

5020 75
8716
115

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

(E.U.D.I.L.)

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR D' UNIVERSITE

Spécialité : **MECANIQUE DES SOLIDES**

PAR

Mohamed Kheir-Eddine BENAOUA

**EXISTENCE DE MINIMUMS POUR LES MATERIAUX DE
SAINT-VENANT KIRCHHOFF ET CONTACT UNILATERAL EN GRANDE
DEFORMATION.**

**EXISTENCE OF MINIMIZERS FOR SAINT-VENANT KIRCHHOFF MATERIALS
AND UNILATERAL CONTACT FOR LARGE DEFORMATION.**

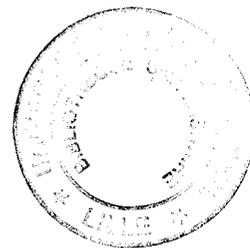
$$\inf \left\{ I(u) = \int_{\Omega} \left\{ \frac{\lambda}{8} (\|\nabla \varphi(x)\|^2 - 3)^2 + \frac{\mu}{4} \|\nabla \varphi(x)^T \nabla \varphi(x) - I\|^2 - f(x) \varphi(x) \right\} dx ; \varphi \in \varphi_0 + W_0^{1,4}(\Omega; \mathbb{R}^3) \right\}$$

Soutenue le 10 Mai 1996 devant la Commission d'Examen composée de :

President : Mr. P. VILLON., U.T.C., Compiègne

Rapporteurs : Mr. A. ULGER., Université de Bogaziçi., Turquie
Mr. J.J. TELEGA., I.P.P.T., Pologne

Examineurs : Mr. D. WEICHERT., I.F.A.M., Allemagne
Mr. B. LANDJERIT., E.U.D.I.L., Lille I
Mr. G. COEURE., Lille I
Mr. M. MBEKHTA., Lille I



à
Zine-El-Abidine

REMERCIEMENTS

J'exprime ma profonde gratitude à mon directeur de recherche monsieur D. WEICHERT, Professeur à Institut für Allgemeine Mechanik (Allemagne) ; c'est à lui que va tout particulièrement ma reconnaissance pour la confiance et l'aide qu'il m'a accordé. Ses qualités humaines et scientifiques ont été un soutien important pour mes travaux.

Je remercie très sincèrement Monsieur P. VILLON, Professeur à l'U.T.C de Compiègne, pour avoir accepté de présider la Commission d'Examen.

Je remercie vivement Monsieur J. J. TELEGA, Professeur à I.P.P.T (Pologne), et Monsieur A. ULGER, Professeur à l'Université de Bogaziçi (Turquie), pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'être les rapporteurs de ma thèse et dont les avis et conseils, ont contribué à son amélioration.

Que Monsieur G. COEURE, Professeur à l'U.F.R de Mathématiques Pures et Appliquées Lille I, Monsieur M. MBEKHTA, Professeur à l'U.F.R de Mathématiques Pures et Appliquées Lille I, Monsieur B. LANDJERIT, Professeur à l' E.U.D.I.L voient l'expression de mes vifs remerciements, pour avoir jugé ce travail et pour leur présence à la soutenance.

Enfin, j'exprime mes sincères remerciements à tous ceux qui de près ou de loin m'ont aidé et encouragé tout au long de ce parcours.

ABSTRACT.

Many problems in non-linear elasticity are modeled by a minimization problem. This thesis is concerned with the existence of minimizers for Saint-Venant Kirchhoff materials, and the unilateral contact problem in large deformation with this material and the polyconvex one. Theoretical results are used to give the conditions under which the minimization problem admits solutions.

When solid bodies interact by contact forces, complex physical phenomena occur on the interface between them.

A novel approach is introduced, it is based on the notion of "contact element", which makes it possible to state some existence results for the variational formulation.

NOTATIONS

Le symbolisme mathématique utilisé est usuel, \forall désigne le quantificateur universel, \exists le quantificateur existentiel, \in le quantificateur d'appartenance, \cup désigne la réunion, \subset l'inclusion, et \cap l'intersection.

\mathbf{N} désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbf{Z}^n := \{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) ; x_i \text{ est un entier relatif} \}$ et $\mathbf{R}^n := \{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) ; x_i \text{ est un nombre réel} \}$. $f(A)$ = image de $A \subset E$ par l'application $f : E \rightarrow F$, $f^{-1}(B)$ = image inverse de $B \subset F$ par l'application $f : E \rightarrow F$.

f/A = la restriction de f à l'ensemble A .

Ω désigne souvent un ouvert non vide, borné de \mathbf{R}^n $n \geq 1$. $\bar{\Omega}$ est la fermeture de Ω , $\text{int}\Omega$ est son intérieur, $\partial\Omega$ son bord, et $\text{meas}(\Omega)$ désigne la mesure de Lebesgue de Ω . On note $\mathbf{M}^{m \times n}$ l'ensemble des matrices réelles d'ordre $m \times n$, et on écrit \mathbf{M}^n au lieu de $\mathbf{M}^{n \times n}$. L'unité dans \mathbf{M}^n est notée I . On utilise les notations $S^n = \{ A \in \mathbf{M}^n ; A^T = A \}$, $M_+^n = \{ A \in \mathbf{M}^n ; \det A > 0 \}$, et $O_+^n = \{ A \in M_+^n ; A^{-1} = A^T \}$; où $\det A$ est le déterminant de A , A^T est la matrice transposée de A , et A^{-1} l'inverse de A . Pour tout $A \in \mathbf{M}^n$, $\text{tr}A$ désigne la trace de A et $\text{cof}A$ désigne la matrice des cofacteurs de A , c'est-à-dire $\text{cof}A = (\det A) \cdot A^{-T}$ (lorsque $\det A \neq 0$).

Le produit scalaire dans \mathbf{R}^n est noté " \cdot ", il est défini par $u \cdot v = uv = \sum_i u_i v_i$, et la norme $|u|$

désigne la norme Euclidienne, le produit scalaire dans \mathbf{M}^n est noté " $:$ ", et il est défini par $A : B = \text{tr}(A^T B)$, et de norme $\|A\| = \sqrt{\text{tr}(A^T A)}$. Pour $x, y \in \mathbf{R}^n$ on note $x \otimes y$ la matrice $(x_i y_j)$, et $x \wedge y$ désigne le produit vectoriel pour $n = 3$.

Si U est un ouvert de \mathbf{R}^n , et $f : U \rightarrow \mathbf{R}^m$, $m \geq 1$ la notation G -dérivable exprime la dérivée au sens de Gâteaux le gradient de f est noté Df i.e $Df = (D_j f_i)_{i=1..m, j=1..n}$ où D_j est la $j^{\text{ième}}$ dérivée partielle et $f_i = f_{e_i}$ avec (e_i) est la base canonique de \mathbf{R}^n quant à la divergence de la fonction

$S : U \rightarrow \mathbf{M}^{m \times n}$ elle est notée $\text{Div}S = \sum_{j=1}^n D_j (S_{ij})_{i=1..m}$ où $S_{ij} = S(e_i \otimes e_j)$.

$\partial_2 W(X, F)$ désigne la dérivée de $W : \Omega \times \mathbf{M}^n \rightarrow \mathbf{R}$ par rapport à la seconde variable, qui s'écrit en termes de composantes : $\frac{\partial W}{\partial F_{ij}}$

La convergence forte (converge en norme) est notée $u_n \rightarrow u$, la convergence faible (convergence de la topologie faible) est notée $u_n \rightharpoonup u$

Mots clés : Déformation, forces conservatives, hyperelasticité, methodes variationnelles, quasiconvexité, enveloppe quasiconvexe, biconjuguée, relaxation, surfaces régulières.

Tables des matières

Page

chapitre I.-Solutions faibles de l'équilibre en élastostatique.

1.0 Introduction	11
1.1 Déformations	
Définition 1.1.1	
Remarque 1.1.2	12
Exemples 1.1.3	13
1.2 L'équilibre en élastostatique	
1.2 a Forces appliquées et tenseur de Cauchy	
1.2.b Equations de l'équilibre	14
1.3 Formulation variationnelle	15
Exemple 1.3.1	
1.3.a Analyse des forces appliquées	16
1.3.b Critère de forces conservatives	17
1.3.c Matériaux élastiques, hyperelastiques	18
Remarques 1.3.2	19
1.3.d Formulation énergétique de l'élastostatique	20
Remarques 1.3.3	21
1.4 Problèmes modèles du calcul des variations	
1.4.a Fonctionnelle du calcul des variations	
Exemples 1.4.1	22
1.5 Densités d'énergies internes	
1.5.a Densité d'énergie convexe	23
Définition 1.5.1	
1.5.b Densité d'énergie polyconvexe	24
Définition 1.5.2	
Exemple 1.5.3	
Remarques 1.5.4	
1.5 c Densité d'énergie quasiconvexe	25
Définition 1.5.5	
Remarques 1.5.6	26
Lemme 1.5.7	
Remarque 1.5.8	
1.6 Relaxation	27
1.6.a Problème régularisé	
1.6.b Existence de solutions au problème primal	28
Corollaire 1.6.1	29

Commentaires.

Chapitre II.-Existence de minimums pour les matériaux de St-Venant Kirchhoff.

2.0	Introduction	32
2.1	Matériaux de St-Venant Kirchhoff	
	Définition 2.1.1	33
	Remarque 2.1.2	
2.2	Propriétés du premier et second potentiel de St-Venant Kirchhoff	
	Lemme 2.2.1	34
	Remarque 2.2.2	
	Proposition 2.2.3	
	Remarque 2.2.4	35
	Corollaire 2.2.5	
	Remarques 2.2.6	
	Proposition 2.2.7	
	Remarques 2.2.8	36
	Proposition 2.2.9	
	Remarque 2.2.10	
2.3	Enveloppe quasiconvexe de l'énergie de St-Venant Kirchhoff	
	Proposition 2.3.1	37
	Remarque 2.3.2	
	Corollaire 2.3.3	
	Remarque 2.3.4	38
2.4	Existence de minimums	
	2.4.a Problème de Dirichlet (déplacement pur)	39
	Lemme 2.4.1	40
	Lemme 2.4.2	41
	Lemme 2.4.3	
	Théorème 2.4.4	42
	Théorème 2.4.5	44
	Remarques 2.4.6	
	2.4.b Problème mixte déplacement-traction	
	Théorème 2.4.7	45
	Théorème 2.4.8	46
	2.4.c Application Existence de minimums pour un cylindre	
	Définition du problème 2.4.10	
	2.4.9 Sens mécanique de la déformation (2.29)	47
	Lemme 2.4.10	49
	Lemme 2.4.11	50
	Théorème 2.4.12 (Existence de solutions)	
	Remarques 2.4.13	
2.5	Comparaison avec la solution obtenue par le Théorème des fonctions implicites	51
	Théorème 2.5.1	
	Théorème 2.5.2	52

Commentaires.

Chapitre III.-Contact unilatéral en grande déformation.

3.0 Introduction	56
3.1 Problème de la détection du contact et sa formulation	
Exemple 3.1.1	57
Remarque 3.1.2	
Exemple 3.1.3	58
3.2 Géométrie des surfaces déformées de contact	59
3.2.a Description géométrique	
Exemple 3.2.1	60
3.2.b Position relative des surfaces déformables	61
Proposition 3.2.2	64
Remarque 3.2.3	65
3.3 Contact statique	
3.3.a Force de contact	66
3.3.b Extension du principe de l'action et de la réaction	67
Remarque 3.3.1	68
3.3.c Loi de contact unilatéral	
Remarque 3.3.2	69
Remarque 3.3.3	70
3.4 Approche de la notion d'élément de contact	
3.4.1 Définition	71
Lemme 3.4.2	
Proposition 3.4.3	
3.5 Contact entre un matériau polyconvexe et un matériau de St-Venant Kirchhoff	72
3.5 a Définition du problème	
3.5.b Le principe du minimum de l'énergie potentielle totale	73
Lemme 3.5.1	
Théorème 3.5.2	74
Commentaire	

Introduction

Les premiers résultats d'existence de minimums en hyperélasticité, pour les potentiels d'énergies \tilde{W} non convexes sont dus à J.M. Ball [8]. En introduisant la "polyconvexité" Ball a résolu le problème de l'équilibre tridimensionnel, correspondant à minimiser l'énergie totale :

$$I(\varphi) = \int_{\Omega} W(x, \nabla \varphi(x)) - L(\varphi)$$

dans l'ensemble des déformations admissibles Φ . Ω désigne un ouvert de \mathbb{R}^3 dont la configuration $\overline{\Omega}$ est occupée par un solide en l'absence d'action, L est une forme linéaire qui représente le potentiel des forces appliquées, et φ la déformation du corps.

En absence d'hypothèse supplémentaire sur l'énergie \tilde{W} ; notamment de "quasiconvexité" le problème de minimisation :

$$(P) \quad \inf \{ I(\varphi) ; \varphi \in \Phi \}$$

n'a pas en général de solution.

Dans le cadre non linéaire, et en grande déformation les matériaux de Saint-Venant Kirchhoff sont un exemple simple où l'absence de "quasiconvexité" de l'énergie interne \hat{W} est vérifiée (cf. [52]).

Ce travail est composé de trois chapitres. Dans le chapitre 1, on rappelle les fondements de l'élasticité non-linéaire, et les "méthodes directes" du calcul des variations, pour résoudre le problème (P).

Dans le chapitre 2, on s'intéresse à la loi de comportement du matériau de Saint-Venant Kirchhoff; exprimée respectivement en fonction du tenseur de Green-Lagrange E ($\tilde{W}(E)$), du tenseur de Green-Cauchy C ($\tilde{W}(C)$), et en fonction du gradient de déformation F ($\hat{W}(F)$). On montre, que les densités d'énergie \tilde{W} et \tilde{W} considérées comme fonctions de leur argument respectif E et C sont des applications quasiconvexes, ce qui n'est pas le cas de la densité \hat{W} fonction du gradient de déformation F . Une démonstration plus simple de ce résultat est annoncé.

Bien que $\tilde{W}(E) = \tilde{W}(C) = \hat{W}(F)$, on ne considère que la troisième densité \hat{W} pour étudier le problème

$$(\hat{P}) \quad \inf \left\{ I(\varphi) = \int_{\Omega} (\hat{W}(\nabla \varphi(x)) - f(x) \varphi(x)) dx; \varphi \in \varphi_0 + W_0^{1,4}(\Omega; \mathbb{R}^3) \right\}$$

Le problème (\hat{P}) , qui traduit l'existence de minimums au problème de pur déplacement (problème de Dirichlet) n'a pas été résolu jusqu'à présent compte tenu que la densité \hat{W} ne vérifie aucune hypothèse de convexité ou ses variantes : "polyconvexité", "quasiconvexité".

On peut associer au problème (\hat{P}) le problème "convexifié":

$$(\hat{P}^{**}) \quad \inf \left\{ I^{**}(\varphi) = \int_{\Omega} (\hat{W}^{**}(\nabla \varphi(x)) - f(x) \varphi(x)) dx; \varphi \in \Phi \right\}$$

où \hat{W}^{**} désigne la fonction bipolaire de l'énergie \hat{W} . Nous obtenons un problème "régulier" (\hat{P}^{**}). L'intérêt de relaxer le problème (\hat{P}) est de savoir sous quelles conditions une solution de (\hat{P}^{**}) est aussi une solution de (\hat{P}).

Partant d'un certain nombre de résultats connus, on établit l'existence de solutions au problème de Dirichlet homogène (\hat{P}).

On étend ensuite, les résultats au problème mixte déplacement-traction. Un exemple particulier du cylindre est cité.

Une comparaison avec la solution obtenue, par le théorème des fonctions implicites dans le cas de petites forces est donnée.

Dans le chapitre 3, on s'intéresse au problème du contact unilatéral en grande déformation, et à sa description Lagrangienne.

Ce problème est loin d'être définitivement résolu, le résultat récent [21a] basé sur la notion de fonction distance de contact, et sa méthode de la projection utilise une régularité forte sur les éléments de déformations.

La nécessité d'une formulation faible, nous a motivé à introduire la notion d'élément de contact. Cette approche, de nature géométrique donne une solution à la formulation faible du problème du contact unilatéral.

Solutions faibles de l'équilibre en élastostatique

Chapitre I

Solutions faibles de l'équilibre en élastostatique.

1.0 Introduction.

Le milieu continu déformable modélise la vision d'un "solide" qui se déforme, d'un liquide qui coule, d'un volume de gaz que l'on comprime ou qui se détend.

Cette modélisation de la réalité physique, induite par l'expérience, signifie que l'on peut traiter certains problèmes à l'échelle macroscopique.

E_3 désigne l'espace physique usuel, l'espace affine Euclidien de dimension 3, la présentation choisie, concerne le milieu continu dont la configuration du système solide au repos est un ouvert borné de E_3 .

Rappelons qu'ici "solide" est pris dans son sens usuel qui autorise les déformations, et non dans le sens strict qu'il est en mécanique générale, où il désigne un système rigide indéformable.

L'objet principal de ce chapitre est de rappeler les trois manières équivalentes de formuler l'équilibre d'un solide, à savoir :

- l'équation différentielle "forte" du mouvement,
- le principe intégral "faible" des travaux virtuels,
- une troisième façon de formuler l'équilibre stable d'un solide élastique consiste à écrire que son énergie doit être minimale.

C'est ce dernier point qui nous intéressera plus particulièrement.

1.1 Déformation.

L'espace Euclidien R^3 est rapporté à un repère orthonormé $(O; e_1, e_2, e_3)$.

Soit Ω un ouvert borné connexe de R^3 à bord $\partial\Omega = \Gamma$ "régulier" (voir (1) remarque 1.1.2), appelé domaine de R^3 . $\bar{\Omega}$ est l'ensemble qu'occupe un solide en absence d'action.

Définitions 1.1.1

On appelle déformation du solide $\bar{\Omega}$, tout champ de vecteurs,

$$\varphi: \bar{\Omega} \rightarrow R^3 \quad (1.1)$$

"régulier", injectif et préservant l'orientation :

$$\det \nabla \varphi(X) > 0 \quad \forall X \in \Omega \quad (1.2)$$

où $\nabla \varphi = (\partial_i \varphi_j) = F$ désigne le gradient de la déformation φ .

Le terme déformation implique l'existence d'une configuration de référence appelée configuration initiale ou Lagrangienne (la configuration Lagrangienne n'exclue pas que le solide est non déformé), la configuration déformée est appelée configuration actuelle ou Eulérienne.

Le point spatial $x = \varphi(X)$ est la position qu'occupe le point matériel X après déformation.

Ces définitions sont illustrées dans la figure 1.1 et permettent une description du changement d'un "élément" de longueur, d'un "élément" de surface ou d'un "élément" de volume au cours de la déformation.

Ainsi un "élément" de vecteur dX d'origine X , est transformé en "l'élément" dx de longueur:

$$dx = dX^T[(F(X)^T F(X))]dX \quad (1.3)$$

De même, un "élément" de surface dA de la configuration de référence de vecteur normal N , est déformé en "l'élément" de surface:

$$da = \det F(X) |F(X)^{-T} N(X)| dA \quad (1.4)$$

de vecteur normal

$$n(x) = \frac{F(X)^{-T} N(X)}{|F(X)^{-T} N(X)|} \quad (1.5)$$

Enfin, un "élément" de volume dX est transformé en "l'élément" de volume:

$$dx = \det F(X) dX \quad (1.6)$$

Remarques 1.1.2

(1) Confondre un solide au repos, à la fermeture $\bar{\Omega}$ d'un domaine Ω de \mathbb{R}^3 est un "moyen" de simplifier les difficultés. En fait, le solide au repos peut être considéré comme une variété.

(2) La régularité du bord $\Gamma = \partial\Omega$ varie selon le besoin du problème posé ; la frontière peut être Lipschitzienne ou de Classe C^m $m \geq 0$ (cf, Adams [1], Annexe A3). Le choix d'une régularité est d'un intérêt mathématique important pour les résultats.

(3) L'existence du gradient de la déformation implique que l'application φ est différentiable en tout point de la configuration de référence, cette différentiabilité est entendue parfois au sens faible, celui des distributions (cf, Schwartz [58]). Il s'en suit que la condition (1.2) doit être vérifiée sauf sur un ensemble de mesure nulle; (1.2) devient alors, $\det \nabla \varphi > 0$ p.p. "p.p" lire presque partout.

(3) L'injectivité est imposée pour caractériser l'impénétrabilité de la matière lors de la déformation, elle signifie que deux points de la configuration Lagrangienne n'occupent pas la même position après déformation. L'injectivité implique aussi lorsque, la déformation φ est régulière que l'inverse $\varphi^{-1}: \varphi(\Omega) \rightarrow \Omega$ existe. Le théorème d'inversion locale (cf. Ciarlet [16]) assure, la régularité de φ^{-1} .

Trois propriétés sont à retenir dans ce cas :

- $\varphi(\bar{\Omega}) = \overline{\varphi(\Omega)}$
- $\varphi(\text{int}\Omega) = \text{int}\varphi(\Omega)$

- $\varphi(\partial\Omega) = \partial(\varphi(\Omega))$

(4) Il est parfois commode d'introduire le déplacement de la particule matérielle X . C'est le champ de vecteurs u défini par : $u(X) = \varphi(X) - X$.

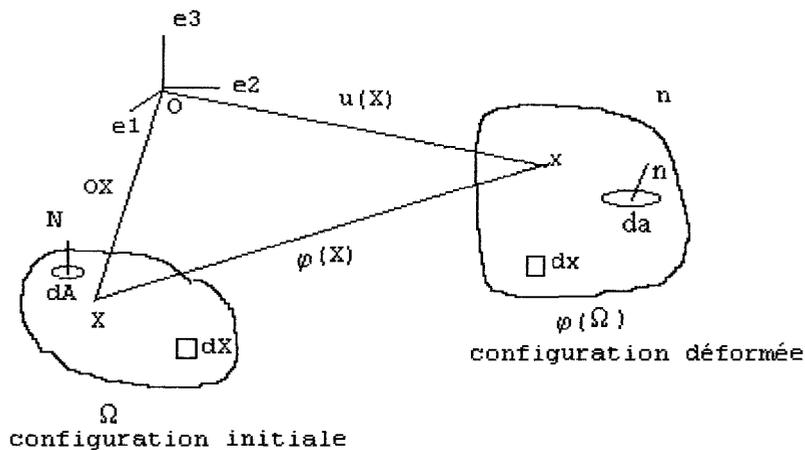


Fig 1.1 Illustration des définitions de § 1.1

Exemples 1.1.3 - On peut citer deux exemples de déformations remarquables :

- La déformation homogène est une déformation dont le gradient est constant, i.e: $\varphi(X) = KX + c$ $K \in M^3, c \in R^3$.
- La déformation rigide est une déformation homogène dont le gradient est un élément de O_3^+ .

1.2 L'équilibre en élastostatique.

Le problème central en élasticité non linéaire tridimensionnelle, est de trouver la position de l'équilibre statique d'un solide, occupant une configuration actuelle $\overline{\varphi(\Omega)}$, caractérisée par la déformation φ .

1.2.a Forces appliquées et Tenseur de Cauchy.

Nous supposons que dans la configuration déformée, le solide est assujéti à deux types de forces :

- des forces volumiques de densité $\bar{f}: \varphi(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^3$

- des forces surfaciques de densité $\bar{g}: \varphi(\Gamma_1) \rightarrow \mathbb{R}^3$,
où Γ_1 est une partie du bord $\partial\Omega$ de Ω .

La mécanique des milieux continus, pour les problèmes statiques est basée sur le postulat d'Euler-Cauchy (cf, Ciarlet [16], Gurtin [31]). Ce principe montre l'existence d'un champ de vecteurs :

$$t: \varphi(\bar{\Omega}) \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (1.7a)$$

où S^2 désigne la sphère unité; vérifiant pour toute partie ω de $\varphi(\Omega)$:

1) pour tout $x \in \varphi(\Gamma_1) \cap \partial\omega$ $t(x, n) = \bar{g}(x)$, où le vecteur normal n à $\varphi(\Gamma_1) \cap \partial\Omega$ existe.

$$2) \text{ l'axiome du bilan des forces : } \int_{\omega} \bar{f}(x) dx + \int_{\partial\omega} t(x, n) da = 0 \quad (1.7b)$$

$$3) \text{ l'axiome du bilan des moments : } \int_{\omega} o\bar{x} \wedge \bar{f}(x) dx + \int_{\partial\omega} o\bar{x} \wedge t(x, n) da = 0 \quad (1.7c)$$

Sous l'hypothèse d'une "régularité" sur le champ de vecteur t (supposé de classe C^1 en x et continu en n), les axiomes 2) et 3) montrent l'existence d'un champ de tenseur symétrique:

$$T: \varphi(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathbb{S}^3 \quad (1.7d)$$

appelé tenseur des contraintes de Cauchy, et qui vérifie :

$$t(x, n) = T(x)n(x) \quad \forall x \in \varphi(\bar{\Omega}), n \in S^2 \quad (1.7e)$$

1.2.b Equations de l'équilibre.

L'axiome du bilan des forces et du bilan des moments, montre que le tenseur de Cauchy T vérifie dans la configuration déformée (cf, Ciarlet [16]) les équations :

$$\begin{cases} \text{Div} T(x) + \bar{f}(x) = 0 & \text{dans } \varphi(\Omega) & (1.8) \\ T(x)n(x) = \bar{g}(x) & \text{sur } \varphi(\Gamma_1) & (1.9) \end{cases}$$

En mécanique des solides déformables, on préfère souvent faire intervenir le domaine non déformé ou de référence car, en général on connaît sa géométrie. Pour cette raison, il est donc commode de réécrire le système d'équations (1.8)-(1.9) dans la configuration de référence, attachée à la variable Lagrangienne X . Cela est possible, en associant aux densités des forces appliquées \bar{f} , \bar{g} définies dans la configuration déformée, les densités des forces appliquées : $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, et $g: \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définies dans la configuration initiale et vérifiant :

$$f(X) dX = \bar{f}(x) dx, \quad g(X) dA = \bar{g}(x) da.$$

Au tenseur des contraintes de Cauchy T défini dans la configuration déformée est associé, le premier tenseur P et le second tenseur S de Piola-Kirchhoff, définis dans la configuration de référence par :

$$P(X) = T(x) \operatorname{cof} F(X), \quad S(X) = F(X)^{-1} P(X)$$

Ces deux tenseurs vérifient respectivement les équations :

$$\begin{cases} \operatorname{Div} P(X) + f(X) = 0 & \text{dans } \Omega \\ FP^T = P^T F \\ P(X)N(X) = g(X) & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases} \quad (1.10)$$

et

$$\begin{cases} \operatorname{Div}\{F(X)S(X)\} + f(X) = 0 & \text{dans } \Omega \\ S^T = S \\ \{F(X)S(X)\}N(X) = g(X) & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases} \quad (1.12)$$

Ce sont les équations de l'équilibre dans la configuration de référence.

1.3 Formulation Variationnelle.

Exemple 1.3.1 Soit Ω un domaine de \mathbb{R}^3 de frontière $\partial\Omega$. Si φ est une fonction définie sur $\partial\Omega$, la résolution de l'équation de Laplace qui intervient en électro-statique:

$$(a) \quad \begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où Δ désigne le Laplacien : en dimension deux $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$; revient à chercher une fonction

$u \in K_0$ telle que

$$(b) \quad J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in K_0$$

où K_0 est l'ensemble $\{v \in C^2(\bar{\Omega}); v = \varphi \text{ sur } \partial\Omega\}$ et $J(v) = \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx$

En effet, la fonctionnelle J est Fréchet-différentiable (cf, Bourbaki [13a]), convexe, et l'ensemble K_0 est aussi convexe. Alors, un résultat classique d'analyse (cf, Temam [29]) montre que (a) et (b) sont équivalents. Ce point de vue, a l'avantage de se généraliser à de nombreux problèmes dans un cadre abstrait; et un grand nombre d'équations aux dérivées partielles décrivant des modèles de la physique, de la chimie ou de la mécanique peuvent être étudiées avec ce point de vue.

Les équations mécaniques (1.10)-(1.13) sont formelles, et le degré de régularité des fonctions (déformation, tenseur de contrainte, forces appliquées) n'est pas spécifié.

Pour que le problème soit bien posé nous supposons que :

- les dérivées considérées sont parfois des dérivées distributionnelles.
- la structure topologique choisie est telle que toute variable physique ait un sens mathématique, et que toute solution physique est une solution mathématique du problème.

Ainsi, sous l'hypothèse que les forces appliquées dérivent d'un potentiel, les équations (1.10)-(1.11) (resp (1.12)-(1.13)) peuvent être transformées en un principe variationnel.

1.3.a Analyse des forces appliquées.

Pendant le mouvement, l'interaction mécanique entre le corps (occupant l'ensemble $\overline{\Omega}$) et son environnement (extérieur de Ω) est décrite à l'aide de forces. Nous sommes concernés par trois types de forces :

- 1) force de contact entre les parties séparées du corps.
- 2) force de contact exercée sur le bord du corps par son environnement.
- 3) force massique exercée à l'intérieur du corps par l'environnement.

Les forces de type 2) sont appelées forces extérieures, et le chargement dépendant de la configuration, et agissant sur le bord matériel est défini, à priori, par l'hypothèse que l'effort appliqué en un point, est calculé au moyen d'une relation, fonction du déplacement de ce point et de son voisinage.

Dans de nombreux problèmes, les conditions aux limites modélisant l'interaction peuvent être formulées par :

$$B(X, g, u, \partial_n u, \partial_T u, \dots) = 0 \quad (1.14)$$

où B est une fonction vectorielle, g désigne la force de contact, $\partial_n u$ et $\partial_T u$ sont les dérivées respectives normale et tangentielle du déplacement u .

Les exemples familiers de conditions aux limites sont : $B = g - c$ condition de traction,

$B = u - u_0$ condition de placement.

Dans le cas d'une force de contact, le déplacement et sa dérivée tangentielle n'ont pas de discontinuité à la surface de contact; cependant, la continuité du vecteur de contrainte implique une restriction sur la condition de discontinuité de la dérivée normale du déplacement. Une hypothèse adéquate sur le choix d'une fonction force de contact nécessite une condition d'ellipticité et de normalité sur le tenseur d'élasticité. Pour plus de précision voir (cf, P.Podio-Guidi and G.Vergara Caffarelli and E.G.Virga [50], [51]).

1.3.b Critères de forces conservatives.

Supposons qu'un "élément" de surface da dans sa configuration actuelle est soumis au chargement $\bar{g} da$ où \bar{g} est la densité de force de contact (par exemple $\bar{g} = \bar{g}(X, u)$ u est le déplacement).

Un critère donné par M.J.Sewell [59] dit que :

L'effort agissant sur la surface en un point est défini comme une force conservative si elle effectue un travail nul pour tout cycle de déplacement faisant ramener le point à sa position actuelle.

ce qui se traduit par :

$$\oint \bar{g} \delta u = 0 \quad (1.15a)$$

(\oint désigne l'intégrale curviligne) cette condition est équivalente (voir [51], [59]) à l'existence d'un potentiel $\bar{G} = \bar{G}(X, u)$ tel que

$$\bar{g} = \frac{\partial \bar{G}}{\partial u} \quad (1.15b)$$

Une force hydrostatique, peut être conservative lorsqu'un déplacement est prescrit ou bien lorsque cet effort hydrostatique est appliqué entièrement sur la surface du bord (cf, [50]).

La qualité des forces appliquées d'être des opérateurs potentiels, est importante pour la formulation variationnelle. Pour un problème statique, nous considérons un cas particulier de système de forces appliquées **conservatives**.

1) une densité de **force volumique**

$$f : \Omega \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (1.16)$$

vérifiant :

il existe une fonction $\hat{F} : \Omega \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ régulière telle que $F(\varphi) = \int_{\Omega} \hat{F}(x, \varphi(x)) dx$ soit G-dérivable et

$$F'(\varphi)\theta = \int_{\Omega} f(x, \varphi(x)) \vartheta(x) dx \quad (1.17)$$

pour toute fonction $\theta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ de variation. La fonction \hat{F} est appelée le potentiel des forces massiques, elle vérifie :

$$f(X, \varphi(X)) = D_2 \hat{F}(X, \varphi(X)) \quad \forall X \in \Omega$$

où D_2 désigne la dérivée de Gâteaux de $F(X, \cdot)$.

2) une densité de **force surfacique**

$$g : \Gamma_1 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (1.18)$$

vérifiant :

i) $g(x, \varphi(x)) = \hat{g}(x, \varphi(x), \nabla \varphi(x))$

ii) il existe une fonctionnelle G-différentiable telle que :

$$G'(\varphi)\theta = \int_{\Gamma_1} g(X, \varphi(X)) \theta(X) dA \quad (1.19)$$

iii) $\langle g'(\varphi)\vartheta, \xi \rangle = \langle g'(\varphi)\xi, \vartheta \rangle \quad (1.20)$

pour toute fonction régulière θ et ξ (la forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le travail).

La symétrie (1.20) est importante, elle exprime que le travail est indépendant du chemin suivi (voir Bufler.H [15]).

Dans de nombreux problèmes, les forces appliquées sont supposées "mortes" c'est-à-dire indépendantes de la déformation et de son gradient. Ce sont des forces conservatives simples.

1.3.c Matériaux élastiques, hyperélastiques.

La catégorie des matériaux pour lesquels, les équations (1.10)-(1.11) peuvent avoir une forme simple, suppose que le tenseur des contraintes de Cauchy T est complètement déterminé par le gradient de la déformation.

Selon la terminologie utilisée dans Ciarlet [16], pour une description Lagrangienne;

- On dira qu'un matériel est **élastique**, s'il existe une fonction

$$T: \Omega \times M_+^3 \rightarrow S^3$$

telle que :

$$T(x) = T(X, \nabla \varphi(X)) \quad \forall X \in \Omega, x = \varphi(X) \quad (1.21)$$

l'égalité (1.21) est l'équation constitutive du matériel considéré.

Une définition équivalente, pour le premier tenseur P et le second S de Piola-Kirchhoff (voir [16]) montre, l'existence de deux applications P et S telles que :

$$P(X) = P(X, \nabla \varphi(X)) \text{ et } S(X) = S(X, \nabla \varphi(X)) \quad (1.22)$$

P et S sont appelées les fonctions de réponses du matériau.

• On dira qu'un matériel élastique, de fonction de réponse P est **hyperélastique** s'il existe une fonction scalaire :

$$W: \Omega \times \mathbf{M}_+^3 \rightarrow \mathbf{R}$$

G-différentiable par rapport à la seconde variable telle que :

$$P(X,F) = D_2 W(X,F) \quad \forall X \in \Omega, \quad \forall F \in \mathbf{M}_+^3 \quad (1.23)$$

Remarques 1.3.2

(1) On demande parfois, à la fonction énergie interne W d'être de Carathéodory i.e. mesurable par rapport à X et continue par rapport à F; c'est la "régularité" utilisée dans [8] pour montrer l'existence de minimums, cela permet aussi de considérer les matériaux non homogènes par exemples compressibles.

(2) La fonction W pour un corps homogène (W indépendante explicitement de X) signifie que l'énergie élastique pour une déformation φ est $\int_{\Omega} W(\nabla \varphi(X)) dX$.

(3) En accord avec certains principes physiques, la densité d'énergie interne W doit vérifier (cf, [16], [31], [66]) :

i) le principe d'objectivité ou d'indifférence matérielle :

$$W(X, QF) = W(X, F) \quad \forall X \in \Omega, F \in \mathbf{M}_3^+, Q \in \mathbf{O}_3^+ \quad (1)$$

Cela signifie qu'une rotation après déformation n'affecte pas l'énergie interne autrement dit, si la configuration déformée est retournée par Q, le vecteur contrainte de Cauchy est retourné par Q.

ii) la propriété d'isotropie :

$$W(X, FQ) = W(X, F) \quad \forall X \in \Omega, F \in \mathbf{M}_3^+, Q \in \mathbf{O}_3^+ \quad (2)$$

Cela correspond à l'idée intuitive que la "réponse" du matériau en tout point est la même dans toute direction, ou que le tenseur de contrainte de Cauchy est le même si le corps déformé est retourné autour d'un point. Lorsque, la relation (2) est vérifiée seulement pour un sous-groupe G_x de \mathbf{O}_3 on dit, que le matériau est anisotrope en x.

L'hypothèse d'isotropie élastique est très bien vérifiée pour les matériaux métalliques, elle l'est un peu moins pour le béton et les composites (cf, Truesdell [66]).

(4) On impose notamment à W des propriétés de croissance, de coercivité et l'hypothèse intuitive: " $W(X,F) \rightarrow +\infty$ lorsque $\det F \rightarrow 0^+$ " $\forall X \in \Omega$.

• Cette dernière hypothèse n'est pas vérifiée pour les matériaux de Saint-Venant Kirchhoff (un détail sera donné plus loin).

1.3.d Formulation énergétique de l'élastostatique.

Dans le cas d'un corps de potentiel élastique W soumis à des forces conservatives de densité volumique f et de densité surfacique g les équations de l'équilibre (1.10)-(1.11) sont formellement équivalentes au problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \varphi \in \Phi \text{ telle que } \forall \vartheta \in H \\ \int_{\Omega} \frac{\partial W}{\partial F}(X, \nabla \varphi(X)) : \nabla \vartheta(X) dX = \int_{\Omega} f(X, \varphi(X)) \vartheta(X) dX + \int_{\Gamma_1} g(X, \nabla \varphi(X)) \vartheta(X) da \end{array} \right. \quad (1.24)$$

où Φ est l'ensemble des déformations cinématiquement admissibles et H l'ensemble des fonctions tests (déplacement virtuel) définis par :

$$\Phi = \{ \varphi \in E \text{ telle que } \varphi = \varphi_0 \text{ sur } \Gamma_0 \text{ et } \det \nabla \varphi > 0 \text{ dans } \Omega \} \quad (1.25)$$

$$H = \{ \psi \in E \text{ telle que } \psi = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \} \quad (1.26)$$

E est un espace de Banach convenablement choisi, Γ_0 et Γ_1 une partition du bord de Ω ($\Gamma = \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_1, \Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$) avec $\text{meas}(\Gamma_0) > 0$. En effet, soit $\varphi \in \Phi$ une solution de (1.10)-(1.11), $\theta \in H$; en multipliant les deux membres de (1.10) par θ et en utilisant la formule intégrale de green (voir Annexe A4) on déduit (1.24).

On appelle potentiel énergétique total, d'un solide hyperélastique mis en déformation la fonctionnelle :

$$J(\varphi) = \int_{\Omega} W(X, \nabla \varphi(X)) dX - \{F(\varphi) + G(\varphi)\} \quad (1.27)$$

La stabilité de l'équilibre du corps hyperélastique, soumis à des charges conservatives ou mortes correspond formellement à minimiser l'énergie totale (1.27) dans l'ensemble des déformations cinématiquement admissibles (cf. Ball [8], Ciarlet [16]).

Minimiser $J(\varphi)$ dans l'ensemble des déformations admissibles Φ	(1.28)
--	--------

C'est la formulation énergétique faible du problème de l'équilibre en élastostatique.

Remarques 1.3.3

(1) L'équation variationnelle (1.24) désigne le principe des travaux virtuels, dans le langage du calcul des variations c'est l'équation d'Euler-Lagrange.

(2) Les solutions de l'équation (1.24) sont appelées points stationnaires, l'intérêt de la formulation variationnelle (1.28) est de chercher des points stationnaires particuliers appelés "minimums".

De nombreux problèmes de mathématiques appliquées provenant de la physique (principe de Fermat, Brachistochrone, problème de Newton,..) entrent dans le cadre du calcul des variations. Le problème (1.28) s'en est un.(cf, Dacorogna [26]; Courant [19]).

1.4 Problèmes modèles du Calcul des Variations.

Le Calcul des Variations est une des branches classiques et anciennes des Mathématiques, c'est au tournant du XIX^e siècle, qu'il entra dans son ère moderne grâce à l'introduction de ce qu'on appelle les "méthodes directes" de résolutions.

1.4.a Fonctionnelles du calcul des variations.

Nous allons donner avec précision, le problème considéré. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et

$$I(u) = \int_{\Omega} f(X, u(X), Du(X)) dX \quad (1.29)$$

où

- $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ une fonction $n, N \geq 1$ $Du = (\partial_j u_j)$ est une matrice réelle $n \times N$
- $f : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory.

On identifie l'ensemble des matrices réelles M^{nN} à \mathbb{R}^{nN} . Le problème modèle est alors, de minimiser la fonctionnelle I sous certaines conditions. Plus précisément, étant donné un espace fonctionnel E et Φ un sous-ensemble de fonctions admissibles, il s'agit de trouver $u \in \Phi$ qui rende l'intégrale (1.29) minimale. On notera le problème :

$$(P) \quad m = \inf\{I(u); u \in \Phi\} \quad (1.30)$$

On dira que $u \in \Phi$ est une solution (ou réalise le minimum de (P)) si:

$$I(u) \leq I(v) \quad \forall v \in \Phi. \quad (1.31)$$

(il s'agit bien d'un minimum absolu).

L'histoire du problème (P), nous ramène dans le cas scalaire $n = N = 1$, aux exemples classiques suivants (cf. Dacorogna [26]) :

Exemples 1.4.1.

• **Principe de Fermat.** Il s'agit de déterminer la trajectoire, d'un rayon de lumière traversant un milieu d'indice de réfraction non constant. En terme mathématique on a :

$$\inf \left\{ \int_a^b \frac{g(t, u)}{\sqrt{1+u'^2}} dt ; u(a) = \alpha, u(b) = \beta, u \in C^1(a, b) \right\}$$

• **Problème de Newton.** On cherche à déterminer, une surface de révolution offrant une résistance minimale lors de son déplacement dans un fluide. Cela revient à considérer :

$$\inf \left\{ \int_a^b \frac{2\pi u u'^3}{1+u'^2} dt ; u(a) = \alpha, u(b) = \beta, u \in C^1(a, b) \right\}$$

• **Brachistochrone.** On cherche la trajectoire que suit une particule, soumise à l'influence de la gravitation, pour relier deux points, dans un même plan et en un minimum de temps. On a alors :

$$\inf \left\{ \int_a^b \frac{\sqrt{(1+u'^2)}}{g\sqrt{u}} dt ; u(a) = \alpha, u(b) = \beta, u \in C^1(a, b) \right\}$$

Si nous tournons notre attention, à l'intégrale multiple $n > 1$, nous retrouvons l'intégrale de Dirichlet avec $f(X, u, \nabla u) = |\nabla u|^2$, une extension de cette intégrale aboutit au problème des surfaces minimales.

La "méthode directe" de résolution du problème (P) (cf. [8], [26]) consiste à :

- 1) choisir une suite minimisante (u_n) ($u_n \in \Phi$ et $I(u_n)$ converge vers $\inf I(\varphi) \varphi \in \Phi$).
- 2) s'assurer d'une compacité de cette suite dans E.
- 3) montrer que I est faiblement semi-continue inférieurement (on écrira en abrégé f.s.c.i voir Annexe A2).

Cette méthode a été utilisée par Riemann et succéda par la suite, une objection de la part de Weierstrass (pour l'exemple 1.3.1 de l'équation de Laplace, il n'est pas évident qu'une suite minimisante $u_n \in K_0$ converge dans K_0 ni même qu'elle soit bornée dans $C^2(\bar{\Omega})$). Ainsi, ce procédé utilisé en dimension infinie pose le problème du choix de l'espace E .

Il semble naturel de prendre $E = C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, car on utilise des dérivées de u mais un tel espace n'est en général pas le plus approprié, on lui préfère un espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ (cf, voir Annexe A3) pour des raisons physiques (déformations, rupture,...) et mathématiques (propriétés topologiques).

Il est clair que la réalisation des trois points de la "méthode directe", dans le cas de l'intégrale (1.29) dépend des données du problème, on sait par exemple que le troisième point a lieu si $f(X,p,.)$ est convexe $\forall (X,p) \in \Omega \times \mathbb{R}^N$ (cf, Morrey [46], Young [70]).

1.5 Densités d'énergie interne.

Dans le cadre de l'hyperélasticité, la fonction intégrande f de la fonctionnelle I donnée par (1.29) est l'énergie interne $W : f(X,u(X),Du(X)) = W(X,Du(X))$, pour un corps homogène W est indépendante explicitement de X .

1.5.a Densité d'énergie convexe.

On note $\mathfrak{R}(M_+^3)$ l'enveloppe convexe de l'ensemble M_+^3 .

Définition 1.5.1. La fonction $W : \mathfrak{R}(M_+^3) \rightarrow [0, +\infty]$ est dite convexe si :

$$W(\lambda A + (1-\lambda)B) \leq \lambda W(A) + (1-\lambda)W(B) \quad \forall \lambda \in [0,1], \forall A, B \in \mathfrak{R}(M_+^3).$$

Le premier grand théorème d'existence en calcul des variations est dû à L. Tonelli [67]. Il établit l'existence de solutions absolument continues (voir Bourbaki [13b]) pour le problème scalaire

$$\inf \left\{ \int_a^b f(t, x(t), x'(t)) dt ; x \in W^{1,p}(a,b), x(a)=\alpha, x(b)=\beta \right\} \quad (1.32)$$

dans lequel l'intégrande f est convexe en x' , régulière en (t,x,x') et coercive.

Des résultats analogues sont établis dans le cas vectoriel (cf, Ball [8], Dacorogna [26]).

Le résultat du théorème 7.3.2 Ciarlet [16], est plus adapté en élasticité aux potentiels d'énergie convexe, par exemple le matériau de Neo-Hookean, dont l'énergie interne est :

$$W(F) = a (\|F\|^2 - 3) \quad \text{avec } a > 0, \|F\|^2 = \sum_{ij} (F_{ij})^2.$$

Malgré son importance mathématique, la convexité de la densité d'énergie interne est une hypothèse "conflictuelle" et "non physiquement acceptable" : le principe d'indifférence matériel et la propriété " $W(X, F) \rightarrow +\infty$ lorsque $\det F \rightarrow 0^+$ " sont incompatibles avec une hypothèse de convexité. De plus, la convexité exclue tout phénomène de flambement fondamental en élasticité non-linéaire enfin, la non-convexité est dû aussi, aux effets des grandes déformations.

1.5.b- Densité d'énergie Polyconvexe.

Ball [8] a remplacé la convexité par la notion de polyconvexité, et établit un résultat d'existence. Nous rappelons la définition de la polyconvexité en dimension trois.

Définition 1.5.2 (Polyconvexité)-Une fonction $f: \Omega \times M^3 \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ de Carathéodory est dite polyconvexe s'il existe une fonction $\tilde{f}: \Omega \times M^3 \times M^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que :

- 1) $\forall X \in \Omega, \tilde{f}(X, \dots, \dots)$ est convexe
- 2) $\forall X \in \Omega, \forall F \in M^3 \tilde{f}(X, F) = f(X, F, \text{cof } F, \det F)$

Il est important d'observer, que cette terminologie affaiblissant la convexité par rapport au gradient de la déformation traduit, la convexité globale de l'énergie par rapport au triplet $(F, \text{cof } F, \det F)$, qui décrit la déformation, d'une longueur, d'une surface, et d'un volume.

Exemple 1.5.3.

En dimension deux, la densité d'énergie $f(F) = \|F\|^2 (\|F\|^2 - 2\det F)$ est polyconvexe (cf. Dacorogna [27]).

Remarques 1.5.4

(1) Une généralisation de la définition (en dimension > 3), est donnée dans [26] et la fonction de représentation \tilde{f} n'est pas unique en général.

(2) Les matériaux d'Ogden sont une classe importante de matériaux hyperélastiques dont la densité d'énergie est polyconvexe (cf. Ciarlet [16])

(3) Une hypothèse de croissance sur f , et la polyconvexité implique la f.s.c.i, et donne un résultat d'existence (cf, Ball [8], Ciarlet [16], Dacorogna [26]).

(4) En dimension deux, la polyconvexité traduit que pour les applications de types :

$$\varphi(X) = (\psi(X_1), X_2)$$

l'énergie est une fonction convexe de ψ' .

En effet, soit $f : \mathbf{M}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue vérifiant $f(UAV) = f(A) \forall A \in \mathbf{M}^2, \forall U, V \in O_+^3$ (c'est la restriction du principe d'objectivité et d'isotropie à O_+^3) d'après Dacorogna [23] f est polyconvexe si et seulement si sa restriction aux matrices diagonales est polyconvexe; il existe

donc une fonction $\bar{f} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ convexe telle que $f \begin{pmatrix} \psi' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \bar{f}(\psi', 1, \psi')$.

Posons $\hat{f}(\psi') = \bar{f}(\psi', 1, \psi')$ alors, \hat{f} est convexe par rapport à ψ' .

(5) Le théorème 4.4 Ball [8], donne une propriété analytique de la polyconvexité :

g est polyconvexe si et seulement si $\forall F \in \mathbf{M}^3 \exists A(F), B(F) \in \mathbf{M}^3$ et $c(F) \in \mathbf{R}$ tels que

$$\forall G \in \mathbf{M}^3 ; g(F+G) \geq g(F) + A(F):G + B(F):\text{cof}G + c(F) \det F$$

Pour $F = 0$ et $G = \varepsilon I$ on déduit alors, $g(\varepsilon I) \geq o(\varepsilon)$.

Cela traduit dans un sens, que le matériau polyconvexe nécessite un minimum d'énergie pour de petits déplacements contrairement, au matériau de Saint-Venant Kirchhoff qui ne demande pas d'énergie pour les déformations rigides $\hat{W}(F) = 0$ si F est le gradient d'une déformation rigide.

(6) Il existe des matériaux non-polyconvexes; en dimension deux la densité d'énergie

$f(F) = \|F\|^2(\|F\|^2 - \det F)$ n'est pas polyconvexe, (cf, Dacorogna [27]).

1.5 c-Densité d'énergie Quasiconvexe.

La quasiconvexité a été introduite d'abord par Morrey [46], pour une fonction intégrande finie et continue; puis généralisée par Ball et Murat [11] qui ont introduit la notion de $W^{1,p}$ -quasiconvexité pour $f : \mathbf{M}^{n \times n} \rightarrow \bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ Borel-mesurable.

Nous rappelons la définition de la quasiconvexité pour des matériaux homogènes.

Définition 1.5.5. (Quasiconvexité). Une fonction $f : \mathbf{R}^{nN} \rightarrow \mathbf{R}$ mesurable et localement intégrable est dite quasiconvexe si et seulement si :

$$\forall D \text{ ouvert borné de } \mathbf{R}^n, \forall A \in \mathbf{R}^{nN}, \forall \varphi \in W_0^{1,\infty}(D, \mathbf{R}^N)$$

l'inégalité:

$$\int_D f(A + \nabla \varphi(X)) dX \geq \int_D f(A) dX = f(A) \text{ meas } D \quad (1.33)$$

est vérifiée.

Remarques 1.5.6

(1) Dans cette définition, on peut remplacer l'ensemble des fonctions tests $W_0^{1,\infty}(D, \mathbb{R}^N)$ par $C_0^\infty(D, \mathbb{R}^N)$, de plus si l'inégalité (1.33) est vérifiée par un ouvert D elle est satisfaite, pour tout ouvert borné de \mathbb{R}^n (cf, Meyers[44]).

(2) R.Temam [64] a donné une caractérisation algébrique de la quasiconvexité.

(3) La quasiconvexité avec des hypothèses de croissances donne la f.s.c.i de l'intégrale I et aboutit à des résultats d'existence de minimums (cf. Morrey [46], Dacorogna [26]).

(4) La quasiconvexité au sens de Morrey [46] traduit physiquement, qu'une déformation homogène est solution faible de l'équilibre d'un corps homogène isotrope et sans densité de forces volumiques. Lorsque la fonction f vérifie une hypothèse de croissance, la notion de $W^{1,p}$ -Quasiconvexité introduite par Ball & Murat [11] est équivalente à la quasiconvexité au sens de Morrey.

(5) Dans le cas scalaire ($n=1$ ou $N=1$) les trois notions sont équivalentes, en général on a l'encadrement

convexe \Rightarrow polyconvexe \Rightarrow quasiconvexe \Rightarrow convexe de rang un

Pour la définition de la convexité de rang un voir Annexe A1.

Dans la pratique la vérification de (1.33) s'avère difficile. Cependant, le lemme suivant simplifie parfois les difficultés.

Lemme 1.5.7 (cf.[61])- Une fonction $f : \mathbb{R}^{nN} \rightarrow \mathbb{R}$ continue est quasiconvexe si et seulement si :

$$\int_{[0,1]^n} f(A + \nabla u(X)) dX \geq f(A) \tag{1.34}$$

$\forall A \in \mathbb{R}^{nN}, \forall u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ régulière et périodique par rapport à \mathbb{Z}^n
 (i.e. $u(X+k) = u(X) \forall X \in \mathbb{R}^n, \forall k \in \mathbb{Z}^n$).

Remarque 1.5.8

Ce lemme a été utilisé dans [61] pour montrer, la non équivalence entre la quasiconvexité et la convexité de rang un .

Nous l'utiliserons pour étudier les propriétés de l'énergie de Saint-Venant Kirchhoff au chapitre II.

1.6 Relaxation.

Soit à nouveau le problème de minimisation :

$$(P) \quad \inf\{I(u) = \int_{\Omega} f(X, u(X), \nabla u(X)) dX; u \in U = u_0 + W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^N)\} \quad (1.35)$$

où

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert borné de frontière régulière.
- $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ une fonction.
- $f : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.
- $u_0 \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ une fonction donnée, $p > 1$ et $I(u_0) < +\infty$.

Les résultats standards du calcul des variations, montrent que pour l'existence de solutions au problème (P) deux hypothèses capitales doivent être faites sur l'intégrande f :

- La convexité ou ses variantes (polyconvexité, quasiconvexité).
- La coercivité et la croissance.

Lorsque l'une de ces deux hypothèses n'a pas lieu, l'absence de la f.s.c.i de la fonctionnelle I n'autorise pas l'application de la "méthode directe" du calcul des variations, et en général (P) peut ne pas admettre de solutions.

Toutefois, nous rappelons une méthode qui permet de trouver des "**solutions généralisées**".

1.6.a Problème régularisé ou relaxé.

Une première approche possible, consiste à associer au problème (P) un problème "relaxé" noté (QP), et défini par :

$$(QP) \quad \inf\{QI(u) = \int_{\Omega} Qf(X, u(X), \nabla u(X)) dX; u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)\} \quad (1.36)$$

où

$Qf(X, p, \cdot)$ est l'enveloppe quasiconvexe de f par rapport à la 3^{ème} variable.

(QP) est le problème régularisé de (P).

Si des hypothèses de coercivité et de croissance sont satisfaites par f alors, le problème (QP) admet une solution et $\inf(QP) = \inf(P)$

En d'autres termes, si u est solution de (QP), il existe une suite minimisante (u_n) de (P) telle que u_n converge faiblement vers u dans $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ et $I(u_n)$ converge vers $QI(u)$ ce qui permet donc de considérer u comme une "solution généralisée" de (P) (cf, Dacorogna [25],[26]).

Ce concept de "relaxation" n'est pas seulement un point de vue mathématique, mais montre pour les applications où les quantités physiques sont mesurées en moyenne, l'importance de la convergence faible, comme modèle du rapport entre les quantités microscopiques et les quantités macroscopiques. Pour de plus amples développements, se référer à [24],[25].

Il existe différentes façons de définir le problème relaxé. Pour traiter le problème de minimisation associé à l'équilibre du matériau de Saint-Venant Kirchhoff, qui fera l'objet du chapitre II. Nous relaxerons le problème (P) en utilisant la fonction bipolaire f^{**} de f (cf, Ekeland & Temam [29], Annexe A2). Cette convexification du problème (P) permet, dans des cas particuliers de trouver des solutions au problème (P).

1.6.b Existence de solutions au problème primal.

Nous considérons une fonction de type,

$$f(X,p,q) = g(q) + h(X,p) \quad (1.37)$$

Au problème de minimisation (1.35) où l'intégrande f est de la forme (1.37) est associé le problème convexifié noté (P^{**}) et défini par

$$(P^{**}) \quad \inf\{I^{**}(u); u \in U\} \quad (1.38)$$

$$\text{où} \quad I^{**}(u) = \int_{\Omega} \{g^{**}(\nabla u(X)) + h(X, u(X))\} dX \quad (1.39)$$

Lorsque la fonction g est non quasiconvexe (c'est le cas de la densité de Saint-Venant), J.P. Raymond [56] a montré, en passant par le problème convexifié (P^{**}) et sous de fortes hypothèses de régularités, l'existence de solution au problème primal (P).

Une des conditions importantes, pour avoir ce résultat est l'hypothèse d'affinité sur la fonction bipolaire g^{**} de g . Nous rappelons cette condition.

(HA) - on suppose qu'il existe I un ensemble dénombrable, (K_i) une famille d'ouverts bornés $i \in I$ tels que:

$$K = \{A \in \mathbb{R}^{nN} ; g^{**}(A) \neq g(A)\} \subset \cup_{i \in I} K_i \quad (1.40)$$

et $\forall i \in I, g^{**}$ est affine dans K_i .

Cette hypothèse similaire dans le cas scalaire ($n=1$ où $N=1$) aux résultats annoncés dans [62] est toujours vérifiées pour $n=N=1$.

Nous examinerons au chapitre II cette condition pour la densité de Saint-Venant Kirchhoff. L'intérêt du problème relaxé est de pouvoir exprimer une condition nécessaire et suffisante d'optimalité pour (P). Cette idée est présentée dans le corollaire suivant.

Corollaire 1.6.1-(Raymond [55]).- φ est solution de (P) si et seulement si φ est solution de (P^{**}) et pour presque tout x

$$g(\nabla\varphi(x)) = g^{**}(\nabla\varphi(x)) \quad (1.41)$$

C'est cette caractérisation, des solutions de (P) qui justifie l'orientation prise dans ce travail. On cherche, parmi les solutions de (P^{**}) celles qui vérifient la condition (1.41).

Commentaires.

(1) Notons que dans le cas scalaire, (QP) et (P^{**}) sont le même problème. Cependant, ceci n'est pas vrai dans le cas vectoriel, en général : $\inf(P) = \inf(QP) > \inf(P^{**})$.

Par exemple, en dimension deux, pour la fonction $f(A) = \det^2(A)$, f est quasiconvexe et donc $f(\nabla u) = Qf(\nabla u) = (\det \nabla u)^2$ d'autre part, $Cf = f^{**}$ et l'enveloppe convexe Cf vérifie :

$$0 \leq Cf(A) \leq \inf \{ \lambda \det^2 B + (1-\lambda) \det^2 C ; \lambda B + (1-\lambda)C = A \}$$

(cf, [26] Th1.1 chap5) or, l'infimum du second membre est justement 0 et par suite $f^{**} = 0$.

D'après l'inégalité de Jensen (cf, Annexe A4) on a:

$$\left(\frac{1}{\text{vol}\Omega} \int_{\Omega} \det \nabla u(x) dx \right)^2 \leq \frac{1}{\text{vol}\Omega} \int_{\Omega} \det^2 \nabla u(x) dx.$$

On peut déduire alors, que si $\det \nabla u_0 > 0$.

$$\inf(P) = \inf(QP) \geq \text{vol}\Omega \left(\frac{1}{\text{vol}\Omega} \int_{\Omega} \det \nabla u_0(x) dx \right)^2 > 0 = \inf(P^{**}).$$

(2) Si pour une densité g non convexe on ait $g^{**} = Qg$ (c'est le cas, nous le verrons au chap II de la densité d'énergie de Saint-Venant Kirchhoff) alors, $\inf(P^{**}) = \inf(QP)$.

Le passage du problème primal (P) au problème relaxé (P^{**}) montre, que si nous perdons en énergie : $g(\nabla\varphi) - g^{**}(\nabla\varphi) > 0$ les infimums sont conservés $\inf(P) = \inf(QP) = \inf(P^{**})$.

(3) L'interprétation physique de la condition d'affinité (HA) signifie, que lors du passage au problème relaxé (P^{**}) s'il y a variation d'énergie, le potentiel des forces volumiques s'annule à l'intérieur du corps.

En effet, soit φ une solution du problème relaxé de déplacement pur c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \frac{\partial g^{**}}{\partial F}(\nabla\varphi(x)) + h(x, \varphi(x)) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \varphi = \varphi_0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Si la condition (HA) est vérifiée alors, g^{**} est affine sur un certain K_1 ,

Posant $\omega_1 = \{x \in \Omega ; \nabla\varphi(x) \in K_1\}$ alors, on déduit de la première équation :

$$h(x, \varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in \omega_1.$$

(4) La condition (HA) d'affinité au-delà de la dimension 1 n'est pas toujours satisfaite. En effet, considérons l'application :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) &\mapsto (x_1^2 - 1)^2 + x_2^4 \end{aligned}$$

On peut vérifier, en utilisant la forme quadratique $\sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \lambda_i \lambda_j$ que f est convexe lorsque

$|x_1| \geq 1$ il s'en suit

$$f^{**}(x_1, x_2) = \begin{cases} f(x_1, x_2) & \text{si } |x_1| \geq 1 \\ x_2^4 & \text{si } |x_1| < 1 \end{cases}$$

et l'ensemble K se réduit à $K = \{(x_1, x_2) ; |x_1| < 1\}$ il est alors, facile d'observer que f^{**} restreinte à K vaut x_2^4 qui n'est pas affine.

(5) Il est possible que le problème (P) n'a pas de solutions tandis que le problème relaxé (P^{**}) a une solution unique (cf, Marcellini [42]).

(6) Ball & Murat [11] ont montré que la quasiconvexité, pour certains problèmes est nécessaire, pour l'existence de minimums.

Existence de minimums pour les matériaux de
Saint-Venant Kirchhoff.

Saint-Venant (Adhemar-Barré, Comte de). Ingénieur et Professeur Français (Villiers-en-Bière, Seine-et-Marne, 1797-Saint-ouen, près de Vendôme, 1886. Acad des Sc., 1868).

Auteur de nombreux ouvrages, techniques, il a attaché son nom à plusieurs formules de mécanique appliquée et de résistances des matériaux, notamment le principe des distributions des forces, introduisant une souplesse dans la formulation des conditions aux limites, en théorie d'élasticité.

"Encyclopaedia universalis."

Chapitre II

Existence de minimums pour les matériaux de Saint-Venant Kirchhoff.

2.0. Introduction.

En élasticité linéaire isotrope, le potentiel énergétique ψ est un invariant quadratique du tenseur de déformation linéaire $\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla^T u + \nabla u)$ (u est le déplacement) c'est-à-dire :

$\psi = \frac{1}{2\rho}(\lambda \varepsilon_I^2 + 4\mu \varepsilon_{II})$, ρ étant la masse volumique, $\varepsilon_I = \text{tr}^2 \varepsilon$, $\varepsilon_{II} = \frac{1}{2} \text{tr} \varepsilon^2$, λ et μ sont les deux coefficients de Lamé, ils vérifient $\mu > 0$, $\lambda \geq 0$. Le tenseur des contraintes s'écrit alors :

$$\sigma = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} = \lambda \text{tr} \varepsilon I + 2\mu \varepsilon \quad \text{"Loi de Hooke"}$$

On introduit aussi les constantes : E le module de Young, ν le coefficient de Poisson ; ces constantes caractérisent le comportement matériel lors d'expériences simples : cisaillement d'un bloc rectangulaire, compression d'une sphère, traction d'un cylindre et les relations classiques entre ces coefficients sont (cf, Ciarlet [16]) :

$$E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \quad (\text{ayant la dimension d'une pression})$$
$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (\text{sans dimension})$$

avec $E > 0$, et $0 \leq \nu < \frac{1}{2}$.

Les matériaux de St-Venant Kirchhoff sont fréquemment utilisés en élasticité non-linéaire en raison de la simplicité de l'expression de leur densité d'énergie interne.

Ces matériaux constituent le modèle le plus simple d'une classe importante de matériaux homogènes, dont la configuration de référence est un état naturel (cf, Ciarlet [16])

L'objet de ce chapitre est de donner des propriétés de la densité d'énergie de Saint-Venant Kirchhoff, et des résultats d'existences aux problèmes de minimums associés à l'équilibre de ces matériaux.

2.1. Matériaux de St-Venant Kirchhoff.

Pour le cas non-linéaire plus adapté aux grandes déformations, si on remplace dans la loi de Hooke le tenseur linéaire ε par le tenseur de Green-Lagrange $E = \frac{1}{2}(\nabla^T u + \nabla u + \nabla^T u \nabla u)$ nous obtenons le tenseur de contrainte : $\lambda (\text{tr} E)I + 2\mu E$.

Ce tenseur reste linéaire par rapport à E , mais perd la linéarité par rapport au déplacement .

Selon la terminologie utilisée dans [16]; le matériau de Saint-Venant Kirchhoff est défini par :

Définition 2.1.1- Un matériau élastique non linéaire est dit de Saint-Venant Kirchhoff, si sa fonction de réponse pour le second tenseur de Piola-Kirchhoff S est donnée par :

$$S(E) = \lambda (\text{tr}E) I + 2\mu E \quad (2.1)$$

où E est le tenseur de Green-Lagrange.

Nous supposons, que les coefficients de Lamé vérifient : $\lambda > 0, \mu > 0$, la condition sur le coefficient de Poisson se réduit donc à $0 < \nu < \frac{1}{2}$.

Ce matériau homogène est hyperélastique et son potentiel est donné par

$$\tilde{W}(E) = \frac{\lambda}{2} \text{tr}^2 E + \mu \text{tr} E^2 \quad (2.2)$$

La relation (2.2) s'écrit en fonction du tenseur de Green-Cauchy $C = F^T F$ (F est le gradient de déformation) sous la forme :

$$\tilde{W}(C) = \frac{\lambda}{8} \text{tr}^2 (C - I) + \frac{\mu}{4} \text{tr} (C - I)^2 \quad (2.3)$$

ou à l'aide du gradient F

$$\hat{W}(F) = \frac{\lambda}{8} \text{tr}^2 (F^T F - I) + \frac{\mu}{4} \text{tr} (F^T F - I)^2 \quad (2.4)$$

ce troisième potentiel est souvent appelé la densité d'énergie de Saint-Venant Kirchhoff.

Remarque 2.1.2

On peut remarquer que la densité (2.4) est objective et isotrope :

(i.e, $\forall Q \in O^3 \forall F \in M_+^3 \hat{W}(QF) = \hat{W}(F)$ et $\hat{W}(FQ) = \hat{W}(F)$), dans ce cas (cf. Ball [8]) il existe une fonction $\Phi: \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}$ symétrique telle que pour chaque $F \in M_+^3 \hat{W}(F) = \Phi(v_1(F), v_2(F), v_3(F))$ où $v_i(F)$ désigne la valeur propre de $(F^T F)^{1/2}$ appelée valeur singulière de F .

Pour l'énergie (2.4) on a :

$$\hat{W}(F) = -\frac{3\lambda + 2\mu}{4} (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + \frac{\lambda + 2\mu}{8} (v_1^4 + v_2^4 + v_3^4) + \frac{\lambda}{4} (v_1^2 v_2^2 + v_1^2 v_3^2 + v_2^2 v_3^2) + \frac{9\lambda + 6\mu}{8}$$

2.2. Propriétés du premier et second potentiel de Saint-Venant Kirchhoff.

A. Raoult [52] a montré, que la densité \hat{W} donnée par (2.4) fonction de la variable F (gradient de la déformation) n'est pas polyconvexe; ce résultat est une conséquence du théorème 4.10.1 Ciarlet [16] et de la condition $3\lambda + 2\mu > 0$, mieux dans sa preuve, elle a montré que \hat{W} n'est pas convexe de rang un, on en déduit alors, qu'elle n'est pas non plus quasiconvexe.

Nous allons montrer que les densités d'énergies (2.2) et (2.3) considérées respectivement comme fonctions des variables E et C sont des fonctions quasiconvexes.

Pour des raisons de simplicité, les résultats sont donnés en dimension deux.

Nous formulons le lemme suivant :

Lemme 2.2.1-Soit $u = (u_1, u_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction deux fois différentiable et périodique dans \mathbb{Z}^2 , i.e., $u(x+k) = u(x) \forall x \in \mathbb{R}^2, \forall k \in \mathbb{Z}^2$. Alors,

$$1) \int_0^1 \int_0^1 \partial_i u_j \, dx_1 dx_2 = 0 \quad \forall i, j \in \{1, 2\}$$

$$2) \int_0^1 \int_0^1 (\partial_1 u_1) \cdot (\partial_2 u_2) \, dx_1 dx_2 = \int_0^1 \int_0^1 (\partial_2 u_1) \cdot (\partial_1 u_2) \, dx_1 dx_2$$

Preuve.-1) Soit, $I_1 = \int_0^1 \left(\int_0^1 \partial_1 u_2(x_1, x_2) \, dx_1 \right) dx_2$, l'intégrale de l'expression entre

parenthèse donne $u_2(1, x_2) - u_2(0, x_2)$, comme u est périodique dans \mathbb{Z}^2 on déduit le résultat.

2) Notons $J_1 = \int_0^1 \int_0^1 (\partial_1 u_1) \cdot (\partial_2 u_2) \, dx_1 dx_2$, une intégration par partie et la périodicité de u donne

$$J_1 = - \int_0^1 \int_0^1 u_2 \cdot \partial_{12}^2 u_1 \, dx_1 dx_2. \text{ En posant } J_2 = \int_0^1 \int_0^1 (\partial_1 u_2) \cdot (\partial_2 u_1) \, dx_1 dx_2 \text{ avec le même argument on}$$

$$\text{obtient : } J_2 = - \int_0^1 \int_0^1 u_2 \cdot \partial_{21}^2 u_1 \, dx_1 dx_2.$$

Comme u est deux fois différentiable, on déduit que $J_1 = J_2$. \square

Remarque 2.2.2

Le résultat de ce lemme reste vrai en dimension 3.

Nous étudions la quasiconvexité d'une classe de fonctions particulières, pour déduire la quasiconvexité des potentiels (2.2) et (2.3).

Proposition.2.2.3-Soit $f : \mathbb{M}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par :

$$f(A) = \alpha [(a_{11})^2 + (a_{22})^2] + \beta a_{11} a_{22} + \gamma a_{12} a_{21} \quad (2.5)$$

où

$A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}^2$, α, β, γ sont des constantes réelles. Alors, si $\alpha > 0$ et $(\beta + \gamma)/\alpha = 2$, la fonction f est quasiconvexe.

Preuve.-Nous utilisons le Lemme 1.7.1

Soit $A \in \mathbb{M}^2$, $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ différentiable et périodique dans \mathbb{Z}^2 en développant l'expression de $f(A + Du(X))$ on obtient, $f(A + Du) = f(A) + \alpha [(\partial_1 u_1)^2 + (\partial_2 u_2)^2] + \beta (\partial_1 u_1) (\partial_2 u_2) + \gamma (\partial_2 u_1) (\partial_1 u_2) + K$ où $K = c_1 (\partial_1 u_1) + c_2 (\partial_2 u_2) + c_3 (\partial_1 u_2) + c_4 (\partial_2 u_1)$ avec c_k une constante dépendant de a_{ij} et de α, β, γ . L'application de 1) et 2) du lemme 2.2.1 donne :

$$\int_0^1 \int_0^1 f(A + Du(x_1, x_2)) \, dx_1 dx_2 = f(A) + \alpha \int_0^1 \int_0^1 [(\partial_1 u_1)^2 + (\partial_2 u_2)^2] \, dx_1 dx_2 + (\beta + \gamma) \int_0^1 \int_0^1 (\partial_1 u_2) (\partial_2 u_1) \, dx_1 dx_2$$

Posons $(\beta + \gamma)/\alpha = 2$, pour $\alpha \neq 0$ il vient

$$\int_0^1 \int_0^1 f(A + Du(x_1, x_2)) \, dx_1 dx_2 = f(A) + \alpha \int_0^1 \int_0^1 (\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2)^2 \, dx_1 dx_2$$

si $\alpha > 0$, alors $\int_0^1 \int_0^1 f(A + Du(x_1, x_2)) \, dx_1 dx_2 \geq f(A)$ ce qui montre que f est quasiconvexe. \square

Remarque 2.2.4

Le résultat de cette proposition se généralise en dimension 3, il suffit de considérer pour $A = (a_{ij}) \in M^3$ la fonction: $f(A) = \alpha \sum_i (a_{ii})^2 + \beta \sum_{i,j} a_{ii}a_{jj} + \gamma \sum_{i \neq j} a_{ij}a_{ji}$

Corollaire 2.2.5-La fonction $\bar{W} : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\bar{W}(A) = \lambda/2 \operatorname{tr}^2(A) + \mu \operatorname{tr}(A)^2 \tag{2.6}$$

où λ et μ sont des constantes positives, est quasiconvexe.

Preuve-(2.6) peut s'écrire $\bar{W}(A) = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{2}\right) [(a_{11})^2 + (a_{22})^2] + \lambda a_{11}a_{22} + 2\mu a_{12}a_{21}$ où $A = (a_{ij})$.

Il est facile de voir que cette expression est un élément de la classe des fonctions (2.5), avec $\left(\frac{\lambda + 2\mu}{2}\right) = \alpha, \beta = \lambda, \gamma = 2\mu$ de plus on a :

$$\left(\frac{\beta + \gamma}{\alpha}\right) = 2,$$

ce qui prouve la quasiconvexité de (2.6). □

Remarques 2.2.6

(1) Ce corollaire met en application la quasiconvexité du potentiel (2.2) de St-Venant Kirchhoff considéré comme fonction de l'argument E tenseur de Green-Lagrange.

(2) la fonction (2.6) du Corollaire n'est pas toujours convexe, il suffit de prendre $\lambda = \mu = 1/2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ pour s'en apercevoir. En effet, } A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \left(\frac{A+B}{2}\right)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

on déduit : $\bar{W}\left(\frac{A+B}{2}\right) = \frac{1}{4}2^2 + \frac{1}{2}4 = 3$, d'autre part,

$$\bar{W}(A) = \frac{1}{4}1 + \frac{1}{2}1 = \frac{3}{4}, \bar{W}(B) = \frac{1}{4}3^2 + \frac{1}{2}5 = \frac{19}{4} \text{ par suite } \frac{\bar{W}(A) + \bar{W}(B)}{2} = \frac{11}{4}$$

or, 3 n'est pas inférieur ou égale $\frac{11}{4}$.

Proposition 2.2.7-Soit la fonction $g : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(A) = \lambda/8 \operatorname{tr}^2(A-I) + \mu/4 \operatorname{tr}(A-I)^2 \tag{2.7}$$

où

λ, μ sont des constantes positives, I désigne la matrice identité. Alors, g est quasiconvexe.

Preuve-Un calcul simple montre que pour $A = (a_{ij})$, g s'écrit

$$g(A) = (\lambda/8 + \mu/4).[(a_{11})^2 + (a_{22})^2] + \lambda/4.(a_{11})(a_{22}) + \mu/2.(a_{12})(a_{21}) + (\lambda/2 + \mu/2).[1 - a_{11} - a_{22}],$$

soit $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ différentiable et périodique dans \mathbb{Z}^2 , une application de 1) et 2) du Lemme 2.2.1 montre

$\int_0^1 \int_0^1 g(A+Du(x_1, x_2)) dx_1 dx_2 = g(A) + (\lambda/8 + \mu/4) \int_0^1 \int_0^1 (\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2)^2 dx_1 dx_2 \geq g(A)$, ce qui prouve la quasiconvexité de l'application g . \square

Remarques 2.2.8

(1) Le résultat de la proposition 2.2.2 se généralise en dimension 3.

(2) Le potentiel élastique (2.3) considéré comme fonction de l'argument C (tenseur de dilatation), est quasiconvexe.

(3) Le potentiel (2.4) fonction de l'argument F (gradient de la déformation) est non quasiconvexe, A.Raoult [52]; ce résultat peut être retrouvé en appliquant le lemme 1.7.1.

Proposition 2.2.9-la fonction $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(A) = \frac{\lambda}{8} \text{tr}^2(A^T A - I) + \frac{\mu}{4} \text{tr}(A^T A - I)^2 \quad (2.8)$$

où

λ, μ sont des constantes positives, est une application non quasiconvexe.

Preuve-On peut remarquer que $f(0) = \frac{\lambda + \mu}{2}$

posons $u(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} (\sin 2\pi x_1 \quad \cos 2\pi x_2)$ il est clair, que u est régulière et périodique dans

Z^2 de plus $Du(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi x_1 & 0 \\ -\sin 2\pi x_1 & 0 \end{pmatrix}$, $Du^T Du - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ il vient alors,

$$f(Du(X)) = \frac{\lambda + 2\mu}{8}.$$

Par application du lemme 1.7.8 on déduit, $\int_0^1 \int_0^1 f(Du(x_1, x_2)) dx_1 dx_2 = \frac{\lambda + 2\mu}{8} < \frac{\lambda + \mu}{2} = f(0)$

ce qui prouve, que f n'est pas quasiconvexe en 0. \square

Remarque 2.2.10

Les résultats de la proposition 2.2.2 et du corollaire 2.2.1 qui montrent, la quasiconvexité des potentiels (2.2) et (2.3) de l'énergie de Saint-Venant Kirchhoff sont surprenants devant le résultat connu de la proposition 2.2.3, ceci est dû au fait que d'une façon générale, si $h : M^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est quasiconvexe, l'application h^* définie par $h^*(A) = h(A^T A)$ n'est pas quasiconvexe.

2.3 Enveloppe quasiconvexe de l'énergie de Saint-Venant Kirchhoff.

En utilisant le module de Young E et le coefficient de Poisson ν , la densité d'énergie (2.4) s'écrit :

$$\forall F \in \mathbf{M}^3 \quad \hat{W}(F) = \frac{E\nu}{8(1+\nu)(1-2\nu)} (\|F\|^2 - 3)^2 + \frac{E}{8(1+\nu)} \|F^T F - I\|^2 \quad (2.9)$$

Soit $0 \leq v_1(F) \leq v_2(F) \leq v_3(F)$ les valeurs singulières de F , rangées dans l'ordre croissant d'après la remarque 2.1.2 \hat{W} est fonction symétrique de $v_i(F)$ et elle s'écrit :

$$\hat{W}(F) = \frac{E}{8(1+\nu)} \sum_{i=1}^3 (v_i^2(F) - 1)^2 + \frac{E\nu}{8(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\sum_{i=1}^3 v_i^2(F) - 3 \right)^2 \quad (2.10)$$

Sous l'hypothèse $\mu > 0$ et $\lambda \geq 0$, H.Le Dret & A.Raoult [40] ont déterminé l'enveloppe quasiconvexe de la densité (2.9).

Notons $C = \{v \in \mathbf{R}^3 ; 0 \leq v_1 \leq v_2 \leq v_3\}$ le cône convexe de \mathbf{R}_+^3 et ψ l'application définie sur C par :

$$\psi(v) = \frac{E}{8} [v_3^2 - 1]_+^2 + \frac{E}{8(1-\nu^2)} [v_2^2 + \nu v_3^2 - (1+\nu)]_+^2 + \frac{E}{8(1-\nu^2)(1-2\nu)} [(1-\nu)v_1^2 + \nu(v_2^2 + v_3^2) - (1+\nu)]_+^2 \quad (2.11)$$

où $[x]_+^2 = x^2$ si $x \geq 0$, $[x]_+^2 = 0$ si $x < 0$.

Proposition 2.3.1 (Le Dret & Raoult [40], [41])—L'enveloppe quasiconvexe $Q\hat{W}$ de l'énergie de Saint-Venant Kirchhoff (2.9) est donnée par :

$$\forall F \in \mathbf{M}^3, \quad Q\hat{W}(F) = \psi(v_1(F), v_2(F), v_3(F)). \quad (2.12)$$

Elle est également l'enveloppe convexe, l'enveloppe polyconvexe et l'enveloppe rang 1-convexe i.e, $Q\hat{W} = C\hat{W} = P\hat{W} = R\hat{W}$. Elle coïncide avec l'énergie (2.4) ou (2.9) sur l'ensemble des matrices dont les valeurs singulières rangées en ordre croissant sont à l'extérieur de l'ellipsoïde:

$$\mathcal{E} = \{v \in C; (1-\nu)v_1^2 + \nu(v_2^2 + v_3^2) - (1+\nu) \leq 0\} \quad (2.13)$$

et seulement sur cet ensemble.

Remarque 2.3.2

De l'expression (2.4) on déduit que : $\forall F \in \mathbf{M}^3 \quad \hat{W}(F) \neq +\infty$ ainsi, du théorème 1.1 chap V [26] découle $C\hat{W} = \hat{W}^{**}$ où \hat{W}^{**} désigne la fonction bipolaire de \hat{W} . C'est-à-dire :

$$\hat{W}^{**}(F) = \psi(v_1(F), v_2(F), v_3(F)).$$

Nous avons vu au chapitre I, que la condition d'affinité sur la fonction bipolaire est une hypothèse nécessaire dans le résultat d'existence de J.P.Raymond [56]. Qu'en est-il pour la densité de Saint-Venant ?

Corollaire 2.3.3-Soit K le sous ensemble de \mathbf{M}^3 définie par :

$$K = \left\{ A \in \mathbf{M}^3 ; \hat{W}^{**}(A) < \hat{W}(A) \right\}.$$

Alors, K est non vide, borné, et \hat{W}^{**} ne peut pas être affine dans K .

Preuve-On peut observer que $\hat{W}(0) = \frac{9\lambda + 6\mu}{8}$, et d'après la proposition 2.3.1

$\hat{W}^{**}(0) = \psi(v(0)) = 0$ d'où $0 \in K$. Soit $F \in K$, notons $v(F) = (v_1, v_2, v_3)$ les valeurs singulières de F alors, $v(F) \in \mathcal{E}$ l'ellipsoïde (2.13).

Comme $0 < v < 1/2$ et $\|F\|^2 = \sum_{i=1}^3 v_i^2$, on déduit que $\|F\| \leq \sqrt{\frac{1+v}{v}}$ ce qui prouve que K est borné.

L'ensemble K est symétrique i.e si $A \in K$, $-A \in K$. En effet, $\hat{W}(A) = \hat{W}(-A)$ et $\hat{W}^{**}(A) = \hat{W}^{**}(-A)$ (si v_i est une valeur singulière de A v_i est aussi valeur singulière de $-A$) de plus, K est invariant sous le groupe orthogonal $O(3)$ car, \hat{W} et \hat{W}^{**} le sont (cf.[40], [41]) par suite \hat{W}^{**} ne peut pas être affine dans K . \square

Remarques 2.3.4

(1) Le corollaire 2.3.3 montre, que pour la densité de Saint-Venant \hat{W} , l'hypothèse essentiel d'affinité dans le théorème de J.P.Raymond [56] n'est pas satisfaite.

(2) Observons que, pour la densité (2.4) ou (2.9), l'hypothèse intuitive :

$$" \hat{W}(F) \rightarrow +\infty \text{ quand } \det F \rightarrow 0^+ "$$

n'est pas satisfaite; l'expression de la densité (2.4) ne contient pas explicitement le terme $\det F$, en dimension deux la densité (2.4) s'écrit :

$$\hat{W}(F) = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{8} \right) \|F\|^4 - \left(\frac{\lambda + \mu}{2} \right) (\|F\|^2 - 1) - \frac{\mu}{2} (\det F)^2$$

et pour $F = a_n I$, avec $a_n \rightarrow 0$ on a $\hat{W}(a_n I) \rightarrow \frac{\lambda + \mu}{2}$.

Cependant, il est facile d'observer que $\hat{W}(F) \rightarrow +\infty$ quand $\|F\| \rightarrow +\infty$ ou si, l'une des valeurs singulières de F $v_i(F)$ $i \in \{1, 2, 3\}$ tend vers ∞ . On peut interpréter cela en disant que le matériau de Saint-Venant Kirchhoff nécessite une grande énergie à l'extension.

Au chapitre 1 on a vu, que sous des hypothèses de croissance et de coercivité sur la fonction intégrande (\hat{W} dans notre cas) l'infimum de (P) dans $u_0 + W_0^{1,p}(\Omega, \mathbf{R}^3)$ est égal à l'infimum de (P^{**}) dans le même espace.

2.4 Existence de minimums pour les matériaux de Saint-Venant Kirchhoff.

Ω étant un ouvert borné de classe C^1 de \mathbf{R}^3 , Γ_0 et Γ_1 une partition de $\Gamma = \partial\Omega$ le bord de Ω telle que la mesure superficielle de $(\Gamma \setminus \Gamma_1)$ soit non nulle et que $\text{mes } \Gamma_0 > 0$

L'ensemble $\bar{\Omega}$ est la configuration de référence qu'occupe un matériau de Saint-Venant Kirchhoff au repos.

Nous examinerons deux problèmes aux limites classiques :

2.4.a Problème de Dirichlet (pur-déplacement).

On suppose que l'ensemble Γ_1 est vide et que la configuration de référence est soumise à l'action des forces de densité volumique

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (2.14)$$

(hypothèse des forces mortes).

L'inconnue du problème de déplacement, est la déformation $\varphi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$, supposée égale à une fonction φ_0 donnée sur l'ensemble $\partial \Omega$, ceci signifie qu'un certain déplacement est imposé sur le bord. Ainsi, le corps déformé est inclu, et collé à une structure assez large, c'est le phénomène d'encastrement.

La formulation variationnelle, consiste à trouver une solution au problème de minimisation :

$$(P) \quad \inf\{J(\varphi); \varphi \in \Theta\} \quad (2.15)$$

où

$$J(\varphi) = \int_{\Omega} \left\{ \hat{W}(\nabla \varphi(x)) - f(x)\varphi(x) \right\} dx \quad (2.16)$$

\hat{W} désigne l'énergie (2.4) et Θ est l'ensemble des déformations admissibles que nous définirons plus loin.

Nous rappelons, que $\theta \in \Theta$ est une solution de (P) si et seulement si :

$$J(\theta) \leq J(\varphi) \quad \forall \varphi \in \Theta.$$

On a vu que l'intégrande \hat{W} , n'est ni convexe ni quasiconvexe, et que l'hypothèse que l'énergie \hat{W} tend vers l'infini si le volume est réduit à 0 n'est pas vérifiée, il est donc intéressant de relaxer le problème de minimisation (P) en remplaçant la densité (2.4) par sa fonction bipolaire \hat{W}^{**} .

On considère le problème de minimisation convexe :

$$(P^{**}) \quad \inf\{J^{**}(\varphi); \varphi \in \Theta\} \quad (2.17)$$

où

$$J^{**}(\varphi) = \int_{\Omega} \left\{ \hat{W}^{**}(\nabla \varphi(x)) - f(x)\varphi(x) \right\} dx \quad (2.18)$$

Θ est l'ensemble défini par :

$$\Theta = \left\{ \varphi \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3); \varphi = \varphi_0 \text{ sur } \partial\Omega, \det \nabla \varphi > 0, \Lambda(\varphi) \geq \frac{5}{2\nu} p \cdot p \Omega \right\} \quad (2.19)$$

avec $\varphi_0: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ une fonction donnée, et Λ l'application :

$$\begin{aligned} \Lambda: W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3) &\rightarrow L^p(\Omega, \mathbb{R}) \\ \varphi &\rightarrow \text{tr} \nabla \varphi \end{aligned} \quad (2.20)$$

tr désigne la trace matricielle.

Avant de donner un théorème d'existence au problème (P), nous formulons et démontrons les résultats suivants :

Lemme 2.4.1-La densité d'énergie de Saint-Venant (2.4) satisfait les conditions suivantes :

i) $\hat{W} \in C^\infty(M^3, \mathbb{R})$

ii) il existe des constantes positives c_1, c_2, c_3, c_4 telles que $\forall F \in M^3$

$$c_1 \|F\|^4 - c_2 \leq \hat{W}(F) \leq c_3 (\|F\|^4 + 1) \quad (2.21)$$

$$\|\hat{W}_{FF}(F)\| \leq c_4 (\|F\|^2 + 1) \quad (2.22)$$

iii) la fonction \hat{W} atteint un maximum local en zéro.

Preuve.- i) la densité (2.4) somme algébrique de fonctions de classe C^∞ est une fonction de classe C^∞

ii) un détail de l'expression de l'énergie (2.4) donne :

$$\hat{W}(F) = \frac{\lambda}{8} \|F\|^4 + \frac{\mu}{4} \|F^T F\|^2 - \frac{6\lambda + 4\mu}{8} \|F\|^2 + \frac{9\lambda + 6\mu}{8}.$$

Une première majoration montre : $\hat{W}(F) \leq \frac{\lambda + 2\mu}{8} \|F\|^4 + \frac{9\lambda + 6\mu}{8}$, en prenant

$c_3 = \max\left\{\frac{\lambda + 2\mu}{8}, \frac{9\lambda + 6\mu}{8}\right\}$ on déduit l'inégalité de droite de (2.21) .

Pour montrer l'inégalité de gauche, on utilise une l'inégalité fondamentale :

"il existe $0 < \alpha < 1$, $\beta \in \mathbb{R}$ tels que $t^2 - 6t + 9 \geq \alpha t + \beta \quad \forall t \geq 0$ " d'autre part, une minoration de l'énergie donne :

$$\hat{W}(F) \geq \frac{\lambda}{8} (\|F\|^4 - 6\|F\|^2 + 9).$$

Finalement l'utilisation de l'inégalité fondamentale ci-dessus montre, que le membre de gauche de (2.21) est vérifié.

Posons $u(F) = \frac{\lambda}{8} (\|F\|^2 - 3)^2$ et $v(F) = \frac{\mu}{4} \|F^T F - I\|^2$ il s'ensuit $\hat{W}(F) = u(F) + v(F)$.

Un calcul montre :

$$\frac{\partial u}{\partial F_{ij} \partial F_{kl}} = \lambda F_{ij} F_{kl} + \frac{\lambda}{2} (\|F\|^2 - 3) \delta_{ijkl} \text{ avec } \delta_{ijkl} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) = (k,l) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

En posant $A = F_{11}^2 + F_{21}^2 + F_{31}^2, B = F_{12}^2 + F_{22}^2 + F_{32}^2, C = F_{13}^2 + F_{23}^2 + F_{33}^2$ et

$a = F_{11}F_{12} + F_{21}F_{22} + F_{31}F_{32}, b = F_{13}F_{11} + F_{21}F_{23} + F_{33}F_{31}, c = F_{13}F_{12} + F_{23}F_{22} + F_{33}F_{32}$ on déduit :

$$v(F) = \lambda/4 [(A-1)^2 + (B-1)^2 + (C-1)^2 + 2a^2 + 2b^2 + 2c^2].$$

Un calcul montre, que les éléments de la matrice Hessienne de v sont de forme simple ou nul,

par exemple $\frac{\partial^2 v}{\partial F_{11} \partial F_{11}} = \frac{\lambda}{2} F_{11}^2 + \lambda(A-1), \frac{\partial^2 v}{\partial F_{21} \partial F_{32}} = \lambda F_{31} F_{22}, \frac{\partial^2 v}{\partial F_{33} \partial F_{11}} = 0.$

Finalement une majoration de la norme Euclidienne de la matrice Hessienne $\frac{\partial^2 \hat{W}}{\partial F_{ij} \partial F_{kl}}$ élément

de M^9 donne l'estimation (2.22).

iii) Définissons pour $A \neq 0$, la fonction réelle $\tau(t) = \hat{W}(tA/\|A\|)$, il est facile de voir que τ est continue et de classe C^2 au moins, un calcul de la dérivée première donne :

$$\tau'(t) = Ct^3 - (3\lambda/2 + \mu)t \text{ où } C \text{ est une constante dépendant de}$$

λ, μ et $\|A\|$; on déduit immédiatement

$\tau''(0) = -(3\lambda/2 + \mu) < 0$, ce qui prouve que 0 est un maximum local de τ , par suite 0 est un maximum local de \hat{W} (i.e il existe $\eta > 0$ tel que $\|F\| < \eta \Rightarrow \hat{W}(F) < \hat{W}(0)$). \square

Nous allons donner une condition suffisante pour que les valeurs singulières d'une matrice soient à l'extérieur de l'ellipsoïde (2.13)

Lemme 2.4.2.- Soit A une matrice de M^3 vérifiant :

$$\text{tr } A \geq \frac{5}{2\nu} \tag{2.23}$$

Alors, les valeurs singulières de A sont à l'extérieur de l'ellipsoïde \mathcal{E} donnée par (2.13).

Preuve.- Soit $A \in M^3$, notons $v(A) = (v_1(A), v_2(A), v_3(A))$ les valeurs singulières de A ; sachant que $\|A\|^2 = v_1^2(A) + v_2^2(A) + v_3^2(A)$ et que $0 < \nu < \frac{1}{2}$ on déduit l'inégalité stricte :

$$\nu \|A\|^2 - 3 < (1 - \nu) v_1^2(A) + \nu [v_2^2(A) + v_3^2(A)] - (1 + \nu) \tag{1}$$

En utilisant l'inégalité fondamentale en dimension 3 :

$$2 \text{tr } A - 3 \leq \|A\|^2$$

on obtient :

$$2 \operatorname{tr} A - \frac{9}{2} < (1 - \nu) \nu_1^2(A) + \nu [\nu_2^2(A) + \nu_3^2(A)] - (1 + \nu) \quad (2)$$

Lorsque la matrice A vérifie (2.23) le membre de droite de (2) est strictement supérieur à $\frac{1}{2}$ ce qui prouve, que les valeurs singulières de $A : (\nu_1(A), \nu_2(A), \nu_3(A))$ n'appartiennent pas à l'ellipsoïde \mathcal{E} . \square

Le résultat suivant montre, que la condition (2.23) se conserve pour la convergence faible.

Lemme 2.4.3-L'opérateur linéaire :

$$\begin{aligned} \Lambda : W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^3) &\rightarrow L^4(\Omega, \mathbb{R}) \\ \varphi &\rightarrow \operatorname{tr} \nabla \varphi \end{aligned} \quad (2.24)$$

est continue, et compact.

Preuve.- L'espace $W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R})$ est muni de la norme $\|\varphi\|_{1,4} = \|\varphi\|_{0,4} + \|\nabla \varphi\|_{0,4}$, $\|\cdot\|_{0,4}$ désigne la norme dans $L^4(\Omega)$. Soit φ_n une suite dans $W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ convergeant vers zéro. Alors, $\partial_{ij} \varphi_n$ converge vers zéro dans $L^4(\Omega)$ par suite, $\operatorname{tr} \nabla \varphi_n = \Lambda(\varphi_n) = \sum_{i=1}^3 \partial_{ii} \varphi_n$ converge vers 0, et donc

Λ est continu.

Soit K un ensemble borné dans $W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^3)$, et considérons y_n une suite dans $\Lambda(K)$.

Il existe alors, une suite x_n dans K telle que $\Lambda(x_n) = y_n$.

Comme K est borné, on peut supposer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha x_n \in B$ (B la boule unité dans $W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R})$) or, d'après le théorème d'injection (Rellich-Kondrachov [14]) B est compact dans $L^4(\Omega, \mathbb{R}^3)$

on peut extraire donc, une sous suite $z_{n_k} = \alpha x_{n_k}$ qui converge vers x dans $L^4(\Omega, \mathbb{R}^3)$.

Mais les dérivées de la sous suite z_{n_k} restent bornées dans L^4 . En effet, $\nabla z_{n_k} = \alpha \nabla x_{n_k}$ et ∇x_{n_k} est borné dans L^4 il s'en suit alors, (cf, remarque 4 chap IX Brezis [14]) que la limite x est dans $W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^3)$, c'est-à-dire que

$$z_{n_k} \rightarrow x \text{ dans } W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^3).$$

Comme l'opérateur Λ est continue alors, $y_{n_k} = \Lambda(\alpha x_{n_k})$ converge vers $\Lambda(x)$ ce qui prouve que $\Lambda(K)$ est compact. \square

Théorème 2.4.4.-(Existence de solutions au problème relaxé (P^{**})) On suppose que la densité des forces volumiques $f \in L^{\frac{4}{3}}(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Alors, le problème convexe (P^{**}) admet une solution dans l'espace $W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^3)$.

Preuve.- i) On commence, par déterminer un minorant de la fonctionnelle J^{**} donnée par (2.18), avec l'estimation (2.21) on déduit, que la fonction bipolaire \hat{W}^{**} est coercive et vérifie la même estimation (cf, [56]) :

$$c_1 \|F\|^4 - c_2 \leq \hat{W}^{**}(F) \leq c_3 (\|F\|^4 + 1) \quad (1)$$

combiné avec l'hypothèse $f \in L^{\frac{4}{3}}$ il vient: $\forall \varphi \in W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^3)$

$$J^{**}(\varphi) \geq \alpha \int_{\Omega} \|\nabla \varphi(x)\|^4 dx - \beta \text{vol} \Omega - k \|\varphi\|_{1,p} \quad \text{où } \alpha > 0, \beta \text{ et } k \in \mathbb{R} \quad (2)$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré [1], il existe deux constantes $c > 0$ et d telles que :

$$\forall \varphi \in \Theta \quad J^{**}(\varphi) \geq c \|\varphi\|_{1,4}^4 + d \quad (3)$$

De l'estimation (1) on déduit que quel que soit $\varphi \in W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ $J^{**}(\varphi) < +\infty$.

ii) On suppose que $\Theta \neq \emptyset$, il suffit de choisir $\varphi_0(X) = \frac{5}{6\nu} X$. Soit (φ_n) une suite minimisante i.e

$\varphi_n \in \Theta$ et $\lim J^{**}(\varphi_n) = \inf J^{**}(\psi), \psi \in \Theta$, quand $n \rightarrow \infty$.

D'après (3) φ_n est bornée dans l'espace reflexif $W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ il existe donc, une sous suite φ_{n_k} telle que:

$$\varphi_{n_k} \text{ converge faiblement vers } \varphi \text{ dans } W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^3) \quad (4)$$

(cf.[14]).

iii) Nous allons montrer $\varphi \in \Theta$ c'est à dire : $\det \nabla \varphi > 0$, $\Lambda(\varphi) \geq \frac{5}{2\nu} \text{p.p } \Omega$ et $\varphi = \varphi_0$ sur Γ .

De (4) on déduit que $\det \nabla \varphi_{n_k}$ converge faiblement vers $\det \nabla \varphi$ dans $L^4(\Omega, \mathbb{R})$ (cf.[8]), en utilisant le théorème de Mazur [16] il existe une combinaison convexe $\psi_l = \sum_{i=1}^l \alpha_i \det \nabla \varphi_{n_i}$ avec

$$\alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^l \alpha_i = 1 \text{ telle que } \psi_l \rightarrow \det \nabla \varphi \text{ dans } L^4(\Omega, \mathbb{R}).$$

Quitte à extraire une sous suite qui converge presque partout on déduit que $\det \nabla \varphi \geq 0$ p.p Ω .

L'opérateur de trace $\gamma: W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^3) \rightarrow L^4(\Gamma, \mathbb{R}^3)$ étant compact (cf.[1], [14]) alors,

$\varphi_{n_k} \rightarrow \varphi$ dans $L^4(\Gamma, \mathbb{R}^3)$ et quitte à extraire une sous suite qui converge presque partout on déduit que : $\varphi = \varphi_0$ sur Γ .

D'après le lemme 2.4.3 l'opérateur Λ est aussi compact alors $\Lambda(\varphi_{n_k}) \rightarrow \Lambda(\varphi)$ dans $L^4(\Omega, \mathbb{R}^3)$,

quitte à extraire une sous suite on déduit que $\Lambda(\varphi) \geq \frac{5}{2\nu} \text{p.p}$ dans Ω .

iv) La convexité de la fonction bipolaire \hat{W}^{**} montre que la fonctionnelle J^{**} s.f.s.c.i (cf.[26]) :

$$J^{**}(\varphi) \leq \liminf (\varphi_{n_k}), k \rightarrow \infty.$$

En utilisant la définition de la limite inférieure on conclut :

$$J^{**}(\varphi) = \inf \{J^{**}(\psi) \quad \psi \in \Theta\}$$

φ est donc une solution du problème (P**). \square

Nous allons maintenant donner un résultat d'existence au problème (P).

Théorème 2.4.5.- (Existence de solutions au problème primal (P)) Sous les hypothèses du théorème, le problème (P) possède une solution dans l'espace $W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^3)$.

Preuve.- Soit φ la solution du problème (P**), alors $J^{**}(\varphi) = \inf \{ J^{**}(\psi); \psi \in \Theta \} \leq J(\psi)$ pour tout ψ dans Θ or, φ vérifie la condition $\Lambda(\varphi) \geq \frac{5}{2\nu}$ p.p dans Ω , et d'après le lemme 2.4.2 les singulières de $\nabla\varphi(x)$, $x \in \Omega$ sont à l'extérieur de l'ellipsoïde \mathcal{E} donc $\hat{W}^{**}(\nabla\varphi(\cdot)) = \hat{W}(\nabla\varphi(\cdot))$ p.p dans Ω par suite, $J^{**}(\varphi) = J(\varphi)$ et φ est aussi solution de (P). \square

Remarques 2.4.6

(1) La contrainte $\Lambda(\varphi) \geq \frac{5}{2\nu}$ p.p dans Ω imposée dans l'ensemble des déformations admissibles est motivée par la propriété de la densité de Saint-Venant \hat{W} . Elle peut être considérée comme superflue. Nous donnerons plus de détails à la fin de ce chapitre, au commentaire.

(2) L'injectivité de la solution φ au sens $\text{mes} \{ y \in \varphi(\Omega); \text{card } \varphi^{-1}(y) = 1 \} = 0$ est obtenue grâce aux Théorèmes 1 et 2 de J. Ball [9], (il suffit de prendre $\varphi_0 \in C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ et injective). Le théorème 2 montre, que sous la condition * (voir Annexe A4) φ est un homéomorphisme de Ω sur $\varphi_0(\Omega)$.

(3) Soit $X_0 \in \Omega$, φ une solution du problème (P) le théorème 3.1 de Ball [8] montre, que la densité de Saint-Venant \hat{W} est quasiconvexe en $\nabla\varphi(X_0)$, par conséquent $\hat{W}(\nabla\varphi(X_0)) = Q\hat{W}(\nabla\varphi(X_0))$ il s'ensuit alors, que les valeurs singulières de $\nabla\varphi(X_0)$ sont à l'extérieur de l'ellipsoïde \mathcal{E} .

2.4.b Problème mixte déplacement-traction.

Outre les forces volumiques de densité f , on suppose que la partie Γ_1 du bord $\Gamma = \partial\Omega$ est soumise à des forces surfaciques de densité $g : \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$. ($\Gamma = \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_1$, $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$) avec, $\text{meas}(\Gamma_0) > 0$.

Il est intéressant de noter que la stricte positivité de la mesure de Lebesgue de Γ_0 a une interprétation physique : Il est intuitif que si $\text{meas}(\Gamma_0)$ est nulle, le corps est libre et par suite une position d'équilibre peut ne pas exister.

Le problème correspondant consiste à trouver une déformation φ qui minimise l'énergie

$$J(\varphi) = \int_{\Omega} \hat{W}(\nabla\varphi(x)) dx - \left(\int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx + \int_{\Gamma_1} g(x)\varphi(x) da \right) \quad (2.25)$$

dans l'ensemble Θ donné par (2.19)

Au problème non-convexe de minimisation:

$$(Q) \quad \inf\{ J(\varphi) ; \varphi \in \Theta \} \quad (2.26)$$

on fait correspondre le problème convexifié

$$(Q^{**}) \quad \inf\{ J^{**}(\varphi) ; \varphi \in \Theta \} \quad (2.27)$$

où

$$J^{**}(\varphi) = \int_{\Omega} \hat{W}^{**}(\nabla \varphi(x)) dx - \left(\int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx + \int_{\Gamma_1} g(x) \varphi(x) d\sigma \right) \quad (2.28)$$

Posons $L(\varphi) = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx + \int_{\Gamma_1} g(x) \varphi(x) d\sigma$, la fonctionnelle J^{**} s'écrit alors:

$$J^{**}(\varphi) = \int_{\Omega} \hat{W}^{**}(\nabla \varphi(x)) dx - L(\varphi).$$

Théorème 2.4.7 (Existence de solutions au problème (Q)).**- On suppose que la densité des forces volumiques $f \in L^{\frac{4}{3}}(\Omega, \mathbb{R}^3)$, la densité des forces surfaciques $g \in L^{\frac{4}{3}}(\Gamma_1; \mathbb{R}^3)$. Alors, le problème (Q**) admet une solution dans $W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^3)$.

Preuve.- Nous avons vu dans la preuve du théorème 2.4.4 que \hat{W}^{**} est de classe C^1 et vérifie l'estimation:

$$c_1 \|F\|^4 - c_2 \leq \hat{W}^{**}(F) \leq c_3 (\|F\|^4 + 1) \quad (1')$$

La forme linéaire L est continue dans $W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^3)$, avec l'estimation (1') pour tout

$\varphi \in W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ on a $J^{**}(\varphi) \leq c_3 \text{vol} \Omega + c_3 \|\nabla \varphi\|_{0,4}^4 + |f|_{0,\frac{4}{3}} |\varphi|_{0,4} + |g|_{0,\frac{4}{3}} |\varphi|_{0,4} < +\infty$ où

$\|\cdot\|_{0,p}$ désigne la norme dans $L^p(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3})$ et $|\cdot|_{0,p}$ la norme dans $L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)$ ou dans $L^p(\Gamma, \mathbb{R}^3)$.

En utilisant l'inégalité de Poincaré (cf, Annexe A4) et (1') on déduit; $J^{**}(\varphi) \geq c \|\varphi\|_{1,4} + d$

avec $c > 0$;

Soit φ_n une suite minimisante dans Θ alors, φ_n est bornée dans l'espace reflexif $W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ et

il existe une sous suite notée φ_1 qui converge faiblement vers φ . La convexité de \hat{W}^{**} implique,

que J^{**} est f.i.s.c, en utilisant le même argument que dans la preuve du théorème 2.4.4, on

montre que $\varphi \in \Theta$, et $J^{**}(\varphi) = \inf_{\psi \in \Theta} J^{**}(\psi)$, c'est-à-dire, φ est solution de (Q**). \square

Nous obtenons le résultat d'existence pour le problème mixte déplacement-traction suivant :

Théorème 2.4.8.(Existence de solution au problème (Q))- Sous les hypothèses du théorème 2.4.7, le problème (Q) de déplacement-traction, admet une solution dans $W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^3)$.

Preuve- Soit φ la solution du problème convexifié (Q^{**}) alors, $\varphi \in \Theta$ et

$$J^{**}(\varphi) = \inf\{J^{**}(\theta) ; \theta \in \Theta\} \leq J(\psi) \quad \forall \psi \in \Theta$$

or φ vérifie $\Lambda(\varphi) \geq \frac{5}{2\nu}$ p.p dans Ω par conséquent, $J^{**}(\varphi) = J(\varphi)$ et φ est solution du problème (Q). \square

2.4.c Application. (Existence de minimum pour un cylindre)

Définition du problème.

Soit l'ouvert $\Omega_a = \{ X=(X_1, X_2, X_3) \in \mathbb{R}^3 ; (X_1, X_2) \in \omega \text{ et } |X_3| < a \}$ où ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^2 de frontière de classe C^1 , a un nombre strictement positif.

La configuration de référence $\bar{\Omega}_a$ est occupée par un matériau de Saint-Venant Kirchhoff au repos.

On note, $\Gamma = \partial\omega \times]-a, a[$ le bord latéral, $S_0 = \omega \times \{-a\}$ et $S_1 = \omega \times \{+a\}$ les faces inférieure et supérieure de Ω_a voir figure 2.1.

Nous supposons que, sous l'action de forces appliquées mortes volumiques et surfaciques, le cylindre subit un placement de type :

$$\varphi(X) = (\alpha X_1, \alpha X_2, \chi(X_3)) \quad \forall X \in \Omega_a \quad (2.29)$$

$$\varphi = \text{id} \quad \text{sur } \Gamma$$

où $\alpha \in]0, 1[$, $\chi \in W^{1,4}([-a, +a], \mathbb{R})$ dont la dérivée distributionnelle χ' satisfait:

$$\chi' \geq k \text{ p.p dans }]-a, +a[\quad (2.30)$$

où $k = \sqrt{\frac{2 + \nu - \alpha^2}{\nu}}$, ν désigne le coefficient de Poisson du matériau.

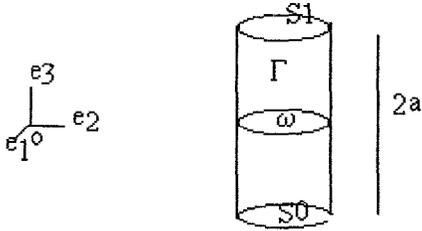


Fig 2.1 Configuration de référence du cylindre Ω_a

2.4.9 Sens mécanique de la déformation (2.29).

Nous supposons que la déformation (2.29), est une conséquence de l'effet de l'interaction entre le solide Ω_a et son environnement (extérieur de Ω_a) sous l'action des forces volumiques mortes de densité :

$$f = (f_1, f_2, f_3) \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \quad (2.31)$$

exercées, à l'intérieur de Ω_a et des forces surfaciques mortes de densité :

$$g_{\pm a} = (g_1, g_2, g_3) \in L^q(S_0 \cup S_1, \mathbb{R}^3) \quad (2.32)$$

exercées, sur les faces S_0 et S_1 , traduit

L'équilibre statique du corps est régi par le système d'équations

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div} P(\nabla \varphi(X)) + f(X) = 0 \text{ dans } \Omega_1 \end{array} \right. \quad (2.33)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi = id \text{ sur } \Gamma \\ P(\nabla \varphi(X))N(X) = g_{\pm a}(X) \text{ sur } S_0 \cup S_1 \end{array} \right. \quad (2.34)$$

où P désigne le premier tenseur de Piola-Kirchhoff $P = FS$ où S est le tenseur donné (2.1).

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$ le tenseur \mathbf{P} se réduit à :

$$\mathbf{P}(\nabla\varphi) = \frac{1}{8} \text{diag}(2\lambda\chi'^2 - (5\lambda + 3\mu), 2\lambda\chi'^2 - (5\lambda + 3\mu), (4\lambda + 8\mu)\chi'^3 - (10\lambda + 8\mu)\chi') \quad (2.35)$$

la divergence de ce tenseur est le vecteur :

$$\text{div}\mathbf{P}(\nabla\varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{(6\lambda + 12\mu)\chi'^2 \chi'' - (5\lambda + 4\mu)\chi''}{4} \end{pmatrix}$$

et de l'équation (2.33), on déduit que la densité des forces volumiques est de la forme :

$$\mathbf{f} = (0, 0, f_3) \quad (2.36)$$

Ainsi, les forces volumiques qu'engendre la déformation (2.29) sont appliquées dans la direction normale à ω .

Considérons les applications $\psi_0 : \omega \rightarrow \mathbf{R}$ et $\psi_1 : \omega \rightarrow \mathbf{R}$ définies par :

$$\psi_0(X_1, X_2) = -a, \text{ et } \psi_1(X_1, X_2) = +a$$

le paramétrage des surfaces $S_0 = \{(X_1, X_2, X_3) ; X_3 = \psi_0(X_1, X_2)\}$ et

$S_1 = \{(X_1, X_2, X_3) ; X_3 = \psi_1(X_1, X_2)\}$, montre que le champ des vecteurs normaux :

$$\mathbf{N}(\mathbf{X}) = \frac{(-\partial_1\psi_0, -\partial_2\psi_1, +1)}{\sqrt{1 + (\partial_1\psi_0)^2 + (\partial_2\psi_1)^2}} \text{ se réduit à : } \mathbf{N}(\mathbf{X}) = \pm \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \text{ est le vecteur } (0, 0, 1) \text{ de la base}$$

canonique de \mathbf{R}^3 .

De l'équation (2.34) on peut écrire, pour $\mathbf{N} = -\mathbf{e}_3$ vecteur normal extérieur à S_0

$\mathbf{P}\mathbf{N} = (0, 0, -\mathbf{P}_{33}) = \mathbf{g}_{-a} = (g_1, g_2, g_3)$ et pour $\mathbf{N} = +\mathbf{e}_3$ vecteur normal extérieur à S_1

$\mathbf{P}\mathbf{N} = (0, 0, \mathbf{P}_{33}) = \mathbf{g}_{+a} = (g'_1, g'_2, g'_3)$, on déduit alors, que la densité des forces surfaciques appliquées sur S_0 est :

$$\mathbf{g}_{-a} = (0, 0, g_3) \quad (2.37a)$$

la densité des forces surfaciques appliquées sur S_1 est :

$$\mathbf{g}_{+a} = (0, 0, -g_3) \quad (2.37b)$$

Les moments résultants $m_{S_0}(\mathbf{g}_{-a}) = \int_{S_0} \mathbf{X} \wedge \mathbf{g}_{-a} d\sigma$ et $m_{S_1}(\mathbf{g}_{+a}) = \int_{S_1} \mathbf{X} \wedge \mathbf{g}_{+a} d\sigma$ sont donnés par :

$$m_{S_0} = \left(-\int_{S_0} X_2 g_3 da, \int_{S_0} X_1 g_3 da, 0 \right), m_{S_1} = \left(\int_{S_1} X_2 g_3 da, -\int_{S_1} X_1 g_3 da, 0 \right) \quad (2.38)$$

La déformation (2.29) induit donc, un couple de forces surfaciques de moment plan $m_{s_0} = -m_{s_1}$.

Avant de donner la formulation variationnelle des équations (2.33)-(2.34) nous énonçons le lemme suivant :

Lemme 2.4.10.- La déformation de type (2.29) vérifie la condition de préservation de l'orientation et les valeurs singulières de son gradient sont à l'extérieur de l'ellipsoïde \mathcal{E} donnée par (2.13).

Preuve.- Soit φ une déformation de type (2.29), son gradient est donné par $\nabla\varphi = \text{diag}(a, a, \chi')$. Le déterminant de ce gradient vaut: $\det\nabla\varphi = a^2\chi'$; comme $\chi \in W^{1,4}(\cdot; -a, +a)$ est de dérivée distributionnelle χ' vérifiant (2.30) on déduit que $\det\nabla\varphi > 0$ dans Ω_a .

On peut remarquer, que les valeurs singulières de $\nabla\varphi$ sont :

$$(\alpha, \alpha, \chi')$$

de l'inégalité (2.30) on peut tirer:

$$v(\chi')^2 \geq (2+v)\alpha^2$$

qu'on peut écrire aussi $(1-v)\alpha^2 + v[\alpha^2 + (\chi')^2] - (1+v) \geq 1$ ce qui montre, que le vecteur (α, α, χ') n'appartient pas à \mathcal{E} . \square

On définit l'ensemble des placements :

$$D = \{ \varphi \in W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^3); \varphi \text{ vérifie (2.29)}, \varphi = id \text{ sur } \Gamma \} \quad (2.39)$$

Le problème de minimisation correspondant est :

$$(R) \quad \begin{cases} \text{trouver } \varphi \in D \text{ telle que} \\ I(\varphi) = \inf \{ I(\psi); \psi \in D \} \end{cases} \quad (2.40)$$

où

$$I(\varphi) = \int_{\Omega_i} \hat{W}(\nabla\varphi(x)) dx - L(\varphi), \text{ avec } L(\varphi) = \int_{\Omega_i} f(x) \varphi(x) dx + \int_{S_0 \cup S_1} g(x) \varphi(x) da,$$

Compte tenu des forces volumiques $f = (0, 0, f_3)$ et surfaciques $g_{\pm a} = (0, 0, \pm g_3)$ appliquées et de la déformation (2.29), la forme linéaire ci-dessus L se réduit à :

$$L(\varphi) = \int_{\Omega_i} f_3(X) \chi(X_3) dX_1 dX_2 dX_3 + \chi(+a) \int_{\omega} g_3(X_1, X_2, +a) dX_1 dX_2 - \chi(-a) \int_{\omega} g_3(X_1, X_2, -a) dX_1 dX_2$$

En effet, considérons les applications : $F_0: \omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $F_1: \omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ définies par :

$$F_0(X_1, X_2) = (X_1, X_2, -a), \quad F_1(X_1, X_2) = (X_1, X_2, +a).$$

F_0, F_1 sont des plongements (applications injectives et la matrice du gradient est de rang 2), on peut écrire alors,

$S_0 = \{F_0(X_1, X_2); (X_1, X_2) \in \omega\}$ et $S_1 = \{F_1(X_1, X_2); (X_1, X_2) \in \omega\}$, d'après la formule intégrale de surface (voir Annexe A4) on a :

$$\int_{S_0} g_{-a} \varphi d\sigma = \int_{\omega} g_{-a}(F_0(X)) \varphi(F_0(X)) \sqrt{\det(F_0'(X)^T F_0'(X))} dX = - \int_{\omega} g_3(X_1, X_2, -a) \chi(-a) dX_1 dX_2$$

$$\int_{S_1} g_{+a} \varphi d\sigma = \int_{\omega} g_{+a}(F_1(X)) \varphi(F_1(X)) \sqrt{\det(F_1'(X)^T F_1'(X))} dX = \int_{\omega} g_3(X_1, X_2, +a) \chi(+a) dX_1 dX_2$$

Avant de donner un résultat d'existence au problème (R), nous avons besoin du lemme suivant:

Lemme 2.4.11- L'ensemble $\Lambda = \{\varphi \in W^{1,4}(\Omega_a, \mathbb{R}^3); \varphi \text{ vérifiant (2.29)}\}$ est un convexe fermé.

Preuve- Soit $\varphi_1, \varphi_2 \in \Lambda$ et $t \in [0,1]$ il existe $\eta_1, \eta_2 \in W^{1,4}((0,1))$ vérifiant $\eta_1' \geq k$ et $\eta_2' \geq k$ il s'ensuit alors, $t \eta_1 + (1-t) \eta_2 \geq k$ et Λ est convexe. Soit

$$\chi_n \in W^{1,4}([-a, +a]) \text{ avec } \chi_n' \geq k \text{ p.p dans }]-a, +a[\text{ et } \chi_n \rightarrow \chi \text{ alors, } \chi' \geq k \text{ p.p dans }]-a, +a[,$$

En effet soit $\chi_n \rightarrow \chi$ dans $W^{1,4}(\Omega_i, \mathbb{R}^3) \Rightarrow \chi_n' \rightarrow \chi'$ dans $L^4([-a, +a])$; quitte à extraire une sous suite qui converge presque partout on a : $\chi' \geq k$ p.p dans $]-a, +a[$, comme Λ est convexe il est aussi faiblement fermé. \square

Nous obtenons le résultat d'existence suivant.

Théorème 2.4.12 (Existence de solution au problème (R))- On suppose que, la densité des forces volumiques donnée par (2.36) appartient à $L^{\frac{4}{3}}(\Omega_a, \mathbb{R}^3)$, la densité des forces surfaciques donnée par (2.37a)-(2.37b) appartient à $L^{\frac{4}{3}}(\Gamma, \mathbb{R}^3)$. Le problème de minimisation (2.40) possède une solution dans l'espace $W^{1,4}(\Omega_a, \mathbb{R}^3)$.

Preuve.- Considérons le problème relaxé :

$$(R^{**}) \quad \inf \{ I^{**}(\varphi); \varphi \in D \}$$

où

$$I^{**}(\varphi) = \int_{\Omega_i} \hat{W}^{**}(\nabla \varphi(x)) dx - L(\varphi), \quad \hat{W}^{**} \text{ désigne la biconjuguée de } \hat{W};$$

Par la méthode directe, du calcul des variations on montre que le problème (R**) admet une solution $\varphi \in D$.

Les valeurs singulières de $\nabla \varphi$ sont à l'extérieur de \mathcal{E} (lemme 2.4.10) par conséquent,

$I(\varphi) = I^{**}(\varphi)$ et donc φ est solution de (R). \square

Remarques 2.4.13.

(1) Dans son état déformé et pour $\alpha = \frac{1}{2}$, l'image du cylindre $\varphi(\Omega_a)$ est soumise au tenseur des contraintes de Cauchy:

$$T = \text{diag} \left(\frac{2\lambda \chi'^2 - (5\lambda + 3\mu)}{4\chi'}, \frac{2\lambda \chi'^2 - (5\lambda + 3\mu)}{4\chi'}, \frac{(2\lambda + 4\mu)\chi'^4 - (5\lambda + 4\mu)\chi'^2}{\chi'} \right).$$

Le nombre k vérifiant $\chi'^2 \geq k^2$ p.p dans $]-a, +a[$ vaut $k^2 = \frac{2 + \nu - \alpha^2}{\nu} = \frac{5\lambda + 3\mu}{2\lambda} > \frac{5\lambda + 4\mu}{2\lambda + 4\mu}$.

On observe donc, que les valeurs propres de T sont positives ainsi, l'état de contraintes est un état de traction.

(2) L'équation (2.33) est équivalente pour $\alpha = \frac{1}{2}$ à l'équation différentielle non-linéaire du second ordre :

$$\left(\frac{3\lambda}{2} + 3\mu\right)\chi'' \chi'^2 - \left(\frac{5\lambda}{4} + \mu\right)\chi'' + f_3 = 0 \text{ dans }]-a, +a[.$$

2.5 Comparaison avec la solution obtenue par le théorème des fonctions implicites.

L'existence de solutions aux problèmes aux limites en élasticité non-linéaire tridimensionnelle est basée sur deux approches :

- Lorsque le matériau est hyperélastique, la solution est obtenue comme minimum de l'énergie totale dans l'ensemble des déformations admissibles.
- Une autre méthode consiste à appliquer le théorème des fonctions implicites (cf, [16], [68]).

Dans Valent [68], un résultat d'existence local et d'unicité est donné pour un problème d'élastostatique.

Aussi, dans la même direction, le théorème 6.4.1 Ciarlet [16] donne une solution locale unique pour des forces volumiques assez petites au problème :

$$(1) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(\mathbf{I} + \nabla u)\mathbf{S}(\mathbf{E}(u)) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (2.41)$$

où le tenseur $\mathbf{S}(\mathbf{E})$ est donné par (2.1), u est le déplacement.

Nous rappelons le résultat suivant.

Théorème 2.5.1 (Ciarlet [16])-Supposons que Ω soit de classe C^2 . Alors pour tout $p > 3$, il existe un voisinage F^p de l'origine dans $L^p(\Omega, R^3)$ et un voisinage U^p de l'origine dans $V^p = \{v \in W^{2,p}(\Omega, R^3); v = 0 \text{ sur } \Gamma\}$ telle que pour tout $f \in F^p$ le problème (1) admet une solution et une seule dans U^p .

Le problème (1) s'écrit en termes de déformation $\varphi = u + \text{id}$:

$$(2) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}P(\nabla\varphi) = f & \text{dans } \Omega \\ \varphi = \text{id} & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (2.42)$$

où P désigne le premier tenseur de Piola-Kirchhoff.

Considérons la fonctionnelle :

$$I(\varphi) = \int_{\Omega} \left\{ \hat{W}(\nabla \varphi(x)) - f(x)\varphi(x) \right\} dx \quad (2.43)$$

et l'ensemble $\Phi^4 = \{ \varphi \in W^{2,4}(\Omega, \mathbb{R}^3); \varphi = id \text{ sur } \Gamma \}$.

On note \bar{u} la solution associée à f du problème (1) dans U^4 . L'application $\bar{\varphi} = \bar{u} + id$ est une solution du problème (2) dans un voisinage de l'identité dans Φ^4 .

Nous avons le résultat suivant.

Théorème 2.5.2. - Supposons que la densité des forces volumiques f est régulière, soit φ_0 la solution de (2). Alors si :

$$\frac{\partial \hat{W}^{**}}{\partial F}(\nabla \bar{\varphi}) = \frac{\partial \hat{W}}{\partial F}(\nabla \bar{\varphi}) \text{ p.p dans } \Omega \quad (2.44)$$

$$\text{tr } \nabla \bar{\varphi} \geq \frac{5}{2\nu} \text{ p.p dans } \Omega \quad (2.45)$$

la solution $\bar{\varphi}$ de (2) est un minimum de l'énergie I dans $\text{int } \Phi^4$.

Preuve. - Les fonctionnelles I , et I^{**} avec $I^{**}(\varphi) = \int_{\Omega} \left\{ \hat{W}^{**}(\nabla \varphi(x)) - g(x)\varphi(x) \right\} dx$, sont

G-différentiables (dérivables au sens de Gâteaux) et pour toute fonction ϑ régulière

$$DI(\varphi)\vartheta = \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial \hat{W}}{\partial F}(\nabla \varphi(x)) : \nabla \vartheta(x) - g(x)\vartheta(x) \right\} dx, \text{ et}$$

$$DI^{**}(\varphi)\vartheta = \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial \hat{W}^{**}}{\partial F}(\nabla \varphi(x)) : \nabla \vartheta(x) - g(x)\vartheta(x) \right\} dx$$

Comme $\bar{\varphi}$ est solution de (2) alors, $DI(\bar{\varphi})\theta = 0$ sous l'hypothèse (2.44) $DI^{**}(\bar{\varphi})\theta = 0$ or,

I^{**} est convexe et $\text{int } \Phi^4$ est un ouvert convexe, le Théorème 4.7.8 Ciarlet [16] montre que $\bar{\varphi}$

est un minimum de I^{**} dans $\text{int } \Phi^4$, sous l'hypothèse (2.45) $I(\bar{\varphi}) = I^{**}(\bar{\varphi}) \leq I(\psi) \forall \psi \in \text{int } \Phi^4$,

ce qui prouve que $\bar{\varphi}$ est minimum de I dans $\text{int } \Phi^4$. \square

Commentaires.

(1) Lorsqu'un déplacement est imposé sur une portion du bord de Ω , l'injectivité au sens :

$$\text{mes } \{y \in \varphi(\Omega); \text{card } \varphi^{-1}(y) > 1\} = 0$$

(cf. Ciarlet [16]) de la solution du problème mixte déplacement-traction est obtenue en ajoutant dans l'ensemble des déformations admissibles la condition :

$$(CI) \quad \int_{\Omega} \det \nabla \varphi \leq \text{vol}(\varphi(\Omega)).$$

(2) Dans le cas de la déformation (2.29), on obtient l'injectivité de la solution en imposant la condition :

$$\chi(-l) \neq \chi(+l).$$

En effet le théorème 1 Ball [9] assure une injectivité pour,

$\chi \in W^{1,4}(-a, +a[)$ vérifiant $\chi' > 0$ p.p dans $] -l, +l[$ pourvu que $\chi / \{-a, +a\}$ soit injective.

(3) Le choix de la constante $0 < \alpha < 1$ dans (2.29) est justifié par la positivité de $\left(\frac{2 + \nu - \alpha^2}{\nu}\right)$.

On peut envisager dans le cas d'un cube $\Omega =]0, 1]^3$ une déformation de type

$$\varphi(X) = (2X_1, 2X_2, \psi(X_3))$$

avec $\psi' \geq 2$ (cette condition montre que les valeurs singulières de $\nabla \varphi$ sont à l'extérieur de \mathcal{E})

Dans ce cas, si on choisit les constantes de Lamé λ et μ telles que $5\lambda = 2\mu$ on peut observer

que l'énergie de St-Venant s'écrit $\hat{W}(F) = g(\psi') = \frac{3\lambda}{2} \psi'^4 + 15\lambda$ qui est une fonction

convexe de ψ' .

(4) L'existence d'un minimum, pour les matériaux de Saint-Venant Kirchhoff dans l'espace de Sobolev $W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ (qui s'injecte dans $C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$) exclue tout phénomène de cavitation ou fracture.

(5) Pour le problème de Dirichlet 2.4.a, la contrainte $\Lambda(\varphi) \geq \frac{5}{2\nu}$ p.p dans Ω qui apparait dans l'ensemble des déformations admissibles (2.19) peut être retirée moyennant une hypothèse sur la condition au bord φ_0 qui est une donnée du problème. Plus précisément, sous la condition

$$\text{tr } \nabla \varphi_0 \geq \frac{5}{2\nu} p. p \text{ dans } \Omega$$

le problème,

$$(A) \quad \inf \left\{ I(\varphi) = \int_{\Omega} \left\{ \hat{W}(\nabla \varphi(x)) - f(x) \varphi(x) \right\} dx; \varphi \in \varphi_0 + W_0^{1,4}(\Omega; \mathbb{R}^3) \right\}$$

admet une solution dans l'espace $W^{1,4}(\Omega; \mathbb{R}^3)$.

L'idée est de montrer que le problème relaxé (A**) (on remplace dans (A) \hat{W} par \hat{W}^{**}) admet une suite minimisante dans

$$\Phi = \left\{ \varphi \in \varphi_0 + W_0^{1,4}(\Omega; \mathbb{R}^3); \operatorname{tr} \nabla \varphi \geq \frac{5}{2\nu} p \cdot p \Omega \right\}$$

En effet, la continuité de l'opérateur Λ d'après le lemme 2.4.3 montre que $\varphi_0 \in \operatorname{int} \Phi$ c'est-à-dire il existe $\delta > 0$ tel que $B(\varphi_0, \delta) \subset \Phi$.

Considérons la fonctionnelle $I^{**}(\varphi) = \int_{\Omega} \left\{ \hat{W}^{**}(\nabla \varphi(x)) - f(x) \varphi(x) \right\} dx$; I^{**} est convexe, s.c.i.

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $I^{**}(\varphi) \leq \inf I^{**} + \varepsilon$; le principe variationnel de Ekeland (cf, M. Struwe [45] th 5.1) montre qu'il existe $\varphi_1 \in \varphi_0 + W_0^{1,4}(\Omega; \mathbb{R}^3)$ tel que : $I^{**}(\varphi_1) \leq I^{**}(\varphi_0)$, et $\|\varphi_1 - \varphi_0\|_{1,4} \leq \frac{\delta}{k_1}$

avec $\frac{1}{k_1} < 1$ il s'en suit alors, que $\varphi_1 \in \Phi$ et $I^{**}(\varphi_1) \leq \inf I^{**} + \varepsilon$. En appliquant le même principe

pour φ_1 , et ainsi de suite, on construit une suite $\varphi_n \in \varphi_0 + W_0^{1,4}$ ($n \geq 1$) vérifiant

$$I^{**}(\varphi_{n+1}) \leq I^{**}(\varphi_n), \text{ et } I^{**}(\varphi_n) \leq \inf I^{**} + \varepsilon.$$

La suite numérique $\alpha_n = I^{**}(\varphi_n)$ est décroissante minorée; elle converge : $\alpha_n \rightarrow \inf I^{**}$.

L'usage de la méthode directe du calcul des variations, montre que le problème relaxé (A^{**}) admet une solution φ qui est la limite faible de la suite minimisante φ_n (plus exactement une sous-suite de φ_n). Finalement, la compacité de l'opérateur Λ assure que $\hat{W}^{**}(\nabla \varphi) = \hat{W}(\nabla \varphi)$ p.p dans Ω , et par conséquent φ est aussi solution de (A).

(6) Recemment B.Dacorogna & P.Marcellini [25] ont donné une condition nécessaire et suffisante à l'existence de solution au problème (A), en dimension 2, sans le potentiel des forces volumique ($f = 0$), et avec une condition au bord de type homogène $\varphi_0(X) = \zeta_0 X$. Cette condition nécessaire et suffisante se traduit par :

$$(1 - \nu)v_1^2(\zeta_0) + \nu v_2^2(\zeta_0) \geq 1 \quad *$$

v_1, v_2 désignent les valeurs singulières de $\zeta_0 \in M^2$. La condition * est équivalente à $\hat{W}^{**}(\zeta_0) = \hat{W}(\zeta_0)$.

Contact unilateral en grande déformation.

Chapitre III

Contact unilatéral en grande déformation.

3.0. Introduction.

La théorie du contact en mécanique est moins développée que la mécanique des milieux continus. Dans de nombreux domaines d'applications, on est confronté à des problèmes de contacts, par exemple le contact entre une bielle et un piston. Au-delà de l'expérience, le contact montre l'existence de phénomènes complexes, et sa modélisation en grande déformation, pose de sérieuses difficultés conceptuelles, mathématiques, et numériques.

Parmi ces difficultés nous pouvons citer :

- Le choix convenable de variables cinématiques et dynamiques décrivant le processus du contact.
- La surface de contact qui est une inconnue du problème et la variation de son étendue selon l'effort appliqué.
- La description Lagrangienne et sa formulation qui se heurte au caractère Eulerienne du problème.

Dans le cas de petites déformations ou contre un obstacle rigide, le problème est bien résolu et la formulation d'une loi de contact se singularise par sa forme d'écriture sous-différentielle (cf. [17], [49], [35]).

En grande déformation et dans [21a] c'est la notion de **fonction distance de contact** qui permet la détection du contact. Nous exposerons cette approche pour formuler le problème aux limites unilatérales de contact.

3.1 Problème de la détection du contact et sa formulation.

Dans la littérature, le problème du contact unilatéral qu'on peut qualifier de contact externe, suppose la connaissance des surfaces de contacts, cette hypothèse réduisant la difficulté, facilite la résolution du problème variationnel correspondant.

On peut déjà observer (voir exemple 3.1.1) que la surface de contact dépend formellement de la nature de la déformation ainsi que de la structure géométrique de la frontière et des matériaux de la charge.

Pour illustrer cela, nous avons choisi l'exemple suivant:

Exemple 3.1.1-

Pour simplifier le problème, on se place en dimension 2 et on suppose que l'un des deux corps est une fondation rigide. Plus précisément, Soit ω le disque unité centré à l'origine des coordonnées et de bord $\Gamma = AB \cup BC \cup CA$. La fondation est assimilée à un fermé C de \mathbb{R}^2 de frontière une courbe régulière contenant une portion de cône $A'B'$ (figure 3.1) d'équation :

$$9x^2 - 72x + 4y^2 + 24y + 144 = 0.$$

Il est facile de vérifier que la déformation :

$$\begin{aligned} \varphi: \omega &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (X, Y) &\rightarrow (2X + 4, 3Y - 3) \end{aligned} \tag{3.1}$$

met en contact l'Arc AB du disque ω avec la cône $A'B'$ de la fondation C indépendamment du matériau constituant ω .

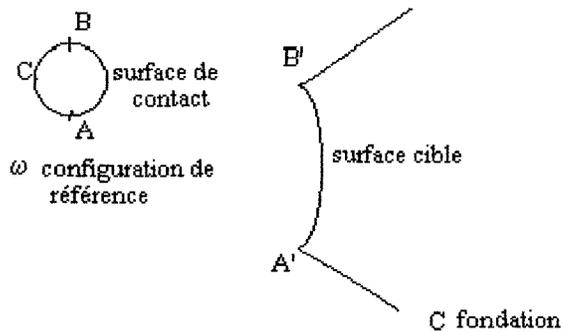


Fig 3.1 Détection de la surface de contact.

Remarque 3.1.2

On peut dire que le contact n'est possible que si les déformations considérées font rapprocher les deux corps, d'où l'idée de formuler une loi de contact basée sur la notion de distance. Il existe une classe importante de problèmes de contact où la formulation spéciale, des conditions du contact se heurte à la description Lagrangienne (cf. Ciarlet [17], Kikuchi [35], Telega [63], Klarbring [37], Simo [60]) Nous avons choisi un exemple où, dans un cas particulier, les conditions du contact sont exprimées en formulation Lagrangienne.

Exemple 3.1.3.

Nous supposons toujours, que l'un des deux corps est une fondation rigide C . Le corps déformable occupe dans sa configuration de référence, l'ensemble $\bar{\Omega}$ où Ω est un domaine de \mathbb{R}^3 . La partie Γ_c du bord de Ω constitue une surface potentielle de contact, la surface potentielle cible de la fondation est assimilée à une partie γ de ∂C .

Si φ est une déformation admissible de Ω ; dans Ciarlet [17] on caractérise, le contact unilatéral par :

$$(1) \varphi(\Gamma_c) \subset C \tag{3.2}$$

$$(2) T(y) \cdot n(y) = 0 \quad \text{si } y = \varphi(X) \in \text{int}C \tag{3.3}$$

$$(3) T(y) \cdot n(y) = -a \cdot n(y) \quad \text{si } y = \varphi(X) \in \partial C \tag{3.4}$$

où T désigne le tenseur des contraintes de Cauchy, $n(y)$ la normale extérieure à la surface déformée $\varphi(\Gamma_c)$ et a un scalaire positif voir figure 3.2.

Classiquement, le caractère Eulerien des conditions (3.3) et (3.4) exprimant le contact unilatéral se traduit dans la description Lagrangienne par :

$$(1') \varphi(\Gamma_c) \subset C \tag{3.5}$$

$$(2') P(\nabla\varphi(X)) N(X) = 0 \quad \text{si } \varphi(X) \in \text{int}C \tag{3.6}$$

$$(3') \{P(\nabla\varphi(X)) - a \cdot \text{cof}(\nabla\varphi(X))\} N(X) = 0 \quad \text{si } \varphi(X) \in \partial C \tag{3.7}$$

où $P = T \text{ cof}F$ est le premier tenseur de Piola-Kirchhoff, N la normale extérieure unitaire à la surface Γ_c .

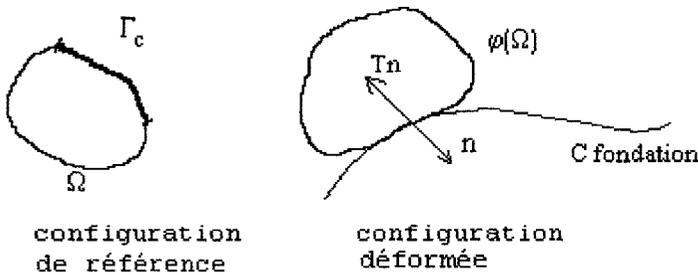


Fig 3.2 Description du contact unilatéral.

3.2 Géométrie des surfaces déformées de contact.

3.2.a Description géométrique.

Soit B (resp B') un solide occupant dans sa configuration de référence l'ensemble $\bar{\Omega}$ (resp $\bar{\Omega}'$) de bord $\partial\Omega$ (resp $\partial\Omega'$).

Un point matériel de B (resp B') est identifié à sa position de référence $X \in \bar{\Omega}$ (resp $X' \in \bar{\Omega}'$); sa position actuelle après déformation est identifiée à $y = \hat{Y}(X)$ (resp $y' = \hat{Y}'(X')$) où $\hat{Y}: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ (resp $\hat{Y}': \bar{\Omega}' \rightarrow \mathbb{R}^3$) est la déformation de B (resp B').

Nous supposons que le bord $\partial\Omega$ (resp $\partial\Omega'$) est une surface régulière, orientable de dimension deux (cf. Thorpe [65]).

Soit Γ une partie de $\partial\Omega$, considérée comme un élément générique de la partition de $\partial\Omega$.

Γ est une surface régulière de mesure positive, dont le bord $\partial\Gamma$ est une courbe de classe C^1 admettant une normale unitaire en tout point de $\Gamma - \partial\Gamma$.

En géométrie différentielle, une caractérisation implicite de Γ et sa contrepartie (sa déformée) $\gamma = \hat{Y}(\Gamma)$ est donnée par les ensembles:

$$\Gamma = \{ X \in U; \varphi(X) = 0 \} \quad (3.8)$$

et

$$\gamma = \{ y \in \mathbb{R}^3; \psi(y) = 0 \} \quad (3.9)$$

où

U est un ouvert de \mathbb{R}^3 , $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction régulière (supposée de classe C^2 et vérifiant $\nabla_X \varphi \neq 0$ dans Γ), $\psi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par:

$$\forall y = \hat{Y}(X), X \in \Gamma \quad \psi(y) = \varphi \circ \hat{Y}^{-1}(y) \quad (3.10)$$

Il est important de connaître les effets de l'action d'une déformation sur la structure géométrique d'une surface, pour cela on suppose que la déformation \hat{Y} est aussi régulière que possible.

Les variations d'un champ de vecteurs, de l'espace tangent, de l'application linéaire tangente associée, de la courbure de la surface Γ et sa déformée γ sont résumées dans le tableau suivant.

structure géométrique	surface matérielle de contact $\Gamma = \{X \in U; \varphi(X) = 0\}$	surface spatiale déformée $\gamma = \{y \in \mathbb{R}^3; \psi(y) = 0\}$
champ de vecteur normal	$\hat{m}(X) = \frac{\nabla_x \varphi(X)}{\ \nabla_x \varphi(X)\ }$	$\bar{n}(y) = \frac{\nabla_y \psi(y)}{\ \nabla_y \psi(y)\ } = \frac{F^{-T}(X)\hat{m}(X)}{\ F^{-T}(X)\hat{m}(X)\ }$
espace vectoriel tangent	$\tau_x = \{u(X) \in \mathbb{R}^3; \hat{m}(X)u(X) = 0\}$	$\tau_y = \{v(y) \in \mathbb{R}^3; \bar{n}(y)v(y) = 0\}$
tenseur d'ordre 2 sur l'espace tangent	$I - \hat{M}(X)$, où $\hat{M}(X) = \hat{m}(X) \otimes \hat{m}(X)$	$I - \bar{N}(y)$, où $\bar{N}(y) = \bar{n}(y) \otimes \bar{n}(y)$
gradient du vecteur normal unitaire	$\nabla_x \hat{m}(X) = \frac{(I - \hat{M}(X))\nabla_x^2 \varphi(X)}{\ \nabla_x \varphi(X)\ }$	$\nabla_y \bar{n}(y) = \frac{(I - \bar{N}(y))\nabla_y^2 \psi(y)}{\ \nabla_y \psi\ }$
application linéaire tangente (Weingarten map)	$L(X) = -\nabla_x \hat{m}(X)(I - \hat{M}(X))$	$W(y) = -\nabla_y \bar{n}(y)(I - \bar{N}(y))$
variation du champ normal (dérivée de Gâteaux)	$\delta \hat{m}(X; \delta X) = -L(X)\delta(X)$	$\delta \bar{n}(y; \delta y) = -W(y)\delta y$
courbure moyenne	$\hat{\kappa}(X) = \frac{1}{2} Tr(L(X))$	$\bar{\kappa}(y) = \frac{1}{2} Tr(W(y))$
courbure de Gauss-Kroneker	$\hat{K}(X) = Det(L(X))$	$\bar{K}(y) = Det(W(y))$
courbure principale	$\hat{c}_1(X) = \hat{\kappa}(X) - (\hat{\kappa}^2(X) - \hat{K}(X))^{\frac{1}{2}}$ $\hat{c}_2(X) = \hat{\kappa}(X) + (\hat{\kappa}^2(X) - \hat{K}(X))^{\frac{1}{2}}$	$\bar{c}_1(y) = \bar{\kappa}(y) - (\bar{\kappa}^2(y) - \bar{K}(y))^{\frac{1}{2}}$ $\bar{c}_2(y) = \bar{\kappa}(y) + (\bar{\kappa}^2(y) - \bar{K}(y))^{\frac{1}{2}}$
rayon de courbure principal	$\hat{r}_1 = \frac{1}{\hat{c}_1}, \hat{r}_2 = \frac{1}{\hat{c}_2}$	$\bar{r}_1 = \frac{1}{\bar{c}_1}, \bar{r}_2 = \frac{1}{\bar{c}_2}$

Tableau T.1 structure géométrique des surfaces Γ et γ (cf.[21b]).

Ces quantités géométriques matérielles et spatiales, trouvent une expression moins lourde dans l'exemple suivant :

Exemple 3.2.1

Soit $\Omega = \{(X_1, X_2, X_3) \in \mathbb{R}^3; X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 < 1\}$ la boule unité de \mathbb{R}^3 occupée par un matériau élastique. Le bord de Ω est $\Gamma = \{X; \varphi(X) = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - 1 = 0\}$.

Un calcul montre : $\nabla_x \varphi(X) = 2X$; donc $\|\nabla_x \varphi(X)\| = 2$ le champ normal se réduit à : $\hat{m}(X) = X$

le tenseur d'ordre deux défini sur l'espace tangent s'écrit : $I - \hat{M}(X) = I - X \otimes X$.

Le calcul du second gradient de φ donne : $\nabla_x^2 \varphi(X) = 2I$, l'application linéaire tangente prend la forme : $L(X) = -(I - X \otimes X)^2$ on déduit alors :

$$\hat{\kappa}(X) = 1, \hat{K}(X) = (X_1^2 X_2^2)(10X_3^2 - 4).$$

On suppose que Ω subit une déformation rigide $\hat{Y}(X) = QX + q, Q^T Q = I, \det Q = 1$ le champ de vecteur normal spatial s'écrit $\bar{n}(y) = \frac{y - q}{|y - q|}$, le calcul du premier et du second gradient de

$\psi = \varphi \circ \hat{Y}^{-1}$ permet de trouver $\bar{N}(y) = \frac{(y-q) \otimes (y-q)}{|y-q|}$ et

$$W(y) = -\frac{1}{|y-q|} \left(I - \frac{(y-q) \otimes (y-q)}{|y-q|^2} \right).$$

3.2.b position relative des surfaces déformables.

Supposons que les deux solides B et B' soumis respectivement aux grandes déformations \hat{Y} et \hat{Y}' sont capables de rentrer en contact.

On peut formuler ce fait en disant que : **le contact est établi entre les deux solides lors de leur déformation si et seulement si les surfaces déformées $\hat{Y}(\Gamma_c) = \gamma_c, \hat{Y}'(\Gamma'_c) = \gamma'_c$ sont en contact.**

Il est donc naturel d'appeler Γ_c et Γ'_c les *surfaces potentielles de contact*. Pour définir la position relative des surfaces déformées γ_c et γ'_c , on convient de choisir γ_c comme étant la surface **cible** et de mesurer le déplacement de γ'_c appelée surface de **contact** par rapport à γ_c .

Considérons une particule $X' \in \Gamma'_c$ de position actuelle $y' \in \gamma'_c$ et une particule $X \in \Gamma_c$ de position actuelle $y \in \gamma_c$. Définissons l'application:

$$H : U'_c \times U_c \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(y', y) \mapsto H(y', y) = y' - y \quad (3.11)$$

où

U'_c (resp U_c) est un ouvert de \mathbb{R}^3 contenant γ'_c (resp γ_c).

L'application (3.11) détermine complètement la position relative des surfaces déformées γ_c et γ'_c , comme γ_c admet en tout point un plan affine tangent on peut décomposer (3.11) sous la forme :

$$H(y', y) = h_n(y', y) + h_T(y', y) \quad (3.12)$$

où

$$h_n(y', y) = \bar{N}(y)H(y', y) = h(y', y)\bar{n}(y), \quad h(y', y) = H(y', y)\bar{n}(y) \quad (3.13)$$

$$h_T(y', y) = ((I - \bar{N}(y))H(y', y)) \quad (3.14)$$

Le tableau T.2 montre schématiquement les correspondances qui existent entre le gradient des fonctions h, h_n, h_T et leur aspect géométrique.

Fonctions	Gradient par rapport à y' $\nabla_{y'}$	Gradient par rapport à y ∇_y
$h(y',y)$	$\bar{n}(y)$	$-\bar{n}(y) + \frac{\nabla_y^2 \psi(y) h_T(y',y)}{\ \nabla_y \psi\ }$
$h_n(y',y)$	$\bar{N}(y)$	$-\bar{N}(y) + \frac{h(y',y)(I - \bar{N}(y))\nabla_y^2 \psi + \bar{n}(y) \otimes \nabla_y^2 \psi(y) h_T(y',y)}{\ \nabla_y \psi\ }$
$h_T(y',y)$	$I(y) = I - \bar{N}(y)$	$-[I - \bar{N}(y)] \left[I + \frac{h(y',y)\nabla_y^2 \psi(y)}{\ \nabla_y \psi\ } \right]$

T.2 calcul du gradient des fonctions de décomposition de H (cf. [21b]).

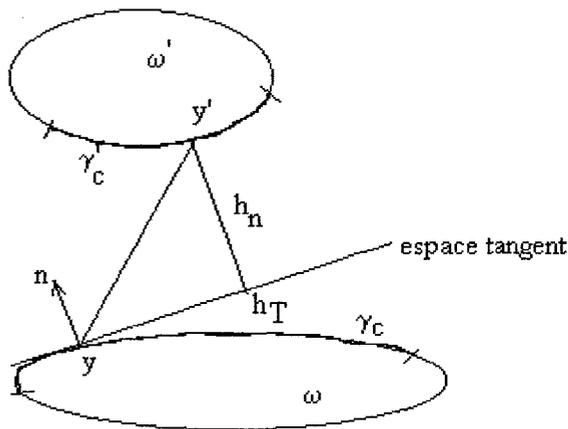


Fig 3.3 interprétation géométrique de h_n , h_T

Le calcul de ces gradients découle des formules classiques du calcul différentiel (cf. Gurtin [31] chapitre I) et permet de déterminer la variation de chacune des fonctions h , h_n , h_T à l'aide de sa dérivée de Gâteaux.

$$Dh(y',y)(\delta y',\delta y) = \nabla_{y'}h(y',y)\delta y' + \nabla_y h(y',y)\delta y \quad (3.15)$$

$$Dh_n(y',y)(\delta y',\delta y) = \nabla_{y'}h_n(y',y)\delta y' + \nabla_y h_n(y',y)\delta y \quad (3.16)$$

$$Dh_T(y',y)(\delta y',\delta y) = \nabla_{y'}h_T(y',y)\delta y' + \nabla_y h_T(y',y)\delta y \quad (3.17)$$

Jusqu'à présent, la position relative des surfaces déformées γ'_c et γ_c est déterminée par la fonction $H(y',y) = y' - y$ où $y' \in \gamma'_c, y \in \gamma_c$.

Comme γ_c est la surface obstacle, l'idée utilisée dans [21b] est de remplacer le point $y \in \gamma_c$ (arbitrairement choisi) par le point particulier :

$$y_p = \text{Projection orthogonale de } y' \text{ sur } \gamma_c$$

Une première question qui se pose est de savoir si cette projection existe; intuitivement si la surface γ_c n'est pas **assez large** par rapport à γ'_c le point y_p n'est pas toujours défini.

Pour assurer l'existence de la projection y_p , nous utilisons l'hypothèse suivante :

$$* \text{ la surface } \gamma'_c \text{ se situe dans l'extension normale de la surface } \gamma_c \quad (3.18a)$$

ceci se traduit par :

$$\gamma'_c \subset N(\gamma_c) = \{y + \alpha \bar{n}(y); y \in \gamma_c, \alpha \in \mathbf{R}^*\} \quad (3.18b)$$

où $\bar{n}(y)$ désigne la normale unitaire à γ_c en y .

Sous l'hypothèse (3.18a), tout point de γ'_c possède une projection orthogonale. En effet, soit $y' \in \gamma'_c$ d'après (3.18b) il existe $y \in \gamma_c, \alpha \in \mathbf{R}^*$ tels que $y' = y + \alpha \bar{n}(y)$ donc le vecteur $y' - y$ est normal à la surface γ_c en y et $y_p = y$ est la projection orthogonale de y' .

Ainsi, le couple (y',y_p) est solution du système d'équations

$$\begin{cases} \psi(y_p) = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

$$\begin{cases} h_T(y',y_p) = H(y',y_p) - h(y',y_p)\bar{n}(y_p) = 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

Ce système d'équations, nous place dans la situation d'appliquer le théorème des fonctions implicites (cf. Thorpe [65]) pour montrer l'existence d'une solution locale.

Soit (y'_0, y_{0p}) une solution du système (3.19)-(3.20) dont l'existence est assuré par l'hypothèse * ou (3.18a), y_{0p} est la projection orthogonale de y'_0 sur γ_c .

La proposition suivante détermine l'existence locale de la fonction projection orthogonale et montre qu'elle est localement un difféomorphisme.

Proposition 3.2.2 (cf [21b])- Supposons que :

$$h(y'_0, y_{0p}) \neq \bar{r}_1(y_{0p}) \text{ et } h(y'_0, y_{0p}) \neq \bar{r}_2(y_{0p}) \quad (3.21)$$

Alors il existe un voisinage $U'_0 \subset \mathbb{R}^3$ de y'_0 et un voisinage $U_{0p} \subset \mathbb{R}^3$ de y_{0p} et une fonction $\bar{Y}_p \in \mathcal{C}^1(U'_0, U_{0p})$ tels que:

$$\text{i) } \psi(\bar{Y}_p(y')) = 0 \text{ et } h_T(y', \bar{Y}_p(y')) = 0, \forall y' \in U'_0 \quad (3.22)$$

$$\text{ii) } (\psi(z) = 0, h_T(z', z) = 0 \forall (z', z) \in U'_0 \times U_{0p}) \Rightarrow z = \bar{Y}_p(z') \quad (3.23)$$

$$\text{iii) si de plus } \bar{n}'(y') \bar{n}(\bar{Y}_p(y')) \neq 0, \forall y' \in \gamma'_c \text{ alors,} \quad (3.24)$$

$$\bar{Y}_p: \gamma'_c \cap U'_0 \rightarrow \gamma_c \cap U_{0p} \text{ est un difféomorphisme.}$$

Preuve: Définissons l'application $\mathcal{G}: U'_c \times U_c \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ par $\mathcal{G}(y', y) = (\psi(y), h_T(y', y))$ en vertu de (3.12) (la déformation \hat{Y} est supposée assez régulière et inversible) et du tableau T.1, θ est de classe \mathcal{C}^1 .

considérons le point (y'_0, y_{0p}) vérifiant $\theta(y'_0, y_{0p}) = 0$, pour appliquer le théorème des fonctions implicites il suffit de montrer que $\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y}(y'_0, y_{0p}) \in \text{INV}(\mathbb{R}, \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ (l'ensemble des applications

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ inversibles) autrement dit il faut que $\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y}(y'_0, y_{0p})$ soit inversible ; le calcul de la

dérivée partielle de θ donne $\partial_y(y', y)z = (\nabla \psi(y)z, \nabla_y h_T(y', y)z)$ notons que :

$\nabla \psi(y) \neq 0 \forall y \in \gamma_c$ par suite pour que $\partial_y \mathcal{G}(y'_0, y_{0p})$ soit inversible il faut que :

$$\det[\nabla_y h_T(y'_0, y_{0p})] \neq 0.$$

connaissant l'expression de $\nabla_y h_T$ du tableau T.2 et sachant que :

$$(I - \bar{N}(y))^2 = (I - \bar{N}(y)), \det(I - \bar{N}(y)) = 1$$

on peut écrire :

$$\det(\nabla_y h_T(y'_0, y_{0p})) = \det[1(y_{0p}) - h(y'_0, y_{0p})W(y_{0p})]$$

où

$W(y_{0p})$ désigne l'application linéaire tangente (voir T.1), par conséquent le deuxième déterminant est non nul si $h(y'_0, y_{0p})$ est différente de l'inverse des valeurs propres du tenseur d'ordre deux $W(y_{0p})$, d'ou la condition (3.23) et le théorème des fonctions implicites montre les assertions i) et ii).

Il reste à montrer que l'application \bar{Y}_p est un difféomorphisme local. Considérons l'ouvert U'_0 on sait déjà que $\bar{Y}_p \in \mathcal{C}^1(U'_0, U_{0p})$ et que $h_T(y', \bar{Y}_p(y')) = 0 \forall y' \in U'_0$ par suite,

$$\nabla_y h_T(y', \bar{Y}_p(y')) = 0 \forall y' \in U'_0 \text{ ou encore } \nabla_y h_T(y', y_p) + \nabla_y h_T(y', y_p) \cdot \nabla_y \bar{Y}_p(y') = 0 \forall y' \in U'_0.$$

En substituant la valeur de $\nabla_y h_T(y', y_p)$ et de $\nabla_y h_T(y', y_p)$ du tableau T.2 on obtient

$$(I - \bar{N}(y_p)) - (I - \bar{N}(y_p)) \left(I + \frac{h(y', y_p) \nabla_y^2 \psi(y_p)}{\|\nabla_y \psi\|} \right) \nabla_y \bar{Y}_p(y') = 0 \text{ en multipliant les deux}$$

$$\text{membres par } I - \bar{N}(y_p) \text{ on arrive à } 1(y_p) = [1(y_p) - h(y', y_p)W(y_p)] \nabla_y \bar{Y}_p(y') \quad (\mathbf{a})$$

Notons A^* le cofacteur du tenseur A d'ordre deux (cf, [13]Bourbaki chap3) en particulier on a $l^*(y_p) = \bar{N}(y_p)$ et $[l(y_p) - h(y', y_p)W(y_p)]^* = \det(l(y_p) - h(y', y_p)W(y_p))\bar{N}(y_p)$ d'autre part un résultat d'algèbre linéaire montre que $\nabla_{y'}\bar{Y}_p(y')$: $\tau_{y'} \rightarrow \tau_{y_p}$ est régulière si et seulement si $|\nabla_{y'}\bar{Y}_p(y')\delta y'_1 \wedge \nabla_{y'}\bar{Y}_p(y')\delta y'_2| \neq 0 \quad \forall \delta y'_1, \delta y'_2 \in \tau_{y'}$ vérifiant $|\delta y'_1 \wedge \delta y'_2| \neq 0$ de l'égalité (a) on obtient $\bar{N}(y)(\delta y'_1 \wedge \delta y'_2) = [1 - 2\bar{\kappa}(y_p)h(y', y_p) + \bar{K}(y_p)h^2(y', y_p)]\bar{N}(y_p)(\delta y_1 \wedge \delta y_2)$ (b) où $\delta y_1 = \nabla_{y'}\bar{Y}_p(y')\delta y'_1$ et $\delta y_2 = \nabla_{y'}\bar{Y}_p(y')\delta y'_2$.

Posons $da' = |\delta y'_1 \wedge \delta y'_2|$ et $da = |\delta y_1 \wedge \delta y_2|$, les surfaces correspondantes. En écrivant $\delta y'_1 \wedge \delta y'_2 = \pm \bar{n}'(y')da'$ et $\delta y_1 \wedge \delta y_2 = \pm \bar{n}(y_p)da$

(b) devient

$$\bar{N}(y_p)\bar{n}'(y_p)da' = [1 - 2\bar{\kappa}(y_p)h(y', y_p) + \bar{K}(y_p)h^2(y', y_p)]\bar{N}(y_p)\bar{n}(y_p)da \quad (c)$$

Multiplions les deux membres de (c) par $\bar{n}(y_p)$ on obtient :

$$\bar{n}'(y')\bar{n}(y_p)da' = [1 - 2\bar{\kappa}(y_p)h(y', y_p) + \bar{K}(y_p)h^2(y', y_p)]da \quad (d)$$

l'égalité (d) montre que $\nabla_{y'}\bar{Y}_p(y')$ est régulière si : (3.23) et $\bar{n}'(y')\bar{n}(y_p) \neq 0$ sont vérifiées. \square

Remarque 3.2.3

La proposition 3.1 montre localement l'existence d'une relation biunivoque entre $y' \in \gamma'_c$ et sa projection orthogonale $y_p \in \gamma_c$ ce difféomorphisme local est assuré par les conditions (3.23) et (3.26) qui signifient que y' n'est pas un centre de courbure de γ_c et que les normales respectives à γ'_c en y' et à γ_c en y_p ne sont pas perpendiculaires.

En particulier, lorsque γ'_c et γ_c sont en contact en y' on a $h(y', y_p) = 0$ et $\bar{n}'(y') = -\bar{n}(y_p)$.

Supposons (3.18b), (3.21), (3.24) réalisées selon la terminologie utilisée dans [21b] l'application scalaire \bar{g} (resp vectorielle \bar{g}) définie par :

$$\bar{g}(y') = h(y', \bar{Y}_p(y')) = (y' - \bar{Y}_p(y'))\bar{n}(\bar{Y}_p(y')) \quad (3.25)$$

$$\text{(resp } \bar{g}(y') = h_n(y', \bar{Y}_p(y')) \text{)} \quad (3.26)$$

est appelée **fonction distance de contact spatiale** (resp **fonction d'écart spatiale**).

La formulation matérielle ou Lagrangienne des applications (3.25), (3.26) nécessite l'introduction des fonctions suivantes définies sur Γ'_c par :

$$\forall X' \in \Gamma'_c \quad \hat{Y}_p(X') = \bar{Y}_p \circ \hat{Y}'(X') \quad (3.27)$$

$$\hat{X}_p(X') = \hat{Y}'^{-1} \circ \hat{Y}_p(X') \quad (3.28)$$

$$\hat{g}(X') = \bar{g} \circ \hat{Y}'(X') \quad (3.29)$$

$$\hat{g}(X') = \bar{g} \circ \hat{Y}'(X') \quad (3.30)$$

3.3 Contact statique.

Soit un solide occupant l'ensemble $\overline{\Omega}$ d'un domaine Ω , dans sa configuration de référence. L'action de l'environnement (ext Ω) est décrite par des forces volumiques définies à l'intérieur de Ω , et des forces de contact surfaciques définies sur une partie de la frontière $\partial\Omega$ de Ω . Dans le cas du contact entre deux solides (sans interpénétration), l'interaction se manifeste par des forces de cohésion sur leurs surfaces de frontière généralisant ainsi, le principe de l'action et de la réaction.

3.3.a Force de contact.

Considérons σ une partie de $\omega = \hat{Y}(\Omega)$, en accord avec l'axiome de Cauchy (cf, [30], [31]) le vecteur contrainte de Cauchy $t: \overline{\omega} \times \mathbf{S}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ exercé à travers $\partial\sigma$ sur σ est donné par:

$$t = t(y, \bar{n}(y)) = T(y) \bar{n}(y) \quad (3.31)$$

où T est le tenseur de contrainte de Cauchy, \bar{n} le vecteur unitaire normal extérieur.

Ainsi, dans le cas d'un tenseur de Cauchy sphérique de type $T(y) = \alpha(y)\mathbf{I}$, la force de contact est colinéaire à la normale unitaire extérieure.

L'introduction du premier tenseur P et du second S de Piola-Kirchhoff (voir chap1) permet de définir les vecteurs de contraintes correspondants.

$$p(X, \hat{m}(X)) = P(X) \hat{m}(X) \text{ et } s(X, \hat{m}(X)) = S(X) \hat{m}(X) \quad (3.32)$$

$$j(X)t(y, \bar{n}(y)) = p(X, \hat{m}(X)) = F(X) s(X, \hat{m}(X)) \quad (3.33)$$

où

$$j(X) = \det F(X) |F^{-T}(X) \hat{m}(X)| \quad (3.34)$$

leur décomposition en partie normale et tangentielle donne :

$$t(y) = t_n(y) \bar{n}(y) + t_T(y) \quad t_n(y) = t(y) \bar{n}(y) \quad t_T(y) = (\mathbf{I} - \bar{N}(y)) t(y) \quad (3.35)$$

$$p(X) = p_n(X) \hat{n}(X) + p_T(X) \quad p_n(X) = P(X) \hat{n}(X) \quad p_T(X) = (\mathbf{I} - \hat{N}(X)) p(X) \quad (3.36)$$

$$s(X) = s_m(X) \hat{m}(X) + s_T(X) \quad s_m(X) = S(X) \hat{m}(X) \quad s_T(X) = (\mathbf{I} - \hat{M}(X)) s(X) \quad (3.37)$$

où

$$\hat{n}(X) = \bar{n}(\hat{Y}(X)), \quad \hat{N}(X) = \bar{N}(\hat{Y}(X))$$

Cela permet la description d'une loi de contact sous la forme spatiale, nominale et matérielle (voir, [21b]).

3.3.b Extension du principe de l'action et de la réaction.

En mécanique des milieux continus, on introduit deux sortes de systèmes de forces : *les forces appliquées à distance*, que les corps exercent les uns sur les autres, et *les forces de contact* que les solides exercent les uns sur les autres à travers leurs surfaces de contact (qu'on peut supposer dépendre de ces surfaces). Les forces de contact vérifient le principe de l'action et de la réaction énoncé, sous forme de théorème (Noll) (cf. Truesdell [66]).

Considérons un point $y' \in \gamma'_c$ de projection $y_p \in \gamma_c$, soit $t'(y')$ (resp $t(y_p)$) le vecteur contrainte de Cauchy exercé en y' sur γ'_c par γ_c (resp exercé en y_p sur γ_c par γ'_c).

Dans le cas du problème de contact, les surfaces effectives de contact sont à priori inconnues et la 3^{ième} loi de Newton (principe de l'action et de la réaction) ne peut pas être appliqué directement.

Une approche utilisée dans [21b] consiste à supposer :

i) l'action mutuelle des surfaces déformées $\bar{\omega}$ et $\bar{\omega}'$ est complètement définie par l'interaction entre γ'_c et $\gamma_p = \bar{Y}_p(\gamma'_c) \subset \gamma_c$.

ii) l'action de γ_p sur γ'_c (resp de γ'_c sur γ_p) est définie par:

$$f'_c(\gamma'_c) = \int_{\gamma'_c} t'(y') da' \quad (\text{resp } f_p(\gamma_p) = \int_{\gamma_p} t(y_p) da) \quad (3.38)$$

iii) pour toute partie $\partial\sigma'_c \subset \gamma'_c$ et $\partial\sigma_p = \bar{Y}_p(\partial\sigma'_c)$ on a:

$$1) f'_c(\partial\sigma'_c) + f_p(\partial\sigma_p) = 0 \quad (3.39)$$

$$2) \int_{\partial\sigma'_c} t'(y') \wedge y' da' + \int_{\partial\sigma_p} t(y_p) \wedge y_p da = 0 \quad (3.40)$$

(3.39) désigne l'extension du principe de l'action et de la réaction aux forces de contact, (3.40) le bilan des moments. En utilisant l'égalité :

$$da = j_p(y', y_p) da' \quad (3.41)$$

où

$$j_p(y', y_p) = \frac{|\bar{n}'(y') \bar{n}(y_p)|}{|1 - 2\bar{\kappa}(y_p)h(y', y_p) + \bar{K}(y_p)h^2(y', y_p)|} \quad (3.42)$$

et le changement de variable, la condition (3.39) s'écrit :

$$\int_{\partial\sigma'_c} [t'(y') + j_p(y', y_p)t(\bar{Y}_p(y'))] da' = 0 \quad \forall \partial\sigma'_c \subset \gamma'_c \quad (3.43)$$

sachant que les fonctions t' , \bar{Y}_p , t sont continues en y' le théorème de localisation (cf. Gurtin [31], Duvaut [28]) donne une forme locale de (3.42) à savoir :

$$t'(y') + j_p(y', \bar{Y}_p(y'))t(\bar{Y}_p(y')) = 0 \quad \forall y' \in \gamma'_c \quad (3.44)$$

de même avec un changement de variable, on peut écrire (3.40) sous la forme :

$$\int_{\partial\sigma'_c} [t'(y') \wedge y' + j_p(y', \bar{Y}_p(y'))t(\bar{Y}_p(y')) \wedge \bar{Y}_p(y')] da' = 0 \quad \forall \partial\sigma'_c \subset \gamma'_c \quad (3.45)$$

et le théorème de localisation donne :

$$t'(y') \wedge y' + j_p(y', \bar{Y}_p(y'))t(\bar{Y}_p(y')) \wedge \bar{Y}_p(y') = 0 \quad \forall y' \in \gamma'_c \quad (3.46)$$

Remarques 3.3.1

(1) En posant $\bar{h}(y') = H(y', \bar{Y}_p(y')) \forall y' \in \gamma'_c$ alors de (3.44) et (3.46) on peut tirer :

$$t'(y') \wedge \bar{h}(y') = 0 \quad \forall y' \in \gamma'_c \quad (3.47)$$

l'équation (3.47) a deux solutions dans le cas où $t'(y') \neq 0 \forall y' \in \gamma'_c$

- (a) $\bar{h}(y') = 0$ ou bien
- (b) $\bar{h}(y') \neq 0$ et $\bar{h}(y')$ est colinéaire à $t'(y')$.

Dans le premier cas y' est en contact avec $\bar{Y}_p(y') = y_p$ et l'extension (3.37) devient :

$$t'(y') + t(y_p) = 0 \quad (j_p(y', y_p) = 1).$$

Dans le second cas, y' n'est pas en contact avec $\bar{Y}_p(y')$ et

$$t'(y') = -j_p(y', y_p) t(y_p) = \alpha \bar{h}(y') \text{ pour } \alpha \in \mathbb{R}$$

(2) Les formes nominales et matérielles de (3.44) sont obtenues en substituant (3.33) dans (3.44), on obtient :

$$j(\hat{X}_p(X'))p'(X') + j'(X')j_p(\hat{Y}'(X'), \hat{Y}_p(X'))p(\hat{X}_p(X')) = 0 \quad \forall X' \in \Gamma'_c \quad (3.48)$$

$$j(\hat{X}_p(X'))F'(X')s'(X') + j'(X')j_p(\hat{Y}'(X'), \hat{Y}_p(X'))F(\hat{X}_p(X'))s(\hat{X}_p(X')) = 0 \quad \forall X' \in \Gamma'_c \quad (3.49)$$

3.3.c Loi de contact unilatéral.

Nous supposons que les domaines Ω et Ω' sont suffisamment réguliers tels que Γ_c et Γ'_c soient de classe C^1 .

La projection y_p de $y' \in \gamma'_c$ sur γ_c est définie par sa forme Eulerienne;

$$\begin{aligned} \{y_p\} &= \text{Proj}_{\gamma_c} : \gamma'_c \rightarrow \gamma_c \\ y' &\mapsto y_p = \bar{Y}_p(y') \end{aligned} \quad (3.50)$$

ou sa forme Lagrangienne;

$$\begin{aligned} \{y_p\} &= \text{Proj}_{\bar{Y}_p(\Gamma_c)}: \Gamma_c \rightarrow \gamma_c \\ X' &\mapsto y_p = \hat{Y}_p(X') \end{aligned} \quad (3.51)$$

\bar{Y}_p désigne l'application (3.27).

La forme Eulerienne (resp Lagrangienne) de la fonction distance de contact est définie par:

$$\bar{d}_n(y') = [y' - \bar{Y}_p(y')] \bar{n}(\bar{Y}_p(y')) \quad (3.52)$$

$$\text{(resp } \hat{d}_n(X') = [\hat{Y}'(X') - \hat{Y}_p(X')] \bar{n}(\hat{Y}_p(X')) \quad (3.53)$$

Remarque 3.3.2.

Lorsque \bar{Y}_p est un difféomorphisme $\bar{d}_n = \bar{g}$, \bar{g} est l'application définie par (3.25). En général les applications (3.50) et (3.51) sont des multifonctions (l'image d'un antécédent est un ensemble de points).

Dans ce cas, une forme plus générale adapté à l'extension du principe de l'action et de la réaction (3.44) est:

$$t'(y') + j_p(y', z)t(z) = 0 \quad \forall y' \in \gamma'_c, \quad \forall z \in \{y_p\} \quad (3.54)$$

Selon [37], [60], [20], [21], une loi de contact est caractérisée par :

- 1) une condition cinématique d'impénétrabilité : $\hat{d}_n \geq 0$
- 2) une condition statique de compression : $p_m \leq 0$
- 3) une condition d'exclusivité : $\hat{d}_n \cdot p_m = 0$

Le sous-gradient de la fonction indicatrice $I_{\mathbb{R}^+}$ permet d'écrire ces trois conditions sous la forme d'une inclusion différentielle :

$$p_m \in \partial I_{\mathbb{R}^+}(\hat{d}_n) \quad (3.55)$$

La relation entre la contrainte normale p_m et la fonction distance de contact \hat{d}_n est une multifonction (cf. Aubin & Frankowska [6]) dont le graphe, est représenté par la figure 3.3

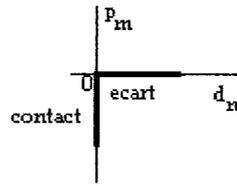


Fig 3.4 Graphe de la loi de contact

Remarque 3.3.3.

L'hypothèse (3.18a), nécessaire pour l'existence d'une projection orthogonale implique une restriction. En effet, (3.18b) montre :

$\forall X' \in \Gamma'_c, \exists X \in \Gamma_c, \alpha \in \mathbb{R}_+$ tels que $\hat{Y}'(X') = \hat{Y}(X) + \alpha \bar{n}(\hat{Y}'(X'))$ intuitivement, le corps Ω' doit être déformé de façon que l'image de Γ'_c se situe dans l'extention normale de $\hat{Y}(\Gamma_c)$ dans ce cas, la condition cinématique d'impenétrabilité $\hat{d}_n \geq 0$ est toujours satisfaite (\hat{d}_n est la fonction distance de contact donnée par (3.35)).

Pour une formulation faible du problème de contact, si on considère les déformation dans l'espace de Sobolev $W^{1,p}$ cela affaiblit, la régularité de l'application (3.10) et par suite celle de la projection orthogonale. Pour remédier, on considère l'approche suivante.

3.4-Approche de la notion d'élément de contact.

En général, dans le problème du contact unilatéral, il s'agit de déterminer deux inconnues essentielles : la déformation et la surface de contact.

Pour des raisons pratiques et de simplification les surfaces de contacts sont choisies au préalable.

Soient Ω, Ω' deux domaines de \mathbb{R}^3 tels que $\bar{\Omega} \cap \bar{\Omega}' = \emptyset$. L'ensemble des déformations d'un domaine Ω (application de Ω dans \mathbb{R}^3 régulière, injective et préservant l'orientation) est noté $Def(\Omega)$, c'est un sous ensemble d'un espace fonctionnel E .

Si Γ désigne une surface régulière connexe (cf, Bourbaki [13b]), on note $C(\Gamma)$ l'ensemble des courbes tracées dans Γ :

$$C(\Gamma) = \{ \alpha : [-\varepsilon, +\varepsilon] \rightarrow \Gamma \text{ application de classe } C^1 \}$$

Etant donné Γ_c, Γ'_c deux parties respectives de $\partial\Omega, \partial\Omega'$ considérées comme deux surfaces régulière, $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $\varphi' : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}^3$ deux applications.

Définition 3.4.1- On dit que le couple (φ, φ') est un élément de contact si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- 1) $\forall \alpha \in C(\Gamma_c), \exists \alpha' \in C(\Gamma'_c), \exists \varepsilon_0$ tels que $\forall |t| \leq \varepsilon_0, \varphi(\alpha(t)) = \varphi'(\alpha'(t))$
- 2) $\forall \beta' \in C(\Gamma'_c), \exists \beta \in C(\Gamma_c), \exists \varepsilon_1$ tels que $\forall |t| \leq \varepsilon_1, \varphi(\beta(t)) = \varphi'(\beta'(t))$

On note $\text{Cont}(\Gamma_c, \Gamma'_c)$ l'ensemble des éléments de contact, c'est-à-dire

$$\text{Cont}(\Gamma_c, \Gamma'_c) = \{(\varphi, \varphi') \in E \times E'; (\varphi, \varphi') \text{ est un élément de contact}\} \quad (3.56)$$

L'ensemble (3.56) n'est pas vide en effet, si les surfaces Γ_c, Γ'_c sont globalement homéomorphes (deux surfaces régulières sont toujours localement difféomorphes), $h : \Gamma_c \rightarrow \Gamma'_c$ étant l'homéomorphisme alors, (h, id) est un élément de contact. Dans le cas général, il suffit de considérer deux transformations f_1 et f_2 telles que $f_1(\Gamma_c), f_2(\Gamma'_c)$ soient des surfaces régulières homéomorphes.

Une première conséquence de la définition 3.5.1 est :

Lemme 3.4.2- Si (φ, φ') est un élément de contact alors, $\varphi(\Gamma_c) = \varphi'(\Gamma'_c)$.

Preuve- Soit $x \in \Gamma_c$ et $\alpha \in C(\Gamma_c)$, passant par x ($\alpha(0) = x$) d'après 1) de la définition 3.5.1 il existe, $\alpha' \in C(\Gamma'_c)$ et un voisinage de t tels que $\varphi(\alpha(t)) = \varphi'(\alpha'(t))$ en particulier, $\varphi(x) = \varphi(\alpha(0)) = \varphi'(\alpha'(0)) \in \varphi'(\Gamma'_c)$ et donc $\varphi(\Gamma_c) \subset \varphi'(\Gamma'_c)$. De la même façon, en utilisant 2) de la définition 3.5.1 on montre que $\varphi'(\Gamma'_c) \subset \varphi(\Gamma_c)$. \square

On suppose que les espaces fonctionnels E, E' sont réflexifs et s'injectent compactement respectivement dans $C(\overline{\Omega}), C(\overline{\Omega}')$ (c'est le cas si $E = W^{1,p}(\Omega), E' = W^{1,p'}(\Omega')$ avec $3 < p, p' < \infty$).

Proposition 3.4.3- L'ensemble des éléments de contacts $\text{Cont}(\Gamma_c, \Gamma'_c)$ est séquentiellement faiblement fermé dans $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3) \times W^{1,p'}(\Omega', \mathbb{R}^3)$.

Preuve- Soit (φ_n, φ'_n) une suite de $\text{Cont}(\Gamma_c, \Gamma'_c)$ convergeant faiblement vers (φ, φ') . Il s'agit de montrer que (φ, φ') est un élément de contact. Comme $(\varphi_n, \varphi'_n) \in \text{Cont}(\Gamma_c, \Gamma'_c) \forall \alpha \in C(\Gamma_c), \exists \alpha' \in C(\Gamma'_c), \varepsilon_0$ tels que $|t| \leq \varepsilon_0 \Rightarrow \varphi_n(\alpha(t)) = \varphi'_n(\alpha'(t))$ d'après l'injection compacte $\varphi_n \rightarrow \varphi$ dans $L^p(\Gamma_c, \mathbb{R}^3)$ et $\varphi'_n \rightarrow \varphi'$ dans $L^{p'}(\Gamma'_c, \mathbb{R}^3)$, quitte à extraire une sous-suite qui converge presque partout on déduit que $\varphi(\alpha(t)) = \varphi'(\alpha'(t))$, même argument est utilisé pour montrer le point 2) de la définition 3.4.1. \square

3.5-Contact entre un matériau polyconvexe et un matériau de St-Venant Kirchhoff.

3.5.a Définition du problème.

Soit Ω un domaine de \mathbb{R}^3 de bord de classe C^1 , $\Gamma_u, \Gamma_f, \Gamma_c$ une partition de $\partial\Omega$ avec $\text{mes}(\Gamma_u) > 0$. La configuration de référence $\bar{\Omega}$ est occupée par un matériau de St-Venant Kirchhoff de potentiel élastique $W = \hat{W}$, (\hat{W} désigne l'énergie (2.4) chap2).

Soit Ω' un domaine de \mathbb{R}^3 dont la configuration de référence $\bar{\Omega}'$ est occupée par un matériau polyconvexe de potentiel élastique W' , on suppose que le bord $\partial\Omega'$ est de classe C^1 et vérifie $\partial\Omega' = \bar{\Gamma}'_u \cup \bar{\Gamma}'_f \cup \bar{\Gamma}'_c$ avec $\Gamma'_u \cap \Gamma'_f \cap \Gamma'_c = \emptyset$, $\text{mes}\Gamma'_u > 0$ voir figure 3.5.

Le matériau de St-Venant Kirchhoff est soumis à une déformation \hat{Y} vérifiant :

$$\Lambda(\hat{Y}) \geq \frac{5}{2\nu} \text{ p.p dans } \Omega$$

Où Λ est l'opérateur (2.24) chapitre II.

Le matériau polyconvexe est soumis à la déformation $\hat{Y}' : \bar{\Omega}' \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Sur la surface Γ_u (resp Γ'_u) un déplacement \bar{Y}_0 (resp \bar{Y}'_0) est imposé, sur la surface Γ_f (resp Γ'_f) une traction g (resp g') est donnée.

Les deux corps déformés entrent en contact, et le contact s'établit entre les surfaces Γ_c et Γ'_c .

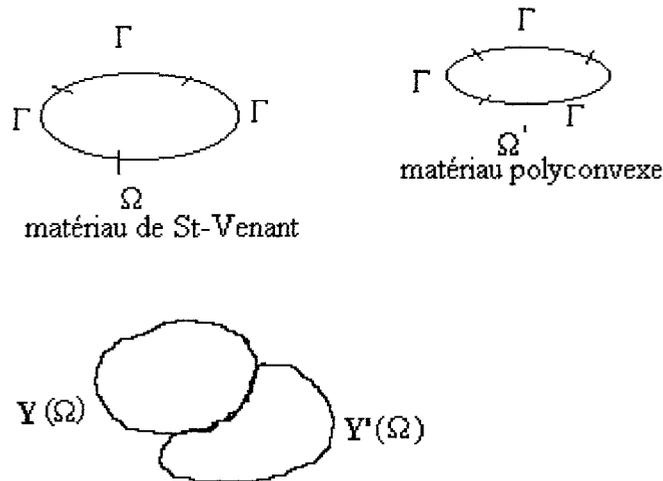


Fig 3.5 contact entre le matériau polyconvexe et le matériau de St-Venant Kirchhoff

3.5.b Le principe du minimum de l'énergie potentielle totale.

Le corps de configuration de référence $\bar{\Omega}'$ étant polyconvexe de densité W' , il existe donc (cf, [8], [26]) une fonction :

$$\phi : \Omega' \times \mathbf{M}^3 \times \mathbf{M}^3 \times \mathbf{R} \rightarrow [0, +\infty] \text{ telle que}$$

- i) $\phi(X', F', H', \delta)$ est une fonction de Carathéodory.
- ii) $\phi(X', \dots)$ est convexe $\forall X' \in \Omega'$ et $W'(X', F') = \phi(X', F', \text{cof}F', \det F')$
- iii) $\phi(X', F', H', \delta) \rightarrow +\infty$ si $\delta \leq 0$,
 $\phi(X', F', H', \delta) \rightarrow +\infty$ quand $F' \rightarrow F'_0, H' \rightarrow H'_0, \delta \rightarrow 0^+ \forall X' \in \Omega', \forall F'_0, H'_0 \in \mathbf{M}^3$.
- iv) $\phi(X', F', H', \delta) \geq c(\|F'\|^{p'} + \|H'\|^{q'} + \delta^{r'}) + b(X)$, $c > 0, b \in L^1(\Omega'), \frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} \leq 1, r' > 1$.

On suppose que le matériau polyconvexe est homogène : $W'(X', F') = W'(F')$. L'énergie potentielle totale du matériau de St-Venant Kirchhoff est :

$$J(\hat{Y}) = \int_{\Omega} \hat{W}(\nabla \hat{Y}(X)) dX - L(\hat{Y}), \quad L(\hat{Y}) = \int_{\Omega} f(X) \hat{Y}(X) dX + \int_{S_1} g(X) \hat{Y}(X) da.$$

L'énergie potentielle totale du matériau polyconvexe est :

$$J'(\hat{Y}') = \int_{\Omega'} W'(\nabla \hat{Y}'(X')) dX' - L'(\hat{Y}'), \quad L'(\hat{Y}') = \int_{\Omega'} f'(X') \hat{Y}'(X') dX' + \int_{\Gamma'_f} g'(X') \hat{Y}'(X') da'.$$

Notons que L (resp L') est la fonctionnelle des charges mortes appliquées sur Ω (resp Ω').

Considérons les ensembles :

$$V = \left\{ \hat{Y} \in W^{1,4}(\Omega, \mathbf{R}^3); \Lambda(\hat{Y}) \geq \frac{5}{2\nu} \text{ p.p } \Omega, \hat{Y} = \bar{Y}_0 \text{ sur } \Gamma \right\} \quad (3.62)$$

et

$$V' = \left\{ \hat{Y}' \in W^{1,p'}(\Omega', \mathbf{R}^3); \hat{Y}' = \bar{Y}'_0 \text{ sur } \Gamma'_n, p' > 3 \right\} \quad (3.63)$$

On définit l'ensemble des déformations cinématiquement admissibles par :

$$K = \{(\varphi, \varphi') \in V \times V' \cap \text{Cont}(\Gamma_c, \Gamma'_c)\} \quad (3.64)$$

Lemme 3.5.1- L'ensemble K donné par (3.64) est séquentiellement faiblement fermé.

Preuve- En fait, il suffit de voir que l'ensemble $V \times V'$ est séquentiellement faiblement fermé, ce qui est immédiat en faisant appel au lemme 2.4.3 chap 2 et à l'injection compact $W^{1,p'}(\Omega', \mathbf{R}^3) \xrightarrow{c} L^{p'}(\Gamma'_c, \mathbf{R}^3)$ ($p' > 3$). □

Posons :

$$A(\hat{Y}, \hat{Y}') = J(\hat{Y}) + J'(\hat{Y}') \quad (3.65)$$

le problème de minimisation (principe du minimum de l'énergie totale) correspondant est :

$$(T) \quad \inf \{ A(\hat{Y}, \hat{Y}'); (\hat{Y}, \hat{Y}') \in K \} \quad (3.66)$$

auquel on associe le problème :

$$(T^{**}) \quad \inf \{ A^{**}(\hat{Y}, \hat{Y}'); (\hat{Y}, \hat{Y}') \in K \} \quad (3.67)$$

où

$$A^{**}(\hat{Y}, \hat{Y}') = J^{**}(\hat{Y}) + J'(\hat{Y}') \quad (3.68)$$

avec $J^{**}(\hat{Y}) = \int_{\Omega} \hat{W}^{**}(\nabla \hat{Y}(X)) dX - L(\hat{Y})$, \hat{W}^{**} désigne la biconjuguée de l'énergie de St-Venant.

Hypothèses sur les charges appliquées.

(H) On suppose que $f \in L^{\frac{4}{3}}(\Omega, \mathbb{R}^3)$, $g \in L^{\frac{4}{3}}(\Gamma_f, \mathbb{R}^3)$ et $f' \in L^{\frac{p'-1}{p'}}(\Omega', \mathbb{R}^3)$, $g' \in L^{\frac{p'-1}{p'}}(\Gamma'_f, \mathbb{R}^3)$

Sous l'hypothèse (H), la fonction linéaire L (resp L') est continue dans $W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ (resp $W^{1,p'}(\Omega', \mathbb{R}^3)$). Avec la convexité de \hat{W}^{**} (resp la polyconvexité de W), la fonctionnelle J^{**} (resp J') est s.f.i.s.c dans $W^{1,4}$ (resp s.f.i.s.c dans $W^{1,p'}$)

Nous obtenons le résultat d'existence suivant :

Théorème 3.5.2- Sous l'hypothèse (H) ci-dessus, et si K est non vide.

Alors, le problème (T) possède une solution dans l'espace $W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^3) \times W^{1,p'}(\Omega', \mathbb{R}^3)$.

Preuve- La coercivité de J^{**} et de J' montre qu'il existe $c > 0$, $d > 0$ et e trois constantes telles que

$$A^{**}(\hat{Y}, \hat{Y}') \geq c \|\hat{Y}\|_{1,4}^4 + d \left\{ \|\hat{Y}'\|_{1,p'}^{p'} + \|cof \nabla \hat{Y}'\|_{0,q'}^{q'} + |\det \nabla \hat{Y}'|_{0,r'}^{r'} \right\} + e.$$

La fonctionnelle A^{**} est s.f.i.s.c. En effet soit

(\hat{Y}_n, \hat{Y}'_n) convergeant faiblement vers (\hat{Y}, \hat{Y}') dans $W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^3) \times W^{1,p'}(\Omega', \mathbb{R}^3)$ on peut écrire,

$$A^{**}(\hat{Y}, \hat{Y}') = J^{**}(\hat{Y}) + J'(\hat{Y}') \leq \liminf J^{**}(\hat{Y}_n) + \liminf J'(\hat{Y}'_n) \leq \liminf \{ J^{**}(\hat{Y}_n) + J'(\hat{Y}'_n) \} = \liminf A^{**}(\hat{Y}_n, \hat{Y}'_n)$$

3. Contact unilatéral en grande déformation.

En utilisant, les méthodes directes du calcul des variations on montre, que le problème régularisé (T^{**}) possède une solution (θ, θ') c'est à dire :

$$(\theta, \theta') \in K \text{ et } A^{**}(\theta, \theta') \leq A^{**}(\varphi, \varphi') \quad \forall (\varphi, \varphi') \in K$$

or, θ vérifie en plus $J^{**}(\theta) = J(\theta)$ il vient alors, $A(\theta, \theta') = A^{**}(\theta, \theta')$ et comme $A^{**} \leq A$ il en découle, que (θ, θ') est aussi une solution du problème (T) . \square

Commentaire.

L'approche 3.4, basée sur la notion "d'élément de contact" est essentiellement géométrique. Son intérêt est de donner un résultat d'existence à la formulation faible du problème de contact unilatéral.

Nous n'avons pas d'informations sur le vecteur contrainte de Cauchy, et sa décomposition en partie normale et tangentielle.

Peut-on supposer que pour une telle approche, il peut y avoir frottement ?

Bibliographie.

- [1] Adams, R.A.(1975) : Sobolev spaces, Academic Press, New-york.
- [2] Acerbi, E.; Fusco, N.(1984) : Semicontinuity problems in the calculus of variations, Arch.Rational.Mech.Anal.86, p.125-145.
- [3] Atman, S.S.; Brezis, H.(1978) : The existence of orientation-preserving deformations in nonlinear elasticity, in nonlinear Analysis and Mechanics, edited by R.Knops.Pitman Res.Notes in Math.27, London, p.1-29.
- [4] Aubert, G.; Tahraoui, R.(1984) : Théorèmes d'existences en optimisation non-convexe Applicable Analysis.18, p.75-100.
- [5] Aubert, G.(1986) : Contributions aux problèmes du calcul des variations et application à l'élasticité non linéaire, Thèse de Doctorat, ParisVI.
- [6] Aubin, J.P.; Frankowska, H.(1990) : Set valued Analysis, Birkhauser, Boston.
- [7] Baiocchi, C.; Buttazzo, G.; Gastaldi, F.; Tomarelli, F.(1988) : General Existence Theorems for Unilateral problems in Continuum Mechanics, Arch.Rational.Mech.Anal, 100, p.144-189
- [8] Ball, J.M.(1977) : Convexity conditions and existence theorems in non linear élasticity, Arch.Rational.Mech.Anal.64, p.337-403.
- [9] Ball, J.M.(1981) : Global invertibility of Sobolev functions and the interpenetration of mater, Proc.Roy.Soc.Edin.88A, p.315-328.
- [10] Ball, J.M.; Marsden, J.E.(1984) : Quasiconvexity at the boundary, positivity of the second variation and elastic stability, Arch.Rational.Mech.Anal.86, p.251-277.
- [11] Ball, J.M.; Murat, F.(1984) : $W^{1,p}$ -Quasiconvexity and variational problems for multiple integrals, J.Funct.Anal.58, p.225-253.
- [12] Ball, J.M.; Currie, J.C.; Olver, P.J.(1981) : Null Lagrangians, weak continuity and variational problems of arbitrary order, J.Funct.Anal.41, p.135-174.
- [13a] Bourbaki, N.(1970) : Element de Mathématique.Algèbre 1, chap1-3.
- [13b] Bourbaki, N.(1967) : Element de Mathématique.Espaces vectoriels topologiques. FascXVIII Livre V.Hermann, Paris.
- [14] Brezis, H.(1983) : Analyse Fonctionnelle, Théorie et Application, Masson, Paris.
- [15] Bufler, H.(1993) : Configuration dependent loading and nonlinear elastomechanics, Z.A.M.M. Z.angew.Math.Mech. 73, p.4-5, T 20-T33.
- [16] Ciarlet, P.G.(1988) : Mathematical Elasticity, Vol 1.North-Holland, Amsterdam.

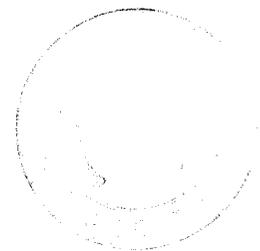
- [17] Ciarlet, P.G.; Necas, J.(1985) : Unilateral problems in non-linear three dimensional elasticity, Arch.Rational.Mech.Anal.87, p.319-338.
- [18] Ciarlet, P.G.; Necas, J.(1987) : Injectivity and self contact in non-linear elasticity, Arch.Rational.Mech.Anal.19, p.171-188.
- [19] Courant, R.(1962) : Calculus of variations, Courant institute publications, New York.
- [20] Curnier, A.; Alart, P.(1988) : A generalised Newton method for contact problems with friction, J.Meca.Theor.Appl., No1, 7, p.67-82.
- [21a] Curnier,A.; Chang, QI.; Telega, J.J.(1992) : Formulation of unilateral contact between two elastic bodies undergoing finite deformations, C.R.A.S.Paris, t.314, sérieII, p.1-6.
- [21b] Q He.; Q.C.;Telega, J.J; Curnier, A.(1995) : Unilateral contact of two solids subject to large deformations, formulation and existence ; sous presse
- [22] Charrier, P.; Dacorogna, B.; Hanouzet, B.; Laborde, P.(1987) : An existence Theorem for slightly compressible materials in non-linear elasticity, S.I.A.M, J.Math.Anal, Vol.19, No1, p.70-85.
- [23] Dacorogna, B.(1993) : Some recent results on polyconvex, quasiconvex and rank one convex function, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, Analyse et Analyse numérique. No.10.93 sept.
- [24] Dacorogna, B.(1982) : Quasiconvexity and relaxation of non convex problems in the calculus of variations, J.Funct.Anal, 46, p.102-118.
- [25] Dacorogna, B.;Marcellini, P.(1995) : Existence of minimizers for Non-Quasiconvex integrals, Arch.Rational.Mech.Anal, 131, p.350-399.
- [26] Dacorogna, B.(1988) : Direct methods in the calculus of variations, Applied.Math.Sciences, 78.Springer-Verlag.
- [27] Dacorogna, B.; Alibert, J.J.(1992) : An example of quasiconvex function that is not polyconvex in dimension two, Arch.Rational.Mech.Anal, 117, p.155-166.
- [28] Duvaut, G.; Lions, J.L.(1976) : Inequalities in Mechanics and physics, Springer-Verlag, Berlin.

- [29] Ekeland, I.; Temam, R.(1974) : Analyse convexe et problèmes variationnels, Donod.
- [30] Germain, P.(1972) : Mécanique des milieux continus, Tome 1, Masson, Paris.
- [31] Gurtin, M.(1981) : Introduction to continuum mechanics, Academic Press, New-york.
- [32] Gurtin, M.; Temam, R.(1981) : On the anti-plane shear problem in finite elasticity, J.Elasticity 11, No ; 2
- [33] Gruwank, A.; Rabier, P.J.(1990) : On the smoothness of convex envelopes, Trans.Amer.Math.Society, p.690-709.
- [34] Huges, T.J.R.; Marsden, J.E.(1983) : Mathematical foundations of elasticity, Printice-Hall, Englewood cliffs.
- [35] Kikuchi, N.; Oden, J.J.(1988) : Contact problems in elasticity, S.I.A.M, Philadelphia.
- [36] Kinderlehrer, D.; Stampacchia, G.(1980) : An introduction to variational inequalities and their applications, Academic Press, New-york.
- [37] Klarbring, A.(1985) : Contact problems in linear elasticity.Friction laws and mathematical programming. Applications, LinKoping studies in Science and Technology, Sweden.
- [38] Le Dret, H.(1990) : Sur les fonctions de matrices convexes et isotropes, C.R.A.S, Paris, SérieI, t.310, p.617-620.
- [39] Le Dret, H.; Raoult, A.(1993) : Le modèle de membrane non linéaire comme limite variationnelle de l'élasticité non linéaire tridimensionnelle, C.R.A.S, Paris, SérieI, t.317, p.221-226.
- [40] Le Dret, H ; Raoult, A.(1994) : The quasiconvexity of the St-Venant Kirchhoff stored energy function . Rap, Institut d'informatique et de mathématiques appliquées de Grenoble RT 107.
- [41] Le Dret, H.; Raoult, A.(1994) : Enveloppe quasiconvexe de la densité d'énergie de St-Venant Kirchhoff, C.R.AS, Paris, SérieI, t.318, p.93-98.

- [42] Marcellini, P.(1990) : Non convex integrals of the calculus of variations, in *Methods of non convex Analysis*, Springer, Lectures Notes in Mathematics, Vol.1446, p.16-57, Springer-Verlag.
- [43] Marcellini, P.(1989) : Regularity of minimizers of integrals of the calculus of variations, with non standard growth conditions, *Arch.Rational.Mech.Anal.* 105, p.267-284.
- [44] Meyers, N.(1965) : Quasiconvexity and lower semi continuity of multiple integrals of any order, *Trans.Amer.Math.Soc*, 119, p.125-149.
- [45] Michael, S.(1990) : *Variational methods.Applications to non-linear partial differential equations and Hamiltonian systems*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New york.
- [46] Morrey, C.B.(1966) : *Multiple integrals in the calculus of variations*, Springer-Verlag, Berlin.
- [47] Necas, J.(1967) : *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, Paris.
- [48] Odgen, R.N.(1972) : Large deformation isotropic elasticity:on the correlation of theory and experiment for compressible rubber-like solids, *Proc.Roy.Soc.London.A*, 338, p.567-583.
- [49] Panagiotopoulos, P.D.(1985) : *Inequality problems in Mechanics and applications*, Birkhauser, Boston.
- [50] Podio-Guidugli, P. ; Vergara-Caffarelli, G ; Virga, G.(1987) :The role of ellipticity and normality assumptions in formulating live-boundary conditions in elasticity, *Quarterly of applied mathematics* .Vol, XLIV, number 4, p.659-664.
- [51] Podio-Guidugli, P ; Vergara-Caffarelli, G.(1984) : On a class of live traction problems in elasticity, in *trends and applications of pure mathematics to mechanics*. (P.G.Ciarlet ; M.Roseau. Editors), Spinger-Verlag,Berlin, p. 291-304.
- [52] Raoult, A.(1986) : Non polyconvexity of the stored energy function of St-Venant Kirchhoff material, *Aplikace Matematiky*.31, p.417-419.
- [53] Raymond, J.P.(1987) : Conditions nécessaires et suffisantes d'existence de solutions en calcul des variations, *Analyse non linéaire*, *Ann.Inst.Henri.Poincaré*, Vol. 4, n° 2, p.169-202.

- [54] Raymond, J.P.(1987) : Théorème d'existence pour des problèmes variationnels non convexes, Proc.Roy.Soc.Edin.107A, p.43-64.
- [55] Raymond, J.P.(1988) : Théorème de régularité locale pour des systèmes elliptiques dégénérés et des problèmes non différentiables, Ann.Fac.Sci.ToulouseIV, p.381-412.
- [56] Raymond, J.P.(1992) : Existence of minimizers for vector problems without quasiconvexity condition, Non-linear Analysis, Theory, Methods and Applications, Vol.18,No.9, p.818-828.
- [57] Schwartz, L.(1970) : Topologie générale et analyse Fonctionnelle, Enseignement des Sciences, Hermann, Paris.
- [58] Schwartz, L.(1973) : Théorie des Distributions, Hermann, Paris.
- [59] Sewell,M.J.(1967) : On configuration-dependent loading Arch.Rat.Mech.Anal 23, p.327-351.
- [60] Simo, J.C.(1992) : An Augmented Lagrangian treatment of contact problems involving friction, Computers and Structures, Vol 42, p.97-116.
- [61] Sverak, V.(1992) : Rank-one convexity does not imply quasiconvexity, Proc.Roy.Soc.Edin.120A, p.185-189.
- [62] Tahraoui, R.(1986) : Théorèmes d'existences en calcul des variations et Applications à l'élasticité non linéaire, C.R.A.S, Paris, t.302, SérieI, p.495-498.
- [63] Telega, J.J.(1988) : Topics on unilateral contact problems of elasticity and inelasticity. In:Non-smooth Mechanics and Applications, edited by.Moreau, J.J and Panagiotopoulos, P.D, p.340-461.Springer-Verlag, Wien, New York.
- [64] Temam, R.(1982) : A characterisation of quasiconvex functions, App.Math.Optim.8, p.287-291.Springer-Verlag, New York.
- [65] Thorpe, J.A.(1978) : Elementary Topics in Differential Geometry, SpringerVerlag, Berlin.
- [66] Truesdell, C.(1977) : A First Course in Rational Continuum Mechanics, Academic Press, New York.

- [67] Tonelli, L.(1915) : Sur une méthode directe du calcul des variations, Rnd.Circ.Palermo, t.39, p.233-264.
- [68] Valent, T.(1988) : Boundary Value Problems of Finite Elasticity, Springer-Verlag.
- [69] Wang, C.C.;Truesdell, C.(1973) : Introduction to Rational Elasticity, Noordhoff, Groningen.
- [70] Young, L.C.(1980) : Lectures On the Calculus of Variations and Optimal Control Theory, Chelsea.



Annexe A.

Résultats d'Analyse Fonctionnelle.

A.1 Ensembles, Fonctions et Convexités.

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} . Si x, y sont deux points de E , on appelle segment d'extrémités x, y l'ensemble: $[x,y]=\{ \lambda x + (1-\lambda)y ; 0 \leq \lambda \leq 1 \}$.

Un ensemble $K \subset E$ est dit convexe si et seulement si pour tout couple $(x,y) \in K ; [x,y] \subset K$.

Soit K un ensemble convexe de E et $f : K \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, on dit que f est convexe si $\forall x,y \in K f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$.

Soit U une partie de E , on appelle fonction indicatrice de U la fonction I_U définie par:

$$I_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in U \\ +\infty & \text{si } x \notin U \end{cases}$$

On déduit qu'un ensemble K de E est convexe si et seulement si sa fonction indicatrice I_K est convexe. Ainsi le problème

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in K \text{ telle que} \\ f(u) = \inf \{ f(v); v \in K \} \end{cases}$$

est équivalent au problème :

$$(P) \quad \inf \{ f(v) + I_K(v), v \in E \}$$

On appelle épigraphe d'une fonction $g : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, le sous ensemble

$$\text{épi } g = \{ (x,\alpha) \in E \times \mathbb{R} ; g(x) \leq \alpha \}$$

Soit E un espace métrique (ou topologique localement convexe), on dit qu'une fonction $f: E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est semi-continue inférieurement en x_0 (on écrit en abrégé s.c.i) si et seulement si $f(x_0) \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x)$

On rappelle que $\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sup_{\eta > 0} \{ \inf_{|x-x_0| < \eta} f(x) \}$

f est s.c.i si et seulement si l'épigraphe de f est fermé.

Une fonction $f: \mathbb{R}^{nm} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite rang un convexe si et seulement si

$$f(\lambda A + (1-\lambda)B) \leq \lambda f(A) + (1-\lambda)f(B) ; \forall \lambda \in [0,1], \forall A,B \in \mathbb{R}^{nm} \text{ avec } \text{rang}(A-B) \leq 1$$

$Cf = \sup \{ g \leq f ; g \text{ convexe} \}$ est l'enveloppe convexe.

$Pf = \sup \{ g \leq f ; g \text{ polyconvexe} \}$ est l'enveloppe polyconvexe

$Qf = \sup \{ g \leq f ; g \text{ quasiconvexe} \}$ est l'enveloppe quasiconvexe.

$Rf = \sup \{ g \leq f ; g \text{ rang 1-convexe} \}$ est l'enveloppe rang 1-convexe.

En général : $Cf \leq Pf \leq Qf \leq Rf \leq f$.

A.2 Polarité et Sous-différentiabilité.

Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, la duale de f (ou la transformée de Legendre de f), $f^*: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est par définition

$$f^*(x^*) = \text{Sup} \{ \langle x, x^* \rangle - f(x) ; x \in \mathbb{R}^n \}$$

La biduale (ou la biconjuguée de f), $f^{**}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ est définie par:

$$f^{**}(x) = \text{Sup} \{ \langle x, x^* \rangle - f^*(x^*) ; x^* \in \mathbb{R}^n \}$$

f^{**} est convexe s.c.i et $f^{**} \leq f$

f est convexe et s.c.i $\Leftrightarrow f = f^{**}$

Si f est finie mais pas nécessairement convexe alors $f^{**} = Cf$ (la plus grande fonction convexe qui soit plus petite que f)

Soit f une fonction strictement convexe de E dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ i.e $\text{Dom} f = \{ x \in E; f(x) < +\infty \} \neq \emptyset$
pour
tout $x_0 \in \text{Dom} f$ la limite

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \{ f(x_0 + hy) - f(x_0) \} = Df(x_0).y$$

existe. Nous dirons que le sous ensemble $\partial f(x_0) = \{ p \in E^*; \forall y \in E, \langle p, y \rangle \leq Df(x_0).y \}$ est le sous-différentielle de f en x_0 . Les éléments p sont appelés sous-gradient.

Le sous-différentiel ∂I_K de la fonction indicatrice de K est le cône convexe fermé

$$\partial I_K(x) = \{ p \in E^*; \forall y \in K, \langle p, y - x \rangle \leq 0 \}$$

A.3 Espaces de Fonctions

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n

$C(\Omega)$ = l'ensemble des fonctions continues $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$C(\overline{\Omega})$ est l'ensemble des fonctions continues $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ qui se prolongent continûment à $\overline{\Omega}$.

Le support d'une fonction continue $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ noté $\text{supp } u$ est: $\text{supp } u = \overline{\{ x \in \Omega; u(x) \neq 0 \}}$

$C_0(\Omega) = \{ u \in C(\Omega) ; \text{supp } u \subset \Omega \text{ est compact} \}$. Pour $k \geq 0$ entier

$C^k(\Omega) = \{ u: \Omega \rightarrow \mathbb{R} ; \forall m \leq k, \nabla^m u \in C(\Omega) \}$

$C_0^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_0(\Omega)$, $C^\infty(\Omega) = \bigcap C^k(\Omega)$

$C_0^\infty(\Omega) = D(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_0(\Omega)$

Régularité de domaine.

• Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borne. On dit que Ω est un **ouvert de classe C^m** , $m \geq 1$, si pour tout $x \in \partial\Omega$, il existe un voisinage U de x dans \mathbb{R}^n et une application bijective $H : Q \rightarrow U$, où $Q = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_j| < 1, j = 1, 2, \dots, n\}$ le cube unité, telle que $H \in C^m(Q)$, $H^{-1} \in C^m(U)$, $H(Q_+) = U \cap \Omega$, $H(Q_0) = U \cap \partial\Omega$, où $Q_+ = \{x \in Q ; x_n > 0\}$ et $Q_0 = \{x \in Q ; x_n = 0\}$.

- Si H est Lipschitzienne, on dit que Ω est Lipschitzien.

- On dit que Ω vérifie la propriété du cône, s'il existe un cône $K_\Omega \subset \mathbb{R}^n$, telle que tout point x de $\partial\Omega$ est le sommet d'un cône $K(x) \subset \Omega$ et congruent à K_Ω .

- On dit que Ω vérifie la propriété du segment, si :

$\forall x \in \partial\Omega, \exists U_x$ voisinage de $x, \exists y_x ;$ si $z \in \Omega \cap U_x$, alors $z + ty_x \in \Omega, \forall t \in (0,1)$

Ω de classe $C^m \Rightarrow \Omega$ Lipschitzien $\Rightarrow \Omega$ vérifie la propriété du cône $\Rightarrow \Omega$ vérifie la propriété du segment

A.4 Espaces L^p , Espaces de Sobolev $W^{1,p}$

Soit $1 \leq p \leq \infty$ on dit que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable est dans $L^p(\Omega)$ si

$\|f\|_{L^p} = |f|_{0,p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$ est finie, muni de cette norme $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach.

On dit que $f \in L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ si $f \in L^p(\Omega')$ pour tout Ω' tel que $\Omega' \subset \subset \Omega$ et Ω' est compact.

Lemme fondamental du calcul des variations:

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tel que $\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = 0 \quad \forall \varphi \in C^\infty_0(\Omega)$
alors $u = 0$ p.p Ω .

Dérivées faibles: Soit $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, on dit que $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ est la dérivée (partielle) faible de u par rapport à x_i si on a $\int_\Omega v(x)\varphi(x)dx = - \int_\Omega u(x)\partial_i\varphi(x)dx, \forall \varphi \in C^\infty_0(\Omega)$.

$W^{1,p}(\Omega) = \{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ dérivable au sens faible ; } u \in L^p(\Omega) \text{ et } \forall u \in L^p(\Omega) \}$, on note

$$\|u\|_{W^{1,p}} = |u|_{1,p} = (|u|_{0,p}^p + |\nabla u|_{0,p}^p)^{1/p} \quad \text{si } 1 \leq p < \infty$$

$$|u|_{1,\infty} = \max\{ |u|_\infty, |\nabla u|_\infty \} \quad \text{si } p = \infty$$

Si $1 \leq p < \infty$, alors $W^{1,p}_0(\Omega)$ est la fermeture de $C^\infty_0(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$. Par abus de langage, on dira souvent si Ω est borné que $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$ si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et $u = 0$ sur $\partial\Omega$ le bord de Ω .

De façon analogue, on définit les espaces d'ordre supérieur. Si $m > 1$ est un entier, on note $W^{m,p}(\Omega) = \{ u \in W^{m-1,p}(\Omega) \text{ et } \partial_i u \in W^{m-1,p}(\Omega) \}$.

Formule intégrale de Green: soit $T: \Omega \rightarrow M^n$ et $\theta: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} T \cdot \theta dx = - \int_{\Omega} T: \nabla \theta dx + \int_{\partial \Omega} T \cdot n \theta da$$

Inégalité de Jensen:

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, $u \in L^1(\Omega)$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe tel que $f \circ u \in L^1(\Omega)$, alors

$$f\left(\frac{1}{\operatorname{mes} \Omega} \int_{\Omega} u(x) dx\right) \leq \frac{1}{\operatorname{mes} \Omega} \int_{\Omega} f(u(x)) dx$$

Inégalité de Poincaré:

$$\forall u \in W^{1,p}(\Omega), u = u_0 \text{ sur } \Gamma_0 \exists c > 0 / \int_{\Omega} |u|^p dx \leq c \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^p + \left| \int_{\Gamma_0} u da \right|^p \right\}$$

Intégrale, mesure superficielle.

Soient ω un ouvert de \mathbb{R}^{N-1} et $F: \omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ une fonction de classe C^1 . On dit que F est un plongement si F est injective et pour tout $x \in \omega$ la matrice $F'(x)$ est de rang $N-1$.

Definition: Soit $S = \{ F(x); x \in \omega \}$, si u est une fonction continue de S dans \mathbb{R} et à support compact, on pose:

$$\int_S u(\sigma) d\sigma = \int_{\omega} u(F(x)) \sqrt{\det(F'(x)^T F'(x))} dx$$

(cf. J. Dieudonné, *Eléments d'analyse*, Vol 2; Gauthiers-Villars, Paris 1974)

Théorème de Mazur: Soit E un espace vectoriel normé et u_n converge faiblement vers u

dans E . Alors il existe une combinaison convexe $v_p = \sum_{n=1}^p \lambda_n u_n \rightarrow u$, $\lambda_n \geq 0$ $\sum_{n=1}^p \lambda_n = 1$

Condition d'injectivité dans l'espace de Sobolev.

Théorème 1. (J.M. Ball [9])- Soit Ω un domaine de \mathbb{R}^n de frontière Lipschitzienne. Soit

$u_0: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue et injective dans Ω . Soit $p > n$ et $u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ vérifiant

$u = u_0$ dans $\partial \Omega$, $\det \nabla u(x) > 0$ p.p dans Ω . Alors

i) $u(\bar{\Omega}) = u_0(\bar{\Omega})$

ii) u transforme tout ensemble mesurable de $\bar{\Omega}$ en un ensemble mesurable dans $u_0(\bar{\Omega})$ et la formule

$$\int_A f(u(x)) \det \nabla u(x) dx = \int_{u(A)} f(y) dy \quad *$$

est satisfaite pour tout ensemble mesurable $A \subset \bar{\Omega}$ et toute fonction mesurable $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tels que l'un des membres de $*$ existe.

iii) u est injective presque partout i.e l'ensemble $S = \{y \in u_0(\bar{\Omega}); \operatorname{card} u^{-1}(y) > 1\}$ est de mesure zero.

iv) Si $y \in u_0(\Omega)$ alors $u^{-1}(y)$ est contenu dans Ω , si $y \in \partial u_0(\Omega)$ alors pour toute composante connexe C de $u^{-1}(y)$ $C \cap \partial \Omega \neq \emptyset$.

Le résultat suivant donne la condition pour laquelle une fonction u vérifiant les hypothèses du théorème 1 est un homeomorphisme.

Théorème 2.(J.M.Ball [9])- Sous les hypothèses du théorème 1, soit $u_0(\Omega)$ vérifiant la propriété du cône, et supposons que pour $q > n$

$$\int_{\Omega} |\nabla u(x)^{-1}|^q \det \nabla u(x) dx < \infty$$

Alors u est un homéomorphisme de Ω sur $u_0(\Omega)$ et l'inverse $v = u^{-1} \in W^{1,q}(u_0(\Omega), \mathbb{R}^3)$.