N° d'ordre :

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE
en Productique : Automatique et Informatique Industrielle

par

Stéphane RIMAUX
Ingénieur Centrale Lille

ETUDE DES PROPRIETES STRUCTURELLES DE CERTAINES CLASSES DE SYSTEMES PHYSIQUES NON LINEAIRES MODELISES PAR BOND GRAPH

Soutenue le 9 Novembre 1995 devant le jury d'examen

M.	**P. BORNE**	: Président
M.	**J. LEFEVRE**	: Rapporteur
M.	**S. SCAVARDA**	: Rapporteur
Mme.	**G. DAUPHIN-TANGUY**	: Examinateur, Directeur de thèse
M.	**C. SUEUR**	: Examinateur, Directeur de thèse
M	**J.P CASSAR**	: Examinateur
Mme.	**M. DELGADO**	: Examinateur

Avant propos

AVANT PROPOS

Le travail que nous présentons dans ce mémoire a été effectué au Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle de Lille (LAIL) à l'Ecole Centrale de Lille sous la direction de Madame le Professeur G. DAUPHIN-TANGUY et de Monsieur le Maître de conférences C. SUEUR.

Nous sommes très redevable à Monsieur P. BORNE, Professeur et Directeur scientifique de l'Ecole Centrale de Lille, pour l'enseignement qu'il a su nous dispenser et sa motivation pour la recherche qu'il a su nous faire partager. Nous sommes très honoré qu'il ait accepté de présider notre jury de thèse et nous l'en remercions.

Nous tenons à exprimer toute notre reconnaissance à Madame le Professeur G. DAUPHIN-TANGUY, Directeur du LAIL, pour la passion des bond graphs qu'elle sait si bien faire partager, ses précieux conseils et la qualité de ses rapports humains.

Nous sommes très reconnaissant à Monsieur C. SUEUR, Maître de Conférences à l'Ecole Centrale de Lille, pour nous avoir soutenu tout au long de ces trois années. Les remarques judicieuses, sa compétence et sa gentillesse ont été une aide précieuse pour la réussite de nos travaux. Qu'il reçoive ici nos très sincères remerciements.

Nous sommes redevable à Messieurs les Professeurs J. LEFEVRE et S. SCAVARDA pour l'honneur qu'ils nous font en acceptant d'examiner ce travail et d'être les rapporteurs de cette thèse.

Madame M. DELGADO, Professeur à l'université de Caracas, nous a honoré en acceptant de participer au jury de thèse.

Nous tenons à remercier Monsieur J.P CASSAR, Maître de Conférences à l'Université de Lille I de l'honneur qu'il nous fait en participant à notre jury.

Nous remercions très sincèrement Monsieur M. VANGREVENINGE pour la reprographie de ce mémoire.

Nous tenons enfin à remercier les membres du LAIL et spécialement les équipes Bond Graph et Commande (David, François, Janette, Jean-Marc, Laurent, Moncef, Philippe) pour l'excellente ambiance qu'ils font régner.

Il va de soi que ce mémoire est dédié à mes parents pour leur amour et leur soutien indéfectible, ainsi qu'à Janette.

Sommaire

Sommaire

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

Les travaux présentés dans ce mémoire constituent une contribution à l'étude des propriétés structurelles des systèmes physiques non linéaires modélisés par bond graph. Il est reconnu que la structure d'un système est un élément clef dans la recherche de lois de commande.

De nombreux résultats existent pour les systèmes linéaires. Pour ces systèmes, de simples critères graphiques appliqués sur leur modèle bond graph fournissent sans aucun calcul de nombreuses informations sur la structure du système : commandabilité, observabilité, découplage...

Nous avons voulu, par nos travaux, étendre ce savoir faire du linéaire au non linéaire. Pour cela deux principales approches ont été développées. La première repose sur le fait que la démarche la plus simple (mais qui demande des précautions) pour étudier un système non linéaire est d'étudier les propriétés de son modèle linéarisé. La seconde démarche repose sur l'analyse de conditions de commandabilité par l'approche par géométrie différentielle de certaines classes de systèmes non linéaires, conditions que l'on transforme ensuite en conditions sur le modèle bond graph.

Le premier chapitre du rapport est consacré à la présentation des résultats acquis pour l'étude des propriétés structurelles des systèmes linéaires modélisés par bond graph. Nous introduisons aussi les notations et définitions utiles par la suite. Dans cette première partie nous rappelons aussi la base de l'approche par géométrie différentielle pour l'étude de la commandabilité des systèmes non linéaires.

Le deuxième chapitre traite de la linéarisation d'un bond graph. Nous sommes parti pour cela des résultats exposés dans [Karnopp(77)] que nous avons étendu et appliqué sur plusieurs exemples notamment sur le modèle du double pendule inversé.

Les modèles bond graphs issus d'une linéarisation ne pouvant être étudiés par la méthode linéaire classique à cause de la présence de liens d'information internes dans le modèle bond graph, nous avons développé dans le troisième chapitre, une méthode d'analyse de la commandabilité structurelle de ces bond graphs. Le champ d'application de cette méthode ne se limite pas aux bond graphs issus d'une linéarisation mais elle peut être aussi utilisée directement sur de nombreux modèles bond graphs possédant intrinsèquement cette modulation interne. Ces cas étaient jusqu'alors hors des hypothèses pour une approche graphique sur le bond graph.

Enfin, dans le dernier chapitre, nous recherchons des conditions pour la commandabilité de certaines classes de systèmes non linéaires. L'étude de plusieurs bond graphs déduits du modèle bond graph initial du système nous permet alors de tester ces conditions algébriques sans avoir à passer par l'intermédiaire de l'équation d'état. Les classes des systèmes non linéaires étudiées sont très intéressantes d'un point de vue pratique car elles regroupent les cas où la commande se fait, non par la modulation d'une source de puissance comme il a été étudié jusqu'à présent, mais par la modulation d'une autre classe d'éléments. Cette étude nous permet d'étudier, entre autres, certains cas où la commande se fait par la modulation de la valeur d'une résistance (Interrupteur dans le cas électrique, vanne dans le cas hydraulique).

CHAPITRE I

Etude des propriétés des systèmes linéaires par l'approche bond graph et des systèmes non linéaires par l'approche géométrie différentielle.

Chapitre I

I.1 Modèles bond graph

Le besoin d'une théorie de modélisation unifiée pour tous les domaines de la physique s'est fait ressentir depuis quelques dizaines d'années. Le développement historique de plusieurs propositions pour résoudre ce problème est donné dans [Evans, van Dixhoorn(1974)]. L'une d'elle est l'approche bond graph. Ce langage a été formulé pour la première fois par Paynter au début des années soixantes [Paynter (1961)], formalisé par Karnopp et Rosenberg [Karnopp, Rosenberg (1974)(1983)(1990)], Thoma [Thoma(1975),(1990)], Breedveld [Breedveld(1984)], et a été développé, élargi à de nouveaux domaines physiques et appliqué par un nombre croissant de personnes, comme en témoignent les bibliographies [Gebben(1979)], [Bos, Breedveld(1985)].

Le but de ce paragraphe est de montrer les procédures d'analyse de propriétés structurelles de systèmes linéaires modélisés par bond graph. Pour cela, nous allons faire un bref rappel sur les bond graphs et plus particulièrement sur la notion de causalité , notion essentielle dans la recherche et l'analyse de propriétés structurelles. Nous verrons ensuite plus particulièrement la méthode d'analyse de la propriété de commandabilité structurelle par manipulation causale [Sueur, Dauphin-Tanguy (1989) (1991)], et la méthode d'analyse du découplage [Maschke(1990)].

I.1.1 Modélisation par bond graph

La modélisation par bond graph permet une représentation graphique des systèmes physiques à travers un formalisme de type réseau [Paynter(1961)], [Kron(1963)]. Elle s'appuie pour cela sur l'hypothèse dite de réticulation, permettant de séparer le système physique en un sous ensemble de sous systèmes élémentaires.

Ces représentations graphiques de type réseau ont pour origines les graphes [Berge(1983)], les graphes linéaires pour les circuits [Trent(1954)] ou les graphes structurels des mécanismes [Crossley(1965)]. Ils ont été généralisés par la suite à tous les domaines physiques classiques des milieux à paramètres localisés [Trent(1954), Branin(1977)] et distribués [Nijen et Twilhaar(1985)].

La notion de bond graph ne constitue qu'une étape d'abstraction supplémentaire de ces graphes où l'on a unifié les différents domaines physiques [Breedveld(1984)], [Van Dixhoorn(1974)], [Oster et Perelson(1974)].

Pour plus de détails sur la modélisation bond graph, le lecteur pourra se reporter à l'annexe 1 et à la bibliographie correspondante.

I.1.2 Notion de Causalité

Toute représentation d'un système physique conduit à un ensemble d'équations le représentant. Pour les petits systèmes, ces équations peuvent facilement être organisées en un ensemble d'équation d'état ou d'une autre forme (block diagramme, équation différentielle). Pour des systèmes de plus grande dimension, la procédure d'élimination, la détection et la résolution des équations implicites (boucles algébriques) peuvent poser beaucoup de problèmes. Un problème particulièrement manifeste existe si les équations doivent être écrites dans une forme implantable sur ordinateur. Pour chaque étape du calcul il faut en effet savoir quelles variables sont des entrées et quelles variables sont des sorties. Prenons l'exemple d'une résistance, il faudra choisir entre l'une des équations caractérisant cet élément $e=\mathrm{R}f$ ou $f=e/\mathrm{R}$.

Dès les débuts de la méthode bond graph, une aide topologique simple a été développée afin de définir la structure de calcul, grâce à une mise en évidence des relations de cause à effet au sein même du système [Paynter(1961)]. Ceci est réalisé par l'adjonction d'une information supplémentaire sur les liens de puissance : la causalité.

Lorsque deux sous systèmes A et B sont couplés, tels que A transmet la puissance $P=ef$ à B, deux cas sont possibles:

A applique à B un effort e, qui réagit en envoyant à un flux f (Figure I.1 a)

A applique à B un flux f, qui répond par un effort e.(Figure I.1 b)

(a) (b)

Figure I.1 : Les deux cas d'affectations possibles de la causalité.

Le trait causal indique le sens dans lequel l'effort est connu. Le flux est donc connu dans le sens opposé au trait causal. La Figure I.2 montre donc trois manières de représenter une des deux causalités possibles (ici flux entrant - effort sortant) pour une résistance. Dans les trois cas, les deux variables de puissance e et f sont bien déterminées comme étant entrée et sortie d'un bloc opératoire caractérisant l'élément.

e=Rf

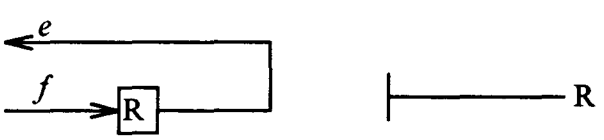


Figure I.2 :Trois représentations de la notion de causalité.

L'affectation de la causalité n'est pas arbitraire mais est soumise à des règles. Ainsi les sources d'efforts et de flux imposent des efforts et des flux qui sont toujours des données connues pour le système. Il faut donc affecter en premier la causalité aux sources avant tout autre élément.

La causalité des élément I et C est préférentiellement choisie de manière dite intégrale, c'est à dire que le choix de la causalité entraîne une opération d'intégration plutôt que de dérivation de l'équation caractérisant l'élément dynamique (I.1). Ce choix consiste donc à préférer une causalité flux entrant-effort sortant pour les éléments C, et effort entrant-flux sortant pour les éléments I Figure I.3.

Figure I.3 : Eléments dynamiques en causalité intégrale.

$$e_c = \frac{1}{C}\int f_c dt \text{ et } f_I = \frac{1}{I}\int e_I dt \qquad (I.1)$$

Cette préférence est fondée sur des considérations d'ordre numérique et physique (Pour des raisons évidentes de facilité et de robustesse, il est préférable d'intégrer que de dériver). De plus les variables d'état associées aux éléments I et C affectés d'une causalité intégrale seront indépendantes statiquement et contribueront à une équation d'état non singulière. En causalité dérivée, ces éléments entraîneront une fonction algébrique (instantanée) des variables p ou q associées en fonction des autres états ou entrées.

Remarquons que dans certains cas, il est préférable d'employer la causalité dérivée. C'est le cas du problème de simulation lorsque les conditions initales ne sont pas connues.

Pour un élément R linéaire, il n'y a pas de causalité préférentielle, il peut avoir l'une comme l'autre des formes causales. Cependant pour un élément R non linéaire (valve hydraulique par exemple) il est possible qu'une seule forme de causalité soit calculable, ce qui entraîne alors une affectation obligatoire de la causalité.

Pour ce qui est des éléments de jonction 0 et 1, l'affectation de la causalité y est systématique en suivant les deux règles suivantes : "Un seul trait causal près de la jonction 0" et "un seul lien sans trait causal près de la jonction 1".

On trouvera Figure I.4 un tableau récapitulatif des causalités possibles des éléments bond graphs.

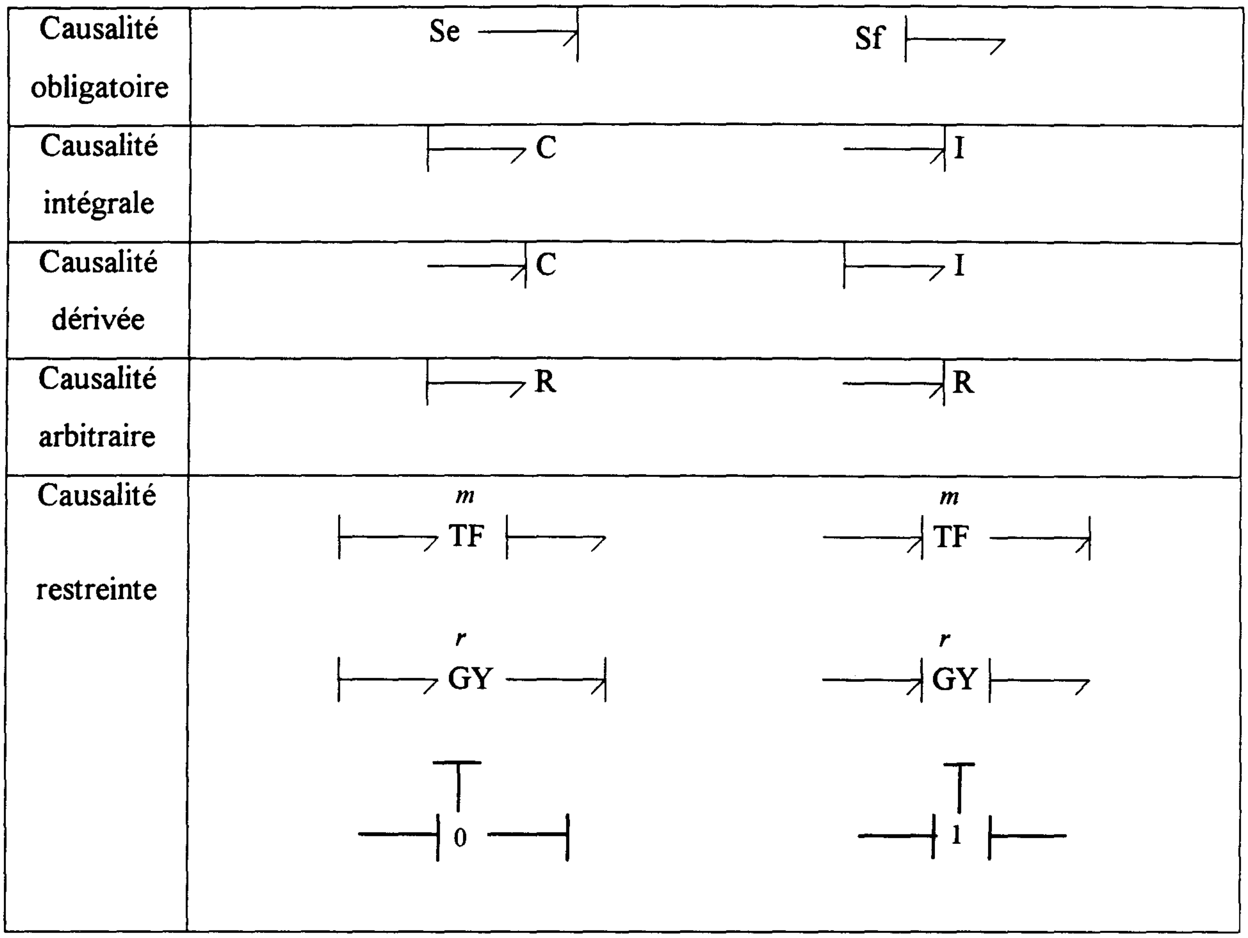


Figure I.4 : Causalités des éléments bond graph.

L'ajout de la causalité sur le bond graph permet d'organiser les calculs afin d'obtenir facilement l'équation d'état. La causalité va aussi permettre d'étudier sans calcul par un simple critère graphique des propriétés structurelles directement sur le bond graph, telles que le rang structurel de la matrice d'état et la propriété de commandabilité. Ces propriétés sont obtenues à partir du parcours du bond graph suivant des chemins privilégiés, appelés chemins causaux, indépendamment de l'orientation de la puissance dans les liens.

I.1.3 Détermination de l'équation d'état associée à un modèle bond graph

I.1.3.1 vecteur d'état

Les variables d'état sont choisies comme étant les variables d'énergie associées aux éléments d'accumulation d'énergie I et C présents dans le bond graph. On choisit ainsi comme variables d'état les variables "moments généralisés" (p) sur les éléments I et les variables "déplacements généralisés" (q) sur les éléments C. Ces variables n'apparaissent pas directement sur le bond graph mais seulement par leur dérivée. La dérivée d'un moment associé à un élément I est en effet égale à l'effort entrant dans cet élément. De même la dérivée du déplacement associé à un élément C est égale au flux entrant dans celui-ci.

Quand une affectation du type intégrale est assignée sur un élément I ou C, on sait que la variable d'état qui lui est associée est statiquement indépendante. Inversement, quand une affectation du type dérivée est assignée sur un élément I ou C, on sait que la variable d'état qui lui est associée est statiquement dépendante. L'ordre d'un système modélisé par bond graph est donc égal au nombre d'éléments dynamiques en causalité intégrale.

I.1.3.2 Détermination de l'équation d'état

Deux méthodes principales existent pour déterminer l'équation d'état à partir d'un bond graph. La première a été formulée pour la première fois dans [Rosenberg(1971)]. Elle peut se résumer par la procédure suivante :

- écrire les lois de structure associées aux jonctions en tenant compte de la causalité;

- écrire les lois constitutives des éléments;

- combiner ces différentes lois pour expliciter les dérivées des variables d'état et obtenir l'équation d'état.

La seconde méthode est basée sur un regroupement sous forme vectorielle des variables intervenant dans le bond graph [Rosenberg(1979)]. Un bond graph peut se schématiser de la façon suivante:

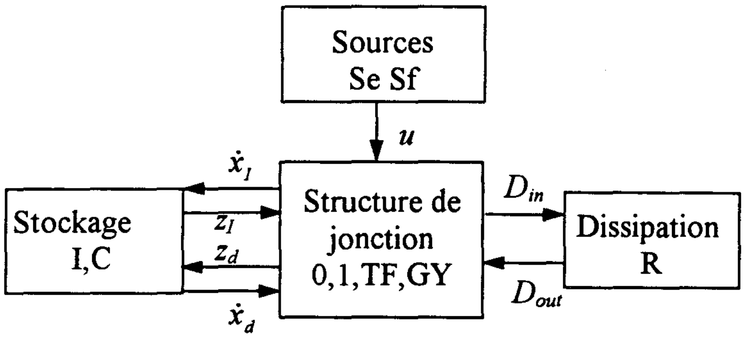


Figure I.5 : Représentation vectorielle d'un bond graph.

où D_{in} et D_{out} regroupent les efforts et les flux respectivement entrants et sortants pour les éléments R.

Le vecteur x_I (x_d) regroupe les variables d'état p et q associés aux éléments I et C en causalité intégrale (dérivée) et le vecteur z_I (z_d) est le vecteur état complémentaire associé à x_I (x_d).

Ces vecteurs satisfont les relations suivantes constitutives des éléments.

$$D_{out} = LD_{in} \text{ avec } L = \begin{bmatrix} [R] & 0 \\ 0 & \left[\frac{1}{R}\right] \end{bmatrix} \tag{I.2a}$$

$$z_I = F_I x_I \text{ avec } F_I = \begin{bmatrix} \left[\frac{1}{I_I}\right] & 0 \\ 0 & \left[\frac{1}{C_I}\right] \end{bmatrix} \tag{I.2b}$$

$$z_d = F_d x_d \text{ avec } F_d = \begin{bmatrix} \left[\frac{1}{I_d}\right] & 0 \\ 0 & \left[\frac{1}{C_d}\right] \end{bmatrix} \tag{I.2c}$$

La structure de jonction est caractérisée par la matrice système, construite à partir de la relation:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_I \\ z_d \\ D_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} & \mathbf{S}_{13} & \mathbf{S}_{14} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} & \mathbf{S}_{23} & \mathbf{S}_{24} \\ \mathbf{S}_{31} & \mathbf{S}_{32} & \mathbf{S}_{33} & \mathbf{S}_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_I \\ \dot{x}_d \\ D_{out} \\ u \end{bmatrix} \tag{I.3}$$

L'élimination des vecteurs D_{in} et D_{out} de l'équation (I.3) et la prise en compte des lois constitutives des éléments (I.2) permet alors l'obtention de l'équation d'état. On peut supposer que les éléments dynamiques en causalité dérivée ne sont pas reliés aux éléments R car sinon ils pourraient être mis en causalité intégrale donc $S_{32}=0$. Si l'on suppose de plus pour simplifier que $z_d = -\mathbf{S}_{12}^T z_I$, on a alors l'équation d'état (I.4)

$$\dot{x}_I = \mathbf{A}x_I + \mathbf{B}u \tag{I.4}$$

avec

$$\mathbf{A} = \left(\mathbf{I} + \mathbf{S}_{12}\mathbf{F}_d^{-1}\mathbf{S}_{12}^T\mathbf{F}_I\right)^{-1}\left(\mathbf{S}_{11} + \mathbf{S}_{13}\mathbf{L}(\mathbf{I} - \mathbf{S}_{32}\mathbf{L})^{-1}\mathbf{S}_{31}\right)\mathbf{F}_I$$

et $\mathbf{B} = \left(\mathbf{I} + \mathbf{S}_{12}\mathbf{F}_d^{-1}\mathbf{S}_{12}^T\mathbf{F}_I\right)^{-1}\left(\mathbf{S}_{14} + \mathbf{S}_{13}\mathbf{L}(\mathbf{I} - \mathbf{S}_{32}\mathbf{L})^{-1}\mathbf{S}_{34}\right)$

I.1.4 Notions de relation causale, de chemin causal et de signal.

La représentation vectorielle d'un modèle bond graph donne les relations entre les diverses variables du bond graph. Cependant, ces variables n'ont pas toutes un sens en terme de digraphe [Reinschke(1988)]. Dans un souci d'uniformisation, les notions suivantes sont données si possible en analogie avec les digraphes selon qu'elles font intervenir, ou pas, des variables ayant un sens en terme de digraphe. Cette différentiation permet aussi de pouvoir appliquer les résultats connus des digraphes sur les bond graphs.

Nous avons vu que la structure de jonction est caractérisée par une matrice système.

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \end{bmatrix} \tag{I.5}$$

L'existence d'un terme non nul dans une matrice S_{ij} est déterminée par l'existence d'une relation causale directe entre les éléments correspondants.

Définition I.1 *(Relation causale directe) Une relation causale directe dans une structure de jonction bond graph est une alternance de liens de puisance, de jonctions 0 et 1, et d'éléments TF et GY telle que:*

a) pour le bond graph acausal, la séquence forme une chaîne simple.

b) tous les noeuds dans la séquence ont une causalité complète et correcte.

c) deux liens de la relation causale ont en un même noeud, des affectations causales opposées.

Ainsi il existe dans le modèle de la figure I.6, une relation causale directe entre l'éléments I et la résistance R empruntant les liens 1-2-3-4.

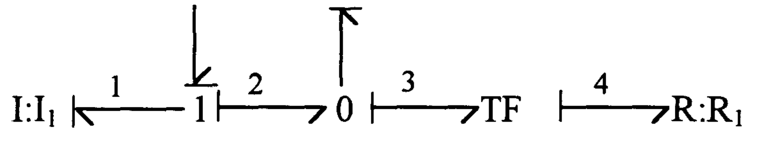


Figure I.6: Relation causale entre I et R.

Dans le quatrième chapître nous aurons besoin de la notion de lien causal direct entre un élément et un lien de puisance.

Définition I.2 *Un lien de puissance est relié directement causalement à un élément si une des variables de ce lien de puissance ne dépend que d'une des variables associées à l'élément. Cela revient à ne pouvoir atteindre l'élément que si l'on suit à partir du lien de puissance la causalité soit effort soit flux.*

Ainsi dans le bond graph de la figure I.6, le lien 2 n'est relié directement causalement qu'à l'élément R pour l'effort, la variable d'effort de ce lien ne dépendant que de l'effort sur l'élément R.

Au contraire de la représentation vectorielle, l'équation d'état (I.4) ne fait intervenir que des variables ayant un sens en langage digraphe. Un terme non nul dans la matrice A est déterminé par l'existence d'un chemin causal direct.

Définition I.3 (*chemin causal direct*) *Un chemin causal direct est défini par une relation causale directe entre deux éléments de l'ensemble E={C en causalité intégrale, I en causalité intégrale, Se, Sf, De, Df}.*

Par analogie avec la notion de chemin dans un digraphe, les C et les I doivent être en causalité intégrale pour avoir des variables d'états indépendantes associées.

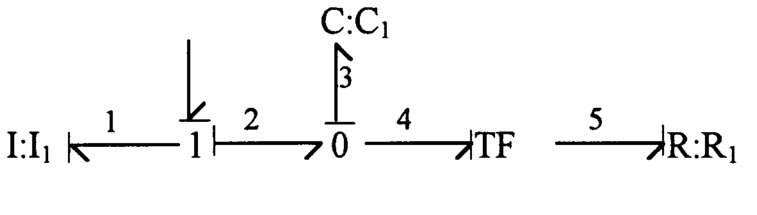


Figure I.7: Relation causale entre I et R.

Si deux éléments sont directement reliés causalement à un troisième, il y a alors une relation causale entre les deux premiers éléments. Ainsi dans la figure I.7, les éléments I et R sont reliés causalement par le chemin 1-2-3-3-4-5.

Définition I.4 *(Relation causale) Une relation causale dans une structure de jonction bond graph est une alternance de liens de puisance et de noeuds (jonctions 0 et 1, et d'éléments quelconques) telle que:*

a) pour le bond graph acausal, la séquence forme une chaîne simple.

b) tous les noeuds dans la séquence ont une causalité complète et correcte.

c) deux liens de la relation causale ont en un même noeud, des affectations causales opposées.

On introduit alors la notion d'ordre.

Définition I.5 *L'ordre d'une relation causale est le nombre d'éléments dynamiques en causalité intégrale que l'on traverse plus un.*

Dans l'exemple de la figure I.7, la relation causale entre I et C est d'ordre 1.

Pour les chemins causaux, des notions équivalentes sont introduites. On parlera alors d'ordre ou de longueur de chemin causal entre deux éléments de l'ensemble E de la définition I.2. La notion de longueur de chemin est identique à celle définie pour le digraphe équivalent. Un exemple est proposé figure I.8.

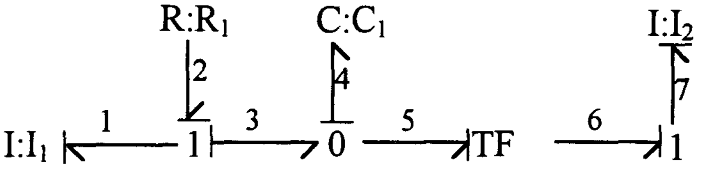


Figure I.8: Chemins causaux.

Sur cet exemple il existe un chemin causal entre I1 et I2. Ce chemin est constitué des liens 1-3-4-4-5-6-7 et sa longueur est de deux.

Dans la suite de notre étude, de nombreux éléments modulés vont apparaître. Des détecteurs d'effort, notés De, et de flux, notés Df, seront alors utilisés pour mesurer les variables intervenant dans la modulation de ces éléments.

Pour pouvoir tester de façon simple la propriété d'atteignabilité (au sens graphique du terme) des états par la commande, une modification du dessin du bond graph est nécessaire. Des liens sont ajoutés entre les détecteurs et les éléments modulés. Ces liens ne correspondant à aucun transfert de puissance sont des liens d'information et sont représentés par une flèche. Si la variable que l'on veut mesurer est proportionnelle à la variable d'état, ou à son intégrale, une jonction 0 (1) est ajoutée "devant" chaque élément C (respectivement I). Les liens d'informations modulant les sources partent alors d'un détecteur mesurant l'effort (respectivement le flux) sur ces nouvelles jonctions. Un signe d'intégration est ajouté comme poids à ce lien si la variable désirée est l'intégrale de la variable d'état. Si la variable que l'on veut mesurer est proportionnelle à la dérivée d'une variable d'état, une jonction 1 (0) est ajoutée "devant" chaque élément C (respectivement I). Les liens d'information modulant les sources partent alors d'un détecteur mesurant le flux (respectivement l'effort) sur ces nouvelles jonctions.

Considérons le bond graph de la figure I.9 a). Si la variable modulant la source d'effort est la variable d'état p_1 associée à l'élément inertiel I1, ce bond graph est modifié comme présenté figure I.9 b).

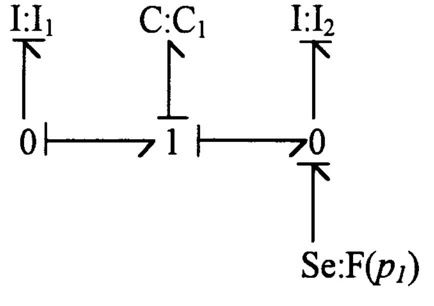


figure I.9 a): Bond graph avec source modulée.

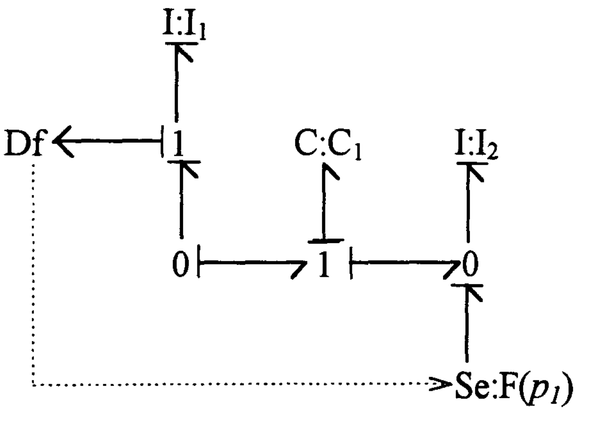


Figure I.9 b): Transformation du bond graph de la figure I.9 a) pour l'étude de l'atteignabilité.

Remarque : La variable mesurée est en réalité la variable d'état complémentaire. Le coefficient de proportionalité entre celle-ci et la variable d'état peut être mis dans la fonction F(.). On peut donc noter indifféremment F(p_1) ou F(f_1). En mécanique cela peut être interprété comme une force modulée par une quantité de mouvement ou une vitesse.

Si la variable qui module la source d'effort est la dérivée de la variable d'état p_1, le bond graph est alors modifié comme suit.

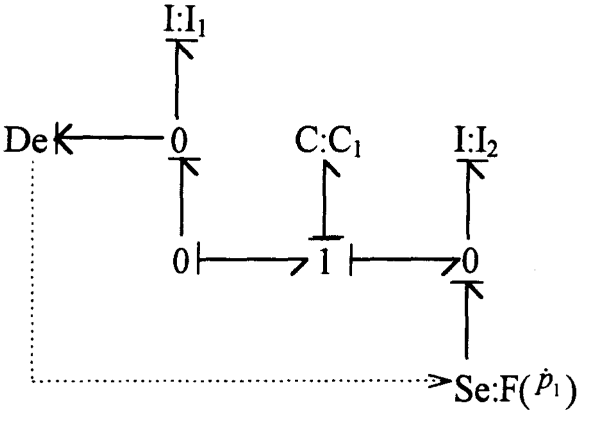


Figure I.9c): Transformation du bond graph de la figure I.9a) pour l'étude de l'atteignabilité.

Définition I.7 *Il existe une relation causale généralisée entre l'élément A et l'élément B si l'on peut aller de A vers B en suivant la causalité et les liens d'information. La relation causale sera dit "propre" si elle ne contient que des liens de puissance. La relation causale sera dite "impropre" (ou dégénérée) si elle contient au moins un lien d'information.*

Définition I.8 *Un chemin causal généralisé est défini par une relation causale entre deux éléments de l'ensemble E={C en causalité intégrale, I en causalité intégrale, Se, Sf, De, Df}. Un chemin causal propre ne contient que des liens de puissance.*

Ainsi dans le bond graph de la figure I.8b), il existe un chemin causal direct propre par exemple entre I_1 et C_1. En se servant du lien d'information et en passant donc par la source modulée, on obtient un chemin causal direct impropre entre I_1 et I_2, ou entre I_1 et lui même.

I.1.5 Propriétés structurelles d'un système modélisé par bond graph

I.1.5.1 Propriétés structurelles

L'étude des propriétés structurelles du modèle d'un système est l'une des approches les plus efficaces pour en avoir une meilleure compréhension et pour la validation d'un modèle.

Le problème est de savoir si des propriétés comme par exemple la commandabilité, l'observabilité ou encore la stabilité, sont ou ne sont pas des propriétés génériques par rapport aux paramètres d'un système, ou autrement dit si elles sont toujours vraies sauf pour des valeurs "exceptionnelles" des paramètres. Cette approche a bien un rapport avec la réalité physique du problème. Les valeurs des paramètres du système (valeur d'une résistance, d'une capacité...) ne sont jamais connues exactement, sauf pour les valeurs nulles qui expriment l'absence d'interaction.

Le concept de commandabilité structurelle a été défini formellement par Lin [Lin(1974)] pour les systèmes linéaires invariants avec une seule entrée. Une approche graphique a été utilisée et a permis de démontrer que la commandabilité demande un niveau minimal adéquat de structure. D'un autre côté, un système peut être non commandable bien qu'ayant ce niveau adéquat de structure si certaines conditions numériques spécifiques existent dans les équations. [Shields and Pearson(1976)] et [Glover and Silverman(1976)] présentent une reformulation de ces résultats en termes d'algèbre de matrices et étendent les résultats aux systèmes invariants à plusieurs entrées.

L'étude des propriétés structurelles directement à partir du modèle bond graph a été développée dans le cas des systèmes linéaires dans [Sueur(1990)] et [Sueur, Dauphin-Tanguy(1991)]. Cette étude porte plus particulièrement sur l'étude structurelle du rang de la matrice d'état et des propriétés de commandabilité et d'observabilité.

I.1.5.2 Définition de rang structurel

Pour l'étude des propriétés structurelles des matrices, plusieurs terminologies ont été utilisées afin de désigner la notion de rang (rang générique, rang terme...). Ces notions reposent sur l'hypothèse d'indépendance des différents termes de la matrice et ne conduisent qu'à une majoration du rang réel.

La structure de jonction d'un modèle bond graph contient les informations sur le type des éléments constituant le système et sur la façon dont ils sont interconnectés, quelle que soit la valeur numérique des paramètres. L'utilisation de cet outil pour caractériser des propriétés structurelles, et en particulier des notions de rang, permet alors d'obtenir des résultats pratiquement toujours égaux aux résultats réels. Ces rangs calculés à partir du modèle bond graph, sont notés dans la suite bg-rang.

I.1.5.3 Etude sur le bond graph

.a Etude du rang de la matrice d'état

La notion de matrice d'état n'a apparemment de sens que dans le cas linéaire. Cependant, les modèles d'état issus de bond graphs à éléments linéaires et à structure de jonction non linéaire sont de la forme $\dot{x} = \mathbf{A}(x,.)x + \mathbf{B}(.)u$. La notion de matrice d'état garde donc bien un sens dans ce cas et la détermination de son rang reste intéressante.

Nous avons déjà rappelé que l'ordre minimal d'un modèle, et donc la dimension de la matrice d'état est égale au nombre n d'éléments I et C qui admettent une causalité intégrale quand on affecte une causalité intégrale au bond graph. Nous pouvons alors énoncer le théorème démontré dans [Sueur et Dauphin-Tanguy(1989)] donnant le rang de la matrice d'état.

Théorème I.1 *Si q représente le nombre de I et C en causalité intégrale quand une causalité dérivée est appliquée au bond graph, alors le bg-rang de la matrice d'état associée à un modèle bond graph est égale à n-q.*

$$bg\text{-}rang(\mathbf{A}) = n - q.$$

q le nombre d'élément gardant une causalité intégrale est en fait égal au nombre de valeurs propres nulles de la matrice **A** (dégénérescence du rang de la matrice).

.b Commandabilité structurelle

Nous ne rappellerons ici que l'énoncé du théorème permettant l'étude de la propriété de commandabilité en état des systèmes linéaires. Pour la commandabilité en sortie on pourra se rapporter par exemple à [Rahmani(1993)].

Il existe plusieurs définitions concernant la commandabilité. Ces définitions aboutissent à des critères différents pour l'analyse de cette propriété. Le critère le plus connu en linéaire est celui de Kalman[Kalman(1963)], ou condition de rang.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mathbf{A}x + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{C}x \end{aligned} \tag{I.6}$$

Théorème I.2 *(critère du rang pour la commandabilité) Le système linéaire (I.6) est commandable si et seulement si le rang de la matrice* $[\mathbf{B}\ \mathbf{AB}\ \ldots \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$ *est égal à la dimension n de l'espace d'état.*

Ce théorème nous fournit un critère valable formellement. Dans le cadre d'une étude graphique de la propriété de commandabilité structurelle [Lin(1974)], une version simplifiée de ce critère existe. Elle a été formulée pour la première fois dans [Shields and Pierson(1976)]. L'adaptation de ce critère au cas particulier des bond graphs est donné par le théorème suivant

Théorème I.3 *Un système modélisé par bond graph est structurellement commandable si et seulement si:*

1) Il existe un chemin causal entre une source et chaque élément dynamique en causalité intégrale quand on applique une causalité préférentielle intégrale.

2) bg-rang(A|B)=n.

où (**A**|**B**) représente la matrice **A** concaténée avec **B**.

Nous avons vu précédemment comment déterminer le rang structurel de la matrice **A**. Une extension de cette procédure permet facilement de déterminer de manière purement graphique le rang structurel de la matrice (**A**|**B**). On trouvera dans [Sueur, Dauphin-Tanguy(1991)] une version générale de ce théorème.

Théorème I.4 *[Sueur,Dauphin-Tanguy(1991)] Un système linéaire modélisé par bond graph est structurellement commandable si et seulement si les conditions suivantes sont réalisées:*

1) Il existe un chemin causal liant une source à chaque élément dynamique I et C en causalité intégrale quand on met le bond graph en causalité intégrale.

2) Tous les éléments I et C admettent une causalité dérivée quand on met le bond graph en causalité dérivée et qu'on dualise si nécessaire les sources afin de mettre les éléments I et C restant en causalité intégrale, en causalité dérivée.

Remarque : Ce résultat n'est vrai que pour les modèles bond graphs ne contenant aucun lien signal (lien d'information, source commandée...).

Exemple I.1 Considérons le bond graph donné Figure I.10, où une causalité intégrale a été imposée.

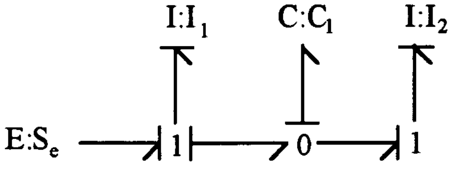


Figure I.10 : Bond graph en causalité intégrale.

La question est de savoir si le système est commandable par l'entrée E, et ce pour presque tous les choix possibles des valeurs I_1, I_2 et C_1.

La première condition d'existence d'un chemin causal direct ou indirect par l'intermédiaire d'un autre élément entre chaque I et C, et la source est facilement vérifiée.

Pour la seconde condition, il faut mettre le bond graph en causalité dérivée (Figure I.11 a et b). On voit qu'un des éléments I doit rester en causalité intégrale.

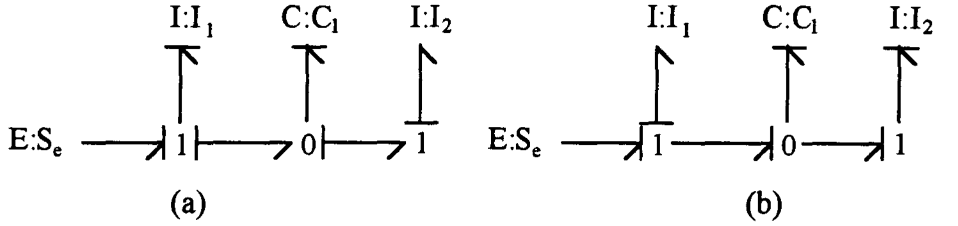


Figure I.11 : bond graphs en causalité dérivée sans dualisation de la source.

La dualisation de la source permet de faire disparaître la causalité intégrale restante (Figure I.12).

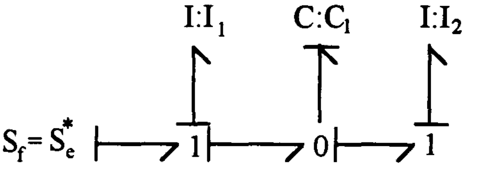


Figure I.12 : bond graph en causalité dérivée avec dualisation de la source.

Ce système est donc structurellement commandable par l'entrée E.

I.1.5.4 Etude par bond graph du problème de découplage-linéarisation

Très peu de résultats existent sur l'étude des propriétés structurelles des modèles bond graphs non linéaires. Le principal concerne la commande de découplage linéarisation des systèmes analytiques linéaires en entrée. Cette commande a pour objectif de linéariser et de découpler le comportement entrée/sortie du système. L'existence de telles lois a été étudiée par de nombreuses approches [Isidori, Krener, Gori-Giorgi et Monaco (1981)], [Claude (1983)], [Fliess(1986)]. L'approche par bond graph de ce problème dans le cadre du problème de Morgan, (retour d'état statique pour découpler et linéariser un système dont le nombre de sortie est égale au nombre d'entrée) a été réalisée pour les modèles bond graphs sans éléments R dans [Maschke(1990)]. Cette méthode s'appuie sur un graphe intermédiaire, le graphe des chemins causaux. Ce graphe représente les connexions causales entre éléments de stockage d'énergie, éléments sources et sorties. Il permet alors de déduire les indices relatifs des sorties, la matrice de découplage et fournit le rang structurel de cette matrice.

I.1.6 Conclusion

L'outil bond graph est une très bonne manière de modéliser les systèmes physiques. Il montre en effet la structure physique ainsi que la structure de calcul d'un système. Il donne de plus facilement accès au modèle d'état ou à la fonction de transfert [Karnopp et Rosenberg(1990)]. Mais cet outil offre en plus dans le cas linéaire, des techniques d'analyse des propriétés structurelles des systèmes linéaires. Ces méthodes d'analyse reposent essentiellement sur des manipulations causales et permettent de déterminer entre autres le rang de la matrice d'état ou la commandabilité d'un système. Dans le cas des systèmes non linéaires, l'analyse du rang structurel de la matrice d'état reste valable quand la non linéarité est localisée au niveau de la structure du système. On peut aussi étudier le problème du découplage des systèmes non linéaires modélisés par bond graph dans le cadre du problème de Morgan.

I.2 Etude de la commandabilité des systèmes non linéaires par la géométrie différentielle

I.2.1 Introduction

L'idée d'utiliser les crochets de Lie pour l'étude de la commandabilité remonte jusqu'à [Chow(1939)]. La théorie de la géométrie différentielle a été développée par la suite pour la théorie de la commande des systèmes non linéaires par de nombreux auteurs, [Hermann(1963)], [Haynes, Hermes(1970)], [Sussmann, Jurdjevic(1972)], [Hermann, Krener(1977)], [Lobry(1979)]... Un résumé des principaux résultats concernant l'étude des systèmes non linéaires par une approche par géométrie différentielle a été réalisé dans les ouvrages [Isidori(1985)] et [Nijmeijer, Van der Schaft(1990)]. Dans ce qui suit, nous ne rappellerons que les hypothèses et les résultats, indispensables pour l'étude de la propriété de commandabilité.

I.2.2 Définitions et théorèmes principaux

Dans cette partie, seuls les outils strictement nécessaires à la présentation des résultats sur la commandabilité sont présentés.

Les systèmes non linéaires étudiés seront définis par une équation d'état (I.7) sous la forme affine en la commande.

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x) u_i \tag{I.7}$$

où $x = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$ est le vecteur d'état de dimension n. L'état est défini dans un espace qui n'est pas égal à l'espace Euclidien R^n, mais dans un sous ensemble courbe de dimension n de R^s $s \geq n$, appelé variété et que l'on notera Q.

u_i est la i-ème variable d'entrée et $f(x)$, $g_1(x)$,..., $g_m(x)$ sont des fonctions vectorielles non linéaires de l'état, appelées aussi champs de vecteurs.

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} \; i = 1, \ldots, m, \qquad g_i(x) = \begin{bmatrix} g_{i1}(x) \\ \vdots \\ g_{in}(x) \end{bmatrix} \tag{I.8}$$

Un champ de vecteur permet de définir une dérivée "directionnelle".

Définition I.9 *Soit $\lambda(x)$ une fonction réelle définie sur Q et $f(x)$ un champ de vecteurs sur Q, on appelle dérivée de Lie de λ suivant f la quantité:*

$$L_f \lambda(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\lambda[f^h(x)] - \lambda(x)}{h} \tag{I.9}$$

en notant $f^t(x)$ la solution de l'équation différentielle $\dot{x} = f(x)$ au temps t ayant pour condition initiale à t=0 le point x=0.

En se plaçant dans une carte locale, au voisinage de x et en prenant $f(x)=(f_1(x),\ldots f_n(x))^T$, on obtient en supposant $\lambda(x)$ de classe C^1 l'équation (I.9).

$$L_f \lambda(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i}(x) f_i(x) \tag{I.10}$$

Remarque : Cet opérateur apparaît naturellement dans l'étude des systèmes non linéaires. Etant donné un système différentiel non linéaire décrit par l'équation (I.10), la dérivée de la variable de sortie s'exprime par la relation (I.11).

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ y(t) = \lambda(x) \end{cases} \tag{I.11}$$

$$\dot{y}(t) = L_f \lambda(x(t)) \tag{I.12}$$

On va introduire maintenant le deuxième opérateur essentiel dans le cadre de la géométrie différentielle: les crochets de Lie.

Définition I.10 (crochets de Lie) *Soient les deux champs de vecteurs f et g définis sur une variété Q. Il existe sur Q un champs de vecteur [f,g], et un seul, tel que*

$$L_{[f,g]} = L_f \circ L_g - L_g \circ L_f \tag{I.13}$$

En se plaçant dans le cas où $Q=R^n$, on peut réécrire la formule (I.12) sous la forme :

$$[f,g](x) = Dg(x)f(x) - Df(x)g(x), \tag{I.14}$$

où Dg et Df désignent les matrices Jacobiennes associées respectivement aux champs de vecteurs g et f.

Exemple I.2 : Prenons le modèle simplifié de la conduite d'une voiture où x_1 et x_2 sont les coordonnées cartésiennes de la voiture, x_3 l'angle de rotation et u la commande en rotation.

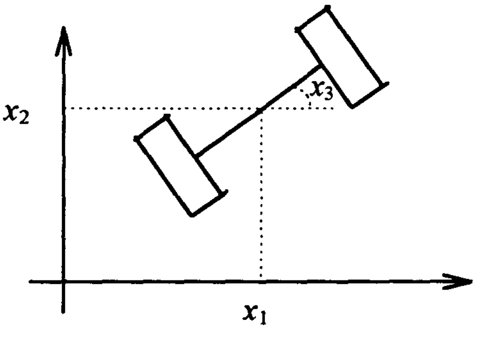


Figure I.13 : Modèle simplifié d'une voiture.

Les équations associées à ce système sont :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sin(x_3) \\ \dot{x}_2 &= \cos(x_3) \\ \dot{x}_3 &= u \end{aligned} \tag{I.15}$$

Suivant la notation de l'équation (I.6), on a alors

$$f(x) = \begin{bmatrix} \sin(x_3) \\ \cos(x_3) \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{I.16}$$

le calcul du crochet de Lie entre ces deux champ de vecteurs donne:

$$\left[\begin{bmatrix} \sin(x_3) \\ \cos(x_3) \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right] = 0 \times \begin{bmatrix} \sin(x_3) \\ \cos(x_3) \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cos(x_3) \\ 0 & 0 & -\sin(x_3) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos(x_3) \\ \sin(x_3) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{I.17}$$

Une interprétation physique simple peut être donnée de l'opérateur crochet de Lie. Soit f et g deux champs de vecteurs et p un point de l'état. Notons $f^t(p)$ le point atteint si le système suit le champs de vecteur f pendant un temps t depuis p. Si $[f,g](p) \neq 0$ alors il existe deux réels t et s tels que $g^s(f^t(p)) \neq f^t(g^s(p))$ et les crochets de Lie entre f et g est une mesure de cette différence. Ils représentent donc la direction entre le point atteint si le système suit le champs de vecteur f pendant un temps t puis le champs de vecteur g pendant un temps s, et le point atteint si le système suit d'abord le champs de vecteur g pendant un temps s puis le champs de vecteur f pendant un temps t.

Avant d'aborder le problème de l'étude de la commandabilité, nous avons encore besoin d'introduire les notions de distributions et d'algèbre de Lie.

Définition I.11 (Distribution) *Une distribution de champs de vecteurs Δ est une application qui à tout point x d'une variété Q fait correspondre le sous espace vectoriel $\Delta(x)$ de l'espace tangent à Q au point x.*

$$\Delta(x) = vect\{f_1(x),\cdots,f_d(x)\} \tag{I.18}$$

$vect\{f_1,..f_n\}$ représente l'ensemble des combinaisons linéaires des fonctions f_i.

Définition I.12 *Une distribution est involutive si*

$$\forall \tau_1,\tau_2 \in \Delta,\quad [\tau_1,\tau_2] \in \Delta \tag{I.19}$$

Définition I.13 *Une algèbre de Lie est un R espace vectoriel muni de l'opérateur crochet de Lie.*

I.2.3 Etude de l'accessibilité

Après ce rappel de certaines notions de géométrie différentielle, nous allons étudier plus particulièrement la méthode d'analyse de la propriété de commandabilité des systèmes non linéaires.

Nous nous restreindrons à ce qui peut apparaître comme une extension de la condition de rang de Kalman pour la commandabilité des systèmes linéaires. En effet, ce n'est pas tant la notion de commandabilité qui est intéressante mais plus la propriété structurelle qu'exprime cette condition de rang. C'est cette condition qui intervient dans l'étude d'autres propriétés des systèmes non linéaires comme pour l'observabilité ou le découplage.

Cette condition plus faible de commandabilité est appelée forte accessibilité locale. Elle est définie à partir de la notion d'atteignabilité.

Définition I.14 *(Atteignabilité)*

(i) Soit $x_0 \in \Re^n$, l'ensemble des $y \in \Re^n$ tels qu'il existe pour $t > 0$, des commandes C^∞ $u_i(.)$ et une trajectoire $x(.)$ définie par (I.7) avec $x(0)=x_0$ et $x(t)=y$, est appelé l'ensemble atteignable depuis x_0 au temps t, noté $\mathcal{A}(x_0,t)$.

(ii) l'ensemble $\mathcal{A}(x_0) = \bigcup_{t\geq 0} \mathcal{A}(x_0,t)$ est appelé l'ensemble atteignable depuis x_0.

Définition I.15 *(forte Accessibilité)*

(i) Le système (I.7) a la propriété de forte accessibilité sur $\Re^n$ en x_0, si pour tout $t>0$ $\mathcal{A}(x_0,t)$ a un intérieur non vide.

(ii) Si cette propriété est vraie pour tout x_0, alors le système a la propriété de forte accessibilité sur $\Re^n$.

Définition I.16 *Si dans les définitions (I.12) et (I.13), $x(.)$ reste dans un voisinage de x_0, les propriétés seront alors en plus dites locales.*

Nous avons vu que le crochet de Lie entre deux champs de vecteur donnait un autre champ de vecteurs dans la "direction" duquel le système pouvait se déplacer. La répétition de ce raisonnement en prenant en compte le crochet de Lie comme appartenant aux champs de vecteur initiaux des crochets de Lie de plus en plus "complexes" peuvent intervenir. Ceci a conduit à l'introduction de l'algèbre suivante.

Définition I.17 *(Algèbre de forte accessibilité locale)* **:** *Considérons le système (I.7). C_0 est défini comme étant la plus petit sous algèbre contenant $g_1(x)...g_m(x)$ et vérifiant* $[f, X] \in C_0$, *pour tout* $X \in C_0$. *Autrement dit, C_0 est la plus petite sous algèbre contenant* $g_1(x)...g_m(x)$ *et qui est invariante sous l'action des champs de vecteurs $f(x), g_1(x), ..., g_m(x)$.*

Nous pouvons alors définir distribution de forte accessibilité locale engendrée par cette algèbre.

Définition I.18*(Distribution de forte accessibilité locale) La distribution involutive* $\Delta C_0 = vect(X(x) / X$ *champ de vecteurs dans C_0), est alors définie. Sa dimension est égale au rang de la matrice $(X_1(x)|...|X_k(x)|...)$ avec $X_k(x) \in C_0$,* $k \in [1; +\infty[$.

Définition I.19 *C_0 et ΔC_0 sont appelés respectivement algèbre de forte accessibilité, et distribution de forte accessibilité locale.*

La construction de la sous algèbre C_0 est réalisée en suivant la procédure suivante.

Procédure pour construire la sous algèbre C_0 : Considérons un système décrit par l'équation (I.7). On définit une distribution Δ_0.

$$\Delta_0 = vect(g_1(x) \cdots g_m(x)) \tag{I.20}$$

On définit alors une nouvelle distribution Δ_k depuis Δ_{k-1} par la formule suivante:

$$\Delta_k = \Delta_{k-1} + [f, \Delta_{k-1}] + \sum_{i=1}^{m} [g_i, \Delta_{k-1}] \tag{I.21}$$

et quand $\Delta_{k^*} = \Delta_{k^*+1}$ alors $\Delta C_0 = \Delta_{k^*}$.

Remarque Notons que la distribution Δ_k dans l'équation (I.21) est calculée à l'aide de Δ_{k-1}. Si Δ_{k-1} est engendrée par un ensemble de champs de vecteurs $\theta_1,...,\theta_d$, et X est un champ de vecteurs, alors une expression simplifiée est

$$\Delta_{k-1} + [X, \Delta_{k-1}] = \mathrm{vect}\{\theta_1, \ldots, \theta_m, [X, \theta_1], \ldots, [X, \theta_m]\} \tag{I.22}$$

par conséquent

$$\Delta_k = \mathrm{vect}\{\theta_s, [f(x), \theta_s], [g_i(x), \theta_s] : 1 \le s \le d, 1 \le i \le m\} \tag{I.23}$$

Une autre façon de calculer l'algèbre de forte accessibilité locale C_0 est d'utiliser la proposition suivante.

Proposition I.1 *Chaque élément de* C_0 *est combinaison linéaire des crochets de Lie itérés de la forme*

$$[X_k, [X_{k-1}, [\cdots[X_1, g_j]\cdots]]] \quad j \in [1;m], k \in [0;+\infty[\tag{I.24}$$

où X_i, $i \in \{1,\ldots,k\}$ *est dans l'ensemble* $\{f(x), g_1(x) \ldots g_m(x)\}$.

Nous pouvons maintenant donner le principal théorème concernant l'étude de la notion de forte accessibilité locale.

Théorème I.5 : *Considérons un système non linéaire décrit par (I.7). Si* $\dim(\Delta C_0(x_0)) = n$ *alors le système est localement fortement accessible depuis* x_0. *Si cette égalité est vraie quelque soit x, alors le système est localement fortement accessible.*

Remarque : Dans le cas linéaire, on vérifie que cette condition correspond à la condition de rang de Kalman.

Exemple I.3 [Nijmeijer(1990)]: Considérons un vaisseau spatial dont la commande consiste en trois propulseurs sur les trois axes principaux d'inertie. Nous ne considérons que les équations décrivant la dynamique des vitesses angulaires ω_1, ω_2, ω_3.

$$\begin{aligned}
a_1\dot{\omega}_1 &= (a_2 - a_3)\omega_2\omega_3 + \sum_{j=1}^{3} b_j^1 u_j \\
a_2\dot{\omega}_2 &= (a_3 - a_1)\omega_1\omega_3 + \sum_{j=1}^{3} b_j^2 u_j \\
a_3\dot{\omega}_3 &= (a_1 - a_2)\omega_1\omega_2 + \sum_{j=1}^{3} b_j^3 u_j
\end{aligned} \tag{I.25}$$

Notons de plus $b_i = \left(b_i^1\ b_i^2\ b_i^3\right)^T$.

Il est clair que si b_1, b_2 et b_3 sont indépendants, le système est commandable. Supposons maintenant que deux des trois propulseurs tombent en panne. Que peut-on dire de la commandabilité du système?

Sans perte de généralité on peut supposer que seul le premier propulseur reste en état de marche, et supposons aussi pour simplifier que $a_1=a_2$. L'équation du système devient alors

$$\begin{aligned}
\dot{\omega}_1 &= A\omega_2\omega_3 + \alpha u \\
\dot{\omega}_2 &= -A\omega_1\omega_3 + \beta u \\
\dot{\omega}_3 &= \chi u
\end{aligned} \tag{I.26}$$

avec $A = (a_1 - a_3)a_1^{-1}$

Le calcul de l'algèbre C_0 pour $f=(A\omega_2\omega_3, -A\omega_1\omega_3, 0)^T$ et $g=(\alpha, \beta, \chi)^T$ donne en particulier

$$[f,g] = -A\begin{bmatrix} \beta\omega_3 + \chi\omega_2 \\ -\alpha\omega_3 - \chi\omega_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{I.27}$$

$$[g,[f,g]] = -2A\chi\begin{bmatrix} \beta \\ -\alpha \\ 0 \end{bmatrix} \tag{I.28}$$

$$[[g,[f,g]],[f,g]] = -2A^2\chi^2 \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{I.29}$$

Ces trois champs de vecteurs engendreront un espace de dimension 3 si et seulement si

$$\det \begin{bmatrix} \alpha & A\chi\beta & A^2\chi^2\alpha \\ \beta & -A\chi\alpha & A^2\chi^2\beta \\ \chi & 0 & 0 \end{bmatrix} = A^3\chi^4\left(\alpha^2+\beta^2\right) \neq 0. \tag{I.30}$$

Par conséquent si $A \neq 0$ et $\chi \neq 0$, et si α et β ne sont pas nuls en même temps alors le système est localement fortement accessible. Ces conditions sont de manière évidentes aussi nécessaires.

Remarque : La propriété de forte accessibilité locale est plus faible que la propriété de commandabilité, elle n'en est seulement qu'une condition nécessaire.

En effet, considérons le système sur R^2 définie par l'équation (I.30).

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases} \tag{I.31}$$

L'algèbre de forte accessibilité locale C_0 est engendrée par les champs de vecteurs $f(x) = \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et leur crochets de Lie $[f,g](x) = \begin{pmatrix} -2x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $[[f,g],g](x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$...

Donc $\dim(\Delta C_0(x)) = \dim(g(x) \| [[\mathrm{f},\mathrm{g}],\mathrm{g}](x)) = 2$ partout, et par conséquent le système est localement fortement accessible. Cependant puisque $x_2^2 \geq 0$, la coordonnée x_1 est toujours croissante. Le système ne peut donc pas être commandable.

I.2.4 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à des rappels et à l'introduction de notations et de définitions.

Dans un premier temps nous avons rappelé les résulats permettant l'étude des propriétés structurelles des systèmes linéaires par une simple analyse causale du modèle du modèle bond graph. Nous avons aussi introduit des notations concernant relations et chemins causaux ainsi que les liens d'information.

La seconde partie du chapitre a été consacré au rappel de certaines notions de géométrie différentielle permettant l'étude de la commandabilité des systèmes non linéaires.

CHAPITRE II

LINEARISATION

DES SYSTEMES NON LINEAIRES

MODELISES PAR BOND GRAPH

CHAPITRE II

II.1 Introduction

Bien qu'il n'existe aucun système physique au comportement totalement linéaire, les modèles linéarisés de systèmes sont très souvent utilisés en pratique. En effet, devant la difficulté de l'étude du cas non linéaire, la démarche naturelle pour l'ingénieur est de linéariser le système, ce qui rend possible l'utilisation de tout l'arsenal de la théorie du contrôle des systèmes linéaires. Cette approche ne peut cependant pas convenir directement à l'étude des systèmes fortement non linéaires. C'est cette démarche que nous appliquons dans ce chapitre. Elle conduit à l'obtention d'une méthode de linéarisation des bond graphs. L'étude des bond graphs linéaires alors obtenus fera l'étude du chapitre suivant.

Il existe plusieurs méthodes de linéarisation au voisinage d'un point de fonctionnement, on peut citer principalement la méthode de linéarisation par la méthode des moindres carrés, la méthode de linéarisation au premier harmonique et la linéarisation Taylorienne. C'est cette dernière approche que nous utiliserons dans la suite de ce mémoire.

Considérons une application continûment différentiable f de R^p dans R^n, la formule de Taylor est représentée par l'équation (II.1):

$$f(a) = f(b) + \mathrm{D}f(b)(a-b) + \mathrm{o}\|a-b\| \qquad \text{(II.1)}$$

$\mathrm{D}f(b)$ désigne la matrice Jacobienne de f au point b.

Considérons une variable x. Pour la linéarisation, cette variable est décomposée en la somme d'une partie constante, dite nominale, et d'une partie variable représentant des petites variations autour d'un point de fonctionnement. La notation proposée est indiquée dans l'équation (II.2).

$$x = \bar{x} + x' \qquad \text{(II.2)}$$

où la barre indique la partie constante et le prime la partie variable. Cette notation sera utilisée par la suite pour tous les types de variables, de fonctions (effort, flux, moment, déplacement...). Cette notation peut aussi s'employer si x est un vecteur. Dans ce cas, chacune de ses composantes doit être décomposée.

L'équation (II.3) est une représentation de l'équation (II.1) en considérant les notations précédentes.

$$f(\bar{x} + x') = \bar{f} + f' = f(\bar{x}) + \mathrm{D}f(\bar{x})x' + \mathrm{o}\|x'\| \qquad \text{(II.3)}$$

La linéarisation directe à partir d'un modèle bond graph non linéaire a été traitée en partie dans [Karnopp(1977)]. Dans ce chapitre, nous allons compléter cette approche qui permet de déduire un bond graph linéarisé d'un bond graph non linéaire. La démarche proposée est telle que l'équation d'état du bond graph linéarisé est aussi celle obtenue en linéarisant l'équation d'état associée au bond graph non linéaire.

Pour cela une étude de la linéarisation des différents types d'éléments pouvant intervenir dans un bond graph est tout d'abord réalisée. L'étude de la linéarisation d'un bond graph dans son ensemble est ensuite exposée. Cette procédure est enfin appliquée à la linéarisation d'un système mécanique relativement simple, le double pendule inversé .

II.2 Linéarisation des éléments

[Karnopp (1977)] décrit la linéarisation des différents composants des bond graphs sans aborder l'extension à la linéarisation du bond graph dans son ensemble. Dans ce paragraphe, nous allons donc reprendre et approfondir cette approche. Pour cela nous allons étudier séparément la linéarisation de chaque élément pouvant intervenir dans un bond graph, soit les éléments R, C, I, les éléments de jonction et les transformateurs et gyrateurs modulés. On peut distinguer deux classes de non linéarités : des non linéarités liées aux lois caractéristiques des éléments (comme dans le cas d'une thermistance), et des non linéarités résultant de la modulation des paramètres caractéristiques des éléments par une autre variable (comme dans le cas d'un transformateur électrique pour lequel la valeur de la position du curseur change le rapport de transformation entre le primaire et le secondaire du transformateur). Après avoir rappelé la linéarisation de chaque élément intervenant dans un bond graph, nous verrons comment linéariser un modèle bond graph complet.

Nous allons d'abord rappeler la méthode de linéarisation des éléments introduisant une non linéarité à cause d'une caractéristique non linéaire, puis celle des éléments modulés [Karnopp (1977)].

II.2.1 Eléments de jonction et éléments R, C et I

II.2.1.1 Elément de jonction

Même dans les systèmes non linéaires, certaines lois restent linéaires. Ainsi, les lois de Kirchoff (la loi des noeuds ou la loi des mailles en électricité), ou la loi de composition des vitesses en mécanique, sont des lois linéaires quelle que soit la nature des éléments.

Ces lois sont caractérisées sur le bond graph par les jonctions 1 et 0. Ces éléments resteront donc inchangés par une linéarisation.

II.2.1.2 Eléments R, C et I

Les éléments R dissipent l'énergie et sont définis par une relation statique liant les variables d'effort et de flux. La représentation bond graph d'une résistance 1-port ainsi qu'un schéma de sa caractéristique flux-effort sont présentés sur la figure II.1.

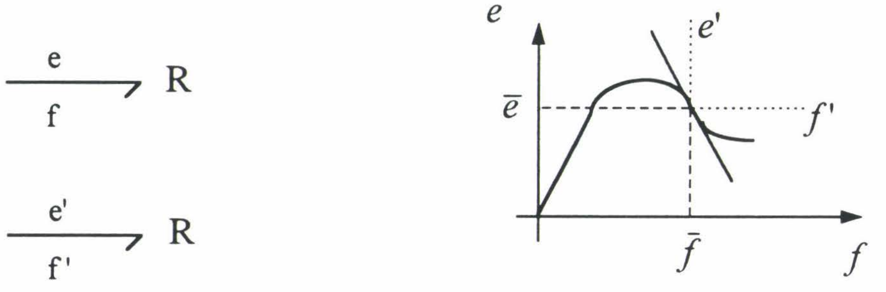


figure II.1 : Elément R dans les cas non linéaire et linéarisé.

La linéarisation autour de $(\bar{e}, \bar{f})$ peut entraîner une résistance linéarisée ayant une valeur négative. Autrement dit, un élément R linéarisé peut dissiper ou fournir de la puissance au reste du système, le bilan de puissance global restant cohérent grâce à des sources modulées apparaissant dans le bond graph linéarisé. Ceci n'est évidemment pas juste si l'on admet que seul un effet résistif existe. Il faudrait donc modéliser le phénomène d'une manière plus rigoureuse en introduisant d'autres éléments. Néanmoins, cette représentation est en générale suffisamment précise pour l'étude du phénomène envisagé.

De la même façon, on trouvera que la linéarisation autour d'un point $(\bar{f},\bar{p})$ ou $(\bar{e},\bar{q})$ pour les éléments I et C respectivement, peut conduire à des éléments I et C linéarisés à valeur négative. L'énergie représentée par $\int f' dp'$ et $\int e' dq'$ sera cependant conservée.

Les systèmes comportant uniquement des éléments R, C et I non linéaires ne présenteront pas de problème particulier pour la linéarisation. La seule différence avec le cas d'un système linéaire est que l'on a des éléments R, C et I pouvant avoir des valeurs négatives. Les valeurs $\bar{f},\bar{e},\bar{p},\bar{q}$ devront quant à elles obéir aux lois non linéaires constitutives des éléments.

Un exemple très simple peut être celui d'un réservoir comme présenté sur la figure II.2. Une source d'eau de débit constant remplit ce réservoir. Une vanne présentant une certaine résistance à l'écoulement permet l'évacuation de l'eau. La conservation du volume total d'eau, le liquide étant en première approximation incompressible, permet d'obtenir une représentation bond graph de ce système dans laquelle un élément capacitif modélisant le stockage de l'eau apparaît comme étant non linéaire, le volume d'eau dans le réservoir (q_2) étant une fonction non linéaire de la hauteur d'eau dans celui-ci donc de la pression (e_3) régnant à la hauteur de la valve. La loi caractéristique de l'élément R modélisant la vanne est aussi non linéaire. En effet d'après la loi de Bernouilli, la vitesse d'écoulement f_3 en sortie de vanne est liée à la pression e_3 par une relation du type $f_3 = K\sqrt{e_3}$.

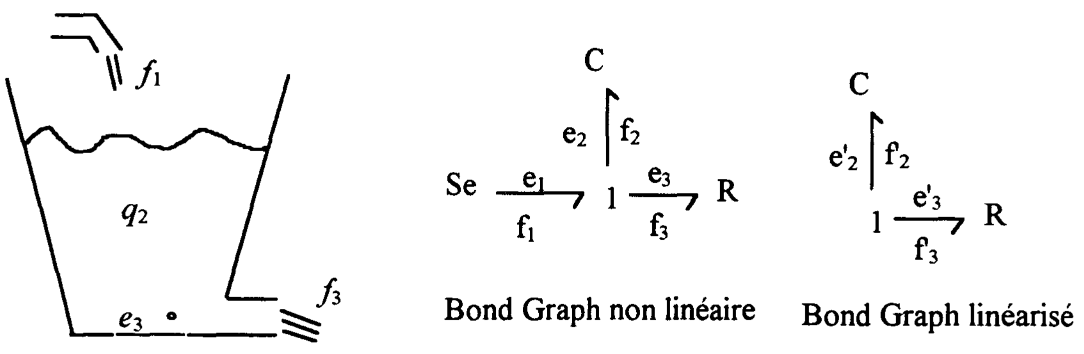


figure II.2 : exemple de linéarisation simple.

On remarquera que la source n'intervient que dans le calcul du point de fonctionnement, mais pas dans le bond graph linéarisé puisque $f_1'=0$ (débit constant).

II.2.2 Eléments modulés

II.2.2.1 Transformateurs et gyrateurs modulés

.a Introduction

Nous considérons ici le cas de transformateurs et gyrateurs dont le module est une fonction de certaines variables (figure II.3). La notation et les lois constitutives pour ces éléments sont données par les équations (II.4).

$$\xrightharpoonup[f_1]{e_1} \overset{m(\beta)}{\mathrm{MTF}} \xrightharpoonup[f_2]{e_2} \qquad \xrightharpoonup[f_1]{e_1} \overset{r(\beta)}{\mathrm{MGY}} \xrightharpoonup[f_2]{e_2}$$

figure II.3 : Représentation bond graph des éléments MTF et MGY.

$$\begin{array}{ll} e_1 = m(\beta) e_2 & \qquad e_2 = r(\beta) f_1 \\ f_2 = m(\beta) f_1 & \qquad e_1 = r(\beta) f_2 \end{array} \qquad (\text{II.4})$$

β représente une variable scalaire quelconque. Cependant, dans les cas considérés, cette variable sera une combinaison linéaire des variables d'état, de leur dérivées ou de leur intégrale. $m(.)$ et $r(.)$ sont des fonctions scalaires.

De tels éléments apparaissent très souvent en mécanique. En effet, la représentation par bond graph des systèmes mécaniques est fondée sur l'écriture de relations cinématiques. De plus, les changements de repère font apparaître des fonctions angulaires de type sinus et cosinus qui interviennent dans la représentation mathématique du système.

Ainsi pour l'exemple d'un bras rigide sans masse en rotation représenté sur la figure II.4a, on a la relation (II.5) liant les différents déplacements,

$$y = l\sin\theta \ . \qquad (\text{II}.5)$$

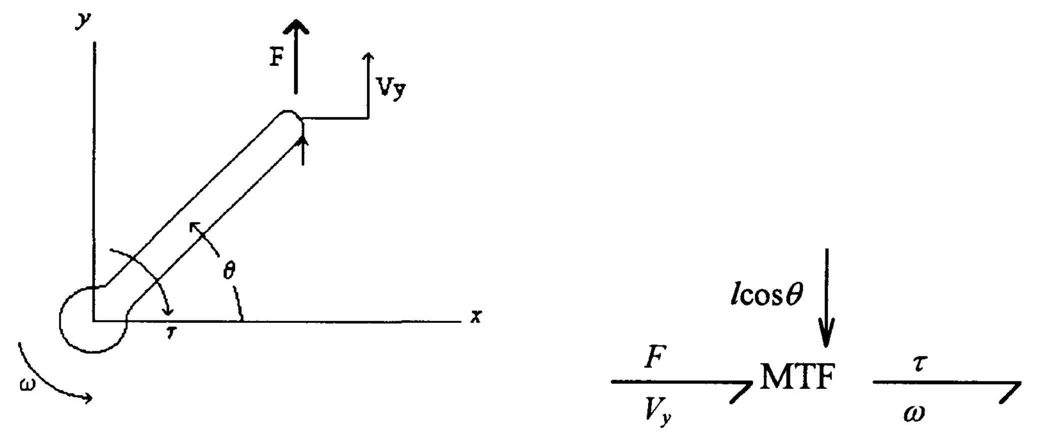
En différenciant cette équation pour obtenir une relation entre vitesses on obtient :

$$\dot{y} = (l\cos\theta)\dot{\theta} \, . \qquad (\text{II}.6)$$

La relation liant la force F au couple τ est donnée par l'équation (II.7).

$$\tau = (l\cos\theta)F \qquad (\text{II}.7)$$

Ceci peut donc être représenté par le bond graph de la figure II.4b.

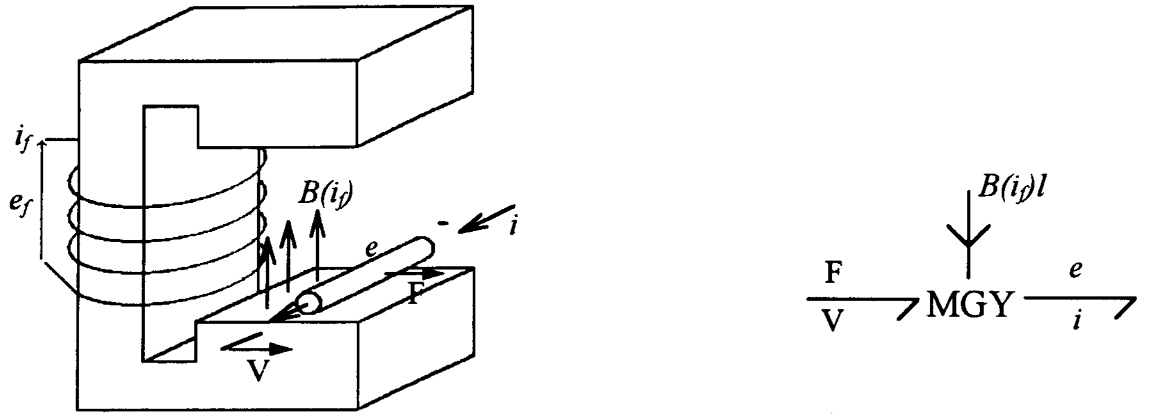


(a) (b)

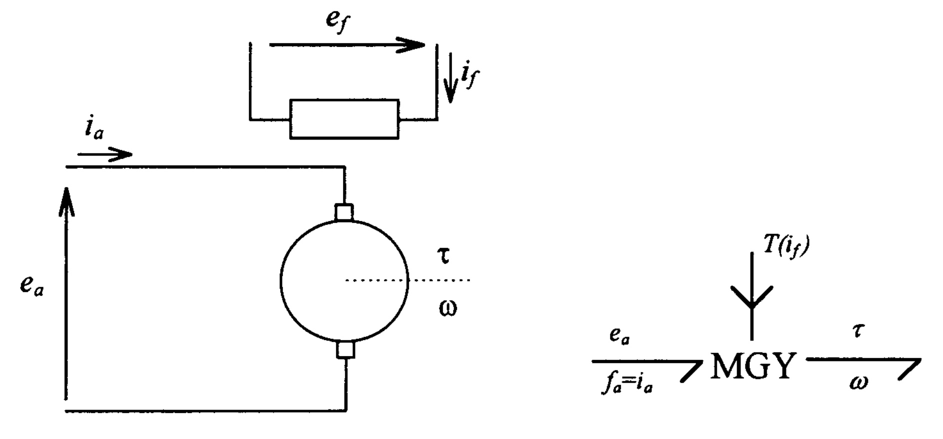
figure II. 4 : Transformateur modulé par la position. (a) Schéma d'un bras rigide sans masse en rotation ; (b) Bond graph associé.

La mécanique n'est pas le seul domaine où apparaissent de tels éléments. On trouvera sur la figure II.5 quelques autres exemples. On pourra consulter pour plus d'exemples les références

[Karnopp(1990)], [Rosenberg(1983)] et [Thoma(1990)] pour la majorité des domaines physiques, [Breedveld(1982)] principalement pour le domaine thermodynamique, [Dransfield(1981)] pour le domaine hydraulique. Une liste exhaustive ne pourrait être dressée tant le nombre d'exemples est important et les domaines d'application de la modélisation par bond graph variés.



(a) Barre en mouvement dans un champ magnétique et sa représentation bond graph.



(b) Modèle d'un moteur à courant continu et sa représentation bond graph.

Figure II.5 : Exemples de systèmes physiques dont le modèle bond graph comporte des éléments modulés.

Nous allons étudier la linéarisation de ces éléments suivant les différents cas possibles d'affectation de la causalité.

.b Linéarisation des éléments MTF avec la causalité flux entrant

Considérons dans un premier temps le transformateur modulé de la figure II.3, et les équations associées (II.4), où β est une variable d'état du bond graph qui vient moduler le rapport du transformateur, ce qui correspond à l'affectation causale de la figure II.6.

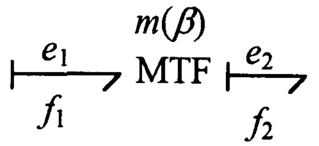


figure II.6 : MTF à causalité flux entrant.

Les équations non linéaires de cet élément s'écrivent

$$\begin{aligned} e_1 &= m(\beta)e_2 \\ f_2 &= m(\beta)f_1 \end{aligned} \qquad \text{(II.8)}$$

Le développement au premier ordre de ces équations rappelé par (II.3), conduit aux équations suivantes:

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 + e_1^{'} &= m(\bar{\beta})\bar{e}_2 + m(\bar{\beta})e_2^{'} + \frac{dm}{d\beta}(\bar{\beta})\bar{e}_2\beta^{'} \\ \bar{f}_2 + f_2^{'} &= m(\bar{\beta})\bar{f}_1 + m(\bar{\beta})f_1^{'} + \frac{dm}{d\beta}(\bar{\beta})\bar{f}_1\beta^{'} \end{aligned} \qquad \text{(II.9)}$$

Le modèle linéarisé localement ne définira le système de façon intrinsinque que si la linéarisation est effectué en un point d'équilibre, stable ou non. Les calculs suivant sont donc effectués en supposant que ce point d'équilibre existe [Breedveld(1984)]. La notion d'équilibre relatif, c'est à dire en considérant les écarts avec une trajectoire, permet d'élargir le domaine de validité de la linéarisation locale.

Sachant que la relation (II.8) doit être vérifiée au point de fonctionnement, on obtient les équations (II.10) constitutives de l'élément linéarisé.

$$\begin{aligned} e_1' &= m(\bar{\beta})e_2' + \frac{dm}{d\beta}(\bar{\beta})\bar{e}_2\beta' \\ f_2' &= m(\bar{\beta})f_1' + \frac{dm}{d\beta}(\bar{\beta})\bar{f}_1\beta' \end{aligned} \qquad \text{(II.10)}$$

Ces équations peuvent se représenter par le bond graph de la figure II.7. On y trouve un transformateur à gain constant $m(\bar{\beta})$ qui donne les premières parties des équations (II.10), et des sources d'effort et de flux modulées par la variable β' pour les seconds termes. Ce modèle bond graph constitue donc le linéarisé du bond graph de la figure II.6.

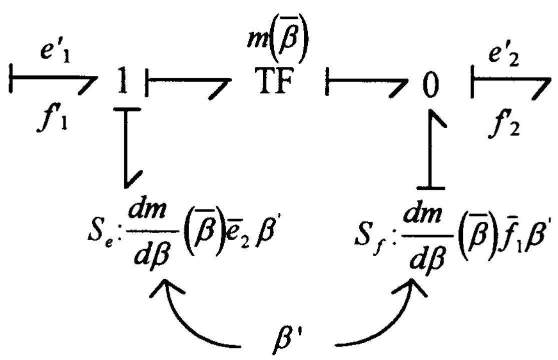


figure II.7 : bond graph de la linéarisation du MTF à flux entrant.

On peut constater sur ce bond graph l'apparition de sources modulées par la variable modulant l'élément MTF. La valeur de ces sources modulées est égale à un coefficient constant dépendant du point de fonctionnement multiplié par les variations de cette variable. Le coefficient constant est composé du produit de la dérivée de la fonction modulant l'élément MTF avec la valeur au point de fonctionnement d'une des variables d'entrée $\bar{f}_1$ ou $\bar{e}_2$. Pour le calcul de ces deux dernières valeurs on utilise le bond graph non linéaire initial au régime nominal. Dans ce bond graph les intégrales des efforts sur les éléments I sont égales à $\overline{p}_I$, les intégrales des flux sur les éléments C sont égales à $\overline{q}_C$ et les valeurs des sources sont égales à leurs régimes nominaux. Cette procédure est détaillée dans l'exemple du paragraphe II.2.2.a.

Considérons maintenant le cas où m est une fonction scalaire de deux variables scalaires β_1 et β_2. On montre de façon simple que le bond graph linéarisé du transformateur est celui de la figure II.8. Il en est de même dans le cas où m est une fonction scalaire d'un nombre quelconque de variables scalaires.

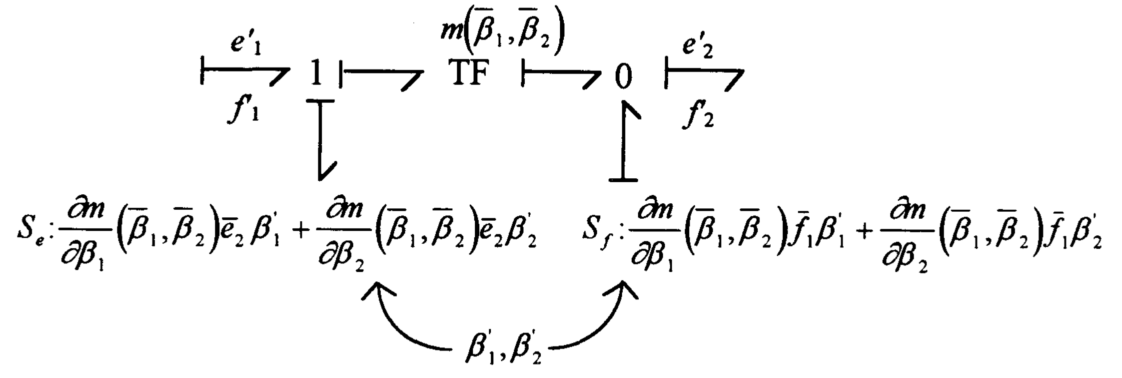


figure II.8 : Cas de la modulation par deux variables.

.c Linéarisation MTF effort entrant

Considérons maintenant le transformateur représenté par la figure II.9.

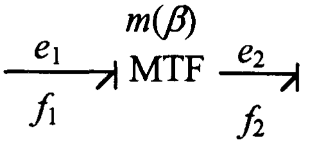


figure II.9 : Elément MTF effort entrant.

avec $m(\beta) \neq 0$

Les équations de cet élément sont

$$e_2 = \frac{1}{m(\beta)} e_1$$
$$f_1 = \frac{1}{m(\beta)} f_2 \qquad \text{(II.11)}$$

La linéarisation de ces équations conduit aux équations

$$e_2' = \frac{1}{m(\bar{\beta})} e_1' - \frac{1}{m(\bar{\beta})^2} \frac{dm}{d\beta}(\bar{\beta}) \bar{e}_1 \beta'$$
$$f_1' = \frac{1}{m(\bar{\beta})} f_2' - \frac{1}{m(\bar{\beta})^2} \frac{dm}{d\beta}(\bar{\beta}) \bar{f}_2 \beta' \qquad \text{(II.12)}$$

Comme dans le cas précédent, on a une représentation par bond graph de ces équations (figure II.10).

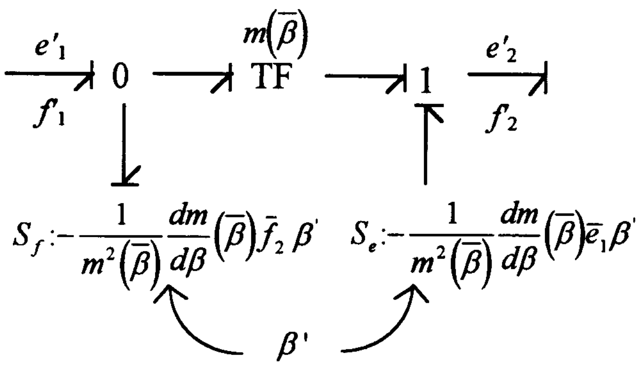


figure II.10 : bond graph de la linéarisation du MTF à effort entrant.

.d Linéarisation MGY flux entrant

L'étude de la linéarisation des éléments gyrateurs s'effectue de la même façon que celle des transformateurs. Considérons le gyrateur modulé représenté par la figure II.11.

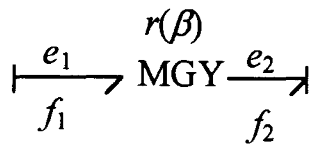


figure II.11 : Elément MGY à causalité flux entrant.

Les équations caractérisant cet élément sont données par :

$$\begin{aligned} e_1 &= r(\beta) f_2 \\ e_2 &= r(\beta) f_1 \end{aligned} \qquad \text{(II.13)}$$

La version linéarisée de ce composant aura donc les lois constitutives suivantes :

$$\begin{aligned} e_1' &= r(\bar{\beta}) f_2' + \frac{dr}{d\beta}(\bar{\beta}) \bar{f}_2 \beta' \\ e_2' &= r(\bar{\beta}) f_1' + \frac{dr}{d\beta}(\bar{\beta}) \bar{f}_1 \beta' \end{aligned} \qquad \text{(II.14)}$$

La représentation bond graph est

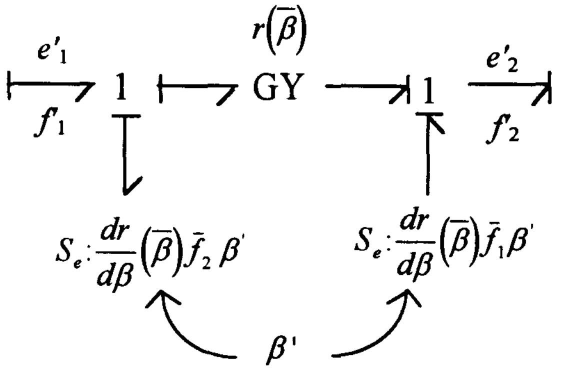


Figure II.12 : Bond graph de la linéarisation du MGY à effort entrant.

Comme pour le cas des transformateurs, on retrouve l'apparition dans le bond graph linéarisé des deux sources modulées mais qui sont maintenant du même type (source d'effort dans ce cas).

.e Linéarisation MGY effort entrant

Il reste enfin le cas du gyrateur à causalité flux entrant (figure II.13) dont les équations sont données par (II.15)

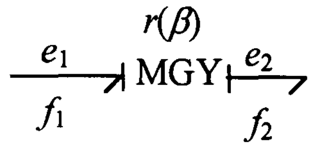


figure II.13 : Elément MGY à causalité effort entrant.

avec $r(\beta) \neq 0$.

$$
\begin{aligned}
f_2 &= \frac{1}{r(\beta)} e_1 \\
f_1 &= \frac{1}{r(\beta)} e_2
\end{aligned}
\qquad (\text{II}.15)
$$

De la même façon que pour les cas précédents, nous obtenons, en linéarisant l'équation (II.15), l'équation constitutive d'un gyrateur modulé linéarisé.

$$
\begin{aligned}
f_2' &= \frac{1}{r(\bar{\beta})} e_1' - \frac{1}{r^2(\bar{\beta})} \frac{dr}{d\beta}(\bar{\beta}) \bar{e}_1 \beta' \\
f_1' &= \frac{1}{r(\bar{\beta})} e_2' - \frac{1}{r^2(\bar{\beta})} \frac{dr}{d\beta}(\bar{\beta}) \bar{e}_2 \beta'
\end{aligned}
\qquad (\text{II}.16)
$$

La représentation bond graph de la linéarisation de cet élément MGY est donc alors donnée par la figure II.14.

La loi non linéaire de la résistance en causalité flux entrant (figure II.16 (a)) est donnée par

$$e_2 = e_2(f_2, d)$$

La linéarisation de cette équation conduit à

$$\bar{e}_2 = e_2(\bar{f}_2, \bar{d})$$

$$e_2' = \frac{\partial e_2}{\partial f_2}(\bar{f}_2, \bar{d}) f_2' + \frac{\partial e_2}{\partial d}(\bar{f}_2, \bar{d}) d'$$

Ces équations peuvent se représenter par le bond graph de la figure II.17.

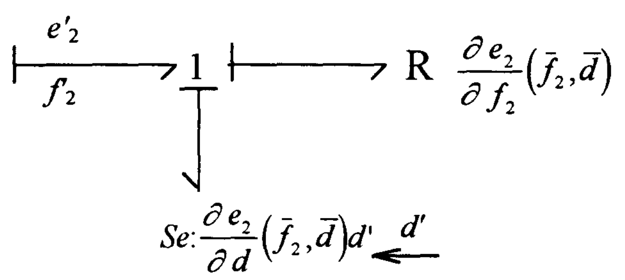


figure II.17 : Modèle bond graph linéarisé de la résistance modulée de la figure II.16 (a).

De même l'équation de la résistance modulée de la figure II.16 (b) est

$$f_2 = f_2(e_2, d)$$

Le modèle bond graph de la résistance modulée en causalité effort entrant est donné par la figure suivante.

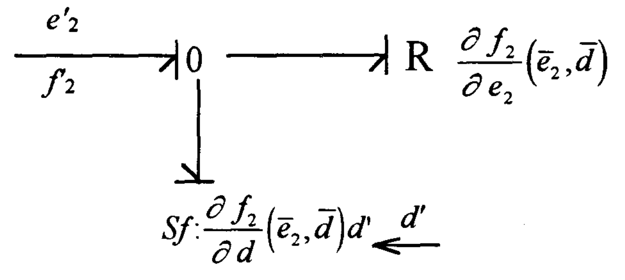


figure II.18 : Modèle bond graph linéarisé de la résistance modulée de la figure II.16 (b).

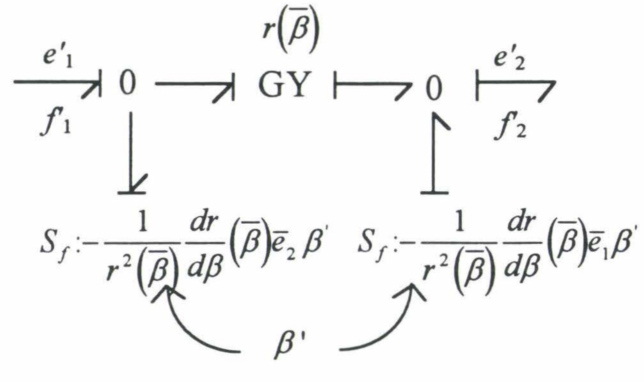


figure II.14 : Bond graph du MGY à flux entrant linéarisé.

II.2.2.2 Eléments R modulés

Certains systèmes font apparaître des éléments R dont la loi constitutive est modulée par un signal. On peut citer le cas de valves pneumatiques ou hydrauliques (figure II.15), le signal représentant le déplacement du tiroir.

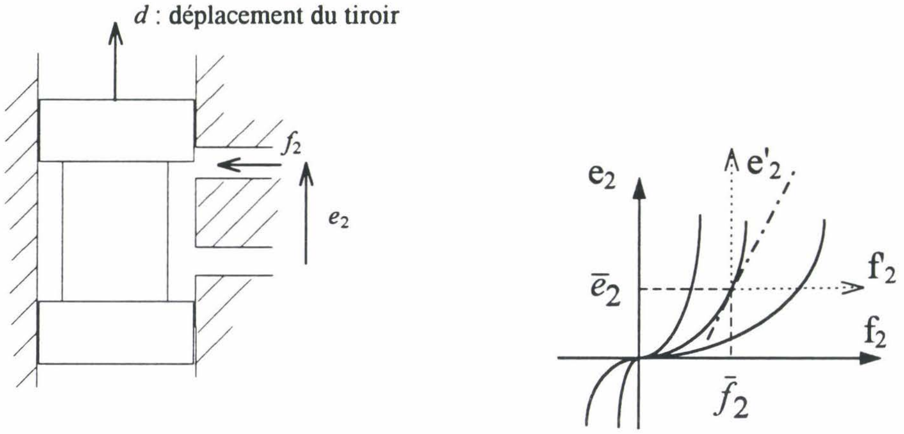
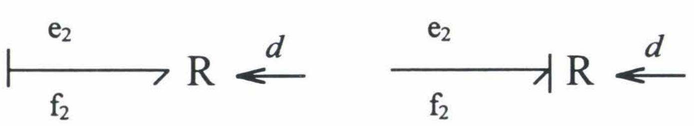


figure II.15 : Exemple d'un élément R modulé : Valve hydraulique [Karnopp(1977)].

La représentation bond graph de ces éléments est donnée figure II.16, deux cas étant possibles selon la causalité.



(a) (b)

figure II.16 : Modèles bond graph d'une résistance modulée.

Remarque : Il n'existe pas théoriquement d'éléments C ou I modulés puisqu'un changement dans la loi constitutive pour de tels éléments impliquerait la non conservation de l'énergie. Nous ne les étudierons donc pas. Cependant, certains phénomènes physiques ne peuvent être représentés uniquement que grâce à de tels éléments [Lefèvre(1993)].

II.3 Linéarisation des modèles bond graphs non linéaires

Après avoir rappelé la manière de linéariser chaque élément, nous allons étendre cette procédure de linéarisation et étudier maintenant la linéarisation du bond graph dans son ensemble. Nous aborderons en premier lieu les bond graphs dont les éléments R, C et I ont une caractéristique linéaire, la non linéarité étant uniquement localisée dans les éléments MTF et MGY. Ce cas sera décomposé en deux. Nous verrons d'abord la linéarisation des bond graphs non linéaires sans élément en causalité dérivée et ensuite la linéarisation des bond graphs non linéaires mais cette fois avec des éléments en causalité dérivée. Dans chacun de ces cas nous appliquerons la méthode de linéarisation directe sur bond graph et nous vérifierons que l'on obtient bien les résultats escomptés. Enfin, nous étudierons l'extension de cette procédure de linéarisation aux bond graphs non linéaires généraux, c'est-à-dire aux bond graphs dont les caractéristiques des éléments R, C et I ne sont pas obligatoirement linéaires.

II.3.1 Linéarisation des bond graphs non linéaires sans élément en causalité dérivée

Nous étudions dans ce paragraphe les systèmes dont le bond graph ne comporte pas d'élément d'accumulation d'énergie I et C en causalité différentielle. Les variables d'énergie formant le vecteur d'état sont alors indépendantes et forment le vecteur d'état.

Théorème II.1 *Soit un bond graph (B) sans élément dynamique en causalité dérivée, dont les caractéristiques des éléments R, C et I sont linéaires, les non linéarités venant de la modulation d'éléments MTF ou MGY par des variables d'état (ou de leur intégrale). Le bond graph linéarisé (B') ayant comme équation d'état l'équation obtenue en linéarisant l'équation d'état associée au bond graph (B), s'obtient en remplaçant les éléments modulés par le bond graph correspondant à la linéarisation de chacun de ces éléments et la valeur des sources par leur partie variable.*

Démonstration voir annexe II

Exemple 1 Nous allons appliquer cette procédure sur le modèle bond graph d'un système mécanique très simple, soit un pendule constitué d'une masse attachée à un ressort. Le ressort est guidé en translation. Une de ses extrémités est attachée à une masse m, l'autre à une liaison pivot permettant une rotation libre dans un plan vertical (figure II.18).

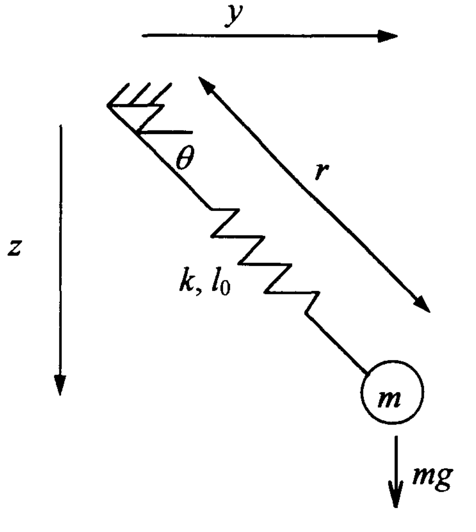


Figure II.18: Pendule avec ressort.

Le bond graph causal associé à ce système peut être représenté par la figure II.19.

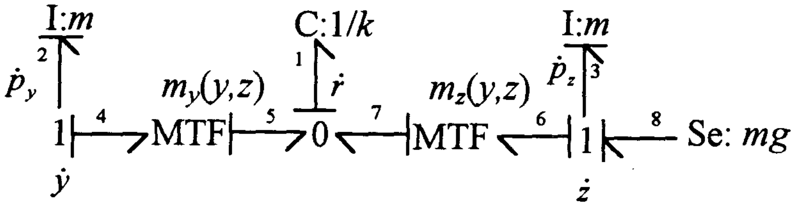


figure II.19 : Bond graph du pendule.

avec $m_y(y,z) = \dfrac{y}{\left(y^2 + z^2\right)^{1/2}}$, $m_z(y,z) = \dfrac{z}{\left(y^2 + z^2\right)^{1/2}}$ et $r = \left(y^2 + z^2\right)^{1/2}$.

Remarque : Pour des raisons de facilité d'exposé, nous avons numéroté les liens de puissance.

Les équations d'état déduites de ce bond graph grâce à la procédure de suivi des chemins causaux [Rosenberg(1971)], [Borne et al(1992)], sont les suivantes :

$$\begin{cases} \dot{r} = m_y(y,z)\dfrac{p_y}{m} + m_z(y,z)\dfrac{p_z}{m} \\ \dot{p}_y = -m_y(y,z)k(r - l_0) \\ \dot{p}_z = -m_z(y,z)k(r - l_0) + mg \\ \dot{y} = \dfrac{p_y}{m} \\ \dot{z} = \dfrac{p_z}{m} \end{cases} \tag{II.17}$$

Remarque : Le modèle bond graph ne comporte que trois éléments dynamiques en causalité intégrale. Il ne devrait donc être décrit que par trois relations. Néanmoins, ces trois équations font apparaître les modules non constants m_y et m_z qui s'expriment en fonction des variables y et z. Il est donc nécessaire d'ajouter deux nouvelles équations, qui ne sont pas des équations énergétiques.

Première approche: Linéarisation de l'équation d'état.

Notons le vecteur d'état $x=[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T=[r, p_y, p_z, y, z]^T$ composé de trois variables d'état énergétiques et de deux variables dynamiques. L'équation (II.17) s'écrit alors

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = m_y(x_4,x_5)\dfrac{x_2}{m} + m_z(x_4,x_5)\dfrac{x_3}{m} \\ \dot{x}_2 = -m_y(x_4,x_5)k(x_1 - l_0) \\ \dot{x}_3 = -m_z(x_4,x_5)k(x_1 - l_0) + mg \\ \dot{x}_4 = \dfrac{x_2}{m} \\ \dot{x}_5 = \dfrac{x_3}{m} \end{cases} \qquad \text{(II.18)}$$

Nous avons rappelé en introduction la formule du développement de Taylor au premier ordre d'une fonction vectorielle. Dans le cas d'une fonction scalaire $f(\beta_1, \beta_2)$ des deux variables scalaires β_1, β_2 ce développement en un point $(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2)$ devient:

$$f(\beta_1,\beta_2) = f(\bar{\beta}_1,\bar{\beta}_2) + \frac{\partial f}{\partial \beta_1}(\bar{\beta}_1,\bar{\beta}_2)\beta_1' + \frac{\partial f}{\partial \beta_2}(\bar{\beta}_1,\bar{\beta}_2)\beta_2' . \qquad \text{(II.19)}$$

En utilisant ce principe, la linéarisation de l'équation (II.18a) donne

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 + \dot{x}_1' = {} & m_y(\bar{x}_4,\bar{x}_5)\frac{\bar{x}_2}{m} + m_z(\bar{x}_4,\bar{x}_5)\frac{\bar{x}_3}{m} + m_y(\bar{x}_4,\bar{x}_5)\frac{x_2'}{m} + m_z(\bar{x}_4,\bar{x}_5)\frac{x_3'}{m} + \\ & \frac{\partial m_y}{\partial x_4}(\bar{x}_4,\bar{x}_5)\frac{\bar{x}_2}{m}x_4' + \frac{\partial m_y}{\partial x_5}(\bar{x}_4,\bar{x}_5)\frac{\bar{x}_2}{m}x_5' + \frac{\partial m_z}{\partial x_4}(\bar{x}_4,\bar{x}_5)\frac{\bar{x}_3}{m}x_4' + \frac{\partial m_z}{\partial x_5}(\bar{x}_4,\bar{x}_5)\frac{\bar{x}_3}{m}x_5' \end{aligned}$$

(II.20)

La barre indiquant la valeur au point d'équilibre autour duquel on linéarise, on aura si l'on linéarise autour du point d'équilibre stable:

$\bar{x}_1 = l_0 + \dfrac{mg}{k}$, $\bar{x}_2 = \bar{x}_3 = \bar{x}_4 = 0$ et $\bar{x}_5 = l_0 + \dfrac{mg}{k}$

Sachant que la relation (II.18) est vérifiée au point de linéarisation, et en tenant compte des valeurs explicitee de $m_y(\bar{x}_4,\bar{x}_5)$, $m_z(\bar{x}_4,\bar{x}_5)$, $\dfrac{\partial m_y}{\partial x_4}(\bar{x}_4,\bar{x}_5)$ ..., on obtient l'équation (II.21a).

$$\dot{x}_1' = \frac{x_3'}{m} \qquad \text{(II.21a)}$$

En utilisant le même principe, nous déduisons les équations suivantes de l'équation (II.18).

$$\dot{x}_2' = -kx_4' \qquad \text{(II.21b)}$$

$$\dot{x}_3' = -kx_4' \qquad \text{(II.21c)}$$

$$\dot{x}_4' = \frac{x_2'}{m} \qquad \text{(II. 21d)}$$

$$\dot{x}_5' = \frac{x_3'}{m} \qquad \text{(II. 21e)}$$

<u>Deuxième approche: Construction du modèle bond graph linéarisé.</u>

En s'inspirant de la décomposition d'un MTF modulé par deux variables d'état présentée figure II.8, on obtient le modèle linéarisé associé à la figure II.20.

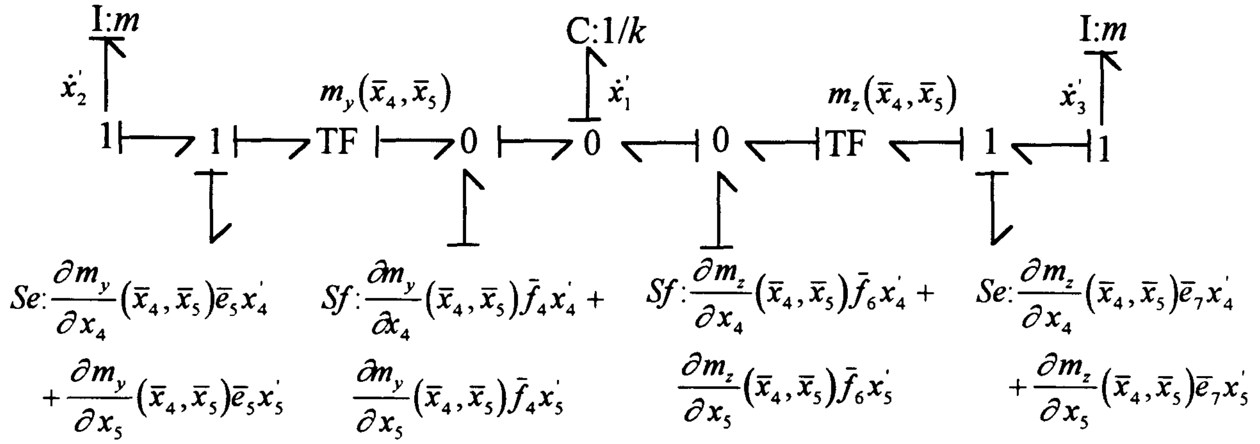


figure II.20 : Modèle bond graph linéarisé

Les éléments MTF sont directement reliés aux sources et aux éléments dynamiques, le calcul des valeurs $\bar{f}_4, \bar{e}_5, \bar{f}_6, \bar{e}_7$ est donc ici immédiat. En remplaçant ces variables, on obtient alors le bond graph de la figure II.20.

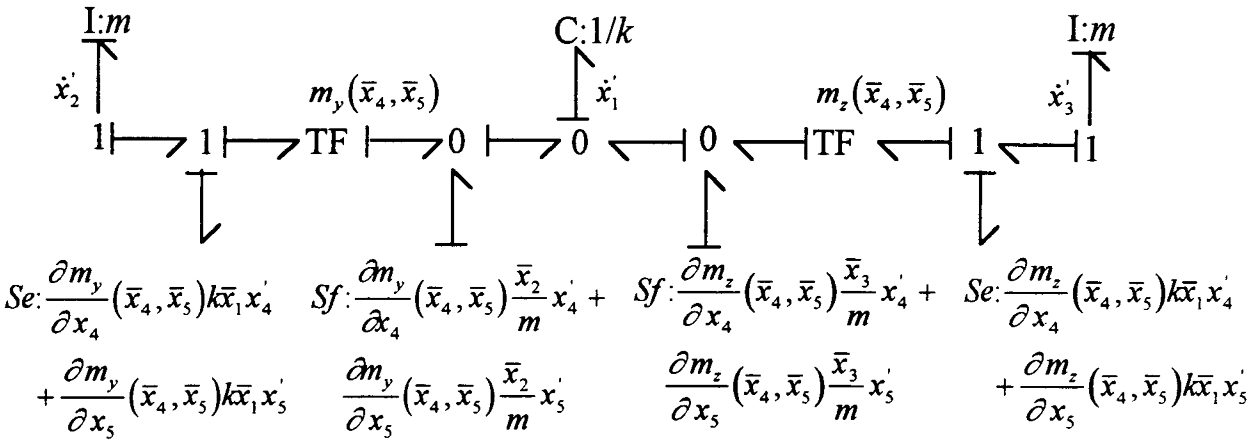


figure II.21 Modèle bond graph linéarisé complet.

On peut remarquer que la source d'effort modélisant la pesanteur, étant constante, disparaît dans le bond graph linéarisé.

Les équations obtenues d'après ce bond graph linéarisé, sont identiques aux équations (II.21) obtenues par une linéarisation de l'équation d'état déduite du bond graph non linéaire.

Exemple 2 :Modèle bond graph avec boucle algébrique entre R.

Considérons le bond graph de la figure II.22a. L'équation d'état du système va être écrite pour une causalité de type effort entrant pour R_1 et flux entrant pour R_2. A condition que m(β) soit inversible, la causalité correspondante au bond graph de la figure II.22b aurait pu être utilisée de manière équivalente.

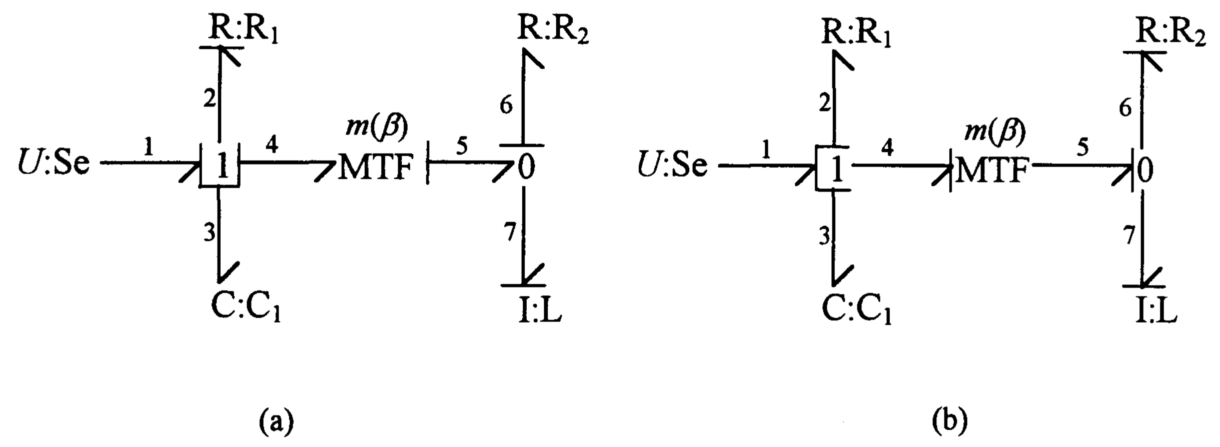


figure II.22 bond graph avec choix de causalité.

Le vecteur d'état est constitué des variables associées aux éléments dynamiques en causalité intégrale, soit ici $x=(p_7,q_3)^T$. La dérivée de ce vecteur, $\dot{x}=(e_7,f_3)^T$, s'obtient directement sur le modèle bond graph. Les éléments R, C et I sont supposés linéaires.

Etant donné que deux éléments R sont causalement liés, le calcul de l'équation d'état n'est pas immédiat. Nous effectuons ce calcul en plusieurs étapes, avec les règles habituelles de calcul d'une équation d'état [Borne et al(1992)].

$$\dot{p}_7 = e_7 = e_6 = R_2 f_6 \tag{II.22}$$

$$f_6 = \frac{m(\beta)}{R_1}\left(U - \frac{q_3}{C_1} - m(\beta)R_2 f_6\right) - f_7 \tag{II.23}$$

sachant que $f_7=p_7/L$ à partir de (II.22) et (II.23) on obtient

$$\left(1+\frac{R_2}{R_1}m^2(\beta)\right)\dot{p}_7 = -\frac{R_2}{L}p_7 - \frac{R_2}{R_1}\frac{m(\beta)}{C_1}q_3 + \frac{R_2 m(\beta)}{R_1}U \tag{II.24}$$

de même pour l'équation associée à l'élément capacitif, on obtient

$$\left(1+\frac{R_2}{R_1}m^2(\beta)\right)\dot{q}_3 = \frac{m(\beta)R_2}{R_1 L}p_7 - \frac{q_3}{R_1 C_1} + \frac{U}{R_1} \tag{II.25}$$

La linéarisation de l'équation (II.24) donne

$$\dot{p}_7' = \left(\frac{1}{1+\frac{R_2}{R_1}m^2(\bar{\beta})}\right)^2 \left[\begin{array}{l} \left(1+\frac{R_2}{R_1}m^2(\bar{\beta})\right)\left(\begin{array}{l} -\frac{R_2}{L}p_7' - \frac{R_2}{R_1}\frac{1}{C_1}\left(m(\bar{\beta})q_3' + \frac{dm}{d\beta}(\bar{\beta})\beta'\bar{q}_3\right) + \\ \frac{R_2}{R_1}\left(m(\bar{\beta})U' + \frac{dm}{d\beta}(\bar{\beta})\beta'\bar{U}\right) \end{array}\right) \\ \\ -2\frac{R_2}{R_1}m(\bar{\beta})\frac{dm}{dx}(\bar{\beta})\beta'\left(-\frac{R_2}{L}\bar{p}_7 - \frac{R_2}{R_1}\frac{m(\bar{\beta})}{C_1}\bar{q}_3 + \frac{R_2 m(\bar{\beta})}{R_1}\bar{U}\right) \end{array} \right] \qquad \text{(II.26)}$$

L'application de la procédure de linéarisation de l'élément MTF conduit au bond graph de la figure II.23.

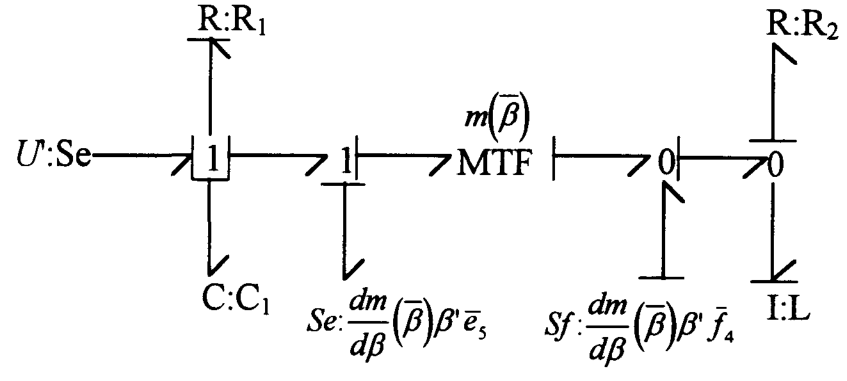


figure II.23 : bond graph linéarisé du bond graph de la figure II.22a.

Les sources font intervenir $\bar{e}_5$ et $\bar{f}_4$ qu'il nous faut donc calculer. Pour cela, on utilise le bond graph de la figure II.22a en régime nominal. La procédure de suivi des chemins causaux permet alors d'exprimer $\bar{e}_5$ et $\bar{f}_4$ en fonction de $\bar{q}_3, \bar{p}_7, \bar{U}$ et $\bar{\beta}$, soit:

$$\bar{e}_5 = \frac{R_2}{\Delta}\left(\frac{m(\bar{\beta})}{R_1}\bar{U} - \frac{\bar{q}_3 m(\bar{\beta})}{R_1 C_1} - \frac{\bar{p}_7}{L}\right) \qquad \text{(II.27)}$$

$$\bar{f}_4 = \frac{1}{\Delta R_1}\left(\overline{U} - \frac{\overline{q}_3}{C_1} + m(\overline{\beta})\frac{\overline{p}_7}{L}R_2\right) \tag{II.28}$$

avec $\Delta = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}m^2(\overline{\beta})\right)$

L'équation différentielle associée à la variable d'état de l'élément I peut donc être calculée à partir du bond graph de la figure II.23.

$$\Delta \dot{p}_7' = -\frac{R_2}{L}p_7' - \frac{R_2 m(\overline{\beta})}{R_1 C_1}q_3' + \frac{R_2 m(\overline{\beta})}{R_1}U' + R_2\frac{dm}{d\beta}(\overline{\beta})\beta'\bar{f}_4 - \frac{R_2}{R_1}m(\overline{\beta})\frac{dm}{d\beta}(\overline{\beta})\beta'\bar{e}_5 \tag{II.29}$$

En remplaçant les valeurs de $\bar{e}_5$ et $\bar{f}_4$, on vérifie l'égalité des équations (II.26) et (II.29).

II.3.2 Linéarisation des bond graphs non linéaires avec des éléments en causalité dérivée

Ce paragraphe traite des bond graphs contenant des éléments d'accumulation d'énergie en causalité différentielle. Les efforts et les flux aux ports des éléments C et I sont donc liés et certaines dynamiques ne sont pas statiquement indépendantes. Un exemple de système électronique simple correspondant à ce cas est la mise en parallèle de deux capacités. La charge dans l'une impose la valeur de la charge dans l'autre. Il n'y aura donc qu'une seule dynamique indépendante pour les deux éléments capacitifs, comme en témoigne d'ailleurs le fait de pouvoir les remplacer par une capacité équivalente.

II.3.2.1 Théorème

Théorème II.2 *Soit un bond graph (B) dont les caractéristiques des éléments R, C et I sont linéaires, les non linéarités venant de la modulation d'éléments MTF ou MGY par des variables d'état (ou de leur intégrale, ou de leur dérivée). Le bond graph linéaire (B') ayant comme équation d'état l'équation obtenue en linéarisant le système d'équations algébro différentielles associées au bond graph (B), s'obtient en remplaçant les éléments modulés par le bond graph correspondant à la linéarisation de chacun de ces éléments.*

Démonstration voir annexe 2

II.3.2.2 Exemple

Considérons le bond graph causal de la figure II.24 . Un des deux éléments C doit être obligatoirement mis en causalité dérivée. Nous avons choisi ici de mettre l'élément C_2 en causalité intégrale et C_1 en causalité dérivée. Si m(β) est supposé différent de 0 pour tout β, on peut choisir de la même façon l'autre causalité. Le choix se fait de manière heuristique en retenant la situation conduisant au cas où le rapport des valeurs des éléments C est inférieur à 1.

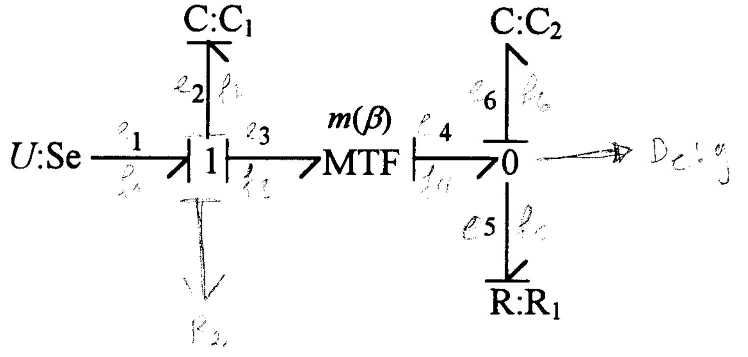


figure II.24 : bond graph comportant un élément en causalité dérivée.

L'équation d'état s'écrit :

$$\dot{q}_6 = f_6 = f_4 - f_5 = m(\beta) f_3 - \frac{e_5}{R_1} = m(\beta)\dot{q}_2 - \frac{1}{R_1}\left(\frac{q_6}{C_2}\right) \qquad \text{(II.30)}$$

avec :

$$q_2 = C_1 e_2 = C_1\left(U - m(\beta)\frac{q_6}{C_2}\right) \tag{II.31}$$

Une linéarisation de ces équations conduit à :

$$\dot{q}_6' = m(\bar{\beta})\dot{q}_2' + \frac{dm}{d\beta}(\bar{\beta})\bar{q}_2\beta' - \frac{1}{R_1}\left(\frac{q_6'}{C_2}\right) \tag{II.32}$$

$$q_2' = C_1\left(U' - m(\bar{\beta})\frac{q_6'}{C_2} - \frac{dm}{d\beta}(\bar{\beta})\frac{\bar{q}_6}{C_2}\beta'\right) \tag{II.33}$$

On applique maintenant la procédure de linéarisation directe sur le bond graph. Le bond graph de la figure II.25 est alors obtenu.

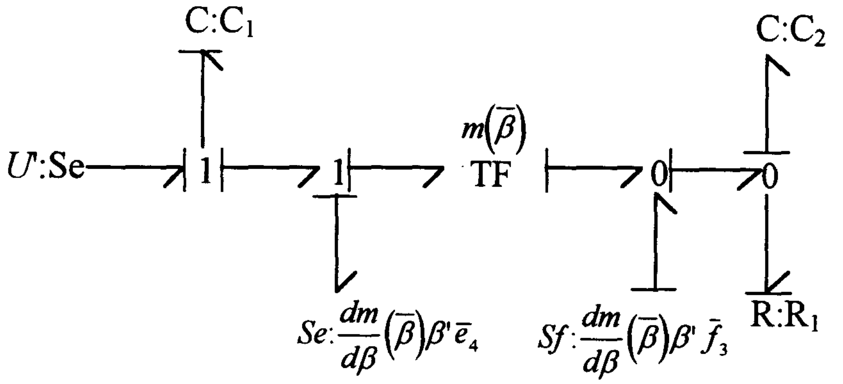


figure II.25 : Bond graph linéarisé du bond graph de la figure II.24.

avec $\bar{e}_4 = \frac{\bar{q}_6}{C_2}$ et $\bar{f}_3 = \bar{q}_2$.

on retrouve alors bien les deux mêmes équations régissant le système linéarisé.

II.3.3 Linéarisation des bond graphs non linéaires

Nous avons présenté une méthode pour linéariser un bond graph dont les caractéristiques des éléments R, C et I sont linéaires. La même procédure de linéarisation peut être appliquée sur les modèles généraux de bond graphs dont les éléments R, C et I ont des caractéristiques non linéaires. Il suffit pour cela de linéariser en plus les caractéristiques des éléments non linéaires.

En ce qui concerne les éléments I et C, le résultat est évident à partir de la démonstration de la linéarisation dans le cas avec éléments linéaires. Cette démonstration est basée sur une décomposition de la structure des bond graphs. La structure d'un bond graph sans élément en causalité dérivée peut en effet se schématiser de la façon suivante en regroupant sous forme de vecteurs les variables mises en oeuvre:

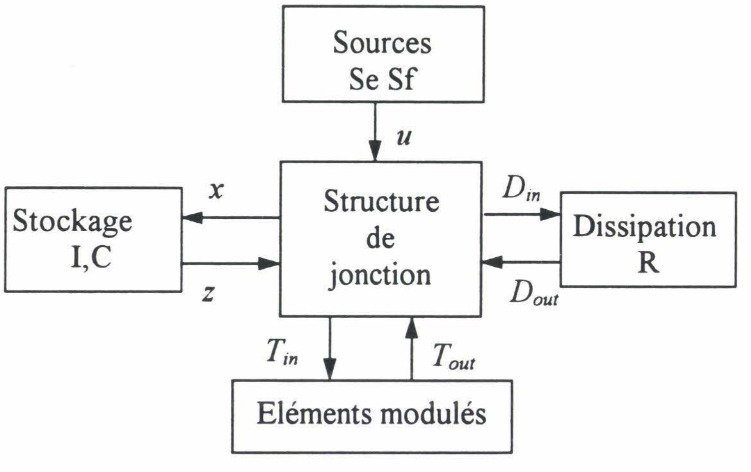


figure II.26 : Représentation vectorielle d'un bond graph.

où D_{in} et D_{out} regroupent les efforts et les flux respectivement entrants et sortants pour les éléments R.

T_{in} et T_{out} regroupent les efforts et les flux respectivement entrants et sortants pour les éléments MTF et MGY modulés par l'état.

Les x sont les variables d'état associés aux éléments I et C en causalité intégrale et les z sont les vecteurs état complémentaires.

Ces vecteurs satisfont les relations suivantes constitutives des éléments (I.2a) et (I.2b).

La relation liant T_{out} à T_{in} est donnée par $T_{out} = M(\beta)T_{in}$ avec par exemple dans le cas du transformateur de la figure II.6, de module $m(\beta)$, l'équation $\begin{bmatrix} e_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m(\beta) & 0 \\ 0 & m(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ f_1 \end{bmatrix}$ ou, dans le cas du gyrateur de la figure II.27b), de module $r(\beta)$, l'équation $\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & r(\beta) \\ r(\beta) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$.

(a) (b)

figure II.27 : Exemples d'éléments modulés.

Le calcul de l'équation d'état montre que la matrice regroupant les caractéristiques de ces éléments intervient par une simple multiplication dans l'équation d'état finale (Ce calcul est fait dans l'annexe 2, équation (A.II.10)). Donc hormis le fait d'avoir à linéariser les caractéristiques des éléments I et C non linéaires, la procédure de linéarisation reste inchangée.

Considérons maintenant des éléments R ayant une loi caractéristique non linéaire. Dans ce cas l'équation constitutive des éléments R devient $D_{out}=L(D_{in})$.

Nous gardons toujours la même hypothèse simplificatrice mais non restrictive de modulation des éléments MTF et MGY par une seule variable β.

L'équation exprimant le vecteur D_{in} comme sortie de la structure de jonction s'écrit alors

$$D_{in} = \mathbf{S}_{21}z_I + \mathbf{S}_{22}L(D_{in}) + \mathbf{S}_{23}T_{out} + \mathbf{S}_{24}u \qquad \text{(II.34)}$$

les matrices $\mathbf{S}_{ij}$ étant des termes de la matrice de structure de jonction.

Deux cas sont alors possibles. Si l'on ne peut pas inverser l'équation (II.34) pour exprimer D_{in} en fonction des autres variables, on ne pourra pas aller plus loin dans le calcul de l'équation non linéaire. Si au contraire D_{in} peut s'exprimer en fonction des autres variables, le calcul peut se poursuivre. On remplace les deux variables T_{in} et D_{in} dans l'équation (II.35), correspondant à la première ligne de l'équation de structure de jonction en tenant compte des lois constitutives des éléments R et des éléments modulés.

$$\dot{x}_I = \mathbf{S}_{11} z_I + \mathbf{S}_{12} D_{out} + \mathbf{S}_{13} T_{out} + \mathbf{S}_{14} u \tag{II.35}$$

Linéariser l'équation d'état obtenue alors revient à linéariser l'équation (II.35). Cette opération conduit, en ne gardant que les parties variables, à l'équation (II.36).

$$\dot{x}_I' = \mathbf{S}_{11} z_I' + \mathbf{S}_{12} D_{out}' + \mathbf{S}_{13} T_{out}' + \mathbf{S}_{14} u' \tag{II.36}$$

Le calcul de D'_{out} se fait en remarquant que $D_{out}' = DL\left(\overline{D}_{in}\right) D_{in}'$ où $DL(.)$ représente la matrice Jacobienne de la fonction $L(.)$. On détermine alors D'_{in} à partir de l'équation (II.34). Cette équation est une équation vectorielle non linéaire du type $f(x)=y$ avec x et y deux vecteurs variables dans le temps. Dans cette équation l'inconnue x représente D_{in} et y représente $S_{21} z_I + S_{23} T_{out} + S_{24} u$. Si $x = \bar{x} + x'$ et $y = \bar{y} + y'$, alors la solution au premier ordre de l'équation $f(x)=y$ est donnée par la résolution de $Df(\bar{x})x' = y'$ où $Df(.)$ représente la Jacobienne de f. Ceci nous permet de calculer la variable D'_{in} comme solution de (II.37)

$$D_{in}' - \mathbf{S}_{22} DL\left(\overline{D}_{in}\right) D_{in}' = \mathbf{S}_{21} z_I' + \mathbf{S}_{23} T_{out}' + \mathbf{S}_{24} u' \tag{II.37}$$

On a donc

$$D_{out}' = DL\left(\overline{D}_{in}\right)\left(\mathbf{I} - \mathbf{S}_{22} DL\left(\overline{D}_{in}\right)\right)^{-1}\left(\mathbf{S}_{21} z_I' + \mathbf{S}_{23} T_{out}' + \mathbf{S}_{24} u'\right) \tag{II.38}$$

On obtient de même l'expression de T'_{out} en fonction des autres variables. En remplaçant ces valeurs dans (II.36) on a alors l'équation d'état linéarisée.

Soit un bond graph comportant des éléments R dont les caractéristiques sont non linéaires, considérons le bond graph déduit de celui-ci en linéarisant les caractéristiques des R. Comme $D'_{out} = DL(\overline{D}_{in})D'_{in}$, la matrice regroupant les valeurs des résistances est donc égale à $DL(\overline{D}_{in})$. L'équation de structure de jonction étant (II.39), on retrouve l'équation (II.37).

$$D'_{in} = \mathbf{S}_{21}z'_{I} + \mathbf{S}_{22}D'_{out} + \mathbf{S}_{23}T'_{out} + \mathbf{S}_{24}u' \tag{II.39}$$

La suite du calcul étant identique au cas précédent, on arrivera à la même équation d'état finale pour le système linéarisé.

II.4 Exemple : le double pendule inversé

Considérons le système du double pendule inversé de la figure II.28, composé d'un chariot de masse M_C pouvant se mouvoir horizontalement sans frottement, supportant deux tiges l^1, l^2 de longueurs respectives l_1 et l_2, de masses m_1 et m_2, et de moments d'inertie J_1 et J_2. Le mouvement du chariot se fait dans le plan horizontal sous l'action d'une force $\vec{F} = F(t)\vec{i}$ où $\vec{i}$ est le vecteur unité dans la direction horizontale. Le mouvement du système est aussi commandé par deux couples τ_1 et τ_2 appliqués respectivement sur les bases des tiges l^1 et l^2. Le système est décrit à tout instant par les coordonnées x_1, x_2, y_1, y_2, θ_1, θ_2 et leurs dérivées où x_1, x_2, y_1 et y_2 sont les coordonnées des centres des masses des tiges l^1 et l^2 par rapport à un repère fixe arbitraire et θ_i (i =1,2) est l'angle entre la tige l^i et un axe horizontal.

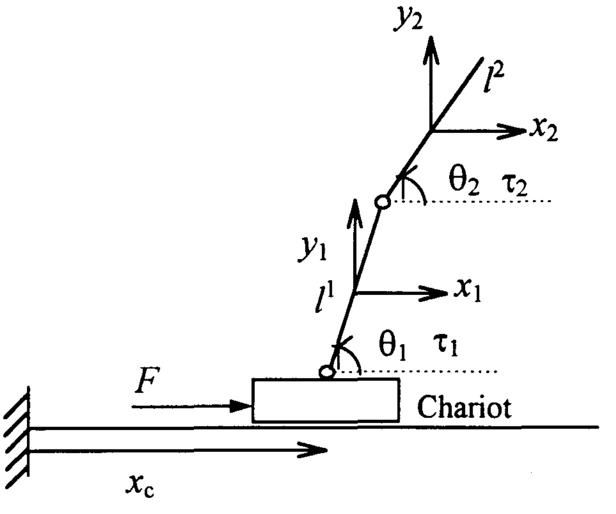


Figure II.28 : Le double pendule inversé

Le modèle bond graph opératoire de ce système sur lequel les procédures graphiques seront discutées, est décrit après affectation de la causalité intégrale par la figure II.29 (voir Annexe IV pour la méthode d'obtention de ce bond graph).

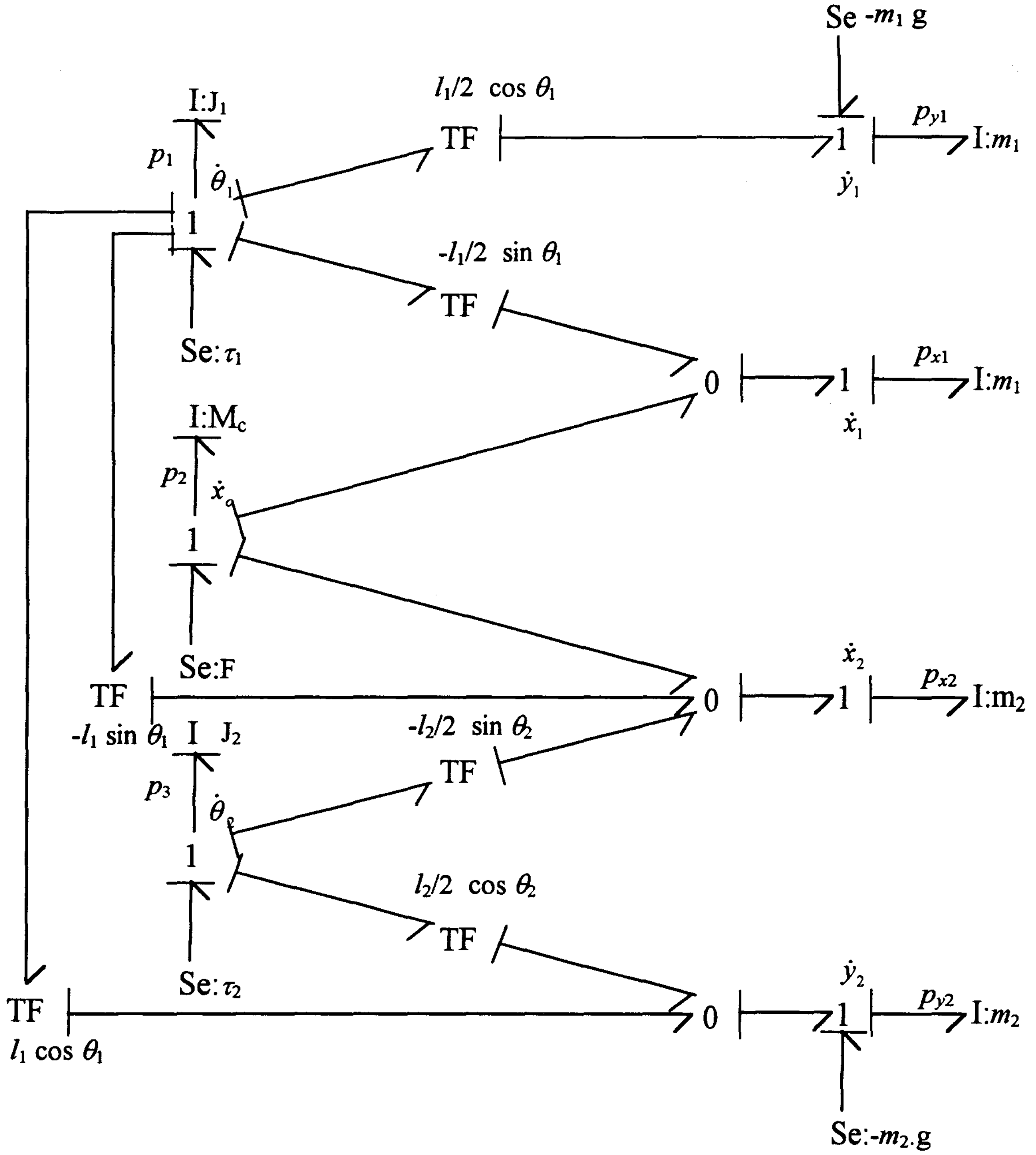


figure II.29 :Modèle bond graph en causalité intégrale du double pendule inversé.

La causalité nous permet de distinguer les variables d'énergie statiquement indépendantes associées aux éléments I en causalité intégrale, des variables d'énergie statiquement dépendantes associées aux éléments I en causalité dérivée. Les variables d'énergie associées aux éléments dynamiques en causalité intégrale sont p_1, p_2 et p_3. Elles correspondent aux mouvements en rotation associées aux tiges l^1, l^2 et au mouvement en translation associé au chariot. Les variables dépendantes sont les quantités de mouvement p_{x1}, p_{y1}, p_{x2}, p_{y2} définissant les mouvements en translation des tiges l^1, l^2. Ces dépendances sont dues aux contraintes cinématiques liant toutes ces variables résultant de la rigidité des solides. L'ordre de ce système est égal au nombre de variables indépendantes, soit trois dans notre cas.

La dynamique de ce système peut alors être décrite par un système d'équations d'état algébro-différentielles, linéaire en l'entrée. Notons $p_4=p_{y1}$, $p_5=p_{x1}$, $p_6=p_{x2}$, $p_7=p_{y2}$.

$$\dot{p}_1 = \tau_1 - \frac{l_1}{2}\cos\theta_1\left(-m_1 g + \dot{p}_4\right) + \frac{l_1}{2}\sin\theta_1\left(\dot{p}_5\right) + l_1\sin\theta_1\left(\dot{p}_6\right) - l_1\cos\theta_1\left(-m_2 g + \dot{p}_7\right) \quad \text{(II.40a)}$$

$$\dot{p}_2 = F - \dot{p}_5 - \dot{p}_6 \quad \text{(II.40b)}$$

$$\dot{p}_3 = \tau_2 + \frac{l_2}{2}\sin\theta_2\left(\dot{p}_6\right) - \frac{l_2}{2}\cos\theta_2\left(-m_2 g + \dot{p}_7\right) \quad \text{(II.40c)}$$

Les trois équations II.40 sont les équations différentielles déduites du bond graph et les quatre équations II.41 sont les équations algébriques.

$$\frac{p_4}{m_1} = \frac{l_1}{2}\cos\theta_1\frac{p_1}{J_1} \quad \text{(II.41a)}$$

$$\frac{p_5}{m_1} = -\frac{l_1}{2}\sin\theta_1\frac{p_1}{J_1} + \frac{p_2}{M_c} \quad \text{(II.41b)}$$

$$\frac{p_6}{m_2} = -l_1\sin\theta_1\frac{p_1}{J_1} - \frac{l_2}{2}\sin\theta_2\frac{p_3}{J_2} + \frac{p_2}{M_c} \quad \text{(II.41c)}$$

$$\frac{p_7}{m_2} = l_1\cos\theta_1\frac{p_1}{J_1} + \frac{l_2}{2}\cos\theta_2\frac{p_3}{J_2} \quad \text{(II.41d)}$$

Pour que le système soit complet, nous ajoutons les équations (II.42) exprimant les relations entre les vitesses angulaires $\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_2$ en fonction des variables d'état.

$$\dot{\theta}_1 = \frac{p_1}{J_1} \quad \text{(II.42a)}$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{p_3}{J_2} \tag{II.42b}$$

Nous allons maintenant chercher le bond graph linéarisé correspondant à ces équations. Pour ce faire nous appliquons la procédure décrite précédemment.

Un seul type d'élément non linéaire apparaît; c'est le transformateur modulé avec la causalité flux entrant comme décrit sur la figure II.28.

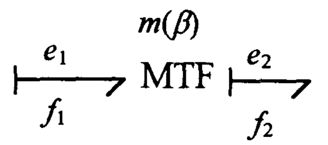
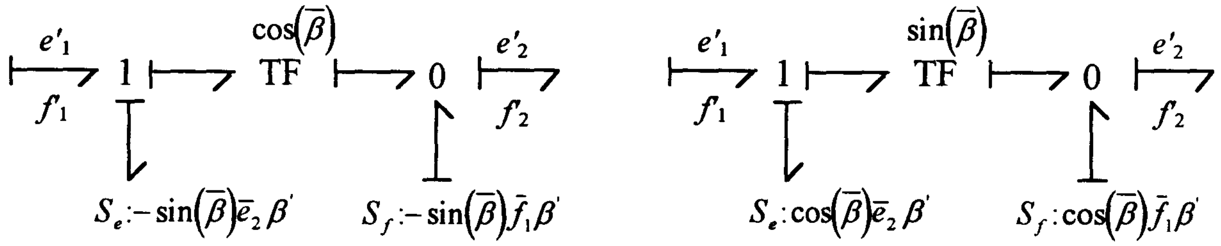


figure II.30 : Transformateur modulé avec la causalité flux entrant.

La fonction $m(\beta)$ est dans le cas présent soit un sinus soit un cosinus, et la variable β est soit θ_1, soit θ_2. La linéarisation de cet élément dans ce cas particulier est présenté sur les figures II.31 (a) et (b).

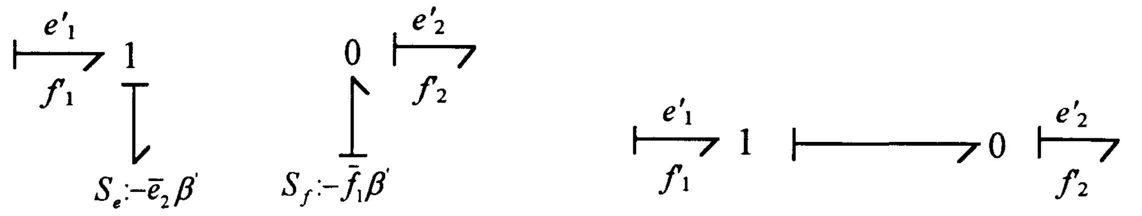


(a) (b)

figure II.31 : bond graph linéarisé de l'élément MTF décrit figure II.25 dans les deux cas possibles de valeur de la fonction $m(\beta)$

Nous allons étudier le système autour de sa position d'équilibre soit : $\bar{\theta}_1 = \pi/2$ et $\bar{\theta}_2 = \pi/2$.

La représentation des bond graphs linéarisés précédents dans ce cas précis est donnée figure II.32 (a) et (b).



(a) (b)

figure II.32 : (a) (b) Représentation des bond graphs linéarisés autour du point d'équilibre $\overline{\theta}_1 = \overline{\theta}_2 = \pi / 2$.

Les valeurs des sources dépendent encore des valeurs des efforts et des flux au point de fonctionnement entrant dans le transformateur modulé. Pour achever la procédure de linéarisation, il nous faut donc les calculer.

Pour cela un calcul des équations en suivant les chemins causaux, nous permet facilement d'obtenir les valeurs $\overline{e}_2$ et $\bar{f}_1$. Elles dépendent linéairement toutes deux des valeurs $\overline{p}_i$, $i \in [1;3]$ des variables d'état au point de fonctionnement. Or comme l'on se place ici autour du point d'équilibre, les valeurs constantes des variables d'état $\overline{p}_i$ $i \in [1;3]$ sont donc nulles. Les valeurs des sources modulées ne seront alors différentes de zéro qu'à la condition que la variable d'effort ou de flux qui leur est associée soit reliée à une source non modulée. C'est à dire que dans ce cas, la source d'effort sera non nulle si e_2 est directement relié à une source d'effort constante. Il en est de même pour la source de flux dont la valeur ne sera différente de zéro que si le flux f_1 est relié directement causalement avec une source non modulée.

La linéarisation du bond graph de la figure II.29 conduit donc au bond graph représenté dans la figure II.33.

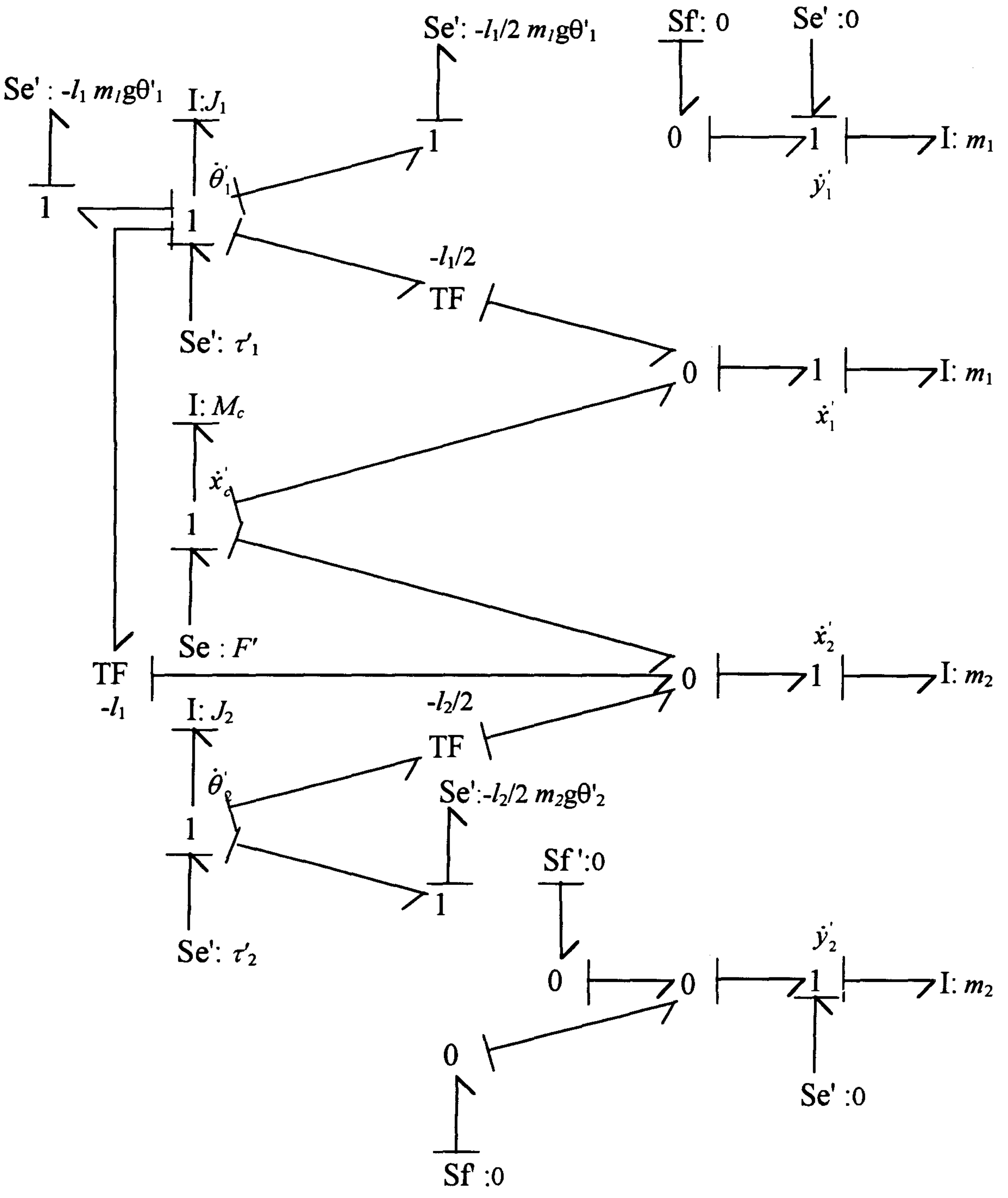


figure II.33 : bond graph du double pendule inversé linéarisé autour de l'équilibre instable.

Les équations liées aux éléments dynamiques en causalité intégrale sont alors:

$$\dot{p}'_1 = \tau'_1 + \frac{l_1}{2}\dot{p}'_5 + l_1\dot{p}'_6 \qquad \text{(II.43a)}$$

$$\dot{p}'_2 = F' - \dot{p}'_5 - \dot{p}'_6 \qquad \text{(II.43b)}$$

$$\dot{p}_3' = \tau_2' + \frac{l_2}{2}\dot{p}_5' \qquad \text{(II.43c)}$$

et les équations liées aux éléments dynamiques en causalité dérivée sont

$$p_4' = 0 \qquad \text{(II.44a)}$$

$$\frac{p_5'}{m_1} = \frac{p_2'}{M_c} \qquad \text{(II.44b)}$$

$$\frac{p_6'}{m_2} = \frac{p_2'}{M_c} - l_1\frac{p_1'}{J_1} - \frac{l_2}{2}\frac{p_3'}{J_2} \qquad \text{(II.44c)}$$

$$p_7' = 0 \qquad \text{(II.44d)}$$

II.5 Conclusion

Dans ce paragraphe, nous avons développé une méthode permettant de passer très rapidement d'un bond graph non linéaire à un bond graph linéaire, celui-ci ayant comme équation d'état, l'équation correspondant à la linéarisation du bond graph non linéaire. Pour cela nous nous sommes servi de l'approche de Karnopp consistant en la linéarisation séparée de chaque élément constitutif du bond graph à linéariser. L'étude de la linéarisation des différents types d'éléments a donc été rappelée en mettant l'accent surtout sur la linéarisation des éléments modulés. En effet comme il a été rappelé en introduction, ces éléments apparaissent très souvent dans les bond graphs et plus particulièrement ceux déduits des systèmes mécaniques, et ce sont eux qui apportent la principale difficulté pour l'étude des bond graphs non linéaires.

Nous avons alors vu que le bond graph obtenu après linéarisation des différents éléments non linéaires correspondait bien au bond graph linéarisé du bond graph initial. Afin d'illustrer cette démarche, nous l'avons appliquée sur plusieurs exemples et plus particulièrement au cas d'un double pendule inversé.

L'intérêt de cette approche est de pouvoir étudier très simplement des problèmes d'analyse de propriétés structurelles locales pour des systèmes non linéaires. Cependant cette procédure de linéarisation des bond graphs fait apparaître des bond graphs étant certes linéaires mais dont les propriétés structurelles ne peuvent tout de même pas être étudiées par les méthodes classiques à cause de la présence de sources modulées.

Le but du chapitre suivant est donc de trouver de nouvelles procédures permettant l'analyse de la commandabilité de ces bond graphs.

CHAPITRE III

Etude de la commandabilité d'un bond graph linéaire avec des sources modulées linéairement

CHAPITRE III

III.1 Introduction

Nous avons rappelé dans le premier chapitre la méthode permettant l'analyse structurelle de la propriété de commandabilité pour les modèles bond graph linéaires ne comportant pas de liens d'information. Le but de ce chapitre est d'étendre l'étude de la commandabilité aux systèmes comportant des sources modulées, la modulation étant réalisée par une combinaison linéaire de variables d'état ou de leur dérivées.

Un tel bond graph peut avoir plusieurs origines. Nous avons vu dans le paragraphe précédent que la linéarisation d'éléments modulés dans un bond graph conduit à un bond graph de ce type. Dans ce cas, la propriété de commandabilité ne sera que de nature locale.

Des bond graphs possédant des sources modulées peuvent apparaître également au moment de la modélisation. Considérons la représentation d'un transistor à jonction (figure III.1). Une source de courant commandée en tension apparaît. Le modèle bond graph est représenté par la figure III.2. De même, les transistors à effet de champs font apparaître des sources de tension commandées en tension.

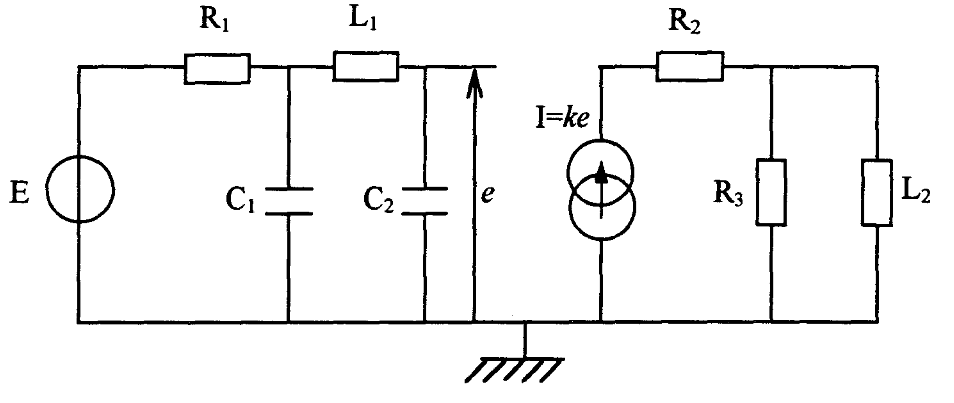


Figure III.1 : Exemple d'un système électrique à source commandée.

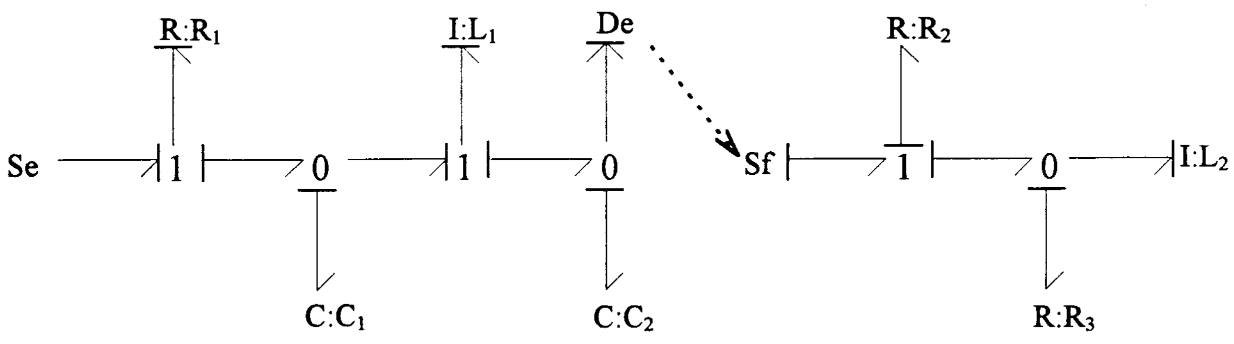


Figure III.2: Représentation bond graph de l'exemple de la figure III.1.

Ce chapitre est séparée en deux parties. La première concerne l'analyse de la commandabilité des bond graphs linéaires comportant des sources modulées mais n'ayant pas d'élément en causalité dérivée. Pour cela on développe d'abord une méthode d'analyse du rang structurel de la matrice d'état. La prise en compte des sources constantes conduit ensuite à une procédure, basée sur des manipulations causales, pour l'analyse de la propriété de commandabilité. La deuxième partie reprend les résultats ci dessus et les étend aux modèles bond graphs comportant des éléments en causalité dérivée. Tout au long de l'exposé de nombreux exemples illustrent les diverses procédures. L'étude de l'analyse de la commandabilité est réalisée entre autre sur l'exemple du double pendule inversé.

III.2 commandabilité structurelle des bond graphs linéaires à sources modulées linéairement sans élément en causalité dérivée

Nous étudions d'abord les modèles bond graphs dont les sources sont soit indépendantes, soit modulées par une combinaison linéaires des dérivées des variables d'état. La commande est alors constituée des valeurs des sources indépendantes. Nous étudierons ensuite le cas des bond graphs dont les sources sont soit indépendantes, soit modulées par une combinaison linéaire des variables d'état. Nous verrons enfin le cas général regroupant les deux cas précédents.

Dans ce paragraphe nous supposons l'absence d'éléments en causalité dérivée quand le bond graph est en causalité intégrale. Ce cas sera l'objet de la seconde partie de ce chapitre.

Tout d'abord nous proposons une définition permettant de fixer et de nommer la classe des modèles bond graphs que nous étudions.

Définition III.1 *Un modèle bond graph est appelé bond graph linéaire à sources modulées linéairement s'il vérifie les trois propriétés suivantes:*

- les caractéristiques des éléments R, C et I sont linéaires

- la structure est linéaire c'est à dire que le modèle bond graph ne comporte pas d'éléments MTF ou MGY modulés

- les valeurs des sources d'effort et de flux sont soit indépendantes (constantes, ou fonctions du temps), soit une combinaison linéaire de variables d'état, de leur dérivée ou de leur intégrale.

III.2.1 Commandabilité des bond graphs linéaires modulés par la dérivée de l'état

Le but de ce paragraphe est l'étude des bond graphs dont les sources sont soit indépendantes (c'est-à-dire à valeur constante ou dépendante du temps) soit modulées par des combinaisons linéaires des dérivées des variables d'état. La commande est constituée du vecteur u des valeurs des sources indépendantes.

Un bond graph de ce type conduit à une équation d'état de la forme (III.1).

$$\dot{x}_I = \mathbf{A}x_I + \mathbf{\Omega}\dot{x}_I + \mathbf{B}u \qquad \text{(III.1)}$$

où x_I est un vecteur de dimension n regroupant toutes les variables d'état associées aux éléments dynamiques I et C en causalité intégrale. Les coefficients de la matrice **A** résultent des chemins causaux directs entre les éléments C et I, ceux de la matrice **B** des chemins causaux directs entre les éléments C, I et les sources non modulées, enfin, ceux de la matrice **Ω** des chemins causaux directs entre les éléments C et I et les sources modulées. Pour calculer ces matrices il suffit de suivre la procédure d'obtention de l'équation d'état consistant à écrire les dérivées des variables d'état, que l'on trouve aux ports des éléments dynamiques en causalité intégrale, en fonction des différentes variables intervenant dans le bond graph [Rosenberg(1971)], ou d'écrire la matrice de structure et d'éliminer les variables intermédiaires.

Lorsque la matrice **I-Ω** est inversible, l'équation (III.1) peut s'écrire sous la forme (III.2). L'inversibilité de cette matrice est structurellement toujours vérifiée, en effet les termes de la matrice **Ω** dépendent tous des coefficients multipliant $\dot{x}_I$ dans les valeurs des sources modulées. L'écriture de l'équation (III.1) comme (III.2) est donc structurellement toujours possible.

$$\dot{x}_I = (\mathbf{I}-\mathbf{\Omega})^{-1}\mathbf{A}x_I + (\mathbf{I}-\mathbf{\Omega})^{-1}\mathbf{B}u \qquad \text{(III.2)}$$

Le système représenté par l'équation III.2 est structurellement commandable par la commande u si et seulement si $rang\left((\mathbf{I}-\mathbf{\Omega})^{-1}\mathbf{A} \middle| (\mathbf{I}-\mathbf{\Omega})^{-1}\mathbf{B}\right) = n$ ce qui équivaut à la condition rang(**A**|**B**)=n.

Il suffit donc d'étudier la commandabilité du bond graph dont l'équation d'état est $\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}U$ c'est à dire le modèle bond graph de départ sans les sources modulées. Nous proposons donc le théorème suivant:

Théorème III.1 *Un bond graph linéaire à sources modulées par la dérivée de l'état est structurellement commandable par les sources non modulées si et seulement si:*

a) Il existe au moins un chemin causal généralisé liant une source indépendante à chaque élément dynamique en causalité intégrale.

b) aucun élément dynamique I ou C ne reste en causalité intégrale quand on applique une causalité préférentielle dérivée et en dualisant si nécessaire les sources non modulées

Remarque Ce critère est identique à celui de la commandabilité des bond graphs linéaires sans source modulée.

III.2.2 Commandabilité structurelle des modèles bond graphs linéaires modulés par l'état

Le but de ce paragraphe est l'étude des bond graphs dont les sources sont soit indépendantes soit modulées par des combinaisons linéaires des variables d'état.

III.2.2.1 Forme de l'équation d'état

Considérons l'équation de structure de jonction définie par:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{i_1} \\ \dot{x}_{i_2} \\ D_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{21} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{i_1} \\ z_{i_2} \\ D_{out} \\ E_1 \\ E_2 \\ u \end{bmatrix} \qquad \text{(III.3)}$$

Le vecteur $x_i = \left[x_{i_1}^T \; x_{i_2}^T\right]^T$ contient les variables d'énergie associées aux éléments en causalité intégrale dans le bond graph en causalité intégrale. Les indices i_1 et i_2 correspondent respectivement aux éléments dynamiques admettant ou non la causalité dérivée quand on choisit préférentiellement une causalité dérivée.

Le vecteur u regroupe les variables correspondant aux sources indépendantes.

Le vecteur $E = \left[E_1^T \; E_2^T\right]^T$ regroupe les valeurs des sources modulées par des variables du vecteur x_{i_1} pour E_1 et x_{i_2} pour E_2. On a donc $E_1 = \Gamma_1 x_{i_1}$ et $E_2 = \Gamma_2 x_{i_2}$. Une autre formulation pour ces équations est : $E_1 = P_1 z_{i_1}$ et $E_2 = P_2 z_{i_2}$. Ce sont en effet les variables d'état complémentaires qui interviennent dans la modulation des sources lors de la linéarisation d'un bond graph non linéaire, cette forme apparaîtra donc naturellement dans la modulation des sources quand le bond graph est obtenu par linéarisation d'un bond graph non linéaire.

L'équation de structure de jonction (III.3) conduit, en éliminant les variables D_{in} et D_{out}, à l'équation (III.4).

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{i_1} \\ \dot{x}_{i_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{i_1} \\ z_{i_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1^1 \\ \mathbf{Q}_1^2 \end{pmatrix} \mathbf{E}_1 + \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_2^1 \\ \mathbf{Q}_2^2 \end{pmatrix} \mathbf{E}_2 + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{pmatrix} u \qquad \text{(III.4)}$$

soit, en remplaçant les sources modulées par leur valeur $\left(E_1 = P_1 z_{i_1} \text{ et } E_2 = P_2 z_{i_2}\right)$,

$$\dot{x} = \mathbf{M}z + \mathbf{N}z + \mathbf{B}u \qquad \text{(III.5)}$$

avec $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \mathbf{N}_{11} & \mathbf{N}_{12} \\ \mathbf{N}_{21} & \mathbf{N}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1^1\mathbf{P}_1 & \mathbf{Q}_2^1\mathbf{P}_2 \\ \mathbf{Q}_1^2\mathbf{P}_1 & \mathbf{Q}_2^2\mathbf{P}_2 \end{pmatrix}$

ou encore à

$$\dot{x} = \mathbf{M}^* z + \mathbf{B}u \qquad \text{(III.6)}$$

avec **M*=M+N.**

En tenant compte de la relation constitutive des éléments, z=**F**x, l'équation (III.6) s'écrit

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{K}x + \mathbf{B}u \tag{III.7}$$

ou peut aussi s'écrire en sommant les matrices **A** et **K**:

$$\dot{x} = \mathbf{A}^{*}x + \mathbf{B}u \text{ avec } \mathbf{A}^{*} = \mathbf{A} + \mathbf{K} \tag{III.8}$$

On retrouve alors la forme classique des équations d'état linéaires.

III.2.2.2 condition nécessaire et suffisante de commandabilité.

On peut énoncer le théorème donnant une condition nécessaire et suffisante de commandabilité pour un bond graph linéaire modulé par l'état. La théorie des systèmes linéaires indique que le système associé à l'équation (III.8) est structurellement commandable si et seulement si il vérifie le théorème III.2.

Théorème III.2 *Le système [A^{*} B] est structurellement à état commandable par les sources indépendantes u si et seulement si:*

a) Il existe au moins un chemin causal généralisé liant une source indépendante à chaque élément dynamique en causalité intégrale.

*b) le rang de la matrice A^{*} concaténée avec la matrice **B** est égal à la dimension de l'espace d'état, c'est à dire struct-rg$\left(\mathbf{A}^{*}|\mathbf{B}\right) = n$*

Ce théorème est simplement une reprise de la théorème I.3 donnant les conditions nécessaires et suffisantes de commandabilité structurelle pour les systèmes linéaires représentés par bond graph mais ne comportant pas de sources modulées. Seule change la condition d'atteignabilité des variables d'état par la commande.

Nous proposons alors à l'image du cas linéaire, une manipulation causale sur le modèle bond graph, permettant de déterminer directement le rang structurel de la matrice de structure ($\mathbf{A}^*$), puis celui de la matrice($\mathbf{A}^*|\ \mathbf{B}$).

III.2.2.3 Etude du rang structurel de A^*

Exemple d'introduction

L'équation régissant les dynamiques d'un modèle bond graph en causalité intégrale sans source indépendante est de la forme $\dot{x} = \mathbf{A}^* x$. La mise en causalité dérivée des éléments de stockage d'énergie équivaut à exprimer maintenant des composantes du vecteur x en fonction de celles du vecteur $\dot{x}$. Si l'on arrive à exprimer totalement le vecteur x en fonction du vecteur $\dot{x}$ avec les équations restantes, on a alors $x = \mathbf{A}^{*-1}\dot{x}$, donc comme la matrice $\mathbf{A}^*$ est inversible elle est de rang n.

Ainsi, soit le modèle bond graph de la figure III.3:

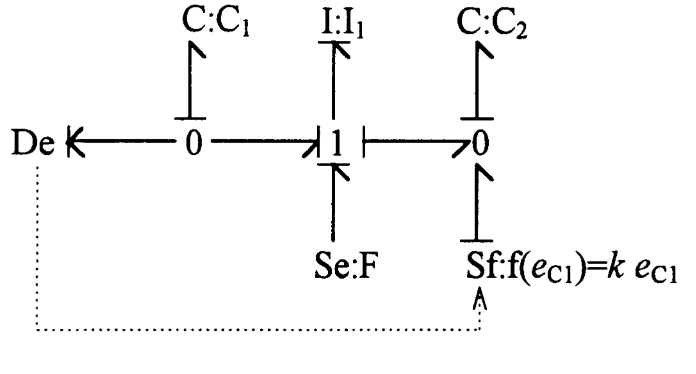


Figure III.3: Modèle bond graph en causalité intégrale.

La mise en causalité dérivée peut conduire au modèle bond graph de la figure III.4.

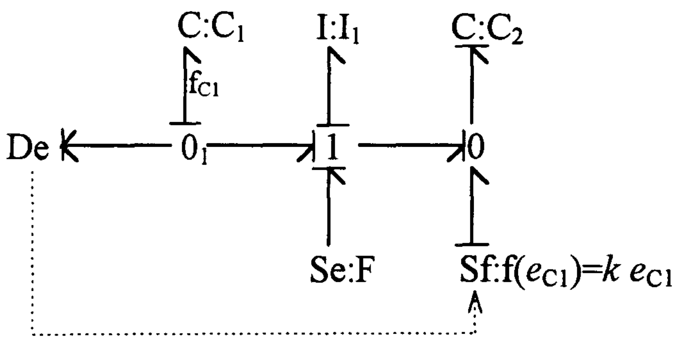


Figure III.4: Modèle bond graph en causalité dérivée.

Un élément dynamique conserve la causalité intégrale. Ce modèle bond graph ne permet donc pas d'exprimer directement le vecteur x en fonction du vecteur $\dot{x}$.

A la jonction 0_1, l'équation est f_{C1}=-f(e_{C1})+f_{C2}. On veut exprimer f(e_{C1}) en fonction de f_{C1} et f_{C2}. Cette opération revient à inverser la causalité sur C_1, et dualiser la source de flux (figure III.5), qui devient Se=Sf*.

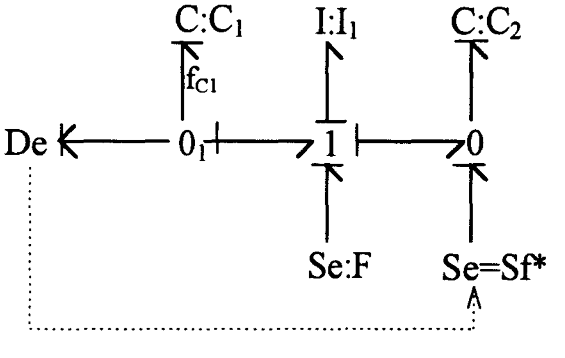


Figure III.5: Modèle bond graph en causalité dérivée avec dualisation de la source de flux.

L'inversion de la fonction f qui n'est qu'une multiplication de la variable e_{C1} par une constante, nous permet donc d'exprimer le vecteur état x en fonction du vecteur dérivée de l'état $\dot{x}$. La matrice A* est donc inversible et le rang bond graph de A* est de 3. L'expression du vecteur x en fonction du vecteur $\dot{x}$ a été possible car l'élément conservant une causalité intégrale était connecté causalement à une source modulée par une variable associée à un élément conservant aussi une causalité intégrale. Dans le cas présent c'est le même élément. C'est cette propriété que nous généralisons dans cette partie.

Propriété III.1

Soit t', le nombre d'éléments dynamiques restant en causalité intégrale lorsque:

(a) la causalité dérivée est imposée sur le modèle bond graph.

(b) Une dualisation de sources modulées est appliquée pour éliminer les causalités intégrales restantes. La dualisation d'une source modulée n'est possible que si, dans le bond graph en causalité dérivée, un élément en causalité intégrale El_j est connectée par un chemin causal (propre ou impropre) à un détecteur modulant cette source. Les signaux partant de ce détecteur vers d'autres sources sont ensuite supprimés. De plus, l'élément El_j ne peut plus être réutilisé pour permettre la dualisation d'une autre source.

Alors le rang de la matrice $\mathbf{A^*}$ *est égal à* n-t'

Démonstration : cf. annexe V.

Remarque : Le choix de la mise en causalité dérivée ne doit pas entraîner l'apparition d'une structure de jonction non solvable [Rosenberg(1979)]. Si tel est le cas, il faut garder plus d'éléments en causalité intégrale (voir exemple 1).

Nous allons voir deux exemples illustrant les différents cas dans lesquels on peut dualiser une source modulée.

Exemple 1

Considérons le modèle bond graph de la figure III.6.

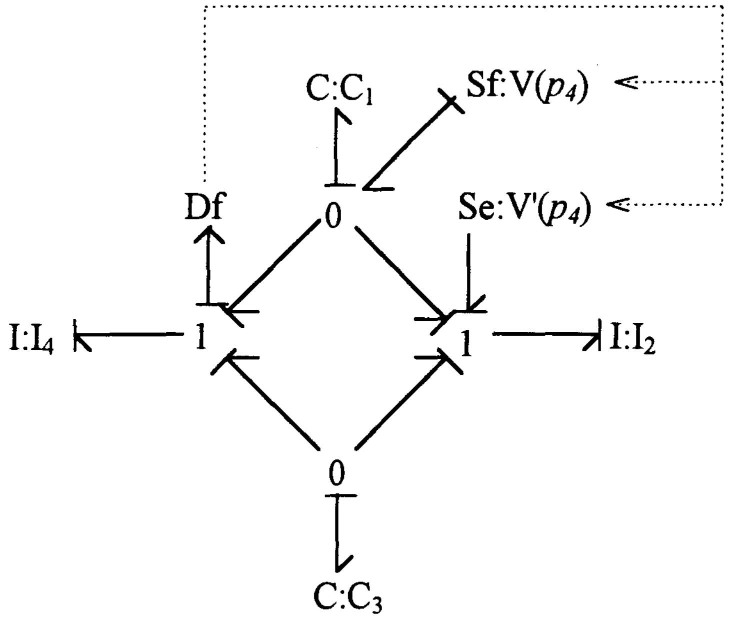


Figure III.6 : Modèle bond graph en causalité intégrale.

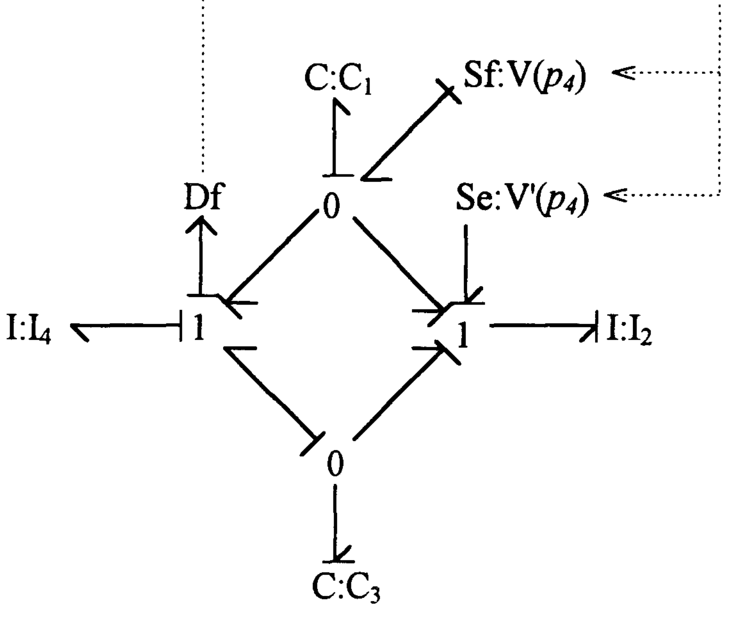


Figure III.7 : Modèle bond graph en causalité dérivée.

La figure III.7 représente le même modèle en causalité dérivée. Deux éléments doivent conserver la causalité intégrale pour éviter une boucle de causalité non solvable. Nous avons choisi de laisser les éléments C_1 et I_2 en causalité intégrale.

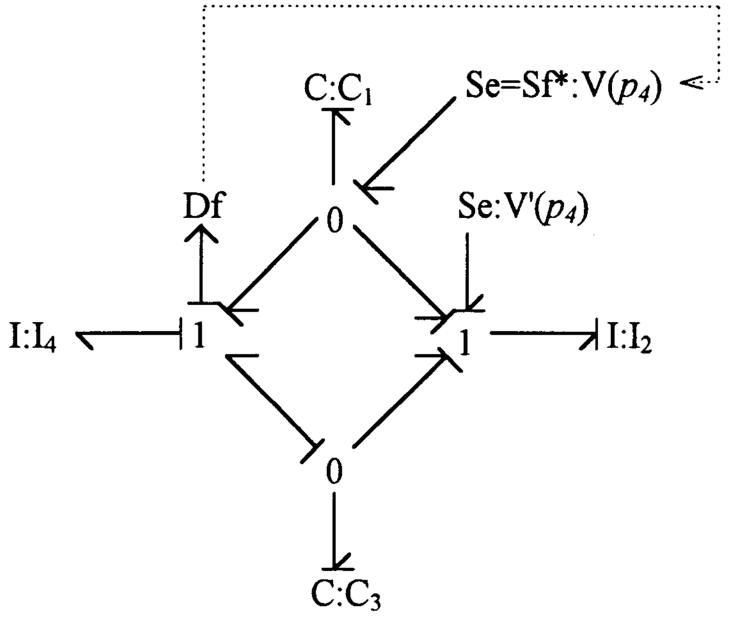


Figure III.8: Modèle bond graph pour le calcul du rang de A*.

Le détecteur étant causalement relié à un élément encore en causalité intégrale (I_2), la source Sf qu'il module peut être dualisée. Dans la figure III.8 nous avons pu, grâce à la dualisation de la source de flux, mettre l'élément C_1 en causalité dérivée. Le signal entre le détecteur et la source d'effort étant alors supprimé conformément à la propriété III.1, il n'est plus possible de la dualiser et donc de mettre l'élément I_2 en causalité dérivée. Le rang de la matrice A* est donc de trois.

Exemple 2

Considérons le circuit de la figure III.9 avec deux transistors à jonction représentés par les sources de courant modulées. Le modèle bond graph de ce circuit est alors celui de la figure III.10.

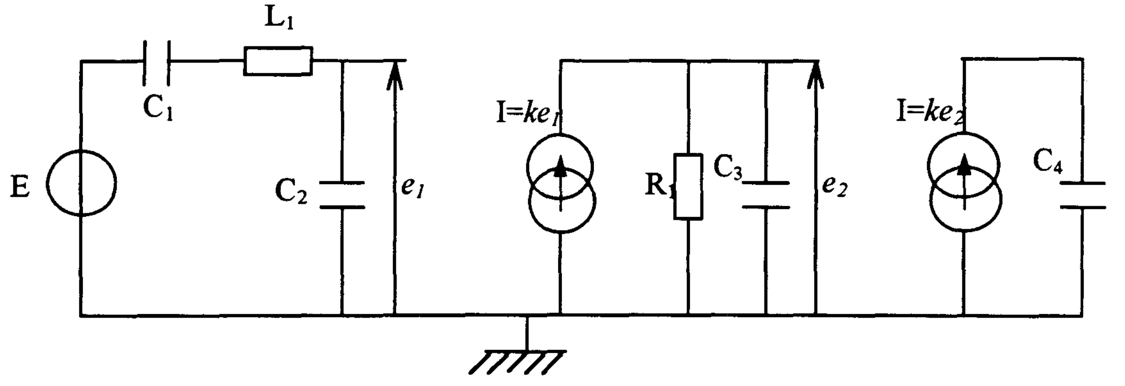


Figure III.9: Exemple d'un système électrique avec deux sources commandées.

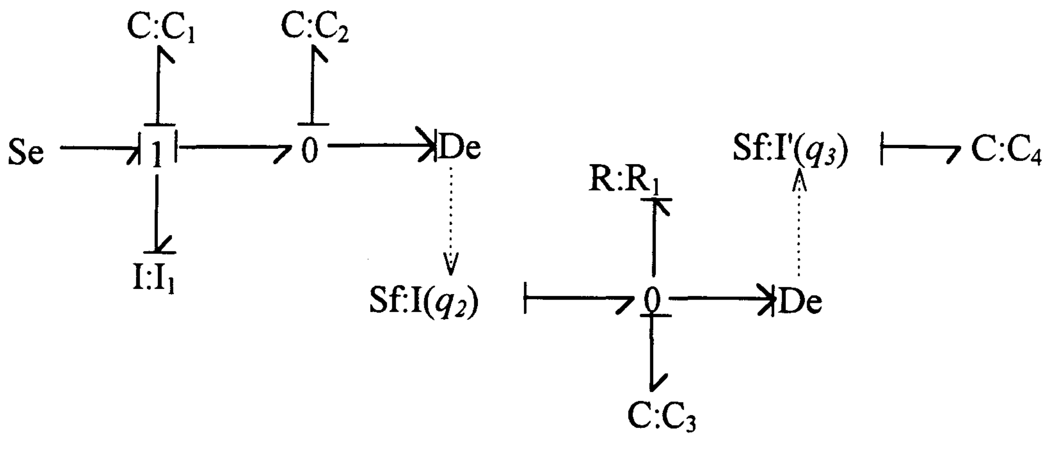


Figure III.10: Modèle bond graph.

La figure III.11 représente le même modèle en causalité dérivée. Deux éléments doivent rester en causalité intégrale.

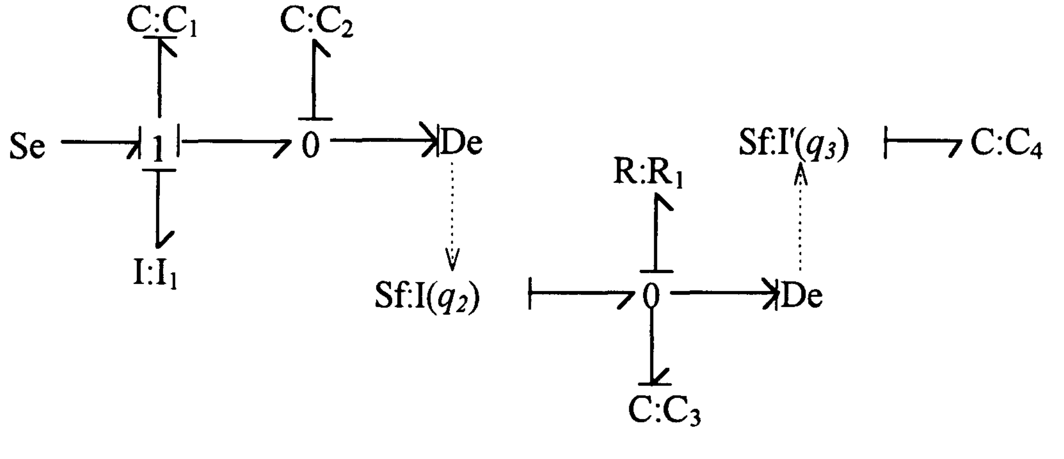


Figure III.11: Modèle bond graph en causalité dérivée.

L'élément en causalité intégrale C_2 étant relié, par un chemin passant par les deux liens d'information, à la source de flux $I'(q_3)$, on peut dualiser celle-ci. Cette dualisation permet de mettre l'élément C_4 en causalité dérivée. Le rang de A^* est donc de quatre car seul C_2 reste en causalité dérivée.

III.2.2.4 Etude du rang de $(A^*|B)$

L'étude du rang de $(\mathbf{A}^*|\mathbf{B})$ se fera en suivant la procédure suivante:

Procédure

Etude du rang de $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$.

Cette étude est réalisée en mettant le bond graph en causalité dérivée et en dualisant les sources si nécessaire. Si aucun élément ne reste en causalité intégrale alors on sait que bg-rang$(\mathbf{A}|\mathbf{B})=n$ donc bg-rang$(\mathbf{A}^*|\mathbf{B})=n$ et le système est structurellement commandable. Si au moins un élément reste en causalité intégrale il faut étudier plus précisément le bg-rang$(\mathbf{A}^*|\mathbf{B})$.

Etude du rang de $(\mathbf{A}^*|\mathbf{B})$.

Il faut vérifier dans un premier temps que le système est bien commandable si les sources modulées sont considérées indépendantes. Il suffit pour cela de mettre le bond graph en causalité dérivée en pouvant dualiser toutes les sources, indépendantes ou non. Si cette condition est vérifiée on peut continuer l'étude du rang de $(\mathbf{A}^*|\mathbf{B})$, sinon on peut conclure que le système n'est pas commandable.

Pour finir l'étude du rang de $(\mathbf{A}^*|\mathbf{B})$, on applique alors la propriété III.2.

Propriété III.2

Soit t'_s le nombre d'éléments dynamiques restant en causalité intégrale lorsque:

(a) la causalité dérivée est imposée sur le modèle bond graph.

(b) Une dualisation des sources modulées et non modulées est appliquée pour éliminer les causalités intégrales restantes. La dualisation d'une source modulée est possible dans les mêmes conditions que dans le calcul de t' mais aussi si le détecteur modulant cette source est connecté par un chemin causal propre à une source non modulée. Les signaux partant du détecteur modulant la source que l'on dualise, vers d'autres sources sont aussi alors supprimés. La dualisation des sources non modulées n'est ensuite soumise à aucune contrainte.

Alors le rang de la matrice $(\mathbf{A}^*|\mathbf{B})$ *est égale à* $n - t'_s$

Démonstration : cf. annexe VI.

Soit le modèle bond graph suivant.

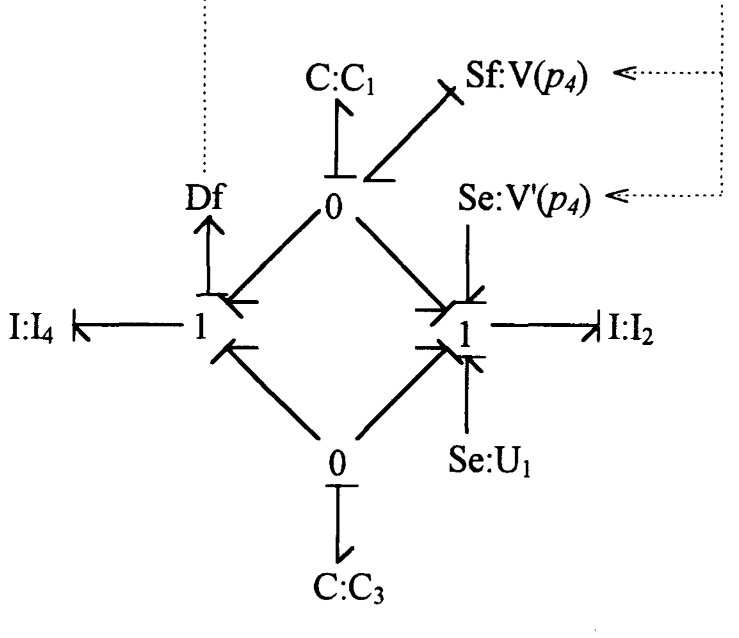


Figure III.12 : Modèle bond graph.

Nous avons vu précédemment que la dualisation de la source de flux indique que le rang de la matrice A* pour ce bond graph est de trois. Le bond graph obtenu à l'issu de cette dualisation est donné par la figure III.13.

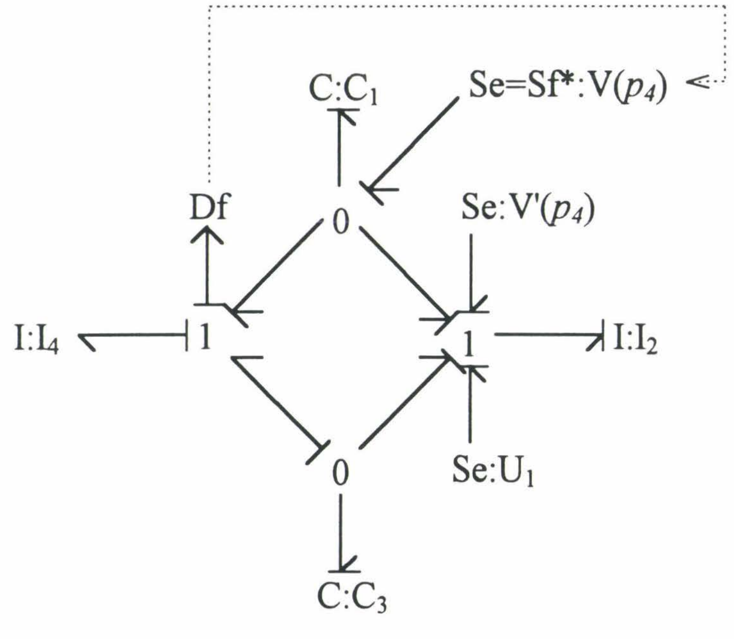


Figure III.13: Modèle bond graph pour le calcul du rang de **(A*|B)**

On constate alors que l'élément I_2 peut être mis en causalité dérivée grâce à la dualisation de la source indépendante U_1. Le rang de la matrice (A*|B) est donc de quatre et comme tous les éléments dynamiques sont atteignables par l'entrée U_1, le système est commandable par cette entrée.

III.2.3 Commandabilité des bond graphs linéaires modulés par l'intégrale de l'état

Le but de ce paragraphe est l'étude des bond graphs dont les sources sont soit indépendantes (c'est-à-dire à valeur constante ou dépendante du temps) soit modulées par des combinaisons linéaires des intégrales des variables d'état. La commande est constituée du vecteur u des valeurs des sources indépendantes.

Un bond graph de ce type conduit à une équation d'état de la forme (III.9).

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{i_1} \\ \dot{x}_{i_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{i_1} \\ x_{i_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{pmatrix} \int x_{i_1} dt + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{pmatrix} u \tag{III.9}$$

où x_i est un vecteur de dimension n regroupant toutes les variables d'état associées aux éléments dynamiques I et C en causalité intégrale, l'indice 1 désignant les états dont la valeur de l'intégrale intervient dans la modulation des sources modulées. Les coefficients de la matrice $\mathbf{\Omega}$ proviennent des chemins causaux directs entre les éléments C et I et les sources modulées.

La propriété suivante nous donne une condition nécessaire de commandabilité structurelle du système.

Propriété III.3 *Pour qu'un bond graph linéaire à sources modulées par l'intégrale de l'état soit structurellement commandable par les sources non modulées, il est nécessaire que:*

a) Il existe au moins un chemin causal généralisé liant une source indépendante à chaque élément dynamique en causalité intégrale.

b) L'application d'une causalité préférentielle dérivée sur les éléments dynamiques n'intervenant pas dans le vecteur x_{i1} *conduit à un bond graph dont les éléments dynamiques encore en causalité intégrale (y compris ceux intervenant dans le vecteur* x_{I1}*) sont tous reliés causalement à des éléments du vecteur* x_{I2} *encore en causalité intégrale, ou à des sources modulées ou non. Les éléments auxquels ils sont reliés doivent de plus être tous différents et les sources dépendantesdoivent être modulées par des variables différentes.*

démonstration Annexe VII

III.2.4 Cas général

Les bond graphs linéaires à sources modulées soit par l'état, soit par la dérivée de l'état, s'étudient en regroupant simplement les deux cas précédents. Soit un tel bond graph; l'étude de sa commandabilité se déroule de la façon suivante:

(a) Mise en causalité dérivée du modèle bond graph.

(b) On dualise les sources modulées pour éliminer les causalités intégrales restantes. Cette dualisation des sources est soumise à une contrainte sur le détecteur d'où part le lien d'information les modulant. La dualisation d'une source modulée n'est possible que .si

- un élément en causalité intégrale El_j est connecté par un chemin causal (propre ou impropre) au détecteur modulant la source. Les signaux partant de ce détecteur vers d'autres sources sont ensuite supprimés. De plus, l'élément Elj ne peut plus être réutilisé pour permettre la dualisation d'une autre source.

- ou si il existe une source non modulée connectée par un chemin causal propre au détecteur modulant la source modulée. Les signaux partant du détecteur modulant la source que l'on dualise vers d'autres sources sont aussi alors supprimés.

(c) On dualise le nombre maximal de sources non modulées pour éliminer les causalités intégrales restantes. La dualisation de ces sources n'est soumise à aucune contrainte.

Si à l'issu de cette procédure il ne reste plus d'éléments dynamiques en causalité intégrale alors on peut conclure que le système est structurellement commandable par les sources indépendantes.

Si maintenant le modèle bond graph possède des sources modulées par l'intégrale de l'état, on mène la même étude que ci-dessus sans dualiser les éléments dont l'intégrale de la variable d'état associée module une source. Les éléments restant en causalité intégrale doivent alors vérifier la condition b) de la propriété III.3.

III.2.5 Exemple

Considérons le modèle mécanique représenté sur la figure III.10. Il consiste en un chariot pouvant se déplacer sans frottement. A celui-ci sont attachés deux ressorts dont un est relié, par son autre extrémité, à un point fixe et l'autre à un point dont la vitesse peut s'écrire à cause d'un retour d'état par exemple, comme étant fonction d'une variable x. Cette variable sera égale soit à q_1, l'allongement du premier ressort, à q_2, l'allongement du second ressort ou enfin à p_1 la quantité de mouvement du chariot.

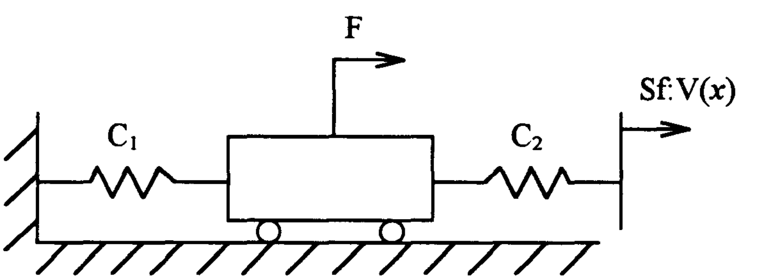


Figure III.14: Exemple mécanique simple.

Le modèle bond graph du système dynamique est représenté en causalité intégrale sur la figure III.17 .

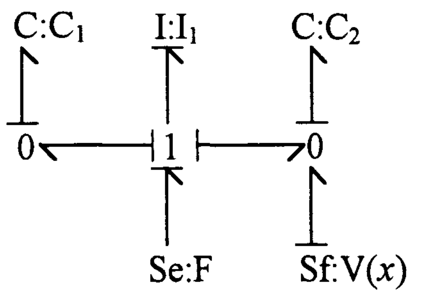


Figure III.15: Bond graph du système mécanique de la figure III.14.

Nous allons étudier maintenant la commandabilité de ce système pour les différents cas de modulation de la source, c'est à dire que la fonction V(x) est égale à k_1q_1 puis à k_2q_2 et enfin à k_3p_1. La méthode analytique classique d'étude des rangs des matrices de structure et de commande nous permettra de confirmer les résultats obtenus par la méthode d'analyse causale du bond graph développée précédemment.

a Méthode analytique

Si la variable x est égale à q_1, la procédure de suivi des chemins causaux donne l'équation d'état suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{p}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\mathrm{I}_1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\mathrm{I}_1} \\ -\frac{1}{\mathrm{C}_1} & -\frac{1}{\mathrm{C}_2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} F + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \end{pmatrix} \qquad \text{(III.10)}$$

soit en simplifiant l'écriture

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{p}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\mathrm{I}_1} \\ k_1 & 0 & \frac{1}{\mathrm{I}_1} \\ -\frac{1}{\mathrm{C}_1} & -\frac{1}{\mathrm{C}_2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} F \qquad \text{(III.11)}$$

de même si la variable x est égale à q_2, on a

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{p}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\mathrm{I}_1} \\ 0 & k_2 & \frac{1}{\mathrm{I}_1} \\ -\frac{1}{\mathrm{C}_1} & -\frac{1}{\mathrm{C}_2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} F \tag{III.12}$$

et enfin si la variable x est égale à p_1, on a

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{p}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\mathrm{I}_1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\mathrm{I}_1} + k_3 \\ -\frac{1}{\mathrm{C}_1} & -\frac{1}{\mathrm{C}_2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} F \tag{III.13}$$

On voit alors par l'étude du rang structurel de la matrice $\left(\mathbf{A}^{*}|\mathbf{B}\right)$ que ce système est commandable par la force F, dans les cas où la source de flux est modulée par les allongements des ressorts mais qu'il ne l'est pas si la source est modulée par la quantité de mouvement du chariot.

b Analyse de la commandabilité structurelle par l'approche bond graph

La première étape consiste à imposer la causalité dérivée sur le modèle bond graph. On voit alors qu'il reste toujours au moins un élément C en causalité intégrale. Les deux affectations possibles de la causalité pour le modèle bond graph sont représentées sur la figure III.18.

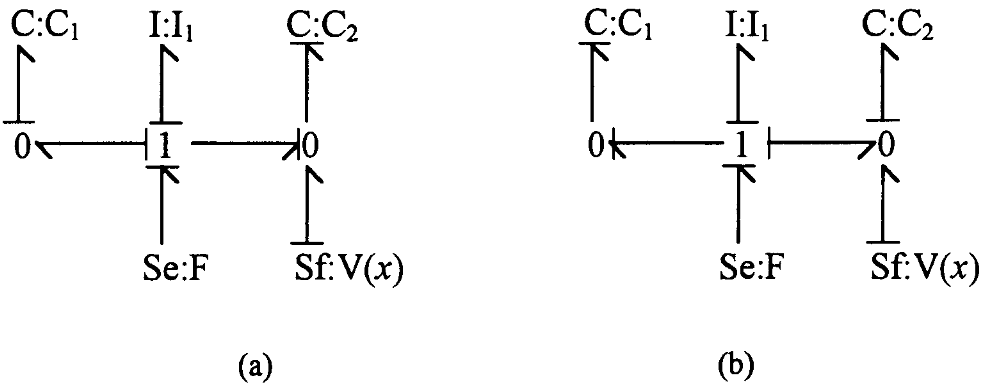


Figure III.16: Deux affectations possibles de causalité dérivée.

L'hypothèse III.1 impose que si une source est modulée par une variable associée à un élément passant en causalité dérivée, elle ne doit pas être reliée causalement dans le bond graph en causalité intégrale, à un élément passant en causalité dérivée.

Cette condition n'est contraignante que si la variable x représente q_2. Comme dans le bond graph en causalité intégrale la source modulée est reliée à l'élément C_2, la mise en causalité dérivée doit laisser cet élément C_2 en causalité intégrale (Figure III.18b). Si la variable x représente p_1 ou q_1, les deux choix (a) et (b) de mise en causalité dérivée sont possibles, nous avons choisi la situation de la figure III.16 a).

<u>Cas $x = q_1$</u>

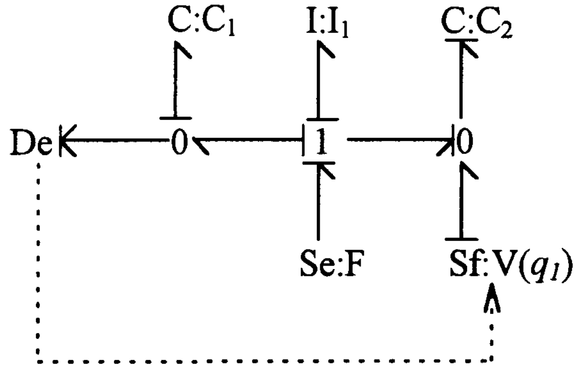


Figure III.17 : Bond graph en causalité dérivée si $x = q_1$.

Le détecteur modulant la source Sf est reliée causalement à un élément en causalité intégrale (C_1). On peut donc dualiser cette source. Tous les éléments dynamiques sont alors en causalité dérivée. Le rang de A* est donc de 3, et, la condition d'atteignabilité étant vérifiée, le système est structurellement commandable par la source d'effort F.

Cas $x = q_2$

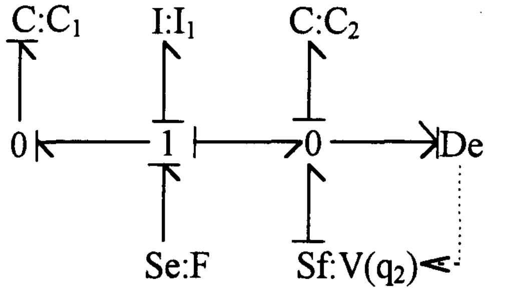


Figure III.18 : Bond graph en causalité dérivée si $x = q_2$

Le détecteur modulant la source est reliée causalement à un élément en causalité intégrale (C_2). On peut donc dualiser cette source. Tous les éléments dynamiques sont alors en causalité dérivée. Le rang de A* est donc de 3, et le système est structurellement commandable par la source d'effort.

Cas $x = p_1$

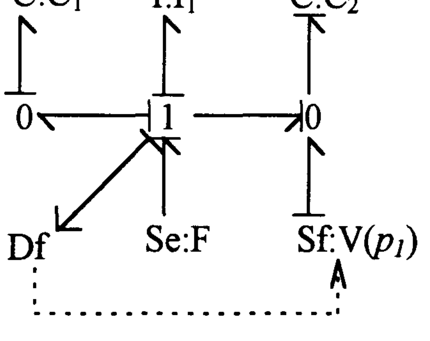


Figure III.19 : Bond graph en causalité dérivée si $x = p_1$

Le détecteur n'est pas relié à un élément en causalité intégrale. La dualisation de la source modulée est donc interdite. Le rang de A* est donc de deux. Une dualisation de la source d'effort indépendante ne permettant pas non plus de mettre tous les éléments en causalité dérivée, le rang de (A*|B) est égal à deux, et le système n'est pas commandable.

On retrouve donc bien la même conclusion que par l'approche analytique.

III.3 Etude de la commandabilité des bond graphs modulés linéairement comportant des éléments en causalité dérivée.

Dans ce paragraphe nous allons étendre les résultats précédents au cas des bond graphs comportant des éléments en causalité dérivée. Une hypothèse est toutefois nécessaire pour que l'équation d'état déduite du bond graph soit bien linéaire.

Hypothèse III.2 *Les éléments (I,C) en causalité dérivée ne sont pas liés par un chemin causal propre ou impropre, ni entre eux, ni aux sources indépendantes.*

Nous pouvons maintenant reprendre la même approche que dans le cas précédent (sans éléments dynamiques en causalité dérivée dans le bond graph en causalité intégrale). Nous allons donc simplifier le cas des bond graphs comportant des sources modulées par la dérivée de l'état puis nous donnerons la propriété permettant l'analyse du rang de (**A***|**B**).

Propriété III.4 *L'étude de la commandabilité d'un bond graph modulé linéairement avec des éléments en causalité dérivée, est équivalente à l'étude de la commandabilité du même bond graph sans les sources modulées par les dérivées de l'état.*

démonstration

Un bond graph modulé linéairement a pour équation d'état

$$\dot{x}_i = \mathbf{M}z_i + \mathbf{Q}E_i + \mathbf{Q'}E_i^{'} + \mathbf{T}E_d + \mathbf{T'}E_d^{'} + \mathbf{B}u + \mathbf{R}\dot{z}_d \tag{III.14}$$

L'indice i (respectivement d) est adjoint aux variables associées aux éléments en causalité intégrale (respectivement dérivée). Ces variables sont notées x pour les variables d'état et z pour les variables d'état complémentaires. On a z_i=$\mathbf{F}_i x_i$ et z_d=$\mathbf{F}_d x_d$.

Le vecteur u regroupe les valeurs des sources indépendantes.

Le vecteur E_i regroupe les valeurs des sources modulées par des variables du vecteur x_i, c'est à dire E_i=$\mathbf{P}z_i$.

Le vecteur E'_i regroupe les valeurs des sources modulées par les dérivées des variables du vecteur x_i, c'est à dire $E_i^{'} = \mathbf{P'}\dot{x}_i$.

Le vecteur E_d regroupe les valeurs des sources modulées par des variables du vecteur x_d, c'est à dire E_d=$\mathbf{S}z_d$.

Le vecteur E'_d regroupe les valeurs des sources modulées par les dérivées des variables du vecteur x_d, c'est à dire $E_d^{'} = \mathbf{S'}\dot{x}_d$.

Nous avons supposé (Hypothèse III.2) que les éléments (I,C) en causalité dérivée ne sont pas liés par un chemin causal propre ou impropre, ni entre eux, ni aux sources indépendantes. On a alors $z_d = \mathbf{V}z_i$.

L'équation (III.14) conduit alors si $(\mathbf{I\text{-}Q'P'\text{-}T'S'V} - \mathbf{RVF}_d)$ est inversible, condition qui n'est pas une contrainte structurelle, à l'équation (III.15).

$$\dot{x}_i = \left(\mathbf{I} - \mathbf{Q'P'} - \mathbf{T'S'V} - \mathbf{RVF}_i\right)^{-1}\left(\mathbf{M} + \mathbf{QP} + \mathbf{TSV}\right)z_i + \left(\mathbf{I} - \mathbf{Q'P'} - \mathbf{T'S'V} - \mathbf{RVF}_i\right)^{-1}\mathbf{B}u \tag{III.15}$$

avec $\mathbf{I}$ la matrice identité d'ordre n, la dimension de l'état.

La commandabilité du système est donc donnée par le rang de la matrice ((**M**+**QP**+**TSV**)|**B**).

L'équation du même bond graph sans les sources modulées par les dérivées de l'état, est donnée par (III.16)

$$\dot{x}_i = \mathbf{M}z_i + \mathbf{Q}E_i + \mathbf{T}E_d + \mathbf{B}u + \mathbf{R}\dot{z}_d \tag{III.16}$$

En remplaçant $\dot{z}_d$ par $\mathbf{VF}_i\dot{x}_i$ et en factorisant, on retrouve que la commandabilité de ce système est donnée par le rang de la matrice ((**M**+**QP**+**TSV**)|**B**).

Nous pouvons alors énoncer le théorème donnant le rang structurel de la matrice (**A***|**B**) dans le cas général.

Propriété III.5

Le rang de la matrice $(\mathbf{A}^*|\mathbf{B})$ *est égale à* $n - t_s^{'}$

où n : dimension du vecteur d'état

t'_s a été défini dans le cas sans éléments en causalité dérivée (Propriété III.2).

La prise en compte de ces éléments ne change donc en rien la procédure d'étude de la commandabilité.

Démonstration Immédiat depuis la propriété III.4.

Exemple Soit le bond graph suivant comportant un élément C en causalité dérivée, la variable d'état liée à cet élément venant moduler une source de flux.

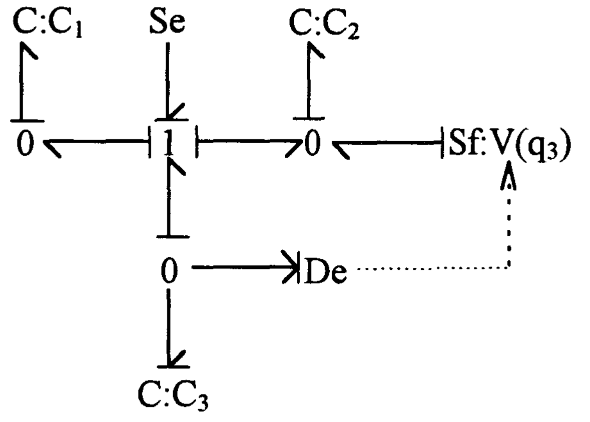


Figure III.20 : Bond graph avec un élément en causalité dérivée.

La mise en causalité dérivée préférentielle sans dualisation de la source indépendante Se de ce bond graph ne change rien.

Comme il existe un chemin causal entre l'élément en causalité intégrale C_1 et le détecteur d'effort, la source qu'il module peut être dualisée ce qui permet de mettre l'élément C_2 en causalité dérivée. La dualisation de la source indépendante étant impossible, l'élément C_1 reste en causalité intégrale et le système n'est pas commandable.

III.4 Le double pendule inversé

Dans cet exemple nous allons reprendre l'exemple du double pendule inversé qui a été décrit dans le paragraphe II.2.4. Ce système présente en effet suffisamment de non linéarités pour engendrer un problème non trivial quand une approche par linéarisation est réalisée. Le problème de l'étude d'un tel système a déjà été réalisée grâce à une approche symbolique dans [Larcombe (1992)]. La conclusion de cet article était que le système était localement commandable autour du point d'équilibre, avec comme seule entrée la force appliquée sur le chariot. Nous allons donc comparer ces résultats avec ceux que nous allons obtenir par notre étude directe sur le bond graph.

L'étude de la linéarisation du double pendule inversé a conduit au bond graph linéarisé de la figure II.33, ou, en lui ajoutant explicitement les liens d'informations , celui donné figure III.23. Etudions la propriété de commandabilité de ce bond graph modulé linéairement.

Pour cela le bond graph linéarisé de la figure III.21 doit être mis en causalité dérivée. Si l'on utilise les trois sources τ_1, τ_2 et F pour la commande, ces trois sources pourront être dualisées, et par conséquent les trois éléments en causalité intégrale pourront être mis en causalité dérivée et le système sera commandable.

On essaie maintenant de commander le système avec moins d'entrées. On peut remarquer que l'élément inertiel attaché au mouvement du chariot (I:*Mc*) n'est relié à aucune source modulée. Pour pouvoir mettre cet élément en causalité dérivée il faut donc obligatoirement pouvoir dualiser la source d'effort F. Considérons donc que nous ne commandons ce système que par cette source seule (les couples τ_1 et τ_2 sont supprimés).

On vérifie bien tout d'abord que la condition d'atteignabilité est satisfaite : il existe un chemin causal entre la source d'effort F' et les éléments I:Mc, I:J1 par un chemin causal passant par I:m1,et I:J2 par un chemin causal passant par I:m2. Le bond graph doit ensuite être mis en causalité dérivée. Cette opération laisse les trois éléments dynamiques inertiels (I:*Mc*, I:J1, I:J2) encore en causalité intégrale. Le bond graph est donc le même que celui de la figure III.21.

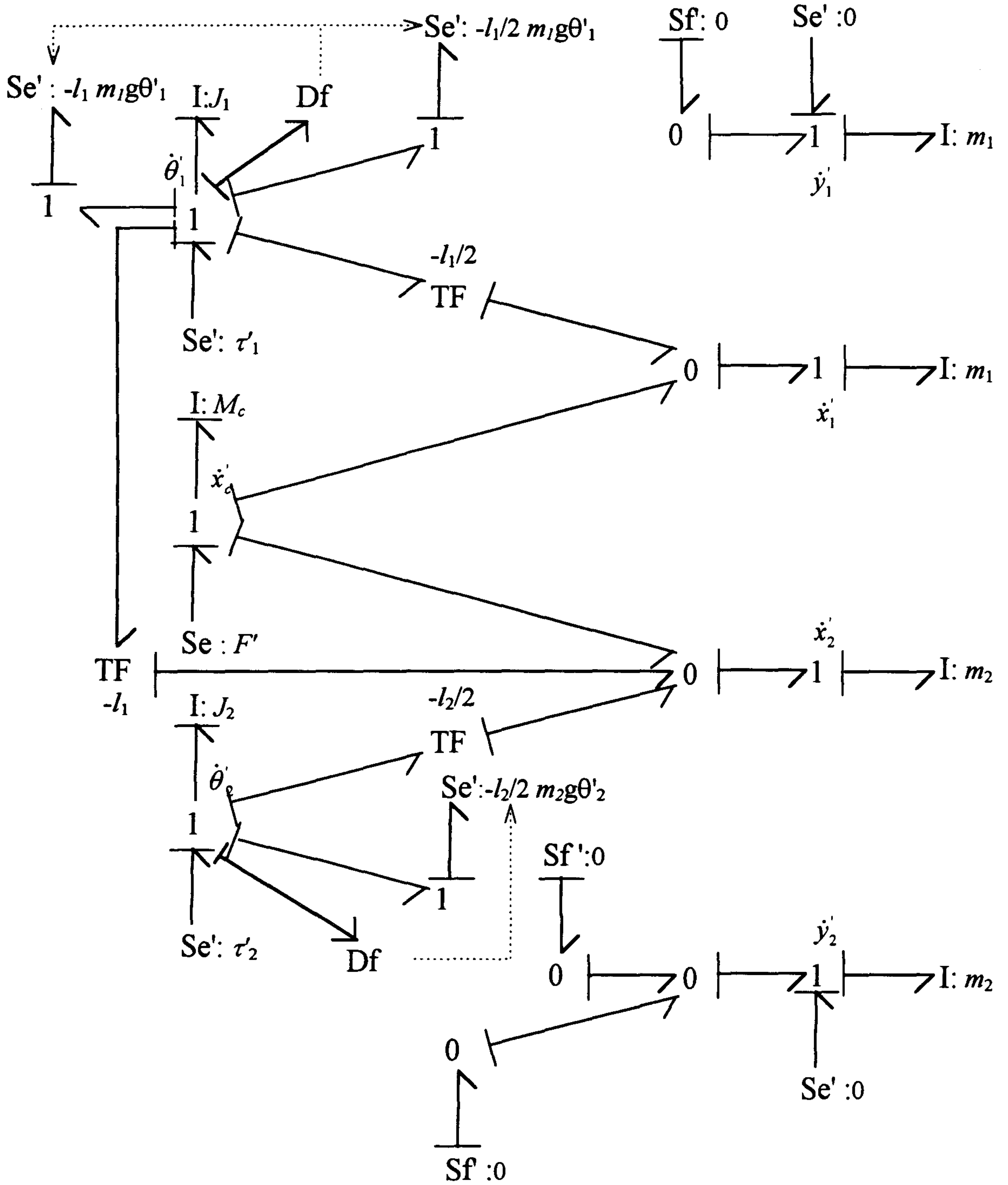


Figure III.21: bond graph linéarisé du double pendule inversé.

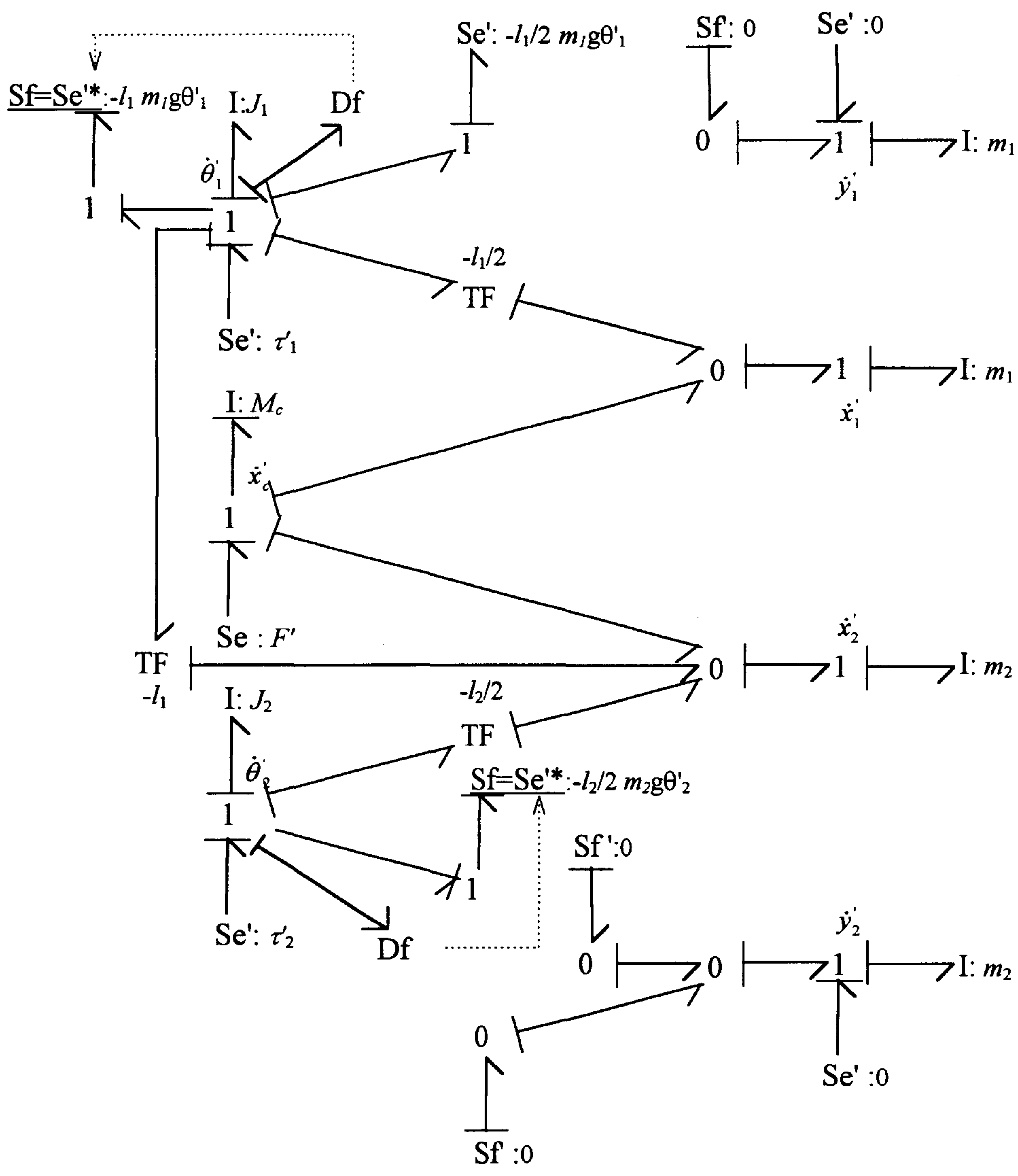


Figure III.22: Dualisation des sources modulées.

On constate alors que les détecteurs sont liés à des éléments en causalité intégrale. Chacun de ces détecteurs permet de dualiser une source modulée. Les éléments dynamiques I:J1 et I:J2 peuvent alors tous être mis en causalité dérivée (figure III.24). L'élément inertiel I:Mc peut être mis enfin en causalité dérivée grâce à la dualisation de la source d'effort F'.

Nous pouvons alors conclure que le double pendule inversé linéarisé autour du point d'équilibre instable est commandable localement par la seule force F et que l'utilisation de cette force est indispensable pour la commandabilité. Nous retrouvons donc bien le résultat trouvé par une méthode symbolique.

III.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé la procédure d'étude de la propriété de commandabilité structurelle des bond graphs modulés linéairement, qu'ils comportent ou non des éléments en causalité dérivée. Cette méthode est basée sur des manipulations causales et des suivis de chemin qui nous permettent de calculer les rangs structurels des matrices intervenant dans le critère de Kalman. L'intérêt d'étudier de tels bond graphs est grand. En effet, nous avons vu dans le deuxième chapitre que la linéarisation d'un bond graph entraîne l'apparition de sources modulées dans le bond graph linéarisé.

Cependant le domaine d'application de cette étude ne s'arrête pas juste aux bond graphs résultant d'une linéarisation. En effet des bond graphs comportant des sources modulées apparaissent aussi naturellement lors de la modélisation de certains systèmes. Les cas des transistors ainsi que de la plupart des composants actifs sont évidents mais l'on trouve des sources modulées dans d'autres cas. On peut citer comme exemple le cas de la tension de seuil d'une diode qui est commandée par une variable venant de la partie thermique du bond graph qui lui est associé [Garcia(1995)].

CHAPITRE IV

ETUDE DE LA COMMANDABILITE STRUCTURELLE DE CERTAINES CLASSES DE SYSTEMES NON LINEAIRES MODELISES PAR BOND GRAPH

CHAPITRE IV

ETUDE DE LA COMMANDABILITE STRUCTURELLE DE CERTAINES CLASSES DE SYSTEMES NON LINEAIRES MODELISES PAR BOND GRAPH

IV.1 Introduction

Nous avons présenté au cours du premier chapitre la méthode d'analyse de la propriété de forte accessibilité locale des systèmes non linéaires par l'approche géométrie différentielle. Cette méthode est basée sur la détermination d'une distribution obtenue en itérant le calcul de crochets de Lie sur des champs de vecteurs initiaux. L'utilisation de langages de programmation symbolique très performants a d'ailleurs permis une approche informatique du calcul de cette distribution de forte accessibilité locale avec MACSYMA [Akhrif et Blankenship(1991)], MAPLE [Van Essen et De Jager(1993)] et MATHEMATICA [Besançon et Bornard(1995)].

La détermination de cette distribution de forte accessibilité locale à partir du modèle bond graph se heurte au problème du calcul des crochets de Lie. En effet, si les dérivées de Lie sont accessibles sur le modèle bond graph [Maschke(1990)], les crochets de Lie sont, quant à eux, beaucoup plus difficiles à déterminer. La distribution de forte accessibilité locale doit vérifier une condition de rang difficile à étudier sur le bond graph. La démarche proposée consiste à déterminer des conditions nécessaires ou suffisantes sur des classes de modèles non linéaires à partir du modèle bond graph.

La première partie de ce chapitre est consacrée à la classe la plus simple de systèmes non linéaires : les systèmes bilinéaires. Les systèmes bilinéaires apparaissent comme modèles naturels pour un grand nombre de processus. On peut citer comme exemples : la fission nucléaire où la commande multiplicative est la réactivité et la commande additionnelle est la source de neutron [Mohler (1961) (1962) (1963)]; la chimie grâce à une commande multiplicative par les catalyseurs; la démographie; l'immunologie où la commande multiplicative peut être la concentration d'enzyme, la réactivité de cellule et la commande additive le taux de source de cellule [Eisen (1974)], [Grodin (1963)]; l'agriculture [Oster(1978)]; des modèles prédateurs proies [Mohler (1979)] etc... Un autre domaine très important où apparaissent de tels systèmes est celui des circuits électriques. C'est d'ailleurs par ces systèmes que nous avons été amené à étudier les systèmes bilinéaires. En effet, suite à une collaboration entre le LAIL et le Laboratoire d'Electrotechnique et d'Electronique de Puissance le LEEP, un formalisme de modélisation par bond graph des composants de commutations tels que les diodes, les transistors, les thyristors [Dauphin-Tanguy (1993)], a engendré l'apparition de tels systèmes bilinéaires.

Nous donnons d'abord la représentation de ces systèmes, ensuite une condition nécessaire simple de commandabilité des systèmes bilinéaires étant trouvée, nous exposons un critère graphique que doit vérifier un système bilinéaire modélisé par bond graph pour être commandable. Enfin nous donnons une condition suffisante de commandabilité locale autour des points d'équilibre du système.

La seconde partie du chapitre est consacrée à une extension de l'étude de la commandabilité pour d'autres classes de systèmes non linéaires dont la commande intervient par la modulation d'éléments MTF et MGY. Nous appliquons ces résultats sur plusieurs exemples dont un circuit d'électronique de puissance.

IV.2 Les systèmes bilinéaires

IV.2.1 Introduction

Les systèmes bilinéaires constituent sûrement la classe des systèmes non linéaires la plus simple. Ces systèmes sont en effet linéaires en l'état, en la commande mais pas en les deux. Ils ne sont donc qu'une légère extension des systèmes linéaires.

Le système bilinéaire le plus simple est représenté par l'équation (IV.1).

$$\dot{x} = x\,u \tag{IV.1}$$

où x est la variable d'état et u la variable de commande. Ce système représente par exemple un système démographique où u serait un coefficient égal à (taux de natalité - taux de mortalité + taux migration dans une région de population x).

Les systèmes bilinéaires que nous étudierons seront décrits plus généralement par une équation de la forme (IV.2).

$$\frac{dx(t)}{dt} = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t) + \sum_{k=1}^{m} \mathbf{N}_k u_k(t) x(t) \tag{IV.2}$$

avec le vecteur d'état $x \in \Re^n$, le vecteur de commande $u \in \Re^m$ de composantes $u_1, \ldots, u_m$, et les $\mathbf{N}_k$, k=1, ..., m des matrices constantes $n \times n$. **A** et **B** sont des matrices constantes de dimension appropriée.

Etudions l'exemple d'un système mécanique conduisant à une équation de ce type. On peut remarquer que lorsqu'un système linéaire est commandé par la valeur d'un paramètre, le système devient le plus souvent bilinéaire. Ainsi, la force de friction dans les freins d'une voiture est à peu près proportionnelle à la force exercée par le conducteur. En tenant compte de la force exercée par le moteur, de l'inertie et des autres forces de frottements, on obtient pour le véhicule, l'équation d'état suivante (IV.3).

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{A}x + u_1\mathbf{N}x + \mathbf{b}u_2 \tag{IV.3}$$

où $x^T = [y \quad \dot{y}]$ y étant la variable de position, et $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{k\,c_f}{m} \end{bmatrix}$, $\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k\,c_b}{m} \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

m est la masse du véhicule; c_f est une constante correspondant à un coefficient de frottement, c_b est une constante correspondant à un coefficient de freinage.

Ce système possède donc deux variables de commande : u_1 (la pédale de freinage) qui intervient par multiplication de l'état et u_2 (la pédale d'accélérateur).

En fait la commande multiplicative sert souvent à atteindre des états qui seraient non atteignables pour un simple modèle linéaire, la deuxième commande servant quant à elle à assurer la commandabilité locale du système.

IV.2.2 Etude de l'accessibilité des systèmes bilinéaires par la géométrie différentielle

Dans un premier temps nous appliquons la théorie générale de l'étude de l'accessibilité des systèmes non linéaires rappelée dans le premier chapitre sur les systèmes bilinéaires. Le calcul de la distribution de forte accessibilité conduisant à une condition trop complexe pour être transformée en une condition sur le bond graph , une condition nécessaire de commandabilité plus simple est déduite de la distribution de forte accessibilité.

IV.2.2.1 Calcul de l'algèbre de forte accessibilité locale des systèmes bilinéaires

Afin de simplifier l'exposé, nous expliquons en détail la procédure de calcul de l'algèbre de forte accessibilité locale sur les systèmes bilinéaires homogènes. Nous montrons alors plus rapidement les modifications qui interviennent sur les systèmes bilinéaires à une, puis à plusieurs entrées.

.a Systèmes Bilinéaires Homogènes : Calcul de l'algèbre de forte accessibilité locale

Considérons le système bilinéaire donné par l'équation (IV.4)

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{N}xu \tag{IV.4}$$

avec $u \in \Re$.

Si l'on compare cette équation à l'équation (I.7), les champs de vecteur $f(x), g_1(x), \dots, g_m(x)$ ont la forme particulière $\tau(x)=\mathrm{T}x$ où T est une matrice $n*n$. L'algèbre de forte accessibilité locale C_0 est calculée en utilisant la propriété suivante.

Propriété IV.1 [Nijmeijer(1990)]

Le crochet de Lie de deux champs de vecteurs τ_1, τ_2 avec $\tau_i(x)=\mathbf{T}_i x$ $(i=1,2)$ est

$$[\tau_1, \tau_2](x) = (\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2)x = [\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2]x \tag{IV.5}$$

où $[\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2] = (\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2)$ est appelé le commutateur de $\mathbf{T}_1$ et $\mathbf{T}_2$.

Ainsi la distribution de forte accessibilité locale ΔC_0 est facilement construite à l'aide de la procédure décrite dans le cas non linéaire général. L'équation (I.20) implique $\Delta_0 = vect\{g_1(x)\} = vect\{\mathbf{N}x\}$.

L'équation (I.21) donne $\Delta_1 = \Delta_0 + [f, \Delta_0] + \sum_{i=1}^{m} [g_i, \Delta_0] = \Delta_0 + [\mathbf{A}x, \Delta_0] + [\mathbf{N}x, \Delta_0]$. On a donc $\Delta_1 = vect\{\mathbf{N}x, [\mathbf{A},\mathbf{N}]x\}$.

De la même manière $\Delta_2 = vect\{\mathbf{N}x, [\mathbf{A},\mathbf{N}]x, [\mathbf{A},[\mathbf{A},\mathbf{N}]]x, [\mathbf{N},[\mathbf{A},\mathbf{N}]]x\}$ et ainsi de suite. Finalement la distribution de forte accessibilité locale s'exprime à l'aide de la relation (IV.6).

$$\Delta C_0 = vect\left\{\begin{array}{l} \mathbf{N}x; \\ [\mathbf{A},\mathbf{N}]x; \\ [\mathbf{A},[\mathbf{A},\mathbf{N}]]x; [\mathbf{N},[\mathbf{A},\mathbf{N}]]x; \\ [\mathbf{A},[\mathbf{A},[\mathbf{A},\mathbf{N}]]]x; [\mathbf{N},[\mathbf{A},[\mathbf{A},\mathbf{N}]]]x; [\mathbf{A},[\mathbf{N},[\mathbf{A},\mathbf{N}]]]x; \\ \quad [\mathbf{N},[\mathbf{N},[\mathbf{A},\mathbf{N}]]]x; [[\mathbf{A},\mathbf{N}],[\mathbf{A},[\mathbf{A},\mathbf{N}]]]x; [[\mathbf{A},\mathbf{N}],[\mathbf{N},[\mathbf{A},\mathbf{N}]]]x \\ \ldots \end{array}\right\} \tag{IV.6}$$

Remarque : Le nombre de termes à calculer pour obtenir ΔC_0 est fini d'après le théorème de Cayley-Hamilton.

Considérons le modèle bilinéaire suivant $\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{N}xu \quad x \in \Re^3$,

avec $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Le commutateur de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{N}$ est $[\mathbf{A},\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. Si l'on continue la procédure de calcul de l'algèbre de forte accessibilité, on obtient $[\mathbf{N},[\mathbf{A},\mathbf{N}]] = \mathbf{A}$ et $[\mathbf{A},[\mathbf{A},\mathbf{N}]] = \mathbf{N}$. Ainsi

$\Delta C_0 = \{\mathbf{T}x; \mathbf{T} \in vect\{\mathbf{A}, \mathrm{N}, [\mathbf{A}, \mathbf{N}]\}\}$. La dimension de la distribution ΔC_0 est égale au rang de la matrice $(\mathbf{A}x, \mathbf{N}x, [\mathbf{A}, \mathbf{N}]x)$.

$$(\mathbf{A}x, \mathbf{N}x, [\mathbf{A}, \mathbf{N}]x) = \begin{bmatrix} x_2 & x_3 & 0 \\ -x_1 & 0 & x_3 \\ 0 & -x_1 & -x_2 \end{bmatrix} \qquad \text{(IV.7)}$$

Donc dim $\Delta C_0(x)=0$ si $x=0$ et dim $\Delta C_0(x)=2$ si $x\neq 0$. La dimension de la distribution de forte accessibilité locale est toujours strictement inférieure à la dimension de l'espace d'état. Le système n'est donc pas localement fortement accessible quel que soit x (théorème I.5).

.b Cas des systèmes bilinéaires hétérogènes mono entrée

Nous allons considérer ici les systèmes bilinéaires pouvant être décrits par une équation d'état de la forme (IV.8).

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}_0 + \mathbf{N}xu + \mathbf{B}u \qquad \text{(IV.8)}$$

où u est la variable de commande. Ici chaque champ de vecteur τ de l'ensemble $\{f(x), g_1(x) \ldots g_m(x)\}$ a la forme $\tau(x)=\mathbf{T}x+\mathbf{V}$, où $\mathbf{T}$ est une matrice $n*n$ et $\mathbf{V}$ est un vecteur de dimension n.

Propriété IV.2 [Nijmeijer(1990)]

Le crochet de Lie de deux champs de vecteur τ_1, τ_2 de la forme $\tau_i(x)=T_i x+V_i\,(i=1,2)$ est

$$[\tau_1, \tau_2] = (T_2T_1-T_1T_2)x-T_1V_2+T_2V_1$$

$$=[T_1,T_2]x-T_1V_2+T_2V_1 \tag{IV.9}$$

La distribution de forte accessibilité locale ΔC_0 est alors calculée grâce à cette propriété. On obtient alors la distribution (IV.10).

$$\Delta C_0 = vect\left\{\begin{array}{l}
\mathbf{N}x+\mathbf{B} \\
[\mathbf{A}x+\mathbf{B}_0,\mathbf{N}x+\mathbf{B}] = [\mathbf{A},\mathbf{N}]x+\mathbf{N}\mathbf{B}_0-\mathbf{A}\mathbf{B} \\
[\mathbf{A}x+\mathbf{B}_0,[\mathbf{A}x+\mathbf{B}_0,\mathbf{N}x+\mathbf{B}]] = [\mathbf{A},[\mathbf{A},\mathbf{N}]]x+\mathbf{A}^2\mathbf{B}-\mathbf{A}\mathbf{N}\mathbf{B}_0+[\mathbf{A},\mathbf{N}]\mathbf{B}_0 \\
[\mathbf{N}x+\mathbf{B},[\mathbf{A}x+\mathbf{B}_0,\mathbf{N}x+\mathbf{B}]] = [\mathbf{N},[\mathbf{A},\mathbf{N}]]x+\mathbf{N}^2\mathbf{B}_0-\mathbf{N}\mathbf{A}\mathbf{B}+[\mathbf{A},\mathbf{N}]\mathbf{B} \\
[\mathbf{A}x+\mathbf{B}_0,[\mathbf{A}x+\mathbf{B}_0,[\mathbf{A}x+\mathbf{B}_0,\mathbf{N}x+\mathbf{B}]]] = [\mathbf{A},[\mathbf{A},[\mathbf{A},\mathbf{N}]]]x-\mathbf{A}^3\mathbf{B}+\mathbf{A}^2\mathbf{N}\mathbf{B}_0 \\
\qquad\qquad +\mathbf{A}[\mathbf{A},\mathbf{N}]\mathbf{B}_0+[\mathbf{A},[\mathbf{A},\mathbf{N}]]\mathbf{B}_0 \\
\ldots
\end{array}\right\} \tag{IV.10}$$

.c Cas des systèmes bilinéaires hétérogènes multi entrées

Dans le cas multi entrées, l'algèbre de forte accessibilité locale est calculée de la même façon. Pour simplifier, la forme de la distribution de forte accessibilité locale est présentée dans le cas d'un système ayant deux variables de commande, cela n'enlève rien à la généralité du problème.

Considérons le modèle bilinéaire à deux variables de commande (IV.11).

$$\dot{x} = \mathbf{A}x+\mathbf{B}_0+\mathbf{N}_1xu_1+\mathbf{N}_2xu_2+\mathbf{B}_1u_1+\mathbf{B}_2u_2 \tag{IV.11}$$

En appliquant l'algorithme de détermination de la distribution de forte accessibilité locale, Δ_0 est définie par (IV.12).

$$\Delta_0 = vect(g_1(x),g_2(x)) = vect(\mathbf{N}_1x+\mathbf{B}_1,\mathbf{N}_2x+\mathbf{B}_2) \tag{IV.12}$$

L'équation (I.21) donne

$$\Delta_1 = \Delta_0 + [f, \Delta_0] + \sum_{i=1}^{2} [g_i, \Delta_0] = \Delta_0 + [\mathbf{A}x + \mathbf{B}, \Delta_0] + [\mathbf{N}_1 x + \mathbf{B}_1, \Delta_0] + [\mathbf{N}_2 x + \mathbf{B}_2, \Delta_0] \quad \text{(IV.13)}$$

et

$$\Delta_1 = vect\{\mathbf{N}_1 x + \mathbf{B}_1, \mathbf{N}_2 x + \mathbf{B}_2, [\mathbf{A}x + \mathbf{B}_0, \mathbf{N}_1 x + \mathbf{B}_1], [\mathbf{A}x + \mathbf{B}_0, \mathbf{N}_2 x + \mathbf{B}_2], [\mathbf{N}_1 x + \mathbf{B}_1, \mathbf{N}_2 x + \mathbf{B}_2]\} \quad \text{(IV.14)}$$

Finalement on obtiendra

$$\Delta C_0 = vect\left\{\begin{array}{l}
\mathbf{N}_1 x + \mathbf{B}_1, \mathbf{N}_2 x + \mathbf{B}_2, \\
[\mathbf{A}x + \mathbf{B}_0, \mathbf{N}_1 x + \mathbf{B}_1] = [\mathbf{A}, \mathbf{N}_1]x + \mathbf{N}_1\mathbf{B}_0 - \mathbf{A}\mathbf{B}_1 \\
[\mathbf{A}x + \mathbf{B}_0, \mathbf{N}_2 x + \mathbf{B}_2] = [\mathbf{A}, \mathbf{N}_2]x + \mathbf{N}_2\mathbf{B}_0 - \mathbf{A}\mathbf{B}_2 \\
[\mathbf{N}_1 x + \mathbf{B}_1, \mathbf{N}_2 x + \mathbf{B}_2] = [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2]x + \mathbf{N}_2\mathbf{B}_1 - \mathbf{N}_1\mathbf{B}_2 \\
[\mathbf{A}x + \mathbf{B}_0, [\mathbf{A}x + \mathbf{B}_0, \mathbf{N}_1 x + \mathbf{B}_1]] = [\mathbf{A}, [\mathbf{A}, \mathbf{N}_1]]x + \mathbf{A}^2\mathbf{B}_1 - \mathbf{A}\mathbf{N}_1\mathbf{B}_0 + [\mathbf{A}, \mathbf{N}_1]\mathbf{B}_0 \\
[\mathbf{N}_1 x + \mathbf{B}_1, [\mathbf{A}x + \mathbf{B}_0, \mathbf{N}_1 x + \mathbf{B}_1]] = [\mathbf{N}_1, [\mathbf{A}, \mathbf{N}_1]]x + \mathbf{N}_1{}^2\mathbf{B}_0 - \mathbf{N}_1\mathbf{A}\mathbf{B}_1 + [\mathbf{A}, \mathbf{N}_1]\mathbf{B}_1 \\
[\mathbf{N}_2 x + \mathbf{B}_2, [\mathbf{A}x + \mathbf{B}_0, \mathbf{N}_1 x + \mathbf{B}_1]] = [\mathbf{N}_2, [\mathbf{A}, \mathbf{N}_1]]x + \mathbf{N}_1\mathbf{B}_0 - \mathbf{N}_1\mathbf{A}\mathbf{B}_1 + [\mathbf{A}, \mathbf{N}_1]\mathbf{B}_1 \\
[\mathbf{A}x + \mathbf{B}_0, [\mathbf{A}x + \mathbf{B}_0, [\mathbf{A}x + \mathbf{B}_0, \mathbf{N}x + \mathbf{B}]]] = [\mathbf{A}, [\mathbf{A}, [\mathbf{A}, \mathbf{N}]]]x - \mathbf{A}^3\mathbf{B} + \mathbf{A}^2\mathbf{N}\mathbf{B}_0 \\
\qquad\qquad + \mathbf{A}[\mathbf{A}, \mathbf{N}]\mathbf{B}_0 + [\mathbf{A}, [\mathbf{A}, \mathbf{N}]]\mathbf{B}_0 \\
\ldots
\end{array}\right\}$$

(IV.15)

.d Conclusion

Le calcul des distributions de forte accessibilité locale montrent que l'approche par géométrie différentielle entraîne rapidement, même dans le cas très simple des systèmes bilinéaires, un très grand nombre de calculs. Cependant, en considérant la forme particulière des distributions de forte accessibilité locale du cas bilinéaire, on peut trouver une condition nécessaire qui sera beaucoup plus simple. Le but du paragraphe suivant est d'expliciter cette condition.

IV.2.2.2 Condition nécessaire de forte accessibilité des systèmes bilinéaires

Nous avons rappelé au premier chapitre que pour qu'un modèle linéaire $\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u$, avec x de dimension n, soit structurellement commandable, il est nécessaire et suffisant que le rang($\mathbf{A}|\mathbf{B}$) soit égal à n, et que toutes les variables dynamiques soient atteignables, au sens graphique du terme, à partir d'au moins une entrée (Théoème I.3).

C'est cette même approche qui apparaît dans l'énoncé de la condition nécessaire de forte accessibilité locale des systèmes bilinéaires.

Théorème IV.1

Une condition nécessaire pour que le système bilinéaire (IV.2) soit fortement localement accessible est que:

- chaque variable dynamique soit atteignable par au moins une entrée.

- rang($\mathbf{A}|\mathbf{N}_1\ldots|\mathbf{N}_m|\mathbf{B}_0|\mathbf{B}_1\ldots|\mathbf{B}_m$*)=n* (IV.16)

Démonstration La première condition est la condition d'atteignabilité au sens graphique d'un état par une entrée [Siljak(1977)].

La seconde condition est démontrée dans l'annexe VIII.

Remarque La condition de forte accessibilité locale étant elle même une condition nécessaire à la commandabilité, la condition exprimée dans le théorème IV.1 est donc aussi nécessaire à la commandabilité.

Considérons le système décrit par l'équation (IV.17).

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{N}xu \qquad x \in \Re^3 \tag{IV.17}$$

avec $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Le rang de la matrice $(\mathbf{A}|\mathbf{N}) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ est bien égal à trois. La condition nécessaire de forte accessibilité locale est donc vérifiée. On peut vérifier que ce système correspond à un système localement fortement accessible pour x différent de 0.

Le calcul du commutateur de A et N donne

$$[A,N] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

En continuant la procédure de calcul de forte accessibilité, on obtient $[[A,N],N] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $[[A,N],A] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ … . On en déduit alors que distribution est donnée par la matrice suivante :

$$\Delta C_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -x_2 \\ -x_2 & -x_3 & -x_1 - x_2 \cdots \\ 0 & -x_2 & 2x_3 \end{bmatrix}$$

La dimension de cette matrice est nulle quand $x=0$ et est égale à 3 si x est différent de 0. Le système est donc localement fortement accessible pour x différent de 0.

L'exemple suivant montre que les conditions du théorème IV.1 ne sont pas suffisantes.

Considérons le système bilinéaire $\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{N}xu \quad x \in \Re^3$,

avec $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$rang(\mathbf{A}|\mathbf{N}) = rang\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) = 3$ et cependant ce système n'est pas accessible.

IV.2.3 Méthode bond graph d'étude de la commandabilité des systèmes bilinéaires

Des conditions nécessaires et suffisantes de commandabilité structurelle pour les systèmes linéaires modélisés par bond graph ont été proposées avec une approche graphique en utilisant le concept de causalité, [Sueur(1990)]. Dans ce paragraphe, une extension aux systèmes bilinéaires modélisés par bond graph est réalisée.

Nous présentons tout d'abord une classe de modèles bond graph conduisant à une équation d'état bilinéaire. Une condition nécessaire de commandabilité, puis une condition suffisante de commandabilité locale autour d'un point d'équilibre sont ensuite proposées. Ces conditions sont appliquées sur plusieurs exemples. Les travaux exposés dans ce paragraphe sont en cours de rédaction pour faire l'objet d'une publication [Rimaux(1995)].

IV.2.3.1 Equation d'état bilinéaire obtenue pour un modèle bond graph

Considérons les systèmes dont la variable de commande apparaît comme module des éléments MTF ou MGY. Si $u=[u_1,\ldots,u_m]^T$ est le vecteur commande, les rapports des éléments MTF ou MGY peuvent alors être écrits comme au_i ou a/u_i , avec $a \in \Re, i = 1..m$. Les lois caractéristiques des éléments R, C, I sont également supposées linéaires. Enfin les sources d'effort et de flux sont indépendantes et n'interviennent pas dans la commande.

Les conditions pour avoir une équation d'état de la forme (IV.2) sont données par:

Condition IV.1

1) Les causalités des éléments MTF et MGY dans le bond graph en causalité intégrale sont telles que u_i^{-1} / i=1..m n'apparaissent pas dans l'équation d'état, c'est à dire que la causalité sur les éléments modulés par la commande correspond à une des formes de la figure IV.1.

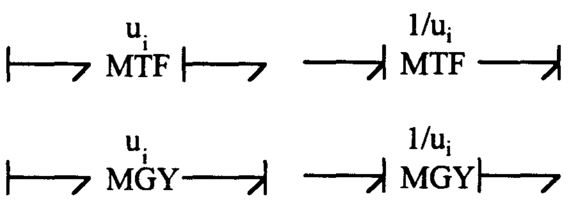


Figure IV.1 : Les différents cas possibles de modulation par la variable de commande.

2) Il n'y a pas de liaisons causales entre des éléments de l'ensemble {éléments R; éléments dynamiques en causalité dérivée} ni entre deux éléments dynamiques ayant des causalités différentes, contenant un élément MTF ou MGY modulé par l'entrée.

3) Si un élément R est causalement relié à un élément modulé, il ne doit l'être que de l'une des façons indiquées par la figure IV.2.

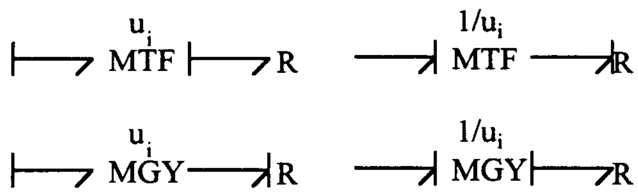


Figure IV.2 : Les différents cas admissibles de liaison d'un R avec un élément modulé.

4) Il n'y a pas de chemin causal entre deux éléments dynamiques en causalité intégrale, passant par plus d'un élément MTF ou MGY modulé par une variable de commande.

Avec ces conditions le bond graph conduit a une équation d'état de la forme (IV.18).

$$\mathbf{J}\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}_0 + \sum_{k=1}^{m}\left(\mathbf{N}_k x u_k + \mathbf{B}_k u_k\right) \tag{IV.18}$$

(La matrice J est égale à la matrice identité si il n'y a pas d'élément en causalité dérivée).

On pourra remarquer que chaque vecteur B_i, i=0,..,m est en fait égal à B_i'E où E est un vecteur contenant les sources d'effort et de flux et B_i' une matrice constante.

Remarque : Comme nous le verrons dans les exemples qui suivent, des modèles bond graphs dont la commande intervient comme module des éléments modulés MTF et MGY, apparaissent dans les systèmes où la commande se fait par la modulation de la valeur d'une résistance. On peut citer comme exemple les circuits d'électronique de puissance dont la commande se fait par l'ouverture et la fermeture d'interrupteurs (thyristors, transistors...), ou les systèmes hydrauliques dont la commande se fait par le contrôle de vannes.

IV.2.3.2 Conditions nécessaires sur le modèle bond graph

.a Notion de groupe

Pour l'étude des conditions nécessaires de commandabilité d'un système modélisé par bond graph, nous introduisons une nouvelle notion: la notion de groupe.

Définition IV.1 *Un groupe est un ensemble d'éléments dynamiques dont l'un des éléments (n'importe lequel) reste en causalité intégrale quand la causalité dérivée est imposée préférentiellement malgré la dualisation éventuelle de source. Soit (E_1...E_n) un ensemble d'éléments dynamiques, cet ensemble forme un groupe si quel que soit $i=1$ à n, on peut mettre tous les éléments Ej, j différent de i, en causalité dérivée et Ei en causalité intégrale.*

Remarque L'interprétation au niveau de l'équation d'état de cette notion de groupe est la suivante : si des éléments dynamiques d'un bond graph linéaire forment un groupe, les lignes correspondantes à ces éléments dans la matrice (**A**|**B**) ne sont pas indépendantes.

Un exemple illustrant la notion de groupe est donné figure IV.3.

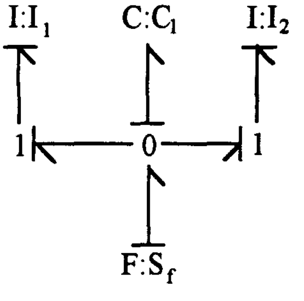


figure IV.3 : Bond graph en causalité intégrale.

Une affectation dérivée préférentielle conduit aux deux bond graphs de la figure IV.4.

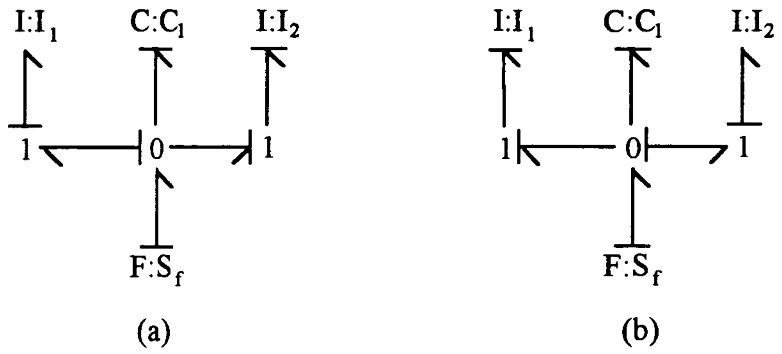


figure IV.4 : Bond graphs en causalité dérivée.

Un des deux éléments I_1 ou l'élément I_2 doit rester en causalité intégrale et ceci malgré la possibilité de dualiser la source. Ces deux éléments constituent donc un groupe.

L'équation d'état associée au bond graph de la figure IV.3 est donnée par l'équation (IV.19).

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_{I_1} \\ \dot{p}_{I_2} \\ \dot{q}_{C_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/C_1 \\ 0 & 0 & 1/C_1 \\ -1/I_1 & -1/I_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{I_1} \\ p_{I_2} \\ q_{C_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} F \qquad \text{(IV.19)}$$

On vérifie donc bien que les lignes correspondants aux élements du groupe ne sont pas indépendantes.

Un autre exemple illustrant la notion de groupe est donnée par le bond graph de la figure IV.5. Dans ce bond graph, les élément I_1, I_2 et I_3 constituent un groupe. En effet, une affectation préférentielle dérivée laisse l'un de ces éléments en causalité intégrale. La figure IV.6 montre une des 3 possibilités de mise en causalité dérivée, les deux autres sont équivalentes avec I_1 ou I_2 en causalité intégrale.

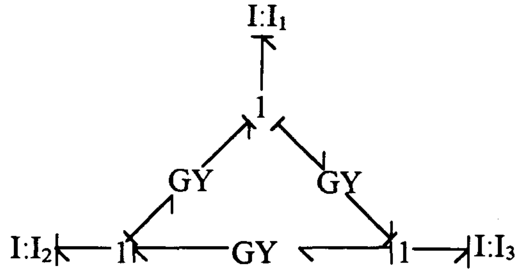


Figure IV.5: Modèle bond graph en causalité intégrale.

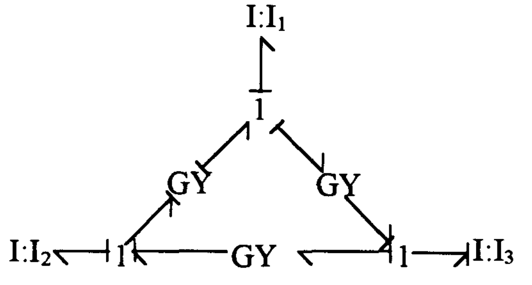


figure IV.6 : Modèle en causalité dérivée (choix: I_3 encore en causalité intégrale).

.b Condition nécessaire de commandabilité

L'équation d'état déduite du bond graph (B) vérifiant les conditions IV.1 a la forme bilinéaire suivante (IV.20).

$$\dot{x} = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{A}x + \mathbf{J}^{-1}\mathbf{B}_0 + \sum_{k=1}^{m}\left(\mathbf{J}^{-1}\mathbf{N}_k x u_k + \mathbf{J}^{-1}\mathbf{B}_k u_k\right) \tag{IV.20}$$

Mais comme

$\mathrm{rang}(\mathbf{J}^{-1}\mathbf{A}|\mathbf{J}^{-1}\mathbf{B}_0|\mathbf{J}^{-1}\mathbf{N}_1|\mathbf{J}^{-1}\mathbf{N}_2|\ldots|\mathbf{J}^{-1}\mathbf{N}_m|\mathbf{J}^{-1}\mathbf{B}_1|\mathbf{J}^{-1}\mathbf{B}_2\ldots|\mathbf{J}^{-1}\mathbf{B}_m) = \mathrm{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{B}_0|\mathbf{N}_1|\mathbf{N}_2|\ldots|\mathbf{N}_m|\mathbf{B}_1|\mathbf{B}_2\ldots|\mathbf{B}_m)$, les éléments dynamiques en causalité dérivée n'auront pas d'influence pour l'étude de l'accessibilité du système. Nous supposerons donc maintenant que l'équation d'état du système (Σ) sera donnée par l'équation (IV.21).

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}_0 + \sum_{i=1}^{m}\left(\mathbf{N}_i x u_i + \mathbf{B}_i u_i\right) \tag{IV.21}$$

Nous proposons une décomposition du modèle bond graph global (B) en un ensemble de bond graphs réduits (B_i) définis comme suit:

- Un bond graph (B_0) est obtenu en supprimant tous les éléments MTF et MGY modulés par les commandes u_i, ainsi que les liens et les éléments R, C or I causalement reliés directement uniquement aux autres éléments par des éléments MTF ou MGY modulés par u_i.

- Un bond graph (B_i) est obtenu en supprimant sur le bond graph initial, les éléments MTF ou MGY modulés par les commandes u_j $j \neq i$, ainsi que les liens et les éléments R, C, I causalement reliés directement uniquement aux éléments modulés par la commande u_j $j \neq i$.

Avant d'énoncer le théorème donnant la condition nécessaire de commandabilité, il nous faut introduire la notion de bond graph somme de plusieurs bond graphs. L'équation d'état du bond graph somme étant la somme des équations état des autres bond graphs.

Le bond graph somme de plusieurs bond graphs est obtenu par la procédure suivante:

Procédure

- Ajout dans chaque bond graph d'une jonction 1 (respectivement 0) devant les éléments I (respectivement C) en causalité intégrale.

- Dessin du bond graph somme en commençant par les éléments dynamiques en causalité intégrale et leur jonction associée, puis ajout de tous les liens et éléments liant ces jonctions intervenant dans chaque bond graph.

Remarque : Les bond graphs dont on cherche le bond graph somme proviennent d'un même modèle. Outre les éléments dynamiques en causalité intégrale et leur jonction associée, un même élément ou lien peut donc apparaître dans plusieurs des bond graphs. Il devra alors être dessiné plusieurs fois dans le bond graph somme.

Exemple : Le bond graph somme des bond graphs des figures IV.7 a) et b) est donné figure IV.7 c)

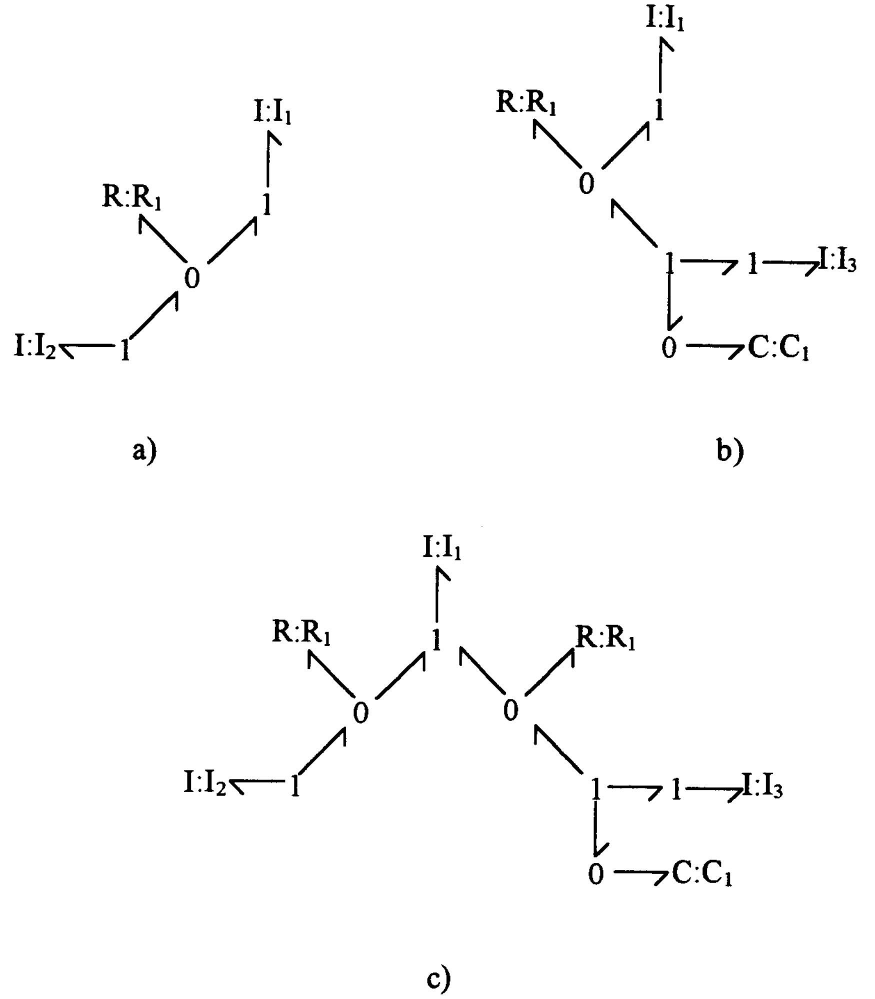


Figure IV.7 : Modèles bond graphs a) et b et bond graph somme c).

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème.

Théorème IV.2

Pour qu'un système (Σ) modélisé par un bond graph (B) soit commandable, il est nécessaire que :

1) Il existe un chemin causal entre un élément MTF ou MGY modulé par une commande et les éléments dynamiques en causalité intégrale quand le bond graph est en causalité intégrale.

2) Aucun groupe de 1 élément n'est commun à tous les bond graphs (B_i) i=0 à m.

3) Si un groupe de 2 éléments ou plus est commun à tous les bond graphs (B_i) i=0 à m, il est nécessaire que ces éléments ne forment plus un groupe dans le bond graph somme des (B_i).

Remarque Un élément dynamique peut ne pas apparaître dans un des bond graphs (B_i). Cet élément constitue à lui seul un groupe. Si plusieurs éléments dynamiques n'apparaissent pas, les différents sous-ensembles de l'ensemble des éléments n'apparaissant pas constituent des groupes. Ainsi si 3 éléments I_1, I_2 et I_3 n'apparaissent pas, il y a 6 groupes: (I_1), (I_2), (I_3), (I_1, I_2), (I_1, I_3), (I_2, I_3) et (I_1, I_2, I_3).

Démonstration du thèorème: Nous savons d'après le théorème IV.1 qu'il est nécessaire que $\text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{N}_1\ldots|\mathbf{N}_m|\mathbf{B}_0|\mathbf{B}_1\ldots|\mathbf{B}_m)=n$ pour que le système (Σ) d'équation (IV.2) soit fortement localement accessible et donc commandable.

or si $\alpha_1\ldots\alpha_m$ sont tous différents de 0, on a

$$\text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{N}_1\ldots|\mathbf{N}_m|\mathbf{B}_0|\mathbf{B}_1\ldots|\mathbf{B}_m)=\text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{A}+\alpha_1\mathbf{N}_1|\ldots|\mathbf{A}+\alpha_m\mathbf{N}_m|\mathbf{B}_0|\mathbf{B}_0+\alpha_1\mathbf{B}_1|\ldots|\,\mathbf{B}_0+\alpha_m\mathbf{B}_m) \tag{IV.22}$$

Au bond graph (B_0) est associée l'équation d'état (IV.23).

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}_0 \qquad \text{(IV.23)}$$

Au bond graph (B_i) est associée l'équation d'état (IV.24).

$$\dot{x} = \left(\mathbf{A} + \mathbf{N}_i u_i\right)x + \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_i u_i \qquad \text{(IV.24)}$$

Le cas linéaire nous permet de dire que l'étude des groupes d'un bond graph détermine les combinaisons linéaires entre les lignes de ($\mathbf{A}|\mathbf{B}_0$) dans le cas de (B_0), et les lignes de ($\mathbf{A}+u_i\mathbf{N}_i|\mathbf{B}_0+u_i\mathbf{B}_i$) dans le cas de ($B_i$).

La présence d'un groupe à un élément identique dans tous les bond graphs (B_i) i=0 à m, signifie que la ligne correspondant à l'élément est nulle dans toutes les matrices ($\mathbf{A}|\mathbf{B}_0$) et ($\mathbf{A}+u_i\mathbf{N}_i|\mathbf{B}_0+u_i\mathbf{B}_i$) donc rang($\mathbf{A}|\mathbf{N}_1\ldots|\mathbf{N}_m|\mathbf{B}_0|\mathbf{B}_1\ldots|\mathbf{B}_m$)<n et la condition de rang du théorème IV.1 n'est pas vérifiée. Le système est donc non commandable.

La présence d'un groupe à deux éléments ou plus identique pour chaque bond graph (B_i) signifie que dans toutes les matrices ($\mathbf{A}|\mathbf{B}_0$) et ($\mathbf{A}+u_i\mathbf{N}_i|\mathbf{B}_0+u_i\mathbf{B}_i$), les lignes correspondantes aux éléments du groupe ne sont pas indépendantes entre elles. Pour que le système soit commandable, il est nécessaire que dans la matrice ($\mathbf{A}|\mathbf{A}+u_1\mathbf{N}_1|\ldots|\mathbf{A}+u_m\mathbf{N}_m|\mathbf{B}_0|\mathbf{B}_0+u_1\mathbf{B}_1|\ldots|\mathbf{B}_0+u_m\mathbf{B}_m$) ces lignes soient indépendantes. Il est donc nécessaire que les coefficients donnant une ligne comme combinaison linéaire des autres soient différents dans au moins une des matrices ($\mathbf{A}|\mathbf{B}_0$) ... ($\mathbf{A}+u_m\mathbf{N}_m|\mathbf{B}_0+u_m\mathbf{B}_m$). Or, si la combinaison linéaire est la même dans toutes les matrices, la même ligne est encore combinaison linéaire dans la matrice somme ($(m+1)\mathbf{A}+ u_1\mathbf{N}_1+\ldots+u_m\mathbf{N}_m \mid (m+1)\mathbf{B}_0+ u_1\mathbf{B}_1+\ldots+u_m\mathbf{B}_m$). Ceci se teste facilement par l'étude de l'existence de ce groupe dans le bond graph somme, celui-ci ayant par construction l'équation d'état (IV.25).

$$\dot{x} = \left((m+1)\mathbf{A} + \mathbf{N}_1 u_1 + \cdots + \mathbf{N}_m u_m\right)x + (m+1)\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 u_1 + \cdots + \mathbf{B}_m u_m \qquad \text{(IV.25)}$$

IV.2.3.3 Exemples

.a Premier exemple

Considérons le modèle bond graph de la figure IV.8.

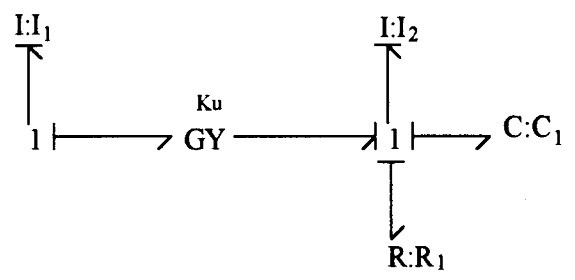


figure IV.8 : Modèle bond graph du premier exemple.

Les trois éléments dynamiques ont une causalité intégrale. La dimension du vecteur état est donc trois. L'équation d'état associée à ce bond graph est donnée par l'équation suivante (IV.25) obtenue en suivant la procédure décrite dans [Rosenberg(1971)].

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} p_{\mathrm{I}_1} \\ p_{\mathrm{I}_2} \\ q_{\mathrm{C}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{R}_1/\mathrm{I}_2 & -1/\mathrm{C} \\ 0 & 1/\mathrm{I}_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{\mathrm{I}_1} \\ p_{\mathrm{I}_2} \\ q_{\mathrm{C}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -K/\mathrm{I}_2 & 0 \\ K/\mathrm{I}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{\mathrm{I}_1} \\ p_{\mathrm{I}_2} \\ q_{\mathrm{C}} \end{pmatrix} u \qquad \text{(IV.26)}$$

La condition nécessaire du théorème IV.1 est vérifiée par l'étude directe de l'équation d'état. Etudions ce résultat directement à partir du modèle bond graph.

<u>Première étape : bond graph (B_0)</u>

En enlevant le gyrateur, le bond graph (B_0) est dessiné figure IV.9a.

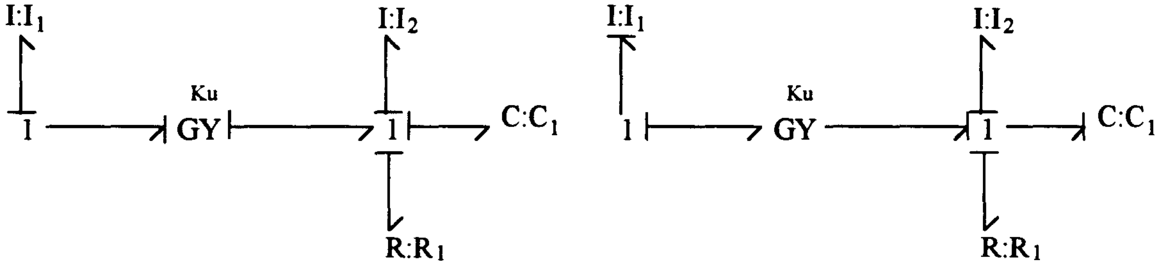
a : (B_0) sans causalité b : (B_0) en causalité dérivée

figure IV.9 : bond graph (B_0).

Une procédure d'affectation de la causalité dérivée est appliquée (figure IV.9b). Les deux éléments dynamiques I_2 et C_1 ont une causalité dérivée. Il n'y a donc qu'un seul groupe, constitué de l'élément I_1 seul.

<u>Seconde étape : bond graph (B_1)</u>

Le système ne comportant qu'une commande, le bond graph (B_1) est identique au bond graph initial. Sa mise en causalité dérivée conduit aux deux formes de la figure IV.10.



a) b)

figure IV.10 : Bond graph (B_1) en causalité dérivée.

On constate donc que les éléments I_1 et C_1 forment un groupe, l'un des deux restant obligatoirement en causalité intégrale.

Remarque : Dans le bond graph (B_1) on étudie le rang bond graph de la matrice (**A**+**N**u). Notre but n'étant que de connaître le rang bond graph de cette matrice, u peut être considéré comme différent de 0 dans (B_1). La causalité du gyrateur peut donc être changée sans s'occuper du problème de l'annulation de son module, d'où les deux formes possibles.

Au bond graph (B_0) est associé le groupe constitué de l'élément I_1 seul. Au bond graph (B_1) est associé le groupe constitué des éléments I_1 et C_1. Ces deux groupes étant différents et la condition d'atteignabilité étant vérifiée, le système vérifie la condition nécessaire de commandabilité exprimée par le théorème IV.2.

.b Second exemple

Considérons le circuit d'électronique de puissance de la figure IV.11.

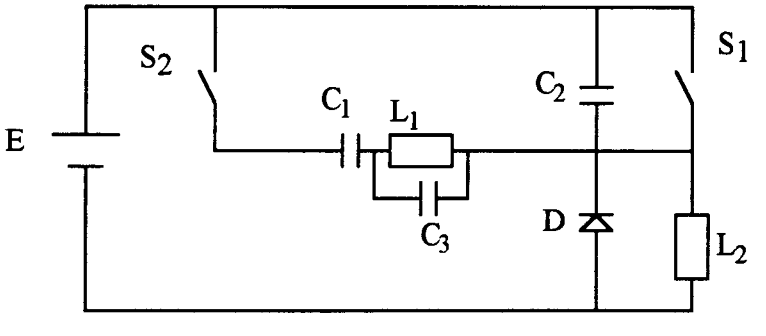


figure IV.11 : Circuit de l'exemple 2.

Dans ce circuit deux interrupteurs S1 and S2 sont commandés extérieurement. La diode a une logique d'ouverture et de fermeture interne.

Comme proposés dans [Dauphin-Tanguy(1993)], les modèles bond graphs de ces interrupteurs sont:

$1 \rightharpoondown \overset{1/u_i}{MTF} \rightharpoondown R{:}Rs_i$ pour S_i, $i = 1,2$, et $1 \rightharpoondown \overset{1/m_D}{MTF} \rightharpoondown R{:}R_D$ pour la diode.

Le bond graph causal de ce circuit est représenté par la figure IV.12.

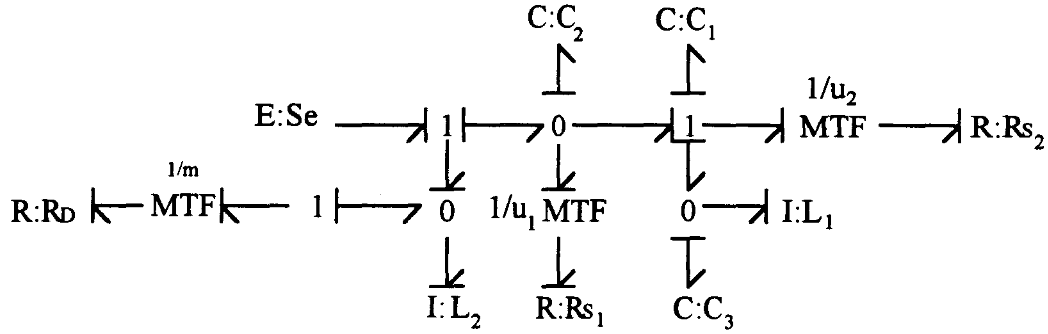


figure IV.12 : Bond graph causal du circuit de la figure IV.11.

Première étape bond graph (B_0)

Le bond graph (B_0) est dessiné en enlevant, d'une part, les éléments MTF modulés par les deux commandes et, d'autre part, les éléments qui ne sont directement causalement reliés qu'à eux. En d'autres termes, suivre la causalité à partir de ces éléments en ne passant que par des liens de puissance et des jonctions 1 et 0 ne permet d'atteindre que les éléments MTF modulés. C'est le cas ici de l'élément C_1. La causalité dérivée est appliquée et le bond graph causal de la figure IV.11 est alors obtenu.

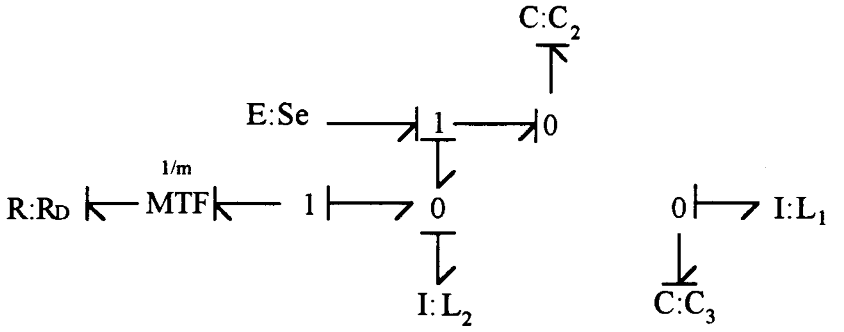


figure IV.13 : Bond graph (B_0) en causalité dérivée.

Aucun élément ne restant en causalité intégrale, il n'y a qu'un seul groupe: celui constitué du seul élément (C_1).

Deuxième étape bond graph (B_1)

L'élément MTF modulé par la commande u_2 est maintenant supprimé du bond graph initial de la figure IV.11, ainsi que les éléments (ici C_1 et R_{s2}) et liens uniquement connectés directement à cet élément MTF. Le bond graph (B_1) est alors dessiné en imposant la causalité dérivée. On obtient le bond graph causal de la figure IV.14.

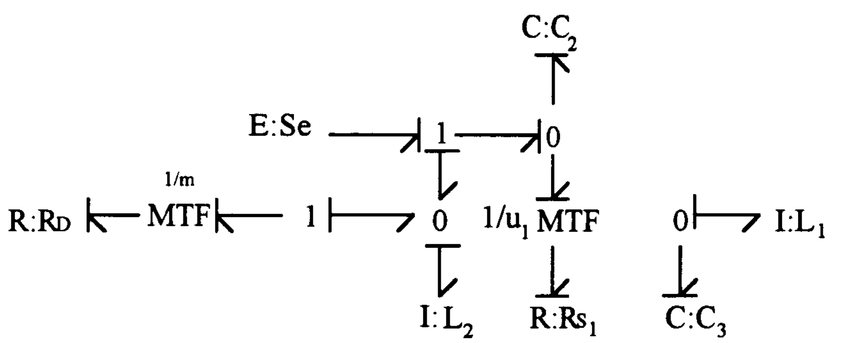


figure IV.14 : Bond graph (B_1) en causalité dérivée.

Le seul groupe pour le bond graph (B_1) est encore le groupe à un élément C_1.

Troisième étape : bond graph (B_2)

L'élément MTF modulé par la commande u_1 est maintenant supprimé du bond graph initial de la figure IV.11, ainsi que les éléments (R_{s1}) et les liens <u>uniquement</u> connectés directement à cet élément MTF. Le bond graph (B_2) est alors dessiné. Une affectation dérivée préférentielle de la causalité conduit au bond graph causal de la figure IV.15.

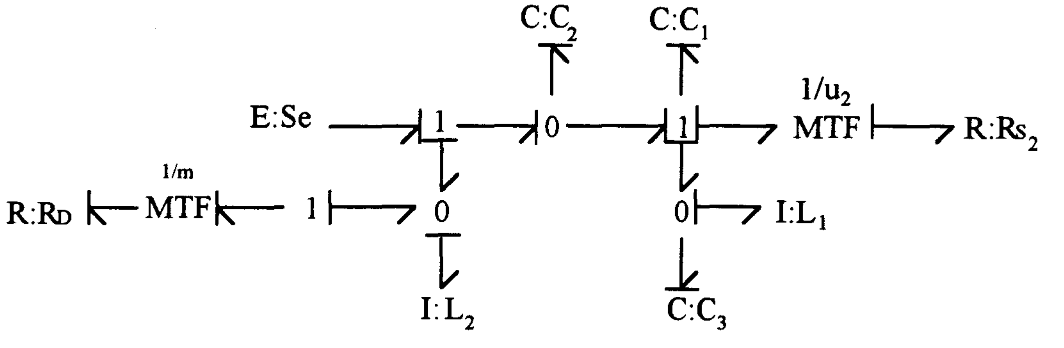


figure IV.15 : Bond graph (B_2) en causalité dérivée.

Aucun élément ne reste en causalité intégrale, il n'y a donc aucun groupe.

<u>Conclusion</u>

Le groupe à un élément (C_1) commun aux bond graphs (B_0) (B_1) n'apparaissant pas dans le bond graph (B_2), aucun groupe n'est commun aux 3 bond graphs. La condition d'atteignabilité étant par ailleurs facilement vérifiée, le système respecte la condition nécessaire de commandabilité exprimée par le théorème IV.2.

IV.2.3.4 Condition Suffisante

Nous avons étudié jusqu'à présent des conditions nécessaires de commandabilité des systèmes bilinéaires. Nous nous intéressons maintenant à la détermination d'une condition suffisante pour cette propriété. Des conditions suffisantes pour la commandabilité locale autour d'un point d'équilibre d'un système bilinéaire sont exposées dans [Mohler(1973)] et [Rink(1968)]. Le premier paragraphe présente certains résultats qui y sont exposés. Nous appliquons ensuite ces résultats sur le cas particulier des systèmes modélisés par bond graph.

.a Approche classique

A partir de résultats obtenus pour les systèmes non linéaires, une condition suffisante de commandabilité locale des systèmes bilinéaires est présentée.

Considérons le système non linéaire décrit par (IV.27).

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u) \tag{IV.27}$$

où $f(.)$ est continûment dérivable par rapport à ses arguments x et u. Considérons alors la représentation linéarisée de (IV.27) autour de $\bar{x}$ et $\bar{u}$ telle que $f(\bar{x},\bar{u}) = 0$.

$$\dot{x}' = \mathbf{E}x' + \mathbf{D}u' \tag{IV.28}$$

où $\mathbf{E} = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{u})$ et $\mathbf{D} = \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x},\bar{u})$.

On peut alors exprimer la condition de commandabilité structurelle locale au point $(\bar{x},\bar{u})$ du système non linéaire (IV.27) en terme de commandabilité de (IV.28). On applique la condition de rang pour la commandabilité des systèmes linéaires à l'équation (IV.28). On aboutit alors à la condition suivante: si le rang de la matrice **M**=(**E**|**D**), constituée de la matrice **E** concaténée avec la matrice **D**, est égal à n l'ordre du système, alors le système non linéaire décrit par l'équation (IV.27) est localement structurellement commandable.

Considérons le système bilinéaire donné par l'équation (IV.29).

$$\frac{dx(t)}{dt} = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t) + \sum_{k=1}^{m} \mathbf{N}_k u_k(t) x(t) \tag{IV.29}$$

où les paramètres sont définis comme précédemment.

Si l'on applique la procédure de linéarisation sur ce système, la matrice D est

$$\mathbf{D} = \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x},\bar{u}) = \left(\mathbf{N}_1\bar{x} \middle| \mathbf{N}_2\bar{x} \middle| \ldots \middle| \mathbf{N}_m\bar{x}\right) + \mathbf{B} \tag{IV.30}$$

E est définie par :

$$\mathbf{E} = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{u}) = \mathbf{A} + \sum_{k=1}^{m} \mathbf{N}_k \bar{u}_k \tag{IV.31}$$

La condition sur le rang de la matrice **M** devient

$$rang\left(\mathbf{A} + \sum_{k=1}^{m} \mathbf{N}_k \bar{u}_k \middle| \left(\mathbf{N}_1\bar{x} \middle| \mathbf{N}_2\bar{x} \middle| \ldots \middle| \mathbf{N}_m\bar{x}\right) + \mathbf{B}\right) = n \tag{IV.32}$$

Théorème IV.3 *Une condition suffisante pour que le système bilinéaire décrit par l'équation (IV.26) soit structurellement commandable localement autour de* $(\bar{x},\bar{u})$ *est que* $rang\left(\mathbf{A} + \sum_{k=1}^{m} \mathbf{N}_k \bar{u}_k \middle| \mathbf{B}\right) = n$.

Démonstration Résultat évident à partir de l'équation (IV.31) en considérant le fait que les termes des matrices $\left(\mathbf{N}_1\bar{x} \middle| \mathbf{N}_2\bar{x} \middle| \ldots \middle| \mathbf{N}_m\bar{x}\right)$ et ceux de **B** sont structurellement indépendants entre eux.

.b Approche bond graph

La simplicité de la forme de l'équation qui doit être vérifiée pour assurer la commandabilité locale d'un système bilinéaire permet de la transformer en une condition graphique simple sur le modèle bond graph non linéaire.

Proposition IV.1 *: Soit un système bilinéaire modélisé par un bond graph (B). Si, l'entrée u étant supposée constante, ce bond graph vérifie le critère des systèmes linéaires pour la commandabilité alors le système bilinéaire est localement commandable autour des points d'équilibre.*

Autrement dit, si tous les éléments I et C admettent une causalité dérivée quand on met le bond graph en dérivée, et qu'on dualise les sources, on peut affirmer que le système est localement commandable.

Démonstration En considérant l'entrée u constante une équation de la forme (IV.33) est associée à un bond graph (B).

$$\dot{x} = \left(\mathbf{A} + \sum_{i=1}^{m} (\mathbf{N}_i \overline{u}_i)\right) x + \mathbf{B}_0 + \sum_{i=1}^{m} (\mathbf{B}_i \overline{u}_i) \qquad \text{(IV.33)}$$

u étant constante l'équation (IV.33) est linéaire et la théorie des systèmes linéaires peut être appliquée. Une affectation préférentielle différentielle de la causalité d'un bond graph linéaire ayant pour équation d'état (IV.34)

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}_0 \qquad \text{(IV.34)}$$

donne l'équation (IV.35),

$$rang(\mathbf{A}|\mathbf{B}_0) = n - t \qquad \text{(IV.35)}$$

où n: nombre d'élément dynamique en causalité intégrale

t : nombre d'éléments dynamiques restant en causalité intégrale lorsqu'une affectation de la différentielle de la causalité est choisie préférentiellement, avec si nécessaire dualisation des sources.

d'où le résultat de la proposition.

Exemple 1

Reprenons le bond graph associé à l'exemple d'électronique de puissance du paragraphe IV.2.3.3.b. Comme le montre la figure IV.16, on peut mettre tous les éléments dynamiques en causalité dérivée.

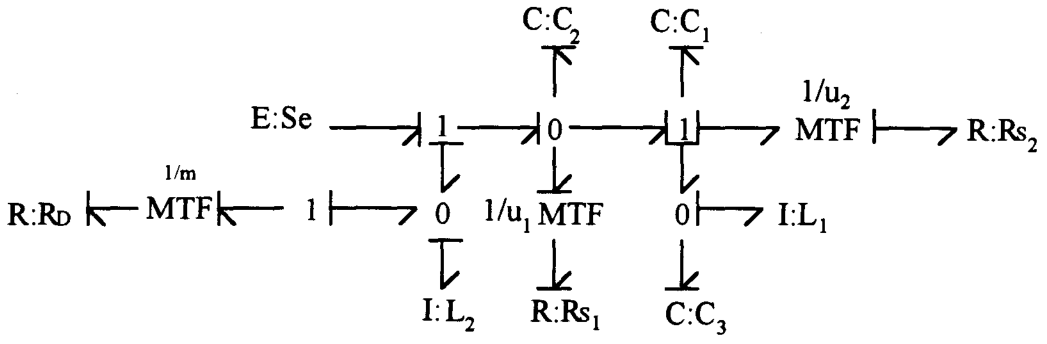


figure IV.16 : Bond graph causal du circuit de la figure IV.11.

Remarque : La mise en causalité dérivée n'étant que le moyen de calculer des rangs de matrices, l'inversion de la causalité sur les liens de puissances liés aux éléments modulés ne pose aucun problème.

Ce système qui vérifiait la condition nécessaire d'accessibilité, vérifie aussi le critère suffisant de commandabilité locale en $(\bar{x},\bar{u})$.

Exemple 2

Reprenons maintenant l'exemple du paragraphe IV.2.3.3.a. La mise en causalité dérivée de ce bond graph laisse par exemple l'élément dynamique C_1 en causalité intégrale (figure IV.17).

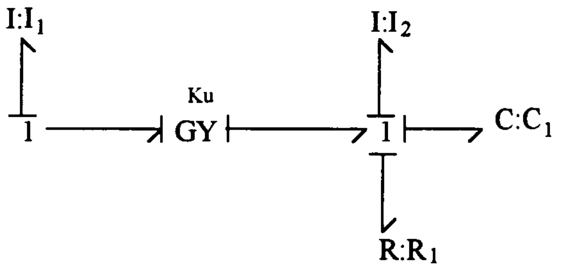


figure IV.17 : Modèle bond graph du premier exemple

La condition suffisante de commandabilité n'est donc pas vérifiée. En fait on peut démontrer par la théorie de la géométrie différentielle que ce système n'est pas localement fortement accessible et ne peut donc pas être commandable.

IV.3 Systèmes non linéaires

Nous avons étudié dans ce qui précède la propriété de commandabilité des systèmes bilinéaires. Pour que le modèle bond graph d'un système conduise effectivement à une équation d'état bilinéaire plusieurs hypothèses ont été nécessaires. L'objet de ce paragraphe est d'étendre les résultats du cas bilinéaire à certaines classes de systèmes non linéaires obtenues quand certaines de ces hypothèses sont supprimées. Les différentes classes de systèmes non linéaires étudiées auront toujours en commun d'avoir la commande intervenant par le module des éléments MTF et MGY.

IV.3.1 Système non linéaire dérivé des systèmes bilinéaires : premier cas.

Nous considérerons encore ici les systèmes dont les commandes interviennent comme modules des éléments MTF ou MGY. Les lois caractéristiques des éléments R, C, I sont également toujours supposées linéaires. Enfin les sources d'effort et de flux sont encore indépendantes et leur valeur ne servent pas de commande.

Nous supposons alors que le modèle bond graph vérifie toujours les conditions IV.1.1 et IV.1.2 et qu'il vérifie de plus la condition IV.2.

Condition IV.2

Il n'y a pas de chemins causaux entre deux éléments dynamiques en causalité intégrale, passant par plus de deux éléments MTF ou MGY modulés par l'entrée.

La principale différence avec les hypothèses du cas bilinéaire est qu'un élément R relié causalement à un élément modulé par l'entrée peut maintenant être aussi causalement relié à un autre élément (R, C, I). L'autre différence est dans l'affaiblissement de la condition IV.1.4.

On a alors une équation d'état de la forme (IV.36)

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}_0 + \sum_{i=1}^{m} \mathbf{N}_i x\, u_i + \sum_{i=1}^{m} \mathbf{B}_i u_i + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \Xi_{ij} x u_i u_k + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \xi_{ij}\, u_i u_k \qquad \text{(IV.36)}$$

Les Ξ_{ij} sont des matrices carrées et les ξ_{ij} des vecteurs.

Ici encore une condition nécessaire de commandabilité du système se ramène à une condition de rang matricielle. De la même façon que dans le cas des systèmes bilinéaires, pour que le système soit commandable il est nécessaire que :

$$rang\Big(\mathbf{A}\big|\mathbf{B}_0\big|\mathbf{N}_1\big|\cdots\big|\mathbf{N}_m\big|\mathbf{B}_1\big|\cdots\big|\mathbf{B}_m\big|\Xi_{11}\big|\cdots\big|\Xi_{mm}\big|\xi_{11}\big|\cdots\big|\xi_{mm}\Big) = n \qquad \text{(IV.37)}$$

De nouveaux bond graphs déduits du modèle bond graph initial doivent alors être obtenus.

- Un bond graph (B_0) est obtenu en supprimant tous les éléments MTF et MGY modulés par toutes les commandes u_i, ainsi que les liens et les éléments R, C or I causalement reliés directement uniquement aux autres éléments par des éléments MTF ou MGY modulés par u_i.

- Le bond graph (B_i) est obtenu depuis le bond graph initial en supprimant les éléments MTF ou MGY modulés par la commande u_j $j \neq i$, ainsi que les liens et les éléments R, C, I causalement reliés directement uniquement aux éléments modulés par la commande u_j.

- Le bond graph (B_{ij}) est obtenu à partir du bond graph initial en ne gardant que les éléments MTF ou MGY modulés par les commandes u_i ou u_j si ces éléments sont causalement reliés entre eux par une liaison causale d'ordre zéro (directement ou par des éléments R). On conserve aussi les liens et les éléments constituant cette liaison ainsi que les éléments C, I causalement reliés à un élément R par un chemin ne passant que par un élément modulé par l'entrée u_i ou u_j.

Théorème IV.4

Pour qu'un système (Σ) régit par l'équation (IV.37) modélisé par un bond graph (B) soit commandable, il est nécessaire que:

1) Il existe un chemin causal entre un élément MTF ou MGY modulé par une commande et les éléments dynamiques en causalité intégrale quand le bond graph est en causalité intégrale.

2) Aucun groupe de 1 élément n'est commun à tous les bond graphs (B_k) et (B_{ij}) $k=0$ à m, $i=1$ à m et $j=1,..,m, j \geq i$.

3) Si un groupe de 2 éléments ou plus est commun à tous les bond graphs (B_k) et (B_{ij}), il faut que ces éléments ne soient plus un groupe dans le bond graph somme des (B_k) et (B_{ij}).

Démonstration Annexe IX

Exemple Considérons le modèle bond graph suivant.

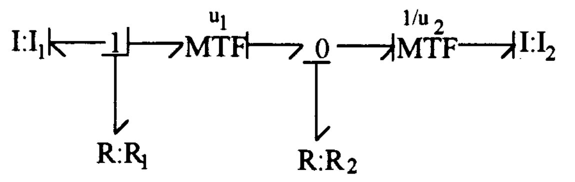


Figure IV.18 : Modèle bond graph non linéaire.

Bond graph (B_0) La procédure d'obtention du bond graph (B_0) conduit au bond graph de la figure IV.19, lorsqu'une affectation différentielle de la causalité est appliquée préférentiellement.

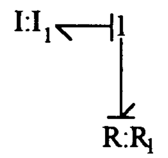


Figure IV.19 : Bond graph (B_0).

Il a une causalité dérivée, donc le seul groupe associé au bond graph (B_0) est le groupe à un élément (I_2).

Bond graphs (B_1) et (B_2) La procédure d'obtention des bond graphs (B_i) conduit aux bond graphs de la figure IV.20, lorsqu'une affectation différentielle de la causalité est appliquée préférentiellement.

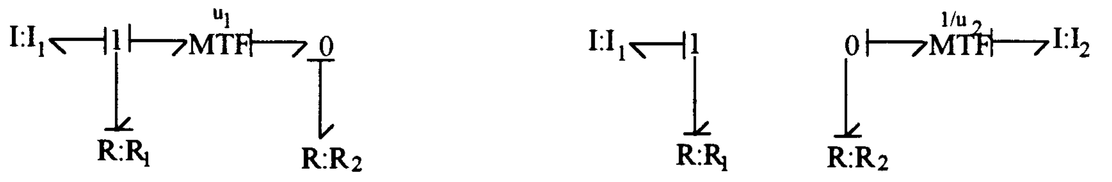


Figure IV.20 : Bond graphs (B_1) et (B_2).

Le groupe à un élément (I_2) est déduit du bond graph (B_1). Aucun élément ne restant en causalité intégrale dans (B_2), il n'y a aucun groupe.

Bond graph (B_{12}), (B_{11}) et (B_{22}) La procédure d'obtention du bond graph (B_{12}) conduit à un bond graph dont les deux possibilités de mise en causalité dérivée sont données figure IV.21.

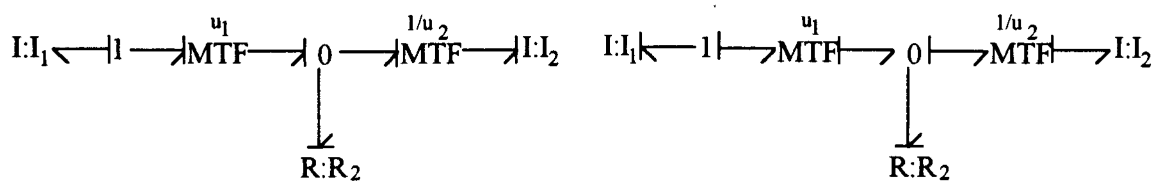


Figure IV.21 : Bond graph (B_{12}).

Soit I_1, soit I_2 doivent rester en causalité intégrale, le groupe (I_1, I_2) est donc associé au bond graph (B_{12}).

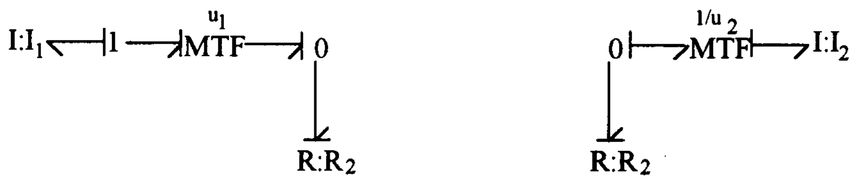


Figure IV.22 : Bond graphs (B_{11}) et (B_{22}).

Le groupe à un élément (I_2) est déduit du bond graph (B_{11}). Du bond graph (B_{22}) on trouve le groupe à un élément (I_1).

Conclusion Aucun groupe n'est commun aux 6 bond graphs. Le système vérifie donc la condition nécessaire de commandabilité.

Exemple 2 Soit le bond graph de la figure IV.23.

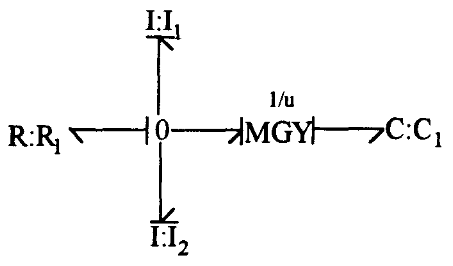


figure IV.23 : Modèle bond graph global.

Bond graph (B_0)

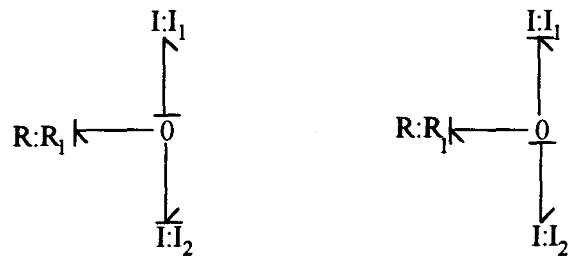


figure IV.24 : Bond graph (B_0).

Il y a deux groupes associés au bond graph (B_0). Le groupe (I_1, I_2) et le groupe (C_1).

Bond graph (B_1) Les deux possibilités de mise en causalité dérivée du bond graph (B_1) sont données figure IV.25.

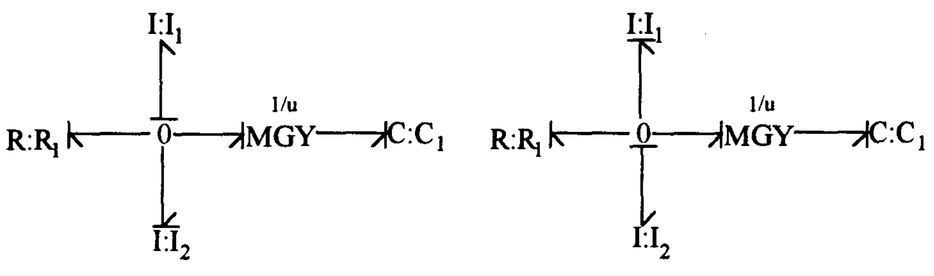


figure IV.25 : Bond graph (B_1).

Le groupe (I_1, I_2) est donc associé au bond graph (B_1).

Bond graph (B_{11}) La mise en causalité dérivée du bond graph (B_{11}) donne le bond graph de la figure IV.26.

$$R{:}R_1 \leftarrow\!\!| \; 0 \longrightarrow\!| \overset{1/u}{MGY} \longrightarrow\!| C{:}C_1$$

figure IV.26 : Bond graph (B_{11}).

Comme I_1 et I_2 n'apparaissent pas, 3 groupes sont associés à ce bond graph: (I_1), (I_2) et (I_1, I_2).

Conclusion Le groupe (I_1, I_2) apparaît dans les différents bond graphs (B_0), (B_1) et (B_{11}), le système ne vérifie donc pas la condition nécessaire de commandabilité.

IV.3.2 Cas non linéaire n°2

Dans ce paragraphe on reprend encore la même classe de systèmes dont la commande est le module des éléments MTF et MGY, mais les conditions IV.1.2 et IV.1.3 sont affaiblies. On suppose maintenant qu'il peut y avoir une liaison causale directe entre deux R passant par un élément modulé.

Condition IV.3

1) Les éléments dynamiques causalement reliés aux éléments R impliqués dans une liaison causale directe contenant un élément modulé par la commande, doivent l'être par une liaison ne passant pas par l'élément modulé.

2) Des éléments R impliqués dans des liaisons causales directes contenant un élément modulé par la commande sont supposés non causalement reliés par une liaison causale d'ordre 0, c'est à

dire par une liaison causale directe ou passant par des éléments R. L'équation d'état de ce système a alors une équation de la forme(IV.38).

$$\Delta(u_1,\cdots,u_m)\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}_0 + \sum_{k=1}^{m}(\mathbf{N}_k x u_k + \mathbf{B}_k u_k) \tag{IV.38}$$

où la matrice $\Delta(u_1,\cdots,u_m)$ est une fonction de la commande.

Le vecteur x est décomposé en $x=(x^T{}_1,\ldots x^T{}_i,\ldots x^T{}_p)^T$. Le vecteur x_i est composé des variables d'état associées aux éléments dynamiques causalement reliés à un des éléments R de la ième boucle causale contenant un élément modulé. Le dernier vecteur x_p est constitué des variables d'état associées aux éléments dynamiques non causalement reliés à une des boucles.

On déduit alors de nouveaux bond graphs du modèle bond graph initial.

- Un bond graph (B_0) est obtenu en supprimant tous les éléments MTF et MGY modulés par toutes les commandes u_i, ainsi que les liens et les éléments R, C or I causalement reliés directement uniquement aux autres éléments par des éléments MTF ou MGY modulés par u_i

- Le bond graph (B_i) est obtenu depuis le bond graph initial en supprimant les éléments MTF ou MGY modulés par la commande u_j $j \neq i$, ainsi que les liens et les éléments R, C, I causalement reliés directement uniquement aux éléments modulés par la commande u_j.

- Le bond graph (B'_i) est obtenu depuis le bond graph initial en ne gardant que les éléments dynamiques en causalité intégrale causalement reliés par une liaison causale d'ordre 0, à un des éléments R intervenant dans une boucle causale entre R passant par un élément MTF ou MGY modulé par la commandes u_i. On conserve aussi tous les éléments causalement reliés à ces éléments dynamiques par une liaison causale d'ordre 0.

Théorème IV.5

Pour qu'un système (Σ) régit par l'équation (IV.38) modélisé par un bond graph (B) soit commandable, il est nécessaire que:

1) Il existe un chemin causal entre un élément MTF ou MGY modulé par une commande et les éléments dynamiques en causalité intégrale quand le bond graph est en causalité intégrale.

2) Aucun groupe de 1 élément n'est commun à tous les bond graphs (B_k) et (B'_i) k=0 à m, i=1 à m.

3) Si un groupe de 2 éléments ou plus est commun à tous les bond graphs (B_k) et (B'_i), il faut que ces éléments ne soient plus un groupe dans le bond graph somme des (B_k) et (B'_i).

Démonstration

La démonstration est identique à celle de l'annexe IX en tenant compte que l'équation d'état du bond graph (B'_i) est donnée par l'équation (IV.39).

$$\Delta(u_i)\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}_0 + \mathbf{N}_i x u_i + \mathbf{B}_i u_i \qquad \text{(IV.39)}$$

Exemple Considérons le modèle bond graph de la figure IV.27.

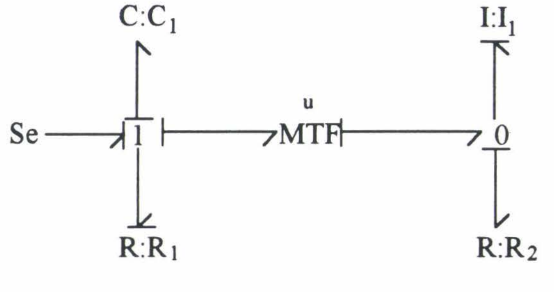


figure IV.27 : Modèle bond graph.

L'équation d'état associée à ce bond graph est donnée par l'équation suivante (IV.40);

$$\left(1+u^2 \,{}^{\mathrm{R}_2}\!/_{\mathrm{R}_1}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}q_{\mathrm{C}_1}\\ p_{\mathrm{I}_1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/\mathrm{R}_1\mathrm{C}_1 & 0\\ 0 & -\mathrm{R}_2/\mathrm{I}_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_{\mathrm{C}_1}\\ p_{\mathrm{I}_1}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & \mathrm{R}_2/\mathrm{R}_1\mathrm{I}_1\\ -\mathrm{R}_2/\mathrm{R}_1\mathrm{C}_1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_{\mathrm{C}_1}\\ p_{\mathrm{I}_1}\end{pmatrix}u$$
$$+\begin{pmatrix}1/\mathrm{R}_1\\ 0\end{pmatrix}Se + \begin{pmatrix}0\\ \mathrm{R}_2/\mathrm{R}_1\end{pmatrix}uSe \tag{IV.40}$$

L'équation d'état est donc bien de la forme (IV.39).

Le bond graph (B_0) en causalité dérivée est donné figure IV.28.

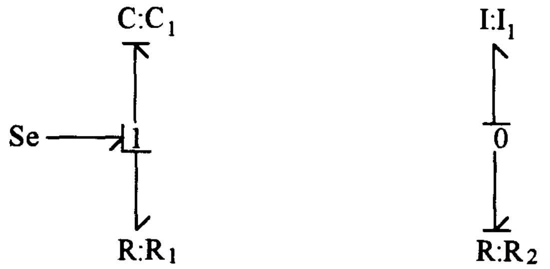


figure IV.28 : Bond graph (B_0).

Le bond graph (B_1) en causalité dérivée est donné par

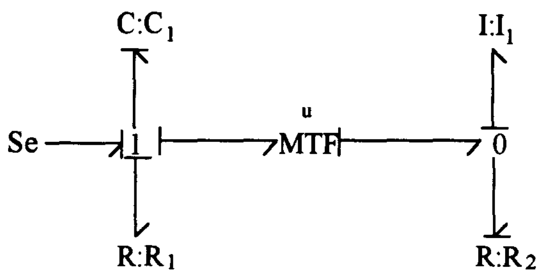


figure IV.29 : Bond graph (B_1).

Aucun élément ne reste en causalité dérivée dans les deux bond graphs, il n'existe donc aucun groupe et la condition nécessaire de commandabilité est satisfaite.

IV.3.3 Cas non linéaire n°3

Ce dernier cas regroupe les différents cas de systèmes non linéaires des paragraphes précédents.

On reprend toujours la même hypothèse sur la forme de la commande qui doit intervenir par la modulation d'éléments MTF ou MGY.

Les conditions supplémentaires sont données dans condition IV.4.

Condition IV.4

1) Il n'y a pas de liaison causale entre un élément quelconque et un élément dynamique en causalité dérivée passant par un élément modulé par l'entrée.

2) Les différentes liaisons entre éléments R passant par un élément modulé par l'entrée doivent être disjointes, c'est à dire que deux éléments R intervenant dans des liaisons différentes ne doivent pas être causalement relié par une liaison d'ordre 0.

L'équation d'état de ce système a alors une équation de la forme(IV.41).

$$\Delta(u_1,\cdots,u_m)\frac{dx}{dt} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}_0 + \sum_{i=1}^{m}\mathbf{N}_i x\, u_i + \sum_{i=1}^{m}\mathbf{B}_i u_i + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\Xi_{ij} x u_i u_k + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\xi_{ij}\, u_i u_k \quad \text{(IV.41)}$$

où la matrice $\Delta(u_1,\cdots,u_m)$ est une fonction de la commande.

Le vecteur x est alors décomposée en $x=(x^T{}_1,\ldots x^T{}_i,\ldots x^T{}_p)^T$. Le vecteur x_i est composé des variables d'état associées aux éléments dynamiques causalement reliés à un des éléments R de la ième boucle causale contenant un élément modulé. Le dernier vecteur x_p est constitué des variables d'état associées aux éléments dynamiques non causalement reliés à une des boucles.

On déduit alors de nouveaux bond graphs du modèle bond graph initial.

- Un bond graph (B_0) est obtenu en supprimant tous les éléments MTF et MGY modulés par toutes les commandes u_i, ainsi que les liens et les éléments R, C or I causalement reliés directement uniquement aux autres éléments par des éléments MTF ou MGY modulés par u_i

- Le bond graph (B_i) est obtenu depuis le bond graph initial en supprimant les éléments MTF ou MGY modulés par la commande u_j $j \neq i$, ainsi que les liens et les éléments R, C, I causalement reliés directement uniquement aux éléments modulés par la commande u_j.

- Le bond graph (B'_i) est obtenu depuis le bond graph initial en ne gardant que les éléments dynamiques causalement reliés par une liaison causale d'ordre 0, à un des éléments R intervenant dans une boucle causale entre R passant par un élément MTF ou MGY modulé par la commandes u_i. On conserve aussi tous les éléments causalement reliés à ces éléments dynamiques par une liaison causale d'ordre 0.

- Le bond graph (B_{ij})est obtenu depuis le bond graph initial en ne gardant que les éléments MTF ou MGY modulés par les commandes u_i ou u_j si ces éléments sont causalement reliés entre eux par une liaison causale d'ordre zéro (directement ou par des éléments R). On conserve aussi les liens et les éléments constituant cette liaison ainsi que les éléments C, I causalement reliés à un élément R par un chemin ne passant que par un élément modulé par l'entrée u_i ou u_j.

- Le bond graph (B'_{ij})est obtenu à partir du bond graph initial en ne gardant que les éléments MTF ou MGY modulés par les commandes u_i ou u_j si ces éléments sont causalement reliés entre eux par une liaison causale d'ordre zéro (directement ou par des éléments R). On conserve aussi les éléments dynamiques causalement reliés, par une liaison causale directe passant par un élément modulé par l'entrée u_i ou u_j, à un des éléments R intervenant dans une boucle causale entre R passant par un élément MTF ou MGY modulé par la commande u_i. ou u_j. On conserve enfin les liens et les éléments constituant ces liaisons.

On peut alors énoncer le théorème donnant une condition nécessaire de commandabilité.

Théorème IV.6

Pour qu'un système (Σ) régi par l'équation (IV.41) modélisé par un bond graph (B) soit commandable, il est nécessaire que:

1) Il existe un chemin causal entre un élément MTF ou MGY modulé par une commande et les éléments dynamiques en causalité intégrale quand le bond graph est en causalité intégrale.

2) Aucun groupe de 1 élément n'est commun à tous les bond graphs (B_k) (B'_i) (Bij) et (B'ij) $k=0$ à m, $i=1$ à m, $j=1$ à m avec $j \geq i$.

3) Si un groupe de 2 éléments ou plus est commun à tous les bond graphs (B_k) (B'_i) (Bij) et (B'ij), il faut que ces éléments ne soient plus un groupe dans le bond graph somme de ces bond graphs.

Démonstration De nouveau la démonstration est identique au cas non linéaire précédent (Annexe IX) sachant qu'au bond graph *(B'ij)* est associée l'équation d'état (IV.42).

$$\Delta(u_i, u_j)\frac{dx}{dt} = \Xi_{ij}xu_iu_j + \Xi_{ii}xu_iu_i + \Xi_{jj}xu_ju_j + \xi_{ij}\ u_iu_j + \xi_{ii}\ u_iu_i + \xi_{jij}\ u_ju_j \quad \text{(IV.42)}$$

Exemple Nous reprenons l'exemple d'électronique de puissance de la figure IV.11, la capacité C_3 est maintenant remplacée par une résistance R_1.

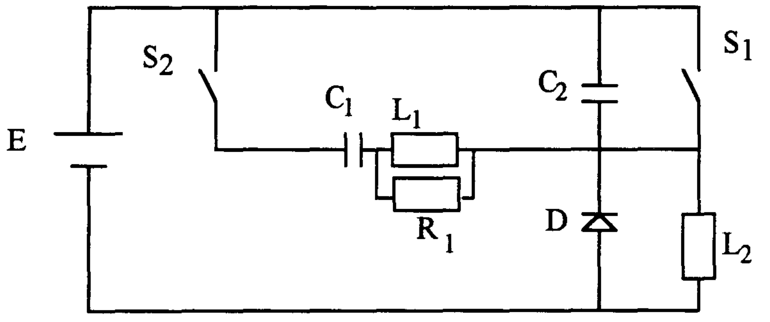


figure IV.29 : Circuit d'électronique de puissance.

Le bond graph causal de ce circuit est donné figure IV.30.

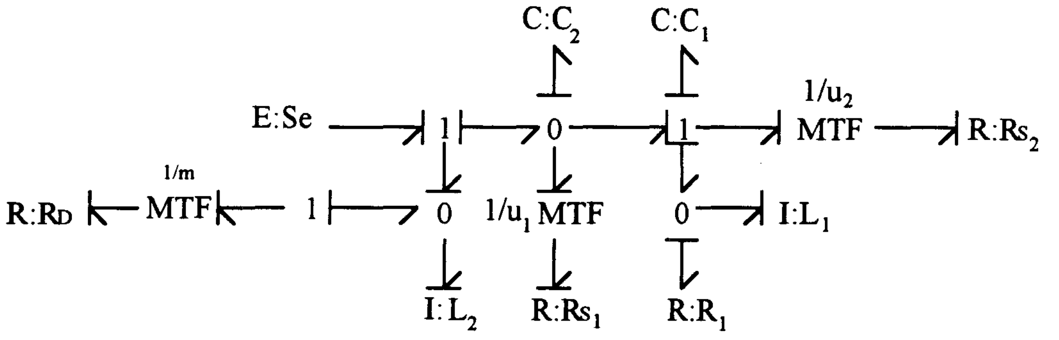


figure IV.28 : Bond graph causal du circuit de la figure IV.29.

Ce bond graph comporte une boucle causale entre les 2 éléments R_{s2} et R_1. Cette boucle étant unique, ce modèle bond graph entre bien dans le cadre de l'étude de ce paragraphe.

Le bond graph (B_0) est donné par la figure IV.29.

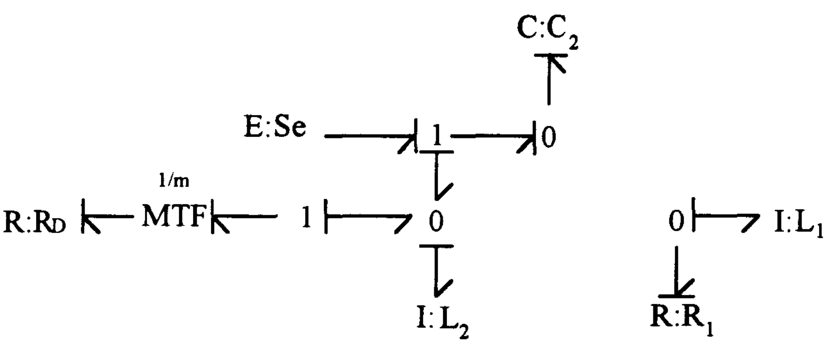


figure IV.29 : Bond graph (B_0) en causalité dérivée.

Aucun élément ne restant en causalité intégrale, il n'y a qu'un seul groupe, celui constitué du seul élément (C_1). Cet élément apparaît dans au moins le bond graph (B_2), on peut donc déjà conclure que le système vérifie la condition nécessaire de commandabilité.

Cette dernière étude regroupe les études des différents cas de systèmes non linéaires étudiés dans ce quatrième chapitre. Elle englobe en fait presque tous les cas où la commande se fait par la modulation d'éléments MTF ou MGY. La principale hypothèse qu'il faut encore satisfaire est qu'il ne doit pas y avoir de liaison causale d'ordre 0 entre des éléments R reliés causalement à des éléments MTF et MGY différents. L'étude d'autres conditions nécessaires de commandabilité plus fines, déduite de l'approche par géométrie différentielle se heurte au problème de la détermination de crochets de Lie sur le bond graph. En effet si la valeur des dérivées de Lie est accessible sur le bond graph par une simple considération de gains de chemins causaux, la valeur des crochets de Lie est inaccessible. D'autres approches fourniront peut être de nouvelles conditions nécessaires de commandabillité. Parmis ces approches possibles on peut penser à la notion d'interacteur [Moog (1992)], ou aux systèmes plats [Fliess(1992)].

IV.4 Conclusion

Après un rappel sur les systèmes bilinéaires, nous avons étudié dans ce chapitre une condition nécessaire à la forte accessibilité locale de ces systèmes. Cette condition d'abord matricielle a été transformée pour être appliquée directement sur la modélisation bond graph du système.

Nous avons ensuite développé une condition graphique nécessaire et une condition graphique suffisante à la commandabilité des systèmes bilinéaires. Nous les avons employées sur quelques exemples simples. Nous avons enfin étendu les procédures obtenues pour l'étude de la propriété de commandabilité des systèmes bilinéaires à certaines classes dérivées de systèmes non linéaires, regroupant les cas où la commande intervient comme module des éléments MTF et MGY.

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GENERALE

La connaissance des propriétés structurelles d'un système est un élément important lors de la modélisation d'un système ou de l'élaboration d'une stratégie de commande.

Désirant profiter des avantages que nous apporte une modélisation par bond graph, nous avons développé de nouveaux algorithmes d'étude de la propriété de commandabilité structurelle.

Pour cela, la première démarche a été d'étudier cette propriété sur le modèle linéarisé. Nous avons donc dans un premier temps développé une méthode permettant d'obtenir le modèle bond graph linéaire dont l'équation d'état est l'équation linéarisée de l'équation d'état associée au modèle bond graph non linéaire. Les modèles bond graphs linéarisés obtenus comportant des sources modulées, une nouvelle méthode d'analyse de la commandabilité structurelle a été développée afin de tenir compte de ces classes de bond graphs linéaires. Nous avons appliqué cette méthode plus particulièrement sur l'exemple du double pendule inversé.

Une autre approche a été utilisée dans le dernier chapitre. Après avoir établi une condition algébrique de commandabilité sur l'équation d'état de certaines classes de systèmes non linéaires, nous étudions cette condition directement à partir du modèle bond graph en décomposant celui-ci en plusieurs bond graphs. Une analyse causale sur les bond graphs nous donne alors des conditions nécessaires pour la commandabilité du système. Le champ d'application de cette méthode concerne les systèmes dont la commande intervient par la modulation d'un élément MTF ou MGY. Nous avons vu en particulier l'étude des systèmes d'électronique de puissance dans lesquels la commande se fait par la commutation d'interrupteurs.

De nombreuses perspectives peuvent être envisagées.

- Détermination d'autres conditions nécessaires ou suffisantes de commandabilité en utilisant la notion d'interacteur [Moog(1992)] ou de systèmes plats [Fliess(1992)].
- Etude d'autres classes de systèmes non linéaires, tels que les systèmes comportant des éléments MTF et MGY modulés par une fonction polynomiale de l'état. Un développement en série de Taylor des rapports des éléments MTF ou MGY dans le cas où ils sont des fonctions quelconques de l'état, pourra permettre avec quelques précautions, de se ramener à ce cas.
- Extension de l'étude à d'autres propriétés telles que l'observabilité ou l'identifiabilité .

ANNEXES

ANNEXE 1

Principes de la méthodologie bond graph

L'hypothèse de réticulation nous permet de décomposer un système en sous systèmes échangeant de la puissance entre eux. Cette puissance est transmise de manière à assurer la conservation de l'énergie, mais aussi sa continuité [Breedveld(1984)], [Paynter(1961)].

Considérons ainsi deux sous systèmes A et B interconnectés par une liaison physique. Le flux d'énergie entre A et B est représenté alors par un lien (bond) de puissance connectant les deux sous systèmes entre eux (Figure A.I.1).

$$A \rightharpoondown B$$

Figure A.I.1 : Transfert de puissance.

Le transfert de puissance à travers un lien est appelé flux d'énergie. Pour cela à chaque lien est associée une paire de variables physiques conjuguées, dont le produit donne la valeur de la puissance échangée par ce lien. Dans la théorie bond graph, ces variables de puissance ont reçu le nom d'effort (*e*) et de flux (*f*) (Figure A.I.2). On a alors $P=ef$.

$$A \overset{e}{\underset{f}{\rightharpoondown}} B$$

Figure A.I.2: Transfert de puissance et ses variables.

En résumé, on peut dire que si l'on a une représentation d'un système comme donné Figure A.I.2 alors on sait que:

- Il existe un lien physique entre A et B

- A transmet de la puissance à B

- La puissance transmise est égale au produit entre *e* et *f*.

	Effort *e*	Flux *f*	Moment généralisé *p*	Déplacement généralisé *q*
Translation	force	vitesse	moment	déplacement
Rotation	couple	vitesse angulaire	moment angulaire	angle
hydraulique	pression	débit volumique	impulsion	volume
Acoustique	pression	vitesse volumique	moment	volume
Electrique	tension	courant	flux magnétique	charge
chimique	potentiel chimique	flux molaire	_______	masse molaire
Thermo-dynamique	température	flux entropique	_______	entropie

Figure A.I.3: Variables des puissance (e,f) et d'énergie (p,q).

Des composants en nombre très restreint permettent de modéliser les différents phénomènes intervenant dans chaque domaine de la physique de manière unifiée (Figure A.I.4).

	Nom	relation élémentaire	exemple
$\mathrm{Se} \rightharpoondown$	source d'effort	$e(t)$ donné	gravité source de tension source de pression
$\mathrm{Sf} \rightharpoondown$	source de flux	$f(t)$ donné	source de vitesse source de flux source de courant
$\rightharpoondown \mathrm{R}$	Résistance	$\phi(e,f)=0$ $e=Rf$	amortisseur résistance électrique frottement
$\rightharpoondown \mathrm{C}$	Capacité	$\phi(e,q)=0$	ressort compressibilité réservoir
$\rightharpoondown \mathrm{I}$	Inertie	$\phi(f,p)=0$	masse inertie d'un fluide inductance
$\rightharpoondown \mathrm{TF} \rightharpoondown$	Transformateur	$e_1 = m\, e_2$ $f_2 = m\, f_1$	système pignons piston pompe
$\rightharpoondown \mathrm{GY} \rightharpoondown$	Gyrateur	$e_1 = r\, f_2$ $e_2 = r\, f_1$	
$\rightharpoondown \overset{m \downarrow}{\mathrm{MTF}} \rightharpoondown$	Transformateur modulé	$e_1 = m(t)\, e_2$ $f_2 = m(t)\, f_1$	mécanisme cinématique
$\rightharpoondown \overset{r \downarrow}{\mathrm{MGY}} \rightharpoondown$	Gyrateur modulé	$e_1 = r(t)\, f_2$ $e_2 = r(t)\, f_1$	moteur électrique pompe centrifuge
$\rightharpoondown 0 \leftharpoondown$	Jonction 0	$e_1 = e_2 = \cdots = e_n$ $\sum f = 0$	force identique connexion électrique parallèle
$\rightharpoondown 1 \leftharpoondown$	Jonction 1	$f_1 = f_2 = \cdots = f_n$ $\sum e = 0$	vitesse identique connexion électrique série

Figure A.I.4: Composants bond graphs élémentaires.

ANNEXE II

Equivalence linéarisation de l'équation d'état -Equation d'état du bond graph linéarisé

La structure d'un bond graph sans élément en causalité dérivée peut se schématiser à l'aide de la figure A.II.1en regroupant sous forme de vecteurs les variables mises en jeu:

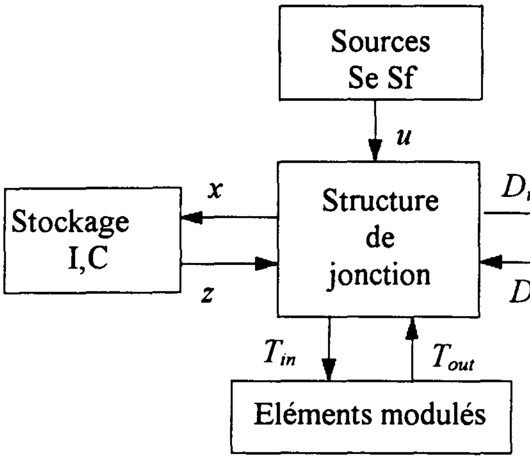


figure A.II.1 : Représentation vectorielle d'un bond graph.

D_{in} et D_{out} regroupent les efforts et les flux respectivement entrants et sortants pour les éléments R.

T_{in} et T_{out} regroupent les efforts et les flux respectivement entrants et sortants pour les éléments MTF et MGY modulés par l'état.

Les x sont les variables d'état associés aux éléments I et C en causalité intégrale et les z sont les vecteurs état complémentaires.

Ces vecteurs satisfont les relations suivantes constitutives des éléments.

$$D_{out} = LD_{in} \text{ avec } L = \begin{bmatrix} [R] & 0 \\ 0 & \left[\frac{1}{R}\right] \end{bmatrix}$$

$$z = Fx \text{ avec } F = \begin{bmatrix} \left[\frac{1}{I}\right] & 0 \\ 0 & \left[\frac{1}{C}\right] \end{bmatrix}$$

$T_{out} = M(\beta)T_{in}$ avec par exemple dans le cas du transformateur de la figure A.II.2a), de module $m(\beta)$, l'équation $\begin{bmatrix} e_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m(\beta) & 0 \\ 0 & m(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ f_1 \end{bmatrix}$; ou dans le cas du gyrateur de la figure A.II.2b), de module $r(\beta)$, l'équation $\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & r(\beta) \\ r(\beta) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$.

figure A.II.2 : Exemples d'éléments modulés.

Pour la simplicité de la démonstration, nous supposerons qu'une seule variable β intervient dans la modulation des différents éléments. Cette hypothèse n'enlève rien à la généralité de la démonstration, la prise en compte de plusieurs variables pour la modulation ne faisant qu'introduire de manière linéaire, et de façon identique par les deux approches, les différentes dérivées partielles ou totales des modules.

La structure de jonction est caractérisée par la relation (A.II.1), où les $\mathbf{S}_{ij}$ sont des matrices constantes.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ D_{in} \\ T_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} & \mathbf{S}_{13} & \mathbf{S}_{14} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} & \mathbf{S}_{23} & \mathbf{S}_{24} \\ \mathbf{S}_{31} & \mathbf{S}_{32} & \mathbf{S}_{33} & \mathbf{S}_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ D_{out} \\ T_{out} \\ u \end{bmatrix} \qquad \text{(A.II.1)}$$

La deuxième ligne de cette équation permet d'écrire

$$D_{in} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{S}_{22}L\right)^{-1}\left[\mathbf{S}_{21}z + \mathbf{S}_{23}M(\beta)T_{in} + \mathbf{S}_{24}u\right] \qquad \text{(A.II.2)}$$

qui donne alors en remplaçant dans la troisième ligne de (A.II.1)

$$T_{in} = \mathbf{S}_{31}z + \mathbf{S}_{32}L\left(\mathbf{I} - \mathbf{S}_{22}L\right)^{-1}\left[\mathbf{S}_{21}z + \mathbf{S}_{23}M(\beta)T_{in} + \mathbf{S}_{24}u\right] + \mathbf{S}_{33}M(\beta)T_{in} + \mathbf{S}_{34}u \qquad \text{(A.II.3)}$$

soit

$$\begin{aligned} T_{in} = &\left[\mathbf{I} - \mathbf{S}_{32}L(\mathbf{I} - \mathbf{S}_{22}L)^{-1}\mathbf{S}_{23}M(\beta) - \mathbf{S}_{33}M(\beta)\right]^{-1} * \\ &\left[\left(\mathbf{S}_{31} + \mathbf{S}_{32}L(\mathbf{I} - \mathbf{S}_{22}L)^{-1}\mathbf{S}_{21}\right)Fx + \left(\mathbf{S}_{32}L(\mathbf{I} - \mathbf{S}_{22}L)^{-1}\mathbf{S}_{24} + \mathbf{S}_{34}\right)u\right] \end{aligned} \tag{A.II.4}$$

ou

$$T_{in} = \left[\mathbf{K}(\beta)\right]^{-1}\left[\mathbf{P}Fx + \mathbf{Q}u\right] \tag{A.II.5}$$

avec

$$\mathbf{K}(\beta) = \left[\mathbf{I} - \mathbf{S}_{32}L(\mathbf{I} - \mathbf{S}_{22}L)^{-1}\mathbf{S}_{23}M(\beta) - \mathbf{S}_{33}M(\beta)\right] \tag{A.II.6}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{S}_{31} + \mathbf{S}_{32}L(\mathbf{I} - \mathbf{S}_{22}L)^{-1}\mathbf{S}_{21} \tag{A.II.7}$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{S}_{32}L(\mathbf{I} - \mathbf{S}_{22}L)^{-1}\mathbf{S}_{24} + \mathbf{S}_{34} \tag{A.II.8}$$

remarque La condition d'inversibilité de la matrice **K** n'est pas une contrainte structurelle, c'est pourquoi nous la supposerons toujours inversible.

Finalement nous pouvons écrire la relation (A.II.9)

$$\begin{aligned} \dot{x} = &\left[\mathbf{S}_{11} + \mathbf{S}_{12}L(\mathbf{I} - \mathbf{S}_{22}L)^{-1}\left[\mathbf{S}_{21} + \mathbf{S}_{23}M(\beta)\mathbf{K}^{-1}(\beta)\mathbf{P}\right] + \mathbf{S}_{13}M(\beta)\mathbf{K}^{-1}(\beta)\mathbf{P}\right]Fx + \\ &\left[\mathbf{S}_{12}L(\mathbf{I} - \mathbf{S}_{22}L)^{-1}\left[\mathbf{S}_{24} + \mathbf{S}_{23}M(\beta)\mathbf{K}^{-1}(\beta)\mathbf{Q}\right] + \mathbf{S}_{13}M(\beta)\mathbf{K}^{-1}(\beta)\mathbf{Q} + \mathbf{S}_{14}\right]u \end{aligned} \tag{A.II.9}$$

Nous pouvons remarquer que seul le produit $M(\beta)\mathbf{K}^{-1}(\beta)$ est non linéaire. En linéarisant l'équation (A.II.9) on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{x}' = &\left[\mathbf{S}_{11} + \mathbf{S}_{12}L(\mathbf{I} - \mathbf{S}_{22}L)^{-1}\left[\mathbf{S}_{21} + \mathbf{S}_{23}M(\bar{\beta})\mathbf{K}^{-1}(\bar{\beta})\mathbf{P}\right] + \mathbf{S}_{13}M(\bar{\beta})\mathbf{K}^{-1}(\bar{\beta})\mathbf{P}\right]Fx' + \\ &\left[\mathbf{S}_{12}L(\mathbf{I} - \mathbf{S}_{22}L)^{-1}\left[\mathbf{S}_{24} + \mathbf{S}_{23}M(\bar{\beta})\mathbf{K}^{-1}(\bar{\beta})\mathbf{Q}\right] + \mathbf{S}_{13}M(\bar{\beta})\mathbf{K}^{-1}(\bar{\beta})\mathbf{Q} + \mathbf{S}_{14}\right]u' + \\ &\left[\left[\mathbf{S}_{12}L(\mathbf{I} - \mathbf{S}_{22}L)^{-1}\mathbf{S}_{23} + \mathbf{S}_{13}\right]\left(\frac{dM}{d\beta}(\bar{\beta})\mathbf{K}^{-1}(\bar{\beta}) + M(\bar{\beta})\frac{d\mathbf{K}^{-1}}{d\beta}(\bar{\beta})\right)\right]\mathbf{P}F\bar{x}\beta' + \\ &\left[\left[\mathbf{S}_{12}L(\mathbf{I} - \mathbf{S}_{22}L)^{-1}\mathbf{S}_{23} + \mathbf{S}_{13}\right]\left(\frac{dM}{d\beta}(\bar{\beta})\mathbf{K}^{-1}(\bar{\beta}) + M(\bar{\beta})\frac{d\mathbf{K}^{-1}}{d\beta}(\bar{\beta})\right)\right]\mathbf{Q}\bar{u}\beta' \end{aligned} \tag{A.II.10}$$

La linéarisation directe consiste à linéariser la relation constitutive des éléments MTF et MGY, $T_{out} = M(\beta)T_{in}$.

En prenant en compte le fait que la relation doit être vérifiée au point nominal autour duquel on opère la linéarisation, soit $\overline{T}_{out} = M(\overline{\beta})\overline{T}_{in}$, la forme linéarisée s'écrit

$$T'_{out} = M(\overline{\beta})T'_{in} + \frac{dM}{d\beta}(\overline{\beta})\overline{T}_{in}\beta'. \qquad \text{(A.II.11)}$$

Ainsi, en reprenant l'exemple du transformateur de la figure A.II.2 , on a

$$\begin{bmatrix} e'_1 \\ f'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m(\overline{\beta}) & 0 \\ 0 & m(\overline{\beta}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e'_2 \\ f'_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{dm}{d\beta}(\overline{\beta}) & 0 \\ 0 & \frac{dm}{d\beta}(\overline{\beta}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{e}_2 \\ \overline{f}_1 \end{bmatrix} \beta' \qquad \text{(A.II.12)}$$

On posera dans la suite $\mathbf{B} = \frac{dM}{d\beta}(\overline{\beta})\overline{T}_{in}$.

Avec ce nouveau vecteur on a

$$D'_{in} = \mathbf{S}_{21}z' + \mathbf{S}_{22}LD'_{in} + \mathbf{S}_{23}\left(M(\overline{\beta})T'_{in} + \mathbf{B}\beta'\right) + \mathbf{S}_{24}u \qquad \text{(A.II.13)}$$

soit

$$D'_{in} = (\mathbf{I} - \mathbf{S}_{22}L)^{-1}\left[\mathbf{S}_{21}z' + \mathbf{S}_{23}M(\overline{\beta})T'_{in} + \mathbf{S}_{24}u' + \mathbf{S}_{23}\mathbf{B}\beta'\right] \qquad \text{(A.II.14)}$$

donc

$$T'_{in} = \mathbf{S}_{31}z' + \mathbf{S}_{32}L(\mathbf{I} - \mathbf{S}_{22}L)^{-1}\left[\mathbf{S}_{21}z' + \mathbf{S}_{23}M(\overline{\beta})T'_{in} + \mathbf{S}_{24}u' + \mathbf{S}_{23}\mathbf{B}\beta'\right] + \mathbf{S}_{33}\left[M(\overline{\beta})T'_{in} + \mathbf{B}\beta'\right] + S_{34}u'$$

(A.II.15)

soit en développant:

$$T'_{in} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{S}_{32}L(\mathbf{I} - \mathbf{S}_{22}L)^{-1}\mathbf{S}_{23}M(\overline{\beta}) - \mathbf{S}_{33}M(\overline{\beta})\right)^{-1} *$$
$$\left[\left[\mathbf{S}_{31} + \mathbf{S}_{32}L(\mathbf{I} - \mathbf{S}_{22}L)^{-1}\mathbf{S}_{21}\right]Fx' + \left[\mathbf{S}_{32}L(\mathbf{I} - \mathbf{S}_{22}L)^{-1}\mathbf{S}_{24} + \mathbf{S}_{34}\right]u' + \left[\mathbf{S}_{32}L(\mathbf{I} - \mathbf{S}_{22}L)^{-1}\mathbf{S}_{23} + \mathbf{S}_{33}\right]\mathbf{B}\beta'\right]$$

(A.II.16)

ou encore

$$T'_{in} = \mathbf{K}^{-1}(\overline{\beta})\left[\mathbf{P}Fx' + \mathbf{Q}u' + \left[\mathbf{S}_{32}L(\mathbf{I} - \mathbf{S}_{22})^{-1}\mathbf{S}_{23} + \mathbf{S}_{33}\right]\frac{dM}{d\beta}(\overline{\beta})\mathbf{K}^{-1}(\overline{\beta})[\mathbf{P}F\overline{x} + \mathbf{Q}\overline{u}]\beta'\right]$$

(A.II.17)

où $\mathbf{K}(\beta)$, **P** et **Q** sont définies comme précédemment (A.II.6-7-8).

d'où

$$D_{in}^{'} = \left(\mathbf{I}-\mathbf{S}_{22}L\right)^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{S}_{21}z'+\mathbf{S}_{23}M\left(\overline{\beta}\right)\mathbf{K}^{-1}\left(\overline{\beta}\right)\left[\mathbf{P}Fx'+\mathbf{Q}u'\right]+\mathbf{S}_{24}u'+\\ \mathbf{S}_{23}\left[M\left(\overline{\beta}\right)\mathbf{K}^{-1}\left(\overline{\beta}\right)\left[\mathbf{S}_{32}L\left(\mathbf{I}-\mathbf{S}_{22}L\right)^{-1}\mathbf{S}_{23}+\mathbf{S}_{33}\right]+\mathbf{I}\right]*\dfrac{dM}{d\beta}\left(\overline{\beta}\right)\mathbf{K}^{-1}\left(\overline{\beta}\right)\left[\mathbf{P}F\overline{x}+\mathbf{Q}\overline{u}\right]\mathbf{B}\beta'\end{bmatrix} \tag{A.II.18}$$

et finalement

$$\begin{aligned}\dot{x}' =& \left[\mathbf{S}_{11}+S_{12}L\left(\mathbf{I}-\mathbf{S}_{22}L\right)^{-1}\left[\mathbf{S}_{21}+\mathbf{S}_{23}M\left(\overline{\beta}\right)\mathbf{K}^{-1}\left(\overline{\beta}\right)\mathbf{P}\right]+\mathbf{S}_{13}M\left(\overline{\beta}\right)\mathbf{K}^{-1}\left(\overline{\beta}\right)\mathbf{P}\right]Fx'+\\ &\left[\mathbf{S}_{12}L\left(\mathbf{I}-\mathbf{S}_{22}L\right)^{-1}\left[\mathbf{S}_{24}+\mathbf{S}_{23}M\left(\overline{\beta}\right)\mathbf{K}^{-1}\left(\overline{\beta}\right)\mathbf{Q}\right]+\mathbf{S}_{13}M\left(\overline{\beta}\right)\mathbf{K}^{-1}\left(\overline{\beta}\right)\mathbf{Q}+\mathbf{S}_{14}\right]u'+\\ &\begin{bmatrix}\mathbf{S}_{12}L\left(\mathbf{I}-\mathbf{S}_{22}L\right)^{-1}\mathbf{S}_{23}M\left(\overline{\beta}\right)\mathbf{K}^{-1}\left(\overline{\beta}\right)\left[\mathbf{S}_{32}L\left(\mathbf{I}-\mathbf{S}_{22}L\right)^{-1}\mathbf{S}_{23}+\mathbf{S}_{33}+\mathbf{I}\right]+\\ \mathbf{S}_{13}M\left(\overline{\beta}\right)\mathbf{K}^{-1}\left(\overline{\beta}\right)\left[\mathbf{S}_{32}L\left(\mathbf{I}-\mathbf{S}_{22}L\right)^{-1}\mathbf{S}_{23}+\mathbf{S}_{33}+\mathbf{I}\right]\end{bmatrix}\dfrac{dM}{d\beta}\left(\overline{\beta}\right)\mathbf{K}^{-1}\left(\overline{\beta}\right)\left[\mathbf{P}F\overline{x}+\mathbf{Q}\overline{u}\right]\beta'\end{aligned} \tag{A.II.19}$$

Il ne reste alors qu'à comparer les équations (A.II.10) et (A.II.19). Cette comparaison nous amène à devoir démontrer l'égalité (A.II.20).

$$\frac{d\mathbf{K}^{-1}}{d\beta}\left(\overline{\beta}\right)=\mathbf{K}^{-1}\left(\overline{\beta}\right)\left[\mathbf{S}_{32}L\left(\mathbf{I}-\mathbf{S}_{22}L\right)^{-1}\mathbf{S}_{23}+\mathbf{S}_{33}\right]\frac{dM}{d\beta}\left(\overline{\beta}\right)\mathbf{K}^{-1}\left(\overline{\beta}\right) \tag{A.II.20}$$

On peut tout d'abord remarquer, d'après la définition de $\mathbf{K}(\beta)$ et la propriété de linéarité de la dérivation, que l'on a l'égalité (A.II.21).

$$\frac{d\mathbf{K}}{d\beta}\left(\overline{\beta}\right)=-\left[\mathbf{S}_{32}L\left(\mathbf{I}-\mathbf{S}_{22}L\right)^{-1}\mathbf{S}_{23}+\mathbf{S}_{33}\right]\frac{dM}{d\beta}\left(\overline{\beta}\right) \tag{A.II.21}$$

La démonstration se ramène donc à la validité de l'équation (A.I.22).

$$\frac{d\mathbf{K}^{-1}}{d\beta}\left(\overline{\beta}\right)=-\mathbf{K}^{-1}\left(\overline{\beta}\right)\frac{d\mathbf{K}}{d\beta}\left(\overline{\beta}\right)\mathbf{K}^{-1}\left(\overline{\beta}\right) \tag{A.II.22}$$

Pour cela, considérons une matrice carré inversible $\mathbf{A}$ dont les coefficients sont fonctions d'un paramètre x. La matrice étant inversible on a :

$$\mathbf{A}^{-1}(x)\mathbf{A}(x)=\mathbf{I} \tag{A.II.23}$$

où $\mathbf{I}$ est la matrice identité de dimension égale à celle de la matrice $\mathbf{A}$.

En dérivant cette expression on obtient en notant $\mathbf{0}$ la matrice nulle:

$$\frac{d\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\right)}{dx}(x) = \mathbf{0} \tag{A.II.24}$$

soit

$$\frac{d\mathbf{A}^{-1}}{dx}(x)\mathbf{A}(x) + \mathbf{A}^{-1}(x)\frac{d\mathbf{A}}{dx}(x) = 0 \tag{A.II.25}$$

et donc finalement

$$\frac{d\mathbf{A}^{-1}}{dx}(x) = -\mathbf{A}^{-1}(x)\frac{d\mathbf{A}}{dx}(x)\mathbf{A}^{-1}(x) \tag{A.II.26}$$

L'équivalence entre les 2 méthodes dans le cas d'un système sans élément dynamique en causalité dérivée est donc vérifiée.

ANNEXE III

Linéarisation des bond graphs comportant des éléments en causalité dérivée.

Dans ce cas l'équation de structure de jonction est définie par (A.III.1)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_I \\ z_d \\ D_{in} \\ T_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} & \mathbf{S}_{13} & \mathbf{S}_{14} & \mathbf{S}_{15} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} & \mathbf{S}_{23} & \mathbf{S}_{24} & \mathbf{S}_{25} \\ \mathbf{S}_{31} & \mathbf{S}_{32} & \mathbf{S}_{33} & \mathbf{S}_{34} & \mathbf{S}_{35} \\ \mathbf{S}_{41} & \mathbf{S}_{42} & \mathbf{S}_{43} & \mathbf{S}_{44} & \mathbf{S}_{45} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_I \\ \dot{x}_d \\ D_{out} \\ T_{out} \\ u \end{bmatrix} \qquad \text{(A.III.1)}$$

Les caractéristiques des éléments sont définies par les équations (A.III.2)

$$\begin{aligned} D_{out} &= \mathbf{L} D_{in} \\ z_I &= \mathbf{F}_I x_I \\ z_d &= \mathbf{F}_d x_d \\ T_{out} &= \mathbf{M}(\beta) T_{in} \end{aligned} \qquad \text{(A.III.2)}$$

Un calcul similaire à celui mené dans l'annexe II conduit à (A.III.3).

$$\begin{aligned} \dot{x}_I &= \mathbf{A}_1(\beta) x_I + \mathbf{A}_2(\beta) \dot{x}_d + \mathbf{B}_1(\beta) u \\ x_d &= \mathbf{A}_3(\beta) x_I + \mathbf{A}_4(\beta) \dot{x}_d + \mathbf{B}_2(\beta) u \end{aligned} \qquad \text{(A.III.3)}$$

Le système linéaire obtenu à partir de ces équations correspond au système avec les deux équations précédentes linéarisées. La démonstration de l'équivalence entre les 2 méthodes se fait donc exactement de la même façon que pour le cas précédent.

ANNEXE IV

Modélisation bond graph du double pendule inversé

Considérons le système donné figure A.IV.1.

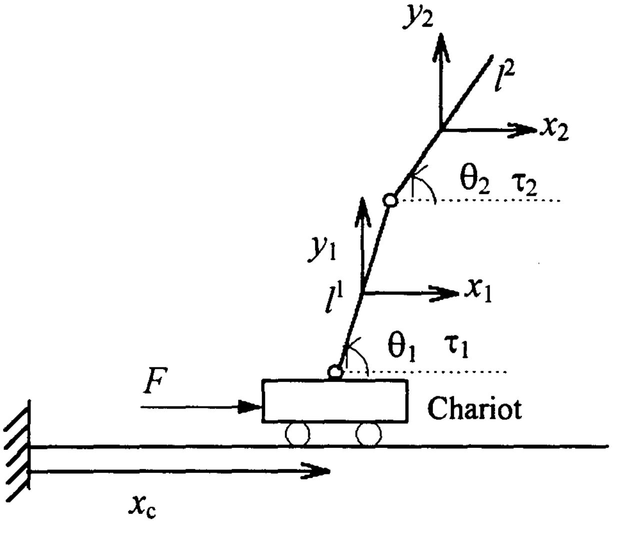


Figure A.IV.1 : Le double pendule inversé

Pour modéliser ce système nous allons suivre la procédure donné dans [Karnopp, Margolis, Rosenberg (1990)].

Une jonction 1 est associée à chaque vitesse définissant l'énergie cinétique (associé aux éléments I).

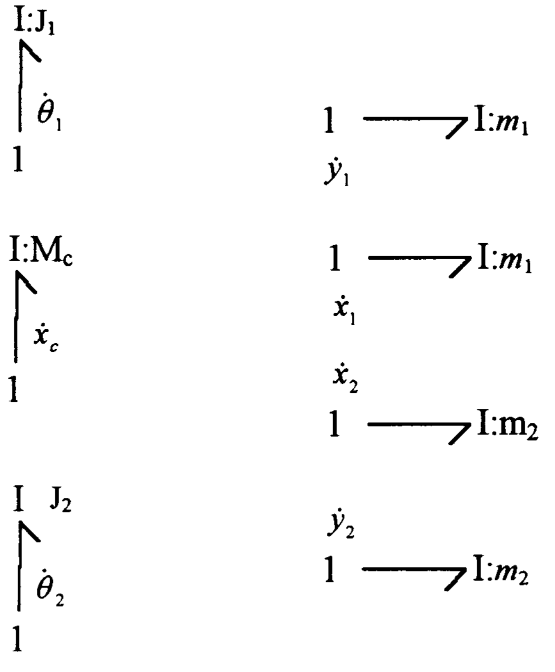


figure A.IV.2 Ensemble des variables géométriques.

On calcule ensuite les différentes relations liant les vitesses. Pour cela on dérive par rapport au temps les relations liants les différents déplacements.

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \frac{l_1}{2}\sin\theta_1 & \qquad & \dot{y}_1 = \frac{l_1}{2}\cos\theta_1\,\dot{\theta}_1 \\
x_1 &= \frac{l_1}{2}\cos\theta_1 + x_c & & \dot{x}_1 = -\frac{l_1}{2}\sin\theta_1\,\dot{\theta}_1 + \dot{x}_c \\
& & \text{d'où} & \\
y_2 &= l_1\sin\theta_1 + \frac{l_2}{2}\sin\theta_2 & & \dot{y}_2 = l_1\cos\theta_1\,\dot{\theta}_1 + \frac{l_2}{2}\cos\theta_2\,\dot{\theta}_2 \\
x_2 &= l_1\cos\theta_1 + \frac{l_2}{2}\cos\theta_2 + x_c & & \dot{x}_2 = -l_1\sin\theta_1\,\dot{\theta}_1 - \frac{l_2}{2}\sin\theta_2\,\dot{\theta}_2 + \dot{x}_c
\end{aligned}
$$

On trouve donc que les vitesses sont multipliées par un terme constant ou dépendant d'une position puis additionnées. Des transformateurs modulés sont utilisés pour les multiplications et des jonctions 0 pour les additions.

On ajoute enfin les autres éléments (Se), pour trouver le modèle bond graph final. La figure A.IV.3 est donc le modèle bond graph causal du double pendule inversé.

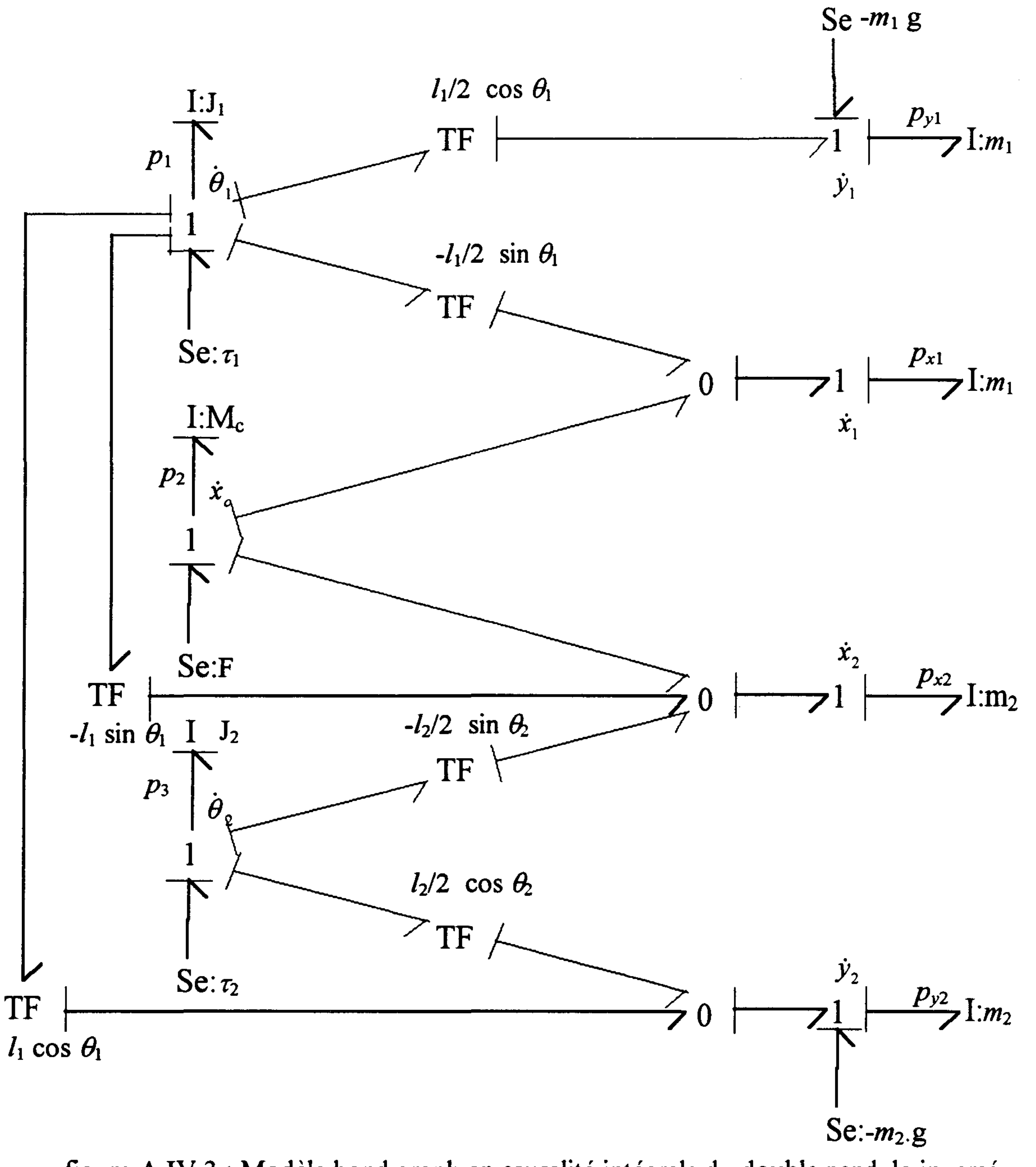


figure A.IV.3 : Modèle bond graph en causalité intégrale du double pendule inversé.

ANNEXE V

Calcul du rang structurel de la matrice d'état A*

Préliminaire Nous rappelons une propriété relative au rang d'une matrice

Propriété

Soit $\mathbf{T}$ *une matrice telle que* $\mathbf{T}=\begin{pmatrix}\mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{12}\\ \mathbf{T}_{21} & \mathbf{T}_{22}\end{pmatrix}$ *avec* $\mathbf{T}_{22}$ *une matrice carré inversible de dimension p alors* $rang(\mathbf{T})=p+rang(\mathbf{T}_{11}-\mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{22}^{-1}\mathbf{T}_{21})$ *(A.V.1)*

Ce résultat se déduit simplement d'une manipulation sur les lignes (ou colonnes) de la matrice T. En effet,

$$rang(\mathbf{T})=rang\begin{pmatrix}\mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{12}\\ \mathbf{T}_{21} & \mathbf{T}_{22}\end{pmatrix}=rang\left(\begin{pmatrix}\mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{12}\\ \mathbf{T}_{21} & \mathbf{T}_{22}\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0}\\ -\mathbf{T}_{22}^{-1}\mathbf{T}_{21} & \mathbf{I}\end{pmatrix}\right)=rang\begin{pmatrix}\mathbf{T}_{11}-\mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{22}^{-1}\mathbf{T}_{21} & \mathbf{T}_{12}\\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{22}\end{pmatrix}$$

d'où le résultat.

Remarque Une conséquence immédiate de ce théorème est que si rang(**T**)=rang(**T**$_{22}$) alors $\mathbf{T}_{11}-\mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{22}^{-1}\mathbf{T}_{21}=\mathbf{0}$

Rappelons que **A*=(M+N)F=M*F** d'où rang(A*)=rang(M*) dans la suite nous raisonnerons donc sur la matrice **M***.

En décomposant le vecteur $\dot{x}_i$ en un vecteur $\dot{x}_{i_1}$ pour les variables d'état associées aux éléments restant en causalité intégrale quand une causalité préférentielle dérivée est appliquée, et un vecteur $\dot{x}_{i_2}$ pour les variables d'état associées aux éléments passant en causalité dérivée, on obtient l'équation (A.V.2).

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{i_1} \\ \dot{x}_{i_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}^*_{11} & \mathbf{M}^*_{12} \\ \mathbf{M}^*_{21} & \mathbf{M}^*_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{i_1} \\ z_{i_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{pmatrix} u \qquad \text{(A.V.2)}$$

Dans cette annexe nous étudions le rang de la matrice **A*** nous pouvons donc prendre $\mathbf{B}_1$ et $\mathbf{B}_2$ nulles.

Une affectation différentielle de la causalité sur les éléments de stockage d'énergie équivaut à inverser $\dot{x}_{i_2}$ et z_{i_2} dans l'équation de structure de jonction (III.2). La nouvelle équation du système est donc construite en inversant les vecteurs $\dot{x}_{i_2}$ et z_{i_2} dans l'équation (A.V.2).

L'inversion de ces deux vecteurs dans la deuxième ligne donne

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{i_1} \\ z_{i_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}^*_{11} - \mathbf{M}^*_{12}\mathbf{M}^{*-1}_{22}\mathbf{M}^*_{21} & \mathbf{M}^*_{12}\mathbf{M}^{*-1}_{22} \\ -\mathbf{M}^{*-1}_{22}\mathbf{M}^*_{21} & \mathbf{M}^{*-1}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{i_1} \\ \dot{x}_{i_2} \end{pmatrix} \qquad \text{(A.V.3)}$$

Remarque : Par référence au cas linéaire sans source modulée, le choix des composants du vecteur x_{I_2} est tel que la matrice $\mathbf{M}^*_{22}$ soit inversible.

D'autre part en considérant l'équation (A.V.2), on sait grâce au préliminaire que

$$rang(\mathbf{M}^*) = rang\left(\mathbf{M}^*_{22}\right) + rang\left(\mathbf{M}^*_{11} - \mathbf{M}^*_{12}\mathbf{M}^{*-1}_{22}\mathbf{M}^*_{21}\right) \qquad \text{(A.V.4)}$$

Il faut donc étudier le rang de la matrice $\mathbf{T} = \mathbf{M}^*_{11} - \mathbf{M}^*_{12}\mathbf{M}^{*-1}_{22}\mathbf{M}^*_{21}$. Or, comme le montre l'équation (A.V.3), cette matrice exprime les chemins entre les éléments encore en causalité intégrale dans le bond graph en causalité dérivée. Pour simplifier nous ne considérons maintenant que le bond graph issu du premier en enlevant les éléments dynamiques qui sont passés en causalité dérivée. Cette opération ne change rien à la généralité de la démonstration les calculs qui suivent pouvant être réalisés exactement de la même façon sur le modèle bond graph complet.

L'équation régissant ce bond graph est $\dot{x}_{i_1} = \mathbf{T} z_{i_1}$.

Si la matrice **T** est nulle, c'est à dire qu'il n'y a aucun chemin causal impropre entre les éléments encore en causalité dérivée, l'équation (A.V.4) donne que le rang de **A*** est de p.

Sinon il existe un coefficient $\mathbf{T}_{22}$ non nul dans la matrice **T**, on décompose alors cette matrice comme (A.V.5). La décomposition des vecteurs $\dot{x}_{i_1}$ en $\left(\dot{x}_1^T \dot{x}_2^T\right)^T$, $\dot{x}_1$ étant un vecteur et $\dot{x}_2$ un scalaire et z_{i_1} en $\left(z_{\alpha 1}^T z_{\alpha 2}^T\right)^T$ $z_{\alpha 1}$ étant un vecteur de dimension identique à celle du vecteur $\dot{x}_1$ et $z_{\alpha 2}$ étant un scalaire, est réalisée en conséquence,

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{12} \\ \mathbf{T}_{21} & \mathbf{T}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{\alpha 1} \\ z_{\alpha 2} \end{pmatrix} \tag{A.V.5}$$

La présence du coefficient $\mathbf{T}_{22}$ non nul est due à l'existence d'un chemin causal entre l'élément en causalité intégrale associé à $\dot{x}_2$ et une source modulée par un détecteur connecté causalement à l'élément en causalité dérivée associé à $z_{\alpha 2}$.

En effet $\mathbf{T} = \mathbf{M}_{11}^* - \mathbf{M}_{12}^* \mathbf{M}_{22}^{*-1} \mathbf{M}_{21}^*$, en remplaçant $\mathbf{M}_{ij}^* = \mathbf{M}_{ij} + \mathbf{N}_{ij}$ et en tenant compte de la relation (A.V.6) on obtient (A.V.7).

$$\left(\mathbf{M}_{22} + \mathbf{N}_{22}\right)^{-1} = \left(\mathbf{I} + \mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{N}_{22}\right)^{-1} \mathbf{M}_{22}^{-1} = \left(\mathbf{I} - \left(\mathbf{I} + \mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{N}_{22}\right)^{-1} \mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{N}_{22}\right) \mathbf{M}_{22}^{-1} \tag{A.V.6}$$

ou

$$\left(\mathbf{M}_{22} + \mathbf{N}_{22}\right)^{-1} = \left(\mathbf{I} + \mathbf{H}\right) \mathbf{M}_{22}^{-1} \tag{A.V.7}$$

avec $\mathbf{H} = -\left(\mathbf{I} + \mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{N}_{22}\right)^{-1} \mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{N}_{22}$

donc

$$\begin{aligned}\mathbf{T} = \mathbf{M}_{11} + \mathbf{N}_{11} - \mathbf{M}_{12}\mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{M}_{21} - \mathbf{M}_{12}\mathbf{H}\mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{M}_{21} - \mathbf{M}_{12}(\mathbf{I}+\mathbf{H})\mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{N}_{21} - \\ \mathbf{N}_{12}(\mathbf{I}+\mathbf{H})\mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{M}_{21} - \mathbf{N}_{12}(\mathbf{I}+\mathbf{H})\mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{N}_{21}\end{aligned} \qquad \text{(A.V.8)}$$

De plus comme le rang de **M** est égal au rang de $\mathbf{M}_{22}$ on a par la remarque du préliminaire que $\mathbf{M}_{11} - \mathbf{M}_{12}\mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{M}_{21} = \mathbf{0}$.

Finalement

$$\mathbf{T} = \mathbf{N}_{11} - \mathbf{M}_{12}\mathbf{H}\mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{M}_{21} - \mathbf{M}_{12}(\mathbf{I}+\mathbf{H})\mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{N}_{21} - \mathbf{N}_{12}(\mathbf{I}+\mathbf{H})\mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{M}_{21} - \mathbf{N}_{12}(\mathbf{I}+\mathbf{H})\mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{N}_{21}$$

(A.V.9)

Les chemins propres entre les éléments encore en causalité intégrale sont donc éliminés, les coefficients restants contenant tous des termes de la matrice **N**.

L'existence d'un chemin entre l'élément associé à $\dot{x}_2$ et une source modulée peut se traduire par la possibilité de mettre cet élément en causalité dérivée grâce à la dualisation de la source modulée, ce qui revient à inverser les scalaires $\dot{x}_2$.et $z_{\alpha 2}$ dans (A.V.5). On a alors l'équation (A.V.10).

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ z_{\alpha 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{11} - \mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{22}^{-1}\mathbf{T}_{21} & \mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{22}^{-1} \\ -\mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{22}^{-1} & \mathbf{T}_{22}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{\alpha 1} \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} \qquad \text{(A.V.10)}$$

Le rang de **A*** est donc égal à $p+1+rang\left(\mathbf{T}_{11} - \mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{22}^{-1}\mathbf{T}_{21}\right)$. Il suffit de recommencer le même raisonnement sur la matrice $\left(\mathbf{T}_{11} - \mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{22}^{-1}\mathbf{T}_{21}\right)$ jusqu'à obtenir une matrice nulle ou de dimension 0.

Il est important de remarquer cependant que pour mettre l'élément dynamique associé à $\dot{x}_2$ en causalité dérivée nous avons dualisé une source modulée par z_2. Cette opération étant équivalente à inverser $\dot{x}_2$ et z_2 dans (A.V.5), une autre source modulée par z_2 ne peut être

Annexe V: Calcul du rang structurel de la matrice d'état A*

ANNEXE VI

Calcul du rang structurel de la matrice $(A^*|B)$

Comme **F**, la matrice intervenant dans la relation entre l'état et les variables d'état complémentaires, est une matrice diagonale inversible, on a:

$$\mathrm{rang}(\mathbf{A}^*|\mathbf{B})=\mathrm{rang}(\mathbf{M}^*\mathbf{F}|\mathbf{B})=\mathrm{rang}(\mathbf{M}^*|\mathbf{B}\mathbf{F}^{-1}) \tag{A.VI.1}$$

Si l'on réécrit la matrice différemment en changeant l'ordre de ses colonnes on a

$$rang\left(\mathbf{M}^*\middle|\mathbf{B}\mathbf{F}^{-1}\right)=rang\begin{pmatrix}\mathbf{M}^*_{11} & \mathbf{M}^*_{12} & \big|\mathbf{B}_1\mathbf{F}^{-1}\\ \mathbf{M}^*_{21} & \mathbf{M}^*_{22} & \big|\mathbf{B}_2\mathbf{F}^{-1}\end{pmatrix}=rang\begin{pmatrix}\mathbf{M}^*_{11}\big|\mathbf{B}_1\mathbf{F}^{-1} & \mathbf{M}^*_{12}\\ \mathbf{M}^*_{21}\big|\mathbf{B}_2\mathbf{F}^{-1} & \mathbf{M}^*_{22}\end{pmatrix} \tag{A.VI.2}$$

Si l'on reprend le préliminaire de l'annexe V en remplaçant la matrice **T** par cette dernière matrice et les matrices $\mathbf{M}^*_{ij}$ par $\mathbf{M}_{ij}+\mathbf{N}_{ij}$, on obtient le résultat suivant:

$$rang\left(\mathbf{M}^*\middle|\mathbf{B}\mathbf{F}^{-1}\right)=rang\left(\mathbf{M}^*_{22}\right)+rang\left(\mathbf{M}^*_{11}-\mathbf{M}^*_{12}\mathbf{M}^{*-1}_{22}\mathbf{M}^*_{21}\middle|\left(\mathbf{B}_1-\mathbf{M}^*_{12}\mathbf{M}^{*-1}_{22}\mathbf{B}_2\right)\mathbf{F}^{-1}\right) \tag{A.VI.3}$$

En décomposant le vecteur $\dot{x}_i$ en un vecteur $\dot{x}_{i_1}$ pour les variables d'états associées aux éléments restant en causalité intégrale quand une causalité préférentielle dérivée est appliquée, et un vecteur $\dot{x}_{i_2}$ pour les variables d'états associées aux éléments passant en causalité dérivée, on obtient l'équation (A.VI.4).

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_{i_1}\\ \dot{x}_{i_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{M}^*_{11} & \mathbf{M}^*_{12}\\ \mathbf{M}^*_{21} & \mathbf{M}^*_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_{i_1}\\ z_{i_2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mathbf{B}_1\\ \mathbf{B}_2\end{pmatrix}u \tag{A.VI.4}$$

Une affectation différentielle de la causalité sur les éléments de stockage d'énergie équivaut à inverser $\dot{x}_{i_2}$ et z_{i_2} dans l'équation de structure de jonction. La nouvelle équation du système est donc construite en inversant les vecteurs $\dot{x}_{i_2}$ et z_{i_2} dans l'équation (A.VI.4).

L'inversion de ces deux vecteurs dans la deuxième ligne donne

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{i_1} \\ z_{i_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}^*_{11} - \mathbf{M}^*_{12}\mathbf{M}^{*-1}_{22}\mathbf{M}^*_{21} & \mathbf{M}^*_{12}\mathbf{M}^{*-1}_{22} \\ -\mathbf{M}^{*-1}_{22}\mathbf{M}^*_{21} & \mathbf{M}^{*-1}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{i_1} \\ \dot{x}_{i_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 - \mathbf{M}^*_{12}\mathbf{M}^{*-1}_{22}\mathbf{B}_2 \\ -\mathbf{M}^{*-1}_{22}\mathbf{B}_2 \end{pmatrix} u \qquad \text{(A.VI.5)}$$

La deuxième partie $\left(\mathbf{B}_1 - \mathbf{M}^*_{12}\mathbf{M}^{*-1}_{22}\mathbf{B}_2\right)$ intervenant dans l'équation (A.VI.3) se retrouve donc dans les chemins liant la commande u avec les éléments encore en causalité intégrale.

Pour étudier $rang\left(\mathbf{M}^*_{11} - \mathbf{M}^*_{12}\mathbf{M}^{*-1}_{22}\mathbf{M}^*_{21} \middle| \left(\mathbf{B}_1 - \mathbf{M}^*_{12}\mathbf{M}^{*-1}_{22}\mathbf{B}_2\right)\mathbf{F}^{-1}\right)$, il suffit donc de considérer le bond graph déduit du premier en enlevant les éléments qui sont passés en causalité dérivée. On a alors l'équation

$$\dot{x}_{i_1} = \left(\mathbf{M}^*_{11} - \mathbf{M}^*_{12}\mathbf{M}^{*-1}_{22}\mathbf{M}^*_{21}\right) z_{i_1} + \left(\mathbf{B}_1 - \mathbf{M}^*_{12}\mathbf{M}^{*-1}_{22}\mathbf{B}_2\right) u \qquad \text{(A.VI.6)}$$

Reprenant la notation de l'annexe V on a $\mathbf{T}=\left(\mathbf{M}^*_{11} - \mathbf{M}^*_{12}\mathbf{M}^{*-1}_{22}\mathbf{M}^*_{21}\right)$. Si il existe un coefficient de $\mathbf{T}$ non nul, on décompose la matrice $\mathbf{T}$ de la même façon que dans l'annexe précédent.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{\alpha 1} \\ \dot{x}_{\alpha 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{12} \\ \mathbf{T}_{21} & \mathbf{T}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{\beta 1} \\ z_{\beta 2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{pmatrix} u \qquad \text{(A.VI.7)}$$

La mise en causalité dérivée de l'élément dynamique lié à $x_{\alpha 2}$ grâce à la dualisation d'une source modulée donne l'équation.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{\alpha 1} \\ z_{\beta 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{11} - \mathbf{T}_{12}\mathbf{T}^{-1}_{22}\mathbf{T}_{21} & \mathbf{T}_{12}\mathbf{T}^{-1}_{22} \\ -\mathbf{T}^{-1}_{22}\mathbf{T}_{21} & \mathbf{T}^{-1}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{\beta 1} \\ \dot{x}_{\alpha 2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 - \mathbf{T}_{12}\mathbf{T}^{-1}_{22}\mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_2 \end{pmatrix} u \qquad \text{(A.VI.8)}$$

Par le même raisonnement que pour l'équation (A.VI.3), on a que

$$rang\left(\mathbf{M}_{11}^{\bullet} - \mathbf{M}_{12}^{\bullet}\mathbf{M}_{22}^{\bullet-1}\mathbf{M}_{21}^{\bullet}\middle|\left(\mathbf{B}_1 - \mathbf{M}_{12}^{\bullet}\mathbf{M}_{22}^{\bullet-1}\mathbf{B}_2\right)\mathbf{F}^{-1}\right) = 1 + rang\left(\mathbf{T}_{11} - \mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{22}^{-1}\mathbf{T}_{21}\middle|\mathbf{V}_1 - \mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{22}^{-1}\mathbf{V}_2\right)$$

(A.VI.9)

On recommence alors la même opération sur la nouvelle matrice $\left(\mathbf{T}_{11} - \mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{22}^{-1}\mathbf{T}_{21}\middle|\mathbf{V}_1 - \mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{22}^{-1}\mathbf{V}_2\right)$ jusqu'à ce que le premier terme $\left(\mathbf{T}_{11} - \mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{22}^{-1}\mathbf{T}_{21}\right)$ soit nul. On a alors une équation de la forme (A.VI.10).

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{\beta_1} \\ z_{\beta_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{X}_{12} \\ \mathbf{X}_{21} & \mathbf{X}_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_{\delta_1} \\ \dot{x}_{\delta_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_1 \end{pmatrix} u \qquad \text{(A.VI.10)}$$

avec rang($\mathbf{A}^*|\mathbf{B}$)=n-t_s+rang($\mathbf{Y}_1$)

Le rang de $\mathbf{Y}_1$ étant égale au nombre d'éléments en causalité intégrale que l'on peut mettre en causalité dérivée en dualisant les sources modulées (identique au cas linéaire), on trouve donc bien finalement que rang($\mathbf{A}^*|\mathbf{B}$)=n-t'_s.

ANNEXE VII

Etude de la commandabilité des bond graphs linéaires modulés par l'intégrale de l'état.

Un bond graph linéaire modulé par l'intégrale de l'état conduit à une équation d'état de la forme (A.VII.1).

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{i_1} \\ \dot{x}_{i_2} \end{pmatrix} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} x_{i_1} \\ x_{i_2} \end{pmatrix} + \Omega\int x_{i_1}dt + \mathbf{B}u \qquad \text{(A.VII.1)}$$

où x_i est un vecteur de dimension n regroupant toutes les variables d'état associées aux éléments dynamiques I et C en causalité intégrale, l'indice 1 désignant les états dont la valeur de l'intégrale intervient dans la modulation des sources modulées.

Une extension du vecteur état en $X=(X_1\ X_2)^T$ avec $X_1 = \int x_{i_1}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} x_{i_1}^T & x_{i_2}^T \end{pmatrix}^T$, le vecteur x_{i_2} étant lui même décomposé en $x_{i_2}^1$ et $x_{i_2}^2$ conduit à l'équation (A.VII.2)

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \Omega_1 & \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \Omega_2 & \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ \Omega_3 & \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_3 \end{pmatrix} u \qquad \text{(A.VII.2)}$$

Ce système est commandable si et seulement si l'équation (A.VII.3) est vérifiée.

$$rang\left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \Omega_1 & \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} & \mathbf{B}_1 \\ \Omega_2 & \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} & \mathbf{B}_2 \\ \Omega_3 & \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} & \mathbf{B}_3 \end{array}\right) = 2n \qquad \text{(A.VII.3)}$$

De la même façon que dans l'annexe V, nous allons mettre le modèle bond graph en causalité dérivée. Cette mise en causalité dérivée ne concerne ici que les éléments dynamiques associés à x_{i_2} (ceux dont la valeur de l'intégrale n'intervient pas dans la modulation de sources). Regroupons dans $x_{i_2}^2$ les états du vecteur x_{i_2} dont l'élément associé passe en causalité dérivée, et dans $x_{i_2}^1$ les autres. D'après le préliminaire de l'annexe V,

$$rang\left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{\Omega}_1 & \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{\Omega}_2 & \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{\Omega}_3 & \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} & \mathbf{B}_3 \end{array}\right) = rang\left(\mathbf{A}_{33} | \mathbf{B}_3\right) + rang\left(\begin{array}{cccc} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{\Omega}_1 - \mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{33}^{-1}\mathbf{\Omega}_3 & \mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{33}^{-1}\mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{12} - \mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{33}^{-1}\mathbf{A}_{32} & \mathbf{B}_1 - \mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{33}^{-1}\mathbf{B}_3 \\ \mathbf{\Omega}_2 - \mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{33}^{-1}\mathbf{\Omega}_3 & \mathbf{A}_{21} - \mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{33}^{-1}\mathbf{A}_{31} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 - \mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{33}^{-1}\mathbf{B}_3 \end{array}\right) \quad \text{(A.VII.4)}$$

Or

$$rang\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{\Omega}_1 - \mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{33}^{-1}\mathbf{\Omega}_3 & \mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{33}^{-1}\mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{12} - \mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{33}^{-1}\mathbf{A}_{32} & \mathbf{B}_1 - \mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{33}^{-1}\mathbf{B}_3 \\ \mathbf{\Omega}_2 - \mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{33}^{-1}\mathbf{\Omega}_3 & \mathbf{A}_{21} - \mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{33}^{-1}\mathbf{A}_{31} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 - \mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{33}^{-1}\mathbf{B}_3 \end{array}\right) = n + rang\left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{\Omega}_1 - \mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{33}^{-1}\mathbf{\Omega}_3 & \mathbf{A}_{12} - \mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{33}^{-1}\mathbf{A}_{32} & \mathbf{B}_1 - \mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{33}^{-1}\mathbf{B}_3 \\ \mathbf{\Omega}_2 - \mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{33}^{-1}\mathbf{\Omega}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 - \mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{33}^{-1}\mathbf{B}_3 \end{array}\right) \quad \text{(A.VII.5)}$$

Pour que la condition (A.VII.3) soit vérifiée il est donc nécessaire que $\left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{\Omega}_1 - \mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{33}^{-1}\mathbf{\Omega}_3 & \mathbf{A}_{12} - \mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{33}^{-1}\mathbf{A}_{32} & \mathbf{B}_1 - \mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{33}^{-1}\mathbf{B}_3 \\ \mathbf{\Omega}_2 - \mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{33}^{-1}\mathbf{\Omega}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 - \mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{33}^{-1}\mathbf{B}_3 \end{array}\right)$ soit de rang plein. Pour cela il est nécessaire qu'il existe un terme non nul dans chaque ligne et chaque colonne différentes.

$\mathbf{\Omega}_1 - \mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{33}^{-1}\mathbf{\Omega}_3$ exprime le gain des chemins causaux entre les éléments associés au vecteur x_{i_1} et les éléments associés au vecteur $x_{i_2}^1$ (Ces chemins passent par une source modulée).

$\mathbf{\Omega}_2 - \mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{33}^{-1}\mathbf{\Omega}_3$ exprime le gain des chemins causaux mixtes entre les éléments associés au vecteur x_{i_1} et les éléments associés au vecteur $x_{i_2}^2$ (Ces chemins passent par une source modulée).

$\mathbf{A}_{12} - \mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{33}^{-1}\mathbf{A}_{32}$ exprime le gain des chemins causaux entre les éléments associés au vecteur $x_{i_2}^2$ et ceux associés au vecteur $x_{i_2}^1$.

$\mathbf{B}_1 - \mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{33}^{-1}\mathbf{B}_3$ exprime le gain des chemins causaux entre les sources indépendantes et les éléments associés au vecteur $x_{i_2}^1$.

$\mathbf{B}_2 - \mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{33}^{-1}\mathbf{B}_3$ exprime le gain des chemins causaux entre les sources indépendantes et les éléments associés au vecteur $x_{i_2}^2$.

L'existence d'un terme non nul sur chaque ligne entraîne donc l'existence d'un chemin causal entre les éléments encore en causalité intégrale aux éléments du vecteur $x_{i_2}^1$ ou à des sources modulées on non. L'existence d'un terme non nul sur chaque colonne implique en plus que les éléments auxquels sont reliés les éléments encore en causalité intégrale peuvent être pris tous différents et pour les sources dépendantes modulées par des variables différentes.

L'étude du cas multi-entrée est identique.

ANNEXE VIII

Condition nécessaire de commandabilité des systèmes bilinéaires

Considérons dans un premier temps le cas des systèmes à une seule entrée.

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}_0 + \mathbf{N}xu + \mathbf{B}u \qquad \text{(A.VIII.1)}$$

Nous avons vu au premier chapitre que le système bilinéaire (A.VIII. 1) est accessible, si la distribution de forte accessibilité locale ΔC_0 est de rang n.

$$\text{Or } \operatorname{rang}(\Delta C_0) = \operatorname{rang}\left\{\begin{array}{l} \mathbf{N}x + \mathbf{B} \\ [\mathbf{A},\mathbf{N}]x + \mathbf{N}\mathbf{B}_0 - \mathbf{A}\mathbf{B} \\ [\mathbf{A},[\mathbf{A},\mathbf{N}]]x + \mathbf{A}^2\mathbf{B} - \mathbf{A}\mathbf{N}\mathbf{B}_0 + [\mathbf{A},\mathbf{N}]\mathbf{B}_0 \\ [\mathbf{N},[\mathbf{A},\mathbf{N}]]x + \mathbf{N}^2\mathbf{B}_0 - \mathbf{N}\mathbf{A}\mathbf{B} + [\mathbf{A},\mathbf{N}]\mathbf{B} \\ [\mathbf{A},[\mathbf{A},[\mathbf{A},\mathbf{N}]]]x - \mathbf{A}^3\mathbf{B} + \mathbf{A}^2\mathbf{N}\mathbf{B}_0 + \mathbf{A}[\mathbf{A},\mathbf{N}]\mathbf{B}_0 + [\mathbf{A},[\mathbf{A},\mathbf{N}]]\mathbf{B}_0 \\ \cdots \end{array}\right\}$$

$$\text{donc } \operatorname{rank}(\Delta C_0) \le \operatorname{rank}\left\{\begin{array}{l} \mathbf{N}x, \mathbf{B}, \\ \mathbf{N}\mathbf{A}x, \mathbf{A}\mathbf{N}x, \mathbf{N}\mathbf{B}_0, \mathbf{A}\mathbf{B}, \\ \mathbf{A}^2\mathbf{N}x, \mathbf{A}\mathbf{N}\mathbf{A}x, \mathbf{N}\mathbf{A}^2x, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{N}\mathbf{B}_0, \mathbf{N}\mathbf{A}\mathbf{B}_0, \mathbf{A}\mathbf{N}\mathbf{B}_0 \\ \mathbf{N}^2\mathbf{A}x, \mathbf{N}\mathbf{A}\mathbf{N}x, \mathbf{A}\mathbf{N}^2x, \mathbf{N}^2\mathbf{B}_0, \mathbf{N}\mathbf{A}\mathbf{B}, \mathbf{N}\mathbf{A}\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{N}\mathbf{B} \\ \mathbf{A}^3\mathbf{N}x, \mathbf{A}^2\mathbf{N}\mathbf{A}x, \mathbf{A}\mathbf{N}\mathbf{A}^2x, \mathbf{N}\mathbf{A}^3x, \\ \mathbf{A}^3\mathbf{B}, \mathbf{A}^2\mathbf{N}\mathbf{B}_0, \mathbf{A}\mathbf{N}\mathbf{A}\mathbf{B}_0, \mathbf{A}^2\mathbf{N}\mathbf{B}_0, \cdots \end{array}\right\}$$

Par conséquent, pour que le système soit accessible, il est nécessaire que

$$\mathrm{Im}(\mathbf{N})+\mathrm{Im}(\mathbf{AN})+\mathrm{Im}(\mathbf{NA})+\mathrm{Im}(\mathbf{A}^2\mathbf{N})+\mathrm{Im}(\mathbf{ANA})+\ldots+\mathrm{Im}(\mathbf{B})+\mathrm{Im}(\mathbf{NB}_0)+\mathrm{Im}(\mathbf{AB})+\mathrm{Im}(\mathbf{A}^2\mathbf{B})+\ldots=\mathbf{R}^n$$

Il est évident que $\mathrm{Im}(\mathbf{AN}) \subset \mathrm{Im}(\mathbf{A})$, $\mathrm{Im}(\mathbf{NA}) \subset \mathrm{Im}(\mathbf{N})$, $\mathrm{Im}(\mathbf{A}^2\mathbf{N}) \subset \mathrm{Im}(\mathbf{A})$, $\mathrm{Im}(\mathbf{NB}_0) \subset \mathrm{Im}(\mathbf{N})$,... . Pour que la condition sur le rang de la distribution de forte accessibilité locale soit vérifiée, il est nécessaire que $\mathrm{Im}(\mathbf{A})+\mathrm{Im}(\mathbf{N})+\mathrm{Im}(\mathbf{B})+\mathrm{Im}(\mathbf{B}_0)=\mathrm{R}^n$, ce qui est équivalent à avoir $\mathrm{rang}\left(\mathbf{A}\middle|\mathbf{N}\middle|\mathbf{B}_0\middle|\mathbf{B}\right) = n$.

La généralisation au cas multi entrée peut être déduite immédiatement de (IV.15) par la même approche.

ANNEXE IX

condition nécessaire de commandabilité d'un système non linéaire à partir de son bond graph.

L'objet de cet annexe est de démontrer le théorème IV.4.

La première condition est la condition nécessaire d'atteignabilité.

Pour que le système (Σ) d'équation (A.IX.1) soit commandable,

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}_0 + \sum_{i=1}^{m} \mathbf{N}_i x\, u_i + \sum_{i=1}^{m} \mathbf{B}_i u_i + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \Xi_{ij} x u_i u_k + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \xi_{ij}\ u_i u_k \qquad \text{(A.IX.1)}$$

les Ξ_{ij} étant des matrices carées et les ξ_{ij} des vecteurs, il est nécessaire que

$$rang\left(\mathbf{A} \middle| \mathbf{B}_0 \middle| \mathbf{N}_1 \middle| \cdots \middle| \mathbf{N}_m \middle| \mathbf{B}_1 \middle| \cdots \middle| \mathbf{B}_m \middle| \Xi_{11} \middle| \cdots \middle| \Xi_{mm} \middle| \xi_{11} \middle| \cdots \middle| \xi_{mm} \right) = n \qquad \text{(A.IX.2)}$$

On a $\forall \alpha_1 \neq 0$ et $\forall \alpha_2 \neq 0$

$$\begin{aligned} & rang\left(\mathbf{A} \middle| \mathbf{B}_0 \middle| \mathbf{N}_1 \middle| \mathbf{N}_2 \middle| \mathbf{B}_1 \middle| \mathbf{B}_2 \middle| \Xi_{11} \middle| \Xi_{12} \middle| \Xi_{22} \middle| \xi_{11} \middle| \xi_{12} \middle| \xi_{22} \right) = \\ & rang\left(\mathbf{A} \middle| \mathbf{B}_0 \middle| \mathbf{A} + \alpha_1 \mathbf{N}_1 + \alpha_1^2 \Xi_{11} \middle| \mathbf{A} + \alpha_2 \mathbf{N}_2 + \alpha_2^2 \Xi_{22} \middle| \mathbf{B}_0 + \alpha_1 \mathbf{B}_1 + \alpha_1^2 \xi_{11} \middle| \mathbf{B}_0 + \alpha_2 \mathbf{B}_2 + \alpha_2^2 \xi_{22} \middle| \Xi_{11} \middle| \Xi_{12} \middle| \Xi_{22} \middle| \xi_{11} \middle| \xi_{12} \middle| \xi_{22} \right) \end{aligned}$$

(A.IX.3)

Au bond graph (B_0) est associée l'équation d'état (A.IX.4).

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}_0 \qquad \text{(A.IX.4)}$$

Au bond graph (B_i) est associée l'équation d'état (A.IX.5).

$$\dot{x} = \left(\mathbf{A} + u_i \mathbf{N}_i + u_i^2 \Xi_{ii}\right)x + \mathbf{B}_0 + u_i \mathbf{B}_1 + u_i^2 \xi_{ii} \qquad \text{(A.IX.5)}$$

Au bond graph (B_{ij}) est associée l'équation d'état (A.IX.6).

$$\dot{x} = \Xi_{ij} x u_i u_j + \xi_{ij} u_i u_j \qquad \text{(A.IX.6)}$$

De la même façon que dans l'annexe précédent on sait alors que l'étude des groupes de ces bond graphs et du bond graph somme si nécessaire donne une condition nécessaire de commandabilité.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

V. Abadie, S. Rimaux, G. Dauphin-Tanguy (1994), "Binary control laws for synchronous motors using sliding modes", IEEE Int. Conf. on Systems, Man and Cybernetics, San Antonio Texas, pp. 1951-1956, 1994.

O. Akhrif and G.L. Blankenship (1991), "Algebraic computation for the Design of nonlinear Control Systems", Vol. 165 of Lecture Notes in Cont. and Info.Sci., Algebraic Computing in Control, Springer Verlag, Berlin, pp. 129-155, 1991.

J. Barreto and J. Lefèvre (1985), "R-fields in the Solution of Implicit Equations", J. Franklin Inst., Vol.319, No.1/2, pp.227-236, 1985.

C. Berge (1983), "Graphes", Ed. Bordas, Paris, 1983.

G. Besançon et G. Bornard (1995), "Performances and Limitations of Symbolic computation in Nonlinear Analysis and Control: An Example using Mathematica", IFAC Conference System Structure and Control, Nantes, pp. 617-622, 5-7 july 1995.

P. Borne, G. Dauphin-Tanguy, J.P. Richard, F. Rotella et I. Zambettakis (1992), "Modélisation et identification des processus", tome2, Collection Méthodes et pratiques de l'ingénieur, dirigée par P. Borne, Edition Technip,1992.

A.M. Bos, P.C. Breedveld (1985), "1985 Update of the Bond Graph Bibliography", Journal Franklin Inst., Vol.319, No.1/2, pp. 269-286, 1985.

F.M. Branin (1977), "The network concept as unifying principle in engineering and the physical sciences", in Problem Analysis in Science and Engineering, F.H. Branin and K. Huseyin eds., Academic Press, New York, pp. 41-111, 1977.

P.C Breedveld (1982), "Thermodynamic bond graphs and the problem of thermal inertance", Journal Franklin Inst., Vol.314, No.1, pp. 15-40, 1982.

P.C Breedveld (1984), "Physical Systems Theory in terms of Bond-Graphs", Ph. D. Thesis, Department of Electrical Engineering, Twente University of Technology, P.O. Box 217, 7500 AE Enschede, The Netherlands, Feb.,1984.

P.C Breedveld (1985),. "Multibond graph elements in physical systems theory", J. Franklin Inst., Vol.319, No.1/2, pp. 1-36, 1985.

W.L. Chow (1939), "Uber Systemen von linearen partiellen Differerntial-gleichungen erster Ordnun", Math. Ann. 117, pp. 98-105, 1939.

F.R.E. Crossley (1965), "The permutation of kinematic chains of eight members or less from the graph-theoretic viewpoint", in Development in Theoretical and Applied Mechanics, Pergamon Press, Atlanta, 1965.

G. Dauphin-Tanguy et C. Rombaut (1993), "Why a unique causality in the elementary commutation cell bond-graph model of a power electronics converter", Proceedings IEEE SMC Conference, Vol.1, pp.257-263, Le touquet France, 1993.

M.D. Di Benedetto, A. Glumineau, C.H. Moog (1994), "The Nonlinear Interactor and its application to Input-Output Decoupling", IEEE Trans. on Aut. Contr., AC-39, No 6, pp. 1246-1250, 1994.

P. Dransfield, "Hydraulic Control Systems (1981), "Design and analysis of their dynamics", Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer-Verlag, 1981.

H. Eisen (1974), "Immunology", Harper and Row, New york, 1974.

F.J. Evans and J.J. van Dixhoorn (1974),"Towards more physical structure in systems theory.", In Physical structure in systems theory, (Edited by J.J.van Dixhoorn and F.J. Evans), pp 1-15, Academic Press, London and New york, 1974.

M. Fliess, J. Levine, P. Martin, et P. Rouchon (1992), "Sur les systèmes non linéaires différentiellement plats", C.R.a.S. Paris, Vol. 315, pp. 619-624, 1992.

J. Garcia, G. Dauphin-Tanguy et C. Rombaut (1995),"Bond Graph Modeling of Thermal Effects in switching devices", ICGBM 95, F.E. Cellier and J.J. Granda, Society for Computer simulation, Vol.27, No 1,pp. 145-150, 1995.

V.D. Gebben (1979), "Bond Graph Bibliography", J. Franklin Inst., Vol.308, No.3, pp. 361-369, 1979.

K. Glover and L.M. Silverman (1976), "Characterization of structural Controllability", IEEE Trans. Aut. Cont., pp. 534-537, 1976.

F.S. Grodins and G. James (1963), "Mathematical Models in Respiratory Regulation", Ann. N.Y. Acad. Sci., 109, pp. 852-863, 1963.

R. Hermann (1963),"On the accessibility problem in control theory", in Int. Symp. on Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics (Eds J.P. La Salle, SYSTEME. Lefschetz), pp. 325-332, Academic, New York, 1963.

R.Hermann, A.J.Krener (1970),"Nonlinear controllability and observability", IEEE Trans. Aut. Contr. Vol. AC-22, pp. 728-740, 1970.

A. Isidori (1985), "Nonlinear Control Systems: an introduction", Lecture notes in Control and Information Sciences, Vol.72, Springer Verlag, 1985.

R.F. Kalman (1963), "Mathematical Description of Linear Dynamical Systems", J. SIAM Control, Ser. A, Vol. 1, N° 2, pp. 153-192, 1963.

D.C. Karnopp (1977), "Power and Energy in Linearized physical Systems", Journal of the Franklin Institute, Vol. 303, No.1, pp.85-97, Janvier 1977.

D.C. Karnopp and R.C. Rosenberg (1974), "System Dynamics: A Unified Approach", John Wiley, New York, 1974.

D.C. Karnopp and R.C. Rosenberg (1983), "Introduction to Physical System Dynamics", Mac Graw Hill, 1983.

D.C. Karnopp and R.C. Rosenberg (1990), "System Dynamics: A Unified Approach second edition", John Wiley, New York, 1990.

G. Kron (1963), "Diakoptics: The piecewise Solution of Large-Scale Systems", Macdonald, London, 1963.

P.J. Larcombe and R. Zbikowski (1993), "The Controllability of a Double Inverted Pendulum by Symbolic Algebra Analysis", IMACS Dublin,1993.

J. Lefèvre (1993), "Constrained Use of Modulated Energy-Storing Processes with and without Internal Modulation in Bond Graphs", Proc. IEEE International Conférence on Systems, Man and Cybernetics, tome 1, pp. 20-25, Le touquet France, 1993.

C.T. Lin (1974), "Structural Controllability", IEEE Trans. Aut. Cont., Vol. AC-19, pp. 201-208, 1974.

C.T. Lin (1977), "System Structure and Minimal Structure Controllability", IEEE Trans. Aut. Cont., Vol. AC-22, No 5, pp. 855-862, 1977.

C. Lobry (1979), "Contrôlabilité des systèmes non linéaires", SIAM J. Contr., Vol.8, pp. 573-605, 1979.

B. Maschke (1990), Contribution à une approche par bond-graph de l'étude et la conception de lois de commande de robots contenant des segments flexibles", thèse de doctorat, Université de Paris-Sud Centre d'Orsay, 26 janvier 1990.

J.W. Meerman (1981), "THTSIM, software for simulation of continuous dynamic systems on small and very small computer systems", Int. J. Modelling Simulation, Vol.1, No.1, pp. 52-56, 1981.

R.R. Mohler and J.E. Perry (1961), "Nuclear Rocket Engine Control", Nucleonics, 19, pp. 80-84, 1961.

R.R. Mohler (1962), "Stability and control of Nuclear Rocket Propulsion", IEEE Trans. Autom. Control, AC-7, pp. 86-96, 1962.

R.R. Mohler (1963), "Optimal Control of Nuclear Reactors and Bilinear Systems", Los Alamos Scientific Laboratory Report, 1963.

R.R. Mohler and P.A. Frick (1979),"Bilinear Demographic Control Processes", Int. J. Policy Anal.Inf. Sys., 2, pp. 57-70, 1979.

R.R. Mohler (1991), "Non linear systems Vol.II Applications to Bilinear Control", Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1991.

G.D. Nijen Twilhaar (1985), "Network representation of electromagnetic fields and forces using generalized bond graphs", J.Franklin Inst.,Vol.319, No.1-2, pp183-200, 1985.

H. Nijmeijer, A. van der Schaft (1990), "Nonlinear dynamical control systems", Springer-Verlag, New York, 1990.

G. Oster (1978), "Bilinear Models in Ecology" in Recent developments on Variable structure systems, Biology and economics, Springer Verlag, New york, pp.260-271, 1978.

G.F. Oster and A.S. Perelson (1974), "Chemical Reaction Dynamics, Part 1: Geometrical Structure", Arch. Rational Mech. Anal., Vol.55, pp230-273, 1974.

H.M. Paynter (1961), "Analysis and Design of Engineering Systems", M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1961.

A. Rahmani (1993), "Etude Structurelle des Systèmes linéaires par l'approche Bond Graph", thèse, productique Automatique et informatique industrielle, Université des Sciences et Technologies de Lille, France, 11 Octobre 1993.