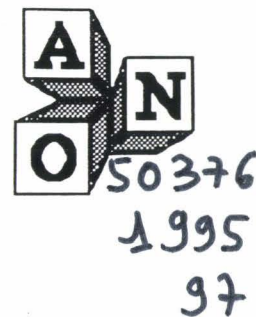


USTL

50376
1995
97

n° d'ordre : 1525

LABORATOIRE D'ANALYSE NUMERIQUE ET
D'OPTIMISATION



THESE
Nouveau régime



présentée à
l'Université des Sciences et Technologies de Lille

pour obtenir le titre de

DOCTEUR en MATHÉMATIQUES
par

Anna ABKOWICZ

**ETUDE DE LA PROCEDURE HYBRIDE
APPLIQUEE A LA RESOLUTION
DES SYSTEMES LINEAIRES**

soutenue le 1er juin 1995 devant la commission d'examen

Membres du jury

Président :	C. Brezinski
Rapporteurs :	S. Lewanowicz H. Sadok
Membres :	B. Germain-Bonne



D 030 059590 2

50376
1995
97

50376
20103712
1995
97

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Mr C. BREZINSKI, Professeur à l'Université des Sciences et Technologies de Lille, d'avoir bien voulu présider ce jury. Il m'a accueilli dans son équipe d'Analyse Numérique et d'Optimisation, il m'a proposé le sujet de cette thèse qu'il a dirigé avec beaucoup d'intérêt. Qu'il trouve ici l'expression de mes vifs remerciements pour ses encouragements et conseils précieux.

Je remercie vivement Mr S. LEWANOWICZ, Professeur à l'Université de Wrocław (Pologne), de m'avoir conseillé de venir au Laboratoire d'Analyse Numérique et d'Optimisation de Lille pour préparer le DEA et ma thèse. Je lui suis reconnaissante de s'être intéressé à ce travail.

Mes remerciements vont également à Mr H. SADOK, Professeur à l'Université du Littoral de Calais, qui s'est intéressé à ce travail et y a apporté des commentaires pertinents et suggestifs.

Mr B. GERMAIN-BONNE, Professeur à l'Université des Sciences et Technologies de Lille, a accepté de juger ce travail. C'est un honneur pour moi, et je le remercie vivement. Je le remercie encore une fois d'avoir lu si soigneusement le manuscrit.

Je remercie mes collègues du Laboratoire d'Analyse Numérique et d'Optimisation de Lille pour l'accueil qu'ils m'ont fait et pour les discussions fructueuses que nous avons échangées pendant mon séjour. Je remercie particulièrement J. ABOUIR, A.H. BENTBIB, K. JBILLOU, M. KZAZ, A. MESSAOUDI, A. SALAM d'avoir lu le manuscrit et d'y avoir apporté des corrections orthographiques nécessaires.

Je remercie Mr Le Maire de Villeneuve d'Ascq G. CAUDRON, Député Européen, pour l'aide financière accordée pendant mon séjour, sans laquelle cette thèse n'existerait pas.

Que mes amis Atika, Fatima, Nadia et Abdellatif soient assurés de ma plus vive reconnaissance pour leur présence et leur soutien.

Moim rodzicom.

Table des matières

Introduction	1
Notations	5
1 Procédure hybride	11
1.1 Définition	15
1.2 Propriétés	16
1.2.1 Comportement asymptotique	16
1.2.2 Propriétés géométriques	23
1.3 Applications	27
1.3.1 1 ^{er} cas	29
1.3.2 2 ^{ème} cas	34
1.4 Exemples numériques	40

1.4.1	1 ^{er} cas	41
1.4.2	2 ^{ème} cas	46
2	Itération de la procédure hybride dans un cas particulier	53
2.1	Définition	55
2.2	Propriétés	56
2.3	Applications	61
2.4	Exemples numériques	68
3	Généralisations de la procédure hybride	77
3.1	Procédure hybride généralisée	79
3.1.1	Définition	79
3.1.2	Propriétés	83
3.1.3	Applications	95
3.1.4	Exemples numériques	105
3.2	Autres généralisations possibles de la procédure hybride	111
3.2.1	Procédure hybride multiple de rang $k + 1$	111
3.2.2	Procédure hybride avec une suite auxiliaire	112
3.2.3	Procédure hybride en cascade	113

4	Calcul récursif du vecteur résidu	121
4.1	Rappel	123
4.1.1	Identité de Sylvester	123
4.1.2	Identité de Schweins	124
4.1.3	H-algorithme	125
4.1.4	RPA algorithme	126
4.2	Algorithmes du calcul récursif du vecteur résidu	126
4.2.1	Application de l'identité de Sylvester	128
4.2.2	Application de l'identité de Schweins	132
4.2.3	Application du H-algorithme	138
4.2.4	Application du RPA algorithme	139
5	Liaisons entre la procédure hybride généralisée et les méthodes de projection	143
5.1	Rappel	145
5.1.1	"Generalized Conjugate Residual" (GCR) algorithme	147
5.1.2	"Generalized Minimal Residual" (GMRES) algorithme	148
5.1.3	La méthode de Lanczos	149
5.1.4	"s-step minimal residual" algorithme	150

5.2	Procédure hybride vue comme une méthode de projection	151
5.3	Application de la procédure hybride généralisée à la suite $r_n = B^n r_0$. Etude de quelques cas particuliers	157
	Conclusion	159
	Références	161

Introduction

Le point de départ de ce travail est un article dû à **C. Brezinski** et **M. Redivo Zaglia** "Hybrid procedures for solving linear systems" [11] où est définie la "procédure hybride" et où sont suggérées plusieurs utilisations possibles de cette méthode.

L'idée essentielle consiste à combiner deux approximations de la solution d'un système linéaire pour en déduire une autre approximation meilleure (au sens de la norme du résidu associé) ; la linéarité du système implique que la combinaison des deux approximations est identique à la combinaison des résidus associés.

Les résultats numériques de [11] montrent que lorsque la procédure hybride est appliquée à deux méthodes itératives on constate deux phénomènes :

- un effet "lissant" (les résidus associés à la procédure hybride décroissent d'une manière monotone),
- de plus la procédure hybride se comporte comme la meilleure des deux méthodes itératives.

La procédure hybride semble pleine de promesses et **C. Brezinski** m'a confié la tâche d'explorer les différentes extensions et propriétés de cette procédure ; c'est ce qui fait l'objet de ce mémoire.

En premier lieu nous nous sommes intéressé à des propriétés d'accélération de convergence, ce qui impose pratiquement que les deux méthodes combinées par la procédure

hybride soient liées par l'intermédiaire d'une matrice B (elle même associée à la matrice initiale, et dont les valeurs propres sont plus ou moins connues). Nous proposons ensuite une procédure hybride généralisée, et ceci dans le but d'avoir à la fois des formules de calcul récursives et des résultats d'accélération de convergence et enfin nous situons la procédure hybride dans le cadre des méthodes de projection.

Nous commençons ce travail par l'introduction de quelques définitions et notations et par la démonstration de quelques lemmes qui nous sont utiles par la suite.

Dans le **premier chapitre** nous rappelons la définition de la procédure hybride, nous étudions son comportement asymptotique et ses propriétés géométriques. Nous appliquons ces résultats dans deux cas particuliers qui sont illustrés par des exemples numériques.

Dans le **second chapitre** nous étudions l'itération de la procédure hybride appliquée à une seule méthode. Nous étudions de nouvelles propriétés de la procédure hybride itérée ainsi définie dans le cas général et dans un cas particulier. Nous donnons également des conditions nécessaires pour que la procédure hybride itérée accélère la convergence d'une méthode particulière. Ce cas est illustré par des exemples numériques.

Dans le **troisième chapitre** nous donnons une définition de la procédure hybride généralisée. Les propriétés de cette méthode, que nous étudions, généralisent les propriétés de la procédure hybride définie dans le premier chapitre. Nous comparons également la procédure hybride généralisée avec la procédure hybride itérée définie dans le chapitre précédent appliquée à la même méthode. Comme dans les chapitres précédents nous étudions des possibilités d'accélération de la convergence de la procédure hybride généralisée par rapport à une méthode particulière, lesquelles sont illustrées par des exemples numériques. Dans ce chapitre nous proposons également d'autres généralisations possibles de la procédure hybride mais sans les étudier plus profondément.

Dans le **quatrième chapitre** nous étudions des possibilités du calcul récursif du vecteur résidu $r_n^{(k)}$ correspondant à la procédure hybride généralisée définie dans le chapitre précédent. Pour cela nous nous servons de l'identité de Sylvester, de l'identité de Schweins, du H-algorithme et du RPA algorithme. Ce chapitre est terminé par une comparaison du coût des algorithmes ainsi obtenus.

Pour terminer ce travail nous étudions dans le **cinquième chapitre** les liaisons entre la procédure hybride généralisée et les méthodes de projection. Nous montrons

que certaines d'entre elles ne sont autres que des cas particuliers de la procédure hybride généralisée.

Notations

Soit à résoudre un système linéaire, de la forme

$$Ax = b \tag{0.1}$$

où $A \in \mathcal{R}^{m \times m}$ est une matrice inversible et $b \in \mathcal{R}^m$ un vecteur arbitraire. Nous considérons des méthodes itératives de résolution du système (0.1). Nous notons

- \tilde{x} : la solution du système (0.1).
- x_n : solution approchée à l'étape n .
- $e_n = \tilde{x} - x_n$: l'erreur à l'étape n .
- $r_n = b - Ax_n$: le résidu à l'étape n .

Soit $G = Z^T Z$ une matrice symétrique définie positive. Le G -produit scalaire et la G -norme vectorielle correspondante sont respectivement définis par :

$$(x, y)_G = (x, Gy)$$

et

$$\|x\|_G = \sqrt{(x, x)_G}.$$

La G -norme matricielle correspondante est définie par :

$$\begin{aligned} \|A\|_G &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_G}{\|x\|_G} \\ &= \sqrt{\rho((ZAZ^{-1})^T ZAZ^{-1})} \\ &= \|ZAZ^{-1}\|_r. \end{aligned}$$

Nous allons aussi utiliser la notation $x \perp_G y$ si $(x, y)_G = 0$. Dans ce travail, lorsqu'il n'y a pas de confusion l'indice G sera supprimé.

Le choix de la matrice G n'est pas restrictif pour obtenir des résultats d'accélération. En effet en utilisant l'équivalence des normes nous pouvons déduire que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|x_n\|_G}{\|y_n\|_G} = 0 \quad \text{ssi} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|x_n\|_H}{\|y_n\|_H} = 0$$

pour des matrices G et H symétriques définies positives. Par contre si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|x_n\|_G}{\|y_n\|_G} = c$ ($c \neq 0$ et ∞) alors nous ne pouvons pas en déduire que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|x_n\|_H}{\|y_n\|_H} = c$

Contre-exemple

Soit $x = [1, 0]^T$, $y = [0, 1]^T$, $Z = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ et $G = Z^T Z$. Il est facile de voir que

$$\frac{\|x\|_I}{\|y\|_I} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\|x\|_G}{\|y\|_G} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Définition 0.1

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles de limite nulle. Si nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|v_n|}{|u_n|} = 0$$

nous écrirons alors $v_n = o(u_n)$.

Définition 0.2

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles de limite nulle. Si $\exists N, \exists C > 0$ tels que $\forall n > N$ nous aurons

$$|v_n| < C|u_n|$$

nous écrirons alors $v_n = \mathcal{O}(u_n)$.

Définition 0.3

Soit $P \in \mathbb{R}^{m \times m}$ une matrice carrée. Nous dirons que la matrice P est un projecteur G -orthogonal si elle vérifie les conditions suivantes :

1. $P^2 = P$
2. $(GP)^T = GP$.

Lemme 0.1

Si la matrice $P \in \mathcal{R}^{m \times m}$ est un projecteur G -orthogonal, alors,

$$\|P\|_G = 1.$$

Preuve :

Nous en rappelons bien évidemment la démonstration, bien que ce soit un résultat connu.

- D'une part, puisque $P^2 = P$, nous avons

$$\|P\|_G = \|P^2\|_G \leq \|P\|_G^2$$

donc

$$1 \leq \|P\|_G.$$

- D'autre part nous avons le résultat suivant :

Chaque vecteur $v \in \mathcal{R}^m$ non nul peut être décomposé de la manière suivante

$$v = Pv + (v - Pv)$$

or $P(v - Pv) = 0$; nous déduisons que

$$(Pv, v - Pv)_G = 0$$

donc

$$\begin{aligned} \|v\|_G^2 &= \|Pv\|_G^2 + 2(Pv, v - Pv)_G + \|v - Pv\|_G^2 \\ &= \|Pv\|_G^2 + \|v - Pv\|_G^2. \end{aligned}$$

Nous pouvons dire que pour tout vecteur $v \in \mathcal{R}^m$ non nul nous avons :

$$\frac{\|Pv\|_G}{\|v\|_G} \leq 1$$

et nous obtenons

$$\|P\|_G = \sup_{v \neq 0} \frac{\|Pv\|_G}{\|v\|_G} \leq 1.$$

Nous avons démontré que $\|P\|_G \geq 1$ et que $\|P\|_G \leq 1$, donc nous obtenons le résultat $\|P\|_G = 1$ ce qui termine la démonstration. ■

Dans ce travail, nous allons faire souvent appel à la méthode de résolution du système (0.1) définie par [14], [17], [40], [22] :

$$\left. \begin{aligned} x_{n+1} &= Bx_n + b \\ r_{n+1} &= Br_n \end{aligned} \right\} \quad (0.2)$$

avec $B = I - A$, x_0 quelconque et $r_0 = b - Ax_0$.

Remarque 0.1 :

Le choix de la matrice $B = I - A$ n'est pas restrictif. En effet, si nous voulons considérer une décomposition régulière de la matrice A

$$A = M - N$$

avec M une matrice inversible, nous obtenons

$$M^{-1}A = I - M^{-1}N.$$

La matrice M^{-1} peut être considérée alors comme un préconditionnement de la matrice A . Si $A^{(M)} = M^{-1}A$ désigne la matrice du système transformé, alors à ce système nous pouvons aussi associer la méthode définie par l'équation (0.2) avec

$$B = I - A^{(M)} = M^{-1}N.$$

Dans ce travail, nous ne considérons que le cas où la matrice $B \in \mathcal{R}^{m \times m}$ est une matrice diagonalisable. Nous supposons en outre que la matrice B admet q ($q \geq 2$) valeurs propres distinctes ordonnées dans le sens décroissant des modules

$$|\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_q|.$$

Dans ce cas, nous savons qu'à chaque valeur propre λ_i de multiplicité m_i ($\sum_{i=1}^q m_i = m$), correspondent m_i vecteurs propres linéairement indépendants, notés par $\gamma_1^{(i)}, \dots, \gamma_{m_i}^{(i)}$. Soit $\mathcal{V}_i = \text{span}\{\gamma_1^{(i)}, \dots, \gamma_{m_i}^{(i)}\}$ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i . Nous noterons $\tilde{\gamma}_i$, un vecteur quelconque appartenant au sous-espace \mathcal{V}_i , déterminé par ses coordonnées $c_1^{(i)}, \dots, c_{m_i}^{(i)}$ dans la base $\gamma_1^{(i)}, \dots, \gamma_{m_i}^{(i)}$, i.e.,

$$\tilde{\gamma}_i = c_1^{(i)}\gamma_1^{(i)} + \dots + c_{m_i}^{(i)}\gamma_{m_i}^{(i)}.$$

Nous avons

$$B\tilde{\gamma}_i = \lambda_i\tilde{\gamma}_i.$$

La matrice B étant diagonalisable, \mathcal{R}^m peut s'écrire comme une somme directe des sous-espaces propres de B

$$\mathcal{R}^m = \mathcal{V}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_q.$$

Ainsi à chaque vecteur $v \in \mathcal{R}^m$, nous pouvons associer une décomposition en somme de vecteurs $\tilde{\gamma}_i(v) \in \mathcal{V}_i$. Les vecteurs $\tilde{\gamma}_i(v)$ sont choisis de telle sorte que

$$v = \tilde{\gamma}_1(v) + \cdots + \tilde{\gamma}_q(v).$$

Pour simplifier la notation, nous noterons

$$v = \tilde{\gamma}_1 + \cdots + \tilde{\gamma}_q.$$

Evidemment à chaque fois que nous allons nous servir de cette décomposition pour un vecteur v il ne faudra pas oublier que les vecteurs $\tilde{\gamma}_i$ ne sont pas arbitraires mais qu'ils dépendent du vecteur v .

Etant donné un vecteur v , la suite des vecteurs (r_n) obtenue en utilisant la méthode (0.2) avec $r_0 = v$ sera de la forme

$$\begin{aligned} r_n &= B^n r_0 \\ &= \lambda_1^n \tilde{\gamma}_1 + \cdots + \lambda_q^n \tilde{\gamma}_q. \end{aligned}$$

Pour certains calculs, nous n'aurons besoin que des $k + 1$ premières valeurs propres ($k \leq q - 2$). Pour cela, nous allons introduire une suite auxiliaire $(a_n^{(k+2)})$ associée au vecteur v , qui sera définie par :

$$\begin{aligned} a_0^{(k+2)} &= \tilde{\gamma}_{k+2} + \cdots + \tilde{\gamma}_q \\ a_n^{(k+2)} &= B^n a_0^{(k+2)}. \end{aligned}$$

Ceci nous donne :

$$a_n^{(k+2)} = \lambda_{k+2}^n \tilde{\gamma}_{k+2} + \cdots + \lambda_q^n \tilde{\gamma}_q.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|a_n^{(k+2)}\| &\leq |\lambda_{k+2}|^n \|\tilde{\gamma}_{k+2}\| + \cdots + |\lambda_q|^n \|\tilde{\gamma}_q\| \\ &\leq (q - k - 1) |\lambda_{k+2}|^n \max_{k+2 \leq i \leq q} \|\tilde{\gamma}_i\|, \end{aligned}$$

ce qui nous donne :

$$\|a_n^{(k+2)}\| = \mathcal{O}(|\lambda_{k+2}|^n) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Pour un indice k fixé, nous pouvons décomposer la suite (r_n) de la manière suivante

$$r_n = \lambda_1^n \tilde{\gamma}_1 + \cdots + \lambda_{k+1}^n \tilde{\gamma}_{k+1} + a_n^{(k+2)}.$$

Dans la suite de ce travail, nous allons, à chaque fois que nous aurons à utiliser la méthode définie par l'équation (0.2), associer à la suite (r_n) une décomposition identique

à celle faite précédemment. Il est clair que les coefficients c_i ainsi que les vecteurs $\tilde{\gamma}_i$ vont toujours dépendre du vecteur initial r_0 .

Dans les deux premiers chapitres nous choisirons $k = 0$ et la suite $(a_n^{(2)})$ sera simplement notée a_n .

Dans le troisième chapitre nous traitons le cas où k est un indice quelconque compris entre 0 et $q - 2$.

Chapitre 1

Procédure hybride

Soit à résoudre un système régulier d'équations linéaires

$$Ax = b. \tag{0.1}$$

La procédure hybride définie par **C. Brezinski** et **M. Redivo Zaglia** dans [11] consiste à combiner deux méthodes de résolution de ce système afin d'obtenir une méthode qui va mieux approcher la solution \tilde{x} . Le critère d'approximation choisi consistera à ce que la norme du vecteur résidu obtenu par la nouvelle méthode soit le plus petit possible. Bien que cette idée soit nouvelle, les méthodes qui peuvent être considérées comme des cas particuliers de la procédure hybride ont été définies et étudiés dans [20], [36], [37], [42], [43], [45], [48]. Dans ce travail nous nous plaçons dans un cadre général permettant d'obtenir des résultats nouveaux qui généralisent des résultats déjà connus (voir [1]).

Dans ce chapitre, en **1.1** nous allons rappeler la notion de procédure hybride.

En **1.2.1** en utilisant la relation bien connue

$$(x, y) = \|x\| \|y\| \cos \theta$$

où θ est l'angle aigu compris entre le vecteur x et le vecteur y , nous allons donner les conditions nécessaires et suffisantes pour que la méthode obtenue par la procédure

hybride accélère la convergence des méthodes initiales dans le sens

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|r_n\|}{\|r'_n\|} = 0$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|r_n\|}{\|r''_n\|} = 0$$

où (r'_n) , (r''_n) et (r_n) désignent les vecteurs résidus donnés respectivement par la première méthode, la deuxième méthode et la procédure hybride. Nous allons étudier deux cas :

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|r'_n\|}{\|r''_n\|} < 1$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|r'_n\|}{\|r''_n\|} = 1.$

Le cas où $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|r'_n\|}{\|r''_n\|} > 1$ ne sera pas étudié car il fait partie du premier cas. En effet, il suffit d'échanger les rôles du vecteur r'_n et du vecteur r''_n pour obtenir des résultats similaires. Pour démontrer ces résultats, nous allons introduire une suite auxiliaire (θ_n) vérifiant

$$(r'_n, r''_n) = \|r'_n\| \|r''_n\| \cos \theta_n$$

et une suite auxiliaire (ϑ_n) vérifiant

$$(r'_n, r'_n - r''_n) = \|r'_n\| \|r'_n - r''_n\| \cos \vartheta_n.$$

Les théorèmes ainsi obtenus vont nous donner des conditions d'accélération qui seront équivalentes.

Nous allons également démontrer dans **1.2.2** les propriétés géométriques de la procédure hybride qui généralisent certains résultats de **R. Weiss** donnés dans [42] dans le cas particulier de la procédure hybride : "Minimal Residual Smoothing" algorithm.

Dans la partie **1.3**, nous allons étudier deux cas particuliers de la procédure hybride dans lesquels nous pouvons donner des conditions suffisantes d'accélération. Dans le premier cas, nous étudierons également un cas où la procédure hybride peut nous donner une certaine amélioration. Dans ce cas, nous ne pouvons pas parler d'accélération de la convergence car, la méthode initiale étant à convergence finie, la procédure hybride sera aussi à convergence finie.

A la fin de ce chapitre en 1.4, nous donnons des exemples numériques illustrant les deux cas particuliers de la procédure hybride pour lesquels nous pouvons obtenir une accélération de la convergence.

1.1 Définition

Nous supposons que nous utilisons deux méthodes itératives de résolution du système

$$Ax = b. \quad (0.1)$$

Nous notons leurs itérés respectifs x'_n et x''_n et les vecteurs résidus correspondants $r'_n = b - Ax'_n$ et $r''_n = b - Ax''_n$.

La procédure hybride définie dans [11] par **C. Brezinski** et **M. Redivo Zaglia** consiste à construire le nouvel élément x_n et le nouveau résidu $r_n = b - Ax_n$ par :

$$\left. \begin{aligned} x_n &= \alpha_n x'_n + (1 - \alpha_n) x''_n \\ r_n &= \alpha_n r'_n + (1 - \alpha_n) r''_n \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

avec

$$\alpha_n = - \frac{(r'_n - r''_n, r''_n)}{(r'_n - r''_n, r'_n - r''_n)}.$$

Quand $r'_n = r''_n$ nous posons $r_n = r'_n = r''_n$. Le coefficient α_n est choisi de telle façon que

$$\|r_n\| = \min_{\alpha} \|\alpha r'_n + (1 - \alpha) r''_n\|.$$

Le vecteur r_n ainsi défini, vérifie :

$$(r_n, r'_n) = (r_n, r''_n) = (r_n, r_n).$$

Dans ce qui suit, nous allons souvent nous servir de la quantité $r'_n - r''_n$. Pour simplifier les notations, nous allons désigner cette quantité par p_n . Posons donc

$$p_n = r'_n - r''_n,$$

alors (1.1) peut être réécrit comme

$$\left. \begin{aligned} r_n &= r''_n - \frac{(p_n, r''_n)}{(p_n, p'_n)} p_n \\ r_n &= r'_n - \frac{(p_n, r'_n)}{(p_n, p_n)} p_n. \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

Nous vérifions facilement que

$$(r_n, r_n) = \frac{(r'_n, r'_n)(r''_n, r''_n) - (r'_n, r''_n)^2}{(r'_n - r''_n, r'_n - r''_n)} \quad (1.3)$$

$$= (r''_n, r''_n) - \frac{(p_n, r''_n)^2}{(p_n, p_n)} \quad (1.4)$$

$$= (r'_n, r'_n) - \frac{(p_n, r'_n)^2}{(p_n, p_n)}. \quad (1.5)$$

1.2 Propriétés

Dans cette section, nous allons étudier, dans le cas général, les propriétés asymptotiques ainsi que les propriétés géométriques de la procédure hybride. Pour cela, nous allons nous servir des formules (1.3) et (1.5) pour étudier les possibilités d'accélération de la convergence de la procédure hybride. Pour démontrer les propriétés géométriques, nous nous servirons de la propriété suivante :

$$(r_n, r'_n) = (r_n, r''_n) = (r_n, r_n).$$

1.2.1 Comportement asymptotique

Soient r'_n et r''_n les vecteurs résidus respectifs des deux méthodes itératives de résolution du système (0.1) et G une matrice définie positive se factorisant en $G = Z^T Z$. Soit θ_n l'angle aigu compris entre le vecteur Zr'_n et le vecteur Zr''_n .

RELATIONS :

Puisque,

$$(r'_n, r''_n) = \|r'_n\| \|r''_n\| \cos \theta_n$$

nous obtenons,

$$\alpha_n = -\frac{\|r'_n\| \|r''_n\| \cos \theta_n - \|r''_n\|^2}{\|r'_n\|^2 - 2\|r'_n\| \|r''_n\| \cos \theta_n + \|r''_n\|^2}$$

et

$$\|r_n\|^2 = \frac{\|r'_n\|^2 \|r''_n\|^2 (1 - \cos^2 \theta_n)}{\|r'_n\|^2 - 2\|r'_n\| \|r''_n\| \cos \theta_n + \|r''_n\|^2}.$$

En posant

$$\varrho_n = \|r'_n\| / \|r''_n\|,$$

les expressions de α_n et de $\frac{\|r_n\|^2}{\|r'_n\|^2}$ deviennent :

$$\alpha_n = -\frac{\varrho_n \cos \theta_n - 1}{\varrho_n^2 - 2\varrho_n \cos \theta_n + 1}$$

et

$$\frac{\|r_n\|^2}{\|r'_n\|^2} = \frac{1 - \cos^2 \theta_n}{\varrho_n^2 - 2\varrho_n \cos \theta_n + 1} \quad (1.6)$$

$$= 1 - \frac{(\varrho_n - \cos \theta_n)^2}{(\varrho_n - \cos \theta_n)^2 + \sin^2 \theta_n} \quad (1.7)$$

$$= \frac{\sin^2 \theta_n}{(\varrho_n - \cos \theta_n)^2 + \sin^2 \theta_n} \quad (1.8)$$

$$= \frac{\sin^2 \theta_n}{\varrho_n^2 - 2\varrho_n \cos \theta_n + 1}. \quad (1.9)$$

A partir de ces relations, nous obtenons immédiatement

Théorème 1.1

Supposons que la suite (θ_n) converge et soit θ sa limite, alors, nous avons

1. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_n = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 1$.
2. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_n = 1$ et $\theta \neq 0, \pi$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 1/2$.
3. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_n = \infty$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$.

Nous remarquons que lorsqu'une des deux méthodes initiales converge plus vite que l'autre, la procédure hybride coïncide asymptotiquement avec la meilleure des deux méthodes initiales.

En utilisant les relations (1.6), (1.7), (1.8) et (1.9), nous allons étudier la convergence du rapport $\|r_n\|/\|r'_n\|$. De la relation (1.9), nous obtenons immédiatement

Théorème 1.2

Supposons que la suite (ρ_n) et la suite (θ_n) convergent et que leurs limites soient respectivement ρ et θ . Si $\rho^2 - 2\rho \cos \theta + 1 \neq 0$, alors, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|r_n\|^2}{\|r'_n\|^2} = \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2 - 2\rho \cos \theta + 1} \leq 1.$$

Remarque 1.1 :

Si la limite ρ de la suite (ρ_n) est inférieure ou égale à 1, alors nous avons également

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|r_n\|^2}{\|r''_n\|^2} = \frac{\rho^2 \sin^2 \theta}{\rho^2 - 2\rho \cos \theta + 1} \leq \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2 - 2\rho \cos \theta + 1} \leq 1.$$

Donc, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|r_n\|}{\min(\|r'_n\|, \|r''_n\|)}$ existe et elle n'est pas supérieure que 1.

Dans le cas où $\rho \geq 1$, nous considérons le rapport $\|r_n\|^2/\|r''_n\|^2$ et nous obtenons des résultats similaires. Nous remarquons aussi que le rapport $\|r_n\|^2/\|r'_n\|^2$ tend vers 1 si et seulement si $\rho = \cos \theta$ et $\rho \neq 1$. Ce résultat peut être obtenu directement à partir de l'équation (1.7). Remarquons que si $\rho = \cos \theta$ et $\rho \neq 1$, alors, $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 1$ ce qui signifie qu'à l'infini, r_n est équivalent à r'_n . De même, en utilisant l'équation (1.7), nous obtenons :

Théorème 1.3

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\exists N$ tel que $\forall n \geq N$

$$0 \leq \frac{\|r_n\|^2}{\|r'_n\|^2} < 1$$

est : pour le même indice N et $\forall n \geq N$, $(r'_n - r''_n, r'_n) \neq 0$.

Preuve :

Supposons que $\exists N : \forall n \geq N (r'_n - r''_n, r'_n) \neq 0$. Nous avons donc

$$\rho_n - \cos \theta_n = \frac{\|r'_n\|}{\|r''_n\|} - \frac{(r'_n, r''_n)}{\|r'_n\| \|r''_n\|} = \frac{(r'_n, r'_n - r''_n)}{\|r'_n\| \|r''_n\|} \neq 0$$

et, d'après (1.7), nous obtenons

$$\frac{\|r_n\|^2}{\|r'_n\|^2} < 1.$$

La réciproque se démontre d'une façon identique ce qui termine la démonstration. ■

Maintenant nous allons étudier le cas où la suite (r_n) converge vers zéro plus vite que les suites (r'_n) et (r''_n) . D'après l'équation (1.8), nous avons

Théorème 1.4

S'il existe un réel $\bar{\varrho}$ et un indice N tels que $\forall n \geq N, 0 \leq \varrho_n \leq \bar{\varrho} < 1$, alors, une condition nécessaire et suffisante pour que la suite (r_n) converge plus vite que la suite (r'_n) , i.e.,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|r_n\|}{\|r'_n\|} = 0$$

est que la suite (θ_n) tende vers 0 ou π ce qui signifie qu'à l'infini le vecteur r'_n et le vecteur r''_n sont colinéaires.

Preuve :

- D'abord, montrons que la condition est suffisante. Supposons que la suite (θ_n) tende vers 0 ou π . Alors, puisque $\varrho_n \leq \bar{\varrho} < 1$, nous déduisons immédiatement de l'équation (1.8)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|r_n\|}{\|r'_n\|} = 0.$$

- Montrons maintenant que la condition est nécessaire. Supposons que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|r_n\|}{\|r'_n\|} = 0$. La condition $\varrho_n \leq \bar{\varrho} < 1$ implique que la suite $(\sin \theta_n)$ tend vers 0,

ce qui termine la démonstration. ■

Remarque 1.2 :

Puisque $\varrho_n < 1$, alors $\forall n \geq N, \|r'_n\| < \|r''_n\|$. De plus, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|r_n\|}{\min(\|r'_n\|, \|r''_n\|)} = 0,$$

donc la procédure hybride accélère les deux méthodes.

Maintenant nous allons étudier le cas où la suite (ϱ_n) tend vers 1. A partir de l'équation (1.9) nous obtenons d'une façon immédiate le résultat suivant :

Théorème 1.5

Supposons que la suite (ϱ_n) converge. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_n = 1$, alors une condition nécessaire et suffisante pour que la suite (r_n) converge plus vite que la suite (r'_n) , i.e.,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|r_n\|}{\|r'_n\|} = 0$$

est que la suite (θ_n) tende vers π .

Remarque 1.3 :

Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_n = 1$, alors la procédure hybride accélère les deux méthodes :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|r_n\|}{\min(\|r'_n\|, \|r''_n\|)} = 0.$$

Un autre résultat dans le cas où la suite (ϱ_n) tend vers 1 est donné par :

Théorème 1.6

Si $\|r'_n\|/\|r''_n\| = 1 + a_n$ avec $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, alors une condition nécessaire et suffisante pour que la suite (r_n) converge plus vite que la suite (r'_n) , i.e.,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|r_n\|}{\|r'_n\|} = 0$$

est que $\theta_n = o(a_n)$.

Preuve :

Nous avons

$$\begin{aligned} \varrho_n &= \frac{\|r'_n\|}{\|r''_n\|} \\ \cos \theta_n &= 1 + \frac{\theta_n^2}{2} + \mathcal{O}(\theta_n^4) \\ \sin \theta_n &= \theta_n + \mathcal{O}(\theta_n^3). \end{aligned}$$

En remplaçant les quantités ϱ_n , $\cos \theta_n$, $\sin \theta_n$ par leurs expressions dans la formule (1.9), nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\|r_n\|}{\|r'_n\|} &= \frac{\sin^2 \theta_n}{\varrho_n^2 - 2\varrho_n \cos \theta_n + 1} \\ &= \frac{(\theta_n(1 + \mathcal{O}(\theta_n^2)))^2}{(1 + a_n)^2 - 2(1 + a_n)(1 - \theta_n^2/2 + \mathcal{O}(\theta_n^4)) + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\theta_n^2(1 + \mathcal{O}(\theta_n^2))}{a_n^2 + \theta_n^2 + a_n\theta_n^2 + (1 + a_n)\mathcal{O}(\theta_n^4)} \\
&= \frac{1 + \mathcal{O}(\theta_n^2)}{(a_n/\theta_n)^2 + 1 + a_n + (1 + a_n)\mathcal{O}(\theta_n^2)}.
\end{aligned}$$

Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|r_n\|}{\|r'_n\|} = 0$ si et seulement si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\theta_n} = \infty$ c'est-à-dire si $\theta_n = o(a_n)$ ce qui termine la démonstration. ■

Remarque 1.4 :

Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_n = 1$, alors la remarque 1.3 (p. 20) reste toujours vraie c'est-à-dire que la procédure hybride accélère les deux méthodes.

Nous pouvons également considérer l'angle aigu ϑ_n compris entre le vecteur Zr'_n et le vecteur Zp_n . A partir de la formule (1.5), nous obtenons

$$\|r_n\|^2 = \|r'_n\|^2 \sin^2 \vartheta_n.$$

Directement de cette équation nous obtenons

Théorème 1.7

Supposons que la suite (ϑ_n) converge et que sa limite soit égale à ϑ . Si $\vartheta \neq \pi/2$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|r_n\|}{\|r'_n\|} = \sin \vartheta < 1.$$

et

Théorème 1.8

Une condition nécessaire et suffisante pour que la suite (r_n) converge plus vite que la suite (r'_n) , i.e.,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|r_n\|}{\|r'_n\|} = 0$$

est que la suite (ϑ_n) tende vers 0 ou π ce qui signifie qu'à l'infini les vecteurs r'_n et $r'_n - r''_n$ sont colinéaires.

Ces résultats sont plus simples à démontrer que les résultats précédents, en particulier les résultats du théorème 1.3 (p. 18) et du théorème 1.4 (p. 19).

Dans le théorème 1.7 (p. 21), la condition $\vartheta = \pi/2$ signifie qu'à l'infini, les vecteurs r'_n et $p_n = r'_n - r''_n$ deviennent orthogonaux (voir la figure 1.1). Dans ce cas-ci la méthode qui détermine la suite (r'_n) se rapproche bien de la méthode optimale qui est la procédure

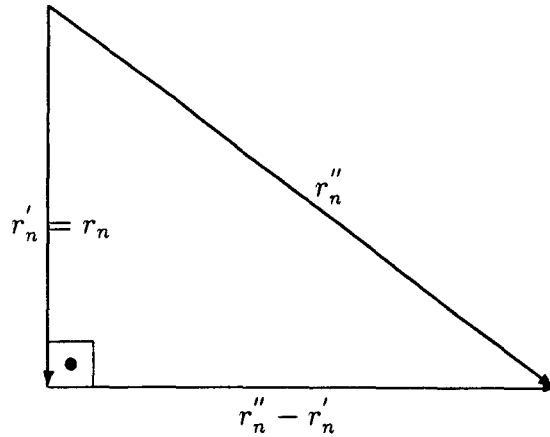


Figure 1.1 :

hybride. Nous rappelons que la suite (r_n) est construite par la procédure hybride de telle sorte que

$$(r_n, r'_n - r''_n) = 0.$$

Dans le théorème 1.8 (p. 21), la condition que la suite (ϑ_n) tende vers 0 ou π signifie qu'à l'infini les vecteurs r'_n et $p_n = r'_n - r''_n$ deviennent colinéaires (voir la figure 1.2). Remarquons que dans ce cas, les vecteurs r'_n et r''_n deviennent aussi colinéaires à l'infini

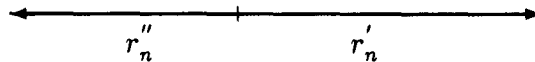


Figure 1.2 :

ce qui signifie que la suite (θ_n) tend vers 0 ou π . Cette condition a été utilisée dans le théorème 1.4 (p. 19). Ces deux théorèmes nous donnent ainsi des conditions équivalentes pour que la procédure hybride accélère la convergence de la suite (r'_n) . Dans les applications faisant à l'un ou l'autre de ces théorèmes, nous allons nous servir de celui dont les conditions nécessaires et suffisantes sont plus faciles à vérifier.

Remarque 1.5 :

De même, si nous notons par φ_n l'angle aigu entre le vecteur Zr''_n et le vecteur Zp_n , nous obtenons $\|r_n\| = \|r''_n\| \sin \varphi_n$.

Evidemment, nous avons $\theta_n = \varphi_n - \vartheta_n$.

La dépendance entre les angles θ_n , ϑ_n et φ_n dans le triangle engendré par le vecteur Zr'_n et le vecteur Zr''_n peut être schématisée par la figure 1.3.

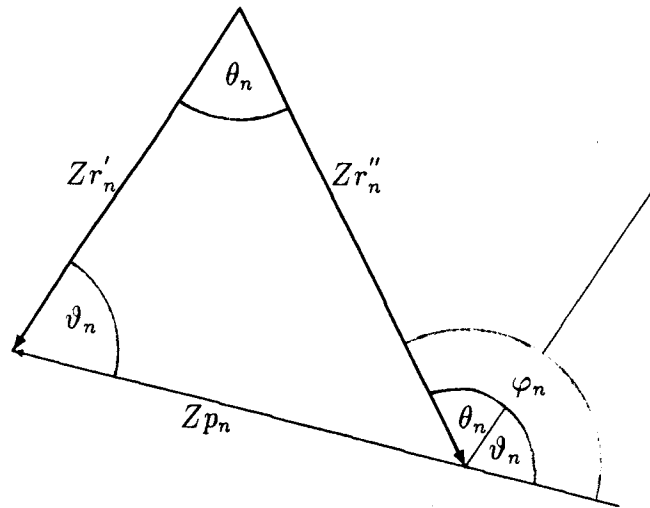


Figure 1.3 :

1.2.2 Propriétés géométriques

Nous noterons $\Upsilon_G(q, r)$ la sphère de centre q et de rayon r , dans l'espace vectoriel \mathcal{R}^m muni de la G -norme et définie par :

$$\Upsilon_G(q, r) = \{y \in \mathcal{R}^m, \|y - q\|_G = r\}.$$

La procédure hybride vérifie les propriétés suivantes :

Propriété 1.1

Le vecteur r_n appartient à l'intersection de deux sphères dans \mathcal{R}^m muni de la G -norme. La première a pour centre le point $\frac{r'_n}{2}$ et son diamètre est $\|r'_n\|_G$, la deuxième a pour centre le point $\frac{r''_n}{2}$ et son diamètre est $\|r''_n\|_G$

$$r_n \in \Upsilon_G \left(\frac{r'_n}{2}, \frac{\|r'_n\|_G}{2} \right) \cap \Upsilon_G \left(\frac{r''_n}{2}, \frac{\|r''_n\|_G}{2} \right).$$

Preuve :

Le vecteur r_n est calculé de telle sorte que [11] les égalités suivantes soient vérifiées :

$$\begin{aligned} (r_n, r'_n - r''_n) &= 0 \\ (r_n, r_n - r'_n) &= 0 \\ (r_n, r_n - r''_n) &= 0. \end{aligned}$$

Donc le vecteur r_n vérifie également :

$$\begin{aligned} (r_n, r_n) &= (r_n, r'_n) \\ &= (r_n, r''_n). \end{aligned}$$

En calculant $\left\| r_n - \frac{r'_n}{2} \right\|^2$ nous obtenons

$$\begin{aligned} \left\| r_n - \frac{r'_n}{2} \right\|^2 &= \|r_n\|^2 - (r_n, r'_n) + \frac{1}{4} \|r'_n\|^2 \\ &= \frac{1}{4} \|r'_n\|^2. \end{aligned}$$

De la même façon, nous montrons que

$$\left\| r_n - \frac{r''_n}{2} \right\|^2 = \frac{1}{4} \|r''_n\|^2$$

donc le vecteur r_n appartient bien à l'intersection des deux sphères mentionnées auparavant ce qui termine la démonstration. ■

Nous expliquons cette propriété par la figure 1.4.

Nous allons noter $e_n = \tilde{x} - x_n$, $e'_n = \tilde{x} - x'_n$, $e''_n = \tilde{x} - x''_n$ les vecteurs erreurs correspondant respectivement aux vecteurs x_n , x'_n , x''_n . En utilisant la relation entre le vecteur résidu et le vecteur erreur ($r = Ae$) et la propriété précédente nous obtenons le

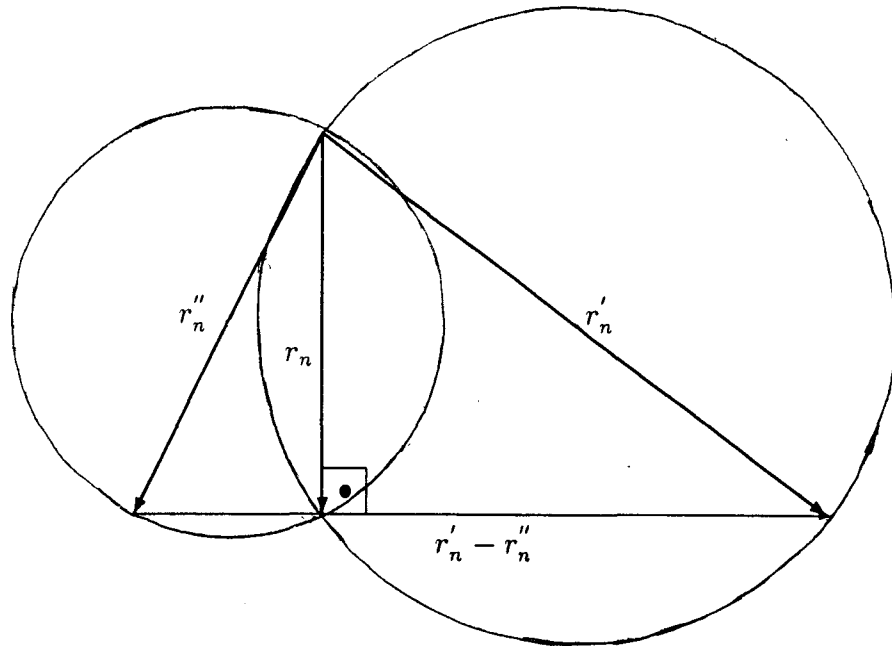


Figure 1.4 :

résultat suivant :

Propriété 1.2

Le vecteur e_n appartient à l'intersection de deux sphères dans \mathcal{R}^m muni de la A^TGA -norme. La première a pour centre le point $\frac{e_n'}{2}$ et son diamètre est $\|e_n'\|_{A^TGA}$, la deuxième a pour centre le point $\frac{e_n''}{2}$ et son diamètre est $\|e_n''\|_{A^TGA}$.

$$e_n \in \Upsilon_{A^TGA} \left(\frac{e_n'}{2}, \frac{\|e_n'\|_{A^TGA}}{2} \right) \cap \Upsilon_{A^TGA} \left(\frac{e_n''}{2}, \frac{\|e_n''\|_{A^TGA}}{2} \right).$$

Dans ce qui suit, nous allons montrer que la procédure hybride peut être considérée comme une méthode de projection; nous allons aussi montrer que c'est la méthode de projection G -orthogonale. En effet nous avons :

Propriété 1.3

Soit $\varphi_n = I - \frac{1}{p_n^T G p_n} p_n p_n^T G$. Nous avons

$$\begin{aligned} r_n &= \varphi_n r_n' \\ &= \varphi_n r_n'' \end{aligned}$$

Preuve :

En réécrivant l'équation (1.2) nous obtenons

$$r_n = r_n' - \frac{(p_n, r_n')_G}{(p_n, p_n)_G} p_n.$$

Le G -produit scalaire est défini par

$$(x, y)_G = (x, Gy) = x^T Gy$$

et nous avons

$$\begin{aligned} r_n &= r_n' - \frac{p_n^T G r_n'}{p_n^T G p_n} p_n \\ &= r_n' - \frac{1}{p_n^T G p_n} p_n p_n^T G r_n' \\ &= \left(I - \frac{1}{p_n^T G p_n} p_n p_n^T G \right) r_n' \end{aligned}$$

Posons donc

$$\varphi_n = I - \frac{1}{p_n^T G p_n} p_n p_n^T G$$

nous avons

$$r_n = \varphi_n r_n'.$$

De la même façon nous montrons que

$$r_n = \varphi_n r_n''$$

ce qui termine la démonstration. ■

Nous montrons facilement que la matrice φ_n vérifie les propriétés suivantes

1. $\varphi_n^2 = \varphi_n$,
2. $(G\varphi_n)^T = G\varphi_n$.

Donc, d'après la définition 0.3 (p. 6), la matrice φ_n est un projecteur G -orthogonal. En utilisant la définition de la matrice φ_n nous obtenons

$$\begin{aligned} \varphi_n v &= v & \text{si } v \perp_G p_n \\ \varphi_n v &= 0 & \text{si } v \in \text{span}\{p_n\}. \end{aligned}$$

Si nous prenons comme choix particulier du vecteur r_n''

$$r_n'' = r_{n-1}$$

nous retrouvons la méthode appliquée "Minimal Residual Smoothing" de la forme

$$r_n = \alpha_n r_n' + (1 - \alpha_n) r_{n-1}.$$

Pour ce cas particulier nous retrouvons les propriétés données par **R. Weiss** dans [42]. Nos résultats peuvent être donc considérés comme une généralisation de ceux donnés par **R. Weiss**.

Nous avons rencontré des difficultés pour donner plus de résultats théoriques sur la convergence de la procédure hybride dans le cas général. Dans la partie suivante nous étudierons les cas particuliers afin de donner des conditions plus pratiques à vérifier pour obtenir l'accélération de la convergence.

1.3 Applications

Considérons une méthode arbitraire de résolution du système (0.1). Soit (r_n') la suite des vecteurs résidus déterminée par cette méthode. Dans cette section nous allons considérer deux choix particuliers du vecteur r_n'' :

1. $r_n'' = Br_{n-1}$

2. $r_n'' = Br_n'$

avec $B = I - A$.

Le choix de la matrice $B = I - A$ n'est pas restrictif. En effet, si nous voulons considérer une décomposition régulière de la matrice A

$$A = M - N$$

avec M une matrice inversible, nous obtenons

$$M^{-1}A = I - M^{-1}N.$$

La matrice M^{-1} peut être considérée alors comme un préconditionnement de la matrice A . Si $A^{(M)} = M^{-1}A$ désigne la matrice du système transformé, alors à ce système nous pouvons aussi associer la méthode définie par l'équation (0.2) avec

$$B = I - A^{(M)} = M^{-1}N.$$

Dans le premier cas nous allons également étudier le cas $B = I$.

Dans ce travail, nous ne considérons que le cas où la matrice $B \in \mathcal{R}^{m \times m}$ est une matrice diagonalisable. Nous supposons en outre que la matrice B admet q ($q \geq 2$) valeurs propres distinctes ordonnées dans le sens décroissant des modules

$$|\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_q|.$$

Dans ce cas, nous savons qu'à chaque valeur propre λ_i de multiplicité m_i ($\sum_{i=1}^q m_i = m$), correspondent m_i vecteurs propres linéairement indépendants, notés par $\gamma_1^{(i)}, \dots, \gamma_{m_i}^{(i)}$. Soit $\mathcal{V}_i = \text{span}\{\gamma_1^{(i)}, \dots, \gamma_{m_i}^{(i)}\}$ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i . Nous noterons $\tilde{\gamma}_i$, un vecteur quelconque appartenant au sous-espace \mathcal{V}_i , déterminé par ses coordonnées $c_1^{(i)}, \dots, c_{m_i}^{(i)}$ dans la base $\gamma_1^{(i)}, \dots, \gamma_{m_i}^{(i)}$, i.e.,

$$\tilde{\gamma}_i = c_1^{(i)}\gamma_1^{(i)} + \dots + c_{m_i}^{(i)}\gamma_{m_i}^{(i)}.$$

Nous avons

$$B\tilde{\gamma}_i = \lambda_i\tilde{\gamma}_i.$$

1.3.1 1^{er} cas

Dans cette partie nous allons déterminer le vecteur r_n à partir du vecteur $r_n'' = Br_{n-1}$ et du vecteur r_n' en utilisant la procédure hybride. Le vecteur r_n peut être écrit comme

$$r_n = \alpha_n r_n' + (1 - \alpha_n) Br_{n-1}. \quad (1.10)$$

Dans ce cas nous obtenons le résultat suivant :

Lemme 1.1

Soit (r_n') une suite de vecteurs résidus déterminée par une méthode arbitraire. Soit r_n le vecteur résidu correspondant à la procédure hybride, déterminé par l'équation (1.10). Si $r_0 = r_0'$ alors, $\forall n \geq 1$

$$(a) \quad r_n = \sum_{i=0}^n a_i^{(n)} B^{n-i} r_i' \quad \mathcal{H}_1(n)$$

$$(b) \quad \sum_{i=0}^n a_i^{(n)} = 1. \quad \mathcal{H}_2(n)$$

Preuve :

La démonstration des propriétés $\mathcal{H}_1(n)$ et $\mathcal{H}_2(n)$ se fait par récurrence simultanée.

- Nous avons par construction $r_0 = r_0'$ et $a_0^{(0)} = 1$, ce qui prouve $\mathcal{H}_1(0)$ et $\mathcal{H}_2(0)$.
- (a) Supposons que $\mathcal{H}_1(n-1)$ soit vraie. En utilisant la définition du vecteur r_n et $\mathcal{H}_1(n-1)$ nous obtenons

$$\begin{aligned} r_n &= \alpha_n r_n' + (1 - \alpha_n) Br_{n-1} \\ &= \alpha_n r_n' + (1 - \alpha_n) B \sum_{i=0}^{n-1} a_i^{(n-1)} B^{n-1-i} r_i' \\ &= \sum_{i=0}^n a_i^{(n)} B^{n-i} r_i'. \end{aligned}$$

La propriété $\mathcal{H}_1(n)$ est donc vérifiée.

- (b) Les coefficients $a_i^{(n)}$ sont calculés par

$$\begin{aligned} a_i^{(n)} &= (1 - \alpha_n) a_i^{(n-1)} & i = 0, \dots, n-1 \\ a_n^{(n)} &= \alpha_n. \end{aligned}$$

Nous calculerons $\sum_{i=0}^n a_i^{(n)}$ en utilisant la définition récursive de coefficients $a_i^{(n)}$ et $\mathcal{H}_2(n-1)$. Nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n a_i^{(n)} &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i^{(n)} + a_n^{(n)} \\ &= (1 - \alpha_n) \sum_{i=0}^{n-1} a_i^{(n-1)} + \alpha_n \\ &= 1. \end{aligned}$$

La propriété $\mathcal{H}_2(n)$ est donc vérifiée

ce qui termine la démonstration. ■

Remarque 1.6 :

Lorsque le vecteur r'_n est calculé par une méthode polynomiale de la forme $r'_n = P_n(B)r'_0$ alors le vecteur r_n est aussi calculé par une méthode polynomiale $r_n = Q_n(B)r'_0$ avec le polynôme Q_n donné par

$$Q_n(t) = \alpha_n P_n(t) + (1 - \alpha_n) t Q_{n-1}(t).$$

Supposons que les polynômes Q_{n-1} et P_n sont liés par la relation

$$tQ_{n-1}(t) = P_n(t) \quad \forall n.$$

Dans ce cas nous obtenons

$$\begin{aligned} Q_n(t) &= P_n(t) \\ &= tQ_{n-1}(t) \\ &= t^n Q_0(t). \end{aligned}$$

La procédure hybride déterminée par l'équation (1.10) et appliquée à la méthode du type

$$\left. \begin{aligned} x'_{n+1} &= Bx'_n + b \\ r'_{n+1} &= Br'_n \end{aligned} \right\} \quad (0.2)$$

coïncide avec la méthode initiale.

Dans ce qui suit, nous allons étudier, la convergence de la méthode définie par l'équation (1.10).

Théorème 1.9

Soit (r'_n) la suite de vecteurs résidus déterminée par une méthode arbitraire. Soit r_n le vecteur résidu correspondant à la procédure hybride, déterminé par l'équation (1.10). Soit λ une valeur propre de la matrice B et γ un vecteur propre correspondant. Supposons que le vecteur r_n se décompose de la façon suivante

$$r_n = c_n \gamma + a_n$$

avec $c_n \in \mathcal{R}$ et $a_n \in \mathcal{R}^m$ tels que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|a_n\|}{c_n} = 0$. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\gamma, r'_n)}{\|r'_n\|} = \|\gamma\|$ alors la procédure hybride accélère la convergence de la suite (r'_n) , i.e.,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|r_n\|}{\|r'_n\|} = 0.$$

Preuve :

Soit $G = Z^T Z$. Soit θ_n l'angle aigu compris entre le vecteur ZBr_{n-1} et le vecteur Zr'_n . Nous avons

$$\begin{aligned} (Br_{n-1}, r'_n)^2 &= c_{n-1}^2 \lambda^2 (\gamma, r'_n)^2 + (Ba_{n-1}, r'_n)^2 + 2c_{n-1} \lambda (\gamma, r'_n) (Ba_{n-1}, r'_n) \\ \|Br_{n-1}\|^2 &= c_{n-1}^2 \lambda^2 \|\gamma\|^2 + \|Ba_{n-1}\|^2 + 2c_{n-1} \lambda (\gamma, Ba_{n-1}) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^2 \theta_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(Br_{n-1}, r'_n)^2}{\|Br_{n-1}\|^2 \|r'_n\|^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\lambda^2 (\gamma, r'_n)^2 + \frac{(Ba_{n-1}, r'_n)^2}{c_{n-1}^2 \|r'_n\|^2} + 2\lambda \frac{(\gamma, r'_n)(Ba_{n-1}, r'_n)}{c_{n-1} \|r'_n\|^2}}{\lambda^2 \|\gamma\|^2 + \frac{\|Ba_{n-1}\|^2}{c_{n-1}^2} + 2\lambda \frac{(\gamma, a_{n-1})}{c_{n-1}}} \right] \\ &= 1 \end{aligned}$$

et nous obtenons notre résultat à partir du théorème 1.4 (p. 19), ce qui termine la démonstration. ■

Dans ce qui suit, nous montrons que sous certaines conditions la méthode déterminée par l'équation (1.10) minimise la norme de vecteur résidu dans chaque itération. En utilisant la propriété du vecteur r_n de minimisation de la G -norme nous obtenons

$$\|r_n\| \leq \|Br_{n-1}\| \leq \|B\| \|r_{n-1}\|$$

donc $\|r_n\| \leq \|r_{n-1}\|$ si $\|B\| \leq 1$.

Remarque 1.7 :

Si $\|B\| < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \|r_n\| = 0$ et donc la procédure hybride converge.

En particulier, si nous considérons une décomposition régulière de la matrice A

$$A = M - N,$$

où la matrice M est régulière et si nous prenons $B = M^{-1}N$ alors $M^{-1}A = I - B$. Donc un bon choix de la matrice B est équivalent à un bon choix du préconditionnement M de la matrice A .

Quand $B = I$ cette méthode est appelée "Minimal Residual Smoothing" (MRS) algorithm. Elle a été introduite dans [36],[37] et appliquée à des méthodes déjà connues; pour plus de détails voir [20], [42], [43],[44],[45],[48].

Maintenant nous allons appliquer cette méthode à une méthode de minimisation d'erreur [26]. Posons $e'_n = \tilde{x} - x'_n$ et $e_n = \tilde{x} - x_n$. Soit φ est une norme dans \mathcal{R}^m . Pour $x \in \mathcal{R}^m$ nous notons par $z(x)$ un vecteur tel que

$$(z(x), x) = \varphi(x).$$

On appelle cette méthode la décomposition de la norme φ [21]. Soit x'_0 un vecteur donné. "The Transformed Norm Decomposition Method" (TNDE) est définie par [24], [26] :

$$r'_0 = b - Ax'_0$$

$$p'_0 = A^T z_0$$

pour $n = 0, 1, \dots$

$$x'_{n+1} = x'_n - \beta_n p'_n$$

$$r'_{n+1} = r'_n + \beta_n A p'_n$$

$$p'_{n+1} = A^T z_{n+1} + \sum_{i=0}^n \gamma_{n+1}^{(i)} p'_i$$

où le vecteur z_i est choisi de tel sorte que $(z_i, r'_i) = \varphi(r'_i)$. Les coefficients β_n et $\gamma_{n+1}^{(i)}$ sont donnés par :

$$\beta_n = \frac{(p'_n, e'_n)}{(p'_n, p'_n)} = -\frac{\varphi(r'_n)}{(p'_n, p'_n)}$$

$$\gamma_{n+1}^{(i)} = -\frac{(p'_i, A^T z_{n+1})}{(p'_i, p'_i)} \quad i = 0, \dots, n.$$

La suite $e'_n = \tilde{x} - x'_n$ vérifie les propriétés suivantes

1. $e'_n \in \mathcal{U}_n = e'_0 + \text{span}\{p'_0, \dots, p'_n\}$
2. $\mathcal{U}_{n-1} \subset \mathcal{U}_n$
3. $\|e'_n\| = \min_{e \in \mathcal{U}_n} \|e\|$
4. $\|e'_n\| \leq \|e'_{n-1}\|$.

Si nous appliquons le MRS algorithme à la méthode TNDE, c'est-à-dire à la suite (r'_n) définie précédemment avec $r_0 = r'_0$, nous obtenons le théorème suivant :

Théorème 1.10

Soit (r'_n) la suite de vecteurs résidus déterminée par la méthode TNDE. Soit α_n le coefficient utilisé par la procédure hybride dans la combinaison

$$r_n = \alpha_n r'_n + (1 - \alpha_n) r_{n-1}.$$

Si $\alpha_n \in]0, 1[$ alors

$$\|e_n\| \leq \|e_{n-1}\|.$$

Preuve :

Le vecteur e_{n-1} s'exprime comme une combinaison du vecteur e'_{n-1} et du vecteur e_{n-2} avec le coefficient α_{n-1}

$$e_{n-1} = \alpha_{n-1} e'_{n-1} + (1 - \alpha_{n-1}) e_{n-2}$$

donc pour tout indice n nous avons,

$$e_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} a_i^{(n-1)} e'_i \in \mathcal{U}_{n-1}.$$

D'après la propriété 3 de la méthode TNDE nous pouvons déduire que

$$\|e'_{n-1}\| \leq \|e_{n-1}\|.$$

En utilisant également la propriété 4 de la méthode TNDE, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|e_n\| &\leq \alpha_n \|e'_n\| + (1 - \alpha_n) \|e_{n-1}\| \\ &\leq \alpha_n \|e'_{n-1}\| + (1 - \alpha_n) \|e_{n-1}\| \\ &\leq \alpha_n \|e_{n-1}\| + (1 - \alpha_n) \|e_{n-1}\| \\ &= \|e_{n-1}\| \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration. ■

1.3.2 2^{ème} cas

Supposons que le vecteur r_n soit déterminé par la procédure hybride à partir du vecteur r'_n et du vecteur Br'_n . Nous pouvons voir que

$$r_n = \alpha_n r'_n + (1 - \alpha_n) Br'_n \quad (1.11)$$

avec $B = I - A$. Nous pouvons réécrire le vecteur r_n comme

$$r_n = r'_n - \frac{(Ar'_n, r'_n)}{(Ar'_n, Ar'_n)} Ar'_n.$$

Remarque 1.8 :

Si nous considérons un choix particulier de la suite (r'_n) tel que $r'_n = r_{n-1}$, alors la procédure hybride devient "the Minimal Residual Method" [14], [40].

Dans ce qui suit nous allons donner une définition et un lemme dont nous nous servirons ultérieurement.

Définition 1.1

Considérons deux suites de vecteurs $(u_n) \in \mathcal{R}^m$ et $(v_n) \in \mathcal{R}^m$ telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v$. Nous disons que la suite (u_n) et la suite (v_n) **convergent avec la même vitesse** si il existe une suite de matrices $(M_n) \in \mathcal{R}^{m \times m}$ et une suite de vecteurs $(a_n) \in \mathcal{R}^m$ qui converge vers zéro avec :

1. $v_{n+1} = M_n v_n$
2. $u_{n+1} = M_n u_n + a_n$.

Lemme 1.2

Soit (r'_n) une suite convergente de vecteurs résidus obtenue par une méthode arbitraire. Soit r_n le vecteur résidu correspondant à la procédure hybride déterminé par l'équation (1.11). Supposons qu'il existe une suite de matrices (M_n) bornée telle que $r'_{n+1} = M_n r'_n$ avec $AM_n = M_n A$. Si la suite de coefficients (α_n) converge alors la suite (r_n) converge avec la même vitesse que (r'_n) .

Preuve :

Si la suite (α_n) converge, alors il existe une suite (ε_n) de limite nulle telle que $\forall n$,

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \varepsilon_n.$$

Soit $a_n = \varepsilon_n AM_n r'_n$, donc nous obtenons à partir de la définition du vecteur r_{n+1}

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= r'_{n+1} - (1 - \alpha_{n+1}) Ar'_{n+1} \\ &= M_n r'_n - (1 - \alpha_n + \varepsilon_n) AM_n r'_n \\ &= M_n (r'_n - (1 - \alpha_n) Ar'_n) + \varepsilon_n AM_n r'_n \\ &= M_n r_n + a_n. \end{aligned}$$

Puisque la suite (M_n) est bornée alors il existe un réel positif tel que $\|M_n\| \leq M$ donc

$$\begin{aligned} \|a_n\| &= \|\varepsilon_n AM_n r'_n\| \\ &\leq M \|A\| \|\varepsilon_n\| \|r'_n\| \end{aligned}$$

or $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \|r'_n\| = 0$ donc nous avons $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. De plus d'après les hypothèses du lemme nous avons :

$$r'_{n+1} = M_n r'_n$$

donc la suite (r_n) converge avec la même vitesse que (r'_n) ce qui termine la démonstration. ■

Dans le cas où la suite initiale (r'_n) est déterminée par la relation $r'_{n+1} = Br'_n$ ($B = I - A$) nous avons $AB = BA$. Donc si la suite (α_n) converge alors la suite (r_n) converge avec la même vitesse que (r'_n) .

Pour la suite des calculs nous supposons que le vecteur r'_n peut être décomposé de la manière suivante

$$r'_n = c_n \gamma + a_n$$

où $c_n \in \mathcal{R}$, $a_n \in \mathcal{R}^m$ et γ est un vecteur propre de la matrice B . Dans ce cas nous avons le résultat suivant :

Lemme 1.3

Soit (r'_n) une suite de vecteurs résidus déterminée par une méthode arbitraire. Soit r_n le vecteur résidu correspondant à la procédure hybride déterminé par l'équation (1.11). Soit γ un vecteur propre de la matrice B avec la valeur propre associée λ . Si on exprime le vecteur r'_n de la façon suivante

$$r'_n = c_n \gamma + a_n$$

alors il existe une suite de matrices $(M_n) \in \mathcal{R}^{m \times m}$, bornée telle que r_n s'exprime :

$$r_n = M_n a_n.$$

Preuve :

Dans la propriété 1.3 (p. 26) nous avons démontré qu'il existait une matrice \wp_n , vérifiant la condition $\wp_n p_n = 0$ avec

$$\begin{aligned} p_n &= Ar'_n \\ &= (1 - \lambda)c_n \gamma + Aa_n \end{aligned}$$

telle que

$$r_n = \wp_n r'_n.$$

Puisque le vecteur r'_n peut être décomposé, nous avons

$$r_n = c_n \wp_n \gamma + \wp_n a_n. \quad (1.12)$$

En multipliant le vecteur p_n par la matrice \wp_n nous obtenons

$$\begin{aligned} 0 &= \wp_n p_n \\ &= (1 - \lambda)c_n \wp_n \gamma + \wp_n Aa_n. \end{aligned}$$

Puisque nous supposons que la matrice A est régulière, alors forcément $\lambda \neq 1$, et nous obtenons

$$c_n \wp_n \gamma = -\frac{1}{1 - \lambda} \wp_n Aa_n.$$

En remplaçant le vecteur $c_n \varphi_n \gamma$ par son expression dans la formule (1.12) et en posant $M_n = \varphi_n \left(I - \frac{1}{1-\lambda} A \right)$ nous obtenons

$$r_n = M_n a_n.$$

La matrice φ_n est un projecteur G -orthogonal; donc, d'après le lemme 0.1 (p. 7) nous avons $\|\varphi_n\| = 1$ et nous pouvons majorer $\|M_n\|$ pour tout indice n :

$$\|M_n\| \leq \left(1 + \frac{1}{|1-\lambda|} \|A\| \right).$$

ce qui termine la démonstration. ■

Remarque 1.9 :

Une conséquence du lemme 1.3 (p. 36) est que

$$\|r_n\| = \mathcal{O}(\|a_n\|).$$

En utilisant le théorème 1.8 (p. 21) nous obtenons un résultat d'accélération pour ce cas particulier :

Théorème 1.11

Soit (r'_n) une suite de vecteurs résidus déterminée par une méthode arbitraire. Soit r_n le vecteur résidu correspondant à la procédure hybride déterminé par l'équation (1.11). Soit λ une valeur propre de la matrice B et γ un vecteur propre associé. Si la suite (r'_n) se décompose de la façon suivante

$$r'_n = c_n \gamma + a_n$$

avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|a_n\|}{c_n} = 0$ alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = -\frac{\lambda}{1-\lambda}$$

et la procédure hybride accélère la convergence de la suite (r'_n) , i.e.,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|r_n\|}{\|r'_n\|} = 0.$$

Preuve :

Nous avons

$$r'_n = c_n \gamma + a_n$$

$$\begin{aligned} Br'_n &= \lambda c_n \gamma + Ba_n \\ Ar'_n &= (1 - \lambda)c_n \gamma + Aa_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n &= -\frac{(Br'_n, Ar'_n)}{(Ar'_n, Ar'_n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-\frac{\lambda(1 - \lambda)c_n^2(\gamma, \gamma) + c_n\lambda(\gamma, Aa_n) + (1 - \lambda)c_n(Ba_n, \gamma) + (Ba_n, Aa_n)}{(1 - \lambda)^2c_n^2(\gamma, \gamma) + 2(1 - \lambda)c_n(\gamma, Aa_n) + (Aa_n, Aa_n)} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-\frac{\lambda(1 - \lambda)(\gamma, \gamma) + \lambda\frac{(\gamma, Aa_n)}{c_n} + (1 - \lambda)\frac{(Ba_n, \gamma)}{c_n} + \frac{(Ba_n, Aa_n)}{c_n^2}}{(1 - \lambda)^2(\gamma, \gamma) + 2(1 - \lambda)\frac{(\gamma, Aa_n)}{c_n} + \frac{(Aa_n, Aa_n)}{c_n^2}} \right] \\ &= -\frac{\lambda}{1 - \lambda}. \end{aligned}$$

Soit θ_n l'angle aigu entre les vecteurs Zr'_n et ZAr'_n . En remplaçant r'_n et Ar'_n par leur expressions ci-dessus, nous obtenons aussi

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^2 \theta_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(r'_n, Ar'_n)^2}{\|r'_n\|^2 \|Ar'_n\|^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[(1 - \lambda)c_n^2(\gamma, \gamma) + c_n(\gamma, Aa_n) + (1 - \lambda)c_n(a_n, \gamma) + (a_n, Aa_n)]^2}{[c_n^2(\gamma, \gamma) + 2c_n(\gamma, a_n) + (a_n, a_n)][(1 - \lambda)^2c_n^2(\gamma, \gamma) + 2(1 - \lambda)c_n(\gamma, Aa_n) + (Aa_n, Aa_n)]} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[(1 - \lambda)(\gamma, \gamma) + \frac{(\gamma, Aa_n)}{c_n} + (1 - \lambda)\frac{(a_n, \gamma)}{c_n} + \frac{(a_n, Aa_n)}{c_n^2} \right]^2}{\left[(\gamma, \gamma) + 2\frac{(\gamma, a_n)}{c_n} + \frac{(a_n, a_n)}{c_n^2} \right] \left[(1 - \lambda)^2(\gamma, \gamma) + 2(1 - \lambda)\frac{(\gamma, Aa_n)}{c_n} + \frac{(Aa_n, Aa_n)}{c_n^2} \right]} \\ &= 1 \end{aligned}$$

et, d'après le théorème 1.8 (p. 21), le résultat est vrai ce qui termine la démonstration. ■

Remarque 1.10 :

Dans le cas idéal où le vecteur a_n est un vecteur nul

$$r'_n = c_n \gamma$$

nous obtenons $r_n = 0$. Il est donc intéressant d'utiliser une méthode de résolution du système (0.1) telle que le vecteur r'_n approche bien un vecteur propre de la matrice B .

Les conditions du lemme 1.3 (p. 36) et du théorème 1.11 (p. 37) ne sont pas difficiles à

vérifier dans un cas particulier. Nous allons donner un exemple où nous pouvons appliquer ces résultats.

Exemple

Soit $B = I - A$ une matrice diagonalisable. Soient $\{\lambda_i\}_{i=1}^q$ ($q \geq 2$) les valeurs propres distinctes de la matrice B ordonnées par ordre décroissant des modules

$$|\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_q|$$

et soient $\{\gamma_i\}_{i=1}^m$ les vecteurs propres correspondants. Les vecteurs propres de la matrice B forment une base de \mathcal{R}^m . Soit (r'_n) la suite déterminée par la méthode

$$\left. \begin{aligned} x'_{n+1} &= Bx'_n + b \\ r'_{n+1} &= Br'_n \end{aligned} \right\} \quad (0.2)$$

et soit r_n le vecteur résidu, correspondant à la procédure hybride, déterminé par l'équation (1.11). Nous noterons $\tilde{\gamma}_i$, un vecteur appartenant au sous-espace propre \mathcal{V}_i correspondant à la valeur propre λ_i tel que $r'_0 = \sum_{i=1}^q \tilde{\gamma}_i$; en faisant une décomposition du vecteur r'_n comme dans la section "Notations" nous avons

$$\begin{aligned} r'_n &= \sum_{i=1}^q \lambda_i^n \tilde{\gamma}_i \\ &= \lambda_1^n \tilde{\gamma}_1 + \sum_{i=2}^q \lambda_i^n \tilde{\gamma}_i. \end{aligned}$$

Remarque 1.11 :

- Si $q = 1$ (la matrice B admet une seule valeur propre) alors r'_0 est un vecteur propre de la matrice B et nous obtenons $r_0 = 0$.
- Si dans la décomposition du vecteur r'_0 nous avons $\tilde{\gamma}_1 = 0$ alors il faut reperer la première composante telle que $\tilde{\gamma}_i \neq 0$.

Si nous posons

$$\begin{aligned} c_n &= \lambda_1^n \\ a_n &= \sum_{i=2}^q \lambda_i^n \tilde{\gamma}_i \end{aligned}$$

alors nous obtenons d'après la remarque 1.9 (p. 37) et le théorème 1.11 (p. 37)

Théorème 1.12

Soit (r'_n) la suite des vecteurs résidus déterminée par la méthode (0.2). Si le vecteur r_n est déterminé par la procédure hybride à partir du vecteur r'_n et du vecteur r'_{n+1} , en utilisant l'équation (1.11), alors

$$\|r_n\| = \mathcal{O}(|\lambda_2|^n).$$

De plus si nous avons $|\lambda_2| < |\lambda_1|$ alors la suite (r_n) converge plus vite que la suite (r'_n) , i.e.,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|r_n\|}{\|r'_n\|} = 0.$$

Remarque 1.12 :

Le théorème 1.12 (p. 40) est aussi vérifié si $|\lambda_2| < 1 < |\lambda_1|$. Dans ce cas la suite (r'_n) ne converge pas vers zéro.

Remarque 1.13 :

La suite (α_n) converge alors, d'après le lemme 1.2 (p. 35), la suite (r_n) converge avec la même vitesse que la suite (r'_n) . Dans ce cas le test théorique est $|\alpha_n + \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_1}| \leq \varepsilon$, où ε est une précision arbitraire. Evidemment si nous ne connaissons pas la valeur de λ_1 cette test est impossible à utiliser. Faute de mieux les iterations doivent être arrêtées quand $|\alpha_n - \alpha_{n+1}| \leq \varepsilon$. Nous devons noter que, à cause de possibilité de stagnation, ce test ne peut pas nous garantir que la suite (α_n) est proche de sa limite.

1.4 Exemples numériques

Dans cette section nous donnons des exemples numériques pour illustrer deux cas particuliers de la procédure hybride étudiée précédemment.

Pour tous les exemples nous prenons $G = I$, $A = I - B$ et $x'_0 = 0$. Le vecteur b est toujours choisi tel que la solution soit $\tilde{x} = [1, \dots, m]^T$. Chaque figure montre $\log \|r'_n\|$ et $\log \|r_n\|$ en fonction du nombre n d'itérations. La courbe en tirés correspond à la

procédure hybride. Afin de connaître les valeurs propres de la matrice B dans chaque exemple nous choisissons arbitrairement une matrice diagonale notée D , une matrice inversible P et nous prenons $A = PDP^{-1}/\sigma$. Soit $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$ l'ensemble des valeurs propres de la matrice B . Les valeurs $\|PDP^{-1}\|_\infty$, $\|B\|$ ont été calculées par Matlab (voir le tableau 1.1 et le tableau 1.2).

	Exemple 1.1	Exemple 1.2	Exemple 1.3
σ	$\ PDP^{-1}\ _\infty = 100$	1	1
$\ B\ $	1.0050	2.0297	46.5926
$ \lambda_1 $	0.9900	1.5427	0.9102
$ \lambda_2 $	0.9701	1.0102	0.7213

Tableau 1.1 :

1.4.1 1^{er} cas

Soit r'_n calculé par la méthode de décomposition de norme de Gastinel [21] avec $\varphi_1(r) = \sum_{i=1}^m |r_i|$. Cette méthode est définie par :

	Exemple 1.4	Exemple 1.5	Exemple 1.6	Exemple 1.7
σ	$\ PDP^{-1}\ _\infty = 200$	1	1	1
$\ B\ $	0.9996	55.2837	207.8772	175.5453
$ \lambda_1 $	0.9950	0.9000	1.0472	1.2247
$ \lambda_2 $	0.9900	0.9000	0.5236	0.8660

Tableau 1.2 :

pour $n = 0, 1, \dots$

$$x'_{n+1} = x'_n - \alpha'_n A^T z_n$$

$$r'_{n+1} = r'_n + \alpha'_n A A^T z_n$$

où le vecteur z_n est choisi tel que $(z_n, r'_n) = \varphi_1(r'_n)$ et

$$\alpha'_n = -\frac{\varphi_1(r'_n)}{(A^T z_n, A^T z_n)}.$$

Nous supposons que la suite des vecteurs résidus (r_n) est déterminée par la procédure hybride à partir du vecteur r'_n et du vecteur $B r_{n-1}$ en utilisant l'équation (1.10). Bien que toutes les conditions du théorème 1.9 (p. 31) n'ont pas été vérifiées les exemples numériques montrent que pour ces cas la méthode de Gastinel peut être accélérée.

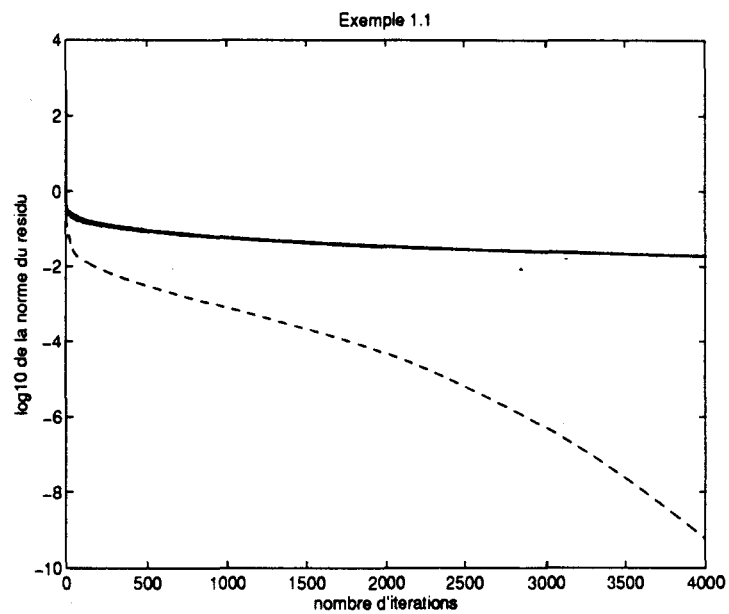
Exemple 1.1

Cet exemple a été pris dans [23]. Soit $m = 100$ et soit $A = PDP^{-1}/\|PDP^{-1}\|_\infty$ avec

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \beta & & & \\ & 1 & \beta & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \ddots & \beta \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 + \alpha & & & 0 \\ & & 3 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 100 \end{bmatrix}$$

avec $\alpha = 0$, $\beta = 0.9$. Nous avons



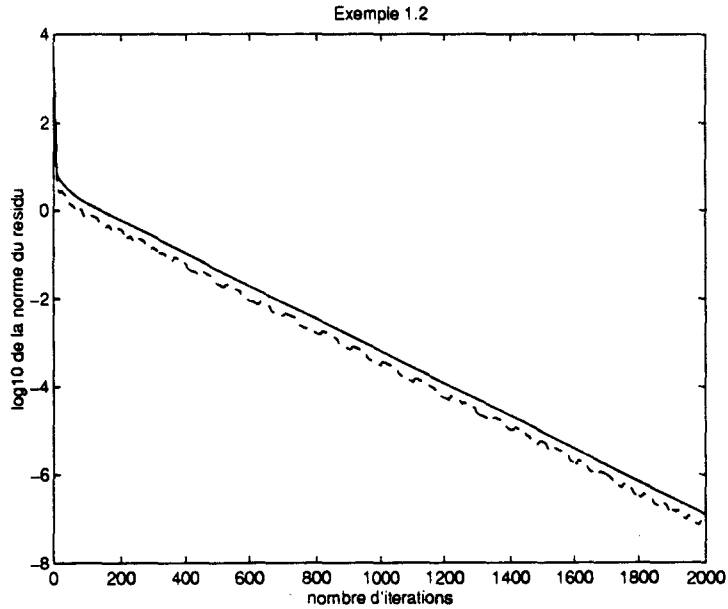
Exemple 1.2

Cet exemple a été pris dans [23]. Soit $m = 200$ et soit $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \beta & & & \\ & 1 & \beta & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & \beta \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1.1 + \frac{1}{\ln(2)} & & & & \\ & 1.1 + \frac{1}{\ln(3)} & & & 0 \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1.1 + \frac{1}{\ln(201)} \end{bmatrix}$$

avec $\beta = 0.9$. Nous avons



1.4.2 2^{ème} cas

Soit (r'_n) la suite des vecteurs résidus déterminée par la méthode

$$\left. \begin{aligned} x'_{n+1} &= Bx'_n + b \\ r'_{n+1} &= Br'_n \end{aligned} \right\} \quad (0.2)$$

Soit (r_n) la suite des vecteurs résidus déterminée par la procédure hybride à partir du vecteur r'_n et du vecteur r'_{n+1} en utilisant l'équation (1.11).

Dans les exemples 1.4, 1.6, 1.7 nous avons choisi les matrices B de telle sorte que $|\lambda_2| < |\lambda_1|$, donc les conditions du théorème 1.12 (p. 40) sont vérifiées. Nous obtenons une accélération de la convergence ($\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|r_n\|}{\|r'_n\|} = 0$) bien que la méthode initiale ne soit pas convergente ($\lim_{n \rightarrow \infty} \|r'_n\| = \infty$) ; voir l'exemple 1.6. Dans l'exemple 1.7 la procédure hybride n'est plus efficace à partir du rang $n = 80$, ceci provient du fait que la suite (α_n) a atteint sa limite à l'itération 80. Il sera donc préférable d'arrêter les itérations à l'étape 80.

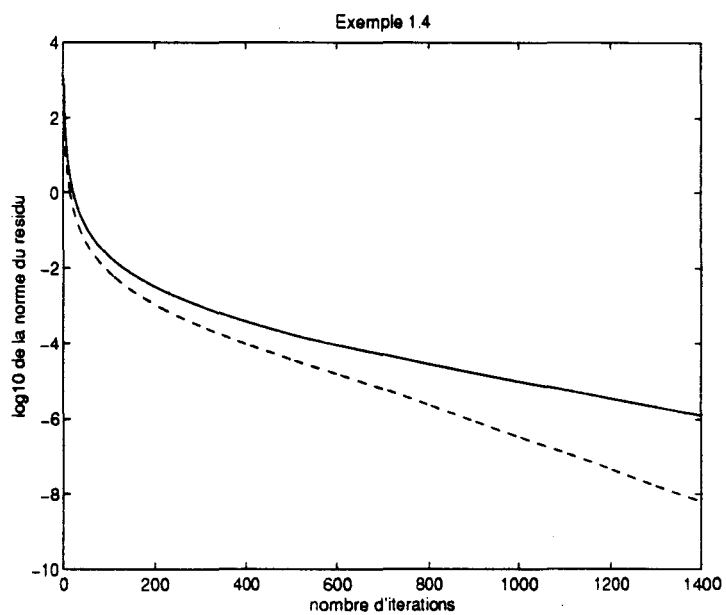
Exemple 1.4

Cet exemple a été pris dans [23]. Soit $m = 200$ et soit $A = PDP^{-1}/\|PDP^{-1}\|_\infty$ avec

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \beta & & & \\ & 1 & \beta & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & \beta \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 + \alpha & & & 0 \\ & & 3 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 200 \end{bmatrix}$$

avec $\alpha = 1$, $\beta = 0.9$. Nous avons

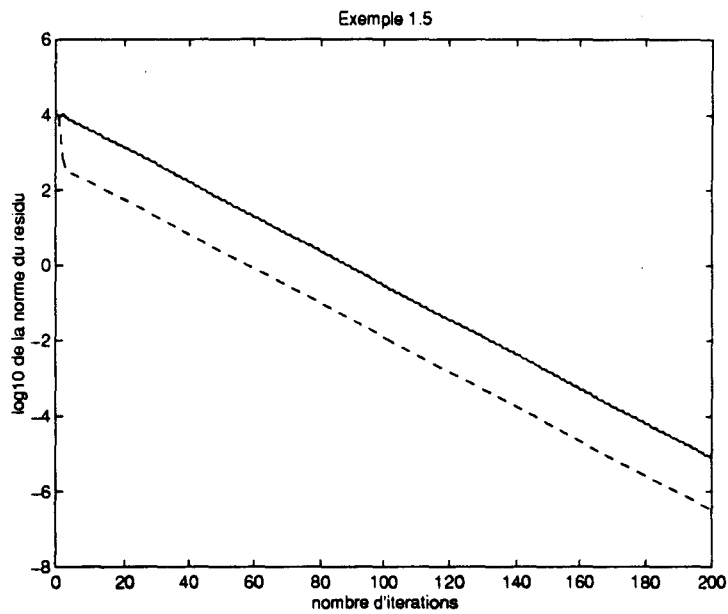


Exemple 1.5

Soit $m = 500$ et soit $A = PDP^{-1}$ avec P une matrice aléatoire inversible et

$$D = \begin{bmatrix} 1 - 0.9 & & & & & \\ & 1 + 0.9 & & & & \\ & & \dots & & & \\ & 0 & & & 1 - \frac{0.9}{250} & \\ & & & & & 1 + \frac{0.9}{250} \end{bmatrix}.$$

Nous avons

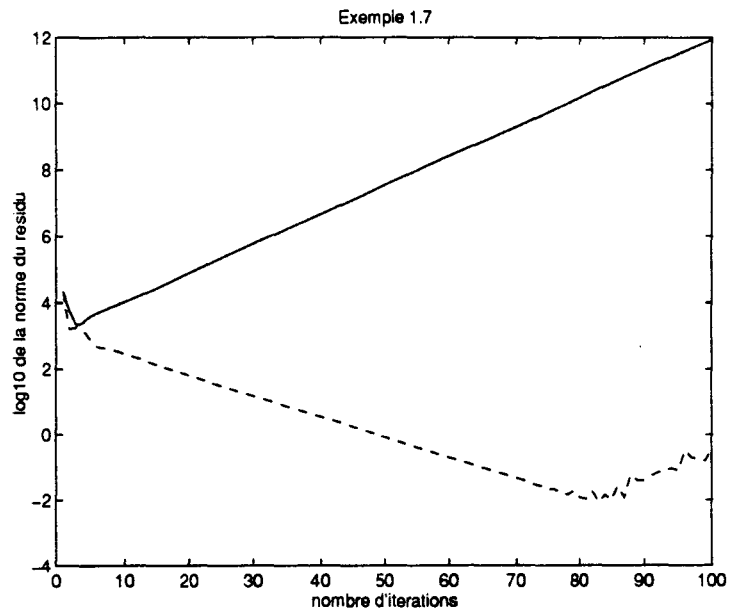


Exemple 1.7

Soit $m = 500$ et soit $A = PDP^{-1}$ avec P une matrice aléatoire inversible et

$$D = \begin{bmatrix} 1 - \sqrt{\alpha} & & & & \\ & 1 - \sqrt{\frac{\alpha}{2}} & & & \\ & & \dots & & \\ & & & & 1 - \sqrt{\frac{\alpha}{500}} \end{bmatrix}$$

avec $\alpha = 1.5$. Nous avons



CONCLUSION :

Pour obtenir les résultats d'accélération il est important d'utiliser deux méthodes dont les vecteurs résidu deviennent colinéaires (ou presque colinéaires) à partir d'un rang. D'où l'intérêt d'appliquer la procédure hybride aux méthodes du type (0.2) avec le choix $r_n'' = r_{n+1}'$. De plus il est important d'avoir une inégalité stricte entre les modules de λ_1 et λ_2 car le rapport $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ est lié à la quantité de l'accélération.

Le choix particulier de la procédure hybride étudié dans le premier cas ($r_n'' = Br_n$) n'est pas efficace pour ce méthodes.

Chapitre 2

Itération de la procédure hybride dans un cas particulier

Dans ce chapitre nous nous plaçons dans un cas particulier de la procédure hybride suivant. Nous disposons uniquement d'une méthode c'est à dire d'une suite (x_n) (et celle des résidus associées (r_n)). Même dans ce cas "limite", il est possible d'utiliser la procédure hybride en jouant sur les suites "décalées" de terme général $x'_n = x_n$ et $x''_n = x_{n+1}$. Il est également possible de faire jouer aux nouvelles suites ainsi construites le rôle de (x'_n) ou (x''_n) de la procédure hybride.

Soit une méthode de résolution du système

$$Ax = b. \tag{0.1}$$

Nous noterons (r_n) la suite des vecteurs résidus correspondant à cette méthode. Nous noterons $(r_n^{(k)})$ la suite des vecteurs résidus correspondant à la procédure hybride itérée construite à l'étape k . Pour $k = 0$ nous poserons $r_n^{(0)} = r_n$. A chaque étape k nous allons déterminer le vecteur $r_n^{(k)}$ à partir du vecteur $r_n^{(k-1)}$ et du vecteur $r_{n+1}^{(k-1)}$ en utilisant la procédure hybride définie dans le chapitre précédent.

En 2.1, nous donnons la définition de la procédure hybride itérée.

En **2.2**, nous donnons les propriétés de la suite $(r_n^{(k)})$ en faisant varier l'indice k ou l'indice n . Nous traitons également le cas où la procédure hybride itérée coïncide avec la méthode initiale. Ce cas sera illustré par des exemples de méthodes avec lesquelles nous ne gagnerons rien en appliquant cette procédure. Dans le cas général, nous n'allons pas donner de nouveaux résultats sur l'accélération de la convergence de la méthode définie ainsi car nous pouvons les déduire directement de théorèmes donnés dans le premier chapitre.

En **2.3**, nous allons étudier l'application de la procédure hybride itérée à la méthode définie par

$$\left. \begin{aligned} x_{n+1} &= Bx_n + b \\ r_{n+1} &= Br_n \end{aligned} \right\} \quad (0.2)$$

avec $B = I - A$ et nous donnerons les théorèmes d'accélération de la convergence de la méthode initiale, dans ce cas particulier, par les suites $(r_n^{(k)})_n$ et $(r_n^{(k)})_k$.

Pour terminer ce chapitre nous donnons en **2.4** des exemples numériques illustrant l'accélération de la convergence dans deux cas différents : en comparant la convergence de la suite $(r_n^{(k)})_k$ par rapport à la suite $(r_{n+k})_k$ et en comparant la convergence de la suite $(r_n^{(k)})_n$ par rapport à la suite $(r_{n+k})_n$.

2.1 Définition

Soit une méthode arbitraire de résolution du système (0.1). Supposons qu'à cette méthode corresponde la suite (x_n) de ses itérés et la suite (r_n) de vecteurs résidus. Posons, pour tout indice n , $x_n^{(0)} = x_n$ et $r_n^{(0)} = r_n$. Nous définissons l'itération de la procédure hybride par :

$$\begin{aligned} x_n^{(k+1)} &= \alpha_n^{(k)} x_n^{(k)} + (1 - \alpha_n^{(k)}) x_{n+1}^{(k)} \\ r_n^{(k+1)} &= \alpha_n^{(k)} r_n^{(k)} + (1 - \alpha_n^{(k)}) r_{n+1}^{(k)} \\ &= r_n^{(k)} - (1 - \alpha_n^{(k)}) (r_n^{(k)} - r_{n+1}^{(k)}) \end{aligned} \quad (2.1)$$

avec

$$\alpha_n^{(k)} = - \frac{(r_n^{(k)} - r_{n+1}^{(k)}, r_{n+1}^{(k)})}{(r_n^{(k)} - r_{n+1}^{(k)}, r_n^{(k)} - r_{n+1}^{(k)})}.$$

Cela revient à former un tableau \mathcal{T}_x avec les éléments $x_n^{(k)}$ et un tableau \mathcal{T}_r avec les éléments $r_n^{(k)}$, chaque colonne du tableau \mathcal{T}_x et du tableau \mathcal{T}_r est déterminée à partir de la colonne précédente en appliquant la procédure hybride usuelle. Ceci nous donne un schéma récursif pour calculer les éléments du tableau \mathcal{T}_r (voir le tableau 2.1).

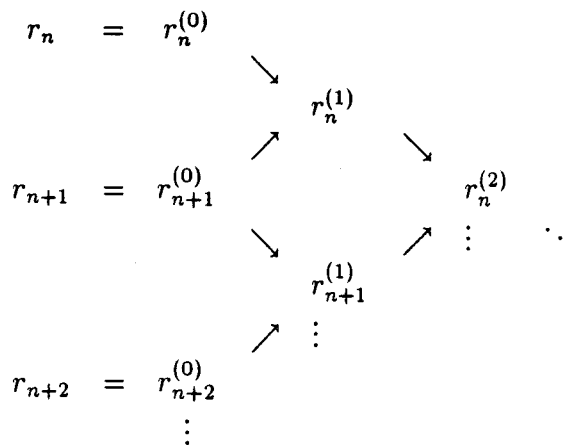


Tableau 2.1 :

Dans la section suivante nous allons étudier les propriétés de la procédure hybride ainsi définie.

2.2 Propriétés

Puisque chaque colonne du tableau \mathcal{T}_r est calculée par la procédure hybride usuelle, définie dans le premier chapitre, nous pouvons, d'une façon immédiate, donner des résultats d'accélération de la convergence de la colonne $(k+1)$ par rapport à la colonne (k) dans le cas général, c'est-à-dire donner les conditions nécessaires et suffisantes pour que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|r_n^{(k+1)}\|}{\|r_n^{(k)}\|} = 0$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|r_n^{(k+1)}\|}{\|r_{n+1}^{(k)}\|} = 0.$$

Soit G une matrice définie positive se factorisant en $G = Z^T Z$. Soit $\vartheta_n^{(k)}$ l'angle aigu compris entre le vecteur $Zr_n^{(k)}$ et le vecteur $Zp_n^{(k)} = Z(r_n^{(k)} - r_{n+1}^{(k)})$. Bien évidemment, nous avons, directement à partir du théorème 1.4

Théorème 2.1

Soit (r_n) la suite de vecteurs résidus déterminée par une méthode arbitraire. Soit $r_n^{(k)}$ le vecteur résidu correspondant à la procédure hybride itérée, déterminé par l'équation (2.1). Une condition nécessaire et suffisante pour que la colonne $(k+1)$ du tableau \mathcal{T}_r converge plus vite que la colonne (k) , i.e.,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|r_n^{(k+1)}\|}{\|r_n^{(k)}\|} = 0$$

est que la suite $(\vartheta_n^{(k)})$ converge vers 0 ou π ($n \rightarrow \infty$).

Dans ce qui suit, nous allons démontrer les propriétés qui sont vérifiées par des éléments du tableau \mathcal{T}_r , calculés en appliquant la procédure hybride itérée à une méthode arbitraire. D'une façon immédiate nous obtenons :

Propriété 2.1

Soit (r_n) une suite de vecteurs résidus déterminée par une méthode arbitraire. Si les éléments $r_n^{(k)}$ du tableau \mathcal{T}_r sont calculés en appliquant la procédure hybride itérée à cette méthode en utilisant l'équation (2.1) alors

$$\|r_n^{(k+1)}\| \leq \|r_n^{(k)}\| \leq \dots \leq \|r_n^{(0)}\| = \|r_n\| \quad \forall k, n.$$

Preuve :

La preuve vient directement de la construction du vecteur $r_n^{(k+1)}$. Nous avons

$$\|r_n^{(k+1)}\| \leq \min(\|r_n^{(k)}\|, \|r_{n+1}^{(k)}\|) \leq \|r_n^{(k)}\|$$

ce qui termine la démonstration. ■

D'une façon identique, nous montrons

Propriété 2.2

Soit (r_n) une suite de vecteurs résidus déterminée par une méthode arbitraire. Si les éléments $r_n^{(k)}$ du tableau \mathcal{T}_r sont calculés en appliquant la procédure hybride itérée à cette méthode en utilisant l'équation (2.1) alors

$$\|r_n^{(k+1)}\| \leq \|r_{n+1}^{(k)}\| \leq \dots \leq \|r_{n+k+1}^{(0)}\| = \|r_{n+k+1}\| \quad \forall k, n.$$

Nous avons donc une propriété de minimisation de la norme sur la diagonale montante et descendante.

Dans ce qui suit nous allons démontrer que le vecteur $r_n^{(k)}$ déterminé par l'équation (2.1) s'exprime comme une combinaison des vecteurs r_n, \dots, r_{n+k} . En effet, nous avons :

Propriété 2.3

Soit (r_n) une suite de vecteurs résidus déterminée par une méthode arbitraire. Pour le vecteur résidu $r_n^{(k)}$, correspondant à la procédure hybride itérée, déterminé par l'équation (2.1) nous avons

$$(a) \quad r_n^{(k)} = \sum_{i=0}^k a_n^{(i,k)} r_{n+i} \quad \mathcal{H}_3(k, n)$$

$$(b) \quad \sum_{i=0}^k a_n^{(i,k)} = 1. \quad \mathcal{H}_4(k, n).$$

Preuve :

La démonstration des propriétés $\mathcal{H}_3(k, n)$ et $\mathcal{H}_4(k, n)$ se fait par récurrence simultanée.

- Pour $k = 0$ et pour tout indice n nous avons $r_n^{(0)} = r_n$ et $a_n^{(0,0)} = 1$, ce qui prouve $\mathcal{H}_3(0, n)$ et $\mathcal{H}_4(0, n)$.
- (a) Supposons que $\mathcal{H}_3(k, n)$ soit vraie pour tout indice n . En utilisant la définition du vecteur $r_n^{(k+1)}$ et $\mathcal{H}_3(k, n)$ nous obtenons

$$\begin{aligned}
r_n^{(k+1)} &= \alpha_n^{(k)} r_n^{(k)} + (1 - \alpha_n^{(k)}) r_{n+1}^{(k)} \\
&= \alpha_n^{(k)} \sum_{i=0}^k a_n^{(i,k)} r_{n+i} + (1 - \alpha_n^{(k)}) \sum_{i=0}^k a_{n+1}^{(i,k)} r_{n+1+i} \\
&= \alpha_n^{(k)} \sum_{i=0}^k a_n^{(i,k)} r_{n+i} + (1 - \alpha_n^{(k)}) \sum_{i=1}^{k+1} a_{n+1}^{(i-1,k)} r_{n+i} \\
&= \sum_{i=0}^{k+1} a_n^{(i,k+1)} r_{n+i}.
\end{aligned}$$

La propriété $\mathcal{H}_3(k+1, n)$ est donc vérifiée.

- (b) Les coefficients $a_n^{(i,k+1)}$ sont calculés par :

$$\begin{aligned}
a_n^{(0,k+1)} &= \alpha_n^{(k)} a_n^{(0,k)} \\
a_n^{(i,k+1)} &= \alpha_n^{(k)} a_n^{(i,k)} + (1 - \alpha_n^{(k)}) a_{n+1}^{(i-1,k)} \quad i = 1, \dots, k \\
a_n^{(k+1,k+1)} &= (1 - \alpha_n^{(k)}) a_{n+1}^{(k,k)}.
\end{aligned}$$

Par un simple calcul nous pouvons vérifier que si $\sum_{i=0}^k a_n^{(i,k)} = 1$ ($\mathcal{H}_4(n, k)$) alors

$$\sum_{i=0}^{k+1} a_n^{(i,k+1)} = 1 \text{ donc } \mathcal{H}_4(n, k+1) \text{ est vérifiée}$$

ce qui termine la démonstration. ■

Dans la partie suivante nous traitons le cas où la procédure hybride itérée définie par l'équation (2.1) n'améliore pas la convergence de la suite (r'_n) . Nous pouvons démontrer que

Propriété 2.4

Soit (r_n) une suite de vecteurs résidus déterminée par une méthode arbitraire. Soit $r_n^{(k)}$ le vecteur résidu, correspondant à la procédure hybride itérée, déterminé par l'équation (2.1). Si la suite (r_n) est telle que, pour tout indice n , la condition suivante est vérifiée :

$$(r_{n+1} - r_n, r_{n+1}) = 0$$

alors nous avons

$$r_n^{(k)} = r_{n+k} \quad \mathcal{H}_5(k, n).$$

Preuve :

La démonstration de cette propriété se fait par récurrence.

- Pour $k = 0$ nous avons par construction, pour tout indice n : $r_n^{(0)} = r_n$, ce qui prouve $\mathcal{H}_5(0, n)$ pour tout indice n .
- Supposons que $\mathcal{H}_5(k, n)$ soit vraie pour tout indice n , c'est-à-dire

$$r_n^{(k)} = r_{n+k}.$$

En utilisant la définition du vecteur $r_n^{(k+1)}$ et $\mathcal{H}_5(k, n)$ nous obtenons

$$\begin{aligned} r_n^{(k+1)} &= \alpha_n^{(k)} r_n^{(k)} + (1 - \alpha_n^{(k)}) r_{n+1}^{(k)} \\ &= \alpha_n^{(k)} r_{n+k} + (1 - \alpha_n^{(k)}) r_{n+k+1} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha_n^{(k)} &= -\frac{(r_n^{(k)} - r_{n+1}^{(k)}, r_{n+1}^{(k)})}{(r_n^{(k)} - r_{n+1}^{(k)}, r_n^{(k)} - r_{n+1}^{(k)})} \\ &= -\frac{(r_{n+k} - r_{n+k+1}, r_{n+k+1})}{(r_{n+k} - r_{n+k+1}, r_{n+k} - r_{n+k+1})} \\ &= 0. \end{aligned}$$

d'où nous obtenons

$$r_n^{(k+1)} = r_{n+k+1}$$

donc $\mathcal{H}_5(k+1, n)$ est vérifié

ce qui termine la démonstration. ■

Nous pouvons déduire de cette propriété que si nous avons une méthode de résolution du système (0.1) dont la suite des vecteurs résidus vérifie la condition suivante

$$(r_{n+1} - r_n, r_{n+1}) = 0$$

pour tout indice n alors

$$r_n^{(k)} = r_{n+k}.$$

Dans ce cas, le tableau \mathcal{T}_r devient

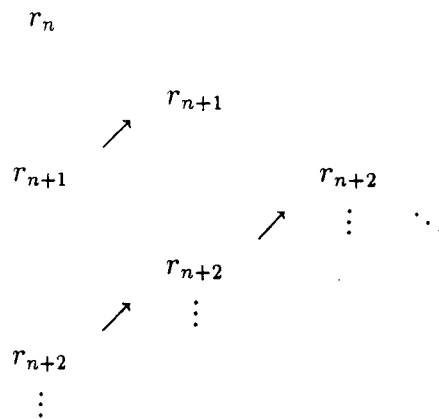


Tableau 2.2 :

Prenons une méthode dont la suite des vecteurs résidus est déterminée par :

$$r_{n+1} = r_n - p_n. \quad (2.2)$$

La suite (p_n) est une suite non nulle choisie de telle façon que la condition suivante soit vérifiée pour tout indice n :

$$(r_{n+1}, p_n) = 0.$$

Nous pouvons donc déduire que

$$(r_{n+1} - r_n, r_{n+1}) = 0$$

et que la procédure hybride itérée appliquée à la méthode ainsi définie coïncide avec la méthode initiale. Dans le tableau 2.3 nous donnons des exemples de méthodes où la suite (r_n) vérifie l'équation (2.2).

Pour s -step GCR nous pouvons montrer [12] que $(r_n, A^i p_{n-1}) = 0$ pour $i = 1, \dots, s$ et donc nous avons la propriété $(r_{n+1} - r_n, r_{n+1}) = 0$.

Remarque 2.1 :

Il n'y a aucun intérêt à appliquer la procédure hybride définie précédemment sur ces méthodes là, c'est-à-dire avec le choix $r'_n = r_{n+1}$ et $r''_n = r_n$.

méthode	r_n
GCR	$r_n = r_{n-1} - \frac{(r_{n-1}, Ap'_{n-1})}{(Ap'_{n-1}, Ap'_{n-1})} Ap'_{n-1}$
Minimal Residual Method	$r_n = r_{n-1} - \frac{(r_{n-1}, Ar_{n-1})}{(Ar_{n-1}, Ar_{n-1})} Ar_{n-1}$
Orthomin(i)	$r_n = r_{n-1} - \frac{(r_{n-1}, Ap''_{n-1})}{(Ap''_{n-1}, Ap''_{n-1})} Ap''_{n-1}$
procédure hybride avec $r''_n = r_{n-1}$	$r_n = r_{n-1} - \frac{(r_{n-1}, r_{n-1} - r'_n)}{(r_{n-1} - r'_n, r_{n-1} - r'_n)} (r_{n-1} - r'_n)$
s - step GCR	$r_n = r_{n-1} - \sum_{i=1}^s a_{n-1}^{(i)} A^i p_{n-1}$

Tableau 2.3 :

2.3 Applications

Dans cette section nous allons étudier l'application itérée de la procédure hybride correspondant à la suite (r_n) déterminée par la méthode,

$$\left. \begin{aligned} x_{n+1} &= Bx_n + b \\ r_{n+1} &= Br_n \end{aligned} \right\} \quad (0.2)$$

avec $B = I - A$.

Supposons que le vecteur initial r_0 puisse être décomposé de la façon suivante :

$$r_0 = \gamma + a_0$$

où γ désigne un vecteur propre de la matrice B avec λ la valeur propre correspondante.

Alors, le vecteur r_n peut être réécrit comme

$$r_n = \lambda^n \gamma + a_n$$

avec

$$a_n = B^n a_0.$$

Dans la partie suivante nous allons étudier les propriétés d'accélération de la suite $(r_n^{(k)})$ obtenue en appliquant la procédure hybride itérée à la méthode définie par l'équation (0.2). Pour cela nous allons utiliser les lemmes suivants :

Lemme 2.1

Soit (r_n) une suite de vecteurs résidus déterminée par la méthode (0.2) avec $B = I - A$ une matrice inversible. Soit λ une valeur propre de la matrice B et γ un vecteur propre correspondant. Soit $r_n^{(1)}$ le vecteur résidu correspondant à la procédure hybride itérée, déterminé par l'équation (2.1). Si le vecteur r_n se décompose de la façon suivante

$$r_n = \lambda^n \gamma + a_n$$

alors

$$\|r_n^{(1)}\| = \mathcal{O}(\|a_{n+1}\|).$$

Preuve :

Pour démontrer ce lemme, nous allons montrer qu'il existe une suite de matrices (M_n) telle que

$$r_n^{(1)} = M_n a_{n+1}$$

et que la suite $(\|M_n\|)$ est majorée par une constante.

D'après la construction du vecteur $r_n^{(1)}$ et d'après la propriété 1.2 nous avons

$$\begin{aligned} r_n^{(1)} &= \varphi_n^{(0)} r_{n+1} \\ &= \lambda^{n+1} \varphi_n^{(0)} \gamma + \varphi_n^{(0)} a_{n+1} \end{aligned}$$

avec $\varphi_n^{(0)} = I - \frac{1}{p_n^T G p_n} p_n p_n^T G$ où $p_n = r_n - r_{n+1}$. La matrice $\varphi_n^{(0)}$ est construite de telle façon que $\varphi_n^{(0)} p_n = 0$. En multipliant le vecteur p_n par la matrice $\varphi_n^{(0)}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi_n^{(0)} p_n \\ &= (\lambda^n - \lambda^{n+1}) \varphi_n^{(0)} \gamma + \varphi_n^{(0)} (a_n - a_{n+1}) \\ &= \frac{1 - \lambda}{\lambda} \lambda^{n+1} \varphi_n^{(0)} \gamma + \varphi_n^{(0)} (B^{-1} - I) a_{n+1}. \end{aligned}$$

(Nous pouvons diviser par λ car la matrice B est supposée inversible et donc $\lambda \neq 0$.) Alors, puisque la matrice A est non-singulière, donc forcément $\lambda \neq 1$ et nous avons :

$$\lambda^{n+1} \varphi_n^{(0)} \gamma = -\frac{\lambda}{1-\lambda} \varphi_n^{(0)} (B^{-1} - I) a_{n+1}.$$

Posons $M_n = \varphi_n^{(0)} \left(I - \frac{\lambda}{1-\lambda} (B^{-1} - I) \right)$, nous obtenons

$$r_n^{(1)} = M_n a_{n+1}.$$

La matrice $\varphi_n^{(0)}$ est un projecteur G -orthogonal et, d'après le lemme 0.1 (p. 7), nous avons $\|\varphi_n^{(0)}\| = 1$ et nous obtenons une majoration de la norme de la matrice M_n pour tout indice n

$$\begin{aligned} \|M_n\| &= \left\| \varphi_n^{(0)} \left(I + \frac{\lambda}{1-\lambda} B^{-1} A \right) \right\| \\ &\leq \left(1 + \left| \frac{\lambda}{1-\lambda} \right| \|A\| \|B^{-1}\| \right) \end{aligned}$$

et donc

$$\|r_n^{(1)}\| \leq \left(1 + \left| \frac{\lambda}{1-\lambda} \right| \|A\| \|B^{-1}\| \right) \|a_{n+1}\|$$

ce qui termine la démonstration. ■

Dans le lemme suivant nous allons généraliser ce résultat pour un indice k quelconque.

Lemme 2.2

Soit (r_n) une suite de vecteurs résidus déterminée par la méthode (0.2) avec $B = I - A$ une matrice inversible. Soit λ une valeur propre de la matrice B et γ un vecteur propre correspondant. Soit $r_n^{(k)}$ le vecteur résidu correspondant à la procédure hybride itérée, déterminé par l'équation (2.1) à partir de la suite (r_n) . Si le vecteur r_n se décompose de la façon suivante

$$r_n = \lambda^n \gamma + a_n$$

alors

$$\|r_n^{(k)}\| = \mathcal{O}(\|a_{n+k}\|) \quad \mathcal{H}_6(k, n).$$

Preuve :

La démonstration de cette propriété se fait par récurrence.

- Nous avons démontré $\mathcal{H}_6(1, n)$ pour tout indice n dans le lemme 2.1 (p. 62).

- Supposons que $\mathcal{H}_6(k, n)$ soit vraie pour tout n . D'après la définition de la procédure hybride nous avons

$$\|r_n^{(k+1)}\| \leq \|r_{n+1}^{(k)}\| = \mathcal{O}(\|a_{n+k+1}\|).$$

La propriété $\mathcal{H}_6(k+1, n)$ est donc vérifiée pour tout indice n

ce qui termine la démonstration. ■

Dans ce qui suit nous allons présenter un lemme dont nous nous servirons ultérieurement.

Lemme 2.3

Soit (r_n) une suite de vecteurs résidus déterminée par la méthode (0.2). Soit λ une valeur propre de la matrice B et γ un vecteur propre correspondant. Si le vecteur r_n se décompose de la façon suivante

$$r_n = \lambda^n \gamma + a_n$$

avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|a_n\|}{|\lambda|^n} = 0$ alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|a_n\|}{\|r_n\|} = 0.$$

Preuve :

En utilisant l'inégalité triangulaire de la forme :

$$(|\lambda|^n \|\gamma\| - \|a_n\|)^2 \leq \|r_n\|^2$$

nous obtenons le résultat suivant :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|a_n\|^2}{\|r_n\|^2} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|a_n\|^2}{(|\lambda|^n \|\gamma\| - \|a_n\|)^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{\|a_n\|}{|\lambda|^n}}{\|\gamma\| - \frac{\|a_n\|}{|\lambda|^n}} \right)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration. ■

En utilisant le lemme 2.2 (p. 63) et le lemme 2.3 (p. 64), nous pouvons donner un théorème sur l'accélération de la convergence de la procédure hybride dans ce cas particulier.

Théorème 2.2

Soit (r_n) une suite de vecteurs résidus déterminée par la méthode (0.2) avec $B = I - A$ une matrice inversible. Soit λ une valeur propre de la matrice B et γ un vecteur propre correspondant. Soit $r_n^{(k)}$ le vecteur résidu, correspondant à la procédure hybride itérée, déterminé par l'équation (2.1) à partir de la suite (r_n) . Si le vecteur r_n se décompose de la façon suivante

$$r_n = \lambda^n \gamma + a_n$$

avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|a_n\|}{|\lambda|^n} = 0$ alors la suite $(r_n^{(k)})_n$ converge plus vite que la suite $(r_{n+k})_n$, i.e.,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|r_n^{(k)}\|}{\|r_{n+k}\|} = 0$$

et la suite $(r_n^{(k)})_k$ converge plus vite que la suite $(r_{n+k})_k$, i.e.,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|r_n^{(k)}\|}{\|r_{n+k}\|} = 0.$$

Preuve :

D'après le lemme 2.2 (p. 63) nous avons

$$\|r_n^{(k)}\| = \mathcal{O}(\|a_{n+k}\|) \quad \forall n, k$$

ou bien encore il existe une constante M telle que

$$\|r_n^{(k)}\| \leq M \|a_{n+k}\| \quad \forall n, k.$$

Nous pouvons conclure, d'après le lemme 2.3 (p. 64), que si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|a_n\|}{|\lambda|^n} = 0$ alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|a_n\|}{\|r_n\|} = 0$$

ce qui veut dire aussi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|a_{n+k}\|}{\|r_{n+k}\|} = 0$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|a_{n+k}\|}{\|r_{n+k}\|} = 0.$$

Nous obtenons ce résultat en fixant l'indice k (respectivement l'indice n) et en faisant varier l'indice n (respectivement l'indice k). Nous obtenons ainsi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|r_n^{(k)}\|}{\|r_{n+k}\|} \leq M \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|a_{n+k}\|}{\|r_{n+k}\|} = 0$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|r_n^{(k)}\|}{\|r_{n+k}\|} \leq M \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|a_{n+k}\|}{\|r_{n+k}\|} = 0$$

ce qui termine la démonstration. ■

Remarque 2.2 :

Le vecteur $r_n^{(1)}$ est exactement le vecteur r_n défini dans le théorème 1.12 (p. 40), nous avons ainsi démontré autrement ce théorème.

Comme dans le chapitre 1, nous allons donner un exemple où la suite (r_n) peut être décomposée de la façon suivante : $r_n = \lambda^n \gamma + a_n$.

Exemple

Soit B une matrice diagonalisable. Soient $\{\lambda_i\}_{i=1}^q$ ($q \geq 2$) les valeurs propres distinctes de la matrice $B = I - A$ ordonnées dans le sens décroissant des modules

$$|\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_q|$$

avec les vecteurs propres correspondants $\{\gamma_i\}_{i=1}^m$. Les vecteurs propres de la matrice B forment une base de \mathcal{R}^m . Soit r_n le vecteur déterminé par la méthode

$$\left. \begin{aligned} x_{n+1} &= Bx_n + b \\ r_{n+1} &= Br_n \end{aligned} \right\} \quad (0.2)$$

avec $B = I - A$.

Nous noterons $\tilde{\gamma}_i$, un vecteur appartenant au sous-espace propre \mathcal{V}_i correspondant à la valeur propre λ_i tel que $r'_0 = \sum_{i=1}^q \tilde{\gamma}_i$; en faisant une décomposition du vecteur r_n comme dans la section "Notations" nous avons

$$\begin{aligned} r_n &= \sum_{i=1}^q \lambda_i^n \tilde{\gamma}_i \\ &= \lambda_1^n \tilde{\gamma}_1 + \sum_{i=2}^q \lambda_i^n \tilde{\gamma}_i. \end{aligned}$$

Remarque 2.3 :

- Si $q = 1$ (la matrice B admet une seule valeur propre) alors r_0 est un vecteur propre de la matrice B et nous obtenons $r_0^{(1)} = 0$.
- Si dans la décomposition du vecteur r_0 nous avons $\tilde{\gamma}_1 = 0$ alors il faut reperer la première composante telle que $\tilde{\gamma}_i \neq 0$.

Si nous posons

$$\begin{aligned}\lambda &= \lambda_1 \\ a_n &= \sum_{i=2}^q \lambda_i^n \tilde{\gamma}_i\end{aligned}$$

alors nous obtenons d'après le lemme 2.2 (p. 63) et d'après le théorème 2.2 (p. 65) le résultat suivant :

Théorème 2.3

Soit B une matrice diagonalisable dont les valeurs propres vérifient l'inégalité suivante :

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_q|.$$

Soit (r_n) la suite des vecteurs résidus déterminée par la méthode (0.2). Si le vecteur résidu $r_n^{(k)}$, correspondant à la procédure hybride itérée, est déterminé par l'équation (2.1) à partir de la suite (r_n) alors

$$\|r_n^{(k)}\| = \mathcal{O}(|\lambda_2|^{n+k}).$$

De plus si $|\lambda_2| \neq |\lambda_1|$ alors la suite $(r_n^{(k)})$ converge plus vite que la suite (r_{n+k}) aussi bien pour un indice k fixé que pour un indice n fixé, i.e.,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|r_n^{(k)}\|}{\|r_{n+k}\|} &= 0 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|r_n^{(k)}\|}{\|r_{n+k}\|} &= 0.\end{aligned}$$

2.4 Exemples numériques

Dans cette section nous donnons des exemples numériques illustrant deux cas particuliers de la procédure hybride étudiée précédemment.

Pour tous les exemples nous prenons $G = I$, $A = I - B$ et $x_0 = 0$. Le vecteur b est toujours choisi tel que la solution soit $\tilde{x} = [1, \dots, m]^T$. Chaque figure montre $\log \|r_{n+k}\|$ et $\log \|r_n^{(k)}\|$ en fonction du nombre d'itérations. La courbe en tirets correspond à la procédure hybride. Afin de connaître les valeurs propres de la matrice B dans chaque exemple nous choisissons arbitrairement une matrice diagonale notée D , une matrice inversible P et nous prenons $A = PDP^{-1}/\sigma$. Soit $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$ l'ensemble des valeurs propres de la matrice B . Les valeurs $\|PDP^{-1}\|_\infty$, $\|B\|$ ont été calculées par Matlab (voir le tableau 2.4 et le tableau 2.5).

	Exemple 2.1	Exemple 2.2	Exemple 2.3
σ	$\ PDP^{-1}\ _\infty = 200$	1	1
$\ B\ $	0.9996	55.2837	52.0067
$ \lambda_1 $	0.9950	0.9000	1.0472
$ \lambda_2 $	0.9900	0.9000	0.5236

Tableau 2.4 :

Soit (r_n) la suite des vecteurs résidus déterminée par la méthode

$$\left. \begin{aligned} x_{n+1} &= Bx_n + b \\ r_{n+1} &= Br_n \end{aligned} \right\} \quad (0.2)$$

avec $B = I - A$. Soit $r_n^{(k)}$ le vecteur déterminé par la méthode (2.1) à partir de la suite (r_n) .

Dans les exemples 2.1, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6 nous avons choisi les matrices B de telle sorte que $|\lambda_2| < |\lambda_1|$, donc les conditions du théorème 2.3 (p. 67) sont vérifiées. Nous

	Exemple 2.4	Exemple 2.5	Exemple 2.6
σ	$\ PDP^{-1}\ _{\infty} = 100$	100	1
$\ B\ $	1.0050	802.2189	2.3585e08
$ \lambda_1 $	0.9900	0.9900	1.5427
$ \lambda_2 $	0.9700	0.9700	1.0102

Tableau 2.5 :

obtenons une accélération de la convergence ($\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|r_n^{(k)}\|}{\|r_{n+k}\|} = 0$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|r_n^{(k)}\|}{\|r_{n+k}\|} = 0$) bien que la méthode initiale ne soit pas convergente ($\lim_{n \rightarrow \infty} \|r_n\| = \infty$) ; voir les exemples 2.3, 2.6.

Dans l'exemple 2.1, l'exemple 2.2 et l'exemple 2.3 nous comparons la convergence de la suite $\|r_{n+k}\|$ et de la suite $\|r_n^{(k)}\|$ pour $k = 0, 1, 2, 3$. La courbe continue correspond à la méthode initiale. La courbe en tirets correspond à la suite $(\|r_n^{(1)}\|)$. La courbe point-tirets correspond à la suite $(\|r_n^{(2)}\|)$. La courbe pointillée correspond à la suite $(\|r_n^{(3)}\|)$.

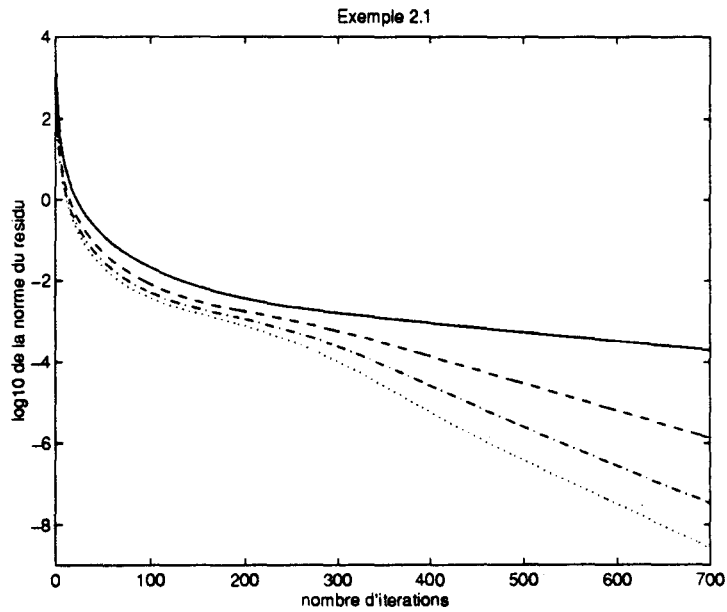
Exemple 2.1

Cet exemple a été pris dans [23]. Soit $m = 200$ et soit $A = PDP^{-1}/\|PDP^{-1}\|_\infty$ avec

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \beta & & & \\ & 1 & \beta & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & \beta \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 + \alpha & & & 0 \\ & & 3 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 200 \end{bmatrix}$$

avec $\alpha = 1$, $\beta = 0.9$. Nous avons

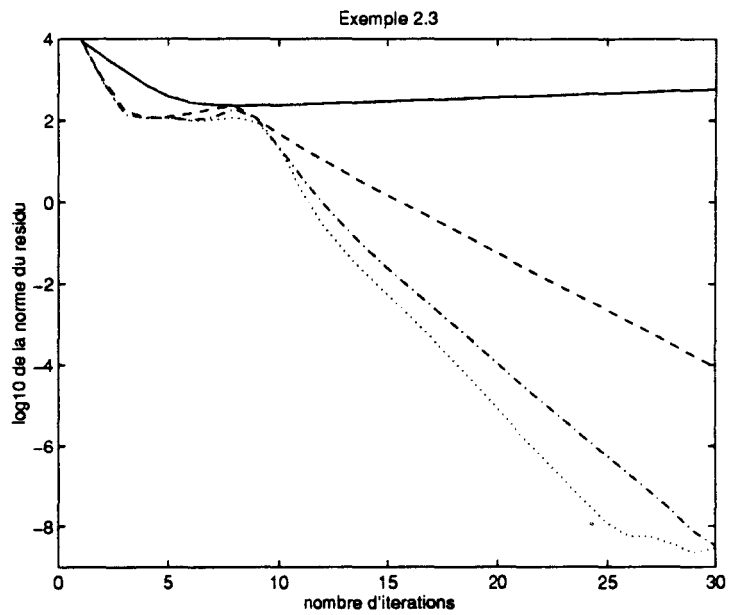


Exemple 2.3

Soit $m = 500$ et soit $A = PDP^{-1}$ avec P une matrice aléatoire inversible et

$$D = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\pi}{3} & & & & \\ & 1 - \frac{\pi}{6} & & & \\ & & \dots & & \\ & & & & 1 - \frac{\pi}{1500} \\ & 0 & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Nous avons



Dans les exemple 2.4, 2.5, 2.6 nous comparons la convergence de la suite $\|r_k\|$ et celle de la suite $\|r_0^{(k)}\|$.

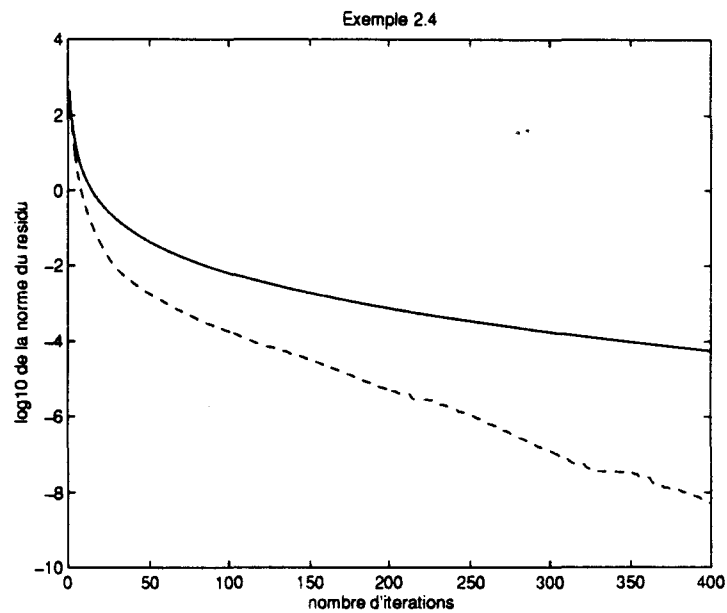
Exemple 2.4

Cet exemple a été pris dans [23]. Soit $m = 100$ et soit $A = PDP^{-1}/\|PDP^{-1}\|_\infty$ avec

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \beta & & & \\ & 1 & \beta & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & \beta \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 + \alpha & & & 0 \\ & & 3 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 100 \end{bmatrix}$$

avec $\alpha = 0$, $\beta = 0.9$. Nous avons



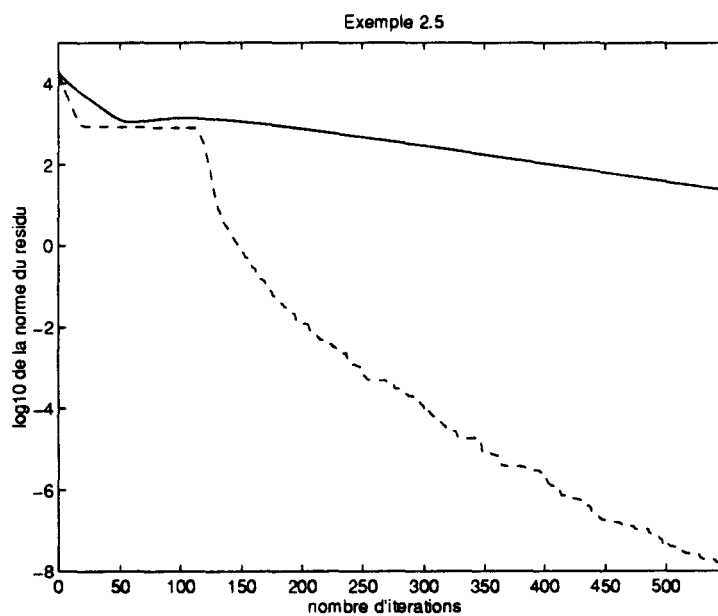
Exemple 2.5

Cet exemple a été pris dans [23]. Soit $m = 100$ et soit $A = PDP^{-1}/100$ avec

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \beta & & & \\ & 1 & \beta & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & \beta \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 + \alpha & & & 0 \\ & & 3 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 100 \end{bmatrix}$$

avec $\alpha = 0$, $\beta = 1.1$. Nous avons



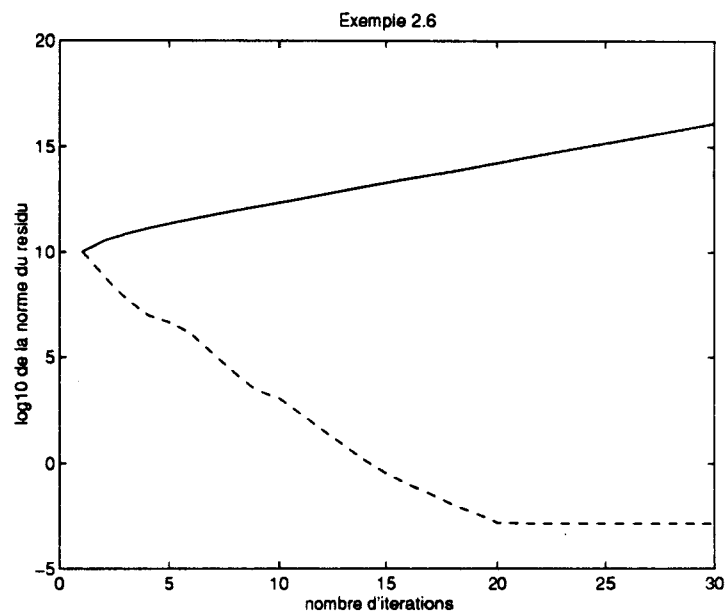
Exemple 2.6

Cet exemple a été pris dans [23]. Soit $m = 200$ et soit $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \beta & & \\ & 1 & \beta & 0 \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & \ddots & \beta \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1.1 + \frac{1}{\ln(2)} & & & & \\ & 1.1 + \frac{1}{\ln(3)} & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & 1.1 + \frac{1}{\ln(201)} \end{bmatrix}$$

avec $\beta = 1.1$. Nous avons



CONCLUSION :

Pour obtenir les résultats d'accélération de méthodes du type (0.2) par la procédure hybride itérée il est important d'avoir une inégalité stricte entre les modules de λ_1 et λ_2 .

La procédure hybride itérée coïncide avec la méthode initiale pour GCR, MR, Orthomin(i), s-step GCR.

Chapitre 3

Généralisations de la procédure hybride

Soit une méthode de résolution du système

$$Ax = b. \quad (0.1)$$

Nous noterons (r_n) la suite des vecteurs résidus associée aux itérés (x_n) de cette méthode.

En **3.1** nous allons donner une généralisation de la procédure hybride, appelée procédure hybride généralisée. Son résidu sera noté $r_n^{(k)}$. Cette méthode consiste à calculer le vecteur $r_n^{(k)}$ à partir des vecteurs r_n, \dots, r_{n+k} (les $k + 1$ éléments de la suite donnée (r_n)) avec la condition que la G -norme du vecteur $r_n^{(k)}$ soit minimale. Même si nous utilisons la même notation $r_n^{(k)}$ pour le vecteur résidu correspondant à la méthode définie dans le deuxième chapitre et pour le vecteur résidu correspondant à la méthode définie dans ce chapitre il ne faut pas les confondre. Nous allons comparer la méthode définie dans le chapitre 2 (son résidu sera noté par $\tilde{r}_n^{(k)}$) avec la méthode définie dans ce chapitre (son résidu sera noté par $r_n^{(k)}$). Nous allons montrer que ces deux méthodes sont équivalentes seulement dans un cas très particulier.

Nous allons étudier les propriétés de la méthode définie ainsi dans le cas général, et

également dans le cas particulier où la suite (r_n) déterminée par la méthode

$$\left. \begin{aligned} x_{n+1} &= Bx_n + b \\ r_{n+1} &= Br_n \end{aligned} \right\} \quad (0.2)$$

avec $B = I - A$. Lorsque $k = 1$ nous retrouvons bien sûr la procédure hybride initiale étudiée dans le chapitre 1.

Nous allons également démontrer, comme pour la procédure hybride définie dans le chapitre 1, que la procédure hybride généralisée peut être considérée comme une méthode de projection G -orthogonale. Ce résultat nous servira à donner un théorème d'accélération de la convergence dans le cas particulier où la suite (r_n) est déterminée par la méthode (0.2). Ce cas particulier sera illustré par des exemples numériques. Dans le cas général nous avons éprouvé des difficultés à obtenir des théorèmes d'accélération. Nous allons donner seulement un théorème mais dont la condition nécessaire et suffisante d'accélération de la convergence est difficile à vérifier.

En **3.2** nous proposerons d'autres généralisations possibles de la procédure hybride. Nous allons donner certaines propriétés de ces généralisations sans preuves en les déduisant directement des propriétés du vecteur $r_n^{(k)}$ défini au début de ce chapitre.

Puisque le vecteur $r_n^{(k)}$ s'exprime comme un rapport de deux déterminants nous pouvons envisager d'utiliser un algorithme récursif pour le calculer. Cette possibilité sera étudiée dans le chapitre suivant.

3.1 Procédure hybride généralisée

3.1.1 Définition

Soit une méthode itérative de résolution du système (0.1). Nous notons x_n son itéré et r_n le vecteur résidu correspondant ($r_n = b - Ax_n$). La procédure hybride généralisée consiste à construire le nouveau itéré, noté $x_n^{(k)}$ avec le vecteur résidu correspondant $r_n^{(k)} = b - Ax_n^{(k)}$, par

$$\left. \begin{aligned} x_n^{(k)} &= \alpha_n^{(0,k)} x_n + \alpha_n^{(1,k)} x_{n+1} + \cdots + \alpha_n^{(k,k)} x_{n+k} \\ r_n^{(k)} &= \alpha_n^{(0,k)} r_n + \alpha_n^{(1,k)} r_{n+1} + \cdots + \alpha_n^{(k,k)} r_{n+k} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Si, dans la formule

$$r_n^{(k)} = \alpha_n^{(0,k)} r_n + \alpha_n^{(1,k)} r_{n+1} + \cdots + \alpha_n^{(k,k)} r_{n+k},$$

nous remplaçons les vecteurs résidus par leur définitions nous obtenons

$$\begin{aligned} b - Ax_n^{(k)} &= \alpha_n^{(0,k)} (b - Ax_n) + \alpha_n^{(1,k)} (b - Ax_{n+1}) + \cdots + \alpha_n^{(k,k)} (b - Ax_{n+k}) \\ &= \left(\sum_{i=0}^k \alpha_n^{(i,k)} \right) b - A \left(\sum_{i=0}^k \alpha_n^{(i,k)} x_{n+i} \right). \end{aligned}$$

Donc pour pouvoir calculer le vecteur $x_n^{(k)}$ à partir des vecteurs x_{n+i} ($i = 0, \dots, k$) avec les mêmes coefficients $\alpha_n^{(i,k)}$ ($i = 0, \dots, k$) et sans utiliser A^{-1} nous devons imposer la condition

$$\alpha_n^{(0,k)} + \alpha_n^{(1,k)} + \cdots + \alpha_n^{(k,k)} = 1.$$

Les coefficients $\alpha_n^{(i,k)}$ sont choisis de telle façon qu'ils minimisent la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathcal{R}^{k+1} &\longrightarrow \mathcal{R} \\ \alpha &\longmapsto (r_n^{(k)}, r_n^{(k)}). \end{aligned}$$

Posons $\alpha = (\alpha^{(0)}, \dots, \alpha^{(k)})$ et calculons $f(\alpha)$, $\frac{\partial f}{\partial \alpha^{(i)}}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^{(i)} \partial \alpha^{(j)}}$. Nous avons

$$f(\alpha) = \left(\sum_{i=0}^k \alpha^{(i)} r_{n+i}, \sum_{j=0}^k \alpha^{(j)} r_{n+j} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{i=0}^{k-1} \alpha^{(i)}(r_{n+i} - r_{n+k}) + r_{n+k}, \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^{(j)}(r_{n+j} - r_{n+k}) + r_{n+k} \right) \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^{(i)} \alpha^{(j)} (r_{n+i} - r_{n+k}, r_{n+j} - r_{n+k}) \\
&\quad + 2 \sum_{i=0}^{k-1} \alpha^{(i)} (r_{n+i} - r_{n+k}, r_{n+k}) + (r_{n+k}, r_{n+k}) \\
\frac{\partial f}{\partial \alpha^{(i)}} &= 2 \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^{(j)} (r_{n+i} - r_{n+k}, r_{n+j} - r_{n+k}) + 2(r_{n+i} - r_{n+k}, r_{n+k}) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^{(i)} \partial \alpha^{(j)}} &= 2(r_{n+i} - r_{n+k}, r_{n+j} - r_{n+k}).
\end{aligned}$$

Dans ce qui suit, nous allons souvent nous servir de la quantité $r_{n+i} - r_{n+k}$ pour $i = 0, \dots, k-1$. Pour simplifier les notations, nous poserons

$$\tilde{p}_{n+i} = r_{n+i} - r_{n+k}.$$

Trouver un vecteur α qui minimise la fonction $f(\alpha)$ est équivalent à résoudre le système d'équations linéaires

$$\begin{bmatrix} (\tilde{p}_n, \tilde{p}_n) & \cdots & (\tilde{p}_n, \tilde{p}_{n+k-1}) \\ \vdots & & \vdots \\ (\tilde{p}_{n+k-1}, \tilde{p}_n) & \cdots & (\tilde{p}_{n+k-1}, \tilde{p}_{n+k-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_{k-1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} (\tilde{p}_n, r_{n+k}) \\ \vdots \\ (\tilde{p}_{n+k-1}, r_{n+k}) \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

D'après la règle de Cramer, la solution du système (3.2) est

$$\begin{aligned}
\alpha_i &= - \frac{\begin{vmatrix} (\tilde{p}_n, \tilde{p}_n) & \cdots & (\tilde{p}_n, \tilde{p}_{n+i-1}) & (\tilde{p}_n, r_{n+k}) & (\tilde{p}_n, \tilde{p}_{n+i+1}) & \cdots & (\tilde{p}_n, \tilde{p}_{n+k-1}) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\tilde{p}_{n+k-1}, \tilde{p}_n) & \cdots & (\tilde{p}_{n+k-1}, \tilde{p}_{n+i-1}) & (\tilde{p}_{n+k-1}, r_{n+k}) & (\tilde{p}_{n+k-1}, \tilde{p}_{n+i+1}) & \cdots & (\tilde{p}_{n+k-1}, \tilde{p}_{n+k-1}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (\tilde{p}_n, \tilde{p}_n) & \cdots & (\tilde{p}_n, \tilde{p}_{n+k-1}) \\ \vdots & & \vdots \\ (\tilde{p}_{n+k-1}, \tilde{p}_n) & \cdots & (\tilde{p}_{n+k-1}, \tilde{p}_{n+k-1}) \end{vmatrix}} \\
&= (-1)^i \frac{\begin{vmatrix} (\tilde{p}_n, r_n) & \cdots & (\tilde{p}_n, r_{n+i-1}) & (\tilde{p}_n, r_{n+i+1}) & \cdots & (\tilde{p}_n, r_{n+k}) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\tilde{p}_{n+k-1}, r_n) & \cdots & (\tilde{p}_{n+k-1}, r_{n+i-1}) & (\tilde{p}_{n+k-1}, r_{n+i+1}) & \cdots & (\tilde{p}_{n+k-1}, r_{n+k}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ (\tilde{p}_n, r_n) & \cdots & (\tilde{p}_n, r_{n+k}) \\ \vdots & & \vdots \\ (\tilde{p}_{n+k-1}, r_n) & \cdots & (\tilde{p}_{n+k-1}, r_{n+k}) \end{vmatrix}}.
\end{aligned}$$

Nous la noterons $\alpha_n^{(i,k)}$ puisqu'elle dépend en fait des indices n et k . Le vecteur $r_n^{(k)}$ peut être écrit comme

$$r_n^{(k)} = \frac{\begin{vmatrix} r_n & \cdots & r_{n+k} \\ (\tilde{p}_n, r_n) & \cdots & (\tilde{p}_n, r_{n+k}) \\ \vdots & & \vdots \\ (\tilde{p}_{n+k-1}, r_n) & \cdots & (\tilde{p}_{n+k-1}, r_{n+k}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ (\tilde{p}_n, r_n) & \cdots & (\tilde{p}_n, r_{n+k}) \\ \vdots & & \vdots \\ (\tilde{p}_{n+k-1}, r_n) & \cdots & (\tilde{p}_{n+k-1}, r_{n+k}) \end{vmatrix}}. \quad (3.3)$$

Dans ce qui suit, nous allons introduire une nouvelle quantité p_{n+i} définie par :

$$p_{n+i} = r_{n+i} - r_{n+i+1}$$

pour $i = 0, \dots, k-1$, et ne dépendant que de l'indice inférieur $n+i$. Ceci va nous permettre d'obtenir une définition récursive du vecteur $r_n^{(k)}$. Evidemment nous avons

$$\begin{aligned} p_{n+i} &= \tilde{p}_{n+i} - \tilde{p}_{n+i+1} & i = 0, \dots, k-2 \\ p_{n+k-1} &= \tilde{p}_{n+k-1}. \end{aligned}$$

En remplaçant, dans les deux déterminants de la formule (3.3), la $i^{\text{ème}}$ ligne par la $i^{\text{ème}}$ soustraite de la $(i+1)^{\text{ème}}$ ligne pour $i = 2, \dots, k-1$, nous obtenons

$$r_n^{(k)} = \frac{\begin{vmatrix} r_n & \cdots & r_{n+k} \\ (p_n, r_n) & \cdots & (p_n, r_{n+k}) \\ \vdots & & \vdots \\ (p_{n+k-1}, r_n) & \cdots & (p_{n+k-1}, r_{n+k}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ (p_n, r_n) & \cdots & (p_n, r_{n+k}) \\ \vdots & & \vdots \\ (p_{n+k-1}, r_n) & \cdots & (p_{n+k-1}, r_{n+k}) \end{vmatrix}}. \quad (3.4)$$

Cette définition du vecteur $r_n^{(k)}$ sera utilisée dans nos prochains calculs.

Remarque 3.1 :

Le vecteur $r_n^{(k)}$ est bien défini si et seulement si les vecteurs p_n, \dots, p_{n+k-1} sont linéairement indépendants.

Remarque 3.2 :

La matrice $\left[\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^{(i)} \partial \alpha^{(j)}} \right]$ est toujours définie positive. Donc la solution du système (3.2) est un minimum global de la fonction $f(\alpha)$.

Théorème 3.1

Soit (r_n) une suite de vecteurs résidus déterminée par une méthode arbitraire. Pour le vecteur $r_n^{(k)}$ correspondant aux coefficients $\alpha_n^{(i,k)}$, solution du système (3.2), nous avons :

$$(r_n^{(k)}, r_n^{(k)}) \leq \min_{i=0, \dots, k} (r_{n+i}, r_{n+i}).$$

Preuve :

Soit $\alpha_n^{(k)} = (\alpha_n^{(0,k)}, \dots, \alpha_n^{(k,k)})$. D'après la remarque 3.2 (p. 81) nous avons, pour tout vecteur $v \in \mathcal{R}^{k+1}$

$$f(\alpha_n) \leq f(v).$$

Soit v_i le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de \mathcal{R}^{k+1} , nous avons donc pour $i = 1, \dots, k+1$

$$f(v_i) = (r_{n+i-1}, r_{n+i-1}).$$

Nous pouvons déduire que pour $i = 0, \dots, k$ l'inégalité suivante est vérifiée :

$$f(\alpha_n) \leq f(v_{i+1}) = (r_{n+i}, r_{n+i}).$$

Nous avons donc démontré que

$$(r_n^{(k)}, r_n^{(k)}) \leq \min_{i=0, \dots, k} (r_{n+i}, r_{n+i}).$$

ce qui termine la démonstration. ■

Nous pouvons également montrer que la condition

$$(r_n^{(k)}, \tilde{p}_{n+i}) = 0 \quad (i = 0, \dots, k-1)$$

est équivalente à la résolution du système (3.2) donc que le vecteur $r_n^{(k)}$ est la hauteur de la pyramide dans le sous-espace $\mathcal{P}_k \subset \mathcal{R}^m$ de dimension $k+1$ construit par les vecteurs r_{n+i} ($i = 0, \dots, k$), c'est à dire la distance du sommet S de la pyramide à l'hyperplan

$$\begin{aligned} H_k &= \text{span}\{\tilde{p}_{n+i}; i = 0, \dots, k-1\} \\ &= \text{span}\{p_{n+i}; i = 0, \dots, k-1\} \end{aligned}$$

de la pyramide \mathcal{P}_k . Dans \mathcal{R}^3 ceci peut être représenté par la figure 3.1 :

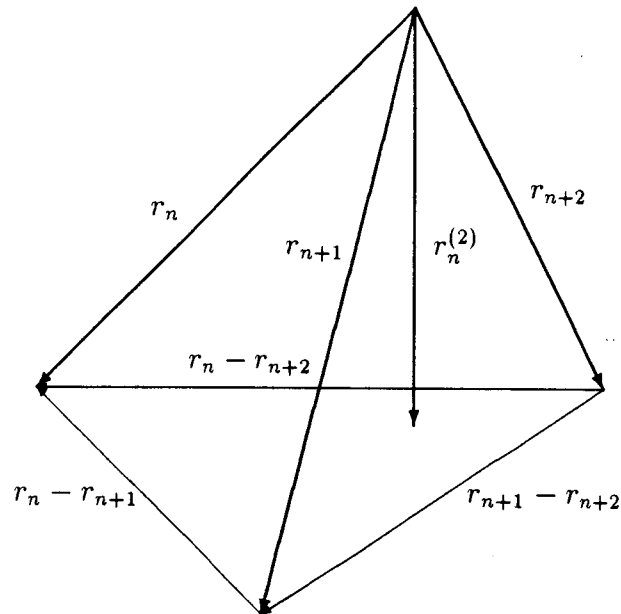


Figure 3.1 :

3.1.2 Propriétés

La procédure hybride généralisée garde toutes les propriétés de la procédure hybride définie dans le chapitre 1. D'après la définition (3.4) du vecteur r_n nous avons :

$$\begin{aligned} r_n^{(k)} &\in \text{span}\{r_n, \dots, r_{n+k}\} \\ r_n^{(k)} &\in \text{span}\{p_n, \dots, p_{n+k-1}\}^{\perp_G} \\ r_n^{(k)} &\in \text{span}\{\tilde{p}_n, \dots, \tilde{p}_{n+k-1}\}^{\perp_G} \end{aligned}$$

et nous pouvons déduire les propriétés suivantes :

Propriété 3.1

Soit (r_n) une suite de vecteurs résidus déterminée par une méthode arbitraire. Pour le vecteur $r_n^{(k)}$, défini par l'équation (3.4) à partir de la suite (r_n) , nous avons, pour $i = 0, \dots, k$, le résultat suivant :

$$(r_n^{(k)}, r_n^{(k)} - r_{n+i}) = 0.$$

Preuve :

Calculons $(r_n^{(k)}, r_n^{(k)} - r_{n+i})$ en utilisant la propriété suivante :

$$(r_n^{(k)}, \tilde{p}_{n+j}) = 0 \quad j = 0, \dots, k-1.$$

Nous obtenons,

$$\begin{aligned} (r_n^{(k)}, r_n^{(k)} - r_{n+i}) &= (r_n^{(k)}, \sum_{j=0}^k \alpha_n^{(j,k)} r_{n+j} - r_{n+i}) \\ &= (r_n^{(k)}, \sum_{j=0}^k \alpha_n^{(j,k)} r_{n+j} - r_{n+k} + r_{n+k} - r_{n+i}) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_n^{(j,k)} (r_n^{(k)}, \tilde{p}_{n+j}) - (r_n^{(k)}, \tilde{p}_{n+i}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration. ■

Propriété 3.2

Soit (r_n) une suite de vecteurs résidus déterminée par une méthode arbitraire. Le vecteur $r_n^{(k)}$, défini par l'équation (3.4) à partir de la suite (r_n) , appartient à l'intersection de $k+1$ sphères dans \mathcal{R}^m muni de la G -norme. Chacune a pour centre le point $\frac{r_{n+i}}{2}$ et son diamètre est $\|r_{n+i}\|_G$ ($i = 0, \dots, k$), i.e.,

$$r_n^{(k)} \in \bigcap_{i=0}^k \Upsilon_G \left(\frac{r_{n+i}}{2}, \frac{\|r_{n+i}\|_G}{2} \right).$$

Preuve :

Calculons le G -produit scalaire $(r_n^{(k)} - \frac{r_{n+i}}{2}, r_n - \frac{r_{n+i}}{2})$ pour $i = 0, \dots, k$ et utilisons la propriété 3.1 (p. 83). Nous obtenons

$$\begin{aligned} \left(r_n^{(k)} - \frac{r_{n+i}}{2}, r_n - \frac{r_{n+i}}{2} \right) &= (r_n^{(k)}, r_n^{(k)}) - (r_n^{(k)}, r_{n+i}) + \frac{1}{4}(r_{n+i}, r_{n+i}) \\ &= \frac{1}{4}(r_{n+i}, r_{n+i}) \end{aligned}$$

donc

$$r_n^{(k)} \in \bigcap_{i=0}^k \Upsilon_G \left(\frac{r_{n+i}}{2}, \frac{\|r_{n+i}\|_G}{2} \right)$$

ce qui termine la démonstration. ■

Nous notons $e_{n+i} = \tilde{x} - x_{n+i}$ ($i = 0, \dots, k$) et $e_n^{(k)} = \tilde{x} - x_n^{(k)}$ les vecteurs erreur correspondant respectivement au vecteur x_{n+i} et au vecteur $x_n^{(k)}$. En utilisant la propriété précédente et la relation entre le vecteur erreur et le vecteur résidu ($Ae = r$) nous obtenons,

Propriété 3.3

Le vecteur erreur $e_n^{(k)}$ correspondant à la procédure hybride généralisée appartient à l'intersection de $k+1$ sphères dans \mathcal{R}^m muni de la A^TGA -norme. Chacune a pour centre le point $\frac{e_{n+i}}{2}$ et son diamètre est $\|e_{n+i}\|_{A^TGA}$ ($i = 0, \dots, k$)

$$e_n^{(k)} \in \bigcap_{i=0}^k \Upsilon_{A^TGA} \left(\frac{e_{n+i}}{2}, \frac{\|e_{n+i}\|_{A^TGA}}{2} \right).$$

En utilisant la propriété 3.1 (p. 83) nous pouvons calculer la G -norme du vecteur $r_n^{(k)}$. Nous avons,

$$(r_n^{(k)}, r_n^{(k)}) = (r_n^{(k)}, r_n)$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} (r_n, r_n) & \cdots & (r_n, r_{n+k}) \\ (p_n, r_n) & \cdots & (p_n, r_{n+k}) \\ \vdots & & \vdots \\ (p_{n+k-1}, r_n) & \cdots & (p_{n+k-1}, r_{n+k}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ (p_n, r_n) & \cdots & (p_n, r_{n+k}) \\ \vdots & & \vdots \\ (p_{n+k-1}, r_n) & \cdots & (p_{n+k-1}, r_{n+k}) \end{vmatrix}}$$

$$= (-1)^k \frac{\begin{vmatrix} (r_n, r_n) & \cdots & (r_n, r_{n+k}) \\ \vdots & & \vdots \\ (r_{n+k}, r_n) & \cdots & (r_{n+k}, r_{n+k}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ (p_n, r_n) & \cdots & (p_n, r_{n+k}) \\ \vdots & & \vdots \\ (p_{n+k-1}, r_n) & \cdots & (p_{n+k-1}, r_{n+k}) \end{vmatrix}}.$$

Une autre présentation de la G -norme du vecteur $r_n^{(k)}$ peut être donnée par

$$\|r_n^{(k)}\|^2 = \|r_{n+k}\|^2 + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_n^{(i,k)} (\tilde{p}_{n+i}, r_{n+k}).$$

Dans ce qui suit nous allons démontrer que la G -norme du vecteur $r_n^{(k+1)}$ est inférieure

ou égale à la G -norme du vecteur $r_n^{(k)}$ et du vecteur $r_{n+1}^{(k)}$, puis nous allons comparer la procédure hybride généralisée avec la procédure hybride itérée définie dans le deuxième chapitre appliquée à une suite donnée (r_n) .

En utilisant la remarque 3.2 (p. 81) nous pouvons obtenir les résultats suivants :

Propriété 3.4

Soit (r_n) la suite de vecteurs résidus déterminée par une méthode arbitraire. Pour le vecteur $r_n^{(k)}$ correspondant aux coefficients $\alpha_n^{(i,k)}$ solution du système (3.2) pour des indices n et k quelconques nous avons le résultat suivant : la G -norme du vecteur $r_n^{(k+1)}$ est inférieure ou égale à la G -norme du vecteur $r_n^{(k)}$ et du vecteur $r_{n+1}^{(k)}$, i.e.,

$$\|r_n^{(k+1)}\| \leq \min(\|r_n^{(k)}\|, \|r_{n+1}^{(k)}\|).$$

Preuve :

Soit $\mathcal{S}_n^{(k+1)}$ le sous-espace vectoriel défini par

$$\mathcal{S}_n^{(k+1)} = \{v : v = a_0 r_n + \dots + a_{k+1} r_{n+k+1} ; a_0 + \dots + a_{k+1} = 1\}.$$

De même nous définissons les sous-espaces $\mathcal{S}_n^{(k)}$ et $\mathcal{S}_{n+1}^{(k)}$ par

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_n^{(k)} &= \{v : v = a_0 r_n + \dots + a_k r_{n+k} ; a_0 + \dots + a_k = 1\} \\ \mathcal{S}_{n+1}^{(k)} &= \{v : v = a_0 r_{n+1} + \dots + a_k r_{n+k+1} ; a_0 + \dots + a_k = 1\}. \end{aligned}$$

Pour les sous-espaces $\mathcal{S}_{n+1}^{(k)}$, $\mathcal{S}_n^{(k)}$, $\mathcal{S}_n^{(k+1)}$ les inclusions suivantes sont vérifiées,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{n+1}^{(k)} &\subset \mathcal{S}_n^{(k+1)} \\ \mathcal{S}_n^{(k)} &\subset \mathcal{S}_n^{(k+1)}. \end{aligned}$$

D'après la construction du vecteur $r_{n+1}^{(k)}$ et du vecteur $r_n^{(k)}$ nous pouvons constater que

$$\begin{aligned} r_{n+1}^{(k)} &\in \mathcal{S}_{n+1}^{(k)} \subset \mathcal{S}_n^{(k+1)} \\ r_n^{(k)} &\in \mathcal{S}_n^{(k)} \subset \mathcal{S}_n^{(k+1)}. \end{aligned}$$

Le vecteur $r_n^{(k+1)}$ est construit de telle sorte qu'il minimise la G -norme dans le sous-espace $\mathcal{S}_n^{(k+1)}$, nous avons donc

$$\begin{aligned} \|r_n^{(k+1)}\| &\leq \|r_n^{(k)}\| \\ \|r_n^{(k+1)}\| &\leq \|r_{n+1}^{(k)}\| \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration. ■

En utilisant la remarque 3.2 (p. 81) nous pouvons également comparer la procédure

hybride itérée définie dans le deuxième chapitre avec la procédure hybride généralisée.

Propriété 3.5

Soit (r_n) la suite de vecteurs résidus déterminée par une méthode arbitraire. Soit $\tilde{r}_n^{(k)}$ le vecteur déterminé par la procédure hybride itérée définie dans le deuxième chapitre à partir de la suite (r_n) et soit $r_n^{(k)}$ le vecteur déterminé par la procédure hybride généralisée à partir de la même suite (r_n) . La G -norme du vecteur $r_n^{(k)}$ est plus petite ou égale à la G -norme du vecteur $\tilde{r}_n^{(k)}$, i.e.,

$$\|r_n^{(k)}\| \leq \|\tilde{r}_n^{(k)}\|.$$

Preuve :

Soit $\mathcal{S}_n^{(k)}$ le sous-espace défini par :

$$\mathcal{S}_n^{(k)} = \{v : v = a_0 r_n + \dots + a_k r_{n+k} ; a_0 + \dots + a_k = 1\}.$$

D'après la propriété 2.3 (p. 57) il existe des coefficients $\tilde{a}_n^{(i,k)}$ tels que

$$\tilde{r}_n^{(k)} = \sum_{i=0}^k \tilde{a}_n^{(i,k)} r_{n+i}$$

et

$$\sum_{i=0}^k \tilde{a}_n^{(i,k)} = 1.$$

Nous pouvons alors déduire que

$$\tilde{r}_n^{(k)} \in \mathcal{S}_n^{(k)}.$$

Puisque le vecteur $r_n^{(k)} \in \mathcal{S}_n^{(k)}$ minimise la G -norme dans le sous-espace $\mathcal{S}_n^{(k)}$, nous obtenons

$$\|r_n^{(k)}\| \leq \|\tilde{r}_n^{(k)}\|$$

ce qui termine la démonstration. ■

En comparant la procédure hybride itérée (définie dans le deuxième chapitre) avec la généralisation de la procédure hybride (définie dans ce chapitre) appliquée à la même suite (r_n) nous pouvons dire que l'itération de la procédure hybride est plus simple à calculer mais nous ne pouvons pas toujours obtenir une norme minimale du vecteur $\tilde{r}_n^{(k)}$ comme c'est le cas pour la procédure hybride généralisée.

Dans le théorème suivant nous allons donner une condition suffisante pour que

$$\tilde{r}_n^{(k)} = r_n^{(k)},$$

c'est-à-dire pour que le vecteur $\tilde{r}_n^{(k)}$ minimise la G -norme dans le sous-espace vectoriel $\mathcal{S}_n^{(k)} = \{v : v = a_0 r_n + \dots + a_k r_{n+k} ; a_0 + \dots + a_k = 1\}$.

Théorème 3.2

Soit (r_n) la suite de vecteurs résidus déterminée par une méthode arbitraire. Soit $\tilde{r}_n^{(k)}$ le vecteur déterminé par la procédure hybride itérée définie dans le deuxième chapitre à partir de la suite (r_n) et soit $r_n^{(k)}$ le vecteur déterminé par la procédure hybride généralisée à partir de la même suite (r_n) . Soit le vecteur p_{n+i} défini par $p_{n+i} = r_{n+i} - r_{n+i+1}$. Si, $\forall n$ et k , nous avons

$$(r_{n+k}, p_{n+i}) = 0 \quad i = 0, \dots, k-1$$

alors

$$\tilde{r}_n^{(k)} = r_n^{(k)}.$$

Preuve :

• D'une part d'après la propriété 2.4 (p. 59) nous avons le résultat suivant :
si pour chaque indice n nous avons

$$(r_{n+1}, p_n) = 0$$

alors pour tous les indices n et k l'égalité suivante est vérifiée :

$$\tilde{r}_n^{(k)} = r_{n+k}.$$

Le vecteur $\tilde{r}_n^{(k)}$ vérifie alors la condition suivante :

$$(\tilde{r}_n^{(k)}, p_{n+i}) = 0 \quad i = 0, \dots, k-1$$

ce qui signifie que le vecteur $\tilde{r}_n^{(k)}$ minimise la G -norme dans le sous-espace défini par :

$$\mathcal{S}_n^{(k)} = \{v : v = a_0 r_n + \dots + a_k r_{n+k}; a_0 + \dots + a_k = 1\}.$$

• D'autre part nous savons également que les coefficients $\alpha_n^{(i,k)}$ sont choisis de telle façon que le vecteur

$$r_n^{(k)} = \alpha_n^{(0,k)} r_n + \alpha_n^{(1,k)} r_{n+1} + \dots + \alpha_n^{(k,k)} r_{n+k}$$

minimise la G -norme dans $\mathcal{S}_n^{(k)}$. Donc, puisque la fonction f définie précédemment atteint un minimum global unique, nous avons

$$\tilde{r}_n^{(k)} = r_n^{(k)}$$

ce qui termine la démonstration. ■

Nous pouvons conclure de ce théorème la remarque suivante :

Remarque 3.3 :

Si, $\forall n$ et k , nous avons $(r_{n+k}, p_{n+i}) = 0$ pour $i = 0, \dots, k - 1$ alors

$$r_n^{(k)} = r_{n+k}.$$

Dans la propriété suivante nous allons démontrer que, lorsque l'indice n est fixé la suite $(r_n^{(k)})$ est à convergence finie. En effet nous avons la propriété suivante :

Propriété 3.6

Soit (r_n) la suite de vecteurs résidus déterminée par une méthode arbitraire. Soit $r_n^{(k)}$ le vecteur déterminé par la procédure hybride généralisée à partir de la suite (r_n) . Soit m la dimension du système (0.1). Pour $k \leq m$, s'il existe des coefficients $\{a_i\}_{i=0}^{k-1}$ tels

que $r_{n+k} = \sum_{i=0}^{k-1} a_i r_{n+i}$ alors

$$r_n^{(k)} = 0.$$

Preuve :

Nous savons que le vecteur $r_n^{(k)}$ peut être écrit comme un rapport de deux déterminants de la forme

$$r_n^{(k)} = \frac{\begin{vmatrix} r_n & \cdots & r_{n+k} \\ (r_n, p_n) & \cdots & (r_{n+k}, p_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (r_n, p_{n+k-1}) & \cdots & (r_{n+k}, p_{n+k-1}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ (r_n, p_n) & \cdots & (r_{n+k}, p_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (r_n, p_{n+k-1}) & \cdots & (r_{n+k}, p_{n+k-1}) \end{vmatrix}}.$$

En remplaçant le vecteur r_{n+k} par sa définition $r_{n+k} = \sum_{i=0}^{k-1} a_i r_{n+i}$ nous obtenons au le numérateur un déterminant dont la $(k + 1)^{\text{ème}}$ colonne s'exprime comme combinaison des colonnes précédentes et donc

$$r_n^{(k)} = 0$$

ce qui termine la démonstration. ■

Remarque 3.4 :

S'il existe un indice K tel que les vecteurs r_n, \dots, r_{n+K-1} soient linéairement indépendants et des coefficients a_i tels que $r_{n+K} = \sum_{i=0}^{K-1} a_i r_{n+i}$ alors

$$\forall k \geq K \quad r_n^{(k)} = 0.$$

En conclusion de cette propriété nous obtenons :

Théorème 3.3

Soit (r_n) la suite de vecteurs résidus déterminée par une méthode arbitraire. Soit $r_n^{(k)}$ le vecteur déterminé par la procédure hybride généralisée à partir de la suite (r_n) . Soit m la dimension du système (0.1). Nous avons, $\forall n$

$$r_n^{(m)} = 0.$$

Dans la partie suivante nous allons montrer que la procédure hybride peut être considérée comme une méthode de projection G -orthogonale. En effet nous avons :

Théorème 3.4

Soit (r_n) la suite de vecteurs résidus déterminée par une méthode arbitraire. Soit $r_n^{(k)}$ le vecteur déterminé par la procédure hybride généralisée à partir de la suite (r_n) . Il existe une matrice notée $\varphi_n^{(k)}$ telle que pour $i = 0, \dots, k$ nous avons

$$r_n^{(k)} = \varphi_n^{(k)} r_{n+i}.$$

Preuve :

Le vecteur $r_n^{(k)}$ est défini par,

$$r_n^{(k)} = \frac{\begin{vmatrix} r_n & \cdots & r_{n+k} \\ (p_n, r_n) & \cdots & (p_n, r_{n+k}) \\ \vdots & & \vdots \\ (p_{n+k-1}, r_n) & \cdots & (p_{n+k-1}, r_{n+k}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ (p_n, r_n) & \cdots & (p_n, r_{n+k}) \\ \vdots & & \vdots \\ (p_{n+k-1}, r_n) & \cdots & (p_{n+k-1}, r_{n+k}) \end{vmatrix}}.$$

En remplaçant dans les deux déterminants la $i^{\text{ème}}$ colonne par la $i^{\text{ème}}$ soustraite de la $(i+1)^{\text{ème}}$ colonne pour $i = 1, \dots, k$ dans cette formule et en posant $c_{i,j} = (p_{n+i}, p_{n+j})$ nous obtenons

$$r_n^{(k)} = \frac{\begin{vmatrix} p_n & \cdots & p_{n+k-1} & r_{n+k} \\ c_{0,0} & \cdots & c_{0,k-1} & (p_n, r_{n+k}) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{k-1,0} & \cdots & c_{k-1,k-1} & (p_{n+k-1}, r_{n+k}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ c_{0,0} & \cdots & c_{0,k-1} & (p_n, r_{n+k}) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{k-1,0} & \cdots & c_{k-1,k-1} & (p_{n+k-1}, r_{n+k}) \end{vmatrix}}$$

$$= r_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} \beta_n^{(i,k)} p_{n+i}$$

avec

$$\begin{aligned} \beta_n^{(i,k)} p_{n+i} &= - \frac{\begin{vmatrix} c_{0,0} & \cdots & c_{0,i-1} & (p_n, r_{n+k}) & c_{0,i+1} & \cdots & c_{0,k-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{k-1,0} & \cdots & c_{k-1,i-1} & (p_{n+k-1}, r_{n+k}) & c_{k-1,i+1} & \cdots & c_{k-1,k-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_{0,0} & \cdots & c_{0,k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{k-1,0} & \cdots & c_{k-1,k-1} \end{vmatrix}} p_{n+i} \\ &= - \frac{\begin{vmatrix} c_{0,0} & \cdots & c_{0,i-1} & p_{n+i}(p_n)^T G & c_{0,i+1} & \cdots & c_{0,k-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{k-1,0} & \cdots & c_{k-1,i-1} & p_{n+i}(p_{n+k-1})^T G & c_{k-1,i+1} & \cdots & c_{k-1,k-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_{0,0} & \cdots & c_{0,k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{k-1,0} & \cdots & c_{k-1,k-1} \end{vmatrix}} r_{n+k}. \end{aligned}$$

Posons

$$M_n^{(i,k)} = \frac{\begin{vmatrix} c_{0,0} & \cdots & c_{0,i-1} & p_{n+i}(p_n)^T G & c_{0,i+1} & \cdots & c_{0,k-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{k-1,0} & \cdots & c_{k-1,i-1} & p_{n+i}(p_{n+k-1})^T G & c_{k-1,i+1} & \cdots & c_{k-1,k-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_{0,0} & \cdots & c_{0,k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{k-1,0} & \cdots & c_{k-1,k-1} \end{vmatrix}}.$$

Cette matrice peut être calculée en développant son numérateur par rapport à la $(i+1)^{\text{ème}}$ colonne par les règles habituelles. En utilisant cette notation nous pouvons écrire le vecteur $r_n^{(k)}$ comme suit :

$$r_n^{(k)} = \wp_n^{(k)} r_{n+k}$$

où la matrice $\wp_n^{(k)}$ est définie par :

$$\wp_n^{(k)} = I - \sum_{i=1}^{k-1} M_n^{(i,k)}.$$

Afin de démontrer que $r_n^{(k)} = \wp_n^{(k)} r_{n+i}$ pour $i = 0, \dots, k-1$ nous allons utiliser la relation suivante

$$r_{n+k} = r_{n+j} - \sum_{i=j}^{k-1} p_{n+i}.$$

Cette relation nous permet de réécrire les coefficients $\beta_n^{(i,k)}$ comme

$$\beta_n^{(i,k)} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\begin{vmatrix} c_{0,0} & \cdots & c_{0,i-1} & (p_n, r_{n+j}) & c_{0,i+1} & \cdots & c_{0,k-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{k-1,0} & \cdots & c_{k-1,i-1} & (p_{n+k-1}, r_{n+j}) & c_{k-1,i+1} & \cdots & c_{k-1,k-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_{0,0} & \cdots & c_{0,k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{k-1,0} & \cdots & c_{k-1,k-1} \end{vmatrix}} & i < j \\ \\ \frac{\begin{vmatrix} c_{0,0} & \cdots & c_{0,i-1} & (p_n, r_{n+i}) & c_{0,i+1} & \cdots & c_{0,k-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{k-1,0} & \cdots & c_{k-1,i-1} & (p_{n+k-1}, r_{n+i}) & c_{k-1,i+1} & \cdots & c_{k-1,k-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_{0,0} & \cdots & c_{0,k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{k-1,0} & \cdots & c_{k-1,k-1} \end{vmatrix}} + 1 & i \geq j. \end{array} \right.$$

Ecrivons le vecteur $r_n^{(k)}$ comme

$$\begin{aligned} r_n^{(k)} &= r_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} \beta_n^{(i,k)} p_{n+i} \\ &= r_{n+j} - \sum_{i=j}^{k-1} p_{n+i} + \sum_{i=0}^{k-1} \beta_n^{(i,k)} p_{n+i} \\ &= r_{n+j} + \sum_{i=0}^{j-1} \beta_n^{(i,k)} p_{n+i} + \sum_{i=j}^{k-1} (\beta_n^{(i,k)} - 1) p_{n+i}. \end{aligned}$$

Si nous utilisons les relations précédentes et nous procédons comme pour $i = k$, alors nous obtenons pour $j = 0, \dots, k-1$

$$r_n^{(k)} = \varphi_n^{(k)} r_{n+j}$$

ce qui termine la démonstration. ■

Nous voyons bien que la matrice $\varphi_n^{(k)}$ définie précédemment vérifie les propriétés suivantes

$$\varphi_n^{(k)} v = \begin{cases} v & \text{si } v \in \text{span}\{p_n, \dots, p_{n+k-1}\}^{\perp G} \\ 0 & \text{si } v \in \text{span}\{p_n, \dots, p_{n+k-1}\}. \end{cases}$$

La matrice $\varphi_n^{(k)}$ peut être écrite sous une forme plus simple. En utilisant la définition de l'inverse d'une matrice nous pouvons donner le résultat suivant :

Théorème 3.5

Soit $P_n^{(k)} = [p_n, \dots, p_{n+k-1}]$. Si $\wp_n^{(k)}$ désigne la matrice définie dans le théorème 3.4 (p. 90) alors

$$\wp_n^{(k)} = I - P_n^{(k)}((P_n^{(k)})^T G P_n^{(k)})^{-1} (P_n^{(k)})^T G.$$

Preuve :

Soit $P_n^{(k)} = [p_n, \dots, p_{n+k-1}]$. Calculons l'inverse de la matrice $(P_n^{(k)})^T G P_n^{(k)}$. Nous avons

$$\begin{aligned} (P_n^{(k)})^T G P_n^{(k)} &= \begin{bmatrix} (p_n)^T \\ \vdots \\ (p_{n+k-1})^T \end{bmatrix} G [p_n, \dots, p_{n+k-1}] \\ &= \begin{bmatrix} (p_n, p_n) & \cdots & (p_n, p_{n+k-1}) \\ \vdots & & \vdots \\ (p_{n+k-1}, p_n) & \cdots & (p_{n+k-1}, p_{n+k-1}) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Posons $c_{i,j} = (p_{n+i}, p_{n+j})$ et soient $C_{i,j}$ les cofacteurs de la matrice $(P_n^{(k)})^T G P_n^{(k)}$. En utilisant cette notation nous obtenons $((P_n^{(k)})^T G P_n^{(k)})^{-1} = \frac{[C_{i,j}]}{|c_{i,j}|}$. Ceci nous permet d'obtenir une nouvelle expression de la matrice $\wp_n^{(k)}$

$$\begin{aligned} \wp_n^{(k)} &= I - \sum_{i=0}^{k-1} M_n^{(i,k)} \\ &= I - \frac{1}{|c_{i,j}|} \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} p_{n+i} (p_{n+j})^T G C_{i,j} \\ &= I - [p_n, \dots, p_{n+k-1}] \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^{k-1} C_{1,j} (p_{n+j})^T \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{k-1} C_{k-1,j} (p_{n+j})^T \end{bmatrix} \frac{G}{|c_{i,j}|} \\ &= I - [p_n, \dots, p_{n+k-1}] \frac{[C_{i,j}]}{|c_{i,j}|} \begin{bmatrix} (p_n)^T \\ \vdots \\ (p_{n+k-1})^T \end{bmatrix} G \end{aligned}$$

et nous avons

$$\wp_n^{(k)} = I - P_n^{(k)}((P_n^{(k)})^T G P_n^{(k)})^{-1} (P_n^{(k)})^T G$$

ce qui termine la démonstration. ■

Remarque 3.5 :

D'après le théorème 3.5 (p. 93) nous pouvons déduire les propriétés suivantes de la matrice $\wp_n^{(k)}$

1. $(G\wp_n^{(k)})^T = G\wp_n^{(k)}$
2. $(\wp_n^{(k)})^2 = \wp_n^{(k)}$.

Donc, d'après la définition 0.3 (p. 6), $\wp_n^{(k)}$ est un projecteur G -orthogonal.

Pour terminer cette section nous allons donner un résultat sur l'accélération de la convergence de la suite (r_{n+k}) par la suite $(r_n^{(k)})$ pour un indice k fixé. Pour cela nous avons besoin du résultat suivant :

Lemme 3.1

Soit (r_n) la suite de vecteurs résidus déterminée par une méthode arbitraire. Soit $r_n^{(k)}$ le vecteur déterminé par la procédure hybride généralisée à partir de la suite (r_n) . Soit Z une matrice et $G = Z^T Z$. Si nous notons $\vartheta_n^{(k)}$ l'angle aigu compris entre les vecteurs $Z(I - \wp_n^{(k)})r_{n+k}$ et Zr_{n+k} alors

$$(r_n^{(k)}, r_n^{(k)})_G = (r_{n+k}, r_{n+k})_G \sin^2 \vartheta_n^{(k)}.$$

Preuve :

Posons $Q_n^{(k)} = I - \wp_n^{(k)}$. La matrice $Q_n^{(k)}$ vérifie les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} (GQ_n^{(k)})^T &= GQ_n^{(k)} \\ (Q_n^{(k)})^2 &= Q_n^{(k)}. \end{aligned}$$

En utilisant les propriétés de la matrice $Q_n^{(k)}$ pour calculer la quantité $(Q_n^{(k)}r_{n+k}, r_{n+k})_G^2$ nous obtenons

$$\begin{aligned} (Q_n^{(k)}r_{n+k}, r_{n+k})_G^2 &= (Q_n^{(k)}r_{n+k}, Q_n^{(k)}r_{n+k})_G (r_{n+k}, r_{n+k})_G \cos^2 \vartheta_n^{(k)} \\ &= (Q_n^{(k)}r_{n+k}, GQ_n^{(k)}r_{n+k})_I (r_{n+k}, r_{n+k})_G \cos^2 \vartheta_n^{(k)} \\ &= ((GQ_n^{(k)})^T Q_n^{(k)}r_{n+k}, r_{n+k})_I (r_{n+k}, r_{n+k})_G \cos^2 \vartheta_n^{(k)} \\ &= (GQ_n^{(k)}Q_n^{(k)}r_{n+k}, r_{n+k})_I (r_{n+k}, r_{n+k})_G \cos^2 \vartheta_n^{(k)} \\ &= (GQ_n^{(k)}r_{n+k}, r_{n+k})_I (r_{n+k}, r_{n+k})_G \cos^2 \vartheta_n^{(k)} \\ &= (Q_n^{(k)}r_{n+k}, r_{n+k})_G (r_{n+k}, r_{n+k})_G \cos^2 \vartheta_n^{(k)} \end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$(Q_n^{(k)}r_{n+k}, r_{n+k})_G = (r_{n+k}, r_{n+k})_G \cos^2 \vartheta_n^{(k)}.$$

Nous pouvons déduire de cette expression

$$\begin{aligned} (r_n^{(k)}, r_n^{(k)})_G &= (r_n^{(k)}, r_{n+k})_G \\ &= (r_{n+k}, r_{n+k})_G - (Q_n^{(k)}r_{n+k}, r_{n+k})_G \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (r_{n+k}, r_{n+k})_G (1 - \cos^2 \vartheta_n^{(k)}) \\
&= (r_{n+k}, r_{n+k})_G \sin^2 \vartheta_n^{(k)}
\end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration. ■

Directement du lemme 3.1 (p. 94) nous obtenons

Théorème 3.6

Soit (r_n) la suite de vecteurs résidus déterminée par une méthode arbitraire. Soit $r_n^{(k)}$ le vecteur déterminé par la procédure hybride généralisée à partir de la suite (r_n) . Soit Z une matrice et $G = Z^T Z$. Soit $\vartheta_n^{(k)}$ l'angle aigu compris entre les vecteurs $Z(I - \wp_n^{(k)})r_{n+k}$ et Zr_{n+k} . Une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(r_n^{(k)})$ converge plus vite que la suite (r_{n+k}) pour un indice k fixé, i.e.,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|r_n^{(k)}\|}{\|r_{n+k}\|} = 0$$

est que la suite $(\vartheta_n^{(k)})$ tende vers 0 ou π ($n \rightarrow \infty$).

3.1.3 Applications

Dans cette section nous allons étudier l'application de la procédure hybride généralisée à la méthode définie par :

$$\left. \begin{aligned} x_{n+1} &= Bx_n + b \\ r_{n+1} &= Br_n \end{aligned} \right\} \quad (0.2)$$

avec $B = I - A$. Pour la suite nous allons supposer que la matrice B est inversible. Comme dans les chapitres précédents nous allons nous servir de la décomposition d'une suite définie dans la section "Notations".

Soit B une matrice diagonalisable. Soient $\{\lambda_i\}_{i=1}^q$ ($q \geq 2$) les valeurs propres distinctes de la matrice $B = I - A$ ordonnées dans le sens décroissant des modules

$$|\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_q|$$

et $\{\gamma_i\}_{i=1}^m$ les vecteurs propres correspondants. Les vecteurs propres de la matrice B forment une base de \mathcal{R}^m . Nous associons au vecteur r_0 sa décomposition en somme des

vecteurs $\tilde{\gamma}_i(r_0)$

$$r_0 = \tilde{\gamma}_1(r_0) + \cdots + \tilde{\gamma}_q(r_0)$$

où le vecteur $\tilde{\gamma}_i(r_0)$ appartient au sous-espace propre \mathcal{V}_i correspondant à la valeur propre λ_i . Pour alléger la notation, cette décomposition sera notée par

$$r_0 = \tilde{\gamma}_1 + \cdots + \tilde{\gamma}_q.$$

Remarque 3.6 :

- Si $q = 1$ (la matrice B admet une seule valeur propre) alors r_0 est un vecteur propre de la matrice B et nous obtenons $r_0^{(1)} = 0$.
- Si dans la décomposition du vecteur r_0 nous avons $\tilde{\gamma}_1 = 0$ alors il faut reperer la première composante telle que $\tilde{\gamma}_i \neq 0$.

En utilisant la définition du vecteur $a_0^{(k+2)} = \tilde{\gamma}_{k+2} + \cdots + \tilde{\gamma}_q$ nous décomposons le vecteur r_0 comme ceci

$$r_0 = \tilde{\gamma}_1 + \cdots + \tilde{\gamma}_{k+1} + a_0^{(k+2)}$$

ce qui nous donne également la décomposition du vecteur r_n :

$$r_n = \lambda_1^n \tilde{\gamma}_1 + \cdots + \lambda_{k+1}^n \tilde{\gamma}_{k+1} + a_n^{(k+2)}$$

avec

$$\begin{aligned} a_n^{(k+2)} &= B a_{n-1}^{(k+2)} \\ \|a_n^{(k+2)}\| &= \mathcal{O}(|\lambda_{k+2}|^n) \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Nous allons revenir à cette notation plus tard. Tout d'abord nous allons présenter un lemme, dont nous nous servirons ultérieurement.

Lemme 3.2

Etant donnés les quantités $\{x_i\}_{i=1}^k$ vérifiant un système d'équations linéaires

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{k,1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1,k} & \cdots & a_{k,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

alors la somme $x_1 + \cdots + x_k$ peut être exprimée comme un rapport de deux déterminants

$$x_1 + \cdots + x_k = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & a_{2,1} - a_{1,1} & \cdots & a_{k,1} - a_{k-1,1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_k & a_{2,k} - a_{1,k} & \cdots & a_{k,k} - a_{k-1,k} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{k,1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1,k} & \cdots & a_{k,k} \end{vmatrix}}$$

Preuve :

En utilisant la règle de Cramer nous pouvons écrire la solution x_i du système (3.5) comme

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{i-1,1} & y_1 & a_{i+1,1} & \cdots & a_{k,1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1,k} & \cdots & a_{i-1,k} & y_k & a_{i+1,k} & \cdots & a_{k,k} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{k,1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1,k} & \cdots & a_{k,k} \end{vmatrix}}$$

$$= (-1)^{i-1} \frac{\begin{vmatrix} y_1 & a_{1,1} & \cdots & a_{i-1,1} & a_{i+1,1} & \cdots & a_{k,1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_k & a_{1,k} & \cdots & a_{i-1,k} & a_{i+1,k} & \cdots & a_{k,k} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{k,1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1,k} & \cdots & a_{k,k} \end{vmatrix}}$$

Calculons $x_1 + x_2$

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_2 &= \left[\begin{array}{cccc|cccc} y_1 & a_{2,1} & a_{3,1} & \cdots & a_{k,1} & y_1 & a_{1,1} & a_{3,1} & \cdots & a_{k,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_k & a_{2,k} & a_{3,k} & \cdots & a_{k,k} & y_k & a_{1,k} & a_{3,k} & \cdots & a_{k,k} \end{array} \right] \\
 &= \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{1,1} & \cdots & a_{k,1} & & a_{1,1} & \cdots & a_{k,1} & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{1,k} & \cdots & a_{k,k} & & a_{1,k} & \cdots & a_{k,k} & \end{array} \right] \\
 &= \left[\begin{array}{cccc|cccc} y_1 & a_{2,1} - a_{1,1} & a_{3,1} & \cdots & a_{k,1} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & & \\ y_k & a_{2,k} - a_{1,k} & a_{3,k} & \cdots & a_{k,k} & & & \end{array} \right] \\
 &= \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{1,1} & \cdots & a_{k,1} & & a_{1,1} & \cdots & a_{k,1} & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{1,k} & \cdots & a_{k,k} & & a_{1,k} & \cdots & a_{k,k} & \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Supposons donc que

$$\begin{aligned}
 x_1 + \cdots + x_i &= \left[\begin{array}{cccc|cccc} y_1 & a_{2,1} - a_{1,1} & \cdots & a_{i,1} - a_{i-1,1} & a_{i+1,1} & \cdots & a_{k,1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_k & a_{2,k} - a_{1,k} & \cdots & a_{i,k} - a_{i-1,k} & a_{i+1,k} & \cdots & a_{k,k} \end{array} \right] \\
 &= \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{1,1} & \cdots & a_{k,1} & & a_{1,1} & \cdots & a_{k,1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1,k} & \cdots & a_{k,k} & & a_{1,k} & \cdots & a_{k,k} \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

et calculons $x_1 + \cdots + x_{i+1}$. Nous avons

$$\begin{aligned}
 x_1 + \cdots + x_i + x_{i+1} &= \left[\begin{array}{cccc|cccc} y_1 & a_{2,1} - a_{1,1} & \cdots & a_{i,1} - a_{i-1,1} & a_{i+1,1} & \cdots & a_{k,1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_k & a_{2,k} - a_{1,k} & \cdots & a_{i,k} - a_{i-1,k} & a_{i+1,k} & \cdots & a_{k,k} \end{array} \right] \\
 &= \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{1,1} & \cdots & a_{k,1} & & a_{1,1} & \cdots & a_{k,1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1,k} & \cdots & a_{k,k} & & a_{1,k} & \cdots & a_{k,k} \end{array} \right] \\
 &+ (-1)^i \left[\begin{array}{cccc|cccc} y_1 & a_{1,1} & \cdots & a_{i,1} & a_{i+2,1} & \cdots & a_{k,1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_k & a_{1,k} & \cdots & a_{i,k} & a_{i+2,k} & \cdots & a_{k,k} \end{array} \right] \\
 &= \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{1,1} & \cdots & a_{k,1} & & a_{1,1} & \cdots & a_{k,1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1,k} & \cdots & a_{k,k} & & a_{1,k} & \cdots & a_{k,k} \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left| \begin{array}{cccccc} y_1 & a_{2,1} - a_{1,1} & \cdots & a_{i,1} - a_{i-1,1} & a_{i+1,1} & \cdots & a_{k,1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_k & a_{2,k} - a_{1,k} & \cdots & a_{i,k} - a_{i-1,k} & a_{i+1,k} & \cdots & a_{k,k} \end{array} \right| \\
 &\quad \left| \begin{array}{ccc} a_{1,1} & \cdots & a_{k,1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1,k} & \cdots & a_{k,k} \end{array} \right| \\
 &= \left| \begin{array}{ccccccc} y_1 & a_{2,1} - a_{1,1} & \cdots & a_{i,1} - a_{i-1,1} & a_{i,1} & a_{i+2,1} & \cdots & a_{k,1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_k & a_{2,k} - a_{1,k} & \cdots & a_{i,k} - a_{i-1,k} & a_{i,1} & a_{i+2,k} & \cdots & a_{k,k} \end{array} \right| \\
 &\quad \left| \begin{array}{ccc} a_{1,1} & \cdots & a_{k,1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1,k} & \cdots & a_{k,k} \end{array} \right| \\
 &= \left| \begin{array}{cccccc} y_1 & a_{2,1} - a_{1,1} & \cdots & a_{i+1,1} - a_{i,1} & a_{i+2,1} & \cdots & a_{k,1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_k & a_{2,k} - a_{1,k} & \cdots & a_{i+1,k} - a_{i,k} & a_{i+1,k} & \cdots & a_{k,k} \end{array} \right| \\
 &\quad \left| \begin{array}{ccc} a_{1,1} & \cdots & a_{k,1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1,k} & \cdots & a_{k,k} \end{array} \right|
 \end{aligned}$$

et par récurrence nous obtenons

$$x_1 + \cdots + x_k = \left| \begin{array}{cccc} y_1 & a_{2,1} - a_{1,1} & \cdots & a_{k,1} - a_{k-1,1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_k & a_{2,k} - a_{1,k} & \cdots & a_{k,k} - a_{k-1,k} \end{array} \right| \\
 \left| \begin{array}{ccc} a_{1,1} & \cdots & a_{k,1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1,k} & \cdots & a_{k,k} \end{array} \right|$$

ce qui termine la démonstration. ■

Dans ce qui suit, nous allons étudier des possibilités d'accélération de la convergence de la suite (r_{n+k}) par la suite $(r_n^{(k)})$ pour un indice k fixé. Nous rappelons que le vecteur r_n peut être décomposé de la manière suivante

$$r_n = \lambda_1^n \tilde{\gamma}_1 + \cdots + \lambda_{k+1}^n \tilde{\gamma}_{k+1} + a_n^{(k+2)}$$

avec

$$\|a_n^{(k+2)}\| = \mathcal{O}(|\lambda_{k+2}|^n) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Le résultat principal de cette section est donné par le théorème suivant

Théorème 3.7

Soit (r_n) la suite de vecteurs résidus déterminée par la méthode (0.2) avec $B = I - A$ une matrice inversible. Soient $\{\lambda_i\}_{i=1}^q$ les valeurs propres distinctes de la matrice B ordonnées dans le sens décroissant

$$|\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_q|$$

et $\{\gamma_i\}_{i=1}^m$ les vecteurs propres correspondants. Soit $r_n^{(k)}$ le vecteur déterminé par la procédure hybride généralisée à partir de la suite (r_n) . Si le vecteur r_n se décompose de la façon suivante

$$r_n = \lambda_1^n \tilde{\gamma}_1 + \dots + \lambda_{k+1}^n \tilde{\gamma}_{k+1} + a_n^{(k+2)}$$

alors nous avons le résultat suivant :

$$\|r_n^{(k+1)}\| = \mathcal{O}(\|a_{n+k+1}^{(k+2)}\|) = \mathcal{O}(|\lambda_{k+2}|^{n+k+1}) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Preuve :

Nous avons

$$r_{n+k+1} = \lambda_1^{n+k+1} \tilde{\gamma}_1 + \dots + \lambda_{k+1}^{n+k+1} \tilde{\gamma}_{k+1} + a_{n+k+1}^{(k+2)}.$$

Dans le théorème 3.4 (p. 90) nous avons montré qu'il existe une matrice $\varphi_n^{(k+1)}$ telle que pour $i = 0, \dots, k+1$ nous avons

$$r_n^{(k+1)} = \varphi_n^{(k+1)} r_{n+i}.$$

En particulier pour $i = k+1$ nous obtenons

$$\begin{aligned} r_n^{(k+1)} &= \varphi_n^{(k+1)} r_{n+k+1} \\ &= \lambda_1^{n+k+1} \varphi_n^{(k+1)} \tilde{\gamma}_1 + \dots + \lambda_{k+1}^{n+k+1} \varphi_n^{(k+1)} \tilde{\gamma}_{k+1} + \varphi_n^{(k+1)} a_{n+k+1}^{(k+2)}. \end{aligned}$$

Nous utilisons la relation

$$a_{n+k+1}^{(k+2)} = B^{k+1-j} a_{n+j}^{(k+2)} \quad j = 0, \dots, k$$

pour démontrer que les vecteurs $\lambda_i^{n+k+1} \varphi_n^{(k+1)} \tilde{\gamma}_i$ pour $i = 1, \dots, k+1$ vérifient le système suivant

$$\begin{bmatrix} 1 - \lambda_1 & \dots & 1 - \lambda_{k+1} \\ \lambda_1^{k+1} & \dots & \lambda_{k+1}^{k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ 1 - \lambda_1 & \dots & 1 - \lambda_{k+1} \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^{n+k+1} \varphi_n^{(k+1)} \tilde{\gamma}_1 \\ \vdots \\ \lambda_{k+1}^{n+k+1} \varphi_n^{(k+1)} \tilde{\gamma}_{k+1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \varphi_n^{(k+1)} (B^{-1} - I) (B^{-1})^k a_{n+k+1}^{(k+2)} \\ \vdots \\ \varphi_n^{(k+1)} (B^{-1} - I) a_{n+k+1}^{(k+2)} \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Ce système est obtenu à partir de la condition $\varphi_n^{(k+1)} p_{n+i} = 0$ pour $i = 0, \dots, k$ où $p_{n+i} = r_{n+i} - r_{n+i+1} = (B^{-1} - I)r_{n+i+1}$. Nous pouvons alors déduire d'après le lemme 3.2 (p. 97) que

$$\lambda_1^{n+k+1} \varphi_n^{(k+1)} \tilde{\gamma}_1 + \dots + \lambda_{k+1}^{n+k+1} \varphi_n^{(k+1)} \tilde{\gamma}_{k+1} =$$

$$-\varphi_n^{(k+1)} (B^{-1} - I) \frac{\begin{vmatrix} (B^{-1})^k & \frac{1-\lambda_2}{\lambda_2^{k+1}} - \frac{1-\lambda_1}{\lambda_1^{k+1}} & \dots & \frac{1-\lambda_{k+1}}{\lambda_{k+1}^{k+1}} - \frac{1-\lambda_k}{\lambda_k^{k+1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ I & \frac{1-\lambda_2}{\lambda_2} - \frac{1-\lambda_1}{\lambda_1} & \dots & \frac{1-\lambda_{k+1}}{\lambda_{k+1}} - \frac{1-\lambda_k}{\lambda_k} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1-\lambda_1}{\lambda_1^{k+1}} & \dots & \frac{1-\lambda_{k+1}}{\lambda_{k+1}^{k+1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1-\lambda_1}{\lambda_1} & \dots & \frac{1-\lambda_{k+1}}{\lambda_{k+1}} \end{vmatrix}} a_{n+k+1}^{(k+2)}.$$

Si nous posons

$$M^{(k+1)} = (B^{-1} - I) \frac{\begin{vmatrix} (B^{-1})^k & \frac{1-\lambda_2}{\lambda_2^{k+1}} - \frac{1-\lambda_1}{\lambda_1^{k+1}} & \dots & \frac{1-\lambda_{k+1}}{\lambda_{k+1}^{k+1}} - \frac{1-\lambda_k}{\lambda_k^{k+1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ I & \frac{1-\lambda_2}{\lambda_2} - \frac{1-\lambda_1}{\lambda_1} & \dots & \frac{1-\lambda_{k+1}}{\lambda_{k+1}} - \frac{1-\lambda_k}{\lambda_k} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1-\lambda_1}{\lambda_1^{k+1}} & \dots & \frac{1-\lambda_{k+1}}{\lambda_{k+1}^{k+1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1-\lambda_1}{\lambda_1} & \dots & \frac{1-\lambda_{k+1}}{\lambda_{k+1}} \end{vmatrix}}$$

alors nous obtenons une nouvelle représentation du vecteur $r_n^{(k+1)}$

$$r_n^{(k+1)} = \varphi_n^{(k+1)} (I - M^{(k+1)}) a_{n+k+1}^{(k+2)}.$$

La matrice $M^{(k+1)}$ peut être calculée en faisant un développement de son numérateur par rapport à sa première colonne. Le dénominateur appaissant dans la définition de la matrice $M^{(k+1)}$ est lié au déterminant de Vandermonde. Il est donc facile de calculer son expression. Puisque la matrice $\varphi_n^{(k+1)}$ est un projecteur G -orthogonal, d'après le lemme 0.1 (p. 7), nous avons $\|\varphi_n^{(k+1)}\| = 1$ et nous obtenons donc

$$\|r_n^{(k+1)}\| \leq (1 + \|M^{(k+1)}\|) \|a_{n+k+1}^{(k+2)}\|$$

ce qui termine la démonstration. ■

Directement du théorème 3.7 (p. 100) nous obtenons une condition suffisante pour que la suite $(\|r_n^{(k+1)}\|)$ converge plus vite que la suite $(\|r_{n+k+1}\|)$ pour un indice k fixé

Théorème 3.8

Soit (r_n) la suite de vecteurs résidus déterminée par la méthode (0.2) avec $B = I - A$ une matrice inversible. Soient $\{\lambda_i\}_{i=1}^q$ les valeurs propres distinctes de la matrice B ordonnées dans le sens décroissant

$$|\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_q|$$

et $\{\gamma_i\}_{i=1}^m$ les vecteurs propres correspondants. Soit $r_n^{(k)}$ le vecteur résidu déterminé par la procédure hybride généralisée à partir de la suite (r_n) . Si le vecteur r_n se décompose de la façon suivante

$$r_n = \lambda_1^n \tilde{\gamma}_1 + \dots + \lambda_{k+1}^n \tilde{\gamma}_{k+1} + a_n^{(k+2)}$$

et si $|\lambda_{k+2}| < |\lambda_1|$ alors pour un indice k fixé la suite $(r_n^{(k+1)})$ converge plus vite que la suite (r_{n+k+1}) , i.e.,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|r_n^{(k+1)}\|}{\|r_{n+k+1}\|} = 0.$$

Preuve :

Nous pouvons décomposer le vecteur r_{n+k+1} comme

$$r_{n+k+1} = \lambda_1^{n+k+1} \tilde{\gamma}_1 + \dots + \lambda_{k+1}^{n+k+1} \tilde{\gamma}_{k+1} + a_{n+k+1}^{(k+2)}.$$

Pour alléger la notation de cette démonstration, nous allons poser

$$b_{n+k+1}^{(k+1)} = \lambda_1^{n+k+1} \tilde{\gamma}_1 + \dots + \lambda_{k+1}^{n+k+1} \tilde{\gamma}_{k+1}.$$

Nous avons donc

$$r_{n+k+1} = b_{n+k+1}^{(k+1)} + a_{n+k+1}^{(k+2)}.$$

Nous rappelons qu'il existe une constante $C(k)$ ne dépendant pas de n telle que

$$\|a_{n+k+1}^{(k+2)}\| \leq C(k) |\lambda_{k+2}|^{n+k+1}$$

donc, si $|\lambda_{k+2}| < |\lambda_1|$, nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|a_{n+k+1}^{(k+2)}\|}{\|b_{n+k+1}^{(k+1)}\|} &\leq C(k) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\lambda_{k+2}|^{n+k+1}}{\|\lambda_1^{n+k+1} \tilde{\gamma}_1 + \dots + \lambda_{k+1}^{n+k+1} \tilde{\gamma}_{k+1}\|} \\ &= C(k) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{\lambda_{k+2}}{\lambda_1} \right|^{n+k+1}}{\left\| \tilde{\gamma}_1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{n+k+1} \tilde{\gamma}_1 + \dots + \left(\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_1} \right)^{n+k+1} \tilde{\gamma}_{k+1} \right\|} \\ &= 0. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité triangulaire $(\|b_{n+k+1}^{(k+1)}\| - \|a_{n+k+1}^{(k+2)}\|)^2 \leq \|r_{n+k+1}\|^2$ et du résultat précédent nous pouvons conclure :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|a_{n+k+1}^{(k+2)}\|^2}{\|r_{n+k+1}\|^2} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|a_{n+k+1}^{(k+2)}\|^2}{(\|b_{n+k+1}^{(k+1)}\| - \|a_{n+k+1}^{(k+2)}\|)^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{\|a_{n+k+1}^{(k+2)}\|}{\|b_{n+k+1}^{(k+1)}\|}\right)^2}{\left(1 - \frac{\|a_{n+k+1}^{(k+2)}\|}{\|b_{n+k+1}^{(k+1)}\|}\right)^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

et nous avons $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|r_n^{(k+1)}\|}{\|r_{n+k+1}\|} \leq (1 + \|M^{(k+1)}\|) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|a_{n+k+1}^{(k+2)}\|}{\|r_{n+k+1}\|} = 0$ ce qui termine la démonstration. ■

Nous pouvons remarquer que la procédure hybride généralisée appliquée à la méthode définie par l'équation (0.2) est mathématiquement équivalente à l'algorithme RRE (Reduced Rank Extrapolation) appliquée à la même méthode. Pour ce cas particulier du RRE **A. Sidi** a démontré [38], sous la condition $|\lambda_{k+1}| > |\lambda_{k+2}|$, que

$$x_n^{(k+1)} - \tilde{x} = F(n)\lambda_{k+2}^n [1 + o(1)] \quad (n \rightarrow \infty)$$

avec $\|F(n)\| \leq K$ (K étant une constante strictement positive) ce qui implique

$$\|x_n^{(k+1)} - \tilde{x}\| = \mathcal{O}(|\lambda_{k+2}|^n) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Le théorème 3.7 (p. 100) nous donne même résultat mais avec des conditions plus faciles à vérifier.

Dans la partie suivante nous allons étudier dans quelles circonstances nous avons pour tout indice n , $r_n^{(k)} = 0$. Nous allons utiliser les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice B pour exprimer la condition suffisante.

Lemme 3.3

Soit B une matrice admettant q valeurs propres distinctes notées : $\lambda_1, \dots, \lambda_q$. Soit \mathcal{W}_q le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs propres de la matrice B $\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_q$ associés chacun à une valeur propre λ_i , linéairement indépendants. Si $x \in \mathcal{W}_q$ est un vecteur arbitraire tel que toutes ses coordonnées dans la base $\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_q$ soient non nulles, alors les vecteurs $x, Bx, \dots, B^{q-1}x$ sont linéairement indépendants.

Preuve :

Supposons que le vecteur x possède les coordonnées (c_1, \dots, c_q) dans la base $\{\tilde{\gamma}_i\}_1^q$

$$x = c_1 \tilde{\gamma}_1 + \dots + c_q \tilde{\gamma}_q.$$

Nous avons

$$B^i x = c_1 \lambda_1^i \tilde{\gamma}_1 + \cdots + c_q \lambda_q^i \tilde{\gamma}_q.$$

Trouver les coefficients β_i tels que

$$\beta_0 x + \cdots + \beta_{q-1} B^{q-1} x = 0$$

est équivalent à résoudre le système d'équations linéaires suivant

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & \lambda_1^{q-1} \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & \lambda_k^{q-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_{q-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ étant distinctes, le déterminant de ce système est non nul et nous avons la solution

$$\beta_0 = \cdots = \beta_{q-1} = 0.$$

Les vecteurs $x, Bx, \dots, B^{q-1}x$ sont donc linéairement indépendants ce qui termine la démonstration. ■

Remarque 3.7 :

Dans le cas où le vecteur x admet l coordonnées nulles dans la base $\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_q$ alors les vecteurs $x, Bx, \dots, B^{q-l-1}x$ sont linéairement indépendants mais $x, Bx, \dots, B^{q-l}x$ sont linéairement dépendants.

Théorème 3.9

Soit (r_n) la suite de vecteurs résidus déterminée par la méthode (0.2) avec $B = I - A$ une matrice inversible. Soit $r_n^{(k)}$ le vecteur déterminé par la procédure hybride généralisée à partir de la suite (r_n) . Si la matrice B admet q valeurs propres distinctes alors, $\forall n$, nous avons

$$r_n^{(q)} = 0.$$

Preuve :

Le vecteur $r_n^{(q)}$ est défini par

$$r_n^{(q)} = \frac{\begin{vmatrix} r_n & \cdots & r_{n+q} \\ (r_n, p_n) & \cdots & (r_{n+q}, p_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (r_n, p_{n+q-1}) & \cdots & (r_{n+q}, p_{n+q-1}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ (r_n, p_n) & \cdots & (r_{n+q}, p_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (r_n, p_{n+q-1}) & \cdots & (r_{n+q}, p_{n+q-1}) \end{vmatrix}} \quad (3.7)$$

avec $p_i = r_i - r_{i+1}$. Soit \mathcal{W}_q le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_q$. Nous avons

$$r_n \in \mathcal{W}_q$$

dans le cas où le vecteur r_n admet toutes ses coordonnées non nulles dans la base $\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_q$, d'après le lemme 3.3 (p. 103) les vecteurs r_n, \dots, r_{n+q-1} forment une base du sous-espace \mathcal{W}_q . Le vecteur r_{n+q} appartient également au sous-espace \mathcal{W}_q alors il existe des coefficients β_i tels que

$$r_{n+q} = \sum_{i=0}^{q-1} \beta_i r_{n+i}.$$

En remplaçant le vecteur r_{n+q} dans la formule (3.7) par son expression nous obtenons dans le numérateur un déterminant dont la dernière colonne s'exprime comme une combinaison linéaire de $q - 1$ colonnes précédentes alors

$$r_n^{(q)} = 0.$$

Si le vecteur r_n admet l coordonnées nulles dans la base $\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_q$ alors d'après la remarque 3.7 nous avons pour tout indice n

$$r_n^{(q-l)} = 0$$

ce qui termine la démonstration. ■

3.1.4 Exemples numériques

Dans cette section nous donnons des exemples numériques pour illustrer deux cas particuliers de la procédure hybride étudiée précédemment.

Pour tous les exemples nous prenons $G = I$, $A = I - B$ et $x_0 = 0$. Le vecteur b est toujours choisi tel que la solution soit $\tilde{x} = [1, \dots, m]^T$. Chaque figure montre $\log \|r_{n+k}\|$ et $\log \|r_n^{(k)}\|$ en fonction du nombre d'itérations. Afin de connaître les valeurs propres de la matrice B dans chaque exemple nous choisissons arbitrairement une matrice diagonale notée D , une matrice inversible P et nous prenons $A = PDP^{-1}/\sigma$. Soit $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$ l'ensemble des valeurs propres de la matrice B . Les valeurs $\|PDP^{-1}\|_\infty$, $\|B\|$ ont été calculées par Matlab (voir le tableau 3.1).

	Exemple 3.1	Exemple 3.2	Exemple 3.3
σ	$\ PDP^{-1}\ _{\infty} = 200$	1	1
$\ B\ $	0.9996	55.2837	49.6635
$ \lambda_1 $	0.9950	0.9000	1.1000
$ \lambda_2 $	0.9900	0.9000	0.6000
$ \lambda_3 $	0.9850	0.4500	0.4333
$ \lambda_4 $	0.9800	0.4500	0.3500

Tableau 3.1 :

Soit (r_n) la suite des vecteurs résidus déterminée par la méthode

$$\left. \begin{aligned} x_{n+1} &= Bx_n + b \\ r_{n+1} &= Br_n \end{aligned} \right\} \quad (0.2)$$

avec $B = I - A$. Soit $r_n^{(k)}$ le vecteur résidu correspondant à la procédure hybride généralisée déterminé à partir de la suite (r_n) . Dans les exemples 3.1, 3.3 nous avons choisi les matrices B de telle sorte que

$$|\lambda_4| < |\lambda_3| < |\lambda_2| < |\lambda_1|$$

donc les conditions du théorème 3.8 (p. 102) sont vérifiées. Nous obtenons une accélération de la convergence ($\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|r_n^{(k+1)}\|}{\|r_n^{(k)}\|} = 0$) bien que la méthode initiale ne soit pas convergente ($\lim_{n \rightarrow \infty} \|r_n'\| = \infty$) ; voir l'exemple 3.3. Dans l'exemple 3.2 nous avons $|\lambda_4| = |\lambda_3| < |\lambda_2| = |\lambda_1|$ et nous obtenons l'accélération de la méthode initiale par la procédure hybride généralisée du rang 2 et 3.

Dans l'exemple 3.1, l'exemple 3.2 et l'exemple 3.3 nous comparons la convergence de la suite $\|r_n\|$ et de la suite $\|r_n^{(k)}\|$ pour $k = 1, 2, 3$. La courbe continue correspond à la méthode initiale. La courbe en tirets correspond à la suite $(\|r_n^{(1)}\|)$. La courbe point-tirets correspond à la suite $(\|r_n^{(2)}\|)$. La courbe pointillée correspond à la suite $(\|r_n^{(3)}\|)$.

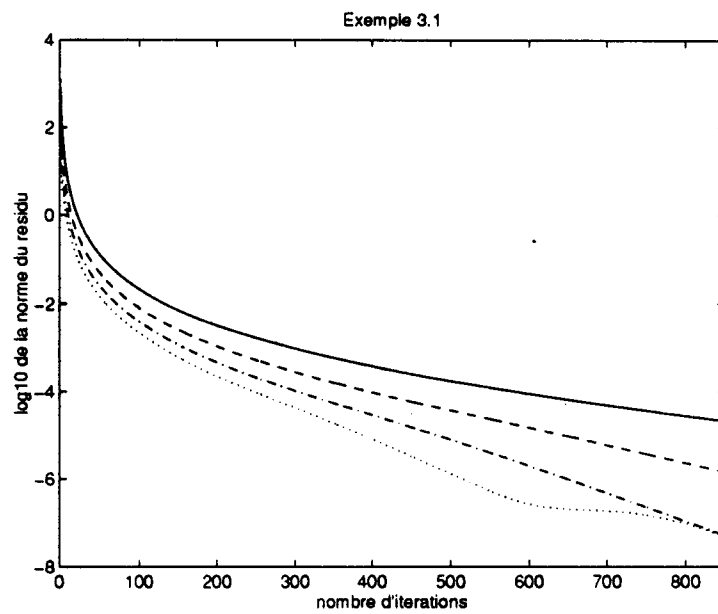
Exemple 3.1

Cet exemple a été pris dans [23]. Soit $m = 200$ et soit $A = PDP^{-1}/\|PDP^{-1}\|_\infty$ avec

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \beta & & \\ & 1 & \beta & 0 \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & \ddots & \beta \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 + \alpha & & 0 \\ & & 3 & \\ & 0 & & \ddots \\ & & & & 200 \end{bmatrix}$$

avec $\alpha = 1$, $\beta = 0.9$. Nous avons



CONCLUSION :

Pour obtenir les résultats d'accélération de méthodes du type (0.2) par la procédure hybride généralisée de rang k il est important d'avoir une inégalité stricte entre les modules de λ_1 et λ_{k+1} .

La procédure hybride généralisée coïncide avec la méthode initiale pour GCR.

3.2 Autres généralisations possibles de la procédure hybride

Dans cette section nous allons proposer d'autres possibilités de généralisation de la procédure hybride. L'idée de deux possibilités vient directement de la définition de la procédure hybride généralisée. La troisième généralisation est la procédure hybride en cascade, qui a été définie par **C. Brezinski** et **M. Redivo Zaglia** dans [11]. Dans chaque cas nous allons étudier certaines propriétés théoriques sans donner d'exemples numériques.

3.2.1 Procédure hybride multiple de rang $k + 1$

Cette généralisation de la procédure hybride consiste à supposer que nous avons $k + 1$ méthodes itératives, différentes entre elles, pour la résolution du système

$$Ax = b. \tag{0.1}$$

Leurs itérés seront notés $x_{n,i}$ ($i = 0, \dots, k$) et les vecteurs résidus correspondants $r_{n,i} = b - Ax_{n,i}$ ($i = 0, \dots, k$). A chaque itération n , nous allons construire un nouvel itéré $x_n^{(k)}$ avec un vecteur résidu correspondant $r_n^{(k)}$ à partir des vecteurs $x_{n,i}$ de telle façon que la G -norme du vecteur $r_n^{(k)}$ soit minimale. En procédant comme au début de ce chapitre nous voyons que le vecteur $r_n^{(k)}$ peut s'écrire comme un rapport de deux

déterminants

$$r_n^{(k)} = \frac{\begin{vmatrix} r_{n,0} & \cdots & r_{n,k} \\ (p_{n,0}, r_{n,0}) & \cdots & (p_{n,0}, r_{n,k}) \\ \vdots & & \vdots \\ (p_{n,k-1}, r_{n,0}) & \cdots & (p_{n,k-1}, r_{n,k}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ (p_{n,0}, r_{n,0}) & \cdots & (p_{n,0}, r_{n,k}) \\ \vdots & & \vdots \\ (p_{n,k-1}, r_{n,0}) & \cdots & (p_{n,k-1}, r_{n,k}) \end{vmatrix}}$$

avec le vecteur $p_{n,i}$ défini par :

$$p_{n,i} = r_{n,i} - r_{n,i+1} \quad i = 0, \dots, k-1.$$

Evidemment si nous remplaçons r_{n+i} par $r_{n,i}$ et p_{n+i} par $p_{n,i}$ les résultats du théorème 3.1 (p. 82), de la propriété 3.1 (p. 83), de la propriété 3.2 (p. 84), de la propriété 3.3 (p. 85), de la propriété 3.6 (p. 89), de la propriété 3.3 (p. 90), du théorème 3.4 (p. 90), du théorème 3.5 (p. 93) et du théorème 3.6 (p. 95) sont vérifiés.

Nous pouvons envisager l'utilisation de cette méthode dans le cas où nous pouvons programmer les $k+1$ méthodes parallèlement et le rapport de deux déterminants qui définit le vecteur $r_n^{(k)}$ peut être calculé facilement.

La méthode ainsi définie peut être considérée comme un cas particulier de "Composite Sequence Transformation" définie par C. Brezinski dans [9]. D'autres cas particuliers de "Composite Sequence Transformation" ont été étudiés dans [34], [35].

3.2.2 Procédure hybride avec une suite auxiliaire

Nous pouvons également envisager une méthode qui utilise une méthode itérative de résidu r_n et une suite auxiliaire (w_n) de telle façon que

$$r_n^{(k)} = \alpha_n^{(0,k)} r_n + \alpha_n^{(1,k)} r_{n+1} + \cdots + \alpha_n^{(k,k)} r_{n+k}.$$

Les coefficients $\alpha_n^{(i,k)}$ sont calculés de telle sorte que le vecteur $r_n^{(k)}$ vérifie, pour $i = 0, \dots, k-1$, la condition suivante :

$$(r_n^{(k)}, w_{n+i}) = 0.$$

En résolvant un système d'équations linéaires nous obtenons

$$r_n^{(k)} = \frac{\begin{vmatrix} r_n & \cdots & r_{n+k} \\ (w_n, r_n) & \cdots & (w_n, r_{n+k}) \\ \vdots & & \vdots \\ (w_{n+k-1}, r_n) & \cdots & (w_{n+k-1}, r_{n+k}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ (w_n, r_n) & \cdots & (w_n, r_{n+k}) \\ \vdots & & \vdots \\ (w_{n+k-1}, r_n) & \cdots & (w_{n+k-1}, r_{n+k}) \end{vmatrix}}.$$

Posons $p_{n+i} = r_{n+i} - r_{n+i+1}$ ($i = 1, \dots, k-1$), $P_n^{(k)} = [p_n, \dots, p_{n+k-1}]$ et $W_n^{(k)} = [w_n, \dots, w_{n+k-1}]$. En procédant comme dans le théorème 3.4 (p. 90) et dans le théorème 3.5 (p. 93) nous obtenons :

$$r_n^{(k)} = \varphi_n^{(k)} r_{n+i} \quad (i = 0, \dots, k)$$

où la matrice $\varphi_n^{(k)}$ est définie par :

$$\varphi_n^{(k)} = I - P_n^{(k)}((W_n^{(k)})^T G P_n^{(k)})^{-1} (W_n^{(k)})^T G.$$

La matrice $\varphi_n^{(k)}$ définie ainsi vérifie les conditions suivantes

$$\begin{aligned} (\varphi_n^{(k)})^2 &= \varphi_n^{(k)} \\ \varphi_n^{(k)} v &= v \quad \text{si } v \in \text{span}\{w_n, \dots, w_{n+k-1}\}^{\perp_G} \\ \varphi_n^{(k)} v &= 0 \quad \text{si } v \in \text{span}\{p_n, \dots, p_{n+k-1}\}. \end{aligned}$$

Dans ce cas nous n'avons plus la propriété de minimisation de la G -norme du vecteur $r_n^{(k)}$, mais nous pouvons choisir la suite (w_n) de telle sorte que le vecteur $r_n^{(k)}$ vérifie d'autres propriétés intéressantes.

3.2.3 Procédure hybride en cascade

Supposons que nous ayons $k+1$ méthodes, différentes entre elles, pour la résolution du système

$$Ax = b. \quad (0.1)$$

Leurs itérés seront notés $x_{n,i}$ ($i = 0, \dots, k$) et leurs vecteurs résidus correspondants $r_{n,i} = b - Ax_{n,i}$ ($i = 0, \dots, k$). La procédure hybride en cascade consiste à appliquer dans chaque iteration n la procédure hybride aux deux premières méthodes, puis appliquer la procédure hybride au résultat et à la troisième méthode et ainsi de suite. Pour un indice n fixé nous obtenons alors une règle récursive pour calculer le vecteur $r_n^{(k)}$

$$\begin{aligned} r_n^{(0)} &= r_{n,0} \\ r_n^{(i+1)} &= \alpha_n^{(i)} r_n^{(i)} + (1 - \alpha_n^{(i)}) r_{n,i+1} \quad i = 0, \dots, k-1. \end{aligned}$$

Les coefficients $\alpha_n^{(i)}$ sont calculés par

$$\alpha_n^{(i)} = - \frac{(r_n^{(i)} - r_{n,i+1}, r_n^{(i)})}{(r_n^{(i)} - r_{n,i+1}, r_n^{(i)} - r_{n,i+1})}.$$

Remarque 3.8 :

Si nous prenons seulement une méthode de résolution du système (0.1) (la suite des vecteurs résidus correspondant à cette méthode sera notée (r_n)) et si nous posons $r_{n,k} = r_{n+k}$ alors, pour un indice n fixé la procédure hybride en cascade devient la méthode "Minimal Residual Smoothing" (MRS) [36], [37].

Le vecteur $r_n^{(k)}$ peut être écrit comme une combinaison des vecteurs $r_{n,0}, \dots, r_{n,k}$. Nous avons le lemme suivant :

Lemme 3.4

Soient $k+1$ suites de vecteurs résidus, notées par $(r_{n,i})$ pour $i = 0, \dots, k$, déterminées par $k+1$ méthodes arbitraires. Si le vecteur $r_n^{(k)}$ est déterminé par la procédure hybride en cascade à partir de ces suites alors nous avons $\forall n$

$$(a) \quad r_n^{(k)} = \sum_{i=0}^k a_n^{(i,k)} r_{n,i} \quad \mathcal{H}_7(k)$$

$$(b) \quad \sum_{i=0}^k a_n^{(i,k)} = 1. \quad \mathcal{H}_8(k)$$

Preuve :

La démonstration de ces propriétés se fait par récurrence simultanée.

- Pour $k = 0$ nous avons par construction $r_n^{(0)} = r_{n,0}$ et $a_n^{(0,0)} = 1$, ce qui prouve $\mathcal{H}_7(0)$ et $\mathcal{H}_8(0)$.
- (a) Supposons que $\mathcal{H}_7(k-1)$ soit vraie. En utilisant la définition du vecteur $r_n^{(k)}$ et $\mathcal{H}_7(k-1)$ nous obtenons

$$r_n^{(k)} = \alpha_n^{(k-1)} r_n^{(k-1)} + (1 - \alpha_n^{(k-1)}) r_{n,k}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha_n^{(k-1)} \left[\sum_{i=0}^{k-1} a_n^{(i,k-1)} r_{n,i} \right] + (1 - \alpha_n^{(k-1)}) r_{n,k} \\
&= \sum_{i=0}^k a_n^{(i,k)} r_{n,i}.
\end{aligned}$$

La propriété $\mathcal{H}_7(k)$ est donc vérifiée.

(b) Les coefficients $a_n^{(i,k)}$ sont calculés par

$$\begin{aligned}
a_n^{(i,k)} &= \alpha_n^{(k-1)} a_n^{(i,k-1)} & i = 0, \dots, k-1 \\
a_n^{(k,k)} &= 1 - \alpha_n^{(k-1)}.
\end{aligned}$$

Supposons que $\mathcal{H}_8(k-1)$ soit vraie. Nous avons

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^k a_n^{(i,k)} &= \sum_{i=0}^{k-1} a_n^{(i,k)} + a_n^{(k,k)} \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} \left[\alpha_n^{(k-1)} a_n^{(i,k-1)} \right] + (1 - \alpha_n^{(k-1)}) \\
&= \alpha_n^{(k-1)} \sum_{i=0}^{k-1} a_n^{(i,k-1)} + (1 - \alpha_n^{(k-1)}) \\
&= \alpha_n^{(k-1)} + (1 - \alpha_n^{(k-1)}) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

La propriété $\mathcal{H}_8(k)$ est satisfaite

ce qui termine la démonstration. ■

Dans la partie suivante nous allons comparer la procédure hybride en cascade avec la procédure hybride multiple de rang $k+1$. Nous allons noter comme auparavant

$$p_{n,i} = r_{n,i} - r_{n,i+1} \quad i = 0, \dots, k-1.$$

Soit $\hat{r}_n^{(k)}$ le vecteur résidu obtenu par la procédure hybride multiple de rang $k+1$ à partir de $k+1$ suites $(r_{n,i})$ pour un indice n fixé. Nous savons, d'après la construction du vecteur $\hat{r}_n^{(k)}$, que

$$(\hat{r}_n^{(k)}, p_{n,i}) = 0 \quad i = 0, \dots, k-1$$

et que le vecteur $\hat{r}_n^{(k)}$ minimise la G -norme dans le sous-espace défini par

$$\mathcal{S}_n^{(k)} = \{v : v = a_0 r_{n,0} + \dots + a_k r_{n,k}; a_0 + \dots + a_k = 1\}.$$

Nous avons donc les résultat suivant

Propriété 3.7

Soient $k + 1$ suites de vecteurs résidus, notées $(r_{n,i})$ pour $i = 0, \dots, k$, déterminées par $k + 1$ méthodes arbitraires. Si le vecteur $\hat{r}_n^{(k)}$ est déterminé par la procédure hybride multiple de rang $k + 1$ à partir des $k + 1$ suites $(r_{n,i})$ et le vecteur $r_n^{(k)}$ est déterminé par la procédure hybride en cascade à partir des mêmes suites $(r_{n,i})$ alors la G -norme du vecteur $\hat{r}_n^{(k)}$ est plus petite ou égale à la G -norme du vecteur $r_n^{(k)}$, i.e.,

$$\|\hat{r}_n^{(k)}\| \leq \|r_n^{(k)}\|.$$

Preuve :

D'après le lemme 3.4 (p. 114)

$$\begin{aligned} r_n^{(k)} &\in \mathcal{S}_n^{(k)} \\ &= \{v : v = a_0 r_{n,0} + \dots + a_k r_{n,k}; a_0 + \dots + a_k = 1\}. \end{aligned}$$

Nous savons aussi que

$$\hat{r}_n^{(k)} \in \mathcal{S}_n^{(k)}$$

et puisque $\hat{r}_n^{(k)}$ minimise la norme dans $\mathcal{S}_n^{(k)}$, nous obtenons

$$\|\hat{r}_n^{(k)}\| \leq \|r_n^{(k)}\|$$

ce qui termine la démonstration. ■

Pour terminer cette partie nous allons donner une condition suffisante pour que

$$r_n^{(k)} = \hat{r}_n^{(k)}.$$

Il suffit de donner une condition suffisante pour que $(r_n^{(k)}, p_{n,i}) = 0$ ($i = 0, \dots, k - 1$) avec $p_{n,i} = r_{n,i} - r_{n,i+1}$ ($i = 0, \dots, k - 1$). Nous avons le résultat suivant :

Théorème 3.10

Soient $k + 1$ suites de vecteurs résidus, notées $(r_{n,i})$ pour $i = 0, \dots, k$, déterminées par $k + 1$ méthodes arbitraires. Soit $r_n^{(k)}$ le vecteur déterminé par la procédure hybride en cascade à partir des $k + 1$ suites $(r_{n,i})$. Si pour $i = 0, \dots, k - 1$ nous avons $(r_{n,k}, p_{n,i}) = 0$ alors

$$(r_n^{(k)}, p_{n,i}) = 0 \quad i = 0, \dots, k - 1 \quad \mathcal{H}_9(k).$$

Preuve :

La démonstration de cette propriété se fait par récurrence.

- Pour $k = 1$ nous avons par construction

$$\begin{aligned} (r_n^{(1)}, r_n^{(0)} - r_{n,1}) &= (r_n^{(1)}, r_{n,0} - r_{n,1}) \\ &= (r_n^{(1)}, p_{n,0}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ce qui prouve $\mathcal{H}_9(1)$.

- Supposons que $\mathcal{H}_9(k-1)$ soit vraie. Nous avons

$$\begin{cases} (r_n^{(k-1)}, p_{n,i}) = 0 & i = 0, \dots, k-2 \\ (r_{n,k}, p_{n,i}) = 0 & i = 0, \dots, k-1 \end{cases}$$

donc puisque $r_n^{(k)} = \alpha_n^{(k)} r_n^{(k-1)} + (1 - \alpha_n^{(k)}) r_{n,k}$ nous obtenons

$$(r_n^{(k)}, p_{n,i}) = 0 \quad i = 0, \dots, k-2.$$

Il faut donc encore montrer que $(r_n^{(k)}, p_{n,k-1}) = 0$. D'après le lemme 3.4 nous pouvons dire que

$$\begin{aligned} r_n^{(k-1)} &= \sum_{i=0}^{k-1} a_n^{(i,k-1)} r_{n,i} \\ &= \sum_{i=0}^{k-2} \tilde{a}_n^{(i,k-1)} p_{n,i} + r_{n,k-1} \end{aligned}$$

où les coefficients $\tilde{a}_n^{(i,k-1)}$ sont calculés en fonction des coefficients $a_n^{(i,k-1)}$. En calculant la quantité $(r_n^{(k)}, r_n^{(k-1)} - r_{n,k})$ nous obtenons

$$\begin{aligned} 0 &= (r_n^{(k)}, r_n^{(k-1)} - r_{n,k}) \\ &= (r_n^{(k)}, \sum_{i=0}^{k-1} a_n^{(i,k-1)} r_{n,i} - r_{n,k}) \\ &= (r_n^{(k)}, \sum_{i=0}^{k-2} \tilde{a}_n^{(i,k-1)} p_{n,i} + r_{n,k-1} - r_{n,k}) \\ &= \sum_{i=0}^{k-2} [\tilde{a}_n^{(i,k-1)} (r_n^{(k)}, p_{n,i})] + (r_n^{(k)}, p_{n,k-1}) \\ &= (r_n^{(k)}, p_{n,k-1}). \end{aligned}$$

Nous avons donc montré que

$$(r_n^{(k)}, p_{n,i}) = 0 \quad i = 0, \dots, k-1,$$

la propriété $\mathcal{H}_9(k)$ est donc vérifiée

ce qui termine la démonstration. ■

Dans ce cas nous pouvons montrer également :

Propriété 3.8

Soient $k + 1$ suites de vecteurs résidus, notées $(r_{n,i})$ pour $i = 0, \dots, k$, déterminées par $k + 1$ méthodes arbitraires. Soit $r_n^{(k)}$ le vecteur calculé par la procédure hybride en cascade à partir des $k + 1$ suites $(r_{n,i})$. Soit $p_{n,i} = r_{n,i} - r_{n,i+1}$. Si pour $i = 0, \dots, k - 1$, nous avons $(r_{n,k}, p_{n,i}) = 0$ alors

$$r_n^{(k)} = r_{n,k} \quad \mathcal{H}_{10}(k).$$

Preuve :

La démonstration de cette propriété se fait par récurrence.

- Pour $k = 0$ nous avons par construction $r_n^{(0)} = r_{n,0}$ ce qui prouve $\mathcal{H}_{10}(0)$.
- Supposons que $\mathcal{H}_{10}(k)$ soit vraie c'est-à-dire

$$r_n^{(k)} = r_{n,k}.$$

Calculons $r_n^{(k+1)}$,

$$\begin{aligned} r_n^{(k+1)} &= \alpha_n^{(k)} r_n^{(k)} + (1 - \alpha_n^{(k)}) r_{n,k+1} \\ &= \alpha_n^{(k)} r_{n,k} + (1 - \alpha_n^{(k)}) r_{n,k+1} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha_n^{(k)} &= -\frac{(r_n^{(k)} - r_{n,k+1}, r_{n,k+1})}{(r_n^{(k)} - r_{n,k+1}, r_n^{(k)} - r_{n,k+1})} \\ &= -\frac{(r_{n,k} - r_{n,k+1}, r_{n,k+1})}{(r_{n,k} - r_{n,k+1}, r_{n,k} - r_{n,k+1})} = 0. \end{aligned}$$

d'où

$$r_n^{(k+1)} = r_{n,k+1}$$

la propriété $\mathcal{H}_{10}(k + 1)$ est donc vérifiée

ce qui termine la démonstration. ■

Nous pouvons donc conclure par la remarque suivante

Remarque 3.9 :

Soit $\hat{r}_n^{(k)}$ le vecteur calculé par la procédure hybride multiple de rang $k + 1$ à partir de $k + 1$ suites données $(r_{n,i})$ ($i = 0, \dots, k$) et $r_n^{(k)}$ le vecteur calculé par la procédure hybride en cascade à partir des mêmes suites $(r_{n,i})$ ($i = 0, \dots, k$). Si pour $i = 0, \dots, k - 1$ nous avons $(r_{n,k}, p_{n,i}) = 0$ alors

$$r_n^{(k)} = \hat{r}_n^{(k)} = r_{n,k}.$$

Chapitre 4

Calcul récursif du vecteur résidu

Dans ce chapitre, nous allons étudier les possibilités de calcul récursif du vecteur $r_n^{(k)}$ obtenu par la procédure hybride généralisée définie dans le chapitre 3. Le vecteur $r_n^{(k)}$ peut être exprimé comme un rapport de deux déterminants d'où l'intérêt de trouver un algorithme récursif qui calcule ce vecteur pour des indices n et k quelconques. Tout d'abord, en [4.1](#) nous allons rappeler l'identité de Sylvester et l'identité de Schweins pour des déterminants vectoriels ainsi que le H-algorithme et le RPA algorithme qui nous permettent de calculer d'une façon récursive certains rapports de deux déterminants.

Ce rappel nous servira en [4.2](#) pour obtenir un algorithme calculant le vecteur $r_n^{(k)}$. Nous proposons quatre algorithmes différents qui seront notés \mathcal{A}_1 , \mathcal{A}_2 , \mathcal{A}_3 , \mathcal{A}_4 . L'algorithme \mathcal{A}_1 utilise l'identité de Sylvester, l'algorithme \mathcal{A}_2 utilise l'identité de Schweins, l'algorithme \mathcal{A}_3 utilise le H-algorithme et l'algorithme \mathcal{A}_4 utilise le RPA algorithme.

Nous allons étudier en particulier l'algorithme \mathcal{A}_1 et l'algorithme \mathcal{A}_2 car ces algorithmes n'utilisent pas d'autres algorithmes déjà connus. L'algorithme \mathcal{A}_3 et l'algorithme \mathcal{A}_4 peuvent être considéré comme des cas particuliers de certains algorithmes bien connus (le H-algorithme, le RPA algorithme); c'est pour cette raison que nous n'allons pas les étudier d'une façon profonde. Nous allons clore ce chapitre en comparant le coût des algorithmes \mathcal{A}_1 , \mathcal{A}_2 , \mathcal{A}_3 , \mathcal{A}_4 en fonction du nombre d'opérations effectuées pour le calcul du vecteur $r_n^{(k)}$.

4.1 Rappel

Dans cette partie, nous allons rappeler les identités de déterminants définies dans un espace vectoriel, ainsi que des algorithmes récursifs qui calculent le rapport de deux déterminants, c'est-à-dire nous allons rappeler l'identité de Sylvester [8], l'identité de Schweins [8], le H-algorithme [7] et le RPA algorithme [6],[8]. Pour d'autres algorithmes voir [10], [19],[25], [5].

4.1.1 Identité de Sylvester

Etant donnés des vecteurs $x_i \in \mathcal{R}^m$, et des coefficients $m_{j,i} \in \mathcal{R}$ où $i \in \{0, \dots, k\}$ et $j \in \{0, \dots, k-1\}$, nous allons considérer la matrice M de la forme

$$M = \begin{bmatrix} x_0 & \cdots & x_k \\ m_{0,0} & \cdots & m_{0,k} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{k-1,0} & \cdots & m_{k-1,k} \end{bmatrix}.$$

C'est une matrice carrée de dimension $(k+1) \times (k+1)$ dont les éléments de la première ligne sont des vecteurs. Le déterminant de la matrice M peut être calculé en faisant un développement par rapport à la première ligne. Nous allons noter M_i^j la sous-matrice de M obtenue en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne et $M_{i,t}^{j,s}$ la sous-matrice obtenue en supprimant la $i^{\text{ème}}$ et $t^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ et $s^{\text{ème}}$ colonne. Comme exemple, nous avons

$$M_1^1 = \begin{bmatrix} m_{0,1} & \cdots & m_{0,k} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{k-1,1} & \cdots & m_{k-1,k} \end{bmatrix}$$

$$M_1^{k+1} = \begin{bmatrix} m_{0,0} & \cdots & m_{0,k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{k-1,0} & \cdots & m_{k-1,k-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 M_{k+1}^1 &= \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_k \\ m_{0,1} & \cdots & m_{0,k} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{k-2,1} & \cdots & m_{k-2,k} \end{bmatrix} \\
 M_{k+1}^{k+1} &= \begin{bmatrix} x_0 & \cdots & x_{k-1} \\ m_{0,0} & \cdots & m_{0,k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{k-2,0} & \cdots & m_{k-2,k-1} \end{bmatrix} \\
 M_{1,k+1}^{1,k+1} &= \begin{bmatrix} m_{0,1} & \cdots & m_{0,k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{k-2,1} & \cdots & m_{k-2,k-1} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

En utilisant ces notations, l'identité de Sylvester nous donne :

$$\det(M) \cdot \det(M_{1,k+1}^{1,k+1}) = \det(M_1^1) \cdot \det(M_{k+1}^{k+1}) - \det(M_{k+1}^1) \cdot \det(M_1^{k+1}).$$

4.1.2 Identité de Schweins

Etant donnés des vecteurs $x_i \in \mathcal{R}^m$ et des coefficients $m_{j,i} \in \mathcal{R}$ où $i, j \in \{0, \dots, k\}$, nous allons considérer la matrice généralisée M de la forme

$$M = \begin{bmatrix} x_0 & \cdots & x_k \\ m_{0,0} & \cdots & m_{0,k} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{k,0} & \cdots & m_{k,k} \end{bmatrix}.$$

C'est une matrice rectangulaire de dimension $(k+2) \times (k+1)$ dont les éléments de la première ligne sont des vecteurs. Nous allons noter M_i la sous-matrice de M obtenue en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et $M_{i,j}^t$ la sous-matrice obtenue en supprimant les $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ lignes et la $t^{\text{ème}}$ colonne. Le déterminant de la matrice M_i et de la matrice $M_{i,j}^t$ peut être calculé en faisant un développement par rapport à la première ligne. En utilisant ces notations l'identité de Schweins nous donne :

$$\frac{\det(M_i)}{\det(M_1)} = \frac{\det(M_{i,s}^t)}{\det(M_{1,s}^t)} = \frac{\det(M_s)}{\det(M_1)} \cdot \frac{\det(M_{1,i}^t)}{\det(M_{1,s}^t)}$$

4.1.3 H-algorithme

Soient des vecteurs $x_{n+i} \in \mathcal{R}^m$ et des coefficients $m_{j,n+i} \in \mathcal{R}$ où $i \in \{0, \dots, k\}$ et $j \in \{1, \dots, k\}$. Nous allons noter $H_n^{(k)}$ le rapport de deux déterminants défini par

$$H_n^{(k)} = \frac{\begin{vmatrix} x_n & \cdots & x_{n+k} \\ m_{1,n} & \cdots & m_{1,n+k} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{k,n} & \cdots & m_{k,n+k} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ m_{1,n} & \cdots & m_{1,n+k} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{k,n} & \cdots & m_{k,n+k} \end{vmatrix}}$$

Pour calculer le vecteur $H_n^{(k)}$, nous pouvons appliquer le H-algorithme défini par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} H_n^{(0)} &= x_n & n &= 0, 1, \dots \\ g_{0,i}^{(n)} &= m_{i,n} & i &= 1, 2, \dots; n = 0, 1, \dots \\ H_n^{(k)} &= H_n^{(k-1)} - \frac{g_{k-1,k}^{(n)}}{g_{k-1,k}^{(n+1)} - g_{k-1,k}^{(n)}} \cdot (H_{n+1}^{(k-1)} - H_n^{(k-1)}) & k &= 1, 2, \dots; n = 0, 1, \dots \\ g_{k,i}^{(n)} &= g_{k-1,i}^{(n)} - \frac{g_{k-1,k}^{(n)}}{g_{k-1,k}^{(n+1)} - g_{k-1,k}^{(n)}} \cdot (g_{k-1,i}^{(n+1)} - g_{k-1,i}^{(n)}) & k &= 1, 2, \dots; n = 0, 1, \dots; i > k. \end{aligned}$$

4.1.4 RPA algorithm

Soient les vecteurs $x_n \in \mathcal{R}^m$, $p_{n+i} \in \mathcal{R}^m$ et $w_{n+i} \in \mathcal{R}^m$, où n est un entier fixé et $i \in \{0, \dots, k-1\}$ avec k un entier quelconque. Nous allons noter $T_n^{(k)}$ le rapport de deux déterminants donné par :

$$T_n^{(k)} = \frac{\begin{vmatrix} x_n & p_n & \cdots & p_{n+k-1} \\ (x_n, w_n) & (p_n, w_n) & \cdots & (p_{n+k-1}, w_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x_n, w_{n+k-1}) & (p_n, w_{n+k-1}) & \cdots & (p_{n+k-1}, w_{n+k-1}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (p_n, w_n) & \cdots & (p_{n+k-1}, w_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (p_n, w_{n+k-1}) & \cdots & (p_{n+k-1}, w_{n+k-1}) \end{vmatrix}}.$$

Afin de calculer $T_n^{(k)}$ pour un indice n fixé, nous pouvons appliquer le RPA algorithme défini par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} T_n^{(0)} &= x_n \\ g_{0,i} &= p_{n+i-1} & i = 1, 2, \dots \\ T_n^{(k)} &= T_n^{(k-1)} - \frac{(w_{n+k-1}, T_n^{(k-1)})}{(w_{n+k-1}, g_{k-1,k})} \cdot g_{k-1,k} & k = 1, 2, \dots \\ g_{k,i} &= g_{k-1,i} - \frac{(w_{n+k-1}, g_{k-1,i})}{(w_{n+k-1}, g_{k-1,k})} \cdot g_{k-1,k} & k = 1, 2, \dots; i > k. \end{aligned}$$

4.2 Algorithmes du calcul récursif du vecteur résidu

Soit $r_n^{(k)}$ le vecteur calculé par la procédure hybride généralisée définie dans le chapitre 3. Nous avons démontré que le vecteur $r_n^{(k)}$ peut être écrit sous la forme d'un rapport de deux déterminants notés par $N_n^{(k)}$ et $D_n^{(k)}$, où $N_n^{(k)}$ est un vecteur. Nous avons donc

$$r_n^{(k)} = \frac{N_n^{(k)}}{D_n^{(k)}}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} r_n & \cdots & r_{n+k} \\ (p_n, r_n) & \cdots & (p_n, r_{n+k}) \\ \vdots & & \vdots \\ (p_{n+k-1}, r_n) & \cdots & (p_{n+k-1}, r_{n+k}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ (p_n, r_n) & \cdots & (p_n, r_{n+k}) \\ \vdots & & \vdots \\ (p_{n+k-1}, r_n) & \cdots & (p_{n+k-1}, r_{n+k}) \end{vmatrix}}.$$

Nous rappelons que les vecteurs p_i sont définis par $p_i = r_i - r_{i+1}$.

D'une façon identique, nous pouvons écrire les vecteurs $r_{n+1}^{(k)}$ et $r_n^{(k+1)}$ comme un rapport de deux déterminants de la forme

$$r_{n+1}^{(k)} = \frac{N_{n+1}^{(k)}}{D_{n+1}^{(k)}} = \frac{\begin{vmatrix} r_{n+1} & \cdots & r_{n+k+1} \\ (p_{n+1}, r_{n+1}) & \cdots & (p_{n+1}, r_{n+k+1}) \\ \vdots & & \vdots \\ (p_{n+k}, r_{n+1}) & \cdots & (p_{n+k}, r_{n+k+1}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ (p_{n+1}, r_{n+1}) & \cdots & (p_{n+1}, r_{n+k+1}) \\ \vdots & & \vdots \\ (p_{n+k}, r_{n+1}) & \cdots & (p_{n+k}, r_{n+k+1}) \end{vmatrix}}$$

$$r_n^{(k+1)} = \frac{N_n^{(k+1)}}{D_n^{(k+1)}} = \frac{\begin{vmatrix} r_n & \cdots & r_{n+k+1} \\ (p_n, r_n) & \cdots & (p_n, r_{n+k+1}) \\ \vdots & & \vdots \\ (p_{n+k}, r_n) & \cdots & (p_{n+k}, r_{n+k+1}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ (p_n, r_n) & \cdots & (p_n, r_{n+k+1}) \\ \vdots & & \vdots \\ (p_{n+k}, r_n) & \cdots & (p_{n+k}, r_{n+k+1}) \end{vmatrix}}.$$

Dans la partie qui suit, afin d'obtenir un algorithme récursif calculant le vecteur $r_n^{(k)}$, nous allons étudier

1. l'application de l'identité de Sylvester

2. l'application de l'identité de Schweins
3. l'application du H-algorithme
4. l'application du RPA algorithme.

4.2.1 Application de l'identité de Sylvester

Dans cette partie, nous allons introduire un nouveau vecteur qui sera noté $y_{n+1,n}^{(k)}$. Nous obtenons ce vecteur à partir du vecteur $r_n^{(k+1)}$ en supprimant la première colonne et la dernière ligne dans le numérateur et dans le dénominateur qui définissent le vecteur $r_n^{(k)}$. Nous allons noter par $N_{n+1,n}^{(k)}$ le numérateur du vecteur $y_{n+1,n}^{(k)}$ et par $D_{n+1,n}^{(k)}$ le dénominateur du vecteur $y_{n+1,n}^{(k)}$. Nous avons alors

$$\begin{aligned}
 y_{n+1,n}^{(k)} &= \frac{N_{n+1,n}^{(k)}}{D_{n+1,n}^{(k)}} \\
 &= \frac{\begin{vmatrix} r_{n+1} & \cdots & r_{n+k+1} \\ (p_n, r_{n+1}) & \cdots & (p_n, r_{n+k+1}) \\ \vdots & & \vdots \\ (p_{n+k-1}, r_{n+1}) & \cdots & (p_{n+k-1}, r_{n+k+1}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ (p_n, r_{n+1}) & \cdots & (p_n, r_{n+k+1}) \\ \vdots & & \vdots \\ (p_{n+k-1}, r_{n+1}) & \cdots & (p_{n+k-1}, r_{n+k+1}) \end{vmatrix}}.
 \end{aligned}$$

Nous pouvons alors remarquer facilement que les égalités suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned}
 (N_n^{(k)}, p_{n+k}) &= \begin{vmatrix} (p_{n+k}, r_n) & \cdots & (p_{n+k}, r_{n+k+1}) \\ (p_n, r_n) & \cdots & (p_n, r_{n+k+1}) \\ \vdots & & \vdots \\ (p_{n+k-1}, r_n) & \cdots & (p_{n+k-1}, r_{n+k+1}) \end{vmatrix} \\
 &= (-1)^k \begin{vmatrix} (p_n, r_n) & \cdots & (p_n, r_{n+k+1}) \\ \vdots & & \vdots \\ (p_{n+k}, r_n) & \cdots & (p_{n+k}, r_{n+k+1}) \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(N_{n+1,n}^{(k)}, p_{n+k}) &= \begin{vmatrix} (p_{n+k}, r_{n+1}) & \cdots & (p_{n+k}, r_{n+k+1}) \\ (p_n, r_{n+1}) & \cdots & (p_n, r_{n+k+1}) \\ \vdots & & \vdots \\ (p_{n+k-1}, r_{n+1}) & \cdots & (p_{n+k-1}, r_{n+k+1}) \end{vmatrix} \\
&= (-1)^k \begin{vmatrix} (p_n, r_{n+1}) & \cdots & (p_n, r_{n+k+1}) \\ \vdots & & \vdots \\ (p_{n+k}, r_{n+1}) & \cdots & (p_{n+k}, r_{n+k+1}) \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

En utilisant ces deux égalités et en appliquant l'identité de Sylvester aux déterminants $N_n^{(k+1)}$ et $D_n^{(k+1)}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
r_n^{(k+1)} &= \frac{N_n^{(k+1)}}{D_n^{(k+1)}} \\
&= \frac{\begin{vmatrix} r_n & \cdots & r_{n+k+1} \\ (p_n, r_n) & \cdots & (p_n, r_{n+k+1}) \\ \vdots & & \vdots \\ (p_{n+k}, r_n) & \cdots & (p_{n+k}, r_{n+k+1}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ (p_n, r_n) & \cdots & (p_n, r_{n+k+1}) \\ \vdots & & \vdots \\ (p_{n+k}, r_n) & \cdots & (p_{n+k}, r_{n+k+1}) \end{vmatrix}} \\
&= \frac{N_n^{(k)} \begin{vmatrix} (p_n, r_{n+1}) & \cdots & (p_n, r_{n+k+1}) \\ \vdots & & \vdots \\ (p_{n+k}, r_{n+1}) & \cdots & (p_{n+k}, r_{n+k+1}) \end{vmatrix} - N_{n+1,n}^{(k)} \begin{vmatrix} (p_n, r_n) & \cdots & (p_n, r_{n+k}) \\ \vdots & & \vdots \\ (p_{n+k}, r_n) & \cdots & (p_{n+k}, r_{n+k}) \end{vmatrix}}{D_n^{(k)} \begin{vmatrix} (p_n, r_{n+1}) & \cdots & (p_n, r_{n+k+1}) \\ \vdots & & \vdots \\ (p_{n+k}, r_{n+1}) & \cdots & (p_{n+k}, r_{n+k+1}) \end{vmatrix} - D_{n+1,n}^{(k)} \begin{vmatrix} (p_n, r_n) & \cdots & (p_n, r_{n+k}) \\ \vdots & & \vdots \\ (p_{n+k}, r_n) & \cdots & (p_{n+k}, r_{n+k}) \end{vmatrix}} \\
&= \frac{N_n^{(k)}(N_{n+1,n}^{(k)}, p_{n+k}) - N_{n+1,n}^{(k)}(N_n^{(k)}, p_{n+k})}{D_n^{(k)}(N_{n+1,n}^{(k)}, p_{n+k}) - D_{n+1,n}^{(k)}(N_n^{(k)}, p_{n+k})} \\
&= \frac{r_n^{(k)}(y_{n+1,n}^{(k)}, p_{n+k}) - y_{n+1,n}^{(k)}(r_n^{(k)}, p_{n+k})}{(y_{n+1,n}^{(k)} - r_n^{(k)}, p_{n+k})}.
\end{aligned}$$

Nous obtenons donc l'algorithme suivant qui calcule récursivement le vecteur $r_n^{(k)}$ pour un indice n fixé :

$$\left. \begin{aligned} r_n^{(0)} &= r_n \\ r_n^{(k+1)} &= r_n^{(k)} - \frac{(r_n^{(k)}, p_{n+k})}{(y_{n+1,n}^{(k)} - r_n^{(k)}, p_{n+k})} \cdot (y_{n+1,n}^{(k)} - r_n^{(k)}) \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \right\} \mathcal{A}_1$$

Dans le cas général les vecteurs $y_{n+1,n}^{(k)}$ peuvent être aussi calculés par un algorithme récursif suivant, obtenu en appliquant l'identité de Sylvester aux numérateur et dénominateur du vecteur $y_{n+i,n}^{(k)}$:

$$\left. \begin{aligned} y_{n+i,n}^{(0)} &= r_{n+i} & i = 1, 2, \dots \\ y_{n+i,n}^{(k)} &= y_{n+i,n}^{(k-1)} - \frac{(y_{n+i,n}^{(k-1)}, p_{n+k-1})}{(y_{n+i+1,n}^{(k-1)} - y_{n+i,n}^{(k-1)}, p_{n+k-1})} \cdot (y_{n+i+1,n}^{(k-1)} - y_{n+i,n}^{(k-1)}) & i, k = 1, 2, \dots \end{aligned} \right\}$$

Néanmoins, sous certaines conditions, le vecteur $y_{n+1,n}^{(k)}$ coïncide avec le vecteur r_{n+k+1} . En effet, nous avons la propriété suivante :

Propriété 4.1

Soit (r_n) la suite des vecteurs résidus déterminée par une méthode arbitraire. Soit $y_{n+1,n}^{(k)}$ le vecteur défini précédemment. S'il existe un indice k tel que $(r_{n+k+1}, p_{n+i}) = 0$ pour $i = 0, \dots, k-1$ alors

$$y_{n+1,n}^{(k)} = r_{n+k+1}.$$

Preuve :

Supposons qu'il existe un indice k tel que la condition

$$(r_{n+k+1}, p_{n+i}) = 0$$

soit vérifiée pour $i = 0, \dots, k-1$. Nous avons alors, en utilisant la définition du vecteur $y_{n+1,n}^{(k)}$,

$$y_{n+1,n}^{(k)} = \frac{\begin{vmatrix} r_{n+1} & \cdots & r_{n+k+1} \\ (p_n, r_{n+1}) & \cdots & (p_n, r_{n+k+1}) \\ \vdots & & \vdots \\ (p_{n+k-1}, r_{n+1}) & \cdots & (p_{n+k+1}, r_{n+k+1}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ (p_n, r_{n+1}) & \cdots & (p_n, r_{n+k+1}) \\ \vdots & & \vdots \\ (p_{n+k-1}, r_{n+1}) & \cdots & (p_{n+k+1}, r_{n+k+1}) \end{vmatrix}}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} r_{n+1} & \cdots & r_{n+k} & r_{n+k+1} \\ (p_n, r_{n+1}) & \cdots & (p_n, r_{n+k}) & 0 \\ \vdots & & \vdots & \\ (p_{n+k-1}, r_{n+1}) & \cdots & (p_{n+k+1}, r_{n+k}) & 0 \end{vmatrix} \\
= & \frac{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ (p_n, r_{n+1}) & \cdots & (p_n, r_{n+k}) & 0 \\ \vdots & & \vdots & \\ (p_{n+k-1}, r_{n+1}) & \cdots & (p_{n+k+1}, r_{n+k}) & 0 \end{vmatrix}}{r_{n+k+1}} \\
= & r_{n+k+1}
\end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration. ■

A partir de cette propriété, nous pouvons déduire le théorème suivant :

Théorème 4.1

Soit (r_n) la suite des vecteurs résidus déterminée par une méthode arbitraire. Si pour tout indice k nous avons $(r_{n+k+1}, p_{n+i}) = 0$ pour $i = 0, \dots, k-1$ alors la règle récursive de l'algorithme \mathcal{A}_1 devient

$$r_n^{(k+1)} = r_n^{(k)} - \frac{(r_n^{(k)}, p_{n+k})}{(r_{n+k+1} - r_n^{(k)}, p_{n+k})} \cdot (r_{n+k+1} - r_n^{(k)}) \quad \forall k.$$

Preuve :

D'après la propriété 4.1 (p. 130), nous savons que si pour tout indice k et pour $i = 0, \dots, k-1$

$$(r_{n+k+1}, p_{n+i}) = 0$$

alors

$$y_{n+1,n}^{(k)} = r_{n+k+1}.$$

En remplaçant $y_{n+1,n}^{(k)}$ par r_{n+k+1} dans la règle récursive de l'algorithme \mathcal{A}_1 , nous obtenons alors

$$\begin{aligned}
r_n^{(k+1)} &= r_n^{(k)} - \frac{(r_n^{(k)}, p_{n+k})}{(y_{n+1,n}^{(k)} - r_n^{(k)}, p_{n+k})} (y_{n+1,n}^{(k)} - r_n^{(k)}) \\
&= r_n^{(k)} - \frac{(r_n^{(k)}, p_{n+k})}{(r_{n+k+1} - r_n^{(k)}, p_{n+k})} (r_{n+k+1} - r_n^{(k)})
\end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration. ■

Remarque 4.1 :

Si de plus, nous avons $(r_{n+k+1}, p_{n+k}) = 0$, alors nous obtenons

$$r_n^{(k+1)} = r_{n+k+1}.$$

Nous pouvons donc déduire que si nous avons une méthode de résolution du système (0.1) vérifiant pour tout indice i

$$(r_i, p_j) = 0 \quad j = 0, \dots, i - 1 \quad (4.1)$$

alors il n'y a aucun intérêt à appliquer la procédure hybride généralisée.

Nous donnons comme l'exemple d'une méthode vérifiant condition (4.1), la méthode GCR.

4.2.2 Application de l'identité de Schweins

Considérons une matrice généralisée M de la forme

$$M = \begin{bmatrix} r_n & \cdots & r_{n+k} \\ (r_n, p_n) & \cdots & (r_{n+k}, p_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (r_n, p_{n+k}) & \cdots & (r_{n+k}, p_{n+k}) \end{bmatrix}.$$

C'est une matrice rectangulaire de dimension $(k+2) \times (k+1)$. En appliquant l'identité de Schweins à la matrice M , avec $i = 2$, $s = k+2$, $t = k+1$, nous obtenons

$$\frac{\det(M_2)}{\det(M_1)} - \frac{\det(M_{2,k+2}^{k+1})}{\det(M_{1,k+2}^{k+1})} = - \frac{\det(M_{k+2})}{\det(M_1)} \cdot \frac{\det(M_{1,2}^{k+1})}{\det(M_{1,k+2}^{k+1})}. \quad (4.2)$$

En appliquant une deuxième fois l'identité de Schweins à la matrice M , avec $i = k+2$, $s = 2$, $t = 1$, nous obtenons

$$\frac{\det(M_{k+2})}{\det(M_1)} - \frac{\det(M_{2,k+2}^1)}{\det(M_{1,2}^1)} = - \frac{\det(M_2)}{\det(M_1)} \cdot \frac{\det(M_{1,k+2}^1)}{\det(M_{1,2}^1)}. \quad (4.3)$$

En résolvant le système composé des deux équations (4.2) et (4.3), avec comme inconnues

les rapports $\frac{\det(M_2)}{\det(M_1)}$ et $\frac{\det(M_{k+2})}{\det(M_1)}$, nous obtenons

$$\frac{\det(M_2)}{\det(M_1)} = \frac{\frac{\det(M_{2,k+2}^{k+1})}{\det(M_{1,k+2}^{k+1})} - \frac{\det(M_{1,2}^{k+1})}{\det(M_{1,k+2}^{k+1})} \cdot \frac{\det(M_{2,k+2}^1)}{\det(M_{1,2}^1)}}{1 - \frac{\det(M_{1,k+2}^1)}{\det(M_{1,2}^1)} \cdot \frac{\det(M_{1,2}^{k+1})}{\det(M_{1,k+2}^{k+1})}} \quad (4.4)$$

$$\frac{\det(M_{k+2})}{\det(M_1)} = \frac{\frac{\det(M_{2,k+2}^1)}{\det(M_{1,2}^1)} - \frac{\det(M_{2,k+2}^{k+1})}{\det(M_{1,k+2}^{k+1})} \cdot \frac{\det(M_{1,k+2}^1)}{\det(M_{1,2}^1)}}{1 - \frac{\det(M_{1,k+2}^1)}{\det(M_{1,2}^1)} \cdot \frac{\det(M_{1,2}^{k+1})}{\det(M_{1,k+2}^{k+1})}} \quad (4.5)$$

Pour la suite des calculs, nous allons introduire deux nouveaux vecteurs, notés $F_n^{(k)}$ et $E_n^{(k)}$, qui nous serviront dans le calcul récursif du vecteur $r_n^{(k)}$. Nous définissons ces vecteurs par :

$$\begin{aligned} F_n^{(k)} &= \frac{\det(M_2)}{\det(M_1)} \\ &= \frac{\begin{vmatrix} r_n & \cdots & r_{n+k} \\ (r_n, p_{n+1}) & \cdots & (r_{n+k}, p_{n+1}) \\ \vdots & & \vdots \\ (r_n, p_{n+k}) & \cdots & (r_{n+k}, p_{n+k}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (r_n, p_n) & \cdots & (r_{n+k}, p_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (r_n, p_{n+k}) & \cdots & (r_{n+k}, p_{n+k}) \end{vmatrix}} \\ E_n^{(k)} &= \frac{\det(M_{k+2})}{\det(M_1)} \\ &= \frac{\begin{vmatrix} r_n & \cdots & r_{n+k} \\ (r_n, p_n) & \cdots & (r_{n+k}, p_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (r_n, p_{n+k-1}) & \cdots & (r_{n+k}, p_{n+k-1}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (r_n, p_n) & \cdots & (r_{n+k}, p_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (r_n, p_{n+k}) & \cdots & (r_{n+k}, p_{n+k}) \end{vmatrix}} \\ &= \frac{N_n^{(k)}}{(-1)^k (N_n^{(k)}, p_{n+k})}. \end{aligned}$$

En utilisant ces deux définitions, nous pouvons constater que

$$\begin{aligned}
 F_n^{(k-1)} &= \frac{\begin{vmatrix} r_n & \cdots & r_{n+k-1} \\ (r_n, p_{n+1}) & \cdots & (r_{n+k-1}, p_{n+1}) \\ \vdots & & \vdots \\ (r_n, p_{n+k-1}) & \cdots & (r_{n+k-1}, p_{n+k-1}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (r_n, p_n) & \cdots & (r_{n+k-1}, p_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (r_n, p_{n+k-1}) & \cdots & (r_{n+k-1}, p_{n+k-1}) \end{vmatrix}} \\
 &= \frac{\det(M_{2,k+2}^{k+1})}{\det(M_{1,k+2}^{k+1})}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{n+1}^{(k-1)} &= \frac{\begin{vmatrix} r_{n+1} & \cdots & r_{n+k} \\ (r_{n+1}, p_{n+1}) & \cdots & (r_{n+k}, p_{n+1}) \\ \vdots & & \vdots \\ (r_n, p_{n+k-1}) & \cdots & (r_{n+k}, p_{n+k-1}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (r_{n+1}, p_{n+1}) & \cdots & (r_{n+k}, p_{n+1}) \\ \vdots & & \vdots \\ (r_{n+1}, p_{n+k}) & \cdots & (r_{n+k}, p_{n+k}) \end{vmatrix}} \\
 &= \frac{\det(M_{2,k+2}^1)}{\det(M_{1,2}^1)} \\
 &= \frac{N_{n+1}^{(k)}}{(-1)^{k-1}(N_{n+1}^{(k)}, p_{n+k})}
 \end{aligned}$$

ce qui nous permet d'obtenir les deux relations suivantes :

$$(p_{n+k}, F_n^{(k-1)}) = (-1)^{k-1} \frac{\det(M_{1,2}^{k+1})}{\det(M_{1,k+2}^{k+1})}$$

$$(p_n, E_{n+1}^{(k-1)}) = \frac{\det(M_{1,k+2}^1)}{\det(M_{1,2}^1)}$$

En remplaçant les rapports de déterminants figurant dans les relations (4.4) et (4.5) par les vecteurs correspondants, nous obtenons la règle récursive suivante qui calcule les vecteurs $F_n^{(k)}$ et $E_n^{(k)}$

$$F_n^{(k)} = \frac{F_n^{(k-1)} - (-1)^{k-1}(p_{n+k}, F_n^{(k-1)}) \cdot E_{n+1}^{(k-1)}}{1 - (-1)^{k-1}(p_{n+k}, F_n^{(k-1)}) \cdot (p_n, E_{n+1}^{(k-1)})}$$

$$E_n^{(k)} = \frac{E_{n+1}^{(k-1)} - (p_n, E_{n+1}^{(k-1)}) \cdot F_n^{(k-1)}}{1 - (-1)^{k-1} (p_{n+k}, F_n^{(k-1)}) \cdot (p_n, E_{n+1}^{(k-1)})}.$$

D'une façon similaire, si nous notons par

$$K_n^{(k)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ (r_n, p_{n+1}) & \cdots & (r_{n+k}, p_{n+1}) \\ \vdots & & \vdots \\ (r_n, p_{n+k}) & \cdots & (r_{n+k}, p_{n+k}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (r_n, p_n) & \cdots & (r_{n+k}, p_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (r_n, p_{n+k}) & \cdots & (r_{n+k}, p_{n+k}) \end{vmatrix}}$$

$$L_n^{(k)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ (r_n, p_n) & \cdots & (r_{n+k}, p_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (r_n, p_{n+k-1}) & \cdots & (r_{n+k}, p_{n+k-1}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (r_n, p_n) & \cdots & (r_{n+k}, p_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (r_n, p_{n+k}) & \cdots & (r_{n+k}, p_{n+k}) \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{D_n^{(k)}}{(-1)^k (N_n^{(k)}, p_{n+k})}$$

et nous utilisons les mêmes techniques que précédemment, nous obtiendrons une règle récursive pour calculer les scalaires $K_n^{(k)}$ et $L_n^{(k)}$

$$K_n^{(k)} = \frac{K_{n+1}^{(k-1)} - (-1)^{k-1} (p_{n+k}, F_n^{(k-1)}) \cdot L_{n+1}^{(k-1)}}{1 - (-1)^{k-1} (p_{n+k}, F_n^{(k-1)}) \cdot (p_n, E_{n+1}^{(k-1)})}$$

$$L_n^{(k)} = \frac{L_{n+1}^{(k-1)} - (p_n, E_{n+1}^{(k-1)}) \cdot K_n^{(k-1)}}{1 - (-1)^{k-1} (p_{n+k}, F_n^{(k-1)}) \cdot (p_n, E_{n+1}^{(k-1)})}.$$

Le vecteur $E_n^{(k)}$ et le scalaire $L_n^{(k)}$ sont définis de telle façon que

$$E_n^{(k)} = \frac{N_n^{(k)}}{(-1)^k (N_n^{(k)}, p_{n+k})}$$

$$L_n^{(k)} = \frac{D_n^{(k)}}{(-1)^k (N_n^{(k)}, p_{n+k})}$$

et donc le vecteur $r_n^{(k)}$ peut être exprimé comme un rapport des déterminants $E_n^{(k)}$ et $L_n^{(k)}$. Nous pouvons donc proposer un algorithme récursif qui calcule le vecteur $r_n^{(k)} = \frac{E_n^{(k)}}{L_n^{(k)}}$ en calculant séparément le vecteur $E_n^{(k)}$ et le scalaire $L_n^{(k)}$:

$$\left. \begin{aligned}
 E_n^{(0)} &= \frac{r_n}{(r_n, p_n)} & n = 0, 1, \dots \\
 L_n^{(0)} &= \frac{1}{(r_n, p_n)} & n = 0, 1, \dots \\
 F_n^{(0)} &= \frac{r_n}{(r_n, p_n)} & n = 0, 1, \dots \\
 K_n^{(0)} &= \frac{1}{(r_n, p_n)} & n = 0, 1, \dots \\
 E_n^{(k)} &= \frac{E_{n+1}^{(k-1)} - (p_n, E_{n+1}^{(k-1)}) \cdot F_n^{(k-1)}}{1 - (-1)^{k-1} (p_{n+k}, F_n^{(k-1)}) \cdot (p_n, E_{n+1}^{(k-1)})} & n = 0, 1, \dots ; k = 1, 2, \dots \\
 L_n^{(k)} &= \frac{L_{n+1}^{(k-1)} - (p_n, E_{n+1}^{(k-1)}) \cdot K_n^{(k-1)}}{1 - (-1)^{k-1} (p_{n+k}, F_n^{(k-1)}) \cdot (p_n, E_{n+1}^{(k-1)})} & n = 0, 1, \dots ; k = 1, 2, \dots \\
 F_n^{(k)} &= \frac{F_n^{(k-1)} - (-1)^{k-1} (p_{n+k}, F_n^{(k-1)}) \cdot E_{n+1}^{(k-1)}}{1 - (-1)^{k-1} (p_{n+k}, F_n^{(k-1)}) \cdot (p_n, E_{n+1}^{(k-1)})} & n = 0, 1, \dots ; k = 1, 2, \dots \\
 K_n^{(k)} &= \frac{K_n^{(k-1)} - (-1)^{k-1} (p_{n+k}, F_n^{(k-1)}) \cdot L_{n+1}^{(k-1)}}{1 - (-1)^{k-1} (p_{n+k}, F_n^{(k-1)}) \cdot (p_n, E_{n+1}^{(k-1)})} & n = 0, 1, \dots ; k = 1, 2, \dots \\
 r_n^{(k)} &= \frac{E_n^{(k)}}{L_n^{(k)}} & n = 0, 1, \dots ; k = 1, 2, \dots
 \end{aligned} \right\} \mathcal{A}_2$$

Remarque 4.2 :

L'algorithme \mathcal{A}_2 nous permet de calculer $r_n^{(k)}$ pour des indices n et k quelconques.

Pour illustrer cette remarque, nous allons donner un exemple de calcul du vecteur $r_n^{(k)}$. Nous allons montrer étape par étape comment, en calculant le vecteur $r_n^{(k)}$, nous calculons aussi les vecteurs $r_{n+j}^{(i)}$ pour $i = 0, \dots, k-1$ et $j = 1, \dots, k-i$.

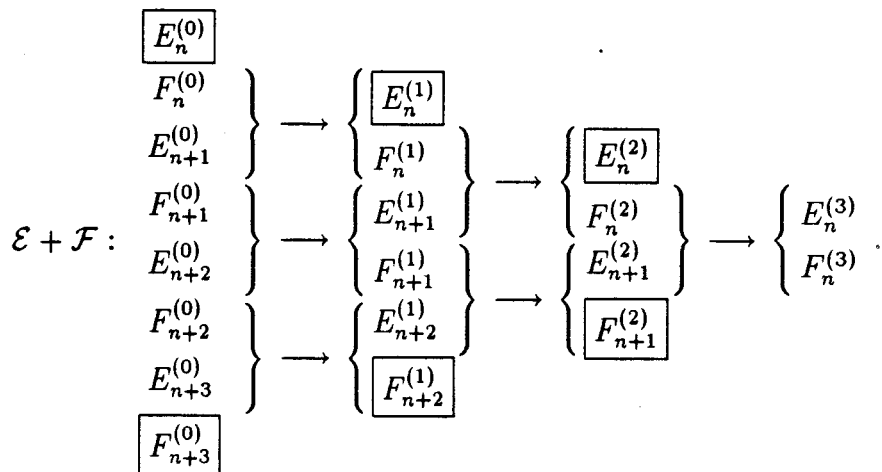
Exemple

Soit (r_n) la suite des vecteurs résidus déterminée par une méthode arbitraire et soit $r_n^{(3)}$ le vecteur défini dans le chapitre 3 par

$$r_n^{(3)} = \frac{\begin{vmatrix} r_n & r_{n+1} & r_{n+2} & r_{n+3} \\ (r_n, p_n) & (r_{n+1}, p_n) & (r_{n+2}, p_n) & (r_{n+3}, p_n) \\ (r_n, p_{n+1}) & (r_{n+1}, p_{n+1}) & (r_{n+2}, p_{n+1}) & (r_{n+3}, p_{n+1}) \\ (r_n, p_{n+2}) & (r_{n+1}, p_{n+2}) & (r_{n+2}, p_{n+2}) & (r_{n+3}, p_{n+2}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ (r_n, p_n) & (r_{n+1}, p_n) & (r_{n+2}, p_n) & (r_{n+3}, p_n) \\ (r_n, p_{n+1}) & (r_{n+1}, p_{n+1}) & (r_{n+2}, p_{n+1}) & (r_{n+3}, p_{n+1}) \\ (r_n, p_{n+2}) & (r_{n+1}, p_{n+2}) & (r_{n+2}, p_{n+2}) & (r_{n+3}, p_{n+2}) \end{vmatrix}}$$

Afin de calculer le vecteur $r_n^{(3)}$, nous allons nous servir de l'algorithme \mathcal{A}_2 . Nous allons noter par \mathcal{E} et \mathcal{F} , les tableaux contenant respectivement les vecteurs $E_n^{(k)}$ et les vecteurs $F_n^{(k)}$, et par \mathcal{L} et \mathcal{K} les tableaux contenant respectivement les scalaires $L_n^{(k)}$ et les scalaires $K_n^{(k)}$. Sur les dessins suivants nous allons montrer comment nous pouvons remplir les tableaux \mathcal{E} et \mathcal{F} . Les tableaux \mathcal{L} et \mathcal{K} seront remplis de la même façon.

Dans ce qui suit, $\left. \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{matrix} c \\ d \end{matrix} \right.$ exprime que les éléments c et d sont calculé uniquement à partir des éléments a , b et des données initiales.



Nous avons encadré les éléments qui ne nous ont pas servi dans la détermination des vecteurs $E_n^{(3)}$ et $F_n^{(3)}$.

Nous pouvons constater que les quantités qui nous ont servi de déterminer le vecteur $r_n^{(k)}$ vont nous permettre aussi de déterminer les vecteurs $r_{n+j}^{(i)}$ pour $j = 1, \dots, k$ et

$i = 0, \dots, k - j$. Ces quantités nous permettront aussi de déterminer le vecteur $r_{n+1}^{(k)}$, à condition de connaître le vecteur r_{n+k+1} .

4.2.3 Application du H-algorithme

Nous pouvons remarquer que le H-algorithme ne peut pas être appliqué directement pour déterminer le vecteur $r_n^{(k+1)}$ en fonction de vecteurs $r_n^{(k)}$ et $r_{n+1}^{(k)}$. En effet, le déterminant $D_{n+1}^{(k)}$ ne peut pas être obtenu à partir du déterminant $D_n^{(k+1)}$, en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne. Pour cette raison, afin de déterminer le vecteur $r_n^{(k)}$ pour des indices quelconques, nous serons obligé d'appliquer le H-algorithme à chaque fois que nous passons de l'indice n à l'indice $n + 1$ et nous ne pourrons pas nous servir des résultats obtenus précédemment.

Pour un indice n fixé, nous pouvons envisager d'utiliser le H-algorithme de la façon suivante

$$\left. \begin{aligned} H_{n+i}^{(0)} &= r_{n+i} & i = 0, 1, \dots \\ H_{n+i}^{(k+1)} &= H_{n+i}^{(k)} - \frac{(H_{n+i}^{(k)}, p_{n+k})}{(H_{n+i+1}^{(k)} - H_{n+i}^{(k)}, p_{n+k})} \cdot (H_{n+i+1}^{(k)} - H_{n+i}^{(k)}) & i, k = 0, 1, \dots \end{aligned} \right\} \mathcal{A}_3$$

et nous avons :

$$\begin{aligned} r_n^{(k)} &= H_n^{(k)} & \forall k \\ r_i^{(k)} &\neq H_i^{(k)} & \forall k > 0; i \neq n. \end{aligned}$$

Dans cet algorithme, nous n'avons plus de règle auxiliaire car nous avons :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_{k-1,k}^{(n)} &= \frac{\begin{vmatrix} (r_n, p_{n+k}) & \cdots & (r_{n+k}, p_{n+k}) \\ (p_n, r_n) & \cdots & (p_n, r_{n+k}) \\ \vdots & & \vdots \\ (p_{n+k-1}, r_n) & \cdots & (p_{n+k-1}, r_{n+k}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ (p_n, r_n) & \cdots & (p_n, r_{n+k}) \\ \vdots & & \vdots \\ (p_{n+k-1}, r_n) & \cdots & (p_{n+k-1}, r_{n+k}) \end{vmatrix}} \\
 &= (H_n^{(k)}, p_{n+k})
 \end{aligned}$$

4.2.4 Application du RPA algorithme

Soit

$$r_n^{(k)} = \frac{\begin{vmatrix} r_n & \cdots & r_{n+k} \\ (p_n, r_n) & \cdots & (p_n, r_{n+k}) \\ \vdots & & \vdots \\ (p_{n+k-1}, r_n) & \cdots & (p_{n+k-1}, r_{n+k}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ (p_n, r_n) & \cdots & (p_n, r_{n+k}) \\ \vdots & & \vdots \\ (p_{n+k-1}, r_n) & \cdots & (p_{n+k-1}, r_{n+k}) \end{vmatrix}}$$

où le vecteur p_i est défini par $p_i = r_i - r_{i+1}$. En remplaçant dans les deux déterminants la $(i+1)^{\text{ème}}$ colonne par la $(i+1)^{\text{ème}}$ soustraite de la $i^{\text{ème}}$ colonne pour $i = 1, \dots, k$,

nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 r_n^{(k)} &= \frac{\begin{vmatrix} r_n & \cdots & r_{n+k} \\ (p_n, r_n) & \cdots & (p_n, r_{n+k}) \\ \vdots & & \vdots \\ (p_{n+k-1}, r_n) & \cdots & (p_{n+k-1}, r_{n+k}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ (p_n, r_n) & \cdots & (p_n, r_{n+k}) \\ \vdots & & \vdots \\ (p_{n+k-1}, r_n) & \cdots & (p_{n+k-1}, r_{n+k}) \end{vmatrix}} \\
 &= \frac{(-1)^k \begin{vmatrix} r_n & p_n & \cdots & p_{n+k-1} \\ (p_n, r_n) & (p_n, p_n) & \cdots & (p_n, p_{n+k-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (p_{n+k-1}, r_n) & (p_{n+k-1}, p_n) & \cdots & (p_{n+k-1}, p_{n+k-1}) \end{vmatrix}}{(-1)^k \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ (p_n, r_n) & (p_n, p_n) & \cdots & (p_n, p_{n+k-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (p_{n+k-1}, r_n) & (p_{n+k-1}, p_n) & \cdots & (p_{n+k-1}, p_{n+k-1}) \end{vmatrix}} \\
 &= \frac{\begin{vmatrix} r_n & p_n & \cdots & p_{n+k-1} \\ (p_n, r_n) & (p_n, p_n) & \cdots & (p_n, p_{n+k-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (p_{n+k-1}, r_n) & (p_{n+k-1}, p_n) & \cdots & (p_{n+k-1}, p_{n+k-1}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (p_n, p_n) & \cdots & (p_n, p_{n+k-1}) \\ \vdots & & \vdots \\ (p_{n+k-1}, p_n) & \cdots & (p_{n+k-1}, p_{n+k-1}) \end{vmatrix}}.
 \end{aligned}$$

Nous pouvons donc appliquer le RPA algorithme pour déterminer le vecteur $r_n^{(k)}$ pour un indice n fixé. Nous avons

$$\left. \begin{aligned}
 r_n^{(0)} &= r_n \\
 g_{0,i} &= p_{n+i-1} & i = 1, 2, \dots \\
 r_n^{(k)} &= r_n^{(k-1)} - \frac{(p_{n+k-1}, r_n^{(k-1)})}{(p_{n+k-1}, g_{k-1,k})} \cdot g_{k-1,k} & k = 1, 2, \dots \\
 g_{k,i} &= g_{k-1,i} - \frac{(p_{n+k-1}, g_{k-1,i})}{(p_{n+k-1}, g_{k-1,k})} \cdot g_{k-1,k} & k = 1, 2, \dots; i > k.
 \end{aligned} \right\} \mathcal{A}_4$$

Dans la pratique nous pouvons nous servir de ces algorithmes en choisissant l'algorithme le mieux adapté à nos données et à nos besoins. Nous voulons aussi souligner que les algorithmes \mathcal{A}_1 , \mathcal{A}_3 , \mathcal{A}_4 déterminent le vecteur $r_n^{(k)}$ pour un indice n fixé. L'algorithme \mathcal{A}_2 permet de déterminer le vecteur $r_n^{(k)}$ pour les indices n et k quelconques, mais il exige de sauvegarder dans la mémoire quatre tableaux dont deux ont comme éléments des vecteurs. Nous pourrions comparer les coûts de ces algorithmes dans le tableau 4.1 (où m est la dimension du système (0.1)).

	nombre d'opérations	
	additions	multiplications
algorithme \mathcal{A}_1	$\mathcal{O}(2mk^2)$	$\mathcal{O}(3/2mk^2)$
algorithme \mathcal{A}_2	$\mathcal{O}(3mk^2)$	$\mathcal{O}(3mk^2)$
algorithme \mathcal{A}_3	$\mathcal{O}(2mk^2)$	$\mathcal{O}(mk^2)$
algorithme \mathcal{A}_4	$\mathcal{O}(3/2mk^2)$	$\mathcal{O}(3/2mk^2)$

Tableau 4.1 :

CONCLUSION :

Nous pourrions remarquer que seul l'algorithme \mathcal{A}_2 nous permet de calculer facilement le vecteur $r_n^{(k)}$ pour des indices n et k quelconques, alors que dans les autres algorithmes, le vecteur $r_{n+1}^{(k)}$ ne peut pas être obtenu par la donnée des vecteurs $(r_i^{(k)})_{1 \leq i \leq n}$ calculés auparavant. Par contre, lorsque l'indice n , est fixé il sera plus facile d'appliquer ces algorithmes, i.e., les algorithmes \mathcal{A}_1 , \mathcal{A}_3 , \mathcal{A}_4 .

Chapitre 5

Liaisons entre la procédure hybride généralisée et les méthodes de projection

Pour terminer ce travail nous allons étudier dans ce chapitre les liaisons entre la procédure hybride généralisée définie dans le chapitre 3 et les méthodes de projection déjà connues appliquées à la résolution du système

$$Ax = b. \tag{0.1}$$

En **5.1**, nous allons commencer par rappeler la définition de la méthode de projection G -oblique et la définition de la méthode de la projection G -orthogonale. Ensuite, nous allons faire un rappel de certaines méthodes de projection bien connues comme "Generalized Conjugate Residual" (GCR) algorithme [13], "Generalized Minimal Residual" (GMRES) algorithme [33], la méthode de Lanczos [28] et "s-step minimal residual" algorithme [12].

En **5.2**, nous allons démontrer, en utilisant les résultats obtenus dans le chapitre 3,

que la procédure hybride généralisée peut aussi être considérée comme une méthode de projection G -orthogonale ou une méthode de projection G -oblique. Nous allons nous servir de ces résultats afin de démontrer que l'application de la procédure hybride généralisée à la méthode définie par

$$\left. \begin{aligned} x_{n+1} &= Bx_n + b \\ r_{n+1} &= Br_n \end{aligned} \right\} \quad (0.2)$$

avec $B = I - A$ nous fournit une méthode qui est mathématiquement équivalente à celles mentionnées précédemment, lorsque l'indice n est fixé dans la définition du vecteur $r_n^{(k)}$. Nous verrons ensuite que les méthodes mentionnées ci-dessus ne sont autres que des cas particuliers de la procédure hybride généralisée.

5.1 Rappel

Dans ce qui suit, nous noterons \mathcal{E} l'espace vectoriel de dimension n engendré par les vecteurs $\{e_1, \dots, e_n\}$

$$\mathcal{E} = \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$$

et par $M * \mathcal{E}$ ou par $M * \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$ l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $\{Me_1, \dots, Me_n\}$

$$\begin{aligned} M * \mathcal{E} &= M * \text{span}\{e_1, \dots, e_n\} \\ &= \text{span}\{Me_1, \dots, Me_n\} \end{aligned}$$

où M est une matrice quelconque.

Considérons maintenant le système :

$$Ax = b. \tag{0.1}$$

Nous allons introduire la définition d'une méthode de projection G -oblique qui donne une solution approchée de ce système.

Définition 5.1 [32]

Soit G une matrice symétrique, définie positive arbitrairement choisie. Nous appellerons **méthode de projection G -oblique**, une méthode qui donne une solution approchée du système (0.1) sous la forme

$$x_n = x_0 + z_n$$

où le vecteur z_n appartient à un certain sous-espace vectoriel \mathcal{R}_n de dimension n (appelé le sous-espace droit) et le vecteur résidu $r_n = b - Ax_n$ est G -orthogonal à un autre sous-espace vectoriel \mathcal{L}_n de dimension n (appelé le sous-espace gauche).

Autrement dit, la méthode de projection G -oblique consiste à déterminer le vecteur $z_n \in \mathcal{R}_n$ vérifiant la condition

$$\forall v \in \mathcal{L}_n \quad (r_0 - Az_n, v)_G = 0.$$

Soit $V_n = [v_0, \dots, v_{n-1}]$ la matrice représentant une base du sous-espace vectoriel \mathcal{R}_n et soit $W_n = [w_0, \dots, w_{n-1}]$ la matrice représentant une base du sous-espace vectoriel \mathcal{L}_n . Nous pouvons alors écrire le vecteur z_n sous la forme $z_n = V_n y_n$. Le vecteur inconnu y_n pourra alors être calculé en résolvant le système d'équations suivant :

$$W_n^T G(r_0 - AV_n y_n) = 0.$$

Si de plus la matrice $W_n^T GAV_n$ est inversible, alors nous avons

$$y_n = (W_n^T GAV_n)^{-1} W_n^T Gr_0$$

ce qui nous permet d'obtenir les expressions suivantes de x_n et r_n

$$x_n = x_0 + V_n (W_n^T GAV_n)^{-1} W_n^T Gr_0$$

$$\begin{aligned} r_n &= r_0 - AV_n (W_n^T GAV_n)^{-1} W_n^T Gr_0 \\ &= (I - P_n (W_n^T GP_n)^{-1} W_n^T G) r_0 \end{aligned}$$

avec $P_n = AV_n$.

Un cas particulier de la méthode de projection G -oblique, est la méthode de projection G -orthogonale définie par :

Définition 5.2

Nous allons appeler **méthode de projection G -orthogonale** la méthode de projection G -oblique qui vérifie

$$A * \mathcal{R}_n = \mathcal{L}_n.$$

Dans ce cas, nous avons

$$x_n = x_0 + V_n (P_n^T GP_n)^{-1} P_n^T Gr_0$$

$$r_n = (I - P_n (P_n^T GP_n)^{-1} P_n^T G) r_0$$

où la matrice P_n représente une base du sous-espace vectoriel \mathcal{L}_n et la matrice V_n représente une base du sous-espace vectoriel \mathcal{R}_n .

Dans la partie qui suit, nous allons donner des exemples de méthodes de projection pour la résolution d'un système d'équations linéaires. Nous ne donnons que des exemples de méthodes qui nous serviront dans la deuxième partie de ce chapitre. D'autres méthodes de projection sont détaillées dans [2], [3], [13], [16], [18], [26], [27], [30], [31], [41], [46], [47].

5.1.1 "Generalized Conjugate Residual" (GCR) algorithme

Soit $G = I$ et x_0 une solution approchée du système (0.1). L'algorithme (GCR) [13] est alors défini par :

$$r_0 = b - Ax_0$$

$$p_0 = b - Ax_0$$

pour $k = 0, 1, \dots$

$$\alpha_k = \frac{(r_k, Ap_k)}{(Ap_k, Ap_k)}$$

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$$

$$r_{k+1} = r_k - \alpha_k Ap_k$$

$$\beta_i^{(k)} = \frac{(Ar_{k+1}, Ap_i)}{(Ap_i, Ap_i)} \quad i = 0, \dots, k$$

$$p_{k+1} = r_{k+1} - \sum_{i=0}^k \beta_i^{(k)} p_i.$$

Les vecteurs x_k et r_k ainsi construits vérifient les propriétés suivantes [13] :

1. $x_k \in x_0 + \mathcal{R}_k = x_0 + \text{span}\{p_0, \dots, p_{k-1}\}$
2. $r_k \in r_0 + A * \mathcal{R}_k = r_0 + \text{span}\{Ap_0, \dots, Ap_{k-1}\}$
3. $(r_k, Ap_i)_I = 0$ pour $i = 0, \dots, k-1$.

Donc l'algorithme GCR peut être considéré comme une méthode de projection I -

orthogonale avec

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_k &= A * \mathcal{R}_k \\ &= \text{span}\{Ar_0, \dots, A^k r_0\}.\end{aligned}$$

5.1.2 "Generalized Minimal Residual" (GMRES) algorithme

Soit $G = I$ et x_0 une solution approchée du système (0.1). L'algorithme GMRES [33] est alors défini par :

$$r_0 = b - Ax_0$$

$$p_0 = \frac{r_0}{\|r_0\|}$$

pour $j = 0, \dots, k - 2$

$$\beta_i^{(j)} = (Ap_j, p_i) \quad i = 0, \dots, j$$

$$\hat{p}_{j+1} = Ap_j - \sum_{i=0}^j \beta_i^{(j)} p_i$$

$$\beta_{j+1}^{(j)} = \|\hat{p}_{j+1}\|$$

$$p_{j+1} = \frac{\hat{p}_{j+1}}{\beta_{j+1}^{(j)}}$$

Construire la solution approchée x_k

$$x_k = x_0 + P_k y_k$$

où y_k minimise la fonctionnelle $J(y) = \|r_0 - AP_k y\|$ avec P_k la matrice définie par :
 $P_k = [p_0, \dots, p_{k-1}]$.

L'algorithme GMRES est mathématiquement équivalent à l'algorithme GCR, donc il peut être aussi considéré comme une méthode de projection I -orthogonale avec

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_k &= A * \mathcal{R}_k \\ &= \text{span}\{Ar_0, \dots, A^k r_0\}.\end{aligned}$$

Pour plus de détails voir [32].

5.1.3 La méthode de Lanczos

Soit $G = I$ et x_0 une solution approchée du système (0.1). La méthode de Lanczos [28] est alors définie par :

$$r_0 = b - Ax_0$$

$$p_0 = \frac{r_0}{\|r_0\|}$$

$$w_0 = \frac{r_0}{\|r_0\|}$$

pour $j = 0, \dots, k - 2$

$$\alpha_j = (Ap_j, w_j)$$

$$\text{si } j=1 \text{ alors } \beta_0 p_{-1} = \delta_0 w_{-1} = 0$$

$$\hat{p}_{j+1} = Ap_j - \alpha_j p_j - \beta_j p_{j-1}$$

$$\hat{w}_{j+1} = A^T w_j - \alpha_j w_j - \delta_j w_{j-1}$$

choisissons les coefficients $\delta_{j+1}, \beta_{j+1}$ tels que $\delta_{j+1} \beta_{j+1} = (\hat{p}_{j+1}, \hat{w}_{j+1})$

$$p_{j+1} = \frac{\hat{p}_{j+1}}{\delta_{j+1}}$$

$$w_{j+1} = \frac{\hat{w}_{j+1}}{\beta_{j+1}}.$$

La solution approchée x_k est de la forme

$$\begin{aligned} x_k &= x_0 + P_k(W_k^T A P_k)^{-1} W_k r_0 \\ &= x_0 + \|r_0\| P_k(W_k^T A P_k)^{-1} e_1 \end{aligned}$$

où e_1 désigne le premier vecteur de la base canonique de \mathcal{R}^m , $P_k = [p_0, \dots, p_{k-1}]$ et $W_k = [w_0, \dots, w_{k-1}]$.

La méthode ainsi définie peut être considérée comme une méthode de I -projection oblique avec

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_k &= \text{span}\{r_0, A^T r_0, \dots, (A^T)^{k-1} r_0\} \\ \mathcal{R}_k &= \text{span}\{r_0, A r_0, \dots, A^{k-1} r_0\}. \end{aligned}$$

5.1.4 "s-step minimal residual" algorithm

Soit $G = I$ et x_0 une solution approchée du système (0.1). Le "s-step minimal residual" algorithm [12] est alors défini par :

$$r_0 = b - A x_0$$

pour $k = 0, 1, \dots$

$$x_{k+1} = x_k + a_k^{(1)} r_k + \dots + a_k^{(s)} A^{s-1} r_k$$

$$r_{k+1} = r_k - a_k^{(1)} A r_k - \dots - a_k^{(s)} A^s r_k$$

Les coefficients $\{a_k^{(i)}\}$ sont choisis de telle façon que

$$\|r_{k+1}\| = \min_{r \in \tau_k + \mathcal{L}_k} \|r\|,$$

avec $\mathcal{L}_k = \text{span}\{Ar_k, \dots, A^s r_k\}$. Cette condition est équivalente à la condition

$$(r_{k+1}, A^i r_k) = 0 \quad i = 1, \dots, s.$$

Il est alors facile de remarquer, que à chaque itération, nous utilisons une méthode de projection I -orthogonale afin de déterminer le vecteur r_{k+1} avec

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_k &= A * \mathcal{R}_k \\ &= \text{span}\{Ar_k, \dots, A^s r_k\}. \end{aligned}$$

5.2 Procédure hybride vue comme une méthode de projection

Soit une méthode de résolution du système (0.1) qui détermine la suite (r_n) et soit une suite auxiliaire (w_n) . En utilisant la procédure hybride avec une suite auxiliaire définie dans le chapitre 3, nous pouvons construire la suite $(r_n^{(k)})$ définie par

$$r_n^{(k)} = \frac{\begin{vmatrix} r_n & \cdots & r_{n+k} \\ (w_n, r_n) & \cdots & (w_n, r_{n+k}) \\ \vdots & & \vdots \\ (w_{n+k-1}, r_n) & \cdots & (w_{n+k-1}, r_{n+k}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ (w_n, r_n) & \cdots & (w_n, r_{n+k}) \\ \vdots & & \vdots \\ (w_{n+k-1}, r_n) & \cdots & (w_{n+k-1}, r_{n+k}) \end{vmatrix}}. \quad (5.1)$$

Nous notons par $p_{n+i} = r_{n+i} - r_{n+i+1}$ ($i = 1, \dots, k-1$). Soit $P_n^{(k)} = [p_n, \dots, p_{n+k-1}]$ et soit $W_n^{(k)} = [w_n, \dots, w_{n+k-1}]$. En procédant comme dans le théorème 3.4 (p. 90) et le théorème 3.5 (p. 93) nous pouvons démontrer que

$$r_n^{(k)} = \varphi_n^{(k)} r_{n+i} \quad (i = 0, \dots, k)$$

avec

$$\wp_n^{(k)} = I - P_n^{(k)}((W_n^{(k)})^T G P_n^{(k)})^{-1} (W_n^{(k)})^T G.$$

La méthode ainsi définie peut être considérée comme une méthode de projection G -oblique avec

$$\begin{aligned} A * \mathcal{R}_n^{(k)} &= \text{span}\{p_n, \dots, p_{n+k-1}\} \\ \mathcal{L}_n^{(k)} &= \text{span}\{w_n, \dots, w_{n+k-1}\}. \end{aligned}$$

Si nous choisissons la suite (w_n) de telle sorte que pour tout indice n nous avons $w_n = p_n$ nous pouvons alors obtenir la généralisation de la procédure hybride définie au début du chapitre 3. Cette méthode peut être considérée comme une méthode de projection G -orthogonale avec

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n^{(k)} &= A * \mathcal{R}_n^{(k)} \\ &= \text{span}\{p_n, \dots, p_{n+k-1}\}. \end{aligned}$$

Dans les deux cas, la détermination des éléments de la base du sous-espace $\mathcal{R}_n^{(k)}$ s'obtient facilement. En effet :

$$\begin{aligned} p_n &= r_n - r_{n+1} \\ &= b - Ax_n - (b - Ax_{n+1}) \\ &= A(x_n - x_{n+1}). \end{aligned}$$

Ce qui nous donne

$$\mathcal{R}_n^{(k)} = \text{span}\{x_n - x_{n+1}, \dots, x_{n+k-1} - x_{n+k}\}.$$

En procédant comme dans le théorème 4.1 (p. 131) et la remarque 4.1 (p. 132), nous pouvons obtenir le résultat suivant :

Théorème 5.1

Soit (r_n) la suite des vecteurs résidus déterminée par une méthode arbitraire. Soit (w_n) une suite quelconque et soit $(r_n^{(k)})$ la suite des vecteurs résidus correspondant à la procédure hybride généralisée. Si pour tout indice k nous avons

$$(r_{n+k}, w_{n+i}) = 0 \quad i = 0, \dots, k-1$$

alors l'égalité suivante est vérifiée pour tout indice n

$$r_n^{(k)} = r_{n+k}.$$

- D'une part, d'après ce qui précède, nous remarquons que, pour une méthode de résolution vérifiant pour tout indice i

$$(r_i, w_j) = 0 \quad j = 0, \dots, i - 1 \quad (5.2)$$

la procédure hybride généralisée est théoriquement identique à la méthode initiale.

- D'autre part, si pour une méthode donnée qui détermine la suite (r_n) , la condition (5.2) n'est pas vérifiée, alors pour un indice n fixé, la détermination du vecteur $r_n^{(k)}$ peut être réalisée sans utilisation de la relation (5.1). En effet, si nous transformons la suite (r_n) via un procédé d'orthogonalisation particulier, en une suite (r'_n) vérifiant pour tout indice n

$$(r'_n, w_j) = 0 \quad j = 0, \dots, n - 1$$

alors nous pouvons conclure d'après le théorème 5.1 (p. 152) que,

$$r_n^{(k)} = r'_{n+k}.$$

Dans la partie qui suit, nous proposons un algorithme correspondant à un tel procédé d'orthogonalisation.

$$r'_0 = r_0$$

$$p'_0 = p_0$$

pour $k = 0, 1, \dots$

$$\alpha_k = \frac{(r'_k, w_k)}{(p'_k, w_k)}$$

$$r'_{k+1} = r'_k - \alpha_k p'_k$$

$$\beta_i^{(k)} = \frac{(p_{k+1}, w_i) - \sum_{j=0}^{i-1} \beta_j^{(k)} (p'_j, w_i)}{(p'_i, w_i)} \quad i = 0, \dots, k$$

$$p'_{k+1} = p_{k+1} - \sum_{j=0}^k \beta_j^{(k)} p'_j$$

} \mathcal{A}_5 .

La suite (r'_n) ainsi définie vérifie la propriété suivante :

Propriété 5.1

La suite (r'_n) calculée par l'algorithme \mathcal{A}_5 à partir d'une suite donnée (r_n) , vérifie les propriétés suivantes

$$(a) \quad p'_k \in \text{span}\{p_0, \dots, p_k\} \quad \mathcal{H}_{11}(k)$$

$$(b) \quad r'_k \in r_0 + \text{span}\{p_0, \dots, p_{k-1}\} \quad \mathcal{H}_{12}(k)$$

$$(c) \quad (p'_k, w_i) = 0 \quad i = 0, \dots, k-1 \quad \mathcal{H}_{13}(k)$$

$$(d) \quad (r'_k, w_i) = 0 \quad i = 0, \dots, k-1 \quad \mathcal{H}_{14}(k)$$

où p_i désigne le vecteur $r_i - r_{i+1}$.

Preuve :

(a) La démonstration de la propriété $\mathcal{H}_{11}(k)$ se fait par récurrence.

- Pour $k = 0$ nous avons par construction $p'_0 = p_0$, ce qui prouve $\mathcal{H}_{11}(0)$.
- Supposons que $\mathcal{H}_{11}(i)$ soit vraie pour $i = 0, \dots, k-1$. Le vecteur p'_k étant la combinaison des vecteurs $p'_0, \dots, p'_{k-1}, p_k$, appartient bien au sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs p_0, \dots, p_{k-1}, p_k . Puisque nous avons supposé que

$$p'_i \in \text{span}\{p_0, \dots, p_i\} \quad (i = 0, \dots, k-1)$$

nous pouvons donc déduire que

$$\begin{aligned} p'_k &\in \text{span}\{p'_0, \dots, p'_{k-1}, p_k\} \\ &\in \text{span}\{p_0, \dots, p_k\}. \end{aligned}$$

La propriété $\mathcal{H}_{11}(k)$ est donc vérifiée.

(b) Montrons la propriété $\mathcal{H}_{12}(k)$ pour tout k . Par construction du vecteur r'_k , nous obtenons

$$\begin{aligned} r'_k &= r'_{k-1} - \alpha_{k-1} p'_{k-1} \\ &= r_0 - \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i p'_i. \end{aligned}$$

En utilisant la propriété $\mathcal{H}_{11}(k)$, nous obtenons

$$r'_k \in r_0 + \text{span}\{p_0, \dots, p_{k-1}\}$$

ce qui prouve $\mathcal{H}_{12}(k)$.

(c) La démonstration de la propriété $\mathcal{H}_{13}(k)$ se fait par récurrence.

- Pour $k = 1$ nous avons par construction

$$p'_1 = p_1 - \frac{(p_1, w_0)}{(p_0, w_0)} p_0.$$

En calculant (p'_1, w_0) nous obtenons

$$\begin{aligned} (p'_1, w_0) &= (p_1, w_0) - \frac{(p_1, w_0)}{(p_0, w_0)} (p_0, w_0) \\ &= (p_1, w_0) - (p_1, w_0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ce qui prouve $\mathcal{H}_{13}(1)$.

- Supposons que $\mathcal{H}_{13}(j)$ soit vraie pour $j = 0, \dots, k-1$

$$(p'_j, w_i) = 0 \quad i = 0, \dots, j-1$$

et montrons que $\mathcal{H}_{13}(k)$ est aussi vérifiée. Nous avons

$$\begin{aligned} (p'_k, w_i) &= (p_k, w_i) - \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^{(k-1)} (p'_j, w_i) \\ &= (p_k, w_i) - \sum_{j=0}^i \beta_j^{(k-1)} (p'_j, w_i) \\ &= (p_k, w_i) - \beta_i^{(k-1)} (p'_i, w_i) - \sum_{j=0}^{i-1} \beta_j^{(k-1)} (p'_j, w_i) \\ &= (p_k, w_i) - \frac{(p_k, w_i) - \sum_{j=0}^{i-1} \beta_j^{(k-1)} (p'_j, w_i)}{(p'_i, w_i)} (p'_i, w_i) - \sum_{j=0}^{i-1} \beta_j^{(k-1)} (p'_j, w_i) \\ &= (p_k, w_i) - \left((p_k, w_i) - \sum_{j=0}^{i-1} \beta_j^{(k-1)} (p'_j, w_i) \right) - \sum_{j=0}^{i-1} \beta_j^{(k-1)} (p'_j, w_i) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ce qui prouve $\mathcal{H}_{13}(k)$.

(d) La démonstration de la propriété $\mathcal{H}_{14}(k)$ se fait par récurrence.

- Le vecteur r'_1 étant donné par

$$r'_1 = r_0 - \frac{(r_0, w_0)}{(p_0, w_0)} p_0$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}(r'_1, w_0) &= (r_0, w_0) - \frac{(r_0, w_0)}{(p_0, w_0)}(p_0, w_0) \\ &= (r_0, w_0) - (r_0, w_0) \\ &= 0\end{aligned}$$

ce qui prouve $\mathcal{H}_{14}(1)$.

- Supposons que $\mathcal{H}_{14}(k-1)$ soit vraie, i.e.,

$$(r'_{k-1}, w_i) = 0 \quad i = 0, \dots, k-2.$$

En utilisant $\mathcal{H}_{14}(k-1)$ et $\mathcal{H}_{13}(k-1)$, nous avons pour $i = 0, \dots, k-2$

$$\begin{aligned}(r'_k, w_i) &= (r'_{k-1}, w_i) - \frac{(r'_{k-1}, w_{k-1})}{(p'_{k-1}, w_{k-1})}(p'_{k-1}, w_i) \\ &= 0.\end{aligned}$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned}(r'_k, w_{k-1}) &= (r'_{k-1}, w_{k-1}) - \frac{(r'_{k-1}, w_{k-1})}{(p'_{k-1}, w_{k-1})}(p'_{k-1}, w_{k-1}) \\ &= (r'_{k-1}, w_{k-1}) - (r'_{k-1}, w_{k-1}) \\ &= 0\end{aligned}$$

donc $\mathcal{H}_{14}(k)$ est vérifiée

ce qui termine la démonstration. ■

La transformation \mathcal{A}_5 est donc équivalente à l'application de la procédure hybride sur la suite (r_n) et nous avons

$$r_0^{(k)} = r'_k.$$

Remarque 5.1 :

Pour calculer $r_n^{(k)}$, il suffira de prendre $r'_0 = r_n$.

5.3 Application de la procédure hybride généralisée à la suite $r_n = B^n r_0$. Etude de quelques cas particuliers

Pour finir ce chapitre nous allons donner des exemples de cas particuliers de la procédure hybride. Comme nous allons le voir ces cas particuliers coïncident avec certaines méthodes de résolution déjà connues. Afin de les obtenir, considérons la suite (r_n) donnée par la méthode

$$\left. \begin{aligned} x_{n+1} &= Bx_n + b \\ r_{n+1} &= Br_n \end{aligned} \right\} \quad (0.2)$$

où $B = I - A$ et où la suite $(r_0^{(k)})$ correspond à la procédure hybride avec une suite auxiliaire.

Ainsi, la procédure hybride appliquée à la méthode choisie de cette manière est une méthode de projection avec

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_0^{(k)} &= \text{span}\{r_0, \dots, r_{k-1}\} \\ &= \text{span}\{r_0, \dots, A^{k-1}r_0\}. \end{aligned}$$

Dans ce qui suit, nous allons considérer différents choix de la matrice G et de la suite (w_n) .

1. Soit $w_n = p_n$ et $G = I$. La procédure hybride devient alors une méthode de projection orthogonale avec

$$\mathcal{L}_0^{(k)} = \text{span}\{Ar_0, \dots, A^k r_0\}.$$

Le procédé qui fournit le vecteur $r_0^{(k)}$ est mathématiquement équivalent à l'algorithme GCR qui nous fournit le vecteur r_k .

2. Puisque l'algorithme GCR est mathématiquement équivalent à l'algorithme RRE (Reduced Rank Extrapolation) [15], [29] lorsque nous l'appliquons à la suite définie par l'équation (0.2) [39], la procédure hybride généralisée et l'algorithme RRE sont aussi mathématiquement équivalents dans ce cas là.
3. Puisque l'algorithme GMRES est mathématiquement équivalent à l'algorithme GCR [32], la procédure hybride avec le choix $w_k = p_k$ et $G = I$ lui est aussi équivalente.

4. Soit $w_k = (A^T)^k r_0$ et $G = I$. La procédure hybride devient alors une méthode de projection oblique avec

$$\mathcal{L}_0^{(k)} = \text{span}\{r_0, \dots, (A^T)^{k-1} r_0\}.$$

Le procédé qui fournit le vecteur $r_0^{(k)}$ est mathématiquement équivalent à la méthode de Lanczos qui nous fournit le vecteur r_k .

5. Puisque la méthode de Lanczos est mathématiquement équivalente à l'algorithme TEA (l' ε -algorithme topologique) [4] lorsque nous l'appliquons à la suite définie par l'équation (0.2) [39], la procédure hybride généralisée et l'algorithme TEA sont aussi mathématiquement équivalents dans ce cas là.
6. Soit $G = I$. Si dans chaque itération nous déterminons le vecteur r_{k+1} en appliquant la procédure hybride généralisée aux vecteurs $r_k, Br_k, \dots, B^s r_k$, alors nous obtenons un procédé qui est mathématiquement équivalent à "s-step minimal residual" algorithme.

CONCLUSION :

Les cas particuliers de la procédure hybride généralisée ne sont autres que les méthodes déjà connues.

Conclusion

A l'issue de ce travail, quels sont les points acquis, quels sont les domaines à explorer?

1. Nous avons montré que lorsque nous disposons d'une méthode linéaire du type $x_{n+1} = Bx_n + d$, (pour résoudre $Ax = b$, la matrice B est soit celle de Jacobi, Gauss-Seidel, SOR ou celle associée à la méthode de Richardson), alors la procédure hybride fournit des résultats d'accélération de convergence dans le cas B diagonalisable. Il est certainement possible d'alléger les hypothèses sur B .
2. Les conditions d'accélération de la convergence à l'aide de ces procédures hybrides nécessitent la connaissance de certaines valeurs propres de la matrice B . Mais, néanmoins, nous remarquons que ces procédures peuvent nous permettre de calculer certaines valeurs propres de la matrice B . Une étude dans ce sens reste à faire.
3. Nous n'avons pas insisté sur les divers choix possibles de la norme G parce que s'il y a accélération de convergence au sens d'une norme alors il y a accélération au sens de toute autre norme.
4. Dans le premier et le troisième chapitres, une étude générale et théorique a été faite pour traiter l'application de la procédure hybride à deux ou plusieurs méthodes. Ce cas peut être très intéressant si nous pouvons programmer les méthodes initiales au parallèle.
5. Nous avons d'autre part (chapitre 2) montré l'intérêt d'appliquer la procédure hybride à une seule méthode itérative.

6. Le chapitre 4 a été élaboré dans un souci algorithmique (calcul récursif de certains déterminants) ; il reste à étudier les propriétés d'accélération des divers algorithmes (en particulier \mathcal{A}_2).
7. Enfin dans le chapitre 5 nous avons démontré que le GCR ("Generalised Conjugate Residual") algorithme peut être considéré comme un cas particulier de la procédure hybride généralisée que nous avons étudié dans la section 3.1.3. Bien que nous n'ayons pas réussi à les démontrer théoriquement, nous avons pu constater numériquement que dans certains cas nous pouvons accélérer la convergence de cette méthode en prenant le vecteur initial x_0 tel que le vecteur résidu correspondant r_0 soit de la forme $r_0 = B^i y$ avec y un vecteur arbitraire. Il sera donc intéressant de trouver des résultats théoriques qui peuvent expliquer ce cas là.

Références

- [1] A. ABKOWICZ, C. BREZINSKI, Acceleration property of the hybrid procedure for solving linear systems, *Applicaciones Mathematicae*, à paraître.
- [2] O. AXELSSON, A generalized conjugate direction method and its application to a singular perturbation problem, in *Proc. 8th biennial Numerical Analysis Conference*, G.A. Watson ed., Lecture Notes in Math. 773, Springer-Verlag, Berlin 1980, pp. 1-11.
- [3] O. AXELSSON, Conjugate Gradient type methods for unsymmetric and inconsistent system of linear equation, *Linear Algebra Appl.*, 29 (1980) 1-16.
- [4] C. BREZINSKI, Généralisations de la transformation de Shanks, de la table de Padé et de l' ε -algorithme, *Calcolo* 12 (1970) 317-360.
- [5] C. BREZINSKI, A general extrapolation algorithm, *Numer. Math.*, 35 (1980) 175-187.
- [6] C. BREZINSKI, Recursive interpolation, extrapolation and projection, *J. Comput. Appl. Math.*, 9 (1983) 369-376.
- [7] C. BREZINSKI, About Henrici's method for nonlinear equations, *Symposium on Numerical Analysis and Computational Complex Analysis*, Zürich, unpublished, August 1983.
- [8] C. BREZINSKI, Some determinantal identities in a vector space, with applications, in *Padé Approximation and its Applications. Bad-Honnef 1983*, H. Werner and H.J. Bünger eds., *LNM* vol. 1071, Springer-Verlag, Berlin, 1984, pp. 1-11.
- [9] C. BREZINSKI, Composite sequence transformations, *Numer. Math.*, 46 (1985) 311-321.
- [10] C. BREZINSKI, M. REDIVO ZAGLIA, *Extrapolation Methods. Theory and Practice*, North-Holland, Amsterdam, 1991.

- [11] C. BREZINSKI, M. REDIVO ZAGLIA, Hybrid procedures for solving linear systems, *Numer. Math.*, 67 (1994) 1–19.
- [12] A.T. CHRONOPOULOS, s -Step iterative methods for (non)symmetric (in)definite linear systems, *SIAM J. Numer. Anal.*, 28 (1991) 1776–1789.
- [13] P. CONCUS, G.H. GOLUB, A generalized conjugate gradient method for nonsymmetric systems of linear equations, in *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, 134, R. Glowinski and J.L. Lions eds., Springer-Verlag, Berlin, 1976, pp. 56–65.
- [14] M. DRYJA, J. M. JANKOWSCY, *Przegląd metod i algorytmów numerycznych*, vol. 2, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1988.
- [15] R.P. EDDY, Extrapolating to the limit of a vector sequence, in *Information Linkage Between Applied Mathematics and Industry*, P.C.C Wang eds., Academic Press, New York, 1979, pp. 387–396.
- [16] C.S. EISENSTAD, H.C. ELMAN, M.H. SHULTZ, Variational iterative methods for nonsymmetric system of linear equations, *SIAM J. Numer. Anal.*, 20 (1983) 345–357.
- [17] V.N. FADDEEVA, *Computational Methods of Linear Algebra*, in "Numerical Analysis, Dundee 1975", Dover, New-York, 1959.
- [18] R. FLETCHER, Conjugate gradient methods for indefinite systems, *LNM*, vol. 506, Springer-Verlag, Berlin, 1976, pp. 73–89.
- [19] W.F. FORD, A. SIDI, Recursive algorithms for vector extrapolation methods, *Appl. Numer. Math.*, 4 (1988) 477–489.
- [20] R.W. FREUND, A transpose-free quasi-minimal residual algorithm for non-Hermitian linear systems, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 14 (1993) 470–482.
- [21] N. GASTINEL, Procédé itératif pour la résolution numérique d'un système d'équations linéaires, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 246 (1958) 2571–2574.
- [22] G.H. GOLUB, C.F. VAN LOAN, *Matrix Computation*, Second Edition, John Hopkins University Press, Baltimore, London, 1993.
- [23] Y. HUANG, H.A. VAN DER VORST, Some observations on the convergence behaviour of GMRES, Delft University of Technology, Report 89-09, 1989.
- [24] K. JBILOU, *Methodes d'Extrapolation et de Projection. Application aux Suites de Vecteurs*, thèse de 3^{ème} cycle, Université de Lille I, 1988.

- [25] K. JBILOU, A general projection algorithm for solving linear systems of equations, *Numerical Algor.*, 4 (1993) 361–377.
- [26] K. JBILOU, Projection–minimization methods for nonsymmetric linear systems, *Lin. Alg. Appl.*, à paraître.
- [27] K. JBILOU, G–orthogonal projection methods for solving linear systems, à paraître.
- [28] C. LANCZOS, Solution of systems of linear equations by minimized iterations, *J. Res. Natl. Bur. Stand.*, 49 (1952) 33–53.
- [29] M. MEŠINA, Convergence accaleration for the iterative solution of the equations $X = AX + f$, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng*, 10 (1977) 165–173.
- [30] Y. SAAD, Krylov subspace methods for solving large unsymmetric linear systems, *Math. Comput.*, 37 (1981) 105–126.
- [31] Y. SAAD, The Lanczos Biorthogonalization algorithm ond other oblique projection method for solving large unsymmetric systems, *SIAM J. Numer. Anal.*, 19 (1983) 485–506.
- [32] Y. SAAD, M.H. SHULTZ, Conjugate Gradient–like algorithms for solving nonsymmetric linear systems, *Math. Comput.*, 44 (1985) 417–424.
- [33] Y. SAAD, M.H. SHULTZ, GMRES : a Generalized Minimal Residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 7 (1986) 856–869.
- [34] H. SADOK, *Accélération de la Convergence de Suites par Utilisation des Transformations Composites*, Thèse 3^{ème} cycle, Université de Lille I, 1986.
- [35] H. SADOK, *Accélération de la Convergence de Suites Vectorielles et de Méthodes de Point Fixe*, Thèse, Université de Lille I, 1988.
- [36] W. SCHÖNAUER, *Scientific Computing on Vector Computers*, North–Holland, Amsterdam, 1987.
- [37] W. SCHÖNAUER, H. MÜLLER, E. SCHNEPF, Numerical tests with biconjugate gradient type methods, *Z. Angew. Math. Mech.*, 65 (1985) T400–T402.
- [38] A. SIDI, Convergence and stability properties of Minimal Polynomial and Reduced Rank extrapolation algorithms, *SIAM J. Numer. Anal.* 23 (1986) 197–209.
- [39] A. SIDI, Extrapolation vs. projection methods for linear systems of equations, *J. Comput. Appl. Math.*, 22 (1988) 71–88.
- [40] R.S. VARGA, *Matrix Iterative Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1962.

- [41] P.K.W. VINSOME, ORTHOMIN, an iterative method for solving sparse sets of simultaneous linear equations, in *Proc. Fourth Symposium on Reservoir Simulation*, Society of Petroleum Engineers of AIME, 1976, pp. 149–159.
- [42] R. WEISS, *Convergence Behavior of Generalized Conjugate Gradient Methods*, Ph.D. Thesis, University of Karlsruhe, 1990.
- [43] R. WEISS, Error-minimizing Krylov subspace methods, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 15 (1994) 511–527.
- [44] R. WEISS, Properties of generalized conjugate gradient methods, *Numer. Lin. Alg. Appl.*, 1 (1994) 45–63.
- [45] R. WEISS, W.SCHÖNAUER, Acceleration generalized conjugate gradient methods by smoothing, in *Iterative Methods in Linear Algebra*, R. Beauwens and P. de Groen eds., North-Holland, Amsterdam, 1992, pp. 283–292.
- [46] O. WINDLUD, A Lanczos method for a class of non-symmetric systems of linear equations, *SIAM J. Numer. Anal.*, 15 (1978) 801–812.
- [47] D.M. YOUNG, K.C. JEA, Generalized conjugate-gradient acceleration of nonsymmetrizable iterative methods, *Linear Algebra Appl.*, 34 (1980) 159–194.
- [48] L. ZHOU, H.F. WALKER, Residual smoothing techniques for iterative methods, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 15 (1994) 297–312.

