

N° d'ordre: 1512

50376
1995
99

gen 20103753
THESE



présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

Pour obtenir le titre de

Docteur en MECANIQUE

par

BAILLY Christèle

MODELISATION ASYMPTOTIQUE ET NUMERIQUE DE
L'ECOULEMENT DU A DES DISQUES EN ROTATION

Soutenue le 18 Avril 1995

Membres du Jury :

Président : M. DYMENT, Professeur, U.S.T.L. .
Rapporteurs : M. FEUILLEBOIS, Directeur de Recherche. Laboratoire PMMH, ESPCI.
M. FLORENT, Professeur, Université de Valenciennes.
M. LE GAL, Chargé de Recherche, Institut de Mécanique Statistique
de la Turbulence, Université d'Aix-Marseille II.

Membres :

M. BOIS, Professeur, U.S.T.L. .
M. ZEYTOUNIAN, Professeur, U.S.T.L. .
M. GODTS, Maître de conférences, Université de Valenciennes, ENSIMEV.

UFR de Mathématiques Pures et Appliquées
Laboratoire de Mécanique de Lille, URA CNRS 1441

Remerciements

Je remercie Monsieur Zeytounian d'avoir été l'initiateur de ce travail de recherche et de l'avoir dirigé. Je remercie également Monsieur Godts d'avoir contribué à sa mise en oeuvre.

Je suis reconnaissante à Monsieur Dymont de s'être intéressé à mon travail et de m'avoir fait l'honneur de présider le Jury de thèse.

Je tiens à remercier vivement Messieurs Feuillebois, Florent et Le Gal pour leurs conseils judicieux et leurs remarques constructives lors de la rédaction finale du manuscrit.

Je remercie aussi Monsieur Bois d'avoir accepté de participer au Jury de thèse.

J'exprime également ma gratitude à ma famille, à mon ami et à ses parents pour leur aide précieuse et leur soutien durant l'élaboration de cette thèse.

Table des matières

Notations principales	5
Introduction générale	9
1 Généralités	11
1.1 Ecoulements tournants de Von Karman	11
1.1.1 Ecoulement dû à un disque en rotation	11
1.1.2 Ecoulement dû à deux disques en rotation	13
1.2 Instabilités des écoulements dus à des disques en rotation	22
1.2.1 Instabilités dans la couche d'Ekman	22
1.2.2 Instabilités sur disque tournant	23
1.2.3 Instabilités dues à deux disques en rotation	24
2 Système dynamique à trois modes	27
2.1 Introduction	27
2.2 Equations modèles	30
2.2.1 Equations de base	30
2.2.2 Hypothèse de similitude	31
2.2.3 Adimensionnalisation	32
2.2.4 Elimination de la pression	33
2.2.5 Equations modèles	34
2.2.6 Système dynamique à trois modes	35
2.3 Etude des solutions stationnaires du système autonome et de leur stabilité	38
2.3.1 Obtention des solutions stationnaires	38
2.3.2 Stabilité des solutions stationnaires	46
2.4 Evolution vers le chaos	51
2.4.1 Système non-linéaire autonome	51
2.4.2 Système non-linéaire non-autonome	54

2.5	Conclusion	78
3	Modélisation en "ondes longues" de l'écoulement entre deux disques en rotation	79
3.1	Introduction	79
3.2	Formulation mathématique	81
3.2.1	Equations de base	81
3.2.2	Système quasi-hydrostatique	84
3.2.3	Système limite ($\epsilon \rightarrow 0$)	86
3.3	Obtention d'une équation pour p_0	87
3.3.1	Expression de w_1	87
3.3.2	Couches d'Ekman	89
3.4	Obtention d'une condition initiale pour p_0	94
3.4.1	Adaptation instationnaire	95
3.4.2	Stabilité dans le cas de rotation solide initiale	96
3.5	Conclusion	99
4	Film visqueux en rotation	101
4.1	Introduction	101
4.2	Formulation mathématique	103
4.2.1	Equations de base	103
4.2.2	Equations adimensionnées	105
4.3	Equations approchées	107
4.3.1	Système quasi-hydrostatique ("en ondes longues")	107
4.3.2	Système "à la Shkadov" ou "quasi-plan"	108
4.4	Analyse asymptotique pour $Re^* \rightarrow 0$ et $We^* = 0$	110
4.4.1	Equation "principale"	110
4.4.2	Système "à la Shkadov" au voisinage de $t = 0$	111
4.4.3	Système "à la Shkadov" au voisinage de $r = 1$	114
4.4.4	Raccords en $t = 0$ et $r = 1$	118
4.4.5	Equation pour h_1 avec conditions initiale et à la limite associées	119
4.5	Résultats numériques ($We^* = 0$ et $Re^* \ll 1$)	123
4.5.1	Solution stationnaire	123
4.5.2	Solution instationnaire	126
4.6	Conclusion	129

Conclusion générale et perspectives	131
A Schéma aux différences finies pour un écoulement entre deux disques coaxiaux	135
B Base de fonctions ψ_ν	139
C Coefficients du système dynamique	143
D Coefficients de l'équation (2.51)	147
E Equation de Duffing	149
F Contraintes dynamiques sur la surface libre	153
Bibliographie	157

Notations principales

(r, θ, z)	: coordonnées cylindriques
(u, v, w)	: composantes de la vitesse \vec{u} dans un repère cylindrique
u	: vitesse radiale
v	: vitesse tangentielle (ou azimutale)
w	: vitesse verticale (ou axiale)
p	: pression
ρ_0	: masse volumique (constante)
ν_0	: viscosité cinématique (constante)
Ω_0	: vitesse angulaire caractéristique
$\Omega(t)$: vitesse angulaire fonction du temps
$\omega(t)$: vitesse angulaire fonction du temps sans dimension
$g(z), h(z)$: fonctions de similitude
d	: hauteur entre les deux disques
Re	: nombre de Reynolds
Ek, Ek_{\perp}	: nombres d'Ekman, d'Ekman vertical
ψ_{ν}	: base de fonctions
$H_{\nu 1}, Q_1, Q_2, X, Y, Z$: modes du système dynamique
E	: notation de la puissance de 10 tel que aEb correspond à: $a10^b$

σ	:	valeur propre du système linéaire
X_{st}, Y_{st}, Z_{st}	:	solution stationnaire du système dynamique
Δt	:	pas de temps
α	:	rapport d'aspect
S	:	nombre de Strouhal
Ro, ϵ	:	nombre de Rossby
$\mathcal{J}(a, .)$:	opérateur défini par: $\mathcal{J}(a, .) = \frac{\partial a}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\partial a}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r}$
g	:	accélération de la pesanteur
Σ	:	débit par unité de surface
ϕ'	:	perturbation du débit
h	:	hauteur du film visqueux
\vec{n}	:	normale unitaire de la surface libre
$\vec{T}(\vec{n})$:	vecteur contrainte pour la direction \vec{n}
γ_s	:	tension superficielle du fluide
We, Fr	:	nombres de Weber, de Froude
ϵ, β, χ	:	paramètres sans dimension
q	:	débit radial
s	:	débit tangentiel
$\mathcal{H}_0, C_0, H_{00}$:	constantes
τ	:	temps dans la couche initiale
ξ	:	coordonnée radiale de couche limite

Introduction générale

Les écoulements de fluide dus à des disques en rotation se rencontrent aussi bien en sciences de l'ingénieur (pompes à disques, etc ...) qu'en géophysique ou astrophysique où ils peuvent constituer un modèle tant pour l'océan ou l'atmosphère que pour les étoiles. Cependant, les équations de Navier-Stokes, écrites dans un repère fixe ou dans un repère mobile en rotation constante, et qui décrivent ces écoulements, sont intraitables analytiquement. Il est donc nécessaire d'avancer des hypothèses supplémentaires afin d'obtenir un modèle plus simple à partir duquel on va pouvoir travailler. Ainsi selon la configuration envisagée, on est amené à faire une ou plusieurs hypothèses qui consistent à supposer le plus souvent :

- l'axisymétrie de l'écoulement (les dérivées par rapport à la coordonnée méridienne sont alors nulles) à partir de considérations sur l'axisymétrie du problème physique.
- des disques de rayon "infini", c'est-à-dire qu'on se place loin des bords ; il est alors possible d'introduire, par exemple, des relations de similitude (voir Chapitre 1).
- l'existence de petits paramètres permettant des passages à la limite dans les équations de base.

Dans le but de simplifier les équations de base, on peut aussi avoir recours à des équations moyennes en z ou encore se limiter à une étude locale en un rayon donné $r = R$.

Après un chapitre d'introduction fondé sur une revue des résultats publiés dans la littérature et consacré aux écoulements auto-similaires, dits "de Von Karman", ainsi qu'aux instabilités liées aux écoulements dus à des disques en rotation, on présente trois problèmes (chaque problème faisant l'objet d'un chapitre particulier et d'une introduction spécifique) ayant des configurations différentes liées aux disques tournants, mais pour lesquels on utilisera une ou plusieurs des hypothèses simplificatrices évoquées ci-dessus.

Le Chapitre 1 résume donc brièvement les résultats obtenus en utilisant les hypothèses de Von Karman, hypothèses qui permettent d'obtenir une solution "exacte" des équations de Navier. Cette solution auto-similaire vérifie un système d'équations différentielles ordinaires non-linéaires qui nécessite une résolution numérique. Cependant, pour certaines valeurs des paramètres, le calcul ne fournit pas une solution unique, mais une multiplicité de solutions qui semble découler de l'absence de conditions aux limites imposées en r . La revue des résultats sur les instabilités des écoulements dus à des disques en rotation, pour sa part, met en évidence, dans le développement de certaines perturbations, le rôle du "feed-back" -ou écoulement de retour- souvent dû aux parois latérales et qui renvoie vers l'axe central du fluide turbulent.

Le chapitre 2 consiste en une approche numérique de l'écoulement entre un disque fixe et un disque en rotation. On obtient, à partir des équations de Navier écrites avec les hypothèses de similitude, un système dynamique à trois modes qui se révèle avoir des solutions stationnaires se rapprochant des solutions multiples de la littérature. Il s'avère aussi que l'application d'un forçage extérieur donne un comportement plus complexe tandis que le phénomène d'imprédictibilité liée à la dépendance sensitive aux conditions initiales (DSCI) se manifeste non seulement par la divergence de trajectoires initialement proches, mais également par l'existence d'une frontière fractale pour le bassin d'attraction des solutions bornées du système.

Au Chapitre 3, on expose une analyse asymptotique de l'écoulement dans un réservoir cylindrique muni d'un couvercle. Cette analyse est effectuée en introduisant deux petits paramètres, l'un lié au rapport d'aspect, l'autre au petit différentiel de vitesse entre le réservoir et le couvercle. On trouve que dans la région principale l'écoulement est géostrophique et qu'il y a adaptation instationnaire au géostrophisme à travers une couche initiale, permettant ainsi d'avoir les "bonnes" conditions initiales pour le modèle limite.

On trouve enfin au Chapitre 4 une autre analyse asymptotique, liée à l'étude d'un film visqueux sur un disque en rotation. A partir d'un moyennage "à la Shkadov" d'équations "en ondes longues", on obtient une solution pour la hauteur du film (à l'ordre 1) qui sert de cas-test à un programme numérique réalisé en différences finies.

On trouvera en fin de volume différentes annexes et la bibliographie liées aux quatre chapitres.

Chapitre 1

Généralités

1.1 Écoulements tournants de Von Karman

Les écoulements dus à des disques en rotation n'ont pas cessé depuis de nombreuses années de susciter un intérêt toujours renouvelé. Les publications qui s'y rapportent sont nombreuses et notamment celles concernant les écoulements dits "de Von Karman".

Afin d'introduire les développements théoriques du chapitre 2, concernant l'étude d'un système dynamique pour l'écoulement entre deux disques en rotation (et où la formulation choisie repose sur l'hypothèse de similitude de Von Karman), on présente un bref historique permettant de replacer le problème traité au chapitre 2 dans son contexte. Cet historique se réfère à l'article de Zandbergen et Dijkstra [42] qui passe en revue les principaux aspects des résultats analytiques et numériques se rapportant aux écoulements "de Von Karman" et dans lequel on pourra trouver un exposé détaillé ainsi que de très nombreuses références de travaux publiés jusqu'en 1986.

1.1.1 Écoulement dû à un disque en rotation

En 1921, Theodore Von Karman [27] considéra le problème d'un écoulement induit par un disque infini en rotation lorsque le fluide au loin est au repos. En utilisant un principe de similitude, il réduisit le système complet des équations de Navier écrites pour un fluide incompressible et visqueux à une paire d'équations différentielles non-linéaires. Ainsi, dans un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) , avec l'axe des z coïncidant avec l'axe de rotation, la composante axiale w est supposée ne dépendre que de z , soit :

$$w = -2(\nu \Omega)^{\frac{1}{2}} f(x),$$

d'où à partir de l'équation de continuité on en déduit que :

$$u = r \Omega f'(x) ,$$

et d'après l'équation de mouvement tangentielle que :

$$v = r \Omega g(x) ,$$

où Ω est une vitesse angulaire constante caractéristique convenable et ν la viscosité cinématique supposée également constante. Les fonctions f et g sont les nouvelles inconnues et restent à déterminer. Le " ' " note la différentiation par rapport à la coordonnée verticale (aussi nommée axiale) sans dimension x avec $x = z (\nu \Omega)^{\frac{1}{2}}$.

Avec les hypothèses de similitude de Von Karman, les équations de Navier, dans le cas d'un disque unique tournant à la vitesse angulaire $r\Omega s$ dans un fluide au repos à l'infini, s'écrivent sous la forme :

$$f''' + 2 f f'' - f'^2 + g^2 = 0 , \tag{1.1}$$

$$g'' + 2 f g' - 2 f' g = 0 \tag{1.2}$$

avec les conditions aux limites :

$$x = 0 \quad f = 0, f' = 0, g = s , \tag{1.3}$$

$$x \rightarrow \infty \quad f \rightarrow 0, g \rightarrow 0 , \tag{1.4}$$

où s est un scalaire supérieur ou égal à 1.

Une solution numérique a été obtenue en 1934 par Cochran [10] et est telle que $f, f' > 0$ et $g' > 0$: c'est-à-dire que le fluide est tiré suivant l'axe de rotation du disque et ensuite rejeté radialement ; il se comporte donc comme dans un ventilateur centrifuge.

Lié au problème originel de Von Karman et étudié en 1940 par Bödewadt [6], on trouve le cas où le disque est au repos tandis que le fluide à l'infini est en rotation de solide rigide. Par ailleurs, cette solution de Bödewadt, au contraire de celle de Von Karman, présente

des oscillations dans les composantes de la vitesse.

Quant à Batchelor [2], en 1951, il montra que le principe de similitude s'applique encore quand le problème est généralisé au cas où le fluide lui-même, loin du disque (en rotation), tourne comme un solide rigide.

1.1.2 Écoulement dû à deux disques en rotation

a) Cas général

Une autre généralisation consiste à considérer l'écoulement entre deux disques coaxiaux, infinis et animés de vitesses angulaires différentes, $r\Omega_{s_0}$ et $r\Omega_{s_1}$.

Alors que pour l'écoulement dû à un seul disque il n'y a pas de longueur caractéristique - et donc pas de nombre de Reynolds -, il est maintenant possible d'introduire un nombre de Reynolds fondé sur la distance séparant les deux disques. Les équations de Navier conduisent alors, à la place de (1.1) et (1.2), aux deux équations suivantes :

$$\frac{1}{Re} f'''' + 2 f f''' + 2 g g' = 0, \quad (1.5)$$

$$\frac{1}{Re} g'' + 2 f g' - 2 f' g = 0 \quad (1.6)$$

avec les conditions aux limites :

$$x = 0 \quad f = 0, f' = 0, g = s_0, \quad (1.7)$$

$$x = 1 \quad f = 0, f' = 0, g = s_1 \quad (1.8)$$

où les paramètres gouvernant le problème sont le nombre de Reynolds Re avec $Re = \frac{H^2 \Omega}{\nu}$ (avec H la hauteur séparant les deux disques) et le paramètre de rapport de vitesse s (ou σ) avec $s = s_0/s_1$ (ou $\sigma = s_1/s_0$).

On peut faire ici deux remarques :

- le choix de l'adimensionnalisation est souvent différent selon les auteurs ; on rencontre donc des écritures équivalentes des équations (1.5)-(1.6) et des conditions aux limites associées (1.7)-(1.8). On peut se référer à l'article de Holodniok *et al* [24], qui indique plus de 10 notations différentes rencontrées dans la littérature.

- l'équation (1.5) peut être intégrée pour donner :

$$\frac{1}{Re} f''' + 2 f f'' = f'^2 - g^2 + K \quad (1.9)$$

où K est une constante d'intégration associée à la pression. Si, dans le cas d'un seul disque où le fluide est en rotation à l'infini (on a alors (1.9) mais sans Re), la constante K est connue, peut être déterminée à l'infini et vaut alors s_∞^2 (où $r\Omega s_\infty$ est la vitesse du fluide au loin), elle est, par contre, inconnue dans le cas d'un problème avec deux disques.

b) Cas d'un disque fixe et d'un disque en rotation

Le problème posé par l'écoulement dû à deux disques n'est pas trivial et peut être notamment illustré par le cas où un disque reste fixe tandis que l'autre est animé d'une vitesse angulaire constante. En effet, pour cette configuration deux prédictions sont en concurrence : celle, qualitative, de Batchelor [2], annonce qu'une couche limite se forme sur chaque disque tandis que le coeur de l'écoulement est animé d'une rotation de solide rigide ; la seconde, de Stewartson [38], s'appuie sur un développement asymptotique à grand nombre de Reynolds (ainsi que sur une expérience avec des disques entraînant de l'air et ouverts sur le milieu ambiant) et conclut à l'existence d'une seule couche limite située sur le disque en rotation pendant qu'au centre le fluide ne tourne pas du tout et que l'écoulement est purement axial.

Ainsi Batchelor [2] et Rasmussen [32] ont supposé *a priori* une rotation "en bloc" de la partie centrale du fluide à une vitesse angulaire adimensionnée constante $r\Omega s'$, c'est-à-dire $g = s'$ (tandis que $g = 0$ sur le disque fixe et $g = 1$ au niveau du disque tournant), et des couches limites sur les disques. Ils ont alors trouvé, en raccordant la vitesse axiale dans le coeur, d'une part, avec la vitesse axiale dans la couche limite sur le disque en rotation (qui tend vers une solution à un disque quand $Re \rightarrow \infty$), d'autre part, avec la vitesse axiale de la solution à la Bödewadt qui se développe sur le disque au repos, que s' vaut 0.313.

Par contre suivant la prédiction avancée par Stewartson, la solution correspond à celle donnée par Cochran pour le problème originel de Von Karman.

c) Existence de solutions multiples

Les calculs numériques ont vite révélé un aspect intrigant de la solution de similitude pour le problème à deux disques : il est apparu que, pour des nombres de Reynolds assez

grands, celle-ci n'est pas unique.

Ainsi en 1968, Mellor, Chapple et Stokes [29] ont résolu, par une méthode de Runge-Kutta et avec différents choix d'adimensionnalisation, le problème non-linéaire (1.5)-(1.8) pour un disque en rotation et un disque fixe. Leur identification de plusieurs branches de solutions montre la non-unicité de la solution de similitude.

Les différentes solutions mises en évidence correspondent à des écoulements à 1, 2 ou 3 cellules dans le plan méridien, où une cellule est définie comme un écoulement borné par deux plans horizontaux sur lesquels la vitesse axiale est nulle. Mellor *et al* ont identifié en particulier trois solutions à une cellule différentes. Une première solution présente une couche limite avec un écoulement entrant sur le disque stationnaire, une couche limite avec un écoulement sortant sur le disque tournant et une région principale où le fluide est animé d'une vitesse de rotation angulaire constante. Cette solution qui est de type "Batchelor" (ou branche I) est obtenue pour de faibles nombres de Reynolds.

En plus de cette solution, Mellor *et al* ont mis en évidence, pour des nombres de Reynolds supérieurs à 437, une sous-branche de la branche de solutions I qui correspond à deux autres solutions à une cellule: une première solution composée de deux écoulements de couches limites séparés par un écoulement central animé d'une vitesse angulaire de direction opposée à celle du disque en rotation (qu'on nommera par la suite solution de la sous-branche de la branche I ou solution SSBI); une seconde solution du type solution de "disque libre" de Von Karman.

On peut également illustrer la multiplicité des solutions de similitude en se reportant à l'article de Nguyen, Ribault et Florent [31] qui ont obtenu des solutions numériques en résolvant un système analogue au système (1.5)-(1.8) à l'aide d'un schéma aux différences finies et d'une itération du type Newton-Raphson. S'il semble assez aisé d'exhiber plusieurs solutions, il paraît plus difficile de cerner leurs conditions d'existence. Ainsi, Nguyen, Ribault et Florent soulignent l'influence du choix de la précision de convergence et de la finesse du maillage, ici unidimensionnel, ainsi que l'influence du choix des valeurs initiales sur la précision et la forme des solutions. Par exemple, pour $Re = 400$ avec, comme conditions initiales $f \equiv 0$ et $g \equiv z$, ils ont obtenu une solution de similitude du type "Batchelor" avec un pas de discrétisation $\Delta z = \frac{1}{n} = 0.05$ et une solution de type "Stewartson" avec $\Delta z = 0.1$. L'article [31] illustre bien les difficultés rencontrées lorsqu'on s'intéresse aux disques en rotation.

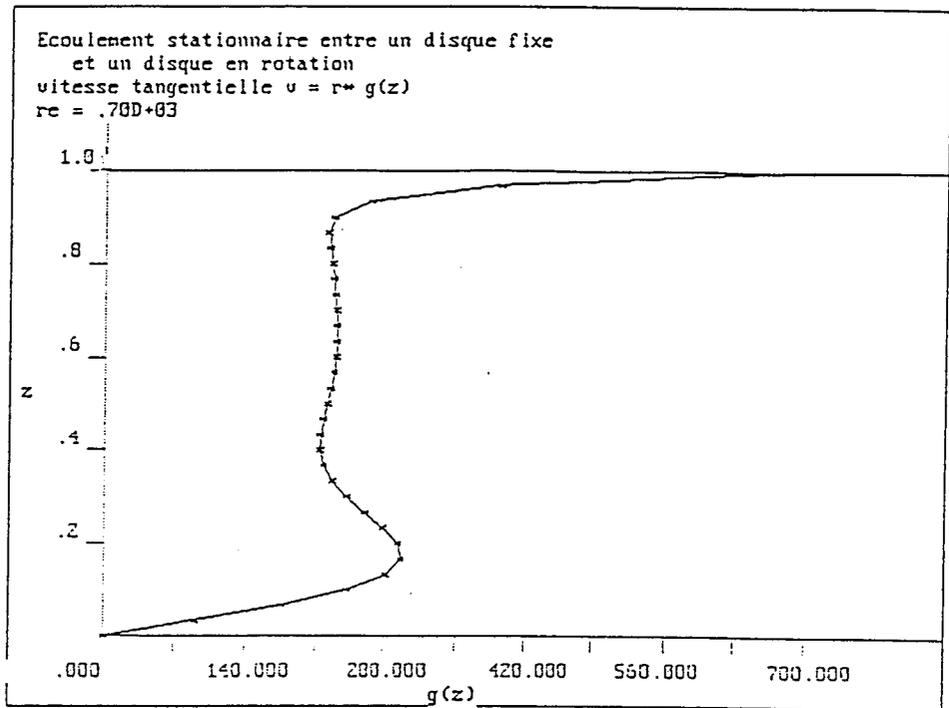


FIG. 1.1 - $Re = 700$. Profil de vitesse tangentielle pour $n = 30$.

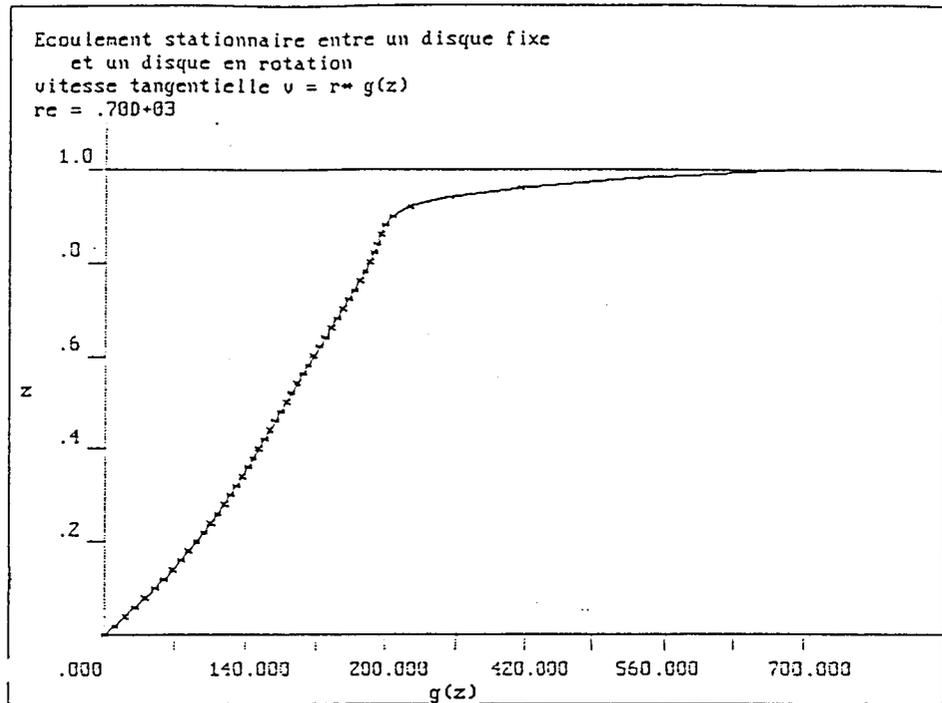


FIG. 1.2 - $Re = 700$. Profil de vitesse tangentielle pour $n = 50$.

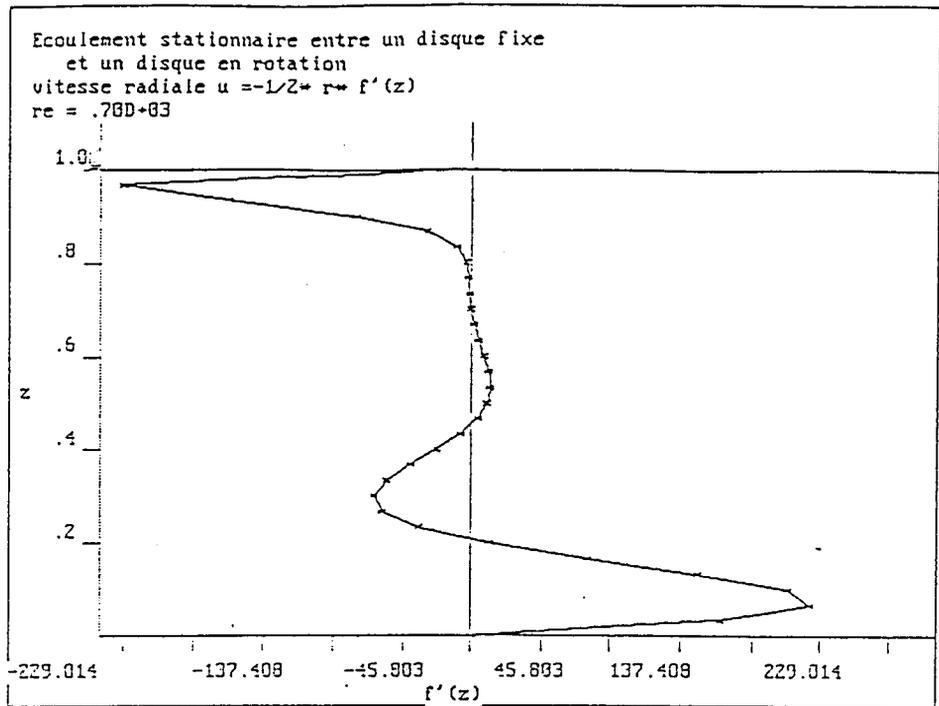


FIG. 1.3 - $Re = 700$. Profil de vitesse radiale pour $n = 30$.

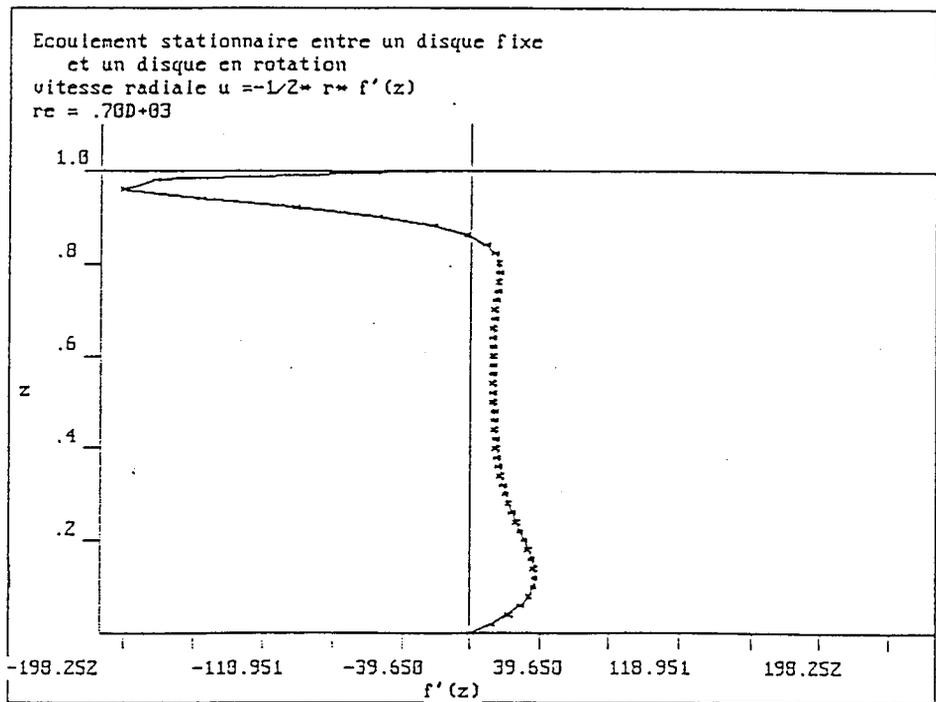


FIG. 1.4 - $Re = 700$. Profil de vitesse radiale pour $n = 50$.

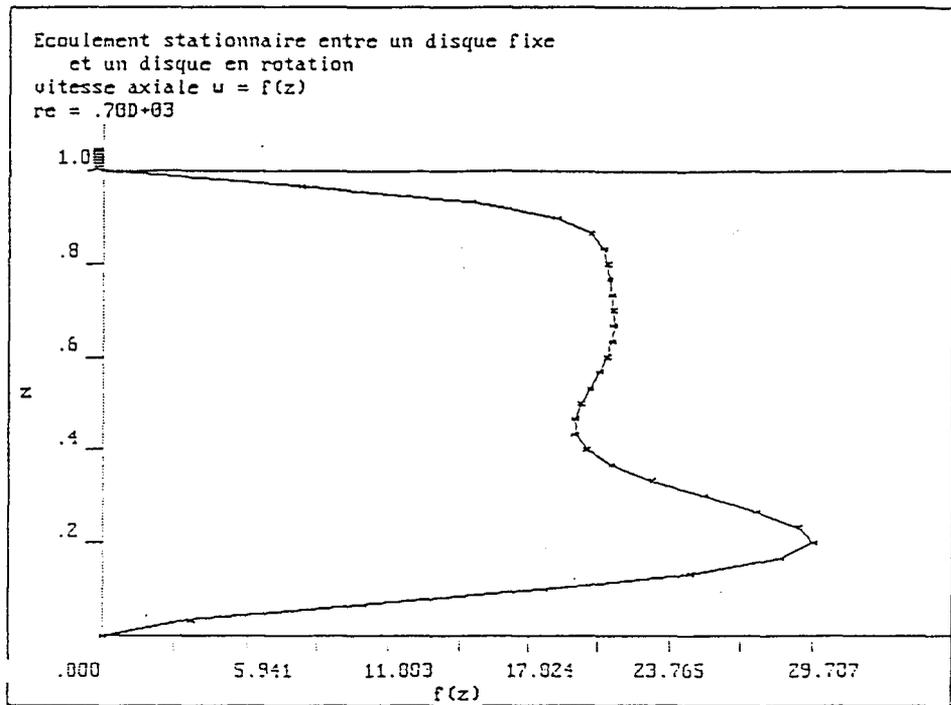


FIG. 1.5 - $Re = 700$. Profil de vitesse axiale pour $n = 30$.

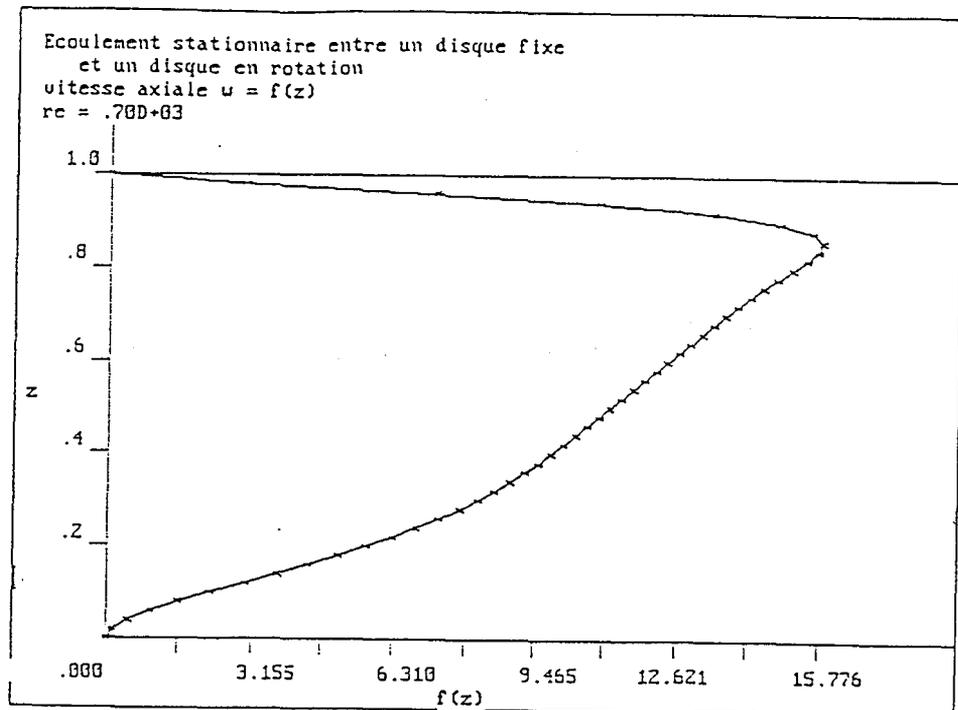


FIG. 1.6 - $Re = 700$. Profil de vitesse axiale pour $n = 50$.

Toutefois les résultats exposés dans [29] et [31] confirment que si une seule solution de similitude est trouvée pour les faibles nombres de Reynolds, pour des valeurs plus importantes de ce dernier une solution (au moins) autre que la solution de "Batchelor" apparaît, cette nouvelle solution présentant les caractéristiques d'un écoulement à la Stewartson où, en dehors de la couche limite située au voisinage du disque tournant, la vitesse est purement axiale.

Afin d'illustrer les deux principaux types de solution, on a repris l'algorithme utilisé dans [31] et qui est exposé en Annexe A et on présente pour $Re = 700$ les résultats obtenus avec deux pas différents. On montre ainsi un exemple des composantes de vitesse associées à la solution de type Batchelor (figures (1.1)-(1.3)-(1.5)) et à la solution de type Stewartson (figures (1.2)-(1.4)-(1.6)). Le profil de la figure (1.1) présente les caractéristiques du profil de vitesse tangentielle d'une solution de type Batchelor avec ses deux couches limites, une sur chaque disque, et son écoulement central animé d'une vitesse angulaire presque uniforme. Si on prend la valeur de $g(z)$ à mi-canal, c'est-à-dire en $z = 0.5$, on trouve que $g(0.5) = 0.3135 g(1)$, résultat qui s'accorde bien avec la valeur de 0.313 de [2] et [32]. La figure (1.3), c'est-à-dire le profil obtenu pour $f'(z)$, montre également bien un écoulement radial centrifuge près du disque tournant et un écoulement centripète au voisinage du disque fixe.

Quant à l'autre solution, dont le profil de vitesse tangentielle est exposé en figure (1.2), si elle correspond à une solution de type Stewartson par la présence d'une seule couche limite sur le disque en rotation, elle ne présente toutefois pas tout à fait une vitesse azimutale quasi-nulle dans le coeur. Cependant, puisque la vitesse radiale prise à mi-canal (par exemple) ne représente qu'environ 6.52% de la valeur absolue de la vitesse radiale maximale - située dans la couche limite supérieure-, on peut dire que la composante de vitesse la plus importante dans le coeur reste la composante axiale, comme on peut le constater en figure (1.6).

Il s'avère, par ailleurs, que les profils de vitesse axiale (figures (1.5) et (1.6)) affichent, pour les deux solutions, des valeurs positives dans tout l'entrefer. Ainsi, la conservation globale de la masse ne peut être réellement respectée qu'en prenant en compte les conditions aux limites en $r \rightarrow \infty$. On peut ainsi supposer (d'après les résultats exposés au paragraphe suivant) que si les disques sont placés dans une enceinte fermée, le fluide va aller du disque supérieur vers le disque inférieur en descendant le long de la paroi latérale à l'intérieur d'une couche de cisaillement verticale, et on est alors en présence d'une solution de type Batchelor. Par contre, si les disques sont baignés dans un fluide au repos à

“l’infini”, le disque supérieur va se comporter comme un ventilateur centrifuge et expulser le fluide dans le milieu environnant ; l’aspiration du fluide du disque fixe vers le disque en rotation induit une zone de dépression qui attire du fluide extérieur dans le coeur et dans la couche limite inférieure. On reconnaît alors les caractéristiques d’une solution de type Stewartson.

Bien que le calcul numérique utilisé ici n’ait pas fourni de solutions SSBI, on peut se demander aussi à quelles conditions aux limites peut correspondre cette dernière solution : on peut ainsi imaginer que si les disques étaient placés dans une enceinte susceptible de tourner dans le sens inverse du disque tournant, l’écoulement serait alors vraisemblablement divisé en deux zones d’influence, l’une correspondant à la couche limite au voisinage du disque en rotation et l’autre au coeur et au voisinage du disque fixe. Les solutions numériques de la littérature permettent ainsi de s’interroger sur les écoulements de base et leurs relations avec les aspects physiques des phénomènes.

d) Validité de la solution de similitude

On peut donc se demander dans quelle mesure la solution de similitude est pertinente pour modéliser un écoulement réel confiné entre des disques de rayon fini.

Dijkstra et Van Heijst [12] se sont intéressés de façon numérique et expérimentale à l’écoulement dans un réservoir cylindrique de petit rapport d’aspect $\delta = H/L$, où H est la distance séparant le fond du réservoir d’un couvercle pouvant tourner à une vitesse Ω_B différente de la vitesse Ω_T de l’ensemble *disque inférieur-paroi latérale* et où L est le rayon intérieur du fond du réservoir. Les expériences rapportées dans [12] ont été menées avec un réservoir de rapport d’aspect $\delta = 0.07$ et pour un rapport de vitesse $s = \Omega_T/\Omega_B$ (ou $\sigma = \Omega_B/\Omega_T$) compris entre -1 et 0 . Toutefois, on ne s’intéressera ici qu’aux résultats obtenus pour $s = 0$ (et $\sigma = 0$), c’est-à-dire pour un écoulement dû à un disque fixe et un disque tournant mais avec une paroi latérale soit en rotation, soit fixe.

Il apparaît que Dijkstra et Van Heijst obtiennent (par exemple en $r/L = 0.233$, pour $s = 0$ et $Ek = \nu/(H^2\Omega_B) = 0.01$), un bon accord entre la solution de similitude, leur solution numérique (issue d’un schéma aux différences finies, bidimensionnel, discrétisant les équations de Navier stationnaires complètes) et leurs résultats expérimentaux obtenus soit avec de l’eau, soit avec un mélange eau-glycérol. Cependant, comme il était prévisible, en raison de la présence de la paroi latérale du cylindre le comportement linéaire en r de la solution numérique et de la solution expérimentale ne persiste pas jusqu’en $r/L = 1$.

De plus, que ce soit numériquement ou expérimentalement, seule une solution de type "Batchelor" a été identifiée dans [12]. La même constatation est faite dans la thèse de P. Vaillant [41] où seule une solution de Bödewadt au voisinage de chaque disque, autrement dit une solution de type Batchelor, a pu être mise en évidence dans les zones annulaires entre les disques, là où l'écoulement est laminaire.

Par contre, en 1987 Brady et Durlofsky [7] ont exhibé des solutions numériques de type "Stewartson". Tout comme Dijkstra et Van Heijst, ils se sont penchés sur la validité de la solution de similitude de Von Karman comme modèle d'un écoulement axisymétrique entre deux disques finis et coaxiaux en rotation. Les résultats qu'ils présentent ont été obtenus au moyen de la combinaison d'une analyse asymptotique et d'un schéma numérique, combinaison appliquée à deux types différents de conditions aux limites latérales : les disques peuvent être enclos par une enceinte ou "libres" - c'est-à-dire baignant dans le fluide étudié. Le modèle utilisé a donc été obtenu comme limite des équations de Navier pour un écoulement axisymétrique avec le paramètre $\epsilon = L/H$ arbitrairement grand, la résolution numérique s'effectuant à l'aide d'un schéma aux différences finies pseudo-instationnaire. Comme dans [12], les calculs ont été menés pour un rapport de vitesse des deux disques compris entre -1 et 0 , mais on ne s'intéressera ici qu'au cas $s = 0$. Dans ce dernier cas, lorsque la limite est "ouverte", la solution est de type Batchelor pour les faibles nombres de Reynolds tandis qu'elle devient du type Stewartson pour des $Re \geq 250$. Cependant, pour des nombres de Reynolds $Re \geq 80$, la solution de branche I ne colle plus à la solution de similitude, et cela, non seulement pour des r modérés mais aussi en $r \simeq 0$ car il se forme, près de l'axe de rotation, une région de collision. Par contre, lorsque la limite est "fermée", la solution de type Batchelor ne correspond plus quantitativement à la solution calculée que pour des $Re \leq 60$, mais y correspond toujours qualitativement lorsque le nombre de Reynolds croît.

Les résultats obtenus par Brady et Durlofsky laissent à penser que la multiplicité des solutions de similitude de Von Karman découle de l'indétermination concernant les conditions aux limites pour les $r \rightarrow \infty$. Toutefois, il semble que les conclusions sur le rôle des conditions aux limites dans l'émergence de tel ou tel type de solution à partir des résultats de Brady et Durlofsky sont surtout valables pour un rapport d'aspect pas trop petit. En effet, les observations expérimentales exposées dans la thèse de J-P Ribault [33] et effectuées à partir de mesures de pression indiquent que si le rapport d'aspect est petit (ce qui est forcément le cas avec l'hypothèse de disques "infinis") alors les conditions aux

limites n'interviennent pas et on obtient toujours une solution de type Batchelor.

Les observations dans [33] montrent également qu'il existe pour des rapports d'aspect plus grands un autre type d'écoulement que celui lié à la solution de Batchelor. Cet autre type d'écoulement, dit "décroché", est vraisemblablement dû à un ralentissement des vitesses de l'écoulement "non-décroché" -de type Batchelor- et de nature turbulente. On peut d'ailleurs empêcher l'apparition de l'écoulement "décroché" en jouant sur la configuration des bords des disques et en provoquant un entraînement même partiel de l'écoulement à la périphérie des disques.

La solution de Batchelor apparaît comme la seule solution observée réellement dans les expériences destinées à valider les différentes solutions de similitude données par calcul numérique.

1.2 Instabilités des écoulements dus à des disques en rotation

1.2.1 Instabilités dans la couche d'Ekman

La classification des instabilités survenant dans les écoulements dus à des disques en rotation est issue des observations expérimentales ([16], [17]) réalisées dans la couche d'Ekman (générée dans un cylindre en rotation avec la paroi latérale comme source et le centre comme puits).

Deux types différents d'instabilité associés à cette couche d'Ekman ont été mis en évidence et baptisés instabilité de classe A et instabilité de classe B (en raison de leur ordre d'apparition). Les ondes des deux familles forment une série de vortex en rouleaux horizontaux dont l'espacement est lié à la profondeur de la couche limite. Dans la littérature, il est fait référence à l'écoulement perturbé soit comme "ondes", soit comme "vortex" (ou "tourbillons"). En effet, comme ces perturbations possèdent de la vorticité, quand l'écoulement de base est retranché de l'écoulement total, elles apparaissent comme des tourbillons, mais, en termes d'écoulement total, elles apparaissent comme une ondulation des lignes de courant.

A partir des descriptions de ces ondes dans [20], [16] et [17], on rappelle ici les principales caractéristiques des instabilités observées :

- Ondes de classe A (ou encore dites de type *II*) : formées de vortex presque concentriques, ces ondes se déplacent vers l'axe de rotation et sont de longueur d'onde plu-

tôt grande. Il semble qu'elles proviennent principalement du cisaillement constant de la composante de vitesse azimutale.

- Ondes de classe B (ou type *I*) : ces ondes se présentent sous la forme de vortex en spirale et sont stationnaires dans le repère en rotation. De longueur d'onde plutôt courte, leur position suivant le rayon coïncide avec l'apparition du premier point d'inflexion du profil de vitesse radiale. Cette instabilité est aussi appelée "instabilité cross-flow".

Faller [16] a noté également, lors de ses expériences sur la couche d'Ekman, réalisées avec de l'eau, que les instabilités de classe A apparaissaient de façon conséquente seulement en présence de perturbations mécaniques de l'expérience. Cette dépendance a été confirmée dans [17] où seul le type *I* apparaissait lorsque les expériences étaient réalisées avec soin, tandis que le type *II* apparaissait plus ou moins selon la force des perturbations.

1.2.2 Instabilités sur disque tournant

L'instabilité de couche limite tridimensionnelle sur disque tournant a pour origine les points d'inflexion du profil moyen de vitesse [25]. Ce profil moyen s'écrit sous la forme :

$$U(\zeta, \epsilon) = F(\zeta) \cos \epsilon - (1 - G(\zeta)) \sin \epsilon \quad (1.10)$$

où les fonctions F et G sont les fonctions de similitude $f(z)$ et $g(z)$ réécrites en variable de couche limite ζ (avec $\zeta = \frac{z}{\delta} = z\sqrt{\frac{\Omega}{\nu}}$) et où ϵ est l'angle entre une direction quelconque et la direction radiale pris en un point M pour un rayon R donné. Les points d'inflexion peuvent engendrer localement de la vorticité et donc des perturbations qui vont se propager. L'étude des perturbations sur le disque tournant nécessite donc (dans l'absolu) une théorie spatio-temporelle puisque l'évolution de l'amplitude de ces instabilités est liée au déplacement de celles-ci le long de l'écoulement. Or si la solution est cherchée sous la forme la plus générale :

$$\Phi(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}, \omega} A(\omega, \vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (1.11)$$

où \vec{r} est le vecteur position et \vec{k} et ω complexes, le problème devient intraitable analytiquement. Un choix doit être fait. Ainsi, dans [25], la théorie spatiale est privilégiée ($\vec{k} = \vec{k}_r + i\vec{k}_i$ et $\omega = \omega_r$) et l'étude est locale suivant un rayon R .

Les mécanismes de la transition vers la turbulence dans la couche limite de disque tournant ne sont pas encore complètement identifiés. Il semble que des rugosités -inévitables sur la surface du disque génèrent un système d'ondes stationnaires avec lequel interagit l'instabilité instationnaire "cross-flow" , voire une instabilité secondaire. L'amplification des perturbations primaires stationnaire et instationnaire ainsi que leurs probables interactions conduiraient à un état turbulent.

1.2.3 Instabilités dues à deux disques en rotation

On ne trouve, à ma connaissance, que peu de travaux consacrés à l'instabilité de l'écoulement confiné entre deux disques en rotation.

En 1983, Szeri, Schneider et Labbe ([39] et [40]) se sont penchés sur la relation entre le nombre de Reynolds (lié au rayon des disques) et la direction de propagation des instabilités. Ils ont obtenu numériquement et expérimentalement l'écoulement de base [39] dont ils ont étudié la stabilité [40]. Le modèle développé, très lourd, fait appel à des techniques rencontrées dans l'étude de stabilité des couches limites tridimensionnelles et nécessite un traitement numérique. Celui-ci est effectué à partir d'un système obtenu par une formulation à la Galerkin exprimée dans une base de B-splines.

Dans le cas d'un disque en rotation et d'un disque fixe, Szeri *et al* ont comparé les résultats obtenus numériquement pour des disques infinis et expérimentalement ($Re \sim 50$) pour des disques finis en un rayon adimensionné $\frac{r}{s} = 14.4$ où s est la hauteur de l'entrefer. Pour de petits nombres de Reynolds, à mi-rayon, où l'écoulement réel approche la solution de disques infinis, les caractéristiques de stabilité de l'écoulement de disques finis sont trouvées voisines de celles obtenues pour des disques infinis. Par contre, l'accord au bord des disques et à l'axe de rotation est moins bon. Pour $Ek^{-1} = \frac{\Omega s^2}{\nu} = 275$, suivant Holodniok *et al* [23], il y a (comme conséquence d'un calcul numérique) trois écoulements de base différents : l'un, de type Batchelor ressemble superficiellement à un écoulement de Couette et devient instable à partir de $\frac{r}{s} = 41.13$; pour les deux autres écoulements de base, la vitesse dans le coeur est largement supérieure à la vitesse de chacune des frontières et l'écoulement ressemble alors à un écoulement de Poiseuille . De plus ces deux derniers profils sont instables quel que soit $\frac{r}{s}$.

Un autre article, [36], examine expérimentalement, pour un disque en rotation et un disque fixe, la stabilité des écoulements de base et leur transition vers la turbulence. Si-

riyat a effectué ses expériences avec de l'eau et pour une configuration avec de petits rapports de l'entrefer sur le rayon des disques α (0.014, 0.0225 et 0.0475), la paroi du disque inférieur empêchant tout écoulement entrant de l'extérieur tandis qu'un apport d'eau était fourni par un système d'alimentation statique.

Comme souvent dans la littérature, est introduit dans [36] un nombre de Reynolds critique (qui n'est pas à proprement parler un nombre de Reynolds mais qui permet d'avoir le rayon critique r_c seulement multiplié par un facteur connu) $Re_\delta = r_c \sqrt{\frac{\Omega}{\nu}}$, où $\sqrt{\frac{\Omega}{\nu}}$ est l'échelle de couche limite et r_c la position des vortex les plus extérieurs, position mesurée depuis l'axe de rotation, tandis que l'écoulement de base entre les disques finis est spécifié par le rapport d'aspect α et le nombre d'Ekman avec $Ek^{-1} = \frac{\Omega h^2}{\nu}$.

Sirivat a observé trois "modes" d'instabilité issus d'états de base laminaires différents :

- le "mode *I*" où il y a apparition de cellules (Sirivat nomme cellule un vortex dans le plan méridien) stationnaires, presque concentriques et occupant vraisemblablement tout l'entrefer. Ce mode *I* semble correspondre à une instabilité de classe A et s'est manifesté pour $\alpha = 0.0475$ et $20 < Ek^{-1} < 200$. De plus, ce mode *I* est à associer avec un écoulement de base de type Batchelor.
- le "mode *II*" a été visualisé pour une taille d'entrefer petite ($\alpha = 0.014$). Bien que ces vortex soient en spirale et se déplacent vers l'extérieur, leur angle d'orientation comparé à celui des instabilités des couches d'Ekman semble indiquer qu'ils sont aussi de classe A ; cependant, tandis que l'historique de l'écoulement n'a pas d'influence sur le mode *I*, le rayon critique pour le mode *II* dépend de la façon d'approcher la vitesse finale, par valeurs supérieures ou par valeurs inférieures. Ce mode se manifeste pour des $Ek^{-1} < 20$ et l'écoulement de base est l'écoulement de torsion de Couette, satisfaisant (pour le profil tangentiel) la relation $v_\theta = r\Omega z/h$ où Ω est la vitesse du disque et r le rayon local.
- le "mode *III*" est observé lorsque le disque tourne relativement vite. Les vortex en spirale sont confinés à l'intérieur de la couche limite en rotation et sont presque stationnaires par rapport à elle. Cette instabilité semble similaire à l'instabilité "cross-flow" et se rapproche donc de l'instabilité de classe B. Son apparition dépend du rapport d'aspect : si pour $\alpha = 0.0225$ elle est mise en évidence pour $Ek^{-1} > 225$, elle n'est observée pour $\alpha = 0.0475$ que pour $Ek^{-1} > 525$. L'écoulement de base de mode *III* est auto-similaire tel que $v_\theta = r\Omega f(\frac{z}{h})$ et correspond aussi à un profil de type Batchelor, la présence d'une paroi latérale ne permettant vraisemblablement pas d'observer une solution du type Stewartson.

L'examen de la transition vers la turbulence pour les trois modes indique que l'apport d'un écoulement turbulent depuis la paroi latérale semble être un agent primordial de la transition pour les modes *I* et *III*. En particulier dans le cas du mode *I*, le rayon critique se déplace vers l'axe à mesure que Ek^{-1} augmente jusqu'à ce que l'écoulement entier soit rempli de cellules du type *II*. Pour un Ek encore plus grand, l'écoulement amène, à partir de la paroi latérale, du fluide turbulent vers l'intérieur.

Pour le mode *II*, la transition vers la turbulence est due à des collisions de tourbillons qui apparaissent spatialement de façon aléatoire.

Chapitre 2

Systeme dynamique à trois modes

2.1 Introduction

Il y a peu de publications traitant des instabilités de l'écoulement d'un fluide confiné entre deux disques en rotation. On peut citer l'article de Sirivat [36] dont les résultats, expérimentaux, sont résumés au Chapitre 1. A ma connaissance, ce sujet n'a pas été abordé jusqu'ici avec la méthode de Galerkin et des systèmes dynamiques. Les difficultés liées à la détermination de l'écoulement de base et à des instabilités physiquement spatio-temporelles n'y sont certainement pas étrangères.

En effet, si on se réfère à un exemple souvent traité dans la littérature, la convection de Rayleigh-Bénard, on s'aperçoit qu'on est confronté tout de suite, dans le problème étudié ici, à quelque chose d'analogue aux instabilités secondaires liées à la convection [28]. Or les caractéristiques de ces instabilités secondaires sont plus difficiles à interpréter que celles des instabilités primaires, car le nouvel état de base est plus compliqué que l'état de repos initial. Ainsi, selon les cas, peuvent intervenir des processus confinés dans les couches limites thermiques situées au voisinage des plaques horizontales ou encore des boucles de "feed-back" entre les rouleaux de convection et une composante d'écoulement à grande échelle. Les expériences menées sur la convection ont également mis en évidence le rôle des effets de confinement, c'est-à-dire que le nombre des modes en interaction est relié aux caractéristiques géométriques (ou paramètres de forme) de la configuration étudiée. Ces paramètres de forme sont choisis pour pouvoir comparer l'extension latérale du dispositif à l'échelle intrinsèque fournie par le mécanisme d'instabilité. Lorsque le paramètre de forme est petit, la structure spatiale des modes est gelée par les effets de confinement latéral et, dans ce cas, la déstabilisation suit les scénarios classiques de transition vers le chaos temporel. Par contre, si le paramètre de forme est grand, le champ convectif

présente un caractère local et nécessite une étude spatio-temporelle.

On étudie ici l'écoulement entre un disque fixe et un disque en rotation (dépendante du temps) en utilisant les hypothèses de Von Karman (cf. Chapitre 1), c'est-à-dire que l'écoulement est supposé auto-similaire suivant r et qu'il se présente "grossièrement" sous la forme suivante :

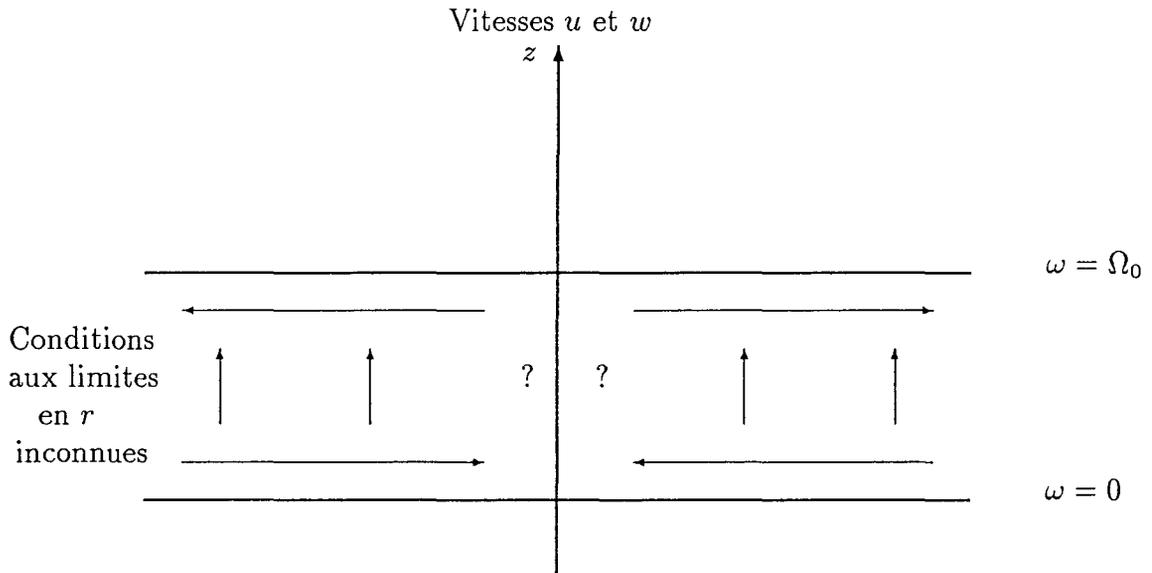


FIG. 2.1 - *Écoulement "de Von Karman" entre un disque fixe et un disque en rotation.*

Ainsi, si des instabilités se superposent à l'écoulement de base, elles vont, en toute généralité, être déplacées par ce dernier et on est confronté à des perturbations se développant aussi bien en temps qu'en espace. Comme le problème analytique complet est très ardu, on va privilégier ici l'aspect temporel en choisissant comme système de base les équations de Navier écrites pour le champ de vitesse auto-similaire (et donc se limiter à l'étude du mode III de [36]). On utilise ensuite la méthode de Galerkin pour obtenir un système dynamique dont on étudie les solutions stationnaires ainsi que le devenir des trajectoires dans l'espace des phases. Lorsque la vitesse de rotation est constante, les solutions stationnaires ressemblent aux profils de vitesse de [31] évoqués au Chapitre 1, mais leur devenir dans l'espace des phases se limite à des attracteurs de type point stationnaire et cycle limite. Si la vitesse angulaire est fonction du temps, la dynamique est plus riche et les trajectoires deviennent chaotiques pour certaines valeurs des paramètres.

De plus, la notion de "chaotique" ne recouvre pas seulement la notion d'attracteur

étrange. Ainsi, dans l'article [9], pour solution chaotique, on se réfère à la fois aux mouvements irréguliers liés à des trajectoires chaotiques dans l'espace des phases, mais aussi à la solution de cycle limite régulier avec l'existence d'une frontière fractale pour le bassin d'attraction. En effet, ces deux types de solutions sont la cause d'une dépendance sensible aux conditions initiales, ce qui à son tour mène à l'imprédictibilité du système. Ainsi l'équation de Duffing "cubic soft spring" (écrite sous la forme d'un système non-autonome comprenant un terme de forçage) étudiée dans [9] présente les deux phénomènes (voir Annexe E) qu'on retrouve également pour le système dynamique étudié ici.

Ce deuxième chapitre comporte donc une première partie consacrée à l'établissement d'un système dynamique à trois modes à partir des équations de Navier, une seconde partie traitant des solutions stationnaires du système pris autonome et une troisième et dernière partie abordant l'évolution vers le chaos.

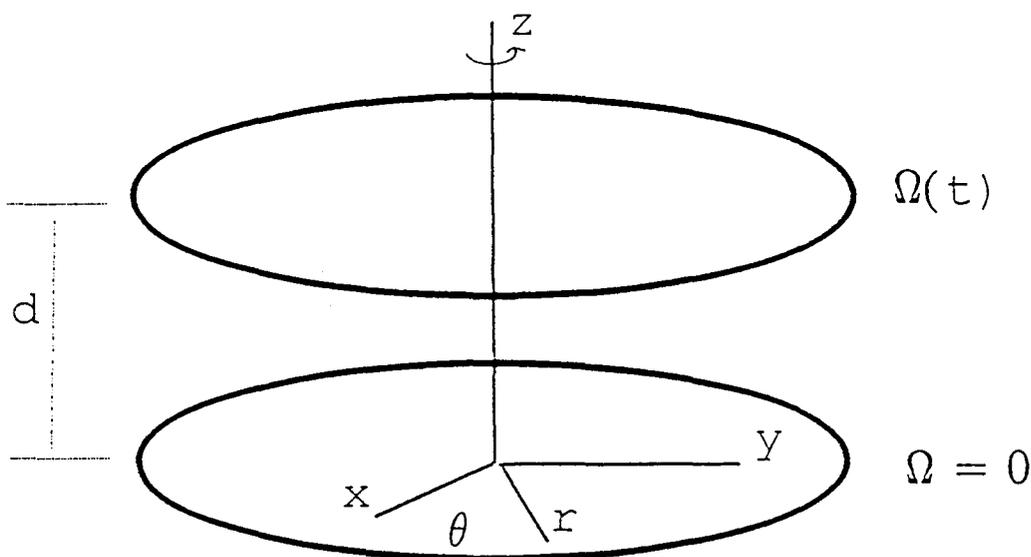


FIG. 2.2 - Disques "infinis", parallèles et coaxiaux. Le disque inférieur est fixe, le disque supérieur tourne à la vitesse $\Omega(t)$.

2.2 Equations modèles

2.2.1 Equations de base

On étudie l'évolution instationnaire d'un écoulement de fluide visqueux et incompressible, confiné entre deux disques dont l'un est en rotation non constante fonction du temps. On suppose que les disques sont de rayon infini, qu'ils sont coaxiaux et séparés par un entrefer de hauteur d . Le disque supérieur est animé de la vitesse de rotation $\Omega(t)$ dépendante du temps tandis que le disque inférieur est maintenu fixe. On représente en figure (2.2) la configuration étudiée.

La géométrie axisymétrique de ce problème nous permet de supposer que l'écoulement est indépendant de la coordonnée angulaire θ (c'est-à-dire que l'on a $\frac{\partial}{\partial \theta} \equiv 0$). Ainsi, muni de cette hypothèse, on écrit, dans un repère galiléen lié au disque fixe, les équations de Navier en coordonnées cylindriques, c'est-à-dire en fonction de (r, θ, z) . Dans ce repère, on note u la vitesse radiale, v la vitesse tangentielle et w la vitesse axiale d'une particule fluide. On appelle p la pression, ρ_0 la masse volumique et ν_0 la viscosité cinématique du fluide. On suppose que ρ_0 et ν_0 sont des constantes.

Les équations de quantité de mouvement et de continuité s'écrivent alors sous la forme suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r} = \nu_0 \left(\nabla^2 u - \frac{u}{r^2} \right), \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} = \nu_0 \left(\nabla^2 v - \frac{v}{r^2} \right), \quad (2.2)$$

(I)

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} = \nu_0 \nabla^2 w, \quad (2.3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.4)$$

où :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Aux équations (2.1)-(2.4), on associe des conditions aux limites liées à l'adhérence du fluide visqueux sur les parois et qui se présentent sous la forme suivante :

$$z = 0 \quad u = v = w = 0 , \quad (2.5)$$

$$z = d \quad u = w = 0, v = r \Omega(t) = r \Omega_0 \omega\left(\frac{t}{t_0}\right), \quad (2.6)$$

où t_0 est un laps de temps caractéristique. De même, on s'impose des conditions initiales que l'on choisit ici telles que :

$$t = 0 \quad u = u^0, w = w^0, v = v^0 + rz \Omega_0 \omega(0) . \quad (2.7)$$

Dans le cadre de cette étude, on s'intéresse à des disques supposés "infinis". On se place donc "loin" des bords et, de ce fait, on n'introduira pas de conditions en r .

2.2.2 Hypothèse de similitude

Puisque les disques sont supposés de rayon "infini", nous allons utiliser l'hypothèse de Von Karman [27]. On supposera donc que la vitesse axiale ne dépend pas de r . De là, en tenant compte de cette hypothèse de similitude on pose que :

$$w = d\Omega_0 h . \quad (2.8)$$

L'expression de w ainsi que celle de u sont choisies de manière à vérifier identiquement l'équation de continuité (2.4) adimensionnée (avec le choix de grandeurs caractéristiques du paragraphe suivant). De même, les expressions de v et de p sont issues des équations du mouvement adimensionnées. On en déduit ainsi que :

$$u = -\frac{1}{2}r\Omega_0 \frac{\partial h}{\partial z}, \quad (2.9)$$

$$v = r\Omega_0 g, \quad (2.10)$$

$$p = \rho_0 \Omega_0^2 P, \quad (2.11)$$

où $h = h(t, z)$, $g = g(t, z)$ et $P = P(r, z, t)$.

2.2.3 Adimensionnalisation

On choisit donc d comme longueur caractéristique pour z , Ω_0 comme grandeur caractéristique de u/r et v/r , (en conséquence $d\Omega_0$ pour w), ainsi que $t_0 = \Omega_0^{-1}$ comme temps caractéristique.

L'adimensionnalisation fait apparaître dans les équations un nombre de Reynolds tel que :

$$Re = \frac{\Omega_0 d^2}{\nu_0}$$

qui caractérise le rapport entre les effets visqueux et les effets convectifs. En substituant les relations (2.8)-(2.11) ci-dessus dans le système (I) adimensionné, il vient les équations suivantes pour les trois fonctions h , g et P :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 + h \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + 2g^2 - \frac{2}{r} \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^3 h}{\partial z^3}, \quad (2.12)$$

$$(II) \quad \frac{\partial g}{\partial t} - g \frac{\partial h}{\partial z} + h \frac{\partial g}{\partial z} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}, \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}, \quad (2.14)$$

en gardant les mêmes notations pour z et t sans dimensions. Quant aux conditions aux limites et initiales (2.5)-(2.7), elles deviennent, après adimensionnalisation et substitution des relations de similitude, telles que :

$$z = 0 \quad h = \frac{\partial h}{\partial z} = g = 0, \quad (2.15)$$

$$z = 1 \quad h = \frac{\partial h}{\partial z} = 0, \quad g = \omega(t) \quad (2.16)$$

et

$$t = 0 \quad h = h^0, \quad g = g^0 + \omega(0)z, \quad (2.17)$$

où on a supposé que $u^0 = -\frac{1}{2}r\Omega_0 \frac{\partial h^0}{\partial z}$, $w^0 = d\Omega_0 h^0(z)$ et $v^0 = r\Omega_0 g^0(z)$.

2.2.4 Elimination de la pression

Comme h et g ne dépendent que de z et t , on peut déduire de l'équation (2.12) que

$$P = r^2 \Pi(t, z) + d^2 \Lambda(t, z) \quad (2.18)$$

et de l'équation (2.14) que $\frac{\partial \Pi}{\partial z} \equiv 0$ afin d'éliminer le terme en r^2 qui apparaît lorsqu'on remplace, dans cette même équation (2.14), P par son expression (2.18). Cela impose donc pour la pression p la forme dimensionnée suivante :

$$p(t, r, z) = \rho_0 (\Omega_0^2 r^2 \Pi(t) + \Omega_0^2 d^2 \Lambda(t, z)) .$$

Il s'agit maintenant d'éliminer dans l'équation (2.12) le terme lié à la pression $\Pi(t)$. Pour cela, on va dériver l'équation (2.12) par rapport à z . On obtient alors pour les inconnues h et g deux équations telles que :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial h^2}{\partial z^2} \right) + h \frac{\partial^3 h}{\partial z^3} + 4g \frac{\partial g}{\partial z} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^4 h}{\partial z^4} , \quad (2.19)$$

(III)

$$\frac{\partial g}{\partial t} - g \frac{\partial h}{\partial z} + h \frac{\partial g}{\partial z} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} . \quad (2.20)$$

Ainsi, une fois h et g déterminées, on pourra obtenir la pression grâce à deux relations déduites de (2.12) et (2.14) telles que :

$$\Pi(t) = \frac{1}{4} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 + h \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + 2g^2 - \frac{1}{Re} \frac{\partial^3 h}{\partial z^3} \right] \quad (2.21)$$

et

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial z} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} - \frac{\partial h}{\partial t} - h \frac{\partial h}{\partial z} . \quad (2.22)$$

2.2.5 Equations modèles

On remarque que les conditions aux limites pour g ne sont pas homogènes en $z = 1$. Afin de pouvoir mettre en oeuvre la méthode de Galerkin, on y remédie à l'aide du changement de fonctions suivant :

$$Q(t, z) = g(t, z) - \omega(t)z \quad (2.23)$$

et

$$H(t, z) = h(t, z) . \quad (2.24)$$

De là, les nouvelles conditions en $z = 0$ et $z = 1$ deviennent :

$$z = 0 \quad H = \frac{\partial H}{\partial z} = Q = 0 , \quad (2.25)$$

$$z = 1 \quad H = \frac{\partial H}{\partial z} = 0, Q = 0 \quad (2.26)$$

ainsi que :

$$t = 0 \quad H = h^0, Q = g^0 . \quad (2.27)$$

Cependant, il est aussi nécessaire de reporter ce changement de fonctions dans le système (III) qui s'écrit alors :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial H^2}{\partial z^2} \right) + H \frac{\partial^3 H}{\partial z^3} + 4(Q + \omega(t)z) \left(\frac{\partial Q}{\partial z} + \omega(t) \right) = \frac{1}{Re} \frac{\partial^4 H}{\partial z^4} , \quad (2.28)$$

(IV)

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + z \frac{d\omega(t)}{dt} - (Q + \omega(t)z) \frac{\partial H}{\partial z} + H \left(\frac{\partial Q}{\partial z} + \omega(t) \right) = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} . \quad (2.29)$$

2.2.6 Système dynamique à trois modes

Les inconnues sont maintenant recherchées sous la forme de développements de fonctions de z vérifiant les conditions aux limites. Si pour approcher l'inconnue Q , il suffit de choisir des fonctions de z qui s'annulent en $z = 0$ et $z = 1$, par exemple $\sin(n\pi z)$, par contre, les fonctions approchant H doivent non seulement s'annuler en $z = 0$ et $z = 1$, mais il doit en être de même pour leurs dérivées premières. Les inconnues Q et H sont ainsi développées de la manière suivante :

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(t) \sin(n\pi z) \quad (2.30)$$

et

$$H = \sum_{\nu} H_{\nu}(t) \psi_{\nu}(z) \quad (2.31)$$

avec

$$\psi_{\nu}(z) = (\sin \nu - sh \nu)(ch \nu z - \cos \nu z) + (ch \nu - \cos \nu)(sh \nu z - \sin \nu z), \quad (2.32)$$

où les valeurs propres ν , en nombre infini mais dénombrable, vérifient la relation suivante :

$$ch \nu \cos \nu = 1. \quad (2.33)$$

Par ailleurs, on vérifie que les ψ_{ν} forment bien une base de fonctions orthogonales (voir Annexe B). On notera par la suite :

$$\alpha = (\sin \nu - sh \nu)$$

et

$$\beta = (ch \nu - \cos \nu).$$

On tronque maintenant les inconnues H et Q de sorte que :

$$Q = Q_1(t) \sin(\pi z) + Q_2(t) \sin(2\pi z) \quad (2.34)$$

et

$$H = H_{\nu_1}(t) \psi_{\nu_1}(z) \quad (2.35)$$

où ν_1 est la première solution non nulle de (2.33). Dans le système (IV), on remplace H et Q par leurs développements (2.34) et (2.35), tronqués respectivement au premier et au deuxième mode ; on multiplie ensuite l'équation (2.28) par $\psi_{\nu_1}(z)$ et l'équation (2.29) par $\sin(\pi z)$ puis $\sin(2\pi z)$ ([13] et [44], p87). Enfin en intégrant de 0 à 1 les relations ainsi obtenues, on obtient le système de trois équations différentielles ou système dynamique à trois modes suivant :

$$A_1 \frac{dH_{\nu_1}}{dt} = \frac{A_2}{Re} H_{\nu_1} + A_3 H_{\nu_1}^2 + A_4 Q_1^2 + A_5 Q_1 Q_2 + A_6 Q_2^2 + A_7 Q_1 + A_8 Q_2 + A_9, \quad (2.36)$$

$$(V) \quad \frac{dQ_1}{dt} = \frac{-\pi^2}{Re} Q_1 + A_{10} H_{\nu_1} Q_1 + A_{11} H_{\nu_1} Q_2 + A_{12} H_{\nu_1} - \frac{1}{\pi} \frac{d\omega}{dt}, \quad (2.37)$$

$$\frac{dQ_2}{dt} = \frac{-4\pi^2}{Re} Q_2 + A_{13} H_{\nu_1} Q_1 + A_{14} H_{\nu_1} Q_2 + A_{15} H_{\nu_1} + \frac{1}{2\pi} \frac{d\omega}{dt} \quad (2.38)$$

où les coefficients de A_1 à A_{15} peuvent être trouvés en Annexe C.

Afin de faciliter la manipulation du système (V), on renomme les inconnues sous la forme familière suivante :

$$X = H_{\nu_1}, Y = Q_1, Z = Q_2. \quad (2.39)$$

En utilisant ces nouvelles inconnues X , Y et Z , on réécrit le système (V) qui devient :

$$\frac{dX}{dt} = pX + aX^2 + bY^2 + cYZ + dZ^2 + eY + fZ + g, \quad (2.40)$$

$$(VI) \quad \frac{dY}{dt} = qY + a'XY + b'XZ + c'X - \frac{1}{\pi} \frac{d\omega}{dt}, \quad (2.41)$$

$$\frac{dZ}{dt} = rZ + a''XY + b''XZ + c''X + \frac{1}{2\pi} \frac{d\omega}{dt} \quad (2.42)$$

où

$$p = \frac{A_2}{Re},$$

$$q = \frac{-\pi^2}{Re},$$

$$r = \frac{-4\pi^2}{Re}$$

et

$$a = \frac{A_3}{A_1},$$

$$b = \frac{A_4}{A_1},$$

$$c = \frac{A_5}{A_1},$$

$$d = \frac{A_6}{A_1},$$

$$e = \frac{A_7}{A_1},$$

$$f = \frac{A_8}{A_1},$$

$$g = \frac{A_9}{A_1},$$

$$a' = A_{10},$$

$$b' = A_{11} ,$$

$$c' = A_{12} ,$$

$$a'' = A_{13} ,$$

$$b'' = A_{14} ,$$

$$c'' = A_{15} .$$

2.3 Etude des solutions stationnaires du système autonome et de leur stabilité

2.3.1 Obtention des solutions stationnaires

On suppose, pour le moment, que la vitesse angulaire ω est constante et vaut 1. De (VI), il vient alors le système dynamique autonome non-linéaire suivant :

$$\frac{dX}{dt} = pX + aX^2 + bY^2 + cYZ + dZ^2 + eY + fZ + g , \quad (2.43)$$

$$(VII) \quad \frac{dY}{dt} = qY + a'XY + b'XZ + c'X , \quad (2.44)$$

$$\frac{dZ}{dt} = rZ + a''XY + b''XZ + c''X , \quad (2.45)$$

dont les coefficients sont indépendants du temps. Les solutions stationnaires du flot (VII) s'obtiennent en imposant :

$$\frac{dX}{dt} = 0 , \quad (2.46)$$

$$\frac{dY}{dt} = 0 , \quad (2.47)$$

$$\frac{dZ}{dt} = 0 . \quad (2.48)$$

On obtient alors du système (VII) un système algébrique à partir duquel on établit pour Y et Z les relations suivantes :

$$Y = \frac{(c''b' - c'b'')X^2 - c'rX}{\Delta}, \quad (2.49)$$

$$Z = \frac{(a''c' - a'c'')X^2 - c''qX}{\Delta} \quad (2.50)$$

où

$$\Delta = (a'b'' - b'a'')X^2 + (qb'' + ra')X + qr.$$

On remplace maintenant, dans l'équation (2.43), avec l'hypothèse $\frac{dX}{dt} = 0$, les expressions de Y et Z que l'on vient d'obtenir et qui sont écrites en fonction de X . Il en découle une équation du sixième ordre en X telle que :

$$c_0X^6 + c_1X^5 + c_2X^4 + c_3X^3 + c_4X^2 + c_5X + c_6 = 0. \quad (2.51)$$

On trouvera les expressions des coefficients de l'équation (2.51) en Annexe D.

Puisque les coefficients de l'équation (2.51) dépendent du nombre de Reynolds, il en va de même pour les solutions stationnaires. On présente ainsi quelques résultats obtenus pour différents Re et où le profil $g(z)$ est obtenu à partir des relations (2.49), (2.50), (2.34) et (2.23) :

- $Re = 100$: Cet exemple révèle que pour les Re petits l'équation (2.51) possède, en plus de deux racines réelles, deux paires de racines complexes conjuguées (table 2.1). De plus, comme l'une des racines réelles (très grande, $X \simeq 5.8458 \times 10^7$) semble *a priori* de valeur plutôt "aphysique" (figure (2.5)), l'équation (2.51) n'engendrerait qu'une seule solution stationnaire (figure (2.4)). Ce résultat est d'ailleurs en accord avec la solution unique trouvée aussi bien expérimentalement que numériquement ([29],[12],[7]). On voit, de plus, que, malgré la troncature à deux modes très restrictive, ce profil se rapproche effectivement d'un profil de vitesse tangentiel du type Batchelor. Ainsi, comme pour la convection de Rayleigh-Bénard où les solutions stationnaires correspondent à des états observés, la solution stationnaire obtenue ici est le reflet de phénomènes physiques sous-jacents.

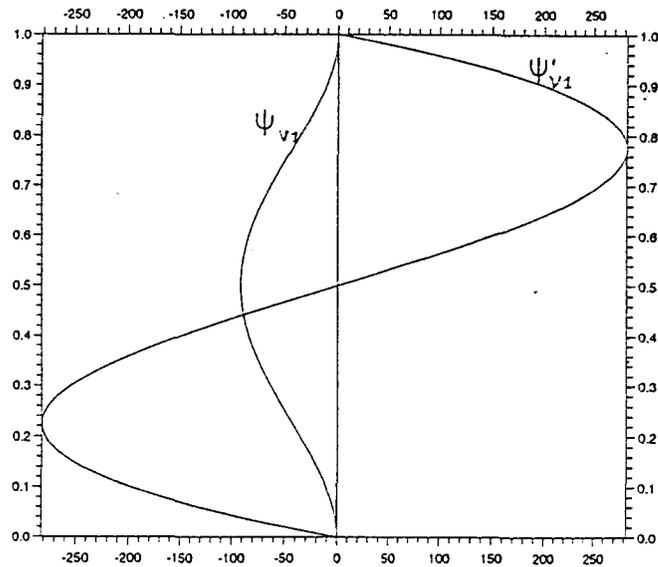


FIG. 2.3 - Graphe de $\psi_{\nu 1}(z)$ et $\psi'_{\nu 1}(z)$ sur $0 \leq z \leq 1$.

- $Re = 500$: On s'aperçoit que l'on n'a plus maintenant qu'une seule paire de racines complexes conjuguées tandis qu'il apparaît deux racines réelles supplémentaires (table 2.2). On représente en figures (2.6)-(2.8) les profils tangentiels correspondant aux différentes racines réelles "physiques". En plus d'une solution de type Batchelor de la figure (2.6), semblable à celle trouvée pour $Re = 100$, on obtient deux autres profils, figures (2.7) et (2.8), qui correspondent à l'une des solutions à 1 cellule mises en évidence par [29], solution où l'écoulement se compose de deux couches limites et d'un coeur animé d'une vitesse de rotation de direction opposée à celle du disque tournant. On retrouve en figure (2.9) la solution de valeur "aphysique".
- $Re = 10000$: Les profils trouvés (que l'on ne représentera pas ici) sont analogues à ceux obtenus pour $Re = 500$, mais comme deux des racines réelles tendent vers $(X, Y, Z) = (0, 0, 0)$, on se retrouve, d'une certaine manière, de nouveau avec un nombre restreint de solutions (table 2.3).

On peut remarquer, d'après le graphe de $\psi_{\nu 1}(z)$ (figure (2.3)), fonction qui va permettre de modéliser la vitesse axiale, que les valeurs plausibles de X sont négatives afin de retrouver un écoulement axial dirigé du disque fixe vers le disque en rotation. Ceci n'est par exemple pas vérifié par la solution déjà qualifiée d'aphysique en raison de l'importance de la valeur de X , ce qui confirme son peu de réalité physique.

Re = 100.

racines complexes: $-8.3447E-004 + 5.8506E-004 i$
 $-8.3447E-004 - 5.8506E-004 i$

racines complexes: $6.9885E-004 + 2.5162E-003 i$
 $6.9885E-004 - 2.5162E-003 i$

racines reelles: $5.8459E+007$
 $-7.7635E-004$

TAB. 2.1 - $Re = 100$. Solutions de l'équation (2.51).

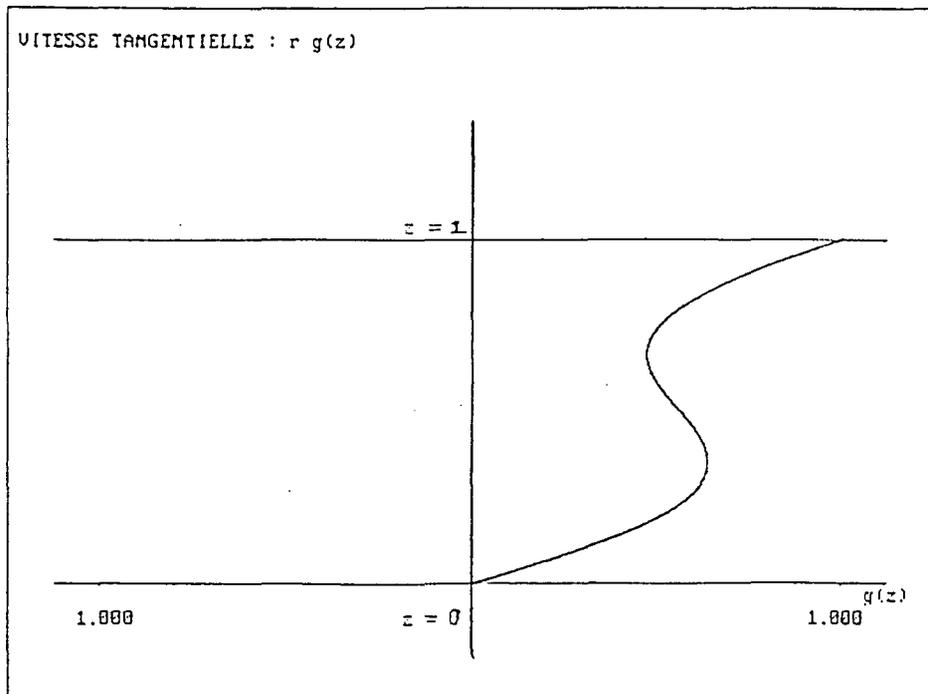


FIG. 2.4 - $Re = 100$. Profil tangential de vitesse $g(z)$ pour $X = -7.763E - 04$.

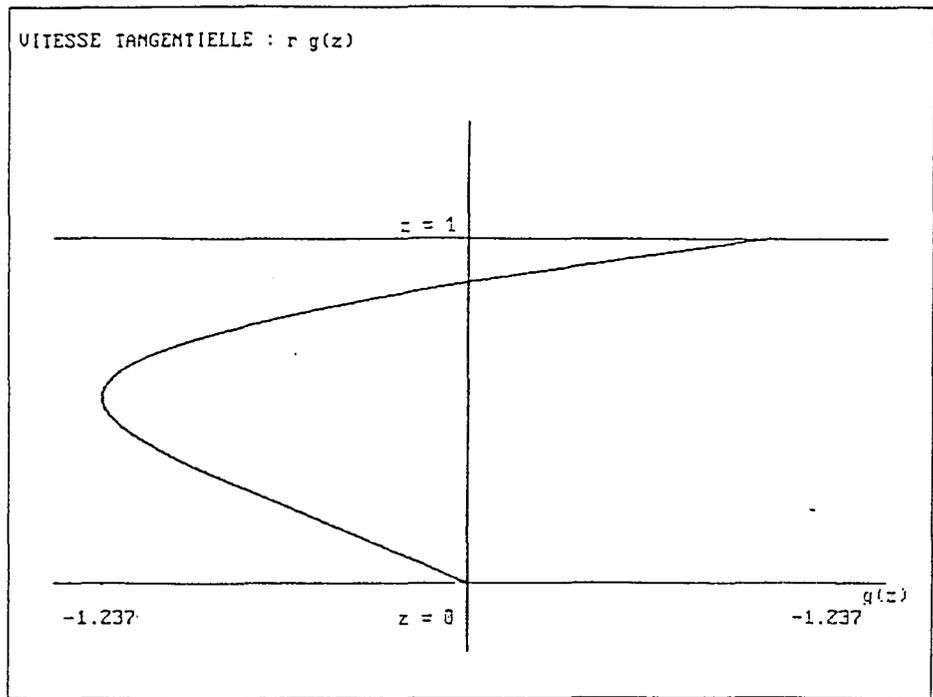


FIG. 2.5 - $Re = 100$. Profil tangentiel de vitesse $g(z)$ pour $X = 5.8458E + 07$.

Re = 500.

racines reelles: -1.6096E-004
-1.8086E-003

racines complexes: -1.3943E-004 + 1.7638E-004 i
-1.3943E-004 - 1.7638E-004 i

racines reelles: 1.1692E+007
-2.9896E-003

TAB. 2.2 - Re = 500. Solutions de l'équation (2.51).

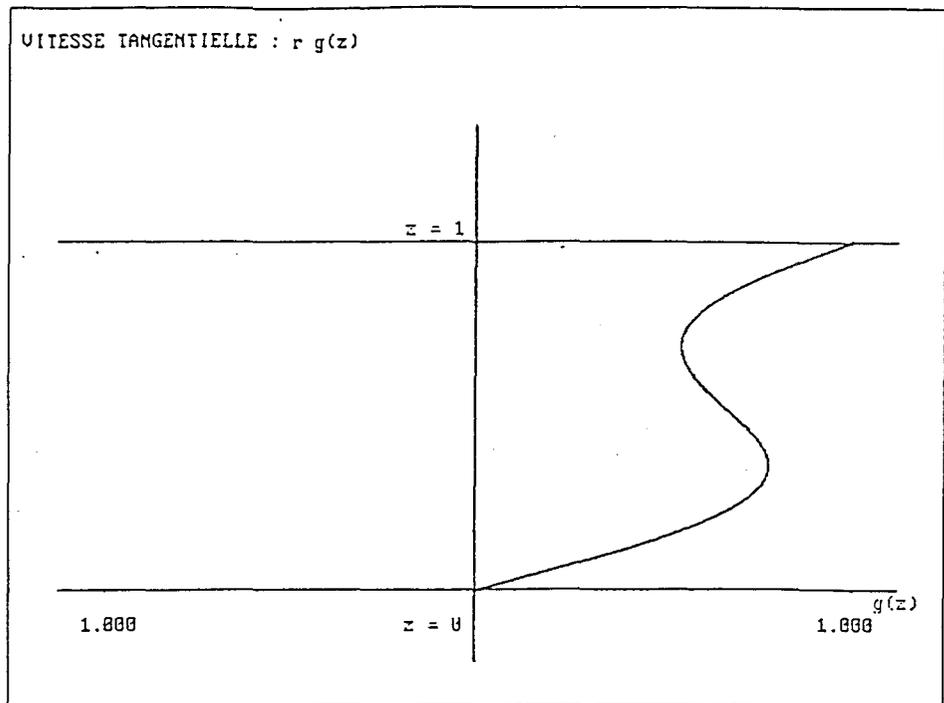


FIG. 2.6 - Re = 500. Profil tangentiel de vitesse $g(z)$ pour $X = -1.609E - 04$ (a).

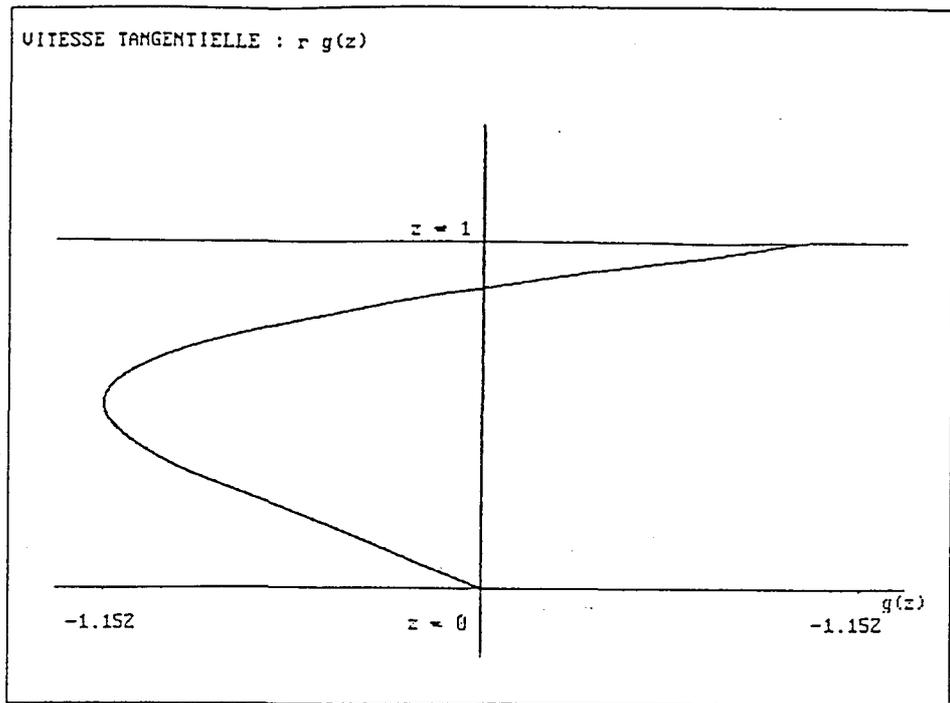


FIG. 2.7 - $Re = 500$. Profil tangential de vitesse $g(z)$ pour $X = -1.808E - 03$ (b).

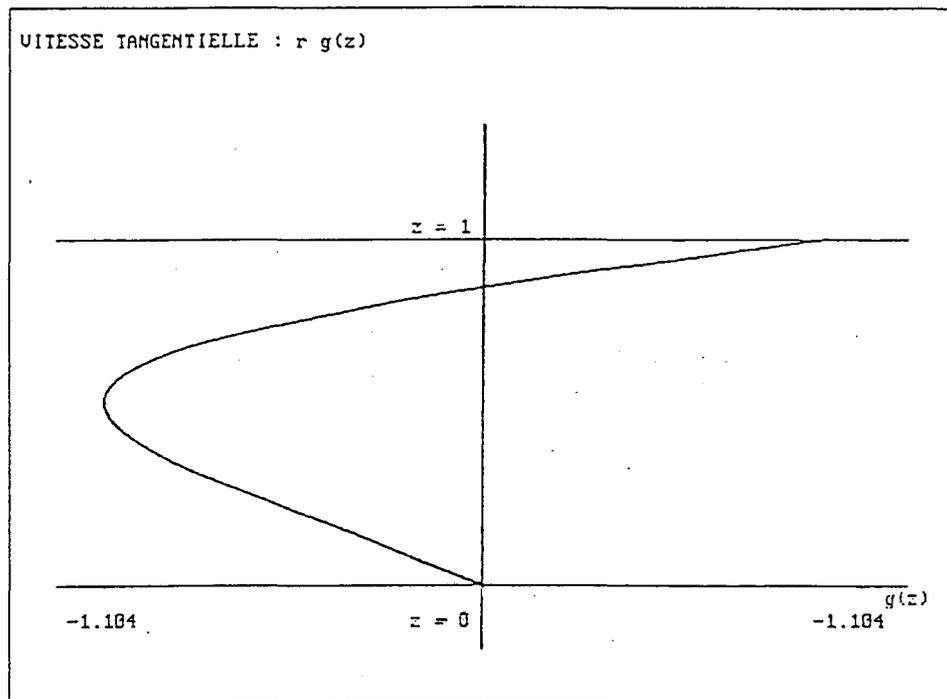


FIG. 2.8 - $Re = 500$. Profil tangential de vitesse $g(z)$ pour $X = -2.989E - 03$ (c).

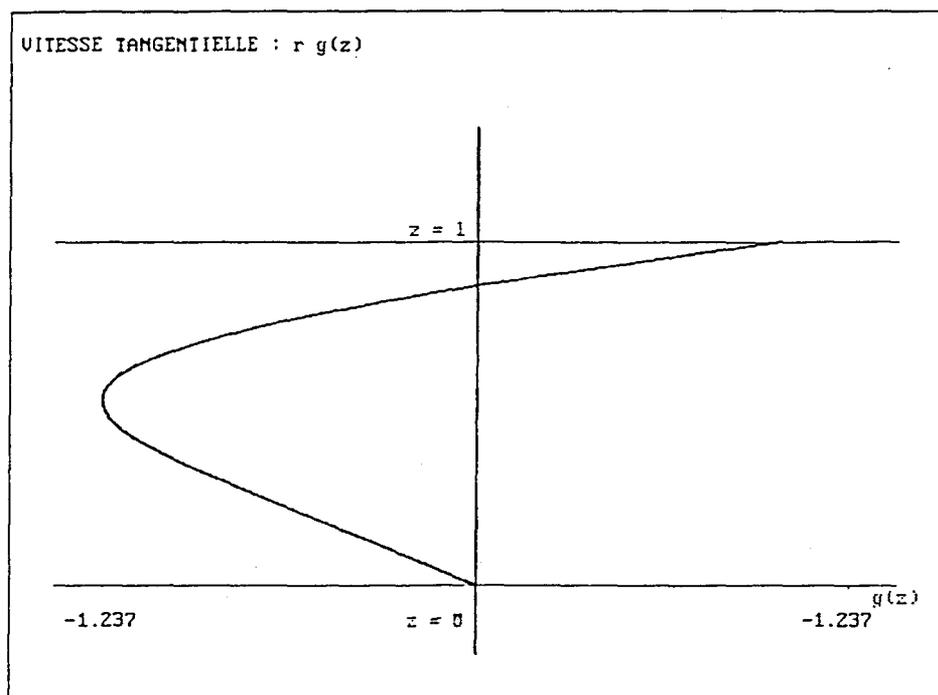


FIG. 2.9 - $Re = 500$. Profil tangential de vitesse $g(z)$ pour $X = 1.609E + 07$ (d).

$Re = 10000$.

racines reelles: $-8.0588E-006$
 $-5.1766E-005$

racines complexes: $-6.7135E-006 + 8.9329E-006 i$
 $-6.7135E-006 - 8.9329E-006 i$

racines reelles: 584586.8059
 $-1.0469E-001$

TAB. 2.3 - $Re = 10000$. Solutions de l'équation (2.51).

2.3.2 Stabilité des solutions stationnaires

Système linéarisé: Afin de pouvoir étudier le comportement des solutions stationnaires vis-à-vis de perturbations infinitésimales, on linéarise le système (VII) autour de X_{st} , Y_{st} et Z_{st} . Pour cela, on pose que :

$$X = X_{st} + \hat{x}e^{-\sigma t}, \quad (2.52)$$

$$Y = Y_{st} + \hat{y}e^{-\sigma t}, \quad (2.53)$$

$$Z = Z_{st} + \hat{z}e^{-\sigma t} \quad (2.54)$$

et on obtient de là le système linéarisé suivant :

$$\begin{aligned} -\sigma \hat{x} = & p\hat{x} + 2aX_{st}\hat{x} + 2bY_{st}\hat{y} + cY_{st}\hat{z} + cZ_{st}\hat{y} + 2dZ_{st}\hat{z} \\ & + e\hat{y} + f\hat{z}, \end{aligned} \quad (2.55)$$

$$(VIII) \quad -\sigma \hat{y} = q\hat{y} + a'X_{st}\hat{y} + a'Y_{st}\hat{x} + b'X_{st}\hat{z} + b'Z_{st}\hat{x} + c'\hat{x} \quad (2.56)$$

$$-\sigma \hat{z} = r\hat{z} + a''X_{st}\hat{y} + a''Y_{st}\hat{x} + b''X_{st}\hat{z} + b''Z_{st}\hat{x} + c''\hat{x}. \quad (2.57)$$

Equation caractéristique: Le système (VIII) aura des solutions autres que la solution triviale si son déterminant s'annule, c'est-à-dire si σ est solution de l'équation cubique suivante :

$$\sigma^3 + a_1\sigma^2 + a_2\sigma + a_3 = 0 \quad (2.58)$$

avec

$$a_1 = T_1 + T_5 + T_9,$$

$$a_2 = T_1T_5 + T_1T_9 + T_5T_9 - T_2T_4 - T_3T_7 - T_6T_8,$$

$$a_3 = T_1T_5T_9 + T_3T_4T_8 + T_2T_6T_7 - T_1T_6T_8 - T_2T_4T_9 - T_3T_5T_7$$

où

$$T_1 = p + 2aX_{st} ,$$

$$T_2 = 2bY_{st} + cZ_{st} + e ,$$

$$T_3 = cY_{st} + 2dZ_{st} + f ,$$

$$T_4 = a'Y_{st} + b'Z_{st} + c' ,$$

$$T_5 = q + a'X_{st} ,$$

$$T_6 = b'X_{st} ,$$

$$T_7 = a''Y_{st} + b''Z_{st} + c'' ,$$

$$T_8 = a''X_{st} ,$$

$$T_9 = r + b''X_{st} .$$

On constate que la racine réelle “unique” (jusqu’à $Re \sim 487$) de (2.51) correspondant à la solution de Batchelor (on peut se reporter au cas de $Re = 100$, p39) est stable. Lorsque Re augmente encore un peu au dessus de 487, l’une des paires de racines complexes conjuguées de l’équation (2.51) se transforme brusquement en deux racines réelles (le cas $Re = 500$ est une illustration de l’existence de quatre racines réelles et d’une seule paire de racines complexes conjuguées) pour lesquelles il s’avère que σ est négatif, c’est-à-dire que les deux nouvelles solutions stationnaires sont instables (l’apparition ici de nouvelles solutions réelles est à rapprocher d’une part de l’émergence à $Re = 437$ de la solution *SBB1* et d’autre part du seuil de convergence situé en $Re \simeq 418$ pour la solution *IR2* de [34] ; cette solution *IR2* ressemble qualitativement aux solutions des figures (2.7) et (2.8) mais en diffère un peu quantitativement puisque la rotation négative dans le coeur y est plus faible que la vitesse de rotation du disque supérieur -le maximum dans le coeur situé à mi-canal donne $g(0.5) \simeq 0.77 g(1)$ - tandis que les solutions de ce type que

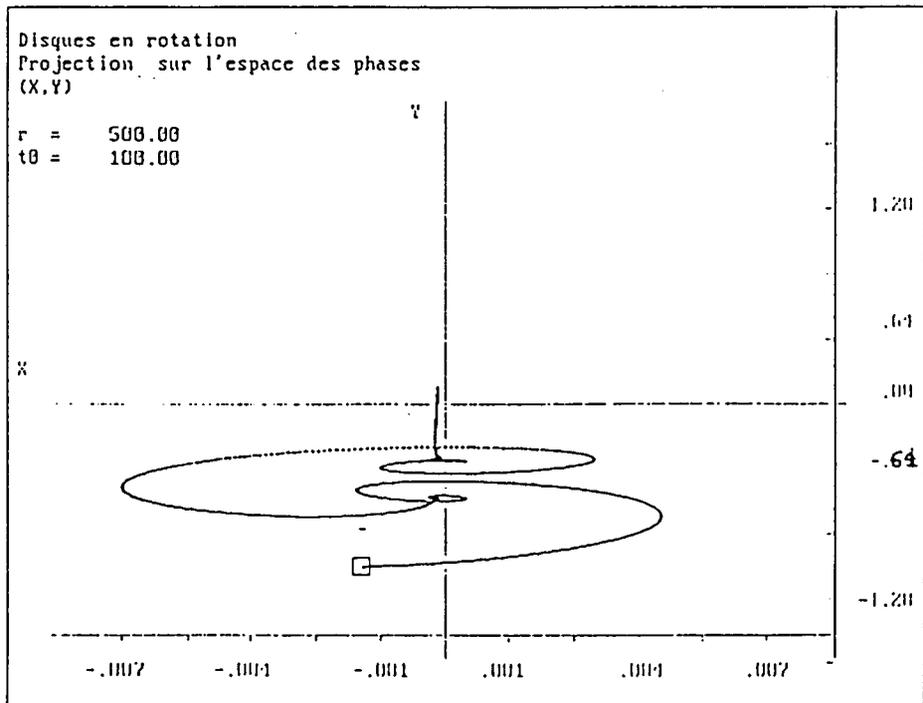


FIG. 2.10 - $Re = 500$. Evolution de la trajectoire dans l'espace de phases (X,Y) avec la solution stationnaire (b) comme condition initiale (□).

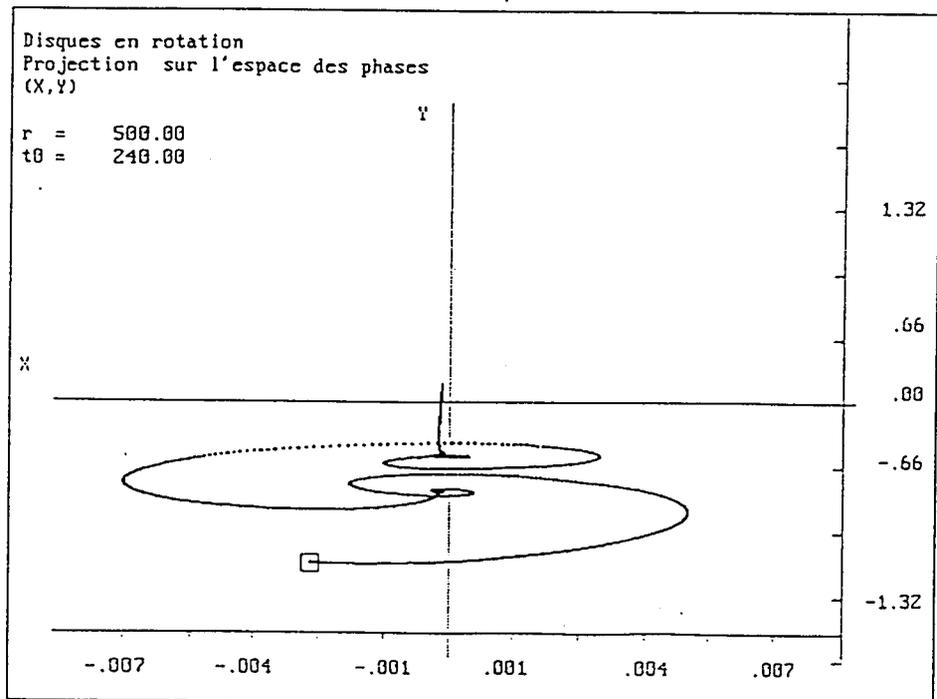


FIG. 2.11 - $Re = 500$. Evolution de la trajectoire dans l'espace de phases (X,Y) avec la solution stationnaire (c) comme condition initiale (□).

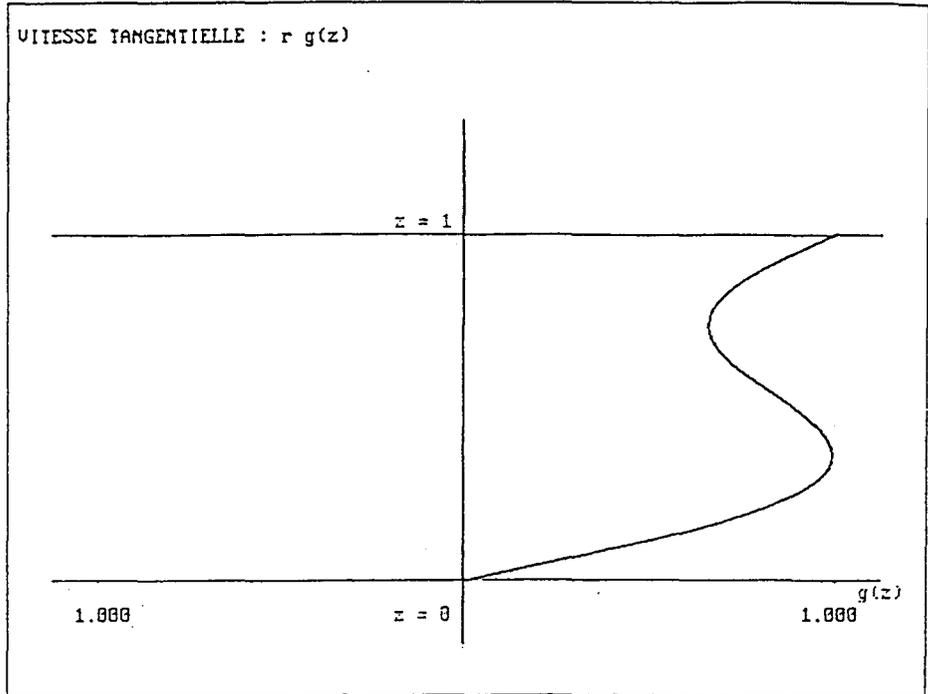


FIG. 2.12 - $Re = 100$. Profil tangentiel de vitesse $g(z)$ pour $X = -8.3447E - 04$

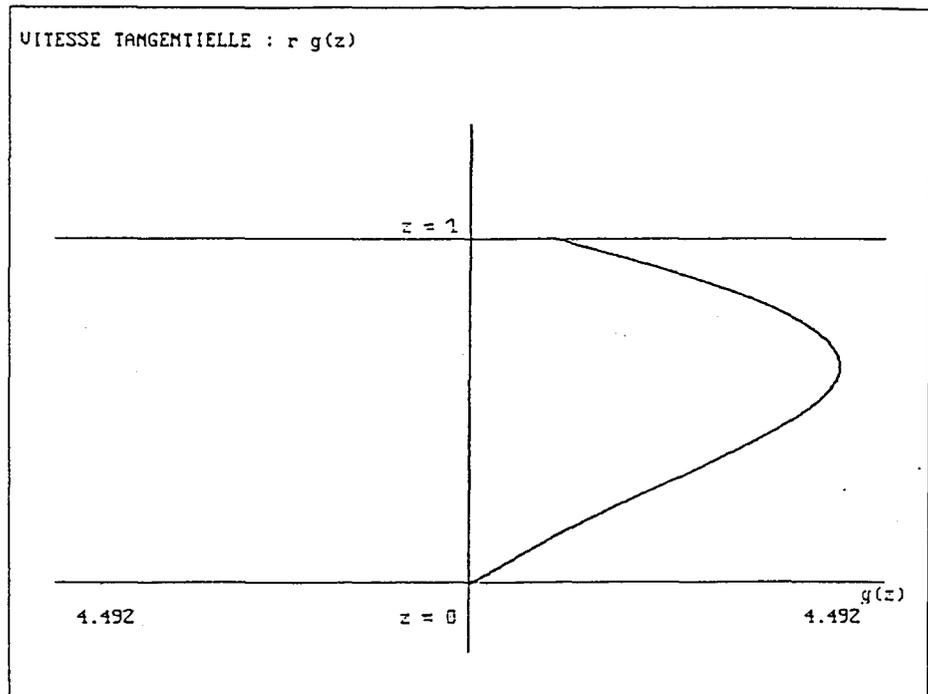


FIG. 2.13 - $Re = 100$. Profil tangentiel de vitesse $g(z)$ pour $X = -6.9885E - 04$

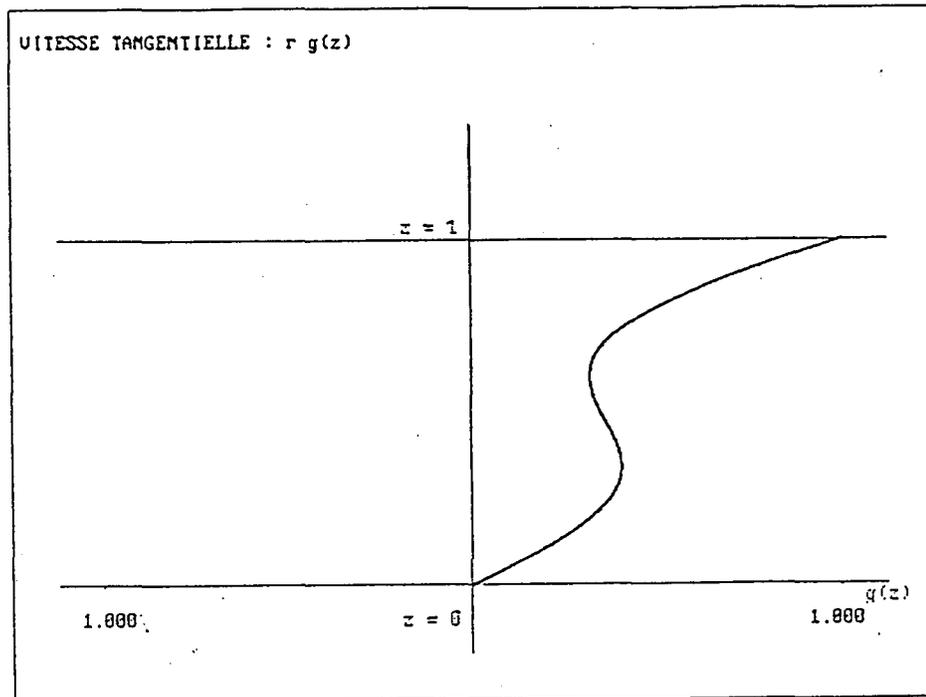


FIG. 2.14 - $Re = 500$. Profil tangential de vitesse $g(z)$ pour $X = -1.394E - 04$

nous avons obtenues exhibent des maxima valant $g(1)$). Ces deux solutions stationnaires instables sont associées à des profils tangentiels présentant une vitesse dans le coeur négative. De telles solutions ont été également trouvées instables par Brady et Durlofsky [7] et, si on résout numériquement par une méthode de Runge-Kutta le système dynamique (VII), on constate que les deux solutions stationnaires (b) et (c), effectivement instables, conduisent (figures (2.10) et (2.11)), pour $Re = 500$, à la solution stationnaire stable (a), qui est un point fixe.

Les profils de vitesse tangentielle qu'on a obtenu pour $Re = 100$ et $Re = 500$ correspondent à des profils liés soit à des solutions de type Batchelor, soit à des solutions SBBI, mais on n'a pas mis en évidence de profils liés à des solutions de type Stewartson. Or il reste des solutions stationnaires auxquelles on ne s'est pas encore intéressé, en raison de leur caractère complexe.

Il est d'ailleurs surprenant d'obtenir de telles solutions et on peut se demander si le fait de tronquer les développements des inconnues H et Q respectivement à un et deux modes n'est pas à l'origine du caractère complexe de certaines solutions. On essaie donc de mettre en évidence un lien possible entre racines complexes et solutions de Stewartson en ne conservant que la partie réelle des racines complexes conjuguées : on s'aperçoit alors que la partie réelle donne $\sigma \sim 0$ pour $Re \sim 235$, valeur voisine de la valeur $Re = 216,9$

donnée par Brady et Durlofsky et qui caractérise le seuil d’instabilité de leur solution de Stewartson. On calcule en outre un profil $g(z)$, fictif, à partir de cette même partie réelle pour $Re = 100$ (figures (2.12) et (2.13)) et pour $Re = 500$ (figure (2.14)). On constate ainsi que le profil obtenu pour $Re = 500$ est moins accentué qu’un profil de type Batchelor et se rapproche davantage d’un profil à la Stewartson.

2.4 Evolution vers le chaos

Les systèmes non-autonome (VI) ou autonome (VII) ne sont pas intégrables analytiquement. On procède donc numériquement par un calcul pas à pas, à l’aide de la méthode de Runge-Kutta d’ordre 4, à partir de conditions initiales (X_0, Y_0, Z_0) [15]. Les trajectoires sont représentées le plus souvent dans l’espace des phases (X, Y) ; cependant, la projection dans l’espace des phases (X, Z) a parfois été préférée lorsque le graphe s’y révèle être plus intéressant. On a choisi le plan $X = 0$ pour effectuer les sections de Poincaré tandis que l’application de premier retour donne le maximum $(n + 1)$ en fonction du maximum précédent n .

2.4.1 Système non-linéaire autonome

On s’est d’abord intéressé à l’évolution temporelle des solutions stationnaires trouvées au paragraphe précédent. D’après les résultats que l’on obtient, on s’aperçoit que les dynamiques possibles semblent se limiter à des points fixes et à des cycles limites. Ainsi, pour $Re = 10000$, les solutions stationnaires “physiques” ont le même comportement que celles pour $Re = 500$ (figure (2.15)), c’est-à-dire qu’elles évoluent au cours du temps vers un attracteur qui est un point fixe (qui est d’ailleurs l’une des solutions stationnaires pour laquelle $X = -8.0588E - 06$). Pour $Re = 1000000$, par exemple, on voit l’émergence d’attracteur du type cycle limite. Mais, en fait, pour des nombres de Reynolds très grands, on sort du domaine laminaire pour être en écoulement turbulent, ce qui limite l’intérêt d’un tel résultat. On peut obtenir toutefois des résultats plus intéressants si on s’éloigne des solutions stationnaires et si on choisit un X_0 plus important en valeur absolue (voir figure (2.16)). Cependant, on n’a pas pu mettre en évidence de comportements chaotiques.

Dans ce paragraphe, comme dans les paragraphes suivants, on a indiqué dans les légendes des figures seulement X_0 lorsque les données initiales correspondent à une solution stationnaire pour laquelle Y_0 et Z_0 sont déterminés grâce aux relations (2.49) et (2.50).

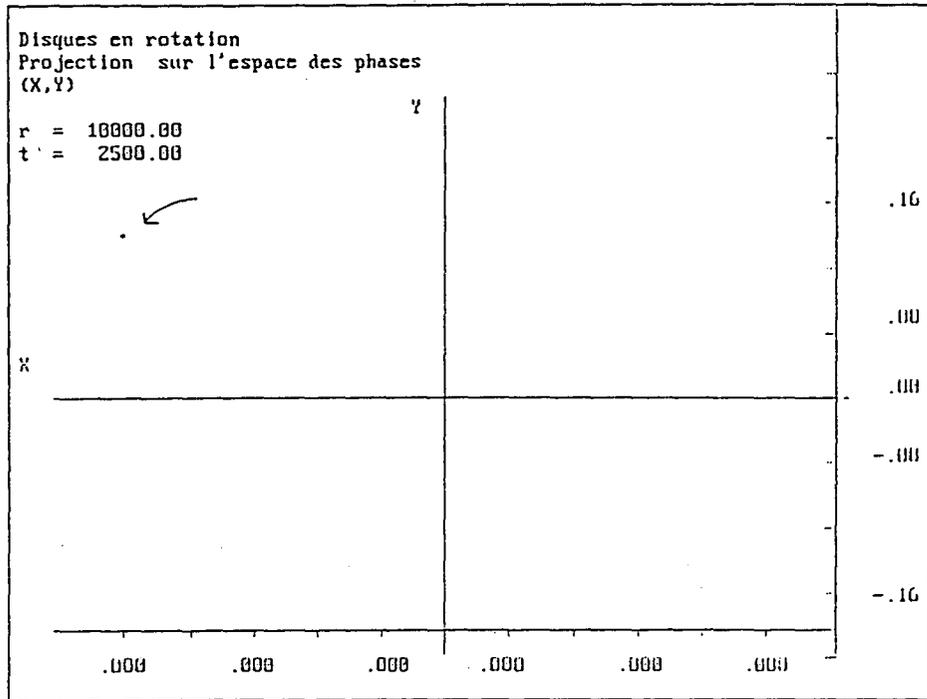


FIG. 2.15 - Cycle limite dans l'espace des phases (X,Y). $Re = 10000$, $\Delta t = 0.005$, $X_0 = -8.0588E - 06$.

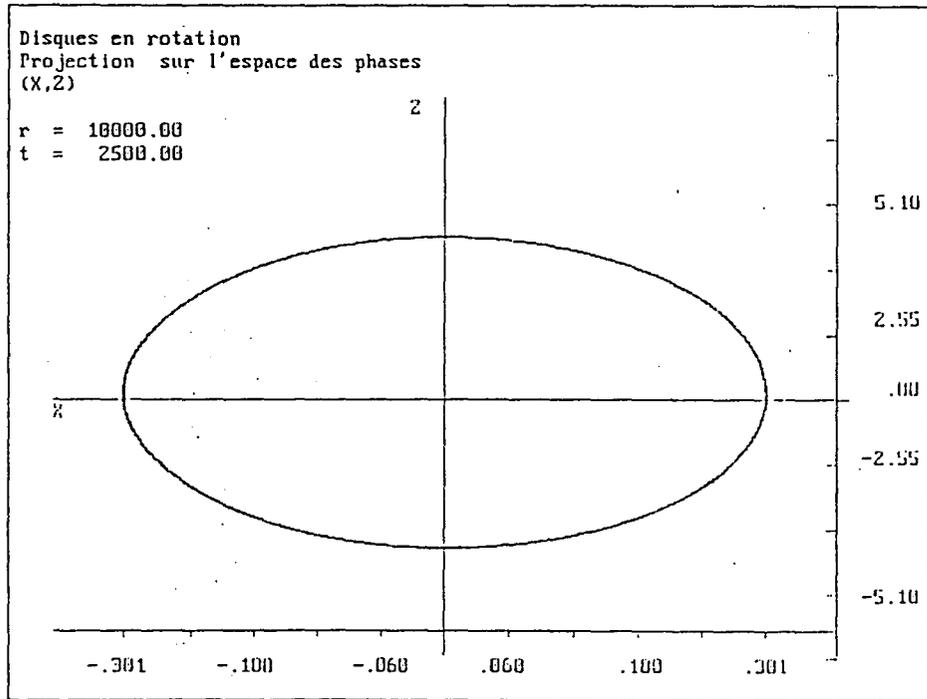
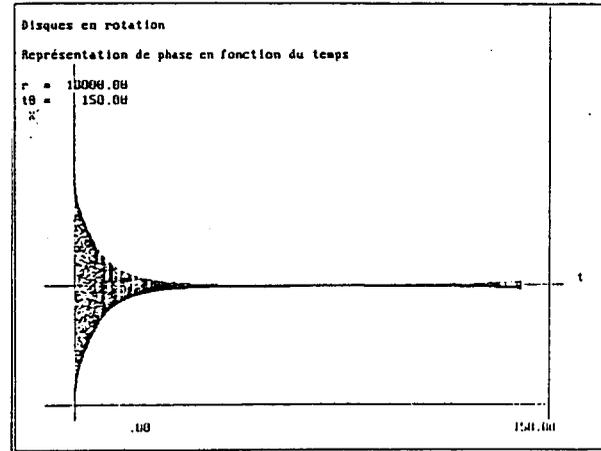
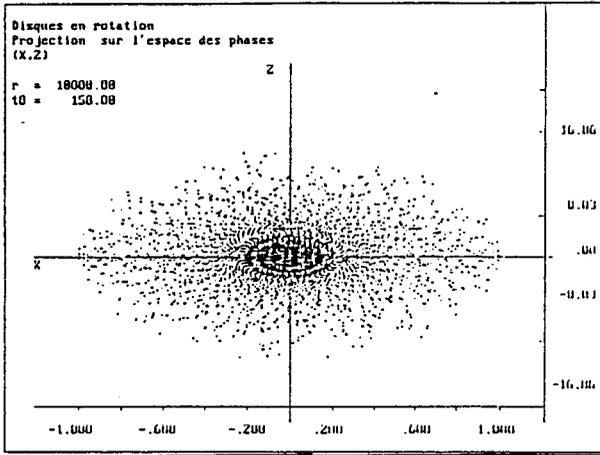
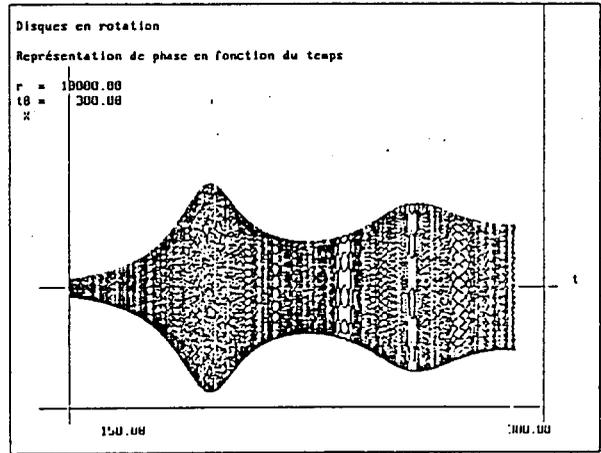
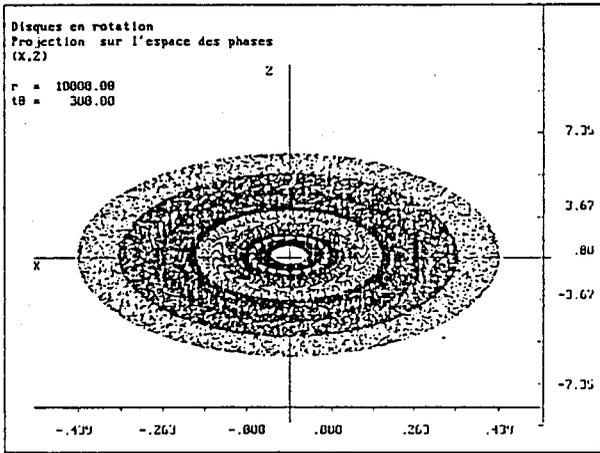


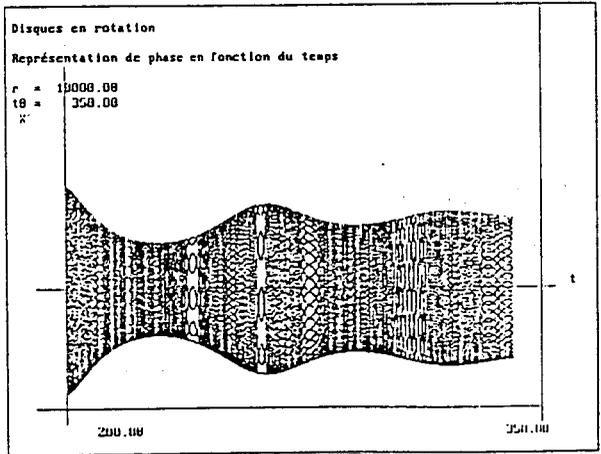
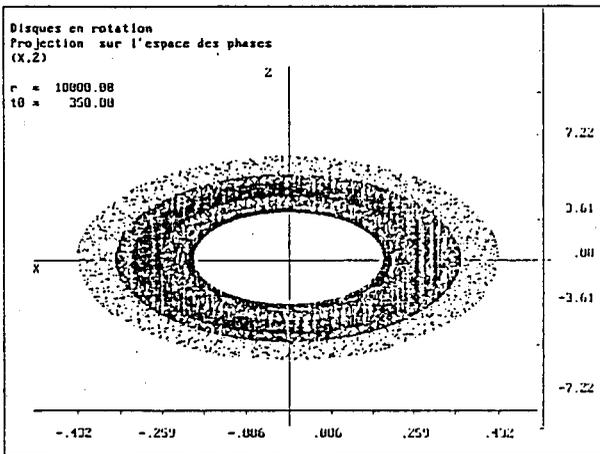
FIG. 2.16 - Cycle limite dans l'espace des phases (X,Z). $Re = 10000$, $\Delta t = 0.005$, $X_0 = -1$, $Y_0 = 0$, $Z_0 = 0$.



(a)



(b)



(c)

FIG. 2.17 - Trajectoire dans l'espace des phases (X,Z) et amplitude de X en fonction du temps à partir de : $t_i = 0$ (a), $t_i = 150$ (b), $t_i = 200$ (c)

La figure (2.17) illustre le comportement depuis la condition initiale jusqu'à l'attraction sur le cycle limite représenté en figure (2.16).

2.4.2 Système non-linéaire non-autonome

Les résultats expérimentaux de Faller ([16] et [17]) pour la couche d'Ekman laissent à penser que des perturbations extérieures amènent une dynamique plus riche. On va donc perturber le système (VII) à l'aide d'un forçage. Le système non-linéaire devient donc dépendant du temps, c'est-à-dire non-autonome. On utilise à présent le système dynamique (VI) pour lequel les coefficients e, f, g, c' et c'' sont dépendants du temps, car fonction de $\omega(t)$.

a) Système non-linéaire un peu perturbé

On choisit d'abord de perturber le système (VII) avec un petit forçage sinusoïdal de la forme suivante :

$$\omega(t) = 1 + \Delta\omega \sin t, \quad (2.59)$$

c'est-à-dire que la vitesse de base $\omega = 1$ est un peu perturbée. Les calculs, effectués pour différents nombres de Reynolds, montrent des scénarios plus complexes à même Re que pour le système non-linéaire autonome (VII).

- Influence du nombre de Reynolds ($\Delta\omega = 0.1, \Delta t = 0.001$):
 - $Re = 500$ (figure (2.18))
 - $Re = 10000$ (figure (2.19))

Là où pour le système autonome on était en présence d'un point stationnaire, on observe l'apparition d'un cycle limite, qui semble la conséquence directe de la perturbation sinusoïdale.

- Influence de la perturbation $\Delta\omega$ ($Re = 10000, \Delta t = 0.001$):
 - $\Delta\omega = 0.4, X_0 = -8.0588E - 06$ (figure (2.20))
 - $\Delta\omega = 0.4, X_0 = -1, Y_0 = 0, Z_0 = 0$ (figure (2.21))

La perturbation engendre dans les deux exemples précédents des figures (2.20) et (2.21) une déformation du cycle limite, qui devient plus triangulaire et exhibe même avec $X_0 = -1, Y_0 = 0, Z_0 = 0$ une deuxième boucle plus petite.

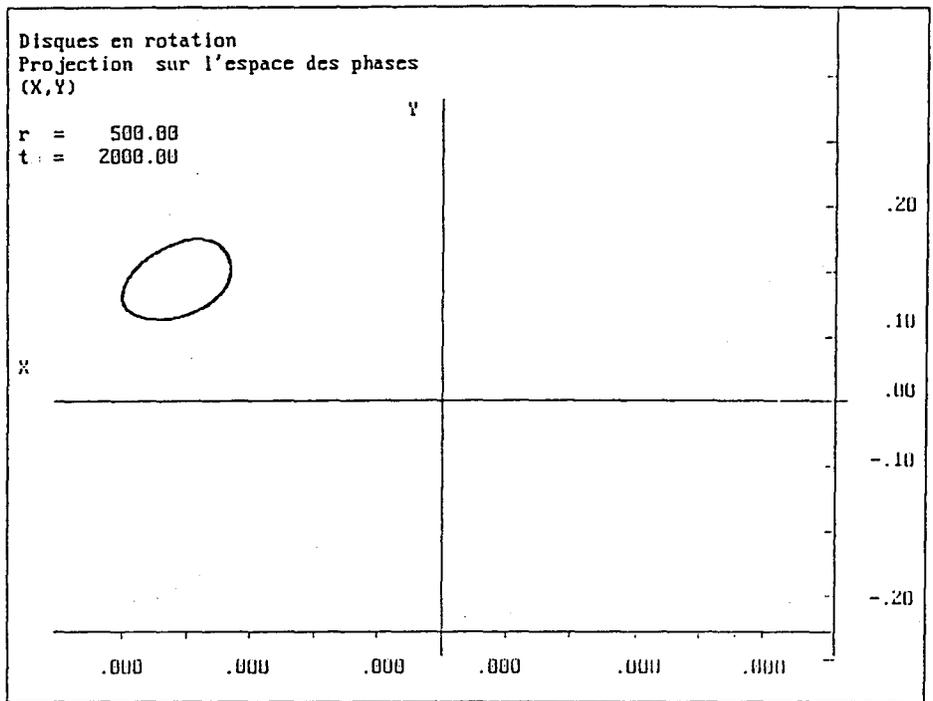


FIG. 2.18 - *Cycle limite dans l'espace des phases (X,Y). $Re = 500$, $\Delta\omega = 0.1$, $\Delta t = 0.001$, $X_0 = -8.0588E - 06$.*

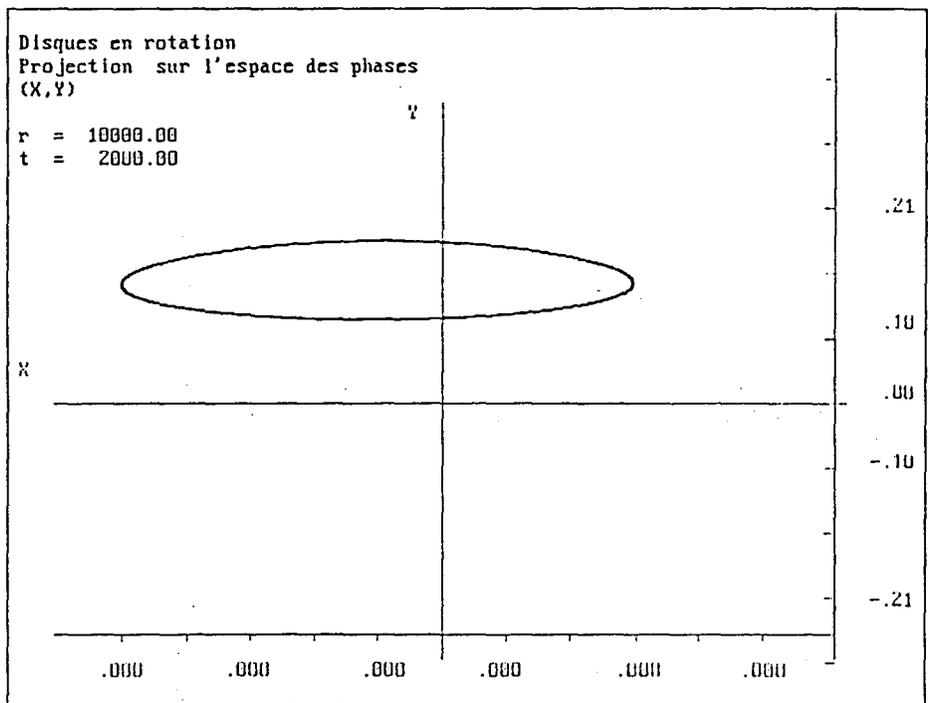


FIG. 2.19 - *Trajectoire dans l'espace des phases (X,Y). $Re = 10000$, $\Delta\omega = 0.1$, $\Delta t = 0.001$, $X_0 = -8.0588E - 06$.*

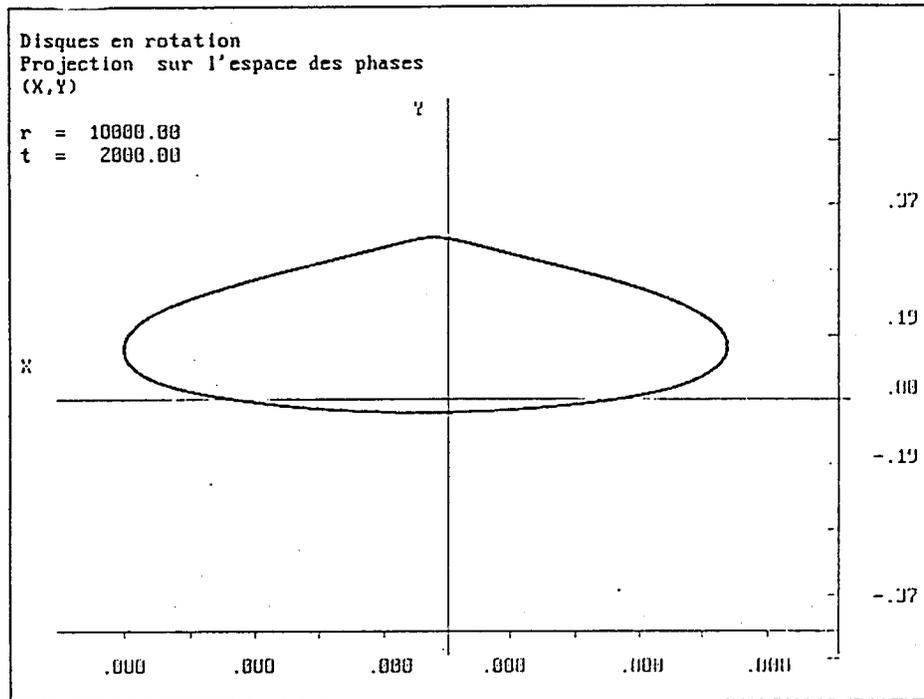


FIG. 2.20 - *Cycle limite dans l'espace des phases (X,Y).* $Re = 10000$, $\Delta\omega = 0.4$, $\Delta t = 0.001$, $X_0 = -8.0588E - 06$.

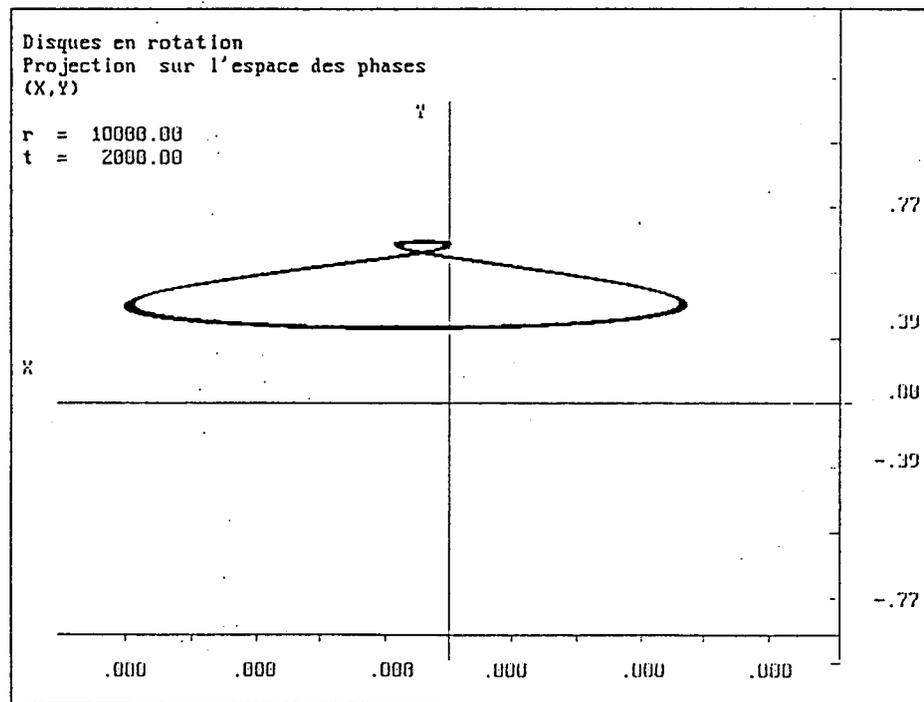


FIG. 2.21 - *Cycle limite dans l'espace des phases (X,Y).* $Re = 10000$, $\Delta\omega = 0.4$, $\Delta t = 0.001$, $X_0 = -1$, $Y_0 = 0$, $Z_0 = 0$.

Bien que plus intéressants que dans le cas autonome, les résultats obtenus avec un petit forçage ne semblent pas encore rendre compte du comportement réel, parfois complexe, d'un écoulement entre deux disques en rotation [36]. Il faut donc envisager l'introduction d'une perturbation qui s'approche davantage, au moins en importance, du "feed-back" qui semble un élément essentiel de l'apparition d'un comportement chaotique.

b) Système non-linéaire avec fort forçage périodique

Le forçage est maintenant plus marqué :

$$\omega(t) = \cos(\omega_f t) . \quad (2.60)$$

avec ω_f permettant de moduler la fonction cosinus. On n'explorera ici qu'une partie de la dynamique du système (VI) car on est confronté à plusieurs difficultés: en plus du nombre de Reynolds, on se rend compte que la valeur de ω_f ainsi que le choix des conditions initiales ont une influence sur les résultats obtenus.

- Influence du nombre de Reynolds ($\omega_f = 1$, $\Delta t = 0.001$):
 - $Re = 100$ (figures (2.23)-(2.24)),
 - $Re = 1000$ (figures (2.25)-(2.26)),
 - $Re = 2000$ (figures (2.27)-(2.28)),
 - $Re = 3000$ (figures (2.29)-(2.30)),
 - $Re = 10000$ (figures (2.31)-(2.34)).

Si on prend les mêmes conditions initiales (par exemple une des solutions stationnaires du système autonome associé) pour différents nombres de Reynolds, on remarque une sorte de dédoublements de périodes lorsque Re croît (figures (2.23)-(2.30)). De là, on construit un diagramme de bifurcation (figure (2.22)).

On peut faire deux remarques à propos de ce diagramme de bifurcation: d'une part, la stabilisation des trajectoires sur les attracteurs nécessite un grand nombre d'itérations (environ 10000 pour $\Delta t = 0.01$) et donc des temps de calculs assez longs; d'autre part on observe un phénomène curieux puisque pour $Re = 1700$ et $Re = 2487$, et sans doute pour d'autres nombres de Reynolds plus grands, il y a un changement de signe brutal, et temporaire, du mode Y . Ce fait est pour l'instant inexpliqué. Sans ces différents changements de signe, on serait en présence, pour les petits nombres de Reynolds, d'un diagramme de bifurcation ressemblant

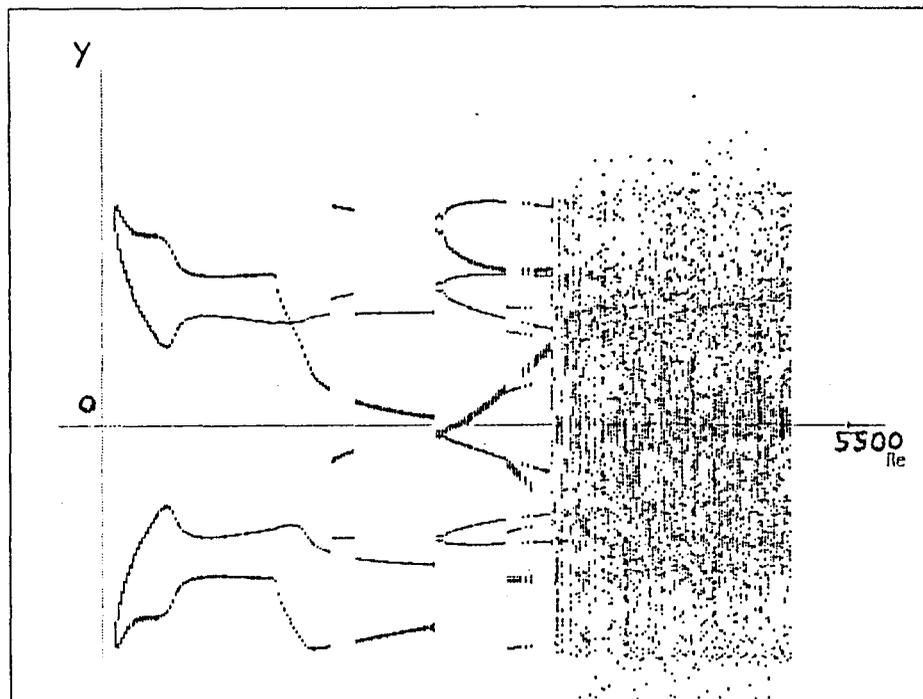


FIG. 2.22 - Diagramme de bifurcation

au diagramme de bifurcation lié à une cascade sous-harmonique [4]. Par contre, la transition vers le chaos, qui survient à $Re \sim 3431$ est plutôt brutale. On peut trouver un exemple de trajectoires chaotiques en figures (2.31)-(2.34); on remarque la dispersion des valeurs dans les graphes donnés par la section de Poincaré et l'application de premier retour, dispersion qu'on ne trouve pas pour les nombres de Reynolds modérés ou pour d'autres valeurs de ω_f , comme on le constate ci-dessous.

- Influence de ω_f ($Re = 10000$, $\Delta t = 0.001$)

- $\omega_f = 0.1$ (figures (2.35)-(2.38))

- $\omega_f = 10$ (figures (2.39)-(2.42))

On voit, d'après les applications de premier retour, qu'une perturbation peu fréquente, $\omega = 0.1$, ou très fréquente, $\omega = 10$, cantonne, pour les mêmes données initiales engendrant avec $\omega = 1$ une solution chaotique, les trajectoires à des cycles limites.

- Influence des conditions initiales ($Re = 10000$, $\omega_f = 1$)

- $X_0 = -1$, $Y_0 = 0$, $Z_0 = 0$ (figures (2.43)-(2.46))

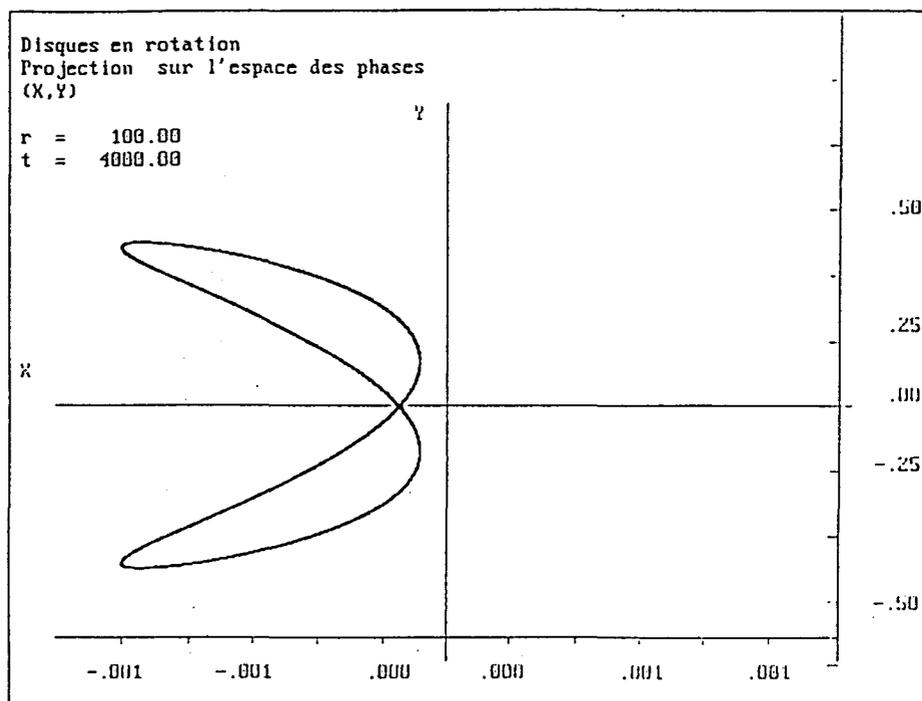


FIG. 2.23 - Cycle limite dans l'espace des phases (X, Y). $Re = 100$, $\omega_f = 1$, $\Delta t = 0.001$, $T_f = 4000$, $X_0 = -8.0588E - 06$.

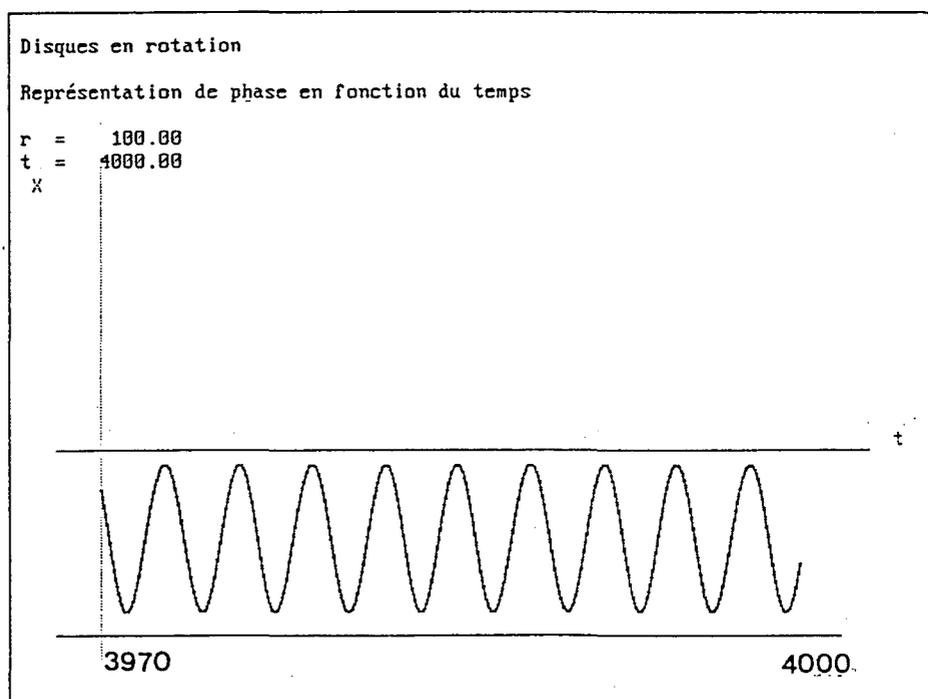


FIG. 2.24 - Amplitude de X en fonction du temps. $Re = 100$, $\omega_f = 1$, $\Delta t = 0.001$, $X_0 = -8.0588E - 06$.

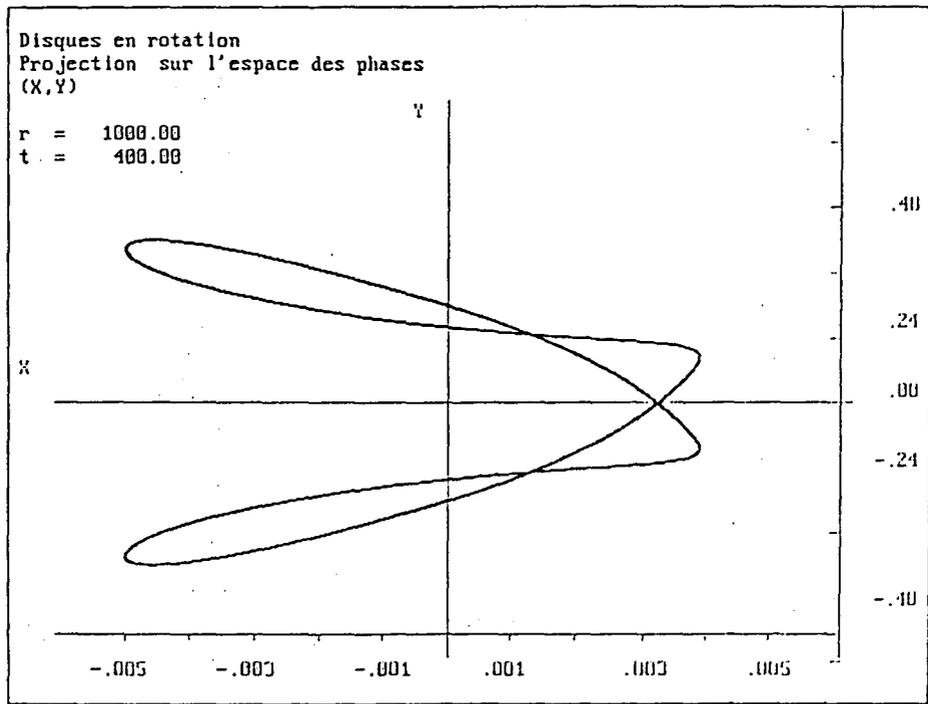


FIG. 2.25 - Cycle limite dans l'espace des phases (X,Y). $Re = 1000$, $\omega_f = 1$, $\Delta t = 0.001$, $T_f = 400$, $X_0 = -8.0588E - 06$.

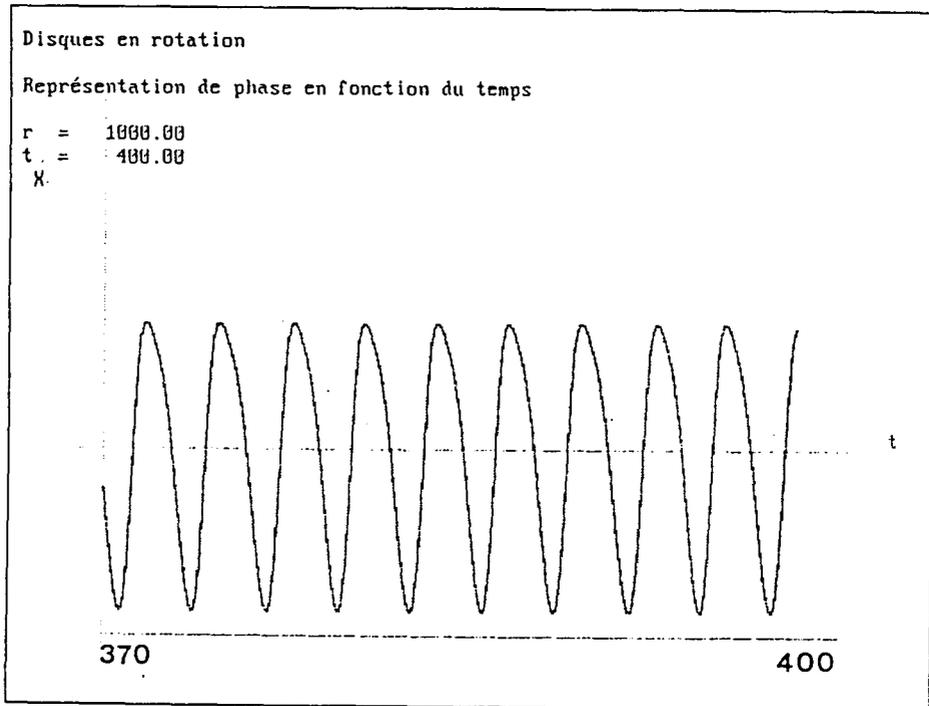


FIG. 2.26 - Amplitude de X en fonction du temps. $Re = 1000$, $\omega_f = 1$, $\Delta t = 0.001$, $X_0 = -8.0588E - 06$.

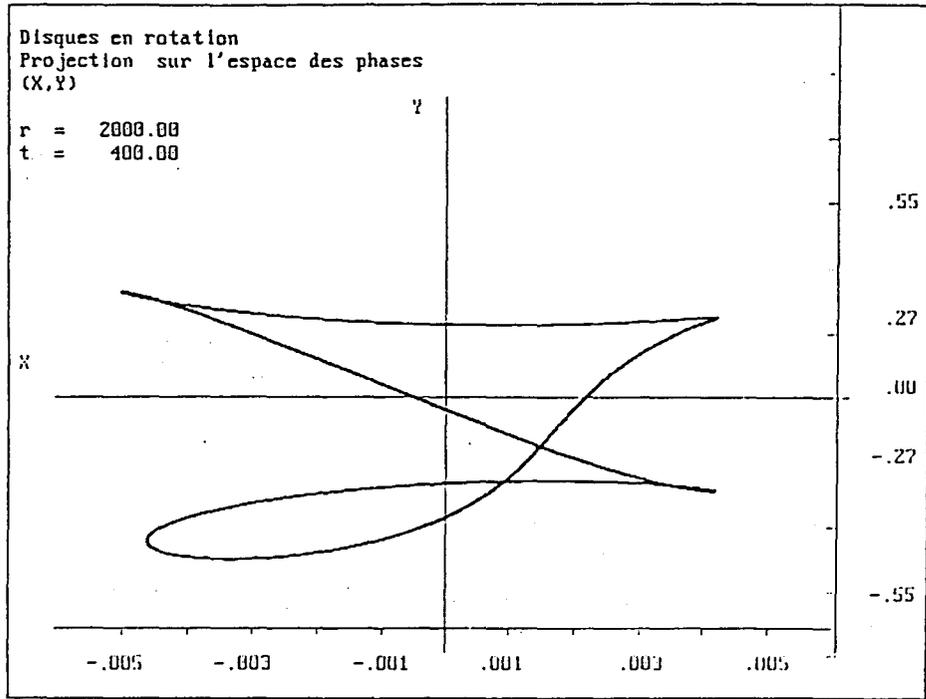


FIG. 2.27 - Cycle limite dans l'espace des phases (X,Y). $Re = 2000$, $\omega_f = 1$, $\Delta t = 0.001$, $T_f = 400$, $X_0 = -8.0588E - 06$.

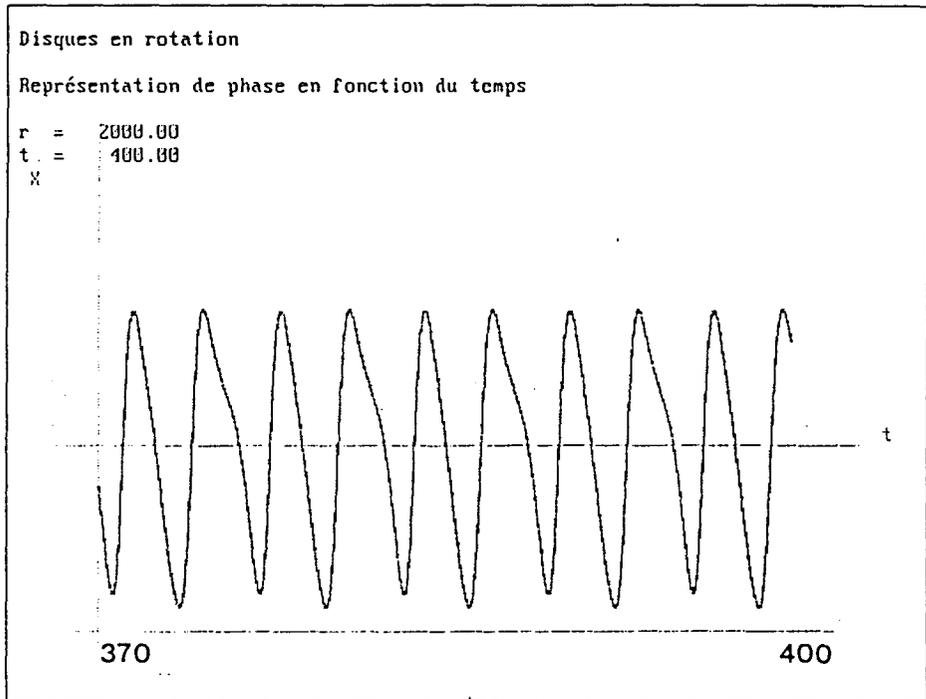


FIG. 2.28 - Amplitude de X en fonction du temps. $Re = 2000$, $\omega_f = 1$, $\Delta t = 0.001$, $X_0 = -8.0588E - 06$.

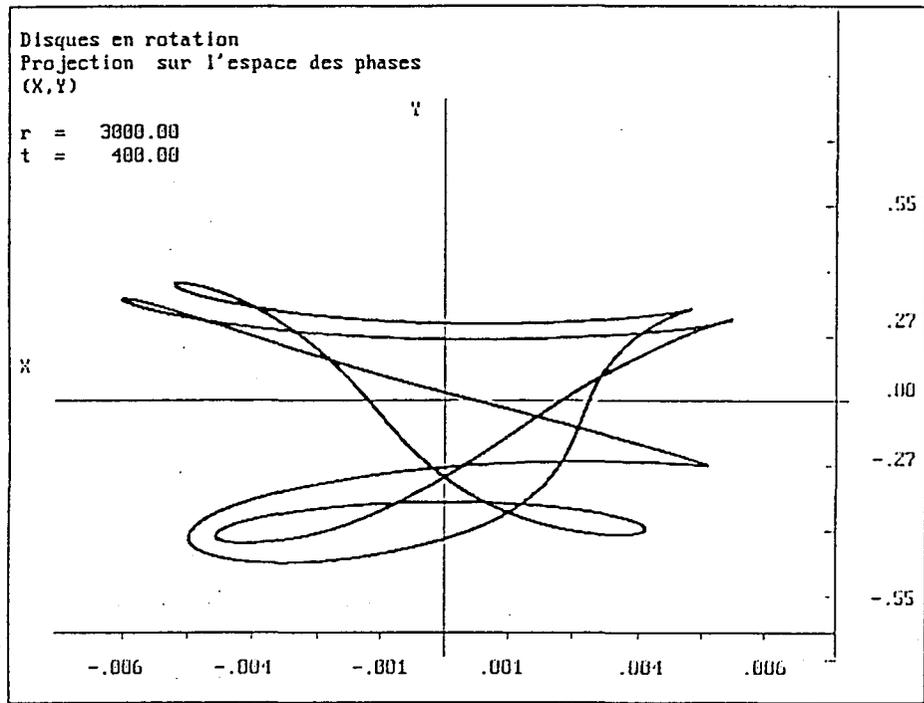


FIG. 2.29 - Cycle limite dans l'espace des phases (X,Y). $Re = 3000$, $\omega_f = 1$, $\Delta t = 0.001$, $T_f = 400$, $X_0 = -8.0588E - 06$.

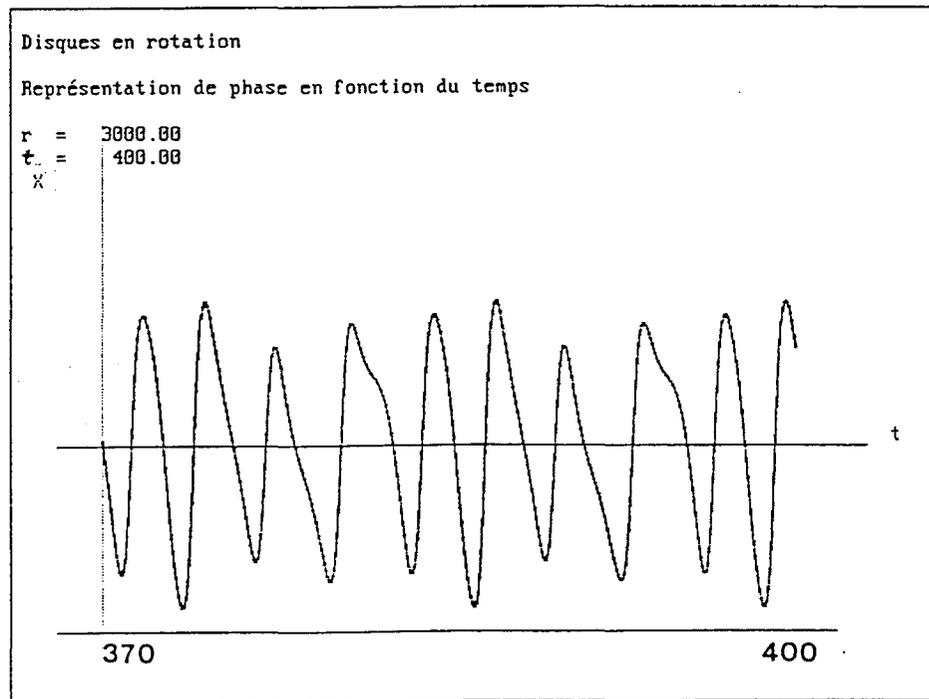


FIG. 2.30 - Amplitude de X en fonction du temps. $Re = 3000$, $\omega_f = 1$, $\Delta t = 0.001$, $X_0 = -8.0588E - 06$.

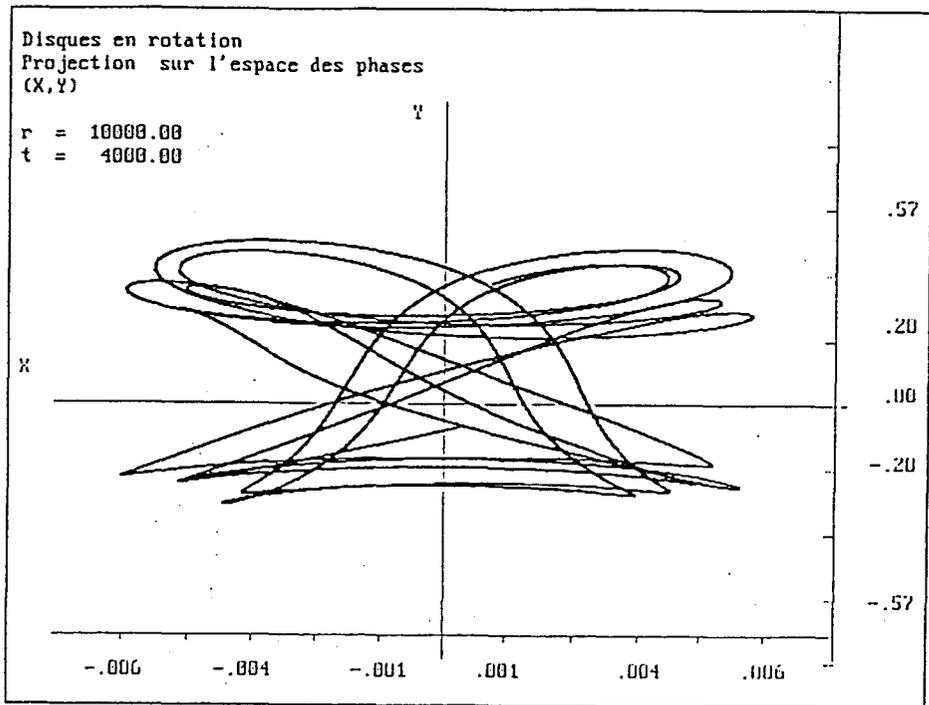


FIG. 2.31 - Trajectoire dans l'espace des phases (X,Y). $Re = 10000$, $\omega_f = 1$, $\Delta t = 0.001$, $T_f = 4000$, $X_0 = -8.0588E - 06$.

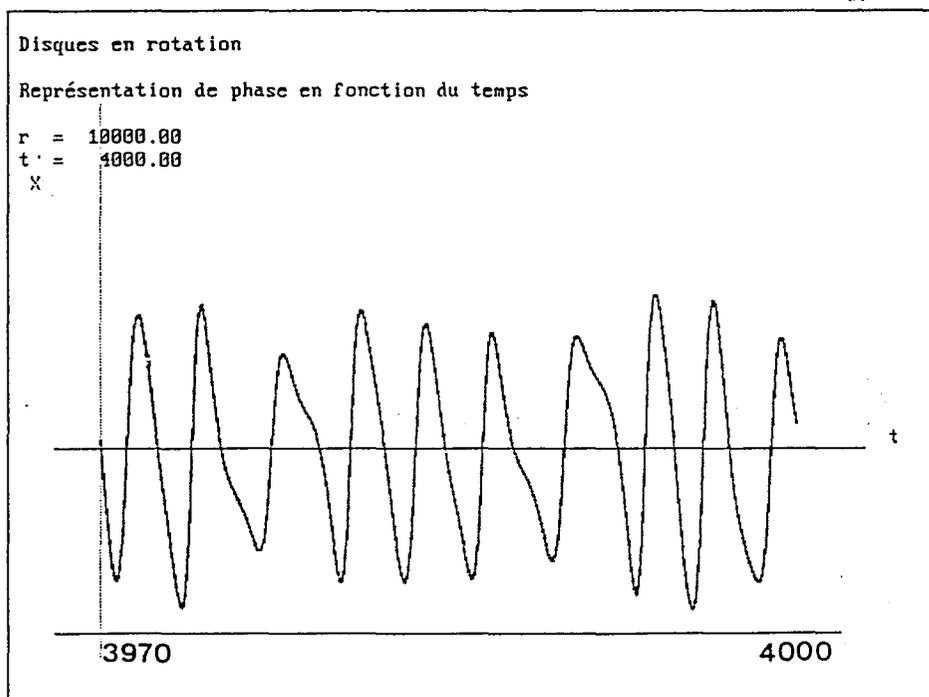


FIG. 2.32 - Amplitude de X en fonction du temps. $Re = 10000$, $\omega_f = 1$, $\Delta t = 0.001$, $X_0 = -8.0588E - 06$.

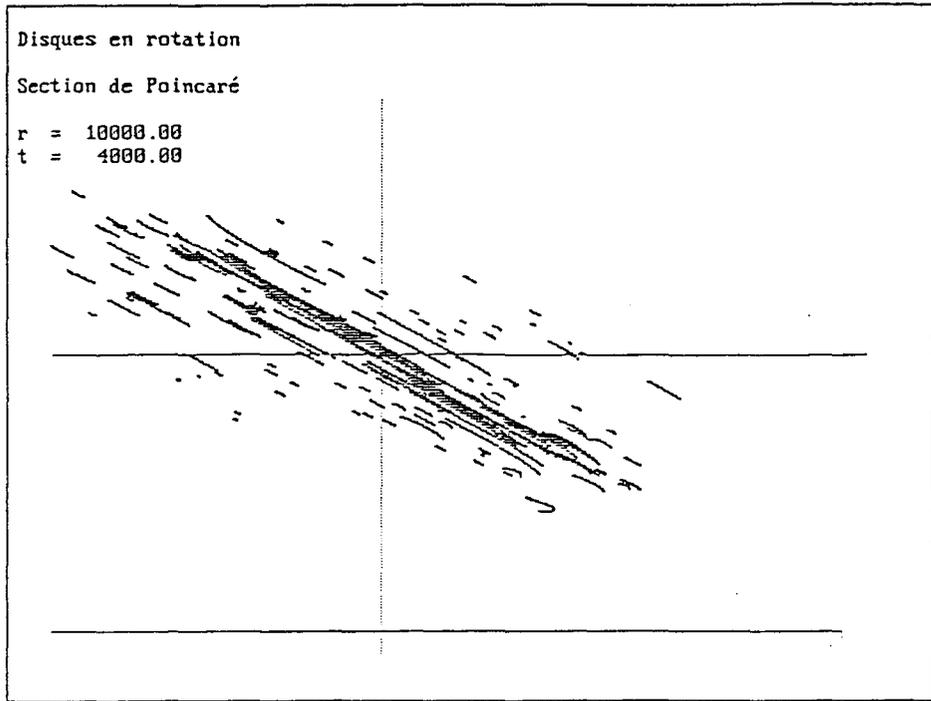


FIG. 2.33 - *Section de Poincaré en $X = 0$. $Re = 10000$, $\omega_f = 1$, $\Delta t = 0.001$, $X_0 = -8.0588E - 06$.*

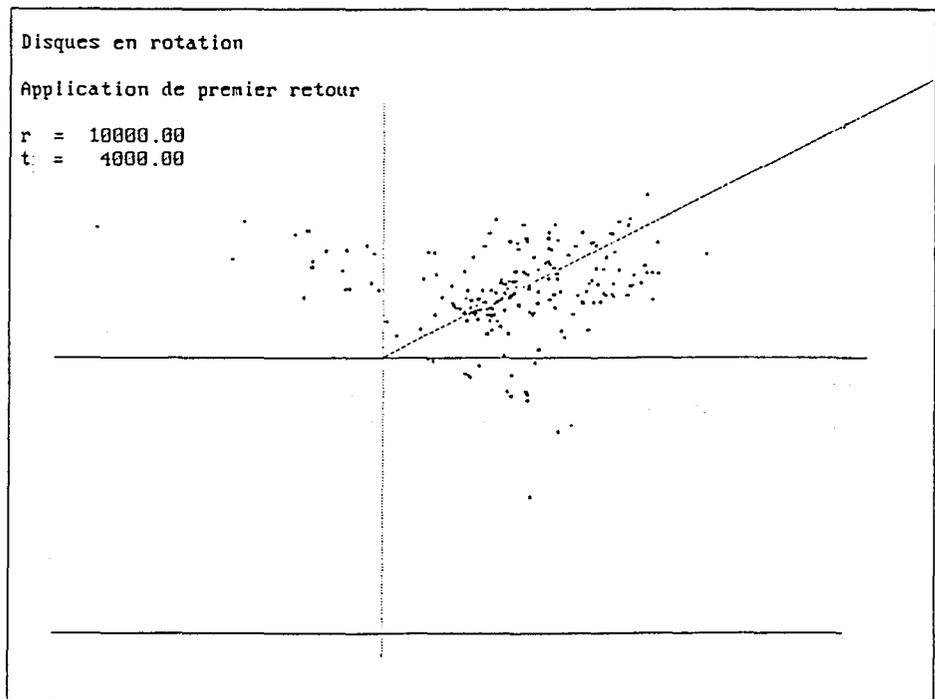


FIG. 2.34 - *Application de premier retour $X_{max}^{n+1} = f(X_{max}^n)$. $Re = 10000$, $\omega_f = 1$, $\Delta t = 0.001$, $X_0 = -8.0588E - 06$.*

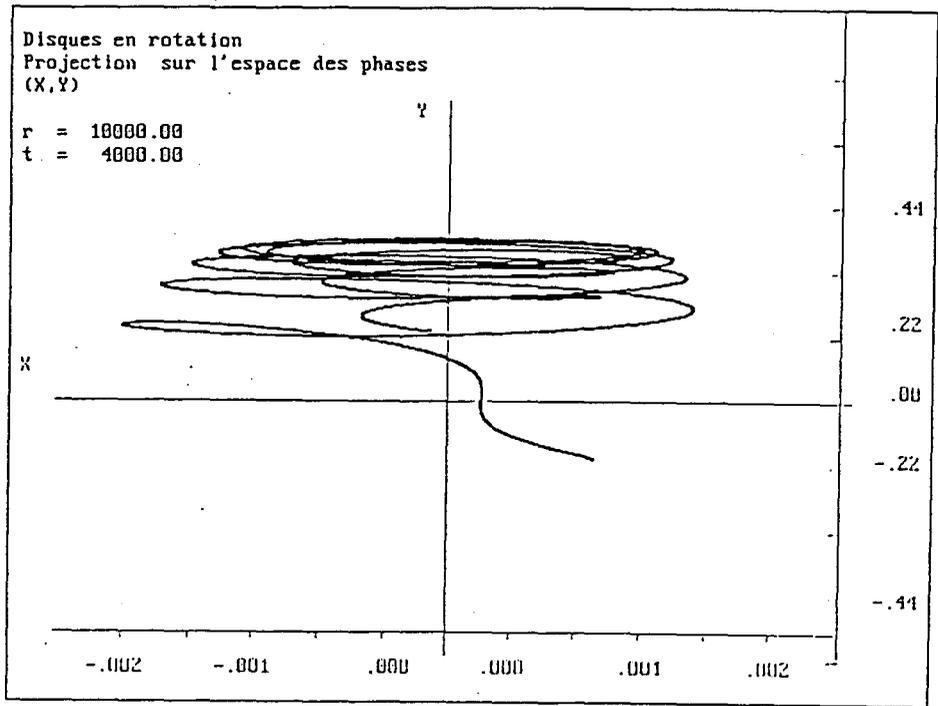


FIG. 2.35 - Trajectoire dans l'espace des phases (X,Y). $Re = 10000$, $\omega_f = 0.1$, $\Delta t = 0.001$, $T_f = 4000$, $X_0 = -8.0588E - 06$.

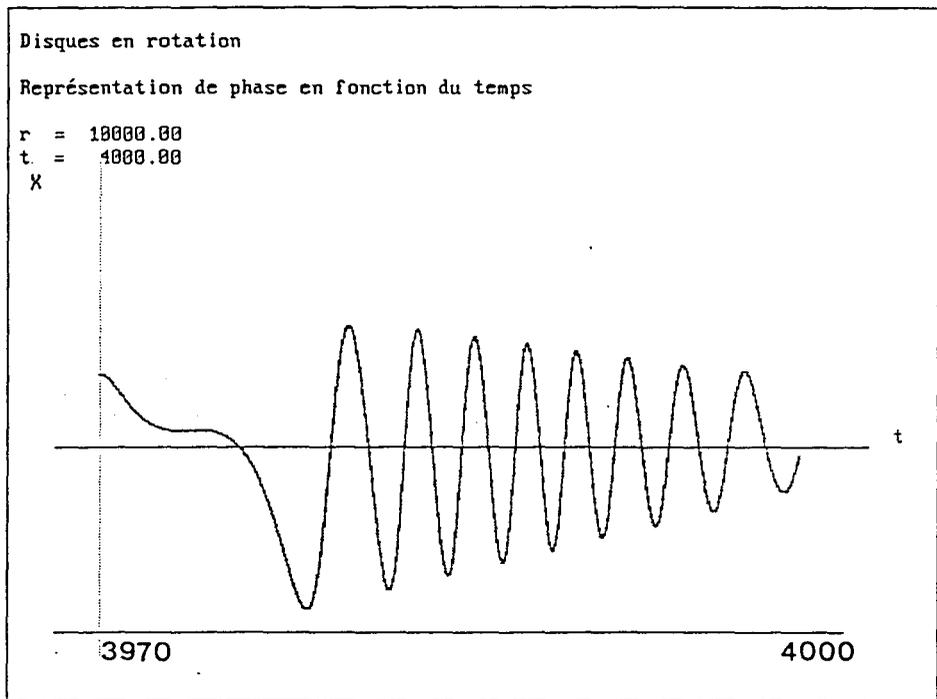


FIG. 2.36 - Amplitude de X en fonction du temps. $Re = 10000$, $\omega_f = 0.1$, $\Delta t = 0.001$, $X_0 = -8.0588E - 06$.

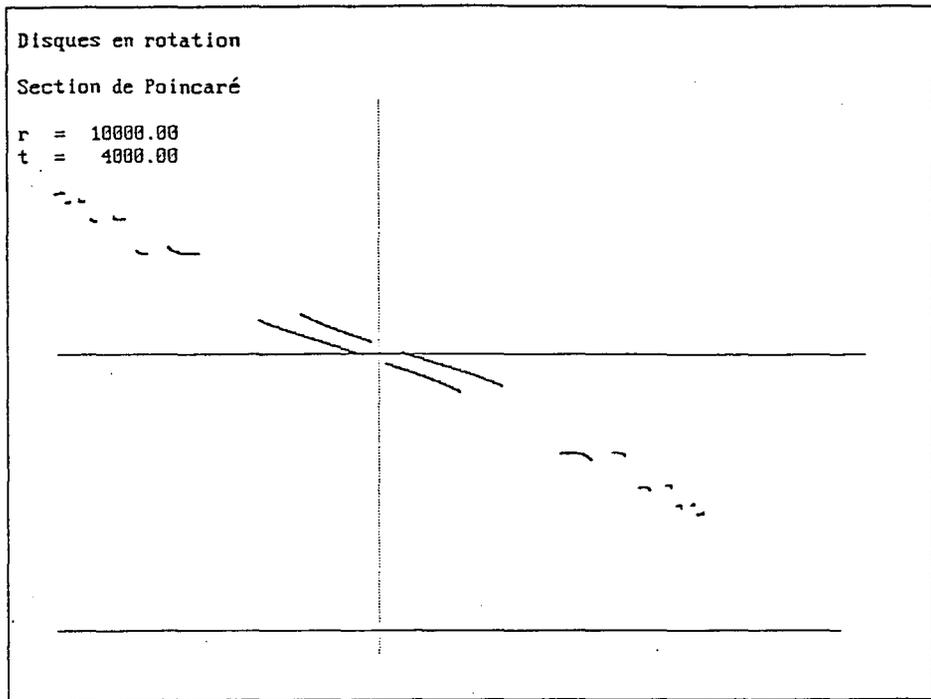


FIG. 2.37 - Section de Poincaré en $X = 0$. $Re = 10000$, $\omega_f = 0.1$, $\Delta t = 0.001$, $X_0 = -8.0588E - 06$.

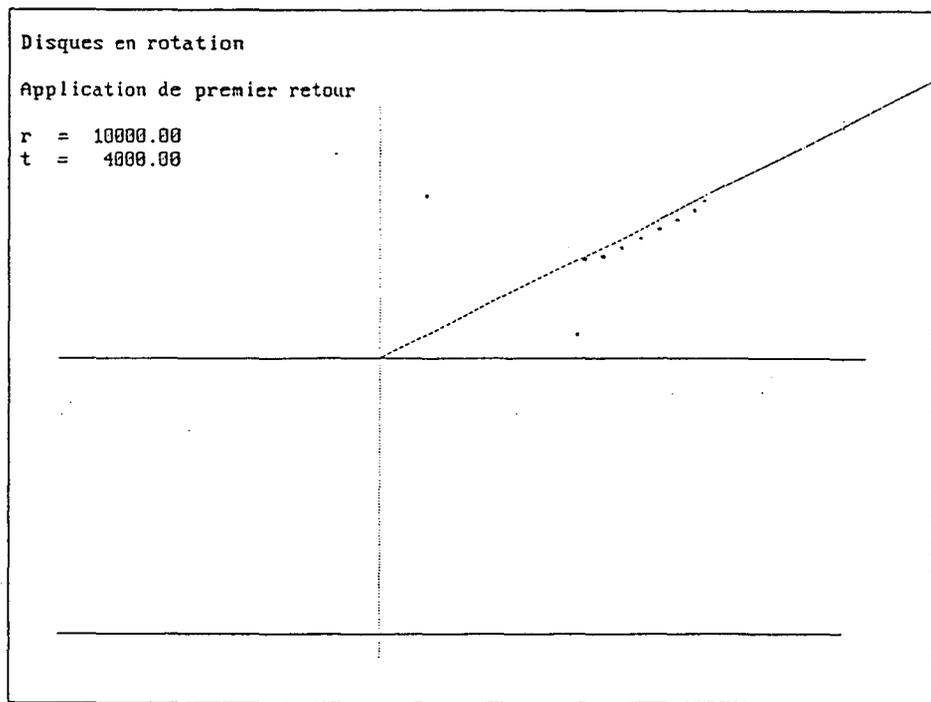


FIG. 2.38 - Application de premier retour $X_{max}^{n+1} = f(X_{max}^n)$. $Re = 10000$, $\omega_f = 0.1$, $\Delta t = 0.001$, $X_0 = -8.0588E - 06$.

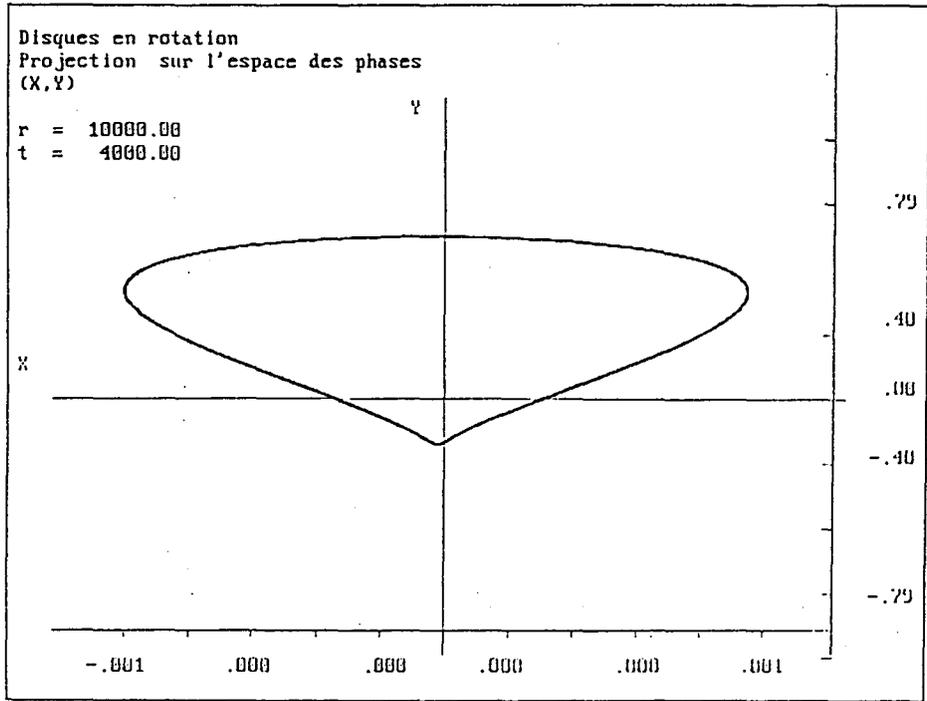


FIG. 2.39 - Cycle limite dans l'espace des phases (X, Y). $Re = 10000$, $\omega_f = 10$, $\Delta t = 0.001$, $T_f = 4000$, $X_0 = -8.0588E - 06$.

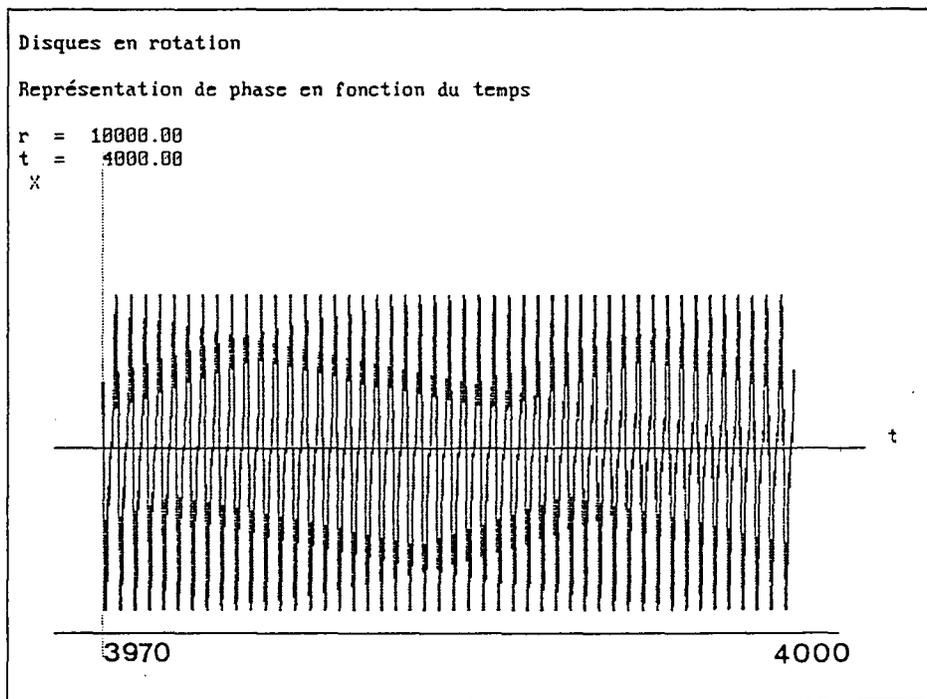


FIG. 2.40 - Amplitude de X en fonction du temps. $Re = 10000$, $\omega_f = 10$, $\Delta t = 0.001$, $X_0 = -8.0588E - 06$.

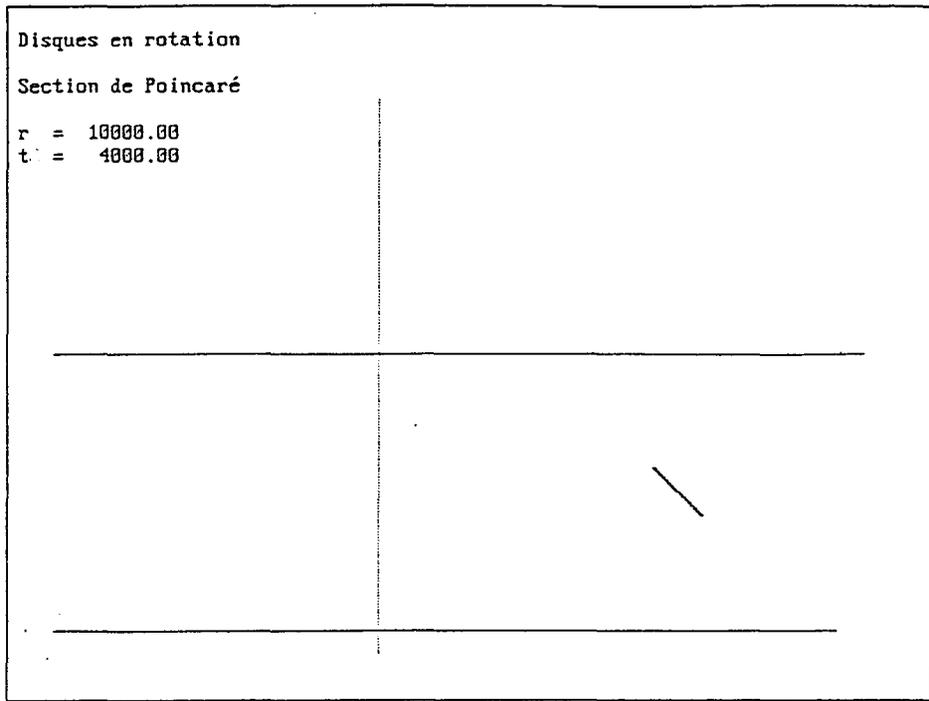


FIG. 2.41 - Section de Poincaré en $X = 0$. $Re = 10000$, $\omega_f = 10$, $\Delta t = 0.001$, $X_0 = -8.0588E - 06$.

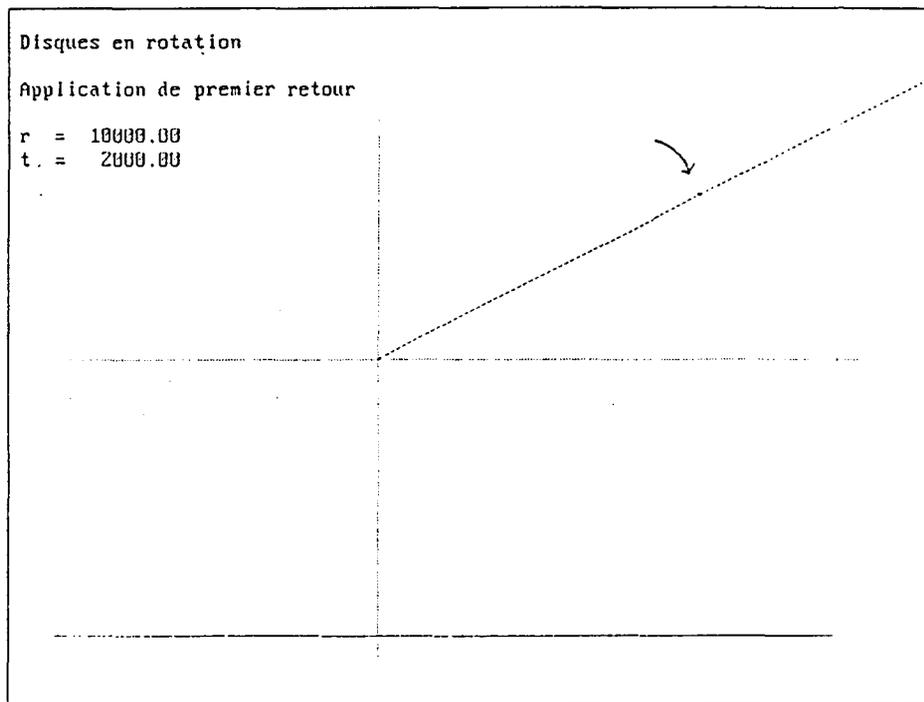


FIG. 2.42 - Application de premier retour $X_{max}^{n+1} = f(X_{max}^n)$. $Re = 10000$, $\omega_f = 10$, $\Delta t = 0.001$, $X_0 = -8.0588E - 06$.

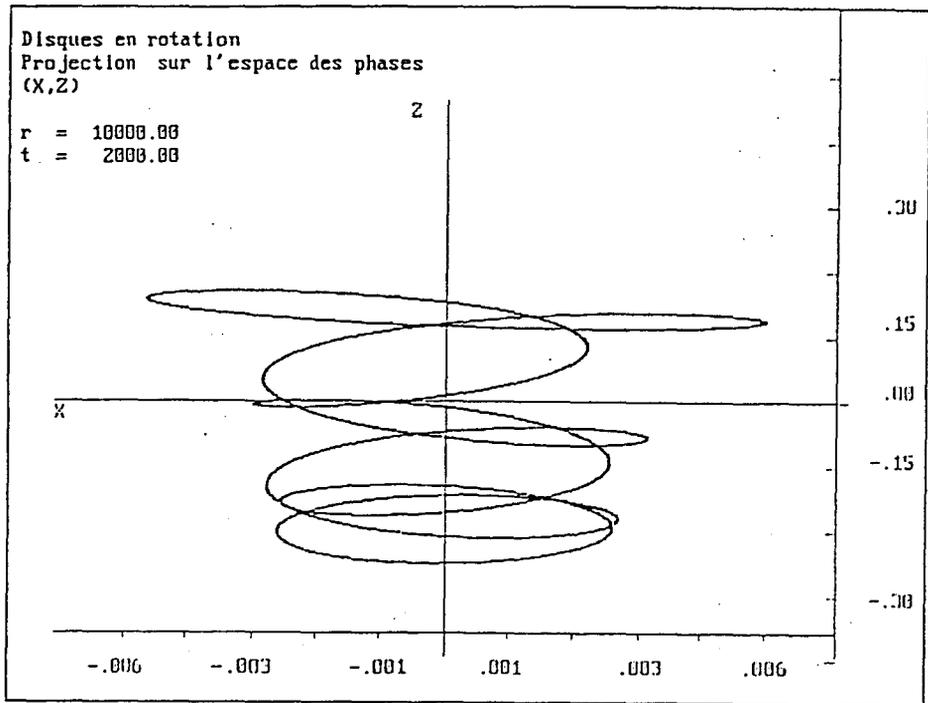


FIG. 2.43 - Cycle limite dans l'espace des phases (X, Z). $Re = 10000$, $\omega_f = 1$, $\Delta t = 0.001$, $T_f = 2000$, $X_0 = -1$, $Y_0 = 0$, $Z_0 = 0$.

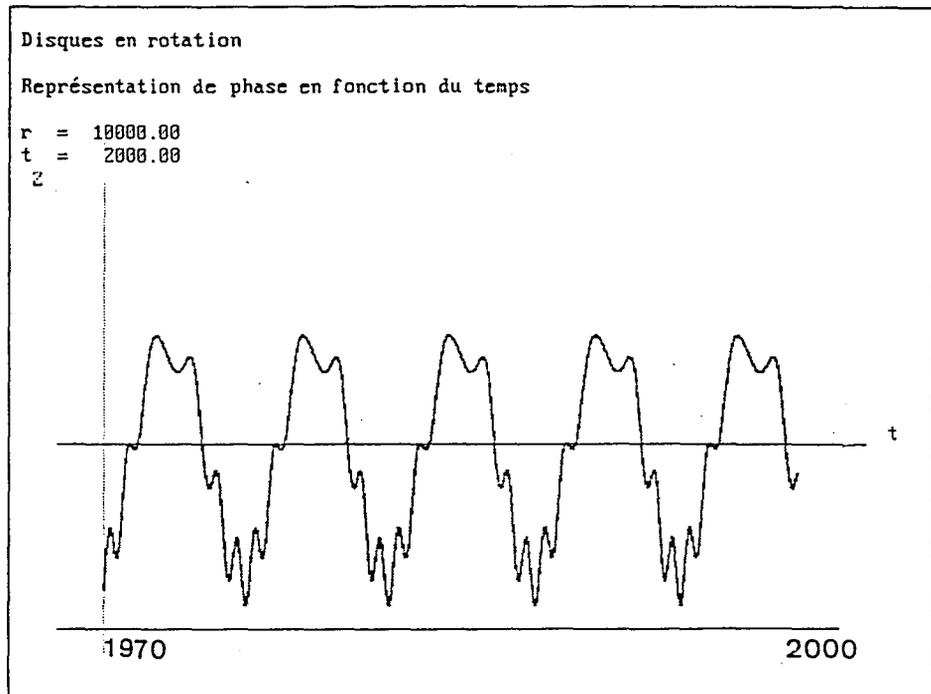


FIG. 2.44 - Amplitude de Z en fonction du temps. $Re = 10000$, $\omega_f = 1$, $\Delta t = 0.001$, $X_0 = -1$, $Y_0 = 0$, $Z_0 = 0$.

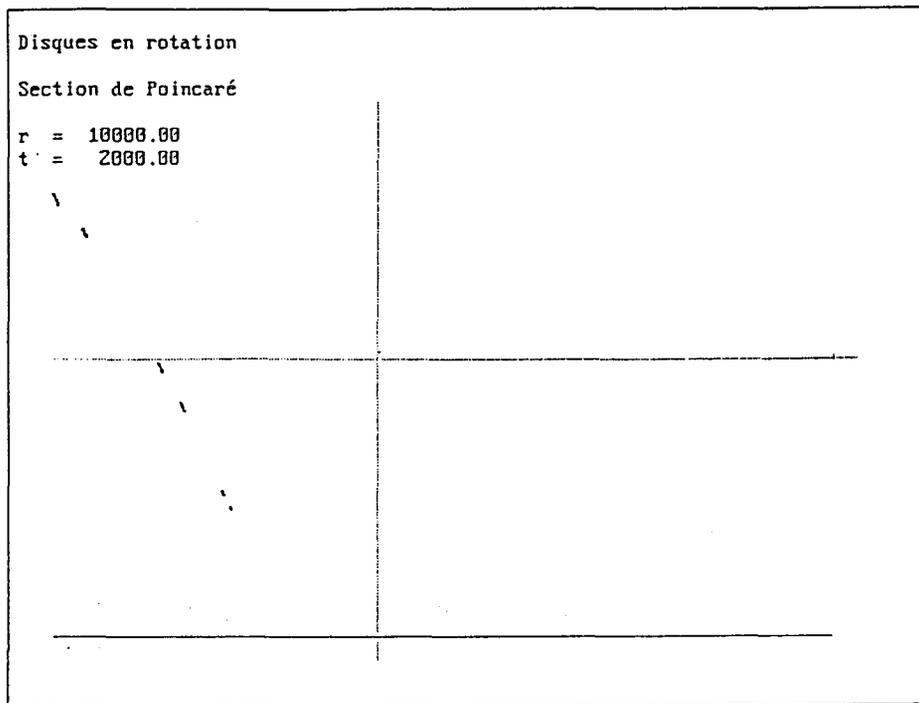


FIG. 2.45 - Section de Poincaré en $X = 0$. $Re = 10000$, $\omega_f = 1$, $\Delta t = 0.001$, $X_0 = -1$, $Y_0 = 0$, $Z_0 = 0$.

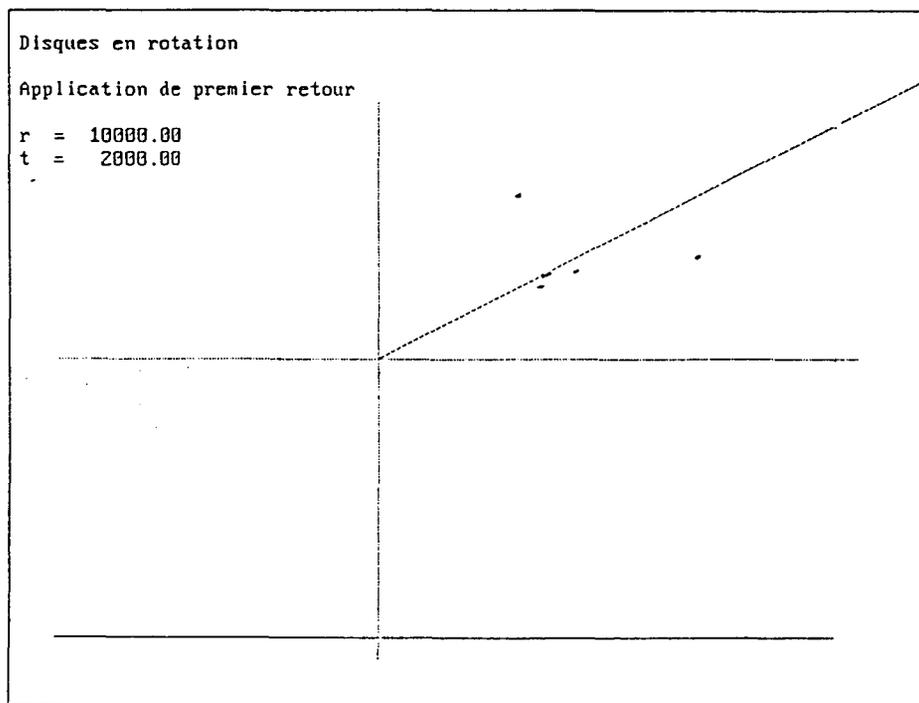


FIG. 2.46 - Application de premier retour $X_{max}^{n+1} = f(X_{max}^n)$. $Re = 10000$, $\omega_f = 1$, $\Delta t = 0.001$, $X_0 = -1$, $Y_0 = 0$, $Z_0 = 0$.

Alors que pour toutes les solutions stationnaires comme conditions initiales on peut observer des trajectoires analogues (qu'on ne représente pas ici), le comportement du système peut être très différent pour d'autres conditions initiales ((2.43)-(2.46)).

Les projections des trajectoires dans les espaces de phases, ainsi que la section de Poincaré et l'application de premier retour, révèlent l'existence d'au moins un scénario donnant des comportements chaotiques. Ce scénario, bien que proche du scénario de la cascade sous-harmonique, présente par contre des "accidents", qui consistent en des changements intermittents de signe. L'application de premier retour (figure (2.34)) se présente sous l'aspect d'un nuage de points, très éloigné de l'application de premier retour d'un système tel que, par exemple, le système de Lorenz [4]. Toutefois, le système dynamique étudié ici se caractérise bien par une imprédictibilité à long terme. On vérifie ainsi que les trajectoires pour $Re = 10000$ et $\omega_f = 1$ ont non seulement une "allure" chaotique, mais qu'elles présentent de plus une sensibilité aux conditions initiales. En effet, si on tronque les valeurs des conditions initiales utilisées pour les figures (2.31)-(2.34), par exemple au quatrième chiffre après la virgule, on obtient des trajectoires différentes (figures (2.47)-(2.50)) de celles obtenues pour la solution stationnaire "exacte".

On peut aussi s'interroger sur l'influence du pas de discrétisation en temps Δt sur les solutions obtenues. Il se révèle que le fait de discrétiser en temps une perturbation dépendant continûment du temps peut impliquer que, selon la valeur de Δt et pour certaines conditions initiales, la perturbation ne va pas agir sur le système avec la même fréquence, c'est-à-dire que la discrétisation peut être "intrusive". Ainsi, pour $X_0 = -1$, $Y_0 = 0$ et $Z_0 = 0$, les trajectoires dans l'espace des phases (X, Z) sont très différentes pour $\Delta t = 0.001$ et $\Delta t = 0.005$: on se retrouve en présence respectivement d'un cycle limite complexe à plusieurs boucles ((2.43)-(2.46)) et d'un "tore" ((2.51)-(2.54)).

On peut enfin se pencher sur la divergence du système dynamique (VI) étudié ici. On a :

$$\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{dX}{dt}\right) + \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{dY}{dt}\right) + \frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{dZ}{dt}\right) = p + q + r + (2a + a' + b'')X$$

qui dépend explicitement de l'inconnue X . La divergence est donc une fonction du temps. Pour tous les exemples présentés ici, elle s'est révélée négative à l'arrêt du calcul. Ainsi, pour $Re = 10000$, la divergence vaut environ -0.001 en fin de calcul non divergent. En raison de la dépendance en temps, on ne peut pas être sûr que la solution obtenue sera la même pour un temps ultérieur. Les trajectoires présentées et le comportement du système qui peut leur être associé sont valables surtout pour la "fenêtre" de temps qui correspond au temps calculé.

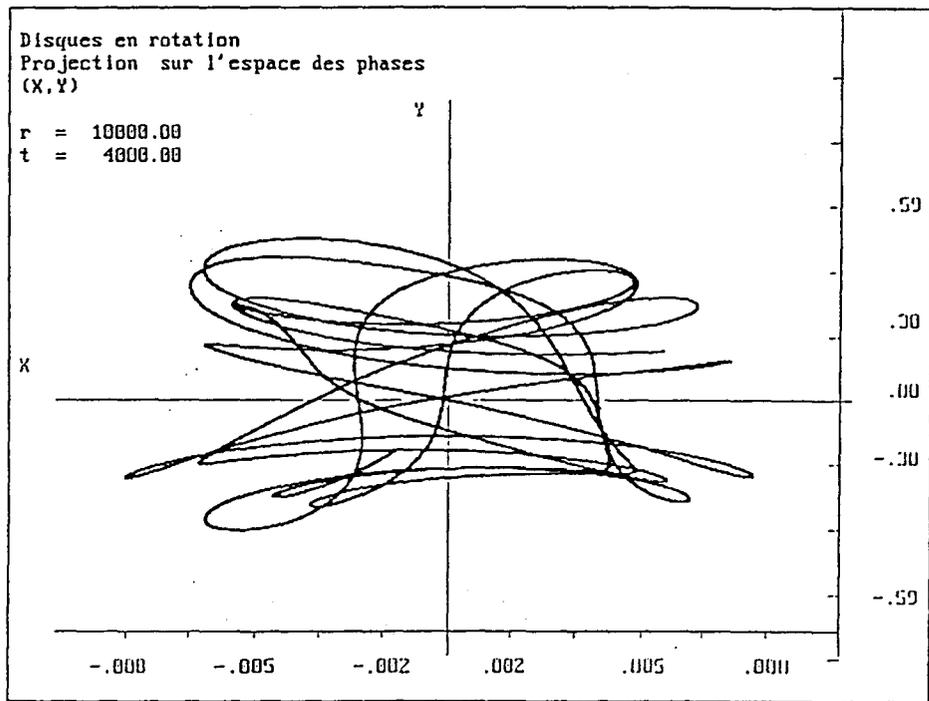


FIG. 2.47 - Trajectoire dans l'espace des phases (X,Y). $Re = 10000$, $\omega_f = 1$, $\Delta t = 0.001$, $T_f = 4000$, $X_0 = -8.05880E - 06$

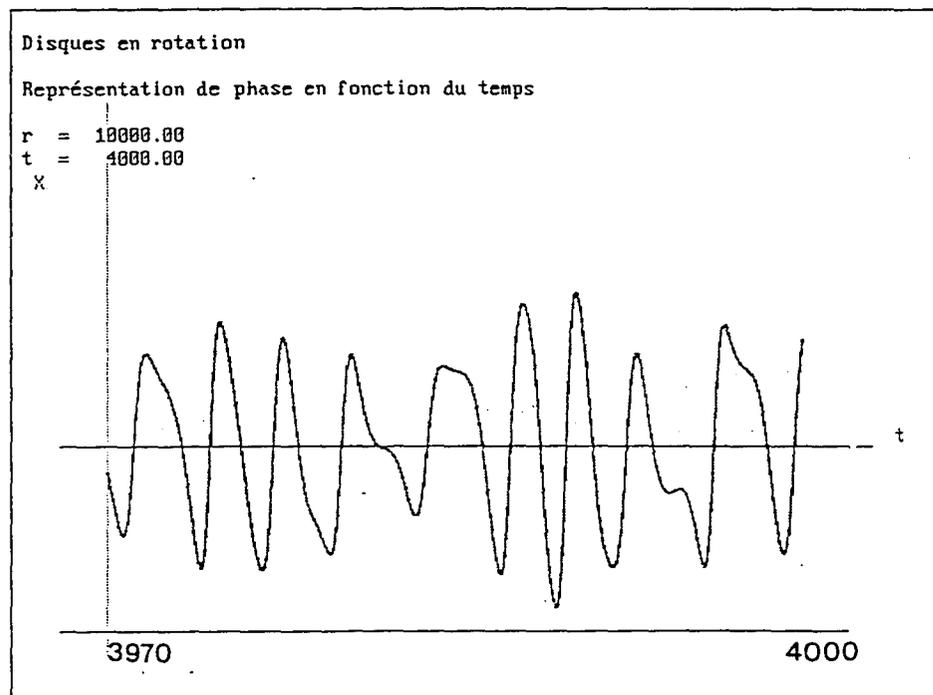


FIG. 2.48 - Amplitude de X en fonction du temps. $Re = 10000$, $\omega_f = 1$, $\Delta t = 0.001$, $X_0 = -8.05880E - 06$

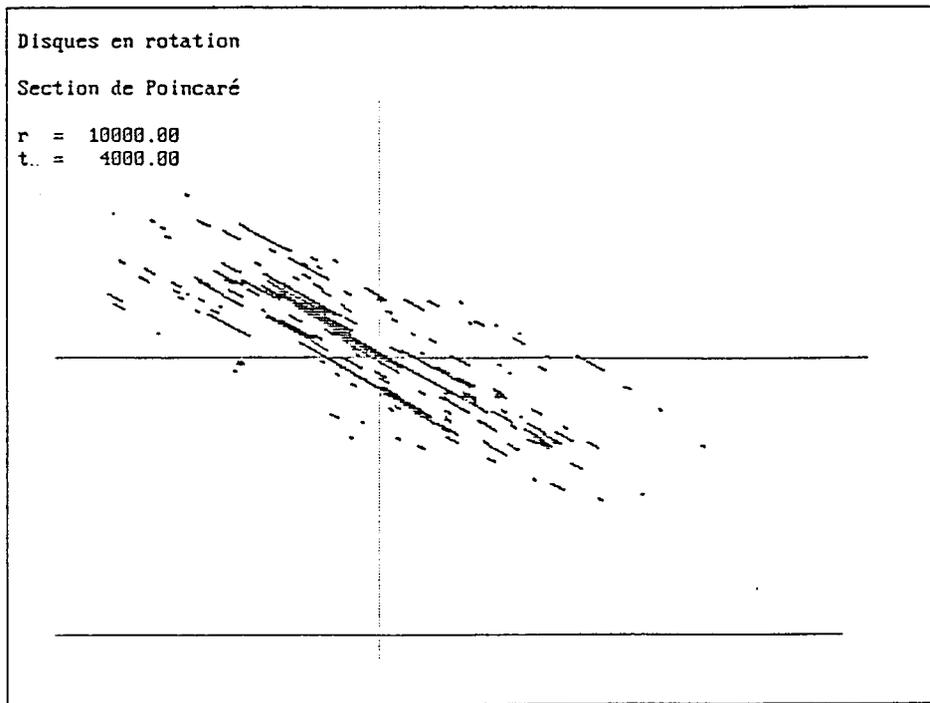


FIG. 2.49 - Section de Poincaré en $X = 0$. $Re = 10000$, $\omega_f = 1$, $\Delta t = 0.001$, $X_0 = -8.05880E - 06$

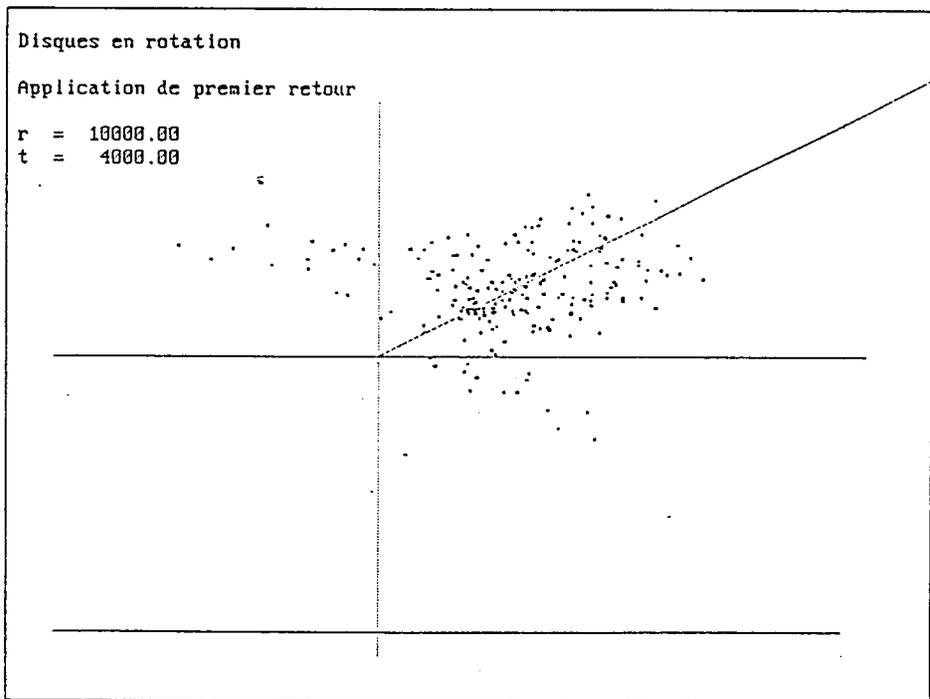


FIG. 2.50 - Application de premier retour $X_{max}^{n+1} = f(X_{max}^n)$. $Re = 10000$, $\omega_f = 1$, $\Delta t = 0.001$, $X_0 = -8.05880E - 06$

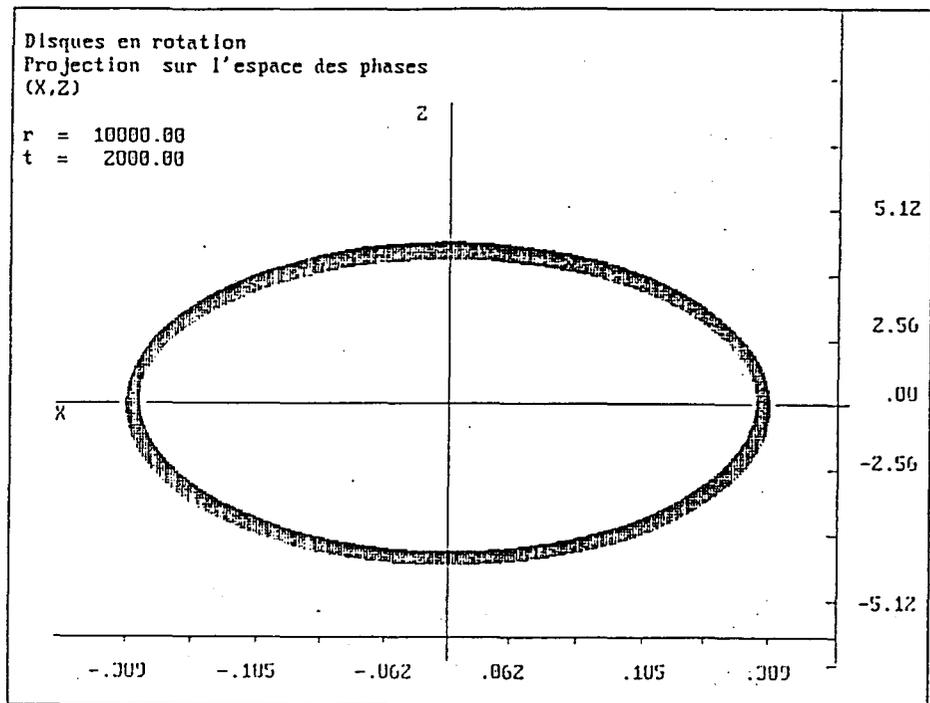


FIG. 2.51 - Trajectoire dans l'espace des phases (X, Z) . $Re = 10000$, $\omega_f = 1$, $\Delta t = 0.005$, $T_f = 2000$, $X_0 = -1$, $Y_0 = 0$ et $Z_0 = 0$:

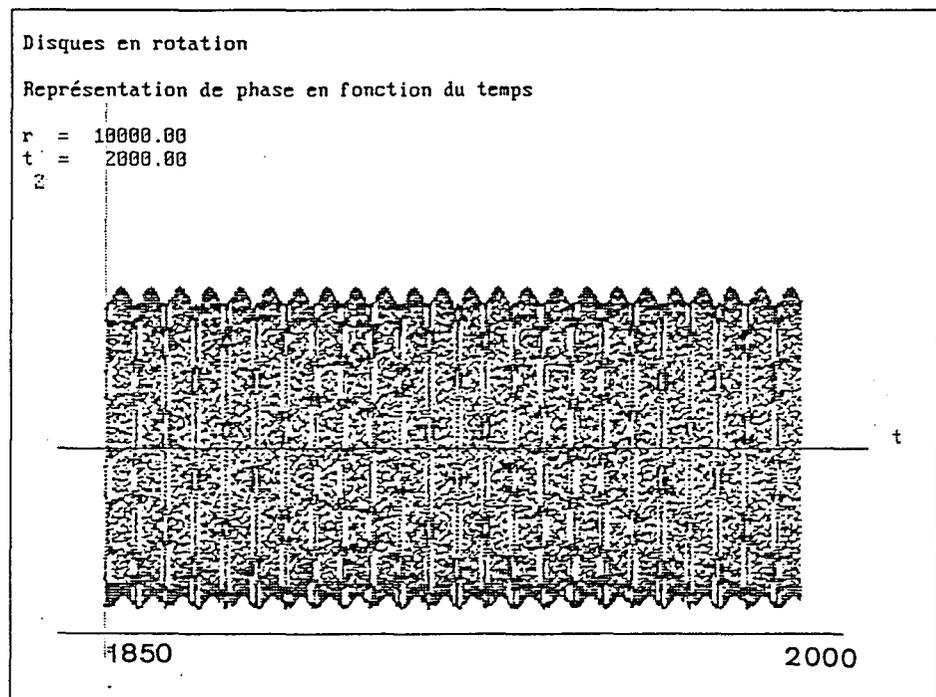


FIG. 2.52 - Amplitude de Z en fonction du temps. $Re = 10000$, $\omega_f = 1$, $\Delta t = 0.005$, $X_0 = -1$, $Y_0 = 0$ et $Z_0 = 0$.

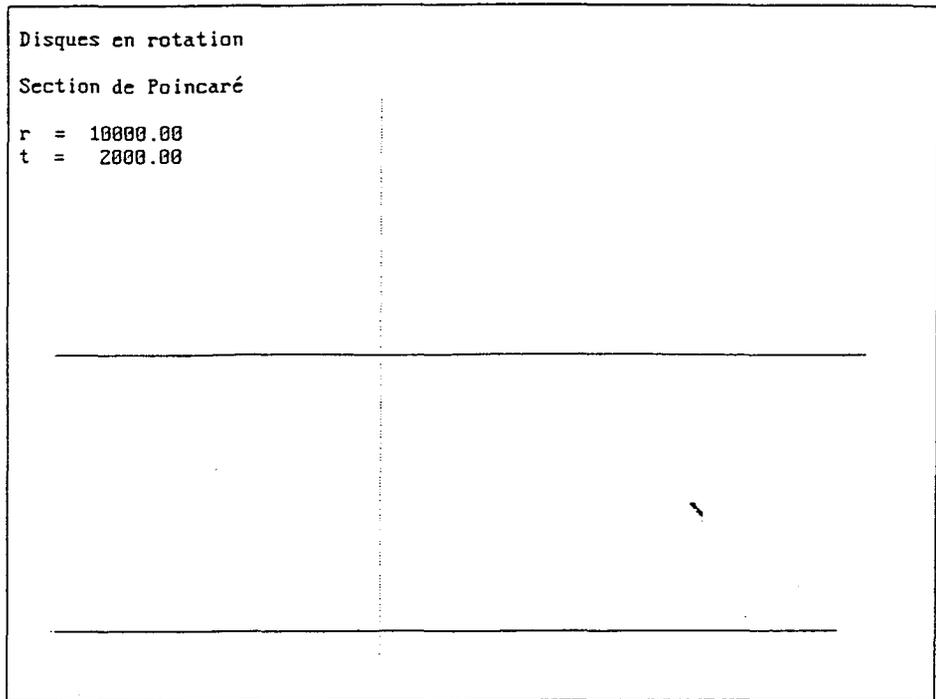


FIG. 2.53 - *Section de Poincaré en $X = 0$. $Re = 10000$, $\omega_f = 1$, $\Delta t = 0.005$, $X_0 = -1$, $Y_0 = 0$ et $Z_0 = 0$.*

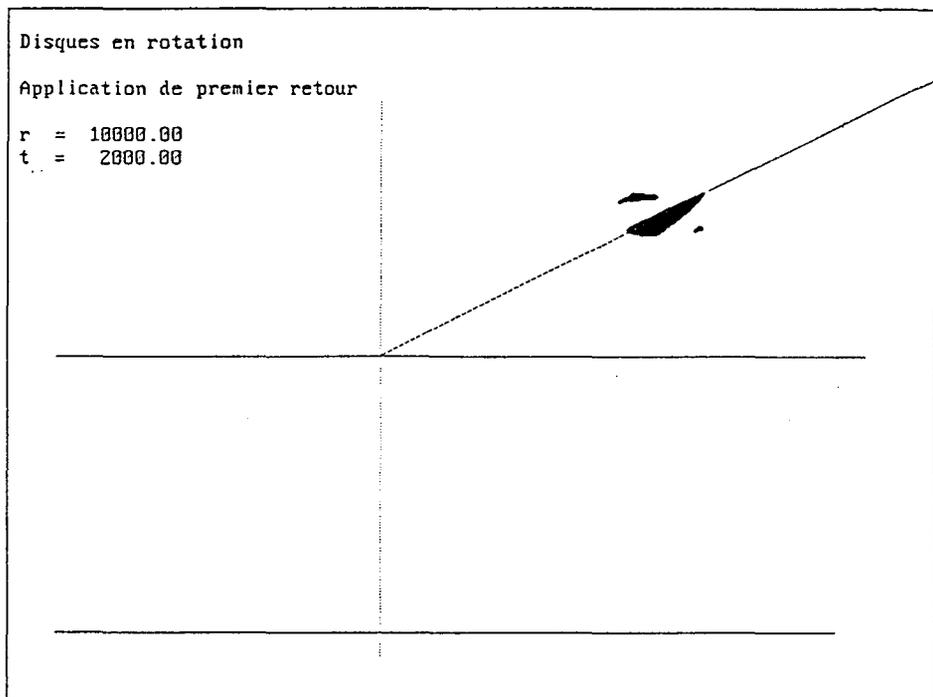


FIG. 2.54 - *Application de premier retour $X_{max}^{n+1} = f(X_{max}^n)$. $Re = 10000$, $\omega_f = 1$, $\Delta t = 0.005$, $X_0 = -1$, $Y_0 = 0$ et $Z_0 = 0$.*

c) Bassin d'attraction

En suivant [9], on s'intéresse à présent au bassin d'attraction des solutions bornées pour le système non-autonome avec le forçage périodique $\omega(t) = \cos(\omega_f t)$ du paragraphe b) avec $\omega_f = 1$. On choisit ainsi de représenter le devenir des trajectoires lorsque les conditions initiales (X_0, Y_0, Z_0) balayent un domaine carré tel $-10 \leq X_0 \leq 10$ et $-10 \leq Y_0 \leq 10$ avec $Z_0 = 0$. On obtient le bassin d'attraction suivant :

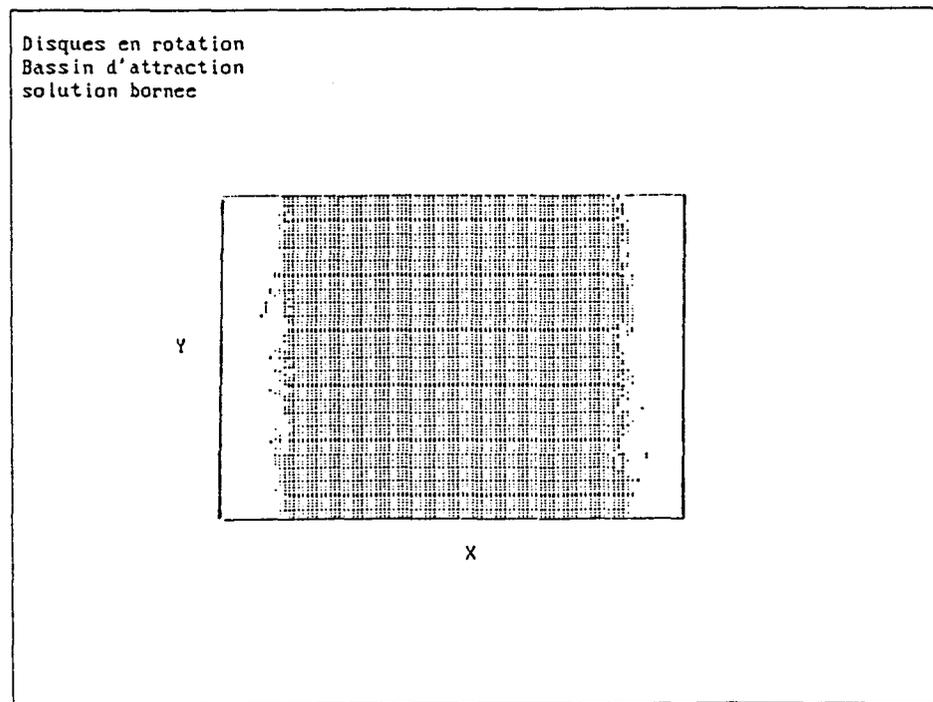


FIG. 2.55 - Bassin d'attraction des solutions bornées. $Re = 3700$ et $-10 \leq X_0 \leq 10$ et $-10 \leq Y_0 \leq 10$ avec $Z_0 = 0$.

où les conditions qui ont donné naissance à des trajectoires divergentes sont repérées en blanc tandis que les conditions initiales qui ont engendré des solutions encore bornées en $t = 70$ sont en noir.

Le bassin d'attraction des solutions bornées (figure (2.55)) apparaît sous la forme d'une bande presque parfaite, mais avec de petites irrégularités visibles sur les frontières latérales. Si, à présent, on ne s'intéresse plus qu'au voisinage de la frontière pour les x négatifs, on s'aperçoit (figure (2.56)) que celle-ci est bien plus irrégulière qu'on aurait pu le penser *a priori*. Cette frontière présente des détails qui en révéleraient certainement d'autres avec un maillage plus fin. La frontière est donc vraisemblablement fractale et est à l'origine d'une imprédictibilité du système pour des données initiales prises dans son voisinage.

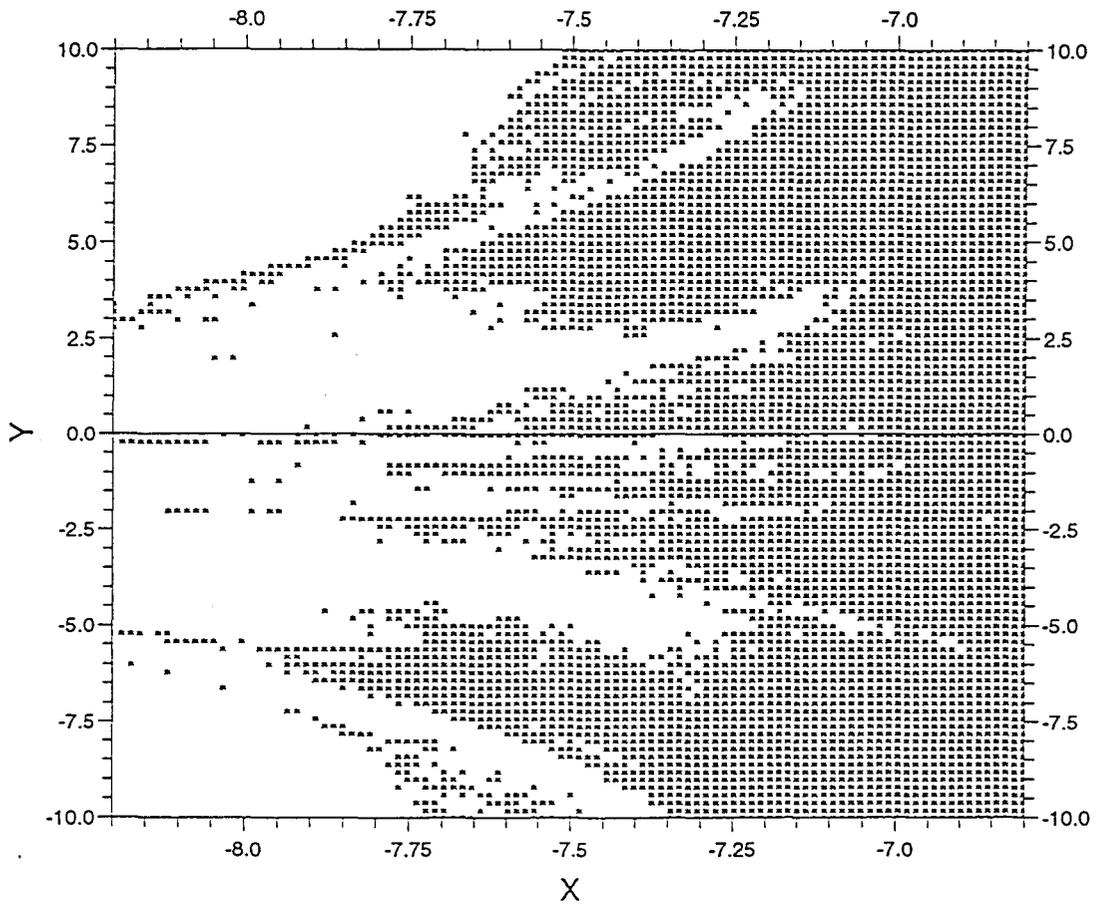


FIG. 2.56 - *Frontière fractale du bassin d'attraction des solutions bornées. $Re = 3700$ et $-8.2 \leq X_0 \leq -6.8$ et $-10 \leq Y_0 \leq 10$ avec $Z_0 = 0$.*

2.5 Conclusion

Le système autonome obtenu à partir d'une troncature à la Galerkin des équations de Navier (écrites avec les fonctions de similitude de Von Karman) donne des solutions stationnaires qui ressemblent aux solutions de type Batchelor et à la solution à une cellule avec coeur animé d'une vitesse angulaire négative de l'écoulement entre deux disques en rotation, solutions qui sont obtenues par d'autres approches numériques. Cependant, l'existence de solutions complexes, qui se rapprochent des solutions du type "Stewartson", laisse à penser que le nombre de modes, limité à trois par la lourdeur du calcul analytique, reste insuffisant pour rendre compte de toute la physique du phénomène.

Le comportement des solutions du système autonome semble se limiter aux points stationnaires et aux cycles limites. En s'inspirant des observations rapportées dans [16], [17] et [36], il apparaît nécessaire de produire artificiellement le "feed-back turbulent" qui semble à l'origine de la déstabilisation de l'écoulement de base, notamment pour le mode *III* de Sivirvat qui nous intéresse plus spécialement ici. Les résultats exposés dans ce chapitre indiquent que la perturbation appliquée doit être assez importante, du moins dans le cas d'une perturbation sinusoïdale. Ce choix de simulation d'écoulement de retour turbulent, sans doute "simpliste", permet pourtant de mettre en évidence un comportement chaotique, pour un nombre de Reynolds supérieur à 3431, à partir d'un forçage périodique. On vérifie qu'en modifiant un peu les conditions initiales on obtient des trajectoires différentes et donc que le système présente une dépendance sensitive aux conditions initiales. De plus, l'étude du bassin d'attraction des solutions bornées montre l'existence d'une frontière fractale et de là l'existence d'une autre forme d'imprédictibilité du système pour certaines conditions initiales.

Le travail effectué ici a mis en évidence quelques aspects du comportement du système dynamique à trois modes modélisant l'écoulement dû à des disques en rotation, mais ne rend sans doute pas compte de toutes ses possibilités.

Chapitre 3

Modélisation en "ondes longues" de l'écoulement entre deux disques en rotation

3.1 Introduction

Les écoulements à l'intérieur d'un cylindre, dont les parois peuvent tourner à des vitesses légèrement différentes, comportent une région principale - ou coeur - et des couches limites au voisinage des parois. On retrouve cette structure dans [21] avec un écoulement géostrophique dans la région principale, des couches d'Ekman sur les parois horizontales et des couches de Stewartson sur les parois verticales. L'écoulement dans le coeur est dit géostrophique car, à l'ordre principal des développements des équations de Navier en puissances du nombre de Rossby, on vérifie l'équilibre entre la force de Coriolis et le gradient horizontal de la pression ([20],[5]). Cependant les processus limites qui ont mené à l'ensemble simplifié d'équations ont également pour conséquence une perte de dérivées en temps.

On travaille ici sur l'écoulement dans un cylindre muni d'un couvercle et de petit rapport de forme. On vérifie que le coeur est géostrophique et qu'un rééchelonnage en temps (pour obtenir un problème dit de "couche initiale") permet l'ajustement des données initiales, c'est-à-dire l'adaptation instationnaire, au modèle asymptotique [43].

On étudie donc la modélisation du type "ondes longues" d'un écoulement instationnaire, entre deux disques en rotation, d'un fluide visqueux, incompressible et initialement animé d'une vitesse dépendant de r , θ et z . Les disques tournent coaxialement et sont distants d'une hauteur d supposée petite devant le rayon L ; le disque inférieur tourne à la vitesse Ω_0 , supposée constante, tandis que le disque supérieur tourne à une vitesse $\Omega_0(1 + \epsilon)$ légè-

rement plus importante. En effet, on suppose, pour notre étude, un différentiel de vitesse faible, soit ϵ petit .

Dans une première partie, on représente mathématiquement cet écoulement de fluide grâce aux équations de Navier. Celles-ci sont écrites en coordonnées cylindriques dans un repère mobile animé de la vitesse angulaire Ω_0 . Par ailleurs, on ne fait pas ici l'hypothèse d'un champ de vitesse axisymétrique, hypothèse souvent avancée - afin de simplifier les équations de départ - dans le cas des écoulements dus à un ou deux disques en rotation. Une fois obtenue la formulation mathématique de base de notre problème physique, on adimensionnalise, par rapport à des grandeurs caractéristiques de la configuration choisie, le système d'équations de base. Des équations de Navier adimensionnées émergent alors deux petits paramètres ; ce sont : le paramètre de forme, noté α et tel que $\alpha = d/L$, et le nombre de Rossby, noté Ro (ce dernier rend compte du rapport entre les forces convectives et la force de Coriolis et équivaut ainsi ici à ϵ).

Si, dans le système d'équations adimensionnées, on fait tendre successivement ces deux petits paramètres vers 0, on obtient d'abord un système quasi-hydrostatique, du type "ondes longues", puis une hiérarchie de systèmes obtenus grâce à un développement asymptotique des inconnues en puissances de ϵ . On s'aperçoit alors que la solution trouvée pour le champ des vitesses à l'ordre 0 ne peut pas satisfaire aux conditions aux limites imposées par l'adhérence sur les disques ainsi qu'aux conditions initiales imposées à $t = 0$; d'où l'obligation de supposer l'existence, sur les parois des disques, de couches limites, appelées couches d'Ekman, qui tiennent compte du cisaillement imposé au fluide par les parois en mouvement ainsi que l'existence d'une couche initiale au voisinage de l'origine des temps.

Dans une seconde partie, on considère les équations du mouvement et l'équation de continuité écrites dans les couches d'Ekman. A partir de ces équations, on détermine les solutions dans les couches limites en fonction des composantes du champ des vitesses de la région "intérieure", c'est-à-dire de la région décrite par les équations du système quasi-hydrostatique. En effectuant des raccords de type "zone intermédiaire" entre la région intérieure et les couches limites sur les disques, on peut en déduire une équation pour p_0 , la pression à l'ordre 0 en ϵ . Cependant il est nécessaire de prescrire pour cette équation d'évolution des conditions initiales convenables.

Ceci est réalisé dans une troisième et dernière partie, où on étudie l'adaptation instantanée au géostrophisme, ce qui nous permet d'afficher la "bonne condition initiale"

pour p_0 à $t = 0$ et de formuler complètement le problème d'évolution pour p_0 . On étudie ensuite la stabilité de l'écoulement de base dans le cas particulier où l'état initial est celui de rotation solide à la vitesse angulaire Ω_0 , c'est-à-dire l'état de repos si on se place dans le repère en mouvement.

Ce travail a fait l'objet d'une publication IRMA [1].

3.2 Formulation mathématique

3.2.1 Equations de base

Les équations de Navier sont écrites en coordonnées cylindriques dans un repère animé d'une vitesse angulaire Ω_0 ; on note u , v et w les composantes de vitesse d'un élément fluide et p la pression réduite telle que $p = \mathcal{P} + \rho_0 \mathcal{U} - \frac{1}{2} \rho_0 \Omega_0^2 r^2$, où \mathcal{P} est la pression et $\mathcal{F} = \nabla \mathcal{U}$ est une force volumique supposée conservative; le fluide est un liquide [20], de masse volumique ρ_0 et de viscosité cinématique ν_0 constantes. Il vient le système (I) suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} - 2\Omega_0 v + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r} = \nu_0 \left(\nabla^2 u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right), \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} + 2\Omega_0 u + \frac{1}{\rho_0 r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \nu_0 \left(\nabla^2 v - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \quad (I)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} = \nu_0 \nabla^2 w, \quad (3.3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.4)$$

où :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Aux équations (3.1)-(3.4), il faut associer des conditions aux limites et initiales. Ici, comme on s'intéresse aux valeurs moyennes en z , on n'introduira pas de conditions en r mais seulement des conditions d'adhérence sur les parois (donnant, dans le repère mobile, une vitesse nulle sur le disque inférieur et une petite vitesse tangentielle sur le disque supérieur) ainsi

que des conditions initiales, c'est-à-dire :

$$z = 0 \quad u = v = w = 0, \quad (3.5)$$

$$z = d \quad u = w = 0, \quad v = \epsilon r \Omega_0, \quad (3.6)$$

$$t = 0 \quad u = u^0, \quad v = v^0, \quad w = w^0 \quad (3.7)$$

où u^0 , v^0 et w^0 sont des données fonctions de r , θ et z .

On adimensionnalise maintenant le système (I) associé aux conditions (3.5)-(3.7) avec comme choix d'échelles $(L, d, U_0, U_0, W_0, t_0, p_0)$ grandeurs caractéristiques respectivement de (r, z, u, v, w, t, p) ; on impose $W_0 = \alpha U_0$, où $\alpha = d/L$, et $p_0 = 2\rho_0 U_0 \Omega_0 L$. Cette adimensionnalisation fait apparaître différents paramètres : le nombre de Strouhal S , le nombre de Rossby Ro et le nombre de Reynolds Re tels que

$$S = \frac{L}{U_0 t_0},$$

$$Ro = \epsilon,$$

$$Re = \frac{L U_0}{\nu_0}.$$

De l'équation (3.1), il vient que $U_0 = 2\epsilon \Omega_0 L$ et de ce fait le système d'équations sans dimension résultant est tel que :

$$\begin{aligned} \epsilon \left(S \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} \right) - v + \frac{\partial p}{\partial r} = \\ \frac{\epsilon}{Re} \left(D^2 u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \epsilon \left(S \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} \right) + u + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \\ (II) \quad \frac{\epsilon}{Re} \left(D^2 v - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\epsilon \left(S \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\epsilon}{Re} \left(D^2 w + \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \quad (3.10)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.11)$$

où D est le laplacien "horizontal" adimensionné :

$$D^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta^2},$$

lorsqu'on garde les mêmes notations pour les grandeurs sans dimension. Aux équations (3.8)-(3.11), il faut associer les conditions aux limites adimensionnées suivantes :

$$z = 0 \quad u = v = w = 0, \quad (3.12)$$

$$z = 1 \quad u = w = 0, \quad v = \frac{r}{2}, \quad (3.13)$$

$$t = 0 \quad u = u^0, \quad v = v^0, \quad w = w^0. \quad (3.14)$$

Par la suite, on utilisera la notation suivante :

$$S \frac{D}{Dt} = S \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

et on introduira deux nouveaux paramètres : le nombre d'Ekman, noté Ek , et le nombre d'Ekman vertical, noté Ek_{\perp} , où

$$Ek = \frac{\nu_0}{2\Omega_0 L^2} = \frac{\epsilon}{Re},$$

$$Ek_{\perp} = \frac{\nu_0}{2\Omega_0 d^2} = \frac{Ek}{\alpha^2}.$$

L'introduction de Ek_{\perp} est liée à une relation dite de similitude (on pourra consulter à ce

sujet [45]); elle permet par la suite de mettre en évidence la dégénérescence dite significative liée au passage à la limite hydrostatique. On réécrit donc (II) en utilisant ces deux nouveaux paramètres ; on a ainsi le système suivant :

$$\epsilon \left(S \frac{Du}{Dt} - \frac{v^2}{r} \right) = v - \frac{\partial p}{\partial r} + Ek \left(D^2 u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + Ek_{\perp} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (3.15)$$

$$\epsilon \left(S \frac{Dv}{Dt} + \frac{uv}{r} \right) = - \left(u + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + Ek \left(D^2 v - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + Ek_{\perp} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \quad (3.16)$$

(III)

$$\alpha^2 \epsilon S \frac{Dw}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial z} = \alpha^2 Ek D^2 w + Ek \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, \quad (3.17)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (3.18)$$

qui est notre système de base pour l'étude asymptotique ci-dessous.

3.2.2 Système quasi-hydrostatique

On effectue maintenant un premier passage à la limite au niveau du système (III) en faisant tendre vers zéro le paramètre de forme α tout en maintenant fixés $r, \theta, z, S, \epsilon$ et Ek_{\perp} . De façon plus précise, on admet que :

$$\text{LIM}_{\alpha} = [\alpha \searrow 0 \text{ avec } r, \theta, z, S, \epsilon \text{ et } Ek_{\perp} \text{ fixés}]$$

et on notera que $Ek \equiv \alpha^2 Ek_{\perp}$ tend vers 0 quand α tend vers 0. D'où, à la limite, on a le système quasi-hydrostatique (IV) suivant :

$$\epsilon \left(S \frac{Du}{Dt} - \frac{v^2}{r} \right) = v - \frac{\partial p}{\partial r} + Ek_{\perp} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (3.19)$$

$$\epsilon \left(S \frac{Dv}{Dt} + \frac{uv}{r} \right) = - \left(u + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + Ek_{\perp} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \quad (3.20)$$

(IV)

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad (3.21)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.22)$$

auquel on doit associer les conditions (3.12)-(3.14). Ensuite, afin de mettre en oeuvre un processus de développement asymptotique cohérent en $\epsilon \ll 1$, on impose la relation de similitude suivante :

$$Ek_{\perp} = \epsilon^2 E\hat{k}_{\perp} ,$$

c'est-à-dire que :

$$Ek = \alpha^2 \epsilon^2 E\hat{k}_{\perp} .$$

Le choix de $E\hat{k}_{\perp} = 0(1)$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ et $Ek_{\perp} \rightarrow 0$ est guidé par le principe de moindre dégénérescence (on pourra consulter à ce propos [19]) afin de retenir le maximum de termes, et notamment les termes visqueux, lors du passage à la limite. Ce choix permet également de n'avoir plus qu'un petit paramètre: le nombre de Rossby ϵ . Si on applique au système (IV) la relation de similitude ci-dessus, il vient les équations suivantes :

$$\epsilon \left(S \frac{Du}{Dt} - \frac{v^2}{r} \right) = v - \frac{\partial p}{\partial r} + \epsilon^2 E\hat{k}_{\perp} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} , \quad (3.23)$$

$$\epsilon \left(S \frac{Dv}{Dt} + \frac{uv}{r} \right) = -\left(u + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \epsilon^2 E\hat{k}_{\perp} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} , \quad (3.24)$$

(V)

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0 , \quad (3.25)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 . \quad (3.26)$$

Ce système (V) est celui que nous allons analyser lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ avec un développement asymptotique tel que les inconnues sont recherchées sous la forme suivante :

$$f(r, \theta, z, t) = f_0(r, \theta, z, t) + \epsilon f_1(r, \theta, z, t) \dots .$$

3.2.3 Système limite ($\epsilon \rightarrow 0$)

De (V), on obtient le cas limite $\epsilon \rightarrow 0$ (ou système "intérieur") suivant :

$$v_0 = \frac{\partial p_0}{\partial r}, \quad (3.27)$$

$$u_0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial p_0}{\partial \theta}, \quad (3.28)$$

(VI)

$$\frac{\partial p_0}{\partial z} = 0, \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \quad (3.30)$$

avec les conditions aux limites et initiales déduites directement de (3.12)-(3.14) :

$$z = 0 \quad u_0 = v_0 = w_0 = 0, \quad (3.31)$$

$$z = 1 \quad u_0 = w_0 = 0, \quad v_0 = \frac{r}{2}, \quad (3.32)$$

$$t = 0 \quad u_0 = u_0^0, \quad v_0 = v_0^0, \quad w_0 = w_0^0 \quad (3.33)$$

où on suppose qu'on peut développer les conditions initiales en puissances de ϵ . On obtient (3.30) de l'équation de continuité (3.26) (à l'ordre 0) car

$$\frac{\partial w_0}{\partial z} = -\left(\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_0)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \theta}\right) = -\frac{1}{r} \left(-\frac{\partial^2 p_0}{\partial r \partial \theta} + \frac{\partial^2 p_0}{\partial \theta \partial r}\right) = 0.$$

On peut remarquer de même que

$$\frac{\partial v_0}{\partial z} = \frac{\partial u_0}{\partial z} = 0,$$

c'est-à-dire que v_0 ne dépend que de r , θ et t . Or $v_0 = 0$ en $z = 0$ et $v_0 = \frac{r}{2}$ en $z = 1$. On doit donc supposer l'existence de couches limites, dites couches d'Ekman, sur les parois

des disques afin d'obtenir une solution satisfaisant aux conditions aux limites. Pour ce faire, on aura besoin de l'ordre 1 en ϵ afin de pouvoir déterminer complètement la solution à l'ordre 0. En effet, la solution intérieure ainsi que les solutions dans les couches d'Ekman seront alors déterminées en raccordant les vitesses entre la couche d'Ekman et la région "intérieure" et notamment en raccordant les vitesses axiales à l'ordre 1 en ϵ . Le système d'équations à l'ordre 1 en ϵ dont on a besoin est tel que :

$$S \frac{Du_0}{Dt} - \frac{v_0^2}{r} = v_1 - \frac{\partial p_1}{\partial r}, \quad (3.34)$$

$$S \frac{Dv_0}{Dt} + \frac{u_0 v_0}{r} = -(u_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial p_1}{\partial \theta}), \quad (3.35)$$

(VII)

$$\frac{\partial p_1}{\partial z} = 0, \quad (3.36)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_1)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0 \quad (3.37)$$

avec les conditions aux limites et initiales suivantes :

$$z = 0 \quad u_1 = v_1 = w_1 = 0, \quad (3.38)$$

$$z = 1 \quad u_1 = v_1 = w_1 = 0, \quad (3.39)$$

$$t = 0 \quad u_1 = u_1^0, v_1 = v_1^0, w_1 = w_1^0. \quad (3.40)$$

3.3 Obtention d'une équation pour p_0

3.3.1 Expression de w_1

On cherche à établir, à partir des systèmes (VI) et (VII) associés aux conditions (3.31)-(3.33) et (3.38)-(3.40), une équation pour p_0 qui permettra la détermination des inconnues u_0 et v_0 . En effet, l'équation de continuité (3.37) permet d'obtenir l'expression de $\frac{\partial w_1}{\partial z}$ en fonction des dérivées partielles de p_0 . On a :

$$\frac{\partial w_1}{\partial z} = -\left(\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_1)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_1}{\partial \theta}\right)$$

ou encore d'après (3.34) et (3.35)

$$\frac{\partial w_1}{\partial z} = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(S \frac{Dv_0}{Dt} + \frac{u_0 v_0}{r} \right) + \frac{\partial p_1}{\partial \theta} \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[S \frac{Du_0}{Dt} - \frac{v_0^2}{r} + \frac{\partial p_1}{\partial r} \right] \right\}.$$

En remplaçant u_0 et v_0 par leurs expressions (3.27) et (3.28) en fonction de p_0 , il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial z} = & \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(S \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial p_0}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\partial p_0}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} \right) \right) \left(\frac{\partial p_0}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial p_0}{\partial \theta} \frac{\partial p_0}{\partial r} \right] \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\left(S \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial p_0}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\partial p_0}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} \right) \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial p_0}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial p_0}{\partial r} \right)^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Par la suite, on utilisera la notation suivante :

$$S \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + \frac{1}{r} \mathcal{J}(p_0, \cdot) \equiv S\mathcal{D}(\cdot)$$

avec :

$$\mathcal{J}(p_0, \cdot) \equiv \frac{\partial p_0}{\partial r} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta} - \frac{\partial p_0}{\partial \theta} \frac{\partial(\cdot)}{\partial r}.$$

Avec la nouvelle notation, l'équation (3.41) devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial z} = & \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[r S\mathcal{D} \left(\frac{\partial p_0}{\partial r} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[S\mathcal{D} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial p_0}{\partial \theta} \right) \right] \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial p_0}{\partial r} \right)^2 \right] - \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial p_0}{\partial \theta} \frac{\partial p_0}{\partial r} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Comme $p_0 = p_0(r, \theta, t)$, cela implique que w_1 s'écrit sous la forme suivante :

$$w_1(r, \theta, z, t) = \frac{1}{r} F(r, \theta, t) z + G(r, \theta, t). \quad (3.43)$$

L'expression de F se déduit aisément de l'équation (3.42) tandis que G est déterminé en appliquant la condition de succion d'Ekman aux raccords des couches limites d'Ekman (inférieure et supérieure) avec la région intérieure. Pour ce faire, on va chercher l'expression des composantes de vitesse au sein des couches d'Ekman.

3.3.2 Couches d'Ekman

a) Sur le disque inférieur

On s'intéresse dans un premier temps à la couche d'Ekman sur le disque inférieur, c'est-à-dire en $z = 0$. Afin de conserver les termes visqueux prééminents au voisinage des parois, on effectue le changement de variable suivant :

$$\hat{z} = \frac{z}{\epsilon} .$$

De là, le système (V) fournit en variables locales $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{p})$ à l'ordre 0 en ϵ les équations suivantes :

$$\hat{v}_0 - \frac{\partial \hat{p}_0}{\partial r} + Ek_{\perp} \frac{\partial^2 \hat{u}_0}{\partial \hat{z}^2} = 0 , \quad (3.44)$$

$$-\hat{u}_0 - \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{p}_0}{\partial \theta} + Ek_{\perp} \frac{\partial^2 \hat{v}_0}{\partial \hat{z}^2} = 0 , \quad (3.45)$$

$$(VIII) \quad \frac{\partial \hat{p}_0}{\partial \hat{z}} = 0 , \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial \hat{w}_0}{\partial \hat{z}} = 0 , \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial \hat{w}_1}{\partial \hat{z}} = - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (r \hat{u}_0)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{v}_0}{\partial \theta} \right] \quad (3.48)$$

avec les conditions aux limites

$$\hat{z} = 0 \quad \hat{u}_0 = \hat{v}_0 = \hat{w}_0 = 0 , \quad (3.49)$$

$$\hat{z} \rightarrow +\infty \quad \hat{u}_0 \rightarrow u_0, \hat{w}_0 \rightarrow w_0, \hat{v}_0 \rightarrow v_0 . \quad (3.50)$$

De (VIII), on déduit que $\hat{p}_0 = p_0(r, \theta, t)$, d'après le raccord de la pression au niveau de la couche d'Ekman avec la pression dans la région intérieure. De même, d'après (3.30), (3.47), (3.49) et (3.50), il vient que $\hat{w}_0 = w_0 = 0$. On élimine maintenant \hat{p}_0 de (3.44) et

(3.45) en utilisant encore (3.46). On obtient alors un système de deux équations couplant \hat{u}_0 et \hat{v}_0 d'où on peut déduire une équation unique ne contenant plus que \hat{u}_0 . L'équation ainsi obtenue est telle que :

$$E\hat{k}_\perp^2 \frac{\partial^5 \hat{u}_0}{\partial \hat{z}^5} + \frac{\partial \hat{u}_0}{\partial \hat{z}} = 0 . \quad (3.51)$$

On déduit \hat{v}_0 en dérivant l'équation (3.44).

En utilisant les conditions aux limites (3.49) et (3.50), on obtient, après raccord avec la région intérieure, \hat{u}_0 et \hat{v}_0 telles que :

$$\hat{u}_0 = u_0 - \exp^{-\gamma \hat{z}} (u_0 \cos(\gamma \hat{z}) + v_0 \sin(\gamma \hat{z})) , \quad (3.52)$$

$$\hat{v}_0 = v_0 - \exp^{-\gamma \hat{z}} (v_0 \cos(\gamma \hat{z}) - u_0 \sin(\gamma \hat{z})) \quad (3.53)$$

avec

$$\gamma = (2E\hat{k}_\perp)^{-1/2} .$$

La condition dite "de succion d'Ekman" est alors calculée en intégrant l'équation de continuité (3.48) sur l'épaisseur de la couche limite ; il vient donc :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial \hat{z}} d\hat{z} = \hat{w}_1(\hat{z} \rightarrow +\infty) - \hat{w}_1(0) . \quad (3.54)$$

Or en raccordant avec la région intérieure ($\hat{w}_1(\hat{z} \rightarrow +\infty) \rightarrow w_1(0)$) et en tenant compte de la condition d'adhérence en $\hat{z} = 0$ ($\hat{w}_1(0) = 0$) , de (3.48) il s'ensuit que :

$$w_1(z=0) = -\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \int_0^{+\infty} \hat{u}_0 d\hat{z} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\int_0^{+\infty} \hat{v}_0 d\hat{z} \right) \right]$$

et de là, en utilisant (3.52) et (3.53) il vient :

$$w_1(z=0) = \frac{1}{2\gamma r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p_0}{\partial r} - \frac{\partial p_0}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial p_0}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_0}{\partial \theta} \right) \right]$$

soit

$$w_1(z = 0) = \frac{1}{2\gamma} D^2 p_0 , \quad (3.55)$$

ce qui détermine G dans (3.43).

La détermination des composantes de vitesse dans la couche d'Ekman inférieure est insuffisante pour obtenir une équation pour p_0 . Il est nécessaire d'écrire (3.43) pour un z particulier, soit $z = 1$. Il faut donc calculer également la vitesse dans la couche d'Ekman supérieure située en $z = 1$ (au voisinage du disque supérieur).

b) Sur le disque supérieur

Nous introduisons maintenant une nouvelle variable \tilde{z} telle que :

$$z = 1 - \epsilon \tilde{z}$$

et on pose que :

$$\tilde{w} = -w .$$

On retrouve alors le système (VIII) avec les variables locales $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{p})$. A ce système sont associées de nouvelles conditions aux limites (3.61) et (3.62). On a donc :

$$\tilde{v}_0 - \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial r} + E \hat{k}_\perp \frac{\partial^2 \tilde{u}_0}{\partial \tilde{z}^2} = 0 , \quad (3.56)$$

$$-\tilde{u}_0 - \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} + E \hat{k}_\perp \frac{\partial \tilde{v}_0}{\partial \tilde{z}^2} = 0 , \quad (3.57)$$

$$(IX) \quad \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{z}} = 0 , \quad (3.58)$$

$$\frac{\partial \tilde{w}_0}{\partial \tilde{z}} = 0 , \quad (3.59)$$

$$\frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial \tilde{z}} = - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (r \tilde{u}_0)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_0}{\partial \theta} \right] \quad (3.60)$$

avec les conditions aux limites

$$\tilde{z} = 0 \quad \tilde{u}_0 = \tilde{w}_0 = 0, \tilde{v}_0 = \frac{r}{2}, \quad (3.61)$$

$$\tilde{z} \rightarrow +\infty \quad \tilde{u}_0 \rightarrow u_0, \tilde{w}_0 \rightarrow -w_0, \tilde{v}_0 \rightarrow v_0. \quad (3.62)$$

D'une manière analogue à celle utilisée pour déterminer les composantes de vitesse dans la couche d'Ekman inférieure, on obtient les composantes correspondantes dans la couche d'Ekman supérieure. De là, on détermine notamment l'expression de la condition de succion en $z = 1$, puis grâce au raccord avec la région intérieure on obtient la valeur de w_1 en $z = 1$, soit :

$$w_1(z = 1) = -\frac{1}{2\gamma r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p_0}{\partial r} - \frac{r^2}{2} - \frac{\partial p_0}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial p_0}{\partial r} - \frac{r}{2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_0}{\partial \theta} \right) \right]$$

ou encore

$$w_1(z = 1) = -\frac{1}{2\gamma} (D^2 p_0 - 1), \quad (3.63)$$

ce qui permet d'établir une équation pour $p_0 = p_0(r, \theta, t)$.

c) Equation pour p_0

Nous pouvons maintenant déduire des relations (3.43), (3.55) et (3.63) une équation d'évolution pour p_0 telle que :

$$\begin{aligned} \left(S \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\gamma} \right) (D^2 p_0) &+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mathcal{J} \left(p_0, \frac{\partial p_0}{\partial r} \right) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mathcal{J} \left(p_0, \frac{1}{r} \frac{\partial p_0}{\partial \theta} \right) \right) \\ &+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial p_0}{\partial r} \right)^2 \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial p_0}{\partial \theta} \frac{\partial p_0}{\partial r} \right) = \frac{1}{2\gamma}. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Si on suppose à présent que $p_0 = p_0(r, t)$, alors l'équation (3.64) se réduit à :

$$\left(S \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\gamma}\right) (D^2 p_0) = \frac{1}{2\gamma} . \quad (3.65)$$

Si à présent on pose $\Phi = D^2 p_0$, on a :

$$\Phi(r, t) = \Phi^0(r) \exp\left(-\frac{t}{\gamma S}\right) + \frac{1}{2} .$$

Ainsi,

$$p_0(r, t) = \Psi_0(r) \exp\left(-\frac{t}{\gamma S}\right) + \frac{r^2}{8} + c^0 \ln r + d^0 , \quad (3.66)$$

où

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \Psi_0(r)) = \phi_0(r) .$$

Comme p_0 est finie en $r = 0$, on a $c^0 \equiv 0$, tandis que d^0 est déterminée à partir des conditions aux limites ou la connaissance de la pression en un r donné. D'après les relations (3.27) et (3.28), on en déduit que :

$$\begin{aligned} v_0 &= \Psi_0'(r) \exp\left(-\frac{t}{\gamma S}\right) + \frac{r}{4} , \\ u_0 &= 0 , \end{aligned}$$

c'est-à-dire que la vitesse dans le coeur est seulement tangentielle et que le fluide tourne avec une rotation moitié de celle du disque en rotation.

On remarque aussi que, lorsque $t \rightarrow \infty$, on retrouve la forme de l'expression de la pression imposée par Von Karman dans le cadre de ses hypothèses de similitude.

3.4 Obtention d'une condition initiale pour p_0

On remarque que l'équation (3.64) pour p_0 est du premier ordre en t et que, de ce fait, il nous faut une seule condition initiale, en $t = 0$, pour la résoudre (on se retrouve en présence d'un problème de Cauchy). Mais nous avons en fait, au départ, des conditions initiales sur u et v au niveau du système (V); la condition initiale pour w se déduira de (3.26). De là, le passage à la limite $\epsilon \rightarrow 0$ dans les équations (3.23)-(3.24) est singulier au voisinage de $t = 0$ au sens que l'approximation asymptotique ne satisfait pas toutes les conditions aux limites (voir [19], Annexe 1). Il nous faut donc introduire un temps "fin" tel que :

$$\bar{t} = \frac{t}{\epsilon^a}$$

et on constate que $a = 1$. On effectue ensuite le passage à la limite suivant :

$$\text{LIM}_{loc} = [\epsilon \searrow 0 \text{ avec } r, \theta, z, S, \bar{t} \text{ et } Ek_{\perp} \text{ fixés}].$$

Il vient alors pour les fonctions \bar{u} , \bar{v} et \bar{p} , fonctions de r, θ, z et \bar{t} que l'on développe en séries en puissances de ϵ , le système "initial" suivant :

$$S \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \bar{t}} - \bar{v}_0 = -\frac{\partial \bar{p}_0}{\partial r}, \quad (3.67)$$

$$S \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \bar{t}} + \bar{u}_0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \theta}, \quad (3.68)$$

(X)

$$\frac{\partial \bar{p}_0}{\partial z} = 0, \quad (3.69)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r \bar{u}_0)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial z} = 0 \quad (3.70)$$

duquel on va déduire une condition initiale pour l'équation (3.64). Au système (X) on peut appliquer les conditions initiales (3.14) en $\bar{t} = t = 0$.

3.4.1 Adaptation instationnaire

En combinant les équations (3.67) et (3.68) du système (X), on élimine le terme de pression et on obtient la relation suivante :

$$\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial z} = S \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r\bar{v}_0)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \theta} \right). \quad (3.71)$$

En intégrant alors (3.71) sur la hauteur séparant les deux disques, il vient :

$$[\bar{w}_0]_0^1 = S \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left[\int_0^1 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r\bar{v}_0)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \theta} \right) dz \right]. \quad (3.72)$$

Le membre de gauche de (3.72) est déterminé grâce au raccord de la couche initiale avec les couches d'Ekman instationnaires supérieure et inférieure. En effet, l'équation de continuité, écrite pour chacune de ces couches, implique que la composante de vitesse axiale à l'ordre 0 (dans ces couches d'Ekman instationnaires) ne dépende pas de la variable locale \hat{z} et puisque les conditions à la paroi nécessitent une vitesse axiale nulle sur les disques, on en déduit que :

$$\bar{w}_0(z=0) = \bar{w}_0(z=1) = 0.$$

Il découle donc de la relation (3.72) ainsi que des conditions aux limites ci-dessus que :

$$S \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left[\int_0^1 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r\bar{v}_0)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \theta} \right) dz \right] = 0 \quad (3.73)$$

c'est-à-dire que la quantité

$$\left[\int_0^1 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r\bar{v}_0)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \theta} \right) dz \right]$$

est indépendante du temps local \bar{t} . Ainsi on peut écrire que :

$$\left[\int_0^1 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r\bar{v}_0)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \theta} \right) dz \right]_{\bar{t}=0} = \left[\int_0^1 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r\bar{v}_0)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \theta} \right) dz \right]_{\bar{t} \rightarrow \infty}.$$

On obtient maintenant, en admettant la permutation de l'intégration et du passage à la limite et comme $\lim \bar{t} \rightarrow \infty = \lim t \rightarrow 0$, une relation entre les composantes de vitesse

dans la couche initiale et les composantes de vitesse dans la région "intérieure". Cette relation s'écrit :

$$\int_0^1 \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r\bar{v}_0)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial\bar{u}_0}{\partial\theta} \right) \right]_{\bar{t}=0} dz = \int_0^1 \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_0)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial\theta} \right) \right]_{t=0} dz$$

soit encore

$$\int_0^1 \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r\bar{v}_0)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial\bar{u}_0}{\partial\theta} \right) \right]_{\bar{t}=0} dz = \int_0^1 [D^2 p_0]_{t=0} dz . \quad (3.74)$$

Comme p_0 ne dépend pas de z dans la région "intérieure", la relation (3.74) associée aux conditions initiales (3.33) devient :

$$[D^2 p_0]_{t=0} = \int_0^1 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_0^0)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_0^0}{\partial\theta} \right) dz . \quad (3.75)$$

La relation (3.75) est la condition initiale associée à l'équation (3.64).

3.4.2 Stabilité dans le cas de rotation solide initiale

On va supposer maintenant que le fluide est initialement animé d'un mouvement de rotation "solide" (ou "en bloc") de vitesse angulaire Ω_0 . Dans ce cas, dans le repère en rotation, l'état initial est le repos et donc les conditions initiales sont nulles ; on a :

$$D^2 p_0 = 0 . \quad (3.76)$$

On cherche une solution de l'équation pour la pression (3.64) sous la forme d'un état de rotation solide perturbé tel que :

$$p_0 = \bar{p}_0 + \delta p' \quad (3.77)$$

avec

$$\bar{p}_0 = P_0 r^2 + \mathcal{P} \quad (3.78)$$

où P_0 est une constante, \mathcal{P} la pression en $r = 0$ et δ un petit paramètre. Pour la suite de

l'étude de stabilité, on fait donc l'hypothèse suivante :

$$\bar{p}_0 = \bar{p}_0(r) \quad (3.79)$$

et on suppose en outre que :

$$p' = p'(\theta, t) . \quad (3.80)$$

En remplaçant (3.77) dans (3.64), il vient, à l'ordre 0 en δ , une relation pour p_0 permettant de déterminer la valeur de P_0 et, à l'ordre 1 en δ , une équation linéaire pour la perturbation p' . Ainsi de la relation pour \bar{p}_0 suivante :

$$\begin{aligned} (S \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\gamma}) (D^2 \bar{p}_0) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\mathcal{J}(\bar{p}_0, \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial r})) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (\mathcal{J}(\bar{p}_0, \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \theta})) \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\frac{1}{r} (\frac{\partial \bar{p}_0}{\partial r})^2) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \theta} \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial r}) = \frac{1}{2\gamma} , \end{aligned}$$

on en déduit que :

$$P_0 = \frac{1}{8} .$$

Quant à l'équation linéaire pour p' , celle-ci s'écrit :

$$(S \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\gamma}) (\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial \theta^2}) + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial r} \frac{\partial^3 p'}{\partial \theta^3} = 0$$

soit encore

$$(S \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\gamma}) \frac{\partial^2 p'}{\partial \theta^2} + \frac{1}{4} \frac{\partial^3 p'}{\partial \theta^3} = 0 . \quad (3.81)$$

Si on recherche maintenant la perturbation sous la forme :

$$p' = P e^{i(\sigma t + k\theta)} \quad (3.82)$$

avec P constante réelle, il découle de (3.82) la relation de dispersion suivante :

$$k^2 \left[4iS\sigma + \frac{4}{\gamma} + ik \right] = 0, \quad (3.83)$$

et on supposera dans ce qui suit que $k \neq 0$.

On s'intéresse dans un premier temps à la stabilité temporelle de la perturbation. On a alors :

$$4S\sigma_r + k = 0 \quad (3.84)$$

$$-S\sigma_i + \frac{1}{\gamma} = 0 \quad (3.85)$$

où $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$ et k réel. Le coefficient d'amplification temporelle σ_i est ici positif : la perturbation va s'amortir au cours du temps. La solution est temporellement stable. Maintenant on s'intéresse à la stabilité spatiale de cette même perturbation. On a donc :

$$4S\sigma + k_r = 0 \quad (3.86)$$

$$\frac{4}{\gamma} - k_i = 0 \quad (3.87)$$

où ici $k = k_r + ik_i$ et σ réel. Comme précédemment, on voit que le coefficient d'amplification spatiale est positif : la perturbation s'amortit en se propageant. On montre ainsi que l'écoulement de base est stable temporellement et spatialement.

Par contre, si on suppose que σ et k sont tous deux complexes, on a alors les relations suivantes :

$$k_i = -4S\sigma_i + \frac{4}{\gamma}, \quad (3.88)$$

$$k_r = -4S\sigma_r, \quad (3.89)$$

c'est-à-dire que k_i est négatif si $\sigma_i > \frac{1}{\gamma S}$ tandis que σ_i est négatif si $k_i > \frac{4}{\gamma}$, ce qui indique des domaines $[k, \sigma]$ d'instabilité spatio-temporelle.

3.5 Conclusion

On a étudié, sous l'hypothèse d'un petit rapport d'aspect, l'écoulement se produisant dans un cylindre en rotation muni d'un couvercle animé d'une vitesse angulaire un peu plus importante que celle du réservoir.

Comme on a supposé que la hauteur séparant les disques est très petite devant leur rayon, on se place loin du bord et on s'est donc intéressé à l'écoulement dans la région principale. A partir de raccords avec les écoulements dans les couches d'Ekman, on a obtenu une équation pour p_0 la pression à l'ordre principal (ou géostrophique).

On a de plus vérifié qu'il y a adaptation des données initiales au modèle géostrophique en obtenant la condition initiale adéquate pour p_0 .

Par ailleurs, si on suppose l'écoulement axisymétrique au niveau de l'équation pour p_0 , on retrouve la forme de la pression imposée par Von Karman dans ses relations de similitude.

Il serait possible d'étudier d'autres cas particuliers à partir de cette équation ainsi que la stabilité, par exemple, de la solution de similitude au voisinage d'un rayon $r = R$.

Chapitre 4

Film visqueux en rotation

4.1 Introduction

Produire un écoulement de fluide le long d'un plan uniforme, incliné d'un angle par rapport à l'horizontale, est l'une des méthodes employées pour générer des films fluides de faible épaisseur qui interviennent dans les processus de transfert de chaleur ou de masse, ou encore de revêtement de surface. On peut aussi procéder par rotation d'une couche de fluide sur un disque plan et c'est à cette dernière méthode que nous allons nous intéresser.

Les publications sur ce sujet sont en moins grand nombre que celles traitant d'un film visqueux sur un plan incliné et les préoccupations de leurs auteurs sont souvent différentes.

Ainsi, Emslie, Bonner et Peck [14], avec les hypothèses que le plan tournant est d'extension "infinie", que la couche liquide est symétrique radialement, que le liquide est Newtonien, et en négligeant la force de Coriolis, se sont intéressés au devenir de différentes distributions de la couche de fluide initiale. A leur suite, Higgins [22] étudie l'amincissement d'un film initialement d'épaisseur uniforme lorsque le disque est mis en rotation stationnaire. Il obtient une formulation analytique de l'épaisseur du film à partir de développements asymptotiques des équations de Navier instationnaires (écrites en utilisant les hypothèses de Von Karman) pour des petits et des grands nombres de Reynolds. Dandapat et Ray [11], pour leur part, se sont penchés, avec une démarche analogue à celle d'Higgins, sur l'écoulement instationnaire d'un film liquide et, plus particulièrement, sur le transfert de chaleur lorsque le disque tournant est chauffé ou refroidi. On peut citer aussi Charwat *et al* [8] qui ont réalisé une approche expérimentale et analytique de la stabilité linéaire en étudiant l'apparition des ondes suivant les valeurs de paramètres liés au débit, à la vitesse de rotation du disque, à la tension de surface et à la viscosité du fluide. Needham et

Merkin [30], de leur côté, ont étudié le film axisymétrique généré par une petite ouverture située sur le fond d'un réservoir cylindrique occupant le centre d'un disque en rotation.

On étudie dans ce chapitre analytiquement et numériquement l'écoulement axisymétrique d'un film mince visqueux sur un disque horizontal en rotation en reprenant le dispositif exposé dans l'article de Needham et Merkin [30].

On suppose donc ici qu'un fluide visqueux et incompressible est injecté sur un disque tournant à un taux d'écoulement par unité de longueur Q par une petite ouverture de hauteur a située sur le fond d'un réservoir cylindrique, lui-même de largeur l et placé au centre du disque. On suppose que la hauteur de l'ouverture d'injection, a , est bien plus petite que le rayon l du réservoir et que ce rayon est, lui-même, bien plus petit que le rayon du disque (voir figure (4.1)).

Needham et Merkin ont obtenu, pour la hauteur de film visqueux stationnaire, une expression analytique au premier ordre d'un développement asymptotique en puissances du paramètre de forme ϵ où $\epsilon = a/l$; cette solution s'écrit sous la forme $h(r) = A r^{-\frac{2}{3}}$ avec A déterminée à partir d'un raccord avec la couche de cisaillement située en $r = 1$. De même, dans le cas instationnaire, ils ont déterminé, grâce à la méthode des caractéristiques, une solution présentant une "discontinuité de saut" survenant en un temps fini.

Dans cette étude, on supposera que l'injection de fluide au centre du disque est faiblement perturbée, soit $Q = a\Sigma(1 + \phi'(t))$ et on travaillera à partir d'équations moyennes à la "Shkadov".

On formule les équations de base en section 4.2 et les équations approchées en section 4.3. En section 4.4, à l'aide d'un développement asymptotique (en puissances d'un paramètre issu de la combinaison du paramètre de forme et d'un nombre de Reynolds), on retrouve, d'une part, le résultat annoncé par Needham et Merkin et on obtient, d'autre part, l'expression de la hauteur du film à l'ordre suivant du développement. On présente également, en section 4.5, pour les cas stationnaire et instationnaire, des résultats obtenus numériquement au moyen de schémas aux différences finies. On peut ainsi vérifier le bon accord des solutions numériques et analytiques et avoir une formulation prenant en compte l'influence de la tension de surface sur l'allure de la surface libre du film mince.

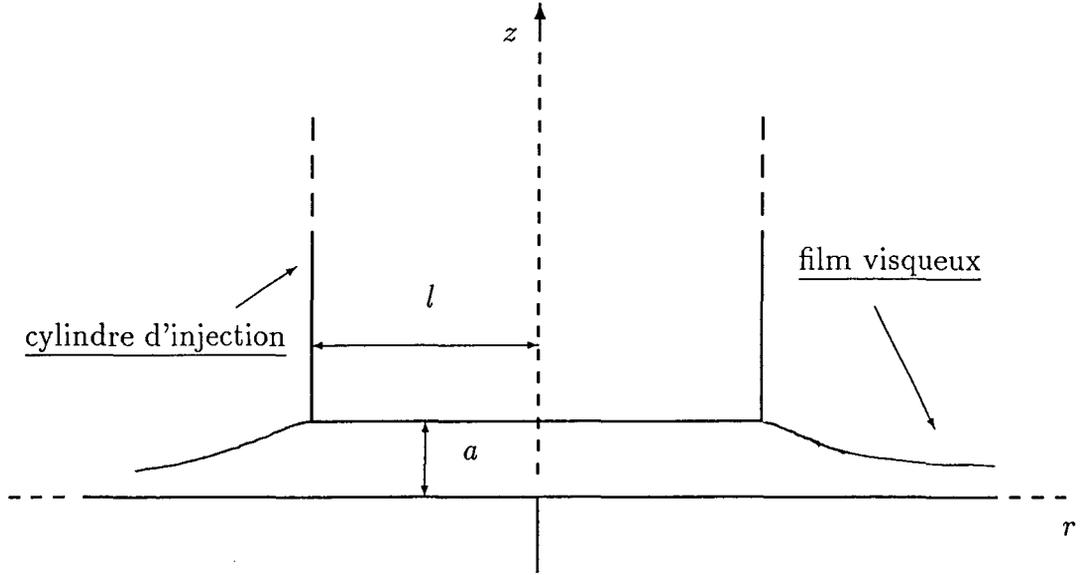


FIG. 4.1 - *Disque en rotation avec injecteur au centre*

4.2 Formulation mathématique

4.2.1 Equations de base

Les équations de Navier pour un écoulement axisymétrique de fluide visqueux et incompressible sont écrites en coordonnées cylindriques dans un repère lié au disque en rotation à une vitesse angulaire Ω_0 constante; on note u , v et w les composantes de la vitesse relative d'un élément fluide, p sa pression ainsi que ρ_0 la masse volumique et ν_0 la viscosité cinématique du fluide (où ρ_0 et ν_0 sont supposées constantes). Il vient alors le système suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} - 2\Omega_0 v - \Omega_0^2 r + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r} = \nu_0 \left(\nabla^2 u - \frac{u}{r^2} \right), \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} + 2\Omega_0 u = \nu_0 \left(\nabla^2 v - \frac{v}{r^2} \right), \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} + g + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} = \nu_0 \nabla^2 w, \quad (4.3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4.4)$$

où :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} .$$

Il faut associer, pour les composantes de la vitesse (u, v, w) et pour la surface libre $z = h(r, t)$, aux équations (4.1)-(4.4), les conditions dues à une injection faiblement perturbée au centre du disque (en $r = l$):

$$r = l \quad u = \Sigma \left(1 + \phi' \left(\frac{t}{t_0} \right) \right), \quad v = w = 0, \quad h = a \quad (4.5)$$

où $|\phi'(\frac{t}{t_0})| \ll 1$ pour tout t ; les conditions d'adhérence sur la paroi du disque :

$$z = 0 \quad u = v = w = 0 \quad (4.6)$$

ainsi que, sur la surface libre, la condition cinématique et les deux conditions dynamiques suivantes [26] :

$$w = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial r}, \quad (4.7)$$

$$z = h(r, t) \quad [\vec{n} \cdot \vec{T}(\vec{n})]_{z=h} + \gamma_s \nabla \cdot \vec{n} = 0, \quad (4.8)$$

$$[\vec{n} \wedge \vec{T}(\vec{n})]_{z=h} = \vec{0} \quad (4.9)$$

où $\vec{T}(\vec{n})$ est le vecteur contrainte pour la direction \vec{n} , avec \vec{n} le vecteur unitaire de la normale dirigée vers l'extérieur, et γ_s la tension superficielle du fluide (voir Annexe F). On impose de plus des conditions initiales telles que :

$$t = 0 \quad u = U^0(r, z), \quad v = V^0(r, z), \quad w = W^0(r, z), \quad h = H^0(r), \quad \phi'(0) = 0. \quad (4.10)$$

4.2.2 Equations adimensionnées

On adimensionne maintenant le système d'équations (4.1)-(4.4) ainsi que les conditions (4.5)-(4.10), avec comme choix d'échelles $(l, a, U_0, V_0, W_0, t_0, p_0)$ grandeurs caractéristiques respectivement de (r, z, u, v, w, t, p) . On impose $W_0 = \epsilon U_0$, où $\epsilon = a/l$, $t_0 = l/U_0$ et $p_0 = \rho_0 U_0^2$. Cette adimensionnalisation fait apparaître différents paramètres : le nombre de Reynolds Re , le nombre de Rossby Ro , le nombre de Froude Fr tels que :

$$Re = \frac{U_0 a}{\nu_0},$$

$$Ro = \frac{U_0}{\Omega_0 l} = \frac{1}{\chi},$$

$$Fr^2 = \frac{U_0^2}{gl}$$

ainsi que les nombres sans dimension suivants :

$$\epsilon = \frac{a}{l},$$

$$\beta = \frac{V_0}{U_0}.$$

De là, le système sans dimension résultant de (4.1)-(4.4) est tel que :

$$\frac{Du}{Dt} - \beta^2 \frac{v^2}{r} - 2\beta\chi v + \frac{\partial p}{\partial r} - \chi^2 r = \frac{1}{\epsilon Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \epsilon^2 (D^2 u - \frac{u}{r^2}) \right), \quad (4.11)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + \frac{uv}{r} + 2\frac{\chi}{\beta} u = \frac{1}{\epsilon Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \epsilon^2 (D^2 v - \frac{v}{r^2}) \right), \quad (4.12)$$

(II)

$$\epsilon^2 \frac{Dw}{Dt} + \frac{\epsilon}{Fr^2} + \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\epsilon}{Re} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \epsilon^2 D^2 w \right), \quad (4.13)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4.14)$$

où D s'écrit :

$$D^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r},$$

lorsque l'on garde les mêmes notations pour les grandeurs sans dimension. On a, par ailleurs, utilisé la notation suivante :

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r} + w \frac{\partial}{\partial z}.$$

Aux équations (4.11)-(4.14), il faut associer, d'après (4.5)-(4.10), les conditions aux limites adimensionnées suivantes :

$$r = 1 \quad u = \sigma(1 + \epsilon Re \phi(t)), \quad v = w = 0, \quad h = 1, \quad (4.15)$$

$$z = 0 \quad u = v = w = 0, \quad (4.16)$$

$$z = h \quad \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial r} - w = 0, \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} P_a - p + \frac{2\epsilon}{Re} \left[\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \epsilon^2 \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \epsilon^2 \frac{\partial u}{\partial r} \left(\frac{\partial h}{\partial r} \right)^2 \right] \\ - \epsilon^2 We \left(1 + \epsilon^2 \left(\frac{\partial h}{\partial r} \right)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} \left(1 + \epsilon^2 \left(\frac{\partial h}{\partial r} \right)^2 \right) + \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} \right) = 0, \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} - \epsilon^2 \frac{\partial h}{\partial r} \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) = 0, \quad (4.19)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \epsilon^2 \frac{\partial w}{\partial r} \right) \left(1 - \epsilon^2 \left(\frac{\partial h}{\partial r} \right)^2 \right) + 2\epsilon^2 \frac{\partial h}{\partial r} \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0, \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} t = 0 \quad u = U^0(r, z), \quad v = V^0(r, z), \quad w = W^0(r, z), \quad h = H^0(r), \\ \phi(0) = 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

où P_a est la pression atmosphérique, $\sigma = \frac{\Sigma}{U_0}$ et où on a supposé que $\phi'(t) = \epsilon Re \phi(t)$ avec $\phi(t) = O(1)$ pour tout t . On a introduit dans les conditions dynamiques à l'interface un nouveau paramètre. Il s'agit d'un nombre de Weber, noté We tel que :

$$We = \frac{\gamma_s}{\rho_0 U_0^2 a} .$$

Le problème (4.11)-(4.21) sera notre problème de base exact pour l'étude asymptotique ci-dessous.

4.3 Equations approchées

4.3.1 Système quasi-hydrostatique ("en ondes longues")

On effectue maintenant un premier passage à la limite au niveau du système (II) en faisant tendre vers zéro le paramètre de forme ϵ tout en maintenant fixés r , z , t , β , χ , We^* et Re^* (avec $We^* = \epsilon^2 We$ et $Re^* = \epsilon Re$). A la limite, on obtient le système "quasi-hydrostatique" suivant :

$$\frac{Du}{Dt} - \beta^2 \frac{v^2}{r} - 2\beta\chi v - \chi^2 r + \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{Re^*} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} , \quad (4.22)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + \frac{uv}{r} + 2\frac{\chi}{\beta} u = \frac{1}{Re^*} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} , \quad (4.23)$$

(III)

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0 , \quad (4.24)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4.25)$$

auquel on doit associer les conditions :

$$r = 1 \quad u = \sigma(1 + Re^* \phi(t)), \quad v = w = 0, \quad h = 1 , \quad (4.26)$$

$$z = 0 \quad u = v = w = 0 , \quad (4.27)$$

$$z = h \quad \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial r} - w = 0 , \quad (4.28)$$

$$p = Pa - We^* \left(\frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} \right) = P(r, t) , \quad (4.29)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad (4.31)$$

$$t = 0 \quad u = u^0(r, z), v = v^0(r, z), w = w^0(r, z), h = H_0(r), \\ \phi(0) = 0 \quad (4.32)$$

où on a supposé qu'on pouvait développer les conditions initiales en puissances de Re^* , c'est-à-dire :

$$U^0(r, z) = u^0(r, z) + Re^* u^1(r, z) + \dots \\ V^0(r, z) = v^0(r, z) + Re^* v^1(r, z) + \dots \\ W^0(r, z) = w^0(r, z) + Re^* w^1(r, z) + \dots \\ H^0(r) = H_0(r) + Re^* H_1(r) + \dots$$

4.3.2 Système "à la Shkadov" ou "quasi-plan"

En tirant profit des conditions en $z = 0$ et $z = h$ pour u et v , on recherche les vitesses u et v sous la forme suivante (d'après [30] et [37]) :

$$u(r, z, t) = \frac{U(r, t)}{h(r, t)} \left(z - \frac{z^2}{2h} \right), \quad (4.33)$$

$$v(r, z, t) = \frac{V(r, t)}{3h(r, t)} \left(\frac{z^3}{h^2} - 2z - \frac{z^4}{4h^3} \right), \quad (4.34)$$

où $U(r, t)$ et $V(r, t)$ restent des fonctions à déterminer. On va travailler, dans ce qui suit, avec les grandeurs moyennées sur la hauteur du film, c'est-à-dire avec :

$$q = \int_0^h u \, dz, \quad (4.35)$$

$$s = \int_0^h v \, dz. \quad (4.36)$$

En intégrant les équations du système précédent grâce aux relations (4.33)-(4.36) et en tenant compte des conditions aux limites, on obtient pour q , s et h , qui sont des fonctions uniquement de t et de r , à la place de (4.22)-(4.32) le système de trois équations moyennes suivant :

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{6}{5r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{q^2}{h} \right] - \frac{310}{63r} \beta^2 \left[\frac{s^2}{h} \right] - 2\beta \chi s - We^* h \left(\frac{\partial^3 h}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial h}{\partial r} \right) + \frac{3}{Re^*} \frac{q}{h^2} = \chi^2 r h , \quad (4.37)$$

$$(IV) \quad \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{17}{14} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{qs}{h} \right) + \frac{2qs}{r h} \right] + 2 \frac{\chi}{\beta} q + \frac{5}{2Re^*} \frac{s}{h^2} = 0 , \quad (4.38)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rq)}{\partial r} = 0 \quad (4.39)$$

auquel sont associées les conditions suivantes:

$$r = 1 \quad q = \sigma (1 + Re^* \phi(t)), \quad s = 0, \quad h = 1 , \quad (4.40)$$

$$t = 0 \quad q = Q^0(r), \quad s = S^0(r), \quad h = H^0(r), \quad \phi(0) = 0 \quad (4.41)$$

où

$$Q^0(r) = \int_0^{H^0(r)} U^0(r, z) dz$$

et

$$S^0(r) = \int_0^{H^0(r)} V^0(r, z) dz .$$

4.4 Analyse asymptotique pour $Re^* \rightarrow 0$ et $We^* = 0$

4.4.1 Equation "principale"

Dans ce travail, on étudiera l'amincissement d'un film sur un disque en rotation pour un fluide supposé assez visqueux et pour une vitesse de rotation du disque modérée, c'est-à-dire qu'on s'intéresse à des écoulements présentant un nombre de Reynolds également modéré. En outre, on suppose un petit rapport d'aspect au niveau de l'injection ce qui implique que le paramètre Re^* , combinaison du nombre de Reynolds Re et du rapport d'aspect ϵ , sera considéré comme étant petit. De même, le nombre We^* tel que $We^* = \epsilon^2 We$ sera ici supposé très petit et pris nul.

Les différentes inconnues sont donc recherchées sous la forme de développements asymptotiques en puissances de Re^* (supposé ici tel que $Re^* \ll 1$). Pour conserver des termes significatifs, on supposera de plus que $\chi \gg 1$ (de sorte que l'on ait $Re^* \chi^2 = 1$) et que $\beta \ll 1$ (avec $\beta = \frac{1}{\chi}$). Avec ces hypothèses, le système (4.37)-(4.39) devient à l'ordre 0 en Re^* :

$$3 \frac{q_0}{h_0^2} = r h_0 , \quad (4.42)$$

$$(V) \quad \frac{5}{2} \frac{s_0}{h_0^2} + 2q_0 = 0 , \quad (4.43)$$

$$\frac{\partial h_0}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rq_0)}{\partial r} = 0 . \quad (4.44)$$

Comme on se place dans le cas où l'injection de fluide est faiblement perturbée, on recherche h_0 sous la forme $h_0 \equiv h_0(r)$. On obtient alors du système ci-dessus les expressions suivantes pour q_0 , s_0 et h_0 , les inconnues à l'ordre 0 en Re^* :

$$q_0 = \frac{C_0}{r} , \quad (4.45)$$

$$h_0 = \mathcal{H}_0 r^{-\frac{2}{3}} , \quad (4.46)$$

$$s_0 = -\frac{4}{15} \mathcal{H}_0^5 r^{-\frac{7}{3}} \quad (4.47)$$

où

$$\mathcal{H}_0 = (3C_0)^{\frac{1}{3}}$$

et où la constante C_0 reste à déterminer.

On cherche à présent les inconnues à l'ordre 1 en Re^* . On va obtenir celles-ci grâce au système suivant (on notera que $h_1 = h_1(r, t)$):

$$-3\frac{q_1}{h_0^2} + 6\frac{q_0 h_1}{h_0^3} + r h_1 = \frac{\partial q_0}{\partial t} + \frac{6}{5r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{q_0^2}{h_0} \right] - 2s_0, \quad (4.48)$$

$$(VI) \quad -\frac{5}{2} \frac{s_1}{h_0^2} + 5\frac{s_0 h_1}{h_0^3} - 2q_1 = \frac{\partial s_0}{\partial t} + \frac{17}{14} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{q_0 s_0}{h_0} \right] + \frac{2}{r} \left[\frac{q_0 s_0}{h_0} \right] \right), \quad (4.49)$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r q_1)}{\partial r} = 0. \quad (4.50)$$

En remplaçant dans le système ci-dessus q_0 , s_0 et h_0 par leurs valeurs (4.45)-(4.47), on obtient, après élimination de q_1 et s_1 , l'équation suivante pour h_1 :

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + \mathcal{H}_0^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^{\frac{2}{3}} h_1) = -\frac{176}{405} \mathcal{H}_0^7 r^{-\frac{14}{3}}. \quad (4.51)$$

Pour résoudre cette équation, il est nécessaire de disposer d'une condition initiale en $t = 0$ ainsi que d'une condition à la limite en $r = 1$. A partir des systèmes d'équations adéquats, l'un écrit pour une couche initiale (au voisinage de $t = 0$) et l'autre pour une couche de cisaillement (en $r = 1$), on va pouvoir en déduire les "bonnes" conditions pour l'équation (4.51).

4.4.2 Système "à la Shkadov" au voisinage de $t = 0$

Afin de se placer dans la couche initiale (région II), on introduit le temps "fin" suivant :

$$t = Re^* \tau.$$

On a donc, pour les inconnues locales \hat{q}_0 , \hat{s}_0 et \hat{h}_0 , fonctions de r et de la variable locale

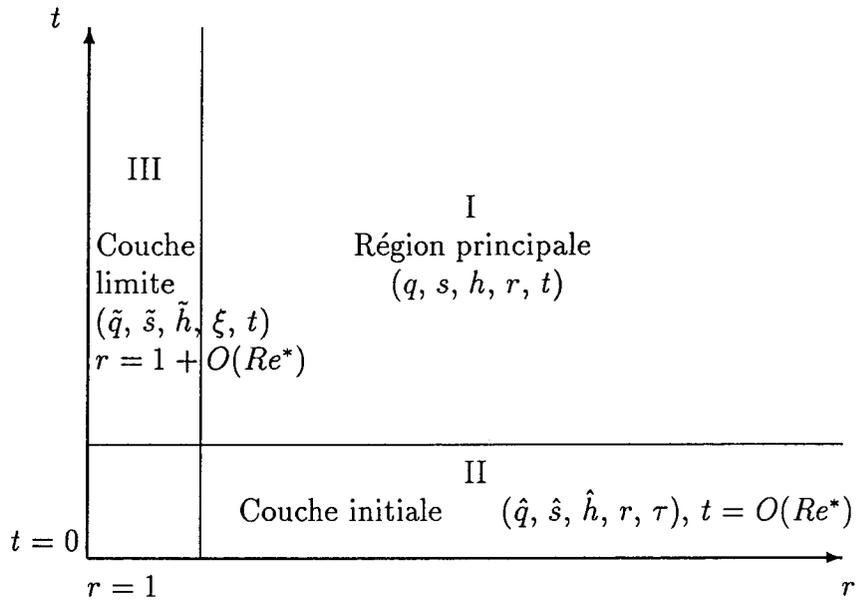


FIG. 4.2 - Régions des différents développements asymptotiques.

τ , le système valable au voisinage de $t = 0$ suivant :

$$\frac{\partial \hat{q}_0}{\partial \tau} + 3 \frac{\hat{q}_0}{\hat{h}_0^2} = r \hat{h}_0, \quad (4.52)$$

$$(VII) \quad \frac{\partial \hat{s}_0}{\partial \tau} + \frac{5 \hat{s}_0}{2 \hat{h}_0^2} + 2 \hat{q}_0 = 0, \quad (4.53)$$

$$\frac{\partial \hat{h}_0}{\partial \tau} = 0 \quad (4.54)$$

avec $\hat{q}_0(\tau = 0) = Q_0(r)$, $\hat{s}_0(\tau = 0) = S_0(r)$ et $\hat{h}_0(\tau = 0) = H_0(r)$.

De l'équation (4.54), on déduit que :

$$\hat{h}_0(\tau = 0) = \hat{h}_0(\tau \rightarrow \infty),$$

d'où, comme $\hat{h}_0(\tau \rightarrow \infty) = h_0(t = 0)$,

$$h_0(t = 0) = H_0(r),$$

où $H_0 = H_0(r)$ est la forme initiale de la surface du film . De là, à partir de l'équation (4.52), en cherchant \hat{q}_0 sous la forme :

$$\hat{q}_0 = \hat{q}_{0st}(r) + \hat{q}_{0inst}(\tau, r) ,$$

avec $\hat{q}_{0st}(r) = \frac{r}{3} H_0^3$, il vient une équation pour \hat{q}_{0inst} telle que :

$$\frac{\partial \hat{q}_{0inst}}{\partial \tau} + \frac{3}{H_0^2} \hat{q}_{0inst} = 0 ,$$

soit

$$\hat{q}_{0inst} = q^0(r) \exp\left(-\frac{3\tau}{H_0^2}\right) .$$

Comme de plus, d'après la condition initiale pour \hat{q}_0 et le résultat ci-dessus pour \hat{q}_{0inst} , on a :

$$\hat{q}_0(\tau = 0) = Q_0(r) \text{ et } \hat{q}_0(\tau = 0) = \frac{rH_0^3}{3} + q^0(r) ,$$

où

$$Q_0(r) = \int_0^{H_0} u^0 dz ,$$

il découle des relations précédentes que :

$$\hat{q}_0(r, \tau) = \frac{rH_0^3}{3} + \left[Q_0 - \frac{rH_0^3}{3}\right] \exp\left(-\frac{3\tau}{H_0^2}\right) .$$

Les expressions de \hat{q}_0 et de \hat{h}_0 vont nous permettre de déterminer à partir du système à l'ordre 1 dans la couche initiale la condition en $t = 0$ pour h_1 . Ainsi, on a besoin du système suivant :

$$\frac{\partial \hat{q}_1}{\partial \tau} - 3 \frac{\hat{q}_1}{\hat{h}_0^2} + 6 \frac{\hat{q}_0 \hat{h}_1}{\hat{h}_0^3} + r \hat{h}_1 = \frac{6}{5r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\hat{q}_0^2}{\hat{h}_0} \right] - 2 \hat{s}_0, \quad (4.55)$$

$$(VIII) \quad \frac{\partial \hat{s}_1}{\partial \tau} - \frac{5 \hat{s}_1}{2 \hat{h}_0^2} + 5 \frac{\hat{s}_0 \hat{h}_1}{\hat{h}_0^3} - 2 \hat{q}_1 = \frac{17}{14} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\hat{q}_0 \hat{s}_0}{\hat{h}_0} \right] + \frac{2}{r} \left[\frac{\hat{q}_0 \hat{s}_0}{\hat{h}_0} \right] \right), \quad (4.56)$$

$$\frac{\partial \hat{h}_1}{\partial \tau} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \hat{q}_0)}{\partial r} = 0. \quad (4.57)$$

D'après (4.57), on en déduit d'abord que :

$$\frac{\partial \hat{h}_1}{\partial \tau} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\frac{r H_0^3}{3} + \left(Q_0 - \frac{r H_0^3}{3} \right) \exp\left(-\frac{3\tau}{H_0^2}\right) \right) \right],$$

d'où, il vient pour \hat{h}_1 :

$$\hat{h}_1(r, \tau) = \left[-\frac{1}{3r} \frac{d}{dr} (r^2 H_0^3) \right] \tau - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[-\frac{H_0^2}{3} (r Q_0 - \frac{r^2}{3} H_0^3) \exp\left(-\frac{3\tau}{H_0^2}\right) \right] + \mathcal{H}_1(r).$$

Comme $\hat{h}_1(\tau = 0) = H_1(r)$, on a :

$$\mathcal{H}_1(r) = H_1(r) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[-\frac{H_0^2}{3} (r Q_0 - \frac{r^2}{3} H_0^3) \right]$$

ce qui détermine complètement $\hat{h}_1(r, \tau)$.

4.4.3 Système "à la Shkadov" au voisinage de $r = 1$

On introduit maintenant la variable ξ valable dans la couche de cisaillement au voisinage de l'injection (c'est-à-dire en $r = 1$, région III de la figure (4.2)) sous la forme :

$$r = 1 + Re^* \xi.$$

A l'ordre 0 en Re^* dans la couche de cisaillement, le système (4.37)-(4.39) devient :

$$\frac{6}{5} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\tilde{q}_0^2}{\tilde{h}_0} \right] + 3 \frac{\tilde{q}_0}{\tilde{h}_0^2} = \tilde{h}_0 , \quad (4.58)$$

$$(IX) \quad \frac{17}{14} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\tilde{q}_0 \tilde{s}_0}{\tilde{h}_0} \right] + 2\tilde{q}_0 + \frac{5}{2} \frac{\tilde{s}_0}{\tilde{h}_0^2} = 0 , \quad (4.59)$$

$$\frac{\partial \tilde{q}_0}{\partial \xi} = 0 , \quad (4.60)$$

avec $\tilde{q}_0(\xi = 0) = \sigma$, $\tilde{s}_0(\xi = 0) = 0$ et $\tilde{h}_0(\xi = 0) = 1$. Il découle de l'équation (4.60) que \tilde{q}_0 est constant dans la couche de cisaillement et, d'après les conditions aux limites en $\xi = 0$, il s'ensuit que :

$$\tilde{q}_0 = \sigma ;$$

en conséquence, comme $q_0(r = 1) = \tilde{q}_0(\xi \rightarrow \infty)$, il vient que :

$$q_0(r = 1) = \sigma ,$$

ce qui détermine C_0 , c'est-à-dire que :

$$C_0 = \sigma$$

et, de là, la valeur de la constante \mathcal{H}_0 avec :

$$\mathcal{H}_0 = (3\sigma)^{\frac{1}{3}} .$$

Les équation (4.58) et (4.59) sont non-linéaires et de résolution non triviale. Afin de pouvoir raccorder avec la région principale, on suppose que les dérivées $\frac{\partial}{\partial \xi}$ des différentes fonctions tendent vers 0 quand $\xi \rightarrow \infty$. D'où, il vient que :

$$\tilde{h}_0(\xi \rightarrow \infty) \rightarrow (3\sigma)^{\frac{1}{3}}$$

et que :

$$\tilde{s}_0(\xi \rightarrow \infty) \rightarrow -\frac{4}{15}(3\sigma)^{\frac{5}{3}}.$$

On vérifie d'ailleurs numériquement cette hypothèse. En effet, si on résout par différences finies (4.58) et (4.59) et si on essaye pour plusieurs valeurs de σ , il apparaît que \tilde{h}_0 et \tilde{s}_0 tendent bien vers les limites annoncées (figures (4.3),(4.4) et (4.5)). Ces résultats justifient donc l'hypothèse qu'à la limite, quand $\xi \rightarrow \infty$, les dérivées par rapport à ξ tendent vers zéro.

A l'ordre 1 en Re^* , au voisinage de $r = 1$, le système (4.37)-(4.39) devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{q}_0}{\partial t} + \frac{6}{5} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[2 \frac{\tilde{q}_0 \tilde{q}_1}{\tilde{h}_0} - \frac{\tilde{q}_0^2 \tilde{h}_1}{\tilde{h}_0^2} + \xi \frac{\tilde{q}_0^2}{\tilde{h}_0} \right] - \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\tilde{q}_0^2}{\tilde{h}_0} \right) \right\} + 3 \frac{\tilde{q}_1}{\tilde{h}_0^2} - 6 \frac{\tilde{q}_0 \tilde{h}_1}{\tilde{h}_0^3} - 2 \tilde{s}_0 \\ = \tilde{h}_1 + \xi \tilde{h}_0, \end{aligned} \quad (4.61)$$

$$(X) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{s}_0}{\partial t} + \frac{17}{14} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\tilde{s}_0 \tilde{q}_1}{\tilde{h}_0} - \frac{\tilde{q}_0 \tilde{s}_0 \tilde{h}_1}{\tilde{h}_0^2} + \frac{\tilde{q}_0 \tilde{s}_1}{\tilde{h}_0} \right] + 2 \left(\frac{\tilde{q}_0 \tilde{s}_0}{\tilde{h}_0} \right) \right) + \frac{5}{2} \frac{\tilde{s}_1}{\tilde{h}_0^2} - 5 \frac{\tilde{s}_0 \tilde{h}_1}{\tilde{h}_0^3} + 2 \tilde{q}_1 \\ = 0, \end{aligned} \quad (4.62)$$

$$\frac{\partial \tilde{h}_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} (\tilde{q}_1 + \xi \tilde{q}_0) - \xi \frac{\partial \tilde{q}_0}{\partial \xi} = 0. \quad (4.63)$$

De l'équation (4.63) et du fait qu'en $\xi = 0$ on a $\tilde{q}_1 = \sigma \phi_0(t)$ (d'après (4.40)), il vient que :

$$\tilde{q}_1 = \sigma (\phi_0 - \xi).$$

On cherche à présent $\tilde{h}_1(\xi \rightarrow \infty)$ sous la forme $a\xi + b$, soit, après identification au niveau de l'équation (4.61) :

$$\tilde{h}_1(\xi \rightarrow \infty) \rightarrow -\frac{2}{3} (3\sigma)^{\frac{1}{3}} \xi + \frac{22}{135} (3\sigma)^{\frac{5}{3}} + \frac{1}{3} (3\sigma)^{\frac{1}{3}} \phi_0.$$

Afin de simplifier les expressions ultérieures, on écrira les relations en utilisant \mathcal{H}_0 , sachant que \mathcal{H}_0 est connu en fonction de σ (p. 115). Ainsi, \tilde{h}_1 lorsque $\xi \rightarrow \infty$ tend vers :

$$\tilde{h}_1(\xi \rightarrow \infty) \rightarrow -\frac{2}{3} \mathcal{H}_0 \xi + \frac{22}{135} \mathcal{H}_0^5 + \frac{1}{3} \mathcal{H}_0 \phi_0.$$

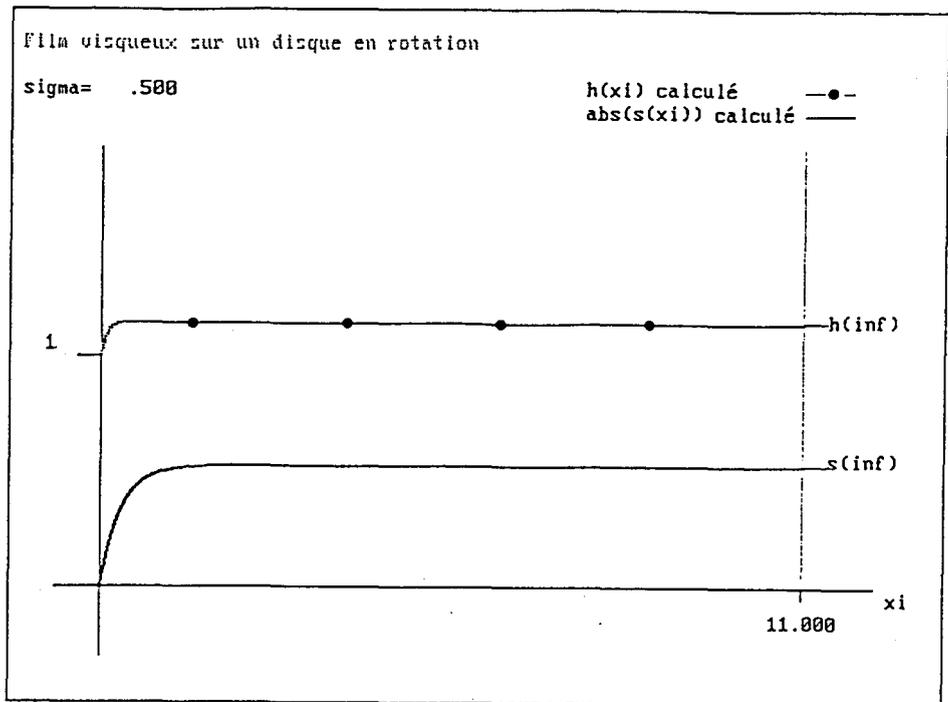


FIG. 4.3 - $\sigma = 0.5$: Epaisseur du film \tilde{h}_0 et débit tangentiel \tilde{s}_0 d'après (4.58) et (4.59). Comparaison avec les valeurs estimées pour $\xi \rightarrow \infty$.

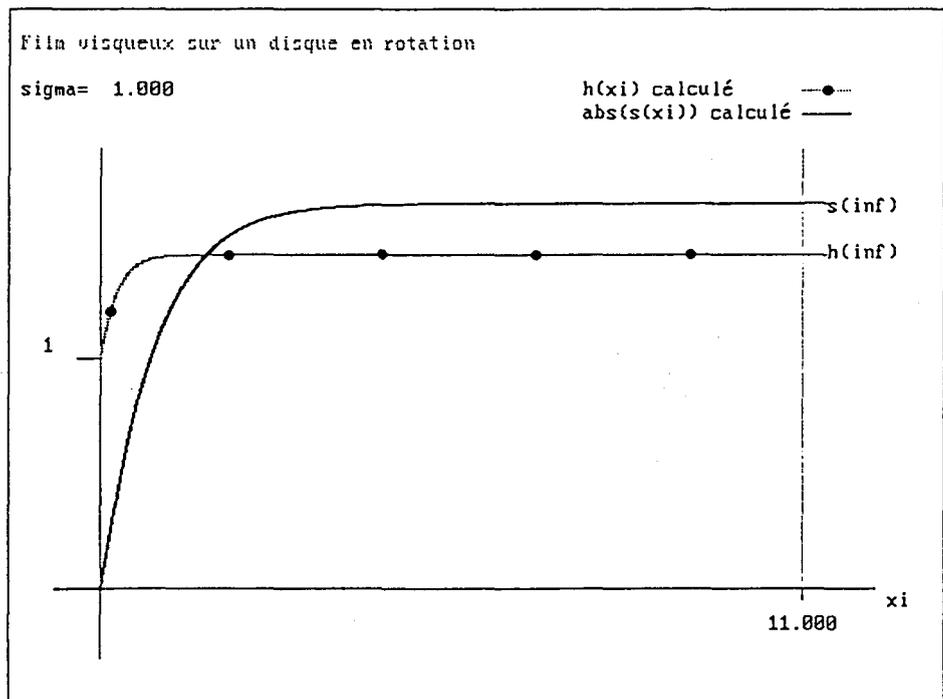


FIG. 4.4 - $\sigma = 1$: Epaisseur du film \tilde{h}_0 et débit tangentiel \tilde{s}_0 d'après (4.58) et (4.59). Comparaison avec les valeurs estimées pour $\xi \rightarrow \infty$.

4.4.4 Raccords en $t = 0$ et $r = 1$

On raccorde la région principale I avec les régions II et III au moyen de raccords “à la Shivamoggi” ([19], [35]). Dans un premier temps, on effectue le raccord entre la région principale et la couche initiale. C’est-à-dire que l’on doit avoir :

$$LIM_{\tau \rightarrow \infty} (\hat{h}_1 - h_1) = 0 ,$$

avec h_1 devant être obtenue à l’aide d’un développement de Taylor au voisinage de $t = 0$ écrit en fonction de la variable locale τ . Soit :

$$\left\{ \left[-\frac{1}{3r} \frac{d}{dr} (r^2 H_0^3) \right] \tau + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[-\frac{H_0^2}{3} (rQ_0 - \frac{r^2}{3} H_0^3) \right] + H_1(r) \right\} - \left\{ h_1(t=0) + \tau \frac{\partial h_0}{\partial t}(t=0) \right\} = 0 . \quad (4.64)$$

De plus, l’hypothèse que $h_0 = h_0(r)$ implique qu’on doit avoir (pour ne pas faire apparaître de terme en τ) :

$$\frac{d}{dr} (r^2 H_0^3) = 0$$

ou encore :

$$H_0 = H_{00} r^{-\frac{2}{3}}$$

avec H_{00} une constante.

Ainsi, la relation (4.64) permet d’obtenir la condition initiale associée à l’équation (4.51) et qui s’écrit sous la forme suivante :

$$h_1(\tau = 0) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[-\frac{H_0^2}{3} (rQ_0 - \frac{r^2}{3} H_0^3) \right] + H_1(r) . \quad (4.65)$$

On s’intéresse à présent au raccord au voisinage de $r = 1$ entre la région principale et la couche de cisaillement. On doit vérifier que :

$$LIM_{\xi \rightarrow \infty} (\tilde{h}_1 - h_1) = 0 ,$$

avec h_1 devant être obtenue à l'aide d'un développement de Taylor au voisinage de $r = 1$ écrit en fonction de la variable locale ξ . Il vient :

$$\left\{-\frac{2}{3}\mathcal{H}_0\xi + \frac{22}{135}\mathcal{H}_0^5 + \frac{1}{3}\mathcal{H}_0\phi_0\right\} - \left\{h_1(r=1) + \xi \frac{dh_0}{dr}(r=1)\right\} = 0 .$$

avec :

$$\frac{dh_0}{dr} = -\frac{2}{3}\mathcal{H}_0 r^{-\frac{5}{3}} ,$$

soit

$$\xi \frac{dh_0}{dr}\Big|_{r=1} = -\frac{2}{3}\mathcal{H}_0\xi .$$

La condition en $r = 1$ pour h_1 s'écrit donc :

$$h_1(r=1) = \frac{22}{135}\mathcal{H}_0^5 + \frac{1}{3}\mathcal{H}_0\phi_0(t) . \quad (4.66)$$

4.4.5 Equation pour h_1 avec conditions initiale et à la limite associées

Il vient donc pour $h_1(r, t)$ le problème avec conditions à la limite et initiale suivant (on retrouve l'équation (4.51)):

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + \mathcal{H}_0^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^{\frac{2}{3}} h_1) = -\frac{176}{405} \mathcal{H}_0^7 r^{-\frac{14}{3}} , \quad (4.67)$$

$$(XI) \quad h_1(r, t=0) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[-\frac{H_0^2}{3} (rQ_0 - \frac{r^2}{3} H_0^3) \right] + H_1(r) , \quad (4.68)$$

$$h_1(r=1, t) = \frac{22}{135} \mathcal{H}_0^5 + \frac{\mathcal{H}_0}{3} \phi_0(t) . \quad (4.69)$$

Comme $H_0(r) = H_{00} r^{-\frac{2}{3}}$, si on pose :

$$Q_0(r) = \frac{Q_{00}}{r} + q_0(r) , \quad (4.70)$$

avec

$$Q_{00} = \frac{H_{00}^3}{3} + \frac{11}{30} \frac{\mathcal{H}_0^5}{H_{00}^2},$$

il vient à la place de (4.68) l'expression pour $h_1(r, t = 0)$ suivante :

$$h_1(r, t = 0) = \frac{22}{135} \mathcal{H}_0^5 r^{-\frac{10}{3}} - \frac{H_{00}}{3r} \frac{d}{dr} (r^{-\frac{1}{3}} q_0) + H_1(r). \quad (4.71)$$

On va chercher à présent h_1 sous la forme :

$$h_1(r, t) = h_{st}(r) + h_{inst}(r, t), \quad (4.72)$$

et on en déduit aisément que :

$$h_{st}(r) = \frac{22}{135} \mathcal{H}_0^5 r^{-\frac{10}{3}}. \quad (4.73)$$

Le résultat obtenu pour $h_{st} = h_{st}(r)$ est en accord avec celui présenté dans [8]. En effet, Charwat, Kelly et Gazley ont effectué un développement asymptotique en puissances de $r^* = r/l$ et ont obtenu une épaisseur de film δ telle que :

$$\frac{\delta}{(\frac{\nu}{\omega})^{\frac{1}{2}}} = r^{*- \frac{2}{3}} + (0.197 - 0.465 \frac{g\nu}{Q\omega^2}) r^{*- \frac{10}{3}}. \quad (4.74)$$

Après avoir déterminé $h_{st}(r)$, il reste maintenant à résoudre pour h_{inst} le problème suivant :

$$\frac{\partial h_{inst}}{\partial t} + \mathcal{H}_0^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^{\frac{2}{3}} h_{inst}) = 0, \quad (4.75)$$

$$h_{inst}(r, t = 0) = -\frac{H_{00}}{3r} \frac{d}{dr} (r^{-\frac{1}{3}} q_0) + H_1(r) = I(r), \quad (4.76)$$

$$h_{inst}(r = 1, t) = \frac{\mathcal{H}_0}{3} \phi_0(t) = \Psi(t). \quad (4.77)$$

où on suppose que q_0 est tel que $h_1(r = 1, t = 0) = 0$. On va d'abord remanier le problème

(4.75)-(4.77). Pour cela, on pose que :

$$H(r, t) = r^{\frac{2}{3}} h_{inst}(r, t) .$$

On a ainsi maintenant à la place de (4.75) l'équation suivante :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \mathcal{H}_0^2 r^{-\frac{1}{3}} \frac{\partial H}{\partial r} = 0 . \quad (4.78)$$

Les conditions à la limite et initiale deviennent :

$$H(r, t = 0) = J(r) , \quad (4.79)$$

$$H(r = 1, t) = \Psi(t) , \quad (4.80)$$

où $J(r) = r^{\frac{2}{3}} I(r)$. On effectue à présent le changement de variables :

$$x = \frac{3}{4} (r^{\frac{4}{3}} - 1) , \quad (4.81)$$

$$\tau = \mathcal{H}_0^2 t . \quad (4.82)$$

L'équation (4.78), pour $\hat{H}(x, \tau) \equiv H(r, t)$, s'écrit donc maintenant sous la forme :

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial \tau} + \frac{\partial \hat{H}}{\partial x} = 0 . \quad (4.83)$$

Les nouvelles conditions à la limite et initiale sont :

$$\hat{H}(x, \tau = 0) = \hat{J}(x) , \quad (4.84)$$

$$\hat{H}(x = 0, \tau) = \hat{\Psi}(\tau) \quad (4.85)$$

où $\hat{J}(x) \equiv J(r)$ et $\hat{\Psi}(\tau) \equiv \Psi(t)$. Il s'agit d'une équation d'onde pour laquelle on dispose

de deux conditions, une en temps et une en espace. On peut donc trouver une solution pour l'équation (4.83) grâce à la méthode des caractéristiques. On voit, en effet, que l'on peut exprimer la solution le long des courbes telles que $\frac{dx}{d\tau} = 1$, c'est-à-dire des droites d'équation $x = \tau + c$.

Si on entre dans la région $x, \tau > 0$ via l'axe des x , alors on va avoir :

$$\hat{H} = \hat{J}(\xi) \quad (4.86)$$

où $x(0) = \xi$.

Si on entre dans la région $x, \tau > 0$ via l'axe des τ , il vient :

$$\hat{H} = \hat{\Psi}(T) \quad (4.87)$$

où $x(T) = 0$.

On voit ainsi l'influence respective de la condition initiale et de la condition en $r = 1$ selon le chemin suivi pour entrer dans la région $x, \tau > 0$.

On peut résumer les résultats obtenus au paragraphe 4.4 en écrivant la solution à laquelle on est parvenue :

$$h(r, t) = (3C_0)^{\frac{1}{3}} r^{-\frac{2}{3}} + Re^* \left(\frac{22}{135} \mathcal{H}_0^5 r^{-\frac{10}{3}} + r^{-\frac{2}{3}} \hat{H} \left(\frac{3}{4} (r^{\frac{4}{3}} - 1), \mathcal{H}_0^2 t \right) + O(Re^{*2}) \right), \quad (4.88)$$

avec

$\hat{H} = r^{\frac{2}{3}} I \left(\left(\frac{4}{3} \xi + 1 \right)^{\frac{3}{4}} \right)$ si on entre dans la région $r > 1, t > 0$ via l'axe des r

et avec $\hat{H} = \hat{\Psi} \left(\frac{T}{\mathcal{H}_0^2} \right)$ si on entre dans la région $r > 1, t > 0$ via l'axe des t , le long de courbes d'équation $\frac{3}{4} (r^{\frac{4}{3}} - 1) = \mathcal{H}_0^2 t + c$.

4.5 Résultats numériques ($We^* = 0$ et $Re^* \ll 1$)

4.5.1 Solution stationnaire

On revient au système moyen (4.37)-(4.39) mais en faisant l'hypothèse que la solution ne dépend pas du temps. Ce cas va permettre de comparer les résultats obtenus numériquement et ceux obtenus dans la section précédente. En effet, la solution stationnaire dans la région principale s'écrit :

$$h(r) = \mathcal{H}_0 r^{-\frac{2}{3}} + \frac{22}{135} Re^* \mathcal{H}_0^5 r^{-\frac{10}{3}} + O(Re^{*2}), \quad (4.89)$$

avec $\mathcal{H}_0 = (3\sigma)^{\frac{1}{3}}$.

On va donc pouvoir comparer la solution (4.89) avec celle obtenue par un calcul numérique en résolvant, par différences finies, le système remanié suivant (obtenu à partir du système (4.37)-(4.39)) :

$$\frac{dH}{dr} = \frac{5r^2}{2\sigma Re^*} - \frac{5rH^3}{6\sigma^2} \left(\chi^2 + \frac{310}{63} \beta^2 \frac{S^2}{r^2} + 2\chi\beta \frac{S}{r} \right) \quad (4.90)$$

$$\frac{dS}{dr} = - \left(\frac{28\chi}{17\beta} + \frac{35}{17} \frac{r^2}{\sigma Re^*} \frac{S}{H} + \frac{S}{r} \right) \quad (4.91)$$

où

$$H = r h \quad \text{et} \quad S = \frac{s}{h}, \quad (4.92)$$

avec $H = 1$ et $S = 0$ en $r = 1$. On résout le système à deux équations (4.90)-(4.91) de façon explicite. Afin de pouvoir comparer aisément les résultats obtenus numériquement grâce au schéma précédent avec la solution analytique (4.89), on choisit les paramètres de sorte que $Re^* \ll 1$ et $\chi^2 Re^* = 1$. On prend donc pour les différents paramètres les valeurs suivantes :

$$(1) \quad Re = 1., \quad \epsilon = 0.1, \quad \beta = 0.1, \quad \chi = \sqrt{10}, \quad \sigma = 0.1.$$

La figure (4.5) permet de constater le bon accord, en dehors du voisinage immédiat de la paroi en $r = 1$, entre la hauteur de film obtenue numériquement et celle obtenue

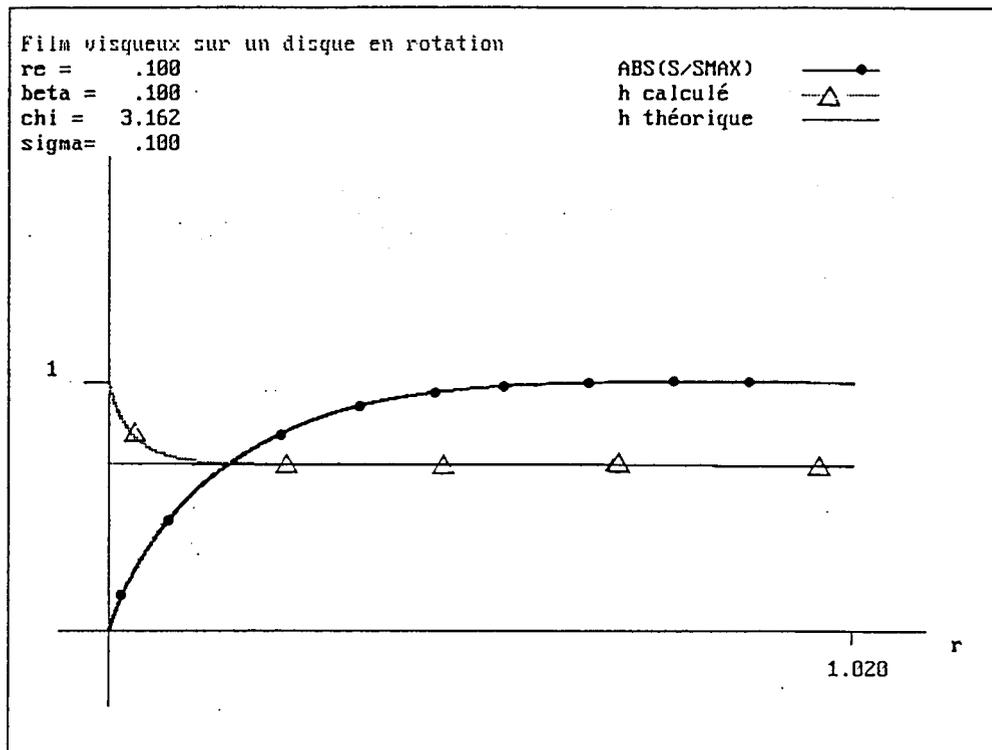


FIG. 4.5 - Comparaison entre la solution théorique et la solution numérique. $Re^* = 0.1$, $\beta = 0.1$, $\chi = \sqrt{10}$, $\sigma = 0.1$.

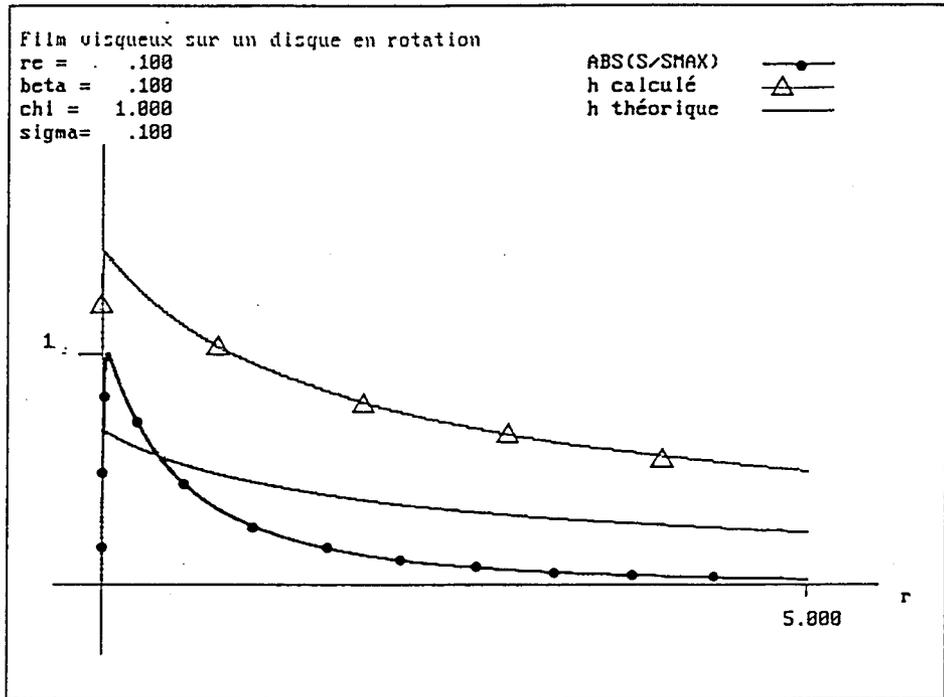


FIG. 4.6 - Comparaison entre la solution théorique et la solution numérique. $Re^* = 0.1$, $\beta = 0.1$, $\chi = 1$, $\sigma = 0.1$.

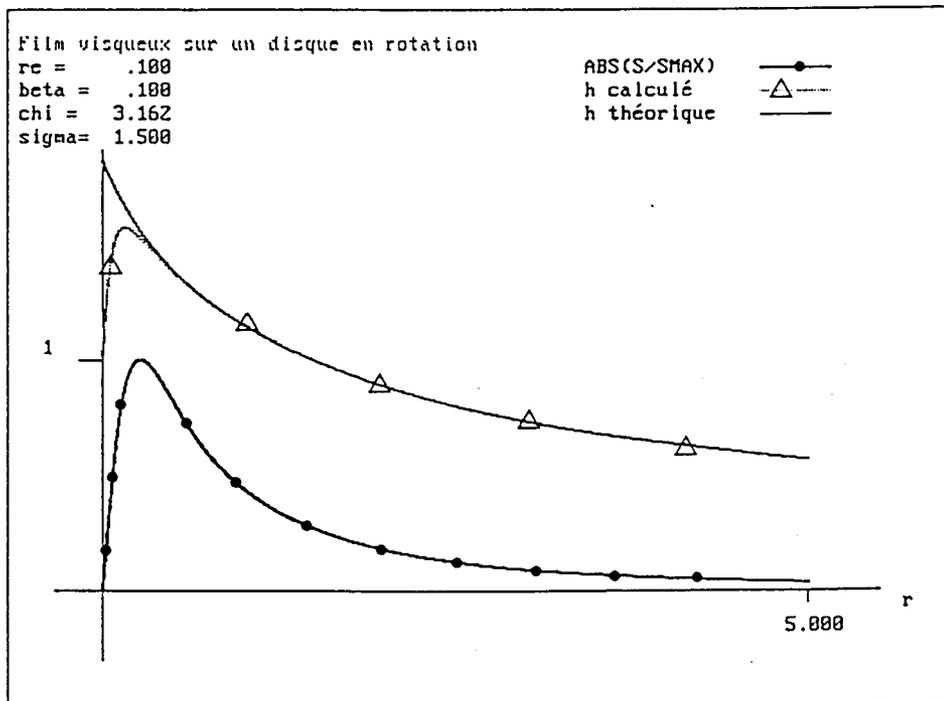


FIG. 4.7 - Comparaison entre la solution théorique et la solution numérique. $Re^* = 0.1$, $\beta = 0.1$, $\chi = \sqrt{10}$, $\sigma = 1.5$.

analytiquement dans la région principale de l'écoulement. Il est intéressant aussi d'observer l'influence du choix des paramètres sur l'allure du film visqueux. On peut faire varier χ , c'est-à-dire la vitesse de rotation du disque, ou σ , l'intensité de l'injection. Ainsi, on conserve les valeurs de (1) pour Re , ϵ et β et on prend une valeur différente pour χ ou σ :

- $\chi = 1$. et $\sigma = 0.1$ (figure (4.6))
- $\chi = \sqrt{10}$ et $\sigma = 1$. (figure (4.7))

Le décalage observé entre la solution analytique (4.89) et la solution numérique dans la figure (4.6) permet de se rendre compte des limites du domaine d'utilisation de la solution théorique pour laquelle on a supposé $Re^*\chi^2 = 1$, ce qui n'est pas vérifié dans ce cas. Par contre, l'augmentation de σ n'empêche pas un bon accord entre la hauteur de film calculée et la hauteur de film théorique de la figure (4.7).

4.5.2 Solution instationnaire

Le système (IV) est maintenant considéré dans sa totalité. A l'aide d'un changement de variables similaire à celui du paragraphe (4.5.1), on obtient une nouvelle forme du système (IV) dont on va résoudre de façon implicite les équations pour S et Q . On pose donc que :

$$Q = r q ,$$

$$S = \frac{s}{h} ,$$

$$H = \frac{1}{rh} .$$

Il vient le système suivant :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \chi^2 \frac{r}{H} - \frac{6}{5} \frac{\partial Q^2 H}{\partial r} + \frac{310}{63} \beta^2 \frac{S^2}{rH} - \frac{3}{Re^*} r^2 Q H^2 + 2\chi\beta \frac{S}{H}, \quad (4.93)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\left(\frac{3}{14} H S \frac{\partial Q}{\partial r} + \frac{17}{14} H Q \frac{\partial S}{\partial r} + \frac{5}{2Re^*} r^2 S H^2 + \frac{17}{14} \frac{QSH}{r} + 2\frac{\chi}{\beta} QH\right), \quad (4.94)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = H^2 \frac{\partial Q}{\partial r}, \quad (4.95)$$

avec, en $r = 1$, les conditions suivantes :

$$Q = \sigma, \quad (4.96)$$

$$S = 0, \quad (4.97)$$

$$H = 1. \quad (4.98)$$

On teste les conditions initiales suivantes : le disque tourne ; on injecte le fluide à un taux σ^- pour $t < 0$ et à un taux σ^+ pour $t \geq 0$. On a alors deux cas :

- $\sigma^- > \sigma^+$ (figure (4.8))

- $\sigma^+ > \sigma^-$ (figure (4.9))

On retrouve ici les résultats présentés dans [30], c'est-à-dire un front qui avance suivant r dans le cas où le débit de fluide injecté est plus faible pour les $t > 0$ que pour les $t < 0$ et la présence d'une discontinuité dans le cas contraire.

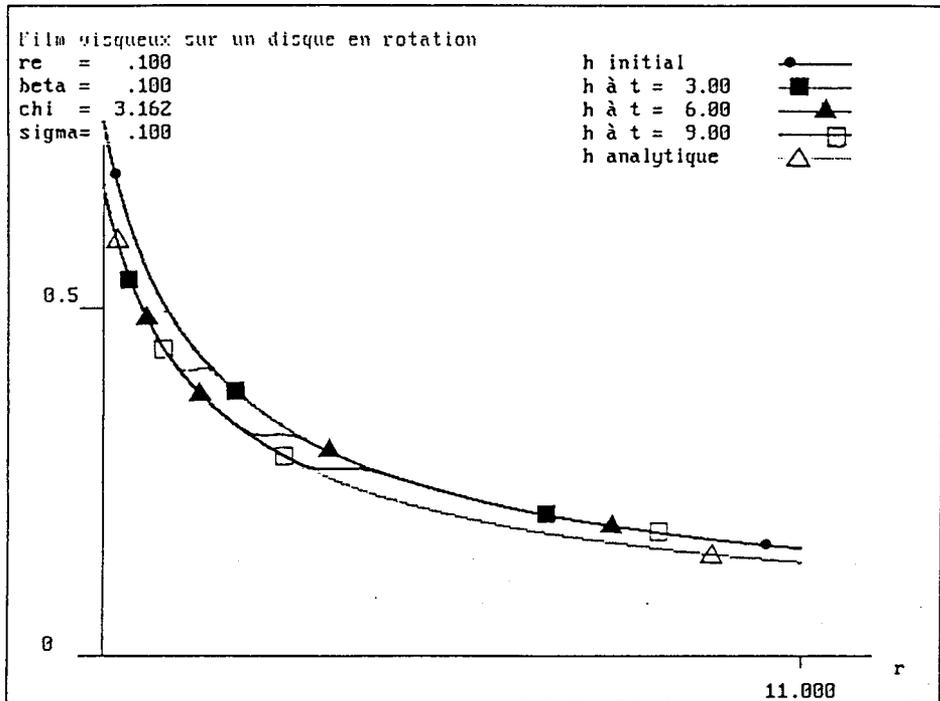


FIG. 4.8 - *Solution instationnaire. $\sigma^- > \sigma^+$.*

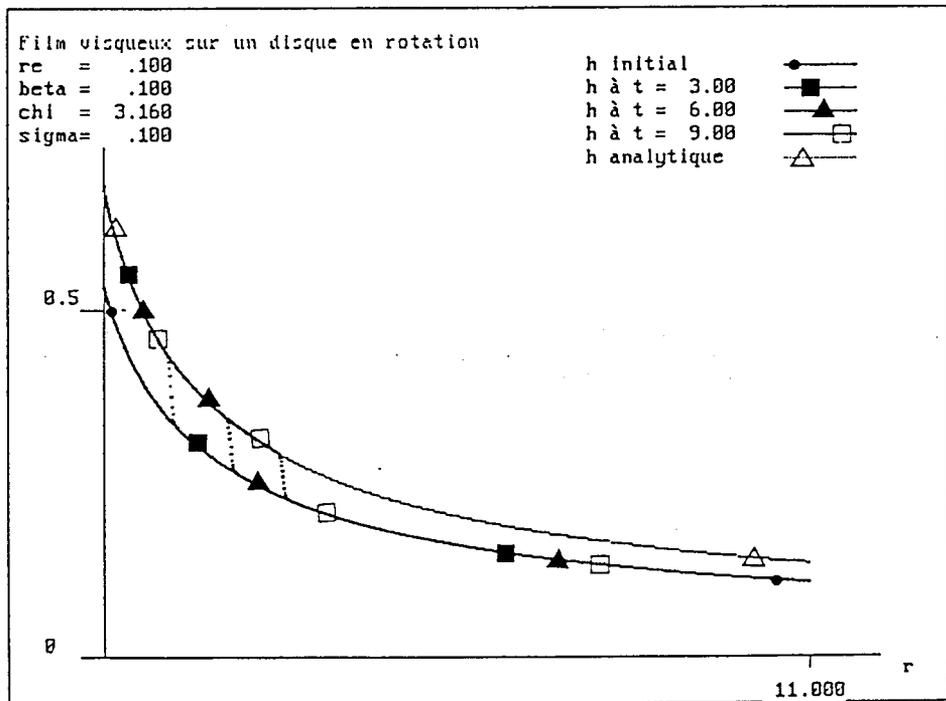


FIG. 4.9 - *Solution instationnaire. $\sigma^+ > \sigma^-$.*

4.6 Conclusion

Grâce à des équations approchées “moyennes”, obtenues à partir de relations à la Shkadov, et en supposant $We^* = 0$ et $Re^*\chi^2 = 1$, on retrouve d’une part, à l’ordre principal, l’expression de la hauteur du film obtenue dans [30] et d’autre part, au premier ordre, la même puissance en r que dans [8].

De plus, des calculs numériques en différences finies à partir des équations stationnaires et instationnaires “moyennes” sont en bon accord avec les résultats analytiques. On retrouve aussi, dans le cas instationnaire, l’apparition d’un front se déplaçant le long des r croissants lorsque le débit est plus faible à partir de $t = 0$ ainsi que l’apparition de discontinuités lorsqu’au contraire le débit est plus important pour les t positifs.

Alors que la formulation des équations inclut des termes liés à la prise en compte de la tension de surface, on n’a pas encore réussi à exploiter, aussi bien analytiquement que numériquement, cette possibilité. En effet, les dérivées de h par rapport à r sont à l’origine de nouvelles difficultés. Ainsi, le calcul numérique nécessite de s’imposer l’allure du film visqueux en $r = 1$. Or les résultats expérimentaux, qui pourraient nous guider dans notre choix de conditions aux limites, ne correspondent pas, pour ceux qu’on a pu trouver, à la configuration choisie ici.

Conclusion générale et perspectives

Le travail effectué dans le cadre de cette thèse concerne trois façons d'aborder les écoulements dus à des disques en rotation pour pouvoir, malgré les difficultés liées aux problèmes de base, avoir des solutions approchées ou un aperçu de leurs principales caractéristiques.

On contribue au Chapitre 2 à l'étude de la route vers le chaos pour un écoulement confiné entre un disque fixe et un disque en rotation.

En supposant des disques coaxiaux et de rayon "infini" et en utilisant l'hypothèse de similitude de Von Karman ainsi que la méthode de troncature de Galerkin, on obtient un système modèle sous la forme d'un système dynamique à trois modes, modes qui sont issus des composantes de vitesses axiale et tangentielle dans l'écoulement.

La recherche des solutions stationnaires du système dynamique fournit des solutions qui se rapprochent qualitativement des solutions de similitude de la littérature, notamment de la solution dite de Batchelor et de la solution présentant une vitesse dans le coeur négative. On voit en outre la transformation de cette dernière solution - de solution complexe à solution réelle - en $Re \simeq 487$, qui est un nombre de Reynolds voisin des seuils trouvés par d'autres méthodes numériques pour l'apparition de la solution de Batchelor.

On observe aussi la nécessité d'exciter le système dynamique obtenu ici pour faire apparaître des comportements complexes. Lorsque ce système subit un forçage sinusoïdal (au moyen d'une vitesse de rotation du disque supérieur périodique), l'évolution vers le chaos peut se réaliser suivant un scénario ressemblant à la cascade de doublement de période du scénario sous-harmonique.

L'imprédictibilité du système dans certains cas peut aussi être mise en évidence en étudiant le bassin d'attraction des solutions bornées, car ce dernier présente une frontière fractale.

Le chapitre suivant est consacré à la modélisation asymptotique de l'écoulement se produisant dans un cylindre en rotation, cylindre de petit rapport d'aspect et muni d'un couvercle animé d'une vitesse angulaire légèrement supérieure au reste du réservoir. L'obtention d'une équation pour la pression (à l'ordre principal du développement et sans hypothèse préliminaire d'axisymétrie) permet, dans des cas particuliers, de déduire des résultats sur la stabilité de l'écoulement ainsi que de retrouver la pression issue de l'hypothèse de similitude posée *a priori* par Von Karman.

Au Chapitre 4, on s'intéresse à l'amincissement d'un film visqueux sur un disque en rotation, pour une injection faiblement perturbée.

En faisant apparaître des petits paramètres dans les équations de base et en opérant un premier passage à la limite, on déduit un système limite dont on moyenne les équations sur la hauteur du film.

Un deuxième passage à la limite dans ces équations moyennes, qui ne font plus intervenir que les débits tangential et radial ainsi que la hauteur du film, permet d'obtenir une hiérarchie de systèmes, à partir desquels on calcule la hauteur du film jusqu'à à l'ordre 1.

La solution asymptotique est ensuite comparée à des solutions numériques développées à partir des équations approchées "moyennes", stationnaires et instationnaires: on trouve que les solutions obtenues par les deux méthodes sont en bon accord.

Une approche analytique à partir des équations de Navier complètes dans le cas de l'écoulement dû à un ou deux disques en rotation est en général impossible.

La modélisation du Chapitre 2 par la méthode de Galerkin de l'écoulement confiné entre un disque fixe et un disque en rotation donne des résultats évidemment d'ordre qualitatif: on retrouve "qualitativement" les solutions de similitude exposées dans la littérature, illustrées et discutées au Chapitre 1. On obtient aussi un premier seuil d'apparition de nouveaux régimes d'écoulement assez proche de celui calculé par d'autres approches numériques; on propose de plus ici un exemple d'évolution du comportement de la solution, relatif à des nombres de Reynolds croissants, à travers un scénario à dédoublement de période (qui n'est sans doute pas le seul possible) qui débouche sur un comportement chaotique.

On essaie aussi de surmonter les problèmes rencontrés dans une approche analytique en utilisant les développements asymptotiques, dans les cas étudiés aux Chapitres 3 et 4, dont les solutions approchées peuvent servir d'initialisation ou de cas-test lors de calculs

numériques.

Les perspectives liées à chacun des chapitres traités ici sont les suivantes :

Il serait utile de compléter le Chapitre 1 en recherchant des publications exposant des résultats détaillés sur la transition vers la turbulence du mode *III* afin de pouvoir comparer avec les résultats obtenus au Chapitre 2.

Le système dynamique nécessiterait, de son côté, une exploration systématique, à partir de la technique de balayage des données initiales, en essayant de mettre en évidence les conditions initiales menant aux points fixes, aux cycles limites et éventuellement à des solutions chaotiques. On peut également envisager d'augmenter le nombre de modes du système afin d'en déterminer l'importance dans la nature des solutions stationnaires du système autonome associé ainsi que dans le comportement avec ou sans forçage.

Le Chapitre 3 peut être suivi d'une étude approfondie de l'équation pour la pression à l'ordre principal ; on peut envisager de considérer l'équation pour d'autres cas particuliers, ainsi que de mettre en oeuvre une étude de stabilité en $r = R$ pour l'équation complète.

Le Chapitre 4 peut être prolongé par une étude des équations approchées "moyennes" en ne négligeant plus l'effet de la tension de surface afin d'apprécier son importance sur l'allure du film visqueux. On peut aussi explorer d'un point de vue numérique l'effet de la perturbation de l'injection.

Annexe A

Schéma aux différences finies pour un écoulement entre deux disques coaxiaux

Schéma aux différences finies pour l'écoulement entre un disque fixe et un disque en rotation constante d'un fluide Newtonien (d'après [31])

On résout le système de deux équations différentielles ordinaires couplées pour $f(z)$ et $g(z)$ ($0 \leq z \leq 1$) tel que :

$$\begin{aligned} f'''' - f f''' - 4gg' &= 0, \\ fg' - f'g - g'' &= 0 \end{aligned} \tag{A.1}$$

associé aux conditions limites suivantes:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, & f(1) &= 0, \\ f'(0) &= 0, & f'(1) &= 0, \\ g(0) &= 0, & g(1) &= Re. \end{aligned}$$

On pose :

$$F_j = f(z)|_{z=z_j}, \tag{A.2}$$

$$G_j = g(z)|_{z=z_j} \tag{A.3}$$

avec

$$z_j = (j - 2)\Delta z,$$

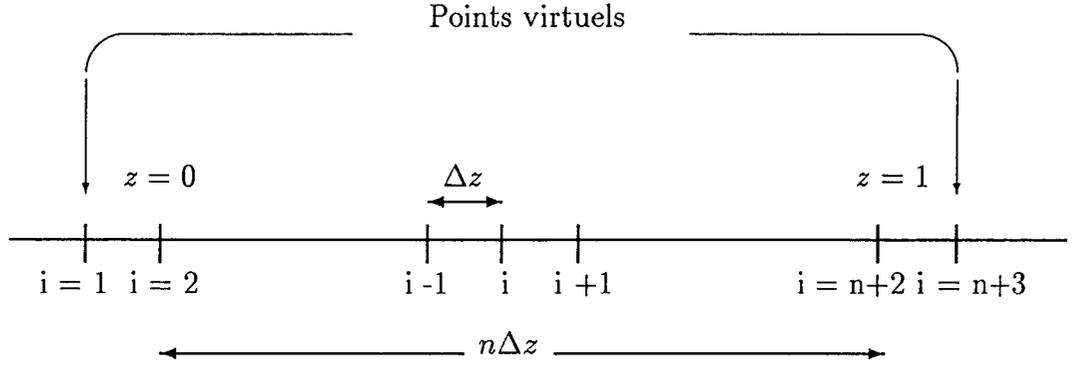


FIG. A.1 - *Discretisation du domaine de calcul et introduction de points virtuels.*

$$\Delta z = \frac{1}{n}$$

où $(n + 1)$ est le nombre de points qui discrétisent la hauteur entre les deux disques. Le système précédent est discrétisé sur l'intervalle $0 \leq z \leq 1$ avec des différences finies centrées sous la forme de deux équations baptisées χ_1 et χ_2 . En fait, cet intervalle est étendu de façon à faire apparaître des points virtuels qui permettent de réaliser les conditions aux limites. Ainsi pour $3 \leq j \leq n + 1$, on a :

$$\begin{aligned} \chi_{1,j} = & \frac{1}{(\Delta z)^4} (F_{j-2} - 4F_{j-1} + 6F_j - 4F_{j+1} + F_{j+2}) \\ & + \frac{1}{2(\Delta z)^3} F_j (F_{j-2} - 2F_{j-1} + 2F_{j+1} - F_{j+2}) + \frac{G_j}{\Delta z} (G_{j-1} - G_{j+1}), \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned} \chi_{2,j} = & \frac{1}{2\Delta z} F_j (G_{j+1} - G_{j-1}) + \frac{1}{(\Delta z)^2} (2G_j - G_{j+1} - G_{j-1}) \\ & + \frac{1}{12\Delta z} G_j (F_{j+2} - 8F_{j+1} + 8F_{j-1} - F_{j-2}). \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Les conditions aux limites en $z = 0$ et $z = 1$ sont remplacées par des conditions aux points virtuels en $j = 1$ et $j = n + 3$ telles que :

$$\begin{aligned}
F_2 &= 0 & , & & F_{n+2} &= 0 & , \\
F_1 &= F_3 & , & & F_{n+1} &= F_{n+3} & , \\
G_2 &= 0 & , & & G_{n+2} &= Re & .
\end{aligned} \tag{A.6}$$

On considère les $2(n-1)$ fonctions $\chi_{1,j}$ et $\chi_{2,j}$ comme fonctions des $2(n-1)$ variables $F_3, F_4, \dots, F_{n+1}, G_3, \dots, G_{n+1}$. Comme la résolution est itérative, pour commencer le calcul, on affecte une première valeur à F_j et G_j comme solutions de (A.4) et (A.5) tandis qu'on note par \bar{F}_j et \bar{G}_j les solutions "exactes".

Pour $3 \leq j \leq n+1$, on a alors :

$$\bar{F}_j = F_j + \Delta F_j , \tag{A.7}$$

$$\bar{G}_j = G_j + \Delta G_j . \tag{A.8}$$

On développe ensuite $\chi_{1,j}$ et $\chi_{2,j}$ en série de Taylor et on néglige les dérivées partielles d'ordre supérieur à 1. On a donc :

$$\bar{\chi}_{\alpha,j} = \chi_{\alpha,j} + \sum_{k=1}^{n+1} \Delta F_k \frac{\partial \chi_{\alpha,j}}{\partial F_k} + \sum_{l=1}^{n+1} \Delta G_l \frac{\partial \chi_{\alpha,j}}{\partial G_l} \tag{A.9}$$

avec $\alpha = 1, 2$.

Le problème peut être maintenant écrit sous la forme matricielle suivante :

$$[D] \begin{bmatrix} \Delta F_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta F_{n+1} \\ \Delta G_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta G_{n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \chi_{1,3} \\ \cdot \\ \cdot \\ \chi_{1,n+1} \\ \chi_{2,3} \\ \cdot \\ \cdot \\ \chi_{2,n+1} \end{bmatrix} = [0] \tag{A.10}$$

où $[D]$ est construite de la manière suivante :

$$[D] = \begin{bmatrix}
\frac{\partial \chi_{1,3}}{\partial F_3} & \frac{\partial \chi_{1,3}}{\partial F_4} & \cdots & \frac{\partial \chi_{1,3}}{\partial F_{n+1}} & \frac{\partial \chi_{1,3}}{\partial G_3} & \frac{\partial \chi_{1,3}}{\partial G_4} & \cdots & \frac{\partial \chi_{1,3}}{\partial G_{n+1}} \\
\frac{\partial \chi_{1,4}}{\partial F_3} & & & & & & & \frac{\partial \chi_{1,4}}{\partial G_{n+1}} \\
\cdot & & & & & & & \cdot \\
\cdot & & & & & & & \cdot \\
\cdot & & & & & & & \cdot \\
\frac{\partial \chi_{1,n+1}}{\partial F_{n+1}} & & & & & & & \frac{\partial \chi_{1,n+1}}{\partial G_{n+1}} \\
\frac{\partial \chi_{2,3}}{\partial F_3} & & & & & & & \frac{\partial \chi_{2,3}}{\partial G_{n+1}} \\
\cdot & & & & & & & \cdot \\
\cdot & & & & & & & \cdot \\
\cdot & & & & & & & \cdot \\
\frac{\partial \chi_{2,n+1}}{\partial F_3} & & & & & & & \frac{\partial \chi_{2,n+1}}{\partial G_{n+1}}
\end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

Annexe B

Base de fonctions ψ_ν

Obtention de la base de fonctions ψ_ν

On cherche une base de fonctions $\psi(z)$ vérifiant les conditions aux limites suivantes :

$$\psi(0) = \psi(1) = 0 , \quad (\text{B.1})$$

$$\psi'(0) = \psi'(1) = 0. \quad (\text{B.2})$$

On pose :

$$\psi_\nu(z) = A \cos \nu z + B \sin \nu z + C \operatorname{ch} \nu z + D \operatorname{sh} \nu z , \quad (\text{B.3})$$

ce qui implique une solution non nulle si et seulement si la relation :

$$\cos \nu \operatorname{ch} \nu = 1 \quad (\text{B.4})$$

est vérifiée (la première valeur non nulle est $\nu_1 \sim 4.73$). On a de plus $A = -C$ et $B = -D$, d'où la forme suivante pour $\psi_\nu(z)$:

$$\psi_\nu(z) = (\sin \nu - \operatorname{sh} \nu)(\operatorname{ch} \nu z - \cos \nu z) + (\operatorname{ch} \nu - \cos \nu)(\operatorname{sh} \nu z - \sin \nu z) . \quad (\text{B.5})$$

Vérification de l'orthogonalité de la base de fonctions

On veut vérifier que :

$$I = \int_0^1 \psi_\nu(z) \psi_\mu(z) dz = 0 . \quad (\text{B.6})$$

En effet, à cette fin, on développe cette intégrale en intégrales "élémentaires" sous la forme

$$\begin{aligned}
 I &= (\sin \nu - sh \nu) (\sin \mu - sh \mu) I_1, \\
 &+ (\sin \nu - sh \nu) (ch \mu - \cos \mu) I_2, \\
 &+ (ch \nu - \cos \nu) (ch \mu - \cos \mu) I_3, \\
 &+ (ch \nu - \cos \nu) (\sin \mu - sh \mu) I_4,
 \end{aligned} \tag{B.7}$$

où:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^1 (ch \nu z - \cos \nu z) (ch \mu z - \cos \mu z) dz \\
 I_2 &= \int_0^1 (ch \nu z - \cos \nu z) (sh \mu z - \sin \mu z) dz \\
 I_3 &= \int_0^1 (sh \nu z - \sin \nu z) (sh \mu z - \sin \mu z) dz \\
 I_4 &= \int_0^1 (sh \nu z - \sin \nu z) (ch \mu z - \cos \mu z) dz,
 \end{aligned} \tag{B.8}$$

soit encore :

$$\begin{aligned}
 I_1 &= I^1 - I^2 - I^3 + I^4 \\
 I_2 &= I^5 - I^6 - I^7 + I^8 \\
 I_3 &= I^9 - I^{10} - I^{11} + I^{12}
 \end{aligned} \tag{B.9}$$

avec

$$\begin{aligned}
 I^1 &= \int_0^1 ch \nu z ch \mu z dz \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{sh(\nu + \mu)}{\nu + \mu} + \frac{sh(\nu - \mu)}{\nu - \mu} \right],
 \end{aligned} \tag{B.10}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2 &= \int_0^1 ch \nu z \cos \mu z dz \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{sh(\nu + i\mu)}{\nu + i\mu} + \frac{sh(\nu - i\mu)}{\nu - i\mu} \right], \tag{B.11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^3 &= \int_0^1 ch \mu z \cos \nu z dz \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{sh(\mu + i\nu)}{\mu + i\nu} + \frac{sh(\mu - i\nu)}{\mu - i\nu} \right], \tag{B.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^4 &= \int_0^1 \cos \nu z \cos \mu z dz \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(\nu + \mu)}{\nu + \mu} + \frac{\sin(\nu - \mu)}{\nu - \mu} \right], \tag{B.13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^5 &= \int_0^1 ch \nu z sh \mu z dz \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{ch(\nu + \mu) - 1}{\mu + \nu} + \frac{ch(\mu - \nu) - 1}{\mu - \nu} \right], \tag{B.14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^6 &= \int_0^1 ch \nu z \sin \mu z dz \\
&= -\frac{i}{2} \left[\frac{ch(\nu + i\mu) - 1}{\nu + i\mu} + \frac{ch(i\mu - \nu) - 1}{i\mu - \nu} \right], \tag{B.15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^7 &= \int_0^1 \cos \nu z sh \mu z dz \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{ch(\mu + i\nu) - 1}{\mu + i\nu} + \frac{ch(\mu - i\nu) - 1}{\mu - i\nu} \right], \tag{B.16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^8 &= \int_0^1 \cos \nu z \sin \mu z dz \\
&= -\frac{1}{2} \left[\frac{\cos(\nu + \mu) - 1}{\mu + \nu} + \frac{\cos(\mu - \nu) - 1}{\mu - \nu} \right], \tag{B.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^9 &= \int_0^1 sh \nu z sh \mu z dz \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{sh(\nu + \mu)}{\nu + \mu} - \frac{sh(\nu - \mu)}{\nu - \mu} \right], \tag{B.18}
\end{aligned}$$

$$\tag{B.19}$$

$$\begin{aligned}
I^{10} &= \int_0^1 sh \nu z \sin \mu z dz \\
&= -\frac{i}{2} \left[\frac{sh(\nu + i\mu)}{\nu + i\mu} - \frac{sh(\nu - i\mu)}{\nu - i\mu} \right], \tag{B.20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I^{11} &= \int_0^1 sh \mu z \sin \nu z dz \\
&= -\frac{i}{2} \left[\frac{sh(i\nu + \mu)}{i\nu + \mu} - \frac{sh(i\nu - \mu)}{i\nu - \mu} \right], \tag{B.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I^{12} &= \int_0^1 \sin \mu z \sin \nu z dz \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(\nu - \mu)}{\nu - \mu} - \frac{\sin(\nu + \mu)}{\nu + \mu} \right]. \tag{B.22}
\end{aligned}$$

On déduit I_4 de I_2 en intervertissant les rôles de μ et ν . Si à présent on rassemble les différentes intégrales que l'on vient de déterminer et qu'on écrive I sous la forme :

$$I = \frac{\nu}{\nu^2 - \mu^2} A + \frac{\mu}{\nu^2 - \mu^2} B + \frac{\nu}{\nu^2 + \mu^2} C + \frac{\mu}{\nu^2 + \mu^2} D, \tag{B.23}$$

on s'aperçoit que $A = B = C = D = 0$.

Annexe C

Coefficients du système dynamique

Les coefficients du système dynamique ont été obtenus analytiquement et vérifiés numériquement par la méthode de Simpson pour le calcul d'intégrales. Les calculs effectués pour l'obtention des coefficients qui suivent ont été réalisés à l'aide de déterminations d'intégrales analogues à celles de l'annexe B.

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{4\nu} [\alpha^2 (sh\ 2\nu - \sin\ 2\nu) + 2\ \alpha\beta (ch\ 2\nu + \cos\ 2\nu - 2) \\ &+ \beta^2 (sh\ 2\nu + \sin\ 2\nu - 4\nu)] \end{aligned} \quad (C.1)$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \nu^3 \left[\alpha^2 \left(\frac{sh\ 2\nu + \sin\ 2\nu}{4} + 1 - \cos\ \nu\ sh\ \nu - \sin\ \nu\ ch\ \nu \right) \right. \\ &+ 2\alpha\beta \left(\frac{ch\ 2\nu - \cos\ 2\nu}{4} - sh\ \nu\ \sin\ \nu \right) \\ &+ \left. \beta^2 \left(\frac{sh\ 2\nu - \sin\ 2\nu}{4} - ch\ \nu\ \sin\ \nu + sh\ \nu\ \cos\ \nu \right) \right] \end{aligned} \quad (C.2)$$

$$\begin{aligned}
A_3 = & -\nu^2 \left[\alpha^3 \left(\frac{ch^3 \nu + \cos^3 \nu - 2}{3} + \frac{ch \nu + \cos \nu - 2}{2} \right. \right. \\
& + \frac{1}{10} (4 \sin 2\nu sh \nu - 3 ch 2\nu \cos \nu - 3 ch \nu \cos 2\nu - 4 \sin \nu sh 2\nu + 6)) \\
& + \alpha \beta^2 \left(ch^3 \nu - \cos^3 \nu + \frac{\cos \nu - ch \nu}{2} \right. \\
& + \frac{1}{10} (5 ch 2\nu \cos \nu - 10 \sin \nu sh 2\nu - 10 \sin 2\nu sh \nu - 5 ch \nu \cos 2\nu)) \\
& + \alpha^2 \beta \left(sh^3 \nu - \sin^3 \nu + \frac{3(sh \nu + \sin \nu)}{2} \right. \\
& - \frac{1}{10} (2 sh 2\nu \cos \nu + 11 \sin \nu ch 2\nu + 11 sh \nu \cos 2\nu + 2 ch \nu \sin 2\nu)) \\
& + \beta^3 \left(\frac{sh^3 \nu + \sin^3 \nu}{3} + \frac{sh \nu - \sin \nu}{2} \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{10} (4 sh 2\nu \cos \nu - 3 \sin \nu ch 2\nu + 3 sh \nu \cos 2\nu - 4 ch \nu \sin 2\nu) \right) \right] \quad (C.3)
\end{aligned}$$

$$A_4 = 4\pi^2 \left[\frac{\alpha(ch \nu - 1) + \beta sh \nu}{\nu^2 + 4\pi^2} + \frac{\alpha(\cos \nu - 1) + \beta \sin \nu}{\nu^2 - 4\pi^2} \right] \quad (C.4)$$

$$A_5 = -16\pi^2 \nu^2 \left[\frac{\alpha(ch \nu + 1) + \beta sh \nu}{(\nu^2 + 9\pi^2)(\nu^2 + \pi^2)} + \frac{\alpha(\cos \nu + 1) + \beta \sin \nu}{(\nu^2 - 9\pi^2)(\nu^2 - \pi^2)} \right] \quad (C.5)$$

$$A_6 = 8\pi^2 \left[\frac{\alpha(ch \nu - 1) + \beta sh \nu}{(\nu^2 + 16\pi^2)} + \frac{\alpha(\cos \nu - 1) + \beta \sin \nu}{(\nu^2 - 16\pi^2)} \right] \quad (C.6)$$

$$\begin{aligned}
A_7 = & -4\pi \omega \left[2\nu^2 \left(\frac{\alpha(ch \nu + 1) + \beta sh \nu}{(\nu^2 + \pi^2)^2} + \frac{\alpha(\cos \nu + 1) + \beta \sin \nu}{(\nu^2 - \pi^2)^2} \right) \right. \\
& \left. - \nu \left(\frac{\alpha sh \nu + \beta ch \nu}{(\nu^2 + \pi^2)} + \frac{-\alpha \sin \nu + \beta \cos \nu}{(\nu^2 - \pi^2)} \right) \right] \quad (C.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_8 = & -8\pi \omega \left[2\nu^2 \left(\frac{\alpha(ch \nu - 1) + \beta sh \nu}{(\nu^2 + 4\pi^2)^2} + \frac{\alpha(\cos \nu - 1) + \beta \sin \nu}{(\nu^2 - 4\pi^2)^2} \right) \right. \\
& \left. - \nu \left(\frac{\alpha sh \nu + \beta ch \nu}{(\nu^2 + 4\pi^2)} + \frac{-\alpha \sin \nu + \beta \cos \nu}{(\nu^2 - 4\pi^2)} \right) \right] \quad (C.8)
\end{aligned}$$

$$A_9 = -4 \frac{\omega^2}{\nu^2} [\alpha(\nu(sh\nu - \sin\nu) - ch\nu - \cos\nu + 2) + \beta(\nu(ch\nu + \cos\nu) - sh\nu - \sin\nu)] . \quad (C.9)$$

$$A_{10} = 3\pi^2 \left[\frac{\alpha(ch\nu - 1) + \beta sh\nu}{(\nu^2 + 4\pi^2)} + \frac{\alpha(\cos\nu - 1) + \beta \sin\nu}{(\nu^2 - 4\pi^2)} \right] \quad (C.10)$$

$$A_{11} = -6\pi^2 \left[\frac{(\nu^2 - \pi^2)(\alpha(ch\nu + 1) + \beta sh\nu)}{(\nu^2 + 9\pi^2)(\nu^2 + \pi^2)} + \frac{(\nu^2 + \pi^2)(\alpha(\cos\nu + 1) + \beta \sin\nu)}{(\nu^2 - 9\pi^2)(\nu^2 - \pi^2)} \right] \quad (C.11)$$

$$A_{12} = \omega\pi \left[-\frac{\alpha(ch\nu + 1) + \beta sh\nu}{(\nu^2 + \pi^2)} - \frac{\alpha(\cos\nu + 1) + \beta \sin\nu}{(\nu^2 - \pi^2)} + \alpha\nu \left(\frac{sh\nu}{(\nu^2 + \pi^2)} - \frac{\sin\nu}{\nu^2 - \pi^2} - \frac{2\nu(ch\nu + 1)}{(\nu^2 + \pi^2)^2} - \frac{2\nu(\cos\nu + 1)}{(\nu^2 - \pi^2)^2} \right) + \beta\nu \left(\frac{ch\nu}{(\nu^2 + \pi^2)} + \frac{\cos\nu}{\nu^2 - \pi^2} - \frac{2\nu sh\nu}{(\nu^2 + \pi^2)^2} - \frac{2\nu \sin\nu}{(\nu^2 - \pi^2)^2} \right) \right] \quad (C.12)$$

$$A_{13} = -6\pi^2 \left[\frac{\alpha(ch\nu + 1) + \beta sh\nu}{(\nu^2 + 9\pi^2)} + \frac{\alpha(\cos\nu + 1) + \beta \sin\nu}{(\nu^2 - 9\pi^2)} \right] \quad (C.13)$$

$$A_{14} = 12\pi^2 \left[\frac{(\alpha(ch\nu - 1) + \beta sh\nu)}{(\nu^2 + 16\pi^2)} + \frac{(\alpha(\cos\nu - 1) + \beta \sin\nu)}{(\nu^2 - 16\pi^2)} \right] \quad (C.14)$$

$$A_{15} = 2\omega\pi \left[\frac{\alpha(ch\nu - 1) + \beta sh\nu}{(\nu^2 + 4\pi^2)} + \frac{\alpha(\cos\nu - 1) + \beta \sin\nu}{(\nu^2 - 4\pi^2)} + \alpha\nu \left(-\frac{sh\nu}{(\nu^2 + 4\pi^2)} + \frac{\sin\nu}{\nu^2 - 4\pi^2} + \frac{2\nu(ch\nu - 1)}{(\nu^2 + 4\pi^2)^2} + \frac{2\nu(\cos\nu - 1)}{(\nu^2 - 4\pi^2)^2} \right) + \beta\nu \left(-\frac{ch\nu}{(\nu^2 + 4\pi^2)} - \frac{\cos\nu}{\nu^2 - 4\pi^2} + \frac{2\nu sh\nu}{(\nu^2 + 4\pi^2)^2} + \frac{2\nu \sin\nu}{(\nu^2 - 4\pi^2)^2} \right) \right] \quad (C.15)$$

Annexe D

Coefficients de l'équation (2.51)

Coefficients de l'équation :

$$c_0 H_1^6 + c_1 H_1^5 + c_2 H_1^4 + c_3 H_1^3 + c_4 H_1^2 + c_5 H_1 + c_6 = 0 . \quad (\text{D.1})$$

$$c_0 = a l_1^2 , \quad (\text{D.2})$$

$$c_1 = p l_1^2 + 2 l_1 l_0 , \quad (\text{D.3})$$

$$c_2 = a(2q r l_1 + l_0^2) + 2p l_1 l_0 + g l_1^2 + l_1(e l_2 + f l_3) + b l_2^2 + c l_2 l_3 + d l_3^2 , \quad (\text{D.4})$$

$$c_3 = 2a q r l_0 + p(2q r l_1 + l_0^2) + 2g l_1 l_0 - l_1(c' r e + c'' q f) + l_0(e l_2 + f l_3) - l_2(2b c' r + c c'' q) - l_3(c c' r + 2d c'' q) , \quad (\text{D.5})$$

$$c_4 = a q^2 r^2 + 2p q r l_0 + g(2q r l_1 + l_0^2) + q r(e l_2 + f l_3) - l_0(c' e r + f c'' q) + b c'^2 r^2 + c c' c'' q r + d c''^2 q^2 , \quad (\text{D.6})$$

$$c_5 = p q^2 r^2 + 2g q r l_0 - q r(c' e r + c'' f q) , \quad (\text{D.7})$$

$$c_6 = g q^2 r^2 \quad (\text{D.8})$$

où

$$l_0 = (qb'' + a'r), \quad (\text{D.9})$$

$$l_1 = (a'b'' - b'a''), \quad (\text{D.10})$$

$$l_2 = (c'b' - c'b''), \quad (\text{D.11})$$

$$l_3 = (a''c - c''a'). \quad (\text{D.12})$$

Annexe E

Equation de Duffing

Systeme dynamique non autonome lie à l'équation de Duffing (d'après [9])

$$\dot{u} = v \quad (\text{E.1})$$

$$\dot{v} = u + u^3 - \delta v - \gamma w + F \cos(\Omega\tau) \quad (\text{E.2})$$

$$\dot{w} = \alpha u - \alpha w \quad (\text{E.3})$$

où:

- u : déplacement normalisé
- v : vitesse normalisée
- w : force de contrôle normalisée
- Ω : fréquence de forçage
- τ : temps
- α : paramètre de contrôle
- δ : coefficient d'amortissement
- γ : paramètre de contrôle de gain .

On reprend ici l'exemple d'une trajectoire et d'un bassin d'attraction obtenus à partir des données suivantes:

$$\begin{aligned} F &= 0.23 \\ \Omega &= 0.5255 \\ \delta &= 0.4 \\ \gamma &= 0 \\ \alpha &= 1 . \end{aligned}$$

La figure (E.2) montre que les conditions initiales qui mènent à des trajectoires chaotiques sont relativement rares et concentrées près de la frontière du bassin des solutions stables.

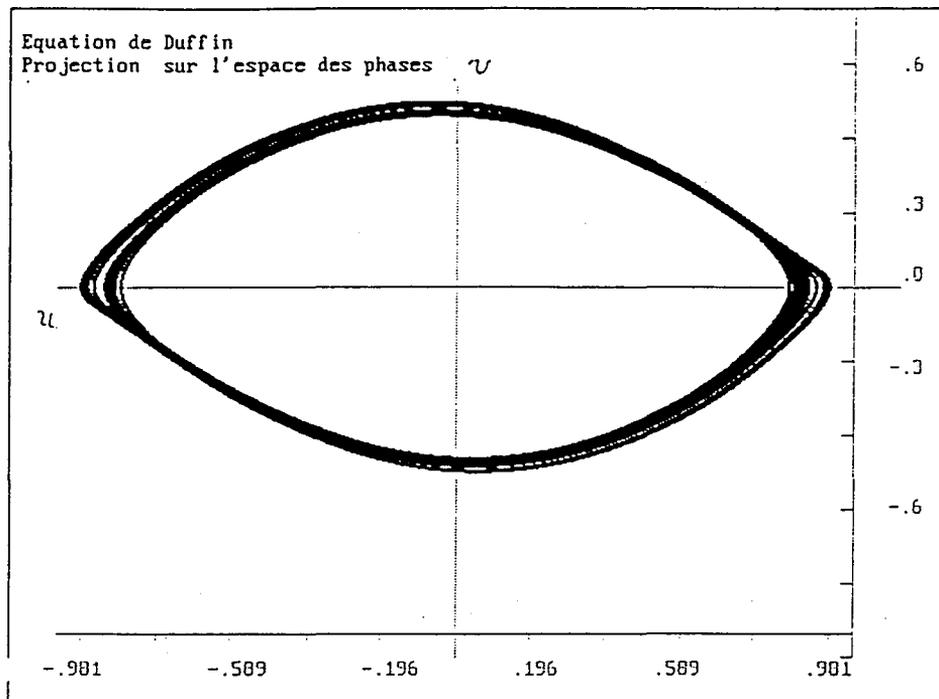


FIG. E.1 - Trajectoire dans l'espace des phases (u, v) . Conditions initiales $(u, v, w) = (-0.3, 0.7, 0)$

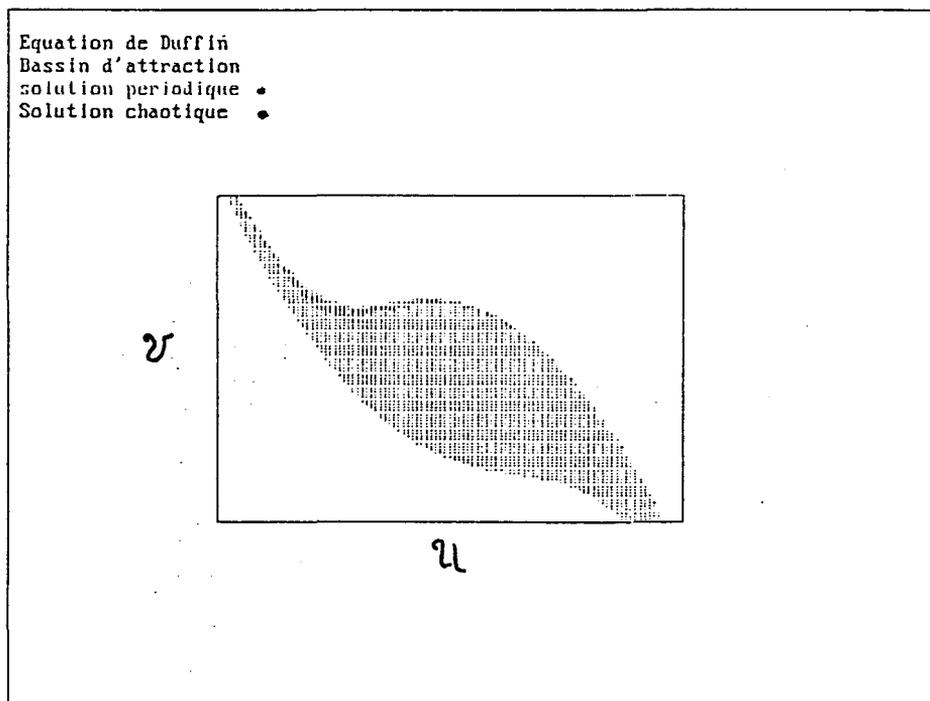


FIG. E.2 - Bassin d'attraction. Conditions initiales $-2 \leq u \leq 2, -2 \leq v \leq 2, w = 0$

On peut trouver dans [9] d'autres exemples et notamment des cas où la frontière du bassin d'attraction présente un aspect nettement fractal.

Annexe F

Contraintes dynamiques sur la surface libre

Vecteur contrainte $\vec{T}(\vec{n})$

Le vecteur contrainte, suivant la normale \vec{n} à une surface, $\vec{T}(\vec{n})$ s'obtient de la manière suivante [18]:

$$\vec{T}(\vec{n}) = \bar{\sigma} \cdot \vec{n} \quad (\text{F.1})$$

où $\bar{\sigma}$ est le tenseur des contraintes, lui-même obtenu à partir du tenseur des déformations \bar{D} par la relation suivante:

$$\bar{\sigma} = -p\bar{I} + 2\mu\bar{D} \quad (\text{F.2})$$

où p est la pression et μ la masse volumique du fluide considéré et \bar{I} étant le tenseur unité. En coordonnées cylindriques, dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, le tenseur des déformations devient:

$$\bar{D} = \begin{pmatrix} D_{rr} & D_{r\theta} & D_{rz} \\ D_{r\theta} & D_{\theta\theta} & D_{\theta z} \\ D_{rz} & D_{\theta z} & D_{zz} \end{pmatrix} \quad (\text{F.3})$$

où:

$$D_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r},$$

$$D_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right),$$

$$D_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right),$$

$$D_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r},$$

$$D_{\theta z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} \right),$$

$$D_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}.$$

On cherche à obtenir $\vec{T}(\vec{n})$ sur la surface libre d'équation $F = z - h(r, t) = 0$. On a donc pour \vec{n} l'expression suivante :

$$\vec{n} = \frac{\vec{\text{grad}} F}{\|\vec{\text{grad}} F\|} \quad (\text{F.4})$$

soit

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial r}\right)^2}} \left(-\frac{\partial h}{\partial r} \vec{e}_r + \vec{e}_z \right). \quad (\text{F.5})$$

De là, on en déduit l'expression de $\vec{T}(\vec{n})$:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial r}\right)^2} \vec{T}(\vec{n}) = \begin{pmatrix} p \frac{\partial h}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial h}{\partial r} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial r} \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \right) \\ -p + \mu \left(2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right) \end{pmatrix} \quad (\text{F.6})$$

Tension de surface

Le fait que les petites gouttes de liquide dans l'air ou les petites gouttes de gaz dans l'eau prennent une forme sphérique semble indiquer que la frontière entre deux milieux en équilibre est le siège d'une forme spéciale d'énergie proportionnelle à la surface de l'interface [3]. Cette énergie peut être interprétée comme une "tension de surface" liée aux forces de cohésion intermoléculaire. Lorsque l'interface sépare le liquide d'un fluide, tous deux stationnaires et en équilibre thermodynamique, la tension, notée γ , est alors supposée

uniforme sur toute l'interface. Dans ce cas la résultante \vec{R} des forces de tension exercée sur une portion de surface est :

$$\vec{R} = -\gamma \oint \vec{n} \wedge d\vec{l} \quad (\text{F.7})$$

soit encore:

$$\vec{R} = -\gamma \iint_S \vec{n} \operatorname{div}(\vec{n}) dS \quad (\text{F.8})$$

où $d\vec{l}$ est un élément de longueur de la courbe fermée bordant la portion de surface et dS l'élément de surface. On montre l'équivalence des deux dernières relations grâce au théorème de Stokes appliqué à $\vec{n} \wedge \vec{c}$ où \vec{c} est un vecteur constant. On a :

$$\begin{aligned} \oint \vec{n} \wedge \vec{c} \cdot d\vec{l} &= \iint_S (\vec{\nabla} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{c})) \cdot \vec{n} dS \\ &= \iint_S [(\vec{c} \cdot \vec{\nabla})\vec{n} - \vec{c}(\vec{\nabla} \cdot \vec{n})] \cdot \vec{n} dS \end{aligned}$$

or

$$[(\vec{c} \cdot \vec{\nabla})\vec{n}] \cdot \vec{n} = \frac{1}{2}(\vec{c} \cdot \vec{\nabla})\vec{n}^2 = 0, \quad (\text{F.9})$$

d'où, comme :

$$\oint \vec{n} \wedge \vec{c} \cdot d\vec{l} = -\vec{c} \cdot \oint \vec{n} \wedge d\vec{l} \quad (\text{F.10})$$

et que \vec{c} est constant et arbitraire, on retrouve que :

$$\oint \vec{n} \wedge d\vec{l} = \iint_S (\vec{\nabla} \cdot \vec{n})\vec{n} dS. \quad (\text{F.11})$$

On peut enfin écrire sous forme locale le résultat (F.8) qu'on vient de démontrer ; on va noter r_n la composante normale et \vec{r}_t composante tangentielle de la résultante locale. Il vient :

$$r_n = -\gamma \nabla \vec{n}, \quad (\text{F.12})$$

$$\vec{r}_t = -\gamma \vec{n} \wedge [(\nabla \vec{n}) \vec{n}] = \vec{0}. \quad (\text{F.13})$$

Bibliographie

- [1] C. Bailly. Modélisation en “ondes longues” de l’écoulement entre deux disques en rotation. *Pub. IRMA, LILLE*, 33, 1993.
- [2] G. K. Batchelor. Note on a class of solutions of the Navier-Stokes equations representing steady rotationally-symmetric flow. *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 4:29–41, 1951.
- [3] G. K. Batchelor. *An introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 1981.
- [4] P. Bergé, Y. Pomeau, and Ch. Vidal. *L’ordre dans le chaos*. Hermann, 1984.
- [5] W. Blumen. *Reviews of Geophysics and Space Physics*, 10:485–528, 1953.
- [6] U. T. Bodewadt. Die Drehströmung ueber festem Grunde. *ZAMM*, 20:241–53, 1940.
- [7] J. F. Brady and L. Durlofsky. On rotating disk flow. *J. Fluid Mech.*, 175:363–394, 1987.
- [8] A. F. Charwat, R. E. Kelly, and C. Gazley. The flow and stability of thin films on a rotating disk. *J. Fluid Mech.*, 53(2):227–255, 1972.
- [9] A. H.-D. Cheng, C. Y. Yang, K. Hackle, and M. J. Chajes. Stability, bifurcation and chaos of non-linear structures with control - 2 non-autonomous case. *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 28:549–565, 1993.
- [10] W. G. Cochran. The flow due to a rotating disc. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 30:365–75, 1934.
- [11] B. S. Dandapat and P. C. Ray. Film of a thin liquid film over a cold/hot rotating disk. *Int. J. Non Linear Mechanics*, 28(5):489–501, 1993.

- [12] D. Dijkstra and G. J. F. Van Heijst. The flow between two finite rotating disks enclosed by a cylinder. *J. Fluid Mech.*, 128:123–54, 1983.
- [13] P.G. Drazin and W.H. Reid. *Hydrodynamic stability*. Cambridge University Press, 1981.
- [14] A. G. Emslie, F. T. Bonner, and L.G. Peck. Flow of a viscous liquid on a rotating disk. *Journal of Applied Physics*, 29(5):858–62, May 1958.
- [15] M. Errafiy. *Transition vers le chaos dans le problème de Bénard profond*. Thèse de Doctorat 1990. Lille I.
- [16] A. J. Faller. An experimental study of the instability of the laminar Ekman boundary layer. *J. Fluid Mech.*, 15:560–576, 1963.
- [17] A. J. Faller and R. E. Kaylor. Investigations of stability and transition in rotating boundary layers. *Dynamics of Fluid and Plasmas* (ed. S. I. Pai) Academic Press, 1966.
- [18] P. Germain and P. Muller. *Introduction à la mécanique des milieux continus*. Masson, 1986.
- [19] S. Godts. *Une modélisation asymptotique des courants océaniques*. Thèse de Doctorat 1985, Université de Lille 1.
- [20] H. P. Greenspan. *The Theory of Rotating Fluids*. Cambridge University Press, 1968.
- [21] G. J. Van Heijst. Fluid flow in a partially-filled rotating cylinder. *J. Eng. M.*, 20:233–250, 1986.
- [22] B. G. Higgins. Film flow on a rotating disk. *Phys. Fluids*, 29(11):3522–29, Nov. 1986.
- [23] M. Holodniok, M. Kubicek, and V. Hlavacek. Computation of the flow between two rotating coaxial disks. *J. Fluid Mech.*, 81:680–99, 1977.
- [24] M. Holodniok, M. Kubicek, and V. Hlavacek. Computation of the flow between two rotating coaxial disks: multiplicity of steady-state solutions. *J. Fluid Mech.*, 108:227–240, 1981.
- [25] S. Jarre. *Etude expérimentale des instabilités sur disque tournant*. Thèse de Doctorat 1993, Université d'Aix-Marseille 2.

- [26] D. D. Joseph. *Fundamentals of two-fluid dynamics. Part 1: Mathematical theory and applications*. Springer-Verlag, 1993.
- [27] T. Von Karman. Ueber laminare und turbulente Reibung. *ZAMM*, 1:233–52, 1921.
- [28] P.G. Manneville. *Structures dissipatives, chaos et turbulence*. Collection Alea Saclay, 1991.
- [29] G. L. Mellor, P. J. Chapple, and V. K. Stokes. On the flow between a rotating and a stationary disk. *J. Fluid Mech.*, 31:95–112, 1968.
- [30] D. J. Needham and J. H. Merkin. The development of nonlinear waves on the surface of a horizontally rotating thin liquid film. *J. Fluid Mech.*, 184:357–379, 1987.
- [31] N. D. Nguyen, J.P. Ribault, and P. Florent. Multiple solutions for flow between coaxial disks. *J. Fluid Mech*, 68:368–88, 1975.
- [32] H. Rasmussen. High Reynolds number for flow between two infinite rotating disks. *J. Aus. Math. Soc.*, 12:483–501, 1971.
- [33] J.P. Ribault. *Contribution à l'étude de l'écoulement radial*. Thèse de Docteur-Ingénieur, Lille I.
- [34] R. Savoie. *Contribution à l'étude numérique pour la multiplicité des solutions de l'écoulement entre disques coaxiaux*. Thèse de Maîtrise ès Sciences Appliquées. Avril 1992, université de Moncton.
- [35] B. K. Shivamoggi. Asymptotic matching principle. *ZAMM*, 58:354–358, 1978.
- [36] A. Sirivat. Stability experiment of flow between a stationary and a rotating disk. *Phys. Fluids A*, 3-11:2664–71, November 1991.
- [37] G. M. Sisoiev and V. Ya. Shkadov. Flow stability of a film of viscous liquid on a rotating disk. *J. Eng. Physics (Translated from Russian)*, 52:671–674, 1987.
- [38] K. Stewartson. On the flow between two rotating coaxial disks. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 49:333–41, 1953.
- [39] A. Z. Szeri, S. J. Schneider, and F. Labbe. Flow between rotating disks. part 1: Basic flow. *J. Fluid Mech.*, 134:103–131, 1983.

- [40] A. Z. Szeri, S. J. Schneider, and F. Labbe. Flow between rotating disks. part 2: Stability. *J. Fluid Mech.*, 134:133–154, 1983.
- [41] P. Vaillant. *Application de la méthode des éléments finis aux écoulements radiaux*. Thèse de Doctorat 3^{ème} cycle, Université de Valenciennes.
- [42] P. J. Zandbergen and D. Dijkstra. Von Karman swirling flows. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 19:465–91, 1987.
- [43] R. K. Zeytounian. *Meteorological Fluid Dynamics*, Chap. 5. Springer-Verlag, 1991.
- [44] R. Kh. Zeytounian. *Mécanique des fluides fondamentale*. Springer-Verlag, 1991.
- [45] R. Kh. Zeytounian. *Modélisation asymptotique en mécanique des fluides newtoniens*. Springer-Verlag, 1994.