gen 2010 6473

N° d'ordre: 802

Année 1995

50376
1995
373

THESE

Présentée à

L'Université des Sciences et Technologies de Lille

pour obtenir legrade de

DOCTEUR ES-SCIENCES PHYSIQUES

Contribution à l'optimisation du placement de formes quelconques:
Application à l'industrie de la confection

par

Salah MAOUCHE

INGENIEUR ENPA
DOCTEUR-INGENIEUR

Soutenue le 4 Décembre 1995 devant la commission d'examen:

Président:	Pierre VIDAL	Professeur à L'UST de Lille
Rapporteurs:	Jean BAJON	Professeur à l'ENSEIH de Toulouse
	Alain JUTARD	Professeur à L'INSA de Lyon
	René SOENEN	Professeur à L'université de Valenciennes
	Pierre VIDAL	Professeur à L'UST de Lille
Examinateurs:	Michel AUBRUN	Professeur à l'Université de Nancy
	Gérard BINDER	Professeur à l'Université de Mulhouse
	Jack-Gérard POSTAIRE	Professeur à l'UST de Lille
	Jean-Marc TOULOTTE	Professeur à l'UST de Lille

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE
UNIVERSITE DES Sc. et Techn. LILLE

REMERCIEMENTS

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au sein de l'équipe DECISION du Centre d'Automatique de Lille; cette équipe est animée par Monsieur ***Pierre VIDAL****, Professeur à l'Université des Sciences et Technologies de Lille et directeur du CAL.*

Je tiens à exprimer ma gratitude au professeur ***Pierre VIDAL****. Il m'a accueilli d'abord dans son laboratoire, puis dans son équipe. Je le remercie pour sa confiance, la qualité de ses conseils et son soutien de tous les instants. Son contact aisé a largement contribué à entretenir de très bonne relations. je le remercie de me faire l'honneur de présider le jury de cette thèse.*

J'exprime toute ma reconnaissance à Monsieur ***Jean BAJON****, Professeur à l'ENSEIH de Toulouse pour ses encouragements et l'honneur qu'il me fait d'examiner ce travail et de participer au jury de cette thèse.*

Je remercie vivement Monsieur ***Alain JUTARD****, Professeur à l'INSA de Lyon, pour sa décision spontanée de juger ce travail et de siéger à la commission d'examen.*

Que Monsieur ***René SOENEN****, professeur à l'Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, Directeur de l'EGIP, soit remercié pour sa disponibilité, ses précieux conseils et l'honneur de le compter parmi les membres du jury.*

Je remercie également Monsieur ***Michel AUBRUN****, professeur à l'Université de Nancy de me faire l'honneur de participer au jury de cette thèse.*

Que Monsieur ***Gérard BINDER****, Professeur à l'Université de Mulhouse, soit chaleureusement remercié pour avoir accepté de siéger à la commission d'examen.*

Je remercie également Monsieur le Professeur ***Jacques-Gérard POSTAIRE*** *pour l'amitié qu'il me fait de siéger à la commission d'examen.*

Je remercie Monsieur le Professeur ***Jean-Marc TOULOTTE*** *qui - il y a longtemps- m'a initié à la recherche, pour avoir accepté de participer au jury de cette thèse.*

Mes remerciements vont également à tous les membres du CAL, particulièrement les membres anciens et actuels de ma modeste équipe.

0. Introduction **1**

1. Présentation et modélisation du placement **4**

1.1. Introduction ***4***

1.2. Découpe ***5***

1.2.1. Présentation 5

1.2.2. Caractéristiques des entrées 6

1.2.3. Découpe/Placement 6

1.2.3.1. Problème du carnet de commandes *6*

1.2.3.2. Problème du placement *7*

1.2.3.3. Outils de coupe/trajectoire *7*

1.3. Modélisation ***7***

1.3.1. Groupes des paveurs 7

1.3.1.1. Dessins à motifs répétitifs *8*

1.3.1.2. Pavage régulier *8*

1.3.2. Couverture d'une forme rectangulaire 9

1.3.3. Couverture avec des pavés différents 9

1.3.4. Applications 10

1.3.4.1. Modèle *10*

1.3.4.2. Plan *11*

1.3.4.3. Transformation *11*

1.3.4.4. Placement *12*

1.3.4.5. Efficacité *12*

1.3.4.6. Contraintes *12*

1.4. Les contraintes ***13***

1.4.1. Types de contraintes 13

1.4.2. Origines des contraintes 13

1.4.2.1. Contraintes technologiques *13*

1.4.2.2. Contraintes de qualité *16*

1.5. Présentation ***18***

1.5.1. Enoncé du problème 18

1.5.2. Formulation géométrique 18

1.5.2.1. Problème de base *18*

1.5.2.2. Problème complet *19*

1.5.3. Simplification 20

1.5.3.1 Fonction caractéristique *20*

1.5.3.2. Mesure de la consommation matière *21*

1.6. Représentation *24*
1.6.1. Solution optimale 24
1.6.1.1. Ensemble des configurations *24*
1.6.1.2. Placement de deux formes *24*
1.6.2. Simplification du modèle 26
1.6.2.1. Réduction de l'ensemble des configurations *26*
1.6.2.2. Décomposition du problème *27*
1.6.2.3. Approximation des modèles des formes *28*
1.7. Conclusion *29*

2. Optimisation de la découpe: état de l'art et étude 30

2.1. Introduction *30*
2.2. Formulation Mathématique du problème de découpe: les difficultés de résolution. *31*
2.2.1. Un exemple simple pour commencer 31
2.2.1.1. Première formulation *32*
2.2.1.2. Deuxième formulation *32*
2.2.2. Formulation générale 33
2.2.2.1. Exemple *36*
2.2.2.2. La contrainte d'intégrité *37*
2.2.2.3. Nombre de colonnes de la matrice A_p *38*
2.3. Classification des méthodes de résolution *39*
2.3.1. Problèmes unidimensionnels 39
2.3.2. Problèmes unidimensionnels et demi 41
2.3.3. Problèmes bidimensionnels 41
2.3.3.1. Méthodes pour formes rectangulaires *44*
2.3.3.2. Modélisation des formes irrégulières par des rectangles *44*
2.3.4. Les fonctions de but 45
2.3.4.1. Définitions des grandeurs d'évaluation *47*
2.3.4.2. Classification des fonctions de but *49*

3. Formulation générale du problème du placement optimal 54

3.1. Introduction *54*
3.2. Formulation générale du placement optimal *56*
3.2.1. Le placement 56
3.2.2. Les modèles 56
3.2.2.1. Représentation des formes. *57*
3.2.2.2. Placement d'une forme *58*
3.2.3. Expression des contraintes 59

3.2.3.1. Contrainte de production ... *59*
3.2.3.2. Contrainte sur les transformations ... *59*
3.2.3.3. Contrainte matière ou de confinement ... *60*
3.2.3.4. Contrainte de disjonction ... *61*
3.2.4. Formulation ... 67
3.2.4.1. Formulation du placement de base ... *68*
3.2.4.2. Formulation du placement général ... *68*
3.2.4. Conclusion ... 68
3.3. Réduction du problème du placement ... ***69***
3.3.1. Introduction ... 69
3.3.2. Description du contour par les peignes de formes ... 69
3.3.2.1. Rectangle paraxial circonscrit et sous-contours ... *69*
3.3.2.2. Codage du contour ... *71*
3.3.3. Placement ... 72
3.3.3.1. Réduction du nombre des transformations ... *73*
3.3.3.2. Peignes de contour et rotation de $\lambda\frac{\pi}{2}$ ... *74*
3.3.4. Etudes de la disjonction ... 74
3.3.4.1. Placement non disjonctif des rectangles ... *74*
3.3.4.2. Disjonction des contours ... *75*
3.3.4.3. Précédence et chevauchement ... *79*
3.3.4.4. Précédence et complémentarité ... *81*
3.3.5. Contraintes de positionnement ... 81
3.3.5.1. Motifs ... *81*
3.3.5.2. Placement à motifs placés ... *82*
3.3.5.3. Placement à raccords ... *82*
3.3.5.4. Les défauts ... *83*
3.3.6. Etude du critère ... 84
3.3.6.1. Les pertes ... *84*
3.3.6.2. Adéquation au processus de coupe ... *85*
3.3.6.3. Conclusion ... *87*
3.3.7. Formulation du placement de base ... 88
3.3.7.1. Placement de deux formes ... *88*
3.3.7.2. Placement optimal ... *92*
3.3.8. Formulation du placement général ... 94
3.4. Conclusion ... ***95***

4. Plate-forme expérimentale de coupe en continu ... 96

4.1. Introduction ... ***96***

4.2. Description du processus de fabrication ... ***97***

4.2.1. L'industrie de l'habillement 97
4.2.2. Processus technologique de fabrication 97
4.2.3. Système de production 100
4.2.4. Problème du placement et de la coupe 101

4.3. Automatisation de la production 102

4.3.1. Approche intégrée 102
4.3.2. Approche par tâche 104

4.4. Présentation de l'atelier de coupe classique 106

4.4.1. Description. 106
4.4.2. Localisation des pertes 107
4.4.2.1. Mesure de l'efficience 107
4.4.2.2. Répartition de la matière 108
4.4.3. Optimisation de la consommation 108

4.5. Présentation de la cellule flexible de coupe 109

4.5.1. Composition de la cellule 109
4.5.1.1. Alimentation en matière première 110
4.5.1.2. Visitage 110
4.5.1.3. Placement 111
4.5.1.4. Découpe 112
4.5.1.5. Déchargement et stockage 114
4.5.2. Coopération entre les différents processus 116

4.6. Détermination des paramètres 116

4.6.1. Paramètres relatifs à la matière 116
4.6.1.1. La laize: W_m 117
4.6.1.2. Repère matière: $(O_m X_m Y_m)$ 118
4.6.1.3. Axe du droit fil 118
4.6.1.4. Caractéristiques des motifs 118
4.6.2. Paramètres relatifs aux pièces 119
4.6.2.1. le contour 119
4.6.2.2. le rectangle circonscrit 120
4.6.2.3. Les repères et crans de montage 120

4.7. Détermination des contraintes 121

4.7.1. Contraintes relatives à la matière 121
4.7.1.1. Contrainte d'inclusion à la matière 121
4.7.1.2. Contrainte de début de rouleau 121
4.7.2. contraintes relatives à la qualité 121
4.7.2.1. Contrainte de non-recouvrement 121
4.7.2.2. Contrainte du droit fil 122
4.7.2.3. La contrainte "dossé-dédossé" 123
4.7.2.4. La contrainte de sens du tissu 123

4.7.2.5. La contrainte de chaîne *124*
4.7.2.6. Prise en compte des défauts *124*
4.7.2.7. Contraintes de positionnement *125*
4.7.3 La contrainte temporelle 127

4.8. Conclusion ***128***

5. Résolution: représentation et algorithmes **129**

5.1. Introduction ***129***

5.2. Placement en bande ***130***

5.2.1. Finitude d'une bande 130
5.2.2. Consistance d'une bande 131

5.3. Evaluation de la complémentarité ***133***

5.3.1. Optimisation de l'Imbrication 133
5.3.2. Indices de complémentarité 133
5.3.2.1 Distance quadratique inter-peigne *134*
5.3.2.2 Surface du rectangle d'intersection *135*
5.3.2.3 Couloir d'imbrication *136*
5.3.2.4. Surface du rectangle de la concaténation *136*
5.3.2.5. Surface modifiée du rectangle circonscrit *137*

5.4. Optimisation locale ***137***

5.4.1. Choix du critère 134
5.4.2. Réduction du domaine de recherche 138
5.4.3. Réduction de l'intervalle de recherche 138
5.4.3.1. Bornes limites de l'intervalle de recherche *138*
5.4.3.2. Mise en correspondance des creux et des bosses *140*
5.4.4. Recherche sous contrainte de motif 140

5.5. représentation du problème du placement ***142***

5.5.1. Introduction 142
5.5.2. Représentation en graphe 142
5.5.3. Variation de la fonction de coût 144
5.5.4. Complexité 146

5.6. Résolution ***147***

5.6.1. Recuit Simulé 147
5.6.1.1. Principe de l'algorithme de Metropolis *147*
5.6.1.2. Comportement du recuit simulé sur le graphe *148*
5.6.1.3. Paramètres de contrôle *148*
5.6.1.4. Résultats *149*

5.6.2. Parcours de graphe: l'algorithme ε-admissible A_ε^* 154

5.6.2.1. Principe *154*
5.6.2.2. Heuristique de calcul de la longueur de chemin *155*
5.6.2.3. Tactique de recherche persévérante *156*
5.6.2.4. Limitation du nombre de noeuds développés *156*
5.6.2.5. Fonction de choix f_c *156*
5.6.2.6. Résultats *156*

5.6.3. Recherche avec risque de non-admissibilité: R_δ^* 164
5.6.3.1. Principe *164*
5.6.3.2. Choix des fonctions *165*
5.6.3.3. Résultats *167*

5.6.4. Comparaison: Recuit simulé, A_ε^* et R_δ^* 183
5.6.5. Réduction 183

5.7. Conclusion ***184***

6. Conclusion **185**

7. Bibliographie **187**

Chapitre zéro

Introduction

Au cours de ces dernières années, les entreprises, devant faire face à une concurrence sans cesse accrue, se voient contraintes de moderniser très rapidement leur outil de production. Face à l'internationalisation des marchés, les industriels font de plus en plus appel à l'automatisation pour acquérir les nouvelles clés de la compétitivité: productivité, qualité, flexibilité et réactivité. Or, pour ce faire, il est essentiel de ne pas perdre de vue qu'une unité de production ne se réduit pas aux éléments qui la constituent. Si les performances de ce système sont jugées insuffisantes on ne résoudra que très partiellement le problème en se contentant de rénover tout ou partie de ses constituants. Ainsi, avant de penser investissement en moyens matériels il faut repenser la structure elle-même. C'est à une solution de ce problème qu'est consacrée cette thèse. Il s'agit de la réalisation d'une cellule flexible de coupe en continu développée dans le cadre du pôle productique du Nord Pas de Calais.

Le problème de découpe apparaît dans de nombreux domaines d'activité et les industries textiles, du bois, du verre ou du métal sont les exemples les plus couramment cités.

Il va de soit que les contraintes à satisfaire lors d'une découpe de panneaux de bois diffèrent sensiblement de celles rencontrées lors de la conception d'un atelier de fabrication ou du remplissage d'un conteneur. Ces contraintes, souvent liées aux aspects pratiques de la tâche à réaliser, font de chacun des problèmes un cas particulier nécessitant des méthodes de résolution spécifiques. Lors de la formulation mathématique de ces problèmes on retrouve pourtant un noyau commun qui constitue une part essentielle de la résolution: le problème du placement dit du sac-à-dos (knapsack).

Dans la formulation mathématique du problème de découpe, posé de façon très claire par de nombreux auteurs, on considère la production au coût minimum d'une quantité de pièces, fonction de la demande et des niveaux de stocks, à partir d'un ensemble de matières premières disponibles sous forme de plusieurs unités de dimensions et formes éventuellement différentes. La quantité de pièces à produire peut être connue ou non à l'avance.

Le problème du placement consiste à rechercher le meilleur amalgame au sens des objectifs du placement et dans le problème de découpe, il s'agit de trouver un ensemble d'amalgames pour satisfaire les demandes. Un amalgame réside dans la manière de découper une unité de matière première.

Le placement constitue la partie la plus importante du problème de découpe et on ne peut résoudre efficacement un problème de découpe sans résoudre efficacement celui du placement. Le problème du placement apparaît aussi en robotique. Il consiste alors à positionner un robot parmi une collection d'obstacles.

Dans le cas de découpe en continu où la demande n'est pas connue à l'avance, le problème de découpe est ramené à une suite de problèmes de placement.

Dans le chapitre premier nous avons commencé par présenter de manière générale le problème de découpe et le situer dans son contexte industriel. Aux contraintes relatives à tous les placements de formes quelconques, nous avons ajouté celles de positionnement qui, ajoutées au problème de base précédent, permettent de définir le problème complet. Basé sur les isométries du plan, le modèle géométrique élaboré permet de définir l'ensemble des configurations. Se posent alors les questions de la représentation et de la réduction de ces problèmes fortement combinatoires.

Le chapitre deuxième revient sur la formulation générale du problème de découpe. Nous présentons une classification des méthodes de résolution basée sur les contraintes relatives aux différentes applications. Dans les cas de formes rectangulaires, les problèmes de découpe sont résolus de manière très satisfaisante.

Le domaine du placement de formes quelconques reste largement ouvert.

La difficulté majeure de ce dernier tient à l'incapacité actuelle à trouver des caractéristiques générales aux formes, incapacité qui contraint les utilisateurs à adopter des critères souvent subjectifs et donc restrictifs. Il apparaît dès lors que la phase la plus importante dans la résolution d'un problème de placement de formes quelconques est celle du codage et de la représentation. Les travaux nous avons menés et présentés au chapitre troisième utilisent un codage par peignes des contours (convolution par un peigne de Dirac). Les peignes représentent la déficience rectangulaire d'une forme. Sont ensuite données les expressions générales des contraintes. La formulation des deux types de problèmes de placement (placement de base et placement complet) est ensuite présentée. L'étude des contraintes nous a amené à décomposer le problème du placement de plusieurs formes en placement par bandes. Chaque bande est construite par imbrication de formes deux à deux. Le chapitre troisième se veut novateur dans le domaine de la description des formes et l'approche de la résolution du problème de placement. Il présente les outils nécessaires à la construction d'un placement, en particulier l'opérateur de concaténation de deux formes qui, lorsqu'il est

utilisé itérativement, permet la construction d'un placement en général ou d'une bande quand une contrainte sur les dimensions du placement est introduite.

Le chapitre quatrième présente à travers une visite accélérée d'un atelier de confection, les bases de travail sur lesquelles repose le métier de l'habillement. Nous abordons de plus près les problèmes économiques et techniques de l'atelier de coupe, centre d'intérêt de notre étude. Nous énonçons ensuite les hypothèses de travail et présentons notre support d'application: la cellule flexible de coupe. Cette cellule répond bien au flux de commandes aléatoires dans le temps, pour produire des petites séries, de complément ou de luxe. La découpe sur feuille unique permet, en effet de mieux satisfaire les contraintes de positionnement relatif. Sa vocation n'est pas de remplacer les coupes sur matelas, mais de pouvoir fournir "juste à temps" les pièces découpées. La détermination des paramètres et des contraintes relatifs à la matière et aux formes terminent ce chapitre. En plus des contraintes spécifiques aux tissus, une contrainte temporelle est introduite afin de produire une solution dans un temps compatible avec l'application.

Le chapitre cinquième est chargé de la représentation du problème et de la présentation des résultats obtenus. Il débute par les propriétés caractéristiques des bandes. Vient ensuite l'opérateur permettant d'évaluer la qualité d'une imbrication locale entre deux formes. Ceci conduit naturellement à parler du critère surfacique à retenir et plus tard, de la méthode d'optimisation utilisée. Les contraintes définissent les degrés de liberté du système et la fonction de coût permet d'évaluer un placement intermédiaire. Mais pour bien définir le problème, il faut décrire l'espace des configurations. Notre choix s'est porté sur l'espace d'états qui, par ses noeuds et ses arcs, restitue bien la relation de précédence induite entre les formes à associer. Nous terminons ce chapitre par une présentation des résultats obtenus par utilisation de trois algorithmes de parcours d'arbres.

Chapitre premier

Présentation et modélisation du placement

1.1. Introduction

Le problème de découpe est rencontré chaque fois que la fabrication d'un objet manufacturé est réalisée par transformation de la matière. De ce fait, il concerne un grand nombre d'industries dont les industries du métal, du bois, du verre, de la confection et du cuir.

La fabrication d'un objet est souvent conduite avec pour objectif principal, la diminution du coût de revient à travers la réduction de la consommation en matière. Cette tendance est en particulier liée aux augmentations des prix des matières premières. Aussi en général, l'exploitation optimale des ressources constitue une préoccupation croissante dans les industries manufacturières.

Une formulation industrielle du problème de découpe en deux dimensions peut se présenter comme suit: " Etant donnée une quantité de matières premières présentées sous forme de plusieurs unités de dimensions et formes éventuellement différentes, comment produire une quantité de pièces, en fonction de la demande et des niveaux de stocks, en utilisant le minimum de matières, et ce dans un temps compatible avec les délais fixés par le client". Nous généraliserons cette formulation pour prendre en compte des zones interdites variables, les défauts, définies en temps réel.

La quantité de pièces à produire peut être connue ou non à l'avance. Si l'objectif principal consiste à minimiser la consommation en matières premières, il est d'actualité de produire vite pour satisfaire des délais de livraison impératifs et de plus en plus courts, au juste à temps pour éviter les frais de stockage.

Après une présentation de la découpe, nous donnerons un modèle géométrique du placement et définirons les différentes contraintes s'exerçant sur le processus de placement-découpe. Nous présenterons ensuite une formulation générale et une représentation du

problème du placement. Nous terminerons ce chapitre par l'introduction à la résolution par décomposition du problème et par simplification des modèles.

1.2. Découpe

1.2.1. Présentation

Le problème de découpe [Dmitrovicz 91] peut être représenté par le schéma de la figure suivante.

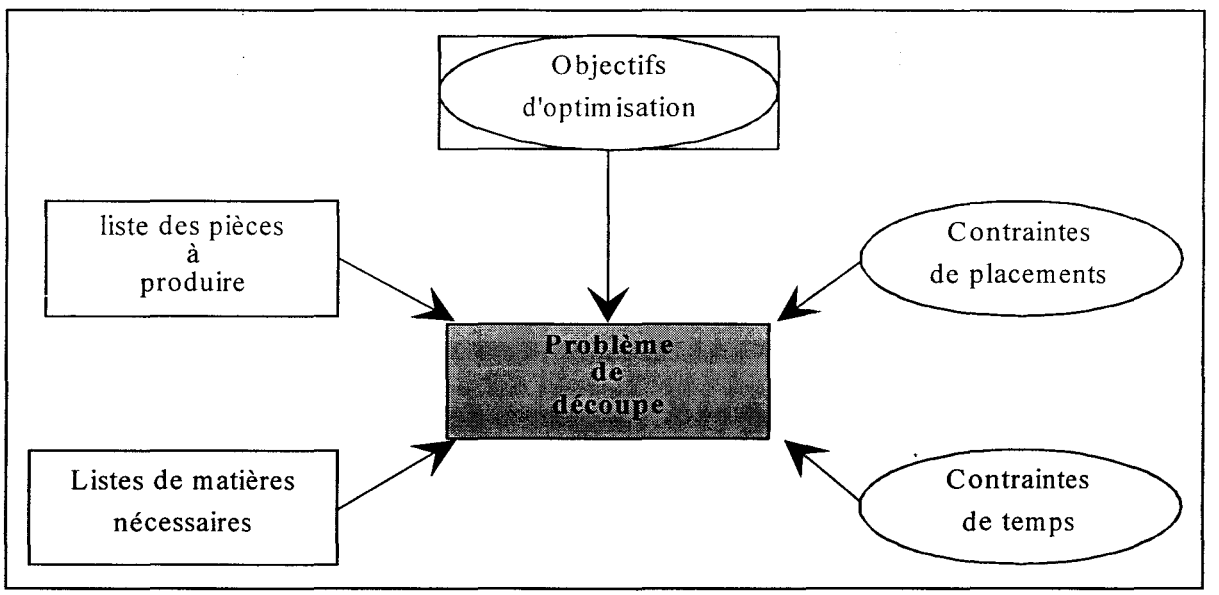

Figure 1.1: Problème de découpe.

Une demande établie à partir d'une liste de pièces et d'une certaine quantité de matières premières constitue la donnée initiale du processus. Les contraintes sont définies comme étant les restrictions imposées au processus pour tenir compte des propriétés de la matière, de la qualité des pièces, du mode de découpe, de l'état des stocks, ...etc.

Les critères d'évaluation des solutions sont fournis par les objectifs d'optimisation, ils permettent de caractériser et de définir la meilleure solution.

La nécessité de produire de plus en plus vite conduit à l'utilisation de contraintes temporelles sévères et les objectifs d'optimisation s'énoncent alors comme l'obtention de la meilleure solution dans un délai donné, c'est-à-dire la recherche d'un compromis entre l'utilisation de matière première et le temps de calcul. Il faut donc prendre en compte la qualité des matériaux et les moyens mis en oeuvre, la main-d'oeuvre et les matériels [Lauriol 85].

Suivant que les entrées du processus de découpe sont connues ou non, le problème peut se présenter de différentes manières.

1.2.2. Caractéristiques des entrées

Les entrées du processus de découpe sont constituées par la quantité de matière première disponible, les matériaux, et la liste des pièces à produire.

Dans l'industrie de la confection et de la métallurgie, la matière première se présente sous forme de bandes dont la longueur peut être considérée comme non bornée. La largeur ou laize des matériaux textiles en particulier est souvent non stationnaire et les variations ne sont pas connues a priori.

Les industries du verre, du cuir, ... etc., utilisent des matières présentées en unités de dimensions bornées stationnaires ou non. Dans tous les cas, les caractéristiques des matériaux, dimensions, quantité, qualité, ... etc. ne sont connues à l'avance que pour des découpes d'une très faible quantité de pièces.

Le nombre de pièces à produire est variable. S'il est connu à l'avance, il s'agit d'une découpe dite statique. Par contre, lorsque la demande fait partie de commandes qui arrivent de manière aléatoire, le nombre de pièces n'est alors pas connu a priori et, afin de satisfaire les demandes au fur et à mesure de leur arrivée, la découpe est continue.

1.2.3. Découpe/Placement

Le processus physique de découpe peut exiger une présentation de la matière sous forme d'unité de dimensions compatibles comme c'est le cas en confection où la longueur est bornée par celle de la table de découpe et le nombre de pièces défini à l'avance. Le problème de découpe se présente alors sous forme de deux problème distincts: un problème de placement et un problème du carnet de commande.

1.2.3.1. Problème du carnet de commandes

Il s'agit de satisfaire l'ensemble des demandes connues à l'avance et de trouver un ensemble d'amalgames pour les satisfaire. Un amalgame réside dans la manière de découper ou de remplir une unité de matière première.

Le problème s'énonce alors: " étant donné un ensemble d'unités de matière première, combien faut-il en utiliser pour satisfaire le carnet de commande?". En confection, on utilise la répartition des fréquences par taille pour déterminer la combinaison des tailles à produire et satisfaire au mieux le carnet de commandes. C'est l'unité de base du carnet de commandes. Le problème consiste alors à déterminer le nombre de fois à répéter ce placement.

"Produire des quantités définies pour chaque pièce à coût minimum" est un problème qui se modélise facilement en programme linéaire en nombres entiers. La contrainte d'intégrité est souvent relaxée pour des raisons de simplification. C'est le cas des découpes à grandes

demandes avec un prix de la matière faible devant celui du temps de calcul [Gilmore 61] [Gilmore 63][Prempti 83].

1.2.3.2. Problème du placement

Le problème du placement consiste à rechercher le meilleur amalgame au sens des objectifs du placement compte tenu des pièces à découper. Ce problème constitue la partie la plus importante du problème de découpe: on ne peut le résoudre efficacement sans résoudre efficacement le problème de placement. L'indice de performance de la découpe est déterminé par celui du placement et les contraintes spécifiques de découpe sont prises en compte au placement (*cf. figure 1.1*). On peut dire aussi que la diversité des applications et la multiplicité des contraintes n'ont pas encore permis la formalisation du problème sous une forme unique.

Il est intéressant de noter que lorsque le nombre de pièces à produire n'est pas connu à l'avance, le problème de découpe se présente comme une suite de problèmes de placement. On parlera alors de placement continu.

1.2.3.3. Outils de coupe/trajectoire

La manière de séparer une pièce de son support détermine le type de découpe et constitue une contrainte de placement. La découpe dite guillotine est utilisée pour la découpe des formes rectangulaires. Lorsque les pièces sont de formes quelconques, irrégulières, la découpe s'effectue par "contournage" ou suivi de contour qui induit alors un problème d'optimisation de la trajectoire de l'outil de coupe. Une trajectoire est composée par un ensemble de passages obligés (découpe) et de liaisons entre les passages obligés (passage à vide). L'espace de travail de l'outil est généralement restreint. Le plus souvent, il est représenté par une fenêtre de placement et la découpe d'une pièce s'effectue en plusieurs étapes [Okat 91]. Notons également qu'outre l'optimisation de la trajectoire, il convient de maîtriser le nombre et la qualité des reprises, problème qui sera traité plus tard.

1.3. Modélisation

Les solutions apportées au problème du placement dépendent toutes de l'application. Nous avons déjà souligné que la diversité des applications et la multiplicité des contraintes n'ont pas permis une formulation unique de ce problème. Nous donnons, dans la suite de ce chapitre, s'appuyant sur la géométrie, en particulier sur les groupes, une formulation synthétique unique du problème du placement.

1.3.1. Groupes des paveurs

Rien ne compta davantage aux yeux d'Escher [Ernst 86] que le remplissage périodique du plan. Dans l'art de l'Alhambra où des motifs composés de formes géométriques abstraites

sont utilisés pour décorer les murs et les sols sans laisser d'espace libre, des mouvements (translations, rotations et réflexions) permettent de conserver un ornement invariant. Le pavage est utilisé pour modéliser le placement.

1.3.1.1. Dessins à motifs répétitifs

Les motifs répétitifs que l'on trouve dans l'art de plusieurs époques et dans l'oeuvre graphique d'ESCHER [Hofstadter 85][Locher 86][Taschen 90] présentent des propriétés mathématiques très intéressantes. Il s'agit de figures planes à motifs répétés régulièrement et couvrant tout le plan [Ernst 86]. En fait les motifs peuvent varier à l'infini, mais le nombre de manières de les reproduire est fini et égal à 17 [Berger 79].

1.3.1.2. Pavage régulier

Soient M le plan euclidien et ω un compact connexe de M, d'intérieur non vide.

$$\omega \subset M$$

ω représente un pavé régulier.

Le problème consiste à exprimer que ω et ses déplacés remplissent tout le plan sans chevauchement ni trou. Pour avoir un pavage régulier, il faut introduire un groupe d'isométries du plan M. Un pavage régulier est un pavage dans lequel un seul type ou espèce de pavé est utilisé. Il ne s'agit donc pas de partager le plan par un ensemble de lignes définissant ainsi une couverture du plan avec des formes quelconques, mais plutôt de définir un nombre de transformations géométriques du pavé unique ω pour couvrir le plan.

Soit $I_S^+(M)$ le groupe d'isométries directes de M. Une isométrie directe est un déplacement, c'est à dire une translation T, une rotation R, ou une composition des deux transformations $T°R$. $I_S^+(M)$ est un groupe, toute composition d'isométries de M est aussi une isométrie ($T°R$ est une loi de composition interne).

Soit G un sous-groupe de $I_S^+(M)$

$$\bigcup_g g(\omega) = M \qquad \textbf{(1.1)}$$

La relation **(1.1)** exprime, d'une part que le pavage est régulier et d'autre part que l'application des transformations du sous-groupe G à ω couvre entièrement le plan.

$$g(\overline{\omega}) \cap h(\overline{\omega}) \neq \varnothing \quad \Rightarrow g = h \qquad (g(\overline{\omega}) = h(\overline{\omega})) \qquad \textbf{(1.2)}$$

où $\overline{\omega}$ dénote l'intérieur de ω.

La relation **(1.2)** montre qu'il n'y a ni trou ni chevauchement entre les déplacés de ω.

On montre [Berger 79] qu'il existe 5 sous-groupes G dans $I_S^+(M)$ et qu'il suffit d'autoriser toutes les isométries de M, c'est à dire $I_S(M)$, pour trouver les *12* sous-groupes supplémentaires. $I_S(M)$ comprend la translation, la rotation et la symétrie axiale ou réflexion appelée aussi retournement.

1.3.2. Couverture d'une forme rectangulaire

Tout compact de M ne contient qu'un nombre fini de pavés $g(\omega)$ distincts.

On peut alors montrer [Sénéchal 79][Lehmann 82] que les seuls assemblages réguliers sont constitués à partir de polygones réguliers d'une seule espèce. Ces pavages sont formés par des triangles, des rectangles, des carrés, des losanges et des hexagones. Une surface de forme rectangulaire ou carrée ne peut être couverte, dans le cas d'un pavage de même espèce, que par des déplacés $g(\omega)$ avec:

$$\omega \in \{rectangle, carré\} \qquad \text{si } g(\omega) \in G \subset I_S^+(M)$$

et

$$\omega \in \{rectangle, carré, triangle\} \qquad \text{si } g(\omega) \in G \subset I_S(M)$$

1.3.3. Couverture avec des pavés différents

On considère un ensemble de pavés:

$$\Omega = \omega \in \{\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^n\}$$

$$\text{avec} \quad \omega^i \neq \omega^j \qquad \forall i,j \quad i \neq j$$

$$\text{et} \qquad \omega^i \subset M \quad \forall i = 1,\ldots,n.$$

Le problème consiste à trouver un sous-groupe $G \subset I_S(M)$ satisfaisant les expressions plus larges que(**1.1**) et (**1.2**) (si les pavés sont quelconques, M ne peut être recouvert entièrement et sans trou).

$$\cup_i g_i(\omega^i) \subset M \qquad \textbf{1.1a)}$$

$$\text{Si } g_i(\overline{\omega}^i) \cap g_j(\overline{\omega}^j) \neq \varnothing \;\Rightarrow\; g_i(\overline{\omega}^i) = g_j(\overline{\omega}^j) \qquad \textbf{1.2a)}$$

$$\text{Or } \omega^i \neq \omega^j \quad \forall i,j \;\Rightarrow\; g_i = g_j \quad et \quad \omega^i = \omega^j$$

Nous considérons donc qu'un pavé quelconque ω^i ne peut être utilisé qu'une seule fois. L'expression **(1.2a)** peut s'écrire autrement, sous la forme:

$$g_i(\omega^i) \cap g_j(\omega^j) = \varnothing \quad \forall i,j \quad i \neq j \qquad \textbf{1.2b)}$$

(1.2b) représente la disjonction entre les pavés ω^i et ω^j.

Remarque 1:

Pour utiliser le même pavé plusieurs fois, il faut le définir un nombre de fois identique dans l'ensemble Ω. Ceci implique que le nombre de pavés doit être connu à l'avance.

Dans le cas où un pavé quelconque ω^i, $i=1,...,n$ peut être utilisé n_i fois,**(1.1a)**et **(1.2b)** deviennent respectivement **(1.3)** et **(1.4)** avec:

$$g_1(\omega^1) \cup g_2(\omega^2) \cup \quad \cup g_{n_1}(\omega^1) \cup \quad g_{n_n}(\omega^n) \subset M \qquad \textbf{(1.3)}$$

$$g_1(\omega^1) \cap g_2(\omega^2) \cap \quad \cap g_{n_1}(\omega^1) \cap \quad \cap g_{n_n}(\omega^n) = \varnothing \qquad \textbf{(1.4)}$$

Le problème consistant à trouver les $n_i \times n$ (n_i formes du modèle ω^i et n modèles différents) isométries qui permettent de couvrir le plan avec exactement n_i pavés ω^i constitue une solution admissible au problème du placement. Si de plus, la surface occupée par tous les transformés, c'est-à-dire *(1.3)*, est minimum, la solution du placement est optimale.

1.3.4. Applications

Pour formaliser le problème du placement, nous allons donner les définitions de l'ensemble des éléments utilisés, en fixant les limites de l'étude à la géométrie euclidienne plane.

1.3.4.1. Modèle

Un modèle ω^i est un sous-ensemble compact et connexe de R^2. Il correspond au pavé de M défini précédemment. ω^i est un élément de l'ensemble des modèles Ω avec:

$$\Omega = \left\{ \omega^i \right\} \quad i = 1,...,N_\omega \quad \text{et} \quad N_\omega = |\Omega| = \textit{cardinal de } \Omega .$$

Chaque élément ω^i de Ω peut être produit en n_i exemplaires.

1.3.4.2. Plan

Le plan matière, noté M, est un sous-ensemble connexe de R^2. Traditionnellement, M est un rectangle correspondant à la surface de la table de coupe.

1.3.4.3. Transformation

On appelle transformation I_v, l'application qui , à tout modèle ω^i de Ω associe un domaine image $I_v(\omega^i) \in M$. Si le plan est considéré comme rapporté à un repère orthonormé OXY, on peut écrire qu'à tout point π^i_j de coordonnées (x^i_j, y^i_j) du modèle ω^i correspond un point μ^i_j de coordonnées (x^i_{mj}, y^i_{mj}) de l'image de ω^i par la transformation I_v.

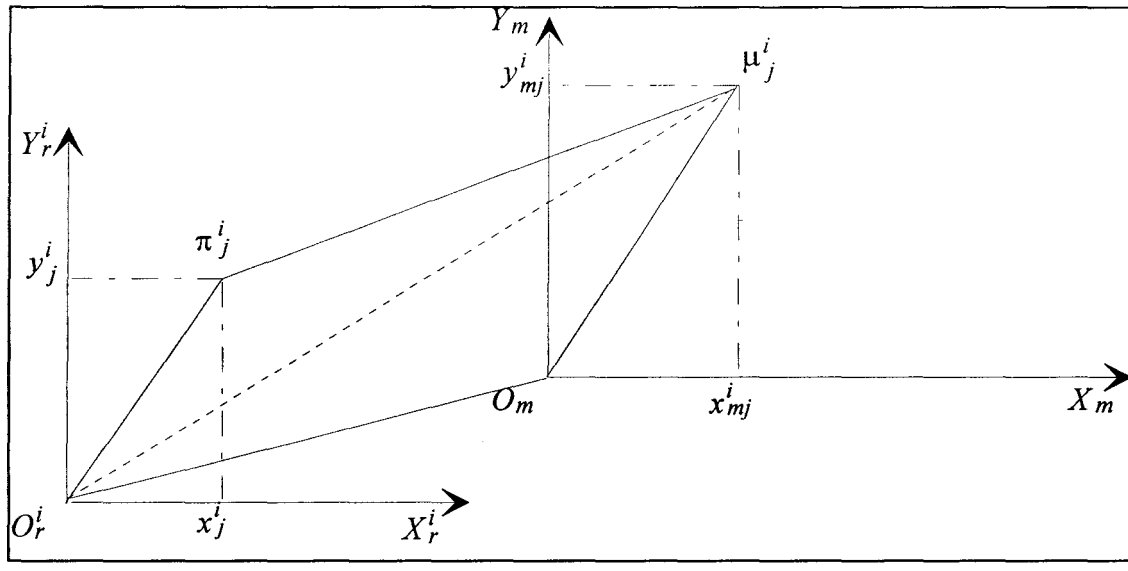

Figure 1.2: Transformation d'un point.

$$
\begin{aligned}
(x^i_{mj}, y^i_{mj}) &= I_v(x^j_i, y^i_j) \\
&= (a_1 x^j_i + b_1 y^i_j + c_1, a_2 x^j_i + b_2 y^i_j + c_2) \\
&= (x^j_i, y^i_j)\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} + c_1 + c_2
\end{aligned}
$$

Comme $I_v \in I_s(R^2)$, la transformée I_v peut être décomposée en une translation T_v et une transformation orthogonale R_v (rotation ou symétrie).

On a alors:

$$
\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \pm 1 \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = Det\, R_v
$$

1.3.4.4. Placement

Un placement est un sous-ensemble de M chargé de la réalisation de n_i pièces pour chaque modèle ω^i de Ω. Le problème posé est donc de définir la position des différentes pièces. On appelle $I_v(\omega^i)$ la réalisation de ω^i par l'isométrie I_v. Le problème du placement réside dans la définition du sous-groupe G appartenant au groupe des isométries du plan permettant de réaliser l'ensemble des pièces demandées.

$$G = \{ I_v \} : \text{ sous-groupe appartenant à } I_S(M)$$

Le nombre d'isométries est:

$$|G| = N_g = \sum_i^{N_\omega} n_i$$

avec n_i nombre de pièces réalisées à partir de ω^i et $N_\omega = |\Omega|$ nombre de modèles différents.

1.3.4.5. Efficacité

L'efficacité du placement sera mesurée par la consommation de la matière utilisée pour la réalisation des pièces demandées. Cette demande peut prendre différentes formes suivant l'application. Elle est fonction du domaine des réalisations:

$$d = f(I_1(\omega^1) \cup I_2(\omega^2) \cup \quad \cup I_{n_g}(\omega^{N_\omega}))$$

1.3.4.6. Contraintes

Les contraintes que l'on peut avoir sur le domaine de découpe s'énoncent d'abord sous forme d'ensemble des propriétés que doivent vérifier les solutions [Dechter 88][Freuder 78][Stefik 81].

"Trouver une solution pour le problème consiste alors à isoler pour un ensemble de variables caractéristiques, un ensemble de valeurs qui satisfont simultanément ces contraintes" [Redlinger 88]. Il s'agit de trouver un ensemble

$$N_g = \sum_{i=1}^{N_\omega} n_i$$

d'isométries I_v du plan matière M correspondant aux réalisations de n_i pièces de chacun des modèles de l'ensemble Ω vérifiant un ensemble de contraintes et permettant de minimiser la consommation de la matière dans un temps compatible avec l'application.

1.4. Les contraintes

1.4.1. Types de contraintes

En proposant une solution respectant au mieux les objectifs en fonction de l'état de la matière et du processus physique, le placement résout d'abord un problème de satisfaction de contraintes qui peuvent êtres divisées en deux groupes [Ziébelin 90][Maouche 85]: les contraintes impératives et les contraintes de préférences.

Les contraintes impératives sont des restrictions dont la satisfaction est impérative et servant à définir l'ensemble des placements admissibles. Elles vérifient donc leur validité et servent à la limitation, parfois importante, du nombre de solutions.

Les contraintes de préférence permettent de définir la qualité d'un placement et sont à satisfaire au mieux. Leur totale satisfaction n'est pas toujours possible et le plus souvent un compromis est nécessaire.

1.4.2. Origines des contraintes

Les origines des contraintes sont diverses. Nous distinguons deux grands groupes: les contraintes dues au processus et les contraintes introduites et simplificatrices.

Les contraintes simplificatrices sont introduites dans un but de simplification du problème de placement. Elles permettent la réduction à priori de l'espace des solutions et donc de réduire d'autant l'explosion combinatoire du placement.

Les contraintes dues au processus sont soit des contraintes technologiques imposées par le procédé de découpe ou le mode de présentation de la matière, soit des contraintes sur les qualités que doivent avoir les pièces découpées.

1.4.2.1. Contraintes technologiques

Trois contraintes différentes peuvent être définies: la contrainte matière, la contrainte de découpe et la contrainte de gestion ou de carnet de commande.

- **Contrainte matière**

Le plan matière doit recevoir l'ensemble des images des pièces à fabriquer sans débordement, et la contrainte matière s'écrit alors sous la forme de l'expression:

$$I_1(\omega^1) \cup I_2(\omega^2) \cup \cdots\cdots \cup I_{N_g}(\omega^{N_\omega}) \subset M \qquad \textbf{(1.3)}$$

Elle traduit le fait que toutes les réalisations des modèles appartiennent bien au plan matière. La contrainte est impérative pour assurer la production du nombre demandé de pièces (contrainte type knapsack).

- **Contrainte de découpe**

Dans le cas du placement de formes quelconques, la seule technique de séparation d'une forme de son support est le contournage ou suivi de contour. Une distance entre deux pièces pour laisser passer l'outil sans réduire les formes peut être nécessaire. Elle peut être obtenue par transformation morphologique ou dilatation de chaque modèle [Coster 85][Schmitt 94]. Pour réaliser une dilatation du modèle ω^i, on réalise la transformation:

$$T_{rm}(\omega^i,\varepsilon) = \left\{\mu \in M : d(\mu,\omega^i) \leq \varepsilon \right\}$$

avec:

$$d(\mu,\omega^i) = inf \left\{d(\mu,\pi^i_j) : \pi^i_j \in \omega^i \right\}$$

et d une distance dans R^2.

On utilise généralement l'addition de Minkowski pour réaliser cette transformation:

$$T_{rm}(\omega^i,\varepsilon) = \omega^i \oplus D_\varepsilon$$

où $\oplus$ représente l'opération d'addition de Minkowski (dilatation) et D_ε un disque de diamètre ε [Serra 82].

Cette contrainte de découpe est impérative et utilisée non seulement pour tenir compte de l'outil de coupe qui est non ponctiforme, mais aussi pour prévoir un espace pour l'assemblage, en particulier la couture dans le cas du textile. En général, les domaines des modèles sont déterminés en fonction de l'outil de coupe et du type d'assemblage (largeur de l'outil de coupe et largeur des coutures). La contrainte est intégrée dans la définition du modèle, ce qui permet de simplifier la résolution.

La découpe de rectangles est souvent réalisée à l'aide d'une cisaille, d'une presse ou d'une scie. Dans ce cas, chaque découpe partage le plan matière suivant une même direction en deux parties qui seront partagées à leur tour de la même manière et ainsi de suite jusqu'à obtention des pièces. Il s'agit là de découpe en n-stades, où il est nécessaire d'appliquer n ensembles de découpe du support matière pour réaliser les pièces placées. Ceci suppose qu'une pièce quelconque doit appartenir à une et une seule partie lors de chaque découpe [Gilmore 65] et chaque ensemble contient des coupes de même longueur et cela suivant la même direction. A la première découpe, la surface M est décomposée en i morceaux $i \geq 2$

$$M_1,\ M_2,\ldots,M_i \text{ tels que } \quad M = M_1 \cup M_2 \cup \quad \cup M_i .$$

Si M_1, M_2,... et M_i ne correspondent pas encore à des pièces , c'est-à-dire si la découpe est effectuée au moins en *2* passes, ces morceaux sont alors subdivisés. Ceci veut dire

qu'il existe à chaque découpe, un ensemble de droites parallèles $\{\Delta_\delta\}$ de largeurs δ partageant le plan en plusieurs parties.

On peut alors écrire:

$$M = I_1(\omega^1) \cup I_2(\omega^2) \cup \ldots\ldots \cup I_{n_g}(\omega^{N_\omega}) \cup \Delta_\delta^1 \cup \Delta_\delta^2 \cup \quad \cup \Delta_\delta^n ,$$

$$\varnothing = I_1(\omega^1) \cap I_2(\omega^2) \cap \cdots\cdots \cap I_{n_g}(\omega^{N_\omega}) \cap \Delta_\delta^1 \cap \Delta_\delta^2 \cap \cdots\cdots \cap \Delta_\delta^n .$$

Déterminer le nombre de droites n, constitue le problème de découpe guillotine en n-stades.

Remarque 2:

Tous les morceaux ne sont pas nécessairement subdivisés.

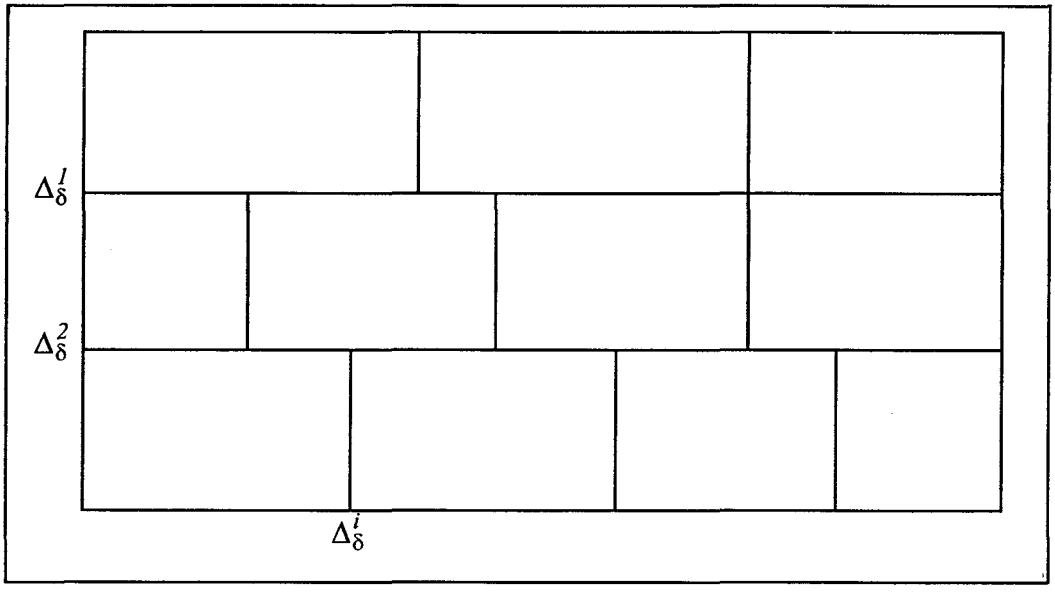

figure 1.3: Découpes 2-stades.

- **Contrainte de gestion**

Il ne s'agit pas de rechercher une meilleure couverture du plan à l'aide d'un ensemble de formes en nombre quelconque, mais d'assurer la réalisation de la quantité demandée de pièces et ce au fur et à mesure de leur arrivée. Le nombre de réalisation est égal au cardinal de G, sous-groupe de I_s^+ :

$$N_g = \sum_{i=1}^{N_\omega} n_i \qquad \text{avec } N_\omega = |\Omega| = \text{cardinal de } \Omega .$$

Cette contrainte à caractère impératif dans une découpe à faible demande, peut devenir préférentielle pour une découpe statique à grande demande parce que le coût de la matière première n'est pas assez élevé pour justifier un temps de calcul supplémentaire.

1.4.2.2. Contrainte de qualité

La qualité est fonction d'un ensemble de contraintes variant suivant la matière utilisée. Les contraintes sur le groupe des isométries permettent de restreindre le nombre de possibilités de transformation d'une pièce. Cette restriction peut aboutir à une seule position possible dans le plan pour une ou plusieurs formes.

- **Contrainte de disjonction**

La contrainte de disjonction traduit le non recouvrement des domaines images $I_v(\omega^i)$. Elle s'exprime par :

$$I_1(\omega^1)\cap I_2(\omega^2)\cap\cdots\cdots\cap I_{N_g}(\omega^{N_\omega})=\varnothing \qquad \textbf{(1.4)}$$

Ce qui signifie que l'intersection de deux domaines images quelconques est un ensemble vide.

$$I_v(\omega^j)\cap I_y(\omega^i)=\varnothing$$
$$\forall i,j \quad i\neq j,$$
$$\forall v,y \quad v\neq y$$

Cette contrainte impérative est toujours utilisée, quel que soit le support matière.

- **Contrainte sur le groupe**

Les deux faces du plan matière sont très souvent différentes. Elles possèdent des caractéristiques d'aspect, de texture ou de couleur différentes. Aussi pour éviter de produire des pièces différentes, on considère que le sous-groupe G des transformations est inclus dans I_s^+ c'est-à-dire que l'on n'utilise que des déplacements et que l'on exclut les symétries axiales.

$G\subset I_s^+$ groupe des isométries directes

Le plan matière peut aussi posséder une direction privilégiée. C'est le cas des matières présentant des propriétés anisotropes. L'angle de rotation ne peut alors prendre que deux valeurs 0, π. La contrainte s'écrit alors:

$$\alpha = 0\pm k\pi\ .$$

Pour certaines applications, la matière ne peut être utilisée que dans un sens (velours, loden par exemple), on a:

$$\alpha = 0\pm 2k\pi\ .$$

Dans certains cas particuliers, un écart angulaire de très faible amplitude peut être accepté et le relâchement de cette contrainte peut être utilisée pour améliorer le rendement du placement par exemple. Nous la qualifions de préférentielle.

- **Contraintes de positionnement**

Nous distinguons deux types de contraintes: les contraintes de positionnement absolu et les contraintes de positionnement relatif.

La contrainte de positionnement absolu sur un modèle ω^i fixe la réalisation $I_v(\omega^i)$. Elle permet de réaliser par partitionnement un modèle à partir d'une zone particulière de *M*.

On peut caractériser cette zone par le prédicat *C* tel que *C(p)* vrai si et seulement si le point *p* appartient à la zone.

Ainsi le choix de la transformation est conditionné par le prédicat *C*. On a alors:

$$I_v^c \quad \text{application de } \Omega \text{ dans } M$$
$$I_v^c(\omega^i) \quad \Rightarrow \exists \mu \in I_v^c(\omega^i) : C(\mu)$$

Le nombre de modèles soumis à cette contrainte, c'est-à-dire dont la réalisation ne peut se faire que dans la zone déterminée grâce à une caractéristique particulière du support est restreint (placement à motif placé).

La contrainte est impérative si elle est utilisée. Elle dépend du support.

Les contraintes de positionnement relatif introduisent une relation de maître à esclave entre certaines pièces: la position de l'une conditionne celles des autres. Si deux pièces ω^i et ω^j sont liées entre elles, la position de la première va engendrer une contrainte de positionnement absolu pour la deuxième.

Si le lien est le couple (π_k^i, π_l^j) avec $\pi_k^i \in \omega^i$ et $\pi_l^j \in \omega^j$, il vient:

$$C(\pi_k^i) \Leftrightarrow C(\pi_l^i)$$

- **Défauts**

Les défauts rencontrés sont de deux types [Esclassan 90]: les défauts de structure et les défauts de teinte ou couleur.

Les défauts de structure sont bien localisés, et un défaut peut être considéré comme s'il était constitué par une pièce soumise à une contrainte de positionnement absolu. On se contente de règles empiriques généralement admises pour qualifier un tissu de premier choix (Conf2000 103, Conf2000 104]. En effet, un tissu est de bonne qualité s'il présente moins de 24 défauts de 3 cm, ou moins de 15 défauts de 10 cm, ou moins de 2 défauts de 1 m pour 100 m de tissus.

Les défauts concernant les coloris peu stables, ou non strictement conformes, ou variables d'une pièce à une autre doivent être décelés par le tisseur ou l'ennoblisseur. Nous ne considérerons que les défauts de couleurs correspondant essentiellement à des variations "linéaires" et légères de la teinte sur une même pièce. Pour prendre en compte ces variations, toutes les pièces composant un même vêtement doivent être réalisées le plus près possible l'une de l'autre. Ceci peut aller jusqu'à définir un ordre de succession afin de respecter un ordre de fabrication. Cette contrainte peut être prise en compte par l'établissement d'une distance maximale entre formes composant un même article.

$$d(\omega^i,\omega^j) \leq d_{max}.$$

1.5. Présentation

1.5.1. Enoncé du problème

Le but du placement est de réaliser l'ensemble des pièces avec le minimum de matière première. L'ensemble des modèles $\Omega = \{\omega^i\}$ contient N_ω éléments. Chaque modèle, élément ω^i de Ω, est produit en n_i exemplaires. Proposer un plan d'imbrication revient à définir les $N_g = \sum_{j=1}^{N_\omega} n_i$ isométries I_v permettant la réalisation avec un minimum de matière et satisfaisant l'ensemble des contraintes posées.

1.5.2. Formulation géométrique

Le domaine placé est représenté par:

$$\bigcup_{i,v} I_v(\omega^i) = I_1(\omega^1) \cup I_2(\omega^2) \cup \cdots\cdots \cup I_{n_g}(\omega^{N_\omega}) \qquad \textbf{(1.5)}$$

La consommation matière résultante est donnée par:

$$D = f\left(\bigcup_{i,v} I_v(\omega^i)\right) \qquad \textbf{(1.6)}$$

1.5.2.1. Problème de base

Il s'agit de minimiser la consommation matière nécessaire au placement de l'ensemble des formes:

$$\text{Min } D = f\left(\bigcup_{i,v} I_v(\omega^i)\right) \qquad \textbf{(1.7)}$$

sous les contraintes

- matière:

$$\bigcup_{i,v} I_v(\omega^i) \subset M \tag{1.8}$$

- de disjonction:

$$\bigcap_{i,v} I_v(\omega^i) = \varnothing \tag{1.9}$$

- et droit fil:

$$I_v \in G \subset I_s^+ \tag{1.10}$$

$$\alpha = 0 \pm k\pi \quad \text{avec } k = 0, 1 \tag{1.11}$$

I_s^+ est le groupe des isométries directes.

$$v \in \{1,2,\ldots\ldots,N_g\} \tag{1.12}$$

1.5.2.2. Problème complet

En ajoutant les contraintes de positionnement au problème de base, pour prendre en compte les caractéristiques des supports à motifs, on obtient l'énoncé général du problème qui s'exprime par:

$$I_v^c(\omega^i) \Rightarrow \exists \mu \in I_v^c(\omega^i): \quad C(\mu) \tag{1.13}$$

$$L(\pi_k^i, \pi_l^i), \quad \pi_k^i \in \omega^i, \quad \pi_l^i \in \omega^i, \quad i \neq j$$

$$C(\pi_k^i) \Leftrightarrow C(\pi_k^j)$$

dans lequel le prédicat $C(\pi_k^i)$ est vrai $\forall \pi_k^i \in \omega^i$. On peut lui ajouter, pour tenir compte des positions relatives des formes, la contrainte " à côté de" exprimée par:

$$d(\omega^i, \omega^j) \leq d_{max}^{ij} \quad \forall i, j$$

1.5.3. Simplification

Afin de mieux aborder les problèmes des recherches d'algorithme d'optimisation, il faut remplacer les opérateurs ensemblistes par les opérateurs arithmétiques. Pour cela, introduisons la notion de fonction caractéristique [Soenen 77].

1.5.3.1 Fonction caractéristique

Il s'agit de définir une fonction associée à chaque domaine ω^i défini sur les éléments de R^2 par:

$$f^{\omega^i}(x,y) = 1 \quad \forall \pi_k^i(x,y) \in \omega^i$$

$$f^{\omega^i}(x,y) = 0 \quad \forall \pi_k^i(x,y) \notin \omega^i$$

Définition de f^{ω^i}

La distance d'un point $\pi \in R^2$ à une partie non vide A de R^2 notée $d(\pi, A)$ est définie par:

$$d(\pi, A) = inf\{d(\pi,\mu): \mu \in A$$

$$\pi \in A \Rightarrow d(\pi, A) = 0$$

si $R^2 = M$ et $\omega^i = A$:

$$\pi \in \omega^i \Rightarrow d(\pi, \omega^i) = 0$$

$$\forall \pi(x,y) \quad \sum_{i=1}^{N_\omega} \sum_{j=1}^{n_i} d(\pi, \omega^i) = N_g - 1$$

$$f^{\omega^i}(\pi) = N_g - \sum_{i=1}^{N_\omega} \sum_{j=1}^{N_j} d(\pi, \omega^i) = 0$$

On retrouve bien la fonction caractéristique f^{ω^i}.

L'expression:

$$(x_1, y_1) = I_v(x, y)$$
$$= (x_v, y_v) + (x, y)[R]$$

permet de définir les fonctions caractéristiques des images $I_v(\omega^i)$ qui s'écrivent:

$$f_v^{\omega^i}(x, y, x_v, y_v, [R]).$$

Les relations (**1.5**) et (**1.6**) deviennent respectivement:

$$\sum_v f_v^{\omega^i}(x, y, x_v, y_v, [R]) \leq f^m \qquad \textbf{(1.5a)}$$

où f^m est une fonction caractéristique de la matière M et $\sum_v f_v^{\omega^i}$ la fonction caractéristique de $\bigcup_{j,v} I_v(\omega^i)$, le domaine placé.

$$\sum_v f_v^{\omega^i}(x, y, x_v, y_v, [R]) \leq 1 \qquad \textbf{(1.6a)}$$

1.5.3.2. Mesure de la consommation matière

Le "diamètre" d'une partie non vide A, notée $d(A)$ et définie par

$$d(A) = sup\{ d(a_1, a_2) : a_1, a_2 \in A \} ,$$

c'est à dire la borne supérieure des distances de A.

Si $d(A)$ est fini, A est borné.

La consommation matière peut être définie, à partir de la notion de diamètre d'un ensemble métrique:

$$D = G\left(\bigcup_{j,v} I_v(\omega^i) \right)$$
$$= Sup\left\{ d(\mu_1, \mu_2) : \mu_1, \mu_2 \in \bigcup_{j,v} I_v(\omega^i) \right\}$$

Différentes formes peuvent être employée pour mesurer la consommation matière. Les distances les plus utilisées sont :

- la distance de Manhattan,
- la distance euclidienne,
- le maximum de déviation.

Ces distances sont obtenues à partir de la famille des distances de Minkowski donnée par la formule (dans R^2):

$$d_r(a,b) = \left(|x_a - x_b|^r + |y_a - y_b|^r \right)^{1/r}$$

dans laquelle r prend respectivement les valeurs $1, 2$ et infini.

On remarque que plus grande est la valeur donnée à r, plus grande est l'importance donnée à la plus grande différence $(x_a - x_b)$ ou $(y_a - y_b)$.

Lorsque $r=1$, la distance entre deux points a et b est égale à la somme des deux déviations $|x_a - x_b| + |y_a - y_b|$. A $r=1$ correspond donc la plus longue distance entre deux points et à $r=\infty$, la plus grande déviation, $Sup(|x_a - x_b|, |y_a - y_b|)$ domine entièrement la distance. De ce fait, il est intéressant de voir l'influence de la distance sur la consommation matière.

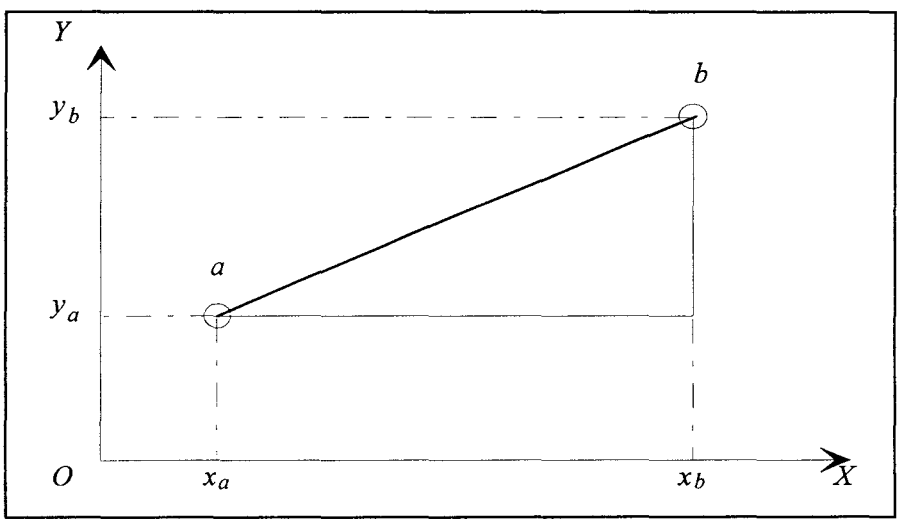

Figure 1.4: Distance entre deux points.

- **Distance de Manhattan**

$$d_1(a,b) = |x_a - x_b| + |y_a - y_b|$$

Cette distance tient compte de la différence entre les différentes coordonnées. L'ensemble des points situés à une distance inférieure à δ (valeur positive quelconque) du point origine, soit l'ensemble iso-distance, est un losange de diagonale 2δ.

- **Distance euclidienne**

$$d_2(a,b) = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$$

d_2 représente le "plus court chemin" entre deux points. L'ensemble des points iso-distance d'un même point O:

$S_{d_2}(O,\delta) = \{\mu : d_2(O,\mu) < \delta\}$ représente un disque.

- **Le maximum de déviation**

$$d_\infty(a,b) = Sup(|x_a - x_b|, |y_a, y_b|)$$

$S_{d_\infty}(o,\delta) = \{\mu : d_\infty(o,\mu) < \delta\}$ est un rectangle de côté 2δ.

Pour un matériau se présentant sous forme d'une bande dont la longueur est non bornée ou considérée comme telle, il est plus intéressant d'utiliser la distance d_∞

Dans ce cas le problème de base du placement devient:

$$Min\left\{Sup\left[d(a,b) : \sum_v f_v^{\omega^i}(x_a, y_a) = 1, \sum_v f_v^{\omega^i}(x_b, y_b) = 1\right]\right\}$$

$$T_v, R_v \in I_s^{+0}$$

où I_s^{+0} est le groupe des isométries directes avec $\alpha = \pm k\pi$, $k = 0, 1, \ldots$

$$\sum_v f_v^{\omega^i} = 1$$

$$\sum_v f_v^{\omega^i} \leq f^m$$

Le problème général s'obtient en ajoutant les contraintes de positionnement.

1.6. Représentation

1.6.1. Solution optimale

La recherche d'une solution nécessite le calcul de la consommation matière pour l'ensemble des solutions admissibles, c'est-à-dire toute solution satisfaisant les contraintes. La solution optimale est celle qui minimise la consommation de la matière. Cette approche théoriquement acceptable si l'ensemble des solutions est dénombrable, conduit à la solution optimale en un temps raisonnable lorsque le nombre de solutions est petit.

Comme les transformations T_v et R_v définies dans I_s^{+0} sont continues, le nombre de solutions admissibles est pratiquement infini. Notons toutefois que la discrétisation du plan matière amène à limiter le nombre de transformations possibles et par conséquent le nombre de solutions; ceci va permette de définir l'ensemble des configurations possibles.

1.6.1.1. Ensemble des configurations

On appelle vecteur de configuration un ensemble de paramètres *(>2)* qui permet de décrire toutes les positions de toutes les pièces, soit l'ensemble des transformations admissibles [Lozano-Pérez 83][Tournassoud 89]. Le plan décrit par le vecteur constitue l'ensemble des configurations.

1.6.1.2. Placement de deux formes

On considère les différents placements des pièces des modèles ω^i et ω^j; ω^i est inscrit dans un rectangle $R^i(L^i,W^i)$ et ω^j dans rectangle $R^j(L^j,W^j)$ où L et W désignent respectivement la dimension suivant Ox et Oy [Taix 91].

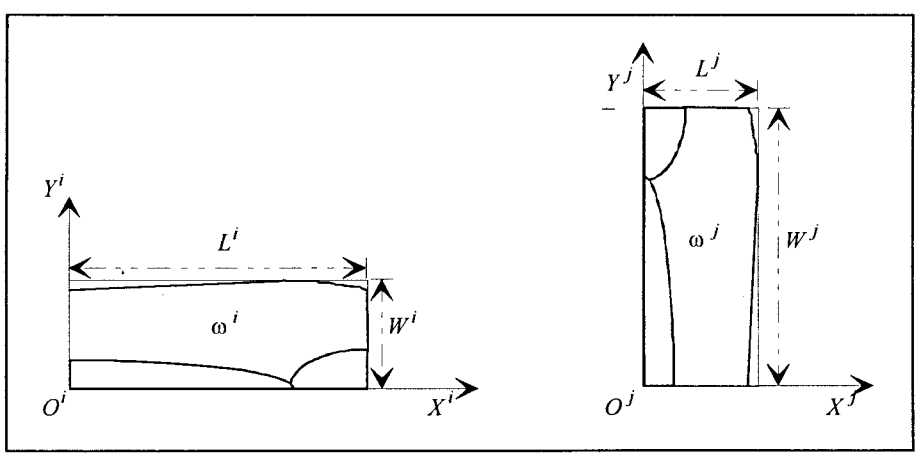

Figure 1.5: Dimensions d'une forme, longueur L et largeur W.

• Placement en translation pure

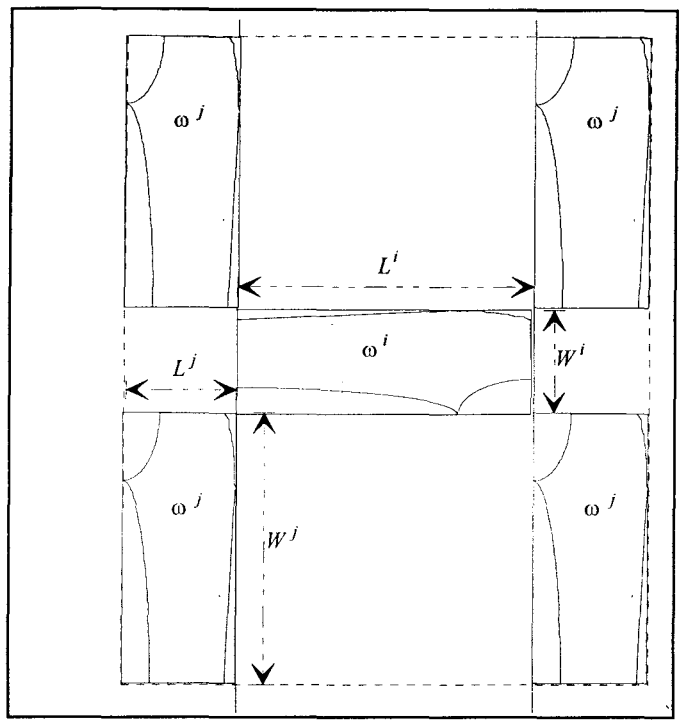

Figure 1.6: Translation d'une forme autour d'une autre.

L'ensemble des transformations admissibles est réduit aux seules translations T_v.

Sur le schéma ci-dessous, on considère toutes les translations de ω^j "autour" de ω^i tout en restant en contact avec ω^i.

L'ensemble des configurations comporte $2(L^i+W^i+L^j+W^j)$ éléments. Il existe donc $2(L^i+W^i+L^j+W^j)$ translations admissibles de ω^j autour de ω^i.

L'ensemble des configurations obtenues par translation de ω^i autour de ω^j est identique à celui obtenu par translation de ω^j.

• Placement en translation et rotation

On considère le groupe des isométries directes I_s^{+0}. On réalise alors $2(L^i+W^i+L^j+W^j)$ translations à chaque rotation de ω^j. Nous avons vu (*cf. paragraphe 1.4*) que lorsque le matériau possède une direction privilégiée définie par l'angle $\alpha = 0 \pm k\pi$, le nombre de rotations admissibles est égal à *2* (cas le plus fréquent). Le nombre d'isométries admissibles est alors:

$$2(2(L^i+W^i+L^j+W^j))$$

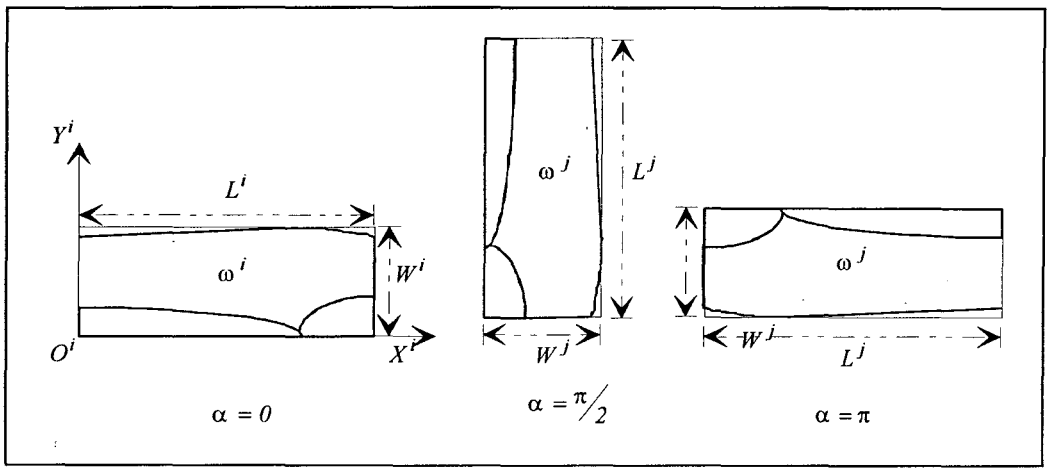

Figure 1.7: Rotations d'une forme.

1.6.2. Simplification du modèle

L'utilisation d'un algorithme adéquat peut conduire à une solution optimale pour un nombre restreint de pièces. Toutefois le nombre de configurations pouvant augmenter rapidement, les temps de calcul ne sont plus compatibles avec l'application. Dans ce sens, il est intéressant de rechercher une solution sous-optimale ou d'élaborer un modèle mathématique plus simple si la solution précédente n'est toujours pas satisfaisante.

Pour atteindre cet objectif, plusieurs solutions sont envisagées, soit en ajoutant des contraintes supplémentaires sur le groupe des isométries ($\alpha = 0 \pm 2k\pi$, nombre de translations réduit), soit en décomposant le problème en plusieurs sous-problèmes plus faciles à résoudre, soit encore en introduisant une représentation plus simples et approximatives des domaines à placer.

1.6.2.1. Réduction de l'ensemble des configurations

Si l'on utilise que des translations, le problème devient un placement en translation pure [Avnaim 89]. Il faut alors introduire une nouvelle contrainte pour n'autoriser que les translations d'un côté et de l'autre de la pièce sans dépassement.

L'ensemble des configurations est réduit à $2\,(\,max(L^i, L^j) - min(L^i, L^j))$.

Si le nombre de degrés de liberté reste encore très grand, on doit choisir un pas de discrétisation plus grand, donc une limitation du nombre de translations : dessus-droit, dessus-gauche, dessous-droit et dessous-gauche (*cf. figure 1.8*).

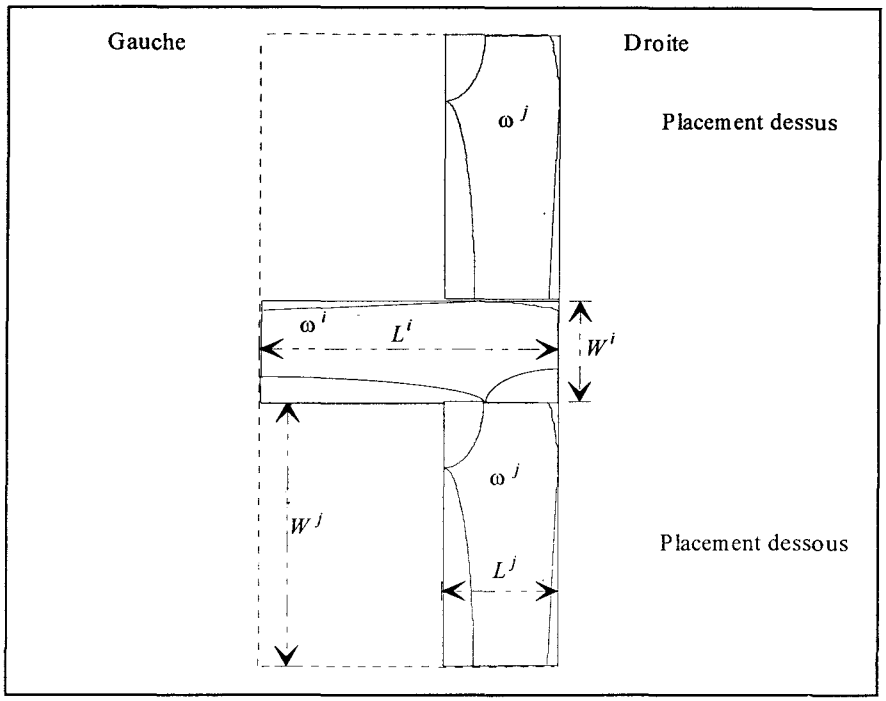

Figure 1.8: Placement Gauche/Droite-Dessus/dessous.

1.6.2.2. Décomposition du problème

La réduction des problèmes consiste à transformer le problème initial de placement de N_g pièces en un ensemble de sous-problèmes dont la solution est éventuellement immédiate. La résolution du problème initial ou d'un sous-problème quelconque, ne peut se faire que s'il se décompose en sous-problèmes tous résolus [Farreny 87].

L'espace des sous-problèmes, noté P, est constitué par un ensemble discret dont chaque élément P_i est un sous-problème particulier. L'espace P peut être structuré par un ensemble d'applications multivoques:

$$O = \{ O_1, O_2, \ldots, O_n \}.$$

Chaque application $O_i : P_i \rightarrow S(P)$ fait correspondre à P_i le sous-ensemble $S(P)$ de sous-problèmes en lesquels P_i se décompose. $O_i(P_i) = \{Q_1, Q_2, \ldots, Q_k\}$ est l'ensemble des sous-problèmes composant le sous-problème P_i.

Le couple $G = (P, O)$ est un graphe *ET/OU*. La représentation sous forme d'un graphe de sous-problèmes permet d'utiliser une technique de résolution tenant compte de la contrainte temps réel nécessaire au placement en continu. En effet, la solution au problème du placement global est donnée sous forme d'une suite de placements en bandes, et chaque bande est constituée par imbrication de formes deux à deux.

Pratiquement, le problème est représenté en graphe d'états où chaque noeud terminal est une solution admissible, donc une bande vérifiant un ensemble de relations. Les états du

graphe sont des placements intermédiaires. L'espace des états, noté toujours P, est structuré par un ensemble fini d'applications:

$$O = \{ O_1, O_2, \ldots, O_n \}$$

appelées opérateurs, tel que: $O_i : P_i \rightarrow P$. L'opérateur O_i transforme l'état $P_i \subset P$ en un autre état.

$G = (P, O)$ est un graphe d'états. Le problème du placement est alors formulé par la donnée

- d'un état initial (une bande vide),
- de l'ensemble des opérateurs de changement d'états et
- du sous-ensemble d'états terminaux donné implicitement par un ensemble de relations que doivent satisfaire ces états terminaux.

Le problème est alors de définir l'ensemble des opérateurs en fonction des formes à imbriquer et des transformations autorisées, et les relations caractérisant les états terminaux (admissibilité des bandes).

Cette représentation permet de disposer rapidement d'une solution et d'essayer de l'améliorer si nécessaire. Des heuristiques permettant une meilleure information sont utilisées pour accélérer la recherche d'une solution.

1.6.2.3. Approximation des modèles des formes

Il s'agit d'introduire une fonction pseudo-caractéristique d'un domaine ω^i de R^2 tel que ω^i soit inclus dans $\tilde{\omega}^i$. $\tilde{\omega}^i$ peut être, de manière générale, un polygone enveloppe. Nous avons utilisé des rectangles circonscrits aux formes ω^i. Il est évident que dans le cas d'une contrainte temporelle forte, comme c'est le cas du placement en continu, l'utilisation de rectangles pour représenter les formes réduit de manière significative le temps de recherche d'une solution acceptable.

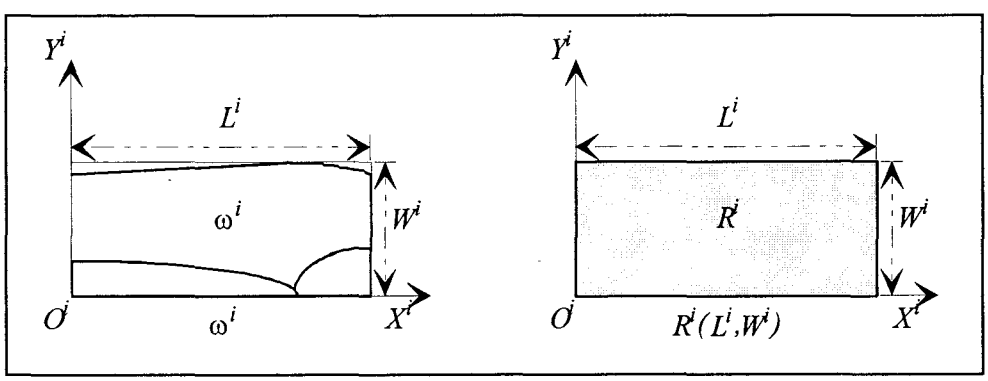

Figure 1.9: Rectangle circonscrit.

Le modèle ω^i est inscrit dans un rectangle $R^i(L^i,W^i)$.

La fonction pseudo-caractéristiques devient alors $\forall \pi(x,y)$:

$$f^{\tilde{\omega}^i} = 1 \quad si \quad 0 \leq x \leq W_i \quad ET \quad 0 \leq y \leq L_i$$

et

$$f^{\tilde{\omega}^i} = 0 \quad Si \quad x < 0 \quad OU \quad x \geq W_i \quad Ou \quad y < 0 \quad Ou \quad y \geq L_i$$

L'ensemble des placements est alors convexe et les solutions nombreuses et variées (*cf. chapitre 3*).

1.7. Conclusion

La littérature sur le placement de rectangles est très abondante. Modélisé sous forme d'un programme linéaire, le problème d'optimisation de découpe plane de formes rectangulaires est résolu. Il n'en est pas de même de celui de découpe de formes irrégulières et complexes. Le manque de publications dans ce domaine est significatif. Les approches utilisées sont surtout basées sur l'association de formes pour construire des rectangles ou l'utilisation d'heuristiques [Haims 70] [Albano 80a] [Delaporte 89].

Dans ce chapitre, nous avons présenté une modélisation du problème de placement et nous avons volontairement écarté le problème de découpe. Nous nous intéressons particulièrement au problème de placement en continu où le nombre de formes à placer est relativement restreint et non connu à l'avance. Nous présentons dans les chapitres suivants une étude bibliographique importante concernant les problèmes de découpe et placements puis les différentes solutions que nous avons apportés au problème présenté. Ces solutions prennent en compte les trois cas de réduction présentés ci-dessus (*cf. paragraphe 1.6.2*).

Chapitre deuxième

Optimisation de la découpe: état de l'art et étude

2.1. Introduction

L'énoncé général du problème de découpe est le suivant: étant donné un stock de matériaux, éventuellement sous la forme de plusieurs entités, comment produire au mieux un ensemble d'objets de dimensions inférieures.

Ce problème apparaît dans de nombreux domaines d'activité; si les industries utilisant la découpe pour la transformation de la matière sont les exemples les plus couramment cités, il n'en est pas moins présent dans des problèmes tels la répartition des ressources (temps C.P.U., mémoire d'un ordinateur, agencement des systèmes de fabrication cellulaires), le placement de circuits intégrés dans une puce, la mise en page d'articles dans un journal ou même la reconstruction d'un puzzle ou les déplacements d'une flotte de robots.

Loin d'être exhaustive, cette liste montre la diversité des problèmes pratiques apparentés au problème de découpe. Il va de soit que les contraintes à satisfaire lors d'une découpe de panneaux de bois diffèrent sensiblement de celles rencontrées lors de la conception d'un atelier de fabrication ou du remplissage d'un conteneur. Ces contraintes, souvent liées aux aspects pratiques de la tâche à réaliser, font de chacun des problèmes un cas particulier nécessitant des méthodes de résolution spécifiques. Cependant un certain nombre de similitudes apparaissent au sein des problèmes de découpe et lors de la formulation mathématique de ces problèmes on retrouve toujours un noyau commun qui constitue une part essentielle de la résolution : le problème du placement dit du sac-à-dos (knapsack). Ce sont les diverses contraintes qui vont permettre de classer les méthodes proposées dans la littérature.

Un problème de découpe est essentiellement caractérisé par la donnée des six paramètres suivants :

1- temps alloué au calcul (placement effectué en temps réel ou hors ligne),

2- dimension des formes (unidimensionnelles, 1.5D, 2D ou 3D),

3- dimension du support (infini, semi-infini, fini, continu ou discontinu),

4- complexité des formes (rectangulaires, polygonales, irrégulières),

5- matériau constituant (imposant des contraintes d'orientation : direction ou sens),

6- type de découpe utilisée (scie, guillotine, jet d'eau, laser...).

La diversité de ces paramètres entraîne une spécificité de chaque problème et explique le nombre important de solutions proposées qui, même efficaces, restent ponctuelles et inapplicables à d'autre cas. Il semble donc très difficile de trouver une formulation générale et unique à l'optimisation de la découpe ou, du moins, de fournir une solution globale de type algorithmique classique. C'est pourquoi, de plus en plus, on préfère considérer le problème sous un aspect système expert même si, dans un premier temps, la modélisation en est plus délicate.

2.2. Formulation Mathématique du problème de découpe: les difficultés de résolution

On trouve dans [Prempti 83] la définition suivante: "comment, à partir d'un stock de matière première, sous forme de plusieurs entités de formes et de dimensions différentes, produire des pièces suivant une demande connue ou non à l'avance, avec le minimum de matière première", définition où apparaît un septième paramètre caractéristique d'un problème de découpe qui est lié à la connaissance à priori on non de la demande. En effet, la découpe s'effectue très souvent en fonction de l'état des stocks, ce qui, nous le verrons plus loin, permet de simplifier grandement la résolution..

2.2.1. Un exemple simple pour commencer

Reprenons ici l'exemple cité dans [Costa 82] et [Dmitrovicz 91]: Comment, à partir d'un stock composé de *3* bobines l_1, l_2 et l_3 de longueur *9* mètres et de *5* bobines $l_4,\dots,l_8$ de longueur *10* mètres, satisfaire la commande suivante : *2* bobineaux de longueurs *3* mètres et *5* bobineaux de longueur *4* mètres.

Le problème décrit est un problème de programmation linéaire en nombres entiers. Il s'agit de trouver la meilleure solution au sens d'un critère choisi.

2.2.1.1. Première formulation

Soit a_{ij} le nombre de bobineaux i découpés dans la bobines l_j. Le carnet de commande s'écrit, pour une production d'un nombre de bobineaux au moins égal à la demande:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{8} a_{1j} \geq 2 & \textbf{(2.1)} \\ \sum_{j=1}^{8} a_{2j} \geq 5 & \textbf{(2.2)} \end{cases}$$

La solution recherchée doit respecter les contraintes de dimensions des bobines:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{3} l_i \quad a_{ij} \leq 9 & \textbf{(2.3)} \\ \sum_{j=4}^{8} l_i \quad a_{ij} \leq 10 & \textbf{(2.4)} \end{cases}$$

2.2.1.2. Deuxième formulation

Nous pouvons énumérer pour les bobines mères, toutes les combinaisons de découpes possibles donnant une chute de longueur inférieure à la longueur du plus petit bobineau (toutes les solutions admissibles):

Bobines mères	9	10
N° d'activité Bobineaux	1 2 3	4 5 6
3	3 1 0	3 2 0
4	0 1 2	0 1 2
pertes	0 2 1	1 0 2

Chaque colonne correspond à une activité, chaque activité à une manière de découper une bobine; donc à un placement. Les activités sont numérotées de 1 à 6. Les activités 1, 2 et 3 vérifient la contrainte de placement (2.3), tandis que les activités 4, 5 et 6 respectent la contrainte (2.4).

Remarque 1:

Les contraintes (2.1), (2.2), (2.3) et (2.4) sont des contraintes de placement. Le problème de découpe consiste donc à choisir parmi les différents placements, pas nécessairement les placements optimaux, mais ceux qui permettent la production des bobineaux demandés au meilleur coût. Les placements optimaux au sens des pertes en matière première sont les activités 1 et 5.

- **Solution 1**

Dans un premier temps, nous recherchons une solution minimisant, voire annulant les pertes. Il suffit, pour cela d'utiliser les activités pour lesquelles les pertes sont

nulles. Cependant, il est nécessaire de vérifier si l'utilisation de ces seules activités peut engendrer la commande; chaque bobineau devant apparaître dans au moins une activité.

En effet, si tout bobineau apparaît dans au moins une activité, la demande sera satisfaite en utilisant uniquement ces activités [Minoux 83]. Dans l'exemple précédent, les activités 1 et 5 sont à perte nulle, et comme, apparaît dans l'une d'elle (la colonne 5) chaque bobineau demandé, l'activité 5 couvre donc la demande. Ainsi en utilisant 5 fois l'activité 5, on produit bien 5 bobineaux de longueur 4 mètres, mais 10 bobineaux de 3 mètres ont été produits au lieu de 3; et 5 bobines de 9 mètres sont utilisées, soit 45 mètres de bobines.

Remarque 2:

Il est important de noter qu'un tel problème peut ne pas avoir de solution comme il peut en avoir plusieurs avec perte nulle.

- **Solution 2**

En utilisant 2 fois l'activité 3 et 1 fois l'activité 5, on produit 5 bobineaux de longueur 4 mètres et 2 bobineaux de longueur 3 mètres. La surproduction est nulle, les bobineaux ont été produits en quantité exacte, mais les pertes ont une longueur de 2 mètres. 2 bobines de 9 mètres et une bobine de 10 mètres sont utilisées, soit une longueur totale de 28 mètres. Dans ce cas, la longueur totale utilisée est minimale.

- **Solution 3**

On peut chercher à minimiser la quantité totale de bobines utilisées tout en cherchant un compromis avec la chute entraînée. Dans ce cas on utilisera sans doute une fois l'activité 3 et trois fois l'activité 5. La longueur totale utilisée est donc de 39 mètres (1 fois 9 + 3 fois 10), la surproduction de 3 bobineaux de 3 mètres et les pertes seulement de 1 mètre.

Cet exemple simple montre que les solutions varient en fonction du critère choisi. Nous allons donner une formulation générale, qui tiendra compte des quantités de bobines disponibles, dans ce qui suit.

2.2.2. Formulation générale

Il n'existe pas à notre connaissance de formulation générale du problème de placement. Notre objectif est d'essayer de représenter les différents problèmes rencontrés dans la littérature au moyen d'une formulation unique prenant en compte les différentes contraintes et objectifs.

La bibliographie sur ce sujet semble unanime: la première formulation mathématique, restée longtemps inconnue d'ailleurs, est due à Kantorowitch [Kantorovich 60]. Le problème est traduit de la manière suivante.

Soient M types de plaques de dimensions différentes numérotées $p=1,...,M$ en quantités q (matériau discontinu disponible en nombre limité). Le vecteur matériau est:

$$Q=(q_1,q_2,\ldots\ldots,q_p,\ldots\ldots,q_M)$$

Une commande constituée de K types de pièces demandées en quantité d est représentée par le vecteur:

$$D = (d_1, d_2, \ldots\ldots, d_i, \ldots\ldots, d_K)^t$$

On appelle patron ou activité une manière de découper les pièces dans une plaque. Une activité a_{jp} est représentée par le vecteur:

$$a_{jp} = (a_{1jp}, a_{2jp}, \ldots\ldots, a_{ijp}, \ldots\ldots a_{Kjp})^t ,$$

où a_{ijp} représente le nombre de pièces de type i produites à partir de la plaque p, par utilisation de l'activité j.

On réunit toutes les activités possibles sur une plaque p en une seule matrice:

$$A_p = (a_{1p}, a_{2p}, \ldots\ldots, a_{jp}, \ldots\ldots a_{Np}).$$

Une même activité pouvant être sollicitée plusieurs fois, on introduit le vecteur:

$$X_p = (x_{1p}, x_{2p}, \ldots\ldots, x_{jp}, \ldots\ldots x_{Np})^t ,$$

où x_{jp} est le nombre de fois que l'on a utilisé l'activité j sur la plaque p.

Il nous faut satisfaire la commande D, d'où :

$$\sum_{p=1}^{M} A_p X_p = D \qquad \text{avec} \quad \forall j \in [1, N], \forall p \in [1, M] \quad \begin{cases} x_{jp} \geq 0 \\ x_{jp} \ \textit{entier} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_p = (x_{1p}, x_{2p}, \ldots\ldots, x_{jp}, \ldots\ldots x_{Np})^t \\ A_p = (a_{1p}, a_{2p}, \ldots\ldots, a_{jp}, \ldots\ldots a_{Np}) \\ a_{jp} = (a_{1jp}, a_{2jp}, \ldots\ldots, a_{ijp}, \ldots\ldots a_{Kjp})^t \end{cases}$$

en minimisant un critère relatif soit:

- au nombre total de plaques nécessaires à la satisfaction de D,
- à la perte totale de matière première,
- au coût de production des pièces.

Cette formulation suppose que les matériaux sont disponibles en quantité suffisante. Pour prendre en compte le fait que les plaques sont en nombre fini, on introduit le vecteur :

$$Y = (y_1, y_2, \ldots\ldots, y_p, \ldots\ldots, y_M),$$

où y_p représente le nombre de fois que l'on a utilisé la plaque p. On a alors :

$$\sum_{p=1}^{M} y_p \quad A_p \quad X_p = D.$$

Comme nous le verrons plus loin, les solutions dépendent du type d'objectif: minimiser le nombre total de plaques utilisées ou minimiser les pertes totales ne conduit pas nécessairement à la même solution.

Pour tenir compte de l'objectif, on introduit un vecteur coût par plaque:

$$C_p = (c_{1p}, c_{2p}, \ldots\ldots, c_{jp}, \ldots\ldots c_{Np})$$

où les c_{jp} prendront des valeurs différentes suivant le but à atteindre :

$c_{jp} = 1 \Rightarrow$ minimisation du nombre de plaques utilisées,

c_{jp} = perte associée au patron $P \Rightarrow$ minimisation de la perte totale,

c_{jp} = coût associée à l'activité $j \Rightarrow$ minimisation du coût total.

On peut aussi chercher une résolution multicritère par exemple l'utilisation d'une combinaison pondérée linéaire des objectifs précédents.

La formulation est toujours sous forme d'un programme linéaire en nombres entiers. La fonction objectif s'écrit alors :

$$Min\ Z = \sum_{p=1}^{M} C_p X_p$$

et le programme linéaire :

$$\begin{cases} Min\ Z = \sum_{p=1}^{M} C_p X_p \\ s.c. \begin{cases} \sum_{p=1}^{M} A_p X_p = D \\ \forall j \in [1, N] \text{ et } \forall p \in [1, M] \\ x_{jp} \geq 0 \\ x_{jp} \ entier \end{cases} \\ \begin{cases} X_p = (x_{1p}, x_{2p}, \ldots\ldots\ldots, x_{jp}, \ldots\ldots\ldots x_{Np})^t \\ A_p = (a_{1p}, a_{2p}, \ldots\ldots\ldots, a_{jp}, \ldots\ldots\ldots a_{Np}) \\ a_{jp} = (a_{1jp}, a_{2jp}, \ldots\ldots, a_{ijp}, \ldots\ldots a_{Kjp})^t \end{cases} \end{cases}$$

Remarque 3:

la formulation des problèmes de découpe à une ou deux dimensions reste la même, la différence apparaissant dans la définition de la matrice des activités A_p.

Deux obstacles empêchent la résolution du problème ainsi posé. Le premier découle de la contrainte d'intégrité impliquant une résolution en nombres entiers, particulièrement coûteuse. La seconde tient au nombre très important de colonnes de la matrice *Ap*. (Gilmore et Gomory ont montré que pour un problème unidimensionnel où *40* pièces de types différents sont à découper dans des rouleaux de papier, le nombre de patrons pouvait atteindre 10 voir 100 millions) [Gilmore 61]).

2.2.2.1. Exemple

Soient trois types de sous-barres t_1, t_2 et t_3 telles que :

t_1 de longueur *5m* demandée en quantité *6*,

t_2 de longueur *3m* demandée en quantité *8*,

t_3 de longueur *2m* demandée en quantité *9*,

à découper dans deux types de barres L_1 et L_2 de longueurs respectives *10* m et *13* m.

L'objectif sera la minimisation du nombre total de barres utilisées ($c_{jp} = 1$).

Détermination de l'ensemble des patrons :

Pour L_1

$2t_1$	→	2×5	Pertes 0
$t_1 + t_2 + t_3$	→	$5+3+2$	Pertes 0
$t_1 + 2t_3$	→	$5+2\times2$	Pertes 1
$3t_2$	→	3×3	Pertes 1
$2t_2 + 2t_3$	→	$2\times3+2\times2$	Pertes 0
$t_2 + 3t_3$	→	$3+3\times2$	Pertes 1
$5t_3$	→	5×2	Pertes 0

Pour L2

$2t_1 + t_2$	→	$2\times5+3$	Pertes 0
$2t_1 + t_3$	→	$2\times5+2$	Pertes 1
$t_1 + 2t_2 + t_3$	→	$5+2\times3+2$	Pertes 0
$t_1 + t_2 + 2t_3$	→	$5+3+2\times2$	Pertes 1
$t_1 + 4t_3$	→	$5+4\times2$	Pertes 0
$4t_2$	→	4×3	Pertes 1
$3t_2 + 2t_3$	→	$3\times3+2\times2$	Pertes 0
$2t_2 + 3t_3$	→	$2\times3+3\times2$	Pertes 1
$t_2 + 5t_3$	→	$3+5\times2$	Pertes 0
$6t_3$	→	6×2	Pertes 1

D'où :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 & 0 & 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Remarque 4:

On peut noter que, même pour un exemple aussi simple, les matrices Ap ont des dimensions assez importantes.

En appelant x_{jp} le nombre de fois que le patron j a été utilisé sur la barre de type p:

$$X_1 = (x_{11},.....,x_{71})^t \qquad \text{et} \qquad X_2 = (x_{21},.....,x_{102})^t$$

Le problème s'écrit alors :

$$\begin{cases} Min(Z) = \underbrace{(1, \ldots ,1)}_{7} X_1 + \underbrace{(1, \ldots ,1)}_{10} X_2 \\ s.c. \quad \sum_{p=1}^{2} A_p X_p = (6,8,9)^t \\ \forall j, \forall p \\ x_{jp} \geq 0 \\ x_{jp} \quad entier \\ X_1 = (x_{11},.., x_{j1},...,x_{71})^t \; et \; X_2 = (x_{12},..., x_{j2},..,x_{102})^t \end{cases}$$

2.2.2.2. La contrainte d'intégrité

Pour résoudre le problème posé par cette contrainte, on distingue deux cas :

- **Cas d'une découpe à grande demande**

[Gilmore 61][Gilmore 63][Gilmore 65][Haessler 75][Coverdale 76][Costa 84][Vidal 89]

Le nombre de pièces commandées étant très important par rapport au nombre de pièces pouvant être découpées par patron, le problème est résolu sans tenir compte de la contrainte X_p entier. La solution obtenue est ensuite arrondie à la valeur directement supérieure et la surproduction stockée en vue d'une éventuelle utilisation ultérieure.

- **Cas d'une découpe à faible demande:**

[Tilanus 76][Madsen 80][Adamowicz 76]

Pour résoudre un tel problème, on fait appel à l'heuristique dite " réduction exhaustive répétitive " qui agit de la manière suivante :

(1) Trouver le meilleur patron initial .

(2) Utiliser ce patron jusqu'à ce que la demande soit satisfaite pour une pièce .

*(3) **S'il y a encore des pièces à produire Alors***
trouver le meilleur patron pour les pièces restant à produire.
Aller en (2).
Sinon
Fin.

Le problème de découpe est alors réduit à une suite de problèmes de placement (étapes (1) et (3)).

2.2.2.3. Nombre de colonnes de la matrice A_p

Une première méthode consiste à ne pas considérer tous les patrons possibles mais à se limiter à un sous-ensemble de bons patrons [Eisemann 57]. Cette méthode, dont la qualité des solutions dépend des critères de choix des " bons " patrons, semble peu fiable et surtout laborieuse.

Une autre méthode proposée par Gilmore et Gomory [Gilmore 61] est celle de la génération de colonnes. Puisque en pratique, il est impossible de garder en mémoire les matrices Ap, on génère au fur et à mesure que l'on progresse, leurs colonnes. Cet algorithme est inspiré de la méthode révisée du simplexe où, à chaque itération, le problème est de trouver la colonne pivot a_{jp} pour laquelle on a un coût réduit minimum. Cette colonne pivot est donnée par la résolution du problème auxiliaire suivant :

$$\begin{cases} Max \sum_{i=1}^{K} v_i a_{ijp} \\ s.c. \begin{cases} a_{ijp} \text{ placement admissible} \\ a_{ijp} \geq 0 \\ a_{ijp} \text{ entiers} \end{cases} \end{cases}$$

Où les v_i sont les multiplicateurs pour chacune des pièces à obtenir .

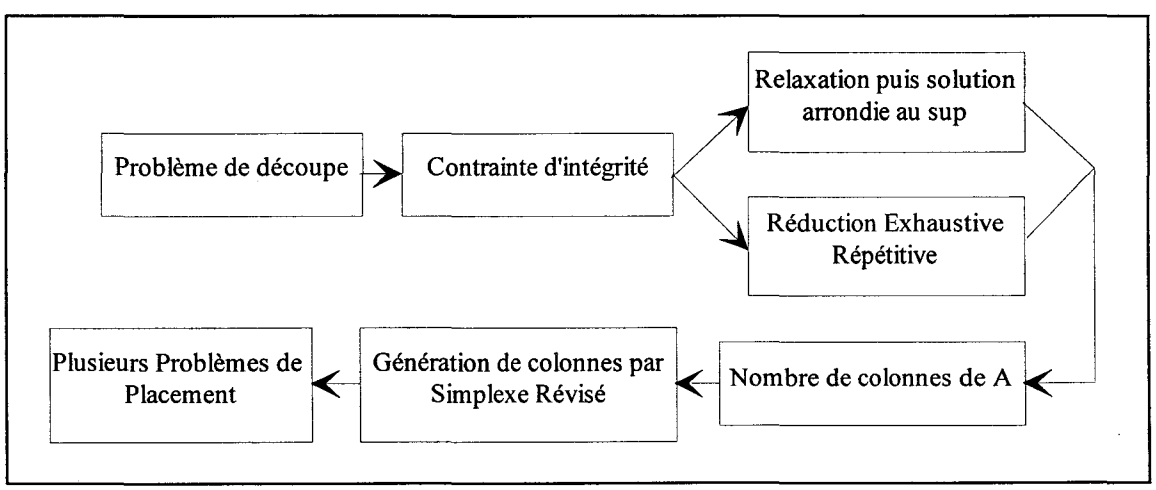

Figure 2.1: Principe des algorithmes de découpe.

En fait, le problème auxiliaire n'est autre que le problème de placement (ou knapsack) [Martello 90]. Il peut être exprimé ainsi : connaissant la valeur de chaque pièce, trouver le patron de valeur maximale où la valeur d'un patron est définie par la somme des valeurs des pièces qui le constituent .

Le principe est résumé par la figure précédente (*cf. figure 2.1*).

2.3. Classification des méthodes de résolution

Du fait de la variété des publications dans le domaine de la découpe et de la particularité des problèmes rencontrés, il devient difficile de proposer une classification de ces méthodes. Une démarche communément adoptée est de les grouper en fonction de la dimension des formes (unidimensionnelles, 1.5D, 2D). Nous la suivrons en proposant toutefois une sous-classification pour les problèmes en 2D tenant compte de la complexité des formes traitées puis nous introduirons une classification suivant la fonction de but et enfin une synthèse sous forme de tableau.

Il est à noter que les méthodes de résolution sont de deux types : méthodes exactes et heuristiques.

Les méthodes exactes tiennent de la programmation linéaire, du "branch and bound" et de la programmation dynamique.

Les heuristiques se subdivisent en trois catégories :

- La recherche en espace d'états où l'on associe des noeuds aux solutions partielles ; la recherche consiste alors en la détermination d'un chemin d'un noeud initial à un noeud solution.

- La réduction de problème, on en a vu un exemple avec la réduction exhaustive répétitive. Une autre approche consiste à relaxer une ou plusieurs contraintes, à résoudre le nouveau problème puis à reconstituer une solution réalisable à partir de la solution trouvée.

- L'échantillonnage, un ensemble de solutions réalisables est généré (aléatoirement) et la solution retenue sera celle qui minimise l'objectif.

2.3.1. Problèmes unidimensionnels

La première méthode, nous l'avons vue, est celle de la génération de colonnes proposée par Gilmore et Gomory [Gilmore 61][Gilmore 63]. Elle est de type exact et ramène le problème de découpe à une série de problèmes de sac-à-dos.

Pour résoudre des problèmes de découpe de papier, Haessler [Haessler 75] utilise une heuristique du type réduction exhaustive répétitive. Deux estimateurs - le nombre de bobines requises pour satisfaire la demande restante et le nombre moyen de bobineaux qui doivent

provenir de chaque bobine - lui permettent de déterminer des bornes auxquelles doivent satisfaire les patrons.

La matrice A_p ne contient alors qu'un nombre limité de colonnes sur lesquelles un calcul du coût est effectué afin de n'en retenir qu'une seule (donc un seul patron). Ce patron est appliqué jusqu'à ce qu'un surplus soit enregistré, les bornes sont alors recalculées, un nouveau patron est retenu et appliqué. La matrice A_p est donc construite colonne par colonne. Dans le cas où l'ensemble des patrons candidats est vide les bornes sont relaxées.

Coverdale [Coverdale 76] a repris la méthode d'Haessler en augmentant le nombre de bornes ce qui permet un choix plus sélectif des patrons et diminue le risque d'opter pour un mauvais patron. Ces nouvelles bornes ont permis une diminution des pertes de 13 % par rapport à Haessler.

Le fonctionnement des deux méthodes précédentes est exprimé par l'algorithme suivant:

(1) Evaluation des estimateurs pour les pièces restant à produire.
(2) Calcul des bornes à partir des estimateurs.
(3) Recherche de l'ensemble des patrons candidats.
(4) Si l'ensemble des patrons candidats est vide,
Alors relaxer les bornes.
Aller en (3).
(5) Retenir le patron à coût minimal.
(6)Appliquer le patron jusqu'à satisfaction de l'une au moins des commandes.
(7) Si les commandes ne sont pas toutes satisfaites
Alors Aller en (1).
(8) Fin.

La méthode proposée par Tilanus et Gerhardt [Tilanus 76] comprend deux étapes. Dans la première, une heuristique du type réduction exhaustive est utilisée : à chaque pièce non encore produite une valeur (fonction de la priorité, de l'état d'avancement du lot) est associée. Ces valeurs permettent de fixer la priorité de production de certaines pièces et donc de déterminer les patrons à appliquer.

Lorsque le problème est suffisamment réduit, la programmation dynamique est utilisée pour résoudre le problème de sac-à-dos restant.

En prenant en compte des contraintes techniques strictes et en s'imposant un taux de chute maximal, Costa [Costa 84] a réduit considérablement l'aspect combinatoire d'un problème de découpe de panneaux de bois. De plus, en remarquant que le temps de réglage des scies sur les machines est important, il a fixé à 3 le nombre maximum de pièces à couper sur un patron. Ceci lui permet d'écrire ses variables sous forme d'une somme de variables binaires puis d'utiliser une procédure arborescente par séparation et évaluation séquentielle.

2.3.2. Problèmes unidimensionnels et demi

Ce sont des cas particuliers du problème de découpe bidimensionnel où le support a une dimension fixe, l'optimisation ne concernant alors que la dimension libre.

Les études pratiques sont plus rares et portent surtout sur des heuristiques du problème bidimensionnel d'empilement [Wang 83].

Un problème caractéristique est celui du placement de pièces rectangulaires dans une bande de longueur infinie traité par Chauny [Chauny 00][Savard 87]. Deux types de pièces sont répertoriés: les pièces pivotables à 90° et les pièces non pivotables. Un patron est défini comme une combinaison de pièces dont la somme des largeurs n'excède pas celle de la bande. L'heuristique procède en deux étapes :

(1) le stratège sélectionne une liste de patrons afin de satisfaire la commande, en résolvant un programme linéaire (programme initial relaxé).

(2) le tacticien tente de placer au mieux les patrons obtenus en (1) en utilisant un algorithme récursif basé sur la résolution d'un problème de sac-à-dos.

2.3.3. Problèmes bidimensionnels

Un sous-classement des méthodes est effectué en se basant sur la complexité des formes et les techniques de découpe utilisées. Les différentes classes retenues sont représentées ci-dessous (*cf. figure 2.2*).

2.3.3.1. Méthodes pour formes rectangulaires

Ces méthodes constituent une grande part des publications et découlent de méthodes d'optimisation linéaire [Gilmore 65][Chambers 76] et, plus souvent, d'heuristiques suivies de méthodes de programmation dynamique [Adamoviwicz 72][Adamoviwicz 76][Hahn 68][Christofides 77][Benhamammouch 79][Madsen 80][Albano 80].

On distingue deux types de découpe : la découpe guillotine dans laquelle une coupe est nécessairement faite d'un bout à l'autre de la pièce d'origine, et la découpe non guillotine ou orthogonale réalisable uniquement grâce aux nouveaux procédés de découpe.

Gilmore et Gomory [Gilmore 65] emploient la même technique de génération de colonnes utilisée dans le cas unidimensionnel. Le problème est ici traité en deux étapes :

(1) Trouver pour chaque largeur de bande le meilleur arrangement parmi les pièces restant à placer (premier problème de sac-à-dos).

(2) Placer au mieux ces largeurs compte tenu de leurs valeurs optimales trouvées en (1).

- **Découpe guillotine**

Selon Herz [Hertz 72] la solution optimale doit satisfaire à la propriété suivante : ou bien la plaque originale est elle-même une pièce demandée ou bien elle est coupée en deux rectangles de manière optimale (récursivité). L'algorithme consiste à générer toutes les coupes initiales réalisables et retenir celle maximisant un critère relatif au nombre total des deux pièces produites. Cette méthode s'est avérée plus rapide que celle proposée par Gilmore et Gomory.

Un problème de découpe en deux stades dans une entreprise de verre caractérisée par une faible demande, donc un temps de calcul court, a été abordé par Madsen [Madsen 80]. L'heuristique utilise un double problème de sac-à-dos : le premier formant des sections à partir des pièces, le second assemblant ces sections dans la plaque.

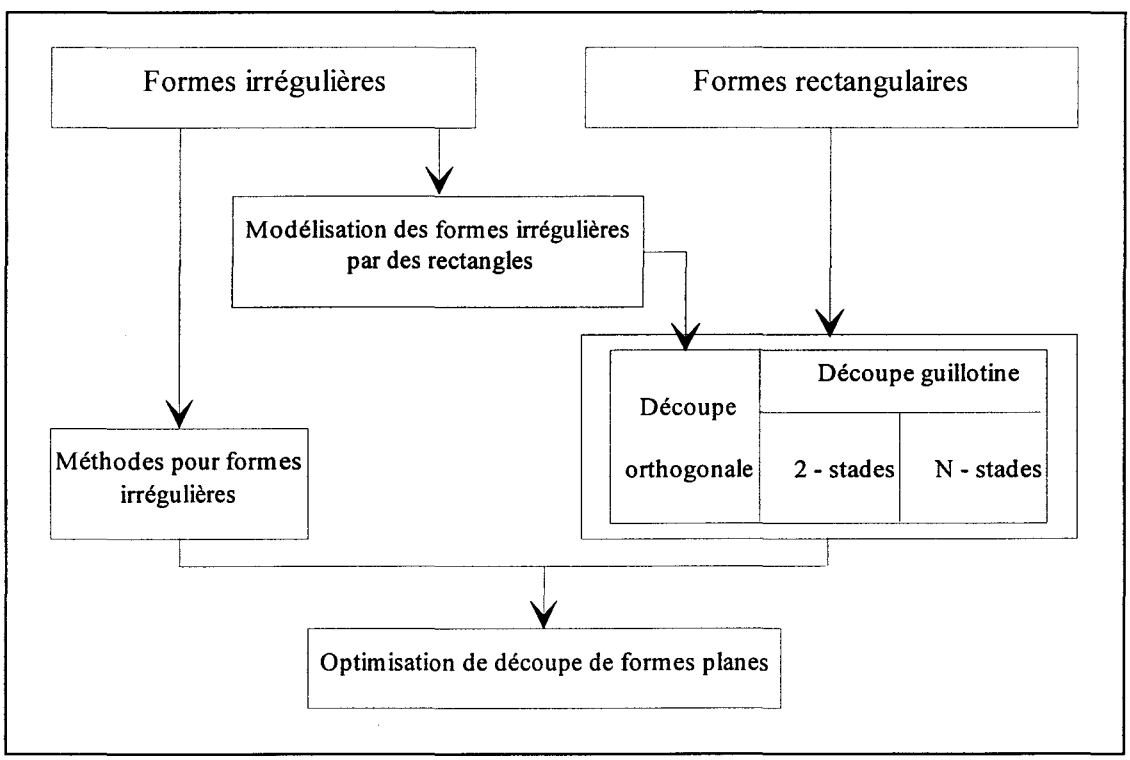

Figure 2.2: Classement des méthodes.

Vidal et Denis [Vidal 89] ont une approche par graphe des états du système et utilisent deux heuristiques de type réduction de but. Le fonctionnement de l'algorithme est donné pour deux types de pièces seulement pour cause de représentation (*cf. figure 2.3*).

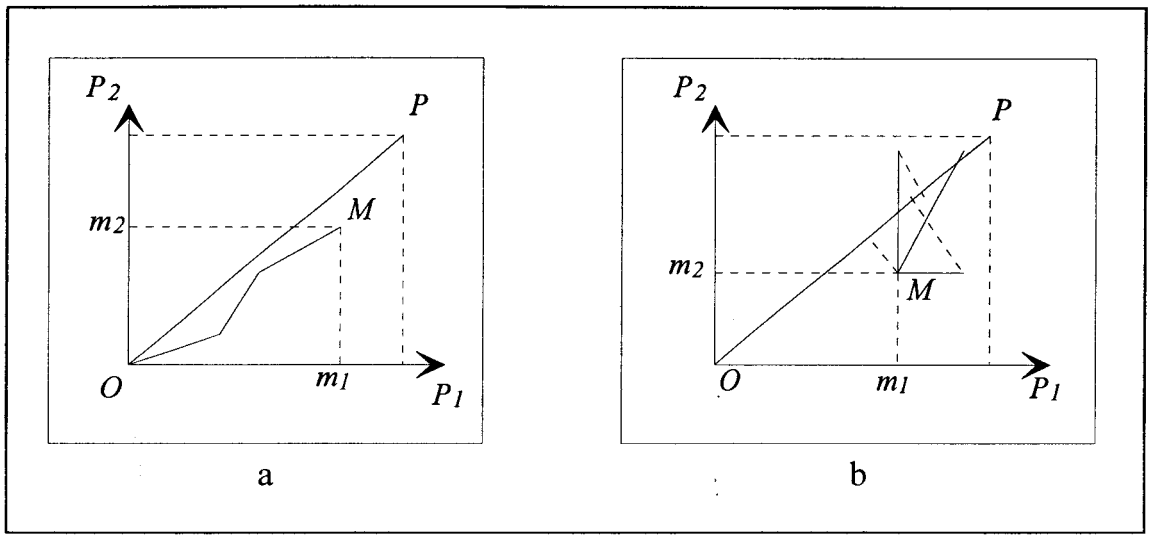

Figure 2.3: Méthode par réduction de but.

Pour le choix du prochain vecteur de commande (patron) deux heuristiques sont proposées :

(1)H1 : Sélectionner le vecteur dont la projection sur MP est la plus grande.
(2)H2 : Construire un sous tableau de placements acceptables.
Sélectionner le meilleur patron.
Conserver le même déplacement tant que M reste dans le rectangle de diagonale OP.

Des travaux plus récents ont abordé la découpe guillotine sous un aspect plus intelligence artificielle en produisant ProSylvIA [Legeard 90]. ProSylvIA ne recherche pas l'optimum mais fournit la première solution acceptable. Il est composé de trois modules principaux :

- une interface Homme-Machine,

- un module de calcul d'optimisation de découpe constitué de six heuristiques de choix de pièces,

- un module historique qui va enrichir la base de connaissance du programme de toutes les découpes qui ont été jugées bonnes par l'expert.

Pour résoudre des problèmes d'occupation d'espace dans des domaines aussi divers que la mécanique, le bâtiment ou l'électronique, Clerc et Sadgal [Clerc 87] ont aussi une approche système expert. L'utilisation d'un prédicat unique leur permet d'exprimer toutes les contraintes d'une manière unifiée. La résolution du problème de placement se fait ensuite de la façon suivante :

(1) Construction d'une liste des modules en prenant en compte les différents critères précisés par l'utilisateur.

(2) Traduction des contraintes en sous-ensembles de relations pour chaque module.

(3) Détermination de la zone de satisfaction des contraintes.

(4) Recherche d'une place dans la zone établie en (3). S'il y a échec, on remet en cause le dernier module placé.

- **Découpe orthogonale**

Adamowicz et Albano [Adamowicz 76] traitent d'un cas où toutes les plaques ont même dimension et utilisent une heuristique de type réduction. Des bandes horizontales homogènes (même largeur, même longueur) sont d'abord générées et doivent satisfaire à des bornes maximales de pertes. Ces bandes sont ensuite allouées sur la plaque d'une manière optimale en utilisant la programmation dynamique. La liste des commandes est alors réduite et les deux étapes précédentes répétées jusqu'à épuisement du carnet de commande.

Une heuristique du type "first-fit decreasing" est présentée par Israni et Sanders [Israni 82]. La liste des pièces à produire est ordonnée de manière décroissante selon la longueur. Les pièces sont ensuite placées successivement suivant la longueur et la largeur de la plaque en partant du coin inférieur gauche. A chaque itération, si la longueur restante est supérieure à celle de l'une des pièces, on place la première - qui soit acceptable - rencontrée dans la liste.

2.3.3.2. Modélisation des formes irrégulières par des rectangles

Ces méthodes sont apparues pour pallier la difficulté de travailler directement avec des formes complexes. En effet, modéliser une forme quelconque par son rectangle exinscrit est assez simple et permet d'appliquer les méthodes pour formes rectangulaires. Mais cette solution est, en règle générale, inacceptable en raison des pertes qu'engendrent une telle modélisation.

Une bonne solution est proposée par Haims et Freeman [Haims 70]. Elle consiste en la construction de modules rectangulaires contenant un nombre limité de formes complexes (1 à 8) placées de manière à occuper un minimum de surface (réduction du problème). Une méthode quelconque peut alors résoudre le problème du placement de ces modules (cette idée de modules rectangulaires est aussi utilisée par Adamowicz [Adamowicz 72]).

D'une autre manière, Diverrez [Diverrez 73] et Moreau [Moreau 73] proposent d'établir une notion de voisinage entre formes complexes qui permettra de classer ces dernières. A chaque paire de surfaces (représentées par leurs rectangles circonscrits) sera associée un indice de voisinage qui facilitera considérablement la recherche. L'indice de voisinage est déterminé de la manière suivante [Diverrez 73]:

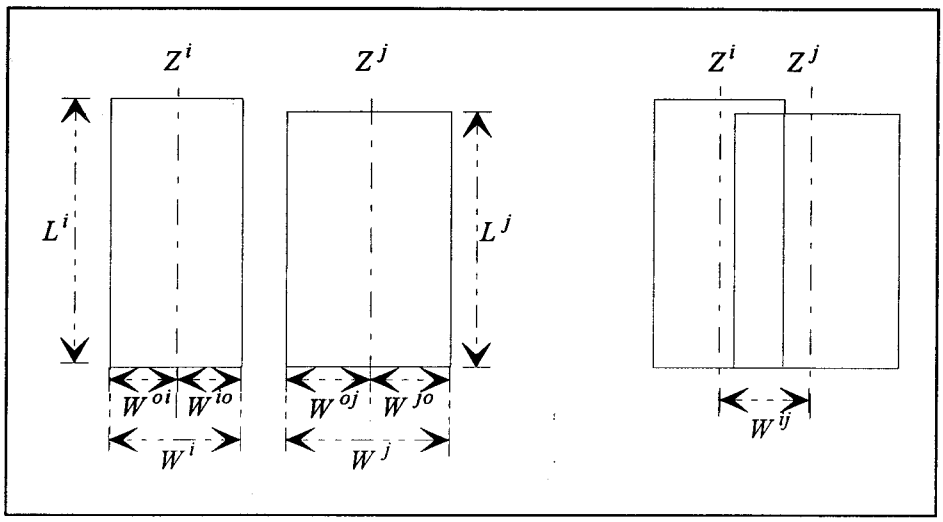

Figure 2.4: Indice de voisinage.

Soient F^i et F^j deux formes représentées par leurs rectangles circonscrits de dimensions respectives (W^i, L^i) et (W^j, L^j). Soit Z^i (resp Z^j) un axe de référence pour la surface F^i (resp F^j) défini par W^{io} ou W^{oi} tel que (fig 4) :

$$W^{oi} = E(W^i/2) \qquad \text{et} \qquad W^{io} = W^i - E(W^i/2)$$

et soit W^{ij} une grandeur caractérisant la distance entre les axes Z^i et Z^j des surfaces lorsque celles-ci sont juste en contact.

L'indice de voisinage entre deux formes F^i et F^j est alors définit comme étant:

$$Ind(i,j) = W^{io} + W^{oj} - W^{ij}.$$

W^{ij} représente le gain lorsque les deux formes sont placées en contact, l'une à côté de l'autre et dans l'ordre indiqué sur la figure 2.4 (W^{ij} est différent de W^{ji}).

L'indice de voisinage permet de dresser une liste hiérarchique des placements deux à deux des formes à placer. Malheureusement, il ne permet de prendre en compte la différence entre les longueurs des formes. Il reste très intéressant pour le placement de formes de dimensions semblables sur un support en bande [Wang 83].

2.3.4. Les fonctions de but

Appelées aussi fonctions objectif, elles formalisent le problème du point de vue de l'objectif à atteindre. Elles quantifient chaque configuration du système, permettent de comparer deux états, d'orienter la recherche des solutions ou de décider de la recevabilité de la situation finale.

Il n'y a pas, malheureusement, unicité de la fonction de but pour un problème donné. Il y a par exemple, dans le cas du placement de formes, au moins deux façons de considérer

l'évaluation de la qualité d'une solution : la surface des pertes ou la longueur de la matière utilisée. Les deux indices sont minimaux si la solution est optimale, pourtant l'utilisation de l'un ou de l'autre ne permet pas d'obtenir la même convergence dans un même algorithme. Dans le meilleur des cas, si la résolution est exacte et donne une solution optimale, le choix de la fonction objectif n'influe que sur la vitesse de convergence vers l'optimal. Mais bien souvent, son impact va même jusqu'à modifier la qualité du placement lorsqu'il est élaboré par une heuristique. Il convient donc de faire une distinction entre les fonctions de but destinées aux algorithmes exacts et celles utilisées dans les heuristiques.

Pensant à juste titre qu'il est illusoire d'atteindre la solution optimale dans les conditions industrielles les plus courantes, [Delaporte 89] a montré qu'il est prometteur en terme de temps, d'analyser les fonctions de but du placement selon trois rôles différents qu'il assimile à trois heuristiques : l'heuristique d'imbrication, d'évaluation, ou de construction. La première permet de sélectionner les formes aux imbrications prometteuses, la deuxième évalue l'association de deux formes, la troisième guide l'évolution de l'amalgame. Il a montré ainsi l'intérêt de considérer la construction d'un placement en se plaçant à des niveaux de résolution différents.

Il est vrai que l'idée de percevoir le problème à deux niveaux global et local, est proche de l'attitude du "placeur" humain. Celui-ci traite globalement la géométrie du placement et affine ensuite les associations.

Une autre façon de diviser la difficulté de l'évaluation d'un placement consiste à supprimer des dimensions spatiales. On se pose alors les questions suivantes : Doit-on exprimer la mesure en terme de surfaces ou de longueur? Doit-on considérer qu'un placement-plan se doit d'être quantifié en terme de chute surfacique ou de surface occupée; ou peut-on se dire que compte tenu de la contrainte de largeur, la minimisation de la longueur entraîne fatalement le tassement des formes qui occuperont donc moins de surface ? Dans le premier cas, la fonction comptabilise un espace à deux dimensions, dans l'autre elle représente une distance unidimensionnelle.

Dans ce qui précède, la contrainte de largeur participe implicitement à la construction du placement. Il arrive que la contrainte intervienne explicitement dans la fonction-objectif. On a constaté au niveau de la contrainte temporelle, qu'elle pouvait s'exprimer en fonction du but. Pourquoi la fonction de but n'inclurait-elle pas la contrainte ? Cette idée a déjà germé chez bien des auteurs montrant des exemples d'algorithme d'optimisation avec contraintes. Dans ce cas, l'expression de la contrainte dans la fonction-objectif apparaît comme une pénalisation qu'il faut réduire au minimum. Elle est souvent pondérée par un coefficient qui affecte une importance relative par rapport à d'autres termes exprimant l'objectif à atteindre.

Enfin l'idée d'inclure plusieurs grandeurs dans une même fonction semble faire école dans diverses heuristiques. C'est aussi le cas, par exemple, lorsqu'il s'agit de relativiser une

grandeur ou une variation de grandeur par rapport à une autre; on parle alors de rapport, de rendement ou de grandeur relative. Ce genre de fonction guide souvent l'évolution d'un placement par comparaison objective, c'est-à-dire indépendamment de l'amplitude de l'une de ces grandeurs. L'exemple le plus courant est le rendement surfacique: $\frac{\textit{surface utile}}{\textit{surface matière consommée}}$ faisant évoluer le placement vers une forme naturelle rectangulaire. L'inconvénient de ce genre de fonction est qu'elle représente une grandeur qualifiée d'intensive et les lois mathématiques (comme l'addition) ne sont plus forcément internes dans l'ensemble de définition de ces fonctions. Par opposition, on dit des fonctions de coût absolu (comme la surface d'une chute) qu'elles sont extensives.

2.3.4.1. Définitions des grandeurs d'évaluation

Au lieu de proposer proposer une classification des différentes grandeurs en fonction d'un ou plusieurs critères, on préfère une énumération ordonnée selon un simple souci de clarté graphique.

• Grandeurs relatives au placement

Elles concernent particulièrement les surfaces ou régions engendrées par un placement d'un ensemble de formes. Ces grandeurs sont présentées ci-dessous.

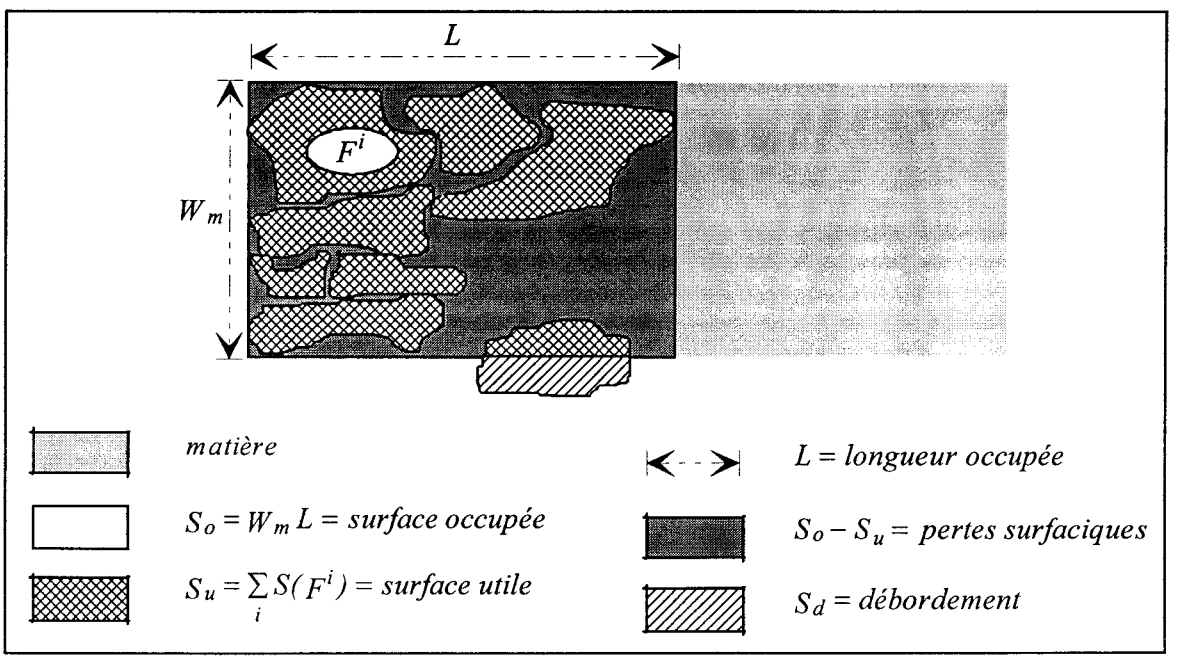

Figure 2.5: Grandeurs relatives au placement.

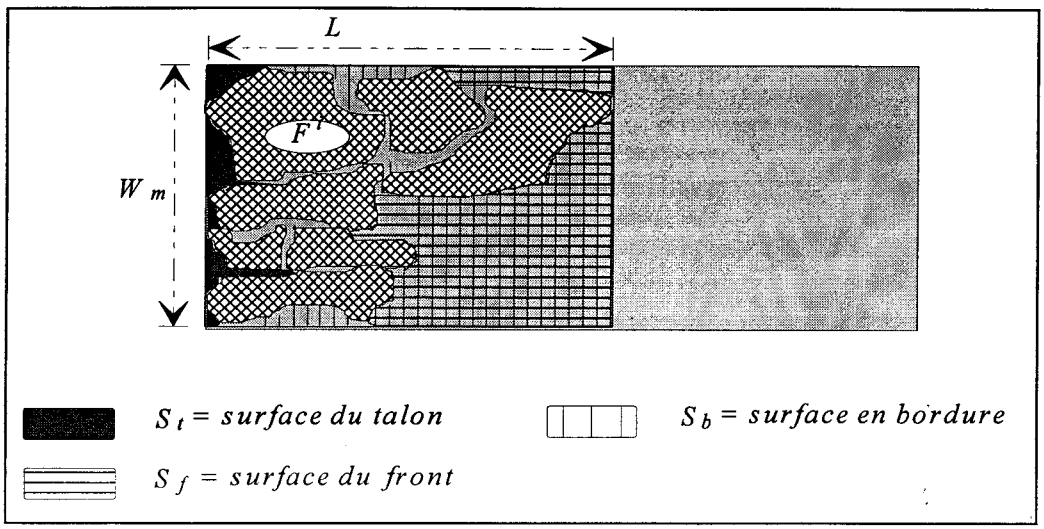

Figure 2.6: placement et surfaces.

- **Grandeurs relatives à une association de deux formes**

Les grandeurs relatives à une association concernent les paramètres caractéristiques d'une imbrication de deux formes.

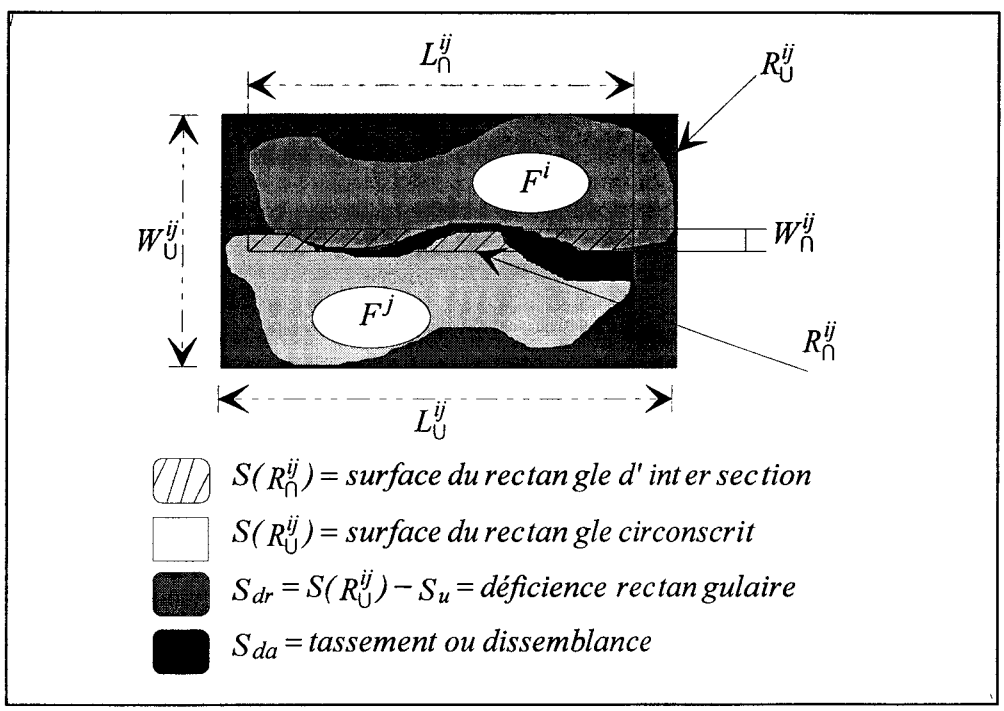

Figure 2.7: Grandeurs relatives à une imbrication.

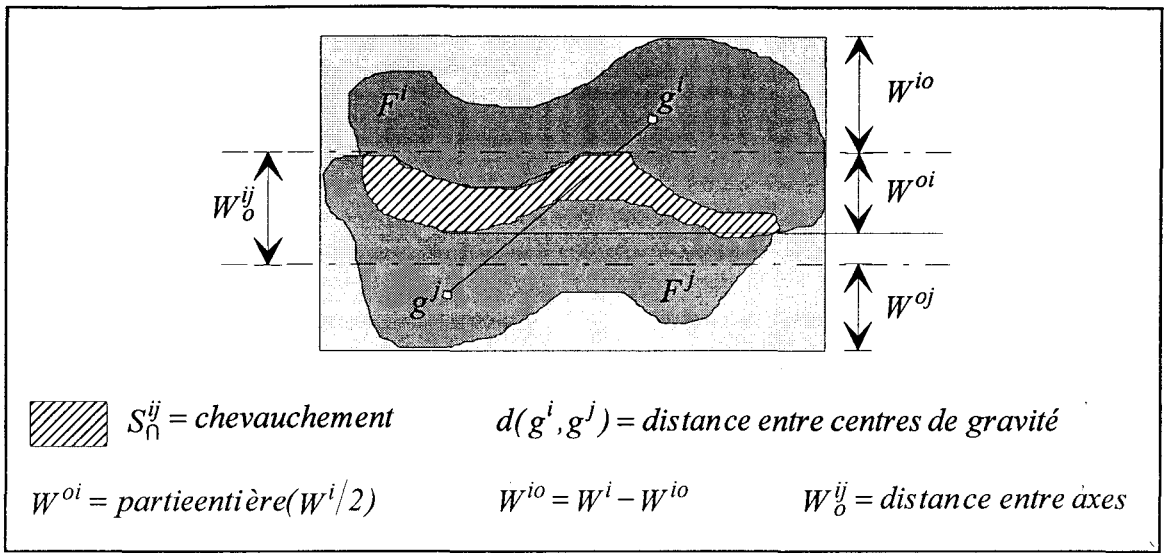

Figure 2.8: Imbrication et tassement.

2.3.4.2. Classification des fonctions de but

On a rassemblé dans les tableaux suivants, l'essentiel des fonctions objectifs recensées dans les différents travaux qui traitent des problèmes de placement et de découpe. Elles utilisent les grandeurs définies ci-dessus. Le premier tableau rassemble les grandeurs simples, participant seules ou avec d'autres grandeurs simples à la mesure de l'efficience de l'algorithme de placement. Le deuxième tableau énumère les fonctions composées conjuguant plusieurs grandeurs caractéristiques.

Pour chacune des fonctions énoncées, nous préciserons pour en faciliter l'analyse, les observations personnelles suivantes:

- *la fonction d'optimisation (min / max)*
- *la méthode qu'il est possible d'utiliser compte tenu de l'objectif de minimisation du coût matière (exact / heuristique)*
- *Le champ d'utilisation de la grandeur (global / local),*
- *la dimension traitée (surface / distance),*
- *la relation avec une contrainte (sans / implicite / explicite),*
- *la nature de la fonction (extensive / intensive),*
- *la référence bibliographique éventuelle où elle est citée pour un but semblable,*
- *l'effet local dans le cas d'une sélection itérative des formes par ce critère,*
- *l'effet global en supposant utiliser un algorithme exact.*

Tous les critères présentés dans cette synthèse convergent vers un même objectif de minimisation des chutes. En réalité, le choix doit s'effectuer afin que la fonction objectif soit en adéquation avec l'espace des configurations ainsi qu'avec l'algorithme d'optimisation utilisé. Ces choix seront effectués au cours des discussions ultérieures.

Grandeurs simples	*critère (min/ max)*	*exact / heuristique*	*global / local*	*surface/ distance*	*contrainte (sans/ implicite/ explicite)*	*extensive/ intensive*	*ref. bibliographique*	*effet local*	*effet global*
S_o (surface occupée)	min	E et H	g et l	S	I (laize)	Ex		place les plus petites formes en premier	occupation optimale de la matière
S_u (surface utile)	max	E	g et l	S	I (rectangle matière)	Ex	[Haims 70], [Delaporte 89]	place les plus grandes pièces en premier	occupation optimale de la matière
$S_o - S_u$ (pertes)	min	E et H	g et l	S	sans	Ex	[Albano 80a]	place les plus grandes pièces en premier	occupation optimale de la matière
L (longueur occupée)	min	E et H	g et l	Di	I (laize)	Ex	[Albano 80a]	place les pièces les plus courtes en premier	occupation optimale de la matière
S_d (débordement)	min	H	g et l	S	E	Ex	[Prempti 83]	permet simplement de satisfaire la contrainte d'inclusion	
S_f (front)	min	H	g et l	S	I (laize)	Ex		aligne les formes à droite	rend le front rectiligne
S_t (talon)	min	H	g et l	S	I (laize)	Ex	[Albano 80a]	aligne les formes à gauche	rend le talon rectiligne
S_b (bordure)	min	H	g et l	S	I (laize)	Ex	[Delaporte 89] [Moreau 73]	associe les formes plates	extérieur plat
$S(R_U^{ij})$ rectangle circonscrit	min	H	g et l	S	I (laize)	Ex	[Adamowicz 76], [Adamowicz 71], [Albano 77]	favorise les bonnes imbrications	directions privilégiées

Grandeurs simples	*critère (min/ max)*	*exact / heuristique*	*global / local*	*surface/ distance*	*contrainte (sans/ implicite/ explicite)*	*extensive/ intensive*	*ref. bibliographique*	*effet local*	*effet global*
S_{dr} déficience rectangulaire	min	H	g et l	S	I (laize)	Ex		favorise la construction de module rectangulaire (remplissage des concavités, assemblages homogènes, faible dépassement)	contour extérieur rectangulaire
S_{da} dissemblance d'appariement	min	H	l	S	I (disjonction)	Ex	[Delaporte 89]	favorise l'appariement des petites pièces avec les grandes	
$S(R_{\cap}^{ij})$ intersection des rectangles circonscrits	min	H	l	S	I (formes i et j non rectangulaires)	Ex	[Delaporte 89]	favorise l'imbrication, indéterminisme si absence de recouvrement	
$W_{\cap}^{ij}$ profondeur d'imbrication	max	H	l	D	I (pas de décalage entre i et j)	Ex		favorise l'imbrication. Risques de décalage des deux formes	
$S_{\cap}^{ij}$ surface de chevauchement	min	H	l	S	E	Ex		favorise la validation de la contrainte de disjonction	
W_{g}^{ij} entre axe	min	H	l	D	I (disjonction)	Ex	[Diverrez 73]	favorise l'imbrication risque de décalage	
$d(g^i,g^j)$ dist. entre centres de gravité	min	H	g et l	D	I (disjonction)	Ex	[Delaporte 89], [Dagli 90]	favorise le choix des petites pièces	évolution circulaire

Grandeurs composées	*critère (min/ max)*	*exact / heuris-tique*	*global / local*	*surface/ distance*	*contr ainte (sans / impli cite/ expli cite)*	*extensive/ intensive*	*ref. bibiogra-phique*	*effet local*	*effet global*
S_u/S_o *rendement matière*	max	H	G et L	_	I	In		- Si la pièce déborde du rect. circonscrit courant, alors favorise la sélection des grandes pièces. - Sinon favorise la sélection des petites pièces	forme générale rectangulaire ou formation de bande
$(S_{o^n} + S(F^i))/S_{o^{n+1}}$ *Accroissement relatif de la surface occupée*	max	H	G et L	_	I	In	[Delaporte 89]	favorise les bonnes imbrications dans une direction privilégiée.	évolution vers une construction par bande
$S_u/S(R_{\cup}^{ij})$ *(remplissage rectangle exinscrit)*	max	H	L et G	_	I	In	[Delaporte 89]	favorise les bonnes imbrications indépendamment de la taille des formes	évolution vers une forme générale rectangulaire
$aS(R_{\cup}^{ij}) + b\sum_i\sum_j S(F^i)S(F^j)d(g^i,g^j)$ $c\sum_{i,j} S_{\cap}^{ij}$ $a,b,c \in R^{3+}$ *Pondération (surf. rect. circ., moment de surf, surf. d'inters.)*	min	H	G	_	E	Ex (énergie)	[Dagli 90]		minimise le chevauchement des formes, la surface du rectangle exinscrit et la distance totale entre les centres de gravité

Grandeurs composées	*critère (min/ max)*	*exact / heuris-tique*	*global / local*	*surface/ distance*	*contrainte (sans/ implicite/ explicite)*	*extensive/ intensive*	*ref. bibiogra-phique*	*effet local*	*effet global*
*soit **m** le nombre de formes à placer* $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} S_{\cap}^{ij} + \sum_{i=1}^{m} S_d + a\sum_{i=1}^{m} S(R^i)y_i$ *pondération (surf d'inters., surf. tot. moment de surf)*	min	H	G	_	E	Ex (énergie)	[Prempti 83]		minimise le chevauchement deux à deux, minimise le débordement de chaque forme, favorise le placement des grandes formes à gauche
$(S_o - S_u)_k + a\% \sum_{i \notin placement} S(F^i)$ *pondération (pertes surf. à l'itérat k, estim. pertes = fract. surf. non plac.)*	min	E avec recherche H	G	_	I	Ex	[Albano 80a]		minimise en estimant les chutes futures

Chapitre troisième

Formulation générale du problème du placement optimal

3.1. Introduction

Le problème dit de placement de pièces de formes quelconques sur une surface définie est constitué par la représentation mathématique du plan de coupe donnant la position de chaque pièce à produire en fonction des contraintes dues d'une part à l'outil de production et d'autre part au matériau utilisé.

Si les contraintes de positionnement d'une pièce de tissu pour prendre en compte le droit fil concernent tous les tissus, celles de positionnements relatifs et absolus n'apparaissent que lors de découpe de tissus à motifs où la recherche d'un effet de dessins permet d'augmenter la valeur ajoutée de l'article. Dés lors, le placement sur tissus unis que nous désignons par PPB ne prend pas en compte les motifs, aussi la surface utile dont on doit optimiser l'utilisation correspond à la surface totale du matériau. Par contre, lors de la découpe de tissus à motifs, il convient de prendre en compte dans le PPB des contraintes de positionnements. On obtient alors le placement PPG. Dans ce cas, la surface utile dépend de la période de répétition des motifs.

PPB ou **Problème de Placement de Base** est équivalent au **Problème de Placement Général**, PPG, dans lequel les contraintes de positionnement sont toujours satisfaites. PPB est un cas particulier de PPG, la période de répétition des motifs étant considérée infiniment petite.

Au chapitre précédent, nous avons donné une formulation générale basée sur les groupes. Dans cette formulation rappelée plus loin, D représente une distance, $\cup$ et $\cap$ deux opérateurs sur les ensembles l'union et l'intersection, I_v une isométrie directe et α l'angle de rotation.

La contrainte de positionnement absolu définit la position d'un modèle en fonction d'un point du motif du tissu. C'est donc une contrainte que l'on peut qualifier de statique, car elle est connue à l'avance. La contrainte de positionnement relatif est formulée par l'existence d'un lien entre deux ou plusieurs modèles. C'est donc une contrainte dynamique qui devient statique dés que l'une des formes liées par le positionnement relatif est placée.

Dans l'étude du PPB, la bibliographie concernant le placement de formes irrégulières est très pauvre et dans de nombreux cas, la formulation est donnée sous forme d'un programme linéaire en nombres entiers comme pour le placement de rectangles auquel est consacré un nombre considérable d'articles.

$$\text{PPB}\begin{cases} Min \quad D = f(\bigcup_v I_v(\omega^j)) & 4.1 \\ \text{Sous les contraintes} & \\ \text{–de confinement} & \\ \bigcup_v I_v(\omega^j) \subset M & 4.2 \\ \text{–de disjonction} & \\ \bigcap_v I_v(\omega^j) = \varnothing & 4.3 \\ \text{–sur le groupe des isométries} & \\ I_v \subset I_s^+ & 4.4 \\ \text{–de droit fil} & \\ \alpha \in \alpha_{ad} & 4.5 \end{cases}$$

En ajoutant les contraintes de positionnements on obtient PPG:

$$\text{PPG}\begin{cases} \text{PPB} & \\ \text{avec les contraintes supplémentaires} & \\ \text{- de positionnements absolus} & \\ I_v^c(\omega^j) \Rightarrow \exists \pi_i \in I_v^c(\omega^j) \quad : \quad C(\pi_i) & 4.6 \\ \text{- de positionnements relatifs} & \\ L(\pi_i, \pi_j), \pi_i \in \omega^k, \pi_j \in \omega^l, l \neq k \quad C(\pi_i) \Leftrightarrow C(\pi_j) & 4.7 \end{cases}$$

Si le précédent chapitre s'attache à donner un aperçu de ces différents problèmes ainsi que des différentes résolutions utilisées, ce chapitre propose une formulation originale exacte, c'est-à-dire sans approximation des formes ni réduction du problème et un algorithme pour la résolution. L'introduction d'une nouvelle représentation exacte des modèles [Roussel 92] [Roussel 94] permettra une nouvelle approche ainsi que la donnée de nouveaux algorithmes

de placement optimal et d'heuristiques spécialement utilisées pour le placement en temps réel et obtenu par réduction du problème de placement.

3.2. Formulation générale du placement optimal

Avant d'aborder les algorithmes d'optimisation, rappelons les données liées aux placements et modèles.

3.2.1. Le placement

Il convient tout d'abord de définir les caractéristiques d'un placement en continu sur un support en bande.

Le problème consiste à découper N_g pièces ω^i de formes connues dans un matériau présenté sous forme d'une bande de largeur non stationnaire W_m et de longueur L_m très importante (du moins très grande devant celle du placement). La longueur du placement doit industriellement être inférieure à celle du support. Nous rappelons que la demande n'est pas connue à l'avance.

Le problème de la qualité du placement consiste en un placement des N_g pièces tel que la surface utilisée soit minimale. Pour un placement sur un matériau en forme de bande, on doit minimiser la longueur et prendre en compte les caractéristiques de la coupe en continu et utiliser au mieux la largeur tout en favorisant la formation de zones connexes importantes. Dans le choix du critère, on doit tenir compte de tous ces éléments.

L'expression de la solution de la solution du problème de placement est recherchée sous la forme de N_g triplets $(X^i_{r0}, Y^i_{r0}, \alpha^i_{r0})$ où :

a) (X^i_{r0}, Y^i_{r0}) sont les coordonnées cartésiennes d'un point caractéristique de chaque forme. Ces coordonnées sont définies dans le plan matière par rapport à une origine commune au placement et à la coupe.

b) $\alpha^i_{r0} \in [0, 2\pi]$ angle de rotation de l'axe de la forme par rapport à la direction privilégiée du placement. En pratique industrielle l'angle α est très souvent nul ou égal à π (placement en tête-bêche), et il est important de rechercher une solution par rapport à l'origine de la matière et non une position relative des formes.

3.2.2. Les modèles

Dans le problème de placement de formes irrégulières se pose la question essentielle de la représentation des objets à placer. La complexité des formes, la précision et la stratégie de découpe demandent une représentation précise et facile à utiliser. Nous proposons, dans un

premier temps, une représentation des formes par leur contour point par point, puis nous introduisons une nouvelle représentation: les peignes.

3.2.2.1. Représentation des formes.

Chaque modèle noté ω^i possède un contour F^i décrit par N_F^i points π_j^i, $j=1,2,...,$ N_F^i ; chaque point est défini par les deux coordonnées (x_{0j}^i, y_{0j}^i) relatives au repère attaché à la forme F^i comme le montre la *figure 3.1*.

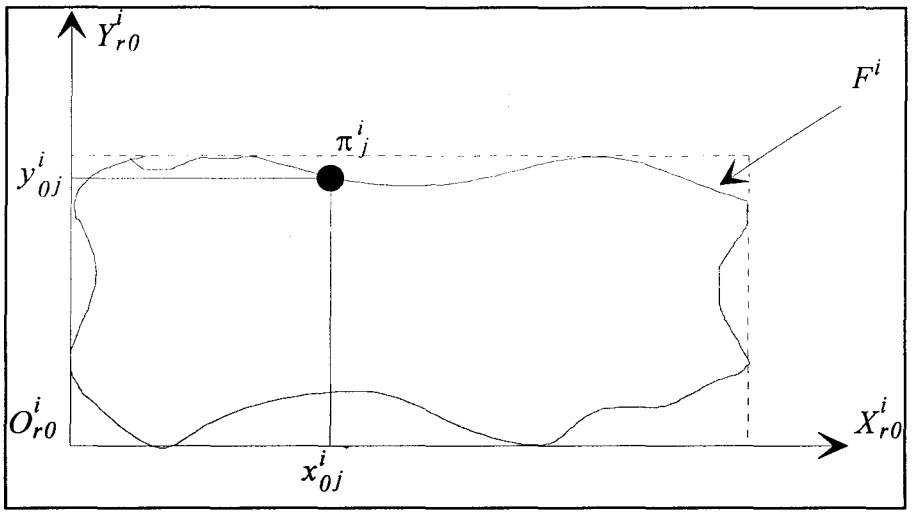

Figure 3.1: Représentation d'une forme.

Supposons que le maillage utilisé pour le codage de la forme soit carré [Chassery 91]. Le maillage carré est en effet le plus utilisé pour la représentation des images car il correspond au codage fourni par la plupart des capteurs d'une part et coïncide exactement avec la structure matricielle d'autre part.

L'axe des abscisses est défini parallèle à la direction du droit fil (direction des fils de chaîne). Il détermine la direction privilégiée du placement de la forme.

Définition 1:

L'ensemble des points d'un contour F^i de ω^i définit un polygone dont le nombre maximal de sommets peut atteindre N_F^i.

Le nombre de côtés d'une telle figure peut être aussi égal au nombre de points. Dans ce cas, la longueur de chaque côté est égale au pas de discrétisation.

Remarque 1:

La discrétisation est liée au capteur intégrant l'information d'intensité lumineuse présente sur une surface. Des éléments relatifs à cette surface sont définis par le pavage. Le codage du pavage ou maillage est le fait d'associer un point à l'intérieur de chacune des tesselles. Ce point (pixel) est généralement le centre de gravité du pavé, [CHASSERY 91] et ses dimensions sont celles du pavé (pas de discrétisation).

Définition 2:

Pour un maillage carré, tout point est caractérisé par ses coordonnées entières (x, y) sur le maillage.

3.2.2.2. Placement d'une forme

Les points composant le contour d'un modèle sont définis par rapport au repère lié à la forme (*cf. figure 3.1*). La position d'une forme est complètement définie par la donnée du triplet $(X^i_{r0}, Y^i_{r0}, \alpha^i_{r0})$, où (X^i_{r0}, Y^i_{r0}) sont les coordonnées d'un point caractéristique de la forme (par exemple le centre du repère relatif O^i_{r0}), et α^i_{r0} l'écart angulaire ou inclinaison de l'axe privilégié de placement par rapport au droit fil symbolisé par l'axe du repère matière.

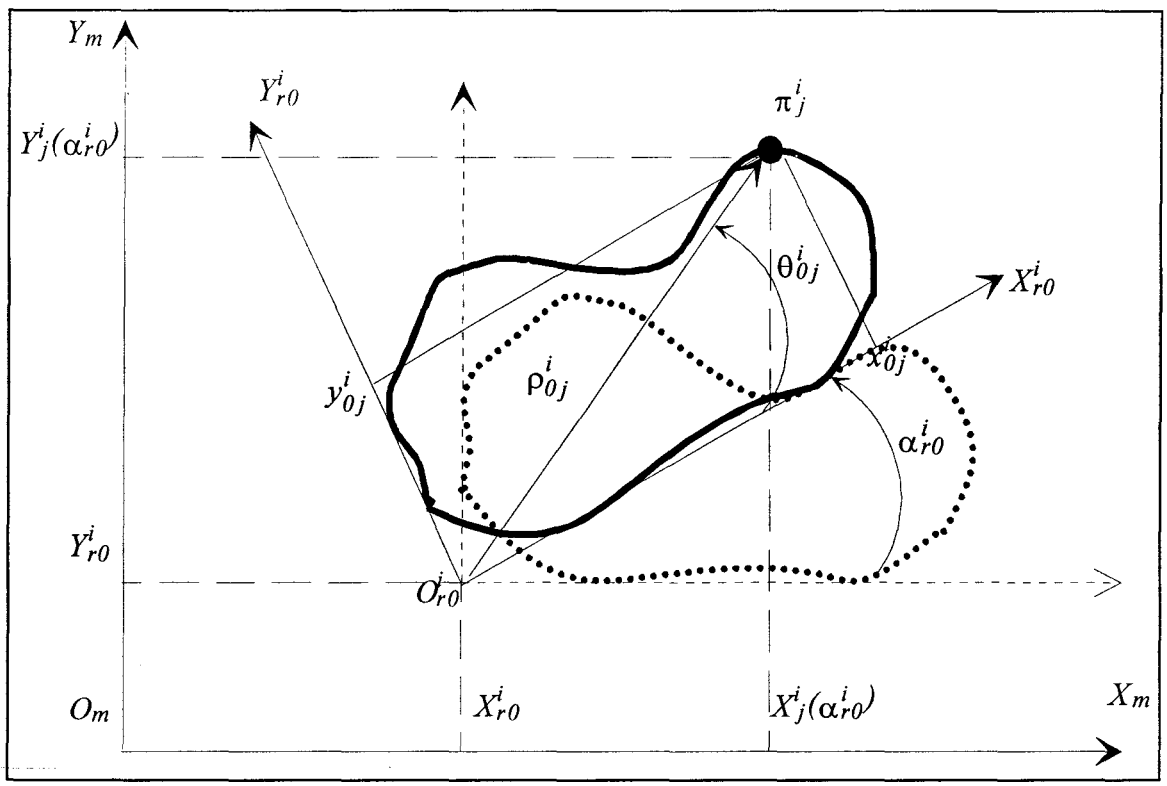

Figure 3.2: Plan matière et position d'une forme.

Proposition 1:

Lorsqu'une forme est placée à une abscisse X^i_{r0}, et une ordonnée Y^i_{r0} avec une inclinaison α^i_{r0}, les points π^i_j du contour F^i forment le sous-ensemble de points:

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi^i_j(X^i_j(\alpha^i_{r0}), Y^i_j(\alpha^i_{r0})) : X^i_j(\alpha^i_{r0}) = X^i_{r0} + \rho^i_{0j} cos(\alpha^i_{r0} + \theta^i_{0j}) \\ \qquad \text{et} \quad Y^i_j(\alpha^i_{r0}) = Y^i_{r0} + \rho^i_{0j} sin(\alpha^i_{r0} + \theta^i_{0j}) \end{array} \right\}$$

avec:

$$\rho_{0j}^{i} = \sqrt{(x_{0j}^{i})^2 + (y_{0j}^{i})^2} \qquad \text{et} \qquad \theta_{0j}^{i} = \pi_j^i \widehat{O_{r0}^{i} X_{r0}^{i}}$$

Un point $\mu(x,y)$ du plan matière est tel que:

$$0 \leq x \leq L_m$$
$$0 \leq y \leq W_m$$

Proposition 2:

Les coordonnées (X_{r0}^{i}, Y_{r0}^{i}) du centre O_{r0}^{i} du repère propre à la forme dans le repère matière $O_m X_m Y_m$ sont telles que:

$$0 \leq X_{r0}^{i} < L_m - L^i$$
$$0 \leq Y_{r0}^{i} < W_m - W^i$$

Avec L^i et W^i dimensions maximales de F^i (*voir paragraphe suivant*)

Le placement des N_g formes est donc un élément de l'espace $(R^2 \times [0,2\pi[)^{N_g}$.

3.2.3. Expression des contraintes

Nous avons vu que la qualité et le type de placement dépendent des contraintes définies au chapitre précédent. Comment exprimer et satisfaire ces contraintes? Pour simplifier le problème, nous considérons, dans un premier temps, uniquement les contraintes agissant sur le placement de base.

3.2.3.1. Contrainte de production

Nous considérons que chaque modèle ω^i de contour F^i est produit en N_ω^i exemplaires. Le nombre de modèles étant N_ω, le nombre de formes à placer est alors:

$$N_g = \sum_{i=1}^{N_\omega} N_\omega^i$$

3.2.3.2. Contrainte sur les transformations

La direction privilégiée de placement dépend de la matière. Dans un premier temps, pour garder le caractère général du placement, on utilise des placements en translation et rotation, puisque les propriétés physiques de la matière sont identiques dans toutes les directions. Nous verrons plus loin que lorsqu'une direction privilégiée est définie, il n'est pas toujours profitable d'utiliser des valeurs d'angle de rotation différentes d'un multiple de π.

3.2.3.3. Contrainte matière ou de confinement

La position d'une forme de contour F^i est donnée par les coordonnées (X^i_{r0}, Y^i_{r0}) de son repère relatif et α^i_{r0} l'écart angulaire de $O^i_{r0}X^i_{r0}$ par rapport à $O_m X_m$. Pour exprimer l'appartenance d'un point du plan matière à l'image de F^i, les coordonnées de son origine doivent vérifier les deux expressions suivantes, si $\alpha^i_{r0} = 0$:

$$0 \leq X^i_{r0} < L_m - L^i$$
$$0 \leq Y^i_{r0} < W_m - W^i$$

Lorsque $\alpha^i_{r0} \neq 0$, ces deux expressions ne suffisent plus à exprimer l'appartenance de l'ensemble des points de F^i au plan. Les coordonnées d'un point π^i_j de F^i en fonction de α, dans le repère matière sont:

$$X^i_j(\alpha^i_{r0}) = X^i_{r0} + \rho^i_{0j} cos(\alpha^i_{r0} + \theta^i_{0j})$$
$$Y^i_j(\alpha^i_{r0}) = Y^i_{r0} + \rho^i_{0j} sin(\alpha^i_{r0} + \theta^i_{0j})$$

avec:

$$\rho^i_{0j} = \sqrt{(x^i_{0j})^2 + (y^i_{0j})^2} \qquad \text{et} \qquad \theta^i_{0j} = arctg \frac{x^i_{0j}}{y^i_{0j}}$$

La contrainte de confinement peut s'exprimer alors :

i) en x, par:

$$0 \leq X^i_j(\alpha^i_{r0}) \leq L_m - \max_j(\rho^i_{0j} cos(\alpha^i_{r0} + \theta^i_{0j})) - X^i_{r0}$$

ii) en y, par:

$$0 \leq Y^i_j(\alpha^i_{r0}) \leq W_m - \max_j(\rho^i_{0j} sin(\alpha^i_{r0} + \theta^i_{0j})) - Y^i_{r0}$$

$$\forall j,\ j = 1,2,\ldots,N^i_F \qquad \text{et} \qquad \forall \alpha^i_{r0} \in [0, 2\pi[$$

Remarque 2:

Le centre O^i_{r0} du repère relatif à F^i n'appartient pas forcément à la forme définie par F^i. Il peut donc arriver que l'abscisse X^i_{r0} ou l'ordonnée Y^i_{r0} soient négatives.

3.2.3.4. Contrainte de disjonction

Définition 3

On appelle extension en x d'une forme définie par son contour F^i, l'expression:

$$E_x^i(\alpha_{r0}^i) = \max_j(\rho_{0_j}^i \cos(\alpha_{r0}^i + \theta_{0j}^i)) - \min_j(\rho_{0_j}^i \cos(\alpha_{r0}^i + \theta_{0j}^i))$$

avec $E_x^i(\alpha_{r0}^i) > 0$ si la forme n'est pas dégénérée.

Définition 4:

On définit de la même manière l'extension en Y par l'expression:

$$E_y^i(\alpha_{r0}^i) = \max_j(\rho_{0_j}^i \sin(\alpha_{r0}^i + \theta_{0j}^i)) - \min_j(\rho_{0_j}^i \sin(\alpha_{r0}^i + \theta_{0j}^i))$$

et $E_y^i(\alpha_{r0}^i) > 0$ si la forme n'est pas dégénérée.

A chaque position de F^i, on peut associer un rectangle paraxial $R^i(\alpha_{r0}^i)$ circonscrit à F^i comme suit:

Définition 5:

Un rectangle paraxial est un rectangle dont les côtés sont toujours parallèles aux axes du repère matière.

Le rectangle paraxial $R^i(\alpha_{r0}^i)$ circonscrit à F^i est complètement défini par:

i) les coordonnées minimales de F^i :

$$X_{ro}^i(\alpha_{r0}^i) = X_{r0}^i + \min_j(\rho_{0_j}^i \cos(\alpha_{r0}^i + \theta_{0j}^i))$$

$$Y_{ro}^i(\alpha_{r0}^i) = Y_{r0}^i + \min_j(\rho_{0_j}^i \sin(\alpha_{r0}^i + \theta_{0j}^i))$$

ii) ses dimensions en x, $E_x^i(\alpha_{r0}^i)$, et en y, $E_y^i(\alpha_{r0}^i)$.

Comme le placement est destiné à une découpe en continu, il doit évoluer en largeur d'abord comme indiqué précédemment. Considérons que le placement d'une forme F^i consomme la surface du rectangle paraxial $R(\alpha_{r0}^i)$ circonscrit à la surface délimitée d'un côté, par les axes du repère matière et de l'autre par les points de F^i les plus éloignés, au sens de la distance euclidienne, des axes du repère matière d'origine O_m, début de la matière pour le placement en court et de dimensions $E_x(\alpha_{r0}^i)$, $E_y(\alpha_{r0}^i)$,(F^i est la forme la plus à droite du placement en cours) (*cf. figure 3.3*).

Ce rectangle $R(\alpha^i_{r0})$ a pour dimensions:

$$(E_x(\alpha^i_{r0}), E_y(\alpha^i_{r0})) = (X^i_{r0}(\alpha^i_{r0}) + E^i_x(\alpha^i_{r0}), Y^i_{r0}(\alpha^i_{r0}) + E^i_y(\alpha^i_{r0}))$$

avec $$X^i_{r0}(\alpha^i_{r0}) + E^i_x(\alpha^i_{r0}) = X^i_{r0} + \max_j(\rho^i_{0j} cos(\alpha^i_{r0} + \theta^i_{0j}))$$

et $$Y^i_{r0}(\alpha^i_{r0}) + E^i_y(\alpha^i_{r0}) = Y^i_{r0} + \max_j(\rho^i_{0j} sin(\alpha^i_{r0} + \theta^i_{0j}))$$

où $X^i_{r0}(\alpha^i_{r0})$ et $Y^i_{r0}(\alpha^i_{r0})$ sont les coordonnées de l'origine de $R^i(\alpha^i_{r0})$ (*cf. figure 3.3*).

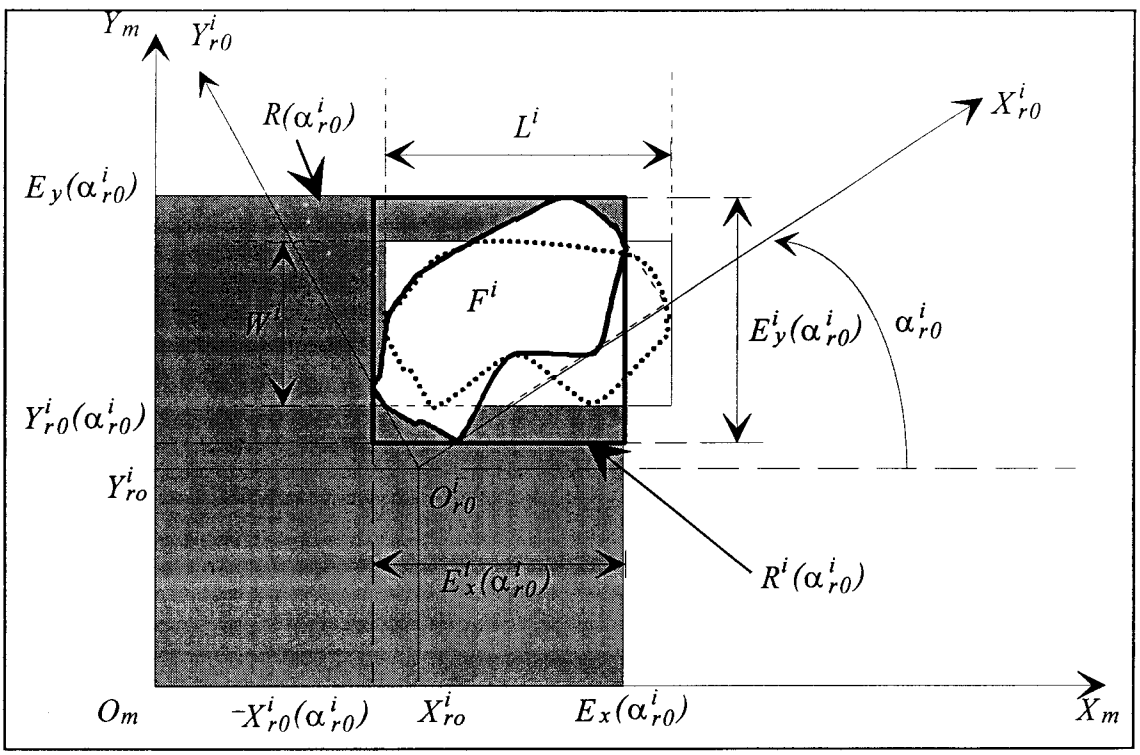

Figure 3.3: Rectangles paraxiaux associés à un placement.

Proposition 3:

Le placement optimal d'une forme F^i est un placement dont la surface du rectangle $R(\alpha^i_{r0})$ paraxial circonscrit est minimale.

La surface du rectangle $R(\alpha^i_{r0})$ représentant le placement en cours s'exprime par:

$$S(R(\alpha^i_{r0})) = E_x(\alpha^i_{r0}) \times E_y(\alpha^i_{r0}).$$

Comme la surface dépend de α_{r0}^{i}, on a:

$$minS(R(\alpha_{r0}^{i})) = \min_{\alpha_{r0}^{i}}(E_x(\alpha_{r0}^{i}) \times E_y(\alpha_{r0}^{i})).$$

Minimiser cette surface revient donc à minimiser d'une part, les coordonnées dans le repère matière de l'origine du rectangle R^i circonscrit à F^i (par translation) et d'autre part, les extensions en x et en y de F^i, ce qui donne effectivement, après le placement de F^i :

$$minS(R(\alpha_{r0}^{i})) = \min_{\alpha_{r0}^{i}}[(X_{r0}^{i}(\alpha_{r0}^{i}) + E_x^{i}(\alpha_{r0}^{i}) \times (Y_{r0}^{i}(\alpha_{r0}^{i}) + E_y^{i}(\alpha_{r0}^{i})))]$$

$$= \min_{\alpha_{r0}^{i}}\begin{bmatrix} \left(X_{r0}^{i} + \max_{j}(\rho_{0j}^{i} cos(\alpha_{r0}^{i} + \theta_{0j}^{i}))\right) \\ \times\left(Y_{r0}^{i} + \max_{j}(\rho_{0j}^{i} sin(\alpha_{r0}^{i} + \theta_{0j}^{i}))\right) \end{bmatrix}$$

Dans le cas d'un placement d'une seule forme, plusieurs solutions peuvent être obtenues. La surface d'un rectangle est invariante par translation et toutes les rotations $\alpha_{r0}^{i} = \frac{\pi}{2} \pm k\pi$ consomment la même superficie.

Remarque 3:

Il est important de minimiser le rectangle paraxial circonscrit d'origine O_m, début du matériau.

Lorsque le placement comporte plusieurs formes, on favorise le placement en largeur. Et dans ce cas, on introduit la contrainte de disjonction qui permet de vérifier le non-chevauchement des formes deux à deux.

$$Int(F^i \cap F^j) = \varnothing$$

$$\forall i, j,\ i \neq j,\ i = 1,2,...,N_g\ ,j = 1,2,...,N_g$$

Il est intéressant d'exprimer la contrainte de disjonction précédente sous la forme d'une expression continue et différentiable afin de trouver la meilleure direction de placement lors de l'utilisation d'un algorithme de descente (méthode du gradient). On peut distinguer quatre cas possibles lors du placement de deux formes de contours F^i et F^j :

$$1 - S(F^i \cap F^j) = S(F^i) \qquad si \quad F^i \subset F^j$$
$$2 - S(F^i \cap F^j) = S(F^j) \qquad si \quad F^j \subset F^i$$
$$3 - S(F^i \cap F^j) = 0 \qquad si \quad F^i \cap F^j = \varnothing$$
$$4 - S(F^i \cap F^j) = S(F^i) + S(F^j) - \left[S(\overline{F^i \cup F^j}) + \sum_l S(H_l) \right]$$

où H_l, $l = 1,2,...$ représente une surface emprisonnée entre deux contours,

$S(F^i \cap F^j)$ la surface de l'intersection et $S(\overline{F^i \cup F^j})$ la surface de la forme géométrique définie par la composition des deux contours et appartenant à l'une des deux formes. On peut écrire:

$$S(\overline{F^i \cup F^j}) = S(F^i \cup F^j) - \sum_l S(H_l)$$

avec $S(F^i \cup F^j)$ la surface définie par l'enveloppe extérieure obtenue par la composition des deux contours F^i et F^j. La somme des surfaces emprisonnées, $\sum_l S(H_l)$, est représentative de la complémentarité des formes qui sera développée plus loin dans ce chapitre.

- **Calcul d'une surface polygonale**

Considérons une région simplement connexe définie par un contour fermé F^i donné par la liste de points $(\pi^i_j)_{j=1}^{j=N^i_F}$.

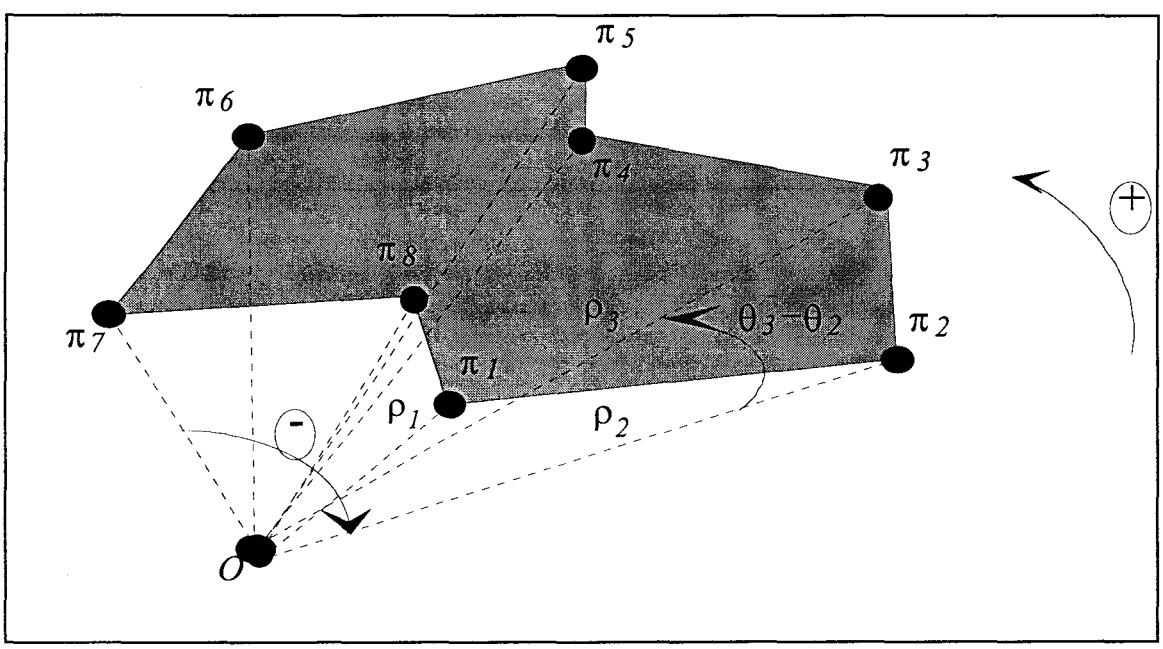

Figure 3.4: Calcul de surface.

La surface de la région délimitée par le contour F^i peut être calculée selon l'expression [Shamos 78][Hégron 85]:

$$S(F^i) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_F^i} \Delta S_j^i$$

avec:

$$\Delta S_j^i = \rho_j \rho_{j+1} sin(\theta_{j+1} - \theta_j)$$

ρ_j, θ_j sont les coordonnées polaires du point π_j^i par rapport au repère de centre arbitraire *O (cf. figure 3.4)*. Le résultat consiste en une valeur algébrique dont le signe dépend du sens de suivi du contour (le sens positif indiqué sur la figure suivante est contraire au sens des aiguilles d'une montre). En prenant le point *O* à l'intérieur du contour (centre de gravité, par exemple) et en considérant uniquement des formes convexes, la surface d'une forme polygonale résulte de la somme des surfaces des triangles composant ce polygone (triangulation, décomposition en triangles).

Remarque 4:

Le temps de calcul et la précision dépendent du pas de discrétisation. Le nombre d'opérations dépend du nombre de points du contour. On peut par exemple, prendre un faible pas de discrétisation pour assurer une bonne précision et utiliser un modèle de représentation approximatif pour les formes (enveloppe convexe ou non) afin de réduire le nombre de points du contour.

- **Cas du placement de formes en recouvrement total**

Pour éviter le calcul systématique de la surface formée par le placement de deux formes et accélérer le processus de calcul, nous avons distingué l'inclusion d'une forme dans une autre du recouvrement partiel d'une forme par une autre.

L'inclusion complète est un cas rare caractérisé par une grande différence entre les dimensions des formes. Ce cas se présente lorsque $F^i \cap F^j \neq \varnothing$ (les contours ne se coupent pas). Il ne faut donc pas pour autant déclarer le placement disjonctif. Dans ce cas, si un point quelconque d'un contour appartient à l'intérieur de l'autre, il y a inclusion totale et la surface de chevauchement est égale à la surface de la plus petite forme.

La fonction d'appartenance d'un point à une forme est calculée en suivant le même principe que pour le calcul de la surface, c'est-à-dire en calculant:

$$\theta^i = \sum_{j=1}^{N_F^i} \Delta\theta_j^i$$

avec:

$\Delta\theta^i_j = \pi^i_j \overset{\angle}{O} \pi^i_{j+1}$, π^i_j un point du contour F^i et $\pi^i_j \overset{\angle}{O} \pi^i_{j+1}$ l'angle.

Proposition 4:

O est intérieur à F^i si et seulement si $\varphi^i = 2\pi$.

Alors si $0 < \theta^i < 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad O \in F^i$ ou à l'extérieur de F^i.

- **Cas du placementde deux formes en recouvrement partiel**

L'intersection de deux contours F^i et F^j forme une figure géométrique dont la surface comprend:

1- la surface d'intersection $S(F^i \cap F^j)$,

2- la surface appartenant exclusivement à l'une ou à l'autre des forme et désignée par $S(\overline{F^i \cup F^j})$,

3- la surface correspondant aux trous éventuels emprisonnés entre les deux contours: $\sum_l S(H_l)$.

Les trous correspondent aux concavités des contours. On peut donc, suivant la typologie des contours, distinguer deux cas :

i) les contours sont convexes et $S(\overline{F^i \cup F^j}) = S(F^i \cup F^j)$;

ii) un contour au moins est concave et, au moins une surface est emprisonnée entre les contours F^i et F^j, on a alors:

$$S(\overline{F^i \cup F^j}) = S(F^i \cup F^j) - \sum_l S(H_l).$$

Le calcul de la surface d'intersection s'effectue en plusieurs étapes:

1- déterminer les points d'intersection,

2- déterminer les points de commutation, c'est-à-dire de passage d'un contour à l'autre,

3- construire $S(\overline{F^i \cup F^j})$ *et enfin*

4- identifier les trous.

Proposition 5:

Soient N_h *le* nombre de trous emprisonnés entre deux contours et N_z le nombre de zones connexes appartenant aux deux formes, c'est à dire le nombre d'intersections d'au moins un point et contacts, alors $N_h = N_z - 1$.

Lorsque les zones d'intersections sont toutes réduites à un simple contact entre les points des contours, la surface d'intersection est nulle.

3.2.4. Formulation

Comme nous l'avons présenté précédemment, le placement d'une forme est formulé comme suit:

$$\min_{\alpha^i_{r0}}\left[\max_j X^i_j(\alpha^i_{r0}) \times \max_j Y^i_j(\alpha^i_{r0})\right]$$

ou

$$\min_{\alpha^i_{r0}}\left[\max_j [X^i_{r0}(\alpha^i_{r0}) + E^i_x(\alpha^i_{r0})] \times \max_j [Y^i_{r0}(\alpha^i_{r0}) + E^i_y(\alpha^i_{r0})]\right]$$

sous les contraintes:

$$0 \le X^i_j(\alpha^i_{r0}) \le L_m - \max_j X^i_j(\alpha^i_{r0})$$

$$0 \le Y^i_j(\alpha^i_c) \le W_m - \max_j Y^i_j(\alpha^i_{r0})$$

Nous avons montré dans les chapitres précédents, qu'un placement d'une forme est équivalent à la composition d'une translation et d'une rotation; le retournement ou symétrie axiale considéré comme une rotation autour d'un axe du repère relatif, est réalisé avant le placement. La translation permet de déterminer les coordonnées de référence du rectangle paraxial $R^i(\alpha^i_{r0})[X^i_r(\alpha^i_{r0}), Y^i_r(\alpha^i_{r0})]$ circonscrit à la forme F^i et la rotation, la position de chaque point du contour par rapport au centre du repère relatif et par conséquent les extensions $E_x(\alpha^i_{r0})$ et $E_y(\alpha^i_{r0})$ du rectangle paraxial $R(\alpha^i_{r0})$ circonscrit au placement. Comme la solution s'écrit sous la forme d'un triplet $Z^i_{r0} = (X^i_{r0}, Y^i_{r0}, \alpha^i_{r0})$, le placement optimal d'une forme peut s'écrire sous la forme équivalente:

$$\min_{Z^i_{r0}}\left[\max_j X^i_j(\alpha^i_{r0}) \times \max_j Y^i_j(\alpha^i_{r0})\right]$$

avec:

$$Z^i_{r0} = \left\{ Z^i_{r0} \in R^2 \times [0, 2\pi[\;\middle|\; \begin{array}{c} 0 \le X^i_j(\alpha^i_{r0}) \le L_m - \max_j X^i_j(\alpha^i_{r0}) \\ 0 \le Y^i_j(\alpha^i_{r0}) \le W_m - \max_j Y^i_j(\alpha^i_{r0}) \\ \forall j,\ j = 1,2,\ldots,N^i_F \end{array} \right\}$$

3.2.4.1. Formulation du placement de base

Le placement de base s'écrit:

$$\forall i,\ i = 1,2,\ldots,N_g$$

$$\min_{Z_{r0}^i}\left[\max_i \max_j X_j^i(\alpha_{r0}^i) \times \max_i \max_j Y_j^i(\alpha_{r0}^i)\right]$$

avec:

$$Z_{r0}^i = \left\{ Z_{r0}^i \in R^2 \times [0,2\pi[\;\middle|\; \begin{array}{c} 0 \le X_j^i(\alpha_{r0}^i) \le L_m - \max_i \max_j X_j^i(\alpha_{r0}^i) \\ 0 \le Y_j^i(\alpha_C^i) \le W_m - \max_i \max_j Y_j^i(\alpha_{r0}^i) \\ Int(F^i \cap F^j) = \varnothing \\ F^i \cap F^j = \varnothing \\ \forall i, \forall j,\quad i = 1,2,\ldots,N_g \text{ et } j = 1,2,\ldots,N_F^i \end{array} \right\}$$

3.2.4.2. Formulation du placement général

Le placement général est obtenu en ajoutant les contraintes de positionnement au placement de base, on obtient le placement général suivant:

PPB

avec les contraintes de positionnement absolu:

$$Z_{r0}^i = Z_0^i \quad pour\ i \in [i_1, i_2, \ldots, i_a]$$

et relatif:

$$Z_{r0}^i = Z_{r0}^k + \Delta Z_r^k \ pour\ i \in \{i_1, i_2, \ldots, i_a\}, et\ k \in \{k_1, k_2, \ldots, k_b\}$$

Les positions Z_0^i sont données et les valeurs ΔZ_r^k sont mises à jour au fur et mesure de la résolution du placement (en pratique, ces valeurs dépendent du tissu).

3.2.4. Conclusion

Le temps de calcul prohibitif même pour un nombre réduit de formes polygonales dont le nombre de sommet est restreint, ne permet pas l'utilisation d'un tel algorithme pour la résolution d'un placement en continu. Cependant, nous avons exploité cet algorithme pour calculer les surfaces emprisonnées entre les contours lorsque deux formes sont en contact. La somme de ces surfaces est utilisée pour définir la notion de complémentarité entre les formes.

Pour réduire encore l'espace de recherche, le calcul des indices de complémentarité s'effectue côté après côté, ce qui nous amène à définir la précédence entre les formes. Nous avons d'autre part rechercher un codage des contours facilitant ce calcul; Ce codage est basé sur la déficience rectangulaire des formes [Roussel 93]. Il s'agit de calculer pour chaque forme la surface comprise entre chaque côté de son rectangle circonscrit et la portion de contour correspondant au côté.

3.3. Réduction du problème du placement

3.3.1. Introduction

Les formes des modèles sont complexes. La vérification de la disjonction entre les formes est très laborieuse et le temps de calcul du placement augmente très vite avec le nombre de pièces à placer. Pour réduire ces temps de calcul et rendre le processus de placement compatible avec l'application, nous avons introduit un nouveau modèle de représentation des formes et une nouvelle formulation prenant en compte la propagation de la contrainte de disjonction.

3.3.2. Description du contour par les peignes de formes

Avec [Roussel 92] [Roussel 94] nous avons utilisé une nouvelle représentation des contours. Ce code dont nous rappelons le principe ci-dessous, est basé sur la notion de rectangle paraxial circonscrit à la forme introduit au paragraphe précédent.

3.3.2.1. Rectangle paraxial circonscrit et sous-contours

Le rectangle paraxial permet de prendre en compte la direction privilégiée de placement et la contrainte induite.

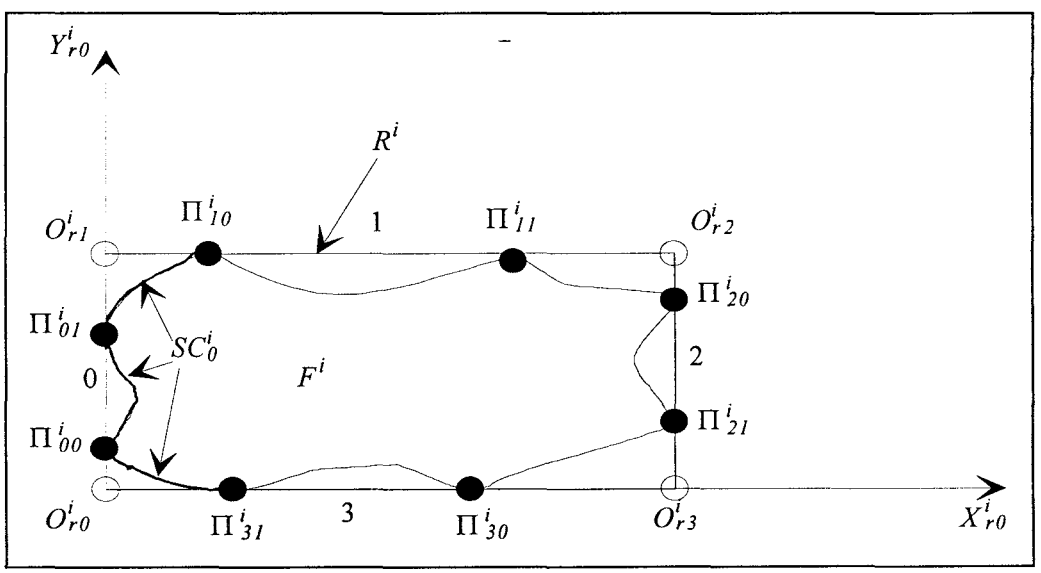

Figure 3.5: Rectangle paraxial et sous-contours.

On constate que le rectangle circonscrit de côtés $C_c^i, c \in \{0,1,2,3\}$ étiquetés comme indiqué ci-dessous (*cf. figure 3.5*), délimite quatre portions du contour que l'on associe à ses quatre côtés. Chaque portion correspond à la partie du contour comprise entre le dernier point de tangence avec le côté précédent et le premier point de tangence avec le côté suivant. Ces points étiquetés dans le sens des aiguilles d'une montre, sont représentés sur l'exemple suivant (*cf. figure 3.5*).

Chaque sous-contour est défini par une suite de points (*cf. tableau 1 et tableau 2).*

$SC_0^i = (\Pi_{31}^i, \ldots, \pi_{j_0}^i, \ldots, \Pi_{10}^i)$
$SC_1^i = (\Pi_{01}^i, \ldots, \pi_{j_1}^i, \ldots, \Pi_{20}^i)$
$SC_2^i = (\Pi_{11}^i, \ldots, \pi_{j_2}^i, \ldots, \Pi_{30}^i)$
$SC_3^i = (\Pi_{21}^i, \ldots, \pi_{j_3}^i, \ldots, \Pi_{00}^i)$

Tableau 3.1: Sous-contours.

$\Pi_{00}^i\left(0 \quad , \min_{j \mid x_{0j}^i = 0} y_{0j}^i\right)$,	$\Pi_{01}^i\left(0 \quad , \max_{j \mid x_{0j}^i = 0} y_{0j}^i\right)$
$\Pi_{10}^i\left(\min_{j \mid y_{0j}^i = max} x_{0j}^i, \max_j y_{0j}^i\right)$,	$\Pi_{11}^i\left(\max_{j \mid y_{0j}^i = max} x_{0j}^i, \max_j y_{0j}^i\right)$
$\Pi_{20}^i\left(\max_j x_{0j}^i, \max_{j \mid x_{0j}^i = max} y_{0j}^i\right)$,	$\Pi_{21}^i\left(\max_j x_{rj}^i, \min_{j \mid x_{0j}^i = max} y_{0j}^i\right)$
$\Pi_{30}^i\left(\min_{j \mid y_{0j}^i = 0} x_{0j}^i, \quad 0\right)$,	$\Pi_{31}^i\left(\max_{j \mid y_{0j}^i = 0} x_{0j}^i, \quad 0\right)$

Tableau 3.2: Points de définition des sous-contours.

On peut vérifier que les extensions en x, $\max_j x_{0j}^i$, et en y, $\max_j y_{0j}^i$, correspondent respectivement à L^i et W^i avec:

$$L^i = d_x(\Pi^i_{00},\Pi^i_{21}) = d_x(\Pi^i_{01},\Pi^i_{20})$$

$$W^i = d_y(\Pi^i_{31},\Pi^i_{10}) = d_y(\Pi^i_{30},\Pi^i_{11})$$

et $d_x(\Pi^i_{00},\Pi^i_{21})$ ($d_x(\Pi^i_{01},\Pi^i_{20})$), la distance euclidienne entre les points Π^i_{00} (Π^i_{01}) et Π^i_{21} (Π^i_{20}) projetée sur l'axe des abscisses $O^i_{r0}X^i_{r0}$ et $d_y(\Pi^i_{31},\Pi^i_{10})$ ($d_y(\Pi^i_{30},\Pi^i_{11})$) la distance euclidienne entre les points Π^i_{31} (Π^i_{30}) et Π^i_{10} (Π^i_{11}) projetée sur l'axe $O^i_{r0}Y^i_{r0}$.

***Remarque 5*:**

Le côté du rectangle peut avoir un seul point de contact avec le contour. On a alors: $\Pi^i_{c1} = \Pi^i_{c0}$ *si le seul point commun est sur le côté* C^i_c.

3.3.2.2. Codage du contour

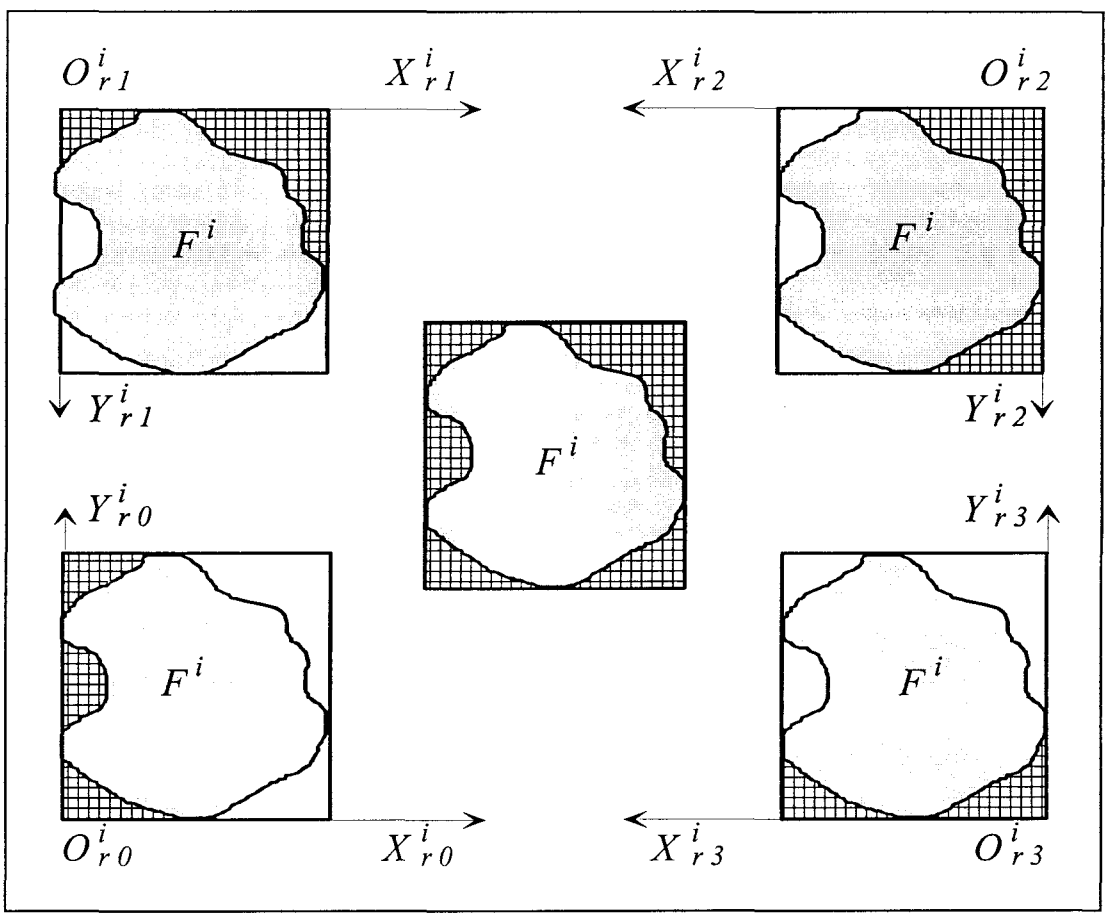

Figure 3.6: Les peignes de contours.

Considérant un contour 8-connexes , on appelle peignes de contour, les distances représentées par la figure 3.6 et définies par les vecteurs du tableau 3.3.

$$D_0^i = \left[d_x(\pi^i_{j_0}, C_0^i) \;\middle|\; \pi^i_{j_0} \in SC_0^i \right]_{j_0=1}^{W^i} \quad avec\ d_x(\pi^i_{j_0}, C_0^i) = x^i_{0j_0} - 1$$

$$D_1^i = \left[d_y(\pi^i_{j_1}, C_1^i) \;\middle|\; \pi^i_{j_1} \in SC_1^i \right]_{j_1=1}^{L^i} \quad avec\ d_y(\pi^i_{j_1}, C_1^i) = W^i - y^i_{0j_1} + 1$$

$$D_2^i = \left[d_x(\pi^i_{j_2}, C_2^i) \;\middle|\; \pi^i_{j_2} \in SC_2^i \right]_{j_2=1}^{W^i} \quad avec\ d_x(\pi^i_{j_0}, C_0^i) = L^i - x^i_{0j_2} + 1$$

$$D_3^i = \left[d_y(\pi^i_{j_3}, C_3^i) \;\middle|\; \pi^i_{j_3} \in SC_3^i \right]_{j_3=1}^{L^i} \quad avec\ d_y(\pi^i_{j_3}, C_3^i) = y^i_{rj_3} - 1$$

Tableau 3.3: Peignes de contours.

Chaque élément $D_k^i(j_k)$ du peigne D_k^i représente la plus courte distance du $j_k^{ième}$ point du sous-contour SC_k^i au côté C_k^i du rectangle circonscrit.

Nous appelons dent chacun des éléments d'un peigne et $D_k^i(j_k)$ la $j_k^{ième}$ dent du peigne D_k^i. Enfin, nous considérons que le nombre entier d'éléments des peignes D_0^i et D_2^i est W^i et celui des peignes D_1^i et D_3^i est L^i. Les dents sont numérotées dans le même sens que les côtés, de 1 à W^i pour les peignes $D^i_{0[2]}$ et de 1 à L^i pour les peignes $D^i_{1[2]}$ (modulo 2). On trouvera une étude détaillée des peignes de contour et de leurs propriétés dans [Roussel 94]. On y présente un modèle simplifié de représentation de contours: ***le peigne réduit.***

Remarque 6:

Le code est redondant. Les sous-contours successifs ne sont pas disjoints.

Exemple: les points de la liste (Π^i_{01}, Π^i_{10}) *appartiennent aux deux sous-contours* SC_0^i et SC_1^i .

3.3.3. Placement

Comme au paragraphe précédent, la position d'une forme de contour F^i est parfaitement définie par la donnée du triplet $(X^i_{r0}, Y^i_{r0}, \alpha^i_{r0})$, où (X^i_{r0}, Y^i_{r0}) sont les coordonnées du centre du repère relatif (coordonnées définissant la position du rectangle circonscrit) et α^i_{r0}, l'écart angulaire par rapport à la direction privilégiée de placement imposée pour le matériau par l'utilisateur.

3.3.3.1. Réduction du nombre des transformations

Lorsqu'une direction de placement est définie par l'utilisateur, comme c'est le cas pour les tissus, un très faible écart angulaire peut, dans certains cas, améliorer grandement le rendement et être accepté industriellement. Le recours à l'utilisation de cet écart est rare car il augmente la surface du rectangle paraxial circonscrit à la forme comme le montre la *figure 3.7.*

La surface du rectangle paraxial circonscrit est

$$S(R^i(\alpha^i_{r0})) = (W^i cos(\alpha^i_{r0}) + L^i sin(\alpha^i_{r0}))(L^i cos(\alpha^i_{r0}) + W^i sin(\alpha^i_{r0}))$$

d'où:

$$S(R^i(\alpha^i_{r0})) - S(R^i) = ((L^i)^2 + (W^i)^2) sin(\alpha^i_{r0}) cos(\alpha^i_{r0})$$

On voit que la différence est positive et croit uniformément jusqu'à $\alpha^i_{r0} = \frac{\pi}{4}$.

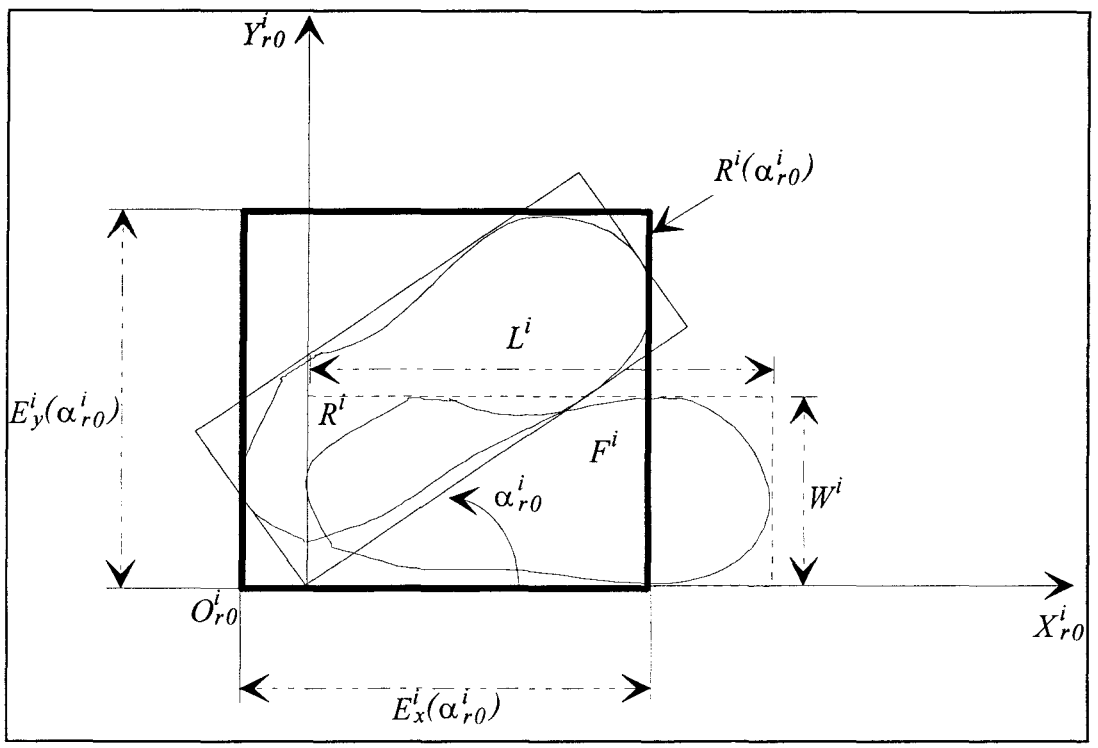

Figure 3.7: Variation de la surface en fonction de α.

L'écart angulaire est utilisé pour un petit nombre de pièces dont la forme peut être inscrite dans un trapèze (la largeur est plus grande à une extrémité qu'à l'autre). L'étude de la

fonction $[((L^i)^2+(W^i)^2)sin(\alpha^i_{r0})cos(\alpha^i_{r0})]$ suggère la restriction de l'angle aux seules valeurs multiples $\frac{\pi}{2}$, lorsque le matériau le permet. On prendra donc:

$$\alpha^i_{r0}=\lambda\frac{\pi}{2},\quad \lambda\in\{0,1,2,3\}$$

3.3.3.2. Peignes de contour et rotation de $\lambda\frac{\pi}{2}$

Une rotation de F^i effectuée autour du centre du repère relatif, s'obtient en réalisant une permutation circulaire des indices du côté associé à chaque peigne:

$$(D^i_k,\lambda)=[D^i_{(k+\lambda)[4]}(j),\quad j=1,2,\ldots,N_{(k+\lambda)[2]}]$$

avec*[4]*, modulo *4*, $N_0=W^i$ et $N_1=L^i$.

Si les rotations de $\lambda\frac{\pi}{2}$, λ impair, sont rares, les rotations de $\lambda\frac{\pi}{2}$ avec λ pair sont souvent utilisées, à l'exception des placement sur des textiles possédant un sens comme le velours et le loden.

3.3.4. Etudes de la disjonction

Si les contraintes de confinement et les contraintes de gestion sont traitées de la même manière que précédemment, les autres contraintes, en particulier les contraintes de disjonction, subissent des traitements progressifs et adaptatifs. Ainsi, la contrainte de disjonction n'est vérifiée que si les rectangles exinscrits ne sont pas eux mêmes disjonctifs.

Le non-recouvrement entre formes est formulé à deux niveaux:

1- au niveau des rectangles circonscrits,

2- au niveau des contours réels des formes.

3.3.4.1. Placement non disjonctif des rectangles

Le placement non disjonctif peut être considéré comme un sous-problème du placement. On prend alors en compte toutes les contraintes à l'exception des contraintes de disjonction qui sont assurées par le choix du positionnement relatif se traduisant par des relations de précédence entre les rectangles. Lorsque les formes sont des rectangles paraxiaux, la contrainte de disjonction:

$$R^i\cap R^j=\varnothing$$

peut se mettre sous la forme disjonctive équivalente:

$$(X_{r0}^{i}+L^{i}\leq X_{r0}^{j})\vee(X_{r0}^{j}+L^{j}\leq X_{r0}^{i})\vee(Y_{r0}^{i}+W^{i}\leq Y_{r0}^{j})\vee(Y_{r0}^{j}+W^{j}\leq Y_{r0}^{i}).$$

On peut choisir les relations suivantes pour traduire un positionnement relatif:

$$X_{r0}^{i}+d_{x}^{ij}\leq X_{r0}^{j} \quad \text{et} \quad Y_{r0}^{i}+d_{y}^{ij}\leq Y_{r0}^{j}.$$

Compte tenu de la paraxialité, la seule donnée nécessaire au positionnement relatif de deux rectangles R^i et R^j sera spécifiée par le vecteur $\overrightarrow{O_{r0}^{i}O_{r0}^{j}}=\begin{pmatrix}\delta X_{00}^{ij}\\ \delta Y_{00}^{ij}\end{pmatrix}(\vec{i},\vec{j})$ joignant les origines respectives de ces rectangles.

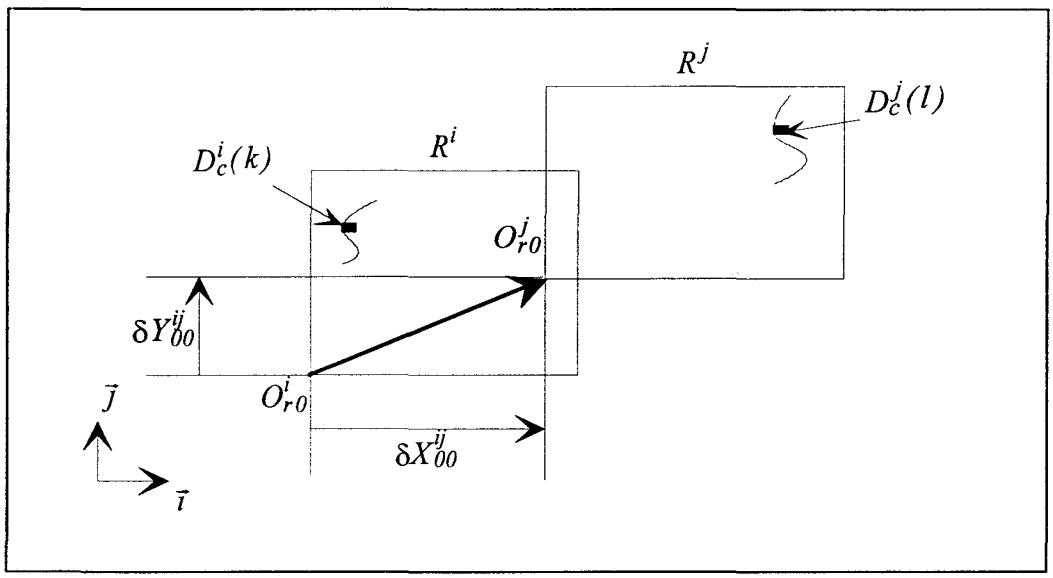

Figure 3.8: Positionnement relatif de rectangles.

3.3.4.2. Disjonction des contours

Une condition suffisante de non-chevauchement des domaines définis par les contours, consiste à ce que les rectangles paraxiaux circonscrits soient disjonctifs. Cette condition n'est malheureusement pas nécessaire. En effet les contours sont irréguliers, et le recouvrement entre les rectangles circonscrits signifie un emboîtement des formes, autrement dit une association bosse-creux [Delaporte 89].

Lorsque la relation $R^i \cap R^j \neq \varnothing$ est vérifiée, la condition suffisante n'est pas satisfaite. La vérification du non-chevauchement est alors limitée à la zone de recouvrement des rectangles. Cette zone rectangulaire que nous désignons par rectangle de test, est définie ci-dessus en fonction des différentes positions relatives. La vérification concerne alors une seule des quatre relations:

$$X^i_{r0} + L^i \leq X^j_{r0}, \quad X^j_{r0} + L^j \leq X x^i_{r0},$$

$$Y^i_{r0} + W^i \leq Y^j_{r0} \ ou \ Y^j_{r0} + W^j \leq Y^i_{r0}$$

- **Positions relatives**

La mise en correspondance de deux peignes D^i_c et $D^j_{c+2[4]}$ nécessite un paramétrage du positionnement relatif entre les origines O^i_{rc} et $O^j_{rc+2[4]}$.

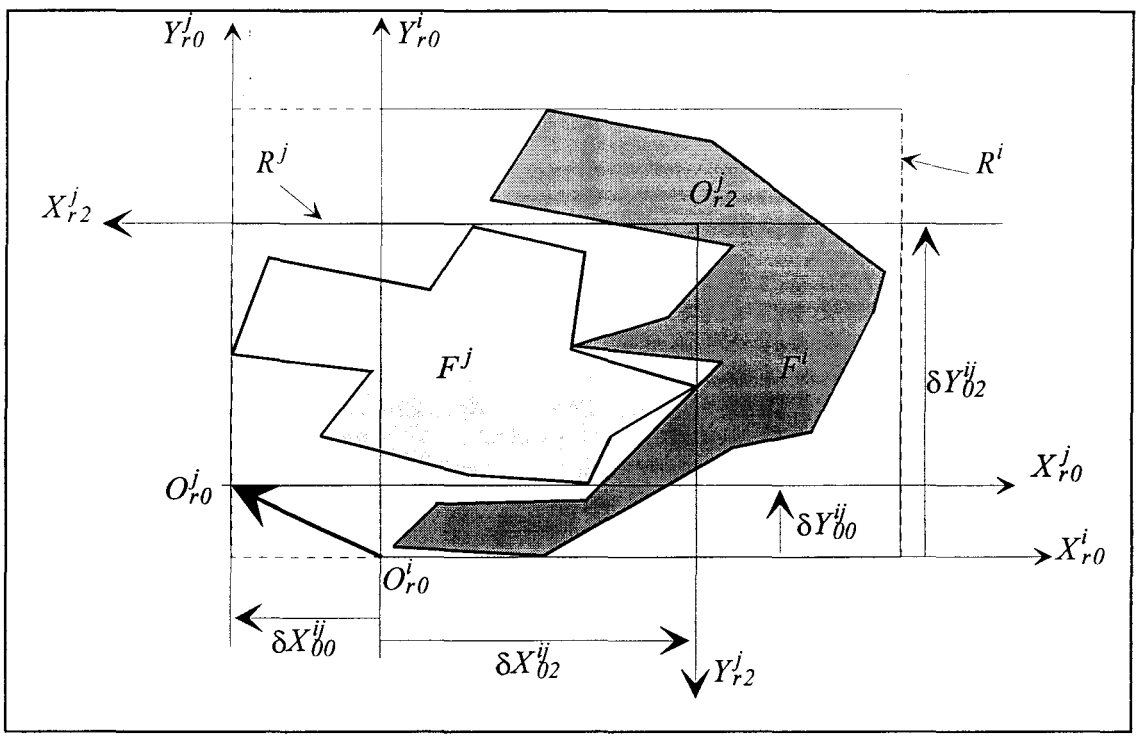

Figure 3.9: Positions relatives.

Le vecteur de positionnement $\overrightarrow{O^i_{rc} O^j_{rc+2[4]}}$ est défini comme suit:

$$\overrightarrow{O^i_{rc} O^j_{rc+2[4]}} = \begin{pmatrix} \delta X^{ij}_{cc+2[4]} \\ \delta Y^{ij}_{cc+2[4]} \end{pmatrix} (\vec{i}, \vec{j}) \quad \text{avec:}$$

- $\delta X^{ij}_{cc+2[4]} = X^j_{rc+2[4]} - X^i_{rc}$, représentant, suivant l'association, la ***profondeur d'imbrication*** ou de chevauchement des rectangles circonscrits ($c \in \{0,2\}$) ou le ***décalage relatif*** suivant l'axe des ordonnées entre les origines O^i_{rc} et $O^j_{rc+2[4]}$ ($c \in \{1,3\}$);

- $\delta Y^{ij}_{cc+2[4]} = Y^j_{rc+2[4]} - Y^i_{rc}$, mesurant, suivant l'association, le ***décalage relatif*** suivant l'axe des ordonnées entre les origines O^i_{rc} et $O^j_{rc+2[4]}$ ($c \in \{0,2\}$) ou la ***profondeur d'imbrication*** ou de chevauchement des rectangles circonscrits ($c \in \{1,3\}$).

Pour convertir le positionnement relatif $\overrightarrow{O^i_{rc}O^j_{rc+2[4]}}$ entre les deux origines locales des peignes mis en correspondance en positionnement entre les origines de définition des formes, $\overrightarrow{O^i_{r0}O^j_{r0}}$, on établit la formule de passage suivante:

$$\overrightarrow{O^i_{r0}O^j_{r0}} = \overrightarrow{O^i_{r0}O^i_{rc}} + \overrightarrow{O^i_{rc}O^j_{rc+2[4]}} + \overrightarrow{O^j_{rc+2[4]}O^j_{r0}}$$

où $\overrightarrow{O^i_{r0}O^j_{r0}} = \begin{pmatrix} \delta X^{ij}_{00} \\ \delta Y^{ij}_{00} \end{pmatrix} (\vec{i}, \vec{j})$

et où $\overrightarrow{O^i_{r0}O^i_{rc}}$ et $\overrightarrow{O^j_{rc+2[4]}O^j_{r0}}$ sont des vecteurs indépendants de la position.

Les signes de δX^{ij}_{00} et δY^{ij}_{00} donnent la précédence entre les points O^i_{r0} et O^j_{r0} suivant OX et OY.

- **Disjonction**

Il s'agit de définir les conditions vérifiant la relation $Int(F_k \cap F_l) = \{\varnothing\}$ signifiant que la disjonction est vérifiée tant que l'intérieur de l'intersection des deux formes est vide.

Les limites du non-recouvrement sont établies lorsque les sous-contours de deux formes distinctes mis en correspondance sont en contact. Supposons que les axes $O^i_{rc}Y^i_{rc}$ et $O^j_{rc+2[4]}Y^j_{rc+2[4]}$ soient superposés (*cf. figure 3.10a*).

Soient π^i_1 et π^j_2 deux points appartenant respectivement à SC^i_c et $SC^j_{c+2[4]}$ et telle que la distance euclidienne $d_x(\pi^i_1, \pi^j_2)$ soit minimale parmi toutes les distances entre deux points π^i_k et π^j_l de SC^i_c et $SC^j_{c+2[4]}$ ayant la même projection sur l'intervalle commun à F^i et F^j, $[a,b]$. On dira que les deux formes sont en contact lorsque, pour un décalage $\delta Y^{ij}_{cc+2[4]}$, la profondeur d'imbrication suivant l'axe des abscisses est égale à $d_x(\pi^i_1, \pi^j_2)$ (*cf. figure 3.10b*).

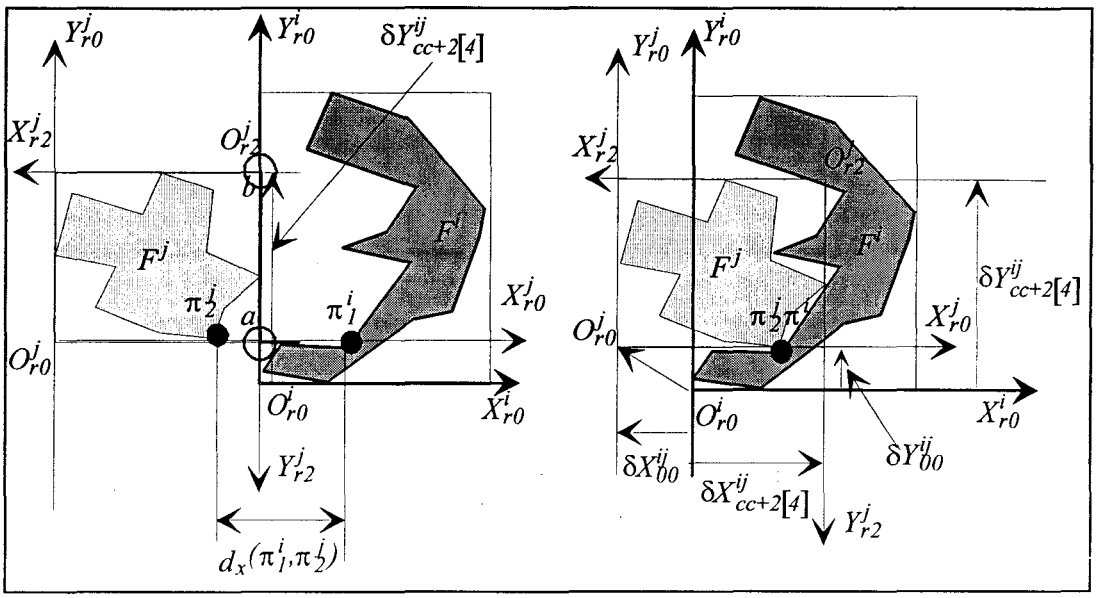

Figure 3.10a: Position relative optimale pour c=0 *Figure 3.10b.*

Pour $c = 0[2]$, la profondeur d'imbrication est définie par:

$$d_x(\pi^i_1,\pi^j_2) = D^i_0(y^i_{01}) + D^j_2(y^j_{22})$$

avec y^i_{01} et y^j_{22} les ordonnées des points π^i_1 et π^j_2 dans les repères relatifs respectifs $O^i_{r0}X^i_{r0}Y^i_{r0}$ et $O^j_{r2}X^j_{r2}Y^j_{r2}$. La contrainte de disjonction est satisfaite si pour un décalage δY^{ij}_{02}, la profondeur d'imbrication vérifie l'inéquation:

$$\delta X^{ij}_{02} \leq d_x(\pi^i_1,\pi^j_2)$$

avec:

$$d_x(\pi^i_1,\pi^j_2) = \underset{proj\pi^i_k/[a,b]=proj\pi^j_l/[a,b]}{Min} d(\pi^i_k,\pi^j_l)$$

$$= \underset{y^i_{0k}+Y^i_{r0}=Y^i_{r2}-y^j_{2l}}{Min} (x^i_{0k}+x^j_{2l})$$

où x^i_{0k} et x^j_{2l} sont les dents des sommets π^i_k et π^j_l appartenant à D^i_0 et D^j_2. Les coordonnées de π^i_k et π^j_l étant, dans leur repère propre, (x^i_{0k}, y^i_{0k}) et (x^j_{2l}, y^j_{2l}).

Pour $c = 1[2]$,π^i_1 et π^j_2 appartenant à SC^i_1 et SC^j_3 la profondeur d'imbrication est définie par:

$$d_y(\pi^i_1,\pi^j_2) = D^i_1(x^i_{11}) + D^j_3(x^j_{32})$$

avec x^i_{11} et x^j_{32} les ordonnées des points π^i_1 et π^j_2 dans les repères relatifs respectifs $O^i_{r1}X^i_{r1}Y^i_{r1}$ et $O^j_{r3}X^j_{r3}Y^j_{r3}$. La contrainte de disjonction est satisfaite si pour un décalage δX^{ij}_{13}, la profondeur d'imbrication vérifie l'inéquation:

$$\delta Y^{ij}_{13} \leq d_y(\pi^i_1, \pi^j_2)$$

avec, $[a,b]$ étant l'intervalle d'intersection:

$$d_y(\pi^i_1, \pi^j_2) = \underset{proj\pi^i_k/[a,b]=proj\pi^j_l/[a,b]}{Min} d(\pi^i_k, \pi^j_l)$$

$$= \underset{x^i_{0k}+X^i_{r1}=X^i_{r3}-x^j_{3l}}{Min} (y^i_{1k}+y^j_{3l})$$

Cette définition nécessite comme nous l'avons fait au chapitre précédent, d'effectuer la recherche de ce minimum pour tous les points des sous-contours dont les projections appartiennent à l'intervalle d'intersection $[a,b]$, soit à la zone commune. Il est intéressant de définir les cas de non chevauchement des rectangles circonscrits par une relation de précédence comme les contraintes dans les ordonnancements.

3.3.4.3. Précédence et chevauchement

Une relation de précédence entre les rectangles circonscrits induit une relation de positionnement entre les formes placées et par conséquence la disjonction.

Définition 6:

On appelle relations binaires de précédence [Redlinger 88] associées au placement, les relations binaires sur l'ensemble des formes définies respectivement dans les directions x et y par:

$$P_x(i,j) \Leftrightarrow X^i_{r0} + L^i \leq X^j_{r0}$$

et

$$P_y(i,j) \Leftrightarrow Y^i_{r0} + W^i \leq Y^j_{r0}$$

La disjonction entre deux rectangles paraxiaux circonscrits aux formes F^i et F^j peut s'écrire d'une manière plus synthétique:

$$P(i,j) \Leftrightarrow P_x(i,j) \vee P_x(j,,i) \vee P_y(i,j) \vee P_y(j,i)$$

$P(i,j)$ peut s'exprimer comme une fonction f de $(R^2)^2$ à valeurs dans $\{0,1\}$:

$$P(i,j) = f(X^i_{r0}, Y^i_{r0}, X^j_{r0}, Y^j_{r0}) \ ,$$

les dimensions des rectangles étant des constantes.

Un placement où les rectangles ne se recouvrent pas, donne à f la valeur "1" (vraie), autrement elle prend la valeur "0" (fausse). La précédence est intéressante et encore plus utile pour le placement de rectangles. Ainsi on définit une équation de disjonction de deux rectangles R^i et R^j par toute fonction f^{ij} définie sur $(R^2)^2$ à valeurs booléennes et qui implique $P(i,j)$:

$$P(i,j): \quad f^{ij} \Rightarrow P(i,j).$$

On peut alors calculer les placements qui satisfont un système donné d'équations de précédence, c'est-à-dire qui réalisent un ensemble de décisions de positionnement relatif. La fonction $(P_x(i,j) \vee P_y(i,j))$ est une équation de disjonction, puisque tout placement pour lequel elle prend la valeur "vraie" réalise la disjonction des rectangles.

La fonction inverse $\overline{(P_x(i,j) \vee P_y(i,j))} = (\overline{P_x(i,j)} \wedge \overline{P_y(i,j)})$ n'implique pas forcément un placement non disjonctif car la relation de précédence P est antisymétrique. En effet:

$$\forall i \in [1, N_g], \quad \forall j \in [1, N_g], \quad i \neq j$$

$$P(i,j) \Rightarrow \overline{P(j,i)} \quad (nonP(i,j))$$

La relation de précédence a en plus les deux propriétés suivantes:

aréflexive $\forall i \in [1, N_g], \quad \overline{P(i,i)}$

transitive $\forall i, j$ et $k \in [1, N_g], \quad i \neq j \neq k \qquad P(i,j)$ et $P(j,k) \Rightarrow P(i,k)$

La notion de précédence montre que toute suite finie de relations de précédence vérifiées définit un placement disjonctif de rectangles.

Inversement deux rectangles se chevauchent si et seulement si aucune des relations de précédence n'est vérifiée. Ainsi on a:

$$\overline{P(i,j)} = \overline{P_x(i,j)} \wedge \overline{P_x(j,i)} \wedge \overline{P_y(i,j)} \wedge \overline{P_y(j,i)}$$

Avec:

$$\overline{P_x(i,j)} \Leftrightarrow X^i_{r0} + L^i > X^j_{r0},$$

$$\overline{P_x(j,i)} \Leftrightarrow X^j_{r0} + L^j > X^i_{r0},$$

$$\overline{P_y(i,j)} \Leftrightarrow Y_{r0}^i + W^i > Y_{r0}^j$$

et

$$\overline{P_y(j,i)} \Leftrightarrow Y_{r0}^j + W^j > Y_{r0}^i$$

3.3.4.4. Précédence et complémentarité

Une optimisation locale par association bosses-creux constitue un placement utilisant le chevauchement des rectangles circonscrits. La non-précédence permet de déterminer les emboîtements tandis que les paramètres décalage-imbrication $(\delta X_{cc+2[4]}^{ij}, \delta Y_{cc+2[4]}^{ij})$ sont utilisés pour les quantifier. On définit ainsi la complémentarité entre deux formes par la zone commune aux rectangles circonscrits. Nous reviendrons sur la notion de complémentarité au paragraphe 3.3.7 et, plus en détail, au chapitre suivant.

3.3.5. Contraintes de positionnement

Les relations de précédence induisent un ordre sur les positions des pièces. Ces relations sont d'ailleurs utilisées dans [Redlinger 88] pour définir les agencements.

Nous avons souligné qu'un placement disjonctif des rectangles est une suite finie de relations binaires de précédence. Définissons maintenant les contraintes de positionnement qui traduisent les décisions de positionnements absolus en fonction d'un motif, ou relatifs en fonction de la disposition des pièces liées.

3.3.5.1. Motifs

Il existe différents types de motifs: libres, adaptés à un cadre ou aux coins, continus répétitifs dans un sens ou plusieurs. Le placement à raccords utilise la répétition d'un motif pour assurer les raccords. Le placement dit à motifs placés, positionne un motif entier à un endroit précis de l'article. La période de répétition étant, dans ce cas, beaucoup plus grande, un motif M^k est caractérisé par un rectangle paraxial circonscrit et sa position complètement définie par les coordonnées du centre du repère relatif $O_{r0}^k X_{r0}^k, Y_{r0}^k$. Un motif est défini comme une forme et son orientation donnée par la direction du droit fil.

Les motifs continus sont caractérisés par leur période de répétition en x et y : T_x et T_y.

Remarque 7:

Tous les motifs sont répétitifs en raison la technique même de fabrication. Pour les placements à motifs placés, une période entière est utilisée lors de la fabrication d'un article, alors que les placements à raccords utilisent plusieurs périodes par article et sont basés sur cette faible période de répétition pour réaliser les raccords.

3.3.5.2. Placement à motifs placés

Un seul motif peut être associé à une et une seule forme. Soit $[1,N_m]$ l'ensemble des indices des motifs et $[1,N_g]$ celui des indices des pièces. Le placement à motifs placés est traduit par une application σ définie comme suit :

$$\begin{array}{ccc} [1,N_m] & \xrightarrow{\sigma} & [1,N_g] \\ k & & \sigma(k) \end{array}.$$

Elle associe une et une seule forme à chaque motif (l'application σ est injective). La position du motif M^k sur le modèle $F^{\sigma(k)}$ est traduite par les deux coordonnées $X_k^{\sigma(k)}$ et $Y_k^{\sigma(k)}$, l'orientation étant par définition effectuée suivant le droit fil. Connaissant le motif M^k et sa position (X_{r0}^k, Y_{r0}^k), le placement de $F^{\sigma(k)}$ est donné par:

$$X_{r0}^{\sigma(k)} = X_{r0}^k + X_k^{\sigma(k)}$$

$$Y_{r0}^{\sigma(k)} = Y_{r0}^k + Y_k^{\sigma(k)}$$

Remarque 8:

Si le motif peut être associé à plusieurs formes, l'application σ définit une partition de l'ensemble des indices de formes en associant à chaque motif, un sous-ensemble de formes. Le problème revient alors à choisir une forme lors du placement (voir placement à raccords).

3.3.5.3. Placement à raccords

- **Points de raccords**

Les modèles possèdent un ensemble de "crans' répartis sur le contour, étiquetés, qu'il faut faire correspondre lors de l'assemblage. Ces crans constituent les points de raccords et chaque forme peut en posséder plusieurs. Chaque point de raccord induit une partition sur l'ensemble des formes.

- **Partitionnement de l'ensemble des formes**

Une forme hérite de tous les points de raccords de son modèle, et seules les pièces composant un même article sont contraintes. Il s'agit de définir une partition de l'ensemble des pièces composantes d'un même article, où toutes les formes liées possèdent un point et un seul point de raccord entre elles. C'est le placement de l'une des formes liées qui active la contrainte.

La relation "a un point de raccord" est une relation d'équivalence. Si pour des raisons évidentes de simplification, les formes présentent plusieurs crans de liaison les unes avec les autres. Tous ces crans correspondent à une seule liaison par raccord: si une forme F^{i_1} possède deux points de raccord, le premier A avec une forme F^{i_2} et le deuxième B avec une autre forme

F^{i3}, F^{i2} et F^{i3} sont liées par A ou B. Toutes les formes liées entre elles forment une même classe d'équivalence.

Considérons l'ensemble des nombres entiers $\{0,1,2,\ldots,N_r\}$ où les N_r derniers correspondent aux indices des raccords et 0 à l'absence de raccord. La notion de placement à raccords peut être traduite par l'application :

$$\begin{array}{ccc} [1,N_g] & \xrightarrow{\varphi} & [1,N_r] \\ i & & \varphi(i) \end{array}$$

qui à chaque forme F^i associe le raccord $\varphi(i)$, $(X^i_{\varphi(i)}, Y^i_{\varphi(i)})$ étant les coordonnées relatives du point de liaison sur la forme F^i si $\varphi(i) \neq 0$.

On peut définir une partition sur l'ensemble et l'on désigne chaque sous-ensemble induit par le raccord r : Φ^r avec $\Phi^r = \{i \mid i \in [1,N_g] \; et \; \varphi(i) = r\}$. La relation inverse qui permet de retrouver le sous-ensemble Φ^r à partir de r, est notée:

$$\{0,1,\ldots,r,\ldots,N_r\} \xrightarrow{\Psi} \{\Phi^0,\Phi^1,\ldots,\Phi^r,\ldots,\Phi^{N_r}\}$$

avec Φ^0 le sous-ensemble de formes libres et $\Phi^1,\Phi^2,\ldots$ les différents sous-ensembles de formes liées entre elles.

- **Propagation**

La contrainte de positionnement relatif est activée lorsqu'une des formes F^{i_i} de Φ^r est placée; les coordonnées $(X^{i_i}_{r0}, Y^{i_i}_{r0}, \alpha^{i_i}_{r0})$ définissant parfaitement la position de F^{i_i}. Connaissant les périodes de répétition du motif, T_x en x et T_y en y, on peut définir les positions des formes $F^{i_i} \in \Phi^j$ par :

$$F^{i_i} \xrightarrow{\varphi} \varphi(i_i) = j \xrightarrow{\Psi} \psi(j) = \Phi^j.$$

Pour chaque forme $F^i \in \Phi^j$ on a:

$$X^i_{r0} = X^{i_i}_{r0} + N_x T_x \quad \text{et} \quad Y^i_{r0} = Y^{i_i}_{r0} + N_y T_y.$$

D'une contrainte de positionnement relatif entre ensemble de formes, Φ^j par exemple, on obtient une contrainte de positionnement absolu par instanciation des coordonnées des repères des formes de Φ^j. Nous retrouvons le cas d'un placement à motifs placés où les motifs sont de périodes T_x *et* T_y.

3.3.5.4. Les défauts

Les défauts sont classés en deux groupes: les défauts de structure et les défauts de teinte.

- **Les défauts de teinte**

Les variations de la couleur sont souvent linéaires. Pour éviter de grandes différences de teinte, la zone allouée au placement des pièces composant un même article est restreinte. On exprime cette contrainte comme un positionnement relatif par:

$$\left|X_{r0}^{i} - X_{r0}^{j}\right| \leq d_x \quad \forall i,j \quad i,j \in [1, N_g]$$

où X_{r0}^{i} et X_{r0}^{j} sont les abscisses des repères relatifs de F^i *et* F^j destinées à la fabrication d'un même article et d_x une distance en x. Lorsque le nombre de pièces à produire est réduit, cette contrainte est implicitement vérifiée.

- **Les défauts de structure**

Comme les motifs, les défauts de structure sont définis par un rectangle paraxial exinscrit et sont considérés comme des modèles soumis à des contraintes de positionnement absolu. L'espace alloué au défaut D^l est défini par $(X_{r0}^{l}, Y_{r0}^{l}, L^l, W^l)$ avec (X_{r0}^{l}, Y_{r0}^{l}) coordonnées du sommet origine du repère relatif, et (L^l, W^l), les dimensions en x et y du rectangle paraxial circonscrit.

3.3.6. Etude du critère

Le critère choisi doit d'une part, conduire à une bonne utilisation de la matière, et d'autre part, être adapté au processus de coupe en continu. Dans la formulation générale donnée au paragraphe précédent, nous avons utilisé comme critère la surface du rectangle paraxial exinscrit au placement pris à partir de l'origine du placement.

L'efficience effective est calculée à partir de la surface consommée S_c et de la surface utile S_u par: $\frac{S_u}{S_c}$ avec $S_u = \sum_{i=1}^{N_g} S(F^i)$. Les pertes sont valuées par l'expression générale: $S_p = S_c - S_u$.

Pour favoriser le placement en largeur d'abord et forcer la formation de bandes pour la coupe en continu, nous proposons d'utiliser le rectangle paraxial enveloppe du placement et de largeur égale à la laize. Les raisons de ce choix sont présentées ci-dessous.

3.3.6.1. Les pertes

Les pertes ont deux origines:

- les pertes dues aux surfaces non utilisées, comprises entre les pièces et qui forment les trous;

- les pertes en bordure dues aux variations de la laize et aux surfaces non utilisées, comprises entre la laize et les contours des pièces.

Le problème du placement consiste alors à choisir des agencements de pièces qui s'emboîtent le mieux possible et qui remplissent la largeur du support. La minimisation des

surfaces des trous à l'aide d'une bonne association bosse-creux conduit à un tassement mais pas forcément à une minimisation des surfaces en bordure. Le but de ce paragraphe réside dans l'étude d'un critère permettant de réaliser ce compromis: optimisation locale par un bon emboîtement et optimisation globale par la minimisation des pertes en général (trous et bordures).

3.3.6.2. Adéquation au processus de coupe

Les techniques de placement sont nombreuses. On peut distinguer deux grandes catégories: les placements constructifs et les placements itératifs.

Dans un placement constructif, le placement se construit par l'ajout de nouveaux modules. Les méthodes utilisées dans cette catégorie opèrent sur un ensemble de formes non encore placées, sélectionnent l'une d'entre elles et la positionnent. Les pièces placées ne changent plus de position. Ces méthodes utilisent des règles de sélection et de positionnement des pièces diverses et variées.

Les placements itératifs demandent plus de temps de calcul que les méthodes constructives, mais peuvent produire de meilleurs placements. Les méthodes utilisées dans cette catégorie opèrent de manière itérative à partir d'une configuration de placement, très souvent triviale. Une ou plusieurs pièces sont sélectionnées et leur position modifiée. Le résultat de chaque étape est constitué par un placement nouveau améliorant le précédent.

- **Evolution de la surface consommée**

La découpe en continu suggère l'utilisation de placements courts et de largeur égale à la laize de la matière. Le placement d'une forme consomme une surface égale à celle de son rectangle paraxial circonscrit. Ainsi, le placement de F^{i_1} consomme:

$$S(R_p^1) = S(R^{i_1}) \text{ avec } R_p^1 = R^{i_1}.$$

Le placement d'une deuxième forme F^{i_2} par une méthode constructive conduit à une consommation:

$$S(R_p^2) = S(R_p^1) + S(R^{i_2}) - S(R_p^1 \cap R^{i_2}).$$

De manière générale, au placement de la $k^{ième}$ forme F^{i_i} on a:

$$S(R_p^k) = S(R_p^{k-1}) + S(R^{i_i}) - S(R_p^{k-1} \cap R^{i_i}).$$

R_p^k indique le rectangle paraxial circonscrit au placement des k premières formes. L'utilisation du rectangle circonscrit au placement ne suffit pas à faire évoluer le placement en largeur d'abord. En effet, même si le placement tend vers un rectangle, la dimension en x peut évoluer plus vite que l'extension en y. Comme à une surface donnée correspond une infinité de

rectangles de dimensions différentes, le non remplissage de la largeur peut conduire à des pertes importantes.

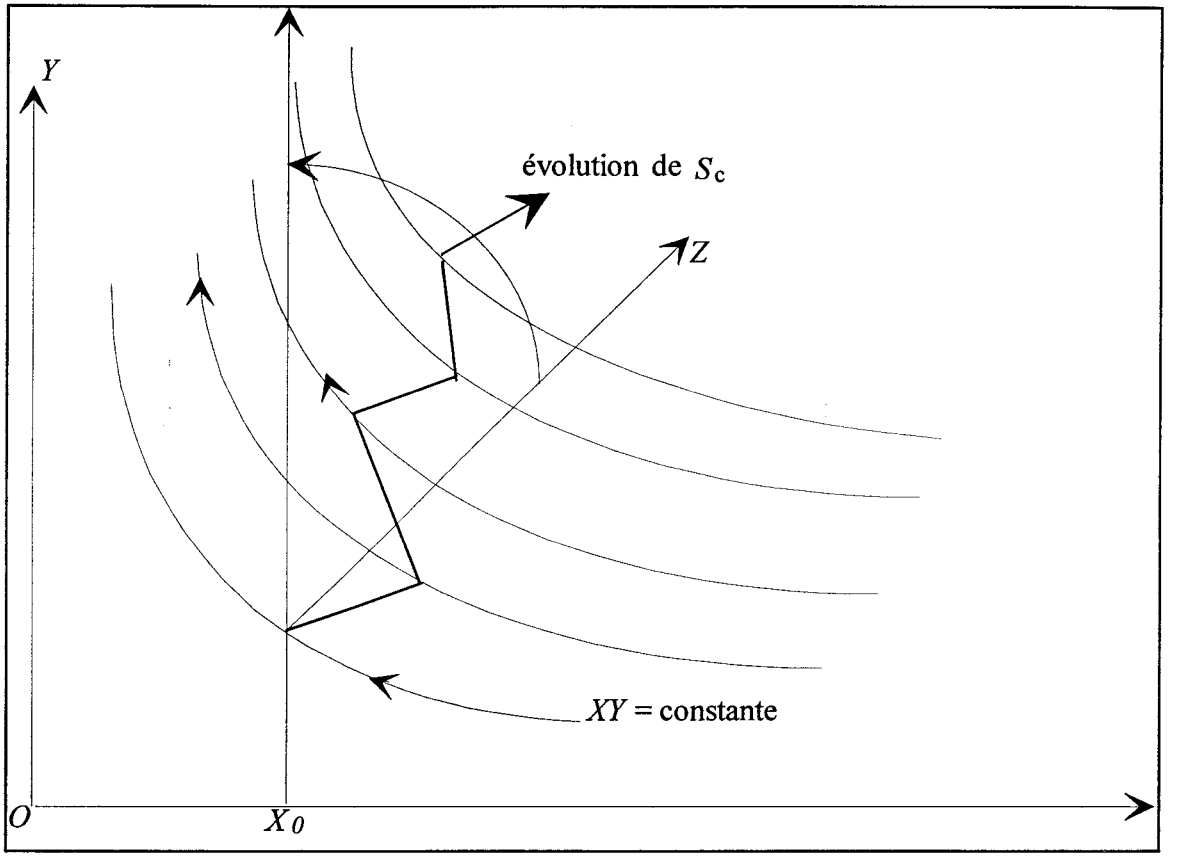

Figure 3 11: Evolution de la surface consommée.

La figure 3.11 montre que l'extension en y doit être supérieure ou égale à l'extension en x. Chaque ajout d'une forme fait passer S_c d'une courbe de même surface à une autre. La direction de l'évolution doit être entre Oy et Oz en moyenne. Plus l'angle $\widehat{yOz}$ est petit plus vite se forme la bande.

De plus le rectangle circonscrit ne tient pas compte des pertes en bordure de laize. En effet, lorsque l'on ne peut plus placer de forme en largeur, le rectangle circonscrit $R_p(L_p,W_p)$ au placement est tel que $W_p \leq W_m$ (confinement) et la surface $L_pW_m - L_pW_p \geq 0$ n'est pas comptabilisée dans les pertes.

- **Placement en largeur d'abord**

Le placement de la première forme définit l'extension en x du placement, l'évolution de l'extension en y conduit à un placement en bande. Les variations de l'extension en y sont limitées par W_m, la largeur du tissu.

Considérons alors que le placement d'une forme F^{i1} de rectangle circonscrit $R^{i1}(L^{i1},W^{i1})$ consomme toute la surface $L^{i1} \times W_m$. On a alors:

$$S_w(R_p^1) = S(R^{i_1})\frac{W_m}{W^{i_1}},$$

et tant que $W_p \leq W_m$,

$$S_w(R_p^k) = S(R_p^k)\frac{W_m}{W_p^k}.$$

R_p^k est le rectangle circonscrit obtenu après le placement de la $k^{ième}$ forme, W_p^k sa largeur. Soit $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ l'ensemble des indices des formes placées:

$$S_w(R_p^1) = W_m \max_{i_j, j=1,k} L^{i_j}.$$

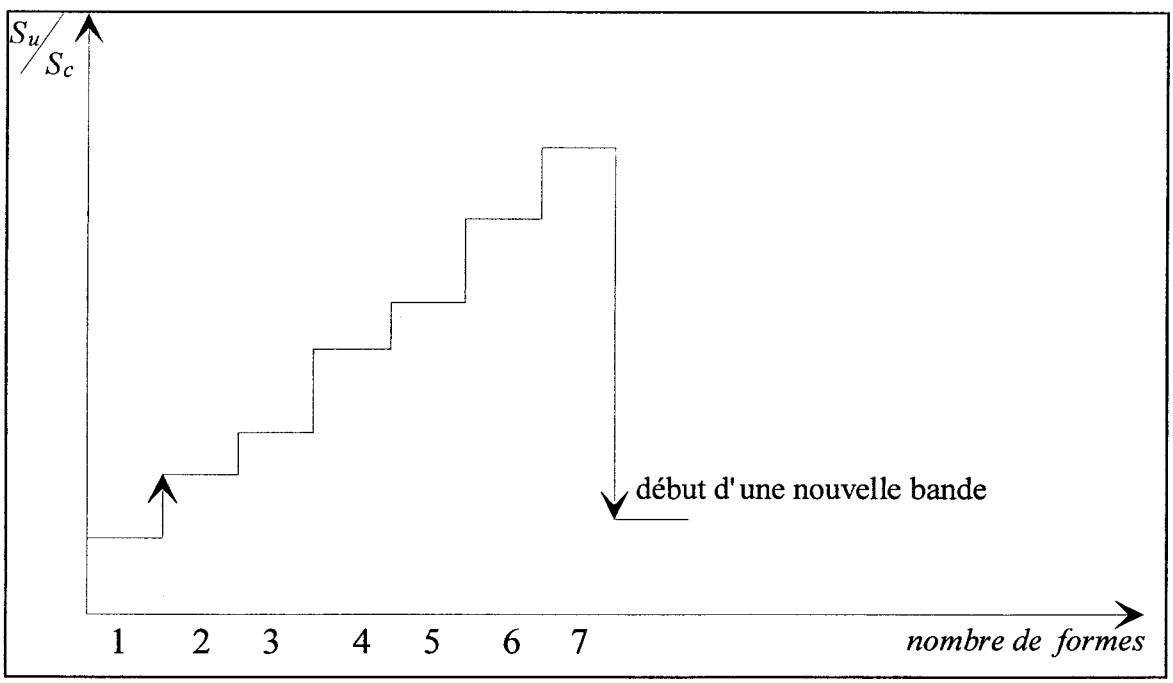

Figure 3.12: Evolution du rendement en fonction du nombre de formes placées.

Le rapport S_u/S_c évolue en escalier comme l'indique la figure ci-dessus. Il est croissant jusqu'au remplissage de la bande en cours, puis décroît au début de la nouvelle bande.

Supposons $S_w(R_p^1) = S_w(R_p^2) = \cdots\cdots = S_w(R_p^k) = Constante$, $\frac{S(F^{i_1})}{S_w(R_p^1)}$ correspond à l'efficience du placement de la forme F^{i_1}. La prochaine forme à placer est celle qui maximise $\frac{S_u}{S_c}$, qui privilégie donc la forme de plus grande surface.

3.3.6.3. Conclusion

Le rapport S_u/S_c est le critère le plus communément utilisé. Si la surface S_u est toujours calculée de la même manière, la valuation de S_c diffère suivant les applications. Le

simple rectangle circonscrit est utilisé pour valuer S_c dans des placements sur des supports dont les dimensions ne sont pas bornées (circuits intégrés, circuits imprimés,...), et dans les découpes classiques sur table (tissus, métaux, bois,...). Il est donc logique d'utiliser un rectangle dont une dimension est bornée par celle du support et dont l'autre varie en fonction des objets à placer. Nous verrons lors de l'étude des algorithmes, qu'il est intéressant d'introduire des règles de sélection basées sur une optimisation locale tout en conservant un critère de choix de bande équivalent à S_u/S_c.

3.3.7. Formulation du placement de base

Nous considérerons dans ce paragraphe des placements en translation pure et nous indiquerons les changements à apporter pour prendre en compte des rotations de $\alpha = \frac{k\pi}{2}$, $k = 1,2,3$. Chaque forme F^i est représentée par l'ensemble des peignes $D_0^i, D_1^i, D_2^i, D_3^i$, son extension en *x*, L^i, égale au nombre de dents des peignes D_1^i et D_3^i et son extension en *y*, W^i, représentant le nombre de dents des peignes D_0^i et D_2^i.

3.3.7.1. Placement de deux formes

On considère deux formes F^i et F^j de rectangles paraxiaux circonscrits respectifs R^i et R^j en translation pure l'une, F^j, autour de l'autre, F^i. Commençons par l'étude des rectangles circonscrits; les différentes configurations étant définies par les relations de précédence.

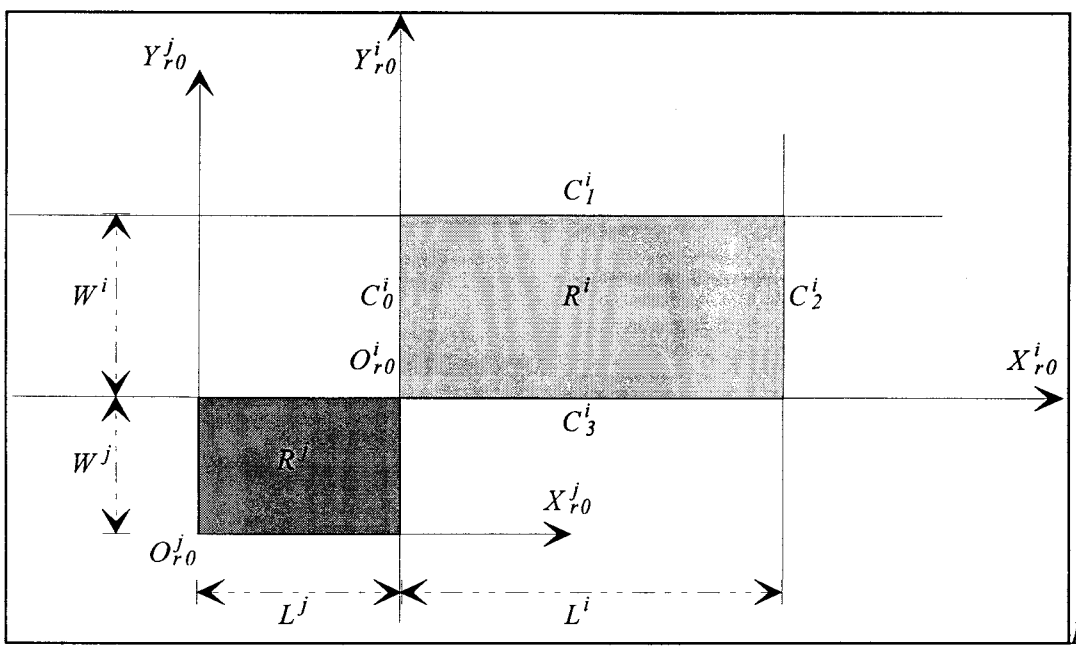

Figure 3 13: Placement en translation.

La translation de R^j le long d'un côté de R^i peut être définie par une relation de précédence comme suit:

- pour une translation le long du côté C_2^i, $X_{r0}^i + L^i = X_{r0}^j \Rightarrow P_x(i,j) = 1$,

- pour une translation le long du côté C_1^i, $Y_{r0}^i + W^i = Y_{r0}^j \Rightarrow P_y(i,j) = 1$,

- pour une translation le long du côté C_0^i, $X_{r0}^j + L^j = X_{r0}^i \Rightarrow P_x(j,i) = 1$,

- pour une translation le long du côté C_3^i, $Y_{r0}^j + W^j = Y_{r0}^i \Rightarrow P_y(j,i) = 1$.

Plus précisément, la translation le long du côté C_0^i est limitée aux positions relatives pour lesquelles l'expression:

$$P_x(j,i) \wedge [(\overline{P_y(i,j)} \vee \overline{P_y(j,i)}] = 1 .$$

On définit de la même manière les translations autour des autres côtés:

$$C_1^i : P_y(j,i) \wedge [\overline{P_x(i,j)} \vee \overline{P_x(j,i)}] = 1 ,$$

$$C_2^i : P_x(i,j) \wedge [\overline{P_y(i,j)} \vee \overline{P_y(j,i)}] = 1 ,$$

$$C_3^i : P_y(j,i) \wedge [\overline{P_x(i,j)} \vee \overline{P_x(j,i)}] = 1 .$$

Proposition 6:

La condition nécessaire pour que la surface du rectangle circonscrit à R^i et R^j soit minimale, est que l'une des extensions reste égale à plus grande dimension d'un des rectangles R^i et R^j.

On recherche donc à aligner les deux rectangles R^i et R^j. La relation de précédence est alors une relation de positionnement et l'on a:

$$[(X_{r0}^j = X_{r0}^i) \vee (X_{r0}^j + L^j = X_{r0}^i + L^i)] \wedge [(Y_{r0}^j + W^j = Y_{r0}^j) \vee (Y_{r0}^i + W^i = Y_{r0}^i)]$$

$$\vee$$

$$[(Y_{r0}^j = Y_{r0}^i) \text{ ou } (Y_{r0}^j + W^j = Y_{r0}^i + W^i)] \wedge [(X_{r0}^j + L^j = X_{r0}^j) \vee (X_{r0}^i + L^i = X_{r0}^i)]$$

Le rectangle obtenu a alors *3* composantes connexes R^i ,R^j et un rectangle représentatif de la différence entre les dimensions de R^i et R^j dont il faudra minimiser la surface. Pour un placement en bande, la progression s'effectue en largeur uniquement, on doit avoir:

$$[P_y(i,j) \wedge [\overline{P_x(i,j)} \vee \overline{P_x(j,i)}]] \vee [P_y(j,i) \wedge [\overline{P_x(i,j)} \vee \overline{P_x(j,i)}]] = 1 .$$

Pour les formes F^i et F^j dont les contours sont irréguliers, rechercher la position optimale de F^i et F^j, revient à trouver la position pour laquelle la surface du rectangle circonscrit au placement est minimale et, pour cela, il faut rechercher à partir de chacune des

positions précédentes un emboîtement et déterminer les dimensions des rectangle circonscrits aux placements. On a un emboîtement des formes si:

$$[\overline{P_x(i,j)} \wedge \overline{P_x(j,i)} \wedge (\overline{P_y(i,j)} \wedge \overline{P_y(j,i)}] \wedge [\overline{P_x(i,j)}] = 1 .$$

On cherchera donc à maximiser, suivant les placements, le rectangle représentant la zone de chevauchement. En pratique, comme pour le placement de rectangle, on cherche à éviter de grands décalages entre les formes en imposant une contrainte sur la largeur du rectangle obtenu. En effet, un décalage important augmente la surface des rectangles A et B (*figure 3.14*). Le gain obtenu par emboîtement est annulé par le décalage, particulièrement pour les placements en bande comme c'est notre cas.

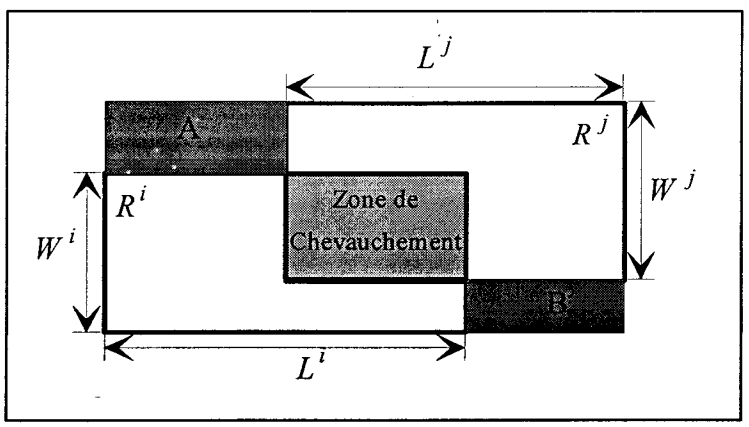

Figure 3.14: Répartition des surfaces dans un emboîtement.

Pour prendre en compte les différences entre les dimensions des formes et simplifier l'écriture, nous considérons:

pour $c=0$ ou 2: $\tilde{D}_c^i(k) = \begin{cases} D_c^i(k) & si \quad 1 \le k \le W^i \\ W^i & si \quad W^i \le k \le W^i + W^j - 1 \end{cases}$

et pour $c=1$ ou 3: $\tilde{D}_c^i(k) = \begin{cases} D_c^i(k) & si \quad 1 \le k \le L^i \\ L^i & si \quad L^i \le k \le L^i + L^j - 1 \end{cases}$

- **Translation sur C_0^i : Gauche(F^j, F^i)**

La translation de la forme F^j sur le côté C_0^i est équivalente à la translation de F^i sur le côté C_2^j: Gauche(F^j, F^i)=Droite(F^i, F^j). La première position à partir de laquelle sont réalisées les translations est définie par les deux égalités:

$$X_{r0}^j + L^j = X_{r0}^i \Rightarrow P_y(j,i) = 1 \quad et \quad Y_{r0}^j + W^j = Y_{r0}^i + 1 \Rightarrow \overline{P_y(j,i)} = 1 .$$

Pour chaque position k, $k = 1,2,\ldots,(W^i + W^j - 1)$ il faut trouver

$$D_{20}^{ji}(k) = \min_{k_1=1,k} (\tilde{D}_2^j(k - k_1 + 1) + \tilde{D}_0^i(k_1))$$

Le vecteur $D_{20}^{ji}(k)$ avec $k=1,(W^i+W^j-1)$, représente les déplacements à effectuer pour réaliser l'emboîtement. Ce vecteur peut être interprété comme une fonction discrète de complémentarité suivant l'axe x avec F^j à gauche de F^i. $\max_k D_{20}^{ji}(k)$ caractérise la position ayant le meilleur indice linéaire de complémentarité.

Le rectangle circonscrit au placement, $R_{20}^{ji}(k)$ a les dimensions suivantes:

$$L_{20}^{ji}(k) = L^i + L^j - D_{20}^{ji}(k) \text{ en x et } W_{20}^{ji}(k) = Max[(W^i+W^j-k),W^i,W^j,k] \text{ en y}$$

En notant u_n, la forme résultante, on peut déterminer, comme pour les formes, $D_0^{u_n}$, $D_1^{u_n}$, $D_2^{u_n}$ et $D_3^{u_n}$ les peignes des sous-contours de la forme résultante dont le rectangle circonscrit est $R_{20}^{ji}(k)$.

- **Translation sur le côté C_1^i:Dessus(F^j, F^i)**

Comme précédemment, Dessus(F^j, F^i) est identique à Dessous(F^i, F^j). La première position est dans ce cas définie par :

$$Y_{r0}^i + W^i = Y_{r0}^j \Rightarrow P_y(i,j) = 1 \quad et \quad X_{r0}^j + L^j = X_{r0}^i + 1 \Leftrightarrow \overline{P_y(j,i)} = 1$$

La fonction de complémentarité peut être calculée de la même manière. Ainsi, pour chaque position: k, $k = 1,2,\ldots,(L^i+L^j-1)$ il faut calculer

$$D_{31}^{ji}(k) = \min_{k_1=1,k} (\tilde{D}_3^j(k-k_1+1) + \tilde{D}_1^i(k_1)).$$

Le rectangle circonscrit au placement, $R_{31}^{ji}(k)$ a alors comme dimensions:

$$L_{31}^{ji}(k) = Max[(L^i+L^j-k),L^i,L^j,k] \text{ en x et } W_{31}^{ji}(k) = W^i+W^j-D_{31}^{ji}(k) \text{ en y}.$$

On peut alors calculer $D_0^{u_n}$, $D_1^{u_n}$, $D_2^{u_n}$ et $D_3^{u_n}$, les peignes des sous-contours de la forme résultante dont le rectangle circonscrit est $R_{31}^{ji}(k)$.

- **Translation sur C_2^i:Droite(F^j, F^i)**

$$X_{r0}^i + L^i = X_{r0}^j \Rightarrow P_x(i,j) \quad \text{et} \quad Y_{r0}^i + W^i = Y_{r0}^j + 1 \Leftrightarrow \overline{P_y(i,j)}$$

définissent la position initiale.

Pour chaque position k, $k = 1$ à W^i+W^j-1, il faut rechercher

$$D_{02}^{ji}(k) = \min_{k_1=1,k} D_0^j(k-k_1+1) + D_2^i(k_1).$$

Il est alors aisé de déterminer, D_0^{yn} , D_1^{yn} , D_2^{yn} et D_3^{yn} les peignes des sous-contours de la forme résultante dont le rectangle circonscrit est $R_{02}^{ji}(k)$. Le rectangle circonscrit au placement, $R_{02}^{ji}(k)$ a, comme pour le côté C_0^i, les dimensions:

$$L_{02}^{ji}(k) = L^i + L^j - D_{02}^{ji}(k) \text{ en x et } W_{02}^{ji}(k) = Max[(W^i + W^j - k), W^i, W^j, k] \text{ en y}.$$

- **ranslation sur C_3^i:Dessous(F^j, F^i)**

A partir de la position initiale définie par:

$$X_{r0}^i + L^i = X_{r0}^j + 1 \Leftrightarrow \overline{P_x(i,j)} = 1 \quad \text{et} \quad Y_{r0}^j + W^j = Y_{r0}^i \Rightarrow P_y(j,i) = 1.$$

On calcule pour $k = 1$ à $L^i + L^j - 1$

$$D_{31}^{ij}(k) = \min_{k_1=1,k} D_1^j(k - k_1 + 1) + D_3^i(k_1)$$

et les quatre peignes D_0^{yn} , D_1^{yn} , D_2^{yn} et D_3^{yn} , correspondant aux sous-contours de la forme résultante dont le rectangle circonscrit est $R_{13}^{ji}(k)$.

Les dimensions du rectangle $R_{13}^{ji}(k)$ circonscrit sont:

$$L_{13}^{ji}(k) = Max[(L^i + L^j - k), L^i, L^j, k] \text{ en y } \quad W_{13}^{ji}(k) = W^i + W^j - D_{13}^{ji}(k) \text{ en y},$$

3.3.7.2. Placement optimal

Le placement optimal au sens surface du rectangle circonscrit minimale ne correspond pas forcément au meilleur emboîtement comme défini ci-dessus. Le but recherché est plutôt un meilleur remplissage de la surface. Il faut en principe calculer la surface du rectangle circonscrit pour chaque position, et suivant la valuation du critère, déterminer les peignes correspondant à la réforme résultante, si la position est retenue avant de procéder à une nouvelle association tout en respectant la contrainte de largeur de la matière. Différentes formulations utilisant les peignes peuvent être proposées. En ajoutant des contraintes supplémentaires de positionnement, on peut utiliser directement les fonctions de complémentarités calculées ci-dessous: $D_{20}^{ji}(k)$, $D_{31}^{ji}(k), D_{13}^{ji}(k)$ et $D_{02}^{ji}(k)$.Ainsi forcer, l'évolution du placement en largeur, revient à n'autoriser que des placements Dessus-Dessous en n'utilisant que $D_{31}^{ji}(k), D_{13}^{ji}(k)$) ou limiter l'intervalle de définition de *k*, valeur initiale, valeur finale, variations pour réduire le nombre de positions et les décalages d'une forme par rapport à l'autre limité. Lorsque le nombre de positions est réduit à un, on retrouve la notion de voisinage vue au deuxième chapitre.

Les applications que nous donnons au chapitre suivant sont basées sur une représentation par espace d'états. Le placement de base peut alors être formulé de la manière suivante:

$$\forall i, \quad i = 1,2,\ldots,N_g$$

$$\underset{i,k}{Min}\left[L^{u_n} \times W_m - \sum_i S(F^i)\right]$$

sous la contrainte: $W^{u_n} \leq W_m$

avec:

$$L^{u_n} = Max\left[\begin{array}{r} L^{u_{n-1}}, (L^{u_{n-1}} + [(L^i - D_{02}^{u_{n-1}i}(k))\, f_{02}^{u_{n-1}i}] - [D_{20}^{u_{n-1}i}(k))\, f_{20}^{u_{n-1}i}]), \\ (L^{u_{n-1}} + [(L^{u_{n-1}} + L^i - k - 1)(f_{13}^{u_{n-1}i} \vee f_{31}^{u_{n-1}i})] \end{array}\right]$$

$$\forall k, \quad k = 1,2,\ldots,L^{u_n} + L^i - 1$$

$$W^{u_n} = Max\left[\begin{array}{r} W^{u_{n-1}}, (W^{u_{n-1}} + [(W^i - D_{13}^{u_{n-1}i}(k))\, f_{13}^{u_{n-1}i}] - [D_{31}^{u_{n-1}i}(k))\, f_{31}^{u_{n-1}i}]), \\ (W^{u_{n-1}} + [(W^{u_{n-1}} + W^i - k - 1)(f_{20}^{u_{n-1}i} \vee f_{02}^{u_{n-1}i})] \end{array}\right]$$

$$\forall k, \quad k = 1,2,\ldots,W^{u_n} + W^i - 1$$

$$\forall n, \quad n = 1,2,\ldots, \quad n \leq N_g$$

$$L^{u_0} = 0 \;\; W^{u_0} = 0 \text{ et } D_{cc+2[4]}^{u_0} = 0 \;\; \forall c \in \{0,1,2,3\}$$

$f_{02}^{u_{n-1}i}, f_{20}^{u_{n-1}i}, f_{13}^{u_{n-1}i}$ et $f_{31}^{u_{n-1}i}$ sont des fonctions logiques prenant la valeur 1 pour, respectivement, les placements Gauche(F^i, u_{n-1}), Droite(F^i, u_{n-1}), Dessus(F^i, u_{n-1}) et Dessous(F^i, u_{n-1}).

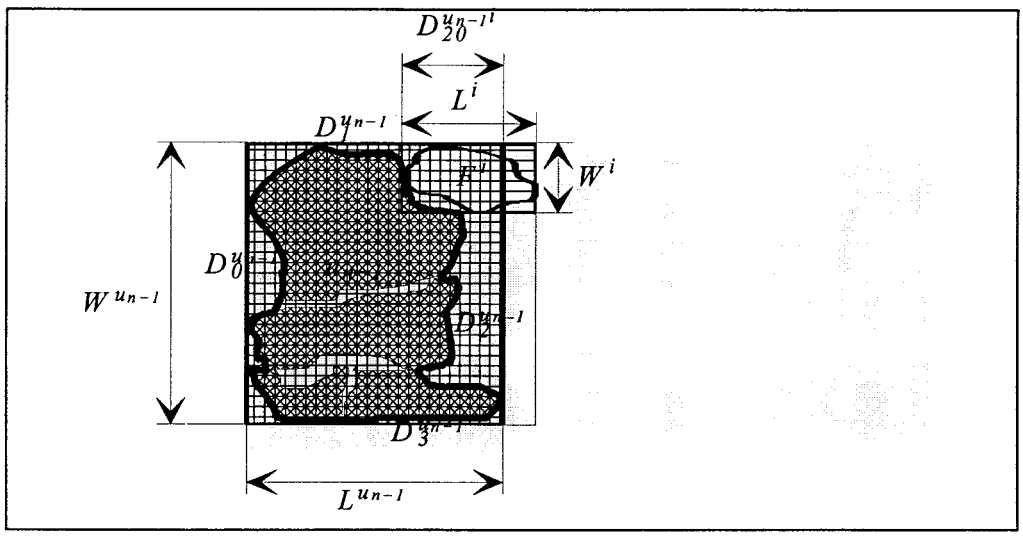

Figure 3.15: Formation du placement.

Et pour un placement en bande transversale, on peut écrire:

$$\forall i, \quad i = 1,2,\ldots,N_g$$

$$\underset{i,k}{Min}\left[L^{u_n} \times W_m - \sum_{i|F^i \in u_n} S(F^i)\right]$$

sous les contraintes:

$$W^{u_n} \leq W_m$$

$$L^{u_n} \leq (1+\beta) L_{max}$$

avec:

$$L_{max} = \underset{i|F^i \in u_n}{Max}\ L^i$$

$$L^{u_n} = Max\left[L^{u_{n-1}}, (L^{u_{n-1}} + [(L^i - D_{02}^{u_{n-1}i}(k)) f_{02}^{u_{n-1}i}] - [D_{20}^{u_{n-1}i}(k)) f_{20}^{u_{n-1}i}])\right]$$

$$W^{u_n} = Max\left[W^{u_{n-1}}, (W^{u_{n-1}} + [(W^{u_{n-1}} + W^i - k - 1)(f_{20}^{u_{n-1}i} \vee f_{02}^{u_{n-1}i})\right]$$

$$\forall k, \quad k = 1,2,\ldots, \quad \text{et } k \leq (1+\beta) \underset{i|F^i \in u_n}{Max}\ L^i - \underset{i|F^i \in u_n}{Min}\ L^i$$

$$\forall n, \quad n = 1,2,\ldots, \quad n \leq N_g$$

$$L^{u_0} = 0 \quad W^{u_0} = 0 \text{ et } D_{cc+2[4]}^{u_0} = 0 \quad \forall c \in \{0,1,2,3\}$$

$f_{02}^{u_{n-1}i}$ et $f_{20}^{u_{n-1}i}$ sont des fonctions logiques prenant la valeur 1 pour les placements Gauche(F^i, u_{n-1}) et Droite(F^i, u_{n-1}) ($f_{13}^{u_{n-1}i}=0$ et $f_{31}^{u_{n-1}i}=0$).

Résoudre le problème du placement revient à trouver un opérateur $O_{(F^i,c,\lambda,s)}$, qui permet de construire u_n en ajoutant F^i à u_{n-1} suivant les paramètres: c pour le type d'association ($c=0$ ou 2 pour le placement en bande), $\lambda \in \{0,1,2,3\}$ pour déterminer, α , l'angle de rotation (α est multiple de $\pi/2$) et s pour indiquer le retournement de F^i (symétrie axiale): $u_n = O_{(F^i,c,\lambda,s)}(u_{n-1})$

3.3.8. Formulation du placement général

On ajoute au placement de base, les contraintes de positionnements relatif et absolu. L'opérateur $O_{(F^i,c,\lambda,s)}$ devient $O_{(F^i,c,\lambda,s,Z_{r0}^i)}$, $Z_{r0}^i = (X_{r0}^i, Y_{r0}^i, \alpha_{r0}^i = 0)$ étant calculé suivant le type de positionnements, comme suit:

$$\left.\begin{array}{l} X_{r0}^{\sigma(k)=i} = X_{r0}^{k} + X_{k}^{\sigma(k)=i} \\ Y_{r0}^{\sigma(k)=i} = Y_{r0}^{k} + Y_{k}^{\sigma(k)=i} \\ (X_{r0,}^{k} Y_{r0}^{k}) \text{ coordonnées du motif } M^{k} \end{array}\right\} \text{ pour les motif placés}$$

et

$$\left.\begin{array}{l} \forall F^{i}, \psi(\varphi(i)) = \Phi^{\varphi(i)} \\ si \;\; \varphi(i) \neq 0 \\ \quad \text{alors} \\ \quad si \ni ! F^{k} \in \Phi^{\varphi(i)} \;\; et \;\; F^{k} \in u_{n} \\ \qquad alors \\ \qquad X_{r0}^{i} = X_{r0}^{k} + N_{x} T_{x} \\ \qquad Y_{r0}^{i} = Y_{r0}^{k} + N_{y} T_{y} \\ \quad sinon \\ \quad X_{r0}^{i} = Y_{r0}^{i} = -1 \text{ (contrainte non encore activée)} \\ \quad findesi \\ X_{r0}^{i} = Y_{r0}^{i} = -1 \text{ (forme non contrainte)} \\ findesi \end{array}\right\} \text{ pour les raccords}$$

3.4. Conclusion

Le modèle géométrique du placement basé sur le groupe des isométries du plan a mis en évidence le nombre important de configurations. La recherche de placements en rotation et translation s'avère très coûteuse en temps de calcul. Au lieu de rechercher une solution optimale dont le temps de calcul peut être très important, surtout lorsque le nombre de formes est élevé, nous préférons une solution sous-optimale obtenue au bout d'une durée de calcul compatible avec l'application envisagée. La limitation des transformations aux translations et rotations d'un angle multiple de $\pi/2$ permet de réduire le nombre de configurations. La représentation des formes à l'aide des peignes de contour est bien adaptée à ces transformations. Cette représentation facilite le calcul des placements. L'introduction de placement en bande par l'utilisation d'une nouvelle contrainte sur les translations conduit à une représentation du placement dans un espace d'états.

Nous présentons aux chapitres suivants la mise en oeuvre de la formulation précédente et les algorithmes utilisés pour apporter une solution au problème de placement de formes irrégulières.

Chapitre quatrième

Plate-forme expérimentale de coupe en continu

4.1. Introduction

Au cours de ces dernières années, l'industrie de l'habillement a dû procéder à d'importants bouleversements technologiques [Dubois 88][Elomri 92][Cao 92][Delgrange 93][D.G.S.I. 94]. Les raisons de ces changements sont parfois différentes suivant les pays, mais elles ont toutes un point commun: une diversification de la demande en matière de styles. En effet, le phénomène de mode s'accélérant, la distribution retardant de plus en plus ses dates de prises de commandes, les entreprises de la confection doivent s'adapter au niveau de la fabrication. Elles sont donc appelées à honorer les commandes dans des délais de livraison de plus en plus réduits, et à compenser le manque de commande importante en volume sur une série, en mettant à la disposition des clients une plus grande variété de modèles. La flexibilité est aujourd'hui une loi du marché et il s'agit de fabriquer le bon produit, au bon moment, en bonnes quantité et qualité. Durant la dernière décennie, la confection en France est passée des longues aux moyennes séries et la perspective est dans le passage aux petites séries.

Cette situation affecte pratiquement toutes les phases de la fabrication d'un vêtement, depuis la fabrication du tissu jusqu'à l'assemblage de l'article. Par suite de l'irrégularité des quantités commandées, la planification correcte des processus de fabrication et particulièrement de la coupe devient très délicate et par conséquent, le nombre de placements à établir s'accroît.

Pour réaliser ces objectifs, de nouveaux outils pouvant améliorer la flexibilité et la réactivité ont été créés: le DAO pour le styliste, les systèmes de CFAO pour la gradation-placement, enfin la GPAO pour la gestion de production [Jouet 88] et enfin l'EDI pour les

échanges de données informatiques de l'entreprise de confection avec ses multiples partenaires (clients, fournisseurs, banques, état, etc.) [Robinet 91][Robinet 93].

Après avoir décrit le processus technologique de confection, nous analysons les points critiques d'un atelier de coupe. Ceci nous conduira à présenter la nouvelle cellule flexible de coupe, définir et préciser les problèmes mathématiques spécifiques à ce mode de production.

4.2. Description du processus de fabrication

4.2.1. L'industrie de l'habillement

Comme toute entreprise de produits manufacturés, le fonctionnement d'une entreprise de confection est très complexe [Delaporte 89]. Sa vie est régie par un ensemble important de fonctions plus au moins dépendantes et l'intervention sur l'une d'entre elles ne peut être envisagée sans disposer d'une connaissance approfondie de son environnement.

Pour rester concurrentielle, l'industrie de la confection doit:

- anticiper par les prévisions et la planification des premiers achats de matières premières,

- répondre vite par la négociation des délais des fournisseurs, par une distribution efficace des produits et une flexibilité des systèmes de production,

- simplifier par une réorganisation des moyens de production et une conception plus aisée des produits.

Ceci se traduit par une gestion intégrée des flux de matières et de produits.

Le flux d'informations est très important, aussi le traitement des ces informations ne peut se faire que par l'installation de moyens informatiques adéquats. L'apport de l'informatique et de la télématique en tant qu'outils d'aide à la prévision, à la gestion, à la communication et à la conception est nécessaire pour le traitement de l'information en temps réel [Robinet 90][Robinet 94] et l'EDI peut constituer une composante majeure de la réactivité de l'entreprise face au marché.

4.2.2. Processus technologique de fabrication

Un vêtement est un produit manufacturé qui, une fois conçu par le styliste, est constitué par un assemblage d'un ensemble de pièces élémentaires. Ces pièces sont obtenues par transformation de la matière première. L'analyse du processus permet de mettre en valeur quatre étapes dans la fabrication d'un article d'habillement (cf. *figure 4.1*).

Il découle [Soënen 77] de ce processus, une structure de fabrication en quatre composantes ou unités ayant chacune une demande propre. La quantité d'articles à produire

est donnée par la demande D_0 (cf. *figure 4.2*) formulée par les détaillants ou distributeurs. Cette demande correspond donc à celle de l'unité de conditionnement.

D_0 est déterminé par le traitement ou par une estimation des carnets de commande. Cette demande définit la charge de travail de l'entreprise pour une saison. L'assemblage d'un vêtement dépend du modèle d'article et les modèles sont très nombreux.

Tous les modèles ne nécessitent pas un assemblage différent, mais l'éventail des techniques d'assemblage est important. L'assemblage peut varier en fonction de la qualité du tissu employé (uni ou à motifs, maille ou chaîne et trame), et de la taille à réaliser.

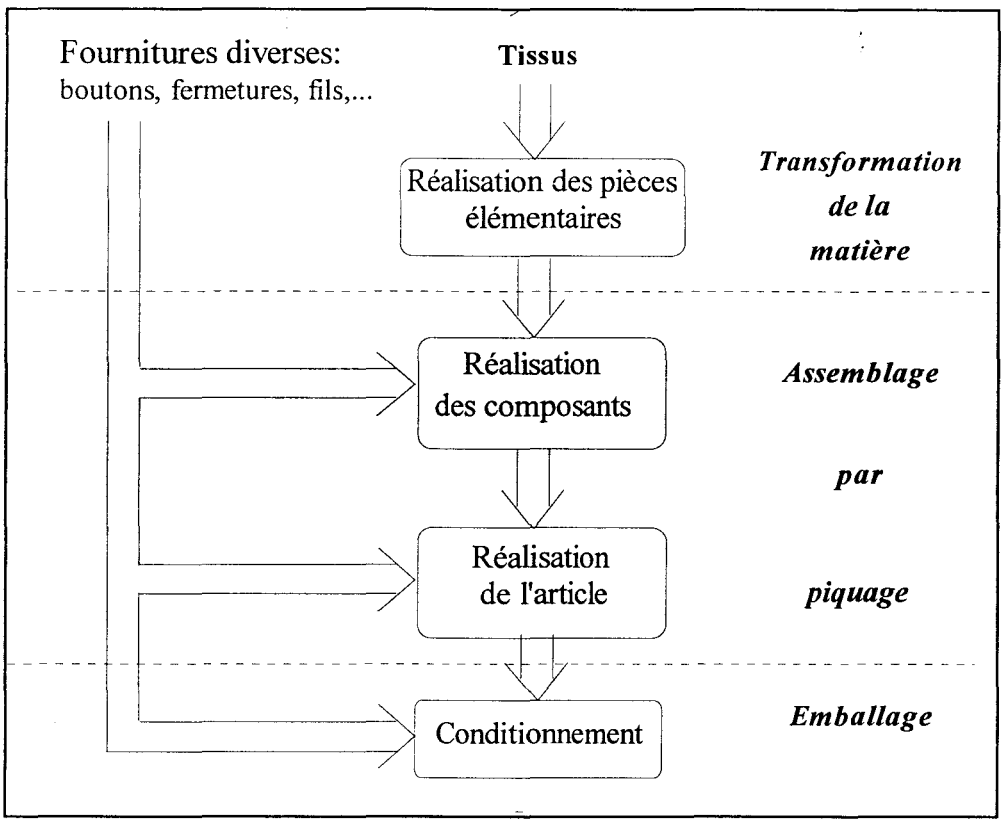

Figure 4.1: Composantes d'une entreprise de confection.

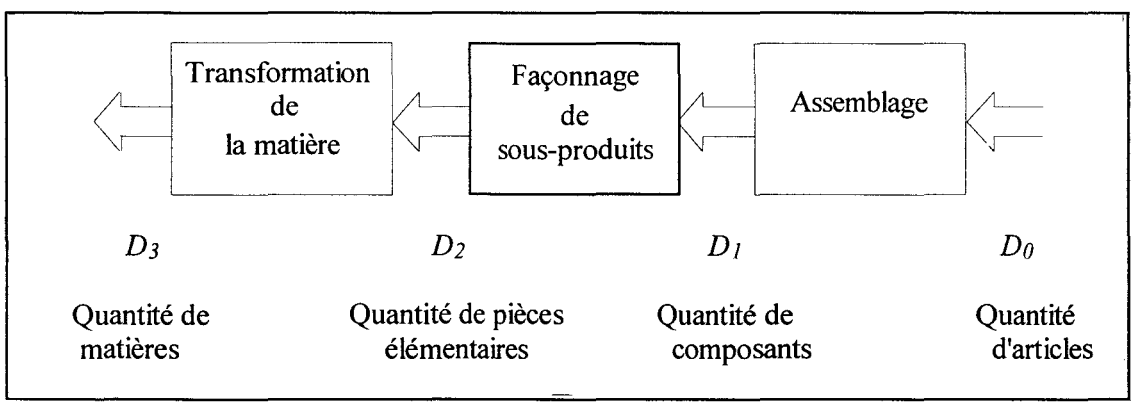

Figure 4.2: Demandes dans l'entreprise.

Un sous-produit ou composant est réalisé par assemblage de pièces élémentaires [Delgrange 93].

L'assemblage d'un article de confection est défini par le bureau des méthodes. Il débute, par la réalisation des composants (cf. *figure 4.3*). La demande D_1 est ainsi déduite de D_0.

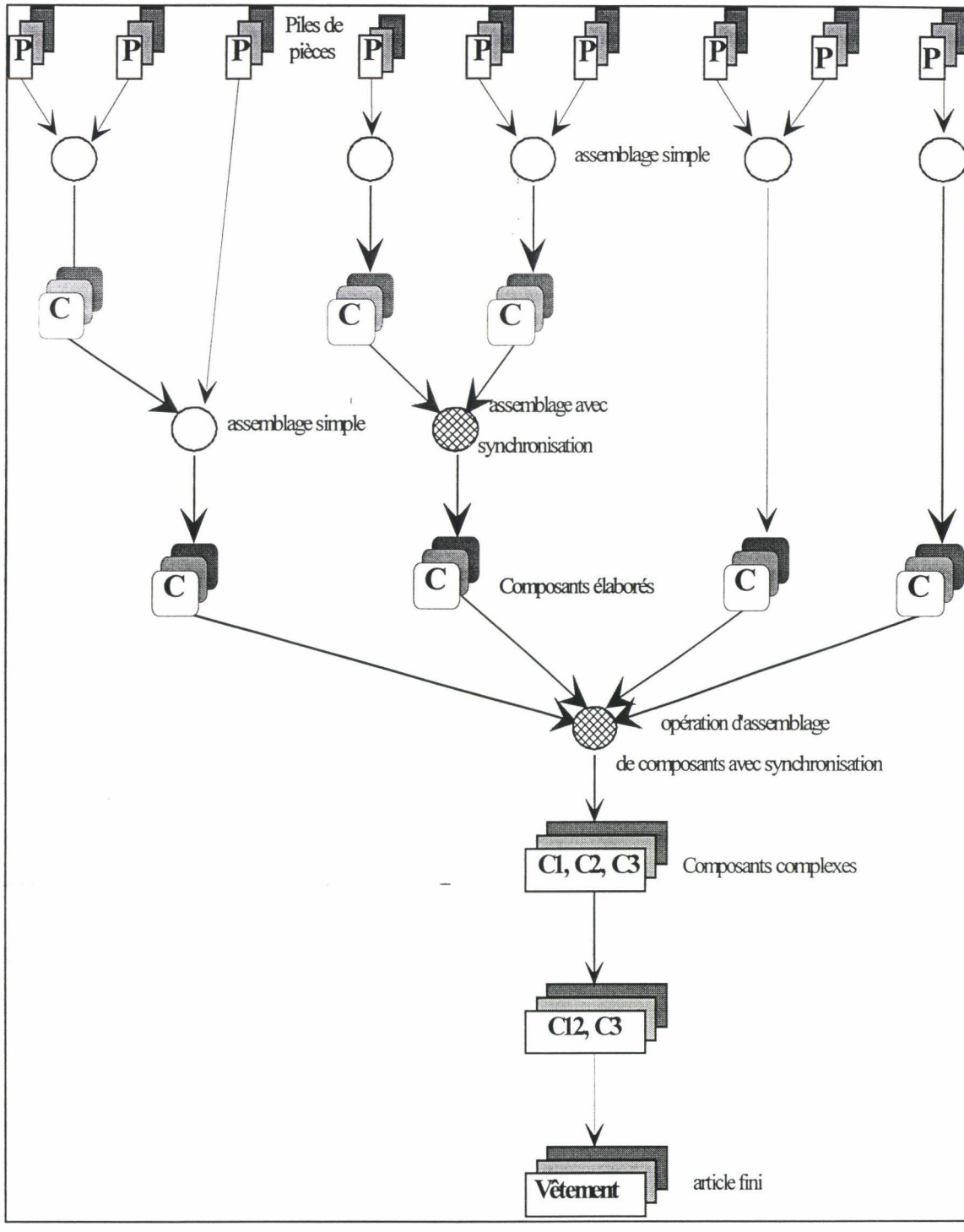

Figure 4.3: Les opérations d'assemblage.

La demande D_2 (cf. *figure 4.2*) représente le nombre de pièces élémentaires à produire pour satisfaire le carnet de commande.

D_2 dépend surtout du style. Le nombre de pièces composant un vêtement est défini lors de la conception du produit. Quant à D_3, il dépend de D_2 mais aussi de la matière au niveau constitution physique (largeur, longueur, dessin, défauts, ...etc.).

4.2.3. Système de production

Le processus de fabrication détermine les interventions technologiques de l'équipement pour la réalisation d'un exemplaire déterminé d'un produit donné. Le système de production est une organisation matérielle et logicielle conditionnant le flux de chaque type de produits.

La demande du marché de la confection peut être décomposée en deux parties:

- la demande qui résulte de la mode développée pour laquelle une production de grandes ou moyennes séries est nécessaire,

- la demande liée à la mode "éclair" dont la production est assurée en petites séries avec des temps de réponse très courts.

La production de grandes et moyennes séries est réalisée par les grandes entreprises et des méthodes scientifiques d'organisation de travail et de gestion ont été étudiées et utilisées. La plus importante est certainement celle due à l'ingénieur TAYLOR. En pratique, chaque opération a été minutieusement étudiée afin d'obtenir le meilleur rendement de l'opérateur à qui on a affecté une machine. Ceci évite des réglages fréquents et source de perte de temps ainsi qu'une trop grande qualification du personnel. En ce qui concerne les flux de matières ou de produits semi-finis, il est devenu nécessaire de gérer des tampons intermédiaires entre les différents postes de travail.

Ces tampons constituent les "en-cours", stocks de matières plus au moins transformées des articles en cours d'assemblage. Un article est terminé après avoir subi les opérations de finition. Ces en-cours permettent un fonctionnement continu de la chaîne de production. Ils sont à l'origine de la contradiction dans la confection où il faut attendre plusieurs jours entre le lancement de la fabrication et la disponibilité du premier article, alors que le temps de fabrication d'un article n'est que de quelques minutes.

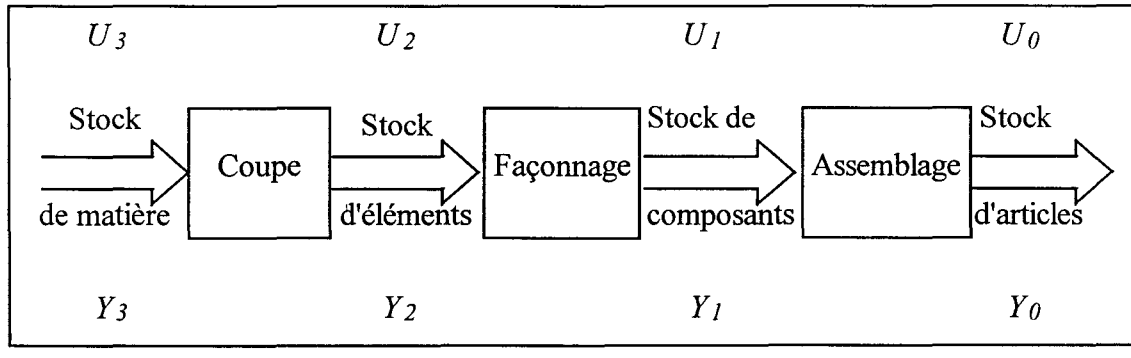

Figure 4.4: Les niveaux de stocks et de fabrication.

Les composantes U_0, U_1, U_2 et U_3 (*cf. figure 4.4*) constituent les niveaux de stocks pour chaque type de produits. Si Y_0, Y_1, Y_2 et Y_3 sont les niveaux de fabrication pour chaque type de produits, sur une durée de campagne divisée en périodes égales, on a alors pour chaque unité i [Soënen 77].

$$U_i(t) = U_i(t+1) + Y_i(t) - D_i(t) \qquad i=0,1,2,3$$

Ce type de production suit généralement un calendrier bien établi, deux collections sont fabriquées par an: Automne-Hiver et Printemps-Eté.

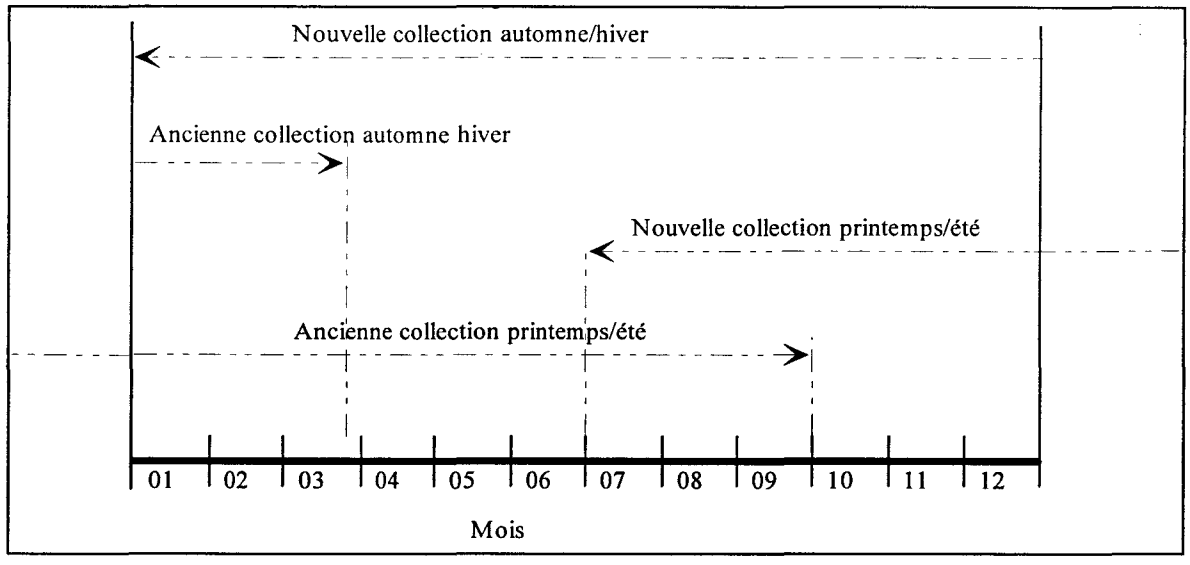

Figure 4.5: Recouvrement entre les collections.

Une collection est conçue, préparée et fabriquée pendant 12 à 16 mois (le temps de fabrication est de 6 à 8 mois).

Ceci implique forcément un recouvrement de fabrication des deux collections, et multiplie évidemment le nombre de modèles à produire (*cf. figure 4.5*).

La production de petites séries n'est pas complètement industrialisée et peut représenter *20* à *30%* de la production. Il s'agit de petites collections, de réassorts, de mesures spéciales, de tailles extrêmes,... etc., ou tout simplement d'articles de mode "éclair" à durée de vie très courte. Dans ce cas, les distributeurs ou détaillants demandent à être livrés au plus près du moment de la vente pour éviter le stockage et surtout les invendus. C'est le juste à temps qui conduit à réduire les temps de fabrication et à rechercher des systèmes de production à cycle court.

4.2.4. Problème du placement et de la coupe

Malgré des évolutions technologiques notoires constatées dans le textile et l'habillement, les temps de réponse industriels en fabrication ont peu diminué. En effet, les

investissements ayant été essentiellement réalisés dans une optique de productivité et de diminution des coûts directs de production, les systèmes productifs ont sensiblement été rigidifiés: alors qu'aujourd'hui les temps d'exécution des produits ont été considérablement réduits, la durée du cycle total de fabrication n'a pas globalement été raccourcie.

Les délais des fournisseurs pratiqués aux niveaux des achats de matières (fils et étoffes) restent importants et les temps de réponse des confectionneurs correspondent difficilement aux exigences des distributeurs.

Dans ce qui suit nous nous intéresserons à l'analyse puis à la conception d'un système de production flexible et rapide.

4.3. Automatisation de la production

Face à l'évolution du marché et de la concurrence, les industriels de la confection font de plus en plus appel à l'automatisation pour acquérir les nouvelles clés de la compétitivité: productivité, qualité, flexibilité et réactivité. L'optimisation, selon ces critères, de la conception et de l'exploitation de l'outil de production constitue un objectif de la productique.

L'internationalisation des marchés, le poids pris par les sources d'approvisionnement à bas prix, le raccourcissement des délais de livraison, ont obligé certaines entreprises à modifier leur stratégie. Une première réponse est apparue au Japon sous la forme de cellule flexible: QUICK RESPONSE SYSTEM [Ruelle 89][Jouet 88].

Les entreprises développèrent alors une stratégie utilisant principalement le temps comme arme, mais l'opportunité de réduire les coûts était également envisagée. Plusieurs projets d'automatisation de l'industrie ont alors vu le jour. L'analyse de ces projets nous fait distinguer deux types d'approches: l'approche par tâche et l'approche intégrée.

4.3.1. Approche intégrée

Pour les projets avec une approche intégrée, l'automatisation concerne une phase entière du processus de fabrication telle que la coupe, le piquage ou la finition (cf. *figure 4.1*). L'argumentation de l'approche intégrée repose sur un ensemble d'idées fortes exposées ci-dessous.

Automatiser une suite logique d'opérations peut s'avérer plus facile que d'automatiser une opération isolée. La remise en cause d'un plus grand nombre d'opérations donne plus de latitude dans le choix de la solution. De plus, le processus de fabrication en confection comporte naturellement trois blocs logiques d'opérations: coupe, piquage (réalisation des modules du vêtement et assemblage des modules), et finition. Ceci facilite la modélisation du processus de fabrication en trois boites noires dont les interfaces sont bien définies. La substitution de l'une de ces boites par un système automatique pose moins de problèmes

d'intégration que la substitution d'un poste de travail unique. L'automatisation d'un bloc logique d'opérations permet la remise en question de l'existence de certains postes de travail ou encore de l'ordonnancement traditionnel de ceux-ci. Certaines solutions techniques ne sont envisageables que dans le cas d'automatisation de grande envergure. C'est le cas, entre autres, de la gestion informatique de production. Pour être efficace, les communications informatiques entre les postes de travail doivent être intégrées dès la conception. Il est alors possible, au travers d'un bon réseau de communication de saisir une information sur le processus de fabrication là ou elle a la forme la plus adéquate.

L'approche intégrée doit fournir de meilleurs résultats de productivité finale. En effet la productivité d'un centre de production est généralement limitée par l'opération la plus lente. L'automatisation d'une phase entière doit apporter un gain de productivité plus sensible.

Il existe actuellement quelques tentatives d'automatisation d'usines textiles qui suivent une approche intégrée. Elles concernent particulièrement les phases de coupe et de piquage. Des travaux de recherche sont nécessaires avant une automatisation globale intégrant le processus complet et ceci pour plusieurs raisons:

- Dans l'état actuel de la productique, seule l'intégration de la partie "Réalisation des composants" peut être envisagée. La manipulation dans l'espace de pièces de tissu pour les coutures 3D n'a pas encore trouvé de solution suffisamment rapide, précise et surtout sans déformation du tissu pour être automatisée sur un plan industriel.
- La situation économique de la confection est telle que rares sont les entreprises qui peuvent supporter l'investissement de tels travaux de recherche. Celle-ci limite naturellement les progrès accomplis qui dépendent beaucoup des moyens mis en œuvre.
- Dans une approche intégrée, il y a inévitablement substitution totale du matériel de production existant. C'est un effort financier inabordable pour beaucoup de P.M.E. Compte tenu des principes de l'approche intégrée, peu de résultats de recherches intermédiaires peuvent être utilisés directement. Le système constitue un tout difficilement dissociable.

Dans les pays industrialisés, plusieurs projets d'approche intégrée ont vu et voient encore le jour. Au Japon, c'est au niveau gouvernemental que des projets de grande ampleur sont promus. Aux Etats-Unis, il y a une concurrence stimulante entre plusieurs commissions parrainant la recherche pour l'industrie textile; nous citerons le "Textile/Clothing Technology Corporation $(TC)^2$ " [Abernathy 86] dont les résultats sont très intéressants. Nous présenteront ensuite la cellule flexible de coupe [Maouche 92] qui a servi de base à nos travaux. Cette commission du $(TC)^2$ est à l'origine d'un dispositif réalisant de façon automatique la manche d'une veste. En se référant à la figure 4.1, c'est tout un groupe de l'étape de "Réalisation des composants du vêtement" qui a été intégré.

Le transfert de poste à poste a été résolu en maintenant rigidement les pièces de tissu sous une série de courroies. Celles-ci, animées d'un mouvement rotatif, font glisser les pièces

d'un poste à l'autre. L'orientation des pièces reste constante au cours du transfert. Cette solution technique présente l'avantage d'être valable quelle que soit la taille ou la forme des pièces de tissu.

Les concepteurs ont placé un poste d'assemblage qui prépare correctement les pièces de tissu pour une préhension aisée avant de les placer dans le système de transfert.

Ce poste comprend un robot équipé d'un préhenseur spécial et guidé dans ses actions par un système de vision. Le préhenseur permet d'aligner correctement deux pièces en vue d'une superposition.

De nouvelles unités de couture ont dû être conçues pour permettre qu'un jeu de courroies puisse entourer la tête de couture. Ainsi le tissu est maintenu rigide tout près de l'aiguille.

Un prototype mettant en œuvre un poste de positionnement, un poste de transfert et un poste de couture ont permis de juger des performances d'un tel système (*cf. figure .4.6*). Bien que les résultats soient encourageants, il reste un long chemin à parcourir avant d'être intégré dans un processus industriel complet. Il s'agit d'un assemblage à plat. La couture en trois dimensions (3D) n'a pas encore trouvé de solution pratique et elle est de plus, industriellement, d'un intérêt limité.

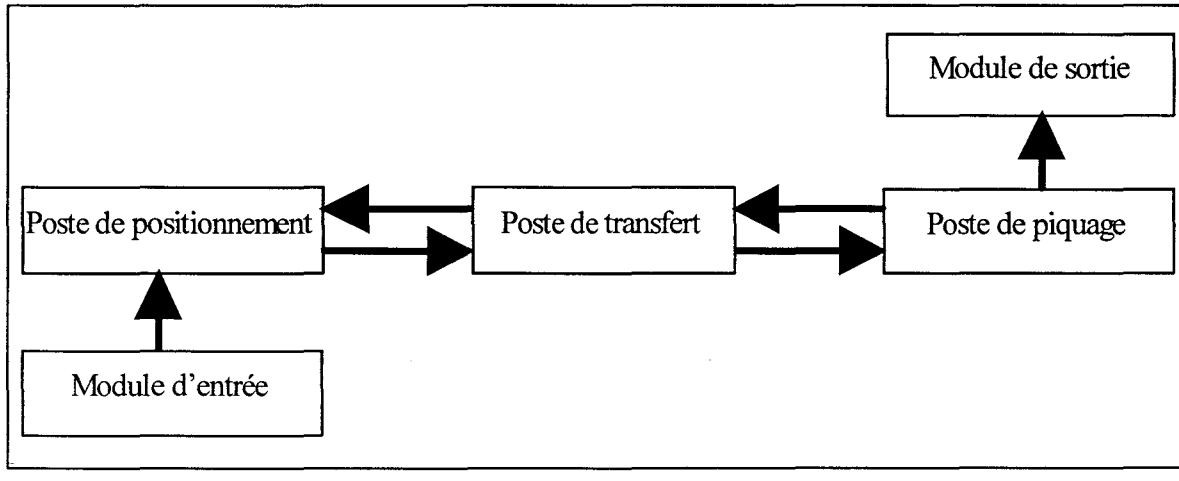

Figure 4.6: Schéma de la cellule TC^2.

4.3.2. Approche par tâche

Un projet d'automatisation suit une approche par tâche s'il n'étudie qu'un seul type de poste de travail. Ce type de projet correspond à une extension logique des travaux qui visent à améliorer uniquement les unités de couture. Un projet d'automatisation avec approche par tâche prend en compte un poste de travail dans sa globalité (**Homme - Machine - Matière**).

Le résultat final est moins ambitieux que celui d'une approche intégrée. Cela trouve néanmoins une grande audience auprès des industriels. Ce sont des systèmes qui peuvent s'intégrer à des projets de modernisation progressive sans remettre en cause les investissements antérieurs.

Sur le plan technique, l'approche par tâche présente certains inconvénients:

• Le poste de travail est un maillon d'une chaîne. L'amont et l'aval de celui-ci sont des contraintes spécifiques à prendre en compte. Comme il est tout à fait probable que le poste de travail étudié puisse être entouré de postes encore manuels, l'interface Homme-Cellule automatique revêt un aspect important.

• L'approche par tâche peut amener le développement de systèmes spécifiques ou dédiés. C'est un travers à éviter. L'étude doit être suffisamment générale pour aboutir à une solution flexible.

L'atout majeur de l'approche par tâche est une plus grande facilité d'intégration dans un processus de fabrication géré selon les nouvelles méthodes d'organisation du travail du type TSS (Toyota Sewing System) présenté ci-dessous.

Il existe plusieurs études qui suivent le principe de l'approche par tâche. Certaines sont en fonctionnement dans l'industrie comme la cellule d'assemblage automatique de cols [Maouche 90][Delgrange 93]. A un niveau plus expérimental, nous citerons le projet japonais pour la couture automatique des manches de veston sur le tronc. Cela représente un premier pas vers les coutures 3D.

Le TSS a été introduit sur le marché japonais en 1978. Ce nouveau système d'organisation de production est le premier à rompre la trilogie **Homme-Machine-Matière** en faisant opérer l'Homme sur plusieurs postes [Delgrange 93][Conf2000 55].Trois principes régissent la philosophie du TSS:

- Le premier concept consiste à réduire le temps de passage de la commande à la livraison, de façon à obtenir une réponse flexible aux variations de la demande,
- le second est d'éliminer le gaspillage, en particulier les mouvements inutiles qui n'augmentent pas la valeur ajoutée,
- le troisième réside dans l'obtention d'une usine propre.

Les éléments relevant du TSS sont:

- une ligne de production intégrée en U pour faciliter le travail debout et comportant plus de matériels que d'opérateurs (au maximum quatre postes par opérateur);
- une polyvalence du personnel et une aide entre opérateurs,
- des en-cours réduits.

4.4. Présentation de l'atelier de coupe classique

Tous les systèmes étudiés (*(TC)*^{2}, *TSS, QRS,* ...ETC.) concernent uniquement l'assemblage de produits. La coupe, début du processus de fabrication, fera l'objet du reste du chapitre. Le rôle de l'atelier de coupe est de transformer la matière première pour alimenter l'atelier de piquage en pièces élémentaires nécessaires à l'assemblage des vêtements.

C'est le début de la chaîne de fabrication en confection.

Le prix de revient d'un article est tributaire de l'efficacité de la main-d'oeuvre, de l'emploi des équipements et surtout de la consommation des matières premières. Pour s'assurer le marché, l'industrie de la confection doit non seulement produire à temps des articles de qualité mais aussi réduire les coûts de fabrication. La coupe est le secteur où l'on peut envisager un grand nombre d'amélioration. Il constitue le domaine à partir duquel l'industrie de la confection peut bâtir une nouvelle technologie.

Afin de mieux introduire la cellule flexible de coupe, nous allons ci-dessous analyser les différentes opérations effectuées dans un atelier de coupe.

4.4.1. Description

Le rôle de l'atelier de coupe est d'assurer l'alimentation en pièces de l'atelier de piquage. Le lancement de la fabrication à la coupe conditionne le piquage et s'effectue en plusieurs étapes.

On commence par un planning de coupe, l'un des éléments les plus délicats dans le processus de fabrication d'un vêtement. Il s'agit principalement de regrouper les articles par tissus et par modèles pouvant être coupés ensemble et de déterminer les combinaisons de tailles qui, par ce biais, permettront d'obtenir la meilleure utilisation de matière et de main-d'oeuvre. Le problème consiste donc à bien combiner les tissus, les tailles, les tracés, les hauteurs, les longueurs et le type de matelas de façon à constituer un plan de coupe optimisé.

Ensuite, le matelassage permet de préparer le support à découper car un matelas comporte généralement plusieurs couches de tissus. Sa longueur est limitée par celle de la table, quant à sa largeur, elle correspond à la laize minimale du tissu (sur l'ensemble des longueurs et des hauteurs considérées).

Et enfin, le placement réside dans la recherche d'un positionnement ordonnancé des patrons d'un ou plusieurs vêtements. Il s'effectue actuellement sur une surface rectangulaire (surface de la table de coupe) et a pour but principal l'économie de la matière employée. Les procédés d'imbrication reposent essentiellement sur les qualités professionnelles de l'opérateur acquises pendant son expérience.

4.4.2. Localisation des pertes

Les pertes peuvent être observées à tous les stades de la conception d'un article.

Elles peuvent se localiser à différents niveaux :

- au niveau du modéliste pour la conception du patron, forme et motifs, coutures, éléments constitutifs,
- au niveau du bureau des méthodes pour la conception du placement, l'allocation métrage, l'organisation des matelas,...etc.,
- au niveau de la coupe et du matelassage avec les fins de pièces inutilisables (coupons), les recouvrements pour les changements de pièces, les extrémités du matelas (en-bouts), la diversité des laizes, le chevauchement des laizes et en fin les erreurs ou mauvais positionnements.

4.4.2.1. Mesure de l'efficience

Le rendement R ou efficience est représenté par le rapport entre les surfaces des gabarits et la surface du tracé; la surface du tracé S_t étant la surface rectangulaire du matelas défini pour un placement, la surface des gabarits S_g étant la somme des surfaces des formes modèles définies à la conception du vêtement.

$$R = \frac{S_g}{S_t}$$

Les pertes S_p sont calculées à partir des deux surfaces précédentes:

$$S_p = S_t - S_g$$

On utilise l'indice:

$$P = \frac{S_p}{S_t}$$

pour caractériser les pertes.

$$S_g = S_u + S_f + S_c$$

S_g est la somme de la surface utile théorique correspondant à l'enveloppe du corps humain (S_u), de la surface fonctionnelle et de confection tributaire de la mode et correspondant au surplus pour l'aisance (S_f) et de la surface de construction ou surface de couture (S_c).

$$S_t = S_g + S_p$$

$$S_p = P_p + P_m + P_l$$

avec P_p les surfaces perdues au placement , en particulier les surfaces comprises entre les patrons, P_m les surfaces perdues au matelassage: les extrémités de matelas, les recouvrements et les coupons et P_l les surfaces perdues à cause de la diversification et des variations des laizes.

4.4.2.2. Répartition de la matière

Il s'agit de définir la répartition de la matière lors de la construction d'un article (*cf. figure 4.7*).

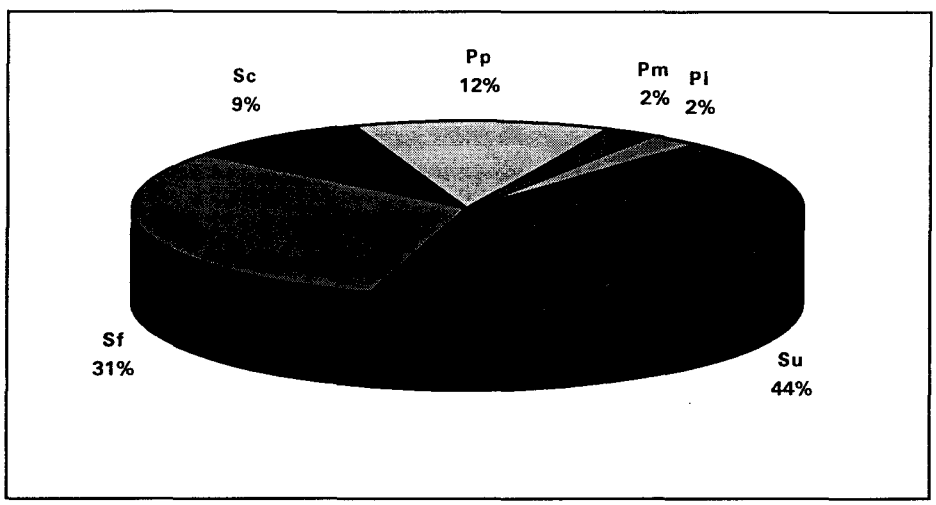

Figure 4.7: Répartition de la matière.

L'analyse de la répartition [Lauriol 85] montre les surfaces utiles composées de la surface théorique et de la surface de construction, les surfaces tributaires de la mode et enfin les pertes inévitables.

4.4.3. Optimisation de la consommation

L'amélioration du rendement peut s'effectuer à tous les stades de la fabrication, à la conception pour réduire la surface S_g des modèles, au placement, à la coupe et au matelassage.

On peut distinguer deux types d'actions pour essayer d'améliorer le rendement: les actions à effet immédiat et les actions susceptibles de réduire les pertes lors d'une opération future.

Une action à effet immédiat consiste surtout à réduire la valeur allouée pour la couture car l'espace de construction ne peut diminuer (lié à la forme du vêtement donc à la mode).

Les actions à effet reporté concernent, d'une part, la transformation des pièces par subdivision et modification des contours et d'autre part, la relaxation de deux contraintes : sens du tissu et droit fil. Ces actions peuvent améliorer fortement le placement.

Le rendement de la matière est d'autant plus grand qu'il y a d'articles à placer. Mais ceci conduit à des matelas longs et des temps d'exécution très importants. On préfère cependant des placements courts pour des lancements fréquents ou de petites séries.

Les pertes dues aux variations de laize sont diminuées par la recherche d'une largeur de laize mieux adaptée et si possible de valeur constante. Il faut aussi éviter les coupons et les recouvrements par utilisation de longueurs de pièces beaucoup plus importantes (ces pertes sont dues au procédé de tissage).

Il faut aussi rechercher des matelassages plus adéquats suivant le sens du tissu et les caractéristiques des pièces. On utilise des matelassages endroit contre endroit pour produire des pièces symétriques par exemple.

4.5. Présentation de la cellule flexible de coupe

L'analyse d'un atelier de coupe classique [Lauriol 85] permet d'une part de présenter sa structure et son fonctionnement afin de mettre en valeur l'innovation que peut apporter une cellule flexible de coupe, d'autre part de montrer les éléments engendrant des pertes de matières. La cellule flexible se propose de réduire les temps de fabrication notamment lors de la coupe de tissus à motifs [Maouche 85]. Sa conception doit permettre de répondre très rapidement à toute modification du carnet de commande.

En effet, une alternative à la technique du matelassage consiste à utiliser un système de découpe en continu sur pli unique. Une telle structure imaginée dans le cadre d'un projet portant sur un atelier expérimental de découpe de vêtements a été réalisée dans le cadre du pôle productique*(cf. figure 4.8)*. Les problèmes théoriques soulevés par cette structure ont été étudiés au Centre d'Automatique de Lille [Maouche 85] [Maouche 92a] [Maouche 92b].

4.5.1. Composition de la cellule

Il s'agit d'une unité de coupe sur feuille unique en mouvement de translation sous l'outil de coupe; la vitesse de 1m/mn a été jugée suffisante par les responsables de la profession. Aux trois modules de base de l'atelier classique, le visitage, le placement et la découpe, viennent s'ajouter le module d'alimentation pour le chargement de la pièce de tissu et le module de déchargement et de stockage. Cette structure fait donc apparaître les cinq modules décrits ci-dessous.

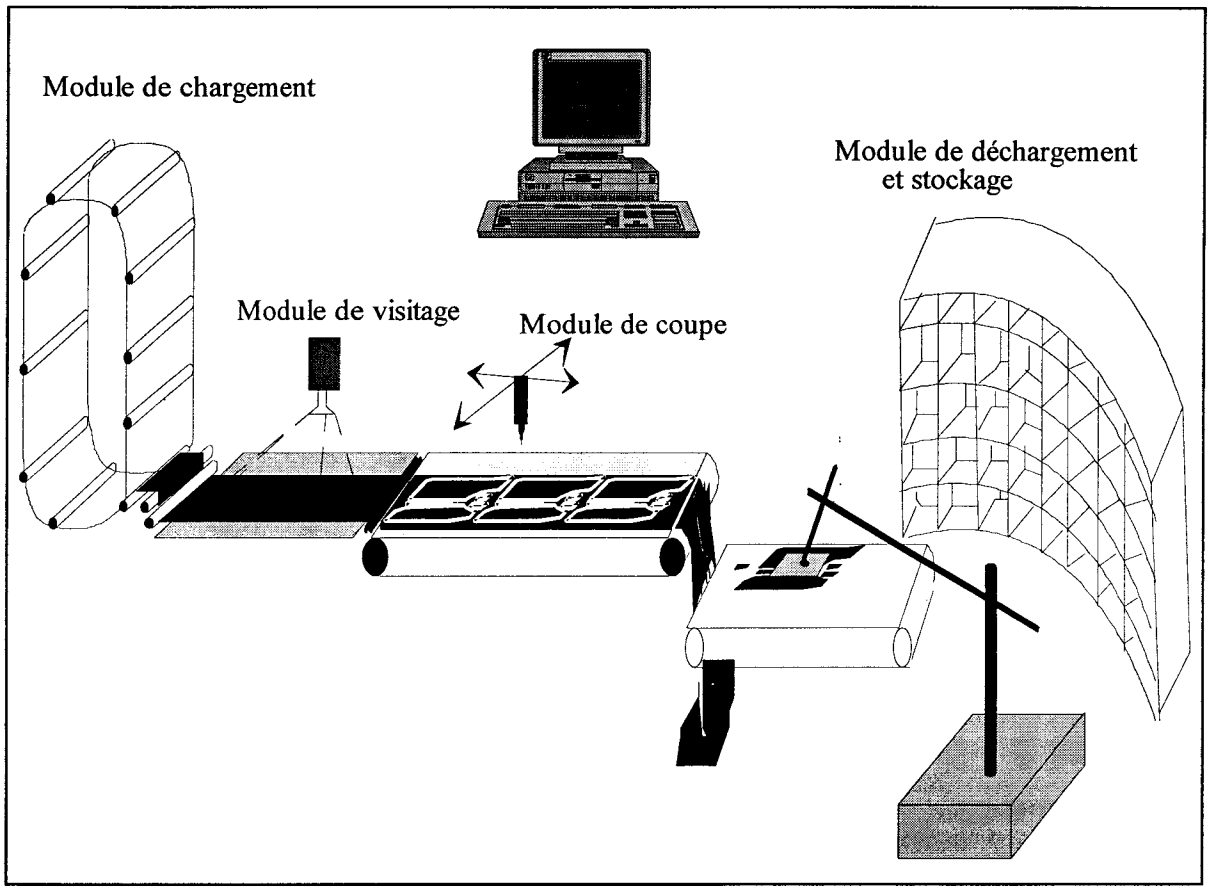

Figure 4.8: Cellule flexible de coupe.

4.5.1.1. Alimentation en matière première

Le chargement de la pièce de tissu s'effectue à l'aide d'un carrousel, structure métallique sur laquelle est disposé un ensemble de rouleaux de tissus. Automatisé, ce système permet de supporter les rouleaux de tissu, et rend possible le déchargement pour le débobinage ainsi que le rembobinage. Le choix de la pièce de tissu à engager sur la table de découpe est réalisé à l'aide d'un processus de gestion des ordres de fabrication [Okat 91].

4.5.1.2. Visitage

Le visitage des tissus est réalisé à l'aide d'un système de traitement d'images. Le module de visitage est capable de réaliser l'acquisition de la largeur réelle du tissu (laize), de reconnaître le motif [Tancrez 87], [Dodona 91], d'en déduire les caractéristiques associées (périodicité, forme), de déterminer la position des motifs placés ainsi que la forme et la position des défauts. On traite surtout des tissus ayant des motifs périodiques: dans le cas des tissus à rayures ou à carreaux, le système de vision fournit les périodes de répétition des raies ou carreaux ainsi que leur inclinaison dans le cas d'une déformation; et seuls les défauts de structure sont pris en compte. Le module est également capable de modéliser la forme du début de rouleau, et de comptabiliser la longueur de la matière débitée. La largeur maximale admise est de 1 m 50. La précision

souhaitée des informations géométriques est de 1 mm. Les motifs détectés sont référencés dans une bibliothèque dont l'accès permet d'obtenir des informations complémentaires.

4.5.1.3. Placement

Le placement doit s'effectuer en recherchant une meilleure utilisation de la matière et cela dans des temps acceptables par le processus. Le critère étant l'optimisation de la consommation matière, il nous semble intéressant de définir la surface utile en fonction des différents tissus et placements. Ceci nous a permis de définir trois catégories:

- le placement sur tissus unis,
- le placement sur tissus à motifs avec respect des raccords,
- le placement à motifs placés.

- **Tissus unis**

Cette catégorie comprend tous les tissus unis ou considérés comme tels pendant le processus de placement. La surface utile dans ce cas correspond à la surface du plan matière et la surface utilisable tient compte des défauts.

- **Tissus à raccords**

Les tissus à motifs pour lesquels le placement nécessite le respect des raccords, le respect de l'effet recherché par le créateur du vêtement, forment cette catégorie de tissus. Le raccord ne concerne évidemment pas tous les empiècements composant un vêtement. Le respect des raccords consiste à assurer la continuité ou à respecter la symétrie d'un dessin ou d'un motif sur l'article assemblé.

Ces tissus présentent souvent des motifs répétitifs avec une faible période de répétition (rayures verticales ou horizontales, carreaux,...etc.) et éventuellement des défauts de structure ou de motifs. La surface utile dépend du nombre de pièces à raccorder et de la fréquence de répétition des motifs. Chaque fois que deux empiècements doivent se raccorder, le placement de l'un dépend de celui de l'autre (contraintes de positionnement relatif).

- **Tissus à motifs placés**

Le placement doit non seulement respecter les raccords pour certains empiècements, mais aussi tenir compte de la position d'un ou de plusieurs motifs sur un ou plusieurs empiècements (contraintes de positionnement absolu). Généralement, une grande période caractérise ce type de tissus. Le problème consiste alors à placer des tailles différentes sur une surface constante.

Le tissu se présente comme une suite de motifs, chaque ensemble de motifs constituant une période et chaque période correspondant à un article. La surface utile peut être exprimée en nombres de périodes.

- **Placement**

Utilisant les informations issues d'une bibliothèque de formes dont les références sont fournies par l'ordre de coupe, l'algorithme doit être en mesure de fournir le placement d'un sous-ensemble de ces formes, lesquelles seront découpées dans la séquence suivante. Il cherche à optimiser une fonction de but de minimisation des pertes de matière, tout en respectant un temps de calcul acceptable par rapport au rythme des opérations connexes. Il doit prendre en compte les raccords des pièces qui seront assemblées, lorsque le tissu employé est à motifs périodiques ou placés. Les défauts doivent également être contournés, afin d'éliminer les pertes liées à la mauvaise qualité des pièces débitées.

C'est à ce niveau du programme que le dialogue homme/machine intervient, puisque les données relatives au carnet de commande sont introduites selon le schéma suivant :

- style demandé,
- modèle à produire,
- quantité dans chaque taille,
- référence du tissu,
- priorité de lancement (normal, urgent, immédiat,..).

Les patrons des vêtements font partie de la bibliothèque de données, dont les différentes tailles sont générées par gradation automatique.

Le lancement de la fabrication s'effectue à partir d'un algorithme de décision. Cet algorithme classe les commandes par tissus identiques (pour éviter les changements fréquents de rouleaux de tissu), par modèles semblables (pour homogénéiser l'assemblage) et par ordre de priorité. On conçoit pour des raisons évidentes de gestion du temps, que les ordres de coupe propres à une matière soient effectués jusqu'à leur terme. Ceci pour éviter les pertes de temps importantes liées à la manoeuvre de changement de rouleau. Cependant, le caractère immédiat d'une commande perturbe volontairement le cycle en cours en se substituant à l'ordre de fabrication courant.

4.5.1.4. Découpe

La découpe s'effectue par suivi de contour (contournage). Le placement, tenant compte des défauts et motifs étant mis en place, le plan de coupe fourni à l'outil de coupe (laser) est imprévisible. Il convient, pour un placement donné de calculer en temps réel l'avance du tissu et de déterminer la trajectoire de l'outil.

Le module de découpe pilote l'outil de coupe. Les informations qu'il utilise sont issues du module de placement. Ce module a accès à toutes les données que le module de placement utilise ou enregistre, en particulier les coordonnées de tous les points $\pi^i_j(x^i_{oj}, y^i_{oj}), j = 1,2,....N^i_F$ du contour F^i de chaque forme placée.

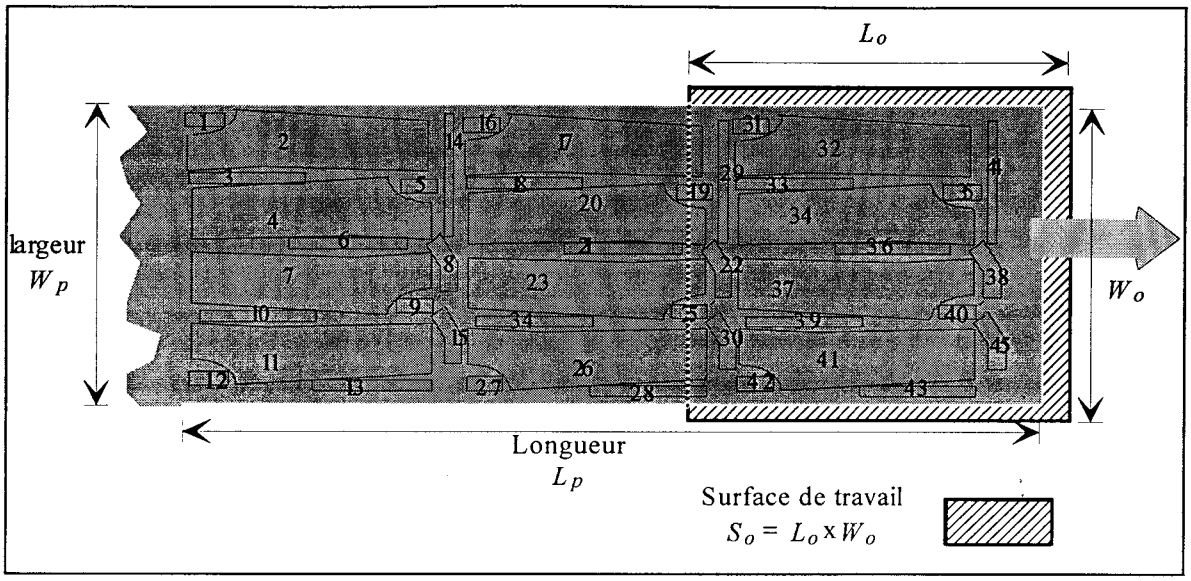

Figure 4.9: Plan de placement et surface de travail.

L'outil peut se déplacer à l'intérieur d'une surface de travail de dimensions L_0 et W_0.

Le plan d'imbrication constitué d'un sous ensemble des pièces du carnet de commandes a une dimension $L_p \times W_p$ tel qu'en général *(cf. figure 4.9)*:

$$Lp \geq Lo \quad \text{et} \quad Wp \leq Wo$$

Le plan de placement P est donc discrétisé en bandes de longueur "T_e" fixée, et le tissu avance d'un nombre variable de pas entiers de longueur "T_e", afin que le processus de découpe soit optimisé *(cf. figure 4.10)*.

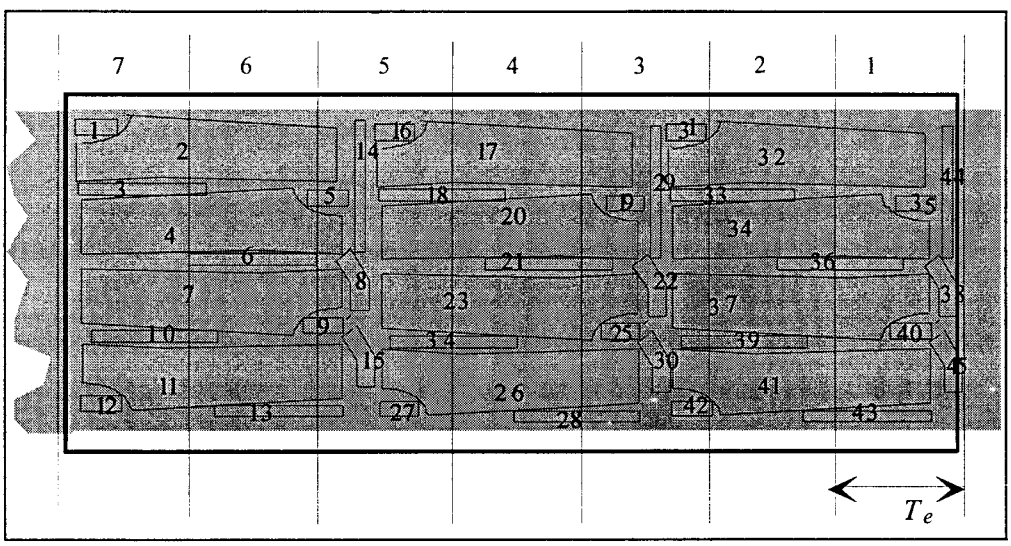

Figure 4.10: Discrétisation du plan de placement.

En effet, le choix d'avancer par pas successifs engendre un morcellement des pièces et une décomposition en contours ouverts de celles-ci *(cf. figure 4.11)*.

Chaque portion de contour doit être découpée et nécessite une commande dynamique de l'outil, telle que l'on ait une phase d'accélération depuis la vitesse nulle, une phase à vitesse constante et une phase de décélération jusqu'à l'arrêt de l'outil. Relativement à la distance parcourue, ce cycle de déplacement nécessite un temps de parcours plus important que si la découpe s'effectuait à vitesse constante, comme cela est possible pour un contour fermé. La gestion de l'avance consiste donc à décider du nombre de pas d'avance du tissu, de façon à ce que les trajectoires à vitesse constante soient les plus longues possibles pour que le temps de production soit minimum. Naturellement, ce problème est associé à la gestion de la trajectoire de l'outil de coupe. Celui-ci est guidé par une commande d'axes sur un plan XY et doit suivre une trajectoire composée de contours fermés, de portions de contours ouverts ou de portions rectilignes sans découpe. Le problème revient alors à la recherche d'un chemin optimal, dit "problème du voyageur de commerce" avec des passages obligés [Okat 91] [Maouche 92a].

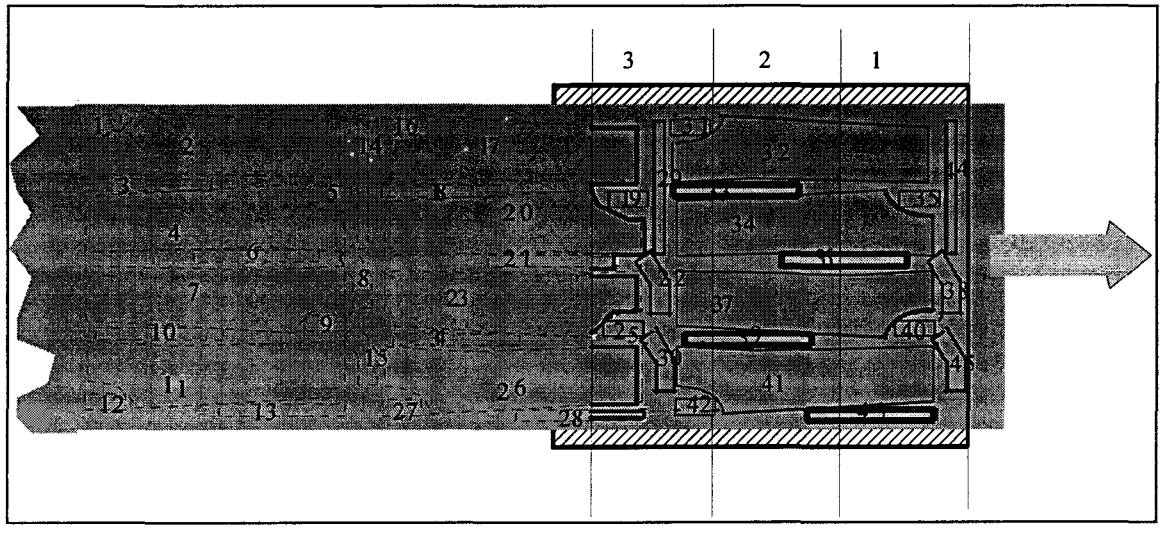

Figure 4.11: Exemple de découpe pour une décision de 3 pas.

4.5.1.5. Déchargement et stockage

Après la coupe, les objets complètement découpés doivent être évacués du tapis roulant sur lequel ils reposent, puis triés et stockés dans le magasin d'en-cours à l'assemblage. Un robot manipulateur doit intervenir de façon autonome pour cette tâche de déchargement. Son travail est rendu difficile par la nature souple du tissu, et la technique utilisée pour le préhenseur est capitale vis-à-vis de l'efficacité de la manipulation. Différents préhenseurs ont été étudiés et mis en oeuvre [Okat 91]. Les données nécessaires au module de déchargement et de stockage sont : la position par rapport au nouveau repère lié au robot, la forme des pièces découpées, ainsi que leurs références. Elles sont fournies au fur et à mesure de la coupe complète d'une pièce.

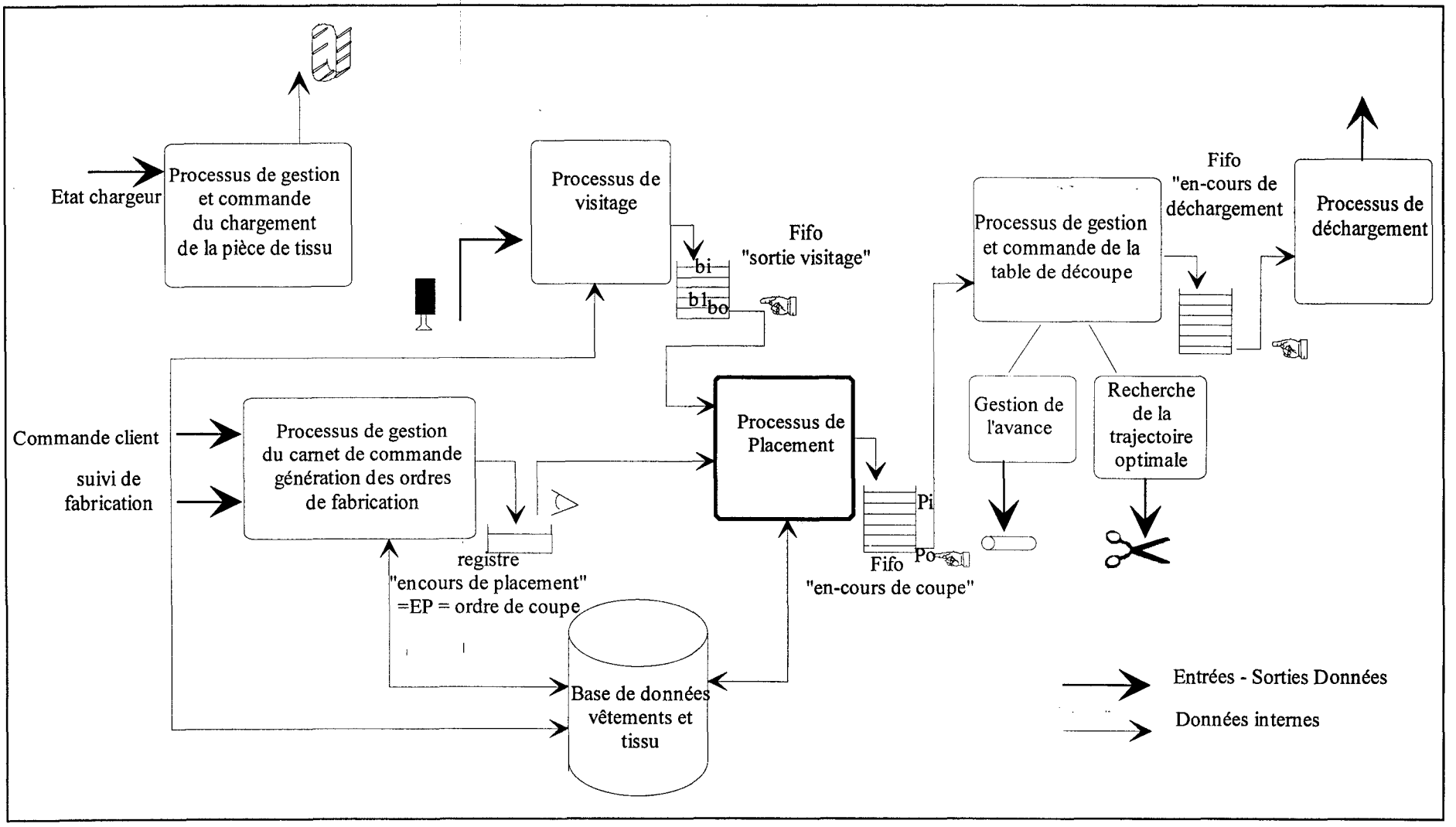

Figure 4.12: Coopération entre les systèmes.

4.5.2. Coopération entre les différents processus

Les différentes tâches participant au cycle de production de la cellule peuvent évoluer en parallèle. Chacune d'elles peut être vue comme un processus indépendant. Chaque processus travaille à son propre rythme, et doit coopérer avec les processus connexes avec qui il partage des ressources communes. La *figure 4.12* illustre la coopération entre les différents processus.

Le diagramme fait apparaître:

- les rectangles symbolisant les processus (chargement de la pièce de tissu, visitage, placement, découpe, déchargement des pièces de vêtements),
- les liaisons orientées correspondant au chemin suivi par les données transmises entre les processus,
- les tampons de données nécessaires en raison des différences de rythme entre chaque processus ,
- Le cylindre symbolisant la base de données générale du système.

Contrairement à la technique du matelassage où les opérations s'effectuent séquentiellement, ici les temps technologiques propres à chaque tâche se chevauchent.

4.6. Détermination des paramètres

4.6.1. Paramètres relatifs à la matière

La matière est déroulée dans une bobine de longueur supérieure à la dimension du placement de toutes les pièces de vêtement à produire. Par hypothèse, on considérera que la matière est bornée à gauche et non bornée à droite, la limite gauche étant simplement la fin de la découpe précédente ou le début d'un nouveau rouleau.

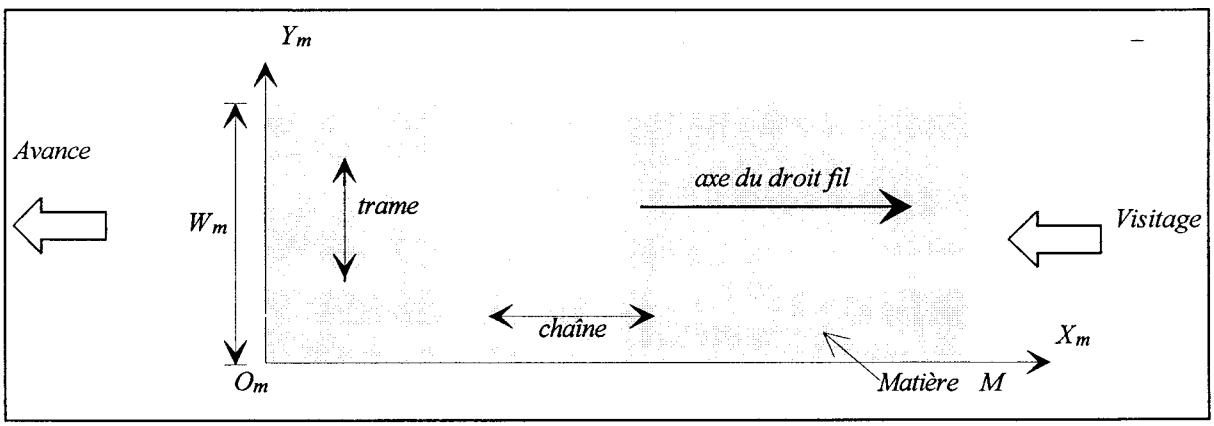

Figure 4.13: Paramètres matières.

Les paramètres retenus pour caractériser la matière sont: la laize, le repère matière, l'axe du droit fil et les caractéristiques des motifs.

4.6.1.1. La laize: W_m

En pratique, pour une laize fixée, l'examen visuel (visitage) de la pièce de tissu fait apparaître une variation de la laize.

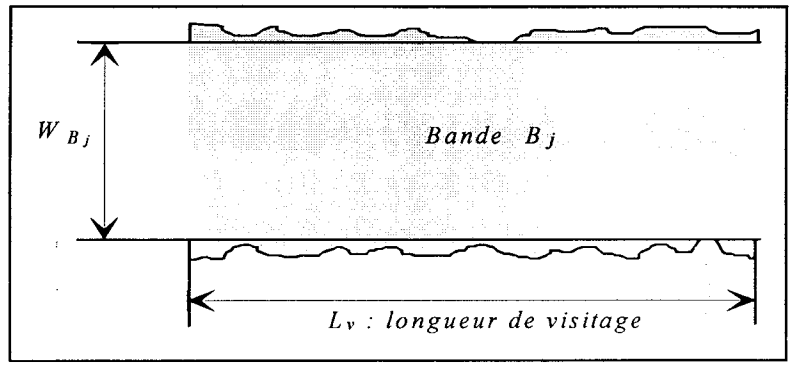

Figure 4.14: Dimensions d'une bande.

Par mesure de simplification, et pour chaque bande de tissu visitée, la largeur W_{B_j} de référence sera constituée par la plus petite laize de la bande B_j.

Par ailleurs, les sous-placements produits chevaucheront assez fréquemment deux ou plusieurs bandes élémentaires de visitage de longueur L_v. Dans ce cas, on conviendra que la largeur autorisée pour ce placement P_i, sera la plus petite largeur parmi celles des bandes destinées à l'accueillir:

$$W_m = \min_{\substack{B_j \\ B_j \cap P_i \neq \emptyset}} W_{B_j}$$

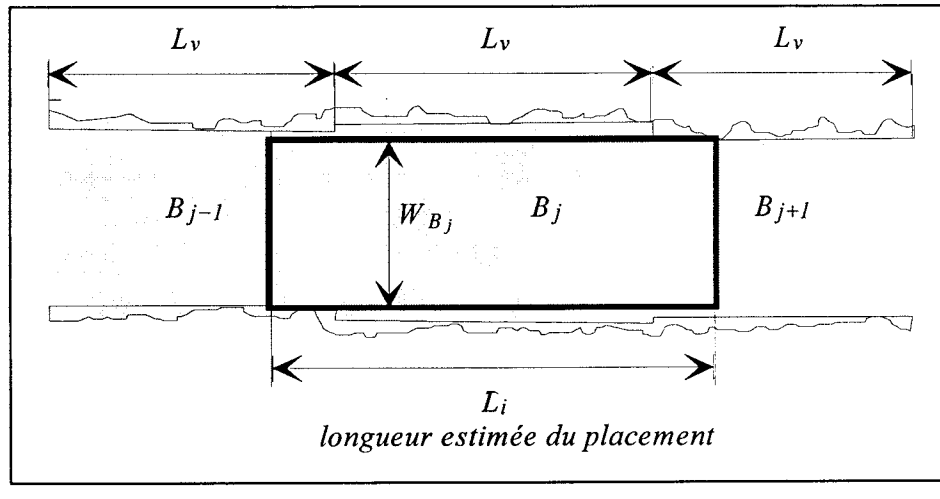

Figure 4.15: Longueur estimée du placement.

Comme on ne connaît pas a priori la longueur du placement, on estime celle-ci $(\hat{L}_i)$ en prenant un rendement matière pessimiste choisi arbitrairement par exemple ρ égal à *60%* sur matière unie, *45%* sur matière à motifs :

$$\hat{L}_i = \frac{\rho \times \text{surface des formes à placer}}{W_m}$$

4.6.1.2. Repère matière: $(O_m X_m Y_m)$

L'axe $O_m X_m$ est orienté vers les modules amont de visitage et d'approvisionnement matière. L'axe $O_m Y_m$ représente la limite gauche du placement. Il arrive que le début de la matière ou que la découpe du placement précédent, présente un profil non rectiligne, laissant un espace pouvant être récupéré (*cf. figure 4.16*).

Dans ce cas, l'axe $O_m Y_m$ demeurera l'axe de référence pour le placement comme pour la modélisation du contour du front du tissu. Le front est alors identifié par la forme F^0, laquelle sera soumise à une contrainte spécifique définie ultérieurement.

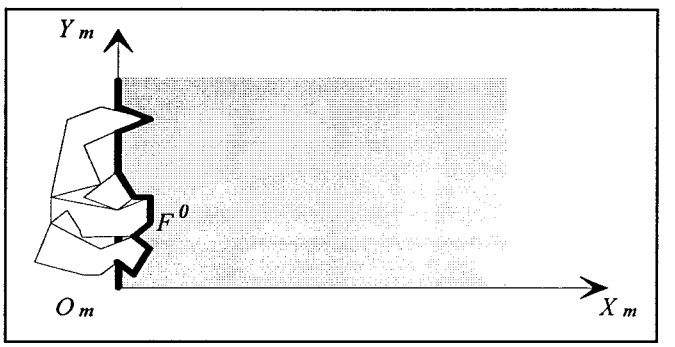

Figure 4.16: Repère matière.

4.6.1.3. Axe du droit fil

C'est un axe fictif parallèle à la direction de la chaîne du tissu et orienté par le sens de l'évolution du placement.

4.6.1.4. Caractéristiques des motifs

Dans le cadre du problème étudié, nous avons distingué essentiellement deux types de tissus:

- les tissus unis ou quasi unis : les tissus quasi unis sont imprimés de motifs dont la petite taille de la périodicité est telle qu'ils peuvent être assimilés à des tissus unis.

- les tissus à motifs : ils peuvent être à rayures, écossais ou à motifs libres. Par projection sur le repère matière, il est toujours possible de définir une périodicité du motif selon la chaîne (T_x) ou selon la trame (T_y) du tissu.

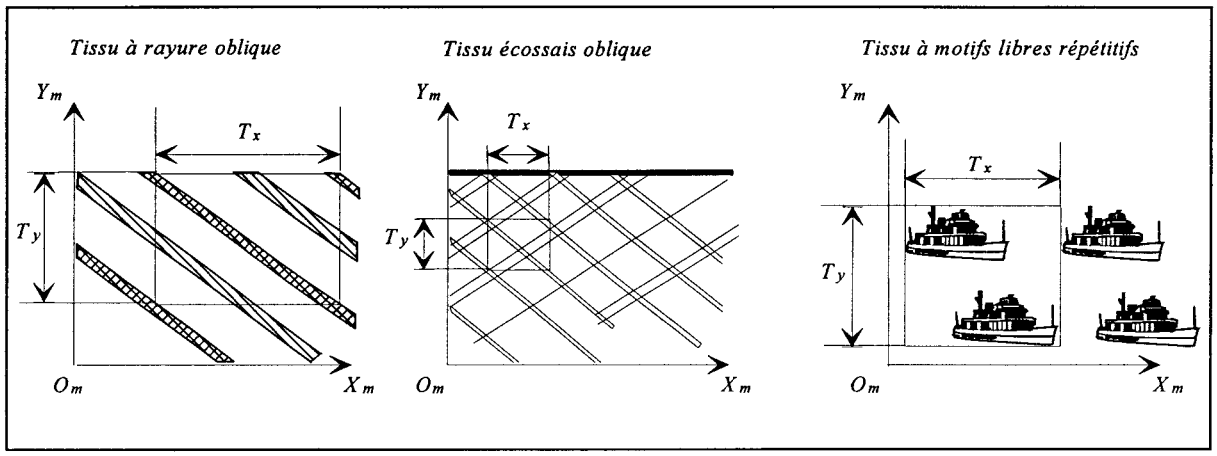

Figure 4.17: Paramètres des motifs.

Dans tous les cas, les motifs répétitifs peuvent être ramenés à un rectangle de dimensions (T_x, T_y), dont les côtés sont parallèles aux axes du repère matière. On supposera par la suite que:

$$0 \leq T_y \leq W_m \quad et \quad 0 \leq T_x$$

Les cas où $T_x = 0$ ou $T_y = 0$ correspondent théoriquement au cas d'un tissu sans motif dans la direction considérée.

4.6.2. Paramètres relatifs aux pièces

4.6.2.1. le contour

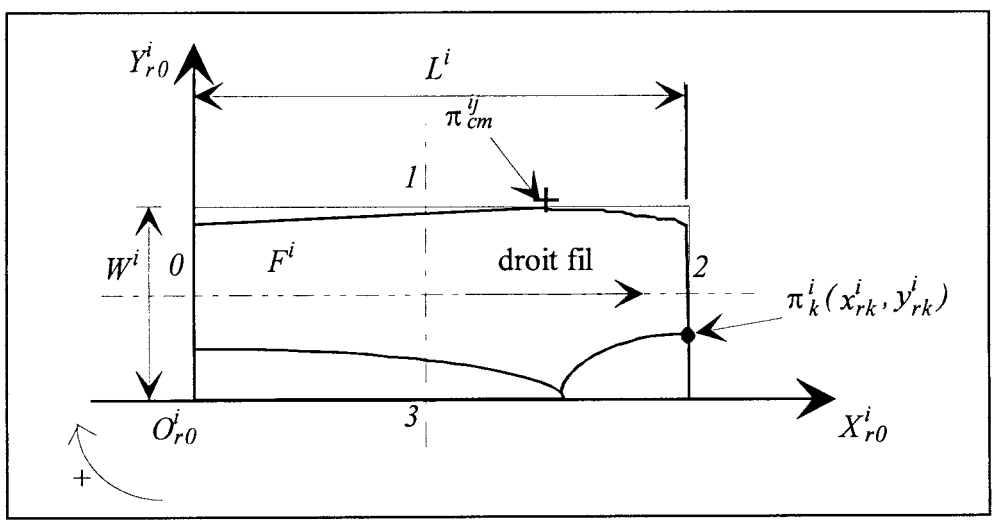

Figure 4.18: Paramètres des pièces.

Le contour C^i de chaque forme F^i est défini initialement par une liste ordonnée de points de coordonnées entières $\pi^i_k(x^i_{rk}, y^i_{rk})$ dans le repère propre $O^i_{rk}(x^i_{rk}, y^i_{rk})$.

Ces coordonnées sont telles que :

$$\left|x^i_{rk+1} - x^i_{rk}\right| \leq 1$$

et

$$\left|y^i_{rk+1} - y^i_{rk}\right| \leq 1$$

Les formes définies ont leur direction de droit fil parallèle à l'axe des abscisses. Leur sens est pratiquement lié au sens du poil du tissu.

4.6.2.2. le rectangle circonscrit

Le rectangle circonscrit R^i est choisi de telle sorte que deux de ses côtés soient parallèles à l'axe $O^i_{r0}X^i_{r0}$. Ses dimensions W^i, L^i, sont telles que :

$$W^i = \left|y^i_{r\,max} - y^i_{r\,min}\right|$$

où

$$y^i_{r\,max} = \underset{\pi^i_k \in C^i}{Max}\,(y^i_{rk}) \quad et \quad y^i_{r\,min} = \underset{\pi^i_k \in C^i}{Min}\,(y^i_{rk})$$

et

$$L^i = \left|x^i_{r\,max} - x^i_{r\,min}\right|$$

où

$$x^i_{r\,max} = \underset{\pi^i_k \in C^i}{Max}\,(x^i_{rk}) \quad et \quad x^i_{r\,min} = \underset{\pi^i_k \in C^i}{Min}\,(x^i_{rk})$$

4.6.2.3. Les repères et crans de montage

Le repère propre $(O^i_{r0}X^i_{r0}Y^i_{r0})$ servira de référence à toutes les données géométriques portant sur la forme F^i.

Le cran de montage π^{ij}_{cm} correspond au point de raccord avec une autre pièce F^j. Son existence est justifiée lorsque la matière réceptrice est à motifs. Dans un but esthétique, les crans de montage permettent d'assurer la continuité des motifs entre les différentes pièces en contact. La pièce F^j possède, elle aussi, un cran de montage correspondant π^{ji}_{cm}. La position des crans de montage est fixée lors de la conception. Ses coordonnées sont : $((x^{ij}_{rcm}, y^{ij}_{rcm}))$. Les ensembles Φ^r sont constitués à partir des crans de montage.

4.7. Détermination des contraintes

Les contraintes ont été définies et discutées aux chapitres précédents. Nous allons fixer les valeurs respectives et définir certaines contraintes dépendant directement de la plate-forme développée.

4.7.1. Contraintes relatives à la matière

Elles concernent toutes les pièces composant un vêtement.

4.7.1.1. Contrainte d'inclusion à la matière

Elle traduit l'inclusion de la pièce dans le tissu.

$$\forall \quad F^i \quad \in \mathrm{P}, \quad 0 \leq Y^i_{r0} \leq W_m - W^i \quad et \quad X^i_{r0} \geq 0$$

La matière n'étant pas bornée à droite, aucune contrainte sur la valeur maximale de l'abscisse n'est proposée. Nous verrons cependant les limites arbitraires que nous nous fixerons pour travailler en placement par bandes. Cependant, une condition sur l'abscisse minimale est ici nécessaire, mais non suffisante si l'on tient compte du profil F^0 du début de rouleau.

4.7.1.2. Contrainte de début de rouleau

C'est une contrainte permettant la récupération des espaces libres de début de rouleau ou de la fin du placement de la bande précédente. Elle se traduit par l'existence d'une région éventuellement non vide F^0, à laquelle s'ajoute une contrainte de positionnement absolu dans $(O_m X_m Y_m)$ telle que :

$$x^0_o = 0 \quad ; \quad y^0_o = 0$$

4.7.2. contraintes relatives à la qualité

4.7.2.1. Contrainte de non-recouvrement

Rappelons que le recouvrement des pièces est interdit. Cela revient à exprimer dans un placement P_l que l'intersection des formes prises deux à deux est vide. D'où la règle:

$$\forall \quad F^i \; et \; F^j \in P_l \quad avec \quad i \neq j$$
$$Int(F^i \cap F^j) = \varnothing$$

La fonction $Int(F^i)$ décrit la région intérieure au contour de F^i à l'exclusion du contour lui même. Son emploi indique ici que des portions de contour de deux formes peuvent être communes, et plus généralement que deux formes voisines peuvent être en contact en au moins un point. Nous rappelons que la notion de précédence induit un ordre sur l'ensemble

des formes et, les seules formes pour lesquelles la contrainte de disjonction peut être violée sont celles dont le placement ne vérifie pas les relations de précédence définies au chapitre troisième.

4.7.2.2. Contrainte du droit fil

Le droit fil est une contrainte absolue imposant à chacune des pièces de vêtement d'avoir son axe de droit fil parallèle ou perpendiculaire à la chaîne du tissu.

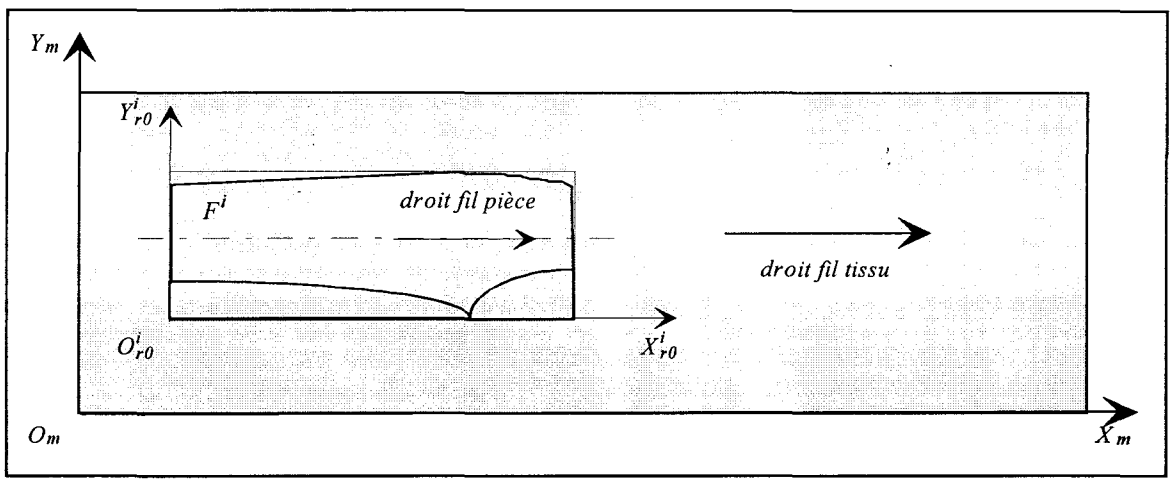

Figure 4.19: Droit fil.

La contrainte du droit fil limite le nombre de positions possibles pour une pièce.

- **les rotations**

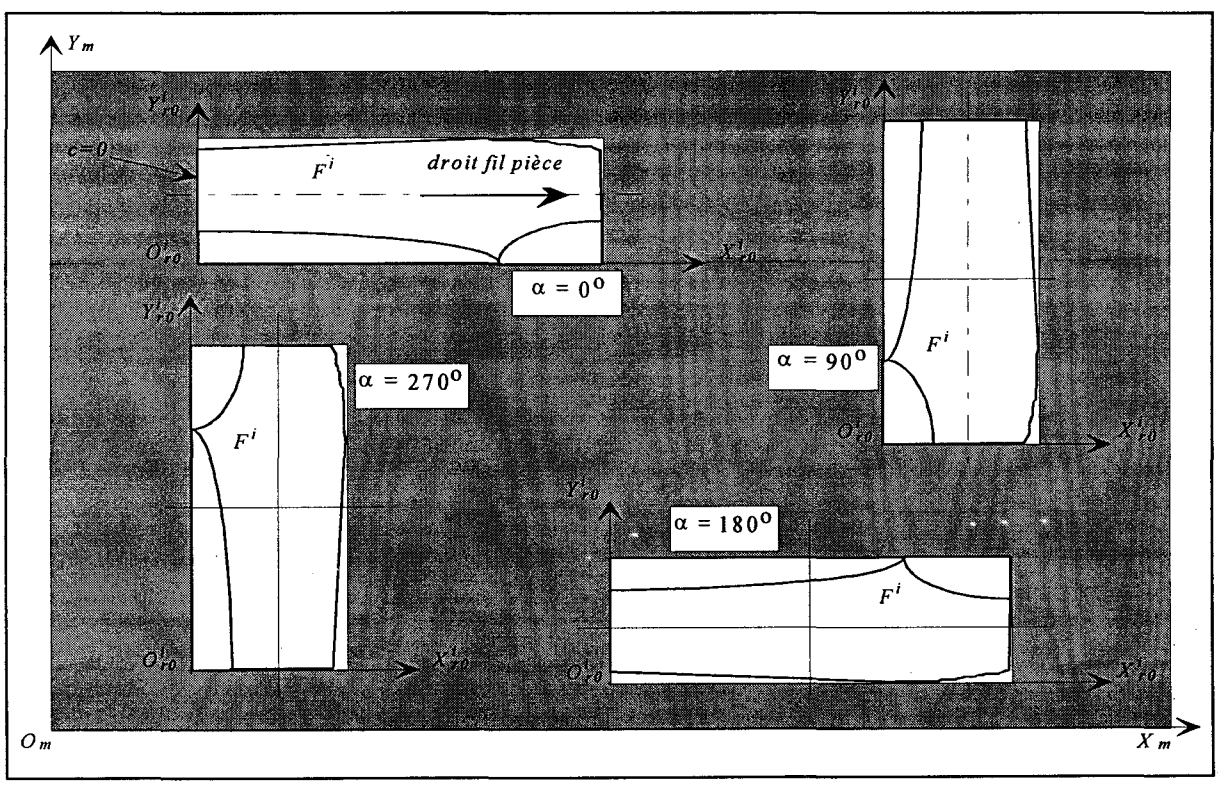

Figure 4.20: Les quatre rotations.

Si α est l'angle formé entre l'axe du droit fil pièce et l'axe du droit fil tissu, alors, pour la forme F^i, la règle peut s'écrire:

$$\alpha = \lambda \times \frac{\pi}{2} \quad , \quad \lambda \in orientations_admises(i)$$
$$orientations_admises(i) \quad \subset orientations_admissibles = \quad \{0,1,2,3\}$$

- **les symétries**

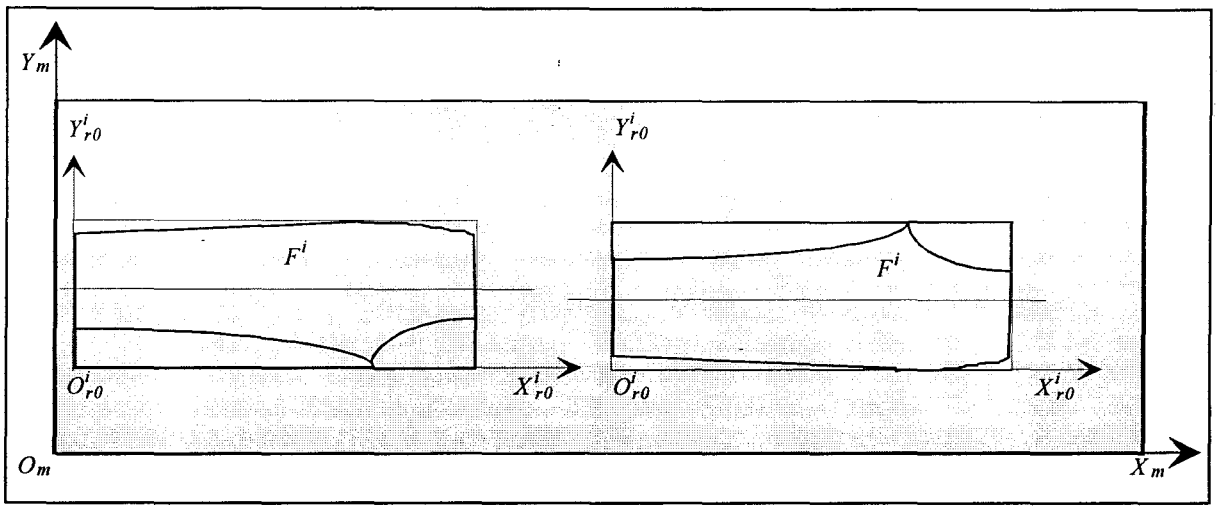

Figure 4.21: La symétrie ou le recto-verso.

Afin de contrôler cette contrainte, il est possible de paramètrer la variable booléenne S_x, dont l'état "1" autorise l'action de retournement.

4.7.2.3. La contrainte "dossé-dédossé"

Il arrive souvent que les tissus aient un aspect différent au verso. Dans ce cas, il n'est pas possible de réaliser le retournement des pièces non symétriques. L'autorisation de la symétrie est invalidée par $S_x = 0$.

4.7.2.4. La contrainte de sens du tissu

Le sens est une propriété fréquente dès lors que l'on travaille avec les tissus à motifs ou les velours. Il est alors impossible de disposer les parties visibles du vêtement à "rebrousse poil" ou à "contre sens" du motif. Par conséquent on interdit aux formes ne possédant pas de symétries intrinsèques, toutes les rotations. L'ensemble des orientations admises pour F^i devient donc:

$$orientations_admises(i)=\{0\}$$

Pour ces formes, la seule orientation permise se limite à la position où les axes orientés de droit fil de la pièce et du tissu sont confondus.

4.7.2.5. La contrainte de chaîne

Pour les tissus unis, il n'est pas rare que l'on puisse faire faire un demi-tour aux pièces, pourvu que l'on respecte l'alignement de la chaîne. Dans ce cas, la contrainte peut s'écrire:

orientations_admises(i)={0,2}

4.7.2.6. Prise en compte des défauts

Les défauts locaux du tissu considérés dans notre étude sont très variés et en particulier ils peuvent correspondre à des taches, des accrocs, des ruptures de fibres, des anomalies de tissage ou des défauts localisés de nuance

Ils peuvent être de surface plus ou moins importante et de forme variable. Leur détection ainsi que leur repérage intervient au niveau du visitage . Le défaut devient alors une région qu'il faut éviter. Les paramètres permettant d'identifier et de localiser un défaut D^k sont (X^k_{r0}, Y^k_{r0}), les coordonnées du centre du repère relatif au défaut dans le plan matière et (L^k, W^k), les dimensions du rectangle circonscrit au défaut.

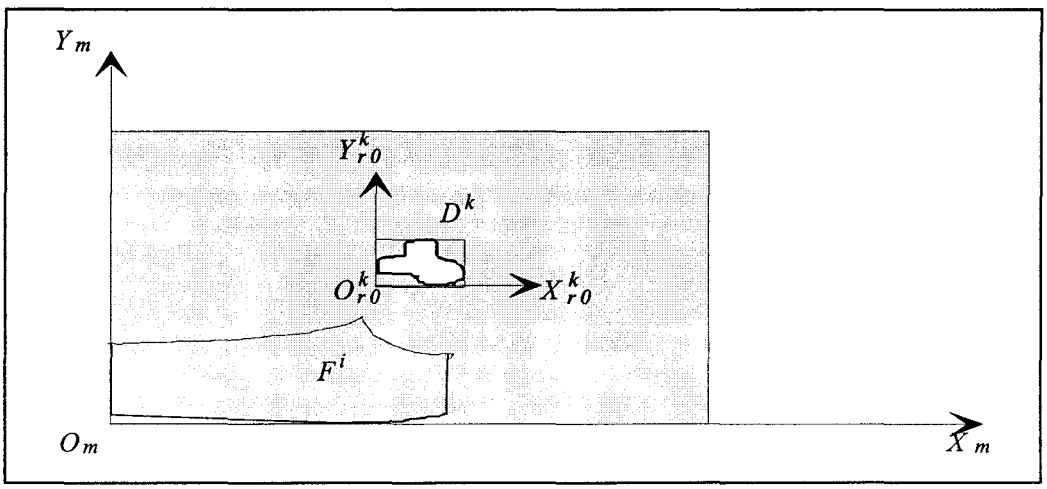

Figure 4.22: Paramètres des défauts.

La contrainte s'exprime par:

$$\forall D^k \in M, \quad , \quad \forall F^i \in P_l$$

$$Int(D^k \cap F^i) = \varnothing$$

Elle traduit ici le fait que l'on caractérise le défaut comme une forme dont la position absolue est imposée et qui doit satisfaire la même contrainte de disjonction que les autres pièces à produire.

4.7.2.7. Contraintes de positionnement

Ces contraintes sont indépendantes et cumulables. Elles s'appliquent individuellement à chaque pièce de vêtement. Elles sont souvent induites par la nature du tissu ou introduites pour des considérations esthétiques.

- **La contrainte de raccord (positionnement relatif)**

Cette contrainte est nécessaire pour assurer la continuité des motifs au niveau des raccords des différentes parties visibles d'un vêtement. Au moment du placement, et en supposant que les périodicités T_x et T_y des motifs sont constantes, les pièces en raccord ont leurs crans de montage espacés d'un nombre entier de fois la période spatiale du motif, et ce dans les deux directions du repère lié à la matière.

La contrainte peut, à partir du point reliant deux formes F^l et F^k $(\varphi(k)=\varphi(l))$ s'écrire sous la forme:

$$\left|x_{rcm}^{kl} - x_{rcm}^{lk}\right| = n_x \times T_x \quad si \;\; T_x > 0$$

$$\left|y_{rcm}^{kl} - y_{rcm}^{lk}\right| = n_y \times T_y \quad si \;\; T_y > 0$$

$$\text{avec} \qquad n_x, n_y \in N$$

$$(x_{rcm}^{lk}, y_{rcm}^{lk}) = (X_{\varphi(k)}^{k}, Y_{\varphi(k)}^{k})$$

$$(x_{rcm}^{kl}, y_{rcm}^{kl}) = (X_{\varphi(l)}^{l}, Y_{\varphi(l)}^{l})$$

Il apparaît nécessaire de limiter l'éloignement des points de raccord tel que:

$$n_x \times T_x \leq L_x \quad et \quad n_y \times T_y \leq W_y$$

soit :

$$n_x \leq Ent(\frac{L_x}{T_x}) \quad et \quad n_y \leq Ent(\frac{W_y}{T_y})$$

$$n_x, n_y \quad \text{entiers}$$

avec L_x et W_y des paramètres liés à la matière.

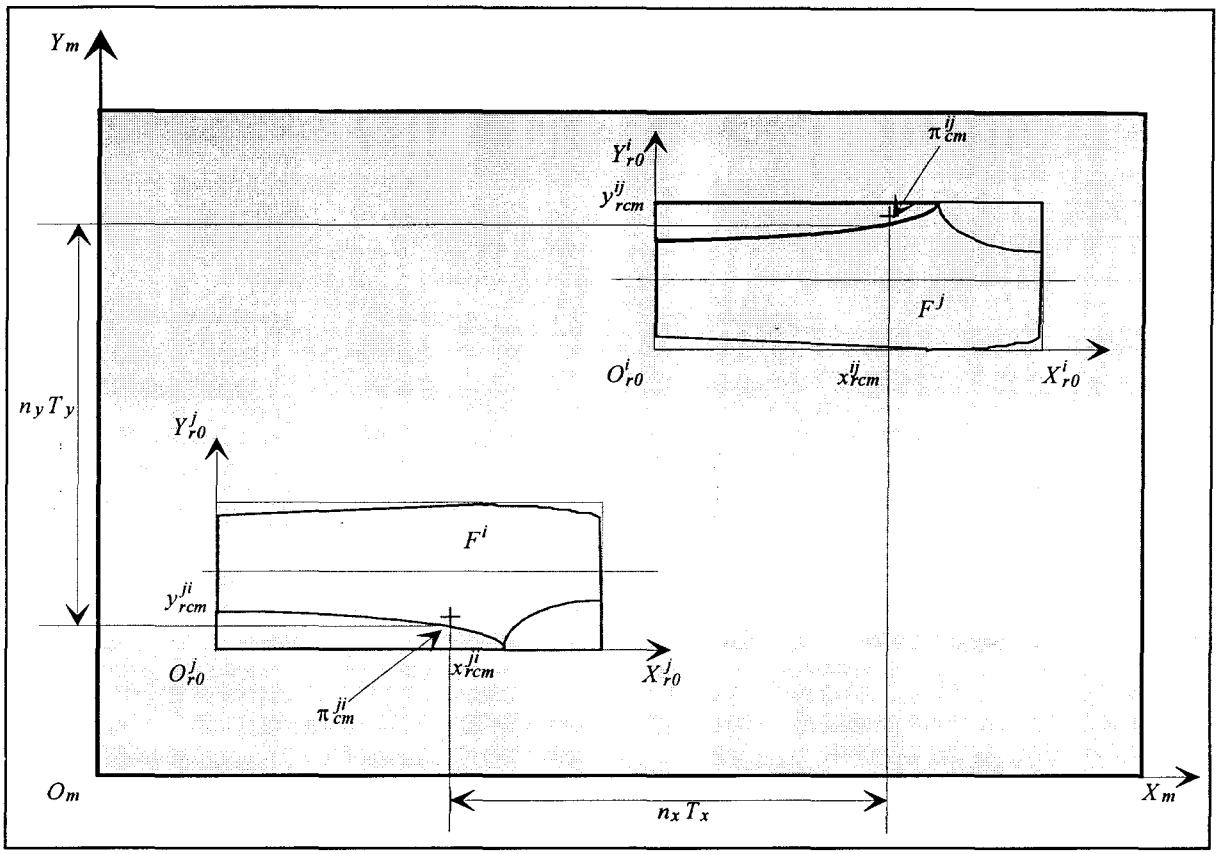

Figure 4.23: Paramètres pour un positionnement relatif.

- **La contrainte de motif placé (positionnement absolu)**

C'est une contrainte plus forte que la contrainte de positionnement relatif. Elle ne concerne souvent que quelques pièces du vêtement. Son but consiste à positionner un motif à un point précis de la pièce, par exemple un bateau juste sur la poche d'une chemise, c'est le motif placé.

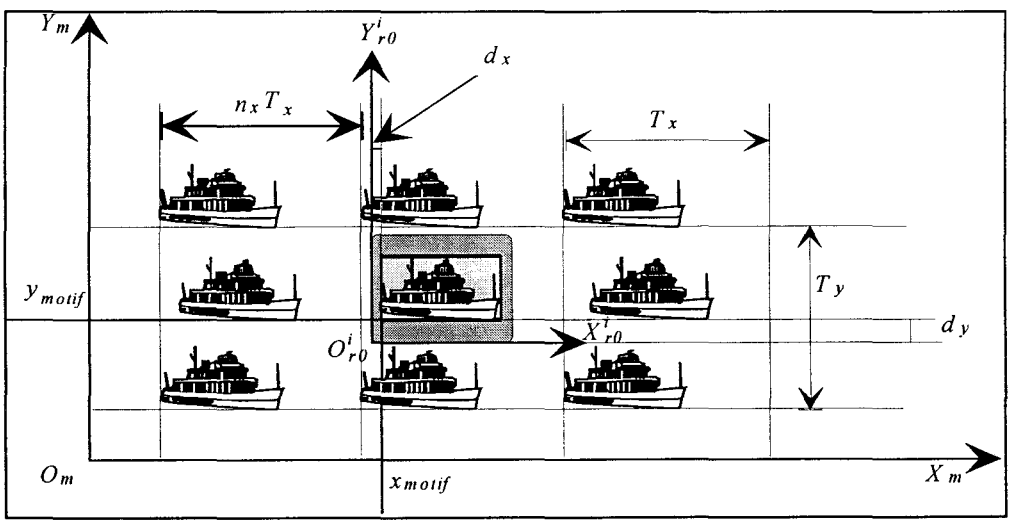

Figure 4.24: Paramètres pour un positionnement absolu.

On convient qu'il s'agit de placer la forme par rapport au motif, lequel est répétitif. Supposant connaître les coordonnées précises du motif (x_{motif}, y_{motif}) se situant au plus près de l'origine du repère matière (calculé à partir du visitage et de l'avance), on peut alors exprimer cette contrainte par:

$$x_{motif} + n_x T_x = X_{r0}^{\sigma(k)} + d_x \quad avec \ T_x > 0$$
$$y_{motif} + n_y T_y = Y_{r0}^{\sigma(k)} + d_y \quad avec \ T_y > 0$$
$$(x_{motif}, y_{motif}) = (X_{r0}^k, Y_{r0}^k) \text{ coordonnées de } M^k$$

d_x et d_y représentent les coordonnées de l'origine de la forme par rapport au repère motif telles que:

$$|d_x| \leq T_x$$
$$|d_y| \leq T_y$$

ce qui signifie que le positionnement ne peut excéder la période du motif.

4.7.3 La contrainte temporelle

La contrainte temporelle concerne le processus global de placement. Le module de placement interagit avec d'autres modules qui évoluent en parallèle et avec des temps de réponse qui leur sont propres. Un mécanisme de synchronisation est mis en place pour garantir la bonne circulation des flux de données. Mais la différence des rythmes de travail engendre des attentes improductives. La cadence élevée qu'il est souhaité d'atteindre pour l'ensemble de la cellule et le voeu de réaliser un fonctionnement permettant une production en juste à temps, fait apparaître la nécessité de tronquer parfois la durée d'exécution des tâches les plus longues. L'efficacité d'un placement se mesure en terme de coût-matière, lequel peut être économisé par un algorithme adéquat, au prix d'un temps de calcul directement appréciable. Une réduction du temps de traitement est alors synonyme de solution non optimale, c'est-à-dire de perte supplémentaire et la réalité industrielle oblige souvent à ce genre de compromis.

Lorsqu'il s'agit de faire un compromis entre l'efficacité du placement et le temps d'obtention de celui-ci, [Redlinger 88] suggère de fixer une borne inférieure V_{min}, à la "vitesse de décroissance relative de l'optimum temporaire de la fonction de but".

Soit g_n et g_{n-1} les valeurs des deux minima consécutifs de la fonction de but g aux instants respectifs t_n(placement u_n) et t_{n-1} (placement u_{n-1}) tels que:

$$g_n \leq g_{n-1}$$
$$t_{n-1} \leq t_n$$
alors
$$\frac{g_{n-1} - g_n}{g_{n-1}} \times \frac{1}{t_n - t_{n-1}} < V_{min}$$
où $\frac{g_{n-1} - g_n}{g_{n-1}}$ est la décroissance relative de g

La contrainte $\frac{g_{n-1} - g_n}{g_{n-1}} \times \frac{1}{t_n - t_{n-1}} < V_{min}$ signifie qu'il est inutile de prolonger la recherche d'une solution meilleure, compte tenu qu'il faudrait attendre un laps de temps supérieur à $(t_n - t_{n-1})$ pour espérer atteindre une nouvelle décroissance de $\frac{g_{n-1} - g_n}{g_{n-1}}$ de la fonction de but. Evidemment, le choix de V_{min} conditionne l'arrêt de la recherche et donc l'instant t_n de la solution retenue.

4.8. Conclusion

Ce chapitre a eu pour objectif de présenter le cahier de charge du problème du placement en présentant la cellule flexible de coupe sur feuille unique. Nous avons commencé par décrire le processus classique de placement et coupe afin de dégager notre problématique. La philosophie générale de l'atelier flexible de coupe consiste en la décomposition d'un problème de placement en sous-placements. Chaque sous-placement est une bande. Nous avons donc déterminé les paramètres relatifs aux matières et pièces et les contraintes s'exerçant sur le processus de coupe en continu. Ces paramètres et contraintes sont utilisés pour la représentation et la résolution du problème du placement développées au chapitré suivant.

Chapitre cinquième

Résolution: représentation et algorithmes

5.1. Introduction

Ce chapitre est consacré la résolution du problème du placement. Nous présentons les algorithmes de recherche d'une ou plusieurs solutions. Les contraintes temporelles et les choix technologiques (surface de travail de l'outil) exposés, nous engagent à diviser l'ordre de coupe. On ne réalisera pas un seul placement P optimal, mais une succession de sous-placements P_i(eux même sous optimaux) que l'on appelle ***bande***. Une bande est construite par imbrication de formes deux à deux. Nous commençons à évaluer la complémentarité des formes afin de définir un critère d'optimisation locale. Nous donnons ensuite une représentation du problème globale de placement. S'agissant de trouver une solution sous optimale à un problème de nature discrète, nous proposons de comparer trois méthodes différentes d'optimisation combinatoire. La première, appelée Recuit Simulé, est une méthode d'optimisation stochastique. Viennent ensuite deux autres méthodes "empruntées" à la recherche en graphe en Intelligence Artificielle, l'algorithme A_ε et R_δ. Si la première peut en théorie trouver l'optimum global, les contraintes temporelles nous amènent à interrompre la recherche avant l'aboutissement à l'optimum. On estimera alors sa capacité à fournir une solution satisfaisante en temps limité. La deuxième heuristique introduit une fonction de risque de passer à côté d'une bonne solution. Les deux méthodes A_ε et R_δ sont par définition ε-admissible, mais peuvent aussi prétendre à l'admissibilité si le paramètre de réglage ε est nul. Une autre méthode basée sur les algorithmes évolutionnistes est actuellement à l'étude dans le cadre d'une thèse. Nous terminerons ce chapitre par une heuristique étudiée pour un placement temps réel.

5.2. Placement en bande

On propose de réaliser un placement P par une succession de ***bandes***. Chaque bande doit être optimisée avec les considérations de finitude et de consistance décrites ci-dessous.

5.2.1. Finitude d'une bande

La limite gauche d'une bande correspond au début de la matière s'il s'agit de la première bande P_l ou à la fin de la bande précédente, s'il s'agit des bandes P_i suivantes.

La limite droite d'une bande est fixée a priori par un intervalle de tolérance ou a posteriori à l'instant de fin de recherche décidé par la contrainte temporelle.

En fait, une bande étant censée pouvoir contenir les formes les plus longues, la longueur sera donc au moins égale au maximum des longueurs des formes non placées. D'autre part, on peut autoriser un décalage longitudinal limité entre les différentes formes si cela permet de faire varier avantageusement la fonction de but. En effet, on remarque expérimentalement qu'un petit déport entre deux formes permet parfois une imbrication très rentable (*cf. Figure 5.1*).

Ceci peut s'écrire au moyen la double inéquation suivante:

$$\forall P_l \quad L_l min = \underset{\substack{F^i \in E_p \\ a_i \neq 0}}{Max} L^i$$

$$L_l min \leq L_l \leq (1+\beta) L_l min$$

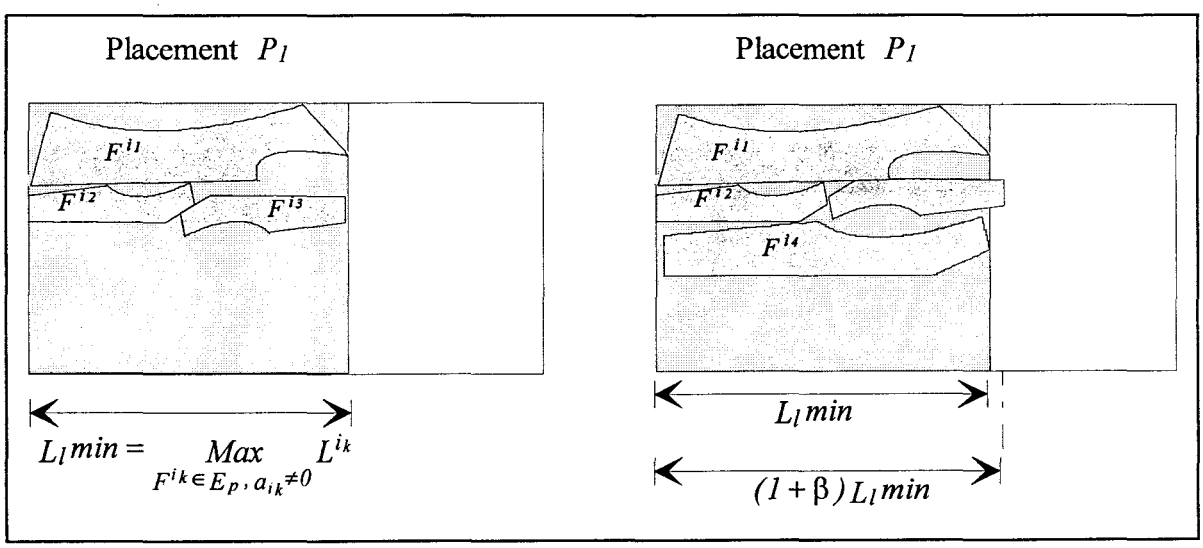

Figure 5.1: Finitude d'une bande.

En outre, la tolérance du déport caractérisé ici par le paramètre β (inférieure à 5%) est choisie relativement petite. En effet, une valeur élevée peut conduire à obtenir un front de placement très irrégulier, éloignant ainsi la bande de la forme générale rectangulaire. D'autre part, une tolérance trop large diminue l'effet du placement en bande réduite et augmente potentiellement le nombre de formes incluses dans la bande et donc aussi la complexité de la recherche (placement sur rectangle quelconque).

Cependant, si la complexité du front de bande P_l (*cf. figure 5.2*) est importante, on prendra comme contour gauche de la bande suivante P_{l+1}, le profil imposé par la bande P_l.

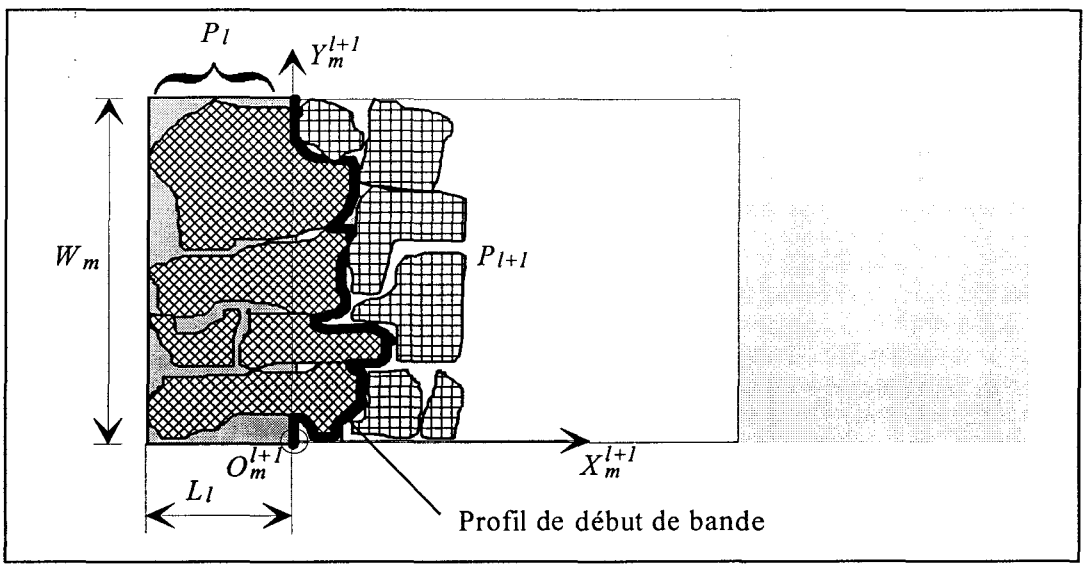

Figure 5.2: profil de début de bande.

5.2.2. Consistance d'une bande

Intuitivement, la qualité d'une bande dépend de l'étendue de l'espace des configurations qu'il faut visiter pendant un temps déterminé. Or, si la taille du carnet de commande est grande, l'espace des configurations s'élargit en conséquence, et donc l'espoir d'avoir une faible perte en un temps donné s'amenuise. Pour éviter cette situation inadéquate par rapport à l'objectif de juste à temps, on préfère réduire le nombre de formes à placer sur une même bande: c'est la contrainte de consistance. Il est vrai que les restrictions apportées par la contrainte de finitude constituent une première limitation du nombre de formes à introduire. Mais avec cette seule condition, l'algorithme tendra systématiquement à remplir l'espace pour atteindre la limite de longueur maximale $(1+\beta)L_l min$ avec $\beta \leq 5\%$. Cette limite n'est donc plus "floue", mais stricte, et apparaît alors comme une contrainte forte pouvant exclure l'obtention d'une solution voisine plus rentable mais plus courte.

D'autres contraintes réduisant l'espace de recherche sont possibles. On peut limiter à N_{max} le nombre de formes dans une bande ($card(P_l) \leq N_{max}$) ou limiter à S_{max} la surface utile d'une bande ($S_u \leq S_{max}$).

L'inconvénient majeur de ces deux inégalités est qu'elles contraignent le nombre de formes indépendamment de la qualité du placement. A ces lois arbitraires nous préférons une règle plus souple visant à adapter le nombre de formes à la qualité maximale de la bande. La solution retenue ici est celle qui consiste à tenir compte des propriétés de la fonction de coût choisie pour contraindre sans biais la consistance d'une bande.

Soit la fonction de coût correspondant à la chute dans la bande:

$$g(P_l) = S_0 - S_u = W_m \cdot L_l - \sum_{i|F^i \in P_l} S(F^i)$$

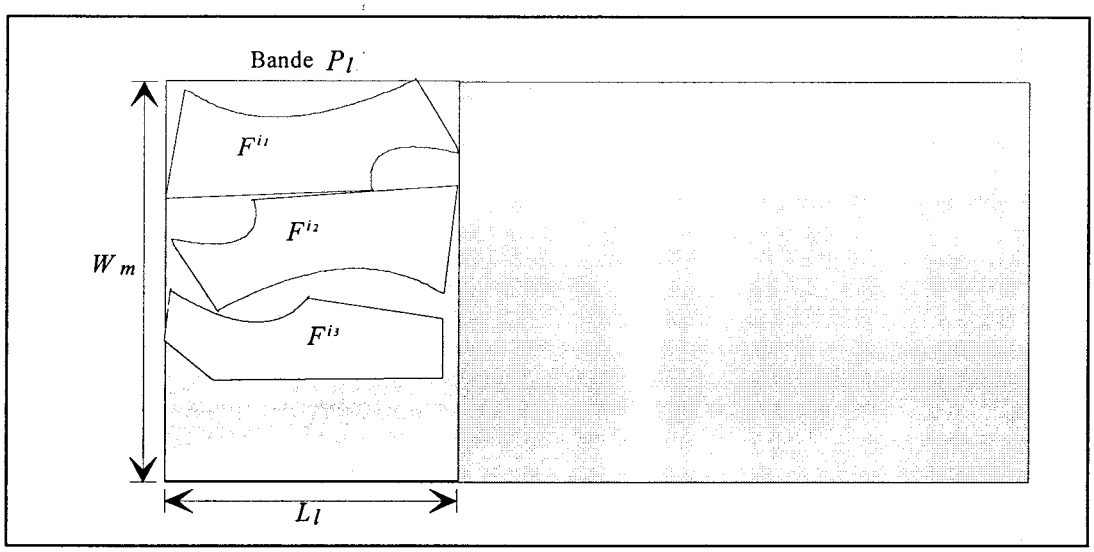

Figure 5.3: Fonction de coût $g(P_l)$.

avec:

$g(P_l)$ = pertes associée au placement P_l,

W_m = largeur matière,

L_l = longueur du placement P_l,

$S(F^i)$ = surface de la forme F^i.

Si l'on considère que le placement est construit progressivement en ajoutant successivement sur la matière les formes du carnet de commande, toutes les formes étant en contact l'une contre l'autre, alors la fonction $g(P_l)$ subit des variations constituées de phases décroissantes et croissantes. Une décroissance reflète une diminution des pertes, c'est à dire que la forme ajoutée n'allonge pas sensiblement la bande. Dès que $g(P_l)$ croît, cela signifie que l'on a probablement augmenté la longueur du placement et que le bilan des pertes est défavorable. Ainsi, en veillant à ce que la chute soit monotone décroissante, on guide la construction d'une bande rectangulaire sans aucune contrainte arbitraire de surface utile ou de nombre de formes. La minimisation de cette fonction fournit alors un sous placement de consistance optimale vis à vis des pertes.

5.3. Evaluation de la complémentarité

Les calculs présentés dans cette partie permettent d'établir une méthode de détermination des coordonnées relatives d'un couple de formes placées en imbrication optimale vis-à-vis d'un critère. L'interprétation optimale n'est pas unique car elle dépend en réalité de la nature du problème. Dans le cas de l'optimisation du placement, si l'on adopte l'approche bifocale locale-globale, la fonction de but n'est pas systématiquement identique à celle du niveau global. L'imbrication optimale au niveau local signifie surface occupée minimale, intersection maximale ou surface inaccessible minimale, alors que globalement on cherchera à minimiser la perte de tissu dans la bande en construction. Naturellement, compte tenu de la nature du code et des contraintes du problème, la recherche d'une imbrication optimale sous-entend la mise en relation de deux peignes issus de deux formes différentes, dont il faut déterminer un positionnement relatif satisfaisant les contraintes.

5.3.1. Optimisation de l'Imbrication

L'optimisation de l'imbrication selon une direction est la juxtaposition de deux formes F^i et F^j en minimisant un critère d'imbrication *I*. Ceci se traduit par:

$$\underset{positions\ relatives}{Min} \quad I(F^i, F^j, c)$$

sous la contrainte disjonctive:

$$Int(F^i \cap F^j) = \varnothing$$

L'optimisation de l'imbrication traduit le fait que la mise en correspondance du côté *c* d'une forme F^i et du côté *c+2[4]* d'une forme F^j doit se faire au sens de la minimisation de l'indice *I*. La contrainte de disjonction doit naturellement être satisfaite, ainsi que le respect des dimensions globales de la bande.

L'optimisation de l'imbrication a ici pour objet de déterminer le vecteur de positionnement relatif $\overrightarrow{O^i_{rc} O^j_{rc+2[4]}}$ ou $\overrightarrow{O^i_{r0} O^j_{r0}}$ des deux formes à concaténer comme il a été défini au chapitre troisième.

5.3.2. Indices de complémentarité

Définir une position relative optimale pour chaque couple de formes à assembler, revient à déterminer les valeurs de $\delta X^{ij}_{cc+2[4]}$ et $\delta Y^{ij}_{cc+2[4]}$ (ou δX^{ij}_{00} et δY^{ij}_{00}) minimisant un critère d'occupation surfacique. Cet objectif conduit naturellement à parler du critère

surfacique à retenir et plus tard, de la méthode d'optimisation utilisée. Successivement, nous analyserons les différents critères potentiellement utilisables afin d'établir notre choix.

5.3.2.1 Distance quadratique inter-peigne

La première approche consiste à établir une mesure de la qualité de la mise en correspondance des sous-contours SC_c^i et $SC_{c+2[4]}^j$. Une mesure possible est basée sur l'évaluation d'une distance quadratique moyenne entre la courbe définie par le peigne D_c^i et celle décrite par $D_{c+2[4]}^j$. Le résultat est représentatif de la <u>similarité</u> des contours sur la zone commune.

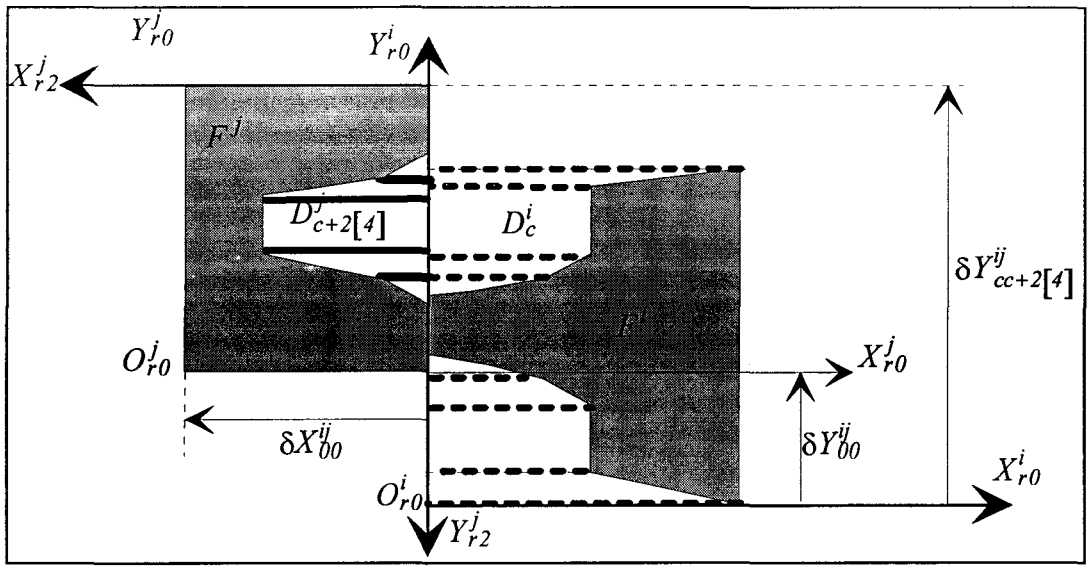

Figure 5.4: Mise en correspondance des peignes.

On désigne par $I_1(F^i, F^j, c, \delta Y_{cc+2[4]}^{ij})$ la fonction qui évalue la distance quadratique inter-peigne lorsque le côté c de F^i est en correspondance avec le côté $c+2[4]$ de la forme F^j et ce pour un décalage $\delta Y_{cc+2[4]}^{ij}$ fixé. L'expression mathématique a la forme:

$$I_1(F^i, F^j, c, \delta Y_{cc+2[4]}^{ij}) = \frac{1}{L_c^{i \cap j}} \times \sum_{y_k^i = y_l^j} (x_{rk}^i - x_{rl}^j)^2$$

$$\text{avec } \pi_k^i \in D_c^i \quad \text{et} \quad \pi_l^j \in D_{c+2[4]}^j, \quad (x_k^i, y_k^i)$$

Cet indice calcule la somme quadratique de toutes les différences une à une des dents des peignes D_c^i et $D_{c+2[4]}^j$.

Par cette même approche, on peut aussi chercher à minimiser la surface moyenne comprise entre les deux portions de contours de projection commune, c'est à dire la

dissemblance d'appariement ou *dissimilarité* des contours sur la zone commune. Ceci part du raisonnement intuitif visant à minimiser les trous situés entre les formes pour maximiser le rapport $\frac{surface\ utile}{surface\ occupée}$. Ce calcul est donné par :

$$I_2(F^i,F^j,c,\delta Y^{ij}_{cc+2[4]}) = \sum\left|\frac{(y^i_k-y^j_l)(x^i_k-x^j_l)}{2}\right| - \left|\frac{(y^i_m-y^j_n)(x^i_m-x^j_n)}{2}\right| \geq 0$$

$$\begin{aligned}
&\text{avec} \quad \pi^i_k,\pi^i_m \in D^i_c, \pi^j_l,\pi^j_n \in D^j_{c+2[4]} \\
&\text{et} \quad [(proj\,\pi^i_k / O^i_{rc}Y^i_{rc} = proj\,\pi^i_m / O^i_{rc}Y^i_{rc}) \\
&\qquad\qquad < \\
&(proj\,\pi^j_l / O^j_{rc+2[4]}Y^j_{rc+2[4]} = proj\,\pi^j_n / O^j_{rc+2[4]}Y^j_{rc+2[4]})
\end{aligned}$$

Ces deux mesures, bien que qualitativement intéressantes, conduisent à une complexité peu engageante d'autant qu'elles sont à calculer pour toutes les valeurs potentielles du décalage $\delta Y^{ij}_{cc+2[4]}$. On peut cependant fixer les valeurs des vecteurs $\delta X^{ij}_{cc+2[4]}$ et $\delta Y^{ij}_{cc+2[4]}$ (ou δX^{ij}_{00} et δY^{ij}_{00}) pour aligner les formes en x ou y, on obtient alors un indice de complémentarité unique. Cet indice est utilisé pour le placement en temps réel comme il est rappelé en fin de ce chapitre.

5.3.2.2 Surface du rectangle d'intersection

Cet indice répond à l'approche qui consiste à mesurer la surface du rectangle d'intersection $R^{i\cap j}$. Celle-ci se calcule facilement après avoir vérifié la contrainte de disjonction et donc obtenu la valeur de $\delta X^{ij}_{cc+2[4]}$ *et* $\delta Y^{ij}_{cc+2[4]}$.

$$I_3(F^i,F^j,c,\delta X^{ij}_{cc+2[4]},\delta Y^{ij}_{cc+2[4]}) = S(R^{i\cap j}(\delta X^{ij}_{cc+2[4]},\delta Y^{ij}_{cc+2[4]}))$$

Pour chaque valeur de $\delta X^{ij}_{cc+2[4]}$ et de $\delta Y^{ij}_{cc+2[4]}$ du vecteur de positionnement relatif, on peut en déduire la surface du rectangle d'intersection $S(R^{i\cap j})$. Cependant, si la maximisation de cet indice favorise effectivement l'imbrication de deux formes, par contre elle peut également engendrer un indéterminisme lorsque, pour un sous-ensemble des valeurs possibles de $\delta Y^{ij}_{cc+2[4]}$, $S(R^{i\cap j})$ est maximal. De plus, la maximisation de cet indice peut parfois fournir un résultat indésirable, si l'on ne tient pas compte des dimensions de l'association obtenue.

5.3.2.3 Couloir d'imbrication

La situation ci-dessus peut conduire aussi au cas représenté par la *figure 5.5*. Là, les décalages $\delta Y1^{ij}_{cc+2[4]}$ et $\delta Y2^{ij}_{cc+2[4]}$ donnent une valeur maximale de $S(R^{i\cap j})$. Pour favoriser le tassement, on cherche à maximiser la surface du "***couloir d'imbrication***" que l'on définit par:

$$I_4(F^i, F^j, c, \delta X^{ij}_{cc+2[4]}, \delta Y^{ij}_{cc+2[4]}) = L_c^{i\cap j} \times \delta X^{ij}_{cc+2[4]}(\delta Y^{ij}_{cc+2[4]})$$

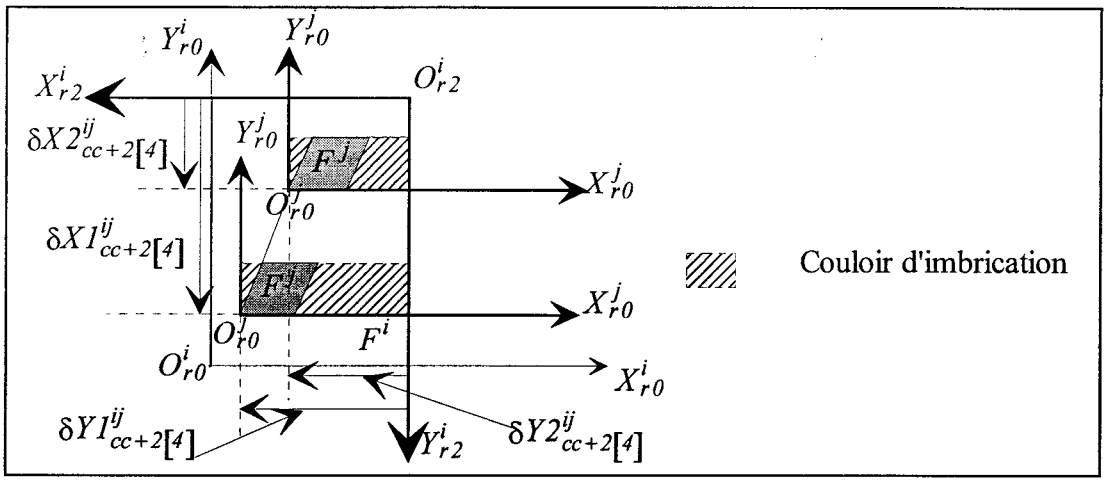

Figure 5.5: Couloir d'imbrication.

Si I_4 fait apparaître plusieurs maxima locaux, on garde la valeur correspondante au décalage minimal. Mais cette distance ne supprime pas les situations indésirables du type escalier. Pour cela, on doit tenir compte des dimensions de l'association, ce que propose la surface du rectangle circonscrit à la concaténation.

5.3.2.4. Surface du rectangle de la concaténation

Cet indice mesure la surface algébrique du rectangle circonscrit à la réunion des deux formes, $S(R^{i\cup j})$. Cette mesure se calcule par la relation :

$$I_5(F_k, F_l, c, \delta X^{ij}_{cc+2[4]}, \delta Y^{ij}_{cc+2[4]}) = S(R^{i\cup j})$$

Comme pour le rectangle d'intersection, l'optimisation de la surface du rectangle de la concaténation peut compter plusieurs minima locaux, induisant de nouveau un indéterminisme sur la valeur de $\delta Y^{ij}_{cc+2[4]}$. C'est le cas par exemple lorsqu'une petite forme vient se loger complètement à l'intérieur du rectangle circonscrit d'une grande forme.

Les considérations de tassement concernant le couloir d'imbrication sont également applicables dans ce cas.

5.3.2.5. Surface modifiée du rectangle circonscrit

Cette distance exprime la différence entre la surface du rectangle circonscrit et la surface du couloir d'imbrication. On la définit donc par :

$$I_6(F^i, F^j, c, \delta X^{ij}_{cc+2[4]}, \delta Y^{ij}_{cc+2[4]}) = I_5(.) - I_4(.)$$

Cet indice a l'avantage de tenir compte des dimensions de l'association de deux formes tout en évitant des situations fréquentes d'indéterminisme. La minimisation de I_6 tend à minimiser la surface du rectangle circonscrit, tout en maximisant le couloir d'imbrication.

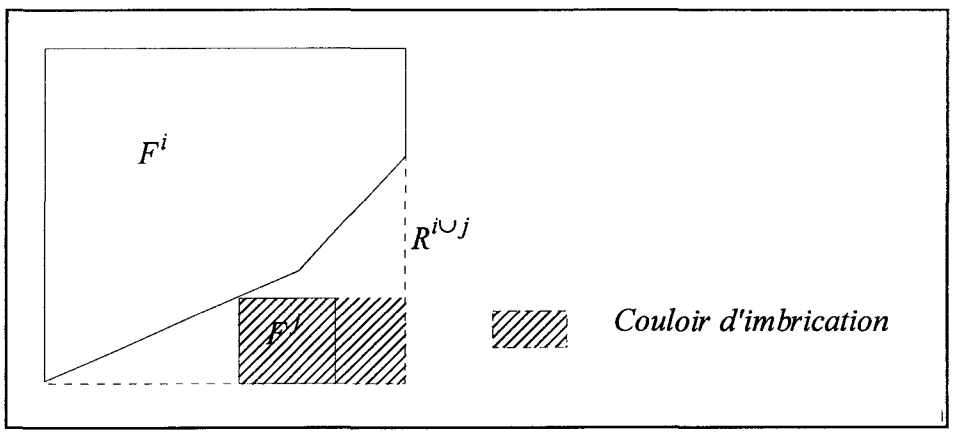

Figure 5.6: Rectangle circonscrit.

5.4. Optimisation locale

5.4.1. Choix du critère

L'opération consiste à optimiser un des indices choisis parmi ceux évoqués précédemment. Selon l'indice, il s'agit de minimiser I_1, I_2, I_5, ou I_6 ou de maximiser I_3 ou I_4 par rapport aux variables $\delta X^{ij}_{cc+2[4]}$ et $\delta Y^{ij}_{cc+2[4]}$ $(\delta X^{ij}_{00}\ \delta Y^{ij}_{00})$.

Pour notre problème, s'agissant d'adopter une stratégie locale-globale, l'indice I_6 a été choisi compte tenu de sa généralité.

Nous chercherons donc à déterminer $\delta X^{ij}_{cc+2[4]}$ et $\delta Y^{ij}_{cc+2[4]}$ tel que:

$$I_6^{min}(F^i, F^j, c) = \underset{\delta Y^{ij}_{cc+2[4]}}{Min} \ \underset{\delta X^{ij}_{cc+2[4]}}{Min} \ I_6(F^i, F^j, c, \delta X^{ij}_{cc+2[4]}, \delta Y^{ij}_{cc+2[4]})$$

Nous sommes donc en présence de l'optimisation d'une fonction discrète à deux variables. Cependant, dans le cas du placement sur tissu uni on peut affirmer que pour minimiser l'espace occupé, les formes doivent être naturellement en contact l'une contre l'autre.

L'optimisation de l'imbrication suppose que le calcul de l'indice de complémentarité ainsi que la vérification de la contrainte de disjonction pour chaque position candidate ont été effectués. La complexité de la recherche est évidemment proportionnelle au nombre de positions candidates, c'est à dire de l'espace de recherche qu'il convient naturellement de diminuer.

5.4.2. Réduction du domaine de recherche

Dans la suite, on aura donc à exprimer un ensemble de relations dans le but unique de réduire le nombre d'itérations lors de la recherche du minimum de l'indice de complémentarité retenu. Cependant, l'application ayant vocation de pouvoir traiter les deux types de tissu, uni ou à motif, il convient donc ici de faire la distinction. Selon le cas, les méthodes d'optimisation seront différentes puisque les domaines de définition seront eux-mêmes différents.

5.4.3. Réduction de l'intervalle de recherche

5.4.3.1. Bornes limites de l'intervalle de recherche

Supposons que l'on cherche à minimiser la surface du rectangle $R_c^{i\cup j}$ du rectangle circonscrit à la réunion des formes F^i et F^j et que celles-ci soient en contact par leurs côtés respectifs *c et c+2[4]*.

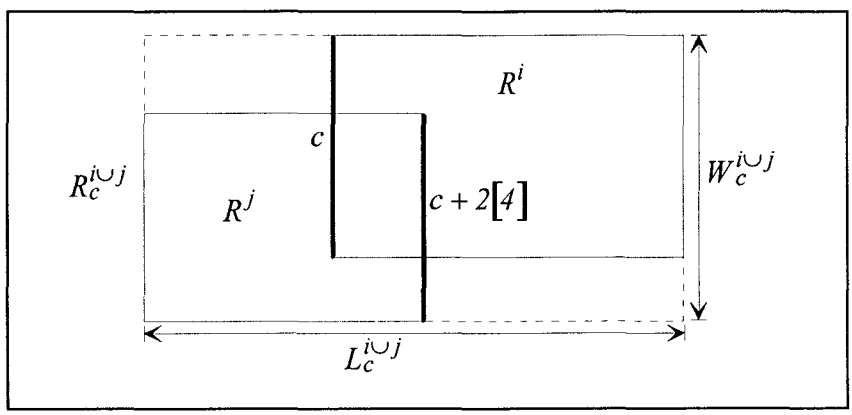

Figure 5.7: Limites de l'intervalle de recherche.

Selon la position relative des deux rectangles, les dimensions du rectangle circonscrit résultant de la concaténation des deux formes peuvent avoir comme valeurs limites:

$$max(L^i, L^j) \leq L_c^{i \cup j} \leq L^i + L^j$$

et

$$max(W^i, W^j) \leq W_c^{i \cup j} \leq W^i + W^j$$

Plaçons maintenant ces deux formes dans une situation engendrant une surface du rectangle circonscrit que l'on puisse diminuer.

- $\delta X_{cc+2[4]}^{ij} = 0$ **et absence de débordement**

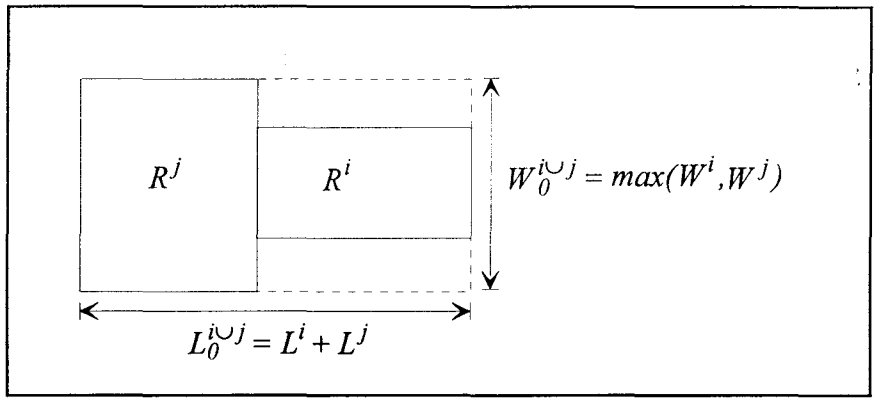

Figure 5.8: Association sans débordement.

La surface correspondante à cette situation constitue alors un premier majorant $S(R_c^{i \cup j})$ tel que:

$$S(R_0^{i \cup j}) = (L^i + L^j) \times max(W^i, W^j)$$

- **profondeur d'imbrication maximale et débordement maximal**

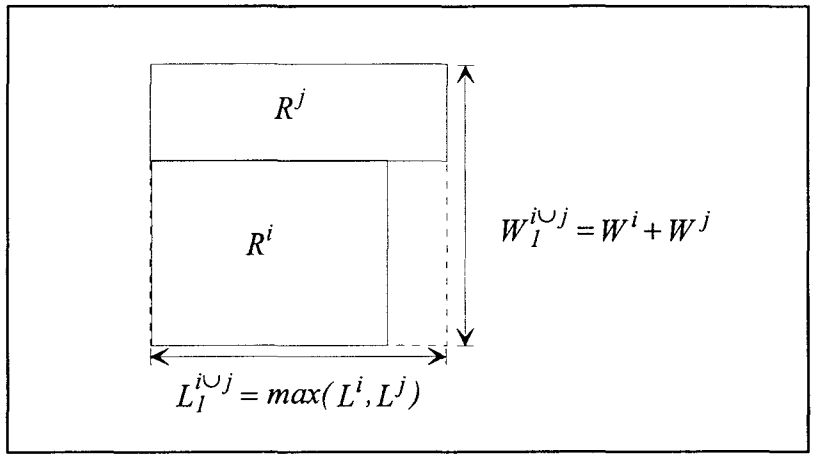

Figure 5.9: Association avec débordement maximal.

La surface du rectangle circonscrit à cette association est:

$$S(R_1^{i\cup j}) = max(L^i, L^j) \times (W^i + W^j)$$

En prenant le minimum des deux surfaces précédentes, on en déduit un majorant de $S(R_c^{i\cup j})$ qu'il est possible d'obtenir par placement trivial sans aucune recherche d'imbrication.

$$S(R_{maj}^{i\cup j}) = min(S(R_0^{i\cup j}), S(R_1^{i\cup j}))$$

Dans l'hypothèse où l'on peut trouver un décalage $\delta Y_{cc+2[4]}^{ij}$ non trivial pour lequel la largeur du rectangle de la réunion est minimale $(max(L^i, L^j))$ c'est-à-dire pour une profondeur d'imbrication maximale, alors la longueur doit être telle que la surface du rectangle $R^{i\cup j}$ reste inférieure au majorant précédent. Si l'hypothèse n'est pas vérifiée, alors la longueur sera de toute façon plus faible que celle proposée.

5.4.3.2. Mise en correspondance des creux et des bosses

Nous avons vu que l'imbrication optimale de deux formes est souvent obtenue lorsque l'on a une mise en relation des bosses et des creux de chaque forme. Cette réduction du domaine de recherche tire donc profit de cette idée en utilisant les définitions proposées concernant les segments bosses et les segments creux:

Il existe un segment bosse si les extrémités de ce segment sont des points de convexité.

Il existe un segment creux si les extrémités de ce segment sont des points de concavité.

D'autre part, un contact entre deux polygones met en commun au moins un point de convexité du premier et un segment de droite du second [Avnaim 89]. Par conséquent il est nécessaire de mettre chaque extrémité convexe d'un segment bosse en relation avec tous les segments constituant la zone creuse. Pour réduire le nombre d'essais, on se contente de ne mettre en correspondance que les segments bosses de hauteur maximale avec toutes les zones creuses de l'autre forme. D'autres contraintes liées à la convexité, aux dimensions du rectangle résultant, ...etc. sont utilisées pour réduire encore l'intervalle de recherche.

5.4.4. Recherche sous contrainte de motif

Les considérations de réduction du domaine de recherche sont également induites par la présence d'un motif sur le tissu. A partir des notations relatives à la contrainte de positionnement relatif adoptée, on peut établir de nouvelles relations réduisant le nombre de positions relatives autorisées d'une forme par rapport à celle qui lui sera connectée lors de l'assemblage. Considérons l'exemple de la *figure 5.10*. Supposons que les formes F^{i_0} et F^{i_4} viennent en contact dans le vêtement et par conséquent mettent en relation leur point de

raccord respectif. Nous devons ainsi connaître la position relative de la forme F^{i_4} par rapport au placement intermédiaire P_u, obtenu par concaténation successive des formes $F^{i_0}, F^{i_1}, F^{i_2}$ et F^{i_3}.

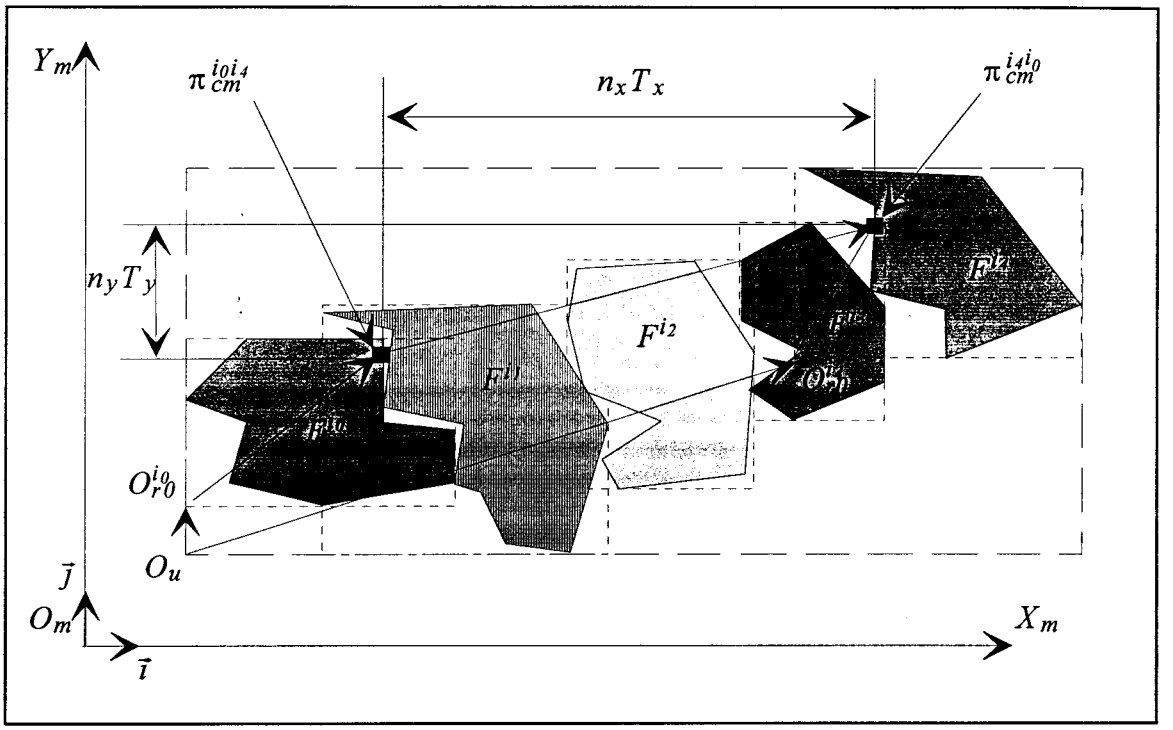

Figure 5.10: Satisfaction de la contrainte de positionnement relatif.

Nous pouvons alors écrire:

$$\overrightarrow{O_u O_{i_4}} + \overrightarrow{O_{i_4} \pi_{cm}^{i_4 i_0}} = \overrightarrow{O_u O_{i_0}} + \overrightarrow{O_{i_0} \pi_{cm}^{i_0 i_4}} + \begin{pmatrix} n_x T_x \\ n_y T_y \end{pmatrix} \times (\vec{i}, \vec{j})$$

soit:

$$\overrightarrow{O_u O_{i_4}} = \overrightarrow{O_u O_{i_0}} + \overrightarrow{O_{i_0} \pi_{cm}^{i_0 i_4}} + \begin{pmatrix} n_x T_x \\ n_y T_y \end{pmatrix} \times (\vec{i}, \vec{j}) - \overrightarrow{O_{i_4} \pi_{cm}^{i_4 i_0}}$$

Plus généralement, si F^k et F^l sont deux formes en raccord, nous avons:

$$\overrightarrow{O_u O_l} = \overrightarrow{O_u O_k} + \overrightarrow{O_k \pi_{cm}^{kl}} + \begin{pmatrix} n_x T_x \\ n_y T_y \end{pmatrix} \times (\vec{i}, \vec{j}) - \overrightarrow{O_l \pi_{cm}^{lk}}$$

$$= \begin{pmatrix} f_x(k, l, n_x) \\ f_y(k, l, n_y) \end{pmatrix}$$

$$n_x, n_y \in N$$

$\vec{i}, \vec{j}$ sont les deux vecteurs unitaires de la base orthogonale liée au repère $O_m X_m Y_m$.

Les fonctions f_x et f_y sont discrètes de pas de discrétisation T_x (respectivement T_y), croissante en n_x, (respectivement n_y). Le vecteur $\overrightarrow{O_u O_k}$ est remis à jour à chaque modification du placement et mémorisé. Les vecteurs $\overrightarrow{O_k \pi_{cm}^{kl}}$ et $\overrightarrow{O_l \pi_{cm}^{lk}}$ font partie de la base de données associée à chaque forme.

Cette relation nous amène à traduire son équivalence dans le repère local lié au peigne réduit du côté mis en relation. Nous précisons l'expression du couple $(\delta X_{cc+2[4]}^{ij}, \delta Y_{cc+2[4]}^{ij})$ en fonction des relations précédentes et du côté *c*.

Nous voyons que $\delta Y_{cc+2[4]}^{ij}$ devient dépendant de n_x (ou n_y si c est impair).

Remarque:

La complexité de la procédure d'imbrication locale a été sensiblement réduite, car l'intervalle de recherche a été discrétisé par les seules valeurs autorisées de $\delta Y_{cc+2[4]}^{ij}$ satisfaisant la contrainte. L'opération de concaténation que l'on s'est attaché à construire, induit une relation de précédence entre les formes à associer. On concatène selon un côté précis de la forme réceptrice déjà placée.

5.5. représentation du problème du placement

5.5.1. Introduction

Nous avons décrit le problème du placement en précisant les contraintes qui le régissent et l'objectif que l'on se fixe. Les contraintes définissent les degrés de liberté du système (les formes ou les groupements de formes), et la fonction de coût donne une mesure pour évaluer, comparer, valider un état intermédiaire du placement ou une solution. Mais pour que le problème soit bien défini, il faut décrire l'espace des configurations, c'est-à-dire les différentes situations qu'un placement peut atteindre.

Nous avons choisi l'espace d'états, au sens de l'intelligence Artificielle, c'est à dire un graphe constitué d'un ensemble de noeuds et d'arcs symbolisant états et coûts de chemin. Pour passer d'un état à un autre, un certain nombre de transformations ont été définies et mises au point. Une vérification implicite des contraintes lors de la construction, et un découplage entre le niveau local du placement et le niveau global de décision permettent de réduire le nombre d'états engendrés. Cependant, celui-ci reste important, tout au moins trop important pour espérer envisager une méthode de recherche exhaustive.

5.5.2. Représentation en graphe

Dans cette représentation, on structure l'ensemble des états du problème par un graphe non orienté. Chaque sommet (ou noeud) du graphe est un état du problème. Il y a un arc du noeud *u* au noeud *v* si on dispose d'un opérateur permettant de transformer l'état *u* en l'état *v*.

Un état est une description de la situation initiale (aucune forme n'est placée sur la matière) ou d'une situation intermédiaire quelconque rencontrée lors de la résolution. Chacun d'eux est réalisé par des concaténations successives de plusieurs formes positionnées en imbrication locale optimale relativement au critère de la surface corrigée du rectangle circonscrit.

Etant donnée la recherche du placement de la $i^{ème}$ bande P_i , on désigne par u l'état correspondant au placement intermédiaire $P_{i,u}$. $P_{i,u}$ est obtenu par concaténation successive d'un sous-ensemble de formes référencées dans l'encours de placement E_p. Dans ce qui suit, l'indice i sera supprimé pour simplifier l'écriture.

A chaque noeud u, on associe le coût $g(u)$ représentant la chute de matière par rapport aux dimensions de la bande (*cf. figure 5.3*), ce qui donne:

$$g(u) = S_{occupé\,e} - S_{utile} = L_u \times W_m - \sum_{F^i \in P_u} S(F^i)$$

avec L_u, la longueur du placement P_u et W_m, la largeur de la matière.

De même, on désigne par:

$$A_u = (a_u^1, a_u^2, a_u^1, \ldots\ldots, a_u^k, \ldots\ldots\ldots a_u^{N_\omega}).$$

La liste des effectifs reste à produire au noeud u pour les N_ω modèles de formes, cette information étant utile pour tenir à jour la productibilité de chaque forme. Les formes restant à produire constituent l'encours de placement E_p.

L'ensemble des états U est fini. D'autre part, les limites physiques imposées par les contraintes de placement en bande engendrent un cloisonnement du graphe sur un sous ensemble des états accessibles, c'est-à-dire un sous-graphe.

L'espace des configurations U est structuré par un ensemble d'applications susceptibles de transformer un état en un autre état. Au niveau du placement, la transformation mise en oeuvre est de la forme $O_{i,\lambda,S_x,c}$. Elle utilise les opérateurs géométriques définis aux chapitres précédents: la rotation (λ), la symétrie (S_x); i indiquant le numéro de la forme et c le côté de concaténation.

Le problème à résoudre n'est pas formulé en raison de la donnée explicite du graphe $G(U,O)$, mais plutôt par les données suivantes:

- l'état initial u_0 associé au placement vide $P_0 = \varnothing$;
- l'ensemble des opérateurs O;
- le coût $g(u)$ associé à chaque état u;
- le sous-ensemble $T \subset U$ des états terminaux.

Ces états sont définis implicitement par la relation d'équivalence:

$$t \in T \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} O(t) = \varnothing \\ ou \\ \forall\ v \in O(t) : g(v) \geq g(t) \end{Bmatrix}.$$

Cette relation signifie que t est un état terminal s'il ne possède aucun successeur ou si tous ses successeurs ne vérifient pas la décroissance de la fonction de coût g. Dans le second cas, le placement correspondant à cette situation ne satisfait pas les conditions de pertes minimales relativement à la bande.

Ce graphe défini implicitement est nécessairement connexe et possède une seule racine u_0. Il s'agit en fait d'une arborescence K-aire. Les noeuds terminaux sont les feuilles de l'arborescence. K représente le nombre maximal de successeurs directs que peut avoir un noeud. Ici, K est égal au cardinal du plus grand ensemble des paramètres.

A un moment quelconque de l'exploration, on distingue:

- Les sommets développés ou partiellement développés dont la totalité ou une partie des successeurs a été générée.

- Les sommets pendants explicités (le placement a été déterminé et évalué), mais dont les successeurs ne sont pas connus.

- Les sommets implicites: descendant des sommets pendants, mais non encore connus.

L'arbre s'arrête donc aux états terminaux dont le placement couvre une bande. En cela, ce graphe est un sous graphe du graphe des états accessibles sans contrainte de longueur de bande. Cette limitation est le reflet du choix d'une stratégie "diviser pour régner", où l'on se contente de traiter des petits placements pour éviter l'explosion combinatoire.

Remarquons que le rang d'un noeud (nombre d'arcs depuis u_0) correspond au nombre de formes présentes dans la bande relativement à ce noeud. Tous les noeuds terminaux ne sont donc pas de rang identique.

5.5.3. Variation de la fonction de coût

A l'espace des configurations, on peut associer une courbe matérialisant l'évolution de la fonction g(u) selon les différentes combinaisons de placement, c'est-à-dire les noeuds.

Evidemment, la courbe $g(u)$ n'a de sens que si l'espace des configurations est doté d'une topologie munie d'une relation de voisinage entre les configurations et d'une distance. Celle-ci découle naturellement de la représentation arborescente puisque deux configurations sont voisines (ou connexes) lorsqu'elles sont reliées par un seul arc. La distance entre deux

configurations non connexes est définie comme le nombre minimal de changements élémentaires nécessaires pour passer d'une configuration à l'autre.

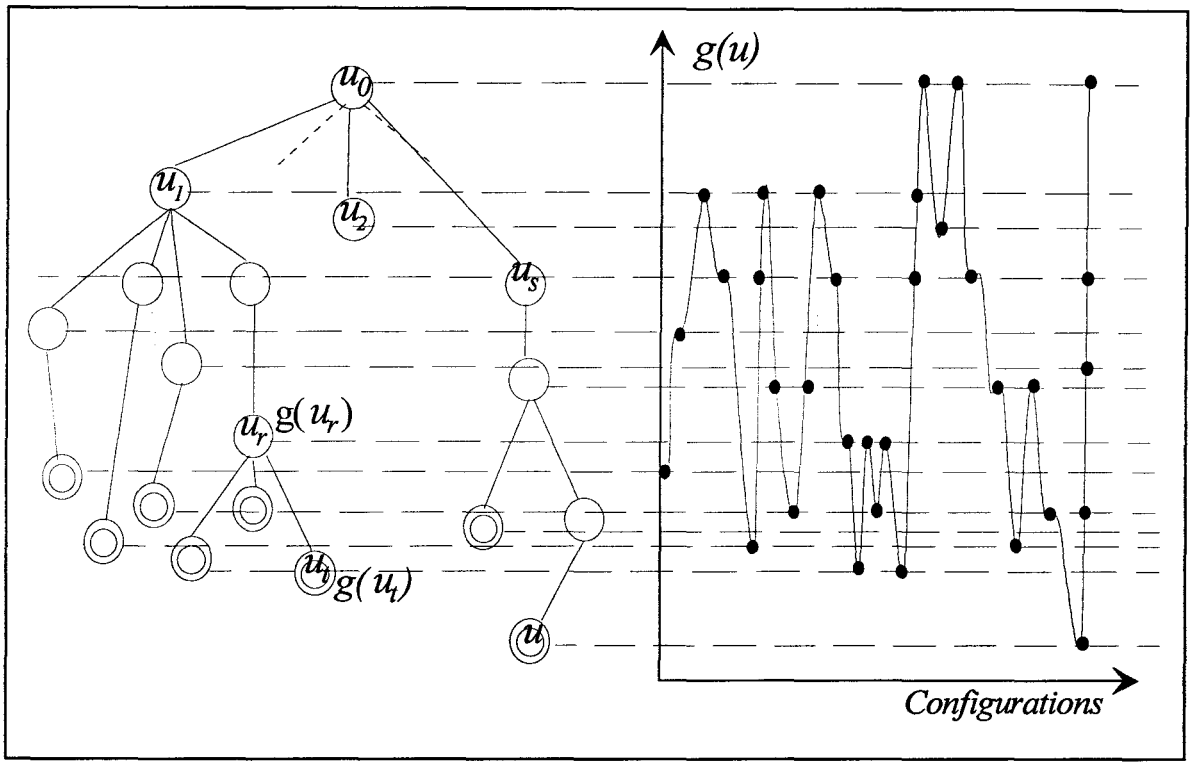

Figure 5.11 : Variations de la fonction de coût.

D'autre part, lors de la recherche en graphe, la remontée vers le prédécesseur d'un noeud, signifie qu'une forme vient d'être enlevée du placement. Le graphe est donc non orienté et chaque configuration est réversible. Cette propriété permet donc de décrire toutes les valeurs potentielles de la fonction de coût, signifiant que tous les états du placement sont accessibles.

Si ce paysage de coût (on parle aussi de paysage d'énergie) présentait un seul minimum global et aucun minimum local, le problème d'optimisation serait très simple, et il pourrait être résolu par la méthode d'amélioration itérative classique. Toute la difficulté du problème d'optimisation réside dans le fait que la fonction de but *g(u)* comporte un grand nombre de vallées plus ou moins profondes et plus ou moins proches qui correspondent à des minima locaux.

Le nombre de minima locaux, donc de noeuds terminaux, dépend de l'espace des paramètres propre à chaque forme et du nombre N_ω de formes modèles. Il est clair que si une forme a peu de contraintes spécifiques, l'espace des paramètres est grand et les successeurs engendrés sont nombreux. De même, le nombre N_ω de modèles différents dans l'encours de placement élargit sensiblement l'arborescence. Il est à noter cependant, que le choix que nous avons fait s'agissant de la stratégie "locale-globale", confère au problème une simplification

sensible de la complexité. Celle-ci se verrait grandie si toutes les positions relatives entre les formes étaient envisageables.

5.5.4. Complexité

Un calcul de mauvais cas, nous permet d'évaluer le nombre de placements en bande différents, engendrés pour un ensemble de N_ω formes distinctes. Supposons que chaque forme n'ait aucune contrainte spécifique. Il vient alors:

$$\begin{aligned} \text{card(O)} &= N_\omega \times \text{card(orientations_Admissibles)} \times \text{card}(\{0,1\}) \times \text{card}(\{0,1,2,3\}) \\ &= N_\omega \times 4 \times 2 \times 4 \\ &= N_\omega \times 32 \end{aligned}$$

Chaque noeud peut donc avoir au pire $32 \times N_\omega$ successeurs. Ce qui fait au rang r : $(32 \times N_\omega)^r$ sommets. Supposons que l'on dispose de $N_\omega = 15$ modalités de forme de dimensions semblables (L^i, W^i) et d'effectif important pour que chaque type de forme puisse remplir complètement une bande avec de plus une espérance de rendement moyen de 70% de la surface occupée pour la bande considérée. Les formes étant semblables, les noeuds terminaux sont tous sensiblement au même rang r, égal au nombre de pièces que l'on peut introduire dans le rectangle de matière $(L^i \times W_m)$. On a donc:

$$r = 0.7 \times W_m / W^i .$$

Pour $W_m / W^i = 10$, $r=7$ et le nombre total de noeuds explicités est donc de :

$$\frac{(32 \times N_\omega)^{r+1} - (32 \times N_\omega)}{(32 \times N_\omega) - 1} = \frac{(32 \times 15)^{7+1} - (32 \times 15)}{(32 \times 15) - 1} \approx 5.9 \times 10^{18}$$

Si ce calcul montre que même si l'on est ramené à un problème de complexité en $O((K \times N_\omega)^r)$ en cloisonnant le graphe, le nombre de noeuds à expliciter reste trop élevé pour espérer utiliser une recherche exhaustive. En pratique, le compromis *qualité/temps* conduit à se contenter d'une bonne solution avec l'assurance que la meilleure solution soit de coût relativement proche. Pour atteindre cet objectif au bout d'un temps de calcul raisonnable, il est nécessaire d'avoir recours à des méthodes heuristiques. Ces méthodes doivent permettre, face à l'impossibilité d'explorer la totalité des configurations du placement, d'évoluer vers une bonne solution en envisageant un nombre limité de combinaisons, dont le choix est guidé, soit par le hasard s'il s'agit d'une méthode stochastique, soit par une stratégie de parcours de graphe.

5.6. Résolution

L'expérience proposée par [Prempti 83] a permis de constater que la méthode du recuit simulé convenait bien à ce genre de problème très combinatoire et lorsque le temps ne représentait pas une contrainte de l'application. Des opérateurs de concaténation ont été construits à l'aide du concept de peigne de contour. On peut ici, pour chaque nouvelle configuration proposée, satisfaire toutes les contraintes de placement avant d'évaluer la fonction de coût, en l'occurrence les pertes, alors que la disjonction n'était vérifiée qu'à posteriori dans [Premti 83]. L'avantage que l'on a par rapport à l'algorithme de [Premti 83] est que, quel que soit le résultat final, toutes les contraintes sont satisfaites. Nous avons montré que l'opération de concaténation que l'on s'est attaché à construire induit une relation de précédence entre les formes à associer. On concatène selon un côté précis de la forme réceptrice déjà placée. Permuter deux formes nécessite une séparation et une nouvelle concaténation selon le nouvel ordre. On voit ici qu'une représentation possible est bien le graphe d'état. Avec ses arcs et noeuds, il restitue bien cette notion d'ordre. La représentation du placement en graphe d'états nous a conduits naturellement à développer les heuristiques de recherche en arbre pour le résoudre.

5.6.1. Recuit Simulé

Cette méthode, issue de la thermodynamique, s'inspire des méthodes d'amélioration itérative. L'idée du recuit simulé a été développée en même temps et indépendamment chez IBM par S. Kirkpatrick, C.D. Gellat Jr et M.P. Vecchi [Kirkpatrick 82], en Tchécoslovaquie par V. Cerny [Cerny 82] et enfin à l'ESPCI [Siarry 84]. Kirkpatrick reprit l'algorithme de N. Metropolis [Metropolis 53] qu'il appliqua à des problèmes concrets d'optimisation (placement de composants, routage de circuit...). Depuis, cette méthode a fait l'objet d'une importante utilisation, comme celles citées dans [Siarry 88] et [Laarhoven 87].

5.6.1.1. Principe de l'algorithme de Metropolis

L'algorithme du recuit simulé s'inspire largement de la méthode d'amélioration itérative, mais en la modifiant de façon fondamentale. Au lieu de rejeter une modification entraînant une augmentation de la fonction de coût, on l'accepte avec une certaine probabilité. On espère ainsi, pouvoir remonter la fonction de coût pour sortir de la vallée, passer un col pour redescendre ensuite dans une vallée plus basse.

Le choix de la représentation nous amène à adopter le principe de Metropolis [Metropolis 53] au parcours de graphe.

5.6.1.2. Comportement du recuit simulé sur le graphe

L'utilisation du recuit simulé pour un problème décrit par une représentation en graphe arborescent semble originale. Au niveau du graphe, l'heuristique revient en fait à "voyager" dans l'arborescence en "liberté contrôlée". Supposons que l'on vienne de traverser un noeud u situé au rang r de l'arbre. Effectuer une transformation élémentaire consiste à choisir un voisin v direct de u (successeur ou prédécesseur) au sens de la topologie définie dans l'espace des configurations. L'acceptation de chaque nouvelle configuration est soumise au test de Metropolis [Metropolis 53] mis en oeuvre dans l'algorithme du recuit simulé. Elle dépend de la probabilité $p(u,v) = Min(e^{-\frac{\Delta g}{T}},1)$; T étant un paramètre de contrôle et $\Delta g = g(v) - g(u)$. Lorsque $\Delta g \leq 0$, la nouvelle configuration est acceptée. La fonction de coût $g(u)$ étant décroissante quand r croît, le choix d'un prédécesseur génère systématiquement un accroissement des chutes et son acceptation dépend de la comparaison de $p(u,v)$ à un nombre aléatoire p tiré sur [0,1[:

si $p < p(u,v)$, la configuration v est acceptée,

$p \geq p(u,v)$ la configuration est rejetée et l'on essaie une autre configuration.

Les remontées sont moins rares lorsque T est élevée. Une préférence est cependant donnée à la descente (recherche en profondeur). Lorsque T diminue les remontées sont de plus en plus difficiles et le rang moyen des noeuds visités est de plus en plus élevé et l'on affine la recherche au voisinage des minima locaux.

5.6.1.3. Paramètres de contrôle

- **Placement initial**

Le choix de la configuration initiale n'intervient pas pour la qualité du résultat final, cependant une bonne configuration de départ permet de partir avec une valeur de T plus basse indiquant que le système se trouve dans un désordre limité et pour la recherche d'une solution sous-optimale, réduire le temps de calcul.

- **Température initiale** T_0

Pour éviter le piège d'un minimum local, T_0 doit être suffisamment élevée pour que toutes les configurations aient sensiblement la même probabilité. A T_0, la probabilité $p(u,v)$ doit être proche de 1, même si la variation Δg est un accroissement important. Lorsqu'on connaît Δg_{max}, [Siarry 88] préconise de choisir:

$$T_0 = \mu_1 \times \Delta g_{max}, \mu_1 > 1$$

Cependant, après quelques essais et pour optimiser la vitesse de convergence, nous avons retenu:

$$T_0 = \mu_1 \times \max_{F^i \in E_p, a^i \neq 0} (S(F^i) \text{ avec } \mu_1 = 1$$

- **Changement d'état**

En attribuant au changement d'état une probabilité identique à la montée et à la descente, tous les états accessibles ne sont plus équiprobables (un prédécesseur et plusieurs successeurs). Mais lorsque T diminue, la probabilité d'acceptation des montées diminue.

- **Loi de décroissance de T**

La température décroît par palier. Au palier k, nous avons choisi:

$$T_k = \mu_2 \times T_{k-1} \quad \text{avec } 0{,}5 < \mu_2 < 1$$

Le taux de décroissance μ_2 est lié au nombre d'essais effectués dans chaque palier pour atteindre l'équilibre statistique qui détermine le moment où l'on doit changer de température. Pour le problème qui nous préoccupe, les meilleurs résultats sont obtenus pour $\mu_2 = 0{,}91$.

- **Critère d'arrêt**

Le critère d'arrêt conjugue les deux paramètres vitesse et rendement.

L'arrêt de la recherche est obtenu si la vitesse de décroissance relative de la fonction de but évoquée au chapitre quatrième et que nous présentons sous la forme:

$$NbNoeudsG(t_n) - NbNoeudsG(t_{n-1}) > \frac{g_{n-1} - g_n}{g_{n-1} \times V_{min}}$$

avec: $V_{min} = 10^{-5}$ (*diminution de 1% du coût pour 1000 transitions*) et $NbNoeudsG(t_n)$, le nombre de noeuds générés à l'instant t_n.

Si la condition sur la vitesse n'est pas vérifiée, l'arrêt de l'algorithme est effectif lorsque $\rho_n \geq \rho_{max}$; ρ_n étant le rendement obtenu à l'étape n et ρ_{max} le rendement maximal espéré.

5.6.1.4. Résultats

Nous proposons d'observer les résultats obtenus à l'aide de la méthode du recuit simulé. Le carnet de commande représenté ci-dessous (*figure 5.12*) comprend un ensemble de formes correspondant à 5 pantalons. Ce choix est motivé par la différence existant entre les dimensions des formes à placer. Pour chaque bande, nous avons indiqué l'encours du carnet (*figure 5.13*), la laize, le nombre de noeuds développés, le nombre de noeuds générés, l'efficience représentée par $\frac{\textit{surface utile}}{\textit{surface occupé}}$ et la durée. La durée est donnée à titre indicatif.

Les programmes sont écrits en Smalltalk (langage interprété sur station Sun IPX). L'évolution de l'efficience en fonction du nombre de noeuds générés est donnée pour chaque bande.

- **Ordre de coupe**

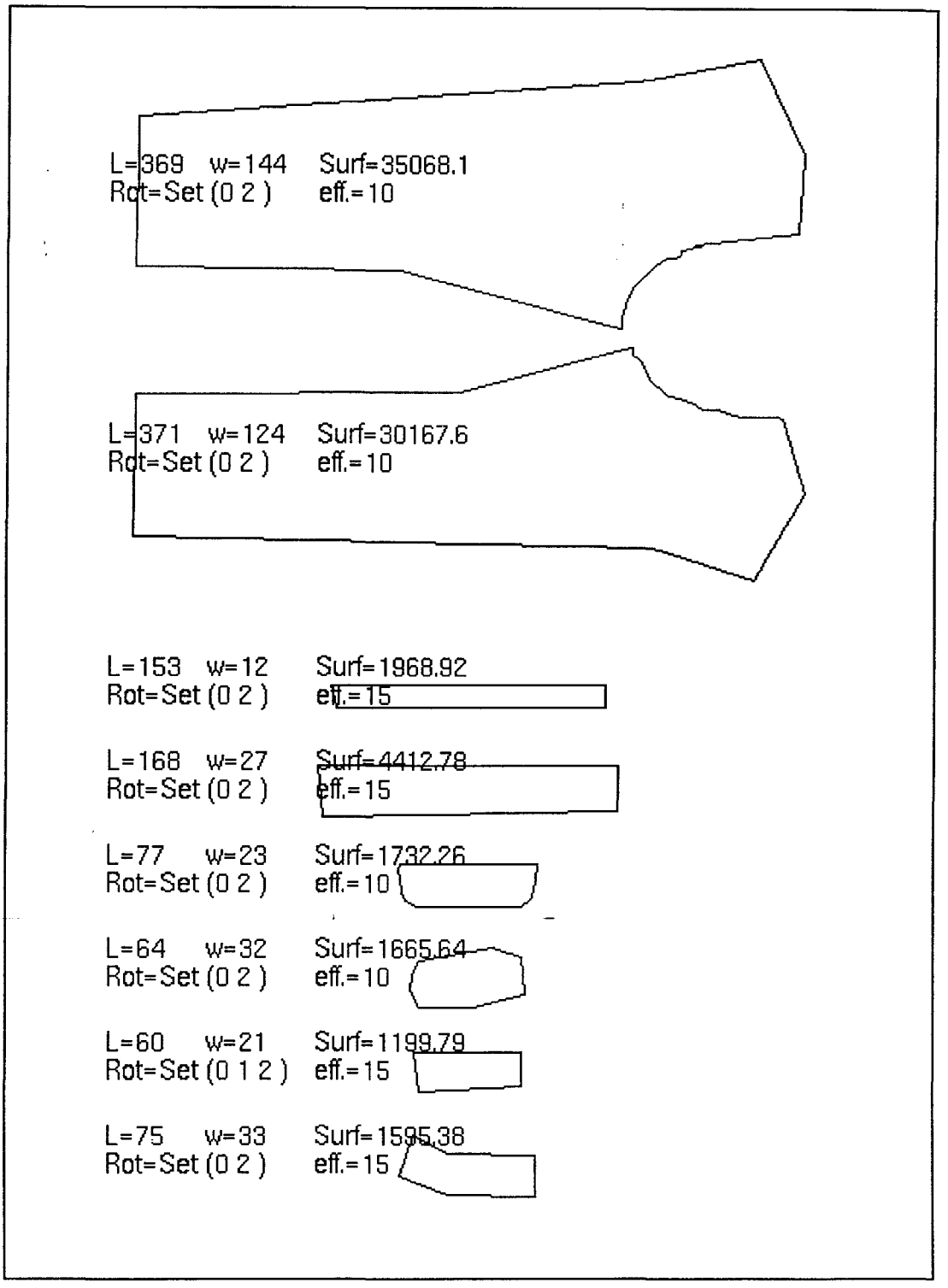

Figure 5.12: Ordre de coupe.

• Interprétations des résultats

Les courbes représentant l'évolution de l'efficience en fonction du nombre de noeuds générés sont typiques au regard de tous les essais effectués. L'accroissement du rendement est plus fort au début de la recherche. Ceci montre une descente rapide dans l'arbre. Ensuite, la température baisse et la recherche s'affine. Le nombre de noeuds augmente alors très vite sans entraîner pour autant de forte augmentation du rendement. La durée dépend surtout du nombre de configurations. Lorsqu'une bande comporte beaucoup de petites pièces placées avec des grandes, le nombre de configurations est très grand et le temps de recherche très élevé. Ce temps, alloué à l'imbrication, dépend aussi du contour de la forme. La recherche de la meilleure position de deux formes rectangulaires met beaucoup moins de temps que celle de deux formes dont les contour sont très irrégulières.

L'utilisation d'un tirage aléatoire d'un successeur entraîne une forme d'instabilité de l'algorithme. En effet, on remarque qu'à température élevée, un grand nombre de bons placements intermédiaires sont construits, mais souvent démontés lorsque, suite au tirage, plusieurs remontées sont acceptées.

	Efficience en %	Temps en secondes
Bande 1	79,5	421
Bande 2	79,0	716
Bande 3	79,9	712
Bande 4	68,6	411
Bande 5	73,6	297
Bande 6	55,7	27
	72,7	**2584**

Tableau 5.1: Efficience et durée obtenues par Recuit simulé.

• Placements obtenus

Les 6 bandes correspondant au carnet de commande sont représentées ci-dessous.

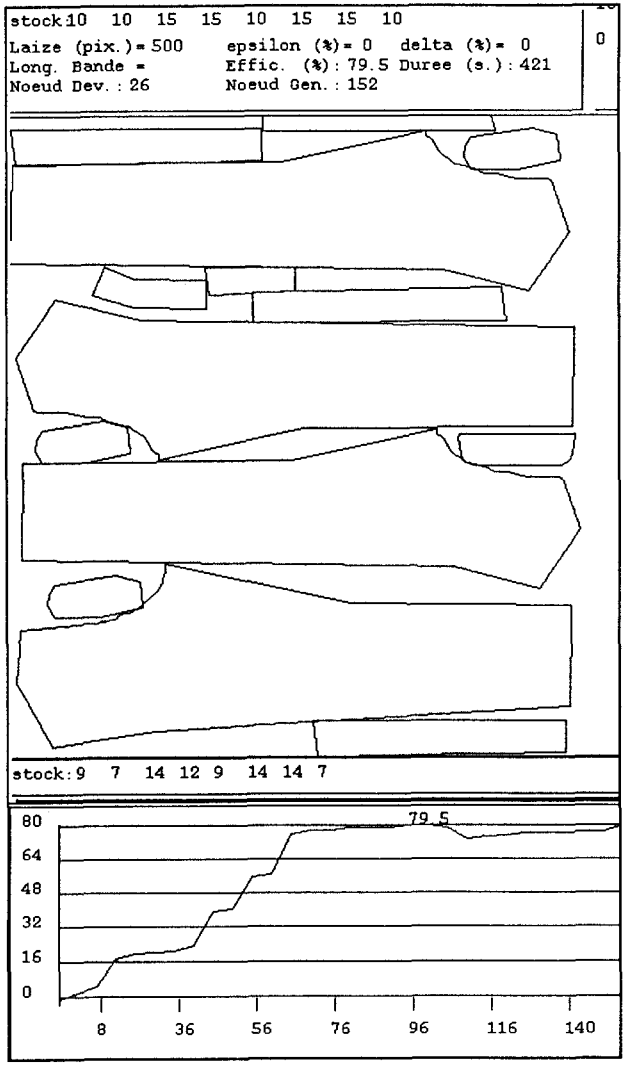

Figure 5.13: SA_Bande 1.

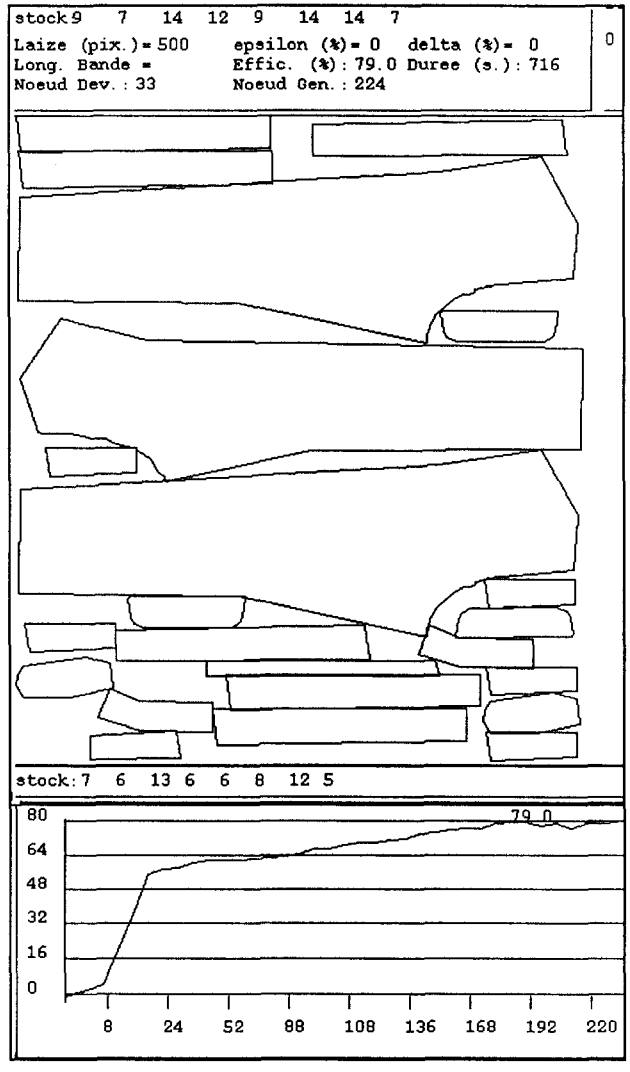

Figure 5.13: SA_Bande 2.

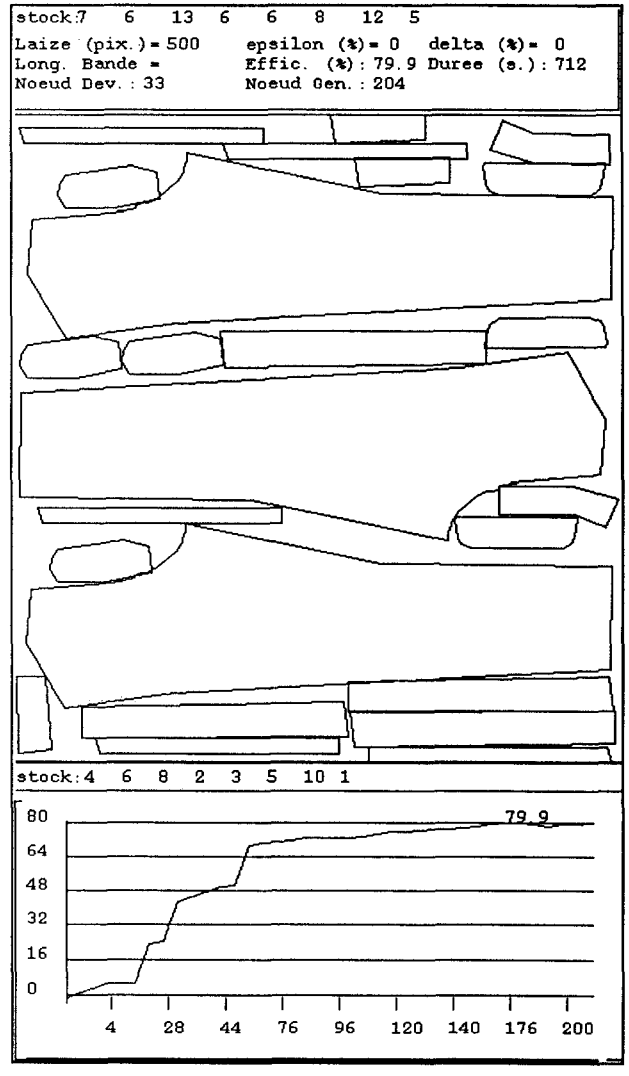

Figure 5.13: SA_Bande 3.

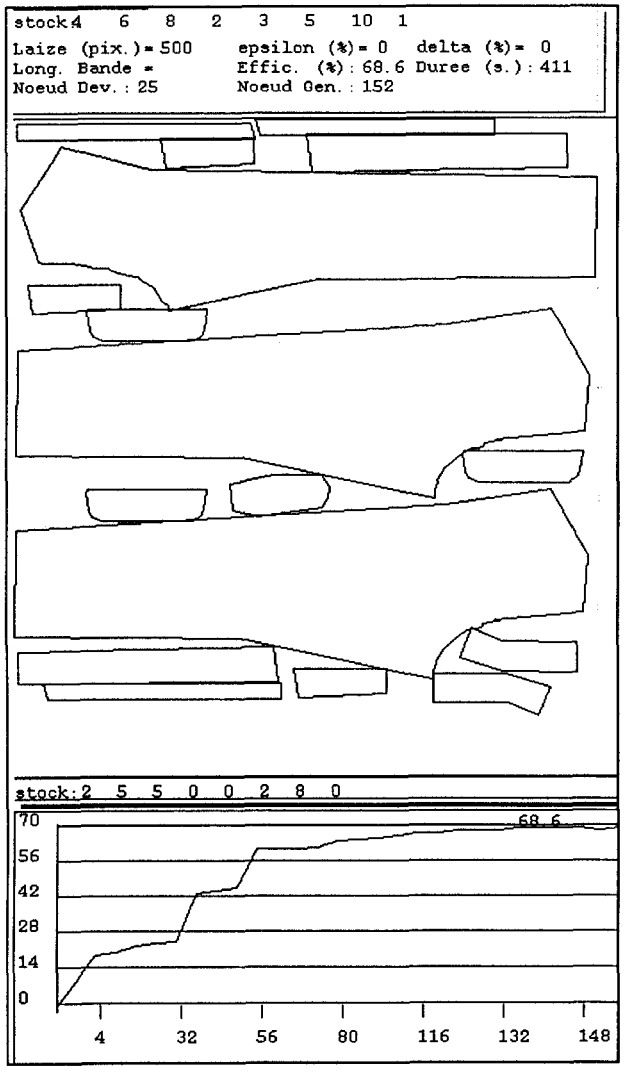

Figure 5.13: SA_Bande 4.

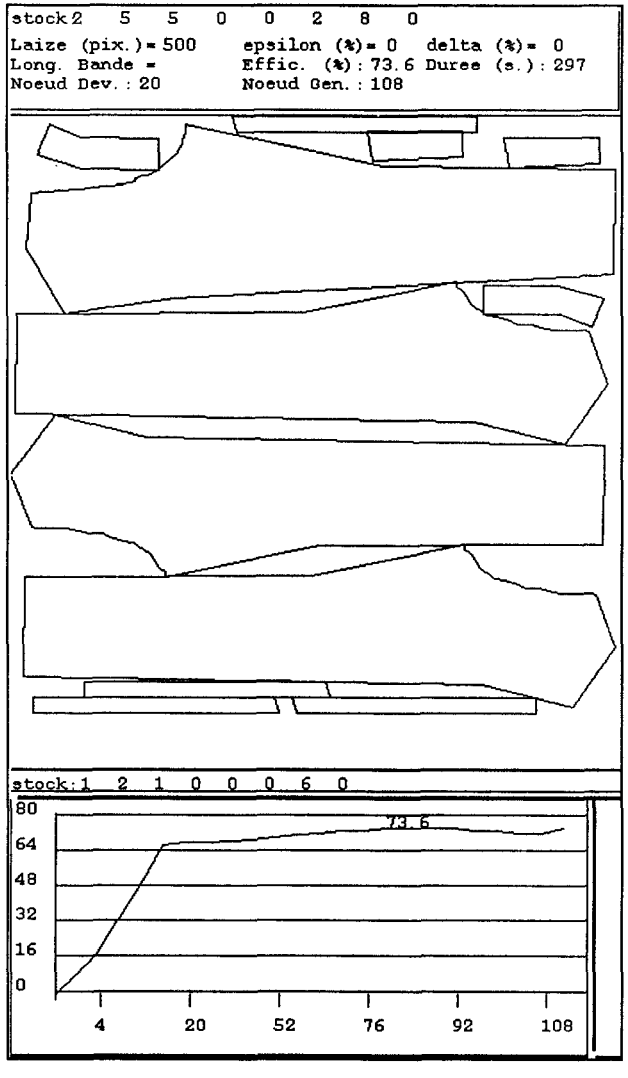

Figure 5.13: SA_Bande 5.

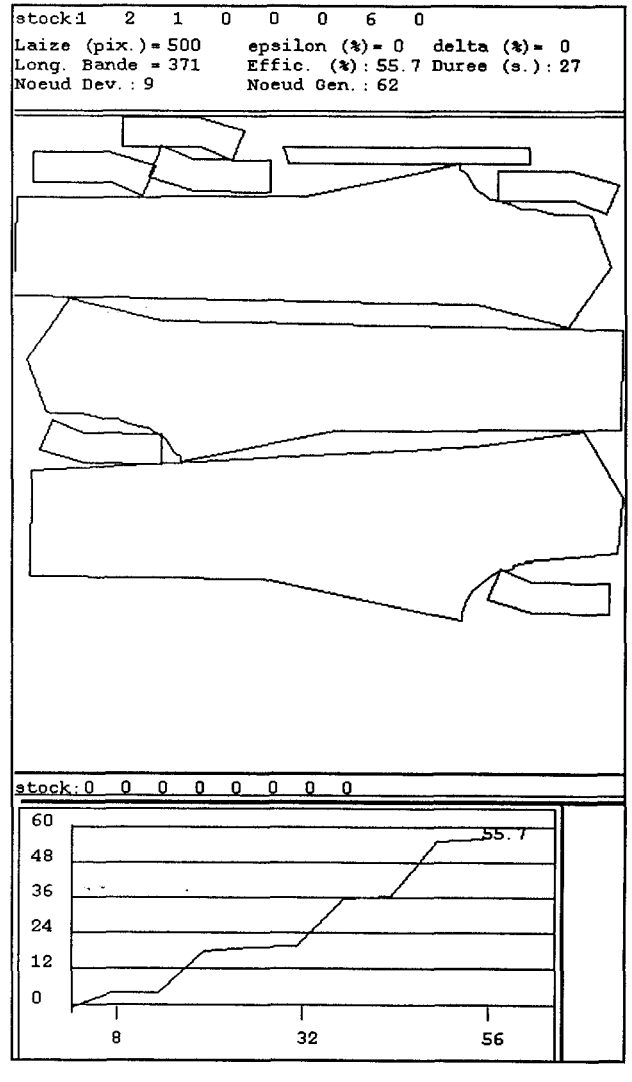

Figure 5.13: SA_Bande 6.

5.6.2. Parcours de graphe: l'algorithme ε-admissible A_ε^*

La modélisation du problème de placement sous forme arborescente nous conduit naturellement à étudier les méthodes de parcours d'arbre.

5.6.2.1. Principe

Comme pour l'algorithme A^*, l'algorithme A_ε^* est basé sur le principe de l'estimation du coût à l'arrivée à un noeud terminal ($f(u) = g(u) + h(u)$). On dit qu'un algorithme est ε-admissible si et seulement s'il fournit une solution acceptable "u" de coût :

$$f(u) \leq seuil \text{ où } seuil = (1+\varepsilon) f^*(u_0).$$

$f^*(u_0) = g(u_0) + h^*(u_0)$ est le minimum du coût des chemins allant de u_0 à la solution optimale. Comme le coût $f^*(u_0)$ n'est pas connu a priori, on utilise un estimateur minorant $f(u_0) = g(u_0) + h(u_0)$. ε représente le maximum de l'écart relatif que tolère l'utilisateur entre la solution optimale et la solution recherchée.

Donc, au moment du choix d'un noeud v à développer, on cherche en priorité parmi les successeurs acceptables de u venant d'être engendrés tel que :

$$f(v) \leq (1+\varepsilon) f(u_0)$$

A noter que le seuil d'acceptabilité est remis à jour chaque fois que l'on trouve un nouveau minorant. Le noeud v à développer est celui dont la fonction de choix $f_c(v) = g(v) + \gamma^* h_c(v)$ est minimale avec $h_c(v)$ une estimation du nombre d'arc du chemin le plus court entre v et un noeud terminal et γ un paramètre permettant de régler le compromis admissibilité/complexité. Plus γ est grand, plus les chemins courts sont favorisés.

L'estimation du coût est sans doute l'opération la plus délicate de l'implantation de l'algorithme. C'est d'elle dont dépend la qualité du placement solution et le temps mis pour l'obtenir. Compte tenu de la définition de $g(u)$ qui comptabilise les pertes par rapport au rectangle de la matière consommée, l'idée consiste à estimer la surface totale des formes qu'il est possible de placer sur l'espace restant disponible, c'est à dire le remplissage espéré. Soit $h(u)$ ce remplissage. $h(u)$ sera donc négative, signifiant que l'on ajoute une perte négative à la perte existante $g(u)$. La perte totale estimée sera bien $f(u) = g(u) + h(u)$.

La surface récupérable $S_r(u)$ est complémentaire de l'enveloppe du placement courant P_u par rapport au cadre de matière fixé par les limites (W_m, L_u).Dans ce qui suit on suppose l'approximation suivante:

$$S_r(u) \approx (W_m - W_u) \times L_u + S(P_u,1) + S(P_u,3)$$

où $S(P_u,c)$ est la surface du peigne du côté c de P_u (*cf. figure 5.14*).

Cette surface évalue l'espace qu'il est possible d'utiliser en plaçant des formes au-dessus ou au-dessous du groupement courant.

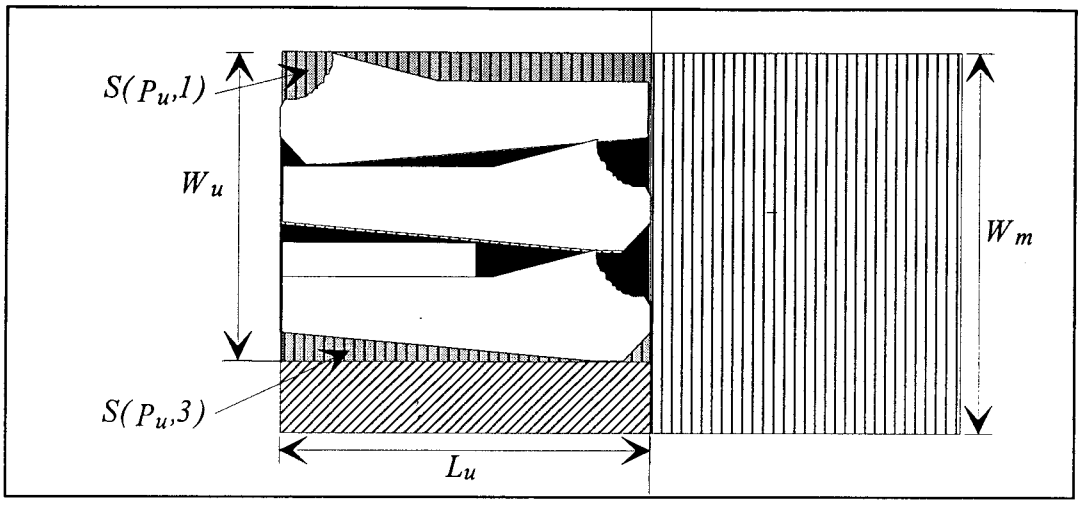

Figure 5.14: Détermination des surfaces.

Comme la fonction $h(u)$ doit être minorante et puisque $h(u) \leq 0$, on cherchera à avoir $|h(u)|$ majorant. Le remplissage doit être optimiste. On peut convenir que:

$$h(u) = -Opt \times S_r(u)$$

Un remplissage supérieur à *86%* est assez rarement atteint en placement textile. Nous retiendrons donc $Opt = 0{,}86$.

Mais cet optimisme doit être tempéré pour ne pas trop s'éloigner de l'heuristique parfaite $h^*(u)$. Si les formes présentes dans le carnet de commande sont de taille importante, ou si la surface totale des petites pièces est faible, les espaces internes risquent d'être important et l'absence des petites pièces ne permet pas de les combler. Il convient donc de compenser cet optimisme par un coefficient de correction appelé *Cor* tenant compte de la surface des petites pièces. Alors:

$$h(u) = -Opt \times Cor(u) \times S_r(u)$$

Dans l'attente de trouver une technique d'optimisation combinatoire plus efficace, on suggère une heuristique $h(u)$ adaptative en fonction des coûts des solutions obtenues durant le passé de la recherche, afin que l'écart $(h^*(u) - h(u))$ devienne de plus en plus faible. On entrevoit ici les possibilités offertes par l'apprentissage au service de l'optimisation. Quelques applications de l'utilisation de l'apprentissage pour la recherche combinatoire sont présentées dans [Perkowski 90].

5.6.2.2. Heuristique de calcul de la longueur de chemin

Cette heuristique, appelée $h_c(u)$ estime le nombre d'arcs compris entre le noeud u et le noeud terminal le plus proche. Connaissant le remplissage estimé $|h(u)|$, c'est à dire la surface que l'on va pouvoir couvrir, on peut calculer le nombre minimal de formes qu'il est possible

de placer dans cette surface de remplissage. La procédure consiste donc à soustraire du remplissage courant, la surface de la plus grande forme restant à placer, si celle-ci est logeable. Sinon on essaie avec une forme plus petite.

5.6.2.3. Tactique de recherche persévérante

On mettra en oeuvre la tactique si la différence relative entre le coût estimé du meilleur successeur et le seuil d'acceptabilité n'excède pas 10% et si la boucle d'exécution de la tactique n'a pas été sollicitée plus de trois fois consécutivement.

5.6.2.4. Limitation du nombre de noeuds développés

Le temps supplémentaire accordé au placement peut être utilement consacré à améliorer les placements suivants. On peut donc diminuer ε. Au niveau de l'algorithme, cela se traduit inévitablement par une diminution du seuil d'acceptabilité. Les développements en profondeur sont plus rares et l'exploration s'effectue plus généralement en largeur.

5.6.2.5. Fonction de choix f_c

On a vu que le choix d'un noeud pendant acceptable ou non, était lié à la minimisation de la fonction $f_c(u) = f(u) + \gamma\ h_c(u)$ en parcourant les noeuds de la liste sélectionnée. Le paramètre γ favorise, lorsqu'il est élevé, le choix des chemins courts. On pourra faire dépendre γ du nombre de noeuds terminaux contenus dans l'ensemble des solutions. La fonction suivante a été retenue:

$$\gamma = \frac{6000}{ln(2 + card\{solutions\}}$$

Au début de la recherche , le nombre de noeuds terminaux est nul, la valeur de γ est élevée afin de favoriser le choix des chemins courts. Au fur et à mesure de l'obtention de solutions intermédiaires garantissant l'existence d'un résultat, on diminue lentement la valeur de γ pour développer des chemins à coûts estimés plus faibles mais souvent plus longs. On affine la recherche en fouillant plus attentivement l'arbre.

5.6.2.6. Résultats

Comme pour la méthode du recuit simulé, nous avons indiqué pour chaque bande l'encours du carnet de commande (*figures 5.15, 5.16, 5.17*), la laize, la largeur réelle de la bande (β=*0,05),* le nombre de noeuds développés, le nombre de noeuds générés, l'efficience et la durée de la recherche (langage interprété sur station Sun IPX). L'évolution de l'efficience en fonction du nombre de noeuds générés n'est pas jugée significative. Elle garde la même allure pour toutes les bandes.

- **Ordre de coupe**

Le carnet de commande utilisé est le même que pour le recuit simulé (*cf.. figure 5.12*).

• Interprétations des résultats

Après de multiples essais, nous avons choisi de présenter les résultats obtenus pour les valeurs 0,10 et 30 de ε. Comme pour la méthode du recuit simulé, les résultats concernent la réalisation des six bandes correspondant au placement du carnet de commande de la figure 5.12. Le tableau suivant résume le comportement général de l'algorithme. Il fait apparaître une efficience par bande meilleure pour de petites valeurs de ε, (ε<10). Mais l'efficience globale atteint son maximum pour ε=10. Cependant, pour ε=*0* les bandes 1 à 5 présentent les rendements les plus élevés, mais la bande 6 n'étant pas complètement "remplie", présente un espace connexe récupérable.

	Efficience en %			Temps en secondes		
	ε=0	ε=10	ε=30	ε=0	ε=10	ε=30
Bande 1	**84,9**	**84,9**	**84,9**	**1251**	**1119**	**1122**
Bande 2	**84,9**	**84,9**	**84,9**	**1054**	**1292**	**1243**
Bande 3	**82,2**	**80,9**	**80,9**	**1015**	**979**	**984**
Bande 4	**80,4**	**76,2**	**76,2**	**771**	**509**	**920**
Bande 5	**79,5**	**78,2**	**78,2**	**447**	**552**	**544**
Bande 6	**52,8**	**72,3**	**71,0**	**86**	**120**	**736**
	77.45	**79.56**	**79,35**	**4624**	**4571**	**5549**

Tableau 5.2: Efficience et durée en fonction de ε (A_ε^*).

• Placements obtenus

Les figures 5.15, 5.16 et 5.17 représentent les bandes obtenues pour différentes valeurs de ε.

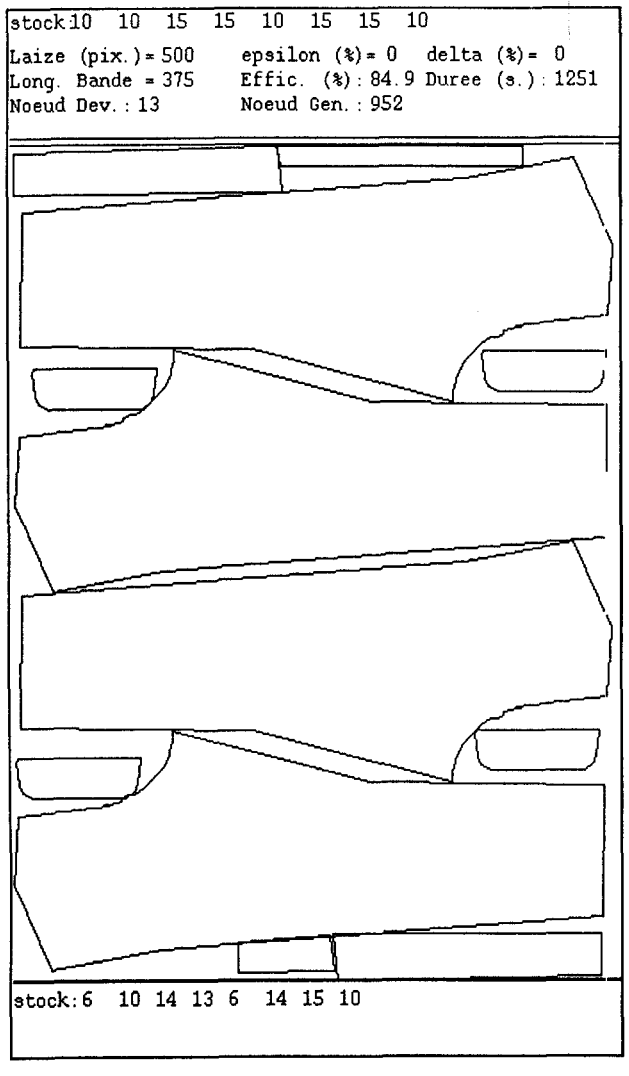

Figure 5.15: $A_{\varepsilon=0}$_Bande 1.

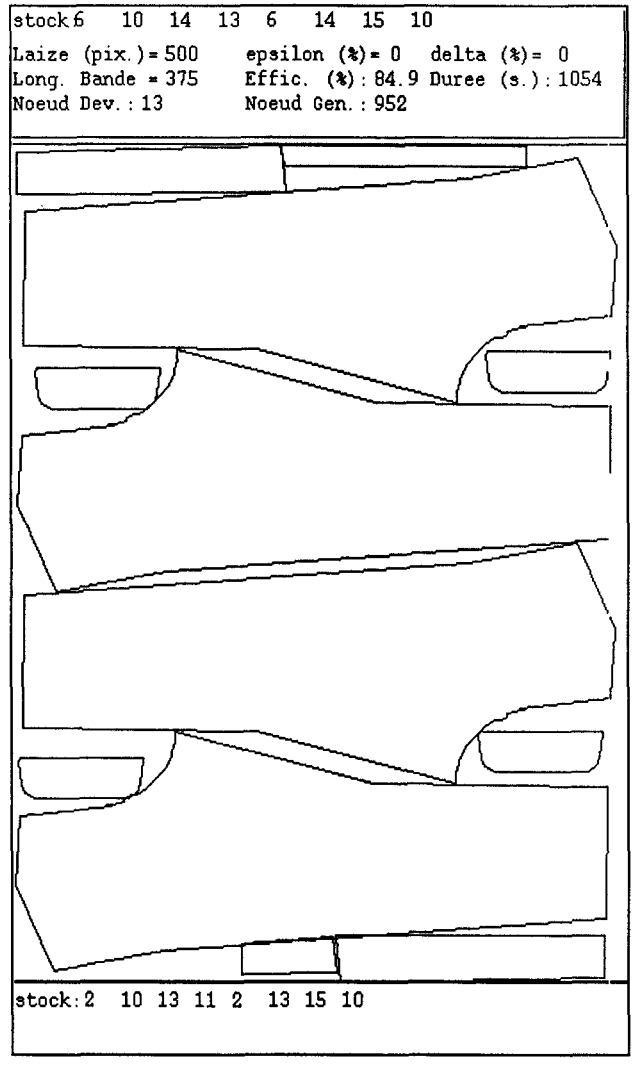

Figure 5.15: $A_{\varepsilon=0}$_Bande 2.

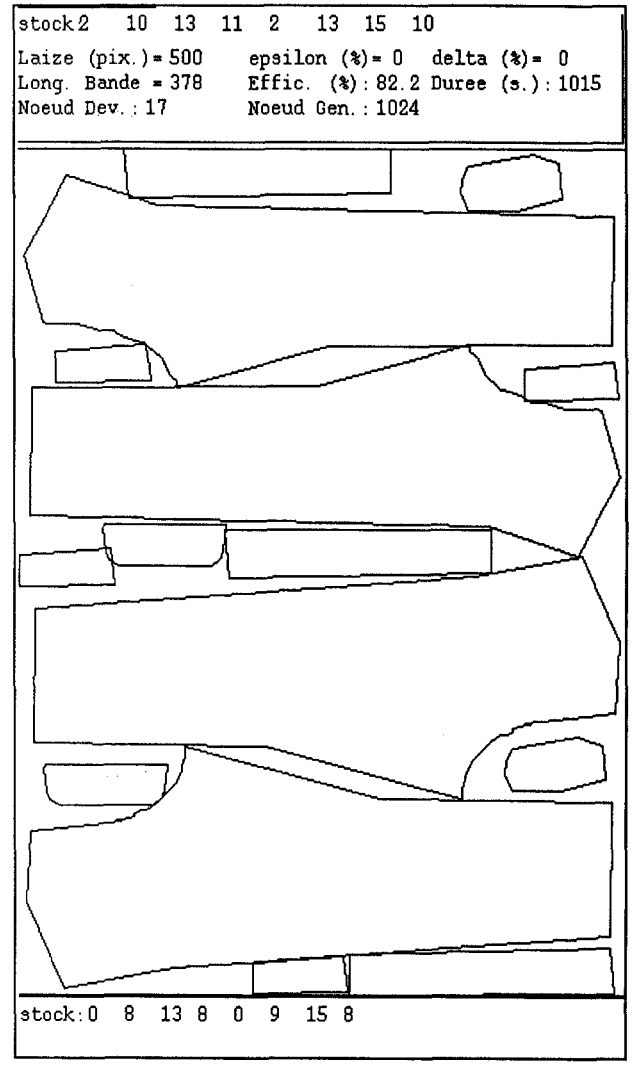

Figure 5.15: $A_{\varepsilon=0}$_Bande 3.

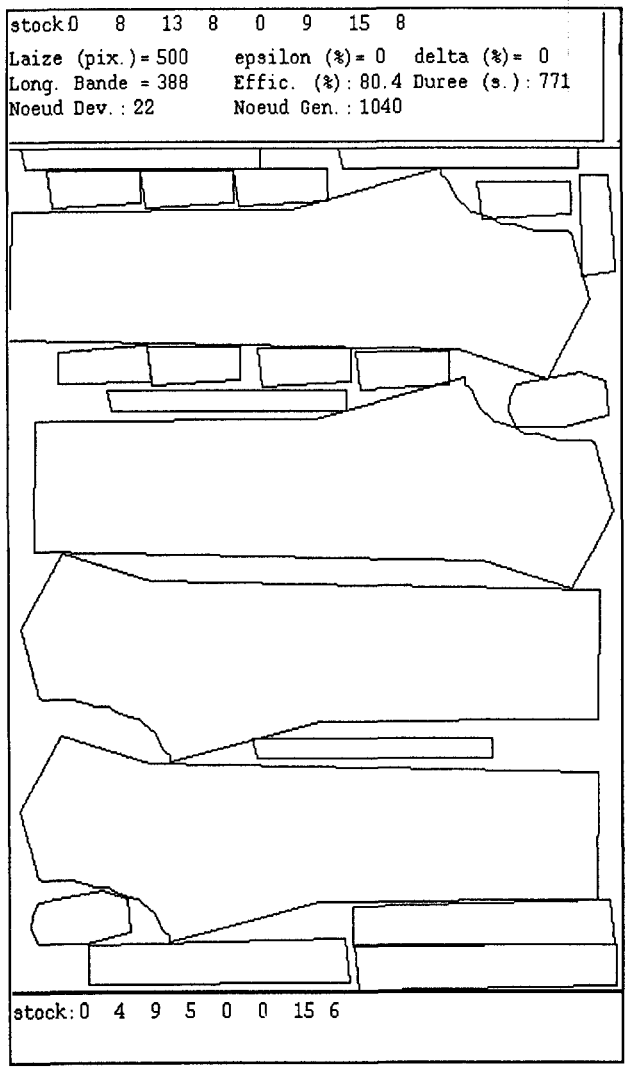

Figure 5.15: $A_{\varepsilon=0}$_Bande 4.

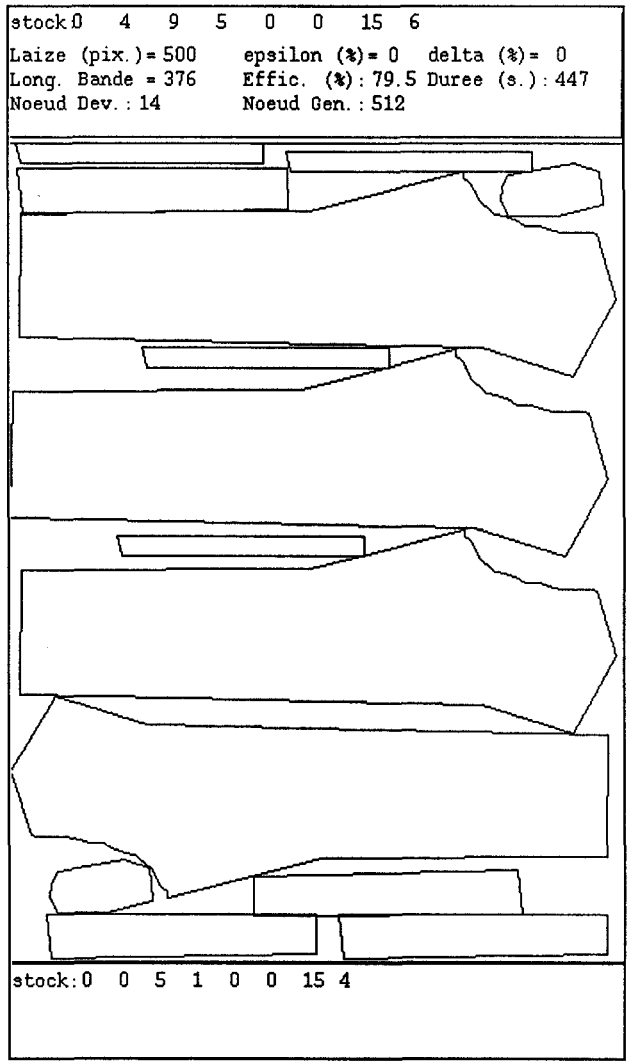

Figure 5.15: $A_{\varepsilon=0}$_Bande 5.

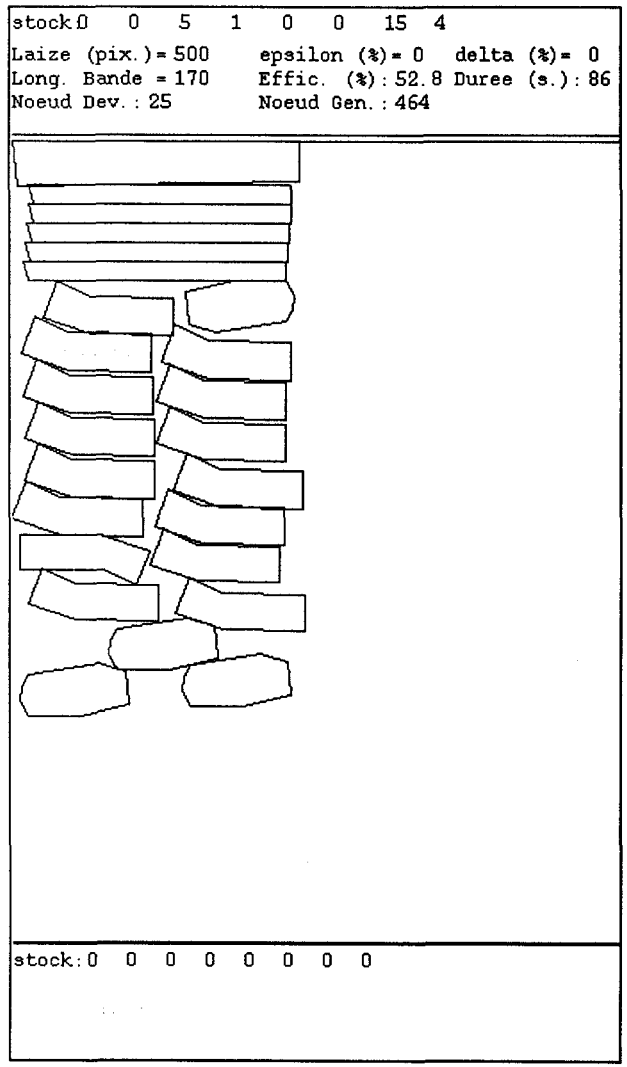

Figure 5.15: $A_{\varepsilon=10}$_Bande 6.

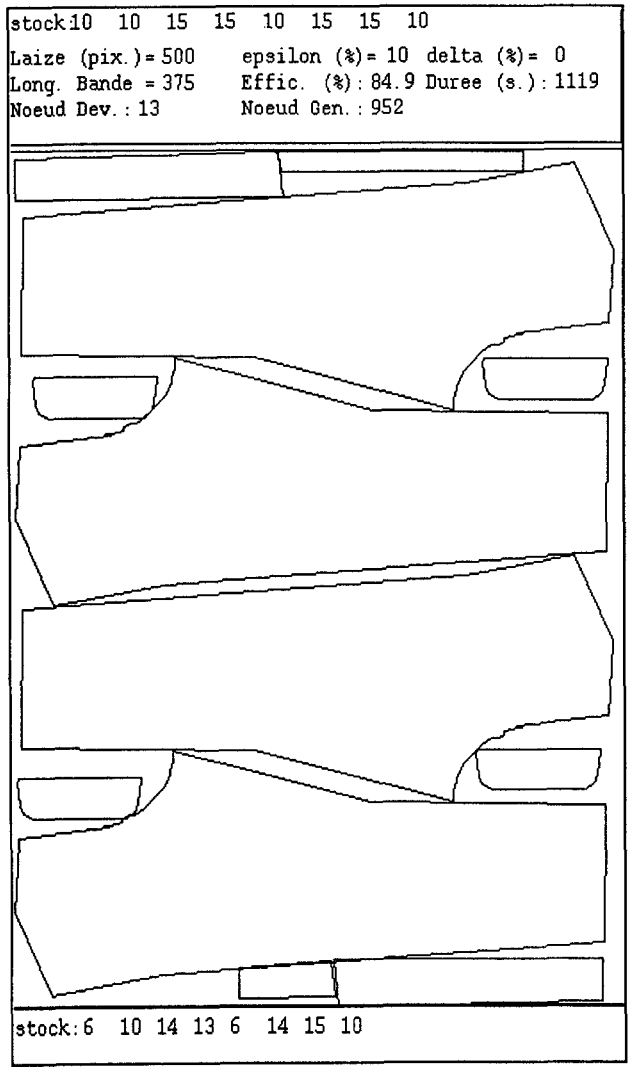

Figure 5.16: $A_{\varepsilon=10}$_Bande 1.

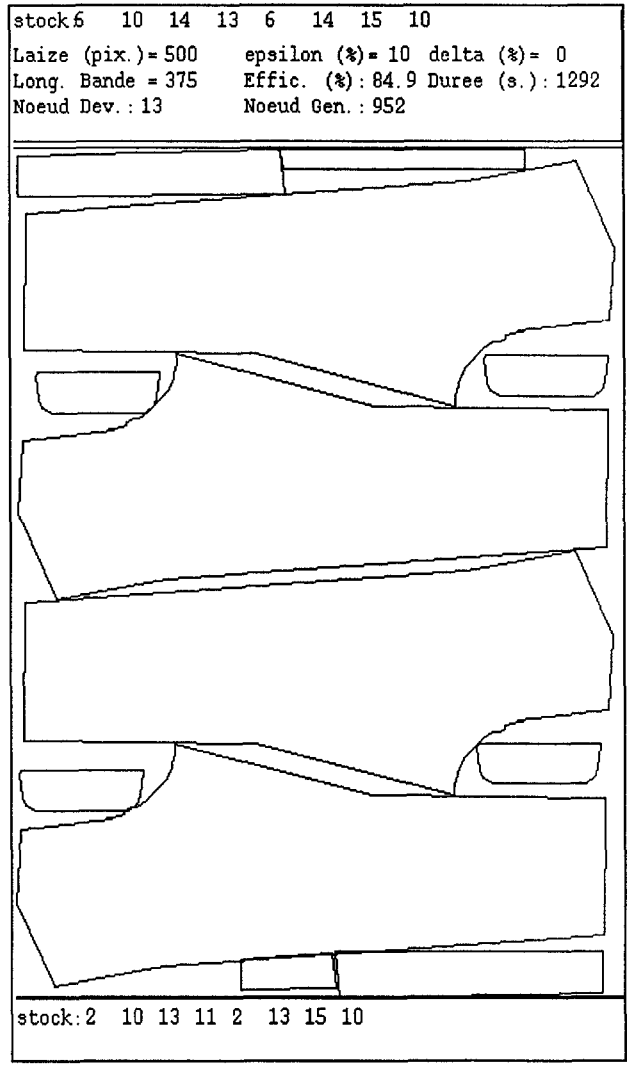

Figure 5.16: $A_{\varepsilon=10}$_Bande 2.

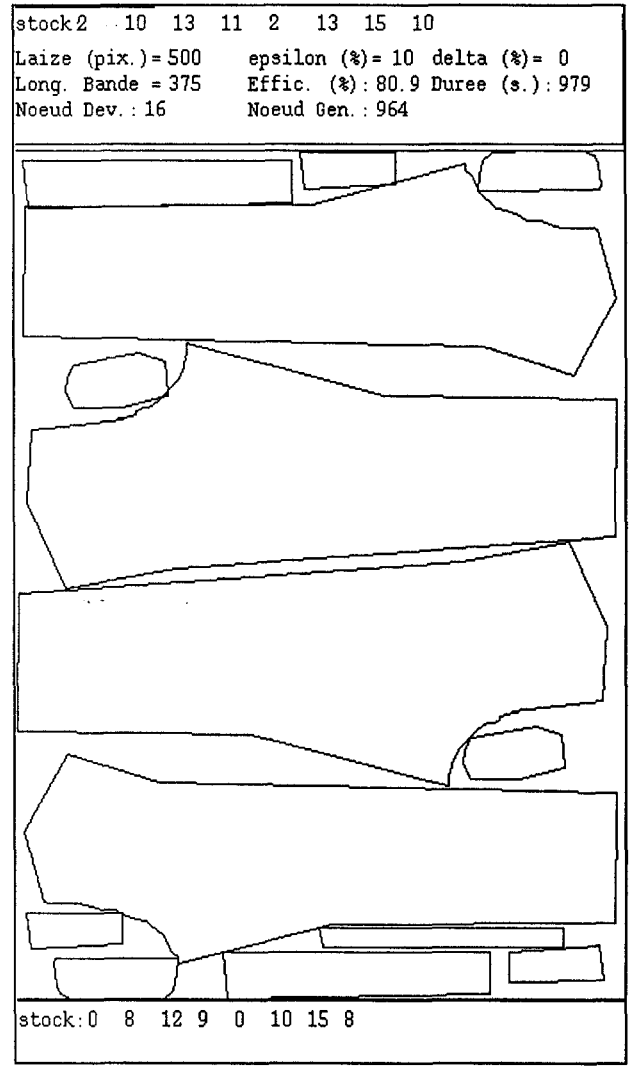

Figure 5.16: $A_{\varepsilon=10}$_Bande 3.

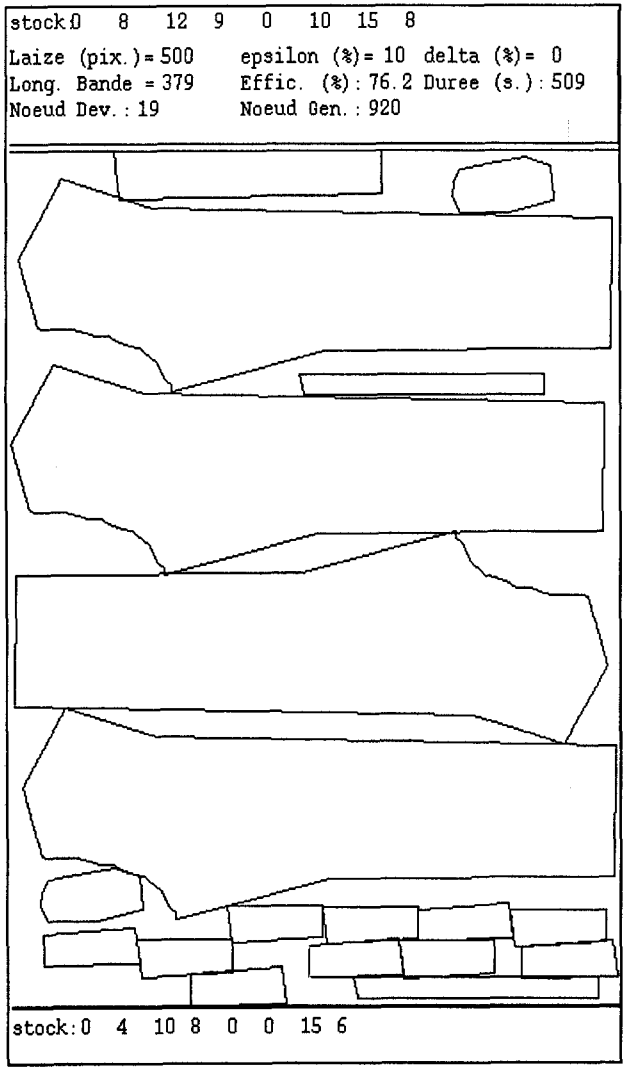

Figure 5.16: $A_{\varepsilon=10}$_Bande 4.

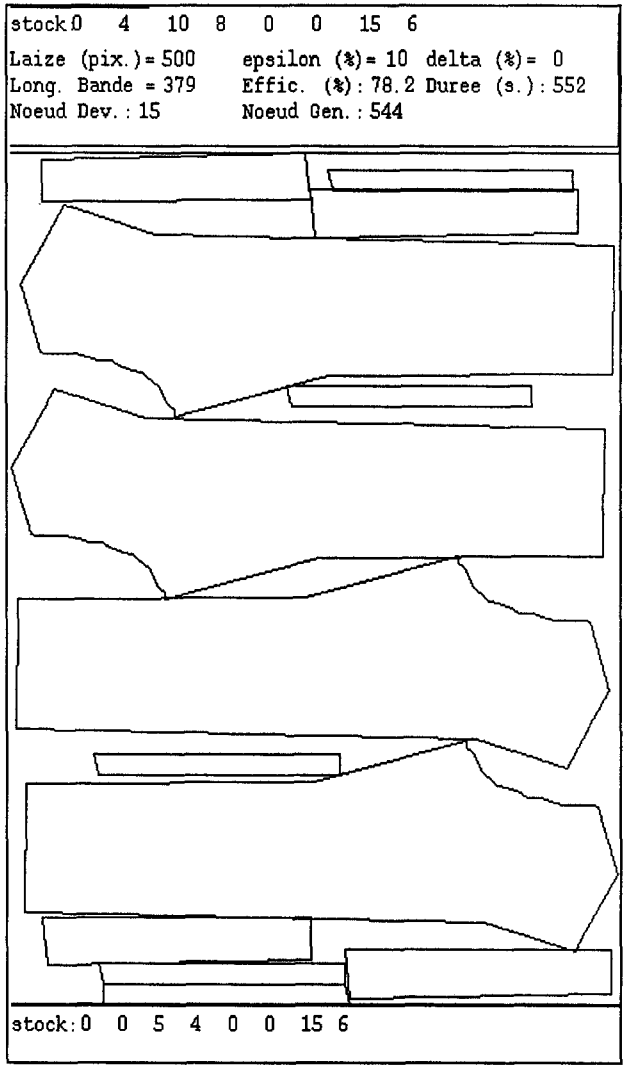

Figure 5.16: $A_{\varepsilon=10}$_Bande 5.

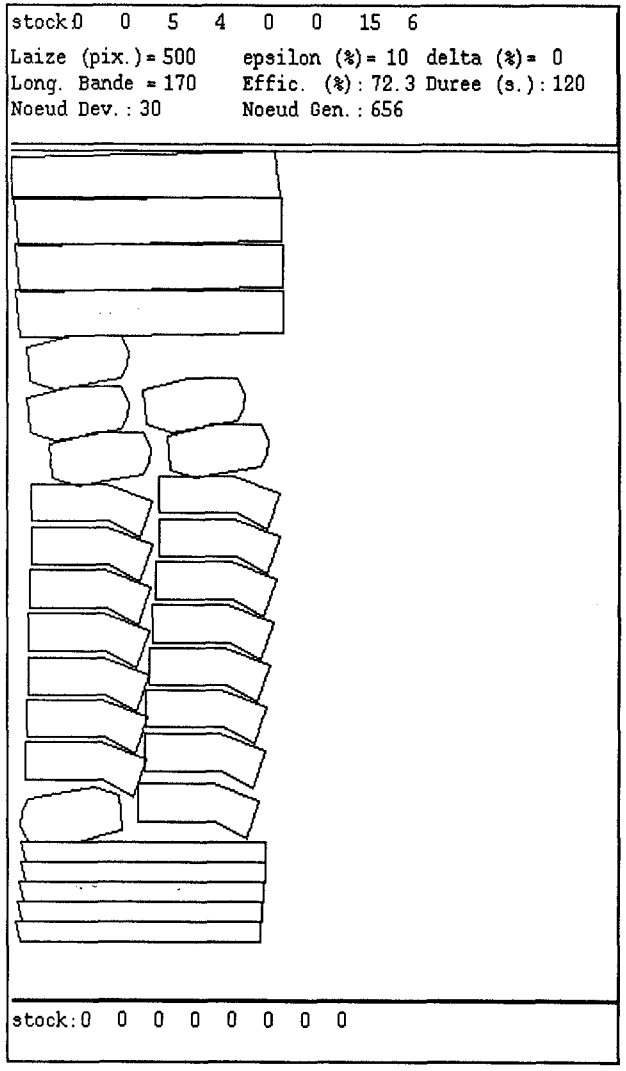

Figure 5.16: $A_{\varepsilon=10}$_Bande 6.

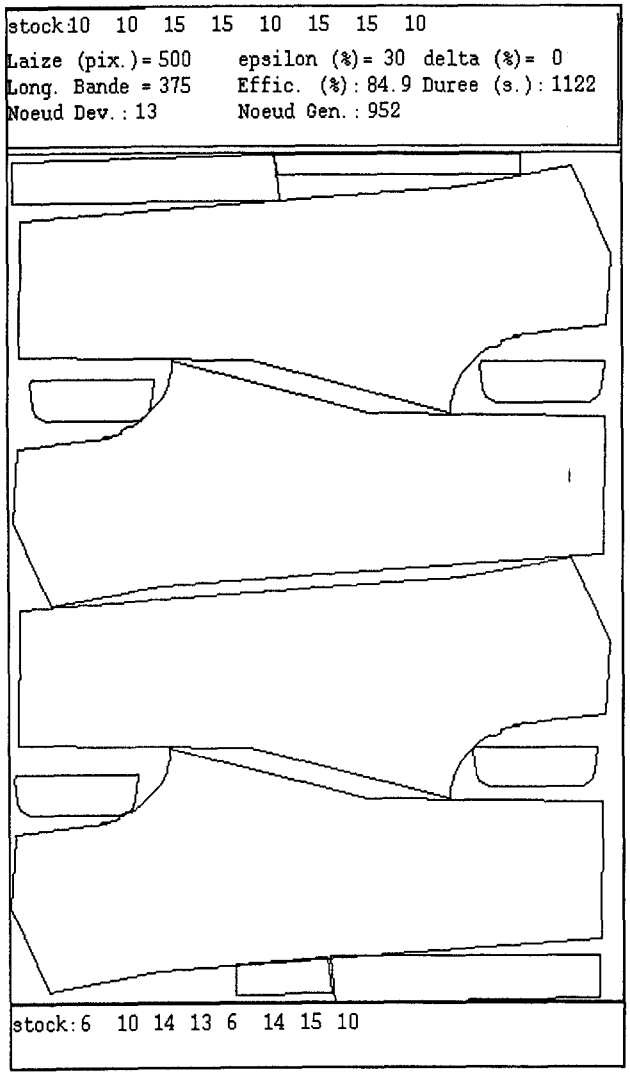

Figure 5.17: $A_{\varepsilon=30}$_Bande 1.

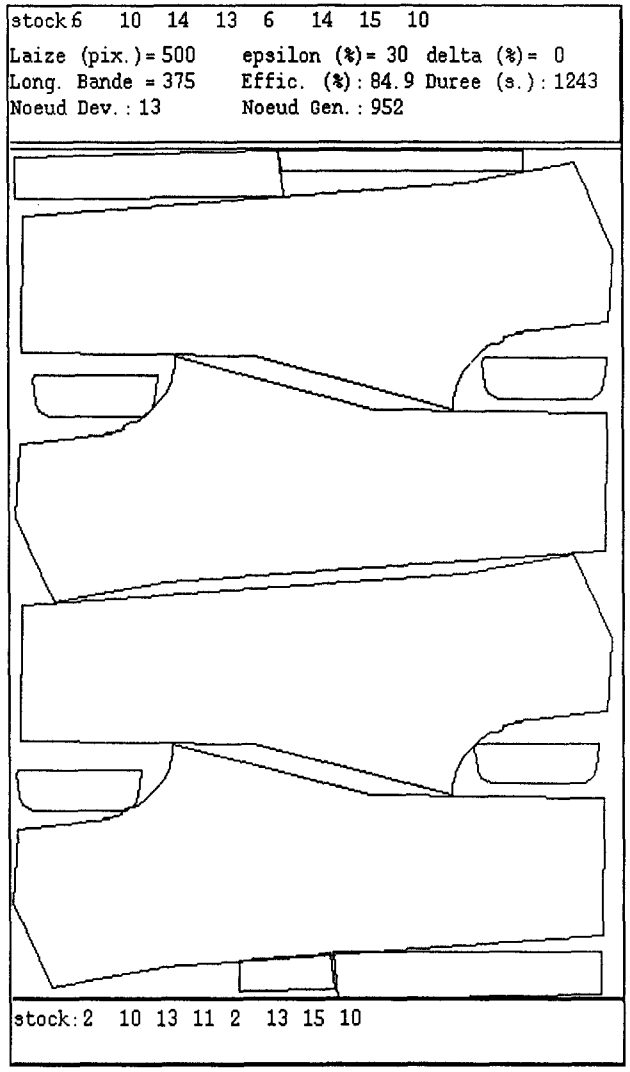

Figure 5.17: $A_{\varepsilon=30}$_Bande 2.

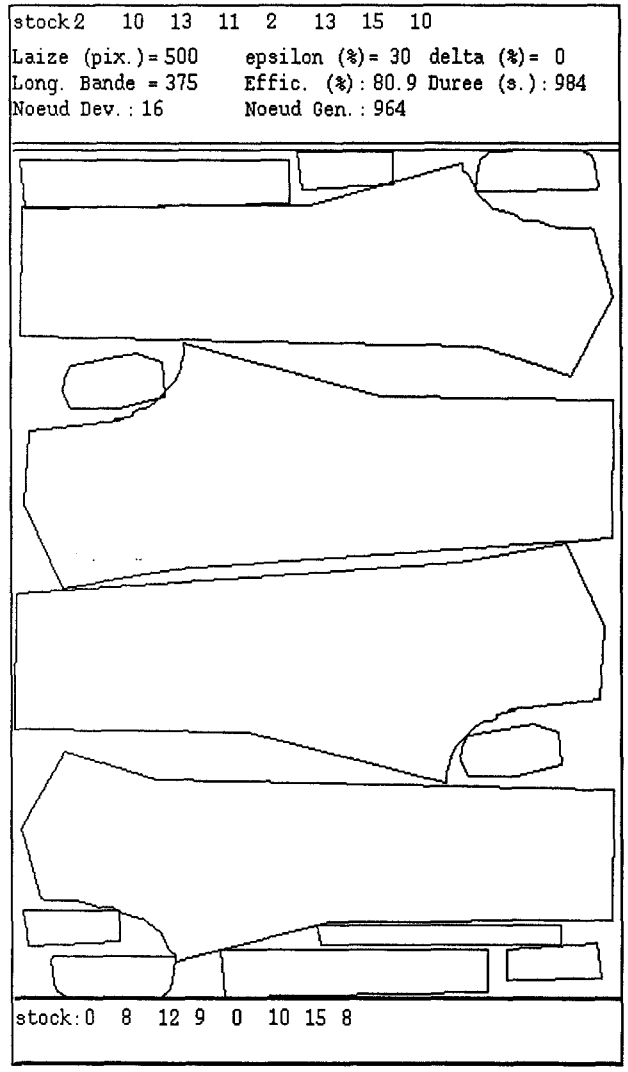

Figure 5.17: $A_{\varepsilon=30}$_Bande 3.

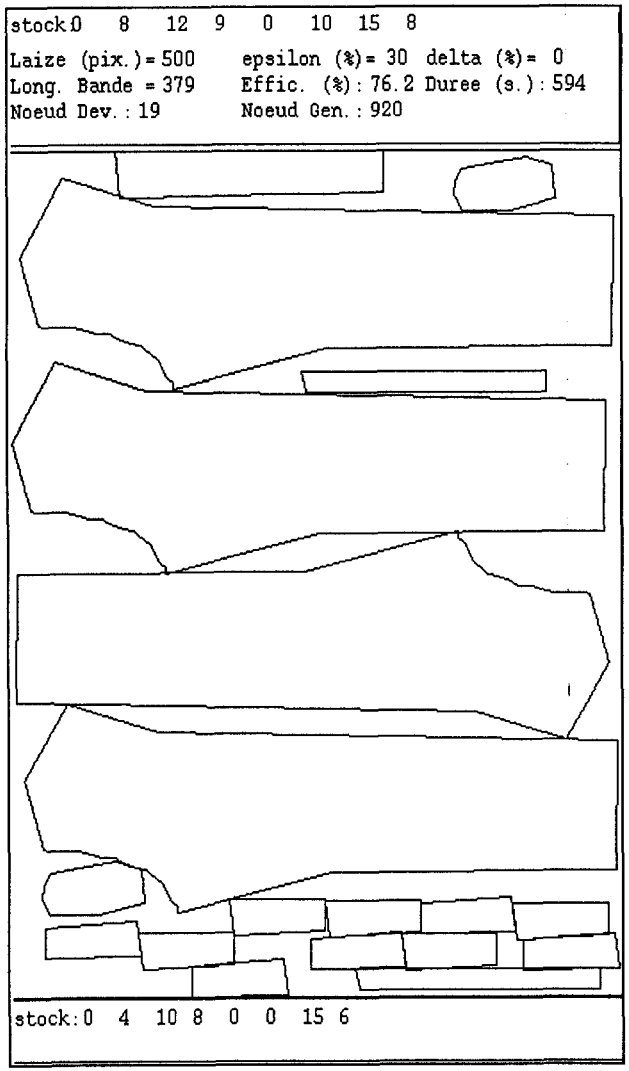

Figure 5.17: $A_{\varepsilon=30}$_Bande 4.

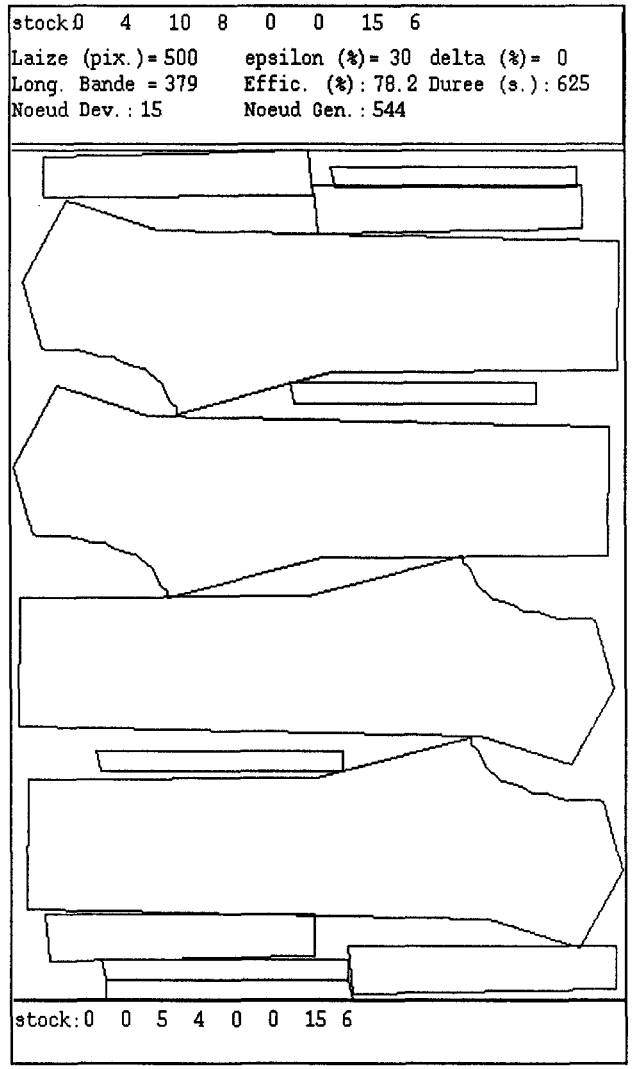

Figure 5.17: $A_{\varepsilon=30}$_Bande 5.

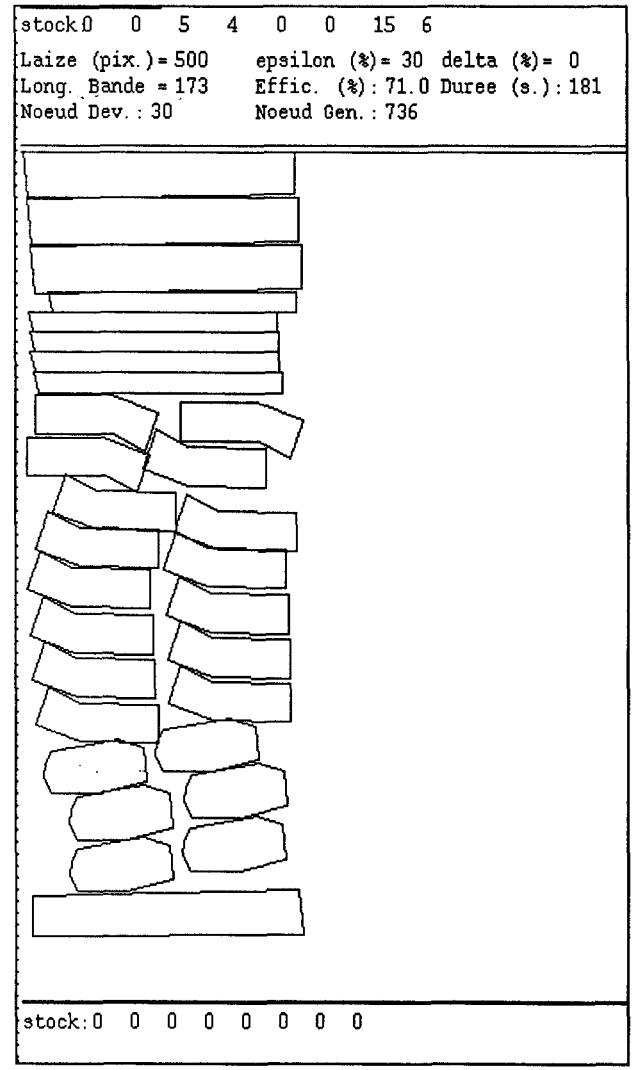

Figure 5.17: $A_{\varepsilon=30}$_Bande 6.

5.6.3. Recherche avec risque de non-admissibilité: R_δ^*

Dans les recherches heuristiques précédentes, les fonctions d'évaluation sont des estimations. Si celles-ci sont parfaites, les heuristiques restent à tout instant sur le chemin optimal. Mais les évaluations étant imparfaites, une mauvaise surévaluation à un endroit quelconque peut les faire dévier sans espoir de retour.

[Pearl 90] propose l'algorithme R_δ^* qui fournit une procédure de recherche généralisée dans les cas où l'on veut considérer une information d'incertitude sur h.

5.6.3.1. Principe

On suppose que l'incertitude sur l'estimation de h^* est représentée par la fonction de densité de probabilité conditionnelle $\rho_{h^*}(x|h)$ qui mesure la vraisemblance relative que h^* se trouve au voisinage de x, sachant l'estimation h.

Dans notre cas où $g^*(u)=g(u)$, la fonction de densité de probabilité induite sur $f^*(u)$ est:

$$\rho_{f^*}(y|h,g) = \rho_{h^*}(y-g|h) \quad \text{ou pour simplifier :} \quad \rho_{f^*}(y,g) = \rho_{h^*}(y-g)$$

On considère alors $f^*(u)$ comme une variable aléatoire représentant le coût du chemin optimal passant par le noeud u non encore développé, et on la note par:

$$f^+(u) = g(u) + h^*(u),$$

et sa fonction de densité de probabilité s'écrit:

$$\rho_{f^+}(y,g) = \rho_{h^*}(y-g).$$

A cette fonction de densité, on associe la fonction risque $R(C)$ définie pour un noeud u de coût $f(u)$ noté $C(u)$ ou C pour simplifier l'écriture et ne pas confondre avec l'algorithme A_ε^* précédent . Plus la valeur de $R(C)$ est forte, plus le coût futur a de chance d'être proche de $f^*(u)$. On la définit par la relation suivante :

$$R(C) = E[max((C-f^+),0)] = \int_y^C (C-y)\rho_{f^+}(y)dy$$

$R(C)$ est l'espérance mathématique de $(C-f^+)$ si $(C-f^+)>0$.

Cette fonction mesure le risque de passer à côté du chemin optimal si on ne développe pas le noeud qui s'y trouve. Plus un noeud présente une valeur de risque élevée, plus il est choisi en priorité pour le développement.

Si l'on fixe le seuil de risque à δ, à la fin de l'algorithme, le risque de chaque noeud admissible doit être inférieur ou égal à δ. C'est la définition d'un algorithme δ*-admissible ou risque-admissible.*

On définit le coût-seuil $C_\delta(u)$ relatif à ce risque-seuil δ par la solution de l'équation:

$$R(C) = \delta$$

$C_\delta(u)$ représente le meilleur coût acceptable avant que le risque ne tombe en dessous de δ.

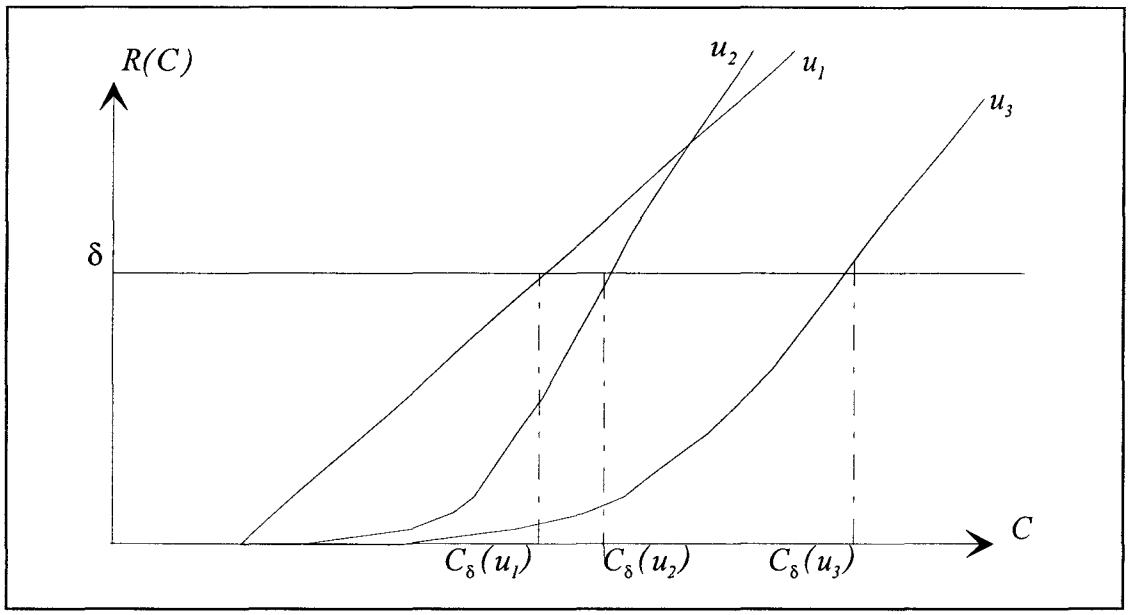

Figure 5.18: fonction de risque.

En fait, il est assez difficile de fixer une valeur à δ. Aussi, on le définit plutôt comme un pourcentage de risque par rapport au coût associé.

L'étape la plus délicate est de trouver la fonction qui mesure ce risque, en l'occurrence la fonction de densité de probabilité sur les estimations.

5.6.3.2. Choix des fonctions

La fonction la plus réaliste est de prendre une forme gaussienne pour $\rho_{h^*}(x)$ puisque la probabilité de trouver h^* au voisinage de x est plus élevée autour de sa valeur moyenne. Mais

comme la forme exacte de $\rho_{h^*}(x)$ ne peut être calculée avec précision, nous avons choisi une fonction uniforme. Il nous faut donc encadrer la valeur optimale par deux estimations.

Soient f_a, une estimation optimiste de $f^+(u)$ et f_b son estimation pessimiste. En supposant que les estimations de coût de chaque noeud u sont distribuées uniformément entre $f_a(u)$ et $f_b(u)$ la fonction de densité s'écrit alors:

$$\rho_{f^+}(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{f_b - f_a} & si\ f_a \leq y \leq f_b \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Et pour un noeud u de coût $C(u)$, le risque vaut:

$$R(C) = \begin{cases} 0 & \text{pour } C \leq f_a \\ \dfrac{(C - f_a)^2}{2(f_b - f_a)} & si\ f_a \leq C \leq f_b \\ C - \dfrac{(f_a + f_b)}{2} & si\ C \geq f_b \end{cases}$$

On résout l'équation:

$$R(C) = \delta$$

on obtient le coût seuil:

$$C_\delta(u) = \begin{cases} 0 & \text{pour } \delta \leq f_a \\ f_a + \sqrt{2\delta(f_b - f_a)} & \text{pour } 0 \leq \delta \leq \dfrac{f_b - f_a}{2} \\ \delta + \dfrac{f_a + f_b}{2} & \text{pour } \delta \geq \dfrac{f_b - f_a}{2} \end{cases}$$

En posant $\delta' = 2\delta/(f_b - f_a)$ **avec** $0 \leq \delta' \leq 1$, on maintient les variations à l'intérieur de l'intervalle estimé. On obtient alors les coûts seuil suivants:

$$C_{\delta'}(u) = f_a \quad \text{pour } \delta' = 0 \quad \text{et} \quad C_{\delta'}(u) = f_b \quad \text{pour } \delta' = 1$$

Ainsi, lorsque $\delta' = 0$, le coût seuil vaut f_a; et lorsque $\delta' = 1$, le coût vaut f_b.

5.6.3.3. Résultats

L'algorithme $R^*_{\delta\varepsilon}$ utilise une partie de A^*_ε. Les estimations sont:

$$f_b = g(u) - (W_m - W_m) L_u \qquad \textbf{et}$$

$$f_a = g(u) - (W_m - W_m) L_u - S(P_u,1) + S(P_u,3).$$

Comme précédemment, nous avons indiqué pour chaque bande l'encours du carnet de commande (figures 5.18 à 5.25), la laize, la largeur réelle de la bande (β=*0,05),* le nombre de noeuds développés, le nombre de noeuds générés, l'efficience et la durée de la recherche (langage interprété sur station Sun IPX). L'évolution de l'efficience en fonction du nombre de noeuds générés n'est pas jugée significative. Elle garde la même allure pour toutes les bandes.

- **Ordre de coupe**

Le carnet de commande utilisé est le même que pour le recuit simulé (*cf. figure 5.12*).

- **Interprétations des résultats**

Nous avons choisi de présenter les résultats obtenus pour les mêmes valeurs 0,10 et 30 de ε comme précédemment mais avec $\delta'=0$ et des valeurs de ε et δ' variables. Ces résultats concernent toujours la réalisation des six bandes correspondant au placement du carnet de commande de la figure 5.12. Le caractère chaotique de g(u) rend l'interprétation des résultats très délicate . Les performances, efficience et durée, dépendent bien des deux paramètres de l'algorithme, ε et δ'. Mais comme l'encours du carnet de commande évolue en fonction de ces mêmes paramètres, les essais effectués, mêmes nombreux, ne nous ont pas permis une analyse définitive. Cependant l'efficience par bande parait meilleure pour de petites valeurs de δ' et ε et l'efficience globale des cas étudiés est meilleure pour $10 \leq \delta' \leq 20$ et $30 \leq 0 \leq \varepsilon \leq 50$.

	Efficience en %						
δ' en %	δ'=0/ε=0	δ'=0/ε=10	δ'=0/ε=30	δ'=10/ε=50	δ'=30/ε=10	δ'=50/ε=30	δ'=70/ε=10
Bande 1	84,5	84,5	84,5	84,5	84,5	84,5	83,7
Bande 2	84,5	84,5	84,5	84,5	84,5	84,5	85,0
Bande 3	82,9	82,9	82,9	82,9	81,0	82,6	77,9
Bande 4	81,5	81,5	81,5	77,8	79,0	81,2	82,3
Bande 5	79,1	79,1	79,1	80,6	81,2	77,4	77,6
Bande 6	57,9	59	57,6	62,3	59,3	29,0	33,7
	78,4	78,6	78,3	78,8	78,2	73,2	73,4

Tableau 5.3: Efficience en fonction de ε et δ obtenue par ($R^*_{\delta\varepsilon}$).

	Temps en secondes						
δ' en %	δ'=0/ε=0	δ'=0/ε=10	δ'=0/ε=30	δ'=10/ε=50	δ'=30/ε=10	δ'=50/ε=30	δ'=70/ε=10
Bande 1	422	442	564	381	392	623	619
Bande 2	418	460	475	353	395	397	538
Bande 3	345	374	428	337	304	617	682
Bande 4	339	324	329	751	872	182	282
Bande 5	766	719	804	200	272	141	210
Bande 6	101	120	120	117	95	133	553
	2391	2438	2720	2139	2330	2093	2884

Tableau 5.4: Durée en fonction de ε et δ ($R^*_{\delta\varepsilon}$).

- **Placements obtenus**

Les figures 5.19 à 5.25 représentent les bandes obtenues pour différentes valeurs de ε et δ'.

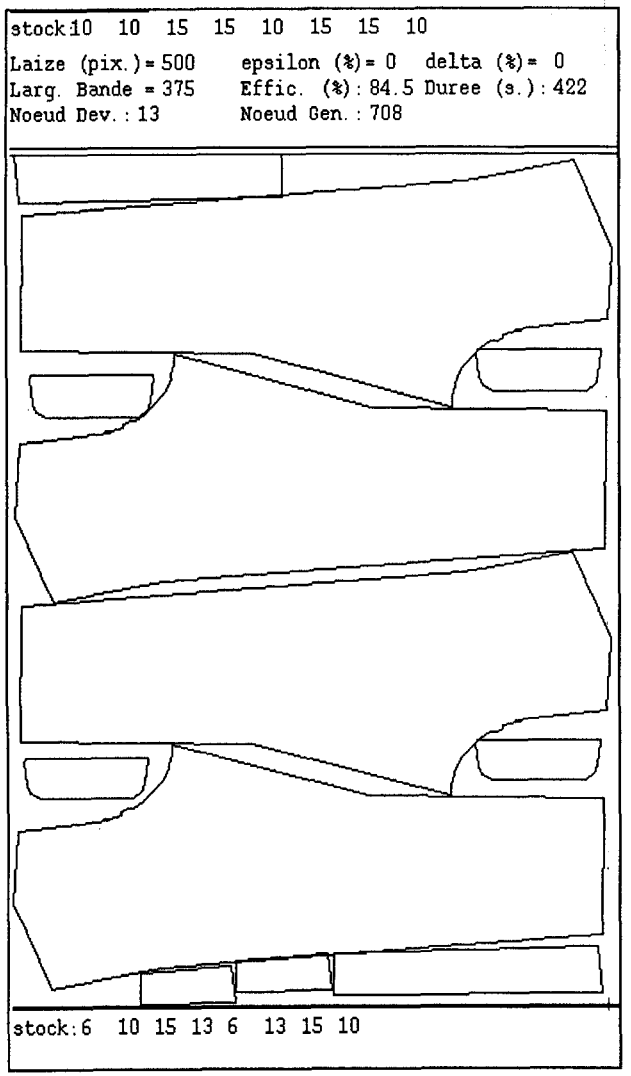

Figure 5.19_1: $R_{\delta=0\varepsilon=0}$_Bande1.

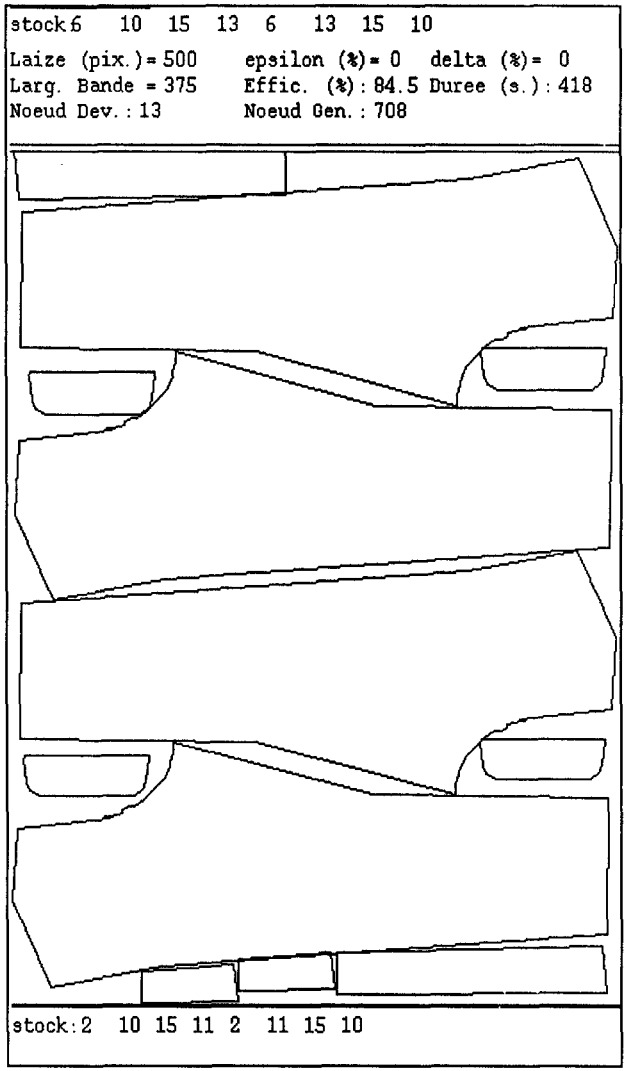

Figure 5.19_2: $R_{\delta=0\varepsilon=0}$_Bande2.

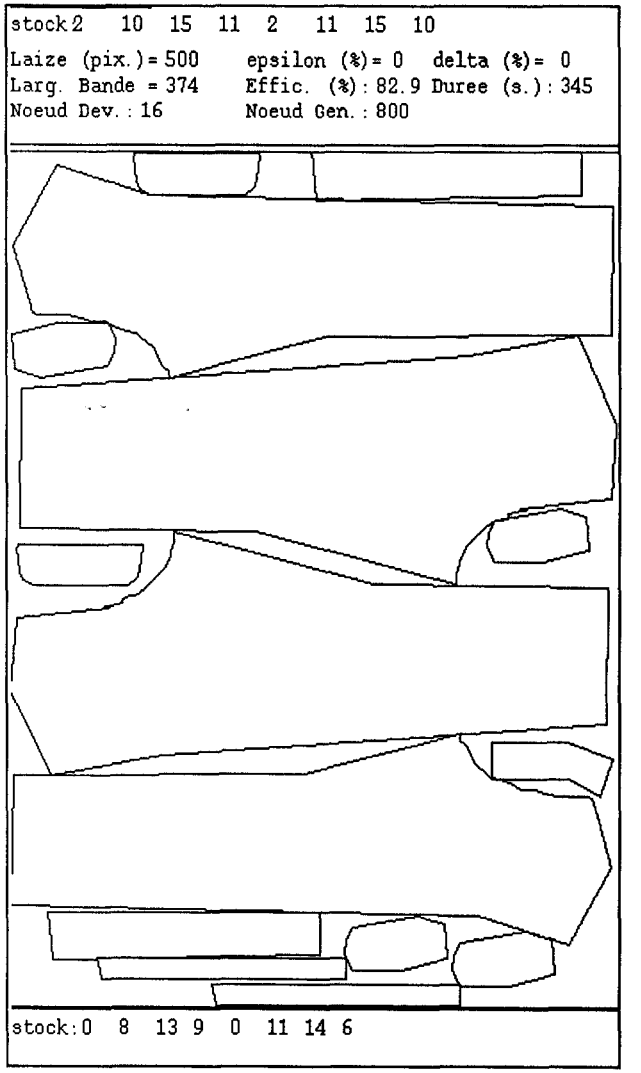

Figure 5.19_3: $R_{\delta=0\varepsilon=0}$_Bande3.

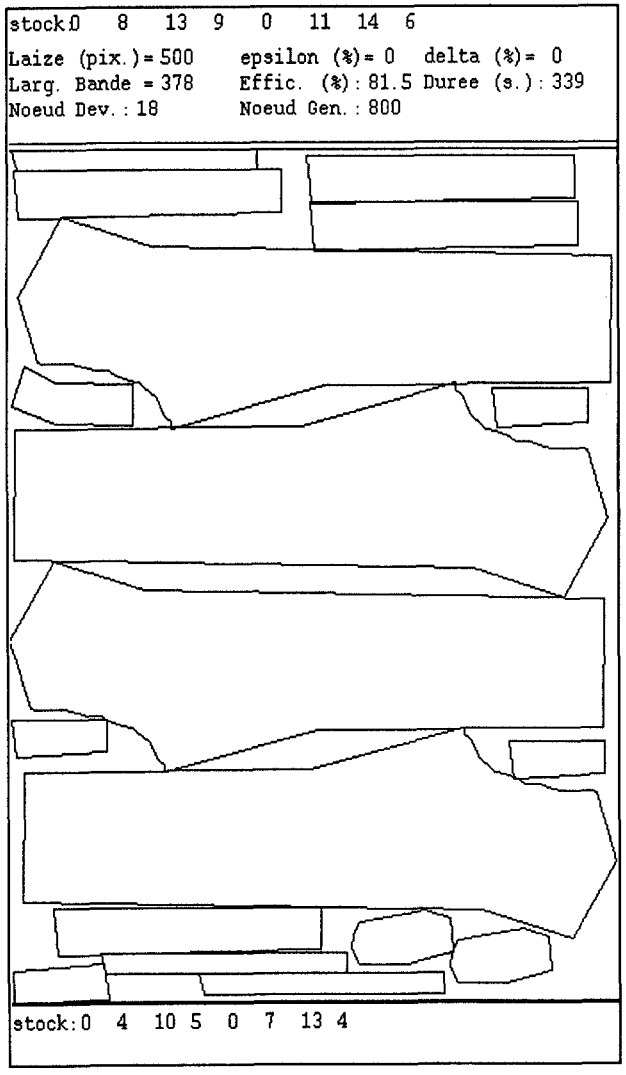

Figure 5.19_4: $R_{\delta=0\varepsilon=0}$_Bande4.

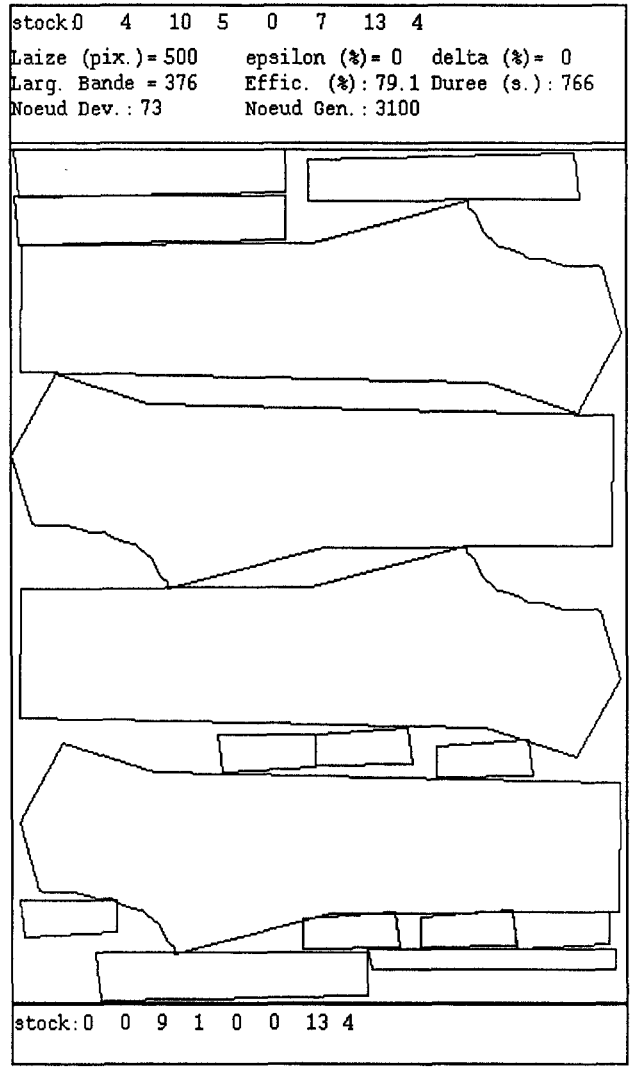

Figure 5.19_5: $R_{\delta=0\varepsilon=0}$_Bande5.

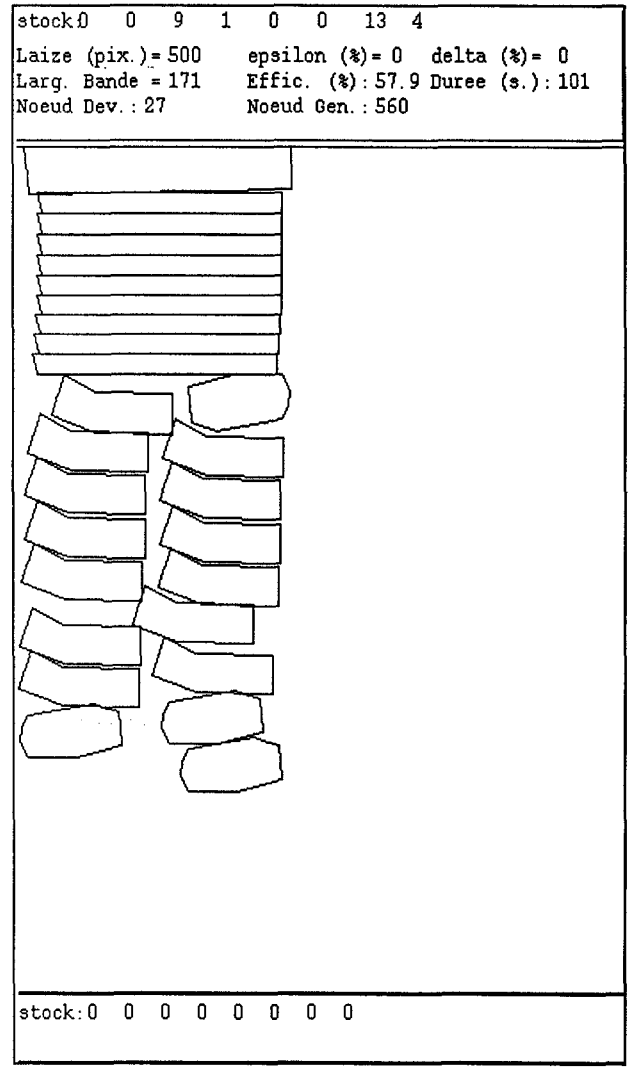

Figure 5.19_6: $R_{\delta=0\varepsilon=0}$_Bande6.

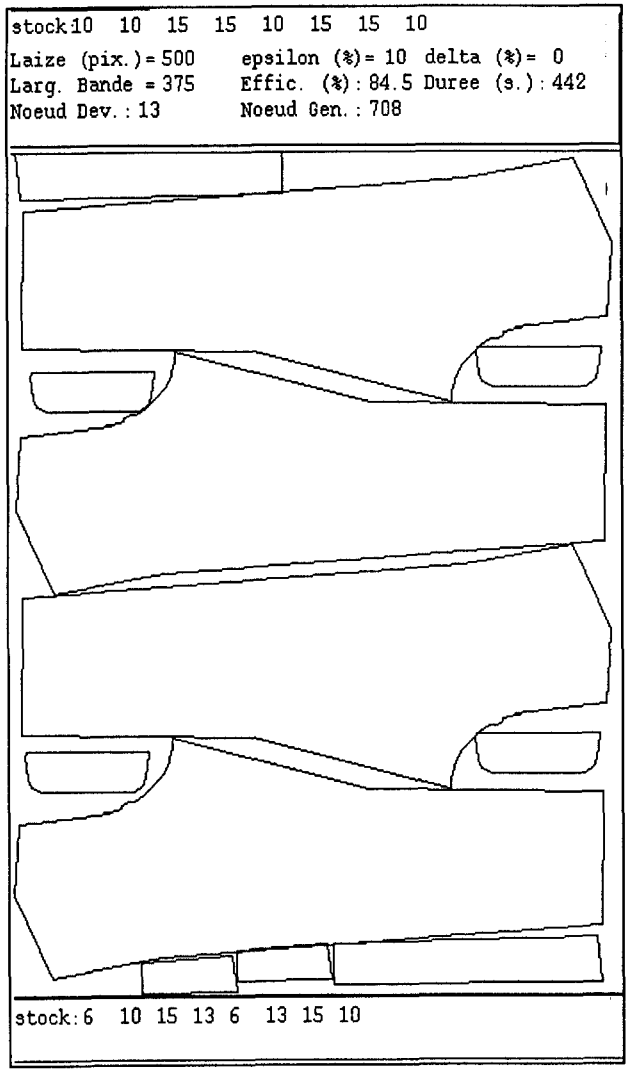

Figure 5.20_1: $R_{\delta=0\varepsilon=10}$_Bande1.

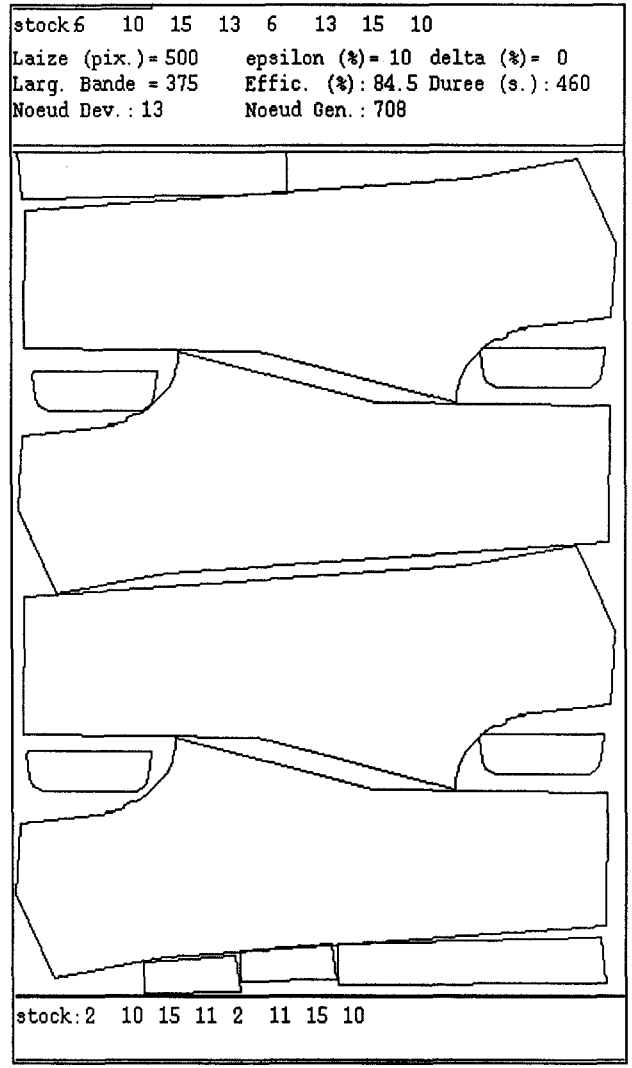

Figure 5.20_2: $R_{\delta=0\varepsilon=10}$_Bande2.

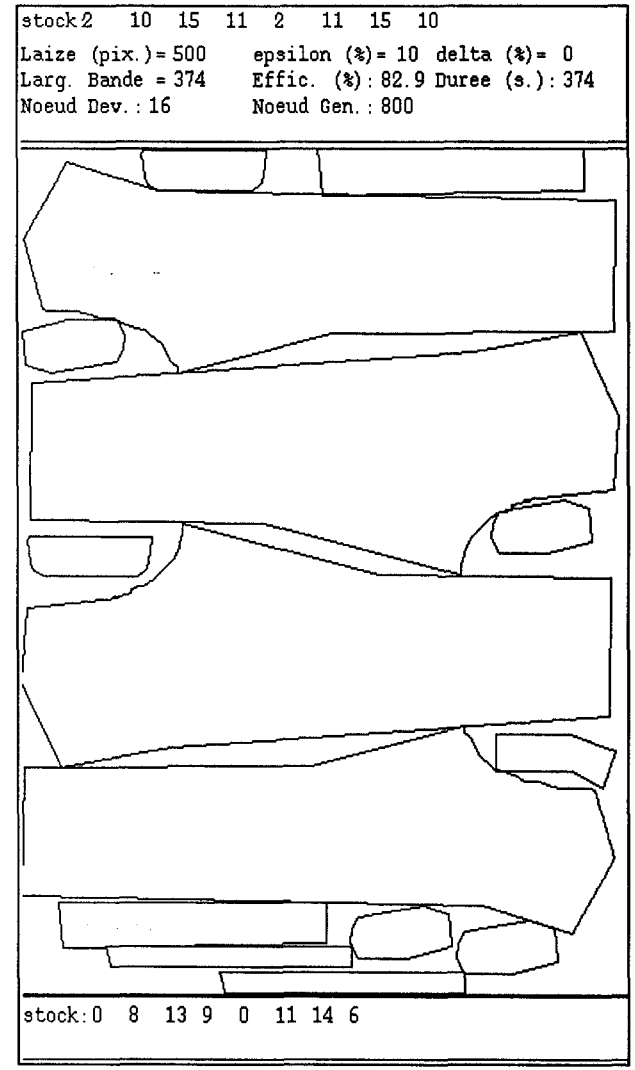

Figure 5.20_3: $R_{\delta=0\varepsilon=10}$_Bande3.

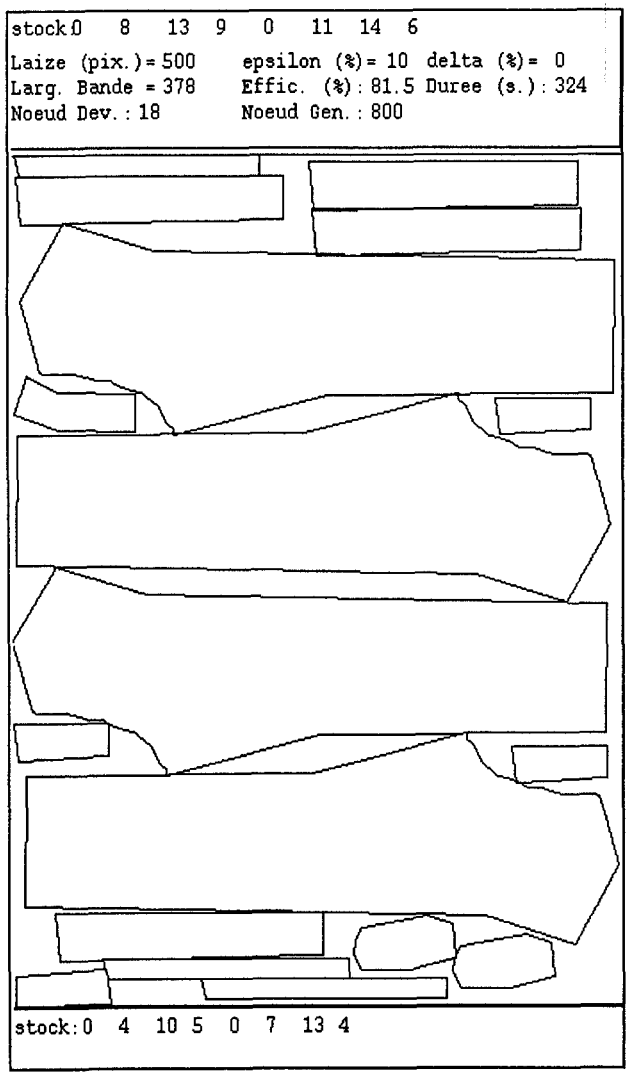

Figure 5.20_4: $R_{\delta=0\varepsilon=10}$_Bande4.

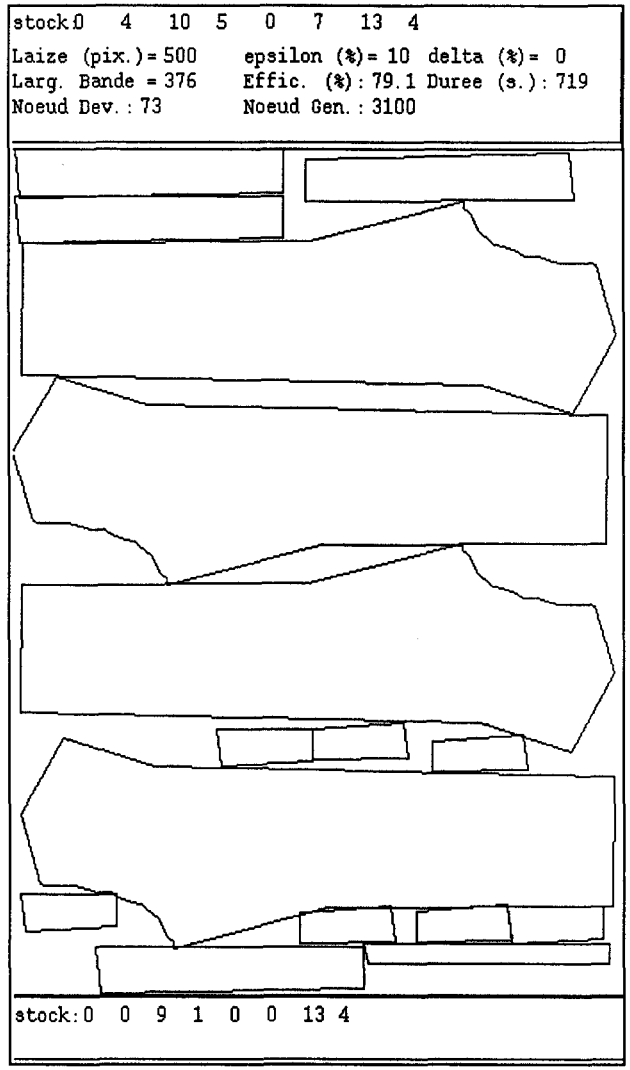

Figure 5.20_5: $R_{\delta=0\varepsilon=10}$_Bande5.

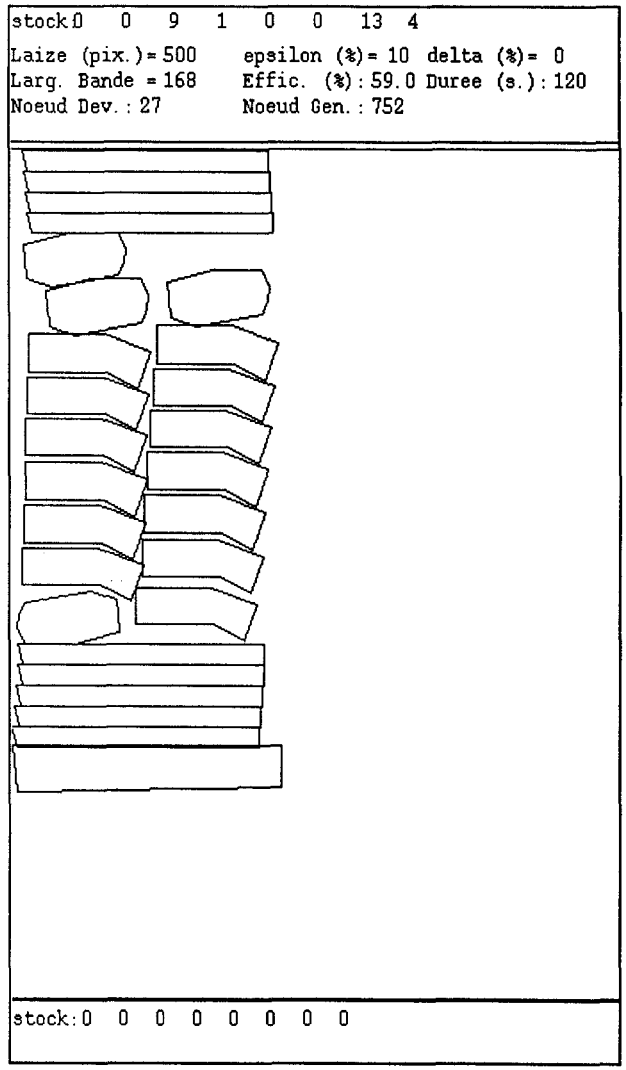

Figure 5.20_6: $R_{\delta=0\varepsilon=10}$_Bande6.

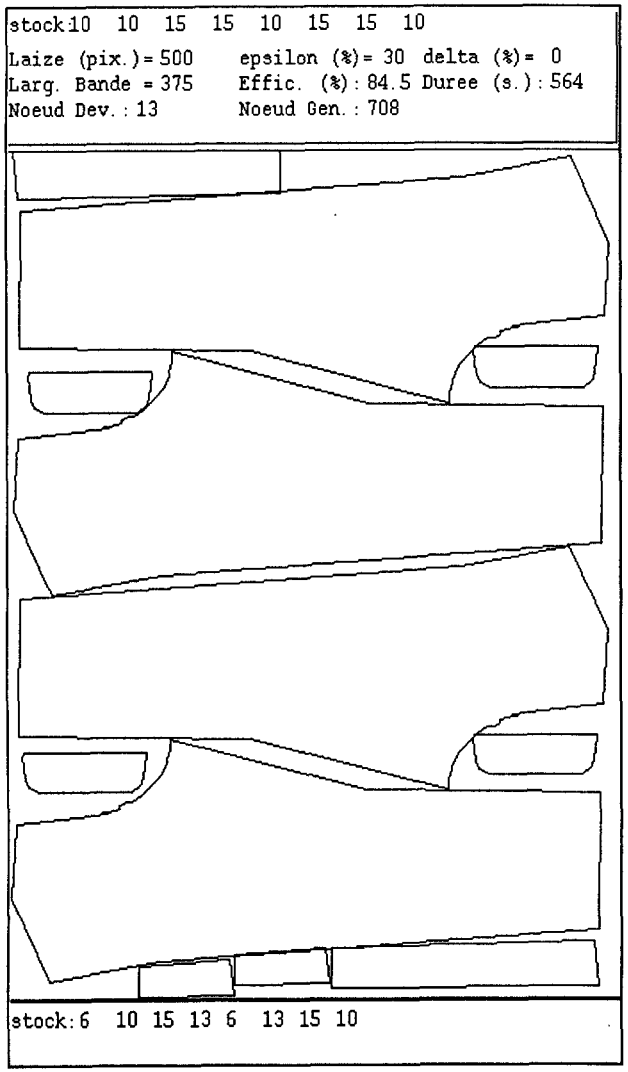

Figure 5.21_1: $R_{\delta=0\varepsilon=30}$_Bande1.

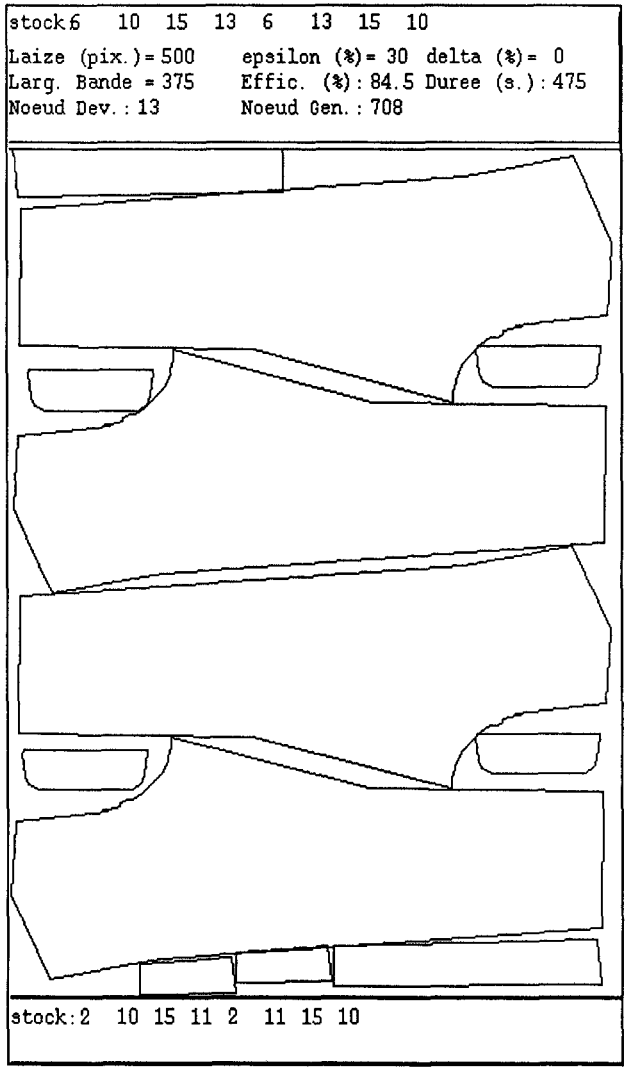

Figure 5.21_2: Rδ=0ε=30_Bande2.

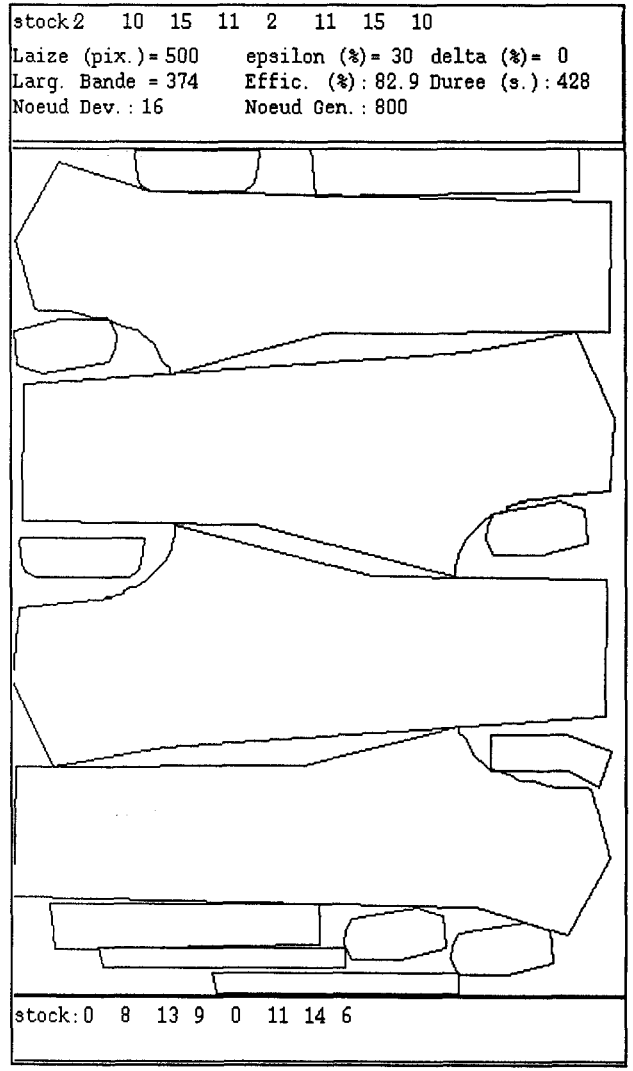

Figure 5.21_3: $R_{\delta=0\varepsilon=30}$_Bande3.

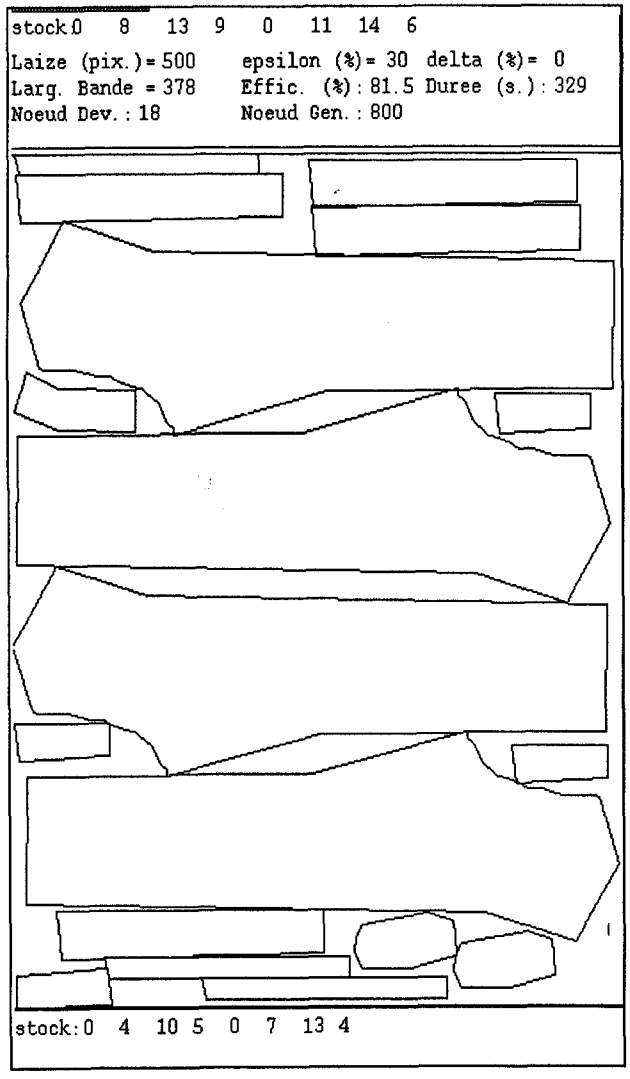

Figure 5.21_1: $R_{\delta=0\varepsilon=30}$_Bande 4.

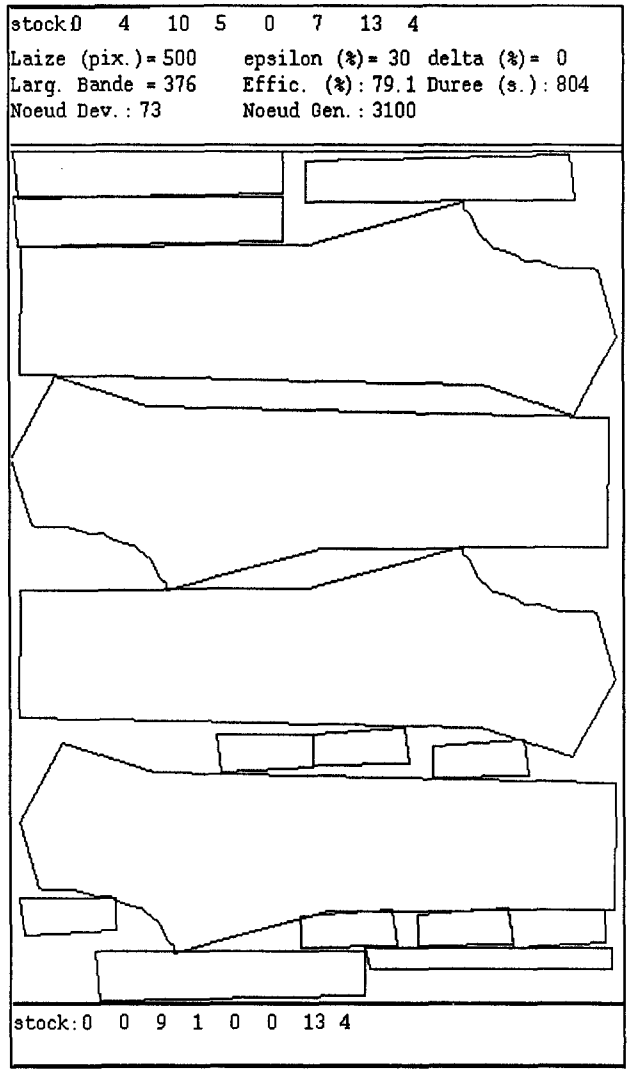

Figure 5.21_1: $R_{\delta=0\varepsilon=30}$_Bande 5.

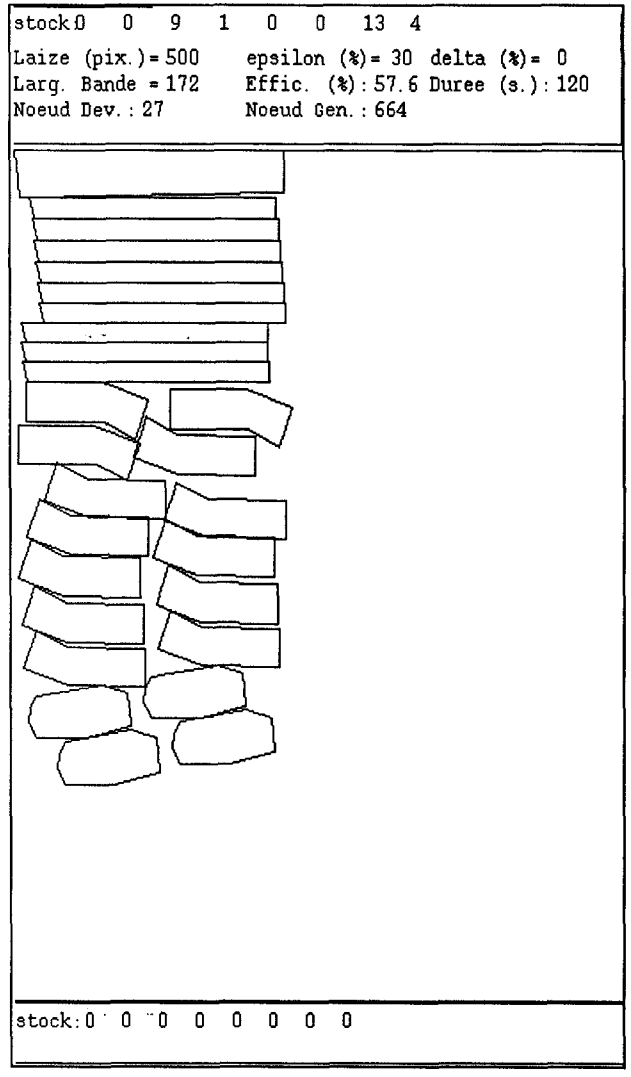

Figure 5.21_1: $R_{\delta=0\varepsilon=30}$_Bande 6.

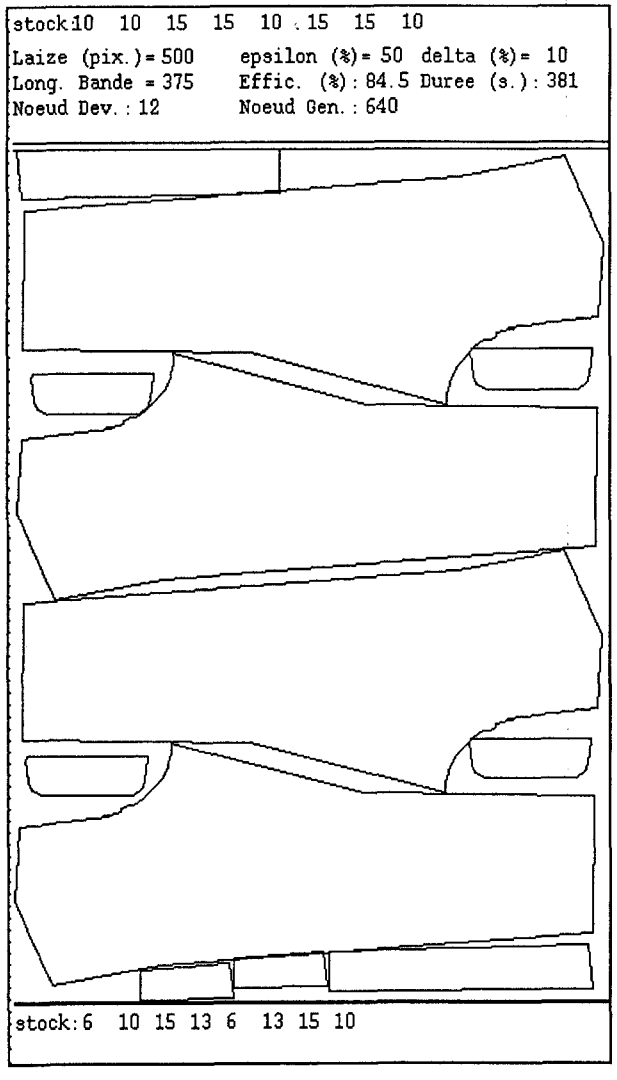

Figure 5.22_6: $R_{\delta=10\varepsilon=50}$_Bande1.

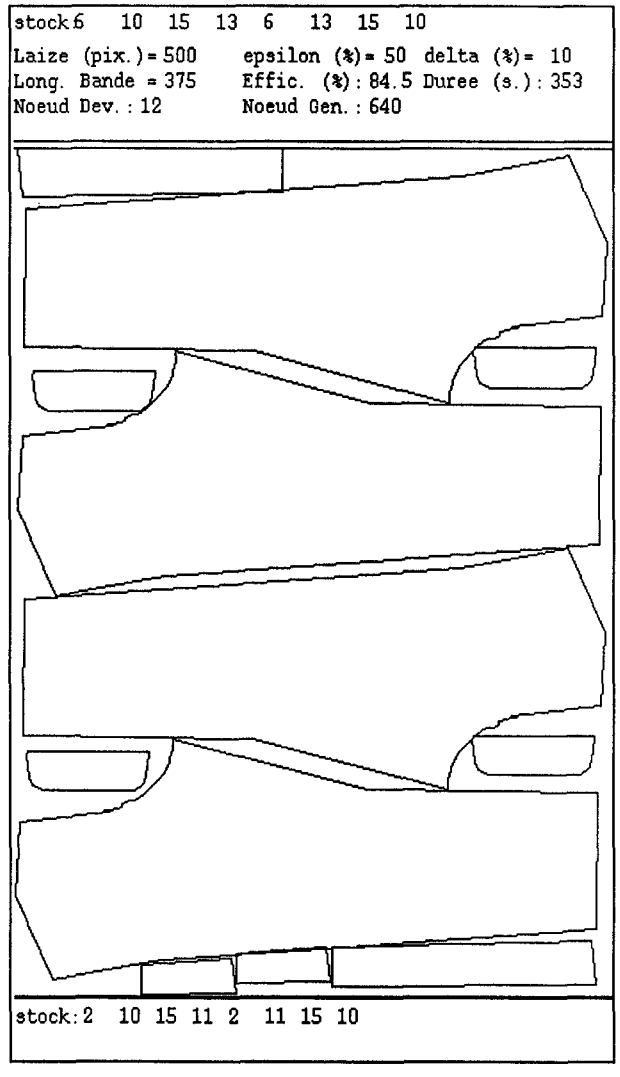

Figure 5.22_2: $R_{\delta=10\varepsilon=50}$_Bande2.

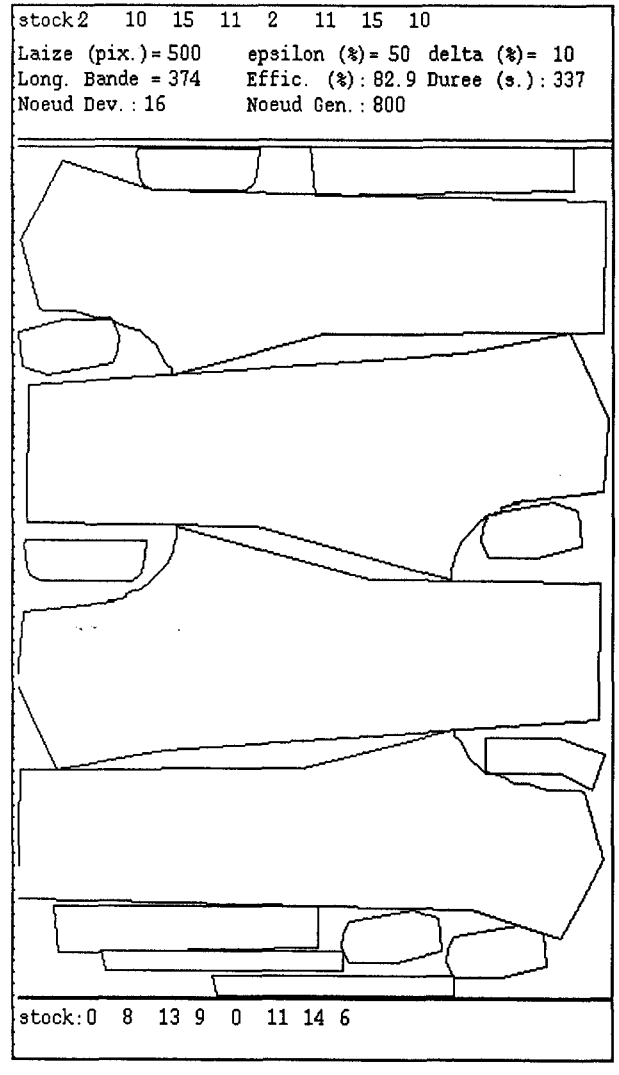

Figure 5.22_3: $R_{\delta=10\varepsilon=50}$_Bande3.

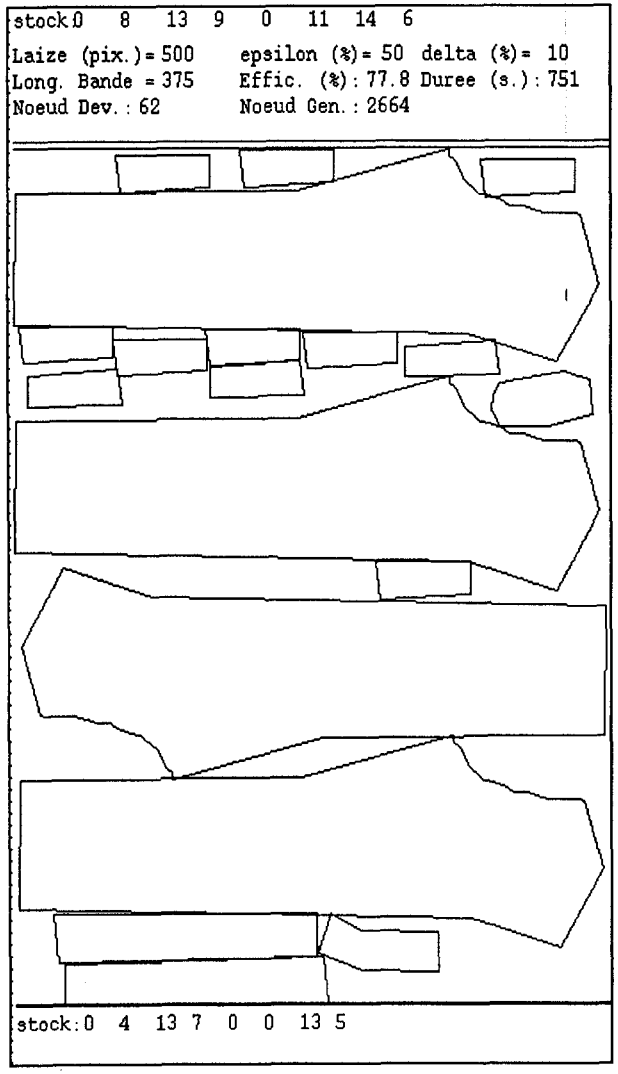

Figure 5.22_4: $R_{\delta=10\varepsilon=50}$_Bande4.

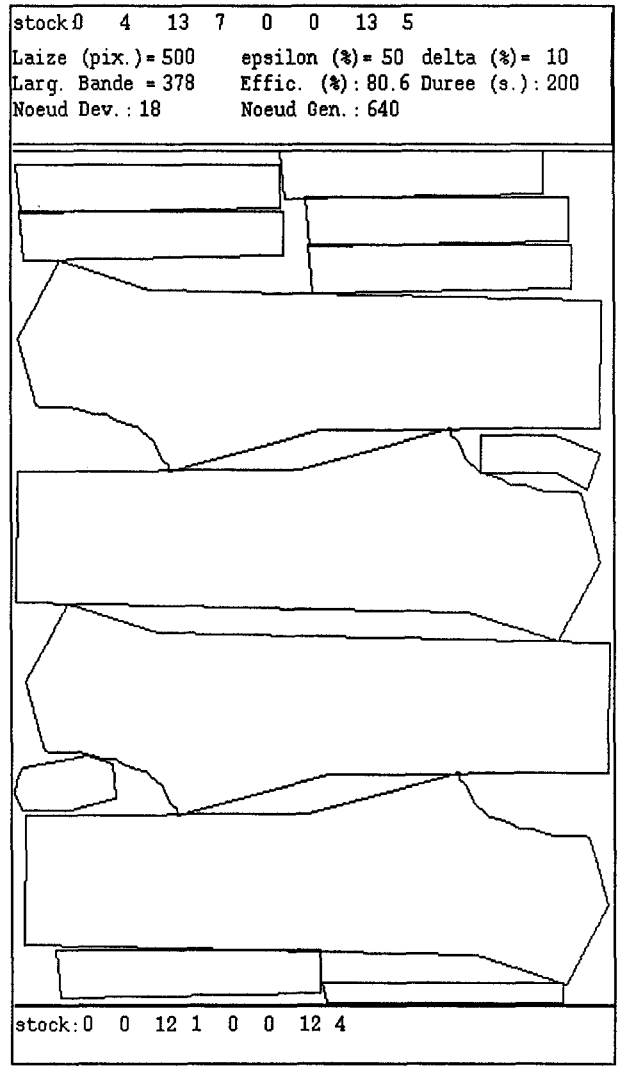

Figure 5.22_5: $R_{\delta=10\varepsilon=50}$_Bande5.

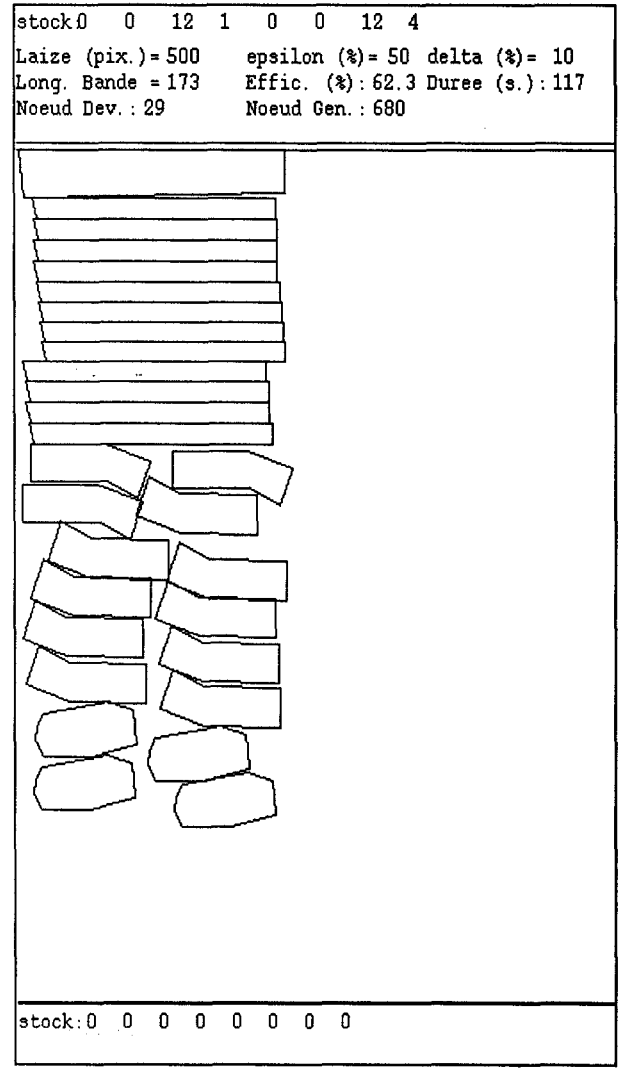

Figure 5.22_6: $R_{\delta=10\varepsilon=50}$_Bande6.

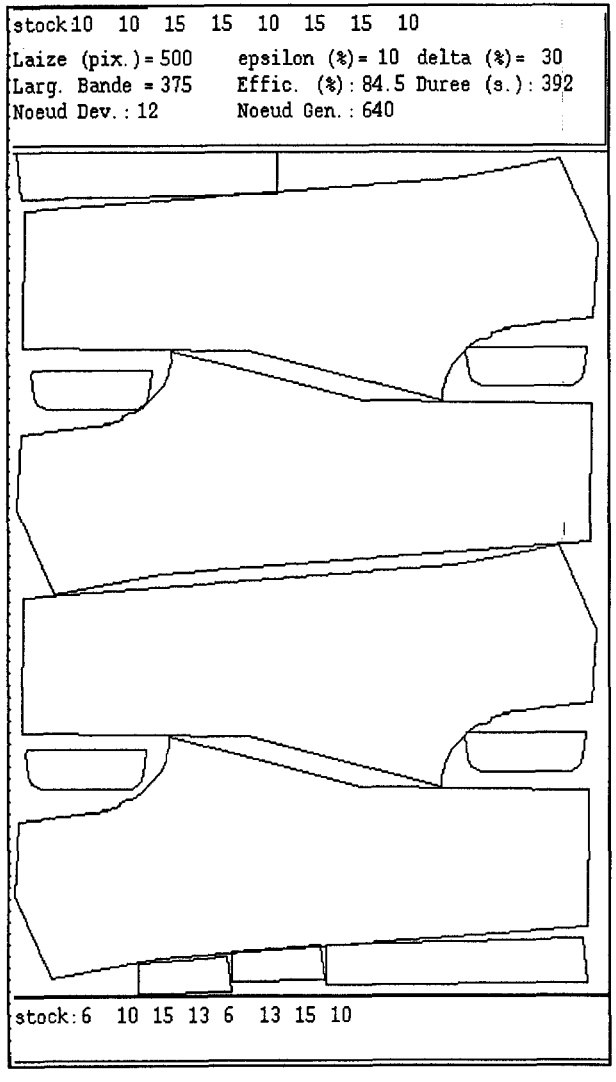

Figure 5.23_1: $R_{\delta=30\varepsilon=10}$_Bande1.

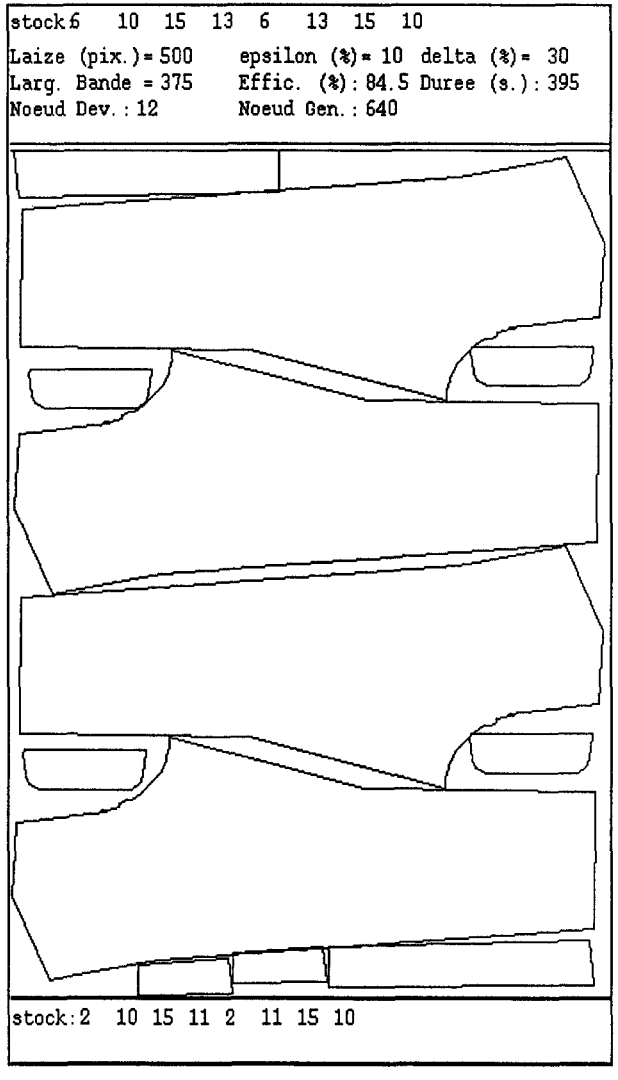

Figure 5.23_2: $R_{\delta=30\varepsilon=10}$_Bande2.

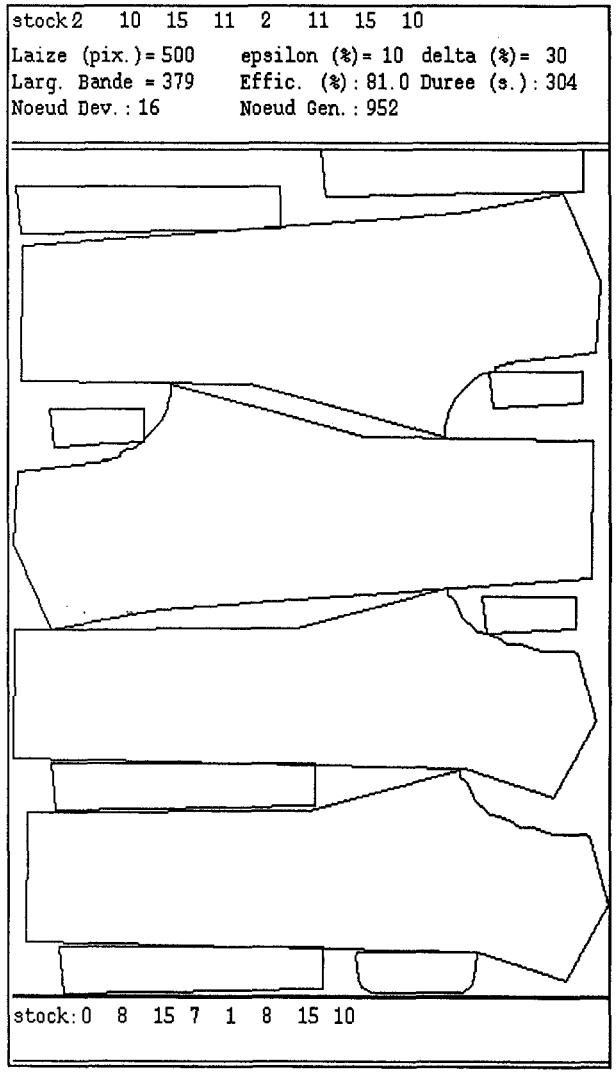

Figure 5.23_3: $R_{\delta=30\varepsilon=10}$_Bande3.

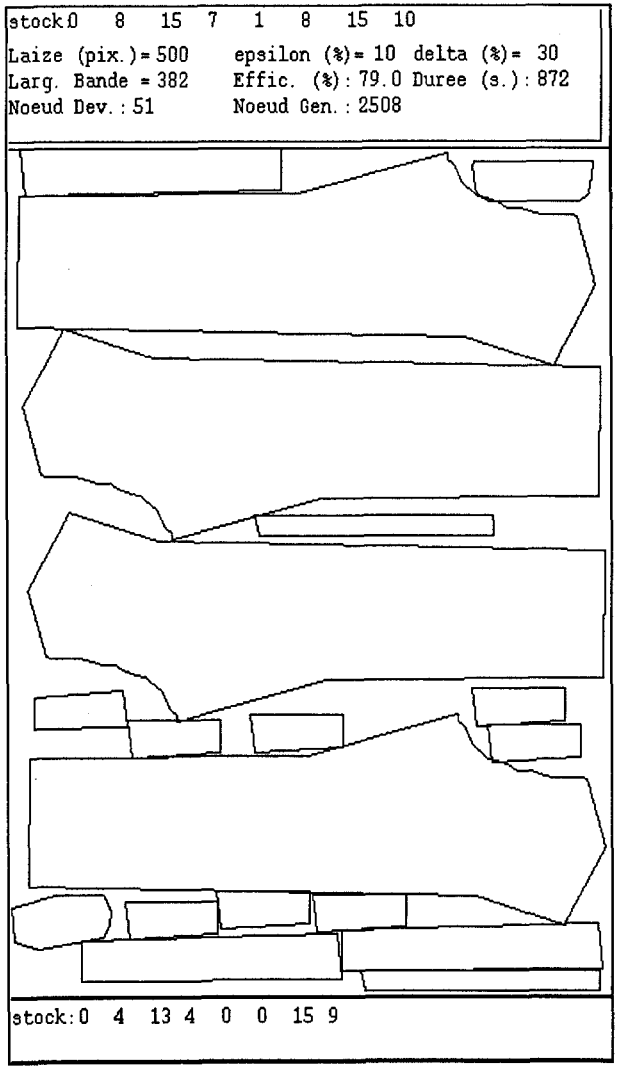

Figure 5.23_4: $R_{\delta=30\varepsilon=10}$_Bande4.

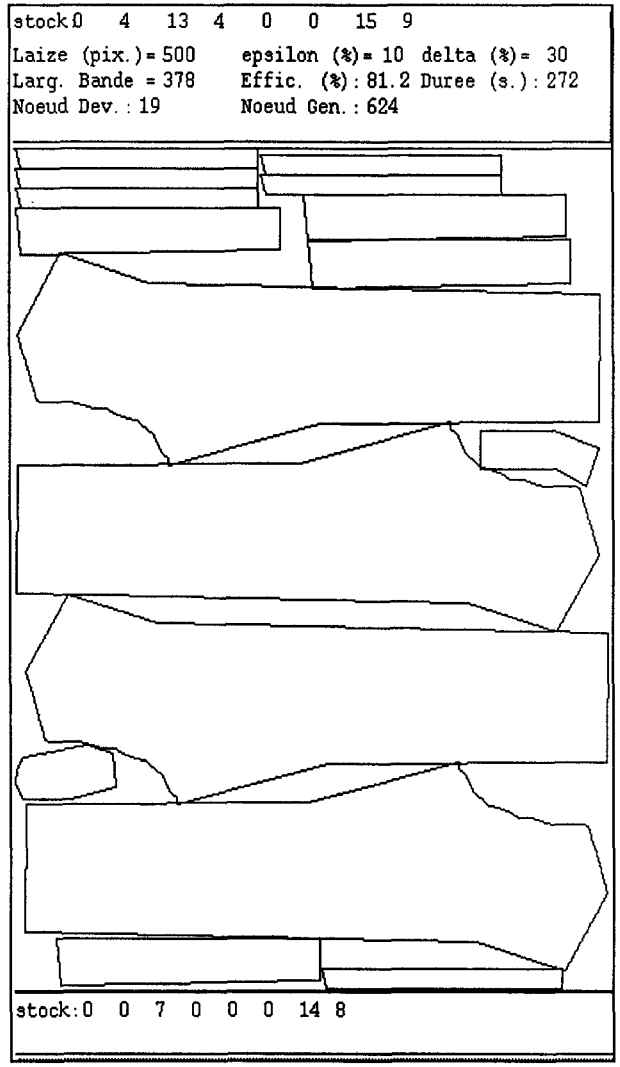

Figure 5.23_5: $R_{\delta=30\varepsilon=10}$_Bande5.

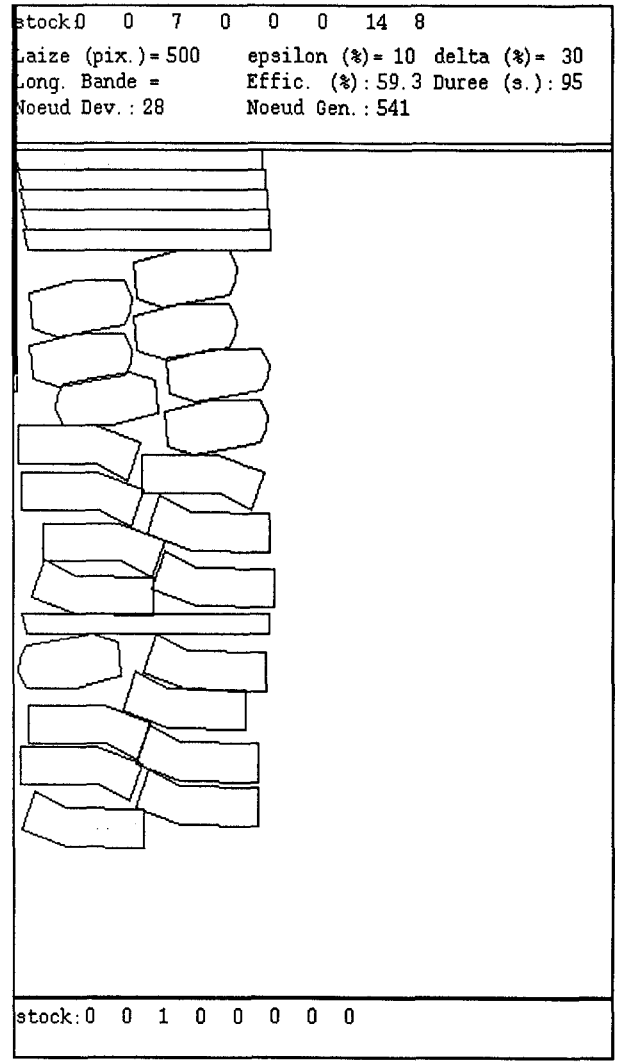

Figure 5.23_6: $R_{\delta=30\varepsilon=10}$_Bande6.

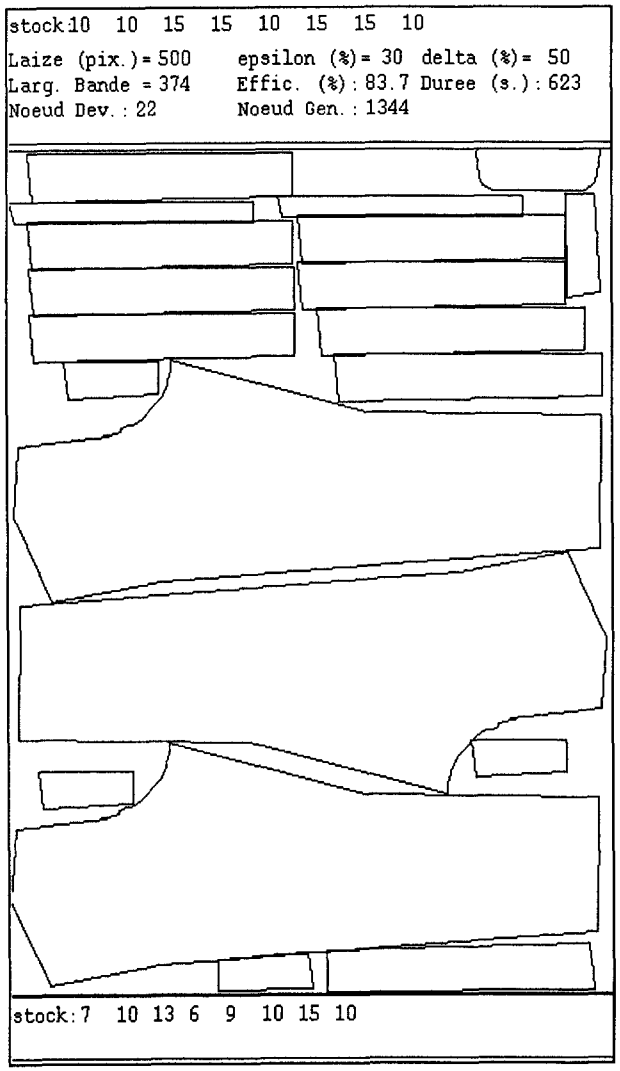

Figure 5.24_1: $R_{\delta=50\varepsilon=30}$_Bande1.

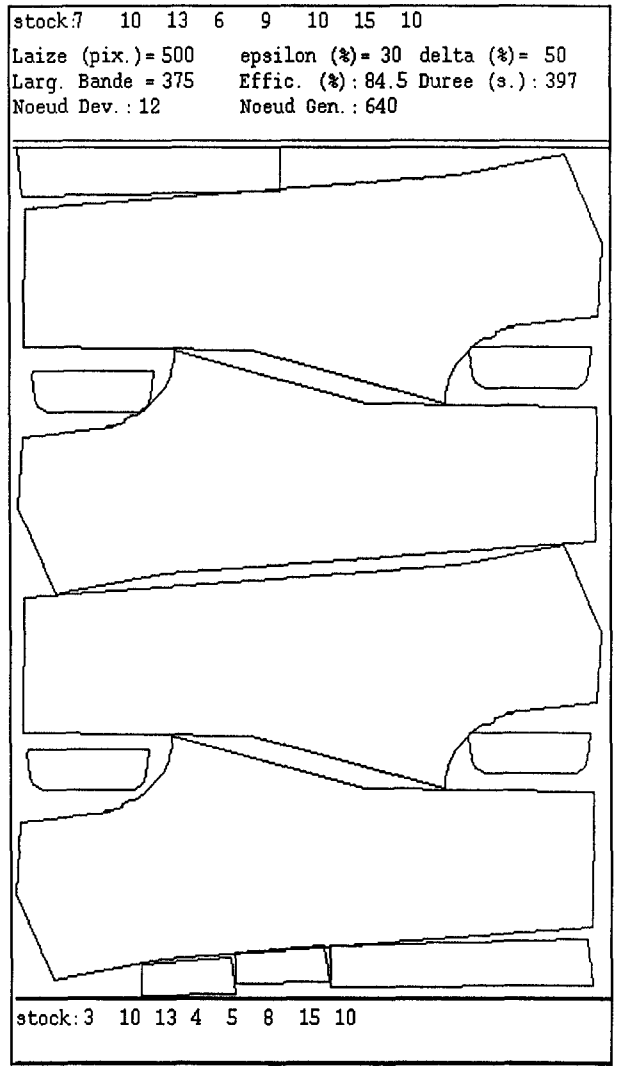

Figure 5.24_2: $R_{\delta=50\varepsilon=30}$_Bande2.

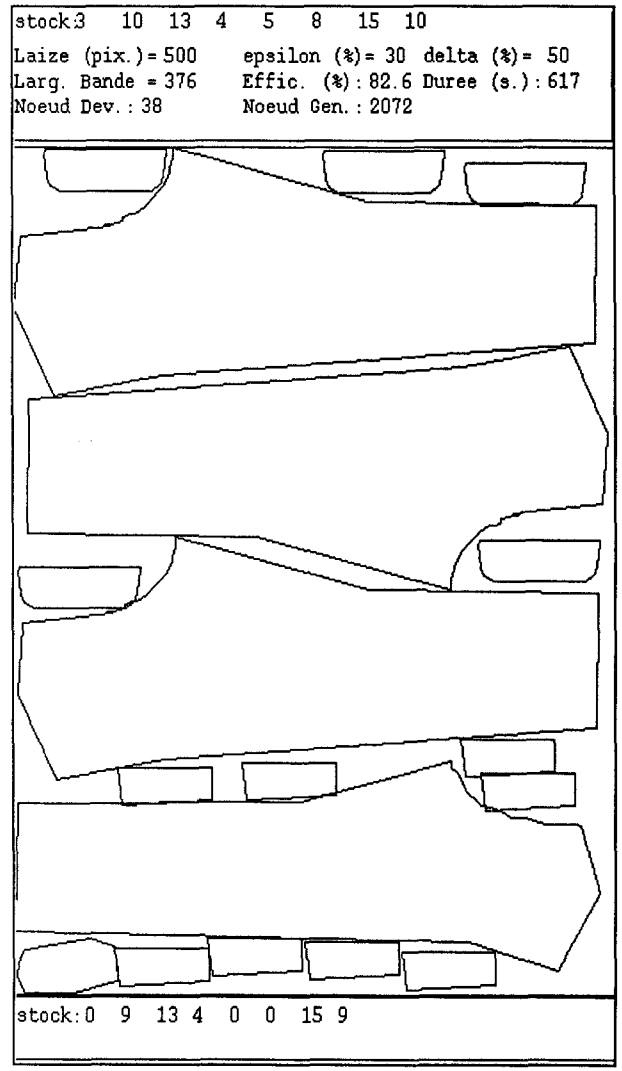

Figure 5.24_3: $R_{\delta=50\varepsilon=30}$_Bande3.

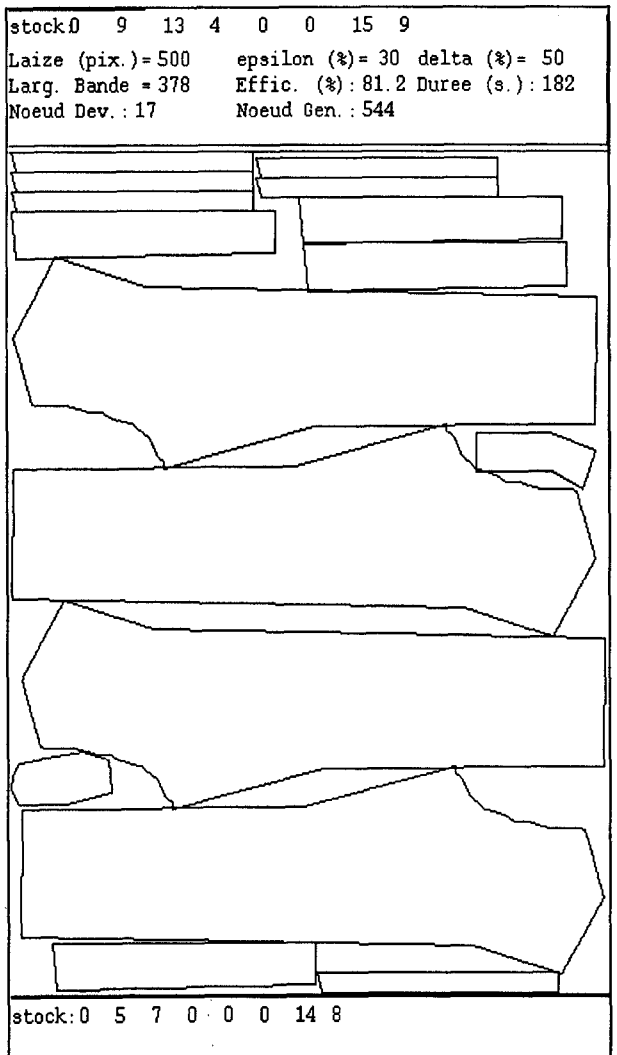

Figure 5.24_4: $R_{\delta=50\varepsilon=30}$_Bande4.

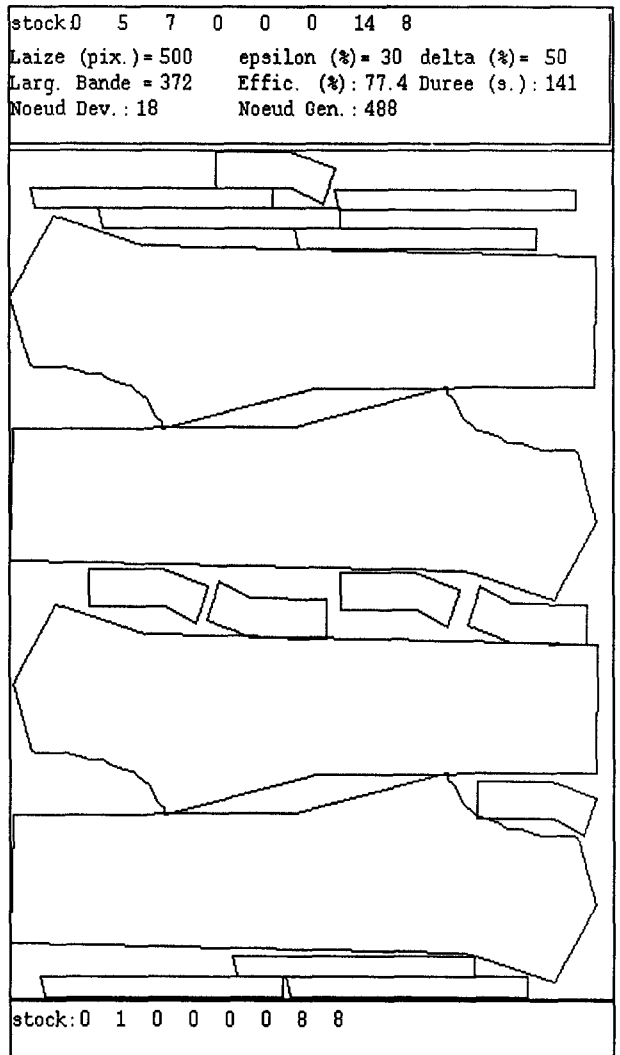

Figure 5.24_5: $R_{\delta=50\varepsilon=30}$_Bande5.

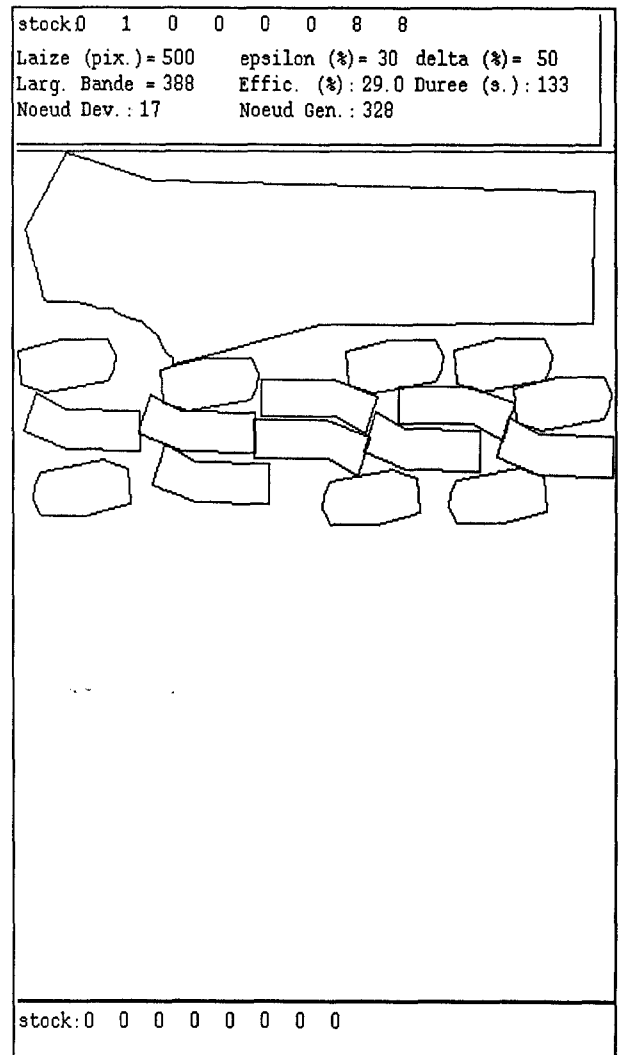

Figure 5.24_6: $R_{\delta=50\varepsilon=30}$_Bande6.

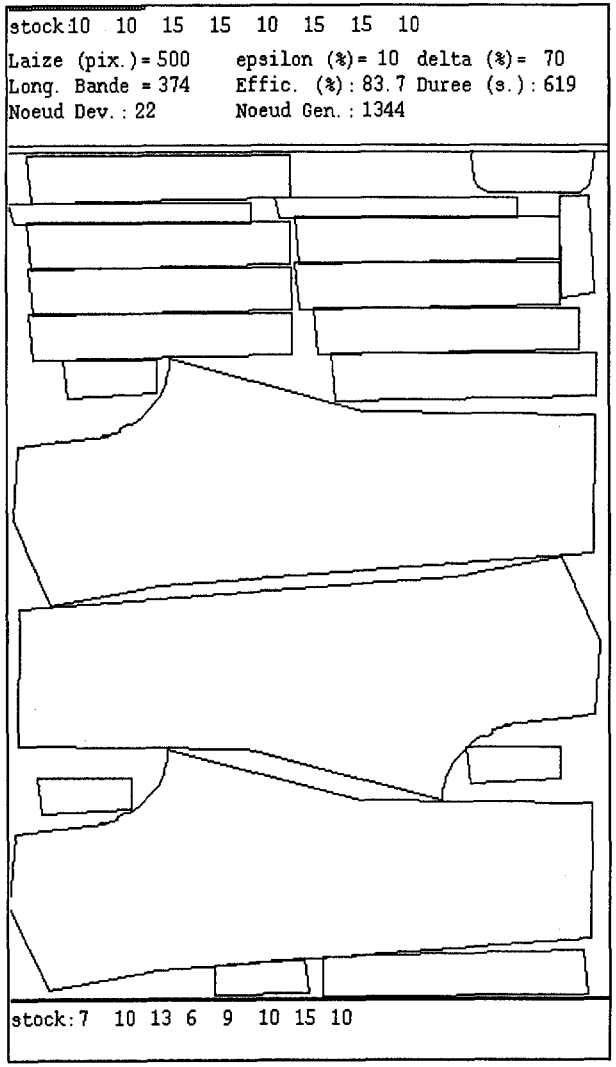

Figure 5.25_1: $R_{\delta=70\varepsilon=10}$_Bande1.

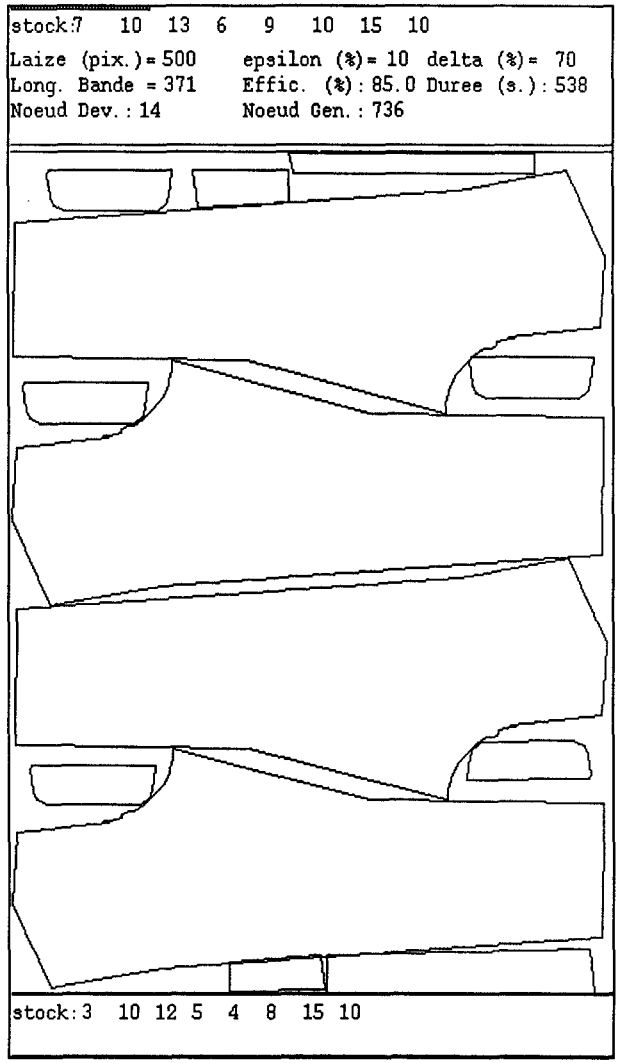

Figure 5.25_2: $R_{\delta=70\varepsilon=10}$_Bande2.

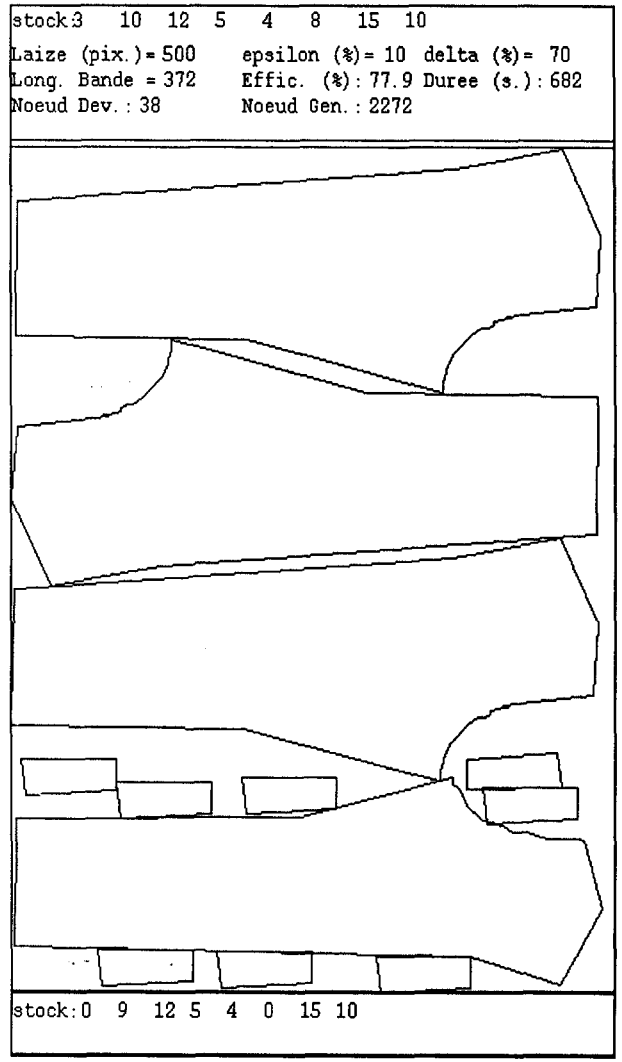

Figure 5.25_3: $R_{\delta=70\varepsilon=10}$_Bande3.

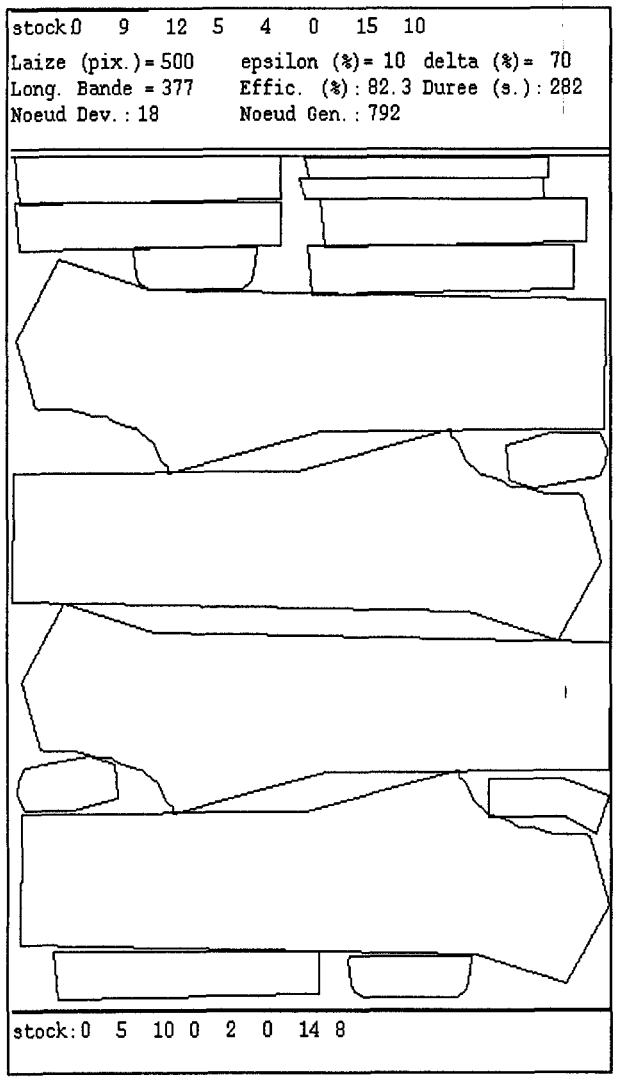

Figure 5.25_4: $R_{\delta=70\varepsilon=10}$_Bande4.

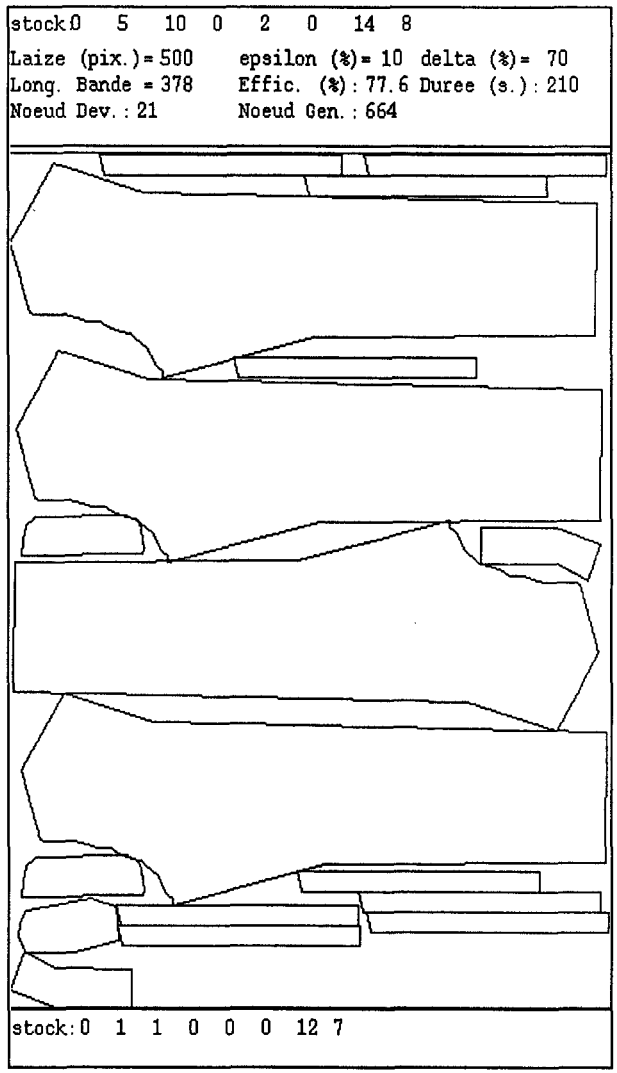

Figure 5.25_5: $R_{\delta=70\varepsilon=10}$_Bande5.

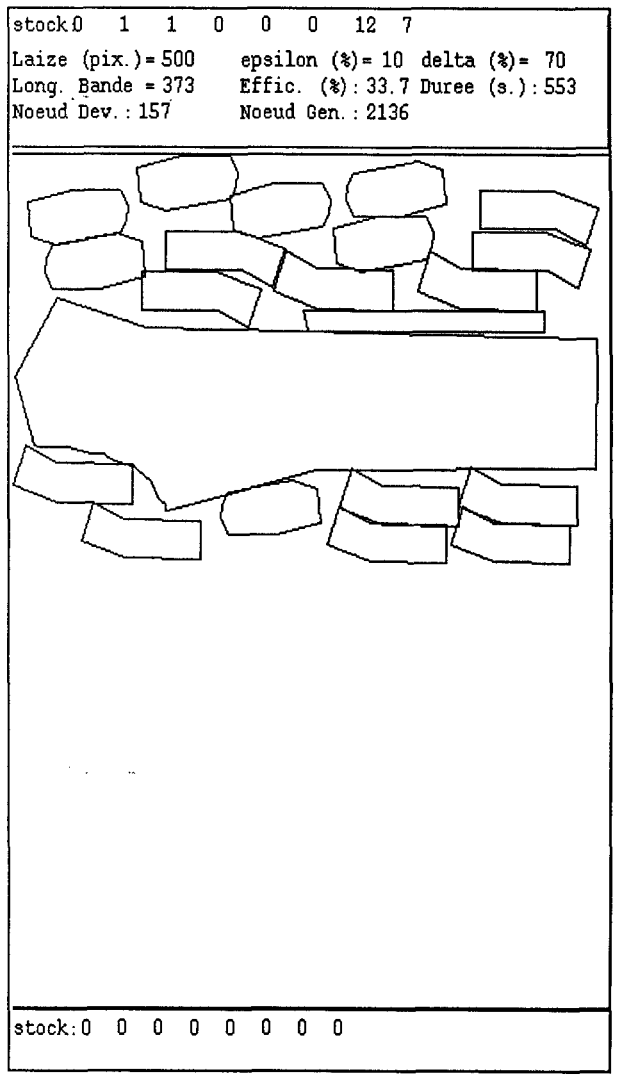

Figure 5.25_6: $R_{\delta=70\varepsilon=10}$_Bande6.

5.6.4. Comparaison: Recuit simulé, A_ε^* et R_δ^*

Comme le montrent les résultats, R_δ^* constitue un bon compromis admissibilité/complexité. Il est en moyenne 2 fois plus rapide que A_ε^* et présente une efficience globale et une efficience par bande toujours meilleures que celle du recuit simulé. Cependant, le choix des paramètres étant très délicat, la comparaison est peu significative. Une étude des performances des algorithmes en fonction de la composition du carnet de commande est en cours. Le recours aux techniques d'apprentissage s'avère utile pour déterminer les paramètres optimaux en fonction des formes à placer. Nous espérons que les algorithmes génétiques, actuellement à l'étude, nous permettront d'atteindre ces objectifs.

Comme le temps de calcul dépend du nombre de configurations, nous présentons ci-dessous une réduction du problème. Cette réduction consiste à ne prendre en compte qu'un ensemble réduit de positions relatives des formes deux à deux.

5.6.5. Réduction

L'approche bifocale locale-globale que nous avons adoptée consiste à rechercher des placements à partir de la mise en correspondance optimale du côté *c* d'une forme F^i et du côté *c+2[4]* d'une forme F^j. La mise en correspondance optimale est l'optimisation de l'imbrication de deux formes F^i et F^j selon un critère *I*:

$$\underset{\text{positions relatives}}{Min} \quad I(F^i, F^j, c)$$

sous la contrainte disjonctive:

$$Int(F^i \cap F^j) = \varnothing .$$

On peut encore réduire l'ensemble des configurations. Au lieu de rechercher la meilleure position relative, on peut définir a priori un ensemble réduit de positions admissibles.

Dans [Maouche 85], le nombre de configurations possibles est limité à 2 Dessous(F^i, F^j) ou Dessous(F^i, F^j) avec alignement des deux formes à gauche (limite gauche de la bande). Dans [Maouche 92a] et [Maouche 92b] le nombre est porté à 4 en prenant les deux positions: Dessous(F^i, F^j) et Dessous(F^i, F^j) avec alignement des deux formes à droite. La figure suivante montre une imbrication Dessus(F^j, F^i) avec alignement à droite. Pour prendre en compte la différence entre les extensions en *x* des formes, on définit le nouvel indice de complémentarité:

$$\begin{aligned} C_k^{ij} &= S(R^i) + S(R^j) - Max(L^i, L^j) \times W_k^{ij} \\ &= (W^i \times L^i) + (W^j \times L^j) - Max(L^i, L^j) \times (W^i + W^j - H_k^{ij}) \end{aligned}$$

On obtient pour le cas représenté par la figure précédente où $Max(L^i, L^j) = L^i$:

$$C_2^{ij} = W^j \times (L^i - L^j) - H_2^{ij} \times L^i .$$

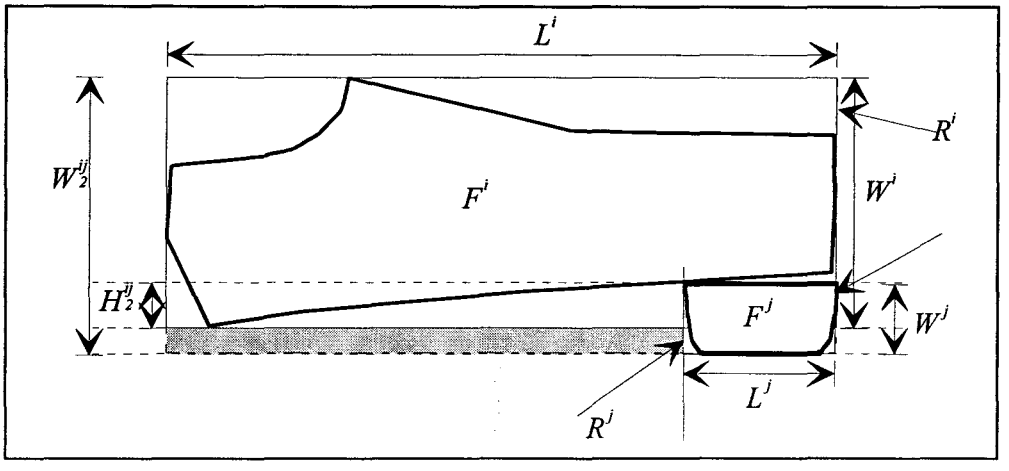

Figure 5.26: Dessus(F^j, F^i) avec alignement à droite.

On considère, pour pénaliser les petites formes, que la surface C_k^{ij} représente le gain en matière réalisé lors de l'utilisation de l'imbrication des deux formes F^i et F^j dans la position k, $k=0,1,2$ *ou* 3. Les positions sont numérotées dans l'ordre des aiguilles d'une montre. La figure précédente montre la position $k=2$.

L'algorithme mis en oeuvre dans ce cas utilise une liste des indices triés par ordre décroissant. En tête de liste, se trouvent les formes qui s'épousent le mieux. On initialise une bande par le couple de formes en imbrication dont l'indice de complémentarité est en tête de la liste courante. On recherche les meilleures imbrications Dessus ou Dessous en parcourant la liste dans l'ordre décroissant des indices [Maouche 92a] et [Maouche 92b]. Il est évident que La bande formée doit être de largeur inférieure à la largeur de la bande en cours. La complexité de l'algorithme correspond à la complexité d'un algorithme de tri.

5.7. Conclusion

Consacré à la résolution, ce chapitre a présenté la décomposition d'un problème de placement en bandes. Chaque bande est construite par imbrication de formes deux à deux. Le problème du placement est alors ramené à la recherche en graphes. S'agissant de trouver une solution sous optimal, nous avons présenté trois algorithmes. Ces algorithmes présentent l'avantage d'être ajustables sur le plan de l'objectif à atteindre. Cette propriété est indispensable face à la flexibilité attendue du module de placement, et à ce titre devient un outil de choix. Les résultats sont encourageants, mais quelques améliorations sont encore envisageables, en particulier un meilleur réglage des paramètres par apprentissage.

Enfin, lorsque la contrainte de temps devient trop forte, la réduction du problème du placement a permis de le transformer en problème de tri.

Chapitre sixième

Conclusion

De la première partie de cette thèse, on retiendra la modélisation géométrique du placement basé sur les isométries du plan. Associé aux contraintes relatives au placement général de formes quelconques, ce modèle a permis la définition de l'espace des configurations. L'utilisation d'un algorithme adéquat peut conduire à une solution optimale pour un nombre réduit de formes. Toutefois le nombre de formes pouvant augmenter, le temps de calcul peut devenir rapidement incompatible avec l'application. Dans ce sens, il est intéressant de rechercher une solution sous-optimale ou d'élaborer un modèle mathématique plus simple si la solution précédente n'est toujours pas satisfaisante. Pour atteindre cet objectif, nous avons envisagé et mis en oeuvre trois solutions. La première consiste à introduire une représentation plus simple et approximative des domaines à placer. La deuxième solution tente une décomposition du problème en plusieurs sous-problèmes plus faciles à résoudre. Et la troisième solution est basée sur l'ajout de contraintes supplémentaires sur le groupe des isométries afin de limiter le nombre de configurations.

Les problèmes de placements rencontrés dans la littérature concernent les découpes de formes rectangulaires ou de formes quelconques représentées par des rectangles. Ce problème est résolu de manière satisfaisante. Mais le placement de formes quelconques reste largement ouvert. La difficulté majeure de ce dernier tient à l'incapacité actuelle à trouver des caractéristiques générales aux formes. Il apparaît dès lors que la phase la plus importante dans la résolution d'un problème de placement de formes quelconques est celle du codage et de la représentation.

D'autre part, l'analyse des fonctions de buts montre les pertes dues aux surfaces emprisonnées entre les contours. Nous avons alors étudié un codage des formes basé sur la déficience rectangulaire des contours. Chaque contour est représenté par quatre peignes correspondant à la surface comprise entre une portion du contour et le côté correspondant du rectangle paraxial circonscrit à la forme. Une telle représentation est adaptable: on peut passer du contour réel à un polygone enveloppe quelconque, voire même au rectangle circonscrit, par simple réduction du peigne. Le modèle simplifié de représentation des formes est ainsi vite trouvé.

Il est bien évident que le nombre de configurations dépend du nombre de formes à placer. Pour profiter de cette richesse tout en essayant de réduire le temps de recherche d'une

solution, plutôt que de réduire le nombre de formes, nous avons imaginé une limitation d'une dimension du placement en introduisant une contrainte supplémentaire. Cette contrainte permet de favoriser l'évolution de la surface placée suivant l'autre dimension. C'est le placement en largeur d'abord qui consiste à rechercher une solution au problème sous forme de plusieurs bandes transversales. Chaque bande est construite par imbrication des formes deux à deux. On considère alors la surface placée comme une nouvelle forme à laquelle on vient concatèner une autre. L'évaluation de l'association est largement facilitée par le code utilisée.

Si la limitation d'une dimension n'est pas suffisante; le nombre de configurations ou positions relatives dépendant de la différence entre les dimensions des formes, une réduction a priori du nombre de transformations admissible peut être utilisé. Cette réduction peut aller jusqu'à la définition d'un nombre restreint de positions. Dans ce cas, le problème du placement est ramené un problème de tri, chaque position étant valué par un indice de complémentarité.

L'objectif original et originel de cette recherche est la réalisation d'une cellule flexible de coupe en continu pour la confection et particulièrement la découpe de tissus à motifs. En effet, une alternative à la technique du matelassage consiste à utiliser un système de découpe en continu sur pli unique. Le déplacement du support à découper suggère l'utilisation de placements en bande pour alimenter en temps réel l'outil de coupe.

Le logiciel développé a été écrit dans un langage qui, par ses facultés interactives et la réutilisabilité des composants logiciels prédéfinis, favorise la mise au point de méthodes algorithmiques: SMALLTALK. Ses performances moyennes en vitesse de traitement ne représentent qu'un handicap relatif face à l'aisance qu'il procure pour comparer les méthodes algorithmiques que nous testons.

Dans les algorithmes mis en oeuvre, nous avons introduit des paramètres pour limiter le temps de calcul en se contentant de solutions jugées satisfaisantes. Il est vrai que les résultats obtenus avec les algorithmes de recherche en arbre ou du recuit simulé demande encore quelques aménagements au niveau du logiciel et du choix des paramètres pour diminuer les temps de recherche et améliorer la consommation de la matière. L'étude menée sur les algorithmes utilisés suggère une utilisation combinée de plusieurs algorithmes afin d'atteindre ces deux objectifs. Le problème de la détermination des paramètres de choix d'algorithmes constitue une réelle difficulté.

D'autre part, la concaténation unissant les contours des deux formes permet de voir la réalisation d'un placement comme une construction progressive d'une forme ayant la même définition et les mêmes propriétés que ses éléments constitutifs. Cette méthode de travail facilite l'évaluation des caractéristiques du placement à cause de la richesse des informations dont on dispose à toutes les étapes de la construction. Cette propriété permet une utilisation aisée des programmes évolutionnistes et en particuliers des algorithmes génétiques dont une première implantation est déjà réalisée.

BIBLIOGRAPHIE

[Abernathy 86] "***(TC)^2 apparel, textile and education at its best***", F. H. ABERNATHY and D. PIPPINS, Bobbin Magazine, pp 162-174, September 1986.

[Adamovicz 72] ***"A two-stage Solution for the cutting-stock problem"***, M. ADAMOWICZ AN A. ALBANO, Information Processing 71, North Holland publishing company, Proc IFIP congress 71, , pp 1086-1091, Amsterdam 1972.

[Adamovicz 76] "***A solution of the Rectangular Cutting-stock problem***", M. ADAMOWICZ & A. ALBANO, IEEE transactions on syst., sc. and cyber. , Vol SMC-6, pp 302-310, 1976.

[Albano 77] "***A method to improve two dimensional layout***", A. ALBANO, Computer Aided Design, vol 9, N° 1, January 1977.

[Albano 80] "***A Heuristic Solution of the Rectangular Cutting-Stock Problem***", A. ALBANO & R. ORSINI, The computer journal, Vol.23, N°4, pp 338-343, 1980.

[Albano 80a] "***Optimal allocation of two-dimensional irregular shapes using heuristics search methods***", A. ALBANO, G. SAPUPPO, IEEE Trans Systems Man and Cybernetics, Vol. SMC-10, N°. 5, pp. 242-248, 1980.

[Alliot 94] "***Intelligence artificielle et informatique théorique***", J. M. ALLIOT et T. SCHIEX, Cépadués-Editions, Toulouse 1994.

[Avnaim 89] "***Placement et déplacement de formes rigides ou articulées***", F. AVNAIM, Thèse de Doctorat en Automatique et Informatique sous la direction de J-D. Boissonnat, Université de Franche Compté, 12 Juin 1989.

[Benhamamouch 79] ***"Un algorithme de découpe optimale dans R2"***, Djilali BENHAMAMOUCH, Thèse de Doctorat de 3ième cycle, informatique, Université Pierre et Marie Curie Paris 6, Février 1979.

[Berger 79] "***Géométrie 1/ Action de groupes, espaces affines et projectifs"***, Marcel BERGER, Editions Cedic/Fernand Nathan, Paris 1979.

[Beziat 90] "***Conception et Développement d'un Système d'Implantation d'Ateliers de Production: PLOOT***", PH. BEZIAT, Thèse de Doctorat, Académie de Montpellier, Mars 1990.

[Bonnemoy 87] "***Sur quelques aspects de l'utilisation de méthodes détermistes en milieu stochastique et inversement***", C. BONNEMOY, Thèse d'état, Université Clermont Ferrand II, Septembre 1987.

BIBLIOGRAPHIE

[Abernathy 86] "***(TC)^2 apparel, textile and education at its best***", F. H. ABERNATHY and D. PIPPINS, Bobbin Magazine, pp 162-174, September 1986.

[Adamovicz 72] ***"A two-stage Solution for the cutting-stock problem"***, M. ADAMOWICZ AN A. ALBANO, Information Processing 71, North Holland publishing company, Proc IFIP congress 71, , pp 1086-1091, Amsterdam 1972.

[Adamovicz 76] "***A solution of the Rectangular Cutting-stock problem***", M. ADAMOWICZ & A. ALBANO, IEEE transactions on syst., sc. and cyber. , Vol SMC-6, pp 302-310, 1976.

[Albano 77] "***A method to improve two dimensional layout***", A. ALBANO, Computer Aided Design, vol 9, N° 1, January 1977.

[Albano 80] "***A Heuristic Solution of the Rectangular Cutting-Stock Problem***", A. ALBANO & R. ORSINI, The computer journal, Vol.23, N°4, pp 338-343, 1980.

[Albano 80a] "***Optimal allocation of two-dimensional irregular shapes using heuristics search methods***", A. ALBANO, G. SAPUPPO, IEEE Trans Systems Man and Cybernetics, Vol. SMC-10, N°. 5, pp. 242-248, 1980.

[Alliot 94] "***Intelligence artificielle et informatique théorique***", J. M. ALLIOT et T. SCHIEX, Cépadués-Editions, Toulouse 1994.

[Avnaim 89] "***Placement et déplacement de formes rigides ou articulées***", F. AVNAIM, Thèse de Doctorat en Automatique et Informatique sous la direction de J-D. Boissonnat, Université de Franche Compté, 12 Juin 1989.

[Benhamamouch 79] ***"Un algorithme de découpe optimale dans R2"***, Djilali BENHAMAMOUCH, Thèse de Doctorat de 3ième cycle, informatique, Université Pierre et Marie Curie Paris 6, Février 1979.

[Berger 79] "***Géométrie 1/ Action de groupes, espaces affines et projectifs"***, Marcel BERGER, Editions Cedic/Fernand Nathan, Paris 1979.

[Beziat 90] "***Conception et Développement d'un Système d'Implantation d'Ateliers de Production: PLOOT***", PH. BEZIAT, Thèse de Doctorat, Académie de Montpellier, Mars 1990.

[Bonnemoy 87] "***Sur quelques aspects de l'utilisation de méthodes détermistes en milieu stochastique et inversement***", C. BONNEMOY, Thèse d'état, Université Clermont Ferrand II, Septembre 1987.

[Bounsaythip 94] "***Optimisation du placement des formes irrégulières: comparaison entre les algorithmes*** A_{ε}^{*} et $R_{\delta\varepsilon}^{*}$ ", K. BOUNSAYTHIP, Mémoire de DEA d'Automatique: Productique et Informatique Industrielle sous la direction de S. MAOUCHE, Université des Sciences et Technologies de Lille, Juin 1994.

[Cao 92] "***Contribution à l'élaboration de systèmes d'aide à la conception à base de connaissances ayant des facultés d'apprentissages: application à la confection***", X-B. Cao, Thèse de Doctorat en Automatique sous la direction de R. Soenen,Université de Valenciennes et Hainaut Cambrésis, 18 Septembre 1992.

[Cerny 82] "***A thermodynamical approach to the travelling salesman problem: an efficient simulation algorithm***", V. CERNY, J. of Optimization Theory and Application, N° 45, 1982.

[Chambers 76] "***The Cutting-Stock Problem in the Flat Glass Industry - Selection of Stock Sizes***", M. L. CHAMBERS, R. G. DYSON, Operation Research, Vol 27, N°4 ii, 1976.

[Chassery 91] "***Géométrie discrète***", J. M. CHASSERY, A. MONTANVERT, Hermès, Paris 1991.

[Chauny 00] "***A two phase Heuristic for the Strip Packing : Algorithm and Probabilistic Analysis***", F. CHAUNY, R. LOULOU, S. SADONES, F. SOUMIS, communication privée.

[Christofides 77] "***An Algorithm for Two-dimensional Cutting Problems***", N. CHRISTOFIDES, C.WHITLOCK, Operation Research, Vol 25, N°1, 1977.

[Clerc 87] "***Prototype d'un Système de Placement Intelligent dans le Plan***", T. CLERC AND M. SADGAL Actes de MICAD 1987.

[Conf2000 143] "***Les défauts décelables à la visite - I***", CONFECTION 2000 N° 143, pp. 49-52, Avril 1993.

[Conf2000 144] "***Les défauts décelables à la visite - II***", CONFECTION 2000 N° 144, pp. 45-49, Mai 1993.

[Conf2000 55] "***Toyota Sewing System***", CONFECTION 2000 n° 55, pp. 45-53, mars 1985.

[Costa 82] "***Formalisation et résolution des problèmes de découpes linéaires*** ", M. COSTA R.A.I.R.O.,Operation Research, VOL 18, N°1, pp 65-82 Février 1982.

[Costa 84] "***Une étude pratique de découpe de panneaux en bois***", M. COSTA R.A.I.R.O.,Operation Research, VOL 16, N°3, pp211-219, Août 1984.

[Coster 85] "***Précis d'analyse d'images***", M. COSTER et J. L. CHERMANT, Editions CNRS, Paris 1985.

[Coverdale 76] "***An Improve Heuristic Procedure for a Non-linear Cutting-Stock Problem***", I. COVERDALE, F. WHARTON, Management Science, Vol 23, N°1, 1976.

[Dagli 90] "***a parallel architecture for stock cutting problem***", C. H. DAGLI and A. HAJAKBARI, IEEE International conference on PARBASE-90: database, parallel architecture and their applivations, 1990.

[Dechter 88] "***Network-based heuristics for constraint satisfaction problems***", R. DECHTER et J. PEARL, Artificial Intelligence 34, pp. 1-38, 1988.

[Delaporte 89] "***Intégration des fonctions de conception et de préparation de la fabrication pour les entreprises de découpe***", J. L.DELAPORTE, Thèse de Doctorat de 3ième cycle, Université de Valenciennes et du Hainaut Cambraisis, 7 Décembre 1989.

[Delgrange 93] "***Analyse, conception et réalisation d'une cellule d'assemblage automatique pour l'industrie de la confection***", A. DELGRANGE, thèse de doctorat en Productique: Automatique et Informatique Industrielle Sous la direction de P. VIDAL et **S. MAOUCHE**, Université des Sciences et Technologies de Lille, 19 Mars 1993.

[D.G.S.I. 94] "***La gestion productique dans la filière textile***", Ministère de l'industrie et Télécommunications et du commerce Extérieur, étude réalisée par «TEXTILE PARTENAIRES» pour la **D**irection **G**énérale des **S**tratégies **I**ndustrielles, Janvier 1994.

[Diverrez 73] "***Recherche d'un classement Hiérarchique de surfaces planes et application à un problème de placement selon une méthode Heuristique***", J.C.DIVERREZ ET AL, Revue Française d'Autom. , d'Inf. et de Rech. Op, N° J-3 Nov 1973.

[Dmitrovicz 91] "***Une approche méthodologique de l'optimisation de découpe dans l'industrie du bois***", B. DMITROWICZ, D. WOLF, R. HUSSON, 23ième CIRP, séminaire international sur les systèmes de production, NANCY, Juin 1991.

[Dominé 88] "***Techniques de l'Intelligence Artificielle-Un guide structuré***", C.-H. DOMINE, Coll. Bo-Pré, Ed. Dunod Informatique, 1988.

[Dodona 91] "***Contribution à la détection de motifs complexes d'orientation quelconque dans les images. Mise en oeuvre sur un système multiprocesseur***", M. DODONA, Thèse de l'Institut National Polytechnique de Toulouse, Novembre 1991.

[Dubois 88] "***L'industrie de l'habillement: l'innovation face à la crise***", P. DUBOIS, Editions la documentation française, notes et études documentaires, 1988.

[Eisemann 57] "***The Trim Problem***", K. EISEMANN, Management Science, Vol 3, 1957.

[Elomri 92] "***Méthodes d'optimisation dans un contexte productique***", A. ELOMRI, thèse de Doctorat en Automatique sous la direction de P. Morel, Université de Bordeaux 1, 17 Juillet 1992.

[Ernst 86] "***Le miroir magique de M. C. ESCHER***", B. ERNST, Editions TACO, Berlin 1986.

[Esclassan 90] "***Contribution à l'étude et à la réalisation d'un système de détection en temps réel de défauts de tissage***", B.ESCASSAN, Thèse de DOCTORAT en Traitement du Signal sous la direction de J. Bajon, Institut National Polytechnique de Toulouse, 14 Décembre 1990.

[Farreny 87] "***Eléments d'intelligence artificielle***", H. FARRENY et M. GHALLAB, Editions Hermès, Paris 1987.

[Ferreira 91] "***Constitution d'ilots et ordonnancement dans un atelier de production***", J.F. FERREIRA RIBEIRO, Thèse, Univers. de Toulouse, 1991.

[Freuder 78] "***Synthesizing constraint expressions***", E.C. FREUDER, Communications of the ACM, VOL 21, N°. 11, pp. 958-966, November 1978.

[Gilmore 61] "***A linear programming approach to the cutting stock problem***",P. C. GILMORE, R. E. GOMORY, Operation research, Vol 9, N° 6, pp. 849-859, 1961.

[Gilmore 63] '***A linear programming approach to the cutting stock problem***', part II, P. C. GILMORE, R. E. GOMORY, Operation research, Vol 11,N° 6, pp. 863-888, 1963.

[Gilmore 65] "***Multistage cutting stock problems of two and more dimensions***", P. C. GILMORE, R. E. GOMORY, Operation research, Vol 13, N° 1, pp. 94-120, 1965.

[Haessler 75] "***Controlling Cutting Pattern Changes in One-dimensional Trim Problems***" R. W. HAESSLER, Operation Research, Vol 23, N°3, 1975.

[Haims 70] "***A multistage solution of the template-layout problem***", M. J. HAIMS, H. FREEMAN, IEEE Trans on Syst. Scien. and Cyber., Vol. SSC-6, N° 5, pp. 145-151, April 1970.

[Hahn 68] "***On the Optimal Cutting of Defective Sheets***", S.G. HAHN Operation Research, Vol 16, 1968.

[Hégron 85] "***Synthèse d'image: alogorithme élémentaires***", G. HEGRON, Dunod Informatique, Paris 1985

[Herz 72] "***Recursive Computational Procedure for Two-dimensional Stock Cutting***", J.C. HERZ, IBM journal Res. Develop., Vol 16, 1972.

[Hofstadter 85] "***Gödel, Escher, Bach: les Brins d'une Guirlande Eternelle***", D. HOFSTADTER, InterEDitions, Paris 1985.

[Israni 82] "***Two-dimensional Cutting-Stock Problem Research: A review and a New Rectangular Layout Algorithm***", S. ISRANI, J. SANDERS, Journal of Manufacturing Systems, Vol 1, N°2, 1982.

[Jouet 88] "***Nul n'est censé ignorer la flexibilité***", J. JOUET, Confection 2000 n° 90, pp. 14-19, Mai 1988.

[Kirkpatrick 82] "***Optimization by simulated annealing***", S. KIRKPATRICK, C. D. GELATT, M. P. VECCHI, Science, 220, pp 671-680, 1982.

[Kantorovich 60] "***Mathematical methods of organising and planning production***", L. V. Kantorovich, Management Science 6/4, pp 363-422, 1960.

[Laarhoven 87] "***Simulated annealing: Theory and applications***", P. M. J. LAARHOVEN and E. H. L. AARTS, Reidel Publishing Compagny, Holland, 1987.

[Lauriol 85] "***L'organisation du travail et des fabrications dans les ateliers de coupe***", A. LAURIOL, Editions Vauclair, Modes et techniques, 1985.

[Legeard 90] "***ProSylvIA: un logiciel d'optimisation de découpe, basé sur la programmation en logique avec contraintes***", B. LEGEARD ET D. PERREARD, Revue Française d'Auto. et de Prod. appliquées, Vol 3, N°3-4, 1990.

[Lehmann 82] "***Géométrie et topologie des surfaces***", D. LEHMANN & C. SACRE, Editions Presses Universitaires de France, Paris 1982.

[Locher 86] "***Le monde de M. C. ESCHER***', J. L. LOCHER, C. H. A. BROOS? M. C. ESCHER, G. W. LOCHER et H. S. M. COXETER, Editions Chêne, Paris 1986.

[Lozano-Pérez 83] "***Spatial planning: a configuration space approach***", T. LOZANO-PEREZ, IEEE Trans on Computers, Vol. 8, N°. C-32, pp. 108-1201, 1983.

[Madsen 80] "***References Concerning the Cutting-Stock Problem, working paper***", O.B.J. MADSEN ISMOR, The Technical University of Denmark, DK-2800 Lyngby, Denmark, 1980.

[Maouche 85] "***Flexible Cutting Frame in Real Time***", S. MAOUCHE, 1er C.I.N.T.T., Mulhouse, 1985.

[Maouche 90] "***Loading and guiding system for NC machine***", S. MAOUCHE et A. DELGRANGE, Rapport de contrat BRITE (Basic Research in Industrial Technology for Europe) n° 1089, CEE, Juin 1990.

[Maouche 92a] "***laser cutting frame in real time***", S. MAOUCHE, 25th International Symposium on Automotive Technology & Automation Florence (Italy) June 1992

[Maouche 92b] "***A continuous cutting system in the suit make up industry***"S. MAOUCHE, Xith International Conference on Systems Science, Wroclaw, Poland, Septembre 1992.

[Martello 90] "***Knapsack problems: Algorithms and computer implementations***", S. MARTELLO and P. TOTH, John Wiley & Sons,Chichester, England, 1990.

[Meguelati 88] "***Méthodes de classification pour la constitution d'ilots de fabrication et l'ordonnancement***", S. MEGUELATI, Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, 1988.

[Metropolis 53] "***Equation of state calculations by fast computing machines***", N. METROPOLIS, A. W. ROSENBLUTH, A. H. TELLER and E. TELLER, J. Chemical and Physique 21, p 1087, 1953.

[Minoux 83] "***Programmation mathématique***", M. MINOUX, Dunod, Paris 1983.

[Moreau 73] "***Méthodes pour la résolution des problèmes d'optimisation de découpe***", Guy MOREAU, Thèse de docteur Ingénieur, Université Claude Bernard, mai 1976.

[Okat 87] "***Optimisation of the cutting trajectories of a laser cutting machine in the garment industry***", A. OKAT, S. MAOUCHE, M. STAROSWIECKI, Grindelwald (Switzeland) February 1987.

[Okat 90] "***Optimum path generation for a laser cutting machine***",A. OKAT, **S. MAOUCHE,** I.S.M.M., New York - October 1990.

[Okat 91] "***Contribution à la conduite d'une cellule de découpe au laser***", A. OKAT, Thèse de 3ième cycle en Productique: Automatique et Informatique Industrielle sous la direction de P. VIDAL et **S. MAOUCHE**, Université des Sciences et Technologies de Lille, 1991.

[Pearl 90] "***Heuristique: stratégie de recherche intelligente pour la résolution de problèmes par ordinateur***", J. PEARL, CEPADUES-EDITIONS, Toulouse, 1990.

[Perkowski 90] "***Two learning methods for a tree search combinatorial optimizer***", M. A. PERKOWSKI, P. DYSKO, B. FALKOWSKI, IEEE PCCC, pp 606-613, 1990.

[Portmann 87] "***Méthodes de décomposition spatiale et temporelle en ordonnancement de la production***", M.C. PORTMANN, Thèse de Doctorat, Université de Nancy 1, 1987.

[Prempti 83] "***Méthodes Stochastiques dans les Problèmes de Placement***", F. PREMTI, Thèse de Doctorat, Univers. Sc. et Méd. de Grenoble, Juil 1983.

[Redlinger 88] "***Contribution au problème du placement optimal, algorithmes analytiques et combinatoires***", A. REDLINGER, Thèse de Doctorat d'état en Sciences, Université des Sciences et Techniques du Languedoc, 1ier Juillet 1988.

[Robinet 90] "***Systèmes de S.F.A.O. en temps réel ou différé: choisir en fonction de ses besoins***", P. ROBINET, Confection 2000 n° 116, pp. 53-61, Novembre 1990.

Robinet 91] "***L'échange de données informatisé: une arme stratégique à ne pas négliger***", P. ROBINET, Confection 2000 n° 119, pp. 30-33, Février 1991.

[Robinet 93] "***EDI: une réactivité plus grande pour l'entreprise***", P. ROBINET, Confection 2000 n° 143, pp. 44-47, Avril 1993.

[Robinet 94] "***L'EDI, élément clé du circuit court***", P. ROBINET, Confection 2000 n° 154, pp. 38-41, Avril 1994.

[Roussel 92] "***A New Parametric Definition of Irregular Shape Boundary. Application to the Nesting Degree Processing and Shapes Clustering for the Optimal Two-dimensional Marking Problem in Clothing Industry***", G. ROUSSEL, **S. MAOUCHE**, P. VIDAL, Systems Science, XI International Conference on Systems and Science, Sept 1992.

[Roussel 93a] "***Automatic lay-planning for irregular shapes on plain fabric: Search in direct graph and A_ϵ admissible resolution***", G. ROUSSEL, **S. MAOUCHE**, 16TH IFIP Conference on System Modeling and Optimization, Compiègne, France, July 1993.

[Roussel 93b] "***Automatic lay-planning for irregular shapes on plain fabric: Search in direct graph and A_ε admissible resolution***", G. ROUSSEL, **S. MAOUCHE**, 16TH IFIP Conference, Le Touquet, France, October 1993.

[Roussel 93c] "***Intelligent lay-planning System for irregular shapes and sheet with patterns and flaws: resolution by ϵ-admissible tree search***", G. ROUSSEL, **S. MAOUCHE**, 24TH ISIR 93 Conference, Tokyo, November 1993.

[Roussel 94] "***Optimisation du placement de formes irrégulières sur matières planes. Application à l'industrie de la confection***", G. ROUSSEL, Thèse de Doctorat en Productique: Automatique et Informatique Industrielle sous la direction de P. VIDAL et **S. MAOUCHE**, Université des Sciences et Technologies de Lille, 1994

[Ruelle 89] "***Le vêtir se met au juste à temps***", N. RUELLE, Confection 2000 n° 103, pp. 20-22, Septembre 1989.

[Savard 87] "***Les Problèmes de Découpe : un Survol de leurs Formulations et de leurs Méthodes de Résolution***", G. SAVARD, Séminaire en Recherche opérationnelle, Janvier 1987.

[Schmitt 94] "***Morphologie mathématique***', M. SCHMITT et J. MATTIOLI, Editions Masson, Paris 1994.

[Sénéchal 79] "***Groupes et Géométries***", B. SENECHAL, Editions Herman, Paris 1979.

[Serra 82] "***Image analysis and mathematical morphology***", J. SERRA, Editions Academic Press, Londres 1982.

[Shamos 78] "***Computational geometry***", Ph. D. Dissertation, Yale University, 1978.

[Siarry 84] "***An application of physical methods to the computer aided design of electronic circuits***", P. SIARRY ET G. DREYFUS,*J. Physique Lett 45, pp 1-39, 1984.*

[Siarry 88] "***La méthode du recuit simulé : théorie et applications***", P. SIARRY ET G. DREYFUS, Ecole Supérieur de Physique et de Chimie Industrielles de la Ville de Paris, I.D.S.E.T. Paris, 1988.

[Soenen 77] "***Contribution à l'étude des systèmes de conduite en temps réel en vue de la commande d'unités de fabrication***", R. SOENEN, thèse de Doctorat état Sciences Physiques sous la direction de P. VIDAL, Université de Valenciennes et du Hainaut Cambraisis, 1ier Mars 1977.

[Stefik 88] "***Planning with constraints (MOLGEN: part 1)***", M. STEFIK, Artificial Intelligence 16, pp. 111-138, 1981.

[Taix 91] "***Planification de mouvement pour robot mobile non holonome***", M. TAIX, Thèse de Doctorat Robotique sous la direction de J-L. Laumond, LAAS, Université Paul Sabatier de Toulouse, 23 Janvier 1991.

[Tancrez 87] "***Un système de vision linéaire pour l'inspection et la caractérisation en temps réel de produit plat en défilement continu***", P. M. TANCREZ, Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille, 1987.

[Taschen 90] "***M. C. ESCHER, l'oeuvre graphique***", B. TASCHEN, Editions Verlag, Berlin 1990.

[Tilanus 76] "***An Application of Cutting-Stock in the Steel Industry***", C.B. TILANUS, C. GERHARDT K.B., Haley ed, Operation Research, North Holland Publishing Company, 1976.

[Tournassoud 89] "***Géométrie et intelligence artificielle pour les robots***", P. TOURNASSOUD, Editions Hermes, Paris 1988.

[Vidal 89] "***Calcul et gestion de la découpe de meubles en bois***", J. VIDAL & A. DENIS, Revue d'Auto. et de Prod. Appliquées, Vol 2, N°4, 1989.

[Wang 83] "***Two algorithms for constrained two-dimensional cutting stock problems***", P. Y. WANG, Operations Research, Vol. 31, N° 3, pp. 573-586, 1983.

[Winston 88] "***Intelligence Artificielle***", P.H. WINSTON, Coll. Informatique Intelligence Artificielle, InterEditions, 1988.

[Ziébelin 90] "***Raisonnement sur les contraintes, application en ordonnancement***", D. ZIEBELIN, Thèse de Doctorat en Informatique, Université Joseph Fourier Grenoble 1, 15 Février 1990.

[Zissimopoulos 84] ***"Problèmes de découpe:'Algorithmes ε-approchants"***, Vassilis ZISSIMOPOULOS, Thèse de docteur de 3ième cycle, Université Paris Sud, Novembre 1984.

BIBLIOTHÈQUE UNIVERSITAIRE LILLE Sciences et Techn.