

THESE DE DOCTORAT

présentée par

Oana CAZACU

Pour obtenir le titre de DOCTEUR



**de l'UNIVERSITE DES SCIENCES
ET TECHNOLOGIES DE LILLE**

Spécialité : GENIE CIVIL

**CONTRIBUTION A LA MODELISATION
ELASTO-VISCOPLASTIQUE D'UNE ROCHE ANISOTROPE**

(Document provisoire pour les membres du jury)

LABORATOIRE DE MECANIQUE DE LILLE URA 1441 CNRS

SOMMAIRE

Résumé	V
Abstract	VI
Introduction	VII

Chapitre I

GÉNÉRALITÉS SUR LE COMPORTEMENT MÉCANIQUE DES ROCHES ANISOTROPES

1.1	ANISOTROPIE DE STRUCTURE	1.2
1.2	OBSERVATIONS EXPÉRIMENTALES	1.3
1.3	CARACTÉRISTIQUES PHYSIQUES ET COMPORTEMENT MÉCANIQUE DE L'ARGILITE DE TOURNEMIRE	1.6
1.3.1	Présentation du matériau	1.6
1.3.2	Résultats des essais de compression hydrostatique	1.7
1.3.3	Comportement de l'argilite en compression triaxiale	1.11
1.4	MODÈLES ANALYTIQUES	1.14
1.4.1	Théorie de la cohésion variable de Jaeger	
1.4.2	Théorie de la cohésion variable de Jaeger modifiée par McLamore et Gray	1.15
1.4.3	Critère de Nova et Sacchi (1979)	1.16
1.4.4	Critère de Hill	1.18
1.4.5	Critère de Tsai et Wu	1.19
1.4.6	Critère de Pariseau	1.21
1.4.7	Critère de Kaar et al (1987)	1.22
1.4.8	Critères de Mises et Mohr-Coulomb anisotropes Boehler (1975)	1.23
1.5	CONCLUSION	1.25

Chapitre II

MODÉLISATION DU COMPORTEMENT ÉLASTIQUE

2.1	NOTE HISTORIQUE	2.2
2.2	ÉQUATIONS GÉNÉRALES DE L'ÉLASTICITÉ DES SOLIDES ORTHOTROPES DE RÉVOLUTION	2.4
2.3	MODÉLISATION DU COMPORTEMENT ÉLASTIQUE DE L'ARGILITE DE TOURNEMIRE	2.9
2.3.1	Lois empiriques d'évolution des coefficients élastiques en fonction de l'état de contrainte	2.9
2.3.1.a	- Évaluation du module de Young E_1	2.10
2.3.1.b	- Modules élastiques E_2, ν_{21} et ν_{23}	2.14
2.3.1.c	- Coefficient de Poisson ν_{12}	2.20
2.3.1.d	- Vérification de la symétrie du tenseur d'élasticité	2.22
2.3.1.e	- Module de cisaillement G_{12}	2.24
2.3.2	Considérations théoriques sur la dépendance en contrainte des modules élastiques des roches orthotropes de révolution : Application à l'argilite de Tournemire	2.27
2.4	CONCLUSIONS	2.38

Chapitre III

ÉTUDE DU COMPORTEMENT À LA RUPTURE DE L'ARGILITE DE TOURNEMIRE

3.1.1	INTRODUCTION	3.2
3.1.2	DÉVELOPPEMENT D'UN CRITÈRE DE RUPTURE ANISOTROPE	3.2
3.1.3	INTERPRÉTATION PHYSIQUE DES COMPOSANTES DU TENSEUR D'ANISOTROPIE A	3.7

3.2	APPLICATION DU CRITÈRE DE TSAI ET WU À L'ARGILITE DE TOURNEMIRE	3.19
3.3	GÉNÉRALISATION DU CRITÈRE DE STASSI SUIVANT LA PROCÉDURE DE OLSZAK ET URBANOWSCHI	3.24
3.4	CONCLUSIONS	3.29

Chapitre IV

MODÉLISATION DU COMPORTEMENT VISCOPLASTIQUE

4.1	LOIS DE COMPORTEMENT DES ROCHES EN FONCTION DU TEMPS	4.2
4.1.1	Lois empiriques de fluage	4.4
4.1.2	Modèles analogiques	4.5
4.1.3	Équations constitutives élasto-viscoplastiques	4.5
4.2	PRÉSENTATION DU MODÈLE CHOIX DES ÉQUATIONS CONSTITUTIVES ET D'ÉVOLUTION	4.8
4.2.1	HYPOTHÈSES GÉNÉRALES	4.8
4.2.2a	Fonction de charge	4.9
4.2.2b	Règle d'écoulement	4.11
4.3	DÉTERMINATION DES FONCTIONS CONSTITUTIVES	4.12
4.3.1	Évaluation de la fonction $H_m(p)$	4.12
4.3.2	Évaluation de la fonction $H_d(\sigma, \mathbf{M})$	4.14
4.3.3	Détermination de la fonction $U(\sigma)$	4.18
4.3.3a	Détermination de la fonction $U_h(p)$	4.18
4.3.3b	Détermination de la fonction $U_d(\sigma)$	4.21
4.4	TEST DU MODÈLE SUR DES RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX	4.23
	CONCLUSION ET PERSPECTIVES	5.1
	BIBLIOGRAPHIE	5.3

RÉSUMÉ

La plupart des roches sont anisotropes. L'anisotropie des roches se traduit par une variation directionnelle des propriétés et caractéristiques macroscopiques.

Beaucoup d'ouvrages souterrains sont réalisés dans des formations anisotropes. Dans la conception et l'analyse de la stabilité de ces ouvrages il est nécessaire d'avoir une bonne connaissance des mécanismes de déformation et de rupture du milieu rocheux.

C'est dans ce contexte que se situe l'objectif de cette étude portant sur la formulation d'un modèle élasto-viscoplastique pour une roche initialement orthotrope de révolution: l'argilite de Tournemire.

La première partie comporte une étude bibliographique sur les roches anisotropes à structure planaire. L'accent est mis sur la caractérisation de l'anisotropie du domaine élastique et des résistances.

Dans la deuxième partie nous proposons une modélisation du comportement élastique non-linéaire de l'argilite de Tournemire.

Les deux dernières parties de ce mémoire sont consacrées au développement d'un modèle de comportement viscoplastique et d'un critère de rupture anisotrope pour ce matériau.

L'anisotropie du comportement irréversible est décrite à l'aide d'un tenseur d'ordre quatre constant qui respecte les symétries du matériau. En utilisant les résultats de la théorie de représentations (Wang, 1970; Bohler (1979), Liu (1982)) nous donnons l'écriture invariante du critère viscoplastique, de la loi d'écoulement et du critère de rupture à courte terme de l'argilite.

Une vérification du modèle développé est effectuée à travers des essais en compression hydrostatique et triaxiale de révolution.

Mots clés : anisotropie, élasticité non-linéaire, élasto-viscoplasticité, rupture

ABSTRACT

Isotropic rocks seldom occur in nature. Oriented internal structures, such as oriented crystallographic axes, grains fissuration, cracks result on the macroscopic level in a directional mechanical response of rocks. Thus, the design and the stability analysis of underground constructions (oil well drilling, nuclear and chemical waste disposals, etc) require a good knowledge of the mechanical behavior of anisotropic rocks.

This study is aimed at formulating a general elastic/viscoplastic constitutive equation for an initially transversely isotropic rock : Tournemire shale. From the experimental investigation conducted in our laboratory by Niandou (1994) on Tournemire shale, we can conclude that the variation of the mechanical characteristics with respect to the oriented structure of the material, may be considered continuous.

In the first part of this study we briefly present some essential features of the anisotropic mechanical behavior of rocks possessing only one apparent direction of anisotropy (orthotropic or transversely isotropic) and some analytical models which describe these properties.

In the second part we characterize the instantaneous (elastic) response of Tournemire shale. The elastic behavior is strongly non-linear. We analyse in detail which are the restrictions to be fulfilled by the laws of variation of the elastic parameters with the stress state, in order to obtain a conservative elastic response (i.e., no energy dissipation occurs if the material undergoes a closed stress cycle).

The last part is devoted to the formulation of a viscoplastic model for Tournemire shale. The anisotropy of the irreversible deformation is described by means of a constant, anisotropic fourth order tensor. The viscoplastic criterion, the flow rule and a short-term failure criterion are expressed in a general invariant form. No a priori assumption concerning the existence of a viscoplastic potential is made.

Finally the model is checked against data obtained in hydrostatic and in conventional triaxial tests performed at different confining pressures and various orientations of the strata with respect to the axial loading.

Keywords : anisotropy, non-linear elasticity, elastic/viscoplastic constitutive equation, failure criterion

INTRODUCTION

Beaucoup d'ouvrages souterrains, tels que les puits pétroliers, les galeries de dépôts de déchets nucléaires ou chimiques sont réalisés dans des formations anisotropes. Une bonne compréhension et une description appropriée de la réponse anisotropes des milieux rocheux aux sollicitations mécaniques, sont d'une grande importance dans l'analyse de la stabilité de ces ouvrages.

L'objet de cette étude est de formuler un critère de rupture à courte terme d'une part et, de développer un modèle viscoplastique d'autre part, capable décrire l'évolution du comportement mécanique d'une roche anisotrope, l'argilite de Tournemire. L'étude expérimentale du comportement de l'argilite de Tournemire, réalisée dans notre laboratoire par Niandou (1994), nous amène à dire que l'anisotropie de l'argilite se traduit, dans une première approche, par une anisotropie de formation. Il a été montré raisonnable de supposer que l'argilite est un milieu initialement orthotrope de révolution dont le plan d'isotropie est le plan de stratification.

Notre étude comporte, en première partie, une présentation succincte des données physiques et expérimentales sur les roches anisotropes à structure planaire et une revue bibliographique des principaux modèles théoriques proposées pour décrire l'influence de l'anisotropie de structure sur les différents domaines du comportement mécanique.

L'étude est ensuite spécialisée à la description du comportement élastique non-linéaire du matériau. On analyse en particulier les restrictions que les lois de variation des coefficients élastiques en fonction de l'état de contrainte doivent respecter afin qu'il n'y ait pas de dissipation d'énergie sur un cycle fermé quelconque dans l'espace des contraintes.

La troisième partie de ce mémoire est consacrée à la formulation invariante d'un critère de rupture anisotrope. Dans une première approche nous généralisons le critère de rupture isotrope de Stassi au cas de l'orthotropie de révolution, en utilisant la procédure de Boehler et Sawczuk (1970). Dans une deuxième variante, le même critère isotrope est généralisé en suivant la méthode proposée par Olszak et Urbanowski (1956) pour généraliser les deux premiers invariants du tenseur de contrainte au cas anisotrope. Une comparaison est faite entre les deux variantes proposée et le critère de Tsai et Wu (1971).

Le modèle viscoplastique que nous développons dans la dernière partie de notre étude est

une généralisation du modèle elasto-viscoplastique isotrope proposé par Cristescu (1987,1994). Le critère de rupture obtenu suivant la démarche de Bohler et Sawczuck (1970) est retenu comme critère de rupture à court terme dans le modèle général viscoplastique. Notre modèle rend compte de l'anisotropie du champ de déformation sous sollicitation isotrope et permet d'interpréter et de prévoir les résultats expérimentaux sur l'argilite pour des chemins de sollicitation triaxiaux classiques.

CHAPITRE I

**GÉNÉRALITÉS SUR LE
COMPORTEMENT MÉCANIQUE DES
ROCHES ANISOTROPES**

Dans ce chapitre nous présentons une revue bibliographique sur le comportement mécanique des roches anisotropes.

Nous débutons par une présentation succincte des structures initiales qu'on peut rencontrer dans les roches. Ensuite nous donnons un aperçu des principaux résultats des essais effectués sur les roches anisotropes à structure planaire (de type orthotrope de révolution) et les modèles analytiques proposés pour décrire l'influence de l'anisotropie de structure sur les différents domaines du comportement mécanique.

1.1 ANISOTROPIE DE STRUCTURE

La plupart des roches sont anisotropes. La directionnalité des propriétés physiques des roches est le résultat d'une part de leur mode de formation et, d'autre part, des transformations naturelles subies.

La notion d'échelle est un facteur important dans l'analyse des mécanismes anisotropes mis en jeu. L'anisotropie de structure peut être due à l'anisotropie des minéraux constitutifs, à l'anisotropie des agrégats ou à la présence des microfissures. A l'échelle de l'agrégat on distingue deux types fondamentaux de structures initiales dans les roches : structures linéaires et structures planaires.

La structure initiale des roches sédimentaires est de type planaire caractérisée par une stratification horizontale par suite du dépôt dans le champ gravitaire. Pour les roches schisteuses les principaux minéraux constitutifs se sont disposés à plat, parallèlement à un même plan, au cours du processus de formation. En ce qui concerne les structures linéaires, on rencontre soit une linéation d'allongement qui apparaît avec la schistosité de flux et de foliation, soit une linéation d'intersection (qui apparaît quand une schistosité se superpose sur une surface plus ancienne) soit, une linéation minérale (correspondant à des cristallisations métamorphiques qui se produisent en même temps que la schistosité).

Liées à ces deux types principales de structures initiales on distingue les systèmes de symétrie suivantes :

- Symétrie orthorhombique (orthotropie): la roche présente trois plans de symétrie orthogonaux.

- Symétrie axiale(orthotropie de révolution): c'est un cas particulier de l'orthotropie , la structure est isotrope dans un des plans de symétrie.
- Symétrie triclinique : la roche ne présente pas d'éléments de symétrie.
- Symétrie sphérique : matériau isotrope.

1. 2. OBSERVATIONS EXPÉRIMENTALES

L'étude de l'influence de l'anisotropie de structure sur le domaine élastique et sur les caractéristiques à la rupture a été développée par de nombreux auteurs tels que : Muller (1930), Lepper (1949), Price(1958), Hobbs(1960), Donath (1961,1964,1972), Hoek (1964), McLamore et Gray(1967), Attewell et Sandford(1974), Alliot et Boehler(1979) principalement sur des roches à structure planaire (de type orthotrope de révolution). Pour caractériser l'anisotropie mécanique, il suffit pour ce type de symétrie, de faire varier l'angle de prélèvement des échantillons cylindriques de 0° à 90° dans un plan défini par l'axe de révolution de l'orthotropie et un axe du plan d'isotropie. Les résultats des essais de compression simple sur des roches sédimentaires ou métamorphiques nous permettent de faire les observations générales suivantes :

- le comportement à la rupture dépend de manière importante de l'orientation du champ de contraintes par rapport à la structure du matériau;
- la résistance minimale est atteinte pour β comprise entre 30° et 45°, β étant défini comme l'angle entre la contrainte principale majeure et la normale au plan d'isotropie;
- la résistance maximale est obtenue soit dans la direction perpendiculaire à la stratification (le plus fréquemment) soit, dans la direction parallèle au strates (Tableau 1.1).

Nature de la roche	β , pour $\sigma_{c \max}$	$\frac{\sigma_{c90}}{\sigma_{c \min}}$	Auteurs
Ardoise de Martinsburg	90°	13.46	Donath(1964)
Argilite	90°	2.33	Chenevert et Gatlin (1965)
Argilite de Green River I	0°	1.62	McLamore et Gray (1964)

Argilite de Green River II	0°	1.41	McLamore et Gray (1964)
Argilite de Green River	0°,90°	1.37	Chenevert et Gatlin (1965)
Ardoise (Afrique du Sud)	0°	3.68	Hoek (1964)
Grès (Kota)	0°	1.12	Rao (1984)
Ardoise(Texas)	90°	3	McLamore et Gray (1964)
Charbon	90°	5.18	Pomerooy et al (1971)

Tableau 1.1 Anisotropie de la résistance des différentes roches en compression simple (d'après Ramamurthy (1993))

- Les roches anisotropes soumises à une pression isotrope subissent des distorsions (Allirot et al. (1977)).

En compression uniaxiale on peut observer trois types de mécanismes de rupture suivant l'orientation (Masure, 1970) :

- pour $\beta < 25^\circ$ la rupture se produit par extension le long ou en travers des plans de stratification.

- pour $\beta \in (25^\circ, 60^\circ)$ il y a fermeture des fissures majeures; la rupture se fait par glissement sur les plans.

- pour $\beta \in (60^\circ, 90^\circ)$ il y a serrage important des plans de stratification ; la rupture se fait par extension à travers la matrice.

Cependant, les valeurs sont indicatives car les angles définissant les phases d'extension et de glissement varient suivant la roche testée.

En compression triaxiale, les mécanismes de rupture et le comportement du matériau dépendent de l'orientation et de la pression de confinement. En général, l'anisotropie des résistances à la rupture ainsi que l'anisotropie des modules élastiques diminue avec l'augmentation de la pression de confinement. Par exemple, dans le cas de l'argilite de Green-River I, le rapport entre la résistance minimale (qui correspond à $\beta = 30^\circ$) et la résistance maximale ($\beta = 0^\circ$) est égale à 0.63 pour un confinement de 100 psi ; à 0.89 pour 25000 psi (McLamore et Gray, 1967). Une variation similaire de l'anisotropie avec le confinement a été observé par Donath(1964, 1972) pour l'ardoise de Martinsburg et un schiste. Cependant, il faut noter les observations d'Allirot et Boehler (1979) sur la diatomite

de la montagne d'Andance (France), à savoir que l'anisotropie des résistances, comme l'anisotropie des modules élastiques, augmente avec la pression de confinement. (Figures 1.1, - 1.2)

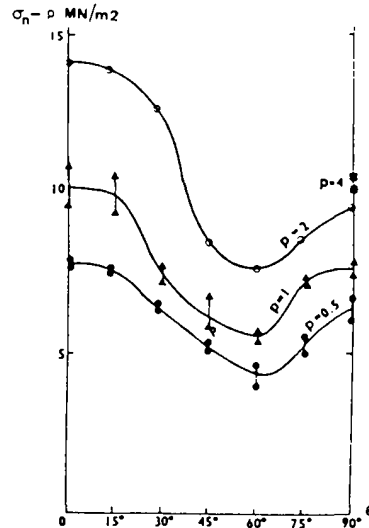


Figure 1.1 : Évolution de l'anisotropie des résistances limites suivant la pression de confinement [d'après Alliot et Boehler (1979)]

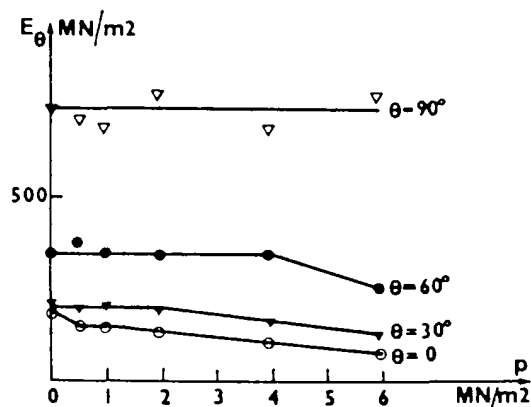


Figure 1.2 : Évolution des modules élastiques en fonction de la pression de confinement [d'après Alliot et Boehler (1979)]

L'analyse du mécanisme de rupture de l'argilite de Tournemire (Niandou, 1994) nous permet de faire les constatations suivantes :

- à $\beta=90^\circ$, quel que soit le confinement la rupture se produit par cisaillement, l'angle de rupture étant au environs de 55° ;
- à $\beta=0^\circ$, pour un confinement de 1 MPa la rupture se fait par extension le long des plans de stratification. En augmentant la pression de confinement on constate que la rupture a lieu à travers les strates; le plan de rupture fait un angle d'environ 30° avec la direction de la contrainte principale. Pour 20 MPa de confinement la rupture se fait par cisaillement suivant deux plans symétriques à la contrainte principale majeure.
- pour les orientations comprises entre 15° et 60° la rupture se produit par glissement le long des plans de stratification.

1.3 CARACTÉRISTIQUES PHYSIQUES ET COMPORTEMENT MÉCANIQUE DE L'ARGILITE DE TOURNEMIRE

1.3.1 PRÉSENTATION DU MATÉRIAU

Un vaste programme expérimental a été mené dans le Laboratoire de Mécanique de Lille (URA CNRS n° 1441) par H. Niandou (Niandou, 1994) afin de caractériser le comportement rhéologique de l'argilite de Tournemire.

L'argilite de Tournemire est une roche sédimentaire, à granulométrie très fine, provenant de Tournemire (France).

La porosité et la densité suivant la température de séchage sont données dans le Tableau 1.2 :

Séchage	Porosité	Densité
65° C	8.35 %	2.72
80° C	8.53 %	2.73
150° C	13.7%	2.76

Tableau 1.2 : Mesures de la porosité et de la densité de solide en fonction de la température de séchage [d' après Schmitt, 1994]

La teneur en eau varie de 4,5% à 8% (Fourmaintraux D., 1990).

Les études par diffractométrie X (Schmitt, 1994) relèvent la composition minéralogique suivante: minéraux argileux 55% , Quartz 19% , Calcite 15%, et autres 11% dont feldspaths 6

à 7%, pyrite 3-4%, sidérite. Les minéraux argileux se répartissent comme suit: Kaolinite 50%, Illite 30%, Intéstratifiés I/S 15% et Chlorite 5%.

1.3.2 RÉSULTATS DES ESSAIS DE COMPRESSION HYDROSTATIQUE

Les essais de compressibilité hydrostatique ont été réalisés sur des échantillons cubiques, découpés en tenant compte des symétries du matériau (Figure 1.3).

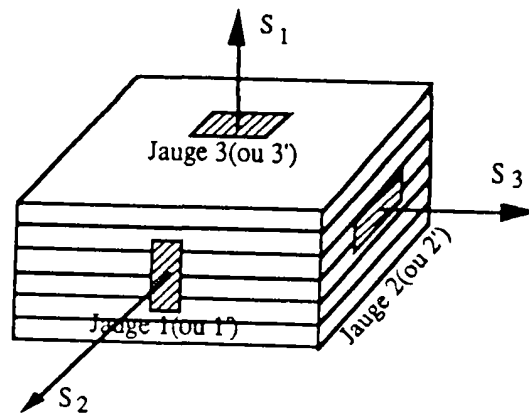


Figure 1.3 : Essai de compressibilité, position des jauges d'extensométrie sur un échantillon cubique ($5 \times 5 \times 5 \text{ cm}^3$). [d'après Niandou, 1994]

La figure 1.4 présente les courbes contrainte-déformation obtenues dans un essai qui comporte un cycle de déchargement après que la pression maximale de 50 MPa soit atteinte.

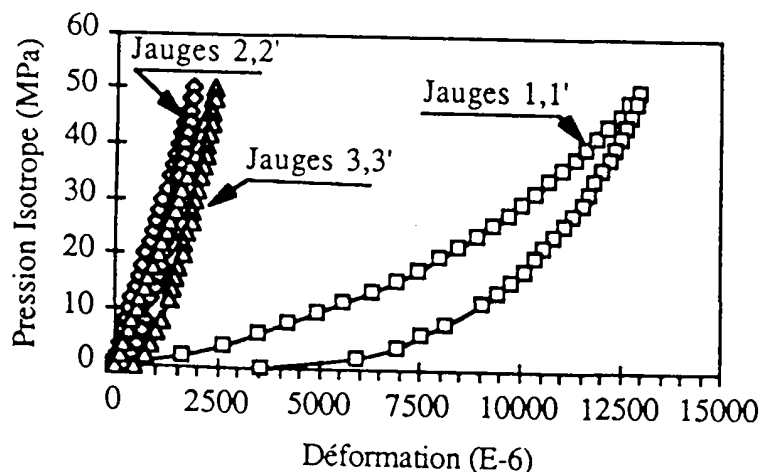


Figure 1.4 : Essai de compressibilité, comparaison entre les déformations dans les trois directions du repère structural

A partir de ces résultats on peut faire les remarques suivantes :

- les courbes pression - déformation sont non - linéaires (notamment la courbe pression - déformation suivant la direction S_1)
- le cycle complet de chargement - déchargement met en évidence l'irréversibilité du comportement du matériau.
- les déformations dans les directions S_2 et S_3 peuvent être considérées comme identiques, compte tenu des incertitudes des mesures; la déformation dans la direction S_1 , normale à la stratification est plus importante que les déformations dans le plan.

On peut conclure que les directions principales des déformations irréversibles coïncident avec les directions privilégiées de la structure initiale du matériau. Ainsi, le **type d'anisotropie initiale est conservée**. Suite au dépôt sédimentaire l'argilite présente une anisotropie initiale (anisotropie de structure) de type orthotrope de révolution dont le plan isotrope est le plan de stratification. Ceci a été identifié également à partir de la détermination des vitesses d'ondes dans des cubes d'argilite (tableau 1.3), [Cuxac, 1991].

En effet, la mesure de la vitesse de propagation des ondes longitudinales dans différentes directions permet de mettre en évidence l'anisotropie des roches. On peut définir :

- une anisotropie majeure : $\Delta M\% = 100 \left[1 - \frac{2V_1}{V_2 + V_3} \right]$, qui représente le rapport

entre la vitesse de propagation moyenne dans le plan des strates et la vitesse de propagation perpendiculairement à ce plan,

- une anisotropie mineure : $\Delta m\% = 100 \frac{2(V_3 - V_2)}{V_2 + V_3}$ permettant de distinguer la

linéation dans le même plan ($V_1 < V_2 < V_3$) (Guyader et al, 1986).

CUBE	$\Delta M\%$	$\Delta m\%$
A	48.93	2.74
B	50.94	0.28
C	50.52	1.54

Tableau 1.3 : Paramètres d'anisotropie $\Delta M\%$ et $\Delta m\%$ mesurés sur des cubes d'argilite [d'après Cuxac, 1991]

Un essai de compression hydrostatique dont le chemin de chargement se compose d'incrément de charge suivis de paliers de fluage et de décharge met en évidence le comportement différé de l'argilite.

La figure 1.5 présente la courbe pression - déformation volumique obtenue.

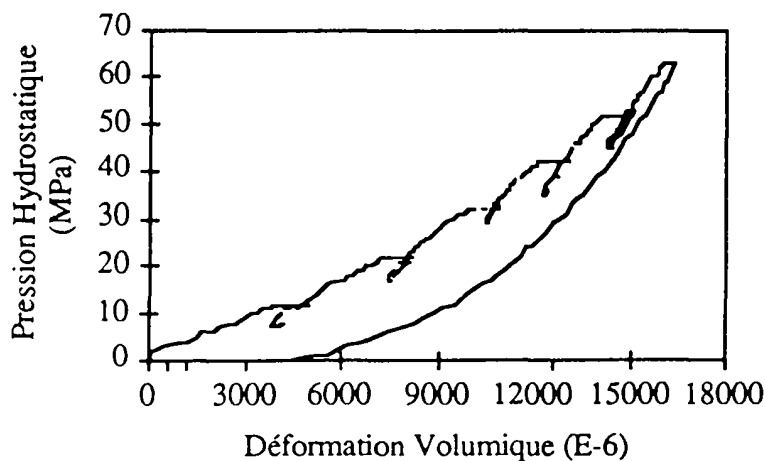


Figure 1.5 : Essai de compressibilité, courbe pression isotrope - déformation volumique

Après l'application de chaque incrément de charge Δp une augmentation instantanée de la déformation volumique est constatée. En gardant ensuite la pression constante, le fluage du volume est observé. Quand le fluage atteint une certaine stabilisation (l'intervalle de temps est de l'ordre de 20 à 30 minutes) une décharge est effectuée. On constate que la décharge est quasi - linéaire et peut être considérée élastique. Cependant, le module de compressibilité n'est pas constant, l'analyse des pentes de déchargement montre une augmentation de ce module avec la pression.

La non - linéarité du comportement en charge peut s'expliquer par le serrage des plans qui introduit une augmentation de la raideur du matériau avec la pression. Cependant, on observe que le taux d'accroissement de ce module diminue avec la pression (Tableau 1.4).

Pression Hydrostatique (MPa)	K (MPa)
12	5590
22	6965
32	8915
42	9675
53	11180
63	11915

Tableau 1.4 : Variation du module de compressibilité en fonction de la pression

Ceci nous fait supposer l'existence d'un seuil au-delà duquel le module de compressibilité **K** devient constant et la réponse du matériau approche un comportement élastique linéaire. Ainsi nous sommes menés à considérer la loi d'évolution suivante du module **K** :

$$K(p) = K_0 - a \exp(-bp) \quad (1.1)$$

où : $K_0 = 20890$ MPa, $a = 19070$, $b = 0.009$. K_0 représente la valeur asymptotique du module qui correspond à la pression de fermeture des plans. Cependant, pour vérifier cette hypothèse un essai de compressibilité allant à des pressions plus élevées est nécessaire. Il est à noter que pour un matériau anisotrope le module de compressibilité n'est pas un paramètre représentatif, car le caractère anisotrope du matériau n'est pas exprimé par ce paramètre.

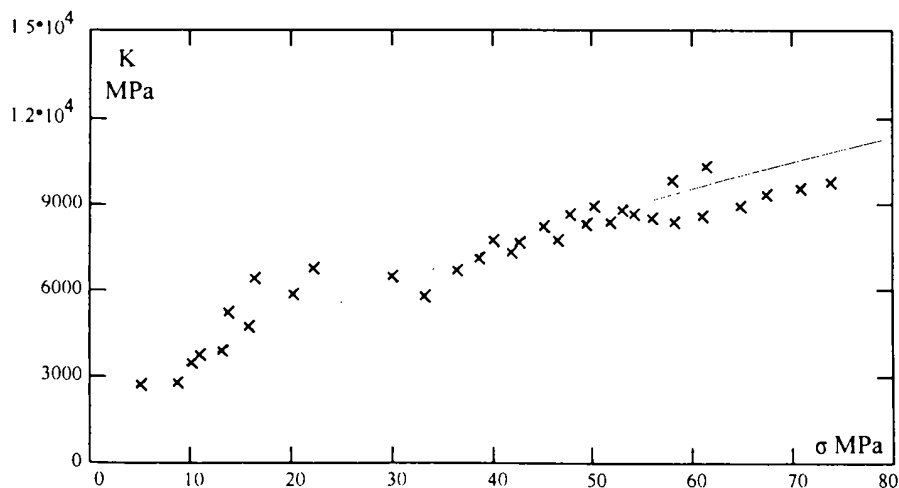


Figure 1.6 : Évolution du module de compressibilité en fonction de la pression

1.3.3 COMPORTEMENT DE L'ARGILITE EN COMPRESSION TRIAXIALE

Les essais de compression triaxiale ont été réalisés sur des échantillons cylindriques (diamètre 37 mm et un élanement voisin de 2) pour différentes orientations θ et à différentes pressions de confinement (θ représente l'angle entre l'axe de révolution de l'orthotropie et la contrainte principale majeure). La figure 1.7 présente les courbes contrainte - déformation correspondant aux trois orientations représentatives : $\theta = 0^\circ$, 45° et 90° , pour différentes pressions de confinement.

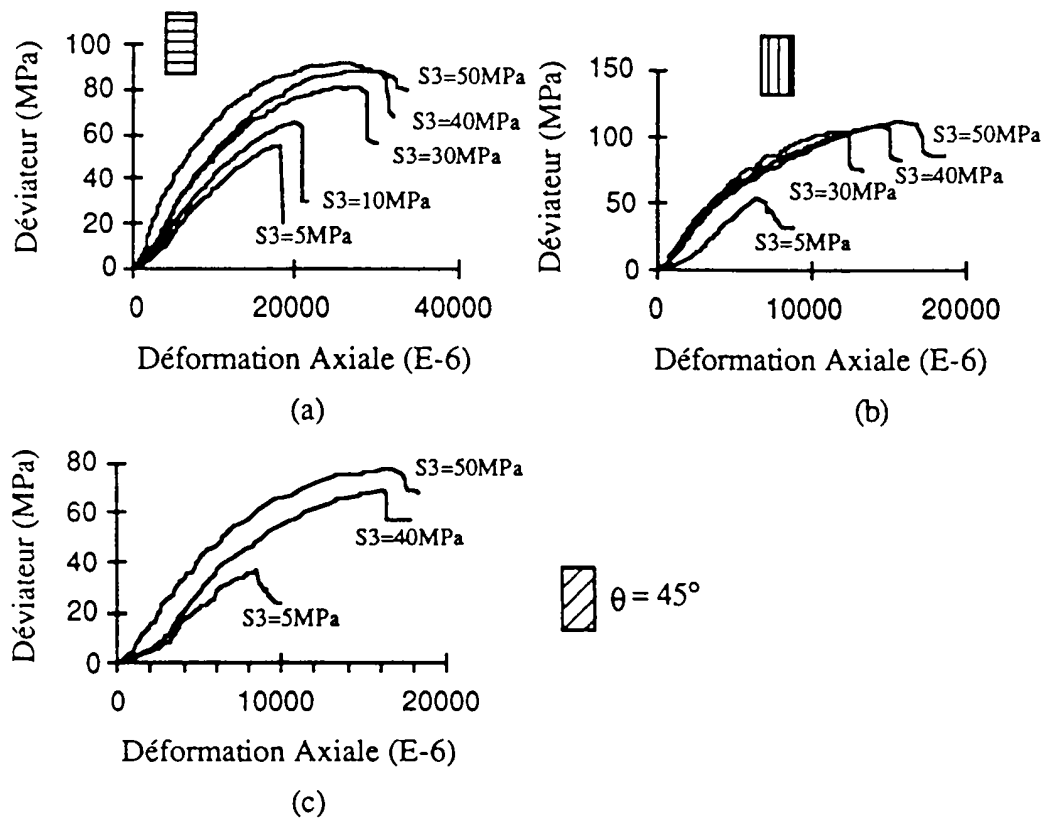


Figure 1.7 : Courbes contrainte déviatorique- déformation axiale (LVDT) en fonction de la pression de confinement, et de l'orientation : (a) $\theta = 0^\circ$, (b) $\theta = 90^\circ$, (c) $\theta = 45^\circ$.

Ces courbes mettent en évidence l'influence de l'orientation et du confinement sur le comportement du matériau. Pour toutes les orientations, la surcharge axiale $\sigma_1 - \sigma_3$ et la déformation augmentent avec la pression de confinement.

D'une manière générale nous pouvons faire les observations suivantes, concernant le comportement de courte durée de l'argilite :

- les courbes contraintes -déformations sont fortement non - linéaires ;
- après déchargement, la déformation permanente enregistrée est de l'ordre de 50% de la déformation totale (voir Niandou, 1994) ;
- les déformations transversales parallèles au plan de stratification $\epsilon_{3//}$ sont nettement moins élevées que les déformations transversales perpendiculaires aux strates ϵ_{3p} , pour $\theta \neq 0^\circ$ (Figure 1.8)

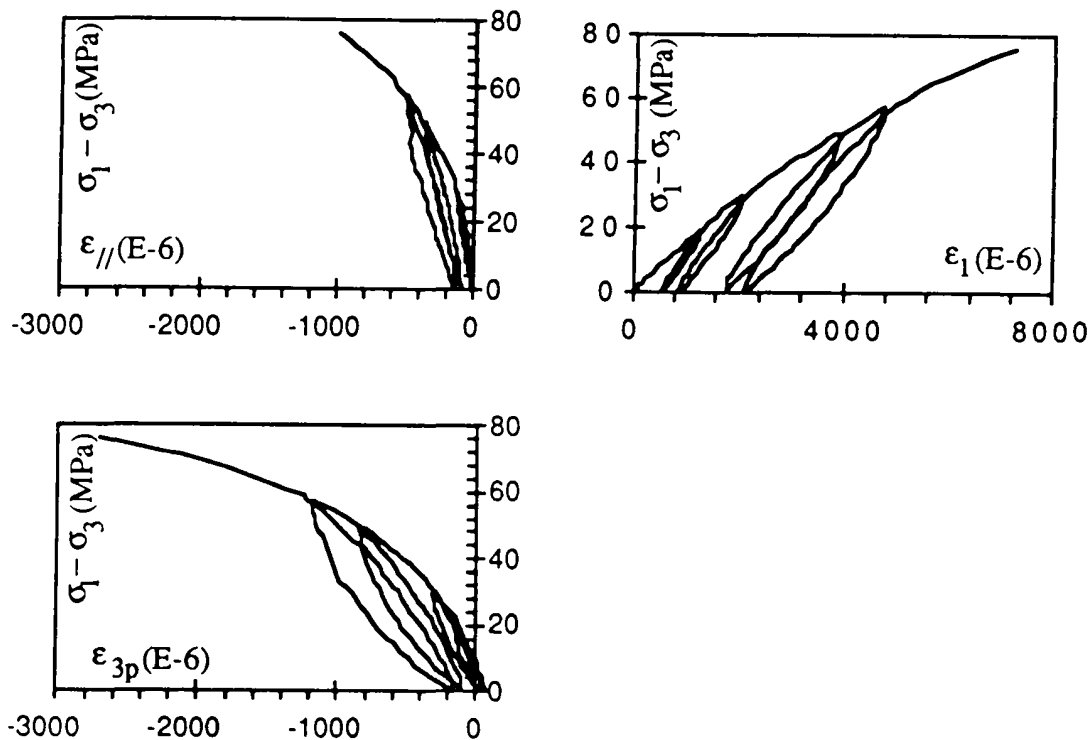


Figure 1.8 : Courbe contrainte - déformation, orientation $\theta=90^\circ$, pression de confinement 10 MPa. [d'après Niandou, 1994].

- les déformations dans le plan de stratification peuvent être considérées comme identiques, pour $\theta = 0^\circ$. On peut considérer que l'anisotropie de déformation est du même type que l'anisotropie de formation ;

- Des essais de compression triaxiale avec relaxation ont été aussi réalisés. Avant chaque cycle de chargement - déchargement, une phase de relaxation ayant une durée relativement courte (de 30 minutes à 1 heure) a été effectuée. Ceci a permis de déterminer d'une façon plus précise les modules élastiques et d'évaluer l'importance des déformations liées à la viscosité du matériau (voir figure 1.9).

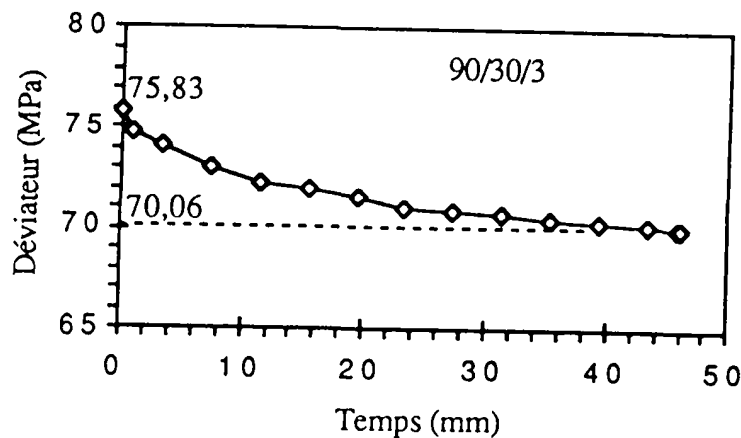


Figure 1.9 : Résultat représentatif de la viscosité de l'argilite de Tournemire : palier de relaxation ($\theta=0^\circ$).

- Pour l'orientation $\theta = 90^\circ$, la courbe contrainte déviatorique - déformation volumique montre que l'argilite de Tournemire est un matériau plutôt contractant. La zone de dilatance qui précède la rupture est très instable: une décharge - recharge effectuée après le point où la variation de la déformation volumique est nulle, provoque la rupture précoce de la roche (Figure 1.10).

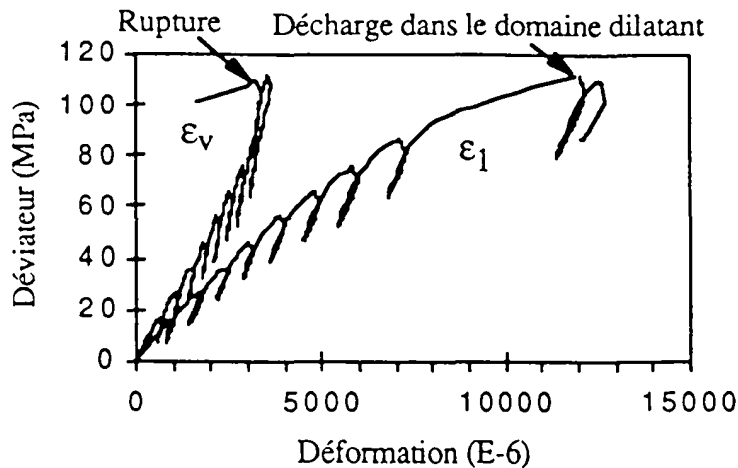


Figure 1.10 : Courbe contrainte - déformation, orientation $\theta=90^\circ$, pression de confinement 50 MPa. [d'après Niandou, 1994].

On peut conclure que l'argilite de Tournemire a un comportement élasto - viscoplastique et anisotrope (de type orthotrope de révolution).

1.4. MODÈLES ANALYTIQUES

Pour décrire le caractère directionnel de la résistance des roches stratifiées plusieurs modèles ont été proposés. Les principales contributions seront présentées ci-dessous.

1.4.1 THÉORIE DE LA COHÉSION VARIABLE DE JAEGER

Jaeger (1960) suppose que la résistance au cisaillement d'une roche stratifiée à structure planaire peut être décrite par un critère type Mohr-Coulomb modifié :

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_{rupture} = \frac{2(C + \sigma_3 \operatorname{tg} \phi)}{\operatorname{tg} \phi - \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \phi}} \quad (1.2)$$

où, $\operatorname{tg} \phi$ - "le coefficient de frottement interne" - est supposé constant et, C - "la cohésion" est une fonction de l'orientation :

$$C = A - B \cos 2(\xi - \theta) \quad (1.3)$$

Dans l'équation (1.3), A et B sont des paramètres du modèle, θ représente l'orientation du plan d'isotropie par rapport à la direction de la contrainte principale majeure σ_1 , ξ est la valeur de l'angle θ qui correspond à la cohésion minimale.

Pour chaque orientation, on détermine les valeurs de C et $\text{tg}\phi$ à partir des résultats d'essais triaxiaux à différentes pressions de confinement suivant la méthode des cercles de Mohr. Ensuite, on identifie les constantes A et B par une procédure de type moindres carrés.

Cependant, pour la plupart des roches $\text{tg}\phi$, n'est pas constant.

Selon l'équation (1.3) la cohésion C varie continûment entre les valeurs (A-B) et (A+B). Les résistances à la rupture, calculées en utilisant (1.2), pour $\theta=0^\circ$ et $\theta=90^\circ$, sont égales.

Ceci est en contradiction avec les observations expérimentales sur la majorité des roches stratifiées.

A la différence de la théorie de Mohr - Coulomb, la théorie de Jaeger prédit un seul plan de rupture qui se situe entre le plan incliné à θ par rapport à la contrainte axiale et le plus proche des plans de Mohr. La rupture se produit le long d'un plan incliné à $45 - \frac{\phi}{2}$ par rapport à σ_1 , si et seulement si, $\theta = 45 - \frac{\phi}{2}$.

1.4.2 THÉORIE DE LA COHÉSION VARIABLE DE JAEGER MODIFIÉE PAR McLAMORE ET GRAY

McLamore et Gray (1967) propose une modélisation du comportement à la rupture des argilites (Green River Shale 1 et 2) et d'une ardoise par un critère de type Mohr - Coulomb à cohésion variable et angle de frottement variable. Quoique ces auteurs présentent leur approche comme étant une adaptation de la théorie de la cohésion variable de Jaeger(1960), la procédure utilisée pour déterminer la "cohésion" et "l'angle de frottement" interne n'est pas la méthode usuelle des cercles de Mohr.

Plus précisément, leur démarche consiste à approcher pour chaque orientation donnée la courbe expérimentale $(\sigma_1 - \sigma_3)_{\text{rupture}}$ en fonction de σ_3 par une droite. Ainsi, la cohésion C et l'angle $\text{tg}\phi$ sont déterminés. McLamore et Gray proposent ensuite, les lois empiriques suivantes pour la variation de ces paramètres avec l'orientation :

$$C = A_1 - B_1 (\cos 2(\xi - \theta))^n \quad (1.4)$$

$$\operatorname{tg}\phi = T_1 - T_2(\cos 2(\zeta - \theta))^m \quad (1.5)$$

où : A_1, B_1, T_1, T_2, m, n sont des paramètres de calage, ξ et ζ sont les valeurs de θ qui correspondent aux minimums de C et $\operatorname{tg}\phi$, respectivement. La valeur de n varie de 1 à 6, selon le type de roche anisotrope considéré. Sur la courbe de variation de C en fonction de θ , la largeur de la partie angulaire diminue avec l'augmentation de n . (McLamore et Gray, 1967). Souvent un seul ensemble de constantes A_1, B_1, T_1, T_2 ne permet de décrire l'évolution de C et $\operatorname{tg}\phi$ sur l'ensemble du domaine ($0^\circ, 90^\circ$). Les théories présentées décrivent assez correctement la rupture par cisaillement des roches anisotropes sous un état de contrainte de type triaxial de révolution. Cependant, comme toute théorie empirique elles nécessitent un travail de calage assez important.

Basés sur des études au niveau microscopique des mécanismes de rupture fragile dans les roches, plusieurs critères ont été dérivés du modèle original de Griffith (Walsh et Brace(1964), Hoek(1964), Barron(1971)). Dans ces critères on suppose l'existence de deux populations de microfissures : des microfissures "longues" orientées préférentiellement (parallèlement aux plans des strates) et des microfissures "petites" réparties aléatoirement dans le matériau. A la différence de Griffith, ces fissures peuvent être fermées sous l'action des contraintes de compression donnant lieu à des frottements sur les lèvres des fissures. McLamore et Gray (1967) montrent que dans le cas de l'argilite de Green River (1) le coefficient de frottement est le même pour toutes les orientations. Pour le même matériau, l'hypothèse que les coefficients de frottement pour les petites fissures μ_s et pour les longues fissures μ_l coïncident, semble confirmée. De plus, on a : $\mu_s = \mu_l = \operatorname{tg}\phi$. Cependant, dans le cas d'une ardoise (McLamore et Gray, 1967) les prédictions de la théorie de Walsh-Brace ne sont pas satisfaisantes pour les valeurs extrêmes de θ et, en général, sont moins bonnes que les prédictions de la théorie de Jaeger modifiée.

1.4.3 CRITÈRE DE NOVA ET SACCHI (1979)

C'est une généralisation du critère de Mohr-Coulomb au cas de l'orthotropie de révolution.

Le critère prédit la rupture, si et seulement si, la contrainte de cisaillement le long d'un plan dans le matériau atteint une valeur limite notée $S(m)$, m étant la normale à ce plan.

On suppose que $S(m)$ est la somme de deux termes f_{mm} et C_{mm} , définis par :

où : Φ_{mnr} est un tenseur d'ordre quatre lié au frottement interne et C_{mn} est un tenseur d'ordre deux caractérisant la cohésion.

Ainsi, la condition de rupture s'écrit :

$$\sigma_{mn} = S(m) \quad (1.7)$$

Les tenseurs de résistance C et Φ doivent respecter les propriétés de symétrie du milieu.

Il en résulte que le tenseur C est caractérisé par deux valeurs propres distinctes C_T et C_R où , C_T représente la cohésion minimale et C_R la cohésion maximale; dans le repère principal de C , le tenseur Φ est défini par deux composantes indépendantes : le coefficient de frottement minimale $2\mu_T$ et le coefficient de frottement maximale $2\mu_R$.

L'identification de ces quatre paramètres se fait à partir des résultats d'essais triaxiaux de révolution. On suppose que :

- les plans des strates sont les plans de résistance minimale,
- pour chaque pression de confinement , la résistance minimale s'obtient dans la même direction θ par rapport à la contrainte principale majeure.

Il en résulte que, pour $\theta = 45^\circ - \frac{1}{2} \text{tg}^{-1}(2\mu_T)$, le rapport $\frac{\sigma_1}{\sigma_3}$ à la rupture est égal au rapport $\frac{\sigma_1}{\sigma_3}|_{\text{rupture}}$ d'un matériau isotrope ayant la cohésion égale à C_T et le coefficient de frottement $2\mu_T$.

Ainsi, pour déterminer C_T et $2\mu_T$, il suffit d'approcher la courbe $\sigma_{1\text{rupture}}$ versus σ_3 par une droite. ($\sigma_{1\text{rupture}}$ est la résistance axiale minimale obtenue pour le confinement σ_3).

Les paramètres C_R et μ_R se déterminent, par une procédure de calage, à partir des résistances à $\theta = 0^\circ$ et $\theta = 90^\circ$, pour différentes pressions de confinement.

Notons que cette théorie repose sur l'hypothèse que le tenseur Φ ne dépend pas de l'état de contrainte. Ceci implique une variation quasi linéaire de la contrainte axiale à la rupture en fonction du confinement. Expérimentalement, ceci n'est vérifié que pour des valeurs modérées de la pression de confinement.

1.4.4 CRITÈRE DE HILL

C'est une généralisation du critère de la limite élastique de Mises au cas anisotrope. Pour des milieux orthotropes parfaitement plastiques Hill (Hill, 1950) propose la forme suivante de la surface de charge :

$$\Psi = F(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + G(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + L\sigma_{23}^2 + M\sigma_{13}^2 + N\sigma_{12}^2 - 1 \quad (1.8)$$

F, G, H, L, M, N sont des constantes caractéristiques du matériau et σ_{ij} sont les composantes du tenseur de contraintes dans un repère ayant les axes parallèles aux plans de symétrie.

Observons que Ψ est une forme quadratique en contraintes ayant les propriétés suivantes :

- $\Psi(\sigma + pI) = \Psi(\sigma)$, quel que soit la pression p, i.e. Ψ est indépendante de la contrainte hydrostatique ;

- Ψ est invariante dans le groupe de symétrie du matériau.

Si le matériau est isotrope dans un des plans de symétrie, le plan (1, 2) par exemple, Ψ doit être invariante par rapport à toute rotation autour de l'axe 1. Il en résulte :

$$F=G, \quad L=M \quad \text{et} \quad N=2F+4H \quad (1.9)$$

Le nombre de constantes indépendantes se réduit ainsi, à trois. Si en plus, l'axe 3 est un axe de symétrie (un matériau orthotrope de révolution dont l'axe de révolution est un axe de symétrie est isotrope) nous obtenons :

$$F=G=H, \quad L=M=N, \quad L=6F \quad (1.10)$$

et le critère (1.8) se réduit au critère isotrope de von Mises.

Si la condition d'associativité s'applique, à partir de (1.8) nous obtenons :

$$d\varepsilon_{11}^p + d\varepsilon_{22}^p + d\varepsilon_{33}^p = 0 \quad (1.11)$$

où, $d\varepsilon_{ij}^p$ représente le taux de déformation plastique. Réciproquement, si on suppose que le potentiel plastique est une forme quadratique en contraintes, invariante dans le groupe de

symétrie du matériau, la condition d'incompressibilité plastique implique que le potentiel ait nécessairement la forme (1.8).

De ce fait, le critère de Hill, ne semble pas applicable aux roches, dont le comportement plastique dépend de la pression hydrostatique.

Pour rendre compte de cet effet, Pariseau (Pariseau, 1972) ajoute un terme linéaire en contraintes à la condition de plasticité (1.8).

Avant de passer à la présentation du critère de Pariseau, notons que le critère de Hill a été utilisé aussi en tant que critère de rupture anisotrope, pour des matériaux supposés élastiques jusqu'à la rupture. Les paramètres F, G, H, L, M, N sont liés, dans ce cas, aux résistances ultimes du matériau.

Pour identifier ces coefficients il suffit d'effectuer une série d'essais de compression simple suivant les directions des axes d'anisotropie et des essais de cisaillement dans les plans de symétrie. Nous obtenons ainsi les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} F + G = 1/Z^2 \\ F + H = 1/Y^2 \\ G + H = 1/X^2 \\ N = 1/S^2 \\ M = 1/R^2, L = 1/Q^2 \end{array} \right. \quad (1.12)$$

où, : X, Y, Z sont les résistances en compression simple suivant les directions 1, 2, 3 ; S, R, Q sont les résistances en cisaillement le long des plans (1, 2), (2, 3) et (3, 1) respectivement. Notons que ce critère prédit des résistances identiques en traction et en compression. Le rapport entre les résistances à la rupture en compression et en traction varient de 20 à 100 pour certaines roches (Lama et Vutukuri (1978)). Ainsi, ce critère ne peut pas décrire correctement la rupture des géomatériaux.

1. 4. 5 CRITÈRE DE TSAI ET WU

Un critère de rupture qui rend compte de l'effet de la contrainte moyenne et prédit des résistances différentes en traction et en compression a été proposé par Tsai et Wu (1971). En notations de Voigt , ce critère s'écrit :

$$F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j = 1 \quad i, j = \overline{1,6} \quad (1.13)$$

F_i et F_{ij} sont des tenseurs symétriques d'ordre 2 et 4, respectivement. Dans le cas le plus général 6 constantes F_i et 21 constantes F_{ij} interviennent dans le critère.

Considérons le cas orthotrope. En faisant l'hypothèse que le signe des contraintes de cisaillement ne modifie pas les propriétés de résistance du matériau, nous sommes amenés à annuler tous les termes linéaires en σ_j , $j = \overline{4,6}$. Il en résulte que :

$$\begin{cases} F_4 = F_5 = F_6 = 0 \\ F_{i4} = F_{i5} = F_{i6} = 0 \end{cases} \text{ pour } i = 1, 2, 3 \quad (1.14)$$

En supposant que les résistances au cisaillement sont non - couplées nous obtenons :

$$F_{45} = F_{56} = F_{64} = 0 \quad (1.15)$$

Ainsi dans le cas orthotrope, nous n'avons que 9 composantes F_{ij} et 3 composantes F_i indépendantes. Dans le repère de structure le critère s'écrit :

$$\begin{aligned} F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 + F_3 \sigma_3 + F_{11} \sigma_1^2 + F_{22} \sigma_2^2 + F_{33} \sigma_3^2 + 2F_{12} \sigma_1 \sigma_2 \\ + 2F_{23} \sigma_3 \sigma_2 + 2F_{13} \sigma_1 \sigma_3 + F_{44} \sigma_4^2 + F_{55} \sigma_5^2 + F_{66} \sigma_6^2 = 1 \end{aligned} \quad (1.16)$$

Des essais de compression et de traction simple suivant les directions des axes d'anisotropie permettent d'identifier les composantes (F_{11}, F_1) , (F_{22}, F_2) et (F_{33}, F_3) . En effectuant des essais de cisaillement dans les plans de symétrie on détermine les valeurs des paires de composantes F_{44} et F_4 , F_{55} et F_5 , F_{66} et F_6 en fonction des résistances au cisaillement. Les composantes hors - diagonale du tenseur F_{ij} peuvent être obtenues à partir des essais de traction et de compression biaxiale dans les plans (2, 3), (3, 1) et (1, 2), respectivement.

Observons qu'avec les notations de Tsai et Wu, le critère de Hill (1.8) correspond à :

$$F_i = 0 \quad (1.17)$$

et

$$\begin{cases} F_{12} = -\frac{1}{2}(F_{11} + F_{22} - F_{33}) \\ F_{23} = -\frac{1}{2}(F_{33} + F_{22} - F_{11}) \\ F_{13} = -\frac{1}{2}(F_{11} + F_{33} - F_{22}) \end{cases} \quad (1.18)$$

On peut remarquer que, dans le critère de Hill, les composantes hors diagonale du tenseur F_{ij} sont des combinaisons linéaires des termes diagonaux. Ceci est une conséquence directe de l'hypothèse que le comportement n'est pas influencé par la contrainte moyenne. De ce fait, la forme quadratique Ψ (équations (1.8) et (1.9)) n'est caractérisée que par 6 composantes indépendantes.

Le critère de Tsai-Wu a été surtout appliqué pour décrire l'anisotropie du comportement à la rupture des matériaux composites unidirectionnels. Dans le cas des roches anisotropes, vu les difficultés liées à la réalisation des essais nécessaires à l'identification des paramètres du modèle (essais de traction directe et de cisaillement), l'utilisation du critère de Tsai-Wu est assez limitée.

1.4.6 CRITÈRE DE PARISEAU

Pariseau (1972) généralise pour les géomatériaux le critère de Hill (1950) pour deux types de symétrie matérielle: orthotropie et orthotropie de révolution.

Pour un matériau orthotrope le critère s'écrit :

$$\begin{aligned} & |F(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + G(\sigma_3 - \sigma_1)^2 + H(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + L\sigma_4^2 + M\sigma_5^2 + N\sigma_6^2|^{\frac{n}{2}} \\ & -(u\sigma_1 + v\sigma_2 + w\sigma_3) = 1 \end{aligned} \quad (1.19)$$

où, $F, G, H, L, M, N, u, v, w$ sont des constantes matérielles et $n \geq 1$.

Remarquons que pour $n = 2$ on retrouve le critère Tsai - Wu, avec les restrictions (1.18) concernant les expressions des termes hors - diagonaux F_{12}, F_{13} et F_{23} .

1.4. 7 CRITÈRE DE KAAR et al (1987)

C'est une généralisation aux milieux orthotropes et orthotropes de révolution de la condition de rupture isotrope suivante :

$$\sqrt{J_2} + C_2 \exp(C_3 I_1) - C_1 = 0 \quad (1.20)$$

C_1, C_2, C_3 sont des paramètres de résistance, I_1 est la contrainte moyenne et $\sqrt{J_2}$ le deuxième invariant du déviateur des contraintes. Conformément au critère de rupture (1.20), on a la rupture quand le niveau de distorsion ($\sqrt{J_2}$) atteint une certaine valeur limite ; cette valeur limite est une fonction exponentielle de la contrainte moyenne.

La généralisation de la condition (1.20) au cas anisotrope est faite en utilisant la notion d'énergie de distorsion généralisée. La notion d'énergie de distorsion généralisée a été introduite par Olszak et Urbanowski (1956). Un matériau anisotrope soumis à une pression isotrope subit des distorsions. Ainsi, à la différence du comportement isotrope, on ne peut pas séparer l'énergie de déformation d'un matériau anisotrope en deux composantes indépendantes : Φ_v et Φ_f , dont Φ_v caractérise la déformation du volume et, Φ_f décrit le changement de forme.

Pour des matériaux élastiques linéaires et anisotropes, ces auteurs proposent la décomposition suivante de l'énergie de déformation Φ :

$$\Phi = \Phi_f + \Phi_v \quad (1.21)$$

dont, Φ_f préserve certaines des propriétés de l'énergie de distorsion isotrope. Ainsi, Φ_f doit s'annuler pour un état de contrainte hydrostatique. Φ_f et Φ_v sont définies par :

$$\begin{cases} \Phi_f = A_{klmn} \sigma_{kl} \sigma_{mn} \\ \Phi_v = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{9\tilde{V}} (A_{ijkl} \delta_{ij} \sigma_{kl})^2 \right] \end{cases} \quad (1.22)$$

Φ_f est nommée énergie de distorsion généralisée. A_{ijkl} est un tenseur d'ordre quatre lié au tenseur d'élasticité C_{ijkl} et, \tilde{V} est un scalaire défini comme suit:

$\Phi_{\bar{f}}$, c'est l'équivalent anisotrope de l'énergie de distorsion isotrope Φ_f , définie par :

$$\Phi_f = \frac{1}{G} J_2 \quad (1.24)$$

G, étant le module de cisaillement. Pour que $\Phi_{\bar{f}}$ s'annule pour un état de contrainte hydrostatique des conditions supplémentaires s'imposent sur la forme du tenseur **A**.

Dans le but d'établir une condition de rupture pour des matériaux écrouissables et anisotropes, (Kaar et al, 1987) supposent que le tenseur **A**, intervenant dans les expressions (1.22) caractérise l'anisotropie des résistances du matériau (à la différence de Olszak et Urbanowski (1956) où le tenseur **A** rend compte de l'anisotropie des propriétés élastiques). Les seules restrictions imposées au tenseur **A** sont de respecter les symétries du milieu. Ainsi, le critère anisotrope s'obtient en remplaçant dans le critère isotrope (1.20) le deuxième invariant du déviateur par $\Phi_{\bar{f}}$ et la contrainte moyenne par un terme linéaire en σ . Ce terme linéaire fait intervenir un deuxième tenseur de résistance, indépendant du tenseur **A**.

Pour un matériau orthotrope, dans le repère de structure, le critère s'écrit :

$$\begin{aligned} & [a_1 \sigma_1^2 + a_2 \sigma_2^2 + a_3 \sigma_3^2 + a_4 \sigma_2 \sigma_3 + a_5 \sigma_3 \sigma_1 + a_6 \sigma_1 \sigma_2 + a_7 \sigma_4^2 + a_8 \sigma_5^2 + a_9 \sigma_6^2]^{1/2} + \\ & + a_{10} \exp(a_{11} \sigma_1 + a_{12} \sigma_2 + a_{13} \sigma_3) - 1 = 0 \end{aligned} \quad (1.25)$$

1.4.8 CRITÈRES DE MISES ET DE MOHR- COULOMB ANISOTROPES BOEHLER (1975)

Une formulation invariante de critères de limite élastique et de critères de rupture pour des sols et des roches anisotropes a été développée par Boehler et Sawczuck(1970, 1977), Alliot et Boehler(1979) dans le cadre de la mécanique non-linéaire des solides anisotropes et la théorie de représentation des fonctions tensorielles invariantes. Nous allons présenter dans ce qui suit des généralisations proposées par Boehler(1975) pour les critères de Mises et de Mohr-Coulomb. Soit un milieu anisotrope parfaitement plastique. On suppose que l'anisotropie plastique est spécifiée par un tenseur d'ordre quatre possédant les symétries :

$$A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{ijlk} = A_{klji} \quad (1.26)$$

Le tenseur **A** intervient dans la loi d'écoulement par double contraction avec le tenseur de contrainte sous la forme d'un tenseur transformé :

$$\bar{\sigma} = A\sigma \quad (1.27)$$

Pour assurer le passage continu du cas anisotrope au cas isotrope la relation (1.27) avec I_{ijkl} (tenseur isotrope d'ordre quatre) à la place de A_{ijkl} doit donner (à un coefficient près) le tenseur σ_{ij} :

$$\bar{\sigma}_{ij} = I_{ijkl} \sigma_{kl} = k \sigma_{ij} \quad (1.28)$$

Nous sommes ainsi amenés à annuler dans le tenseur A les composantes :

$$A_{ijkl} = 0 \quad \text{si } i = j, k = l \text{ et } i \neq k \quad (1.29)$$

La généralisation des critères isotropes est proposée en faisant jouer au tenseur transformé $\bar{\sigma}$ le même rôle dans le cas anisotrope, qu'au tenseur de contrainte σ en cas isotrope. Ainsi, les généralisations des critères de von Mises et de Mohr - Coulomb sont données par :

$$\begin{cases} \text{tr } \bar{S}^2 = 4K^2 \\ \text{tr } \bar{\sigma} + \sqrt{\text{tr } \bar{S}^2} = C \end{cases} \quad (1.30)$$

où, \bar{S} est le déviateur de $\bar{\sigma}$, K et C sont constantes de matériau.

Pour un milieu orthotrope de révolution le tenseur A , soumis aux restrictions (1.26) et (1.29) et respectant les symétries du milieu n'a que 3 composantes indépendantes. L'expression de $\bar{\sigma}$ en fonction de σ peut s'écrire sous la forme :

$$\bar{\sigma} = [(\alpha + \gamma - 2\beta)\text{tr } M\sigma]M + \gamma\sigma + (\beta - \gamma)(M\sigma + \sigma M) \quad (1.31)$$

où, M est un tenseur de structure d'ordre deux et α, β, γ sont les composantes indépendantes du tenseur A :

$$A = \text{diag} \left[\gamma, \gamma, \alpha, \frac{\beta}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2} \right] \quad (1.32)$$

Pour évaluer les constantes qui interviennent dans les critères (1.30) généralement on utilise les résultats d'essais triaxiaux réalisés à différentes pressions de confinement et pour différentes orientations (au moins quatre orientations différentes).

1.5 CONCLUSION

Les essais de compression triaxiale de révolution sur des roches sédimentaires et métamorphiques montrent que la résistance à la rupture dépend de manière importante de l'orientation des plans des strates par rapport à la contrainte de compression majeure. Pour décrire cette dépendance des critères de rupture ont été proposés par Jaeger (1960), McLamore et Gray (1967), Hoek (1964), Walsh et Brace (1964), etc. Des formulations plus générales qui font intervenir des tenseurs d'anisotropie de résistance de différents ordres ont été proposées par Goldenblat (1962), Tsai et Wu (1971) pour des composites unidirectionnels et, par Boehler et Sawczuck (1970), Parisseau (1971), Nova et Sacchi (1979) pour des géomatériaux. Ces théories ont été détaillées dans notre revue bibliographique car elles permettent de décrire de manière satisfaisante le comportement à la rupture des roches stratifiées.

En ce qui concerne la théorie de la plasticité des milieux anisotropes, des critères de limite élastique basés sur la notion d'énergie critique de la déformation élastique ont été formulés par Hill (1950), Olszak et Urbanowski (1956). Une théorie de la plasticité parfaite des milieux anisotropes a été développée par Boehler (1975), Boehler et Sawczuck (1977, 1978) dans le cadre de la théorie de représentation des fonctions tensorielles invariantes. Des lois de comportement plastique anisotrope avec écrouissage ont été également proposées par Boehler et Raclin (1984). Leur applicabilité est cependant restreinte aux métaux initialement pré-déformés.

Nova (1986) a proposé un modèle elasto-plastique anisotrope qui est une généralisation du modèle Cam-Clay. Cependant ce modèle ne rend pas compte de l'anisotropie du champ de déformation sous contrainte hydrostatique. Des défauts importants de ce modèle ont été démontrés sur certains chemins de sollicitation (surtout en extension latérale, voir Niandou, 1994).

Dans la suite de ce mémoire, nous ferons référence à des éléments de cette étude bibliographique, pour mieux situer notre approche.

CHAPITRE II

MODÉLISATION DU COMPORTEMENT

ÉLASTIQUE

CHAPITRE II

MODÉLISATION DU COMPORTEMENT

ÉLASTIQUE

La plupart des études sur le comportement élastique des roches anisotropes mettent en évidence la variation des modules élastiques en fonction de l'état de contrainte (Hoffmann (1958), Handin et Haeger (1957), Deklotz et al (1965), McLamore (1966), Alliot et Boehler (1979), Niandou (1994), etc.). Pour les roches isotropes, des lois de variations du module de Young E et du coefficient de Poisson ν avec le confinement ont été proposées (Duncan et Chang (1970), Kulhawy (1975), Santarelli (1987), etc.). Rappelons que dans le cas d'un matériau isotrope, les modules élastiques ne dépendent de la contrainte que par l'intermédiaire des invariants. Ainsi, les lois de variation des modules élastiques en fonction du confinement, citées ci- dessus, quoique correctes sur des chemins de compression triaxiale de révolution, sont souvent difficile à justifier pour un chargement quelconque. Si en plus les modules élastiques sont considérés comme des fonctions de l'état de contrainte, des restrictions supplémentaires doivent être vérifiées afin que l'énergie de déformation et l'énergie complémentaire soient indépendantes du trajet de chargement suivi. L'une des conséquences de ces restrictions est que ces modules ne dépendent plus du troisième invariant du tenseur de contrainte (et du troisième invariant du tenseur de déformation, respectivement) (voir Loret (1985), Suliciu (1989)). Les conséquences de l'utilisation des modules élastiques variables sur la réversibilité de la déformation et sur l'énergie stockée dans le matériau après un trajet fermé dans l'espace des contraintes ont été examinées par plusieurs auteurs, tels que : Zytinski et al (1978), Nova et Wood (1978), Boyce (1980).

Dans ce chapitre nous nous proposons d'analyser dans le cas des matériaux orthotropes de révolution subissant des déformations infinitésimales, les conséquences de la dépendance en contrainte des modules élastiques. Nous formulons un modèle élastique non-linéaire en généralisant la relation élastique linéaire correspondante. Plus précisément, nous supposons que les modules élastiques sont des fonctions des deux premiers invariants du tenseur de contrainte. Cette hypothèse semble être raisonnable dans le cas du matériau étudié. On formule les conditions nécessaires et suffisantes que doivent respecter les lois de variation de ces modules afin qu'il n'y ait pas de dissipation d'énergie sur un cycle fermé quelconque dans l'espace des contraintes. Nous montrons que ces conditions entraînent des limitations sévères pour le choix des lois décrivant la dépendance de ces modules en fonction de contrainte. L'application des résultats obtenus à l'étude du comportement élastique de l'argilite est finalement présentée. Les défauts du modèle sont discutés et des possibles améliorations sont suggérées.

2.1 NOTE HISTORIQUE

Cauchy (1828), en se basant sur la théorie moléculaire des solides, obtient les équations

de l'élasticité linéaire. Dans le cas général, 21 constantes caractérisent le comportement élastique. Cependant, parmi ces 21 constantes seulement **15** sont indépendantes, les six autres étant liées aux conditions initiales en contraintes; ainsi, dans le cas isotrope le nombre de constantes élastiques est réduit de 21 à 15.

Poisson (1829), admettant l'existence des forces moléculaires entre les particules qui forment un solide, retrouve les équations d'équilibre formulées par Navier (1821) et Cauchy (1828) ainsi que les équations de l'élasticité linéaire. En appliquant ces équations générales au cas isotrope, Poisson démontre qu'en traction le rapport entre la déformation transversale et la déformation axiale d'une barre prismatique est égal à $1/4$. Il en déduit que ce rapport, nommé coefficient de Poisson, a la même valeur pour tous les matériaux. Cette théorie (à 15 constantes, dans le cas général) a été soumise aux critiques de Green et Stokes.

Green contestait les hypothèses de nature physique sur lesquelles la théorie a été basée (i.e.- la théorie moléculaire et surtout l'hypothèse de l'existence des forces centrales agissant entre les "molécules" du solide) tandis que les critiques de Stokes étaient portées sur les résultats obtenus en appliquant cette théorie aux problèmes statiques (voir Love (1944)). Green (1839), propose une autre méthode de déduction des équations générales de l'élasticité basée sur le principe de conservation de l'énergie. Il suppose l'existence d'un potentiel (l'énergie de déformation) d'où dérive la contrainte et en déduit ainsi que le comportement élastique linéaire est caractérisé par **21 constantes indépendantes**.

La controverse concernant le nombre de constantes élastiques indépendantes a duré une moitié de siècle. Dans cette période, presque toute expérience, dont les résultats étaient en désaccord avec la théorie des "rariconstantes" (cf. à l'appellation donnée par Pearson (1886) à la théorie de Cauchy (1828)) était contestée, sous raison que le matériau testé n'est pas isotrope.

Pour le verre et le cuivre, Wertheim (1848) obtient une valeur du coefficient de Poisson proche de $1/3$. Il détermine le coefficient de Poisson par des méthodes statiques (indirectement, à partir des valeurs du module de compressibilité K , obtenues dans des essais hydrostatiques et à partir des résultats des essais de traction sur cylindre creux) et par des méthodes dynamiques (Bell (1973)). Cependant, les résultats de Wertheim ont été contestés unanimement par théoriciens et par expérimentateurs. Notons avec Bell (1973) que, 80 ans après Wertheim, Köster (Köster, 1943), en se basant sur les résultats d'essais effectués sur 46 éléments du système périodique, montre que pour la plupart des métaux ν est proche de $1/3$.

Dans la controverse des constantes élastiques une réponse décisive a été apportée par les études expérimentales de Voigt. Ses essais (100 essais de flexion, 32 essais de torsion) sur le sel invalide la théorie de Cauchy (1828). Le cristal de sel est caractérisé par une symétrie

cubique. Si la théorie de Cauchy s'applique alors : $c_{12}-c_{44}$. Cependant, Voigt obtient les valeurs expérimentales suivantes :

$$c_{11}=4753 \text{ kg/mm}^2, c_{44}=1313 \text{ kg/mm}^2 \text{ et } c_{12}=1202 \text{ kg/mm}^2 \text{ (Bell, 1973)}.$$

Le traité de Voigt de 1910, qui rassemble les résultats des essais réalisés sur 7 classes cristallines, représente la première étude expérimentale d'ampleur sur l'anisotropie élastique.

Les équations de l'élasticité linéaire des milieux homogènes et anisotropes, exprimées sous la forme d'une relation tensorielle linéaire entre les tenseurs de contrainte et de déformation ont été décrites par Love (1944), Lekhnitski (1963), Malvern (1969), etc. La formulation des équations de l'élasticité linéaire des milieux anisotropes dans le cadre de la théorie des représentation des fonctions tensorielles anisotropes a été donné par Smith et Rivlin (1958), Boehler (1975, 1987), Spencer (1971, 1987), etc.

2.2 ÉQUATIONS GÉNÉRALES DE LA THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ DES SOLIDES ORTHOTROPES DE RÉVOLUTION

Dans ce qui suit nous allons présenter les équations générales de l'élasticité linéaire des milieux orthotropes de révolution dans le cadre de la théorie de représentation des fonctions tensorielles (Boehler, 1987). Nous donnons ensuite, les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un matériau orthotrope de révolution élastique et linéaire soit hyperélastique. Le passage de la formulation invariante à la formulation classique (loi de Hooke généralisée) est présentée en détail.

Pour un matériau élastique, l'état de contrainte ne dépend que de l'état de déformation et vice versa :

$$\sigma = F(\varepsilon) \quad \text{ou} \quad \varepsilon = G(\sigma) \quad (2.1)$$

Les fonctions de réponse F et G sont des bijections et $G = F^{-1}$. Pour un matériau orthotrope de révolution, la forme invariante la plus générale de la fonction de réponse G est (Boehler, 1987) :

$$\varepsilon = a_1 I + a_2 \sigma + a_3 \sigma^2 + a_4 (M\sigma + \sigma M) + a_5 (M\sigma^2 + \sigma^2 M) + a_6 M \quad (2.2)$$

où, $M = S_1 \otimes S_1$. S_1 représente le vecteur unité de l'axe de révolution et les a_i , ($i=1,6$) sont des fonctions à valeurs scalaires d'arguments les invariants suivants : $\text{tr}\sigma$, $\text{tr}\sigma^2$, $\text{tr}\sigma^3$, $\text{tr}M\sigma$, $\text{tr}M\sigma^2$.

Il en résulte que le comportement élastique linéaire est décrit par les termes du premier

ordre du développement de Taylor de a_1 et de a_6 et, pour a_i constantes ($i \neq 1,6$) :

$$\begin{cases} a_1 = b_0 + b_1 \text{tr} \sigma + b_2 \text{tr} M \sigma \\ a_2 = b_3 \\ a_3 = 0 \\ a_4 = b_4 \\ a_5 = 0 \\ a_6 = b'_0 + b_5 \text{tr} M \sigma + b_6 \text{tr} \sigma \end{cases} \quad (2.3)$$

et les b_i sont des constantes réelles. En imposant que les déformations résiduelles soient nulles, i.e. ($\sigma = 0 \Rightarrow \varepsilon = 0$), il en résulte que :

$$b_0 \mathbf{I} + b'_0 \mathbf{M} = 0 \quad (2.4)$$

A partir de (2.4) nous en déduisons :

$$\begin{cases} \text{tr}(b_0 \mathbf{I} + b'_0 \mathbf{M}) = 0 \\ \text{tr}((b_0 \mathbf{I} + b'_0 \mathbf{M}) \mathbf{M}) = 0 \end{cases} \quad (2.4)'$$

soit,

$$\begin{cases} 3b_0 + b'_0 = 0 \\ b_0 + b'_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow b'_0 = b_0 = 0 \quad (2.5)$$

L'élasticité linéaire des milieux orthotropes de révolution est donc caractérisée par six constantes b_i indépendantes :

$$\varepsilon = (b_1 \text{tr} \sigma + b_2 \text{tr} M \sigma) \mathbf{I} + b_3 \sigma + b_4 (M \sigma + \sigma M) + (b_5 \text{tr} M \sigma + b_6 \text{tr} \sigma) M \quad (2.6)$$

En ce qui suit, nous nous proposons d'examiner quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que le solide élastique défini par (2.6) soit hyperélastique (les déformations dérivent d'un potentiel élastique).

L'énergie complémentaire W_C et l'énergie de déformation W sont définies par les relations incrementales suivantes :

$$\begin{aligned} \delta W_C &= \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} \\ \delta W &= \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \end{aligned} \quad (2.7)$$

En introduisant (2.6) dans (2.7) nous obtenons l'expression de l'énergie complémentaire δW_C

pour la classe de matériaux définie par l'équation (2.6) :

$$\delta W_c = (9b_1 p + 3b_2 m + 3b_3 p) dp + \frac{2}{3} b_3 q dq + b_4 dn + (b_5 m + 3b_6 p) dm \quad (2.8)$$

où :

$$\begin{cases} p = \frac{\text{tr}(\sigma)}{3} & m = \text{tr} M \sigma \\ q = \sqrt{\frac{3}{2} \text{tr} S^2} & n = \text{tr} M \sigma^2 \end{cases}$$

Pour établir la relation (2.8) nous avons utilisé les différentielles suivantes :

$$\begin{cases} d(\text{tr} \sigma) = \mathbf{I} : d\sigma ; d(\text{tr} \sigma^2) = 2\sigma : d\sigma, \\ d(\text{tr} M \sigma^2) = (M\sigma + \sigma M) : d\sigma \\ d(\text{tr} M \sigma) = M : d\sigma \end{cases} \quad (2.9)$$

où, tr désigne l'opérateur trace et le symbole " : " dénote un produit deux fois contracté. Ainsi, la condition nécessaire et suffisante pour que δW_c soit une différentielle exacte (i.e. le matériau élastique défini par (2.6) soit hyperélastique) est obtenue en appliquant la formule de Stokes. En tenant compte du fait que b_i sont des constantes, cette condition se réduit à la relation suivante :

$$b_6 = b_2 \quad (2.10)$$

Il en résulte qu'un matériau hyperélastique linéaire et orthotrope de révolution est caractérisé par 5 constantes indépendantes, soit :

$$\varepsilon = (b_1 \text{tr} \sigma + b_2 \text{tr} M \sigma) \mathbf{I} + b_4 (M \sigma + \sigma M) + b_3 \sigma + (b_5 \text{tr} M \sigma + b_2 \text{tr} \sigma) M \quad (2.6)'$$

Nous allons donner par la suite le passage de la formulation invariante (2.6)' à la formulation classique (loi de Hooke généralisée). Soit (S_1, S_2, S_3) le repère de structure, où S_1 représente le vecteur unité de l'axe de révolution et (S_2, S_3) est parallèle au plan d'isotropie. Dans ce repère la relation (2.6)' peut être écrite sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

où, les composantes non nulles de A sont définies par :

$$\begin{cases} A_{11} = b_1 + 2b_2 + 2b_3 + b_4 + b_5 \\ A_{12} = A_{21} = A_{13} = A_{31} = b_1 + b_2 \\ A_{22} = A_{33} = b_1 + b_4 \\ A_{23} = A_{32} = b_1 \\ A_{44} = 2b_4, \quad A_{55} = A_{66} = 2(b_3 + b_4) \end{cases} \quad (2.12)$$

Les significations physiques des composantes du tenseur d'élasticité A , s'identifient à partir d'une série d'essais de compression simple suivant les directions S_1 et S_2 et, d'un essai de cisaillement dans le plan d'isotropie (S_2, S_3), (Lehnitskii, 1963).

Dans un essai de compression simple suivant S_1 , les relations entre contraintes et déformations sont :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = A_{11} \sigma_1 \\ \varepsilon_2 = A_{21} \sigma_1 \\ \varepsilon_3 = A_{31} \sigma_1 \end{cases} \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 \quad (2.13)$$

soit,

$$\varepsilon_2 = \frac{A_{21}}{A_{11}} \varepsilon_1 \quad \varepsilon_3 = \frac{A_{31}}{A_{11}} \varepsilon_1$$

Il en résulte que :

$$A_{11} = \frac{1}{E_1}, \quad A_{21} = -\frac{\nu_{12}}{E_1}, \quad \nu_{12} = \nu_{13} \quad (2.14)$$

où E_1 est le module de Young suivant la direction S_1 .

Le coefficient de Poisson ν_{ij} caractérise l'allongement dans la direction S_j dû à une compression simple dans la direction S_i .

Pour une compression simple suivant S_2 nous avons les relations contrainte - déformation suivantes :

$$\varepsilon_1 = A_{12}\sigma_2, \quad \varepsilon_2 = A_{22}\sigma_2, \quad \varepsilon_3 = A_{32}\sigma_2 \quad (2.15)$$

De même, en compression simple suivant S_3 , nous obtenons :

$$\varepsilon_1 = A_{13}\sigma_3, \quad \varepsilon_2 = A_{23}\sigma_3, \quad \varepsilon_3 = A_{33}\sigma_3 \quad (2.16)$$

À partir des relations (2.15) - (2.16) on en déduit :

$$\begin{cases} A_{22} = A_{33} = \frac{1}{E_2} \quad (\text{i.e. } E_2 = E_3) \\ A_{23} = -\frac{\nu_{23}}{E_2}, \quad A_{23} = A_{32} \quad \text{soit } \nu_{23} = \nu_{32} \\ A_{13} = -\frac{\nu_{31}}{E_3} = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \quad A_{12} = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \end{cases} \quad (2.17)$$

E_2 , le module de Young suivant la direction S_2 est égal au module de Young dans la direction S_3 et , :

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2} \quad (2.18)$$

De même, $A_{55} = A_{66} = \frac{1}{G_{12}}$ caractérise la variation de l'angle droit entre S_1 et S_2 due à une contrainte de cisaillement σ_{12} appliquée dans le plan (S_1, S_2) .

En résumant, les relations (2.13)-(2.18) conduisent à la forme suivante de la loi de comportement (2.11) :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_{23})}{E_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (2.11)'$$

2.3 MODÉLISATION DU COMPORTEMENT ÉLASTIQUE DE L'ARGILITE DE TOURNEMIRE

2.3.1 LOIS EMPIRIQUES D'ÉVOLUTION DES COEFFICIENTS ÉLASTIQUES EN FONCTION DE L'ÉTAT DE CONTRAINTE

L'argilite de Tournemire peut être assimilée à un matériau orthotrope de révolution. Par conséquent, si nous nous plaçons dans le cadre de l'hyperélasticité linéaire nous devons déterminer cinq paramètres élastiques indépendants : E_1 E_2 ν_{12} (ou ν_{21}) ν_{23} et G_{12} .

La détermination de ces paramètres sera faite à partir des résultats des essais de compression triaxiale de révolution. Avant de procéder à la discussion des résultats de ces essais il convient de préciser les repères utilisés : (X_1, X_2, X_3) et (S_1, S_2, S_3) .

Le repère (X_1, X_2, X_3) est le repère des contraintes principales dans un essai de compression triaxiale de révolution et (S_1, S_2, S_3) représente le repère de structure du matériau. L'angle θ est l'angle entre la direction de la contrainte principale majeure et l'axe S_1 (Fig. 2.1).

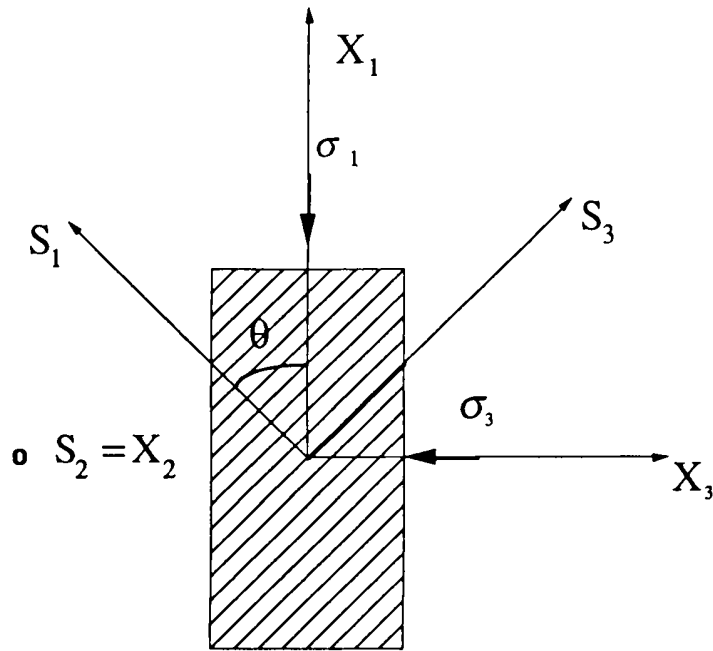


Figure 2.1 : Définition de l'essai triaxial

2.3.1a. ÉVALUATION DU MODULE DE YOUNG E_1

Dans un essai triaxial classique avec des cycles de chargement - déchargement les courbes contrainte - déformation présentent des importantes boucles d'hystérésis (Fig. 2.2).

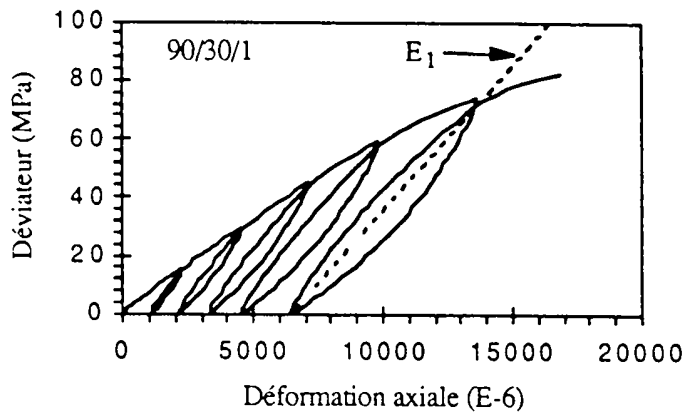


Figure 2.2a : Résultat d'un essai de chargement - déchargement classique (d'après Niandou (1994))

La décharge n'est pas élastique. Il en résulte que la détermination des constantes élastiques à partir de la pente de la courbe de décharge est entachée d'erreur. Pour éliminer les effets dus à

la viscosité, la méthode proposée par Cristescu (Cristescu, 1989) a été appliquée. Ainsi, avant d'effectuer la décharge, la déformation est maintenue constante pendant un certain intervalle de temps pour permettre au matériau d'atteindre par relaxation un état stable. Si ensuite on recharge on constate la quasi disparition des boucles d'hystérésis. (Fig. 2.2b).

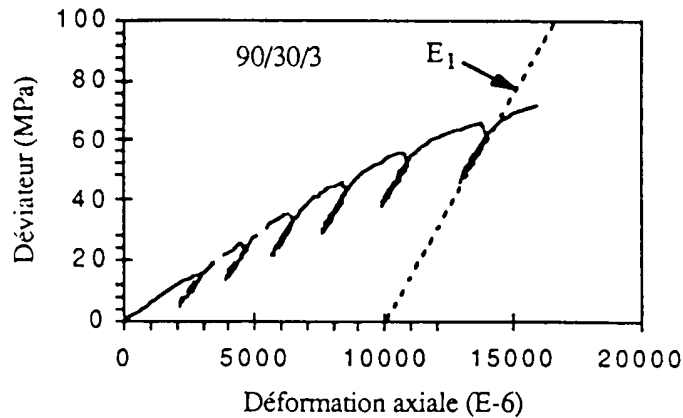


Figure 2.2b : Résultat d'un essai de chargement - déchargement avec paliers de relaxation

Le module de Young E_1 se détermine en mesurant la pente de la décharge sur la courbe contrainte déviatorique ($\sigma_1 - \sigma_3$) - déformation axiale, pour l'orientation $\theta=0^\circ$ (Fig. 2.2b). Les valeurs expérimentales de E_1 sont reportées sur une grille dans le plan déviatorique (τ, σ), où τ représente la contrainte octaédrique et σ la contrainte moyenne (Fig. 2.3). Pour un essai de compression triaxiale de révolution, ces invariants s'expriment en fonction des contraintes principales sous la forme :

$$\begin{cases} \tau = \frac{\sqrt{2}}{3} (\sigma_1 - \sigma_3) \\ \sigma = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{3} \end{cases} \quad (2.19)$$

Sur la figure 2.3 les lignes en trait pointillé représentent les chemins de sollicitation suivis et les symboles, les valeurs de E_1 pour différentes valeurs du déviateur appliqué. On constate que :

- au cours d'un essai donné E_1 augmente avec la contrainte déviatorique appliquée.
- E_1 varie sensiblement avec la pression de confinement.

Pour éliminer cette anomalie, Santarelli (1987) modifie cette loi, en utilisant une puissance de $(1 + \sigma_3)$:

$$E = E_0(1 + \sigma_3)^n \quad (2.21)$$

En prenant les valeurs moyennes de E_1 pour un essai donné, Niandou (1994) obtient pour l'argilite de Tournemire :

$$\begin{cases} E_0 = 6723 \text{ MPa} \\ n = 0.2 \end{cases} \quad (2.22)$$

Observons que cette dépendance ne rend pas compte de l'évolution du module avec le déviateur appliqué au cours d'un même essai. En plus, la loi (2.22) prédit pour $\sigma_3 \rightarrow \infty$, $E_1 \rightarrow \infty$. Dans ce qui suit, nous allons proposer une loi de variation de ce module en fonction des premiers invariants du tenseur de contrainte.

En effet, le programme expérimental a été conçu tel que les cycles de chargement - déchargement se situent approximativement au même niveau de la contrainte octaédrique pour des essais à différentes pressions de confinement. Ainsi, on peut étudier la variation de ce module avec la contrainte moyenne et avec τ , indépendamment.

Nous constatons que pour $\tau = \text{constante}$, E_1 est une fonction croissante de la contrainte moyenne. Nous supposons en plus, que le module de Young E_1 approche pour des niveaux élevés de contrainte d'une valeur limite constante $E_{1\infty}$. Ceci nous conduit à proposer l'approximation suivante :

$$E_1 = E_{1\infty} - \alpha \cdot \exp(-b\sigma) \quad (2.23)$$

où, $E_{1\infty} = 15900 \text{ MPa}$ et $b = 0.0313 \text{ MPa}^{-1}$. On observe que le coefficient α varie avec τ . Pour décrire cette variation, nous proposons l'expression suivante :

$$\alpha(\tau) = E_{1\alpha}\tau^2 + \frac{E_{1\beta}}{\tau + E_{1\delta}} \quad (2.24)$$

où $E_{1\alpha} = 0.09 \text{ MPa}^{-1}$, $E_{1\beta} = 2.5 \cdot 10^5 \text{ MPa}^2$ et $E_{1\delta} = 16 \text{ MPa}$.

Sur la figure 2.4 nous présentons la variation théorique de E_1 avec la contrainte moyenne obtenue avec les relations (2.23) et (2.24) pour différents paliers $\tau = \text{constante}$, en comparaison avec les valeurs expérimentales.

Pour éliminer cette anomalie, Santarelli (1987) modifie cette loi, en utilisant une puissance de $(1 + \sigma_3)$:

$$E = E_0(1 + \sigma_3)^n \quad (2.21)$$

En prenant les valeurs moyennes de E_1 pour un essai donné, Niandou (1994) obtient pour l'argilite de Tournemire :

$$\begin{cases} E_0 = 6723 \text{ MPa} \\ n = 0.2 \end{cases} \quad (2.22)$$

Observons que cette dépendance ne rend pas compte de l'évolution du module avec le déviateur appliqué au cours d'un même essai. En plus, la loi (2.22) prédit pour $\sigma_3 \rightarrow \infty$, $E_1 \rightarrow \infty$. Dans ce qui suit, nous allons proposer une loi de variation de ce module en fonction des premiers invariants du tenseur de contrainte.

En effet, le programme expérimental a été conçu tel que les cycles de chargement - déchargement se situent approximativement au même niveau de la contrainte octaédrique pour des essais à différentes pressions de confinement. Ainsi, on peut étudier la variation de ce module avec la contrainte moyenne et avec τ , indépendamment.

Nous constatons que pour $\tau = \text{constante}$, E_1 est une fonction croissante de la contrainte moyenne. Nous supposons en plus, que le module de Young E_1 approche pour des niveaux élevés de contrainte d'une valeur limite constante $E_{1\infty}$. Ceci nous conduit à proposer l'approximation suivante :

$$E_1 = E_{1\infty} - \alpha \cdot \exp(-b\sigma) \quad (2.23)$$

où, $E_{1\infty} = 15900 \text{ MPa}$ et $b = 0.0313 \text{ MPa}^{-1}$. On observe que le coefficient α varie avec τ . Pour décrire cette variation, nous proposons l'expression suivante :

$$\alpha(\tau) = E_{1\alpha}\tau^2 + \frac{E_{1\beta}}{\tau + E_{1\delta}} \quad (2.24)$$

où $E_{1\alpha} = 0.09 \text{ MPa}^{-1}$, $E_{1\beta} = 2.5 \cdot 10^5 \text{ MPa}^2$ et $E_{1\delta} = 16 \text{ MPa}$.

Sur la figure 2.4 nous présentons la variation théorique de E_1 avec la contrainte moyenne obtenue avec les relations (2.23) et (2.24) pour différents paliers $\tau = \text{constante}$, en comparaison avec les valeurs expérimentales.

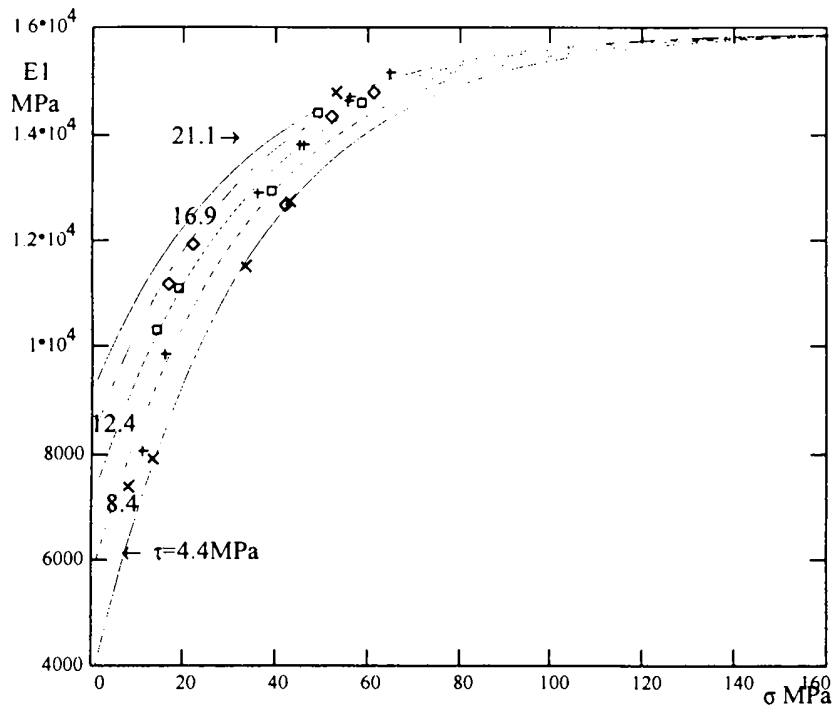


Figure 2.4 : Évolution du module de Young E_1 en fonction de la contrainte moyenne pour différents paliers $\tau = \text{constante}$

2.3.1.b MODULES ÉLASTIQUES E_2, ν_{21} ET ν_{23}

Le module de déformation élastique E_2 dans le plan d'isotropie (S_2, S_3) se détermine à partir des mesures de la déformation axiale ϵ_1 pour l'orientation $\theta=90^\circ$. Comme précédemment, les valeurs expérimentales du module E_2 , obtenues à partir des essais avec phase de relaxation, sont reportées sur une grille dans le plan déviatorique (τ, σ). (Fig. 2.5).

On constate une dispersion expérimentale assez importante. Ceci nous conduit à considérer dans un premier temps que E_2 est indépendant de la contrainte octaédrique τ . Ainsi, nous allons prendre en compte, dans l'approximation proposée que l'évolution de E_2 avec la contrainte moyenne, soit :

$$E_2 = E_{2\infty} - \beta \cdot \exp(-E_{2c}\sigma) \quad (2.25)$$

où, $E_{2\infty} = 45000 \text{ MPa}$, $\beta = 23561 \text{ MPa}$ et $E_{2c} = 0.0147 \text{ MPa}^{-1}$.

Notons que le module de Young dans les plans des strates E_2 est toujours supérieur à E_1 , le rapport E_2/E_1 étant d'environ 3.

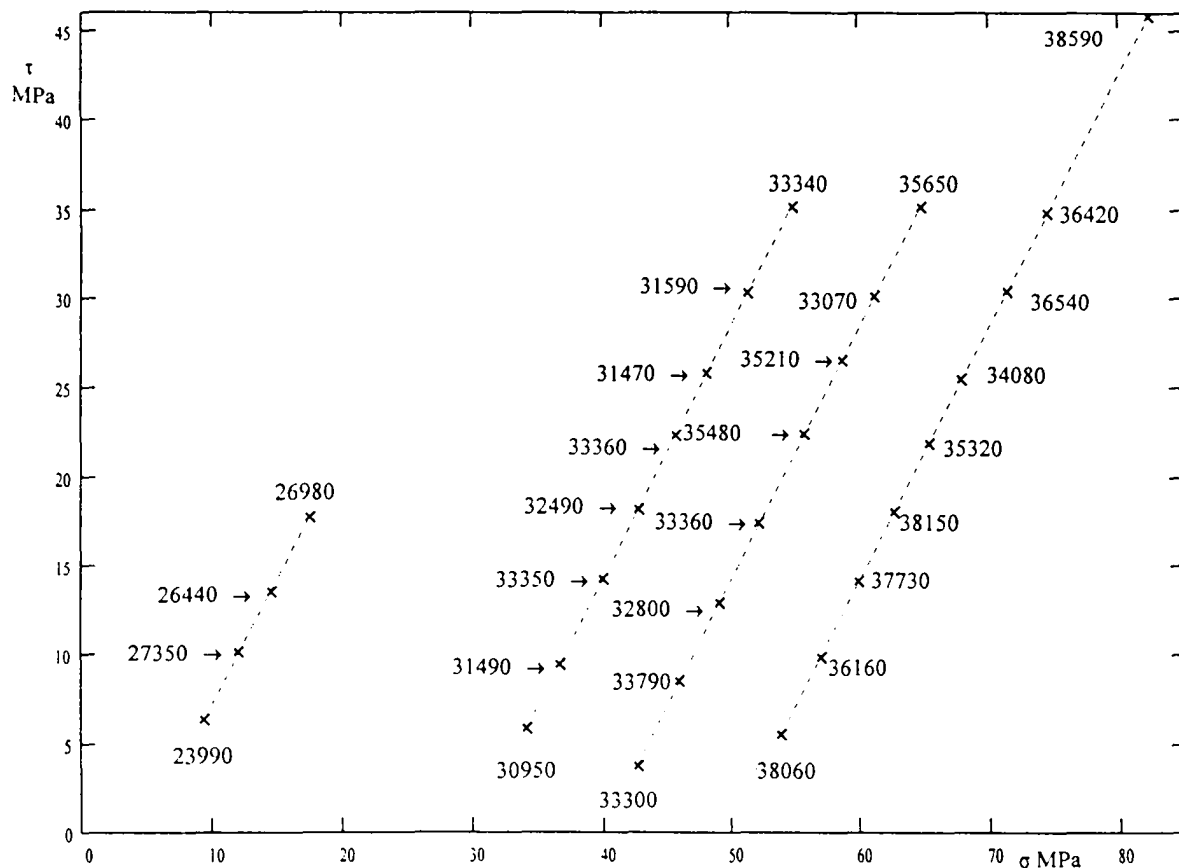


Figure 2.5 : Évolution du module de Young E_2 (MPa) dans le plan (σ, τ)

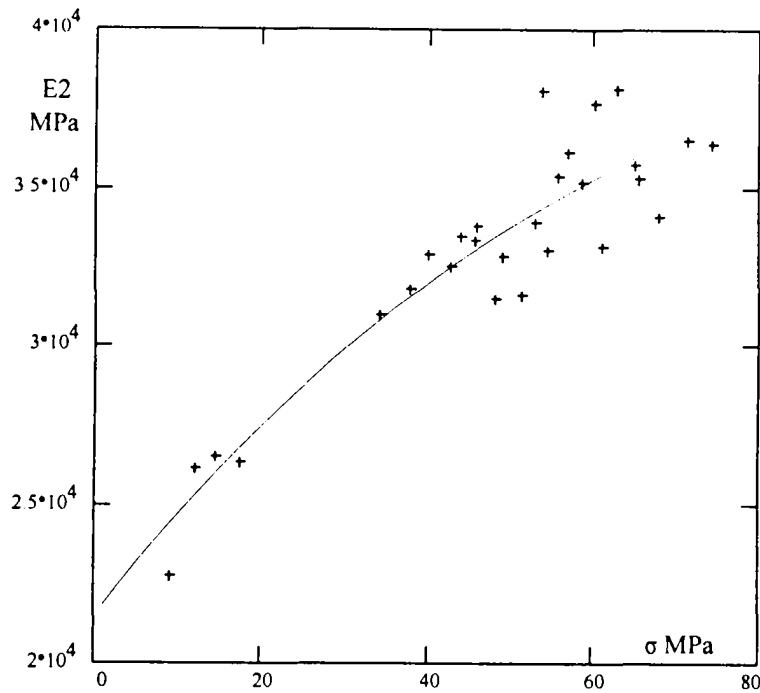


Figure 2.6 : Évolution du module de Young E_2 en fonction de la contrainte moyenne

Le module de Poisson ν_{21} se détermine à partir des déformations latérales ϵ_{3p} avec $\theta=90^\circ$. En examinant la figure 2.7, où nous avons reporté les valeurs expérimentales de ν_{21} , nous constatons que ν_{21} augmente essentiellement avec la contrainte moyenne. Vu la dispersion expérimentale, il est impossible de préciser une variation de ce module avec la contrainte octaédrique. Ainsi, dans un premier temps, nous allons négliger cette dépendance.

Nous proposons la loi de variation suivante :

$$\nu_{21} = \nu_{21}^0 - \nu_{21}^a \cdot \exp(-\nu_{21}^b \sigma) \quad (2.26)$$

où : $\nu_{21}^0 = 0.75$, $\nu_{21}^a = 0.501$ et $\nu_{21}^b = 0.0058 \text{ Ma}^{-1}$.

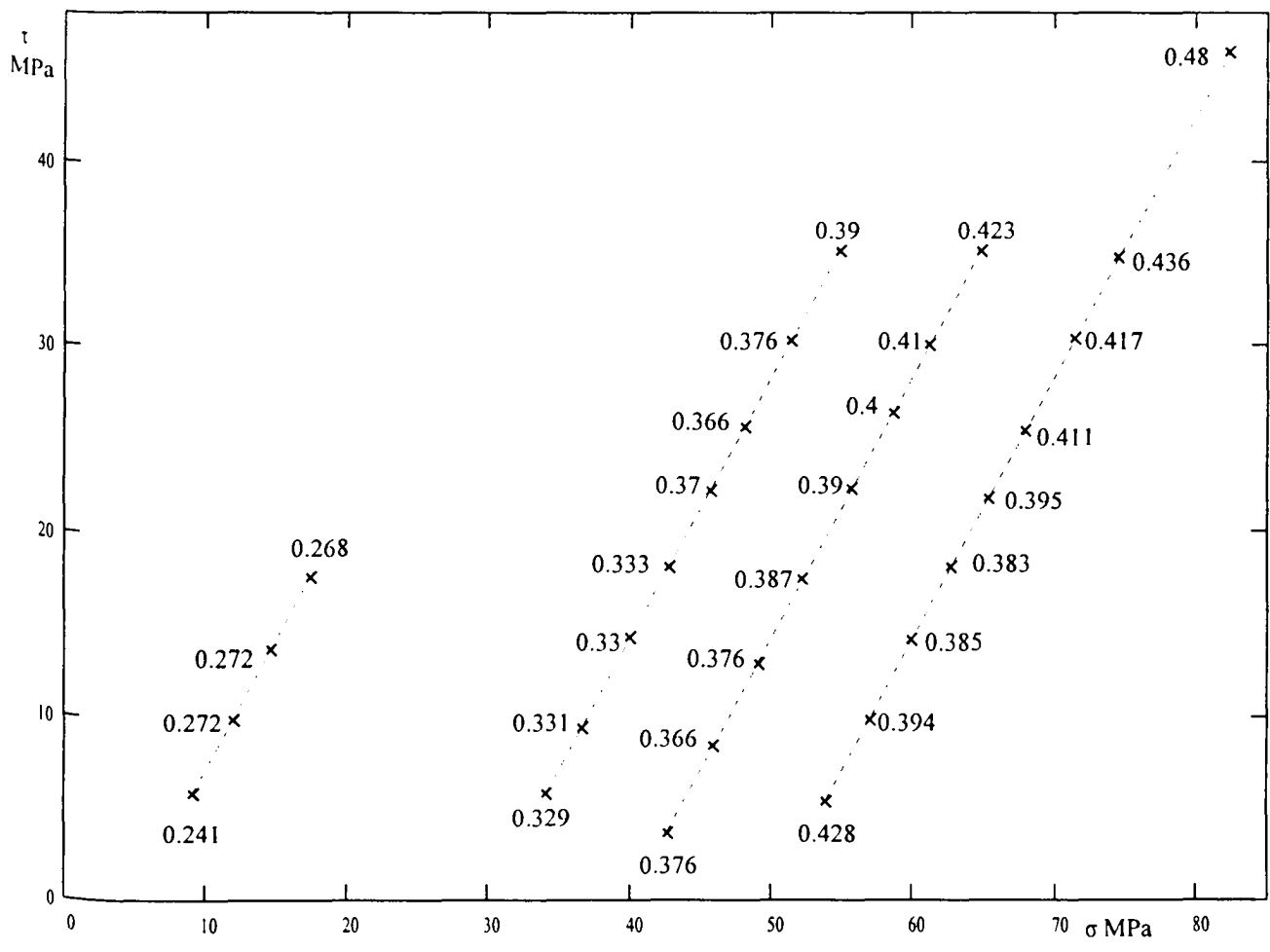


Figure 2.7 : Évolution du coefficient de Poisson ν_{21} dans le plan (τ, σ)

La comparaison entre l'approximation théorique proposée et les valeurs expérimentales de ν_{21} est présentée sur la figure 2.8.

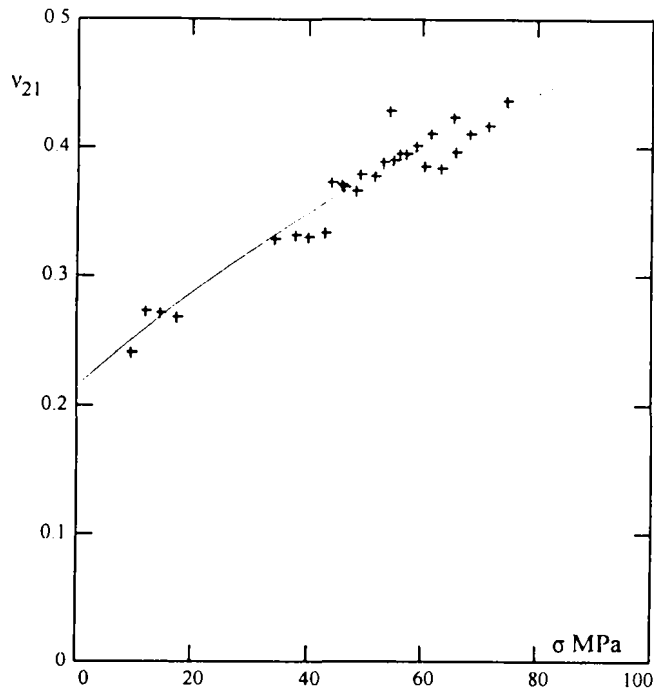


Figure 2.8 : Évolution du coefficient de Poisson ν_{21} avec la contrainte moyenne

Le coefficient de Poisson ν_{23} se détermine à partir des réponses des déformations latérales $\epsilon_{3//}$ dans un essai à $\theta=90^\circ$. L'examen de la figure 2.9, où nous avons présenté les valeurs expérimentales de ν_{23} montre que :

- ν_{23} augmente avec la contrainte moyenne ;
- ν_{23} reste sensiblement constant au cours d'un essai triaxial donné.

La loi d'évolution suivante semble reproduire correctement l'évolution de ce coefficient élastique avec la contrainte moyenne :

$$\nu_{23} = \nu_{23}^0 - \nu_{23}^b \cdot \exp(-\nu_{23}^c \sigma) \quad (2.27)$$

où, $\nu_{23}^0 = 0.19$, $\nu_{23}^b = 0.084$ et $\nu_{23}^c = 0.0216 \text{ MPa}^{-1}$.

La comparaison entre l'approximation théorique proposée et les valeurs expérimentales de ν_{23} est présentée sur la figure 2.10.

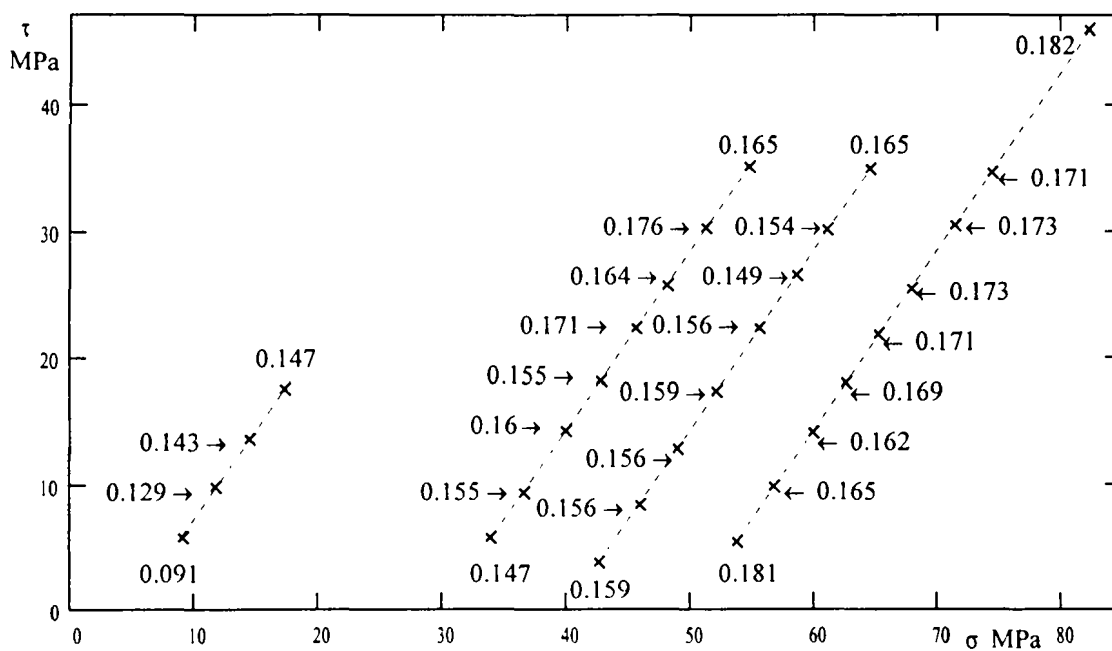


Figure 2.9 : Évolution du coefficient de Poisson ν_{23} dans le plan (σ, τ)

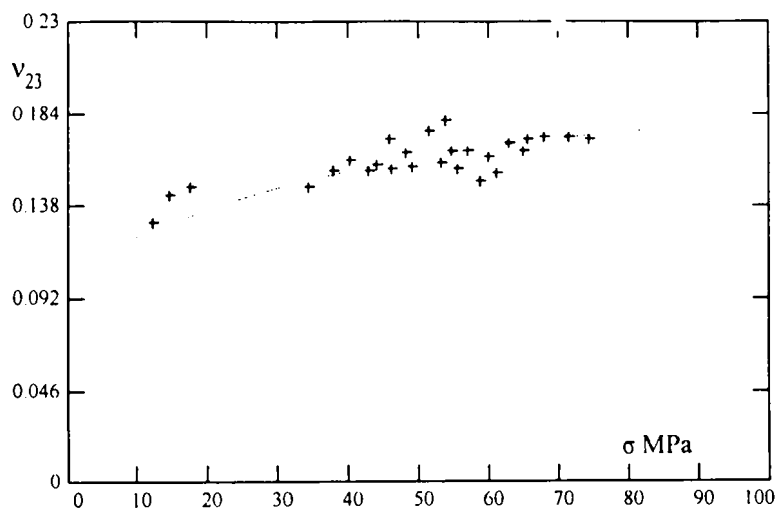


Figure 2.10 : Évolution du coefficient de Poisson v_{23} avec la contrainte moyenne

2.3.1.c COEFFICIENT DE POISSON v_{12}

Le coefficient de Poisson v_{12} est égal au rapport des variations de ϵ_3 et ϵ_1 pour une variation de contrainte donnée, pour l'orientation $\theta=0^\circ$. Les valeurs expérimentales de ce coefficient sont regroupées sur la figure 2.11.

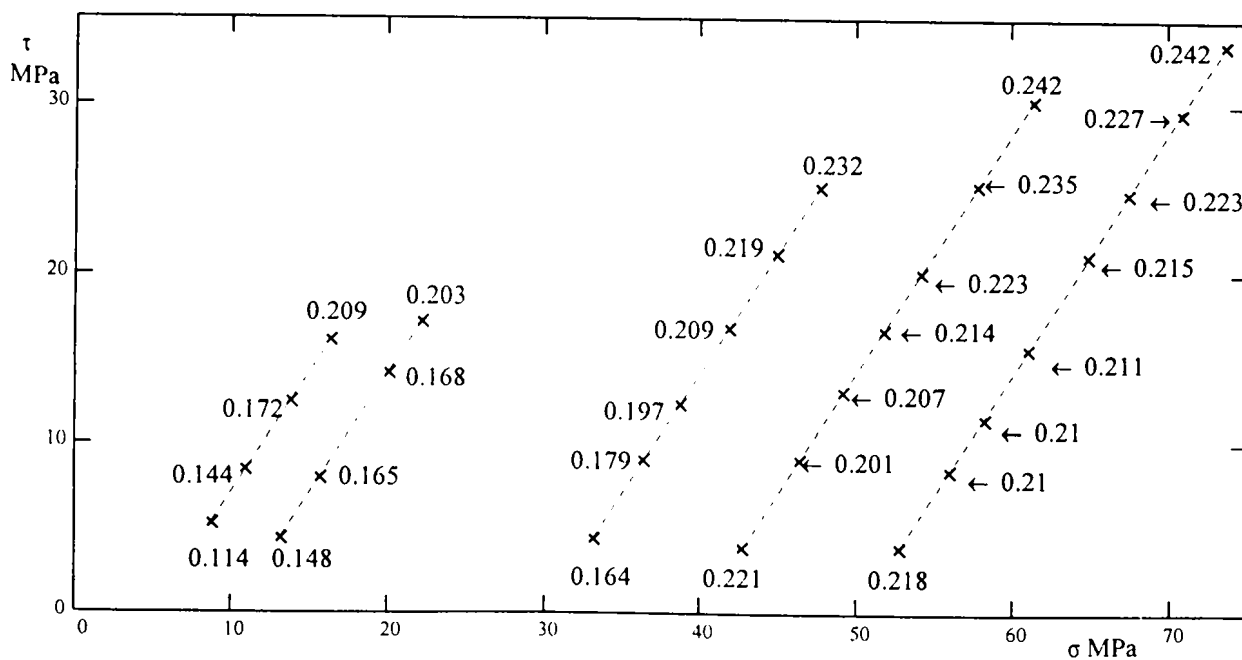


Figure 2.11 : Évolution du coefficient de Poisson v_{12} dans le plan (σ, τ)

L'analyse de cette figure montre que ν_{12} varie avec la contrainte moyenne et la contrainte octaédrique. À partir des résultats expérimentaux, pour chaque niveau $\tau = \text{constante}$, nous approchons la variation ν_{12} avec la contrainte moyenne par une loi exponentielle :

$$\nu_{12} = \nu_{12}^0 - \nu_a \exp(-B\sigma) \quad (2.28)$$

Le coefficient ν_{12}^0 peut être considéré constant : $\nu_{12}^0 = 0.23$; les paramètres ν_a et B dépendent de τ . Nous exprimons la variation de ces paramètres avec τ sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \nu_a(\tau) = a_0 \cdot \exp(-a_1 \tau) \\ B(\tau) = b_0 \cdot \exp(-b_1 \tau) \end{cases} \quad (2.29)$$

où $a_0 = 0.163$, $a_1 = 0.019 \text{ MPa}^{-1}$ et $b_0 = 0.02 \text{ MPa}^{-1}$, $b_1 = -0.04 \text{ MPa}^{-1}$.

La comparaison entre les valeurs expérimentales et les valeurs calculées en utilisant les relations (2.29) - (2.30) est présentée sur la figure 2.12.

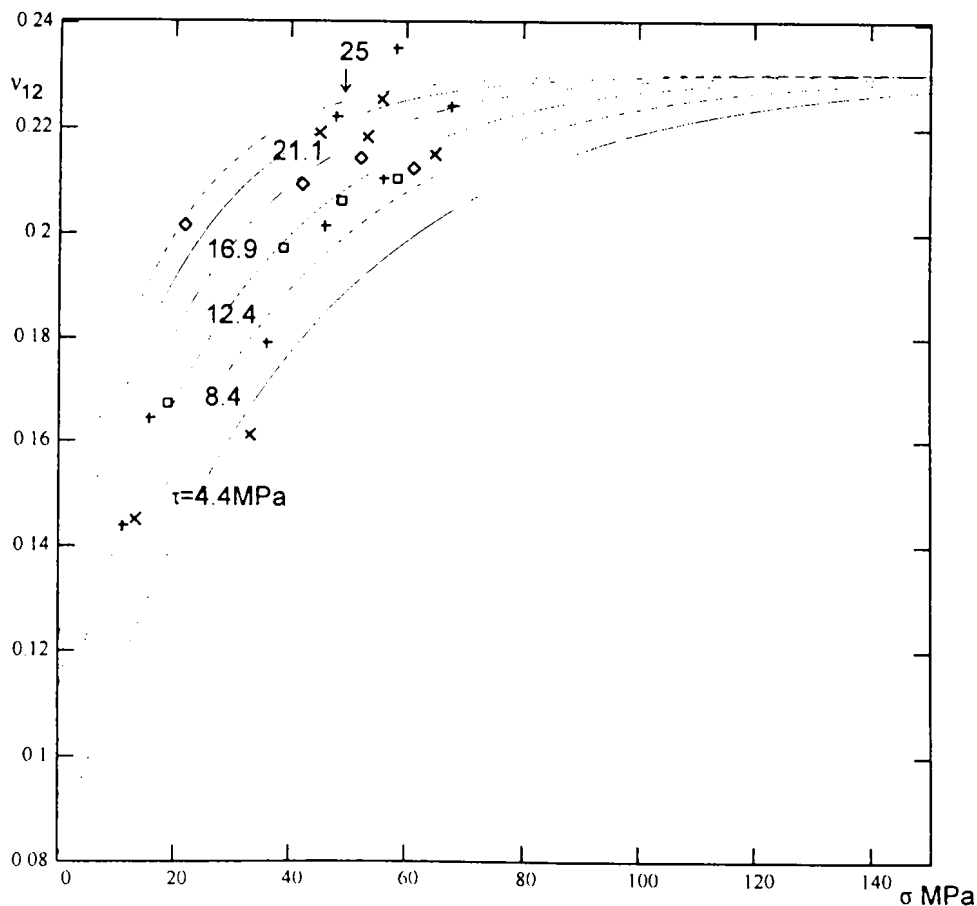


Figure 2.12 : Variation du coefficient de Poisson ν_{12} avec la contrainte moyenne pour différents niveaux $\tau = \text{constante}$

2.3.1.d. VÉRIFICATION DE LA SYMÉTRIE DU TENSEUR D'ÉLASTICITÉ

Vérifions si la condition de symétrie du tenseur d'élasticité est satisfaite, à savoir :

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2} \quad (2.30)$$

Expérimentalement, on constate systématiquement que : $\frac{\nu_{12}}{E_1} > \frac{\nu_{21}}{E_2}$ (Figure 2.13).

Cet écart peut s'expliquer par l'existence d'une structure orientée des défauts dans le matériau. Pour des pressions élevées, quand la majorité des défauts est fermée, l'écart entre $\frac{\nu_{12}}{E_1}$ et $\frac{\nu_{21}}{E_2}$ semble diminuer (Figure 2.13).

Les approximations des paramètres élastiques que nous avons proposé, à savoir la dépendance de E_1 et ν_{12} de la contrainte moyenne et de la contrainte octaédrique, tout en supposant que E_2 et ν_{21} ne dépendent que de la contrainte moyenne, s'éloignent de l'hypothèse d'hyperélasticité (2.30). Sur la figure 2.13 nous présentons les courbes théoriques ($\frac{\nu_{12}}{E_1}$ versus σ) pour différents niveaux $\tau = \text{constante}$ et la courbe théorique ($\frac{\nu_{21}}{E_2}$ versus σ), en comparaison avec les valeurs expérimentales (les points expérimentaux sont représentés par des symboles). Nous pouvons constater que les lois de variation des coefficients élastiques en fonction de l'état de contrainte proposées semblent reproduire correctement le fait que pour des pressions élevées le matériau tend vers un comportement élastique linéaire.

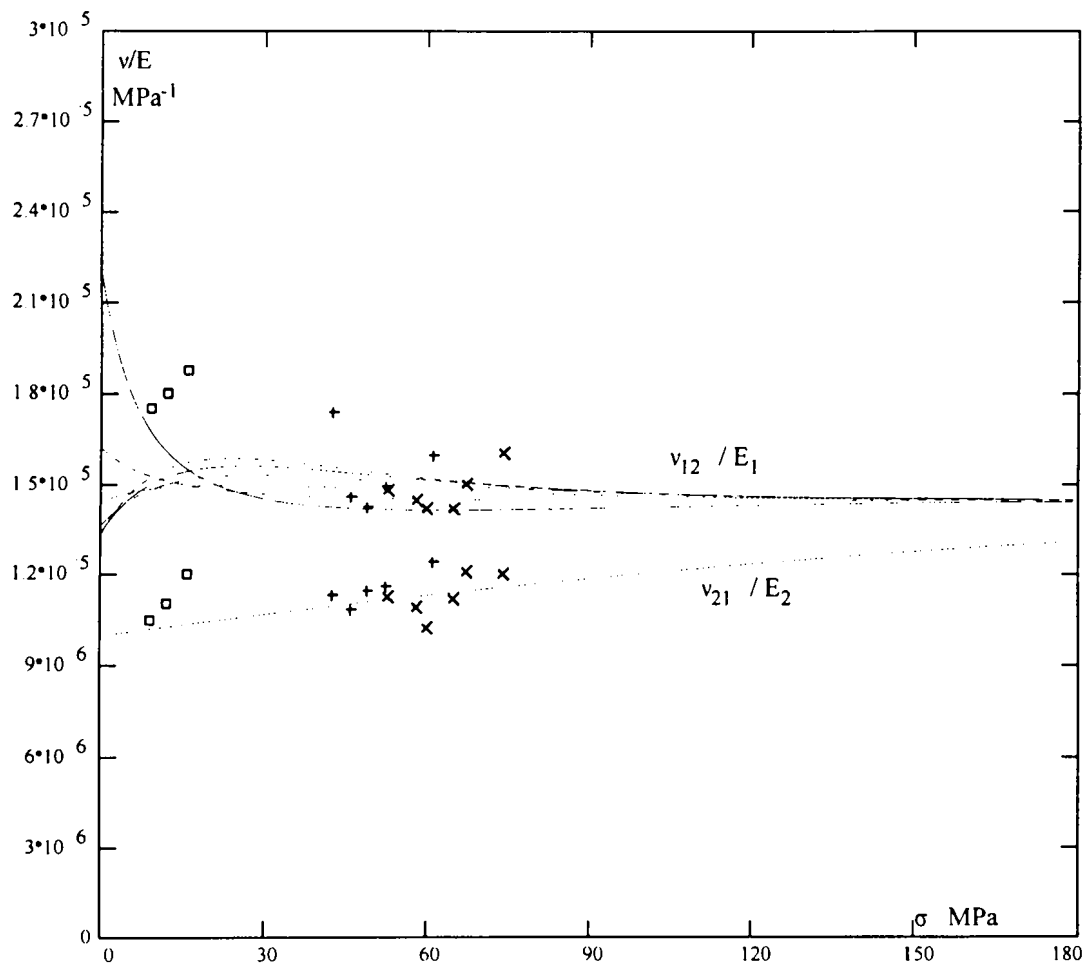


Figure 2.13 : Vérification de la symétrie du tenseur d'élasticité

2.3.1.e MODULE DE CISAILLEMENT G_{12}

Les essais de cisaillement directs sur l'argilite sont pratiquement impossible à réaliser à cause de la fragilité des échantillons. Des mesures dynamiques complémentaires ont été effectuées par Cuxac(1991) pour caractériser le type d'anisotropie de l'argilite et pour évaluer les modules élastiques dynamiques. La valeur moyenne du module de cisaillement dynamique G_{12} trouvée, est : $G_{12}=5995$ MPa. Cependant, le dispositif expérimental utilisé ne permet pas la mesure des célérités des ondes de compression et de cisaillement au cours d'un essai triaxial. Ainsi, la variation de G_{12} dynamique en fonction de l'état de contrainte n'a pas été évaluée.

Le module de cisaillement G_{12} statique peut être déterminé à partir des mesures des jauges longitudinales (ϵ_1) et des jauges transversales (ϵ_{3p}), placées perpendiculairement au plan de stratification, dans un essai de compression triaxiale à $\theta = 45^\circ$:

$$G_{12} = \frac{\sigma_{11}}{2(\epsilon_1 - \epsilon_{3p})} \quad (2.31)$$

On constate une importante dispersion expérimentale qui est liée aux difficultés que présente la mesure de (ϵ_{3p}) (Niandou, 1994).

Dans un essai hors - axe les mesures des jauges longitudinales sont plus précises. Ces mesures permettent l'estimation du module de Young E_θ avec la formule :

$$\Delta\epsilon_1 = \frac{\Delta(\sigma_1 - \sigma_3)}{E_\theta} \quad (2.32)$$

E_θ s'exprime en fonction des coefficients élastiques principaux et θ sous la forme suivante (Lehnitschii, 1963) :

$$\frac{1}{E_\theta} = \frac{\cos^4 \theta}{E_1} + \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{\nu_{12}}{E_1} - \frac{\nu_{21}}{E_2} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{\sin^4 \theta}{E_2} \quad (2.33)$$

Sur la figure 2.14 nous présentons les valeurs de G_{12} , obtenues à partir de (2.33) en utilisant les valeurs expérimentales de E_{60} , E_{30} et E_{45} pour un confinement de 40 MPa et les valeurs des coefficients élastiques principaux $E_1, E_2, \nu_{12}, \nu_{21}$ calculées avec les approximations théoriques proposées ((2.24-2.30)). Nous constatons une importante dispersion des valeurs de G_{12} .

Pour cette raison nous allons estimer G_{12} à partir de la formule suivante [Saint - Venant (1863)] :

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{2\nu_{21}}{E_2} \quad (2.34)$$

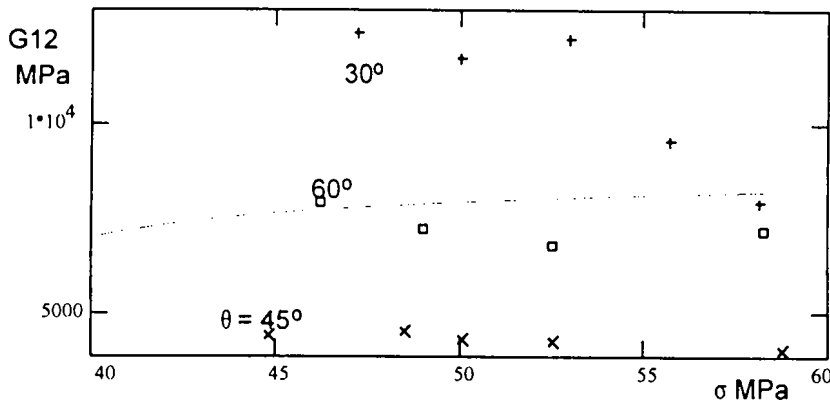


Figure 2.14 : Comparaison entre les valeurs expérimentales ($\sigma_3=40$ MPa) du module G_{12} obtenues à partir de (2.33) et l'approximation théorique de Saint - Venant.

Nous allons démontrer par la suite que l'approximation (2.34) du module de cisaillement G_{12} s'avère approprié dans le cas du matériau étudié. En effet, des calculs trigonométriques simples conduisent à la forme suivante de (2.33) :

$$\frac{1}{E_\theta} = V_1 + V_2 \cos 2\theta + V_3 \cos 4\theta \quad (2.35)$$

où :

$$V_1 = \frac{1}{8} \left(\frac{3}{E_1} + \frac{1}{G_{12}} - \frac{\nu_{12}}{E_1} - \frac{\nu_{21}}{E_2} + \frac{3}{E_2} \right) \quad (2.35)'$$

$$V_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \right)$$

$$V_3 = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{\nu_{12}}{E_1} + \frac{\nu_{21}}{E_2} - \frac{1}{G_{12}} \right)$$

Les quantités V_i ($i=1,3$), sont des combinaisons linéaires des coefficients élastiques principaux et, par conséquent sont invariantes par rapport à tout changement de repère. Si la formule de Saint -Venant (2.34) s'applique il en résulte :

$$\begin{cases} V_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \\ V_3 = 0 \end{cases} \quad (2.35)''$$

et,

$$(E_\theta)' = \frac{2 \sin 2\theta}{(V_1 + V_2 \cos 2\theta)^2} V_2 \quad (2.36)$$

Dans l'expression (2.36) " ' " désigne la première dérivée de E_θ . Comme $E_1 < E_2$, on en déduit que E_θ croît continûment de 0° à 90° .

Dans le tableau 2.1 sont données les valeurs expérimentales moyennes du module de Young E_θ à un confinement donné pour différentes orientations.

P (MPa)	E(0)	E(30)	E(45)	E(60)	E(90)
5	8990	12501	13347	17322	26190
40	14455	16177	25842 (?)	23633	34127
50	15013.7	17600	20358	22818	36784

Tableau 2.1 : Valeurs expérimentales du module élastique $E(\theta)$ en fonction de la pression de confinement

Malgré la dispersion expérimentale, nous pouvons constater que la rigidité de l'argilite croît avec l'orientation. Ceci montre que dans le cas de l'argilite l'approximation de Saint -Venant

semble s'appliquer .

2.3.2 CONSIDÉRATIONS THÉORIQUES SUR LA DÉPENDANCE EN CONTRAINTES DES MODULES ÉLASTIQUES DES ROCHES ORTHOTROPES DE RÉVOLUTION : APPLICATION À L'ARGILITE DE TOURNEMIRE

Les essais de compression triaxiale ont montré que la réponse élastique de l'argilite est fortement non -linéaire. Les modules élastiques principaux dépendent de l'état de contrainte. Pour décrire le comportement du matériau dans le domaine élastique nous proposons une généralisation de la loi élastique linéaire en considérant que les modules élastiques principaux ne dépendent que des deux premiers invariants du tenseur des contraintes p et q , i. e. :

$$\varepsilon = (b_1 \text{tr} \sigma + b_2 \text{tr} M \sigma) I + b_3 (M \sigma + \sigma M) + b_4 \sigma + (b_5 \text{tr} M \sigma + b_6 \text{tr} \sigma) M \quad (2.37)$$

$$b_i = b_i(p, q).$$

Les expressions des coefficients b_i en fonction des modules élastiques principaux sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 = -\frac{\nu_{23}}{E_2}, \quad b_2 = \frac{\nu_{23}}{E_2} - \frac{\nu_{21}}{E_2} \quad b_3 = \frac{1}{2G_{12}} - \frac{1 + \nu_{23}}{E_2} \\ b_4 = \frac{1 + \nu_{23}}{E_2}, \quad b_5 = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + 2\frac{\nu_{21}}{E_2} - \frac{1}{G_{12}} \\ b_6 = b_2 \end{array} \right. \quad (2.38)$$

La question qui se pose est de savoir quelles sont les restrictions à imposer aux fonctions b_i afin que les principes de la thermodynamique ne soient pas violés. Dans ce qui suit, nous tentons de répondre à cette question pour des processus isothermes.

En effet, pour la classe de matériaux définie par l'équation (2.37) l'énergie complémentaire élastique s'exprime par :

$$\delta W_c = (9b_1 p + 3b_2 m + 3b_3 p) dp + \frac{2}{3} b_3 q dq + b_4 dn + (b_5 m + 3b_6 p) dm \quad (2.39)$$

Par conséquent l'énergie complémentaire est une différentielle exacte si et seulement si :

$$\begin{cases}
3 \frac{\partial}{\partial q} [(b_3 + 3b_1)p + b_2 m] = \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{2}{3} b_3 q \right) \\
3 \frac{\partial}{\partial m} [(b_3 + 3b_1)p + b_2 m] = \frac{\partial}{\partial p} (b_5 m + 3b_6 p) \\
3 \frac{\partial}{\partial n} [(b_3 + 3b_1)p + b_2 m] = \frac{\partial}{\partial p} (b_4) \\
\frac{2}{3} q \frac{\partial b_3}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial q} (b_5 m + 3b_6 p) \\
\frac{2}{3} q \frac{\partial b_3}{\partial n} = \frac{\partial b_4}{\partial q} \\
\frac{\partial b_4}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial n} (b_5 m + 3b_6 p)
\end{cases} \quad (2.40)$$

Le système (2.40) exprime le fait que les dérivées croisées des coefficients de dp, dq, dm et dn doivent être égales. Comme $b_i = b_i(p, q)$, on en déduit :

$$3 \frac{\partial}{\partial q} [(b_3 + 3b_1)p + b_2 m] = \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial p} (b_3 q) \quad (2.41a)$$

$$3b_2 = \frac{\partial b_5}{\partial p} m + 3b_6 + 3p \frac{\partial b_6}{\partial p} \quad (2.41b)$$

$$\frac{\partial b_4}{\partial p} = 0 \quad (2.41c)$$

$$\frac{\partial b_5}{\partial q} m + 3 \frac{\partial b_6}{\partial q} p = 0 \quad (2.41d)$$

$$\frac{\partial b_4}{\partial q} = 0 \quad (2.41e)$$

la dernière équation (2.40), conduisant à l'identité : $0=0$.

À partir des équations (2.41c) et (2.41e) nous obtenons :

$$b_4 = C_1 \quad (2.42)$$

où C_1 est une constante matérielle.

L'équation (2.41d) peut être écrite sous la forme équivalente suivante :

$$m \frac{\partial b_5}{\partial q} = -3p \frac{\partial b_6}{\partial q} \quad (2.41d')$$

Comme b_6 est fonction de p et q seulement, on en déduit que :

$$\frac{\partial b_5}{\partial q} = 0 \Rightarrow \frac{\partial b_6}{\partial q} = 0 \quad (2.43)$$

A partir de l'équation (2.41b), un raisonnement similaire conduit à :

$$\begin{cases} \frac{\partial b_5}{\partial p} = 0 \\ p \frac{\partial b_6}{\partial p} = b_2 - b_6 \end{cases} \quad (2.44)$$

En combinant (2.43) et (2.44) on obtient que $b_5 = C_2$, où C_2 est une constante matérielle

L'équation (2.41a) donne :

$$\begin{cases} \frac{\partial b_2}{\partial q} = 0 \\ \frac{2}{3} q \frac{\partial b_3}{\partial p} - 3p \frac{\partial b_3}{\partial q} - 9p \frac{\partial b_1}{\partial q} = 0 \end{cases} \quad (2.45)$$

En remplaçant dans les relations (2.43)-(2.45) les coefficients b_i par leurs expressions en fonction des modules élastiques principaux, nous obtenons les **conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il n'y ait pas de dissipation d'énergie** :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2G_{12}} - \frac{1 + \nu_{23}}{E_2} = C_1 \end{array} \right. \quad (2.46a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{\nu_{21}}{E_2} + \frac{\nu_{12}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}} = C_2 \end{array} \right. \quad (2.46b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\nu_{23}}{E_2} - \frac{\nu_{21}}{E_2} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (2.46c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\nu_{23}}{E_2} - \frac{\nu_{21}}{E_2} \right) = \frac{\nu_{21}}{E_2} - \frac{\nu_{12}}{E_1} \end{array} \right. \quad (2.46d)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(3p \frac{\partial}{\partial q} - \frac{2q}{3} \frac{\partial}{\partial p} \right) \left(\frac{1}{E_2} \right) + \left(-6p \frac{\partial}{\partial q} - \frac{2}{3} q \frac{\partial}{\partial p} \right) \left(\frac{\nu_{23}}{E_2} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (2.46e)$$

Observons que le module de cisaillement n'est plus un paramètre élastique indépendant . Ce module s'exprime en fonction des autres paramètres élastiques comme suit :

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{\nu_{12}}{E_1} + \frac{\nu_{21}}{E_2} - C_2 \quad (2.46b')$$

Si $\nu_{21}/E_2 = \nu_{12}/E_1$ (i.e. la condition de symétrie du tenseur des compliances est vérifiée) et $C_2=0$, la relation (2.46b') coïncide avec l'approximation de Saint-Venant (voir (2.34)).

Le système d'équations (2.46) est complexe. Dans la suite nous allons donner une solution analytique de ce système dans le cas où les hypothèses supplémentaires suivantes s'appliquent :

$$\frac{\nu_{23}}{E_2} = C_3 \quad (H0)$$

$$\frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1} \quad (H1)$$

où C_3 est une constante matérielle.

Si $\frac{\nu_{23}}{E_2} = C_3$, (2.46e) devient :

$$\left(3p \frac{\partial}{\partial q} - \frac{2q}{3} \frac{\partial}{\partial p}\right) \left(\frac{1}{E_2}\right) = 0,$$

soit,

$$\begin{bmatrix} -(2q/3) & 3p \\ dp & dq \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial(1/E_2)/\partial p \\ \partial(1/E_2)/\partial q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ d(1/E_2) \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Résoudre ce système différentiel dans l'esprit de la théorie des caractéristiques revient à annuler le déterminant :

$$\Delta = -(2/3)q dq - 3p dp \quad (2.48)$$

Il en résulte la restriction suivante concernant la forme de $1/E_2$:

$$1/E_2 = f\left(\frac{3}{2}(p/p_a)^2 + \frac{1}{3}(q/p_a)^2\right) \quad (2.49)$$

p_a étant une constante (la pression atmosphérique).

• (2.46 c) et (2.46d) se réduisent à :

$$\begin{cases} p \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{v_{21}}{E_2}\right) = \frac{v_{21}}{E_2} - \frac{v_{12}}{E_1} \\ \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{v_{21}}{E_2}\right) = 0 \end{cases} \quad (2.50)$$

Si nous supposons que $\frac{v_{21}}{E_2} = \frac{v_{12}}{E_1}$ (l'hypothèse (H1)) le système (2.50) conduit à :

$$\frac{v_{21}}{E_2} = \frac{v_{12}}{E_1} = C_4 \quad (2.51)$$

où C_4 est une constante.

• Ensuite, par soustraction de (2.46 a) et (2.46b) on élimine $1/G_{12}$. Nous obtenons la relation suivante entre les modules élastiques E_1 et E_2 :

$$1/E_1 - 1/E_2 = 2(C_1 + C_3 - C_4) + C_2 \quad (2.52)$$

Ainsi, un solide élastique défini par (2.37) et vérifiant les :

$$\bullet \frac{\nu_{23}}{E_2} = C_3 \quad (H0)$$

$$\bullet \frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1} \quad (H1)$$

est hyperélastique, si et seulement si :

$$\begin{cases} 1/E_2 = f(x) \\ 1/E_1 = f(x) + C_2 + 2(C_1 + C_3 - C_4) \\ 1/G_{12} = 2(1/E_2 + C_1 + C_3) \end{cases} \quad (2.53)$$

où :

$$x = \frac{1}{3} \left(\frac{q}{p_a} \right)^2 + \frac{3}{2} \left(\frac{p}{p_a} \right)^2$$

• f est une fonction continue quelconque qui doit être déterminée à partir des données expérimentales.

Par la suite, nous allons utiliser le modèle (2.53) pour décrire la partie élastique de la déformation de l'argilite de Tournemire.

L'hypothèse (H0) semble très raisonnable pour ce matériau : $C_3 = 4.765 \cdot 10^{-6} \text{ MPa}^{-1}$. Notons que l'hypothèse (H1) n'est pas vérifiée expérimentalement (§ 2.3.1.d). Cependant , on peut supposer que :

$$\begin{cases} \nu_{21}/E_2 = C_4 \\ \nu_{12}/E_1 = C_5 \end{cases} \quad (H3)$$

où $C_5 = 1.551 \cdot 10^{-5} \text{ MPa}^{-1}$ et $C_4 = 1.152 \cdot 10^{-5} \text{ MPa}^{-1}$.

Avec les hypothèses (H0) et (H3), à partir des équations (2.46a), (2.46b) et (2.46e) nous obtenons :

$$\begin{cases} 1/E_2 = f(x) \\ 1/E_1 - 1/E_2 = C_2 + 2(C_1 + C_3) - C_4 - C_5 \end{cases} \quad (2.54)$$

La dispersion des valeurs expérimentales du module de Young E_1 est moins importante que celle des autres paramètres élastiques. Pour cette raison nous déterminons la fonction f à partir des valeurs expérimentales de ce module.

L'évolution du module de Young E_1 en fonction de $x = \frac{1}{3} \left(\frac{q}{p_a} \right)^2 + \frac{3}{2} \left(\frac{p}{p_a} \right)^2$, ($p_a = 1 \text{ MPa}$) est donnée sur la Figure 2.15 (les symboles représentent les valeurs expérimentales de E_1).

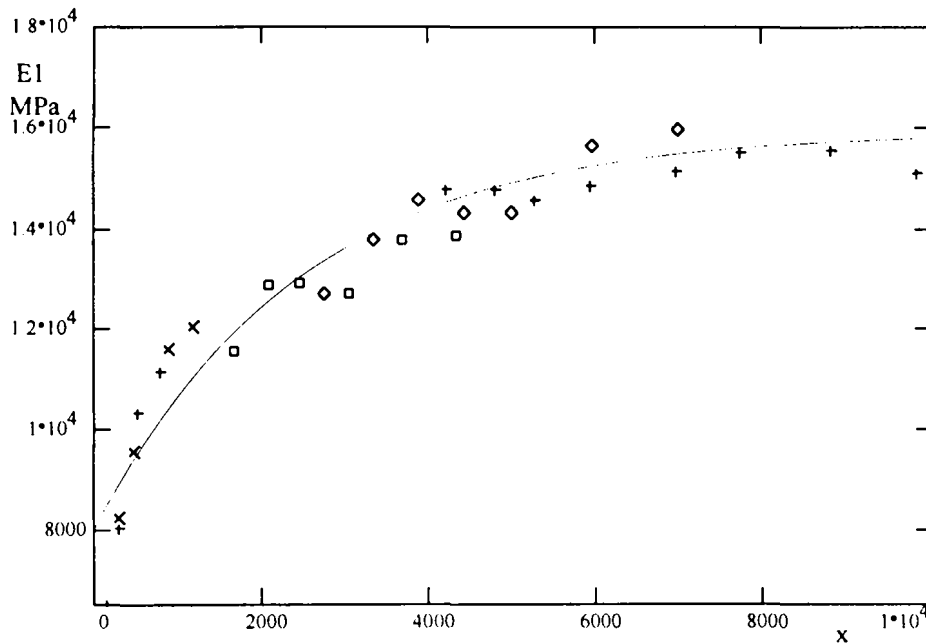


Figure 2.15 : Évolution de E_1 en fonction de x , comparaison entre les résultats expérimentaux et la loi (2.55).

Nous proposons la forme spécifique suivante pour la fonction f :

$$E_1 = 15900 - 7936 \exp(-4.11 \cdot 10^{-4} x) \quad (2.55)$$

Notons que pour $p \rightarrow \infty$, $E_1 \rightarrow 15900$. Ceci est en accord avec les observations expérimentales (le module approche pour des niveaux élevés de pression une valeur limite constante). Dans un essai triaxial classique ($\sigma_3 = \text{constante}$) le chemin de chargement est défini par :

$$q = 3(p - \sigma_3) \quad (2.56)$$

Pour ce type de sollicitation, en introduisant (2.56) dans (2.55) nous obtenons l'expression de E_1 en fonction de p :

$$E_1 = 15900 - 7936 \exp \left\{ -4.11 \cdot 10^{-4} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{p}{p_a} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{3p - \sigma_3}{p_a} \right)^2 \right] \right\} \quad (2.55)'$$

Dans la figure 2.16 nous présentons une comparaison entre différentes courbes (2.55)' et les données expérimentales.

L'équation (2.54) peut s'écrire sous la forme :

$$E_2(x) = \frac{1}{1/E_1(x) - C} \quad (2.57)$$

avec $C = C_2 + 2(C_1 + C_3) - C_4 - C_5$. A partir de (2.55) et des valeurs expérimentales de E_2 nous déterminons C par approximation par moindres carrées. Pour l'argilite, $C = 3.822 \cdot 10^{-5} \text{ MPa}^{-1}$. Ensuite, à partir des relations (H0), (H1) et (2.57) nous en déduisons les lois de variation des coefficients de Poisson ν_{12}, ν_{21} et ν_{23} :

$$\begin{cases} \nu_{12}(p, q) = C_5 \cdot E_1(p, q) \\ \nu_{21}(p, q) = C_4 \cdot E_2(p, q) \\ \nu_{23}(p, q) = C_3 \cdot E_2(p, q) \end{cases} \quad (2.58)$$

Les approximations théoriques (2.58) et (2.59) sont comparées avec les valeurs expérimentales de ces coefficients obtenues sur des chemins de compression triaxiale à différentes pressions de confinement. (Figures (2.17)-(2.20)). Nous observons une bonne concordance générale entre les approximations théoriques proposées et l'expérience.

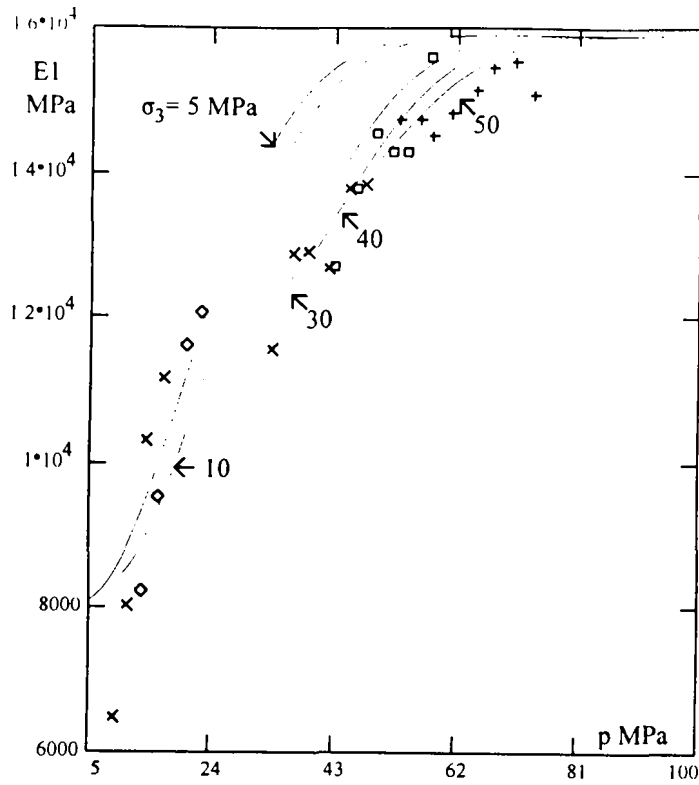


Figure 2.16 : Évolution de E_1 avec la contrainte moyenne obtenue avec la loi (2.55)' en comparaison avec les valeurs expérimentales

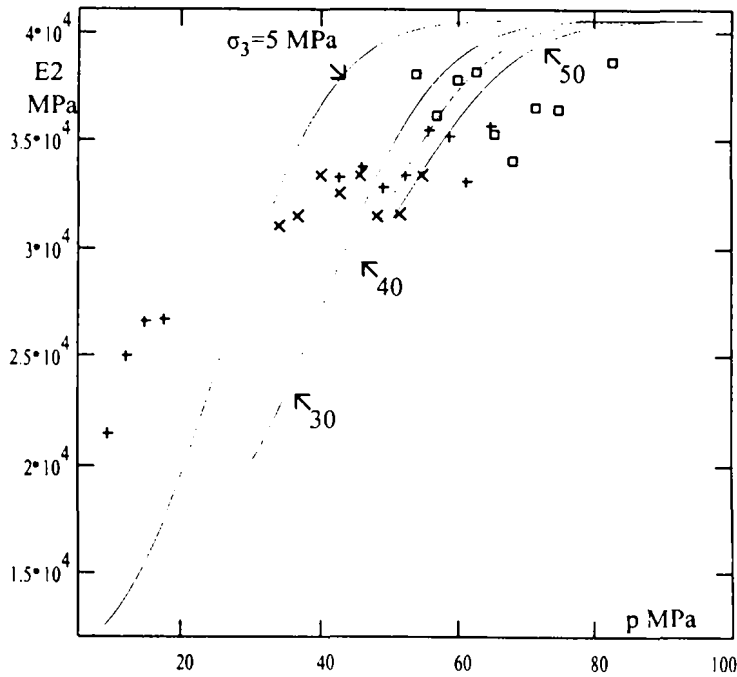


Figure 2.17 : Évolution de E_2 avec la contrainte moyenne obtenue avec la loi (2.57) en comparaison avec les valeurs expérimentales

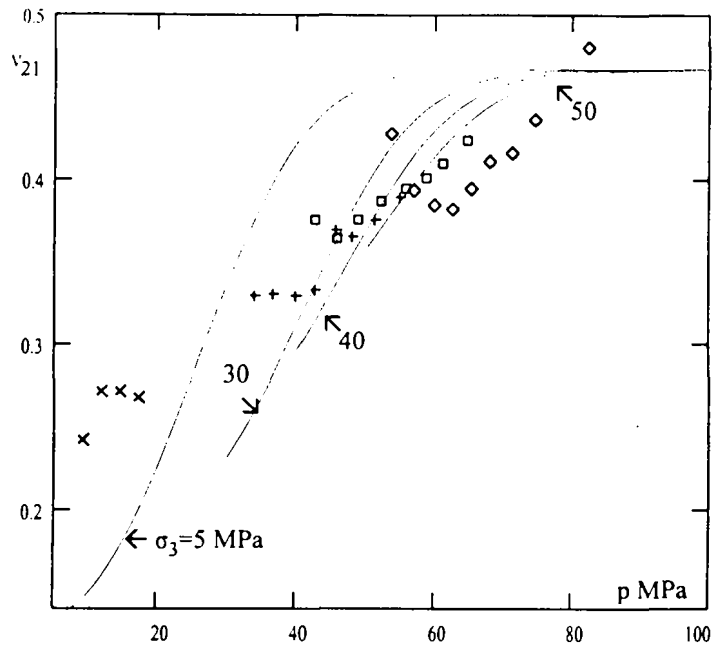


Figure 2.18 : Évolution de ν_{21} avec la contrainte moyenne obtenue avec la loi (2.59) en comparaison avec les valeurs expérimentales

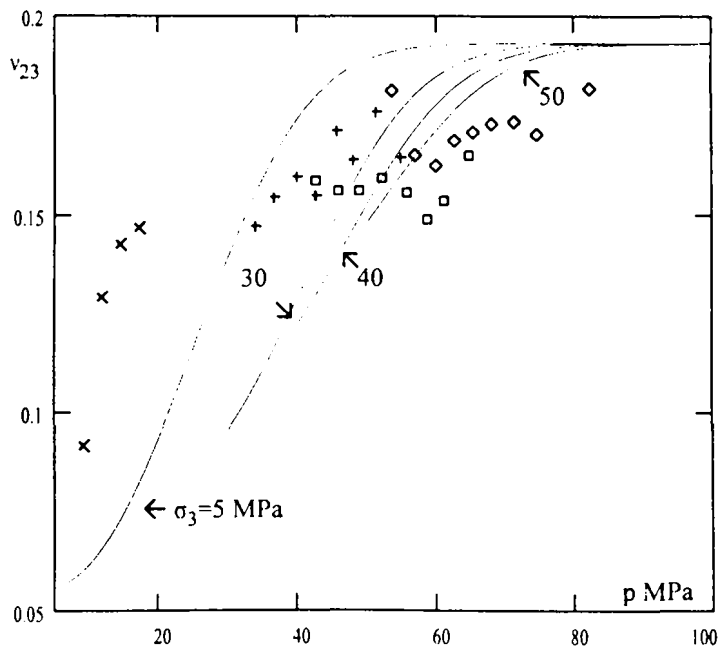


Figure 2.19 : Évolution de ν_{23} avec la contrainte moyenne obtenue avec la loi (2.59) en comparaison avec les valeurs expérimentales

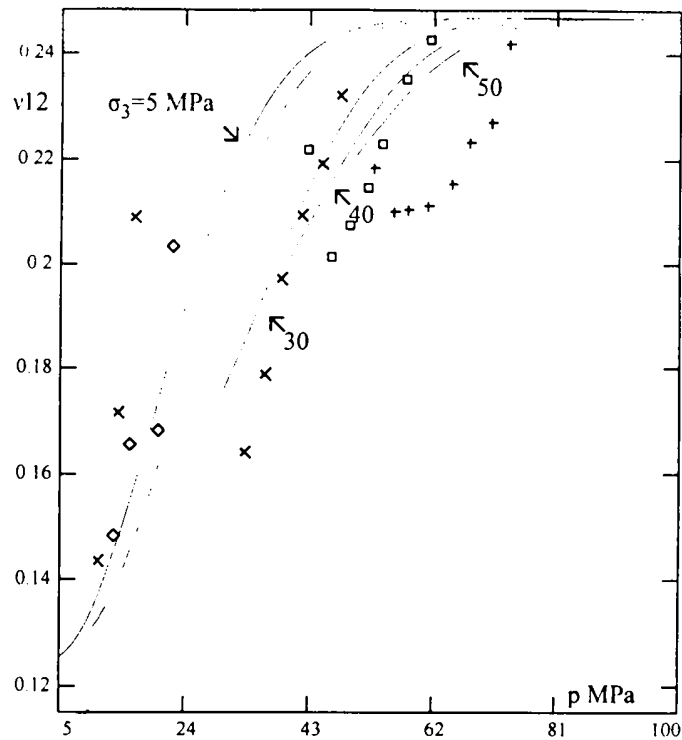


Figure 2.20 : Évolution de v_{12} avec la contrainte moyenne obtenue avec la loi (2.59) en comparaison avec les valeurs expérimentales

Nous pouvons constater que pour des pressions de confinement élevées ($\sigma_3 = 40$ MPa et $\sigma_3 = 50$ MPa) le modèle reproduit correctement le comportement du matériau. Cependant, pour des faibles pressions de confinement les simulations sont moins satisfaisantes. Pour valider les lois de variation proposées des données expérimentales supplémentaires sont nécessaires.

Ensuite, en introduisant (2.58) dans (2.46b) nous obtenons la loi de variation du coefficient de cisaillement G_{12} :

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{2}{E_1} - 2C_3 - 2(C_1 + C_2) \quad (2.46b')$$

La comparaison entre les valeurs expérimentales de G_{12} (obtenues à partir des essais de compression triaxiale pour $\theta=45^\circ$) et l'approximation (2.46b') ($C_2=0$ et $C_1=1.5 \cdot 10^{-8}$) est présentée sur la Figure 2.21.

Notons que le modèle non-linéaire proposé pour l'argilite (équations (2.55)-(2.59) et (2.46b')) est hypoélastique. En effet, dans les hypothèses (H0-H3), (2.46d) s'écrit : $0 = 4 \cdot 10^{-6}$, donc cette condition n'est pas respectée.

$0 = 4 \cdot 10^{-6}$, donc cette condition n'est pas respectée.

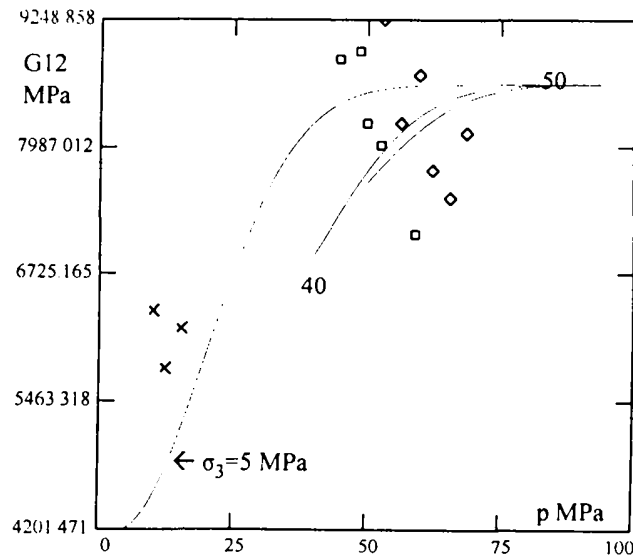


Figure 2.21 : Évolution du module de cisaillement G_{12} en fonction de la contrainte moyenne

2.4 CONCLUSIONS

Le comportement élastique de l'argilite de Tournemire est non-linéaire et anisotrope (orthotrope de révolution). En nous basant sur les résultats d'une série d'essais de compression triaxiale, nous avons proposé des lois empiriques de variation des modules élastiques principaux E_1 , E_2 , ν_{12} , ν_{21} et ν_{23} . Le module de cisaillement G_{12} a été approché par la formule de Saint-Venant (1834). Nous avons montré que si l'hypothèse de Saint-Venant s'applique il en résulte que E_θ croît continûment de 0° à 90° . Pour l'argilite de Tournemire ceci a été confirmé expérimentalement (Tableau 2.1). Un modèle élastique non-linéaire a été ensuite proposé. Une hypothèse de base de ce modèle est de considérer que les paramètres élastiques ne dépendent que des deux premiers invariants du tenseur des contraintes. Une telle hypothèse réduit au minimum la complexité formelle du problème et néanmoins reste suffisante pour décrire les données expérimentales sur les roches sédimentaires. Nous avons formulé les restrictions que les lois d'évolution des modules élastiques doivent satisfaire afin que les principes de la thermodynamique soient respectés. Ainsi, si nous supposons que :

$$\begin{cases} \frac{\nu_{23}}{E_2} = C_3 \\ \frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1} \end{cases},$$

il en résulte que le matériau est hyperélastique si et seulement si :

$$\begin{cases} 1/E_2 = f\left(\frac{1}{3}\left(\frac{q}{p_a}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{p}{p_a}\right)^2\right) \\ 1/E_1 - 1/E_2 = C \\ 1/G_{12} = 2/E_2 + C' \end{cases}$$

où C_3 , C , C' sont des constantes. On en déduit donc, que les coefficients élastiques sont des fonctions de l'expression :

$$\frac{3}{2}\left(\frac{p}{p_a}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{q}{p_a}\right)^2$$

Des résultats expérimentaux supplémentaires sur des chemins de chargement plus généraux seront nécessaires pour valider les approximations choisies. Cependant, nous estimons que les lois proposées permettent de décrire d'une manière satisfaisante le comportement réel du matériau.

CHAPITRE III

ÉTUDE DU COMPORTEMENT À LA RUPTURE DE L'ARGILITE DE TOURNEMIRE

3.1.1 INTRODUCTION

Dans la première partie de ce chapitre nous proposons un critère de rupture pour des roches à structure initiale de type orthotrope de révolution. Dans le cas isotrope, le critère proposé se réduit au critère du paraboloïde de Stassi. Six paramètres interviennent dans ce critère. Une procédure d'identification ainsi que l'interprétation physique de ces paramètres est présentée. Le critère est ensuite appliqué à l'étude du comportement à la rupture de l'argilite.

Afin de comparer la performance du critère proposé à d'autres critères couramment utilisés pour les matériaux anisotropes nous allons appliquer le critère de Tsai et Wu (1971) à la modélisation du comportement à la rupture de l'argilite. Le choix de ce critère est motivé par la différence entre la méthode utilisée par Tsai et Wu pour décrire l'anisotropie des propriétés de résistance et celle que nous avons suivie dans le critère développé.

Enfin, dans le souci de comparer les différentes possibilités de prendre en compte l'anisotropie de la rupture nous généralisons le même critère isotrope de Stassi au cas de l'orthotropie de révolution en utilisant la démarche proposée par Olszak et Urbanowski (1956).

3.1.2 DÉVELOPPEMENT D'UN CRITÈRE DE RUPTURE ANISOTROPE

La résistance ultime d'un matériau peut être influencée par plusieurs facteurs, tels que : le temps, l'histoire de chargement, la température, l'humidité. Pour une vitesse de chargement donné, on peut considérer que le critère de rupture ne dépend que de l'état de contrainte et, d'une manière générale peut s'exprimer par :

$$f(\sigma) = 0 \quad (3.1)$$

où σ représente le tenseur de contraintes.

Pour un milieu anisotrope, f doit être invariante dans le groupe de symétrie du matériau. En utilisant les théorèmes de représentation de Shih Liu (1982) il en résulte que la forme invariante la plus générale du critère de rupture d'un solide orthotrope de révolution est donnée par :

$$f'(tr\sigma, tr\sigma^2, tr\sigma^3, trM\sigma, trM\sigma^2) = 0 \quad (3.2)$$

f' étant une fonction isotrope et $M = S_1 \otimes S_1$ (S_1 - l'axe de révolution du matériau).

La forme générale (3.2) doit être spécifiée pour chaque classe de matériaux orthotropes de révolution.

Nous proposons un nouveau critère de rupture pour des roches orthotropes de révolution sous la forme spécifique suivante :

$$\frac{3}{2} \text{tr}(\Sigma')^2 - \frac{m}{3} \text{tr}(\Sigma) - 1 = 0 \quad (3.3)$$

où, \underline{m} est une constante du matériau et le tenseur Σ est défini par la transformation suivante (Goldenblat (1962), Boehler et Sawczuck(1970)) :

$$\Sigma_{ij} = A_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (3.4)$$

Dans le critère (3.3), l'anisotropie est introduite à l'aide du tenseur d'ordre quatre constant \mathbf{A} , qui satisfait les conditions de symétrie suivantes :

$$A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{klij} = A_{ijlk} \quad (3.5)$$

Parmi les premiers auteurs qui ont suggéré l'utilisation d'un tenseur d'ordre quatre pour décrire l'anisotropie des propriétés de résistance nous pouvons citer Goldenblat et Kopnov (1966), Boehler et Sawczuck (1970). À la différence de Boehler et Sawczuck (1970,1977,1978), nous supposons que la seule restriction à imposer sur la forme du tenseur \mathbf{A} , est celle d'invariance dans le groupe de symétrie du matériau. Ainsi, pour un milieu orthotrope de révolution, le tenseur \mathbf{A} a 5 composantes indépendantes. La forme matricielle de \mathbf{A} dans le repère de structure (S_1, S_2, S_3) est donc, donnée par :

$$A = \begin{bmatrix} a & b & b & 0 & 0 & 0 \\ b & d & e & 0 & 0 & 0 \\ b & e & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{d-e}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c}{2} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

où **a, b, c, d, e**, sont des constantes, et (S_2, S_3) définit le plan d'isotropie du matériau.

En utilisant les relations (3.4) et (3.6) nous obtenons les expressions des invariants de Σ en fonction de σ et M :

$$\begin{cases} tr\Sigma = (a + b - d - e)trM\sigma + (b + d + e)tr\sigma \\ \frac{3}{2}tr(\Sigma')^2 = A(trM\sigma)^2 + B(tr\sigma)^2 + C(tr\sigma)(trM\sigma) + D(trM\sigma^2) \end{cases} \quad (3.7)$$

où :

$$\begin{cases} A = x^2 + 2\alpha x + 4\beta x + 3u^2 + 2xu + 4\beta u \\ B = y^2 + 3v^2 + 2yv + 2\alpha \\ C = 2xy + 2\alpha y + 4\beta y + 6uv + 2(xv + yu) + 2u\alpha + 4\beta v \\ D = 4\beta^2 + 4\beta\alpha \end{cases} \quad (3.8)$$

et

$$\begin{cases} x = a + d - 2c - 2b \\ y = b - e, \\ \alpha = d - e, \\ \beta = c - d - e \\ u = \frac{1}{3}(2b - 2e - a + d) \\ v = \frac{1}{3}(2e - b - d) \end{cases} \quad (3.9)$$

Ensuite en introduisant (3.7) dans (3.3), nous obtenons l'expression du critère proposé en fonction des invariants de contraintes et des invariants mixtes $trM\sigma$ et $trM\sigma^2$. Notons que le critère proposé est une forme spécifique du critère général (3.2) ne faisant intervenir que des termes jusqu'à l'ordre deux en contraintes.

Dans le repère de structure (S_1, S_2, S_3) , le tenseur d'anisotropie M , (cf. §2.1, équation (2.2)) est donné par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Ensuite en utilisant les formules (3.7)-(3.9) nous obtenons l'expression du critère (3.3) dans le repère (S_1, S_2, S_3) :

$$AA\sigma_1^2 + BB(\sigma_2^2 + \sigma_3^2) + CC(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3) + DD\sigma_2\sigma_3 + 3c^2(\sigma_5^2 + \sigma_6^2) + 3(d-e)^2\sigma_4^2 - m/3[(a+2b)\sigma_1 + (b+e+d)(\sigma_2 + \sigma_3)] - 1 = 0 \quad (3.11)$$

où :

$$\begin{cases} AA = (a-b)^2 \\ BB = \frac{1}{2}[(b-e)^2 + (d-e)^2 + (b-d)^2] \\ CC = (b-a)(e-2b+d) \\ DD = (2b-d-e)^2 - 2BB \end{cases} \quad (3.11)'$$

Observons que les coefficients des composantes du tenseur de contraintes ayant les indices 2 et 3 (associés au plan d'isotropie (S_2, S_3)) sont identiques.

Dans le cas isotrope, le critère (3.3) se réduit au critère de Stassi (Henry, J.P et Parsy, F 1982) :

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + c_1(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + c_2 = 0 \quad (3.12)$$

c_1, c_2 étant des paramètres du matériau.

En effet, le passage au cas isotrope se fait en remplaçant le tenseur A par le tenseur d'ordre 4 isotrope I ayant les mêmes symétries, i.e. :

$$I_{ijkl} = I_{jikl} = I_{klij} = I_{ijlk} \quad (3.13)$$

Le tenseur isotrope de quatrième ordre I , est défini par :

$$I = \begin{bmatrix} a & b & b & 0 & 0 & 0 \\ b & a & b & 0 & 0 & 0 \\ b & b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a-b}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a-b}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a-b}{2} \end{bmatrix} \quad (3.13)'$$

Ainsi, dans le cas isotrope, les invariants du tenseur transformé Σ , se réduisent à :

$$\begin{cases} tr\Sigma = tr(I_{ijkl}\sigma_{kl}) = (a+2b)tr\sigma \\ \frac{3}{2}tr(\Sigma')^2 = \frac{3}{2}tr\left[I_{ijkl}\sigma_{kl} - \frac{1}{3}I_{ijkl}\sigma_{kl}\delta_{ij}\delta_{kl}\right] = \frac{3}{2}(a-b)^2 trS^2 \end{cases} \quad (3.14)$$

où, S est le déviateur du tenseur des contraintes. Il en résulte que, dans le cas isotrope, le critère proposé (3.3), s'écrit :

$$\frac{3(a-b)^2}{2} trS^2 - \frac{m(a+2b)}{3} tr\sigma - 1 = 0 \quad (3.15)$$

Notons que (3.15) est une forme équivalente du critère de Stassi (voir (3.12)).

3.1.3 INTERPRÉTATION PHYSIQUE DES COMPOSANTES DU TENSEUR D'ANISOTROPIE A

La signification physique des paramètres intervenant dans le critère de rupture (3.3) s'identifie à partir des essais suivants :

- compression et traction simple suivant la direction S_1 ;
- compression et traction simple suivant une direction quelconque du plan d'isotropie ;
- cisaillement pur dans le plan d'isotropie (S_2, S_3) ;
- cisaillement pur dans le plan (S_1, S_2).

Pour un état de sollicitation uniaxiale suivant la direction S_1 , les invariants du tenseur Σ s'écrivent :

$$\begin{cases} \text{tr}\Sigma = (a + 2b)\text{tr}\sigma = (a + 2b)\sigma_1 \\ \frac{3}{2}\text{tr}(\Sigma')^2 = (a - b)^2 \sigma_1^2 \end{cases} \quad (3.16)$$

Il en résulte que, $\text{tr}\sigma$ et $\text{tr}\Sigma$ ont le même signe si et seulement si :

$$a + 2b > 0 \quad (3.17)$$

En utilisant (3.16), le critère (3.3) devient :

$$-\frac{m}{3}(a + 2b)\sigma_1 + (a - b)^2 \sigma_1^2 - 1 = 0 \quad (3.18)$$

Nous adoptons la convention de signe utilisée dans la mécanique des roches (une contrainte compressive est considérée positive). Soit X_c et $(-X_t)$, les résistances à la compression et à la traction simple suivant S_1 . La formule (3.18) nous conduit aux relations suivantes :

$$(a - b)^2 = \frac{1}{X_t X_c} \quad (3.19a)$$

et

$$-\frac{m}{3}(a+2b) = \frac{1}{X_c} - \frac{1}{X_t} \quad (3.19b)$$

D'une façon similaire, pour un état de sollicitation uniaxiale suivant S_2 , nous obtenons :

$$\begin{cases} tr\Sigma = (b+d+e)\sigma_2 = (b+d+e)tr\sigma \\ \frac{3}{2}tr(\Sigma')^2 = \frac{1}{2}[(b-d)^2 + (b-e)^2 + (d-e)^2] \end{cases} \quad (3.20)$$

On en déduit que :

$$b+d+e > 0 \quad (3.21)$$

$$\frac{1}{2}[(b-d)^2 + (b-e)^2 + (d-e)^2] = \frac{1}{Y_t Y_c} \quad (3.22a)$$

et,

$$-\frac{m}{3}(b+e+d) = \frac{1}{Y_c} - \frac{1}{Y_t} \quad (3.22b)$$

où, $-(Y_t)$, Y_c sont les résistances à la traction et à la compression simple suivant la direction S_2 .

Pour un état de cisaillement pur dans le plan (S_2, S_3) le critère prédit rupture, quand :

$$Q^2 = \frac{1}{3(d-e)^2} \quad (3.23)$$

Q , étant la résistance au cisaillement dans ce plan.

La signification physique du paramètre c est identifiée à partir d'un essai de cisaillement dans le plan (S_1, S_2) :

$$c^2 = \frac{1}{3R^2} \quad (3.24)$$

À partir des formules (3.18) - (3.24) nous allons ensuite exprimer les paramètres du modèle en fonction des résistances limites du matériau.

Faisons tout d'abord, les notations suivantes :

$$\begin{cases} C = \frac{(1/X_c) - (1/X_t)}{(1/Y_c) - (1/Y_t)} \\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{X_t X_c}} \\ \beta = \frac{1}{Q\sqrt{3}} \end{cases} \quad (3.25)$$

Si $d > e$, alors :

$$d - e = \beta \text{ (cf. (3.23))} \Rightarrow b - d = (b - e) - \beta \quad (3.26)$$

Introduisons (3.26) dans (3.22a). On en déduit :

$$(b - e)^2 - \beta(b - e) + \beta^2 - \frac{1}{Y_t Y_c} = 0 \quad (3.27)$$

Le discriminant Δ de cette équation s'exprime comme suit :

$$\Delta = \frac{4}{Y_t Y_c} - \frac{1}{Q^2} \quad (3.28)$$

Il en résulte que, $(b - e)$ est réel, si et seulement si, la relation suivante, entre les résistances du matériau, s'applique :

$$\frac{4}{Y_t Y_c} - \frac{1}{Q^2} \geq 0 \quad (3.28)'$$

Pour $\Delta > 0$, nous obtenons les solutions suivantes :

$$\begin{cases} b-e = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2} \\ \text{soit,} \\ b-e = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2} \end{cases} \quad (3.29)$$

En divisant membre par membre les équations (3.19b) et (3.22b), on obtient :

$$C = \frac{a+2b}{b+e+d} \quad (3.30)$$

Les restrictions (3.17) et (3.21) impliquent : $C > 0$.

Posons $x=b-e$: si $a > b$, (3.30) s'écrit sous la forme équivalente suivante :

$$C = \frac{3x+3e+\alpha}{b+3e+x} \quad (3.31)$$

soit,

$$3e(C-1) = \alpha + 3x - (x+\beta)C \quad (3.31)'$$

D'où, pour $C \neq 1$, il en résulte :

$$e_1 = \frac{\alpha + x_1(3-C) - \beta C}{3(C-1)} \quad (3.32a)$$

ou,

$$e_2 = \frac{\alpha + x_2(3-C) - \beta C}{3(C-1)} \quad (3.32b)$$

Ensuite, (3.25) et (3.22) conduit à l'expression de \underline{d} en fonction des résistances du matériau :

$$d_1 = \beta + e_1 \quad (3.33a)$$

ou,

$$d_2 = \beta + e_2 \quad (3.33b)$$

Les relations (3.25), (3.29) et (3.32) donnent les solutions suivantes pour les paramètres a et b:

$$\begin{cases} b_1 = e_1 + x_1 \\ ou, \\ b_2 = e_2 + x_2 \end{cases} \quad (3.34a)$$

et,

$$\begin{cases} a_1 = \alpha + b_1 \\ ou \\ a_2 = \alpha + b_{21} \end{cases} \quad (3.34b)$$

Le paramètre m se détermine à partir des relations (3.22b), (3.31)-(3.33). Les coefficients d'anisotropie sont soumis aux restrictions (3.17) et (3.21). En remplaçant dans (3.17) et (3.21) les coefficients a, b, d, e par leurs expressions (équations (3.32)-(3.34)) nous obtenons les conditions restrictives suivantes :

$$\begin{cases} \frac{C}{C-1}(\alpha + 2x - \beta) > 0 \\ \frac{\alpha + 2x - \beta}{C-1} > 0 \end{cases} \quad (3.35)$$

On en déduit que, pour $C > 1$:

$$\alpha + 2x - \beta > 0 \quad (3.36)$$

Pour $a > b$, cette condition est identiquement vérifiée par la solution x_1 , tandis que la solution x_2 conduit à une relation restrictive supplémentaire entre les résistances du matériau :

$$\frac{1}{\sqrt{X_r X_c}} > \sqrt{\frac{4}{Y_r Y_c} - \frac{1}{Q^2}} \quad (3.37)$$

Nous sommes ainsi conduits à retenir les solutions a_1, b_1, d_1, e_1 .

En conclusion, pour : $C > 1, \Delta > 0, a > b, d > e$ nous avons les solutions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2} \\ e = \frac{x(3-C) + \alpha - C\beta}{3(C-1)} \\ b = e + x \\ d = e + \beta \\ a = b + \alpha \end{array} \right. \quad (3.38)$$

En procédant d'une manière similaire, nous obtenons :

$$\bullet \text{ Pour } C > 1, \Delta > 0, a > b, d < e : \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2} \\ e = \frac{x(3-C) + \alpha + C\beta}{3(C-1)} \\ b = e + x \\ d = e - \beta \\ a = b + \alpha \end{array} \right. \quad (3.39)$$

• Pour $C > 1, \Delta > 0, a < b, d < e$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2} \\ e = \frac{x(3-C) - \alpha + C\beta}{3(C-1)} \\ b = e + x \\ d = e - \beta \\ a = b - \alpha \end{array} \right. \quad (3.40)$$

$$\bullet \text{ Pour } C > 1, \Delta > 0, a < b, d > e : \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\beta + \sqrt{\Delta}}{2} \\ e = \frac{x(3-C) - \alpha - C\beta}{3(C-1)} \\ b = e + x \\ d = e + \beta \\ a = b - \alpha \end{array} \right. \quad (3.41)$$

$$\bullet \text{ Pour } C > 1, \Delta > 0, a < b, d < e : \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2} \\ e = \frac{x(3-C) - \alpha + C\beta}{3(C-1)} \\ b = e + x \\ d = e - \beta \\ a = b - \alpha \end{array} \right. \quad (3.42)$$

Le cas $C < 1$ se traite d'une manière analogue.

Si $C = 1$, le système d'équations (3.18)-(3.24) n'est pas déterminé.

3.1.4 APPLICATION DU CRITÈRE À L'ARGILITE DE TOURNEMIRE

Dans cette partie nous allons appliquer le critère de rupture (3.3) pour décrire l'anisotropie des propriétés de résistance de l'argilite de Tournemire.

Les essais de compression triaxiale de révolution réalisés par Niandou (1994) montrent que pour une pression de confinement donnée, la résistance du matériau varie continûment avec l'orientation en passant par un minimum pour θ comprise entre 45° et 50° (figure 3.1)

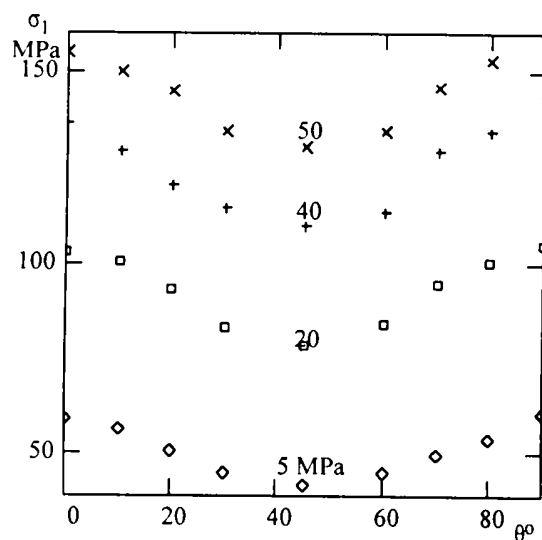


Figure 3.1 : Évolution de la résistance à la rupture en fonction de l'orientation θ pour différentes pressions de confinement

La résistance maximale est atteinte dans la direction normale à la stratification. Cependant, dans la direction parallèle aux strates on a aussi un maximum relatif. De manière générale, on peut constater que l'anisotropie de la résistance diminue avec l'augmentation de la pression de confinement. Pour une orientation donnée, la résistance limite croît avec le confinement.

Nous ne disposons pas des valeurs des résistances au cisaillement du matériau. Ainsi, l'identification des coefficients du critère (3.3) sera faite à partir des résultats d'essais en compression triaxiale.

Notons (X_1, X_2, X_3) le repère principal des contraintes pour un chemin de chargement triaxial de révolution. Le passage de ce repère au repère de structure se fait par une rotation d'angle θ autour de S_2 (voir &2.2, figure 2.1). Par conséquent, le tenseur de contraintes dans

le repère (S_1, S_2, S_3) est donné par la matrice :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_3 \sin^2 \theta & 0 & (\sigma_1 - \sigma_3) \sin \theta \cos \theta \\ 0 & \sigma_3 & 0 \\ (\sigma_1 - \sigma_3) \sin \theta \cos \theta & 0 & \sigma_3 \cos^2 \theta + \sigma_1 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

En introduisant (3.43) dans l'expression (3.11) du critère nous obtenons :

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{u}{X_c} (\sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_3 \sin^2 \theta)^2 + \frac{v}{Y_c} [\sigma_3^2 + (\sigma_1 \sin^2 \theta + \sigma_3 \cos^2 \theta)^2] \\ & + z \sqrt{\frac{u}{X_c}} (\sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_3 \sin^2 \theta) (\sigma_1 \sin^2 \theta + \sigma_3 \cos^2 \theta + \sigma_3) + \\ & + 3c^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + \sigma_3 (\sigma_1 \sin^2 \theta + \sigma_3 \cos^2 \theta) (z^2 - 2v/Y_c) + \\ & \left(\frac{1}{X_c} - u \right) (\sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_3 \sin^2 \theta) + \left(\frac{1}{Y_c} - v \right) (\sigma_1 \sin^2 \theta + \sigma_3 \cos^2 \theta + \sigma_3) = 1 \end{aligned} \right. \quad (3.44)$$

où les notations suivantes ont été utilisées :

$$u = \frac{1}{X_t}, v = \frac{1}{Y_t} \quad \text{et} \quad z = 2b - e - d. \quad (3.44)'$$

Pour l'argilite $X_c = 39$ MPa, $Y_c = 47$ MPa, $X_t = 3.927$ MPa et $Y_t = 4.167$ MPa.

En utilisant les valeurs des contraintes au pic obtenues dans les essais à 50 MPa de confinement pour les orientations : 0° , 30° , 45° , 60° et 90° , nous déterminons les paramètres z et c à partir de (3.44) par approximation par moindres carrées. Nous obtenons les valeurs suivantes :

$$z = -0.08 \text{ MPa}^{-1}, \quad 3c^2 = 0.037 \text{ MPa}^{-2}.$$

La détermination des paramètres a, b, d, e, m s'opère comme suit :

- Comme $C \neq 1$, en supposant, $a > b$ les relations (3.19)-(3.21) conduisent à :

$$\begin{cases} b = \frac{z(u-1/X_c) + (v-1/Y_c)\sqrt{u/X_c}}{(u-1/X_c) - (1/Y_c - v)} \\ a = b + \sqrt{u/X_c} \\ m = \frac{3(u-1/X_c)}{a+2b} \end{cases} \quad (3.45)$$

- il en résulte que (3.22a) s'écrit :

$$6e^2 - 6(z-2b)e + (6b^2 + 2z^2 - 2v/Y_c) = 0$$

Les valeurs des paramètres a, b, d, e, obtenues suivant la procédure décrite, sont :

$$a=0.05983\text{MPa}^{-1}, b=-0.02097\text{MPa}^{-1}, c=0.111\text{MPa}^{-1}, d=0.05322\text{MPa}^{-1}, \\ e=-0.01516\text{MPa}^{-1} \text{ et } m=38.4\text{MPa}^{-1}.$$

Sur la figure 3.2, nous présentons la variation de la contrainte limite σ_1 en fonction de l'orientation, obtenue à l'aide du critère, pour les pressions de confinement de 5, 20, 40, 50 MPa, en comparaison avec les résultats expérimentaux. Les courbes théoriques sont représentées en trait continu, et les valeurs expérimentales par des symboles.

Nous constatons que l'anisotropie du comportement à la rupture du matériau est correctement décrite. Cependant, pour des pressions de confinement élevées, le critère sous-estime légèrement les résistances du matériau pour des orientations proches de $\theta=90^\circ$. Sur la figure 3.3, nous présentons la projection de la surface de rupture (3.3) dans le plan (σ, τ) pour différentes orientations. La concordance entre la théorie et l'expérience nous paraît très satisfaisante (σ est la contrainte moyenne et τ le déviateur de contraintes).

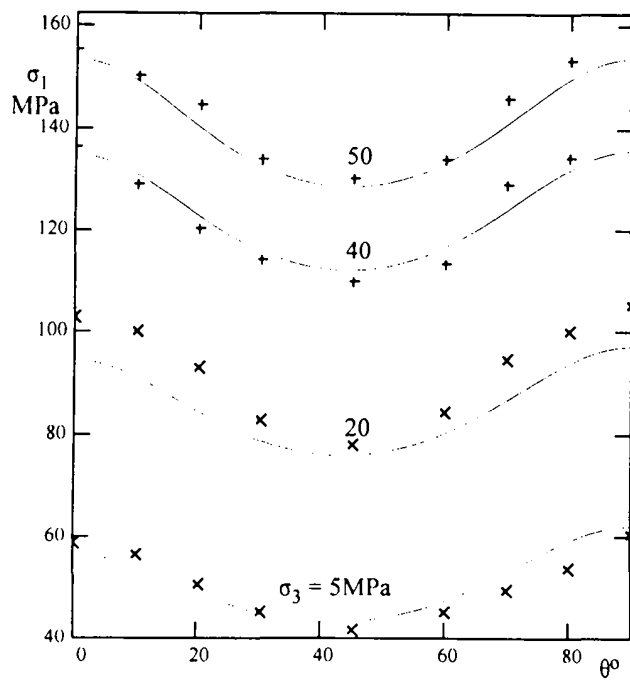


Figure 3.2 : Évolution des résistances à la rupture en fonction de l'orientation

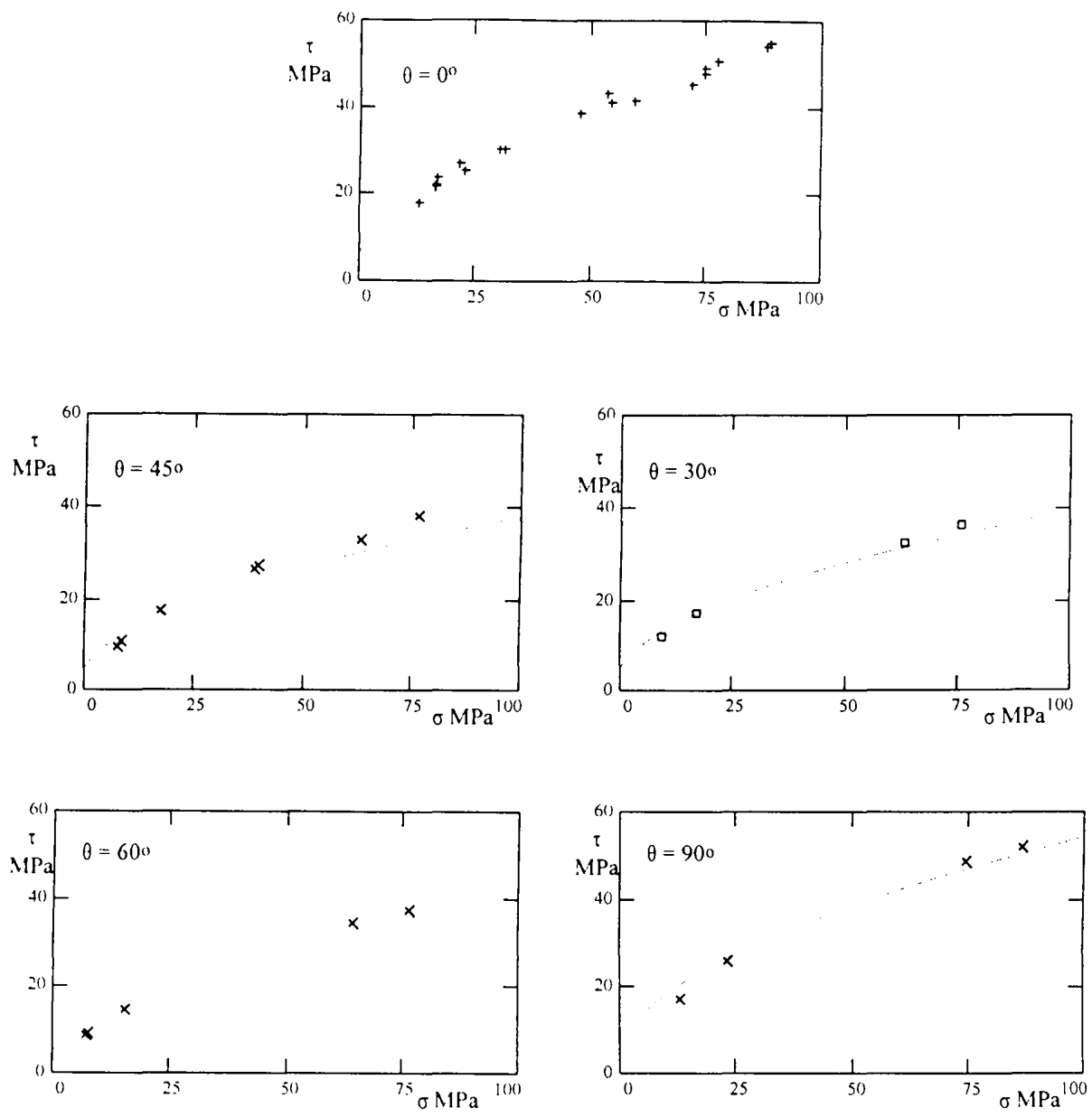


Figure 3.3 : Projection de la surface de rupture dans le plan (σ , τ) pour différentes orientations

3.2 APPLICATION DU CRITÈRE DE TSAI ET WU À L'ARGILITE DE TOURNEMIRE

Le critère de Tsai et Wu (1971) a été initialement proposé pour les milieux orthotropes. Pour un matériau orthotrope de révolution, dans le repère de structure, ce critère est exprimé par :

$$F_1 \sigma_1 + F_2(\sigma_2 + \sigma_3) + F_{11} \sigma_1^2 + F_{22}(\sigma_2^2 + \sigma_3^2) + 2F_{12}(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3) + 2F_{23} \sigma_3 \sigma_2 + \frac{1}{2}(F_{22} - F_{23})\sigma_4^2 + F_{55}(\sigma_5^2 + \sigma_6^2) = 1 \quad (3.46)$$

L'application du critère (3.46) aux essais de compression et de traction simple dans la direction S_1 et dans la direction S_2 conduit aux relations suivantes :

$$\begin{cases} F_{11} = \frac{1}{X_t X_c} \\ F_1 = \frac{1}{X_c} - \frac{1}{X_t} \end{cases} \quad (3.47a)$$

et respectivement,

$$\begin{cases} F_{22} = \frac{1}{Y_t Y_c} \\ F_2 = \frac{1}{Y_c} - \frac{1}{Y_t} \end{cases} \quad (3.47b)$$

La constante F_{55} s'exprime en fonction de la résistance au cisaillement dans le plan (S_2, S_3) par :

$$F_{55} = \frac{1}{2Q^2} \quad (3.48)$$

L'évaluation de F_{12} est plutôt délicate. En effet, si on effectue un essai de cisaillement à

$\theta=45^\circ$ (Figure 3.4) :

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau_+ \quad \sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = \sigma_6 = 0, \quad \tau_+ > 0 \quad (3.49)$$

on en déduit que :

$$F_{12} = -\frac{1}{V_+^2} \left[1 - \left(\frac{1}{X_t X_c} + \frac{1}{Y_t Y_c} \right) V_+^2 - V_+ \left(\frac{1}{X_c} - \frac{1}{X_t} - \frac{1}{Y_c} + \frac{1}{Y_t} \right) \right] \quad (3.50)$$

V_+ est la résistance au cisaillement. Si nous appliquons un cisaillement négatif :

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = -\tau_- \quad \sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = \sigma_6 = 0, \quad \tau_- > 0 \quad (3.51)$$

$$F_{12} = -\frac{1}{V_-^2} \left[1 - \left(\frac{1}{X_t X_c} + \frac{1}{Y_t Y_c} \right) V_-^2 - V_- \left(\frac{1}{X_c} - \frac{1}{X_t} - \frac{1}{Y_c} + \frac{1}{Y_t} \right) \right] \quad (3.52)$$

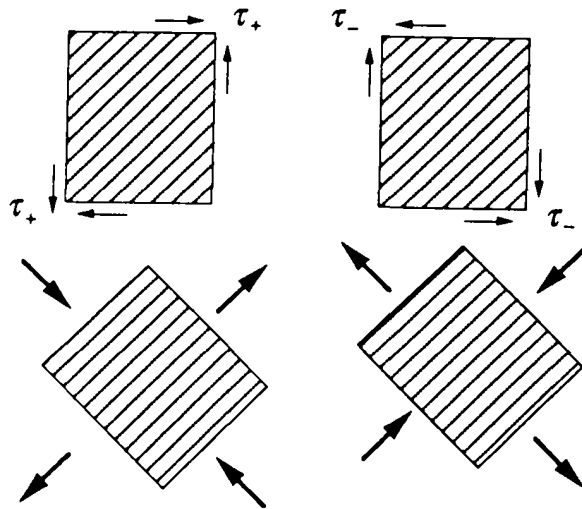


Figure 3.4 : Essais de cisaillement à $\theta = 45^\circ$: $V_+ \neq V_-$

Tsai et Hahn (1980) montre que F_{12} doit être compris entre les limites suivantes :

$$-\sqrt{F_{11} F_{22}} < F_{12} < \sqrt{F_{11} F_{22}} \quad (3.53)$$

Cette restriction est obtenue en imposant que (3.46) soit une courbe fermée dans le plan (σ_1, σ_2) (i.e. que les résistances directionnelles du matériau soient finies).

Vu les difficultés expérimentales liées à la détermination de F_{12} ces auteurs recommandent l'approximation de ce coefficient par l'expression suivante :

$$F_{12} = -\frac{1}{2}\sqrt{F_{11}F_{22}} \quad (3.54)$$

qui correspond au critère isotrope de Mises.

Dans le cas de l'argilite, nous calculons les coefficients F_{12} , F_{55} et F_{22} à partir des résultats en compression triaxiale pour les orientations : 0° , 30° , 45° , 60° et 90° et sous pression de confinement de 50 MPa.

L'application du critère (3.46) aux essais de compression triaxiale dans la direction θ et sous la pression de confinement σ_3 , conduit à l'expression :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{X_c} - u \right) (\sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_3 \sin^2 \theta) + \left(\frac{1}{Y_c} - v \right) (\sigma_1 \sin^2 \theta + \sigma_3 \cos^2 \theta + \sigma_3) + \\ & \frac{u}{X_c} (\sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_3 \sin^2 \theta)^2 + \frac{v}{Y_c} [(\sigma_1 \sin^2 \theta + \sigma_3 \cos^2 \theta)^2 + \sigma_3^2] + \\ & + 2F_{12} (\sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_3 \sin^2 \theta) (\sigma_1 \sin^2 \theta + \sigma_3 \cos^2 \theta + \sigma_3) + \\ & + 2F_{23} \sigma_3 (\sigma_1 \sin^2 \theta + \sigma_3 \cos^2 \theta) + F_{55} (\sigma_1 - \sigma_3)^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta = 1 \end{aligned} \quad (3.55)$$

À partir de (3.55) par approximation par moindres carrés, nous obtenons :

$$F_{12} = -0.004 \text{ (MPa)}^{-2}, F_{55} = 0.033 \text{ (MPa)}^{-2} \text{ et } F_{23} = -0.001 \text{ (MPa)}^{-2}.$$

Sur la figure 3.5, nous présentons les courbes théoriques obtenues en appliquant le critère de Tsai-Wu en comparaison avec les points expérimentaux. Nous pouvons constater un bon accord entre les prévisions théoriques et les données expérimentales.

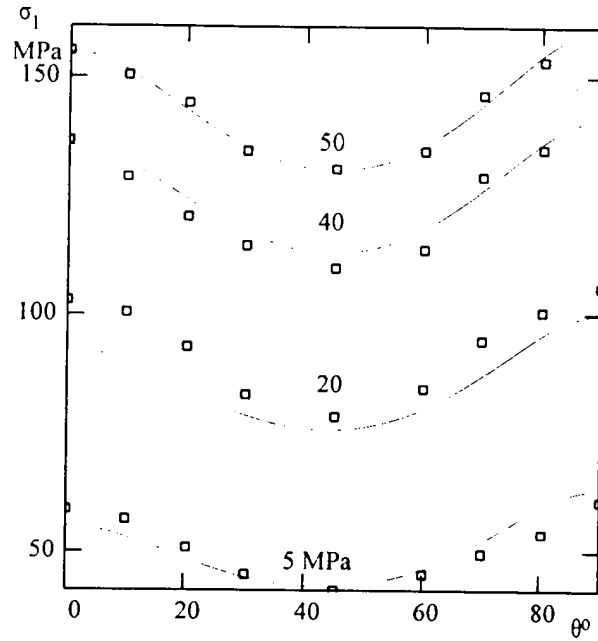


Figure 3.5 : Résistances directionnelles en compression triaxiale : comparaison entre les valeurs expérimentales (symboles) et le critère de Tsai et Wu (trait continu)

Le critère de Tsai et Wu fait intervenir deux tenseurs de résistance : le tenseur d'ordre deux (F_i) et le tenseur d'ordre quatre (F_{ij}). Cependant, ces deux tenseurs ne sont pas indépendants. En effet, les relations (3.47a) et (3.47b) peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} F_1 = (X_t - X_c)F_{11} \\ F_2 = (Y_t - Y_c)F_{22} \end{cases} \quad (3.56)$$

Dans la formulation du critère (3.3) nous avons décrit l'anisotropie du comportement à la rupture à l'aide d'un seul tenseur de résistance d'ordre quatre. Avec les notations du critère de Tsai et Wu, le critère proposé au §3.1.2 correspond à :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{11} = (a-b)^2 \\ F_{22} = \frac{1}{2}[(b-e)^2 + (d-e)^2 + (b-d)^2] \\ F_{23} = \frac{(2b-d-e)^2 - 2F_{22}}{2} \\ F_{12} = \frac{(b-a)(e-2b+d)}{2} \\ F_{44} = 3(d-e)^2 \\ F_{55} = 3c^2 \end{array} \right. \quad (3.57a)$$

et,

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1 = -\frac{m}{3}(a+2b) \\ F_2 = -\frac{m}{3}(b+e+d) \end{array} \right. \quad (3.57b)$$

Observons que dans notre critère :

$$F_{12} = -\frac{1}{2}\sqrt{2F_{11}(F_{22} + F_{23})} \quad (3.58)$$

le nombre de constantes indépendantes de notre critère se réduisant ainsi à six.

Notons que la restriction (3.53) est automatiquement satisfaite.

En effet :

$$\frac{F_{12}^2}{F_{11}F_{22}} = \frac{(e-2b+d)^2}{2[(b-e)^2 + (d-e)^2 + (b-d)^2]} \quad (3.58b)$$

$$\Rightarrow (\forall) a, b, d, e : \frac{F_{12}^2}{F_{11}F_{22}} < 1 \quad (3.59)$$

3.3 GÉNÉRALISATION DU CRITÈRE DE STASSI SUIVANT

LA PROCÉDURE DE OLSZAK ET URBANOWSCHI

Dans cette section nous proposons une généralisation du critère isotrope de Stassi aux milieux orthotropes de révolution en suivant la procédure utilisée par Olszak et Urbanowski (1956) pour généraliser le critère de von Mises au cas orthotrope.

Ainsi, dans l'expression du critère de Stassi (3.12) nous remplaçons le deuxième invariant du déviateur par l'énergie de distorsion généralisée J_2^* , définie par :

$$J_2^* = B_{ijkl} S_{ij} S_{kl} \quad (3.60a)$$

et, la contrainte moyenne par :

$$I_1^* = B_{ijkl} \sigma_{ij} \delta_{kl} \quad (3.60b)$$

B est un tenseur symétrique constant d'ordre quatre invariant dans le groupe de symétrie du matériau.

Le critère que nous proposons s'exprime alors sous la forme suivante :

$$B_{ijkl} S_{ij} S_{kl} - \frac{m}{3} B_{ijkl} \sigma_{kl} \delta_{ij} - 1 = 0 \quad (3.61)$$

Pour un matériau orthotrope de révolution, dans le repère de structure le tenseur B s'exprime comme suit :

$$B = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & d_1 & e_1 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & e_1 & d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{d_1 - e_1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_1}{2} \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

À partir d'essais de compression et de traction simple suivant les directions S_1 et S_2 nous obtenons les relations suivantes entre les constantes du critère et les résistances du matériau :

$$\begin{cases} 2a_1 - 4b_1 + d_1 + e_1 = \frac{9}{2X_t X_c} \\ a_1 - 2b_1 + 5d_1 - 4e_1 = \frac{9}{Y_t Y_c} \\ a_1 + (2 - C)b_1 - Cd_1 - Ce_1 = 0 \end{cases} \quad (3.63)$$

où,
$$C = \frac{(1/X_c) - (1/X_t)}{(1/Y_c) - (1/Y_t)} \quad (\text{cf. (3.25)}).$$

Soit P la matrice du système d'équations (3.63). Des calculs algébriques simples conduisent à :

$$\text{rang}(P) = 3, (\forall) C \in \mathbb{R}. \quad (3.64)$$

Il en résulte que le système (3.63) est compatible si et seulement si tous les mineurs d'ordre 4 de la matrice augmentée sont nulles. Ceci conduit à la relation suivante entre les résistances du matériau :

$$\frac{4}{Y_t Y_c} - \frac{1}{Q^2} = \frac{1}{X_t X_c} \quad (3.65)$$

Si la condition (3.65) s'applique, le système (3.63) admet les solutions suivantes :

$$\bullet \text{ Pour } C \neq -1/2 : \begin{cases} a_1 = \frac{b_1(5C - 2) + U_1 C}{2C + 1} \\ d_1 = \frac{(U_1 + 9b_1)(4 - C)}{9(2C + 1)} + \frac{V_1}{9} \\ e_1 = -\frac{V_1}{9} + \frac{9b_1(4 - C) + U_1(C + 5)}{9(2C + 1)} \\ b_1 \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3.66a)$$

$$\bullet \text{ Pour } C = -1/2 : \begin{cases} b_1 = -\frac{U_1}{9} \\ d_1 = -\frac{9a - 2U_1 - V_1}{9} \\ e_1 = \frac{-9a + 3U_1 - V_1}{9} \\ a_1 \in \mathbf{R} \end{cases} \quad (3.66b)$$

où :

$$\begin{cases} U_1 = \frac{9}{2X_t X_c} \\ V_1 = \frac{9}{Y_t Y_c} \end{cases}$$

• On constate que seulement 3 parmi les 4 coefficients d'anisotropie a_1, b_1, d_1, e_1 sont indépendants. Ainsi, le critère (3.61) ne fait intervenir que **5 paramètres indépendants**. La détermination du coefficient c_1 est faite à partir des résultats des essais triaxiaux en compression.

L'application de la condition de rupture proposée aux essais de compression axiale σ_1 dans la direction définie par θ et sous la pression de confinement σ_3 résulte dans l'expression :

$$\begin{aligned} & \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)^2}{9} F(\theta) + \left(\frac{1}{X_c} - \frac{1}{X_t}\right) (\sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_3 \sin^2 \theta) \\ & + \left(\frac{1}{Y_c} - \frac{1}{Y_t}\right) (\sigma_3 + \sigma_3 \cos^2 \theta + \sigma_1 \sin^2 \theta) - 1 = 0 \end{aligned} \quad (3.67a)$$

où,

$$\begin{aligned} F(\theta) = & \frac{5U_1 - V_1}{9} (3\cos^2 \theta - 1)^2 + \frac{2V_1 - U_1}{9} [1 + (3\cos^2 \theta - 2)^2] + \\ & + 9c_1 \sin^2 2\theta \end{aligned} \quad (3.67b)$$

L'identification du coefficient c_1 se fait à partir des relations (3.67a)-(3.67b) en utilisant une procédure d'approximation par moindres carrés. Les mêmes données expérimentales qui ont servi à l'identification des coefficients du critère de Tsai et Wu (3.46) et du critère (3.13) ont été utilisées.

Pour l'argilite de Tournemire, les valeurs numériques de ces coefficients sont :

$a_1=0098 \text{ MPa}^{-2}$, $b_1=-10^{-4}\text{MPa}^{-2}$, $c_1=0.0013\text{MPa}^{-2}$ $d_1=8.10^{-3}\text{MPa}^{-2}$, $e_1=0.0012 \text{ MPa}^{-2}$ et $m=71.52\text{MPa}^{-1}$.

Observons que, dans les notations du critère de Tsai et Wu (1971) le critère (3.61) correspond à :

$$\begin{cases} F_{11} = \frac{2}{9}(2a_1 - 4b_1 + d_1 + e_1) \\ F_{22} = \frac{1}{9}(a_1 - 2b_1 + 5d_1 - 4e_1) \\ F_1 = -\frac{m}{3}(a_1 + 2b_1) \\ F_2 = -\frac{m}{3}(b_1 + d_1 + e_1) \end{cases} \quad (3.68a)$$

et,

$$\begin{cases} F_{12} = -\frac{1}{2}F_{11} \\ F_{23} = -\frac{1}{2}(-F_{11} + 2F_{22}) \\ F_{44} = -(2F_{12} + 4F_{23}) \end{cases} \quad (3.68b)$$

Les relations (3.68b) montrent que les composantes hors-diagonale F_{12} et F_{23} sont des combinaisons linéaires des termes diagonaux F_{11} et F_{22} .

En regroupant les termes et en tenant compte des relations (3.68b) nous pouvons exprimer le critère (3.61) sous la forme équivalente suivante :

$$\begin{aligned} & F(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + H[(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2] + M(\sigma_5^2 + \sigma_6^2) \\ & + L\sigma_4^2 + F_1\sigma_1 + F_2(\sigma_2 + \sigma_3) - 1 = 0 \end{aligned} \quad (3.69)$$

avec :

$$\begin{cases} F = \frac{1}{9}(2a_1 - 4b_1 + d_1 + e_1) \\ H = -\frac{1}{9}(a_1 - 2b_1 + 5e_1 - 4d_1) \\ M = 2c_1 \\ L = 2F + 4H \end{cases} \quad (3.70)$$

Nous pouvons constater que (3.69) est une forme particulière du critère de Parisseau (1972) pour un milieu isotrope transverse (conforme à l'équation (1.18)).

À la différence du critère de Parisseau, dans (3.53) les constantes F_1 et F_2 associées à la forme linéaire en contraintes, ne sont pas indépendantes.

Sur la figure 3.6 nous présentons une comparaison entre les valeurs expérimentales et les prédictions théoriques obtenues en utilisant le critère (3.61) pour le chemin de compression triaxiale.

Nous constatons que le modèle sous-estime largement les résistances du matériau dans les directions $\theta=0^\circ$ et $\theta=90^\circ$. Le critère ne permet pas de prévoir le comportement réel du matériau. Quelle que soit la pression de confinement l'anisotropie des propriétés de résistance de l'argilite n'est pas décrite correctement.

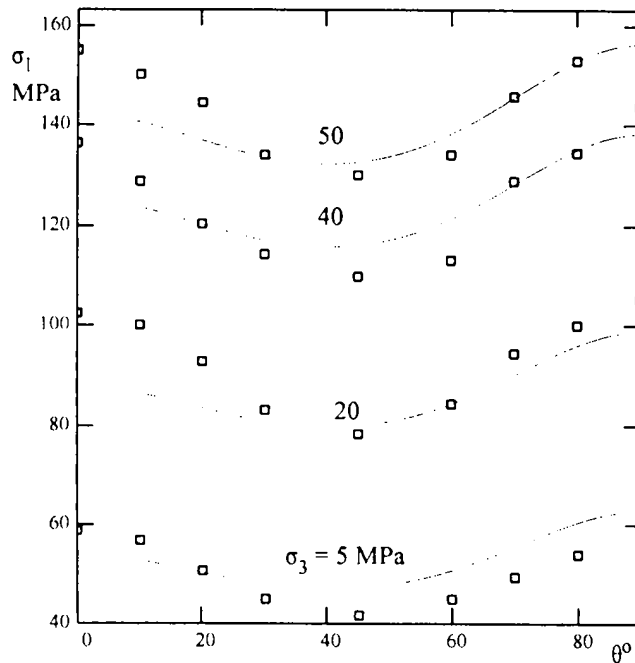


Figure 3.6 : Comparaison entre les prévisions du critère (3.61) et les résultats expérimentaux.

3.4 CONCLUSIONS

Pour décrire l'anisotropie de résistance de l'argilite de Tournemire nous avons utilisé trois critères de rupture ayant la forme générale suivante :

- Terme quadratique en contraintes + Terme linéaire en contraintes = 1

Dans le critère développé (3.3) nous avons considéré :

$$\left\{ \begin{array}{l} - \text{le terme quadratique: } \frac{3}{2} \Sigma'_{ij} \Sigma'_{ij}, \text{ où: } \Sigma'_{ij} = A_{ijkl} \sigma_{kl} - A_{mnkl} \sigma_{kl} \delta_{mn} \delta_{ij} \\ - \text{le terme linéaire: } A_{ijkl} \sigma_{kl} \delta_{ij} \end{array} \right.$$

L'anisotropie est introduite à l'aide d'un seul tenseur d'ordre quatre symétrique A . Notons que pour un état de sollicitation isotrope le terme quadratique est non nul. De ce fait on peut reproduire les caractéristiques à la rupture des solides orthotropes de révolution pour des chemins de sollicitation complexes.

Nous avons généralisé le même critère isotrope de Stassi suivant la procédure de Olszak et Urbanowski (1956) (critère (3.61)). Ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{le terme quadratique: } \frac{3}{2} A_{ijkl} \sigma'_{kl} \sigma'_{ij} \\ \text{le terme linéaire: } A_{ijkl} \sigma_{kl} \delta_{ij} \\ \Rightarrow 5 \text{ constantes indépendantes} \end{array} \right.$$

Observons qu'un seul tenseur anisotrope rend compte de l'anisotropie de résistance du matériau. Le terme quadratique est une généralisation de l'énergie de distorsion du cas isotrope (deuxième invariant du déviateur du tenseur de contraintes). De ce fait, il s'annule pour un état de contrainte isotrope.

Le critère de Tsai et Wu (1971) fait intervenir deux tenseurs de résistance. L'identification des constantes rend difficile l'application de ce critère aux géomatériaux.

Le critère (3.3) semble le plus performant. Il reproduit correctement l'anisotropie des résistances de l'argilite en compression triaxiale de révolution. Ce critère sera utilisé comme critère de rupture à court terme dans le modèle général élasto-viscoplastique que nous proposons au Chapitre 4.

CHAPITRE IV

MODÉLISATION DU COMPORTEMENT VISCOPLASTIQUE

Les résultats expérimentaux en compression triaxiale (voir &1.3.2 -&1.3.3) montrent l'influence du temps sur le comportement irréversible de l'argilite. Cet effet de temps se traduit par des phénomènes de fluage et de relaxation. Nous sommes ainsi conduits à adopter une approche viscoplastique pour la modélisation du comportement de ce matériau.

4.1 LOIS DE COMPORTEMENT DES ROCHES EN FONCTION DU TEMPS

Le point commun entre le comportement viscoplastique et le comportement plastique est le fait qu'il subsiste une déformation permanente après décharge. Par contre, en différence à la plasticité, le temps influence les déformations irréversibles. Ainsi, il n'y a pas d'unicité de la courbe de déformation pour différentes vitesses de chargement. En général, plus la vitesse de chargement est élevée, plus la contrainte est grande pour une même déformation. Cependant, l'influence de la vitesse de chargement diminue pour les vitesses très élevées ou très faibles. Sous sollicitation dynamique la réponse instantanée du matériau est élastique, pour des vitesses très faibles la réponse tend vers un comportement plastique indépendant du temps.

L'étude expérimentale de l'influence du temps sur le comportement mécanique des roches est réalisée généralement, au moyen de deux types d'essais : essais de fluage et essais de relaxation. Selon les applications envisagées, les durées d'essais sont de quelques heures (comportement à court terme) à plusieurs années (comportement à long terme).

Pour les métaux, la courbe de fluage classique, représentant l'évolution de la déformation avec le temps sous contrainte uniaxiale constante, comporte, en général, trois étapes (Figure 4.1) :

- une étape de fluage primaire au cours de laquelle la vitesse de déformation diminue,
- une étape de fluage secondaire où la vitesse de déformation peut être considérée constante (compte tenu des erreurs de mesure),
- une étape de fluage tertiaire pendant laquelle la vitesse de déformation augmente, conduisant à la rupture.

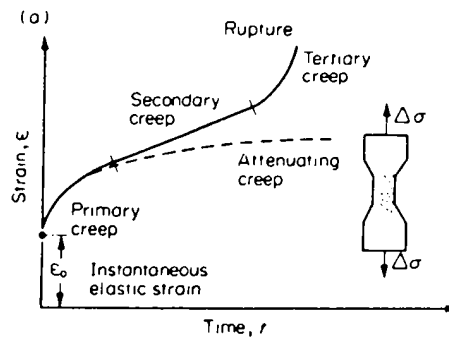


Figure 4.1 : Interprétation classique de la courbe de fluage classique en traction (métaux)
[d'après Dusseault,1993]

Pour les roches, selon le niveau de contrainte appliquée et le type de roche étudiée, ces phases sont plus ou moins prépondérantes. Ainsi, si la contrainte appliquée ne dépasse pas un certain seuil (entre $0.5 \sigma_c$ et $0.7 \sigma_c$, σ_c étant la résistance en compression simple) seul le fluage primaire est observé ; au-delà de ce seuil, uniquement le fluage secondaire et tertiaire sont enregistrés (Figure 4.2). Dans le sel gemme on n'observe que le fluage secondaire, par contre pour les roches plus dures (comme : granites, gneiss, etc.) uniquement le fluage primaire et le fluage tertiaire sont mis en évidence (Dusseault,1993).

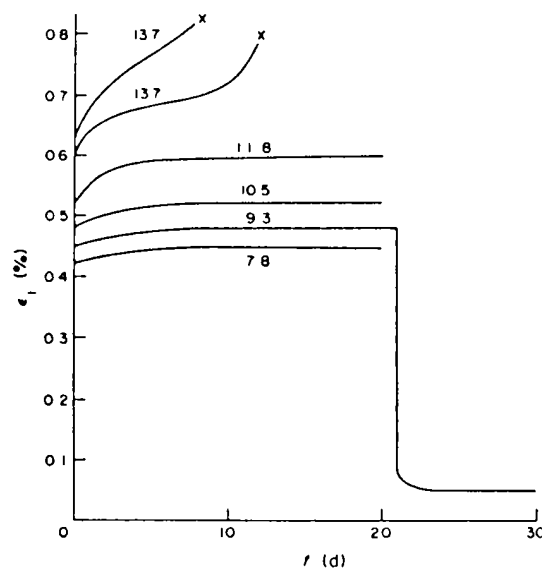


Figure 4.2 : Courbe de fluage en compression d'un grès [d'après Cristescu,1993]

L'essai de relaxation consiste à effectuer une mise en charge (vitesse de déformation contrôlée) suivie du maintien à déformation constante. On constate que la contrainte chute (Figure 1.9 chapitre I & 1.3.3).

La valeur résiduelle de la contrainte lorsque la diminution de contrainte est pratiquement stoppée, correspond à la limite supérieure du domaine d'élasticité, appelée " frontière de stabilisation "(D. François et al, 1992).

Différentes approches ont été suivies pour décrire l'évolution temporelle irréversible des déformations dans les roches :

- formulation de lois empiriques de fluage,
- utilisation de modèles rhéologiques,
- formulation de modèles élasto-viscoplastiques.

4.1.1 LOIS EMPIRIQUES DE FLUAGE

Les lois proposées pour décrire le fluage sont généralement de la forme :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 + f(t) + Ct \quad (4.1)$$

où, ε_0 représente la déformation élastique instantanée du matériau et $f(t)$ caractérise le fluage primaire et le troisième terme décrit le fluage secondaire.

Les formulations les plus fréquemment retenues pour $f(t)$ sont :

- $f(t) = At^{1/q}$ - loi d'Andrade (1910), (4.1a)

- $f(t) = C_2 \ln(1+t)$ - loi en logarithme du temps, (4.1b)

- $f(t) = C_1(1 - e^{-d_1 t})$ - loi en exponentielle amortie. (4.1c)

où A, C_1, C_2 et d_1 sont des constantes de matériau et t représente la durée de l'expérience.

Ce sont des lois uniaxiales faisant intervenir la variable temporelle explicitement. De ce fait, la validité de ces lois est restreinte au type particulier d'histoire de chargement (le fluage) et aux conditions spécifiques du test qui ont servi à leurs identifications. Des lois triaxiales, exprimées en fonction de l'état de contrainte, ont été proposées pour décrire le fluage secondaire. Par exemple, pour le sel, on utilise des lois de la forme :

$$\dot{\epsilon} = A \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_0} \right)^n \exp(-Q/RT) \quad (4.2)$$

(Dusseault, 1993; Hunsche, 1994), où Q représente l'énergie d'activation, R la constante universelle des gazes, T la température absolue (exprimée en degrés Kelvin).

Ce type de loi est une adaptation de la loi d'Odquist (1934) :

$$\dot{\epsilon}_{ij} = f(J_2) s_{ij} \quad (4.3)$$

J_2 , étant le deuxième invariant du déviateur des contraintes s_{ij} . Notons que les lois (4.2) ne rendent pas compte ni de l'écroutissage du matériau, ni de la différence de comportement en compression et en traction.

4.1.2 MODÈLES ANALOGIQUES

Une autre approche du problème de la modélisation du comportement visqueux consiste à réaliser des modèles analogiques à partir d'éléments mécaniques dont les réponses sont similaires à celles des matériaux (le ressort qui schématise l'élasticité linéaire, l'amortisseur pour la viscosité newtonienne, etc.). En fonction du type et du nombre d'éléments de base utilisés et du groupement de ces éléments (en série, en parallèle, soit en groupement mixte) on distingue une grande variété de modèles analogiques. Généralement on constate des larges divergences entre ces modèles théoriques et le comportement du matériau réel.

4.1.3 ÉQUATIONS CONSTITUTIVES ÉLASTO-VISCOPLASTIQUES

La formulation générale du comportement viscoplastique est similaire à celle de la plasticité dont il emprunte les éléments de base. Il s'agit de définir :

- la forme actuelle du domaine d'élasticité ;

- la règle d'écoulement ;
- l'évolution des variables d'écrouissage.

Si, $d\varepsilon_{ij}$ représente l'incrément de déformation infinitésimale, alors :

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p \quad (4.4)$$

où, $d\varepsilon_{ij}^e$ représente la composante élastique ou réversible de la déformation et $d\varepsilon_{ij}^p$ la composante irréversible.

Le domaine d'élasticité est défini à l'aide d'une fonction de charge, qui dépend de l'état de contrainte et de l'écrouissage. Ceci permet de décrire la forme initiale et les variations éventuelles de ce domaine au cours du chargement. La règle d'écoulement précise la façon dont évoluent les déformations irréversibles. Le problème de l'activation de l'écoulement viscoplastique se pose de manière plus simple qu'en plasticité puisqu'il ne subsiste que deux régimes : le régime élastique et le régime viscoplastique. Pour un point de charge donné, hors du domaine d'élasticité, la vitesse de déformation viscoplastique est indépendante de la vitesse de contrainte. Elle ne dépend que des valeurs actuelles du tenseur des contraintes et des variables d'écrouissage.

La condition de consistance n'existe plus. (en plasticité, cette condition impose que le point de charge soit et reste sur la surface de charge, la déformation plastique étant une fonction positivement homogène d'ordre un, par rapport à la vitesse de contrainte).

Dans le cas classique de la viscoplasticité associée, l'écoulement viscoplastique est défini par rapport à la fonction de charge. Dans le tableau 4.1 nous présentons les principaux modèles élasto-viscoplastiques isotropes, en précisant la fonction de charge, le potentiel viscoplastique (si la loi d'écoulement est non-associée) ainsi que les variables d'écrouissage (pour les modèles avec écrouissage).

Auteurs	Fonction de charge	Équations constitutives	Commentaires
Bingham (1922)	$F = \sqrt{J_2} - k$ <i>k - constante</i> $J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}$	$S_{ij} = 2\eta \left(1 - \frac{k}{\sqrt{J_2}}\right)^{-1} e_{ij}$ <i>η - paramètre de viscosité</i>	<ul style="list-style-type: none"> • rigide viscoplastique; • modèle associé.
Hohenesmer & Prager (1932); Freudenthal (1958)	$F = \sqrt{J_2} - k$ <i>(von Mises)</i>	$\dot{e}_{ij} = \dot{e}_{ij}^E + \dot{e}_{ij}^{VP}$ $\dot{e}_{ij}^{VP} = \frac{1}{2\eta} \left(1 - \frac{k}{\sqrt{J_2}}\right) S_{ij}$ $\dot{e}_{ij}^E = \frac{1}{2G} \dot{S}_{ij}, \quad \dot{\epsilon}_v = \frac{\sigma}{K}$	loi élasto-viscoplastique associée, <ul style="list-style-type: none"> • incompressibilité irréversible.
Perzyna (1966)	$F(\sigma_{ij}) = \frac{f(\sigma_{ij})}{\kappa} - 1$ $\kappa = \kappa \left(\int_0^{t_j} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^P \right)$	$\dot{\epsilon}_{ij}^P = \gamma \langle \Phi(F) \rangle \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$ <i>γ - coefficient de viscosité</i>	loi élasto-viscoplastique associée avec écrouissage
Cristescu (1967)	<i>critère de von Mises</i>	$\dot{e}_{ij}^P = \left\{ \sum_{a=1}^n \frac{1}{2\eta_a} \left\langle 1 - \frac{k_a}{\sqrt{J_2}} \right\rangle \right\} S_{ij}$ $0 < k_1 < k_2 \dots < k_n$ $\dot{e}_{ij}^E = \frac{1}{2G} \dot{S}_{ij}$	groupement d'un nombre fini d'éléments viscoplastiques
Dragon & Mroz (1979)	$F = 2J_2 - 2p(W, \beta)(I_1^0 - \sigma)$ $p(W, \beta) = p_0 + W - \beta^2$ $K_1, p_0, I_1^0 - \text{constantes}$ <i>β décrit l'endommagement</i> <i>W décrit l'écrouissage</i>	<ul style="list-style-type: none"> • loi d'écoulement associé, • $\dot{\beta} = K_1 \dot{\epsilon}_v + K_2(\beta)g(\sigma, \beta)$ 	décrit le fluage secondaire et tertiaire des roches,
Cristescu (1983)	$H = H(\sigma, \bar{\sigma}, \Delta)$	$\dot{\epsilon}^{VP} = k \left\langle 1 - \frac{W}{H} \right\rangle \frac{\partial F}{\partial \sigma}$ <i>W - travail plastique irréversible</i> $F = F(\sigma, \bar{\sigma}, \Delta)$	modèle non-associé décrit le fluage primaire des roches

Tableau 4.1 : Résumé des lois viscoplastiques représentatives

4.2. PRÉSENTATION DU MODÈLE

CHOIX DES ÉQUATIONS CONSTITUTIVES ET D'ÉVOLUTION

4.2.1 HYPOTHÈSES DE BASE

Cette partie est consacrée à la présentation d'un modèle élasto-viscoplastique pour un matériau initialement anisotrope : l'argilite de Tourmemire. Dans ce modèle, l'anisotropie sera introduite à l'aide d'un tenseur d'ordre quatre, A_{ijkl} ayant les propriétés de symétrie suivantes :

$$A_{ijkl} = A_{jkl i} = A_{ijlk} = A_{klij} \quad (4.5)$$

Ce tenseur est supposé constant : il ne dépend ni du temps, ni de l'état de déformation . A_{ijkl} intervient dans les expressions de la surface de charge, de la règle d'écoulement et du critère de rupture, par double contraction avec le tenseur des contraintes sous la forme d'un tenseur transformé Σ , défini par :

$$\Sigma_{ij} = A_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (4.6)$$

Notons que l'idée d'utiliser un tenseur d'ordre quatre pour caractériser l'anisotropie du comportement irréversible n'est pas nouvelle. On la retrouve dans les travaux de Olszack et Urbanowski (1956), Sedov (1966). La notion de tenseur transformé (4.6) a été introduite par Boehler et Sawczuk (1970) (et aussi Goldenblat (1962), avec une notion semblable). Néanmoins, à la différence de Boehler et Sawczuk (1970, 1977, 1978), dans notre approche, la seule restriction imposée au tenseur A est celle de respecter les symétries du milieu. Ainsi, pour un milieu orthotrope de révolution, le tenseur A est caractérisé par cinq composantes indépendantes (au lieu de 3).

La forme matricielle de A dans le repère de structure (S_1, S_2, S_3) est donc, donnée par :

$$A = \begin{bmatrix} a & b & b & 0 & 0 & 0 \\ b & d & e & 0 & 0 & 0 \\ b & e & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{d-e}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c}{2} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

où, **a, b, c, d, e**, sont des constantes, et (S_2, S_3) définit le plan d'isotropie du matériau. À l'aide des définitions (4.6) - (4.7) nous pouvons exprimer le tenseur transformé Σ en fonction du tenseur d'anisotropie $M = S_1 \otimes S_1$ et de σ sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \Sigma = & M[(a + d - 2c - 2b)trM\sigma + (b - e)tr\sigma] + \\ & + [(b - e)trM\sigma + e tr\sigma]I + (d - e)\sigma \\ & + [c - (d - e)](M\sigma + \sigma M) \end{aligned} \quad (4.8)$$

où, **I** est le tenseur identité d'ordre deux.

Le tenseur **A** caractérise l'anisotropie du comportement irréversible et des propriétés de résistance du matériau. Pour décrire la rupture (à courte terme) de l'argilite nous retenons le critère de rupture anisotrope (3.3) proposé au Chapitre 3 (&3.1.1).

Ainsi, les composantes du tenseur **A** ont été déterminées à partir des résistances à la rupture du matériau. Les valeurs suivantes ont été obtenues : **a=0.05983**, **b=-0.002097**, **d=0.05322**, **c=0.111** et **e=-0.0156** (voir &3.1.4).

4.2.2a FONCTION DE CHARGE

Nous supposons que l'écroutissage du matériau est gouverné par le travail irréversible W^I , défini par :

$$W^I(T) = \int_0^T \sigma(t) \dot{\varepsilon}^I(t) dt \quad (4.9)$$

où ε^I représente la partie irréversible de la déformation.

Pour un milieu anisotrope, la loi de comportement est soumise à une double exigence : d'une part, de respecter le principe d'objectivité (c'est à dire d'être invariante par rapport à tout changement de coordonnées de référence) et, d'autre part, d'être invariante dans le groupe de symétrie du matériau.

Ainsi, pour un solide simple orthotrope de révolution, conformément au théorème de représentation de Liu (1982), la fonction de charge admet la représentation générale suivante :

$$F(\sigma, M, W^I) = H(\sigma, M) - W^I \quad (4.10)$$

où H est une fonction scalaire isotrope par rapport à ces arguments.

Nous allons supposer que la fonction $H(\sigma, M)$ admet la décomposition suivante :

$$H(\sigma, M) = H_m(p) + H_d(\sigma, M) \quad (4.11)$$

tel que : $H_d(\sigma, M)|_{\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3} = 0$, σ_i étant les composantes principales du tenseur de contraintes et p, la contrainte moyenne. Autrement dit, pour un chemin de contrainte isotrope ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$) la fonction de charge se réduit à H_m qui ne dépend que de la contrainte moyenne p. La forme spécifique de cette fonction sera déterminée à partir des résultats expérimentaux en compression hydrostatique.

Nous proposons l'expression suivante pour la fonction $H_d(\sigma, M)$:

$$H_d(\sigma, M) = B_1 \text{tr} \Sigma + B_2 \left(\frac{3}{2} \text{tr} \Sigma'^2 \right) \quad (4.12)$$

où, tr désigne l'opérateur de trace et Σ' est le déviateur du tenseur transformé Σ (défini par la relation (4.8)). Dans l'équation (4.12) B_1 et B_2 sont des fonctions scalaires d'arguments : la contrainte moyenne p et la contrainte octaédrique τ . Les fonctions B_1 et B_2 seront déterminées à partir des essais de compression triaxiale pour l'orientation $\theta = 90^\circ$ et à différentes pressions de confinement.

En utilisant (4.11) - (4.12), nous obtenons l'expression de la surface de charge :

$$H_m(p) + B_1(p, \tau) \text{tr} \Sigma + B_2(p, \tau) \left(\frac{3}{2} \text{tr} \Sigma'^2 \right) - W' = 0 \quad (4.13)$$

Les deux premiers invariants du tenseur transformé Σ sont donnés par :

$$\begin{cases} \text{tr} \Sigma = (a + b - d - e) \text{tr} M \sigma + (b + d + e) \text{tr} \sigma \\ \frac{3}{2} \text{tr} (\Sigma')^2 = A (\text{tr} M \sigma)^2 + B (\text{tr} \sigma)^2 + C (\text{tr} \sigma) (\text{tr} M \sigma) + D (\text{tr} M \sigma^2) \end{cases} \quad (4.14)$$

Les constantes **A**, **B**, **C**, **D** et **E** sont des combinaisons algébriques des coefficients d'anisotropie a, b, c, d, e précisées par les équations (3.7) du §3.12. Il en résulte que les invariants du tenseur transformé sont des combinaisons linéaires, jusqu'à l'ordre deux en contraintes, des invariants scalaires :

$$\text{tr} \sigma, \quad \text{tr} \sigma^2, \quad \text{tr} M \sigma, \quad \text{tr} M \sigma^2$$

De ce fait, la fonction de charge satisfait automatiquement la condition d'invariance dans le groupe de symétrie du matériau.

4.2.2 b RÈGLE D'ÉCOULEMENT

Nous proposons la forme suivante pour la règle d'écoulement :

$$\dot{\epsilon}' = k_1 \left\langle 1 - \frac{W'}{H(\sigma, M)} \right\rangle (\Sigma + U(p, \tau) \mathbf{I}) \quad (4.15)$$

Dans l'équation (4.15) k_1 est le coefficient de viscosité du matériau, $H(\sigma, M)$ est définie par les équations (4.11) et (4.12) et \mathbf{I} représente le tenseur identité d'ordre deux. Comme le tenseur transformé Σ est une combinaison linéaire des tenseurs générateurs $\mathbf{I}, \sigma, M\sigma + \sigma M$ (équation (4.8)) on en déduit que l'équation (4.15) est invariante par rapport à toute transformation appartenant au groupe de symétrie (conforme au théorème de Liu (1982)).

La fonction $U(p,\tau)$ sera déterminée à partir des résultats d'essais de compression hydrostatique et d'essais de compression triaxiale de révolution pour l'orientation $\theta = 90^\circ$.

4.3. DÉTERMINATION DES FONCTIONS CONSTITUTIVES

4.3.1 ÉVALUATION DE LA FONCTION $H_m(p)$

Nous avons supposé que pour un chemin de chargement hydrostatique ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p$), la fonction de charge se réduit à $H_m(p)$.

Ainsi, il y a écoulement viscoplastique si et seulement si :

$$H_m(p) \geq W^I \quad (4.16)$$

La détermination de la fonction $H_m(p)$ est faite à partir d'un essai de compression hydrostatique. Le chemin de sollicitation pour cet essai se compose d'incrément de charge suivis de paliers de fluage ($p = \text{constante}$) puis de décharge. Seul le fluage primaire a été mis en évidence (pour une durée de maintien de charge de 45 à 60 minutes). De ce fait seul ce mécanisme de fluage est pris en compte dans la modélisation.

La surface de charge (4.16) est déterminée en considérant les états (p, ε_v) qui correspondent à la stabilisation pour chaque palier de fluage. Pour ces états on calcule le taux de travail irréversible dW^I avec la formule :

$$dW^I = p d\varepsilon_v^i \quad (4.17)$$

où, $d\varepsilon_v^i$ représente le taux de déformation volumique irréversible.

Sur la figure 4.3 nous présentons les valeurs expérimentales du travail irréversible W^I , calculées en utilisant la formule (4.17), en fonction de la contrainte moyenne.

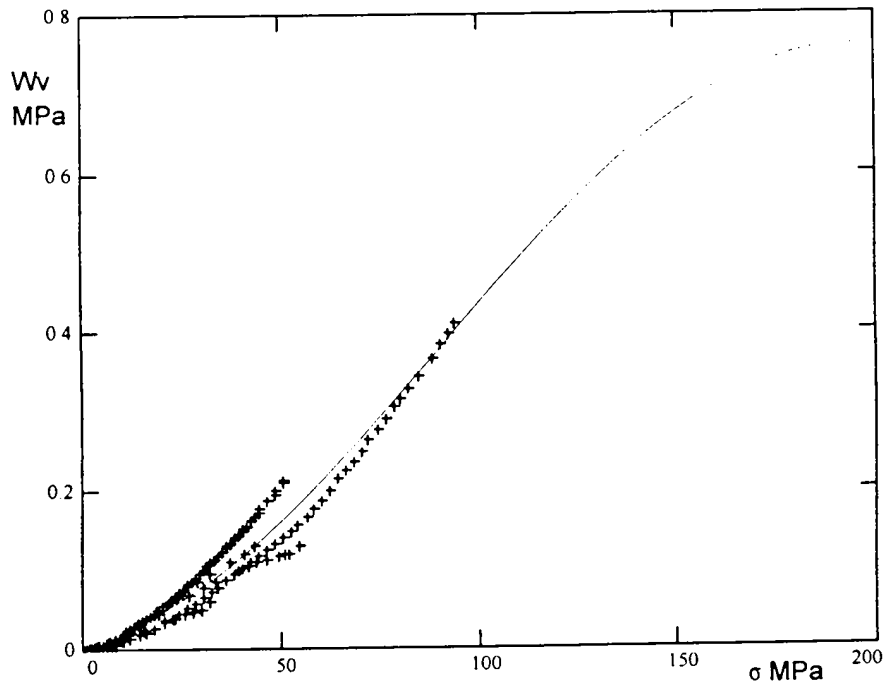


Figure 4.3 : Variation du travail plastique W^I en fonction de la contrainte moyenne σ (MPa)

Du fait qu'à la stabilisation nous avons $H_m(p) = W^I$ il est donc possible de déterminer la fonction $H_m(p)$ en approchant la courbe $(W^I - p)$. On obtient :

$$H_m(p) = c_0 \sin(\omega p/p_0 + \varphi) + c_1 \quad (4.18)$$

où $c_0, c_1, \omega, \varphi$ sont des constantes. La pression $p_0 = 1$ MPa est utilisée comme contrainte de référence, afin de rendre le paramètre ω sans dimension dans l'expression (4.18).

Pour l'argilite les valeurs numériques de ces paramètres sont :

$$c_0 = 0.38 \text{ MPa,}$$

$$c_1 = 0.377 \text{ MPa,}$$

$$\omega = 0.15$$

$$\varphi = -1.348 \text{ radians.}$$

Nous avons imposé la condition : $H_d(\sigma, M)|_{\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3} = 0$. De ce fait, la surface de charge définie par l'équations (4.18) est indépendante de l'orientation θ .

Cette nous semble raisonnable, pour un chargement hydrostatique la sollicitation est la même dans toutes les directions .

4.3.2 ÉVALUATION DE LA FONCTION $H_d(\sigma, M)$

L'identification des fonctions B_1 et B_2 , qui interviennent dans l'équation (4.12) de la fonction $H_d(\sigma)$ sera faite à partir des résultats des essais de compression triaxiale pour l'orientation $\theta = 90^\circ$ et pour différentes pressions de confinement.

Afin d'exploiter ces résultats expérimentaux, nous allons spécialiser l'équation (4.12) pour des états de contrainte triaxiaux de révolution. Soit σ_3 la pression de confinement, σ_1 la contrainte axiale et θ l'angle entre l'axe de l'échantillon et la normale au plan de stratification S_1 .

Les arguments de la fonction $H_d(\sigma)$ s'expriment par rapport aux variables $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ par :

$$\begin{cases} p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \\ \tau = \frac{\sqrt{2}}{3}(\sigma_1 - \sigma_3) \\ trM\sigma = \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_3 \sin^2 \theta \\ trM\sigma^2 = \sigma_1^2 \cos^2 \theta + \sigma_3^2 \sin^2 \theta \end{cases} \quad (4.19)$$

Il en résulte que pour ce type d'essai les invariants (4.19) ne sont plus indépendants, car :

$$trM\sigma^2 = p \cdot trM\sigma + (trM\sigma - p)(p + \tau/\sqrt{2}) + \tau^2 \quad (4.20)$$

Il ne subsiste donc, que trois invariants indépendants : $p, \tau, trM\sigma$.

De plus, nous avons :

$$trM\sigma = \frac{3\tau}{\sqrt{2}} \cos^2 \theta + p - \frac{\tau}{\sqrt{2}} \quad (4.21)$$

Ainsi, pour ce type d'essai la fonction de charge $H_d(\sigma, \mathbf{M})$ a comme arguments indépendants p, τ et θ .

En utilisant les relations (4.14) et (4.19) nous obtenons les expressions des invariants du tenseur transformé Σ pour l'orientation $\theta = 90^\circ$:

$$\begin{cases} tr\Sigma|_{\theta=90} = (a + 2b)\sigma_3 + (b + e + d)(\sigma_1 + \sigma_3) \\ \frac{3}{2}tr(\Sigma')^2|_{\theta=90} = (a + b - d - e)\sigma_3[\sigma_3(a - b) + \sigma_1(2b - e - d)] + \\ \frac{1}{2}[(b - d)^2 + (b - a)^2 + (d - e)^2](\sigma_1 - \sigma_3)^2 \end{cases} \quad (4.22)$$

Pour la partie déviatorique d'un essai triaxial ($\sigma_2 = \sigma_3 = \text{constante}$, $\dot{\sigma}_1 > 0$) le taux de travail irréversible des contraintes s'exprime par :

$$dW^i = \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \tau \right) d\varepsilon_1^i + \sigma_3 d\varepsilon_v^i \quad (4.23)$$

où $d\varepsilon_1^i$ représente le taux de déformation axiale irréversible et, $d\varepsilon_v^i$ est le taux de déformation volumique irréversible.

La fonction $H_d(\sigma)$ doit s'annuler pour des états de contrainte hydrostatiques.

Ainsi, pour chaque confinement, nous déterminons les paramètres B_1 et B_2 par la méthode des moindres carrés, en utilisant les valeurs expérimentales du travail irréversible W^I (calculées avec (4.23)) et l'équation :

$$B_1 [inv1(p, \tau, 90) - inv1(p, 0, 90)] + B_2 [inv2(p, \tau, 90) - inv2(p, 0, 90)] - W^I = 0 \quad (4.24)$$

Dans l'expression (4.24), $inv1$ et $inv2$ désignent le premier et le deuxième invariant du tenseur transformé Σ exprimés en fonction des arguments : p, τ et θ (équation (4.22)).

Nous constatons que, pour l'argilite, le coefficient B_1 dépend de la pression de confinement (Tableau 4.2) :

σ_3 (MPa)	B_1
5	-0.02
40	-0.11
50	-0.13

Tableau 4.2 : Valeurs du coefficient B_1 en fonction du confinement

Nous proposons l'approximation suivante de cette variation :

$$B_1(\sigma_3) = b_{11} + b_{12}\sigma_3^2 \quad (4.25)$$

avec : $b_{11} = -0.08688$, $b_{12} = -9.714 \cdot 10^{-5} \text{ MPa}^{-2}$. Le coefficient B_2 peut être considéré constant : $B_2 = 0.0065 \text{ MPa}^{-3}$. Ensuite, nous exprimons la contrainte principale σ_3 en fonction de p, τ par :

$$\sigma_3 = p - \frac{\tau}{\sqrt{2}} \quad (4.26)$$

Finalement, nous obtenons l'expression en invariants de la fonction $H_d(\sigma, \mathbf{M})$:

$$H_d(\sigma, \mathbf{M}) = \left[b_{11} + b_{12} \left(p - \frac{\tau}{\sqrt{2}} \right)^2 \right] \text{tr} \Sigma + B_2 \left(\frac{3}{2} \text{tr} \Sigma'^2 \right) \quad (4.27)$$

les expressions des invariants du tenseur transformé étant données par (4.14).

Sur la figure 4.4, nous présentons l'évolution du travail irréversible (calculé avec la formule (4.23)) en fonction de la contrainte déviatorique, pour un confinement de 50 MPa et les orientations $\theta = 30^\circ, 45^\circ$ et 90° , en comparaison avec les approximations théoriques. Pour tracer les courbes théoriques pour les différentes orientations nous avons utilisé l'équation (4.27) . Nous constatons que la concordance entre la théorie et l'expérience est acceptable.

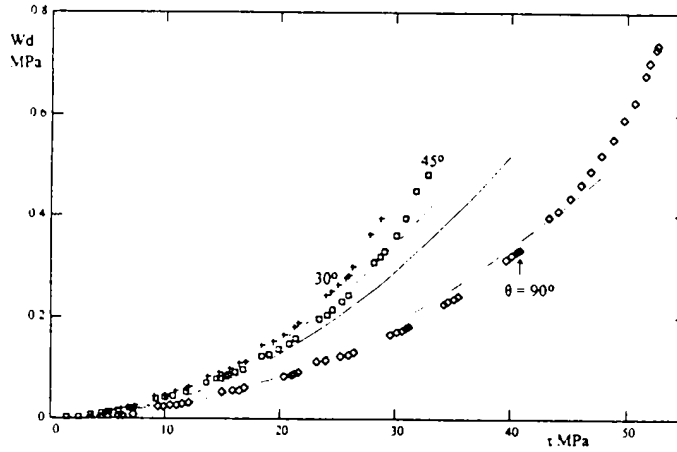


Figure 4.4 : Évolution du travail irréversible en fonction de la contrainte octaédrique pour $\sigma_3 = 50$ MPa et différentes orientations

En additionnant les formules (4.18) et (4.27) nous obtenons l'expression finale de la fonction de charge $H(\sigma, M)$:

$$H(\sigma, M) = \left[b_{11} + b_{12} \left(p - \frac{\tau}{\sqrt{2}} \right)^2 \right] tr \Sigma + B_2 \left(\frac{3}{2} tr \Sigma'^2 \right) + c_0 \sin \left(\omega \frac{p}{p_0} + \varphi \right) + c_1 \quad (4.28)$$

Pour un essai triaxial de révolution les surfaces ($H = \text{constante}$) peuvent être représentées dans le plan des invariants (p, τ) par une famille de courbes paramétrées par l'angle θ qui coupent l'axe hydrostatique au même point.

Sur la figure 4.5 nous représentons dans le plan (p, τ) une famille de courbes ($H = 0.24$ MPa) pour les orientations $\theta = 0^\circ, 60^\circ, 45^\circ$ et 90° . Ces courbes ont été calculées en utilisant (4.28). Les surfaces de rupture, calculées en utilisant le critère de rupture anisotrope (3.3) sont également représentées sur la figure (pour une orientation donnée, la surface de charge et la surface de rupture sont représentées par le même type de ligne).

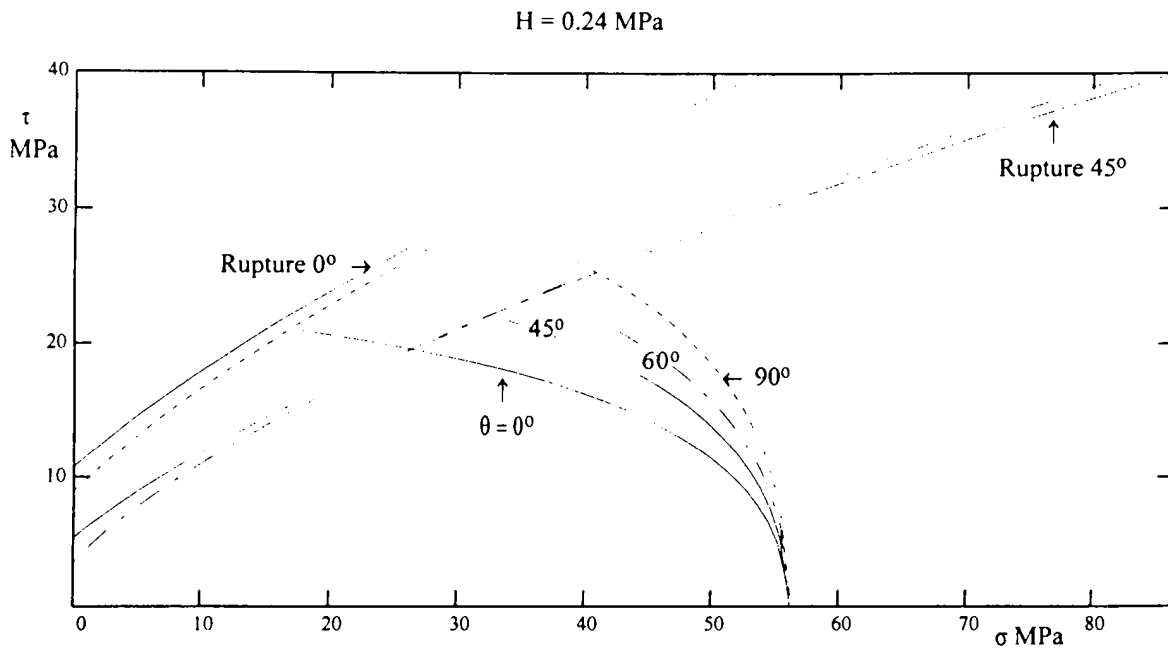


Figure 4.5 : Représentation des surfaces H=0.24 MPa pour différentes orientations

4.3.3 DÉTERMINATION DE LA FONCTION U(σ)

4.3.3 a DÉTERMINATION DE LA FONCTION $U_h(p)$

Nous avons proposé la loi d'écoulement :

$$\dot{\epsilon}' = k_1 \left\langle 1 - \frac{W'}{H(\sigma)} \right\rangle (\Sigma + U(p, \tau) I) \quad (4.15)$$

Faisons en plus l'hypothèse que la fonction U admet la décomposition suivante :

$$U = U_h(p) + U_d(p, \tau) \quad (4.29)$$

tel que : $U = U_h(p)$, pour un état de sollicitation hydrostatique.

De ce fait, nous pouvons déterminer la fonction $U_h(p)$ directement à partir des résultats des essais de compression hydrostatique. Afin d'exploiter ces résultats expérimentaux nous allons spécialiser l'équation (4.15) pour des états de contrainte isotrope.

Dans le repère de structure (S_1, S_2, S_3) la loi d'écoulement s'exprime comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}'_1 = k_1 \left\langle 1 - \frac{W'}{H_m(p)} \right\rangle \{(a + 2b)p + U_h(p)\} \\ \dot{\epsilon}'_2 = k_1 \left\langle 1 - \frac{W'}{H_m(p)} \right\rangle \{(b + d + e)p + U_h(p)\} \\ \dot{\epsilon}'_2 = \dot{\epsilon}'_3 \end{cases} \quad (4.30)$$

On peut constater que notre modèle prédit un champ de déformation à déviateur non nul sous un état de contrainte isotrope.

En éliminant $k_1 \left\langle 1 - \frac{W'}{H_m(p)} \right\rangle$ nous obtenons l'expression de U_h :

$$U_h(p) = \frac{\dot{\epsilon}'_2(a + 2b) - \dot{\epsilon}'_1(b + d + e)}{\dot{\epsilon}'_1 - \dot{\epsilon}'_2} p \quad (4.31)$$

Ensuite, en nous basant sur les données d'un essai de compression hydrostatique jusqu'à 50 MPa, nous calculons les valeurs expérimentales de U_h à l'aide de la formule (4.31).

Sur la figure 4.6, nous présentons la variation de U_h en fonction de la contrainte moyenne. Nous proposons une loi en puissance pour approcher cette variation :

$$U_h(p) = u_{1h} p^2 + u_{2h} \quad (4.32)$$

avec $u_{1h} = 1.098 \cdot 10^{-4} \text{MPa}^{-1}$ et $u_{2h} = 0.025 \text{MPa}$.

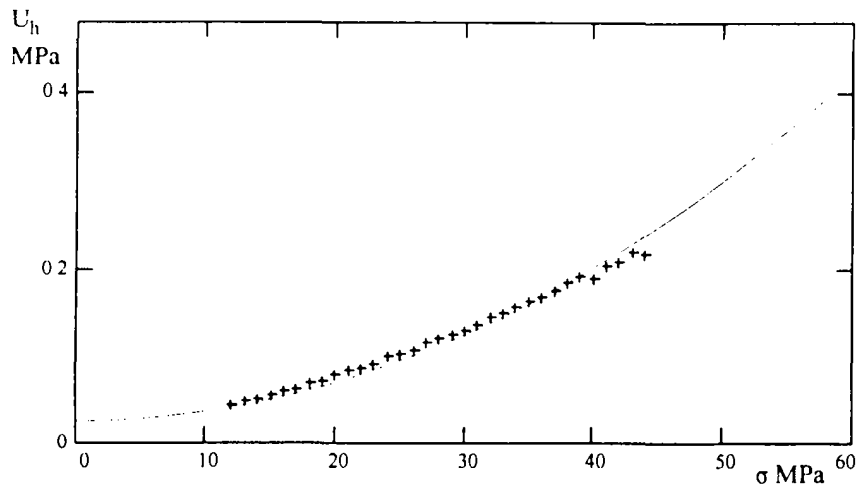


Figure 4.6 : Variation de U_h en fonction de la contrainte moyenne

Les valeurs des constantes **a** et **b** que nous avons utilisé pour l'identification de U_h sont légèrement différentes de ceux qui caractérisent la rupture du matériau. Ces valeurs sont : $a'=0.083255$, $b'=-0.041$. Elles ont été obtenues par calage à partir des valeurs des constantes **a** et **b**.

Sur la figure 4.7 nous comparons la simulation de l'essai hydrostatique faite avec le modèle, avec l'expérience. La valeur du coefficient de viscosité utilisée est : $k_1 = 1.95 \cdot 10^{-4} \text{s}^{-1}$. On peut constater que le modèle reproduit d'une façon satisfaisante le comportement du matériau.

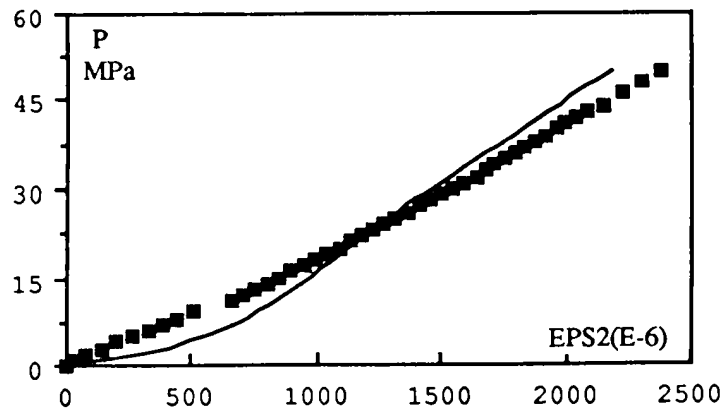
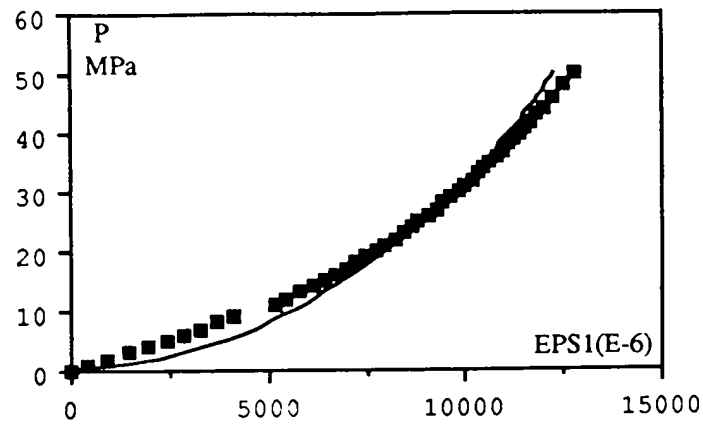


Figure 4. / : Comparaison entre courbes théoriques et expérimentales pour un essai de compression hydrostatique

4.3.3 b DÉTERMINATION DE LA FONCTION $U_d(\sigma)$

L'évaluation de la fonction $U_d(\sigma)$ est faite à partir des essais de compression triaxiale en phase déviatorique ($\sigma_2 = \sigma_3 = \text{constante}$, $\dot{\sigma}_1 > 0$) pour les pressions de confinement de 5, 40 et 50 MPa, effectués sur un échantillon prélevé à $\theta=90^\circ$.

Dans le repère des contraintes principales (X_1, X_2, X_3) la loi d'écoulement s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_1^I = k_1 \left\langle 1 - \frac{W^I}{H(\sigma)} \right\rangle \{ \Sigma_1 + U(\sigma) \} \\ \dot{\epsilon}_2^I = k_1 \left\langle 1 - \frac{W^I}{H(\sigma)} \right\rangle \{ \Sigma_2 + U(\sigma) \} \\ \dot{\epsilon}_3^I = k_1 \left\langle 1 - \frac{W^I}{H(\sigma)} \right\rangle \{ \Sigma_3 + U(\sigma) \} \end{cases} \quad (4.33)$$

où, $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ sont les composantes du tenseur transformé dans le repère des contraintes principales.

Les expressions de ces composantes en fonction des contraintes principales, obtenues en particulierisant la relation (4.8) pour $\theta=90^\circ$ sont :

$$\begin{cases} \Sigma_1 = b\sigma_1 + (a+b)\sigma_3 \\ \Sigma_2 = e\sigma_1 + (b+d)\sigma_3 \\ \Sigma_3 = d\sigma_1 + (b+e)\sigma_3 \end{cases} \quad (4.34)$$

$\dot{\epsilon}'_1$ représente la déformation irréversible axiale, $\dot{\epsilon}'_2$ la déformation irréversible transversale parallèle aux plans des strates et $\dot{\epsilon}'_3$ est la déformation transversale perpendiculaire aux plans des strates.

En combinant les relations (4.33), nous obtenons :

$$U_d(\sigma) = \frac{\dot{\epsilon}'_2(\Sigma_1) - \dot{\epsilon}'_1(\Sigma_2)}{\dot{\epsilon}'_1 - \dot{\epsilon}'_2} - U_h(p) \quad (4.35)$$

Ensuite, pour un confinement donné, nous calculons les valeurs expérimentales de U_d en utilisant la relation (4.35).

Sur la figure 4.8 nous illustrons la variation de U_d en fonction de la contrainte octaédrique, pour une pression de confinement de 40 MPa.

Nous approchons la variation de U_d avec τ par l'expression suivante :

$$U_d = n\tau + m\tau^2 \quad (4.36)$$

où, n et m sont des paramètres du matériau.

Les valeurs de n et m , obtenues pour différentes pressions de confinement, sont données dans le Tableau 4.3.

σ_3	m	n
5 MPa	0.027 MPa ⁻¹	-0.001
40 MPa	- 0.01MPa ⁻¹	3.9·10 ⁻⁴
50 MPa	- 0.021	4.1·10 ⁻⁴

Tableau 4.3 : Valeurs des coefficients m et n en fonction du confinement

On remarque la dépendance de ces paramètres du confinement. Pour en tenir compte nous exprimons (4.36) sous la forme :

$$U_d(p, \tau) = n(\sigma_3)\tau + m(\sigma_3)\tau^2 \quad (4.36)$$

avec :

$$\sigma_3 = p - \frac{\tau}{\sqrt{2}}.$$

Pour les paramètres m et n, nous considérons les approximations suivantes :

$$\begin{cases} m(p, \tau) = m_1 + m_2 \left(p - \frac{\tau}{\sqrt{2}}\right)^2 \\ n(p, \tau) = n_1 + n_2 \left(p - \frac{\tau}{\sqrt{2}}\right) \end{cases} \quad (4.37)$$

avec

$$\begin{aligned} m_1 &= 0.026 \text{ MPa}^{-1}, \\ m_2 &= -2.6 \cdot 10^{-5} \text{ MPa}^{-3} \\ n_1 &= -0.0012 \\ n_2 &= 3.579 \cdot 10^{-5} \text{ MPa}^{-1}. \end{aligned}$$

Ainsi, tous les coefficients du modèle sont déterminés.

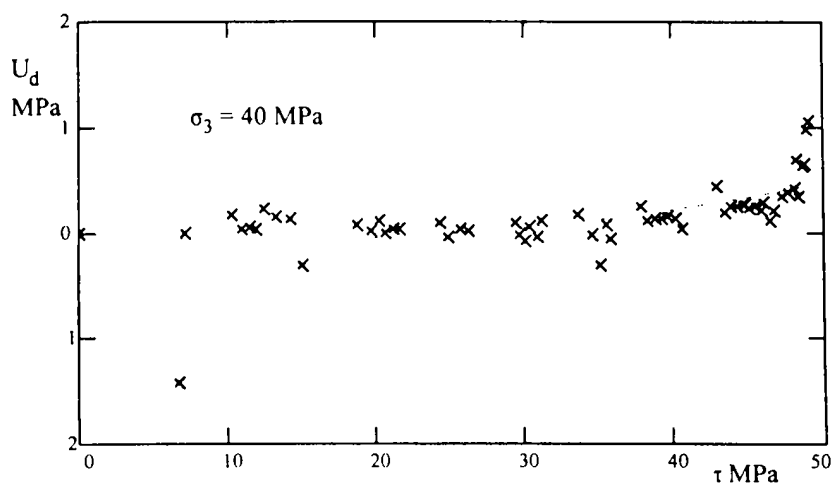


Figure 4.8 : Variation de U_d en fonction de la contrainte octaédrique [les points expérimentaux (symboles) sont obtenus dans un essai triaxial ($\theta=90^\circ$ $\sigma_3=40$ MPa)]

4.4 TEST DU MODÈLE SUR DES RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

Nous allons tester le modèle sur des chemins de contraintes homogènes, en utilisant les paramètres constitutifs précédemment obtenus. Il s'agit de simuler des essais triaxiaux classiques.

Les variations des modules E_1, E_2, ν_{21} et ν_{23} sont respectivement décrits par les relations empiriques suivantes (Chapitre 2, &2.3.1) :

$$\begin{cases} E_1 = 15900 - \left[0.09\tau^2 + \frac{2.5 \cdot 10^5}{\tau + 16} \right] \exp(-0.013p) \\ E_2 = 45000 - 2.35 \cdot 10^4 \exp(-0.0147p) \\ \nu_{21} = 0.75 - 0.501 \exp(-0.0058p) \\ \nu_{23} = 0.19 - 0.084 \exp(-0.0216p) \end{cases} \quad (4.38)$$

En outre, nous supposons que $\nu_{12} / E_1 = \nu_{21} / E_2$ et que la formule de Saint-Venant s'applique.

La figure 4.9 représente les graphes donnés par les résultats expérimentaux et ceux de la simulation numérique du modèle pour l'orientation $\theta=90^\circ$ pour une pression de confinement de 5 MPa. Rappelons que la détermination des paramètres du modèle proposé a été faite à partir des essais de compression triaxiale pour cette orientation.

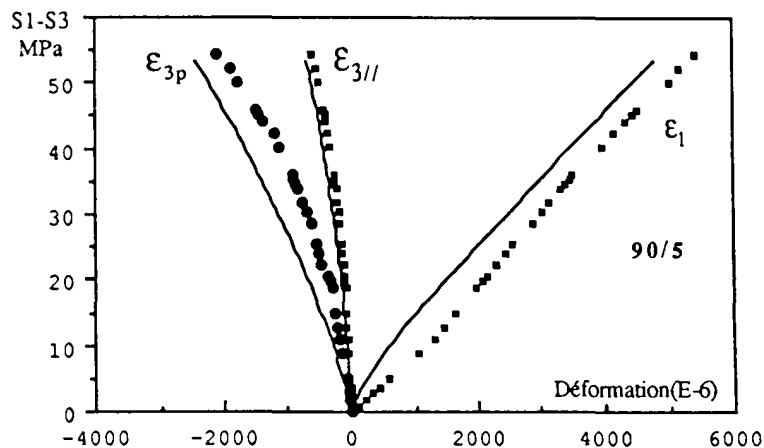


Figure 4.9 : Simulation d'un essai de calage des paramètres ($\theta=90^\circ$; $\sigma_3=5$ MPa)

Nous constatons que la déformation parallèle aux strates $\epsilon_{3//}$ est parfaitement simulée. Les déformations axiales théoriques et expérimentales sont assez proches. La déformation transversale perpendiculaire au plan de stratification est surestimée. Malgré ceci, la simulation nous paraît satisfaisante.

Pour $\theta=0^\circ$, la comparaison entre la théorie et l'expérience est très bonne tant pour des pressions de confinement faibles ainsi que pour des pressions de confinement élevées (Figures 4.10 a-4.10 b).

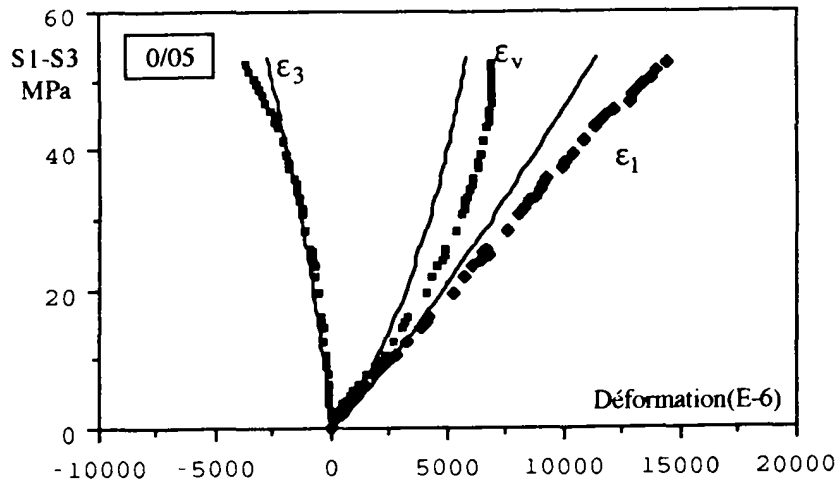


Figure 4.10 a : Comparaison entre courbes théoriques et expérimentales pour $\theta=0^\circ$

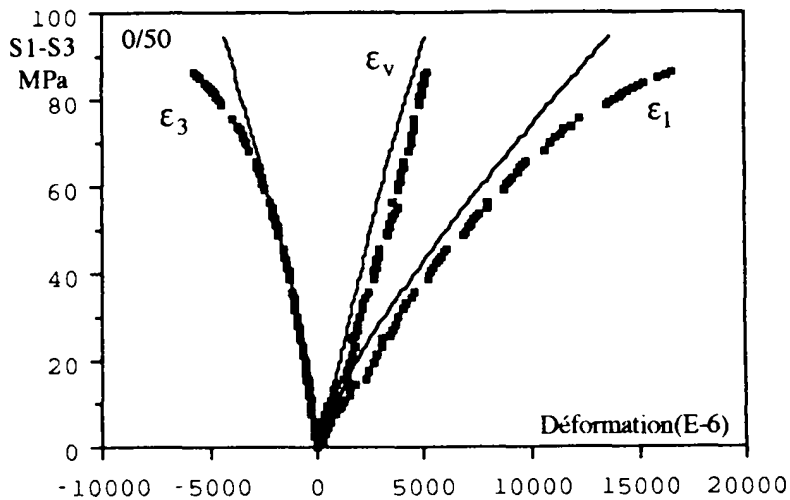


Figure 4.10 b : Comparaison entre courbes théoriques et expérimentales pour $\theta=0^\circ$, $\sigma_3= 50$ MPa (les valeurs expérimentales sont représentées par des symboles)

Cependant, lorsqu'on s'approche du pic de contrainte l'écart entre la simulation et l'expérience devient plus important. Expérimentalement on constate une petite zone de dilatance très proche de la rupture (courbe contrainte-déformation volumique, Figure 4.10 a). Le modèle proposé ne décrit cependant qu'un comportement contractant. Nous envisageons dans la suite de ce mémoire d'adapter le modèle présenté pour pouvoir décrire la phase dilatante.

Afin de tester si le modèle décrit correctement l'anisotropie du comportement du matériau nous avons simulé des essais à $\theta=45^\circ$ (Figure 4.11). De nouveau, il y a une bonne concordance entre les déformations transversales parallèles aux strates expérimentales et théoriques. Les déformations transversales perpendiculaires aux strates sont inférieures aux valeurs expérimentales, les courbures des courbes ne sont pas simulées. Les déformations axiales sont qualitativement assez bien reproduites.

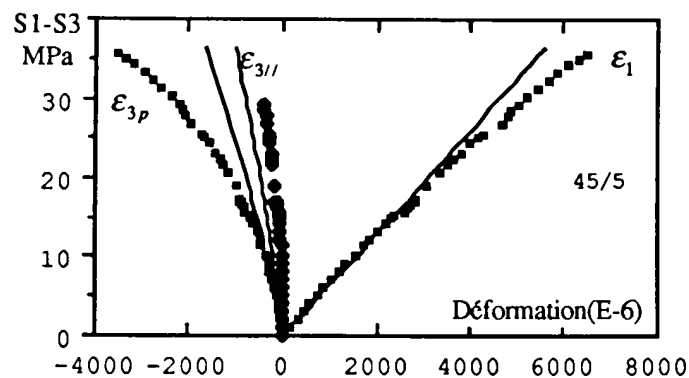


Figure 4.11 : Comparaison entre courbes théoriques et expérimentales pour $\theta=45^\circ$, $\sigma_3 = 5$ MPa (les valeurs expérimentales sont représentées par des symboles)

Il est utile de rappeler que nous avons supposé que le matériau est caractérisé par une anisotropie fixe. En effet, pour décrire l'anisotropie du matériau nous avons introduit un tenseur d'ordre quatre constant (invariant dans le groupe de symétrie du matériau). La détermination des 5 composantes indépendantes de ce tenseur a été faite à partir des résistances en compression (compression simple et compression triaxiale) du matériau.

Cependant expérimentalement on constate que l'anisotropie du matériau diminue avec l'augmentation de la contrainte. Il serait intéressant d'étudier l'évolution du degré d'anisotropie en fonction de l'histoire de chargement.

Nous avons observé que si nous modifions légèrement les valeurs des coefficients d'anisotropie obtenus à partir des contraintes au pic nous obtenons des meilleures corrélations entre la théorie et l'expérience. En effet, nous avons considéré pour un chemin de chargement déviatorique ($\sigma_2 = \sigma_3 = \text{constante}, \dot{\sigma}_1 > 0$) les valeurs suivantes des coefficients d'anisotropie :

$$a' = 0.08325, b' = -0.041, d' = 0.051554, e' = -0.009 \text{ et } 3c'^2 = 0.0588. \quad (4.39)$$

au lieu de : $a = 0.05983, b = -0.002097, d = 0.05322, 3c^2 = 0.037$ et $e = -0.0156$ (voir &3.1.4).

Ensuite, en procédant de la même manière qu'au &4.3 et à partir des mêmes résultats expérimentaux (à $\theta = 90^\circ$) nous identifions les fonctions constitutives B_1 et B_2 :

$$\begin{cases} B_1(\sigma_3) = b'_{11} + b'_{12}\sigma_3^2 \\ B_2(\sigma_3) = b'_{21} + b'_{22}\sigma_3^2 \end{cases} \quad (4.40)$$

avec : $b'_{11} = -0.0168, b'_{12} = -2.007 \cdot 10^{-6} \text{ MPa}^{-2}$ et $b'_{21} = 0.00537 \text{ MPa}^{-1}, b'_{22} = 1.9 \cdot 10^{-7} \text{ MPa}^{-3}$.

Observons que dans le modèle de base $B_2 = 0.0065 \text{ MPa}^{-3}$.

La fonction U_d peut être approchée par :

$$U_d(p, \tau) = n'(\sigma_3)\tau + m'(\sigma_3)\tau^2 \quad (4.41)$$

et :

$$\begin{cases} m'(\sigma_3) = m'_1 + m'_2(\sigma_3)^2 \\ n'(\sigma_3) = n'_1 + n'_2\sigma_3 \end{cases} \quad (4.42)$$

avec :

$$m'_1 = 4.35 \cdot 10^{-5} \text{ MPa}^{-1}, m'_2 = 1.162 \cdot 10^{-5} \text{ MPa}^{-3} \text{ et } n'_1 = -0.003, n'_2 = 2.026 \cdot 10^{-5} \text{ MPa}^{-1}$$

Sur la figure (4.12a-4.12b) nous présentons une comparaison entre les courbes théoriques obtenues en utilisant les valeurs (4.39) des coefficients d'anisotropie et les

paramètres constitutifs (4.40-4.42) et les courbes expérimentales pour $\theta=45^\circ$. Nous constatons que l'accord entre la théorie et l'expérience est très bon.

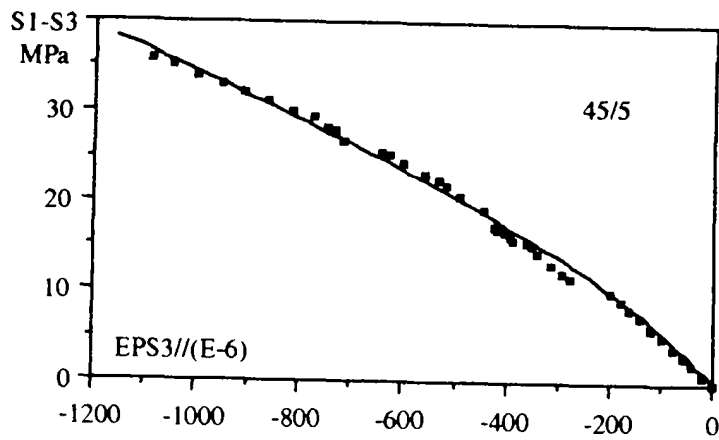
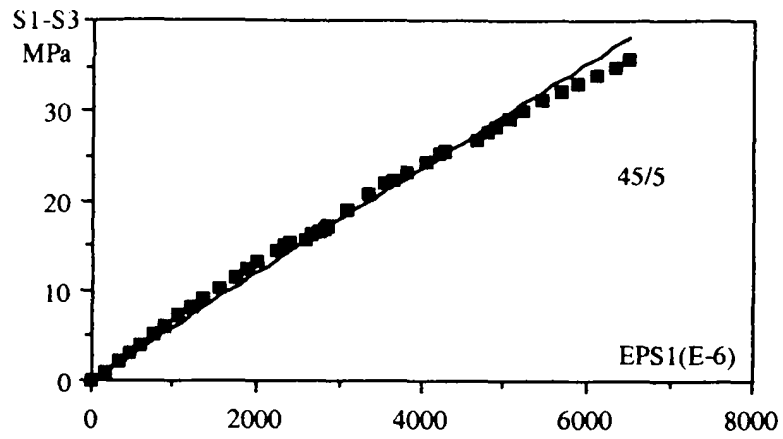


Figure 4.12a : Comparaison entre courbes théoriques et expérimentales pour $\theta=45^\circ$, $\sigma_3 = 5$ MPa (les valeurs expérimentales sont représentées par des symboles)

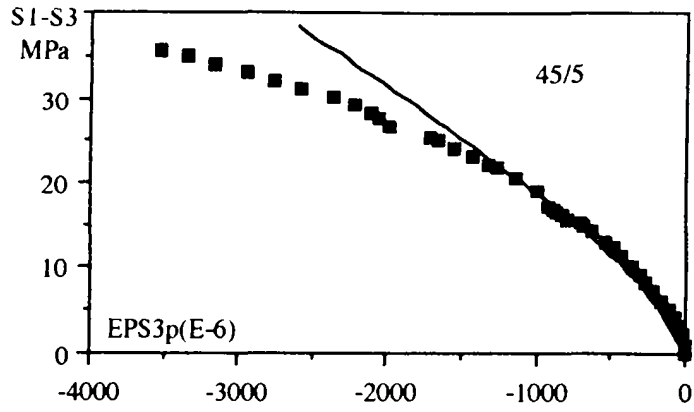


Figure 4.12b : Comparaison entre courbes théoriques et expérimentales pour $\theta=45^\circ$, $\sigma_3=5$ MPa (les valeurs expérimentales sont représentées par des symboles)

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

L'objet de cette étude a été de modéliser le comportement mécanique dépendant du temps d'une roche fortement anisotrope, l'argilite de Tournemire.

Suite au dépôt sédimentaire l'argilite présente une anisotropie de formation de type orthotrope de révolution, le plan d'isotropie étant le plan de stratification. À cette anisotropie de texture correspond une anisotropie des caractéristiques mécaniques.

L'étude expérimentale réalisé par H. Niandou (Niandou, 1994) montre que la réponse élastique de l'argilite est fortement non-linéaire et anisotrope. Nous avons formulé des lois empiriques de variation des modules élastiques principaux avec l'état de contrainte. Les conséquences de l'utilisation de modules élastiques variables (supposés fonctions des deux premiers invariants du tenseur des contraintes) sur l'énergie stockée dans le matériau sur un chemin fermé quelconque dans l'espace des contraintes ont été analysé en détail. Ainsi, nous avons montré que les choix des lois de variation des modules élastiques ne peuvent pas être indépendants.

Pour caractériser le comportement irréversible dépendant du temps de l'argilite nous avons élaboré un modèle élasto-viscoplastique. Expérimentalement on constate (essais de compression triaxiale) que les directions principales des déformations irréversibles coïncident avec les directions privilégiées de la structure initiale du matériau. On peut supposer que le type d'anisotropie initiale est conservé. Ainsi, dans notre approche l'anisotropie du matériau est décrite à l'aide d'un tenseur d'ordre quatre invariant par rapport à toute transformation orthogonale appartenant au groupe de symétrie du matériau. Ce tenseur est supposé constant : il ne dépend ni du temps, ni de l'état de déformation (i.e. nous faisons l'hypothèse que le matériau est caractérisé par une anisotropie fixe). Il intervient dans les expressions de la surface de charge, de la règle d'écoulement et du critère de rupture (à court terme).

La détermination des composantes indépendantes de ce tenseur est faite à partir des résistances en compression simple et triaxiale de l'argilite. Les relations constitutives proposées (la fonction de charge et la loi d'évolution de la déformation viscoplastique) ont été déterminées

à partir des résultats expérimentaux en compression hydrostatique et en compression triaxiale pour l'orientation $\theta=90^\circ$.

Le critère de rupture (à court terme) retenu dans la formulation du modèle viscoplastique est une généralisation du critère isotrope du paraboloïde de Stassi. La signification physique des paramètres du critère proposé ainsi qu'une procédure d'identification a été décrite.

Notre modèle rend compte de l'anisotropie du champ de déformations sous sollicitation isotrope et permet d'interpréter et de prévoir le comportement du matériau sur des chemins de sollicitation triaxiale classiques. Cependant l'exploitation complète du modèle exige des résultats expérimentaux complémentaires : des essais de compression à différentes vitesses de chargement et des essais de fluage à long terme.

Certaines parties de ce mémoire demande à être développées. Nous envisageons :

- effectuer des essais complémentaires qui nous permettrons de valider le modèle élastique non-linéaire développé;
- l'étude de l'évolution du degré d'anisotropie en fonction de l'histoire de chargement (l'évolution des coefficients du tenseur d'anisotropie A en fonction du taux de déformation)
- l'étude du tenseur vitesse de déformation irréversible. Ceci doit permettre de mieux préciser la fonction tensorielle U (équation (4.15) et de mieux prévoir le comportement du matériau.
- introduire le modèle élasto-viscoplastique dans un code d'éléments finis en vue de son application aux problèmes de stabilité des ouvrages souterrains.

BIBLIOGRAPHIE

- ALLIROT, D., et BOEHLER, J. P., (1979) Évolution des propriétés mécaniques d'une roche stratifiée sous pression de confinement. In Proc. 4th Int. Soc. Rock. Mech. Vol. 1, Montreux, pp 15-22 Balkema, Rotterdam.
- ATTEWELL, P. B., et SANDFORD M. R., (1974) Intrinsic shear strength of a brittle anisotropic rock - I. Experimental and mechanical interpretation. Int. J. Rock Mech. Min. Sci & Geomech. Abstr. Vol. 11, pp 423-430.
- AMADEI, B., (1983) Rock anisotropy and the theory of stress measurements. Springer-Verlag, Heidelberg.
- BELL, J. F., (1973) The experimental foundations of solid mechanics. In Encyclopedia of Physics, Vol VIa | 1, éd C. Truesdell, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg- New York.
- BEREST, P., (1990) Viscoplasticity in Rock Mechanics. In Geomaterials : Constitutive Equations and Modelling. ed F. Darve (en anglais)
- BOEHLER, J.P., (1975) Contributions Théoriques et Expérimentales à l'Étude des Milieux Plastiques Anisotropes, Thèse de Doctorat ès Sciences, Grenoble.
- BOEHLER, J. P. et SAWCZUK, A., (1970) Équilibre limite des sols anisotropes. Journal de Mécanique. Vol 9, pp 5-33.
- BOEHLER, J. P. et SAWCZUK, A., (1977) On yielding of oriented solids. Acta Mechanica, Vol 27, pp 185-206
- BOEHLER, J. P., (1978) Lois de comportement anisotrope des milieux continus. Journal de Mécanique Vol 17, N° 2, pp 153-190.
- BOEHLER, J. P., (1987) Anisotropic linear elasticity. In : Applications of tensor functions in solid mechanics. Courses and lectures N° 292, CISM Udine, ed J.P. Boehler.
- BORS, C. J., (1966) Sur la théorie de la plasticité des corps orthotropes. Bull. Acad. Pol. Sc. Vol. 14, No 9, pp 541-544.
- BORS, C.J., (1970) Théorie de l'élasticité des milieux anisotropes. Ed. Acad. R.S.R. Bucuresti. (en roumain).
- BOYCE, H. R., (1980) A non-linear model for the elastic behavior of granular materials under repeated loading. Proc. Int. Symp. Soils under cyclic and transient loading, Swansea, Vol 1, pp 285-294. Balkema.
- CHENEVERT, M.E., et GATLIN, C., (1965) Mechanical anisotropies of laminated sedimentary rocks. Soc. Petrol. Eng. J. 5, pp 67-77.
- CRISTESCU, N. D., (1967) Dynamic Plasticity. North-Holland, Amsterdam.
- CRISTESCU, N. D., (1983) Mechanics of Rocks. éd Université Bucarest (en roumain).

CRISTESCU, N.D., (1987) Elastic-viscoplastic constitutive equations for rock. *Int.J.Rock Mech.Min.Sci.&Geomech.Abst.* Vol 24, No 5, pp 271-282.

CRISTESCU, N.D., (1989) *Rock Rheology*. Kluwer Academic Publishers.

CRISTESCU, N.D., (1994) Viscoplasticity of Geomaterials. In : *Visco-Plastic behaviour of geomaterials. Courses and lectures N° 350, CISM Udine*, ed N.D.Cristescu and G.Gioda. pp 103-209

CUXAC, P., (1991) Propagation et atténuation des ondes ultrasoniques dans des roches fissurées et anisotropes. Thèse de doctorat, INPL (ENSG de Nancy).

DAFALIAS, Y. F., (1979) Anisotropic hardening of initially orthotropic materials. *ZAMM* 59, pp 437-446.

DEKLOTZ, E. J., BROWN J. W. et STEMLER O. A., (1966) Anisotropy of schistose gneiss. *Proc.1st Cong. Int. Soc. Rock. Mech.*, Lisbon, Vol 1, pp 465-470.

DOMINIQUE, F., ANDRÉ, P., ANDRÉ, Z., (1992) *Comportement mécanique des matériaux. Élasticité et Plasticité* ème Éd Hermès, Paris.

DONATH, F.A., (1964) Strength variation and deformational behavior in anisotropic rock. In *State of stress in the Earth's crust*. Judd W. R. (Editor), pp 281-297. Elsevier, Amsterdam.

DONATH, F. A., (1972) Effects of cohesion and granularity on deformational behavior of anisotropic rock. In *Studies in mineralogy and precambrian geology* (Edited by B. R. Doc and D.K. Smith), Vol 135, pp 95-128. Geological Society of America, Boulder. Co.

DRAGON, P. B. et MROZ, Z. , (1979) A model for plastic creep of rock-like materials accounting for the kinetics of fracture. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci & Geomech. Abstr.* Vol. 22, pp 173-176.

DUNCAN, J. M. et CHANG, C. Y. (1970) Nonlinear analysis of stress and strain in soils. In *J.Soil Mech.Found. Div., Am.Soc.Civ. Eng (ASCE)*, Vol 96, NoSM5, pp 1629-1653.

DUSSEAULT, M. B. et FORDHAM, C. J. (1993) Time-dependent behavior of rocks. In *Comprehensive Rock Engineering*. Vol 3, Pergamon Press, Oxford. pp 119-149.

GOLDENBLAT, I. I., (1962) Some problems of mechanics of deformable media, Noordhoff, Groningen.

GOLDENBLAT, I. I. et KOPNOV, V. A., (1966) Strength of Glass-Reinforced Plastics in the complex stress state, *Polymer Mechanics*, Vol 1, pp 54.

GUYADER, J. et DENIS A., (1986) Propagation des ondes dans les roches anisotropes sous contraintes. Evaluation de la qualité des schistes ardoisiers. *Bull. Ass.Internat.Géol.Ing.* No 33, pp 49-55.

HANDIN J., FRIEDMAN, M., LOGAN, J. M., PATTISON, L. J. et SWOLFS, H. S.,(1957) Experimental deformation of sedimentary rocks under confining pressure : Tests at room temperature on dry samples. *Bull. Am. Assoc. Pet. Geol.*, Vol 41, pp 1-50.

- HENRY, J.P. et PARSY, .F, (1982) COURS D'ÉLASTICITÉ. Edition Dunod.
- HILL, R., (1950) The mathematical theory of plasticity. Clarendon press.
- HOBBS, D. W., (1964) The strength and the stress-strain characteristics of coal in triaxial compression. J. Geol. Vol 72, pp 214-231.
- HOEK, E., (1964), Fracture of anisotropic rock. J. S. Afr. Inst. Min. Metall, Vol. 64, No. 10, pp 501-518.
- HOFFMANN, H., (1958), Investigations into carbonic rocks under triaxial pressure for the purpose of rock stress computation. Proc. Int. Strata Control Cong., Leipzig.
- HOMAND F., MOREL E., HENRY J. P., CUXAC P., HAMMADE E., (1993) Characterization of the moduli of elasticity of an anisotropic rock using dynamic and static methods. Int. J. Rock Mech. Min. Sci.&Geomech. Abstr., Vol 30, No 5, pp 527-535.
- HUNSCHE, U., (1994) Uniaxial and triaxial creep and failure tests on rock : Experimental Technique and Interpretation. In : Viso-Plastic behaviour of geomaterials. Courses and lectures N° 350, CISM Udine, ed N.D.Cristescu et G.Gioda. pp 1-54.
- JAEGER, J. C., (1960) Shear failure of anisotropic rocks. Geol. Mag. Vol 97, pp 65-72.
- JAEGER, J. C. et COOK, N.G.W., (1971) Fundamentals of rock mechanics. Chapman and Hall, London.
- KAAR, D. G., LAW, F. P. FATT HOO, M et COX, G. F. N., (1989) Asymptotic and quadratic failure criteria for anisotropic materials. Int. J. of Plasticity, Vol 7, pp 303-336.
- KULHAWY, F. H., (1975) Stress deformation properties of rock and rock discontinuities. Eng.Geol., Vol 9, pp 327-350.
- KWASNIEWSKI, M.A., (1993) Mechanical behavior of anisotropic rocks. In Comprehensive Rock Engineering. Vol 1 : Fundamentals. Pergamon Press, Oxford. pp 285-312.
- LAMA, R. D. et VUTUKURI, V. S., (1978) Handbook on mechanical properties of rocks, Vol II : Testing Techniques and Results, Trans Tech Publ, pp 57-148, 254-282.
- LEKHNITSKII, S. G., (1963) Theory of elasticity of an anisotropic body. Holden Day, Inc. San Francisco.
- LIU, S. I., (1982) On representation of anisotropic invariants. Int. J. Engng. Sci., Vol 20, pp 1099-1109.
- LORET, B., (1985) On the choice of elastic parameters for sand. Int.J.Num.Anal.Methods Geomech., VOL 9, pp 285-292.
- LOVE, A. E. H., (1944) A treatise on the mathematical theory of elasticity. New York Dover Publications, pp 151-161.
- MALVERN, L. E., (1969) Introduction to the mechanics of continuous medium, Prentice Hall, Inc. pp 284-289.

- McCLINTOCK, F. A. et WALSH, J. B., (1962) Friction on Griffith cracks in rocks under pressure. Proc. 4th U.S Nat. Congress of Applied Mechanics, (ASME), Vol II, pp 1015-1021.
- McLamore, R. T., (1966) Strength-deformation characteristics of anisotropic sedimentary rocks. Thèse de Doctorat, Univ. Texas, Austin.
- McLamore, R. et Gray, K. E., (1967) The mechanical behavior of anisotropic sedimentary rocks. Journal of Engineering for Industry, Trans. of the ASME, Vol 89, pp 62-73.
- MASURE, P., (1970) Comportement mécanique des roches à anisotropie planaire discontinue. In Proc. 2nd Int. Congr. Rock Mechanics, Belgrade, Vol I, pp 197-207.
- NOVA, R. et WOOD D.M, (1978) A constitutive model for sand in triaxial compression . In Int.J. Num. Anal. Methods Geomech., Vol 3, pp 285-294.
- NOVA , R. et SACCHI, G.A., (1979) A generalized failure condition for orthotropic solids. Euromech 115- Mechanical behavior of anisotropic solids, Villard de Lans.
- NOVA ,R., (1980) The failure of transversely isotropic rocks in triaxial compression. Int. J. Rock Mech. Min. Sci., Vol 17, No 6, pp 325-332.
- NOVA, R., (1986) An extended Cam-Clay model for soft anisotropic rocks. Computer and Geotechnics 2, pp 69-88.
- NIANDOU, H., SHAO J. F. & HENRY, J.P., (1993) Anisotropic yield and failure of shale. Assessment and Prevention of Failure Phenomena in Rock Engineering, Pasamehmetoglu et al (eds). Balkema, Rotterdam, pp 107-112.
- NIANDOU, H., SHAO, J. F. & HENRY J.P., (1993) "Étude du comportement rhéologique d'une argilite et modélisation". Actes du Onzième Congrès Français de Mécanique (AUM), Villeneuve d'Ascq, Volume 4, pp 489-492.
- NIANDOU, H., (1994) Étude du comportement rhéologique et modélisation de l'argilite de Tournemire. Application à la stabilité des ouvrages souterrains. Thèse de doctorat USTL, Université de Lille 1.
- OLSZAK, W. et URBANOWSCHI, W.,(1956) The plastic potential and the generalized energy in theory of non-homogeneous and anisotropic elastic-plastic bodies. Arch. Mech. Stos, Vol 8.
- PARISEAU, W. G.,(1972) Plasticity theory for anisotropic rocks and soils. Proc. 10th Symposium on Rock Mechanics (AIME), pp 267-295.
- PATERSON, M. S., (1978) Experimental Rock Deformation - The Brittle Field, Springer-Verlag Berlin, pp 48-50.
- PERZYNA , P., (1966) Fundamentals Problems in Viscoplasticity. Applied Mechanics. Vol 9. Academic Press. Inc. New York.
- PRICE, N. J., (1963) The influence of geological factors on the strength of coal measure rocks. Geol. Mag. Vol 100, pp 428-443.

- RACLIN, J., (1984) Contributions théoriques et expérimentales à l'étude de la plasticité, de l'écroutissage et de la rupture des solides anisotropes. Thèse de Docteur ès Sciences (Grenoble).
- RAMAMURTHY, T., (1993) Strength and modulus responses of anisotropic rocks. In *Comprehensive Rock Engineering* (Ed. J. A. HUDSON), Vol I : Fundamentals. Pergamon Press, Oxford. pp 313-329.
- SANTARELLI, F. J., (1987) Theoretical and experimental investigation of the stability of the axisymmetric wellbore. Ph. D.Thesis, University of London.
- SCHMITT, L., FORSANS, T. et SANTARELLI, F. J.,(1994) Shale testing and capillary phenomena. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci & Geomech. Abstr.* Vol 31. pp 411-427.
- SMITH, G. F. et RIVLIN, R.S., (1958) The strain energy function for anisotropic elastic materials. In *Trans. Amer. Math. Soc.* Vol. 88, pp 175-193.
- SPENCER, A. J. M., (1971) *Theory of invariants in Continuum Physics*, C. Eringen éd. Academic Press, pp 239-353.
- SULICIU, I.,(1989) Some remarks of the instantaneous response in rate-type viscoplasticity. In *Int Journal of Plasticity*, Vol 5, No 2, pp 173-183.
- TIMOSHENKO ST. P., (1972) *History of strength of materials*, Dover Publications, Inc. New York, (1972), edition.
- TSAI, S. W. et WU, E., (1971) A general theory of strength of anisotropic materials. *J. Composite Materials*, Vol 5, pp 58-80.
- WALSH, J. B. and BRACE, W. F. (1964) A fracture criterion for brittle anisotropic rock. *Journal of Geophysical Research*, Vol 69, No 16, pp 3449-3456.
- WANG, C. C., (1971) Corrigendum 43, *Arch. Rat. Mech. Anal.* 36, pp 392-395.
- WOROTNICKI, G., (1993) Stress measurements in anisotropic rocks. In *Comprehensive Rock Engineering* ed J. A. HUDSON, Vol 3 : Rock Testing and Site Characteristics, pp 362-365.
- ZYTINSKI, M., RANDOLPH, M.F., NOVA, R. et WROTH, C.P., (1978) On modelling the unloading-reloading behavior of soils. *Int.J.Num.Anal.Methods Geomech.*, Vol 2, pp 87-94