

Jan 2010 6742

50376
1995
367

UNIVERSITE DES SCIENCES
ET TECHNOLOGIES DE LILLE

DOYENS HONORAIRES DE L'ANCIENNE FACULTE DES SCIENCES

M. H. LEFEBVRE, M. PARREAU

PROFESSEURS HONORAIRES DES ANCIENNES FACULTES DE DROIT
ET SCIENCES ECONOMIQUES, DES SCIENCES ET DES LETTRES

MM. ARNOULT, BONTE, BROCHARD, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, DECUYPER, DEHEUVELS, DEHORS, DION, FAUVEL, FLEURY, GERMAIN, GLACET, GONTIER, KOURGANOFF, LAMOTTE, LASSERRE, LELONG, LHOMME, LIEBAERT, MARTINOT-LAGARDE, MAZET, MICHEL, PEREZ, ROIG, ROSEAU, ROUELLE, SCHILTZ, SAVARD, ZAMANSKI, Mes BEAUJEU, LELONG.



PROFESSEUR EMERITE

M. A. LEBRUN

ANCIENS PRESIDENTS DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

MM. M. PARREAU, J. LOMBARD, M. MIGEON, J. CORTOIS, A. DUBRULLE

PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

M. P. LOUIS

PROFESSEURS - CLASSE EXCEPTIONNELLE

M. CHAMLEY Hervé
M. CONSTANT Eugène
M. ESCAIG Bertrand
M. FOURET René
M. GABILLARD Robert
M. LABLACHE COMBIER Alain
M. LOMBARD Jacques
M. MACKE Bruno

Géotechnique
Electronique
Physique du solide
Physique du solide
Electronique
Chimie
Sociologie
Physique moléculaire et rayonnements atmosphériques

M. TURREL Georges
M. VANDIJK Hendrik
Mme VAN ISEGHEM Jeanine
M. VANDORPE Bernard
M. VASSEUR Christian
M. VASSEUR Jacques
Mme VIANO Marie Claude
M. WACRENIER Jean Marie
M. WARTEL Michel
M. WATERLOT Michel
M. WEICHERT Dieter
M. WERNER Georges
M. WIGNACOURT Jean Pierre
M. WOZNIAK Michel
Mme ZINN JUSTIN Nicole

Spectrochimie infrarouge et raman

Modélisation, calcul scientifique, statistiques
Chimie minérale
Automatique
Biologie

Electronique
Chimie inorganique
géologie générale
Génie mécanique
Informatique théorique

Spectrochimie
Algèbre

M. MIGEON Michel
M. MONTREUIL Jean
M. PARREAU Michel
M. TRIDOT Gabriel

EUDIL
Biochimie
Analyse
Chimie appliquée

PROFESSEURS - 1ère CLASSE

M. BACCHUS Pierre	Astronomie
M. BLAYS Pierre	Géographie
M. BILLARD Jean	Physique du Solide
M. BOILLY Bénoni	Biologie
M. BONNELLE Jean Pierre	Chimie-Physique
M. BOSCOQ Denis	Probabilités
M. BOUGHON Pierre	Algèbre
M. BOURIQUET Robert	Biologie Végétale
M. BRASSELET Jean Paul	Géométrie et topologie
M. BREZINSKI Claude	Analyse numérique
M. BRIDOUX Michel	Chimie Physique
M. BRUYELLE Pierre	Géographie
M. CARREZ Christian	Informatique
M. CELET Paul	Géologie générale
M. COEURE Gérard	Analyse
M. CORDONNIER Vincent	Informatique
M. CROSNIER Yves	Electronique
Mme DACHARRY Monique	Géographie
M. DAUCHET Max	Informatique
M. DEBOURSE Jean Pierre	Gestion des entreprises
M. DEBRABANT Pierre	Géologie appliquée
M. DECLERCQ Roger	Sciences de gestion
M. DEGAUQUE Pierre	Electronique
M. DESCHEPPER Joseph	Sciences de gestion
Mme DESSAUX Odile	Spectroscopie de la réactivité chimique
M. DHAINAUT André	Biologie animale
Mme DHAINAUT Nicole	Biologie animale
M. DJAFARI Rouhani	Physique
M. DORMARD Serge	Sciences Economiques
M. DOUKHAN Jean Claude	Physique du solide
M. DUBRULLE Alain	Spectroscopie hertzienne
M. DUPOUY Jean Paul	Biologie
M. DYMENT Arthur	Mécanique
M. FOCT Jacques Jacques	Métallurgie
M. FOUQUART Yves	Optique atmosphérique
M. FOURNET Bernard	Biochimie structurale
M. FRONTIER Serge	Ecologie numérique
M. GLORIEUX Pierre	Physique moléculaire et rayonnements atmosphériques
M. GOSSELIN Gabriel	Sociologie
M. GOUDMAND Pierre	Chimie-Physique
M. GRANELLE Jean Jacques	Sciences Economiques
M. GRUSON Laurent	Algèbre
M. GUILBAULT Pierre	Physiologie animale
M. GUILLAUME Jean	Microbiologie
M. HECTOR Joseph	Géométrie
M. HENRY Jean Pierre	Génie mécanique
M. HERMAN Maurice	Physique spatiale
M. LACOSTE Louis	Biologie Végétale
M. LANGRAND Claude	Probabilités et statistiques

M. LATTEUX Michel
M. LAVEINE Jean Pierre
Mme LECLERCQ Ginette
M. LEHMANN Daniel
Mme LENOBLE Jacqueline
M. LEROY Jean Marie
M. LHENAFF René
M. LHOMME Jean
M. LOUAGE François
M. LOUCHEUX Claude
M. LUCQUIN Michel
M. MAILLET Pierre
M. MAROUF Nadir
M. MICHEAU Pierre
M. PAQUET Jacques
M. PASZKOWSKI Stéfan
M. PETIT Francis
M. PORCHET Maurice
M. POUZET Pierre
M. POVY Lucien
M. PROUVOST Jean
M. RACZY Ladislas
M. RAMAN Jean Pierre
M. SALMER Georges
M. SCHAMPS Joël
Mme SCHWARZBACH Yvette
M. SEGUIER Guy
M. SIMON Michel
M. SLIWA Henri
M. SOMME Jean
Melle SPIK Geneviève
M. STANKIEWICZ François
M. THIEBAULT François
M. THOMAS Jean Claude
M. THUMERELLE Pierre
M. TILLIEU Jacques
M. TOULOTTE Jean Marc
M. TREANTON Jean René
M. TURRELL Georges
M. VANEECLOO Nicolas
M. VAST Pierre
M. VERBERT André
M. VERNET Philippe
M. VIDAL Pierre
M. WALLART François
M. WEINSTEIN Olivier
M. ZEYTOUNIAN Radyadour

Informatique
Paléontologie
Catalyse
Géométrie
Physique atomique et moléculaire
Spectrochimie
Géographie
Chimie organique biologique
Electronique
Chimie-Physique
Chimie physique
Sciences Economiques
Sociologie
Mécanique des fluides
Géologie générale
Mathématiques
Chimie organique
Biologie animale
Modélisation - calcul scientifique
Automatique
Minéralogie
Electronique
Sciences de gestion
Electronique
Spectroscopie moléculaire
Géométrie
Electrotechnique
Sociologie
Chimie organique
Géographie
Biochimie
Sciences Economiques
Sciences de la Terre
Géométrie - Topologie
Démographie - Géographie humaine
Physique théorique
Automatique
Sociologie du travail
Spectrochimie infrarouge et raman
Sciences Economiques
Chimie inorganique
Biochimie
Génétique
Automatique
Spectrochimie infrarouge et raman
Analyse économique de la recherche et développement
Mécanique

PROFESSEURS - 2ème CLASSE

M. ABRAHAM Francis	Composants électroniques
M. ALLAMANDO Etienne	Biologie des organismes
M. ANDRIES Jean Claude	Analyse
M. ANTOINE Philippe	Génétique
M. BALL Steven	Biologie animale
M. BART André	Génie des procédés et réactions chimiques
M. BASSERY Louis	Géographie
Mme BATTIAU Yvonne	Systèmes électroniques
M. BAUSIERE Robert	Mécanique
M. BEGUIN Paul	Physique atomique et moléculaire
M. BELLET Jean	Physique atomique, moléculaire et du rayonnement
M. BERNAGE Pascal	Sciences Economiques
M. BERTHOUD Arnaud	Sciences Economiques
M. BERTRAND Hugues	Analyse
M. BERZIN Robert	Physique de l'état condensé et cristallographie
M. BISKUPSKI Gérard	Algèbre
M. BKOUCHE Rudolphe	Biologie végétale
M. BODARD Marcel	Biochimie métabolique et cellulaire
M. BOHIN Jean Pierre	Mécanique
M. BOIS Pierre	Génie civil
M. BOISSIER Daniel	Spectrochimie
M. BOIVIN Jean Claude	Physique
M. BOUCHER Daniel	Biologie appliquée aux enzymes
M. BOUQUELET Stéphane	Gestion
M. BOUQUIN Henri	Chimie
M. BROCARD Jacques	Paléontologie
Mme BROUSMICHE Claudine	Mécanique
M. BUISINE Daniel	Biologie animale
M. CAPURON Alfred	Géographie humaine
M. CARRE François	Chimie organique
M. CATTEAU Jean Pierre	Sciences Economiques
M. CAYATTE Jean Louis	Electronique
M. CHAPOTON Alain	Biochimie structurale
M. CHARET Pierre	Composants électroniques optiques
M. CHIVE Maurice	Informatique théorique
M. COMYN Gérard	Composants électroniques et optiques
Mme CONSTANT Monique	Psychophysiologie
M. COQUERY Jean Marie	Sciences Economiques
M. CORIAT Benjamin	Paléontologie
Mme CORSIN Paule	Physique nucléaire et corpusculaire
M. CORTOIS Jean	Chimie organique
M. COUTURIER Daniel	Tectonique géodynamique
M. CRAMPON Norbert	Biologie
M. CURGY Jean Jacques	Physique théorique
M. DANGOISSE Didier	Analyse
M. DE PARIS Jean Claude	Composants électroniques et optiques
M. DECOSTER Didier	Electrochimie et Cinétique
M. DEJAEGER Roger	Informatique
M. DELAHAYE Jean Paul	Physiologie animale
M. DELORME Pierre	Sciences Economiques
M. DELORME Robert	Sociologie
M. DEMUNTER Paul	Physique atomique, moléculaire et du rayonnement
Mme DEMUYNCK Claire	Informatique
M. DENEL Jacques	Physique du solide - cristallographie
M. DEPREZ Gilbert	

M. DERIEUX Jean Claude
 M. DERYCKE Alain
 M. DESCAMPS Marc
 M. DEVRAINNE Pierre
 M. DEWAILLY Jean Michel
 M. DHAMELINCOURT Paul
 M. DI PERSIO Jean
 M. DUBAR Claude
 M. DUBOIS Henri
 M. DUBOIS Jean Jacques
 M. DUBUS Jean Paul
 M. DUPONT Christophe
 M. DUTHOIT Bruno
 Mme DUVAL Anne
 Mme EVRARD Micheline
 M. FAKIR Sabah
 M. FARVACQUE Jean Louis
 M. FAUQUEMBERGUE Renaud
 M. FELIX Yves
 M. FERRIERE Jacky
 M. FISCHER Jean Claude
 M. FONTAINE Hubert
 M. FORSE Michel
 M. GADREY Jean
 M. GAMBLIN André
 M. GOBLOT Rémi
 M. GOURIEROUX Christian
 M. GREGORY Pierre
 M. GREMY Jean Paul
 M. GREVET Patrice
 M. GRIMBLOT Jean
 M. GUELTON Michel
 M. GUICHAOUA André
 M. HAIMAN Georges
 M. HOUDART René
 M. HUEBSCHMANN Johannes
 M. HUTTNER Marc
 M. ISAERT Noël
 M. JACOB Gérard
 M. JACOB Pierre
 M. JEAN Raymond
 M. JOFFRE Patrick
 M. JOURNAL Gérard
 M. KOENIG Gérard
 M. KOSTRUBIEC Benjamin
 M. KREMBEL Jean
 Mme KRIFA Hadjila
 M. LANGEVIN Michel
 M. LASSALLE Bernard
 M. LE MEHAUTE Alain
 M. LEBFEVRE Yannic
 M. LECLERCQ Lucien
 M. LEFEBVRE Jacques
 M. LEFEBVRE Marc
 M. LEFEBVRE Christian
 Mlle LEGRAND Denise
 M. LEGRAND Michel
 M. LEGRAND Pierre
 Mme LEGRAND Solange
 Mme LEHMANN Josiane
 M. LEMAIRE Jean

Microbiologie
 Informatique
 Physique de l'état condensé et cristallographie
 Chimie minérale
 Géographie humaine
 Chimie physique
 Physique de l'état condensé et cristallographie
 Sociologie démographique
 Spectroscopie hertzienne
 Géographie
 Spectrométrie des solides
 Vie de la firme
 Génie civil
 Algèbre
 Génie des procédés et réactions chimiques
 Algèbre
 Physique de l'état condensé et cristallographie
 Composants électroniques
 Mathématiques
 Tectonique - Géodynamique
 Chimie organique, minérale et analytique
 Dynamique des cristaux
 Sociologie
 Sciences économiques
 Géographie urbaine, industrielle et démographie
 Algèbre
 Probabilités et statistiques
 I.A.E.
 Sociologie
 Sciences Economiques
 Chimie organique
 Chimie physique
 Sociologie
 Modélisation, calcul scientifique, statistiques
 Physique atomique
 Mathématiques
 Algèbre
 Physique de l'état condensé et cristallographie
 Informatique
 Probabilités et statistiques
 Biologie des populations végétales
 Vie de la firme
 Spectroscopie hertzienne
 Sciences de gestion
 Géographie
 Biochimie
 Sciences Economiques
 Algèbre
 Embryologie et biologie de la différenciation
 Modélisation, calcul scientifique, statistiques
 Physique atomique, moléculaire et du rayonnement
 Chimie physique
 Physique
 Composants électroniques et optiques
 Pétrologie
 Algèbre
 Astronomie - Météorologie
 Chimie
 Algèbre
 Analyse
 Spectroscopie hertzienne

M. LE MAROIS Henri
M. LEMOINE Yves
M. LESCURE François
M. LESENNE Jacques
M. LOCQUENEUX Robert
Mme LOPES Maria
M. LOSFELD Joseph
M. LOUAGE Francis
M. MAHIEU François
M. MAHIEU Jean Marie
M. MAIZIERES Christian
M. MANSY Jean Louis
M. MAURISSON Patrick
M. MERIAUX Michel
M. MERLIN Jean Claude
M. MESMACQUE Gérard
M. MESSELYN Jean
M. MOCHE Raymond
M. MONTEL Marc
M. MORCELLET Michel
M. MORE Marcel
M. MORTREUX André
Mme MOUNIER Yvonne
M. NIAY Pierre
M. NICOLE Jacques
M. NOTELET Francis
M. PALAVIT Gérard
M. PARSY Fernand
M. PECQUE Marcel
M. PERROT Pierre
M. PERTUZON Emile
M. PETIT Daniel
M. PLIHON Dominique
M. PONSOLLE Louis
M. POSTAIRE Jack
M. RAMBOUR Serge
M. RENARD Jean Pierre
M. RENARD Philippe
M. RICHARD Alain
M. RIETSCH François
M. ROBINET Jean Claude
M. ROGALSKI Marc
M. ROLLAND Paul
M. ROLLET Philippe
Mme ROUSSEL Isabelle
M. ROUSSIGNOL Michel
M. ROY Jean Claude
M. SALERNO Francis
M. SANCHOLLE Michel
Mme SANDIG Anna Margarete
M. SAWERYSYN Jean Pierre
M. STAROSWIECKI Marcel
M. STEEN Jean Pierre
Mme STELLMACHER Irène
M. STERBOUL François
M. TAILLIEZ Roger
M. TANRE Daniel
M. THERY Pierre
Mme TJOTTA Jacqueline
M. TOURSEL Bernard
M. TREANTON Jean René

Vie de la firme
Biologie et physiologie végétales
Algèbre
Systèmes électroniques
Physique théorique
Mathématiques
Informatique
Electronique
Sciences économiques
Optique - Physique atomique
Automatique
Géologie
Sciences Economiques
EUDIL
Chimie
Génie mécanique
Physique atomique et moléculaire
Modélisation, calcul scientifique, statistiques
Physique du solide
Chimie organique
Physique de l'état condensé et cristallographie
Chimie organique
Physiologie des structures contractiles
Physique atomique, moléculaire et du rayonnement
Spectrochimie
Systèmes électroniques
Génie chimique
Mécanique
Chimie organique
Chimie appliquée
Physiologie animale
Biologie des populations et écosystèmes
Sciences Economiques
Chimie physique
Informatique industrielle
Biologie
Géographie humaine
Sciences de gestion
Biologie animale
Physique des polymères
EUDIL
Analyse
Composants électroniques et optiques
Sciences Economiques
Géographie physique
Modélisation, calcul scientifique, statistiques
Psychophysiologie
Sciences de gestion
Biologie et physiologie végétales

Chimie physique
Informatique
Informatique
Astronomie - Météorologie
Informatique
Génie alimentaire
Géométrie - Topologie
Systèmes électroniques
Mathématiques
Informatique
Sociologie du travail

M. TURREL Georges
M. VANDIJK Hendrik
Mme VAN ISEGHEM Jeanine
M. VANDORPE Bernard
M. VASSEUR Christian
M. VASSEUR Jacques
Mme VIANO Marie Claude
M. WACRENIER Jean Marie
M. WARTEL Michel
M. WATERLOT Michel
M. WEICHERT Dieter
M. WERNER Georges
M. WIGNACOURT Jean Pierre
M. WOZNIAK Michel
Mme ZINN JUSTIN Nicole

Spectrochimie infrarouge et raman

Modélisation, calcul scientifique, statistiques
Chimie minérale
Automatique
Biologie

Electronique
Chimie inorganique
géologie générale
Génie mécanique
Informatique théorique

Spectrochimie
Algèbre

REMERCIEMENTS

Je remercie Claude Brezinski, Professeur à l'Université des Sciences et Technologies de Lille, pour avoir accepté de présider ce jury ainsi que pour m'avoir permis d'accomplir cette thèse dans son laboratoire d'Analyse Numérique et d'Optimisation.

Mes remerciements vont également à Florent Cordellier, Professeur à l'Université de Lille III et Jacek Gilewicz, Professeur à l'Université de Toulon et du Var, pour avoir bien voulu être rapporteurs de ce travail.

Un grand merci aussi à Michela Redivo Zaglia, Professeur à l'Università degli Studi di Padova, pour avoir accepté de juger ce travail.

Des remerciements tout particuliers à Marc Prévost, Professeur à l'Université du Littoral, pour avoir accepté de diriger mes recherches, pour ses conseils, pour ses idées et surtout pour tout le temps qu'il a bien voulu me consacrer ainsi que pour son incessant soutien.

Je remercie aussi le Rectorat de Lille qui m'a accordé une allocation de recherche sans laquelle ce travail ne serait encore qu'une ébauche, sans oublier les personnes qui sont intervenues en ma faveur pour l'attribution de cette allocation, à savoir Jeannette Van Iseghem, Professeur à l'Université des Sciences et Technologies de Lille, et Claude Brezinski, Professeur à l'Université des Sciences et Technologies de Lille.

Merci beaucoup à l'équipe du laboratoire d'Analyse Numérique et d'Optimisation pour l'aide apportée à ce travail.

Une immense reconnaissance affective à Cécilia et à tous mes amis pour le soutien moral qu'ils m'ont témoigné tout au long de ce parcours.



Introduction :

Le thème essentiel de ce travail est l'utilisation systématique des méthodes d'extrapolation pour construire des méthodes de prédiction. En effet, de la connaissance des premiers termes d'une suite (c'est-à-dire S_0, S_1, \dots, S_N), nous pouvons estimer la limite S de cette suite en utilisant des procédés d'extrapolation, mais aussi prédire les termes suivants de cette suite (c'est-à-dire S_{N+1}, S_{N+2}, \dots).

On entend par méthode de prédiction un procédé qui transforme un vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N}$ en une suite $(S_{i,N})_{i \geq 0}$ telle que $S_i = S_{i,N}$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, N\}$. Dans ce cas, on dit que la suite $(S_{i,N})_{i \geq 0}$ est une suite prédite à partir du vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N}$.

Utiliser une méthode d'extrapolation pour construire une méthode de prédiction est une idée qui a déjà été exploitée par C. Brezinski dans [6] ainsi que par C. Brezinski et M. Redivo Zaglia dans [8, pp. 392-395]. Ils ont, en effet, développé la E-prédiction (chapitre 1) qui est une méthode de prédiction très générale. Et, pour une bonne utilisation de cette méthode, la suite à prédire doit avoir un développement asymptotique sur une échelle de comparaison connue.

Cependant, un cas particulier de cette méthode de prédiction, à savoir l' ε -prédiction (chapitre 2), n'emploie pas cette connaissance. En conséquence, de tous les algorithmes de prédiction que nous proposons dans ce travail, c'est celui de l' ε -prédiction qui est le plus simple à mettre en oeuvre.

En identifiant le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N}$ au vecteur des sommes partielles $(\sum_{j=0}^i S_j t^j)_{0 \leq i \leq N}$, et la suite prédite $(S_{i,N})_{i \geq 0}$ à la suite des sommes partielles $(\sum_{j=0}^i S_{j,N} t^j)_{i \geq 0}$, nous pouvons prédire le vecteur des sommes partielles au lieu du vecteur initial. Ainsi, à partir d'une série formelle dont les premiers coefficients (c'est-à-dire S_0, S_1, \dots, S_N) sont connus, J. Gilewicz dans [11, pp. 424-439] forme la série tronquée $\sum_{j=0}^N S_j t^j$, puis développe en série formelle un approximant de Padé de cette série tronquée pour prédire les coefficients inconnus (c'est-à-dire S_{N+1}, S_{N+2}, \dots) de la série formelle initiale. Cette méthode de prédiction est appelée la Padé-prédiction (chapitre 3). D'autre part, dans [20], utilisant la t-transformation, A. Sidi et D. Levin étudient la t-prédiction. En substituant un approximant de type-Padé particulier à l'approximant de Padé, ils se servent en fait du même procédé que J. Gilewicz. Dans cette thèse, nous généralisons ces deux méthodes en considérant les approximants de Padé-partiels englobant les approximants de Padé et de type-Padé. Nous définissons ainsi, de façon algébrique, une méthode de prédiction appelée la Padé-partiel-prédiction (chapitre 3).

Ensuite, nous voyons comment généraliser une méthode de prédiction (chapitre 4) à l'aide d'une transformation inversible. Les différentes transformations évoquées nous permettent d'éclairer divers liens entre les méthodes de prédiction ainsi que nombre de leurs propriétés.

Il s'ensuit que l' ε -algorithme nous permet de mettre en oeuvre non seulement la Padé-prédiction, mais encore la Padé-partiel-prédiction (chapitre 5). Cet exposé contient l'algorithme que nous utilisons pour cette dernière. Cet algorithme emploie l' ε -algorithme duquel il nous a semblé nécessaire de discuter la stabilité (chapitre 5).

En mettant à profit des résultats d'accélération de la convergence, nous établissons des théorèmes concernant la consistance des méthodes de prédiction (chapitre 6). Ceux-ci sont primordiaux dans cette analyse car la définition choisie pour une méthode de prédiction est très faible.

Enfin, cette thèse contient quelques exemples numériques (chapitre 7) destinés principalement à mettre en valeur les résultats de consistance. Ils nous permettent aussi de discuter du choix de l'utilisation de telle ou telle méthode de prédiction.

Domaines d'application des méthodes de prédiction :

Les domaines d'application des méthodes de prédiction sont variés : nous les utilisons en économétrie, en statistique, ou dans la résolution de problèmes paraboliques comme l'ont fait M. Morandi Cecchi, M. Redivo Zaglia et G. Scenna dans [14], ou encore dans l'étude de la structure des bandes dans les semi-conducteurs ainsi que G. Allan le propose dans [1] et que A. Trias, M. Kiwi et M. Weissmann l'exposent dans [21], ...

Notations :

\mathbb{N} est l'ensemble des entiers positifs au sens large.

$n!$ est la fonction factorielle évaluée en n ($n! = n.(n-1)!$ avec $0! = 1$).

$C_k^j = \frac{k!}{j!(k-j)!}$ sont les coefficients binômiaux.

$A \wedge B$ est défini comme étant le plus grand commun diviseur des entiers A et B .

\mathbb{R} est le corps des réels.

L'écriture d'un réel $a.10^b$ est abrégée en aEb (par exemple $1000 = 1E3$, $0.001 = 1E-3$, ...).

$[x] \in \mathbb{N}$ est défini tel que $[x] \leq x < [x] + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

\mathbb{C} est le corps des complexes.

Nous notons les fonctions usuelles de façon tout à fait traditionnelle (max, min, |.|, sup, inf, le logarithme, l'exponentielle, ...).

\mathbb{K} désigne un corps commutatif (en général \mathbb{R} ou \mathbb{C}).

$\mathbb{K}_n[t]$ est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n , à coefficients dans \mathbb{K} , en la variable t .

$P(t) \wedge Q(t)$ est défini comme étant le plus grand commun diviseur des polynômes $P(t)$ et $Q(t)$.

$O(t^n)$ désigne une fonction telle que $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $|O(t^n)| < M.|t^n|$ pour t voisin de zéro.

$[p/q]_{f(t)}$ représente l'approximant de Padé (lorsqu'il existe) de la série formelle $f(t)$, dont le numérateur est au plus de degré p et dont le dénominateur est au plus de degré q (p.45).

\mathbb{K}^X représente l'ensemble des applications de l'ensemble X dans \mathbb{K} (en particulier si $X = \mathbb{N}$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ représente l'ensemble des suites à éléments dans \mathbb{K}).

Δ est l'opérateur de différence agissant indifféremment sur les suites et sur les vecteurs par $\Delta S_i = S_{i+1} - S_i$ (p.15).

Différents ensembles de vecteurs et de suites :

TM : ensemble des suites totalement monotones (p.26).

TO : ensemble des suites totalement oscillantes (p.28).

MS : ensemble des suites de moments de Stieltjes (p.32).

MMS : ensemble des suites de moments de Markov-Stieltjes (p.32).

MH : ensemble des suites de moments de Hamburger (p.32).

TMF : ensemble des vecteurs totalement monotones finis (p.27).

TOF : ensemble des vecteurs totalement oscillants finis (p.28).

TME : ensemble des vecteurs totalement monotones extraits (p.27).

TOE : ensemble des vecteurs totalement oscillants extraits (p.28).

MSE : ensemble des vecteurs de moments de Stieltjes (p.33).

MMSE : ensemble des vecteurs de moments de Markov-Stieltjes (p.33).

MHE : ensemble des vecteurs de moments de Hamburger (p.33).

Table des matières

1	La E-prédiction	8
1.1	Développement asymptotique sur une échelle de comparaison	8
1.2	Les méthodes d'accélération de la convergence	8
1.3	Les méthodes de prédiction	9
1.4	Le E-algorithme	9
1.5	La E-prédiction du point de vue algorithmique	10
1.6	La E-prédiction du point de vue algébrique	12
2	L'ε-prédiction	15
2.1	L'opérateur de différence Δ	15
2.2	L' ε -algorithme	16
2.3	L' ε -prédiction du point de vue algorithmique	17
2.4	L' ε -prédiction du point de vue algébrique	19
2.5	Connection entre ε -prédiction et E-prédiction	21
2.6	Quelques exemples théoriques de l' ε -prédiction	21
2.7	Extrapolation exponentielle et ε -prédiction	22
2.8	Propriétés de relations entre ε -prédictions	24
2.9	Propriétés de positivité et de monotonie pour l' ε -prédiction	25
2.10	Totale monotonie et totale oscillation	26
2.10.1	Totale monotonie	26

Tableau récapitulant les différentes méthodes de prédiction et leurs principales particularités

méthode de prédiction	suite prédite	condition d'existence	paramètres	page
la E – prédiction (algorithmique)	$((g)S_{i,N}^{(E)})_{i \geq 0}$	$((g)H_N^{(E)})$	$N \in \mathbb{N}$, (g) table d'éléments de \mathbb{K}	p.12
la E – prédiction (algébrique)	$((g)S_{i,N}^{(ES)})_{i \geq 0}$	$((g)H_N^{(ES)})$	$N \in \mathbb{N}$, (g) famille d'éléments de \mathbb{K}	p.13
l' ε – prédiction (algorithmique)	$(S_{i,N}^{(\varepsilon)})_{i \geq 0}$	$(H_N^{(\varepsilon)})$	$N \in \mathbb{N}$	p.18
l' ε – prédiction (algébrique)	$(S_{i,2K}^{(\varepsilon S)})_{i \geq 0}$	$(H_N^{(\varepsilon S)})$	$K \in \mathbb{N}$	p.19
l' ε_p – prédiction (algorithmique)	$(S_{i,N}^{(\varepsilon,p)})_{i \geq 0}$	$(H_N^{(\varepsilon,p)})$	$N \in \mathbb{N}$, $p \in \{0, 1, \dots, N\}$	p.42
l' ε_p – prédiction (algébrique)	$(S_{i,N}^{(\varepsilon S,p)})_{i \geq 0}$	$(H_N^{(\varepsilon S,p)})$	$N \in \mathbb{N}$, $p \in \{0, 1, \dots, N\}$	p.43
la Padé – prédiction (algébrique)	$(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$	$(H_N^{(p)})$	$N \in \mathbb{N}$, $p \in \{0, 1, \dots, N\}$	p.46
la Padé – partiel – prédiction calculée à l'aide de $x(t)$ et $y(t)$ (algébrique)	$(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$	$(H_N^{(p)})$	$N \in \mathbb{N}$, $p \in \{0, 1, \dots, N\}$, $x(t) \in \mathbb{K}_r[t]$, $y(t) \in \mathbb{K}_s[t]$	p.63
la Padé – prédiction (algorithmique)	$(S_{i,N}^{(\varepsilon)(p)})_{i \geq 0}$	$(H_N^{(\varepsilon)(p)})$	$N \in \mathbb{N}$, $p \in \{0, 1, \dots, N\}$	p.87
la Padé – partiel – prédiction calculée à l'aide de $x(t)$ et $y(t)$ (algorithmique)	$(S_{i,N}^{(\varepsilon)(p)})_{i \geq 0}$	$(H_N^{(\varepsilon)(p)})$	$N \in \mathbb{N}$, $p \in \{0, 1, \dots, N\}$, $x(t) \in \mathbb{K}_r[t]$, $y(t) \in \mathbb{K}_s[t]$	p.87

Démarche observée pour analyser une méthode de prédiction

Dans ce travail, nous partons d'une définition assez faible pour une méthode de prédiction. En effet, un algorithme est dit de prédiction s'il reproduit les données initiales d'une suite tout en fournissant une approximation des prochains.

Ensuite,

1. nous définissons la méthode de prédiction algébriquement,
2. nous lui associons un algorithme qui ne nécessite pas d'avoir à résoudre de système linéaire,
3. nous tentons d'énumérer les propriétés qui se reconduisent de la suite initiale à la suite prédite.
4. enfin, nous énonçons des résultats de consistance.

2.10.2	Totale oscillation	28
2.11	Propriétés de totale monotonie et de totale oscillation pour l' ε -prédiction	28
2.11.1	Totale monotonie	29
2.11.2	Totale oscillation	31
2.12	Moments de Markov-Stieltjes et moments de Hamburger	32
2.13	Propriétés des moments de Markov-Stieltjes et des moments de Hamburger pour l' ε -prédiction	33
2.14	Propriétés concernant les suites polynômiales pour l' ε -prédiction	34
2.15	L' ε_p -prédiction du point de vue algorithmique	40
2.16	L' ε_p -prédiction du point de vue algébrique	43
3	La Padé-prédiction et la Padé-partiel-prédiction	45
3.1	Les approximants de Padé	45
3.2	La Padé-prédiction	46
3.3	Quelques exemples théoriques de la Padé-prédiction	48
3.4	Extrapolation exponentielle et Padé-prédiction	49
3.5	Propriétés de relations entre Padé-prédictions	51
3.6	Propriétés de positivité et de monotonie pour la Padé-prédiction	52
3.7	Propriétés de totale monotonie et de totale oscillation pour la Padé-prédiction	53
3.7.1	Totale monotonie	53
3.7.2	Totale oscillation	55
3.8	Propriétés des moments de Markov-Stieltjes et des moments de Hamburger pour la Padé-prédiction	56
3.9	Propriétés concernant les suites polynômiales pour la Padé-prédiction	57
3.10	Lien entre l' ε -algorithme et les approximants de Padé	60
3.11	Lien entre l' ε_p -prédiction et la Padé-prédiction	61
3.12	Les approximants de Padé-partiels	62
3.13	La Padé-partiel-prédiction	63

3.14	Quelques exemples théoriques de la Padé-partiel-prédiction	65
3.15	Extrapolation exponentielle et Padé-partiel-prédiction	65
3.16	Propriétés de relations entre Padé-partiel-prédictions	71
3.17	Propriétés de positivité et de monotonie pour la Padé-partiel-prédiction	73
3.18	Propriétés de totale monotonie et de totale oscillation pour la Padé-partiel-prédiction	73
3.18.1	Totale monotonie	73
3.18.2	Totale oscillation	76
3.19	Propriétés des moments de Markov-Stieltjes et des moments de Hamburger pour la Padé-partiel-prédiction	77
3.20	Propriétés concernant les suites polynômiales pour la Padé-partiel-prédiction	78
4	Généralisation d'une méthode de prédiction	81
4.1	Généralisation par une translation agissant sur les variables séparées	82
4.2	Généralisation par une similitude agissant sur les variables séparées	82
4.3	Généralisation par une application transformant le $n^{\text{ème}}$ terme d'une suite x_n en $a^n x_n$	83
4.4	Généralisation par une bijection agissant sur les variables séparées	83
4.5	Généralisation par l'application qui permet de passer de la Padé-prédiction à la Padé-partiel-prédiction calculée à partir des polynômes $x(t)$ et $y(t)$	84
4.6	Généralisation par l'application qui permet de passer de l' ε_p -prédiction à la Padé-prédiction	84
5	Algorithme et stabilité pour la Padé-partiel-prédiction	86
5.1	L'application élémentaire	86
5.2	Mise en oeuvre de la Padé-partiel-prédiction par l' ε -algorithme	87
5.3	Programmation de la Padé-partiel-prédiction	87
5.4	Stabilité de la Padé-partiel-prédiction	91
6	Consistance des méthodes de prédiction	95
6.1	Consistance en colonne	95
6.1.1	Consistance en colonne pour l' ε -prédiction	96

6.1.2	Consistance en colonne pour la E-prédiction	98
6.2	Consistance en diagonale	101
6.2.1	Consistance en diagonale pour la Padé-prédiction	101
6.2.2	Consistance en diagonale pour la E-prédiction	103
7	Quelques applications numériques	106
7.1	Premier exemple	106
7.2	Second exemple	108
7.3	Conclusions sur les deux exemples précédents	111

Chapitre 1

La E-prédiction

A partir d'une méthode d'extrapolation, à savoir le E-algorithme, exposé par C. Brezinski dans [8, p. 59], nous construisons la E-prédiction. Cette méthode de prédiction a déjà été définie par C. Brezinski et M. Redivo Zaglia dans [8, pp. 392-395] et par C. Brezinski dans [6]. Cependant, la E-prédiction a l'inconvénient de n'être efficace que si la suite à prédire possède un développement asymptotique sur une échelle de comparaison connue.

Dans ce travail, nous avons pu améliorer l'algorithme de la E-prédiction en ce sens qu'il est inutile de réinitialiser la table des suites auxiliaires à chaque étape.

1.1 Développement asymptotique sur une échelle de comparaison

S'il existe des suites $g_1(i), g_2(i), \dots$ telles que $S_i = S + a_1 g_1(i) + a_2 g_2(i) + \dots$ pour i voisin de l'infini et que $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{g_{k+1}(i)}{g_k(i)} = 0, \forall k \in \mathbb{N}$ avec par convention $g_0(i) = 1, \forall i \in \mathbb{N}$, alors, on dit que la suite $(S_i)_{i \geq 0}$ possède un développement asymptotique sur une échelle de comparaison $g_1(i), g_2(i), \dots$.

1.2 Les méthodes d'accélération de la convergence

Une transformation $T : (S_i)_{i \geq 0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \rightarrow (T_i)_{i \geq 0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est dite transformation d'accélération de la convergence si

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{i \rightarrow \infty} S_i = S \\ \lim_{i \rightarrow \infty} T_i = S \\ \text{et } \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{T_i - S}{S_i - S} = 0. \end{array} \right.$$

Un algorithme permettant de calculer T_i à partir de S_0, S_1, \dots, S_{i+k} est appelé algorithme d'accélération de la convergence.

1.3 Les méthodes de prédiction

Une transformation $T : (S_i)_{0 \leq i \leq N} \in \mathbb{K}^{N+1} \rightarrow (T_i)_{i \geq 0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est dite une transformation de prédiction si

$$S_i = T_i, \forall i \in \{0, 1, \dots, N\}.$$

Un algorithme permettant de calculer T_i à partir de S_0, S_1, \dots, S_N est appelé algorithme de prédiction. $(S_i)_{0 \leq i \leq N}$ est le vecteur à prédire, $(T_i)_{i \geq 0}$ est la suite prédite.

Dans ce travail, le vecteur à prédire est toujours indicé de 0 à N . Dans le cas où le vecteur à prédire est indicé de N_1 à N_2 , on translate les indices pour se ramener à un vecteur à prédire indicé de 0 à $N_2 - N_1$, on lui applique ensuite la transformation de prédiction, et on translate les indices pour se ramener à une suite prédite indicée de N_1 à l'infini. On dit que deux méthodes de prédiction sont identiques si elles ont même transformation de prédiction et que seul l'ensemble des indices sur lequel nous agissons change.

1.4 Le E-algorithme

Le E-algorithme est un algorithme d'extrapolation très général. Il a été obtenu indépendamment par T. Håvie dans [10] et par C. Brezinski dans [5].

Soit la suite initiale $(S_i)_{i \geq 0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Soient $(g_j(i))_{i \geq 0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\forall j \in \{1, 2, \dots, k\}$, k suites auxiliaires (k est fixé).

On construit alors la suite $(E_k^{(i)})_{i \geq 0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ en définissant $E_k^{(i)}$ comme solution du système linéaire suivant :

$$\begin{cases} S_i &= E_k^{(i)} + a_1 g_1(i) + \dots + a_k g_k(i) \\ S_{i+1} &= E_k^{(i)} + a_1 g_1(i+1) + \dots + a_k g_k(i+1) \\ &\vdots \\ S_{i+k} &= E_k^{(i)} + a_1 g_1(i+k) + \dots + a_k g_k(i+k) \end{cases}$$

où les autres inconnues sont a_1, a_2, \dots, a_k .

Nous obtenons immédiatement l'écriture de $E_k^{(i)}$ sous forme d'un rapport de deux déterminants, comme suit :

$$E_k^{(i)} = \frac{\begin{vmatrix} S_i & \dots & S_{i+k} \\ g_1(i) & \dots & g_1(i+k) \\ g_2(i) & \dots & g_2(i+k) \\ \vdots & & \vdots \\ g_k(i) & \dots & g_k(i+k) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ g_1(i) & \dots & g_1(i+k) \\ g_2(i) & \dots & g_2(i+k) \\ \vdots & & \vdots \\ g_k(i) & \dots & g_k(i+k) \end{vmatrix}}, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Ceux-ci peuvent être générés par le E-algorithme de la manière suivante :

On initialise la première colonne de la table du E-algorithme par

$$E_0^{(i)} = S_i, \forall i \in \mathbb{N},$$

et la table des suites auxiliaires par

$$g_{0,l}^{(i)} = g_l(i), \forall i \in \mathbb{N}, \forall l \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

Ensuite, on calcule récursivement les $E_l^{(i)}$ par

$$E_l^{(i)} = E_{l-1}^{(i)} - \frac{E_{l-1}^{(i+1)} - E_{l-1}^{(i)}}{g_{l-1,l}^{(i+1)} - g_{l-1,l}^{(i)}} g_{l-1,l}^{(i)}, \quad \forall i \in \mathbb{N}, \forall l \in \{1, 2, \dots, k\},$$

en utilisant la table des suites auxiliaires donnée par

$$g_{j,l}^{(i)} = g_{j-1,l}^{(i)} - \frac{g_{j-1,l}^{(i+1)} - g_{j-1,l}^{(i)}}{g_{j-1,j}^{(i+1)} - g_{j-1,j}^{(i)}} g_{j-1,j}^{(i)}, \quad \forall i \in \mathbb{N}, \forall j \in \{1, 2, \dots, k-1\}, \forall l \in \{j+1, j+2, \dots, k\}.$$

Les éléments $E_l^{(i)}$ sont donnés sous forme d'un rapport de deux déterminants comme suit :

$$E_l^{(i)} = \frac{\begin{vmatrix} S_i & \dots & S_{i+l} \\ g_1(i) & \dots & g_1(i+l) \\ g_2(i) & \dots & g_2(i+l) \\ \vdots & & \vdots \\ g_l(i) & \dots & g_l(i+l) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ g_1(i) & \dots & g_1(i+l) \\ g_2(i) & \dots & g_2(i+l) \\ \vdots & & \vdots \\ g_l(i) & \dots & g_l(i+l) \end{vmatrix}}, \quad \forall i \in \mathbb{N}, \forall l \in \{0, 1, \dots, k\}.$$

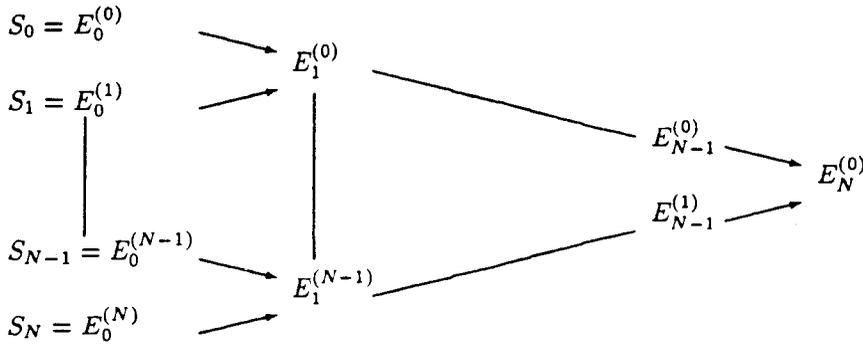
Et, les éléments de la table des suites auxiliaires sont eux aussi donnés sous forme d'un rapport de deux déterminants par

$$g_{j,l}^{(i)} = \frac{\begin{vmatrix} g_l(i) & \dots & g_l(i+j) \\ g_1(i) & \dots & g_1(i+j) \\ g_2(i) & \dots & g_2(i+j) \\ \vdots & & \vdots \\ g_j(i) & \dots & g_j(i+j) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ g_1(i) & \dots & g_1(i+j) \\ g_2(i) & \dots & g_2(i+j) \\ \vdots & & \vdots \\ g_j(i) & \dots & g_j(i+j) \end{vmatrix}}, \quad \forall i \in \mathbb{N}, \forall j \in \{0, 1, \dots, k-1\}, \forall l \in \{j+1, j+2, \dots, k\}.$$

D'autre part, on dit que le E-algorithme est linéaire. En effet, si u est une application qui à x fait correspondre $u(x) = a.x + b$ et si nous appliquons u à chaque élément de la suite initiale, alors nous appliquons u à chaque élément de la table du E-algorithme.

1.5 La E-prédiction du point de vue algorithmique

Soient le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in \mathbb{K}^{N+1}$ et des éléments $g_j(i) \in \mathbb{K}, \forall i \in \mathbb{N}, \forall j \in \{1, 2, \dots, N\}$. Nous formons la table (1) :



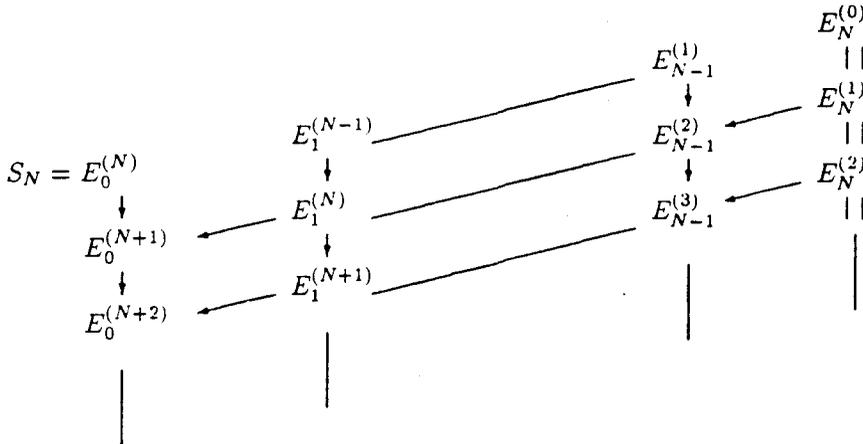
à l'aide de la règle classique du E-algorithme :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_0^{(i)} = S_i, \forall i \in \{0, 1, \dots, N\} \\ \text{et, } E_k^{(i)} = E_{k-1}^{(i)} - \frac{E_{k-1}^{(i+1)} - E_{k-1}^{(i)}}{g_{k-1,k}^{(i+1)} - g_{k-1,k}^{(i)}} g_{k-1,k}^{(i)}, \forall k \in \{1, 2, \dots, N\}, \forall i \in \{0, 1, \dots, N-k\} \end{array} \right.$$

où les $g_{j,k}^{(i)}$ sont calculés dans la table (g) des suites auxiliaires comme dans le E-algorithme :

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{0,j}^{(i)} = g_j^{(i)}, \forall i \in \mathbb{N}, \forall j \in \{1, 2, \dots, N\} \\ \text{où } (g_j^{(i)})_{i \geq 0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \forall j \in \{1, 2, \dots, N\} \text{ sont } N \text{ suites auxiliaires,} \\ \text{et, } g_{k,j}^{(i)} = g_{k-1,j}^{(i)} - \frac{g_{k-1,j}^{(i+1)} - g_{k-1,j}^{(i)}}{g_{k-1,k}^{(i+1)} - g_{k-1,k}^{(i)}} g_{k-1,k}^{(i)}, \\ \forall i \in \mathbb{N}, \forall k \in \{1, 2, \dots, N-1\}, \forall j \in \{k+1, k+2, \dots, N\} \end{array} \right.$$

Ensuite, nous formons la table (2) :



en utilisant la règle progressive du E-algorithme :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_N^{(i)} = E_N^{(0)}, \forall i \geq 1 \\ \text{(la E - prédiction est obtenue en attribuant la même valeur à tous les termes de la colonne la plus à droite et en redescendant la table à l'aide de la règle progressive du E - algorithme)} \\ \text{et, } E_{k-1}^{(i+1)} = E_{k-1}^{(i)} - \frac{(E_k^{(i)} - E_{k-1}^{(i)})(g_{k-1,k}^{(i+1)} - g_{k-1,k}^{(i)})}{g_{k-1,k}^{(i)}}, \forall k \in \{1, 2, \dots, N\}, \\ \forall i \geq N - k + 1 \end{array} \right.$$

où les $g_{j,k}^{(i)}$ sont calculés dans la table (g) définie précédemment.

Définition de la E-prédiction du point de vue algorithmique

Nous définissons la suite prédite par la E-prédiction $((g)S_{i,N}^{(E)})_{i \geq 0}$ à partir du vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N}$ par

$${}_{(g)}S_{i,N}^{(E)} = E_0^{(i)}, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Nous notons $((g)S_{i,N}^{(E)})_{i \geq 0}$ cette suite prédite, parce que chaque terme de celle-ci dépend de la table (g) et de la valeur de N (E indique que cette suite est obtenue par la E-prédiction).

Condition d'existence de la E-prédiction du point de vue algorithmique

Lorsque $g_{k-1,k}^{(i+1)} \neq g_{k-1,k}^{(i)}, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, N-k\},$
et lorsque

$$\begin{cases} g_{k-1,k}^{(i+1)} \neq g_{k-1,k}^{(i)}, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, N-1\}, \quad \forall i \geq N-k+1 \\ g_{k-1,k}^{(i)} \neq 0, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad \forall i \geq N-k+1 \end{cases}$$

la E-prédiction existe, ce qui veut dire qu'il ne se produit pas de division par zéro dans l'algorithme.

Nous notons cette condition $((g)H_N^{(E)})$ parce qu'elle dépend de la table (g) et de la valeur de N . Cette condition d'existence est toujours associée à une table en particulier.

Remarque à propos de la E-prédiction définie de façon algorithmique

L'algorithme de la E-prédiction et donc la condition d'existence peuvent être simplifiés dans de nombreux exemples. En effet, si dans la table (1), la colonne d'indice N_0 ($N_0 \in \{0, 1, \dots, N\}$) est constante et égale à S , on peut s'abstenir de calculer les termes des colonnes d'indice supérieur ou égal à N_0 dans les tables (1) et (2), et supposer que la colonne d'indice N_0 dans la table (2) est constante et égale à S (dans ce cas, l'algorithme de la E-prédiction est raccourci, et la condition d'existence en est d'autant allégée).

De par la construction même de la suite $((g)S_{i,N}^{(E)})_{i \geq 0}$, nous énonçons ceci :

Soient le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in \mathbb{K}^{N+1}$ et la table (g) satisfaisant la condition $((g)H_N^{(E)})$, alors $((g)S_{i,N}^{(E)})_{i \geq 0}$ est une suite prédite à partir du vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N}$.

De cette façon, nous justifions l'attribution du mot prédiction à cette méthode.

1.6 La E-prédiction du point de vue algébrique

Soit le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in \mathbb{K}^{N+1}$.

Soit (g) une famille de N suites auxiliaires :

$$(g) : (g_j(i))_{i \geq 0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

On définit alors (b_0, b_1, \dots, b_N) comme solution du système linéaire suivant :

$$\begin{cases} S_0 = b_0 + b_1 g_1(0) + \dots + b_N g_N(0) \\ S_1 = b_0 + b_1 g_1(1) + \dots + b_N g_N(1) \\ \vdots \\ S_N = b_0 + b_1 g_1(N) + \dots + b_N g_N(N) \end{cases}$$

qui admet une solution si et seulement si

$$\begin{vmatrix} 1 & g_1(0) & \dots & g_N(0) \\ 1 & g_1(1) & \dots & g_N(1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & g_1(N) & \dots & g_N(N) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Définition de la E-prédiction du point de vue algébrique

Nous définissons la suite prédite par la E-prédiction $((g)S_{i,N}^{(ES)})_{i \geq 0}$ à partir du vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N}$ par :

$$({}_g)S_{i,N}^{(ES)} = b_0 + b_1 g_1(i) + \dots + b_N g_N(i), \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Nous notons $((g)S_{i,N}^{(ES)})_{i \geq 0}$ cette suite prédite, parce que chacun de ses termes dépend de la table (g) et de la valeur de N (E indique que cette suite est obtenue par la E-prédiction, et S que la résolution d'un système linéaire est indispensable).

Condition d'existence de la E-prédiction du point de vue algébrique

Lorsque

$$\begin{vmatrix} 1 & g_1(0) & \dots & g_N(0) \\ 1 & g_1(1) & \dots & g_N(1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & g_1(N) & \dots & g_N(N) \end{vmatrix} \neq 0,$$

la E-prédiction existe.

Nous notons cette condition $((g)H_N^{(ES)})$ parce qu'elle dépend de la table (g) et de la valeur de N . Cette condition d'existence est toujours associée à une famille en particulier.

De par la construction même de la suite $((g)S_{i,N}^{(ES)})_{i \geq 0}$, nous énonçons ceci :

Soient le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in \mathbb{K}^{N+1}$ et la famille (g) satisfaisant la condition $((g)H_N^{(ES)})$, alors $((g)S_{i,N}^{(ES)})_{i \geq 0}$ est une suite prédite à partir du vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N}$.

De cette façon, nous justifions l'attribution du mot prédiction à cette méthode.

Remarque à propos des conditions d'existence

Lorsque la condition $((g)H_N^{(E)})$ est satisfaite pour la table (g) , il s'ensuit que la condition $((g)H_N^{(ES)})$ est satisfaite pour la famille (g) . Cette propriété provient du fait que le déterminant non nul de la condition $((g)H_N^{(ES)})$ est précisément le dénominateur de $E_N^{(0)}$ quand celui-ci est donné sous forme d'un rapport de deux déterminants.

Théorème 1.1 *Soient le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in \mathbb{K}^{N+1}$ et la table (g) satisfaisant la condition $((g)H_N^{(E)})$, alors*

$$({}_g)S_{i,N}^{(E)} = ({}_g)S_{i,N}^{(ES)}, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Ce théorème établit que la E-prédiction définie algorithmiquement, lorsqu'elle existe, est exactement la E-prédiction définie algébriquement.

Remarque concernant la constance de la colonne la plus à droite dans l'algorithme de la E-prédiction

Dans le point de vue algorithmique de la E-prédiction, le choix que nous faisons d'attribuer la même valeur à tous les termes de la colonne la plus à droite est motivé par la simplicité du point de vue algébrique. Nous pourrions choisir d'égaliser cette colonne à une suite non constante, mais dans ce cas, le point de vue algébrique en serait d'autant plus compliqué. Par exemple, si nous connaissons la limite de la suite prédite, nous pourrions égaliser la colonne la plus à droite à une suite convergeant vers la même limite.

Remarque à propos des deux algorithmes existants pour la E-prédiction

Le point de vue algébrique de la E-prédiction est rédigé par C. Brezinski et M. Redivo Zaglia dans [8, pp. 392-395], mais l'algorithme qui y est proposé diffère de celui que nous établissons principalement en deux points :

1. il n'est pas basé sur la constance d'une des colonnes du E-algorithme.
2. l'initialisation de la table des suites auxiliaires dépend de l'indice du terme calculé de la suite prédite. Ceci entraîne donc une complexité en temps plus importante que celle de l'algorithme détaillé ici.

Dans [8, pp. 392-395], C. Brezinski et M. Redivo Zaglia nous donnent une expression de ${}_{(g)}S_{N+i,N}^{(ES)}$, $\forall i \in \mathbb{N}$, sous forme d'un rapport de deux déterminants.

Nous rappelons cette égalité, dans le théorème suivant, sans sa démonstration qui est triviale car provenant directement du système de Cramer.

Théorème 1.2 Soient le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in \mathbb{K}^{N+1}$ et la famille (g) satisfaisant la condition $({}_{(g)}H_N^{(ES)})$, alors

$${}_{(g)}S_{N+i,N}^{(ES)} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & g_1(N+i) & \dots & g_N(N+i) \\ S_0 & 1 & g_1(0) & \dots & g_N(0) \\ S_1 & 1 & g_1(1) & \dots & g_N(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_N & 1 & g_1(N) & \dots & g_N(N) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & g_1(0) & \dots & g_N(0) \\ 1 & g_1(1) & \dots & g_N(1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & g_1(N) & \dots & g_N(N) \end{vmatrix}}, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Chapitre 2

L' ε -prédiction

L' ε -algorithme permet de construire une méthode de prédiction appelée l' ε -prédiction. L' ε -algorithme est un cas particulier du E-algorithme. Il en est de même pour l' ε -prédiction vis à vis de la E-prédiction. Cependant, l' ε -prédiction, contrairement à la E-prédiction, ne requiert pas de développement asymptotique sur une échelle de comparaison pour la suite à prédire.

Notons cependant que d'autres méthodes d'extrapolation, succinctement référées dans [8, pp. 57-58], pourraient aussi être utilisées pour obtenir des méthodes de prédiction, telles le procédé de Richardson, la G-transformation, ou encore des procédés de sommation. Les méthodes de prédiction ainsi obtenues sont, elles aussi, des cas particuliers de la E-prédiction.

C. Brezinski et M. Redivo Zaglia exposent dans [8, pp. 390-391] la Δ^2 -prédiction qui est un cas particulier de l' ε -prédiction (au même titre que le Δ^2 -d'Aitken est un cas particulier de l' ε -algorithme).

2.1 L'opérateur de différence Δ

Soit $(S_i)_{i \geq 0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite, on définit Δ par

$$\Delta S_i = S_{i+1} - S_i.$$

Les itérés successifs ($\Delta^{k+1} S_i = \Delta^k S_{i+1} - \Delta^k S_i, \forall k \geq 1$) de cet opérateur de différence sont donnés par

$$\Delta^k S_i = \sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j S_{i+j},$$

où $C_k^j = \frac{k!}{j!(k-j)!}$ sont les coefficients binômiaux.

Lorsque la suite sur laquelle agit l'opérateur Δ possède plusieurs indices, on convient toujours que l'indice sur lequel il agit est i . D'autre part, on s'autorise à noter cet opérateur Δ , qu'il agisse sur une suite ou sur un vecteur car il s'applique indifféremment sur ces deux éléments.

2.2 L' ε -algorithme

L' ε -algorithme est un algorithme d'extrapolation. Il a été obtenu par P. Wynn dans [23].

Soit la suite initiale $(S_i)_{i \geq 0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

On construit alors la suite $(\varepsilon_{2k}^{(i)})_{i \geq 0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ (k fixé) en définissant $\varepsilon_{2k}^{(i)}$ comme solution du système linéaire suivant :

$$\begin{cases} S_{k+i} = \varepsilon_{2k}^{(i)} + a_1 S_i + \dots + a_k S_{k+i-1} \\ S_{k+i+1} = \varepsilon_{2k}^{(i)} + a_1 S_{i+1} + \dots + a_k S_{k+i} \\ \vdots \\ S_{2k+i} = \varepsilon_{2k}^{(i)} + a_1 S_{k+i} + \dots + a_k S_{2k+i-1} \end{cases}$$

où les autres inconnues sont a_1, a_2, \dots, a_k .

Nous obtenons immédiatement l'écriture d' $\varepsilon_{2k}^{(i)}$ sous forme d'un rapport de deux déterminants, comme suit :

$$\varepsilon_{2k}^{(i)} = \frac{\begin{vmatrix} S_i & \dots & S_{k+i} \\ S_{i+1} & \dots & S_{k+i+1} \\ \vdots & & \vdots \\ S_{k+i} & \dots & S_{2k+i} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta^2 S_i & \dots & \Delta^2 S_{k+i-1} \\ \Delta^2 S_{i+1} & \dots & \Delta^2 S_{k+i} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta^2 S_{k+i-1} & \dots & \Delta^2 S_{2k+i-2} \end{vmatrix}}, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Ceux-ci peuvent être générés par l' ε -algorithme de la manière suivante :

On initialise les deux premières colonnes de la table de l' ε -algorithme par

$$\varepsilon_0^{(i)} = S_i, \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

et

$$\varepsilon_{-1}^{(i)} = 0, \quad \forall i \geq 1.$$

Ensuite, on calcule récursivement les $\varepsilon_l^{(i)}$ par

$$\varepsilon_l^{(i)} = \varepsilon_{l-2}^{(i+1)} + \frac{1}{\varepsilon_{l-1}^{(i+1)} - \varepsilon_{l-1}^{(i)}}, \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad \forall l \in \{1, 2, \dots, 2k\}.$$

Les éléments $\varepsilon_{2l}^{(i)}$ et $\varepsilon_{2l+1}^{(i)}$ sont donnés sous forme d'un rapport de deux déterminants par

$$\varepsilon_{2l}^{(i)} = \frac{\begin{vmatrix} S_i & \dots & S_{l+i} \\ S_{i+1} & \dots & S_{l+i+1} \\ \vdots & & \vdots \\ S_{l+i} & \dots & S_{2l+i} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta^2 S_i & \dots & \Delta^2 S_{l+i-1} \\ \Delta^2 S_{i+1} & \dots & \Delta^2 S_{l+i} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta^2 S_{l+i-1} & \dots & \Delta^2 S_{2l+i-2} \end{vmatrix}}, \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad \forall l \in \{0, 1, \dots, k\},$$

et

$$\epsilon_{2l+1}^{(i)} = \frac{\begin{vmatrix} \Delta^3 S_i & \dots & \Delta^3 S_{l+i-1} \\ \Delta^3 S_{i+1} & \dots & \Delta^3 S_{l+i} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta^3 S_{l+i-1} & \dots & \Delta^3 S_{2l+i-2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta S_i & \dots & \Delta S_{l+i} \\ \Delta S_{i+1} & \dots & \Delta S_{l+i+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta S_{l+i} & \dots & \Delta S_{2l+i} \end{vmatrix}}, \forall i \in \mathbb{N}, \forall l \in \{0, 1, \dots, k-1\}.$$

D'autre part, on dit que l' ϵ -algorithme est semi-linéaire. En effet, soit u une application qui à x fait correspondre $u(x) = a.x + b$, et soit v une application qui à x fait correspondre $v(x) = x/a$. Alors, si nous appliquons u à chaque élément de la suite initiale, nous appliquons u à chaque élément d'une colonne d'indice pair de la table de l' ϵ -algorithme, et nous appliquons v à chaque élément d'une colonne d'indice impair de cette même table.

De plus, les colonnes paires de l' ϵ -algorithme peuvent être générées par la règle de la croix de P. Wynn, donnée dans [24], de la façon suivante :

L'initialisation de l' ϵ -algorithme est alors assurée par

$$\epsilon_0^{(i)} = S_i, \forall i \in \mathbb{N}$$

et

$$\epsilon_{-2}^{(i)} = \infty, \forall i \geq 1.$$

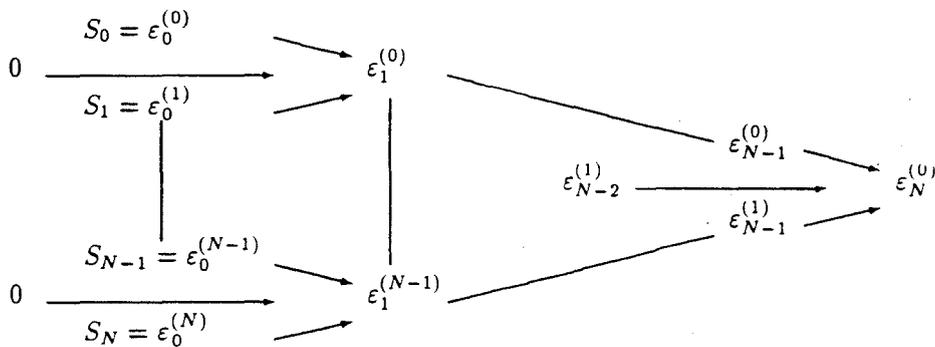
Ensuite, on calcule $\epsilon_{2l+2}^{(i)}$ par la règle de la croix :

$$\frac{1}{\epsilon_{2l+2}^{(i)} - \epsilon_{2l}^{(i+1)}} + \frac{1}{\epsilon_{2l-2}^{(i+2)} - \epsilon_{2l}^{(i+1)}} = \frac{1}{\epsilon_{2l}^{(i)} - \epsilon_{2l}^{(i+1)}} + \frac{1}{\epsilon_{2l}^{(i+2)} - \epsilon_{2l}^{(i+1)}}, \forall i \in \mathbb{N}, \forall l \in \{0, 1, \dots, k-1\}.$$

2.3 L' ϵ -prédiction du point de vue algorithmique

Soit le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in \mathbb{K}^{N+1}$.

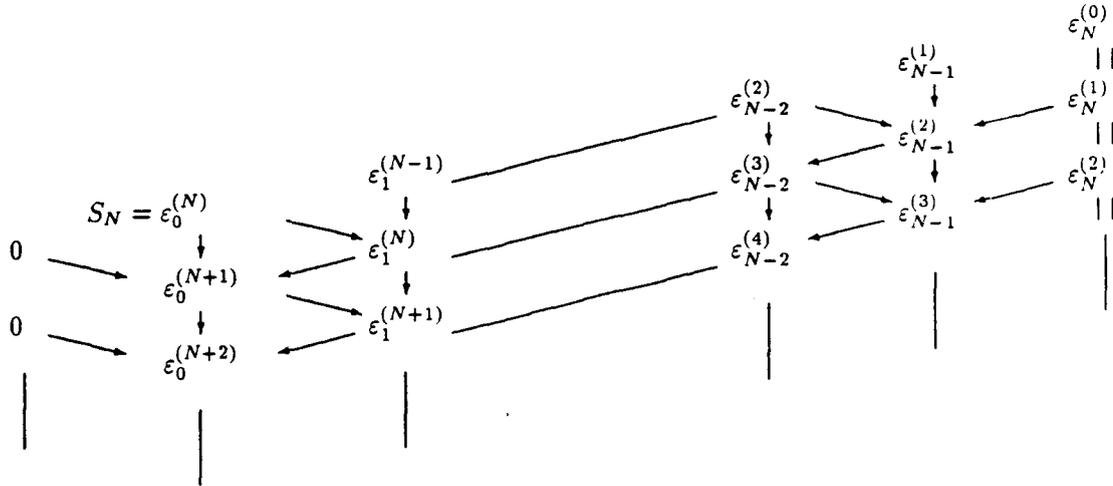
Nous formons la table (1) :



à l'aide de la règle classique de l' ε -algorithme :

$$\begin{cases} \varepsilon_{-1}^{(i)} = 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, N\} \\ \varepsilon_0^{(i)} = S_i, \forall i \in \{0, 1, \dots, N\} \\ \text{et, } \varepsilon_j^{(i)} = \varepsilon_{j-2}^{(i+1)} + \frac{1}{\varepsilon_{j-1}^{(i+1)} - \varepsilon_{j-1}^{(i)}}, \forall j \in \{1, 2, \dots, N\}, \forall i \in \{0, 1, \dots, N-j\} \end{cases}$$

Ensuite, nous formons la table (2) :



en utilisant la règle progressive de l' ε -algorithme :

$$\begin{cases} \varepsilon_N^{(i)} = \varepsilon_N^{(0)}, \forall i \geq 1 \\ (\text{l}'\varepsilon - \text{prédiction est obtenue en attribuant la même valeur à tous les termes de la colonne la plus à droite et en redescendant la table à l'aide de la règle progressive de l}'\varepsilon - \text{algorithme}) \\ \varepsilon_{-1}^{(i)} = 0, \forall i \geq N+1 \\ \text{et, } \varepsilon_j^{(i)} = \varepsilon_j^{(i-1)} + \frac{1}{\varepsilon_{j+1}^{(i-1)} - \varepsilon_{j+1}^{(i)}}, \forall j \in \{0, 1, \dots, N-1\}, \forall i \geq N-j+1. \end{cases}$$

Définition de l' ε -prédiction du point de vue algorithmique

Nous définissons la suite prédite par l' ε -prédiction $(S_{i,N}^{(\varepsilon)})_{i \geq 0}$ à partir du vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N}$ par

$$S_{i,N}^{(\varepsilon)} = \varepsilon_0^{(i)}, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Nous notons $(S_{i,N}^{(\varepsilon)})_{i \geq 0}$ cette suite prédite, parce que chaque terme de celle-ci dépend de la valeur de N (ε indique que cette suite est obtenue par l' ε -prédiction).

Condition d'existence de l' ε -prédiction du point de vue algorithmique

Lorsque $\varepsilon_{j-1}^{(i+1)} \neq \varepsilon_{j-1}^{(i)}, \forall j \in \{1, 2, \dots, N\}, \forall i \in \{0, 1, \dots, N-j\}$,

et $\varepsilon_{j+1}^{(i-1)} \neq \varepsilon_{j+1}^{(i)}, \forall j \in \{0, 1, \dots, N-1\}, \forall i \geq N-j+1$,

l' ε -prédiction existe, ce qui veut dire qu'il ne se produit pas de division par zéro dans l'algorithme.

Nous notons cette condition $(H_N^{(\varepsilon)})$ parce qu'elle dépend de la valeur de N . Cette condition d'existence est toujours associée à une suite en particulier.

Remarques à propos de l' ε -prédiction définie de façon algorithmique

1. L'algorithme de l' ε -prédiction et donc la condition d'existence peuvent être simplifiés dans de nombreux exemples. En effet, si dans la table (1), la colonne d'indice N_0 ($N_0 \in \{0, 1, \dots, N\}$) est

constante et égale à S , il nous est impossible de calculer les termes des colonnes d'indice supérieur ou égal à N_0 dans les tables (1) et (2). Dans ce cas, nous supposons que la colonne d'indice N_0 (plutôt que celle d'indice N) dans la table (2) est constante et égale à S (l'algorithme de l' ε -prédiction est raccourci et la condition d'existence en est d'autant allégée).

2. La condition $(H_N^{(\varepsilon)})$ peut être affaiblie dans beaucoup d'exemples. Formellement à l'aide d'un logiciel de calcul formel utilisant les règles de calcul usuelles concernant l'infini (i.e. $\frac{1}{\infty} = 0$, $\frac{1}{0} = \infty, \dots$). Numériquement, en se servant des règles particulières de l' ε -algorithme exposées dans [8, pp. 34-38], et dans [9], qui permettent de contourner les singularités.
3. Quand N est pair, au lieu d'utiliser les règles classique et progressive de l' ε -algorithme pour l'algorithme de l' ε -prédiction, nous pouvons utiliser la règle de la croix de l' ε -algorithme de P. Wynn donnée dans [24].

De par la construction même de la suite $(S_{i,N}^{(\varepsilon)})_{i \geq 0}$, nous énonçons ceci :

Soit le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in \mathbb{K}^{N+1}$ satisfaisant la condition $(H_N^{(\varepsilon)})$, alors $(S_{i,N}^{(\varepsilon)})_{i \geq 0}$ est une suite prédite à partir du vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N}$.

De cette façon, nous justifions l'attribution du mot prédiction à cette méthode.

2.4 L' ε -prédiction du point de vue algébrique

Soit le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq 2K} \in \mathbb{K}^{2K+1}$.

On définit alors (b_0, b_1, \dots, b_K) comme solution du système linéaire suivant :

$$\begin{cases} S_K &= b_0 S_0 + b_1 S_1 + \dots + b_{K-1} S_{K-1} + b_K \\ S_{K+1} &= b_0 S_1 + b_1 S_2 + \dots + b_{K-1} S_K + b_K \\ &\vdots \\ S_{2K} &= b_0 S_K + b_1 S_{K+1} + \dots + b_{K-1} S_{2K-1} + b_K \end{cases}$$

qui admet une solution si et seulement si

$$\begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \dots & S_{K-1} & 1 \\ S_1 & S_2 & \dots & S_K & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ S_K & S_{K+1} & \dots & S_{2K-1} & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Définition de l' ε -prédiction du point de vue algébrique

Nous définissons la suite prédite par l' ε -prédiction $(S_{i,2K}^{(\varepsilon S)})_{i \geq 0}$ à partir du vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq 2K}$ par

$$S_{i,2K}^{(\varepsilon S)} = S_i, \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, 2K\},$$

et

$$S_{2K+i,2K}^{(\varepsilon S)} = b_0 S_{K+i,2K}^{(\varepsilon S)} + b_1 S_{K+i+1,2K}^{(\varepsilon S)} + \dots + b_{K-1} S_{2K+i-1,2K}^{(\varepsilon S)} + b_K, \quad \forall i \geq 1.$$

Nous notons $(S_{i,2K}^{(\varepsilon S)})_{i \geq 0}$ cette suite prédite, parce que chaque terme de celle-ci dépend de la valeur de K (ε indique que cette suite est obtenue par l' ε -prédiction, et S que la résolution d'un système linéaire est indispensable).

Condition d'existence de l' ε -prédiction du point de vue algébrique
Lorsque

$$\begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \dots & S_{K-1} & 1 \\ S_1 & S_2 & \dots & S_K & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ S_K & S_{K+1} & \dots & S_{2K-1} & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

l' ε -prédiction existe.

Nous notons cette condition ($H_{2K}^{(\varepsilon S)}$) parce qu'elle dépend de la valeur de K . Cette condition d'existence est toujours associée à une suite en particulier.

De par la construction même de la suite $(S_{i,2K}^{(\varepsilon S)})_{i \geq 0}$, nous énonçons ceci :

Soit le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq 2K} \in \mathbb{K}^{2K+1}$ satisfaisant la condition $(H_{2K}^{(\varepsilon S)})$, alors $(S_{i,2K}^{(\varepsilon S)})_{i \geq 0}$ est une suite prédite à partir du vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq 2K}$.

De cette façon, nous justifions l'attribution du mot prédiction à cette méthode.

Remarque à propos des conditions d'existence

Lorsque la condition $(H_{2K}^{(\varepsilon)})$ est satisfaite pour le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq 2K} \in \mathbb{K}^{2K+1}$, la condition $(H_{2K}^{(\varepsilon S)})$ est satisfaite pour le même vecteur. Cette propriété provient du fait que le déterminant non nul de la condition $(H_{2K}^{(\varepsilon S)})$ est précisément le dénominateur d' $\varepsilon_{2K-1}^{(0)}$ quand celui-ci est donné sous forme d'un rapport de deux déterminants.

Théorème 2.1 *Soit le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq 2K} \in \mathbb{K}^{2K+1}$ satisfaisant la condition $(H_{2K}^{(\varepsilon)})$, alors*

$$S_{i,2K}^{(\varepsilon)} = S_{i,2K}^{(\varepsilon S)}, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Ce théorème établit que l' ε -prédiction définie algorithmiquement, lorsqu'elle existe, est exactement l' ε -prédiction définie algébriquement.

Remarque concernant la constance de la colonne la plus à droite dans l'algorithme de la ε -prédiction

Dans le point de vue algorithmique de l' ε -prédiction, nous choisissons d'attribuer la même valeur à tous les termes de la colonne la plus à droite. De ce choix découle la simplicité du point de vue algébrique. Nous pourrions tout aussi bien choisir d'égaliser cette colonne la plus à droite à une suite non constante. Par exemple, si nous connaissons la limite de la suite prédite, nous pourrions l'égaliser à une suite convergeant vers la même limite.

Nous donnons, dans le théorème suivant, une expression de $S_{2K+i,2K}^{(\varepsilon S)}$, $\forall i \in \mathbb{N}$, sous forme d'un rapport de deux déterminants, sans la démonstration qui est triviale car provenant directement du système de Cramer.

Théorème 2.2 Soit le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq 2K} \in \mathbb{K}^{2K+1}$ satisfaisant la condition $(H_{2K}^{(\varepsilon S)})$. alors

$$S_{2K+i,2K}^{(\varepsilon S)} = - \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & S_{K+i,2K}^{(\varepsilon S)} & \cdots & S_{2K+i-1,2K}^{(\varepsilon S)} \\ S_K & 1 & S_0 & \cdots & S_{K-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_{2K} & 1 & S_K & \cdots & S_{2K-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & S_0 & \cdots & S_{K-1} \\ 1 & S_1 & \cdots & S_K \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & S_K & \cdots & S_{2K-1} \end{vmatrix}}, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

2.5 Connection entre ε -prédiction et E-prédiction

Dans l'introduction de ce chapitre, il est dit que l' ε -prédiction est un cas particulier de la E-prédiction. Nous le vérifions du point de vue algébrique depuis l'expression de chacun des termes des suites prédites sous forme d'un rapport de deux déterminants (en comparant les théorèmes 1.2 et 2.2).

En effet, si $(S_{i,2K}^{(\varepsilon S)})_{i \geq 0}$ est la suite prédite par l' ε -prédiction à partir du vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq 2K}$ et si $(T_{i,K}^{(ES)})_{i \geq 0}$ est la suite prédite par la E-prédiction à partir du vecteur $(T_i)_{0 \leq i \leq K}$ (tel que $S_{i+K} = T_i$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, K\}$) à l'aide de la table (g) des suites auxiliaires (données par $g_i(j) = S_{i+j-1,2K}^{(\varepsilon S)}$, $\forall j \in \mathbb{N}$, $\forall i \geq 1$), alors

$$S_{i,2K}^{(\varepsilon S)} = S_i, \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, K-1\},$$

et

$$S_{i+K,2K}^{(\varepsilon S)} = T_{i,K}^{(ES)}, \quad \forall i \geq 0.$$

Nous ne donnons pas, dans cette thèse, la démonstration de cette propriété du point de vue algorithmique, celle-ci ne présentant pas grand intérêt, à notre avis.

2.6 Quelques exemples théoriques de l' ε -prédiction

Étudions sur de simples exemples (i.e. pour de petites valeurs de N) l'expression des termes de la suite prédite par l' ε -prédiction.

Exemple 2.1 La Δ^2 -prédiction (lorsque $N = 2$) :

$$S_{i,2}^{(\varepsilon)} = \frac{S_0 S_2 - S_1^2 - (S_2 - S_1) S_{i-1,2}^{(\varepsilon)}}{S_0 - S_1} \quad \text{pour } i \geq 3, \text{ lorsque } S_0 - S_1 \neq 0,$$

et, $S_{i,2}^{(\varepsilon)} = S_i$ pour $i \in \{0, 1, 2\}$.

Exemple 2.2 Lorsque $N = 4$:

$$S_{i,4}^{(\varepsilon)} = \frac{S_0 S_2 S_4 + 2 S_1 S_2 S_3 - S_3^3 - S_1^2 S_4 - S_0 S_3^2 - (S_0 S_1 + S_2 S_3 + S_1 S_2 - S_0 S_3 - S_1 S_4 - S_2^2) S_{i-1,4}^{(\varepsilon)}}{S_0 S_2 + S_1 S_3 + S_1 S_2 - S_2^2 - S_1^2 - S_0 S_3}$$

$$- \frac{S_1 S_3 + S_2 S_4 + S_2 S_3 - S_1 S_4 - S_3^2 - S_2^2) S_{i-2,4}^{(\varepsilon)}}{S_0 S_2 + S_1 S_3 + S_1 S_2 - S_2^2 - S_1^2 - S_0 S_3} \quad \text{pour } i \geq 5,$$

lorsque $S_0S_2 + S_1S_3 + S_1S_2 - S_2^2 - S_1^2 - S_0S_3 \neq 0$,
 et, $S_{i,4}^{(\varepsilon)} = S_i$ pour $i \in \{0, 1, \dots, 4\}$.

2.7 Extrapolation exponentielle et ε -prédiction

Le fait que des systèmes exponentiels puissent être transformés en des systèmes linéaires est déjà connu sous le nom de méthode de Prony. Les renseignements concernant la méthode de Prony et la définition des systèmes exponentiels peuvent être trouvés dans [12, pp. 272-280].

Avant d'établir le lien entre extrapolation exponentielle et ε -prédiction, nous énonçons quelques lemmes préliminaires :

Lemme 2.1 $\forall (a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_k) \in \mathbb{K}^{2k}$, on a

$$\begin{vmatrix} a_1 + a_2 + \dots + a_k & \dots & a_1b_1^k + a_2b_2^k + \dots + a_kb_k^k \\ a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_kb_k & \dots & a_1b_1^{k+1} + a_2b_2^{k+1} + \dots + a_kb_k^{k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_1b_1^k + a_2b_2^k + \dots + a_kb_k^k & \dots & a_1b_1^{2k} + a_2b_2^{2k} + \dots + a_kb_k^{2k} \end{vmatrix} = 0.$$

Démonstration

Considérons les k vecteurs de \mathbb{K}^{k+1} :

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_1^k \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_2^k \end{pmatrix}, \dots \text{ et } B_k = \begin{pmatrix} 1 \\ b_k \\ \vdots \\ b_k^k \end{pmatrix}.$$

Définissons A_k par

$$A_k = \begin{vmatrix} a_1 + a_2 + \dots + a_k & \dots & a_1b_1^k + a_2b_2^k + \dots + a_kb_k^k \\ a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_kb_k & \dots & a_1b_1^{k+1} + a_2b_2^{k+1} + \dots + a_kb_k^{k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_1b_1^k + a_2b_2^k + \dots + a_kb_k^k & \dots & a_1b_1^{2k} + a_2b_2^{2k} + \dots + a_kb_k^{2k} \end{vmatrix}.$$

Alors A_k est le déterminant de $(k+1)$ vecteurs (les $V_i = a_1b_1^i B_1 + \dots + a_kb_k^i B_k$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, k\}$) qui sont combinaison linéaire de k vecteurs (les B_i , $\forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$). Donc, ces $(k+1)$ vecteurs sont liés, et $A_k = 0$.

Lemme 2.2 $\forall (a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_k) \in \mathbb{K}^{2k}$, on a

$$\begin{vmatrix} a_1 + a_2 + \dots + a_k & a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_kb_k & \dots & a_1b_1^{k-1} + a_2b_2^{k-1} + \dots + a_kb_k^{k-1} \\ a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_kb_k & a_1b_1^2 + a_2b_2^2 + \dots + a_kb_k^2 & \dots & a_1b_1^k + a_2b_2^k + \dots + a_kb_k^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1b_1^{k-1} + a_2b_2^{k-1} + \dots + a_kb_k^{k-1} & a_1b_1^k + a_2b_2^k + \dots + a_kb_k^k & \dots & a_1b_1^{2k-2} + a_2b_2^{2k-2} + \dots + a_kb_k^{2k-2} \end{vmatrix} \\ = \left(\prod_{i \in \{1, 2, \dots, k\}} a_i \right) \cdot \left(\prod_{i \in \{1, 2, \dots, k\}, j \in \{i+1, i+2, \dots, k\}} (b_j - b_i)^2 \right).$$

Démonstration

On a le résultat suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ b_1 & b_2 & \dots & b_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1^{k-1} & b_2^{k-1} & \dots & b_k^{k-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_1 b_1 & \dots & a_1 b_1^{k-1} \\ a_2 & a_2 b_2 & \dots & a_2 b_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_k & a_k b_k & \dots & a_k b_k^{k-1} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 + \dots + a_k & \dots & a_1 b_1^{k-1} + a_2 b_2^{k-1} + \dots + a_k b_k^{k-1} \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_k b_k & \dots & a_1 b_1^k + a_2 b_2^k + \dots + a_k b_k^k \\ \vdots & & \vdots \\ a_1 b_1^{k-1} + a_2 b_2^{k-1} + \dots + a_k b_k^{k-1} & \dots & a_1 b_1^{2k-2} + a_2 b_2^{2k-2} + \dots + a_k b_k^{2k-2} \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{vmatrix} a_1 + a_2 + \dots + a_k & \dots & a_1 b_1^{k-1} + a_2 b_2^{k-1} + \dots + a_k b_k^{k-1} \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_k b_k & \dots & a_1 b_1^k + a_2 b_2^k + \dots + a_k b_k^k \\ \vdots & & \vdots \\ a_1 b_1^{k-1} + a_2 b_2^{k-1} + \dots + a_k b_k^{k-1} & \dots & a_1 b_1^{2k-2} + a_2 b_2^{2k-2} + \dots + a_k b_k^{2k-2} \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ b_1 & b_2 & \dots & b_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1^{k-1} & b_2^{k-1} & \dots & b_k^{k-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_1 b_1 & \dots & a_1 b_1^{k-1} \\ a_2 & a_2 b_2 & \dots & a_2 b_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_k & a_k b_k & \dots & a_k b_k^{k-1} \end{vmatrix} \\ = \left(\prod_{i \in \{1, 2, \dots, k\}} a_i \right) \cdot \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ b_1 & b_2 & \dots & b_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1^{k-1} & b_2^{k-1} & \dots & b_k^{k-1} \end{vmatrix} \right)^2 \\ = \left(\prod_{i \in \{1, 2, \dots, k\}} a_i \right) \cdot \left(\prod_{i \in \{1, 2, \dots, k\}} \prod_{j \in \{i+1, i+2, \dots, k\}} (b_j - b_i)^2 \right),$$

en utilisant l'expression du déterminant de Vandermonde.

Théorème 2.3 Soit le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq 2K} \in \mathbb{K}^{2K+1}$ satisfaisant la condition $(H_{2K}^{(\varepsilon)})$. Lorsque le système (S) admet une solution, l' ε -prédiction est une méthode de prédiction identique à de l'extrapolation exponentielle dont une des puissances est fixée égale à 1 ; ceci signifie que, si on définit $(T_{i,2K})_{i \geq 0}$ par

$$T_{i,2K} = a_1 b_1^i + \dots + a_K b_K^i + c_1, \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

où $a_1, a_2, \dots, a_K, b_1, b_2, \dots, b_K, c_1$, sont déterminés comme solutions du système (S) non linéaire suivant :

$$\begin{cases} S_0 & = a_1 + \dots + a_K + c_1 \\ S_1 & = a_1 b_1 + \dots + a_K b_K + c_1 \\ \vdots & \\ S_{2K} & = a_1 b_1^{2K} + \dots + a_K b_K^{2K} + c_1 \end{cases}$$

alors

$$T_{i,2K} = S_{i,2K}^{(\varepsilon)}, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Démonstration

Il suffit de montrer que si $(T_{i,2K})_{i \geq 0}$ est une suite donnée par $T_{i,2K} = a_1 b_1^i + \dots + a_K b_K^i + c_1$, $\forall i \in \mathbb{N}$, alors, lorsque nous appliquons l' ε -algorithme à cette suite, nous obtenons : $\varepsilon_{2K}^{(i)} = \varepsilon_{2K}^{(0)} = c_1$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

L' ε -algorithme étant semi-linéaire, nous pouvons supposer $c_1 = 0$. Ensuite, le lemme 2.1 nous permet d'annuler le numérateur dans l'expression des éléments de la table de l' ε -algorithme sous forme d'un rapport de deux déterminants. On obtient alors aisément le résultat du théorème.

Remarque à propos de l'extrapolation exponentielle

Pour de l'extrapolation exponentielle, les a_i et les b_i n'appartiennent pas nécessairement au corps \mathbb{K} , comme nous le constatons dans l'exemple suivant :

Exemple 2.3 si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $N = 4$

et si $(S_i)_{0 \leq i \leq 4}$ est donnée par $S_0 = 1 + \sin 0$, $S_1 = 1 + \sin 1$, $S_2 = 1 + \sin 2$, $S_3 = 1 + \sin 3$, $S_4 = 1 + \sin 4$, alors, d'après le théorème 2.3, $S_{k,4}^{(\varepsilon)} = 1 + \frac{1}{2I} e^{kI} - \frac{1}{2I} e^{-kI} = 1 + \sin k$. et, $\frac{1}{2I} \notin \mathbb{R}$, $e^I \notin \mathbb{R}$, $-\frac{1}{2I} \notin \mathbb{R}$, $e^{-I} \notin \mathbb{R}$

2.8 Propriétés de relations entre ε -prédictions

Cette section est reprise dans sa majeure partie dans le chapitre 4. Cependant, il nous faut souligner l'intérêt que comporte le présent théorème, celui-ci étant de nous procurer, à l'aide des points (i), (ii), (iii) et (iv), de nouvelles méthodes de prédiction.

Théorème 2.4 Il existe des vecteurs $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in \mathbb{K}^{N+1}$ et $(T_i)_{0 \leq i \leq N} \in \mathbb{K}^{N+1}$ vérifiant tous les deux la condition $(H_N^{(\varepsilon)})$ et un élément a de \mathbb{K} tels que :

(i) $S_{i,N}^{(\varepsilon)} + T_{i,N}^{(\varepsilon)} \neq U_{i,N}^{(\varepsilon)}$ où $(U_i)_{0 \leq i \leq N}$ est un vecteur donné par $U_i = S_i + T_i$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, N\}$.

fournissant la suite $(U_{i,N}^{(\varepsilon)})_{i \geq 0}$ par l' ε -prédiction

(ii) $S_{i,N}^{(\varepsilon)} * T_{i,N}^{(\varepsilon)} \neq V_{i,N}^{(\varepsilon)}$ où $(V_i)_{0 \leq i \leq N}$ est un vecteur donné par $V_i = S_i * T_i$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, N\}$.

fournissant la suite $(V_{i,N}^{(\varepsilon)})_{i \geq 0}$ par l' ε -prédiction

(iii) $\frac{1}{S_{i,N}^{(\varepsilon)}} \neq W_{i,N}^{(\varepsilon)}$ où $(W_i)_{0 \leq i \leq N}$ est un vecteur donné par $W_i = \frac{1}{S_i}$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, N\}$.

fournissant la suite $(W_{i,N}^{(\varepsilon)})_{i \geq 0}$ par l' ε -prédiction

(iv) $a^i S_{i,N}^{(\varepsilon)} \neq X_{i,N}^{(\varepsilon)}$ où $(X_i)_{0 \leq i \leq N}$ est un vecteur donné par $X_i = a^i S_i$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, N\}$,

fournissant la suite $(X_{i,N}^{(\varepsilon)})_{i \geq 0}$ par l' ε -prédiction.

D'autre part, soient le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in \mathbb{K}^{N+1}$ et le couple $(a, b) \in \mathbb{K}^2$, alors :

(v) $a \cdot S_{i,N}^{(\varepsilon)} + b = Y_{i,N}^{(\varepsilon)}$ où $(Y_i)_{0 \leq i \leq N}$ est un vecteur donné par $Y_i = a \cdot S_i + b$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, 2k\}$.

fournissant la suite $(Y_{i,N}^{(\varepsilon)})_{i \geq 0}$ par l' ε -prédiction.

Démonstration

Pour montrer l'existence dans les points (i), (ii), (iii) et (iv), il nous suffit de donner des exemples :

(i) Prenons $N = 2$, $S_0 = 1$, $S_1 = \frac{1}{2}$, $S_2 = \frac{1}{3}$, $T_0 = 1$, $T_1 = \frac{1}{4}$, $T_2 = \frac{1}{9}$, alors $S_{3,2}^{(\epsilon)} = \frac{5}{18}$ et $T_{3,2}^{(2)} = \frac{83}{972}$ et $U_{3,2}^{(\epsilon)} = \frac{599}{1620}$, et donc

$$S_{3,2}^{(\epsilon)} + T_{3,2}^{(\epsilon)} \neq U_{3,2}^{(\epsilon)}.$$

(ii) Prenons $N = 2$, $S_0 = 1$, $S_1 = \frac{1}{2}$, $S_2 = \frac{1}{3}$, $T_0 = 1$, $T_1 = \frac{1}{4}$, $T_2 = \frac{1}{9}$, alors $S_{3,2}^{(\epsilon)} = \frac{5}{18}$ et $T_{3,2}^{(2)} = \frac{83}{972}$ et $V_{3,2}^{(\epsilon)} = \frac{1151}{40824}$ et donc

$$S_{3,2}^{(\epsilon)} * T_{3,2}^{(\epsilon)} \neq V_{3,2}^{(\epsilon)}.$$

(iii) Prenons $N = 2$, $S_0 = 1$, $S_1 = \frac{1}{4}$, $S_2 = \frac{1}{9}$, alors

$S_{3,2}^{(\epsilon)} = \frac{83}{972}$ et $W_{3,2}^{(\epsilon)} = \frac{52}{3}$ et donc

$$1/S_{3,2}^{(\epsilon)} \neq W_{3,2}^{(\epsilon)}.$$

(iv) Prenons $N = 2$, $S_0 = 1$, $S_1 = \frac{1}{2}$, $S_2 = \frac{1}{3}$, alors, si $a = -1$, $S_{3,2}^{(\epsilon)} = \frac{5}{18}$ et $X_{3,2}^{(\epsilon)} = -\frac{7}{54}$ et donc

$$a^3 \cdot S_{3,2}^{(\epsilon)} \neq X_{3,2}^{(\epsilon)}.$$

Le point (v) est une conséquence directe de la semi-linéarité de l' ϵ -algorithme.

2.9 Propriétés de positivité et de monotonie pour l' ϵ -prédiction

Pour cette section, on impose en plus au corps commutatif \mathbb{K} d'être totalement ordonné.

Quelles sont les propriétés à supposer sur les composantes du vecteur à prédire pour que les termes de la suite prédite possède les mêmes propriétés ?

Dans cette section, nous constatons que ni la propriété de positivité ni celle de monotonie ne répondent à cette question.

Théorème 2.5 *Il existe un vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in \mathbb{K}_+^{N+1}$ satisfaisant la condition $(H_N^{(\epsilon)})$ tel que $(S_{i,N}^{(\epsilon)})_{i \geq 0} \notin \mathbb{K}_+^{\mathbb{N}}$.*

Démonstration

Pour montrer l'existence, il suffit de donner un exemple.
Prenons $N = 2$, $S_0 = 9$, $S_1 = 8$, $S_2 = 1$ alors

$$S_{3,2}^{(\epsilon)} = -48 < 0.$$

Théorème 2.6 *Il existe un vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in \mathbb{K}_-^{N+1}$ satisfaisant la condition $(H_N^{(\epsilon)})$ tel que $(S_{i,N}^{(\epsilon)})_{i \geq 0} \notin \mathbb{K}_-^{\mathbb{N}}$.*

Démonstration

C'est une conséquence directe des théorèmes 2.5 et 2.4, (v).

Théorème 2.7 *Il existe un vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in \mathbb{K}^{N+1}$ vérifiant $S_{i+1} - S_i \in \mathbb{K}_+$ et satisfaisant la condition $(H_N^{(\varepsilon)})$ tel que $(S_{i,N}^{(\varepsilon)})_{i \geq 0} \in \mathbb{K}^N$, et cependant $S_{i+1,N}^{(\varepsilon)} - S_{i,N}^{(\varepsilon)} \notin \mathbb{K}_+$.*

Démonstration

Pour montrer l'existence, il suffit de donner un exemple.

Prenons $N = 4$, $S_0 = -1$, $S_1 = -\cos \frac{9}{11}$, $S_2 = -\cos \frac{18}{11}$, $S_3 = -\cos \frac{27}{11}$, $S_4 = -\cos \frac{36}{11}$, alors

$$S_{5,4}^{(\varepsilon)} = -\cos \frac{45}{11} < S_{4,4}^{(\varepsilon)}.$$

Théorème 2.8 *Il existe un vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in \mathbb{K}^{N+1}$ vérifiant $S_{i+1} - S_i \in \mathbb{K}_-$ et satisfaisant la condition $(H_N^{(\varepsilon)})$ tel que $(S_{i,N}^{(\varepsilon)})_{i \geq 0} \in \mathbb{K}^N$, et cependant $S_{i+1,N}^{(\varepsilon)} - S_{i,N}^{(\varepsilon)} \notin \mathbb{K}_-$.*

Démonstration

C'est une conséquence directe des théorèmes 2.7 et 2.4, (v).

2.10 Totale monotonie et totale oscillation

Pour cette section, on impose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Nous rappelons ici la définition et les principales propriétés des suites totalement monotones et des suites totalement oscillantes. Pour de plus amples renseignements, nous pouvons, par exemple, nous reporter à [11, chap. 2].

2.10.1 Totale monotonie

Définition

Soit $u = (u_i)_{i \geq 0} \in \mathbb{R}^N$, on dit que u est totalement monotone si

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, (-1)^j \Delta^j u_i \geq 0.$$

Notation

On note TM l'ensemble des éléments de \mathbb{R}^N qui sont totalement monotones.

Théorème 2.9 (de Hausdorff)

$$u = (u_i)_{i \geq 0} \in TM \iff \exists g \text{ une fonction non décroissante à variation bornée sur } [0, 1] \\ \text{telle que : } u_i = \int_0^1 x^i dg(x), \forall i \in \mathbb{N}.$$

Théorème 2.10 Si $(u_i)_{i \geq 0} \in TM$, alors

$$\begin{vmatrix} u_n & \dots & u_{n+k-1} \\ u_{n+1} & \dots & u_{n+k} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{n+k-1} & \dots & u_{n+2k-2} \end{vmatrix} \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall k \geq 1.$$

Nous allons maintenant définir un vecteur totalement monotone fini et un vecteur totalement monotone extrait. Ces deux notions sont effectivement distinctes.

Définition

Soit $u = (u_i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$, on dit que u est un vecteur totalement monotone fini si

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \text{ tel que } i + j \leq n, \quad (-1)^j \Delta^j u_i \geq 0.$$

Notation

On note TMF l'ensemble des éléments de \mathbb{R}^{n+1} qui sont totalement monotones finis.

Définition

Soit $u = (u_i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$, on dit que u est un vecteur totalement monotone extrait s'il existe une suite $v = (v_i)_{i \geq 0} \in TM$ telle que $v_i = u_i, \forall i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Notation

On note TME l'ensemble des éléments de \mathbb{R}^{n+1} qui sont totalement monotones extraits.

Théorème 2.11 $TME \subset TMF$ et $TME \neq TMF$.

Démonstration

Soit $u = (u_i)_{0 \leq i \leq n} \in TME$, alors, par définition, il existe $v = (v_i)_{i \geq 0} \in TM$ telle que :

$$\forall i \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad v_i = u_i.$$

On a alors $(-1)^j \Delta^j v_i \geq 0, \forall (i, j) \in \mathbb{N}^2$, et donc

$$(-1)^j \Delta^j u_i \geq 0, \quad \forall (i, j) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } i + j \leq n.$$

Ainsi $u \in TMF$, ce qui montre l'inclusion.

Soit $u = (u_i)_{0 \leq i \leq 2}$ donnée par $u_0 = 20, u_1 = 10, u_2 = 1$.

$u \in TMF$ car $u_0 \geq 0, u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, -\Delta u_0 \geq 0, -\Delta u_1 \geq 0, \Delta^2 u_0 \geq 0$.

Montrons par l'absurde que $u \notin TME$.

Si $u \in TME$, alors, il existe $v = (v_i)_{i \geq 0} \in TM$ telle que $v_0 = 20, v_1 = 10, v_2 = 1$. Comme $v \in TM$, nécessairement, v est une suite positive décroissante, donc v est telle que $v_i \in [0, 1], \forall i \geq 3$.

Mais alors, $\Delta^3 v_0 = v_3 - 3 + 30 - 20 = v_3 + 7 > 0$, ce qui contredit le fait que $v \in TM$.

Donc, il existe $u \in TMF$ telle que $u \notin TME$, ce qui montre que l'inclusion est stricte.

L'exemple précédent est bien entendu construit pour que la suite v soit trop rapidement décroissante sur ses premiers termes.

2.10.2 Totale oscillation

Définition

Soit $u = (u_i)_{i \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on dit que u est totalement oscillante si

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, (-1)^j \Delta^j v_i \geq 0,$$

avec

$$v_i = (-1)^i u_i, \forall i \in \mathbb{N},$$

c'est-à-dire que u est totalement oscillante si $v = (v_i)_{i \geq 0}$, définie par $v_i = (-1)^i u_i, \forall i \in \mathbb{N}$, est totalement monotone.

Notation

On note TO l'ensemble des éléments de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ qui sont totalement oscillants.

La similarité des suites totalement monotones et des suites totalement oscillantes nous permet de définir les vecteurs totalement oscillants finis et les vecteurs totalement oscillants extraits, par analogie avec les vecteurs totalement monotones finis et les vecteurs totalement monotones extraits.

Définition

Soit $u = (u_i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$, on dit que u est un vecteur totalement oscillant fini si le vecteur $v = (v_i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $v_i = (-1)^i u_i, \forall i \in \{0, 1, \dots, n\}$ est totalement monotone fini.

Notation

On note TOF l'ensemble des éléments de \mathbb{R}^{n+1} qui sont totalement oscillants finis.

Définition

Soit $u = (u_i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$, on dit que u est un vecteur totalement oscillant extrait si le vecteur $v = (v_i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $v_i = (-1)^i u_i, \forall i \in \{0, 1, \dots, n\}$ est totalement monotone extrait.

Notation

On note TOE l'ensemble des éléments de \mathbb{R}^{n+1} qui sont totalement oscillants extraits.

Théorème 2.12 $TOE \subset TOF$ et $TOE \neq TOF$.

Démonstration

C'est une conséquence directe du théorème 2.11 et de la définition même de la totale oscillation en regard de celle de la totale monotonie.

2.11 Propriétés de totale monotonie et de totale oscillation pour l' ε -prédiction

Pour cette section, on impose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Reprenons la question précédemment émise : *Quelles sont les propriétés à supposer sur les composantes du vecteur à prédire pour que les termes de la suite prédite possède les mêmes propriétés ?*

Cette section nous montre que la suite prédite à partir d'un vecteur totalement monotone fini n'est pas nécessairement totalement monotone. Cependant, lorsque le vecteur à prédire par l' ε -prédiction est totalement monotone extrait, la suite prédite est alors totalement monotone. Cette propriété motive la séparation qui existe entre les ensembles TMF et TME.

2.11.1 Totale monotonie

Commençons par voir si l' ε -prédiction fournit une suite totalement monotone à partir d'un vecteur totalement monotone fini.

Théorème 2.13 *Il existe un vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in TMF$ satisfaisant la condition $(H_N^{(\varepsilon)})$ tel que $(S_{i,N}^{(\varepsilon)})_{i \geq 0} \notin TM$.*

Démonstration

Pour montrer l'existence, il suffit de donner un exemple.
Prenons $N = 2$, $S_0 = \frac{5}{6}$, $S_1 = \frac{1}{3}$, $S_2 = \frac{1}{12}$.

$$(S_i)_{0 \leq i \leq 2} \in TMF,$$

mais

$$(S_{i,2}^{(\varepsilon)})_{i \geq 0} \notin TM,$$

car $S_{3,2}^{(\varepsilon)} = -\frac{1}{24} < 0$.

Ensuite, voyons si l' ε -prédiction fournit une suite totalement monotone à partir d'un vecteur totalement monotone extrait (dans le cas où le nombre de termes du vecteur initial est impair).

Théorème 2.14 *Soit le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq 2K} \in TME$ satisfaisant la condition $(H_{2K}^{(\varepsilon)})$, alors*

$$(S_{i,2K}^{(\varepsilon)})_{i \geq 0} \in TM.$$

Démonstration

D'après le théorème 2.3 et le théorème 2.9 de Hausdorff, on extrait

$$S_i = a_1 b_1^i + \dots + a_K b_K^i + c_1 = \int_0^1 x^i dg(x), \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, 2K\},$$

avec g non décroissante à variation bornée sur $[0, 1]$. On obtient donc

$$S_{i,2K}^{(\varepsilon)} = a_1 b_1^i + \dots + a_K b_K^i + c_1, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Mais dans ce cas,

$$\Delta S_i = a_1 (b_1 - 1) b_1^i + \dots + a_K (b_K - 1) b_K^i = \int_0^1 x^i (x - 1) dg(x), \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, 2K - 1\},$$

et

$$\Delta S_{i,2K}^{(\varepsilon)} = a_1 (b_1 - 1) b_1^i + \dots + a_K (b_K - 1) b_K^i, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Ainsi, d'après les résultats connus sur la quadrature de Gauss et puisque g est non décroissante à variation bornée sur $[0, 1]$, on a

1. $b_i \in [0, 1], \forall i \in \{1, 2, \dots, K\}$
2. $a_i(1 - b_i) \geq 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, K\}$.

On peut supposer dès lors que $b_i \neq 1, \forall i \in \{1, 2, \dots, K\}$. En effet, si $b_i = 1, \forall i \in \{1, 2, \dots, K'\}$ et si $b_i \neq 1, \forall i \in \{K' + 1, K' + 2, \dots, K\}$, alors on peut remplacer c_1 par $c_1 + a_1 + a_2 + \dots + a_{K'}$. Il s'ensuit :

1. $b_i \in [0, 1[, \forall i \in \{1, 2, \dots, K\}$
2. $a_i \geq 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, K\}$.

Pour montrer que la suite $(S_{i,2K}^{(\varepsilon)})_{i \geq 0}$ est totalement monotone, il nous reste à montrer que c_1 est une constante positive au sens large.

On a le système suivant :

$$\begin{cases} a_1 + \dots + a_K + c_1 = \int_0^1 dg(x) \\ a_1 b_1 + \dots + a_K b_K + c_1 = \int_0^1 x dg(x) \\ \vdots \\ a_1 b_1^{2K} + \dots + a_K b_K^{2K} + c_1 = \int_0^1 x^{2K} dg(x) \end{cases}$$

Il suit, par l'opération $i^{\text{ème}} \text{ ligne} - 2b_1(i-1)^{\text{ème}} \text{ ligne} + b_1^2(i-2)^{\text{ème}} \text{ ligne}, \forall i \in \{3, 4, \dots, 2K+1\}$:

$$\begin{cases} a_2(b_2 - b_1)^2 + \dots + a_K(b_K - b_1)^2 + c_1(1 - b_1)^2 = \int_0^1 (x - b_1)^2 dg(x) \\ a_2 b_2(b_2 - b_1)^2 + \dots + a_K b_K(b_K - b_1)^2 + c_1(1 - b_1)^2 = \int_0^1 x(x - b_1)^2 dg(x) \\ \vdots \\ a_2 b_2^{2K-2}(b_2 - b_1)^2 + \dots + a_K b_K^{2K-2}(b_K - b_1)^2 + c_1(1 - b_1)^2 = \int_0^1 x^{2K-2}(x - b_1)^2 dg(x) \end{cases}$$

Ensuite, par l'opération $i^{\text{ème}} \text{ ligne} - 2b_2(i-1)^{\text{ème}} \text{ ligne} + b_2^2(i-2)^{\text{ème}} \text{ ligne}, \forall i \in \{3, 4, \dots, 2K-1\}$:

$$\begin{cases} a_3(b_3 - b_1)^2(b_3 - b_2)^2 + \dots + a_K(b_K - b_1)^2(b_K - b_2)^2 + c_1(1 - b_1)^2(1 - b_2)^2 \\ = \int_0^1 (x - b_1)^2(x - b_2)^2 dg(x) \\ a_3 b_3(b_3 - b_1)^2(b_3 - b_2)^2 + \dots + a_K b_K(b_K - b_1)^2(b_K - b_2)^2 + c_1(1 - b_1)^2(1 - b_2)^2 \\ = \int_0^1 x(x - b_1)^2(x - b_2)^2 dg(x) \\ \vdots \\ a_3 b_3^{2K-4}(b_3 - b_1)^2(b_3 - b_2)^2 + \dots + a_K b_K^{2K-4}(b_K - b_1)^2(b_K - b_2)^2 + c_1(1 - b_1)^2(1 - b_2)^2 \\ = \int_0^1 x^{2K-4}(x - b_1)^2(x - b_2)^2 dg(x) \end{cases}$$

Puis, par l'opération $i^{\text{ème}} \text{ ligne} - 2b_3(i-1)^{\text{ème}} \text{ ligne} + b_3^2(i-2)^{\text{ème}} \text{ ligne}, \forall i \in \{3, 4, \dots, 2K-3\}$,

puis, par l'opération $i^{\text{ème}} \text{ ligne} - 2b_4(i-1)^{\text{ème}} \text{ ligne} + b_4^2(i-2)^{\text{ème}} \text{ ligne}, \forall i \in \{3, 4, \dots, 2K-5\}$.

puis, ...

puis, enfin, par l'opération $i^{\text{ème}} \text{ ligne} - 2b_K(i-1)^{\text{ème}} \text{ ligne} + b_K^2(i-2)^{\text{ème}} \text{ ligne}, \forall i \in \{3\}$:

$$c_1(1 - b_1)^2(1 - b_2)^2 \dots (1 - b_K)^2 = \int_0^1 (x - b_1)^2(x - b_2)^2 \dots (x - b_K)^2 dg(x).$$

Donc, comme g est une fonction non décroissante à variation bornée sur $[0, 1]$:

$$c_1(1 - b_1)^2(1 - b_2)^2 \dots (1 - b_K)^2 \geq 0.$$

D'où, comme $b_i \neq 1, \forall i \in \{1, 2, \dots, K\}$, $c_1 \geq 0$. Ainsi, $(S_{i,2K}^{(\varepsilon)})_{i \geq 0} \in TM$, et de plus, $\lim_{i \rightarrow \infty} S_{i,2K}^{(\varepsilon)} = c_1$.

Remarque concernant la construction d'une suite totalement monotone

Nous pouvons donner un procédé de construction d'une suite totalement monotone comme suit :

Nous nous donnons une fonction α non décroissante à variation bornée sur $[0, 1]$.

Nous calculons $c_i = \int_0^1 x^i d\alpha(x)$ pour $i \in \{0, 1, \dots, 2m\}$.

Ainsi, d'après le théorème 2.14, on a $(c_{i,2m}^{(\varepsilon)})_{i \geq 0} \in TM$.

Enfin, regardons si l' ε -prédiction fournit une suite totalement monotone à partir d'un vecteur totalement monotone extrait (dans le cas où le nombre de termes du vecteur initial est pair).

Théorème 2.15 *Il existe un vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq 2K+1} \in TME$ satisfaisant la condition $(H_{2K+1}^{(\varepsilon)})$ tel que $(S_{i,2K+1}^{(\varepsilon)})_{i \geq 0} \notin TM$.*

Démonstration

Pour montrer l'existence, il suffit de donner un exemple.

Prenons $K = 1$, $S_0 = 2$, $S_1 = \frac{5}{6}$, $S_2 = \frac{13}{36}$, $S_3 = \frac{35}{216}$.

$$(S_i)_{0 \leq i \leq 3} \in TME,$$

car la suite $(\frac{1}{2^i} + \frac{1}{3^i})_{i \geq 0}$ est totalement monotone, mais

$$(S_{i,3}^{(\varepsilon)})_{i \geq 0} \notin TM,$$

car $S_{6,3}^{(\varepsilon)} = -\frac{8551439}{729000000} < 0$.

2.11.2 Totale oscillation

Nous établissons les théorèmes concernant la totale oscillation en vis-à-vis de ceux concernant la totale monotonie.

Théorème 2.16 *Il existe un vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in TOF$ satisfaisant la condition $(H_N^{(\varepsilon)})$ tel que $(S_{i,N}^{(\varepsilon)})_{i \geq 0} \notin TO$.*

Démonstration

Pour montrer l'existence, il suffit de donner un exemple.

Les exemples des théorèmes 2.17 et 2.18 conviennent d'après le théorème 2.12.

Contrairement à ce que l'on attend au vu du théorème 2.14 traduisant qu'une propriété qui est vérifiée pour la totale monotonie l'est automatiquement pour la totale oscillation, nous devons exhiber le théorème suivant :

Théorème 2.17 *Il existe un vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq 2K} \in TOE$ satisfaisant la condition $(H_{2K}^{(\varepsilon)})$ tel que $(S_{i,2K}^{(\varepsilon)})_{i \geq 0} \notin TO$.*

Démonstration

Pour montrer l'existence, il suffit de donner un exemple.

Prenons $K = 1$, $S_0 = 1$, $S_1 = -\frac{1}{2}$, $S_2 = \frac{1}{3}$.

$$(S_i)_{0 \leq i \leq 2} \in TOE,$$

car la suite $(\frac{(-1)^i}{i})_{i \geq 0}$ est totalement oscillante, mais

$$(S_{i,2}^{(\epsilon)})_{i \geq 0} \notin TO,$$

car $S_{7,2}^{(\epsilon)} = \frac{7073}{354294} > 0$.

Théorème 2.18 *Il existe un vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq 2K+1} \in TOE$ satisfaisant la condition $(H_{2K+1}^{(\epsilon)})$ tel que $(S_{i,2K+1}^{(\epsilon)})_{i \geq 0} \notin TO$.*

Démonstration

Pour montrer l'existence, il suffit de donner un exemple. Prenons $K = 1$, $S_0 = 1$, $S_1 = -\frac{1}{2}$, $S_2 = \frac{1}{3}$, $S_3 = -\frac{1}{4}$.

$$(S_i)_{0 \leq i \leq 3} \in TOE,$$

car la suite $(\frac{(-1)^i}{i})_{i \geq 0}$ est totalement oscillante, mais

$$(S_{i,3}^{(\epsilon)})_{i \geq 0} \notin TO,$$

car $S_{6,3}^{(\epsilon)} = -\frac{12909}{97808} < 0$.

2.12 Moments de Markov-Stieltjes et moments de Hamburger

On impose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Le théorème 2.9 de Hausdorff induit une définition des suites totalement monotones à l'aide de moments modifiés. A partir de celle-ci, une généralisation basée sur une modification du support de la mesure est assez simple à établir. C'est ainsi que nous sommes amenés à considérer les moments de Markov-Stieltjes et les moments de Hamburger.

Définition

S'il existe g une fonction non décroissante à variation bornée sur un intervalle réel Ω telle que la suite $u = (u_i)_{i \geq 0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ soit donnée par $u_i = \int_{\Omega} x^i dy(x)$, $\forall i \in \mathbb{N}$, on dit que u est

1. totalement monotone si $\Omega = [0, 1]$.
2. totalement oscillante si $\Omega = [-1, 0]$.
3. une suite de moments de Stieltjes si $\Omega = [0, \infty[$.
4. une suite de moments de Markov-Stieltjes si $\Omega = [0, R]$ (où R est un réel positif fini).
5. une suite de moments de Hamburger si $\Omega =]R_1, R_2[$ (où R_1 et R_2 sont des réels non nécessairement finis tels que $R_1 < R_2$).

Notation

On note

1. MS l'ensemble des suites de moments de Stieltjes.
2. MMS l'ensemble des suites de moments de Markov-Stieltjes.

3. MH l'ensemble des suites de moments de Hamburger.

Définition

S'il existe g une fonction non décroissante à variation bornée sur un intervalle réel Ω telle que le vecteur $u = (u_i)_{0 \leq i \leq N} \in \mathbb{K}^{N+1}$ soit donnée par $u_i = \int_{\Omega} x^i dg(x)$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, N\}$, on dit que u est

1. totalement monotone extrait si $\Omega = [0, 1]$.
2. totalement oscillant extrait si $\Omega = [-1, 0]$.
3. un vecteur de moments de Stieltjes si $\Omega = [0, \infty[$.
4. un vecteur de moments de Markov-Stieltjes si $\Omega = [0, R]$ (où R est un réel positif fini).
5. un vecteur de moments de Hamburger si $\Omega =]R_1, R_2[$ (où R_1 et R_2 sont des réels non nécessairement finis tels que $R_1 < R_2$).

Notation

On note

1. MSE l'ensemble des vecteurs de moments de Stieltjes,
2. MMSE l'ensemble des vecteurs de moments de Markov-Stieltjes,
3. MHE l'ensemble des vecteurs de moments de Hamburger,

où le E évoque le mot extrait (par exemple, un vecteur appartenant à MSE est extrait d'une suite de l'ensemble MS).

Remarque concernant quelques inclusions

On a

1. MMS \subset MS.
2. MMSE \subset MSE.

2.13 Propriétés des moments de Markov-Stieltjes et des moments de Hamburger pour l' ε -prédiction

On impose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Nous analysons ici une possibilité pour généraliser le théorème 2.14, notre souci étant toujours de répondre à la question : *Quelles sont les propriétés à supposer sur les composantes du vecteur à prédire pour que les termes de la suite prédite possède les mêmes propriétés ?*

Théorème 2.19 *Il existe un vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq 2K} \in MSE$ satisfaisant la condition $(H_{2K}^{(\varepsilon)})$ tel que $(S_{i, 2K}^{(\varepsilon)})_{i \geq 0} \notin MS$.*

Démonstration

Pour montrer l'existence, il suffit de donner un exemple.

$$\text{Prenons } K = 2, S_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, S_1 = \frac{1}{4}, S_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{16}, S_3 = \frac{3}{32}, S_4 = \frac{3\sqrt{\pi}}{128}.$$

$$(S_i)_{0 \leq i \leq 4} \in MSE,$$

$$\text{car } S_i = 2 \int_0^\infty y^i e^{-4y^2} dy = \int_0^\infty \left(\frac{x}{2}\right)^i e^{-x^2} dx.$$

Cependant,

$$(S_{i,4}^{(\varepsilon)})_{i \geq 0} \notin MS,$$

$$\text{car } S_{\delta,4}^{(\varepsilon)} = \frac{-5700\sqrt{\pi} - 1440\pi + 3884(\sqrt{\pi})^3 + 1008\pi^2 - 841(\sqrt{\pi})^5}{-102400 - 163840\sqrt{\pi} + 77824\pi + 114688(\sqrt{\pi})^3 - 50176\pi^2} < 0.$$

Théorème 2.20 *Il existe un vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq 2K} \in MMSE$ satisfaisant la condition $(H_{2K}^{(\varepsilon)})$ tel que $(S_{i,2K}^{(\varepsilon)})_{i \geq 0} \notin MMS$.*

Démonstration

Pour montrer l'existence, il suffit de donner un exemple.

Si $[0, R] \subset [0, 1]$, on ne peut pas trouver d'exemple car dans ce cas, le vecteur est totalement monotone extrait.

$$\text{Prenons } K = 1, S_0 = \arctan 3, S_1 = \frac{\ln 10}{2}, S_2 = 3 - \arctan 3.$$

$$(S_i)_{0 \leq i \leq 2} \in MMSE,$$

$$\text{car } S_i = \int_0^3 \frac{x^i}{1+x^2} dx.$$

Cependant,

$$(S_{i,2}^{(\varepsilon)})_{i \geq 0} \notin MMS,$$

$$\text{car } S_{3,2}^{(\varepsilon)} = 3 - \arctan 3 - \frac{(-6 + 2 \arctan 3 + \ln 10)^2}{2(2 \arctan 3 - \ln 10)} < 0.$$

Théorème 2.21 *Il existe un vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq 2K} \in MHE$ satisfaisant la condition $(H_{2K}^{(\varepsilon)})$ tel que $(S_{i,2K}^{(\varepsilon)})_{i \geq 0} \notin MH$.*

Démonstration

Pour montrer l'existence, il suffit de donner un exemple.

Les exemples des théorèmes 2.17 et 2.20 conviennent en prenant respectivement $]R_1, R_2[=] - 1, 0[$ et $]R_1, R_2[=]0, 3[$.

2.14 Propriétés concernant les suites polynômiales pour l' ε -prédiction

Quelles sont les propriétés à supposer sur les composantes du vecteur à prédire pour que les termes de la suite prédite possède les mêmes propriétés ?

Dans cette section, nous établissons que la propriété d'être donné sous une forme polynomiale de degré suffisamment petit répond à cette question.

Voyons préalablement quelques lemmes.

Lemme 2.3 Si $(i)P_m(x) \in \mathbb{K}_m[x]$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, m+1\}$, alors, $\forall s \in \mathbb{K}$, $\forall (r_0, r_1, \dots, r_{m+1}) \in \mathbb{K}^{m+2}$, on a

$$\begin{vmatrix} (0)P_m(r_0) & (1)P_m(r_1) & \dots & (m+1)P_m(r_{m+1}) \\ (0)P_m(r_0+s) & (1)P_m(r_1+s) & \dots & (m+1)P_m(r_{m+1}+s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (0)P_m(r_0+(m+1)s) & (1)P_m(r_1+(m+1)s) & \dots & (m+1)P_m(r_{m+1}+(m+1)s) \end{vmatrix} = 0.$$

Démonstration

La preuve de ce lemme se fait par récurrence sur m :

- si $m = 0$, alors $(0)P_0(x) = a$ et $(1)P_0(x) = b$ avec $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. On a donc bien

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = 0.$$

- on suppose la propriété vraie au rang $(m-1)$ et on montre qu'alors elle reste valide au rang m :

$$\begin{vmatrix} (0)P_m(r_0) & (1)P_m(r_1) & \dots & (m+1)P_m(r_{m+1}) \\ (0)P_m(r_0+s) & (1)P_m(r_1+s) & \dots & (m+1)P_m(r_{m+1}+s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (0)P_m(r_0+(m+1)s) & (1)P_m(r_1+(m+1)s) & \dots & (m+1)P_m(r_{m+1}+(m+1)s) \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} (0)P_m(r_0) & (1)P_m(r_1) & \dots & (m+1)P_m(r_{m+1}) \\ (0)Q_{m-1}(r_0) & (1)Q_{m-1}(r_1) & \dots & (m+1)Q_{m-1}(r_{m+1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (0)Q_{m-1}(r_0+ms) & (1)Q_{m-1}(r_1+ms) & \dots & (m+1)Q_{m-1}(r_{m+1}+ms) \end{vmatrix}$$

par l'opération $i^{\text{ème}} \text{ ligne} - (i-1)^{\text{ème}} \text{ ligne}$, $\forall i \in \{2, 3, \dots, m+2\}$ et où

$$(i)Q_{m-1}(x) = (i)P_m(x+s) - (i)P_m(x) \in \mathbb{K}_{m-1}[x], \forall i \in \{0, 1, \dots, m+1\}.$$

En effet si le terme de degré m de $(i)P_m(x)$ est $a_i x^m$, celui de $(i)P_m(x+s)$ est $a_i x^m$, et donc le terme de degré m de $(i)Q_{m-1}(x)$, qui est à priori un polynôme de degré m , est nul.

On développe ensuite le déterminant obtenu suivant la première ligne, et on conclut par hypothèse de récurrence que le déterminant qui est facteur de $(i)P_m(r_i)$ est nul, $\forall i \in \{0, 1, \dots, m+1\}$, et donc

$$\begin{vmatrix} (0)P_m(r_0) & (1)P_m(r_1) & \dots & (m+1)P_m(r_{m+1}) \\ (0)P_m(r_0+s) & (1)P_m(r_1+s) & \dots & (m+1)P_m(r_{m+1}+s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (0)P_m(r_0+(m+1)s) & (1)P_m(r_1+(m+1)s) & \dots & (m+1)P_m(r_{m+1}+(m+1)s) \end{vmatrix} = 0.$$

Lemme 2.4 Si $(i)P_m(x) \in \mathbb{K}_m[x]$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, m+1\}$, alors, $\forall (r_0, r_1, \dots, r_{m+1}, s_0, s_1, \dots, s_{m+1}) \in \mathbb{K}^{2m+4}$, on a

$$\begin{vmatrix} (0)P_m(r_0+s_0) & (1)P_m(r_1+s_0) & \dots & (m+1)P_m(r_{m+1}+s_0) \\ (0)P_m(r_0+s_1) & (1)P_m(r_1+s_1) & \dots & (m+1)P_m(r_{m+1}+s_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (0)P_m(r_0+s_{m+1}) & (1)P_m(r_1+s_{m+1}) & \dots & (m+1)P_m(r_{m+1}+s_{m+1}) \end{vmatrix} = 0.$$

Démonstration

D'après le lemme 2.3, il existe $(A_0, A_1, \dots, A_{m+1}) \in \mathbb{K}^{m+2}$, tel que

$$A_0 {}^{(0)}P_m(r_0 + x) + A_1 {}^{(1)}P_m(r_1 + x) + \dots + A_{m+1} {}^{(m+1)}P_m(r_{m+1} + x)$$

soit un polynôme de degré inférieur ou égal à m qui est nul pour au moins $(m+2)$ valeurs de x à savoir $0, s, \dots, (m+1)s$.

Donc

$$A_0 {}^{(0)}P_m(r_0 + x) + A_1 {}^{(1)}P_m(r_1 + x) + \dots + A_{m+1} {}^{(m+1)}P_m(r_{m+1} + x) = 0, \forall x \in \mathbb{K}.$$

Ainsi, si l'on prend successivement pour x les valeurs s_0, s_1, \dots, s_{m+1} , on obtient

$$\begin{vmatrix} {}^{(0)}P_m(r_0 + s_0) & {}^{(1)}P_m(r_1 + s_0) & \dots & {}^{(m+1)}P_m(r_{m+1} + s_0) \\ {}^{(0)}P_m(r_0 + s_1) & {}^{(1)}P_m(r_1 + s_1) & \dots & {}^{(m+1)}P_m(r_{m+1} + s_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {}^{(0)}P_m(r_0 + s_{m+1}) & {}^{(1)}P_m(r_1 + s_{m+1}) & \dots & {}^{(m+1)}P_m(r_{m+1} + s_{m+1}) \end{vmatrix} = 0.$$

Lemme 2.5 Si $P_m(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i \in \mathbb{K}_m[x]$, alors, $\forall s \in \mathbb{K}, \forall (r_0, r_1, \dots, r_m) \in \mathbb{K}^{m+1}$, on a

$$\begin{vmatrix} P_m(r_0) & P_m(r_1) & \dots & P_m(r_m) \\ P_m(r_0 + s) & P_m(r_1 + s) & \dots & P_m(r_m + s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_m(r_0 + ms) & P_m(r_1 + ms) & \dots & P_m(r_m + ms) \end{vmatrix} \\ = a_m^{m+1} s^{\frac{m(m+1)}{2}} \left(\prod_{i \in \{1, 2, \dots, m\}} i^i \right) \left(\prod_{i \in \{0, 1, \dots, m\}, j \in \{i+1, i+2, \dots, m\}} (r_i - r_j) \right).$$

Démonstration

La preuve de ce lemme se fait par récurrence sur m :

- si $m = 0$, alors $P_0(r_0) = a_0$.

- on suppose la propriété vraie au rang $(m-1)$ et on montre qu'alors elle reste valide au rang m :

$$\begin{vmatrix} P_m(r_0) & P_m(r_1) & \dots & P_m(r_m) \\ P_m(r_0 + s) & P_m(r_1 + s) & \dots & P_m(r_m + s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_m(r_0 + ms) & P_m(r_1 + ms) & \dots & P_m(r_m + ms) \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} P_m(r_0) & P_m(r_1) & \dots & P_m(r_m) \\ Q_{m-1}(r_0) & Q_{m-1}(r_1) & \dots & Q_{m-1}(r_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Q_{m-1}(r_0 + (m-1)s) & Q_{m-1}(r_1 + (m-1)s) & \dots & Q_{m-1}(r_m + (m-1)s) \end{vmatrix}$$

par l'opération $i^{\text{ème}} \text{ ligne} - (i-1)^{\text{ème}} \text{ ligne}, \forall i \in \{2, 3, \dots, m+1\}$, où $Q_{m-1}(x) = P_m(x+s) - P_m(x) \in \mathbb{K}_{m-1}[x]$.

En effet puisque le terme de degré m de $P_m(x)$ est $a_m x^m$, celui de $P_m(x+s)$ est $a_m x^m$, et donc le terme de degré m de $Q_{m-1}(x)$, qui est a priori un polynôme de degré m , est nul.

D'où, on obtient

$$\begin{vmatrix} P_m(r_0) & P_m(r_1) & \dots & P_m(r_m) \\ P_m(r_0 + s) & P_m(r_1 + s) & \dots & P_m(r_m + s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_m(r_0 + ms) & P_m(r_1 + ms) & \dots & P_m(r_m + ms) \end{vmatrix}$$

$$= (msa_m)^m s^{\frac{(m-1)m}{2}} \left(\prod_{i \in \{1,2,\dots,m-1\}} i^i \sum_{i=0}^m ((-1)^i P_m(r_i)) \prod_{\substack{k \in \{0,1,\dots,m\}, j \in \{k+1,k+2,\dots,m\}, k \neq i, j \neq i}} (r_k - r_j) \right),$$

en appliquant l'hypothèse de récurrence à $Q_{m-1}(x) = \sum_{i=0}^{m-1} b_i x^i$ avec $b_{m-1} = msa_m$, et en développant ce déterminant suivant la première ligne.

Cependant,

$$\begin{vmatrix} r_0^n & r_1^n & \dots & r_n^n \\ r_0^{n-1} & r_1^{n-1} & \dots & r_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \prod_{i \in \{0,1,\dots,n\}, j \in \{i+1,i+2,\dots,n\}} (r_i - r_j), \quad \forall (r_0, r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{K}^{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

car c'est un déterminant de Vandermonde.

On en déduit que

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} P_m(r_0) & P_m(r_1) & \dots & P_m(r_m) \\ P_m(r_0+s) & P_m(r_1+s) & \dots & P_m(r_m+s) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ P_m(r_0+ms) & P_m(r_1+ms) & \dots & P_m(r_m+ms) \end{vmatrix} \\ &= (msa_m)^m s^{\frac{(m-1)m}{2}} \left(\prod_{i \in \{1,2,\dots,m-1\}} i^i \right) \begin{vmatrix} P_m(r_0) & P_m(r_1) & \dots & P_m(r_m) \\ r_0^{m-1} & r_1^{m-1} & \dots & r_m^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ r_0 & r_1 & \dots & r_m \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} \\ &= a_m^m s^{\frac{m(m+1)}{2}} \left(\prod_{i \in \{1,2,\dots,m\}} i^i \right) \begin{vmatrix} a_m r_0^m & a_m r_1^m & \dots & a_m r_m^m \\ r_0^{m-1} & r_1^{m-1} & \dots & r_m^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ r_0 & r_1 & \dots & r_m \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

par changement de la 1^{ère} ligne en 1^{ère} ligne - $\sum_{i=0}^{m-1} a_i(m+1-i)^{i_m}$ ligne.

Et donc

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} P_m(r_0) & P_m(r_1) & \dots & P_m(r_m) \\ P_m(r_0+s) & P_m(r_1+s) & \dots & P_m(r_m+s) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ P_m(r_0+ms) & P_m(r_1+ms) & \dots & P_m(r_m+ms) \end{vmatrix} \\ &= a_m^{m+1} s^{\frac{m(m+1)}{2}} \left(\prod_{i \in \{1,2,\dots,m\}} i^i \right) \left(\prod_{i \in \{0,1,\dots,m\}, j \in \{i+1,i+2,\dots,m\}} (r_i - r_j) \right), \end{aligned}$$

par mise en facteur de a_m dans la 1^{ère} ligne, et d'après la valeur du déterminant de Vandermonde.

Lemme 2.6 Si $P_m(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i \in \mathbb{K}_m[x]$, alors $\forall r \in \mathbb{K}$, on a

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} P_m(r) & P_m(r+1) & \dots & P_m(r+m) \\ P_m(r+1) & P_m(r+2) & \dots & P_m(r+m+1) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ P_m(r+m) & P_m(r+m+1) & \dots & P_m(r+2m) \end{vmatrix} \\ &= a_m^{m+1} (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} \left(\prod_{i \in \{1,2,\dots,m\}} (i!) i^i \right). \end{aligned}$$

Démonstration

Dans le lemme 2.5, on pose $s = 1$, $r_i = i + r$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, m+1\}$, et, comme

$$\begin{aligned} \prod_{i \in \{0, 1, \dots, m\}, j \in \{i+1, i+2, \dots, m\}} (r_i - r_j) &= \prod_{i \in \{0, 1, \dots, m\}, j \in \{i+1, i+2, \dots, m\}} (i - j) \\ &= (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} \prod_{i \in \{0, 1, \dots, m\}, j \in \{i+1, i+2, \dots, m\}} (j - i) \\ &= (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} \prod_{i \in \{1, 2, \dots, m\}} i!, \end{aligned}$$

on obtient directement le résultat suivant :

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} P_m(r) & P_m(r+1) & \dots & P_m(r+m) \\ P_m(r+1) & P_m(r+2) & \dots & P_m(r+m+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_m(r+m) & P_m(r+m+1) & \dots & P_m(r+2m) \end{vmatrix} \\ &= a_m^{m+1} (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} \left(\prod_{i \in \{1, 2, \dots, m\}} (i!) i^i \right). \end{aligned}$$

Lemme 2.7 Si $a_{i,j} \in \mathbb{K}$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $\forall j \in \{1, 2, \dots, m\}$, alors, $\forall b \in \mathbb{K}$, on a

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & ba_{1,2} & \dots & b^{m-1}a_{1,m} \\ ba_{2,1} & b^2a_{2,2} & \dots & b^m a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b^{m-1}a_{m,1} & b^m a_{m,2} & \dots & b^{2m-2}a_{m,m} \end{vmatrix} = b^{(m-1)m} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,m} \end{vmatrix}$$

Démonstration

En mettant b^{i-1} en facteur dans la $i^{\text{ème}}$ ligne, $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$, puis, en mettant b^{i-1} en facteur dans la $i^{\text{ème}}$ colonne, $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$, on obtient directement le résultat du lemme.

Nous constatons dans le théorème suivant que, si les composantes du vecteur initial sont données par une expression polynômiale de degré assez petit, alors les termes de la suite prédite par l' ϵ -prédiction sont eux aussi donnés par cette expression.

Théorème 2.22 Soit le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq 2K-1}$, donné par $S_i = \sum_{l=0}^K a_l i^l$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, 2K-1\}$, satisfaisant la condition $(H_{2K-1}^{(\epsilon)})$, alors, la suite $(S_{i,2K-1}^{(\epsilon)})_{i \geq 0}$ est donnée par

$$S_{i,2K-1}^{(\epsilon)} = \sum_{l=0}^K a_l i^l, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Démonstration

On peut supposer $a_K \neq 0$ car si $a_i = 0$, $\forall i \in \{K_0+1, K_0+2, \dots, K\}$ avec $a_{K_0} \neq 0$, on est ramené à démontrer qu' $\epsilon_{2K_0-1}^{(i)} = 0$, $\forall i \in \mathbb{N}$ au lieu de montrer qu' $\epsilon_{2K-1}^{(i)} = 0$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

D'après la section introductrice sur l' ε -algorithme,

$$\varepsilon_{2K-1}^{(i)} = \frac{\begin{vmatrix} \Delta^3 S_{i,2K-1}^{(\varepsilon)} & \cdots & \Delta^3 S_{K+i-2,2K-1}^{(\varepsilon)} \\ \Delta^3 S_{i+1,2K-1}^{(\varepsilon)} & \cdots & \Delta^3 S_{K+i-1,2K-1}^{(\varepsilon)} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta^3 S_{K+i-2,2K-1}^{(\varepsilon)} & \cdots & \Delta^3 S_{2K+i-4,2K-1}^{(\varepsilon)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta S_{i,2K-1}^{(\varepsilon)} & \cdots & \Delta S_{K+i-1,2K-1}^{(\varepsilon)} \\ \Delta S_{i+1,2K-1}^{(\varepsilon)} & \cdots & \Delta S_{K+i,2K-1}^{(\varepsilon)} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta S_{K+i-1,2K-1}^{(\varepsilon)} & \cdots & \Delta S_{2K+i-2,2K-1}^{(\varepsilon)} \end{vmatrix}}, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

On suppose que $S_{i,2K-1}^{(\varepsilon)} = \sum_{l=0}^K a_l i^l = P_K(i)$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

Alors, $\Delta^3 S_{i,2K-1}^{(\varepsilon)} = P_K(i+3) - 3P_K(i+2) + 3P_K(i+1) - P_K(i)$.

Cependant, $P_K(x+3) - 3P_K(x+2) + 3P_K(x+1) - P_K(x) \in \mathbb{K}_{K-3}[x]$, car ce polynôme qui est à priori de degré K , a

1. son coefficient de degré K nul puisque $a_K - 3a_K + 3a_K - a_K = 0$,
2. son coefficient de degré $(K-1)$ nul puisque $(3Ka_K + a_{K-1}) - 3(2Ka_K + a_{K-1}) + 3(Ka_K + a_{K-1}) - a_{K-1} = 0$,
3. son coefficient de degré $(K-2)$ nul puisque $(9\frac{(K-1)K}{2}a_K + 3(K-1)a_{K-1} + a_{K-2}) - 3(4\frac{(K-1)K}{2}a_K + 2(K-1)a_{K-1} + a_{K-2}) + 3(\frac{(K-1)K}{2}a_K + (K-1)a_{K-1} + a_{K-2}) - a_{K-1} = 0$.

Donc, d'après le lemme 2.3,

$$\begin{vmatrix} \Delta^3 S_{i,2K-1}^{(\varepsilon)} & \cdots & \Delta^3 S_{K+i-2,2K-1}^{(\varepsilon)} \\ \Delta^3 S_{i+1,2K-1}^{(\varepsilon)} & \cdots & \Delta^3 S_{K+i-1,2K-1}^{(\varepsilon)} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta^3 S_{K+i-2,2K-1}^{(\varepsilon)} & \cdots & \Delta^3 S_{2K+i-4,2K-1}^{(\varepsilon)} \end{vmatrix} = 0.$$

De plus, $\Delta S_{i,2K-1}^{(\varepsilon)} = P_K(i+1) - P_K(i)$.

Et cependant, $P_K(x+1) - P_K(x) \in \mathbb{K}_{K-1}[x] \setminus \mathbb{K}_{K-2}[x]$, car ce polynôme qui est à priori de degré K a

1. son coefficient de degré K nul puisque $a_K - a_K = 0$,
2. son coefficient de degré $(K-1)$ non nul puisque $(Ka_K + a_{K-1}) - a_{K-1} = Ka_K \neq 0$.

Donc, d'après le lemme 2.6,

$$\begin{vmatrix} \Delta S_{i,2K-1}^{(\varepsilon)} & \cdots & \Delta S_{K+i-1,2K-1}^{(\varepsilon)} \\ \Delta S_{i+1,2K-1}^{(\varepsilon)} & \cdots & \Delta S_{K+i,2K-1}^{(\varepsilon)} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta S_{K+i-1,2K-1}^{(\varepsilon)} & \cdots & \Delta S_{2K+i-2,2K-1}^{(\varepsilon)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ainsi, $\varepsilon_{2K-1}^{(i)} = 0$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

Le théorème suivant constitue une généralisation de ce dernier.

Théorème 2.23 Soit le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq 2K}$, donné par $S_i = a^i \sum_{l=0}^{K-1} a_l i^l$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, 2K\}$, satisfaisant la condition $(H_{2K}^{(\varepsilon)})$, alors, la suite $(S_{i,2K}^{(\varepsilon)})_{i \geq 0}$ est donnée par

$$S_{i,2K}^{(\varepsilon)} = a^i \sum_{l=0}^{K-1} a_l i^l, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Démonstration

On peut supposer $a_{K-1} \neq 0$ car si $a_i = 0$, $\forall i \in \{K_0, K_0 + 1, \dots, K-1\}$ avec $a_{K_0-1} \neq 0$, on est ramené à démontrer qu' $\varepsilon_{2K_0}^{(i)} = 0$, $\forall i \in \mathbb{N}$ au lieu de montrer qu' $\varepsilon_{2K}^{(i)} = 0$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

D'après la section introductrice sur l' ε -algorithm,.

$$\varepsilon_{2K}^{(i)} = \frac{\begin{vmatrix} S_{i,2K}^{(\varepsilon)} & \cdots & S_{K+i,2K}^{(\varepsilon)} \\ S_{i+1,2K}^{(\varepsilon)} & \cdots & S_{K+i+1,2K}^{(\varepsilon)} \\ \vdots & & \vdots \\ S_{K+i,2K}^{(\varepsilon)} & \cdots & S_{2K+i,2K}^{(\varepsilon)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta^2 S_{i,2K}^{(\varepsilon)} & \cdots & \Delta^2 S_{K+i-1,2K}^{(\varepsilon)} \\ \Delta^2 S_{i+1,2K}^{(\varepsilon)} & \cdots & \Delta^2 S_{K+i,2K}^{(\varepsilon)} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta^2 S_{K+i-1,2K}^{(\varepsilon)} & \cdots & \Delta^2 S_{2K+i-2,2K}^{(\varepsilon)} \end{vmatrix}}, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

On suppose que $S_{i,2K}^{(\varepsilon)} = a^i \sum_{l=0}^{K-1} a_l i^l = a^i P_{K-1}(i)$, $\forall i \in \mathbb{N}$.
Donc, d'après les lemmes 2.3 et 2.7 :

$$\begin{vmatrix} S_{i,2K}^{(\varepsilon)} & \cdots & S_{K+i,2K}^{(\varepsilon)} \\ S_{i+1,2K}^{(\varepsilon)} & \cdots & S_{K+i+1,2K}^{(\varepsilon)} \\ \vdots & & \vdots \\ S_{K+i,2K}^{(\varepsilon)} & \cdots & S_{2K+i,2K}^{(\varepsilon)} \end{vmatrix} = 0.$$

D'autre part, $\Delta^2 S_{i,2K}^{(\varepsilon)} = a^{i+2} P_{K-1}(i+2) - 2a^{i+1} P_{K-1}(i+1) + a^i P_{K-1}(i)$.

Et cependant, $a^2 P_{K-1}(x+2) - 2a P_{K-1}(x+1) + P_{K-1}(x) \in \mathbb{K}_{K-1}[x] \setminus \mathbb{K}_{K-2}[x]$, car ce polynôme qui est à priori de degré $(K-1)$ a son coefficient de degré $(K-1)$ non nul (en effet, on peut supposer que $a \neq 1$ car sinon on est dans le cadre du théorème 2.22 et par conséquent, $a^2 a_{K-1} - 2a a_{K-1} + a_{K-1} = a_{K-1}(a-1)^2 \neq 0$).

Donc, d'après les lemmes 2.6 et 2.7,

$$\begin{vmatrix} \Delta^2 S_{i,2K}^{(\varepsilon)} & \cdots & \Delta^2 S_{K+i-1,2K}^{(\varepsilon)} \\ \Delta^2 S_{i+1,2K}^{(\varepsilon)} & \cdots & \Delta^2 S_{K+i,2K}^{(\varepsilon)} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta^2 S_{K+i-1,2K}^{(\varepsilon)} & \cdots & \Delta^2 S_{2K+i-2,2K}^{(\varepsilon)} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

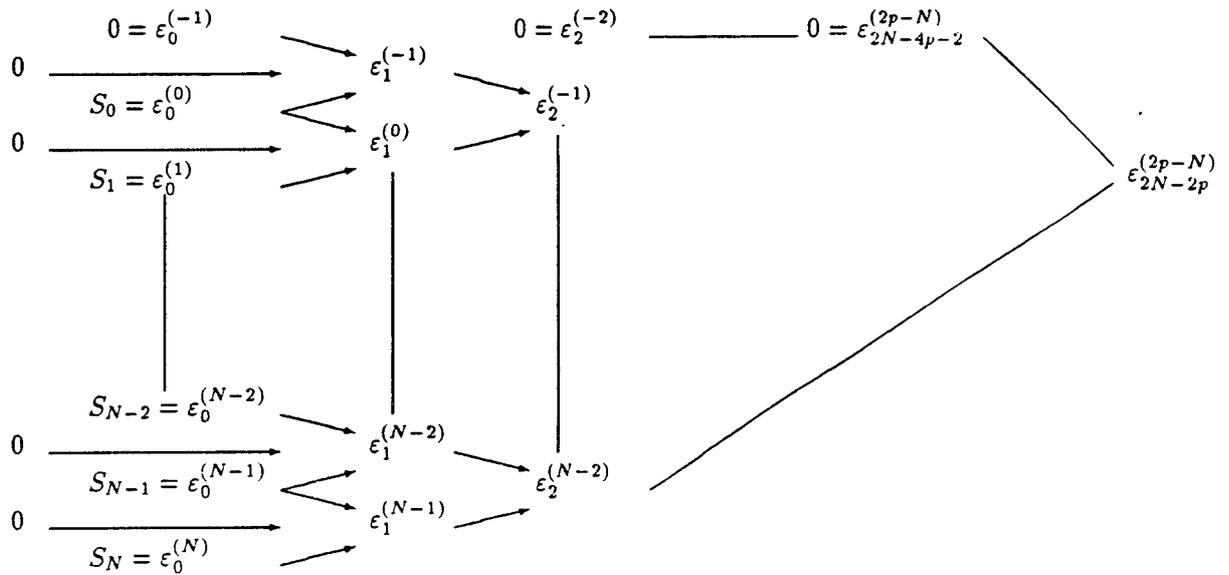
Ainsi, $\varepsilon_{2K}^{(i)} = 0$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

2.15 L' ε_p -prédiction du point de vue algorithmique

L' ε_p -prédiction est une méthode de prédiction qui généralise la ε -prédiction. L' ε_p -prédiction est obtenue de la manière suivante : selon la valeur de p , soit nous précéons le vecteur à prédire de composantes nulles, soit nous lui tronquons ses premières composantes. Nous lui appliquons ensuite l' ε -prédiction.

Soit le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in \mathbb{K}^{N+1}$ et $p \in \{0, 1, \dots, N\}$.

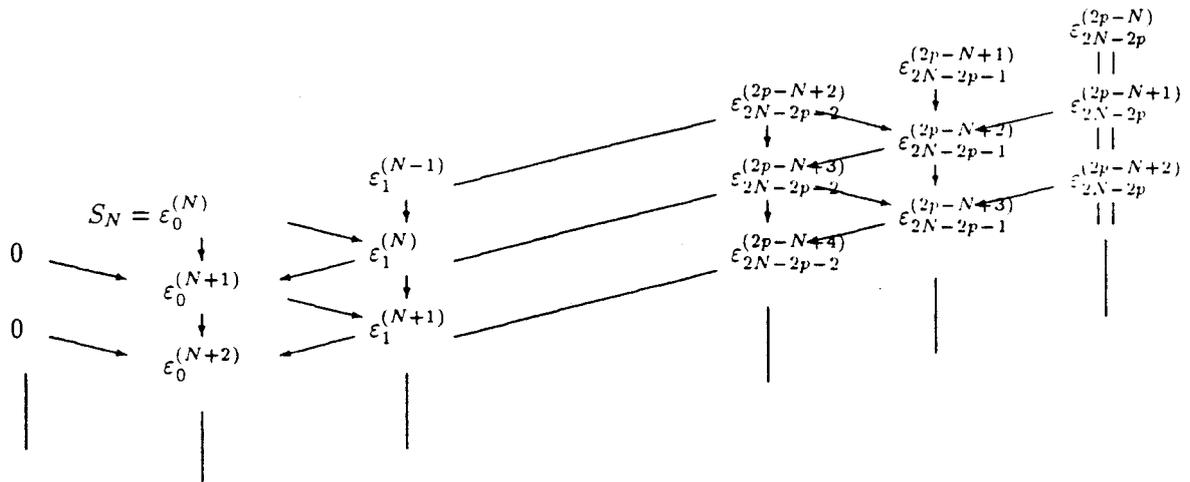
Nous formons la table (1) dépendante de p :



à l'aide de la règle classique de l' ε -algorithmme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{-1}^{(i)} = 0, \forall i \in \{\max(0, 2p - N), \max(0, 2p - N) + 1, \dots, N\} \\ \varepsilon_0^{(i)} = S_i, \forall i \in \{\max(0, 2p - N), \max(0, 2p - N) + 1, \dots, N\} \\ \varepsilon_{2(i-1)}^{(-i)} = 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, N - 2p\} \\ \text{et } \varepsilon_j^{(i)} = \varepsilon_{j-2}^{(i+1)} + \frac{1}{\varepsilon_{j-1}^{(i+1)} - \varepsilon_{j-1}^{(i)}}, \forall j \in \{1, 2, \dots, 2N - 2p\}, \\ \forall i \in \{\max(2p - N, -1 - \lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor), \max(2p - N, -1 - \lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor) + 1, \dots, N - j\} \\ (\text{où, } \forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor \in \mathbb{N} \text{ est tel que } \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1). \end{array} \right.$$

Ensuite, nous formons la table (2) dépendante aussi de p :



en utilisant la règle progressive de l' ε -algorithme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{2N-2p}^{(i)} = \varepsilon_{2N-2p}^{(2p-N)}, \forall i \geq 2p - N + 1 \\ \text{(l' ε_p - prédiction est obtenue en attribuant la même valeur à tous les termes de la colonne la plus à droite et en redescendant la table à l'aide de la règle progressive de l' ε - algorithme)} \\ \varepsilon_{-1}^{(i)} = 0, \forall i \geq N + 1 \\ \text{et, } \varepsilon_j^{(i)} = \varepsilon_j^{(i-1)} + \frac{1}{\varepsilon_{j+1}^{(i-1)} - \varepsilon_{j-1}^{(i)}}, \forall j \in \{0, 1, \dots, 2N - 2p - 1\}, \forall i \geq N - j + 1. \end{array} \right.$$

Définition de l' ε_p -prédiction du point de vue algorithmique

Nous définissons la suite prédite par l' ε_p -prédiction $(S_{i,N}^{(\varepsilon,p)})_{i \geq 0}$ à partir du vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N}$ par

$$S_{i,N}^{(\varepsilon,p)} = \varepsilon_0^{(i)}, \forall i \geq \max(0, 2p - N),$$

et

$$S_{i,N}^{(\varepsilon,p)} = S_i, \forall i \in \{0, 1, \dots, 2p - N - 1\}.$$

Nous notons $(S_{i,N}^{(\varepsilon,p)})_{i \geq 0}$ cette suite prédite, parce que chaque terme de celle-ci dépend des valeurs de N et de p (ε indique que cette suite est obtenue par l' ε_p -prédiction).

Condition d'existence de l' ε_p -prédiction du point de vue algorithmique

Lorsque $\varepsilon_{j-1}^{(i+1)} \neq \varepsilon_{j-1}^{(i)}, \forall j \in \{1, 2, \dots, 2N - 2p\}$,

$$\forall i \in \{\max(2p - N, -1 - \lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor), \max(2p - N, -1 - \lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor) + 1, \dots, N - j\}$$

et $\varepsilon_{j+1}^{(i-1)} \neq \varepsilon_{j+1}^{(i)}, \forall j \in \{0, 1, \dots, 2N - 2p - 1\}, \forall i \in \{N - j + 1, N - j + 2, \dots\}$

l' ε_p -prédiction existe, ce qui veut dire qu'il ne se produit pas de division par zéro dans l'algorithme.

Nous notons cette condition $(H_N^{(\varepsilon,p)})$ parce qu'elle dépend des valeurs de N et de p . Cette condition d'existence est toujours associée à une suite en particulier.

Remarques à propos de l' ε_p -prédiction définie de façon algorithmique

1. L'algorithme de l' ε_p -prédiction et donc la condition d'existence peuvent être simplifiés dans de nombreux exemples. En effet, si dans la table (1), la colonne d'indice N_0 ($N_0 \in \{0, 1, \dots, N\}$) est constante et égale à S , il nous est impossible de calculer les termes des colonnes d'indice supérieur ou égal à N_0 dans les tables (1) et (2). Dans ce cas, on suppose alors que la colonne d'indice N_0 dans la table (2) est constante et égale à S (l'algorithme de l' ε -prédiction est raccourci et la condition d'existence en est d'autant allégée).
2. La condition $(H_N^{(\varepsilon,p)})$ peut être affaiblie dans beaucoup d'exemples. Formellement à l'aide d'un logiciel de calcul formel utilisant les règles de calcul usuelles concernant l'infini (i.e. $\frac{1}{\infty} = 0, \frac{1}{0} = \infty, \dots$). Numériquement, en se servant des règles particulières de l' ε -algorithme exposées dans [8, pp. 34-38], et dans [9], qui permettent de contourner les singularités.
3. Quand N est pair, au lieu d'utiliser les règles classique et progressive de l' ε -algorithme pour l'algorithme de l' ε_p -prédiction, nous pouvons utiliser la règle de la croix de l' ε -algorithme donnée par P. Wynn dans [24].
4. L' ε_p -prédiction n'est l' ε -prédiction que lorsque $p = K$ et $N = 2K$.

De par la construction même de la suite $(S_{i,N}^{(\varepsilon)})_{i \geq 0}$, nous énonçons ceci :

Soit le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in \mathbb{K}^{N+1}$ satisfaisant la condition $(H_N^{(\varepsilon,p)})$, alors $(S_{i,N}^{(\varepsilon,p)})_{i \geq 0}$ est une suite prédite à partir du vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N}$.

De cette façon, nous justifions l'attribution du mot prédiction à cette méthode.

2.16 L' ε_p -prédiction du point de vue algébrique

Soit le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in \mathbb{K}^{N+1}$.

On définit alors $(b_0, b_1, \dots, b_{N-p})$ comme solution du système linéaire suivant :

$$\begin{cases} S_p &= b_0 S_{2p-N} + b_1 S_{2p-N+1} + \dots + b_{N-p-1} S_{p-1} + b_{N-p} \\ S_{p+1} &= b_0 S_{2p-N+1} + b_1 S_{2p-N+2} + \dots + b_{N-p-1} S_p + b_{N-p} \\ &\vdots \\ S_N &= b_0 S_p + b_1 S_{p+1} + \dots + b_{N-p-1} S_{N-1} + b_{N-p} \end{cases}$$

avec par convention $S_i = 0$ lorsque $i < 0$.

Le système précédent admet une solution si et seulement si

$$\begin{vmatrix} S_{2p-N} & S_{2p-N+1} & \dots & S_{p-1} & 1 \\ S_{2p-N+1} & S_{2p-N+2} & \dots & S_p & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ S_p & S_{p+1} & \dots & S_{N-1} & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Définition de l' ε_p -prédiction du point de vue algébrique

Nous définissons la suite prédite par l' ε_p -prédiction $(S_{i,N}^{(\varepsilon S,p)})_{i \geq 0}$ à partir du vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N}$ par

$$S_{i,N}^{(\varepsilon S,p)} = S_i, \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, N\}$$

et

$$S_{N+i,N}^{(\varepsilon S,p)} = b_0 S_{p+i,N}^{(\varepsilon S,p)} + b_1 S_{p+i+1,N}^{(\varepsilon S,p)} + \dots + b_{N-p-1} S_{N+i-1,N}^{(\varepsilon S,p)} + b_{N-p}, \quad \forall i \geq 1.$$

Nous notons $(S_{i,N}^{(\varepsilon S,p)})_{i \geq 0}$ cette suite prédite, parce que chaque terme de celle-ci dépend des valeurs de N et de p (ε indique que cette suite est obtenue par l' ε_p -prédiction, et S que la résolution d'un système linéaire est indispensable).

Condition d'existence de l' ε_p -prédiction du point de vue algébrique

Lorsque

$$\begin{vmatrix} S_{2p-N} & S_{2p-N+1} & \dots & S_{p-1} & 1 \\ S_{2p-N+1} & S_{2p-N+2} & \dots & S_p & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ S_p & S_{p+1} & \dots & S_{N-1} & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

l' ε_p -prédiction existe.

Nous notons cette condition $(H_N^{(\varepsilon S,p)})$ parce qu'elle dépend des valeurs de N et de p . Cette condition d'existence est toujours associée à une suite en particulier.

De par la construction même de la suite $(S_{i,N}^{(\varepsilon S,p)})_{i \geq 0}$, nous énonçons ceci :

Soit le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in \mathbb{K}^{N+1}$ satisfaisant la condition $(H_N^{(\varepsilon S,p)})$, alors $(S_{i,N}^{(\varepsilon S,p)})_{i \geq 0}$ est une suite prédite à partir du vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N}$.

De cette façon, nous justifions l'attribution du mot prédiction à cette méthode.

Remarque à propos des conditions d'existence

Lorsque la condition $(H_N^{(\varepsilon S,p)})$ est satisfaite pour le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in \mathbb{K}^{N+1}$, il s'ensuit que la condition

$(H_N^{(\epsilon S, p)})$ est satisfaite pour le même vecteur. Cette propriété provient du fait que le déterminant non nul de la condition $(H_N^{(\epsilon S, p)})$ est précisément le dénominateur d' $\epsilon_{2N-2p-1}^{(2p-N)}$ quand celui-ci est donné sous forme d'un rapport de deux déterminants.

Théorème 2.24 Soit le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in \mathbb{K}^{N+1}$ satisfaisant la condition $(H_N^{(\epsilon, p)})$, alors

$$S_{i,N}^{(\epsilon, p)} = S_{i,N}^{(\epsilon S, p)}, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Ce théorème établit que l' ϵ_p -prédiction définie algorithmiquement, lorsqu'elle existe, est exactement l' ϵ_p -prédiction définie algébriquement.

Nous donnons, dans le théorème suivant, une expression de $S_{N+i,N}^{(\epsilon S, p)}$, $\forall i \in \mathbb{N}$, sous forme d'un rapport de deux déterminants, sans la démonstration qui est triviale car provenant directement du système de Cramer.

Théorème 2.25 Soit le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in \mathbb{K}^{N+1}$ satisfaisant la condition $(H_N^{(\epsilon S, p)})$, alors

$$S_{N+i,N}^{(\epsilon S, p)} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & S_{p+i,N}^{(\epsilon S, p)} & S_{p+i+1,N}^{(\epsilon S, p)} & \dots & S_{N+i-1,N}^{(\epsilon S, p)} \\ S_p & 1 & S_{2p-N} & S_{2p-N+1} & \dots & S_{p-1} \\ S_{p+1} & 1 & S_{2p-N+1} & S_{2p-N+2} & \dots & S_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ S_N & 1 & S_p & S_{p+1} & \dots & S_{N-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & S_{2p-N} & S_{2p-N+1} & \dots & S_{p-1} \\ 1 & S_{2p-N+1} & S_{2p-N+2} & \dots & S_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & S_p & S_{p+1} & \dots & S_{N-1} \end{vmatrix}}, \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

avec par convention $S_i = 0$ lorsque $i < 0$.

De nombreuses propriétés associées à l' ϵ -prédiction demeurent valides pour l' ϵ_p -prédiction. Par conséquent, nous ne les détaillons pas.

Chapitre 3

La Padé-prédiction et la Padé-partiel-prédiction

La Padé-prédiction a déjà été étudiée par J. Glewicz dans [11, chap. 8]. Cette méthode de prédiction est obtenue à partir des approximants de Padé. Dans ce chapitre, nous utilisons les approximants de Padé partiels pour construire une méthode de prédiction appelée la Padé-partiel-prédiction.

Alors que la E-prédiction et l' ε -prédiction sont des méthodes agissant directement sur le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N}$, la Padé-prédiction et la Padé-partiel-prédiction agissent sur le vecteur des sommes partielles $(\sum_{j=0}^i S_j t^j)_{0 \leq i \leq N}$.

Nous ne voyons ici que le point de vue algébrique de cette méthode de prédiction. Son aspect algorithmique est étudié au chapitre 5.

Nous étudions tout d'abord la Padé-prédiction qui possède de nombreuses propriétés. Nous essayons ensuite de définir si celles-ci restent valables pour la Padé-partiel-prédiction.

3.1 Les approximants de Padé

Les approximants de Padé sont définis par H. Padé dans [15]. Un récapitulatif concernant ces approximants nous est donné dans [4, p. 35].

Définition

Soit $f(t) = \sum_{i \geq 0} c_i t^i$ une série formelle.

S'il existe un couple $(v(t), w(t)) \in \mathbb{K}_q[t] \times \mathbb{K}_p[t]$ tel que

$$\begin{cases} v(0) = 1 \\ v(t) \wedge w(t) = 1 \\ \frac{w(t)}{v(t)} = f(t) + O(t^{p+q+1}) \end{cases},$$

on dit que $\frac{w(t)}{v(t)}$ est l'approximant de Padé $[p/q]$ de $f(t)$.

Aussi, on note $\frac{w(t)}{v(t)} = [p/q]_{f(t)}$.

L'existence du couple $(v(t), w(t)) \in K_q[t] \times K_p[t]$ est assurée par la condition :

$$\begin{vmatrix} c_{p-q+1} & \dots & c_p \\ \vdots & & \vdots \\ c_p & \dots & c_{p+q-1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

avec par convention $c_i = 0$ si $i < 0$.

Théorème 3.1 Pour les approximants de Padé, on a la formule de Jacobi :

$$[p/q]_{f(t)} = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=0}^{p-q} c_i t^{q+i} & \sum_{i=0}^{p-q-1} c_i t^{q-1+i} & \dots & \sum_{i=0}^p c_i t^i \\ c_{p-q+1} & c_{p-q+2} & \dots & c_{p+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_p & c_{p+1} & \dots & c_{p+q} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t^q & t^{q-1} & \dots & 1 \\ c_{p-q+1} & c_{p-q+2} & \dots & c_{p+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_p & c_{p+1} & \dots & c_{p+q} \end{vmatrix}}.$$

avec par convention $c_i = 0$ si $i < 0$.

3.2 La Padé-prédiction

Soit $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in K^{N+1}$. On pose alors

$$P_N(t) = \sum_{i=0}^N S_i t^i \in K_N[t].$$

Soit (lorsqu'il existe) $\frac{w(t)}{v(t)}$, l'approximant de Padé $[p/N-p]$ de $P_N(t)$.

Définition de la Padé-prédiction du point de vue algébrique

Nous définissons la suite prédite par la Padé-prédiction $(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$ à partir du vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N}$ telle que, formellement, on ait

$$\sum_{i \geq 0} S_{i,N}^{(p)} t^i = \frac{w(t)}{v(t)}.$$

Nous notons $(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$ cette suite prédite par la Padé-prédiction, parce que chaque terme de celle-ci dépend des valeurs de N et de p .

Condition d'existence de la Padé-prédiction du point de vue algébrique

Lorsque

$$\begin{vmatrix} S_{2p-N+1} & S_{2p-N+2} & \dots & S_p \\ S_{2p-N+2} & S_{2p-N+3} & \dots & S_{p+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_p & S_{p+1} & \dots & S_{N-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

avec par convention $S_i = 0$ si $i < 0$, la Padé-prédiction $(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$ calculée à partir du vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N}$ existe.

Nous notons cette condition $(H_N^{(p)})$ parce qu'elle dépend des valeurs de N et de p . Cette condition d'existence est toujours associée à une suite en particulier.

Soit le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in \mathbb{K}^{N+1}$ satisfaisant la condition $(H_N^{(p)})$, alors $(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$ est une suite prédite à partir du vecteur $(\bar{S}_i)_{0 \leq i \leq N}$.

De cette façon, nous justifions l'attribution du mot prédiction à cette méthode.

La Padé-prédiction a déjà été donnée par J. Gilewicz dans [11, chap. 8], sous la forme suivante : soit $f(z)$ la série tronquée

$$f(z) = \sum_{i=0}^{n+m} S_i z^i.$$

On note

$$[m/n]_{f(z)} = \frac{p_0 + p_1 z + \dots + p_m z^m}{1 + q_1 z + \dots + q_n z^n}.$$

On résoud le système linéaire suivant à n inconnues qui sont q_1, q_2, \dots, q_n et à n équations :

$$\sum_{j=1}^n S_{i-j} q_j = -S_i, \quad \forall i \in \{m+1, m+2, \dots, m+n\},$$

et on déduit les p_0, p_1, \dots, p_m à partir des égalités :

$$-p_i + \sum_{j=1}^n S_{i-j} q_j = -S_i, \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, m\},$$

avec par convention $S_j = 0$ si $j < 0$.

La résolution de ce système linéaire impose

$$\begin{vmatrix} S_{m-n+1} & \dots & S_m \\ \vdots & & \vdots \\ S_m & \dots & S_{n+m-1} \end{vmatrix} \neq 0.$$

On pose $S_{i,n+m} = S_i$ pour $0 \leq i \leq n+m$, et on définit $S_{i,n+m}$ pour $i \geq n+m+1$ par

$$\sum_{j=1}^n S_{i-j,n+m} q_j = -S_{i,n+m}.$$

Lorsque l'on pose $m = p$ et $n+m = N$, on vérifie que la suite $(S_{i,n+m})_{i \geq 0}$ définie par J. Gilewicz est égale à la suite prédite par la Padé-prédiction $(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$.

D'autre part, si $m-n \geq 0$, $S_{i,n+m}$ pour $i \geq n+m+1$ est trivialement (au vu du système qui détermine les q_1, q_2, \dots, q_n) indépendant des valeurs de $S_0, S_1, \dots, S_{m-n-1}$ et S_{m-n} . Cette propriété est mise en forme dans le théorème suivant :

Théorème 3.2 Soit le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N}$ satisfaisant la condition $(H_N^{(p)})$, alors si $2p - N \geq 0$, la partie prédite de la suite $(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$, c'est-à-dire $(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq N+1}$, est indépendante de $S_0, S_1, \dots, S_{2p-N-1}$ et S_{2p-N} .

Remarque

Pour que la partie prédite dépende de toute la suite, il faut et il suffit que $2p - N < 0$.

3.3 Quelques exemples théoriques de la Padé-prédiction

Nous étudions ici, sur de simples exemples (i.e. pour de petites valeurs de N) l'expression des termes de la suite prédite par la Padé-prédiction.

Exemple 3.1 $N=2, p=1$

$$P_2(t) = S_0 + S_1t + S_2t^2.$$

$$[1/1]_{P_2(t)} = S_0t + \frac{S_1t}{1 - \frac{S_2}{S_1}t}.$$

D'où

$$\begin{cases} S_{0,2}^{(1)} = S_0 \\ S_{i,2}^{(1)} = \frac{S_2^{i-1}}{S_1^{i-2}} \text{ pour } i \geq 1 \text{ lorsque } S_1 \neq 0. \end{cases}$$

Exemple 3.2 $N=2, p=0$

$$P_2(t) = S_0 + S_1t + S_2t^2.$$

$$[0/2]_{P_2(t)} = \frac{S_0}{1 - \frac{S_1}{S_0}t + [(\frac{S_1}{S_0})^2 - \frac{S_2}{S_0}]t^2}.$$

D'où

$$\begin{cases} S_{0,2}^{(0)} = S_0 \\ S_{1,2}^{(0)} = S_1 \\ S_{i,2}^{(0)} = \frac{S_1}{S_0} S_{i-1,2}^{(0)} - \frac{S_1^2 - S_0 S_2}{S_0^2} S_{i-2,2}^{(0)} \text{ pour } i \geq 2 \text{ lorsque } S_0 \neq 0. \end{cases}$$

Exemple 3.3 $N=3, p=2$

$$P_3(t) = S_0 + S_1t + S_2t^2 + S_3t^3.$$

$$[2/1]_{P_3(t)} = S_0 + S_1t + \frac{S_2t^2}{1 - \frac{S_3}{S_2}t}.$$

D'où

$$\begin{cases} S_{0,3}^{(2)} = S_0 \\ S_{1,3}^{(2)} = S_1 \\ S_{i,3}^{(2)} = \frac{S_2^{i-2}}{S_2^{i-3}} \text{ pour } i \geq 2 \text{ lorsque } S_2 \neq 0. \end{cases}$$

Exemple 3.4 N quelconque, $p=N$

$$P_N(t) = \sum_{i=0}^N S_i t^i.$$

$$[N/0]_{P_N(t)} = P_N(t).$$

D'où

$$\begin{cases} S_{i,N}^{(N)} = S_i \text{ pour } i \in \{0, 1, \dots, N\} \\ S_{i,N}^{(N)} = 0 \text{ pour } i \geq N + 1. \end{cases}$$

3.4 Extrapolation exponentielle et Padé-prédiction

L'extrapolation exponentielle, exposée dans [12, pp. 272-280], et la Padé-prédiction sont connectées de façon élémentaire.

Théorème 3.3 *On suppose préalablement que $2p - N \geq -1$.*

Soit le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in \mathbb{K}^{N+1}$ satisfaisant la condition $(H_N^{(p)})$. Lorsque le système (S) admet une solution, la Padé-prédiction est une méthode de prédiction identique à de l'extrapolation exponentielle du vecteur initial tronqué de ses $(2p - N + 1)$ premiers termes ; ceci signifie que si on définit $(T_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$ par

$$\begin{cases} T_{i,N}^{(p)} = S_i, \forall i \in \{0, 1, \dots, 2p - N\} \\ T_{i,N}^{(p)} = a_1 b_1^{i+N-2p-1} + \dots + a_{N-p} b_{N-p}^{i+N-2p-1}, \forall i \geq 2p - N + 1 \end{cases}$$

où $a_1, a_2, \dots, a_{N-p}, b_1, b_2, \dots, b_{N-p}$, sont déterminés comme solutions du système (S) non linéaire suivant :

$$\begin{cases} S_{2p-N+1} = a_1 + \dots + a_{N-p} \\ S_{2p-N+2} = a_1 b_1 + \dots + a_{N-p} b_{N-p} \\ \vdots \\ S_N = a_1 b_1^{2N-2p-1} + \dots + a_{N-p} b_{N-p}^{2N-2p-1} \end{cases}$$

alors

$$T_{i,N}^{(p)} = S_{i,N}^{(p)}, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Démonstration

On a

$$\begin{aligned} P_N(t) &= \sum_{i=0}^N S_i t^i \\ &= \sum_{i=0}^{2p-N} S_i t^i + \sum_{i=2p-N+1}^N S_i t^i \\ &= \sum_{i=0}^{2p-N} S_i t^i + \sum_{i=2p-N+1}^N (a_1 b_1^{i+N-2p-1} + \dots + a_{N-p} b_{N-p}^{i+N-2p-1}) t^i \\ &= \sum_{i=0}^{2p-N} S_i t^i + t^{2p-N+1} \sum_{i=0}^{2N-2p-1} (a_1 b_1^i + \dots + a_{N-p} b_{N-p}^i) t^i. \end{aligned}$$

$$\text{et, } [p/N - p]_{P_N(t)} = \sum_{i=0}^{2p-N} S_i t^i + t^{2p-N+1} \left(\frac{a_1}{1 - b_1 t} + \dots + \frac{a_{N-p}}{1 - b_{N-p} t} \right).$$

D'où, formellement,

$$[p/N - p]_{P_N(t)} = \sum_{i=0}^{2p-N} S_i t^i + t^{2p-N+1} \sum_{i \geq 0} (a_1 b_1^i + \dots + a_{N-p} b_{N-p}^i) t^i.$$

Ce qui implique que

$$\begin{cases} S_{i,N}^{(p)} = S_i, \forall i \in \{0, 1, \dots, 2p - N\} \\ S_{i,N}^{(p)} = a_1 b_1^{i+N-2p-1} + \dots + a_{N-p} b_{N-p}^{i+N-2p-1}, \forall i \geq 2p - N + 1 \end{cases}$$

et donc, $T_{i,N}^{(p)} = S_{i,N}^{(p)}, \forall i \in \mathbb{N}$.

Théorème 3.4 On suppose préalablement que $2p - N \leq -1$.

Soit le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in \mathbb{K}^{N+1}$ satisfaisant la condition $(H_N^{(p)})$. Lorsque le système (S) admet une solution, la Padé-prédiction est une méthode de prédiction identique à de l'extrapolation exponentielle du vecteur initial précédé de $(N - 2p - 1)$ zéros ; ceci signifie que si on définit $(T_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$ par

$$T_{i,N}^{(p)} = a_1 b_1^{i+N-2p-1} + \dots + a_{N-p} b_{N-p}^{i+N-2p-1}, \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

où $a_1, a_2, \dots, a_{N-p}, b_1, b_2, \dots, b_{N-p}$, sont déterminés comme solutions du système (S) non linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = a_1 + \dots + a_{N-p} \\ 0 = a_1 b_1 + \dots + a_{N-p} b_{N-p} \\ \vdots \\ 0 = a_1 b_1^{N-2p-2} + \dots + a_{N-p} b_{N-p}^{N-2p-2} \\ S_0 = a_1 b_1^{N-2p-1} + \dots + a_{N-p} b_{N-p}^{N-2p-1} \\ S_1 = a_1 b_1^{N-2p} + \dots + a_{N-p} b_{N-p}^{N-2p} \\ \vdots \\ S_N = a_1 b_1^{2N-2p-1} + \dots + a_{N-p} b_{N-p}^{2N-2p-1} \end{array} \right. ,$$

alors

$$T_{i,N}^{(p)} = S_{i,N}^{(p)}, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Démonstration

On a

$$\begin{aligned} P_N(t) &= \sum_{i=0}^N S_i t^i \\ &= \sum_{k=2p-N+1}^N S_k t^k \text{ avec } S_j = 0 \text{ si } j < 0 \\ &= \sum_{k=2p-N+1}^N (a_1 b_1^{k+N-2p-1} + \dots + a_{N-p} b_{N-p}^{k+N-2p-1}) t^k \\ &= \sum_{i=0}^{2N-2p-1} (a_1 b_1^i + \dots + a_{N-p} b_{N-p}^i) t^{i+2p-N+1} \\ &= t^{2p-N+1} \sum_{i=0}^{2N-2p-1} (a_1 b_1^i + \dots + a_{N-p} b_{N-p}^i) t^i, \end{aligned}$$

$$\text{et, } [p/N - p]_{P_N(t)} = t^{2p-N+1} \left(\frac{a_1}{1-b_1 t} + \dots + \frac{a_{N-p}}{1-b_{N-p} t} \right).$$

D'où, formellement,

$$[p/N - p]_{P_N(t)} = t^{2p-N+1} \sum_{i \geq 0} (a_1 b_1^i + \dots + a_{N-p} b_{N-p}^i) t^i.$$

Ce qui implique que

$$S_{i,N}^{(p)} = a_1 b_1^{i+N-2p-1} + \dots + a_{N-p} b_{N-p}^{i+N-2p-1}, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

et donc, $T_{i,N}^{(p)} = S_{i,N}^{(p)}, \quad \forall i \in \mathbb{N}$.

Remarque à propos de l'extrapolation exponentielle

Pour de l'extrapolation exponentielle, les a_i et les b_i n'appartiennent pas nécessairement au corps \mathbb{K} , comme nous le constatons dans l'exemple suivant :

Exemple 3.5 Soit $K = \mathbb{R}$, $N = 3$, $p = 1$.

Soit $(S_i)_{0 \leq i \leq 3}$ donnée par $S_0 = \sin 0$, $S_1 = \sin 1$, $S_2 = \sin 2$, $S_3 = \sin 3$, alors, d'après le théorème 3.3 ou le théorème 3.4, $S_{k,3}^{(1)} = \frac{1}{2I} e^{kI} - \frac{1}{2I} e^{-kI} = \sin k$, et, $\frac{1}{2I} \notin \mathbb{R}$, $e^I \notin \mathbb{R}$, $-\frac{1}{2I} \notin \mathbb{R}$, $e^{-I} \notin \mathbb{R}$.

3.5 Propriétés de relations entre Padé-prédictions

Cette section est reprise dans sa majeure partie dans le chapitre 4. Un des attrait motivant le théorème suivant est de procurer de nouvelles méthodes de prédiction grâce aux points (i), (ii), (iii) et (iv).

Théorème 3.5 Il existe des vecteurs $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in \mathbb{K}^{N+1}$ et $(T_i)_{0 \leq i \leq N} \in \mathbb{K}^{N+1}$ vérifiant tous les deux la condition $(H_N^{(p)})$ et fournissant respectivement les suites $(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$ et $(T_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$ par la Padé-prédiction, et un élément a de \mathbb{K} tels que :

- (i) $S_{i,N}^{(p)} + T_{i,N}^{(p)} \neq U_{i,N}^{(p)}$ où $(U_i)_{0 \leq i \leq N}$ est un vecteur donné par $U_i = S_i + T_i$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, N\}$, fournissant la suite $(U_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$ par la Padé - prédiction
- (ii) $S_{i,N}^{(p)} * T_{i,N}^{(p)} \neq V_{i,N}^{(p)}$ où $(V_i)_{0 \leq i \leq N}$ est un vecteur donné par $V_i = S_i * T_i$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, N\}$, fournissant la suite $(V_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$ par la Padé - prédiction
- (iii) $\frac{1}{S_{i,N}^{(p)}} \neq W_{i,N}^{(p)}$ où $(W_i)_{0 \leq i \leq N}$ est un vecteur donné par $W_i = \frac{1}{S_i}$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, N\}$, fournissant la suite $(W_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$ par la Padé - prédiction
- (iv) $S_{i,N}^{(p)} + a \neq X_{i,N}^{(p)}$ où $(X_i)_{0 \leq i \leq N}$ est un vecteur donné par $X_i = S_i + a$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, N\}$, fournissant la suite $(X_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$ par la Padé - prédiction.

D'autre part, soient le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in \mathbb{K}^{N+1}$, vérifiant la condition $(H_N^{(p)})$ et fournissant la suite $(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$ par la Padé-prédiction, et $a \in \mathbb{K}$, alors :

- (v) $a \cdot S_{i,N}^{(p)} = Y_{i,N}^{(p)}$ où $(Y_i)_{0 \leq i \leq N}$ est un vecteur donné par $Y_i = a \cdot S_i$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, N\}$, fournissant la suite $(Y_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$ par la Padé - prédiction
- (vi) $a^i \cdot S_{i,N}^{(p)} = Z_{i,N}^{(p)}$ où $(Z_i)_{0 \leq i \leq N}$ est un vecteur donné par $Z_i = a^i \cdot S_i$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, N\}$, fournissant la suite $(Z_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$ par la Padé - prédiction.

Démonstration

Pour montrer l'existence dans les points (i), (ii), (iii) et (iv), il nous suffit de donner des exemples :

(i) Prenons $N = 2$, $p = 1$, $S_0 = 1$, $S_1 = \frac{1}{2}$, $S_2 = \frac{1}{3}$, $T_0 = 0$, $T_1 = \frac{1}{2}$, $T_2 = \frac{2}{3}$, alors $S_{3,2}^{(1)} = \frac{2}{9}$ et $T_{3,2}^{(1)} = \frac{8}{9}$ et $U_{3,2}^{(1)} = 1$ et donc

$$S_{3,2}^{(1)} + T_{3,2}^{(1)} \neq U_{3,2}^{(1)}.$$

(ii) Prenons $N = 4$, $p = 2$, $S_0 = 1$, $S_1 = 2$, $S_2 = 3$, $S_3 = 2$, $S_4 = 1$, $T_0 = 1$, $T_1 = \frac{1}{2}$, $T_2 = \frac{1}{3}$, $T_3 = \frac{1}{2}$, $T_4 = 1$, alors $S_{5,4}^{(2)} = \frac{2}{5}$ et $T_{5,4}^{(2)} = \frac{21}{10}$ et $V_{5,4}^{(2)} = 1$ et donc

$$S_{5,4}^{(2)} * T_{5,4}^{(2)} \neq V_{5,4}^{(2)}.$$

(iii) Prenons $N = 4$, $p = 2$, $S_0 = 1$, $S_1 = 2$, $S_2 = 3$, $S_3 = 2$, $S_4 = 1$, alors $S_{5,4}^{(2)} = \frac{2}{5}$ et $W_{5,4}^{(2)} = \frac{21}{10}$ et donc

$$1/S_{5,4}^{(2)} \neq W_{5,4}^{(2)}.$$

(iv) Prenons $N = 2$, $p = 1$, $S_0 = 1$, $S_1 = \frac{1}{2}$, $S_2 = \frac{1}{3}$, alors, si $a=1$, $S_{3,2}^{(1)} = \frac{2}{9}$ et $X_{3,2}^{(1)} = \frac{32}{27}$ et donc

$$1 + S_{3,2}^{(1)} \neq X_{3,2}^{(1)}.$$

Montrons maintenant les points (v) et (vi).

(v) $Y_i = a \cdot S_i$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, N\} \Rightarrow Y_{i,N}^{(p)} = a \cdot S_{i,N}^{(p)}$, $\forall i \in \mathbb{N}$,

car $\sum_{i=0}^N Y_i t^i = a \cdot \sum_{i=0}^N S_i t^i$ implique que $[p/N - p] \sum_{i=0}^N Y_{i,t} = [p/N - p]_a \cdot \sum_{i=0}^N S_{i,t} = a \cdot [p/N - p] \sum_{i=0}^N S_{i,t}$,
et donc formellement,

$$\sum_{i \geq 0} Y_{i,N}^{(p)} t^i = a \cdot \sum_{i \geq 0} S_{i,N}^{(p)} t^i.$$

(vi) $Z_i = a^i \cdot S_i$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, N\} \Rightarrow Z_{i,N}^{(p)} = a^i \cdot S_{i,N}^{(p)}$, $\forall i \in \mathbb{N}$,

car $\sum_{i=0}^N Z_i t^i = \sum_{i=0}^N S_i (a \cdot t)^i$ implique que formellement,

$$\sum_{i \geq 0} Z_{i,N}^{(p)} t^i = \sum_{i \geq 0} S_{i,N}^{(p)} (a \cdot t)^i = \sum_{i \geq 0} a^i \cdot S_{i,N}^{(p)} t^i.$$

3.6 Propriétés de positivité et de monotonie pour la Padé-prédiction

Pour cette section, on impose en plus au corps commutatif \mathbb{K} d'être totalement ordonné. Nous constatons, par exemple, que la suite prédite par la Padé-prédiction à partir d'un vecteur à composantes positives n'est pas nécessairement à termes positifs.

Théorème 3.6 *Il existe un vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in \mathbb{K}_+^{N+1}$ satisfaisant la condition $(H_N^{(p)})$ tel que $(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0} \notin \mathbb{K}_+^{\mathbb{N}}$.*

Démonstration

Pour montrer l'existence, il suffit de donner un exemple.

Prenons $N = 4$, $p = 2$, $S_0 = 1$, $S_1 = \frac{1}{2}$, $S_2 = \frac{1}{4}$, $S_3 = \frac{1}{16}$, $S_4 = \frac{1}{256}$, alors

$$S_{5,4}^{(2)} = -\frac{17}{4096} < 0.$$

Théorème 3.7 *Il existe un vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in \mathbb{K}_-^{N+1}$ satisfaisant la condition $(H_N^{(p)})$ tel que $(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0} \notin \mathbb{K}_-^{\mathbb{N}}$.*

Démonstration

C'est une conséquence directe des théorèmes 3.6 et 3.5, (v).

Théorème 3.8 *Il existe un vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in \mathbb{K}_+^{N+1}$ vérifiant $S_{i+1} - S_i \in \mathbb{K}_+$ et satisfaisant la condition $(H_N^{(p)})$ tel que $(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0} \in \mathbb{K}_+^{\mathbb{N}}$, et cependant $S_{i+1,N}^{(p)} - S_{i,N}^{(p)} \notin \mathbb{K}_+$.*

Démonstration

Pour montrer l'existence, il suffit de donner un exemple.
Prenons $N = 2$, $p = 1$, $S_0 = -1$, $S_1 = -\frac{1}{2}$, $S_2 = \frac{1}{10}$, alors

$$S_{3,2}^{(1)} = -\frac{1}{50} < S_{2,2}^{(1)}.$$

Théorème 3.9 *Il existe un vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in \mathbb{K}^{N+1}$ vérifiant $S_{i+1} - S_i \in \mathbb{K}_-$ et satisfaisant la condition $(H_N^{(p)})$ tel que $(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, et cependant $S_{i+1,N}^{(p)} - S_{i,N}^{(p)} \notin \mathbb{K}_-$.*

Démonstration

C'est une conséquence directe des théorèmes 3.8 et 3.5, (v).

3.7 Propriétés de totale monotonie et de totale oscillation pour la Padé-prédiction

Pour cette section, on impose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Il existe une grande différence entre les vecteurs totalement monotones finis et les vecteurs totalement monotones extraits. Dans cette section, celle-ci transparait de manière limpide. En effet, nous constatons que la suite prédite par la Padé-prédiction à partir d'un vecteur totalement monotone extrait est totalement monotone alors que la suite prédite par la Padé-prédiction à partir d'un vecteur totalement monotone fini ne l'est pas nécessairement.

3.7.1 Totale monotonie

Commençons par voir si la Padé-prédiction fournit une suite totalement monotone à partir d'un vecteur totalement monotone fini (lorsque $2p - N \geq -1$).

Théorème 3.10 *On suppose préalablement $2p - N \geq -1$.*

Il existe un vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in TMF$ satisfaisant la condition $(H_N^{(p)})$ tel que $(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0} \notin TM$.

Démonstration

Pour montrer l'existence, il suffit de donner un exemple.
Prenons $N = 4$, $p = 2$, $S_0 = 97$, $S_1 = 22$, $S_2 = \frac{73}{9}$, $S_3 = \frac{13}{4}$, $S_4 = 1$.

$$(S_i)_{0 \leq i \leq 4} \in TMF,$$

mais

$$(S_{i,4}^{(2)})_{i \geq 0} \notin TM,$$

car $S_{5,4}^{(2)} = -\frac{2903409}{54760000} < 0$.

Nous voyons maintenant dans les deux prochains théorèmes que la suite prédite par la Padé-prédiction calculée à partir d'un vecteur totalement monotone extrait n'est pas nécessairement totalement monotone, mais que sa queue (i.e. la suite tronquée de ses premiers termes) l'est (lorsque $2p - N \geq -1$).

Théorème 3.11 *On suppose préalablement $2p - N \geq -1$.*

Soit le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in TME$ satisfaisant la condition $(H_N^{(p)})$, alors

$$(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 2p-N+1} \in TM.$$

Démonstration

D'après le théorème 3.3 et le théorème 2.9 de Hausdorff, comme on a

$$S_i = a_1 b_1^i + \dots + a_{N-p} b_{N-p}^i = \int_0^1 x^i dg(x), \quad \forall i \in \{2p-N+1, 2p-N+2, \dots, N\},$$

avec g non décroissante à variation bornée sur $[0, 1]$, on obtient

$$S_{i,N}^{(p)} = a_1 b_1^i + \dots + a_{N-p} b_{N-p}^i, \quad \forall i \geq 2p-N+1.$$

Et, d'après les résultats connus sur la quadrature de Gauss, on a, puisque g est non décroissante à variation bornée sur $[0, 1]$

i) $b_i \in [0, 1], \forall i \in \{1, 2, \dots, N-p\}$

ii) $a_i \geq 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, N-p\}$.

Il s'ensuit que :

$$(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 2p-N+1} \in TM.$$

Remarque concernant la construction d'une suite totalement monotone

Nous pouvons donner un procédé de construction d'une suite totalement monotone comme suit :

Nous nous donnons une fonction α non décroissante à variation bornée sur $[0, 1]$.

Puis, nous calculons $c_i = \int_0^1 x^i d\alpha(x)$ pour $i \in \{0, 1, \dots, 2m-1\}$.

Ainsi, d'après le théorème 3.11, on a $(c_{i,2m-1}^{(m-1)})_{i \geq 0} \in TM$.

Théorème 3.12 *On suppose préalablement $2p - N \geq -1$.*

Il existe un vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in TME$ satisfaisant la condition $(H_N^{(p)})$ tel que $(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0} \notin TM$.

Démonstration

Pour montrer l'existence, il suffit de donner un exemple.

Prenons $N = 3, p = 2, S_0 = 12, S_1 = 8, S_2 = 6, S_3 = 5$.

$$(S_i)_{0 \leq i \leq 3} \in TME,$$

car la suite $(4 + 8 \cdot \frac{1}{2^i})_{i \geq 0}$ est totalement monotone, mais

$$(S_{i,3}^{(2)})_{i \geq 0} \notin TM,$$

$$\text{car } \Delta^5 S_{0,3}^{(2)} = \frac{23}{36} > 0.$$

Nous allons maintenant considérer les précédents théorèmes lorsque $2p - N < -1$. Sous cette condition, le théorème 2.10 n'est plus vérifié parce que, lorsque nous précédons un vecteur totalement monotone extrait de zéros, celui-ci ne demeure en général pas totalement monotone extrait.

Théorème 3.13 *On suppose préalablement $2p - N < -1$.*

Il existe un vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in TMF$ satisfaisant la condition $(H_N^{(p)})$ tel que $(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0} \notin TM$.

Démonstration

Pour montrer l'existence, il suffit de donner un exemple.
Prenons $N = 2$, $p = 0$, $S_0 = 292$, $S_1 = 117$, $S_2 = 1$.

$$(S_i)_{0 \leq i \leq 2} \in TMF,$$

mais

$$(S_{i,2}^{(0)})_{i \geq 0} \notin TM,$$

$$\text{car } S_{3,2}^{(0)} = -\frac{1533285}{85264} < 0.$$

Théorème 3.14 *On suppose préalablement $2p - N < -1$.*

Il existe un vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in TME$ satisfaisant la condition $(H_N^{(p)})$ tel que $(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0} \notin TM$.

Démonstration

Pour montrer l'existence, il suffit de donner un exemple.
Prenons $N = 2$, $p = 0$, $S_0 = 6$, $S_1 = 3$, $S_2 = 2$.

$$(S_i)_{0 \leq i \leq 2} \in TME,$$

car la suite $(\frac{6}{i+1})_{i \geq 0}$ est totalement monotone, mais

$$(S_{i,2}^{(0)})_{i \geq 0} \notin TM,$$

$$\text{car } \Delta^3 S_{1,2}^{(0)} = \frac{1}{24} > 0.$$

3.7.2 Totale oscillation

Les théorèmes 3.10, 3.11, 3.12, 3.13 et 3.14 trouvent leur analogue dans cette section. Du fait du lien entre les définitions de totale monotonie et de la totale oscillation, et grâce au théorème 3.5. (vi), nous pouvons énoncer ces analogues sans démonstration.

Théorème 3.15 *On suppose préalablement $2p - N \geq -1$.*

Il existe un vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in TOF$ satisfaisant la condition $(H_N^{(p)})$ tel que $(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0} \notin TO$.

Théorème 3.16 *On suppose préalablement $2p - N \geq -1$.*

Soit le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in TOE$ satisfaisant la condition $(H_N^{(p)})$, alors

$$(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 2p-N+1} \in TO.$$

Théorème 3.17 *On suppose préalablement $2p - N \geq -1$.*

Il existe un vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in TOE$ satisfaisant la condition $(H_N^{(p)})$ tel que $(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0} \notin TO$.

Théorème 3.18 *On suppose préalablement $2p - N < -1$.*

Il existe un vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in TOF$ satisfaisant la condition $(H_N^{(p)})$ tel que $(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0} \notin TO$.

Théorème 3.19 *On suppose préalablement $2p - N < -1$.*

Il existe un vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in TOE$ satisfaisant la condition $(H_N^{(p)})$ tel que $(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0} \notin TO$.

3.8 Propriétés des moments de Markov-Stieltjes et des moments de Hamburger pour la Padé-prédiction

On impose ici $K = \mathbb{R}$.

Nous analysons ici une possibilité pour généraliser les théorèmes 3.11 et 3.16.

Théorème 3.20 *On suppose préalablement $2p - N \geq -1$.*

Soit le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in MSE$ satisfaisant la condition $(H_N^{(p)})$, alors

$$(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 2p-N+1} \in MS.$$

Démonstration

D'après le théorème 3.3 et la définition des moments de Stieltjes, comme on a

$$S_i = a_1 b_1^i + \dots + a_{N-p} b_{N-p}^i = \int_0^\infty x^i dg(x), \quad \forall i \in \{2p - N + 1, 2p - N + 2, \dots, N\},$$

avec g non décroissante à variation bornée sur $[0, \infty[$, on obtient

$$S_{i,N}^{(p)} = a_1 b_1^i + \dots + a_{N-p} b_{N-p}^i, \quad \forall i \geq 2p - N + 1.$$

Et, d'après les résultats connus sur la quadrature de Gauss, on a, puisque g est non décroissante à variation bornée sur $[0, \infty[$

1. $b_i \in [0, \infty[$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, N - p\}$
2. $a_i \geq 0$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, N - p\}$.

Il s'ensuit que :

$$(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 2p-N+1} \in MS.$$

Théorème 3.21 *On suppose préalablement $2p - N \geq -1$.*

Soit le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in MMSE$ satisfaisant la condition $(H_N^{(p)})$, alors

$$(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 2p-N+1} \in MMS.$$

Démonstration

D'après le théorème 3.3 et la définition des moments de Markov-Stieltjes, comme on a

$$S_i = a_1 b_1^i + \dots + a_{N-p} b_{N-p}^i = \int_0^R x^i dg(x), \quad \forall i \in \{2p - N + 1, 2p - N + 2, \dots, N\},$$

avec g non décroissante à variation bornée sur $[0, R]$, on obtient

$$S_{i,N}^{(p)} = a_1 b_1^i + \dots + a_{N-p} b_{N-p}^i, \quad \forall i \geq 2p - N + 1.$$

Et, d'après les résultats connus sur la quadrature de Gauss, on a, puisque g est non décroissante à variation bornée sur $[0, R]$

1. $b_i \in [0, R]$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, N - p\}$
2. $a_i \geq 0$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, N - p\}$.

Il s'ensuit que :

$$(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 2p-N+1} \in MMS.$$

Théorème 3.22 *On suppose préalablement $2p - N \geq -1$.*

Soit le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in MHE$ satisfaisant la condition $(H_N^{(p)})$, alors

$$(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 2p-N+1} \in MH.$$

Démonstration

D'après le théorème 3.3 et la définition des moments de Hamburger, comme on a

$$S_i = a_1 b_1^i + \dots + a_{N-p} b_{N-p}^i = \int_{R_1}^{R_2} x^i dg(x), \quad \forall i \in \{2p - N + 1, 2p - N + 2, \dots, N\},$$

avec g non décroissante à variation bornée sur $]R_1, R_2[$, on obtient

$$S_{i,N}^{(p)} = a_1 b_1^i + \dots + a_{N-p} b_{N-p}^i, \quad \forall i \geq 2p - N + 1.$$

Et, d'après les résultats connus sur la quadrature de Gauss, on a, puisque g est non décroissante à variation bornée sur $]R_1, R_2[$

1. $b_i \in [R_1, R_2]$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, N - p\}$
2. $a_i \geq 0$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, N - p\}$.

Il s'ensuit que :

$$(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 2p-N+1} \in MH.$$

3.9 Propriétés concernant les suites polynômiales pour la Padé-prédiction

Si $\mathbb{K} = \mathcal{C}$, le théorème qui suit montre en particulier que toute série entière, centrée en l'origine, à coefficients polynômiaux complexes (donc de rayon de convergence égal à 1), est sur son disque de convergence une fonction rationnelle.

Théorème 3.23 *Soit le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq 2K-1}$, donné par $S_i = \sum_{l=0}^{K-1} a_l i^l$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, 2K-1\}$, satisfaisant la condition $(H_{2K-1}^{(K-1)})$, alors, la suite $(S_{i,2K-1}^{(K-1)})_{i \geq 0}$ est donnée par*

$$S_{i,2K-1}^{(K-1)} = \sum_{l=0}^{K-1} a_l i^l, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Démonstration

On a $S_i = \sum_{j=0}^{K-1} a_j i^j$, $\forall i \in \{0, \dots, 2K-1\}$,
avec $\sum_{j=0}^{K-1} a_j i^j = \sum_{j=0}^{K-1} b_j \frac{(i+1)(i+2)\dots(i+j)}{(j-1)!}$, $\forall i \in \mathbb{N}$, par changement de base.

Le polynôme $P_{2K-1}(t)$ est défini par

$$\begin{aligned} P_{2K-1}(t) &= \sum_{i=0}^{2K-1} S_i t^i \\ &= \sum_{i=0}^{2K-1} \sum_{j=0}^{K-1} b_j \frac{(i+1)(i+2)\dots(i+j)}{(j-1)!} t^i \\ &= \sum_{j=0}^{K-1} \sum_{i=0}^{2K-1} b_j \frac{(i+1)(i+2)\dots(i+j)}{(j-1)!} t^i \\ &= \sum_{j=0}^{K-1} \sum_{i \geq 0} b_j \frac{(i+1)(i+2)\dots(i+j)}{(j-1)!} t^i + O(t^{2K}) \\ &= \sum_{j=0}^{K-1} \sum_{i \geq 0} b_j \frac{(i+j)! t^i}{(j-1)! i!} + O(t^{2K}) \\ &= \sum_{j=0}^{K-1} \sum_{i \geq 0} b_j \frac{d^i}{dt^i} \left(\frac{1}{(1-t)^{j+1}} \right) (0) \frac{t^i}{i!} + O(t^{2K}) \\ &= \sum_{j=0}^{K-1} b_j \frac{1}{(1-t)^{j+1}} + O(t^{2K}), \end{aligned}$$

mais alors, par définition de l'approximant de Padé,

$$[K-1/K]_{P_{2K-1}(t)} = \sum_{j=0}^{K-1} b_j \frac{1}{(1-t)^{j+1}}.$$

Il s'ensuit, formellement, que :

$$\begin{aligned} [K-1/K]_{P_{2K-1}(t)} &= \sum_{j=0}^{K-1} \sum_{i \geq 0} b_j \frac{(i+1)(i+2)\dots(i+j)}{(j-1)!} t^i \\ &= \sum_{i \geq 0} \sum_{j=0}^{K-1} a_j i^j t^i. \end{aligned}$$

Donc

$$S_{i, 2K-1}^{(K-1)} = \sum_{j=0}^{K-1} a_j i^j, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Corollaire 3.1 Soit $P_{m-1}(x) \in \mathbb{K}_{m-1}[x]$, alors, $\forall x \in \mathbb{K}$,

$$\begin{vmatrix} x^m & \dots & x & 1 \\ P_{m-1}(i+1) & \dots & P_{m-1}(i+m) & P_{m-1}(i+m+1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ P_{m-1}(i+m) & \dots & P_{m-1}(i+2m-1) & P_{m-1}(i+2m) \end{vmatrix} = a \cdot (x-1)^m$$

où

$$a = \begin{vmatrix} P_{m-1}(i+2) & \dots & P_{m-1}(i+m+1) \\ \vdots & & \vdots \\ P_{m-1}(i+m+1) & \dots & P_{m-1}(i+2m) \end{vmatrix} \in \mathbb{K}.$$

Démonstration

Dans la démonstration du théorème 3.23, $[K-1/K]_{P_{2K-1}(x)}$ est un approximant de Padé dont le dénominateur est $(x-1)^m$ à un facteur près.

Mais, d'après le théorème 3.1, l'expression du dénominateur est donnée sous la forme d'un déterminant à un facteur près, et donc

$$\begin{vmatrix} x^m & \dots & x & 1 \\ P_{m-1}(i+1) & \dots & P_{m-1}(i+m) & P_{m-1}(i+m+1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ P_{m-1}(i+m) & \dots & P_{m-1}(i+2m-1) & P_{m-1}(i+2m) \end{vmatrix} = \alpha(x-1)^m \text{ où } \alpha \in \mathbb{K}.$$

Ainsi, en calculant de part et d'autre de l'égalité le coefficient du terme en x^m , on obtient

$$\alpha = \begin{vmatrix} P_{m-1}(i+2) & \dots & P_{m-1}(i+m+1) \\ \vdots & & \vdots \\ P_{m-1}(i+m+1) & \dots & P_{m-1}(i+2m) \end{vmatrix} \in \mathbb{K}.$$

Théorème 3.24 Soit le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq 2K-1}$, donné par $S_i = a^i \sum_{l=0}^{K-1} a_l i^l$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, 2K-1\}$, satisfaisant la condition $(H_{2K-1}^{(K-1)})$, alors, la suite $(S_{i,2K-1}^{(K-1)})_{i \geq 0}$ est donnée par

$$S_{i,2K-1}^{(K-1)} = a^i \sum_{l=0}^{K-1} a_l i^l, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Démonstration

C'est une conséquence directe des théorèmes 3.23 et 3.5, (vi).

Corollaire 3.2 Soit $P_{m-1}(x) \in \mathbb{K}_{m-1}[x]$, alors, $\forall x \in \mathbb{K}, \forall a \in \mathbb{K}$,

$$\begin{vmatrix} x^m & x^{m-1} & \dots & 1 \\ P_{m-1}(i+1) & aP_{m-1}(i+2) & \dots & a^m P_{m-1}(i+m+1) \\ aP_{m-1}(i+2) & a^2 P_{m-1}(i+3) & \dots & a^{m+1} P_{m-1}(i+m+2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^{m-1} P_{m-1}(i+m) & a^m P_{m-1}(i+m+1) & \dots & a^{2m-1} P_{m-1}(i+2m) \end{vmatrix} = \alpha(ax-1)^m$$

où

$$\alpha = a^{(m-1)m} \begin{vmatrix} P_{m-1}(i+2) & \dots & P_{m-1}(i+m+1) \\ \vdots & & \vdots \\ P_{m-1}(i+m+1) & \dots & P_{m-1}(i+2m) \end{vmatrix} \in \mathbb{K}.$$

Démonstration

Le principe de la démonstration est le même que pour le corollaire 3.1.

On se propose de généraliser les théorèmes 3.23 et 3.24.

Théorème 3.25 Soit le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq 2K-1}$, donné par

$S_i = \sum_{j=0}^p b_j^i \sum_{l=0}^{k_j-1} a_{l,j} i^l$, $\forall i \in \{0, \dots, 2K-1\}$, satisfaisant la condition $(H_{2K-1}^{(K-1)})$ ($k_j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \forall j \in \{0, \dots, p\}$ est tel que $\sum_{j=0}^p k_j \leq K$), alors, la suite $(S_{i,2K-1}^{(K-1)})_{i \geq 0}$ est donnée par

$$S_{i,2K-1}^{(K-1)} = \sum_{j=0}^p b_j^i \sum_{l=0}^{k_j-1} a_{l,j} i^l, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Démonstration

C'est principalement une conséquence des théorèmes 3.23, 3.24 et 3.5 (vi).

Cependant, elle utilise la propriété suivante :

$\sum_{j=0}^p [k_j - 1/k_j]_{P_{2k_j-1}^{(j)}(t)}$, où $P_{2k_j-1}^{(j)}(t) = \sum_{i=0}^{2k_j-1} \sum_{l=0}^{k_j-1} a_{l,j} i^l (b_j t)^i$, est une fonction rationnelle en la variable t dont le numérateur est un polynôme de degré $(K-1)$ au plus, et dont le dénominateur est un polynôme de degré K au plus.

D'après l'unicité de l'approximant de Padé,

$$\sum_{j=0}^p [k_j - 1/k_j]_{P_{2k_j-1}^{(j)}(t)} = [K - 1/K]_{P_{2K-1}(t)}$$

où $P_{2K-1}(t) = \sum_{i=0}^{2K-1} \sum_{j=0}^p \sum_{l=0}^{k_j-1} a_{l,j} i^l (b_j t)^i$, car d'après les théorèmes 3.23 et 3.24, on a formellement

$$[k_j - 1/k_j]_{P_{2k_j-1}^{(j)}(t)} = \sum_{i \geq 0} \sum_{l=0}^{k_j-1} a_{l,j} i^l (b_j t)^i,$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^p [k_j - 1/k_j]_{P_{2k_j-1}^{(j)}(t)} &= \sum_{j=0}^p \sum_{i \geq 0} \sum_{l=0}^{k_j-1} a_{l,j} i^l (b_j t)^i \\ &= \sum_{i \geq 0} \sum_{j=0}^p \sum_{l=0}^{k_j-1} a_{l,j} i^l (b_j t)^i, \\ &= [K - 1/K]_{P_{2K-1}(t)}. \end{aligned}$$

Donc,

$$S_{i,2K-1}^{(K-1)} = \sum_{j=0}^p b_j^i \sum_{l=0}^{k_j-1} a_{l,j} i^l, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

3.10 Lien entre l' ε -algorithme et les approximants de Padé

Nous rappelons ici que le calcul d'un approximant de Padé peut être mis en oeuvre par l' ε -algorithme. Ce résultat provient de l'expression sous forme d'un rapport de deux déterminants des termes calculés par la transformation de D. Shanks. Cette expression est donnée dans [19] et rappelée dans [4, p. 159].

Théorème 3.26 *On se donne $f(t) = \sum_{i \geq 0} c_i t^i$ une série formelle.*

On pose

$$\varepsilon_{-1}^{(i)} = 0, \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

$$\varepsilon_{2i}^{(-i-1)} = 0, \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

$$\varepsilon_0^{(i)} = \sum_{j=0}^i c_j t^j, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Et on définit $\varepsilon_{k+1}^{(i)}$ par

$$\varepsilon_{k+1}^{(i)} = \varepsilon_{k-1}^{(i+1)} + \frac{1}{\varepsilon_k^{(i+1)} - \varepsilon_k^{(i)}}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall i \geq -1 - \lfloor \frac{k}{2} \rfloor.$$

Il s'ensuit :

$$\varepsilon_{2k}^{(n)} = [n + k/k]_{f(t)}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq -k.$$

3.11 Lien entre l' ε_p -prédiction et la Padé-prédiction

Le théorème que nous énonçons et démontrons maintenant, nous permet d'obtenir un algorithme pour la Padé-prédiction qui ne requiert pas la résolution d'un système linéaire. Il dérive directement du lien existant entre l' ε -algorithme et les approximants de Padé. Le fait de ne pas avoir à résoudre de système linéaire représente un gain en complexité en temps dans l'algorithme qui n'est pas à négliger.

Théorème 3.27 Soit le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in \mathbb{K}^{N+1}$.

Soit aussi le vecteur $(T_i)_{0 \leq i \leq N} \in \mathbb{K}^{N+1}$ donné par $T_i = \sum_{j=0}^i S_j$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, N\}$ et satisfaisant la condition $(H_N^{(\varepsilon, p)})$, alors,

$$S_{i,N}^{(p)} = T_{i,N}^{(\varepsilon, p)} - T_{i-1,N}^{(\varepsilon, p)}, \quad \forall i \geq 1,$$

et

$$S_{0,N}^{(p)} = T_{0,N}^{(\varepsilon, p)}.$$

Démonstration

Commençons cette démonstration par une remarque : il n'est guère utile de supposer que le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in \mathbb{K}^{N+1}$ satisfasse la condition $(H_N^{(p)})$ car, si le vecteur $(T_i)_{0 \leq i \leq N} \in \mathbb{K}^{N+1}$ donné par $T_i = \sum_{j=0}^i S_j$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, N\}$ satisfait la condition $(H_N^{(\varepsilon, p)})$, alors automatiquement, le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N}$ satisfait la condition $(H_N^{(p)})$. En effet, le déterminant qui doit être non nul dans la condition $(H_N^{(p)})$ est exactement le dénominateur d' $\varepsilon_{2N-2p-1}^{(2p-N)}$ (lorsque l' ε -algorithme est appliqué à la suite $(T_i^{(\varepsilon, p)})_{i \geq 0}$).

Si on pose maintenant

$$f(t) = \sum_{i \geq 0} S_{i,N}^{(p)} t^i$$

$$\varepsilon_{-1}^{(i)} = 0, \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

$$\varepsilon_{2i}^{(-i-1)} = 0, \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

$$\varepsilon_0^{(i)} = \sum_{j=0}^i S_{j,N}^{(p)} t^j, \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

et, si on définit $\varepsilon_{k+1}^{(i)}$ par

$$\varepsilon_{k+1}^{(i)} = \varepsilon_{k-1}^{(i+1)} + \frac{1}{\varepsilon_k^{(i+1)} - \varepsilon_k^{(i)}}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall i \geq -1 - \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor,$$

il s'ensuit, d'après le théorème 3.26, que :

$$\varepsilon_{2N-2p}^{(2p-N)} = [p/N - p]_{f(t)}, \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall N \geq p,$$

et,

$$\varepsilon_{2N-2p}^{(2p-N+i)} = [p + i/N - p]_{f(t)}, \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall N \geq p, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Or $[p + i/N - p]_{f(t)} = [p/N - p]_{f(t)}$, car formellement $f(t) = [p/N - p]_{f(t)}$, par définition même de la Padé-prédiction.

Maintenant, si on prend

$$f(t) = \sum_{i \geq 0} S_{i,N}^{(p)} t^i$$

$$\varepsilon_{-1}^{(i)} = 0, \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

$$\varepsilon_{2i}^{(-i-1)} = 0, \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

$$\varepsilon_0^{(i)} = \sum_{j=0}^i S_{j,N}^{(p)}, \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

et, si on définit $\varepsilon_{k+1}^{(i)}$ par

$$\varepsilon_{k+1}^{(i)} = \varepsilon_{k-1}^{(i+1)} + \frac{1}{\varepsilon_k^{(i+1)} - \varepsilon_k^{(i)}}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall i \geq -1 - \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor,$$

alors,

$$\varepsilon_{2N-2p}^{(2p-N+i)} = [p + i/N - p]_{f(t)} = [p/N - p]_{f(t)}, \forall p \in \mathbb{N}, \forall N \geq p, \forall i \in \mathbb{N}, \text{ pour } t = 1,$$

et donc la colonne d'indice $2N - 2p$ est constante, ce qui montre que

$$S_{i,N}^{(p)} = T_{i,N}^{(\varepsilon,p)} - T_{i-1,N}^{(\varepsilon,p)}, \forall i \geq 1,$$

et

$$S_{0,N}^{(p)} = T_{0,N}^{(\varepsilon,p)}.$$

En guise de conclusion : nous pouvons mettre en oeuvre la Padé-prédiction par l' ε -algorithme.

3.12 Les approximants de Padé-partiels

Nous pouvons trouver la définition de ces approximants de Padé-partiels dans [7] ou encore dans [16].

Définition

Soit $f(t) = \sum_{i \geq 0} c_i t^i$ une série formelle.

On se donne $x_1, x_2, \dots, x_r, y_1, y_2, \dots, y_s$ des éléments de \mathbb{K} , et on pose

$$x(t) = (1 - x_1 t)(1 - x_2 t) \dots (1 - x_r t) \in \mathbb{K}_r[t]$$

et

$$y(t) = (1 - y_1 t)(1 - y_2 t) \dots (1 - y_s t) \in \mathbb{K}_s[t].$$

S'il existe un couple $(v(t), w(t)) \in \mathbb{K}_q[t] \times \mathbb{K}_p[t]$ tel que

$$\begin{cases} v(0) = 1 \\ v(t) \wedge w(t) = 1 \\ \frac{w(t)}{v(t)} = \frac{y(t)}{x(t)} f(t) + O(t^{p+q+1}) \end{cases},$$

on dit que $\frac{w(t)x(t)}{v(t)y(t)}$ est l'approximant de Padé-partiel $[p/q]$ de $f(t)$ calculé à partir des polynômes $x(t)$ et $y(t)$.

Aussi, on note $\frac{w(t)}{v(t)} = [p/q]_{\frac{y(t)}{x(t)} f(t)}$.

L'existence du couple $(v(t), w(t)) \in \mathbb{K}_q[t] \times \mathbb{K}_p[t]$ est assurée par la condition

$$\begin{vmatrix} d_{p-q+1} & \dots & d_p \\ \vdots & & \vdots \\ d_p & \dots & d_{p+q-1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

avec par convention $d_i = 0$ si $i < 0$, et formellement $\sum_{i \geq 0} d_i t^i = \frac{y(t)}{x(t)} f(t)$.

Lorsque $x(t) = y(t) = 1$, l'approximant de Padé-partiel $[p/q]$ de $f(t)$ calculé à partir des polynômes $x(t)$ et $y(t)$, est exactement l'approximant de Padé $[p/q]$ de $f(t)$.

Théorème 3.28 Pour les approximants de Padé-partiels, on a la formule de Jacobi :

$$[p/q]_{\frac{y(t)}{x(t)}} f(t) = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=0}^{p-q} d_i t^{q+i} & \sum_{i=0}^{p-q-1} d_i t^{q-1+i} & \dots & \sum_{i=0}^p d_i t^i \\ d_{p-q+1} & d_{p-q+2} & \dots & d_{p+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_p & d_{p+1} & \dots & d_{p+q} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t^q & t^{q-1} & \dots & 1 \\ d_{p-q+1} & d_{p-q+2} & \dots & d_{p+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_p & d_{p+1} & \dots & d_{p+q} \end{vmatrix}}$$

avec par convention $d_i = 0$ si $i < 0$, et formellement $\sum_{i \geq 0} d_i t^i = \frac{y(t)}{x(t)} f(t)$.

3.13 La Padé-partiel-prédiction

Soit $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in \mathbb{K}^{N+1}$. On pose alors

$$P_N(t) = \sum_{i=0}^N S_i t^i \in \mathbb{K}_N[t].$$

On se donne $x_1, x_2, \dots, x_r, y_1, y_2, \dots, y_s$, des éléments de \mathbb{K} .

Soit (lorsqu'il existe) $\frac{w(t)x(t)}{v(t)y(t)}$, l'approximant de Padé partiel $[p/N-p]$ de $P_N(t)$ calculé à partir des polynômes $x(t) = (1 - x_1 t)(1 - x_2 t) \dots (1 - x_r t)$ et $y(t) = (1 - y_1 t)(1 - y_2 t) \dots (1 - y_s t)$.

Définition de la Padé-partiel-prédiction du point de vue algébrique

Nous définissons la suite prédite par la Padé-partiel-prédiction $(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$ calculée à partir des polynômes $x(t) = (1 - x_1 t)(1 - x_2 t) \dots (1 - x_r t)$ et $y(t) = (1 - y_1 t)(1 - y_2 t) \dots (1 - y_s t)$ du vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N}$ telle que, formellement

$$\sum_{i \geq 0} S_{i,N}^{(p)} t^i = \frac{w(t)x(t)}{v(t)y(t)}.$$

Nous notons $(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$ cette suite prédite par la Padé-partiel-prédiction calculée à partir des polynômes $x(t)$ et $y(t)$, parce que chaque terme de celle-ci dépend des valeurs de N et de p .

Condition d'existence de la Padé-partiel-prédiction du point de vue algébrique

Lorsque

$$\begin{vmatrix} T_{2p-N+1} & T_{2p-N+2} & \dots & T_p \\ T_{2p-N+2} & T_{2p-N+3} & \dots & T_{p+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ T_p & T_{p+1} & \dots & T_{N-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

avec par convention $T_i = 0$ si $i < 0$, et formellement $\sum_{i \geq 0} T_i t^i = \frac{y(t)}{x(t)} P_N(t)$, la Padé-partiel-prédiction

$(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$, calculée à partir du vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N}$ et à partir des polynômes $x(t)$ et $y(t)$, existe.

Nous notons cette condition $(H_N^{(p)})$ parce qu'elle dépend des valeurs de N et de p . Cette condition d'existence est toujours associée à une suite en particulier.

Soit le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in \mathbb{K}^{N+1}$ satisfaisant la condition $(H_N^{(p)})$, alors la suite $(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$, calculée à partir des polynômes $x(t) = (1 - x_1 t)(1 - x_2 t) \dots (1 - x_r t)$ et $y(t) = (1 - y_1 t)(1 - y_2 t) \dots (1 - y_s t)$, est une suite prédite à partir du vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N}$.

De cette façon, nous justifions l'attribution du mot prédiction à cette méthode.

Remarques concernant la Padé-partiel-prédiction et ses cas particuliers

1. La Padé-partiel-prédiction calculée à partir des polynômes $x(t) = (1 - x_1 t)(1 - x_2 t) \dots (1 - x_r t)$ et $y(t) = (1 - y_1 t)(1 - y_2 t) \dots (1 - y_s t)$ généralise

- (a) la Padé-prédiction qui est la Padé-partiel-prédiction calculée à partir des polynômes $x(t) = 1$ et $y(t) = 1$.
- (b) la type-Padé-prédiction calculée à partir du polynôme $y(t) = (1 - y_1 t)(1 - y_2 t) \dots (1 - y_s t)$, qui est la Padé-partiel-prédiction calculée à partir des polynômes $x(t) = 1$ et $y(t) = (1 - y_1 t)(1 - y_2 t) \dots (1 - y_s t)$.

2. Un cas particulier de la type-Padé-prédiction a déjà été établi par A. Sidi et D. Levin dans [20], sous la forme suivante.

Soit le vecteur $(a_i)_{0 \leq i \leq n'} \in \mathbb{K}^{n'+1}$, tel que $a_0 = 0$.

On pose alors

$$A_0(t) = 0$$

et

$$A_j(t) = \sum_{i=1}^j a_i t^{i-1} \in \mathbb{K}_{j-1}[t], \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n'\}.$$

On définit alors $T_{K,n}(t)$ par

$$T_{K,n}(t) = \frac{\sum_{j=0}^K \lambda_j^{(K,n)} t^{K-j} A_{n+j-1}(t)}{\sum_{j=0}^K \lambda_j^{(K,n)} t^{K-j}},$$

en posant $\lambda_K^{(K,n)} = 1$.

Il s'ensuit que la suite $(a_i^{(K,n)})_{i \geq 0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, telle que $a_0^{(K,n)} = 0$ et telle que formellement

$T_{K,n}(t) = \sum_{i \geq 1} a_i^{(K,n)} t^{i-1}$, est une suite prédite à partir du vecteur $(a_i)_{0 \leq i \leq n'}$.

D'une part, si on a $n' = n + 2K - 1$ et si les $\lambda_j^{(K,n)}$ (lorsqu'ils existent) sont déterminés de telle manière que $T_{K,n}(t) = A_{n'}(t) + O(t^{n'+1})$, alors $T_{K,n}(t)$ est l'approximant de Padé $[p/N-p]$ de $A_{n'}(t)$ (on a avec nos notations $p = n + K - 2$ et $N - p = K$). Et, il s'ensuit que la méthode de prédiction ainsi définie est une Padé-prédiction.

D'autre part, si on a $n' = n + K - 2$, et si les $\lambda_j^{(K,n)}$ sont déterminés par

$$\lambda_j^{(K,n)} = (-1)^{K-j} C_K^j \left(\frac{n+j}{n+K} \right)^{K-1} \frac{a_{n+K}}{a_{n+j}}, \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, K\},$$

la méthode de prédiction ainsi définie, appelée la t-prédiction car issue de la t-transformation, est une type-Padé-prédiction calculée (puisque $\lambda_K^{(K,n)} = 1$) à partir du polynôme $y(t) = \sum_{j=0}^K \lambda_j^{(K,n)} t^{K-j}$ (on a avec nos notations $p = n + K - 2$ et $N - p = 0$).

Théorème 3.29 Soit le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N}$ satisfaisant la condition $(H_N^{(p)})$, alors si $2p - N - s \geq 0$, la partie prédite par la type-Padé-prédiction de la suite $(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$, calculée à partir du polynôme $y(t) = (1 - y_1 t)(1 - y_2 t) \dots (1 - y_s t)$, c'est-à-dire $(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq N+1}$, est indépendante de $S_0, S_1, \dots, S_{2p-N-s-1}$ et S_{2p-N-s} .

Démonstration

D'après le théorème 3.2, $(1 - y_1 t)(1 - y_2 t) \dots (1 - y_s t) \sum_{i \geq N+1} S_{i,N}^{(p)} t^i$ ne dépend ni de S_0 , ni de S_1, \dots , ni de S_{2p-N-1} , ni de S_{2p-N} .

Si on pose

$$(1 - y_1 t)(1 - y_2 t) \dots (1 - y_s t) = y^{(s)} t^s + y^{(s-1)} t^{s-1} + \dots + y^{(0)}$$

avec $y^{(0)} = 1$, alors on obtient que

$$\sum_{i \geq N+1} (y^{(0)} S_{i,N}^{(p)} + y^{(1)} S_{i-1,N}^{(p)} + \dots + y^{(s-1)} S_{i+1-s,N}^{(p)} + y^{(s)} S_{i-s,N}^{(p)}) t^i$$

ne dépend ni de S_0 , ni de S_1, \dots , ni de S_{2p-N-1} , ni de S_{2p-N} .

Il suit que $\sum_{i \geq N+1} S_{i,N}^{(p)} t^i$ ne dépend ni de S_0 , ni de S_1, \dots , ni de $S_{2p-N-s-1}$, ni de S_{2p-N-s} et donc la partie prédite ne dépend ni de S_0 , ni de S_1, \dots , ni de $S_{2p-N-s-1}$, ni de S_{2p-N-s} .

3.14 Quelques exemples théoriques de la Padé-partiel-prédiction

Etudions sur de simples exemples (i.e. pour de petites valeurs de N) l'expression des termes de suites prédites par la Padé-partiel-prédiction.

Exemple 3.6 La type-Padé-prédiction calculée à partir du polynôme $y(t) = 1 - t$, en prenant $N = 2$ et $p = 1$.

$$P_2(t) = S_0 + S_1 t + S_2 t^2.$$

$$[1/1]_{(1-t)P_2(t)} = \frac{S_0(S_1 - S_0) + (S_1^2 + S_0^2 - S_0 S_1 - S_0 S_2)t}{S_1 - S_0 - (S_2 - S_1)t}.$$

D'où

$$\begin{cases} S_{0,2}^{(1)} = S_0 \\ S_{1,2}^{(1)} = S_1 \\ S_{2,2}^{(1)} = S_2 \\ S_{i,2}^{(1)} = S_2 + \frac{(S_2 - S_1)^2}{S_1 - S_0} + \frac{(S_2 - S_1)^3}{(S_1 - S_0)^2} + \dots + \frac{(S_2 - S_1)^{i-1}}{(S_1 - S_0)^{i-2}}, \quad \forall i \geq 3, \text{ lorsque } S_1 \neq S_0. \end{cases}$$

Exemple 3.7 La Padé-partiel-prédiction calculée à partir des polynômes $x(t) = 1 + t$ et $y(t) = 1$, en prenant $N = 2$ et $p = 1$.

$$P_2(t) = S_0 + S_1 t + S_2 t^2.$$

$$[1/1]_{\frac{P_2(t)}{(1+t)}} = \frac{S_0(S_1 - S_0) + (S_1^2 - S_0 S_1 - S_0 S_2)t}{S_1 - S_0 - (S_2 - S_1 + S_0)t}.$$

D'où

$$\begin{cases} S_{0,2}^{(1)} = S_0 \\ S_{1,2}^{(1)} = S_1 \\ S_{2,2}^{(1)} = S_2 \\ S_{i,2}^{(1)} = \frac{(S_2 - S_1 + S_0)^{i-1} + (S_1 - S_0)(S_2 - S_1 + S_0)^{i-2}}{(S_1 - S_0)^{i-2}}, \quad \forall i \geq 3, \text{ lorsque } S_1 \neq S_0. \end{cases}$$

3.15 Extrapolation exponentielle et Padé-partiel-prédiction

L'extrapolation exponentielle, exposée dans [12, pp. 272-280], et la type-Padé-prédiction sont connectées de façon élémentaire.

Théorème 3.30 On suppose préalablement que $2p - N - s \geq -1$.

Soit le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in \mathbb{K}^{N+1}$ satisfaisant la condition $(H_N^{(p)})$. Lorsque le système (S) admet une solution, la type-Padé-prédiction calculée à partir du polynôme $y(t) = (1 - y_1 t)(1 - y_2 t) \dots (1 - y_s t)$, en supposant que $y_i \neq y_j$ lorsque $i \neq j$, est une méthode de prédiction identique à de l'extrapolation exponentielle à s puissances imposées du vecteur initial tronqué de ses $(2p - N - s + 1)$ premiers termes ; ceci signifie que si on définit $(T_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$ par

$$\begin{cases} T_{i,N}^{(p)} = S_i, \forall i \in \{0, 1, \dots, 2p - N - s\} \\ T_{i,N}^{(p)} = a_1 b_1^{i+N+s-2p-1} + \dots + a_{N-p} b_{N-p}^{i+N+s-2p-1} \\ \quad + c_1 y_1^{i+N+s-2p-1} + c_2 y_2^{i+N+s-2p-1} + \dots + c_s y_s^{i+N+s-2p-1}, \forall i \geq 2p - N - s + 1 \end{cases}$$

où $a_1, a_2, \dots, a_{N-p}, b_1, b_2, \dots, b_{N-p}, c_1, c_2, \dots, c_s$, sont déterminés comme solutions du système (S) non linéaire suivant :

$$\begin{cases} S_{2p-N-s+1} = a_1 + \dots + a_{N-p} + c_1 + c_2 + \dots + c_s \\ S_{2p-N-s+2} = a_1 b_1 + \dots + a_{N-p} b_{N-p} + c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_s y_s \\ \quad \vdots \\ S_N = a_1 b_1^{2N+s-2p-1} + \dots + a_{N-p} b_{N-p}^{2N+s-2p-1} \\ \quad + c_1 y_1^{2N+s-2p-1} + c_2 y_2^{2N+s-2p-1} + \dots + c_s y_s^{2N+s-2p-1} \end{cases}$$

alors

$$T_{i,N}^{(p)} = S_{i,N}^{(p)}, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Démonstration

On a

$$\begin{aligned} P_N(t) &= \sum_{i=0}^N S_i t^i \\ &= \sum_{i=0}^{2p-N-s} S_i t^i + \sum_{i=2p-N-s+1}^N S_i t^i \\ &= \sum_{i=0}^{2p-N-s} S_i t^i + \sum_{i=2p-N-s+1}^N (a_1 b_1^{i+N+s-2p-1} + \dots + a_{N-p} b_{N-p}^{i+N+s-2p-1} \\ &\quad + c_1 y_1^{i+N+s-2p-1} + c_2 y_2^{i+N+s-2p-1} + \dots + c_s y_s^{i+N+s-2p-1}) t^i \\ &= \sum_{i=0}^{2p-N-s} S_i t^i + t^{2p-N-s+1} \sum_{i=0}^{2N+s-2p-1} (a_1 b_1^i + \dots + a_{N-p} b_{N-p}^i \\ &\quad + c_1 y_1^i + c_2 y_2^i + \dots + c_s y_s^i) t^i, \end{aligned}$$

et formellement

$$P_N(t) = \sum_{i=0}^{2p-N-s} S_i t^i + t^{2p-N-s+1} \left(\frac{a_1}{1-b_1 t} + \dots + \frac{a_{N-p}}{1-b_{N-p} t} + \frac{c_1}{1-y_1 t} + \frac{c_2}{1-y_2 t} + \dots + \frac{c_s}{1-y_s t} \right) + O(t^{N+1}).$$

On pose maintenant

$$\begin{cases} u(t) = \sum_{i=0}^{2p-N-s} S_i t^i \in \mathbb{K}_{2p-N-s}[t] \\ \frac{a(t)}{b(t)} = \frac{a_1}{1-b_1 t} + \dots + \frac{a_{N-p}}{1-b_{N-p} t} \\ \text{où } a(t) \in \mathbb{K}_{N-p-1}[t] \text{ et } b(t) \in \mathbb{K}_{N-p}[t] \\ \text{et } \frac{c(t)}{y(t)} = \frac{c_1}{1-y_1 t} + \frac{c_2}{1-y_2 t} + \dots + \frac{c_s}{1-y_s t} \\ \text{où } c(t) \in \mathbb{K}_{s-1}[t] \text{ et } y(t) = (1-y_1 t)(1-y_2 t) \dots (1-y_s t) \in \mathbb{K}_s[t] \end{cases}$$

Il s'ensuit que, formellement :

$$P_N(t) = \frac{b(t)u(t)y(t) + t^{2p-N-s+1}(a(t)y(t) + b(t)c(t))}{b(t)y(t)} + O(t^{N+1}).$$

Ce qui implique que

$$[p/N - p]_{y(t)P_N(t)} = \frac{b(t)u(t)y(t) + t^{2p-N-s+1}(a(t)y(t) + b(t)c(t))}{b(t)}$$

parce que $b(t)u(t)y(t) + t^{2p-N-s+1}(a(t)y(t) + b(t)c(t)) \in \mathbb{K}_p[t]$, que $b(t) \in \mathbb{K}_{N-p}[t]$, et d'après la définition même des approximants de Padé.

Ainsi, formellement,

$$\sum_{i \geq 0} S_{i,N}^{(p)} t^i = \sum_{i=0}^{2p-N-s} S_i t^i + t^{2p-N-s+1} \sum_{i \geq 0} (a_1 b_1^i + \dots + a_{N-p} b_{N-p}^i + c_1 y_1^i + c_2 y_2^i + \dots + c_s y_s^i) t^i,$$

puis,

$$\begin{cases} S_{i,N}^{(p)} = S_i, \forall i \in \{0, 1, \dots, 2p-N-s\} \\ S_{i,N}^{(p)} = a_1 b_1^{i+N+s-2p-1} + \dots + a_{N-p} b_{N-p}^{i+N+s-2p-1} \\ \quad + c_1 y_1^{i+N+s-2p-1} + c_2 y_2^{i+N+s-2p-1} + \dots + c_s y_s^{i+N+s-2p-1}, \forall i \geq 2p-N-s+1 \end{cases}$$

et donc, $T_{i,N}^{(p)} = S_{i,N}^{(p)}, \forall i \in \mathbb{N}$.

Nous généralisons le théorème précédent par le suivant :

Théorème 3.31 On suppose préalablement que $2p - N - s \geq -1$.

Soit le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in \mathbb{K}^{N+1}$ satisfaisant la condition $(H_N^{(p)})$. Lorsque le système (S) admet une solution, la type-Padé-prédiction calculée à partir du polynôme $y(t) = (1-y_1 t)^{\alpha_1} (1-y_2 t)^{\alpha_2} \dots (1-y_\sigma t)^{\alpha_\sigma}$, en supposant que $y_i \neq y_j$ lorsque $i \neq j$ et que $s = \sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i$, est une méthode de prédiction identique à une dégénérescence de l'extrapolation exponentielle à s puissances imposées du vecteur initial tronqué de ses $(2p - N - s + 1)$ premiers termes ; ceci signifie que si on définit $(T_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$ par

$$\begin{cases} T_{i,N}^{(p)} = S_i, \forall i \in \{0, 1, \dots, 2p-N-s\} \\ T_{i,N}^{(p)} = a_1 b_1^{i+N+s-2p-1} + \dots + a_{N-p} b_{N-p}^{i+N+s-2p-1} \\ \quad + \sum_{l=1}^{\sigma} (\beta_{l,0} + \beta_{l,1} i + \dots + \beta_{l,\alpha_l-1} i^{\alpha_l-1}) y_l^{i+N+s-2p-1}, \forall i \geq 2p-N-s+1 \end{cases}$$

où $a_1, a_2, \dots, a_{N-p}, \beta_{1,0}, \beta_{1,1}, \dots, \beta_{1,\alpha_1-1}, \beta_{2,0}, \dots, \beta_{\sigma-1,\alpha_{\sigma-1}-1}, \beta_{\sigma,0}, \beta_{\sigma,1}, \dots, \beta_{\sigma,\alpha_\sigma-1}$, sont déterminés comme solutions du système (S) non linéaire suivant :

$$\begin{cases} S_{2p-N-s+1} = a_1 + \dots + a_{N-p} \\ \quad + \sum_{l=1}^{\sigma} (\beta_{l,0} + \beta_{l,1}(2p-N-s+1) + \dots + \beta_{l,\alpha_l-1}(2p-N-s+1)^{\alpha_l-1}) \\ S_{2p-N-s+2} = a_1 b_1 + \dots + a_{N-p} b_{N-p} \\ \quad + \sum_{l=1}^{\sigma} (\beta_{l,0} + \beta_{l,1}(2p-N-s+2) + \dots + \beta_{l,\alpha_l-1}(2p-N-s+2)^{\alpha_l-1}) y_l \\ \vdots \\ S_N = a_1 b_1^{2N+s-2p-1} + \dots + a_{N-p} b_{N-p}^{2N+s-2p-1} \\ \quad + \sum_{l=1}^{\sigma} (\beta_{l,0} + \beta_{l,1} N + \dots + \beta_{l,\alpha_l-1} N^{\alpha_l-1}) y_l^{2N+s-2p-1} \end{cases}$$

alors

$$T_{i,N}^{(p)} = S_{i,N}^{(p)}, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Démonstration

On a

$$\begin{aligned} P_N(t) &= \sum_{i=0}^N S_i t^i \\ &= \sum_{i=0}^{2p-N-s} S_i t^i + \sum_{i=2p-N-s+1}^N S_i t^i \\ &= \sum_{i=0}^{2p-N-s} S_i t^i + \sum_{i=2p-N-s+1}^N (a_1 b_1^{i+N+s-2p-1} + \dots + a_{N-p} b_{N-p}^{i+N+s-2p-1} \\ &\quad + \sum_{l=1}^{\sigma} (\beta_{l,0} + \beta_{l,1} i + \dots + \beta_{l,\alpha_l-1} i^{\alpha_l-1}) y_l^{i+N+s-2p-1}) t^i \\ &= \sum_{i=0}^{2p-N-s} S_i t^i + t^{2p-N-s+1} \sum_{i=0}^{2N+s-2p-1} (a_1 b_1^i + \dots + a_{N-p} b_{N-p}^i \\ &\quad + \sum_{l=1}^{\sigma} (\beta_{l,0} + \beta_{l,1}(i+2p-N-s+1) + \dots + \beta_{l,\alpha_l-1}(i+2p-N-s+1)^{\alpha_l-1}) y_l^i) t^i, \end{aligned}$$

et, formellement

$$P_N(t) = \sum_{i=0}^{2p-N-s} S_i t^i + t^{2p-N-s+1} \left(\frac{a_1}{1-b_1 t} + \dots + \frac{a_{N-p}}{1-b_{N-p} t} \right) + \sum_{l=1}^{\sigma} \left(\frac{\gamma_{l,0}}{1-y_l t} + \frac{\gamma_{l,1}}{(1-y_l t)^2} + \dots + \frac{\gamma_{l,\alpha_l-1}}{(1-y_l t)^{\alpha_l}} \right) + O(t^{N+1}),$$

$$\text{où } \beta_{l,0} + \beta_{l,1}(i+2p-N-s+1) + \dots + \beta_{l,\alpha_l-1}(i+2p-N-s+1)^{\alpha_l-1} = \gamma_{l,0} + \gamma_{l,1}(i+1) + \gamma_{l,2} \frac{(i+1)(i+2)}{2} + \dots + \gamma_{l,\alpha_l-1} \frac{(i+1)(i+2)\dots(i+\alpha_l-1)}{(\alpha_l-1)!}.$$

On pose maintenant

$$\left\{ \begin{array}{l} u(t) = \sum_{i=0}^{2p-N-s} S_i t^i \in \mathbb{K}_{2p-N-s}[t] \\ a(t) = \frac{a_1}{1-b_1 t} + \dots + \frac{a_{N-p}}{1-b_{N-p} t} \\ b(t) = \frac{a(t)}{1-b_1 t} + \dots + \frac{a_{N-p}}{1-b_{N-p} t} \\ \text{où } a(t) \in \mathbb{K}_{N-p-1}[t] \text{ et } b(t) \in \mathbb{K}_{N-p}[t] \\ \text{et } \frac{c(t)}{y(t)} = \sum_{l=1}^{\sigma} \left(\frac{\gamma_{l,0}}{1-y_l t} + \frac{\gamma_{l,1}}{(1-y_l t)^2} + \dots + \frac{\gamma_{l,\alpha_l-1}}{(1-y_l t)^{\alpha_l}} \right) \\ \text{où } c(t) \in \mathbb{K}_{s-1}[t] \text{ et } y(t) = (1-y_1 t)^{\alpha_1} (1-y_2 t)^{\alpha_2} \dots (1-y_{\sigma} t)^{\alpha_{\sigma}} \in \mathbb{K}_s[t] \end{array} \right.$$

Il s'ensuit que, formellement :

$$P_N(t) = \frac{b(t)u(t)y(t) + t^{2p-N-s+1}(a(t)y(t) + b(t)c(t))}{b(t)y(t)} + O(t^{N+1}).$$

Ce qui implique que

$$[p/N - p]_{y(t)} P_N(t) = \frac{b(t)u(t)y(t) + t^{2p-N-s+1}(a(t)y(t) + b(t)c(t))}{b(t)}$$

parce que $b(t)u(t)y(t) + t^{2p-N-s+1}(a(t)y(t) + b(t)c(t)) \in \mathbb{K}_p[t]$, que $b(t) \in \mathbb{K}_{N-p}[t]$, et d'après la définition même des approximants de Padé.

Ainsi, formellement,

$$\sum_{i \geq 0} S_{i,N}^{(p)} t^i = \sum_{i=0}^{2p-N-s} S_i t^i + t^{2p-N-s+1} \sum_{i \geq 0} (a_1 b_1^i + \dots + a_{N-p} b_{N-p}^i) + \sum_{l=1}^{\sigma} (\beta_{l,0} + \beta_{l,1}(i+2p-N-s+1) + \dots + \beta_{l,\alpha_l-1}(i+2p-N-s+1)^{\alpha_l-1}) y_l^i t^i,$$

puis,

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{i,N}^{(p)} = S_i, \forall i \in \{0, 1, \dots, 2p-N-s\} \\ S_{i,N}^{(p)} = a_1 b_1^{i+N+s-2p-1} + \dots + a_{N-p} b_{N-p}^{i+N+s-2p-1} \\ \quad + \sum_{l=1}^{\sigma} (\beta_{l,0} + \beta_{l,1}i + \dots + \beta_{l,\alpha_l-1} i^{\alpha_l-1}) y_l^{i+N+s-2p-1}, \forall i \geq 2p-N-s+1 \end{array} \right.$$

et donc, $T_{i,N}^{(p)} = S_{i,N}^{(p)}, \forall i \in \mathbb{N}$.

Théorème 3.32 On suppose préalablement que $2p-N-s \leq -1$.

Soit le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in \mathbb{K}^{N+1}$ satisfaisant la condition $(H_N^{(p)})$. Lorsque le système (S) admet une solution, la type-Padé-prédiction calculée à partir du polynôme $y(t) = (1-y_1 t)(1-y_2 t) \dots (1-y_s t)$, en supposant que $y_i \neq y_j$ lorsque $i \neq j$, est une méthode de prédiction identique à de l'extrapolation exponentielle à s puissances imposées du vecteur initial précédé de $(N+s-2p-1)$ zéros ; ceci signifie que si on définit $(T_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$ par

$$T_{i,N}^{(p)} = a_1 b_1^{i+N+s-2p-1} + \dots + a_{N-p} b_{N-p}^{i+N+s-2p-1} + c_1 y_1^{i+N+s-2p-1} + c_2 y_2^{i+N+s-2p-1} + \dots + c_s y_s^{i+N+s-2p-1}, \forall i \in \mathbb{N}$$

où $a_1, a_2, \dots, a_{N-p}, b_1, b_2, \dots, b_{N-p}, c_1, c_2, \dots, c_s$, sont déterminés comme solutions du système (S) non linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = a_1 + \dots + a_{N-p} + c_1 + c_2 + \dots + c_s \\ 0 = a_1 b_1 + \dots + a_{N-p} b_{N-p} + c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_s y_s \\ \vdots \\ 0 = a_1 b_1^{N+s-2p-2} + \dots + a_{N-p} b_{N-p}^{N+s-2p-2} \\ \quad + c_1 y_1^{N+s-2p-2} + c_2 y_2^{N+s-2p-2} + \dots + c_s y_s^{N+s-2p-2} \\ S_0 = a_1 b_1^{N+s-2p-1} + \dots + a_{N-p} b_{N-p}^{N+s-2p-1} \\ \quad + c_1 y_1^{N+s-2p-1} + c_2 y_2^{N+s-2p-1} + \dots + c_s y_s^{N+s-2p-1} \\ S_1 = a_1 b_1^{N+s-2p} + \dots + a_{N-p} b_{N-p}^{N+s-2p} \\ \quad + c_1 y_1^{N+s-2p} + c_2 y_2^{N+s-2p} + \dots + c_s y_s^{N+s-2p} \\ \vdots \\ S_N = a_1 b_1^{2N+s-2p-1} + \dots + a_{N-p} b_{N-p}^{2N+s-2p-1} \\ \quad + c_1 y_1^{2N+s-2p-1} + c_2 y_2^{2N+s-2p-1} + \dots + c_s y_s^{2N+s-2p-1} \end{array} \right. ,$$

alors

$$T_{i,N}^{(p)} = S_{i,N}^{(p)}, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Démonstration

On a

$$\begin{aligned} P_N(t) &= \sum_{i=0}^N S_i t^i \\ &= \sum_{i=2p-N-s+1}^N S_i t^i, \text{ avec pour convention } S_i = 0 \text{ lorsque } i < 0 \\ &= \sum_{i=2p-N-s+1}^N (a_1 b_1^{i+N+s-2p-1} + \dots + a_{N-p} b_{N-p}^{i+N+s-2p-1} \\ &\quad + c_1 y_1^{i+N+s-2p-1} + c_2 y_2^{i+N+s-2p-1} + \dots + c_s y_s^{i+N+s-2p-1}) t^i \\ &= t^{2p-N-s+1} \sum_{i=0}^{2N+s-2p-1} (a_1 b_1^i + \dots + a_{N-p} b_{N-p}^i \\ &\quad + c_1 y_1^i + c_2 y_2^i + \dots + c_s y_s^i) t^i, \end{aligned}$$

et, formellement

$$P_N(t) = t^{2p-N-s+1} \left(\frac{a_1}{1-b_1 t} + \dots + \frac{a_{N-p}}{1-b_{N-p} t} + \frac{c_1}{1-y_1 t} + \frac{c_2}{1-y_2 t} + \dots + \frac{c_s}{1-y_s t} \right) + O(t^{N+1}).$$

On pose maintenant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a(t)}{b(t)} = \frac{a_1}{1-b_1 t} + \dots + \frac{a_{N-p}}{1-b_{N-p} t} \\ \text{où } a(t) \in \mathbb{K}_{N-p-1}[t] \text{ et } b(t) \in \mathbb{K}_{N-p}[t] \\ \text{et } \frac{c(t)}{y(t)} = \frac{c_1}{1-y_1 t} + \frac{c_2}{1-y_2 t} + \dots + \frac{c_s}{1-y_s t} \\ \text{où } c(t) \in \mathbb{K}_{s-1}[t] \text{ et } y(t) = (1-y_1 t)(1-y_2 t) \dots (1-y_s t) \in \mathbb{K}_s[t] \end{array} \right.$$

Il s'ensuit que, formellement :

$$P_N(t) = \frac{t^{2p-N-s+1} (a(t)y(t) + b(t)c(t))}{b(t)y(t)} + O(t^{N+1}).$$

Ce qui implique que

$$[p/N - p]_{y(t)} P_N(t) = \frac{t^{2p-N-s+1} (a(t)y(t) + b(t)c(t))}{b(t)}$$

parce que $t^{2p-N-s+1} (a(t)y(t) + b(t)c(t)) \in \mathbb{K}_p[t]$, que $b(t) \in \mathbb{K}_{N-p}[t]$, et d'après la définition même des approximants de Padé.

Ainsi, formellement,

$$\sum_{i \geq 0} S_{i,N}^{(p)} t^i = t^{2p-N-s+1} \sum_{i \geq 0} (a_1 b_1^i + \dots + a_{N-p} b_{N-p}^i + c_1 y_1^i + c_2 y_2^i + \dots + c_s y_s^i) t^i,$$

puis,

$$\begin{cases} S_{i,N}^{(p)} = a_1 b_1^{i+N+s-2p-1} + \dots + a_{N-p} b_{N-p}^{i+N+s-2p-1} \\ \quad + c_1 y_1^{i+N+s-2p-1} + c_2 y_2^{i+N+s-2p-1} + \dots + c_s y_s^{i+N+s-2p-1}, \forall i \in \mathbb{N} \end{cases}$$

et donc, $T_{i,N}^{(p)} = S_{i,N}^{(p)}$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

Nous généralisons le théorème précédent en le suivant :

Théorème 3.33 *On suppose préalablement que $2p - N - s \leq -1$.*

Soit le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in \mathbb{K}^{N+1}$ satisfaisant la condition $(H_N^{(p)})$. Lorsque le système (S) admet une solution, la type-Padé-prédiction calculée à partir du polynôme $y(t) = (1-y_1 t)^{\alpha_1} (1-y_2 t)^{\alpha_2} \dots (1-y_\sigma t)^{\alpha_\sigma}$, en supposant que $y_i \neq y_j$ lorsque $i \neq j$ et que $s = \sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i$, est une méthode de prédiction identique à une dégénérescence de l'extrapolation exponentielle à s puissances imposées du vecteur initial précédé de $(N + s - 2p - 1)$ zéros ; ceci signifie que si on définit $(T_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$ par

$$\begin{aligned} T_{i,N}^{(p)} &= a_1 b_1^{i+N+s-2p-1} + \dots + a_{N-p} b_{N-p}^{i+N+s-2p-1} \\ &+ \sum_{l=1}^{\sigma} (\beta_{l,0} + \beta_{l,1} i + \dots + \beta_{l,\alpha_l-1} i^{\alpha_l-1}) y_l^{i+N+s-2p-1}, \forall i \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

où $a_1, a_2, \dots, a_{N-p}, \beta_{1,0}, \beta_{1,1}, \dots, \beta_{1,\alpha_1-1}, \beta_{2,0}, \dots, \beta_{\sigma-1,\alpha_{\sigma-1}-1}, \beta_{\sigma,0}, \beta_{\sigma,1}, \dots, \beta_{\sigma,\alpha_\sigma-1}$ sont déterminés comme solutions du système (S) non linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = a_1 + \dots + a_{N-p} \\ \quad + \sum_{l=1}^{\sigma} (\beta_{l,0} + \beta_{l,1}(2p - N - s + 1) + \dots + \beta_{l,\alpha_l-1}(2p - N - s + 1)^{\alpha_l-1}) \\ 0 = a_1 b_1 + \dots + a_{N-p} b_{N-p} \\ \quad + \sum_{l=1}^{\sigma} (\beta_{l,0} + \beta_{l,1}(2p - N - s + 2) + \dots + \beta_{l,\alpha_l-1}(2p - N - s + 2)^{\alpha_l-1}) y_l \\ \vdots \\ 0 = a_1 b_1^{N+s-2p-2} + \dots + a_{N-p} b_{N-p}^{N+s-2p-2} \\ \quad + \sum_{l=1}^{\sigma} (\beta_{l,0} - \beta_{l,1} + \dots + \beta_{l,\alpha_l-1} (-1)^{\alpha_l-1}) y_l^{N+s-2p-2} \\ S_0 = a_1 b_1^{N+s-2p-1} + \dots + a_{N-p} b_{N-p}^{N+s-2p-1} \\ \quad + \sum_{l=1}^{\sigma} (\beta_{l,0}) y_l^{N+s-2p-1} \\ S_1 = a_1 b_1^{N+s-2p} + \dots + a_{N-p} b_{N-p}^{N+s-2p} \\ \quad + \sum_{l=1}^{\sigma} (\beta_{l,0} + \beta_{l,1} + \dots + \beta_{l,\alpha_l-1}) y_l^{N+s-2p} \\ \vdots \\ S_N = a_1 b_1^{2N+s-2p-1} + \dots + a_{N-p} b_{N-p}^{2N+s-2p-1} \\ \quad + \sum_{l=1}^{\sigma} (\beta_{l,0} + \beta_{l,1} N + \dots + \beta_{l,\alpha_l-1} N^{\alpha_l-1}) y_l^{2N+s-2p-1} \end{array} \right.$$

alors

$$T_{i,N}^{(p)} = S_{i,N}^{(p)}, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Démonstration

On a

$$\begin{aligned} P_N(t) &= \sum_{i=0}^N S_i t^i \\ &= \sum_{i=2p-N-s+1}^N S_i t^i, \text{ avec pour convention } S_i = 0 \text{ lorsque } i < 0 \\ &= \sum_{i=2p-N-s+1}^N (a_1 b_1^{i+N+s-2p-1} + \dots + a_{N-p} b_{N-p}^{i+N+s-2p-1} \\ &\quad + \sum_{l=1}^{\sigma} (\beta_{l,0} + \beta_{l,1} i + \dots + \beta_{l,\alpha_l-1} i^{\alpha_l-1}) y_l^{i+N+s-2p-1}) t^i \\ &= t^{2p-N-s+1} \sum_{i=0}^{2N+s-2p-1} (a_1 b_1^i + \dots + a_{N-p} b_{N-p}^i \\ &\quad + \sum_{l=1}^{\sigma} (\beta_{l,0} + \beta_{l,1}(i+2p-N-s+1) + \dots + \beta_{l,\alpha_l-1}(i+2p-N-s+1)^{\alpha_l-1}) y_l^i) t^i, \end{aligned}$$

et, formellement

$$P_N(t) = t^{2p-N-s+1} \left(\frac{a_1}{1-b_1 t} + \dots + \frac{a_{N-p}}{1-b_{N-p} t} \right)$$

$$+ \sum_{l=1}^{\sigma} \left(\frac{\gamma_{l,0}}{1-y_l t} + \frac{\gamma_{l,1}}{(1-y_l t)^2} + \dots + \frac{\gamma_{l,\alpha_l-1}}{(1-y_l t)^{\alpha_l}} \right) + O(t^{N+1}).$$

$$\begin{aligned} \text{où } & \beta_{l,0} + \beta_{l,1}(i+2p-N-s+1) + \dots + \beta_{l,\alpha_l-1}(i+2p-N-s+1)^{\alpha_l-1} \\ & = \gamma_{l,0} + \gamma_{l,1}(i+1) + \gamma_{l,2} \frac{(i+1)(i+2)}{2} + \dots + \gamma_{l,\alpha_l-1} \frac{(i+1)(i+2)\dots(i+\alpha_l-1)}{(\alpha_l-1)!}. \end{aligned}$$

On pose maintenant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a(t)}{b(t)} = \frac{a_1}{1-b_1 t} + \dots + \frac{a_{N-p}}{1-b_{N-p} t} \\ \text{où } a(t) \in \mathbb{K}_{N-p-1}[t] \text{ et } b(t) \in \mathbb{K}_{N-p}[t] \\ \text{et } \frac{c(t)}{y(t)} = \sum_{l=1}^{\sigma} \left(\frac{\gamma_{l,0}}{1-y_l t} + \frac{\gamma_{l,1}}{(1-y_l t)^2} + \dots + \frac{\gamma_{l,\alpha_l-1}}{(1-y_l t)^{\alpha_l}} \right) \\ \text{où } c(t) \in \mathbb{K}_{s-1}[t] \text{ et } y(t) = (1-y_1 t)^{\alpha_1} (1-y_2 t)^{\alpha_2} \dots (1-y_{\sigma} t)^{\alpha_{\sigma}} \in \mathbb{K}_s[t] \end{array} \right.$$

Il s'ensuit que, formellement :

$$P_N(t) = \frac{t^{2p-N-s+1}(a(t)y(t) + b(t)c(t))}{b(t)y(t)} + O(t^{N+1}).$$

Ce qui implique que

$$[p/N - p]_{y(t)P_N(t)} = \frac{t^{2p-N-s+1}(a(t)y(t) + b(t)c(t))}{b(t)}$$

parce que $t^{2p-N-s+1}(a(t)y(t) + b(t)c(t)) \in \mathbb{K}_p[t]$, que $b(t) \in \mathbb{K}_{N-p}[t]$, et d'après la définition même des approximants de Padé.

Ainsi, formellement,

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq 0} S_{i,N}^{(p)} t^i &= t^{2p-N-s+1} \sum_{i \geq 0} (a_1 b_1^i + \dots + a_{N-p} b_{N-p}^i) \\ &+ \sum_{l=1}^{\sigma} (\beta_{l,0} + \beta_{l,1}(i+2p-N-s+1) + \dots + \beta_{l,\alpha_l-1}(i+2p-N-s+1)^{\alpha_l-1}) y_l^i t^i, \end{aligned}$$

puis,

$$\begin{aligned} S_{i,N}^{(p)} &= a_1 b_1^{i+N+s-2p-1} + \dots + a_{N-p} b_{N-p}^{i+N+s-2p-1} \\ &+ \sum_{l=1}^{\sigma} (\beta_{l,0} + \beta_{l,1}i + \dots + \beta_{l,\alpha_l-1} i^{\alpha_l-1}) y_l^{i+N+s-2p-1}, \quad \forall i \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

et donc, $T_{i,N}^{(p)} = S_{i,N}^{(p)}$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

Dans le cas où la Padé-partiel-prédiction est calculée à l'aide des polynômes $x(t)$ et $y(t)$ et que $x(t) \neq 1$, le lien entre l'extrapolation exponentielle et cette Padé-partiel-prédiction n'est encore pas établi.

3.16 Propriétés de relations entre Padé-partiel-prédictions

Le chapitre 4 reprend certaines de ces propriétés. Cependant, le théorème suivant fournit de nouvelles méthodes de prédiction à l'aide des points (i), (ii), (iii) et (iv).

Théorème 3.34 *Il existe des vecteurs $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in \mathbb{K}^{N+1}$ et $(T_i)_{0 \leq i \leq N} \in \mathbb{K}^{N+1}$ vérifiant tous les deux la condition $(H_N^{(p)})$ et fournissant respectivement les suites $(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$ et $(T_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$ par la Padé-partiel-prédiction calculée à l'aide des polynômes $x(t) = (1-x_1 t)(1-x_2 t) \dots (1-x_r t) \in \mathbb{K}_r[t]$ et $y(t) =$*

$(1 - y_1 t)(1 - y_2 t) \dots (1 - y_s t) \in \mathbb{K}_s[t]$, et un élément a de \mathbb{K} tels que :

- (i) $S_{i,N}^{(p)} + T_{i,N}^{(p)} \neq U_{i,N}^{(p)}$ où $(U_i)_{0 \leq i \leq N}$ est un vecteur donné par $U_i = S_i + T_i$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, N\}$,
fournissant la suite $(U_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$ par la même Padé - partiel - prédiction
- (ii) $S_{i,N}^{(p)} * T_{i,N}^{(p)} \neq V_{i,N}^{(p)}$ où $(V_i)_{0 \leq i \leq N}$ est un vecteur donné par $V_i = S_i * T_i$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, N\}$.
fournissant la suite $(V_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$ par la même Padé - partiel - prédiction
- (iii) $\frac{1}{S_{i,N}^{(p)}} \neq W_{i,N}^{(p)}$ où $(W_i)_{0 \leq i \leq N}$ est un vecteur donné par $W_i = \frac{1}{S_i}$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, N\}$,
fournissant la suite $(W_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$ par la même Padé - partiel - prédiction
- (iv) $S_{i,N}^{(p)} + a \neq X_{i,N}^{(p)}$ où $(X_i)_{0 \leq i \leq N}$ est un vecteur donné par $X_i = S_i + a$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, N\}$.
fournissant la suite $(X_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$ par la même Padé - partiel - prédiction.

D'autre part, soient le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in \mathbb{K}^{N+1}$, vérifiant la condition $(H_N^{(p)})$ et fournissant la suite $(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$ par la Padé-partiel-prédiction calculée à l'aide des polynômes $x(t) = (1 - x_1 t)(1 - x_2 t) \dots (1 - x_r t) \in \mathbb{K}_r[t]$ et $y(t) = (1 - y_1 t)(1 - y_2 t) \dots (1 - y_s t) \in \mathbb{K}_s[t]$, et $a \in \mathbb{K}$, alors

- (v) $a \cdot S_{i,N}^{(p)} = Y_{i,N}^{(p)}$ où $(Y_i)_{0 \leq i \leq N}$ est un vecteur donné par $Y_i = a \cdot S_i$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, N\}$,
fournissant la suite $(Y_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$ par la même Padé - partiel - prédiction
- (vi) $a^i \cdot S_{i,N}^{(p)} = Z_{i,N}^{(p)}$ où $(Z_i)_{0 \leq i \leq N}$ est un vecteur donné par $Z_i = a^i \cdot S_i$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, N\}$.
fournissant la suite $(Z_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$ par la Padé - partiel - prédiction calculée à l'aide des polynômes $\tilde{x}(t) = (1 - a \cdot x_1 t)(1 - a \cdot x_2 t) \dots (1 - a \cdot x_r t)$ et $\tilde{y}(t) = (1 - a \cdot y_1 t)(1 - a \cdot y_2 t) \dots (1 - a \cdot y_s t)$.

Ou encore, soient le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in \mathbb{K}^{N+1}$, vérifiant la condition $(H_N^{(p)})$ et fournissant la suite $(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$ par la type-Padé-prédiction calculée à l'aide du polynôme $y(t) = (1 - y_1 t)(1 - y_2 t) \dots (1 - y_s t) \in \mathbb{K}_s[t]$, et $a \in \mathbb{K}$, alors

- (vii) (on impose que $y_i \neq y_j$ si $i \neq j$)
 $(d_1 y_1^i + d_2 y_2^i + \dots + d_s y_s^i) + S_{i,N}^{(p)} = \Omega_{i,N}^{(p)}$ où $(\Omega_i)_{0 \leq i \leq N}$ est un vecteur donné par $\Omega_i = (d_1 y_1^i + d_2 y_2^i + \dots + d_s y_s^i) + S_i$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, N\}$,
fournissant la suite $(\Omega_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$ par la même type - Padé - prédiction
- (viii) (on impose, pour $z_i \neq z_j$ lorsque $i \neq j$, que
 $(1 - y_1 t)(1 - y_2 t) \dots (1 - y_s t) = (1 - z_1 t)^{\alpha_1} (1 - z_2 t)^{\alpha_2} \dots (1 - z_\sigma t)^{\alpha_\sigma}$ avec $\sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i = s$)
 $\sum_{i=1}^{\sigma} (\gamma_{i,0} + \gamma_{i,1} t + \dots + \gamma_{i,\alpha_i-1} t^{\alpha_i-1}) z_i^i + S_{i,N}^{(p)} = \Theta_{i,N}^{(p)}$ où $(\Theta_i)_{0 \leq i \leq N}$ est un vecteur donné par $\Theta_i = \sum_{i=1}^{\sigma} (\gamma_{i,0} + \gamma_{i,1} t + \dots + \gamma_{i,\alpha_i-1} t^{\alpha_i-1}) z_i^i + S_i$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, N\}$,
fournissant la suite $(\Theta_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$ par la même type - Padé - prédiction.

Démonstration

Nous ne donnons pas d'autres exemples pour montrer les points (i), (ii), (iii) et (iv) que ceux qui ont été détaillés dans la démonstration des points (i), (ii), (iii) et (iv) du théorème 3.5.

Montrons maintenant les points (v), (vi), (vii) et (viii).

$$(v) Y_i = a \cdot S_i, \forall i \in \{0, 1, \dots, N\} \Rightarrow Y_{i,N}^{(p)} = a \cdot S_{i,N}^{(p)}, \forall i \in \mathbb{N}.$$

En effet, $\sum_{i=0}^N Y_i t^i = a \cdot \sum_{i=0}^N S_i t^i$ implique que

$$[p/N - p] \frac{y(t)}{x(t)} \sum_{i=0}^N Y_i t^i = [p/N - p] \frac{y(t)}{x(t)} a \cdot \sum_{i=0}^N S_i t^i = a \cdot [p/N - p] \frac{y(t)}{x(t)} \sum_{i=0}^N S_i t^i, \text{ et donc, formellement,}$$

$$\sum_{i \geq 0} Y_{i,N}^{(p)} t^i = a \cdot \sum_{i \geq 0} S_{i,N}^{(p)} t^i.$$

$$(vi) Z_i = a^i \cdot S_i, \forall i \in \{0, 1, \dots, N\} \Rightarrow Z_{i,N}^{(p)} = a^i \cdot S_{i,N}^{(p)}, \forall i \in \mathbb{N}.$$

En effet, $\sum_{i=0}^N Z_i t^i = \sum_{i=0}^N S_i (a \cdot t)^i$ implique que $[p/N - p] \frac{y(a \cdot t)}{x(a \cdot t)} \sum_{i=0}^N Z_i t^i = [p/N - p] \frac{y(a \cdot t)}{x(a \cdot t)} \sum_{i=0}^N S_i (a \cdot t)^i,$

et donc, formellement,

$$\sum_{i \geq 0} Z_{i,N}^{(p)} t^i = \sum_{i \geq 0} S_{i,N}^{(p)} (a \cdot t)^i = \sum_{i \geq 0} a^i \cdot S_{i,N}^{(p)} t^i.$$

Le point (vii) est une conséquence directe des théorèmes 3.30 et 3.32.

Le point (viii) est une conséquence directe des théorèmes 3.31 et 3.33.

3.17 Propriétés de positivité et de monotonie pour la Padé-partiel-prédiction

Pour cette section, on impose en plus au corps commutatif K d'être totalement ordonné. Dans les sections de même nom qui concernent l' ε -prédiction et la Padé-prédiction, nous établissons uniquement des propriétés d'existence. Comme la Padé-prédiction est un cas particulier de la Padé-partiel-prédiction, les théorèmes 3.6, 3.7, 3.8 ou encore 3.9 restent valides. En effet, les exemples donnés pour montrer ces existences demeurent convenables.

3.18 Propriétés de totale monotonie et de totale oscillation pour la Padé-partiel-prédiction

Pour cette section, on impose $K = \mathbb{R}$. La Padé-prédiction est un cas particulier de la Padé-partiel-prédiction. Il n'est par conséquent pas utile de considérer ici les analogues aux théorèmes 3.10, 3.12, 3.13, 3.14, 3.15, 3.17, 3.18 ou encore 3.19. En effet, les exemples proposés pour montrer l'existence dans ces théorèmes restent valables. Pour cette raison, nous ne tentons ici que de donner des analogues aux théorèmes 3.11 et 3.16.

3.18.1 Totale monotonie

La première question que l'on est amené à se poser est : *Que se produit-il lorsque le polynôme $x(t)$ vaut 1 et lorsque le polynôme $y(t) = (1 - y_1 t)(1 - y_2 t) \dots (1 - y_s t)$ est tel que les y_i soient distincts et appartenant à $]0, 1]$, pour tout i de $\{1, 2, \dots, s\}$?*

Nous répondons à cela dans le théorème suivant :

Théorème 3.35 *On suppose préalablement $2p - N - s \geq -1$.*

Il existe un vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in TME$, fournissant la suite $(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$ par la type-Padé-prédiction calculée à partir du polynôme $y(t) = (1 - y_1 t)(1 - y_2 t) \dots (1 - y_s t) \in \mathbb{K}_s[t]$ (on impose $y_i \in]0, 1[$ et $y_i \neq y_j$ lorsque $i \neq j$) et satisfaisant la condition $(H_N^{(p)})$, telle que cependant

$$(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 2p - N - s + 1} \notin TME.$$

Démonstration

Pour montrer l'existence, il suffit de donner un exemple.

Prenons $N = 2$, $p = 1$, $y(t) = 1 - \frac{t}{2}$, $S_0 = 2$, $S_1 = \frac{17}{15}$, $S_2 = \frac{169}{225}$.

$$(S_i)_{0 \leq i \leq 2} \in TME,$$

car la suite $(\frac{1}{3^i} + \frac{4^i}{5^i})_{i \geq 0}$ est totalement monotone, mais

$$(S_{i,2}^{(1)})_{i \geq 0} \notin TM,$$

$$\text{car } \Delta S_{3,2}^{(1)} = \frac{60917}{1620000} > 0.$$

Une autre question : *Que se produit-il si les y_i sont à l'extérieur de $]0,1[$ au lieu d'être à l'intérieur ?*
Nous considérons à cet effet le théorème suivant :

Théorème 3.36 *On suppose préalablement $2p - N - s \geq -1$.*

Il existe un vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in TME$, fournissant la suite $(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$ par la type-Padé-prédiction calculée à partir du polynôme $y(t) = (1 - y_1 t)(1 - y_2 t) \dots (1 - y_s t) \in \mathbb{K}_s[t]$ (on impose $y_i \notin [0, 1]$ et $y_i \neq y_j$ lorsque $i \neq j$) et satisfaisant la condition $(H_N^{(p)})$, telle que cependant

$$(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 2p - N - s + 1} \notin TM.$$

Démonstration

Pour montrer l'existence, il suffit de donner un exemple.

Prenons $N = 2$, $p = 1$, $y(t) = 1 - 2 \cdot t$, $S_0 = 2$, $S_1 = \frac{5}{6}$, $S_2 = \frac{13}{36}$.

$$(S_i)_{0 \leq i \leq 2} \in TME,$$

car la suite $(\frac{1}{2^i} + \frac{1}{3^i})_{i \geq 0}$ est totalement monotone, mais

$$(S_{i,2}^{(1)})_{i \geq 0} \notin TM,$$

$$\text{car } \Delta S_{4,2}^{(1)} = \frac{2908457}{53335584} > 0.$$

Encore une question : *Que se produit-il si les y_i sont tous égaux à 1 ?*
Pour répondre à ceci, nous établissons le théorème suivant :

Théorème 3.37 *On suppose préalablement $2p - N - s \geq -1$.*

Il existe un vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in TME$, fournissant la suite $(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$ par la type-Padé-prédiction calculée à partir du polynôme $y(t) = (1 - t)^s \in \mathbb{K}_s[t]$ et satisfaisant la condition $(H_N^{(p)})$, telle que cependant

$$(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 2p - N - s + 1} \notin TM.$$

Démonstration

Pour montrer l'existence, il suffit de donner un exemple.

Prenons $N = 3$, $p = 2$, $y(t) = (1 - t)^2$, $S_0 = 2$, $S_1 = \frac{5}{6}$, $S_2 = \frac{13}{36}$, $S_3 = \frac{35}{216}$.

$$(S_i)_{0 \leq i \leq 3} \in TME,$$

car la suite $(\frac{1}{2^i} + \frac{1}{3^i})_{i \geq 0}$ est totalement monotone, mais

$$(S_{i,3}^{(2)})_{i \geq 0} \notin TM,$$

$$\text{car } S_{6,3}^{(2)} = -\frac{8551439}{729000000} < 0.$$

Pourtant, on a le théorème suivant :

Théorème 3.38 On suppose préalablement $2p - N - 1 \geq -1$.

Soit le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in TME$, fournissant la suite $(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$ par la type-Padé-prédiction calculée à partir du polynôme $y(t) = 1 - t \in \mathbb{K}_1[t]$ et satisfaisant la condition $(H_N^{(p)})$, alors

$$(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 2p-N} \in TM.$$

Démonstration

L'obtention ce résultat se fait de façon similaire à la démonstration du théorème 2.14.

Cependant, le théorème suivant établit la nécessité de l'hypothèse $2p - N - 1 \geq -1$:

Théorème 3.39 On suppose préalablement $2p - N - 1 < -1$.

Il existe un vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in TME$, fournissant la suite $(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$ par la type-Padé-prédiction calculée à partir du polynôme $y(t) = 1 - t \in \mathbb{K}_1[t]$ et satisfaisant la condition $(H_N^{(p)})$, telle que cependant

$$(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0} \notin TM.$$

Démonstration

Pour montrer l'existence, il suffit de donner un exemple.

Prenons $N = 2$, $p = 0$, $y(t) = 1 - t$, $S_0 = 2$, $S_1 = \frac{5}{6}$, $S_2 = \frac{13}{36}$.

$$(S_i)_{0 \leq i \leq 2} \in TME,$$

car la suite $(\frac{1}{2^i} + \frac{1}{3^i})_{i \geq 0}$ est totalement monotone, mais

$$(S_{i,2}^{(0)})_{i \geq 0} \notin TM,$$

car $\Delta S_{2,2}^{(0)} = \frac{91}{96} > 0$.

Inversement, nous sommes amenés à répondre à la question *Que se produit-il lorsque le polynôme $x(t)$ n'est pas égal à 1 ?*

Le théorème suivant établit la réponse :

Théorème 3.40 Il existe un vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in TME$, fournissant la suite $(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$ par la Padé-partiel-prédiction calculée à partir des polynômes $x(t) = (1 - x_1 t)(1 - x_2 t) \dots (1 - x_r t) \in \mathbb{K}_r[t]$ et $y(t) = 1$ et satisfaisant la condition $(H_N^{(p)})$, telle que cependant

$$(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0} \notin TM.$$

Démonstration

Pour montrer l'existence, il suffit de donner un exemple.

Prenons $N = 3$, $p = 1$, $x(t) = 1 + t$, $S_0 = 1$, $S_1 = \frac{1}{2}$, $S_2 = \frac{1}{3}$, $S_3 = \frac{1}{4}$.

$$(S_i)_{0 \leq i \leq 3} \in TME,$$

car la suite $(\frac{1}{i+1})_{i \geq 0}$ est totalement monotone, mais

$$(S_{i,3}^{(1)})_{i \geq 0} \notin TM,$$

car $\Delta^2 S_{2,3}^{(1)} = -\frac{1}{126} < 0$.

3.18.2 Totale oscillation

Pour la totale oscillation, nous pouvons énoncer sans donner les démonstrations (celles-ci dérivant du théorème 3.34, (vi) et de la définition même de la totale oscillation en regard de celle de la totale monotonie) les analogues des théorèmes concernant la totale monotonie.

Théorème 3.41 *On suppose préalablement $2p - N - s \geq -1$.*

Il existe un vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in TOE$, fournissant la suite $(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$ par la type-Padé-prédiction calculée à partir du polynôme $y(t) = (1 - y_1 t)(1 - y_2 t) \dots (1 - y_s t) \in \mathbb{K}_s[t]$ (on impose $y_i \in [-1, 0[$ et $y_i \neq y_j$ lorsque $i \neq j$) et satisfaisant la condition $(H_N^{(p)})$, telle que cependant

$$(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 2p - N - s + 1} \notin TO.$$

Théorème 3.42 *On suppose préalablement $2p - N - s \geq -1$.*

Il existe un vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in TOE$, fournissant la suite $(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$ par la type-Padé-prédiction calculée à partir du polynôme $y(t) = (1 - y_1 t)(1 - y_2 t) \dots (1 - y_s t) \in \mathbb{K}_s[t]$ (on impose $y_i \notin [-1, 0[$ et $y_i \neq y_j$ lorsque $i \neq j$) et satisfaisant la condition $(H_N^{(p)})$, telle que cependant

$$(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 2p - N - s + 1} \notin TO.$$

Théorème 3.43 *On suppose préalablement $2p - N - s \geq -1$.*

Il existe un vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in TOE$, fournissant la suite $(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$ par la type-Padé-prédiction calculée à partir du polynôme $y(t) = (1 + t)^s \in \mathbb{K}_s[t]$ et satisfaisant la condition $(H_N^{(p)})$, telle que cependant

$$(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 2p - N - s + 1} \notin TO.$$

Théorème 3.44 *On suppose préalablement $2p - N - 1 \geq -1$.*

Soit le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in TOE$, fournissant la suite $(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$ par la type-Padé-prédiction calculée à partir du polynôme $y(t) = 1 + t \in \mathbb{K}_1[t]$ et satisfaisant la condition $(H_N^{(p)})$, alors

$$(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 2p - N} \in TO.$$

Théorème 3.45 *On suppose préalablement $2p - N - 1 < -1$.*

Il existe un vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in TOE$, fournissant la suite $(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$ par la type-Padé-prédiction calculée à partir du polynôme $y(t) = 1 + t \in \mathbb{K}_1[t]$ et satisfaisant la condition $(H_N^{(p)})$, telle que cependant

$$(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0} \notin TO.$$

Théorème 3.46 *Il existe un vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in TOE$, fournissant la suite $(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$ par la Padé-partiel-prédiction calculée à partir des polynômes $x(t) = (1 - x_1 t)(1 - x_2 t) \dots (1 - x_r t) \in \mathbb{K}_r[t]$ et $y(t) = 1$ et satisfaisant la condition $(H_N^{(p)})$, telle que cependant*

$$(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0} \notin TO.$$

3.19 Propriétés des moments de Markov-Stieltjes et des moments de Hamburger pour la Padé-partiel-prédiction

On impose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Nous analysons ici une possibilité pour généraliser les théorèmes 3.38 et 3.44. Cependant, pour un vecteur totalement monotone extrait, nous considérons le polynôme $y(t) = 1 - t$ et, pour un vecteur totalement oscillant extrait, nous considérons le polynôme $y(t) = 1 + t$. Ainsi, pour un vecteur de moments de Markov-Stieltjes, nous considérons le polynôme $y(t) = 1 - Rt$, mais pour un moment de Stieltjes, nous ne pouvons pas généraliser l'écriture du polynôme $y(t)$ (car $1 - Rt$ tend vers $-\infty t$ lorsque R tend vers l'infini, à t fixé). Pour un vecteur de moments de Hamburger, lorsque de plus, $\max(|R_1|, |R_2|)$ est fini, nous considérons consécutivement les polynômes $y(t) = 1 - R_1t$, puis $y(t) = 1 - R_2t$, puis encore $y(t) = (1 - R_1t)(1 - R_2t)$.

Théorème 3.47 *On suppose préalablement $2p - N - 1 \geq -1$.*

Soit le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in MMSE$, fournissant la suite $(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$ par la type-Padé-prédiction calculée à partir du polynôme $y(t) = 1 - Rt \in \mathbb{K}_1[t]$ et satisfaisant la condition $(H_N^{(p)})$, alors

$$(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 2p-N} \in MMS.$$

Démonstration

L'obtention ce résultat se fait de façon similaire à la démonstration du théorème 2.14, si ce n'est qu'au lieu d'appliquer l'opérateur $-\Delta$ pour faire disparaître la constante c_1 , on applique l'opérateur T défini par $T.S_i = -S_{i+1} + RS_i$ pour faire disparaître le terme en $c_1 R^i$.

Théorème 3.48 *On suppose préalablement $2p - N - 1 \geq -1$.*

Soit le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in MHE$, fournissant la suite $(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$ par la type-Padé-prédiction calculée à partir du polynôme $y(t) = 1 - R_1t \in \mathbb{K}_1[t]$ (R_1 est supposé fini) et satisfaisant la condition $(H_N^{(p)})$, alors

$$(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 2p-N} \in MH.$$

Démonstration

L'obtention ce résultat se fait de façon similaire à la démonstration du théorème 2.14, si ce n'est qu'au lieu d'appliquer l'opérateur $-\Delta$ pour faire disparaître la constante c_1 , on applique l'opérateur T défini par $T.S_i = S_{i+1} - R_1 S_i$ pour faire disparaître le terme en $c_1 R_1^i$.

Théorème 3.49 *On suppose préalablement $2p - N - 1 \geq -1$.*

Soit le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in MHE$, fournissant la suite $(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$ par la type-Padé-prédiction calculée à partir du polynôme $y(t) = 1 - R_2t \in \mathbb{K}_1[t]$ (R_2 est supposé fini) et satisfaisant la condition $(H_N^{(p)})$, alors

$$(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 2p-N} \in MH.$$

Démonstration

L'obtention ce résultat se fait de façon similaire à la démonstration du théorème 2.14, si ce n'est qu'au lieu d'appliquer l'opérateur $-\Delta$ pour faire disparaître la constante c_1 , on applique l'opérateur T défini par $T.S_i = -S_{i+1} + R_2 S_i$ pour faire disparaître le terme en $c_1 R_2^i$.

Théorème 3.50 On suppose préalablement $2p - N - 2 \geq -1$.

Soit le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N} \in MHE$, fournissant la suite $(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$ par la type-Padé-prédiction calculée à partir du polynôme $y(t) = (1 - R_1 t)(1 - R_2 t) \in \mathbb{K}_2[t]$ (R_1 et R_2 sont supposés finis) et satisfaisant la condition $(H_N^{(p)})$, alors

$$(S_{i,N}^{(p)})_{i \geq 2p - N - 1} \in MH.$$

Démonstration

L'obtention ce résultat se fait de façon similaire à la démonstration du théorème 2.14, si ce n'est qu'au lieu d'appliquer l'opérateur $-\Delta$ pour faire disparaître la constante c_1 , on applique l'opérateur T défini par $T.S_i = -S_{i+2} + (R_1 + R_2)S_{i+1} - R_1 R_2 S_i$ pour faire disparaître les termes en $c_1 R_1^i$ et en $c_2 R_2^i$.

On a :

$$S_i = a_1 b_1^i + \dots + a_{N-p} b_{N-p}^i + c_1 R_1^i + c_2 R_2^i = \int_{R_1}^{R_2} x^i dg(x), \quad \forall i \in \{2p - N - 1, 2p - N, \dots, N\}.$$

avec

1. $b_i \in]R_1, R_2[, \forall i \in \{1, 2, \dots, N - p\}$
2. $a_i \geq 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, N - p\}$.

Par le même procédé que dans la démonstration du théorème 2.14, on obtient

$$c_1 (1 - b_1)^2 (1 - b_2)^2 \dots (1 - b_K)^2 R_1^i + c_2 (1 - b_1)^2 (1 - b_2)^2 \dots (1 - b_K)^2 R_2^i \\ = \int_{R_1}^{R_2} (x - b_1)^2 (x - b_2)^2 \dots (x - b_K)^2 x^i dg(x), \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, 2p - N\}.$$

$$D'où $c_2 (1 - b_1)^2 (1 - b_2)^2 \dots (1 - b_K)^2 (R_2 - R_1) R_2^i \\ = \int_{R_1}^{R_2} (x - R_1) (x - b_1)^2 (x - b_2)^2 \dots (x - b_K)^2 x^i dg(x), \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, 2p - N\}.$$$

$$\text{Et, } c_1 (1 - b_1)^2 (1 - b_2)^2 \dots (1 - b_K)^2 (R_2 - R_1) R_1^i \\ = \int_{R_1}^{R_2} (R_2 - x) (x - b_1)^2 (x - b_2)^2 \dots (x - b_K)^2 x^i dg(x), \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, 2p - N\}.$$

Et il s'ensuit que $c_1 \geq 0$ et que $c_2 \geq 0$.

3.20 Propriétés concernant les suites polynômiales pour la Padé-partiel-prédiction

Théorème 3.51 Soit le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq 2K-1}$, donné par $S_i = a^i \sum_{l=0}^{K-1} a_l i^l, \forall i \in \{0, 1, \dots, 2K-1\}$, fournissant la suite $(S_{i,2K-1}^{(K-1)})_{i \geq 0}$ par la type-Padé-prédiction calculée à partir du polynôme $y(t) = (1 - at)^s \in \mathbb{K}_s[t]$ et satisfaisant la condition $(H_{2K-1}^{(K-1)})$, alors, la suite $(S_{i,2K-1}^{(K-1)})_{i \geq 0}$ est donnée par

$$S_{i,2K-1}^{(K-1)} = a^i \sum_{l=0}^{K-1} a_l i^l, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Démonstration

On a $S_i = a^i \sum_{j=0}^{K-1} a_j i^j$, $\forall i \in \{0, \dots, 2K-1\}$,

avec $\sum_{j=0}^{K-1} a_j i^j = \sum_{j=0}^{K-1} b_j \frac{(i+1)(i+2)\dots(i+j)}{(j-1)!}$, $\forall i \in \mathbb{N}$, par changement de base.

Le polynôme $P_{2K-1}(t)$ est défini par

$$\begin{aligned} P_{2K-1}(t) &= \sum_{i=0}^{2K-1} S_i t^i \\ &= \sum_{i=0}^{2K-1} \sum_{j=0}^{K-1} b_j \frac{(i+1)(i+2)\dots(i+j)}{(j-1)!} (at)^i. \end{aligned}$$

En remarquant que l'on peut identifier formellement $y(t) \sum_{i \geq 0} \sum_{j=0}^{K-1} b_j \frac{(i+1)(i+2)\dots(i+j)}{(j-1)!} (at)^i$

et $\sum_{i \geq 0} \sum_{j=0}^{K-1} c_j \frac{(i+1)(i+2)\dots(i+j)}{(j-1)!} (at)^i$, on déduit

$$\begin{aligned} y(t)P_{2K-1}(t) &= \sum_{j=0}^{K-1} \sum_{i=0}^{2K-1} c_j \frac{(i+1)(i+2)\dots(i+j)}{(j-1)!} (at)^i + O(t^{2K}) \\ &= \sum_{j=0}^{K-1} \sum_{i \geq 0} c_j \frac{(i+1)(i+2)\dots(i+j)}{(j-1)!} (at)^i + O(t^{2K}) \\ &= \sum_{j=0}^{K-1} \sum_{i \geq 0} c_j a^i \frac{(i+j)!}{(j-1)! i!} t^i + O(t^{2K}) \\ &= \sum_{j=0}^{K-1} \sum_{i \geq 0} c_j \frac{d^i}{dt^i} \left(\frac{1}{(1-at)^{j+1}} \right) (0) \frac{t^i}{i!} + O(t^{2K}) \\ &= \sum_{j=0}^{K-1} c_j \frac{1}{(1-at)^{j+1}} + O(t^{2K}), \end{aligned}$$

mais alors, par définition de l'approximant de Padé,

$$[K-1/K]_{y(t)P_{2K-1}(t)} = \sum_{j=0}^{K-1} c_j \frac{1}{(1-at)^{j+1}}.$$

Il s'ensuit, formellement, que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{y(t)} [K-1/K]_{y(t)P_{2K-1}(t)} &= \frac{1}{y(t)} \sum_{j=0}^{K-1} \sum_{i \geq 0} c_j \frac{(i+1)(i+2)\dots(i+j)}{(j-1)!} (at)^i \\ &= \sum_{j=0}^{K-1} \sum_{i \geq 0} b_j \frac{(i+1)(i+2)\dots(i+j)}{(j-1)!} (at)^i \\ &= \sum_{i \geq 0} \sum_{j=0}^{K-1} a_j i^j (at)^i. \end{aligned}$$

Donc

$$S_{i,2K-1}^{(K-1)} = a^i \sum_{j=0}^{K-1} a_j i^j, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Théorème 3.52 Il existe un vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq 2K-1}$, donné par $S_i = a^i \sum_{l=0}^{K-1} a_l i^l$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, 2K-1\}$, fournissant la suite $(S_{i,2K-1}^{(K-1)})_{i \geq 0}$ par la type-Padé-prédiction calculée à partir du polynôme $y(t) = (1 -$

$y_1 t)(1 - y_2 t) \dots (1 - y_s t) \in \mathbb{K}_s[t]$ et satisfaisant la condition $(H_{2K-1}^{(K-1)})$, telle que la suite $(S_{i,2K-1}^{(K-1)})_{i \geq 0}$ ne soit pas donnée par

$$S_{i,2K-1}^{(K-1)} = a^i \sum_{l=0}^{K-1} a_l i^l, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Démonstration

Pour montrer l'existence, il suffit de donner un exemple.

Prenons $K = 1$, $y(t) = 1 - 2t$, $S_0 = 1$, $S_1 = 3$, $S_2 = 5$, $S_3 = 7$.

$(S_i)_{0 \leq i \leq 3}$ est donnée par $S_i = 1 + 2i, \forall i \in \{0, 1, 2, 3\}$, mais la suite $(S_{i,3}^{(1)})_{i \geq 0}$ n'est pas donnée par $S_{i,3}^{(1)} = 1 + 2i, \forall i \in \mathbb{N}$ car $S_{4,3}^{(1)} = 13 \neq 9$.

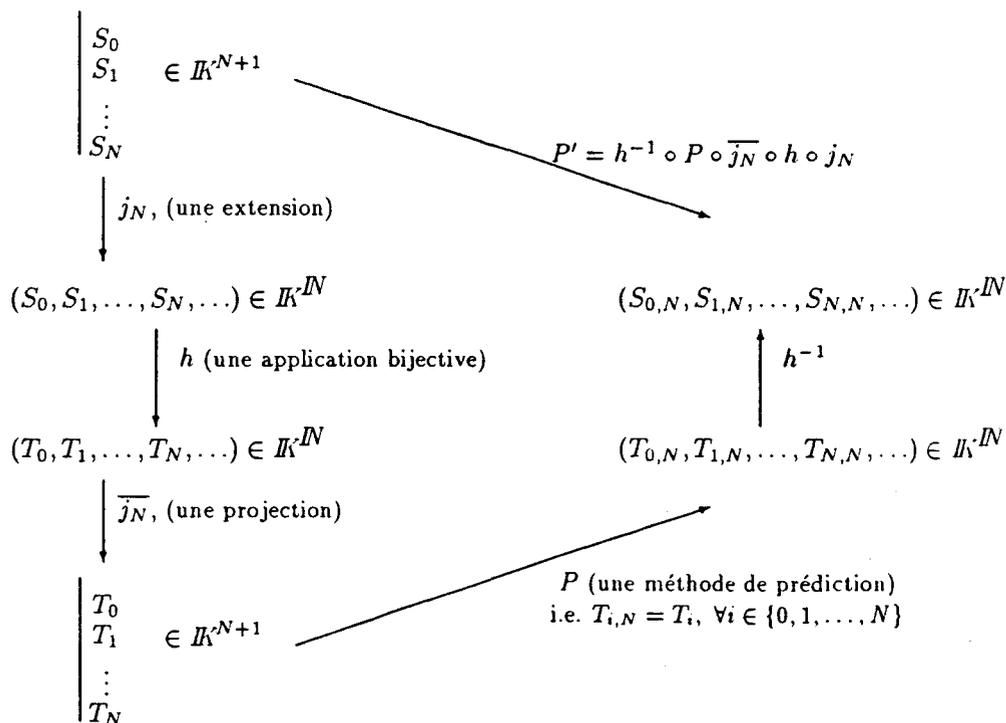
A plus forte raison, il n'est pas utile ici de regarder ce qu'il en est pour une Padé-partiel-prédiction calculée à partir des polynômes $x(t)$ et $y(t)$ où $x(t)$ ne serait pas constant et égal à 1.

Chapitre 4

Généralisation d'une méthode de prédiction

Au lieu de prédire le vecteur initial, nous pouvons prédire une transformation de celui-ci, tout en induisant une prédiction du vecteur initial par la transformation inverse. Ainsi, nous obtenons une généralisation d'une méthode de prédiction par l'intermédiaire d'une transformation inversible. Cette généralisation présente l'avantage de pouvoir tenir compte des propriétés analytiques de la suite à prédire. Cependant, nous ne donnons pas de théorème indiquant quelle est, pour une suite donnée, la méthode de prédiction la plus appropriée.

Afin de généraliser une méthode de prédiction de départ, nous construisons le schéma suivant :



En général, $P' = h^{-1} \circ P \circ \overline{j_N} \circ h \circ j_N$ n'est pas une méthode de prédiction. Aussi, nous imposons à l'application bijective h d'être telle que P' soit une méthode de prédiction (i.e. telle que $S_{i,N} = S_i, \forall i \in \{0, 1, \dots, N\}$).

Nous allons maintenant donner quelques exemples de transformations vérifiant cette propriété. Ces exemples sont accompagnés de remarques concernant leur utilité.

4.1 Généralisation par une translation agissant sur les variables séparées

On se donne $a \in \mathbb{K}$, et on considère l'application h suivante :

$$h : \begin{cases} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ (a_0, a_1, \dots, a_N, \dots) & \longrightarrow & (a_0 + a, a_1 + a, \dots, a_N + a, \dots). \end{cases}$$

Remarques concernant la translation agissant sur les variables séparées

1. Lorsque h est la translation agissant sur les variables séparées et lorsque P est la E-prédiction, alors $P' = h^{-1} \circ P \circ \overline{j_N} \circ h \circ j_N$ est aussi la E-prédiction.
2. Lorsque h est la translation agissant sur les variables séparées et lorsque P est l' ε -prédiction, alors $P' = h^{-1} \circ P \circ \overline{j_N} \circ h \circ j_N$ est aussi l' ε -prédiction (voir théorème 2.4, (v)).
3. Lorsque h est la translation agissant sur les variables séparées et lorsque P est la Padé-prédiction, alors $P' = h^{-1} \circ P \circ \overline{j_N} \circ h \circ j_N$ est une méthode de prédiction qui généralise la Padé-prédiction (voir théorème 3.5, (iv)).

4.2 Généralisation par une similitude agissant sur les variables séparées

On se donne $a \in \mathbb{K}$, et on considère l'application h suivante :

$$h : \begin{cases} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ (a_0, a_1, \dots, a_N, \dots) & \longrightarrow & (a \cdot a_0, a \cdot a_1, \dots, a \cdot a_N, \dots). \end{cases}$$

Remarques concernant la similitude agissant sur les variables séparées

1. Lorsque h est la similitude agissant sur les variables séparées et lorsque P est la E-prédiction, alors $P' = h^{-1} \circ P \circ \overline{j_N} \circ h \circ j_N$ est aussi la E-prédiction.
2. Lorsque h est la similitude agissant sur les variables séparées et lorsque P est l' ε -prédiction, alors $P' = h^{-1} \circ P \circ \overline{j_N} \circ h \circ j_N$ est aussi l' ε -prédiction (voir théorème 2.4, (v)).
3. Lorsque h est la similitude agissant sur les variables séparées et lorsque P est la Padé-partiel-prédiction calculée à partir de n'importe quels polynômes $x(t)$ et $y(t)$, alors $P' = h^{-1} \circ P \circ \overline{j_N} \circ h \circ j_N$ est aussi la Padé-partiel-prédiction calculée à partir des polynômes $x(t)$ et $y(t)$ (voir théorème 3.34, (v)).

4.3 Généralisation par une application transformant le $n^{\text{ème}}$ terme d'une suite x_n en $a^n x_n$

On se donne $a \in \mathbb{K}$, et on considère l'application h suivante :

$$h : \begin{cases} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ (a_0, a_1, \dots, a_N, \dots) & \longrightarrow (a_0, a \cdot a_1, \dots, a^N \cdot a_N, \dots). \end{cases}$$

Remarques concernant l'application transformant le $n^{\text{ème}}$ terme d'une suite x_n en $a^n x_n$

1. Lorsque h est l'application transformant le $n^{\text{ème}}$ terme d'une suite x_n en $a^n x_n$ et lorsque P est la E-prédiction, alors $P' = h^{-1} \circ P \circ \overline{j_N} \circ h \circ j_N$ est une méthode de prédiction généralisant la E-prédiction.
2. Lorsque h est l'application transformant le $n^{\text{ème}}$ terme d'une suite x_n en $a^n x_n$ et lorsque P est l' ε -prédiction, alors $P' = h^{-1} \circ P \circ \overline{j_N} \circ h \circ j_N$ est une méthode de prédiction généralisant l' ε -prédiction (voir théorème 2.4, (iv)).
3. Lorsque h est l'application transformant le $n^{\text{ème}}$ terme d'une suite x_n en $a^n x_n$ et lorsque P est la Padé-prédiction, alors $P' = h^{-1} \circ P \circ \overline{j_N} \circ h \circ j_N$ est aussi la Padé-prédiction (voir théorème 3.5, (vi)).
4. Lorsque h est l'application transformant le $n^{\text{ème}}$ terme d'une suite x_n en $a^n x_n$ et lorsque P est la Padé-partiel-prédiction calculée à partir de n'importe quels polynômes $x(t)$ et $y(t)$, alors $P' = h^{-1} \circ P \circ \overline{j_N} \circ h \circ j_N$ est la Padé-partiel-prédiction calculée à partir des polynômes $x(a \cdot t)$ et $y(a \cdot t)$ (voir théorème 3.34, (vi)).

4.4 Généralisation par une bijection agissant sur les variables séparées

On se donne $u : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$, où u est supposée être une application bijective, et on considère l'application h suivante :

$$h : \begin{cases} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ (a_0, a_1, \dots, a_N, \dots) & \longrightarrow (u(a_0), u(a_1), \dots, u(a_N), \dots). \end{cases}$$

Remarques concernant la bijection agissant sur les variables séparées

1. On peut considérer aussi des applications u qui ne sont pas bijectives sur tout \mathbb{K} , mais cela entraîne une restriction quant à l'ensemble des vecteurs auxquels on peut appliquer la méthode de prédiction P' . Par exemple, soit l'application $u : x \longrightarrow \frac{1}{x}$ qui est bijective de $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ sur $\mathbb{K} \setminus \{0\}$. On peut avoir vecteur initial $(S_i)_{0 \leq i \leq N}$ à composantes non nulles et donc tel que la construction du vecteur $(T_i)_{0 \leq i \leq N}$ et de la suite $(T_{i,N})_{i \geq 0}$ soit possible, alors que celle de la suite $(S_{i,N})_{i \geq 0}$ ne le soit pas car certains des termes de la suite $(T_{i,N})_{i \geq 0}$ sont nuls.

Ainsi, on peut aussi considérer les applications

$$u : x \longrightarrow \frac{1}{x}, \text{ bijective de } \mathbb{K} \setminus \{0\} \text{ sur } \mathbb{K} \setminus \{0\},$$

$$u : x \longrightarrow \frac{x+c}{x+d}, \text{ bijective de } \mathbb{K} \setminus \{-d\} \text{ sur } \mathbb{K} \setminus \{1\}, \dots$$

2. Lorsque h est la bijection agissant sur les variables séparées et lorsque P est soit la E-prédiction, soit l' ε -prédiction, soit la Padé-prédiction, soit la Padé-partiel-prédiction calculée à partir de n'importe quels polynômes $x(t)$ et $y(t)$, alors, en général, $P' = h^{-1} \circ P \circ \overline{j_N} \circ h \circ j_N$ est une méthode de prédiction qui n'est ni la E-prédiction, ni l' ε -prédiction, ni la Padé-prédiction, ni encore la Padé-partiel-prédiction calculée à partir de n'importe quels polynômes $\tilde{x}(t)$ et $\tilde{y}(t)$.

4.5 Généralisation par l'application qui permet de passer de la Padé-prédiction à la Padé-partiel-prédiction calculée à partir des polynômes $x(t)$ et $y(t)$

On pose

$$x(t) = (1 - x_1 t)(1 - x_2 t) \dots (1 - x_r t) \in \mathbb{K}_r[t]$$

et

$$y(t) = (1 - y_1 t)(1 - y_2 t) \dots (1 - y_s t) \in \mathbb{K}_s[t],$$

et on considère l'application h suivante :

$$h_{x(t), y(t)} : \begin{cases} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ (S_0, S_1, \dots, S_N, \dots) & \longrightarrow & (T_0, T_1, \dots, T_N, \dots) \text{ telle que formellement} \\ & & \sum_{i \geq 0} T_i t^i = \sum_{i \geq 0} S_i \frac{y(t)}{x(t)} t^i. \end{cases}$$

Remarques concernant l'application qui permet de passer de la Padé-prédiction à la Padé-partiel-prédiction calculée à partir des polynômes $x(t)$ et $y(t)$

1. Le nom donné à cet exemple est dû à la propriété suivante : lorsque P est la Padé-prédiction, alors $P' = h_{x(t), y(t)}^{-1} \circ P \circ \overline{j_N} \circ h_{x(t), y(t)} \circ j_N$ est la Padé-partiel-prédiction calculée à partir des polynômes $x(t)$ et $y(t)$.
2. Cette application semble être difficile à mettre en oeuvre algorithmiquement à cause du produit de séries formelles. Cependant, on peut éviter ce calcul pénible. Nous proposons de voir sur le prochain exemple qui est un cas particulier de celui-ci comment éviter le calcul du produit de séries formelles. Et, lorsque les polynômes $x(t)$ et $y(t)$ ont une forme plus compliquée que dans l'exemple à suivre on peut utiliser par exemple, la propriété suivante : lorsque l'on considère les polynômes $x_1(t)$, $x_2(t)$, $y_1(t)$, et $y_2(t)$, on a

$$h_{x_1(t), y_1(t)} \circ h_{x_2(t), y_2(t)} = h_{x_2(t), y_2(t)} \circ h_{x_1(t), y_1(t)} = h_{x_1(t) \cdot x_2(t), y_1(t) \cdot y_2(t)}.$$

4.6 Généralisation par l'application qui permet de passer de l' ε_p -prédiction à la Padé-prédiction

On considère l'application h suivante :

$$h : \begin{cases} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ (S_0, S_1, \dots, S_N, \dots) & \longrightarrow & (S_0, S_0 + S_1, \dots, S_0 + S_1 + \dots + S_N, \dots). \end{cases}$$

Remarques concernant l'application qui permet de passer de l' ε_p -prédiction à la Padé-prédiction

1. Le nom donné à cet exemple est dû à la propriété suivante :
 lorsque P est l' ε_p -prédiction, alors $P' = h^{-1} \circ P \circ \overline{j_N} \circ h \circ j_N$ est la Padé-prédiction (voir théorème 3.27).
 En conséquence, comme nous possédons un algorithme ne nécessitant pas la résolution d'un système linéaire pour chaque Padé-prédiction, nous en possédons un aussi pour chaque Padé-partiel-prédiction calculée à partir des polynômes $x(t)$ et $y(t)$ en utilisant l'application $h_{x(t),y(t)}$, définie dans la section 4.5.
2. Cette application h est un cas particulier de l'application $h_{x(t),y(t)}$ donnée précédemment, en considérant les polynômes $x(t) = 1 - t$ et $y(t) = 1$.
3. L'application réciproque h^{-1} est donnée par

$$h^{-1} : \begin{cases} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ (T_0, T_1, \dots, T_N, \dots) & \longrightarrow (T_0, T_1 - T_0, \dots, T_N - T_{N-1}, \dots) \end{cases}$$

Nous pouvons représenter h par une matrice infinie H définie par

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 1 & 1 & \dots & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

et h^{-1} par une matrice infinie H^{-1} définie par

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & -1 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Le premier point des remarques nous conduit directement au chapitre suivant.

Chapitre 5

Algorithme et stabilité pour la Padé-partiel-prédiction

Nous avons déjà établi un lien entre la Padé-prédiction et l' ε_p -prédiction, dans le théorème 3.27, et le lien entre la Padé-prédiction et la Padé-partiel-prédiction dans le précédent chapitre. Il ne nous reste plus maintenant qu'à constituer l'algorithme à l'aide de ces deux propriétés.

De la même manière que l' ε -algorithme est utilisé pour engendrer la table des approximants de Padé (voir le théorème 3.26), nous voyons dans ce chapitre comment il sert à générer la Padé-partiel-prédiction.

Les outils nécessaires pour la composition de cet algorithme sont l' ε -prédiction et l'application élémentaire. Cette dernière rend inutile le calcul du produit d'une série formelle par une fonction rationnelle.

5.1 L'application élémentaire

D'une part, on considère l'application h_z suivante :

$$h_z : \begin{cases} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ (S_0, S_1, \dots, S_N, \dots) & \longrightarrow (S_0, zS_0 + S_1, \dots, z^N S_0 + z^{N-1} S_1 + \dots + S_N, \dots). \end{cases}$$

Alors, l'application réciproque de celle-ci, notée h_z^{-1} , est donnée par

$$h_z^{-1} : \begin{cases} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ (S_0, S_1, \dots, S_N, \dots) & \longrightarrow (S_0, -zS_0 + S_1, \dots, -zS_{N-1} + S_N, \dots). \end{cases}$$

D'autre part, on considère l'application \bar{h}_z suivante :

$$\bar{h}_z : \begin{cases} \mathbb{K}^{\mathbb{N}+1} & \longrightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}+1} \\ (S_0, S_1, \dots, S_N) & \longrightarrow (S_0, zS_0 + S_1, \dots, z^N S_0 + z^{N-1} S_1 + \dots + S_N). \end{cases}$$

Alors, l'application réciproque de celle-ci, notée \bar{h}_z^{-1} , est donnée par

$$\bar{h}_z^{-1} : \begin{cases} \mathbb{K}^{\mathbb{N}+1} & \longrightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}+1} \\ (S_0, S_1, \dots, S_N) & \longrightarrow (S_0, -zS_0 + S_1, \dots, -zS_{N-1} + S_N). \end{cases}$$

5.2 Mise en oeuvre de la Padé-partiel-prédiction par l' ε -algorithme

On pose

$$x(t) = (1 - x_1 t)(1 - x_2 t) \dots (1 - x_r t) \in K_r[t],$$

et,

$$y(t) = (1 - y_1 t)(1 - y_2 t) \dots (1 - y_s t) \in K_s[t].$$

On se donne le vecteur $S = (S_i)_{0 \leq i \leq N}$ à prédire par la Padé-partiel-prédiction calculée à partir des polynômes $x(t)$ et $y(t)$.

Puis, on construit le vecteur $T = (T_i)_{0 \leq i \leq N}$ donné par

$$T = \bar{h}_{x_1} \circ \bar{h}_{x_2} \circ \dots \circ \bar{h}_{x_r} \circ \bar{h}_{y_1}^{-1} \circ \bar{h}_{y_2}^{-1} \circ \dots \circ \bar{h}_{y_s}^{-1} \circ \bar{h}_1(S).$$

On utilise ensuite l' ε_p -prédiction :

$T' = (T'_{i,N}^{(\varepsilon,p)})_{i \geq 0}$ est la suite prédite par l' ε_p -prédiction à partir du vecteur $(T_i)_{0 \leq i \leq N}$.

Enfin, on donne la suite $S' = (S'_{i,N}^{(\varepsilon,p)})_{i \geq 0}$ par

$$S' = h_{x_1}^{-1} \circ h_{x_2}^{-1} \circ \dots \circ h_{x_r}^{-1} \circ h_{y_1} \circ h_{y_2} \circ \dots \circ h_{y_s} \circ h_1^{-1}(T').$$

Ainsi constituée, $(S'_{i,N}^{(\varepsilon,p)})_{i \geq 0}$ est la suite prédite à partir du vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N}$, par la Padé-partiel-prédiction calculée à partir des polynômes $x(t)$ et $y(t)$. Nous notons cette suite $(S'_{i,N}^{(\varepsilon,p)})_{i \geq 0}$ car elle dépend des valeurs de N et de p (ε indique l'utilisation de l' ε -algorithme).

Cet algorithme que nous avons déterminé ici est performant car il ne requiert pas la résolution de système linéaire.

La Padé-partiel-prédiction est donc ainsi définie de façon algorithmique, et l'existence de la Padé-partiel-prédiction définie algorithmiquement découle directement de celle de l' ε_p -prédiction définie, elle aussi, algorithmiquement. Il n'est donc pas utile de décrire cette condition d'existence, condition que nous notons $(H_N^{(\varepsilon,p)})$ puisqu'elle dépend des valeurs de N et de p . Cependant, nous avons la propriété suivante (qui provient de l'expression des termes de l' ε -algorithme sous forme d'un rapport de deux déterminants) :

si le vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N}$, à prédire par la Padé-partiel-prédiction calculée à partir des polynômes $x(t)$ et $y(t)$, satisfait la condition $(H_N^{(\varepsilon,p)})$, alors, automatiquement, il satisfait la condition $(H_N^{(p)})$.

5.3 Programmation de la Padé-partiel-prédiction

Pour programmer la Padé-partiel-prédiction, il suffit donc de définir trois procédures, à savoir la procédure EPSILON, la fonction HBARRE et la fonction HBARREINVERSE. Le programme principal n'utilise en fait que ces trois procédures que nous détaillons ici.

EPSILON($N, p, S, Npred, Sbarre$)

Début de commentaire

Cette procédure met en oeuvre l' ε_p -prédiction.

Les paramètres d'entrée sont :

N , le nombre diminué de 1 de composantes du vecteur à prédire.

p , paramètre de l' ε_p -prédiction.

S , le vecteur initial à prédire, à $N + 1$ composantes.

N_{pred} , un nombre qui définit combien de termes on veut déterminer pour la suite prédite.

Le paramètre de sortie est :

S_{barre} , le vecteur prédit (constitué des $N + N_{pred} + 1$ premières composantes de la suite prédite).

Fin de commentaire

Paramètres internes :

U un vecteur à $2N - 2p + 1$ composantes.

V et W deux vecteurs à $2N - 2p + 2$ composantes.

Début de commentaire

U ne contient que des valeurs puisées dans les colonnes d'indice pair de la table de l' ϵ -algorithme.

V ne contient que des valeurs puisées dans les colonnes d'indice impair de la table de l' ϵ -algorithme.

W ne contient que des valeurs puisées dans les antidiagonales (i.e. la somme des deux indices est constante) de la table de l' ϵ -algorithme.

Fin de commentaire

Début de procédure

Début d'initialisation

Pour $i = 2p - N$ à $i = N + 1$, faire

$V(i) \leftarrow 0$

Fin pour.

Pour $i = 2p - N$ à $i = N$, faire

si $i < 0$ alors

$U(i) \leftarrow 0$

sinon

$U(i) \leftarrow S(i)$

Fin si

Fin pour.

Pour $i = 0$ à $i = N$, faire

$S_{barre}(i) \leftarrow S(i)$

Fin pour.

Fin d'initialisation.

Pour $i = 1$ à $i = N - p$, faire

Pour $j = 2p - N$ à $j = N - 2i + 1$, faire

si $V(j + 1) = \textit{infinity}$, alors

$V(j) \leftarrow \textit{infinity}$

sinon

si $U(j + 1) = \textit{infinity}$ ou si $U(j) = \textit{infinity}$, alors

$V(j) \leftarrow V(j + 1)$

sinon

si $U(j + 1) = U(j)$, alors

$V(j) \leftarrow \textit{infinity}$

sinon

$V(j) \leftarrow V(j + 1) + \frac{1}{U(j + 1) - U(j)}$

Fin si

Fin si

Fin si

Fin pour

```

Pour  $j = 2p - N$  à  $j = N - 2i$ , faire
  si  $U(j + 1) = \text{infinity}$ , alors
     $U(j) \leftarrow \text{infinity}$ 
  sinon
    si  $V(j + 1) = \text{infinity}$  ou si  $V(j) = \text{infinity}$ , alors
       $U(j) \leftarrow U(j + 1)$ 
    sinon
      si  $V(j + 1) = V(j)$ , alors
         $U(j) \leftarrow \text{infinity}$ 
      sinon
         $U(j) \leftarrow U(j + 1) + \frac{1}{V(j + 1) - V(j)}$ 
      Fin si
    Fin si
  Fin si
Fin pour.

```

Début de commentaire

Si on se réfère à la définition algorithmique de l' ϵ_p -prédiction, nous avons jusqu'ici calculé tous les termes de la table (1). Nous calculons maintenant ceux nécessaires de la table (2).

Fin de commentaire

Début d'initialisation

```

Pour  $i = 0$  à  $i = N - p$ , faire
   $W(2p - N + 2i) \leftarrow U(2p - N + 2i)$ 
   $W(2p - N + 2i + 1) \leftarrow V(2p - N + 2i + 1)$ 
Fin pour.

```

Fin d'initialisation.

```

Pour  $i = 1$  à  $i = N_{pred}$ , faire
  Pour  $j = 2p - N + 1$  à  $j = N$ , faire
    si  $W(j - 1) \neq \text{infinity}$ , si  $W(j) \neq \text{infinity}$ , et si  $W(j + 1) \neq \text{infinity}$ , alors
      si  $W(j + 1) = W(j - 1)$ , alors
         $W(j) \leftarrow \text{infinity}$ 
      sinon
         $W(j) \leftarrow W(j) + \frac{1}{W(j - 1) - W(j + 1)}$ 
      Fin si
    Fin si
  Fin pour
   $S_{barre}(N + i) \leftarrow W(N)$ 
Fin pour.

```

Fin de procédure.

HBARRE(N, S, z, T)

Début de commentaire

Cette procédure calcule la fonction \bar{h}_z .

Les paramètres d'entrée sont :

N , le nombre diminué de 1 de composantes du vecteur S .

S , un vecteur donné à $N + 1$ composantes.

z , un paramètre propre à la fonction.

Le paramètre de sortie est :

T , le vecteur à $N + 1$ composantes, défini par $T = \bar{h}_z(S)$.

Fin de commentaire

Début de procédure

Début d'initialisation

$T(0) \leftarrow S(0)$

Fin d'initialisation.

Pour $i = 1$ à $i = N$, faire

$T(i) \leftarrow z * T(i - 1) + S(i)$

Fin pour.

Fin de procédure.

HBARREINVERSE(N, S, z, T)

Début de commentaire

Cette procédure calcule la fonction \bar{h}_z^{-1} .

Les paramètres d'entrée sont :

N , le nombre diminué de 1 de composantes du vecteur S .

S , un vecteur donné à $N + 1$ composantes.

z , un paramètre propre à la fonction.

Le paramètre de sortie est :

T , le vecteur à $N + 1$ composantes, défini par $T = \bar{h}_z^{-1}(S)$.

Fin de commentaire

Début de procédure

Début d'initialisation

$T(0) \leftarrow S(0)$

Fin d'initialisation.

Pour $i = 1$ à $i = N$, faire

$T(i) \leftarrow -z * S(i - 1) + S(i)$

Fin pour.

Fin de procédure.

PROGRAMME PRINCIPAL

PADEPARTIELPREDICTION($X, r, Y, s, N, S, p, Npred, Sbarre$)

Début de commentaire

Cette procédure met en oeuvre la Padé-partiel-prédiction.

Les paramètres d'entrée sont :

X , un vecteur de taille r contenant les inverses des racines du polynôme $x(t)$.

Y , un vecteur de taille s contenant les inverses des racines du polynôme $y(t)$.

N , le nombre diminué de 1 de composantes du vecteur initial S à prédire par la Padé-partiel-prédiction calculée à l'aide des polynômes $x(t)$ et $y(t)$.

S , un vecteur donné à $N + 1$ composantes.

p , un paramètre propre à la Padé-partiel-prédiction.

$Npred$, un nombre qui définit combien de termes on veut déterminer pour la suite prédite.

Le paramètre de sortie est :

$Sbarre$, le vecteur prédit (constitué des $N + N_{pred} + 1$ premières composantes de la suite prédite).
Fin de commentaire

Début du programme principal

Pour $i = 1$ à $i = r$, faire
 HBARRE($N, S, X(i), S$)
Fin pour.

Pour $i = 1$ à $i = s$, faire
 HBARREINVERSE($N, S, Y(i), S$)
Fin pour.

HBARRE($N, S, 1, S$)

EPSILON($N, p, S, N_{pred}, Sbarre$)

Pour $i = 1$ à $i = r$, faire
 HBARREINVERSE($N + N_{pred}, Sbarre, X(i), Sbarre$)
Fin pour.

Pour $i = 1$ à $i = s$, faire
 HBARRE($N + N_{pred}, Sbarre, Y(i), Sbarre$)
Fin pour.

HBARREINVERSE($N + N_{pred}, Sbarre, 1, Sbarre$)

Fin du programme principal.

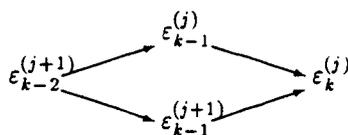
5.4 Stabilité de la Padé-partiel-prédiction

Pour étudier la stabilité de la Padé-partiel-prédiction, il suffit de considérer celle de l' ε_p -prédiction. En effet, l' ε -prédiction est le seul outil qui pourrait poser des problèmes de stabilité dans la Padé-partiel-prédiction, puisque l'autre outil, l'application élémentaire, n'est constituée que d'additions et de multiplications.

La stabilité numérique de l' ε -algorithme a déjà été analysée par P. Wynn dans [25] où l'auteur déclare faire une erreur sur l'un des termes de la table de l' ε -algorithme et observe de quelle manière celle-ci se propage sur les autres termes de cette même table. Dans la présente section, nous étudions la propagation de l'erreur due à l'arithmétique de l'ordinateur ou encore à la précision-machine, c'est-à-dire que nous supposons faire un certain type d'erreur non pas sur un terme uniquement, mais sur chacun des termes calculés par l'algorithme.

Observons maintenant ce qu'il en est de la stabilité pour deux des façons de générer l' ε -algorithme (classique et progressive).

On note $\varepsilon_k^{(j)}$ les éléments exacts de la table de l' ε_p -prédiction et $\tilde{\varepsilon}_k^{(j)}$ les éléments calculés de cette même table. On pose $|\varepsilon_k^{(j)} - \tilde{\varepsilon}_k^{(j)}| < \delta_k^{(j)}$ et on se propose d'évaluer les $\delta_k^{(j)}$.
La règle classique de l' ε -algorithme donne

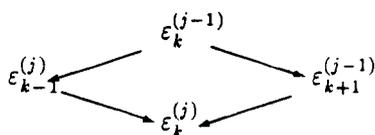


Et, on a

$$\delta_k^{(j)} = \delta_{k-2}^{(j+1)} + \frac{\delta_{k-1}^{(j)} + \delta_{k-1}^{(j+1)}}{|\varepsilon_{k-1}^{(j+1)} - \varepsilon_{k-1}^{(j)}|^2} + \delta + O(\delta^2)$$

où δ est l'erreur que l'on fait lorsque l'on stocke un nombre en machine.

La règle progressive de l' ε -algorithme donne



Et, on a

$$\delta_k^{(j)} = \delta_k^{(j-1)} + \frac{\delta_{k-1}^{(j)} + \delta_{k+1}^{(j-1)}}{|\varepsilon_{k-1}^{(j)} - \varepsilon_{k+1}^{(j-1)}|^2} + \delta + O(\delta^2).$$

On a donc un algorithme permettant de calculer les $\delta_k^{(j)}$:
Ceux calculés grâce à la règle classique

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{-1}^{(i)} = \delta, \forall i \in \{\max(0, 2p - N), \max(0, 2p - N) + 1, \dots, N\} \\ \delta_0^{(i)} = \delta, \forall i \in \{\max(0, 2p - N), \max(0, 2p - N) + 1, \dots, N\} \\ \delta_{2(i-1)}^{(-i)} = \delta, \forall i \in \{1, 2, \dots, N - 2p\} \\ \text{et } \delta_j^{(i)} = \delta_{j-2}^{(i+1)} + \frac{\delta_{j-1}^{(i)} + \delta_{j-1}^{(i+1)}}{|\varepsilon_{j-1}^{(i+1)} - \varepsilon_{j-1}^{(i)}|^2} + \delta + O(\delta^2), \forall j \in \{1, 2, \dots, 2N - 2p\}, \\ \quad \forall i \in \{\max(2p - N, -1 - \lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor), \max(2p - N, -1 - \lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor) + 1, \dots, N - j\} \\ \quad (\text{où, } \forall x \in \mathbb{R}, [x] \in \mathbb{N} \text{ est tel que } [x] \leq x < [x] + 1) \end{array} \right.$$

Et ceux calculés grâce à la règle progressive

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{2N-2p}^{(i)} = \delta_{2N-2p}^{(2p-N)}, \forall i \geq 2p - N + 1 \\ \delta_{-1}^{(i)} = \delta, \forall i \geq N + 1 \\ \text{et, } \delta_j^{(i)} = \delta_j^{(i-1)} + \frac{\delta_{j-1}^{(i)} + \delta_{j+1}^{(i-1)}}{|\varepsilon_{j-1}^{(i)} - \varepsilon_{j+1}^{(i-1)}|^2} + \delta + O(\delta^2), \forall j \in \{0, 1, \dots, 2N - 2p - 1\}, \forall i \geq N - j + 1 \end{array} \right.$$

Maintenant, nous nous proposons de donner les valeurs prises par $\delta_0^{(i)}$ sur deux exemples numériques particuliers.

Exemple 5.1 On impose au vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N}$ d'être donné par $S_i = \frac{1}{i+1}$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, N\}$ (ce vecteur est extrait d'une suite à convergence logarithmique).

Nous donnons dans un tableau à double entrée les valeurs prises par $\delta_0^{(i)}$ à δ près.

	$N=2$	$N=4$	$N=6$	$N=8$
$i=0$	δ	δ	δ	δ
$i=1$	δ	δ	δ	δ
$i=2$	δ	δ	δ	δ
$i=3$	$5.\delta$	δ	δ	δ
$i=4$	$13.\delta$	δ	δ	δ
$i=5$	$23.\delta$	$14.\delta$	δ	δ
$i=6$	$39.\delta$	$49.\delta$	δ	δ
$i=7$	$63.\delta$	$123.\delta$	$36.\delta$	δ
$i=8$	$98.\delta$	$267.\delta$	$170.\delta$	δ
$i=9$	$150.\delta$	$537.\delta$	$549.\delta$	$92.\delta$
$i=10$	$226.\delta$	$1027.\delta$	$1476.\delta$	$561.\delta$
$i=11$	$340.\delta$	$1902.\delta$	$3565.\delta$	$2210.\delta$
$i=12$	$508.\delta$	$3446.\delta$	$8028.\delta$	$7039.\delta$
$i=13$	$757.\delta$	$6150.\delta$	$17201.\delta$	$19727.\delta$
$i=14$	$1125.\delta$	$10864.\delta$	$35535.\delta$	$50715.\delta$
$i=15$	$1670.\delta$	$19052.\delta$	$71420.\delta$	$122512.\delta$
$i=16$	$2478.\delta$	$33241.\delta$	$140571.\delta$	$282324.\delta$

Exemple 5.2 On impose au vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N}$ d'être donné par $S_i = \frac{1}{2^{i(i+1)}}$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, N\}$ (ce vecteur est extrait d'une suite à convergence linéaire).

Nous donnons dans un tableau à double entrée les valeurs prises par $\delta_0^{(i)}$ à δ près.

	$N=2$	$N=4$	$N=6$	$N=8$
$i=0$	δ	δ	δ	δ
$i=1$	δ	δ	δ	δ
$i=2$	δ	δ	δ	δ
$i=3$	$6.\delta$	δ	δ	δ
$i=4$	$14.\delta$	δ	δ	δ
$i=5$	$27.\delta$	$16.\delta$	δ	δ
$i=6$	$49.\delta$	$60.\delta$	δ	δ
$i=7$	$85.\delta$	$162.\delta$	$43.\delta$	δ
$i=8$	$143.\delta$	$378.\delta$	$221.\delta$	δ
$i=9$	$237.\delta$	$816.\delta$	$763.\delta$	$113.\delta$
$i=10$	$390.\delta$	$1678.\delta$	$2192.\delta$	$747.\delta$
$i=11$	$638.\delta$	$3336.\delta$	$5643.\delta$	$3157.\delta$
$i=12$	$1041.\delta$	$6486.\delta$	$13521.\delta$	$10740.\delta$
$i=13$	$1695.\delta$	$12408.\delta$	$30799.\delta$	$32010.\delta$
$i=14$	$2758.\delta$	$23456.\delta$	$67596.\delta$	$87247.\delta$
$i=15$	$4483.\delta$	$43954.\delta$	$144237.\delta$	$222955.\delta$
$i=16$	$7285.\delta$	$81825.\delta$	$301131.\delta$	$542743.\delta$

Remarques concernant ces deux exemples numériques

1. Ces termes nous indiquent une évaluation de la propagation des erreurs dues à l'informatique de l'ordinateur. Cependant, il nous faut tout de même signifier que les calculs, qui sont basés sur des majorations d'erreurs, ne tiennent absolument pas compte des possibles compensations d'erreurs.
2. Dans les colonnes de ces deux tableaux (i.e. où N est constant), la croissance des erreurs paraît relativement forte.
3. Si on s'attarde sur les diagonales (i.e. où la différence entre les indices i et N est constante), nous

pouvons constater que les erreurs croissent avec N . En effet, plus on utilise de données, *meilleures* sont les approximations, mais plus elles nécessitent de calculs, et donc, plus la propagation des erreurs dues à l'arithmétique de l'ordinateur est *importante*.

4. Le sujet de la stabilité numérique renaîtra lorsque nous discuterons des exemples numériques.

Chapitre 6

Consistance des méthodes de prédiction

Qu'est-ce que la consistance pour une méthode de prédiction ?

Le terme consistance illustre la propriété suivante : lorsque la suite à prédire converge, alors la suite prédite converge vers la même limite.

Avant d'énoncer des propriétés, il semble important tout d'abord de différencier les deux types de consistance : consistance en colonne et consistance en diagonale. Le vocabulaire utilisé provient de celui usité dans les méthodes d'extrapolation, et il semble tout naturel de rapprocher, d'une part, la notion d'accélération en colonne de celle de consistance en colonne et, d'autre part, celle d'accélération en diagonale de celle de consistance en diagonale. La consistance en colonne est, en fait, la consistance à partir d'un nombre fini de termes de plus en plus loin de l'origine d'une suite. La consistance en diagonale est, quant à elle, la consistance à partir d'un nombre de termes de plus en plus grand. La principale différence (au niveau des démonstrations de résultats) entre consistance en diagonale et consistance en colonne réside en ce point : pour une suite prédite exprimée sous forme d'un rapport de deux déterminants, la taille des déterminants est fixe si l'on considère la consistance en colonne, mais elle croît infiniment dans le cas de la consistance en diagonale.

Cette étude est capitale dans ce travail car la définition choisie pour une méthode de prédiction est faible.

6.1 Consistance en colonne

Nous n'étudions ce phénomène que pour l' ϵ -prédiction et la E-prédiction.

Dans ce mémoire, nous avons simplifié l'écriture de la suite prédite en supposant que le vecteur à prédire était toujours indicé à partir de zéro. En conséquence, il nous est difficile d'exprimer le fait que l'on prédit des termes de plus en plus loin de l'origine et les écritures des définitions de la consistance en colonne sont lourdes.

6.1.1 Consistance en colonne pour l' ε -prédiction

Définition

Si

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\begin{vmatrix} S_{2K+i+m} & 1 & S_{K+i+m,2K,m}^{(\varepsilon)} & \cdots & S_{2K+i-1+m,2K,m}^{(\varepsilon)} \\ S_{K+m} & 1 & S_m & \cdots & S_{K-1+m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_{2K+m} & 1 & S_{K+m} & \cdots & S_{2K-1+m} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & S_m & \cdots & S_{K-1+m} \\ 1 & S_{1+m} & \cdots & S_{K+m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & S_{K+m} & \cdots & S_{2K-1+m} \end{vmatrix}} = 0, \quad \forall i \geq 1,$$

où $S_{i+m,2K,m}^{(\varepsilon)} = T_{i,2K}^{(\varepsilon)}$, $\forall i \in \mathbb{N}$ et où $(T_{i,2K}^{(\varepsilon)})_{i \geq 0}$ est l' ε -prédiction calculée à partir du vecteur $(T_i)_{0 \leq i \leq 2K}$ tel que $T_i = S_{i+m}$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, 2K\}$, alors l' ε -prédiction est consistante en colonne.

Remarques concernant la consistance en colonne pour l' ε -prédiction

1. Cette définition de la consistance en colonne de l' ε -prédiction implique directement que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (S_{2K+i+m,2K,m}^{(\varepsilon)} - S_{2K+i+m}) = 0, \quad \forall i \geq 1.$$

2. Si l' ε -prédiction est consistante en colonne pour une suite convergeant vers S , alors la suite prédite converge ⁽¹⁾, et converge vers la limite S ⁽²⁾, lorsque le vecteur à prédire est extrait de plus en plus et infiniment loin de l'origine :

$$\begin{aligned} & \text{(1) parce que } |S_{2K+i+m,2K,m}^{(\varepsilon)} - S_{2K+m,2K,m}^{(\varepsilon)}| \\ & \leq \underbrace{|S_{2K+i+m,2K,m}^{(\varepsilon)} - S_{2K+i+m}|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|S_{2K+i+m} - S_{2K+m}|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|S_{2K+m} - S_{2K+m,2K,m}^{(\varepsilon)}|}_{=0} < 2\varepsilon \\ & \text{(2) parce que } |S_{2K+i+m,2K,m}^{(\varepsilon)} - S| \leq \underbrace{|S_{2K+i+m,2K,m}^{(\varepsilon)} - S_{2K+i+m}|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|S_{2K+i+m} - S|}_{< \varepsilon} < 2\varepsilon \end{aligned}$$

Commençons directement par donner un résultat où $K = 1$ (la Δ^2 -prédiction) qui est présenté par C. Brezinski et M. Redivo Zaglia dans [8, p. 391].

Théorème 6.1 Soit $(S_i)_{i \geq 0}$ une suite convergeant vers S .

Si $\exists M, \exists J$, tels que $\forall j \geq J$, on ait $\left| \frac{\Delta S_{j+1}}{\Delta S_j} \right| \leq M$, alors, la Δ^2 -prédiction est consistante en colonne.

Nous généralisons ce théorème en le suivant :

Théorème 6.2 Soit $(S_i)_{i \geq 0}$ une suite convergeant vers S .

Si $\exists M_1, \exists M_2, \exists J$, tels que $\forall j \geq J$, on ait :

$$M_1 \leq \frac{\begin{vmatrix} \Delta S_j & \Delta S_{j+1} & \dots & \Delta S_{K+j} \\ \Delta S_{j+1} & \Delta S_{j+2} & \dots & \Delta S_{K+j+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta S_{K+j-1} & \Delta S_{K+j} & \dots & \Delta S_{2K+j-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta S_j & \Delta S_{j+1} & \dots & \Delta S_{K+j-1} \\ \Delta S_{j+1} & \Delta S_{j+2} & \dots & \Delta S_{K+j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta S_{K+j-1} & \Delta S_{K+j} & \dots & \Delta S_{2K+j-2} \end{vmatrix}} \stackrel{(l)}{\leq} M_2, \forall l \in \{1, 2, \dots, K\};$$

où $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n+1} \end{vmatrix}_{(m)}$, $\forall m \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ représente le déterminant de la matrice des

$(a_{k,l})_{1 \leq k \leq n, 1 \leq l \leq n+1, l \neq m}$, alors, l' ε -prédiction est consistante en colonne.

Démonstration

On a :

$$S_{2K+i+m, 2K, m}^{(\varepsilon)} - S_{2K+m} = - \frac{\begin{vmatrix} S_{2K+m} & 1 & S_{K+i+m, 2K, m}^{(\varepsilon)} & \dots & S_{2K+i-1+m, 2K, m}^{(\varepsilon)} \\ S_{K+m} & 1 & S_m & \dots & S_{K-1+m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_{2K+m} & 1 & S_{K+m} & \dots & S_{2K-1+m} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & S_m & \dots & S_{K-1+m} \\ 1 & S_{1+m} & \dots & S_{K+m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & S_{K+m} & \dots & S_{2K-1+m} \end{vmatrix}}$$

$$= - \frac{\begin{vmatrix} S_{2K+m} & 1 & S_{K+i+m, 2K, m}^{(\varepsilon)} & \dots & S_{2K+i-1+m, 2K, m}^{(\varepsilon)} \\ -\Delta S_{K+m} & 0 & -\Delta S_m & \dots & -\Delta S_{K+m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\Delta S_{2K+m-1} & 0 & -\Delta S_{K+m-1} & \dots & -\Delta S_{2K+m-2} \\ 0 & 0 & S_{K+m} - S_{K+i+m, 2K, m}^{(\varepsilon)} & \dots & S_{2K-1+m} - S_{2K+i-1+m, 2K, m}^{(\varepsilon)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta S_m & \Delta S_{m+1} & \dots & \Delta S_{m+K-1} \\ \Delta S_{m+1} & \Delta S_{m+2} & \dots & \Delta S_{m+K} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta S_{m+K-1} & \Delta S_{m+K} & \dots & \Delta S_{m+2K-2} \end{vmatrix}}$$

$$= - \frac{\begin{vmatrix} \Delta S_m & \dots & \Delta S_{K+m-1} & \Delta S_{K+m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \Delta S_{K+m-1} & \dots & \Delta S_{2K+m-2} & \Delta S_{2K+m-1} \\ S_{K+i+m, 2K, m}^{(\varepsilon)} - S_{K+m} & \dots & S_{2K+i-1+m, 2K, m}^{(\varepsilon)} - S_{2K-1+m} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta S_m & \Delta S_{m+1} & \dots & \Delta S_{m+K-1} \\ \Delta S_{m+1} & \Delta S_{m+2} & \dots & \Delta S_{m+K} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta S_{m+K-1} & \Delta S_{m+K} & \dots & \Delta S_{m+2K-2} \end{vmatrix}}$$

$$= - \sum_{j=0}^{K-1} \left((-1)^{K+j} (S_{K+i+m+j, 2K, m}^{(\varepsilon)} - S_{K+m+j}) \frac{\begin{vmatrix} \Delta S_m & \Delta S_{m+1} & \dots & \Delta S_{K+m} \\ \Delta S_{m+1} & \Delta S_{m+2} & \dots & \Delta S_{K+m+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta S_{K+m-1} & \Delta S_{K+m} & \dots & \Delta S_{2K+m-1} \end{vmatrix}_{(j)}}{\begin{vmatrix} \Delta S_m & \Delta S_{m+1} & \dots & \Delta S_{m+K-1} \\ \Delta S_{m+1} & \Delta S_{m+2} & \dots & \Delta S_{m+K} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta S_{m+K-1} & \Delta S_{m+K} & \dots & \Delta S_{m+2K-2} \end{vmatrix}} \right).$$

Donc, $\forall m \geq J$,

$$|S_{2K+i+m, 2K, m}^{(\varepsilon)} - S_{2K+m}| < \max(|M_1|, |M_2|) \sum_{j=0}^{K-1} |S_{K+i+m+j, 2K, m}^{(\varepsilon)} - S_{K+m+j}|,$$

et il s'ensuit, par récurrence sur i , que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2K+i+m, 2K, m}^{(\varepsilon)} - S_{2K+i+m} = 0,$$

et donc l' ε -prédiction est consistante en colonne d'après le premier point des remarques précédentes.

6.1.2 Consistance en colonne pour la E-prédiction

Définition

Si

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\begin{vmatrix} S_{N+i+m} & 1 & g_1(N+i+m) & \dots & g_N(N+i+m) \\ S_m & 1 & g_1(m) & \dots & g_N(m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_{N+m} & 1 & g_1(N+m) & \dots & g_N(N+m) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & g_1(m) & \dots & g_N(m) \\ 1 & g_1(m+1) & \dots & g_N(m+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & g_1(N+m) & \dots & g_N(N+m) \end{vmatrix}} = 0, \forall i \geq 1,$$

alors la E-prédiction calculée à l'aide de la table (g) est consistante en colonne.

Remarques concernant la consistance en colonne pour la E-prédiction

1. Cette définition de la consistance en colonne de la E-prédiction calculée à l'aide de la table (g) implique directement que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} ({}_{(g)}S_{N+i+m, N, m}^{(E)} - S_{N+i+m}) = 0, \forall i \geq 1,$$

où ${}_{(g)}S_{i+m, N, m}^{(E)} = ({}_{(\tilde{g})}T_{i, N}^{(E)})$, $\forall i \in \mathbb{N}$ et où $({}_{(\tilde{g})}T_{i, N}^{(E)})_{i \geq 0}$ est la E-prédiction calculée à l'aide de la table (\tilde{g}) à partir du vecteur $(T_i)_{0 \leq i \leq N}$ donné par $T_i = S_{i+m}$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, N\}$ (la table (\tilde{g}) est telle que lorsque (g) est la table des $g_i(n)$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, N\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, (\tilde{g}) est la table des $\tilde{g}_i(n) = g_i(n+m)$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, N\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$).

2. Si la E-prédiction calculée à partir de la table (g) est consistante en colonne pour une suite convergeant vers S, alors la suite prédite converge ⁽¹⁾, et converge vers la limite S ⁽²⁾, lorsque le vecteur à prédire est extrait de plus en plus et infiniment loin de l'origine :

$$\begin{aligned}
 & \text{(1) parce que } |(g)S_{N+i+m, N, m}^{(E)} - (g)S_{N+m, N, m}^{(E)}| \\
 & \leq \underbrace{|(g)S_{N+i+m, N, m}^{(E)} - S_{N+i+m}|}_{< \epsilon} + \underbrace{|S_{N+i+m} - S_{N+m}|}_{< \epsilon} + \underbrace{|S_{N+m} - (g)S_{N+m, N, m}^{(E)}|}_{=0} < 2\epsilon
 \end{aligned}$$



$$\text{(2) parce que } |(g)S_{N+i+m, N, m}^{(E)} - S| \leq \underbrace{|(g)S_{N+i+m, N, m}^{(E)} - S_{N+i+m}|}_{< \epsilon} + \underbrace{|S_{N+i+m} - S|}_{< \epsilon} < 2\epsilon$$

Pour argumenter cette section, nous exposons ici sans démonstration un théorème qui nous est démontré par C. Brezinski et M. Redivo Zaglia dans [8, p. 393].

Théorème 6.3 Soit $(S_i)_{i \geq 0}$ une suite convergeant vers S, telle que $S_n = S + a_1 g_1(n) + a_2 g_2(n) + \dots, \forall n \in \mathbb{N}$.

Si $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{g_i(j+1)}{g_i(j)} = b_i \neq 1, \forall i \geq 1$, avec $b_i \neq b_j$ pour $i \neq j$ et si $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{g_{i+1}(j)}{g_i(j)} = 0, \forall i \in \mathbb{N}$, en imposant $g_0(j) = 1, \forall j \in \mathbb{N}$, alors, la E-prédiction est consistante en colonne.

Le théorème suivant concerne des suites auxiliaires qui ne rentrent pas dans le cadre du théorème précédent.

Préalablement, donnons ici un lemme qui est présenté et démontré par A. C. Matos et M. Prévost sous le nom de théorème 2, dans [13]. Celui-ci sera utile à la démonstration du théorème de consistance à suivre.

Lemme 6.1 Soit $(g_i(n))_{n \in \mathbb{N}}, \forall i \in \mathbb{N}$ un ensemble de suites telles que :

(i)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_{i+1}(n)}{g_i(n)} = 0, \forall i \in \mathbb{N}$$

(ii)

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall i \in \mathbb{N}, \exists J \in \mathbb{N} \text{ tel que si } j \geq J, \text{ alors, } \left| \begin{array}{cccc} g_{i+p}(j) & g_{i+p-1}(j) & \dots & g_i(j) \\ g_{i+p}(j+1) & g_{i+p-1}(j+1) & \dots & g_i(j+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{i+p}(j+p) & g_{i+p-1}(j+p) & \dots & g_i(j+p) \end{array} \right| \geq 0.$$

alors $\forall k \in \mathbb{N}, \forall l \geq k+1, \forall i \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \begin{array}{cccc} g_{i+l+1}(n) & g_{i+k}(n) & g_{i+k-1}(n) & \dots & g_i(n) \\ g_{i+l+1}(n+1) & g_{i+k}(n+1) & g_{i+k-1}(n+1) & \dots & g_i(n+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{i+l+1}(n+k+1) & g_{i+k}(n+k+1) & g_{i+k-1}(n+k+1) & \dots & g_i(n+k+1) \end{array} \right| = 0.$$

Enonçons maintenant un théorème qui concerne plutôt la Richardson-prédiction (ce procédé provient de la E-prédiction, mais la table (g) des suites auxiliaires est donnée par $g_i(j) = x_j^i, \forall i \geq 1, \forall j \in \mathbb{N}$) :

Théorème 6.4 Soit $(S_i)_{i \geq 0}$ une suite convergeant vers S , telle que $S_i = S + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots \forall i \in \mathbb{N}$. Si la table des suites auxiliaires est donnée par : $g_i(j) = x_j^i, \forall i \geq 1, \forall j \in \mathbb{N}$, où $(x_i)_{i \geq 0}$ est une suite à termes positifs et qui décroît strictement, alors, la E-prédiction calculée à l'aide de la table (g) est consistante en colonne.

Démonstration

Comme $S_n = S + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots, \forall n \in \mathbb{N}$, on déduit :

$$\begin{aligned}
 & \left| \begin{array}{cccc} S_{N+i+m} & 1 & x_{N+i+m} & \dots & x_{N+i+m}^N \\ S_m & 1 & x_m & \dots & x_m^N \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_{N+m} & 1 & x_{N+m} & \dots & x_{N+m}^N \end{array} \right| \\
 & \left| \begin{array}{cccc} 1 & x_m & \dots & x_m^N \\ 1 & x_{m+1} & \dots & x_{m+1}^N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{N+m} & \dots & x_{N+m}^N \end{array} \right| \\
 & = (-1)^{N+1} \sum_{j \geq N+1} a_j \left| \begin{array}{cccc} x_m^j & x_m^N & \dots & x_m & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{N+m}^j & x_{N+m}^N & \dots & x_{N+m} & 1 \\ x_{N+i+m}^j & x_{N+i+m}^N & \dots & x_{N+i+m} & 1 \end{array} \right| \\
 & \left| \begin{array}{cccc} x_m^N & \dots & x_m & 1 \\ x_{m+1}^N & \dots & x_{m+1} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{N+m}^N & \dots & x_{N+m} & 1 \end{array} \right| \\
 & = (-1)^{N+1} \left| \begin{array}{cccc} x_m^{N+1} & x_m^N & \dots & x_m & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{N+m}^{N+1} & x_{N+m}^N & \dots & x_{N+m} & 1 \\ x_{N+i+m}^{N+1} & x_{N+i+m}^N & \dots & x_{N+i+m} & 1 \end{array} \right| \\
 & \left| \begin{array}{cccc} x_m^N & \dots & x_m & 1 \\ x_{m+1}^N & \dots & x_{m+1} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{N+m}^N & \dots & x_{N+m} & 1 \end{array} \right| \\
 & \times \sum_{j \geq N+1} a_j \prod_{\alpha=N+2}^j \left| \begin{array}{cccc} x_m^\alpha & x_m^N & \dots & x_m & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{N+m}^\alpha & x_{N+m}^N & \dots & x_{N+m} & 1 \\ x_{N+i+m}^\alpha & x_{N+i+m}^N & \dots & x_{N+i+m} & 1 \end{array} \right| \\
 & \left| \begin{array}{cccc} x_m^{\alpha-1} & x_m^N & \dots & x_m & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{N+m}^{\alpha-1} & x_{N+m}^N & \dots & x_{N+m} & 1 \\ x_{N+i+m}^{\alpha-1} & x_{N+i+m}^N & \dots & x_{N+i+m} & 1 \end{array} \right|
 \end{aligned}$$

$$= (-1)^{N+1} \left(\prod_{\beta=m}^{m+N} (x_\beta - x_{N+m+i}) \right) \sum_{j \geq N+1} a_j \prod_{\alpha=N+2}^j$$

x_m^α	x_m^N	...	x_m	1
\vdots	\vdots		\vdots	\vdots
x_{N+m}^α	x_{N+m}^N	...	x_{N+m}	1
x_{N+i+m}^α	x_{N+i+m}^N	...	x_{N+i+m}	1
$x_m^{\alpha-1}$	x_m^N	...	x_m	1
\vdots	\vdots		\vdots	\vdots
$x_{N+m}^{\alpha-1}$	x_{N+m}^N	...	x_{N+m}	1
$x_{N+i+m}^{\alpha-1}$	x_{N+i+m}^N	...	x_{N+i+m}	1

Et, donc, d'après le lemme 6.1, la série converge et on obtient directement le résultat suivant :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\begin{vmatrix} S_{N+i+m} & 1 & x_{N+i+m} & \dots & x_{N+i+m}^N \\ S_m & 1 & x_m & \dots & x_m^N \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_{N+m} & 1 & x_{N+m} & \dots & x_{N+m}^N \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_m & \dots & x_m^N \\ 1 & x_{m+1} & \dots & x_{m+1}^N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{N+m} & \dots & x_{N+m}^N \end{vmatrix}} = 0.$$

6.2 Consistance en diagonale

La consistance en diagonale n'est étudiée ici que pour deux méthode de prédiction. à savoir la Padé-prédiction et la E-prédiction.

6.2.1 Consistance en diagonale pour la Padé-prédiction

Définition

Lorsque $\lim_{N \rightarrow \infty} (S_{N+k,N}^{(p)} - S_{N+k}) = 0, \forall k \geq 1$, on dit que la Padé-prédiction est consistante en diagonale.

Remarques concernant la consistance en diagonale pour la Padé-prédiction

1. Si la Padé-prédiction est consistante en diagonale pour une suite convergeant vers S , alors la suite prédite converge ⁽¹⁾, et converge vers la limite S ⁽²⁾, lorsque le nombre de composantes du vecteur à prédire croît infiniment :

$$^{(1)} \text{ parce que } |S_{N+k,N}^{(p)} - S_{N,N}^{(p)}| \leq \underbrace{|S_{N+k,N}^{(p)} - S_{N+k}|}_{< \epsilon} + \underbrace{|S_{N+k} - S_N|}_{< \epsilon} + \underbrace{|S_N - S_{N,N}^{(p)}|}_{=0} < 2\epsilon$$

$$^{(2)} \text{ parce que } |S_{N+k,N}^{(p)} - S| \leq \underbrace{|S_{N+k,N}^{(p)} - S_{N+k}|}_{< \epsilon} + \underbrace{|S_{N+k} - S|}_{< \epsilon} < 2\epsilon$$

2. Nous n'étudions ici que des suites constituées de moments de Hamburger.

Dans cette section, nous établissons quelques théorèmes de consistance pour la Padé-prédiction. Le théorème suivant nous procure directement quelques résultats de consistance en diagonale pour la Padé-prédiction.

Théorème 6.5 Si $(U_i)_{i \geq 0} \in MH$ ($R = \max(|R_1|, |R_2|)$ est supposé fini), et si $(U_i)_{0 \leq i \leq N}$ satisfait la condition $(H_N^{(p)})$ ($p = p(N)$ est une fonction de N telle que $2p - N \geq -1$), alors la suite $(U_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$ prédite par la Padé-prédiction à partir du vecteur $(U_i)_{0 \leq i \leq N} \in MHE$ est telle que :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{U_{N+k,N}^{(p)} - U_{N+k}}{\rho^N} = 0, \forall \rho > R, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Démonstration

D'après le théorème 3.22, $(U_{i,N}^{(p)})_{i \geq 2p-N+1} \in MH$. Donc, nous avons :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{U_{N+k,N}^{(p)}}{\rho^N} = 0, \forall \rho > R, \forall k \in \mathbb{N}$$

et, comme

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{U_{N+k}}{\rho^N} = 0, \forall \rho > R, \forall k \in \mathbb{N},$$

il s'ensuit que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{U_{N+k,N}^{(p)} - U_{N+k}}{\rho^N} = 0, \forall \rho > R, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Nous déduisons directement les trois corollaires (pour lesquels la valeur de ρ dans le théorème 6.5 vaut exactement 1) suivants :

Corollaire 6.1 Si $(U_i)_{i \geq 0} \in TM$ est une suite à convergence linéaire, et si $(U_i)_{0 \leq i \leq N}$ satisfait la condition $(H_N^{(p)})$ ($p = p(N)$ est une fonction de N telle que $2p - N \geq -1$), alors la suite $(U_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$ prédite par la Padé-prédiction à partir du vecteur $(U_i)_{0 \leq i \leq N} \in TME$ est telle que :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} U_{N+k,N}^{(p)} - U_{N+k} = 0, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Corollaire 6.2 Si $(U_i)_{i \geq 0} \in TO$ est une suite à convergence linéaire, et si $(U_i)_{0 \leq i \leq N}$ satisfait la condition $(H_N^{(p)})$ ($p = p(N)$ est une fonction de N telle que $2p - N \geq -1$), alors la suite $(U_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$ prédite par la Padé-prédiction à partir du vecteur $(U_i)_{0 \leq i \leq N} \in TOE$ est telle que :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} U_{N+k,N}^{(p)} - U_{N+k} = 0, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Corollaire 6.3 Si $(U_i)_{i \geq 0} \in MH$ (on suppose $-1 < R_1 < R_2 < 1$) et si $(U_i)_{0 \leq i \leq N}$ satisfait la condition $(H_N^{(p)})$ ($p = p(N)$ est une fonction de N telle que $2p - N \geq -1$), alors la suite $(U_{i,N}^{(p)})_{i \geq 0}$ prédite par la Padé-prédiction à partir du vecteur $(U_i)_{0 \leq i \leq N} \in MHE$ est telle que :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} U_{N+k,N}^{(p)} - U_{N+k} = 0, \forall k \in \mathbb{N}.$$

En ce qui concerne l'accélération de la convergence en diagonale par l' ε -algorithme, nous ne sommes pas encore en possession de résultats autres que ceux pour les suites totalement monotones (ou totalement oscillantes, ...) à convergence linéaire. Le lien qui a été établi entre l' ε -algorithme et la Padé-prédiction, nous laisse donc à penser qu'il faudrait toujours imposer au vecteur à prédire d'être extrait de moments de Hamburger pour pouvoir conclure quant à la consistance en diagonale de la Padé-prédiction.

6.2.2 Consistance en diagonale pour la E-prédiction

Définition

Si

$$\lim_{N \rightarrow \infty} ({}_{(g)}S_{N+k,N}^{(E)} - S_{N+k}) = 0, \forall k \geq 1,$$

alors la E-prédiction calculée à l'aide de la table (g) est consistante en diagonale.

Remarques concernant la consistance en diagonale pour la E-prédiction

1. Pour montrer des résultats de consistance en diagonale pour la E-prédiction calculée à l'aide de la table (g) , il nous suffit donc de montrer que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\begin{vmatrix} S_{N+i} & 1 & g_1(N+i) & \dots & g_N(N+i) \\ S_0 & 1 & g_1(0) & \dots & g_N(0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_N & 1 & g_1(N) & \dots & g_N(N) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & g_1(0) & \dots & g_N(0) \\ 1 & g_1(1) & \dots & g_N(1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & g_1(N) & \dots & g_N(N) \end{vmatrix}} = 0, \forall i \geq 1.$$

2. Si la E-prédiction calculée à l'aide de la table (g) est consistante en diagonale pour une suite convergent vers S , alors la suite prédite converge ⁽¹⁾, et converge vers la limite S ⁽²⁾, lorsque le nombre de composantes du vecteur à prédire croît infiniment :

$$(1) \text{ parce que } |{}_{(g)}S_{N+k,N}^{(E)} - ({}_{(g)}S_{N,N}^{(E)})| \leq \underbrace{|{}_{(g)}S_{N+k,N}^{(E)} - S_{N+k}|}_{< \epsilon} + \underbrace{|S_{N+k} - S_N|}_{< \epsilon} + \underbrace{|S_N - ({}_{(g)}S_{N,N}^{(E)})|}_{=0} < 2\epsilon$$

$$(2) \text{ parce que } |{}_{(g)}S_{N+k,N}^{(E)} - S| \leq \underbrace{|{}_{(g)}S_{N+k,N}^{(E)} - S_{N+k}|}_{< \epsilon} + \underbrace{|S_{N+k} - S|}_{< \epsilon} < 2\epsilon$$

Le seul théorème que nous allons énoncer concerne en fait la Richardson-prédiction. Cependant, voyons d'abord le lemme préliminaire suivant, qui est établi par M. Prévost dans [18], sous l'appellation lemme 1, (i).

Lemme 6.2 Si $\exists J \in \mathbb{N}$ tel que $\forall j \geq J, \forall p \in \mathbb{N}, \forall i \in \mathbb{N}$,

$$\begin{vmatrix} g_{i+p}(j) & g_{i+p-1}(j) & \dots & g_i(j) \\ g_{i+p}(j+1) & g_{i+p-1}(j+1) & \dots & g_i(j+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{i+p}(j+p) & g_{i+p-1}(j+p) & \dots & g_i(j+p) \end{vmatrix},$$

alors la suite des éléments

$$u_i^{(k)} = \frac{1}{g_i(n_1)} \begin{vmatrix} g_i(n_1) & g_{l_k}(n_1) & \dots & g_{l_1}(n_1) \\ g_i(n_2) & g_{l_k}(n_2) & \dots & g_{l_1}(n_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_i(n_{k+1}) & g_{l_k}(n_{k+1}) & \dots & g_{l_1}(n_{k+1}) \end{vmatrix}$$

est croissante avec $i \geq l_k, \forall (n_1, n_2, \dots, n_{k+1})$ tel que $J \leq n_1 < n_2 < \dots < n_{k+1}$. $\forall (l_1, l_2, \dots, l_k)$ tel que $0 \leq l_1 < l_2 < \dots < l_k$.

Théorème 6.6 Soit $(S_i)_{i \geq 0}$ une suite convergeant vers S , telle que $S_i = S + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots, \forall i \in \mathbb{N}$. Si on impose $|x_0| < r$ où r est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{i \geq 0} a_i t^i$, et si la table des suites auxiliaires est donnée par : $g_i(j) = x_j^i, \forall i \geq 1, \forall j \in \mathbb{N}$, où $(x_i)_{i \geq 0}$ est une suite à termes positifs et qui décroît strictement en convergeant vers zéro, alors, la E -prédiction calculée à l'aide de la table (g) est consistante en diagonale.

Démonstration

Puisque $S_i = S + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots, \forall i \in \mathbb{N}$, on déduit :

$$S_{N+i} - (g)S_{N+i,N}^{(E)} = \frac{\begin{vmatrix} S_{N+i} & 1 & x_{N+i} & \dots & x_{N+i}^N \\ S_0 & 1 & x_0 & \dots & x_0^N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ S_N & 1 & x_N & \dots & x_N^N \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^N \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^N \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_N & \dots & x_N^N \end{vmatrix}}$$

$$= \sum_{j \geq N+1} a_j \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^N & x_0^j \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_N & \dots & x_N^N & x_N^j \\ 1 & x_{N+i} & \dots & x_{N+i}^N & x_{N+i}^j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^N \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^N \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_N & \dots & x_N^N \end{vmatrix}}$$

Cependant, la suite des éléments

$$\frac{\begin{vmatrix} x_0^j & x_0^N & \dots & x_0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ x_N^j & x_N^N & \dots & x_N & 1 \\ x_{N+i}^j & x_{N+i}^N & \dots & x_{N+i} & 1 \end{vmatrix}}{x_0^j}$$

est une suite qui croît avec j , d'après le lemme 6.2. Chaque terme de cette suite est donc inférieur à sa limite lorsque j tend vers l'infini, et donc :

$$0 < \frac{1}{x_0^j} \begin{vmatrix} x_0^j & x_0^N & \dots & x_0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ x_N^j & x_N^N & \dots & x_N & 1 \\ x_{N+i}^j & x_{N+i}^N & \dots & x_{N+i} & 1 \end{vmatrix} < \begin{vmatrix} 1 & x_0^N & \dots & x_0 & 1 \\ 0 & x_1^N & \dots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & x_N^N & \dots & x_N & 1 \\ 0 & x_{N+i}^N & \dots & x_{N+i} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1^N & \dots & x_1 & 1 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ x_N^N & \dots & x_N & 1 \\ x_{N+i}^N & \dots & x_{N+i} & 1 \end{vmatrix}$$

Donc :

$$|S_{N+i} - {}_{(g)}S_{N+i,N}^{(E)}| < \left| \sum_{j \geq N+1} a_j x_0^j \right| \left| \frac{\begin{vmatrix} x_1^N & \dots & x_1 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_N^N & \dots & x_N & 1 \\ x_{N+i}^N & \dots & x_{N+i} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^N \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_N & \dots & x_N^N \end{vmatrix}} \right|,$$

et finalement,

$$|S_{N+i} - {}_{(g)}S_{N+i,N}^{(E)}| < \prod_{l \in \{1,2,\dots,N\}} \left| \frac{x_{N+i} - x_l}{x_l - x_0} \right| \left| \sum_{j \geq N+1} a_j x_0^j \right|.$$

Or $|x_0| < r$, donc, $\sum_{j \geq N+1} a_j x_0^j < \infty$, et comme $(x_i)_{i \geq 0}$ décroît strictement en convergeant vers zéro, $\prod_{l \in \{1,2,\dots,N\}} \frac{x_{N+i} - x_l}{x_l - x_0}$ tend vers zéro quand N tend vers l'infini, et donc :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_{N+i} - {}_{(g)}S_{N+i,N}^{(E)} = 0.$$

Les résultats concernant la consistance donnent un sens à ce mémoire, mais il y a certainement encore beaucoup à faire dans cette voie ...

Chapitre 7

Quelques applications numériques

Dans ce dernier chapitre, nous allons comparer deux méthodes de prédiction au travers de deux exemples numériques. Celles-ci dépendent énormément du choix des paramètres, et il nous sera difficile d'émettre un avis sur la sélection de ces derniers. En effet, la *meilleure* Padé-prédiction est liée au choix du *meilleur* approximant de Padé ; la *meilleure* Padé-partiel-prédiction requiert, en plus, un choix approprié pour les polynômes $x(t)$ et $y(t)$; la *meilleure* E-prédiction, quant à elle, exige la connaissance d'une échelle de comparaison sur laquelle la suite à prédire possède un développement asymptotique. Pour le choix du meilleur approximant de Padé, J. Gilewicz nous fournit un exposé dans [11, chap. 8]. D'autre part, nous pouvons, afin de tester la E-prédiction, trouver des suites possédant un développement asymptotique sur une échelle de comparaison connue dans [18].

7.1 Premier exemple

Nous considérons ici que le vecteur à prédire $(S_i)_{0 \leq i \leq N}$ est donné par $S_i = \sum_{j=0}^i \frac{1}{(j+1)^2}$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, N\}$.

Il est bien connu que lorsque N tend vers l'infini, S_N tend vers $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

Pour ce vecteur, parmi toutes les Padé-partiel-prédictions, c'est l' ε -prédiction (avec $N = 2K$) que nous choisissons d'exhiber. La suite dont est extrait le vecteur à prédire convergeant vers une limite non nulle, il semble *raisonnable* d'imposer à la Padé-partiel-prédiction d'avoir un comportement du type $S_n = a_1 b_1^n + a_2 b_2^n + \dots + a_K b_K^n + c_1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (voir théorème 2.3), en espérant que c_1 tende vers $\zeta(2)$ et que les b_i prennent des valeurs comprises dans $] -1, 1[$.

Ensuite, nous donnons le résultat de la E-prédiction calculée à l'aide des suites auxiliaires correspondant à l'échelle de comparaison connue sur laquelle la suite à prédire $(S_i)_{i \geq 0}$ donnée par $S_i = \sum_{j=0}^i \frac{1}{(j+1)^2}$, $\forall i \in \mathbb{N}$ admet un développement asymptotique.

L' ε -prédiction :

Nous rappelons que la suite $(S_{i,N}^{(\varepsilon)})_{i \geq 0}$ est l' ε -prédiction calculée à partir du vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N}$.

Nous notons cette suite $(\bar{S}_{i,N}^{(\varepsilon)})_{i \geq 0}$ lorsqu'elle est programmée en arithmétique exacte (avec MATHEMATICA) et $(\tilde{S}_{i,N}^{(\varepsilon)})_{i \geq 0}$ lorsqu'elle est programmée avec la précision machine (19 chiffres avec MATHEMATICA).

On définit les tableaux à double entrée suivants :

$$EPS_1(i, N) = -\log_{10}|S_{i,N}^{(\epsilon)} - S_i|, \forall i \geq N + 1$$

et

$$EPS_2(i, N) = |\bar{S}_{i,N}^{(\epsilon)} - \tilde{S}_{i,N}^{(\epsilon)}|, \forall i \geq N + 1.$$

$EPS_1(i, N)$:

	$N = 2$	$N = 4$	$N = 6$	$N = 8$
$i = 3$	1.9			
$i = 4$	1.5			
$i = 5$	1.3	3.1		
$i = 6$	1.2	2.6		
$i = 7$	1.1	2.3	4.3	
$i = 8$	1.0	2.1	3.7	
$i = 9$	1.0	1.9	3.3	5.5
$i = 10$	1.0	1.8	3.0	4.8
$i = 11$	0.9	1.7	2.8	4.3
$i = 12$	0.9	1.6	2.6	4.0

et

$EPS_2(i, N)$:

	$N = 2$	$N = 4$	$N = 6$	$N = 8$
$i = 3$	$1E - 19$	$1E - 19$	$1E - 19$	$1E - 19$
$i = 4$	$1E - 19$	$1E - 19$	$1E - 19$	$1E - 19$
$i = 5$	$1E - 19$	$1E - 19$	$1E - 19$	$1E - 19$
$i = 6$	$1E - 19$	$2E - 16$	$1E - 19$	$1E - 19$
$i = 7$	$1E - 19$	$4E - 16$	$1E - 15$	$1E - 19$
$i = 8$	$1E - 19$	$2E - 15$	$2E - 15$	$1E - 19$
$i = 9$	$1E - 19$	$2E - 15$	$2E - 16$	$3E - 15$
$i = 10$	$1E - 19$	$3E - 15$	$6E - 16$	$3E - 15$
$i = 11$	$1E - 15$	$2E - 15$	$2E - 15$	$1E - 15$
$i = 12$	$6E - 17$	$3E - 15$	$2E - 15$	$3E - 15$

Une E-prédiction :

Nous rappelons que la suite $((g)S_{i,N}^{(E)})_{i \geq 0}$ est la E-prédiction calculée à l'aide de la table (g), à partir du vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N}$.

Nous notons cette suite $((g)\bar{S}_{i,N}^{(E)})_{i \geq 0}$ lorsqu'elle est programmée en arithmétique exacte (avec MATHEMATICA) et $((g)\tilde{S}_{i,N}^{(E)})_{i \geq 0}$ lorsqu'elle est programmée avec la précision machine (19 chiffres avec MATHEMATICA).

Nous définissons la table (g) des suites auxiliaires par

$$g_j(i) = \frac{1}{(i+1)^j}, \forall j \in \{1, 2, \dots, N\}$$

car nous connaissons l'expression du développement asymptotique de la suite $(S_i)_{i \geq 0}$ donnée par $S_i = \sum_{j=0}^i \frac{1}{(j+1)^2}$, $\forall i \in \mathbb{N}$, sur l'échelle de comparaison $g_1(i), g_2(i), \dots$.

On définit les tableaux à double entrée suivants :

$$E_1(i, N) = -\log_{10}|(g)S_{i,N}^{(E)} - S_i|, \forall i \geq N + 1$$

et

$$E_2(i, N) = |(g)\bar{S}_{i,N}^{(E)} - (g)\tilde{S}_{i,N}^{(E)}|, \forall i \geq N + 1.$$

	$N = 2$	$N = 3$	$N = 4$	$N = 5$	$N = 6$	
$i = 3$	2.8					
$i = 4$	2.4	4.3				
$i = 5$	2.3	3.9	6.7			
$i = 6$	2.2	3.7	6.2	7.0		
$E_1(i, N) :$	$i = 7$	2.1	3.5	5.9	6.5	8.5
	$i = 8$	2.1	3.4	5.7	6.2	8.0
	$i = 9$	2.0	3.4	5.5	6.0	7.7
	$i = 10$	2.0	3.3	5.4	5.9	7.4
	$i = 11$	2.0	3.3	5.3	5.7	7.3
	$i = 12$	1.9	3.2	5.2	5.6	7.1

et

	$N = 2$	$N = 3$	$N = 4$	$N = 5$	$N = 6$	
$i = 3$	1E-19	1E-19	1E-19	1E-19	1E-19	
$i = 4$	1E-19	1E-19	1E-19	1E-19	1E-19	
$i = 5$	1E-19	1E-19	1E-19	1E-19	1E-19	
$i = 6$	1E-19	1E-19	1E-19	1E-19	1E-19	
$E_2(i, N) :$	$i = 7$	1E-19	1E-19	1E-19	1E-19	1E-19
	$i = 8$	1E-19	1E-19	1E-19	1E-19	1E-19
	$i = 9$	1E-19	1E-19	2E-19	1E-19	1E-19
	$i = 10$	1E-19	1E-19	2E-19	1E-19	1E-19
	$i = 11$	1E-19	1E-19	3E-19	1E-19	1E-19
	$i = 12$	1E-19	1E-19	3E-19	1E-19	3E-15

Quelques remarques à propos de cet exemple

1. Les tableaux $EPS_1(i, N)$ et $E_1(i, N)$ indiquent le nombre de décimales exactes de la suite prédite comparativement à la suite $(S_i)_{i \geq 0}$ donnée par $S_i = \sum_{j=0}^i \frac{1}{(j+1)^2}$, $\forall i \in \mathbb{N}$.
2. Nous notons aussi qu'il n'est ni utile de considérer les $EPS_3(i, N) = -\log_{10} \frac{|S_{i,N}^{(\varepsilon)} - S_i|}{S_i}$, ni encore les $E_3(i, N) = -\log_{10} \frac{|{}_{(g)}S_{i,N}^{(E)} - S_i|}{S_i}$, parce que $S_i \in [1, \zeta(2)]$. Par conséquent, les $EPS_3(i, N)$ sont proches des $EPS_1(i, N)$ et les $E_3(i, N)$ proches des $E_1(i, N)$.
3. La E-prédiction donne de *meilleurs* résultats que l' ε -prédiction, mais elle utilise la connaissance du développement asymptotique de la suite à prédire sur l'échelle de comparaison $g_1(n), g_2(n), \dots$.
4. Le tableau $EPS_2(i, N)$ (respectivement $E_2(i, N)$) nous donne des renseignements sur la stabilité de l' ε -prédiction (respectivement la E-prédiction) puisqu'il évalue l'erreur due à l'arithmétique de l'ordinateur. Pour cette suite, les deux méthodes de prédiction étudiées semblent assez stables.

7.2 Second exemple

Nous considérons ici que le vecteur à prédire $(S_i)_{0 \leq i \leq N}$ est donné par $S_i = \sum_{j=0}^i \frac{(-1)^j}{j+1}$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, N\}$. Il est bien connu que lorsque N tend vers l'infini, S_N tend vers $\ln(2)$.

Pour ce vecteur, parmi toutes les Padé-partiel-prédictions, c'est encore l' ε -prédiction (avec $N = 2K$) que nous choisissons d'exhiber. La raison en est que cette suite aussi converge vers une limite non nulle.

Ensuite, nous donnons le résultat de la E-prédiction calculée à l'aide des suites auxiliaires correspondant à l'échelle de comparaison connue sur laquelle la suite à prédire $(S_i)_{i \geq 0}$ donnée par $S_i = \sum_{j=0}^i \frac{(-1)^j}{j+1}$, $\forall i \in \mathbb{N}$ admet un développement asymptotique.

L' ϵ -prédiction :

Nous rappelons que la suite $(S_{i,N}^{(\epsilon)})_{i \geq 0}$ est l' ϵ -prédiction calculée à partir du vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N}$.

Nous notons cette suite $(\overline{S}_{i,N}^{(\epsilon)})_{i \geq 0}$ lorsqu'elle est programmée en arithmétique exacte (avec MATHEMATICA) et $(\tilde{S}_{i,N}^{(\epsilon)})_{i \geq 0}$ lorsqu'elle est programmée avec la précision machine (19 chiffres avec MATHEMATICA).

On définit les tableaux à double entrée suivants :

$$EPS_1(i, N) = -\log_{10} |S_{i,N}^{(\epsilon)} - S_i|, \forall i \geq N + 1$$

et

$$EPS_2(i, N) = |\overline{S}_{i,N}^{(\epsilon)} - \tilde{S}_{i,N}^{(\epsilon)}|, \forall i \geq N + 1.$$

$EPS_1(i, N)$:

	$N = 2$	$N = 4$	$N = 6$	$N = 8$
$i = 3$	1.6			
$i = 4$	1.6			
$i = 5$	1.4	2.8		
$i = 6$	1.5	2.5		
$i = 7$	1.3	2.3	4.0	
$i = 8$	1.5	2.1	3.5	
$i = 9$	1.3	2.0	3.2	5.2
$i = 10$	1.5	1.9	3.0	4.6
$i = 11$	1.4	1.9	2.8	4.2
$i = 12$	1.6	1.9	2.7	3.9

et

$EPS_2(i, N)$:

	$N = 2$	$N = 4$	$N = 6$	$N = 8$
$i = 3$	1E-19	1E-19	1E-19	1E-19
$i = 4$	1E-19	1E-19	1E-19	1E-19
$i = 5$	1E-19	2E-19	1E-19	1E-19
$i = 6$	1E-19	3E-19	1E-19	1E-19
$i = 7$	1E-19	5E-19	2E-19	1E-19
$i = 8$	1E-19	6E-19	1E-18	1E-19
$i = 9$	1E-19	7E-19	2E-18	4E-19
$i = 10$	1E-19	7E-19	4E-18	2E-19
$i = 11$	1E-19	7E-19	6E-18	2E-18
$i = 12$	1E-19	7E-19	9E-18	7E-18

Une E-prédiction :

Nous rappelons que la suite $((_y)S_{i,N}^{(E)})_{i \geq 0}$ est la E-prédiction calculée à l'aide de la table (y) , à partir du vecteur $(S_i)_{0 \leq i \leq N}$.

Nous notons cette suite $((_y)\overline{S}_{i,N}^{(E)})_{i \geq 0}$ lorsqu'elle est programmée en arithmétique exacte (avec MATHEMATICA) et $((_y)\tilde{S}_{i,N}^{(E)})_{i \geq 0}$ lorsqu'elle est programmée avec la précision machine (19 chiffres avec MATHEMATICA).

Nous définissons la table (g) des suites auxiliaires par

$$g_j(i) = \frac{(-1)^i}{(i+1)^j}, \forall j \in \{1, 2, \dots, N\}$$

car nous connaissons l'expression du développement asymptotique de la suite $(S_i)_{i \geq 0}$ donnée par $S_i = \sum_{j=0}^i \frac{(-1)^j}{j+1}$, $\forall i \in \mathbb{N}$, sur l'échelle de comparaison $g_1(i), g_2(i), \dots$

On définit les tableaux à double entrée suivants :

$$E_1(i, N) = -\log_{10} |(g)S_{i,N}^{(E)} - S_i|, \forall i \geq N+1$$

et

$$E_2(i, N) = |(g)\tilde{S}_{i,N}^{(E)} - (g)\tilde{S}_{i,N}^{(E)}|, \forall i \geq N+1.$$

	$N=2$	$N=3$	$N=4$	$N=5$	$N=6$
$i=3$	2.5				
$i=4$	3.0	4.6			
$i=5$	2.4	∞	4.8		
$i=6$	3.0	4.8	4.7	5.9	
$i=7$	2.5	5.0	4.5	5.7	7.7
$i=8$	3.1	5.4	4.5	5.5	7.6
$i=9$	2.5	4.7	4.4	5.4	7.4
$i=10$	3.3	5.6	4.4	5.3	7.3
$i=11$	2.5	4.6	4.3	5.3	7.2
$i=12$	3.5	5.2	4.4	5.2	7.3

et

	$N=2$	$N=3$	$N=4$	$N=5$	$N=6$
$i=3$	$1E-19$	$1E-19$	$1E-19$	$1E-19$	$1E-19$
$i=4$	$1E-19$	$1E-19$	$1E-19$	$1E-19$	$1E-19$
$i=5$	$1E-19$	$1E-19$	$2E-19$	$1E-19$	$1E-19$
$i=6$	$1E-19$	$1E-19$	$1E-19$	$2E-19$	$1E-19$
$i=7$	$1E-19$	$1E-19$	$3E-19$	$3E-19$	$2E-19$
$i=8$	$1E-19$	$1E-19$	$3E-19$	$6E-19$	$7E-19$
$i=9$	$1E-19$	$2E-19$	$5E-19$	$9E-19$	$2E-18$
$i=10$	$1E-19$	$3E-19$	$5E-19$	$2E-18$	$4E-18$
$i=11$	$1E-19$	$7E-19$	$6E-19$	$3E-18$	$6E-18$
$i=12$	$1E-19$	$9E-19$	$5E-19$	$4E-18$	$9E-18$

Quelques remarques à propos de cet exemple

1. Les tableaux $EPS_1(i, N)$ et $E_1(i, N)$ indiquent le nombre de décimales exactes de la suite prédite comparativement à la suite $(S_i)_{i \geq 0}$ donnée par $S_i = \sum_{j=0}^i \frac{1}{(j+1)^2}$, $\forall i \in \mathbb{N}$.
2. Nous notons aussi qu'il n'est ni utile de considérer les $EPS_3(i, N) = -\log_{10} \frac{|S_{i,N}^{(\varepsilon)} - S_i|}{S_i}$, ni encore les $E_3(i, N) = -\log_{10} \frac{|(g)S_{i,N}^{(E)} - S_i|}{S_i}$, parce que $S_i \in [\ln(2), 1]$. Par conséquent, les $EPS_3(i, N)$ sont proches des $EPS_1(i, N)$ et les $E_3(i, N)$ proches des $E_1(i, N)$.
3. La E-prédiction donne de *meilleurs* résultats que l' ε -prédiction, mais elle utilise la connaissance du développement asymptotique de la suite à prédire sur l'échelle de comparaison $g_1(n), g_2(n), \dots$.

4. Le tableau $EPS_2(i, N)$ (respectivement $E_2(i, N)$) nous donne des renseignements sur la stabilité de l' ε -prédiction (respectivement la E-prédiction) puisqu'il évalue l'erreur due à l'arithmétique de l'ordinateur. Pour cette suite, les deux méthodes de prédiction étudiées semblent très stables.

7.3 Conclusions sur les deux exemples précédents

1. Consistance

Sur ces exemples numériques, il semble que l' ε -prédiction et la E-prédiction calculée à l'aide des suites auxiliaires $g_1(n), g_2(n), \dots$ soient consistantes en diagonale pour cette suite. En effet, les diagonales (i.e. où la différence entre les deux indices est constante) des tableaux $EPS_1(i, n)$ et $E_1(i, n)$ ont l'air de tendre vers l'infini avec N , et ce sur les deux exemples.

2. Stabilité

Les méthodes de prédiction paraissent plus stables pour le second exemple que pour le premier. La raison réside vraisemblablement dans le comportement des suites : la première est strictement croissante tandis que la seconde oscille autour de sa limite.

CONCLUSIONS

Ce travail comporte nombre de méthodes de prédiction. Nous pouvons maintenant les regrouper en deux familles : les E-prédictions et les Padé-partiel-prédictions.

La E-prédiction est déjà définie par C. Brezinski dans [6] ainsi que par C. Brezinski et M. Redivo Zaglia dans [8, pp. 392-395]. Cependant, la thèse nous apporte un nouvel algorithme et de nouveaux résultats de consistance.

La Padé-prédiction est étudiée par J. Gilewicz dans [11, pp. 424-439], la t-prédiction, par A. Sidi et D. Levin dans [20] et la Δ^2 -prédiction, par C. Brezinski et M. Redivo Zaglia dans [8, pp. 390-391]. Toutes ces méthodes de prédiction sont englobées dans la famille des Padé-partiel-prédictions.

La Padé-partiel-prédiction est largement étudiée dans ce mémoire. Définie à partir des approximants de Padé partiels, elle est liée à l'extrapolation exponentielle (ce lien permet, entre autres, de déterminer la forme de la suite prédite par la Padé-partiel-prédiction). Nous lui associons ensuite un algorithme (basé sur l' ε -algorithme) ne nécessitant pas la résolution d'un système linéaire.

Enfin, nous considérons quelques résultats de consistance pour ces deux familles de méthodes de prédiction.

Les exemples numériques proposés semblent promettre un bel avenir aux méthodes de prédiction ...

PERSPECTIVES

1. Il reste encore beaucoup à faire dans l'étude de la consistance des méthodes de prédiction ...
2. Il faudrait tester les méthodes de prédiction sur de réels problèmes ...
3. Il demeure à regarder ce que devient ce travail dans le cas vectoriel (seul le cas scalaire est ici étudié)
...
4. Il conviendrait d'établir un lien entre prédiction et prévision ...

Références

- [1] G. ALLAN, A linear prediction of the recursion coefficients, *J. Phys. C, Solid State Physics*, 17:3945-3955, 1984.
- [2] C. BREZINSKI, Conditions d'application et de convergence de procédés d'extrapolation, *Numer. Math.*, 20:64-79, 1972.
- [3] C. BREZINSKI, Convergence acceleration of some sequences by the ε -algorithm, *Numer. Math.*, 29:173-177, 1978.
- [4] C. BREZINSKI, *Padé-type Approximants and General Orthogonal Polynomials*, Birkhäuser, Basel, 1980.
- [5] C. BREZINSKI, A general extrapolation algorithm, *Numer. Math.*, 35:175-187, 1980.
- [6] C. BREZINSKI, Prediction properties of some extrapolation methods, *Appl. Numer. Math.*, 1:457-462, 1985.
- [7] C. BREZINSKI, Partial Padé approximation, *J. Approx. Theory*, 54:210-233, 1988.
- [8] C. BREZINSKI, M. REDIVO ZAGLIA, *Extrapolation Methods. Theory and Practice*, North Holland, Amsterdam, 1991.
- [9] F. CORDELLIER, Démonstration algébrique de l'extension de l'identité de Wynn aux tables de Padé non normales, *Padé Approximation and its Applications*, L. Wuytack ed., LNM 765, Springer-Verlag, Berlin, 1979, pp.36-60.
- [10] T. HÁVIE, Generalized Neville type extrapolation schemes, *B.I.T.*, 19:204-213, 1979.
- [11] J. GILEWICZ, *Approximants de Padé*, LNM 667, Springer-Verlag, Berlin, 1978.
- [12] C. LANCZOS, *Applied analysis*, Sir Isaac Pitman and sons, ltd., London, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1956.
- [13] A. C. MATOS, M. PREVOST, Acceleration property for the columns of the E-algorithm, *Numerical Algorithms*, 2:393-408, 1992.
- [14] M. MORANDI CECCHI, M. REDIVO ZAGLIA et G. SCENNA, Approximation of the numerical solution of parabolic problems, *Computational and Applied Mathematics I*, 71-80, 1992.
- [15] H. PADE, Sur la représentation approchée d'une fonction par des fractions rationnelles, *Ann. Ec. Norm. Sup.*, 9:1-93, 1892.
- [16] M. PREVOST, Determinantal expression for partial Padé approximants, *Appl. Numer. Math.*, 6:221-224, 1989-1990.
- [17] M. PREVOST, Approximation of weight function and approached Padé approximants, *JCAM*, 32:237-252, 1990.

- [18] M. PREVOST, Acceleration property for the E-algorithm and an application to the summation of series, *Advances in Computational Mathematics*, 2:319-341, 1994.
- [19] D. SHANKS, Nonlinear transformations of divergent and slowly convergent sequences, *J. Math. Phys.*, 34:1-42, 1955.
- [20] A. SIDI, D. LEVIN, Prediction properties of the t-transform, *SIAM J. Numer. Anal.*, 20:589-598, 1983.
- [21] A. TRIAS, M. KIWI, M. WEISSMANN, Reconstruction of the density of states from its moments, *Phys. Rev. B*, 28:1859-1863, 1983.
- [22] D. VEKEMANS, Equivalences between some prediction methods, *to appear in JCAM*.
- [23] P. WYNN, On a device for computing the $e_m(S_n)$ transformation, *MTAC*, 10:91-96, 1956.
- [24] P. WYNN, Upon systems of recursions which obtain among the quotients of the Padé table, *Numer. Math.*, 8:264-269, 1966.
- [25] P. WYNN, On the convergence and stability of the epsilon algorithm, *SIAM J. Numer. Anal.* 3:91-122, 1966.

