.*

Ph.D dissertation, Waterloo, Ontario, 1990.

[BORN 92] : Borne, P ; Dauphin-Tanguy, G ; Richard, J.P ; Rotella, F ; Zambettakis, I.

*Modélisation et identification des processus.*

Editions Technip, 1992

[BREE 84] : Breedveld, P.

*Essential Gytrators and Equivalence Rules for 3-Port Junction Structure.*

Journal of the Franklin Institute, 318 n°2, pp 77-89, 1984.

[BROW 72] : Brown, F.T.

*Direct Application of the Loop Rule to Bond Graphs.*

Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, pp 253-261, septembre 1972.

[CASS 94a] : Cassar, J.P.

*Génération des relations de redondance analytique pour la surveillance.*

Journées d'Etude S3 : Sûreté, Surveillance, Supervision.

Détection et localisation de défaillances

GDR automatique

Paris 17-18 novembre 1994.

[CASS 94b] : Cassar, J.P ; Litwak, R.G ; Coquempot, V ; Staroswiecki, M.

*Approche structurelle de la conception de systèmes de surveillance pour des procédés industriels complexes.*

Revue Européenne de Diagnostic et Sûreté de fonctionnement.

Vol n°2 1994.

[CECC 91] : Cecchin, T.D ; Sauter, B.

*Fault Detection in Time Varying System via Parameter Estimation.*

Proceedings IMACS MCTS 91, pp 542-551, Lille, France 1991.

[CHOW 80] : Chow, E. Y.

*Failure Detection System Design Methodology*

Sc.D Thesis, lab Information and Decision System, MIT, Cambridge, M.A, 1980

[CHOW 84] : Chow, E. Y ; Willsky, A.S.

*Analytical Redundancy and the Design of Robust Failure Detection System.*

IEEE trans on Automatic Control, Vol AC-29 n°7, juillet 1984.

[CLAR 78] : Clark, R.N.

*A Simplified Instrument Failure Detection Scheme.*

IEEE Trans. Aerosp. Electro. Syst.

Vol AES, pp 558-563, juillet 1978.

[COCQ 93] : V. Cocquempot

*Surveillance des processus industriels complexes , génération et optimisation des relations de redondance analytiques.*

Thèse de doctorat, Université de Lille I, France, 1993.

[DECL 91] : Declerck, P.

*Analyse structurale et fonctionnelle des grands systèmes. Application à une centrale PWR 900 MW.*

Thèse de doctorat, Université de Lille I, France, 1991.

[DING 90] : Ding, X ; Frank, P.M.

*Fault detection and Identification via Frequency Domain approaches.*

Proceedings of MIM-S2'90, Bruxelles, Belgique, pp IV.A1 1-6.

3-7 septembre 1990.

[DUBU 90] : Dubuisson, B.

*Diagnostic et reconnaissance des formes.*

Traité des nouvelles technologies, ED HERMES 1990.

[DULM 58] : Dulmage, A.L ; Mendelshon, N.S.

*Covring of Bipartite Graph*

Canadian Journal of mathematic, Vol. 10, pp 517-534, 1958.

[EVAN 70] : Evans, F.A ; Willcox, J.C.

*Experimental Standdown Redundant Sensor Inertial Navigation Systems.*

Journal of Space craft Rockets, Vol 7, n°9, pp 1070-1074, septembre 1970.

[FRAN 87] : Frank, P.M.

*Advanced Fault Detection and Isolation Schemes Using Nonlinear and Robust Observers.*

10th World Congress on Automatic Control, IFAC, RFA, pp 63-68, juillet 1987.

[FRAN 88] : Frank, P.M.

*Fault diagnosis on the basis of Dynamic Process Models.*

Proceedings IMACS, 12th World Congress on Scientific Computation, Paris, France.

pp 414-419, 18-22 juillet 1988.

[FREL 93] : Frélicot, C ; Dubuisson, B.

*A Fuzzy Approach for the Predictive Diagnosis of Technological Systems.*

Int Conference on Fault Diagnosis.

Tooldiag'93, France.

pp 914-921, avril 1993

[GERT 88] : Gertler, J.J.

*Survey on Model-Based Failure Detection and Isolation in Complex Plants.*

IEEE Control System Magazine, pp 3-11, décembre 1988.

[GERT 89] : Gertler, J.J ; Luo, Q.

*Robust Isolable Models for Failure Diagnosis.*

AIChE Journal vol.35, n°11, pp 1856-1861, november 1989.



[GERT 93] : Gertler, J.J ; Monajemy, R.

*Generating Directional Residuals with Dynamic Parity Equations.*

12th World Congress, IFAC, Sydney, Australie.

Vol 7, pp 505-510, 18-23 juillet 1993.

[ISER 84] : Iserman, R.

*Process Fault Detection Based on Modeling and Estimation Methods - A survey.*

Automatica, Vol 20, n°4, pp 387-404, 1984.

[KARN 83] : Karnopp, D.C ; Rosenberg, R.C.

*Systems Dynamics : a Unified Approach.*

Mac Graw Hill, 1983.

[LUCA 93] : Lucas, B ; Evrard, J.M.

*An Improved Diagnosis Method Using a Mixed Model.*

Int Conference on Fault Diagnosis.

Tooldiag'93, France.

pp 1071-1079, avril 1993

[LUEN 71] : Luenberger, D.G.

*An Introduction to Observers.*

IEEE Transactions on Automatic Control.

Vol AC-16, n°6, pp 596-602, décembre 1971.

[LUON 94] : Luong, M ; Maquin, D ; Huynh, C.T ; Ragot, J.

*Observability, Redundancy, Reliability and Integrated Design of Measurement System.*

Proceedings of 2nd IFAC Symposium on Intelligent Components and Instruments for Control

Applications, SICICA'94, Budapest, Hungary, juin 1994.

[MAGN 91] : Magni, J.F ; Moyon, P.

*A Generalized Approach to Observers for Fault Diagnosis.*

Proceedings of 30th IEEE CDC, Brighton, UK, décembre 1991.

[MAQU 94] : Maquin, D ; Luong, M ; Ragot, J.

*A propos de la Conception d'une Architecture d'Instrumentation.*

Journées d'Etude S3 : Sûreté, Surveillance, Supervision.

Détection et localisation de défaillances

GDR automatique

Paris 17-18 novembre 1994.

[MINO 86] : Minoux, M ; Bartnik, G.

*Graphes algorithmes logiciels.*

Dunod informatique, Paris, 1986.

[MURO 87] : Murota, M.

*System Analysis by Graphs and Matroids, Structural Solvability and Controllability.*

Springer-verlag, 1987.

[PAO 89] : Pao, Y.

*Adaptive Pattern Recognition and Neural Networks.*

Addison Wesley Inc, New York, 1989.

[PARK 90] : Park, Y ; Stein, J.L.

*Performance Evaluation of State and Input Observer for Machine Diagnostics.*

Proceeding of the 1990 American Control Conference, San Diego, CA, 1990.

[PATT 93] : Patton, R.J.

*Robustness Issues In Fault Tolerant Control.*

Tooldiag'93, Toulouse, France, vol 3 (late papers), april 5-7 1993.

[PAYN 61] : Paynter, M.

*Analysis and Design of Engineering Systems.*

MIT Press, 1961.

[POTT 77] : Potter, J.E ; Soman, M.C.

*Thersholdless Redundancy Management with Array of Skewed Instrument.*

Electronic Flight Control System, Agardograph 224

pp 15-25. 1977

[RAGO 90] : Ragot, M ; Darouach, D ; Maquin, D ; Bloch, G.

*Validation de données et diagnostic.*

Traité des nouvelles technologies, série diagnostic et maintenance, Hermès, Paris, 1990.

[RAHM 93] : Rahmani, A.

*Etude structurelle des systèmes linéaires par l'approche bond graph.*

Thèse de doctorat, Université de Lille I, France, 1993.

[RECS 89] : Recski, A.

*Matroid Theory and its Applications in Electric Network Theory and in Statics.*

Springer-verlag 1989.

[ROSE 83] : Rosenberg, R.C ; Karnopp, D.C.

*Introduction to Physical System Dynamics.*

Series in mechanical engineering, Mac Graw Hill, 1983.

[SAPO 78] : Saporta, G.

*Théorie et méthodes de la statistique.*

Paris-Technip, 1978.

[SATI 78] : Satin, L ; Gates, R.L.

*Evaluation of Parity Equations for Gyro Failure Detection and Isolation.*

Journal of Guidance Control, Vol 1, pp 14-20, 1978.

[SPRO 92] : Sprösser, T.

*Contribution à l'étude des méthodes de détection de défauts par redondance analytique.*

Thèse, Université de Haute Alsace, 16 décembre 1992.

[STAR 89] : Staroswiecki, M ; Declerck, P.

*Analytical Redundancy in Nonlinear Interconnected Systems by Means of Structural Analysis.*

AIPAC'89, IFAC Symposium on Advanced Information Processing in Automatic Control.

Nancy, France, ppII 23-27, 3-5 juillet 1989.

[STAR 92] : Staroswiecki, M.

*Les systèmes et le concept d'instrumentation intelligente*

Ingénieurs et scientifiques de France, le progrès technique

(reprise de la communication aux entretiens de la technologie, Paris-CNIT-La Défense 1992)

pp 35-42, février 1992.

[STAR 93] : Staroswiecki, M ; Cassar, J.P ; Cocquempot, V.

*A General Approach for Multicriteria Optimization of Structured Residuals.*

Tooldiag'93, Toulouse, France, vol 2, pp 800-807, avril 5-7 1993.

[STAR 94] : Staroswiecki, M.

*La problématique et les approches de la surveillance des systèmes technologiques.*

Journées d'Etude S3 : Sûreté, Surveillance, Supervision.

Détection et localisation de défaillances

GDR automatique

Paris 17-18 novembre 1994.

[STEI 94] : Stein, J.L ; Tu, J.F.

*A State-Space Model for Monitoring Thermally Preload in Anti-Friction Spindle Bearings of High-Speed Machine Tools.*

Transaction du ASME, Vol. 116, pp 372-386, septembre 1994.

[SUEU 90] : Sueur, C.

*Contribution à la modélisation et à l'analyse des systèmes dynamiques par une approche bond graph. Application aux systèmes poly-articulés plans à segments flexibles.*

Thèse de doctorat, Université de Lille I, France 1990.

[TAGI 94] : Tagina, M ; Cassar, J.P ; Dauphin-Tanguy, G ; Staroswiecki, M.

*La surveillance d'un système électromécanique en utilisant une approche bond graph.*

14ième Journées Tunisiennes d'Electrotechnique et d'Automatique JTEA'94.

Vol 1 pp 99-107, 5-7 novembre 1994.

[TAGI 95a] : Tagina, M ; Cassar, J.P ; Dauphin-Tanguy, G ; Staroswiecki, M.

*Monitoring of Systems Modelled by Bond Graph.*

ICBGM'95. International Conference on Bond Graph Modeling. Las Vegas, pp 275-280, janvier 1995.

[TAGI 95b] : Tagina, M ; Cassar, J.P ; Dauphin-Tanguy, G ; Staroswiecki, M.  
*Bond Graph Models for Direct Generation of Formal Fault Detection Systems .*  
accepté à Systems Analysis Modelling Simulation 1995.

[THOM 75] : Thoma, J.U.  
*Introduction to Bond Graphs and their Applications.*  
Pergamon Press, 1975.

[THOM 91] : Thoma, J.U.  
*Simulation by Bond Graphs.*  
Springer Verlag, 1991.

[TURB 92] : Turbatte, H.C.  
*Conception d'architectures d'instrumentation sous contraintes d'observabilité et de fiabilité.*  
*Application à des plates formes pétrolières.*  
Thèse de doctorat, Institut polytechnique de Lorraine, France 1992.

[VERG 94] : Vergé, M ; Jaume, D.  
*Fault Detection and Bond Graph Modeling.*  
Safe Process'94 IFAC symposium, Espoo, Finland, June 1994.

[VISW 87] : Viswanadham, N ; Taylor, J.H ; Luce, E.C.  
*A Frequency-Domain Approach to Failure Detection and Isolation with Application to GE-21*  
*Turbine Engine Control System.*  
Control Theory and Advanced Technology, Vol 3, n°1, pp 45-72, mars 1987.

[VOLL 76] : Volle, M.  
*Analyse de données.*  
Publication de l'INSEE, chap II, 1976.

[WILL 76] : Willsky, A.S.

*A Survey of Design Methods for Failure Detection in Dynamic Systems.*

Automatica, Vol 12, pp 601-611, 1976

## Annexe A

### I Passage à d'autres formes de représentation

Le bond graph permet de passer à d'autres formes de modélisation [BORN 92].

#### I-1 Schéma bloc

Le passage d'une modélisation bond graph à une représentation sous forme schéma bloc peut être très utile, non seulement pour des problèmes de surveillance mais aussi pour résoudre des problèmes de commande et de simulation.

Pour ce faire, il faut suivre la démarche suivante :

- Ecrire successivement les lois structurelles associées à la structure de jonction et les lois régissant les composants (sous forme symbolique).
- Faire apparaître deux lignes distinctes, la première est associée aux efforts et la deuxième aux flux.
- Faire apparaître un sommateur et un point de connexion pour chaque jonction du modèle bond graph, pour représenter la somme pondérée pour un type de variable et l'égalité pour l'autre type de variable.

A partir de la structure obtenue, on construit le schéma bloc en ne parcourant qu'une seule variable à partir du signal d'entrée jusqu'au signal de sortie.



**Exemple :**

Considérons le système mécanique suivant (figure A.1) :

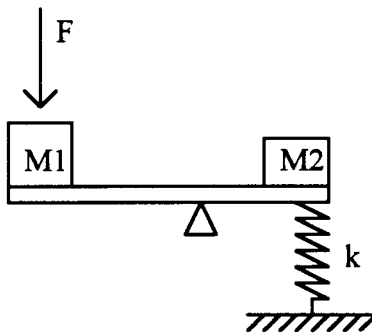


figure A.1. Exemple d'un système mécanique.

on désire mesurer le flux (la vitesse) au niveau du ressort.

Le modèle bond graph associé à ce système est défini par (figure A.2) :

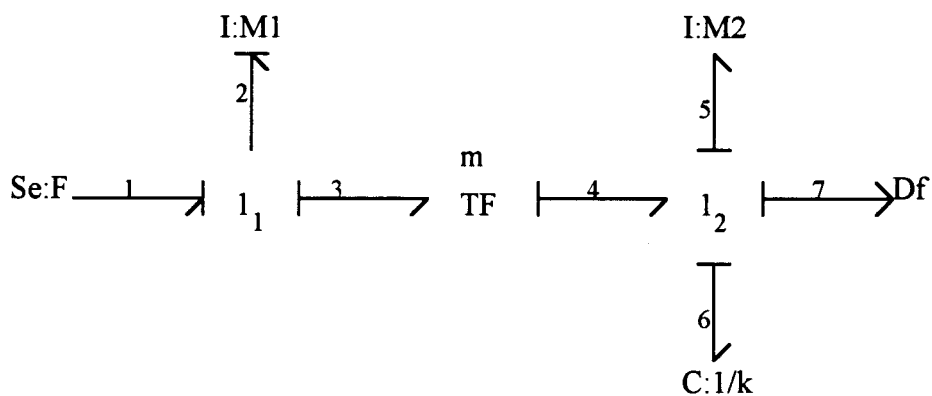


figure A.2. Modèle bond graph du système mécanique.

Les lois structurelles et les relations des composants s'écrivent comme suit :

Pour la jonction  $1_1$

$$f_1 = f_2$$

$$f_3 = f_2$$

$$e_2 = e_1 - e_3$$

Pour la jonction TF :

$$e_3 = m \cdot e_4$$

$$f_4 = m \cdot f_3$$

Pour la jonction 12 :

$$f_5 = f_4$$

$$f_6 = f_4$$

$$e_4 = e_5 + e_6$$

Pour les composants :

$$f_2 = (1/M_1s)e_2$$

$$e_5 = (M_2s)f_5$$

$$e_6 = (k/s)f_6$$

D'où le schéma bloc associé (figure A.3) :

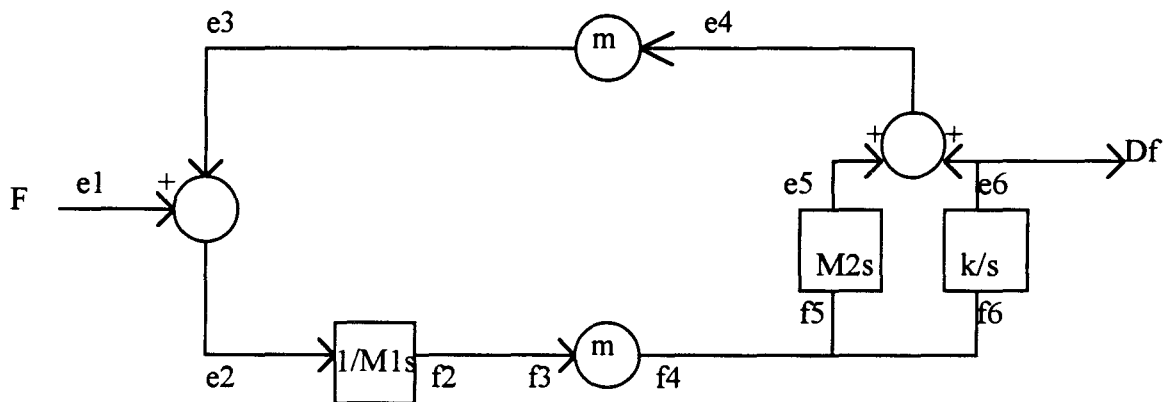


figure A.3. Schéma bloc associé au système mécanique..

## I-2 Equation d'état

Les variables d'état sont les variables d'énergie "p" et "q" associées respectivement aux éléments I et C :  $x = \begin{bmatrix} p_I \\ q_C \end{bmatrix}$ .

### Remarque :

Si tous les éléments dynamique (I,C) sont en causalité intégrale, alors la dimension de x donne l'ordre du modèle.

Il existe deux méthodes pour déterminer les matrices A, B, C et D de l'équation d'état à partir d'un modèle bond graph. La première consiste à partir des lois structurelles et les lois régissant le comportement des composants pour aboutir, après quelques combinaisons linéaires, à une forme d'état. La deuxième méthode est plus directe, elle se fonde sur la notion de chemins et boucles causaux.

**Définition :**

Un chemin causal, dans une structure de jonction d'un bond graph causal, est une alternance de liens et de noeuds entre un élément de la famille (Se, Sf, I, C, R) et un élément de la famille (I, C, R, De, Df), telle que deux liens de ce chemin, au niveau d'une même jonction, présentent des orientations causales opposées (sauf en présence d'une jonction GY).

**Remarque :**

Un chemin causal est simple s'il peut être parcouru en ne suivant qu'une seule variable. Dans le cas contraire, il est dit mixte.

**Définition :**

Une boucle causale est un chemin fermé entre deux éléments de la famille (I, C, R) partant de la sortie d'un port et revenant à l'entrée de ce même port, sans parcourir un même lien dans la même direction plus d'une fois.

Le passage de la modélisation bond graph à la représentation d'état se fait en calculant le gain des boucles reliant les éléments dynamiques et ceux des boucles reliant ces même composants aux éléments "R" (pour la détermination de la matrice "A"). Pour la détermination de la matrice "B", on regarde les chemins causaux reliant les sources aux éléments dynamiques (voir annexe).

**Exemple :**

Soit le circuit électrique composé d'une source de tension, d'une inductance en série avec une résistance  $R_1$  et une capacité en parallèle avec une résistance  $R_2$ . Un capteur d'effort mesure la tension aux bords de la capacité (figure A.4) :

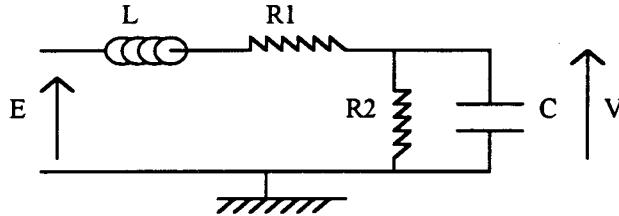


figure A.4. Exemple d'un système électrique.

Le bond graph associé a la forme suivante (figure A.5) :

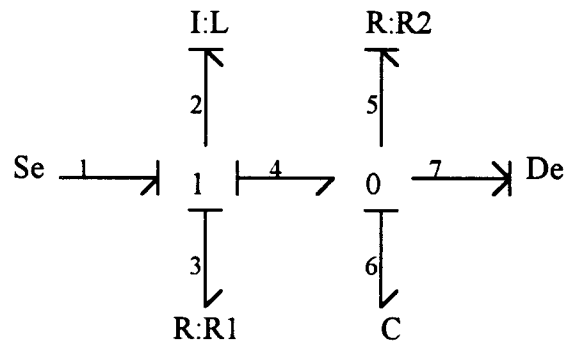


figure A.5. Modèle bond graph du système électrique.

Le vecteur état est défini par l'impulsion magnétique au niveau de l'inductance et la charge au niveau de la capacité :

$$x = \begin{bmatrix} p_2 \\ q_6 \end{bmatrix}$$

L'équation d'état associée est :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} e_2 \\ f_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1/L & -1/L \\ 1/L & -1/R_2 C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ q_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} E$$

$$y = e_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \end{bmatrix} x$$

### I-3 Matrice de transfert

L'obtention de la matrice de transfert à partir d'un modèle bond graph est le résultat de la généralisation de la règle de Shannon-Mason, habituellement utilisée pour les graphes de fluence [BROW 72].

Nous présentons le cas d'un système mono entrée-mono sortie, sachant que la méthode est généralisée pour les systèmes à plusieurs entrées et plusieurs sorties.

#### Définition :

La transmittance des éléments R, I et C dépend de leur causalité et est définie comme suit :

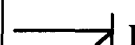
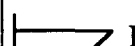


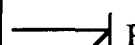
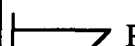
élément	causalité	transmittance
I	 I	1/Is
	 I	Is
C	 C	Cs
	 C	1/Cs
R	 R	1/R
	 R	R

tableau 1.

#### Définition :

Le gain d'un chemin causal direct est défini par :

$$T = (-1)^{n_0 + n_1} \prod_{j,k} (m_j \text{ ou } 1/m_j)(r_k \text{ ou } 1/r_k)$$

où :

- $n_0$  et  $n_1$  représentent respectivement le nombre total de changements d'orientation des liens aux jonctions 0 (respectivement 1) quand on suit la variable flux (respectivement effort).

•  $m_j$ ,  $1/m_j$ ,  $r_k$  et  $1/r_k$  désignent les modules des éléments TF et GY par lesquels passe le chemin causal en tenant compte de leur causalité.

**Remarque :**

Quand le chemin causal passe par un élément R, C ou I (chemin causal indirect) on multiplie l'expression du gain par la transmittance de l'élément traversé.

**Définition :**

Le gain d'une boucle causale est défini par :

$$B = (-1)^{n_0+n_1} \prod_g \prod_{j,k} (m_j \text{ ou } 1/m_j)^2 (r_k \text{ ou } 1/r_k)^2$$

où :

- $\prod_g$  désigne le produit des transmittances des éléments de la boucle.

**Définition :**

Pour un système mono entrée (u)-mono sortie (y), la fonction de transfert s'écrit :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_k T_k(s) D_k(s)}{D(s)}$$

où :

- $T_k(s)$  est le gain du  $k^{\text{ième}}$  chemin causal direct reliant la sortie à l'entrée.
- $D(s)$  est le déterminant bond graph obtenu par la relation :

$$D(s) = 1 - \sum_j B_j(s) + \sum_{j,k} B_j(s) B_k(s) - \sum_{j,k,l} B_j(s) B_k(s) B_l(s) + \dots$$

où les  $B_j$  représentent les gains des boucles causales du système intervenant lors qu'elles sont disjointes deux à deux puis trois à trois etc...

- $D_k(s)$  est le déterminant du bond graph quand on enlève de celui ci le  $k^{\text{ième}}$  chemin causal.

**Exemple :**

Pour le circuit électrique considéré dans le paragraphe précédent, on localise les boucles causales et on calcule leurs gains (tableau 2) :

boucle	gain
L-R <sub>1</sub>	B1 = -R <sub>1</sub> /Ls
L-R <sub>2</sub>	B2 = -1/R <sub>2</sub> Cs
L-C	B3 = -1/LCs <sup>2</sup>

tableau 2.

Le seul chemin causal liant l'entrée à la sortie (1-2-L-2-4-6-C-6-7) a un gain de :

$$T1(s) = 1/LCs^2.$$

$$D1(s) = 1.$$

$$D(s) = 1+R$$

$$D1(s) = 1.$$

$$D(s) = 1+R_1/Ls+1/R_2Cs+1/LCs^2+R_1/R_2LCs^2.$$

D'où la fonction de transfert (A.1) :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1/LCs^2}{1 + R_1/Ls + 1/R_2Cs + 1/LCs^2 + R_1/R_2LCs^2} \quad (A.1)$$

**Remarque :**

Pour avoir l'expression (A.1) en terme de l'opérateur s, il faut partir du modèle bond graph en causalité dérivée.

## **II Analyse structurelle**

Dans cette partie, on rappelle quelques résultats pour analyser la structure d'un système par simple manipulation de la causalité de son modèle bond graph [SUEU 90][RAHM 93].

### **II-1 Rang de la matrice d'état associée au bond graph**

#### **Théorème :**

Le rang structurel de la matrice d'état  $A$ , noté  $\text{rang\_bg}$ , associée à un modèle bond graph initialement en causalité intégrale est égal au nombre d'éléments dynamiques en causalité intégrale admettant une causalité dérivée. Si  $(n_i)_i$  (respectivement  $(n_i)_d$ ) représente le nombre d'éléments dynamique en causalité intégrale quand une causalité intégrale (respectivement dérivée) est appliquée au bond graph, alors :

$$\text{rang\_bg}(A) = (n_i)_i - (n_i)_d$$

### **II-2 Commandabilité / Observabilité structurelles**

#### **Définition :**

Dualiser une source (ou un capteur) d'effort (respectivement de flux) c'est la transformer en source (ou capteur) de flux (respectivement d'effort).

#### **Théorème :**

Un système modélisé par bond graph est structurellement commandable (respectivement observable) si et seulement si :

1- Il existe un chemin causal liant une source (respectivement un capteur) à un élément dynamique en causalité intégrale quand le bond graph est affecté d'une causalité intégrale.



2- Tous les éléments dynamiques admettent une causalité dérivée quand on affecte le bond graph d'une causalité dérivée avec une dualisation éventuelle des sources (respectivement des capteurs).

## Annexe B

### Algorithme de détermination de $n^*$

Nous nous donnons une matrice  $M$  de dimensions  $(q_1, q_2)$  et de rang  $r$ . Nous cherchons à déterminer une matrice de projection  $n$ . Soit  $k(i)$  le degré des lignes de  $n$  déterminées à l'étape  $i$ .

#### Initialisation :

On suppose qu'il y a au moins un capteur, donc  $q_1 - r > 0$ .

A l'étape initiale,  $i = 0$ .

$M^0 = M$ ,  $k(0) = 0$ .

Soit  $M^{*0} = [M_0^0 \ M_1^0 \ M_2^0]$ .

a/ A partir de  $M^{*0}$ , la matrice  $M_{k(0)}^{*0}$  (chapitre II relation (36)) peut être construite.

Cette matrice est de dimension  $((k(0)+1).q_1, (k(0)+q_1+1).q_2)$ .

Soit  $d_{k(0)}$  la quantité définie de la manière suivante :

$$d_{k(0)} = (k(0)+1)q_1 - \text{rang}(M_{k(0)}^{*0}). \quad (\text{B.1})$$

b/ Si  $d_{k(0)} = 0$ , on ne peut pas trouver de matrice  $n^{*k(0)}$  orthogonale à  $M_{k(0)}^{*0}$ .  $n$  ne possède donc pas de lignes de degré 0. On incrémente  $k(0)$  et on répète la procédure à partir de a/.

c/ Si  $d_{k(0)} > 0$ , on peut déterminer, par résolution d'un système linéaire,  $d_{k(0)}$  vecteurs réels linéairement indépendants, orthogonaux aux vecteurs colonnes de  $M_{k(0)}^*$ . Ces vecteurs constituent la matrice  $(0)$ . A partir de cette matrice réelle, la matrice polynomiale  $\eta^0$  peut être construite. Cette matrice représente la sous matrice de  $\eta$  de degré  $k(0)$  déterminé à l'étape initiale.

d/ Si  $d_{k(0)} < q_1 - r$ , on passe à l'étape  $i = 1$  et on recherche les solutions de degré  $k(i)$ . si  $d_{k(0)} = q_1 - r$ , toutes les lignes de  $\eta$  sont déterminées. Chacune de ces lignes est de degré exactement égal à  $k(0)$ .

Etape  $i$  ( $i > 0$ ) :

e/ Pour permettre l'indépendance des lignes de  $\eta$ , déterminées à l'étape  $i - 1$ , et celles qu'on recherche à l'étape  $i$ , on construit :

$$M^i = M^{i-1}(\eta^{i-1})^t \quad (B.2)$$

On recherche ensuite la matrice  $\eta^i$  de degré  $k(i)$ , orthogonale à  $M^i$ .

Initialisons  $k(i)$  à  $k(i-1)+1$ . En effet,  $\eta^i$  est obligatoirement de degré strictement supérieur à  $k(i-1)$ .

A partir de  $M^{*i} = [M_0^i \ M_1^i \ M_2^i]$ , on construit  $M_{k(i)}^{*i}$ .

Soit  $d_{k(i)} = (k(i)+1)q_1 - \text{rang}(M_{k(i)}^{*i})$ .

Tant que cette quantité est inférieure ou égale à 0, on incrémente  $k(i)$ . Lors que  $d_{k(i)} > 0$ , par résolution d'un système linéaire, on détermine  $d_{k(i)}$  vecteurs lignes indépendants orthogonaux à  $M_{k(i)}^{*i}$ . Ces vecteurs lignes forment la matrice  $\eta^{*k(i)}$  à partir de laquelle on forme la matrice polynomiale  $\eta^i$  sous matrice de  $\eta$ , de degré  $k(i)$  déterminée à l'étape  $i$ .

Le nombre total des lignes de  $\eta$  déterminées à l'étape  $i$  est  $n_i$  :

$$n_i = \sum_j^i d_{k(j)} \quad (\text{B.3})$$

Si  $n_i < q_1 - r$ , on passe à l'étape  $i+1$  (étape e/).

Si  $n_i = q_1 - r$ , la matrice  $\mathcal{N}$  orthogonale à  $M^*$  est entièrement déterminée par concaténation des lignes déterminées jusqu'à l'étape  $i$  incluse.

Cet algorithme assure l'indépendance des lignes de  $\mathcal{N}$ . Les lignes de même degré sont linéairement indépendantes alors que celles de degrés différents sont polynomialement indépendantes. Pour obtenir d'autres relations de redondance analytique, on effectue des combinaisons linéaires des lignes de la matrice de projection  $\mathcal{N}$ .

## Annexe C

Les démonstrations des théorèmes et propositions que nous rappelons dans cet annexe se trouvent dans [BIRK 90].

### Association d'un bond graph à un graphe.

#### Définition :

Soit  $G_p$  une représentation planaire d'un graphe  $G$ . Pour toute face de  $G_p$ , la collection de ses frontières est un cycle de  $G_p$ . S'il y a au moins trois arcs dans ce cycle alors on appelle la face correspondante face-s de  $G_p$ . Sinon, il faut qu'il y ait deux arcs dans le cycle et on appelle la face correspondante une face-p. Une face-p correspond à deux arcs parallèles. La face non limitée n'est ni face-s ni face-p de  $G_p$ .

#### Définition :

Soit  $G_p$  une représentation planaire d'un graphe  $G$ . Pour tout arc  $b$  de  $G_p$  qui lie deux faces de  $G_p$  on ajoute un minimum d'arcs parallèles à  $b$  pour que  $b$  ne soit pas la frontière d'une face-s. Si les deux faces sont toutes les deux des faces-s alors il faut ajouter 2 arcs pour englober  $b$ . S'il y a une face-s et une face-p alors un seul arc est nécessaire et si les deux faces sont des faces-p alors il n'y a pas besoin d'ajouter d'arc. Le graphe obtenu est noté  $G_{pa}$  et appelé graphe augmenté de  $G_p$ .

**Définition :**

Un sous graphe-s de  $G_{pa}$  est un sous graphe constitué des arcs de  $G_{pa}$  qui forment la limite d'une seule face-s. Un sous graphe-p de  $G_{pa}$  est un sous graphe comportant des arcs parallèles.

**Définition :**

Pour tout sous graphe-s ou -p de  $G_{pa}$  on définit une jonction du bond graph dont les liens sont en correspondance avec les arcs de ce graphe. Cette collection de jonction est assemblée dans un bond graph noté  $B(G_p)$ .

**Théorème :**

Pour la représentation planaire  $G_p$  d'un graphe  $G$ ,  $B(G_p)$  est un bond graph propre. Les liens externes correspondent aux arcs de  $G_p$  et les liens internes à ceux de  $G_{pa}$  n'appartenant pas à  $G_p$ .

**Théorème :**

Pour la représentation planaire  $G_p$  d'un graphe  $G$ . Le nombre de parties de  $B(G_p)$  est le nombre de composantes de  $G$ . En particulier, le bond graph  $B(G_p)$  est connexe si et seulement si  $G$  a une seule composante.

**Remarque :**

Deux représentations planaires différentes d'un même graphe peuvent engendrer deux bond graphs différents. Il faut donc introduire la notion d'espace vectoriel des bond graphs défini sur  $GF(2)$ .

**Exemple :**

Considérons le système dont la structure est modélisée par le graphe G. En utilisant la méthode décrite ci-dessus, il est possible de construire le graphe augmenté Gpa correspondant à G ainsi qu'un modèle bond graph associé (figure C.1).

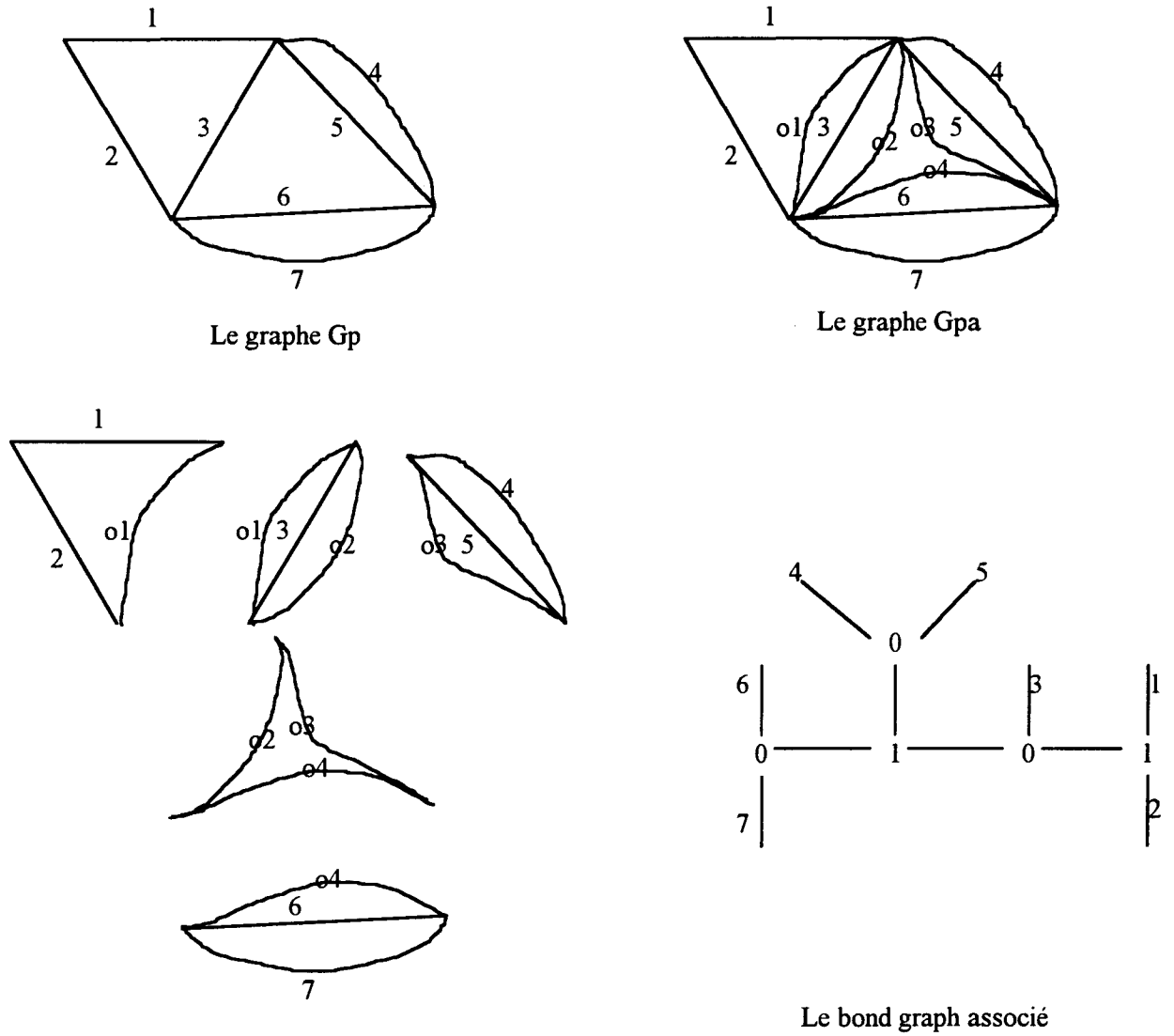


figure C.1. Exemple d'un Graphe et d'un bond graph associé

Une méthode directe de construction d'un bond graph à partir d'un graphe peut être donnée. La grande différence qu'elle présente de la première méthode c'est qu'elle n'admet pas de méthode réciproque.

**Définition :**

Une méthode de construction d'un bond graph à partir d'un graphe  $G$  peut être définie comme suit : chaque sommet est remplacé par une jonction "0" et tout arc de  $G$  est divisé intérieurement par une jonction "1" à laquelle on ajoute un lien externe libellé, pour la convenance, de la même manière que l'arc correspondant dans  $G$ . Le bond graph obtenu est appelé le bond graph des sommets de  $G$ , noté  $B_+(G)$ .

**Remarque :**

En interchangeant les jonctions "0" et "1" on construit le dual de  $B_+(G)$

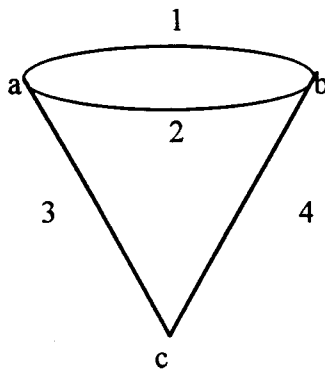
**Théorème :**

Le bond graph  $B_+(G)$  est équivalent aux bond graphs dans  $B(G)$ . En particulier,  $B_+(G)$  est associé à  $G$ .

**Exemple :**

Considérons un système dont la structure est donnée par un graphe  $G$ , un bond graph associé peut être directement construit (figure C.2).





Le graphe G

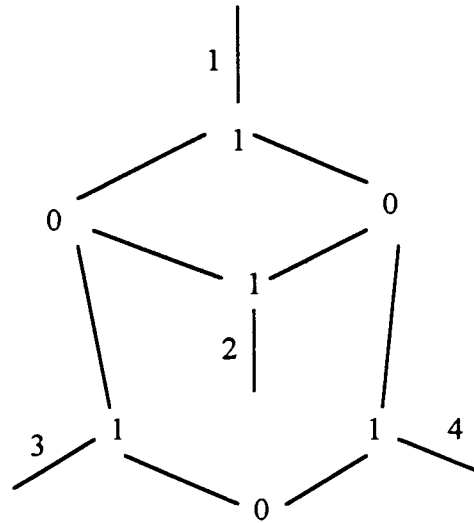
Le bond graph  $B+(G)$ 

figure C.2. Exemple d'un graphe est d'un bond graph associé

### Les espaces vectoriels associés à un bond graph

#### Proposition :

Soit  $E$  l'ensemble des liens d'un bond graph. On considère la collection  $W(B)$  de tous les sous-ensembles de  $E$ . On peut associer une structure d'espace vectoriel sur  $GF(2)$  à  $W(B)$ .

Si  $E_1, E_2 \in W(B)$ , alors la somme  $E_1 + E_2$  est définie par :  $E_1 + E_2 = (E_1 \cup E_2) - (E_1 \cap E_2)$ .

L'inverse de  $E_1$  est  $E_1$  :  $E_1 + E_1 = (E_1 \cup E_1) - (E_1 \cap E_1) = \emptyset$ .

Le produit par un scalaire est défini par :  $1.E_1 = E_1$  ;  $0.E_1 = \emptyset$ .

$W(B)$  est un espace vectoriel sur  $GF(2)$  appelé espace des liens de  $B$ .

#### Définition :

On appelle l'ensemble de liens externes, l'ensemble  $E_e$  des liens reliés à une seule jonction. Et on appelle l'ensemble de liens internes, l'ensemble  $E_i$  des liens reliés à deux jonctions.

**Théorème :**

Pour un bond graph avec  $n$  liens,  $W(B)$  est un espace vectoriel de dimension  $n$ .

Si  $E = b_1 b_2 \dots b_n$ , alors une base de  $W(B)$  est  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ .  $W(B)$  est un espace vectoriel fini de  $2^n$  vecteurs.

**Définition :**

Un vecteur type- $s$  est un élément de  $W(B)$  qui comprend tous les liens incidents à une jonction " $s$ " de  $B$ . Un vecteur type- $p$  de  $B$  est un élément de  $W(B)$  qui comprend chaque paire de liens incidents à la même jonction " $p$ " de  $B$ . Les vecteurs type- $s$  ou type- $p$  de  $W(B)$  sont appelés vecteurs élémentaires de jonction de  $B$ . Le sous espace de  $W(B)$  engendré par les vecteurs élémentaires de jonction de  $B$  est appelé l'espace- $s$  de  $B$  et est noté  $W_s(B)$  ou plus simplement  $W_s$ .

**Définition :**

Les ensembles de vecteurs suivants sont fermés pour l'addition et sont donc des sous espaces de  $W_s(B)$ .

$W_{cy}(B) = \{v \in W_s(B) / v \subseteq E_e\}$  : espace des cycles de  $B$ .

$W_i(B) = \{v \in W_s(B) / v \subseteq E_j\}$  : espace interne de  $B$ .

**Définition :**

On dit que deux bond graphs  $B_1$  et  $B_2$  sont  $s$ -équivalents si et seulement si  $W_{cy}(B_1)$  est isomorphe à  $W_{cy}(B_2)$ . On écrit :  $B_1 \stackrel{s}{\cong} B_2$ .

**Théorème :**

Soit  $G_p$  une représentation plane d'un graphe  $G$ . Et soit  $B = B(G_p)$ , le bond graph associé à  $G_p$ . l'espace des cycles de  $B$  est isomorphe à l'espace des cycles de  $G$ .

**Corollaire :**

Tous les bond graphs associés aux représentations plane d'un même graphe  $G$  sont  $s$ -équivalents.

**Définition :**

Soit  $B$  un bond graph avec  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  une base de  $W_{cy}(B)$ . Pour tout  $v_k$  on définit la fonction  $f_k : E_e \rightarrow GF(2)$ ,  $b \rightarrow f_k(b) = 1$  si  $b \in v_k$ , 0 sinon. La fonction  $f_k$  est dite une chaîne sur  $GF(2)$ . Le groupe de chaînes généré par les chaînes définies ci-dessus est noté  $N_{cy}$ , c'est l'ensemble de toutes les chaînes qui sont obtenues en faisant des sommes de chaînes de type  $f_k$ .

**Théorème :**

Le groupe de chaînes, vu comme sous espace vectoriel de  $L(E_e)$ , est isomorphe à  $W_{cy}$ .

**Définition :**

Le matroïde du groupe de chaînes  $N_{cy}(B)$ , noté  $M(B)$ , est appelé matroïde des cycles du bond graph  $B$ .

