

**UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE**

**THESE DE DOCTORAT**

*Présentée au :*

**LABORATOIRE DE MECANIQUE DE LILLE**

**(FIABILITE DES STRUCTURES)**

**Spécialité : Mécanique**

*Par :*

**Abdelkader HADDI**

**Ingénieur USTO**

---

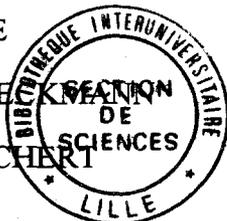
**FORMULATION TRIDIMENSIONNELLE D'UN CRITERE  
DE PROPAGATION DE FISSURE DANS LES MATERIAUX  
INHOMOGENES**

**THREE-DIMENSIONAL FORMULATION OF A CRACK  
PROPAGATION CRITERION IN INHOMOGENEOUS MATERIALS**

---

Soutenue le 21 Mars 1995 devant la commission d'examen composée de :

- |                    |     |              |                          |
|--------------------|-----|--------------|--------------------------|
| <b>Président</b>   | M.  | G. MESMACQUE | I.U.T., Lille            |
| <b>Rapporteurs</b> | MM. | G. A. MAUGIN | Université PARIS VI      |
|                    |     | K. C. LE     | Ruhr-Universität, Bochum |
| <b>Examineurs</b>  | MM. | C. BROEKE    | Ruhr-Universität, Bochum |
|                    |     | D. WEICHERT  | E.U.D.I.L., Lille        |



*A mes grand-parents,  
à mes parents,  
à mes soeurs et frères,  
à ma famille,  
et à mes amis (es).*

## REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé au sein du Laboratoire de Mécanique de Lille "Groupe Fiabilité des Structures" (Ecole Universitaire d'Ingénieurs de Lille), à l'Université des Sciences et Technologies de Lille (U.S.T.L.).

J'adresse mes remerciements à mon directeur de recherche Monsieur D. Weichert, Professeur à l'Ecole Universitaire d'Ingénieurs de Lille, pour l'aide qu'il m'a accordée au cours de ces années de recherche ainsi que pour les conseils et remarques précieuses.

Je remercie très sincèrement Monsieur G. MESMACQUE, Professeur à I.U.T de Lille, d'avoir accepté de présider la commission d'examen.

Je remercie vivement Monsieur G. MAUGIN, Professeur à l'Université Paris VI, et Monsieur K. C. LE, Docteur à l'Université de Bochum (Allemagne), pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'être rapporteurs de ma thèse et dont les avis et conseils, ont contribué à son amélioration.

Je remercie Monsieur C. Brockmann, Docteur à l'Université de Bochum (Allemagne), pour les précieuses remarques et pour avoir accepté d'examiner mon travail.

Je suis reconnaissant à Messieurs O. M. Teyeb, K. Meroum, A. Hamadouche, A. Groß-Weege et, plus particulièrement, A. Hachemi pour le soutien qu'ils n'ont cessé de m'apporter.

Mes remerciements vont à mes collègues du département Mécanique de l'EUDIL.

Enfin, que tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin dans l'aboutissement de ce travail trouvent ici ma sincère reconnaissance.

**ABSTRACT** – This study concerns the crack propagation in inhomogeneous materials to 3-D configuration. An analytical expression of the J-integral in inhomogeneous materials is proposed and put in a form suitable for numerical analysis of an arbitrary 3-D crack configuration.

In a two-dimensional study (2-D) based on works of RICE, WEICHERT and SCHULZ the J-integral for inhomogeneous materials have been developed where the strain energy density depends on the spatial coordinate.

The extension of the J-integral of 2-D to 3-D is developed based, on the one hand on the principle of virtual work and the ESHELBY'S energy moment tensor and on the other hand on an analysis of the theory of defects account for the notion of material force developed by MAUGIN.

The J-integral and stress intensity factors of cracked bodies are calculated by use of the finite element method and the virtual crack extension technique. This crack extension is analogous to that of a crack advance on a small distance.

Since linear elastic material is considered, a square root stress singularity exists along the crack front. To deal with this, we use eight and twenty noded, isoparametric, quarter-point elements. To illustrate the developed method, different numerical examples are presented for a solid with an edge crack subjected to quasi-static loading. It is shown that, in 2-D and 3-D, the difference of Young's modulus of the inclusion and the material as well as the distance between the crack front and the inclusion has a strong influence on the stress intensity factors.

Results obtained by simplifying the 3-D model to a 2-D model, are in good agreement with those obtained by a general 2-D model. Moreover, the influence of the shape of the crack front on the J-integral is clearly illustrated.

**Key words** : J-integral, three-dimensional crack, elasticity, defects, material force, inhomogeneities.

## **SOMMAIRE**

## SOMMAIRE

### CHAPITRE 1

<b>PROBLEMES TRIDIMENSIONNELS ET MILIEUX INHOMOGENES</b>	4
1.1. INTRODUCTION GENERALE	4
1.2. HISTORIQUE	8
1.2.1. Problèmes tridimensionnels	8
1.2.2. Milieux inhomogènes	12
1.3. CONTENU DU RAPPORT	14

### CHAPITRE 2

<b>NOTIONS SUR LA RUPTURE</b>	15
2.1 INTRODUCTION	15
2.2. NOTIONS SUR LES MODES DE RUPTURE	16
2.3. CRITERES MACROSCOPIQUES DE LA RUPTURE	17
2.3.1 Facteurs d'intensité de contraintes	18
2.3.2. Taux de restitution d'énergie	19
2.4. INTEGRALE J	21
2.5. PROBLEMES TRIDIMENSIONNELS	24
2.5.1. Etat de contraintes 3-D	24
2.5.2. Méthode analytique	26
2.5.3. Méthodes numériques	26
2.5.3.1. Méthodes énergétiques	27
2.5.3.2. Méthode de la dérivé de la rigidité	27
2.5.3.3. Méthode de l'intégrale J	30
2.5.3.4. Méthode des éléments finis	30

## **CHAPITRE 3**

<b>THEORIE ELASTIQUE DES MATERIAUX INHOMOGENES</b>	<b>32</b>
3.1. INTRODUCTION	32
3.2. ESPACE PHYSIQUE ET MATERIEL	33
3.3. NOTION DE FORCE MATERIELLE	34
3.4. FORCE SUR UN DEFAUT	36
3.5. LIEN ENTRE LA FORCE SUR UN DEFAUT ET L'INTEGRALE DE CONTOUR	37
3.6. INTEGRALE J EN MULTI-PHASE	40

## **CHAPITRE 4**

<b>EXPRESSION ANALYTIQUE DE L'INTEGRALE J DE VOLUME EN MILIEUX INHOMOGENES</b>	<b>43</b>
4.1. INTRODUCTION	43
4.2. INTEGRALE J DE CONTOUR	44
4.3. INTEGRALE J DE SURFACE	45
4.4. INTEGRALE J DE VOLUME	48
4.5. INTEGRALE DE VOLUME DANS LES MILIEUX INHOMOGENES	53
4.5.1. Introduction	53
4.5.2. Formulation analytique	54

## **CHAPITRE 5**

<b>FORMULATION PAR LA METHODE DES ELEMENT FINIS</b>	<b>68</b>
5.1. INTRODUCTION	68
5.2. PRINCIPE	69
5.3. EVALUATION DE L'INTEGRALE J	70

5.3.1. Intégrale de surface	70
5.3.2. Intégration volumique	74
5.3.2.1. Intégrale de volume	74
5.3.2.2. Intégrale de surface	79
<b>CHAPITRE 6</b>	
<b>EVALUATION DES RESULTATS NUMERIQUES</b>	<b>83</b>
6.1. INTRODUCTION	83
6.2. EVALUATION DE L'INTEGRALE J	84
6.3. TYPE D'ELEMENTS UTILISES	84
6.4. QUELQUES EXEMPLES NUMERIQUES	86
6.4.1. Influence de l'inclusion sur le front de fissure	86
6.4.1.1. Fissure en présence d'une inclusion en 2-D	86
6.4.1.2. Fissure en présence d'une inclusion en 3-D	91
6.4.2. Evaluation de l'intégrale J de volume en milieux hétérogènes	93
6.4.3. Influence de la forme du front de fissure	98
6.4.4. Comparaison de J en 2-D et en 3-D simplifiée en 2-D	100
<b>CONCLUSION ET PERSPECTIVES</b>	<b>102</b>
<b>REFERENCES</b>	<b>104</b>

# **CHAPITRE 1**

## **PROBLEMES TRIDIMENSIONNELS ET MILIEUX INHOMOGENES**

## **CHAPITRE 1**

### **PROBLEMES TRIDIMENSIONNELS ET MILIEUX INHOMOGENES**

#### **1.1. INTRODUCTION GENERALE**

L'évolution actuelle de la technologie nécessite la réalisation des projets industriels complexes, coûteux et soumis à des contraintes de sécurité sévères. Ces projets industriels (l'aérospatial, l'aéronautique, le nucléaire, ...) utilisent de nouveaux matériaux tels que les céramiques, métaux durs, polymères et les composites.

L'apparition de fissures dans ces matériaux peut conduire à la défaillance de ceux-ci, ce qui amène les concepteurs à utiliser des méthodes qui prennent en compte l'existence de fissures dans le calcul des structures mécaniques. Les fissures naissent sur des défauts métallurgiques (les inclusions, les vides, les micro-fissures, ...) ou parfois mécaniques (usinage, soudage, ...) et se propagent lorsque le chargement et l'environnement créent des conditions favorables.

Les méthodes bidimensionnelles, plus simples à étudier, donnent des résultats approximatives sur le comportement des matériaux. Les méthodes tridimensionnelles, qui se rapprochent de la réalité, concernent le cas des matériaux homogènes.

En vue de la formulation d'un critère de rupture des problèmes de fissures tridimensionnelles d'un matériau de forte hétérogénéité, développé au chapitre 4, une étape essentielle est l'étude des problèmes tridimensionnels et homogènes (DELORENZI ([27] (1982), [28] (1985)), DELORENZI & SHIH [29] (1983), BANKS-SILLS & SHERMAN ([4] (1984), [5] (1986), [6] (1989), [7] (1991), [8] (1992)), MURAKAMI & SATO [82] (1983), LI & al. [64] (1985) et CHONG RHEE & SALAMA [20] (1987)), donnée au chapitre 2, ainsi que le cas hétérogène en bidimensionnel (WEN-HWA CHEN & TA-CHYAN LIN [111] (1983), MÜLER ([79] (1989), [80] (1990)), MÜLER & SCHMAUDER [81] (1993), BÜLENT DOYUM & GÜRSOY [16] (1991) et LI & CHUDNOVSKY [65] (1993)).

Avant de commencer ces deux études, un résumé des différents travaux réalisés permettra au lecteur d'avoir un aperçu historique du développement qu'a suivi la théorie des fissures.

GRIFFITH [43] (1920), a été le premier à s'y intéressé au problème plan de fissure, il considérait une plaque infinie, soumise à des contraintes uniformes à l'infinie et qui comportait une fissure de forme elliptique. Il ne s'intéressait pas aux champs de déplacements et de contraintes mais plutôt au bilan énergétique du solide. Il parvenait à formuler le principe d'instabilité d'une fissure du point de vue énergétique, principe connu aujourd'hui sous le nom de critère d'instabilité de Griffith.

Plus tard, WESTERGAARD [112] (1939) publia une méthode de résolution de certains problèmes plans de fissures en milieu infini, admettant des conditions de symétrie de la géométrie et du chargement. Il montrait que ces problèmes pourraient se ramener à trouver une fonction (fonction de Westergaard), qui permet de déterminer les champs de déplacements et de contraintes au voisinage de la singularité.

Les problèmes de fissures tridimensionnelles sont beaucoup plus compliqués. Au début, des fissures planes de géométrie simple sont considérées, SNEDDON [102] (1946) a étudié le problème d'une fissure circulaire immergée en milieu infini soumise à une traction uniforme. A l'aide des équations de l'élasticité, il parvenait à isoler dans la solution les premiers termes du développement de l'expression des contraintes au voisinage du front de fissure.

L'idée d'un champ singulier de contraintes était déjà sous-jacente, et elle n'attendait plus qu'Irwin pour être précisée. IRWIN [53] (1956), analysa les résultats de Westergaard et puis Sneddon montrait que pour tout autre problème plan plus général, les formes du champ singulier de contraintes et de déplacements au voisinage du front de fissure étaient les mêmes, et qu'en plus ces champs étaient caractérisés par des paramètres appelés facteurs d'intensité de contraintes.

C'est l'étude de problèmes de rupture (fusées, avion ...) qui a conduit Irwin à formuler les bases de la théorie dite de la mécanique élastique linéaire de la rupture (LEFM) et à donner des solutions pratiques. La conclusion fut que l'application industrielle de la mécanique de la rupture était possible.

IRWIN [54] (1957) et OROWAN [87] (1950), ont montré que le champ singulier avec des contraintes infinies au front de fissure n'était pas physiquement acceptable et qu'il fallait prévoir une correction pour tenir compte de la déformation plastique au voisinage du front de fissure. Il s'agissait de résoudre un problème élastoplastique qui est un problème difficile lorsque la zone plastique est étendue. En rupture fragile, la zone plastique est confinée au front de fissure, Irwin faisait des corrections qui revenaient à travailler en élasticité en considérant que la longueur de la fissure était légèrement augmentée.

Plus tard, une autre théorie élastique a été proposée par BARENBLATT [10] (1962) qui a fait intervenir les forces de cohésions atomiques s'exerçant sur les lèvres de la fissure pour annuler la singularité des contraintes. Cette théorie est plus satisfaisante puisque les forces de cohésion permettant de compenser les contraintes infinies, dès lors les champs élastiques sont finis dans tout le solide.

WILLIAMS [113] (1957) a étudié, indépendamment des travaux d'Irwin, la singularité de contraintes ; il déduisait que pour une fissure, les déplacements étaient de l'ordre de  $\sqrt{r}$  alors que les contraintes étaient singulières comme  $1/\sqrt{r}$ , où  $r$  est la distance du point considéré à la pointe de la fissure.

WELLS [110] (1963) a donné un véritable coup d'envoi à la mécanique élastoplastique des ruptures en introduisant le concept d'écartement critique de fissure. Par la suite SIH & LIEBOWITZ [99] (1968) ont donné une démonstration plus générale à l'aide

des fonctions analytiques de Muskhelishvili. Ils ont isolé les premiers termes des développements du champ de déplacements et de contraintes et montraient que la forme des champs mécaniques indiqués par Irwin était générale.

Une autre façon de caractériser la singularité du champ de contraintes au voisinage de la pointe des fissures est l'étude de certaines intégrales de contour (RICE [93] (1968) et BUI [15] (1978)) que l'on peut déduire de la loi de conservation de l'énergie.

Les équations de bases d'un corps élastique avec un défaut, incluant la condition d'équilibre au fond du défaut, peuvent être déduites par le principe variationnel de l'énergie totale (LE [59], [60] (1989), LE & al. [61] (1989)).

La dernière décennie a été consacrée à l'amélioration des critères déjà existants. Deux problèmes se posent pour l'étude de corps fissurés tridimensionnels :

- calculer le champ de contraintes et de déplacements au voisinage du front de fissure,
- déterminer un critère de rupture permettant de prévoir le chargement critique, au point du front de fissure où s'initiera l'instabilité et la direction que prendra la propagation.

Dans cette étude, nous nous placerons dans le cadre de la rupture fragile et nous nous intéresserons uniquement à la détermination d'un critère de rupture dans le cas d'un matériau hétérogène.

En bidimensionnel, beaucoup de méthodes analytiques et numériques ont été mises au point en vue de calculer les facteurs d'intensité de contraintes. Il y a aussi la méthode des éléments finis qui, en utilisant un maillage assez serré au voisinage du front de fissure, permet de calculer le champ de contraintes et de déplacements tout en déduisant les critères de rupture (facteurs d'intensité de contraintes  $K$ , intégrale  $J$  ou taux de restitution d'énergie libre  $G$ ). Pour augmenter la précision du résultat, il existe des éléments spéciaux qui incluent la singularité d'ordre  $1/2$  du champ de contraintes au voisinage du front de fissure. Ces éléments singuliers ont été proposés par PARKS [90] (1974) et HELLEN [48] (1975).

La généralisation des résultats bidimensionnels aux cas tridimensionnels, sans aucune condition sur la direction d'extension de la fissure, est donnée par LE & al. [61] (1989) et STUMPF & LE [104] (1990). Dans ce cas, la méthode des éléments finis reste toujours applicable, mais avec un grand nombre d'éléments entourant le front de fissure. La troisième

dimension multiplie ainsi rapidement les degrés de liberté et rend le temps de calcul extrêmement long.

La résolution des problèmes de fissure dans un milieu à trois dimensions est basée sur deux méthodes les plus utilisées actuellement et qui sont, la méthode d'extension de fissure virtuelle (PARKS [90] (1974) et HELLEN [48] (1975)) et la méthode de l'intégrale J introduite par RICE [93] (1968). Ces méthodes sont développées par plusieurs auteurs pour différents problèmes (DELORENZI [27] (1982), MURAKAMI & SATO [82] (1983), LI & al. [64] (1985), NAKAMURA & PARKS [85] (1989) et BANKS-SILLS & SHERMAN [7] (1991)).

## 1.2. HISTORIQUE

### 1.2.1. Problèmes tridimensionnels :

Depuis les travaux d'ESHELBY [38] (1975) et Rice [93] (1968), de nombreuses contributions ont apparu concernant les intégrales indépendantes de contour et leurs applications à la mécanique de rupture. RICE [93] (1968) a dérivé l'intégrale J comme étant le taux d'énergie libre pour une fissure et une entaille quasi-statique. ESHELBY [38] (1975) a donné une formule pour le calcul de la force sur un défaut du côté d'un état physique du solide. Ces défauts, repartis dans le matériau, sont capables de changer leur position sous un chargement quelconque. Dans un tel calcul, ESHELBY [38] (1975) utilise le tenseur moment d'énergie analogue à la théorie classique des champs et prouve que la composante normale de l'intégrale le long d'une surface fermée est la force sur les défauts ou inhomogénéités.

Quelques intégrales de contours indépendants ( $J_K$ ,  $L_K$ ,  $M$ ) présenté par KNOWLES & STERNBERG [56] (1972) sont liées au taux d'énergie libre associé soit à la rotation du défaut, soit à son expansion (ou coalescence) (BUDIANSKY & RICE [14] (1973)).

La relation entre le taux d'énergie libre, expression similaire à  $M$ , et l'intégrale  $J_1$  est donnée par FREUND [40] (1978) alors que, la relation entre le taux d'énergie libre de rotation  $L_K$  et l'intégrale  $J_2$  est établie par HERRMANN & HERRMANN [49] (1981). Les intégrales mentionnées sont restreintes aux situations quasi-statiques.

Plusieurs publications existent concernant l'application de l'intégrale  $J$  aux problèmes plus généraux. BLACKBURN [12] (1972) a présenté l'intégrale  $J^*$  comme une approche à l'analyse de la rupture après écoulement plastique et la compare avec d'autres méthodes. MIYAMOTO & KAGEYAMA [77] (1978) ont suggéré une autre intégrale et une nouvelle méthode pour l'évaluation de problèmes généraux d'élastoplasticité. SIEGELE [98] (1989) et GREBNER & HÖFLER [42] (1991) ont évalué l'intégrale  $J$  en utilisant le programme d'éléments finis ADINA pour les problèmes élastoplastiques.

Les études incluant les modèles matériels dépendant du temps ont suscités un intérêt particulier chez certains auteurs ; le problème variationnel associé à la rupture dynamique est présenté par LE & al. [61] (1989), ATLURI [3] (1982) considèrent des intégrales de contours indépendantes dans le cas des différents types de matériaux (élastiques, inélastiques). FREUND [39] (1972), NISHIOKA & ATLURI [86] (1983) et EISCHEN & HERRMANN [32] (1987) ont fait usage du concept des intégrales indépendantes de contour dans le cas de la mécanique de rupture dynamique. NISHIOKA & ATLURI [86] (1983), ont donné le sens physique des intégrales de contour indépendantes pour la propagation de fissure élasto-dynamique ainsi que la relation entre ces intégrales et les facteurs d'intensité de contraintes dépendant du temps. Ces différents travaux sont limités aux cas bidimensionnels.

Après les problèmes plans de la mécanique de rupture, les problèmes de fissures tridimensionnelles présentent beaucoup d'intérêt et font l'objet de plusieurs publications. Il existe des méthodes analytiques pour le calcul du champ de contraintes et de déplacements dans le cas d'un milieu infini. Par contre pour les corps fissurés de dimensions finies, il n'existe que la méthode numérique pour le calcul du facteur  $K$ , de l'intégrale  $J$  ou du taux de relaxation d'énergie (trois variables qui gouvernent le comportement des fissures) (BANKS-SILLS & SHERMAN [8] (1992)).

L'utilisation des facteurs d'intensité de contraintes pour l'étude de la fissuration tridimensionnelle peut présenter un intérêt dans certains cas particuliers, par contre l'approche globale semble plus appropriée pour cette étude.

Utilisant la théorie de la densité d'énergie de déformation, SIH & CHA [100] (1974) ont résolu le problème de la croissance d'une fissure elliptique. Une application de cette théorie permet à WEN-HWA CHEN & TA-CHYAN LIN [111] (1983), d'analyser le problème d'une fissure dans un disque en rotation. Ils déterminent les facteurs d'intensité de contraintes en mode mixte, en utilisant l'intégrale J dans le cas d'un matériau élastique et homogène.

L'application de la contrainte de cisaillement maximale permet à DE-CHANG TIAN & al. [26] (1982), de résoudre le problème de propagation de fissure sous contraintes combinées. Dans la même année, YASUFUMI & TOMOKASU [115] (1982) a analysé l'effet de la forme des fissures sur l'état de contraintes à l'aide de la méthode des éléments finis (MEF). CHONG & SALAMA [20] (1987), ont utilisé la MEF pour calculer les K en mode mixte d'une fissure provoquée par un joint de soudure.

L'intégrale J proposée par RICE [93] (1968), est utilisée pour caractériser la singularité du champ de contraintes au voisinage de la pointe des fissures. Cette intégrale est applicable à un corps subissant une déformation plastique au fond de fissure. RICE [93] (1968), a résumé le développement de certaines études analytiques, qui sont limitées pour la plus part aux modèles simples (contraintes planes, déformations planes ...).

L'intégrale J est devenue ces dernières années un des critères le plus utilisé pour caractériser l'initiation et la croissance de fissure. Il est important, pour les configurations à deux et trois dimensions, d'avoir accès à des techniques de calcul de J sous des conditions élastoplastiques. DELORENZI [27] (1982) et NAKAMURA & PARKS ([84] (1988), [85] (1989)) ont montré que l'expression du G se ramène à une expression générale à trois dimensions de l'intégrale J. LEVY & al. [63] (1971), présentent les résultats d'EF qui montrent que les contraintes tridimensionnelles à la pointe de la fissure coïncident avec la solution des contraintes planes, à une distance du front de fissure deux fois l'épaisseur d'une plaque mince. MASONORI [67] (1986) a montré, à l'aide de la méthode de translation des points nodales, que la distribution de J est presque uniforme le long du front de fissure due à la croissance d'une fissure stable dans le domaine élastoplastique. MACHIDA & al. [66] (1989), ont analysé des échantillons CCT (center cracked tension)

avec la MEF. Pour ce même type de problème, SCHMITT [95] (1986) a établi une comparaison des courbes J-R.

MURAKAMI [82] (1983), a développé une forme d'intégrale J en utilisant le tenseur moment d'énergie d'Eshelby pour n'importe quelle surface entourant la fissure. Le taux de relaxation d'énergie est calculé soit par la méthode de l'intégrale J soit par la méthode d'extension de fissure. Cette dernière méthode développée à partir de considérations d'éléments finis et de l'application de la méthode de la dérivée de la rigidité a été introduit par PARKS [90] (1974) et HELLEN [48] (1975) pour calculer le taux de restitution d'énergie dans le cas des matériaux élastiques et élastoplastiques. Ensuite la méthode d'extension de fissure a été reprise par DELORENZI [28] (1985) et BANKS-SILLS & SHERMAN ([6] (1989), [8] (1992)), pour des problèmes tridimensionnels.

DELORENZI [27] (1982) a généralisé la méthode de l'intégrale J aux configurations tridimensionnelles. Cette méthode est basée sur la mécanique des milieux continus et du principe d'extension de fissure virtuelle pour enfin aboutir à une forme plus générale de l'intégrale J. Le calcul peut être utilisé pour des géométries de fissures tridimensionnelles des matériaux élastiques et élastoplastiques, aussi bien pour des déformations planes et contraintes planes que pour des problèmes axisymétriques (HELLEN [48] (1975), DELORENZI [27] (1982) et BANKS-SILLS & SHERMAN [8] (1992)).

NAKAMURA & PARKS ([84] (1988), [85] (1989)), ont déterminé les facteurs d'intensité de contraintes en mode mixte à partir des intégrales de conservation basées sur l'analyse des EF. Utilisant des expressions dérivées du principe d'extension de fissure virtuelle, plusieurs applications sont étudié en utilisant le programme ADINA (LEVY & al. [63] (1971) et BANKS-SILLS & VOLPERT [9] (1991)).

La méthode de l'intégrale de surface est appliquée par LI & al. [64] (1985), au problème à deux et à trois dimensions. BANKS-SILLS & SHERMAN [8] (1992) et PARKS [90] (1974) montrent que la méthode d'intégrale de surface en deux dimensions est identique à la méthode de la dérivée de la rigidité lorsqu'elles sont exprimées pour des éléments quart-point isoparamétriques à 8 noeuds. Par ailleurs en tridimensionnel l'intégrale de volume et la méthode de dérivée de la rigidité sont identiques dans le cas des éléments quart-point

isoparamétrique à 20 noeuds. Les expressions précédentes seraient identiques si l'extension de fissure virtuelle choisie était la même pour les méthodes comparées, ces intégrales sont développées par LI & al. [64] (1985) et DELORENZI [27] (1982). La conservation de l'intégrale de surface en milieu homogène et hétérogène est examinée par XIANG & al. [114] (1991) pour une fissure délaminée.

### 1.2.2. Milieux inhomogènes :

La présence des différentes catégories de défauts telles que, les microfissures, les vides et les inclusions dans les matériaux hétérogènes, a souvent une influence sur la propagation de fissure.

Depuis que WILLIAMS [113] (1959) a étudié la distribution de contraintes dans deux demis plaques entreposées, plusieurs travaux concernant le problème de fissure à l'interface ont été publiés. Les travaux de ERDOGAN [37] (1963), RICE & SIH [92] (1965) et ENGLAND [33] (1965) ont montré que le champ de contraintes oscille fortement à proximité immédiate de la pointe de fissure, due à la singularité trouvée par WILLIAMS [113] (1959). Dans ces travaux, la forme de l'interface est supposée droite. D'autres auteurs ont proposé un nouveau modèle de fissure à l'interface parmi eux, COMNINOU [23] (1977) et COMNINOU & SCHMUESER [24] (1979) en introduisant des petites zones de contacts, ATKINSON [2] (1977), en introduisant un troisième matériau entre deux matériaux en contacts et SINCLAIR [101] (1985) en introduisant une fissure avec un angle d'ouverture fini. Le champ de contraintes au fond de fissure est fortement dépendant de la forme de la région à proximité de la fissure.

Plus tard, GAUTENSEN & DUNDURS [41] (1987) ont étudié le problème formulé par COMNINOU [23] (1977) et ont résolu le problème d'une fissure à l'interface dans un champ de tensions. HUTCHINSON & al. [50] (1987) ont examiné une fissure noyée dans un corps à une petite distance de l'interface. ERDOGAN [37] (1963), analyse plusieurs fissures à l'interface de deux matériaux.

Parallèlement aux problèmes d'interface, d'autres auteurs ont examiné l'influence des défauts sur la propagation de fissure. STEIF [103] (1987) a étudié l'influence entre le module

de l'inclusion et la matrice, en résolvant le problème d'une fissure semi-infinie à moitié propagée dans l'inclusion. BÜLENT DOYUM & GÜR SOY [16] (1991) ont analysé l'orientation d'une inclusion plate dans un milieu homogène, isotrope et linéaire élastique. Les facteurs d'intensité de contraintes sont présentés pour différentes inclusions et chargements. LI & CHUDNOVSKY [65] (1993) ont analysé la variation du taux d'énergie libre au fond de fissure pénétrée dans une inclusion élastique, ce taux varie avec le module de l'inclusion et la position du front de fissure avec la particule. MÜLLER ([79] (1989), [80] (1990)) et MÜLLER & SCHMAUDER [81] (1993) ont étudié l'interaction entre une fissure avec une particule circulaire de  $ZrO_2$ , le facteur d'intensité de contraintes est calculé pour différentes longueurs et distances de la fissure avec l'interface en utilisant les équations intégrales.

Il y a peu de publication concernant les problèmes de fissures dans les matériaux multi-phases en utilisant les intégrales de contours ; PARK & EARMME [89] (1986) ont montré que les intégrales J, L et M, proposées par KNOWLES & STERNBERG [56] (1972) et appliquées aux problèmes d'interface satisfassent la loi de conservation sous certaines conditions sur l'interface.

Récemment, une extension du vecteur d'intégrale J en un matériau hétérogène bidimensionnel est présentée par WEICHERT & SCHULZ [109] (1993), les résultats montrent l'indépendance de contour et le sens physique de l'intégrale J. Cette intégrale est considérée comme la projection suivant l'axe horizontal d'une force matérielle résultante de la dépendance explicite de l'énergie de déformations  $w$  par rapport aux coordonnées matérielles (ESHELBY [38] (1975), MAUGIN [69] (1993)).

La défaillance des structures, surtout en fatigue, est très souvent liée à l'influence des hétérogénéités des matériaux décrits précédemment (fissure en présence d'inclusion ou à l'interface). En plus les problèmes plans considèrent seulement l'effet de la dimension plane (longueur de fissure), cependant, les dimensions suivant la direction  $z$ , le long du front de fissure, peuvent jouer un rôle majeur et aussi nous renseignent sur le comportement d'une fissure de surface. Il fallait donc rechercher une méthode générale du comportement de fissure dans un matériau inhomogène.

L'objectif ultime des travaux présentés dans ce rapport est de contribuer à la formulation d'une théorie de propagation de fissure dans les matériaux hétérogènes à configuration tridimensionnelle soumis à un chargement statique. Le milieu continu est supposé élastique linéaire.

### 1.3. CONTENU DU RAPPORT :

Le **deuxième chapitre** de ce rapport est consacré à l'étude des solutions de problèmes de fissures en bidimensionnels ainsi qu'aux principales méthodes connues en tridimensionnels pour déterminer les facteurs d'intensité de contraintes : méthodes analytiques, semi-analytiques et les méthodes des éléments finis.

Dans le **troisième chapitre**, la théorie d'élasticité d'un milieu inhomogène est introduite à partir du tenseur moment d'énergie d'Eshelby et de la pseudo-quantité de mouvement qui a essentiellement la propriété de fournir une force matérielle équivalente à l'intégrale J. D'autre part, on donne une expression de l'intégrale J en multi-phase.

Le but du **quatrième chapitre** est de proposer une méthode de l'intégrale J en tridimensionnel appliquée au milieu hétérogène et basée sur l'analyse faite aux chapitres 2 et 3. On expose aussi les principales méthodes de l'intégrale J.

Le **cinquième chapitre** est consacré à la mise en oeuvre de la méthode des éléments finis. Les expressions des intégrales J proposées dans le chapitre 4 sont discrétisées en utilisant un formalisme tensoriel.

Des applications numériques concernant l'influence de l'inclusion sur le front de fissure et le calcul de l'intégrale J de contour, de surface et de volume en milieu hétérogène sont illustrées dans le **sixième chapitre**.

## **CHAPITRE 2**

### **NOTIONS SUR LA RUPTURE**

## **CHAPITRE 2**

### **NOTIONS SUR LA RUPTURE**

#### **2.1. INTRODUCTION :**

Après les problèmes plans de la mécanique de la rupture linéaire élastique, les problèmes de fissure tridimensionnels suscitent beaucoup d'intérêt et font l'objet de nombreuses contributions.

Comme seuls des problèmes simples se prêtent à des solutions exprimées algébriquement, il fallait donc approfondir les fondements théoriques et rechercher si les notions utilisées par la mécanique de la rupture avaient un sens pour les problèmes ne présentant pas de solutions analytiques et dans l'affirmative rechercher des méthodes de calcul pratiques, probablement numériques.

Dans ce chapitre, nous commençons dans un premier temps à faire un rappel sur les critères de rupture en 2-D avant d'aborder l'étude des problèmes 3-D.

## 2.2. NOTIONS SUR LES MODES DE RUPTURE :

Avant de procéder à l'analyse des contraintes d'un problème de fissure, il est utile de distinguer les trois modes de base de déplacement de surface de fissure, donnés par IRWIN [53] (1956) (Fig. 2.1). Pour cela, considérons un état initial dans lequel une fissure plane est soumise à un système de forces, supposons de plus que la propagation de cette fissure se fasse dans son plan.

En distingue trois modes de rupture :

- le mode I ou encore le mode d'ouverture, les surfaces de la fissure se déplacent perpendiculairement l'une à l'autre.
- le modes II ou glissement droit, les surfaces de la fissure se déplacent dans le même plan et dans une direction perpendiculaire au front de la fissure.
- le mode III ou glissement vis, les surfaces de la fissure se déplacent dans le même plan et dans une direction parallèle au front de la fissure.

Les ruptures dangereuses sont généralement des ruptures de mode I, c'est la raison pour laquelle la plupart des études de la mécanique de rupture ont porté sur ce mode.

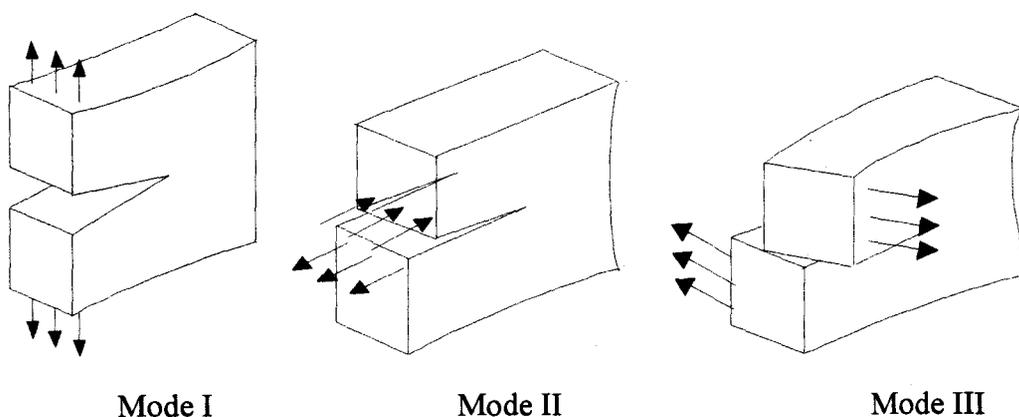


Fig. 2.1 - Modes de rupture -

Lorsque plusieurs modes sont simultanément présents on dit qu'il s'agit d'un problème à mode mixte.

### 2.3. CRITERES MACROSCOPIQUES DE LA RUPTURE :

Formuler un critère de rupture, c'est définir la condition permettant de prévoir l'évolution de la fissure existante dans une pièce mécanique. Généralement c'est une relation de type BUI [15] (1978) :

$$f(p_1, p_2, \dots) = 0 \quad (2.1)$$

où,  $p_1$  et  $p_2$  sont des paramètres caractéristiques de l'état mécanique au fond de fissure. Ces paramètres dépendent de la géométrie du solide et des conditions de chargement.

On peut distinguer les critères de ruptures selon deux approches : une approche locale et une approche globale. La première suppose que dans un élément de volume situé dans la zone de rupture, la densité d'énergie disponible atteint une valeur critique (PLUVINAGE [91] (1989)). La seconde, de l'extérieur, fait le bilan de l'énergie fournie et de l'énergie récupérable pour calculer l'énergie disponible pour faire croître un défaut (PLUVINAGE [91] (1989)). Les critères peuvent être par ailleurs classés en trois familles (critère de déformations, de contraintes et énergétiques).

Dans une approche globale, trois types de variables caractérisent la perturbation du champ de contraintes due à la présence d'une fissure :

- les facteurs d'intensité des contraintes  $K$  ;
- les intégrales de contours  $J$  ;
- le taux de restitution d'énergie  $G$  ;

ces critères  $K$ ,  $J$  et  $G$  sont équivalents pour les milieux plans élastiques linéaires, le comportement des fissures peut être décrit à l'aide de l'une d'entre elles.

**2.3.1. Facteurs d'intensité de contraintes :**

Le facteur d'intensité de contraintes traduit l'état de contraintes au voisinage du fond de fissure.

En effet, les géométries et les chargements des pièces réelles sont souvent complexes de sorte que la détermination analytique exacte est laborieuse. Cependant, il est souvent possible de ramener la situation réelle à l'une ou plusieurs des situations plus élémentaires fournissant les valeurs de  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$  pour un grand nombre de configurations et chargements (BUI [15] (1978) et SANZ [94] (1974)).

Un exemple extrait de ces deux ouvrages est présenté ci-dessous (Fig. 2.2) et utilisé comme un modèle de calcul dans le chapitre 6 :

– Fissure débouchante dans une plaque de largeur finie.

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} f\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{2b}{\pi a} \operatorname{tg} \frac{\pi a}{2b}\right)^{1/2} \frac{0.752 + 0.37 \left(1 - \sin \frac{\pi a}{2b}\right)^3 + 2.02 \frac{a}{b}}{\cos \frac{\pi a}{2b}}$$

la précision atteinte par cette formule est de 0,5 % quelque soit le rapport  $\frac{a}{b}$

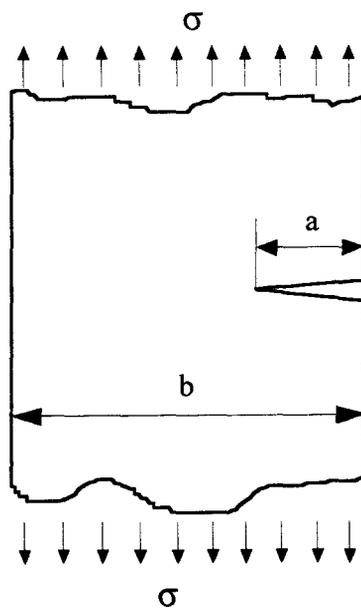


Fig. 2.2

La plupart des théories de la rupture fragile conduisent à la notion d'un seuil critique du facteur  $K_I$  noté  $K_{Ic}$  où,  $K_{Ic}$  est une caractéristique physique du matériau appelée ténacité. Dans un problème plan, le facteur  $K_I$  est une fonction de la géométrie de la structure, en particulier, de la longueur "a" de la fissure et des paramètres du chargement.

La détermination de  $K_{Ic}$  est un problème expérimental. Lorsque  $K_I < K_{Ic}$  il n'y a pas de rupture.

Lorsque le facteur d'intensité de contrainte  $K_I$  atteint la valeur critique  $K_{Ic}$ , dans un problème plan de mode I, ouverture symétrique, la fissure devient instable et s'étend brusquement dans sa propre direction.

En mode II pur, la symétrie n'existe plus, il existe en avant du front de fissure des régions comprimées et des régions tendues ; si la fissure devient instable, elle ne s'étendra pas dans sa propre direction, et on ne sait pas calculer le taux de libération d'énergie potentielle comme en mode I.

On ne voit pas immédiatement la forme d'un critère d'instabilité, dans le cas d'un problème à trois dimensions, du fait que les facteurs d'intensité de contraintes varient le long du front de fissure.

### 2.3.2. Taux de restitution d'énergie :

Cette approche consiste à étudier le bilan des énergies mises en jeu dans le processus d'accroissement de fissure.

Considérons un solide d'épaisseur unité contenant une fissure de longueur  $2a$ , soumis à un système de forces extérieures  $F_i$  (Fig. 3.2). Si la longueur de la fissure augmente d'une quantité  $\delta a$ , on a un accroissement de l'énergie potentielle et une diminution de l'énergie de déformation emmagasinée.

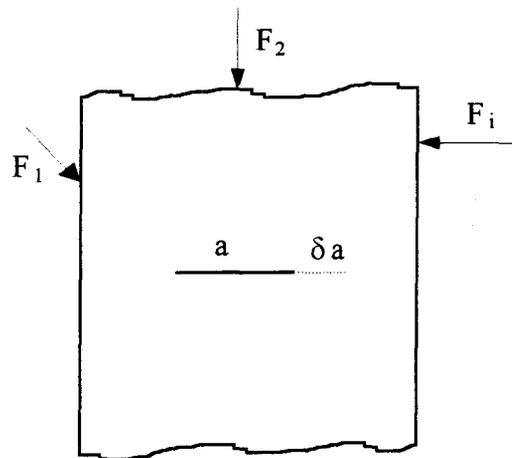


Fig. 2.3 - Accroissement de fissure virtuelle -

L'énergie disponible lors d'un accroissement de fissure est par définition le taux de restitution d'énergie  $G$  (BUI [15] (1978)) est exprimé par :

$$G = - \frac{\partial}{\partial a} (w_{el} - F_{ext}) \quad (2.2)$$

où,

$F_{ext}$  : est le travail des forces extérieures ou énergie potentielle des forces extérieures (changé de signe),

$w_{el}$  : est l'énergie de déformation élastique emmagasinée,

$a$  : est la longueur de fissure.

La condition de rupture par instabilité des milieux élastiques-fragiles de GRIFFITH [43] (1920) est alors :

$$G \geq 2 \gamma \quad (2.3)$$

où,  $\gamma$  est l'énergie surfacique de rupture par unité d'aire.

Lorsque  $G = 2 \gamma$ , on peut dire que la rupture est contrôlée, l'énergie cinétique n'augmente plus.

La figure 2.4 illustre schématiquement la définition du taux de restitution d'énergie élastique lorsqu'il s'agit de force ou de déplacement imposés (LEMAITRE & CHABOCHE [62] (1988)).

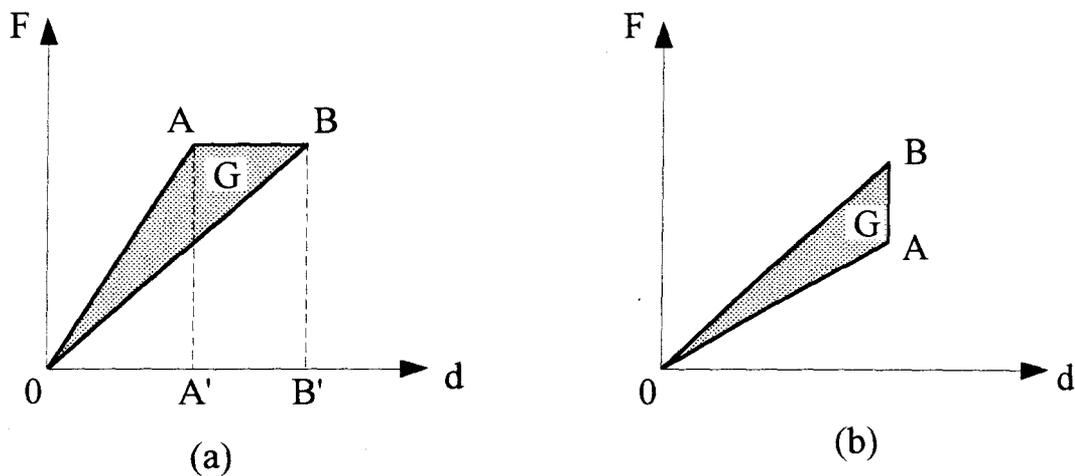


Fig. 2.4 - Schéma du bilan énergétique en élasticité linéaire -

(a) force imposée, (b) déplacement imposé

## 2.4. INTEGRALE J :

L'intégrale J de RICE [93] (1968) se présente comme un moyen commode d'étendre les concepts de la mécanique linéaire élastique de la rupture au cas des matériaux qui présentent des déformations plastiques à fond d'entaille.

Considérons une fissure rectiligne et un système d'axes (x, y), la pointe de la fissure coïncide avec l'origine des coordonnées (Fig. 2.5).

Soit  $\Gamma$  un contour ouvert orienté d'une manière quelconque et  $\mathbf{n}$  la normale au contour  $\Gamma$ .

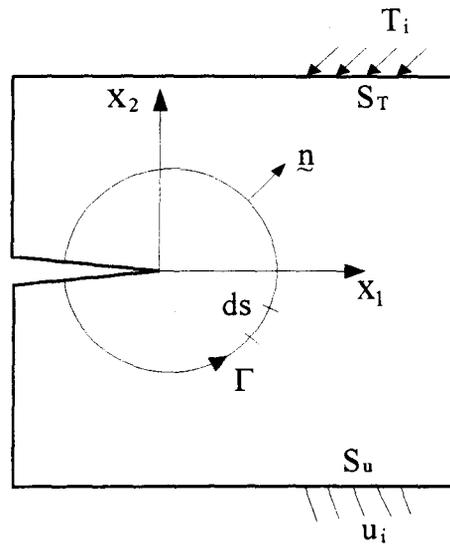


Fig. 2.5 - Coordonnées au front de fissure et contour  $\Gamma$  pour l'évaluation de l'intégrale J -

L'intégrale J introduite par Rice est définie par :

$$J = \int_{\Gamma} \left[ w n_1 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right] ds \quad (2.4)$$

avec

$\Gamma$  : contour d'intégration,

$T_i$  : vecteur de tractions ( $T_i = \sigma_{ij} n_j$ ),

$u_i$  : vecteur de déplacements,

$ds$  : élément curviligne,

$w$  : le travail des contraintes jusqu'à l'instant  $t$  (MAUGIN [73] (1994)) définie par :

$$w(\boldsymbol{\varepsilon}) = \int_0^{\boldsymbol{\varepsilon}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \int_0^t \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dt \quad (2.5)$$

où,  $\varepsilon_{ij}$  est le tenseur de déformations défini en chaque point du plan.

L'intégrale  $J$  est reliée à la variation d'énergie potentielle  $\frac{\partial P}{\partial a}$  par  $J = -\frac{\partial P}{\partial a}$ . Cette intégrale  $J$  est indépendante du contour d'intégration  $\Gamma$ .

Dans le cas d'un corps purement élastique ou dans le cas d'un corps subissant une très faible déformation plastique à fond de fissure, l'intégrale  $J$  s'exprime par :

$$J = G = -\frac{\partial P}{\partial a}; \quad (2.6)$$

Dans le cas d'un solide subissant une forte déformation plastique,  $J$  s'exprime par :

$$J = -\frac{\partial (P + P_{\text{plas}})}{\partial a} \neq G \quad (2.7)$$

$P_{\text{plas}}$  étant l'énergie consommée par la déformation plastique.

Dans le cas plan, mode -I- et -II-, on trouve :

$$\begin{aligned} J &= \frac{1-\nu}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) && \text{en déformation plane} \\ J &= \frac{1}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) && \text{en contrainte plane} \end{aligned} \quad (2.8)$$

où,  $E$  et  $\nu$  sont respectivement, le module de Young et le coefficient de Poisson.

Pour un matériau présentant une certaine ductilité, la rupture brutale est précédée par une propagation stable de la fissure. La résistance à la rupture du matériau peut être représentée par une courbe  $J_R$ , analogue à la courbe  $R$  (LABBENS [57] (1980)).

Cette courbe comporte deux branches linéaires, l'une à pente très raide correspondant à l'extension de fissure par émoussement au cours du chargement, l'autre à pente faible correspondant à la croissance stable de la fissure (Fig. 2.6). L'intersection de ces

deux branches caractérise l'amorçage de la rupture. En ce point d'intersection, le paramètre  $J$  prend la valeur  $J_{1c}$  (PLUVINAGE [91] (1989)).

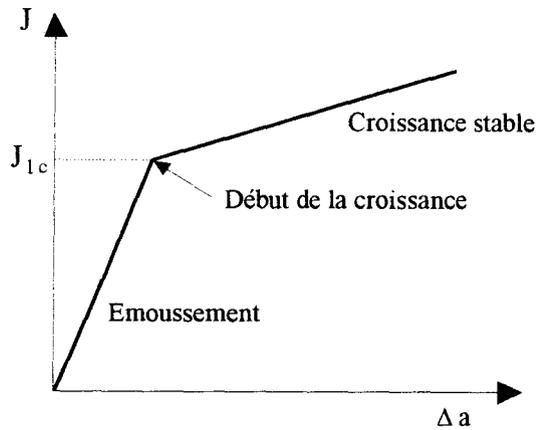


Fig. 2.6 - Schématisation de la courbe  $J_R-\Delta a$  -

## 2.5. PROBLEMES TRIDIMENSIONNELS :

L'approche globale développée précédemment semble plus appropriée pour l'étude de la fissuration tridimensionnelle.

Dans une analyse numérique, l'utilisation des éléments finis tridimensionnels nécessite un nombre considérable de noeuds à l'extrémité de la fissure. Toute la ligne de la fissure est une ligne singulière pour les champs de déformations et de contraintes. Pour obtenir un résultat acceptable du point de vue de la précision, on doit concentrer dans une petite région torique, entourant la ligne de la fissure, presque autant de noeuds que dans le reste de la structure.

### 2.5.1. Etat de contraintes 3-D :

Les matériaux utilisés dans les structures sont soumis à un état de contraintes tridimensionnel qui doit être analysé avant un critère de défaillance approprié. En général, le chargement peut apparaître extérieurement simple. Un état de contraintes complexe peut

exister à l'intérieur du milieu, particulièrement à proximité des défauts ou des fissures, où les contraintes peuvent subir des variations brusques (LAWS [58] (1993)).

L'analyse des contraintes et des déformations au voisinage de front de fissures constitue une base nécessaire pour étudier le comportement des fissures (Fig. 2.7).

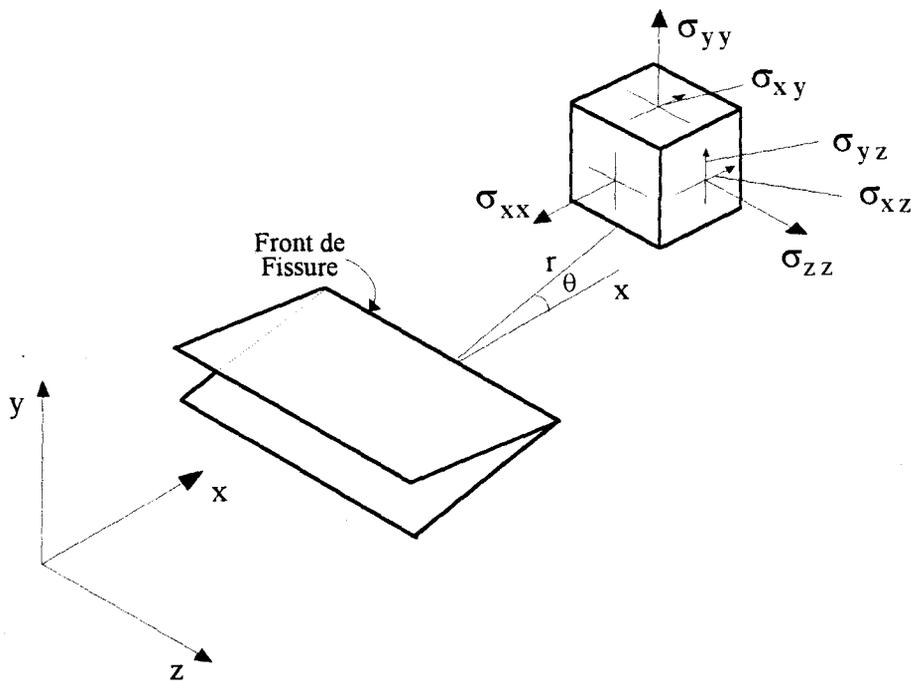


Fig. 2.7. - Contraintes au voisinage de l'extrémité d'une fissure -

Les contraintes ont été calculées par IRWIN [53] (1956) à l'aide de la théorie de l'élasticité. Les problèmes de mécanique de la rupture que l'on rencontre dans la pratique n'ont pas de solutions exactes, d'où l'importance pratique des méthodes de résolutions approchées.

Nous examinons principalement deux groupes de méthodes :

- méthode analytique,
- méthodes numériques basées sur l'utilisation des éléments finis.

### 2.5.2. Méthode analytique :

Les facteurs d'intensité de contraintes sont les plus utilisés, c'est donc ces variables que nous employons pour présenter les résultats expérimentaux de base qui servent à la modélisation. On trouvera les expressions analytiques pour un certains nombre de situations simples (LEMAITRE & CHABOCHE [62] (1988)). Un exemple de calcul de facteur d'intensité de contraintes est présenté ci-après.

1°/ Eprouvette C.T

$$K_I = \frac{p\sqrt{a}}{b e} \left[ 29.6 - 185.5 \frac{a}{b} + 655.7 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 638.6 \left(\frac{a}{b}\right)^4 \right]$$

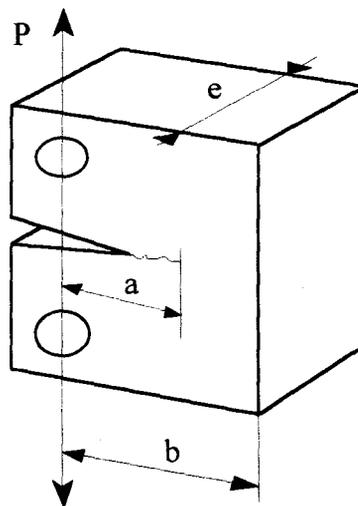


Fig. 2.8

### 2.5.3. Méthodes numériques :

Le développement des moyens de calculs par ordinateur fait de ces méthodes, un outil puissant pour l'étude des problèmes de fissures. L'existence aussi des codes de calculs commerciaux appliqués à la mécanique de la rupture a contribué à ce développement. Ces méthodes sont appliquées à des problèmes bidimensionnels ou tridimensionnels. On

présente, dans qui suit, quatre méthodes : méthode énergétique, méthode de la dérivée de rigidité, méthode de l'intégrale J et la méthode des éléments finis.

### 2.5.3.1. Méthode énergétique :

Cette méthode est basée sur le calcul du taux d'énergie élastique libérée pour un accroissement unitaire de fissure et consiste à calculer le travail des efforts extérieurs pour différentes longueurs de fissures (avec les mêmes efforts extérieurs F) (LEMAITRE & CHABOCHE [62] (1988)) :

$$W = \sum_i F_i u_i \quad (2.9)$$

En différentiant la relation obtenue entre W et A, on obtient le taux de restitution d'énergie G :

$$G = \frac{1}{2} F \frac{\partial u}{\partial A} \Big|_F = \frac{1}{2} \frac{\partial W(A)}{\partial A} \quad (2.10)$$

ou,  $u_i$  sont les différentes longueurs de fissure,

A est l'aire engendré par l'avance de fissure.

cette méthode est précise et nécessite autant de résolutions complètes qu'il y a de longueurs calculées.

### 2.5.3.2. Méthode de la dérivée de la rigidité :

Cette méthode, basée sur la MEF, est introduite par HELLEN [48] (1975) et PARKS [90] (1974), pour déterminer les facteurs d'intensité de contraintes élastiques à la pointe d'une fissure et est basée sur le taux de relaxation d'énergie G.

Pour cela, on considère un corps élastique linéaire d'épaisseur unité contenant une fissure, en utilisant la MEF, l'énergie potentielle P est exprimée par (ZIENKIEWICZ [116] (1971)) :

$$P = \frac{1}{2} \{u\}^T [K] \{u\} - \{u\}^T \{f\} \quad (2.11)$$

où,

[K] – matrice de rigidité principale.

{f} – vecteur des charges nodales.

{u} – vecteur nodal de déplacement.

On différencie l'expression de P par rapport à la longueur de fissure :

$$-\frac{\partial P}{\partial a} \Big|_{\text{charge}} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \{u\}^T}{\partial a} \{[K]\{u\} - \{f\}\} - \frac{1}{2} \{u\}^T \frac{\partial [K]}{\partial a} \{u\} + \{u\}^T \frac{\partial \{f\}}{\partial a} \quad (2.12)$$

l'expression entre crochet  $\{[K]\{u\} - \{f\}\}$ , est égale à zéro dans la solution d'éléments finis, on trouve alors :

$$-\frac{\partial P}{\partial a} \Big|_{\text{charge}} = -\frac{1}{2} \{u\}^T \frac{\partial [K]}{\partial a} \{u\} + \{u\}^T \frac{\partial \{f\}}{\partial a} \quad (2.13)$$

Le terme  $\frac{\partial [K]}{\partial a}$  représente la variation de la matrice de rigidité principale par unité de longueur de fissure.

En absence des forces de volume, on peut réécrire l'équation (2.13) comme :

$$-\frac{\partial P}{\partial a} \Big|_{\text{charge}} = -\frac{1}{2} \{u\}^T \frac{\partial [K]}{\partial a} \{u\} \quad (2.14)$$

La variation de l'énergie potentielle par unité d'avance de fissure est égale au taux de relaxation d'énergie  $G$  :

$$G = - \left. \frac{\partial P}{\partial a} \right|_{\text{charge}} = - \frac{1}{2} \{u\}^T \frac{\partial [K]}{\partial a} \{u\} \quad (2.15)$$

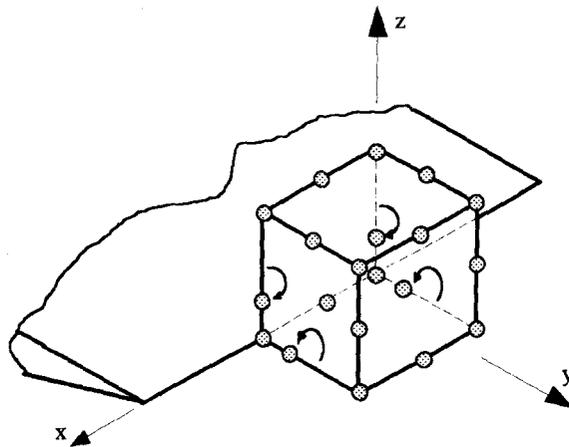


Fig. 2.9 - Élément quart-point -

Cette méthode a été appliquée par PARKS [90] (1974) aux problèmes bidimensionnels utilisant la méthode des éléments finis pour déterminer  $K$ . La généralisation de cette méthode à des configurations tridimensionnelles ainsi que la singularité de contraintes le long du front de fissure a conduit BANKS-SILLS & BORTMAN [4] (1984) et BANKS-SILLS & SHERMAN ([5] (1986), [6] (1989)) à utiliser des éléments quart point, (Fig. 2.10) pour résoudre les difficultés numériques et déterminer le facteur  $K$  d'une fissure dans un cylindre de hauteur finie.

### 2.5.3.3. Méthode de l'intégrale J :

Cette méthode ne nécessite qu'un seul calcul des intégrales, qui seront exprimées au chapitre 4, et qui sont :

(a)- l'intégrale de contour :

$$J = \int_{\Gamma} \left[ w n_1 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right] ds \quad (2.16)$$

(b)- l'intégrale de surface dans le plan :

$$J = \int_A \left[ \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - w \delta_{ij} \right] \frac{\partial q_i}{\partial x_j} dA \quad (2.17)$$

(c)- l'intégrale de volume :

$$J = \int_{V_1} \left[ \sigma_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - w \delta_{jk} \right] \frac{\partial q_i}{\partial x_k} dV. \quad (2.18)$$

Les solutions sont moins précises au voisinage de la pointe de la fissure, étant donné que les valeurs des contraintes ou des déformations sont finies dans tout calcul numérique et de ce fait il est impossible de trouver un champ singulier en fond de fissure. Du fait, que l'intégrale J ne dépend pas du contour, on choisit de préférence plusieurs contours éloignés de la pointe, de façon à ce qu'on puisse s'assurer de la constance de l'intégrale ainsi obtenue (RICE [93] (1968)). Les contraintes et les déformations sont calculées sur le contour d'intégration aux points de Gauss.

### 2.5.3.4. Méthode des éléments finis :

Les méthodes précédentes utilisent une discrétisation de la structure par éléments finis. Cependant le concept de base des méthodes d'analyse par éléments finis est de modéliser le milieu continu par subdivisions en domaines (éléments finis), où dans chacun

des domaines le comportement est décrit par un ensemble distinct de fonctions représentant les contraintes ou les déplacements.

Le principal avantage des méthodes d'analyse par éléments finis réside dans le fait que les systèmes d'équations algébriques à résoudre se présentent sous forme propice à une résolution incrémentale. D'autre part, elles permettent l'analyse de structures irrégulières et hétérogènes sous chargement complexe.

Nous donnons seulement les applications de la méthode des éléments finis aux problèmes de propagation de fissure. A cause de la singularité, cette technique nécessite une précision importante des calculs et impose des maillages adaptés :

- soit un maillage très fin à la pointe de la fissure,
- soit des éléments spéciaux de front de fissure tenant compte de la singularité  $1/2$  ont été mis au point par certains nombre d'auteurs (BANKS-SILLS & SHERMAN ([6] (1989), HELLEN [48] (1975) et PARKS [90] (1974)).

Une fois le champ de déformations et de contraintes sont obtenus, le facteur d'intensité de contraintes est calculé en utilisant les relations définies dans les trois méthodes précédentes.

D'une manière générale, un découpage trop grossier donne des résultats trop faibles, mais un découpage serré multiplie les degrés de liberté et coûte cher en temps de calcul (LABBENS [57] (1980)).

## **CHAPITRE 3**

### **THEORIE ELASTIQUE DES MATERIAUX INHOMOGENES**

## CHAPITRE 3

### THEORIE ELASTIQUE DES MATERIAUX INHOMOGENES

#### 3.1. INTRODUCTION :

Dans ce qui suit, on se propose de donner une analyse de la théorie des défauts, basée sur la notion de force matérielle (Eshelby [38] (1975)).

En partant de la définition d'une force, dans l'espace physique et matériel, et de la notion de force sur un défaut, on déduit une intégrale de contour pour un matériau multiphase.

Pour un milieu hétérogène, la densité volumique d'énergie élastique ( $w$ ) de la configuration de référence dépend explicitement du point  $X$  et cette dépendance conduit à l'apparition d'un nouveau terme dans l'équation de la "pseudo-quantité de mouvement" qui, en statique s'écrit (MAUGIN [69] (1993) et DASCALU [25] (1994)) :

$$\operatorname{div}_R \mathbf{b} = (\nabla_x w)_{\text{exp}} \quad (3.1)$$

où,  $\mathbf{b}$  est le tenseur d'impulsion-énergie d'Eshelby et le second terme représente le gradient explicite de  $w$  appelé force matérielle d'inhomogénéité. Dans le cas d'une fissure, la projection sur la direction d'extension de fissure de  $\mathbf{b}$  sur un contour entourant la pointe de fissure est l'intégrale  $J$  de Rice.

### 3.2. ESPACE PHYSIQUE ET MATERIEL :

Une analogie entre une force physique et matérielle est présentée en considérant un espace physique (Fig. 3.1a) et un espace matériel (Fig. 3.1b) MAUGIN [69] (1993) :

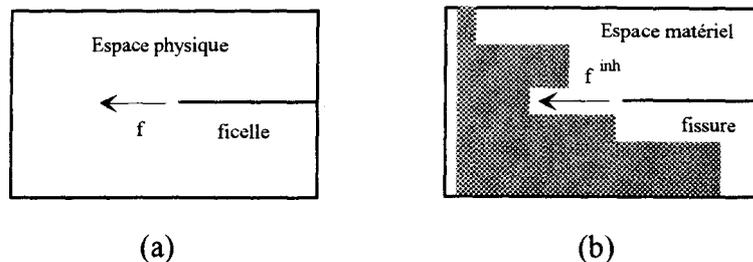


Fig. 3.1

– si la force  $f$ , agissant sur le coté gauche de la tige, est assez forte, en supposant que l'autre côté est fixe, alors la tige peut se déformer plastiquement. C'est-à-dire, qu'on a, dans l'espace physique, la condition suivante :

$$\begin{cases} \Delta l = 0 & \text{si } f < f_c \\ \Delta l \neq 0 & \text{si } f = f_c. \end{cases} \quad (3.2)$$

– si la force fictive (matérielle)  $f^{\text{inh}}$  agissant au fond d'une fissure droite, de longueur  $l$ , développée dans l'espace matériel est assez élevée, alors on a propagation de la fissure dans le matériau. Le critère de croissance est le suivant :

$$\begin{cases} \Delta l = 0 & \text{si } f^{\text{inh}} < f_c^{\text{inh}} \\ \Delta l \neq 0 & \text{si } f^{\text{inh}} = f_c^{\text{inh}}. \end{cases} \quad (3.3)$$

où  $f_c^{\text{inh}}$  est le seuil critique qui est une caractéristique du matériau considéré.

Dans la Fig. 1a, la force physique est engendrée par une variation de la position actuelle dans l'espace physique, où la structure matérielle est considérée fixe. Alors que dans la Fig. 1b, la force matérielle  $f^{mh}$  est engendrée par une variation du point dans l'espace matériel, gardant la position fixe dans l'espace physique.

### 3.3. NOTION DE FORCE MATERIELLE :

Avant de développer le concept de force matérielle, on rappelle les deux approches suivantes (MAUGIN [69] (1993)) :

- l'approche classique qu'on qualifie de Newtonienne, consiste à représenter les efforts exercés par un système  $\Sigma$  sur un système S et permet de déduire l'équation du mouvement (équation de la quantité de mouvement),
- l'approche de type fonctionnelle, qu'on peut l'associer à Alembert. Cette approche repose sur le mouvement virtuel, à partir duquel on obtient l'équation de conservation d'énergie.

Les variables d'Euler sont exprimées comme des fonctions de position  $x$  ( $x$  dépend du temps  $t$ ) dans la configuration actuelle  $C_t$ . Cependant, les variables de Lagrange correspondent à la position de  $X$  au temps  $t_0 = 0$  dans la configuration de référence  $C_R$ .

Le mouvement direct entre la configuration de référence arbitraire  $C_R$  et la configuration actuelle  $C_t$  au temps  $t$  est décrit par (MAUGIN [69] (1993)) :

$$\chi : X \xrightarrow{t} x, \quad x = \chi(X, t) \quad (3.4)$$

$$F = \frac{\partial \chi}{\partial X} \Big|_{t \text{ fixe}} = \nabla_R \chi \quad (3.5)$$

où,  $X$  représente une particule matérielle dans la configuration  $C_R$  et  $F$  est le gradient de déformations,

$$X = \chi^{-1}(x, t) \text{ si } J_F = \det F > 0 \quad (3.6)$$

$\chi^{-1}$  est appelé mouvement inverse (Fig. 3.2).

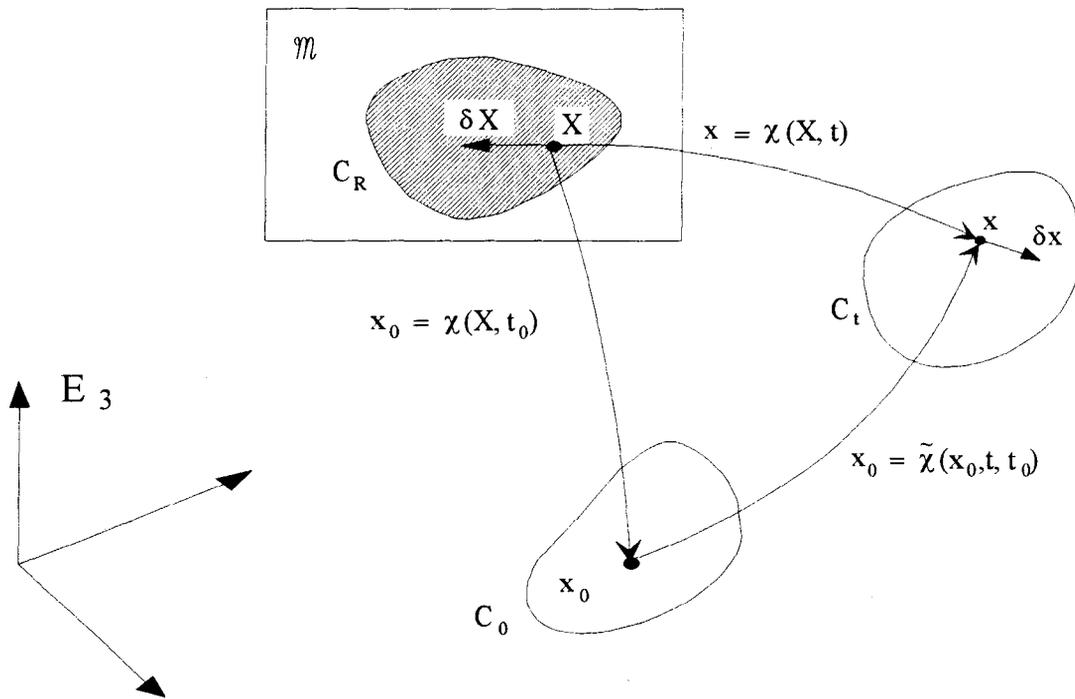


Fig. 3.2 - Variation dans l'espace physique et matériel -

Dans la représentation Eulerienne de l'équation du mouvement, et en se référant au principe des travaux virtuels, la variation virtuelle de la position  $x$  engendre des forces appelées forces physiques avec  $X$  maintenue fixe. Alors que, les forces générées par la variation virtuelle de la position  $X$ , sont appelées forces matérielles, en maintenant la position  $x$  fixe. Ce dernier concept est la base pour l'étude des inhomogénéités ainsi que pour la représentation des forces agissant sur des défauts (EPSTEIN & MAUGIN [34] (1990) et MAUGIN & TRIMARCO [71] (1991)).

### 3.4. FORCE SUR UN DEFAUT :

RICE [93] (1968) et ESHELBY [38] (1975) ont proposé une expression équivalente à la force d'extension de fissure sous la forme d'une intégrale indépendante du contour. La proposition d'exprimer un critère énergétique sous cette forme, remonte aux années 50. Cette forme, développée par Eshelby à partir du tenseur moment-énergie, a été modifiée pour être utilisée pour un milieu élastique continu contenant des défauts et des inhomogénéités au lieu de cristaux contenant des dislocations (ESHELBY [38] (1975)).

La force  $F_1$  agissant sur un défaut, qui se déplace de sa position  $x_1$ , est alors définie par :

$$F_1 = \frac{\partial P}{\partial x_1} \quad (3.7)$$

$\partial P$  est la variation d'énergie totale, comprenant le travail interne et la variation d'énergie potentielle des actions mécaniques externes.

Cette variation d'énergie peut s'exprimer à partir de l'intégrale sur un contour d'une quantité appelée tenseur moment d'énergie. L'expression de la variation d'énergie à partir d'une intégrale du contour a été faite à partir du principe variationnel de Noether. KNOWLES ET STERNBERG [56] (1972) ont proposé d'autres intégrales indépendantes du contour pour décrire les possibilités de rotation et de déformation générale ( $L_K, M$ ).



L'énergie  $E_{S'}$ , à l'intérieur de  $S'$ , diffère de l'énergie  $E_S$ , à l'intérieur de  $S$ , par addition d'un côté de  $S$  de l'énergie de la région 1 et soustraction de l'énergie de l'autre côté de la région 2, ainsi on obtient :

$$\delta E_1 = E_{S'} - E_S = - \delta \mathbf{X} \int_S w \, dS \quad (3.8)$$

où,  $dS$  est l'élément de surface et  $w$  est l'énergie élastique par unité de volume.

On essaiera de remplacer le matériau dans la position déformée de  $S'$  (Fig. 3.3b) dans le trou formé par la position déformée de  $S$  (Fig. 3.3a), en faisant translater le matériau déformé fictif vers l'origine. Pour cela, il est nécessaire d'appliquer des déplacements qui rendent cette opération possible. Cela signifie qu'un élément en position  $u_i$  se déplacera de  $u_i + \delta u_i$ , avec :

$$\delta u_i = - u_{i,j} \delta X_j \quad (3.9)$$

$\delta u_i$  est le déplacement sur le contour  $S'$  moins le déplacement sur  $S$ .

Cette opération nécessitera un travail des contraintes  $\sigma_{ij}$  :

$$dE_2 = - \int_S \delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot d\mathbf{S} \quad (3.10)$$

où, le signe (-) est dû à l'orientation de l'élément de surface qui est normale vers l'extérieur de  $S$ .

L'insertion dans le trou du matériau venant de  $S'$  va provoquer des forces volumiques correspondant à la différence des forces entre le trou et le matériau qui y est introduit. Ces forces peuvent être négligées car elles sont du 2ème ordre en  $\delta\mathbf{X}$ , de sorte que la variation d'énergie est donnée par :

$$\delta E = - F_1 \delta X \quad (3.11)$$

La variation d'énergie  $\delta E$  est considérée comme étant égale à l'énergie dépensée par la force  $F_1$  se déplaçant de la quantité  $\delta X$  dans la direction 1.  $F_1$  est appelée force sur un défaut. Le résultat de la variation de l'énergie est la somme de  $\delta E_1 + \delta E_2$  :

$$\begin{aligned} \delta E &= - \delta \mathbf{X} \int_S w \, dS + \int_S (\delta \mathbf{X} \nabla) \mathbf{u} \boldsymbol{\sigma} \cdot d\mathbf{S} \\ &= - \delta \mathbf{X} \cdot \int_S (w \mathbf{I} - \nabla \mathbf{u} \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{n} \, dS \end{aligned} \quad (3.12)$$

où,  $\mathbf{n}$  est la normale extérieure à  $S$ . On peut écrire aussi la variation d'énergie sous la forme:

$$\delta E = - \mathbf{F} \delta \mathbf{X} \quad (3.13)$$

En comparant les deux expressions (3.12) et (3.13) on trouve que :

$$\mathbf{F} = \int_S \mathbf{b} \mathbf{n} \, dS = - \left( \frac{\partial E}{\partial \mathbf{X}} \right)_{\text{exp}} \quad (3.14)$$

où,  $\mathbf{b}$  est appelé tenseur moment d'énergie d'Eshelby,

$$\mathbf{b} = w \mathbf{I} - \nabla \mathbf{u} \boldsymbol{\sigma} \quad (3.15)$$

et  $\left( \frac{\partial E}{\partial \mathbf{X}} \right)_{\text{exp}}$  indique le gradient du potentiel total par rapport à la dépendance explicite  $\mathbf{X}$ .

### 3.6. INTEGRALE J EN MULTI-PHASE :

L'intégrale J peut être interprétée comme le taux d'énergie libre lorsque la fissure se déplace d'une distance infinitésimale dans le plan de la fissure ou comme une force agissant sur la pointe de fissure dans la direction de la fissure pour des matériaux élastiques non linéaires (EPSTEIN & MAUGIN [34] (1990)).

Rice a étudié la différence qui existe entre les énergies potentielles de deux solides comportant chacun un vide dont le second se déduit du premier par une petite déformation, où l'expression de l'intégrale J est donnée par :

$$J = \int_{\Gamma} [w n_1 - \mathbf{u}_{,1} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n})] d\Gamma \quad (3.16)$$

cette intégrale est indépendante du contour d'intégration (Fig. 3.4) et la densité d'énergie de déformations  $w(\boldsymbol{\varepsilon})$  est fonction des déformations seules.

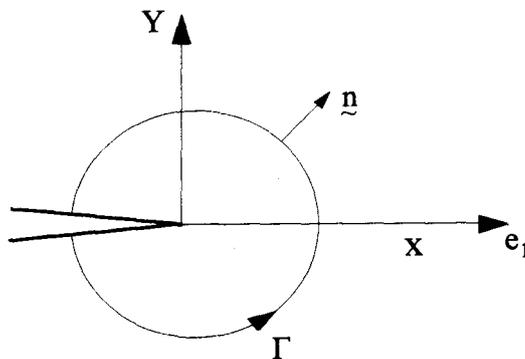


Fig. 3.4 - Coordonnées au front de fissure et contour  $\Gamma$  pour l'évaluation de l'intégrale J -

Une extension de l'intégrale J aux matériaux multiphasiques pour des problèmes bidimensionnels est présentée par WEICHERT & SCHULZ [109] (1993) ; basée sur les travaux de Rice et en tenant compte que dans le cas inhomogène la densité d'énergie de déformation ne dépend pas seulement de la déformation mais aussi des coordonnées spatiales :

$$w = w(\epsilon, x_1, x_2) \quad (3.17)$$

Ces auteurs proposent une expression du taux d'énergie libre d'un matériau inhomogène, exprimé par :

$$J = \int_{\Gamma} [w n_1 - u_{,1} (\sigma n)] d\Gamma - \int_A \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} \right)_{\text{exp}} dA \quad (3.18)$$

où, A est l'aire entouré par  $\Gamma$ .

Le premier terme de l'équation (3.18) de droite est l'intégrale J de Rice dans lequel  $\Gamma$  est une courbe entourant la pointe de la fissure, w est la densité de déformation élastique,  $T_i$  ( $T_i = \sigma_{ij} n_j$ ) sont les composantes du vecteur de forces surfaciques et  $u_i$  sont les composantes du vecteur de déplacements. Le deuxième terme décrit l'influence d'inhomogénéité et le terme intégré est appelé dérivée explicite définie comme étant une force matérielle agissant sur l'inhomogénéité :

$$\left( \frac{\partial w}{\partial x_1} \right)_{\text{exp}} = \frac{\partial w(\epsilon, x_1, x_2)}{\partial x_1} \Big|_{\epsilon = \text{Cte}} \quad (3.19)$$

SCHULZ [96] (1992) caractérise l'interface entre deux matériaux (Fig. 3.5) comme étant une couche mince d'épaisseur  $\epsilon$ , et qu'à l'intérieur de cette couche les propriétés du matériau sont supposées avoir une variation continue.

En tenant compte de cette hypothèse, le second terme de l'équation (3.18) est évalué quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , et ainsi l'expression de l'intégrale  $J$  en multi-phase est donnée par :

$$J = \int_{\Gamma} [w n_1 - \mathbf{u}_{,1} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n})] d\Gamma - \int_{\Gamma_p} [w n_1 - \mathbf{u}_{,1} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n})] d\Gamma \quad (3.20)$$

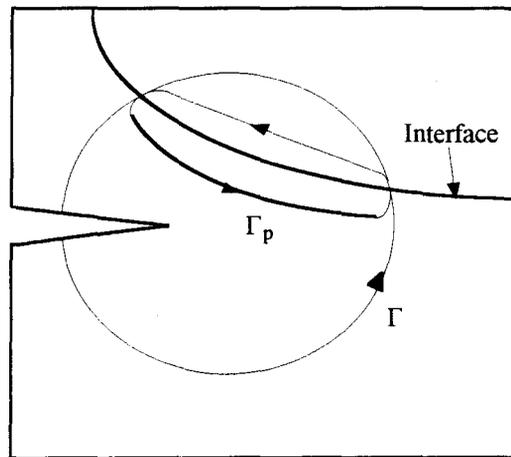


Fig. 3.5 - Contour d'intégration  $\Gamma$  et  $\Gamma_p$  -

## **CHAPITRE 4**

**EXPRESSION ANALYTIQUE DE L'INTEGRALE J  
DE VOLUME EN MILIEUX INHOMOGENES**

## **CHAPITRE 4**

### **EXPRESSION ANALYTIQUE DE L'INTEGRALE J DE VOLUME EN MILIEUX INHOMOGENES**

#### **4.1. INTRODUCTION :**

La modélisation des phénomènes physiques de déformation et de rupture, nécessitent souvent une méthode fondée sur des principes généraux gouvernant les variables représentatives de l'état du milieu matériel.

Deux types de modélisation sont nécessaires : l'une que l'on peut qualifier de cinématique ou de mécanique, schématisée par les mouvements et les efforts dans le milieu matériel, et l'autre de phénoménologique ou de physique qui introduit les variables caractéristiques des phénomènes étudiés. La schématisation mécanique repose sur le principe des puissances virtuelles, et le développement récent des méthodes variationnelles de l'analyse fonctionnelle a surtout contribué à son utilisation systématique. Le choix d'un mouvement virtuel particulier pour un milieu donné conduit à une définition cohérente des déformations et des contraintes avec les conditions aux limites correspondantes.

L'état d'un milieu matériel dépend en général de toute l'histoire de ces variables mécaniques et son comportement peut se modéliser par des lois intégrales.

#### 4.2. INTEGRALE J DE CONTOUR :

L'intégrale J introduite par Rice, a la même valeur pour tout chemin entourant une entaille dans un champ de déformation 2-D (contraintes planes, déformations planes) d'un matériau homogène, élastique ou élastoplastique (Fig 4.1).

Utilisant l'hypothèse d'un gradient de déplacement petit et en négligeant les forces de volume, l'intégrale J est définie par :

$$J = \int_{\Gamma} \left( w n_1 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) ds \quad (4.1)$$

où,  $\Gamma$  est une courbe entourant l'entaille,  $T_i$  est le vecteur de traction de surface défini selon la normale extérieure le long de  $\Gamma$  ( $T_i = \sigma_{ij} n_j$ ),  $u$  est le vecteur de déplacement et  $ds$  est l'élément curviligne.

En élasticité, la densité d'énergie  $w$  est définie comme :

$$w(\epsilon) = \int_0^\epsilon \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}$$

et la déformation comme :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}).$$

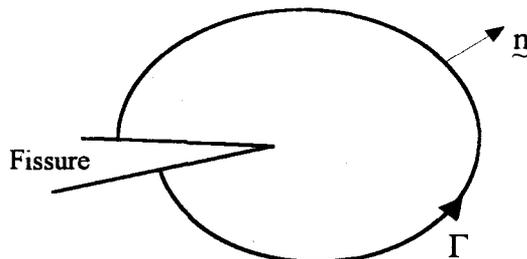


Fig. 4.1 - Contour d'intégration  $\Gamma$  -

L'intégrale J (éq. (4.1)) est définie comme étant la variation d'énergie potentielle quand la fissure se déplace d'un incrément da :

$$J = - \frac{dP}{da} \Big|_T \quad (4.2)$$

dans le cas de l'élasticité linéaire, J est équivalent au taux d'énergie libre (J = G).

L'intégrale J est indépendante du contour d'intégration  $\Gamma$ , et elle n'est autre que la première composante des intégrales définies par BUDIANSKY & RICE [14] (1973). L'intégrale J est identique en forme à une composante statique du tenseur moment d'énergie introduit par Eshelby pour caractériser les forces généralisées sur des dislocations et des défauts dans le domaine élastique.

### 4.3. INTEGRALE J DE SURFACE :

L'intégrale J de surface est dérivée de l'intégrale J de contour par l'application du théorème de Gauss. L'idée consiste à une translation de la fissure dans la direction  $x_1$ , déterminant une région A autour de la pointe de fissure (Fig. 4.2), on peut exprimer l'intégrale J comme :

$$J = G = - \int_{\Gamma_1} \left( \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} - w \delta_{ij} \right) n_j ds = \int_{\Gamma_1} b_{1j} n_j ds \quad (4.3)$$

où,  $b_{1j}$  est la composante suivant  $x_1$  du tenseur moment d'énergie de Eshelby et  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal extérieur à  $\Gamma$ . La courbe entourant la surface A est représenté par  $\Gamma$  ( $\Gamma = \Gamma_2 + \Gamma_3 - \Gamma_1 + \Gamma_4$ ).

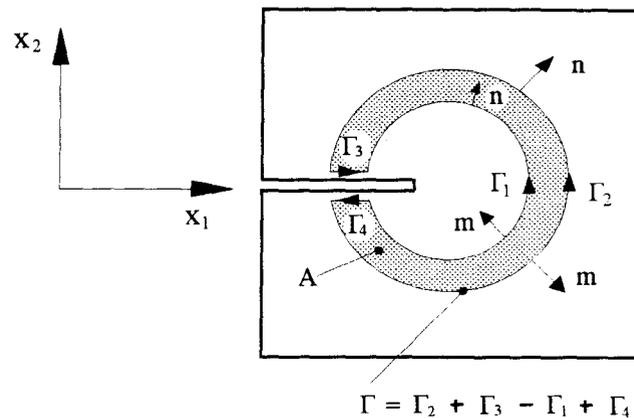


Fig. 4.2 - Intégrale de surface -

Le vecteur unitaire  $m$  sur  $\Gamma$  est égal à :

$$\begin{cases} m = -n & \text{sur } \Gamma_1 \\ m = n & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases} \quad (4.4)$$

et la traction sur les surfaces libres de fissure est nulle :  $\sigma_{ij} n_j = 0$  sur  $\Gamma_3$  et  $\Gamma_4$

Considérons un corps solide fissuré partagé en trois domaines I, II et III (Fig. 4.3).

L'avance de fissure virtuelle suivant  $x_1$  engendre les trois situations suivantes (DELORENZI [28] (1985)) :

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= 0 && \text{dans le domaine I} \\ \Delta x_1 &\in [0, \Delta a] && \text{dans le domaine II} \\ \Delta x_1 &= \Delta a && \text{dans le domaine III} \end{aligned} \quad (4.5)$$

les points matériels dans le domaine III sont traduits par une translation d'un corps rigide d'une distance  $\Delta a$  dans la direction  $x_1$ , tandis que les points dans le domaine I restent fixes. Dans le domaine II, l'extension de fissure virtuelle provoque une translation des points matériels de  $\Delta x_1$ .

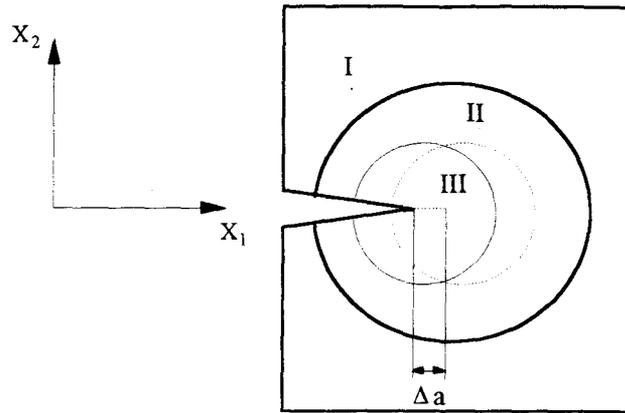


Fig. 4.3 - Avance de fissure virtuelle en bidimensionnel -

L'utilisation des équations (4.4) et (4.5), permet d'exprimer l'expression (4.3) sous la forme suivante :

$$G \Delta a = \Delta a \oint_{\Gamma} \left( \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} - w \delta_{ij} \right) q_1 m_j ds = - \Delta a \oint_{\Gamma} b_{ij} q_1 m_j ds \quad (4.6)$$

où,  $q_1$  est une fonction d'interpolation qui est égale à l'unité sur  $\Gamma_1$  et zéro sur  $\Gamma_2$  et  $\Delta a$  est interprétée comme un incrément d'avance de fissure.

Appliquons le théorème de divergence, l'équation (4.6) se ramène à :

$$G \Delta a = - \Delta a \int_A \left( \frac{\partial}{\partial x_j} (b_{ij} q_1) \right) dA = - \Delta a \int_A \left( \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_j} q_1 + b_{ij} \frac{\partial q_1}{\partial x_j} \right) dA \quad (4.7)$$

La densité d'énergie de déformations  $w$  est indépendante de  $x$ , par conséquent le terme  $\frac{\partial b_{ij}}{\partial x_j} = 0$ , et l'expression de l'intégrale de surface devient:

$$G = \int_A \left( \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} - w \delta_{ij} \right) \frac{\partial q_1}{\partial x_j} dA \quad (4.8)$$

L'expression (4.8) coïncide avec celle obtenue par DELORENZI [27] (1982). Cependant BANKS-SILLS & SHERMAN [8] (1992) montrent aussi, en utilisant les éléments finis, que l'intégrale de surface et la méthode de la dérivée de rigidité sont identiques pour des éléments triangulaires isoparamétriques quart-points à quatre et à huit noeuds.

#### 4.4. INTEGRALE $J$ DE VOLUME :

Dans un test sur un échantillon, la fissure accroîtra le long du front de fissure et le taux d'énergie libre dérivé du test représente la valeur moyenne. Il semble approprié de définir la valeur moyenne du taux d'énergie libre en calculant l'énergie libre totale par unité d'extension de fissure le long du front de fissure et la diviser ensuite par la longueur totale du front (DELORENZI [28] (1985)).

Dans une analyse tridimensionnelle, on peut évaluer soit le taux d'énergie libre locale en appliquant un déplacement virtuel à une petite partie du front de fissure, soit le taux d'énergie libre globale en appliquant le même déplacement virtuel à tout le front de fissure (Fig. 4.4).

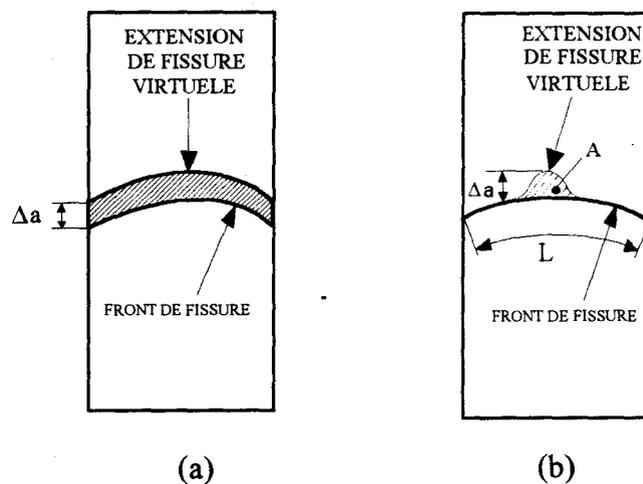


Fig. 4.4 - Extensions de fissure virtuelle pour la définition du taux d'énergie libre moyen et local -

Les taux d'énergie libre moyen (Fig. 4.4a) et local (Fig. 4.4b) sont exprimés par :

$$G_{\text{moy}} = \frac{G}{\Delta a L} = \frac{G}{A}, \quad G_{\text{local}} = \frac{G}{\Delta a b} = \frac{G}{A} \quad (4.9)$$

Une méthode d'intégration de volume est développée par LI & al. [64] (1985) en utilisant la méthode d'extension de fissure et le tenseur moment d'énergie de Eshelby. L'intégrale de volume consiste à une intégration suivant un volume entourant la pointe de la fissure.

Considérons un solide élastique, avec une portion de surface externe  $S_t$  libre de toute force qui varie avec une vitesse  $v_j$ . Les charges appliquées et les déplacements prescrits sont supposés fixes durant ce processus. Considérons une courbe séparant  $S_t$  du reste de la surface de l'entaille, et une surface  $S_2$  entourant complètement la surface  $S_t$ , le volume entre  $S_t$  et  $S_2$  est le volume d'intégration  $V_I$  (Fig. 4.5).

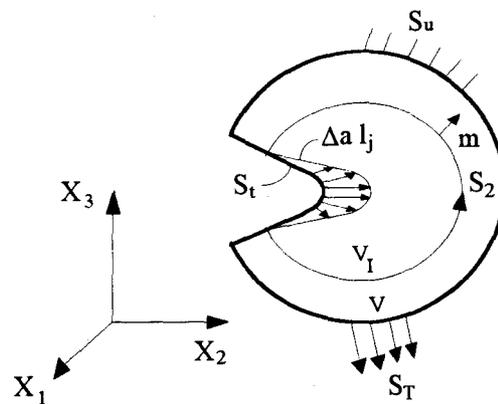


Fig. 4.5 - Intégrale de volume  $V_I$  formée par les surfaces  $S_t$  et  $S_2$  -

L'intégrale de volume est obtenue sous la forme suivante (LI & al. [64] (1985)) :

$$G = \int_{V_i} \left( \sigma_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - w \delta_{jk} \right) \frac{\partial q_i}{\partial x_k} dV \quad (4.10)$$

où,

$G$  est l'énergie totale par unité d'avance de fissure,

$q_i$  est une fonction d'interpolation.

Ce résultat d'intégration est équivalent à celui de DELORENZI [27] (1982), qui a obtenu par un calcul direct une expression de  $G$  pour une fissure arbitraire entre deux configurations de fissure de longueur différente.

A noté aussi que la méthode d'extension de fissure a été à l'origine développée à partir des considérations des éléments finis et les expressions qui en résultaient ont dès lors été basées sur une formulation de matrice des éléments finis. Le facteur d'intensité de contraintes  $K_I$ , de l'expression (4.12), le long du front de fissure est calculé par la méthode de la dérivée de rigidité présentée par PARKS [90] (1974).

En absence des forces de volume, pour les géométries tridimensionnelles, BANKS-SILLS & SHERMAN [8] (1992) ont donné l'égalité suivante :

$$\int_0^L G(s) \delta l(s) ds = \frac{1}{2} \{u\}^T \Delta [K] \{u\} \quad (4.11)$$

$$K_I = \frac{1}{2} \{u\}^T \frac{\Delta [K]}{\Delta a} \{u\} \quad (4.12)$$

où,  $G(s)$  est le taux d'énergie libre défini comme une fonction de la position  $s$  le long du front de fissure,  $L$  est la longueur du front de fissure,  $\{u\}$  est le vecteur de déplacement nodal et  $\delta l(s)$  est la variation de la forme de fissure (Fig. 4.6).

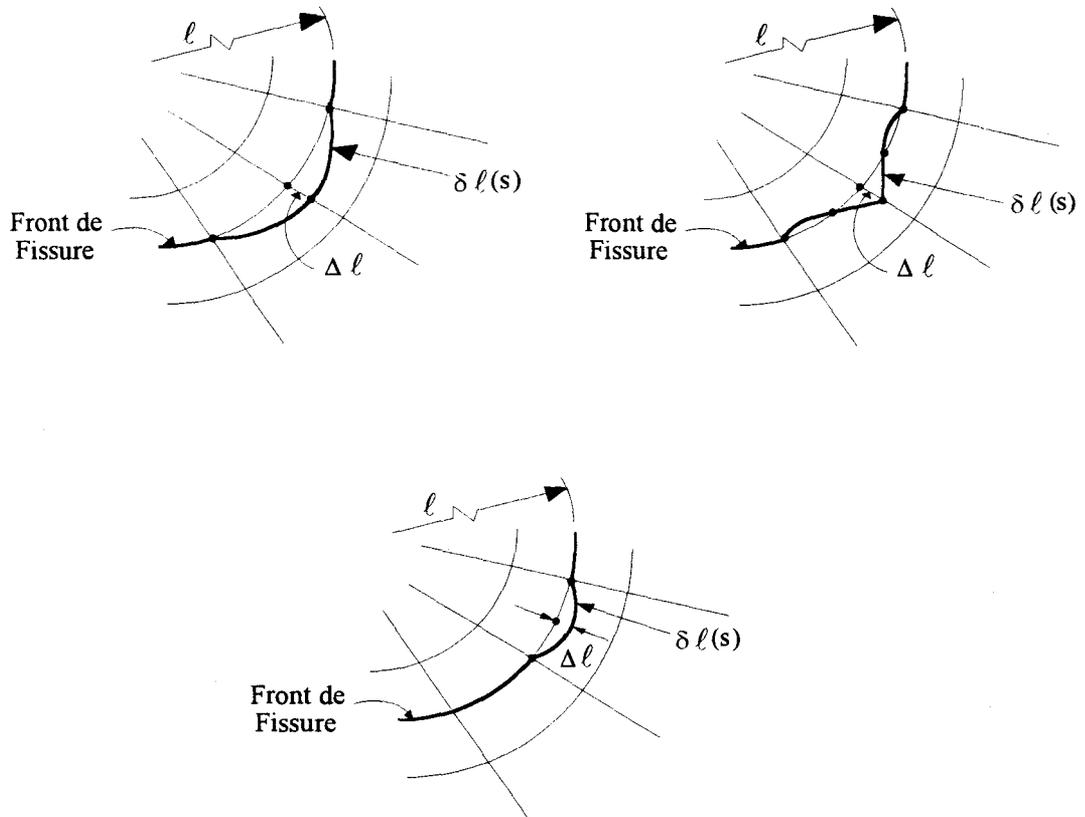


Fig. 4.6 - Différentes extensions virtuelles de fissures -

La variation de la matrice de rigidité  $\Delta[\mathbf{K}]$ , pour une extension de fissure peut être écrite comme une différence :

$$\Delta[\mathbf{K}] = [\mathbf{K}]_{l+\delta l} - \Delta[\mathbf{K}]_l \quad (4.13)$$

Une autre expression du taux d'énergie libre totale, basée sur le taux d'énergie locale, est exprimée sous la forme (NAKAMURA & PARKS [84] (1989)) :

$$J(s) = \int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} q_1(s) \mu_1(s) J^{\text{local}}(s) ds = \int_{V(s)} \left( \sigma_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - w \delta_{jk} \right) \frac{\partial q_j}{\partial x_k} dV \quad (4.14)$$

où,  $V(s)$  est un volume qui entoure le front de fissure (Fig. 4.7c), avec :

$$J(s) = \lim_{\Gamma(s) \rightarrow 0} \mu_k(s) \int_{\Gamma(s)} \left( w n_k - \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) d\Gamma \quad (4.15)$$

$J(s)$  étant le taux d'énergie libre totale due à une extension virtuelle du front de fissure entre les points  $(s-\varepsilon)$  et  $(s+\varepsilon)$ ,  $s$  est la longueur d'arc (Fig. 4.7b). L'avance de fissure est exprimée par le produit  $q_1(s) \mu_1(s)$  avec,  $q_1(s)$  comme fonction d'interpolation continue de position, qui est égale à la grandeur et la direction de l'extension de la fissure virtuelle pour des points le long du front de fissure, et  $\mu_1(s)$  comme vecteur unitaire donnant la direction, formée par l'intersection du plan normal au front de fissure et du plan tangentiel au plan de fissure au point  $s$  (Fig. 4.7.a).

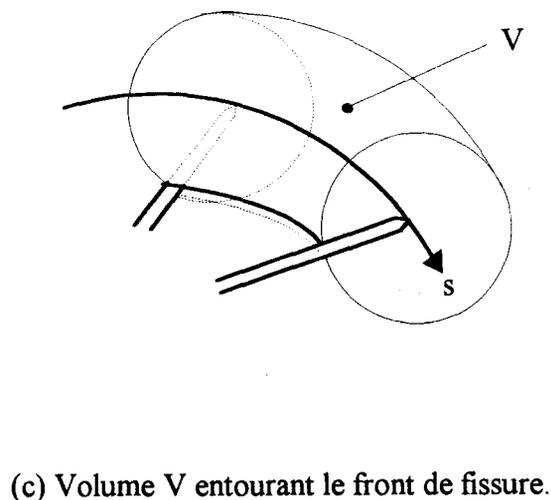
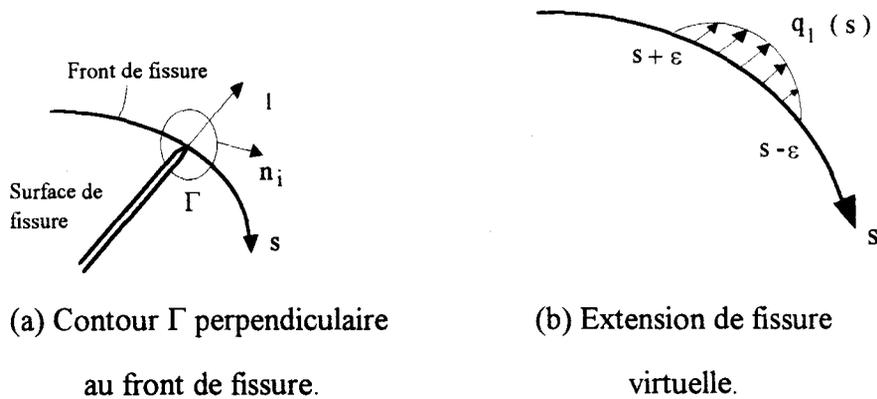


Fig. 4.7

#### 4.5. INTEGRALE DE VOLUME DANS LES MILIEUX INHOMOGENES :

##### 4.5.1. Introduction :

Dans le cas homogène  $w$  dépend seulement de la déformation  $\varepsilon$  mais dans le cas inhomogène  $w$  est fonction de  $\varepsilon$  et  $x$  :

$$w = w (\varepsilon, x) \quad (4.16)$$

où,  $w$  dépend de  $\varepsilon$  et explicitement du système de coordonnées  $x_m$ .

On distingue deux dérivées de  $w$  par rapport à  $x$  (ESHELBY [38] (1975)) :

- le gradient

$$\frac{\partial w}{\partial x_k} = (\text{grad } w)_k \quad (4.17)$$

- la dérivée

$$\left( \frac{\partial w}{\partial x_k} \right)_{\text{exp}} = \frac{\partial}{\partial x_k} w (u_i, u_{i,j}, x_m) \Bigg|_{\substack{u_i, u_{i,j} = c^{te} \\ x_m = c^{te}, x_m \neq x_k}} \quad (4.18)$$

La dérivée de  $w$  par rapport à  $x$  est exprimée par :

$$\frac{\partial w}{\partial x_k} = \frac{\partial w}{\partial u_k} u_{i,k} + \frac{\partial w}{\partial u_{i,j}} u_{i,jk} + \left( \frac{\partial w}{\partial x_k} \right)_{\text{exp}} \quad (4.19)$$

et en utilisant  $\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial w}{\partial u_{i,j}} = \frac{\partial w}{\partial u_j}$  (ESHELBY [38] (1975)), on aura :

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial w}{\partial u_{i,j}} u_{i,k} + \frac{\partial w}{\partial u_{i,j}} u_{i,jk} + \left( \frac{\partial w}{\partial x_k} \right)_{\text{exp}} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial w}{\partial u_{i,j}} u_{i,k} \right) + \left( \frac{\partial w}{\partial x_k} \right)_{\text{exp}} \end{aligned} \quad (4.20)$$

On peut identifier l'équation (4.20) à un problème élastique non linéaire décrit par CARPENTER & al. [17] (1986).

En écrivant  $\frac{\partial w}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_j} (w \delta_{kj})$ , l'expression (4.20) se ramène à :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (w \delta_{kj}) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial w}{\partial u_{ij}} u_{i,k} \right) = \left( \frac{\partial w}{\partial x_k} \right)_{\text{exp}} \quad (4.21)$$

Le tenseur moment d'énergie d'Eshelby  $\mathbf{b}$  est égal à :

$$b_{kj} = w \delta_{kj} - \frac{\partial w}{\partial u_{ij}} u_{i,k} \quad (4.22)$$

La dérivée de  $\mathbf{b}$  par rapport à  $\mathbf{x}$  donne :

$$\frac{\partial b_{kj}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( w \delta_{kj} - \frac{\partial w}{\partial u_{ij}} u_{i,k} \right) = \left( \frac{\partial w}{\partial x_k} \right)_{\text{exp}} \quad (4.23)$$

donc :

$$\frac{\partial b_{kj}}{\partial x_j} = \left( \frac{\partial w}{\partial x_k} \right)_{\text{exp}} \quad (4.24)$$

on constate que, la divergence de  $\mathbf{b}$  est égale à la dérivée explicite de  $w$  par rapport à  $\mathbf{x}$ .

#### 4.5.2. Formulation analytique :

On considère un solide élastique avec une portion de surface externe  $S_t$  libre de toute force qui varie avec une vitesse  $v_j$ . Les charges appliquées et les déplacements prescrits sont supposés rester fixes durant ce processus (Fig. 4.9).

L'énergie potentielle est définie comme :

$$P = \int_{V(t)} w(\epsilon, x) dV - \int_{S_T} T_i u_i dS_T \quad (4.25)$$

Le taux de l'énergie potentielle est :

$$\frac{dP}{dt} = \int_{V(t)} \frac{dw}{dt} dV - \int_{S_T} T_i \dot{u}_i dS \quad (4.26)$$

La variation de  $w$  provient d'une part de la variation de la quantité à intégrer et d'autre part de la variation du domaine d'intégration (Fig. 4.8) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} w dV &= \frac{\partial w}{\partial t} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + w dv_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ &+ w dx_1 \wedge dv_2 \wedge dx_3 + w dx_1 \wedge dx_2 \wedge dv_3 \end{aligned} \quad (4.27)$$

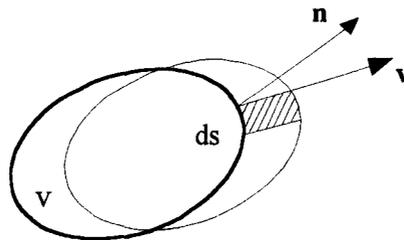


Fig. 4.8

La dérivée particulière de  $dx_i$  est par définition  $dv_i$ , où  $v_i$  désigne les composantes du vecteur vitesses :

$$\frac{d}{dt} dx_i = d \left( \frac{dx_i}{dt} \right) = dv_i \quad (4.28)$$

On remarque que :

$$\begin{aligned} dv_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 &= v_{1,j} dx_j \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ &= v_{1,1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \end{aligned} \quad (4.29)$$

de même pour  $dv_2$  et  $dv_3$ , ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} w dV &= \left( \frac{\partial w}{\partial t} + w v_{k,k} \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ &= \left( \frac{\partial w}{\partial t} + w v_{k,k} \right) dV \end{aligned} \quad (4.30)$$

En tenant compte de l'équation (4.30), on déduit le taux de variation de l'énergie potentielle par :

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \int_{V(t)} \left( \frac{\partial w}{\partial t} + w v_{k,k} \right) dV - \int_{S_T} T_i \dot{u}_i dS \\ &= \int_{V(t)} \frac{\partial w}{\partial t} dV + \int_{V(t)} w v_{k,k} dV - \int_{S_T} T_i \dot{u}_i dS \end{aligned} \quad (4.31)$$

Le premier terme à droite de (4.31) peut être exprimé comme :

$$\begin{aligned} \int_{V(t)} \frac{\partial w}{\partial t} dV &= \int_{V(t)} \left( \frac{\partial w}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} \right) dV \\ &= \int_{V(t)} \frac{\partial w}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} dV + \int_{V(t)} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} dV \\ &= \int_{V(t)} \sigma_{ij} \dot{u}_{i,j} dV + \int_{V(t)} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} dV \quad (\sigma_{ij} = \sigma_{ji}) \end{aligned} \quad (4.32)$$

en absence des forces de volume, l'équation d'équilibre donne  $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$ .

En multipliant l'équation d'équilibre par un champ de vitesse virtuelle  $\dot{u}_i$  et on intégrant sur un volume  $V$ , on déduit l'égalité suivante :

$$\int_V \sigma_{ij} \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} dV = \int_S \sigma_{ij} \dot{u}_i m_j dS \quad (4.33)$$

La dérivé partielle de  $\dot{\mathbf{u}}$ , s'écrit comme :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{d u_i}{d t} - v_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \quad (4.34)$$

En utilisant les équations (4.33) et (4.34), l'expression (4.32) devient :

$$\int_{V(t)} \frac{dw}{dt} dV = \int_{S_T} \sigma_{ij} \frac{d u_i}{d t} n_j dS_T - \int_{S_t} \sigma_{ij} n_j v_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dS_t + \int_{V(t)} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} dV \quad (4.35)$$

On remplace l'équation (4.35) dans (4.31), le taux de variation de l'énergie potentielle s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \int_{S_T} \sigma_{ij} \frac{d u_i}{d t} n_j dS_T - \int_{S_t} \sigma_{ij} n_j v_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dS_t + \int_{V(t)} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} dV \\ &+ \int_{V(t)} w v_{k,k} dV - \int_{S_T} T_i \dot{u}_i dS \end{aligned} \quad (4.36)$$

Le premier terme s'annule avec le cinquième terme, le quatrième terme peut être exprimé comme :

$$\int_{V(t)} w v_{k,k} dV = \int_{V(t)} \text{div} (w v_k) dV - \int_{V(t)} \frac{\partial w}{\partial x} v_k dV. \quad (4.37)$$

Donc l'expression (4.36) devient :

$$\frac{dP}{dt} = - \int_{S_t} \sigma_{ij} n_j v_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dS_t + \int_{V(t)} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} dV + \int_{V(t)} \text{div} (w v_k) dV - \int_{V(t)} \frac{\partial w}{\partial x} v_k dV \quad (4.38)$$

Après simplification de l'expression (4.38), on obtient finalement :

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= - \int_{S_t} \sigma_{ij} n_j v_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dS_t + \int_{V(t)} \text{div} (w v_k) dV \\ &= - \int_{S_t} \sigma_{ij} n_j v_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dS_t + \int_{S_t} w v_i n_i dS_t \\ &= \int_{S_t} \left( w \delta_{kj} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) v_k n_j dS_t \end{aligned} \quad (4.39)$$

on suppose que le long de la surface  $S_t$ , la fissure avance avec une vitesse  $v_k$  par unité de temps de la variation  $x_k$ .

Il existe trois possibilités de mouvements de fissure d'écrit par EISCHEN & HERRMANN [32] (1987) :

- translation rigide tel que tous les points sur les surfaces de fissure translatent avec une vitesse  $v = v_k e_k$ , où les  $v_k$  sont des constantes,
- rotation rigide autour de l'axe  $x_3$  tel que les points sur la surface de fissure translatent avec une vitesse  $v = v_k e_k = - e_{3kl} x_l \omega e_k$ , où  $\omega$  est une constante positive,
- la même extension le long de axe de fissure tel que les points sur la surface de fissure translatent avec une vitesse  $v = v_k e_k = \alpha x_k e_k$ , où  $\alpha$  est une constante positive.

La vitesse peut être exprimée comme :

$$v_k = \frac{d}{dt} (u_k) = \frac{d}{dt} (a l_k) = \frac{da}{dt} l_k + a \frac{dl_k}{dt} \quad \left( \frac{dl_k}{dt} = 0 \right)$$

$$v_k = \frac{da}{dt} l_k \tag{4.40}$$

où,  $l_k$ , variable le long de  $S_t$ , est la normale à  $S_t$  en chaque point et aussi fonction de  $x_1$  et  $x_2$ .

En utilisant les équations (4.39) et (4.40), le taux d'énergie potentielle se met sous la forme :

$$\frac{dP}{dt} = \int_{S_t} \left( w \delta_{kj} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \frac{da}{dt} l_k n_j dS_t \tag{4.41}$$

le terme  $\frac{da}{dt}$  est indépendant de  $S_t$ , alors :

$$\frac{dP}{dt} = \frac{da}{dt} \int_{S_t} \left( w \delta_{kj} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) l_k n_j dS_t \tag{4.42}$$

En tenant compte de l'égalité  $G = - \left. \frac{dP}{da} \right|_T$ , on obtient :

$$G = - \int_{S_t} \left( w \delta_{kj} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) l_k n_j dS_t \tag{4.43}$$

où,  $G$  est l'énergie totale par unité d'avance de fissure.

On suppose que le volume  $V_I$  est formé par les surface  $S_t$  et  $S_2$  décrit par Li & al. [64] (1985) (Fig. 4.9).

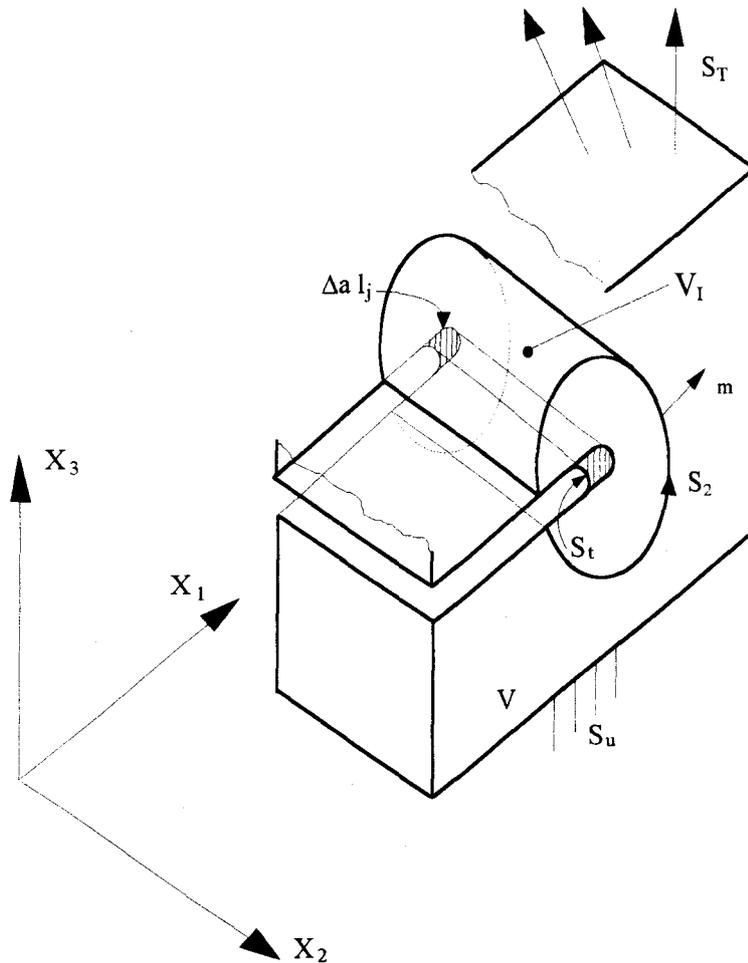


Fig. 4.9 - Intégrale de volume  $V_I$  formée par les surfaces  $S_t$  et  $S_2$  -

Pour développer l'expression de l'intégrale de volume, on introduit des fonctions  $q_j$ , exprimées par :

$$q_j = \begin{cases} 1_j & \text{sur } S_t \\ 0 & \text{sur } S_2 \end{cases} \quad (4.44)$$

$q_j$  sont choisis suffisamment régulières dans le volume entre les surfaces  $S_t$  et  $S_2$ .

En se basant sur l'équation (4.44), l'énergie libre totale est comme suit :

$$G = \int_{S_1-S_2} \left( \sigma_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - w \delta_{jk} \right) q_j n_k dS = - \int_{S_1-S_2} b_{jk} q_j n_k dS \quad (4.45)$$

où,  $\mathbf{b}$  est le tenseur moment d'énergie d'Eshelby

Le contour d'intégration est pris le long des surfaces entourant le front de l'entaille et n'entoure aucune autre entaille, tel que  $S = S_2 + S_3 - S_1 + S_4$ . Lorsque  $h \rightarrow 0$ , l'entaille devient une courte fissure, la traction sur les surfaces  $S_3$  et  $S_4$  sont égales a zéro (Fig. 4.10).

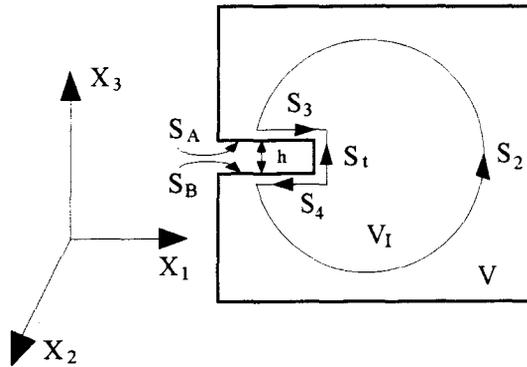


Fig. 4.10 - Epaisseur  $h$  d'une entaille dans le plan  $(X_1, X_3)$  -

En utilisant le théorème de la divergence, l'expression (4.45) devient :

$$G = \int_{V_I} \left( b_{jk} \frac{\partial q_j}{\partial x_k} + \frac{\partial b_{jk}}{\partial x_k} q_j \right) dV = - \int_{V_I} b_{jk} \frac{\partial q_j}{\partial x_k} dV - \int_{V_I} \frac{\partial b_{jk}}{\partial x_k} q_j dV \quad (4.46)$$

Finalement :

$$G = \int_{V_I} \left( \sigma_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - w \delta_{jk} \right) \frac{\partial q_j}{\partial x_k} dV - \int_{V_I} \frac{\partial b_{jk}}{\partial x_k} q_j dV \quad (4.47)$$

le second terme découle de l'utilisation des matériaux hétérogènes. Pour mieux comprendre la signification de ce terme, considérons un volume  $V$  régulier englobant une fissure-disque  $\Sigma$  sans épaisseur de bord  $\partial\Sigma$ , ce volume se déplace à une vitesse uniforme  $\dot{\mathbf{u}}$  par rapport à la fissure (Fig. 4.11) (MAUGIN & TRIMARCO ([70] (1991), [71] (1991))).

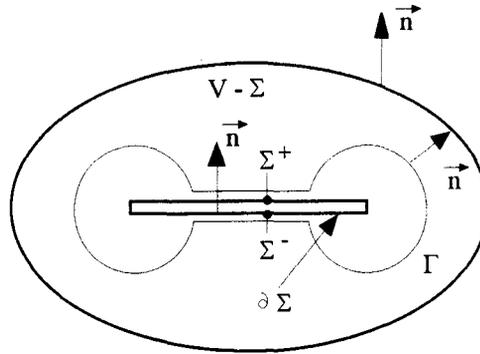


Fig. 4.11 - Fissure disque dans un milieu élastique non linéaire homogène -

La force matérielle totale est exprimée par (MAUGIN & TRIMARCO [70] (1991)) :

$$F^{\text{inh}}(V) = \int_V f^{\text{inh}} dV = - \int_V \text{div}_R \mathbf{b} dV \quad (4.48)$$

$\mathbf{b}$  est le tenseur moment d'énergie d'Eshelby.

Le membre de droite se calcul à partir de

$$f^{\text{inh}} = - \text{div}_R \mathbf{b} \quad (4.49)$$

La divergence de  $\mathbf{b}$  est égale au gradient de la densité d'énergie de déformations par rapport à une dépendance explicite par rapport à  $\mathbf{x}$  :

$$\text{div}_R \mathbf{b} = \left( \frac{\partial w}{\partial \mathbf{x}_k} \right)_{\text{exp}} \quad (4.50)$$

ceci définit une force fictive (matérielle) élémentaire agissant sur l'inhomogénéité et qui, en la projetant sur la direction d'extension de la fissure, conduit directement à l'intégrale  $J$  indépendante du contour, en utilisant le théorème de Stokes (si les lèvres de la fissure sont libres de tractions).

La force matérielle totale peut s'écrire sous la forme suivante (LE & al. [61] (1989)) (MAUGIN & TRIMARCO [70] (1991)):

$$F^{\text{inh}}(\mathbf{V}) = F^{\text{inh}}(\Sigma) = \int_{\partial\Sigma} J(\partial\Sigma) dL \quad (4.51)$$

où,  $J(\partial\Sigma) = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \mathbf{b} \cdot \mathbf{N} d\Gamma$  est indépendante du contour et peut être interprétée comme une force agissant, par unité de longueur, sur  $\partial\Sigma$  ou comme étant le flux d'énergie à la pointe de la fissure.

Des équations (4.48), (4.50) et (4.51), la force matérielle agissant sur une inhomogénéité s'exprime par :

$$F_k = - \int_V \text{div}_R \mathbf{b} dV = - \int_V \left( \frac{\partial w}{\partial x_k} \right)_{\text{exp}} dV = \int_{\partial\Sigma} J(\partial\Sigma) dL \quad (4.52)$$

La force matérielle agissant sur un défaut dans un volume matériel  $V_0$ , est obtenue par la variation d'énergie par unité de translation de ce défaut :

$$F_k = - \int_{V_0} \text{div} \mathbf{b} dV_0 = - \int_{S_0} \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} dS_0 \quad (4.53)$$

où,  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal extérieur à la surface matérielle  $S_0$  entourant  $V_0$ .

On réécrite l'expression (4.47)

$$G = \int_{V_I} \left( \sigma_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - w \delta_{jk} \right) \frac{\partial q_j}{\partial x_k} dV - \int_{V_I} \frac{\partial b_{jk}}{\partial x_k} q_j dV$$

l'influence de l'inhomogénéité est décrit par le second terme de l'équation précédente. Pour évaluer ce dernier terme, on considère un corps fissuré avec un interface, qui est remplacé par une couche mince d'épaisseur  $e$  (Fig. 4.12).

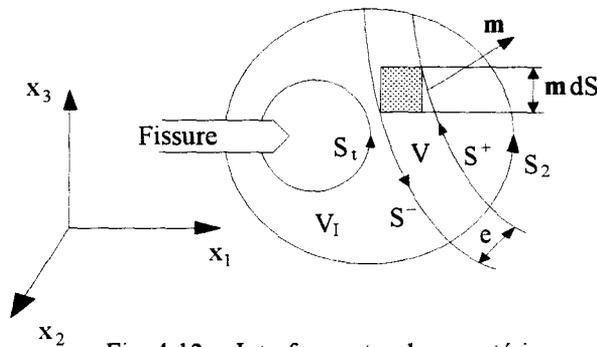


Fig. 4.12 - Interface entre deux matériaux remplacé par une couche mince -

le second terme de (4.47) peut être écrit comme

$$\int_{V_I} \frac{\partial b_{jk}}{\partial x_k} q_j dV = \int_{V_I-V} \frac{\partial b_{jk}}{\partial x_k} q_j dV + \int_V \frac{\partial b_{jk}}{\partial x_k} q_j dV \quad (4.54)$$

A l'intérieur de la couche et sur la frontière, les propriétés du matériau sont supposés varier de manière régulière. Seul la couche contribué à cette variation, ailleurs le matériau est homogène, le premier terme s'annule  $(\partial b/\partial x_k)=0$  et le second terme peut être évalué dans le cas limite où  $e \rightarrow 0$  en utilisant l'égalité (4.50) :

on introduit deux fonctions  $Q$  et  $L$  qui sont régulières et supposées avoir une variation identique à l'intérieur de la couche dans la direction  $x_m$  (Fig. 4.13a). La fonction  $Q$  peut exprimé soit l'énergie de déformation élastique soit le produit du tenseur de contrainte par le gradient de déplacement et la fonction  $L$  peut exprimé le vecteurs  $\mathbf{q}$ .

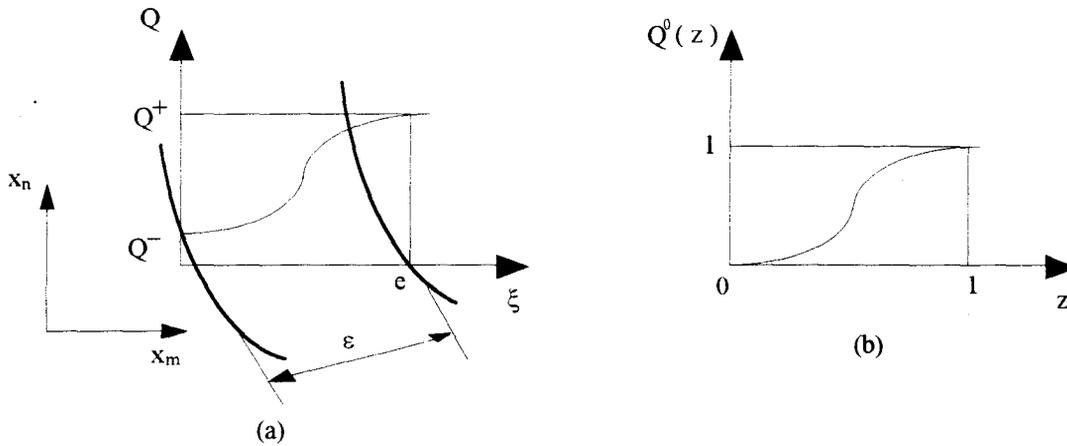


Fig. 4.13 - Fonctions Q et  $Q^0$

$Q$  et  $L$  peuvent être exprimé par une fonction  $Q^0$ , fonction régulière et dérivable, qui est indépendante de l'épaisseur  $\epsilon$  de la couche (Fig. 4.13b),  $Q$  et  $L$  sont exprimé comme :

$$Q(\xi) = Q^- + (Q^+ - Q^-) Q^0\left(\frac{\xi}{\epsilon}\right) \quad (4.55)$$

l'extension de fissure virtuelle est réalisé le long de la direction  $x_1$  (Fig. 4.12),  $q_2 = q_3 = 0$  et

on suppose que  $q_i = \left\{ \begin{array}{ll} l_1^- & \text{on } S^- \\ l_1^+ & \text{on } S^+ \end{array} \right\}$ , donc :

$$L(\xi) = l_1^- + (l_1^+ - l_1^-) Q^0\left(\frac{\xi}{\epsilon}\right) \quad (4.56)$$

avec  $Q^0(0) = 0$

et  $Q^0(1) = 1$

L'évaluation de l'intégrale de volume est comme suit :

$$\int_V \frac{\partial Q}{\partial x_k} L_k dV \quad \text{dans le cas limite } \epsilon \rightarrow 0.$$

substituant l'élément de volume de la couche

$$\begin{aligned}
 \int_V \frac{\partial Q}{\partial x_k} L_k dV &= \int_{S^+} \left\{ \int_0^e \frac{\partial Q}{\partial x_k} L_k \right\} dx_1 \mathbf{n} dS \\
 &= \int_{S^+} \left\{ \int_0^e \left( \frac{\partial Q}{\partial x_1} L_1 + \frac{\partial Q}{\partial x_2} L_2 + \frac{\partial Q}{\partial x_3} L_3 \right) \right\} dx_1 \mathbf{n} dS \\
 &= \int_{S^+} \left\{ \int_0^e \frac{\partial Q}{\partial x_1} L_1 \right\} dx_1 \mathbf{n} dS \quad (q_2 = q_3 = 0) \\
 \int_V \frac{\partial Q}{\partial x_k} L_k dV &= \int_{S^+} \left\{ \int_0^e \frac{\partial Q}{\partial \xi} L_1 d\xi \right\} \mathbf{n} dS \quad , \text{pour } \varepsilon \text{ or } e \rightarrow 0
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

Regardant l'intégrale interne

$$\int_0^e \frac{\partial Q}{\partial \xi} L_1 d\xi = \int_0^e \frac{\partial Q}{\partial \xi} \left( l_1^+ + (l_1^+ - l_1^-) Q^0\left(\frac{\xi}{e}\right) \right) d\xi \tag{4.58}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial Q}{\partial \xi} &= (Q^+ - Q^-) \frac{1}{e} \frac{\partial Q^0\left(\frac{\xi}{e}\right)}{\partial\left(\frac{\xi}{e}\right)} \\
 &= (Q^+ - Q^-) \frac{1}{e} \frac{\partial Q^0(z)}{\partial z} \quad \text{avec } z = \frac{\xi}{e}
 \end{aligned} \tag{4.59}$$

$\partial Q^0(z)/\partial z$  existe dans le cas limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  ou  $e \rightarrow 0$ , et  $\partial Q/\partial \xi$  n'est pas ainsi. Mais l'intégrale

$\int_0^e \frac{\partial Q}{\partial \xi} L_1 d\xi$  existe dans le cas limite

$$\begin{aligned}
 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^e \frac{\partial Q}{\partial \xi} L_1 d\xi &= \lim_{e \rightarrow 0} \int_0^e \frac{\partial Q}{\partial \xi} L_1 d\xi \\
 &= \lim_{e \rightarrow 0} \int_0^1 (Q^+ - Q^-) \frac{1}{e} \frac{\partial Q^0(z)}{\partial z} \left( l_1^+ + (l_1^+ - l_1^-) Q^0(z) \right) e dz \\
 &= \left\{ (Q^+ - Q^-) l_1^- \int_0^1 dQ^0 \right\} + \left\{ (Q^+ - Q^-) (l_1^+ - l_1^-) \int_0^1 \frac{\partial Q^0(z)}{\partial z} Q^0(z) dz \right\} \\
 &= (Q^+ - Q^-) l_1^- + (Q^+ - Q^-) (l_1^+ - l_1^-) \frac{1}{2} \\
 &= (Q^+ - Q^-) (l_1^+ + l_1^-) \frac{1}{2} \\
 &= (Q^+ - Q^-) m_1
 \end{aligned} \tag{4.60}$$

Ainsi, on arrive à

$$\int_{S^-} (Q^+ - Q^-) m_1 \mathbf{n} \, dS = \int_{S^+} Q^+ m_1 \mathbf{n} \, dS - \int_{S^+} Q^- m_1 \mathbf{n} \, dS \quad , \quad \text{pour } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (4.61)$$

et évaluant le dernier intégrale le long de la surface  $S^-$  à la place de  $S^+$  en prenant la direction de la normal  $\mathbf{n}$  sur  $S^-$

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial Q}{\partial x_k} L_k \, dV &= \int_{S^+} Q^+ m_1 \mathbf{n} \, dS + \int_{S^-} Q^- m_1 \mathbf{n} \, dS, \quad \text{pour } \varepsilon \rightarrow 0 \\ \Rightarrow \int_V \frac{\partial Q}{\partial x_k} L_k \, dV &= \int_{S=S^+ \cup S^-} Q m_1 \mathbf{n} \, dS \quad , \text{pour } \varepsilon \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (4.62)$$

Substituant  $Q$  par  $w$  et par  $\sigma_{ik} u_{i,1}$ ,  $L$  par  $q$  et selon l'égalité  $\text{div}_R \mathbf{b} = \left( \frac{\partial w}{\partial x_k} \right)_{\text{exp}}$ , on obtient

$$\int_V \frac{\partial b_{ik}}{\partial x_k} q_j \, dV = \int_S b_{1k} m_1 n_k \, dS, \quad \text{pour } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (4.63)$$

Le taux d'énergie libre  $G$  est réduit à l'intégrale  $J_1$  dans le cas de la translation d'une cavité ou une fissure dans la direction  $x_1$ . L'intégrale  $J$  dans le cas tridimensionnel pour des matériaux inhomogènes, est comme

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{V_1} \left( \sigma_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} - w \delta_{1k} \right) \frac{\partial q_1}{\partial x_k} \, dV - \int_S b_{1k} m_1 n_k \, dS \\ &= \int_{V_1} \left( \sigma_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} - w \delta_{1k} \right) \frac{\partial q_1}{\partial x_k} \, dV - \int_S \left( w \delta_{1k} - \sigma_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) m_1 n_k \, dS \end{aligned} \quad (4.64)$$

L'expression (4.64) est l'intégrale  $J$  dans le cas d'un matériaux hétérogène. Cette formule est composé de deux termes, le premier est l'intégrale volumique le long du front de fissure, et le second terme est une intégrale surfacique entourant toute inhomogénéité.

# **CHAPITRE 5**

## **FORMULATION PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS**

## **CHAPITRE 5**

### **FORMULATION PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS**

#### **5.1. INTRODUCTION :**

L'une des méthodes numériques les plus utilisées, est la méthode des éléments finis qui consiste à modéliser le milieu continu par subdivisions en régions (éléments finis). Les éléments sont reliés par un nombre fini de noeuds aux points nodaux (DHATT & TOUZOT [31] (1984)). De nombreux programmes généraux de calcul sont disponibles en industrie, par exemple NASTRAN, ADINA, TITUS et ANSYS.

Dans ce qui suit, le programme ANSYS est utilisé pour calculer les contraintes et les déformations aux points de Gauss pour une intégration numérique.

5.2. PRINCIPE :

Le programme de calcul de l'expression de l'intégrale J, donnée par (4.64), comporte une intégration volumique le long du front de fissure et une intégration surfacique autour de l'hétérogénéité. Les éléments utilisés sont isoparamétriques, à huit noeuds et à vingt noeuds, à configuration quart-points.

Dans l'hypothèse d'un comportement élastique, on a la relation

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} \quad (5.1)$$

où,  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  et  $D$  sont respectivement, le vecteur de contraintes, de déformations et la matrice d'élasticité.

La figure 5.1 montre l'élément à huit et à vingt noeuds.

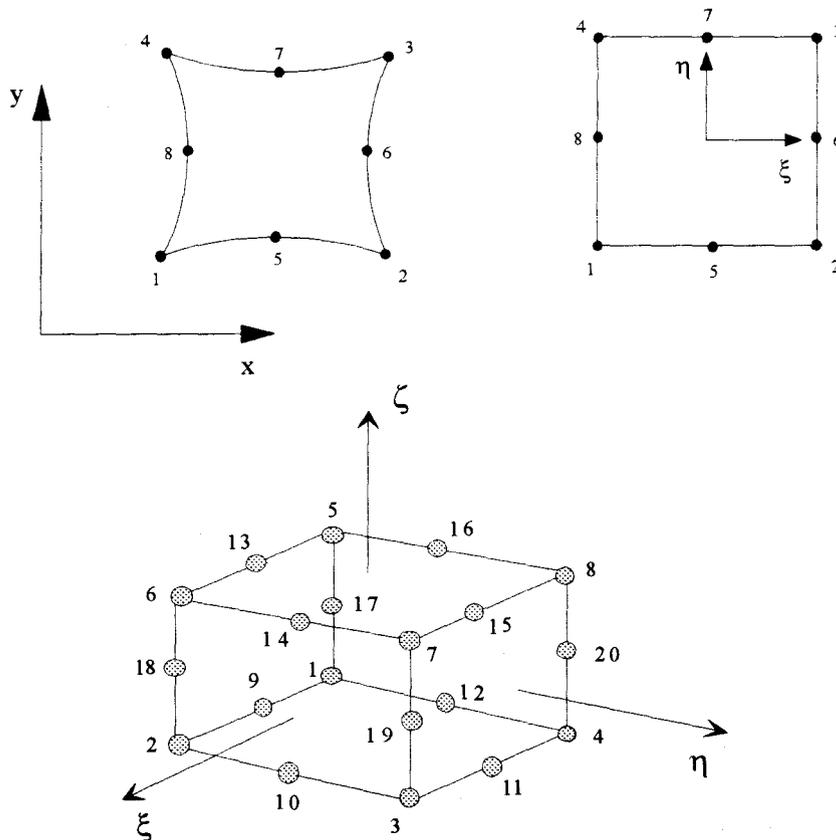


Fig. 5.1 - Élément à 8 noeuds et à 20 noeuds -

### 5.3. EVALUATION DE L'INTEGRALE J :

La méthode est basée sur la formulation de la mécanique des milieux continus et sur le principe de l'extension de fissure virtuelle. La formulation est facilement incorporée dans le programme d'éléments finis, avec une part importante du programme post-processeur du logiciel ANSYS qui donne les contraintes et les déplacements pour le calcul de l'intégrale de volume.

Le programme utilisé pour le calcul de l'intégrale J de contour est développé par OWEN & FAWKES [88] (1983). L'extension aux matériaux hétérogènes en bidimensionnels est développée par SCHULZ [96] (1992).

On discute l'implantation dans un premier temps de l'intégrale de surface et en suite l'intégrale  $J_1$  dans le cas inhomogène décrits ci-après :

$$J = \int_A \left( \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - w \delta_{ij} \right) \frac{\partial q_1}{\partial x_j} dA \quad (5.2)$$

$$J_1 = \int_{V_1} \left( \sigma_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - w \delta_{ik} \right) \frac{\partial q_1}{\partial x_k} dV - \int_S \left( w \delta_{ik} - \sigma_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) m_l n_k dS \quad (5.3)$$

#### 5.3.1. Intégrale de surface :

La formule (5.2) est mise sous forme d'éléments finis. Un système de coordonnées locales  $\xi$  et  $\eta$  est associé à chaque élément quadratique à huit noeuds ( $-1 \leq \xi_i \leq 1$ ,  $i = 1, 2$ ), les fonctions d'interpolations sont construites comme suit :

– noeud au coin :

$$\xi_0 = \xi \xi_i, \quad \eta_0 = \eta_i \eta \quad (5.4)$$

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(\xi_0 + \eta_0 - 1) \quad (5.5)$$

– noeud des milieux des cotés :

$$\xi_i = 0 \quad N_i = \frac{1}{2} (1 - \xi^2)(1 + \eta_0) \quad (5.6)$$

$$\eta_i = 0 \quad N_i = \frac{1}{2} (1 + \xi_0)(1 - \eta^2) \quad (5.7)$$

La relation entre les coordonnées (x,y) et les déplacements (u,v) globaux et locaux est donnée par :

$$x_i = \sum_{k=1}^8 N_k X_{ik} \quad (i = 1,2) \quad (5.8)$$

$$u_i = \sum_{k=1}^8 N_k U_{ik} \quad (i = 1,2) \quad (5.9)$$

où,  $X_{ik}$  sont les coordonnées nodales et  $U_{ik}$  les déplacements nodaux.

Dans l'analyse d'éléments finis, l'aire A (Fig. 5.2.) est divisée en éléments. L'expression de  $q_1$  à l'intérieur d'un élément est donnée par :

$$q_1 = \sum_{I=1}^8 N_I Q_{1I} \quad (5.10)$$

où,  $Q_{1I}$  sont les valeurs nodales pour le noeud I. De la définition de  $q_1$ ,  $Q_{1I} = 1$  si le noeud I est sur  $\Gamma_1$ ,  $Q_{1I} = 0$  si le noeud I est sur  $\Gamma_2$  et  $Q_{1I} \in [0, 1]$  si le noeud I varie entre  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ .

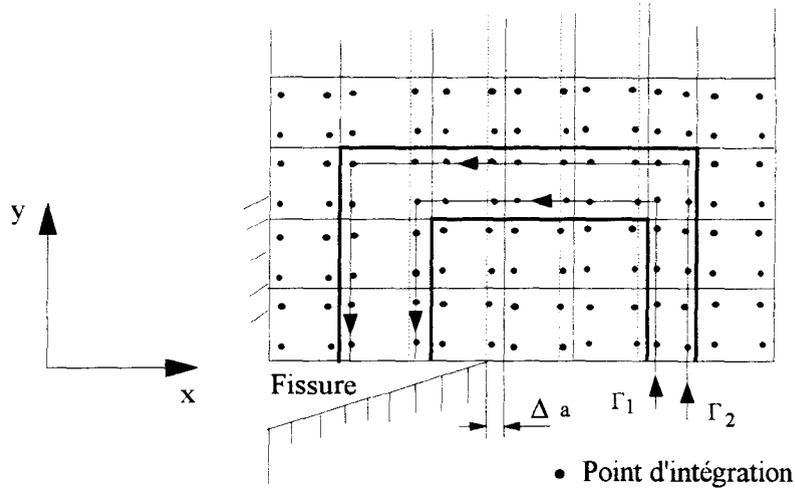


Fig. 5.2 - Intégrale numérique de surface A formée par les contours  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  -

Utilisant les équations (5.8)-(5.10), le gradient de  $q_1$  dans un élément est donné par :

$$\frac{\partial q_1}{\partial x_j} = \sum_{I=1}^8 \sum_{J=1}^2 \frac{\partial N_I}{\partial \eta_J} \frac{\partial \eta_J}{\partial x_j} Q_{II} \quad (5.11)$$

$\frac{\partial \eta_J}{\partial x_j}$  est la matrice Jacobien de la transformation (éqs. (5.8) et (5.9)) :

$$|J| = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (5.12)$$

avec l'intégration de Gauss 2 x 2 ou 3 x 3, la forme discrétisée de l'intégrale de surface est :

$$J = \sum_{n=1}^N \sum_{lm=1}^M \sum_{lp=1}^P \left( \left[ \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} - w \delta_{lj} \right] \frac{\partial q_1}{\partial x_j} |J| \right)_{\xi_m, \eta_p} w_m w_p \quad (5.13)$$

la quantité entre parenthèses est évaluée à chaque point de Gauss.  $w_i w_j$  sont les fonctions du poids, N est le nombre d'éléments dans l'aire A et M et P sont respectivement les nombres des points de Gauss dans la direction x et y.

On considère le contour d'intégration de l'intégrale J (éq. (5.13)) suivant  $\xi = c^{te}$  ou  $\eta = c^{te}$  (Fig. 5.3) :

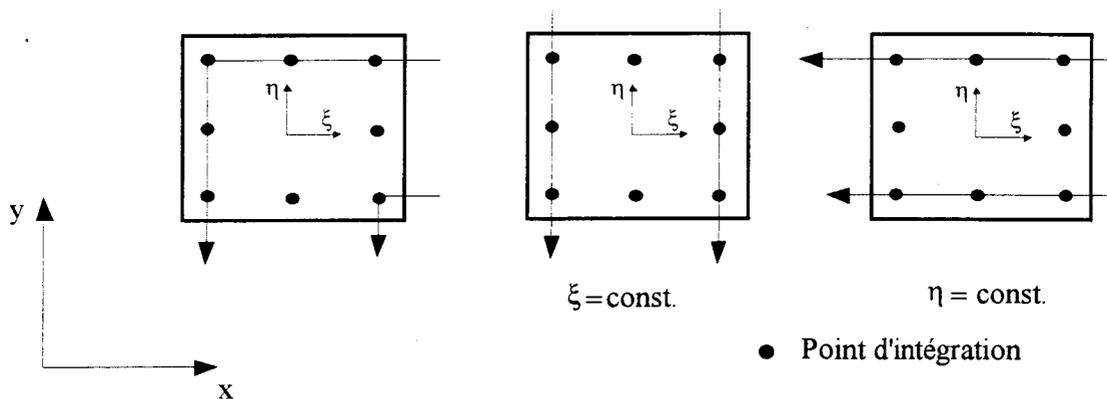


Fig. 5.3. - Différents contours pour calculer l'intégrale J -

L'expression (5.11) est décomposée suivant x et y :

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_1}{\partial x_j} &= \frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial q_1}{\partial y} \\ \frac{\partial q_1}{\partial x} &= \sum_{I=1}^8 \left( \frac{\partial N_I}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_I}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) Q_{II} \\ \frac{\partial q_1}{\partial y} &= \sum_{I=1}^8 \left( \frac{\partial N_I}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N_I}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) Q_{II} \end{aligned} \quad (5.14)$$

L'expression (5.13) est décomposée en deux termes  $J_x$  et  $J_y$  suivant x et y :

$$\begin{aligned} J_x &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \sum_{p=1}^P \left( \left[ \sigma_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \sigma_{21} \frac{\partial u_2}{\partial x} - w \right] \frac{\partial q_1}{\partial x} |J| \right)_{\xi_m, \eta_p} w_m w_p \\ J_y &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \sum_{p=1}^P \left( \left[ \sigma_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \sigma_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x} - w \right] \frac{\partial q_1}{\partial y} |J| \right)_{\xi_m, \eta_p} w_m w_p \end{aligned} \quad (5.15)$$

### 5.3.2. Intégration volumique :

L'implantation de l'expression 3-D (éq. (5.3)) en éléments finis est divisée en deux parties : une intégration volumique du premier terme et une intégration surfacique du second terme de l'équation (5.3).

#### 5.3.2.1. Intégrale de volume :

Les fonction de formes pour un élément volumique isoparamétrique à 20 noeuds ( $-1 \leq \xi_i \leq 1$ ,  $i=1, 2, 3$ ) sont construits comme suit :

– noeud au coin :

$$\xi_0 = \xi \xi_i, \quad \eta_0 = \eta_i \eta, \quad \zeta_0 = \zeta \zeta_i \quad (5.16)$$

$$N_i = \frac{1}{8} (1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0)(\xi_0 + \eta_0 + \zeta_0 - 2) \quad (5.17)$$

– noeud des milieux des cotés :

$$\xi_i = 0, \quad \eta_i = \pm 1, \quad \zeta_i = \pm 1 \quad (5.18)$$

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi^2)(1 + \eta_0)(1 - \zeta_0) \quad (5.19)$$

Les relations entre les coordonnées et les déplacements globaux et locaux est donnée comme suit :

$$\begin{aligned} x_i &= \sum_{k=1}^{20} N_k X_{ik} & (i = 1,2,3) \\ u_i &= \sum_{k=1}^{20} N_k U_{ik} & (i = 1,2,3) \end{aligned} \quad (5.20)$$

Lorsque l'on connaît les déplacements en tout point intérieur à l'élément, on peut déterminer les déformations en utilisant la matrice [B]. En notation matricielle, la déformation peut être écrite sous la forme :

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{B}] \{\mathbf{U}\}^e \quad (5.21)$$

avec

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial N_i / \partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial N_i / \partial z \\ \partial N_i / \partial y & \partial N_i / \partial x & 0 \\ 0 & \partial N_i / \partial z & \partial N_i / \partial y \\ \partial N_i / \partial z & 0 & \partial N_i / \partial x \end{bmatrix}$$

La matrice  $[D]$  reliant les déformations  $\{\varepsilon\}$  et les contraintes  $\{\sigma\}$  est sous la forme :

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} = [D] \{\varepsilon\} \quad (5.22)$$

La matrice  $[D]$  est exprimée en fonction du module de Young  $E$  et du coefficient de Poisson  $\nu$ , sous la forme :

– en contraintes planes :

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \text{Sym} & & & 1-\nu/2 & 0 & 0 \\ & & & & 1-\nu/2 & \\ & & & & & 1-\nu/2 \end{bmatrix}$$

– en déformations planes :

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \text{Sym} & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

L'expression de  $q_1$  est sous la forme :

$$q_1 = \sum_{I=1}^{20} N_I(\xi, \eta, \zeta) Q_{jI} \quad (5.23)$$

où,  $Q_{jI}$  sont les valeurs nodales pour le noeuds I.  $Q_{jI} = 1$  si le noeud est sur la surface  $S_1$  et  $Q_{jI} = 0$  si le noeud est sur la surface  $S_2$  (Fig. 5.4). Pour les noeuds à l'intérieur de  $V_1$ ,  $Q_{jI}$  sont données par interpolation entre les noeuds sur  $S_1$  et  $S_2$ .

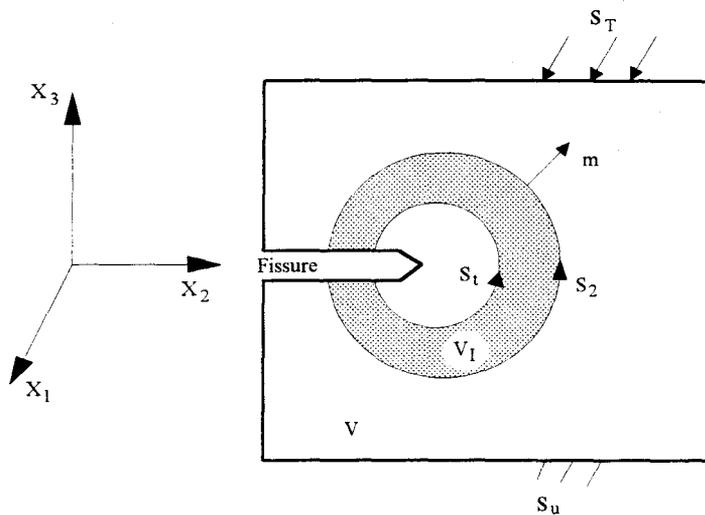


Fig. 5.4 - Intégrale de volume  $V_1$  formée par les surfaces  $S_1$  et  $S_2$  -

En utilisant les expressions (5.20) et (5.23), le gradient de  $q_j$  est exprimé comme suit:

$$\frac{\partial q_i}{\partial x_j} = \sum_{I=1}^{20} \sum_{J=1}^3 \left( \frac{\partial N_I}{\partial \eta_J} \frac{\partial \eta_J}{\partial x_j} \right) Q_{iI} \quad (5.24)$$

$\frac{\partial \eta_J}{\partial x_j}$  est la matrice Jacobien de la transformation (5.20).

La matrice Jacobien et son inverse sont sous la forme suivante :

$$\{J\} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} \quad \{J\}^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{vmatrix}$$

La forme discrétisée de l'intégrale de volume en utilisant une intégration de Gauss 2x2x2 est :

$$J_v = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \sum_{p=1}^P \sum_{r=1}^R \left( \sigma_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - w \delta_{jk} \right) \frac{\partial q_i}{\partial x_k} |J| \Big|_{\xi_m, \eta_p, \zeta_r} w_m w_p w_r \quad (5.25)$$

où, N est le nombre d'éléments à l'intérieur du volume  $V_I$ .

M, P, R : est le nombre de points de Gauss dans les directions x, y et z, respectivement.

Le gradient de  $q_i$  peut se décomposer suivant trois composantes :

$$\frac{\partial q_i}{\partial x_k} = \frac{\partial q_1}{\partial x_k} + \frac{\partial q_2}{\partial x_k} + \frac{\partial q_3}{\partial x_k} \quad (5.26)$$

L'extension de fissure est dans une seule direction et pour les éléments quadratiques,

$q_2 = q_3 = 0$  :

$$\frac{\partial q_1}{\partial x_k} = \sum_{I=1}^{20} \sum_{J=1}^3 \left( \frac{\partial N_I}{\partial \eta_J} \frac{\partial \eta_J}{\partial x_1} \right) Q_{II} \quad (5.27)$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_1}{\partial x} &= \sum_{I=1}^{20} \left( \frac{\partial N_I}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_I}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial N_I}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) Q_{II} \\ \frac{\partial q_1}{\partial y} &= \sum_{I=1}^{20} \left( \frac{\partial N_I}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N_I}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial N_I}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) Q_{II} \\ \frac{\partial q_1}{\partial z} &= \sum_{I=1}^{20} \left( \frac{\partial N_I}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial N_I}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial N_I}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) Q_{II} \end{aligned} \quad (5.28)$$

Enfin, les composantes de  $J_v$  et ces valeurs suivant  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont données comme suit :

$$\begin{aligned}
 J_{v_x} &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \sum_{p=1}^P \sum_{r=1}^R \left( \left[ \sigma_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \sigma_{21} \frac{\partial u_2}{\partial x} + \sigma_{31} \frac{\partial u_3}{\partial x} - w \right] \frac{\partial q_1}{\partial x} |J| \right)_{\xi_m, \eta_p, \zeta_r} w_m w_p w_r \\
 J_{v_y} &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \sum_{p=1}^P \sum_{r=1}^R \left( \left[ \sigma_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \sigma_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x} + \sigma_{32} \frac{\partial u_3}{\partial x} \right] \frac{\partial q_1}{\partial y} |J| \right)_{\xi_m, \eta_p, \zeta_r} w_m w_p w_r \quad (5.29) \\
 J_{v_z} &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \sum_{p=1}^P \sum_{r=1}^R \left( \left[ \sigma_{13} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \sigma_{23} \frac{\partial u_2}{\partial x} + \sigma_{33} \frac{\partial u_3}{\partial x} \right] \frac{\partial q_1}{\partial z} |J| \right)_{\xi_m, \eta_p, \zeta_r} w_m w_p w_r
 \end{aligned}$$

### 5.3.2.2. Intégrale surfacique :

L'intégrale de surface est calculée en utilisant les points d'intégration de Gauss. Le contour d'intégration est une surface entourant n'importe quelle inhomogénéité comme le montre la figure 5.5.

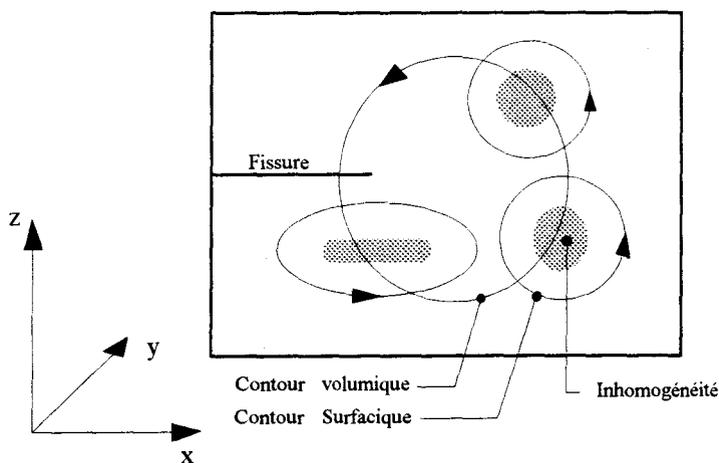


Fig. 5.5 - Contour d'intégration autour de l'hétérogénéité -

L'intégrale de surface est faite suivant le plan  $(\xi, \eta) = Cste$  et suivant le plan  $(\eta, \zeta) = Cste$  (Fig. 5.6).

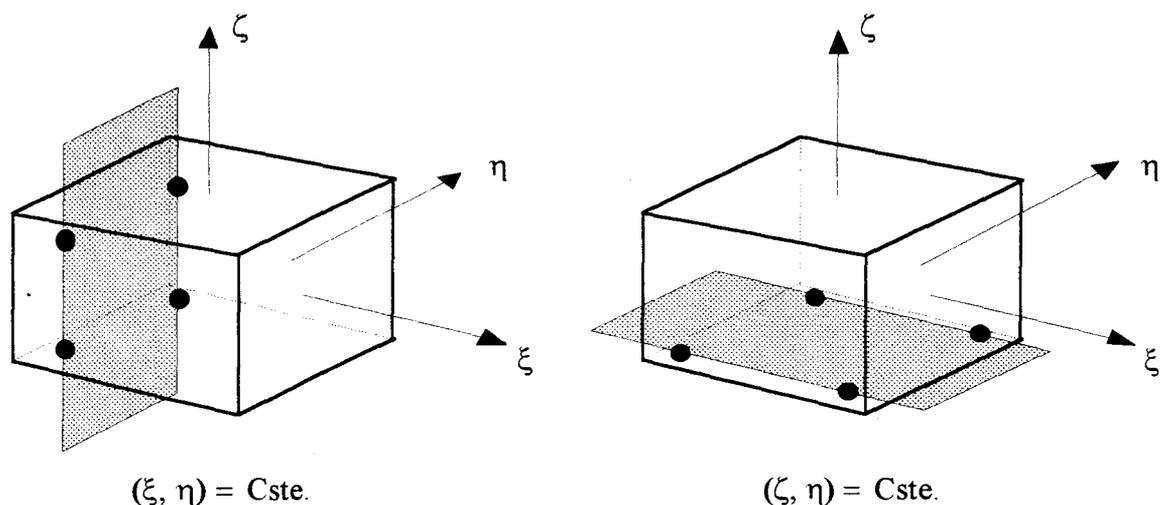


Fig. 5.6 - Intégration suivant un plan -

L'intégrale  $J_s$  de surface de l'équation (5.3) est exprimée par :

$$J_s = \int_s \left( w \delta_{1k} - \sigma_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) m_1 n_k dS \quad (5.30)$$

L'évaluation de cette intégrale dépend de la surface d'intégration  $((\xi, \eta) = \text{Cste}, (\eta, \zeta) = \text{Cste})$  (Fig. 5.6).

L'intégrale de surface s'écrit en fonction des coordonnées de surface qui sont en générale  $(\xi, \eta)$ ,  $(\xi, \zeta)$  ou  $(\eta, \zeta)$ . Dans ce cas l'intégration est suivant :

(a) - le plan  $(\xi, \eta)$   $((\xi, \eta) = \text{Cste})$

les composantes du vecteur normal  $\mathbf{n}$  sont exprimées par :

$$\begin{aligned}
 n_1 &= \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) / |J| \\
 n_2 &= \left( \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) / |J| \\
 n_3 &= \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) / |J|
 \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$\text{où, } |J| = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2};$$

la surface élémentaire dS est :

$$dS = |J| d\xi d\eta \quad (5.32)$$

(b) - le plan  $(\eta, \zeta)$  ( $(\eta, \zeta) = \text{Cste}$ )

les composantes du vecteur normal  $\mathbf{n}$  sont exprimées par

$$\begin{aligned} n_1 &= \left(\frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \eta}\right) / |J| \\ n_2 &= \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \eta}\right) / |J| \\ n_3 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial x}{\partial \eta}\right) / |J| \end{aligned} \quad (5.33)$$

$$\text{où, } |J| = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2};$$

la surface élémentaire dS est :

$$dS = |J| d\zeta d\eta \quad (5.34)$$

L'énergie de déformation élastique peut s'écrire sous la forme :

$$w = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + \sigma_{xy} \varepsilon_{xy} + \sigma_{yz} \varepsilon_{yz} + \sigma_{xz} \varepsilon_{xz}) \quad (5.35)$$

En utilisant les équations précédentes (5.31)-(5.35), on peut exprimer  $J_s$  comme suit :

$$J_s = \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left[ \left( \sigma_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} - w \delta_{ik} \right) m_1 n_k |J| \right]_{\xi_i, \eta_j} w_i w_j \quad (5.36)$$

où,  $N$  est le nombre d'éléments formant la surface  $S$ ,  $I$  et  $J$  sont respectivement, les nombres de points de Gauss dans les directions  $x$  et  $y$ . L'expression entre crochets est évaluée aux points de Gauss  $i$  et  $j$ . Les expressions (5.29), (5.36) sont déterminées numériquement à l'aide d'un programme réalisé en fortran. Les déplacements, les déformations et les contraintes au points de Gauss sont calculés en utilisant le code ANSYS.

## **CHAPITRE 6**

**EVALUATION DES RESULTATS NUMERIQUES**

## CHAPITRE 6

### EVALUATION DES RESULTATS NUMERIQUES

#### 6.1. INTRODUCTION :

Le chapitre précédent nous a permis de présenter la formulation par la méthode des éléments finis de l'intégrale J en tridimensionnelle dans les milieux inhomogènes. Nous proposons maintenant quelques résultats numériques afin de mettre en lumière d'une part, le comportement de fissure en présence d'une hétérogénéité en 2-D et en 3-D et d'autre part, de vérifier le résultat théorique de l'intégrale J dans les milieux inhomogènes en 3-D.

Afin de montrer l'efficacité de notre formulation, nous avons mené une étude comparative avec le modèle bidimensionnel développé par WEICHERT & SCHULZ [109] (1993).

## 6.2. EVALUATION DE L'INTEGRALE J :

L'intégrale J est évaluée numériquement en calculant l'expression sous l'intégrale au points de Gauss dans chaque élément. La valeur totale de l'intégrale J est donnée en sommant les valeurs de l'intégré dans tous les éléments formant le contour d'intégration.

En 2-D, le calcul de l'intégrale J est réalisé par le programme PCRACK (OWEN & FAWKES [88] (1983) et SCHULZ [96] (1992)). Par contre en 3-D, on utilise le code de calcul ANSYS ; les déplacements, les contraintes et les déformations sont incorporés dans un programme en fortran pour évaluer l'intégrale J dans le cas inhomogène (Fig. 6.1).

## 6.3. TYPE D'ELEMENTS UTILISES :

Nous considérons l'intégration le long d'un contour, passant par les points de Gauss, entourant la pointe de fissure ou l'hétérogénéité. Le choix du nombre de points de Gauss dépend du type d'éléments utilisés ; le nombre de points doit être aussi faible que possible afin de diminuer le volume de calcul.

Nous avons utilisé des éléments quadratiques isoparamétriques quart-points à 8 noeuds pour le modèle 2-D avec 2x2 ou 3x3 points d'intégrations dans chaque élément, et à 20 noeuds avec 2x2x2 points d'intégrations dans chaque élément pour le modèle 3-D. Les déplacements, les contraintes et les déformations sont obtenus aux points de Gauss pour le problème 2-D et 3-D.

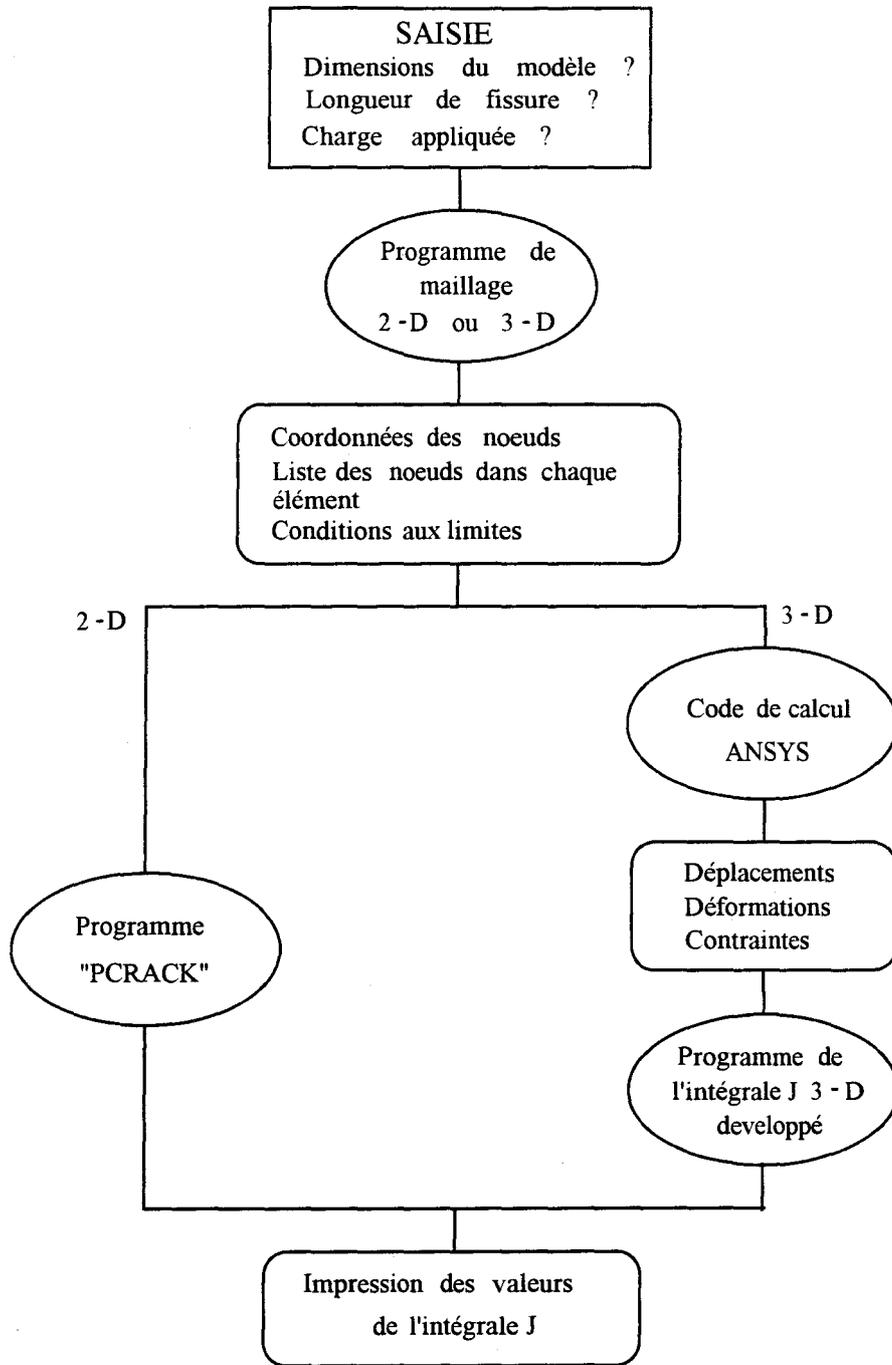


Fig. 6.1 - Schéma de calcul de l'intégrale J en 2-D et en 3-D -

6.4. QUELQUES EXEMPLES NUMERIQUES :

6.4.1. Influence de l'inclusion sur le front de fissure :

6.4.1.1. Fissure en présence d'une inclusion en 2-D :

On analyse l'influence de l'inclusion sur les valeurs de l'intégrale J d'une fissure latérale de largeur finie dans des échantillons soumis à une charge répartie. L'intégrale J de contour est évaluée en utilisant le programme PCRAK. Due aux conditions de symétrie, la moitié du corps est modélisée (Fig. 6.2) :

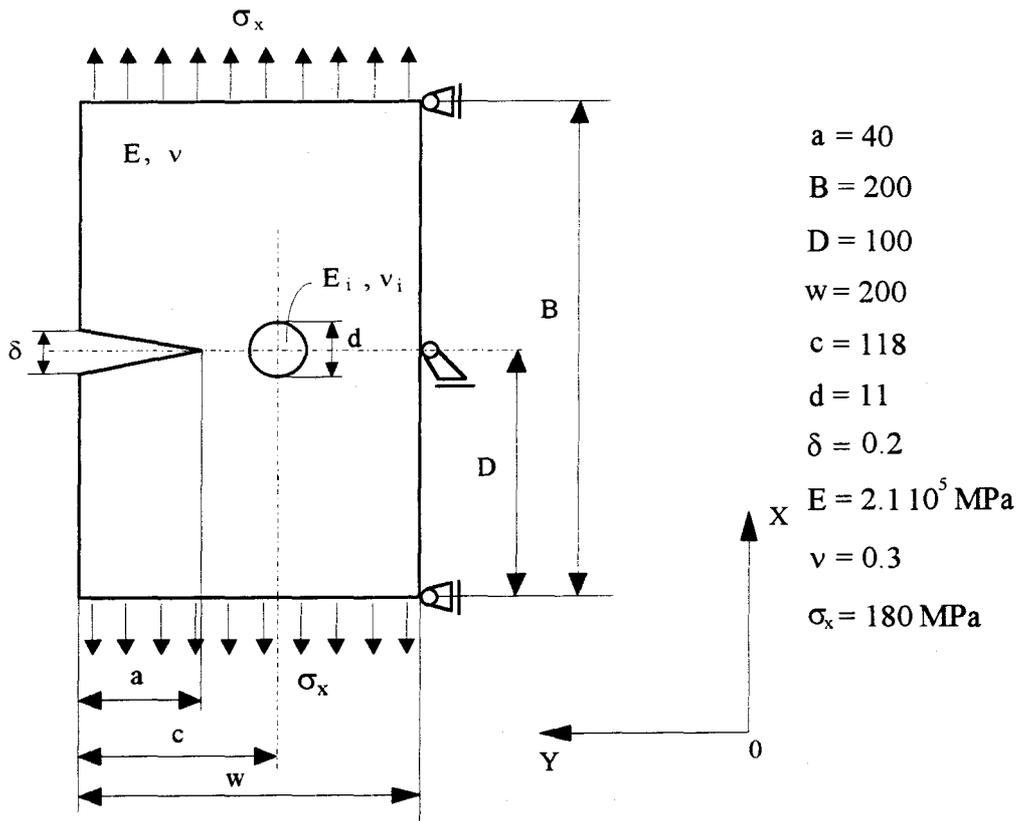


Fig. 6.2

les données géométriques sont en mm.

Le facteur d'intensité de contrainte  $K_I$  est évalué par l'équation suivante :

$$K_I = \sqrt{E \cdot J}$$

où,  $E$  est le module de Young,  $E = 2.1 \cdot 10^5$  MPa.

**1°/ Cas d'une inclusion :**

**(a) - Influence du module de Young  $E_i$  de l'inclusion :**

L'intégrale  $J$  est évaluée pour différents modules de Young de l'inclusion. Le module de Young  $E_i$  de l'inclusion est compris entre ( $10^5$  MPa -  $2 \cdot 10^5$  MPa ) pour les inclusions doux et entre ( $2.8 \cdot 10^5$  MPa -  $7 \cdot 10^5$  MPa ) pour les durs. La figure 6.3 montre l'effet de la décroissance de  $J$  lorsque le rapport  $\frac{E_i}{E}$  augmente.

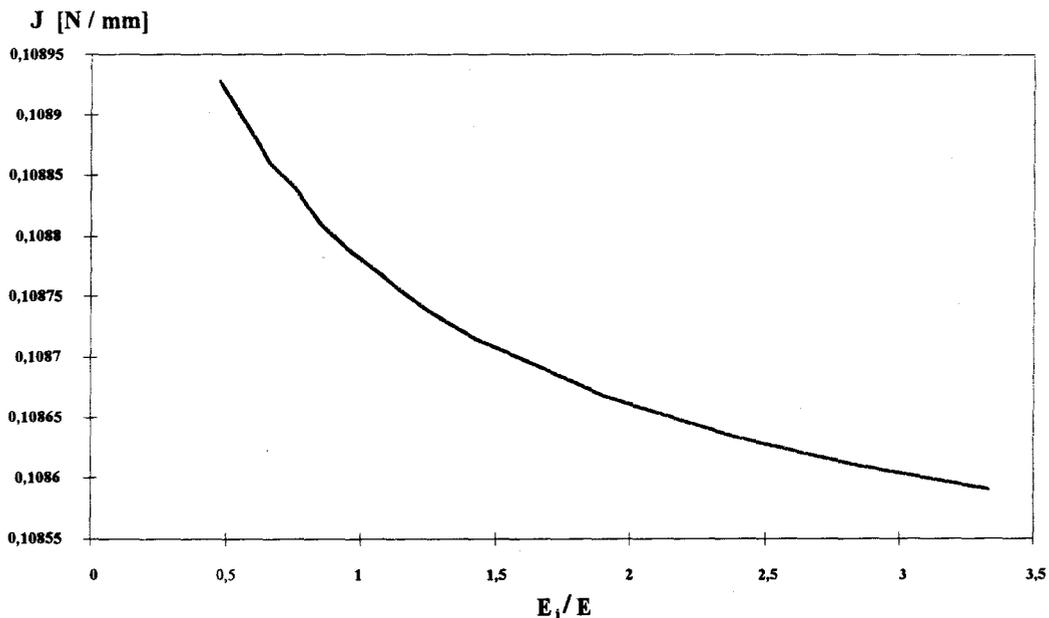


Fig. 6.3 - Variation de  $J$  avec le rapport  $E/E_i$  -

(b) - Influence de la distance  $r$  entre l'inclusion et la fissure :

Nous constatons que l'inclusion influe considérablement sur l'intégrale  $J$  suivant deux cas :

– le rapport  $\frac{E_i}{E} < 1$ , les résultats obtenus montrent la croissance du rapport  $\frac{J}{J_0}$  ( $J_0$  est la valeur de l'intégrale  $J$  dans le cas homogène) quand l'inclusion s'approche de la pointe de fissure, cela peut conduire à une instabilité de la fissure.

– le rapport  $\frac{E_i}{E} > 1$ , alors que le rapport  $\frac{J}{J_0}$  diminue lorsque la distance entre l'inclusion et la pointe de fissure décroît, la fissure se stabilise.

On constate que les deux courbes tendent vers une valeur  $J_0$  quand  $\frac{r}{a}$  augmente ;  $J_0$  est considérée comme une valeur de  $J$  dans le cas d'un matériau homogène. Ces résultats sont en accord avec LI & CHUDNOVSKY [65] (1993), Fig. 6.4, et aussi avec ceux trouvés par MÜLLER [79] (1989) et MÜLLER & SCHMAUDER [81] (1993) pour un calcul à l'échelle microscopique.

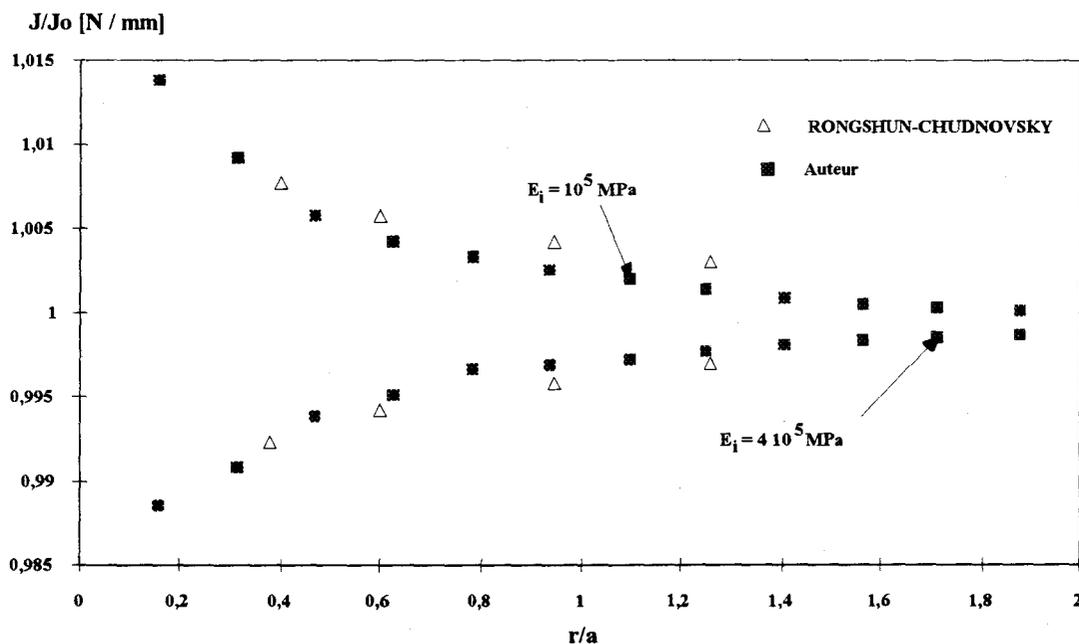


Fig. 6.4 - Courbe de  $J/J_0$  en fonction de  $r/a$  -

2°/ Cas de deux inclusions :

Nous considérons la même structure (Fig. 6.2), en présence de deux inclusions situées de part et d'autre de la fissure (Fig.6.5)

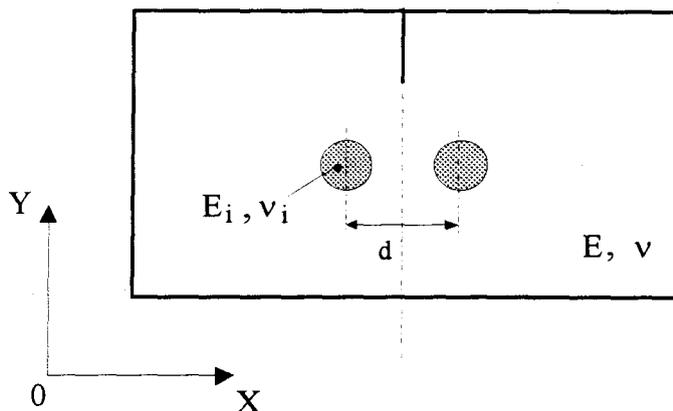


Fig. 6.5

(a) - Influence du module de Young  $E_i$  de l'inclusion

La présence de deux inclusions de part et d'autre de la fissure influe sur l'intégrale  $J$ .

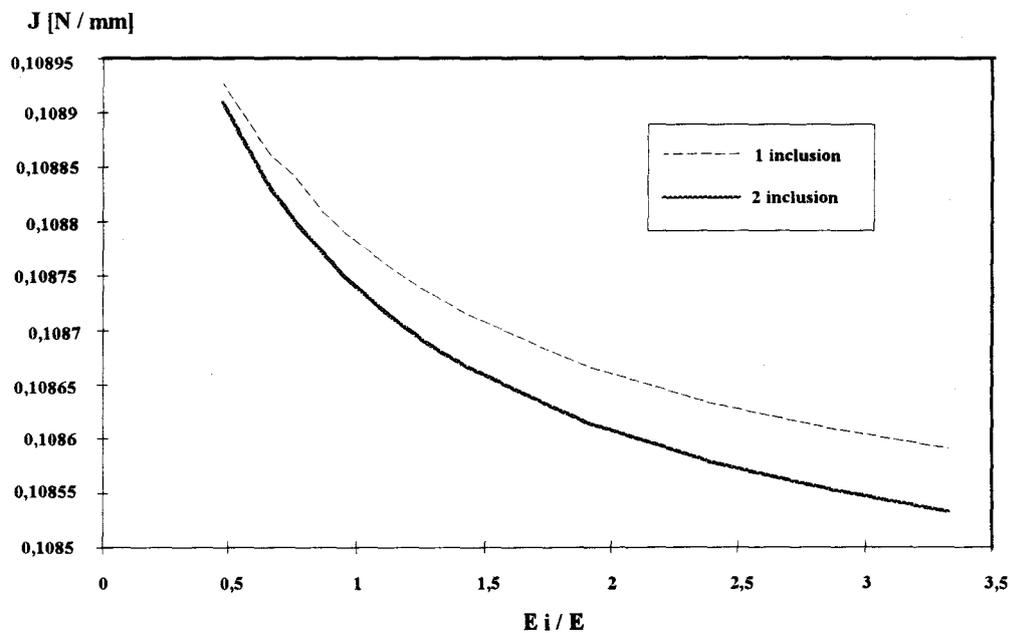


Fig. 6.6 - Variation de  $J$  en fonction de  $E_i/E$  -

(b) - Influence de la distance entre deux inclusions :

L'intégrale J varie dans deux cas (Fig. 6.7) :

–  $\frac{E_i}{E} > 1$  : la valeur de J croît quand la distance diminue, cela s'explique que lorsque les deux inclusions sont plus proches, on peut les considérer comme une seule ce qui provoque l'instabilité de la fissure. Par contre lorsque la distance entre les deux inclusions augmente, la fissure a tendance à se comprimer et l'intégrale J diminue.

–  $\frac{E_i}{E} < 1$  : la distance d diminue, la concentration de contraintes autour des deux inclusions augmente avec la diminution de la distance d, ce qui rend la fissure stable.

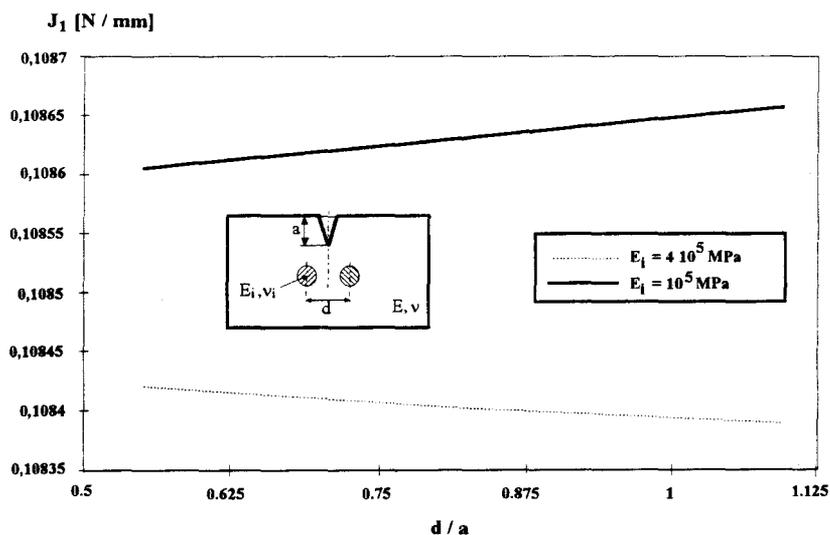
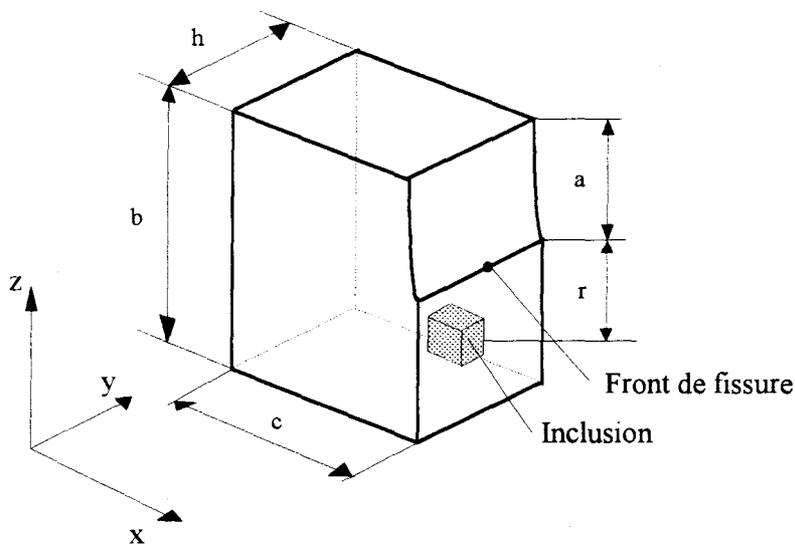


Fig. 6.7 - Variation de J avec la distance entre deux inclusions -

6.4.1.2. Fissure en présence d'une inclusion en 3-D :

On considère un corps tridimensionnel avec une fissure latérale de dimensions  $\frac{a}{b} = 0.5$ ,  $\frac{c}{b} = 1$  et  $h = 20$  (Fig. 6.8). Dans ce qui suit, on étudie l'influence de la variation du module de Young de l'inclusion (l'inclusion est située au milieu du front de fissure) et de la distance  $r$  ( $r$  est la distance entre l'inclusion et le front de fissure) sur l'intégrale  $J$ .

– Modèle de calcul :



$$\frac{a}{b} = 0.5, \frac{c}{b} = 1, h = 20 \text{ [mm]}, r = 16 \text{ [mm]}, \sigma = 18 \text{ MPa}$$

Dimensions de l'inclusion (14, 9, 11)

Fig. 6.8

Les courbes des résultats obtenus ont la même allure décroissante que celles obtenues par le modèle bidimensionnel de la figure 6.3. La Fig. 6.9 montre que plus l'inclusion durcit, le facteur d'intensité de contraintes devient faible pour les différentes positions ( $y$ ). Les deux courbes obtenues pour les différentes positions ( $y = 0, 10$  et  $20$ ) et pour les différentes distances  $d$ , convergent vers une valeur considérée comme une valeur de  $K$  dans le cas d'un matériau homogène (Fig. 6.10). On montre, dans la figure 6.11, la distribution du facteur d'intensité de contraintes le long du front de fissure.

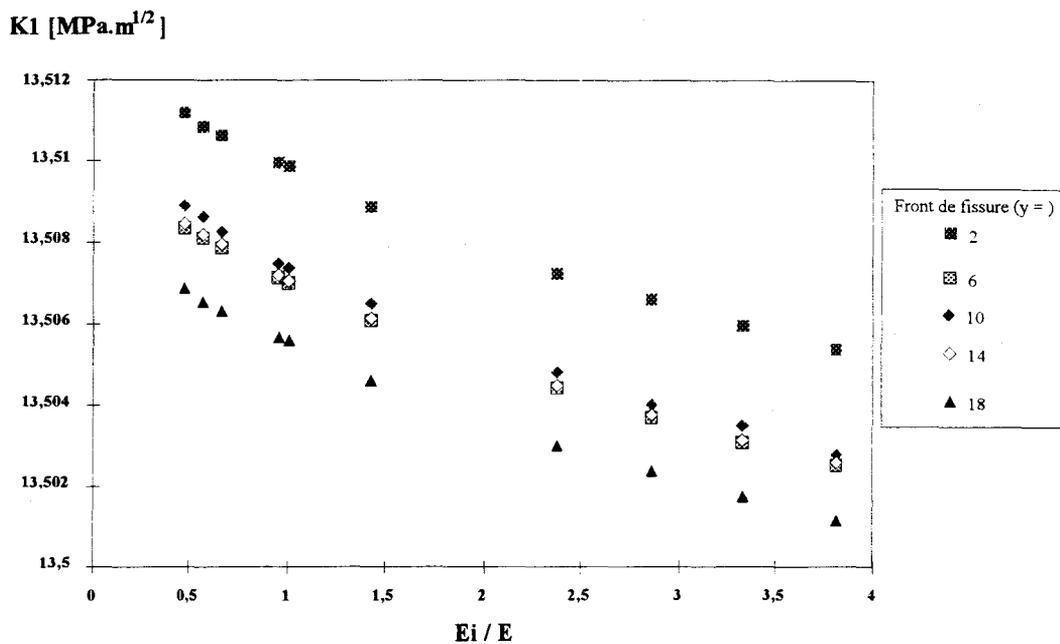


Fig. 6.9 - Variation de  $K_1$  pour différents  $E_i$  de l'inclusion -

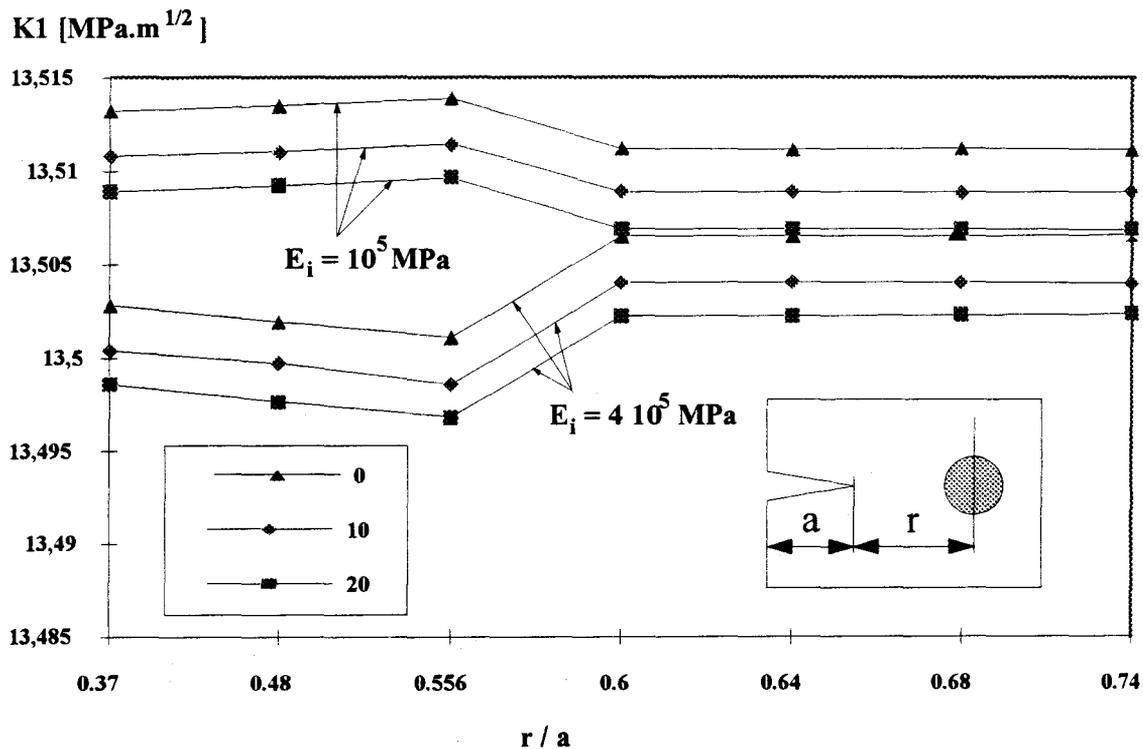


Fig. 6.10 - Variation  $K_1$  avec la distance  $r$  entre la fissure et inclusion -

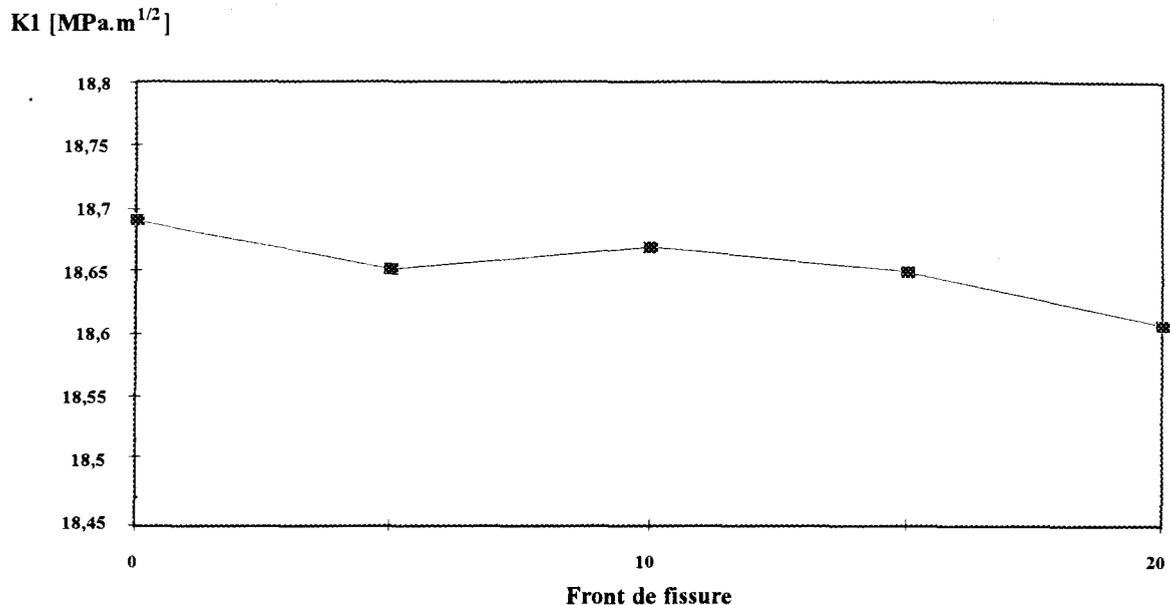
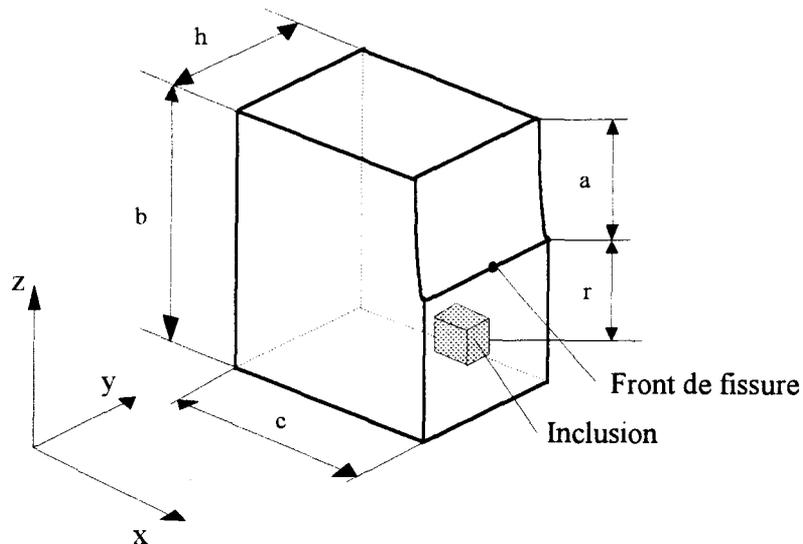


Fig. 6.11- Variation de  $K_I$  le long du front de fissure -

#### 6.4.2. Evaluation de l'intégrale J de volume en milieux hétérogènes :

L'objet de ce paragraphe est d'illustrer l'interprétation physique de l'intégrale J ou du taux d'énergie libre G par un calcul numérique dans le cas d'un matériau inhomogène en tenant compte du second terme de l'équation (5.3). Les contraintes, les déformations et les déplacements sont calculés en utilisant le code de calcul ANSYS ; l'intégrale J est évaluée en utilisant une méthode d'intégration numérique. Pour cela, on considère un corps fissuré avec une inclusion au milieu de front de fissure ( $y = 20$ ) à une distance  $r$  (Fig. 6.12). Les résultats obtenus de l'intégrale J du milieu inhomogène, de l'équation (4.64), seront comparés avec ceux de l'intégrale J du milieu homogène (éq. (4.10)).

– Modèle de calcul :



$\frac{a}{b} = 0.5, \frac{c}{b} = 1, h = 40$  [mm],  $\sigma = 180$  MPa  
 Dimensions de l'inclusion (14, 9, 11),  $r = 27$

Fig. 6.12

L'évaluation de l'intégrale J de volume (éq. (4.10)) est obtenue pour les différents contours et le long du front de fissure (Fig. 6.13). On constate que, l'intégrale J décroît de 12% (le long du contour 4) et de 6% (le long du contour 5) (Fig. 6.14) par rapport à l'intégrale J de volume en milieu inhomogène (éq. (4.64)) (Fig. 6.15). Cette diminution est due à la présence de l'inclusion le long des contours 4 et 5. Le même comportement est observé en 2-D (WEICHERT & SCHULZ [109] (1993)).

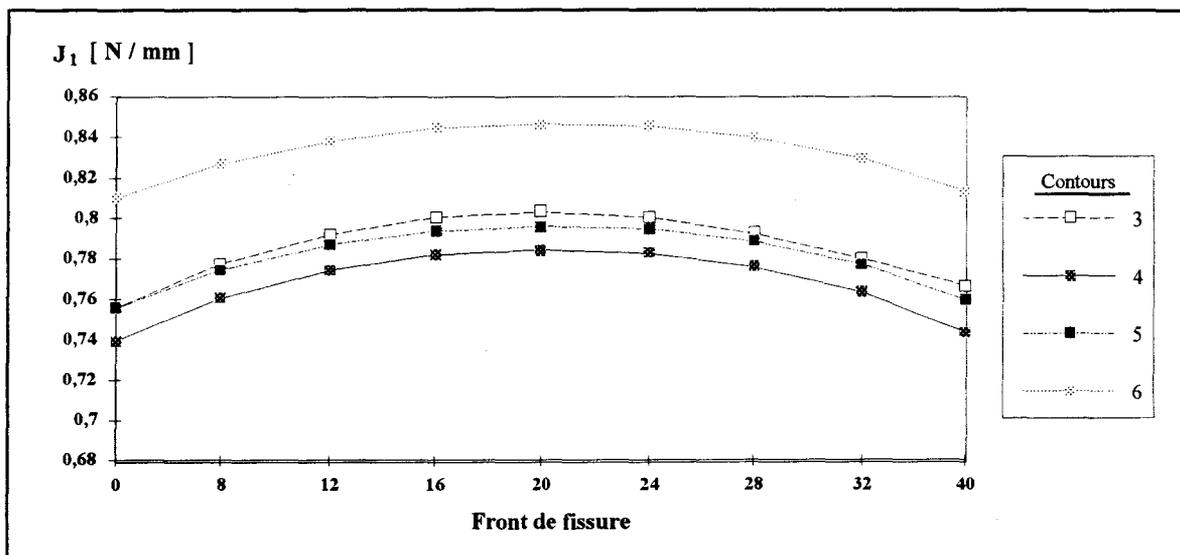
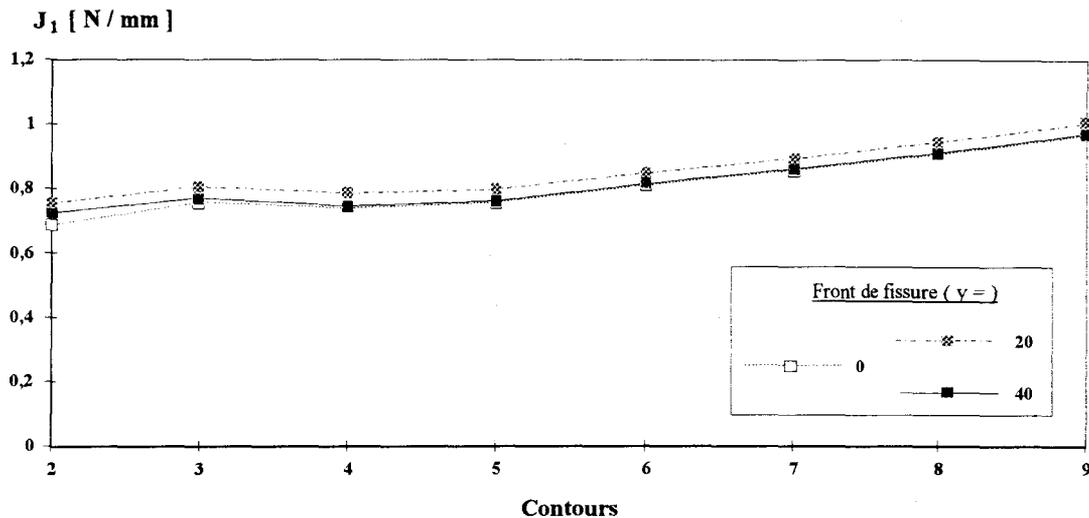


Fig. 6.13 - Intégrale J en milieu homogène -

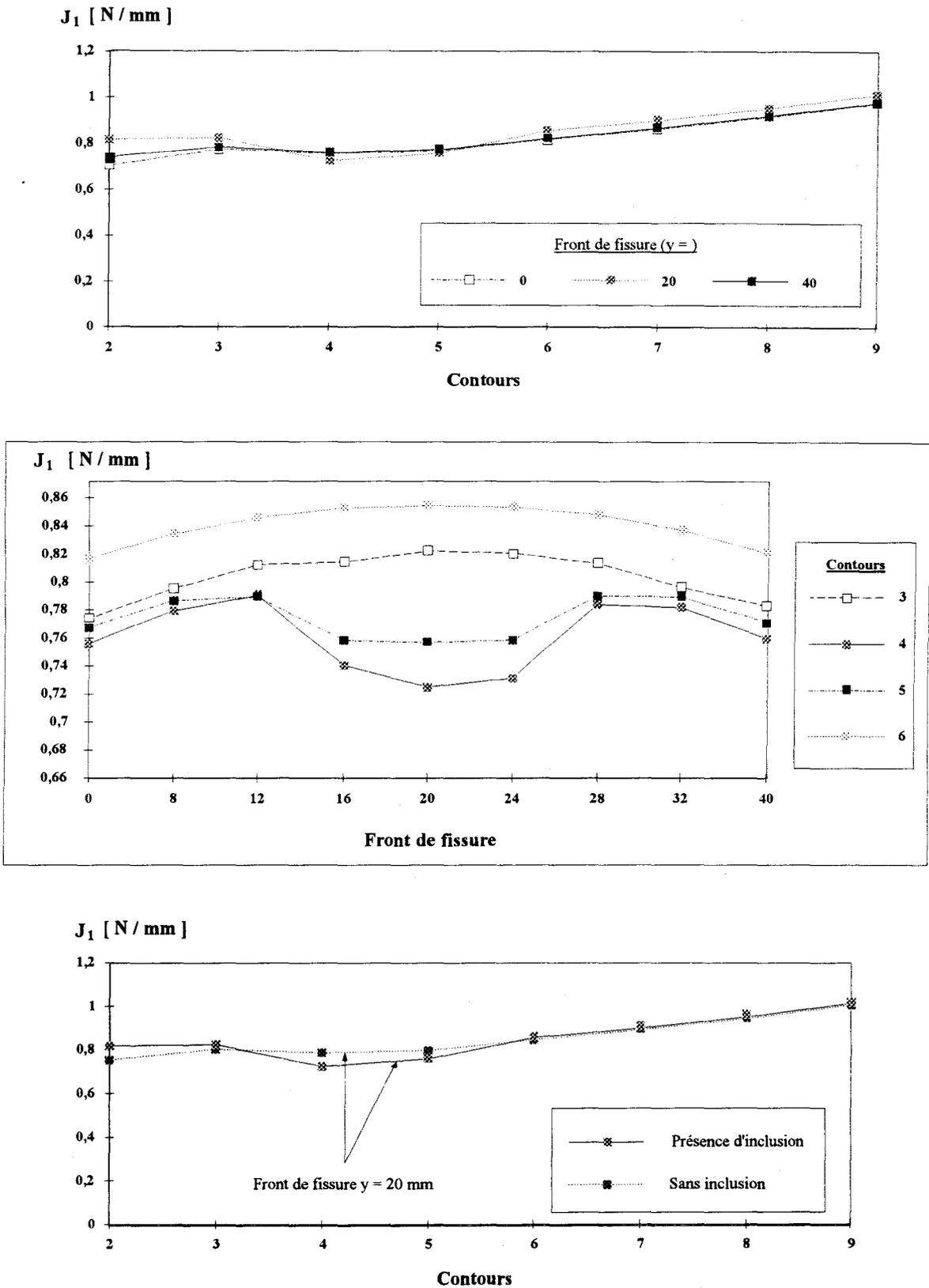


Fig. 6.14 - Intégrale J en milieu homogène avec présence d'inclusion -

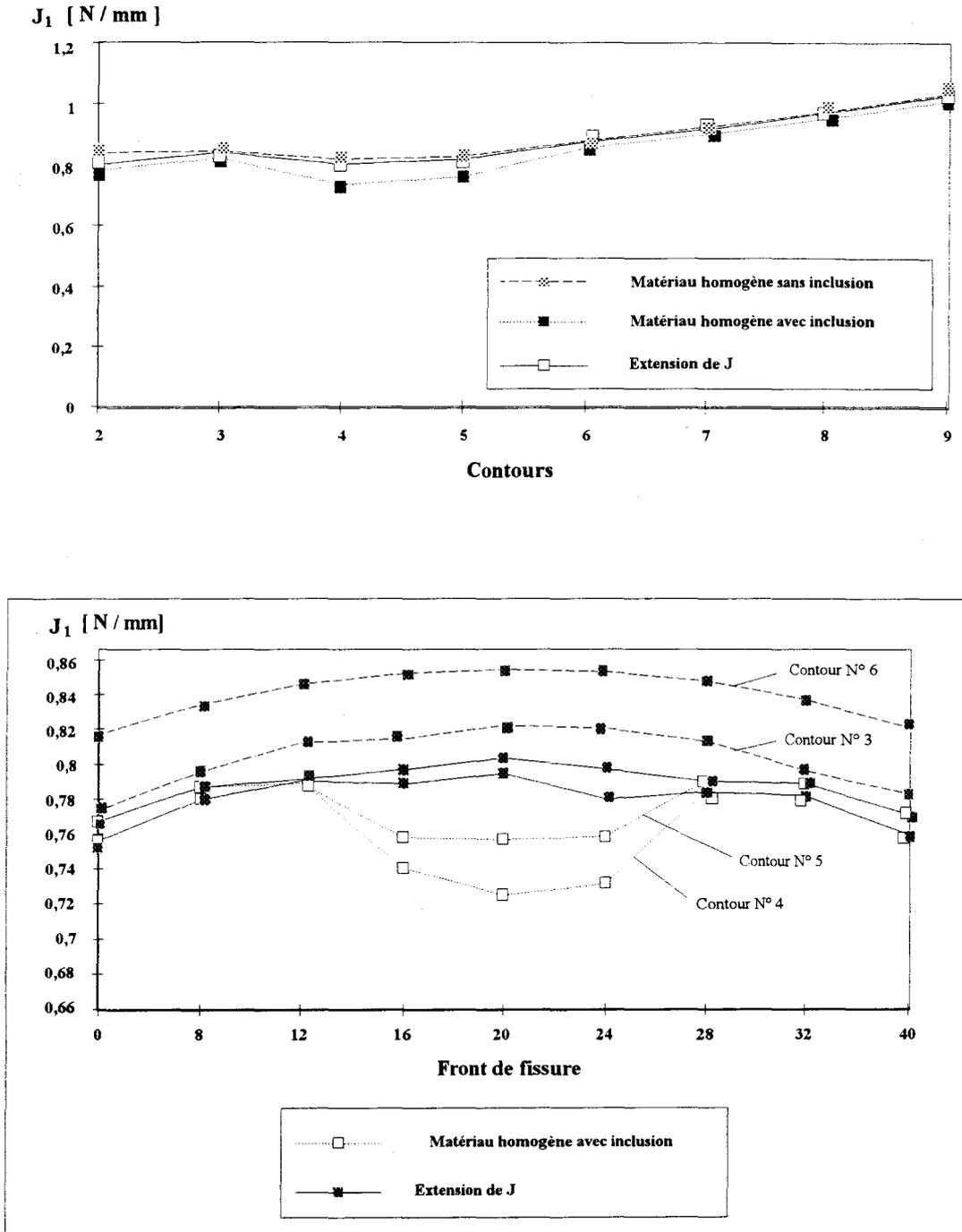


Fig. 6.15 - Extension de l'intégrale J en milieu hétérogène -

### 6.4.3. Influence de la forme du front de fissure :

Les figures 6.16 et 6.17 montrent l'influence de l'angle  $\theta$  sur l'intégrale J de volume, de l'équation (4.10), évaluée respectivement, pour un matériau homogène et inhomogène. La différence entre l'intégrale J, calculée le long du front de fissure droit et courbé, augmente avec l'angle  $\theta$ .

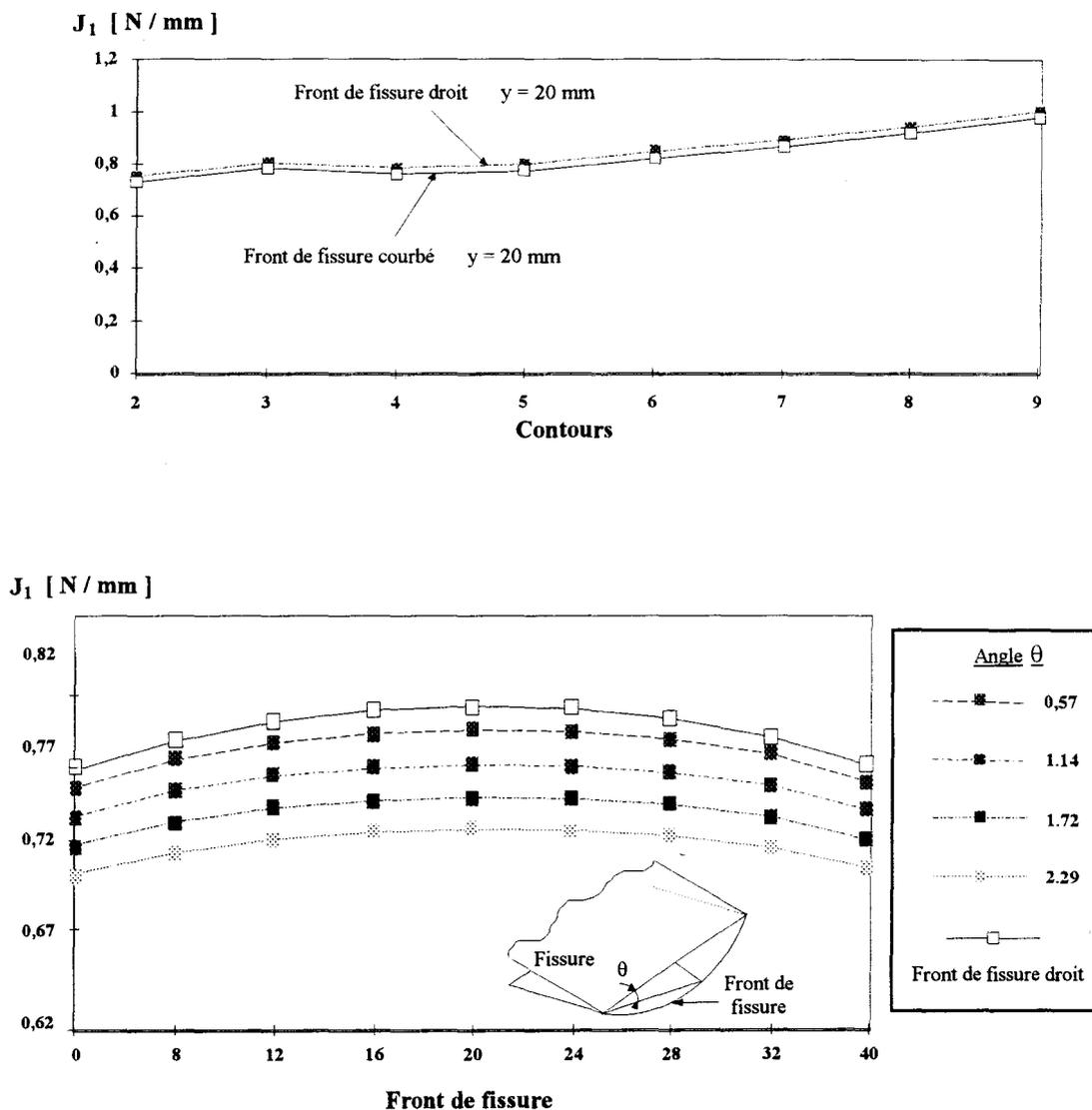


Fig. 6.16 - Influence de l'angle  $\theta$  dans le cas d'un matériau homogène -

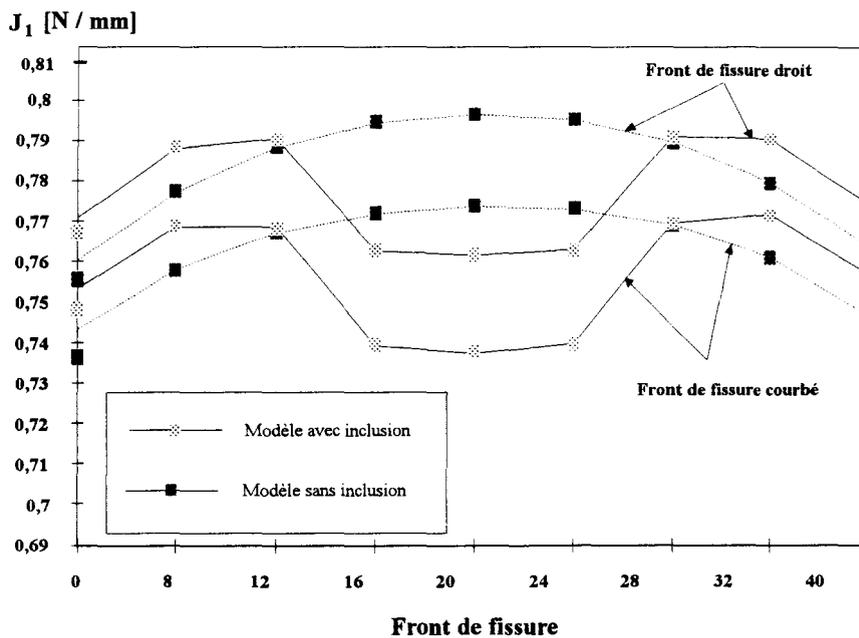
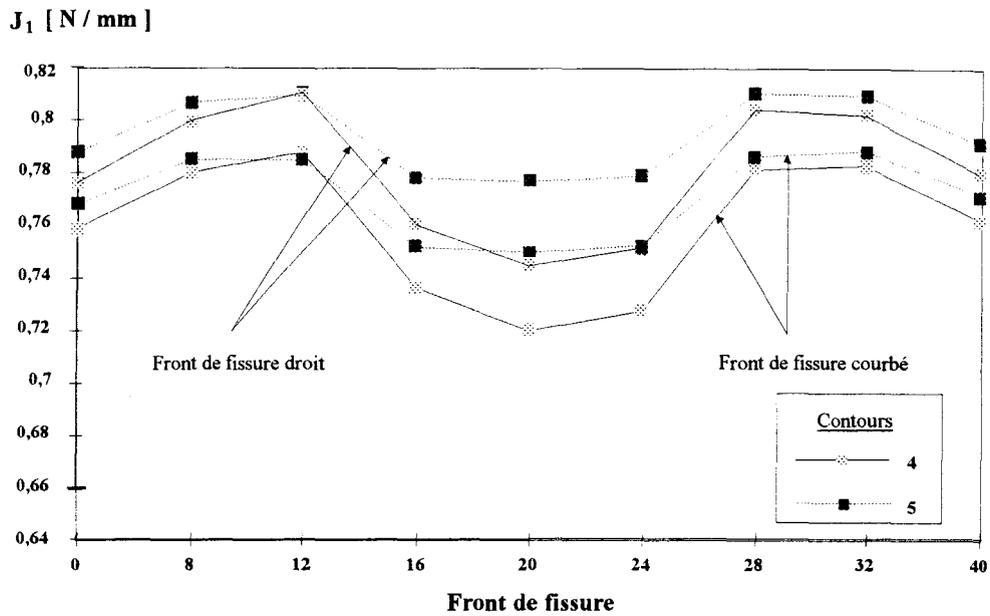


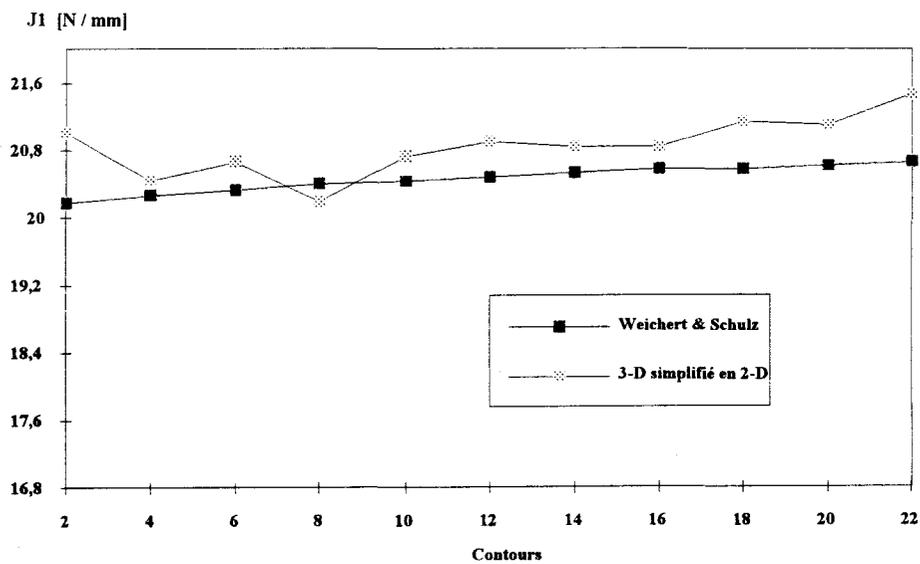
Fig. 6.17 - Influence de l'angle  $\theta$  dans le cas d'un matériau inhomogène -

#### 6.4.4. Comparaison de J en 2D et 3D simplifiée en 2D :

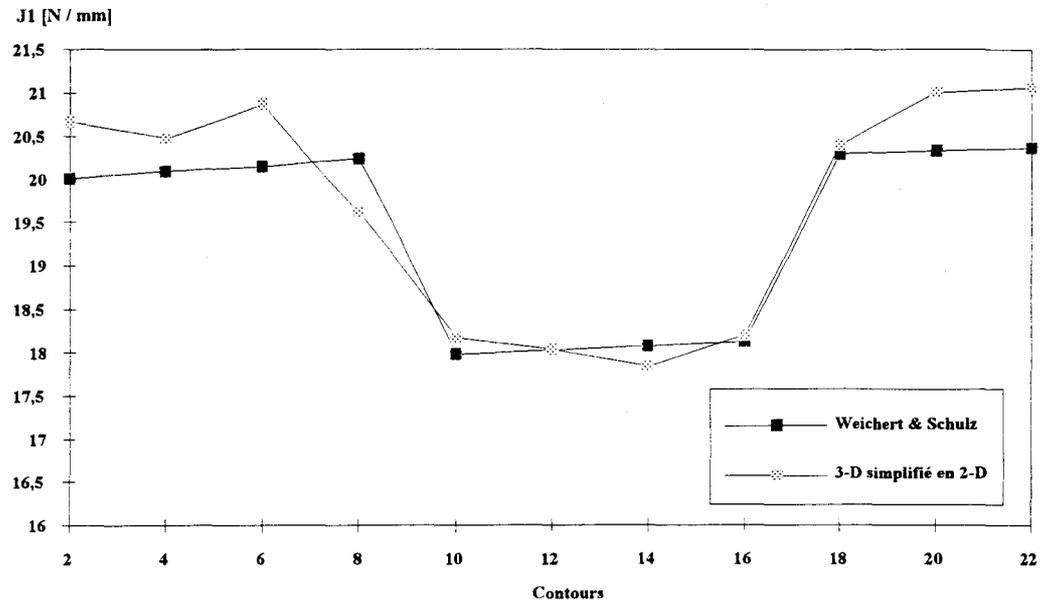
On fait la comparaison de l'intégrale J entre le modèle 2-D et le modèle 3-D simplifié en 2-D, en considérant la structure montrée dans la figure 6.2. L'intégrale J est évaluée :

- dans le cas homogène (éq. (4.10)) (Fig. 6.18a),
- dans le cas inhomogène (éq. (4.10)) (Fig. 6.18b),
- dans le cas inhomogène (éq. (4.64)) (Fig. 6.18c)

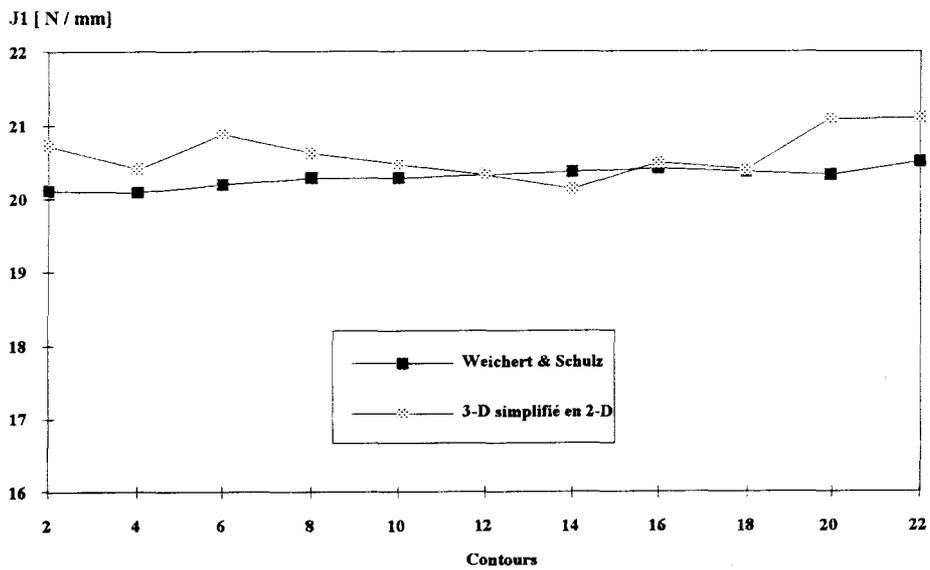
Les résultats obtenus de l'intégrale J en 3-D simplifiée en 2-D sont en concordance avec ceux obtenus par WEICHERT & SCHULZ [109] (1993).



(a) - Sans inclusion



(b) - Avec inclusion



(c) Extension de J en 2 et 3-D

Fig. 6.18 - Matériau contenant une fissure -

## **CONCLUSION ET PERSPECTIVES**

## CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Ce travail a permis de formuler le problème des fissures tridimensionnelles sous forme d'une intégrale, applicable à des fissures de géométries simples pour un corps élastique linéaire et hétérogène sous à un chargement statique.

On a établi, par l'application de la méthode d'extension virtuelle de fissure et la notion de force matérielle, une expression analytique du taux d'énergie libre, qu'on a mis sous une forme convenable pour une analyse numérique. Cette formule est une extension de la théorie bidimensionnelle présentée par Weichert & Schulz.

La formulation proposée, repose sur une analyse tridimensionnelle par l'application de l'intégrale  $J$  de volume et sur une théorie élastique des milieux inhomogènes. L'intégrale  $J$  en tridimensionnel est développée par Li & al. et Delorenzi en utilisant le principe des travaux virtuels et le tenseur moment d'énergie d'Eshelby. Pour un milieu inhomogène, la densité d'énergie élastique dépend explicitement des coordonnées spatiales, cette dépendance permet de définir une force appelée force matérielle qui est considérée comme une forme statique de l'équation de la pseudo-quantité de mouvement développée par Maugin.

Dans cette approche, le taux d'énergie libre ou l'intégrale  $J$  sont calculés à chaque position, le long du front de fissure. La formulation est écrite sous forme discrétisée par la méthode des éléments finis et se prêtent facilement aux applications numériques.

La première application portant sur une fissure en présence d'une inclusion en bi-et tridimensionnel, montre que les résultats numériques en 2-D concordent avec ceux du modèle de Li & Chudnovsky. Par contre en 3-D les résultats sont fonctions de la variation du facteur d'intensité de contraintes le long du front de fissure.

La seconde application concerne l'étude d'un critère de rupture d'une fissure tridimensionnelle dans un milieu inhomogène, pour cela une comparaison entre l'expression analytique proposée et l'intégrale  $J$  de volume dans le cas homogène est faite.

Afin de montrer l'efficacité de notre approche, nous avons mené, dans la troisième application, une étude comparative du modèle 3-D simplifié en 2-D avec celui de 2-D développé par Weichert & Schulz. Les résultats numériques montrent la concordance entre les deux modèles.

Pour compléter cette étude, il est important d'étudier la propagation d'une ou plusieurs fissures avec défauts. Aussi il est utile d'étendre la formulation de l'intégrale J de volume en milieu inhomogène au comportement élastoplastique (MAUGIN [73] (1994)).

Lorsque l'inclusion est loin du front de fissure, le résultat de l'intégrale J en milieu inhomogène coïncide avec celui du cas homogène, ainsi nous pouvons étudier la progression de la fissure et son comportement quand elle s'approche d'une inclusion en 2-D puis en 3-D. Pour comprendre le mécanismes de propagation, il est utile d'appliquer la formulation de l'intégrale J à la modélisation des problèmes microscopiques.

## **REFERENCES**

## REFERENCES

- [1] AN-YU KUO, (1987) "On the use of a path-independent line integral for axisymmetric cracks with nonaxisymmetric loading," *J. Appl. Mech.*, Vol. 54, pp. 833-837.
- [2] ATKINSON C., (1977) "Interfaces in linear elastic fracture mechanics," *Int. J. Fract.*, 13, 807.
- [3] ATLURI S. N., (1982) "Path-independent integrals in finite elasticity and inelasticity, with body forces, inertia, and arbitrary crack-face conditions," *Engng. Fract. Mech.*, Vol. 16, N° 3, pp. 341-364.
- [4] BANKS-SILLS L. & BORTMAN Y., (1984) "Reappraisal of the quart-point quadrilateral element in linear elastic fracture mechanics," *Int. J. Fract.*, 25, pp. 169-180.
- [5] BANKS-SILLS L. & SHERMAN D., (1986) "Comparison of methods for calculating stress intensity factors with quarter-point elements," *Int. J. Fract.*, 32, pp. 127-140.
- [6] BANKS-SILLS L. & SHERMAN D., (1989) "On quart-point three-dimensional finite element in linear elastic fracture mechanics," *Int. J. Fract.*, 41, pp. 177-196.
- [7] BANKS-SILLS L. & SHERMAN D., (1991) " $J_{II}$  fracture testing of a plastically deforming material," *Int. J. Fract.*, 50, pp. 15-26.
- [8] BANKS-SILLS L. & SHERMAN D., (1992) "On the computation of stress intensity factors for three-dimensional geometries by means of the stiffness derivative and J-integral methods," *Int. J. Fract.*, 53, pp. 1-20.
- [9] BANKS-SILLS L. & VOLPERT Y., (1991) "Application of the cyclic J - integral to fatigue crack propagation of Al 2024- 351," *Engng. Fract. Mech.*, Vol. 40, N° 2, pp. 355-370.
- [10] BARENBLATT G. I., (1962) "The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture," *In Advance applied mechanics*, 7, 55.

- [11] **BATTE A. D. , BLACKBURN W. S., ELSENDER A., HELLEN T. K. & JACKSON A. D.**, (1983) "A comparison of the  $J^*$  integral with other methods of post yield fracture mechanics," *Int. J. Fract.*, 21, pp. 49-66.
- [12] **BLACKBURN W. S.**, (1972) "Path independent integrals to predict onset of crack instability in an elastic plastic material," *Int. J. Fract. Mech.*, 8, pp. 343-346.
- [13] **BUCHHOLZ F. -G., GREBNER H. & STRATHMEIER**, (1986) "Numerical investigations of crack closure integral and J-integral calculations for a thermally stressed specimen," *Int. J. Solids Structures*, Vol. 22, N° 7, pp. 709-719.
- [14] **BUDIANSKY B. & RICE J. R.**, (1973) "Conservation laws and energy-release rates," *J. Appl. Mech.*, 40, pp. 201-203.
- [15] **BUI H.D.**, (1978) *Mécanique de la rupture fragile*, Edition Masson Paris.
- [16] **BÜLENT DOYUM A. et GÜRSOY A.**, (1991) "An arbitrarily oriented inclusion in a half-space subjected to an inclined surface load," *Engng. Fract. Mech.*, Vol. 40, N° 3, pp. 609-625.
- [17] **CARPENTER W. C., READ D. T. & DODDS R. H.**, (1986) "Comparison of several path independent integrals including plasticity effects," *Int. J. Fract.*, 31, pp. 303-323.
- [18] **CHEN F.**, (1992) "Weight function method for mixed-mode loading and mixed boundary conditions," *Engng. Fract. Mech.*, Vol. 42, N° 5, pp. 731-736.
- [19] **CHIARELLI A. & FREDIANI A.**, (1993) "A Computation of the three-dimensional J-integral for elastic materials with a view to applications in fracture mechanics," *Engng. Fract. Mech.*, Vol. 44, N° 5, pp. 763-788.
- [20] **CHONG RHEE H. & SALAMA M. M.**, (1987) "Mixed-mode stress intensity factor solutions of a warped surface flaw by three-dimensional finite element analysis," *Engng. Fract. Mech.*, Vol. 28, N° 2, pp. 203-209.
- [21] **CHUDNOVSKY A. , KIM A. & BOSNYAK C. P.**, (1992) "An energy analysis of crack initiation and arrest in epoxy," *Int. J. Fract. Mech.*, 55, pp. 209-222.

- 
- [22] **CLAYDON P. W.**, (1992) "Maximum energy release rate distribution from a generalized 3D virtual crack extension method," *Engng. Fract. Mech.*, Vol. 42, N° 6, pp. 961-969.
- [23] **COMNINOU M.**, (1977) "The interfacial crack," *J. Appl. Mech.*, 44, 631.
- [24] **COMNINOU M. & SCHMUESER D.**, (1979) "The interfacial crack in a combined tension-compression and shear field," *J. Appl. Mech.*, 46, 345.
- [25] **DASCALU C.**, (1994) "Contribution a la théorie des défauts en élasticité, thermoélasticité et électroélasticité," Thèse de Doctorat, Université Paris VI.
- [26] **DE-CHANG TIAN, DAU-QUAN LU & JIA-JU ZHU**, (1982) "Crack propagation under combined stresses in three-dimensional medium," *Engng. Fract. Mech.*, Vol. 16, N° 1, pp. 5-17.
- [27] **DELORENZI H. G.**, (1982) "On the energy release rate and the J-integral for 3-D crack configurations," *Int. J. Fract.*, 19, pp. 183-193.
- [28] **DELORENZI H. G.**, (1985) "Energy release rate calculations by the finite element method," *Engng. Fract. Mech.*, Vol. 21, N° 1, pp. 129-143.
- [29] **DELORENZI H. G. & SHIH C.D.**, (1983) "3-D Elastic-plastic investigation of fracture parameters in side-grooved compact specimen," *Int. J. Fract.*, 21, pp.195-220.
- [30] **DHAR S. & CLOUD G.L.**, (1992) "Energy density approach for calculation of three-dimensional inelastic strain and stress at the crack tip in compact tension specimens of polycarbonate," *Int. J. Fract.*, 53, pp. 229-248.
- [31] **DHATT G. & TOUZOT G.**, (1984) "Une présentation de la méthode des éléments finis, Maloine S. A. Editeur Paris.
- [32] **EISCHEN J. W. & HERRMANN G.**, (1987) "Energy release rates and related balance laws in linear elastic defect mechanics," *J. Appl. Mech.*, Vol. 54, pp. 388-392.
- [33] **ENGLAND A. H.**, (1965) "A crack between dissimilar media," *J. Appl. Mech.* 32, pp. 400-402.

- 
- [34] EPSTEIN M. & MAUGIN G. A., (1990) "Sur le Tenseur de Moment Matériel d'Eshelby en Elasticité non Linéaire," C. R. Acad. Sci. Paris, t. 310, Série II, pp.675-678.
- [35] EPSTEIN M. & MAUGIN G. A., (1990) "The energy-momentum tensor and material uniformity in finite elasticity," Acta Mechanica, 83, 127-133.
- [36] EPSTEIN M. & MAUGIN G. A., (1991) "Energy-Momentum Tensor and J-integral in Electrodeformable Bodies," Int. J. Appl. Electromagnetics in Materials, 2, pp. 141-145.
- [37] ERDOGAN F., (1963) "Stress distribution in a nonhomogeneous elastic plane with cracks," J. Appl. Mech. Vol. 30, Trans. ASME, Vol. 85, Series E, pp. 232-237.
- [38] ESHELBY J. D., (1975) "The Elastic Energy-Momentum Tensor," J. of Elasticity, Vol. 5, N°. 3-4, pp. 321-335.
- [39] FREUND L. B., (1972) "Energy flux into the tip of an extending crack in an elastic solid," J. of Elasticity, Vol. 2, N°. 4, pp. 341-349.
- [40] FREUND L. B., (1978) "Stress intensity factor calculations based on a conservation integral," Int. J. Solids structures, Vol. 14, pp. 241-250.
- [41] GAUTESEN A. K. & DUNDURS J., (1987) "The interface crack in a tension field," J. Appl. Mech. Vol. 54, pp. 93-98.
- [42] GREBNER H. & HÖFLER A.H., (1991) "J-Integral evaluation from ADINA shell element results," Computers & Structures, Vol. 40, N°.2, pp. 365-374.
- [43] GRIFFITH A. A., (1920) "The phenomena of rupture and flow in solids," Phil. Trans. Roy. Soc. London, Series A, 221, pp. 163-198.
- [44] GUSTAVSSON A. I. & MELANDER A., (1990) "A finite element study of the early growth of fatigue cracks emanating from a spherical pore," In 5th. Int. Conf. Numerical Methods in Fracture Mechanics (Edited by A. R. Luxmoore and D. R. J. Owen), pp. 225-236, Pineridge Press. U.K.
- [45] GUSTAVSSON A. I. & MELANDER A., (1992) "Fatigue limit model for hardened steels," Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct. Vol. 15, N°. 9, pp. 881-894.

- 
- [46] **HADDI A. & WEICHERT D.**, (1994) "Influence d'une inclusion sur le facteur d'intensité de contrainte dans des milieux bi-et tridimensionnels," 2ème Colloque National en Calcul des Structures, Giens (Var)-France, (à paraître).
- [47] **HADDI A. & WEICHERT D.**, (1994) "On the computation of the J-integral for three-dimensional geometries in inhomogeneous materials," Colloque "Computational Modelling of the Mechanical Behaviour of Materials", Villeneuve d'Ascq-France, (à paraître).
- [48] **HELLEN T.K.**, (1975) "On the method of virtual crack extensions," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 9, pp. 187-207.
- [49] **HERRMANN A. G. & HERRMANN G.**, (1981) "On energy-release rates for a plane crack," *J. Appl. Mech.*, Vol. 48, pp. 525-528.
- [50] **HUTCHINSON J. W., MEAR M. E. & RICE J. R.**, (1987) "Crack paralleling an interface between dissimilar materials," *J. Appl. Mech.*, Vol. 54, pp. 828-832.
- [51] **INGRAFFEA A. R. & MANU C.**, (1980) "Stress-intensity factor computation in three-dimensions with quarter-point elements," *Int. J. for Num. Meth. Engng.*, Vol. 15, pp. 1427-1445.
- [52] **IOAKIMIDIS N. I.**, (1982) "A natural approach to the introduction of finite-part integrals into crack problems of three-dimensional elasticity," *Engng. Fract. Mech.*, Vol. 16, N° 5, pp. 669-673.
- [53] **IRWIN G. R.**, (1956) "Relation of stresses near a crack to the crack extension force," *Int. Cong. Appl. Mech.*, pp. 245, Bruxelles.
- [54] **IRWIN G. R.**, (1957) "Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate," *J. Appl. Mech.*, pp. 361.
- [55] **KIRK M. T. & DODDS R. H.**, (1991) "An analytical and experimental comparison of  $J_i$ -values for shallow through and part-through surface cracks," *Engng. Fract. Mech.*, Vol. 39, N° 3, pp. 535-551.
- [56] **KNOWLES J. K. & STERNBERG ELI**, (1972) "On a Class of conservation laws in linearized and finite elastostatics," *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 44, pp. 187-211.
- [57] **LABBENS R.**, (1980) *Introduction à la mécanique de la rupture*, Ed Pluralis.

- 
- [58] **LAWS B.**, (1993) *Fracture of brittle solids*, Cambridge University Press.
- [59] **LE K.C.**, (1989) "Variational inequalities in brittle fracture mechanics," *Brittle Matrix Composite 2*, pp. 144-151, London, Elsevier.
- [60] **LE K.C.**, (1989) Equilibrium criterion for a nonlinear elastic slitted body, In : *Advances in Fracture 1*, pp. 49-53, New York-Oxford : Pergamon Press.
- [61] **LE K.C., STUMPF H. & WEICHERT D.**, (1989) "Variational principes of fracture mechanics," *Mitteilungen Institut für Mechanik 64*, Ruhr-Universität Bochum.
- [62] **LEMAITRE J. & CHABOCHE J.L.**, (1988) *Mécanique des matériaux solides*, Ed. Dunod Paris.
- [63] **LEVY N., MARCAL P.V & RICE J.R.**, (1971) "Progress in three-dimensional elastic-plastic stress analysis for fracture mechanics," *Nuclear Engng. and Design.*, 17, pp. 64-75.
- [64] **LI F.Z, SHIH C.F & NEEDLEMAN A.**, (1985) "A comparison of methods for calculating energy release rates," *Engng. Fract. Mech.*, Vol. 21, N° 2, pp. 405-421.
- [65] **LI R. & CHUDNOVSKY A.**, (1993) "Variation of the energy release rate as a crack approaches and passes through an elastic inclusion," *Int. J. Fract.*, 59, R69-R74.
- [66] **MACHIDA K., KIKUCHI M. & MIYAMOTO H.**, (1989) "J-integral evaluation of side-grooved CCT specimens by three-dimensional analysis," *JSME Int. J., Serie I*, Vol. 32, N° 3, pp. 355-361.
- [67] **MASANORI K., HIROSHI M. & SATOSHI H.**, (1986) "Three-dimensional crack growth analysis by the T.N.P method," *Bulletin of J.S.M.E*, Vol. 29, N° 257, pp. 3679-3684.
- [68] **MATVIENKO Y. G. & MOROZOV E. M.**, (1987) "Some problems in linear and non-linear fracture mechanics," *Engng. Fract. Mech.*, Vol. 28, N° 2, pp. 127-138.
- [69] **MAUGIN G. A.**, (1993) "Material inhomogeneities in elasticity", Ed. Chapman and Hall, London.
- [70] **MAUGIN G. A. & C. TRIMARCO C.**, (1991) "Pseudomomentum and material forces in nonlinear elasticity : Variational formulations and application to brittle fracture," *Acta Mechanics*, 94, pp. 1-28.

- [71] MAUGIN G. A. & TRIMARCO C., (1991) "Pseudo-quantité de mouvement et milieu élastiques inhomogènes," C. R. Acad. Sci. Paris, t. 313, Série II, pp.851-856.
- [72] MAUGIN G. A. & TRIMARCO C., (1991) "Pseudomomentum and material forces in electromagnetic solids," Int. J. of Appl. Electromagnetics in Materials, 2, pp. 207-216.
- [73] MAUGIN G. A., (1994) "Eshelby stress in elastoplasticity and ductile fracture," Int. J. of Plas., Vol. 10, N° 4, pp. 393-408.
- [74] MELETIS E. I., WEIJI HUANG & GDOUTOS E. E., (1991) "A study of the three-dimensional region at crack tips by the method of caustics," Engng. Fract. Mech., Vol. 39, N° 5, pp. 875-885.
- [75] MIKKOLA T. P. J., (1992) "Method for calculating stress intensity factors for surface cracks," Engng. Fract. Mech. Vol. 42, N° 5, pp. 713-730.
- [76] MISRA J.C, MISHRA M. & MAITI S.N., (1983) "Theoretical stress analysis for a non-isotropic body of cylindrical configuration containing a row of cracks," Engng. Fract. Mech., Vol. 17, N° 5, pp. 471-489.
- [77] MIYAMOTO H. & KAGEYAMA K., (1978) "Extension of J-integral to the elastoplastic problem and suggestion of a new method for its evaluation. In Numerical methods in fracture mechanics," Ed. A. R. Luxmoore and D. R. J. Owen, Swansea.
- [78] MUKAI D. J., BALLARINI R. & MILLER G. R., (1990) "Analysis of branched interface cracks," J. Appl. Mech., Vol. 57, pp. 887-893.
- [79] MÜLLER W. H., (1989) The exact calculation of stress intensity factors in transformation toughened ceramics by means of integral equations. Int. J. Fract., 41, pp. 1-22.
- [80] MÜLLER. W. H., (1990) "An analytical approach for the calculation of stress intensity factors in transformation-toughened ceramics," Continuum Mech. Thermodyn. 2, pp. 279-299.
- [81] MÜLLER . W. H. & SCHMAUDER S., (1993) "Stress-intensity factors of r-cracks in fiber-reinforced composites under thermal and mechanical loading," Int. J. Fract., 59, pp. 307-343.

- [82] MURAKAMI T. & SATO T., (1983) "Three-dimensional J-integral calculations of part-through surface crack problems," *Computers & Structures*, Vol. 17, N° 5-6, pp. 731-736.
- [83] NAKAMURA T., (1992) "Three-dimensional effects in thin film fracture mechanics," *Mechanics of Materials*, N° 13, pp. 67-77.
- [84] NAKAMURA T. & PARKS D.M., (1988) "Three-dimensional stress field near the crack front of a thin elastic plate," *J. Appl. Mech.*, Vol. 55, pp. 805-813.
- [85] NAKAMURA T. & PARKS D. M., (1989) "Antisymmetrical 3-D stress field near the crack front of a thin elastic plate," *Int. J. Solids Structures*, Vol. 25, N° 12, pp. 1411-1426.
- [86] NISHIOKA T. & ATLURI S. N., (1983) "Path-independent integrals, energy release rates, and general solutions of near-tip fields in mixed-mode dynamic fracture mechanics," *Engng. Fract. Mech.* Vol. 18, N° 1, pp. 1-22.
- [87] OROWAN E., (1950) "Fundamentals of brittle behaviour in metals," In *Fatigue and fracture of metals*, Ed. MURRAY W. M., 139.
- [88] OWEN D. R. J. & FAWKES A. J., (1983) "Engineering fracture mechanics, Pineridge Press Ltd., Swansea, U. K.
- [89] PARK J. H. & EARMME.Y. Y., (1986) "Application of conservation integrals to interfacial crack problems," *Mechanics of Materials*, 5, pp. 261-276.
- [90] PARKS D. M., (1974) "A stiffness derivative finite element technique for determination of crack tip stress intensity factors," *Int. J. Fract.*, Vol. 10, N° 4, pp. 487-502.
- [91] PLUVINAGE G., (1989) *Mécanique élastoplastique de la rupture*, Cepadues-Editions, Toulouse.
- [92] RICE J. R. & SIH G. C., (1965) "Plane problems of cracks in dissimilar media," *J. Appl. Mech.*, 32, pp. 418-423.
- [93] RICE J.R., (1968) "A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks," *J. Appl. Mech.*, 35, pp. 379-386.

- [94] **SANZ G.**, (1974) La rupture des aciers, Deuxième partie : la mécanique de la rupture, Collection IRSID OTUA, Paris.
- [95] **SCHMITT W.**, (1986) "Three-dimensional finite element simulation of post-yield fracture experiments," *Int. J. Solids-Structures*, Vol. 22, N° 7, pp. 833-843.
- [96] **SCHULZ. M.**, (1992) Diplom-Arbeit, Ruhr-Universität Bochum, Fakultät Maschinenbau.
- [97] **SHIVAKUMAR K. N. & RAJU I. S.**, (1992) "An equivalent domain integral method for three-dimensional mixed-mode fracture problems," *Engng. Fract. Mech.*, Vol. 42, N° 6, pp. 935-959.
- [98] **SIEGELE D.**, (1989) "3 D - crack propagation using ADINA," *Computers & Structures*, Vol. 32, N° 3/4, pp. 639-645.
- [99] **SIH G.C. & LIEBOWITZ H.**, (1968) "Mathematical theories of brittle fracture," In *fracture* (Ed. LIEBOTWITZ), Academic Press, New York, Vol. 2.
- [100] **SIH G.C. & CHA B.C.K.**, (1974) "A fracture criterion for three-dimensional crack problems," *Engng. Fract. Mech.*, Vol. 6, pp. 699-723.
- [101] **SINCLAIR G. B.**, (1985) "Some inherently unreliable practices in present day fracture mechanics," *Int. J. Fract.*, 28, pp. 3-16.
- [102] **SNEDDON I. N.**, (1946) "The distribution of stress in the neighbourhood of a crack an elastic solid," *Proceedings of the Royal Society of London, Serie A*, 187, pp. 229-260.
- [103] **STEIF P. S.**, (1987) "A semi-infinite crack partially penetrating a circular inclusion," *J. Appl. Mech.*, Vol. 54, pp. 87-92.
- [104] **STUMPF H. & LE K.C.**, (1990) " Variational principles of nonlinear fracture mechanics," *Acta Mech.* 83, pp. 25-37.
- [105] **SUTTON M. A., TURNER J.L., CHAO Y.J. , BRUCK H.A. & CHAE T.L.**, (1992) "Experimental investigations of three-dimensional effects near a crack tip using computer vision," *Int. J. Fract.*, 53, pp. 201-228.

- [106] **WANG Qi ZHI, ZHANG XING & REN BING YI.**, (1991) "A closed form solution of stress intensity factors for three-dimensional finite bodies unsymmetric cracks by energy release rate method," *Int. J. Fract.*, 47, pp. 257-290.
- [107] **WEAVER J.**, (1977) "Three-dimensional crack analysis," *Int. J. Solids Structures*. Vol. 13, pp. 321-330.
- [108] **WEI X.**, (1992) "The J-integral and its dominant region," *Engng. Fract. Mech.*, Vol. 42, N° 5, pp. 815-824.
- [109] **WEICHERT D. & SCHULZ M.**, (1993) "J-integral concept for multi-phase materials," *Computation Materials Science*, 1, pp. 241-248.
- [110] **WELLS A. A.**, (1963) "Application of fracture mechanics at and beyond general yielding," *British Welding J.*, 10-11, pp. 563-570.
- [111] **WEN-HWA CHEN & TA-CHYAN LIN.**, (1983) "A mixed-mode crack analysis of rotating disk using finite element method," *Engng. Fract. Mech.*, Vol. 18, N° 1, pp. 133-143.
- [112] **WESTERGAARD H. M.**, (1939) "Bearing pressures and cracks," *J. Appl. Mech.*, pp. 49.
- [113] **WILLIAMS M. L.**, (1957) "on the stress distribution at the base of a stationary crack," *J. Appl. Mech.*, 109-114.
- [114] **XIANG QIAO YAN, SHANYI DU & DUOWANG.**, (1991) "J-Integral criterion of determination on set in toughened matrix composite laminates," *Engng. Fract. Mech.*, Vol. 40, N° 1, pp. 67-74.
- [115] **YASUFUMI I. & TOMOKASU M.**, (1982) "Effect of side grooves on the elastic-plastic stress state of fracture toughness specimens three-dimensional finite element analysis," *Engng. Fract. Mech.*, Vol. 16, N° 5, pp. 659-668.
- [116] **ZIENKIEWICZ O. C.**, (1971) *The finite element method in engineering science*, Mc. Graw-Hill, London.

