N° d'ordre : 1473

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

présentée par

KIKI Maxime

ETUDE DES EXTREMES D'UNE CLASSE DE PROCESSUS DE MARKOV

Soutenue le 12 Janvier 1995 devant le Jury :

Président : P. DEHEUVELS, Université de Paris VI
Rapporteurs : H. ROOTZEN, Université Chalmers
P. DEHEUVELS, Université de Paris VI
Examinateurs : Ch. SUQUET, Université de Lille I
G. HAIMAN, Université de Lille I
Y. DAVYDOV, Université de Lille I

Je tiens à remercier :

Monsieur Paul Deheuvels et Monsieur Holger Rootzén de m'avoir fait l'honneur d'être rapporteurs de cette thèse.

Monsieur Yuri Davydov et Monsieur Charles Suquet pour m'avoir fait l'honneur d'être membres du Jury.

Mon directeur de thèse, Monsieur George Haiman, qui m'a initié à la théorie des processus. Sa participation effective, ses nombreux conseils, ses remarques et ses encouragements ont été décisifs pour sa réalisation.

Les membres du laboratoire de Statistique et Probabilités et tout particulièrement Monsieur Charles Suquet, qui m'a beaucoup aidé à améliorer la présentation de ce travail.

Madame Arlette Lengaigne du secrétariat scientifique et Madame Monique Lloret de l'imprimerie.

Mes parents à qui je dédie cette thèse pour le soutien moral et financier qu'ils m'ont apportés durant toutes mes études, Macaire qui m'a souvent aidé, toute ma famille ainsi que tous mes amis.

Notations

$\lfloor x \rfloor$: partie entière de x
$\lceil x \rceil$: partie entière supérieure de x définie par : $\lceil x \rceil \in \mathbb{N}$ et

$$\lceil x \rceil - 1 < x \leq \lceil x \rceil$$

i.i.d. : indépendantes et identiquement distribuées
i.s. : infiniment souvent
v.a. : variable aléatoire
$\sigma()$: tribu engendrée par les v.a. ou les événements se trouvant entre les parenthèses
$E()$: espérance de la v.a. entre les parenthèses
λ : mesure de Lebesgue.
ln : logarithme népérien
$\ln_2(x)$: $\ln(\ln(x))$
max() : maximum des termes entre les parenthèses
min() : minimum des termes entre les parenthèses

Chapitre 1

Introduction générale

Ce travail concerne les extrêmes de certains processus de Markov régénératifs. Le point de départ est un résultat de Rootzen(1988), rappelé ci-après, donnant une approximation de la loi du maximum, basée sur la décomposition des processus régénératifs en cycles, lorsque les cycles sont indépendants. Dans ce cas, l'étude de la loi du maximum se ramène à celle du maximum des maximums partiels sur les cycles qui sont des v.a. indépendantes équidistribuées (i.i.d.). Ceci place le problème dans un cadre classique.

Mais en général les cycles sont 1-dépendants.

(Rappelons qu'un processus $\{Z_n, n \geq 0\}$ est m-dépendant ($m \geq 1$) si quels que soient les entiers $0 \leq i_1 < i_2 \ldots < i_k$ et $i_k + m < j_1 < \ldots < j_l$ les vecteurs $(Z_{i_1}, \ldots, Z_{i_k})$ et $(Z_{j_1}, \ldots, Z_{j_l})$ sont indépendants).

D'où l'idée de ce travail qui est d'appliquer certaines techniques et résultats obtenus dans Haiman(1987 a)) pour les extrêmes des suites stationnaires m-dépendantes aux processus de Markov considérés.

Des références classiques de travaux ayant trait aux extrêmes des processus de Markov sont Serfozo(1980), O'Brien(1987) et plus récemment Smith(1992) et Jakubowski(1993). (L'article précité de Rootzen contient une liste de références très importante sur le sujet.)

La thèse comporte quatre parties relativement distinctes (chapitres 2,3,4,5) chacune possédant une introduction.

Au chapitre 2 on commence par étudier en détail la décomposition en cycles d'une chaîne de Markov régénérative, en suivant la méthode introduite par Asmussen(1987) (voir aussi Nummelin (1978)).

Au chapitre 3 on particularise cette décomposition aux processus de Markov que nous considérons, à savoir les processus admettant une densité de transition $f(x, y)$ par rapport à la mesure de Lebesgue, telle qu'il existe un entier $s \geq 1$, deux constantes $0 < \eta < 1$,

$M > 1$, et une densité de probabilité par rapport à la mesure de Lebesgue $g(y)$, tels que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$\eta g(y) \leq f^{(s)}(x,y) \text{ et } f(x,y) \leq Mg(y). \tag{1.1}$$

Des exemples de tels processus sont donnés et des propriétés utiles dans la suite, (en particulier l'ergodicité géométrique en valeur relative) sont démontrées.
La propriété (1.1) est également discutée en termes de propriété de mélange.

Au chapitre 4, après le rappel du résultat de Rootzen(1988) nécéssitant les préliminaires du chapitre 2, on démontre le résultat plus précis suivant :

Soit $\{Z_n, n \geq 0\}$ le processus de Markov stationnaire dont la probabilité de transition vérifie (1.1). Soit $\omega = \sup\{u; P\{Z_0 < u\} < 1\}$ et soit u_n une suite définie pour tout $\tau > 0$ fixé par

$$P\{Z_0 > u_n\} = \frac{\tau}{n}, \quad n > \tau.$$

Théorème 1.1 *Il existe $n_0(\tau)$ et une constante $C(\tau) > 0$ telle que pour tout $n \geq n_0$, on a*

$$\Delta_n = \max_{u_n \leq x \leq \omega} \left| P\{\max(Z_0, \ldots, Z_n) < x\} - (P\{Z_0 < x\})^{n+1} \right| \leq C(\ln n) n^{-\frac{1}{2}} \tag{1.2}$$

Ce théorème améliore légèrement le résultat de [Haiman, Kiki, Puri, 1994] (voir annexe 2).

Notons comme application que si la loi de Z_0 est dans le domaine d'attraction d'une loi limite extrême, alors (1.2) permet d'estimer la vitesse de convergence de la loi des maximums partiels normalisés de la chaîne vers cette loi limite, à condition que cette vitesse soit connue dans le cas i.i.d.

On montre ensuite le

Théorème 1.2 *Pour tout $B \in (0,1)$ et $\gamma > 1$ fixés, il existe $x_0(B,\gamma) \in \mathbb{R}$ et une constante $M_0(\gamma)$ tels que pour tout $x_0 < u < v < w < b$, on a*

$$\sup_{n \in E(u)} \left| \frac{P\{\max(Z_0, \ldots, Z_{n-1}) \leq u, v < Z_n < w\}}{(P\{Z_0 \leq u\})^n P\{v < Z_0 < w\}} - 1 \right|$$
$$\leq M_0 \left(\left(\ln_2 \frac{1}{G(u)} \right) \left(\ln \frac{1}{G(u)} \right)^{-(1+\gamma)} \right) \tag{1.3}$$

avec $G(u) = P\{Z_0 > u\}$, $\ln_2(x) = \ln(\ln(x))$ et

$$E(u) = \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{(G(u))^B} \leq n \leq \frac{\gamma}{G(u)} \ln_2(\frac{1}{G(u)}) \right\}.$$

La démonstration de ce résultat est plus compliquée et son intérêt réside dans le fait que l'on peut en déduire un principe d'invariance presque sûr pour les maximums analogue à celui démontré pour la première fois dans Haiman(1987 a)) (voir introduction du chapitre 4).

Au chapitre 5, on démontre ce principe d'invariance pour les chaînes de Markov considérées.

Notons que très récemment G. Haiman(travaux encore non publiés) a étendu, sous des hypothèses plus générales (exprimées essentiellement en terme d'ergodicité) l'application des méthodes et résultats présentés ici à une classe de processus de Markov plus large, comprenant en particulier les processus récurrents de la forme $X_{n+1} = \rho X_n + \mathcal{E}_{n+1}$, avec $\{\mathcal{E}_n, n \geq 1\}$ i.i.d. et $0 < \rho < 1$. Dans l'annexe 1, on démontre quelques résultats énoncés dans les chapitres 2,3 et 4.

L'annexe 2 est l'article [Haiman, Kiki, Puri, 1994] précité, à paraître dans J.S.P.I.

Chapitre 2

Décomposition en cycles d'un processus de Markov régénératif

2.1 Introduction

Rappels Soit F un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}$ muni de la tribu trace de la tribu borélienne sur F qu'on note $\mathcal{F}$.

On appelle probabilité de transition sur F, toute fonction $Q(.,.)$ définie sur $F \times \mathcal{F}$, à valeurs dans $[0,1]$, telle que pour tout $A \in \mathcal{F}$ fixé, $Q(.,A)$ est une fonction mesurable et pour tout $x \in F$ fixé, $Q(x,.)$ est une probabilité sur $\mathcal{F}$. On dit qu'un processus $\{X_n, n \geq 0\}$ à valeurs dans F est une chaîne de Markov si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une probabilité de transition $P_n(.,.)$ définie sur $(F, \mathcal{F})$, telle que :

$$P\{X_n \in A \mid X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}\} = P_n(x_{n-1}, A).$$

La chaîne de Markov $\{X_n, n \geq 0\}$ est homogène si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une probabilité de transition indépendante de n, $P(.,.)$, sur $(F, \mathcal{F})$ telle que :

$$P\{X_n \in A \mid X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}\} = P(x_{n-1}, A).$$

Dans ce cas, on vérifie par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la probabilité de transition en k pas associée $P^{(k)}(.,.)$ $(P^{(1)}(x,A) = P(x,A))$

$$P\{X_{t+k} \in A \mid X_0 = x_0, \ldots, X_t = x_t\} = P^{(k)}(x_t, A)$$

est telle que :

$$P^{(u+s)}(x,A) = \int P^{(s)}(y,A) P^{(u)}(x,dy). \tag{2.1}$$

(Cette égalité est appelée équation de Chapman-Kolmogorov.)

La loi d'une chaîne de Markov homogène est déterminée par la probabilité de transition et la loi de X_0 (loi initiale). Lorsque la loi de X_0 est μ, on désigne par P_μ la probabilité définie sur $\sigma(X_n, n \geq 0)$ par

$$P_\mu\{X_0 \in A_0, \ldots, X_n \in A_n\} = \int_{A_0} \mu(dx_0) \int_{A_1} P(x_0, dx_1) \cdots \int_{A_n} P(x_{n-1}, dx_n),$$
$$n \in \mathbb{N}, A_0, \ldots A_n \in \mathcal{F}.$$

Lorsque la loi de X_0 est la mesure de Dirac au point x, cette probabilité est notée P_x. Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_0, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$, on a

$$P_\mu\{X_0 \in A_0, \ldots, X_n \in A_n\} = \int_F \mu(dx) P_x\{X_0 \in A_0, \ldots, X_n \in A_n\}.$$

Toutes les chaînes de Markov définies dans la suite sont homogènes.
Définition 2.1 Soit $\{Z_n, n \geq 0\}$ une suite de v.a. à valeurs dans F .
On dit que $\{Z_n, n \geq 0\}$ est **régénératif** s'il existe une suite croissante de v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$, $\{S_n, n \geq 0\}$, (on pose $S_0 = 0$) définies sur le même espace de probabilité telles que :

1) Quels que soient les entiers positifs $n, y_1, \ldots, y_n$ et $A_1, \ldots, A_{s_n}$, $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, \ldots, s_n$ avec $s_k = \sum_{i=1}^{k} y_i$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, les événements

$$B_k = \{Y_k = S_k - S_{k-1} = y_k, Z_{s_{k-1}} \in A_{s_{k-1}}, \ldots, Z_{s_k-1} \in A_{s_k-1}\}$$

sont indépendants

2) Pour tout $1 \leq k < l$, u et $A_1, \ldots, A_u$, $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, \ldots, u$ on a

$$P\{Y_k = u, Z_{S_{k-1}} \in A_1, \ldots, Z_{S_k-1} \in A_u\} = P\{Y_l = u, Z_{S_{l-1}} \in A_1, \ldots, Z_{S_l-1} \in A_u\}.$$

Remarque 2.1 a) On peut construire une famille croissante de tribus $\mathcal{A}_n$, $n \geq 1$, telles que $\sigma(\cdots, Z_n) \subset \mathcal{A}_n, n \geq 1$ et les S_n sont des temps d'arrêt adaptés aux $\mathcal{A}_n$. Dans notre cas, l'inclusion précédente serait stricte car $\mathcal{A}_n$ comporterait $\sigma(\cdots, Z_n)$ et des facteurs indépendants qui eux seuls rentrent dans la construction des S_n.
Par conséquent, l'introduction de ce formalisme n'apporterait rien car seules les propriétés 1) et 2) sont utiles.
Remarque 2.2

a) Les conditions 1) et 2) sont exprimées dans [Asmussen 1987] sous la forme "il existe un processus $S_0, S_1, \ldots$ constituant les instants d'arrivée d'un processus de renouvellement tel que les cycles $C_k = \{Z_t; S_{k-1} \leq t < S_k\}$ sont i.i.d."

b) On voit que sous ces conditions $\{S_n, n \geq 0\}$ constitue les instants d'arrivée d'un processus de renouvellement.

   En effet 1) entraîne que les v.a. $\{Y_k, k \geq 1\}$ sont indépendantes et 2) qu'elles sont identiquement distribuées.

Définition 2.2 On dit que $\{Z_n, n \geq 0\}$ est 1-dépendant régénératif s'il existe un processus de renouvellement $\{S_n, n \geq 0\}$, ($S_0 = 0$) vérifiant les conditions 1') et 2) où 1') est la condition

1') Quels que soient les entiers $n \geq 2$, $k \geq 1$, les tribus $\sigma(B_1, \ldots, B_k)$ et $\sigma(B_{k+2}, \ldots, B_{k+n})$ sont indépendantes.

Les v.a. $\{S_n, n \geq 0\}$ sont appelées les **instants de régénération** du processus $\{Z_n, n \geq 0\}$.

Soit F un sous ensemble mesurable de $\mathbb{R}$ tel que $\lambda(F) > 0$ et $\mathcal{F}$ la tribu trace de la tribu borélienne sur F.
Soit $\{X_n, n \geq 0\}$ une chaîne de Markov homogène à valeurs dans F, de probabilité de transition telle que pour tout $x \in F$, $P(x, .)$ admet par rapport à la mesure de Lebesgue λ sur F, une densité de transition $f(x, .)$. On désigne alors par $f^{(r)}(x, .)$ la densité par rapport à λ de $P^{(r)}(x, .)$. On déduit de (2.1) que pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on a

$$f^{(r)}(x, y) = \int_F f^{(r-1)}(x, z) f(z, y)\, dz. \tag{2.2}$$

Soit H_r l'hypothèse suivante :
$\mathbf{H_r}$) Il existe R appartenant à $\mathcal{F}$ et une loi de probabilité Λ sur $\mathcal{F}$ telle que :

(i) R est récurrent pour $\{X_n, n \geq 0\}$. Ceci est équivalent à :
Pour tout $x \in F$,
$$P_x(\inf\{t \geq 1\ :\ X_t \in R\} < \infty) = 1.$$

(ii) Il existe $r \in \mathbb{N}^*$ et $\epsilon \in (0, 1)$ tels que pour tout $x \in R$, pour tout $B \in \mathcal{F}$,
$$P^{(r)}(x, B) \geq \epsilon \Lambda(B).$$

(iii) La loi de la v.a. X_0 est Λ.

(Tout ensemble satisfaisant comme R à $H_r(i$ et $ii)$ est appelé **ensemble régénératif)**

Remarque 2.3 On peut montrer que l'hypothèse $H_r(i)$ est équivalente à :
$$\forall x \in F,\ P_x\{X_n \in R \text{ i.s.}\} = 1.$$

On montre dans cette partie le

Théorème 2.1 *Sous l'hypothèse H_r, on peut construire simultanément sur l'espace de probabilité sur lequel est défini le processus $\{X_n, n \geq 0\}$, une chaîne de Markov $\{Z_n, n \geq 0\}$ appelée* **Processus régénératif associé à** *$\{X_n, n \geq 0\}$, à valeurs dans F, de même loi que $\{X_n, n \geq 0\}$ et un processus $\{S_k, k \geq 1\}$ constituant les temps d'arrivée d'un processus de renouvellement tels que :*

- *Lorsque $r = 1$, $\{Z_n, n \geq 0\}$ est régénératif.*

- *Lorsque* $r > 1$, $\{Z_n, n \geq 0\}$ *est 1-dépendant régénératif.*

- *Les v.a.* $\{S_k, k \geq 1\}$ *sont les instants de régénération du processus* $\{Z_n, n \geq 0\}$.

- *Pour tout* $n \geq 0$, $\{Z_{S_n+j}, j \geq 0\}$ *est une chaîne de Markov de loi initiale* Λ *et de probabilité de transition* $P(.,.)$ *identique à celle de* $\{X_n, n \geq 0\}$.

On déduit du théorème 2.1 que si on pose $\zeta_0 = \max(Z_j, 0 \leq j < S_0)$ et pour $i \geq 1$, $\zeta_i = \max(Z_j, S_{i-1} \leq j < S_i)$ alors $\{\zeta_i, i \geq 1\}$ est un processus stationnaire 1-dépendant lorsque $r > 1$ et les v.a. $\{\zeta_i, i \geq 1\}$ sont i.i.d. lorsque $r = 1$.

2.2 Construction du processus $(\{Z_n, n \geq 0\}, \{S_n, n \geq 1\})$

Ce procédé de construction est celui succintement décrit dans Asmussen(1978), p.150, de la manière suivante :

On construit le processus $(\{Z_n\}, \{S_n\})$ par étapes de sorte qu'il y ait régénération r pas après une visite dans R avec une probabilité ϵ. Pour cela, si $n \leq \tau(R) : = \inf\{t \geq 1; X_t \in R\}$, on pose $Z_n = X_n$; puis on construit $Z_{\tau(R)+r}$ de sorte que sa loi conditionnelle sachant $Z_{\tau(R)} = X_{\tau(R)} = x_0$ soit, avec la probabilité $1-\epsilon$, $\frac{P^{(r)}(x_0,.)-\epsilon\Lambda(.)}{1-\epsilon}$ et avec la probabilité ϵ, elle soit indépendante de $Z_0, \dots, Z_{\tau(R)}$ et sa loi soit Λ. Dans ce dernier cas, il y a régénération en $\tau(R)+r$. Lorsque $r > 1$, on construit ensuite $Z_{\tau(R)+1}, \dots, Z_{\tau(R)+r-1}$ de manière que sa loi soit la même que celle de $X_1, \dots, X_{r-1}$ sachant $X_0 = Z_0$ et $X_r = Z_r$. Puis on considère une chaîne de Markov $\{X_n^2, n \geq 0\}$ de probabilité de transition identique à celle de $\{X_n, n \geq 0\}$, ne dépendant des v.a. construites précédemment qu'à travers $X_0^2 = Z_{\tau(R)+r}$. On pose $\tau^2(R) = \inf\{t \geq 1; X_t^2 \in R\}$ et on repète la procédure, etc... Les diverses étapes de la construction peuvent être détaillées comme suit :

Première étape de construction. Construction de $\{Z_j, 0 \leq j \leq \tau^1(R) + r\}$.

Soit $\{Q_n, n \geq 1\}$ une suite de v.a. de Bernoulli i.i.d., indépendante du processus $\{X_n, n \geq 0\}$, telle que :

$$P\{Q_n = 1\} = \epsilon.$$

Pour tout n inférieur à $\tau^1(R)$, posons $Z_n = X_n$.
Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $\{\bar{Q}_j = \bar{q}_j\}$ l'événement $\{Q_1 = q_1, \dots, Q_j = q_j\}$ avec $q_i \in \{0,1\}$, $i = 1 \dots j$.
Soit $V_{1,1}$ une v.a. définie sur le même espace de probabilité que $\{X_n, n \geq 0\}$, indépendante de Q_1, de loi de probabilité définie de sorte que pour tout $A \in \mathcal{F}$,

$$\begin{aligned} P\{V_{1,1} \in A, \tau^1(R) = p \mid Z_0 = z_0, \dots, Z_p = z_p\} \\ = \Lambda(A) P\{\tau^1(R) = p \mid Z_0 = z_0, \dots, Z_p = z_p\} \end{aligned}$$

et $V_{2,1}$ une v.a. définie sur le même espace de probabilité que $\{X_n, n \geq 0\}$, indépendante de $V_{1,1}$ et Q_1, de loi définie de sorte que pour tout $A \in \mathcal{F}$,

$$\begin{aligned} P\{V_{2,1} \in A, \tau^1(R) = p \mid Z_0 = z_0, \dots, Z_p = z_p\} \\ = \frac{P^{(r)}(z_p, .) - \epsilon\Lambda(.)}{1-\epsilon} P\{\tau^1(R) = p \mid Z_0 = z_0, \dots, Z_p = z_p\}. \end{aligned}$$

Posons

$$Z_{\tau^1(R)+r} = Q_1 V_{1,1} + (1-Q_1)V_{2,1}.$$

Lorsque $r > 1$, on définit la probabilité de l'événement

$$\{Z_{p+1} \in A_1, \ldots, Z_{p+r-1} \in A_{r-1}, \tau^1(R) = p\},\ A_i \in \mathcal{F},\ i \leq r-1$$

de sorte que :

$$\begin{aligned}
&P\{Z_{p+1} \in A_1, \ldots, Z_{p+r-1} \in A_{r-1}, \tau^1(R) = p \mid Z_0 = z_0, \ldots, Z_p = z_p, Z_{p+r} = z_{p+r}, \bar{Q}_1 = \bar{q}_1\} \\
&\quad = \left(\int_{A_1} dz_1 \cdots \int_{A_{r-1}} dz_{r-1} \frac{f(z_p, z_1) \cdots f(z_{r-1}, z_{p+r})}{f^{(r)}(z_p, z_{p+r})} \right) \times \\
&\qquad P\{\tau^1(R) = p \mid Z_0 = z_0, \ldots, Z_p = z_p\}.
\end{aligned}$$

Ceci achève la première étape de construction.

Ième étape de construction. Pour passer de la (i-1) ième étape à la ième, supposons $\{Z_j, 0 \leq j \leq t_{i-1}\}$ construites.

Soit $\{X_n^i, n \geq 0\}$ une chaîne de Markov définie sur le même espace de probabilité que $\{X_n, n \geq 0\}$, de probabilité de transition identique à celle du processus $\{X_n, n \geq 0\}$, ne dépendant des v.a. précédemment construites qu'à travers

$$Z_{t_{i-1}} = X_0^i.$$

Soit

$$\tau^i(R) = \inf\{t \geq 1 : X_t^i \in R\}.$$

Pour tout $1 \leq n \leq \tau^i(R)$, posons

$$Z_{t_{i-1}+n} = X_n^i.$$

Soit $V_{1,i}$ une v.a. définie sur le même espace de probabilité que $\{X_n, n \geq 0\}$, indépendante de Q_i, de loi définie de sorte que pour tout $A \in \mathcal{F}$,

$$\begin{aligned}
&P\{V_{1,i} \in A, \tau^i(R) = p, t_{i-1} = t \mid Z_0 = z_0, \ldots, Z_{t+p} = z_{t+p}, \bar{Q}_{i-1} = \bar{q}_{i-1}\} \\
&\quad = \Lambda(A) P\{\tau^i(R) = p, t_{i-1} = t \mid Z_0 = z_0, \ldots, Z_{t+p} = z_{t+p}, \bar{Q}_{i-1} = \bar{q}_{i-1}\}
\end{aligned}$$

et $V_{2,i}$ une v.a. définie sur le même espace probabilité que $\{X_n, n \geq 0\}$, indépendante de $V_{1,i}$ et Q_i, de loi définie de sorte que pour tout $A \in \mathcal{F}$,

$$\begin{aligned}
&P\{V_{2,i} \in A, \tau^i(R) = p, t_{i-1} = t \mid Z_0 = z_0, \ldots, Z_{t+p} = z_{t+p}, \bar{Q}_{i-1} = \bar{q}_{i-1}\} \\
&\quad = \left(\frac{P^{(r)}(z_{t+p}, A) - \epsilon\Lambda(A)}{1-\epsilon} \right) P\{\tau^i(R) = p, t_{i-1} = t \mid Z_0 = z_0, \ldots, Z_{t+p} = z_{t+p}, \\
&\qquad \bar{Q}_{i-1} = \bar{q}_{i-1}\}.
\end{aligned}$$

Posons

$$Z_{t_{i-1}+\tau^i(R)+r} = Q_i V_{1,i} + (1-Q_i)V_{2,i}.$$

Lorsque $r > 1$, on définit la probabilité de l'événement

$$\{Z_{t+k+1} \in A_1, \ldots, Z_{t+k+r-1} \in A_{r-1}, t_{i-1} = t, \tau^i(R) = k\},\ A_j \in \mathcal{F},\ 1 \leq j \leq r-1$$

de sorte que :

$$\begin{aligned}
&P\{Z_{t+k+1} \in A_1, \ldots, Z_{t+k+r-1} \in A_{r-1}, t_{i-1} = t, \tau^i(R) = k \mid Z_0 = z_0, \ldots, Z_{t+k} = z_{t+k},\\
&Z_{t+k+r} = z_{t+k+r}, \bar{Q}_i = \bar{q}_i\}\\
&\qquad = \left(\int_{A_1} dz_1 \cdots \int_{A_{r-1}} dz_{r-1} \frac{f(z_{t+k}, z_1)\cdots f(z_{r-1}, z_{t+k+r})}{f^{(r)}(z_{t+k}, z_{t+k+r})}\right) \times\\
&\qquad P\{t_{i-1} = t, \tau^i(R) = k \mid Z_0 = z_0, \ldots, Z_{t+k} = z_{t+k}, \bar{Q}_i = \bar{q}_i\}.
\end{aligned}$$

Ceci achève la ième étape de construction.

Définition de $\{S_n, n \geq 1\}$

Soit

- $\tau_i(R, 0) = -r$
- $\tau_i(R, 1) = \inf\{k > 0 : Z_{k+i} \in R\}$
- $\tau_i(R, j) = \inf\{k > \tau_i(R, j-1) + r : Z_{k+i} \in R\},\ \ j > 1$
- $k_1 = \inf\{j > 0 : Q_j = 1\}$ et $k_n = \inf\{k > k_{n-1} : Q_k = 1\},\ \ n > 1.$

Il est clair que lors de la ième étape, on construit $\{Z_j, t_{i-1} < j \leq t_i\}$ où

$$t_i = \tau_0(R, i) + r,\ i \geq 1.$$

La définition de la suite $\{S_n, n \geq 1\}$ est donnée par :
$Y_1 = \tau_0(R, k_1) + r$, $\quad S_1 = Y_1$ et

$Y_j = \tau_{S_{j-1}}(R, k_j - k_{j-1}) + r$, $S_j = \sum_{i=1}^{j} Y_j = \tau_0(R, k_j) + r,\ \ j > 1.$
Pour tout $k, n \in \mathbb{N}^*$, l'évènement $\{S_n = k\}$ dépend de $\{Z_i, 0 \leq i \leq k\}$ et de

$\{Q_i, 1 \leq i \leq k\}$. Par conséquent les v.a. $\{S_n, n \geq 1\}$ ne sont pas des temps d'arrêt adaptés à $\sigma(Z_0, \ldots, Z_n, n \geq 1)$.

La vérification que la loi du processus $\{Z_n, n \geq 0\}$ ainsi construit est identique à celle de $\{X_n, n \geq 0\}$ est faite dans l'annexe.

On montre également dans l'annexe les propriétés, utiles dans la suite, suivantes :

Proposition 2.2 *Quels que soient les entiers $j \geq 1$, $r < s_1 < s_2 < \ldots < s_j$, $s_i - s_{i-1} > r$, $i = 1, \ldots, j$, $(s_0 = 0)$ et $y_{j+1} > r$, pour tout $A_l \in \mathcal{F}$, $0 \leq l \leq s_j - r$ et $C_m \in \mathcal{F}$, $0 \leq m \leq y_{j+1}$, on a*

$$\begin{aligned} D &= P\{Z_0 \in A_0, \ldots, Z_{s_j - r} \in A_{s_j - r}, S_1 = s_1, \ldots S_j = s_j, \\ &\quad Z_{s_j} \in C_0, \ldots, Z_{s_j + y_{j+1} - 1} \in C_{y_{j+1}-1}, Y_{j+1} = y_{j+1}\} \\ &= P\{Z_0 \in A_0, \ldots, Z_{s_j - r} \in A_{s_j - r}, S_1 = s_1, \ldots, S_j = s_j\} \times \\ &\quad P\{Z_0 \in C_0, \ldots, Z_{y_{j+1}-1} \in C_{y_{j+1}-1}, Y_1 = y_{j+1}\}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Pour tout $x \in F$,

$$P_x\{S_n < \infty\} = 1. \tag{2.4}$$

On déduit aisément de la proposition 2.2 et de (2.4) les corollaires suivants :

Corollaire 2.1 *Quels que soient les entiers naturels $n \in \mathbb{N}^*$ et $i > r$, pour tout $A_j \in \mathcal{F}$, $0 \leq j < i$, on a*

$$P\{Z_{S_n} \in A_0, \ldots, Z_{S_n + i - 1} \in A_{i-1}, Y_{n+1} = i\} = P\{Z_0 \in A_0, \ldots, Z_{i-1} \in A_{i-1}, Y_1 = i\}.$$

Corollaire 2.2 *Les v.a. $\{Y_n, n \geq 1\}$ sont i.i.d.*

Corollaire 2.3 *Lorsque $r > 1$, pour tous $n, j \in \mathbb{N}^*$, les tribus $\sigma(B_k, 1 \leq k \leq n)$ et $\sigma(B_{n+p}, 2 \leq p \leq j)$ sont indépendantes. de la définition 2.1 sont indépendantes.*

Preuve : On déduit de (2.3) que :

$$P\{B_1, \ldots, B_n, \{Y_{n+1} = y_{n+1}\}, B_{n+2}\} = P\{B_1, \ldots, B_n, \{Y_{n+1} = y_{n+1}\}\} P\{B_{n+2}\}.$$

Les tribus $\sigma(B_1, \ldots, B_n, \{Y_{n+1} = y_{n+1}\})$ et $\sigma(B_{n+2})$ étant indépendantes, les tribus $\sigma(B_1, \ldots, B_n)$ et $\sigma(B_{n+p}, 2 \leq p \leq j)$ le sont également car $\sigma(B_{n+p}, 2 \leq p \leq j)$, ne dépend de $\sigma(B_1, \ldots, B_n, \{Y_{n+1} = y_{n+1}\})$ qu'à travers B_{n+2}. ∎

Corollaire 2.4 *Lorsque $r = 1$, les événements $\{B_n, n \geq 1\}$ sont indépendants.*

Remarque 2.4 Lorsque la loi de la v.a. X_0 n'est pas Λ, le procédé de construction de $(\{Z_n\}, \{S_n\})$ est encore valable . On désigne alors respectivement par C_0 et Y_0 le premier cycle et la v.a. dont la valeur est le premier instant de régénération et on a :

- Les tribus $\sigma(B_k, k \geq 1)$ ont les mêmes propriétés que lorsque la loi de X_0 est Λ.
- Pour tout $k \geq 1$, pour tout $y_0 \in \mathbb{N}^*$, pour tout $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, \ldots, y_0$, les événements $B_0 = \{Y_0 = y_0, Z_0 \in A_1, \ldots, Z_{y_0-1} \in A_{y_0}\}$ et $\{Y_0 = y_0\}$ ont en général une probabilité différente respectivement de $\{Y_k = y_0, Z_{S_{k-1}} \in A_1, \ldots, Z_{S_k-1} \in A_{y_0}\}$ et $\{Y_k = y_0\}$, $k \geq 1$.
  Lorsque $r = 1$, les tribus $\sigma(B_0)$ et $\sigma(B_k, k \geq 1)$ sont indépendantes.
  Lorsque $r > 1$, les tribus $\sigma(B_0)$ et $\sigma(B_k, k \geq 2)$ sont indépendantes.

Corollaire 2.5 *Soit $\zeta_0 = \max(Z_j, 0 \leq j < S_0)$ et $\zeta_i = \max(Z_j, S_{i-1} \leq j < S_i)$. $\{\zeta_i, i \geq 1\}$ est un processus stationnaire 1-dépendant lorsque $r > 1$, et indépendant lorsque $r = 1$.*

Proposition 2.3 *Pour tout $n \geq 0$, le processus $\{Z_{S_n+j}, j \geq 0\}$ est une chaîne de Markov de loi initiale Λ, et de probabilité de transition $P(.,.)$ identique à celle de $\{X_n, n \geq 0\}$.*

Preuve : Le procédé de construction du processus $\{Z_{S_n+j}, j \geq 0\}$ est identique à celui du processus $\{Z_n, n \geq 0\}$, lorsqu'on remplace Z_0 par $Z_{S_n} = V_{1,k_n}$. La v.a. k_n étant indépendante de la suite de v.a. i.i.d. de loi Λ $\{V_{1,j}, j \geq 1\}$, on vérifie aisément que la loi de la v.a. $Z_{S_n} = V_{1,k_n}$ est Λ. Le processus $\{Z_{S_n+j}, j \geq 0\}$ est donc une chaîne de Markov de loi initiale Λ et de probabilité de transition $P(.,.)$. ∎

On montre dans l'annexe que si $\{X_n, n \geq 0\}$ est une chaîne de Markov de densité de transition $f(.,.)$ par rapport à la mesure de Lebesgue vérifiant l'hypothèse suivante :

$$\forall x \in F,\ \forall A \in \mathcal{F} \text{ tel que } \lambda(A) > 0, \sum_{n=1}^{\infty} P^{(n)}(x, A) = \infty$$

alors, $\{X_n, n \geq 0\}$ est régénérative.

Chapitre 3

Etude de l'ergodicité et de certaines propriétés de la loi de probabilité de la classe de processus de Markov considérée

3.1 Introduction

Une loi de probabilité π est stationnaire pour $\{X_n, n \geq 0\}$ si pour tout A appartenant à $\mathcal{F}$ on a

$$\pi(A) = \int P(x, A)\pi(dx).$$

On vérifie que si la loi de probabilité stationnaire π existe, et si $P(x, dy) = f(x, y)dy$, alors elle admet par rapport à λ une densité

$$f(y) = \int_F f(x, y)\pi(dx) \quad \lambda \text{ p.s.}$$

On montre facilement que $\{X_n, n \geq 0\}$ est strictement stationnaire sous P_π.
Supposons que $\{X_n, n \geq 0\}$ est à valeurs dans un intervalle (a, b), $-\infty \leq a < b \leq \infty$, muni de la tribu trace de la tribu borélienne sur (a, b) qu'on note $\mathcal{B}(a, b)$. Soit *H1* l'hypothèse suivante :
H1) Il existe $s \in \mathbb{N}^*$, une densité de probabilité (par rapport à λ) $g(y)$ définie sur (a, b), et deux constantes $\eta \in (0, 1)$ et $M > 1$, telles que pour tout x, $y \in (a, b)$,

$$\eta g(y) \leq f^{(s)}(x, y) \leq M g(y)$$

On démontre d'abord le

Théorème 3.1 *Sous H1, il existe une loi de probabilité stationnaire unique π, de densité $f(y)$ par rapport à λ, telle que pour tout x, $y \in (a, b)$, pour tout entier $n \geq s$, on a*

$$\left|f^{(n)}(x, y) - f(y)\right| \leq A_0 \rho^n f(y) \tag{3.1}$$

avec $A_0 = 2(\frac{M}{(1-\eta)\eta})^2$ *et* $\rho = (1 - \eta)^{\frac{1}{s}}$.

Comme conséquence du théorème 3.1, dans la section 3.3, on montre que pour tout $r \geq r_0 = \inf\{n \in \mathbb{N}^* : A_0\rho^n < 1\}$ et $\epsilon \in (0, 1 - A_0\rho^r)$, il est possible d'adapter le procédé de construction du théorème 2.1 pour construire simultanément une chaîne de Markov stationnaire $\{Z_n, n \geq 0\}$ et un processus $\{S_n, n \geq 1\}$ constituant les temps d'arrivée d'un processus de renouvellement tels que :

1) $\{Z_n, n \geq 0\}$ est régénérative de densité de transition $f(x, y)$.

2) Les v.a. $\{S_k, k \geq 1\}$ sont les instants de régénérations du processus $\{Z_n, n \geq 0\}$.

3) La suite de v.a. $\{Y_n = S_n - S_{n-1}, n \geq 1\}$, $(S_0 = 0)$, est i.i.d., à valeurs dans $r\mathbb{N}^*$, de loi de probabilité définie par :

$$P\{Y_n = kr\} = P\{Y_1 = kr\} = (1-\epsilon)^{k-1}\epsilon, \quad k \in \mathbb{N}^*. \tag{3.2}$$

Remarques Si on remplace *H1* par l'hypothèse plus forte *H2* suivante :
H2) Il existe $s \in \mathbb{N}^*$, une densité de probabilité (par rapport à λ) $g(y)$ définie sur (a,b), et deux constantes $\eta \in (0,1)$ et $M > 1$, telles que pour tout x, $y \in (a,b)$,

$$\eta g(y) \leq f^{(s)}(x,y) \text{ et } f(x,y) \leq Mg(y),$$

on montre que celle-ci est équivalente à la propriété :
Pour tout x, $y \in (a,b)$ et $n \geq 1$, on a

$$\left|f^{(n)}(x,y) - f(y)\right| \leq A\rho^n f(y) \tag{3.3}$$

avec $A = \max(2(\frac{M}{(1-\eta)\eta})^2, \frac{M}{\eta\rho^{s-1}} - \frac{1}{\rho^{s-1}}, \frac{1}{\rho^{s-1}})$.

Soit $\{U_n, n \geq 0\}$ une suite de v.a. définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. Pour tout $m, n \in \mathbb{N}, m \leq n$, soit $\mathcal{M}_m^n$ la tribu engendrée par $\{U_i, m \leq i \leq n\}$ et $\mathcal{M}_m^\infty$ la tribu engendrée par $\{U_i, i \geq n\}$. On dit que $\{U_n, n \geq 0\}$ est ψ-mélangeante s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et une fonction décroissante f, définie pour les entiers $n \geq n_0$, telle que $\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$ et, pour tout $n \geq n_0$, $A \in \mathcal{M}_0^m$ et $B \in \mathcal{M}_{m+n}^\infty$, on a

$$|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq f(n)P(A)P(B).$$

On montre (voir Blum (1963)) qu'une chaîne de Markov $\{U_n, n \geq 0\}$ est ψ-mélangeante si pour tout $n \geq n_0$, $m \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{M}_m^m$ et $B \in \mathcal{M}_{m+n}^{m+n}$, on a

$$|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq f(n)P(A)P(B).$$

Si la chaîne $\{U_n, n \geq 0\}$ est stationnaire et ψ-mélangeante, on montre (voir Blum (1963)) qu'il existe deux constantes $C > 0$ et $0 \leq \gamma < 1$, telles que pour tout $n \geq n_0$, $A \in \mathcal{M}_0^m$ et $B \in \mathcal{M}_{m+n}^\infty$, on a

$$|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq C\gamma^n P(A)P(B).$$

On déduit facilement du théorème 3.1 que toute chaîne de Markov stationnaire vérifiant *H1* est ψ-mélangeante.

Dans la section 3.4, on donne des exemples de processus vérifiant *H2* et par conséquent (3.3).

Dans la section 3.5, on estime les densités marginales et bivariés avant et entre deux instants de régénérations, d'une chaîne stationnaire vérifiant (3.3). Les résultats de ces estimations sont utilisés dans le chapitre suivant.

Pour alléger les formules, on suppose que le réel ϵ choisi pour construire $\{Z_n, n \geq 0\}$ est $\leq \frac{1}{2}$, que r satisfait

$$r \geq r_1 = \inf\left\{n \in \mathbb{N} : \frac{A\rho^n}{1-\epsilon} < 1\right\}$$

et on démontre la proposition suivante :
Pour tout k et t appartenant à $\mathbb{N}^*$ fixés, désignons respectivement par $g^{'}(z_i)$ et $g^{'}(z_i, z_j)$, $0 \leq i < j \leq kr$, la densité conditionnelle par rapport à la mesure de Lebesgue de la v.a. Z_i et celle du couple de v.a. (Z_i, Z_j) sachant $\{S_1 = kr\}$. De manière analogue, soient $g^{''}(z_i)$ et $g^{''}(z_i, z_j)$, $0 \leq i < j \leq (k+t)r$, respectivement la densité conditionnelle par rapport à la mesure de Lebesgue de la v.a. Z_i et celle du couple (Z_i, Z_j) sachant $\{S_1 = kr, S_2 - S_1 = tr\}$. On a alors la

Proposition 3.2 *Pour tout $s \in \{0, \ldots, kr\}$, on a*

$$g^{'}(z_s) = \left(1 + O\left(\frac{A\rho^r}{1 - A\rho^r}\right)\right) f(z_s) \tag{3.4}$$

$$g^{''}(z_s) = \left(1 + O\left(\frac{A\rho^r}{1 - A\rho^r}\right)\right) f(z_s) \tag{3.5}$$

s et $s^{'}$ étant deux entiers naturels tels que $0 \leq s < s^{'} \leq kr$, on a

$$g^{'}(z_s, z_{s^{'}}) \leq 2K\left(1 + O\left(\frac{A\rho^r}{1 - A\rho^r}\right)\right)^2 f(z_s) f(z_{s^{'}}) \tag{3.6}$$

$$g^{''}(z_s, z_{s^{'}}) \leq 2K\left(1 + O\left(\frac{A\rho^r}{1 - A\rho^r}\right)\right)^2 f(z_s) f(z_{s^{'}}) \tag{3.7}$$

où $K = 1 + A\rho$ et $|O(x)| \leq |x|$.

3.2 Démonstration du théorème 3.1.

Montrons que *H1* est équivalente à l'hypothèse H' suivante :
H')Il existe une unique loi de probabilité stationnaire π, de densité $f(y)$ par rapport à λ, telle que pour tout x, $y \in (a,b)$, pour tout entier $n \geq s$,

$$\left|f^{(n)}(x,y) - f(y)\right| \leq A_0 \rho^n f(y). \tag{3.8}$$

avec $A_0 = 2(\frac{M}{(1-\eta)\eta})^2$ et $\rho = (1-\eta)^{\frac{1}{s}}$.

On vérifie aisément que H' implique *H1* avec $g = f$.
Montrons que *H1* implique H'.
Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et $y \in (a,b)$, posons

$$m^{(r)}(y) = \inf_{x \in (a,b)} f^{(r)}(x,y) \quad \text{et} \quad M^{(r)}(y) = \sup_{x \in (a,b)} f^{(r)}(x,y).$$

D'après (2.2) p.9, les suites $(m^{(r)}(y))_r$ et $M^{(r)}(y)_r$ sont respectivement croissantes et décroissantes. D'où on déduit que pour tout $i,j \in \mathbb{N}^*$ et $y \in (a,b)$, on a

$$m^{(i)}(y) \leq M^{(j)}(y).$$

Pour tout $x, y \in (a,b)$ fixés, pour tout $u \in (a,b)$, soit $\psi_{x,y}(u) = f^{(m)}(x,u) - f^{(m)}(y,u)$. Posons

$$S^+_{x,y} = \{u \in (a,b) : \psi_{x,y}(u) \geq 0\} \quad \text{et} \quad S^-_{x,y} = \{u \in (a,b) : \psi_{x,y}(u) < 0\}.$$

On a alors

$$0 \leq \int_{S^+_{x,y}} \psi_{x,y}(u)\, du = 1 - \int_{S^-_{x,y}} f^{(s)}(x,u)\, du - \int_{S^+_{x,y}} f^{(s)}(y,u)\, du$$

La combinaison de l'égalité précédente et de la première inégalité de *H1* entraîne que :

$$0 \leq \int_{S^+_{x,y}} \psi_{x,y}(u)\, du \leq 1 - \eta \int_{(a,b)} g(u)\, du = 1 - \eta. \tag{3.9}$$

D'après *H1*, pour tout $u \in (a,b)$, on a

$$0 \leq M^{(s)}(u) - m^{(s)}(u) \leq M^{(s)}(u) \leq Mg(u).$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $u \in (a,b)$, on a

$$\begin{aligned}
M^{((k+1)s)}(u) - m^{((k+1)s)}(u) &= \sup_{x,y\in(a,b)} \left[f^{((k+1)s)}(x,u) - f^{((k+1)s)}(y,u)\right] \\
&= \sup_{x,y\in(a,b)} \left(\int_{(a,b)} f^{(ks)}(z,u)\Big(f^{(s)}(x,z) - f^{(s)}(y,z)\Big)\, dz\right) \\
&= \sup_{x,y\in(a,b)} \left(\int_{S^+_{x,y}} f^{(ks)}(z,u)\, \psi_{x,y}(z)\, dz + \int_{S^-_{x,y}} f^{(ks)}(z,u)\psi_{x,y}(z)\, dz\right) \\
&\leq \sup_{x,y\in(a,b)} \left(\int_{S^+_{x,y}} M^{(ks)}(u)\psi_{x,y}(z)\, dz + \int_{S^-_{x,y}} m^{(ks)}(u)\psi_{x,y}(z)\, dz\right)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

car $\psi_{x,y}(z) \geq 0$ sur $S^+_{x,y}$ et $\psi_{x,y}(z) < 0$ sur $S^-_{x,y}$.
Observons que $\int_{S^+_{x,y}} \psi(z)\, dz = -\int_{S^-_{x,y}} \psi(z)\, dz$. Ceci combiné à (3.10) implique que pour tout $u \in (a,b)$, on a

$$M^{((k+1)s)}(u) - m^{((k+1)s)}(u) \leq (M^{(ks)}(u) - m^{(ks)}(u)) \sup_{x,y\in(a,b)} \left(\int_{S^+_{x,y}} \psi_{x,y}(u)\, du\right). \tag{3.11}$$

On déduit de (3.9) et (3.11) que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $u \in (a,b)$, on a

$$M^{(ks)}(u) - m^{(ks)}(u) \leq (1-\eta)^{k-1} M g(u). \tag{3.12}$$

Lorsque $s > 1$, pour tout $i \in \{1, \ldots, s-1\}$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $u \in (a,b)$, on a

$$\begin{aligned}
M^{(ks+i)}(u) - m^{(ks+i)}(u) &= \sup_{x,y\in(a,b)} \Big(f^{(ks+i)}(x,u) - f^{(ks+i)}(y,u)\Big) \\
&\leq \int_{(a,b)} f^{(i)}(z,u)(M^{(ks)}(z) - m^{(ks)}(z))\, dz \\
&\leq M(1-\eta)^{k-1} \int_{(a,b)} f^{(i)}(z,u) g(z)\, dz \\
&\leq M(1-\eta)^{k-1} \int_{(a,b)} f^{(i)}(z,u) \frac{f^{(s)}(x,z)}{\eta}\, dz \\
&= \frac{M}{\eta}(1-\eta)^{k-1} f^{(i+s)}(x,u) \leq \frac{M^2}{\eta}(1-\eta)^{k-1} g(u).
\end{aligned}$$

Il en résulte que pour tout $n \geq s$, on a

$$M^{(n)}(u) - m^{(n)}(u) \leq C(1-\eta)^{E(\frac{n}{s})} g(u), \; C = \frac{M^2}{\eta(1-\eta)}. \tag{3.13}$$

Les suites $(M^{(n)}(u))_n$ et $(m^{(n)}(u))_n$ sont donc adjacentes, telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x,\, u \in (a,b)$, on a

$$m^{(n)}(u) \leq f^{(n)}(x,u) \leq M^{(n)}(u). \tag{3.14}$$

Par conséquent, leur limite commune $f_1(u)$ coincide avec $\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x,u)$. Il est clair que $f_1(u) \geq 0$, $\int_{(a,b)} f_1(u)\, du = 1$ et $\eta g(u) \leq f_1(u) \leq M g(u)$. Observons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x,\, u \in (a,b)$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} f^{(m+n)}(x,u) &= f_1(u) = \lim_{m\to\infty} \int_{(a,b)} f^{(m)}(x,z) f^{(n)}(z,u)\, dz \\ &= \int_{(a,b)} f_1(z) f^{(n)}(z,u)\, dz = f(u). \end{aligned}$$

Ceci combiné à (3.13) et (3.14) entraîne que pour tout $n \geq s$ et $x,\, y \in (a,b)$, on a

$$\begin{aligned} \left|f^{(n)}(x,y) - f(y)\right| &\leq \left|f^{(n)}(x,y) - m^{(n)}(y)\right| + \left|f(y) - m^{(n)}(y)\right| \\ &\leq 2(M^{(n)}(y) - m^{(n)}(y)) \leq 2C(1-\eta)^{\frac{n}{s}-1} g(y) \end{aligned}$$

$g(y)$ étant inférieur à $\frac{f(y)}{\eta}$ on déduit (3.8). ∎

On adapte dans la partie suivante le procédé de construction décrit dans le chapitre précédent aux processus de Markov vérifiant *H1*.

3.3 Adaptation du procédé de construction à la classe de processus considérée

Soit $\{X_n, n \geq 0\}$ une chaîne de Markov stationnaire, à valeurs dans (a,b), dont la densité de transition vérifie *H1* et

$$r_0 = \inf\{n \in \mathbb{N} : A_0 \rho^n < 1\}.$$

On a alors la

Proposition 3.3 *Pour tout $r \geq r_0$ fixé, pour tout $\epsilon \in (0, 1-A_0\rho^{r_0})$, il est possible d'adapter le procédé de construction du théorème 2.1 pour construire un processus régénératif $(\{Z_n, n \geq 0\}, \{S_n, n \geq 1\})$ tel que :*

- *$\{Z_n, n \geq 0\}$ a même loi que $\{X_n, n \geq 0\}$ et comme instants de régénération $\{S_n, n \geq 1\}$.*
- *La suite de v.a. i.i.d $\{Y_n = S_n - S_{n-1}, n \geq 1\}$ $(S_0 = 0)$ est à valeurs dans $r\mathbb{N}^*$ et de loi de probabilité définie par :*

$$P\{Y_n = kr\} = P\{Y_1 = kr\} = (1-\epsilon)^{k-1}\epsilon, \quad n \geq 1, \quad k \geq 1.$$

Preuve : D'après le lemme précédent, pour tout x, $y \in (a, b)$, on a

$$f^{(r)}(x,y) \geq (1 - A_0\rho^r)f(y) \geq \epsilon f(y).$$

Ceci entraîne que tout $x \in R = (a,b)$, pour tout $A \in \mathcal{B}(a,b)$, on a

$$P^{(r)}(x, A) \geq \epsilon\pi(A).$$

On déduit alors du théorème 2.1 qu'il existe une chaîne de Markov régénérative $\{Z_n, n \geq 0\}$ de même loi que $\{X_n, n \geq 0\}$. D'après le théorème 3.5 p. 153 de Asmussen (1978), lorsqu'une chaîne de Markov régénérative $\{Z_n, n \geq 0\}$ admet une loi de probabilité stationnaire π, celle-ci est unique.
Construction de $(\{Z_n, n \geq 0\}, \{S_n, n \geq 1\})$. Soit $\{Q_n, n \geq 1\}$ une suite de v.a. de Bernoulli i.i.d, indépendante du processus $\{X_n, n \geq 0\}$, telle que :

$$P\{Q_n = 0\} = 1 - \epsilon.$$

Pour tout $j \geq 1$ désignons par $\{\bar{Q}_j = \bar{q}_j\}$ l'événement

$$\{Q_1 = q_1, \ldots, Q_j = q_j\} \text{ avec } q_i \in \{0,1\}, \quad i = 1 \ldots j.$$

Le processus $\{Z_n, n \geq 0\}$ se construit en plusieurs étapes pouvant être résumées de la manière suivante :
on pose $Z_0 = X_0$ puis on construit Z_r de sorte que sa loi conditionnelle sachant $Z_0 = X_0 = x_0$ soit $\frac{P^{(r)}(x_0,.) - \epsilon\Lambda(.)}{1-\epsilon}$ avec la probabilité $1 - \epsilon$, et avec la probabilité ϵ, elle soit indépendante de Z_0 et sa loi soit $\Lambda(.)$. Dans ce dernier cas, il y a régénération en Z_r. On construit ensuite $Z_1, \ldots, Z_{r-1}$ de sorte que $\{Z_n, 0 \leq n \leq r\}$ ait la loi souhaitée. Puis

on repète cette procédure. Les diverses étapes de la construction peuvent être détaillées comme suit :

Première étape de construction. On pose $Z_0 = X_0$.

Soit $V_{1,1}$ une v.a. à valeurs dans (a,b), indépendante Q_1, de loi de probabilité définie de sorte que pour tout $A \in \mathcal{B}(a,b)$,

$$P\{V_{1,1} \in A \mid Z_0 = z_0\} = \pi(A)$$

et $V_{2,1}$ une v.a. à valeurs dans (a,b), indépendante de $V_{1,1}$ et Q_1, de loi de probabilité définie de sorte que pour tout $A \in \mathcal{B}(a,b)$,

$$P\{V_{2,1} \in A \mid Z_0 = z_0\} = \int_A \frac{f^{(r)}(z_0,y) - \epsilon f(y)}{1-\epsilon}\, dy.$$

Posons

$$Z_r = Q_1 V_{1,1} + (1-Q_1)V_{2,1}.$$

Pour tout $A_i \in \mathcal{B}(a,b)$, $1 \leq i \leq r-1$, définissons la probabilité de l'événement $\{Z_1 \in A_1, \ldots, Z_{r-1} \in A_{r-1}\}$ de sorte que :

$$\begin{aligned} &P\{Z_1 \in A_1, \ldots, Z_{r-1} \in A_{r-1} \mid Z_0 = z_0, Z_r = z_r, \bar{Q}_1 = \bar{q}_1\} \\ &= \int_{A_1} dz_1 \ldots \int_{A_{r-1}} dz_{r-1} \frac{f(z_0,z_1)\cdots f(z_{r-1},z_r)}{f^{(r)}(z_0,z_r)}. \end{aligned}$$

Ceci achève la première étape de construction.

(k+1)ième étape de construction. Pour passer de la kème étape à la (k+1)ième, Supposons $Z_i, 0 \leq i \leq kr, k \geq 1$ construites.

Soit $V_{1,k+1}$ une v.a. à valeurs dans (a,b), indépendante de Q_{k+1}, de loi de probabilité définie de sorte que tout $A \in \mathcal{B}(a,b)$,

$$P\{V_{1,k+1} \in A \mid Z_0 = z_0, \ldots, Z_{kr} = z_{kr}, \bar{Q}_k = \bar{q}_k\} = \pi(A)$$

et $V_{2,k+1}$ une v.a. à valeurs dans (a,b), indépendante de $V_{1,k+1}$ et Q_{k+1}, de loi de probabilité définie de sorte que tout $A \in \mathcal{B}(a,b)$,

$$P\{V_{2,k+1} \in A \mid Z_0 = z_0, \ldots, Z_{kr} = z_{kr}, \bar{Q}_k = \bar{q}_k\} = \int_A \frac{f^{(r)}(z_{kr},y) - \epsilon f(y)}{1-\epsilon}\, dy.$$

Posons

$$Z_{(k+1)r} = Q_{k+1}V_{1,k+1} + (1 - Q_{k+1})V_{2,k+1}.$$

Pour tout $A_i \in \mathcal{B}(a,b)$, $1 \leq i \leq r-1$, définissons la probabilité de l'événement $\{Z_{kr+1} \in A_1, \ldots, Z_{(k+1)r-1} \in A_{r-1}\}$ de sorte que :

$$P\{Z_{kr+1} \in A_1, \ldots, Z_{(k+1)r-1} \in A_{r-1} \mid Z_0 = z_0, \ldots, Z_{kr} = z_{kr}, Z_{(k+1)r} = z_{(k+1)r},$$
$$\bar{Q}_{k+1} = \bar{q}_{k+1}\} = \int_{A_1} dz_1 \ldots \int_{A_{r-1}} dz_{r-1} \frac{f(z_{kr}, z_1) \cdots f(z_{r-1}, z_{(k+1)r})}{f^{(r)}(z_{kr}, z_{(k+1)r})}.$$

Ceci achève la construction.

Soit

$$k_1 = \inf\{i \geq 1 : Q_i = 1\} \text{ et } k_n = \inf\{j > k_{n-1} : Q_j = 1\},\ n > 1.$$

Le processus $\{S_n, n \geq 1\}$ est défini par $S_n = rk_n$.

On vérifie que les v.a. $\{Z_{S_n}, n \geq 1\}$ sont indépendantes de $S_1, \ldots, S_n, Z_0, \ldots, Z_{S_{n-1}}$, et qu'elles ont comme densité $f(y)$.

Les v.a. $\{S_n, n \geq 1\}$ sont des instants de régénération du processus $\{Z_n, n \geq 0\}$.

Si on pose

$$\{Y_n = S_n - S_{n-1}, n \geq 1\}$$

on vérifie que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$P\{Y_n = kr\} = P\{Y_1 = kr\} = \epsilon(1-\epsilon)^{k-1}.$$

On déduit alors

$$E(Y_n) = E(Y) = \frac{r}{\epsilon} \text{ et } \operatorname{Var}(Y_n) = \operatorname{Var}(Y) = \frac{r^2(1-\epsilon)}{\epsilon^2}.$$

■

Proposition 3.4 *L'hypothèse H2 est équivalente à la propriété :*
Pour tout $n \geq 1$, pour tout x, $y \in (a,b)$, on a

$$\left|f^{(n)}(x,y) - f(y)\right| \leq A\rho^n f(y) \tag{3.15}$$

avec $A = \max(2(\frac{M}{(1-\eta)\eta})^2, \frac{M}{\eta\rho^{s-1}} - \frac{1}{\rho^{s-1}}, \frac{1}{\rho^{s-1}})$ *et* $\rho = (1-\eta)^{\frac{1}{s}}$.

Preuve : On vérifie aisément que la propriété précédente implique *H2*.
Réciproquement, on déduit de la seconde inégalité de *H2* que pour tout x, $y \in (a,b)$,

$$0 \leq f^{(i)}(x,y) \leq \frac{M}{\eta} f(y).$$

Il vient

$$\left|f^{(i)}(x,y) - f(y)\right| \leq \max\left(\frac{M}{\eta\rho^{s-1}} - \frac{1}{\rho^{s-1}}, \frac{1}{\rho^{s-1}}\right)\rho^i f(y),\ i \in \{1,\ldots,s-1\},\ \rho \in (0,1). \tag{3.16}$$

De (3.8) et (3.16) on déduit (3.15) ■

On donne dans la partie suivante des exemples de processus vérifiant *H2*.

3.4 Exemples

Considérons un processus $\{X_n, n \geq 0\}$ défini récursivement par :

$$X_{n+1} = T(X_n) + \sigma(X_n)\mathcal{E}_{n+1}$$

où T désigne une fonction à valeurs dans un ensemble borné inclus dans $[-M_1, M_1]$ (M_1 étant une constante strictement positive), σ est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $\{\mathcal{E}_n, n \geq 1\}$ une suite de v.a. i.i.d., à valeurs dans $\mathbb{R}$, de densité G continue, strictement positive, et bornée.

On suppose qu'il existe deux constantes A et B strictement positives telles que :

$$A < \frac{1}{|\sigma(x)|} < B.$$

On peut alors effectuer la remarque suivante :
Remarque 3.1 $\frac{T(x)}{\sigma(x)}$ est à valeurs dans un ensemble borné qu'on suppose inclus dans $[-M_2, M_2]$. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a

$$P\{X_{n+1} \leq y \mid X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x\} = P\{T(x) + \sigma(x)\mathcal{E}_{n+1} \leq y\}$$

$\{X_n, n \geq 0\}$ est donc une chaîne de Markov de densité de transition

$$f(x,y) = \frac{1}{|\sigma(x)|} G\left(\frac{y - T(x)}{\sigma(x)}\right).$$

Exemple 3.1 Si $G(y) \sim C|y|^{-\alpha}$ $(|y| \to +\infty)$, $\alpha > 1$, $C > 0$, alors $\{X_n, n \geq 0\}$ vérifie *H2* avec $s = 1$.
La demonstration est faite dans l'annexe.
Exemple 3.2 Si σ est constante et $G(y) \sim C|y|^p \exp(-\alpha|y|^\gamma)$, $\alpha > 0$, $p \geq 0$, $C > 0$, $0 < \gamma \leq 1$, $(|y| \to +\infty)$, alors $\{X_n, n \geq 0\}$ vérifie *H2* avec $s = 1$.
La demonstration est faite dans l'annexe.
Exemple 3.3 Soit $\{X_n, n \geq 0\}$ une chaîne de Markov à valeurs dans un intervalle (a, b), $-\infty < a < b < +\infty$. On suppose qu'il existe $s \in \mathbb{N}^*$ et deux constantes $\delta \in (0, 1)$, $M_1 > b - a$ telles que pour tout $x, y \in (a, b)$,

$$\delta \leq f^{(s)}(x, y) \leq M_1 \quad \text{et} \quad f(x, y) \leq M_1$$

alors, $\{X_n, n \geq 0\}$ vérifie *H2*.
Preuve : Il suffit de poser

$$g(y) = \frac{1}{b - a}, \quad \eta = \delta(b - a) \quad \text{et} \quad M = M_1(b - a)$$

et d'appliquer la proposition 3.4. ■

En particulier le processus $\{X_n, n \geq 0\}$ défini récursivement par :

$$X_{n+1} = \frac{1}{X_n} H^{-1}(H(X_n)H(\mathcal{E}_{n+1}))$$

(où $\{\mathcal{E}_n\}_n$ est une suite de v.a. i.i.d. de densité h, de fonction de répartition associée H, et X_0 une v.a. à valeurs dans $(0, 1)$)
admet pour densité de transition

$$f(x, y) = x \left(\int_0^x h(z)\, dz \right)^{-1} h(xy).$$

Si h est bornée et supérieur à un réel positif ϵ, pour tout $x, y \in (0, 1)$, on a

$$f(x, y) \geq \frac{\epsilon x}{(\sup_{x \in [0,1]} h(x))(x)} \geq \frac{\epsilon}{\sup_{x \in [0,1]} h(x)} = \delta \quad \text{et} ,$$

$$f(x, y) \leq \frac{(\sup_{x \in [0,1]} h(x))(x)}{\epsilon x} = \frac{\sup_{x \in [0,1]} h(x)}{\epsilon} = M$$

$\{X_n, n \geq 0\}$ vérifie donc *H2* avec $s = 1$.
On montre dans l'annexe que si $h(z) = 2(1 - z)$, $0 < z < 1$, *H2* n'est pas vérifiée avec

$s = 1$ mais elle l'est avec $s = 2$.
Remarque 3.2 Il n'existe pas de processus de Markov stationnaire de la forme

$$X_{n+1} = aX_n + \mathcal{E}_{n+1}$$

$(0 < a < 1)$ qui vérifie *H1*.
La démonstration est faite dans l'annexe.

On estime dans la partie suivante les densités marginales et bivariés avant et entre deux instants de régénérations.

3.5 Démonstration de la proposition 3.2.

Première étape : Estimation de la densité d'une v.a. avant et entre deux instants de régénération.
Soit $g'(z_0, \ldots, z_{lr})$ la densité conditionnelle du vecteur aléatoire $(Z_0, \ldots, Z_{lr})$ sachant $\{S_1 = kr\}$. Soit $g'(z_{ir} \mid z_0, \ldots, z_{(i-1)r})$, $i \in \{1, \ldots, l\}$, la densité conditionnelle de Z_{ir} sachant $\{Z_0 = z_0, \ldots, Z_{(i-1)r} = z_{(i-1)r}\}$ et $\{S_1 = kr\}$.
Montrons que pour tout $l \in \{0, \ldots, k\}$, on a

$$g'(z_{lr}) = f(z_{lr}). \tag{3.17}$$

Observons que pour tout $l \in \{0, \ldots, k-1\}$, on a

$$\begin{aligned} g'(z_0, z_r, \ldots, z_{lr}) &= g'(z_0) \prod_{i=1}^{l} g'(z_{ir} \mid z_0, z_r, \ldots, z_{(i-1)r}) \\ &= f(z_0) \prod_{i=1}^{l} \frac{f^{(r)}(z_{(i-1)r}, z_{ir}) - \epsilon f(z_{ir})}{1 - \epsilon}. \end{aligned}$$

Ceci implique

$$g'(z_0, z_r, \ldots, z_{lr}) = h(z_0, \ldots, z_{lr}) \prod_{i=1}^{l} \left(1 - \frac{\epsilon}{1-\epsilon} \frac{f(z_{ir}) - f^{(r)}(z_{(i-1)r}, z_{ir})}{f^{(r)}(z_{(i-1)r}, z_{ir})}\right) \tag{3.18}$$

avec

$$h(z_0, \ldots, z_{lr}) = f(z_0) \prod_{i=1}^{l} f^{(r)}(z_{(i-1)r}, z_{ir}).$$

On déduit de (3.18) que pour tout $l \in \{0, \ldots, k-1\}$, on a

$$g'(z_{lr}) = \int_a^b dz_0 \cdots \int_a^b dz_{(l-1)r} g'(z_0, z_r, \ldots, z_{lr}) = f(z_{lr})$$

car

$$\int_a^b f(x_0)\left(f^{(r)}(x_0, x_r) - \frac{\epsilon}{1-\epsilon}\left(f(x_r) - f^{(r)}(x_0, x_r)\right)\right) dx_0 = f(x_r).$$

Observons que conditionnellement à $\{S_1 = kr\}$, la v.a. Z_{kr} a pour loi de probabilité π. Donc,

$$g'(z_{kr}) = f(z_{kr}).$$

■

Il est clair que pour tout $s \in \{lr+1, \ldots, (l+1)r-1\}$, $l \in \{0, \ldots, k-1\}$, on a

$$g'(z_s) = \int_a^b \int_a^b g'(z_s \mid z_{lr}, z_{(l+1)r}) g'(z_{lr}, z_{(l+1)r})\, dz_{lr}\, dz_{(l+1)r} \tag{3.19}$$

avec

$$g'(z_s \mid z_{lr}, z_{(l+1)r}) = \frac{f^{(s-lr)}(z_{lr}, z_s) f^{((l+1)r-s)}(z_s, z_{(l+1)r})}{f^{(r)}(z_{lr}, z_{(l+1)r})}. \tag{3.20}$$

Montrons que si $s = lr + i$, $0 \leq l < k-1$, $0 < i \leq r-1$, on a

$$g'(z_s) = \left(1 + O\left(\frac{\epsilon}{1-\epsilon}\frac{A\rho^r}{1-A\rho^r}\right)\right) f(z_s). \tag{3.21}$$

On vérifie que :

$$\begin{aligned} g'(z_{lr}, z_{(l+1)r}) &= f(z_{lr})\left(\frac{f^{(r)}(z_{lr}, z_{(l+1)r}) - \epsilon f(z_{lr})}{1-\epsilon}\right) \\ &= \left(1 - \frac{\epsilon}{1-\epsilon}\frac{f(z_{lr}) - f^{(r)}(z_{lr}, z_{(l+1)r})}{f^{(r)}(z_{lr}, z_{(l+1)r})}\right) f(z_{lr}) f^{(r)}(z_{lr}, z_{(l+1)r}). \end{aligned}$$

D'après (3.3) on a

$$\frac{\left|f^{(r)}(x,y) - f(y)\right|}{f^{(r)}(x,y)} \leq \frac{A\rho^r}{1-A\rho^r}, \quad x, y \in (a,b).$$

Ceci entraîne que :

$$g'(z_{lr}, z_{(l+1)r}) = \left(1 + O\left(\frac{\epsilon}{1-\epsilon}\frac{A\rho^r}{1 - A\rho^r}\right)\right) f(z_{lr}) f^{(r)}(z_{lr}, z_{(l+1)r}) \tag{3.22}$$

avec $|O(x)| \leq |x|$.
En combinant (3.19), (3.20) et (3.22) on obtient (3.21). ∎

Montrons que si $s = (k-1)r + i$, $0 < i \leq r - 1$, on a

$$g'(z_s) = \left(1 + O\left(\frac{A\rho^r}{1 - A\rho^r}\right)\right) f(z_s). \tag{3.23}$$

Observons que :

$$g'(z_{(k-1)r}, z_{kr}) = g'(z_{(k-1)r}) g'(z_{kr}) = f(z_{(k-1)r}) f(z_{kr}). \tag{3.24}$$

D'après (3.3) on a

$$\frac{f(y)}{f^r(x,y)} = 1 + \frac{f(y) - f^{(r)}(x,y)}{f^{(r)}(x,y)} = 1 + O\left(\frac{A\rho^r}{1 - A\rho^r}\right), \ x, y \in (a,b) \tag{3.25}$$

avec $|O(x)| \leq |x|$.
En combinant (3.19), (3.20), (3.24), et (3.25) on obtient (3.23). ∎

La combinaison de (3.17), (3.21), (3.23) et de l'inégalité $\frac{\epsilon}{1-\epsilon} \leq 1$ entraîne (3.4). ∎

Remarque 3.3 Soit s un entier naturel appartenant à $\{0, \ldots, (k+t)r\}$.
Si $0 \leq s \leq kr$, on a

$$g''(z_s) = g'(z_s).$$

Si $s = jr$, $k \leq j \leq (k+t)$, on a

$$g''(z_s) = f(z_s).$$

Si $s = jr + i$, $k \leq j < (k+t-1)$, $0 < i \leq r - 1$, on a

$$g''(z_s) = \left(1 + O\left(\frac{\epsilon}{1-\epsilon}\frac{A\rho^r}{1 - A\rho^r}\right)\right) f(z_s).$$

Si $s = (k+t-1)r + i$, $0 < i \le r-1$, on a

$$g''(z_s) = \left(1 + O\Big(\frac{A\rho^r}{1 - A\rho^r}\Big)\right) f(z_s)$$

avec $|O(x)| \le |x|$.

Seconde étape : majoration de la densité conditionnelle d'un couple avant et entre deux instants de régénérations.

Pour tout couple d'entiers naturels (l, l') tels que $0 \le l < l' \le k$, désignons par $g'(z_{lr}, z_{(l+1)r}, \ldots, z_{l'r})$ la densité conditionnelle du vecteur aléatoire $(Z_{lr}, Z_{(l+1)r}, \ldots, Z_{l'r})$ sachant $\{S_1 = kr\}$. Pour tout $i \in \{l+1, \ldots, l'\}$, soit $g'(z_{ir} \mid z_{lr}, \ldots, z_{(i-1)r})$ la densité de la v.a. Z_{ir} sachant $\{Z_{lr} = z_{lr}, \ldots, Z_{(i-1)r} = z_{(i-1)r}\}$ et $\{S_1 = kr\}$. On vérifie que :

$$g'(z_{lr}, z_{(l+1)r}, \ldots, z_{l'r}) = g'(z_{lr}) \prod_{i=l+1}^{l'} g'(z_{ir} \mid z_{lr}, \ldots, z_{(i-1)r}). \tag{3.26}$$

Soit $g(z_s, z_{s'})$, $0 \le s < s' \le kr$, la densité du vecteur aléatoire $(Z_s, Z_{s'})$.
Montrons que si $0 \le l < l' \le k-1$, on a

$$g'(z_{lr}, z_{l'r}) = \left(1 + O\Big(\frac{\beta}{1-\beta}\frac{A\rho^{r(l'-l)}}{1 - A\rho^{r(l'-l)}}\Big)\right) g(z_{lr}, z_{l'r}) \tag{3.27}$$

avec $\beta = 1 - (1-\epsilon)^{l'-l}$ et $|O(x)| \le |x|$.
On déduit de (3.26) que si $0 \le l < l' \le k-1$, on a

$$g'(z_{lr}, z_{(l+1)r}, \ldots, z_{l'r}) = f(z_{lr}) \prod_{i=l+1}^{l'} \frac{f^{(r)}(z_{(i-1)r}, z_{ir}) - \epsilon f(z_{ir})}{1-\epsilon}. \tag{3.28}$$

On déduit de (3.28) par un calcul par récurrence que :

$$g'(z_{lr}, z_{l'r}) = \frac{1}{(1-\epsilon)^{l'-l}} f(z_{lr}) \left(f^{((l'-l)r)}(z_{lr}, z_{l'r}) - (1 - (1-\epsilon)^{l'-l}) f(z_{l'r})\right). \tag{3.29}$$

Le processus $\{Z_n, n \ge 0\}$ vérifiant (3.3), observons que :

$$\left| \frac{f(z_{l'r}) - f^{((l'-l)r)}(z_{lr}, z_{l'r})}{f^{((l'-l)r)}(z_{lr}, z_{l'r})} \right| \le \frac{A\rho^{(l'-l)r}}{1 - A\rho^{(l'-l)r}}. \tag{3.30}$$

La combinaison de (3.29) et (3.30) donne

$$\begin{aligned} g'(z_{lr}, z_{l'r}) &= \Big(1 - \frac{(1-(1-\epsilon)^{l'-l})}{(1-\epsilon)^{l'-l}} \frac{f(z_{l'r}) - f^{((l'-l)r)}(z_{lr}, z_{l'r})}{f^{((l'-l)r)}(z_{lr}, z_{l'r})}\Big) f(z_{lr}) f^{((l'-l)r)}(z_{lr}, z_{l'r}) \\ &= \Big(1 + O\Big(\frac{\beta}{1-\beta}\frac{A\rho^{(l'-l)r}}{1-A\rho^{(l'-l)r}}\Big)\Big) f(z_{lr}) f^{((l'-l)r)}(z_{lr}, z_{l'r}) \end{aligned}$$

avec $\beta = 1-(1-\epsilon)^{l'-l}$ et $|O(x)| \leq |x|$. ∎

Montrons que si $0 \leq s \leq (k-1)r$, on a

$$g'(z_s, z_{kr}) = g'(z_s) g'(z_{kr}) = g'(z_s) f(z_{kr}). \tag{3.31}$$

D'après (3.26) on a

$$g'(z_{lr}, z_{(l+1)r}, \ldots, z_{kr}) = f(z_{lr}) \Big(\prod_{j=l+1}^{k-1} \frac{f^{(r)}(z_{(j-1)r}, z_{jr}) - \epsilon f(z_{jr})}{1-\epsilon}\Big) f(z_{kr}).$$

Il vient

$$g'(z_{lr}, z_{kr}) = \int_a^b dz_{(l+1)r} \cdots \int_a^b dz_{(k-1)r} g'(z_{lr}, \ldots, z_{kr}) = f(z_{lr}) f(z_{kr}).$$

Ce résultat était prévisible car conditionnellement à $\{S_1 = kr\}$, la v.a. $Z_{kr} = V_{1,k}$ a pour loi π indépendamment des v.a. $\{Z_j, 1 \leq j \leq (k-1)r\}$. Ceci entraîne que si $0 \leq s \leq (k-1)r$,

$$g'(z_s, z_{kr}) = g'(z_s) f(z_{kr}).$$

∎

Montrons que si s et s' sont tels que $(k-1)r \leq s < s' \leq kr, (s, s') \neq ((k-1)r, kr)$ on a

$$g'(z_s, z_{s'}) = \Big(1 + O\Big(\frac{A\rho^r}{1-A\rho^r}\Big)\Big) g(z_s, z_{s'}). \tag{3.32}$$

Si $s = (k-1)r$ alors $s' \neq kr$. Il résulte alors de (3.25) et (3.31) que :

$$\begin{aligned} g'(z_s, z_{s'}) &= \int_a^b g'(z_{s'} \mid z_s, z_{kr}) g'(z_s, z_{kr}) \, dz_{kr} \\ &= \int_a^b \frac{f^{(s'-s)}(z_s, z_{s'}) f^{(kr-s')}(z_{s'}, z_{kr})}{f^{(r)}(z_s, z_{kr})} f(z_s) f(z_{kr}) \, dz_{kr} \\ &= \Big(1 + O\Big(\frac{A\rho^r}{1-A\rho^r}\Big)\Big) g(z_s, z_{s'}). \end{aligned}$$

Si $s' = kr$ alors $s \neq (k-1)r$ et on déduit de la même manière (3.32).
Si $s \neq (k-1)r$ et $s' \neq kr$ on a

$$\begin{aligned} g'(z_s, z_{s'}) &= \int_a^b \int_a^b g'(z_{(k-1)r}, z_s, z_{s'}, z_{kr})\, dz_{(k-1)r} dz_{kr} \\ &= \int_a^b \int_a^b g'(z_s, z_{s'} \mid z_{(k-1)r}, z_{kr}) f(z_{(k-1)r}) f(z_{kr})\, dz_{(k-1)r} dz_{kr}. \end{aligned}$$

On vérifie que :

$$g'(z_s, z_{s'} \mid z_{(k-1)r}, z_{kr}) = \frac{f^{(s-(k-1)r)}(z_{(k-1)r}, z_s) f^{(s'-s)}(z_s, z_{s'}) f^{(kr-s')}(z_{s'}, z_{kr})}{f^{(r)}(z_{(k-1)r}, z_{kr})}.$$

Ceci combiné à (3.25) entraîne que :

$$\begin{aligned} g'(z_s, z_{s'}) &= \left(1 + O\Big(\frac{A\rho^r}{1 - A\rho^r}\Big)\right) \int_a^b f(z_{(k-1)r}) f^{(s-(k-1)r)}(z_{(k-1)r}, z_s) \times \\ &\qquad f^{(s'-s)}(z_s, z_{s'})\, dz_{(k-1)r} = \left(1 + O\Big(\frac{A\rho^r}{1 - A\rho^r}\Big)\right) g(z_s, z_{s'}). \end{aligned}$$

■

Si s et s' ne font pas partie des cas étudiés précédemment et sont tels que $0 \leq s < s' \leq kr$, en appliquant les raisonnements et les résultats précédents, on déduit que :

si $s = lr + i$, $s' = (l+1)r$ ou $s = lr$, $s' = lr + i$, $0 \leq l < k-1$, $0 < i \leq r-1$, on a

$$g'(z_s, z_{s'}) = \left(1 + O\Big(\frac{A\rho^r}{1 - A\rho^r}\Big)\right) g(z_s, z_{s'}). \tag{3.33}$$

Si $s = lr + i$, $s' = l'r$, $0 \leq l < l' - 1$, $l' < k$, $0 < i \leq r - 1$, on a

$$\begin{aligned} g'(z_s, z_{s'}) &= \int_a^b g'(z_{l'r} \mid z_{(l+1)r}) g'(z_{lr+i}, z_{(l+1)r}) dz_{(l+1)r} \\ &= \left(1 + O\Big(\frac{A\rho^r}{1 - A\rho^r}\Big)\right)\left(1 + O\Big(\frac{\beta}{1-\beta} \frac{A\rho^{r(l'-l-1)}}{1 - A\rho^{r(l'-l-1)}}\Big)\right) g(z_s, z_{s'}) \end{aligned}$$

avec $\beta = 1 - (1-\epsilon)^{l'-l-1}$.
Si $s = lr$, $s' = l'r + j$, $0 \leq l < l'$, $l' < k$, $0 < j \leq r-1$, on a

$$\begin{aligned} g'(z_s, z_{s'}) &= \int_a^b g'(z_{l'r+j} \mid z_{l'r}) g'(z_{lr}, z_{l'r})\, dz_{l'r} \\ &= \Big(1 + O\Big(\frac{A\rho^r}{1-A\rho^r}\Big)\Big)\Big(1 + O\Big(\frac{\beta}{1-\beta}\frac{A\rho^{r(l'-l)}}{1-A\rho^{r(l'-l)}}\Big)\Big) g(z_s, z_{s'}) \end{aligned} \quad (3.34)$$

avec $\beta = 1 - (1-\epsilon)^{l'-l}$.
Si $s = lr + i$, $s' = l'r + j$, $0 \leq l < l' < k$, $0 < i, j \leq r-1$, on a

$$\begin{aligned} g'(z_s, z_{s'}) &= \int_a^b \int_a^b g'(z_{s'} \mid z_{l'r}) g'(z_{l'r} \mid z_{(l+1)r}) g'(z_{lr+i}, z_{(l+1)r})\, dz_{lr} dz_{(l+1)r} \\ &= \Big(1 + O\Big(\frac{A\rho^r}{1-A\rho^r}\Big)\Big)^2 \Big(1 + O\Big(\frac{\beta}{1-\beta}\frac{A\rho^{r(l'-l-1)}}{1-A\rho^{r(l'-l-1)}}\Big)\Big) g(z_s, z_{s'}) \end{aligned}$$

avec $\beta = 1 - (1-\epsilon)^{l'-l-1}$.
Si $s = lr + i$, $s' = lr + j$, $0 \leq i < j \leq r-1$, $0 \leq l < k-1$, on a

$$\begin{aligned} g'(z_s, z_{s'}) &= \int_a^b \int_a^b g'(z_s, z_{s'} \mid z_{lr}, z_{(l+1)r}) g'(z_{lr}, z_{(l+1)r}) dz_{lr} dz_{(l+1)r} \\ &= \Big(1 + O\Big(\frac{A\rho^r}{1-A\rho^r}\Big)\Big) g(z_s, z_{s'}). \end{aligned}$$

On sait que $0 < \epsilon \leq \min(1 - A\rho^r, \frac{1}{2})$. A étant supérieur à 1, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, il vient : $A\rho^{ri} \leq (A\rho^r)^i \leq (1-\epsilon)^i$. On a donc $\frac{1-(1-\epsilon)^i}{1-A\rho^{ri}} \leq 1$ et par conséquent,

$$\Big(1 + O\Big(\frac{1-(1-\epsilon)^i}{(1-\epsilon)^i}\frac{A\rho^{ri}}{1-A\rho^{ri}}\Big)\Big) \leq 1 + \Big(\frac{A\rho^r}{1-\epsilon}\Big)^i \frac{1-(1-\epsilon)^i}{1-A\rho^{ri}} \leq 2, i \in \mathbb{N}. \quad (3.35)$$

En combinant (3.27), (3.31)-(3.35) et l'inégalité suivante :
quels que soient $s, s' \in \mathbb{N}$ tels que $s < s'$,

$$g(z_s, z_{s'}) = f(z_s) f^{(s'-s)}(z_s, z_{s'}) \leq (1 + A\rho) f(z_s) f(z_{s'}) = K f(z_s) f(z_{s'})$$

on obtient (3.6). ∎

Remarque 3.4 Soient s et s' étant deux entiers tels que $0 \leq s < s' \leq (k+t)r$. Si $0 \leq s < s' \leq kr$, on a

$$g''(z_s, z_{s'}) = g'(z_s, z_{s'}).$$

Si $0 \leq s \leq (k-1)r$, $kr \leq s' \leq (k+t)r$, on a

$$g''(z_s, z_{s'}) = g''(z_s)g''(z_{s'}).$$

Si $kr \leq s < s' \leq (k+t)r$, on a

$$g''(z_s, z_{s'}) = g'''_{(Z_{s-kr}, Z_{s'-kr})}(z_s, z_{s'}).$$

$g'''_{(Z_{s-kr}, Z_{s'-kr})}$ désignant la densité par rapport à la mesure de Lebesgue de la loi de probabilité conditionnelle de $(Z_{s-kr}, Z_{s'-kr})$ sachant $\{S_1 = tr\}$.

Si s et s' sont tels que $0 \leq s \leq (k+t-1)r$ et $s' = (k+t)r$, on a alors

$$g''(z_s, z_{s'}) = g''(z_s)g''(z_{s'}).$$

Dans les autres cas, $(k-1)r < s < kr < s' < (k+t)r$ et on a

$$g''(z_s, z_{s'}) = \left(1 + O\Big(\frac{A\rho^r}{1 - A\rho^r}\Big)\right)^2 \left(1 + O\Big(\frac{\beta}{1-\beta} \frac{A\rho^{r(\left\lfloor \frac{s'}{r} \right\rfloor - k)}}{1 - A\rho^{r(\left\lfloor \frac{s'}{r} \right\rfloor - k)}}\Big)\right) g(z_s, z_{s'}) \tag{3.36}$$

avec $\beta = 1 - (1-\epsilon)^{\left\lfloor \frac{s'}{r} \right\rfloor - k}$ et $|O(x)| \leq |x|$.
$\lfloor x \rfloor$ étant la g entière de x.
Preuve : Montrons (3.36).
Si s et s' sont tels que $(k-1)r < s < kr < s' < (k+t)r$, on a $s = (k-1)r + i, 0 < i < r-1$. On vérifie alors que :

$$g''(z_s, z_{s'}) = \int_a^b g''(z_{s'} \mid z_{kr}) g''(z_s, z_{kr})\, dz_{kr}. \tag{3.37}$$

On déduit de (3.32) que :

$$g''(z_s, z_{kr}) = \left(1 + O\Big(\frac{A\rho^r}{1 - A\rho^r}\Big)\right) g(z_s, z_{kr}). \tag{3.38}$$

D'après (3.27) et (3.34) on a

$$g''(z_{s'} \mid z_{kr}) = \left(1 + O\Big(\frac{A\rho^r}{1 - A\rho^r}\Big)\right)\left(1 + O\Big(\frac{\beta}{1-\beta}\frac{A\rho^{r(\lfloor \frac{s'}{r} \rfloor - k)}}{1 - A\rho^{r(\lfloor \frac{s'}{r} \rfloor - k)}}\Big)\right) f^{(s'-kr)}(z_{kr}, z_{s'}) \tag{3.39}$$

avec $\beta = 1 - (1-\epsilon)^{\lfloor \frac{s'}{r} \rfloor - k}$.
La combinaison de (3.37), (3.38) et (3.39) entraîne (3.36).
De (3.35)-(3.36) on déduit (3.7) . ■

Chapitre 4

Etude des extrêmes des chaînes de Markov considérées

4.1 Introduction

Soit $\{Z_n, n \geq 0\}$ une chaîne de Markov régénérative à valeurs dans $(F, \mathcal{F})$. Soit $\{S_n, n \geq 0\}$ les instants de régénération associés obtenu par la construction précédente (théorème 2.1.).
Soit

$$\zeta_i = \max(Z_t; S_{i-1} \leq t < S_i), \; i = 0, 1, \cdots$$

D'après les résultats du chapitre 2, si $r = 1$, $\{\zeta_n, n \geq 1\}$ est une suite i.i.d. et si $r > 1$, $\{\zeta_n, n \geq 1\}$ est une suite stationnaire 1-dépendante.
Soit

$$\nu_n = \min\{k \geq 0; S_k \geq n\}, n = 0, 1,$$

et

$$M_n = \max(Z_0, \ldots, Z_n).$$

Théorème 4.1 *(Rootzen, 1988, p. 375) Supposons que $r = 1$ et $\mu = E(Y_1) < \infty$ ($Y_1 = S_1 - S_0$). Alors, pour tout $\delta > 0$, on a*

$$\begin{aligned} \left|P\{M_n \leq x\} - (P\{\zeta_1 \leq x\})^{\frac{n}{\mu}}\right| &\leq \mu\left(\delta + \frac{1}{n}\right) + P\left\{\left|\frac{\nu_n}{n} - \frac{1}{\mu}\right| \geq \delta\right\} \\ &+ P\left\{\zeta_0 > \max\left(\zeta_1, \ldots, \zeta_{\lfloor \frac{n}{\mu} + \delta \rfloor}\right)\right\}. \end{aligned}$$

$\lfloor x \rfloor$ étant la partie entière de x.

Il en résulte que si $\lim_{k \to \infty} P\{\zeta_0 > \max(\zeta_1, \ldots, \zeta_k)\} = 0$,
(comme c'est par exemple le cas lorsque la loi de X_0 est Λ ou lorsque $\{Z_t, t \geq 0\}$ est stationnaire.)
alors

$$\sup_x \left|P\{M_n \leq x\} - (P\{\zeta_1 \leq x\})^{\frac{n}{\mu}}\right| \to 0.$$

En effet, d'après la loi des grands nombres, pour tout $\delta > 0$, on a

$$\lim_{n \to \infty} P\left\{\left|\frac{\nu_n}{n} - \frac{1}{\mu}\right| > \delta\right\} = 0.$$

On considère dans la suite de ce chapitre que $\{Z_n, n \geq 0\}$ est une chaîne de Markov stationnaire et régénérative, à valeurs dans (a, b), de densité marginale f par rapport à λ, vérifiant l'hypothèse (*H2*) du chapitre 3 . Le réel ϵ servant à sa construction est $\leq \frac{1}{2}$. On choisit pour cela r tel que :

$$r \geq r_2 = \inf\left\{n \in \mathbb{N} : A\rho^n < \frac{1}{2}\right\}.$$

Soit $\omega = \sup\{u : P\{Z_0 < u\} < 1\}$ et $(u_n)_{n>\tau}$ une suite définie pour tout $\tau > 0$ fixé par :

$$P\{Z_0 > u_n\} = \frac{\tau}{n}, \quad n > \tau.$$

On montre d'abord le

Théorème 4.2 *Il existe $n_0(\tau)$ et une constante $C_0(\tau)$ telle que pour tout $n \geq n_0$, on a*

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \max_{u_n \leq x \leq \omega} \left|P\{\max(Z_0, \ldots, Z_n) < x\} - (P\{Z_0 < x\})^{n+1}\right| \\ &\leq C_0(\ln n)n^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Une idée naturelle est de tenter d'obtenir, en utilisant les mêmes techniques, un principe d'invariance comme celui démontré dans Haiman (1987 a) pour les processus m-dépendants, et dans Haiman (1987 b) pour les processus Gaussiens. Ce principe s'énonce de la manière suivante :

Théorème 4.3 *Sous des hypothèses adéquates, on peut construire sur l'espace de probabilité sur lequel est définie $\{Z_n, n \geq 0\}$, élargi de facteurs indépendants, une suite de v.a. i.i.d. $\{\hat{Z}_n, n \geq 0\}$ de loi marginale identique à celle de la v.a. Z_0, telle que si on pose $M_n = \max(Z_0, \ldots, Z_n)$ et $\hat{M}_n = \max(\hat{Z}_0, \ldots, \hat{Z}_n)$, il existe presque sûrement un entier n_0 tel que pour $n \geq n_0$, on a*

$$\hat{M}_n = M_n. \tag{4.1}$$

On se propose de suivre les grandes lignes de la démonstration des travaux précités.

Dans Haiman(1987 a), le théorème 4.3 a été démontré pour les processus stationnaires m-dépendants, en supposant $\{Z_n, n \geq 0\}$ de fonction de répartition continue vérifiant l'hypothèse :

Il existe $\beta > 0$ tel que pour tout $1 < i \leq m$,

$$\limsup_{z \to b} \left\{ \sup_{\substack{z < v < w < b \\ z < u < b}} \frac{P\{Z_1 \leq u, v \leq Z_i \leq w\}}{(P\{Z_1 \leq u\})^{\beta} P\{v \leq Z_i \leq w\}} \right\} < \infty. \tag{4.2}$$

Pour les processus gaussiens stationnaires, l'hypothèse qui remplace (4.2) dans Haiman(1987 b) est que la fonction de covariance $\Gamma(n)$ ($\Gamma(0) = 1$) vérifie :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\Gamma(n)| < \frac{1}{2}, \quad \text{et} \quad \limsup_{n \to \infty} |\Gamma(n)|\, n^{4+\epsilon} < \infty \quad \text{pour un certain } \epsilon > 0.$$

Ce résultat a été étendu dans Haiman et Puri (1993) à la suite des vecteurs des J plus grandes valeurs parmi $X_1, \ldots, X_n$, $J \geq 1$ fixé, en ajoutant d'autres jeux d'hypothèses du même type que les précédentes.

Dans le cas des suites stationnaires m-dépendantes vérifiant (4.2), l'élément clé de la démonstration du théorème 4.3 est le

Théorème 4.4 *(Haiman 1987 a)) Il existe $C' > 0$ et $u_1 \in (a, b)$ tels que pour tout $u \in (u_1, b)$,*

$$\max_{\substack{u \leq v < w \leq b \\ n \geq 1}} \left| \frac{P\{\max(Z_1, \ldots, Z_n) \leq u, v \leq Z_{n+1} \leq w\}}{(\mathcal{M}(u))^n (1 - \mathcal{M}(u)) P\{v \leq Z_1 \leq w\} (P\{Z_1 \geq u\})^{-1}} - 1 \right|$$
$$\leq C'(P\{Z_1 \geq u\})^{\min(\beta, 1)}$$

avec

$$\mathcal{M}(u) = 1 - P\{\max(Z_1, \ldots, Z_{m-1}) \leq u, Z_m \geq u\} + O_1(P^2\{Z_1 \geq u\})$$

et $|O_1(x)| \leq C_1 |x|$. (C_1 et C' étant deux constantes universelles.)

Un résultat analogue est à la base de la démonstration dans le cas gaussien.

Dans le cas des processus de Markov considérés, le résultat permettant de démontrer le théorème 4.3 est le :

Théorème 4.5 *Pour tout $B \in (0,1)$ et $\gamma > 1$ fixés, il existe $x_0(B,\gamma) \in (a,b)$ et une constante $M_0(\gamma)$ tels que pour tout $x_0 < u < v < w < b$, on a*

$$\sup_{n\in E(u)} \left| \frac{P\{\max(Z_0,\ldots,Z_{n-1}) \le u, v < Z_n < w\}}{(P\{Z_0 \le u\})^n P\{v < Z_0 < w\}} - 1 \right|$$
$$\le M_0 \left(\left(\ln_2 \frac{1}{G(u)} \right) \left(\ln \frac{1}{G(u)} \right)^{-(1+\gamma)} \right) \tag{4.3}$$

avec $G(u) = P\{Z_0 > u\}$, $\ln_2(x) = \ln(\ln(x))$ *et*

$$E(u) = \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{(G(u))^B} \le n \le \frac{\gamma}{G(u)} \ln_2(\frac{1}{G(u)}) \right\}.$$

Le choix de la plage de variation de u, v et w dans le théorème 4.5 est lié aux propriétés classiques suivantes des temps de records et des records, jouant un rôle essentiel dans la démonstration du théorème 4.3.
Les temps de records et les records (T_n, θ_n) étant définis par

$$T_1 = 1,\ \theta_1 = \theta_0,\ T_{n+1} = \inf\{k > T_n : Z_k > \theta_n\},\ \theta_{n+1} = Z_{T_{n+1}},$$

soit $G = 1 - F$. Lorsque $\{Z_n, n \ge 0\}$ est i.i.d., on a les propositions suivantes :

Proposition 4.6 *Pour tout* $0 < \alpha < 1$,

$$P\{G(\theta_n) > \exp(-\alpha n) \ \text{i.s.}\} = 0.$$

Proposition 4.7 *Pour tout* $\gamma > 1$,

$$P\left\{ T_{n+1} - T_n \ge \frac{\gamma}{G(\theta_n)} \ln_2 \frac{1}{G(\theta_n)} \ \text{i.s.} \right\} = 0.$$

Proposition 4.8 *Pour tout* $0 < B < 1$,

$$P\left\{ T_{n+1} - T_n < \frac{1}{(G(\theta_n))^B} \ \text{i.s.} \right\} = 0.$$

Une démarche similaire à celle utilisée dans Haiman (1987 a) permet de démontrer (4.1) pour la classe de processus de Markov considérée à partir du théorème 4.5. .

Pour démontrer les théorèmes 4.1 et 4.5, on a besoin du

Théorème 4.9 *(Haiman(1987 a)) Soit* $\{\zeta_k, k \geq 1\}$ *une suite de v.a. stationnaire m-dépendante de fonction de répartition continue. Il existe une fonction* $\mathcal{M}(x)$, $0 < \mathcal{M}(x) < 1$, *définie pour* $x \geq u_0$, u_0 *vérifiant l'équation* $P\{\zeta_1 \leq u_0\} = p_0$ *(*p_0 *étant une constante universelle appartenant à* $(0,1)$*) telle que :*

$$\mathcal{M}(x) = 1 - P\{\zeta_1 > x\} + P\{\zeta_1 > x, \zeta_2 > x\} + O_1((P\{\zeta_1 > x\})^2), \;\; x \geq u_0$$

et

$$\max_{n \geq 1} \left| P\left\{ \max_{1 \leq k \leq n} \zeta_k < x \right\} (\mathcal{M}(x))^{-n} - 1 \right| \leq M_1 P\{\zeta_1 > x, \zeta_2 > x\}, \;\; x \geq u_0 \qquad (4.4)$$

avec $|O_1(x)| \leq C_1 |x|$, C_1 *et* M_1 *étant deux constantes universelles.*

La structure de ce chapitre est la suivante :
Afin d'appliquer le théorème 4.9, on commence par estimer $\mathcal{M}(x)$ et par majorer $P\{\zeta_1 > x, \zeta_2 > x\}$.
On démontre ensuite le théorème 4.2 en utilisant les résultats du théorème 4.9.
Puis on estime $P\{\max(Z_0, \ldots, Z_{n-1}) < u, v < Z_n < w\}$.
Enfin on démontre le théorème 4.5 en utilisant conjointement l'estimation de $P\{\max(Z_0, \ldots, Z_{n-1}) < u, v < Z_n < w\}$ et le théorème 4.9.

4.2 Présentation des résultats préliminaires .

Pour démontrer les théorèmes, on a besoin des résultats intermédiaires suivants :
Soit, avec les notations du théorème 4.9,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(x) &= 1 - P\{\max(Z_0,\ldots,Z_{S_1-1}) > x\} + P\{\max(Z_0,\ldots,Z_{S_2-1}) > x\} + \\ &\quad O_1(P(\{\max(Z_0,\ldots,Z_{S_1-1}) > x\})^2),\ x \in (a,b) \text{ avec } |O_1(x)| \le C_1\,|x| \quad (4.5)\end{aligned}$$

C_1 étant une constante universelle. Pour tout entier $r \geq r_2$, on a le

Lemme 4.1

$$\mathcal{M}(x) = 1 - \frac{r}{\epsilon} P\{Z_0 > x\}(1 + O(2A\rho^r)) + O\Big(4\frac{r^2}{\epsilon^2}(8K + C_1)(P\{Z_0 > x\})^2\Big) \quad (4.6)$$

avec $|O(x)| \leq |x|$. (On rappelle que $K = 1 + A\rho$ est tel que pour tout $x, y \in (a,b)$, pour tout $n \geq 1$, $f^{(n)}(x,y) \leq Kf(y)$.)

Preuve :

$$\text{Soit } \overline{\mathcal{M}}(x) = 1 - P\{\max(Z_0,\ldots,Z_{S_1-1}) > x\} + P\{\max(Z_0,\ldots,Z_{S_2-1}) > x\}$$

Appliquons aux événements

$$\{\max(Z_0,\ldots,Z_{S_1-1}) > x\} \text{ et } \{\max(Z_{S_1},\ldots,Z_{S_2-1}) > x\}. \text{ l'identité}$$

$1 - P(A_1) + P(A_1 \bigcap A_2) = 1 - P(A_1^c) + P(A_1^c \bigcap A_2^c)$ vraie pour tout A_1 et A_2 tel que

$$P\{A_1\} = P\{A_2\}.$$

Il vient

$$\overline{\mathcal{M}}(x) = 1 - P\{\max(Z_0,\ldots,Z_{S_1-1}) \leq x\} + P\{\max(Z_0,\ldots,Z_{S_2-1}) \leq x\}.$$

D'où on déduit que :

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{M}}(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty}\Big[&-P\{\max(Z_0,\ldots,Z_{kr-1}) \leq x \mid S_1 = kr, S_2 - S_1 = tr\} + \\ &P\{\max(Z_0,\ldots,Z_{(k+t)r-1}) \leq x \mid S_1 = kr, S_2 - S_1 = tr\}\Big] P\{S_1 = kr, S_2 - S_1 = tr\}.\end{aligned}$$

Ceci combiné aux inégalités de Bonferroni entraîne que :

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{M}}(x) &= 1+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty}\Bigg[-\sum_{i=kr}^{(k+t)r-1} P\{Z_i > x \mid S_1 = kr, S_2 - S_1 = tr\}+\\ &\quad O\Bigg(\sum_{0\le i_1<i_2\le(k+t)r-1} P\{Z_{i_1} > x, Z_{i_2} > x \mid S_1 = kr, S_2 - S_1 = tr\}\Bigg)\Bigg]\\ &\quad P\{S_1 = kr, S_2 - S_1 = tr\} \text{ avec } |O(x)| \le |x|. \qquad (4.7)\end{aligned}$$

On déduit de (4.7), de la proposition 3.2 et de la majoration $\frac{A\rho^r}{1-A\rho^r} \le 1$ que :

$$\overline{\mathcal{M}}(x) = 1 - \frac{r}{\epsilon}P\{Z_0 > x\}(1+O(2A\rho^r)) + O\Big(32K\frac{r^2}{\epsilon^2}(P\{Z_0 > x\})^2\Big)$$
$$\text{avec } |O(x)| \le |x|. \qquad (4.8)$$

De même, il résulte de la proposition 3.2 que :

$$\begin{aligned}P\{\max(Z_0,\ldots,Z_{S_1-1}) > x\} &= \sum_{i=1}^{\infty} P\{\max(Z_0,\ldots,Z_{ir-1}) > x, S_1 = ir\}\\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P\Big(\bigcup_{j=0}^{ir-1}\{Z_j > x, S_1 = ir\}\Big)\\ &\le \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{ir-1} P\{Z_j > x \mid S_1 = ir\}P\{S_1 = ir\}\\ &= (1+O(2A\rho^r))\frac{r}{\epsilon}P\{Z_0 > x\} \le \frac{2r}{\epsilon}P\{Z_0 > x\}. \quad (4.9)\end{aligned}$$

La combinaison de (4.8) et (4.9) entraîne (4.5) ∎

Montrons ensuite que pour tout entier $r \ge r_2$, pour tout $x \in (a,b)$, on a

$$P\{\max(Z_0,\ldots,Z_{S_1-1}) > x, \max(Z_{S_1},\ldots,Z_{S_2-1}) > x\} \le 8K\frac{r^2}{\epsilon^2}(P\{Z_0 > x\})^2. \qquad (4.10)$$

Observons pour cela que :

$$
\begin{aligned}
P\{\zeta_1 > x, \zeta_2 > x\} &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty} P\{\max(Z_0,\ldots,Z_{kr-1}) > x, \max(Z_{kr},\ldots,Z_{(k+t)r-1}) > x,\\
&\quad S_1 = kr, S_2 - S_1 = tr\}\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty} P\Big(\bigcup_{i=0}^{kr-1}\ \bigcup_{j=kr}^{(k+t)r-1} \{Z_i > x, Z_j > x, S_1 = kr, S_2 - S_1 = tr\}\Big).
\end{aligned}
$$

Il résulte alors de la proposition 3.2 que :

$$
\begin{aligned}
P\{\zeta_1 > x, \zeta_2 > x\} &\leq 2K\sum_{k=1}^{\infty}\ \sum_{t=1}^{\infty}\ \sum_{i=0}^{kr-1}\ \sum_{j=kr}^{(k+t)r-1} \quad [1 + O(2A\rho^r)]^2 (P\{Z_0 > x\})^2 \times\\
&\quad (1-\epsilon)^{k+t-2}\epsilon^2 \leq 8K\frac{r^2}{\epsilon^2}(P\{Z_0 > x\})^2. \qquad (4.11)
\end{aligned}
$$

■

Lemme 4.2 *Pour tout $\delta > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < \delta < \frac{1}{\mu}$, on a*

$$
P\left\{\frac{\nu_n}{n} > \frac{1}{\mu} + \delta\right\} \leq \left(1 + \frac{\epsilon\mu\delta}{1-\epsilon-\epsilon\mu\delta}\right)\exp\left(-\frac{\epsilon}{2(1-\epsilon)}n\mu\delta^2 + 1\right) \qquad (4.12)
$$

et

$$
P\left\{\frac{\nu_n}{n} < \frac{1}{\mu} - \delta\right\} \leq \exp\left(\frac{1}{1-\mu\delta-\frac{\mu}{n}} - \frac{\epsilon n\mu\delta^2}{2(1-\epsilon)}\left(1 - \frac{\epsilon}{1-\epsilon}\mu\delta\right)\right). \qquad (4.13)
$$

Preuve : La démonstration est faite dans l'annexe.

4.3 Démonstration du théorème 4.2.

Présentation des résultats préliminaires.

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, on note $\lceil a \rceil$ sa partie entière supérieure définie par :

$$
\lceil a \rceil - 1 < a \leq \lceil a \rceil .
$$

Il est clair que pour toute v.a. X à valeurs dans $\mathbb{N}$, $P\{X \geq a\} = P\{X \geq \lceil a \rceil\}$.
On suppose dans la suite que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $y_i \in r\mathbb{N}^*$ et on pose :

$$\{\overline{Y}_j = \overline{y}_j\} = \{Y_1 = y_1, \ldots, Y_j = y_j\}, \quad s_j = \sum_{i=1}^{j} y_i, \quad j \in \mathbb{N}^*.$$

Lemme 4.3 *Pour tout* $0 < \delta < \frac{1}{\mu}$ *et tout entier* $n > 2\left(\frac{1}{\mu} - \delta\right)^{-1}$, *on a*

$$P\{M_n < x\} \leq (1-\epsilon)^{\lceil \frac{n}{r} \rceil - 1} + P\left\{\max_{1 \leq k \leq \lfloor n(\frac{1}{\mu}-\delta) \rfloor - 1} \zeta_k < x\right\} + P\left\{\frac{\nu_n}{n} < \frac{1}{\mu} - \delta\right\} \tag{4.14}$$

et

$$P\{M_n < x\} \geq P\left\{\max_{1 \leq k \leq \lfloor n(\frac{1}{\mu}+\delta) \rfloor} \zeta_k < x\right\} - P\left\{\frac{\nu_n}{n} > \frac{1}{\mu} + \delta\right\}. \tag{4.15}$$

Preuve : Observons que :

$$\begin{aligned}
P\{M_n < x\} &= P\{M_n < x, \nu_n = 1\} + P\{M_n < x, \nu_n > 1\} \\
&= P\{M_n < x, \nu_n = 1\} + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{y_1 + \ldots + y_{k-1} < n} P\{M_n < x, \overline{Y}_{k-1} = \overline{y}_{k-1}, \\
&\quad Y_k \geq n - s_{k-1}\}.
\end{aligned}$$

On vérifie que :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=2}^{\infty} \sum_{y_1 + \ldots + y_{k-1} < n} P\{M_n < x, \overline{Y}_{k-1} = \overline{y}_{k-1}, Y_k \geq n - s_{k-1}\} \\
&\leq \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{y_1 + \ldots + y_{k-1} < n} P\{\max(Z_0, \ldots, Z_{s_{k-1}}) < x, \overline{Y}_{k-1} = \overline{y}_{k-1}, Y_k \geq n - s_{k-1}\} \\
&= P\{\max(\zeta_1, \ldots, \zeta_{\nu_n - 1}) < x, \nu_n > 1\}.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Il vient

$$P\{M_n < x\} \leq P\{\nu_n = 1\} + P\{\max(\zeta_1, \ldots, \zeta_{\nu_n - 1}) < x, \nu_n > 1\}. \tag{4.17}$$

On obtient (4.14) en remarquant que :

$$P\{\max(\zeta_1,\dots,\zeta_{\nu_n-1})<x,\nu_n>1\}=P\Big\{\max(\zeta_1,\dots,\zeta_{\nu_n-1})<x,\nu_n>1,$$
$$\frac{\nu_n}{n}<\frac{1}{\mu}-\delta\Big\}+P\Big\{\max(\zeta_1,\dots,\zeta_{\nu_n-1})<x,\nu_n>1,\frac{\nu_n}{n}\geq\frac{1}{\mu}-\delta\Big\}$$
$$\leq P\left\{\frac{\nu_n}{n}<\frac{1}{\mu}-\delta\right\}+P\left\{\max_{1\leq k\leq\lfloor n(\frac{1}{\mu}-\delta)\rfloor-1}\zeta_k<x\right\}$$

et

$$P\{\nu_n=1\}=(1-\epsilon)^{\lceil\frac{n}{r}\rceil-1}.$$

La démonstration de (4.15) est pratiquement similaire car

$$\begin{aligned}P\{M_n<x\} &\geq \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{y_1+\dots+y_{k-1}<n}\sum_{j=n-s_{k-1}}^{\infty}P\{\overline{Y}_{k-1}=\overline{y}_{k-1},Y_k=j,\max(Z_0,\dots,Z_{s_k})<x\}\\ &= P\{\max(\zeta_1,\dots,\zeta_{\nu_n})<x\}.\end{aligned}$$

■

La loi de la chaîne $\{Z_j,j\geq 0\}$ étant indépendante de la valeur de $r\geq r_2$ choisie pour la construire, on considère dans la suite de la démonstration de ce théorème que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ assez grand, r dépend de n de sorte que $r=r(n)=\lfloor\alpha\ln n\rfloor$, α étant une constante positive fixée et n un entier supérieur à :

$$n_1=\inf\left\{n\in\mathbb{N}:A\rho^{\lfloor\alpha\ln n\rfloor}<\frac{1}{2}\right\}.$$

Alors pour tout $x,y\in(a,b)$,

$$f^{(r)}(x,y)\geq(1-A\rho^r)f(y)\geq\frac{1}{2}f(y).$$

On peut donc fixer $\epsilon=\frac{1}{2}$. (ce choix qui n'est pas indispensable a été fait pour adopter les mêmes notations que celles de l'article)
D'après (4.6) p. 43 on a alors

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(x) &= 1-2rP\{Z_0>x\}(1+O(2A\rho^r))+O(16r^2(8K+C_1)(P\{Z_0>x\})^2),\\ &\quad x\geq u_0 \end{aligned}\qquad(4.18)$$

Posons $H(x)=(\mathcal{M}(x))^{\frac{1}{\mu}}=(\mathcal{M}(x))^{\frac{1}{2r}}$. On a alors le

Lemme 4.4 *Pour tout entier $n > 2\mu$ et $0 < \delta < \frac{1}{\mu} - \frac{2}{n}$, on a*

$$\max\left|(\mathcal{M}(x))^{n(\frac{1}{\mu}-\delta)-2} - (H(x))^n\right| \le \mu\delta + \frac{2\mu}{n} \tag{4.19}$$

et

$$\max\left|(\mathcal{M}(x))^{n(\frac{1}{\mu}+\delta)} - (H(x))^n\right| \le \mu\delta. \tag{4.20}$$

Preuve : Posons $Z = H^n(x)$. Observons que pour $0 < \delta < \frac{1}{\mu} - \frac{2}{n}$, on a

$$\max\left|(\mathcal{M}(x))^{n(\frac{1}{\mu}+\delta)-1} - H^n(x)\right| = \left|Z^{1-\gamma} - Z\right| = Z^{1-\gamma} - Z,$$

avec $\gamma = \mu(\delta + \frac{2}{n}) < 1$ et on déduit (4.19) en majorant $Z^{1-\gamma} - Z \le \gamma(1-\gamma)^{\frac{1}{\gamma}-1} \le \gamma$, $0 \le Z \le 1$. La démonstration de (4.20) est similaire. ∎

On a également les lemmes suivants :

Lemme 4.5 *Pour $0 \le v \le \frac{1}{2}$ et $0 < a < 1$, on a*

$$1 - av + 2a(a-1)v^2 \le (1-v)^a \le 1 - av. \tag{4.21}$$

Lemme 4.6 *Pour tout $\theta > 0$ fixé , u tel que $|u| < \frac{1}{2}$, $n \ge 4\tau$ et θ tel que $n\theta \le \tau$, on a*

$$(1-\theta(1+u))^n = (1-\theta)^n + O\Big(2\tau\exp(-\frac{n\theta}{2})\Big)u \tag{4.22}$$

avec $|O(x)| \le |x|$.

Démonstration du théorème.

Soit

$$\begin{aligned} n_2 = n_2(\tau,\alpha) \;&=\; \min\Big\{ j \ge n_1 : \forall n > j, \frac{\tau}{n}\Big(2\alpha\ln n(1 + 2A\rho^{\alpha\ln n - 1}) + \\ &\qquad 16\alpha^2(8K + C_1)(\ln n)^2\frac{\tau}{n}\Big) < \frac{1}{2}, \text{ et } u_n \ge u_0\Big\}. \end{aligned}$$

(voir le théorème 4.9 pour la définition de u_0)
On vérifie aisément que pour tout $x \ge u_n$, $n \ge n_2$, on a $1 - \mathcal{M}(x) < \frac{1}{2}$.

En posant $v = 1 - \mathcal{M}(x)$ et $a = \frac{1}{2r}$, on déduit de (4.21) que :

$$\begin{aligned} H(x) &= (\mathcal{M}(x))^{\frac{1}{\mu}} = 1 - av + O(av^2) \\ &= 1 - P\{Z_0 > x\}(1 + O(2A\rho^r)) + O_2(r(P\{Z_0 > x\})^2), \\ & \quad n \geq n_2, \quad x \geq u_n \end{aligned} \tag{4.23}$$

avec $|O(x)| \leq |x|$ et $|O_2(x)| \leq C_2 |x|$ où $C_2 = 8(8K + C_1) + 8(1 + (8K + C_1))^2$ car pour $n \geq n_2$, $2rP\{Z_0 > x\} \leq 2\alpha\frac{\tau}{n}\ln n \leq \frac{1}{2}$.
Soit

$$n_3(\alpha, \tau) = \min\left\{n \geq n_2 : 2A\rho^{\alpha \ln n - 1} + C_2\alpha\tau^2\frac{\ln n}{n^2} < \frac{1}{2}\right\}.$$

On vérifie que pour $n \geq n_3$ et $x \geq u_n$, on a $\left|\frac{1-H(x)}{P\{Z_0>x\}} - 1\right| < \frac{1}{2}$.
Ceci combiné à (4.22) entraîne si on pose $u = \frac{1-H(x)}{P\{Z_0>x\}} - 1$ et $\theta = P\{Z_0 > x\}$ que pour $n \geq n_3$ et $x \geq u_n$, on a

$$(H(x))^n = (P\{Z_0 < x\})^n + O\left(2\tau \exp\left(-\frac{nP\{Z_0 > x\}}{2}\right)\right)\left(O(2A\rho^r) + O_2(rP\{Z_0 > x\})\right). \tag{4.24}$$

De (4.4) , (4.9) et (4.19) on déduit que pour $n > n_4 = \max(n_3, 2\mu)$, $0 < \delta < \frac{1}{\mu} - \frac{2}{n}$ et $x \geq u_n$, on a

$$\begin{aligned} P\left\{\max_{1 \leq k \leq \lfloor n(\frac{1}{\mu}-\delta)\rfloor - 1} \zeta_k < x\right\} &= (\mathcal{M}(x))^{\lfloor n(\frac{1}{\mu}-\delta)\rfloor - 1}\Big(1 + O(M_1 P\{\zeta_1 > x\})\Big) \\ &\leq \left((H(x))^n + \mu\delta + \frac{2\mu}{n}\right)(1 + 4M_1 rP\{Z_0 > x\}). \end{aligned} \tag{4.25}$$

De même on obtient

$$P\left\{\max_{1 \leq k \leq \lfloor n(\frac{1}{\mu}+\delta)\rfloor} \zeta_k < x\right\} \geq ((H(x))^n - \mu\delta)(1 - 4M_1 rP\{Z_0 > x\}). \tag{4.26}$$

En combinant (4.14), (4.15), (4.24), (4.25) et (4.26) on déduit l'encadrement suivant :
Pour $n > n_4$, $x \geq u_n$ et $0 < \delta < \frac{1}{\mu} - \frac{2}{n}$, on a

$$\begin{aligned} P\{M_n < x\} \geq{}& (P\{Z_0 < x\})^n + O\left(2\tau \exp\left(-\frac{nP\{Z_0 > x\}}{2}\right)\right)\left(O(2A\rho^r) + O_2(rP^2\{Z_0 > x\})\right) \\ & - 4M_1 rP\{Z_0 > x\}(H(x))^n - \mu\delta + 4M_1 r\mu\delta P\{Z_0 > x\} - P\left\{\frac{\nu_n}{n} > \frac{1}{\mu} + \delta\right\} \end{aligned}$$

et

$$P\{M_n < x\} \leq (P\{Z_0 < x\})^n + O\Big(2\tau \exp\Big(-\frac{nP\{Z_0 > x\}}{2}\Big)\Big)\Big(O(2A\rho^r) + O_2(rP\{Z_0 > x\})\Big)$$
$$+4M_1 rP\{Z_0 > x\}(H(x))^n + \mu\delta + \frac{2\mu}{n} + 4M_1 r\mu\delta P\{Z_0 > x\}$$
$$+8M_1 r\frac{\mu}{n}P\{Z_0 > x\} + P\left\{\frac{\nu_n}{n} < \frac{1}{\mu} - \delta\right\} + (1-\epsilon)^{\frac{n}{r}-1}.$$

D'après l'encadrement précédent et l'inégalité $|x^{n+1} - x^n| \leq \frac{1}{n+1}, 0 \leq x \leq 1$, pour $n > n_4$ et $0 < \delta < \frac{1}{\mu} - \frac{2}{n}$, on a

$$\begin{aligned}\Delta_n \quad \leq \quad & 2\tau\Big(2A\rho^r + C_2 rP\{Z_0 < x\}\Big) + \mu\delta + 8M_1 rP\{Z_0 > x\} + \frac{2\mu}{n} + \\ & 8M_1 r\frac{\mu}{n}P\{Z_0 > x\} + (1-\epsilon)^{\frac{n}{r}-1} + P\left\{\left|\frac{\nu_n}{n} - \frac{1}{\mu}\right| > \delta\right\} + \frac{1}{n+1} \qquad (4.27)\end{aligned}$$

car $\mu\delta < 1$ et $(H(x))^n < 1$.
Posons $\delta = n^{-\frac{1}{2}}$ et $\alpha = \frac{1}{2|\ln\rho|}$. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que $\rho \in (\frac{1}{e}, 1)$. On a alors $\alpha > \frac{1}{2}$.
Soit

$$\begin{aligned}n_0 = n_0(\tau) \quad = \quad & \min\left\{j > n_4 : \forall n \geq j, \delta = n^{-\frac{1}{2}} < \frac{1}{2\mu} - \frac{2}{n} = \frac{1}{2\lfloor\alpha\ln n\rfloor} - \frac{2}{n},\right. \\ & \left.\text{et} \quad \alpha(1 - 2\alpha n^{-\frac{1}{2}}\ln n) > \frac{1}{2}\right\}.\end{aligned}$$

On vérifie aisément que pour $n \geq n_0$, on a

-
$$A\rho^r \leq A\rho^{\alpha\ln n - 1} = \frac{A}{\rho}n^{-\frac{1}{2}}.$$

-
$$\begin{aligned}(1-\epsilon)^{\frac{n}{r}-1} \quad &= \quad 2\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\frac{n}{r}} \leq 2\exp(-\frac{n}{\alpha\ln n}\ln 2) \\ &= \quad n^{-1}\ln n\Big(2\alpha\frac{n}{\alpha\ln n}\exp\Big(-\frac{n}{\alpha\ln n}\ln 2\Big)\Big) \leq \Big(\frac{2\alpha}{e\ln 2}\Big)n^{-1}\ln n,\end{aligned}$$

car $x\exp(-x\ln 2) \leq \frac{1}{e\ln 2} \quad x > 0$.

- On déduit de (4.12) et (4.13) que :

$$\begin{aligned}
P\left\{\frac{\nu_n}{n} > \frac{1}{\mu} + \delta\right\} &\le \left(1 + \frac{\mu\delta}{1-\mu\delta}\right)\exp\left(-\frac{n\mu\delta^2}{2} + 1\right) \le 2\frac{\exp(2)}{n^\alpha} \\
&\le 2\exp(2)n^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

car pour tout $n \ge n_0$, on a $\mu\delta < \frac{1}{2}$
Il est clair que pour tout $n \ge n_0$, on a $\mu\delta + \frac{\mu}{n} < \frac{1}{2}$. Il vient :

$$\begin{aligned}
P\left\{\frac{\nu_n}{n} < \frac{1}{\mu} - \delta\right\} &\le \exp\left(\frac{1}{1-\mu\delta-\frac{\mu}{n}}\right)\exp\left(-\frac{n\mu\delta^2}{2} + \frac{n\mu^2\delta^3}{2}\right) \\
&\le \exp(3)\exp\Big(-\alpha\ln n\Big(1 - 2\alpha n^{-\frac{1}{2}}\ln n\Big)\Big) \\
&= \exp(3)n^{-\alpha\left(1-2\alpha n^{-\frac{1}{2}}\ln n\right)} \le \exp(3)n^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Il résulte de (4.27) et des majorations précédentes que pour $n \ge n_0$, on a

$$\begin{aligned}
\Delta_n \le\ & (\ln n)n^{-\frac{1}{2}}\Big(4\tau A(\rho\ln n)^{-1} + 2\tau^2 C_2\alpha n^{-\frac{1}{2}} + 2\alpha + 8M_1\alpha\tau n^{-\frac{1}{2}} + 4\alpha n^{-\frac{1}{2}} \\
& +16M_1\tau\alpha^2(\ln n)n^{-\frac{3}{2}} + n^{-\frac{1}{2}}(2\alpha)(e\ln 2)^{-1}2\exp(3)(\ln n)^{-1} + n^{-\frac{1}{2}}(\ln n)^{-1}\Big).
\end{aligned}$$

■

4.4 Démonstration du théorème 4.5.

Avant d'entamer la démonstration, résumons la démarche qui nous guide.
On commence par estimer $P\{\max(Z_0,\dots,Z_{n-1}) < u, v < Z_n < w\}$ en donnant un encadrement de cette probabilité faisant intervenir les v.a. $\{\zeta_i, i \ge 1\}$, ν_n et un réel $\delta > 0$ arbitraire (voir proposition 4.10 p. 52). Ceci nous permet par la suite d'utiliser les résultats du théorème 4.9.

Ensuite on prouve que pour tout $B \in (0,1)$ et $\gamma > 1$ fixés, il existe deux constantes $M_2(\gamma)$ et $M_3(\gamma)$ telles que pour $u \in (a,b)$ assez grand fixé et $n \in (\frac{1}{(G(u))^B}, \frac{\gamma}{G(u)}\ln_2\frac{1}{G(u)})$, on a

$$\frac{P\left\{\max\limits_{1\le k\le\max\left(\left\lfloor n(\frac{1}{\mu}-\delta)\right\rfloor-3,1\right)}\zeta_k \le u\right\}}{(P\{Z_0 \le u\})^n} \le 1 + M_2\Big(\ln_2\frac{1}{G(u)}\Big)\Big(\ln\frac{1}{G(u)}\Big)^{-(1+\gamma)}$$

et

$$\frac{P\left\{\max\limits_{1\le k\le \lfloor n(\frac{1}{\mu}+\delta)\rfloor+1}\zeta_k\le u\right\}}{(P\{Z_0\le u\})^n}\ge 1-M_3\left(\ln_2\frac{1}{G(u)}\right)\left(\ln\frac{1}{G(u)}\right)^{-(1+\gamma)}.$$

On remarque pour cela que la loi de la chaîne $\{Z_n, n\ge 0\}$ est indépendante de la valeur de $r\ge r_2$ choisie pour la construire et du réel δ servant à encadrer $P\{\max(Z_0,\dots,Z_{n-1})<u, v<Z_n<w\}$ et, on montre les assertions précédentes en attribuant à r et δ les valeurs suivantes :

$$r=r(u)=\frac{2+\gamma}{\ln\frac{1}{\rho}}\ln_2\frac{1}{G(u)}\quad\text{et}\quad \mu\delta=\frac{r}{\epsilon}\delta=\left(\ln\frac{1}{G(u)}\right)^{-(1+\gamma)}.$$

Enfin on combine les résultats de l'encadrement de $P\{E_n\}$ et les majorations et minorations précédentes pour démontrer le théorème.

Présentation des résultats préliminaires.

Posons

$$E_n=\{Z_0<u,\dots,Z_{n-1}<u, v<Z_n<w\},\quad a<u<v<w<b$$

u, v et w étant fixés.
On a la

Proposition 4.10 *Quels que soient les entiers $n\in\mathbb{N}^*$, $r\ge r_2$, pour tout $\delta>0$, on a l'encadrement suivant :*

$$\begin{aligned}P\{E_n\} &\ge P\{v<Z_0<w\}\Bigg[P\left\{\max_{1\le k\le\lfloor n(\frac{1}{\mu}+\delta)\rfloor+1}\zeta_k<u\right\}-\Bigg(P\left\{\left|\frac{\nu_n}{n}-\frac{1}{\mu}\right|>\delta\right\}\\ &\quad+(1+O(2A\rho^r))^2\frac{4Kr}{\epsilon^2}P\{Z_0>u\}P\left\{\max_{1\le k\le\max(\lfloor n(\frac{1}{\mu}-\delta)\rfloor-3,1)}\zeta_k<u\right\}\\ &\quad+\left(\frac{n}{r}+1\right)^2(1-\epsilon)^{\frac{n}{r}-1}\Bigg)\Bigg]\end{aligned}\tag{4.28}$$

et

$$\begin{aligned}P\{E_n\} &\le P\{v<Z_0<w\}\Bigg[P\left\{\max_{1\le k\le\max(\lfloor n(\frac{1}{\mu}-\delta)\rfloor-3,1)}\zeta_k<u\right\}+P\left\{\frac{\nu_n}{n}<\frac{1}{\mu}-\delta\right\}\\ &\quad+\left(\frac{n}{r}+1\right)^2(1-\epsilon)^{\frac{n}{r}-1}\Bigg]\end{aligned}\tag{4.29}$$

avec $|O(x)|\le|x|$.

Pour faciliter la compréhension de la démonstration de ce résultat, il est nécessaire avant de l'entamer de commençer par la résumer.

Il est clair que :

$$P\{E_n\} = P\{E_n, \nu_n \geq 4\} + P\{E_n, \nu_n \leq 3\}$$

On vérifie que :

$$P\{E_n, \nu_n \geq 4\} = \sum_{k \geq 4} P\{E_n, S_{k-1} < n, S_k \geq n\}$$

$$= \sum_{k\geq 4} \sum_{y_1+\ldots+y_{k-1}<n} P\{E_n, \overline{Y}_{k-1} = \overline{y}_{k-1}, Y_k \geq n - s_{k-1}\}$$

$$= \sum_{k\geq 4} \sum_{y_1+\ldots+y_{k-1}<n} \left[P\left\{ \max_{0\leq i<s_{k-2}} Z_i < u, v < Z_n < w, \overline{Y}_{k-1} = \overline{y}_{k-1}, Y_k \geq n - s_{k-1} \right\} \right.$$

$$\left. -P\left\{ \max_{0\leq i<s_{k-2}} Z_i < u, \max_{s_{k-2}\leq j\leq n-1} Z_j > u, v < Z_n < w, \overline{Y}_{k-1} = \overline{y}_{k-1}, Y_k \geq n - s_{k-1} \right\} \right].$$

La dernière égalité permet d'utiliser la 1-dépendance des cycles pour séparer $P\{v < Z_n < w, Y_k \geq n - s_{k-1}\}$ de $P\left\{\max_{0\leq i<s_{k-2}} Z_i < u, \overline{Y}_{k-1} = \overline{y}_{k-1}\right\}$. Le même procédé sert à majorer le second terme qui est inférieur à

$$P\left\{ \max_{0\leq i<s_{k-3}} Z_i < u, \max_{s_{k-2}\leq j\leq n-1} Z_j > u, v < Z_n < w, Y_k \geq n - s_{k-1} \right\}.$$

L'inégalité $P\{E_n, \nu_n \leq 3\} \leq P\{v \leq Z_n \leq w, \nu_n \leq 3\}$ permet de majorer $P\{E_n, \nu_n \leq 3\}$. On combine ensuite ces majorations pour obtenir l'encadrement énoncé.
Pour abréger les notations, on pose dans la suite :

$$A(\overline{y}_{k-1}) = \left\{ \max_{0\leq i<s_{k-2}} Z_i < u, v < Z_n < w, \overline{Y}_{k-1} = \overline{y}_{k-1}, Y_k \geq n - s_{k-1} \right\} \tag{4.30}$$

et

$$B(\overline{y}_{k-1}) = \left\{ \max_{0\leq i<s_{k-2}} Z_i < u, \max_{s_{k-2}\leq j\leq n-1} Z_j > u, v < Z_n < w, \overline{Y}_{k-1} = \overline{y}_{k-1}, Y_k \geq n - s_{k-1} \right\}. \tag{4.31}$$

On a besoin besoin pour démontrer la proposition, des résultats intermédiaires suivants :

Lemme 4.7

$$\sum_{k\geq 4}\sum_{y_1+\ldots+y_{k-1}<n} P\{A(\overline{y}_{k-1})\} = P\{v < Z_0 < w\}P\left\{\max(\zeta_1,\ldots,\zeta_{\nu_n-2}) < u, \nu_n \geq 4\right\} \tag{4.32}$$

Pour tout $\delta > 0$, on a

$$\sum_{k\geq 4}\sum_{y_1+\ldots+y_{k-1}<n} P\{B(\overline{y}_{k-1})\} \leq P\{v < Z_0 < w\}\left[\frac{4Kr}{\epsilon^2}\left(1+O\left(2A\rho^r\right)\right)^2 \times \right.$$
$$\left. P\{Z_0 > u\}P\left\{\max_{1\leq k\leq \max(n(\lfloor\frac{1}{\mu}-\delta\rfloor)-3,1)} \zeta_k < u\right\} + P\left\{\frac{\nu_n}{n} < \frac{1}{\mu} - \delta\right\}\right] \tag{4.33}$$

avec $|O(x)| \leq |x|$.

Preuve :

Montrons d'abord (4.32).

On vérifie que : (voir la proposition 2.2 p. 14)

$$\begin{aligned} P\{A(\overline{y}_{k-1})\} &= P\left\{\max_{0\leq i<s_{k-2}} Z_i < u, v < Z_n < w, \overline{Y}_{k-1} = \overline{y}_{k-1}\right\} \times \\ & \quad P\{v < Z_{n-s_{k-1}} < w, Y_1 \geq n - s_{k-1}\}. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$P\{v < Z_n < w, Y_1 \geq n\} = P\{v < Z_0 < w\}P\{Y_1 \geq n\}. \tag{4.35}$$

Observons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$P\{v < Z_n < w, Y_1 \geq n\} = P\left\{v < Z_n < w, Y_1 = \left\lceil\frac{n}{r}\right\rceil r\right\} + P\left\{v < Z_n < w, Y_1 > \left\lceil\frac{n}{r}\right\rceil r\right\}. \tag{4.36}$$

Pour alléger les formules, posons $m = \left\lceil\frac{n}{r}\right\rceil$. D'après (3.17) p. 28, la densité avant régénération des v.a. (Z_{lr}) est f. Par conséquent,

$$\begin{aligned} P\left\{v < Z_n < w \mid Y_1 = mr\right\} &= \int_a^b dx_{(m-1)r}\int_v^w dx_n \int_a^b dx_{mr} \\ & f(x_{(m-1)r})f(x_{mr})\frac{f^{(n-(m-1)r)}(x_{(m-1)r}, x_n)f^{(mr-n)}(x_n, x_{mr})}{f^{(r)}(x_{(m-1)r}, x_{mr})} \end{aligned} \tag{4.37}$$

et

$$P\{v < Z_n < w \mid Y_1 > mr\} = \int_a^b dx_{(m-1)r} \int_v^w dx_n \int_a^b dx_{mr}\, f(x_{(m-1)r}) \times$$
$$\left(\frac{f^{(r)}(x_{(m-1)r}, x_{mr}) - \epsilon f(x_{mr})}{1-\epsilon}\right) \frac{f^{(n-(m-1)r)}(x_{(m-1)r}, x_n) f^{(mr-n)}(x_n, x_{mr})}{f^{(r)}(x_{(m-1)r}, x_{mr})} \tag{4.38}$$

On déduit de (4.36) que :

$$\begin{aligned} P\{v < Z_n < w, Y_1 \geq n\} &= P\{v < Z_n < w \mid Y_1 = mr\} P\{Y_1 = mr\} + \\ &\quad P\{v < Z_n < w \mid Y_1 > mr\} P\{Y_1 > mr\} \\ &= [P\{v < Z_n < w \mid Y_1 = mr\} P\{Q_m = 1\} + P\{v < Z_n < w \mid Y_1 > mr\} \times \\ &\quad P\{Q_m = 0\}] P\{Q_1 = 0, \ldots, Q_{m-1} = 0\}. \end{aligned} \tag{4.39}$$

La combinaison de (4.37), (4.38) et (4.39) entraîne que :

$$\begin{aligned} P\{v < Z_n < w, Y_1 \geq n\} &= \left[\int_a^b dx_{(\lceil \frac{n}{r} \rceil - 1)r} \int_v^w dx_n \int_a^b dx_{\lceil \frac{n}{r} \rceil r}\, f(x_{(\lceil \frac{n}{r} \rceil - 1)r}) \times \right. \\ &\left. f^{(n-(\lceil \frac{n}{r} \rceil - 1)r)}(x_{(\lceil \frac{n}{r} \rceil - 1)r}, x_n) f^{(\lceil \frac{n}{r} \rceil r - n)}(x_n, x_{\lceil \frac{n}{r} \rceil r})\right] P\left\{Q_1 = 0, \ldots, Q_{\lceil \frac{n}{r} \rceil - 1} = 0\right\} \\ &= P\{v < Z_0 < w\} P\left\{Y_1 > (\left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil - 1)r\right\} \\ &= P\{v < Z_0 < w\} P\{Y_1 \geq n\}. \end{aligned}$$

■

La combinaison de (4.34) et (4.35) implique

$$P\{A(\overline{y}_{k-1})\} = P\{v < Z_0 < w\} P\left\{\max_{0 \leq i < s_{k-2}} Z_i < u, \overline{Y}_{k-1} = \overline{y}_{k-1}, S_k \geq n\right\}$$

d'où on déduit (4.32).

Montrons (4.33)

Observons que :

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 4} \sum_{y_1 + \ldots + y_{k-1} < n} P\{B(\overline{y}_{k-1})\} &= \sum_{k \geq \max(4, \lfloor n(\frac{1}{\mu} - \delta) \rfloor)} \sum_{y_1 + \ldots + y_{k-1} < n} P\{B(\overline{y}_{k-1})\} + \\ &\quad \sum_{4 \leq k < \lfloor n(\frac{1}{\mu} - \delta) \rfloor} \sum_{y_1 + \ldots + y_{k-1} < n} P\{B(\overline{y}_{k-1})\}. \end{aligned} \tag{4.40}$$

a) Montrons d'abord que :

$$\sum_{k\geq\max(4,\lfloor n(\frac{1}{\mu}-\delta)\rfloor)} \sum_{y_1+\ldots+y_{k-1}<n} P\{B(\overline{y}_{k-1})\} \leq \frac{4Kr}{\epsilon^2} P\{Z_0 > u\} P\{v < Z_0 < w\} \times$$

$$(1+O(2A\rho^r))^2 P\left\{\max_{1\leq k\leq \max(\lfloor n(\frac{1}{\mu}-\delta)\rfloor -3,1)} \zeta_k < u\right\} \quad (4.41)$$

Remarquons que pour tout entier k supérieur à 4, on a

$$\begin{aligned} P\{B(\overline{y}_{k-1})\} \leq\ & P\Big\{\max_{0\leq i<s_{k-3}} Z_i < u, \max_{s_{k-2}\leq j\leq n-1} Z_j > u, v < Z_n < w, \\ & \overline{Y}_{k-1} = \overline{y}_{k-1}, Y_k \geq n - s_{k-1}\Big\}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

En combinant (4.42) et la proposition 2.2 on obtient

$$\begin{aligned} P\{B(\overline{y}_{k-1})\} \leq\ & P\left\{\max_{0\leq i<s_{k-3}} Z_i < u, \overline{Y}_{k-2} = \overline{y}_{k-2}\right\} P\Big\{\max_{0\leq j<n-s_{k-2}} Z_j > u, \\ & v < Z_{n-s_{k-2}} < w, Y_1 = y_{k-1}, Y_2 \geq n - s_{k-1}\Big\} \\ \leq\ & \sum_{j=0}^{n-s_{k-2}-1} P\left\{\max_{0\leq i<s_{k-3}} Z_i < u, \overline{Y}_{k-2} = \overline{y}_{k-2}\right\} P\Big\{Z_j > u, \\ & v < Z_{n-s_{k-2}} < w, Y_1 = y_{k-1}, Y_2 \geq n - s_{k-1}\Big\}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

La combinaison de (4.43) et de la proposition 3.2 donne

$$\begin{aligned} P\{B(\overline{y}_{k-1})\} \leq\ & 2KP\{Z_0 > u\} P\{v < Z_0 < w\} (1+O(2A\rho^r))^2 (n - s_{k-2}) \times \\ & P\left\{\max_{0\leq i<s_{k-3}} Z_i < u, \overline{Y}_{k-2} = \overline{y}_{k-2}\right\} P\{Y_1 = y_{k-1}, Y_2 \geq n - s_{k-1}\}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

k étant supérieur à $\max(\left\lfloor n(\frac{1}{\mu}-\delta)\right\rfloor, 4)$, on a

$$\begin{aligned} P\{B(\overline{y}_{k-1})\} \leq\ & 2K\left[1+O(2A\rho^r)\right]^2 P\{Z_0 > u\} P\{v < Z_0 < w\} \times \\ & (n - s_{k-2}) P\left\{\max_{0\leq i<s_{\max(\lfloor n(\frac{1}{\mu}-\delta)\rfloor -3,1)}} Z_i < u, \overline{Y}_{k-2} = \overline{y}_{k-2}\right\} \times \\ & P\{Y_1 = y_{k-1}, Y_2 \geq n - s_{k-1}\} = C(\overline{y}_{k-1}). \end{aligned}$$

Il vient

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k \geq \max(4, \lfloor n(\frac{1}{\mu}-\delta) \rfloor)} \sum_{y_1+\ldots+y_{k-1}<n} P\{B(\overline{y}_{k-1})\} \\
\leq\ & \sum_{k \geq \max(4, \lfloor n(\frac{1}{\mu}-\delta) \rfloor)} \sum_{1 \leq j < n-2r} \sum_{y_{k-1}<n-j} \sum_{y_1+\ldots+y_{k-2}=j} C(\overline{y}_{k-1}) \\
\leq\ & 2K\left[1+O\left(2A\rho^r\right)\right]^2 P\{Z_0>u\} P\{v<Z_0<w\} \Bigg[\sum_{k \geq \max(4, \lfloor n(\frac{1}{\mu}-\delta) \rfloor)} \\
& \sum_{y_1,\ldots,y_{k-2} \in r\mathbb{N}^*} P\left\{ \max_{0 \leq i < s_{\max(\lfloor n(\frac{1}{\mu}-\delta) \rfloor -3,1)}} Z_i < u, \overline{Y}_{k-2} = \overline{y}_{k-2} \right\} \\
& \sum_{1 \leq j < n-2r} \sum_{y_{k-1}<n-j} (n-j) P\{Y_1 = y_{k-1}, Y_2 \geq n-(y_{k-1}+j)\} \Bigg]. \qquad (4.45)
\end{aligned}
$$

Le terme entre les crochets étant inférieur à

$$
P\left\{ \max_{1 \leq i < \max(\lfloor n(\frac{1}{\mu}-\delta) \rfloor -3,1)} \zeta_i < u \right\} r\epsilon \sum_{1 \leq j < (n-2r)} \left(\left\lceil \frac{n-j}{r} \right\rceil - 1 \right) \left\lceil \frac{n-j}{r} \right\rceil (1-\epsilon)^{\lceil \frac{n-j}{r} \rceil -2}. \qquad (4.46)
$$

On vérifie que :

$$
\begin{aligned}
r\epsilon \sum_{1 \leq j < (n-2r)} & \left(\left\lceil \frac{n-j}{r} \right\rceil - 1 \right) \left\lceil \frac{n-j}{r} \right\rceil (1-\epsilon)^{\lceil \frac{n-j}{r} \rceil -2} \\
& \leq r\epsilon \sum_{i=1}^{\infty} i(i-1)(1-\epsilon)^{i-2} = \frac{2r}{\epsilon^2}. \qquad (4.47)
\end{aligned}
$$

La combinaison de (4.45), (4.46) et (4.47) entraîne (4.41). ∎

b) Montrons ensuite que :

$$
\sum_{4 \leq k < \lfloor n(\frac{1}{\mu}-\delta) \rfloor} \sum_{y_1+\ldots+y_{k-1}<n} P\{B(\overline{y}_{k-1})\} \leq P\{v<Z_0<w\} P\left\{ \frac{\nu_n}{n} < \frac{1}{\mu} - \delta \right\} (4.48)
$$

Observons que :

$$\begin{aligned}
&\sum_{4\leq k<\lfloor n(\frac{1}{\mu}-\delta)\rfloor}\ \sum_{y_1+\ldots+y_{k-1}<n} P\{B(\overline{y}_{k-1})\}\\
\leq &\sum_{4\leq k<\lfloor n(\frac{1}{\mu}-\delta)\rfloor}\ \sum_{y_1+\ldots+y_{k-1}<n} P\{\overline{Y}_{k-1}=\overline{y}_{k-1}, v<Z_n<w, Y_k\geq n-s_{k-1}\}\\
= &\sum_{4\leq k<\lfloor n(\frac{1}{\mu}-\delta)\rfloor}\ \sum_{y_1+\ldots+y_{k-1}<n} P\{\overline{Y}_{k-1}=\overline{y}_{k-1}\}P\{v<Z_{n-s_{k-1}}<w, Y_1\geq n-s_{k-1}\}.
\end{aligned} \tag{4.49}$$

D'après (4.35) et (4.49) on a

$$\begin{aligned}
\sum_{4\leq k<\lfloor n(\frac{1}{\mu}-\delta)\rfloor}\ \sum_{y_1+\ldots+y_{k-1}<n} P\{B(\overline{y}_{k-1})\} &\leq P\{v<Z_0<w\}\sum_{4\leq k<\lfloor n(\frac{1}{\mu}-\delta)\rfloor} P\{\nu_n=k\}\\
&\leq P\{v<Z_0<w\}P\left\{\nu_n<n(\frac{1}{\mu}-\delta)\right\}.
\end{aligned}$$

■

La combinaison de (4.40), (4.41) et (4.48) entraîne (4.33). ■

Montrons enfin que :

$$P\{v<Z_n<w, \nu_n\leq 3\}\leq P\{v<Z_0<w\}\left(\frac{n}{r}+1\right)^2(1-\epsilon)^{\frac{n}{r}-1}. \tag{4.50}$$

On prouve à l'aide d'un raisonnement identique au précédent que :

$$P\{v<Z_n<w, \nu_n\leq 3\}=P\{v<Z_0<w\}P\{\nu_n\leq 3\}$$

On vérifie que :

$$\begin{aligned}
P\{\nu_n\leq 3\} &= \sum_{j=1}^{3} C^{j-1}_{\lceil\frac{n}{r}\rceil-1}(1-\epsilon)^{\lceil\frac{n}{r}\rceil-j}\epsilon^{j-1}\\
&= (1-\epsilon)^{\lceil\frac{n}{r}\rceil-1}\sum_{j=1}^{3} C^{j-1}_{\lceil\frac{n}{r}\rceil-1}\left(\frac{\epsilon}{1-\epsilon}\right)^{j-1} \leq \left\lceil\frac{n}{r}\right\rceil^2(1-\epsilon)^{\lceil\frac{n}{r}\rceil-1}\\
&\leq (\frac{n}{r}+1)^2(1-\epsilon)^{\frac{n}{r}-1}.
\end{aligned}$$

D'où on déduit (4.50). ■

Démonstration de la proposition 4.10

Il est clair que :

$$P\{E_n\} = P\{E_n, \nu_n \geq 4\} + P\{E_n, \nu_n \leq 3\}. \tag{4.51}$$

On déduit de (4.32) que :

$$\begin{aligned} P\{E_n, \nu_n \geq 4\} &\leq \sum_{k\geq 4} \sum_{y_1+\ldots=y_{k-1}<n} P\{A(\overline{y}_{k-1})\} \\ &\leq P\{v < Z_0 < w\} P\left\{\max(\zeta_1, \ldots, \zeta_{\nu_n-2}) < u, \nu_n \geq 4\right\}. \end{aligned} \tag{4.52}$$

Observons que :

$$\begin{aligned} P\{\max(\zeta_1, \ldots, \zeta_{\nu_n-2}) < u, \nu_n \geq 4\} &\leq P\left\{\max(\zeta_1, \ldots, \zeta_{\nu_n-2}) < u, \nu_n \geq 4, \nu_n \geq n(\frac{1}{\mu} - \delta)\right\} \\ &\quad + P\left\{\nu_n < n(\frac{1}{\mu} - \delta)\right\} \\ &\leq P\left\{\max_{1\leq k\leq \max(\lfloor n(\frac{1}{\mu}-\delta)\rfloor -3,1)} \zeta_k < u\right\} + P\left\{\frac{\nu_n}{n} < \frac{1}{\mu} - \delta\right\} \end{aligned} \tag{4.53}$$

D'après (4.50) on a

$$\begin{aligned} P\{E_n, \nu_n \leq 3\} &\leq P\{v < Z_n < w, \nu_n \leq 3\} \\ &\leq (\frac{n}{r} + 1)^2 (1-\epsilon)^{\frac{n}{r}-1} P\{v < Z_0 < w\}. \end{aligned} \tag{4.54}$$

En combinant (4.51), (4.52), (4.53) et (4.54) on déduit (4.28).

D'après (4.30) et (4.31) on a

$$P\{E_n\} \geq P\{E_n, \nu_n \geq 4\} = \sum_{k\geq 4} \sum_{y_1+\ldots+y_{k-1}<n} [P\{A(\overline{y}_{k-1})\} - P\{B(\overline{y}_{k-1})\}]. \tag{4.55}$$

Appliquons aux événements

$$A = \left\{\max_{1\leq k\leq \lfloor n(\frac{1}{\mu}+\delta)\rfloor +1} \zeta_k < u\right\} \quad \text{et} \quad B = \left\{\nu_n \leq n(\frac{1}{\mu} + \delta), \nu_n \geq 4\right\}$$

l'inégalité

$$P\{A \cap B\} \geq P\{A\} - P\{B^c\}.$$

Il vient

$$
\begin{aligned}
&P\left\{\max(\zeta_1,\ldots,\zeta_{\nu_n-2}) < u, \nu_n \geq 4\right\} \geq P\{A\cap B\} \\
\geq\ & P\left\{\max_{1\leq k\leq \lfloor n(\frac{1}{\mu}+\delta)\rfloor+1} \zeta_k < u\right\} - P\left\{\frac{\nu_n}{n} > \frac{1}{\mu}+\delta\right\} - P\{\nu_n \leq 3\}
\end{aligned} \tag{4.56}
$$

De (4.32) ,(4.33) , (4.55) et (4.56) on déduit (4.29). ■

Soit $G(u) = P\{Z_0 > u\}$ et

$$
\overline{a} = \inf\left\{u \in (a,b) : G(u) < \frac{1}{e}\right\}.
$$

On suppose dans la suite que $u \in (\overline{a}, b)$. On a alors le

Lemme 4.8 *Pour tout $B \in (0,1)$ et $\gamma > 1$ fixés, il existe $w_1(\gamma, B) \in (a,b)$ et deux constantes $M_2(\gamma)$ et $M_3(\gamma)$ telles que pour tout $u \in (w_1, b)$ et $n \in (\frac{1}{(G(u))^B}, \frac{\gamma}{G(u)} \ln_2 \frac{1}{G(u)})$, si $r = r(u) = \left\lfloor \frac{2+\gamma}{\ln\frac{1}{\rho}} \ln_2 \frac{1}{G(u)} \right\rfloor$ et $\delta = \delta(u)$ est choisi de sorte que*

$$
\mu\delta = \frac{r(u)}{\epsilon}\delta = \left(\ln\frac{1}{G(u)}\right)^{-(1+\gamma)},
$$

on a

$$
F(n,u) = \frac{P\left\{\max_{1\leq k\leq \max\left(\lfloor n(\frac{1}{\mu}-\delta)\rfloor-3,1\right)} \zeta_k \leq u\right\}}{(P\{Z_0\leq u\})^n} \leq 1 + M_2\left(\ln_2\frac{1}{G(u)}\right)\left(\ln\frac{1}{G(u)}\right)^{-(1+\gamma)} \tag{4.57}
$$

et

$$
G(n,u) = \frac{P\left\{\max_{1\leq k\leq \lfloor n(\frac{1}{\mu}+\delta)\rfloor+1} \zeta_k \leq u\right\}}{(P\{Z_0\leq u\})^n} \geq 1 - M_3\left(\ln_2\frac{1}{G(u)}\right)\left(\ln\frac{1}{G(u)}\right)^{-(1+\gamma)}. \tag{4.58}
$$

Preuve : On vérifie qu'il existe $v_0 \in (\overline{a}, b)$ tel que la fonction

$$h(u) = G(u)^{-B}\left(\ln_2 \frac{1}{G(u)}\right)^{-1}\left(1 - \left(\ln \frac{1}{G(u)}\right)^{-1}\right)$$

est croissante pour tout u supérieur à v_0.

Soit

$$\tilde{u} = \inf\left\{u \in (v_0, b) : \epsilon\left(\ln \frac{1}{\rho}\right) h(u) > 4(2+\gamma)\right\}.$$

Posons

$$\begin{aligned} u_1 \quad = \quad & \inf\left\{ u \in (\overline{a}, b) : \frac{1}{G(u)^B} < \frac{1}{G(u)} \ln_2 \frac{1}{G(u)} \text{ et} \right. \\ & \left. \frac{2}{\ln \frac{1}{\rho}} \ln_2 \frac{1}{G(u)} \geq \frac{1}{\ln \frac{1}{\rho}}\left(\ln_2 \frac{1}{G(u)}\right) + 1 \geq r_2 \right\} \end{aligned} \tag{4.59}$$

et $v_1 = \max(u_1, \tilde{u})$.

Il est clair que :

$$\gamma \in (1, \frac{\epsilon}{4}(\ln \frac{1}{\rho})h(u) - 2),\ u \geq v_1.$$

On vérifie facilement que pour tout $u \in (v_1, b)$ et $n \in (\frac{1}{G(u)^B}, \frac{\gamma}{G(u)} \ln_2 \frac{1}{G(u)})$, on a $n\left(\frac{1}{\mu} - \delta\right) \geq 4$.

Il vient

$$P\left\{\max_{1 \leq k \leq \max\left(\left\lfloor n(\frac{1}{\mu}-\delta)\right\rfloor - 3, 1\right)} \zeta_k \leq u\right\} = P\left\{\max_{1 \leq k \leq \left\lfloor n(\frac{1}{\mu}-\delta)\right\rfloor - 3} \zeta_k \leq u\right\}. \tag{4.60}$$

La fonction de répartition des v.a. $\{\zeta_n, n \geq 1\}$ étant continue sur (a, b), on déduit du théorème 4.9 qu'il existe $u_2 \in (u_0, b)$, une constante M_1 et une fonction $\mathcal{M}(u)$ à valeurs dans $(0,1)$, telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $u \in (u_2, b)$, on a

$$\left| \frac{P\left\{\max\limits_{1 \leq k \leq n} \zeta_k \leq u\right\}}{(\mathcal{M}(u))^n} - 1 \right| \leq M_1 P\{\zeta_1 > u, \zeta_2 > u\}. \tag{4.61}$$

D'après (4.10), (4.60) et (4.61) on a

$$F(n,u) \leq \left(\frac{(\mathcal{M}(u))^{(\frac{1}{\mu}-\delta)}}{P\{Z_0 \leq u\}}\right)^n (\mathcal{M}(u))^{-3}\left(1 + K_0(G(u))^2\left(\ln_2 \frac{1}{G(u)}\right)^2\right) \quad (4.62)$$

et

$$G(n,u) \geq \left(\frac{(\mathcal{M}(u))^{\frac{1}{\mu}+\delta}}{P\{Z_0 \leq u\}}\right)^n \mathcal{M}(u)\left(1 - K_0(G(u))^2\left(\ln_2 \frac{1}{G(u)}\right)^2\right) \quad (4.63)$$

en posant

$$K_0 = \frac{8KM_1}{\epsilon^2}\frac{(2+\gamma)^2}{(\ln \frac{1}{\rho})^2}.$$

On déduit des inégalités

$$x - \frac{x^2}{2(1+x)} < \ln(1+x) < x, \ x \in (-1,1) \ \text{et}$$
$$1 - x \leq \exp(-x) \leq 1 - x + x^2, x \geq 0$$

qu'on a :

$$(\mathcal{M}(u))^{\frac{1}{\mu}-\delta} \leq 1 - \left(\frac{1}{\mu} - \delta\right)(1 - \mathcal{M}(u)) + \left(\frac{1}{\mu} - \delta\right)^2 (1 - \mathcal{M}(u))^2 \quad (4.64)$$

et

$$(\mathcal{M}(u))^{\frac{1}{\mu}+\delta} \geq 1 - \left(\frac{1+\mu\delta}{\mu}\right)\left((1 - \mathcal{M}(u)) + \frac{(1-\mathcal{M}(u))^2}{2(\mathcal{M}(u))^2}\right). \quad (4.65)$$

Observons que :

$$\left(\frac{1}{\mu} - \delta\right)(1 - \mathcal{M}(u)) \geq G(u) - \mu\delta G(u) - 2A\rho^r G(u) - 4\frac{r}{\epsilon}(8K + C_1)(G(u))^2$$

et

$$\frac{1}{\mu}(1 - \mathcal{M}(u)) \leq 2G(u) + \frac{4r}{\epsilon}(8K + C_1)G(u) \leq 6\frac{r}{\epsilon}(8K + C_1)G(u).$$

Il résulte alors de (4.64) que :

$$(\mathcal{M}(u))^{\frac{1}{\mu}-\delta} \leq 1 - G(u) + \mu\delta G(u) + 2A\rho^r G(u) + (10(8K + C_1))^2\frac{r^2}{\epsilon^2}(G(u))^2. \quad (4.66)$$

On vérifie aisément l'existence de $u_3 \in (u_2, b)$ tel que pour tout $u \in (u_3, b)$, on a $1 - \mathcal{M}(u) < \frac{1}{2}$. Un calcul simple montre que pour tout $x \in (0, \frac{1}{e})$ et $\alpha > 1$, on a

$$x\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha} \leq \alpha^{\alpha}\exp(-\alpha). \tag{4.67}$$

Il en résulte que pour tout $u \in (u_3, b)$, on a

$$\frac{1 - \mathcal{M}(u)}{\mathcal{M}(u)} \leq 2(1 - \mathcal{M}(u)) \leq K_1 G(u) \ln_2 \frac{1}{G(u)} \tag{4.68}$$

en posant

$$K_1 = 4\frac{2+\gamma}{\epsilon \ln\frac{1}{\rho}}\Big(1 + (8K + C_1)\frac{2+\gamma}{\epsilon\ln\frac{1}{\rho}}\frac{1}{e}\Big).$$

Il vient

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1+\mu\delta}{\mu}\right)\left(\frac{1-\mathcal{M}(u)}{\mathcal{M}(u)}\right)^2 \leq K_2\left(\ln_2\frac{1}{G(u)}\right)(G(u))^2, \; u \geq u_3 \tag{4.69}$$

en posant

$$K_2 = K_1^2 \epsilon \left(\frac{1+\gamma}{\ln\frac{1}{\rho}}\right)^{-1}.$$

car u_3 étant supérieur à u_1, on a $r = r(u) \geq \frac{1+\gamma}{\ln\frac{1}{\rho}} \ln_2 \frac{1}{G(u)}$.
Un calcul simple montre que pour tout $u \in (u_3, b)$, on a

$$\left(\frac{1+\mu\delta}{\mu}\right)(1 - \mathcal{M}(u)) \leq G(u) + 2\mu\delta G(u) + 2A\rho^r G(u) + 8(8K + C_1)\frac{r}{\epsilon}(G(u))^2. \tag{4.70}$$

De (4.65), (4.69) et (4.70) on déduit que pour $u \in (u_3, b)$, on a

$$\begin{aligned}(\mathcal{M}(u))^{\frac{1}{\mu}+\delta} \geq \quad & 1 - G(u) - 2\mu\delta G(u) - 2A\rho^r G(u) \\ & - \left(8(8K + C_1)\frac{r}{\epsilon} + K_2\left(\ln_2\frac{1}{G(u)}\right)\right)(G(u))^2.\end{aligned} \tag{4.71}$$

Le réel $G(u)$ appartenant à $(0, \frac{1}{e})$, d'après (4.66) on a

$$\frac{(\mathcal{M}(u))^{\frac{1}{\mu}-\delta}}{P\{Z_0 \leq u\}} = (\mathcal{M}(u))^{\frac{1}{\mu}-\delta}\left(1 + G(u) + \frac{(G(u))^2}{1 - G(u)}\right) \leq 1 + H_1(u) \tag{4.72}$$

en posant

$$H_1(u) = \mu\delta G(u) + 2A\rho^r G(u) + 10(10(8K + C_1))^2 \frac{r^2}{\epsilon^2}(G(u))^2.$$

De même,

$$\frac{(\mathcal{M}(u))^{\frac{1}{\mu}+\delta}}{P\{Z_0 \leq u\}} = (\mathcal{M}(u))^{\frac{1}{\mu}+\delta}\left(1 + G(u) + \frac{(G(u))^2}{1-G(u)}\right) \geq 1 - H_2(u) \qquad (4.73)$$

en posant

$$H_2(u) = 2\mu\delta G(u) + 2A\rho^r G(u) + \left(24(8K + C_1)\frac{r}{\epsilon} + 2K_2 \ln_2 \frac{1}{G(u)}\right)(G(u))^2.$$

(On vérifie que $\rho^r \leq \left(\ln \frac{1}{G(u)}\right)^{-(1+\gamma)}$, $u \geq u_1$.)
Soit

$$w_1 = \inf\left\{ v \in (u_3, b) : \forall u \in (v, b), \left(\frac{\gamma}{G(u)} \ln_2 \frac{1}{G(u)}\right) H_1(u) < \frac{1}{2} \text{ et } \left(\frac{\gamma}{G(u)} \ln_2 \frac{1}{G(u)}\right) H_2(u) < \frac{1}{2}\right\}.$$

On vérifie que si x et n sont tels que $|nx| < 1$, on a

$$|(1+x)^n - 1| \leq \frac{|nx|}{1-|nx|}. \qquad (4.74)$$

De (4.72), (4.67) et (4.74) on déduit que pour tout $u \in (w_1, b)$ et $n \in (\frac{1}{(G(u))^B}, \frac{\gamma}{G(u)} \ln_2 \frac{1}{G(u)})$, on a

$$\left(\frac{(\mathcal{M}(u))^{\frac{1}{\mu}-\delta}}{P\{Z_0 \leq u\}}\right)^n \leq 1 + 2nH_1(u) \leq 1 + K_3\left(\ln_2 \frac{1}{G(u)}\right)\left(\ln \frac{1}{G(u)}\right)^{-(1+\gamma)} \qquad (4.75)$$

en posant

$$K_3 = 2\gamma\left(1 + 2A + \frac{10}{\epsilon^2}[10(8K + C_1)]^2 \frac{(2+\gamma)^2}{(\ln \frac{1}{\rho})^2}(3+\gamma)^{3+\gamma} \exp(-(3+\gamma))\right).$$

et

$$\left(\frac{(\mathcal{M}(u))^{\frac{1}{\mu}+\delta}}{P\{Z_0 \le u\}}\right)^n \ge 1 + 2nH_2(u) \ge 1 - K_4 \left(\ln_2 \frac{1}{G(u)}\right) \left(\ln \frac{1}{G(u)}\right)^{-(1+\gamma)} \tag{4.76}$$

en posant

$$K_4 = 2\gamma(2+2A) + \left(\frac{24}{\epsilon}(8K + C_1)\frac{2+\gamma}{\ln \frac{1}{\rho}} + 2K_2\right)(2+\gamma)\exp(-(2+\gamma)).$$

Pour tout $u \in (w_1, b)$, $\mathcal{M}(u) > \frac{1}{2}$. Il résulte alors de (4.68) que :

$$\left(\frac{1}{\mathcal{M}(u)}\right)^3 = \left(1 + \frac{1-\mathcal{M}(u)}{\mathcal{M}(u)}\right)^3 \le 1 + 7\frac{1-\mathcal{M}(u)}{\mathcal{M}(u)} \le 1 + 7K_1 G(u) \ln_2 \frac{1}{G(u)}. \tag{4.77}$$

La combinaison de (4.62) , (4.75) et (4.77) entraîne (4.57).
On vérifie aisément que :

$$\mathcal{M}(u) \ge 1 - K_5 G(u) \ln_2 \frac{1}{G(u)} \tag{4.78}$$

en posant $K_5 = \frac{2+\gamma}{\epsilon \ln \frac{1}{\rho}}\left(2 + \frac{4(8K+C_1)}{\epsilon}\frac{2+\gamma}{e \ln \frac{1}{\rho}}\right)$.
De (4.63), (4.76) et (4.78) on déduit (4.58). ∎

Démonstration du théorème 4.5.

On suppose dans la suite que les hypothèses du lemme précédent sont vérifiées. On a donc

$$u \in (w_1, b), \;\; 1 < \gamma < \frac{\epsilon}{4}\left(\ln \frac{1}{\rho}\right) h(u) - 2,$$

et d'après (4.59),

$$r = r(u) = \left\lfloor \frac{2+\gamma}{\ln \frac{1}{\rho}} \ln_2 \frac{1}{G(u)} \right\rfloor \ge \frac{1+\gamma}{\ln \frac{1}{\rho}} \ln_2 \frac{1}{G(u)},$$

$$\mu\delta = \left(\ln \frac{1}{G(u)}\right)^{-(1+\gamma)} \quad \text{et} \quad \frac{1}{G(u)^B} \le n \le \frac{\gamma}{G(u)} \ln_2 \frac{1}{G(u)}.$$

En combinant les résultats de la proposition 4.10, (4.57) et (4.58) on déduit que :

$$\left|\frac{P\left\{\max(Z_0,\ldots,Z_{n-1})\le u, v<Z_n<w\right\}}{(P\{Z_0\le u\})^n P\{v<Z_0<w\}}-1\right|\le C\left(\ln_2\frac{1}{G(u)}\right)\left(\ln\frac{1}{G(u)}\right)^{-(1+\gamma)}$$
$$+\frac{1}{(P\{Z_0\le u\})^n}P\left\{\left|\frac{\nu_n}{n}-\frac{1}{\mu}\right|>\delta\right\}+\frac{4Kr}{\epsilon^2}\left(1+2A\rho^r\right)^2 G(u)\times$$
$$\frac{P\left\{\max_{1\le k\le \max\left(\left\lfloor n(\frac{1}{\mu}-\delta)\right\rfloor-3,1\right)}\zeta_k\le u\right\}}{(P\{Z_0\le u\})^n}+\frac{1}{(P\{Z_0\le u\})^n}\left(\frac{n}{r}+1\right)^2(1-\epsilon)^{\frac{n}{r}-1} \qquad (4.79)$$

en posant $C=\max(M_2,M_3)$.

On déduit de (4.57) que pour $u\in(w_1,b)$ et $n\in\left(\frac{1}{G(u)^B},\frac{\gamma}{G(u)}\ln_2\frac{1}{G(u)}\right)$, on a

$$\frac{4Kr}{\epsilon^2}\left[1+2A\rho^r\right]^2 G(u)\frac{P\left\{\max_{1\le k\le \max\left(\left\lfloor n(\frac{1}{\mu}-\delta)\right\rfloor-3,1\right)}\zeta_k\le u\right\}}{(P\{Z_0\le u\})^n}$$
$$\le K_6\left(\ln_2\frac{1}{G(u)}\right)\left(\ln\frac{1}{G(u)}\right)^{-(1+\gamma)} \qquad (4.80)$$

en posant

$$K_6=\frac{16K}{\epsilon^2}\frac{2+\gamma}{\ln\frac{1}{\rho}}\left((1+\gamma)^{1+\gamma}\exp(-(1+\gamma))+\frac{M_2}{\epsilon}\right).$$

Soit

$$w_2 = \inf\left\{v\in(w_1,b):\forall u\in(v,b),\frac{\mu}{n}\le\frac{2+\gamma}{\epsilon\ln\frac{1}{\rho}}\left(\ln_2\frac{1}{G(u)}\right)G(u)^B<\mu\delta=\right.$$
$$\left.\left(\ln\frac{1}{G(u)}\right)^{-(1+\gamma)}\ \text{et}\ \ \mu\delta+\frac{\mu}{n}\le 2\left(\ln\frac{1}{G(u)}\right)^{-(1+\gamma)}\le\frac{1}{2}\right\}$$

et

$$x_0=\inf\left\{v\in(w_2,b):\forall u\in(v,b),\frac{1}{(G(u))^2}\left(\ln_2\frac{1}{G(u)}\right)^{-1}\left(\ln\frac{1}{G(u)}\right)^{(1+\gamma)}\times\right.$$
$$\exp\left(-(G(u))^{-B}\left[\frac{\epsilon^2}{2(1-\epsilon)}\ln\frac{1}{\rho}\left(\ln_2\frac{1}{G(u)}\right)^{-1}\left(\ln\frac{1}{G(u)}\right)^{-2(1+\gamma)}\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\frac{1}{2+\gamma}\left(1-\left(\ln_2\frac{1}{G(u)}\right)^{-(1+\gamma)}\right)-G(u)-\frac{(G(u))^2}{2(1-G(u))^2}\right]\right)<1\right\}.$$

On vérifie facilement que :

$$\begin{aligned}
\frac{P\left\{\frac{\nu_n}{n} < \frac{1}{\mu} - \delta\right\}}{(P\{Z_0 \le u\})^n} &= P\left\{\frac{\nu_n}{n} < \frac{1}{\mu} - \delta\right\} \exp(-n \ln(1 - G(u)) \\
&\le P\left\{\frac{\nu_n}{n} < \frac{1}{\mu} - \delta\right\} \exp\left(n\left(G(u) + \frac{(G(u))^2}{2(1 - G(u))^2}\right)\right). \quad (4.81)
\end{aligned}$$

La combinaison de (4.13) et (4.81) entraîne que pour tout $u \ge x_0$ et $n \in (\frac{1}{(G(u))^B}, \frac{\gamma}{G(u)} \ln_2 \frac{1}{G(u)})$, on a

$$\begin{aligned}
&\frac{P\left\{\frac{\nu_n}{n} < \frac{1}{\mu} - \delta\right\}}{(P\{Z_0 \le u\})^n} \\
\le\ & \exp(2) \exp\left(-n\left(\frac{\epsilon}{2(1-\epsilon)} \frac{(\mu\delta)^2}{\mu}(1 - \mu\delta) - G(u) - \frac{(G(u))^2}{2(1 - G(u))^2}\right)\right) \\
\le\ & \exp(2) \ln_2 \frac{1}{G(u)} \left(\ln \frac{1}{G(u)}\right)^{-(1+\gamma)}. \quad (4.82)
\end{aligned}$$

On déduit de la même manière de (4.12) que sous les hypothèses précédentes, on a

$$\frac{P\left\{\frac{\nu_n}{n} > \frac{1}{\mu} + \delta\right\}}{(P\{Z_0 \le u\})^n} \le 2\exp(1) \ln_2 \frac{1}{G(u)} \left(\ln \frac{1}{G(u)}\right)^{-(1+\gamma)}. \quad (4.83)$$

On vérifie aisément que :

$$\begin{aligned}
\frac{(1-\epsilon)^{\frac{n}{r}}}{(P\{Z_0 \le u\})^n} &\le \exp\left(-n\left(\frac{\epsilon}{r} - G(u) - \frac{(G(u))^2}{2(1 - G(u))^2}\right)\right) \times \\
&\quad \exp\left(-n\left(\epsilon \frac{\ln \frac{1}{\rho}}{2+\gamma}\left(\ln_2 \frac{1}{G(u)}\right)^{-1} - G(u) - \frac{(G(u))^2}{2(1 - G(u))^2}\right)\right).
\end{aligned}$$

Il en résulte que pour $u \ge x_0$ et $n \in (\frac{1}{G(u)^B}, \frac{\gamma}{G(u)} \ln_2 \frac{1}{G(u)})$, on a

$$\begin{aligned}
&\frac{(\frac{n}{r}+1)^2 (1-\epsilon)^{\frac{n}{r}-1}}{(P\{Z_0 \le u\})^n} \le \left(\gamma(\frac{1+\gamma}{\ln \frac{1}{\rho}})^{-1} + 1\right)^2 (1-\epsilon)^{-1} \times \\
&\frac{1}{(G(u))^2} \exp\left(-(G(u))^{-B}\left(\epsilon \frac{\ln \frac{1}{\rho}}{2+\gamma}\left(\ln_2 \frac{1}{G(u)}\right)^{-1} - G(u) - \frac{(G(u))^2}{2(1 - G(u))^2}\right)\right) \\
&\le K_7 \ln_2 \frac{1}{G(u)} \left(\ln \frac{1}{G(u)}\right)^{-(1+\gamma)} \quad (4.84)
\end{aligned}$$

en posant $K_7 = (\gamma(\frac{1+\gamma}{\ln\frac{1}{\rho}})^{-1} + 1)^2(1-\epsilon)^{-1}$.
En combinant (4.79), (4.80), (4.82), (4.83) et (4.84) on déduit (4.3). ■

Chapitre 5

Etude du comportement asymptotique des temps de records et de records des chaînes de Markov considérées

5.1 Introduction

Soit $\{Z_n, n \geq 0\}$ une chaîne de Markov stationnaire et régénérative vérifiant l'hypothèse H2 du chapitre 3.

$\theta_0 \in (a,b)$ étant un seuil initial donné, on définit les temps de records et de records relatifs à θ_0 par

$$T_1 = \min\{k \geq 0 : Z_k > \theta_0\}, \;\; \theta_1 = Z_{T_1}$$

et pour tout $n \geq 1$

$$T_{n+1} = T_n + \min\{k \geq 1 : Z_{T_n+k} > \theta_n\}, \;\; \theta_{n+1} = Z_{T_{n+1}}.$$

On rappelle que si $\{Z_n, n \geq 0\}$ est i.i.d., $\{(T_n, \theta_n), n \geq 1\}$ est un processus de Markov tel que :

Proposition 5.1 *(Deheuvels 1974)*

i) Pour tout entier $s \geq 0$ et $r_1 \in (\theta_0, b)$ on a :

$$P\{T_1 = s, \theta_1 > r_1\} = (P\{Z_0 \leq \theta_0\})^s P\{Z_0 > r_1\}. \tag{5.1}$$

ii) Quels que soient les entiers $n \geq 1, 1 < s_1 < \ldots < s_n < s_{n+1}$ et $\theta_0 < r_1 < \ldots < r_n < r_{n+1} < b$, on a :

$$\begin{aligned} P\{T_{n+1} - T_n = s_{n+1} - s_n, \theta_{n+1} > r_{n+1} \mid T_1 = s_1, \theta_1 = r_1, \ldots, T_n = s_n, \theta_n = r_n\} \\ = P\{T_{n+1} - T_n = s_{n+1} - s_n, \theta_{n+1} > r_{n+1} \mid \theta_n = r_n\} \\ = (P\{Z_0 \leq r_n\})^{s_{n+1}-s_n-1} P\{Z_0 > r_{n+1}\}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

On démontre dans ce chapitre le théorème 4.2. On montre que (voir Haiman 1993) ce théorème est équivalent au

Théorème 5.2 *Il existe $\theta_0 \in (a,b)$ et une suite $\{(\overline{S}_n, \overline{R}_n), n \geq 1\}$ de v.a. définies sur le même espace de probabilité que $\{Z_n, n \geq 0\}$ élargi de facteurs indépendants, $\overline{S}_n$ étant une suite croissante d'entiers et $\overline{R}_n$ une suite croissante à valeurs dans (θ_0, b) telle que :*

i) $\{(\overline{S}_n, \overline{R}_n), n \geq 1\}$ vérifie (5.1) et (5.2) avec $\overline{S_n}$ à la place de T_n et $\overline{R}_n$ à la place de θ_n.

ii) Presque sûrement, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a

$$T_n = \overline{S}_n, \;\; \theta_n = \overline{R}_n.$$

Pour cela, on commence par construire une suite $\{(\overline{S}_n, \overline{R}_n), n \geq 1\}$ satisfaisant (5.1) et (5.2) telle que :
presque sûrement pour tout entier naturel assez grand on a la

Proposition 5.3

$$\overline{S}_n = \overline{S}_{n-1} + \min\{k \geq 1 : Z_{\overline{S}_{n-1}+k} > \overline{R}_n\}, \ \ \overline{R}_n = Z_{\overline{S}_n}$$

et on déduit le théorème du

Lemme 5.1 *(Haiman 1987 a)) Soit $\{(T'_n, \theta'_n), n \geq 1\}$ une suite telle que presque sûrement il existe $p \geq 1$ tel que pour tout $n \geq p$, on a :*

$$T'_{n+1} = T'_n + \min\{k \geq 1 : Z_{T'_n+k} > \theta'_n\}, \ \theta'_{n+1} = Z_{T'_{n+1}}$$

alors presque sûrement, il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a :

$$T_n = T'_n \ \text{ et } \ \theta_n = \theta'_n.$$

L'élément clé de la construction de $\{(\overline{S}_n, \overline{R}_n), n \geq 1\}$ est le

Lemme 5.2 *(Haiman 1987 a)) Soit Y une v.a. à valeurs dans un ensemble $\mathcal{Y}$. Soit φ un sous-ensemble de $\mathcal{Y}$ et $\hat{P}$ une probabilité sur $\mathcal{Y}$ telle que $0 < \hat{P}(\varphi) < 1$. On suppose que sur φ la loi de Y est absolument continue par rapport à $\hat{P}$ et*

$$\max_{y \in \varphi} \left| \frac{dP_Y}{d\hat{P}}(y) - 1 \right| (1 - \hat{P}(\varphi))^{-1} = q < 1.$$

Soit Q une variable de Bernoulli, indépendante de Y et telle que $P\{Q = 0\} = q$. Il existe deux v.a. Y' à valeurs dans φ et $\overline{Y}$ à valeurs dans φ^c (le complémentaire de φ dans $\mathcal{Y}$) indépendantes de Y et Q, telles que si l'on pose

$$\hat{Y} = \begin{cases} Y \ si \ Q = 1 \ \ et \ Y \in \varphi \\ \overline{Y} \ si \ \overline{Q} = 1 \ \ et \ Y \in \varphi^c \\ Y' \ si \ Q = 0 \end{cases}$$

alors la loi de $\hat{Y}$ est $\hat{P}$.

Les propositions 4.6, 4.7, 4.8 sont utilisées dans la démonstration du théorème.

5.2 CONSTRUCTION DE $\{(\overline{S}_n, \overline{R}_n), n \geq 1\}$

Pour tout $B \in (0,1)$ fixé, soit $x_0 \in (a,b)$ et $\gamma > 1$ tel que pour tout u supérieur à x_0, le théorème 4.5 soit vérifié. Soit $\tau \in (1,\gamma)$ fixé.

Pour tout $\overline{r} \in (x_0, b)$ on pose dans la suite :

$$H(\overline{r}) = \left\{(t,\rho) \in \mathbb{N} \times (\overline{r}, b) \ : \frac{1}{(G(\overline{r}))^B} \leq t \leq \frac{\tau}{G(\overline{r})} \ln_2 \frac{1}{G(\overline{r})}\right\} \tag{5.3}$$

$H(\overline{r})^c$ étant le complémentaire dans $\mathbb{N} \times (\overline{r}, b)$ de $H(\overline{r})$.

$$T = T(\overline{r}) = \inf\{k \geq 1 : Z_k > \overline{r}\} \ \text{ et } \ \theta = \theta(\overline{r}) = Z_T.$$

Soit $\hat{P}$ la loi de probabilité de $Y = (T, \theta)$ lorsque les v.a. $\{Z_k, k \geq 0\}$ sont indépendantes. Observons que la densité de $\hat{P}$ est :

$$\frac{d\hat{P}}{d\rho}(s,\rho) = (1 - P\{Z_0 > \overline{r}\})^{s-1} f(\rho), \ \ (s,\rho) \in \mathbb{N}^* \times (\overline{r}, b).$$

En utilisant les conventions d'écriture précédentes, on a le

Lemme 5.3 *La loi de probabilité de la v.a. Y notée P_Y est absolument continue par rapport à $\hat{P}$ et, il existe une constante $K_1 > 0$ telle que pour tout $\overline{r} \in (x_0, b)$, on a*

$$\max_{(s,\rho)\in H(\overline{r})} \left|\frac{dP_Y}{d\hat{P}}(s,\rho) - 1\right| [\hat{P}(H(\overline{r})^c)]^{-1} \leq K_1 \left(log_2 \frac{1}{G(\overline{r})}\right) \left(log \frac{1}{G(\overline{r})}\right)^{-(1+\gamma-\tau)}. \tag{5.4}$$

Preuve : D'après le théorème 4.5, pour tout $\overline{r} \in (x_0, b)$, on a

$$\max_{(s,\rho)\in H(\overline{r})} \left|\frac{dP_Y}{d\hat{P}}(s,\rho) - 1\right| \leq M_0 \left(log_2 \frac{1}{G(\overline{r})}\right) \left(log \frac{1}{G(\overline{r})}\right)^{-(1+\gamma)}. \tag{5.5}$$

On déduit aisément de (5.3) que :

$$\begin{aligned}
\hat{P}(H(\overline{r})^c) \ &\geq \ \hat{P}\left\{T(\overline{r}) > \frac{\tau}{G(\overline{r})} \ln_2 \frac{1}{G(\overline{r})}\right\} \geq (P\{Z_0 \leq \overline{r}\})^{\frac{\tau}{G(\overline{r})} \ln_2 \frac{1}{G(\overline{r})}} \\
&\geq \ \exp\left(-\frac{\tau}{G(\overline{r})}\left(\ln_2 \frac{1}{G(\overline{r})}\right)\left(G(\overline{r}) + \frac{G(\overline{r})^2}{2(1 - G(\overline{r}))^2}\right)\right).
\end{aligned}$$

(On rappelle que pour tout $x > x_0$, $G(x) < \frac{1}{e}$.) Ceci combiné à l'inégalité

$$x \ln_2 \frac{1}{x} \leq \frac{1}{e}, \; 0 < x < \frac{1}{e}$$

entraîne que :

$$\hat{P}(H(\overline{r})^c) \geq \left(\ln \frac{1}{G(\overline{r})}\right)^{-\tau} \exp\left(-\frac{\tau}{2e(1-\frac{1}{e})^2}\right) \tag{5.6}$$

La combinaison de (5.5) et (5.6) entraîne (5.4).

■

Soit

$$x_1 = \inf\left\{\overline{r} \geq x_0 : K_1\left(\ln_2 \frac{1}{G(\overline{r})}\right)\left(\ln \frac{1}{G(\overline{r})}\right)^{-(1+\gamma-\tau)} < 1\right\}$$

Pour tout $\theta_0 \in (x_1, b)$, considérons la v.a. Y_{θ_0,S_2} à valeurs dans $\mathbb{N} \times (\theta_0, b)$ définie par

$$\{Y_{\theta_0,S_2} = (t, r_1)\} \Leftrightarrow \{\max(Z_{S_2}, \ldots, Z_{S_2+t-1}) \leq \theta_0, Z_{S_2+t} = r_1\}.$$

Soit $\hat{P}_{\theta_0,S_2}$ la loi de la v.a. Y_{θ_0,S_2} lorsque les v.a. $\{Z_{S_2+j}, j \geq 0\}$ sont i.i.d. et, $\overline{Q}_1$ une v.a. de Bernoulli indépendante des v.a. précédentes, telle que :

$$P\{\overline{Q}_1 = 0\} = K_1\left(\ln_2 \frac{1}{G(\theta_0)}\right)\left(\ln \frac{1}{G(\theta_0)}\right)^{-(1+\gamma-\tau)} < 1.$$

On a le

Lemme 5.4 *Il existe deux v.a. Y'_{θ_0,S_2} et $\overline{Y}_{\theta_0,S_2}$ définies sur le même espace que $\{Z_n, n \geq 0\}$ élargi de facteurs indépendants, à valeurs dans $\mathbb{N} \times (\theta_0, b)$, indépendantes de Y_{θ_0,S_2} et $\overline{Q}_1$, telle que la v.a.*

$$\hat{Y}_{\theta_0,S_2} = \begin{cases} Y_{\theta_0,S_2} \text{ si } \overline{Q}_1 = 1 \text{ et } Y_{\theta_0,S_2} \in H(\theta_0) \\ \overline{Y}_{\theta_0,S_2} \text{ si } \overline{Q}_1 = 1 \text{ et } Y_{\theta_0,S_2} \in H(\theta_0)^c \\ Y'_{\theta_0,S_2} \text{ si } \overline{Q}_1 = 0 \end{cases}$$

a pour loi de probabilité $\hat{P}_{\theta_0,S_2}$.

Preuve : On a montré que le processus $\{Z_{S_2+j}, j \geq 0\}$ est une chaîne de Markov de même loi que $\{Z_n, n \geq 0\}$. D'après le lemme précédent,

$$\max_{(s,\rho)\in H(\theta_0)} \left| \frac{dP_{Y_{\theta_0,S_2}}}{d\hat{P}_{\theta_0,S_2}}(s,\rho) - 1 \right| [\hat{P}(H(\theta_0)^c)]^{-1} = \max_{(s,\rho)\in H(\theta_0)} \left| \frac{dP_{Y_{\theta_0,S_2}}}{d\hat{P}_Y}(s,\rho) - 1 \right| [\hat{P}(H(\theta_0)^c)]^{-1}$$
$$\leq K_1 \left(log_2 \frac{1}{G(\theta_0)} \right) \left(log \frac{1}{G(\theta_0)} \right)^{-(1+\gamma-\tau)}$$

On déduit le résultat annoncé en appliquant le lemme 5.2. ■

CONSTRUCTION DE $(\overline{S}_1, \overline{R}_1)$

Soit $\tilde{Y}_{\theta_0} = (\tilde{Y}_{\theta_0})_1, (\tilde{Y}_{\theta_0})_2)$ une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}^* \times (\theta_0, b)$, ne dépendant des v.a. précédentes qu'à travers la v.a. S_2, dont la densité de probabilité est définie par

$$\frac{dP_{\tilde{Y}_{\theta_0}}}{d\rho}(s, \rho \mid S_2 = kr) = \hat{P}(s, \rho \mid (\hat{Y}_{\theta_0})_1 \leq kr - 1) = \frac{(P\{Z_0 \leq \theta_0\})^s f(\rho)}{1 - (P\{Z_0 \leq \theta_0\})^{kr}}$$

$(s,\rho) \in \{0, \ldots, kr-1\} \times (\theta_0, b)$.
Soit L_1 une v.a. de Bernoulli définie sur le même espace que $\{Z_n, n \geq 0\}$, ne dépendant des v.a. précédentes qu'à travers S_2, de loi définie par

$$P\{L_1 = 1 \mid S_2 = kr\} = (P\{Z_0 \leq \theta_0\})^{kr}.$$

Posons

$$\begin{cases} \overline{S}_1 = L_1(S_2 + (\hat{Y}_{\theta_0,S_2})_1) + (1 - L_1)(\tilde{Y}_{\theta_0})_1 \\ \\ \overline{R}_1 = L_1(\hat{Y}_{\theta_0,S_2})_2 + (1 - L_1)(\tilde{Y}_{\theta_0})_2. \end{cases}$$

On montre dans l'annexe que pour tout $(s,\rho) \in \mathbb{N} \times (\theta_0, b)$,

$$P\{\overline{S}_1 = s, \overline{R}_1 > \rho\} = (P\{Z_0 \leq \theta_0\})^s P\{Z_0 > \rho\}. \tag{5.7}$$

CONSTRUCTION DE $(\overline{S}_2, \overline{R}_2)$

Soit

$$\overline{\nu}_1 = \inf\{k \in \mathbb{N} : S_k > \overline{S}_1\}.$$

On montre dans l'annexe que la loi de la v.a. $Z_{S_{\overline{\nu}_1+1}}$ est π. Le procédé de construction du processus $\left\{Z_{S_{\overline{\nu}_1+1}+j}, j \geq 0\right\}$ étant identique à celui de $\{Z_j, j \geq 0\}$, $\left\{Z_{S_{\overline{\nu}_1+1}+j}, j \geq 0\right\}$ est donc une chaîne de Markov stationnaire de même loi que $\{Z_j, j \geq 0\}$. Pour tout $\overline{r}_1 > \theta_0$, soit $Y_{\overline{r}_1, S_{\overline{\nu}_1+1}}$ une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N} \times (\overline{r}_1, b)$ définie par

$$\left\{Y_{\overline{r}_1, S_{\overline{\nu}_1+1}} = (t, \rho)\right\} \Leftrightarrow \left\{\max(Z_{S_{\overline{\nu}_1+1}}, \ldots, Z_{S_{\overline{\nu}_1+1}+t-1}) \leq \overline{r}_1, Z_{S_{\overline{\nu}_1+1}+t} = \rho\right\}.$$

Soit $\hat{P}_{\overline{r}_1, S_{\overline{\nu}_1+1}}$ la loi de la v.a. $Y_{\overline{r}_1, S_{\overline{\nu}_1+1}}$ lorsque les v.a. $\left\{Z_{S_{\overline{\nu}_1+1}+j}, j \geq 0\right\}$ sont i.i.d. et, $\overline{Q}_2(\overline{r}_1)$ une v.a. de Bernoulli indépendante des v.a. précédentes telle que :

$$P\{\overline{Q}_2(\overline{r}_1) = 0\} = K_1 \left(\ln_2 \frac{1}{G(\overline{r}_1)}\right) \left(\ln \frac{1}{G(\overline{r}_1)}\right)^{-(1+\gamma-\tau)}$$

On déduit du lemme 1 la majoration suivante :

$$\max_{(s,\rho)\in H(\overline{r}_1)} \left| \frac{dP_{Y_{\overline{r}_1, S_{\overline{\nu}_1+1}}}}{d\hat{P}_{\overline{r}_1, S_{\overline{\nu}_1+1}}}(s, \rho) - 1 \right| [\hat{P}(H(\overline{r}_1)^c)]^{-1} \leq K_1 \left(\ln_2 \frac{1}{G(\overline{r}_1)}\right)^2 \left(\ln \frac{1}{G(\overline{r_1})}\right)^{-(1+\gamma-\tau)}.$$

Ceci entraîne (d'après le lemme 5.2) l'existence d'une v.a.

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{\overline{r}_1, S_{\overline{\nu}_1+1}} &= ((\hat{Y}_{\overline{r}_1, S_{\overline{\nu}_1+1}})_1, (\hat{Y}_{\overline{r}_1, S_{\overline{\nu}_1+1}})_2) \\ &= \begin{cases} Y_{\overline{r}_1, S_{\overline{\nu}_1+1}} \text{ si } \overline{Q}_2(\overline{r}_1) = 1 \text{ et } Y_{\overline{r}_1, S_{\overline{\nu}_1+1}} \in H(\overline{r}_1) \\ \overline{Y}_{\overline{r}_1, S_{\overline{\nu}_1+1}} \text{ si } \overline{Q}_2(\overline{r}_1) = 1 \text{ et } Y_{\overline{r}_1, S_{\overline{\nu}_1+1}} \in H(\overline{r}_1)^c \\ Y'_{\overline{r}_1, S_{\overline{\nu}_1+1}} \text{ si } \overline{Q}_2(\overline{r}_1) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

à valeurs dans $\mathbb{N}^* \times (\overline{r}_1, b)$, dont la loi de probabilité est $\hat{P}_{\overline{r}_1, S_{\overline{\nu}_1+1}}$.
Soit $\tilde{Y}_{\overline{r}_1} = ((\tilde{Y}_{\overline{r}_1})_1, (\tilde{Y}_{\overline{r}_1})_2)$ une v.a. définie sur le même espace que $\{Z_n, n \geq 0\}$, à valeurs dans $\mathbb{N}^* \times (\overline{r}_1, b)$, ne dépendant des v.a. précédentes qu'à travers $S_{\overline{\nu}_1+1} - \overline{S}_1$, dont la densité est définie par

$$\frac{dP_{\tilde{Y}_{\overline{r}_1}}}{d\rho}(s, \rho \mid S_{\overline{\nu}_1+1} - \overline{S}_1 = j) = \frac{(P\{Z_0 \leq \overline{r}_1\})^{s-1} f(\rho)}{1 - (P\{Z_0 \leq \overline{r}_1\})^{j-1}}$$
$$(s, \rho) \in \{1, \ldots, j-1\} \times (\overline{r}_1, b).$$

Soit $L_2(\overline{r}_1)$ une v.a. de Bernoulli définie sur le même espace que $\{Z_n, n \geq 0\}$, ne dépendant des v.a. précédentes qu'à travers $S_{\overline{\nu}_1+1} - \overline{S}_1$, de loi définie par

$$P\{L_2(\overline{r}_1) = 1 \mid S_{\overline{\nu}_1+1} - \overline{S}_1 = j\} = (P\{Z_0 \leq \overline{r}_1\})^{j-1}.$$

Posons

$$\begin{cases} \Delta\overline{S}_2 = L_2(\overline{R}_1)\left(S_{\overline{\nu}_1+1} - \overline{S}_1 + (\hat{Y}_{\overline{R}_1, S_{\overline{\nu}_1+1}})_1\right) + (1 - L_2(\overline{R}_1))\,(\tilde{Y}_{\overline{R}_1})_1 \\ \\ \Delta\overline{R}_2 = L_2(\overline{R}_1)(\hat{Y}_{\overline{R}_1, S_{\overline{\nu}_1+1}})_2 + (1 - L_2(\overline{R}_1))\,(\tilde{Y}_{\overline{R}_1})_2 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \overline{S}_2 = \overline{S}_1 + \Delta\overline{S}_2 \\ \\ \overline{R}_2 = \Delta\overline{R}_2. \end{cases}$$

On vérifie aisément que pour tout $(\overline{s}_2 - \overline{s}_1, \rho)$ appartenant à $\mathbb{N}^* \times (\overline{r}_1, b)$, on a

$$P\{\Delta\overline{S}_2 = \overline{s}_2 - \overline{s}_1, \Delta\overline{R}_2 > \rho \mid \overline{S}_1 = \overline{s}_1, \overline{R}_1 = \overline{r}_1\} = (P\{Z_0 \leq \overline{r}_1\})^{\overline{s}_2 - \overline{s}_1 - 1} P\{Z_0 > \rho\}.$$

La construction de $(\overline{S}_2, \overline{R}_2)$ définit un algorithme qu'on utilise pour construire $\{(\overline{S}_n, \overline{R}_n), n > 2\}$. Supposons $\{(\overline{S}_i, \overline{R}_i), 1 \leq i \leq n\}$ déja construites.

CONSTRUCTION DE $(\overline{S}_{n+1}, \overline{R}_{n+1})$

Soit

$$\overline{\nu}_n = \inf\{k \in \mathbb{N} : S_k > \overline{S}_n\}.$$

On vérifie que le processus $\left\{Z_{S_{\overline{\nu}_n+1}+j}, j \geq 0\right\}$ est une chaîne de Markov de même loi que $\{Z_n, n \geq 0\}$. Pour tout $\overline{r}_n > \theta_0$, soit $Y_{\overline{r}_n, S_{\overline{\nu}_n+1}}$ une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N} \times (\overline{r}_n, b)$ définie par

$$\left\{Y_{\overline{r}_n, S_{\overline{\nu}_n+1}} = (t, \rho)\right\} \Leftrightarrow \left\{\max(Z_{S_{\overline{\nu}_n+1}}, \ldots, Z_{S_{\overline{\nu}_n+1}+t-1}) \leq \overline{r}_n, Z_{S_{\overline{\nu}_n+1}+t} = \rho\right\}. \tag{5.8}$$

Soit $\hat{P}_{\overline{r}_n, S_{\overline{\nu}_n+1}}$ la loi de la v.a. $Y_{\overline{r}_n, S_{\overline{\nu}_n+1}}$ lorsque les v.a. $\{Z_{S_{\overline{\nu}_n+1}+j}, j \geq 0\}$ sont i.i.d. et, $\overline{Q}_{n+1}(\overline{r}_n)$ une v.a. de Bernoulli indépendante des v.a. précédentes telle que :

$$P\{\overline{Q}_{n+1}(\overline{r}_n) = 0\} = K_1 \left(\ln_2 \frac{1}{G(\overline{r}_n)}\right)^2 \left(\ln \frac{1}{G(\overline{r}_n)}\right)^{-(1+\gamma-\tau)}.$$

On déduit du lemme 1 la majoration suivante :

$$\max_{(s,\rho)\in H(\overline{r}_n)} \left| \frac{dP_{Y_{\overline{r}_n,S_{\overline{\nu}_n}}}}{d\hat{P}_{\overline{r}_n,S_{\overline{\nu}_n}}}(s,\rho) - 1 \right| [\hat{P}(H(\overline{r}_n)^c)]^{-1} \leq K_1 \left(log_2 \frac{1}{G(\overline{r}_n)}\right)^2 \left(log \frac{1}{G(\overline{r}_n)}\right)^{-(1+\gamma-\tau)}. \tag{5.9}$$

Ceci entraîne (d'après le lemme 5.2) l'existence d'une v.a.

$$\hat{Y}_{\overline{r}_n,S_{\overline{\nu}_n+1}} = ((\hat{Y}_{\overline{r}_n,S_{\overline{\nu}_n+1}})_1, (\hat{Y}_{\overline{r}_n,S_{\overline{\nu}_n+1}})_2)$$
$$= \begin{cases} Y_{\overline{r}_n,S_{\overline{\nu}_n+1}} \text{ si } \overline{Q}_{n+1}(\overline{r}_n) = 1 \text{ et } Y_{\overline{r}_n,S_{\overline{\nu}_n+1}} \in H(\overline{r}_n) \\ \overline{Y}_{\overline{r}_n,S_{\overline{\nu}_n+1}} \text{ si } \overline{Q}_{n+1}(\overline{r}_n) = 1 \text{ et } Y_{\overline{r}_n,S_{\overline{\nu}_n+1}} \in H(\overline{r}_n)^c \\ Y'_{\overline{r}_n,S_{\overline{\nu}_n+1}} \text{ si } \overline{Q}_{n+1}(\overline{r}_n) = 0 \end{cases} \tag{5.10}$$

à valeurs dans $\mathbb{N}^* \times (\overline{r}_n, b)$ dont la loi de probabilité est $\hat{P}_{\overline{r}_n,S_{\overline{\nu}_n+1}}$.
Soit $\tilde{Y}_{\overline{r}_n} = ((\tilde{Y}_{\overline{r}_n})_1, (\tilde{Y}_{\overline{r}_n})_n)_2)$ une v.a. définie sur le même espace que $\{Z_n, n \geq 0\}$, à valeurs dans $\mathbb{N}^* \times (\overline{r}_n, b)$, ne dépendant des v.a. précédentes qu'à travers $S_{\overline{\nu}_n+1} - \overline{S}_n$, dont la densité est définie par

$$\frac{dP_{\tilde{Y}_{\overline{r}_n}}}{d\rho}(s,\rho \mid S_{\overline{\nu}_n+1} - \overline{S}_n = j) = \frac{(P\{Z_0 \leq \overline{r}_n\})^{s-1} f(\rho)}{1 - (P\{Z_0 \leq \overline{r}_n\})^{j-1}}$$
$$(s,\rho) \in \{1, \ldots, j-1\} \times (\overline{r}_n, b).$$

Soit $L_{n+1}(\overline{r}_n)$ une v.a. de Bernoulli définie sur le même espace que $\{Z_n, n \geq 0\}$, ne dépendant des v.a. précédentes qu'à travers $S_{\overline{\nu}_n+1} - \overline{S}_n$, de loi définie par

$$P\{L_{n+1} = 1 \mid S_{\overline{\nu}_n+1} - \overline{S}_n = j\} = (P\{Z_0 \leq \overline{r}_n\})^{j-1}. \tag{5.11}$$

Posons

$$\begin{cases} \Delta\overline{S}_{n+1} = L_{n+1}(\overline{R}_n)\left(S_{\overline{\nu}_n+1} - \overline{S}_n + (\hat{Y}_{\overline{R}_n,S_{\overline{\nu}_n+1}})_1\right) + \left(1 - L_{n+1}(\overline{R}_n)\right)(\tilde{Y}_{\overline{R}_n})_1 \\ \Delta\overline{R}_{n+1} = L_{n+1}(\overline{R}_n)(\hat{Y}_{\overline{R}_n,S_{\overline{\nu}_n+1}})_2 + \left(1 - L_{n+1}(\overline{R}_n)\right)(\tilde{Y}_{\overline{R}_n})_2 \end{cases} \tag{5.12}$$

et

$$\begin{cases} \overline{S}_{n+1} = \overline{S}_n + \Delta\overline{S}_{n+1} \\ \overline{R}_{n+1} = \Delta\overline{R}_{n+1}. \end{cases}$$

On vérifie aisément à l'aide d'un raisonnement similaire à celui utilisé dans l'annexe pour montrer (5.7) que pour tout $(\overline{s}_{n+1} - \overline{s}_n, \rho)$ appartenant à $\mathbb{N}^* \times (\overline{r}_n, b)$,

$$\begin{aligned} P\{\Delta\overline{S}_{n+1} = \overline{s}_{n+1} - \overline{s}_n, \Delta\overline{R}_{n+1} > \rho \mid \overline{S}_1 = \overline{s}_1, \overline{R}_1 = \overline{r}_1, \dots, \overline{S}_n = \overline{s}_n, \overline{R}_n = \overline{r}_n\} \\ = (P\{Z_0 \le \overline{r}_n\})^{\overline{s}_{n+1}-s_n-1} P\{Z_0 > \rho\}. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Il est nécessaire pour faciliter la compréhension de la suite d'effectuer au préalable les remarques suivantes :

Remarque 5.1 $\overline{S}_1$ et $\overline{R}_1$ sont construites de manière telle que :

$$\{\overline{S}_1 = \overline{s}_1, \overline{R}_1 = \overline{r}_1\} \in \sigma(Z_0, \dots, Z_{\overline{s}_1}) \times \sigma(S_2) \times \sigma(L_1, \overline{Q}_1, \overline{Y}_{\theta_0,S_2}, Y'_{\theta_0,S_2}, \tilde{Y}_{\theta_0})$$

$L_1, \overline{Q}_1, \overline{Y}_{\theta_0,S_2}, Y'_{\theta_0,S_2}, \tilde{Y}_{\theta_0}$ étant choisies de sorte qu'elles ne dépendent de $\{Z_j, j \ge 0\}$ et $\{S_j, j \ge 1\}$ que par l'intermédiaire de S_2 et, pour tout $n \ge 1$, il existe une tribu σ'_n telle que :

$$\begin{aligned} &\{\overline{S}_1 = \overline{s}_1, \overline{R}_1 = \overline{r}_1 =, \dots, \overline{S}_{n+1} = \overline{s}_{n+1} =, \overline{R}_{n+1} = \overline{r}_{n+1}\} \in \\ &\sigma(Z_0, \dots, Z_{\overline{s}_{n+1}}) \times \sigma'_n \times \sigma(L_{n+1}(\overline{R}_n), \overline{Q}_{n+1}(\overline{R}_n), \overline{Y}_{\overline{R}_n, S_{\overline{\nu}_n+1}}, Y'_{\overline{R}_n, S_{\overline{\nu}_n+1}}, \tilde{Y}_{\overline{R}_n}). \end{aligned} \tag{5.14}$$

Les v.a. $L_{n+1}(\overline{R}_n), \overline{Q}_{n+1}(\overline{R}_n), \overline{Y}_{\overline{R}_n, S_{\overline{\nu}_n+1}}, Y'_{\overline{R}_n, S_{\overline{\nu}_n+1}}, \tilde{Y}_{\overline{R}_n}$ étant choisies de telle sorte qu'elles ne dépendent de $\{Z_j, j \ge 0\}$, $\{S_j, j \ge 1\}$ et de σ'_n que par l'intermédiaire des v.a. $S_{\overline{\nu}_n+1} - \overline{S}_n$ et $\overline{R}_n$.

Remarque 5.2 De (5.10) et (5.12) on déduit que :

$$\begin{aligned} &\left\{\Delta\overline{S}_{n+1} = S_{\overline{\nu}_n+1} - \overline{S}_n + \min\{t \ge 0 : Z_{S_{\overline{\nu}_n+1}+t} > \overline{R}_n\}, \Delta\overline{R}_{n+1} = Z_{\overline{S}_{n+1}}\right\} \\ &= \{L_{n+1}(\overline{R}_n) = 1\} \cap \{\overline{Q}_{n+1}(\overline{R}_n) = 1\} \cap \left\{\overline{Y}_{\overline{R}_n, S_{\overline{\nu}_n+1}} \in H(\overline{R}_n)\right\}. \end{aligned} \tag{5.15}$$

5.3 Démonstration de la proposition 5.3

Présentation des résultats préliminaires

Lemme 5.5

$$\begin{aligned} P\Big\{&(\Delta\overline{S}_{n+1}, \Delta\overline{R}_{n+1}) = (\overline{S}_{n+1} - \overline{S}_n, \overline{R}_{n+1}) \neq \\ &\left(S_{\overline{\nu}_n+1} - \overline{S}_n + \min\left\{t \ge 0 : Z_{S_{\overline{\nu}_n+1}+t} > \overline{R}_n\right\}, Z_{\overline{S}_{n+1}}\right) \text{ i.s.}\Big\} = 0. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Preuve : On montre successivement que :

$$P\left\{L_{n+1}(\overline{R}_n)=0 \text{ i.s.}\right\}=P\left\{\overline{Q}_{n+1}(\overline{R}_n)=0 \ i.s.\right\}=P\left\{Y_{\overline{R}_n,S_{\overline{\nu}_n+1}}\in H(\overline{R}_n)^c \text{ i.s.}\right\}=0$$

et on déduit (5.16) de (5.15).

Montrons que

$$P\{L_{n+1}(\overline{R}_n)=0 \text{ i.s.}\}=0. \tag{5.17}$$

On sait d'après le lemme (2.8) P 31 de (Haiman 1993) que pour tout $\alpha\in(0,1)$,

$$P\{G(\overline{R}_n)>\exp(-\alpha n) \text{ i.s.}\}=0.$$

Ceci implique

$$P\{L_{n+1}(\overline{R}_n)=0 \text{ i.s.}\}=P\{L_{n+1}(\overline{R}_n)=0, G(\overline{R}_n)\le\exp(-\alpha n)\text{ i.s.}\}.$$

Observons que :

$$\begin{aligned}&P\{L_{n+1}(\overline{R}_n)=0, G(\overline{R}_n)\le\exp(-\alpha n)\}\\&\quad=\int_{G(\overline{r})\le\exp(-\alpha n)}P\{L_{n+1}(\overline{R}_n)=0\mid\overline{R}_n=\overline{r}\}dP_{\overline{R}_n}(\overline{r}).\end{aligned}$$

On déduit de (5.11) que

$$\begin{aligned}P\{L_{n+1}(\overline{R}_n)=0\mid\overline{R}_n=\overline{r}\}&=\sum_{j=r+1}^{\infty}P\{L_{n+1}(\overline{R}_n)=0, S_{\overline{\nu}_n+1}-\overline{S}_n=j\mid\overline{R}_n=\overline{r}\}\\&=\sum_{j=1}^{\infty}(1-(P\{Z_0\le\overline{r}\})^{j-1})P\{S_{\overline{\nu}_n+1}-\overline{S}_n=j\}.\end{aligned}$$

On montre dans l'annexe que pour tout $\overline{r}\in(\theta_0,b)$, on a

$$P\{S_{\overline{\nu}_n+1}-\overline{S}_n=j\}\le j(1-\epsilon)^{\frac{j}{r}-1}.$$

Ceci combiné à l'inégalité

$$1-x^{j-1}\le(j-1)(1-x), 0<x<1, j\ge 2$$

entraîne que :

$$
\begin{aligned}
P\{L_{n+1}(\overline{R}_n) = 0 \mid \overline{R}_n = \overline{r}\} &\leq \sum_{j=1}^{\infty} j(j-1)(1-\epsilon)^{\frac{j}{r}-3} G(\overline{r}) \\
&= \frac{G(\overline{r})}{(1-\epsilon)} (1-\epsilon)^{\frac{2}{r}} \frac{2}{(1-(1-\epsilon)^{\frac{1}{r}})}.
\end{aligned}
$$

Il vient

$$
P\{L_{n+1}(\overline{R}_n) = 0, G(\overline{R}_n) \leq \exp(-\alpha n)\} \leq \frac{\exp(-\alpha n)}{(1-\epsilon)} (1-\epsilon)^{\frac{2}{r}} \frac{2}{(1-(1-\epsilon)^{\frac{1}{r}})^3}
$$

et on déduit (5.17) du lemme de Borel Cantelli. ∎

Un raisonnement similaire au précédent permet de montrer que

$$
P\{\overline{Q}_{n+1}(\overline{R}_n) = 0 \text{ i.s.}\} = 0
$$

car $1 + \gamma - r > 1$.

Montrons que

$$
P\left\{Y_{\overline{R}_n, S_{\overline{\nu}_n+1}} \in H(\overline{R}_n)^c \text{ i.s.}\right\} = 0. \tag{5.18}
$$

D'après le lemme (2.8) p 31 de Haiman 1993, pour tout $\alpha \in (0,1)$ on a :

$$
P\left\{Y_{\overline{R}_n, S_{\overline{\nu}_n+1}} \in H(\overline{R}_n)^c \text{ i.s.}\right\} = P\left\{Y_{\overline{R}_n, S_{\overline{\nu}_n+1}} \in H(\overline{R}_n)^c,\ G(\overline{R}_n) \leq \exp(-\alpha n) \text{ i.s.}\right\}.
$$

Observons que :

$$
\begin{aligned}
&P\left\{Y_{\overline{R}_n, S_{\overline{\nu}_n+1}} \in H(\overline{R}_n)^c, G(\overline{R}_n) \leq \exp(-\alpha n)\right\} \\
&\qquad = \int_{G(\overline{r}) \leq \exp(-\alpha n)} [1 - P\{Y_{\overline{r}, S_{\overline{\nu}_n+1}} \in H(\overline{r})\}]\, dP_{\overline{R}_n}(\overline{r}).
\end{aligned}
$$

Le processus $\left\{Z_{S_{\overline{\nu}_n+1}+j}, j \geq 0\right\}$ étant une chaîne de Markov stationnaire de même loi que $\{Z_j, j \geq 0\}$, (la preuve est faite dans l'annexe) en combinant (5.3) et (5.8) on déduit que pour tout $\overline{r} \in (\theta_0, b)$, on a

$$
P\left\{Y_{\overline{r}, S_{\overline{\nu}_n+1}} \in H(\overline{r})\right\} = \sum_{\frac{1}{(G(\overline{r}))^B} \leq j \leq \frac{r}{G(\overline{r})} \ln_2 \frac{1}{G(\overline{r})}} P\{\max(Z_0, \ldots, Z_{j-1}) \leq \overline{r}, Z_j > \overline{r}\}. \tag{5.19}
$$

D'après le théorème 4.5, il existe une fonction

$$f(\overline{r}) = M_0 \left(log_2 \frac{1}{G(\overline{r})} \right)^2 \left(log \frac{1}{G(\overline{r})} \right)^{-(1+\gamma)} < 1, \ \ \overline{r} > \theta_0$$

telle que pour tout $j \in (\frac{1}{(G(\overline{r}))^B}, \frac{\tau}{G(\overline{r})} \ln_2 \frac{1}{G(\overline{r})})$, on a :

$$P\{\max(Z_0, \dots, Z_{j-1}) \leq \overline{r}, Z_j > \overline{r}\} \ \geq \ (1 - f(\overline{r}))(P\{Z_0 \leq \overline{r}\})^j P\{Z_0 \geq \overline{r}\} \quad (5.20)$$

La combinaison de (5.19) et (5.20) entraîne que :

$$\begin{aligned} P\{Y_{\overline{r}, S_{\overline{\nu}_n+1}} \in H(\overline{r})\} \ &\geq \ (1 - f(\overline{r}))[(P\{Z_0 \leq \overline{r}\})^{(G(\overline{r}))^{-B}+1} - (P\{Z_0 \leq \overline{r}\})^{\frac{\tau}{G(\overline{r})} \ln_2 \frac{1}{G(\overline{r})}}] \\ &\geq \ (P\{Z_0 \leq \overline{r}\})^{(G(\overline{r}))^{-B}+1} - (P\{Z_0 \leq \overline{r}\})^{\frac{\tau}{G(\overline{r})} \ln_2 \frac{1}{G(\overline{r})}} - f(\overline{r}). \end{aligned}$$

Il vient

$$1 - P\{Y_{\overline{r}, S_{\overline{\nu}_n+1}} \in H(\overline{r})\} \ \leq \ 1 - (P\{Z_0 \leq \overline{r}\})^{(G(\overline{r}))^{-B}+1} + (P\{Z_0 \leq \overline{r}\})^{\frac{\tau}{G(\overline{r})} \ln_2 \frac{1}{G(\overline{r})}} + f(\overline{r}). \quad (5.21)$$

On déduit des inégalités

$$\ln(1 - x) \geq -x - \frac{x^2}{2(1 - x)^2}, 0 < x < 1 \ \text{ et } \ \exp(-x) \geq 1 - x, x > 0$$

que :

$$(P\{Z_0 \leq \overline{r}\})^{(G(\overline{r}))^{-B}+1} \geq 1 - \left((G(\overline{r}))^{1-B} + \frac{(G(\overline{r}))^{2-B}}{2(1 - G(\overline{r}))^2} + G(\overline{r}) + \frac{G(\overline{r})^2}{2(1 - G(\overline{r}))^2} \right). \quad (5.22)$$

D'après l'inégalité

$$\ln(1 - x) < -x \, ; \ 0 < x < 1,$$

on a

$$(P\{Z_0 \leq \overline{r}\})^{\frac{\tau}{G(\overline{r})} \ln_2 \frac{1}{G(\overline{r})}} \leq \left(\ln \frac{1}{G(\overline{r})} \right)^{-\tau}. \quad (5.23)$$

La combinaison de (5.21) (5.22) et (5.23) entraîne que pour n assez grand, on a

$$P\left\{Y_{\overline{R}_n,S_{\overline{\nu}_n+1}} \in H(\overline{R}_n)^c, G(\overline{R}_n) \leq \exp(-\alpha n)\right\} \leq \exp(-\alpha(1-B)n)+\frac{\exp(-\alpha(2-B)n)}{2(1-\exp(-\alpha n))^2}$$
$$+\exp(-\alpha n)+\frac{\exp(-2\alpha n)}{2(1-\exp(-\alpha n))^2}+(\alpha n)^{-\tau}+M_1(\ln \alpha n)(n\alpha)^{-(1+\gamma)}$$
$$\sim \exp(-\alpha(1-B)n)+\exp(-\alpha(2-B)n)+\exp(-\alpha n)+\exp(-2\alpha n)$$
$$+(\alpha n)^{-\tau}+M_1(\ln \alpha n)(n\alpha)^{-(1+\gamma)}$$

τ et γ étant strictement supérieurs à 1, on en déduit (5.18) du lemme de Borel Cantelli. ∎

Démonstration de la proposition 5.3.

La combinaison de la majoration

$$P\{S_{\overline{\nu}_{n+1}+1}-\overline{S}_{n+1}=p\} \leq p(1-\epsilon)^{\frac{p}{r}-1},\ n \geq 1$$

qu'on montre dans l'annexe et du lemme de Borel Cantelli entraîne que :

$$P\left\{S_{\overline{\nu}_{n+1}+1}-\overline{S}_{n+1} > \frac{1}{(G(\overline{R}_n))^B}\ \text{i.s.}\right\}$$
$$=P\left\{S_{\overline{\nu}_{n+1}+1}-\overline{S}_{n+1} > \frac{1}{(G(\overline{R}_n))^B}\ , G(\overline{R}_n) \leq \exp(-\alpha n)\ \text{ i.s.}\right\}=0.$$

Ayant démontré (5.16), pour montrer la proposition 5.3, il suffit de prouver que :

$$P\left\{\max(Z_{\overline{S}_n+1},\ldots,Z_{S_{\overline{\nu}_{n+1}}-1}) > \overline{R}_n\ \text{ i.s.}\right\}=0. \tag{5.24}$$

Soit

$$A_{n+1}=\Big\{\max(Z_{\overline{S}_{n+1}+1},\ldots,Z_{S_{\overline{\nu}_{n+1}+1}-1}) > \overline{R}_{n+1}, L_{n+1}(\overline{R}_n)=1, \overline{Q}_{n+1}(\overline{R}_n)=1,$$
$$Y_{\overline{R}_n,S_{\overline{\nu}_n+1}} \in H(\overline{R}_n), G(\overline{R}_n) \leq \exp(-\alpha n), S_{\overline{\nu}_{n+1}+1}-\overline{S}_{n+1} \leq \frac{1}{(G(\overline{R}_n))^B}\Big\}.$$

D'après les résultats précédents il est équivalent de démontrer (5.24) et

$$P\{A_{n+1}\ \text{ i.s.}\}=0. \tag{5.25}$$

Observons que

$$\begin{aligned}
P\{A_{n+1}\} &= \int_s \int_{G(\overline{r}) \leq \exp(-\alpha n)} P\{A_{n+1} \mid \overline{R}_n = \overline{r}, S_{\overline{\nu}_n+1} = s\} dP_{(\overline{R}_n, S_{\overline{\nu}_n+1})}(\overline{r}, s) \\
&= \int_s \int_{G(\overline{r}) \leq \exp(-\alpha n)} \sum_{\frac{1}{(G(\overline{r}))^B} \leq j \leq \frac{\overline{r}}{G(\overline{r})} \ln_2 \frac{1}{G(\overline{r})}} \sum_{i \leq \frac{1}{(G(\overline{r}))^B}} P\{\max(Z_s, \ldots, Z_{s+j-1}) \leq \overline{r}, \\
& Z_{s+j} > \overline{r}, \max(Z_{s+j+1}, \ldots, Z_{s+j+i-1}) \leq Z_{s+j}, Z_{s+j+i} > Z_{s+j}\} dP_{(\overline{R}_n, S_{\overline{\nu}_n+1})}(\overline{r}, s).
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Le processus $\left\{Z_{S_{\overline{\nu}_n+1}+j}, j \geq 0\right\}$ étant une chaîne de Markov stationnaire de même loi que $\{Z_n, n \geq 0\}$, on déduit de (5.26) que :

$$\begin{aligned}
P\{A_{n+1}\} \leq & \int_{G(\overline{r}) \leq \exp(-\alpha n)} \sum_{\frac{1}{(G(\overline{r}))^B} \leq j \leq \frac{\overline{r}}{G(\overline{r})} \ln_2 \frac{1}{G(\overline{r})}} \sum_{i \leq \frac{1}{(G(\overline{r}))^B}} \\
& P\{\max(Z_0, \ldots, Z_{j-1}) \leq \overline{r}, Z_j > \overline{r}, Z_{j+i} > \overline{r}\} dP_{\overline{R}_n}(\overline{r}).
\end{aligned} \tag{5.27}$$

Il résulte des hypothèses initiales que :

$$\begin{aligned}
& P\{\max(Z_0, \ldots, Z_{j-1}) \leq \overline{r}, Z_j > \overline{r}, Z_{j+i} > \overline{r}\} \\
& \qquad \leq K P\{\max(Z_0, \ldots, Z_{j-1}) \leq \overline{r}, Z_j > \overline{r}\} P\{Z_{j+i} > \overline{r}\}.
\end{aligned}$$

D'après le théorème 4.5, pour tout $\overline{r} > \theta_0$ et $j \in (\frac{1}{(G(\overline{r}))^B}, \frac{\overline{r}}{G(\overline{r})} \ln_2 \frac{1}{G(\overline{r})}) < 1$ on a

$$\begin{aligned}
& P\{\max(Z_0, \ldots, Z_{j-1}) \leq \overline{r}, Z_j > \overline{r}\} \leq (1 + f(\overline{r}))(P\{Z_0 \leq \overline{r}\})^j P\{Z_0 \geq \overline{r}\}, \\
& \qquad 0 \leq f(\overline{r}) < 1, \ \ \overline{r} > \theta_0.
\end{aligned}$$

D'où on déduit que :

$$\begin{aligned}
& \sum_{\frac{1}{(G(\overline{r}))^B} \leq j \leq \frac{\overline{r}}{G(\overline{r})} \ln_2 \frac{1}{G(\overline{r})}} \sum_{i \leq \frac{1}{(G(\overline{r}))^B}} P\{\max(Z_0, \ldots, Z_{j-1}) \leq \overline{r}, Z_j > \overline{r}, Z_{j+i} > \overline{r}\} \\
& \quad \leq 2K(G(\overline{r}))^2 \sum_{\frac{1}{(G(\overline{r}))^B} \leq j \leq \frac{\overline{r}}{G(\overline{r})} \ln_2 \frac{1}{G(\overline{r})}} \sum_{i \leq \frac{1}{(G(\overline{r}))^B}} (P\{Z_0 \leq \overline{r}\})^j \\
& \quad \leq \frac{2K}{(G(\overline{r}))^B} (G(\overline{r})) \left[(P\{Z_0 \leq \overline{r}\})^{(G(\overline{r}))^{-B}} - (P\{Z_0 \leq \overline{r}\})^{\frac{\overline{r}}{G(\overline{r})} \ln_2 \frac{1}{G(\overline{r})} + 1} \right].
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Il vient

$$\sum_{\frac{1}{(G(\overline{r}))^B} \leq j \leq \frac{r}{G(\overline{r})} \ln_2 \frac{1}{G(\overline{r})}} \sum_{i \leq \frac{1}{(G(\overline{r}))^B}} P\{\max(Z_0, \dots, Z_{j-1}) \leq \overline{r}, Z_j > \overline{r}, Z_{j+i} > \overline{r}\}$$
$$\leq 2K(G(\overline{r}))^{1-B}. \tag{5.29}$$

La combinaison de (5.27) et (5.29) entraîne que :

$$P\{A_{n+1}\} \leq 2K \exp(-\alpha n(1-B))$$

et on déduit (5.25) du lemme de Borel Cantelli. ∎

5.4 Démonstration du théorème 5.2

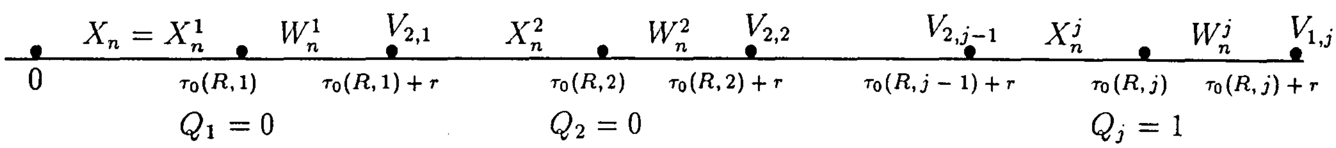
Le théorème est un corollaire immédiat de la proposition 5.3 et du lemme 5.1. ∎

Chapitre 6

Annexe

6.1 Démonstrations du chapitre 2.

Proposition 6.1 *Le processus* $\{Z_n, n \geq 0\}$ *construit est une chaîne de Markov de même loi que* $\{X_n, n \geq 0\}$.



Preuve : Pour abréger les notations, Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $A \in \mathcal{F}$, posons

$$\{Z_0 = z_0, \ldots, Z_n = z_n\} = \{\overline{Z}_n = \overline{z}_n\}$$
$$A_{n,k} = P\{Z_n \in A, \tau_0(R,k) + r < n \leq \tau_0(R,k+1) \mid \overline{Z}_{n-1} = \overline{z}_{n-1}\}$$
et
$$B_{n,k} = P\{Z_n \in A, \tau_0(R,k+1) < n \leq \tau_0(R,k+1) + r \mid \overline{Z}_{n-1} = \overline{z}_{n-1}\}.$$

Observons que :

$$\begin{aligned}
&P\{Z_n \in A \mid \overline{Z}_{n-1} = \overline{z}_{n-1}\} \\
&\quad = P\left(\bigcup_{k=0}^{\infty}\{Z_n \in A, \tau_0(R,k) + r < n \leq \tau_0(R,k+1) + r \mid \overline{Z}_{n-1} = \overline{z}_{n-1}\}\right) \\
&\quad = \sum_{k=0}^{\infty}(A_{n,k} + B_{n,k}).
\end{aligned} \tag{6.1}$$

On vérifie aisément que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$t_k = \tau_0(R,k) + r \geq k(r+1) \text{ et } \tau_0(R,k+1) = t_k + \tau^{k+1}(R).$$

Ceci implique

$$A_{n,k} = \sum_{j=k(r+1)}^{n-1} B_j \tag{6.2}$$

où

$$B_j = P\{Z_n \in A, t_k = j, \tau^{k+1}(R) \geq n-j \mid \overline{Z}_{n-1} = \overline{z}_{n-1}\}.$$

D'après la formule de Bayes, on a

$$\begin{aligned} B_j &= P\{z_n \in A \mid t_k = j, \tau^{k+1}(R) \geq n-j, \overline{Z}_{n-1} = \overline{z}_{n-1}\} \times \\ &\quad P\{t_k = j, \tau^{k+1}(R) \geq n-j \mid \overline{Z}_{n-1} = \overline{z}_{n-1}\}. \end{aligned}$$

Le processus $(\{Z_n, n \geq 0\}, \{S_n, n \geq 1\})$ est construit de sorte que :

$$\begin{aligned} &P\{Z_n \in A \mid t_k = j, \tau^{k+1}(R) \geq n-j, \overline{Z}_{n-1} = \overline{z}_{n-1}\} \\ &\quad = P\{X^{k+1}_{n-j} \in A \mid X^{k+1}_0 = z_j, \ldots, X^{k+1}_{n-j-1} = z_{n-1}\} = P(z_{n-1}, A). \end{aligned} \tag{6.3}$$

Il vient

$$B_j = P(z_{n-1}, A) P\{t_k = j, \tau^{k+1}(R) \geq n-j \mid \overline{Z}_{n-1} = \overline{z}_{n-1}\}. \tag{6.4}$$

La combinaison de (6.2) et (6.4) entraîne que :

$$A_{n,k} = P(z_{n-1}, A) P\{\tau_0(R,k) + r < n \leq \tau_0(R, k+1) \mid \overline{Z}_{n-1} = \overline{z}_{n-1}\}. \tag{6.5}$$

Il est clair que :

$$B_{n,k} = \sum_{j=1}^{r} P\{Z_n \in A, n - \tau_0(R, k+1) = j \mid \overline{Z}_{n-1} = \overline{z}_{n-1}\}. \tag{6.6}$$

Montrons que pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$, on a

$$\begin{aligned} &P\{Z_n \in A, n - \tau_0(R, k+1) = j \mid \overline{Z}_{n-1} = \overline{z}_{n-1}\} \\ &\quad = P(z_{n-1}, A) P\{n - \tau_0(R, k+1) = j \mid \overline{Z}_{n-1} = \overline{z}_{n-1}\}. \end{aligned} \tag{6.7}$$

On vérifie que pour tout $A, A_i \in \mathcal{F}$, $i = 0 \ldots n-1$, pour tout $j \in \{1, \ldots, r-1\}$, $r > 1$, on a

$$\begin{aligned} &P\{Z_0 \in A_0, \ldots, Z_{n-1} \in A_{n-1}, n - \tau_0(R, k+1) = j, Z_n \in A\} \\ &\quad = \int_{A_0} \cdots \int_{A_{n-j}} P\{Z_{n-j+1} \in A_{n-j+1}, \ldots, Z_{n-1} \in A_{n-1}, n - \tau_0(R, k+1) = j, \\ &\qquad\qquad Z_n \in A \mid \overline{Z}_{n-j} = \overline{z}_{n-j}\} dP_{(Z_0, \ldots Z_{n-j})}(z_0, \ldots, z_{n-j}). \end{aligned} \tag{6.8}$$

D'après la formule de formule de Bayes, on a

$$P\{Z_{n-j+1} \in A_{n-j+1}, \ldots, Z_{n-1} \in A_{n-1}, n - \tau_0(R, k+1) = j, Z_n \in A \mid \overline{Z}_{n-j} = \overline{z}_{n-j}\}$$
$$= \left[\int_F P\{Z_{n-j+1} \in A_{n-j+1}, \ldots, Z_{n-1} \in A_{n-1}, Z_n \in A \mid \overline{Z}_{n-j} = \overline{z}_{n-j}, Z_{n-j+r} = z_{n-j+r},\right.$$
$$\left. n - \tau_0(R, k+1) = j\} dP_{\{Z_{n-j+r} \mid \overline{Z}_{n-j} = \overline{z}_{n-j}, n-\tau_0(R,k+1)=j\}}(z_{n-j+r})\right] \times$$
$$P\{n - \tau_0(R, k+1) = j \mid \overline{Z}_{n-j} = \overline{z}_{n-j}\}. \tag{6.9}$$

Observons que pour tout $B \in \mathcal{F}$, pour tout $r \geq 1$, pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$, on a

$$\begin{aligned} &P\{Z_{n-j+r} \in B, Q_{k+1} = 0 \mid \overline{Z}_{n-j} = \overline{z}_{n-j}, n - \tau_0(R, k+1) = j\} \\ &\quad = P\{V_{2,k+1} \in B, Q_{k+1} = 0 \mid \overline{Z}_{n-j} = \overline{z}_{n-j}, n - \tau_0(R, k+1) = j\} \\ &\quad = \left[\frac{P^{(r)}(z_{n-j}, B) - \epsilon\Lambda(B)}{1 - \epsilon}\right] P\{Q_{k+1} = 0\} \end{aligned} \tag{6.10}$$

et

$$\begin{aligned} &P\{Z_{n-j+r} \in B, Q_{k+1} = 1 \mid \overline{Z}_{n-j} = \overline{z}_{n-j}, n - \tau_0(R, k+1) = j\} \\ &\quad = P\{V_{1,k+1} \in B, Q_{k+1} = 1 \mid \overline{Z}_{n-j} = \overline{z}_{n-j}, n - \tau_0(R, k+1) = j\} \\ &\quad = P\{Q_{k+1} = 1\}\Lambda(B). \end{aligned} \tag{6.11}$$

En combinant (6.10) et (6.11) obtient

$$P\{Z_{n-j+r} \in B \mid \overline{Z}_{n-j} = \overline{z}_{n-j}, n - \tau_0(R, k+1) = j\} = P^{(r)}(z_{n-j}, B) \tag{6.12}$$

$\{Z_n, n \geq 0\}$ est construit de manière telle que pour tout $j \in \{1, \ldots, r-1\}$, $r > 1$, pour tout $A, A_k \in \mathcal{F}$, $k = n - j + 1 \ldots n - 1$, on a

$$P\{Z_{n-j+1} \in A_{n-j+1}, \ldots, Z_{n-1} \in A_{n-1}, Z_n \in A \mid \overline{Z}_{n-j} = \overline{z}_{n-j}, n - \tau_0(R, k+1) = j,$$
$$Z_{n-j+r} = z_{n-j+r}\}$$
$$= \int_{A_{n-j+1}} dz_{n-j+1} \cdots \int_{A_{n-1}} dz_{n-1} \int_A dz_n \, \frac{f(z_{n-j}, z_{n-j+1}) \cdots f(z_{n-1}, z_n) f^{(r-j)}(z_n, z_{n-j+r})}{f^{(r)}(z_{n-j}, z_{n-j+r})}. \tag{6.13}$$

De même, on montre que si $j = r$, $r > 1$, l'égalité précédente est encore valable en supposant que $f^{(0)}(x, x) = 1$.
De (6.9), (6.12) et (6.13), on déduit que pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$, $r \geq 1$, on a

$$
\begin{aligned}
&P\{Z_{n-j+1} \in A_{n-j+1}, \dots, Z_{n-1} \in A_{n-1}, n - \tau_0(R, k+1) = j, Z_n \in A \mid \overline{Z}_{n-j} = \overline{z}_{n-j}\} \\
&= \left[\int_{A_{n-j+1}} dz_{n-j+1} \cdots \int_{A_{n-1}} dz_{n-1} \int_A dz_n \int_F dz_{n-j+r} f(z_{n-j}, z_{n-j+1}) \cdots f(z_{n-1}, z_n) \times \right. \\
&\qquad \left. f^{(r-j)}(z_n, z_{n-j+r})\right] P\{n - \tau_0(R, k+1) = j \mid \overline{Z}_{n-j} = \overline{z}_{n-j}\} \\
&= \int_{A_{n-j+1}} dz_{n-j+1} \cdots \int_{A_{n-1}} dz_{n-1} \left[P(z_{n-1}, A) P\{n - \tau_0(R, k+1) = j \mid \overline{Z}_{n-j} = \overline{z}_{n-j}\}\right] \\
&\qquad f(z_{n-j}, z_{n-j+1}) \cdots f(z_{n-2}, z_{n-1}). \qquad (6.14)
\end{aligned}
$$

Il résulte de (6.8) et (6.14) que pour tout $j \in \{1, \dots, r\}$, $r \geq 1$, on a

$$
\begin{aligned}
&P\{Z_n \in A, n - \tau_0(R, k+1) = j, Z_0 \in A_0, \dots, Z_{n-1} \in A_{n-1}\} \\
&= \int_{A_0} dz_0 \cdots \int_{A_{n-1}} dz_{n-1} [P(z_{n-1}, A) P\{n - \tau_0(R, k+1) = j \mid \overline{Z}_{n-j} = \overline{z}_{n-j}\}] \times \\
&\qquad f(z_{n-j}, z_{n-j+1}) \cdots f(z_{n-2}, z_{n-1}) dP_{(Z_0, \dots Z_{n-j})}(z_0, \dots z_{n-j}) \\
&= \int_{A_0} dz_0 \cdots \int_{A_{n-1}} dz_{n-1} [P(z_{n-1}, A) f(z_{n-j}, z_{n-j+1}) \cdots f(z_{n-2}, z_{n-1})] \\
&\qquad dP_{(Z_0, \dots, Z_{n-j}, n-\tau_0(R,k+1))}(z_0, \dots, z_{n-j}, j).
\end{aligned}
$$

Il vient

$$
\begin{aligned}
&P\{Z_0 \in A_0, \dots, Z_{n-1} \in A_{n-1}, n - \tau_0(R, k+1) = j, Z_n \in A\} \\
&= \int_{A_0} dz_0 \cdots \int_{A_{n-1}} dz_{n-1} [P(z_{n-1}, A) dP_{(Z_0, \dots, Z_{n-1}, n-\tau_0(R,k+1))}(z_0, \dots, z_{n-1}, j)]
\end{aligned}
$$

Par conséquent,

$$
P\{Z_n \in A \mid \overline{Z}_{n-1} = \overline{z}_{n-1}, n - \tau_0(R, k+1) = j\} = P(z_{n-1}, A);
$$

d'où on déduit que :

$$
\begin{aligned}
&P\{Z_n \in A, n - \tau_0(R, k+1) = j \mid \overline{Z}_{n-1} = \overline{z}_{n-1}\} \\
&\qquad = P(z_{n-1}, A) P\{n - \tau_0(R, k+1) = j \mid \overline{Z}_{n-1} = \overline{z}_{n-1}\}.
\end{aligned}
$$

■

La combinaison de (6.6) et (6.7) donne

$$\begin{aligned} B_{n,k} &= P(z_{n-1},A)\sum_{j=1}^{r} P\{n-\tau_0(R,k+1)=j \mid \overline{Z}_{n-1}=\overline{z}_{n-1}\} \\ &= P(z_{n-1},A)P\{\tau_0(R,k+1)<n\leq \tau_0(R,k+1)+r \mid \overline{Z}_{n-1}=\overline{z}_{n-1}\}. \quad (6.15) \end{aligned}$$

D'après (6.1), (6.5) et (6.15) on a

$$P\{Z_n\in A \mid \overline{Z}_{n-1}=\overline{z}_{n-1}\}=P(z_{n-1},A).$$

Il en résulte que $\{Z_n, n\geq 0\}$ est une chaîne de Markov de loi initiale Λ et de probabilité de transition identique à celle de $\{X_n, n\geq 0\}$. $\{Z_n, n\geq 0\}$ est donc un processus de même loi que $\{X_n, n\geq 0\}$.

Démonstration de la proposition 2.2.

On vérifie aisément que pour tout $i\in \mathbb{N}^*$,

$$\tau_i(R,l)+r\geq l(r+1).$$

Il vient

$$k_j\leq \frac{S_j}{r+1} \text{ et } k_{j+1}-k_j\leq \frac{Y_{j+1}}{r+1},\ j\in\mathbb{N}^*$$

car $S_j=\tau_0(R,k_j)+r$ et $Y_{j+1}=\tau_{S_j}(R,k_{j+1}-k_j)+r$.
Par conséquent,

$$D=\sum_{l_j=j}^{E(\frac{s_j}{r+1})}\ \sum_{1<l_1<\ldots<l_j}\ \sum_{l=1}^{E(\frac{y_{j+1}}{r+1})} P\{A_{l_1\ldots l_j l}\} \quad (6.16)$$

avec

$$\begin{aligned} A_{l_1\ldots l_j l} = \{ & Z_0\in A_0,\ldots,Z_{s_j-r}\in A_{s_j-r},k_1=l_1,\ldots,k_j=l_j,\tau_0(R,l_1)= \\ & s_1-r,\ldots,\tau_0(R,l_j)=s_j-r,Z_{s_j}\in B_0,\ldots,Z_{s_j+y_{j+1}-1}\in B_{y_{j+1}-1}, \\ & \tau_{s_j}(R,l)=y_{j+1}-r,Q_{l_j+1}=0,\ldots,Q_{l_j+l-1}=0,Q_{l_j+l}=1\}. \end{aligned}$$

Soit

$$E_j^k=\{(i_1,\ldots,i_{j-1},i_j=k)\in(\mathbb{N}^*)^j : i_{l+1}-i_l>r, 1\leq l\leq j-1\}.$$

On a alors

$$P\{A_{l_1\ldots l_j l}\}=\sum_{(u_1,\ldots,u_{l_j})\in E}\ \sum_{(v_1,\ldots,v_l)\in E_l^{y_{j+1}-r}} P\{E_{l_1\ldots l_j},F_{l_j,l}\} \quad (6.17)$$

en posant

$$E = \{(u_1, \dots, u_{l_j}) \in E_{l_j}^{s_j - r} : u_{l_1} = s_1 - r, \dots, u_{l_j} = s_j - r\},$$

$$\begin{aligned} E_{l_1 \dots l_j} &= \{Z_0 \in A_0, \dots, Z_{s_j - r} \in A_{s_j - r}, k_1 = l_1, \dots, k_j = l_j, \tau_0(R,1) = u_1, \dots, \\ &\quad \tau_0(R, l_j) = u_{l_j}\} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} F_{l_j,l} &= \{Z_{s_j} = V_{1,l_j} \in B_0, \dots, Z_{s_j + y_{j+1} - 1} \in B_{y_{j+1}-1}, Q_{l_j+1} = 0, \dots, \\ &\quad Q_{l_j+l-1} = 0, Q_{l_j+l} = 1, \tau_{s_j}(R,1) = v_1, \dots, \tau_{s_j}(R,l) = v_l = y_{j+1} - r\}. \end{aligned}$$

Le processus $(\{Z_n, n \geq 0\}, \{S_n, n \geq 1\})$ est construit de manière telle que :

$$\begin{aligned} P\{F_{l_j,l}\} &= P\{Z_0 \in B_0, \dots, Z_{y_{j+1}-1} \in B_{y_{j+1}-1}, Q_1 = 0, \dots, Q_{l-1} = 0, \\ &\quad Q_l = 1, \tau_0(R,1) = v_1, \dots, \tau_0(R,l) = v_l = y_{j+1} - r\}. \end{aligned} \tag{6.18}$$

Il vient

$$\sum_{(v_1,\dots,v_l) \in E_l^{y_{j+1}-r}} P\{F_{l_j,l}\} = P\{Z_0 \in B_0, \dots, Z_{y_{j+1}-1} \in B_{y_{j+1}-1}, Y_1 = y_{j+1}, k_1 = l\}. \tag{6.19}$$

Soit

$$\sigma(\mathcal{F}_1) = \begin{cases} \sigma((X_k^i)_{1 \leq i \leq l_j,\, 0 \leq k \leq u_i - u_{i-1} - r}, (W_1^i, \dots, W_{r-1}^i)_{1 \leq i \leq l_j - 1}) & \text{si } r > 1 \\ \sigma((X_k^i)_{1 \leq i \leq l_j,\, 0 \leq k \leq u_i - u_{i-1} - r}) & \text{si } r = 1 \end{cases}$$

avec

$$(X_j^1 = X_j)_j, \quad (X_0^{l_i+1} = V_{1,l_i})_{1 \leq i \leq j-1},$$

et

$$X_0^i = V_{2,i-1}, i \in \{2, \dots, l_j\} - \{l_0 + 1, \dots, l_{j-1} + 1\}$$

Le vecteur aléatoire $(W_1^i, \dots, W_{r-1}^i)$ ne dépendant des autres v.a. engendrant $\sigma(\mathcal{F}_1)$ qu'à travers $X_{u_i - u_{i-1} - r}^i$ et X_0^{i+1} de sorte que que pour tout $A_i \in \mathcal{F}$, $1 \leq i \leq r-1$, on a

$$\begin{aligned} &P\{W_1^i \in A_1, \dots, W_{r-1}^i \in A_{r-1} \mid X_{u_i - u_{i-1} - r}^i = x_0, X_0^{i+1} = x_r, Q_1 = q_1, \dots, Q_i = q_i\} \\ &= \int_{A_1} dx_1 \cdots \int_{A_{r-1}} dx_{r-1} \frac{f(x_0, x_1) \cdots f(x_{r-1}, x_r)}{f^{(r)}(x_0, x_r)}. \end{aligned}$$

Soit $\sigma(\mathcal{G}_{l_j}) = \sigma(Q_1, \ldots, Q_{l_j})$.
Observons que l'événement $E_{l_1 \ldots l_j} \in \sigma(\mathcal{F}_1) \times \sigma(\mathcal{G}_{l_j})$.
Soit

$$\sigma(\mathcal{F}_2) = \begin{cases} \sigma((X_i^{l_j+k})_{1 \le k \le l, 0 \le i \le v_k - v_{k-1} - r}, (W_1^{l_j+k}, \ldots, W_{r-1}^{l_j+k})_{1 \le k \le l}) & \text{si } r > 1 \\ \sigma((X_i^{l_j+k})_{1 \le k \le l, 0 \le i \le v_k - v_{k-1} - r}) & \text{si } r = 1 \end{cases}$$

avec $v_0 = -r$, $X_0^{l_j+1} = V_{1,l_j}$ et $X_0^{l_j+k} = V_{2,l_j+k-1}, k \in \{2, \ldots, l\}$
Soit

$$\sigma(\mathcal{G}_{l_j+1,l}) = \sigma(Q_{l_j+1}, \ldots, Q_{l_j+l}).$$

On vérifie que $F_{l_j,l} \in (\sigma\mathcal{F}_2) \times \sigma(\mathcal{G}_{l_j+1,l})$.
Observons que la tribu $\sigma(\mathcal{F}_2) \times \sigma(\mathcal{G}_{l_j+1,l})$ ne dépend de $\sigma(\mathcal{F}_1) \times \sigma(\mathcal{G}_{l_j})$ qu'à travers la v.a. $X_0^{l_j+1} = V_{1,l_j}$ qui est indépendante des v.a. engendrant $\sigma(\mathcal{F}_1) \times \sigma(\mathcal{G}_{l_j})$.
Les tribus $\sigma(\mathcal{F}_1) \times \sigma(\mathcal{G}_{l_j})$ et $\sigma(\mathcal{F}_2) \times \sigma(\mathcal{G}_{l_j+1,l})$ sont donc indépendantes. Ceci entraîne que les événements $E_{l_1 \ldots l_j}$ et $F_{l_j,l}$ le sont . De (6.17) et (6.19) on déduit que

$$\begin{aligned} P\{A_{l_1 \ldots l_j l}\} &= \sum_{(u_1, \ldots u_{l_j}) \in E} P\{E_{l_1 \ldots l_j}\} \sum_{(v_1, \ldots, v_l) \in E_l^{y_{j+1}-r-1}} P\{F_{l_j,l}\} \\ &= P\{Z_0 \in A_0, \ldots, Z_{s_j - r} \in A_{s_j - r}, k_1 = l_1, \ldots, k_j = l_j, S_1 = s_1, \ldots, S_j = s_j\} \times \\ &\qquad P\{Z_0 \in B_0, \ldots, Z_{y_{j+1}-1} \in B_{y_{j+1}-1}, Y_1 = y_{j+1}, k_1 = l\} \end{aligned} \tag{6.20}$$

La combinaison de (6.16) et (6.20) entraîne que :

$$\begin{aligned} D &= P\{Z_0 \in A_0, \ldots, Z_{s_j - r} \in A_{s_j - r}, S_1 = s_1, \ldots, S_j = s_j\} \times \\ &\quad P\{Z_0 \in B_0, \ldots, Z_{y_{j+1}-1} \in B_{y_{j+1}-1}, Y_1 = y_{j+1}\}. \end{aligned}$$

■

Proposition 6.2 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in F$, $P_x\{Y_n < \infty\} = 1$.*

Preuve : Raisonnons par récurrence. Pour tout $x \in F$, on a

$$\begin{aligned} P_x\{Y_1 = \infty\} &= P_x\{\tau_0(R, k_1) = \infty\} = \sum_{j=1}^{\infty} P_x\{\tau_0(R, k_1) = \infty, k_1 = j\} \\ &\le \sum_{j=1}^{\infty} P_x\{\tau_0(R, j) = \infty\} + P_x\{k_1 = \infty\}. \end{aligned}$$

On déduit de l'hypothèse $H_r(i)$ du chapitre 2 que :

$$P_x\{\tau_0(R,j) = \infty\} = 0.$$

On vérifie que pour tout $x \in F$, on a

$$P_x\{k_1 = \infty\} = P\{k_1 = \infty\} = 0.$$

Il vient

$$P_x\{Y_1 = \infty\} = 0.$$

Admettons l'hypothèse jusqu'au rang n. Pour tout $x \in F$ on a donc

$$P_x\{S_n < \infty\} = 1$$

Il est clair que :

$$\begin{aligned} P_x\{Y_{n+1} = \infty\} &= P_x\{\tau_{S_n}(R, k_{n+1} - k_n) = \infty\} \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} P_x\{\tau_{S_n}(R,j) = \infty\} + P_x\{k_{n+1} - k_n = \infty\}. \end{aligned}$$

Ceci d'après l'hypothèse de récurrence implique

$$P_x\{Y_{n+1} = \infty\} \leq \sum_{j=1}^{\infty} P_x\{\tau_{S_n}(R,j) = \infty, S_n < \infty\} + P_x\{k_{n+1} - k_n = \infty\}$$

On vérifie aisément qu'on a :

$$P_x\{k_{n+1} - k_n = \infty\} = P_x\{k_1 = \infty\} = 0$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} P_x\{\tau_{S_n}(R,j) = \infty, S_n < \infty\} &= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} P_x\{\tau_i(R,j) = \infty, S_n = i\} \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} P_x\{\tau_i(R,j) = \infty\} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} P_{Z_i}\{\tau_0(R,j) = \infty\}. \end{aligned}$$

(P_{Z_i} étant la loi de $\{Z_n, n \geq 0\}$ lorsque la loi initiale est celle de la v.a. Z_i)
Il résulte alors de l'hypothèse $H_r(i)$ que :

$$\sum_{j=1}^{\infty} P_x\{\tau_{S_n}(R,j) = \infty, S_n < \infty\} = 0.$$

On déduit alors des résultats précédents que

$$P_x\{Y_{n+1} = \infty\} = 0, \quad x \in F.$$

■

Proposition 6.3 *Soit $\{X_n, n \geq 0\}$ une chaîne de Markov à valeurs dans $(F, \mathcal{F})$ de densité de transition f par rapport à la mesure de Lebesgue satisfaisant à :*

$$\forall x \in F, \forall A \in \mathcal{F} \text{ tel que } \lambda(A) > 0, \sum_{n=1}^{\infty} P^{(n)}(x, A) = \infty$$

alors $\{X_n, n \geq 0\}$ est régénérative.

Preuve : L'hypothèse précédente impliquant que la chaîne $\{X_n, n \geq 0\}$ est λ irréductible, $(\lambda(A) > 0 \Rightarrow \forall x \in F, L(x, A) > 0)$, d'après le théorème 2.1 p7 de [Orey(1971)], il existe un élément C de $\mathcal{F}$ de mesure de Lebesgue positive, $r \in \mathbb{N}^*$ et $\beta > 0$ tel que $\inf_{x,y \in C} f^{(r)}(x, y) > \beta$.
Soit Λ la loi de probabilité sur F définie par $\Lambda(.) = \frac{\lambda(. \bigcap C)}{\lambda(C)}$ et $\epsilon = \beta\lambda(C)$.
Pour tout $x \in C$, pour tout $A \in \mathcal{F}$, on a

$$P^{(r)}(x, A) \geq \int_{A \cap C} f^{(r)}(x, y)\, dy \geq \beta\lambda(A \bigcap C) = \epsilon\Lambda(A)$$

Montrons que tout élément R de $\mathcal{F}$ de mesure de Lebesgue positive vérifie l'hypothèse $H_r(i)$. Il résultera alors du théorème 2.1 que la chaîne $\{X_n, n \geq 0\}$ est régénérative et admet C comme ensemble régénératif.

Pour tout $B \in \mathcal{F}$, posons

$$\tau(B) = \begin{cases} \inf\{t \geq 1 : X_t \in B\} \\ \infty \text{ si } \{t \geq 1 : X_t \in B\} = \emptyset \end{cases}$$

$$\tau_1(B) = \begin{cases} \sup\{t \geq 0 : X_t \in B\} \\ -\infty \text{ si } \{t \geq 0 : X_t \in B\} = \emptyset \end{cases}$$

Pour tout $x \in F$, posons

$$Q(x, B) = P_x(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} \{X_n \in B\})$$

et

$$L(x, B) = P_x(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_n \in B\})$$

Soit

$$B^\infty = \{x \in F : Q(x, B) = 1\} = \{x \in F : P_x\{X_n \in B \;\; is\} = 1\}.$$

Il est clair que pour tout $x \in B^\infty$, $P_x\{\tau(B) < \infty\} = 1$.

Observons que pour tout $x \in F$, pour tout $B \in \mathcal{F}$, on a

$$\begin{aligned} 1 - Q(x, B) &= P_x\{\tau_1(B) < \infty\} = \sum_{k=0}^{\infty} P_x\{\tau_1(B) = k\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_B [1 - L(y, B)] P^{(k)}(x, dy) \quad (P^{(0)}(x, .) = \delta_x(.)). \end{aligned}$$

Il vient

$$Q(x, B) = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \int_B [1 - L(y, B)] P^{(k)}(x, dy), \quad x \in F, \;\; B \in \mathcal{F} \tag{6.21}$$

Montrons d'abord qu'il existe $x \in F$ tel que $Q(x, R) = 1$.

Raisonnons par l'absurde. Supposons que pour tout $x \in F$, $Q(x, R) < 1$.
Soit

$$K = \{y \in R : L(y, R) < 1\} \text{ et } K_i = \{y \in R : L(y, R) \leq 1 - \frac{1}{i}\}.$$

Il est clair que $K = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$.
La probabilité $Q(x, R)$ étant < 1 montrons qu'il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda(K_j) > 0$.
Soit

$$K^0 = \{y \in F : L(y, K) = 0\}.$$

Montrons que $K^0 = \emptyset$.

Raisonnons par l'absurde. Supposons que $K^0 \neq \emptyset$. Alors pour tout $x \in K^0$, on a

$$0 = L(x,K) = P(x,K) + \int_{K^c} P(x,dy)L(y,K) = \int_{K^cK^{0c}} P(x,dy)L(y,K).$$

La fonction $L(.,K)$ étant > 0 sur K^cK^{0c}, pour tout $x \in K^0$, on a

$$P(x, K^cK^{0c}) = 0.$$

Il vient

$$P(x, K^{0c}) = P(x, K^cK^{0c}) = 0, \ x \in K^0. \tag{6.22}$$

Observons que $F = (K^0K^c)\bigcup(K^0K^c)^c$. D'après (6.22), pour tout $x \in K^0$, on a

$$\begin{aligned} 1 &= P(x,F) = P(x,K^0K^c) + P(x,K^{0c}) + P(x,K) - P(x,K^{0c}K) \\ &= P(x,K^0K^c). \end{aligned}$$

D'où on déduit que $K^0K^c \neq \emptyset$. Le Borélien K^0K^c étant fermé, ($\forall x \in K^0K^c, P(x,K^0K^c) = 1$), on vérifie à l'aide de (6.21) que pour tout $x \in K^0K^c$ on a $Q(x,R) = 1$.
Ceci contredit l'hypothèse pour tout $x \in F$, $Q(x,R) < 1$. Il en résulte que $K^0 = \emptyset$ ∎

Par conséquent, pour tout $x \in F, L(x,K) > 0$. Il existe donc i,j et $k \in \mathbb{N}$ tels que

$$P^{(i)}(x,K_j) \geq \frac{1}{k} \text{ ce qui entraîne } \lambda(K_j) > 0.$$

∎

Pour tout $y \in K_j$, on a

$$L(y,K_j) \leq L(y,R) \leq 1 - \frac{1}{j} \text{ ce qui entraîne } 1 - L(y,K_j) \geq \frac{1}{j}. \tag{6.23}$$

De (6.21) et (6.23), on déduit que pour tout $x \in R$, on a

$$Q(x,K_j) = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \int_{K_j} [1 - L(y,K_j)]P^{(k)}(x,dy) \leq 1 - \frac{1}{j}\sum_{k=0}^{\infty} p^{(k)}(x,K_j).$$

Il vient

$$\frac{1}{j}\sum_{k=0}^{\infty} p^{(k)}(x,K_j) \leq 1 - Q(x,K_j).$$

Il en résulte que

$$\sum_{k=0}^{\infty} p^{(k)}(x, K_j) \leq j < \infty.$$

Ceci d'après l'hypothèse de l'énoncé est impossible car $\lambda(K_j) > 0$.

Il existe donc $x \in F$ tel que $Q(x, R) = 1$. Il vient $R^\infty \neq \emptyset$.

■

Montrons que

$$R^{\infty c} = \emptyset \Leftrightarrow R^\infty = F$$

Il en résultera que R vérifie l'hypothèse $H_r(i)$.

Observons que sur R^∞, $Q(., R) = 1$. Pour tout $x \in R^\infty$, on a donc

$$\begin{aligned} 1 &= Q(x,R) = \int_{R^\infty} Q(y,R)P(x,dy) + \int_{R^{\infty c}} Q(y,R)P(x,dy) \\ &= \int_{R^\infty} f(x,y)\,dy + \int_{R^{\infty c}} Q(y,R)f(x,y)\,dy. \end{aligned}$$

Il vient

$$P(x, R^{\infty c}) = \int_{R^{\infty c}} f(x,y)Q(y,R)dy, \quad x \in R^\infty. \tag{6.24}$$

Par conséquent,

$$\int_{R^{\infty c}} [1 - Q(y,R)]f(x,y)\,dy = 0.$$

La fonction $Q(., R)$ étant < 1 sur $R^{\infty c}$, pour tout $x \in R^\infty$, pour λ presque tout $y \in R^{\infty c}$ on a

$$f(x,y) = 0.$$

D'où on déduit (par récurrence) que pour tout $x \in R^\infty$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P^{(n)}(x, R^{\infty c}) = 0.$$

La chaîne $\{X_n, n \geq 0\}$ étant λ irréductible, $(\lambda(A) > 0 \Rightarrow L(x,A) > 0)$ on a

$$\lambda(R^{\infty c}) = 0.$$

Supposons que $R^{\infty c} \neq \emptyset$. Alors, pour tout $x \in R^{\infty c}$, on a

$$1 = P(x,F) = P(x,R^\infty) + P(x,R^{\infty c}) = P(x,R^\infty)$$

Il en résulte que pour tout $x \in R^{\infty c}$, $Q(x,R) = 1$ (ce qui est impossible) ■

Remarque 5.1 D'après le théorème 2 P 390 de [Tweedie 1975b)], l'hypothèse

$$\forall x \in F, \forall A \in \mathcal{F} \text{tel que } \lambda(A) > 0, \sum_{n=1}^{\infty} P^{(n)}(x, A) = \infty$$

est vérifiée s'il existe une fonction non négative mesurable $h : F \to \mathbb{R}$ et un borélien K de $\mathcal{F}$ de mesure de Lebesgue positive tels que :

$$\forall x \notin K, \int_F h(y)P(x, dy) \leq h(x) \text{ et}$$
$$\forall M > 0, \exists K_M \in \mathcal{F} : \lambda(K_M) > 0 \textit{ et } h(x) \geq M \textit{ pour tout } x \in K_M^C.$$

On a en particulier l'exemple bien connu suivant :

Soit ρ un réel compris dans $(0, 1)$ et $\{U_n\}_n$ une chaîne de Markov définie récursivement par :

$$U_{n+1} = \rho U_n + \mathcal{E}_{n+1}$$

$\{\mathcal{E}_n\}_n$ désignant une suite de v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2 = 1 - \rho^2)$.

On montre que $\{U_n, n \geq 0\}$ est une chaîne de Markov dont la probabilité de transition en n pas $P^{(n)}(x, .)$ admet par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ une densité de transition en n pas

$$f^{(n)}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1 - \rho^{2n})}} exp - \frac{(y - \rho^n x)^2}{2(1 - \rho^{2n})}.$$

Montrons que toute chaîne de Markov $\{X_n, n \geq 0\}$ de densité de transition identique à celle de $\{U_n, n \geq 0\}$ est régénérative.

Soit $\mathcal{B}^+ = \{A : \lambda(A) > 0\}$.

$$\forall A \in \mathcal{B}^+, \sum_{n=1}^{\infty} P^{(n)}(x, A) = \infty$$

(car $\lim_{n\to\infty} P^{(n)}(x, A) = \lim_{n\to\infty} \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^{2n}}} \exp - \frac{(y-\rho^n x)^2}{2(1-\rho^{2n})} dy = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(\frac{-y^2}{2}) > 0$).
(La remarque 5.1 est vérifiée avec $h(y) = |y|$). ■

6.2 Démonstrations du chapitre 3.

Démonstrations de la section exemples

Montrons que si $G(y) \sim C|y|^{-\alpha}$, $(|y| \to +\infty)$, $\alpha > 1$, $C > 0$, alors $\{X_n, n \geq 0\}$ vérifie $H2$ avec $s = 1$.

Il existe une fonction $\epsilon_1(y)$ vérifiant

$$\lim_{y \to +\infty} \epsilon_1(y) = 0 \quad \text{telle que} \quad G(y) = C(1 + \epsilon_1(y))|y|^{-\alpha}.$$

Il vient

$$f(x,y) = \frac{C}{|\sigma(x)|} G\Big(\frac{y - T(x)}{\sigma(x)}\Big) = \frac{C}{|\sigma(x)|}\left(1 + \epsilon_1\Big(\frac{y - T(x)}{\sigma(x)}\Big)\right)\left|\frac{y - T(x)}{\sigma(x)}\right|^{-\alpha} \tag{6.25}$$

Soit

$$S = \sup_{x \in \mathbb{R}} |T(x)|$$

et y_0 un réel fixé strictement supérieur à S . Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|y| \geq y_0$, on a

$$\left(1 - \frac{S}{y_0}\right)^{-\alpha} |y|^{-\alpha} \leq |y - T(x)|^{-\alpha} \leq \left(1 + \frac{S}{y_0}\right)^{-\alpha} |y|^{-\alpha}. \tag{6.26}$$

Pour tout $0 < \epsilon < 1$, il existe $y_1 \geq y_0$ tel que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|y| \geq y_1$, on a

$$\left|\epsilon_1\left(\frac{y - T(x)}{\sigma(x)}\right)\right| < \epsilon.$$

Ceci combiné à (6.25) et (6.26) entraîne que :

$$\frac{C}{|\sigma(x)|}(1 - \epsilon)\left(1 - \frac{S}{y_0}\right)^{-\alpha} |y|^{-\alpha} \leq f(x,y) \leq \frac{C}{|\sigma(x)|}(1 + \epsilon)\left(1 + \frac{S}{y_0}\right)^{-\alpha} |y|^{-\alpha} \tag{6.27}$$

Posons

$$E_1 = CAB^{-\alpha}(1 - \epsilon)\left(1 - \frac{S}{y_0}\right)^{-\alpha} \quad \text{et} \quad E_2 = CBA^{-\alpha}(1 + \epsilon)\left(1 + \frac{S}{y_0}\right)^{-\alpha}.$$

On déduit de (6.27) que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|y| > y_1$, on a l'encadrement

$$E_1 \, |y|^{-\alpha} \leq f(x,y) \leq \frac{E_2}{E_1}(E_1|y|^{-\alpha}. \tag{6.28}$$

On vérifie aisément que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|y| \leq y_1$,

$$\frac{y - T(x)}{|\sigma(x)|} \in \left[-\frac{y_1}{A} - M_2, \frac{y_1}{A} + M_2\right].$$

Sur le compact $[-\frac{y_1}{A} - M_2, \frac{y_1}{A} + M_2]$, la fonction continue G admet un maximum M_3 et un minimum m_3 strictement positifs. Il vient

$$Am_3 \leq f(x,y) \leq BM_3 = \frac{BM_3}{Am_3}(Am_3), \ \ (x,y) \in \mathbb{R} \times [-y_1, y_1]. \tag{6.29}$$

Soit

$$h(y) = \begin{cases} E_1 \, |y|^{-\alpha} \text{ pour } |y| > y_1 \\ Am_3 \text{ pour } |y| \leq y_1 \end{cases}$$

et $M_1 = \sup(\frac{BM_3}{Am_3}, \frac{E_2}{E_1})$.
En combinant (6.28) et (6.29) on obtient

$$h(y) \leq f(x,y) \leq M_1 h(y), \ \ x, y \in \mathbb{R}.$$

Ceci entraîne *H2* avec $s = 1$, $\eta \in (0, \int h(y)\, dy)$, $g(y) = \frac{h(y)}{\int h(y)\, dy}$ et
$M > \max(1, M_1 \int h(y)\, dy)$. ■

- Montrons que Si σ est constante et $G(y) \sim c|y|^p \exp(-\alpha\, |y|^\gamma)$, $\alpha > 0$, $p \geq 0$ $c > 0$, $0 < \gamma \leq 1$ lorsque $|y| \to +\infty$, alors $\{X_n, n \geq 0\}$ vérifie *H2* avec $s = 1$.

(On peut dans ce cas supposer que $\sigma = 1$).

On a alors

$$f(x,y) = G(y - T(x)).$$

Il existe une fonction $\epsilon_2(y)$ vérifiant $\lim_{|y| \to +\infty} \epsilon_2(y) = 0$ telle que pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$G(y) = c(1 + \epsilon_2(y))|y|^p \exp(-\alpha|y|^\gamma).$$

Soit y_0 un réel fixé strictement supérieur à $S = \sup_{x\in\mathbb{R}} |T(x)|$. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|y| \geq y_0$, on a l'encadrement

$$\left(1 - \frac{S}{y_0}\right)^p |y|^p \leq |y - T(x)|^p \leq \left(1 + \frac{S}{y_0}\right)^p |y|^p. \tag{6.30}$$

D'après la formule de Taylor Lagrange, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|y| \geq y_0$, il existe $0 \leq \theta(x, y) \leq 1$ tel que :

$$\left(1 - \frac{T(x)}{y}\right)^\gamma = 1 - \gamma\frac{T(x)}{y} + \frac{1}{2}\gamma(\gamma-1)\left(1 - \theta\frac{T(x)}{y}\right)^{\gamma-2}\left(\frac{T(x)}{y}\right)^2.$$

Il en résulte que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|y| \geq y_0$,

$$\begin{aligned}
\exp\left(-\alpha\,|y - T(x)|^\gamma\right) &= \exp\left(-\alpha\,|y|^\gamma\left(1 - \frac{T(x)}{y}\right)^\gamma\right) \\
&\leq \exp\left(-\alpha\,|y|^\gamma\left(1 - \frac{S}{|y|} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{S}{y_0}\right)^{\gamma-2}\frac{S^2}{|y|^2}\right)\right) \\
&\leq \exp\left(\alpha S y_0^{\gamma-1} + \frac{1}{2}\alpha\left(1 - \frac{S}{y_0}\right)^{\gamma-2} S^2 y_0^{\gamma-2}\right)\exp\left(-\alpha|y|^\gamma\right)
\end{aligned} \tag{6.31}$$

et

$$\begin{aligned}
\exp(-\alpha\,|y - T(x)|^\gamma) &= \exp\left(-\alpha\,|y|^\gamma\left(1 - \frac{T(x)}{y}\right)^\gamma\right) \\
&\geq \exp\left(-\alpha|y|^\gamma\left(1 + \frac{S}{|y|}\right)\right) \\
&\geq \exp(-\alpha S y_0^{\gamma-1})\exp(-\alpha|y|^\gamma).
\end{aligned} \tag{6.32}$$

De plus, pour tout $0 < \epsilon < 1$, il existe $y_1 \geq y_0$ tel que pour tout réel y vérifiant $|y| \geq y_1$, on a

$$|\epsilon_2(y - T(x))| < \epsilon$$

Posons :

$$E_3 = c(1-\epsilon)\left(1 - \frac{S}{y_0}\right)^p \exp(-\alpha S y_0^{\gamma-1})$$

et

$$E_4 = c(1+\epsilon)\Big(1+\frac{S}{y_0}\Big)^p \exp\Big(\alpha S y_0^{\gamma-1} + \frac{1}{2}\alpha\Big(1-\frac{S}{y_0}\Big)^{\gamma-2} S^2 y_0^{\gamma-2}\Big).$$

De (6.30), (6.31) et (6.32) on déduit que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|y| > y_1$, on a

$$E_3 \exp(-\alpha|y|^\gamma)\,|y|^p \leq f(x,y) \leq \frac{E_4}{E_3}(E_3 \exp(-\alpha|y|^\gamma)\,|y|^p). \tag{6.33}$$

On vérifie aisément que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times [-y_1, y_1]\ ,\ y - T(x) \in [-y_1 - S, y_1 + S].$$

A l'intérieur du compact $[-y_1 - S, y_1 + S]$ la fonction continue G admet un maximum M_4 et un minimum m_4 positif. Il vient

$$m_4 \leq f(x,y) \leq M_4 = \frac{M_4}{m_4} m_4, \quad (x,y) \in \mathbb{R} \times [-y_1, y_1]. \tag{6.34}$$

Soit

$$h(y) = \begin{cases} E_3\,|y|^p \exp(-\alpha|y|^\gamma) & \text{pour} \quad |y| > y_1 \\ m_4 \quad \text{pour} \quad |y| \leq y_1 \end{cases}$$

et $M = \max(\frac{M_4}{m_4}, \frac{E_4}{E_3})$
La combinaison de (6.33) et (6.34) entraîne

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\ ,\ h(y) \leq f(x,y) \leq M h(y).$$

■

Montrons que si $h(z) = 2(1-z)$, $0 < z < 1$,
$\{X_n, n \geq 0\}$ ne vérifie pas *H2* avec $s = 1$ et satisfait à cette hypothèse avec $s = 2$.
On vérifie aisément que pour tout $x, y \in (0,1)$,

$$f(x,y) = \frac{x h(xy)}{H(x)} = \frac{2(1-xy)}{2-x}. \tag{6.35}$$

Montrons qu'il n'existe pas de réel $\delta > 0$ tel que $\forall x, y \in (0,1)$,

$$f(x,y) > \delta.$$

Il est clair que :

$$\forall 0<\delta<1, \forall x \in \Big((1-\frac{\delta}{2}),1\Big),\ \ \forall y \in \Big(\frac{1}{x}(1-\frac{\delta}{2}),1\Big),$$
$$f(x,y) \leq 2(1-xy) \leq 2(1-x\frac{1}{x}(1-\frac{\delta}{2})) = \delta.$$

■

Montrons qu'il n'existe pas de fonction mesurable g et de constante M telles que

$$\forall x,y \in (0,1), g(y) \leq f(x,y) \leq Mg(y) \tag{6.36}$$

Observons que

$$g(y) \leq f(x,y) \leq Mg(y) \Leftrightarrow 1 - Mg(y)\Big(1-\frac{x}{2}\Big) \leq xy \leq 1 - g(y)\Big(1-\frac{x}{2}\Big).$$

Si on pose $x = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, il vient

$$1 - Mg(y)\Big(1-\frac{1}{2n}\Big) \leq \frac{y}{n} \leq 1 - g(y)\Big(1-\frac{1}{2n}\Big).$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, la première inégalité donne

$$1 - Mg(y) \leq 0.$$

Il en résulte que si g vérifie (6.36), on a

$$g(y) \geq \frac{1}{M},\ \ y \in (0,1).$$

Ceci d'après le résultat précédent est impossible. $\{X_n, n \geq 0\}$ ne vérifie donc pas *H2* avec $s=1$. ■

Montrons que $\{X_n, n \geq 0\}$ vérifie *H2* avec $s=2$.
On vérifie que pour tout $x,y \in (0,1)$, on a

$$f^{(2)}(x,y) = \frac{4}{2-x}\left(\ln 2 - (2\ln 2 - 1)(y+x) + (4\ln 2 - \frac{5}{2})xy\right).$$

Soit

$$G(x,y) = -(2\ln 2 - 1)(y+x) + (4\ln 2 - \frac{5}{2})xy.$$

Un calcul simple montre que pour tout $(x, y) \in (0,1) \times (0,1)$,

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x,y) \neq 0 \text{ et } \frac{\partial G}{\partial y}(x,y) \neq 0.$$

Ceci entraîne que la fonction continue G admet sur le compact $[0,1] \times [0,1]$ un maximum et un minimum sur le bord de ce compact. Une étude des fonctions $G(x,0)$, $G(0,x)$, $G(x,1)$, $G(1,x)$, $x \in [0,1]$ montre que

$$\forall x, y \in [0,1], G(x,y) \geq -\frac{1}{2}.$$

Il vient

$$\forall x, y \in [0,1], f^{(2)}(x,y) \geq 2\Big(\ln 2 - \frac{1}{2}\Big) = \delta > 0.$$

La fonction continue $f^{(2)}$ étant majorée par une constante M_2, on a

$$\forall x, y \in (0,1),\ \delta \leq f^{(2)}(x,y) \leq \max(2, M_2) \text{ et } f(x,y) \leq 2 \leq \max(2, M_2)$$

∎

Montrons qu'il n'existe pas de processus de Markov stationnaire de la forme

$$X_{n+1} = aX_n + \mathcal{E}_{n+1},\ \ 0 < a < 1$$

($\{\mathcal{E}, n \geq 0\}$ étant une suite de v.a. i.i.d. à valeurs dans un intervalle de $\mathbb{R}$ de densité G strictement positive.)
qui vérifie l'hypothèse *H1*.

Remarquons que dans ce cas, les v.a.

$$X_n = a^n X_0 + \sum_{j=0}^{n-1} a^j \mathcal{E}_{n-j} \text{ et } Y_n = a^n X_0 + \sum_{j=0}^{n-1} a^j \mathcal{E}_{j+1}$$

ont la même loi de probabilité. La suite de v.a. stationnaire $\{Y_n, n \geq 1\}$ converge presque sûrement vers la v.a. $\sum_{j=0}^{\infty} a^j \mathcal{E}_j$ qui a donc pour loi de probabilité π.

Si le support de $\mathcal{E}_n$ est un intervalle borné (c,d), le support de π est $(\frac{c}{1-a}, \frac{d}{1-a})$. Pour tout r dans $\mathbb{N}^*$, pour tout $X_0 = x$ fixé dans l'intervalle $(\frac{c}{1-a}, \frac{d}{1-a})$, on vérifie que le support de la loi de probabilité $P^{(r)}(x,.)$ est $\left[a^r x + c\sum_{j=0}^{r-1} a^j, a^r x + d\sum_{j=0}^{r-1} a^j\right]$.

Posons

$$E_x^r = \left[\max(a^{r+1}x + c\sum_{j=0}^{r} a^j, a^r x + d\sum_{j=0}^{r-1} a^j), a^{r+1}x + d\sum_{j=0}^{r} a^j\right].$$

Observons que pour λ presque tout $y \in E_x^r$

$$f^{(r)}(x,y) = 0 \text{ et } f^{(r+1)}(x,y) > 0.$$

Raisonnons par l'absurde. Supposons *H1* satisfaite. Alors, pour tout $n \geq s$, pour tout $x \in (\frac{c}{1-a}, \frac{d}{1-a})$, pour λ presque tout $y \in (\frac{c}{1-a}, \frac{d}{1-a})$, on a

$$\left|f^{(n)}(x,y) - f(y)\right| \leq A\rho^n f(y).$$

Soit n_0 un entier supérieur à s suffisamment grand pour que $A\rho^{n_0} < 1$. Alors, pour tout $x \in (\frac{c}{1-a}, \frac{d}{1-a})$, pour λ presque tout $y \in E_x^{n_0}$, on a

$$(1 - A\rho^{n_0})f(y) \leq f^{(n_0)}(x,y) \leq (1 + A\rho^{n_0})f(y)$$

il vient $f(y) = 0$

$$(1 - A\rho^{n_0+1})f(y) \leq f^{(n_0+1)}(x,y) \leq (1 + A\rho^{n_0+1})f(y)$$

et par conséquent $f(y) > 0$.
Ceci est impossible. $\{X_n, n \geq 0\}$ ne vérifie donc pas *H1*.

Si le support des v.a. $\mathcal{E}_n$ n'est pas borné, remarquons que :

$$(1 - A\rho^n)f(y) \leq f^{(n)}(x,y) \leq (1 + A\rho^n)f(y)$$

entraîne que pour tout entier $m \geq s$, pour tout $C, D \in \mathcal{F}$,

$$\begin{aligned}&(1 - A\rho^m)P\{X_n \in C\}P\{X_{m+n} \in D\} \leq P\{X_n \in C, X_{m+n} \in D\} \leq \\ &(1 + A\rho^m)P\{X_n \in C\}P\{X_{m+n} \in D\}.\end{aligned}$$

Il en résulte que pour tout $C, D \in \mathcal{F}$ tel que $P\{X_n \in C\} > 0$, on a

$$(1 - A\rho^m)P\{X_{m+n} \in D\} \leq P\{X_{m+n} \in D \mid X_n \in C\} \leq (1 + A\rho^m)P\{X_{m+n} \in D\} \quad (6.37)$$

Montrons que (6.37) n'est pas vérifié lorsque le support des v.a. $\mathcal{E}_n$ n'est pas borné. Supposons d'abord que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P\{\mathcal{E}_n > x\} > 0.$$

Posons $C = [a^{-m}(l+M), \infty)$ et $D = (-\infty, L)$.
Les réels M ET L étant choisis suffisamment grands pour que :

$$P\{X_n \leq L\} \geq 1 - \delta \tag{6.38}$$

et

$$P\left\{\sum_{j=0}^{m-1} a^j \mathcal{E}_{j+1} \leq -M\right\} < \delta, \tag{6.39}$$

où $\delta \in (0, \frac{1}{2})$
Le processus $\{X_n, n \geq 0\}$ étant stationnaire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$P\{X_n \in C\} = P\left\{\sum_{j=0}^{\infty} a^j \epsilon_{j+1} \in C\right\} > 0 \text{ et}$$
$$P\{X_{m+n} \in D \mid X_n \in C\} = P\{X_m \in D \mid X_0 \in C\}.$$

Il vient

$$\begin{aligned}
P\{X_{m+n} \in D \mid X_n \in C\} &= P\{a^m X_0 + \sum_{j=0}^{m-1} a^j \epsilon_{m-j} \in D \mid X_0 \in C\} \\
&= P\left\{a^m X_0 + \sum_{j=0}^{m-1} a^j \mathcal{E}_{m-j} \leq L \mid X_0 \geq a^{-m}(L+M)\right\} \\
&\leq P\left\{\sum_{j=0}^{m-1} a^j \mathcal{E}_j \leq -M\right\} < \delta
\end{aligned} \tag{6.40}$$

((6.40) résulte de (6.39)).
Le processus $\{X_n, n \geq 0\}$ étant stationnaire, on a

$$P\{X_{m+n} \in D\} = P\{X_{m+n} \leq L\} = P\{X_n \leq L\} \geq 1 - \delta \tag{6.41}$$

((6.41) résulte de (6.38)).
En combinant (6.40) et (6.41) on obtient

$$|P\{X_{m+n} \in D \mid X_n \in C\} - P\{X_{m+n} \in D\}| \geq 1 - 2\delta \tag{6.42}$$

(6.37) n'est donc pas vérifié dans ce cas.
Un raisonnement symétrique permet de conclure dans le cas où il existe x tel que :

$$P\{\mathcal{E}_n > x\} = 0 \text{ et pour tout } y \in \mathbb{R},\ P\{\mathcal{E}_n < y\} > 0.$$

■

6.3 Démonstrations du chapitre 4

Démonstration du lemme 4.2

Montrons que pour $\frac{1}{n} < \delta < \frac{1}{\mu}$, on a

$$P\left\{\frac{\nu_n}{n} > \frac{1}{\mu} + \delta\right\} \leq \left(1 + \frac{\epsilon\mu\delta}{1-\epsilon-\epsilon\mu\delta}\right) \exp\left(-\frac{\epsilon}{2(1-\epsilon)} n\mu\delta^2 + 1\right). \quad (6.43)$$

Observons que quel que soit $q \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{I}_{\{S_q < n\}} \leq \exp(u(n - S_q)),\ \ u > 0.$$

Il vient

$$P\{S_q < n\} \leq E\Big(\exp(u(n-S_q))\Big) = \exp(un)\Big(E(\exp(-uY_1))\Big)^q,\ u > 0.$$

Un calcul simple montre que :

$$E\Big(\exp(u(n-S_q))\Big) = \frac{\epsilon^q \exp\Big(u(n-qr)\Big)}{\Big(1-(1-\epsilon)\exp(-ur)\Big)^q}.$$

Il en résulte que si $qr < n < q\mu$, $E\Big(\exp(u(n-S_q))\Big)$ atteint son minimum en $u = -\frac{1}{r}\ln\frac{n-qr}{n(1-\epsilon)}$. Par conséquent, si $qr < n < q\mu$, on a

$$P\{S_q < n\} \leq \left(\frac{\epsilon n}{qr}\right)^q \exp\left(\left(q - \frac{n}{r}\right)\ln\frac{n-qr}{n(1-\epsilon)}\right) \quad (6.44)$$

On vérifie aisément que :

$$P\left\{\frac{\nu_n}{n} > \frac{1}{\mu} + \delta\right\} = P\left\{S_{\lfloor n(\frac{1}{\mu}+\delta)\rfloor} < n\right\}.$$

Il est clair que si $\frac{1}{n} < \delta < \frac{1}{\mu}$ on a $n < [n(\frac{1}{\mu}+\delta) - 1]\mu$. Il résulte alors de (6.44) que :

- Si $\left\lfloor n(\frac{1}{\mu}+\delta)\right\rfloor r < n$, on a

$$\begin{aligned}
P\left\{\frac{\nu_n}{n} > \frac{1}{\mu}+\delta\right\} &= P\left\{S_{\lfloor n(\frac{1}{\mu}+\delta)\rfloor} < n\right\} \\
&\leq \left(\frac{\epsilon n}{\left(n(\frac{1}{\mu}+\delta)-1\right)r}\right)^{n\left(\frac{1}{\mu}+\delta\right)-1} \exp\left(\left(n\left(\frac{1}{\mu}+\delta\right)-1-\frac{n}{\epsilon\mu}\right)\ln\frac{n-n\epsilon\mu\left(\frac{1}{\mu}+\delta\right)}{n-n\epsilon}\right) \\
&= \left(\frac{1}{1+\mu\delta-\frac{\mu}{n}}\right)^{n\left(\frac{1}{\mu}+\delta\right)-1} \exp\left(\left(n\left(\frac{1}{\mu}+\delta\right)-1-\frac{n}{\epsilon\mu}\right)\ln\left(1-\frac{\epsilon\mu\delta}{1-\epsilon}\right)\right) \qquad (6.45)
\end{aligned}$$

la combinaison de (6.45) et de l'encadrement

$$-x-\frac{x^2}{2(1-x)} < \ln(1-x) < -x, \quad 0 < x < 1$$

donne

$$\begin{aligned}
P\left\{\frac{\nu_n}{n} > \frac{1}{\mu}+\delta\right\} &\leq \left(1+\frac{\epsilon\mu\delta}{1-\epsilon-\epsilon\mu\delta}\right)\exp(-n\delta+1) \times \\
&\qquad \exp\left(\frac{\epsilon}{1-\epsilon}\left(\frac{n}{\mu}+n\delta-\frac{n}{\epsilon\mu}\right)\left(-\mu\delta-\frac{\epsilon}{2}\,\frac{(\mu\delta)^2}{1-\epsilon-\epsilon\mu\delta}\right)\right) \\
&= \left(1+\frac{\epsilon\mu\delta}{1-\epsilon-\epsilon\mu\delta}\right)\exp\left(-\frac{\epsilon}{2(1-\epsilon)}n\mu\delta^2+1\right)
\end{aligned}$$

- Si $\left\lfloor n(\frac{1}{\mu}+\delta)\right\rfloor r \geq n$ on a

$$P\left\{\frac{\nu_n}{n} > \frac{1}{\mu}+\delta\right\} = 0$$

et la majoration est encore valable. ■

Montrons que pour $\frac{1}{n} < \delta < \frac{1}{\mu}$, on a

$$P\left\{\frac{\nu_n}{n} < \frac{1}{\mu}-\delta\right\} \leq \exp\left(\frac{1}{1-\mu\delta-\frac{\mu}{n}}\right)\exp\left(-\frac{\epsilon}{2(1-\epsilon)}n\mu\delta^2\left(1-\frac{\epsilon}{1-\epsilon}\mu\delta\right)\right).$$

Il est clair que pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathbf{I}_{\{S_q \geq n\}} \leq \exp(u(S_q - n)).$$

Il vient

$$P\{S_q \geq n\} \leq E\Big(\exp(u(S_q - n))\Big) = \exp(-un)\Big(E(\exp(uY_1))\Big)^q, \ u > 0.$$

Un calcul simple montre que pour $u < \frac{1}{r} \ln \frac{1}{1-\epsilon}$, on a

$$E \exp\Big(u(S_q - n)\Big) = \frac{\epsilon^q \exp\Big(u(n - qr)\Big)}{\Big(1 - (1 - \epsilon)\exp(ur)\Big)^q}.$$

Il en résulte que $E(\exp(u[S_q - n]))$ atteint son minimum en $u = \frac{1}{r} \ln \frac{n-qr}{n(1-\epsilon)}$.
Par conséquent, pour tout $n > q\mu$, on a

$$P\{S_q \geq n\} \leq \left(\frac{\epsilon n}{qr}\right)^q \exp\left(\left(q - \frac{n}{r}\right) \ln \frac{n - qr}{n(1 - \epsilon)}\right). \tag{6.46}$$

Observons que pour $\frac{1}{n} < \delta < \frac{1}{\mu}$, $n > \left\lfloor n\left(\frac{1}{\mu} - \delta\right)\right\rfloor \mu$.
Il résulte alors de (6.46) que :

$$P\left\{\frac{\nu_n}{n} < \frac{1}{\mu} - \delta\right\} \leq P\left\{\nu_n \leq \left\lfloor n\left(\frac{1}{\mu} - \delta\right)\right\rfloor\right\} = P\left\{S_{\lfloor n(\frac{1}{\mu} - \delta)\rfloor} \geq n\right\}$$

$$\leq \left(\frac{\epsilon n}{\left(n\left(\frac{1}{\mu} - \delta\right) - 1\right)r}\right)^{n\left(\frac{1}{\mu}-\delta\right)} \exp\left(\left(n\left(\frac{1}{\mu} - \delta\right) - \frac{n}{r}\right) \ln \frac{n - n\left(\frac{1}{\mu} - \delta\right)\epsilon\mu}{n(1 - \epsilon)}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{1 - \mu\delta - \frac{\mu}{n}}\right)^{n\left(\frac{1}{\mu}-\delta\right)} \exp\left(n\left(\frac{1}{\mu} - \delta - \frac{1}{\epsilon\mu}\right) \ln\left(1 + \frac{\epsilon}{1 - \epsilon}\mu\delta\right)\right). \tag{6.47}$$

D'après (6.47) et l'encadrement $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x, \ \ x > 0$, on a

$$\begin{aligned} P\left\{\frac{\nu_n}{n} < \frac{1}{\mu} - \delta\right\} \ &\leq \ \exp\left(n\delta + 1 + \frac{\mu(n\delta + 1)}{n\left(1 - \mu\delta - \frac{\mu}{n}\right)}\right) \times \\ &\quad\ \exp\left(n\left(\frac{1}{\mu} - \delta - \frac{1}{\epsilon\mu}\right)\left(\frac{\epsilon}{1 - \epsilon}\mu\delta - \frac{1}{2}\frac{\epsilon^2}{(1 - \epsilon)^2}(\mu\delta)^2\right)\right) \\ &= \ \exp\left(\frac{1}{1 - \mu\delta - \frac{\mu}{n}}\right) \exp\left(-\frac{\epsilon}{2(1 - \epsilon)} n\mu\delta^2\left(1 - \frac{\epsilon}{1 - \epsilon}\mu\delta\right)\right). \end{aligned}$$

■

6.4 Démonstrations du chapitre 5

Montrons que pour tout $(s,\rho) \in \mathbb{N} \times (\theta_0, b)$ on a

$$P\{\overline{S}_1 = s, \overline{R}_1 > \rho\} = (P\{Z_0 \le \theta_0\})^s P\{Z_0 > \rho\}. \tag{6.48}$$

Il est clair que

$$P\{\overline{S}_1 = s, \overline{R}_1 > \rho\} = P\{\overline{S}_1 = s, \overline{R}_1 > \rho, S_2 \le \overline{S}_1\} + P\{\overline{S}_1 = s, \overline{R}_1 > \rho, S_2 > \overline{S}_1\}.$$

On vérifie que

$$\begin{aligned} P\{\overline{S}_1 = s, \overline{R}_1 > \rho, S_2 \le \overline{S}_1\} &= P\{S_2 + (\hat{Y}_{\theta_0,S_2})_1 = s, \overline{R}_1 > \rho, L_1 = 1\} \\ &= \sum_{2r \le s_2 \le s} P\{(\hat{Y}_{\theta_0,S_2})_1 = s - s_2, \overline{R}_1 > \rho, L_1 = 1, S_2 = s_2\}. \end{aligned}$$

Il résulte de la définition des v.a. L_1, $\overline{S}_1$, $\overline{R}_1$ et de l'égalité précédente que :

$$\begin{aligned} P\{\overline{S}_1 = s, \overline{R}_1 > \rho, S_2 \le \overline{S}_1\} &= \sum_{2r \le s_2 \le s} P\Big\{(\hat{Y}_{\theta_0,S_2})_1 = s - s_2, (\hat{Y}_{\theta_0,S_2})_2 > \rho, L_1 = 1, S_2 = s_2\Big\} \\ &= \sum_{2r \le s_2 \le s} (P\{Z_0 \le \theta_0\})^{s_2} P\Big\{(\hat{Y}_{\theta_0,S_2})_1 = s - s_2, (\hat{Y}_{\theta_0,S_2})_2 > \rho, S_2 = s_2\Big\}. \end{aligned}$$

Observons que

$$\hat{Y}_{\theta_0,S_2} \in \sigma(Y_{\theta_0,S_2}, \overline{Q}_1, \overline{Y}_{\theta_0,S_2}, Y'_{\theta_0,S_2}) \subset \sigma(\{Z_{S_2+j}, j \ge 0\}, \overline{Q}_1, \overline{Y}_{\theta_0,S_2}, Y'_{\theta_0,S_2}).$$

Ceci d'après la définition des v.a. $\overline{Q}_1, \overline{Y}_{\theta_0,S_2}, Y'_{\theta_0,S_2}$ et la proposition (2.2) entraîne que les v.a. $\hat{Y}_{\theta_0,S_2}$ et S_2 sont indépendantes.

Il vient

$$P\{\overline{S}_1 = s, \overline{R}_1 > \rho, S_2 \le \overline{S}_1\} = (P\{Z_0 \le \theta_0\})^s P\{Z_0 > \rho\} P\{S_2 \le s\}. \tag{6.49}$$

Observons que

$$\begin{aligned} P\{\overline{S}_1 = s, \overline{R}_1 > \rho, S_2 > \overline{S}_1\} &= P\{\overline{S}_1 = s, \overline{R}_1 > \rho, S_2 > s, L_1 = 0\} \\ &= \sum_{j>s} P\{(\tilde{Y}_{\theta_0})_1 = s, (\tilde{Y}_{\theta_0})_2 > \rho, S_2 = j, L_1 = 0\} \\ &= \sum_{j>s} (1 - (P\{Z_0 < \theta_0\})^j) \frac{(P\{Z_0 < \theta_0\})^s P\{Z_0 > \rho\}}{1 - (P\{Z_0 < \theta_0\})^j} P\{S_2 = j\}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$P\{\overline{S}_1 = s, \overline{R}_1 > \rho, S_2 > \overline{S}_1\} = (P\{Z_0 \le \theta_0\})^s P\{Z_0 > \rho\} P\{S_2 > s\}. \quad (6.50)$$

La combinaison de (6.49) et (6.50) entraîne (6.48). ∎

Montrons que la loi de la v.a. $Z_{S_{\overline{\nu}_1+1}}$ est π.
Observons que pour tout $A \in \mathcal{F}$,

$$\begin{aligned}
P\Big\{Z_{S_{\overline{\nu}_1+1}} \in A\Big\} &= \sum_{j=1}^{\infty} P\Big\{Z_{S_{j+1}} \in A, S_{j-1} \le \overline{S}_1 < S_j\Big\} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{s_1<s_2<\ldots<s_j<s_{j+1}} P\Big\{Z_{S_{j+1}} \in A, S_1 = s_1, \ldots, S_j = s_j, \\
&\qquad s_{j-1} \le (\tilde{Y}_{\theta_0})_1 < s_j, S_{j+1} = s_{j+1}, L_1 = 0\Big\} \\
&+ \sum_{j=3}^{\infty} \sum_{s_1<s_2<\ldots<s_j<s_{j+1}} P\Big\{Z_{S_{j+1}} \in A, S_1 = s_1, \ldots, S_j = s_j, \\
&\qquad s_{j-1} \le s_2 + (\hat{Y}_{\theta_0,S_2})_1 < s_j, S_{j+1} = s_{j+1}, L_1 = 1\Big\} \quad (6.51)
\end{aligned}$$

Par définition, les v.a. $(\tilde{Y}_{\theta_0})$ et L_1 ne dépendent de $\{Z_j, j \ge 0\}$ et $\{S_j, j \ge 1\}$ qu'à travers S_2 qui d'après la proposition(2.2) est indépendante de $Z_{S_{j+1}}$, $j \ge 1$. Ceci entraîne que pour tout $j \ge 1$, on a

$$\begin{aligned}
&P\{Z_{S_{j+1}} \in A, S_1 = s_1, \ldots, S_j = s_j, s_{j-1} \le (\tilde{Y}_{\theta_0})_1 < s_j, S_{j+1} = s_{j+1}, L_1 = 0\} \\
&= \pi(A) P\{S_1 = s_1, \ldots, S_j = s_j, s_{j-1} \le (\tilde{Y}_{\theta_0})_1 < s_j, S_{j+1} = s_{j+1}, L_1 = 0\}. \quad (6.52)
\end{aligned}$$

On déduit de la définition de la v.a. $(\hat{Y}_{\theta_0,S_2})$, que pour tout $j \ge 3$, l'événement

$$\{S_1 = s_1, \ldots, S_j = s_j, s_{j-1} \le s_2 + (\hat{Y}_{\theta_0,S_2})_1 < s_j, S_{j+1} = s_{j+1}, L_1 = 1\} \in$$

appartient à la tribu

$$\sigma(\overline{Q}_1, \overline{Y}_{\theta_0,S_2}, Y'_{\theta_0,S_2}, Z_{s_2}, \ldots, Z_{s_j}, \mathbf{I}_{\{S_1=s_1\}}, \ldots, \mathbf{I}_{\{S_j=s_j\}}, \mathbf{I}_{\{S_{j+1}=s_{j+1}\}}, L_1)$$

qui d'après le choix de L_1, et la proposition(2.2) est indépendante de $Z_{S_{j+1}}$.

Il en résulte que pour tout $j \geq 3$, on a

$$\begin{aligned} & P\{Z_{S_{j+1}} \in A, S_1 = s_1, \ldots, S_j = s_j, s_{j-1} \leq s_2 + (\hat{Y}_{\theta_0,S_2})_1 < s_j, S_{j+1} = s_{j+1}, L_1 = 1\} \\ = \; & \pi(A) P\{S_1 = s_1, \ldots, S_j = s_j, s_{j-1} \leq s_2 + (\hat{Y}_{\theta_0,S_2})_1 < s_j, S_{j+1} = s_{j+1}, L_1 = 1\} \quad (6.53) \end{aligned}$$

La combinaison de (6.51), (6.52) et (6.53) implique

$$P\{Z_{S_{\overline{\nu}_1+1}} \in A\} = \pi(A) \sum_{j=1}^{\infty} P\{S_{j-1} \leq \overline{S}_1 < S_j\} = \pi(A)$$

■

Montrons que pour tout $n \geq 1$, $\{Z_{S_{\overline{\nu}_{n+1}}+j}, j \geq 0\}$ est une chaîne de Markov de même loi que $\{Z_j, j \geq 0\}$.
Pour tout $A \in \mathcal{F}$, on a :

$$\begin{aligned} P\{Z_{S_{\overline{\nu}_n+1}} \in A\} &= \sum_{i_n=1}^{\infty} P\{Z_{S_{i_n+1}} \in A, \overline{\nu}_n = i_n\} \\ &= \sum_{i_n=1}^{\infty} \sum_{1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_{n-1} \leq i_n} \sum_{1 \leq s_1 < s_2 < \ldots < s_{i_n}} \sum_{\overline{s}_1 = s_{i_1}-1}^{s_{i_1}-1} \cdots \sum_{\overline{s}_n = s_{i_n}-1}^{s_{i_n}-1} \\ &\quad P\{Z_{S_{i_n+1}} \in A, S_1 = s_1, \ldots, S_{i_n} = s_{i_n}, \overline{S}_1 = \overline{s}_1, \ldots, \overline{S}_n = \overline{s}_n\}. \end{aligned}$$

D'après (5.14) p.78, l'événément

$$\{S_1 = s_1, \ldots, S_{i_n} = s_{i_n}, \overline{S}_1 = \overline{s}_1, \ldots, \overline{S}_n = \overline{s}_n\}$$

appartient à la tribu

$$\begin{aligned} & \sigma(\{Z_0, \ldots, Z_{\overline{s}_n}\}) \times \sigma'_{n-1} \times \sigma(L_n, \overline{Q}_n(\overline{R}_{n-1}), \overline{Y}_{\overline{R}_{n-1}, S_{\overline{\nu}_{n-1}+1}}, Y'_{\overline{R}_{n-1}, S_{\overline{\nu}_{n-1}+1}}, \tilde{Y}_{\overline{R}_{n-1}}) \times \\ & \sigma(\mathbf{I}_{\{S_1 = s_1\}}, \ldots, \mathbf{I}_{\{S_{i_n} = s_{i_n}\}}, \mathbf{I}_{\{S_{i_n+1} = s_{i_n+1}\}}) \end{aligned}$$

qui d'après le choix des v.a. l'engendrant et la proposition (6.2) de l'annexe est indépendante de $Z_{S_{i_n+1}}$.
Il en résulte que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P\{Z_{S_{\overline{\nu}_n+1}} \in A\} = \pi(A).$$

Le procédé de construction de $\{Z_{S_{\overline{\nu}_{n+1}}+j}, j \geq 0\}$ étant identique à celui de $\{Z_j, j \geq 0\}$ lorsqu'on remplace Z_0 par $Z_{S_{\overline{\nu}_{n+1}}}$, $\{Z_{S_{\overline{\nu}_{n+1}}+j}, j \geq 0\}$ est une chaîne de Markov de même loi que $\{Z_j, j \geq 0\}$. ■

Montrons que pour tout $n, p \in \mathbb{N}^*$,

$$P\{S_{\overline{\nu}_n+1} - \overline{S}_n = p\} \leq p(1-\epsilon)^{\frac{p}{r}-3}. \tag{6.54}$$

Il est clair que pour tout $p \leq r$, $P\{S_{\overline{\nu}_n+1} - \overline{S}_n = p\} = 0 \leq p(1-\epsilon)^{\frac{p}{r}-3}$.

Pour tout $p > r$ on a :

$$P\{S_{\overline{\nu}_n+1} - \overline{S}_n = p\} = \sum_{j=1}^{\infty} P\{S_{\overline{\nu}_n+1} - \overline{S}_n = p, S_{j-1} \leq \overline{S}_n < S_j\}.$$

Il vient

$$\overline{S}_n = S_{j-1} + i, S_j = \overline{S}_n + k = S_{j-1} + i + k, S_{j+1} = S_{j-1} + i + p$$

où $k \geq 1$, $i + p, i + k \in r\mathbb{N}^*$, $i + k + r \leq i + p$, et $i + k \geq r$.

Par conséquent,

$$\begin{aligned} P\Big\{S_{\overline{\nu}_n+1} - \overline{S}_n = p\Big\} &= \sum_{j=1}^{\infty} P\Big\{S_{\overline{\nu}_n+1} - \overline{S}_n = p, \overline{\nu}_n = j\Big\} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{s_1 < s_2 < \ldots < s_{j-1}} \sum_{i \in E^1} \sum_{k \in E^2} P\Big\{S_1 = s_1, \ldots, S_{j-1} = s_{j-1}, \\ &\qquad \overline{S}_n = s_{j-1} + i, S_j = s_{j-1} + i + k, S_{j+1} = s_{j-1} + i + p\Big\} \end{aligned} \tag{6.55}$$

en posant

$$E^1 = \{i \in \mathbb{N} : i + p \in r\mathbb{N}^*\}$$

et

$$E^2 = \{k \in \mathbb{N} : \max(1, r-i) \leq k \leq p - r \text{ et } i + k \in r\mathbb{N}^*\}.$$

Observons que pour tout $i \in E^1$ et $k \in E^2$ on a :

$$P\Big\{S_1 = s_1, \ldots, S_{j-1} = s_{j-1}, \overline{S}_n = s_{j-1} + i, S_j = s_{j-1} + i + k, S_{j+1} = s_{j-1} + i + p\Big\}$$
$$= P\Big\{S_1 = s_1, \ldots, S_{j-1} = s_{j-1}, \overline{S}_n = s_{j-1} + i, Q_{\lceil \frac{s_{j-1}+i}{r} \rceil} = 0, Q_{\lceil \frac{s_{j-1}+i}{r} \rceil + 1} = 0, \ldots,$$
$$Q_{\frac{s_{j-1}+i+k}{r} - 1} = 0, Q_{\frac{s_{j-1}+i+k}{r}} = 1, Q_{\frac{s_{j-1}+i+k}{r} + 1} = 0, \ldots, Q_{\frac{s_{j-1}+i+p}{r} - 1} = 0, Q_{\frac{s_{j-1}+i+p}{r}} = 1\Big\}. \tag{6.56}$$

On vérifie que l'évènement

$$\{S_1 = s_1, \ldots, S_{j-1} = s_{j-1}, \overline{S}_n = s_{j-1} + i\}$$

$\Big($qui ne dépend qui ne dépend de v.a. $\Big\{Q_{\lceil \frac{s_{j-1}+i}{r} \rceil + k}, k \geq 0\Big\}$ qu'à travers

$$\Big\{Z_0, \ldots, Z_{s_{j-1}+i}, Q_1, \ldots, Q_{\lceil \frac{s_{j-1}+i}{r} \rceil}\Big\}\Big)$$

est indépendant de la tribu engendrée par les v.a. $\Big\{Q_{\lceil \frac{s_{j-1}+i}{r} \rceil + l}, l \geq 1\Big\}$. Il résulte alors de (6.56) que :

$$P\Big\{S_1 = s_1, \ldots, S_{j-1} = s_{j-1}, \overline{S}_n = s_{j-1} + i, S_j = s_{j-1} + i + k, S_{j+1} = s_{j-1} + i + p\Big\}$$
$$\leq (1-\epsilon)^{\frac{p}{r}-1} P\Big\{S_1 = s_1, \ldots, S_{j-1} = s_{j-1}, \overline{S}_n = s_{j-1} + i\Big\} \tag{6.57}$$

(on rappelle que $\epsilon \leq 1 - \epsilon$). De (6.55) et (6.57) on déduit que :

$$P\Big\{S_{\overline{\nu}_n+1} - \overline{S}_n = p\Big\} \leq \sum_{k \in E^2} (1-\epsilon)^{\frac{p}{r}-1} \leq (p-r)(1-\epsilon)^{\frac{p}{r}-1} \leq p(1-\epsilon)^{\frac{p}{r}-1}$$

■

Bibliographie

[1] **Asmussen S.** (1987) *Applied probability and queues* . Wiley, New York.

[2] **Athreya K.B. and Ney P.** (1978) *a new approach to the limit theory for recurrent Markov chains.* Trans. Amererican Mathematical Society (245) (p.493-501).

[3] **Athreya K.B. and G. Pantula** (1986) *Missing properties of Harris chains and autoregressive processes* Journal of Applied Probability. (23) (p.880-892).

[4] **Billingsley P.** (1979) *Probability and measure.* Wiley, New York.

[5] **Blum J.R., DL. Hanson, L.H. Koopmans** (1963) *on a strong law of large numbers for a class of stochastic process.* Zeitschrift für Wahrschei. Verw. Geb. (2) (p.1-11)

[6] **Chung K.L.** (1964) *The general theory of Markov process according to Doeblin.* Zeitschrift für Wahrschei. Verw. Geb.(2) (p.230-254).

[7] **Deheuvels P.** (1974). *Valeurs extrémale d'échantillons croissants d'une v.a. réelle.* Annales de l'institut Henri Poincaré B (10) (p.89-114).

[8] **Diebolt J.** (1991) *Estimates of the tail of the stationnary density function of certain nonlinear autoregressive process.* vol (4) Journal of Theorical Probability. (p.655-677)

[9] **Diebolt J. et Guegan G.** (1990) *Rapport technique 125 Markov process of order one and applications to times series modelling.*

[10] **Doukhan P. and Ghindes M.** (1980) *étude du processus* "$X_{n+1} = f(X_n)\mathcal{E}_n$." C.R.Acad. Sc. Paris (A 29) (p.921-923).

[11] **Doob J.L.** (1953) *Stochastic Process.* Wiley, New York.

[12] **Galambos** (1987) *The asymptotic theory of extreme order statistics.* Robert E.Krieger Publishing company Malabar, FLorida.

[13] **G. Hognas** (1986) *Comparison of some non-linear autoregressive process.* Journal of Time Series Analysis (7) (p.205-211).

[14] **Haiman G.**(1981) *Valeurs extrêmales de suites stationnaires de v.a. m-dépendantes.* Annales de l'institut henri Poincarre (p.309-330).

[15] **Haiman G.** (3) (1987 a) *Valeurs des extrêmes d'une suite stationnaire m-dépendante avec une application relative aux accroissements du processus de Wiener.* Annales de l'institut henri Poincarre 23 (3) (p.425-458).

[16] **Haiman G.** (1987 b) *Almost sure asymptotic behavior of the record and record time sequences of a stationary gaussian process.* Mathematical Statistics and Probability Theory, vol. A (p.105-120).

[17] **Haiman G.and M.L. Puri** (1990 a) *A strong invariance principle concerning the J-upper statistics for stationary m-dependant sequence.* Journal of Statistical Planning and Inference (25) (p.43-51).

[18] **Haiman G.**(1991) *A strong invariance principle for the extreme of multivariate stationary m-dependent sequence.* Journal of Statistical Planning and Inference (32) (1992) (p.47-163).

[19] **Haiman G.and M.L. Puri** (1993) *A strong invariance principle concerning the j-upper order statistics for stationary Gaussian sequences.* Annals of Probability vol (21) $N^o 1$ (p.86-135).

[20] **Haiman G., Kiki M. and M.L. Puri** (1994) *Extreme of Markov sequences* Journal of Statistical Planning and Inference (sous presse)

[21] **Jain.N. et Jamison.B.** (1967) *Contribution to Doeblin's theory of Markov processes.* Zeitschrift für Wahrschei. Verw. Geb. (8) (p.19-40).

[22] **Jakubowski A.**(1993) *An asymptotic independent representation in limit theorems for maxima of non stationary random sequences.*, Annals of Probability Vol (21) N^o (2) (p.819-930).

[23] **Leadbetter M.R. and H. Rootzen** (1988) *Extremal theory for stochastic process.* Annals of Probability Vol 16 $N^o(2)$ (p.431-478).

[24] **Leadbetter, M.R.Lindgren, G. and H. Rootzen** (1983). *Extremes and related properties of random sequences and processes.* Springer, New York.

[25] **Mokkadem.A.**(1987) *Sur un modèle autoregressif non linéaire ergodicité ergodicité géométrique* Journal of Time Series Analysis (8) (p.195-204).

[26] **Nummelin** (1978) *A splitting technique for Harris recurrent Markov chains.* Zeitschrift für Wahrschei. Verw. Geb. (43) (p.309-318.

[27] **Nummelin et Tuominen** (1982) *Geometric ergodicity and R-positivity for general Markov chains.* Stochastic Process and Their Applications. (12) (187-202).

[28] **Nummelin et Tweedie** (1978) *Geometric ergodicity and R-positivity for general Markov Chains.* Annals of Probability (6) (p.404-420).

[29] **O'Brien,G.L.** (1987) *Extreme values for stationary Markov sequences.* Annals of Probability (15) (p.281-291).

[30] **Orey S.** (1971) *Limit theorems for Markov chain transition probabilities.* Van Nostrand.

[31] **Revuz D.**(1984) *Markov chains.* North Holland Amsterdam.

[32] **Rootzen H.** (1988) *Maxima and exceedances of stationary Markov chains.* Advances of Applied Probability (20) (p.371-390).

[33] **Serfozo R.** (1980) *High level exceedances of regenerative and semi stationary process.* Journal of Applied Probability (17) (p.423-431).

[34] **Smith R.L.**(1992) *The extremal index for a Markov chain.* J. Appl. Prob.(29) (p.37-45)

[35] **Tweedie R.L.** (1974 a) *R-theory for Markov chains on a general state 1.* Annals of Probability (2) (p.840-864).

[36] **Tweedie R.L.** (1975b) *Sufficient condition for ergodicity and recurrence of Markov chains on general state space.* Stochastic Processes and their Applications (3) (p.385-403).

[37] **Tweedie R.L.** (1976) *Criteria for classifying general Markov chains.* Advances of Applied Probability (8) (p.737-771).

ELSEVIER

Journal of Statistical Planning and Inference 44 (1995) 000–000

journal of statistical planning and inference

Extremes of Markov sequences

George Haiman[a,*], Maxime Kiki[a], Madan L. Puri[b,1]

[a] Université des Sciences et Technologies de Lille, Laboratoire de Statistique et Probabilités, Bâtiment M2 59655, Villeneuve D'ascq, Cedex, France

[b] Department of Mathematics, Indiana University, Bloomington, Indiana 47405, USA

Received 1 November 1993; revised 15 May 1994

Abstract

This paper establishes bounds for

$$\Delta_n = \max_{u_n \leqslant x \leqslant \omega} |P\{\mathrm{Max}(X_0,\ldots,X_n)<x\} - P(X_0<x)^{n+1}|,$$

where $\{X_n\}_{n \geqslant 0}$ is a stationary Markov sequence with transition density $f(x,y)$ satisfying some regularity conditions, $\omega = \sup\{u;\ P(X_0<u)<1\}$, and u_n is defined for any fixed $\tau>0$ by $P\{X_0>u_n\}=\tau/n$, $n>\tau$. In particular, if there exists a probability density $g(y)$ such that

$$\eta g(y) \leqslant f(x,y) \leqslant Mg(y), \quad x,y \in \mathrm{R},$$

then for any $0<\beta<1$ there exists $n_0(\tau,\beta)$ such that for $n \geqslant n_0$

$$\Delta_n \leqslant \beta n^{-1/2}(\log n)^{3/2}.$$

Key words: Extremes; Regenerative and Markov processes

1. Introduction and results

The starting point of this paper is a result of Rootzén (1988), recalled below, concerning the maxima of stationary Markov chains. Earlier classical references more or less closely connected with this topic are Serfozo (1980) and O'Brien (1987) (for a complete bibliography see Rootzén's paper). More recent papers are Smith (1992) and Jakubowski (1993). In order to present out results, we need some preliminaries.

* Corresponding author.

[1] Research was supported by the Office of Naval Research Contract N00014-91-J-1020.

SSDI 0378-3758(94)00070-0

1.1. Preliminaries

Let $\{X_n;\ n=0,1,\dots\}$ be a $(\mathbb{R},\mathscr{R})$ valued Markov chain (where $\mathscr{R}$ is the σ field generated by the Borel sets of $\mathbb{R}$) with stationary transition probability $P(\cdot,\cdot)$.

The distribution of $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ is determined by the transition probability and the distribution of X_0 (initial distribution). A probability π is stationary for $P(\cdot,\cdot)$ if $\pi(A)=\int P(x,A)\,\mathrm{d}\pi(x)$ for all $A\in\mathscr{R}$ and then $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ is strictly stationary under P_π.

Let $R\in\mathscr{R}$ and set

$$\tau(R)=\inf\{t\geqslant 1,\ X_t\in R\}. \tag{1.1}$$

R is called *recurrent* if $P_x(\tau(R)<\infty)=1$ for all $x\in\mathbb{R}$. (We denote P_x the distribution of the chain with initial probability which gives probability 1 to the set $\{x\}$, $x\in\mathbb{R}$.)

R is called a *regeneration set* if it is recurrent and if there exist an integer $r\geqslant 1$, $\varepsilon\in(0,1)$ and a probability λ on $\mathscr{R}$ such that

$$P^r(x,A)\geqslant\varepsilon\lambda(A)\quad\forall x\in R,\ A\in\mathscr{R}. \tag{1.2}$$

This terminology is justified by the fact (Asmussen, 1987, p. 151) that if a regeneration set R exists, then it is possible to construct $\{X_t\}$ simultaneously with a renewal process $S_0,S_1,\dots$ with respect to which $\{X_t\}$ becomes regenerative if $r=1$ and 1-dependent regenerative if $r>1$.

$\{X_t\}$ (not necessarily Markov) is called *regenerative* if there exists a positive integer valued random sequence $\{Y_n\}_{n\geqslant 0}$ defined on the same probability space such that:

(i) For any positive integers $n\geqslant 1$ and $y_0,y_1,\dots,y_n$ and any $A_1,\dots,A_{s_n}\in\mathscr{R}$, the events

$$B_k=\{Y_k=y_k,\ X_{s_{k-1}}\in A_{s_{k-1}},\dots,X_{s_k-1}\in A_{s_k-1}\}, \tag{1.3}$$

$$s_k=\sum_{l=0}^{k} y_l,\quad k=0,\dots,n,\quad s_{-1}=0$$

are independent.

(ii) For any integers $1\leqslant k<l$ and $u>0$ and any $A_1,\dots,A_u\in\mathscr{R}$,

$$\begin{aligned}P\{Y_k=u,\ X_{s_{k-1}}\in A_1,\dots,X_{s_k-1}\in A_u\}\\ =P\{Y_l=u,\ X_{s_{l-1}}\in A_1,\dots,X_{s_l-1}\in A_u\}.\end{aligned} \tag{1.4}$$

Remark 1.1. This definition is described in Asmussen (1987) as 'there exists a renewal process $S_0,S_1,\dots$ such that the cycles $c_k=\{X_t;\ S_{k-1}\leqslant t<S_k\}$, $k\geqslant 1$, are i.i.d.'. Clearly (i) and (ii) imply that Y_n, $n\geqslant 1$, are i.i.d. and $\{S_k:=Y_0+\dots+Y_k\}_{k\geqslant 1}$ is a renewal process.

The sequence $\{X_t\}$ is called *1-dependent regenerative* if there exists a renewal process $\{S_k=Y_0+\dots+Y_k\}_{k\geqslant 0}$ such that the events B_k in (1.3) are 1-dependent (i.e. for any $k \geqslant 0$ and $n \geqslant 2$, $\sigma(B_1, \ldots, B_k)$ and $\sigma(B_{k+2}, \ldots, B_{k+n})$ are independent) and condition (ii) holds. Asmussen's construction of $\{X_t\}_{t \geqslant 0}$ simultaneously with $\{S_k\}_{k \geqslant 0}$ is then briefly the following.

Realise $X_0(\omega) = x$ and take the usual version of $\{X_t\}$ up to time $\tau(R)$ where R is hit. Then with probability ε let a renewal occur at $\tau(R)+r$ (i.e. $S_0 = \tau(R)+r$) and then let $X_{\tau(R)+r}$ be independent of $X_0, X_1, \ldots, X_{\tau(R)}$ and have distribution λ. Let, with probability $1-\varepsilon$, $X_{\tau(R)+r}$ have distribution (no renewal at $\tau(R)+r$ in this case)

$$[P^r(X_{\tau(r)}, \cdot) - \varepsilon\lambda(\cdot)]/1-\varepsilon. \tag{1.5}$$

After that define $X_{\tau(R)+s}$, $0<s<r$, in order it has the right distribution.

Then repeat the procedure with the new initial value $X_{\tau(R)+r} := x$ and so on. It is clear that at any renewal epoch S_n, $n \geqslant 0$, the distribution of X_{S_n} is λ and X_{S_n} is independent of $X_0, \ldots, X_{S_{n-1}}$.

Let $\{X_t\}_{t \geqslant 0}$ be a Markov process with a regeneration set R ($\{X_t\}$ is then also called Harris recurrent) and let $\{S_n\}_{n \geqslant 0}$ be the renewal process obtained by the previous construction. Let

$$\xi_0 = \max(X_0, \ldots, X_{S_0 - 1}) \quad \text{and} \quad \text{for } n \geqslant 1,\ \xi_n = \max(X_{S_{n-1}}, \ldots, X_{S_n - 1}). \tag{1.6}$$

It is not difficult to check that if $r=1$ then by (1.3) and (1.4) $\{\xi_n\}_{n \geqslant 1}$ is an i.i.d. sequence and if $r>1$, then $\{\xi_n\}_{n \geqslant 1}$ is a 1-dependent stationary sequence.

Since the distributionof X_0 is not necessarily λ, the distribution of ξ_0 is in general different from the common distribution of $\xi_1, \xi_2, \ldots$ Let

$$\nu_t = \min\{k \geqslant 0;\ S_k \geqslant t\} \tag{1.7}$$

and

$$M_n = \mathrm{Max}(X_0, \ldots, X_n).$$

Theorem 1.1 (Rootzén, 1988 p. 375). *Suppose $r=1$ in (1.2), $\mu := E(Y_1) < \infty$ ($Y_1 = S_1 - S_0$) and put $G(x) = P(\xi \leqslant x)^{1/\mu}$. Then for any $\delta > 0$ we have*

$$|P(M_n \leqslant x) - G(x)^n| \leqslant \mu\left(\delta + \frac{1}{n}\right) + P(|\nu_n/n - 1/\mu| \geqslant \delta)$$
$$+ P(\xi_0 > \max(\xi_1, \ldots, \xi_{[n(1/\mu+\delta)]}) \tag{1.8}$$

with $[x]$ = integer part of x. Hence, if $\lim_{k\to\infty} P(\xi_0 > \max(\xi_1, \ldots, \xi_k)) = 0$ (this is the case for example if the distribution of X_0 is λ), then, since by the law of large numbers $\lim_{n\to\infty} P(|\nu_n/n - 1/\mu| > \delta) = 0$, we have

$$\sup_x |P(M_n \leqslant x) - G(x)^{n+1}| \to 0 \quad \text{as } n \to \infty. \tag{1.9}$$

1.2. The results

In the following we consider a Markov process $\{X_t\}_{t\geq 0}$ with transition density $f(x,y)$ with respect to the Lebesgue measure (i.e. $P(x, dy)=f(x,y)\,dy$). We suppose that the k step transition density $f^k(x,y)$ $(f^1(x,y)=f(x,y))$, given recursively by

$$f^k(x,y)=\int f^{k-1}(x,z)f(z,y)\,dz, \quad k\geq 2, \tag{1.10}$$

satisfies the following hypothesis (H):

(H) There exists an integer $s\geq 1$, two constants $0<\eta<1$ and $M>1$ and a probability density with respect to the Lebesgue measure $g(y)$ such that

$$\eta g(y)\leq f^s(x,y)\leq Mg(y), \quad x,y\in\mathbb{R}. \tag{1.11}$$

We first prove the following result.

Theorem 1.2. *Let $\{X_n\}_{n\geq 0}$ satisfy hypothesis (H). Then, there exists a unique stationary distribution which has a density $f(y)$ with respect to the Lebesgue measure such that, for $n\geq s$,*

$$|f^n(x,y)-f(y)|\leq A\rho^n f(y), \quad -\infty<x,y<\infty, \tag{1.12}$$

where $A=2(M/(1-\eta)\eta)^2$ and $\rho\doteq(1-\eta)^{1/s}$.

Proof. See Section 3.

Let $\{X_t\}_{t\geq 0}$ satisfy hypothesis (H) and X_0 have the stationary density $f(y)$. If $s>1$, suppose further that there exists $y_0<\omega:=\sup\{x;\ P(X_0<x)<1\}$ and a function $h(y)$, defined for $y\geq y_0$, such that

$$f(x,y)\leq h(y), \quad y\geq y_0 \tag{1.13}$$

and $1_{\{y\geq y_0\}}h(y)$ is Lebesgue integrable.

Let $\tau>0$ be fixed and define $u_n=u_n(\tau)$ by $P(X_0>u_n)=\tau/n$, $n>\tau$. Put

$$\Delta_n=\max_{u_n\leq x\leq\omega}|P(M_n\leq x)-P(X_0<x)^{n+1}|. \tag{1.14}$$

Our main result is the following theorem.

Theorem 1.3. *Under the above hypotheses, if $s>1$ and*

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\int_{u_n}^{\infty}h(y)\,dy\right)\left(-\log\int_{u_n}^{\infty}g(y)\,dy\right)^{-3/2}\left(\int_{u_n}^{\infty}g(y)\,dy\right)^{1/2}>0, \tag{1.15}$$

then there exists a constant $C>0$ *such that*

$$\Delta_n \leqslant C\int_{u_n}^{\infty} h(y)\,dy, \quad n\geqslant 1. \tag{1.16a}$$

If the limit above is zero or $s=1$, *then, for any* $0<\beta<1$, *there exists* $n_0(\tau,\beta)$ *such that, for* $n\geqslant n_0$,

$$\Delta_n \leqslant \beta\frac{(\log n)^{3/2}}{n^{1/2}}. \tag{1.16b}$$

Proof. See Section 2.

We conclude this section by some remarks and examples.

Remark 1.2. (a) Let, with A and ρ as in (1.14),

$$r_0 := \min\{n;\ A\rho^n<1\}.$$

By Theorem 1.2, for any $r\geqslant r_0$ and $\varepsilon\leqslant 1-A\rho^r$,

$$f^r(x,y)\geqslant \varepsilon f(y), \quad x,y\in\mathbb{R}. \tag{1.17}$$

Thus, $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ satisfy (1.2) where λ is the stationary distribution and R is $\mathbb{R}$. In this case Asmussen's construction may be simplified.

Realise $X_0(\omega)=x$ and then let with probability ε a renewal occur at r (i.e. $S_0=r$) and then let X_r be independent of $X_0,\dots,X_{r-1}$ and have probability density $f(y)$. Let, with probability $1-\varepsilon$, X_r have density (no renewal at r in this case)

$$\frac{f^r(x,y)-\varepsilon f(y)}{1-\varepsilon}.$$

After that define X_s, $0<s\leqslant r-1$ in order it has the right distribution. Then repeat the procedure with the new initial value $X_r=x$ and so on. In this case the probability distribution of the renewal process is such that

$$P\{Y_0=S_0=kr\}=P\{Y_1=S_1-S_0=kr\}=(1-\varepsilon)^{k-1}\varepsilon, \quad k=1,2,\dots \tag{1.18}$$

and hence

$$E(Y_1)=\mu=r/\varepsilon \quad\text{and}\quad V(Y_1)=\mu^2(1-\varepsilon). \tag{1.19}$$

(b) Observe that using (1.17), ξ_0 and ξ_n, $n\geqslant 1$ in (1.6) have the same distribution so that $\{\xi_n\}_{n\geqslant 0}$ is stationary 1-dependent. (This is not the case in general if the construction is based on the first inequality in (1.11), with $d\lambda(y)=g(y)\,dy$, $\varepsilon=\eta$ and $r=s$.)

These facts play an important role in the proof of Theorem 1.3.

(c) If we compare Theorems 1.1 and 1.3, on the one hand some of the hypotheses of Theorem 1.3 are stronger (existence of transition density, right-hand inequality in

(1.11) and the fact that $R=\mathbb{R}$). On the other hand Theorem 1.3 includes the case $r>1$ and (1.16a), (1.16b) are much more explicit than (1.8).

(d) Note that (1.16a) and (1.16b) imply that if the stationary probability is in the domain of attraction of an extreme value distribution, then, for some constants $a_n>0$ and b_n (which are the same as in the independent case), $a_n(M_n-b_n)$ converges weakly to a limit belonging to the same domain of attraction. If the speed of convergence in the independent case is known (see Galambos, 1987), then (1.16a) and (1.16b) provide estimates of the speed of convergence in the Markov case.

1.3. Examples

It may be checked that the following examples of processes satisfy the hypotheses of Theorem 1.3.

Example 1. $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ is defined recursively by

$$X_{n+1}=T(X_n)+\sigma(X_n)\varepsilon_{n+1},\quad n\geqslant 0, \tag{1.20}$$

where T and σ are such that there exist $C\geqslant 0$ and $0<A<B$ such that $\sup_x|T(x)|\leqslant C$ and $A<1/|\sigma(x)|<B$, $x\in\mathbb{R}$.

$\{\varepsilon_n\}_{n\geqslant 1}$ is an i.i.d. sequence with common density $h(y)$ with respect to the Lebesgue measure such that

$$h(y)\sim C|y|^{-\alpha},\quad |y|\to\infty,\ \alpha>0,\ C>0.$$

Then the transition density is

$$f(x,y)=\frac{1}{|\sigma(x)|}h\left(\frac{y-T(x)}{\sigma(x)}\right),\quad x,y\in\mathbb{R}$$

and one can find η, M and $g(y)$ such that (1.11) holds with $s=1$.

Example 2 (*Variant of Example* 1). $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ is defined recursively by (1.20) with $\sigma(x)$ a constant and T bounded. Then one can take $h(y)\sim C|y|^p\exp(-\alpha|y|)$, $|y|\to\infty$, $\alpha>0$, $p\geqslant 0$, $c>0$.

Example 3. $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ takes values in (a,b), $-\infty<a<b<\infty$, and has a bounded (or continuous on $(a,b)^2$) transition density $f(x,y)$ such that, for some integer $s\geqslant 1$ and $0<\varepsilon<1$,

$$f^s(x,y)\geqslant\varepsilon. \tag{1.21}$$

This is in particular the case if $a=0$, $b=1$ and

$$f(x,y)=xh(xy)\left(\int_0^x h(z)\,\mathrm{d}z\right)^{-1}\quad x,y\in(0,1), \tag{1.22}$$

where $h(x)$ is a bounded (or continuous) probability density on $(0,1)$ such that

$$h(x) \geqslant \varepsilon, \quad x \in (0,1),$$

for some $\varepsilon > 0$.

Then it may be seen that there exist $0 < \eta < M$ such that

$$\eta \leqslant f(x,y) \leqslant M, \quad x, y \in (0,1), \tag{1.23}$$

which implies (1.11) with $s=1$ and $g(y)=1$, $y \in (0,1)$.

If $f(x,y)$ satisfy (1.22) with $h(x)=2(1-x)$, $0<x<1$, then $f(x,y)=2(1-xy)/(2-x)$ and it may be seen that (1.11) does not hold for $s=1$ but (1.21) holds for $s=2$.

Condition (1.13) is also satisfied since $f(x,y) \leqslant 2$, $x, y \in (0,1)$.

2. Proof of Theorem 1.3

The proof consists in showing first that an inequality similar to (1.8) (without the last term) may be established also in the case under consideration, and then, in giving explicit expressions for $G(x)$, μ and $P\{|\nu_n/n - 1/\mu| \geqslant \delta\}$.

Roughly, $P\{M_n < x\} \sim P\{\max_{i \leqslant \nu_n} \xi_i < x\}$, $\nu_n \sim n/\mu$ with $\mu = E(Y_0) = r/\varepsilon$ and by Theorem 2.1 (the key of the proof), if $\{\xi_i\}$ is a stationary 1-dependent sequence, then

$$P\left\{\max_{i \leqslant t} \xi_i < x\right\} \sim G^t(x),$$

where an explicit expression of $G(x)$ may be given.

In order to get the result we then evaluate the differences between 'equivalent' terms.

We need the following preliminary results.

Lemma 2.1. *With the definitions in (1.8), (1.9) and (1.19), for any $0 < \delta < 1/\mu$ and $n > (1/\mu - \delta)^{-1}$, we have*

$$P(M_n < x) \leqslant (1-\varepsilon)^{n/r-1} + P\left\{\operatorname*{Max}_{0 \leqslant k \leqslant [n(1/\mu - \delta)]-1} \xi_k < x\right\} + P\left\{\frac{\nu_n}{n} < \frac{1}{\mu} - \delta\right\} \tag{2.1}$$

and, for any $\delta > 0$,

$$P(M_n < x) \geqslant P\left\{\operatorname*{Max}_{0 \leqslant k \leqslant [n(1/\mu - \delta)]-1} \xi_k < x\right\} - P\left\{\frac{\nu_n}{n} > \frac{1}{\mu} + \delta\right\}, \tag{2.2}$$

where $[u]$ = integer part of u.

Proof. We have

$$P\{M_n < x\} = P(M_n < x,\ \nu_n = 0) + P(M_n < x,\ \nu_n \geqslant 1)$$
$$\leqslant P\{\nu_n = 0\} + P\left\{ \operatorname*{Max}_{0 \leqslant k \leqslant \nu_n - 1} \xi_k < x,\ \nu_n \geqslant 1 \right\}$$

and

$$P\left(\operatorname*{Max}_{0 \leqslant k \leqslant \nu_n - 1} \xi_k < x,\ \nu_n \geqslant 1 \right) = P\left\{ \operatorname*{Max}_{0 \leqslant k \leqslant \nu_n - 1} \xi_k < x,\ \nu_n \geqslant 1,\ \frac{\nu_n}{n} < \frac{1}{\mu} - \delta \right\}$$
$$+ P\left\{ \operatorname*{Max}_{0 \leqslant k \leqslant \nu_n - 1} \xi_k < x,\ \nu_n \geqslant 1,\ \frac{\nu_n}{n} \geqslant \frac{1}{\mu} - \delta \right\}.$$

Thus we obtain (2.1) by observing that $P\{\nu_n = 0\} = (1-\varepsilon)^{\lceil n/r \rceil - 1}$ where $\lceil x \rceil - 1 < x \leqslant \lceil x \rceil$.

The proof of (2.2) is similar and simpler since

$$P(M_n < x) \geqslant P\left(\operatorname*{Max}_{0 \leqslant k \leqslant \nu_n - 1} \xi_k < x \right). \qquad \square$$

In the following lemmas we develop expressions for the last two terms in (2.1) and (2.2). We need the following theorem.

Theorem 2.1 (Haiman, 1981). *Let $\{\xi_k\}_{k \geqslant 0}$ be a 1-dependent stationary sequence with continuous marginal distribution function.*

Then there exists a function $\mathscr{M}(x)$, $0 < \mathscr{M}(x) < 1$, defined for $x \geqslant x_0$, where x_0 is given by $P\{\xi_0 > x_0\} = p_0$, with p_0 universal constant, $0 < p_0 < 1$, such that

$$\mathscr{M}(x) = 1 - P\{\xi_0 > x\} + P\{\xi_0 > x, \xi_1 > x\} + O(P^2(\xi_0 > x)), \quad x \geqslant x_0 \tag{2.3}$$

and

$$\operatorname*{Max}_{n \geqslant 0} \left| P\left(\operatorname*{Max}_{0 \leqslant k \leqslant n} \xi_k < x \right) \times \mathscr{M}^{-(n+1)}(x) - 1 \right| \leqslant C_2 P(\xi_0 > x,\ \xi_1 > x), \quad x \geqslant x_0, \tag{2.4}$$

with $|O(x)| \leqslant C_1 |x|$ and C_1, C_2 universal constants.

Lemma 2.2. *For $1/n < \delta < 1/\mu$, where $\mu = r/\varepsilon$, we have*

$$P\left\{ \frac{\nu_n}{n} < \frac{1}{\mu} - \delta \right\} \leqslant C \exp\left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{nr}{\varepsilon} \right)^{1/2} \frac{\delta - 1/n}{(1 - \delta\mu)^{1/2}} \right\}, \tag{2.5}$$

with

$$C = \exp\left(\frac{1}{2} \frac{(1-\varepsilon)e}{(1 - e(1-\varepsilon))^2} \right)$$

and

$$P\left\{\frac{\nu_n}{n}>\frac{1}{\mu}+\delta\right\}\leqslant C'\exp\left\{-n^{1/2}\delta\frac{\mu^{3/2}}{r}(1+\mu\delta)^{-1/2}\right\}, \tag{2.6}$$

with $C'=\exp((1-\varepsilon)/2\varepsilon^2)$.

Proof. We have, since ν_n is an integer,

$$P\left\{\frac{\nu_n}{n}<\frac{1}{\mu}-\delta\right\}\leqslant P\left\{\nu_n\leqslant\left[n\left(\frac{1}{\mu}-\delta\right)\right]\right\}.$$

Put $q:=[n(1/\mu-\delta)]$. Then

$$P\{\nu_n\leqslant q\}=P\{S_q\geqslant n\}=P\{S_q-(q+1)\mu\geqslant n-(q+1)\mu\}$$

$$\leqslant P\left\{S_q-(q+1)\mu\geqslant n\mu\left(\delta-\frac{1}{n}\right)\right\},$$

since $q\leqslant n(1/\mu-\delta)$, which implies $n-(q+1)\mu\geqslant n\mu(\delta-1/n)$.

We now apply Bernstein's inequality

$$P\left\{\xi>\frac{t+\log M_\xi(\eta)}{\eta}\right\}<e^{-t},\quad t>0,\ \eta>0, \tag{2.7}$$

with $\xi=S_q-(q+1)\mu$ and

$$M_\xi(\eta)=E(e^{\eta\xi})=\left(e^{\eta r(1-1/\varepsilon)}\frac{\varepsilon}{1-e^{\eta r}(1-\varepsilon)}\right)^{q+1}.$$

Since we have $1-\varepsilon<e^{-1}$, $M_\xi(\eta)$ is defined for $\eta<1/r$.

Next, using Taylor's formula, we get

$$\frac{\log M_\xi(v)}{\eta}\leqslant(q+1)\frac{\eta r^2}{2}\frac{(1-\varepsilon)e}{(1-e(1-\varepsilon))^2},\quad \eta<\frac{1}{r}.$$

Let $\eta=(1/r)(q+1)^{1/2}$. Then (2.7) implies

$$P\{\xi>r(q+1)^{1/2}(t+C)\}<e^{-t},\quad t>0,$$

from which (2.5) follows.

The proof of (2.6) is completely similar. □

In the proof of Theorem 1.3, for any integer n we will consider the construction of the renewal process (see Section 1) made with $r=r(n)=[\alpha\log n]$, where α is a fixed positive constant to be chosen later.

Then, for $n\geqslant n_0$ large enough, $A\rho^r<\frac{1}{2}$. We then take a fixed $\varepsilon=\frac{1}{2}$.

Lemma 2.3. *For $n \geqslant n_0$ and $x \geqslant \max(x_0, y_0)$, with y_0 in (1.15), $\mathscr{M}(x)$ in (2.3) has the form*

$$\mathscr{M}(x)=\mathscr{M}(n,x)=1-2rP(X_0>x)\left[1+2\mathrm{O}_1(A\rho^r)+2s\mathrm{O}_2\left(\int_x^\infty h(y)\,\mathrm{d}y\right)\right]$$
$$+\mathrm{O}_3[16r^2P^2(X_0>x)(5M+C_1)],\quad |\mathrm{O}_i(x)|\leqslant|x|,\ i=1,2,3. \tag{2.8}$$

Proof. Since $P\{\xi_0>x\}=P\{\xi_1>x\}$, if we put

$$A=\{\mathrm{Max}(X_0,\dots,X_{S_0-1})<x\}\quad\text{and}\quad B=\{\mathrm{Max}(X_0,\dots,X_{S_1-1})<x\},$$

we have

$$1-P\{\xi_0>x\}+P\{\xi_0>x,\xi_1>x\}=1-P\{A\}+P\{B\}.$$

Next, since $P\{A|Y_0=kr\}=P\{A|Y_0=kr,\ Y_1=tr\}$, we have

$$P(A)-P(B)=\sum_{t=1}^{\infty}P\{Y_1=tr\}\sum_{k=1}^{\infty}[P\{A|Y_0=kr,Y_1=tr\}$$
$$-P\{B|Y_0=kr,\ Y_1=tr\}]P(Y_0=kr) \tag{2.9}$$

with $Y_0=S_0$, $Y_1=S_1-S_0$.

Put

$$\mathscr{N}=\mathscr{N}(x,k,t):=P\{A|Y_0=kr,\ Y_1=tr\}-P\{B|Y_0=kr,\ Y_1=tr\}$$

and let $X'_0,\dots,X'_{(k+t)r}$ be random variables with joint distribution equal to the conditional distribution of $X_0,\dots,X_{(k+t)r}$ given $Y_0=kr$ and $Y_1=tr$.

We then have, by Bonferroni's inequalities,

$$\mathscr{N}=P\{\mathrm{Max}(X'_0,\dots,X'_{kr-1})<x\}-P\{\max(X'_0,\dots,X'_{(k+t)r-1})<x\}$$
$$=P(X'_{kr}>x)+\cdots+P(X'_{(k+t)r-1}>x)$$
$$+\mathrm{O}\left(\sum\sum_{0\leqslant i<j\leqslant(k+t)r-1}P(X'_i>x,\ X'_j>x)\right) \tag{2.10}$$

with $|\mathrm{O}(x)|\leqslant|x|$.

Remark 2.1. Observe that by Theorem 2.1 and since $r=r(n)=[\alpha\log n]$, x_0 in Lemma 2.3 also depends on n.

Next,

$$P\{\xi_0>x\}=\sum_{k=1}^{\infty}P(\xi_0>x\,|\,S_1=kr)P(S_1=kr)$$
$$\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}krP\{X_0>x\}P(S_1=kr)=P(X_0>x)\times\frac{r}{\varepsilon}.$$

Let $x_r = x_{r(n)}$ satisfy $(r/\varepsilon)P(X_0 > x) = p_0$. Then the above inequality implies that for n large enough Lemma 2.3 holds for $x \geqslant x_r$.

In order to evaluate the terms of (2.10), we need the following lemma.

Lemma 2.4. *Put $i = lr + m$, $0 \leqslant l < k$, $0 \leqslant m \leqslant r-1$. Then the probability density of $X'_i\ g_i(x)$ is*

$$g_i(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } i = lr,\ 0 \leqslant l < k, \\ f(x)(1 + \mathrm{O}((\frac{A\rho'}{1-A\rho'}))) & \text{if } i = lr+m,\ 0 \leqslant l \leqslant k-1,\ 0 < m \leqslant r-1, \end{cases} \tag{2.11}$$

where $f(x)$ is the density of X_0 and $|\mathrm{O}(x)| \leqslant |x|$. The joint probability density of (X'_i, X'_j), $0 \leqslant i < j \leqslant (k+t)r - 1$, denoted by $g_{ij}(x, y)$, is such that

$$g_{ij}(x, y) = g_i(x)g_j(y) \quad \text{if } i \leqslant (k-1)r \quad \text{and } j \geqslant kr,$$

and, in the complementary case for i and j,

$$g_{ij}(x, y) \leqslant 8f(x)f^{j-i}(x, y) \leqslant \begin{cases} 8Mf(x)f(y) & \text{if } j - i \geqslant s, \\ 8f(x)h(y) & \text{if } 1 \leqslant j - i < s,\ s > 1. \end{cases} \tag{2.12}$$

Proof. See Section 3.

Proof of Lemma 2.3 (Conclusion). Combining (2.10)–(2.12) (and observing that the probability distribution of $(X'_{kr}, \ldots, X'_{(k+t)r-1})$ is the same as the distribution of $X_0, \ldots, X_{tr-1}$ given $Y_0 = tr$) we get

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= trP(X_0 > x)(1 + 2\mathrm{O}_1(A\rho')) + \mathrm{O}_2\left[8M\frac{(k+t)^2}{2}r^2P^2(X_0 > x)\right] \\ &\quad + \mathrm{O}_3\left[(k+t)rsP(X_0 > x)\int_x^\infty h(y)\,\mathrm{d}y\right] \end{aligned} \tag{2.13}$$

with $|\mathrm{O}_i(x)| \leqslant |x|$, $i = 1, 2, 3$.

From (2.9) and since $\varepsilon = \frac{1}{2}$ we obtain

$$\begin{aligned} P(A) - P(B) &= \sum_{t=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{N}(k, t)P\{Y_0 = kr\}P\{Y_1 = tr\} \\ &= 2rP(X_0 > x)\left[1 + 2\mathrm{O}_1(A\rho') + \mathrm{O}_3\left(2s\int_x^\infty h(y)\,\mathrm{d}y\right)\right] \\ &\quad + \mathrm{O}_2(80Mr^2P^2(X_0 > x)) \end{aligned} \tag{2.14}$$

and, using (2.11),

$$P(\xi_0 > x) = P(A^c) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{kr-1} P(X_l' > x) P(Y_0 = kr) \leqslant 2rP(X_0 > x)(1 + 2\mathrm{O}(A\rho^r)) \right)$$
$$\leqslant 4rP(X_0 > x). \tag{2.15}$$

Combining (2.3), (2.14) and (2.15) we get (2.8). □

Lemma 2.5. *Put* $H(x) = H(n, x) = \mathscr{M}(x)^{1/\mu} = \mathscr{M}(x)^{1/2r}$. *Then, for* $n > \mu$,

$$\max_x |\mathscr{M}(x)^{n(1/\mu - \delta) - 1} - H^n(x)| \leqslant \delta\mu + \frac{\mu}{n} \tag{2.16}$$

and

$$\max_x |\mathscr{M}(x)^{n(1/\mu - \delta) + 1} - H^n(x)| \leqslant \delta\mu + \frac{\mu}{n}. \tag{2.17}$$

Proof. Put $Z = H(x)^n$. Then, for $0 < \delta < 1/\mu - 1/n$, we have

$$|\mathscr{M}(x)^{n(1/\mu - \delta) - 1} - H(x)^n| = |Z^{1-\gamma} - Z| = Z^{1-\gamma} - Z, \quad \gamma = \mu\left(\delta + \frac{1}{n}\right) < 1$$

and (2.16) follows by maximising $Z^{1-\gamma} - Z$ subject to $0 \leqslant Z \leqslant 1$. The proof of (2.17) is completely similar. □

The following lemmas are easy applications of Taylor's formula.

Lemma 2.6. *For* $0 \leqslant v \leqslant \frac{1}{2}$ *and* $0 < a < 1$ *we have*

$$1 - av + 2a(a-1)v^2 \leqslant (1-v)^a \leqslant 1 - av. \tag{2.18}$$

Lemma 2.7. *For any fixed* $\tau > 0$ *and* u, $|u| < \frac{1}{2}$ *we have, for* $n \geqslant 4\tau$,

$$\left(1 - \frac{\tau}{n}(1+u)\right)^n = \left(1 - \frac{\tau}{n}\right)^n + \mathrm{O}(2\tau e^{-\tau/2})u, \quad |\mathrm{O}(x)| \leqslant |x|. \tag{2.19}$$

Proof of Theorem 1.3. Let $\tau > 0$ be fixed and $u_n = u_n(\tau)$ be defined by $P(X_0 > u_n) = \tau/n$, $n > \tau$.

Then, by Remark 2.1, for $n \geqslant n_0(\tau)$ large enough $u_n > x_r$ and since $rP(X_0 > u_n) \leqslant \alpha \log n_n^{\xi} \to 0$ as $n \to \infty$ we have $1 - \mathscr{M}(x) < \frac{1}{2}$, $x \geqslant u_n$. Thus, using (2.18) with $v = 1 - M(x)$ and $a = 1/2r$ we get

$$H(x) = 1 - P(X_0 > x)\left[1 + 2\mathrm{O}_1(A\rho^r) + \mathrm{O}_2\left(rP(X_0 > x) + \int_x^{\infty} h(y)\,\mathrm{d}y\right)\right], \quad x \geqslant u_n$$

with $|\mathrm{O}_1(x)| \leqslant |x|$ and $|\mathrm{O}_2(x)| \leqslant K|x|$, K universal constant.

Next, applying (2.19) with $u=(1-H(x))/P(X_0>x)-1$, we obtain that for $n\geqslant n_1(\tau)$ large enough

$$H^n(x)=P(X_0<x)^n+O(2\tau e^{-\tau/2})\left(2O_1(A\rho^r)+O_2\left(rP(X_0>x)+\int_x^\infty h(y)\,dy\right)\right),$$
$$x\geqslant u_n. \tag{2.20}$$

Combining (2.4), (2.15) and (2.16) we have

$$\begin{aligned}P\left\{\operatorname*{Max}_{0\leqslant k\leqslant[n(1/\mu-\delta)]-1}\xi_k<x\right\}&=\mathcal{H}(x)^{[n(1/\mu-\delta)]}(1+O(C_2P(\xi_0>x)))\\&\leqslant\mathcal{H}(x)^{n(1/\mu-\delta)-1}(1+C_2P(\xi_0>x))\\&\leqslant\left(H(x)^n+\mu\delta+\frac{\mu}{n}\right)(1+4C_2rP(X_0>x))\end{aligned}$$

and similarly, using (2.17),

$$P\left\{\operatorname*{Max}_{0\leqslant k\leqslant[n(1/\mu+\delta)]}\xi_k<x\right\}\geqslant\left(H(x)^n-\mu\delta-\frac{\mu}{n}\right)(1-4C_2rP(X_0>x)). \tag{2.22}$$

Observe that, for $x\geqslant u_n$,

$$P(X_0<x)^n\geqslant\left(1-\frac{\tau}{n}\right)^n\simeq e^{-\tau},\quad n\to\infty \tag{2.23}$$

and, since $1+u\leqslant 1/(1-u)\leqslant 1+2u$, $0<u<\frac{1}{2}$, for n large enough,

$$\begin{aligned}P(X_0<x)^n&=P(X_0<x)^{n+1}(1-P(X_0>x))^{-1}\\&=P(X_0<x)^{n+1}\left(1+2O\left(\frac{\tau}{n}\right)\right),\quad |O(x)|\leqslant|x|.\end{aligned}\tag{2.24}$$

Let $r(n)=\alpha\log n$ with $\alpha=\frac{1}{2}1/|\log\rho|$. Then, in (2.20) we have $\rho^r=n^{-1/2}$. Let

$$\delta=\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon^3}{\alpha}\frac{\log n}{n}\right)^{1/2}.$$

Then the right-hand terms in (2.5) and (2.6) are $O(n^{-1/2})$. We now evaluate Δ_n of (1.14), by combining (2.1), (2.2), (2.4)–(2.6) and (2.20)–(2.24).

In (2.21) and (2.22) we have

$$\mu\delta=\left(\frac{\log n}{2}\right)^{3/2}\left(\frac{\varepsilon}{|\log\rho|n}\right)^{1/2}\quad\text{and}\quad\frac{\mu}{n}=o(\mu\delta),\quad n\to\infty.$$

Next, the contribution of the term $\int_x^\infty h(y)\,dy$ in (2.20) is $\int_{u_n}^\infty h(y)\,dy$. If the limit in (1.15) is strictly positive, then, since by (1.11) $\eta\int_x^\infty g(y)\,dy\leqslant\int_x^\infty f(y)\,dy\leqslant M\int_x^\infty g(y)\,dy$, we have $0<\limsup_{n\to\infty}(\int_{u_n}^\infty h(y)\,dy)(\mu\delta)^{-1}\leqslant\infty$.

If the limit is zero, then $\int_{u_n}^\infty h(y)\,dy=o(\mu\delta)$, $n\to\infty$.

Since the other terms are all $o(\mu\delta)$, $n\to\infty$, either $\delta_n = O(\int_{u_n}^{\infty} h(y)\,dy)$ or $\lim_{n\to\infty} \delta_n/\mu\delta = 1$. In the second case, since ε is arbitrary, we get (1.16b). The fact that n_0 depends on β (through ε) may be seen in particular from (2.1). □

3. Proofs of Theorem 1.2 and Lemma 2.4

3.1. *Proof of Theorem 1.2*

For any $r \geqslant 1$ and y put

$$m^{(r)}(y) = \inf_x f^r(x,y) \quad \text{and} \quad M^{(r)}(y) = \max_x f^r(x,y). \tag{3.1}$$

Formula (1.10) then implies that $\{m^r(y)\}$ and $\{M^r(y)\}$ are, respectively, increasing and decreasing. Then, since for any $y m^r(y) \leqslant M^r(y)$ we deduce that

$$m^i(y) \leqslant M^j(y), \quad i,j \geqslant 1, \quad y \in \mathbb{R}.$$

For any fixed x and y, let $\psi_{x,y}(u) := f^s(x,u) - f^s(y,u)$, $u \in \mathbb{R}$, and put

$$S_{xy}^+ = \{u;\ \psi_{xy}(u) \geqslant 0\} \quad \text{and} \quad S_{xy}^- = \{u;\ \psi_{xy}(u) < 0\}.$$

We then have

$$0 \leqslant \int_{S_{xy}^+} \psi_{xy}(u)\,du = 1 - \int_{S_{xy}^-} f^s(x,u)\,du - \int_{S_{xy}^+} f^s(y,u)\,du,$$

which combined with the first inequality in (1.13) provides

$$0 \leqslant \int_{S_{xy}^+} \psi_{xy}(u)\,du \leqslant 1 - \eta \int g(u)\,du = 1 - \eta. \tag{3.2}$$

Next, $0 \leqslant M^s(u) - m^s(u) \leqslant M^s(u) \leqslant Mg(u)$ and for any $k \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
M^{(k+1)s}(u) - m^{(k+1)s}(u) &= \sup_{x,y} [f^{(k+1)s}(x,u) - f^{(k+1)s}(y,u)] \\
&= \sup_{x,y} \left[\int f^{ks}(z,u)(f^s(x,z) - f^s(y,z))\,dz \right] \\
&= \sup_{x,y} \left[\int_{S_{xy}^+} f^{ks}(z,u)\psi_{x,y}(z)\,dz + \int_{S_{xy}^-} f^{ks}(z,u)\psi_{x,y}(z)\,dz \right] \\
&\leqslant \sup_{x,y} \left(M^{ks}(u) \int_{S_{xy}^+} \psi_{x,y}(z)\,dz + m^{ks}(u) \int_{S_{xy}^-} \psi_{x,y}(z)\,dz \right)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

since $\psi_{xy} \geqslant 0$ on S_{xy}^+ and $\psi_{xy} < 0$ on S_{xy}^-.

Observe that $\int_{S_{xy}^+} \psi(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{S_{xy}^-} \psi(z)\,\mathrm{d}z$ which combined with (3.3) provides

$$M^{(k+1)s}(u) - m^{(k+1)s}(u) \leqslant (M^{ks}(u) - m^{ks}(u)) \sup_{x,y} \int_{S_{xy}^+} \psi_{xy}(z)\,\mathrm{d}z. \tag{3.4}$$

Thus, using (3.2) with $\lambda = 1-\eta$, we obtain

$$M^{ks}(u) - m^{ks}(u) \leqslant \lambda^{k-1} \times Mg(u), \quad k \geqslant 1, \ u \in \mathbb{R}.$$

If $1 \leqslant i \leqslant s-1$, we have

$$\begin{aligned} M^{ks+i}(u) - m^{ks+i}(u) &= \sup_{x,y} (f^{ks+i}(x,u) - f^{ks+i}(y,u)) \\ &\leqslant \int f^i(z,u)(M^{ks}(z) - m^{ks}(z))\,\mathrm{d}z \\ &\leqslant M\lambda^{k-1} \int f^i(z,u) g(z)\,\mathrm{d}z \leqslant M\lambda^{k-1} \int f^i(z,u) \frac{f^s(x,z)}{\eta}\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{M}{\eta} \lambda^{k-1} f^{(i+s)}(x,u) \leqslant \frac{M^2}{\eta} \lambda^{k-1} g(u). \end{aligned}$$

Thus, for any $n \geqslant s$, we have

$$M^n(u) - m^n(u) \leqslant C\lambda^{[n/s]} g(u), \quad C = \frac{M^2}{\eta\lambda}. \tag{3.5}$$

Next

$$m^n(u) \leqslant f^n(x,u) \leqslant M^n(u), \quad n \geqslant 1, \ x, u \in \mathbb{R}, \tag{3.6}$$

and since $m^n(u)$ is increasing and $M^n(u)$ decreasing, these sequences have a common limit, $f(u)$, which coincides, for any x, with $\lim_{n\to\infty} f^n(x,u)$. It is clear that $f(u) \geqslant 0$, $\int f(u)\,\mathrm{d}u = 1$ and $\eta g(u) \leqslant f(u) \leqslant Mg(u)$. Moreover, from (3.6) and (3.5) we have, for $n \geqslant s$,

$$\begin{aligned} |f^n(x,y) - f(y)| &= |f^n(x,y) - m^n(y) + m^n(y) - f(y)| \\ &\leqslant f^n(x,y) - m^n(y) + f(y) - m^n(y) \\ &\leqslant 2(M^n(y) - m^n(y)) \leqslant 2C\lambda^{n/s-1} g(y), \quad x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Since $g(u) \leqslant f(u)/\eta$, we obtain (1.14). $\square$

Proof of Lemma 2.4. Let $i = lr$, $0 \leqslant l < k$ and denote by $g(z_0, z_r, \ldots, z_{lr})$ the joint density of $X'_0, X'_r, \ldots, X'_{lr}$. We have

$$g(z_0, z_r, \ldots, z_{lr}) = f(z_0) \frac{f^r(z_0, z_r) - \varepsilon f(z_r)}{1-\varepsilon} \cdots \frac{f(z_{(l-1)r}, z_{lr}) - \varepsilon f(z_{lr})}{1-\varepsilon}$$

and thus, the density of X'_{lr} evaluated at x is

$$\int \cdots \int g(z_0, \ldots, z_{(l-1)r}, x)\, dz_0 \cdots dz_{(l-1)r} = f(x)$$

by a recurrence over l.

Let $i = lr + m$, $0 \leqslant l < k-1$, $0 < m \leqslant r-1$. Then, by the classical conditional density formula, the density $g_i(x)$ of X'_i, evaluated at x, is

$$g_i(x) = \iint f(z_{lr}) f^m(z_{lr}, x) f^{r-m}(x, z_{(l+1)r}) \times (f(z_{lr}) f^r(z_{lr}, z_{(l+1)r}))^{-1}$$

$$\times f(z_{lr}) \frac{f^r(z_{lr}, z_{(l+1)r}) - \varepsilon f(z_{(l+1)r})}{1-\varepsilon} dz_l\, dz_{(l+1)r}$$

$$= \iint f(z_{lr}) f^m(z_{lr}, x) f^{r-m}(x, z_{(l+1)r})$$

$$\times \left(1 + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \frac{f^r(z_{lr}, z_{(l+1)r}) - f(z_{lr})}{f^r(z_{lr}, z_{(l+1)r})}\right) dz_{lr}\, dz_{(l+1)r}$$

$$= f(x)\left(1 + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} O\left(\frac{A\rho^r}{(1-Z\rho^r)}\right)\right), \quad |O(x)| \leqslant |x|,$$

since, by (1.14),

$$\left|\frac{f^r(x,y) - f(y)}{f^r(x,y)}\right| \leqslant \frac{A\rho^r}{1 - A\rho^r}.$$

The case $i = (k-1)r + m$, $0 < m \leqslant r-1$ is similar and since $\varepsilon = \frac{1}{2}$ we get (2.11).

The first equality in (2.12) is straightforward by the construction of $\{X_n\}$.

Next, if $i = lr + m$, $j = l'r + m'$, $0 \leqslant i < j \leqslant (k-1)r$, we obtain in the same way

$$g_{ij}(x,y) = f(x) f^{j-i}(x,y) \left(1 + O\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \frac{A\rho^r}{1-A\rho^r}\right)\right)^2$$

$$\times \left(1 + O'\left(\frac{\eta}{1-\eta} \frac{A\rho^{(l'-l)r}}{1 - A\rho(l-l')r}\right)\right),$$

where $|O(x)| \leqslant |x|$, $|O'(x)| \leqslant x$ and $\eta = 1 - (1-\varepsilon)^{l'-l}$.

Thus we deduce the first inequality in (2.12). The second inequality follows from the fact that (1.15) implies

$$f^k(x,y) \leqslant h(y), \quad x \in \mathbb{R}, \; y \geqslant y_0, \; k \geqslant 1.$$

For more details see Kiki (1994). □

Acknowledgement

We wish to thank Professors T. Hsing and H. Rootzén for the careful examination of the manuscript, and for providing many valuable comments and suggestions. In particular, we are indebted to Professor Rootzén one of whose remarks lead to a sharper bound in (1.16b).

References

Asmussen, S. (1987). *Applied Probability and Queues.* Wiley, New York.

Galambos, J. (1987). *The Asymptotic Theory of extreme order statistics*, 2nd ed. Krieger, New York.

Haiman, G. (1981). Valeurs extrêmales de suites de variables aléatoires m-dépendantes. *Ann. Inst. H Poincaré* **XVII**, 309–330.

Jakubowski, A. (1993). An asymptotic independent representation in limit theorems for maxima of nonstationary random sequences. *Ann. Probab.* **21**, 819–830.

Kiki, M. (1994). Thèse de Doctorat.

O'Brien, G.L. (1987). Extreme values for stationary and Markov sequences. *Ann. Probab.* **15**, 281–291.

Rootzén, H. (1988). Maxima and exceedances of stationary Markov chains. *Adv. in Appl. Probab.* **20**, 371–390.

Serfozo, R. (1980). High level exceedances of regenerative and semi stationary processes. *J. Appl. Probab.* **17**, 423–431.

Smith, R.L. (1992). The extremal index for a Markov chain. *J. Appl. Probab.* **29**, 37–45.