gm 20004067

Sm 246
1995
413

N° d'ordre: 1595

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE
LABORATOIRE DE MECANIQUE DE LILLE URA 1441 CNRS

.....

THESE DE DOCTORAT

présentée à l'USTL
en vue de l'obtention du titre de

UNIVERSITÉ DES SC. ET TECHN. BIBLIOTHÈQUE UNIVERSITAIRE LILLE

DOCTEUR EN GENIE CIVIL

Spécialité
MECANIQUE DES ROCHES

Par
DIOUTA NGAMY Gilbert

ANALYSE NUMERIQUE DE LA LOCALISATION DANS LES MATERIAUX ROCHEUX

.....

Thèse soutenue le 26 octobre 1995 devant le jury composé de:

- **D. AUBRY**	E.C.P.	Président
- **R. CHARLIER**	Liège	Rapporteur
- **G. PIJAUDIER-CABOT**	E.N.S. Cachan	Rapporteur
- **J. DESRUES**	I.M.G.	Examinateur
- **Y. MEIMON**	I.F.P.	Examinateur
- **D. KONDO**	Lille I	Co-Responsable
- **J.F. SHAO**	Lille I	Co-Responsable

A Brigitte et Dany
A toute ma famille

REMERCIEMENTS

Je remercie G. CAIGNAERT, Directeur du Laboratoire de Mécanique de Lille, de m'avoir accueilli dans cette institution.

Je dis toute ma gratitude à Jean-Pierre HENRY pour m'avoir accepté dans son équipe "Mécanique des Matériaux Fragiles".

D. AUBRY m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse. Je l'en remercie vivement.

Mes remerciements vont également à G. PIJAUDIER-CABOT et R. CHARLIER qui ont accépté d'être rapporteurs de mon travail ainsi qu'à J. DESRUES et Y. MEIMON pour leur participation au jury.

Ce travail a été réalisé sous la direction de JF. SHAO et D. KONDO. Je leur dis toute ma reconnaissance pour leur disponibilité.

RESUME

Ce travail est consacré à l'étude numérique de la pré-localisation et de la post-localisation des déformations dans les géomatériaux.

Pour la pré-localisation, il s'agit d'analyser en détail les conditions d'occurrence du critère de bifurcation par localisation des déformations de RICE. Ce critère permet de détecter la bifurcation lors de la simulation de l'essai triaxial dans plusieurs géomatériaux et de prévoir les paramètres de la localisation (niveau de sollicitation correspondant à la bifurcation et cinématique de localisation). Ainsi, pour la craie de Haubourdin modelisée par Laderock et la marne à hydrobie décrite par une version modifiée du modèle de KHAN, qui sont des matériaux plastiques peu dilatants, il est établi que la non-associativité de la loi de comportement favorise le critère. Quand au grès de Fontainebleau qui est une roche susceptible à la microfissuration et fortement dilatante, il est décrit par le modèle de RICE. On montre pour ce matériau qu'en plus de la non-associativité, il faut avoir recours à la théorie de plasticité non-coaxiale pour trouver des conditions de bifurcation consistantes avec les données expérimentales.

Pour la post-localisation, le choix se porte sur la méthode de régularisation viscoplastique. Cette méthode permet de pallier les limites du formalisme de RICE. Sur le problème de compression sur plaque du grés de fontainebleau, on peut, en plus des paramètres accessibles par le critère de RICE, suivre l'émergence de la bande de localisation et son évolution et prévoir sa largeur.

Enfin, les outils numériques mis au point dans ces deux cadres permettent d'étudier les instabilités dans deux exemples types d'ouvrages: l'excavation des cavités souterraines et la coupe des roches.

ABSTRACT

This thesis is devoted to the numerical study of pre-localization and post-localization of deformations in geomaterials.

For pre-localization, the aim is to analyse in details the conditions under which the RICE's criterion of bifurcation into localization mode occurs. This criterion allows to detect bifurcation in the simulation of triaxial tests on geomaterials and to predict localization parameters (level of applied forces at bifurcation and localization kinematics). For plastic and less dilatant materials such as Haubourdin chalk modelled by Laderock and Beaucaire marl described by a modified KHAN's model, it is shown that the non-associativity of the law is the main factor influencing the RICE's criterion. Whereas, for a strong dilatant rock such as Fontainebleau sandstone, non-coaxial flow theory needs to be incorporated in the constitutive low to reproduce the bifurcation experimental data.

For the post-bifurcation analysis, the dynamic viscoplastic regularization method is retained. In this framework, the total evolution of the localization band up to failure can be followed in a boundary value problem. This is achieved here on the exemple of a compressed prismatical sample of Fontainebleau sandstone.

Finally, the numerical tools developped for the two parts are used to simulate instability modes in two examples of civil engineering problems: the drilling of underground openings and rock cutting.

SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE 1

Chapitre 1: REVUE BIBLIOGRAPHIQUE DE LA THEORIE DE BIFURCATION APPLIQUEE AUX GEOMATERIAUX.

1.1 INTRODUCTION 6
1.2 BIFURCATION EN MODE LOCALISE 7
1.2.1 Définition 7
1.2.2 Equations de compatibilité de HADAMARD 9
1.2.2.1 Introduction 9
1.2.2.2 Equations de compatibilité géométrique 9
1.2.2.3 Equations de compatibilité cinématique 10
1.2.2.4 Equations de compatibilité dynamique 12
1.2.3 Applications à l'élasticité linéaire isotrope 14
1.2.4 Localisation comme instabilité rhéologique: Critère de RICE 15
1.2.5 Catégorie de modèles considérée: Elastoplasticité classique 18
1.2.6 Facteurs susceptibles d'influencer le critère de RICE 19
1.2.6.1 Normalité et critère de RICE 20
1.2.6.2 Coaxialité et critère de RICE 21
1.3 METHODES DE TRAITEMENT DE LA POST-BIFURCATION 21
1.3.1 Introduction 21
1.3.2 Méthodes descriptives 22
1.3.2.1 Elément enrichi d'ORTIZ 22
1.3.2.2 La méthode de superposition spectrale 24
1.3.2.3 La méthode du maillage adaptatif 27
1.3.2.4 Les éléments d'interface 29
1.3.3 Méthodes prédictives 30
1.3.3.1 Approche par la mécanique non-locale du milieu 31
1.3.3.2 Milieu de COSSERAT 32
1.3.3.3 Théorie du second gradient 34
1.3.3.4 Méthode de régularisation viscoplastique 35

Chapitre 2: DETECTION DE LA BIFURCATION DANS QUELQUES MODELES ELASTOPLASTIQUES.

2.1 INTRODUCTION....36
2.2 IMPLEMENTATION NUMERIQUE DU CRITERE DE RICE....36
2.2.1 Intégration de lois élastoplastiques....36
2.2.2 Evaluation du tenseur élastoplastique de comportement....40
2.2.3 Module de détection de la bifurcation....42
2.2.3.1 Orientation de la bande....42
2.2.3.2 Amplitude de la discontinuité....44
2.3 BIFURCATION DANS LADEROCK APPLIQUE A LA CRAIE....48
2.3.1 Description du modèle....48
2.3.2 Simulations....49
2.3.3 Résultats et discussions....50
2.4 BIFURCATION DANS LE MODELE DE KHAN APPLIQUE A LA MARNE....53
2.4.1 Description du modèle....53
2.4.2 Détermination des paramètres....53
2.4.3 Simulations et résultats....54
2.5 BIFURCATION DANS LE GRES DE FONTAINEBLEAU....57
2.5.1 Résultats expérimentaux....57
2.5.2 Modélisation par la plasticité simple coaxiale....58
2.5.2.1 Description du modèle de RICE....58
2.5.2.2 Simulations....59
2.5.2.3 Résultats et commentaires....62
2.5.3 Modélisation dans le cadre de la théorie de la coaxialité non-linéaire....63
2.5.3.1 Introduction....63
2.5.3.2 Formulation du modèle....65
2.5.3.3 Simulations et résultats....68
2.5.4 Modélisation par la plasticité non-coaxiale (Modèle de fissures)....70
2.5.4.1 Formulation du modèle....70
2.5.4.2 Détermination du tenseur de comportement....71
2.5.4.3 Simulations....73
2.5.4.4 Résultats et interprétations....74
2.6 CONCLUSION....76

Chapitre 3: LOCALISATION DES DEFORMATIONS PAR L'APPOCHE DE REGULARISATION VISCOPLASTIQUE.

3.1 LIMITES DU FORMALISME DE RICE....78
3.2 FONDEMENTS THEORIQUES DE LA METHODE DE REGULARISATION VISCOPLASTIQUE....79
3.3 DEFINITION DU PROBLEME A RESOUDRE....84
3.4 ALGORITHME DE DISCRETISATION TEMPORELLE....85
3.5 PROCEDURE D'INTRODUCTION DE LA VISCOSITE FICTIVE....87
3.6 PROGRAMME DE CALCUL....89
3.7 VALIDATION DU PROGRAMME....90
3.7.1 Définition du problème de la poutre viscoplastique....90
3.7.2 Résolution numérique....93
3.8 SIMULATION DE LA COMPRESSION SUR PLAQUE DU GRES....94
3.8.1 Introduction....94
3.8.2 Modèle de RICE sans viscosité....96
3.8.3 Introduction de la viscosité: régularisation....98
3.9 CONCLUSION....99

Chapitre 4: EXEMPLES D'APPLICATIONS AUX INSTABILITES DANS LES OUVRAGES.

4.1 DETECTION DE LA LOCALISATION DANS LES OUVRAGES PAR LE CRITERE DE RICE....122
4.1.1 Introduction....122
4.1.2 Excavation d'une cavité....123
4.1.3 Cas de la coupe des roches....125
4.2 LOCALISATION DANS LES OUVRAGES PAR LE FORMALISME DE REGULARISATION VISCOPLASTIQUE....126
4.2.1 Cas d'essais triaxiaux vrais simulant des cavités....126
4.2.1.1 Modes d'instabilité d'une cavité:Résultats expérimentaux....126
4.2.1.2 Modes d'instabilité d'une cavité:Simulation numérique....128
4.2.2 Cas de la coupe des roches....130
4.3 CONCLUSION....130

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES....147
REFERENCES BIBLIOGRAHIQUES....149

INTRODUCTION GENERALE

Les surfaces de discontinuité sont de plus en plus reconnues comme cause d'instabilités dans les structures. Leur étude devient nécessaire pour la prédiction des désordres dans la vie d'un ouvrage. Les zones de localisation des déformations constituent un type de surfaces de discontinuité très courant. Les mécanismes physiques responsables de la localisation sont variés. Les zones de localisation des déformations peuvent apparaître dans une large gamme de matériaux, de microstructures différentes, et sous diverses conditions de sollicitation.

- Dans les matériaux à comportement ductile dominant comme les métaux, on a mis en évidence la formation de zones de localisation des déformations pour de fortes vitesses de déformation qui induisent des effets thermiques ainsi que pour de faibles vitesses où les effets thermiques sont négligeables. Les zones de localisation sont dans ce cas des bandes de cisaillement où les déformations plastiques sont importantes par rapport au reste du milieu.

- Dans les géomatériaux (bétons, roches), on observe des zones de grandes déformations avant rupture dans les essais de laboratoire. Dans ce type de matériaux qui sont micro-fissurés dans leur état non contraint et à comportement fragile, les zones de localisation résulteraient plutôt du développement de micro-fissures, des glissements et frottements sur leurs lèvres et de leur coalescence finale.

- Dans les sols (sables, argiles), on observe expérimentalement que les échantillons se rompent selon des lignes de glissement qui les séparent en blocs quasiment rigides.

- Sur site, les plissements et les failles sont aussi des manifestations à une plus grande échelle de la localisation des déformations.

Les bases théoriques nécessaires à l'analyse de la bifurcation par localisation des déformations ont été posées par HADAMARD (1903), THOMAS (1961), HILL (1962) et RICE (1976). Mais jusqu'à une date récente, les seuls résultats numériques et expérimentaux relatifs à la localisation disponibles concernaient les métaux (ELAM, 1927, PUTTICK, 1959, SEWELL, 1972, HAHN & al, 1975, ASARO, 1979, CHRISTOFFERSEN & HUTHINSON, 1979, CHANG & ASARO, 1980, TVERGAARD & al, 1981, PEIRCE & al, 1981). De nombreux chercheurs étudient à présent le phénomène de localisation dans les géomatériaux (HILL & HUTCHINSON, 1975, RUDNICKI & RICE, 1975, VARDOULAKIS & al, 1978, RICE & RUDNICKI, 1980, KOLYMBAS,

1981, RANIEKI & BRUHNS, 1981, PIETRUSZCZAK & al, 1981, DESRUES, 1984, VARDOULAKIS, 1979 & 1988, CHAMBON, 1986 & 1989, DESRUES & al, 1986, ORTIZ, 1987, DARVE, 1987, SING & al, 1989a & 1989b, HOLCOMB, 1992). Dans les conditions de sollicitation quasi-statique, le formalisme de HADAMARD - THOMAS - HILL - RICE permet de prévoir l'initialisation du phénomène dans des matériaux modélises comme non linéaires et non visqueux.

Dans ce cadre, on analyse un solide soumis à certaines conditions aux limites qui se déforme de façon homogène et on cherche à déterminer le premier instant où la bifurcation en mode de déformation localisée aura lieu. Ce mode est un mode de déformation non homogène faisant apparaître une zone où les déformations sont concentrées. La localisation est alors associée à une instabilité rhéologique qui correspond à la perte d'ellipticité des équations qui gouvernent l'équilibre incrémental. C'est pourquoi la loi constitutive du matériau joue un rôle essentiel dans cette analyse. En général, les lois simples ne permettent pas de mettre en évidence numériquement le phénomène de localisation. Les résultats expérimentaux relatifs à la bifurcation par localisation des déformations ne sont pas toujours disponibles, même pour des chemins simples de sollicitation.

Sur le plan expérimental, il existe autant de techniques de détection de la localisation que d'équipes de recherche. C'est dire combien la question d'un critère expérimental de localisation reste ouverte. Les techniques mises en oeuvre à cet effet dépendent du caractère ductile ou fragile du matériau utilisé. Les techniques les plus utilisées sont:

- La stéréophotogrammetrie développée principalement à l' IMG de Grenoble (DESRUES, 1984, HAMMAD, 1991). Cette technique est basée sur la vision stéréoscopique qui permet à partir de photographies d'échantillons prises à différents niveaux de chargement de restituer le déplacement de certains points et d'en déduire les déformations locales.

- La tomodensitométrie permet de mesurer l'évolution de la compacité d'un échantillon dans des coupes réalisées de manière non destructive au cours d'un essai.

- La technique des lames minces basée sur les observations au microscope électronique à balayage (MEB).

- La technique de multiplication des jauges où le seuil de localisation est repéré comme l'instant de perte de linéarité des déformations transversales (HADLEY, 1975, SANTARELLI, 1990, HAIED & al, 1993, HAIED, 1995, VIGGIANI & al, 1993, ORD & al, 1991).

On peut signaler également l'étude comparative de BASCOUL & al (1993) dans laquelle ont été utilisées les techniques de stéréophotogrammetrie, de speckle laser et des repliques.

Sur le plan numérique, il y a à présent une quasi - unanimité sur quelques conditions nécessaires que doit vérifier la loi constitutive pour satisfaire le critère de bifurcation dans le formalisme de HADAMARD - THOMAS - HILL - RICE. A savoir la règle de non normalité par exemple. Les autres questions en majorité restent ouvertes. Notons d'abord qu'il existe d'autres critères de bifurcation qui ne rentrent pas dans le formalisme de HADAMARD - THOMAS - HILL - RICE (SHAWKI, 1994, part 1& 2). De plus tous ces critères s'intéressent en général à l'initialisation de la localisation (pré - localisation).

Le phénomène de post - localisation est encore mal maîtrisé. On désigne par ce terme l'ensemble des processus qui surviennent depuis l'initialisation de la localisation jusqu'à la rupture. Les questions d'orientation et de largeur de bandes sont les plus cruciales. Dans le formalisme de HADAMARD - THOMAS - HILL - RICE, aucune indication n'est donnée sur la largeur de la bande puisque dans les équations qui gouvernent l'équilibre incrémental, il n'y a aucune variable de longueur. Comme conséquence, lors des simulations par éléments finis, il apparaît que la largeur de bande est fonction du maillage. Cette non - objectivité constitue une inconsistance numérique évidemment inadmissible physiquement. De plus, les éléments finis isoparamétriques classiques sont inaptes à reproduire les modes de déformation localisée. Pour ces raisons, plusieurs autres approches ont été développées ces dernières années parmi lesquelles on peut citer celle de l'élément enrichi d' ORTIZ & al (1987), celle de superposition spectrale (BELYTSCHKO & al, 1990), celle du maillage adaptatif (ZIENKIEWICK & al, 1987), celle la régularisation viscoplastique (NEEDELMAN, 1988 & 1989) et celle la théorie de la mécanique non locale (BAZANT & al, 1984).

Nous développerons en détail ces approches ainsi que d'autres avec leurs objectifs spécifiques dans la revue bibliographique sur la bifurcation en mode localisé au chapitre 1. SHAWKI& al (1989) et SHAWKI, (1994, Part I & Part II) ont aussi établi récemment un critère énergétique de localisation des déformations pour des matériaux sous sollicitations dynamiques.

La finalité de cette étude est de pouvoir prévoir et caractériser les désordres et les ruptures dans les cavités souterraines. Il s'agit d'étudier la localisation des déformations comme initialisation de la rupture dans les géomatériaux. Nous avons donc à étudier à la fois la pré - localisation et la post - localisation.

Pour la pré - localisation, nous sommes restés dans le formalisme de HADAMARD - THOMAS - HILL - RICE. Nous cherchons alors une modelisation consistante avec les résultats expérimentaux de bifurcation par localisation des déformations - quand ils sont disponibles - de différents matériaux rocheux (craie, marne, grès..). Dans cet esprit, le critère de bifurcation servira à valider les modèles.

La méthode de régularisation viscoplastique a ensuite été utilisée comme procédure unifiée d'analyse de la pré - localisation et de la post - localisation.

Ce travail étant le premier du genre au Laboratoire de Mécanique de Lille (LML), son objectif est aussi de doter le laboratoire d'outils de calculs pour l'analyse numérique de la bifurcation en mode localisé. Un module de détection de bifurcation par le critère de RICE a été réalisé pour les problèmes statiques. Pour les sollicitations dynamiques, un algorithme complet pouvant traiter des problèmes non linéaires avec effet du temps (viscosité) a été mis en oeuvre. Ces deux outils ont été incorporés dans le progiciel CESAR - version 3.0 - du LCPC en développement au LML.

Ce mémoire est composé de quatre chapitres et d'une conclusion générale.

Le premier chapitre est consacrée à une revue bibliographique de la théorie de la bifurcation en mode localisé. Après avoir défini ce type particulier de bifurcation, le critère de RICE est établi à partir des équations de compatibilité de HADAMARD sur la singularité des fonctions. Une application directe de ces équations de compatibilité est la détermination des vitesses d'ondes dans un milieu de comportement donné. Un accent particulier est mis sur la classe de lois de comportement retenu pour décrire les différents matériaux que nous étudions dans la suite et sur l'étude des facteurs qui influencent le critère de RICE. Ce chapitre se termine par une description des autres approches qui sortent du formalisme de HADAMARD - THOMAS - HILL - RICE à l'exception de la méthode de régularisation viscoplastique qui est présentée au troisième chapitre.

Dans le deuxième chapitre, une implémentation numérique du critère de RICE est effectuée et introduit dans l'intégration de quelques modèles élastoplastiques. Nous utilisons une version du modèle de LADE developpée par SHAO (1987) pour modéliser la craie de Haubourdin, un modèle modifié de KHAN pour décrire le comportement d'une marne et le modèle de RUDNICKI & RICE (1975) pour modéliser le grès de Fontainebleau. Les deux premiers matériaux sont ductiles et peu dilatants alors que le troisième est fragile et fortement dilatant. Les conditions pour lesquelles le critère de RICE

est vérifié pour ces modèles sont comparées et discutées. On note l'importance de deux facteurs qui sont la règle de normalité et la dilatance. Pour le grès en particulier, nous montrons qu'il est nécessaire d'avoir recours à des modèles très élaborés - basés sur la théorie de la plasticité non-coaxiale ou sur des considérations micromécaniques - pour que les résultats numériques relatifs à la bifurcation en mode localisé soient conformes aux observations expérimentales. Dans ce chapitre, les simulations sont faites en champ homogène et en conditions de sollicitation quasi-statique.

Dans le troisième chapitre, nous analysons en introduction les limites du formalisme de HADAMARD - THOMAS - HILL - RICE. Le choix de la méthode de régularistion viscoplastique pour pallier ces limites est justifié et un exposé détaillé de cette méthode est présenté. Le programme de calcul conçu pour le traitement de la localisation par cette méthode est testé avec succès sur le problème de la *poutre viscoplastique* de BRICKSTAD (1983). Avec ce programme, nous simulons la localisation des déformations dans le grès de Fontainebleau qui suit le modèle de RUDNICKI & RICE (1975) et nous discutons les résultats obtenus. On montre qu'il est possible non seulement de prédire tous les paramètres de la localisation - l'orientation de la bande, sa largeur, le niveau de sollicitation où elle apparaît - mais aussi de suivre son développement.

Dans le quatrième chapitre, nous appliquons les outils developpés au deuxième et au troisième chapitres à l'étude des conditions de stabilité dans des ouvrages types (forage des cavités souterraines de grande profondeur et coupe des roches). Dans l'approche de HADAMARD - THOMAS - HILL - RICE, il s'agit surtout d'introduire le module de détection de la bifurcation par le critère de RICE dans la simulation par éléments finis du problème posé. On peut ainsi prévoir, en fonction du chargement, l'instant où la bifurcation apparaît et surtout localiser les premiers points bifurqués. Dans l'approche par la méthode de régularisation viscoplastique, les investigations numériques portent sur les modes de rupture envisageables. Une validation sur un cas expérimental est effectué pour l'exemple de la cavité souterraine.

Chapitre 1

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE DE LA THEORIE DE BIFURCATION APPLIQUEE AUX GEOMATERIAUX.

1.1 INTRODUCTION

De façon générale, le terme de bifurcation désigne le fait que le chemin fondamental d'un système change brusquement lors de son évolution. A partir d'un état d'équilibre donné, supposons qu'on donne une petite perturbation à l'entrée du système. Si la réponse (sortie) correspondante reste petite, le système évolue de façon stable. Mais il arrive que dans certaines conditions, la réponse correspondant à cette perturbation infinitésimale de l'entrée soit très grande. Le système bascule alors brusquement sur un chemin d'évolution non encore expérimenté. Ce chemin est appelé chemin instable ou bifurqué. L'exemple simple de bifurcation en mécanique est le flambement eulérien (figure 1.1). Une tige comprimée par une force F ne change pas de configuration tant que F reste inférieure à F_C. C'est le cas de stabilité. Dés que F dépasse F_C, la tige flambe brusquement. Ce changement de configuration géométrique - bifurcation - est une instabilité. La force F_C est appelée force critique d'EULER.

Un autre exemple est celui de la figure (1.2) (LORET, 1986): On impose à un cylindre plein, à partir d'une configuration homogène (C°°) dans laquelle le rayon est R° et la hauteur H°, une transformation axisymétrique de gradient F qui l'amène à la configuration (C°) supposée être en équilibre. On cherche s'il existe plusieurs configurations non homogènes (C) obtenues à partir de (C°) équilibrées par les mêmes conditions aux limites et qui conservent l'axisymétrie géométrique du cylindre.

Dans les deux cas cités ci-dessus, les conditions de bifurcation incluent à la fois les données géométriques et les données rhéologiques. On parle de bifurcation en mode diffus. Le type de bifurcation qui nous intéresse dans ce travail est de nature différente. Notamment, les conditions de son occurrence ne font pas intervenir les données géométriques.

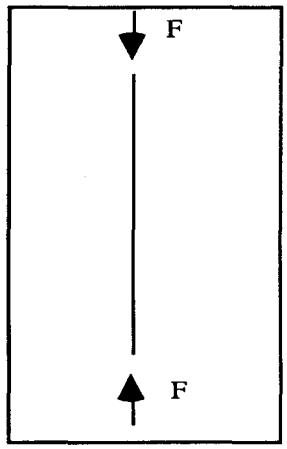


Figure 1.1 a: Si $F < F_C$: stabilité.

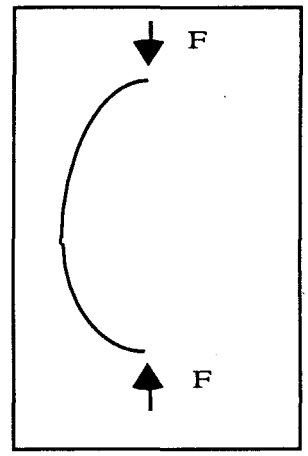


Figure 1.1 b: $F > F_C$: bifurcation.

1.2 BIFURCATION EN MODE LOCALISE

1.2.1 Définition

Le problème de la bifurcation en mode localisé se pose de la façon suivante (LORET, 1986):

Soit un système quelconque dans une configuration initiale (C°°) où les champs de contrainte et de gradient de vitesse de déplacement sont homogènes. Après une transformation de gradient F°, ce système vient en (C°) ou configuration actuelle où les champs précités restent homogènes. Le chemin (C°°) --------> (C°) s'appelle chemin fondamental. A partir de (C°) on cherche si après une transformation de gradient F, *sans changer la nature des conditions aux limites, et dans l'hypothèse de l'équilibre continu*, il existe une configuration finale C^{fl} appelée configuration localisée où le *gradient de vitesse de déplacement est discontinu à travers une surface* Σ ou sur un petit domaine de dimensions très faibles par rapport à celles de l'échantillon (figure 1.3).

La fonction vitesse de déplacement V est supposée être elle même continue sur tout le domaine pour toutes les configurations (C°°) à (Cf). Seul son gradient est susceptible de présenter une discontinuité. Le chemin (C°°) ----> (C°) ----> (Cfh) est dit *stable* tandis que (C°°) ----> (C°) ----> (Cfl) est dit chemin *instable* ou bifurqué. Comme le notent plusieurs auteurs (RUDNICKI & RICE, 1975, RICE, 1976, BARDET,1991, LORET, 1986), l'écriture de la condition de bifurcation dans ce cas ne fait pas intervenir explicitement les conditions aux limites. C'est pourquoi on utilise souvent le terme *d'instabilité - purement -*

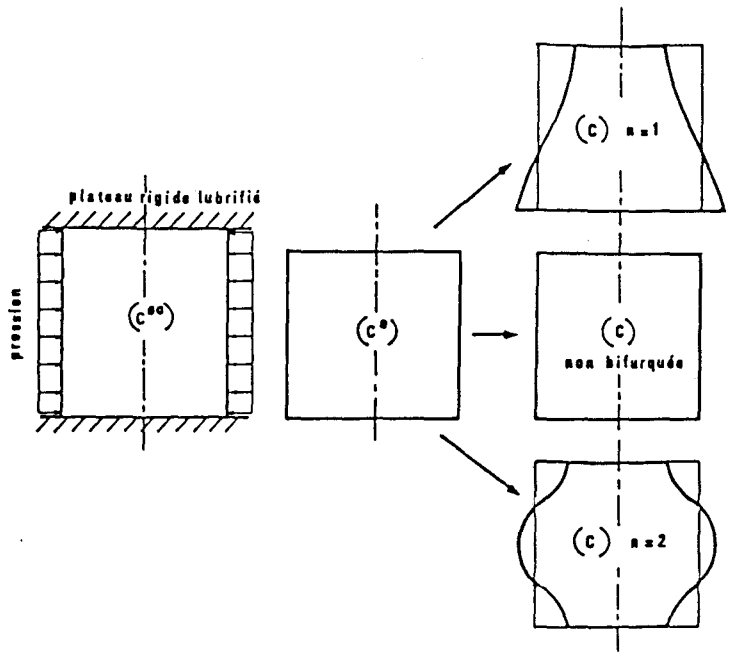


Figure 1.2: Schématisation d'un problème de bifurcation en mode diffus (LORET, 1986).

rhéologique dans le cas d'une bifurcation en mode localisé. Cette bifurcation étant définie par l'occurrence de la discontinuité de la fonction gradient de vitesse de déplacement ($\partial V/\partial x$), il faut pouvoir écrire les relations entre $(\partial V/\partial x)^1$ et $(\partial V/\partial x)^0$. Ces relations constituent les équations de compatibilité de HADAMARD.

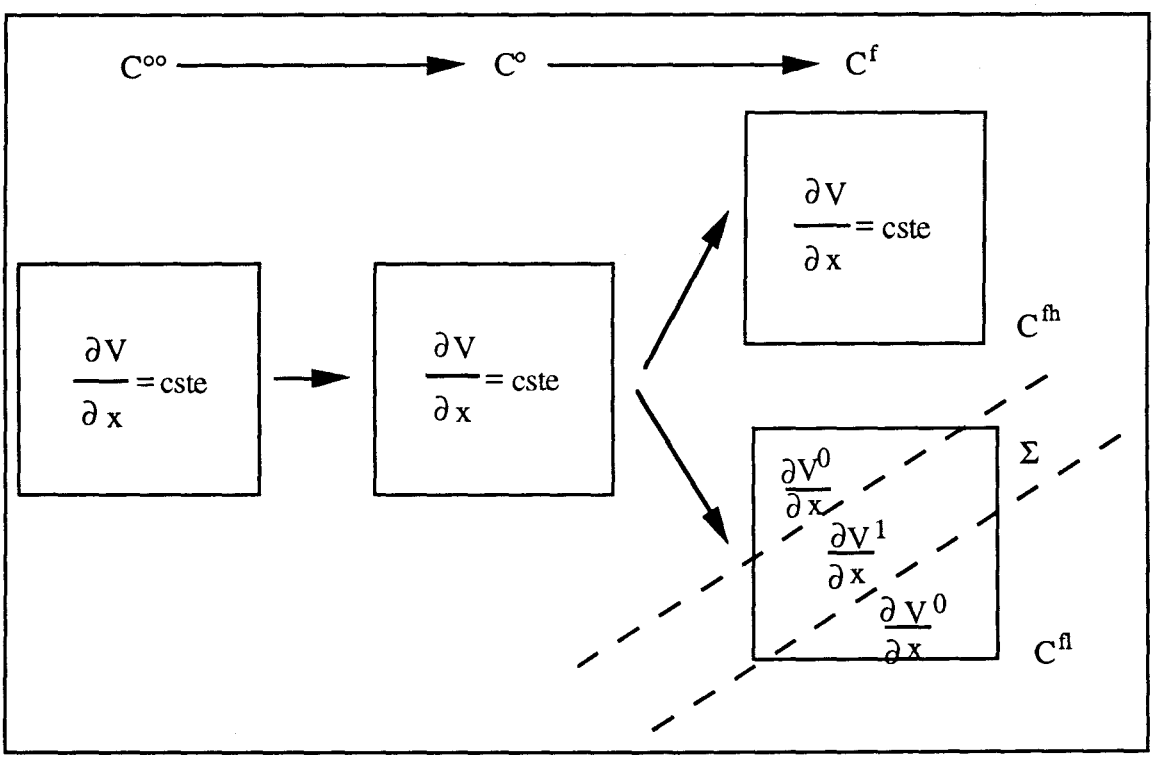


Figure 1.3: Schématisation du problème de bifurcation en mode localisé.

1.2.2 Equations de compatibilité de HADAMARD

1.2.2.1 Introduction

Les travaux de HADAMARD (1903) sur les surfaces de discontinuité en mécanique des milieux continus sont à l'origine des études sur la propagation des ondes dans les milieux solides. On verra par la suite que les surfaces de localisation sont un type particulier d'onde. Le lemme fondamental de HADAMARD sur les champs réguliers est à la base de ces travaux. Ce lemme, complété par le théorème de MAXWELL qui stipule que " le saut du gradient d'un champ est normal à la surface singulière" (TRUESDELL, 1974) constitue la base de l'étude des singularités et de la stabilité matérielle. MANDEL (1962, 1963 & 1964) et HILL (1962) ont continué ce travail en appliquant ces résultats à la détermination des vitesses d'ondes dans les milieux non linéaires (plastiques). Mais la présentation que nous faisons ci-après est plus inspiré du livre de THOMAS (1961).

Le problème se pose de la manière suivante:

Considérons un domaine Ω déformable et $\Omega(t)$ une configuration de Ω à l'instant t. Soit une surface $\Sigma(t)$ sur Ω supposée mobile et F(x,t) une fonction continue et différentiable de part et d'autre de $\Sigma(t)$ c'est-à-dire sur les sous-domaines Ω^1 et Ω^2 (figure 1.4). Comment s'écrivent, quand elles existent, les discontinuités de F(x,t) au travers de $\Sigma(t)$? HADAMARD (1903) a montré que ces discontinuités ou *sauts* de F et de ses dérivées de tous ordres par rapport aux variables x et t à travers Σ ne peuvent pas être arbitraires. Elles sont assujetties à de formes particulières exprimées par les équations de compatibilité. Si ces discontinuités existent, Σ est dite surface de discontinuité ou surface singulière relativement à la fonction F. Σ est perçue comme une *perturbation* (onde) qui se propage dans Ω. On distingue les équations de compatibilité géométrique ou cinématique selon que la discontinuité est par rapport à la variable espace ou temps.

1.2.2.2 Equations de compatibilité géométrique.

Si F(x,t) est une fonction scalaire continue au travers de Σ, on montre qu'il existe une fonction G(x,t) également scalaire telle que:

$$[\nabla F] = G\vec{n} \quad \text{ou} \quad [F_{,i}] = G n_i \tag{1.1}$$

où le crochet désigne le *saut* de la quantité concernée à travers Σ dans la direction de sa normale locale $\vec{n}(x,t)$. Si $\vec{F}(x,t)$ est une fonction vectorielle ou tensorielle, on montre également qu'il existe une fonction $\vec{G}(x,t)$ de même nature telle que:

$$\left[\nabla \vec{F}\right] = \vec{G} \otimes \vec{n} \quad \text{ou} \quad \left[F_{i,j}\right] = G_i n_j \tag{1.2}$$

La fonction $\vec{G}$ est liée à Σ et mesure l'amplitude du *saut*. Au moins un G_i est non nul sur Σ et tous les G_i sont nuls en dehors de Σ.

L'équation (1.1) ou (1.2) est appelée équation de compatibilité géométrique du premier ordre de F. Elle exprime la forme *obligatoire* du *saut*, quand il existe, du gradient de la fonction continue F. Le terme *géométrique* fait référence à la dérivée par rapport à la variable d'espace.

1.2.2.3 Equations de compatibilité cinématique.

Si F(x,t) est une fonction scalaire, on montre également qu'il existe une fonction G(x,t) telle que (THOMAS, 1961):

$$\left[\frac{\partial F}{\partial t}\right] = -cG + \frac{\delta[F]}{\delta t} \tag{1.3}$$

La relation (1.3) exprime la condition pour la discontinuité $[F]$ de F au travers de Σ de persister au cours du mouvement de $\Sigma(t)$. Si F est continue sur Σ, c'est - à - dire $[F] = 0$, cette condition se réduit à:

$$\left[\frac{\partial F}{\partial t}\right] = -cG \quad \text{ou} \quad \left[\dot{F}\right] = -cG \tag{1.4}$$

avec la quantité c qui est appelée vitesse normale de propagation de Σ sur Ω, définie comme:

$$c = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Δs étant le déplacement d'un point quelconque P sur Σ.

L'équation (1.4) est appelée équation de compatibilité cinématique du premier ordre de F car elle concerne une dérivée première par rapport au temps.

Les surfaces $\Sigma(t)$ où il existe une discontinuité d'une fonction quelconque F ou de ses dérivées par rapport aux variables espace ou temps sont appelées surfaces singulières ou surfaces d'onde.

Plus précisément, $\Sigma(t)$ est une surface singulière d'ordre zéro - *onde de choc* - relativement à la fonction F(x,t) si cette fonction est discontinue à travers $\Sigma(t)$. Elle est singulière d'ordre un si:

- F est continue à travers $\Sigma(t)$
- une au moins de ses dérivées par rapport à x est discontinue à travers $\Sigma(t)$.

Les surfaces de localisation du mode bifurqué de la figure (1.3) correspondent donc à des singularités du premier ordre de la fonction vitesse de déplacement. Seule l'équation de compatibilité géométrique est nécessaire ici puisque la discontinuité porte sur le gradient de cette fonction.

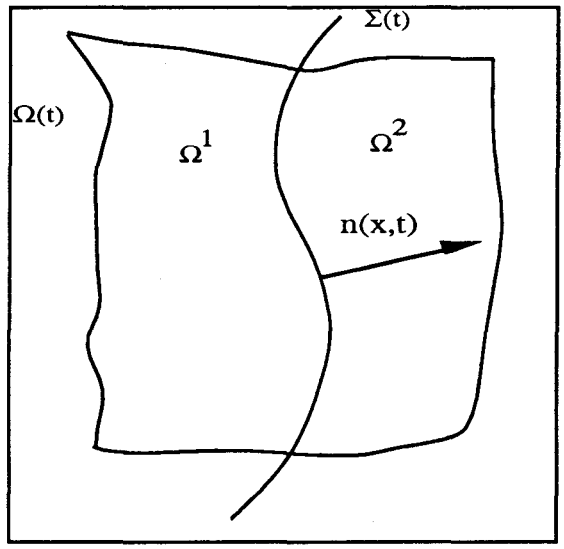


Figure 1.4: Normale locale d'une courbe Σ mobile sur un domaine Ω.

Remarque:

La combinaison des équations (1.1) ou (1.2) avec l'équation (1.3) donne:

$$[\nabla F] = -\frac{[\dot{F}]\vec{n}}{c} \quad \text{ou} \quad [F,_i] = \frac{[\dot{F}]}{c} n_i \quad \text{pour F scalaire}$$

$$[\nabla \vec{F}] = \frac{[\dot{\vec{F}}] \otimes \vec{n}}{c} \quad \text{ou} \quad [F_{i,j}] = \frac{[\dot{F}_i]}{c} n_j \quad \text{pour F vectorielle}$$

$$\text{Si} \quad [\dot{F}] = 0 \quad \text{alors} \quad [\nabla F] = 0$$

Il résulte de ceci qu'il existe une discontinuité de la dérivée de F par rapport à x aux points de la surface singulière où il existe une discontinuité de la dérivée de F par rapport à t, sous réserve que c soit non nulle. C'est pour cette raison que l'ordre de la discontinuité est toujours défini par rapport à la variable d'espace. Il existe évidemment des discontinuités d'ordre supérieur ou égal à deux. On les appelle ondes faibles.

1.2.2.4 Equations de compatibilité dynamique.

Si à l'aide des équations de compatibilité géométrique et cinématique on écrit les équations de continuité ou de mouvement en remplaçant les fonctions par leurs *sauts*, on obtient les équations de compatibilité dynamique.

Exemple: Ecrivons les équations de compatibilité géométrique et cinématique sur les fonctions déplacement et contrainte:

$$[u_{i,j}] = g_i n_j \quad ; \quad [\dot{u}_i] = -c g_i \rightarrow [u_{i,j}] = -\frac{[\dot{u}]}{c} n_j \qquad (1.5)$$

De la même manière, on trouve:

$$[\sigma_{ij,k}] = -\frac{\dot{\sigma}_{ij}}{c} n_k \qquad (1.6)$$

L'équation du mouvement s'écrit:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = \rho \ddot{u}_i \qquad (1.7)$$

Si on la réécrit en remplaçant les fonctions par leurs *sauts*, on trouve:

$$[\sigma_{ij,j}] + [b_i] = [\rho \ddot{u}_i] \tag{1.8}$$

Cette équation traduit le fait que les équations du mouvement doivent être vérifiées au travers de Σ. En la développant d'après l'équation (1.6), il vient (les forces de volume et la densité étant supposées continues à travers Σ):

$$[\dot{\sigma}_{ij}]n_j = -\rho c[a_i] \quad \text{avec} \quad a_i = \ddot{u}_i \tag{1.9}$$

Ecrivons la loi de comportement sous la forme incrémentale:

$$\dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl} \tag{1.10}$$

En supposant le tenseur de comportement D le même de part et d'autre de Σ (bifurcation continue), il vient à partir des équations (1.9) et (1.10):

$$D_{ijkl}[\dot{\varepsilon}_{kl}]n_j = \rho c[a_i] \tag{1.11}$$

Or en tenant compte de la définition du tenseur des déformations par rapport au vecteur déplacement et de l'équation (1.6), on a:

$$[\dot{\varepsilon}_{kl}] = -\left(\frac{[a_k]n_l + [a_l]n_k}{2c}\right) \tag{1.12}$$

En portant l'équation (1.12) dans (1.11), on trouve donc l'équation de compatibilité dynamique:

$$B_{ik}(\vec{n})[a_k] = \rho c^2[a_i] \quad \text{avec} \quad B_{ij}(\vec{n}) = D_{ijkl}n_k n_l \tag{1.13}$$

Cette équation est une équation aux valeurs propres en *saut d'accélération* $[a_i]$ C'est la condition que doit satisfaire ce *saut* à travers Σ. On peut la mettre sous forme:

$$\det(B(\vec{n}) - \tau I) = 0 \tag{1.14}$$

avec $\tau = \rho c^2$ et I le tenseur identité.

Elle met en évidence le fait que le rôle de la loi de comportement est central dans l'étude de la naissance, de la propagation et de l'amortissement des ondes dans le solide.

1.2.3 Application à l'élasticité linéaire isotrope.

L'une des applications simples et directes de ces équations de compatibilité est la détermination des vitesses de propagation d'ondes équivolumiques et irrotationnelles dans les milieux élastiques. Pour le cas d'un matériau isotrope, la loi de comportement s'écrit:

$\dot{\sigma}_{ij} = \lambda \dot{\varepsilon}_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \dot{\varepsilon}_{ij}$ ou λ et μ sont les coefficients de LAME;

ou sous forme de *saut*:

$$[\dot{\sigma}_{ij}] = \lambda [\dot{\varepsilon}_{kk}] \delta_{ij} + 2\mu [\dot{\varepsilon}_{ij}]$$

Compte tenu des équations (1.9) et (1.12), on peut écrire:

$$(\lambda + \mu)[a_k] n_k n_i + \mu [a_i] n_j n_j = \rho c^2 [a_i] \qquad (1.15\ a)$$

- Ondes équivolumiques: Si

$$[a_k] n_k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad [\dot{\varepsilon}_{kk}] = 0$$

le passage de la perturbation n'entraîne aucun changement de volume d'où le terme équivolumique. L'équation (1.15 a) devient:

$$\mu [a_i] n_j n_j = \rho c^2 [a_i]$$

Le vecteur $\vec{n}$ étant unitaire, on en déduit la vitesse de propagation c d'une onde équivolumique dans un matériau élastique isotrope:

$$c^2 = \frac{\mu}{\rho} \qquad (1.15\ b)$$

- Ondes irrotationnelles: Si

$$[a_k]n_k \neq 0$$

alors multiplions les deux membres de l'équation (1.15 a) par n_i. Il vient:

$$(\lambda + 2\mu)[a_k]n_k = \rho c^2 [a_k]n_k$$

On en déduit:

$$c^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \qquad (1.15\ c)$$

Nous venons de résoudre de façon détaillée l'équation (1.14) pour ce cas simple. On s'est fixé une direction $\vec{n}$ de propagation et on a déterminé les vitesses des ondes qui se propagent dans cette direction. Ce sont les valeurs propres du tenseur $B(\vec{n})$. Les vecteurs propre associés sont appelés polarisations. (figure 1.5). Selon une autre terminologie, le tenseur $B(\vec{n})$ est appelé tenseur acoustique associé à la direction $\vec{n}$. Les valeurs propres de $B(\vec{n})$ sont alors des nombres acoustiques et les vecteurs propres associés les axes acoustiques (TRUESDELL, 1974) pour la direction $\vec{n}$.

Quand les valeurs propres de $B(\vec{n})$ existent toujours et sont strictement positives, on montre que le matériau est *stable* en ce sens que toutes les perturbations qui naissent au sein du matériau s'évacuent car elles se propagent à des vitesses non nulles. L'équation du mouvement régissant le milieu est dit alors hyperbolique - on dit elliptique dans le cas quasi statique - pour les équations d'équilibre.

1.2.4 Localisation comme instabilité rhéologique: Critère de RICE.

Pour un système constitué d'un matériau non linéaire, suivant une loi constitutive et un chemin de transformation donnés, il peut arriver qu'à un niveau d'évolution une ou plusieurs valeurs de ces vitesses de propagation de perturbations c s'annulent ou deviennent imaginaires (figure 1.6). C'est une instabilité. Le critère de RICE correspond au cas de l'analyse en quasi - statique où on annule dans l'équation (1.14) les termes d'inertie.

Dans ce cas, on écrit directement:

$$[\dot{u}_{i,j}] = g_i n_j \quad ; \quad [\dot{\varepsilon}_{i,j}] = \frac{(g_i n_j + g_j n_i)}{2}$$

Les dérivées par rapport au temps doivent être assimilées à des incréments puisqu'ici le temps n'est pas matériel. L'équivalent de l'équation (1.13) pour l'équation d'équilibre devient:

$$B_{ij}(\vec{n})g_j = 0 \qquad (1.16\,a)$$

En éliminant la solution triviale $\vec{g}=\vec{0}$, la condition nécessaire de bifurcation en mode localisé ou critère de RICE s'écrit donc:

$$\det(B(\vec{n})) = 0 \qquad (1.16\,b)$$

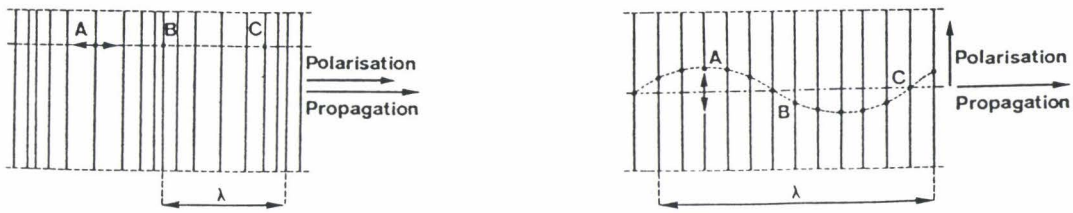
Remarque:

En faisant c = 0 dans l'équation (1.14) on obtient le même résultat. C'est pour cela que les surfaces de localisation définies par le critère de RICE sont souvent *appelées surfaces d'ondes stationnaires ou dégénérées* c'est-à-dire qui ne se propagent pas. Précisons qu'ici, l'inconnue est $\vec{n}$, la *normale qui oriente la surface de discontinuité du gradient de vitesse de déplacement.* Le vecteur $\vec{g}$ est l'*amplitude de la discontinuité*. Pour une loi de comportement donnée, ce critère indique si au cours d'un processus de déformation, une surface de localisation apparaît ou non au point étudié où est définie la normale $\vec{n}$. Le critère de RICE est donc un critère local. Dans ce cas, on donne le point de bifurcation - niveau de chargement où le critère est atteint -, l'orientation $\vec{n}$ et l'amplitude de $\vec{g}$.

Rappelons que les hypothèses sont:

- discontinuité du gradient (de vitesse) de déplacement;
- équation d'équilibre continu;
- tenseur de comportement D le même de part et d'autre de Σ.

La condition c = 0 relative aux surfaces de localisation correspond à une instabilité dans la mesure où des perturbations qui naissent au sein du matériau y restent. En outre, seule la loi de comportement intervient dans le critère d'où le terme d'instabilité rhéologique. Quand le critère est atteint, les équations d'équilibre perdent leur caractère elliptique. On dit alors que le problème devient mal posé. L'un des axes de travail dans ce domaine est de *régulariser* ces équations, ce qui leur permet de garder leur caractère elliptique même au delà de l'instant ou on a théoriquement atteint le critère de RICE. Nous reviendrons ultérieurement sur ce traitement dit de *post-bifurcation* par la suite.



a) Onde longitudinale. b) Onde transversale.

Figure 1.5: Directions de propagation et polarisations.

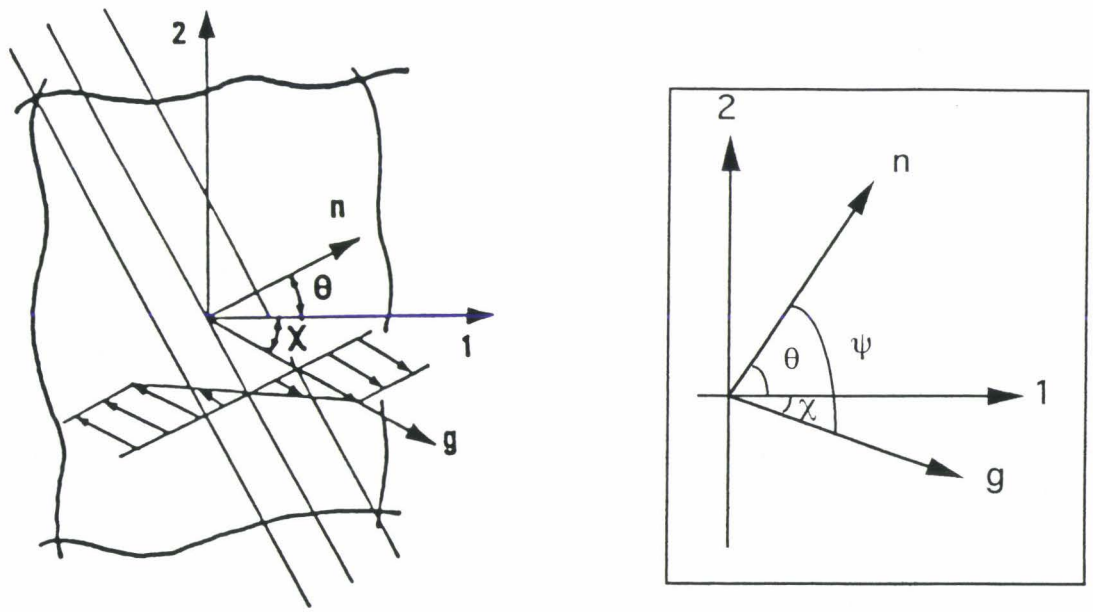


Figure 1.6: Paramètres θ, χ, et ψ définissant la cinématique de localisation dans une bande.

a) Matériau dilatant. b) Matériau contractant.

Figure 1.7: Cinématique de localisation (LORET, 1986)

Envisageons à présent les lois de comportement non linéaires auxquelles sera appliqué le critère de RICE.

Mais avant, il nous paraît opportun de discuter un instant la terminologie au sujet des surfaces de localisation. La littérature sur le sujet ne permet pas toujours de faire la différence entre surface singulière, surface de discontinuité, surface de localisation, *bande de cisaillement* et fissure. Pour LEROY et ORTIZ (1989), une bande de cisaillement est un type particulier de bande de localisation. Elle correspond au cas où les vecteurs $\vec{g}$ et $\vec{n}$ (équation 1.16 a) sont perpendiculaires et apparaît généralement pour des matériaux plastiques incompressibles. Pour les matériaux fragiles où la surface de localisation a plutôt tendance à s'ouvrir - $\vec{g}$ parallèle à $\vec{n}$ - il utilise le terme de *bande d'ouverture* (*surface d'extension).* TRUESDELL (1974) fait la même distinction. Si $\vec{g}$ est parallèle à $\vec{n}$, il utilise le terme de singularité *longitudinale* et *transversale* pour $\vec{g}$ normal à $\vec{n}$. LORET (1986), situe plus la distinction au niveau des cinématiques de localisation dans un matériau contractant ou dilatant (figure 1.7),

Les fissures quant à elles sont des discontinuités de la matière. Elles ne rentrent en principe pas dans le cadre des surfaces de localisation comme définies plus haut. Ce sont des singularités plus fortes que celles envisagées dans la théorie de la bifurcation en mode localisé. Toutefois, comme le souligne LORET, (1986), les singularités faibles peuvent changer d'ordre et devenir plus fortes si la sollicitation est poursuivie dans le même sens pendant longtemps. Si le mode de déformation inhomogène fait apparaître des fissures, on n'a plus affaire à un échantillon mais à une structure, de sorte que le problème n'est plus uniquement rhéologique.

1.2.5 Catégorie de modèles considérée: élastoplasticité classique.

En toute rigueur, les lois de comportement écrites de façon incrémentale doivent utiliser des dérivées objectives (type Jaumann) pour respecter les conditions d'invariance matérielle. Dans l'hypothèse des petites déformations où nous nous plaçons, l'utilisation de dérivées temporelles se justifie. On devra quand même vérifier que les termes corrotationnels sont négligeables. Pour les applications envisagées, nous nous plaçons dans le cadre de l'élastoplasticité classique. Il s'agit donc de lois de comportement incrémentalement bilinéaires. Rappelons qu'une loi de comportement incrémentalement non linéaire s'écrit sous la forme:

$$\dot{\sigma} = D(\varepsilon)\dot{\varepsilon} \qquad (1.17)$$

où ε est la partie symétrique du gradient de vitesse et $D(\varepsilon)$ dépend explicitement de ε. Si on peut écrire l'équation (1.17) sous la forme:

$$\dot{\sigma} = D\left(\varepsilon^0\right)\dot{\varepsilon} \qquad (1.18)$$

on dit que l'équation (1.18) est une forme linéarisée de l'équation (1.17) autour de ε^0 (qui correspond en général au trajet fondamental). Le solide qui répond à (1.17) est le solide réel. Celui qui répond à (1.18) est le solide linéaire de comparaison associé. Dans le cas de l'élastoplasticité classique, il s'agit d'une loi bilinéaire (ou à deux branches) qui s'écrit:

$$\dot{\sigma} = D^e\dot{\varepsilon} \quad si \quad F<0 \qquad \text{branche de décharge élastique}$$

$$\dot{\sigma} = D^p\dot{\varepsilon} \quad si \quad F>0 \quad et \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma}\dot{\sigma} > 0 \qquad \text{branche de charge plastique}$$

où D^e et D^P sont indépendants de ε et F la fonction de charge.

Nous travaillerons avec:

$$\dot{\sigma} = D^p\dot{\varepsilon}$$

Donc le solide de comparaison que nous utiliserons dans l'évaluation du critère de RICE est celui qui correspond à la charge plastique. Des études existent dans la littérature où les bifurcations d'un solide réel sont comparées à celles des solides de comparaison associés (LORET, 1986). Notons que les lois de comportement type CLOE développées à Grenoble par CHAMBON (1986) et CAILLERIE & CHAMBON (1993) sont totalement incrémentalement non linéaires et sortent du cadre de l'élastoplasticité classique.

Avant de passer à l'implémentation numérique du critère de RICE, résumons ici les différents facteurs pouvant avoir une influence sur la bifurcation - dans le sens où le critère de RICE est atteint de façon précoce ou retardée.

1.2.6 Facteurs susceptibles d'influencer le critère de RICE.

Dans la plupart des publications traitant de bifurcation, le problème est posé de l'une des deux manières suivantes:

1 - Pour un système donné soumis à de conditions aux limites données, quels modes de bifurcation peuvent-ils présenter (bifurcation en mode diffus, en mode localisé)? Et surtout dans quel ordre surviennent ces modes au cours du processus de transformation? La bifurcation en mode localisé précède-t-elle celle en mode diffus et vice-versa? Si oui, pour quel jeu de paramètres? Qu'advient-il lorsqu'on remplace les solides réels par les solides de comparaison associés? (BARDET, 1990 & 1991, SCHREYER, 1990, CHAU, 1993).

2 - Pour un type de bifurcation fixé et une loi de comportement fixée, quel jeu de paramètres accélère ou retarde l'occurrence du critère? Quel autre jeu l'inhibe complètement? Par exemple, dans leur article, RUDNICKI & RICE, (1975) montrent que pour un géomatériau dilatant, il ne peut y avoir bifurcation par localisation des déformations en régime d'écrouissage positif pour un chemin de contrainte de compression triaxiale.

La démarche que nous suivons n'est pas exactement la même. Notre problème se pose de la façon suivante:

Etant donnés un matériau, des courbes expérimentales (σ,ε) classiques (essais triaxiaux) et des données expérimentales de localisation (seuil de bifurcation, direction de bande, épaisseur...), quel modèle reproduit le plus fidèlement possible et les courbes expérimentales, et les données de bifurcation avec le même jeu de paramètres? C'est ce que nous entendrons par validation de modèles. Sinon, quels facteurs, parmi ceux cités ci-dessous, permettent le mieux de modifier ce modèle dans le sens voulu? Le premier de ces facteurs est la règle de normalité.

1.2.6.1 Normalité et critère de RICE

THOMAS (1961), MANDEL (1963), RICE (1976), NEEDELMAN (1979), DE BORST (1988), CHAU & al (1990), BIGONI & al (1991) et BIGONI (1992) ont montré que la règle de normalité a une grande influence sur le critère de localisation. Pour un modèle associé, le tenseur élastoplastique D possède les symétries majeures en plus des symétries mineures. Le tenseur acoustique B devient symétrique. Et on montre que dans ce cas, le critère de bifurcation par localisation des déformations ne peut être atteint qu'en phase d'écrouissage négatif c'est-à-dire en phase post-pic dans l'essai triaxial. En revanche, l'utilisation d'une loi non-associée peut conduire à la localisation en régime d'écrouissage positif. Or les expérimentateurs s'accordent aujourd'hui à reconnaître que la localisation est observée avant le pic en contrainte. On s'attachera donc à utiliser des lois non-associées.

1.2.6.2 Coaxialité et critère de RICE.

Dans la théorie classique de l'élastoplasticité, qu'on dit aussi *coaxiale* - nous y reviendrons en détail au paragraphe (2.5.2) du chapitre 2 - on montre que les modules de cisaillement (D_{1212}, D_{1313}, D_{2323}) gardent leurs valeurs élastiques durant tout le processus de chargement. Ces valeurs seraient grandes par rapport à la réalité expérimentale et joueraient contre la précocité de l'apparition de la bifurcation par localisation des déformations. On peut généraliser cette propriété aux lois à surface de charge régulière dont les réponses à certains chemins particuliers sont physiquement erronées.

C'est pourquoi de nombreux auteurs cherchent à diminuer la valeur de ces modules de cisaillement en prônant les techniques de la non-coaxialité où les lois de comportement sont à surface de charge irrégulière (ANAND & al, 1980). On a pu montrer ainsi qu'on baisse sensiblement le point de bifurcation de façon à l'avoir dans le domaine d'écrouissage positif. En plus de cet artifice, d'autres auteurs ont montré que les types d'écrouissage combiné (isotrope plus cinématique) permettent de mieux prédire ou retrouver numériquement les données expérimentales relatives à la bifurcation par localisation des déformations. Nous exploiterons ces deux facteurs par la suite.

1.3 METHODES DE TRAITEMENT DE LA POST-BIFURCATION

1.3.1 Introduction.

Le critère de RICE permet lors d'un calcul d'indiquer le niveau de sollicitation pour lequel il y a perte d'ellipticité des équations et d'indiquer en quel point cela se produit. Il traite de la pré-bifurcation. Pour un problème aux limites par exemple, ce formalisme ne précise pas comment il faut relier entre elles les normales locales $\vec{n}$ pour former la bande globale. Il laisse aussi sans réponses la question de la largeur de la bande et surtout celle de son évolution.

Les méthodes de traitement de la post bifurcation sont variées. Elles peuvent être classées en deux catégories:

1 - La première catégorie rassemble des méthodes qu'on peut qualifier de *descriptives*. Elles peuvent être présentées comme des *artifices* numériques qui permettent de décrire l'évolution des bandes de localisation sans toucher à la structure des équations sous-jacentes qui régissent le système en évolution. En somme, cette catégorie de

techniques permet de résoudre les incohérences numériques liées au phénomène de bifurcation sans s'attaquer au *caractère mal posé* du problème qui est devenu non elliptique. Dans cette catégorie, les procédures de *pré - bifurcation* sont différentes des procédures de *post - bifurcation* et pour la détection de la bifurcation, elles utilisent en général le critère de RICE.

2 - La deuxième catégorie rassemble des méthodes qu'on peut qualifier de *prédictives*. Dans ces méthodes, on fait des hypothèses sur les équations d'équilibre - ou du mouvement - et sur les équations de loi constitutive de façon à lever l'indétermination liée à la perte d'ellipticité des équations d'équilibre - ou l'hyperbolicité des équations du mouvement - correspondant à la bifurcation. Ces méthodes permettent de prédire toutes les caractéristiques de la bande et son évolution et éliminent les problèmes numériques de façon à ce que la *pré - bifurcation* et la *post - bifurcation* soient traitées par une procédure unique.

1.3.2 Méthodes descriptives.

1.3.2.1 Elément enrichi d'ORTIZ.

Cette technique permet d'améliorer la performance des éléments finis isoparamétriques qui sont inaptes à reproduire les modes localisés dans les problèmes de bifurcation à cause de leur faible interpolation (ORTIZ & al, 1987, LEROY & ORTIZ, 1989). Plus précisément, soit l'interpolation classique des éléments finis conformes:

$$u_k(x) = u_{ki} N_i(x) \tag{1.19}$$

où les u_{ki} sont les déplacements nodaux et N_i les fonctions d'interpolation.

Supposons qu'en un point de Gauss quelconque le critère de RICE est atteint à un niveau de chargement donné. On connaît donc complètement la cinématique de la localisation en ce point - couple $(\vec{n},\vec{g})$. Théoriquement, à partir de cet instant, le mode de déformation présente une discontinuité de son gradient en ce point qu'on doit pouvoir reproduire numériquement. Cette discontinuité étant exprimée à l'aide du couple $(\vec{n},\vec{g})$.

Pour ce faire, un choix judicieux de mode incompatible censé *modéliser* cette discontinuité est ajouté à l'interpolation (1.19). Il vient:

$$u_k(x) = u_{ki}(x) N_i(x) + M_{kj}(x)\gamma_j \tag{1.20}$$

La somme i est faite sur les noeuds de l'élément; la somme j est faite sur tous les modes localisés de tous les points de gauss de l'élément. Les fonctions M sont définies de sorte que le *saut* du gradient de déplacement au point de Gauss concerné, relativement au mode de localisation j soit:

$$\left[M_{kj,l}\right] = g_{kl}\, n_{jl} \tag{1.21}$$

avec

$$\begin{cases} M_{kj}(x) = \left(1-\lambda_j\right) M_{kj}^{-}(x) + \lambda_j M_{kj}^{+}(x) \\ M_{kj}^{+}(x) = \begin{cases} g_{kj}\left(n_j\left(x-x_j\right)\right) & \text{si } n_j\left(x-x_j\right) \geq 0 \\ 0 & \text{si } n_j\left(x-x_j\right) \prec 0 \end{cases} \\ M_{kj}^{-}(x) = \begin{cases} -g_{kj}\left(n_j\left(x-x_j\right)\right) & \text{si } n_j\left(x-x_j\right) \leq 0 \\ 0 & \text{si } n_j\left(x-x_j\right) \succ 0 \end{cases} \end{cases} \tag{1.22}$$

x désigne un point quelconque de l'élément et x_j le point de Gauss de l'élément où a lieu le mode de localisation j.

Les déformations s'écrivent matriciellement pour un élément:

$$\varepsilon(x) = B_1 u_1 + B_2 u_2 \tag{1.23}$$

Le premier terme est le terme classique. Dans le second, u_2 désigne le vecteur formés par les coefficients γ_j qui sont des degrés de liberté supplémentaires de l'élément non encore déterminés à ce niveau et B_2 est défini par:

$$\left(B_2\right)_{ikj} = \begin{cases} \frac{1}{2}\lambda_j\left(g_{ij}\, n_{kj} + g_{kj}\, n_{ij}\right) \text{ si } n_j\left(x-x_j\right) \succ 0 \\ -\frac{1}{2}\left(1-\lambda_j\right)\left(g_{ij}\, n_{kj} + g_{kj}\, n_{ij}\right) \text{ si } n_j\left(x-x_j\right) \prec 0 \end{cases} \tag{1.24}$$

Les indices i et k sont relatifs aux coordonnées d'espace et j au mode de localisation. Dans les équations (1.21), (1.22), et (1.24), il n'y a pas de sommation sur l'indice répété.

L'ajout de modes incompatibles dans l'interpolation du déplacement rend l'élément incompatible. Il doit donc passer le *patch test* (IRONS & al, 1972) pour que la convergence reste assurée. Cette condition de *patch test* s'écrit pour ce cas précis;

$$\int_{\Omega^e} B_2 dv = 0 \qquad (1.25)$$

ce qui permet d'identifier les coefficients γ. Les degrés de liberté supplémentaires γ sont donc éliminés au niveau de chaque élément par *condensation statique*. Comme conséquence, dans la résolution du système global d'équations, les seules inconnues qui restent sont les déplacements nodaux classiques.

Mise en oeuvre de la méthode.

Au cours d'une simulation, on ne connaît pas à priori les points de Gauss où la bifurcation apparaît en premier. On peut néanmoins ajouter les modes incompatibles à l'interpolation dès le début du calcul. Le couple ($\vec{n}$, $\vec{g}$) correspond alors au minimum de la fonction $f(\vec{n}) = \det(B(\vec{n}))$ (où $B(\vec{n})$ est définie à l'équation (1.13)) en chaque point de Gauss. Tant que ce minimum reste grand, l'influence des termes incompatibles reste négligeable. Mais dès qu'il est proche de zéro (bifurcation), l'élément ainsi enrichi favorisera l'apparition des modes de déformation localisée. Ajoutons que tout le traitement effectué se fait au niveau d'un point de Gauss. Cette méthode est donc *locale*. Dans cette catégorie, citons maintenant trois méthodes globales où les améliorations numériques portent sur plusieurs éléments ou même toute la structure entière.

1.3.2.2 La méthode de superposition spectrale.

La technique de superposition spectrale (BELYTSCHKO & al, 1990, FISH & BELYTSCHKO, 1990) est proche dans son principe de celle d'enrichissement d'ORTIZ présenté ci-dessus en ce sens que les éléments finis classiques sont enrichis par des modes spectraux. Elle est conçue pour combiner les avantages respectifs de deux méthodes numériques de résolution des équations:

- La méthode des éléments finis où on cherche une solution approchée globale comme somme de solutions approchées sur des sous-domaines appelés éléments;

- La méthode spectrale où on cherche une solution approchée globale, différentiable jusqu'à un ordre n grand, directement sur tout le domaine de calcul.

L'avantage principal de la méthode des éléments finis est de s'adapter à des géomètries complexes. Son inconvénient majeur est d'utiliser une interpolation d'ordre faible pour approcher les sous-solutions (solutions sur les éléments). Les éléments finis ont donc tendance à moyenner les champs qu'ils sont censés reproduire. Comme on l'a dit plus haut, c'est pour cette raison qu'ils sont inaptes à traiter les problèmes de champs à grand gradient comme c'est le cas pour les problèmes de bifurcation en mode localisé.

Quant à la méthode spectrale, elle permet grâce à l'ordre élevé de son interpolation de reproduire des variations même brusques des champs calculés. Mais elle n'est efficace que pour des géomètries simples.

Voici une présentation de la méthode spectrale due à WANG (1993):

Principe

Soit à résoudre l'équation

$$L(u) = F \tag{1.26}$$

sur le domaine Ω, soumise à des conditions initiales et de frontière. u est l'inconnue; L est un opérateur différentiel; F est une donnée; u et F dépendent de x et t.

Si u* est une solution approchée de l'équation (1.26), alors on définit le résidu e par:

$$e = L(u^*) - F \neq 0 \tag{1.27}$$

Dans la méthode spectrale, on cherche une solution approchée u* de la forme:

$$u^* = \Sigma a_k(x)\Phi_k(t) \qquad k = 0,1,\ldots,N \tag{1.28}$$

de façon à annuler la forme intégrale w définie par:

$$w = \int_\Omega e(x,t)\Psi_l(x)\,d\Omega \qquad l = 0,1,\ldots,N \tag{1.29}$$

où les $a_k(t)$ sont N + 1 coefficients inconnus, degrés de liberté de l'approximation spectrale, les $\Phi_k(x)$ une série de fonctions donnée ou choisie appelées fonctions d'essai et les $\Psi_l(x)$ des fonctions de pondération.

L'équation w = 0 permet de trouver les N + 1 degrés de liberté. u* est ainsi connu.

Mise en oeuvre de la méthode.

Après avoir formé la grille d'éléments finis, on la mappe par un système de bandes spectrales (figure 1.8). Il existe alors deux sortes d'éléments:

- Ceux qui ne sont pas couverts par une bande; leur interpolation reste celle des éléments finis et on écrit les déformations sous la forme matricielle:

$$\varepsilon = B_1 u_1 \tag{1.30}$$

- Ceux qui sont couverts par une bande. L'équation (1.30) devient:

$$\varepsilon = B_1 u_1 + B_2 u_2 \tag{1.31}$$

où u_2 représente le vecteur des degrés de liberté spectraux. Pour les problèmes de localisation, BELYTSCHKO & al (1989) et BELYTSCHKO & al (1990) ont proposé:

$$B_2 = Q(\bar{x}_2)\beta(\bar{x}_1) \tag{1.32}$$

ou la matrice Q dépend du couple $(\vec{n},\vec{g})$ de la cinématique de localisation, $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ est le repère local lié à la bande spectrale et β est un vecteur de fonctions d'interpolation spectrale choisies de telle sorte que les déplacements spectraux soient nuls sur la frontière de la bande spectrale et sur le domaine hors de la bande spectrale (figure 1.8).

Cette méthode doit donc être couplée avec une pré-analyse basée sur le critère de RICE.

Pour cette méthode, les points d'intégration sur les éléments finis ne correspondent pas toujours à ceux de l'intégration spectrale. Pour la construction des matrices de rigidité relatives aux modes classiques et spectraux, il est nécessaire de transférer des informations (contraintes, déformations et autres variables du problèmes) d'un système de points d'intégration à l'autre. Plusieurs méthodes de transfert existent dans la littérature. Voir à ce propos WANG (1993).

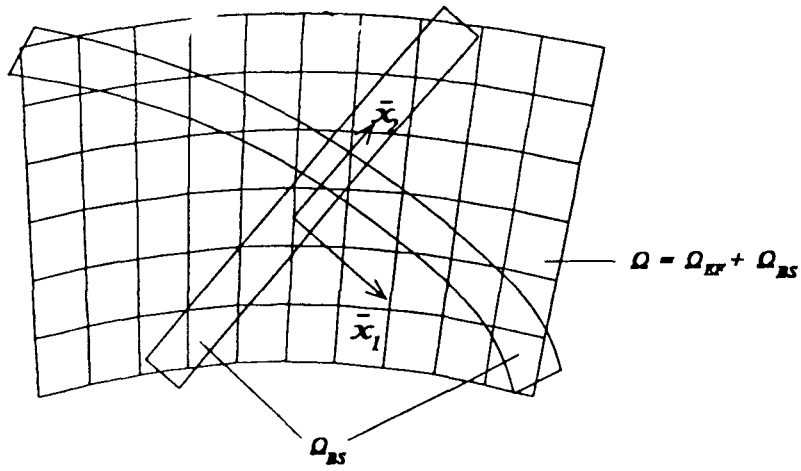


Figure 1.8: Superposition de bandes spectrales sur un maillage éléments finis.

Remarque:

Il est à noter que pour les deux méthodes citées ci-dessus, il est indispensable d'introduire dans les calculs une inhomogenéité de structure pour initialiser la zone de localisation en un point précis. Par exemple, si on résout le problème de *quart de plaque* de la figure (3.10 b), en statique, le champ de contrainte est uniforme (identique en tous les points de Gauss de la structure). Si le critère de bifurcation est atteint, il le sera en tous les points en même temps. La notion de zone de localisation n'a plus alors aucun sens. D'où la nécessité d'introduire un *élément faible* pour que la localisation s'initialise en un point précis.

On justifie l'introduction de ces *éléments faibles* par le fait que les matériaux réels étudiés sont en général structurellement hétérogènes. Mais leurs positions et surtout leurs tailles sont choisies arbitrairement par le calculateur. Pour la méthode spectrale, les dimensions de la bande spectrale (ou des bandes spectrales) à superposer sur la grille des éléments finis sont également arbitraires (PREVOST & al, 1981, PREVOST, 1984, ORTIZ & al, 1987, DE BORST, 1989, LARSSON & al, 1991).

1.3.2.3 Méthode du maillage adaptatif (KELLY & al, 1983, GAGO & al, 1983, ZIENKIEWICZ & al, 1987, CHENG, 1988, CESCOTTO & al, 1989, HABRAKEN & CESCOTTO, 1990, ZIENKIEWICZ & al, 1990).

Quand on simule les problèmes de bifurcation en mode de déformation localisée par la méthode des éléments finis, les éléments où les déformations sont localisées se déforment beaucoup plus que les autres. Si on poursuit la sollicitation dans le même sens, il arrive que la distorsion des éléments devienne tellement importante qu'elle met en cause la validité du résultat final. Quand cette distorsion dépasse un certain seuil, elle devient

inadmissible et il est alors nécessaire de remailler le domaine - ou au moins la zone où la distorsion est devenue inadmissible - pour que le nouveau maillage *s'adapte* mieux à la forte variation des déformations.

Cette méthode est surtout indiquée pour des problèmes à géométries très irrégulières susceptibles de présenter des zones de forte concentration de contraintes (figure 1.9).

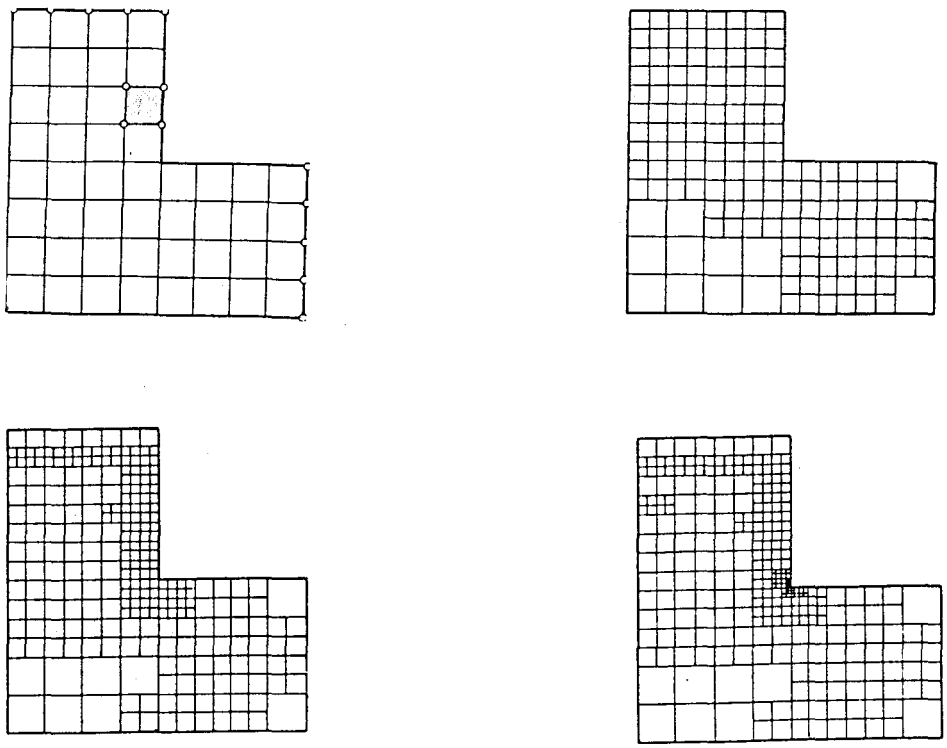


Figure 1.9: Shématisation d'un h-raffinement.

La technique numérique du maillage adaptatif se résume donc en trois principales opérations (ZIENKIEWICK & ZHU, 1987):

- Définir un seuil de distorsion au delà duquel on donnera l'ordre de remaillage.

- Choisir une méthode de raffinement de maillage.

- Transférer judicieusement les informations de l'ancien système de points d'intégration vers le nouveau (voir la remarque du paragraphe précèdent).

Il existe deux principales méthodes de raffinement de maillage:

1 - Le h - raffinement: on remplace un élément dont la distorsion a dépassé le seuil par plusieurs éléments de taille plus petite de façon à ce que la distorsion sur ces nouveaux éléments reste admissible.

2 - Le p - raffinement: la distorsion est fonction de l'interpolation initiale des éléments. Si on augmente l'ordre d'interpolation, on diminue la distorsion finale.

L'estimation des distorsions est basée sur le calcul d'erreurs. La méthode des éléments finis donne la solution approchée d'un problème; cette solution est entachée d'erreurs qui proviennent soit de la discrétisation spatiale, soit de la méthode de résolution.

1.3.2.4 Eléments d'interface (CHARLIER, 1987, CHARLIER & HABRAKEN, 1990, CHALIER, 1992).

Nous avons souligné dans le paragraphe précèdent que la forte distorsion des éléments situés dans une bande de localisation altérait la performance des calculs. D'où la nécessité d'un raffinement de maillage. Par hypothèse, c'est de ces déformations élevées que surviendra la rupture. Or, si on suit l'évolution d'une bande de son initialisation jusqu'à la rupture, il peut être nécessaire de procéder à plusieurs raffinements. Ces raffinements exigent l'arrêt de la simulation, le déclenchement du (re)-mailleur automatique, le transfert des données et la reprise de la simulation. Ce qui est lourd à traiter et coûteux en temps de calcul.

Pour éviter ces raffinements successifs, CHARLIER (1992) a proposé la technique des éléments d'interface dont voici le principe (figure 1.10):

Si on fait l'hypothèse que la largeur de la bande est infiniment petite - elle tend vers zéro - on peut supposer que la localisation est située à l'interface de deux éléments. On place alors à cette interface, un élément linéaire pour reprendre les distorsions qui seraient inadmissibles aux éléments adjacents. On peut ainsi modéliser l'évolution de la bande jusqu'à la rupture sans que les éléments subissent des distorsions inadmissibles qui exigeraient un raffinement de maillage.

Dans cette technique, c'est l'hypothèse de largeur de bande faible tendant vers zéro qui paraît forte. Car expérimentalement dans la plupart des problèmes de localisation, les largeurs des bandes sont finies et valent plusieurs fois une dimension caractéristique du matériau. Dans la modélisation par éléments finis, la bande doit recouvrir au moins une maille entière.

1.3.3 Méthodes prédictives.

Quand on modélise les problèmes de bifurcation en mode localisé par les éléments finis, on constate que la largeur de la bande dépend du maillage. En général, la largeur de la bande coïncide avec celle du plus petit élément. Si on utilise des éléments de plus en plus fins, à la limite on aura une bande de largeur nulle. C'est ce qu'on appelle la sensibilité de la solution - en terme de largeur de bande de localisation - au maillage. D'après BELYTSCHKO & al (1986), ce phénomène est plus flagrant pour les matériaux à écrouissage négatif - radoucissants - pour lesquels la contrainte diminue quand la déformation irréversible augmente rapidement.

Même quand on ne s'intéresse pas à l'aspect localisation - recherche de champs de contrainte et de déformation pour un problème aux limites donné - la sensibilité de la solution au maillage peut exister. Il faut alors trouver le maillage pour lequel la solution se stabilise, c'est - à - dire un maillage à partir duquel, en raffinant, l'erreur relative sur la solution soit acceptable.

Pour le problème particulier de la localisation, si on admet que la bande de localisation est le lieu d'amorçage de la rupture, la remarque sur la sensibilité de la largeur de bande au maillage implique que la matière va se séparer suivant une bande de largeur nulle. Or on sait que la densité de l'énergie de dissipation par unité de surface pour les problèmes plans - ou par unité de volume pour les problèmes tridimensionnels - est finie. L'intégrale de cette densité sur une bande de largeur nulle pour les problèmes plans - ou sur une surface d'épaisseur nulle pour les problèmes tridimensionnels - est donc nulle. Ce qui veut dire que la matière va se séparer sans dissipation d'énergie ou que la séparation de la matière ne consomme pas de l'énergie. Ceci est physiquement incohérent et inadmissible (BELYTSCHKO & al, 1986, PASTOR & al, 1992).

Cette inconsistance numérique est une conséquence de la structure des équations d'équilibre incrémental qui régissent le problème. Plusieurs auteurs ont montré que c'est l'inexistence d'une longueur caractéristique dans les équations constitutives qui en est la cause principale. Les méthodes qui sont décrites ci-dessous ont pour objet de résoudre ces problèmes et de prédire tous les paramètres de localisation de façon *naturelle*. Les deux premières ont des fondements physiques et introduisent une longueur caractéristique dans les équations de façon explicite alors que les deux dernières ont des fondements plus mathématiques et introduisent une longueur caractéristique dans les équations de façon implicite.

1.3.3.1 Approche par la mécanique non-locale du milieu.

D'après de nombreux auteurs (BAZANT & al, 1984, BAZANT & BELYTSCHKO, 1985, PIJAUDIER-CABOT & al, 1986, BELYTSCHKO & al, 1986, PASTOR & al, 1992), la mécanique des milieux continus classique ne permet pas de bien rendre compte du radoucissement pour lequel les problèmes numériques sont les plus cruciaux. Dans le cadre de la mécanique des milieux continus classique - *local continuum* - on définit les grandeurs physiques du problème en un point (contrainte, déformations, et variables internes). Si on admet que le radoucissement est une conséquence macroscopique de l'existence d'hétérogénéités (vides, micro-fissures), il peut avoir lieu en un point matériel dans la théorie classique. Plus précisément, sur les *points faibles* qui coïncident avec ces défauts, on aura des déformations importantes à contraintes modérées. La théorie classique prévoit donc des zones de localisation de la dimension du plus petit défaut, c'est - à - dire de la dimension d'un point matériel qui est nulle. L'hypothèse dans la théorie *non-locale* est la suivante:

Bien que la contrainte sur les points faibles baisse quand la déformation augmente, la contrainte sur un point *sain* entre deux défauts peut continuer à croître. Les grandeurs physiques qui rendent compte de l'état du solide en un point ne dépendent pas uniquement du point mais aussi de son voisinage immédiat. La valeur de ces grandeurs en ce point doit donc être une moyenne sur un volume élémentaire représentatif.

On définit ainsi une longueur caractéristique qui est en quelque sorte la taille minimum d'un défaut. En cas de localisation, la largeur de la bande sera au moins égale à cette longueur caractéristique. Ainsi la rupture ne pourra s'opérer qu'à énergie de dissipation finie. Par exemple, BAZANT & al (1984) définissent une déformation moyenne en un point x en fonction de cette longueur l par (figure 1.11):

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{l}\left(u\left(x + \frac{l}{2} \right) - u\left(x - \frac{l}{2} \right) \right)$$

où u désigne le vecteur déplacement. La longueur caractéristique l est ici un paramètre du matériau qu'on peut déterminer à partir de ses propriétés physiques (densité, porosité, indice des vides, microfissuration...). Il faut cependant souligner que la détermination expérimentale de cette longueur caractéristique est encore délicate.

1.3.3.2 Milieu de COSSERAT (COSSERAT, 1909, MULHAUS, 1986, PAPANASTASIOU & VARDOULAKIS, 1992)

La différence entre cette théorie et la mécanique des milieux continus classique est qu'ici on admet la rotation d'un point matériel autour de lui-même. Ceci se justifie surtout quand il s'agit de décrire la cinématique des milieux granulaires et quand on s'intéresse aux grands déplacements. Dans cette théorie, la nullité de la somme des moments - des contraintes de cisaillement sur les facettes en un point - qui assure la symétrie du tenseur des contraintes en mécanique des milieux continus classique n'est plus admise. Le tenseur des contraintes peut être dissymétrique.

Le déplacement d'un point est défini sur la figure (1.12) par (PAPANASTASIOU & al, 1992):

$$u^t = \{u_1, u_2, \omega^c\}$$

où ω^c représente la rotation propre du point P. Les déformations, les contraintes et les tractions s'écrivent matriciellement:

$$\varepsilon^t = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{21}, \kappa_1 R, \kappa_2 R\}$$
$$\sigma^t = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, m_1 / R, m_2 / R\}$$
$$t^t = \{t_1, t_2, m\}$$

avec:

$$\varepsilon_{11} = u_{1,1} \quad ; \quad \varepsilon_{22} = u_{2,2}$$
$$\varepsilon_{12} = u_{1,2} + \omega^c \quad ; \quad \varepsilon_{21} = u_{2,1} - \omega^c$$
$$\kappa_1 = \omega^c{}_{,1} \quad ; \quad \kappa_2 = \omega^c{}_{,2}$$

où R est une longueur interne. Les équations d'équilibre s'écrivent:

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad ; \quad m_{k,k} + \sigma_{21} - \sigma_{12} = 0 \quad \text{dans le volume}$$
$$\sigma_{ij} n_j = t_i \quad ; \quad m_i n_i = m \quad \text{sur un élément de frontière}$$

où le terme m est le couple (moment) des contraintes.

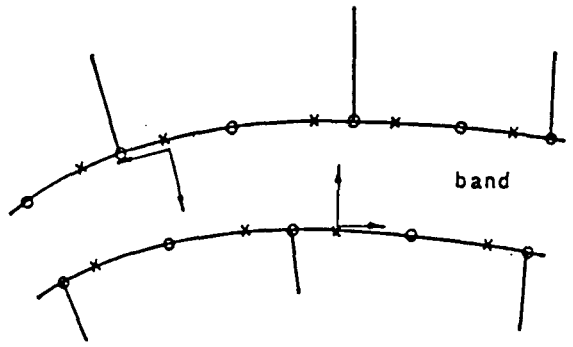


Figure 1.10: Eléments d'interface avec leurs repères locaux.

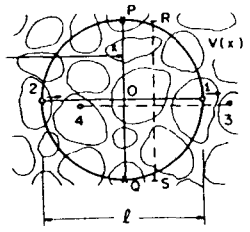
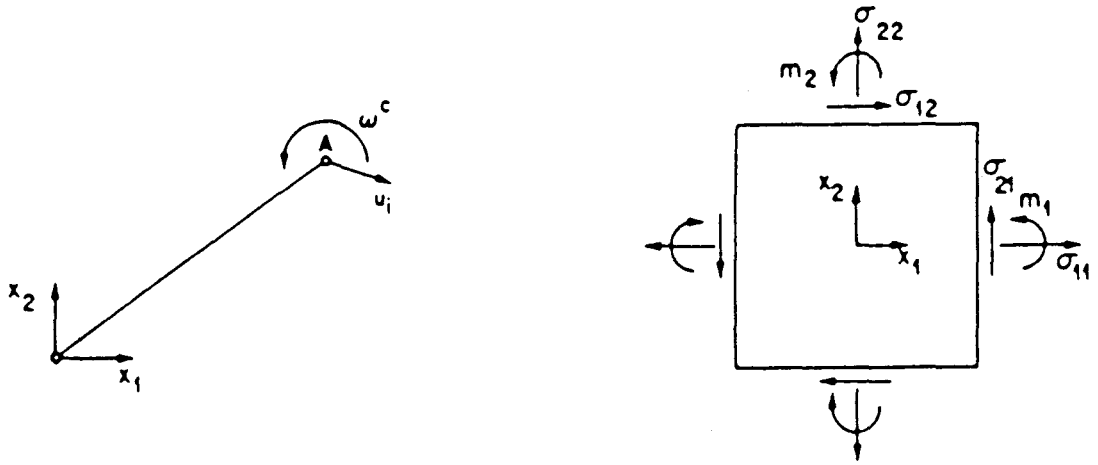


Figure 1.11: Théorie du non local. Volume élémentaire v(x) de *dimension* l.



a) Champs de déplacement et de rotation. b) Contraintes et moments des contraintes.

Figure 1.12: Théorie de Cosserat.

PAPANASTASIOU & VARDOULAKIS (1992) ont montré qu'avec cette formulation, ils arrivent à lever l'indétermination de la sensibilité au maillage de la largeur de bande et que la rupture par localisation consomme une quantité finie d'énergie de dissipation.

1.3.3.3 Théorie du second gradient (PETRYK & al, 1985, TRIANTAFYLLIDIS & AIFANTIS, 1986, CHARALAMBAKIS & al, 1991).

Dans cette théorie, on propose une procédure unifiée de traitement de la pré-localisation et de la post-localisation par ajout d'un terme du second gradient dans l'expression de la densité d'énergie de déformation par unité de volume dans le cadre *du local continuum.*

Si on appelle F le gradient d'une transformation, cette densité d'énergie W est telle que:

$$D_{ijkl} = \frac{\partial^2 W}{\partial F_{ij} \partial F_{kl}}$$

où D_{ijkl} est le module tangent de comportement.

Dans le cadre d'une analyse statique, la condition de bifurcation en mode localisé est donnée par la l'équation (1.16 b). Or cette équation est aussi la condition de perte d'ellipticité des équations d'équilibre (BENALLAL & al, 1988). Quand cette condition est réalisée, le problème devient mal posé.

Pour une analyse en dynamique, la localisation correspond à un passage des équations de mouvement d'un régime hyperbolique à un régime elliptique. Au delà de cet instant, le calcul devrait être arrêté.

L'ajout du terme de second gradient permet de garantir l'ellipticité des équations d'équilibre en statique - ou l'hyperbolicité des équations du mouvement en dynamique - tout au long du processus de déformation du système de façon à s'affranchir de tous les problèmes numériques énumérés jusque là dans la prédiction des caractéristiques de localisation.

TRIANTAFYLLIDIS & AIFANTIS (1986) ont proposé une modification de l'expression de la densité d'énergie de la façon suivante:

$$\overline{W}(F) = W(F) + kH(F,G)$$

où k est un scalaire strictement positif, G le gradient de F et H une fonction homogène et quadratique en G. Ainsi G est le gradient d'un gradient, d'où le terme de gradient supérieur ou gradient d'ordre deux. Ces auteurs en déduisent une longueur caractéristique de localisation des déformations l_c qui est proportionnelle à la racine carrée de k. Ainsi, on revient au cas de la densité non modifiée en faisant k nul. A noter que dans ce cas, l_c ne découle plus des propriétés physiques comme c'est le cas dans les méthodes du *non-local* ou dans la théorie du milieu de COSSERAT, mais dépend plutôt de k et de la forme postulée de la fonction H. Une application de cette théorie a été récemment effectuée par DESOYER & al (1994) dans le cadre de la mécanique de l'endommagement.

1.3.3.4 Méthode de régularisation viscoplastique.

C'est cette méthode qui a été utilisée dans ce travail comme procédure unifiée de traitement de la pré-localisation et de la post-localisation. Son principe sera exposé en détail au début du chapitre 3 après une justification de ce choix. Mais on peut déjà retenir que cette méthode est basée sur une analyse dynamique de la localisation des déformations. Elle combine d'une part la relaxation dynamique des équations du mouvement et d'autre part l'introduction d'une viscosité fictive dans la loi élastoplastique sous forme d'un temps de relaxation. On arrive ainsi à mettre implicitement en évidence une longueur caractéristique qui lève l'indétermination de la non-objectivité. Cette méthode a surtout l'avantage d'être simple à implementer numériquement et elle peut s'appliquer à une large gamme de modèles.

Chapitre 2

DETECTION DE LA BIFURCATION DANS QUELQUES MODELES ELASTOPLASTIQUES.

2.1 INTRODUCTION.

L'objectif de ce chapitre est de présenter une implémentation numérique du critère de RICE, son application dans différentes situations, les informations qu'on peut en tirer et de montrer les limites de cette démarche.

Le critère de RICE est un critère local, c'est - à - dire que son évaluation se fait en chaque point. Dans ce chapitre, l'intégration des lois élastoplastiques est donc faite en champ homogène. L'utilisation des éléments finis n'est pas nécessaire dans ce chapitre. Les essais simulés sont des essais de compression triaxiale. Toutes les simulations dans ce chapitre sont réalisées en déformation axiale imposée et la résolution des équations d'équilibre est faite par la méthode de Newton - Raphson modifiée.

2.2 IMPLEMENTATION NUMERIQUE DU CRITERE DE RICE.

2.2.1 Intégration de lois élastoplastiques.

Les algorithmes d'intégration de modèles sont des sous-programmes indépendants même dans les codes de calcul par éléments finis. Ils servent à déterminer en chaque point l'histoire de la contrainte pour une histoire de déformation donnée. Dans tous les cas, on rentre donc dans ces sous-programmes avec ε, tenseur des déformations au point considéré. Pour les lois de comportement non linéaires, les équations constitutives sont en général écrites sous forme incrémentale. Au lieu de ε, on donne plutôt l'incrément de déformation $\Delta\varepsilon^i$ et on cherche le couple $\left(\Delta\sigma^i, \Delta\gamma^i\right)$ induit par $\Delta\varepsilon^i$ qui soit à la fois statiquement admissible - qui vérifie les équations d'équilibre et les conditions aux limites - et rhéologiquement admissible - qui vérifie la loi rhéologique. Le terme $\Delta\sigma^i$ désigne l'incrément de contrainte à l'incrément i et $\Delta\gamma^i$ l'incrément de variable interne qui permet de décrire l'irreversibilité (variable d'écrouissage).

Pour ce faire, on procède de la façon suivante:

a) - On calcule l'incrément de contrainte statiquement admissible $\Delta\sigma^i$ par la loi de HOOKE (élasticité linéaire):

$$\Delta\sigma^i = C:\Delta\varepsilon^i \tag{2.1}$$

où C est le tenseur d'ordre quatre des coefficients d'élasticité.

Remarque: Pour les calculs numériques, on travaille en général avec la représentation matricielle des tenseurs. Les tenseurs de contrainte ou de déformation d'ordre deux deviennent donc des vecteurs et les tenseurs d'ordre quatre des matrices. L'équation (2.1) s'écrit alors simplement:

$$\Delta\sigma^i = C\Delta\varepsilon^i$$

La contrainte à l'incrément i est calculé en ajoutant à la contrainte à l'incrément précèdent i - 1 l'incrément de contrainte $\Delta\sigma^i$ ainsi calculé. Mais à ce niveau, il n'est pas sûr que cette contrainte soit rhéologiquement admissible. C'est pourquoi on l'appelle en général contrainte d'essai (*trial stress* dans la terminologie anglo-saxonne, LORET & al, 1986). On écrit donc:

$$\sigma^{iT} = \sigma^{i-1} + \Delta\sigma^i \qquad \text{(T pour } \textit{trial}\text{)} \tag{2.2}$$

b) - A chaque étape de l'évolution du système, le couple (σ,γ) doit vérifier la loi rhéologique, en particulier l'équation de la surface de charge $F(\sigma,\gamma)\leq 0$.

- Si $F\left(\sigma^{iT},\gamma^{i-1}\right) \prec 0$, cela veut dire que $\left(\sigma^{iT},\gamma^{i-1}\right)$ est le bon état final à l'incrément i. On passe donc à l'incrément suivant. La variable d'écrouissage ne change pas de valeur.

- Si $F\left(\sigma^{iT},\gamma^{i-1}\right) = 0$, l'état caractérisé par le couple $\left(\sigma^{iT},\gamma^{i-1}\right)$ est sur la surface de charge et génère des déformations plastiques. La variable d'écrouissage évolue et la contrainte σ^{iT} doit être corrigée. La bonne contrainte à l'incrément i est alors donnée par:

$$\sigma^i = \sigma^{i-1} + \Delta\sigma^i_{RH} \qquad \text{(RH pour rhéologie)} \tag{2.3}$$

avec:

$$\Delta\sigma^{i}_{RH} = C\left(\Delta\varepsilon^{i} - \Delta\varepsilon^{i}_{pl}\right) \tag{2.4}$$

où $\Delta\varepsilon^{i}_{pl}$ est l'incrément de déformation plastique à l'incrément i donné par la loi d'écoulement. Cette loi exprime que la déformation plastique est portée (colinéaire) par le gradient d'un potentiel Q dans l'espace des contraintes. On écrit:

$$\Delta\varepsilon^{i}_{pl} = \lambda \left.\frac{\partial Q}{\partial \sigma}\right|_{(\sigma^{iT},\, \gamma^{i-1})} \tag{2.5}$$

où cette notation signifie que la dérivation se fait au point $\left(\sigma^{iT}, \gamma^{i-1}\right)$. Quand le potentiel Q coïncide avec la fonction de charge F, on dit que la loi de comportement est associée (figure 2.1 a). Sinon, elle est dite non-associée (figure 2.1 b). Le coefficient λ, appelé multiplicateur de plasticité, est donné par la relation de consistance. Cette relation exprime le fait que la contrainte reste sur la surface de charge. L'équation (2.5) n'a de sens que si le multiplicateur de plasticité est strictement positif.

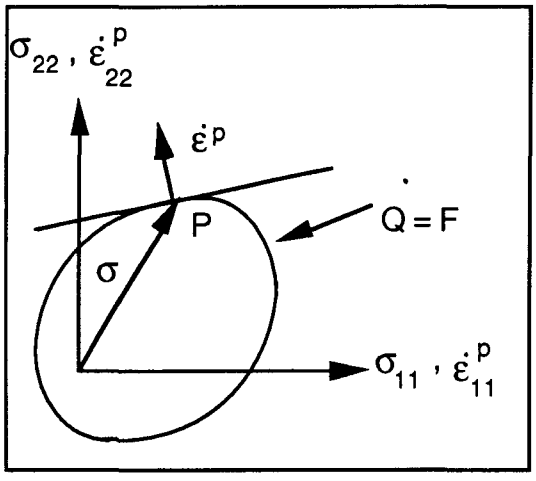


Figure 2.1 a: Modèle associé.

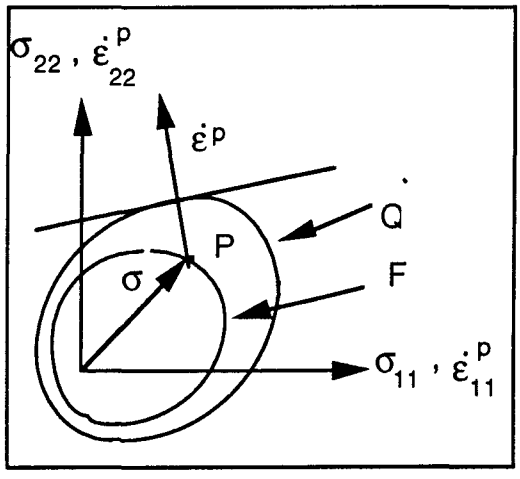


Figure 2.1 b: Modèle non associé

Enfin, l'incrément de la variable d'écrouissage est donné par la règle d'écrouissage:

$$\Delta\gamma^i = -\lambda \frac{h}{\left.\frac{\partial F}{\partial \gamma}\right|_{\gamma^{i-1}}} \tag{2.6}$$

où h désigne le module d'écrouissage. La valeur de la variable d'écrouissage à l'incrément i est donc:

$$\gamma^i = \gamma^{i-1} + \Delta\gamma^i \tag{2.7}$$

En fin de compte, l'algorithme d'intégration des lois de comportement élastoplastiques retenu est basée sur la méthode classique de la contrainte initiale (OWEN & HINTON, 1987) et suit le schéma suivant:

[1] Données: $\sigma^{i-1}, \gamma^{i-1}, \Delta\varepsilon^i$

[2] Calculer: $\sigma^i = \sigma^{i-1} + C\Delta\varepsilon^i$ (trial stress) (C: matrice d'élasticité)

[3] Evaluer: $F(\sigma^i, \gamma^{i-1})$: valeur courante de la fonction de charge

[3.1] Si $F(\sigma^i, \gamma^{i-1}) \le 0$ retenir (σ^i, γ^{i-1}) comme bon état final. sortir

[3.2] Si $F(\sigma^i, \gamma^{i-1}) > 0$ alors:

[3.2.1] Calculer λ par la relation de consistance

[3.2.2] Calculer $\Delta\varepsilon^i_{pl} = \lambda \left.\frac{\partial Q}{\partial \sigma}\right|_i$ (loi d'écoulement: Q est le potentiel)

[3.2.3] Calculer $\Delta\gamma^i$ et $\gamma^i = \gamma^{i-1} + \Delta\gamma^i$

[3.2.4] Corriger la contrainte: $\sigma^i = \sigma^{i-1} + C(\Delta\varepsilon^i - \Delta\varepsilon^i_{pl})$

[3.2.5] Evaluer: $F(\sigma^i, \gamma^i)$

Si $F(\sigma^i, \gamma^i) \le 0$ retenir (σ^i, γ^i). sortir

Si $F(\sigma^i, \gamma^i) > 0$ alors faire une correction plus fine de la contrainte:

- $\Delta\varepsilon^i_{pl} = \Delta\varepsilon^i_{pl} + \delta\varepsilon_{pl}$
- $\delta\varepsilon_{pl} = \delta\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma}$
- $\gamma^i = \gamma^i + \delta\gamma$
- Retour à [3.2.4]

Tableau 2.1: Schéma d'intégration d'un modèle élastoplastique

Remarques:

1 - La réponse $\Delta\varepsilon$ de l'incrément de déformation à un incrément de sollicitation est donnée de façon itérative en cumulant sur cet incrément les déformations correspondant aux itérations successives. Le schéma ci-dessus correspond donc en fait à une itération de chaque incrément.

2 - Physiquement, une valeur strictement positive de la surface de charge ($F > 0$) n'a pas de sens. L'état de contrainte ne doit jamais sortir de la surface de charge, du moins pour les modèles sans viscosité. Mais numériquement, la condition $F < 0$ équivaut à la condition $F < k$, avec $k > 0$ mais petit. Si F dépasse k, on considère que la surface est atteinte. L'état de contrainte est supposée ramenée à l'intérieur de la surface si la valeur de F est inférieure à k.

2.2.2 Evaluation du tenseur élastoplastique de comportement.

Pour un matériau élastoplastique à une surface de charge, désignons par γ l'unique variable interne définissant l'écrouissage. Pour simplifier, on note les incréments des grandeurs par un point au dessus et on supprime les exposants i correspond à l'incrément. La condition de consistance est donnée par:

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} + \frac{\partial F}{\partial \gamma}\dot{\gamma} = 0 \tag{2.8}$$

Posons:

$$\dot{\gamma} = -V\lambda \tag{2.9}$$

avec $V = \dfrac{h}{\dfrac{\partial F}{\partial \gamma}}$ d'après l'équation (2.6). En tenant compte de l'équation (2.5) et de la loi de comportement:

$$\dot{\sigma} = D : \dot{\varepsilon} = C : \left(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_{pl}\right) \tag{2.10}$$

où D est le tenseur de comportement dont on cherche l'expression, l'équation (2.8) devient:

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma}:C:\left(\dot{\varepsilon}-\dot{\varepsilon}_{pl}\right)+\frac{\partial F}{\partial \gamma}\left(-V\lambda\right)=0$$

On en déduit:

$$\lambda=\frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma}:C:\dot{\varepsilon}}{\frac{\partial F}{\partial \sigma}:C:\frac{\partial Q}{\partial \sigma}+V\frac{\partial F}{\partial \gamma}}=\frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma}:C:\dot{\varepsilon}}{H} \tag{2.11}$$

où H est le module de plasticité généralisé. En réinjectant λ dans l'équation (2.10), on met en facteur $\dot{\varepsilon}$. On identifie alors le tenseur D comme:

$$D=C-\frac{\left(C:\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right)\otimes\left(\frac{\partial Q}{\partial \sigma}:C\right)}{\frac{\partial F}{\partial \sigma}:C:\frac{\partial Q}{\partial \sigma}+V\frac{\partial F}{\partial \gamma}}=C-\frac{\left(C:\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right)\otimes\left(\frac{\partial Q}{\partial \sigma}:C\right)}{H} \tag{2.12}$$

Notons que si la loi de comportement était écrite avec une dérivée objective, le tenseur D serait remplacé D* tel que (pour la dérivée type Jaumann par exemple):

$$D^{*}_{ijkl}=D_{ijkl}+\frac{\left(\sigma_{ik}\delta_{jl}+\sigma_{kj}\delta_{il}-\sigma_{il}\delta_{kj}-\sigma_{lj}\delta_{ik}\right)}{2} \tag{2.13}$$

de sorte que les termes corrotationnels n'ont d'influence que sur les modules de cisaillement et on écrit par exemple:

$$D^{*}_{1212}=D_{1212}+\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2} \tag{2.14}$$

Si $\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}$ est négligeable devant D_{1212}, les dérivées simples temporelles et les dérivées objectives donnent le même résultat. Nous avons déjà évoqué l'importance

accordée dans la littérature au rôle de ces modules de cisaillement. Dans tout ce qui suit, les conditions du type ci-dessus sont vérifiées. Donc nous ne tenons pas compte des termes corrotationnels dans le calcul de D. Lors de la charge plastique ($F = 0$ et $\lambda > 0$), on évalue le tenseur D.

Voyons à présent comment s'insère dans ce schéma l'implémentation du critère de RICE.

2.2.3 Module de détection de la bifurcation.

2.2.3.1 Orientation de la bande.

Le champ de contrainte dans un essai triaxial est considéré comme homogène, le mode de déformation axisymétrique. En coupant l'échantillon selon une génératrice, on se place dans un plan et tous les plans sont équivalents. Les paramètres de bifurcation identifiés dans un plan quelconque constituent la *trace* du mode de déformation localisée dans ce plan. On retrouve la cinématique globale en générant l'échantillon à partir du plan. Cet artifice nous permet de ramener l'analyse de la localisation dans un essai triaxial qui est en toute rigueur un problème tridimensionnel à un problème bidimensionnel (figure 2.2).

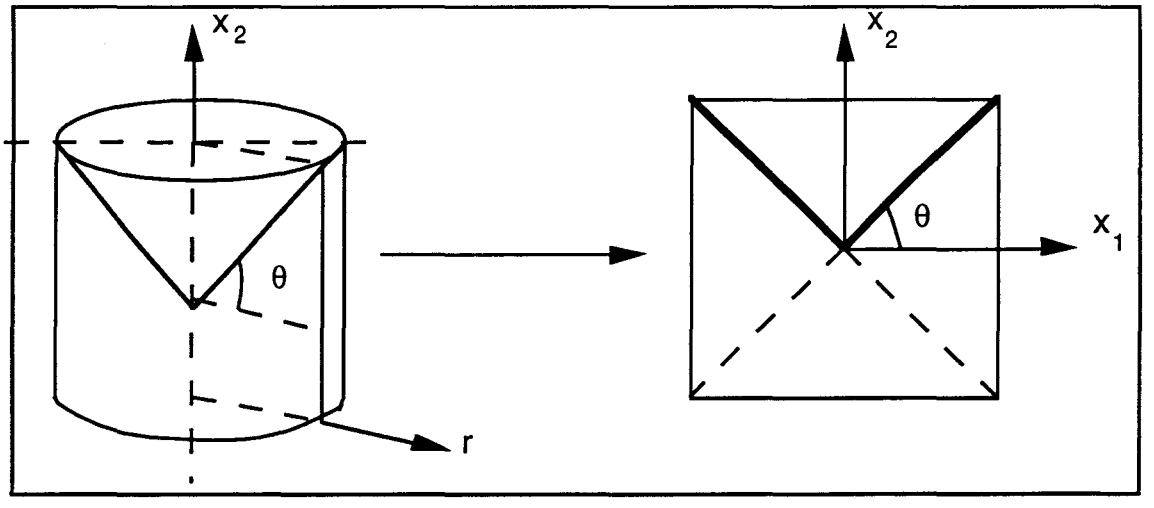


Figure 2.2: Simplification de l'essai triaxial en problème 2D.

Dans le plan, un vecteur $\vec{n}$ (normale potentielle à la bande) est défini par ses deux composantes n_1 et n_2. Pour le tenseur acoustique défini à l'équation (1.13), seules les valeurs 1 et 2 sont retenues pour les indices. D'après les développements de LEROY & ORTIZ (1987), on peut écrire:

$$B_{jk}(\vec{n}) = n_1 D_{1jk1} n_1 + n_1 D_{1jk2} n_2 + n_2 D_{2jk1} n_1 + n_2 D_{2jk2} n_2 \tag{2.15}$$

Le critère de RICE (équation 1.16 b) s'écrit alors:

$$\det(B(\vec{n})) = B_{11} B_{22} - B_{12} B_{21} = 0 \tag{2.16}$$

ou sous une autre forme:

$$\det(B(\vec{n})) = a_0 n_1^4 + a_1 n_1^3 n_2 + a_2 n_1^2 n_2^2 + a_3 n_1 n_2^3 + a_4 n_2^4 = 0 \tag{2.17}$$

où les coefficients a_i (i = 0, 1, 2, 3, 4) sont fonction des composantes du tenseur D par les formules ci-après:

$$\begin{cases} a_0 = D_{1111} D_{1212} - D_{1112} D_{1211} \\ a_1 = D_{1111} D_{1222} + D_{1111} D_{2212} - D_{1112} D_{2211} - D_{1122} D_{1211} \\ a_2 = D_{1111} D_{2222} + D_{1112} D_{1222} + D_{1211} D_{2212} - D_{1122} D_{1212} \\ \qquad - D_{1122} D_{2211} - D_{1212} D_{2211} \\ a_3 = D_{1112} D_{2222} + D_{1211} D_{2222} - D_{1122} D_{2212} - D_{1222} D_{2211} \\ a_4 = D_{1212} D_{2222} - D_{2212} D_{1222} \end{cases} \tag{2.18}$$

En posant (figure 1.6):

$$x = \cot g(\theta) = \frac{n_1}{n_2} \tag{2.19}$$

l'équation (2.17) devient:

$$a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0 \tag{2.20}$$

Le critère de RICE est atteint si l'équation (2.20) admet des racines réelles. Dans ce cas, l'angle θ est donné par la valeur des racines.

La recherche de solutions au critère de localisation peut aussi être regardé comme un problème de minimisation de la grandeur $f(\vec{n})=\det(B(\vec{n}))$. Si on appelle D° l'équivalent du tenseur D avant tout chargement et B° le tenseur acoustique correspondant, on peut schématiser sous la forme suivante (figures 2.3 a et 2.3 b):

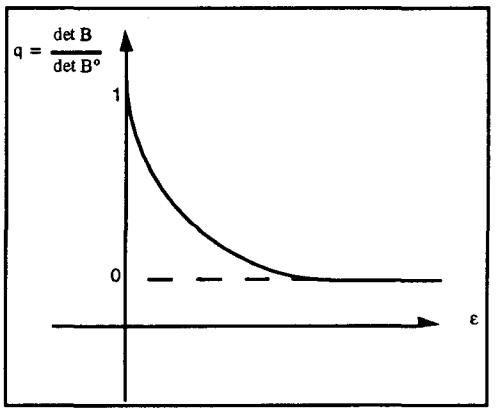


Figure 2.3 a: Variation de (det B) en fonction de déformation moyenne.

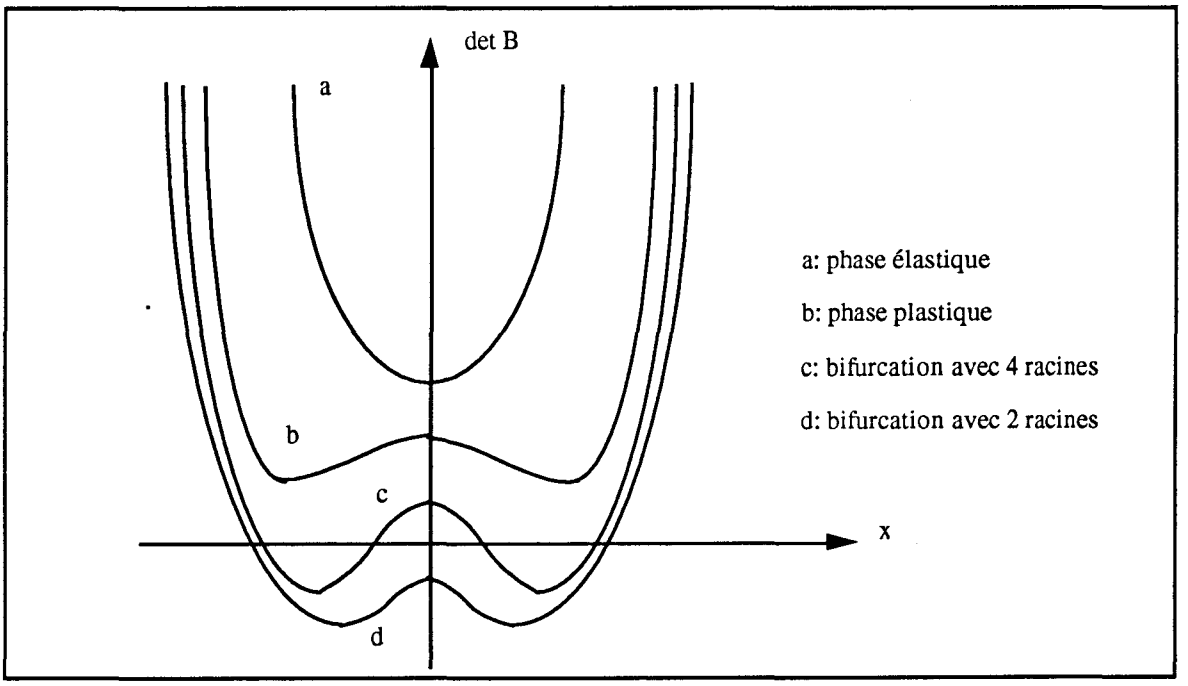


Figure 2.3 b Variation de (det B) en fonction du niveau de chargement.

2.2.3.2 Amplitude de la discontinuité.

Le vecteur $\vec{g}$ qui caractérise l'amplitude de la discontinuité est donnée par l'équation (1.16 a). En explicitant cette équation, on obtient le système:

$$\begin{cases} B_{11}(\vec{n})g_1 + B_{12}(\vec{n})g_2 = 0 \\ B_{21}(\vec{n})g_1 + B_{22}(\vec{n})g_2 = 0 \end{cases} \tag{2.21}$$

A l'instant de la bifurcation, le vecteur $\vec{n}$ définissant la normale au plan potentiel de localisation est tel que $\det(B(\vec{n}))$ soit nul. A cet instant, le vecteur $\vec{g}$ est donc donné par l'une quelconque des équations (2.21). Si on désigne par χ l'angle qui définit $\vec{g}$ (figure 1.6), on pose:

$$\cot g(\chi) = \frac{g_1}{g_2} \tag{2.22}$$

A partir de la première équation (2.21) par exemple, on tire:

$$\cot g(\chi) = -\frac{B_{12}(\vec{n})}{B_{11}(\vec{n})} = -\frac{B_{12}(\theta)}{B_{11}(\theta)} \tag{2.23}$$

où θ défini par l'équation (2.19) est déjà connu par la résolution de l'équation (2.20). Connaissant θ et χ, on en déduit l'angle:

$$\psi = (\vec{n}, \vec{g}) = |\theta| + |\chi| \tag{2.24}$$

Ce qui achève la caractérisation de la cinématique du mode localisé.

Remarques:

1 - La résolution des équations polynomiales est effectuée par la méthode de BAIRSTOW.

2 - Pour les simulations en compression triaxiale, la contrainte de cisaillement σ_{12} est nulle. Pour la catégorie de lois de comportement que nous avons considérée, les termes $\frac{\partial F}{\partial \sigma_{12}}$ et $\frac{\partial Q}{\partial \sigma_{12}}$ sont également nuls (équation 2.12). Comme conséquence, les coefficients du tenseur D où trois des indices sont égaux et différents du quatrième s'annulent. Exemple:

$$D_{1112} = C_{1112} - \frac{\left(C_{11mn}\frac{\partial F}{\partial \sigma_{mn}}\right)\left(\frac{\partial Q}{\partial \sigma_{rs}}C_{rs12}\right)}{H}$$

Or:

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma_{rs}}C_{rs12} = \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{11}}C_{1112} + \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{12}}C_{1212} + \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{21}}C_{2112} + \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{22}}C_{2212}$$

Puisque les coefficients élastiques C_{1112} et C_{2212} sont nuls, D_{1112} l'est aussi. On peut faire le même calcul pour les termes D_{1222} , D_{2212} et D_{1211}. Dans ces conditions, le critère de RICE (équation 2.20) se simplifie et devient une équation biquadratique ($a_1 = a_3 = 0$). Les quatre modes potentiels de localisation sont donc deux à deux symétriques ou conjugués ($\theta = \pm\theta_1$ et $\theta = \pm\theta_2$). Certains auteurs (SULEM & al, 1993) ont noté le fait que dans ce cadre, on ne pouvait pas reproduire numériquement les modes de déformation localisée non-symétriques qu'on rencontre dans les expériences. C'est l'une des raisons notamment pour lesquelles ces auteurs modifient le cadre classique de la plasticité (dite coaxiale) pour introduire les notions de coaxialité non-linéaire ou de non-coaxialité (le *vertex* des anglos saxons) sur lesquelles nous reviendrons en détail au paragraphe (2.5.3). On montre que si le tenseur de comportement est établi dans ce nouveau cadre, l'équation (2.20) redevient *pleine* (complète) et les modes de localisation non-symétriques peuvent être reproduits.

3 - Par un calcul similaire à celui de la remarque précédente, on montre que pour les simulations d'essais triaxiaux, les modules de cisaillement gardent leurs valeurs élastiques tout au long du processus de simulation: ($D_{1212} = C_{1212}$ par exemple).

Or il est de plus en plus admis que ces modules doivent baisser. Plusieurs auteurs (RUDNICKI & RICE, 1975, KOLYMBAS, 1981) ont noté que ces valeurs élevées des modules de cisaillement données par la plasticité classique inhibe le critère de localisation surtout pour les matériaux dilatants. Cet aspect, comme on le verra au chapitre 4 joue un grand rôle dans les problèmes aux limites où σ_{12} n'est plus nul partout.

4 - Le tenseur élastoplastique de comportement D possède les symétries mineures ($D_{ijkl} = D_{jikl}$) et les symétries majeures ($D_{ijkl} = D_{klij}$) pour le cas d'une loi de

comportement associée. Pour un modèle non associé, D ne possède que les symétries mineures. La non vérification de la symétrie majeure de D joue en faveur du critère de RICE comme on le verra dans les paragraphes suivants.

5 - Quand l'équation (2.20) est réduite à sa forme polynomiale biquadratique, le critère est atteint pour:

$$a_2 \prec 0 \quad ; \quad a_2^2 - 4 a_0 a_4 \geq 0$$

en supposant que a_0 et a_4 restent toujours positifs, ce qui est en général le cas.

6 - Si l'angle ψ de l'équation (2.24) est égal à 90°, la cinématique de localisation correspond au cisaillement. S'il est égal à 0°, la cinématique correspond à une *ouverture*. S'il est entre ces deux valeurs extrêmes, la cinématique de localisation est une combinaison des deux modes (ORTIZ & al, 1987).

Dans les paragraphes suivants, le critère de localisation est détecté dans trois exemples de matériaux. Pour les deux premiers, les résultats expérimentaux relatifs à la localisation ne sont pas disponibles.

Remarques générales sur la présentation des résultats de bifurcation.

1) Dans les tableaux qui représentent l'évolution des modules plastiques et des coefficients a_i du critère de RICE (équation 2.20), la colonne IIC désigne les numéros d'incréments. Pour les cas où il y a bifurcation, les résultats pour 3 incréments sont présentés: l'incrément juste avant la bifurcation, celui où la bifurcation apparaît (souligné) et le dernier incrément. Sinon, seuls les résultats pour 2 incréments sont présentés: un incrément quelconque et l'incrément final.

2) Dans les figures représentant les contraintes en fonction des déformations, en ordonnée sont portés les déviateurs de contrainte en MPa. En abscisse, les valeurs positives représentent les déformations axiales imposées et les valeurs négatives les déformations latérales. Les courbes simulées sont en trait continu.

3) Dans les tableaux qui décrivent la cinématique de localisation, θ et χ sont de signes opposés et leurs valeurs sont données en degrés.

2.3 BIFURCATION DANS LADEROCK APPLIQUE A LA CRAIE

2.3.1 Description du modèle.

En s'appuyant sur les travaux de LADE (1977), SHAO (1987) a proposé un modèle élastoplastique à deux surfaces de charge *laderock* pour décrire le comportement d'une craie blanche à forte porosité. Ce modèle étant déjà intégré dans notre laboratoire, nous y avons effectué les premiers tests du critère de bifurcation de RICE.

Dans ce modèle, on fait l'hypothèse de la partition de la déformation plastique en une partie dite contractante et l'autre déviatorique. Dans les expressions suivantes, les indices c et d sont relatifs à ces deux parties. La fonction de charge du mécanisme contractant est:

$$F_c(\sigma,\zeta_c) = I_1 - Y_c(\zeta_c) \tag{2.25}$$

où le paramètre d'écrouissage est défini par $\dot{\zeta}_c = \left(\dot{\varepsilon}_{ij}^{pc}\,\dot{\varepsilon}_{ij}^{pc}\right)^{\frac{1}{2}}$ avec $\dot{\varepsilon}_{ij}^{pc}$ incrément de déformation plastique du mécanisme contractant et I_1 est le premier invariant du tenseur de contrainte. La règle d'écrouissage isotrope est donnée par:

$$Y_c(\zeta_c) = 3(P_0 + R\,P_a) + a\,P_a\,\zeta_c^n\,e^{w\zeta_c} \tag{2.26}$$

Ce mécanisme est associé ($Q_c = F_c$). Le mécanisme déviatorique est non associé. Sa fonction de charge est:

$$F_d(\sigma,\zeta_d) = \left(\frac{I_1^3}{I_3} - 27\right)\left(\frac{I_1}{P_a}\right)^m - Y_d(\zeta_d) \tag{2.27}$$

où I_3 est le troisième invariant de contrainte. Le paramètre d'écrouissage est défini par $\dot{\zeta}_d = \left(\dot{\varepsilon}_{ij}^{pd}\,\dot{\varepsilon}_{ij}^{pd}\right)^{\frac{1}{2}}$ avec $\dot{\varepsilon}_{ij}^{pd}$ l'incrément de déformation plastique du mécanisme déviatorique. La règle d'écrouissage isotrope est donnée par:

$$Y_d(\zeta_d) = \frac{y_d^r\,\zeta_d}{b + g_0\zeta_d} \tag{2.28}$$

et le potentiel par:

$$Q_d(\sigma,\zeta_d) = I_1^3 - 27 I_3 \, e^{(t\zeta_d)} \tag{2.29}$$

Pour les justifications physiques du choix de ce modèle pour décrire la craie ainsi que les détails du modèle, consulter SHAO (1987) et SHAO & HENRY (1991). Ce modèle comporte en tout douze paramètres (P_a désigne la pression atmosphérique):

$$E, \upsilon, P_0, R, a, w, t, b, g_0, y_d^r, n, m$$

Pour le calcul du tenseur élastoplastique de comportement D, la procédure décrite au paragraphe (2.2.2) est suivi si un seul des mécanismes est activé. Si un état de contrainte active les deux mécanismes à la fois, il faut écrire la condition de consistance pour les deux mécanismes:

$$\begin{cases} \dot{F}_c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{\partial F_c}{\partial \sigma}\dot{\sigma} + \dfrac{\partial F_c}{\partial \zeta_c}\dot{\zeta}_c = 0 \\ \\ \dot{F}_d = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{\partial F_d}{\partial \sigma}\dot{\sigma} + \dfrac{\partial F_d}{\partial \zeta_d}\dot{\zeta}_d = 0 \end{cases} \tag{2.30}$$

En remplaçant dans le système (2.30) $\dot{\sigma}$ par:

$$\dot{\sigma} = C\left(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^{pc} - \dot{\varepsilon}^{pd}\right) = C\left(\dot{\varepsilon} - \lambda_c \frac{\partial Q_c}{\partial \sigma} - \lambda_d \frac{\partial Q_d}{\partial \sigma}\right) \tag{2.31}$$

on obtient un système en λ_c et λ_d. Après résolution de ce système, on remplace les multiplicateurs plastiques λ_c et λ_d par leurs valeurs dans l'équation (2.31) où en mettant $\dot{\varepsilon}$ en facteur, on isole le tenseur D. Ce tenseur a ici la forme:

$$D = C - DC - DD \quad \text{(DC pour contractant et DD pour déviatorique)} \tag{2.32}$$

2.3.2 Simulations.

SHAO (1987) a identifié les paramètres de ce modèle sur une craie de Haubourdin. Seuls les paramètres $g_0$et b dépendent de la pression de confinement. Les valeurs de ces paramètres rassemblés dans les tableaux (2.2). Les pressions de confinements sont de 2, 4,

5, 7, 10, et 15 MPa. Ce modèle servant juste à tester le module numérique de bifurcation, les courbes expérimentales n'ont pas été reprises (figures 2.4).

E	υ	P_0	R	a	w	t	y_d^r	n	m
3000	0.15	10	0	1800	8.5	0	59	0.41	0.18

Tableau 2.2 a: Paramètres constants du modèle *laderock*

P_c	2	4	5	7	10	15
g_0	1	0.8	0.8	0.98	0.98	1
b	0.003	0.005	0.054	0.011	0.032	0.096

Tableau 2.2 b: Paramètres b et g_0 du modèle *laderock* (dépendent de P_c).

2.3.3 Résultats et discussions.

Il ressort de cette analyse que la bifurcation dans la craie étudiée n'apparaît que pour les basses pressions de confinement: 2, 4, 5, et 7 MPa. Pour les pressions de confinement supérieures ou égales à 10 MPa, on n'observe pas de bifurcation. Les tableaux (2.3) présentent les résultats de cette analyse (cinématique de localisation, variations des modules). Avant d'interpréter ces résultats, rappelons quelques conclusions de SHAO (1987). La craie a un caractère fragile prononcé aux basses pressions de confinement et se comporte comme un sol. Lors des simulations, c'est le mécanisme déviatorique qui est dominant aux basses pressions de confinement. Si on néglige le terme DC dans l'expression de D (équation 2.32), la partie active C - DD commande le comportement dans ce cas et ne possède pas les symétries majeures.

Aux fortes pressions de confinement par contre, c'est le caractère ductile qui est prononcé. La craie se comporte comme une roche. C'est le mécanisme contractant qui est prépondérant. Ce mécanisme étant associé, la partie active de D possède toutes ses symétries.

Des tableaux (2.3 1), il ressort que $C_{1212} = D_{1212}$ dans tous les cas. Le module de cisaillement garde sa valeur élastique. Dans le tableau (2.3 1 b), la différence entre D_{1122} et D_{2211} est très grande (exemple: ces valeurs sont respectivement de 83,6 et 15633 à l'incrément 40). Pour ce cas où la bifurcation apparaît, le caractère non associé est très prononcé. Alors que pour le cas du tableau (2.3 1 c) où il n'y a pas bifurcation, ces deux

modules ont pratiquement le même ordre de grandeur (106 et 310 à l'incrément 20). C'est le mécanisme associé qui est prépondérant.

Compte tenu des valeurs de θ et χ du tableau (2.3 3), les valeurs correspondantes de l'angle ψ (figure 1.6) sont de l'ordre de 90°. Exemple: pour $\theta = +35°$ et $\chi = -58°$, on trouve $\psi = 93°$ (colonne $p_c = 2$ MPa). La cinématique de localisation possible dans la craie étudiée est donc le cisaillement. D'après ces valeurs de ψ dans le tableau (2.3 3), la cinématique de localisation varie peu en fonction de la pression de confinement. SULEM & al (1993) ont énoncé un résultat analogue.

Au regard de ces conclusions, nos résultats de bifurcation sont très significatifs si on tient compte de ce qui a été dit plus haut. En effet, nous avons noté le fait que la non-normalité joue en faveur de l'occurrence du critère de RICE. L'intérêt de ces résultats est aussi de mettre en évidence l'importance de la loi de comportement dans le critère. Pour une même loi et pour des pressions de confinement différentes, les résultats relatifs à la bifurcation sont différents selon que tel ou tel mécanisme de la loi est prépondérant.

C_{1111}	C_{2222}	C_{1212}	C_{1122}	C_{2211}	C_{1112}	C_{1211}	C_{1222}	C_{2212}
3167	3167	1304	559	559	0	0	0	0

2.3.1 a) Modules élastiques.

IIC	D_{1111}	D_{2222}	D_{1212}	D_{1122}	D_{2211}	D_{1112}	D_{1211}	D_{1222}	D_{2212}
13	1385	3632	1304	423	6658	0	0	0	0
14	1310	3755	1304	395	7247	0	0	0	0
40	306	5671	1304	83.6	15633	0	0	0	0

2.3.1 b) Modules élastoplastiques pour $P_c = 5$ MPa.

IIC	D_{1111}	D_{2222}	D_{1212}	D_{1122}	D_{2211}	D_{1112}	D_{1211}	D_{1222}	D_{2212}
20	413	1583	1304	106	310	0	0	0	0
120	198	1500	1304	63	433	0	0	0	0

2.3.1 c) Modules élastoplastiques pour $P_c = 15$ MPa.

Tableau 2.3. 1: Evolution des modules élastoplastiques.

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
$4.13\ e^6$	0	$8.9\ e^6$	0	$4.13\ e^6$

2.3.2 a) Coefficients élastiques.

IIC	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
8	$1.810\,e^6$	0	$-5.32\,e^6$	0	$4.74\,e^6$
9	$1.71\,e^6$	0	$-6.22\,e^6$	0	$4.9\,e^6$
40	$4.0\,e^5$	0	$-1.84\,e^7$	0	$6.4\,e^6$

2.3.2 b) Coefficients pour P_c = 5 MPa.

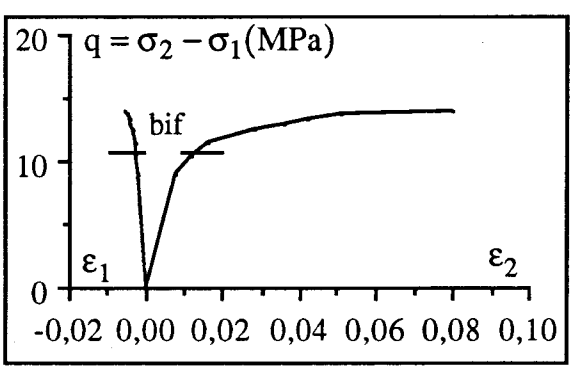
IIC	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
20	$5.40\,e^5$	0	$1.78\,e^6$	0	$2.07\,e^6$
120	$2.6\,e^5$	0	$1.3\,e^6$	0	$2.0\,e^6$

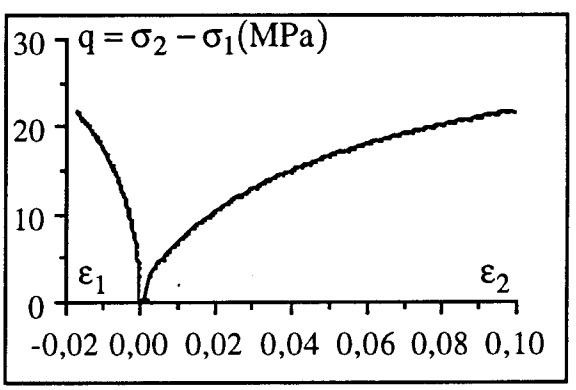
2.3.2 c) Coefficients pour P_c = 15 MPa.

Tableau 2.3.2: Evolution des coefficients.

Pc	2			4			5			7		
q_{bif}	4.4			9.1			10.7			15.3		
	θ	χ	ψ	θ	χ	ψ	θ	χ	ψ	θ	χ	ψ
	35	-58	93	36	-58	94	32	-59	91	36	-58	94
	-35	58	93	-36	58	94	-32	59	91	-36	58	94
	40	-57	97	39	-57	96	42	-57	99	39	-57	96
	-40	57	97	-39	57	96	-42	57	99	-39	57	96

Tableau 2.3.3: Paramétres de la bifurcation.





2.4 a) pc = 5 MPa: bifurcation

2.4 b) pc = 15 MPa: pas de bifurcation

Figure 2.4: Modèle *laderock* pour la craie.

2.4 BIFURCATION DANS LE MODELE DE KHAN APPLIQUE A LA MARNE

La marne étudiée a une très faible perméabilité ($k \approx 10^{-20}$ m^2). Elle est fréquemment utilisée comme matériau de stockage des déchets radioactifs. Il est donc interessant de connaître les conditions de stabilité des structures (ouvrages souterrains notamment) réalisées sur les sites constitués par ce matériau. Des résultats d'essais triaxiaux sont disponibles pour ce matériau. Cependant, la caractérisation expérimentale de la bifurcation par localisation des déformations n'y a pas encore été éffectuée. Notons que des résultats expérimentaux de localisation sur un autre type de marne (la marne de Beaucaire) sont disponibles dans TILLARD (1992).

2.4.1 Description du modèle.

Nous avons adopté une version modifiée de KHAN & al (1991 & 1992) pour modéliser le comportement de cette marne. La surface de rupture de la forme (figure 2.5 a):

$$\sqrt{J_2} = c_0 + c_1 I_1 + c_2 I_1^2 \tag{2.33}$$

est la position ultime de la surface de charge initiale (figure 2.5 b):

$$\sqrt{J_2} = b_0 + b_1 I_1 + b_2 I_1^2 \tag{2.34}$$

où J_2 est le second invariant du déviateur de contrainte et I_1 le premier invariant de contrainte. Les fonctions de charge intermédiaires s'écrivent donc:

$$F(\sigma,\gamma) = \sqrt{J_2} - \beta(\gamma)\left(b_0 + b_1 I_1 + b_2 I_1^2\right) \tag{2.35}$$

La variable d'écrouissage est définie par $\gamma = \left(\varepsilon_{ij}^p \varepsilon_{ij}^p\right)^{\frac{1}{2}}$ et la règle d'écrouissage isotrope et monotone s'écrit:

$$\beta(\gamma) = \beta_{max} - (\beta_{max} - 1)e^{-M\gamma} \tag{2.36}$$

2.4.2 Détermination des paramètres (figure 2.5)

Ce modèle comporte dix paramètres: $E, \upsilon, c_0, c_1, c_2, b_0, b_1, b_2, \beta_{max}, M$. Pour déterminer c_0, c_1 et c_2, on relève sur les courbes expérimentales correspondant aux différentes pressions de confinements les points de rupture. On les reporte ensuite dans un

repère $\left(\sqrt{J_2}, I_1\right)$ et par approximation - moindre carré par exemple - on trouve ces trois paramètres. Pour déterminer b_0, b_1 et b_2 la procédure est exactement pareille sauf qu'au lieu des points extrêmes, ce sont les points qui coïncident avec la perte de linéarité sur les courbes expérimentales qu'il faut relever. Pour β_{max} et M, on trace les courbes $\beta = \beta(\gamma)$ à partir des résultats expérimentaux. Les paramètres élastiques E et υ sont déterminés de façon classique par les pentes à l'origine.

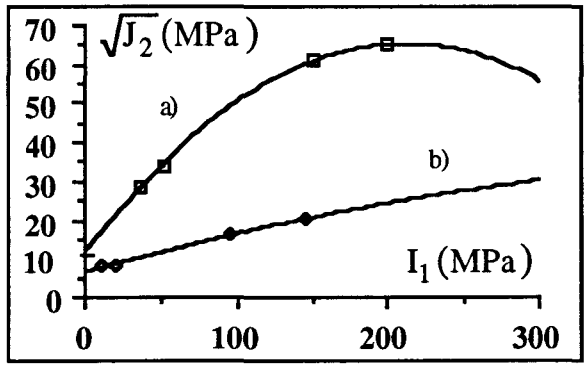


Figure 2.5: a) Interpolation des c_i; b) Interpolation des b_i.

E	υ	c_0	c_1	c_2	b_0	b_1	b_2	βmax
12000	0.25	11.943	0.508	-0.0012	6.63	0.11	-0.0001	2.8

Tableau 2.4: Paramétres constants du modèle de Khan.

Dans un premier temps, on suppose que la loi est associée et on écrit pour le potentiel:

$$Q(\sigma,\gamma) = \sqrt{J_2} - \delta(\gamma)\left(b_0 + b_1 I_1 + b_2 I_1^2\right) \quad \text{avec} \quad \delta = \beta \tag{2.37}$$

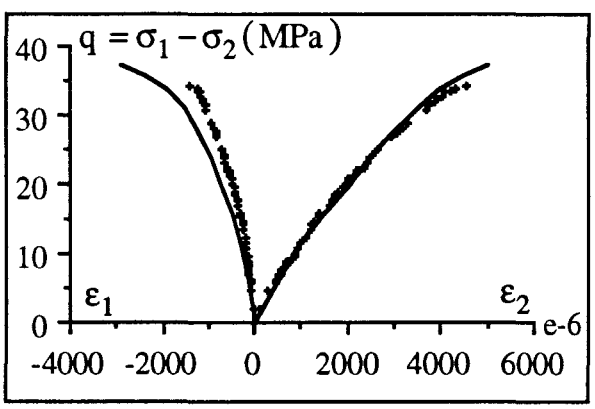
2.4.3 Simulations et résultats

Les valeurs des paramètres du modèle sont reportées sur le tableau (2.4). Seul le paramètre M dépend du confinement. Sous cette forme (associée), le modèle ne vérifie le critère de RICE pour aucune des pressions de confinement 0, 3, 25, et 40 MPa. Les déformations latérales excédent celles qu'on observe expérimentalement. Cette forte dilatance est ici liée au caractère associée de la loi qui, on l'a dit, inhibe le critère de RICE (figures 2.6).

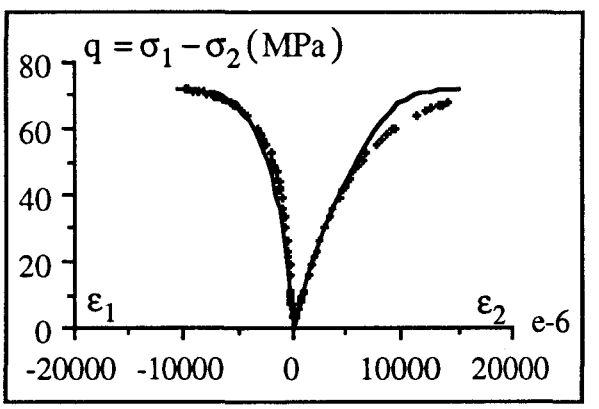
Le paramètre sensible à la bifurcation est N à travers δ si on pose:

$$\delta(\gamma) = \beta_{max} - (\beta_{max} - 1)e^{-N\gamma} \tag{2.38}$$

Le cas de la normalité correspond à M = N. En s'éloignant de plus en plus de la normalité, c'est-à-dire en augmentant de plus en plus la différence entre M et N, on arrive à observer l'occurrence du critère pour les valeurs de N figurant au tableau (2.5). Dans ce cas, les déformations latérales sont bien recouvrées sauf pour la pression de confinement de 25 MPa (figures 2.7). Dans les tableaux (2.6), nous reportons l'évolution des modules plastiques et des coefficients a_i (équation 2.20) pour les cas associé et non associé (pression de confinement de 25 MPa). Pour le cas associé, le coefficient a_2 baisse de 1.38 e^8(valeur élastique) à 1.3 e^6 en fin d'essai mais reste positif (tableau 2.6.2 c). En calculant les angles ψ à partir du tableau (2.6 3), on peut dire que la cinématique de localisation dans la marne étudiée est très proche du cisaillement.



2.6 a) pc = 0 MPa



2.6 b) pc = 25 MPa

Figure 2.6: Cas associé.

Pc	0	3	25	40
M=N	1000	1300	400	300
M	1000	1300	400	300
N	-600	-400	-120	-160

Tableau 2.5: Paramétres M et N pour les cas associé et non associé.

C_{1111}	C_{2222}	C_{1212}	C_{1122}	C_{2211}	C_{1112}	C_{1211}	C_{1222}	C_{2212}
14400	14400	4800	4800	4800	0	0	0	0

2.6.1 a) Modules élastiques.

IIC	D_{1111}	D_{2222}	D_{1212}	D_{1122}	D_{2211}	D_{1112}	D_{1211}	D_{1222}	D_{2212}
97	18163	7967	4800	27826	3748	0	0	0	0
98	18618	7706	4800	28804	3623	0	0	0	0
100	19630	7124	4800	30975	3346	0	0	0	0

2.6.1 b) Modules élastoplastiques pour P_c = 25 MPa (cas non associé).

IIC	D_{1111}	D_{2222}	D_{1212}	D_{1122}	D_{2211}	D_{1112}	D_{1211}	D_{1222}	D_{2212}
98	7954	13892	4800	6609	6609	0	0	0	0
100	7952	13892	4800	6608	6608	0	0	0	0

2.6.1 c) Modules élastoplastiques pour P_c = 25 MPa (cas associé).

Tableau 2.6. 1: Evolution des modules élastoplastiques.

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
$6.91\ e^7$	0	$1.38e^8$	0	$6.91\ e^7$

2.6.2 a) Coefficients élastiques.

IIC	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
97	$8.72\ e^7$	0	$-1.11e^8$	0	$3.82\ e^7$
98	$8.94\ e^7$	0	$-1.17\ e^8$	0	$3.7\ e^7$
100	$9.42\ e^7$	0	$-1.3\ e^8$	0	$3.24\ e^7$

2.6.2 b) Coefficients pour P_c = 25 MPa (cas non associé).

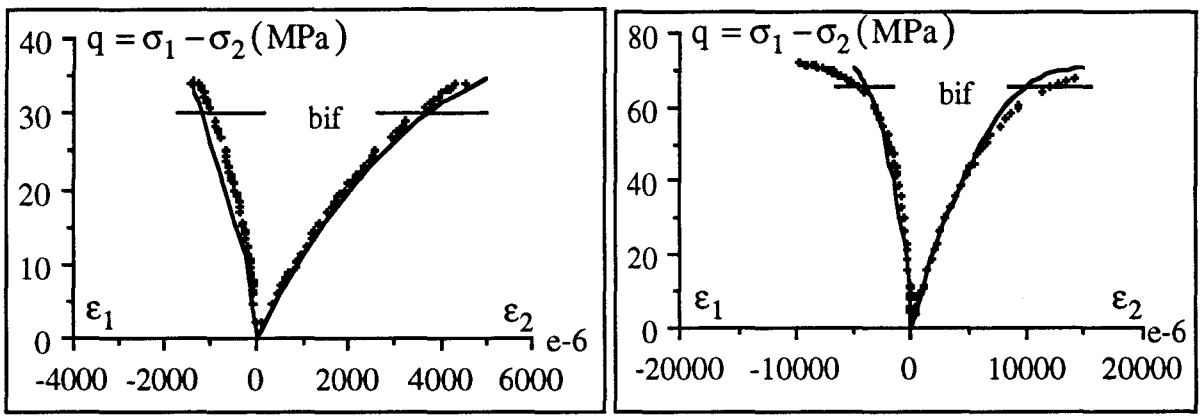
IIC	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
98	$5.40\ e^5$	0	$1.78\ e^6$	0	$2.07\ e^6$
100	$2.6\ e^5$	0	$1.3\ e^6$	0	$2.0\ e^6$

2.6.2 c) Coefficients pour P_c = 25 MPa (cas associé).

Tableau 2.6.2: Evolution des coefficients.

Pc	0			3			25			40		
q_{bif}	30			41			68			77		
	θ	χ	ψ	θ	χ	ψ	θ	χ	ψ	θ	χ	ψ
	50	-30	80	45	-30	75	49	-33	82	51	-35	86
	-50	30	80	-45	30	75	-49	33	82	-51	35	86
	54	-27	81	55	-26	81	53	-31	84	56	-33	89
	-54	27	81	-55	26	81	-53	31	84	-56	33	89

Tableau 2.6.3: Paramétres de la bifurcation.



2.7 a): pc = 0 MPa

2.7 b): pc = 25 MPa

Figure 2.7: Bifurcation dans la marne

2.5 BIFURCATION DANS LE GRES DE FONTAINEBLEAU.

2.5.1 Résultats expérimentaux

En s'inspirant des hypothèses de HADLEY (1975), HAIED (1995) a travaillé sur la détection expérimentale de la localisation dans le grès de Fontainebleau. Dans l'optique de HADLEY, la localisation correspond à une perte d'homogénéité (ou d'uniformité) des déformations latérales. Pour un essai triaxial, cela veut dire que la courbe $(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$ perd sa linéarité (figure 2.8). Cette procédure nécessite uniquement la multiplication des jauges de mesure des déformations. SANTARELLI (1990), ORD & al (1991), VIGGIANI & al (1993) ont utilisé cette procédure de détection de la localisation avec succès pour différentes roches. Le grès de Fontainebleau étudié ici est composé presqu'exclusivement de quartz (99%). Sa porosité varie entre 9 et 11%. L'accent a été mis ici sur l'essai à 30

MPa de confinement pour lequel les résultats expérimentaux relatifs à la localisation sont plus fournis; Mais les conclusions auxquelles nous aboutissons peuvent être étendues aux autres pressions de confinement sans grand changement.

En appliquant cette procédure, HAIED (1995) a montré que pour 30 MPa de confinement, la localisation apparaît à environ 85% du pic en contrainte et que l'orientation de la bande θ (figure 1.6) varie entre 63 et 67 degrés. Ce sont ces résultats que nous devons reproduire numériquement.

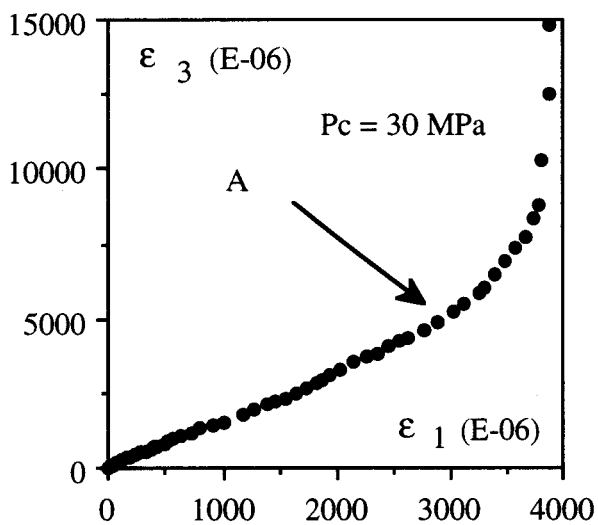


Figure 2.8: Illustration du critère expérimental de localisation.

2.5.2 Modélisation par la plasticité simple coaxiale.

2.5.2.1 Description du modèle de RICE.

RUDNICKI & RICE (1975) ont proposé un modèle pour décrire le comportement des roches fragiles en compression dont le caractère principal est la dilatance. Le grès de Fontainebleau rentre dans cette catégorie car le mode de destruction de sa matrice est essentiellement de la micro-fissuration. Ce modèle est à écrouissage isotrope. La fonction de charge dépend de la pression moyenne et s'écrit:

$$F(\sigma,\gamma^p) = \tau - \mu(\gamma^p)(P + p_0) \qquad (2.39\ a)$$

où τ est la contrainte équivalente de cisaillement, $P = \frac{\sigma_{kk}}{3}$ la contrainte moyenne et σ'_{ij} le déviateur de contrainte. La variable d'écrouissage γ^p est définie par l'équation (2.39 b). C'est une déformation équivalente de cisaillement. Le terme Δe^p_{ij} désigne l'incrément de déviateur du tenseur de déformation plastique et la somme est faite sur tous les incréments depuis le début jusqu'au niveau actuel de chargement. Le coefficient μ est appelé coefficient de frottement interne et p_0 est la cohesion du matériau.

$$\tau = \left(\frac{1}{2}\sigma'_{ij}\,\sigma'_{ij}\right)^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad \gamma^p = \Sigma\left(2\,\Delta e^p_{ij}\,\Delta e^p_{ij}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.39 b}$$

Ce modèle est non associé et on postule un potentiel de la forme:

$$Q(\sigma, \gamma^p) = \tau - \beta(\gamma^p)(P + p_0) \tag{2.40}$$

Le coefficient β appelé facteur de dilatance est défini comme le rapport de l'incrément de déformation plastique volumique sur l'incrément de déformation équivalente de cisaillement γ^p:

$$\beta = \frac{\dot{\varepsilon}^p_v}{\dot{\gamma}^p} = \frac{\dot{\varepsilon}^p_{kk}}{\dot{\gamma}^p} \tag{2.41}$$

2.5.2.2 Simulations

Les coefficients μ et β sont calés sur les courbes expérimentales. Puisqu'il est plus aisé de trouver à partir de ces courbes ε^p_v et γ^p (au lieu de leurs incréments), nous avons déterminé β comme la pente de la courbe $\varepsilon^p_v = \varepsilon^p_v(\gamma^p)$ (figure 2.9 a). De cette courbe il ressort que β est constant au cours de l'essai et vaut 1. Cette valeur est un peu grande par rapport à celle que trouvent RUDNICKI & RICE (1975) sur le granite de Westerley testé par BRACE & al, (1966). Ils trouvent une valeur de β de l'ordre de 0,3 et β augmente d'un facteur de 2 du début à la fin d'un essai (pour une pression de confinement fixée). On peut donc dire que le grès de fontainebleau est beaucoup plus dilatant que le granite de Westerley.

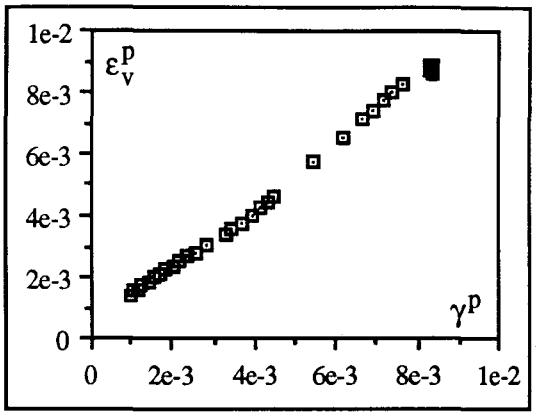


Figure 2.9 a): Courbe ($\varepsilon_v^p, \gamma^p$) de pente $\beta = 1$.

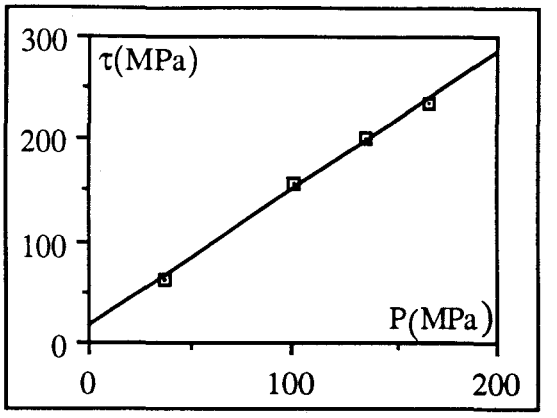


Figure 2 .9 b): Courbe (τ, P).

Par contre, l'ordre de grandeur de μ est tout fait le même que celui du granite de Westerley. De la figure (2.10), on détermine expérimentalement la loi d'écrouissage. Nous adoptons ici la forme due à SULEM & al (1993):

$$\mu(\gamma^p) = c_1 (\gamma^p)^{c_2} e^{-c_3 \gamma^p} \tag{2.42}$$

Notons que cette fonction n'est pas monotone et admet une décroissance de μ en fonction de γ^p au delà d'une valeur γ_m^p. Cette valeur de γ_m^p correspond au pic sur la courbe expérimentale (de l'ordre de 0.008). Mais on suppose que la rupture surviendra suite à une chute brutale de la contrainte qu'on ne peut enregistrer que sur des machines asservies. La courbe expérimentale (figure 2.10) est ainsi prolongée par une branche *radoucissante* et γ_m^p est tel que $\mu' = 0$. D'où $\gamma_m^p = \dfrac{c_2}{c_3}$ (figure 2.11). La cohésion p_0 est quant à elle l'ordonnée à l'origine de courbe (τ, P) (figure 2.9 b) où les valeurs correspondant à la rupture pour différentes pressions de confinement sont reportées. Les valeurs des paramètres $E, \upsilon, c_1, c_2, c_3$ et p_0 sont consignés dans le tableau (2.7).

E	υ	c_1	c_2	c_3	p_0
27700	0.15	1.34	0.003	0.36	12

Tableau 2.7: Paramétres du grès.

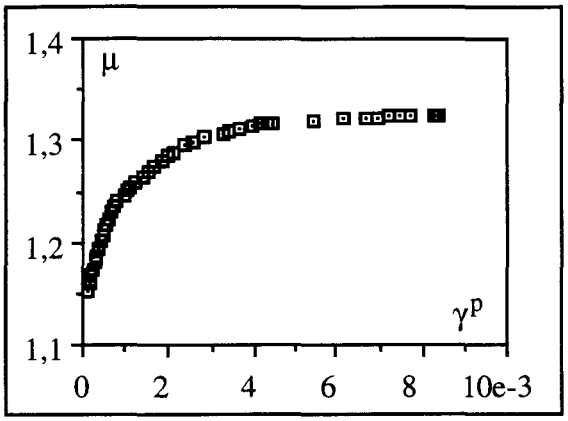


Figure 2.10: Courbe expérimentale (μ, γ^p)

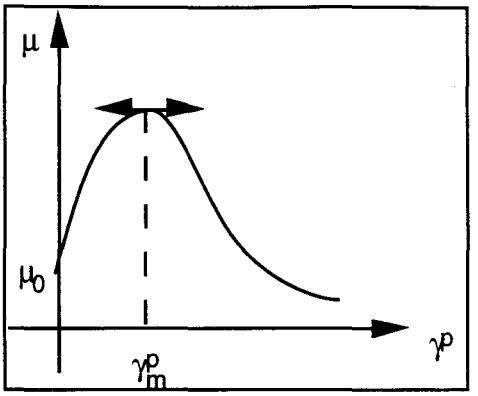


Figure 2.11: Extrapolation de la courbe (μ, γ^p).

Remarques:

1- Pour ce modèle, le module d'écrouissage défini à l'équation (2.6) s'écrit:

$$h = -\frac{\partial F}{\partial \gamma^p}\frac{\dot{\gamma}^p}{\lambda} = (P + p_0)\frac{\partial \mu}{\partial \gamma^p} \tag{2.43}$$

puisque dans ce cas, on peut montrer que $\lambda = \dot{\gamma}^p$. Le module d'écrouissage varie comme la dérivée du coefficient de frottement. Donc pour des valeurs de γ^p telles que $\gamma^p \leq \gamma^p_m$ qui correspondent à $h > 0$, on est en phase d'écrouissage positif et négatif dans le cas contraire.

2 - La loi d'écoulement s'écrit pour ce modèle:

$$\dot{\varepsilon}_{pl} = \lambda\frac{\partial Q}{\partial \sigma} = \lambda\left(\frac{\sigma'}{2\tau} - \frac{\beta}{3}\delta\right)$$

où δ est le tenseur unité. La partie déviatorique de l'incrément de déformation plastique est alors dans ce cas:

$$\dot{\varepsilon}'_{pl} = \lambda\frac{\sigma'}{2\tau} \tag{2.44}$$

L'incrément du déviateur de déformation plastique et le déviateur de contrainte sont portés par le même *axe* dans le cadre de cette loi simple. C'est pour cette raison qu'on parle de plasticité *coaxiale*.

2.5.2.3 Résultats et commentaires

Lors de la simulation, on n'observe pas de bifurcation. Les tableaux (2.8) donnent l'évolution des modules plastiques et des coefficients a_i (équation 2.20). Le coefficient a_2 baisse de 7.13 e^8 (valeur élastique) à 2.55 e^8 en fin d'essai mais reste positif (tableau 2.8.2). Cette non observation de la bifurcation est conforme au résultat de RUDNICKI & RICE (1975) qui ont montré que le critère de bifurcation ne peut être atteint - pour ce type de loi - pour des valeurs positives du module d'écrouissage h en condition de compression triaxiale. Notons que dans ce modèle, la règle de normalité est bien violée ($\mu(\gamma^p) \neq \beta(\gamma^p)$). Pourtant, contrairement aux deux exemples précédents (Laderock pour la craie et Khan pour la marne), la violation de cette règle de normalité ne suffit plus pour atteindre le critère de bifurcation.

C_{1111}	C_{2222}	C_{1212}	C_{1122}	C_{2211}	C_{1112}	C_{1211}	C_{1222}	C_{2212}
28329.6	28329.6	12591	3147.7	3147.73	0	0	0	0

2.8.1 a) Modules élastiques.

IIC	D_{1111}	D_{2222}	D_{1212}	D_{1122}	D_{2211}	D_{1112}	D_{1211}	D_{1222}	D_{2212}
70	14542	28358	12591	5344	2967	0	0	0	0
85	13175	28396	12591	5562	2729	0	0	0	0

2.8.1 b) Modules élastoplastiques (p_c = 30 MPa).

Tableau 2.8 1: Evolution des modules élastoplastiques.

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
3.57 e^8	0	7.13 e^8	0	3.57 e^8

2.8.2 a) Coefficients élastiques.

IIC	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
70	1.83 e^8	0	2.92e^8	0	3.57 e^8
85	1.66e^8	0	2.55 e^8	0	3.58 e^8

2.8.2 b) Coefficients pour P_c = 30 MPa.

Tableau 2.8 2: Evolution des coefficients.

RUDNICKI & RICE (1975) ont montré que la simplicité de cette loi - écrouissage isotrope et régularité de la surface de charge - rend mal compte du comportement complexe des roches fragiles à forte dilatance. Rappelons une fois de plus que le critère de RICE est essentiellement tributaire de la structure du tenseur de comportement. Pour les roches fragiles à forte dilatance, les déformations irréversibles résulteraient de la microfissuration qui est le mécanisme prépondérant de leur détérioration. La roche fragile sous compression peut donc être regardée comme un milieu formé d'une distribution de microfissures qui sont le siège de glissements par frottement sur leurs lèvres. Un modèle plus élaboré basé sur ces considérations physiques est développé. En particulier, ce modèle de fissures - dit *non-coaxial* - conduit à une surface de charge irrégulière (*vertex*) au point courant de contrainte où on est rentré en plasticité. Mais avant de l'étudier, analysons un modèle intermédiaire basé sur la théorie de la *coaxialité non-linéaire* qui est une simplification de ce modèle complet de fissures.

2.5.3 Modélisation dans le cadre de la théorie de la coaxialité non-linéaire.

2.5.3.1 Introduction

Un modèle à écrouissage isotrope où les déformations inélastiques sont données par le gradient d'une fonction régulière est représenté sur la figure (2.12). F_0 désigne la surface de charge initiale; F la surface de charge courante; P l'état courant (point courant de contrainte). En P, l'incrément de déformation inélastique est donné de façon unique par:

$$\dot{\varepsilon}_{pl} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma}$$

Considérons à présent la figure (2.13) où le point courant de contrainte appartient à deux surfaces de charges F_1 et F_2. Au point P, la zone d'élasticité correspond à la zone hachurée. Si un incrément de contrainte $\dot{\sigma}$ ramène P dans cette zone, le milieu sera en décharge élastique. En cas de charge plastique, l'incrément de déformation plastique en P n'est ni $\dot{\varepsilon}^1_{pl}$ ni $\dot{\varepsilon}^2_{pl}$ mais une combinaison (*somme vectorielle*) des deux et se situe dans l'angle formé par ces deux directions. On dit que la déformation plastique en P est contenue dans le *cône* formé par les normales aux surfaces de charge F_1 et F_2. Le point P est donc un point singulier dans ce cas (*vertex*).

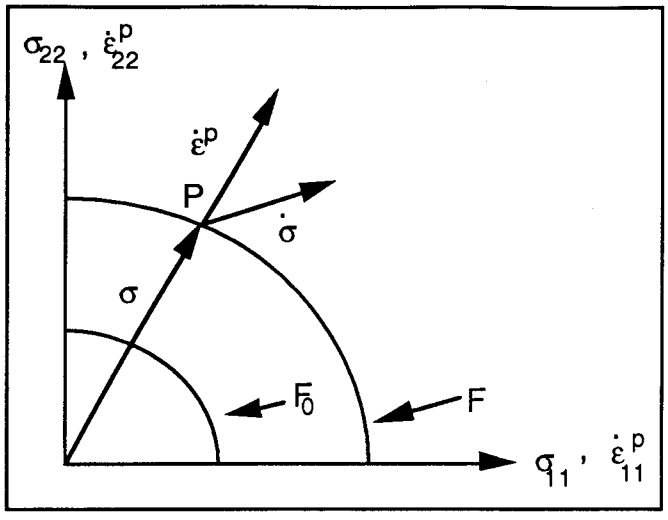


Figure 2.12: Plasticité simple (régularité de la surface de charge et écrouissage isotrope).

Si un incrément de contrainte amène P au point P', cette transformation provoquera des déformations plastiques puisque P' est situé en dehors de la zone élastique définie par les surfaces F_1 et F_2. Si le point P était régulier au sens où l'incrément de déformation plastique y serait donné par l'unique normale à la surface de charge courante F - hypothèse d'écrouissage isotrope et de surface de charge régulière - cette transformation ne provoquerait pas de déformation plastique puisque P' est à l'intérieur de la zone élastique définie par F. Le chemin $P \rightarrow P'$ est appelé chemin *tangentiel* par opposition au chemin *radial* (figure 2.14). La réponse du modèle avec vertex à un incrément *tangentiel* de contrainte est donc plastique alors qu'elle est élastique pour le modèle classique simple de plasticité. Le modèle simple a une résistance plus grande à un *chargement tangentiel* que celui avec *vertex*. Si un matériau suit normalement le vertex et qu'il est modélisé par la plasticité simple, sa réponse à ce type de chargement sera surestimée par rapport à la réalité. On dit que la plasticité simple ne donne pas une réponse aux incréments *tangentiels* de contrainte conforme à la réalité. En somme, la plasticité simple n'est *robuste* que pour des chemins *radiaux* de chargement et réagit mal pour les autres directions.

Physiquement, il est aisé de comprendre que le comportement d'une roche fragile microfissurée est mieux représenté par un modèle avec vertex. En effet, supposons qu'à partir du point courant de contrainte P, on donne un certain incrément de chargement (radial par exemple). Un système de fissures est alors activé (ces fissures frottent par glissement sur leurs lèvres et créent des déformations inélastiques). Si on change de direction de chargement (s'il devient tangentiel par exemple), un autre système de fissures sera activé de sorte que dans les deux cas, des déformations plastiques sont produites. Le point singulier sur la surface de charge traduit en fait cette activation préférentielle des microfissures, ce

que ne prévoit pas le modèle simple de la plasticité classique. Ceci montre les limites de ce modèle à représenter la structure exacte du comportement d'une roche microfissurée comme le grès étudié et partant ses limites en matière de prédiction de la bifurcation par localisation des déformations dans ce type de matériau à forte dilatance (RUDNICKI, 1984, DE BORST, 1987, BAZANT & al, 1992).

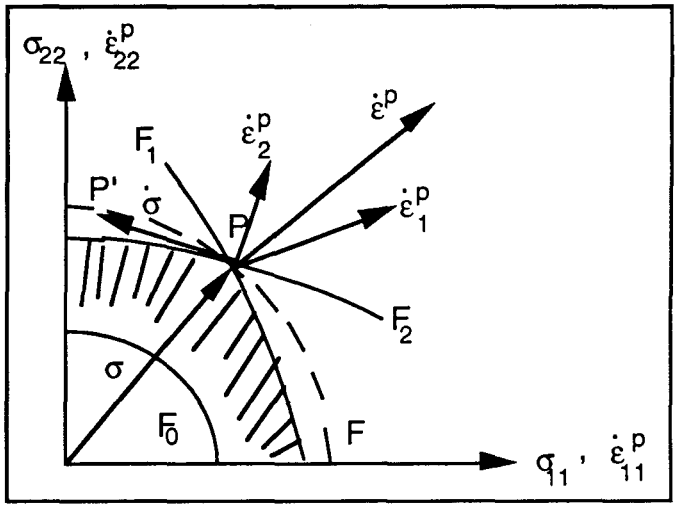


Figure 2.13: Plasticité avec surface de charge singulière en P.

2.5.3.2 Formulation du modèle.

Compte tenu de ce qui vient d'être dit, on postule un modèle dont la réponse aux incréments *tangentiels* de contrainte est à mi-chemin entre la réponse par la plasticité classique et la réponse par le modèle du vertex. Pour cette direction de sollicitation, la réponse du modèle postulé est donc une sorte de plasticité *modérée* entre la réponse élastique que prévoit la plasticité classique et la plasticité complète que prévoit le modèle du *vertex*. En unidimensionnel, si on appelle $\dot{\varepsilon}_t$ la réponse à l'incrément de contrainte *tangentiel* $\dot{\sigma}_t$, on peut écrire schématiquement:

$$\begin{cases} \text{plasticité classique: } \dot{\varepsilon}_t = \dfrac{\dot{\sigma}_t}{G} \\ \text{modèle postulé : } \dot{\varepsilon}_t = \dfrac{\dot{\sigma}_t}{V_1} \quad \text{avec} \quad V \prec V_1 \prec G \\ \text{modèle du vertex : } \dot{\varepsilon}_t = \dfrac{\dot{\sigma}_t}{V} \end{cases}$$

où G est relatif à l'élasticité et V et V_1 relatifs à la plasticité. Notons que les parties volumiques (des contraintes ou des déformations) ne jouent aucun rôle dans le modèle du *vertex* car elles influencent de façon identique le comportement de toutes les fissures. On peut donc remplacer l'incrément de contrainte *tangentiel* ci-dessus par son déviateur sans que cela change le résultat.

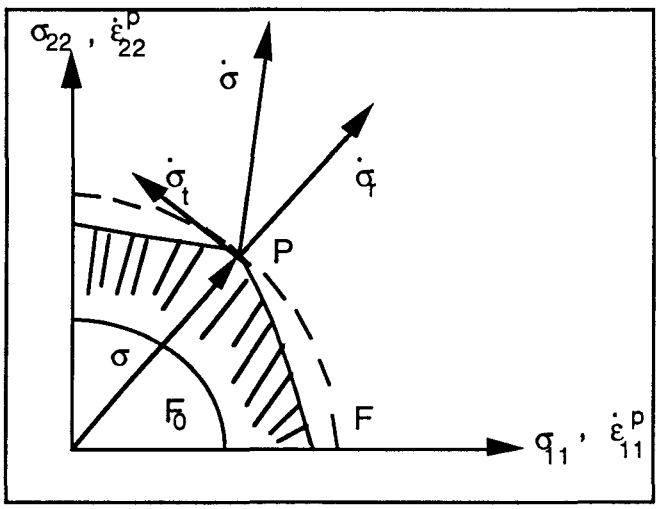


Figure 2.14: Décomposition d'un incrément de contrainte.

Dans le cas général, on peut écrire l'incrément total du déviateur de déformation comme la somme de sa partie élastique et de sa partie plastique soit:

$$\dot{\varepsilon}' = \dot{\varepsilon}'_e + \dot{\varepsilon}'_{pl} \tag{2.45}$$

Soit v_{ij} la *direction* telle que $v_{ij}\dfrac{\sigma'_{ij}}{2\tau} = 0$. La *projection* de $\dot{\varepsilon}'$ sur v_{ij} se réduit à sa partie élastique compte tenu de l'équation (2.44). La direction v_{ij} est donc celle de l'incrément de contrainte *tangentiel* - ou de son déviateur - pour laquelle la plasticité classique donne une réponse purement élastique. Il suffit alors de poser pour la loi postulée qu'une partie de l'incrément du déviateur de déformation plastique est portée par cette direction v_{ij}. On écrit:

$$\dot{\varepsilon}' = \dot{\varepsilon}'_e + \dot{\varepsilon}'_{pl} + \dot{\varepsilon}'^{\,c}_{pl} \tag{2.46}$$

où $\dot{\varepsilon}'^{\,c}_{pl}$ est porté par v_{ij}. Le déviateur de l'incrément de déformation plastique n'est plus porté par le déviateur de contrainte d'où le terme de plasticité *non-coaxiale*. La relation

$v_{ij}\dfrac{\sigma'_{ij}}{2\tau}=0$ indique que ces deux directions sont orthogonales. Sur la figure (2.15), un incrément quelconque de contrainte peut se décomposer selon ces deux directions et on trouve:

$$v_{ij}=\dot{\sigma}_{ij}-s_{ij}\left(\dot{\sigma}_{kl}\,s_{kl}\right)\quad\text{avec}\quad s_{ij}=\frac{\sigma'_{ij}}{\tau\sqrt{2}} \tag{2.47}$$

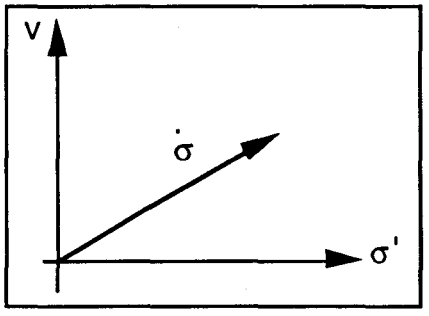


Figure 2.15: Repère (σ', v).

En fin de compte, l'incrément de déformation plastique donnée pour cette loi prend la forme:

$$\dot{\varepsilon}^{pl}_{ij}=\lambda\left(\frac{\sigma'_{ij}}{2\tau}-\frac{\beta}{3}\delta_{ij}\right)+\lambda' v_{ij} \tag{2.48}$$

SULEM & al (1993) ont suggéré que l'expression des déformations plastiques de l'équation (2.48) s'applique plus à des modes de rupture par ouverture des fissures en mode 1. Pour des modes de glissement par frottement, ils proposent de remplacer le terme non coaxial par un terme *coaxial non-linéaire* qui rend mieux compte de ce mécanisme physique. L'équation (2.48) devient:

$$\dot{\varepsilon}^{pl}_{ij}=\lambda\left(\frac{\sigma'_{ij}}{2\tau}-\frac{\beta}{3}\delta_{ij}\right)+\frac{\left(v_{kl}\,v_{kl}\right)^{\frac{1}{2}}}{h_1}s_{ij} \tag{2.49}$$

Ce terme supplémentaire de déformation plastique contribue au tenseur de comportement par un terme défini par:

$$D^s_{ijkl} = \frac{G}{h_1}\left(\frac{\sigma'_{ij}}{\tau} - \frac{G\frac{\sigma'_{ij}}{\tau} + K\beta\delta_{ij}}{H}\right)C_{12kl} \qquad (2.50)$$

où K et G sont respectivement les modules de compressibilité volumique et de cisaillement élastiques et H le module de plasticité généralisé relatif à la plasticité classique défini par l'équation (2.11). Le tenseur de comportement final pour ce modèle est donc la somme du tenseur D donné par l'équation (2.12) et du tenseur D^s défini par l'équation (2.50).

Remarque

Les modules de cisaillement même pour cette loi gardent toujours leurs valeurs élastiques pour un essai triaxial. On peut vérifier par exemple que $D^s_{1212} = 0 \Leftrightarrow D_{1212} = C_{1212}$. Par contre, les coefficients tels que D_{1112} et D_{2212} ne sont plus nuls. Le critère de RICE n'est plus réduit à sa forme polynomiale biquadratique et les modes de localisation non symétriques sont possibles.

2.5.3.3 Simulations et résultats

Le module h_1 de cette plasticité modérée ne peut être déterminé expérimentalement. Ici, il a été utilisé comme paramètre de calage de la bifurcation. Pour la simulation, on pose:

$$h_1 = k\,h \qquad (2.51)$$

où h est défini par l'équation (2.43) et k un scalaire. Pour k très grand, le terme supplémentaire de l'équation (2.50) est négligeable et on retrouve la plasticité classique: le critère de bifurcation n'est pas atteint. Si on baisse progressivement k, ce terme supplémentaire devient de plus en plus important. Pour la valeur de k = 4, le critère est atteint. Les paramètres de bifurcation sont donnés dans les tableaux (2.9) (modules plastiques, coefficients a_i, cinématique de localisation) et la courbe simulée à la figure (2.16). Ici on arrive à atteindre le critère bien que a_2 reste positif. Ceci est possible du fait que a_1 et a_3 ne sont plus nuls. Les racines θ qui définissent les bandes de localisation potentielles sont dans ce cas au nombre de deux uniquement au lieu de quatre comme pour les paragraphes (2.3) et (2.4) où le critère (2.20) se réduisait à une forme biquadratique. On peut dire qu'on retrouve quantitativement les résultats expérimentaux avec $\theta = 63°$ et un rapport déviateur de contrainte à la bifurcation (q_{bif} = 396 MPa) sur le déviateur au pic (q_{max} = 414 MPa) qui est de 0.95. Néanmoins, qualitativement, le résultat obtenu est gênant car si on calcule l'angle ψ (figure (1.6) à partir du tableau (2.9 3), on trouve 89° dans un cas

et 70° dans l'autre. Ce qui laisse penser à une cinématique de cisaillement alors que physiquement, pour des matériaux microfissurés comme le grès étudié, on s'attend plus à une combinaison de glissement par frottement et d'ouverture des microfissures, c'est -à-dire à une valeur de ψ plus faible. Une amélioration de ces résultats est proposée dans le paragraphe suivant.

IIC	D_{1111}	D_{2222}	D_{1212}	D_{1122}	D_{2211}	D_{1112}	D_{1211}	D_{1222}	D_{2212}
75	13742	28377	12591	5471	2844	25461	0	0	-8652
76	13644	28341	12591	5487	2824	30468	0	0	-10131
85	13212	28396	12591	5556	2733	194606	0	0	-58527

Tableau 2.9 1: Modules élastoplastiques pour P_c = 30 MPa (coaxialité non-linéaire).

IIC	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
75	1.73 e^8	-1.91 e^8	2.7 e^8	7.7 e^8	3.57 e^8
76	1.72 e^8	-2.24 e^8	2.67 e^8	9.2 e^8	3.57 e^8
85	1.67 e^8	-1.3 e^8	2.56 e^8	5.83 e^9	3.58 e^8

Tableau 2.9 2: Coefficients pour P_c = 30 MPa (coaxialité non linéaire).

q_{bif}	θ	χ	ψ
396	63	-26	89
	43	-27	70

Tableau 2.9 3: Paramétres de bifurcation pour P_c = 30 MPa (coaxialité non linéaire).

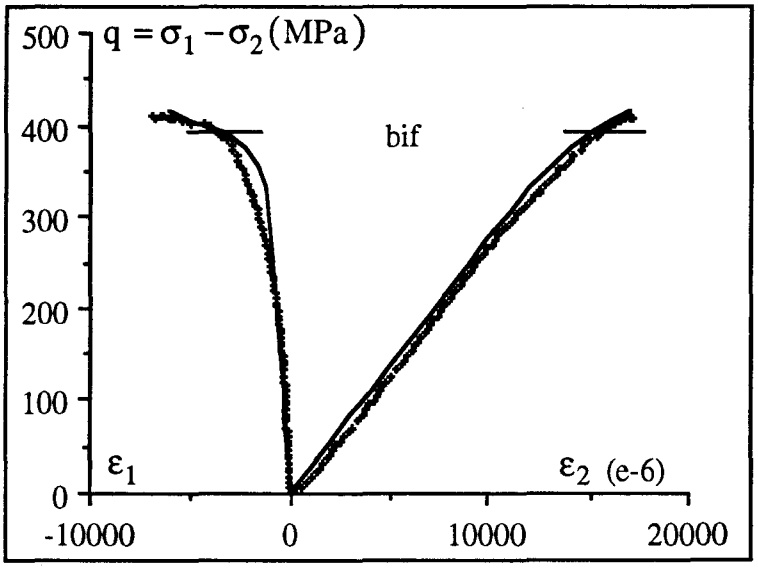


Figure 2.16: Bifurcation dans le grès (modèle avec terme additionnel coaxial non lineaire).

2.5.4 Modélisation par la plasticité non-coaxiale (Modèle de fissures).

2.5.4.1 Formulation du modèle.

Généralisons la figure (2.13) à un grand nombre de fonctions de charge F_i. Au point courant de contrainte P, la surface de charge est l'enveloppe des surfaces de charge individuelles F_i. Associons à chaque fissure i du milieu une fonction de charge F_i (figure 2.17). En cas de charge plastique, les déformations plastiques résultent de l'activation d'un certain nombre de fissures et les coordonnées du point P vérifient les équations des surfaces de charge associées à ces fissures activées.

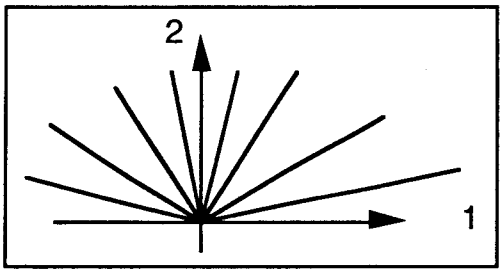


Figure 2.17: Fissures discrètes formant le demi-plan.

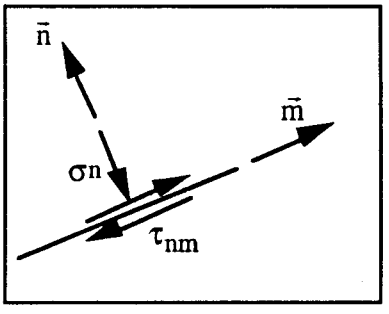


Figure 2.18: Fissure individuelle.

Pour une fissure individuelle, on prend une fonction de charge de la forme donnée par l'équation (2.39 a). Le terme τ dans ce cas désigne la contrainte tangentielle dans le plan de la fissure et $(P + p_0)$ désigne la contrainte normale sur la fissure (figure 2.18). La fissure sera donc dite activée si elle glisse par frottement sur ses lèvres autrement dit si le rapport de la contrainte de cisaillement sur la contrainte normale dépasse un certain seuil de résistance qui est le coefficient de frottement grain à grain sur les lèvres de la fissure.

Soit σ_{ij} le tenseur macroscopique de contrainte en P et soit une fissure quelconque i définie par le couple ($\vec{m}$, $\vec{n}$) de la figure (2.18) (RUDNICKI & RICE, 1975). Le vecteur $\vec{n}$ indique la normale à la fissure et $\vec{m}$ la direction du glissement (plan de la fissure). On suppose qu'au début du processus, la pression moyenne est suffisamment grande pour fermer toutes les fissures.

La contrainte normale sur la fissure s'écrit:

$$\sigma_n = \sigma_{ij}\, n_i\, n_j \qquad (2.52)$$

et la contrainte tangentielle:

$$\tau_{mn} = \sigma_{ij}\, n_i\, m_j \tag{2.53}$$

de façon que la fissure i est activée (la surface de charge F_i est atteinte) si:

$$\tau_{mn} - \mu\,\sigma_n = 0 \tag{2.54}$$

2.5.4.2 Détermination du tenseur de comportement.

Pour déterminer l'expression des déformations plastiques et du tenseur de comportement D dans ce modèle, nous nous référons à la théorie de la plasticité multipotentielle. SIMO & al (1987) ont formulé un modèle à surface de charge irrégulière de ce genre et en ont déduit un algorithme d'intégration. Nous faisons ici une présentation due à SEWELL (1974) et NEMAT-NASSER (1993).

Considérons qu'au point singulier P la surface de charge soit l'enveloppe de N surfaces de charge individuelles dans l'espace des contraintes $F_i\left(\sigma,\gamma^i\right)\quad i=1,\ldots,N$ où on suppose que chaque fonction de charge dépend de N paramètres d'écrouissage γ^i. En condition de charge plastique (au moins une surface de charge atteinte), l'incrément total de déformation s'écrit:

$$\dot{\varepsilon} = E:\dot{\sigma} + \dot{\gamma}^i \Gamma^i \tag{2.55}$$

où E est le tenseur de compliance élastique et Γ^i la normale à la fonction de charge F_i en P. En fait, on fait l'hypothèse de la règle de normalité et on écrit:

$$\Gamma^i = \frac{\partial F_i}{\partial \sigma} \tag{2.56}$$

Dans l'équation (2.55), la sommation se fait sur les fissures activées et $\dot{\gamma}^i$ désigne l'incrément de la variable d'écrouissage γ^i. La relation de consistance s'écrit pour chaque fissure activée:

$$\dot{F}_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma^i:\dot{\sigma} + h^{ij}\,\dot{\gamma}^j = 0 \quad ; \quad h^{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial \gamma^j} \tag{2.57}$$

Si la matrice h^{ij} admet un inverse, on peut écrire à partir de l'équation (2.57):

$$\dot{\gamma}^i = -h^{ij}_{-1}\Gamma^j : \dot{\sigma} \tag{2.58}$$

et en mettant $\dot{\sigma}$ en facteur dans l'équation (2.55), on identifie le tenseur tangent de compliance:

$$E' = E - h^{ij}_{-1}\,\Gamma^i \otimes \Gamma^j \tag{2.59}$$

Appelons ϕ^i l'équivalent de F_i dans l'espace des déformations. L'incrément total de contrainte s'écrit:

$$\dot{\sigma} = C : \dot{\varepsilon} - \dot{\gamma}^i \Pi^i \tag{2.60}$$

où C est le tenseur des coefficients d'élasticité et Π^i la normale à ϕ^i dans l'espace des déformations:

$$\Pi^i = -\frac{\partial \phi^i}{\partial \varepsilon} \tag{2.61}$$

La relation de consistance donne:

$$\dot{\phi}^i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\Pi^i : \dot{\varepsilon} + g^{ij}\dot{\gamma}^j = 0 \quad ; \quad g^{ij} = \frac{\partial \phi^i}{\partial \gamma^j} \tag{2.62}$$

Si la matrice g^{ij} admet un inverse, on peut écrire:

$$\dot{\gamma}^i = g^{ij}_{-1}\Pi^j : \dot{\varepsilon} \tag{2.63}$$

A partir des équations (2.60) et (2.63), on isole le tenseur élastoplastique de comportement:

$$D = C - g^{ij}_{-1}\Pi^i \otimes \Pi^j \tag{2.64}$$

Les deux équations de consistance (2.57) et (2.62) doivent être équivalentes. En plus, les équations (2.55) et (2.60) doivent être compatibles. On en déduit:

$$\Pi^i = C:\Gamma^i \quad ; \quad \Gamma^i = E:\Pi^i \tag{2.65}$$

En injectant l'équation (2.65) dans les équations de consistance (2.57) et (2.62), il vient:

$$\left(\left(g^{ij} + h^{ij}\right) - \left(\Gamma^i:C:\Gamma^j\right)\right)\dot{\gamma}^j = 0 \tag{2.66}$$

Ce qui est automatiquement vérifié si:

$$g^{ij} + h^{ij} = \Gamma^i:C:\Gamma^j \tag{2.67}$$

2.5.4.3 Simulations.

On discrétise le demi-plan en un nombre N de fissures (figure 2.17). En fonction de l'orientation de la fissure et du tenseur de contrainte macroscopique, on détermine la valeur de la fonction de charge (équation 2.54) pour chaque fissure. Ici, on considère que la fonction de charge sur chaque fissure dépend d'une seule variable d'écrouissage γ^p définie par l'équation (2.39 b). Le coefficient de frottement μ est pris égal pour toutes les fissures et on garde la même forme qu'à la figure (2.11) (équation 2.42). Physiquement, ceci peut avoir l'explication suivante: la résistance initiale au glissement est égale à μ_0. Au fur et à mesure que le déviateur macroscopique augmente, le rapport $\frac{\tau_{mn}}{\sigma_n}$ augmente également et atteint pour la première fois μ_0 pour une certaine orientation. Ensuite, μ_0 passe à $\mu_1 \succ \mu_0$ pour un certain niveau de déformation plastique. C'est la phase d'écrouissage positif où il faut augmenter le déviateur pour activer de nouvelles fissures. Puis, lorsque les grains entre les lèvres des fissures sont complètement écrasés, il n'y a plus de résistance des fissures au glissement et la valeur de μ commence donc à chuter.

Le fait de prendre une variable d'écrouissage unique simplifie le problème. En effet, dans ces conditions, la matrice h^{ij} est diagonale et directement inversible. Par rapport au cas simple de plasticité classique, les routines d'évaluation de la surface de charge enveloppe, du calcul des déformations plastiques et du tenseur élastoplastique de

comportement sont modifiées. A chaque étape de calcul, les opérations spécifiques à ce modèle sont:

a) - Faire une boucle sur les orientations discrètes du demi-espace (fissures) et calculer pour chacune d'elles l'expression de la fonction de charge de l'équation (2.54).

b) - Pour toutes les fissures activées, calculer et stocker les dérivées Γ^i et h^{ij}.

c) - Pour toutes les fissures activées, calculer et stocker les g^{ij} par l'équation (2.67).

d) - Inverser g^{ij}.

e) - Calculer les Π^i par l'équation (2.65).

f) - Enfin, évaluer le tenseur de comportement cherché par l'équation (2.64).

A noter que les paramètres du modèle sont uniquement E , υ , c_1 , c_2 , c_3. Les trois derniers sont ceux définis à l'équation (2.42) et gardent les mêmes valeurs que dans le tableau (2.7).

2.5.4.4 Résultats et interprétations

En appliquant ce modèle au grès de Fontainebleau, les courbes expérimentales (déformations axiales, dilatance) sont assez bien reproduites. On arrive à observe la bifurcation avant le pic en contrainte. Surtout la dilatance (exprimée par les déformations latérales). Les tableaux (2.10) donnent les paramètres de la localisation. On note que par rapport au cas de plasticité simple, le module D_{1111} baisse fortement et provoque l'apparition de la localisation alors que les modules de cisaillement gardent toujours leurs valeurs élastiques. Les résultats correspondants aux discrétisations N et 2N (avec N = 45) sont quasiment identiques.

Les valeurs de θ sont différentes de ce qu'on trouve expérimentalement. Pourtant les valeurs de ψ (tableau 2.10 3) correspondant à la cinématique de localisation dans ce cas (entre 30° et 40°) sont plus acceptables physiquement. Le rapport de q_{bif} (= 403 MPa) sur q_{max} (= 441MPa) est ici de 0.91. Ce qui est également acceptable.

IIC	D_{1111}	D_{2222}	D_{1212}	D_{1122}	D_{2211}	D_{1112}	D_{1211}	D_{1222}	D_{2212}
73	822	28328	12591	3214	3214	0	0	0	0
74	322	28328	12591	3149	3149	0	0	0	0
85	-2099	28300	12591	2560	2560	0	0	0	0

Tableau 2.10 1: Modules élastoplastiques pour P_c = 30 MPa (modèle de fissures).

IIC	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
73	$1.04\ e^7$	0	$-6.8\ e^7$	0	$3.57\ e^8$
74	$4.06\ e^6$	0	$-8.01\ e^7$	0	$3.57\ e^8$
85	$-2.64\ e^7$	0	$-1.3\ e^8$	0	$3.58\ e^8$

Tableau 2.10 2: Coefficients pour P_c = 30 MPa (modèle de fissures).

q_{bif}	θ	χ	ψ
403	15	-17	32
	-15	17	32
	21	-20	41
	-21	20	41

Tableau 2.10 3: Paramétres de bifurcation pour P_c = 30 MPa (modèle de fissures).

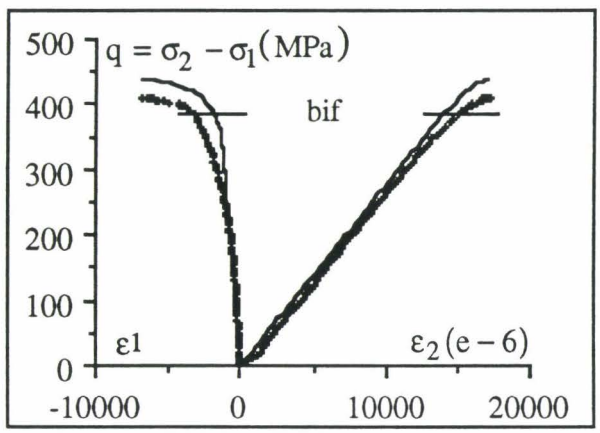


Figure 2.19: Bifurcation dans le grès (modèle de fissures).

2.6 CONCLUSION

Ce chapitre a été consacré à l'étude de la bifurcation par localisation des déformations dans trois matériaux différents.

Pour les deux premiers, la craie de Haubourdin décrite par le modèle *laderock* et la marne décrite par un modèle modifié de KHAN, on montre que la violation de la règle de normalité suffit pour atteindre le critère de RICE. Pour ces matériaux plastiques peu dilatants, la cinématique de localisation correspond au cisaillement. Seulement, nous ne disposons pas de résultats expérimentaux relatifs à la bifurcation pour les comparer aux résultats numériques.

Le troisième matériau qui est le grès de Fontainebleau et pour lequel le seuil de localisation en contrainte est estimé expérimentalement à 85 % du pic et l'orientation de la bande θ entre 63° et 67°, a été étudié plus complètement. Notons que ce matériau a une forte susceptibilité à la microfissuration et présente un comportement fortement dilatant. On montre d'abord que quand il est étudié à l'aide d'une loi élastoplastique simple (modèle de RICE), la non-normalité ne suffit plus pour faire apparaître la localisation. En effet, pour cette plasticité simple dite *coaxiale*, le critère de RICE est une équation polynomiale biquadratique où les modules de plasticité ne baissent pas suffisamment par rapport à leurs valeurs élastiques pour provoquer l'emergence du critère.

Ensuite, on montre que compte tenu de la nature fragile et microfissurée de cette roche, un modèle à surface de charge irrégulière (*vertex*) basé sur l'activation préférentielle des microfissures en fonction de la direction du chargement rend mieux compte du comportement du grès. Dans ce cadre, un terme additionnel dit *coaxial non-linéaire* s'ajoute à l'incrément de déformation plastique. Le critère de RICE cesse d'être une équation polynomiale biquadratique et on obtient la bifurcation pour un niveau de contrainte de 95 % par rapport au pic et deux orientations θ non symétriquess de 43° et 63°. L'une des valeurs de θ correspond à ce qu'on trouve expérimentalement. Pourtant, la cinématique globale de la localisation s'apparente à un cisaillement.

Enfin, pour mieux affiner ces résultats, un modèle complet de fissures basé sur les mêmes considérations physiques a été étudié. On montre alors que dans ce cadre, le critère de RICE redevient une équation polynomiale biquadratique mais les modules plastiques baissent suffisamment pour provoquer l'occurrence du critère. Le seuil de localisation en contrainte de 90 % s'approche plus des observations expérimentales. L'ordre de grandeur

de θ est plus faible (15° - 17°) mais la cinématique globale de localisation est plus proche de ce qui est physiquement acceptable.

Chapitre 3 LOCALISATION DES DEFORMATIONS PAR L'APPROCHE DE REGULARISATION VISCOPLASTIQUE.

3.1 LIMITES DU FORMALISME DE RICE.

Le critère de RICE qui est un critère d'instabilité rhéologique permet, pour un point matériel subissant une histoire de déformation, de prévoir les conditions locales de bifurcation. Il nous donne des indications sur l'instant de l'histoire de déformation à partir duquel on n'a plus théoriquement le droit de poursuivre les calculs à cause de la perte d'ellipticité des équations d'équilibre qui régissent le problème (DIOUTA & al, 1994, DIOUTA & al, 1995a). En somme, ce critère permet de détecter l'instabilité (pré - localisation) mais ne donne pas d'informations sur la façon dont l'instabilité évolue pour provoquer la rupture (problème de post-localisation). Si on considère le critère de RICE comme un système dont l'entrée est un modèle, la sortie est constituée du niveau de chargement où l'instabilité est apparue et l'angle qui définit localement la normale à la bande de localisation potentielle. Quand on passe d'un point matériel à un système de points, on a affaire avec un problème aux limites qu'on peut résoudre par exemple par la méthode d'éléments finis (figure 3.10). Le problème de localisation s'énonce alors de la façon suivante:

Etant donné un domaine géométriquement défini, soumis à des conditions aux limites et (ou) initiales données, où naît la bande de localisation? Quand naît-elle? Quelles sont ses caractéristiques (en particulier sa direction et sa largeur) et comment évolue -t - elle? La formulation de RICE ne répond pas à la plupart de ces questions et surtout ne donne aucune indication sur la largeur de la bande. Nous en avons exposé déjà les raisons plus haut. La notion de bande de localisation dans un domaine comme celui défini sur la figure (3.10) implique un champ de contraintes non uniforme. La formulation de RICE se fait en statique. Or, si on résoud le problème de la figure (3.10) en statique, pour des forces ou déplacements imposés, il ne présente aucune non uniformité. La relation de comportement a la même structure en tous les points du domaine. Si le critère de RICE est atteint, il l'est en même temps en tous les points et on ne peut pas mettre en évidence un domaine particulier qu'on peut identifier comme bande de localisation. C'est pour cette raison que dans toutes les méthodes que nous avons qualifiées de descriptives, un *point faible* ou *défaut* est nécessaire pour *forcer* le critère en un point précis (PREVOST & al, 1981, PREVOST, 1984, ORTIZ & al, 1987, DE BORST, 1989, LARSSON & al, 1991). Nous avons déjà commenté cette catégorie de méthodes. Ici, nous proposons une méthode prédictive qui est une procédure unifiée de traitement de la pré-localisation et de la post-

localisation. Les principaux précurseurs de cette méthode sont NEEDELMAN (1988 & 1989) et LORET & PREVOST (1990, part 1 & part 2). Dans cette méthode, la technique de relaxation dynamique permet de générer un champ non uniforme de contraintes sur le domaine.

La relaxation dynamique est en fait une méthode unifiée de résolution des problèmes statiques et dynamiques. Elle a été mise en oeuvre par OTTER (1966) et UNDERWOOD (1983) qui l'ont utilisée à l'origine pour une résolution numérique par différences finies des équations. Elle a ensuite été étendue aux éléments finis (ZIENKIEWICZ & al, 1985) et on peut en trouver un exposé et des applications dans ZIENKIEWICZ & al (1989, Volume 2). Son principe est le suivant: Pour trouver la solution d'un problème statique, on le formule en dynamique avec une discrétisation temporelle explicite. Ainsi, à des temps proches du début, la présence des forces d'inertie crée une inuniformité des champs et au fur et à mesure que le temps augmente, les vitesses et les accélérations s'amenuisent et tendent vers zéro et on trouve la solution statique. En somme, par cette technique de relaxation dynamique, la solution statique uniforme est la solution en *régime établi* d'un problème *transitoire* pour lequel la solution est non uniforme.

L'introduction d'une viscosité fictive dans les modèles élastoplastiques simples permet d'assurer l'hyperbolicité des équations tout au long du processus de calcul. La non-objectivité que constitue la dépendance de la largeur de bande au maillage est levée. Aucun critère explicite de localisation n'est donnée et la bande apparaît *naturellement*. La combinaison de ces deux aspects - relaxation dynamique et viscosité fictive - constitue la méthode de régularisation viscoplastique.

3.2 FONDEMENTS THEORIQUES DE LA METHODE DE REGULARISATION VISCOPLASTIQUE.

Les fondements de cette méthode se résument aux différences sur le problème de bifurcation en mode localisé entre l'approche dynamique par rapport à l'approche statique d'une part (PASTOR & al, 1992), et d'autre part l'influence du caractère visqueux des modèles par rapport aux modèles non visqueux. C'est NEEDELMAN (1988) qui a établi ces différenciations. Nous résumons ci-après ses principales conclusions.

Soit le problème de cisaillement unidimensionnel défini par la figure (3.1). Le propos est de caractériser la bifurcation en mode localisé dans les conditions suivantes:

a) Pour un modèle élastoplastique sans viscosité.

La loi de comportement s'écrit incrémentalement:

$$\dot{\tau} = G(\dot{\gamma} - \dot{\gamma}^p) \tag{3.1}$$

avec:

$$\dot{\gamma}^p = \begin{cases} \dfrac{\dot{\tau}}{H} & \text{charge plastique} \\ 0 & \text{décharge élastique} \end{cases} \tag{3.2}$$

où τ est la contrainte de cisaillement, γ la déformation associée, G le module de cisaillement et H le module plastique. En combinant les équations (3.1) et (3.2), on peut écrire:

$$\dot{\tau} = \begin{cases} G_t \dot{\gamma} & \text{charge plastique} \\ G\dot{\gamma} & \text{décharge élastique} \end{cases} \quad \text{avec} \quad G_t = \frac{G}{1 + \dfrac{G}{H}} \tag{3.3}$$

i) Analyse en statique.

Si au cours du processus une bande de localisation apparaît, la condition d'équilibre continu à la frontière de cette bande impose $\dot{\tau}_b = \dot{\tau}_0$ où l'indice b est relatif à la bande et τ_0 désigne la contrainte à l'extérieur de la bande. La condition de bifurcation se réduit pour ce cas simple à:

$$G_t(\dot{\gamma}_b - \dot{\gamma}_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad G_t = 0 \tag{3.4}$$

La déformation moyenne s'écrit:

$$\dot{\gamma} = (1-\beta)\dot{\gamma}_0 + \beta\dot{\gamma}_b \tag{3.5}$$

ce qui compte tenu de l'équation (3.3) et de la condition $\dot{\tau}_b = \dot{\tau}_0$ entraîne:

$$\dot{\tau} = \frac{G_t \dot{\gamma}}{\beta + (1-\beta)\dfrac{G_t}{G}} \tag{3.6}$$

avec $\beta = \frac{h_b}{h}$ (figure 3.1). Cette analyse ne permet pas d'identifier β (qui définit implicitement la largeur de la bande) de manière unique (NEEDELMAN, 1988). Quand β tend vers zéro, tout le domaine est en décharge élastique. Et quand β tend vers un, tout le domaine est en charge plastique.

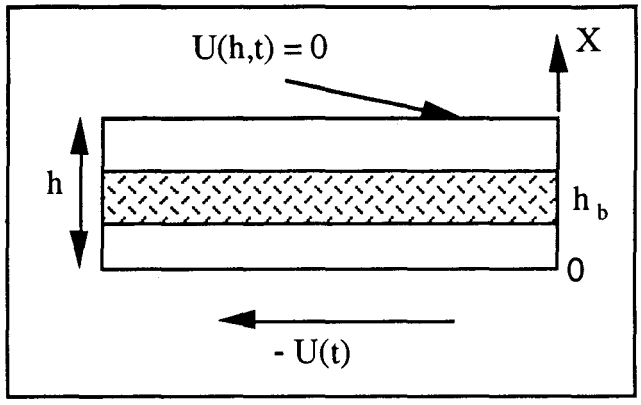


Figure 3.1: Schématisation d'un problème de cisaillement unidimensionnel (NEEDELMAN, 1988).

ii) Analyse en dynamique.

En combinant les équations du mouvement avec la loi de comportement, on peut écrire:

$$\begin{cases} \rho v_{,tt} = G_t v_{,xx} & \text{charge plastique} \\ \rho v_{,tt} = G v_{,xx} & \text{décharge élastique} \end{cases} \tag{3.7}$$

où v ($v(0,t) = -\dot{U}(t), v(h,t) = 0$) est la fonction vitesse de déplacement et ρ la masse volumique. En cas de charge plastique, l'équation (3.7) est l'équation de propagation d'une onde de vitesse:

$$c_t = \sqrt{\frac{G_t}{\rho}} \tag{3.8}$$

Quand on impose une vitesse aux points x = 0 (figure 3.1), compte tenu des effets d'inertie, elle met du temps pour cheminer jusqu'à x = h (l'onde ou la perturbation se propage à une certaine vitesse). Supposons qu'au moment où on impose cette vitesse v aux

points x = 0, l'intensité de v soit telle que G_t s'annule ou devienne négatif. Alors la vitesse de propagation c_t s'annule ou devient imaginaire aux points x = 0. En d'autres termes, la perturbation imposée ne se propage pas. Le lieu des points x = 0 est donc une surface de discontinuité où les déformations se localisent et on ne peut plus transmettre les perturbations de x = 0 à x = h. Par rapport au cas statique, la localisation naît en un point précis à cause de la non uniformité engendrée par la présence des forces d'inertie. La formulation en dynamique permet de mettre en évidence l'émergence d'une zone de localisation de façon naturelle. Seulement dans une modélisation éléments finis, la dimension de cette zone sera égale à celle du premier élément (figure 3.2). C'est la sensibilité de la largeur de bande de localisation au maillage.

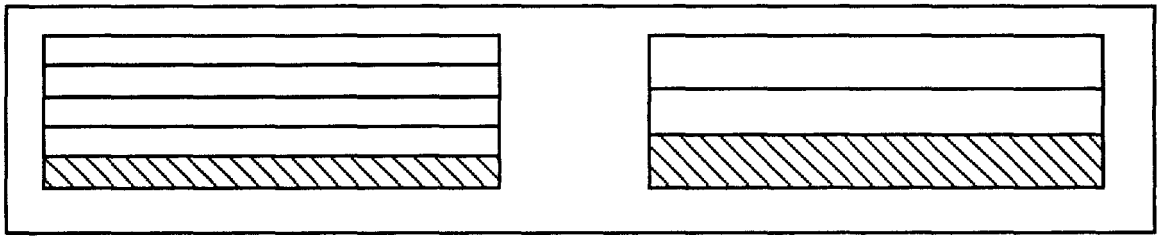


Figure 3.2: Zone de localisation fonction du maillage.

Pour une analyse en dynamique, la localisation correspond à la perte d'hyperbolicité des équations de mouvement. La zone de localisation est celle où les vitesses d'ondes plastiques sont nulles ou imaginaires. Cette zone est en conséquence une surface caractéristique à travers laquelle on ne peut plus transmettre les informations.

En résumé, pour un modèle non visqueux, que ce soit en analyse statique ou dynamique, la solution au problème de bifurcation en mode localisé admet un choix arbitraire de largeur de la bande de localisation. Aucune grandeur dans ce cas ne permet de garantir l'unicité de cette largeur.

b) Pour un modèle élastoplastique avec viscosité.

A la différence des lois de comportement élastoplastiques sans viscosité, l'incrément de déformation visco-plastique ne dépend pas des grandeurs incrémentales. Dans le cas présent, l'équivalent de l'équation (3.2) s'écrit:

$$\dot{\gamma}^p = \frac{f(\tau, g)}{\eta} \tag{3.9}$$

où η a la dimension du temps et g est un paramètre d'écrouissage. Par exemple, la loi puissance s'écrit:

$$f(\tau,g)=\left(\frac{\tau}{g}\right)^{\frac{1}{m}} \tag{3.10}$$

i) Analyse en statique.

La condition d'équilibre continu à la frontière d'une bande éventuelle impose compte tenu des équations (3.1), (3.9) et la condition $\dot{\tau}_b=\dot{\tau}_0$:

$$G(\dot{\gamma}_b-\dot{\gamma}_0)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\gamma}_b=\dot{\gamma}_0 \tag{3.11}$$

En d'autres termes, toute localisation est exclue. Si on suppose qu'au départ, il existe une imperfection de largeur h_b de propriétés différentes, alors on peut écrire:

$$(\dot{\gamma}^p)_b=\frac{f_b(\tau,g_b)}{\eta_b} \qquad \text{dans l'imperfection;}$$

$$(\dot{\gamma}^p)_0=\frac{f_0(\tau,g_0)}{\eta_0} \qquad \text{hors de l'imperfection.}$$

En combinant ces deux expressions à l'équation (3.5) et à la condition $\dot{\tau}_b=\dot{\tau}_0$, on obtient le système:

$$\begin{cases}(1-\beta)\dot{\gamma}_0+\beta\dot{\gamma}_b=\dot{\gamma}\\ -\dot{\gamma}_0+\dot{\gamma}_b=-\dfrac{f_0(\tau,g_0)}{\eta_0}+\dfrac{f_b(\tau,g_b)}{\eta_b}\end{cases} \tag{3.12}$$

Le système (3.12) en $\dot{\gamma}_0$ et $\dot{\gamma}_b$ a une solution unique car son déterminant vaut 1 quel que soit β. Dans ce cas, le problème admet un mode de déformation localisé où la largeur de la bande coïncide avec celle de l'imperfection.

En somme, l'introduction d'une viscosité dans la loi élastoplastique assure l'ellipticité des équations d'équilibre et l'unicité de la solution du problème. D'où le terme de régularisation.

ii) Analyse en dynamique.

En cas de charge plastique, la combinaison des équations de mouvement et de la loi de comportement donne:

$$\rho v_{,tt} = G v_{,xx} - G \frac{f(\tau, g)_{,x}}{\eta} \tag{3.13}$$

Si on pose:

$$T = \eta \quad ; \quad c = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad ; \quad L = c\,T \tag{3.14}$$

la longueur caractéristique L est la distance que parcourt l'onde de vitesse c pendant le temps caractéristique T. Par rapport à l'équation (3.7), l'équation (3.13) réduite aux termes de dérivées secondes, décrit la propagation d'une onde dont la vitesse reste toujours élastique même en phase de charge plastique. Le problème est régularisé dans le sens où la vitesse de propagation c étant toujours strictement positive, les équations du mouvement gardent leur hyperbolicité. Il n'est plus nécessaire de distinguer la procédure de pré-bifurcation de celle de post-bifurcation. La longueur caractéristique L définit la largeur minimum de la bande de localisation. Rappelons qu'elle résulte de la combinaison de la formulation en dynamique (où on définit la vitesse c) et l'introduction d'une viscosité (par l'intermédiaire du temps caractéristique η). Dans une modélisation éléments finis, la largeur de la bande est au moins égale à L et la rupture, si elle a lieu par localisation des déformations, dissipera une quantité finie d'énergie. NEEDELMAN (1989), LORET & PREVOST (1990, part 1 & part 2), LORET & al (1991) et HARIRECHE & LORET (1992) ont étendu les principales conclusions ci-dessus aux cas bidimensionnel ou tridimensionnel. Passons maintenant à l'application de cette méthode de régularisation viscoplastique au problème qui nous concerne.

3.3 DEFINITION DU PROBLEME A RESOUDRE.

Le problème à résoudre est décrit géométriquement sur les figures (3.9) et (3.10). Il s'agit de simuler les modes de localisation, quand ils existent, dans un échantillon

parallélipipédique de grès de Fontainebleau soumis à une compression triaxiale à partir du formalisme de régularisation viscoplastique.

Pour des raisons de symétrie, seul le quart supérieur de l'échantillon a été maillé. Les conditions aux limites sont représentées sur la figure (3.10 b). Aucun effort n'est imposé et on impose une vitesse constante aux points supérieurs pour simuler la compression. Pour les conditions initiales, on considère qu'à l'instant initial, l'échantillon est au repos et des contraintes initiales sont égales aux pressions de confinement des essais triaxiaux en laboratoire (5, 10, 20, 30 MPa, figure (3.10 b)).

La solution numérique de ce problème sera obtenue à l'aide de la méthode des éléments finis. Dans le paragraphe suivant, nous présentons l'algorithme explicite de discrétisation temporelle.

Dans un premier temps, le modèle élastoplastique simple non visqueux du paragraphe (2.5.2.1) a été utilisé comme loi de comportement. On met en évidence dans ce cas la sensibilité de la largeur de bande au maillage sur deux maillages distincts. Ensuite, on introduit une viscosité fictive au sens de LORET et & al (1990, part 1) dans la loi constitutive pour régulariser le problème.

3.4 ALGORITHME DE DISCRETISATION TEMPORELLE.

Après discrétisation spatiale, la forme matricielle de l'équation à résoudre s'écrit en l'absence du terme d'amortissement:

$$M\ddot{u} + Ku = F(t) \tag{3.15}$$

où $\ddot{u}$ est le vecteur global des accélérations nodales, u le vecteur global des déplacements nodaux, M la matrice globale de masse, K la matrice globale de rigidité et F le vecteur global des forces extérieures donné. A l'instant initial, les déplacements et vitesses sont connus.

La méthode explicite est une méthode de différences finies centrales. Nous avons déjà commenté le choix de cette méthode dans l'introduction à ce chapitre. Par cette méthode, on détermine à chaque instant t les paramètres du problème uniquement à partir de leurs valeurs aux instants antérieurs. Pour cela, on fait les approximations suivantes (discrétisation temporelle):

$$\ddot{u}_t = \frac{1}{\Delta t^2}\left(u_{t+\Delta t} - 2u_t + u_{t-\Delta t}\right) \quad ; \quad \dot{u}_t = \frac{1}{2\Delta t}\left(u_{t+\Delta t} - u_{t-\Delta t}\right) \tag{3.16}$$

où $\dot{u}$ désigne le vecteur vitesse de déplacement et Δt l'incrément de temps. En posant:

$$\Delta u_t = u_{t+\Delta t} - u_t \tag{3.17}$$

l'équation (3.15) devient:

$$\overline{K}\,\Delta u_t = \overline{R}_t \tag{3.18}$$

avec:

$$\begin{cases} \overline{K} = M \\ \overline{R}_t = \Delta t^2 F_t + M\left(u_t - u_{t-\Delta t}\right) - \Delta t^2 K u_t \\ \ddot{u}_0 = \ddot{u}_{(t=0)} = M^{-1}\left(F_0 - K u_0\right) \\ u_{-\Delta t} = u_0 - \Delta t\,\dot{u}_0 + \dfrac{\Delta t^2}{2}\ddot{u}_0 \end{cases} \tag{3.19}$$

Ainsi, pour calculer $u_{t+\Delta t}$, on n'a besoin que des grandeurs à l'instant t qui sont déjà déterminées. Le terme $K u_t$ représente en fait le vecteur des forces intérieures nodales. On peut donc écrire:

$$\overline{R}_t = M\left(u_t - u_{t-\Delta t}\right) + \Delta t^2\left(F_t^{ext} - F_t^{int}\right) \tag{3.20}$$

Ceci traduit l'un des avantages majeurs de la méthode explicite car on peut résoudre le problème (trouver l'incrément de déplacement) sans jamais calculer de façon explicite la matrice de rigidité. Ce qui fait gagner du temps de calcul. Il est aussi d'usage de diagonaliser la matrice de masse. La résolution du système discret défini à l'équation (3.18) se simplifie alors énormément car il n'y a plus aucune *factorisation* de matrice à faire. L'inconnue est évaluée par élimination directe.

La procédure de diagonalisation que nous avons retenue est décrite dans ZIENKIEWICZ & al (1989, Volume 2). Si on appelle M la matrice *consistante* ou *pleine* et $\overline{M}$ la matrice triangularisée correspondante, on écrit:

$$\overline{M}_{ii} = a\, M_{ii} \quad i = 1, \ldots, ddl \tag{3.21}$$

où ddl désigne le nombre total de degrés de liberté et le coefficient a est défini tel que:

$$\sum_i \overline{M}_{ii} = \int_\Omega \rho \, d\Omega = \text{masse totale de la structure} \tag{3.22}$$

Dans les méthodes explicites, le pas de temps Δt doit être choisi suffisamment petit pour assurer la convergence et vérifier les conditions de stabilité. Dans le cas de la viscoplasticité qui nous préoccupe ici, le pas de temps Δt doit vérifier les critères de convergence au niveau de l'algorithme global d'intégration des équations de mouvement ainsi qu'au niveau de l'algorithme local d'intégration de la loi viscoplastique. Au niveau global, le critère de convergence s'écrit (HUGHES & al, 1978, HUGHES, 1987):

$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega_{max}} \tag{3.23}$$

où ω_{max} est la plus grande fréquence propre du système. Pour un maillage régulier formé de rectangles de cotés h_1 et h_2, le critère (3.23) devient:

$$\Delta t = \frac{1}{c} \min(h_1, h_2) \tag{3.24}$$

où c est la valeur élastique de le vitesse d'onde longitudinale. Cette limite est en fait le temps que met une onde longitudinale pour traverser l'élément. CORMEAU (1975) a établi les critères de convergence au niveau local. Mais pour la plupart des matériaux courants, la condition la plus restrictive est donnée par le critère de convergence au niveau global. Nous retiendrons donc uniquement cette borne pour le choix du pas de temps.

3.5 PROCEDURE D'INTRODUCTION DE LA VISCOSITE FICTIVE.

La viscosité fictive est introduite selon la procédure décrite par LORET & al (part 1). Il s'agit d'introduire un paramètre $\eta > 0$, de la dimension du temps, appelé temps de

relaxation. La loi d'écoulement pour le modèle viscoplastique s'écrit alors en notation matricielle:

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}^{vp} = \dfrac{1}{\eta} C^{-1}(\sigma - \overline{\sigma}) & \text{en cas de charge plastique} \\ 0 & \text{pour la décharge élastique} \end{cases} \tag{3.25}$$

où C est la matrice d'élasticité. Ce qui se résume par:

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \frac{1}{\eta} C^{-1}(\sigma - \overline{\sigma}) H[F(\sigma(t))] \tag{3.26}$$

Le terme $F(\sigma(t))$ désigne la valeur de la fonction de charge au point courant de contrainte $\sigma(t)$ et H(x) est la fonction définie par:

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \succ 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \tag{3.27}$$

L'évolution de la variable d'écrouissage γ est donnée par:

$$\dot{\gamma} = -\frac{1}{\eta}(\gamma - \overline{\gamma}) H[F(\sigma(t))] \tag{3.28}$$

Le couple $(\overline{\sigma}, \overline{\gamma})$ est la réponse au modèle non visqueux de base qui correspond au cas $\eta = 0$. L'incrément de contrainte provoqué par un incrément de déformation s'écrit donc:

$$\dot{\sigma} = C(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^{vp}) = C\dot{\varepsilon} - \frac{1}{\eta}(\sigma - \overline{\sigma}) H[F(\sigma(t))] \tag{3.29}$$

Puisque les contraintes σ et $\overline{\sigma}$ sont continues aux frontières d'une surface singulière éventuelle, le tenseur acoustique lié à la loi constitutive définie par l'équation (3.29) se réduit à sa partie élastique. Les vitesses d'ondes restent réelles et l'hyperbolicité des équations régissant le problème aux limites est garantie. L'effet de la viscosité est de retarder le développement des déformations plastiques.

3.6 PROGRAMME DE CALCUL.

Un algorithme basé sur les équations décrites ci-dessus a été effectué et introduit dans le code de calcul par éléments finis CESAR, version 3.0 du LCPC. Les principales opérations sont les suivantes:

- Calcul de la masse totale de la structure.

- Calcul de la matrice globale de masse M.

- Calcul du coefficient $a = \dfrac{\text{Masse totale}}{\sum_i M_{ii}}$, $\quad i = 1,..., ddl.$

- Calcul des termes de la matrice diagonale $\overline{M}_{ii} = a\, M_{ii}$ et stockage de la matrice $\overline{M}$ ainsi diagonalisée.

- Initialisation de σ_0 , u_0 , $\dot{u}_0$ et calcul de $\ddot{u}_0$ et $u_{-\Delta t}$.

- Faire la boucle sur les pas de temps. Pour un pas de temps k donné:

1) calculer $\overline{R}_k = \overline{M}(u_k - u_{k-1}) + \Delta t^2 (F_k^{ext} - F_k^{int})$ avec $F_k^{int} = \int_\Omega {}^t B(\sigma_k - \sigma_0)\, d\Omega$ où B est la matrice de transformation classique qui lie les déformations aux déplacements.

2) Calculer Δu_k tel que $\overline{M}\,\Delta u_k = \overline{R}_k$:

$$\Delta u_k^\alpha = \frac{\overline{R}_k^\alpha}{\overline{M}_{\alpha\alpha}},\ \alpha = 1,.....,ddl.$$

3) Calculer $\Delta\sigma_k$ correspondant à Δu_k par le modèle.

4) Incrémenter les déplacements et les contraintes: $u_{k+1} = u_k + \Delta u_k$ et $\sigma_{k+1} = \sigma_k + \Delta\sigma_k$.

5) Passer à l'incrément suivant.

Remarques:

i) Dans le cas que nous traitons, les forces extérieures sont nulles car il n'y a pas de conditions aux limites en force.

ii) Les conditions aux limites (vitesses imposées) sont prises en compte par pénalisation (ou la technique du terme diagonal dominant).

iii) Les intégrations numériques de la masse, de la matrice de masse et des forces internes se fait par la méthode classique de Gauss avec quatre points d'intégration pour des éléments quadrilatères à quatre noeuds.

Pour calculer l'incrément de contrainte (étape 3 de l'algorithme ci-dessus) à partir de l'incrément de déplacement en chaque point d'intégration, on extrait du vecteur global Δu_k le vecteur élémentaire Δu_k^e de l'élément e. Sur l'élément e, au point de gauss G, le vecteur incrément de déformation est donné par:

$$\Delta\varepsilon_k^G = B(G)\,\Delta u_k^e \tag{3.30}$$

A partir de là, on suit le schéma du tableau (2.1) pour trouver au point de Gauss considéré le couple $(\overline{\sigma}_{k+1}, \overline{\gamma}_{k+1})$ correspondant à la réponse au modèle plastique de base sans viscosité. La réponse du modèle viscoplastique est trouvée en intégrant analytiquement les équations visqueuses (3.28) et (3.29). Sous forme algorithmique, on connaît en chaque point d'intégration, au pas de temps k +1, les valeurs de $\sigma_k, \gamma_k, \overline{\sigma}_{k+1}, \overline{\gamma}_{k+1}$ et de $\Delta\varepsilon_{k+1}$. On trouve alors (SIMO & al, 1987):

$$\begin{cases} \sigma_{k+1} = e^{-\frac{\Delta t}{\eta}}\sigma_k + (1-e^{-\frac{\Delta t}{\eta}})\overline{\sigma}_{k+1} + \dfrac{1-e^{-\frac{\Delta t}{\eta}}}{\frac{\Delta t}{\eta}} C\,\Delta\varepsilon_{k+1} \\ \gamma_{k+1} = e^{-\frac{\Delta t}{\eta}}\gamma_k + (1-e^{-\frac{\Delta t}{\eta}})\overline{\gamma}_{k+1} \end{cases} \tag{3.31}$$

3.7 VALIDATION DU PROGRAMME.

3.7.1 Définition du problème de la poutre viscoplastique.

Le programme de calcul ainsi conçu a été utilisé pour traiter un problème *classique* de la littérature afin de tester sa validité. L'exemple choisi est celui de la *poutre*

viscoplastique. Notons que BRICKSTAD (1983) et MORAN (1987) ont utilisé le même exemple pour vérifier la validité de leurs programmes de calcul de même type que le nôtre. Il s'agit d'étudier une poutre, de section droite carrée de coté l, encastrée à ses deux extrémités et soumise à une pression uniforme pendant un temps très court (figure 3.3). On cherche à évaluer la variation de la déflexion du milieu de la poutre. La loi viscoplastique étudiée est de type PERZYNA et son intégration est faite par un schéma explicite basé sur la méthode du module tangent de PEIRCE & al (1984). En résumé, les principales équations constitutives sont:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}^{e}_{ij} + \dot{\varepsilon}^{vp}_{ij} \quad ; \quad \dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}\,\dot{\varepsilon}^{e}_{kl} \tag{3.32}$$

On choisit un critère de VON-MISES associé et la loi d'écoulement s'écrit:

$$\dot{\varepsilon}^{vp}_{ij} = \frac{\Phi}{\eta} r_{ij} \quad ; \quad \Phi = Y\left(\frac{\tilde{\sigma} - Y}{Y}\right)^{n} \quad ; \quad r_{ij} = \frac{3\sigma'_{ij}}{2\tilde{\sigma}} \tag{3.33}$$

où $\tilde{\sigma} = (\frac{3}{2}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij})^{\frac{1}{2}}$ est la contrainte de cisaillement équivalente, σ' le déviateur de contrainte, Y une fonction définissant la limite élastique du matériau et dépendant d'un paramètre d'écrouissage γ, η la viscosité du matériau et n une constante du matériau. La loi d'écrouissage s'écrit:

$$\dot{\gamma} = \frac{\Phi}{\eta} h \tag{3.34}$$

Quand à la méthode d'intégration de PEIRCE & al (1984), son point particulier est d'évaluer de façon explicite une déformation (visco)plastique effective notée λ. On suppose qu'au pas de temps k + 1, la déformation totale est donnée par:

$$\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_{k} + \Delta\varepsilon_{k} \tag{3.35}$$

A partir des équations constitutives, on estime un incrément de λ par:

$$\Delta\lambda = \frac{\Delta t}{\eta}\left((1-\theta)\Phi_{k} + \theta\Phi_{k+1}\right) \; ; \; \Phi_{k} = \Phi_{k}(\sigma_{k}, \gamma_{k}) \tag{3.36}$$

où le coefficient θ est compris entre 0 et 1. En développant Φ_{k+1} en série de Taylor comme:

$$\Phi_{k+1}=\Phi_k+\nu_k:\Delta\sigma_k+\zeta_k\Delta\gamma_k \quad ; \quad \nu_k=\frac{\partial\Phi_k}{\partial\sigma_k} \quad ; \quad \zeta_k=\frac{\partial\Phi_k}{\partial\gamma_k} \tag{3.37}$$

on trouve:

$$\Delta\sigma_k=C:(\Delta\varepsilon_k-\Delta\lambda\, r_k) \tag{3.38}$$

avec:

$$\begin{cases}\Delta\lambda=\dfrac{\Delta t}{\eta(1+\theta)}\Phi_k+\dfrac{\alpha\, t_k^r}{\eta(1+\theta)}\nu_k:C:\Delta\varepsilon_k\\ \alpha=\dfrac{\theta\,\Delta t}{t_k^r}\\ t_k^r=\dfrac{\eta}{\nu_k:C:r_k-\zeta_k h_k}\end{cases} \tag{3.39}$$

et on calcule enfin $\sigma_{k+1}=\sigma_k+\Delta\sigma_k$. Dans cette application, on considére que le matériau n'est pas écrouissable (Y est constant) et le terme t_k^r se réduit à:

$$t_k^r=\frac{\eta}{\nu_k:C:r_k}$$

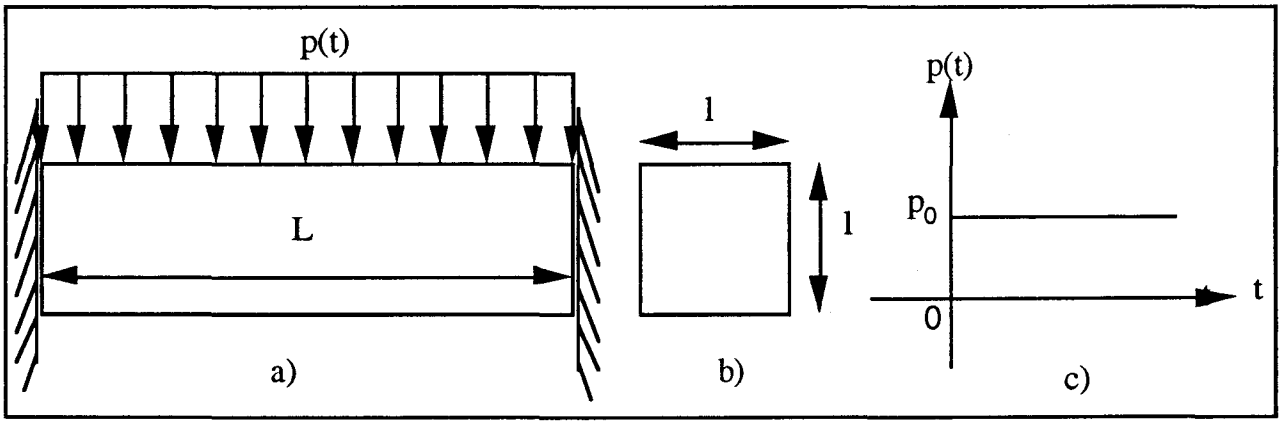


Figure 3.3: Schématisation de poutre: a) Géométrie; b) section droite; c) Allure du chargement en fonction du temps.

Pour des pas de temps Δt très petits, cette méthode donne des résultats peu différents de ceux que donne la méthode d'EULER où les déformations viscoplastiques sont données de façon plus simple par $\varepsilon^{vp}_{k+1} = \varepsilon^{vp}_{k} + \Delta\varepsilon^{vp}_{k}\,\Delta t$.

3.7.2 Résolution numérique.

Ce problème a été modélisé en dimension deux par 80 éléments quadrilatères à quatre noeuds (maillage figure 3.4). La simulation est faite en conditions de contraintes planes. Le pas de temps est limité par (HUGHES, 1987, CORMEAU, 1975):

$$\Delta t \prec \min\left\{\frac{d_{min}}{c}, \frac{4(1+\upsilon)}{3}\frac{Y}{E\omega\Phi'}\right\}$$

où υ est le coefficient de Poisson, $\omega = \dfrac{Y}{\eta}$ le coefficient de fluidité, E le module d'Young et Φ' la dérivée de Φ par rapport à son argument. Sauf pour le cas où ω tend vers l'infini (c'est-à-dire η tend vers zéro ce qui correspond à la plasticité non visqueuse), c'est le terme $\dfrac{d_{min}}{c}$ qui fixe la limite du pas de temps. Précisons que d_{min} désigne la dimension minimale d'une maille. Les valeurs numériques sont:

$$L = 20*1 = 0.508\,m$$
$$p_0 = 43.78\,KN/m$$
$$\rho = 2672\,kg/m^3$$
$$\upsilon = 0.3$$
$$E = 6.8955\ 10^4\,MPA$$
$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 5080\ m/s$$
$$\theta = 0.5$$
$$Y = 276\,MPA$$
$$n = 1$$
$$\Delta t = 8\ 10^{-7}\,s$$

Les simulations sont arrêtées au temps final $t_f = 1.36\ 10^{-3}$ s (soit 1700 pas de temps) et on représente la déflexion au milieu du milieu de la poutre:

i) Pour le cas élastique, η tend vers l'infini ($\omega = 0$): figure (3.5).
ii) Pour le cas viscoplastique, nous avons considéré le cas $\eta = 0.01$: figure (3.6).

Sur les figures (3.7) et (3.8) sont représentés les déformées de la poutre respectivement aux instants particuliers t = $5.576\ 10^{-4}$ s et t = $1.088\ 10^{-3}$ s.

Les figures (3.5) et (3.6) montrent que les résultats de BRICKSTAD (1983) ou MORAN (1987) sont bien reproduits à la différence que nos représentations sont faites en grandeurs absolues alors que les leurs sont faites en grandeurs relatives. Signalons également que certains calculs de NEEDELMAN (1989) et LORET & al (1990, part 2) ont été repris et leurs résultats retrouvés.

3.8 SIMULATION DE LA COMPRESSION SUR PLAQUE DU GRES.

3.8.1 Introduction.

Seul l'essai à 30 MPa de pression de confinement est traité dans cette étude. Deux maillages ont été choisis, l'un lâche et l'autre serré (figure 3.11). Les maillages sont réguliers et formés de quadrilatères à quatre noeuds. Le maillage lâche est composé de 12 x 18 = 216 éléments et le maillage serré de (2 x 12) x (2 x 18) = 864 éléments. Compte tenu des valeurs des paramètres élastiques E = 27700 MPA, ρ = 2000 kg/m^3 et υ = 0.15, les vitesses d'ondes transversale et longitudinale sont respectivement de (équations 1.15):

$$c_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = 2.4539\ 10^3\ m/s$$

$$c_l = \sqrt{\frac{2G(1-\upsilon)}{\rho(1-2\upsilon)}} = 3.8241\ 10^3\ m/s$$

où $G = \dfrac{E}{2(1+\upsilon)}$ est le module de cisaillement. A partir de ces valeurs et des conditions que doit vérifier le pas de temps, on choisit pour le maillage lâche un pas de temps

$\Delta t = 4\ 10^{-7}$ s. Pour le maillage serré, le pas de temps est deux fois plus petit soit $\Delta t = 2\ 10^{-7}$ s.

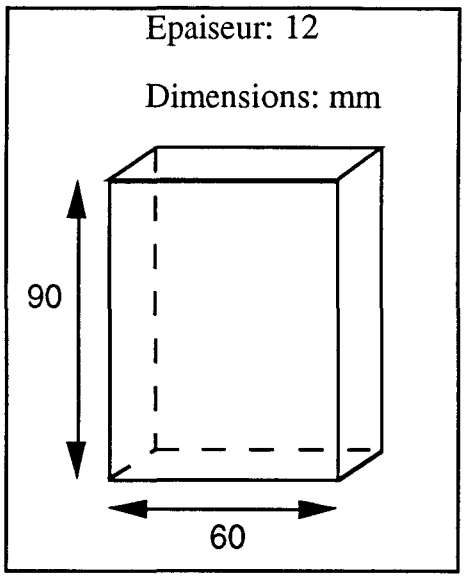


Figure 3.9: Géométrie de l'échantillon.

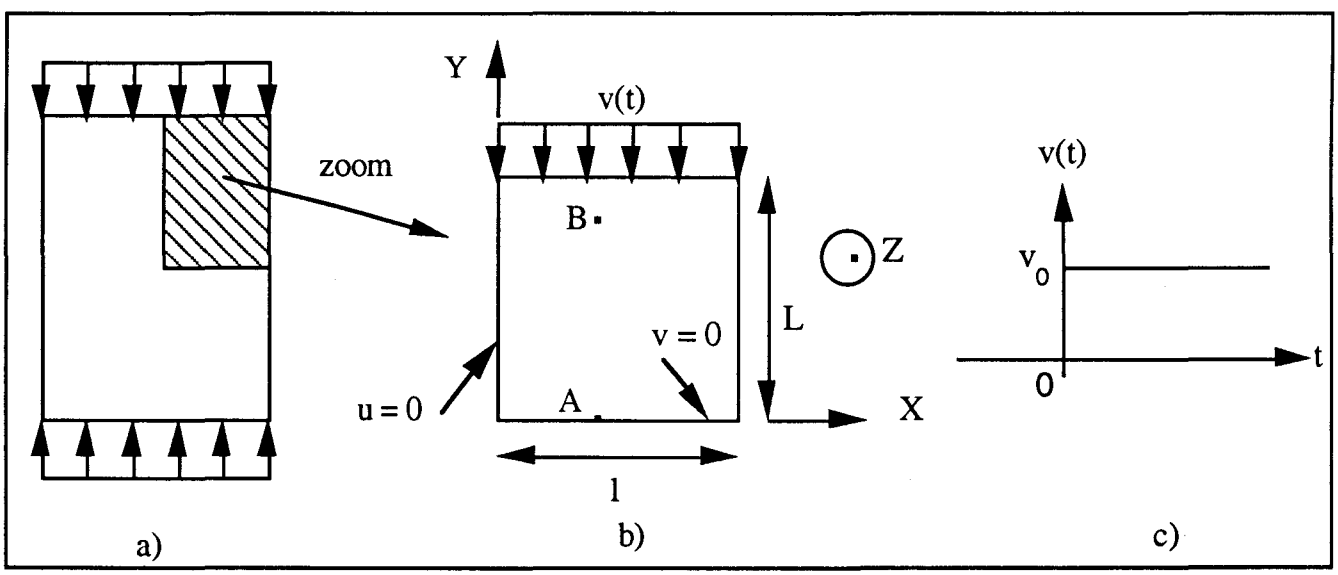


Figure 3.10: a) Modélisation de la compression; b) Conditions aux limites sur le quart de l'échantillon maillé; c) Allure de la fonction vitesse de déplacement imposée aux points y = +L ou y = - L.

La vitesse de déplacement imposée aux points y = L (figure 3.10 c) est choisie de telle sorte que la plasticité s'initialise au milieu de l'échantillon (y = 0). Le paramètre μ au seuil initial d'élasticité est μ_0 (figure 2.10) selon la loi de comportement. On sait que les

deux ondes parties des extrémités de l'échantillon (y = +L et y = -L) au temps initial t_0 se rejoignent au milieu à l'instant t_1. A cet instant, l'effet de la perturbation en A est le double de celui en B (figure (3.10 b)). On choisit donc la vitesse de déplacement v_0 telle que à l'instant t_1:

- En B on ait: $\frac{\tau}{P+p_0} \prec \mu_0 \Leftrightarrow \tau - \mu_0(P+p_0) \prec 0$ (élasticité, équation (2.39 a)).

- En A on ait: $\frac{\tau}{P+p_0} \geq \mu_0 \Leftrightarrow \tau - \mu_0(P+p_0) \geq 0$ (initialisation des déformations plastiques, équation (2.39 a)). La valeur de v_0 a été calée numériquement à:

$$v_0 = 25 \text{ m/s}$$

3.8.2 Modèle de RICE sans viscosité.

Les paramètres utilisés sont ceux du paragraphe (2.5.2.2) (tableau 2. 7). La sensibilité des résultats au coefficient de dilatance β (équation 2. 41) est étudiée. Nous présentons:

- Sur le figure (3.12) les maillages déformées à l'instant t = $2.4\ 10^{-5}$ s où la bande commence à se mettre en place.

- Sur la figure (3.16) les isovaleurs de la déformation équivalente de cisaillement γ^p définie à l'équation (2.39 b) à ce même instant.

- Sur les figures (3.13, 3.17) et (3.14, 3.18) les mêmes résultats aux instants t = $3.2\ 10^{-5}$ s et t = $4.0\ 10^{-5}$ s. A noter que les calculs sont arrêtés au temps t = $4.0\ 10^{-5}$ s où la bande s'est mise en place sur la hauteur totale de l'échantillon. Ce qui représente 100 pas de temps pour le maillage lâche et 200 pas de temps pour le maillage serré.

- Sur la figure (3.15) les contraintes principales pour les deux maillages à l'instant final t = $4.0\ 10^{-5}$ s.

De l'analyse de ces figures, on peut faire les remarques suivantes:

- La localisation des déformations s'initialise au milieu de l'échantillon sans qu'il soit nécessaire d'introduire un élément faible en ce point. A noter que ORTIZ & al, (1987)

et WANG (1993) ont résolu le même problème respectivement par les méthodes d'enrichissement et de superposition spectrale décrites au paragraphe (1.3). Dans les deux cas, ils supposent que un ou plusieurs éléments, arbitrairement choisis (mais en général situés au milieu de l'échantillon), résistent moins que les autres. Ils imposent donc *à priori* le point d'amorçage de la localisation alors que c'est précisément ce qu'on cherche. De plus, dans la méthode de superposition spectrale, c'est la largeur de la bande spectrale, également estimée *à priori*, qui détermine la zone de localisation. Dans la méthode de régularisation viscoplastique par contre, seule la non uniformité du champ de contraintes créée par la présence des forces d'inertie (formulation dynamique), détermine la position sur le domaine du point d'emergence de la localisation des déformations.

- Les largeurs de la bande sont différentes pour les deux maillages (non objectivité).

- Les niveaux de déformation équivalente de cisaillement, à un même instant, sont très différents d'un maillage à l'autre. Par exemple, au temps $t = 4.0\ 10^{-5}$ s (figure 3.18), la valeur maximum de γ^p est de $3.4\ 10^{-1}$ pour le maillage serré alors que cette valeur est de $8.7\ 10^{-2}$ pour le maillage lâche. Le rapport entre ces deux valeurs est de l'ordre de 4.

- A l'instant $t = 2.4\ 10^{-5}$ s où la bande commence à se mettre en place, les valeurs maximales de γ^p sont respectivement de $2.5\ 10^{-2}$ pour le maillage lâche et $7\ 10^{-2}$ pour le maillage serré. Si on porte ces valeurs sur courbe de la figure (2.11), on constate que les points correspondants se trouvent dans la phase d'écrouissage négatif. On peut donc dire que la bande n'apparaît que pour des valeurs de γ^p nettement supérieures à γ^p_m.

- Sur la figure (3.15) représentant les champs de contraintes principales au temps $t = 4.0\ 10^{-5}$ s, la bande est plus nette dans le cas du maillage serré où les contraintes principales subissent une *rotation* dans la bande par rapport à celles de l'extérieur de la bande. Ce qui n'est pas net pour le cas du maillage lâche.

A noter que ce qui précède est obtenu pour une valeur de $\beta = 0.1$. Quand on fait croître la valeur de β, la bande à tendance à disparaître. Par exemple, sur la figure (3.22) nous représentons les maillages déformés pour le cas où β est supérieur à 0.1. La netteté de la bande décroît fortement quand β augmente et pour $\beta = 1$, on ne distingue pratiquement aucune bande alors que les déformées sont agrandies par un facteur de 5 pour les figures (3.22 a, 3.22 b, 3.22 c) et 10 pour la figure (3.22 d). Ce fait pourrait être rapproché au résultat obtenu en analyse statique selon le formalisme de RICE. En effet, pour $\beta = 1$ (forte dilatance), le caractère non associé de la loi est peu marqué ($\beta = 1$ et μ varie entre 1 et 1.4).

Dans ce cas, il faut aller loin en phase d'écrouissage négatif pour atteindre la bifurcation par localisation des déformations. Et pour β petit (β = 0.1 et μ varie entre 1 et 1.4), le caractère non associé est plus prononcé et on peut atteindre la bifurcation pour des modules d'écrouissage positifs ou modérément négatifs.

3.8.3 Introduction de la viscosité: régularisation.

On commence par retrouver tous les résultats du modèle sans viscosité qui correspond à un temps de relaxation η très petit. Dans cette application, pour un rapport de $\frac{\Delta t}{\eta} \approx 10^3$ c'est-à-dire pour η de l'ordre de 10^{-10} s, les résultats du modèle sans viscosité sont retrouvés. A partir de là, on augmente graduellement la valeur de η. Au fur et à mesure que η augmente, les largeurs des bandes se rapprochent pour les deux maillages ainsi que les niveaux de déformation équivalente de cisaillement (visco)plastique γ^p. On poursuit cette opération jusqu'à ce que les différences relatives entre ces paramètres pour les deux maillages soient négligeables. On retient alors la valeur correspondante de η comme temps de relaxation définitif qui permet de calculer la largeur unique de la bande pour les deux maillages. Cette valeur de η est:

$$\eta = 1.5\ 10^{-6}\ \text{s}$$

soit un rapport $\frac{\Delta t}{\eta}$ égal à 0.266 pour le maillage lâche et 0.133 pour le maillage serré. Pour cette valeur de η, l'évolution des paramètres du problème reste la même (figures 3.19, 3.20, 3.21pour γ^p et 3.23 pour les maillages déformés). Si on appelle longueur caractéristique l_c le produit $c\eta$, compte tenu de ce qui a été dit plus haut, la largeur de la bande s'écrit:

$$d = k\, l_c.$$

La valeur de l_c est ici de 5.7 mm. Et en mesurant la largeur de la bande sur les figures (3.23), on détermine la valeur du coefficient k. La valeur mesurée de la largeur d est ici d'environ 12 mm; ce qui donne k = 2. Nous présentons sur les figures (3.24) les échantillons testés. Comme on peut le constater, les largeurs des bandes sont difficilement identifiables. Sur certains échantillons, cette largeur n'est pas constante le long de la bande. Néanmoins, on peut remarquer que les largeurs de bandes observées ne correspondent pas toujours à celles trouvées par calcul. En outre, dans certains cas, on n'observe qu'une seule bande expérimentale (figure 3.24 b).

A propos du niveau d'amorçage de la localisation.

L'effet de la viscosité est de différer le développement des déformations plastiques. Si on compare les figures (3.16) et (3.19) au même instant t = $2.4\ 10^{-5}$ s, on constate que l'amorçage de la localisation pour le cas où existe la viscosité (figure 3.19) se fait à un niveau de déformation de cisaillement équivalente plastique γ^p inférieur au cas sans viscosité. La valeur maximum de γ^p à cet instant est en moyenne de $9.0\,10^{-3}$ (plus précisément $8.0\ 10^{-3}$ pour le maillage lâche et $9.5\ 10^{-3}$ pour le maillage serré) alors qu'elle est d'au moins $2.5\ 10^{-2}$ pour le cas sans viscosité. Sur la figure (2.11), en comparant cette valeur de γ^p avec γ^p_m, on peut dire que la localisation s'initialise pour des valeurs de modules d'écrouissage modérément négatifs ou quasiment nuls. Ce niveau se rapproche donc de ce qui est observé expérimentalement.

Influence de β (coefficient de dilatance)

L'augmentation de β n'entraîne plus la disparition progressive de la bande. Pour le problème régularisé, il n'existe aucune différence entre les figures (3.23 b) et (3.23 c) qui correspondent respectivement à $\beta = 0.1$ et $\beta = 1$ (valeur expérimentale).

3.9 CONCLUSION.

BU LILLE I

Ce chapitre a été consacré à la simulation d'un problème de localisation par la méthode de régularisation viscoplastique. Le programme de calcul conçu à cet effet a été validé sur le problème-test de la *poutre viscoplastique* dont les résultats classiques ont été reproduits. Il a été utilisé pour simuler la localisation des déformations dans un échantillon de grès de Fontainebleau soumis à une compression triaxiale.

Les principaux résultats obtenus sont:

- La localisation des déformations s'initialise au milieu de l'échantillon sans qu'il soit nécessaire d'y introduire une imperfection.

- On peut *visualiser* l'évolution de la bande (post-localisation).
- Lorsqu'on considère que ce matériau obeit à un modèle de RICE non visqueux, on met en évidence la non objectivité numérique traduite par la dépendance de la largeur de

bande au maillage. Dans ce cas, la localisation s'initialise pour des modules d'écrouissage fortement négatifs ($\gamma^p_{loc} > 2.5\ 10^{-2}$; $\gamma^p_m = 8.0\ 10^{-3}$).

- Lorsqu'on introduit une viscosité fictive sous forme de temps de relaxation d'une valeur de $\eta = 1.5\ 10^{-6}$ s, on régularise tout à fait le problème et on trouve une bande de localisation de largeur $2l_c$ où l_c est la longueur caractéristique du matériau. Dans ce cas on trouve $\gamma^p_{loc} \cong 9.0\ 10^{-3}$. L'initialisation de la localisation est presque ramenée en phase d'écrouissage nul.

- L'angle θ qui oriente la bande est mesuré et vaut approximativement $55°$. Ainsi, quand le problème est régularisé, les résultats (paramètres de localisation θ et γ^p_{loc}) sont très proches qualitativement des observations expérimentales.

- Le phénomène de localisation étant irréversible, les déformations plastiques continuent à s'accumuler dans la bande au cours du temps. Cette bande devient le lieu d'initialisation de la rupture qui surviendra pour des valeurs de la déformation équivalente γ^p inadmissibles.

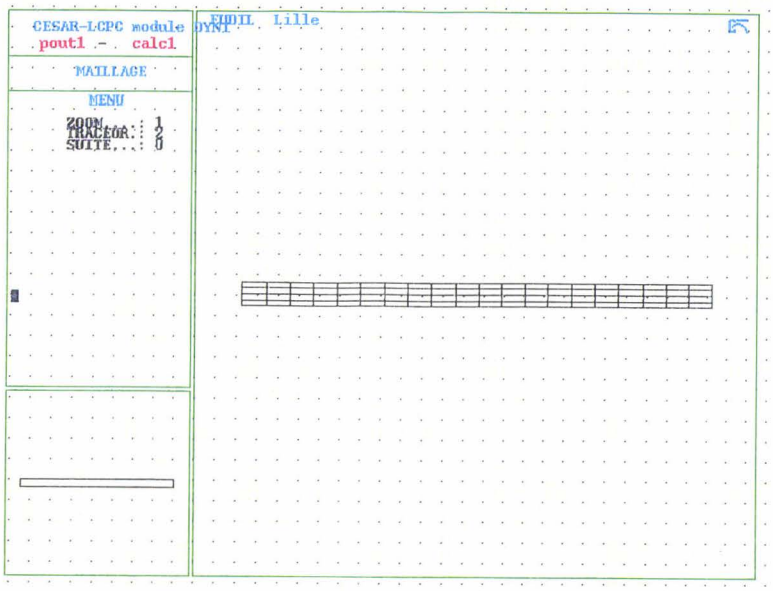


Figure 3.4: Maillage de la poutre.

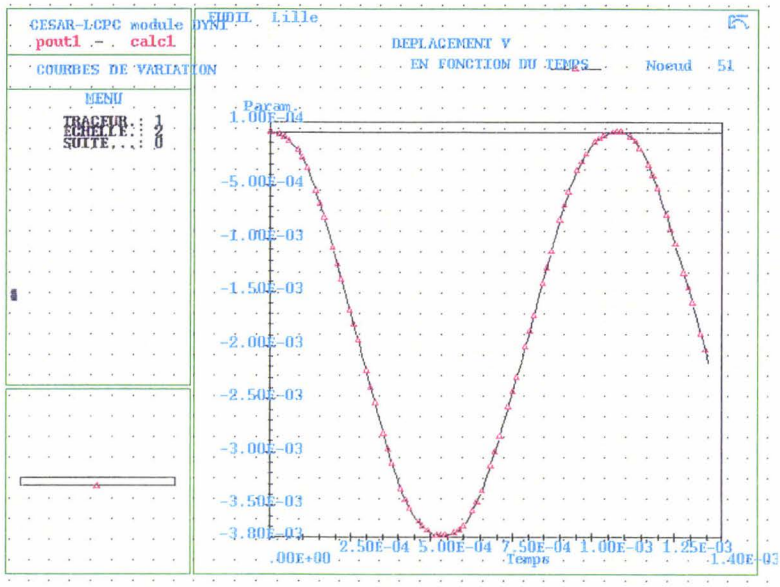


Figure 3.5: Déflexion du point milieu de la poutre (noeud 51): Cas de l'élasticité.

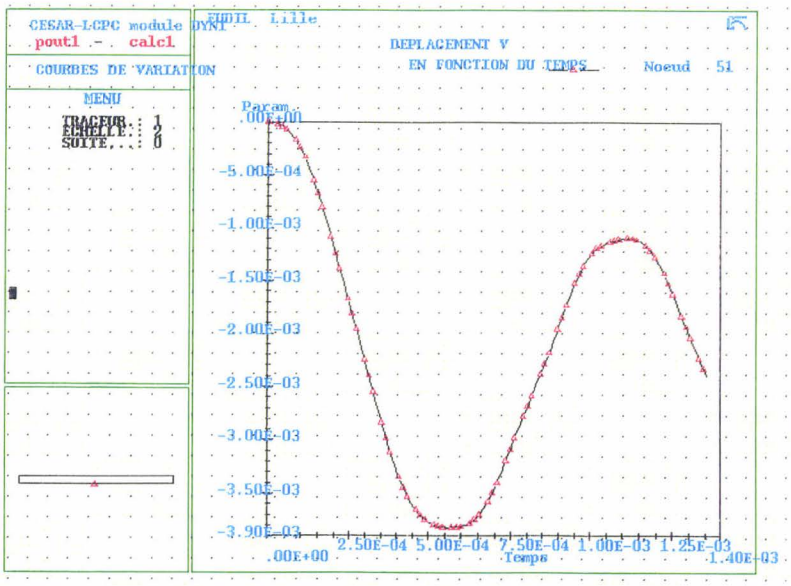
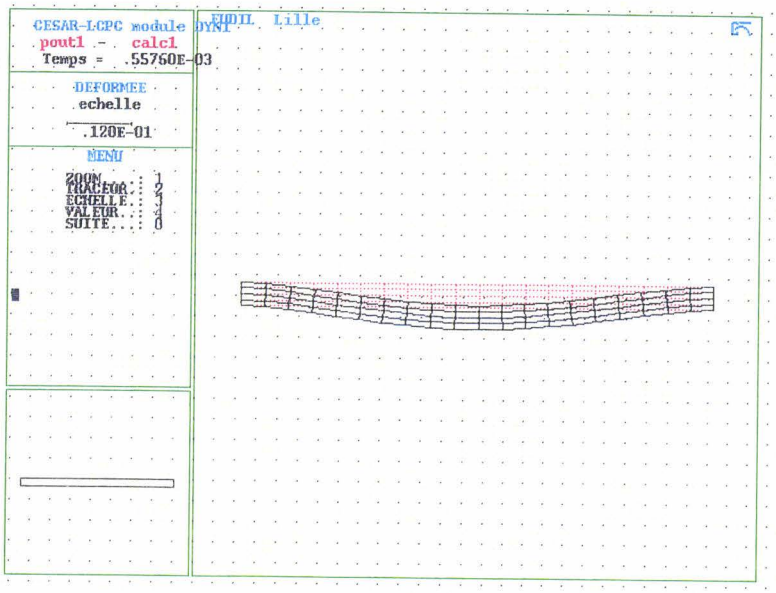
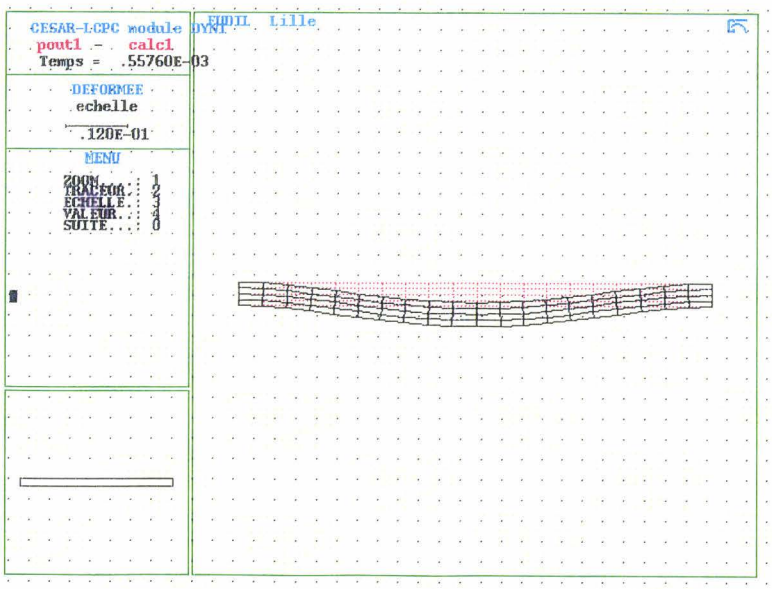


Figure 3.6: Déflexion du point milieu de la poutre (noeud 51): Cas de la viscoplasticité.

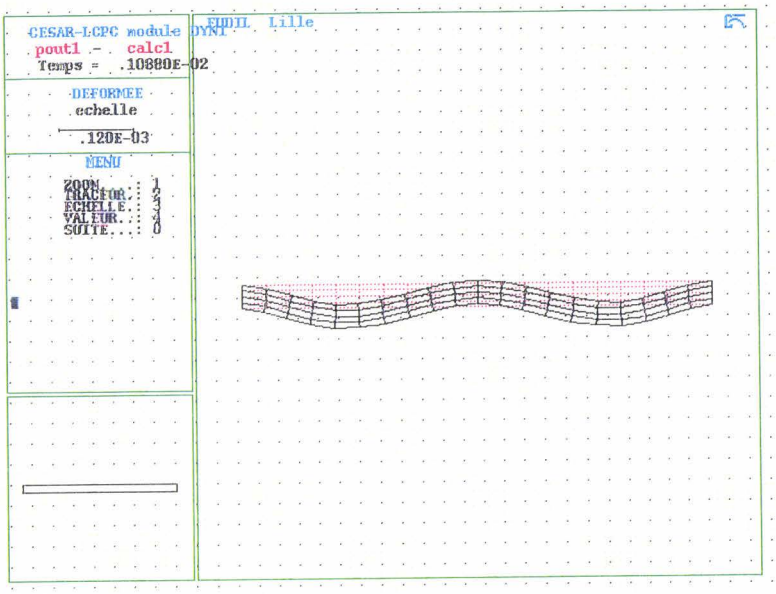


3.7 a) Cas élastique.

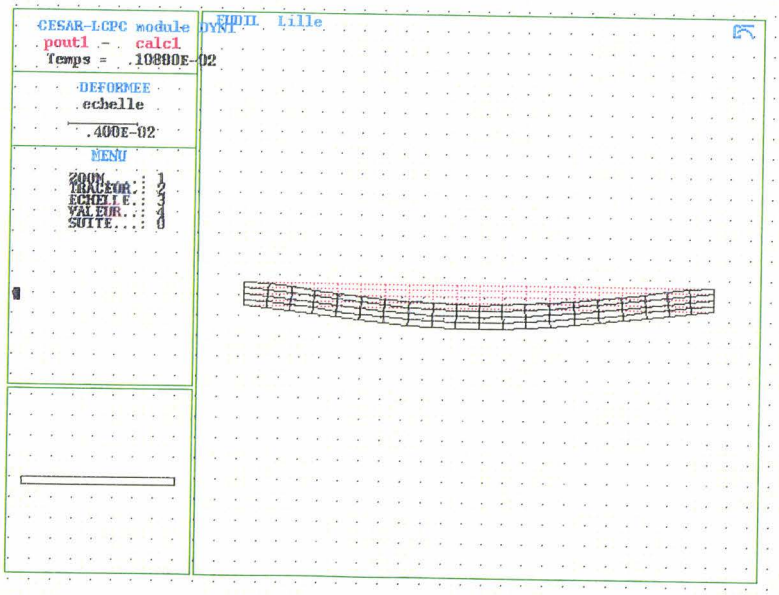


3.7 b) Cas viscoplastique.

Figure 3.7: Déformée de la poutre à l'instant t = 5.576 10^{-4} s où la déflexion du noeud 51 est maximale.

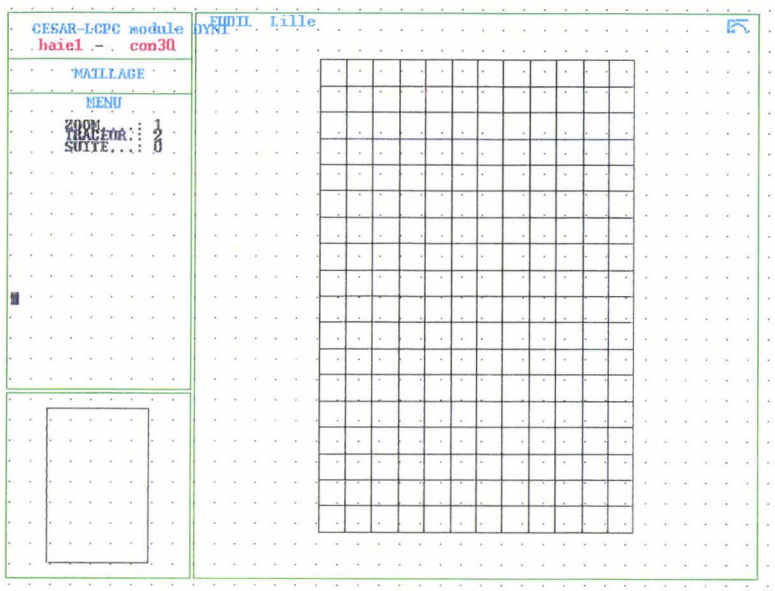


3.8 a) Cas élastique: Le noeud 51 revient à sa position au repos.

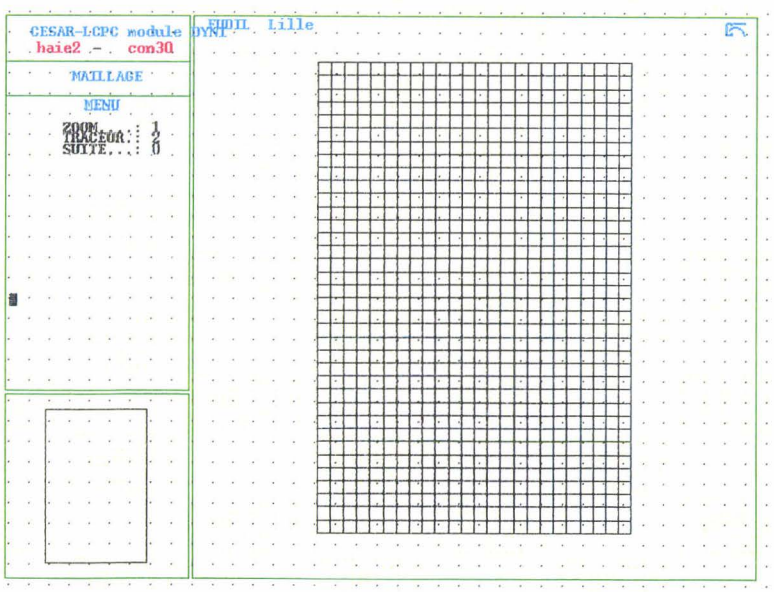


3.8 b) Cas viscoplastique: la déflexion du noeud 51 reste non nulle.

Figure 3.8: Déformée de la poutre à l'instant t = 1.088 10^{-3} s.

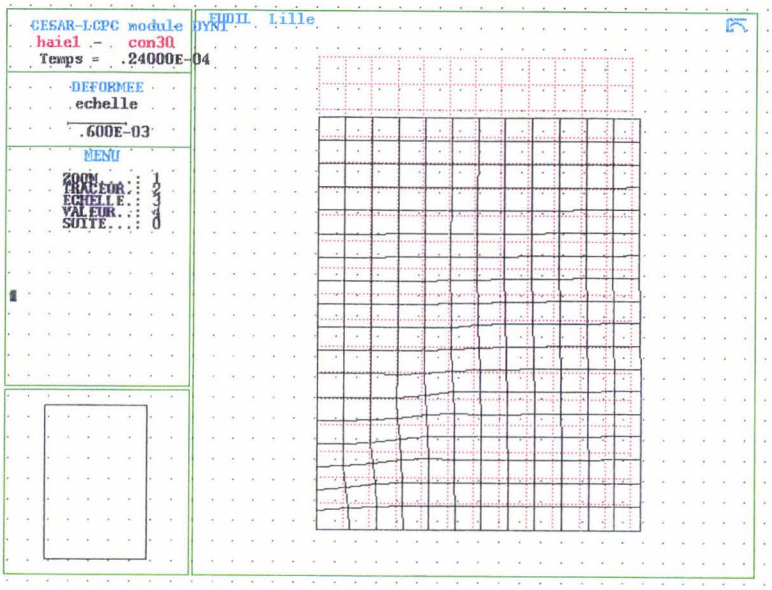


3.11 a) Maillage lâche (ML).

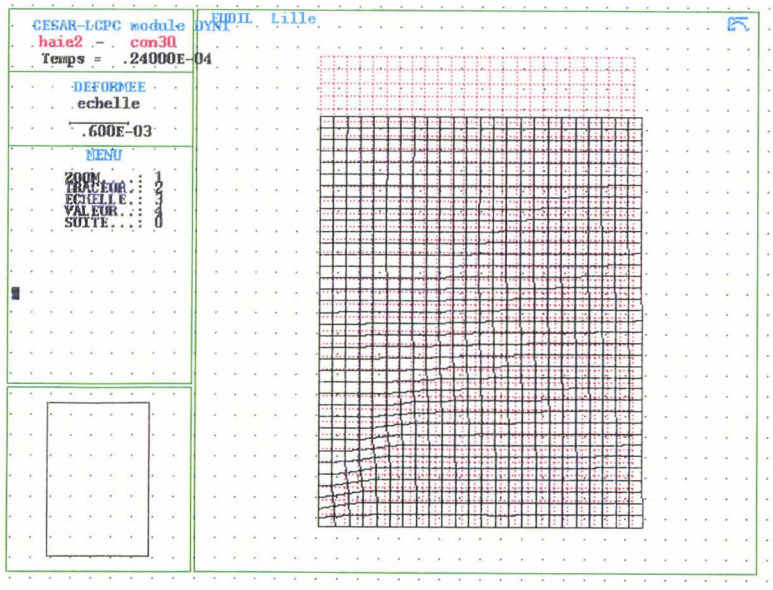


3.11 b) Maillage serré (MS).

Figure 3.11: Maillage du quart d'échantillon du grès.

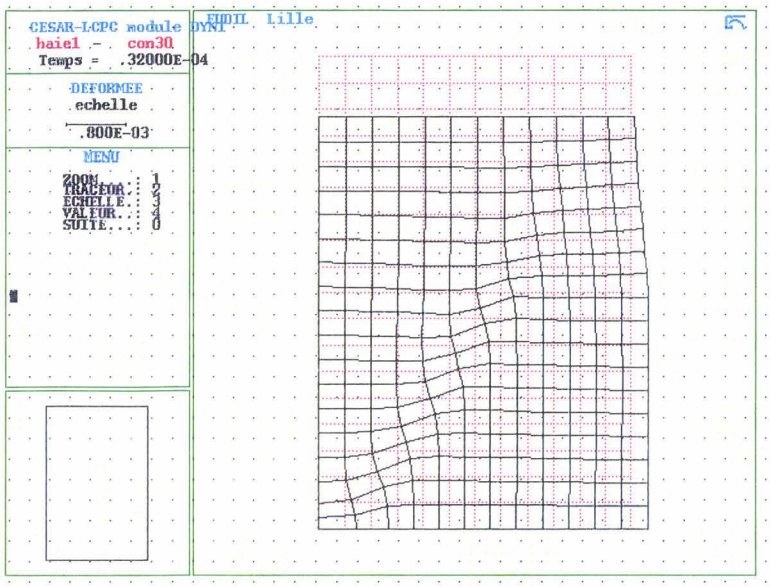


3.12 a) Maillage lâche.

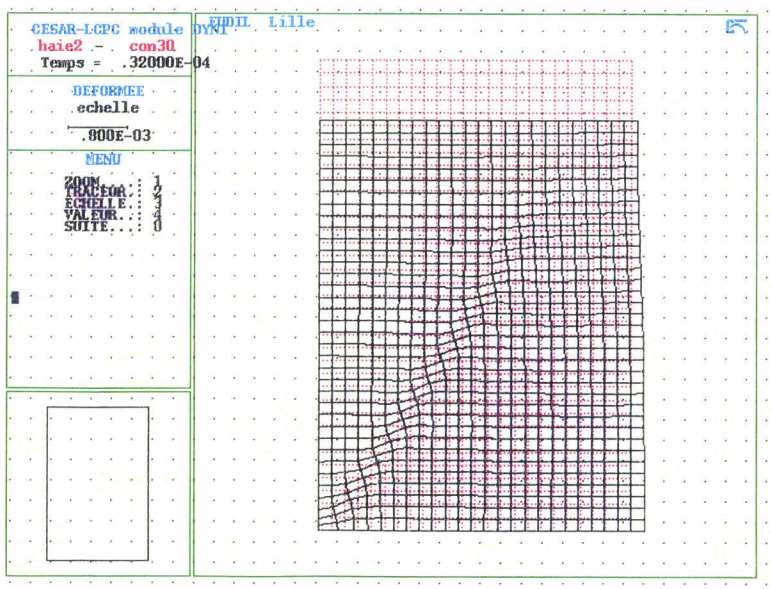


3.12 b) Maillage serré.

Figure 3.12: Maillages déformés (agrandis par un facteur 3) à l'instant t = 2.4 10^{-5} s ($\beta = 0.1$, sans viscosité).

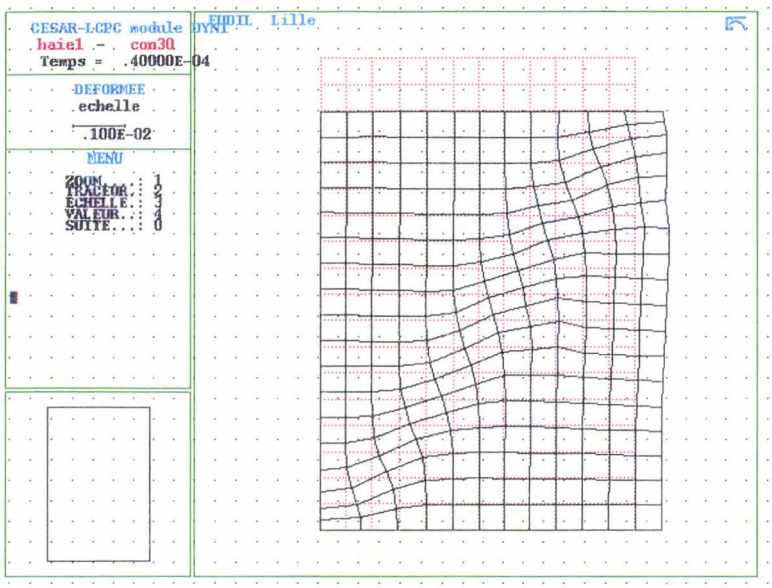


3.13 a) Maillage lâche.

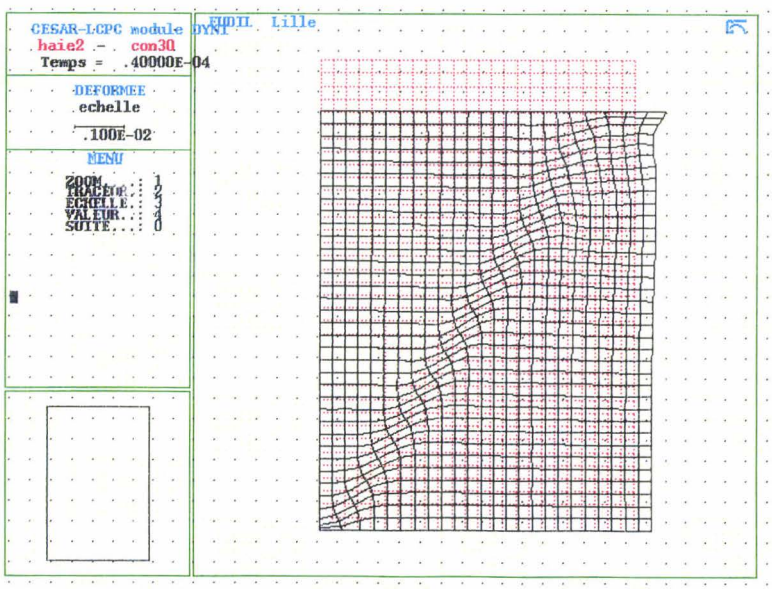


3.13 b) Maillage serré.

Figure 3.13: Maillages déformés (agrandis par un facteur 3) à l'instant t = 3.2 10^{-5} s ($\beta = 0.1$, sans viscosité).

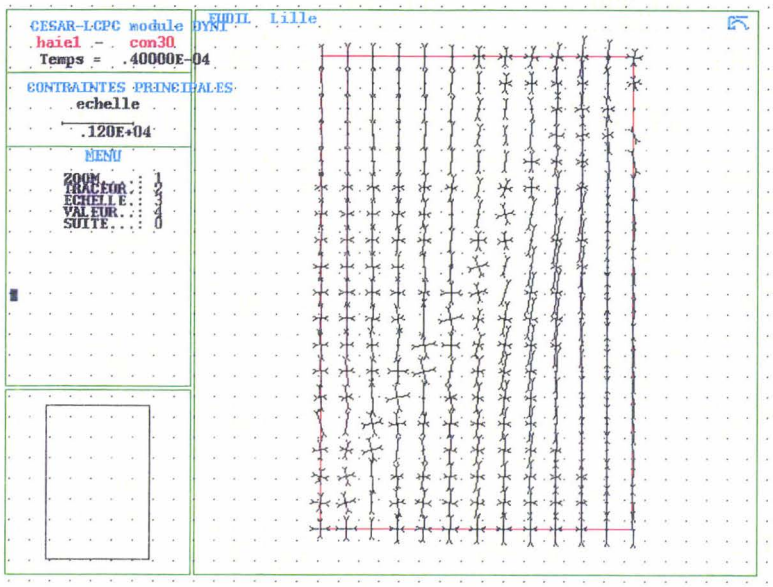


3.14 a) Maillage lâche.

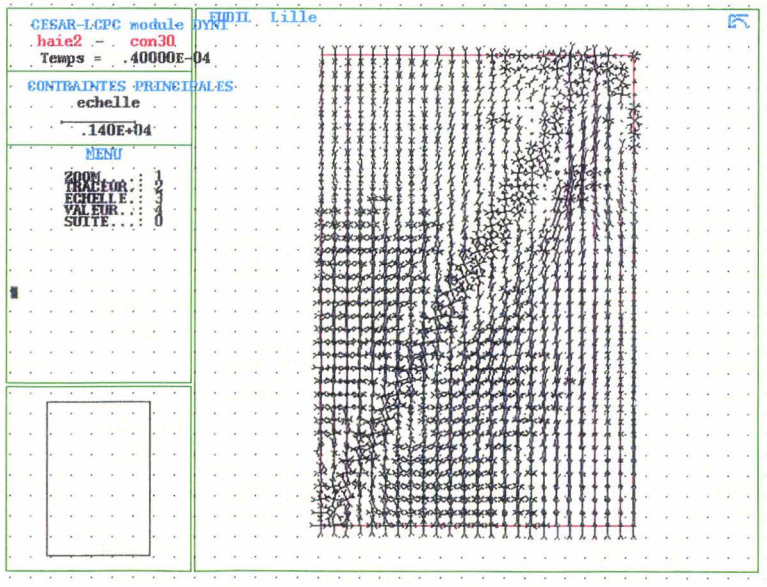


3.14 b) Maillage serré.

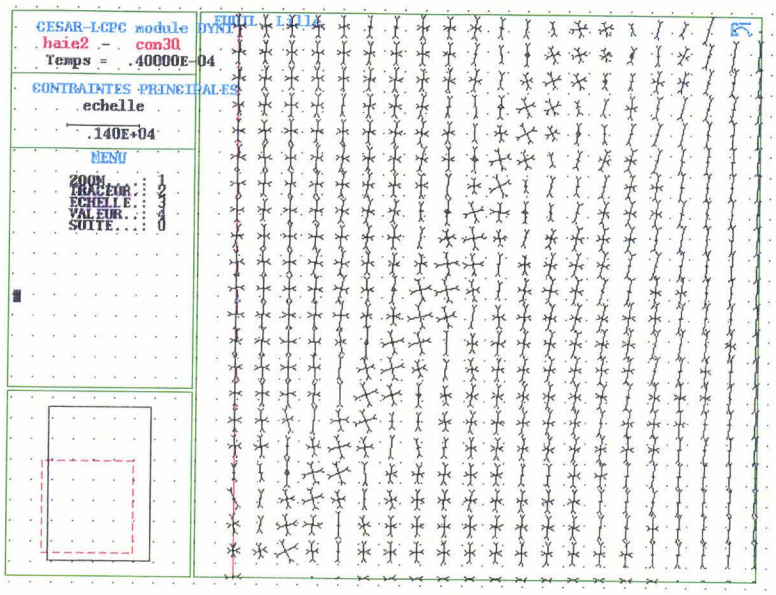
Figure 3.14: Maillages déformés (agrandis par un facteur 3) à l'instant $t = 4.0\,10^{-5}$ s ($\beta = 0.1$, sans viscosité).



3.15 a) Contraintes pour le maillage lâche.

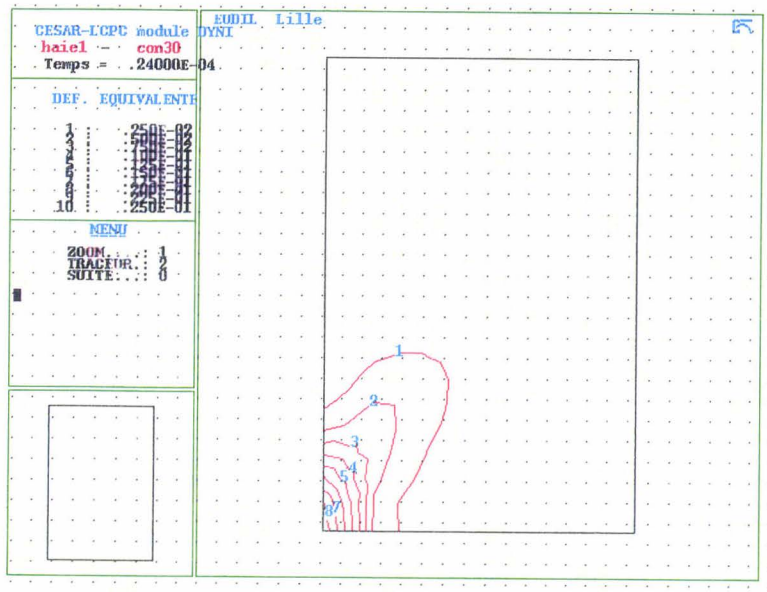


3.15 b) Contraintes pour le maillage serré (nette rotation des contraintes dans la bande).

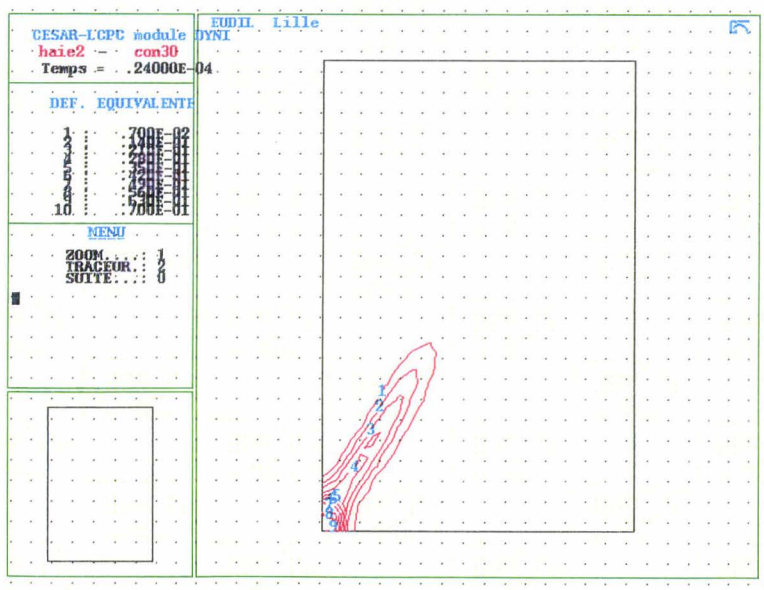


3.15 c) Zoom de b).

Figure 3.15: Contraintes principales à l'instant t = $4.0\,10^{-5}$ s ($\beta = 0.1$, sans viscosité).

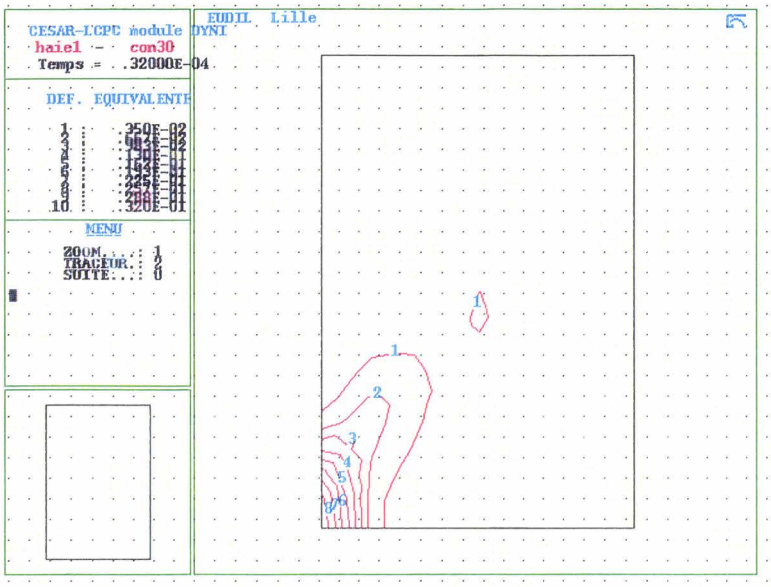


3.16 a) Maillage lâche.

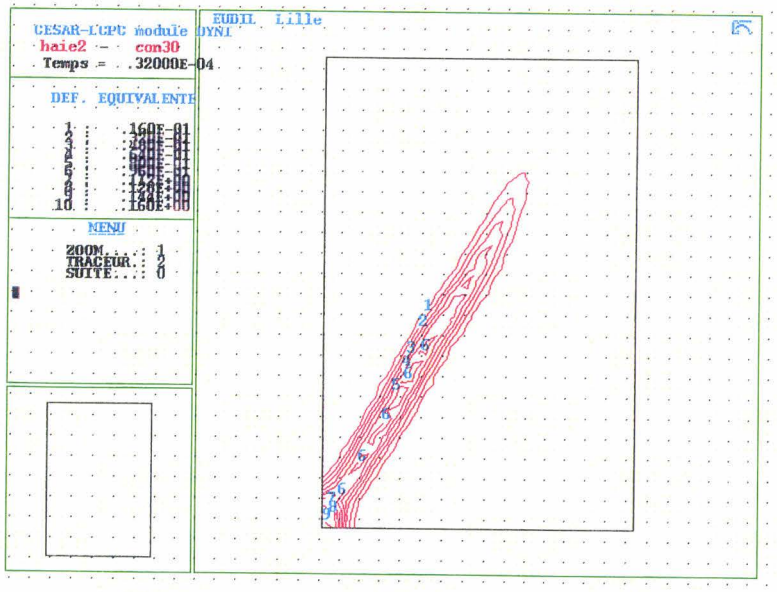


3.16 b) Maillage serré.

Figure 3.16: Isovaleurs de déformation équivalente γ^p à l'instant t = 2.4 10^{-5} s ($\beta = 0.1$, sans viscosité).

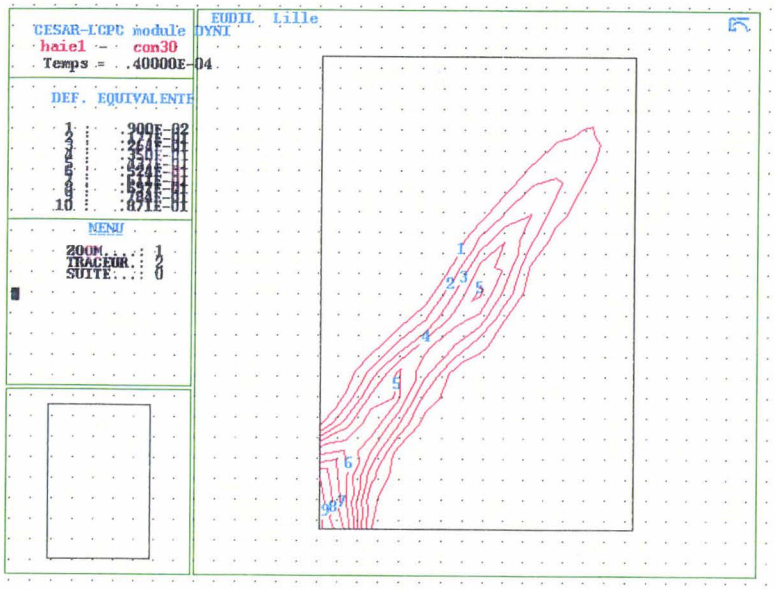


3.17 a) Maillage lâche.

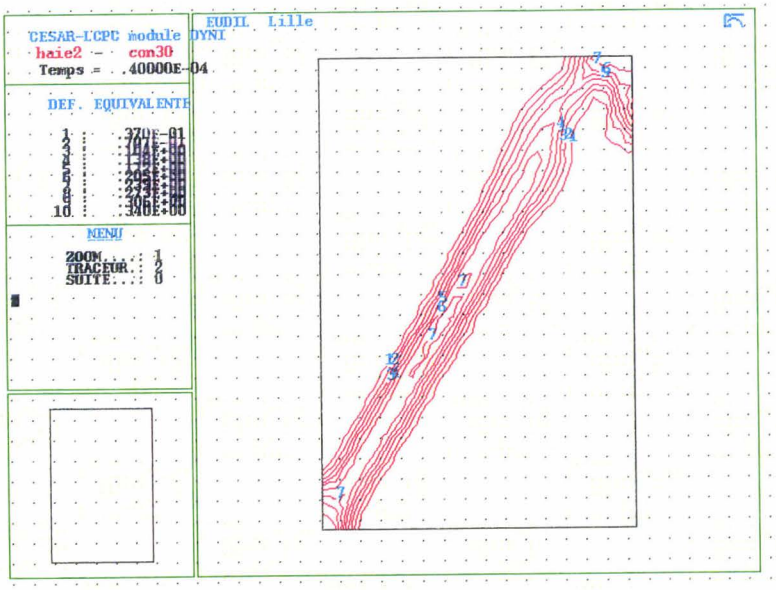


3.17 b) Maillage serré.

Figure 3.17: Isovaleurs de déformation équivalente γ^p à l'instant t = 3.2 10^{-5} s ($\beta = 0.1$, sans viscosité).

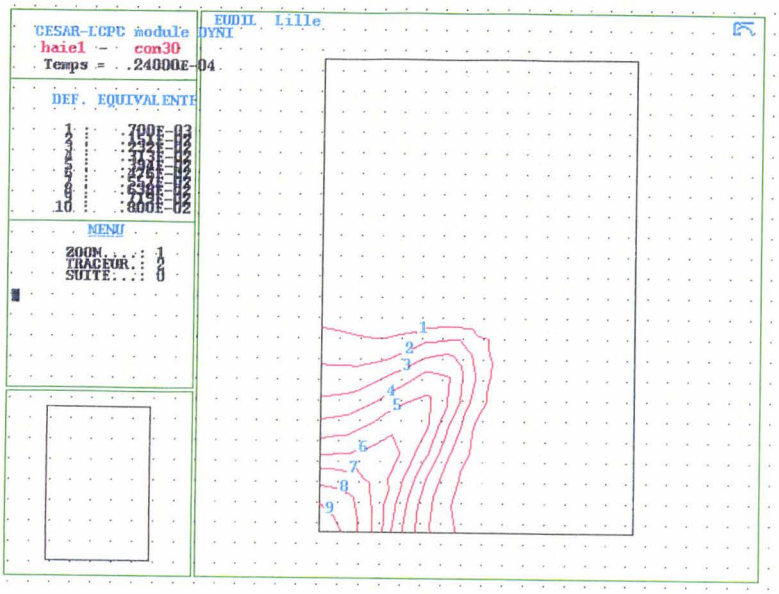


3.18 a) Maillage lâche.

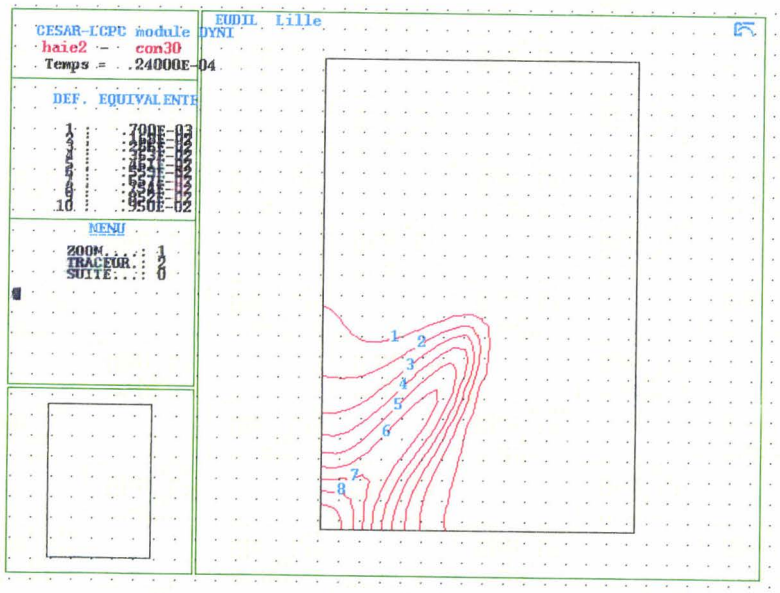


3.18 b) Maillage serré.

Figure 3.18: Isovaleurs de déformation équivalente γ^p à l'instant t = $4.0\,10^{-5}$ s ($\beta = 0.1$, sans viscosité).

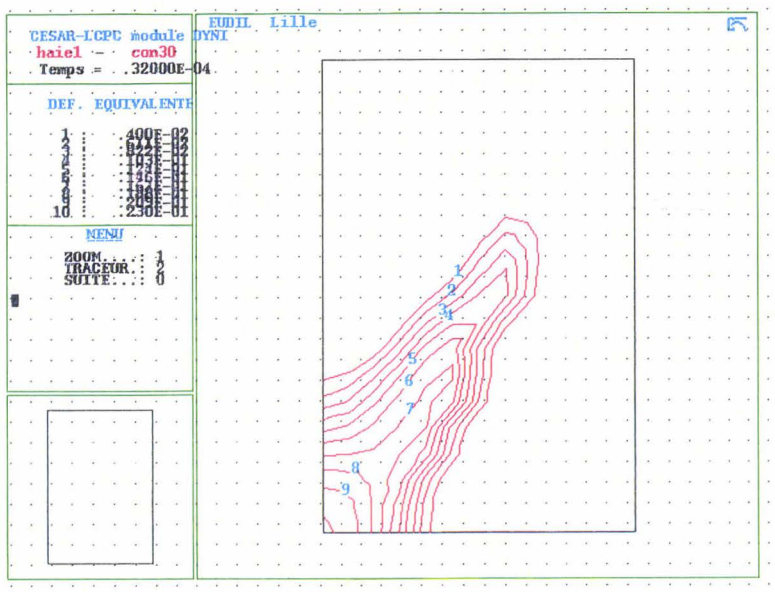


3.19 a) Maillage lâche.

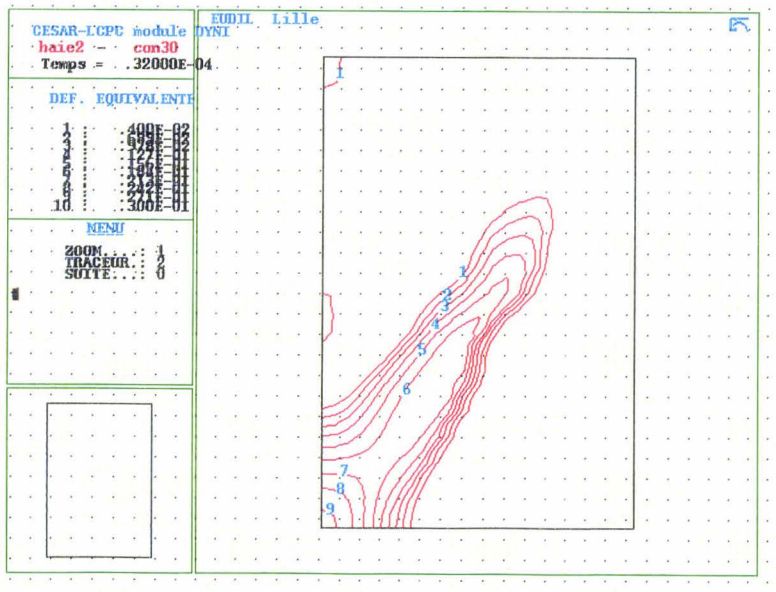


3.19 b) Maillage serré.

Figure 3.19: Isovaleurs de déformation équivalente γ^p à l'instant t = 2.4 10^{-5} s ($\beta = 0.1$, problème régularisé).

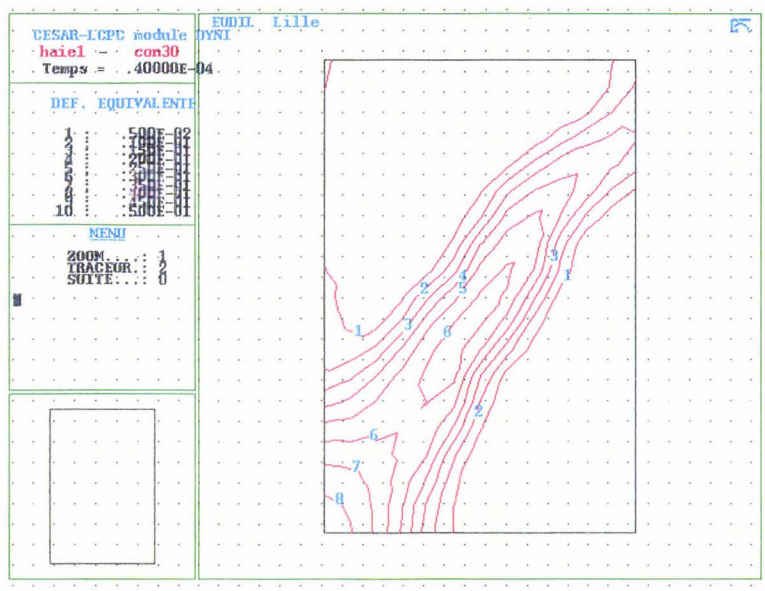


3.20 a) Maillage lâche.

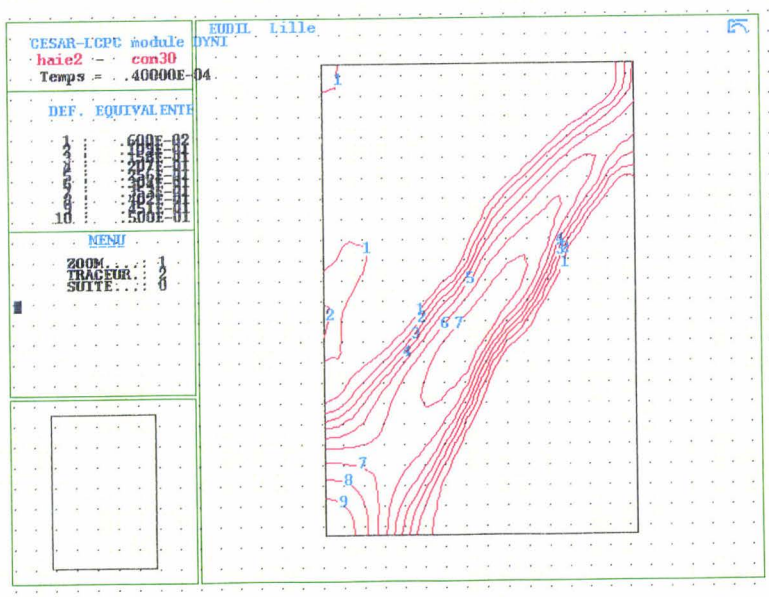


3.20 b) Maillage serré.

Figure 3.20: Isovaleurs de déformation équivalente γ^p à l'instant t = 3.2 10^{-5} s ($\beta = 0.1$, problème régularisé).

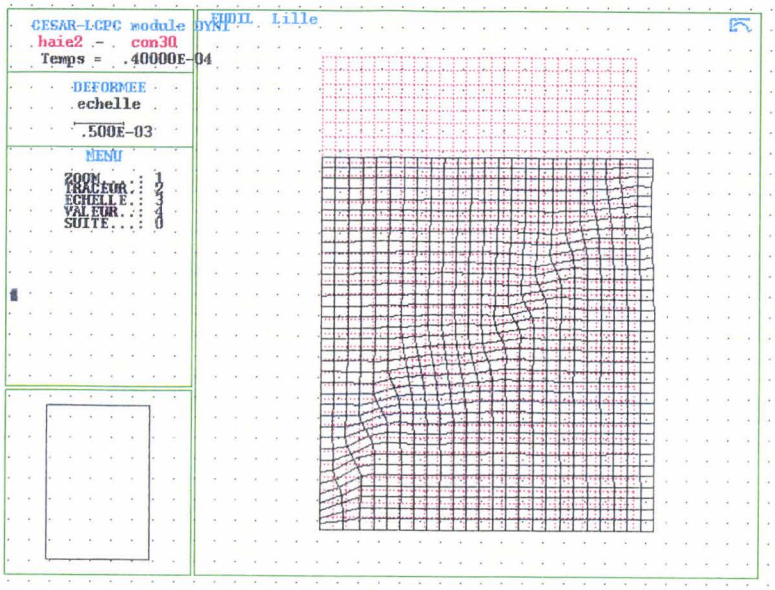


3.21 a) Maillage lâche.

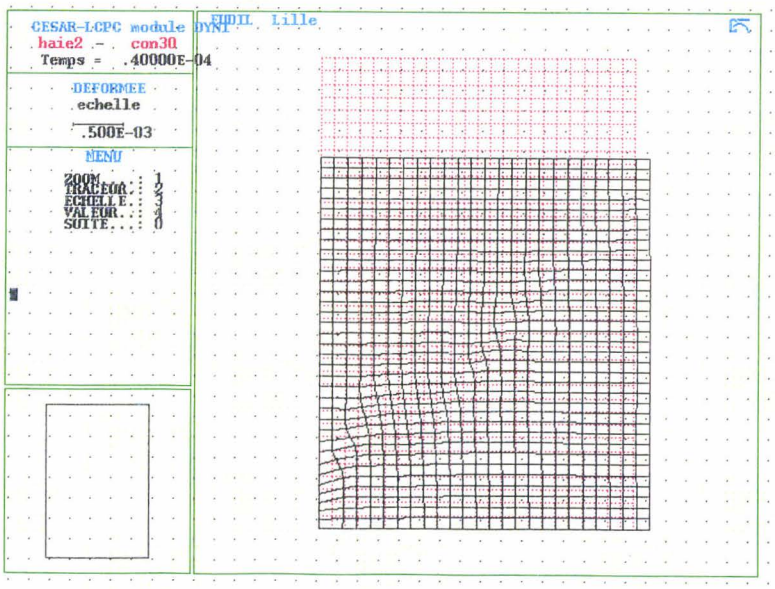


3.21 b) Maillage serré.

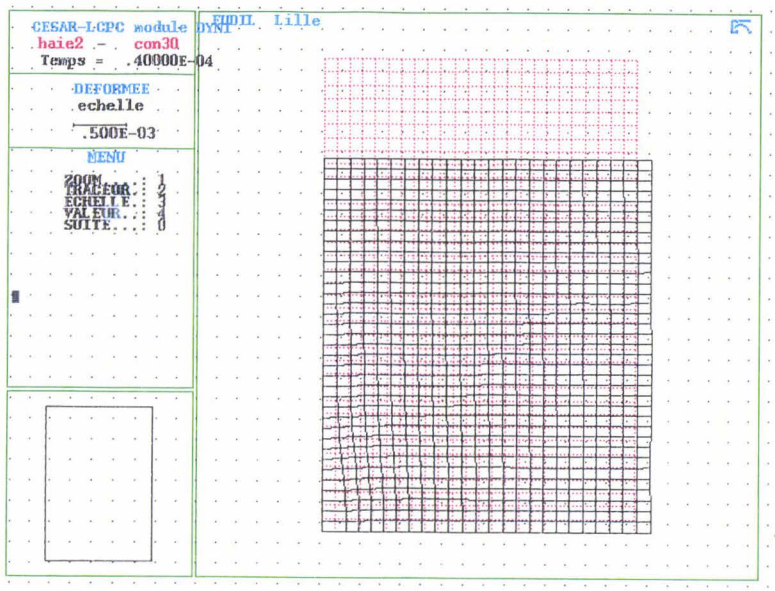
Figure 3.21: Isovaleurs de déformation équivalente γ^p à l'instant t = $4.0\,10^{-5}$ s ($\beta = 0.1$, problème régularisé).



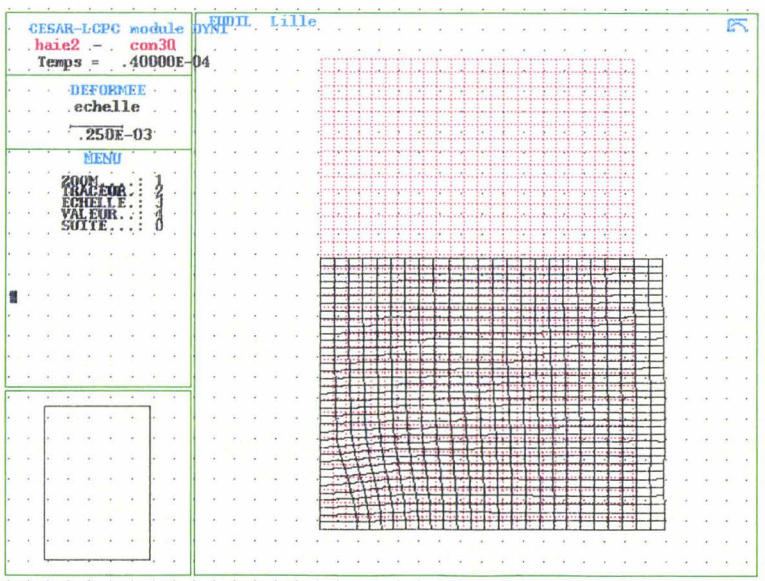
3.22 a) Déformée MS pour $\beta = 0.4$, agrandi par un facteur 5.



3.22 b) Déformée MS pour $\beta = 0.7$, agrandi par un facteur 5.

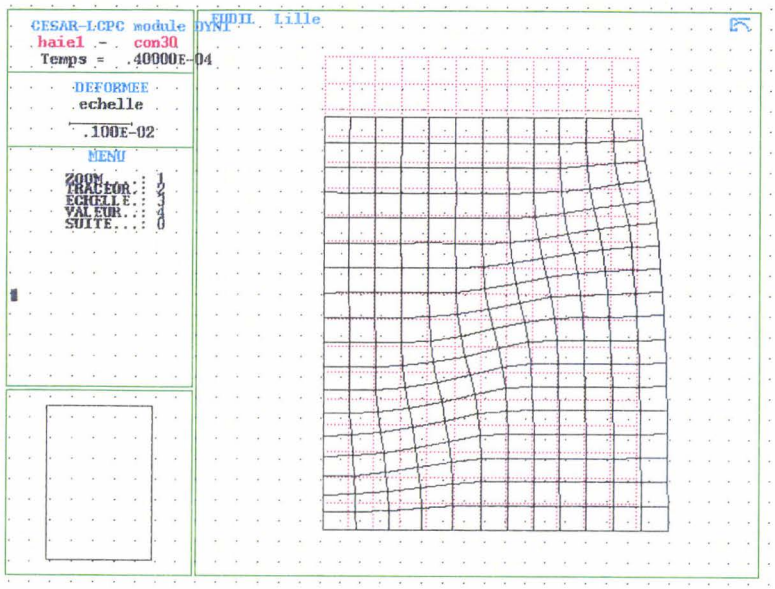


3.22 c) Déformée MS pour $\beta = 1$, agrandi par un facteur 5.

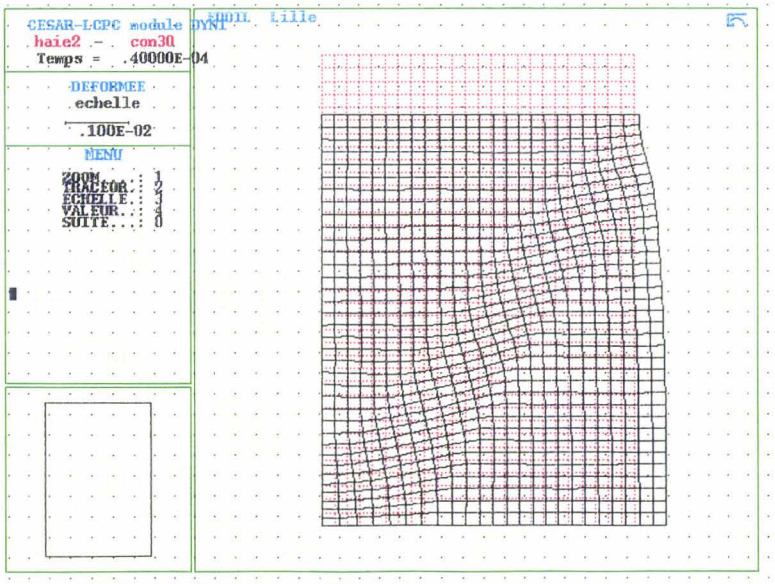


3.22 d) Déformée MS pour $\beta = 1$, agrandi par un facteur 10.

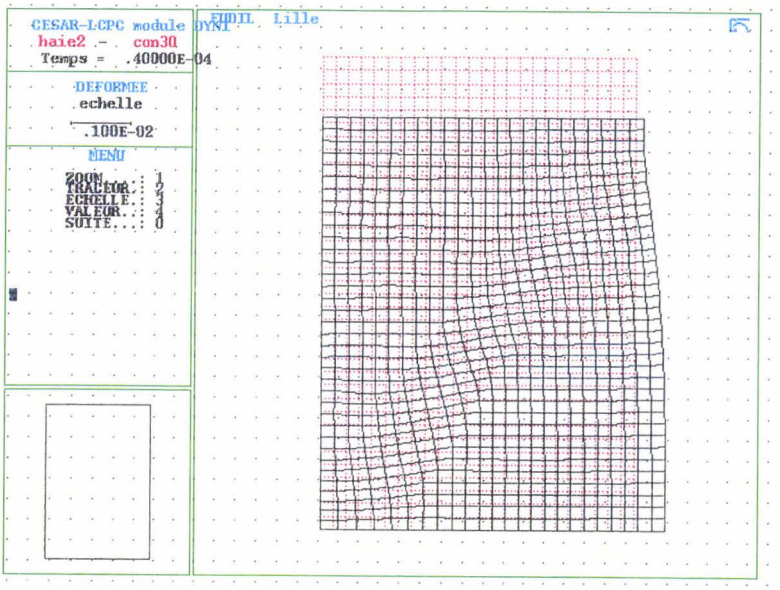
Figure 3.22: Maillage serré déformé à l'instant t = $4.0\,10^{-5}$ s (sans viscosité): Influence du coefficient de dilatance β.



3.23 a) Déformée maillage lâche, $\beta = 0.1$, agrandi par un facteur 3.

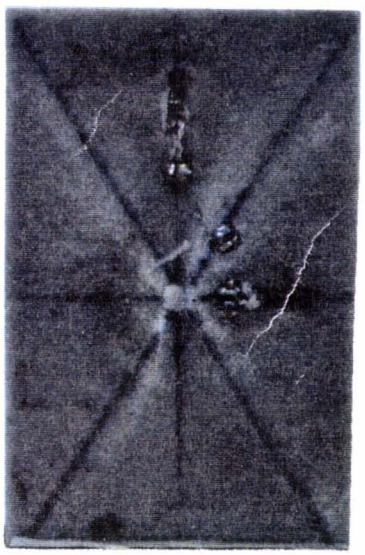


3.23 b) Déformée maillage serré, $\beta = 0.1$, agrandi par un facteur 3.

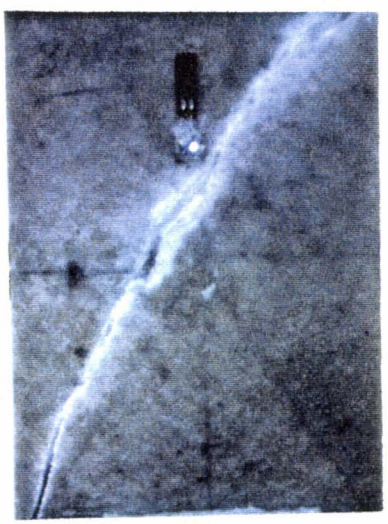


3.23 c) Déformée maillage serré, $\beta = 1$, agrandi par un facteur 3.

Figure 3.23: Maillages déformés à l'instant $t = 4.0\,10^{-5}$ s (problème régularisé).



3.24 a) Deux bandes de localisation.



3.24 b) Une bande de localisation.

Figure 3.24: Photos d'échantillons testés.

Chapitre 4 EXEMPLES D'APPLICATIONS AUX INSTABILITES DANS LES OUVRAGES.

Ce chapitre est consacré à l'application des outils développés aux chapitres précédents pour la prédiction des conditions de stabilité et des modes de rupture dans les ouvrages types. Deux exemples d'ouvrages sont abordés. Le premier porte sur la stabilité d'une cavité souterraine à grande profondeur. On dispose de résultats expérimentaux pour ce problème, obtenus à l'aide du triaxial vrai de notre laboratoire, et le but est de confronter les prédictions numériques à ces résultats. Le deuxième exemple concerne les modes de rupture au voisinage de l'outil lors de la coupe des roches. L'intérêt est pour cet exemple de comparer les résultats obtenus avec ceux obtenus par d'autres chercheurs par des méthodes différentes (superposition spectrale, WANG (1993)). Pour chaque exemple d'ouvrage, les approches par le formalisme de RICE et de régularisation viscoplastique sont envisagées.

4.1 DETECTION DE LA LOCALISATION DANS LES OUVRAGES PAR LE CRITERE DE RICE.

4.1.1 Introduction.

Le module de détection des points bifurqués (paragraphe 2.2.3) conçu a été introduit dans le code de calcul par éléments finis CESAR -LCPC, version 3.0. Ce module est complètement indépendant du calcul classique des champs (déplacement, gradients ...). Simplement, après un incrément de sollicitations, quand l'équilibre est rétabli, on fait un test du critère de RICE sur tous les points d'intégration de la structure. A l'instant (niveau de chargement) où le premier point bifurqué est détecté, l'unicité de la solution du problème aux limites n'est plus garantie. (Dans ce sens, le critère de RICE peut être équivalent à un critère de rupture). On peut malgré tout poursuivre les calculs et trouver à chaque incrément de chargement le nuage de points bifurqués. La localisation de ce nuage pourrait indiquer en fait la zone d'amorçage de la rupture. La notion de bande de localisation des déformations dans ce type d'approche est floue. En effet, le nuage de points bifurqués constitue plus une zone de géométrie complexe qu'une bande de dimension ou d'orientation précise telle que celle que nous avons décrite au chapitre 3 (DIOUTA & al, 1995b). La connaissance des paramètres de bifurcation ($\vec{n}$, $\vec{g}$) en différents points d'intégration de la zone ne permet pas de trouver un ($\vec{N}$, $\vec{G}$) global. De plus, ce type de calcul est peu significatif. En effet, comme on le verra par la suite, pour deux maillages différents, les nuages de points bifurqués ainsi que le niveau de chargement correspondant à l'initialisation de la bifurcation sont différents. Ceci est encore une conséquence de la nature rhéologique et locale du critère de RICE et du caractère mal-posé (perte d'ellipticité) du problème. Néanmoins, la

plupart des méthodes *descriptives* de traitement de la post-localisation décrites au paragraphe (1.3.2) utilisent le critère de RICE comme procédure de pré-localisation. On a en effet besoin dans ce type de méthodes de connaître le lieu géométrique d'émergence de la localisation à partir duquel, par traitements numériques spéciaux, on peut suivre l'évolution de la zone de localisation. Dans certaines méthodes comme celle d'enrichissement d'ORTIZ (paragraphe 1.3.2.1), on a même besoin du nuage de points bifurqués à tous les niveaux de calcul. Afin d'illustrer cette détection de la localisation par le critère de RICE et pour les deux cas d'ouvrages, on ne considèrera qu'un des matériaux étudié, la marne décrite par le modèle de KHAN du paragraphe (2.4).

4.1.2 Excavation d'une cavité.

Le problème à résoudre dans ce paragraphe est défini de la façon suivante:

On considère un massif de roche où on vient réaliser un forage (figure 4.1). On se ramène à un problème bidimensionnel et on adopte les conditions de déformation plane. Pour des raisons de symétrie, seul le quart de la section droite est maillé. Deux maillages sont considérés (figures 4.2). Le maillage M1 est constitué de 160 éléments quadrilatéraux à 8 noeuds (4 points d'intégration) et le maillage M2 est constitué de 112 éléments de même type. A l'état initial, la contrainte σ_p (figure 4.1) représente la contrainte qu'il faudrait appliquer à la paroi pour avoir l'équilibre. L'effet du creusement du forage est simulé par un déchargement (diminution de σ_p). Les principaux résultats sont les suivants:

- On remarque que le nuage de points bifurqués *suit* les contraintes de cisaillement. En effet, si on représente les isovaleurs de contraintes de cisaillement, ce nuage se confond avec les zones de contraintes de cisaillement maximum. Pour illustrer ce résultat, deux calculs ont été effectués sur le maillage M1. Pour le cas du chargement hydrostatique (σ_H^0 = σ_h^0 = 30 MPa), on considère que la contrainte initiale géostatique est isotrope et vaut 30 MPa. Au début du calcul, la contrainte σ_p vaut 30 MPa et on impose une vitesse de déchargement de 1.5 MPa par incrément (figure 4.3.1). Pour le cas du chargement non hydrostatique (σ_H^0 = 20 MPa) $\neq$ (σ_h^0 = 30 MPa), on considère un état de contrainte initial de 30 MPa pour la contrainte verticale et 20 MPa pour la containte horizontale. Au début du calcul, la contrainte σ_p est déterminée par la condition d'équilibre et on impose une vitesse de déchargement de 1.0 MPa par incrément (figure 4.3.2). Il faut bien préciser que dans ces calculs, σ_H^0 et σ_h^0 sont maintenues constantes et que seule σ_p diminue. En paroi de puits, autour des axes Y = 0 ou X = 0, les contraintes de cisaillement sont minimum. Aux points A et B de la figure (4.1), on retrouve donc sensiblement les conditions de l'essai triaxial. Comme on l'a vu au paragraphe (2.2.3), dans ces conditions, les modules de cisaillement

gardent leurs valeurs élastiques (ce qui joue contre l'occurrence du critère de RICE). Par contre, quand la contrainte de cisaillement croît, les modules élastoplastiques de cisaillement diminuent par rapport à leurs valeurs élastiques. En reconstituant le forage entier par les différentes symétries, la configuration des zones potentielles de rupture par localisation des déformations est représentée sur la figure (4.4).

- Les niveaux de chargement où les premiers points bifurqués sont détectés sont:

* Pour le maillage M1, σ_p^{bif} = 16.5 MPa (incrément 9) pour le chargement hydrostatique et σ_p^{bif} = 9.0 MPa (incrément 11) pour le chargement non hydrostatique.

* Pour le maillage M2, seul le chargement hydrostatique a été effectué et on trouve σ_p^{bif} = 13.5 MPa. Le nuage de points bifurqués est présenté sur la figure (4.3.3). Ainsi, pour le même calcul et pour deux maillages différents, les paramétres de bifurcation sont donc différents. L'emergence de la bifurcation ne correspond pas au même niveau de chargement pour les deux maillages et les nuages de points bifurqués ne coïncident pas.

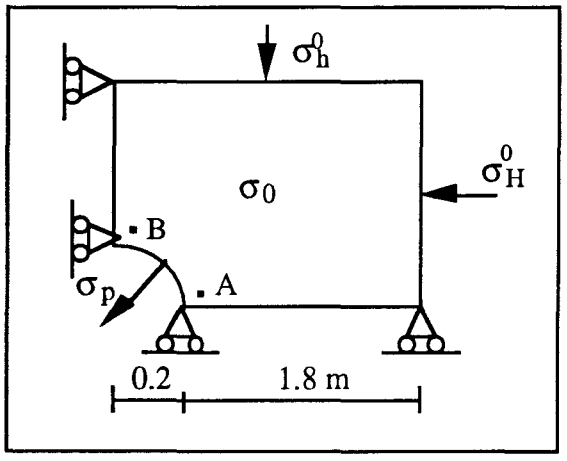


Figure 4.1: Schématisation de l'excavation d'une cavité: Conditions aux limites et chargement.

Dans les applications aux domaines pétroliers, l'intérêt concret des calculs ci-dessus peut être par exemple la détermination de la pression optimale de boue de forage. La valeur de σ_p pour laquelle le premier point bifurqué apparaît correspond à la pression minimale de boue (dans un sens pessimiste) qu'il faut pour maintenir stable la paroi du puits si on prend pour critère d'instabilité l'occurrence de la condition de RICE.

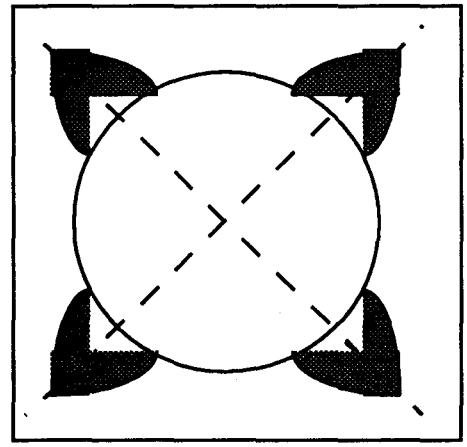


Figure 4.4: Nuage de points bifurqués autour d'une cavité.

4.1.3 Cas de la coupe des roches.

Le deuxième exemple d'ouvrage est le problème qu'a traité WANG (1993) par la méthode des bandes spectrales. Il s'agit de modéliser la portion de roche coupée par l'outil lors du forage d'un puits. La schématisation de ce problème est représentée sur la figure (4.5.a). L'action de la pression de boue de forage et du poids de l'outil est équivalente à un état de contrainte initial isotrope de 37.5 MPa. Nous envisageons l'action de l'outil par une poussée du front de coupe sous forme d'une force répartie de 100 MPa sur le segment CD (figure 4.5.a) qu'on impose en 20 incréments. Le maillage (figure 4.5.b) est formé de 319 éléments quadrilatéraux à 4 noeuds (4 points d'intégration)

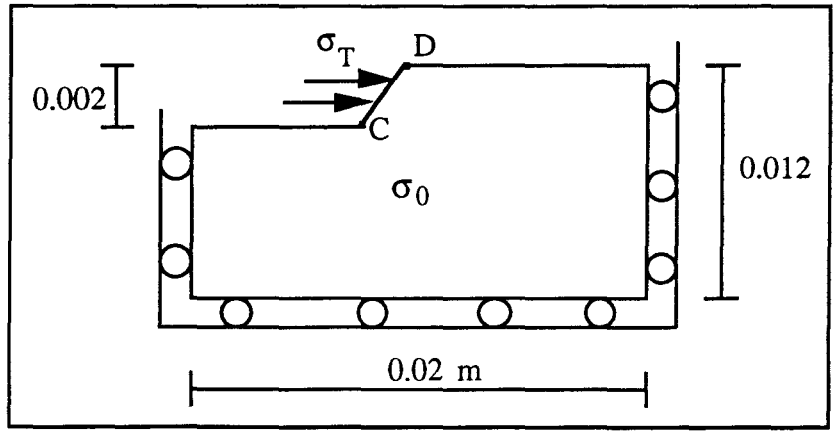


Figure 4.5.a: Schématisation du problème de coupe des roches: Conditions aux limites et chargement.

Le premier point bifurqué apparaît à l'incrément 9, ce qui correspond à une force de σ_T = 45 MPa. Sur les figures (4.6) sont représentés les nuages de points bifurqués à

différents niveaux de chargement. Ces résultats sont tout à fait comparables à ceux que trouve WANG (1993). Il est à noter que WANG (1993) a utilisé le modèle CLOE et qu'il a imposé comme conditions aux limites un déplacement horizontal du segment CD (figure 4.5.a)

Le même calcul de détection du nuage de points bifurqués pour les deux cas d'ouvrages peut se faire dans le cas du grès décrit par un modèle de RICE avec ou sans *vertex*. Mais ce calcul ne présente plus ici un grand intérêt dès lors que, comme nous l'avons dit plus haut, nous ne ferons pas notre analyse post-bifurcation par une méthode *descriptive* qui exige une analyse de pré-bifurcation par le formalisme de RICE. Le but était dans ce paragraphe tout simplement de montrer qu'on peut prédire par le critère de RICE l'émergence d'une instabilité locale dans le calcul de tout ouvrage d'ingénierie. Pour le grès, nous passons donc directement à l'application du formalisme de régularisation viscoplastique pour prédire les modes de rupture à comparer avec les modes expérimentaux pour le cas d'une cavité et avec les modes obtenus par WANG (1993) pour le cas de la coupe des roches.

4.2 LOCALISATION DANS LES OUVRAGES PAR LE FORMALISME DE REGULARISATION VISCOPLASTIQUE.

4.2.1 Cas d'essais triaxiaux vrais simulant des cavités.

4.2.1.1 Modes d'instabilité d'une cavité: Résultats expérimentaux.

Des échantillons cubiques de grès des Vosges percés ont été testés sur une presse triaxiale vraie afin de simuler les modes de rupture pouvant subvenir en paroi des cavités souterraines (BOUMAHDI & al, 1989). La géométrie des échantillons et leur chargement sont présentés sur la figure (4.7).

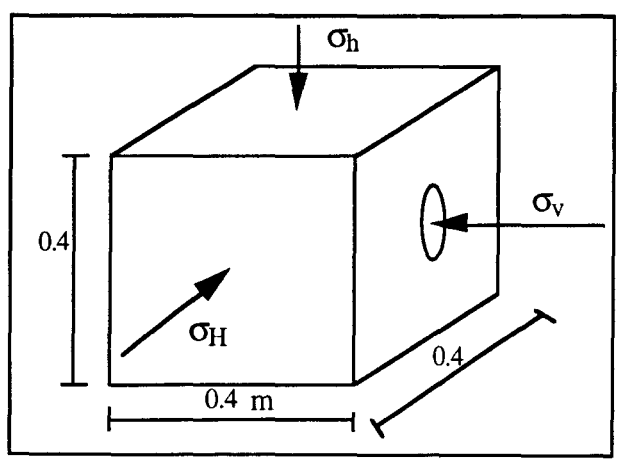


Figure 4.7 Essai triaxial vrai simulant une cavité: Géométrie et chargement.

Il s'agit de blocs cubiques de 40 cm de coté et le diamétre du trou est de 50 mm. Le mode de sollicitation est tel que $\frac{\sigma_h}{\sigma_v} = k_1$ et $\frac{\sigma_H}{\sigma_v} = k_2$.

Durant ces essais, on enrégistre la convergence Ur en paroi de cavité en fonction du chargement et suivant différentes orientations. On enrégistre aussi durant ces essais l'émission acoustique des échantillons. Les allures de ces deux enrégistrements pour l'essai type sont représentées sur la figure (4.9). A partir de la figure (4.9) on remarque que le niveau de chargement correspondant à l'accélération de la convergence coïncide avec le niveau où le nombre d'événements acoustiques émis croît fortement. Ce niveau de chargement (point critique) peut être considéré comme le niveau d'amorçage de la rupture (coalescence des microfissures) et on peut supposer qu'il donne une indication sur l'initialisation de la localisation. L'étude porte sur une large gamme de contraintes σ_v, σ_H et σ_h. Mais nous ne présentons que les résultats pour deux cas représentatifs:

- 1) $\sigma_v = \sigma_H = \sigma_h = 100$ MPa.
- 2) $\sigma_v = \sigma_h = 100$ MPa; $\sigma_H = 50$ MPa.

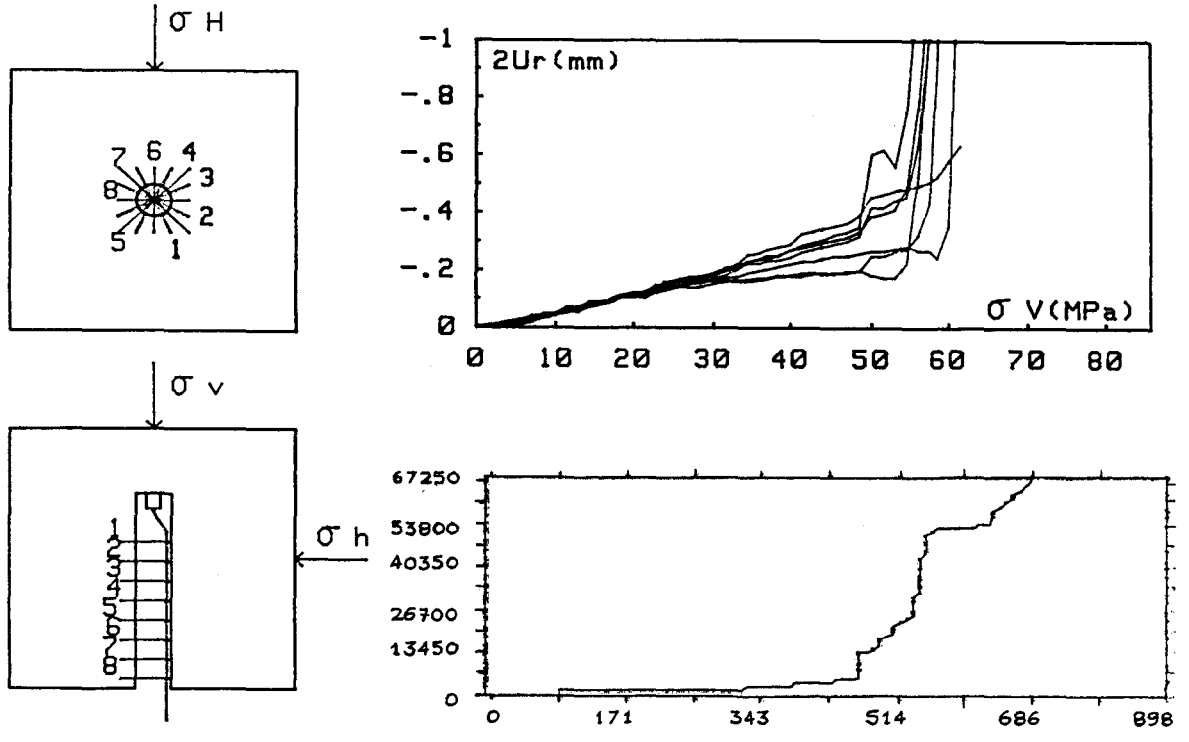


Figure 4.9: Exemple de mesures expérimentales de la convergence suivant différentes directions et de l'émission acoustique.

Pour le cas 1), le point critique correspond à $\sigma_H = \sigma_h = 47$ MPa et pour le cas 2), il correspond à $\sigma_h = 44$ MPa c'est-à-dire $\sigma_H = 22$ MPa. Les résultats présentés pour ces deux cas sur les figures (4.8) concernent les modes de rupture de la section droite moyenne à la fin de l'essai.

4.2.1.2 Modes d'instabilité d'une cavité: Simulation numérique.

Le problème réel est 3-D, mais l'outil numérique actuel ne permet de résoudre que des problèmes 2-D. On se ramène donc à un problème de déformation plane en considérant une coupe perpendiculaire au trou (section droite moyenne).

Dans le formalisme de régularisation viscoplastique, il n'y a pas de critère explicite d'instabilité par localisation des déformations. On considère que les isovaleurs de déformation plastique équivalente de cisaillement γ^p définissent les niveaux de localisation. Le modèle est celui du paragraphe (3.5) (modèle de RICE avec viscosité fictive). Pour le problème régularisé, ces zones de rupture et les niveaux de γ^p qui les définissent ne sont plus fonction du maillage.

C'est le problème dont les résultats expérimentaux sont présentés au paragraphe (4.2.1.1) qu'on simule numériquement. Le maillage considéré est représenté sur la figure (4.10). Il est composé de 400 éléments quadrilatéraux à quatre noeuds. A l'état initial, l'échantillon est considéré au repos et sans contraintes initiales. Compte tenu du maillage, le pas de temps limite est de $2.0\ 10^{-7}$ s. L'allure du chargement appliqué est présenté sur la figure (4.11.b). Le temps total de chargement Tc est de $3.2\ 10^{-4}$ s.

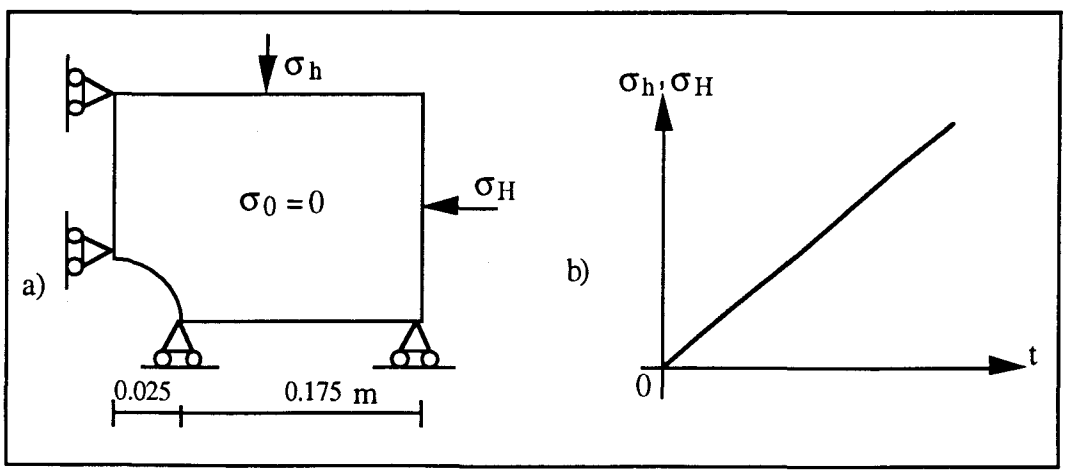


Figure 4.11: Conditions aux limites et allure du chargement d'une cavité dans le formalisme de régularisation viscoplastique.

Deux calculs sont effectués: le premier avec un chargement hydrostatique où σ_H et σ_h varient de 0 à 100 MPa pendant le temps Tc et le second avec un chargement non hydrostatique où σ_H varie de 0 à 50 MPa et σ_h de 0 à 100 MPa pendant le temps Tc. Les principaux résultats sont commentés ci-dessous.

Sur les figures (4.12), nous présentons les isovaleurs de γ^p aux instants 3.84 10^{-5} s, 1.152 10^{-4} s, 1.6 10^{-4} s et 3.2 10^{-4} s pour le cas du chargement hydrostatique. On peut faire les remarques suivantes:

- L'instant 1.152 10^{-4} s où la configuration des isovaleurs de γ^p de la figure (4.12.b) apparaît pour la première fois est considéré comme instant d'initialisation de la localisation. Cette initialisation de la localisation ne se fait pas en paroi de puits car les valeurs maximales de γ^p à cet instant sont à une certaine distance la paroi (figure 4.12.b). A cet instant, la valeur de σ_H ou σ_h est de 36 MPa.

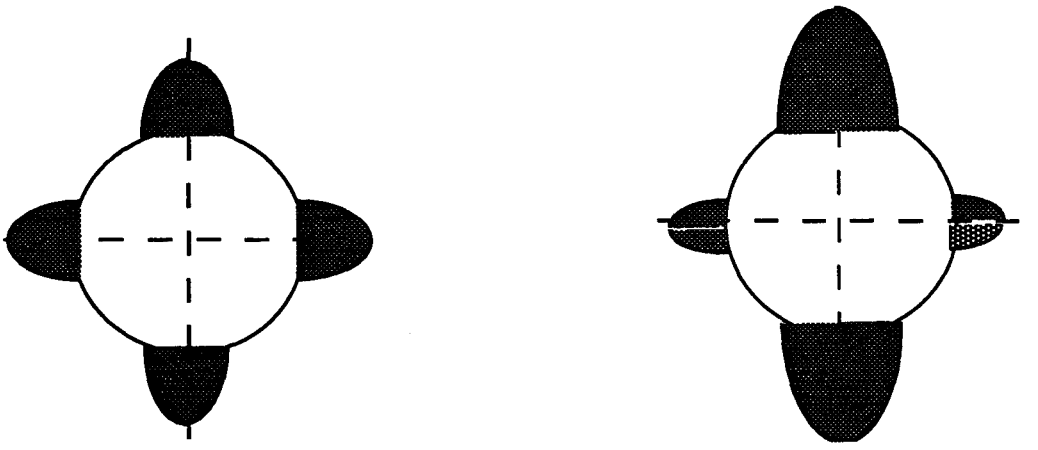
- A l'instant 1.6 10^{-4} s, la configuration des isovaleurs de γ^p de la figure (4.12.c) apparaît pour la première fois et ne change plus sensiblement jusqu'à la fin du calcul. A cet instant, la valeur de σ_H ou σ_h est de 50 MPa.

- L'intervalle entre les niveaux de chargement de 36 MPa et de 50 MPa peut être considéré comme celui pendant lequel l'essentiel de la concentration des déformations se produit. Cet intervalle est à comparer avec la valeur expérimentale de 47 MPa.

- En reconstituant la cavité entière, on trouve schématiquement le mode de rupture en "dog ears" de la figure (4.13 a).

Pour le chargement non-hydrostatique, le dépouillement aux mêmes instants (figures 4.14) montre que les niveaux de γ^p dans la direction du plus petit chargement σ_H baissent fortement (figure 4.13 b).

Remarquons que les résultats expérimentaux présentent également des modes de rupture en "dog ears". Numériquement, nous trouvons quatre "dog ears" orientés selon les diamètres de base du trou (Y = 0 et X = 0) pour le cas du chargement hydrostatique. Le nombre de "dog ears" expérimentaux est compris entre 2 et 3 d'après les figures (4.8). Dans le cas d'un chargement non-hydrostatique, les "dog ears" de la direction où le chargement a diminué ont tendance à disparaître (figures 4.14).



a) Chargement hydrostatique. b) Chargement non-hydrostatique.

Figure 4.13: Zones de rupture d'un tunnel simulées par le formalisme de régularisation viscoplastique.

4.2.2 Cas de la coupe des roches.

Compte tenu du maillage, le pas de temps limite est de 4.10^{-8} s. La schématisation du problème (figure 4.5.a) et le maillage (figure 4.5.b) restent valables. L'allure du chargement σ_T est celle de figure (4.11.b) où σ_T varie de 0 à 100 MPa pendant un temps total Tc de 4.0 10^{-5} s. On se rend compte qu'au bout d'un temps de 2.0 10^{-5} s (σ_T = 50 MPa), les configurations des isovaleurs de déplacement horizontal (figures 4.15) et de γ^p (figures 4.16) ne varient plus sensiblement. Les isovaleurs de γ^p définissent une bande initialisatrice de rupture. Les déformés trouvées (figure 4.17) paraissent plus explicites que celles de WANG (1993).

4.3 CONCLUSION.

Dans ce chapitre, nous avons simulé les modes de localisation des déformations ou de rupture dans deux exemples d'ouvrages. Le premier concerne la stabilité d'une cavité souterraine et le second la coupe des roches.

Pour le premier exemple, quand on reste dans le formalisme de RICE, nous avons montré que le nuage de points bifurqués "suit" la contrainte de cisaillement maximum autour du puits et qu'elle est répartie autour des deux bissectrices du plan pour un chargement hydrostatique.

Si on adopte le formalisme de régularisation viscoplastique, la zone de rupture est définie par les isovaleurs de déformation équivalente plastique de cisaillement. Cette zone est faite de quatre "dog ears" dont les directions dépendent du chargement. Pour un chargement hydrostatique, ces directions sont les deux axes de base du puits. Notons que ces résultats de zone de rupture en régime de "dog ears" ainsi que les niveaux de chargement théoriques d'amorçage de localisation correspondent qualitativement à ce qu'on trouve expérimentalement.

Quand au second exemple qui concerne la coupe des roches, la zone de rupture trouvée par la méthode de régularisation viscoplastique est comparable a celle que trouve WANG (1993) par la méthode de superposition spectrale.

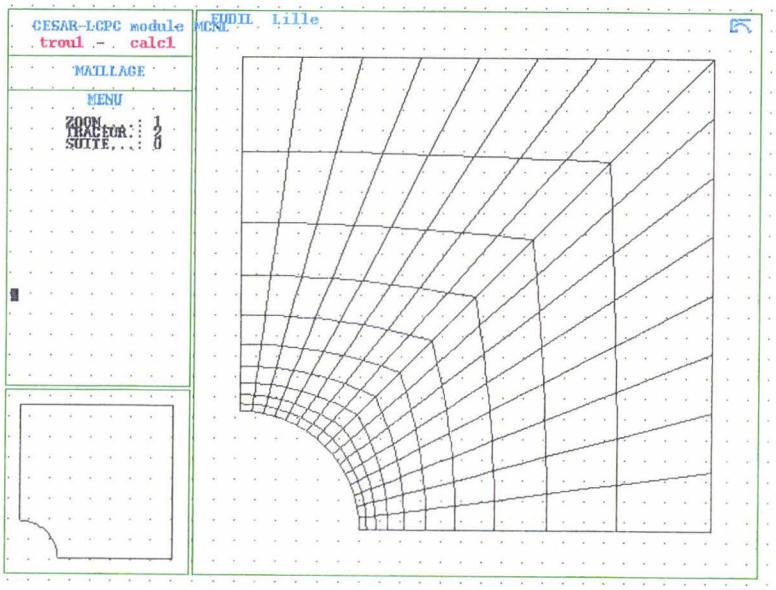


Figure 4.2 a): Maillage M1.

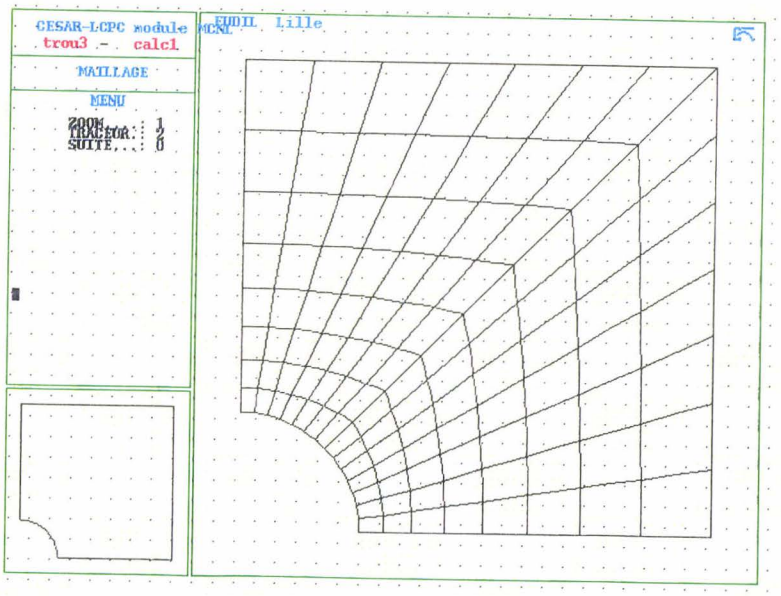
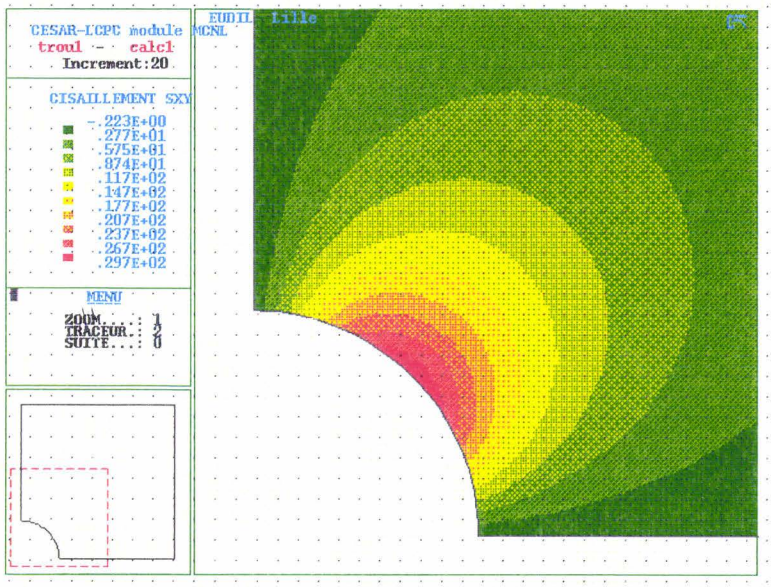
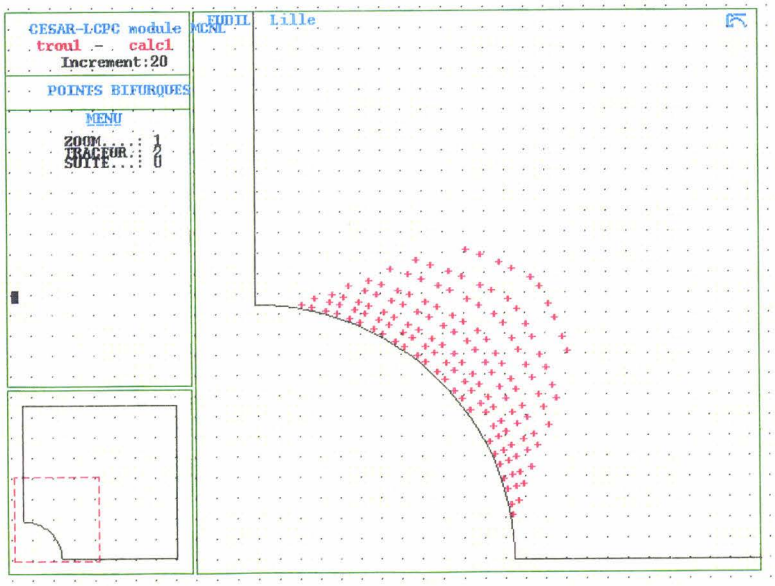


Figure 4.2 b): Maillage M2.

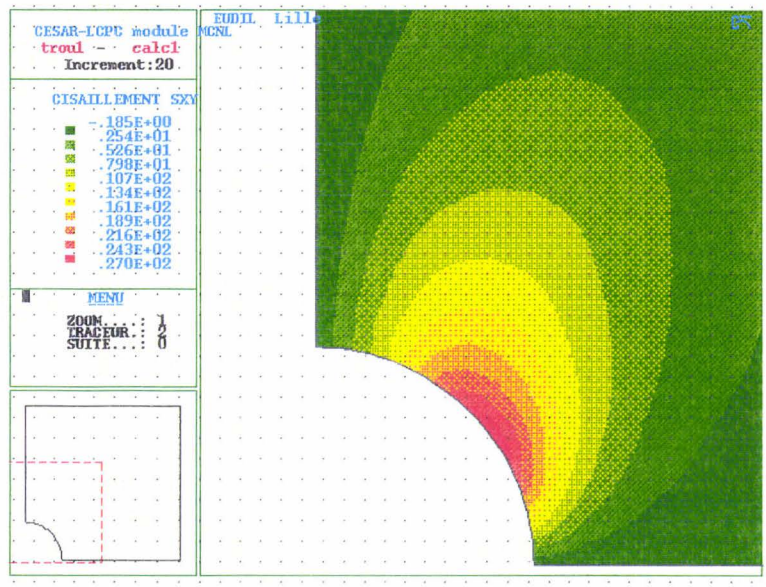


4.3.1 a) Zones d'isovaleurs de contrainte de cisaillement.

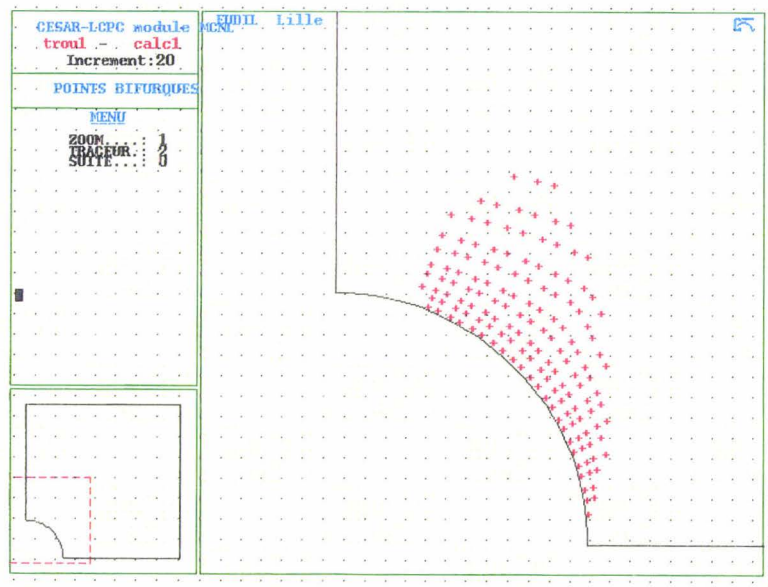


4.3.1 b) Nuage de points bifurqués.

Figure 4.3.1: Maillage M1 avec chargement hydrostatique à la fin du chargement (incrément n° 20).



4.3.2 a) Zones d'isovaleurs de contrainte de cisaillement.



b) Nuage de points bifurqués.

Figure 4.3.2: Maillage M1 avec chargement non-hydrostatique à la fin du chargement (incrément n° 20)

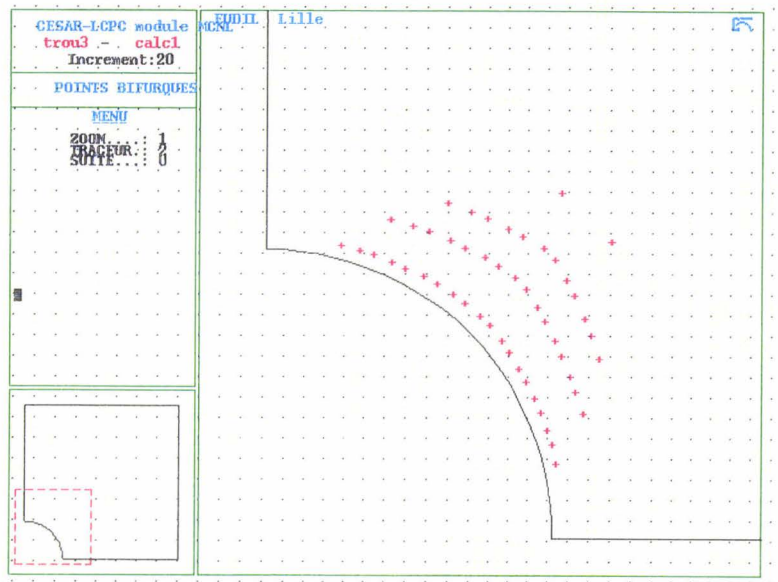


Figure 4.3.3: Maillage M2 avec chargement hydrostatique à la fin du chargement (incrément n° 20). Nuage de points bifurqués.

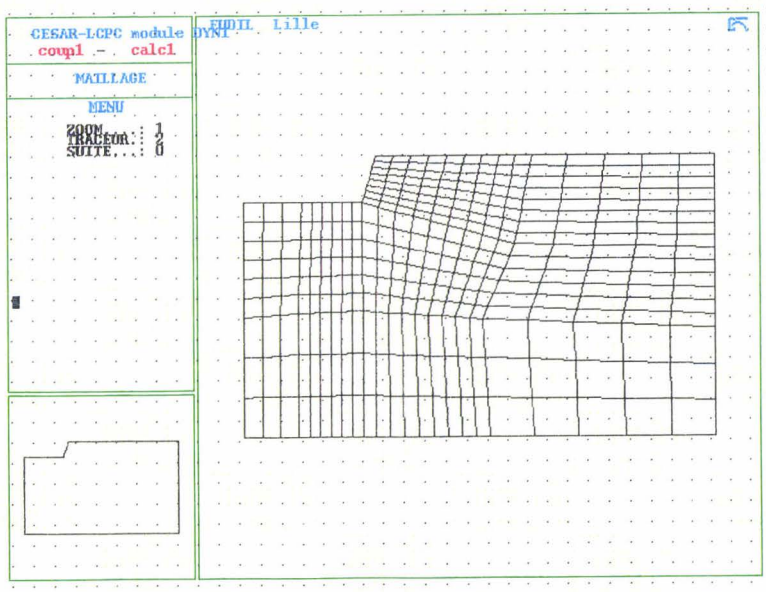


Figure 4.5.b): Maillage du domaine de la figure (4.5.a).

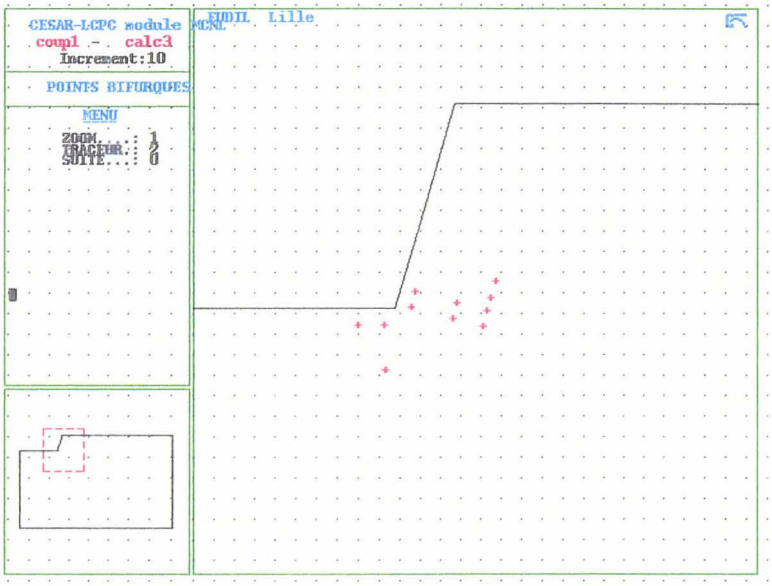


Figure 4.6.a): Nuage de points bifurqués à l'incrément n° 10.

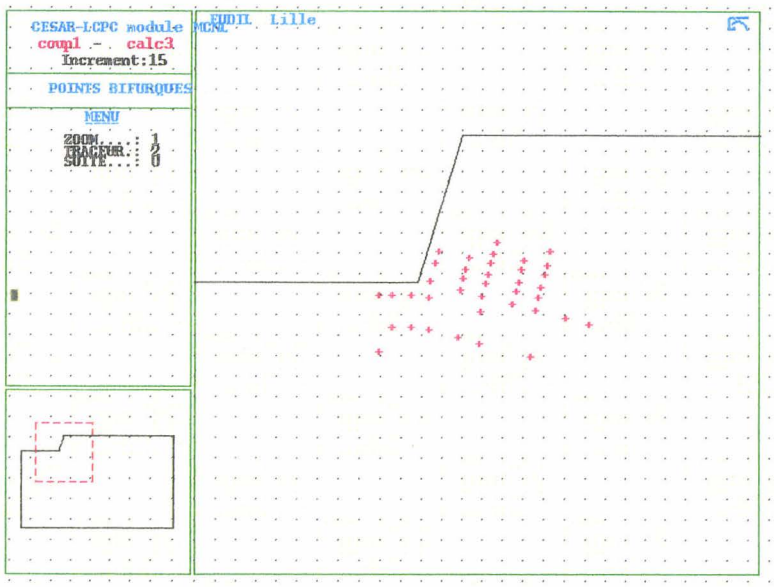


Figure 4.6.b): Nuage de points bifurqués à l'incrément n° 15.

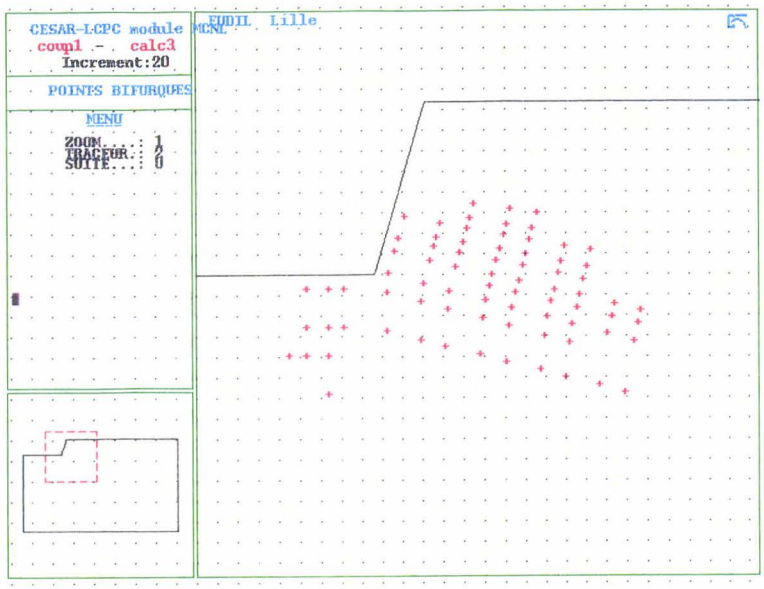


Figure 4.6.c): Nuage de points bifurqués à l'incrément n° 20.

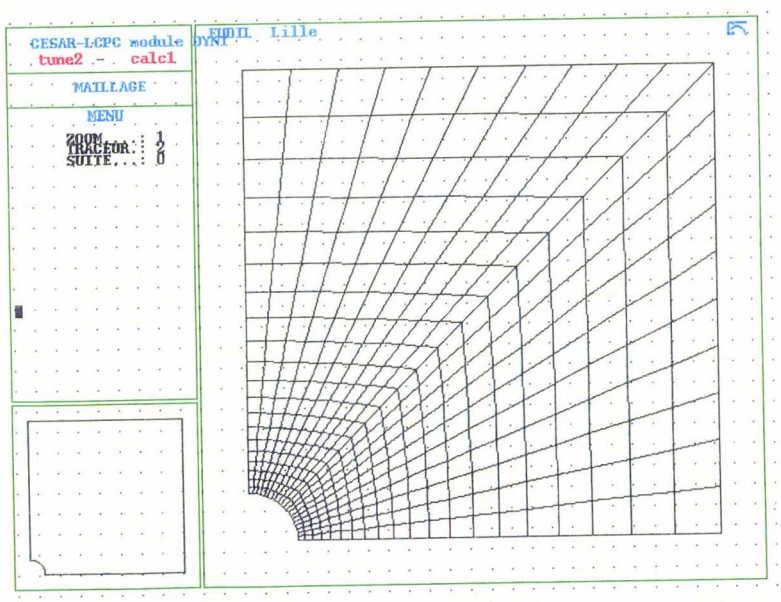
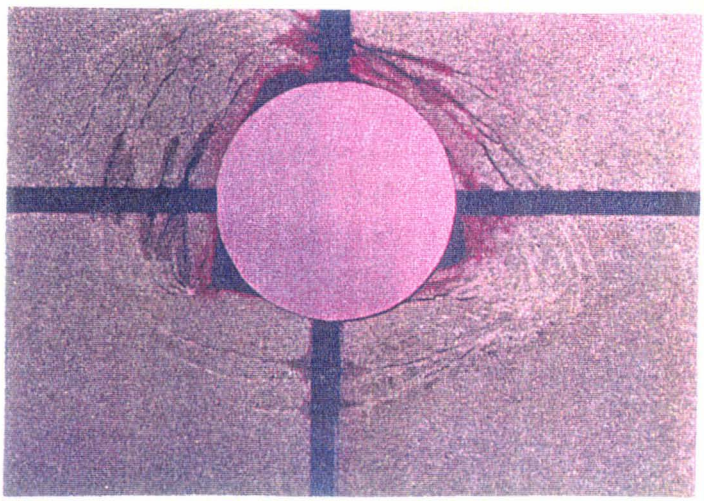
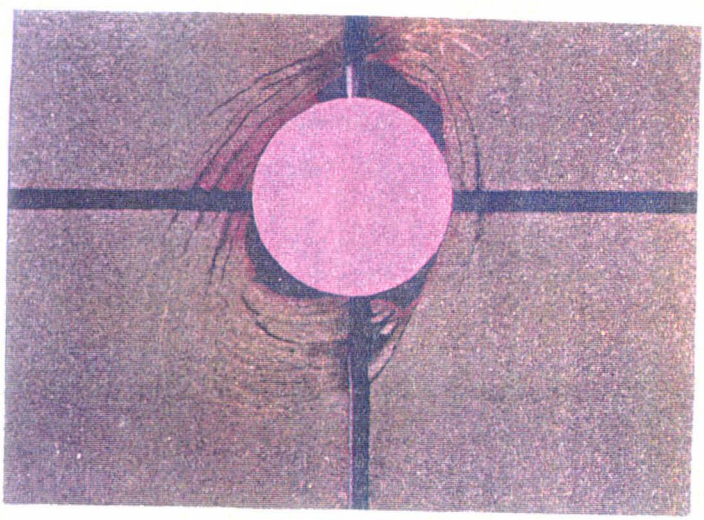


Figure 4.10: Maillage d'un quart de section de l'échantillon de la figure (4.7).

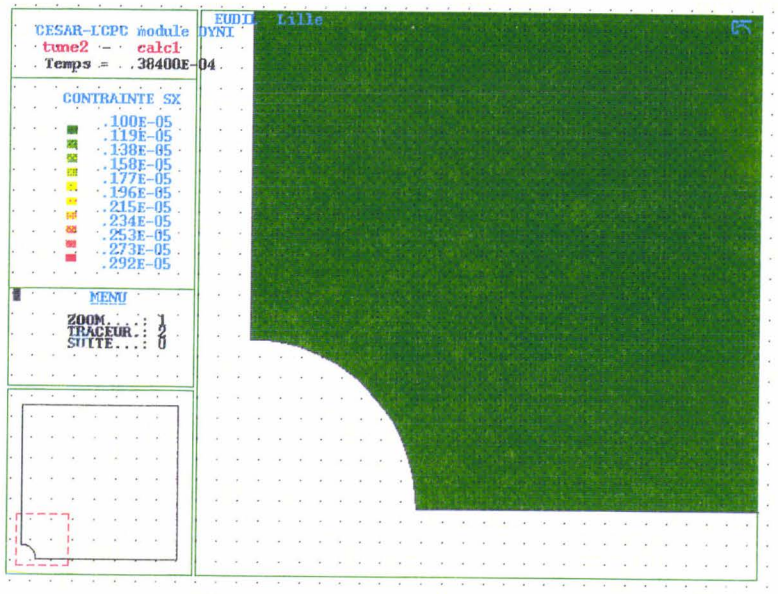


4.8 a) Cas du chargement hydrostatique.

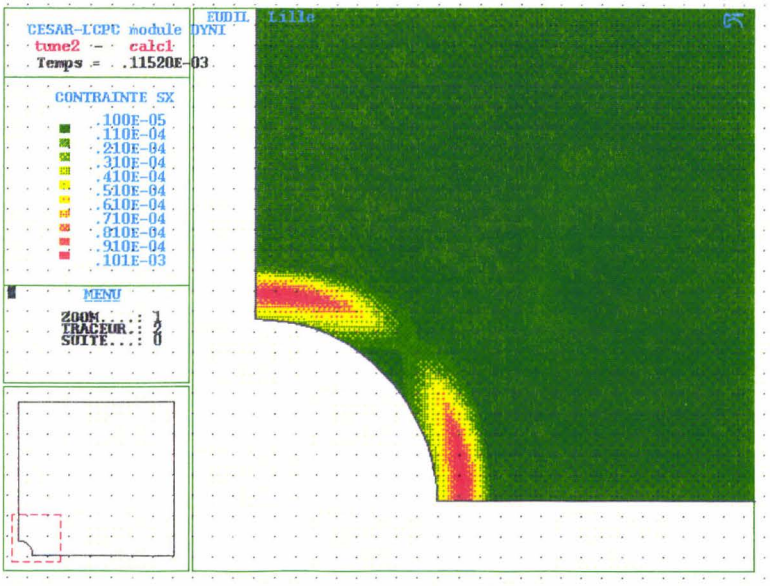


4.8 b) Cas du chargement non-hydrostatique.

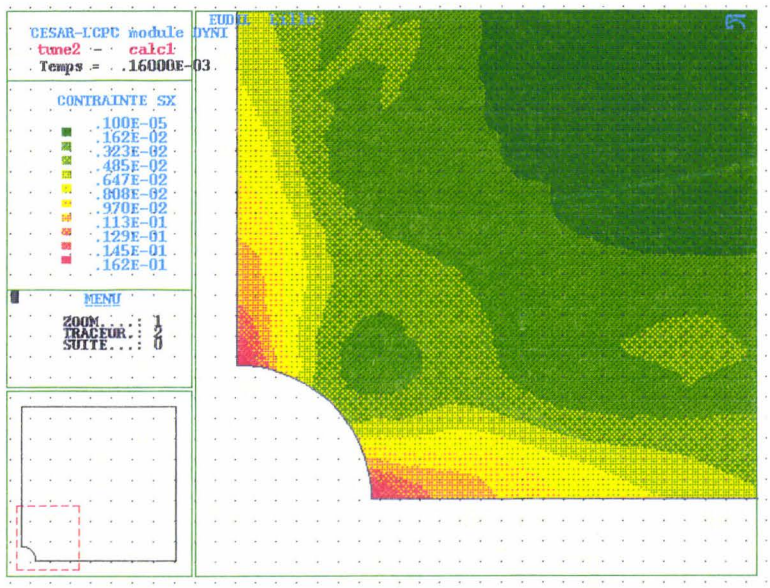
Figure 4.8: Modes expérimentaux de rupture en "dog ears" d'un tunnel.



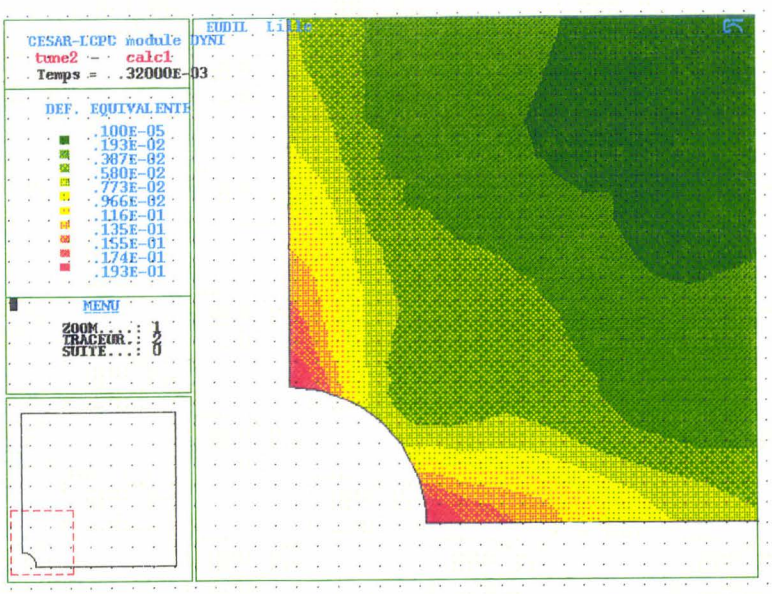
4.12 a) Instant 3.84 10^{-5} s.



4.12 b) Instant 1.152 10^{-4} s.

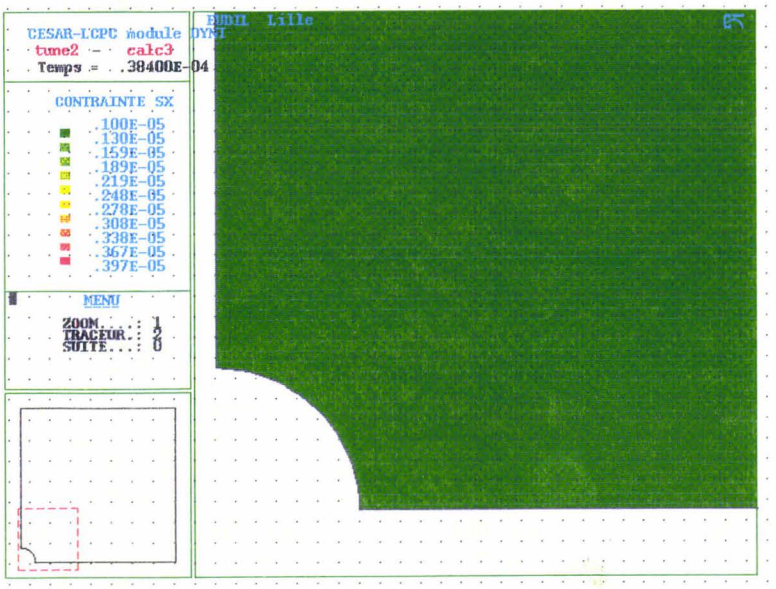


4.12 c) Instant 1.6 10^{-4} s.

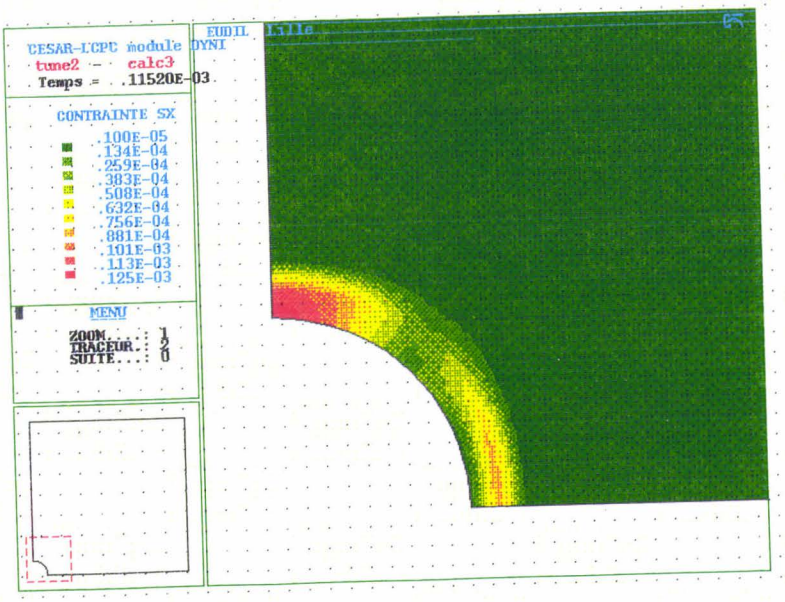


4.12 d) Instant 3.2 10^{-4} s.

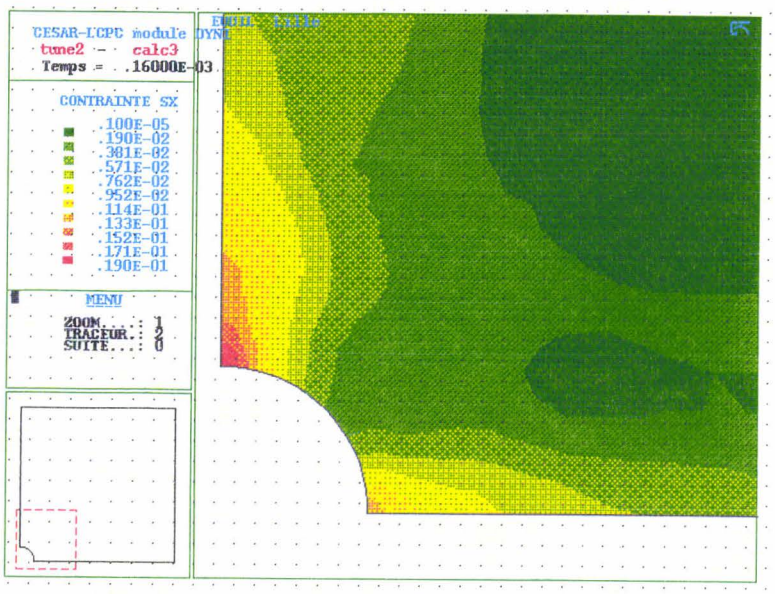
Figure 4.12: Isovaleurs de déformation équivalente γ^p pour un chargement hydrostatique à différents instants.



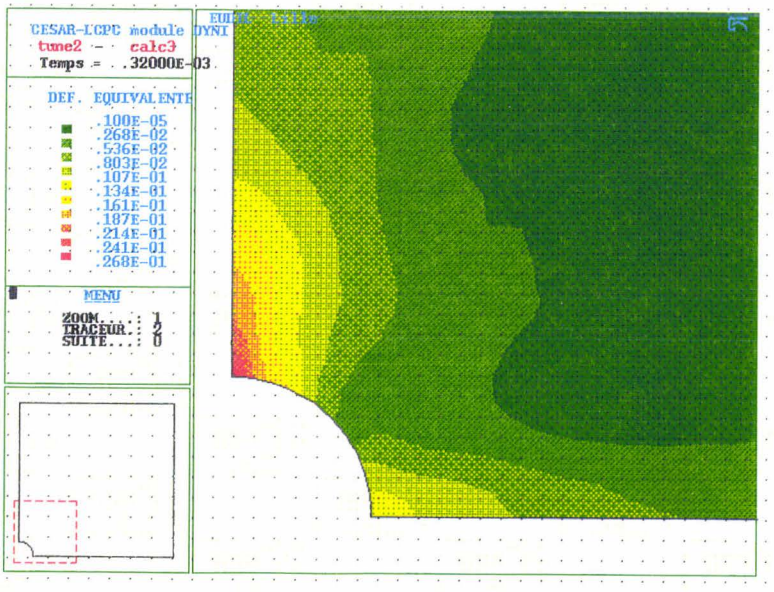
4.14 a) Instant 3.84 10^{-5} s.



4.14 b) Instant 1.152 10^{-4} s.

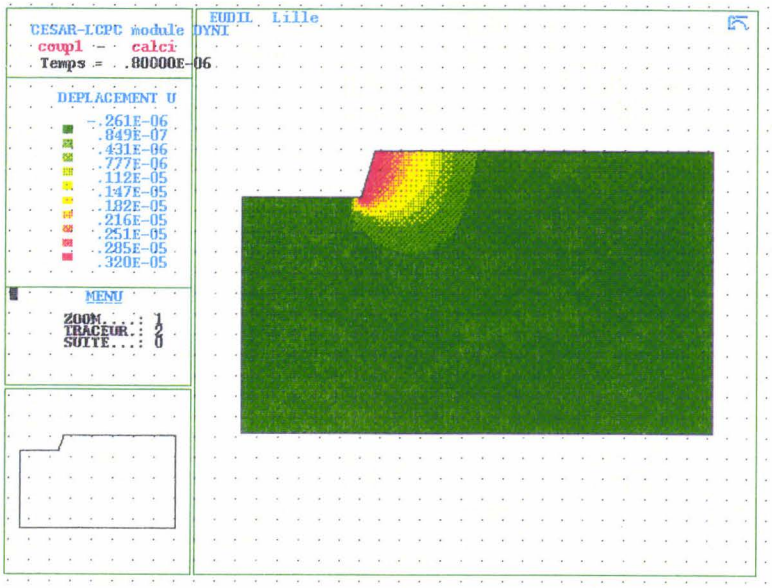


4.14 c) Instant 1.6 10^{-4} s.

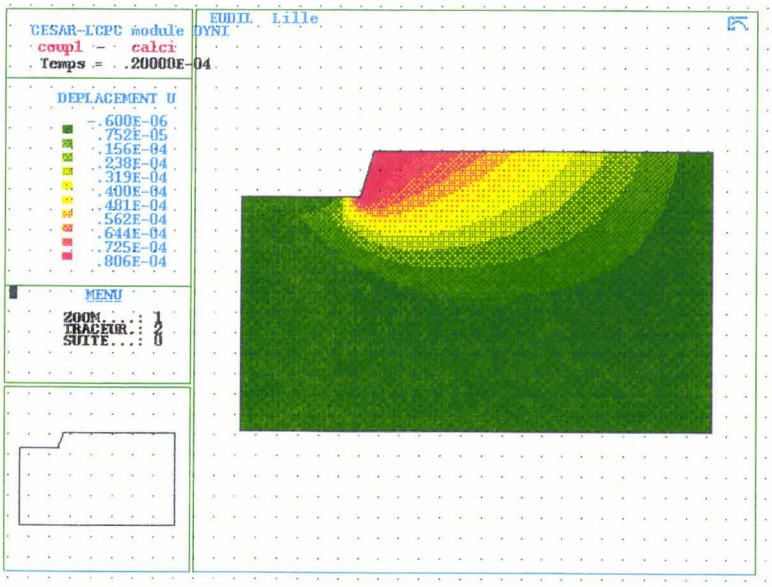


4.14 d) Instant 3.2 10^{-4} s.

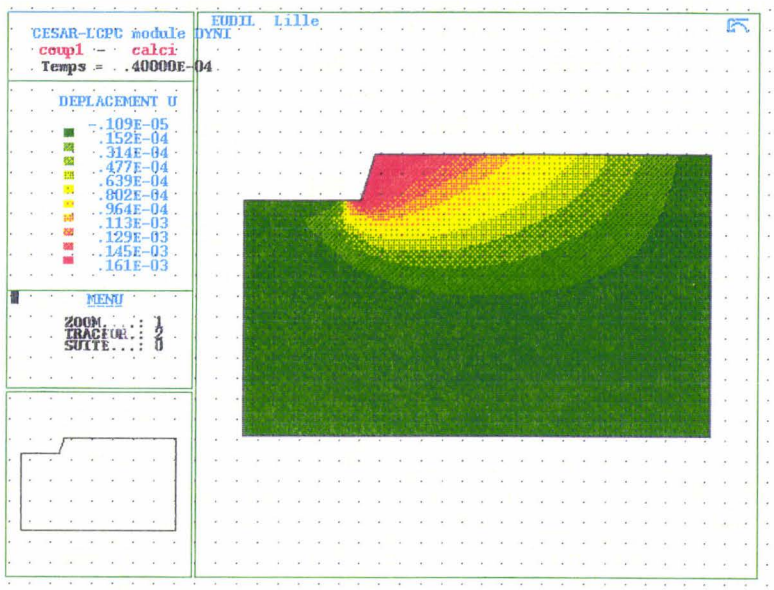
Figure 4.14: Isovaleurs de déformation équivalente γ^p pour un chargement non-hydrostatique à différents instants.



4.15 a) Instant 8.0 10^{-7} s.

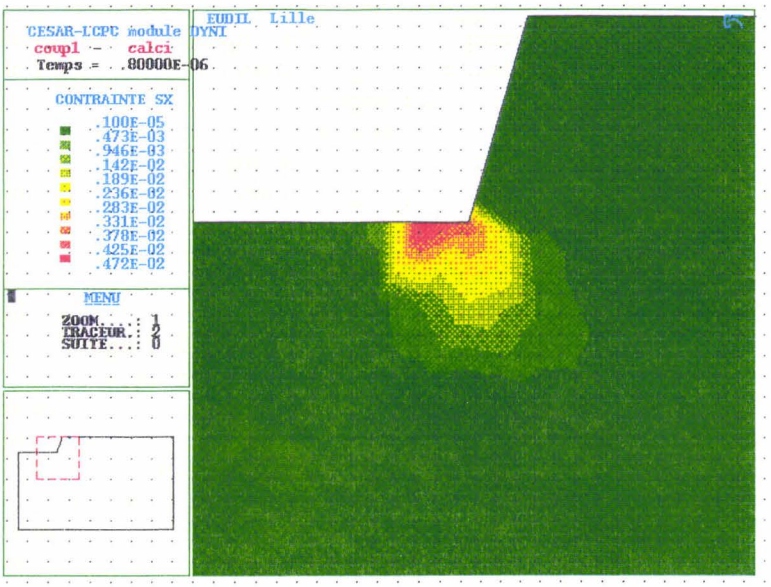


4.15 b) Instant 2.0 10^{-5} s.

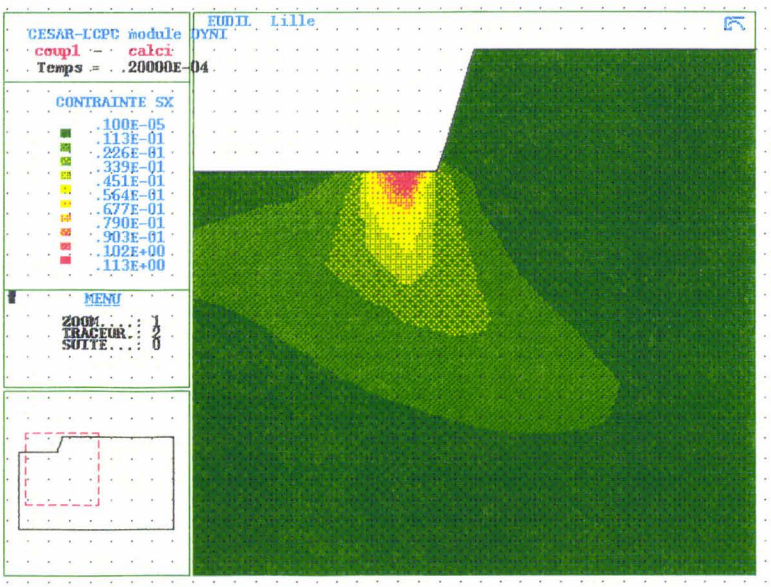


4.15 c) Instant 4.0 10^{-5} s.

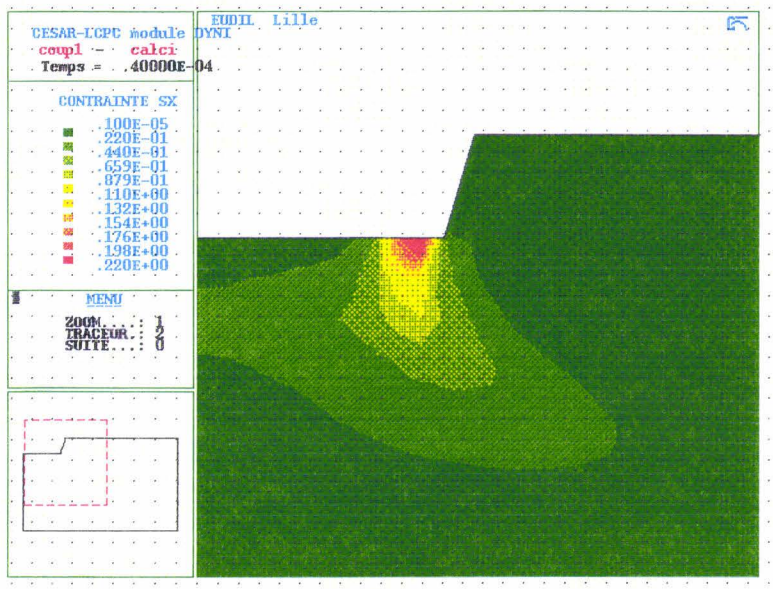
Figure 4.15: Isovaleurs de déplacement horizontal à différents instants.



4.16 a) Instant 8.0 10^{-7} s.



4.16 b) Instant 2.0 10^{-5} s.



4.16 c) Instant 4.0 10^{-5} s.

Figure 4.16: Isovaleurs de déformation équivalente γ^p définissant les niveaux de localisation à différents instants.

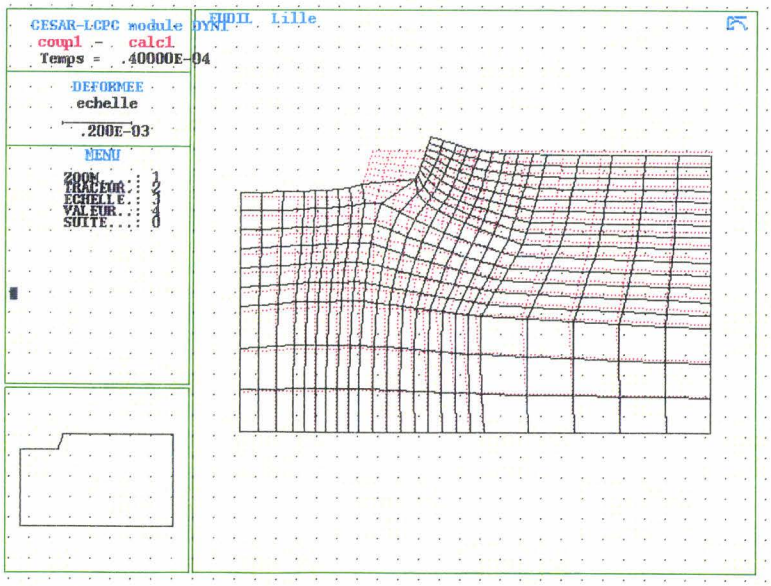


Figure 4.17: Exemple de déformée (instant 4.0 10^{-5} s).

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES.

Ce mémoire était consacré à l'étude de la pré-localisation et de la post-localisation des déformations dans les géomatériaux.

Pour la pré-localisation, nous nous sommes limités à une analyse détaillée du critère de bifurcation par localisation des déformations de RICE. Après avoir rappelé les hypothèses de conditions de compatibilité de HADAMARD sur la théorie de discontinuité des fonctions qui fondent ce critère, nous en avons fait une implémentation numérique sous forme d'un module indépendant qu'on peut introduire soit dans un code de calcul par éléments finis, soit dans un schéma d'intégration en champ homogène. A l'aide de ce module, nous avons étudié les conditions de la localisation des déformations lors de la simulation de l'essai triaxial sur plusieurs types de matériaux:

- Pour la craie de Haubourdin modélisé par Laderock et la marne de Beaucaire décrite par un modèle modifié de KHAN qui sont des matériaux plastiques peu dilatants, nous avons établi que la non-associativité de la loi de comportement favorisait le critère.

- Pour le grès de Fontainebleau qui est une roche fragile et fortement dilatante décrite par le modèle de RICE, nous établissons clairement que la non-associativité ne suffit plus pour provoquer le critère de localisation. Il faut avoir alors recours à la théorie de la plasticité à surface de charge irrégulière ou plasticité non-coaxiale pour trouver les conditions de bifurcation consistantes avec les observations expérimentales. Le choix de cette théorie, basée sur les considérations micromécaniques d'activation préférentielle des microfissures, est pleinement justifiée dans le cas du grès de Fontainebleau qui est une roche à forte susceptibilité à la microfissuration.

Après avoir rappelé les limites du formalisme du critère de RICE en matière d'analyse de la post-localisation, nous avons donné une abondante bibliographie sur les différentes méthodes de traitement de la post-localisation. Le choix de la méthode de régularisation viscoplastique nous est très vite apparu judicieux à cause de la solidité de ses fondements théoriques ainsi que de sa relative facilité de mise en oeuvre numérique. Par ailleurs, sur le plan rhéologique, la plupart des roches présentent un comportement visqueux.

Avec cette méthode, nous avons simulé l'émergence de la localisation des déformations ainsi que l'évolution de la bande localisée lors de la compression sur plaque du grès de Fontainebleau et nous avons obtenu qualitativement les différents paramètres de

localisation mesurés expérimentalement (niveau de chargement correspondant à l'émergence de la localisation des déformations, orientation de la bande localisée, largeur de la bande localisée).

Ces deux outils numériques (module de détection de la localisation par le critère de bifurcation de RICE et la procédure de simulation pré et post-localisation de régularisation viscoplastique) ont été utilisés pour analyser les instabilités dans deux ouvrages types: les puits en grande profondeur et la coupe des roches. Pour les puits, il apparaît que les modes de rupture sont essentiellement en "dog ears" avec une configuration qui varie avec le chargement. Ce qui est conforme à l'expérience. Pour le problème de la coupe des roches, nos résultats sur les zones de rupture sont comparables à ce que trouvent d'autres chercheurs par des méthodes différentes.

Perspectives.

- Ce travail a été fait avec des hypothèses simples. La loi de comportement concernait uniquement l'aspect mécanique. Il faudrait introduire dans ces lois les couplages thermique et/ou hydraulique et analyser leurs influences respectives sur le phénomène de bifurcation par localisation des déformations.

- La rupture d'un grand nombre de roches est liée à l'endommagement induit par la microfissuration. Un certain nombre de modèles ont été développés dans ce sens. Il sera utile de généraliser l'approche de la régularisation viscoplastique à ces modèles afin de résoudre les problèmes de localisation dans ces matériaux endommageables.

- Dans le formalisme de régularisation viscoplastique, on peut penser à remplacer les modèles avec viscosité fictive par des modèles viscoplastiques physiques car la plupart des roches présentent un comportement visqueux.

- Il est aussi souhaitable de résoudre les mêmes problèmes que ceux traités dans ce travail par d'autres méthodes de traitement de la post-localisation (théories du non-local et Cosserat notamment) et comparer les résultats.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.

ANANG, L. and SPITZIG, W.A., 1980, Initiation of localized shear bands in plane strain, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 28, pp. 113-128.

ASARO, R.J., 1979, Geometrical effects in the inhomogeneous deformation of ductile single crystals, Acta Metall., 27, pp. 445-453.

BARDET, J.P., 1990, Lode dependence for isotropic pressure sensitive elastoplastic materials, ASME Journal of Appl. Mech., 57, pp. 498-506.

BARDET, J.P., 1991, Analytical solutions for the plane strain bifurcation of compressible solids, ASME Journal of Appl. Mech., 58, pp. 651-657.

BASCOUL, A., BENAIJA, E.H., BERTHAUD, Y., TORRENTI, J.M. and ZIZI, Z., 1993, Analysis of localization in concrete through stereophotogrammetry, speckle laser and replica, Cement and concrete research, Vol. 26 (6), pp. 1340-1350.

BAZANT, Z.P. and BELYTSCHKO, T.B. and CHANG, T.P., 1984, Continuum theory for strain-softening, ASCE, J. Eng. Mech., Vol. 110, pp. 1666-1692.

BAZANT, Z.P. and BELYTSCHKO, T.B., 1985, Wave propagation in a strain-softening bar: exact solution, ASCE, J. Eng. Mech., Vol. 111, pp. 381-389.

BAZANT, Z.P. and TABBARA, M.R., 1992, Bifurcation and stability of structures with interacting propagating cracks, Int. J. Fract., Vol. 53, pp. 273-289.

BELYTSCHKO, T., BAZANT, Z.P., HYUN, Y.W. and CHANG, T.P., 1986, Strain softening materials and finite element solution, Comp. Struct., Vol. 23, pp. 163-180.

BELYTSCHKO, T. and FISH, J., 1989, Spectral superposition on finite elements for shear banding problems, Proc. 5th. Int. Symposium on Numerical Methods in Engineering, R. GRUBER & al eds., Springer-Verlag, Vol. 1, pp. 19-29.

BELYTSCHKO, T., FISH, J. and BAYLISS, A., 1990, The spectral overlay on finite elements for problems with high gradients, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 81, pp. 71-89.

BENALLAL, A., R. BILLARDON, R. and GEYMONAT, G., 1988, Some mathematical aspects of the damage softening rate problem, Cracking and Damage, U.S-FRANCE workshop on Strain localisation and size effects, pp. 247-258.

BIGONI, D., 1992, Strain localization in axially-symmetric compression of brittle-cohesive materials, Eng. Fract. Mech., Vol. 42, pp. 617-627.

BIGONI, D. and HUECKEL, T., 1991, Uniqueness and localization - I Associative and non-associative elastoplasticity, Int. J. Solids Struct., Vol. 28, pp. 197-213.

BORST(DE), R., 1987, Smeared cracking, plasticity, creep and thermal loading - A unified approach, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 62, pp. 89-110.

BORST(DE), R., 1988, Bifurcations in finite element models with a non-associative flow law, Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech., Vol. 12, pp. 99-116.

BORST(DE), R., 1989, Numerical methods for bifurcation analysis in geomechanics, Ing. Arch., Vol. 59, pp. 160-174.

BOUMAHDI, M. and HENRY, J.P., 1989, Experimental results on borehole stability, LML internal report.

BRACE, W.F., PAULDING, B.W. and SCHOLZ, C., 1966, J. Geophys. Res., Vol. 71, 3939.

BRICKSTAD, B., 1983, A viscoplastic analysis of rapid crack propagation experiments in steel, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 31, pp. 307-327.

CAILLERIE, D. and CHAMBON, R., 1993, Existence and uniqueness for B.V. problems involving CLOE model, Localization and bifurcation theory for soils and rocks, pp. 35 - 40.

CESCOTTO, S. and WU, Z.D., 1989, A variable density mesh generation for planar domains, Com. Appl. Num. Meth., Vol. 5, pp. 473-481.

CHAMBON, R., 1986, Bifurcation par localisation en bande de cisaillement, une approche avec des lois incrémentalement non linéaires, Journal de Mécanique Théorique et Appliquée, Vol. 5, pp. 277-298.

CHAMBON, R., 1989, Bases théoriques d'une loi de comportement incrémentale consistante pour les sols, Rapport de Recherche COSM, IMG, Grenoble, France.

CHANG, Y.W. and ASARO, R.J., 1980, Lattice rotations and localized shearing in single crystals, Arch. Mech., 32, pp. 369-388.

CHARALAMBAKIS, N. and AIFANTIS, E.C., 1991, Thermoviscoplastic shear instability and higher order strain gradients, Int. J. Eng. Sci., Vol. 12, pp. 1639-1650.

CHARLIER, R., 1987, Approche unifiée de quelques problèmes non linéaires de mécanique des milieux continus par la méthode des éléments finis, Thèse de Doctorat en Sciences Appliqées, Université de Liége, Belgique.

CHARLIER, R., HABRAKEN, A.M., 1990, Numerical modelisation of contact with friction phenomena by the finite element method, Comp. Geotech., 9, pp. 59-72.

CHARLIER, R., 1992, Modelling of shear band localization using interface finite elements, Proc. NUMOG IV, Swansea.

CHAU, K.T., 1993, Antisymmetric bifurcations in a compressive pressure-sensitive circular cylinder under axisymmetric tension and compression, ASME Journal of Appl. Mech., 60, pp. 282-289.

CHAU, K.T. and RUDNICKI, J.W., 1990, Bifurcation of compressive pressure-sensitive materials in plane strain tension and compression, J. Mech. Phys. solids, Vol. 38, pp. 875-898.

CHENG, J.H., 1988, Automatic adaptative remeshing for finite element simulation of forming processes, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 26, pp. 1-8.

CHRISTOFFERSEN, J. and HUTCHINSON, J.W., 1979, A class of phenomenological corner theories of plasticity, J. Mech. Phys. Solids, 27, pp. 465, 487.

CORMEAU, I., 1975, Numerical stability in quasi-static elasto-visco-plasticity, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 9, pp. 109-127.

COSSERAT, E. et F., 1909, Théorie des corps déformables, Paris, A. HERMANN et fils.

DARVE, F., 1987, An incrementally non-linear constitutive law of second order and its application to localization, Mech. Eng. Mat., DESAI C.S. and GALLAGHER R.H. eds., Wiley, pp. 179-196.

DESOYER, T. and LEROUX, S., 1994, Etude de la localisation pour une loi élastique endommageable avec gradients de déplacement d'ordre supérieur, CR. Acad. Sci. Paris, t. 318; Serie 2, pp. 277-282.

DESRUES, J., 1984, La localisation de la déformation dans les milieux granulaires, Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Grenoble.

DESRUES, J. and CHAMBON, R., 1986, Bifurcation par localisation de la déformation: étude expérimentale et théorique à l'essai biaxial sur sable, Large deformation of solids: Physical Bases and Mathematical Modelling, GITTUS, J., ZARKA, J. and NEMAT-NASSER, S. eds., Elsevier Applied Science, pp. 433-459.

DIOUTA, N.G., HAIED, A., KONDO, D. and SHAO, J.F., 1994, Experimental and numerical analysis of strain localization in two rock materials, EUROCK'94, Delft, The Netherlands.

DIOUTA, N.G., KONDO, D. and SHAO J.F., 1995a, Strain localization in rocks modelled by non-associated and non-coaxial plasticity, submitted to Eur. J. Mech. A/Solids.

DIOUTA, N.G., SHAO, J.F. and KONDO, D., 1995b, Dynamic viscoplastic approach for strain localization in a sandstone, submitted to Eur. J. Mech. A/Solids.

ELAM, C.F., 1927, Tensile tests on alloy crystals, Part I: Solid solution alloys of aluminium and zinc, Proc. R. Soc. London, A115, pp. 133-147.

FISH, J. and BELYTSCHKO, T., 1990, A general finite element procedure for problems with high gradients, Comp. Struct., Vol. 35, pp. 309-319.

GAGO, J.P. de S.R., KELLY, D.W., ZIENKIEWICZ, O.C. and BABUSKA, I., 1983, A posteriori error analysis and adaptative processes in the finite method: Part II - Adaptative mesh refinement, Int. J. Num. Meth. Eng., 19, pp. 1621-1656.

HABRAKEN, A.M. and CESCOTTO, S., 1990, An automatic remeshing technique for finite element simulation of forming processes, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 30, pp. 1503-1525.

HADAMARD, J., 1903, Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique, chapitre 6, Hermann Paris.

HADLEY, K., 1975, Azimutal variation of dilatancy, J. Geophys. Res., Vol. 80, pp. 4845-4850.

HAHN, G.T., and ROSENFIELD, A.R., 1975, Metallurgical factors affecting fracture toughness of aluminium alloys, Met. Trans. 6A, pp. 653-668.

HAIED, A., KONDO, D. and HENRY, J.P., 1993, Experimental detection of shear bands in a sandstone, Assessment and prevention of failure phenomena in rock engineering, pp. 149-154.

HAIED, A, 1995, Etude expérimentale de la rupture en mode de déformation localisée, Thèse de Doctorat, Université de Lille I.

HAMMAD, W.I., 1991, Modelisation non linéaire et expérimentale des bandes de cisaillement dans les sables, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourrier, Grenoble 1.

HARIRECHE, O. and LORET, B., 1992, 3-D dynamic strain localization: shear-band pattern transition in solids, Eur. J. Mech., A/Solids, Vol. 11, pp. 733-751.

HILL, R., 1962, Accelation waves in solids, J. Mech. Phys., volume 10, pp. 1-16.

HILL, R. and HUTCHINSON, J.W., 1975, Bifurcation phenomena in the plane tension test, J. Mech. Phys. Solids, 23, pp. 239-264.

HOLCOMB, D.J., 1992, Localization studies under triaxial conditions, Proc. US. Symp., ed. Balkema, pp. 661-670.

HUGHES, T.J.R. and LIU W.K., 1978, Implicit-Explicit finite elements in transient analysis: Stability theory, ASME, J. Appl. Mech., Vol. 45, pp. 371-378.

HUGHES, T.J.R., 1987, The finite element method, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

HUTCHINSON, J.W. and TVERGAARD, V., 1980, Surface instabilities on statically strained plastic solids, Int. J. Mech. Sci., 22, pp. 339-354.

IRONS, B.M. and RAZZAQUE, A., 1972, Experience with the patch test for convergence of finite elements, Math. Fond., pp. 557-587.

KELLY, D.W., GAGO, J.P. de S.R., ZIENKIEWICZ, O.C. and BABUSKA, I., 1983, A posteriori error analysis and adaptative processes in the finite method: Part I - Error analysis, Int. J. Num. Meth. Eng., 19, pp. 1593-1619.

KHAN, A.S., XIANG, Y. and HUANG, S., 1991, Behaviour of Berea sandstone under confining pressure, Part I: Yield and failure surfaces of non linear elastic response, Int. J. Plast., Vol. 7, pp. 607-624.

KHAN, A.S., XIANG, Y. and HUANG, S., 1992, Behaviour of Berea sandstone under confining pressure, Part II: Elastic-plastic response, Int. J. Plast., Vol. 8, pp. 209-220.

KOLYMBAS, D., 1981, Bifurcation analysis for sand samples with non linear constitutuve equation, Ing. Arch., Vol. 50, pp. 131-140.

LADE, P.V., 1977, Elasto-plastic stress strain theory for cohesionless soil with curved yield surfaces, Int. J. Solids Structures, 13, pp. 1019-1035.

LARSSON, R. and RUNESSON, K., 1991, Finite element simulation of localized plastic deformation, Arch. Appl. Mech., Vol. 61, pp. 305-317.

LEROY, Y. and ORTIZ, M., 1989, Finite element analysis of strain localization in frictional materials, Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech., vol. 13, 53-74.

LORET, B., 1986, Problèmes numériques et théoriques de la géomécanique, Thèse de doctorat d'Etat, Université Pierre et Marie Curie, Paris-VI.

LORET, B. and PREVOST, J.H., 1986, Accurate numerical solutions for Drucker-Prager elastic-plastic models, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 54, pp. 259-277.

LORET, B. and PREVOST, J.H., 1990, Strain localization in elasto-(visco)-plastic solids, Part 1: General formulation and one-dimentional examples, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 83, pp. 247-273.

LORET, B. and PREVOST, J.H., 1990, Strain localization in elasto-(visco)-plastic solids, Part 2: Plane strain examples, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 83, pp. 275-294.

LORET, B. and PREVOST, J.H., 1991, Dynamic localization in fluid-saturated porous media, ASCE, J. Eng. Mech., 117, pp. 907-922.

MANDEL, J., 1962, Ondes plastiques dans un milieu indéfini à trois dimensions, J. Mech., 1, pp. 3-30.

MANDEL, J., 1963, Propagation des surfaces de discontinuité dans un milieu élastoplastique, Int. Symp. on Stress Waves in Anelastic Solids, Brown University, Berlin/Göttinger/Heidelberg: Springer 1964.

MANDEL, J., 1964, Conditions de stabilité et postulat de drucker, Proceedings of the IUTAM Symposium on Rheology and soil Mechanics, Springer-Verlag, Berlin, pp. 58-68.

MORAN, B., 1987, A finite element formulation for transient analysis of viscoplastic solids with application to stress wave propagation problems, Comp. Struct., Vol. 27, pp. 241-247.

MÜHLHAUS H.B., 1986, Shear band analysis in granular materials by Cosserat theory, Ing. Arch., Vol. 56, pp. 389-399.

NEEDELMAN, A., 1979, Non-normality and bifurcation in plane strain tension and compression, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 27, pp. 231-254.

NEEDELMAN, A., 1988, Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems, Com. Meth. Appl. Mech. Eng., 67, pp. 69-85.

NEEDELMAN, A., 1989, Dynamic shear band development in plane strain, ASME J. Appl. Mech., 56, pp. 1-9.

NEMAT-NASSER, S. and HORI, M., 1993, Micromechanics: Overall properties of heterogeneous materials, Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam.

ORD, A, VARDOULAKIS, I.G. and KAJEWSKI, R., 1991, Shear band in Godsford sandstone, Int. J. Rock. Mech. Min. sci., Vol. 28, pp. 397-409.

ORTIZ, M., 1987, An analytical study of the localised failure modes of concrete, Mech. Mat., 6, pp. 159-174.

ORTIZ, M., LEROY, Y. and NEEDELMAN, A., 1987, A finite element method for localized failure analysis, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 61, pp. 189-214.

OTTER, J.R.M., 1966, Dynamic relaxation, Proc. Inst. Civ. Eng., Vol. 35, pp. 633-656.

OWEN, D.J.R. and HINTON, E., 1987, Finite elements in plasticity: Theoty and pracrice, Pineridge press limited.

PAPANASTASIOU, P.C. and VARDOULAKIS, I.G., 1992, Numerical treatement of progressive localization in relation to borehole stability, Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech., Vol. 16, 389-424.

PASTOR, M., RUBIO, C., MURA, P., PERAIRE, J., VILOTTE, J.P. and ZIENKIEWICZ, O.C., 1992, Numerical analysis of localization, Num. Models Geomech., PANDE & PIETRUSZCZAK eds., pp. 339-348.

PEIRCE, D., ASARO, R.J. and NEEDELMAN, A., 1981, An analysis of nonuniform and localized deformation in ductile single crystals, Acta Metall.

PEIRCE, D., SHIH, C.F. and NEEDELMAN, A., 1984, A tangent modulus method for rate dependent solids, Comp. Struct., Vol. 18, pp. 875-887.

PETRYK, H. and THERMANN, K., 1985, Second-order bifurcation in élastic-plastic solids, J. Mech. Phys. solids, Vol. 33, pp. 577-593.

PIETRUSZCZAK, S.T. and MROZ, Z., 1981, Finite element analysis of deformation of strain-softening materials, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 17, pp. 327-334.

PIJAUDIER-CABOT, G. and BAZANT, Z.P., 1986, Non local damage theory, ASCE, J. Eng. Mech., Vol. 113, pp. 1512-1533.

PREVOST, J.H. and HUGHES, T.J.R., 1981, Finite element solution of elastic-plastic boundery-value problems, ASME, J. Appl. Mech., Vol. 48, pp. 69-74.

PREVOST, J.H., 1984, Localization of deformations in elastic-plastic solids, Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech., Vol. 8, pp. 187-196.

PUTTICK, D.E., 1959, Ductile fracture in metals, Phil. Mag., 4, pp. 964-969.

RANIECKI, B. and BRUHNS, O.T., 1981, Bounds to bifurcation stresses in solids with non associated plastic flow law at finite strain, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 29, pp. 153-172.

RICE, J.R., 1976, The localisation of plastic deformation, Theoritical and applied Mechanics, pp. 207-220.

RICE, J.R. and RUDNICKI, J.W., 1980, A note on some features of the theory of localization of deformation, Int. J. Solids Mech., pp. 597-605.

RUDNICKI, J.W. and RICE, J.R., 1975, Conditions of localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials, J. Mech. Phys. Solids, 23, pp. 371-394.

RUDNICKI, J.W., 1984, Effects of dilatant hardening on the development of concentrated shear deformation in fissurated rock masses, J. Geophys. Res., Vol. 89, pp. 9259-9270.

SANTARELLI, F.J., 1990, Etude expérimentale de la bifurcation dans les roches. Revue Française de géotechnique, Vol. 50, pp. 61-70.

SCHREYER, H.L., 1990, Analytical solutions for non-linear strain-gradient softening and localization, ASME Journal of Appl. Mech. 57, pp. 522-528.

SEWELL, M.J., 1972, A survey of plastic buckling, in Stability, ed. LEIPHOZ, H., University of Waterloo Press, Waterloo, 85.

SEWELL, M.J., 1974, A plastic flow rule at a yield vertex, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 22, pp. 469-490.

SHAO, J.F., 1987, Etude du comportement d'une craie blanche très poreuse et modélisation, Thèse de doctorat, Université de LILLE 1, France.

SHAO, J.F. and HENRY, J.P., 1991, Development of an elastoplastic model for porous rock, Int. J. Plas., Vol. 7, pp. 1-13.

SHAWKI, T.G., and CLIFTON, R.J., 1989, Shear band formation in thermal viscoplastic materials, Mech. Mat., 8, pp. 13-43.

SHAWKI, T.G., 1994, An energy criterion for the onset of shear localization in thermal viscoplastic materials, Part I: Necessary and sufficient initiation conditions, ASME, J. Appl. Mech., Vol. 61, pp. 530-537.

SHAWKI, T.G., 1994, An energy criterion for the onset of shear localization in thermal viscoplastic materials, Part II: Applications and implications, ASME, J. Appl. Mech., Vol. 61, pp. 538-547.

SIMO, J.C., KENNEDY, J.G., GOVINDJEE, S. and HUGHES, T.J.R., 1987, Unconditionally convergent algorithms for non-smooth multi-surface plasticity amenable to exact linearization, in NAKAZAWA, S., WILLIAM, K. and REBELLO, N., eds., ASME Winter Annual Meeting, Advances in Inelastic Analysis, AMD, Vol. 88, pp. 87-96.

SINGH, U.K. and DIGBY, P.J., 1989a, A continuum damage model for simulation of the progressive failure of brittle rocks, Int. J. Solids Struct., Vol. 25, pp. 647-663.

SINGH, U.K. and DIGBY, P.J., 1989b, The application of a continuum damage model in the finite element simulation of the progressive failure and localization of deformation in brittle rock structures, Int. J. Solids Struct., Vol. 25, pp. 1023-1038.

SULEM, J., VARDOULAKIS, I.G. and PAPAMICHOS, E., 1993, Prediction of shear failure in sandstone, Geotech. Eng. of Hard Soils - Soft Rocks, Vol. 2, pp. 1663-1669.

THOMAS, T.Y., 1961, Plastic flow and fracture in solids, Academic Press, New-york.

TILLARD, D., 1992, Etude de la rupture dans les géomatériaux cohésifs. Application à la marne de beaucaire, Thèse I.M.P.G.

TRUESDELL, C., 1974, Introduction à la mécanique rationnelle des milieux continus, Traduction par EUVRARD, D., Eds Masson et Cie, Paris.

TRIANTAFYLLIDIS, N. and AIFANTIS, E.C., 1986, A gradient approach to localization of deformation. I. Hyperelastic materials, J. Elas., Vol. 16, pp. 225-237.

TVERGAARD, V., NEEDELMAN, A. and LO, K.K., 1981, Flow localization in the plane strain tensile test, J. Mech. Phys. Solids, 29, pp. 115-142.

UNDERWOOD, P., 1983, Dynamic relaxation, in Comp. Meth. Trans. Anal., BELYTSCHKO, T. and HUGHES, T.J.R. eds., North Holland, Dordrecht, Chap. 5, pp. 245-265.

VARDOULAKIS, I., GOLDSCHEIDER, M. and GUDEHUS, Q.G., 1978, Formulation of shear bands in sand bodies as a bifurcation problem, Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech., Vol. 2, pp. 99-128.

VARDOULAKIS, I., 1979, Bifurcation analysis of the triaxial test on sand samples, Acta Mechenica, 32, pp. 35-44.

VARDOULAKIS, I., 1988, Theoretical and experimental bounds of shear band bifurcation strain in biaxial tests on dry samples, Res. Mechanica, 23, pp. 239-259.

VIGGIANI, G. and RAMPELLO, 1993, Experimental analysis of localization phenomena in triaxial tests on stiff clays, Geotech. Eng. of Hard Soils - Soft Rocks, Vol. 1, pp. 849-856.

WANG, X., 1993, Modélisation numérique des problèmes avec localisation de la déformation en bandes de cisaillement, Thése de doctorat, Université de Liège, Belgique.

ZIENKIEWICZ, O.C. and LÖHNER, R., 1985, Accelarated relaxation or direct solution? Future prospects for finite element methods, Int. J. Num. Mech. Eng., Vol. 21, pp. 1-11.

ZIENKIEWICZ, O.C. and ZHU, J.Z., 1987, A simple error estimator and adaptative procedure for practical engineering analysis, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 24, pp. 337-357.

ZIENKIEWICZ, O.C. and HUANG, G.C.,1990, A note on localization phenomena and adaptative finite-element analysis in forming processes, Comp. Appl. Num. Meth., Vol. 6, pp. 71-76.

ZIENKIEWICZ, O.C. and TAYLOR, R.L., 1989, The finite element, method, Volume 2, Solid and Fluid Mechanics, Dynamic and Non-linearity, 4th edition, McGraw-Hill Book Company.

UNIVERSITÉ DES SC. ET TECHN. BIBLIOTHÈQUE UNIVERSITAIRE LILLE