

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir le grade de

Docteur en mécanique

par

Bahaidin DAMIRI

**MODELE ANALYTIQUE POUR L'ANALYSE DU TRANSDUCTEUR
FLEXTENSIONNEL DE CLASSE IV DANS L'AIR**

Soutenu le 8 Mars 1996 devant la commission d'examen:

Président	Monsieur D. BUISINE
Rapporteurs	Monsieur M. BEN TAHAR Monsieur J. BOINET
Examineurs	Madame J. ADDA Monsieur D. BOUCHER Monsieur D. BUISINE Monsieur J.C DEBUS Monsieur B. HAMONIC

A Françoise,

A mon frère Fouad,

A la mémoire de mon père,

A ma mère, mes soeurs, ma famille et tous mes amis.

Cette thèse a été préparée dans le Laboratoire
d'Acoustique de l'ISEN
(Institut Supérieur d'Electronique du Nord)

Le code éléments finis ATILA utilisé a été conçu pour le GERDSM
(Groupe d'Etude et de Recherche en Détection Sous Marine)
Son développement a été financé par la DCAN
(Direction des Constructions et Armes Navales).

Je remercie vivement Monsieur le Professeur D. BUISINE d'avoir accepté la présidence de ce jury.

Je remercie Monsieur M. BEN TAHAR et Monsieur J. BOINET d'avoir accepté le rôle de rapporteurs et d'avoir jugé ce travail dans une version provisoire.

Je tiens à remercier Madame J. ADDA de THOMSON SINTRA et Monsieur D. BOUCHER de la DGADCN, qui ont accepté de participer à ce jury.

Ce travail n'aurait vraisemblablement pas abouti sans Monsieur le Professeur J. C. DEBUS, qui m'a apporté un soutien permanent, tant sur le plan scientifique que sur le plan humain, je lui exprime mon très sincère attachement.

J'adresse mes vifs remerciements à Monsieur B. HAMONIC, qui a accepté de participer au jury, pour ses conseils et pour son aide lors de la rédaction de ce mémoire.

J'assure l'ensemble des membres du laboratoire de ma reconnaissance pour leur aide efficace, et plus spécialement R. BOSSUT et J.M. DROULEZ pour leurs conseils judicieux en informatique, B. DUBUS, A-C. HLADKY et A. LAVIE pour leur disponibilité, l'aide précieuse qu'ils m'ont apportée et la sympathie qu'ils m'ont témoignée.

Enfin, je remercie l'Institut Supérieur d'Electronique du Nord qui m'a permis de réaliser ce travail dans les meilleurs conditions.

SOMMAIRE

INTRODUCTION	1
CHAPITRE I :	
<i>Présentation générale des transducteurs flextionnels</i>	3
I - 1 Application des basses fréquences en acoustique sous-marine	5
I - 2 Les projecteurs basse fréquence	9
I -2.1 Utilisation des projecteurs basse fréquence en acoustique sous-marine.	9
I -2.2 Transducteurs Flextionnels	10
I -2.3 Description des cinq classes de flextionnels	10
I -2.4 Historique et évolution des différents modèles mathématiques	11
I - 3 Transducteur flextionnel de classe IV	12
I -3.1 Principe de fonctionnement	12
I -3.2 Description et géométrie	14
I - 4 Conclusion	17

CHAPITRE II :

Présentation des différentes approches pour l'analyse des transducteurs

<i>flexensionnels de classe IV</i>	19
II - 1 Des différentes analyses mathématiques utilisées pour le transducteur flexensionnel de classe IV	21
II - 2 Méthode des éléments finis	23
II - 2.1 Présentation	23
II - 2.2 Présentation des différentes analyses nécessaires utilisées par la méthode des éléments finis.	23
II - 2.2.1 Analyse statique d'une structure élastique	23
II - 2.2.2 Analyse modale d'une structure élastique	23
II - 2.2.3 Analyse harmonique d'une structure élastique	24
II - 2.2.4 Analyse modale d'une structure piézoélectrique	24
II - 2.2.5 Analyse harmonique d'une structure piézoélectrique	25
II - 2.3 Présentation du code de calcul ATILA	25
II - 3 Diffusion acoustique et équations intégrales	25
II - 3.1 Présentation du code de calcul EQI	26
II - 4 Technique des schémas équivalents	26
II - 4.1 Circuits électriques équivalents pour les transducteurs	26
II - 4.2 Schéma équivalent du transducteur flexensionnel de classe IV	27
II - 4.2.1 Identification des éléments du schéma	28
II - 4.3 Elaboration d'un schéma équivalent du transducteur à partir des contributions séparées de la coque et du moteur	30
II - 4.3.1 Principe	31
II - 4.3.2 Détermination des différents paramètres	32
II - 4.3.3 Schéma équivalent du projecteur complet	36
II - 4.4 Caractéristiques du projecteur complet	37

II - 5 Conclusion	38
-------------------------	----

CHAPITRE III :

<i>Détermination analytique des caractéristiques de la coque</i>	39
III - 1 Géométrie de la coque	41
III - 2 Utilisation de la méthode des éléments finis	43
III - 2.1 Présentation des différentes analyses nécessaires	43
III - 2.2 Modélisation	43
III - 2.3 Résultats	43
III - 3 Déterminations des déplacements des points d'une structure chargée	49
III - 4 Détermination de la première fréquence de résonance	53
III - 4.1 Principe	53
III - 4.2 Déplacements	54
III - 4.2.1 Comparaison avec la méthode des éléments finis	56
III - 4.3 Première fréquence de résonance	59
III - 4.4 Résultats	59
III - 4.4.1 Comparaison avec la méthode des éléments finis	59
III - 4.4.2 Analyse et interprétation des résultats	62
III - 5 Détermination de la deuxième fréquence de résonance	70
III - 5.1 Principe	70
III - 5.1.1 Méthode des coefficients de flexibilité	70
III - 5.2 Deuxième fréquence de résonance	72
III - 5.2.1 Cas à deux masses	72
III - 5.2.2 Cas à trois masses	73
III - 5.2.3 Deuxième fréquence de résonance	75

III - 5.3	Résultats	76
III - 5.3.1	Comparaison avec la méthode des éléments finis	76
III - 5.3.2	Analyse et interprétation des résultats	79
III - 6	Détermination de la fréquence d'antirésonance mécanique	80
III - 6.1	Principe	80
III - 6.1.1	Méthode	81
III - 6.2	Fréquence de coupure	81
III - 6.3	Résultats	82
III - 6.3.1	Comparaison avec la méthode des éléments finis	82
III - 6.3.2	Analyse et interprétation des résultats	83
III - 7	Mode de membrane	87
III - 7.1	Principe	87
III - 7.2	Déplacements	87
III - 7.2.1	Comparaison avec la méthode des éléments finis	87
III - 7.3	Fréquence de membrane	87
III - 7.4	Résultats	88
III - 8	Conclusion	92

CHAPITRE IV :

	<i>Détermination analytique des caractéristiques du moteur</i>	93
IV - 1	Description du Janus, Tonpilz et du moteur du flexensionnel de classe IV	95
IV - 1.1	Le transducteur type Tonpilz	95
IV - 1.2	Le transducteur type Janus	96
IV - 1.3	Moteur du transducteur flexensionnel de classe IV	97
IV - 2	Théorie générale sur les vibrations longitudinales des barres	97

IV - 3	Application de la théorie	98
IV - 3.1	Cas homogène	98
IV - 3.1.1	Modèle type Janus	98
IV - 3.1.2	Modèle Tonpiliz	102
IV - 3.1.3	Modèle de moteur du transducteur flexensionnel de classe IV	104
IV - 3.2	Cas piézoélectrique	106
IV - 3.2.1	Effet piézoélectrique	106
IV - 3.2.2	Etude du Janus	109
IV - 3.2.3	Etude du Tonpiliz	115
IV - 3.2.4	Cas type du moteur du classe IV	117
IV - 4	Conclusion	120

CHAPITRE V :

	<i>Exemples d'applications</i>	<i>121</i>
V - 1	Exemple 1 : Transducteur à coque de type I (ga = 521. mm)	123
V - 1.1	Description	123
V - 1.2	Elaboration du schéma équivalent global du projecteur	124
V - 1.3	Elaboration du schéma équivalent à partir des contributions séparées	127
V - 1.4	Schéma équivalent du moteur seul	127
V - 1.5	Schéma équivalent de la coque seule	132
V - 1.6	Schéma équivalent du transducteur complet	136
V - 2	Exemple 2 : transducteur à coque de type 2 (ga = 1150. mm)	140
V - 2.1	Description	140
V - 2.2	Elaboration du schéma équivalent global du projecteur	140
V - 2.3	Elaboration du schéma équivalent à partir des contributions séparées	142

V - 2.4	Schéma équivalent du moteur seul	142
V - 2.5	Schéma équivalent de la coque seule	147
V - 2.6	Schéma équivalent du projecteur complet	150
V - 3	Conclusion	153
CONCLUSION		155
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES		157
ANNEXE I :		163
<i>Fréquences de flexion et de membrane</i>		
AI - 1	Déplacements	163
AI - 2	Première fréquence de résonance de la coque	166
AI - 2.1	Energie cinétique de flexion	166
AI - 2.2	Energie potentielle de flexion	167
AI - 3	Fréquence de membrane	167
AI - 3.1	Energie cinétique de membrane	167
AI - 3.2	Energie potentielle de membrane	168
ANNEXE II :		169
<i>Coefficients de flexibilité</i>		
AII - 1	Eléments de la première ligne de la matrice de flexibilité	169
AII - 2	Eléments de la deuxième ligne de la matrice de flexibilité	170
AII - 3	Eléments de la troisième ligne de la matrice de flexibilité	171
ANNEXE III :		173
<i>Résistance de rayonnement</i>		
ANNEXE IV :		175
<i>Equivalences électromécaniques</i>		

NOTATIONS

A, B	constantes définissant la géométrie de la coque,
A_i	aire des sections,
$[A]$	matrice de flexibilité,
c	célérité du son,
C	capacité,
C_0	capacité bloquée,
c_i	compliances équivalentes de la coque, ($i = 1,2$)
c_m	compliance équivalente du moteur,
c_{iM}, c_{iN}, c_{iT}	constantes d'intégration relatives au moment fléchissant, à l'effort normal et à l'effort tranchant,
C_{BF}	capacité basse fréquence,
C_0	capacité bloquée,
E	module d'élasticité longitudinale (module d'YOUNG),(élasticité) champ électrique, (piézoélectricité)
E_{cf}	énergie cinétique de flexion,
E_{cm}	énergie cinétique de membrane,
E_{pf}	énergie potentielle de flexion,
E_{pm}	énergie potentielle de membrane,
f_1, f_2	fréquences de résonance du premier et second mode de la coque,
f_r	fréquence de résonance du transducteur dans l'air,
f_{rm}	fréquence de résonance du moteur,

f_{ram}	fréquence d'antirésonance du moteur,
f_c	fréquence d'antirésonance mécanique de la coque,
g_a	grand axe moyen,
G	module d'élasticité transversale,
$[G]$	matrice dynamique,
h	épaisseur,
I	moment d'inertie,
$[I]$	matrice unité,
k	nombre d'onde, ou coefficient de couplage
$[K]$	matrice de rigidité mécanique,
l_i	masses équivalentes de la coque,
l_m	masse équivalente du moteur,
L	self,
L_i	longueur,
m_i	masses,
$M(\theta), \bar{M}(\theta)$	moment fléchissant,
$M(\theta), M(s)$	point définie par son angle θ ou son abscisse s ,
$[M]$	matrice masse,
$N(\theta), \bar{N}(\theta)$	effort normal,
N_m	facteur de transformation électromécanique,
n	nombre d'anneaux ou de barreaux de céramiques piézoélectriques,
p	pression,
r, R	rayons de courbures,

s	abscisse curviligne
S_1	surface réduite,
$[S]$	tenseur des déformations,
$[S^E]$	tenseur des compliances à champ électrique constant,
t	temps,
T	contrainte
$T(\theta), \bar{T}(\theta)$	effort tranchant,
$[T]$	tenseur des contraintes,
$u_i(\alpha)$	déplacement horizontal,
$v_i(\alpha)$	déplacement vertical,
$x, y, z,$	système de coordonnées spatiales,
Y	admittance électrique,
Z	impédance électrique,
α, β, θ	angles définissant la position d'un point,
ε	rapport du grand rayon de courbure/petit rayon de courbure,
$[\varepsilon^S]$	tenseur diélectrique à déformation constante,
$[\varepsilon^T]$	tenseur diélectrique à contrainte constante,
φ	angle délimitant les régions 1 et 2,
λ	longueur d'onde,
ν	coefficient de Poisson,
ρ	masse volumique,
ω	pulsation,

INTRODUCTION

Les projecteurs électroacoustiques employés actuellement en acoustique sous-marine utilisent l'effet piézoélectrique ou magnétostrictif, pour convertir l'énergie électrique en énergie mécanique.

Les transducteurs les plus classiques, de type Tonpiliz, sont des structures qui vibrent longitudinalement. Ils sont composés d'une colonne de céramiques piézoélectriques comprise entre une contremasse lourde et un pavillon léger en contact avec le milieu environnant; de tels transducteurs, pour lesquels les dimensions sont proportionnelles à la longueur d'onde émise, sont très encombrants lorsqu'on les utilise comme projecteurs basse fréquence (< 1 kHz).

Pour une onde se propageant en milieu marin, plus la fréquence est basse, plus les pertes d'énergie sont faibles, donc plus la portée de détection est grande.

Pour avoir des puissances élevées et des fréquences de plus en plus basses tout en ayant des dimensions raisonnables, il est nécessaire d'employer des transducteurs flexensionnels.

Les transducteurs flexensionnels font partie d'une classe d'amplificateurs mécaniques, composée d'une partie active appelée moteur, généralement piézoélectrique (barreaux, disques, anneaux) ou magnétostrictive et d'une coque qui rayonne dans le fluide environnant. Le principe de leur fonctionnement est basé sur l'amplitude de la déformation volumique à la résonance de la coque.

L'analyse mathématique de ces transducteurs se révèle difficile de par le nombre de mécanismes mis en jeu : piézoélectricité au niveau du moteur, vibrations de la coque, couplage fluide structure et rayonnement acoustique. Il existe à priori cinq classes de transducteurs flexensionnels.

Les transducteurs de classe IV, III et V sont pour le moment les plus utilisés. Ceux de type V utilisent les vibrations radiales d'un anneau ou d'un disque de céramique, les transducteurs de type IV sont composés d'un cylindre ovale et d'une ou plusieurs colonnes de céramiques piézoélectriques ou de barreaux magnétostrictifs, ils ont les avantages suivants : ils sont compacts et ont un bon rapport puissance/poids ; ils sont capables de fournir une puissance acoustique élevée à une fréquence basse (au dessus de 300 Hz) ; ils ont une très bonne résistance aux chocs ; ils peuvent être facilement associés en antennes compactes ; enfin, de nombreuses informations validées existent concernant leur comportement physique...

Il n'existe pas à l'heure actuelle de méthode analytique simple permettant la conception du transducteur flexensionnel de classe IV.

Le comportement mécanique du transducteur flexensionnel de classe IV implique un couplage complexe entre la vibration longitudinale du moteur et le mouvement de flexion de la coque. Il est néanmoins susceptible d'être représenté sous forme de schéma équivalent. Ce schéma peut être obtenu en assemblant le circuit représentant le moteur au circuit représentant la co-

que, en utilisant les hypothèses suivantes :

- le circuit moteur à une seule branche motionnelle correspondant au premier mode longitudinal,
- le circuit coque à deux branches motionnelles pour représenter le premier mode de flexion et le deuxième mode de flexion ou le premier mode de membrane.

L'objet de cette thèse est de proposer un modèle analytique simple pour l'analyse des transducteurs flex-tensionnels de classe IV, en vue de son optimisation.

La méthode proposée consiste à étudier de manière simple les vibrations mécaniques de la coque afin de déterminer les différents paramètres nécessaires à la mise en place du schéma équivalent. De la même manière, on propose une méthode analytique pour pouvoir déterminer les paramètres du schéma équivalent du moteur.

Ce rapport est divisé en cinq chapitres :

Le premier chapitre est une présentation générale des transducteurs flex-tensionnels, avec différentes approches mathématiques utilisées pour ces transducteurs, et plus particulièrement pour le transducteur flex-tensionnel de classe IV.

Le deuxième chapitre est une présentation des techniques utilisées pour l'étude des transducteurs électroacoustiques utilisés en acoustique sous-marine ; une présentation brève de la méthode des éléments finis nécessaire pour la comparaison avec les méthodes analytiques y est rappelée. La technique des schémas équivalents citée plus haut est enfin détaillée.

Le troisième chapitre porte sur la mise en oeuvre de la méthode analytique proposée pour déterminer les deux premiers modes de résonance et du premier mode d'antirésonance mécanique de la coque.

Dans le quatrième chapitre, après avoir appliqué une méthode analytique pour déterminer le premier mode propre de vibration longitudinale des structures élastiques admettant la même géométrie que les transducteurs Janus et Tonpilz ainsi que le moteur du transducteur de classe IV, pour valider l'approche, l'effet piézoélectrique est mis en évidence pour déterminer les fréquences (résonance et antirésonance) et les éléments nécessaires à la mise en place du schéma équivalent du moteur du transducteur flex-tensionnel de classe IV.

Enfin le chapitre V constitue une validation des méthodes analytiques ; deux exemples de transducteurs flex-tensionnels seront traités successivement par la méthode analytique proposée et par celle des éléments finis afin d'établir une comparaison entre les résultats obtenus par ces deux méthodes.

Présentation générale des transducteurs flextionnels

Dans ce chapitre, après avoir rappelé l'intérêt et les applications des basses fréquences en acoustique sous-marine, nous présenterons dans un premier temps les transducteurs flextionnels et dans un second temps nous présenterons, de façon détaillée, le transducteur flextionnel de classe IV : géométrie, principe de fonctionnement et montage en antennes.

En acoustique sous-marine, l'évolution des systèmes sonars vers les basses fréquences (100 Hz à 1 ou 2 kHz) a conduit au développement de structures de transducteurs originales autorisant la fourniture de puissances élevées pour un encombrement réduit. Ces sources permettent notamment d'augmenter la portée de détection ou d'activer des antennes linéaires.

L'intérêt des basses fréquences est évident. En effet:

Lorsqu'une onde acoustique se propage en milieu marin sur une distance D , elle subit des pertes d'énergie durant son trajet, appelées pertes de propagation (Transmission Losses : TL). Ces pertes de propagation s'expriment, en dB, sous la forme [1] :

$$TL(d) = D(d) + a_0 d \quad (I.1)$$

Dans cette équation, le premier terme du membre de droite correspond aux "pertes par divergence" de l'onde. Il correspond à la propagation d'une onde en champ lointain.

Le second terme est relatif aux pertes d'absorption d'énergie acoustique par le milieu fluide (absorption par diffusion de l'onde sur différents obstacles, prise en compte de la salinité, etc).

TL(d) : pertes de transmission totales exprimées en dB,
 a_0 : coefficient d'absorption en dB par d_0 mètres,
 d : distance en d_0 mètres,

On utilise généralement pour distance de référence $d_0 = 1$ mètre.

En première approximation, le terme a_0 s'exprime en fonction de la fréquence f par :

$$a_0 = 10^{-5} f^2 \quad (I.2)$$

a_0 en dB/m et f en kHz

A partir de l'équation (I.2), il est facile de démontrer que, si l'onde sonore a une fréquence de 1 kHz, elle perd 3 dB de niveau sonore par absorption pour 300 km de propagation. Par contre, à 10 kHz et sur la même distance, les pertes d'absorption s'élèvent à 300 dB!

Bien que très approximatif, ce résultat montre que seules les ondes acoustiques de fréquences basses peuvent se propager sur de très longues distances sans être entièrement absorbées par le milieu.

I - 1 Application des basses fréquences en acoustique sous-marin

Dans le domaine de l'océanographie, des projecteurs basse fréquence (100 Hz, 3 kHz) ont été utilisés [2] :

- a) pour repérer sur de très longues distances (des centaines ou des milliers de kilomètres) des flotteurs dérivant librement, utilisés pour analyser la circulation des eaux profondes de l'océan,

b) pour mesurer, sur des centaines de kilomètres, les variations du temps de parcours des ondes acoustiques (tomographie acoustique), ce qui apporte des informations sur les variations de la vitesse du son ainsi que sur d'autres paramètres physiques dans des bassins océaniques,

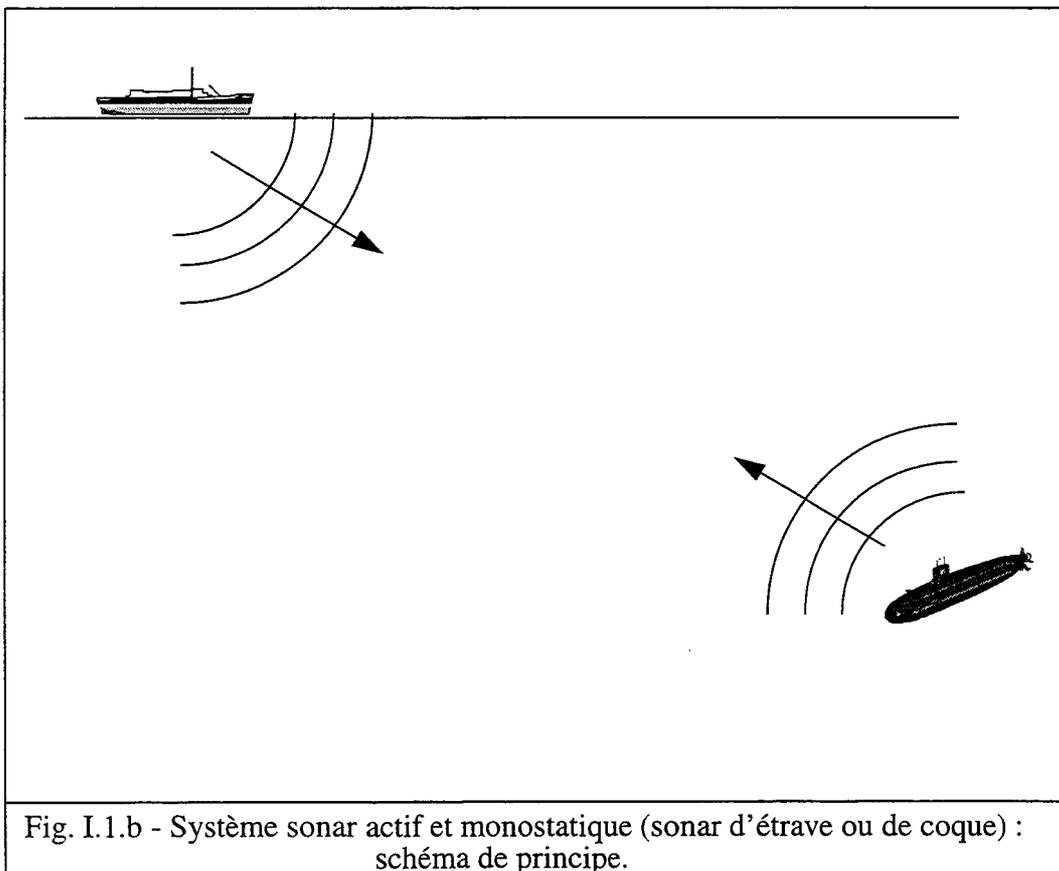
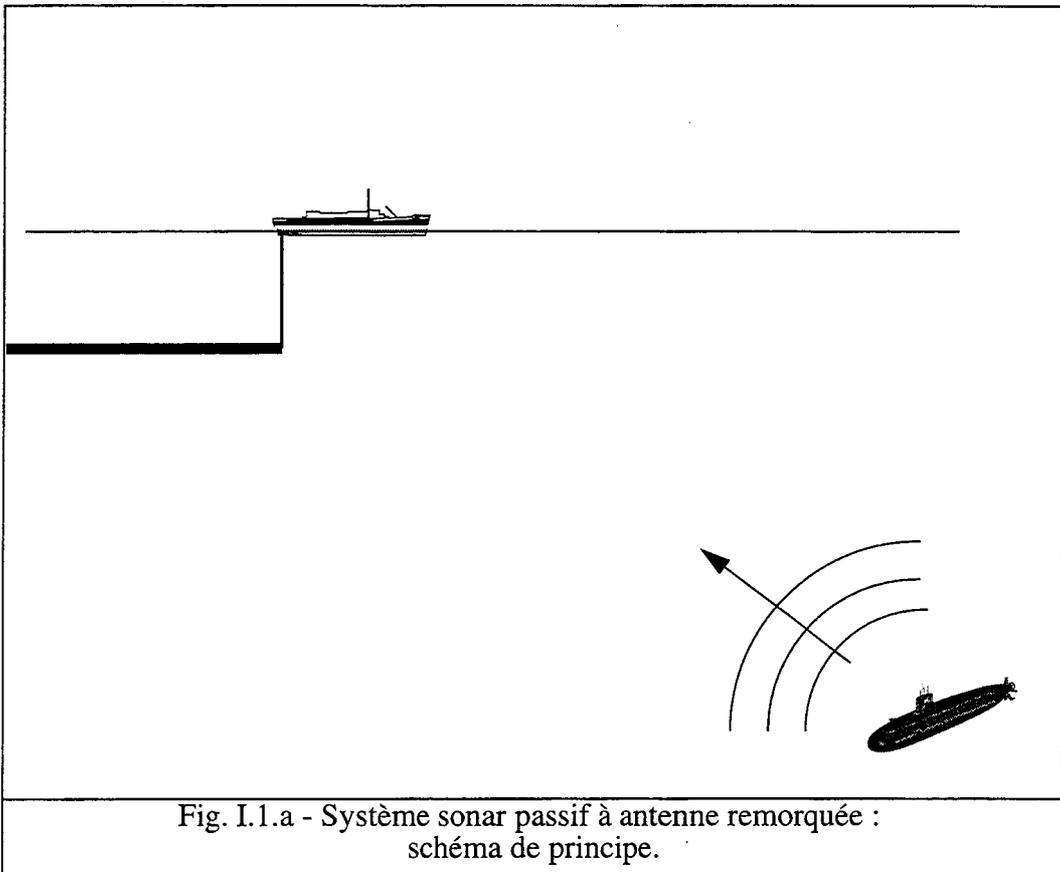
c) pour transmettre des informations relatives au contrôle des systèmes offshore ou venant des stations de monitoring ancrées (séismographie).

Dans le domaine militaire, les basses fréquences sont utilisées en lutte sous-marine dans le but d'augmenter les portées de détection [3].

Le système sonar passif (Fig. I.1.a) repose sur le principe de la seule écoute des sons rayonnés par la cible. Or, depuis les années 80, des progrès considérables ont été réalisés en matière de discrétion acoustique des sous-marins, diminuant progressivement l'efficacité du sonar passif, même en basse fréquence.

C'est pourquoi les avancées en matière de détection longue distance ne sont réalisées maintenant qu'au moyen des systèmes sonars actifs basse fréquence (Fig. I.1.b), suivant un concept relativement neuf connu sous le nom d'activation acoustique des antennes passives. Selon ce concept, un projecteur, émettant sur une fréquence comprise dans une fenêtre d'écoute d'une antenne passive associée et immergée à la même profondeur que celle-ci, est utilisé pour accroître les performances de détection. Ce projecteur doit alors fonctionner dans une gamme de fréquences très basses, dont la fréquence centrale est souvent de quelques centaines de Hertz. Dans leurs premières versions, ces systèmes sont restés monostatiques (Fig. I.1.c). Enfin, combinant les divers avantages, la dernière évolution conduit maintenant au concept de phare acoustique. Dans ce cas, le principe de base reste l'activation d'antennes passives mais le système est bistatique, le projecteur ou l'antenne de projecteurs étant immergé par un bâtiment auxiliaire, différent des unités opérationnelles. Ces derniers, qui portent les antennes passives, restent ainsi totalement discrets (Fig. I.1.d). Ces phares sont nécessairement loin du champ d'action des unités engagées et il faut, évidemment, que leur nombre reste relativement réduit.

En conséquence, ils doivent non seulement être des émetteurs très basses fréquences, mais également disposer d'une très forte puissance, pouvoir être immergés dans les chenaux acoustiques ad'hoc et être capables de balayer tout l'horizon. Ils sont donc obligatoirement constitués par des antennes à projecteurs multiples.



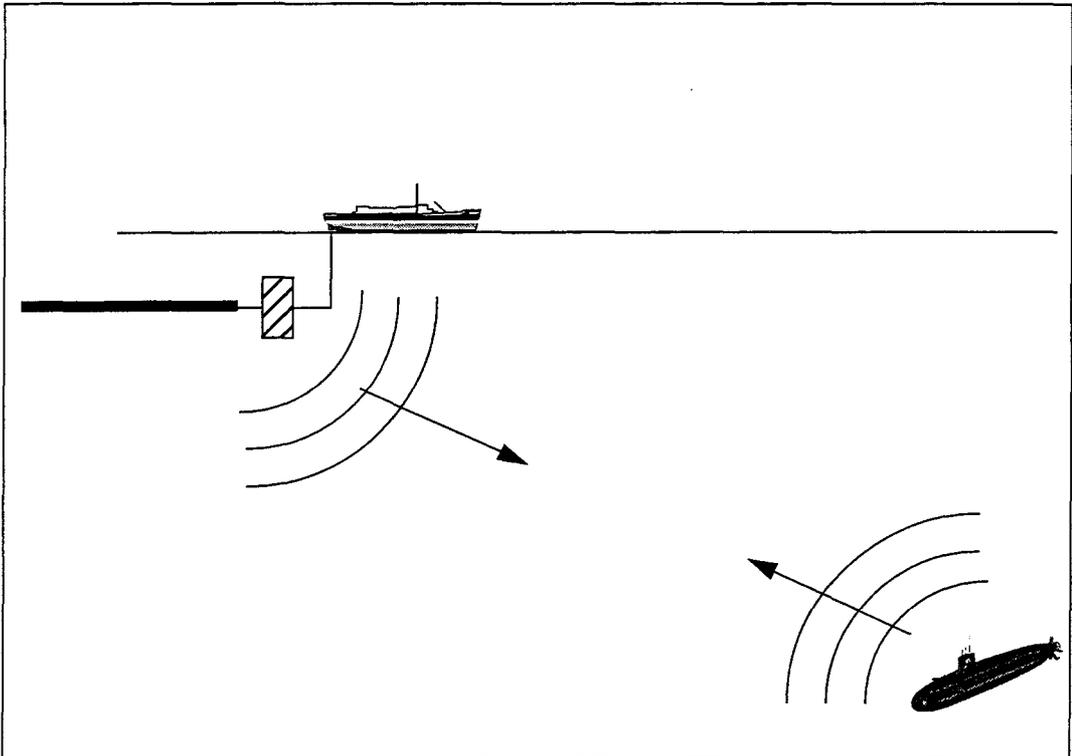


Fig. I.1.c - Système monostatique d'activation acoustique d'antenne passive (base d'émission dans le corps remorqué) : schéma de principe.

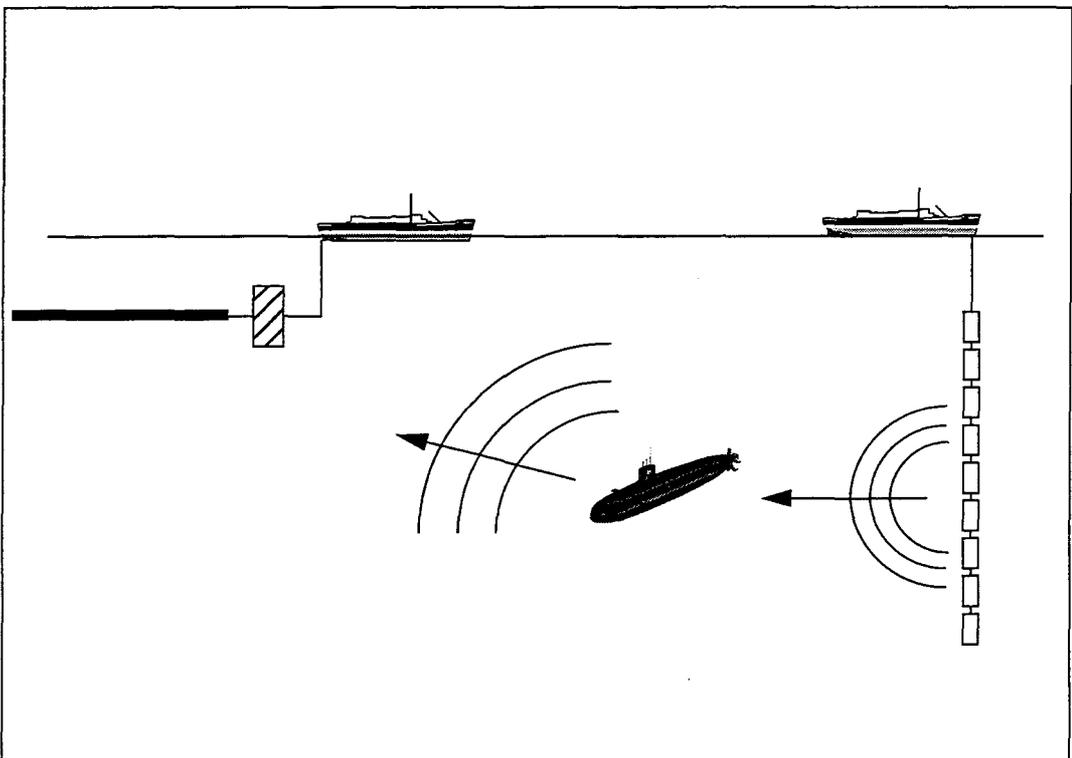


Fig. I.1.d - Système bistatique d'activation acoustique d'antenne passive (concept de phare, le phare étant ici l'antenne lacunaire verticale) : schéma de principe.

I - 2 Les projecteurs basses fréquences

I -2.1 Utilisation des projecteurs basses fréquences en acoustique sous-marine

La conception d'antennes de projecteurs électroacoustiques susceptibles de rayonner une onde acoustique dans l'eau à des fréquences inférieures au kiloHertz est un problème ardu, qui n'a reçu, à l'heure actuelle, que des solutions partielles. Les principales difficultés sont :

- la nécessité d'exciter le transducteur dans une bande de fréquences centrée sur la fréquence de résonance fondamentale. Cette nécessité, inhérente au principe de fonctionnement des transducteurs [4] implique généralement que, si leur mode vibratoire est un mode de dilatation-compression, leur longueur est prohibitive. Elle impose donc le recours à d'autres modes, en particulier de type flexion, mais le couplage électromécanique est alors nettement plus faible et, de toute façon, les dimensions des structures restent importantes. Cette contrainte pourrait, à terme, être moins sévère si l'utilisation de matériaux magnétostrictifs de type Terfenol [5] dont la rigidité est environ 3 fois plus faible que celle des céramiques piézoélectriques, devient technologiquement plus aisée,
- la faible valeur de la résistance de rayonnement. Dans le cas d'une source monopolaire, quels que soient son principe de fonctionnement et sa forme, et lorsque les dimensions de la surface rayonnante sont faibles devant la longueur d'onde dans l'eau, la résistance de rayonnement dépend du carré de la fréquence. Il en est de même pour l'amplitude de la pression rayonnée en champ lointain, à vitesse vibratoire volumique constante [4, 6]. Cette situation est la règle lorsqu'une fréquence d'émission inférieure au kiloHertz est recherchée. En conséquence, l'efficacité du rayonnement décroît très rapidement avec la fréquence, ce qui implique des puissances d'excitation très importantes, elles-mêmes conditionnées par les diverses limitations mécaniques, électriques et thermiques des transducteurs [7, 8]. En outre, la faible valeur de la résistance de rayonnement se traduit par des coefficients de qualité élevés et, en conséquence, des largeurs de bande réduites. De ce fait, outre la forte excitation, il faut aussi recourir à des associations en antenne qui posent alors de délicates questions liées aux interactions acoustiques [9],
- l'absence de directivité. Lorsque leurs dimensions sont faibles devant la longueur d'onde, les sources monopolaires ont une directivité nulle ou négligeable. Or, une directivité en site est souvent essentielle pour confiner l'énergie émise dans les chenaux de propagation. La solution est, ici également, l'association en antenne, évoquée à la section précédente,
- la nécessité d'une immersion profonde. La pression hydrostatique due à une immersion profonde complique généralement de façon conséquente la réalisation d'un transducteur : mise en place d'un système de compensation, augmentation de la force de précontrainte... Bien qu'il ne soit pas spécifique au cas des projecteurs basse fréquence, ce problème est néanmoins compliqué par l'importance des volumes ou des puissances mis en jeu.

On peut citer parmi les projecteurs basse fréquence de forte puissance :

Les flexionnels de classe IV et V, les résonateurs de Helmholtz, les Janus et Janus Helmholtz, ainsi que les bender bars.

I-2.2 Transducteurs flexensionnels

Les transducteurs flexensionnels constituent une classe d'amplificateurs mécaniques, Ils se composent d'une partie active appelée moteur, généralement piézoélectrique (barreaux, disques, anneaux), ou magnétostrictive, et d'une coque qui rayonne dans le fluide environnant. Leur fonctionnement comme leur nom l'indique, exploite la conversion du mouvement longitudinal ou radial de leur moteur en mouvement de flexion de leur coque, pour amplifier notablement la vitesse volumique et la puissance acoustique rayonnée dans le milieu fluide en contact avec la coque [10, 23].

K.D. Rollt [10] retrace l'histoire des transducteurs flexensionnels électroacoustiques. Le concept proposé par H.C. Hayes en 1929 et développé ensuite par W.J. Toulis à partir de 1960 a conduit à définir cinq classes de transducteurs flexensionnels classés de I à V suivant leur géométrie [13], présentés schématiquement (Fig. I.2), toutes destinées à fonctionner en basses fréquences [10, 43].

I-2.3 Description des cinq classes de flexensionnels

Les transducteurs flexensionnels de type I ont été parmi les premiers étudiés [11,12]. Ils sont composés d'une colonne de céramique piézoélectrique reliée par une partie massive à une coque fermée, dont la forme admet exactement ou pratiquement une symétrie axiale. Dans la colonne, dont la cohérence est assurée par une tige de précontrainte, les céramiques sont séparées par des électrodes et excitées en parallèle de façon à transférer le maximum d'énergie mécanique. Les transducteurs flexensionnels de type III fonctionnent suivant le même principe, la forme de la coque permettant de modifier l'amplification volumique. Les flexensionnels de type II et V [13,16], utilisent les vibrations radiales d'un anneau et d'un disque de céramique. Ils ont diverses applications comme bouées émettrices. Leur coque est collée sur l'anneau ou le disque de céramique par une résine époxy. Dans le cas d'un anneau de céramique, un anneau externe de précontrainte est souvent adjoint à l'ensemble.

Les transducteurs de type IV sont composés d'un cylindre ovale et d'un moteur : un ou plusieurs barreaux de céramique piézoélectriques, ou moteurs magnétostrictifs.

Bien que sensiblement différents du point de vue de la géométrie, tous les types de flexensionnels possèdent les mêmes propriétés :

- une bonne adaptation acoustique au milieu fluide, procurant un rendement important, obtenue grâce à l'augmentation d'amplitude et de surface entre le moteur et la coque, qui conduit à un accroissement notable de la vitesse volumique (Fig. I.3),
- une largeur de bande plus importante, pour une taille donnée, que celle d'un transducteur classique, grâce à la flexion,
- une densité de puissance par unité de volume très élevée (parfois triple), par rapport à celle obtenue avec un transducteur conventionnel utilisant les déformations de flexion (barreau en flexion, disque en flexion),
- une densité de puissance par unité de masse également élevée (typiquement 60 watts par kg),

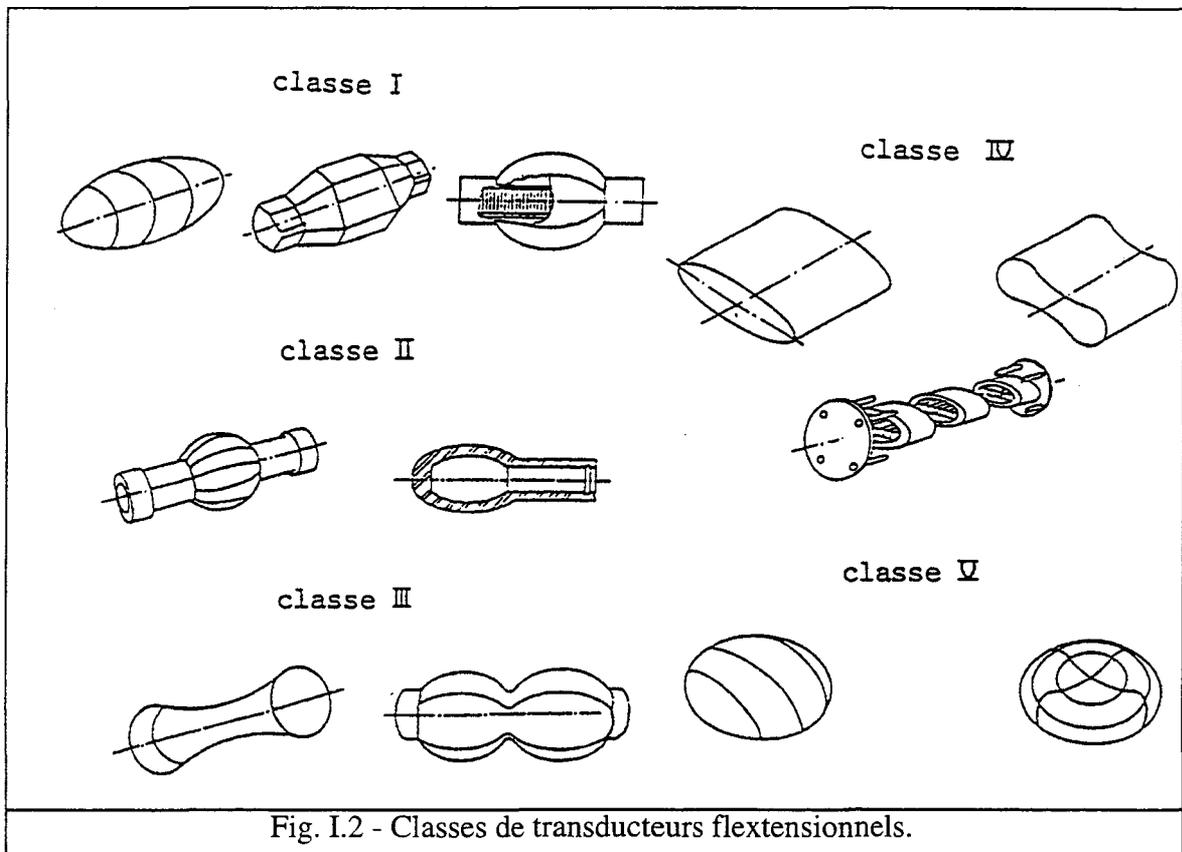
- un encombrement réduit. Ces transducteurs sont petits, comparés à la longueur d'onde de l'onde acoustique émise, et sont relativement légers,
- une solidité et une fiabilité élevées.

Le choix d'un transducteur peut se faire suivant deux directions :

- classe du transducteur,
- paramètres géométriques et physiques pour un type de transducteur donné : dimension et forme, nature des matériaux, conditions de montage.

Par ailleurs, ce choix peut être réalisé pour ajuster ou optimiser des caractéristiques multiples : fréquence de résonance, coefficient de qualité du transducteur immergé (bande passante), puissance acoustique et profondeur d'immersion.

Parmi tous ces transducteurs flexensionnels, le classe IV est celui qui a été le mieux compris et le plus étudié.



I-2.4 Historique et évolution des différents modèles mathématiques

L'analyse mathématique du comportement des transducteurs flexensionnels est difficile, essentiellement à cause du grand nombre des variables à considérer. De fait, il n'existe pas, à l'heure actuelle, de modèle analytique simple permettant d'aider à leur conception.

C'est L.H. ROYSTER, qui le premier a proposé des modèles simplifiés permettant de décrire approximativement le comportement des flexensionnels de différentes classes [13-15]. Dans le cas des transducteurs de classe I et IV, le moteur de céramiques a été modélisé en admettant que le déplacement de la colonne est essentiellement longitudinal, c'est à dire en négligeant les effets de flexion. Dans un premier temps, le moteur a ainsi été assimilé à une barre homogène, supposée fixée en son milieu (plan symétrie), soumise à un champ électrique constant et chargée à l'extrémité par une impédance complexe quelconque [13]. Le choix d'un champ électrique constant s'appuie alors sur le fait que la longueur de l'onde se propageant dans la colonne de céramique est supposée plus importante que l'épaisseur d'une céramique élémentaire, ce qui élimine les problèmes liés à la segmentation. Dans un deuxième temps, la technique des matrices de transfert a été utilisée, permettant de prendre en compte la segmentation de la colonne. Dans le cas d'un flexensionnel de classe V [14-16], le calcul du mode radial du disque de céramique a été réalisé en utilisant des fonctions de Bessel pour résoudre les équations de W.P. MASON [17] et A. TACHIBANA [18], Dans tous les cas, la coque du transducteur a été simplifiée. Pour les flexensionnels de classe I, L.H ROYSTER [13] a admis qu'un réseau de barres, connectées entre-elles par des masses concentrées, peut permettre une analyse dynamique convenable. Mathématiquement, le remplacement de la coque contenant un nombre infini de degrés de liberté par un modèle à nombre de degrés de liberté déterminé revient à résoudre le système d'équations différentielles caractérisant son comportement par une méthode aux différences finies.

Pour les systèmes de classe II, IV et V, R.A. NELSON et L.H. ROYSTER [14-16] ont directement utilisé cette méthode, les équations du mouvement étant, dans ce cas, obtenues à partir du principe de conservation de l'énergie. Dans tous les cas, le problème du rayonnement est traité en utilisant une représentation approximative de la géométrie du transducteur.

La répartition de la pression dans le champ proche et dans le champ lointain est obtenue pour une distribution de vitesse déterminée sur la surface, à l'aide d'intégrales de Helmholtz, le couplage fluide-structure étant pris en compte grâce à une méthode itérative développée par G. CHERTOCK [19].

I - 3 Transducteur flexensionnel de classe IV

I -3.1 Principe de fonctionnement

Dans la conception de la plupart des transducteurs sonar, un des objectifs est d'atteindre une puissance de rayonnement importante ayant la plus grand rendement électroacoustique possible, sans négliger les autres impératifs tels la largeur de bande recherchée. La puissance acoustique rayonnée par un projecteur dans une partie liquide infinie est, d'une part, une fonction prenant en compte le produit de la résistance de rayonnement [41] à la surface rayonnante du projecteur, qui est linéairement proportionnelle à l'impédance acoustique spécifique du fluide et, d'autre part, un terme déterminé par le carré de la vitesse de vibration de la surface. Pour des géométries simples, où les dimensions de la surface ne sont pas grandes comparées à la longueur d'onde acoustique dans le fluide, les expressions de la puissance rayonnée deviennent relativement simples [24].

L'une des principales difficultés rencontrée lors de la conception de transducteurs basses fréquences (<5 kHz) et très basses fréquences (<1 kHz) est de conserver un encombrement et un poids raisonnables.

La pression rayonnée par une source petite devant la longueur d'onde s'écrit :

$$P = G\rho\omega^2\Delta V$$

avec :

- G : fonction de Green,
- ρ : masse volumique,
- ω : pulsation,
- ΔV : déformé volumique de la source,

En basses fréquences, c'est à dire lorsque ω est faible, pour obtenir une puissance d'émission convenable, il est nécessaire d'avoir une forte déformation volumique. Le mouvement de flexion induit dans la coque entraîne généralement une variation de volume (c.a.d une vitesse volumique) importante et permet d'assurer un bon rayonnement. En effet, si, pour une forme ellipsoïdale, les noeuds de vibration du premier mode de flexion comme indiqué sur la figure (I.5) sont près des extrémités, il apparaît une différence importante entre les surfaces se déplaçant vers l'intérieur et celles se déplaçant vers l'extérieur de la structure.

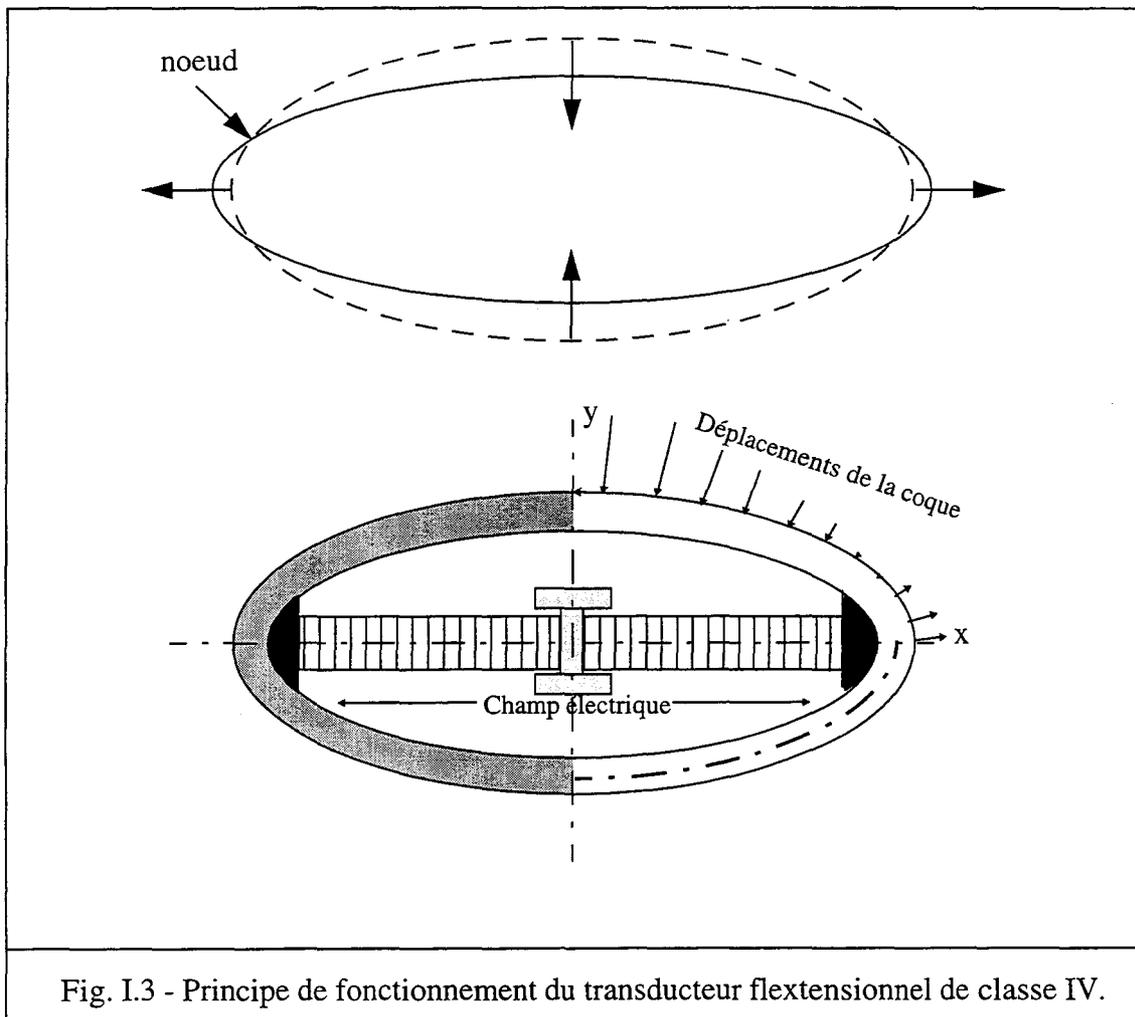


Fig. I.3 - Principe de fonctionnement du transducteur flexionnel de classe IV.

I-3.2 Description et géométrie

Le transducteur flexionnel de classe IV est formé d'une coque cylindrique, de section ovale, à l'intérieur de laquelle est fixé un moteur piézoélectrique ou magnétostrictif. Le moteur piézoélectrique est constitué d'un ensemble d'anneaux ou de barreaux longitudinaux, montés dans le plan médian de la coque, suivant le grand axe, et régulièrement espacés (figure I.4 et I.5).

La longueur du moteur est généralement choisie légèrement supérieure au grand axe de la coque, son insertion est réalisée en déformant celle-ci. Après relâchement, les efforts de compression lui assurant une précontrainte, sont ainsi appliqués. Ces efforts doivent être notablement supérieurs aux efforts de tension induits par la pression hydrostatique appliquée à la coque immergée lorsque des conditions de forte immersion sont requises, mais ils doivent toutefois rester inférieurs aux contraintes qui entraîneraient des réductions de couplages et des effets de dépoliarisation dans les céramiques. L'apparition des forces de tension dues à la pression hydrostatique implique un compromis entre la puissance d'utilisation du transducteur et sa profondeur de fonctionnement, ce qui constitue une limitation importante à prendre en compte lors de sa conception.

Un choix judicieux de l'excès de la longueur du moteur d'une part, de la rigidité de la coque d'autre part, permet de donner à la contrainte résiduelle sur les moteurs la valeur ad hoc. Toutefois, dans d'autres technologies, la précontrainte est obtenue à l'aide d'un enroulement filamentaire entourant le moteur et elle ne dépend plus alors de la coque.

Sous excitation électrique, les moteurs vibrent en dilatation-compression et leur mouvement est converti, via les liaisons, en mouvement de flexion de la coque. La fréquence de fonctionnement est choisie pour assurer la résonance mécanique de l'ensemble sur son mode fondamental, qui correspond toujours au premier mode de flexion de la coque seule mais avec une fréquence plus élevée, compte tenu de la rigidité supplémentaire amenée par les moteurs. A cette fréquence, les dimensions du transducteur sont inférieures à la longueur d'onde dans l'eau et le projecteur se comporte acoustiquement comme une source monopolaire non directive.

Pour assurer le montage du moteur dans la coque, des inserts métalliques sont placés aux extrémités de ces moteurs. Par ailleurs, pour permettre la mise en place des flasques (plaques terminales) qui ferment le cylindre d'une part, l'assemblage mécanique de plusieurs transducteurs d'autre part, une poutre métallique est généralement insérée le long de l'axe de symétrie de la coque (Fig. I.4).

La coque du transducteur flexionnel de classe IV est un élément critique car elle assure le rayonnement acoustique. Les premières réalisations ont été conduites à l'aide de coques en alliage d'aluminium. Depuis 1985, des coques en composite verre-résine ont permis avec les mêmes géométries, de réduire simultanément la fréquence de résonance, le coefficient de qualité mécanique dans l'eau et le poids [22].

Le moteur (colonnes de céramiques ou barreaux magnétostrictifs) utilisé dans des conditions de couplage électromécanique éloignées des conditions optimales est donc, généralement, sollicité sous très forte excitation. De ce fait, un volume maximal de matériau actif est toujours recherché et les problèmes de dimensionnement, notamment de la précontrainte, sont difficiles.

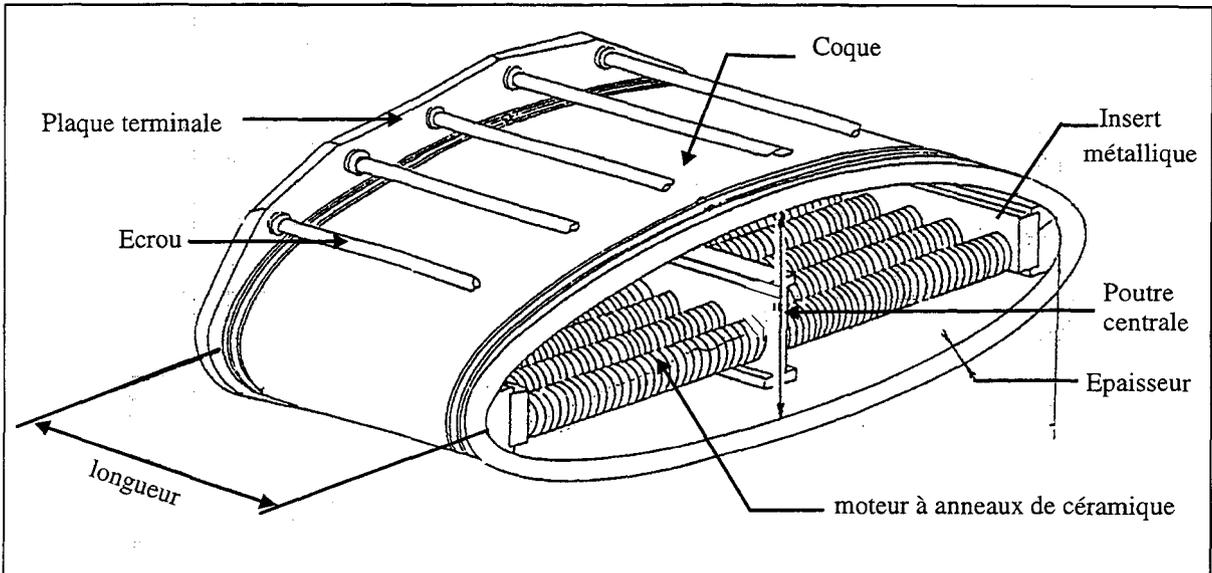


Fig. I.4 - Description schématique d'un transducteur flexionnel de classe IV (tiré de [51]).

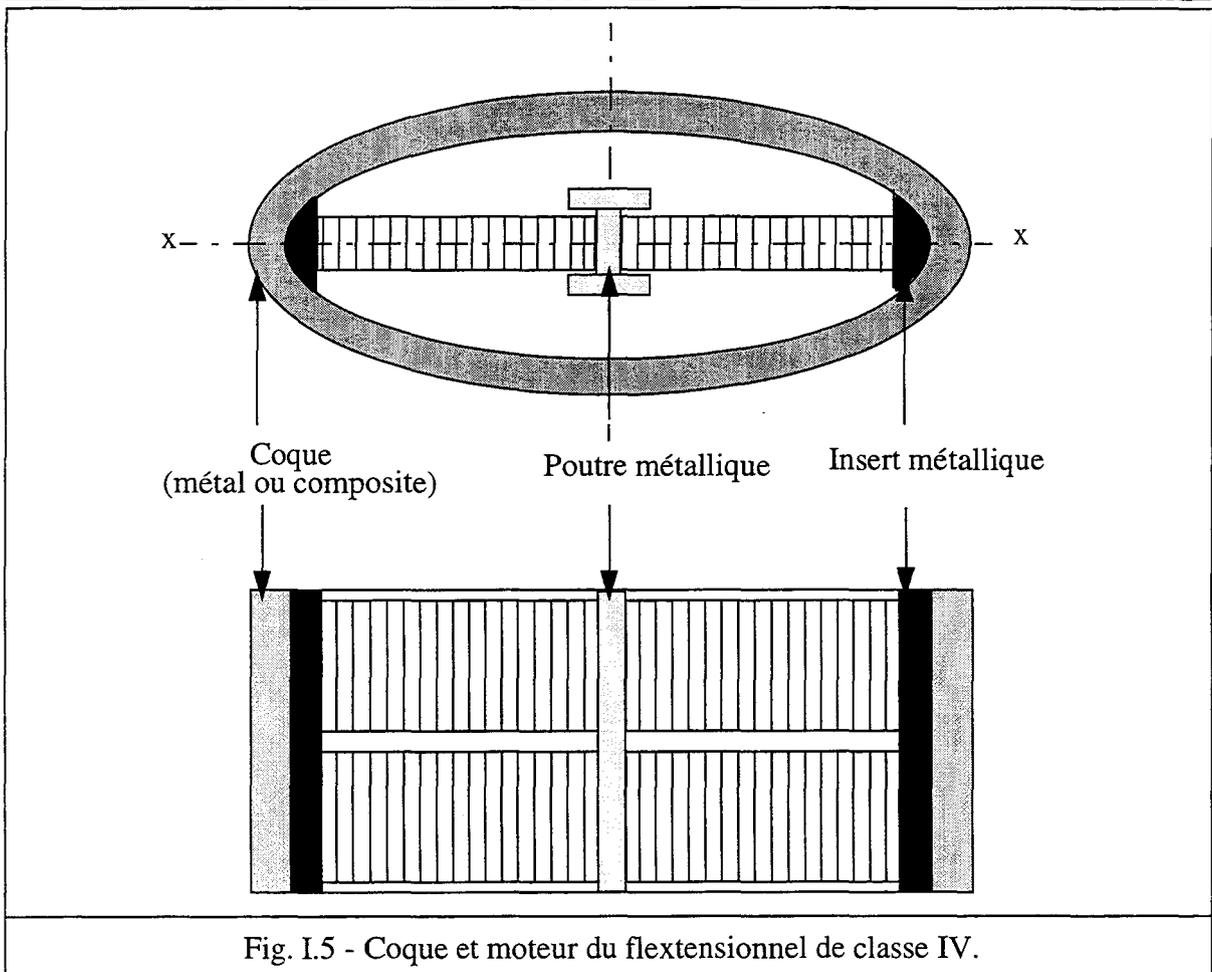


Fig. I.5 - Coque et moteur du flexionnel de classe IV.

Le transducteur flexionnel, développé par W.J. TOULIS sur la base des travaux de H.C. HAYES dans les années 60 [10], est l'application même de cette nécessité qui consiste à maximiser la déformation volumique d'un objet [21].

Les flextionnels de classe IV possèdent les avantages suivants : ils sont compacts et ont un bon rapport puissance/poids, ils sont capables de fournir une puissance acoustique moyenne et élevée à une fréquence basse, ils ont une très bonne résistance aux chocs ; ils peuvent être facilement associés en antennes, l'antenne émettrice ainsi constituée étant placée entre deux plaques rigides, comme indiquée sur la figure (I.6).

L'association des transducteurs flextionnels de classe IV en modules jointifs (plusieurs transducteurs) ou en antennes lacunaires est technologiquement aisée et peut procurer des niveaux d'émission et des directivités élevées. Toutefois, compte tenu de la faiblesse des dimensions des projecteurs élémentaires devant la longueur d'onde, les problèmes d'interaction acoustique dans les modules ou les antennes sont posés de façon critique et doivent être impérativement pris en compte au niveau de la conception du système (asservissement des excitations électriques par exemple [51]).

Enfin, de nombreuses informations validées existent concernant leur comportement physique, leur fabrication, et les interactions dans des antennes [9].

L'inconvénient majeur des flextionnels de classe IV réside dans leur incapacité à supporter des grandes profondeurs. Cela est dû au fait que la pression hydrostatique sur la coque réduit la précontrainte du moteur et donc la puissance disponible [20]. Néanmoins, ce problème est partiellement résolu par les nouvelles méthodes de précontraintes (qui présentent d'autres inconvénients) ainsi que par l'utilisation de coques de formes différentes, ou en insérant, au milieu du moteur, un système absorbant la déformation statique, mais quasiment rigide dynamiquement.

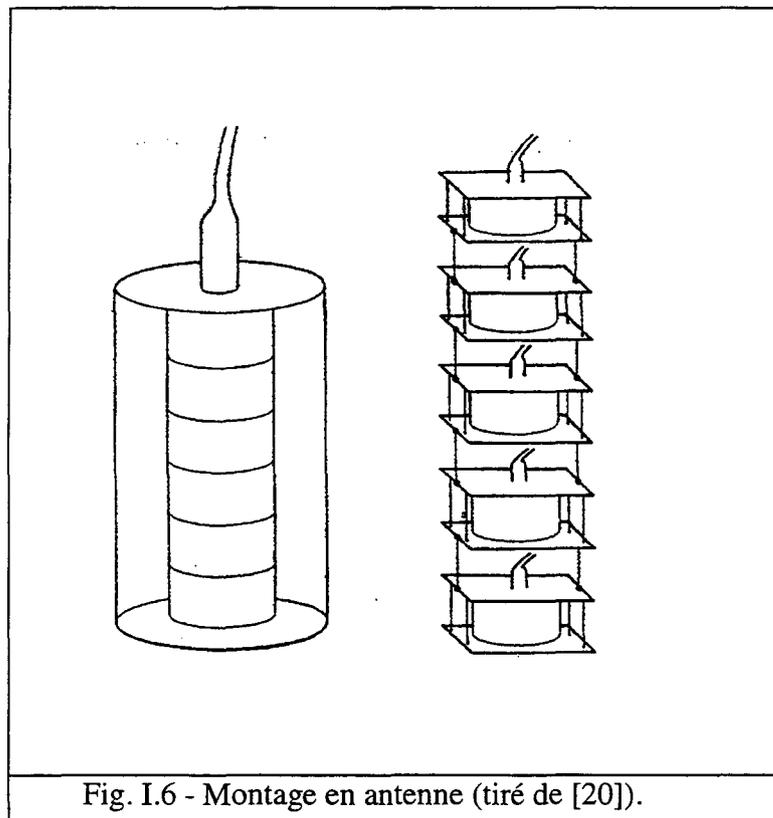


Fig. I.6 - Montage en antenne (tiré de [20]).

I - 4 Conclusion

Après avoir montré l'importance des basses fréquences en acoustique sous-marine et présenté les différentes classes de transducteurs flexensionnels nous avons souligné l'intérêt de l'utilisation des transducteurs de classe IV.

En effet ce type de transducteur admet les avantages suivants :

- la technologie de sa réalisation est bien maîtrisée,
- l'association des projecteurs élémentaires en modules jointifs ou en antenne est aisée,
- une certaine connaissance des problèmes d'interaction est déjà acquise, aussi bien sur le plan théorique que sur le plan expérimental,
- un gain de performance dû à l'avènement des nouveaux matériaux : composites pour la coque et magnétostrictifs pour le moteur est plus que probable.

A l'heure actuelle, il n'existe pas de modèle analytique pour l'étude et l'optimisation de ce transducteur. Dans le chapitre II, on présentera les différentes approches mathématiques qui ont été utilisées ces dernières années. De même, on présentera une technique de schéma équivalent qui permet de séparer les contributions de la coque et du moteur.

*Présentation des différentes approches
pour l'analyse des
transducteurs flexensionnels de classe IV*

L'objet de ce chapitre est de rappeler, dans un premier temps, les différentes approches mathématiques utilisées pour l'étude des transducteurs flexensionnels de classe IV, dans un deuxième temps, la méthode des éléments finis utilisée pour l'étude des transducteurs piézoélectriques et enfin une technique de schéma équivalent permettant de déterminer les caractéristiques d'un transducteur flexensionnel de classe IV, ce schéma se compose de :

- un schéma équivalent global déduit de la modélisation numérique par éléments finis (ATILA),*
- un schéma équivalent permettant de séparer la contribution du moteur d'une part, celle de la coque d'une autre part, le moteur étant représenté par une branche motionnelle et la coque par deux branches motionnelles montées en parallèle [40].*

L'intérêt de l'utilisation de ce dernier schéma réside dans la possibilité de séparer les contributions de la coque et du moteur.

II - 1 Des différentes analyses mathématiques utilisées pour le transducteur flexensionnel de classe IV

G.A. BRIGHAM [24-26], a développé, pour les flexensionnels de classe IV, un modèle qui traite les différentes parties du transducteur (coque, moteur, fluide) séparément. La théorie des cylindres segmentés, présentée par G.E. MARTIN [27] est alors utilisée pour l'étude dynamique des barreaux piézoélectriques à partir de matrices de transfert.

Dans un premier temps, l'étude de la coque est réalisée en intégrant le fait que la longueur l_m d'un module, représenté schématiquement par la figure (II.1), est généralement faible devant son périmètre P_m . Dans ce cas, l'état de contrainte peut être assimilé à celui d'un anneau ovale et les trois équations différentielles d'équilibre qui en résultent (deux pour les forces, une pour les moments), négligeant l'inertie de rotation, sont celles proposées par A.E.H. LOVE [28], de plus, en basse fréquence, les modes dans le plan de la section droite peuvent être exprimés à partir d'une seule équation, résolue en décomposant les champs de contrainte et de déformation en série de Fourier [25].

Les équations du mouvement sont :

$$\begin{aligned} \frac{T(s, t)}{r} + \frac{\partial N(s, t)}{\partial s} &= \rho h(s) \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + P \text{ (normale)} \\ \frac{\partial T(s, t)}{\partial s} - \frac{N(s, t)}{r} &= \rho h(s) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + P \text{ (tangentielle)} \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

avec, comme indiqué sur la figure (II.1) :

$T(s, t)$: effort tranchant, $N(s, t)$: effort normal, t : le temps, p : la pression et s : l'abscisse curviligne. V et W représentent le déplacement normal et le déplacement tangentiel, ρ la masse volumique et $h(s)$ l'épaisseur variable en fonction de s .

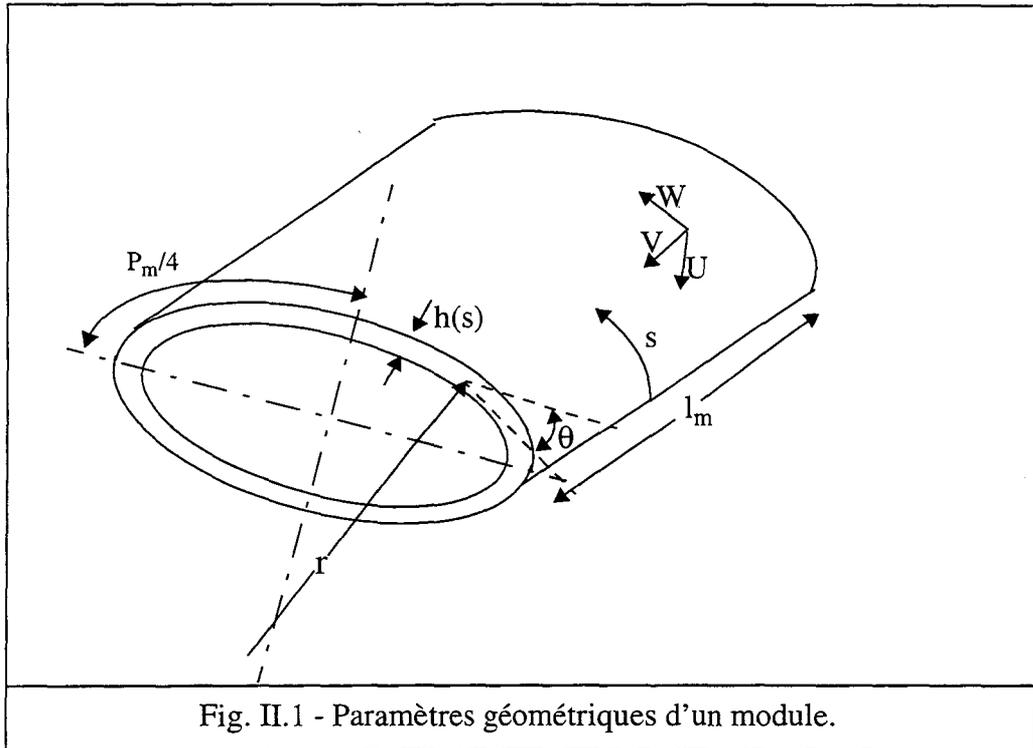
En considérant que les différentes quantités harmoniques sont de la forme :

$V(\theta, t) = e^{-j\omega t} V(\theta)$, avec :

$$\begin{aligned} V(\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} [V_n^e \cos(n\theta) + V_n^e \sin(n\theta)] & W(\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} [W_n^e \cos(n\theta) + W_n^e \sin(n\theta)] \\ N(\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} [N_n^e \cos(n\theta) + N_n^e \sin(n\theta)] & T(\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} [T_n^e \cos(n\theta) + T_n^e \sin(n\theta)] \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

les résultats obtenus, notamment le déplacement en tout point de la coque et la fréquence des différents modes présentent un bon accord avec les résultats expérimentaux.

Dans un deuxième temps, l'étude du moteur (barreaux piézoélectriques) [26], a été conduite sous forme de schéma équivalent, en utilisant la théorie des ondes longitudinales.



W.J MARSHALL et al, [29], ont présenté, sur la base des travaux de G.A. BRIGHAM, un ensemble de formules simples permettant, pour des flexextensionnels de classe IV, d'optimiser les différents paramètres de fonctionnement (fréquence de résonance des transducteurs dans l'air et dans l'eau, profondeur d'utilisation maximum, puissance acoustique émise, contraintes résultantes dans les barreaux de céramique, longueur de l'axe de plus grande dimension de l'ellipse, épaisseur de coque). De ces diverses analyses, un certain nombre de remarques peuvent être déduites :

- chaque code de calcul développé, sinon chaque méthode, est propre à un type de transducteur flexextensionnel et dépend de manière assez critique de sa géométrie,
- les modèles de coque employés sont souvent simples et mal adaptés pour décrire l'interface entre la coque et le moteur ou pour prendre en compte la courbure et la surépaisseur dans cette même région,
- la prise en compte du rayonnement est généralement grossière et systématiquement chère en ressources informatiques.

Parmi ces méthodes, seules les méthodes numériques lourdes type méthode des éléments finis permettent la prise en compte du fonctionnement complet d'un transducteur. C'est la méthode des éléments finis qui répond le mieux aux besoins ; plusieurs travaux dans ce domaine ont été réalisés grâce à cette dernière. Une présentation de cette méthode pour le cas de l'analyse des transducteurs électroacoustiques est largement détaillée dans [7,32,33]. La méthode des équations intégrales seule ou couplée à la méthode des éléments finis, traite la partie du rayonnement dans un fluide.

Les sections qui suivent rappellent brièvement les points principaux de ces deux méthodes.

II - 2 Méthode des éléments finis

II - 2.1 Présentation

La méthode des éléments finis et ses applications dans le domaine de la mécanique ont donné lieu à l'écriture de nombreux ouvrages et à de très nombreuses publications. C'est une technique éprouvée pour décrire le comportement dynamique des structures de géométrie complexe. Les équations des éléments finis sont présentées en détail dans les travaux de G. DHATT et G. TOUZOT [34], O.C. ZIENKIEWICZ [36] et K.J. BATH [37], Elles sont présentées, pour les cas qui nous intéressent, dans la section suivante :

II - 2.2 Présentation des différentes analyses nécessaires utilisées par la méthode des éléments finis

Les différentes analyses nécessaires pour comparer les résultats des méthodes analytiques aux résultats donnés par la méthode des éléments finis sont présentées ci-dessous :

II - 2.2.1 Analyse statique d'une structure élastique

Si l'on considère que la structure est soumise sur sa frontière à une force mécanique, le système à résoudre est :

$$[K_{uu}]U = F \quad (\text{II.3})$$

La résolution de ce système permet de déterminer le déplacement à l'équilibre en tout point de la structure, avec :

- $[K_{uu}]$: matrice de rigidité mécanique,
- F : vecteur des forces nodales appliquées,
- U : vecteur des valeurs nodales du champ de déplacement,

II - 2.2.2 Analyse modale d'une structure élastique

La structure étant libre, ses modes propres purement élastiques sont fournis par :

$$\left([K_{uu}] - \omega^2 [M] \right) U = 0 \quad (\text{II.4})$$

où : $[M]$, représente la matrice de masse cohérente du domaine solide.

Pour le problème discret, cette équation est satisfaite pour un nombre fini de pulsations propres ω_i racines de l'équation :

$$\left| \left[K_{uu} \right] - \omega^2 \left[M \right] \right| = 0 \quad (\text{II.5})$$

A chacune de ces pulsations est associé un mode propre de vibration U_i , défini à une constante multiplicative près.

II - 2.2.3 Analyse harmonique d'une structure élastique

Pour l'analyse harmonique d'une structure élastique, on considère que la structure est soumise, sur sa frontière, à une force mécanique sinusoïdale de pulsation ω . Le système d'équation est :

$$\left(\left[K_{uu} \right] - \omega^2 \left[M \right] \right) \underline{U} = \underline{F} \quad (\text{II.6})$$

L'amplitude du déplacement à tous les noeuds est obtenue en résolvant ce système singulier pour les fréquences propres de la structure, la modélisation ne tenant pas compte de l'amortissement.

II - 2.2.4 Analyse modale d'une structure piézoélectrique

Les modes propres d'une structure piézoélectrique, libre mécaniquement, sont donnés par le système d'équations :

$$\begin{bmatrix} \left[K_{uu} \right] - \omega^2 \left[M \right] & \left[K_{u\phi} \right] \\ \left[K_{u\phi} \right]^T & \left[K_{\phi\phi} \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U} \\ \underline{\Phi}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\underline{Q}_p \end{bmatrix} \quad (\text{II.7})$$

où :

$\left[K_{u\phi} \right]$: matrice piézoélectrique,

$\left[K_{\phi\phi} \right]$: matrice diélectrique,

Φ : vecteur des valeurs nodales du potentiel électrique,

Q : vecteur des valeurs nodales de la charge électrique.

Si toutes les électrodes sont à la masse (court-circuit), leurs potentiels électriques sont nuls. Les valeurs propres du système d'équations obtenues sont les pulsations de résonance. Si le système est électriquement isolé (circuit ouvert), la somme des charges nodales sur chaque électrode est nulle. Les valeurs propres du système obtenu sont les pulsations d'antirésonance.

II - 2.2.5 Analyse harmonique d'une structure piézoélectrique

Si la structure piézoélectrique étudiée est mécaniquement libre et excitée sinusoïdalement par l'intermédiaire de ses électrodes, le système d'équation devient :

$$\left[\left[\mathbf{K}_{uu} \right] - \omega^2 \left[\mathbf{M} \right] \right] \underline{U} = - \left[\mathbf{K}_{u\phi} \right] \Phi_p \quad (\text{II.8})$$

Connaissant \underline{U} , il est possible de déterminer le vecteur Q_p :

$$Q_p = - \left[\mathbf{K}_{\phi\phi} \right] \Phi_p - \left[\mathbf{K}_{u\phi} \right]^T \underline{U} \quad (\text{II.9})$$

Si la structure possède une seule électrode chaude, l'intensité du courant électrique qui la pénètre peut s'écrire :

$$I_p = j\omega Q_p \quad (\text{II.10})$$

et il est possible de calculer l'admittance Y par la relation :

$$Y = -j\omega \left(\mathbf{K}_{\phi\phi} + \frac{\left[\mathbf{K}_{u\phi} \right]^T}{\Phi_p} \underline{U} \right) \quad (\text{II.11})$$

II - 2.3 Présentation du code de calcul ATILA

Le code de calcul ATILA : "*Analyse des Transducteurs par Intégration des équations de Laplace*"[35], utilise la méthode des éléments finis. Il a été développé par le laboratoire d'acoustique de l'ISEN, spécifiquement pour permettre la modélisation de transducteurs rayonnant dans un fluide, mais peut être utilisé pour effectuer l'analyse statique, modale et harmonique des structures élastiques, piézoélectriques ou magnétostrictives immergées ou non. Il peut être utilisé pour modéliser des géométries à symétrie axiale, bidimensionnelles ou tridimensionnelles et prendre en compte la périodicité d'une structure à une ou deux dimensions. Son aptitude à décrire le comportement de différents transducteurs et la précision des résultats obtenus ont été vérifiés grâce à la modélisation de nombreuses structures différentes et la comparaison entre résultats numériques et expérimentaux.

La bibliothèque d'ATILA, possède en majorité des éléments isoparamétriques à interpolation quadratique qui permettent une description simple des surfaces courbes. Ils peuvent être à deux ou trois dimensions et de formes variées, ils sont répertoriés ci-après :

- éléments mécaniques (structures élastiques),
- éléments composites,
- éléments piézoélectriques,
- éléments magnétostrictifs,
- éléments fluides,
- éléments interfaces,
- éléments rayonnants.

II - 3 Diffusion acoustique et équations intégrales

En ce qui concerne l'étude de la diffusion acoustique par un corps élastique, deux méthodes sont susceptibles de décrire ce problème :

- méthode des éléments finis,
- méthode des équations intégrales,
- ou couplage des deux méthodes.

La méthode des équations intégrales est une méthode numérique éprouvée bien adaptée à l'étude de géométries quelconques. Par rapport à la méthode des éléments finis, elle prend en compte exactement la condition de rayonnement et rend inutile le maillage du milieu fluide environnant en restreignant celui-ci à la surface de la structure. Cette dernière caractéristique permet d'augmenter la fréquence de calcul.

La diffusion acoustique dans le fluide est régie par l'équation de Helmholtz. En général, il n'existe pas de solution analytique au problème précédent. Il peut alors être avantageusement remplacé par une formulation intégrale.

Dans la section suivante, nous présentons brièvement le code de calcul EQI (équations intégrales) qui a été développé à l'ISEN [38-39]

II - 3.1 Présentation du code de calcul EQI

EQI est un code équations intégrales spécialement développé pour simuler le comportement acoustique de structures tridimensionnelles immergées dans un fluide d'extension infinie. S'il y a lieu, il prend en compte tout type de symétrie par rapport à un, deux ou trois plans orthogonaux. Trois types d'analyses harmoniques sont possibles : rayonnement à partir d'un champ de déplacement donné ; diffraction à partir d'une onde incidente plane donnée ; interaction fluide-structure par identification des matrices d'impédances en vue de leur prise en compte par un code éléments finis. Il fournit la pression sur la surface extérieure et, suivant l'étude envisagée, en déduit par post-traitement la pression dans le fluide à distance finie ou infinie (diagrammes de directivité de rayonnement ou de diffraction bistatique ou monostatique), l'impédance de rayonnement et les coefficients d'autodiffraction. Il a déjà permis la modélisation de structures variées : transducteurs flexionnels, antennes acoustiques, sous-marins et cibles de formes complexes.

La validation du code a été effectuée par de nombreuses comparaisons avec des solutions analytiques.

II - 4 Technique des schémas équivalents

L'association, observée au niveau des équations différentielles associées, entre phénomènes électriques et mécaniques dans certains systèmes constitue l'élément technique de base des transducteurs électroacoustiques [4]. Une relation fonctionnelle unique existe entre les variables électriques et mécaniques qui caractérisent les systèmes.

L'annexe IV présente un résumé des analogies (force-tension) électromécaniques classiques.

II - 4.1 Circuits électriques équivalents pour les transducteurs

Le schéma équivalent d'un système électromécanique quelconque est généralement considéré comme un assemblage de paramètres R, L et C, les effets sur le circuit électrique ainsi obtenu

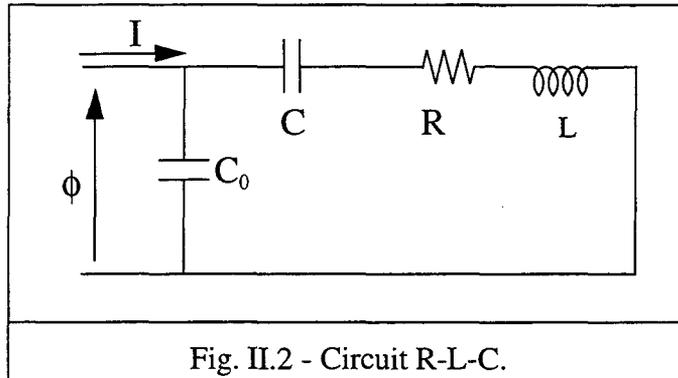
seront les mêmes que ceux du système électromécanique lui-même, au moins dans une certaine bande de fréquences [4].

Il est généralement utile de décrire le phénomène de transduction dans un matériau ou dans un transducteur en terme de coefficient ou facteur de couplage électromécanique, celui-ci est calculé à partir de la transformation d'énergie électrique et mécanique. Pour un circuit équivalent simple représenté par la figure (II.2), le coefficient de couplage peut être calculé à partir des fréquences de résonance et d'antirésonance par la formule :

$$k^2 = \frac{f_a^2 - f_r^2}{f_a^2} \quad (\text{II.12})$$

où k représente le coefficient ou facteur de couplage électromécanique, f_r : la fréquence de résonance et f_a la fréquence d'antirésonance.

Ce qui fait apparaître k^2 comme un rendement de transduction.



Dans le paragraphe suivant, les transducteurs flexensionnels de classe IV sont décrits à l'aide de schéma équivalent pour obtenir leurs caractéristiques :

- un schéma équivalent global, dont les composantes sont calculées numériquement pour avoir : les valeurs de la fréquence de résonance, de la fréquence d'antirésonance, de la capacité basse fréquence et du déplacement basse fréquence en bout du petit axe du projecteur complet.
- un schéma équivalent obtenu en assemblant le schéma équivalent du moteur et un schéma équivalent deux modes à constantes localisées de la coque [40].

Etant donné que ce dernier schéma nous aide à distinguer les contributions de la coque de celles du moteur, nous pourrions donc mener séparément leur optimisation.

II - 4.2 Schéma équivalent du transducteur flexensionnel de classe IV

Suivant une approche classique, le comportement électromécanique du transducteur peut être représenté, autour de la fréquence de résonance fondamentale par un schéma équivalent à constantes localisées [4].

Ce schéma est représenté par la figure (II.3.a). A vide, il se compose de la capacité bloquée C_0 (F), d'un transformateur électromécanique de rapport N_m (N/V, C/m) et d'une branche motionnelle formée de l'association série de la compliance équivalente c (m/N) et de la masse équivalente l (Kg). A l'aide d'une transformation classique, ce schéma peut être réduit à un schéma purement électrique, celui de la figure (II.3.b), avec les relations suivantes :

$$L = l/N_m^2 \text{ et } C = N_m^2 c \quad (\text{II.13})$$

Si le transducteur rayonne en milieu fluide, la branche motionnelle contient de plus l'impédance de rayonnement Z_r , (annexe III) souvent constituée d'une résistance de rayonnement r_r (Ns/m) et une masse ajoutée l_r (Kg), comme indiqué sur la figure (II.3.c). ϕ étant la tension appliquée au projecteur, I l'intensité du courant entrant. La quantité circulant dans la branche motionnelle est la vitesse vibratoire v de l'extrémité du petit axe, supposée constante le long de la génératrice.

II - 4.2.1 Identification des éléments du schéma

Pour pouvoir identifier les différents éléments du schéma, deux modélisations numériques sont nécessaires, la première relative à la structure seule, à l'aide de la méthode des éléments finis et du code ATILA, la seconde relative à l'impédance de rayonnement, à l'aide de la méthode des équations intégrales et du code EQI.

Par la méthode des éléments finis on peut, grâce à l'analyse modale déterminer les premiers modes de vibration. Par une analyse harmonique conduite en très basse fréquence (0 - 50 Hz), on détermine la capacité équivalente au projecteur C_{BF} et l'amplitude du déplacement à l'extrémité du petit axe v_{BF} , constante dans cette bande.

a) Transducteur dans l'air.

En utilisant les notations de la figure (II.3) : l'identification des éléments du schéma s'effectue alors comme suit. Les fréquences de résonance et d'antirésonance du premier mode donnent les relations :

$$f_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad \text{et} \quad f_a = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{C+C_0}{LCC_0}} \quad (\text{II.14})$$

Si C_{BF} est la capacité basse fréquence et V_{BF} le déplacement à l'extrémité du petit axe calculé en basse fréquence déduits du modèle éléments finis et pour 1 Volt d'excitation, on a :

$$C_{BF} = C + C_0 \text{ et } N_m = \frac{C}{v_{BF}} \quad (\text{II.15})$$

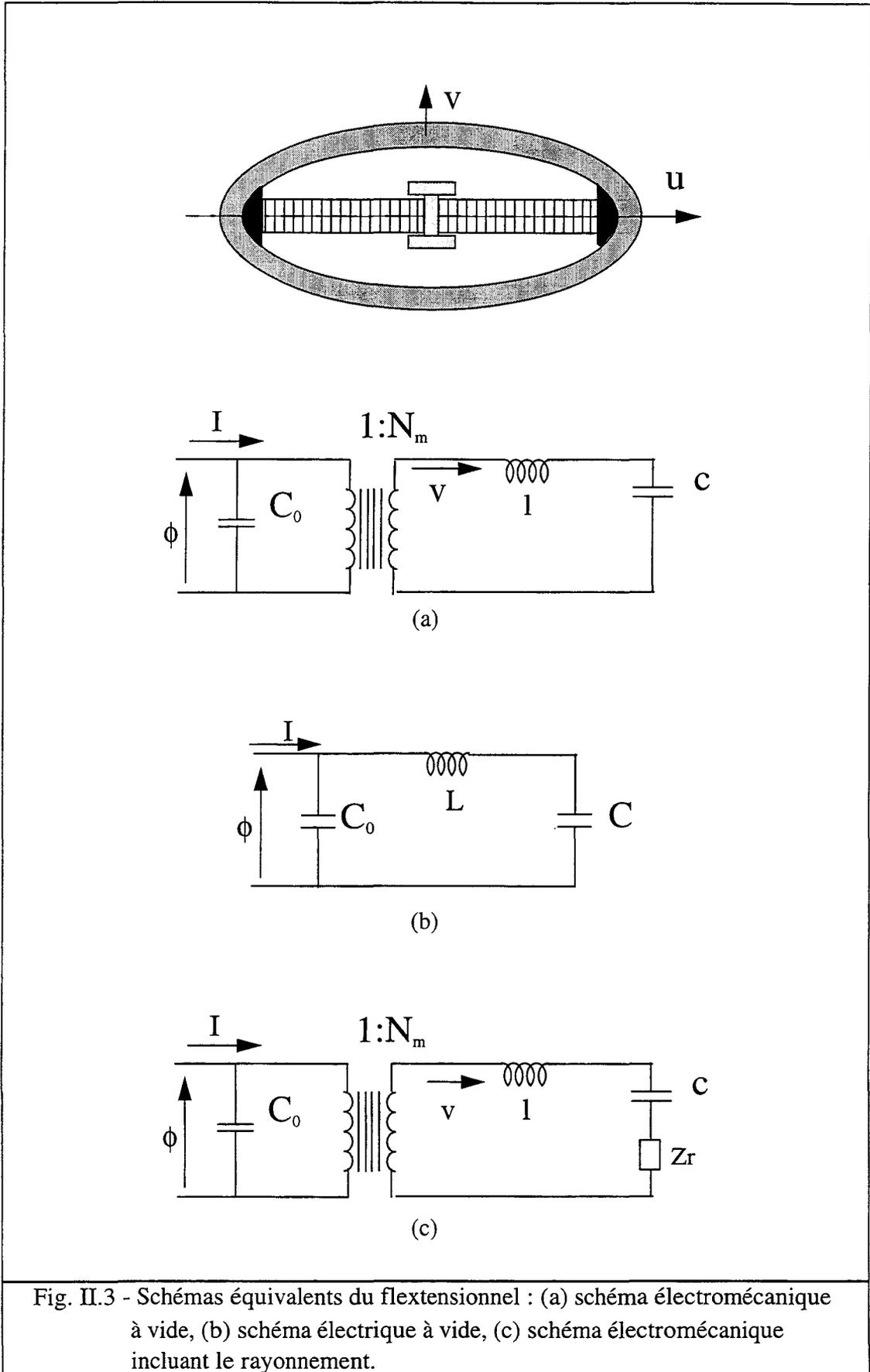


Fig. II.3 - Schémas équivalents du flexionnel : (a) schéma électromécanique à vide, (b) schéma électrique à vide, (c) schéma électromécanique incluant le rayonnement.

Des équations (II.13) et (II.14), on déduit les valeurs des différents paramètres du circuit, qui sont :

$$\begin{aligned} C_0 &= C_{BF} \left(\frac{f_r}{f_a} \right)^2 & L &= \left[4\pi^2 f_r^2 \left(1 - \left(\frac{f_r}{f_a} \right)^2 \right) \right]^{-1} \\ C &= C_{BF} \left(1 - \left(\frac{f_r}{f_a} \right)^2 \right) & N &= \frac{C_{BF}}{v_{BF}} \left[1 - \left(\frac{f_r}{f_a} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

A partir des valeurs de C_{BF} , v_{BF} , f_r et f_a déterminées par la méthode des éléments finis, on peut reproduire grâce au schéma équivalent quasi-exactement les comportements mécanique et électrique du projecteur.

b) Fonctionnement dans un fluide lourd environnant.

Dans le cadre de l'analyse par la méthode des équations intégrales, le code EQI permet de déterminer le champ de pression en tout point de la surface du projecteur de même qu'en champ lointain. Un postprocesseur calcule enfin l'impédance de rayonnement (annexe IV), au sens de L.L. FOLDY [39,41].

Le champ de déplacement utilisé comme référence par EQI, est celui calculé dans l'air à l'aide du code ATILA à la première fréquence de résonance.

Le schéma équivalent complet devient celui de la figure (II.3.c).

II - 4.3 Elaboration d'un schéma équivalent du transducteur à partir des contributions séparées de la coque et du moteur

II - 4.3.1 Principe

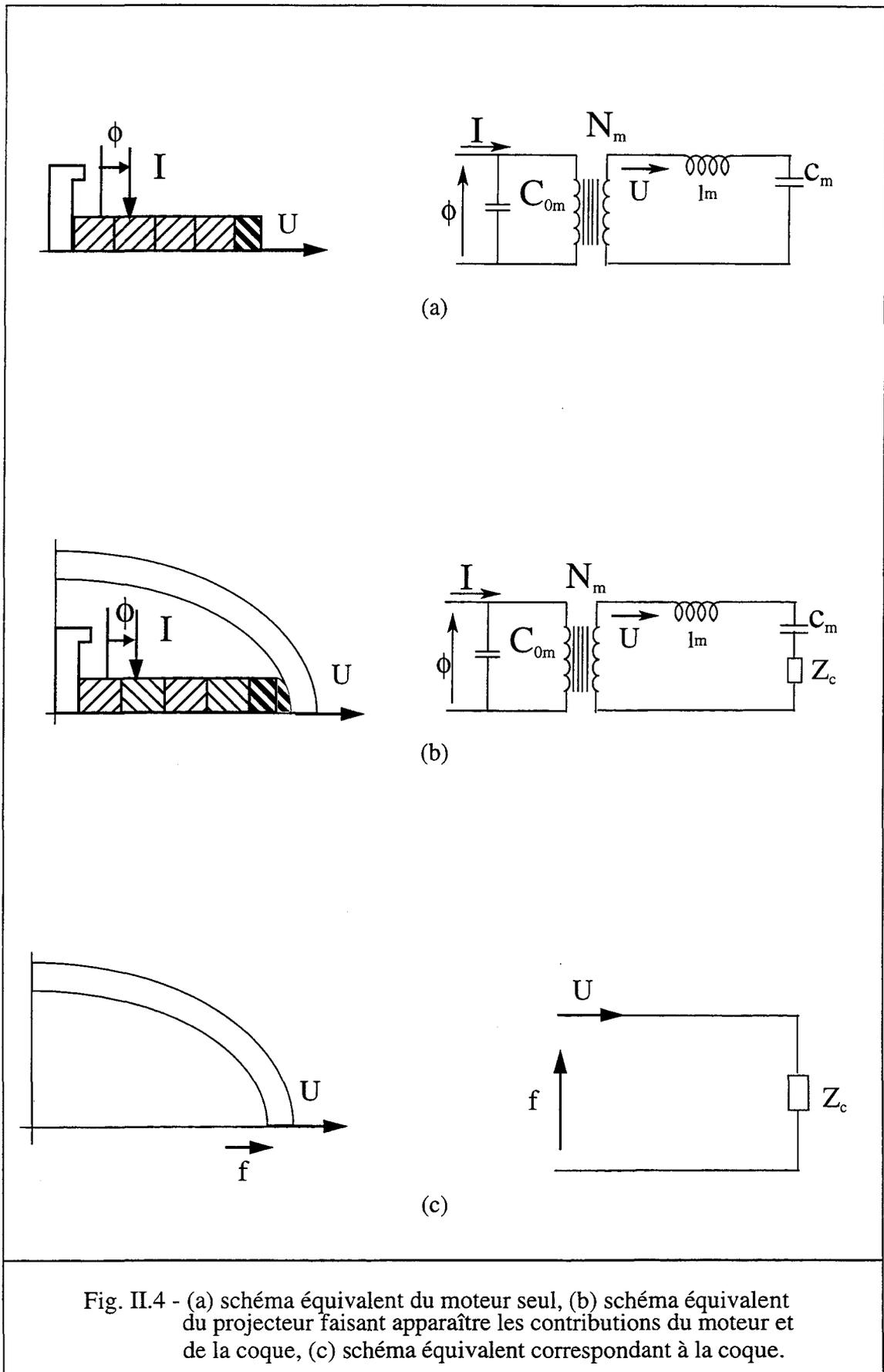
Classiquement, le schéma équivalent du moteur est celui de la figure (II.4.a). La variable u représente la vitesse à l'extrémité libre de la colonne.

La représentation la plus simple de l'impédance z_c est une branche résonante série formée de l'association d'une compliance équivalente c_1 et d'une masse équivalente l_1 (Fig. II.5), telles que :

$$f_l = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{l_1 c_1}} \quad (\text{II.17})$$

Où f_l est la première fréquence de résonance de la coque libre. Toutefois, cette représentation s'avère incorrecte lorsqu'on l'utilise. En effet avec un tel modèle, on a :

$$f_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c_l + c_m}{c_l c_m (l_l + l_m)}} \quad (\text{II.18})$$



Or, la compliance de la coque est toujours très nettement supérieure à celle du moteur ($c_1 \gg c_m$). De même, sa masse est également supérieure, mais dans un moindre rapport ($l_1 > l_m$). En conséquence :

$$f_r \approx \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{c_m l_1}} \quad (\text{II.19})$$

Relation dans laquelle la seule raideur qui intervienne est celle du moteur et qui donne une valeur de f_r beaucoup trop élevée. Un autre argument réfute ce schéma. De fait, compte tenu de la faible valeur de c_m , l'amplitude vibratoire de l'extrémité du grand axe, u_1 , est très faible.

Or le premier mode de résonance de la coque représenté schématiquement par la figure (II.5.a) est tel que l'amplitude vibratoire v_1 à l'extrémité du petit axe est du même ordre que u_1 . En conséquence, v_1 est aussi très faible, ce qui est opposé au principe de fonctionnement du flexensionnel.

Une représentation correcte s'obtient simplement en incorporant dans z_c une seconde branche motionnelle formée de l_2 et c_2 , en parallèle sur la première et correspondant à la seconde résonance (Fig. II.5.b). En effet, dans ce cas, l'impédance totale Z_T de la branche motionnelle (Fig. II.6) est donnée par :

$$Z_T = \frac{1}{y_m} + \frac{1}{y_1 + y_2} = \frac{y_1 + y_2 + y_m}{y_m (y_1 + y_2)} \quad (\text{II.20})$$

où y_1 , y_2 et y_m sont les admittances des branches motionnelles 1 et 2 de la coque et du moteur.

La figure (II.6) montre alors que la fréquence de résonance du projecteur f_r , correspondant à $Z_T = 0$ est cette fois beaucoup plus proche de f_1 , voisine de la fréquence d'antirésonance de la coque f_c pour laquelle $y_1 + y_2 = 0$.

De plus, le second mode de la coque, représenté par la figure (II.5.b) est telle que u_2 et v_2 , contrairement au premier mode, sont du même signe. En conséquence, quand $y_1 + y_2$ est quasi nulle, u_1 et u_2 sont opposés et v_1 et v_2 sont de même signe, ce qui autorise une vitesse vibratoire $v = v_1 + v_2$ à l'extrémité du petit axe très supérieure à $u = u_1 + u_2$, conformément au principe de fonctionnement du flexensionnel.

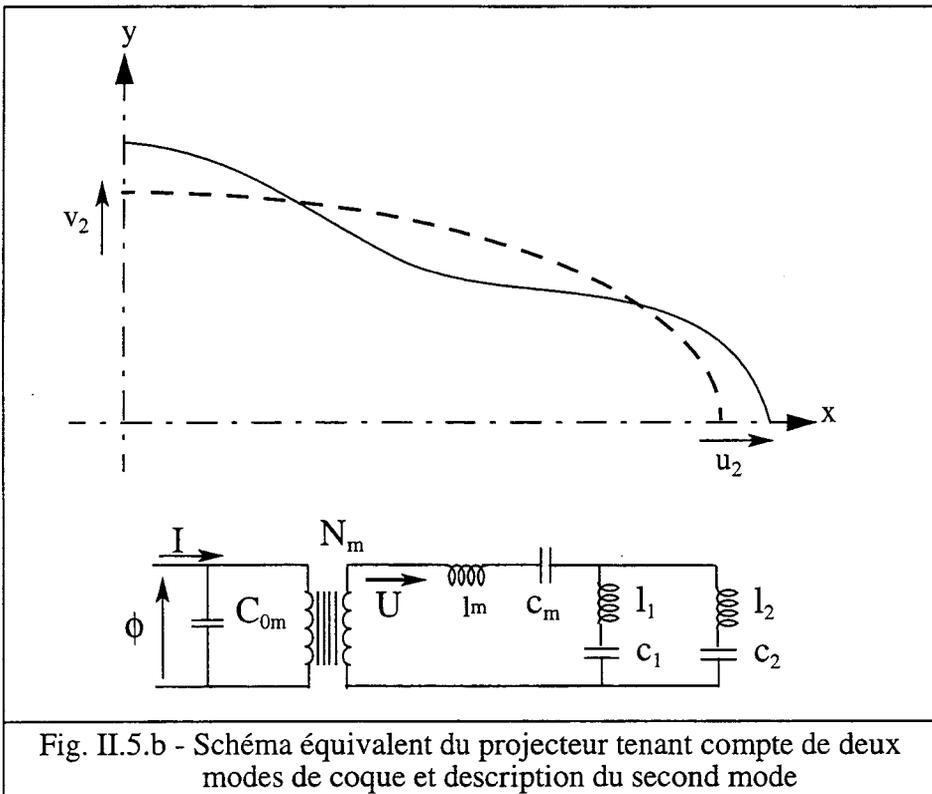
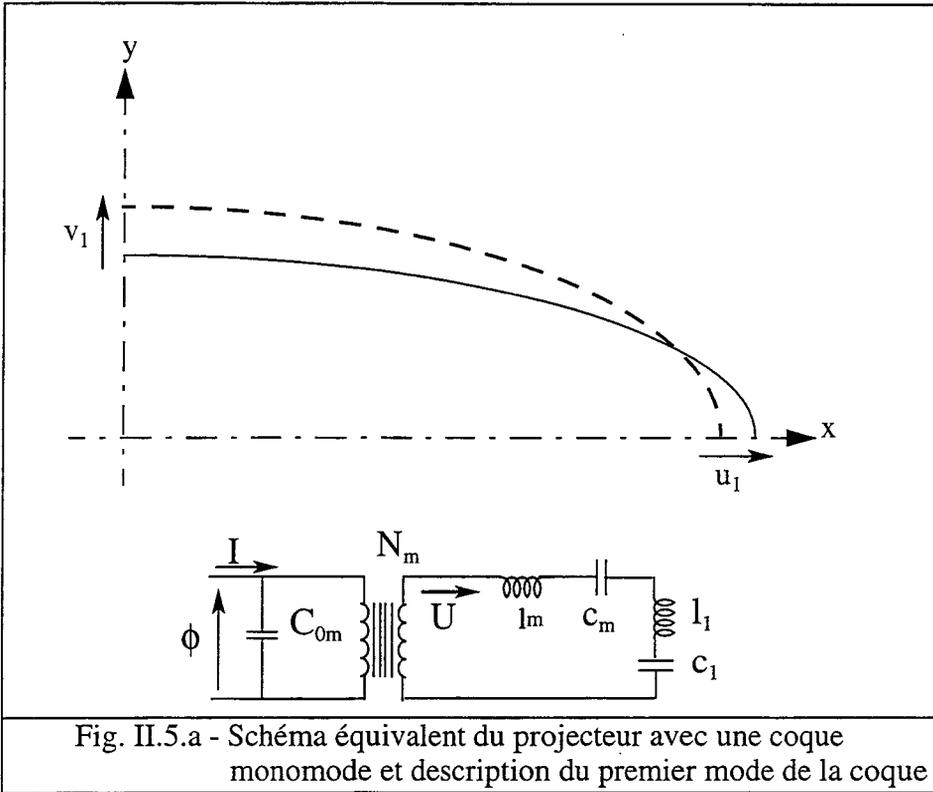
Les sections suivantes vont permettre l'identification du schéma équivalent de la coque (I - 4.3.2.1), l'identification du schéma équivalent du moteur (I - 4.3.2.2), puis la construction du schéma équivalent du projecteur complet (I - 4.3.2.3).

Dans le chapitre V, nous traiterons deux exemples de transducteurs où d'identification des différents schémas présentée ici, sera appliquée.

II - 4.3.2 Détermination des différents paramètres

a) Schéma équivalent de la coque

Dans cette section, on présente le schéma équivalent de la coque seule, à une branche représentant son premier mode puis à deux branches représentant ces deux premiers modes.



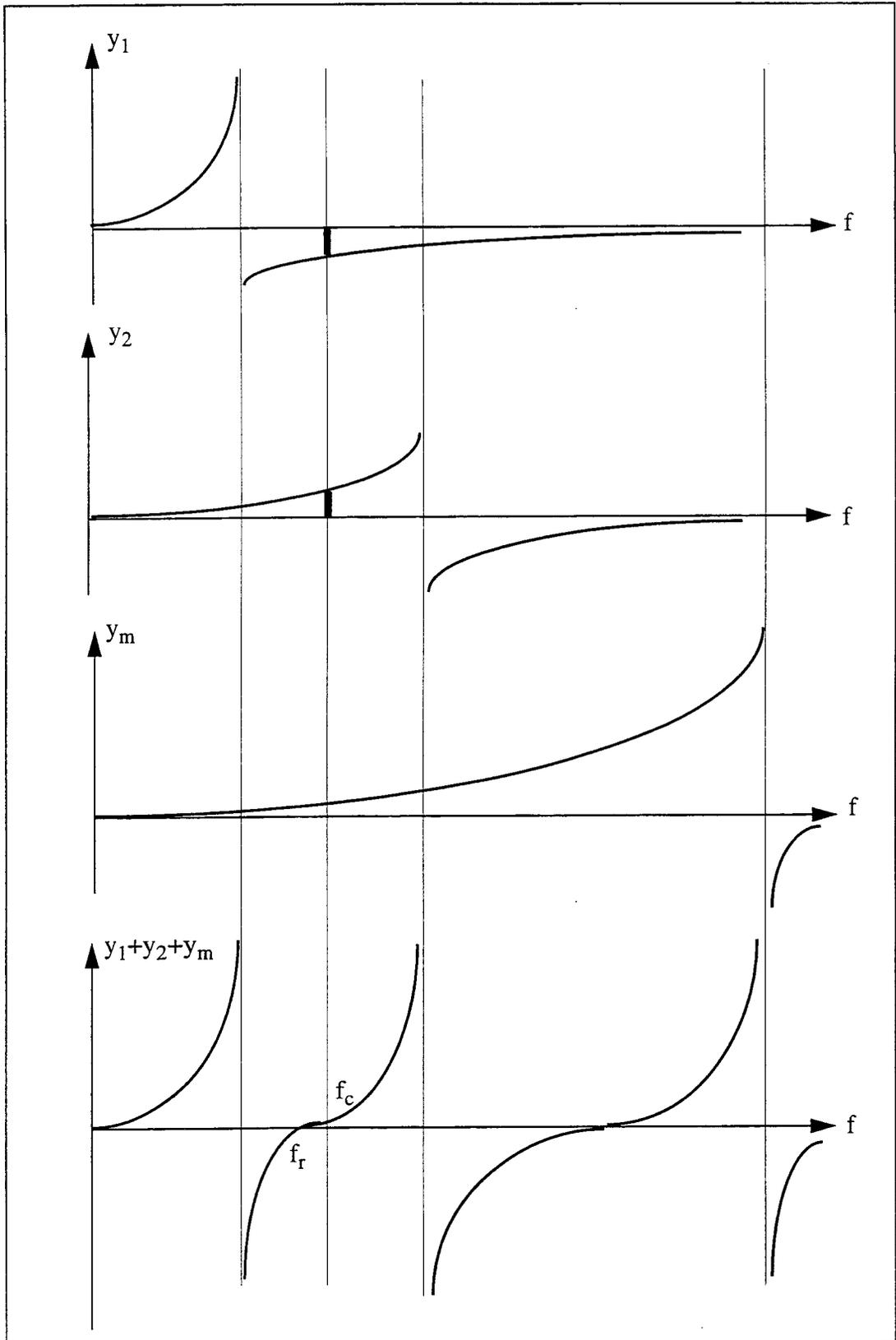


Fig. II.6 - Variations avec la fréquence des admittances des deux modes de coque (y_1 et y_2) et du moteur (y_m) et détermination graphique de la fréquence de résonance du projecteur f_r . f_c est la fréquence de la coque telle que : $y_1 + y_2 = 0$.

Du schéma équivalent de la figure (II.5.b) on a :

$$f_1 = \frac{I}{2\pi \sqrt{l_1 c_1}} \quad , \quad f_2 = \frac{I}{2\pi \sqrt{l_2 c_2}} \quad (\text{II.21})$$

où f_1 et f_2 représentent respectivement la première et la deuxième fréquence de résonance des deux premiers modes propre de la coque seule. Lorsqu'on est en basse fréquence, on a :

$$c_1 + c_2 = u_{BF} \quad (\text{II.22})$$

c_1 et c_2 sont les compliances de la coque, u_{BF} est le déplacement de l'extrémité du grand axe en basse fréquence.

u le déplacement à l'extrémité du grand axe est défini par :

$$u = \frac{v}{j\omega} = -\frac{I}{\omega} \left[\frac{I}{\left(l_1 \omega - \frac{I}{c_1 \omega} \right)} + \frac{I}{\left(l_2 \omega - \frac{I}{c_2 \omega} \right)} \right] F \quad (\text{II.23})$$

quand $u = 0$, la fréquence correspondante est celle du mode d'antirésonance mécanique notée f_c . On obtient donc dans ce cas :

$$\frac{I}{\left(l_1 \omega_c - \frac{I}{c_1 \omega_c} \right)} + \frac{I}{\left(l_2 \omega_c - \frac{I}{c_2 \omega_c} \right)} = 0 \quad (\text{II.24})$$

Des équations(II.21-II.24) on déduit les valeurs des deux masses l_1 et l_2 :

$$l_1 = \frac{I}{\omega_1^2 u} \frac{2 - \left(\frac{\omega_c}{\omega_1} \right)^2 - \left(\frac{\omega_c}{\omega_2} \right)^2}{\left[I - \left(\frac{\omega_c}{\omega_2} \right)^2 \right]} \quad l_2 = \frac{I}{\omega_2^2 u} \frac{2 - \left(\frac{\omega_c}{\omega_1} \right)^2 - \left(\frac{\omega_c}{\omega_2} \right)^2}{\left[I - \left(\frac{\omega_c}{\omega_1} \right)^2 \right]} \quad (\text{II.25})$$

de la même manière on détermine les valeurs des deux compliances c_1 et c_2

$$c_1 = u \frac{\left[I - \left(\frac{\omega_c}{\omega_1} \right)^2 \right]}{\left(\frac{\omega_c}{\omega_2} \right)^2 - \left(\frac{\omega_c}{\omega_1} \right)^2} \quad c_2 = u \frac{\left[\left(\frac{\omega_c}{\omega_2} \right)^2 - I \right]}{\left(\frac{\omega_c}{\omega_2} \right)^2 - \left(\frac{\omega_c}{\omega_1} \right)^2} \quad (\text{II.26})$$

b) Schéma équivalent du moteur

Si on note :

- l_m : masse équivalente du moteur,
- c_m : compliance équivalente du moteur,

- c_0 : capacité bloquée,
- f_{rm} : fréquence de résonance du moteur,
- f_{am} : fréquence d'antirésonance du moteur,
- N_m : rapport du transformateur électromécanique,

Du schéma équivalent de la figure (II.4 (a)), on a :

$$l_m c_m \omega_r^2 = I \quad (II.27)$$

$$\frac{l_m c_m c_0}{c_m + c_0} \omega_a^2 = I \quad (II.28)$$

Des relations (II.27) et (II.28), on déduit les fréquences de résonance et d'antirésonance du moteur, exprimées si après par :

$$\begin{aligned} f_{rm} &= \frac{1}{2\pi \sqrt{l_m c_m}} \\ f_{am} &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c_m + c_0}{l_m c_m c_0}} \end{aligned} \quad (II.29)$$

L'admittance du moteur en basse fréquence est :

$$Y(\omega) = (c_m + c_0) \omega \quad (II.30)$$

A partir des équations (II.27-II.30), on détermine les paramètres du schéma équivalent du moteur, qui sont :

$$c_m = \frac{Y(\omega)}{\omega} \left[1 - \frac{\omega_r^2}{\omega_a^2} \right] \quad c_{0m} = \frac{Y(\omega) \omega_r^2}{\omega \omega_a^2} \quad (II.31)$$

$$l_m = \frac{\omega}{Y(\omega) \omega_r^2 \left[1 - \frac{\omega_r^2}{\omega_a^2} \right]} \quad N_m = \frac{\Phi}{u_0 \omega \left(\frac{I}{c_m \omega} - l_m \omega \right)} \quad (II.32)$$

II - 4.3.3 Schéma équivalent du projecteur complet

A partir des deux schémas équivalents du moteur (Fig. II.4) d'une part, celui de la coque seule (Fig. II.5) d'autre part, il est facile de déduire le schéma global du projecteur. Ce schéma est représenté par la figure (II.5.b).

Si conformément à l'utilisation normale du flexensionnel, la vitesse vibratoire intéressante est celle de l'extrémité du petit axe v , alors le calcul est aisé. A l'aide du schéma équivalent de la figure (II.5.b), les composantes modales u_1 et u_2 de la vitesse u sont calculées en fonction de la fréquence. Ensuite, on considère que :

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \quad (II.33)$$

où les coefficients α_1 et α_2 sont définis par :

$$\alpha_1 = \frac{v_1}{u_1} \text{ et } \alpha_2 = \frac{v_2}{u_2} \quad (\text{II.34})$$

u_1 et u_2 représentent le déplacement, du bout du grand axe de la coque, du premier mode et du second mode respectivement, v_1 et v_2 ceux du petit axe.

II - 4.4 Caractéristiques du projecteur complet

Si on dispose du schéma équivalent complet à deux branches, le schéma équivalent global de la section (I - 4.2.1.1) peut être facilement retrouvé. En effet, la fréquence de résonance f_r du projecteur complet est alors la racine positive la plus faible de l'équation bicarrée :

$$f^4 \left[\frac{c_2}{f_1^2 f_m^2} + \frac{c_1}{f_2^2 f_m^2} + \frac{c_m}{f_1^2 f_2^2} \right] - f^2 \left[c_2 \left(\frac{1}{f_1^2} + \frac{1}{f_m^2} \right) + c_1 \left(\frac{1}{f_2^2} + \frac{1}{f_m^2} \right) + c_m \left(\frac{1}{f_1^2} + \frac{1}{f_2^2} \right) \right] + c_1 + c_2 + c_m = 0 \quad (\text{II.35})$$

La fréquence d'antirésonance est solution de la même équation obtenue en remplaçant c_m par c'_m dans l'équation (II.35) telle que :

$$c'_m = \frac{c_m c_0}{c_m + c_0} \quad (\text{II.36})$$

$$c_0 = \frac{C_0}{N_m^2} \quad (\text{II.37})$$

La capacité basse fréquence est :

$$C_{BF} = C_0 + \frac{N_m^2 c_m (c_1 + c_2)}{c_1 + c_2 + c_m} \quad (\text{II.38})$$

et le déplacement basse fréquence au bout du petit axe est obtenu par :

$$u_{BF} = N_m \frac{c_m (\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2)}{c_1 + c_2 + c_m} \quad (\text{II.39})$$

II - 5 Conclusion

Pour déterminer les caractéristiques des transducteurs flexensionnels de classe IV, leur schéma équivalent global peut être déterminé numériquement. Ces mêmes caractéristiques peuvent être obtenues à partir d'un schéma équivalent où les contributions de la coque et du moteur sont séparées. Ce schéma peut être obtenu en assemblant le circuit représentant le moteur (circuit à une seule branche motionnelle correspondant au premier mode longitudinal) au circuit représentant la coque (circuit à deux branches motionnelles correspondant aux deux premiers modes de la coque).

C'est grâce à ce dernier schéma que l'on peut déterminer les caractéristiques des transducteurs complets analytiquement en menant une étude (analytique) de la coque et du moteur.

Pour cela, nous avons besoin de connaître :

- les fréquences de résonance des deux premiers modes ainsi que la fréquence d'anti-résonance mécanique de la coque, le déplacement en basse fréquence en bout du grand axe et les rapports des déplacements en bout du grand axe / déplacements en bout du petit axe des deux premiers modes.
- les fréquences de résonance et d'antirésonance du moteur seul, la capacité et le déplacement en bout du moteur en basse fréquence.

Dans le chapitre III nous présentons la méthode analytique pour l'étude de la coque, et de la même manière, dans le chapitre IV une méthode analytique pour l'étude du moteur sera présentée. Les résultats de ces deux méthodes seront comparés à ceux obtenus par la méthode des éléments finis.

CHAPITRE III

Détermination analytique des caractéristiques de la coque

Comme nous l'avons indiqué dans le chapitre précédent, pour avoir le schéma équivalent d'un transducteur flexensionnel de classe IV, il faut connaître pour sa coque :

- les deux premiers modes et leur fréquence : f_1 et f_2 ,
- la fréquence d'antirésonance mécanique : f_c ,
- le déplacement en basse fréquence en bout du grand axe,
- les rapports des déplacements (déplacement en bout du grand axe / déplacement en bout du petit axe) des deux premiers modes de résonance.

Parmi les différents coques des transducteurs flexensionnels de classe IV, nous allons nous limiter dans le cadre de cette étude aux coques à épaisseur constante.

Ce chapitre présente une méthode analytique simple [30] permettant de déterminer les différents paramètres cités plus haut. Pour le premier mode de la coque, le principe de RAYLEIGH [44] est utilisé ; ce même principe sera appliqué pour déterminer le mode de membrane.

Pour la seconde fréquence de résonance et la fréquence d'antirésonance mécanique de la coque, la méthode utilisée ici est fondée sur le principe des coefficients de flexibilité [45].

La géométrie de la coque est définie en détail, ainsi que les modélisations utilisées par ATILA. Pour comparer les résultats analytiques aux résultats de la méthode des éléments finis, il est nécessaire de recourir à plusieurs analyses.

Pour pouvoir appliquer les deux principes cités plus haut, on a besoin de connaître le champ de déplacement, pour cela, une méthode énergétique utilisant les formules de BRESSE [46] est présentée.

III - 1 Géométrie de la coque

Nous nous intéresserons dans cette thèse à des coques dont la géométrie d'une section est définie (Fig. III.1), elle admet deux rayons de courbure r et R , le matériau utilisé étant l'aluminium (AU4G). Les coques en matériaux composites étant à épaisseur variable ne seront pas traitées dans cette thèse.

Les différents paramètres géométriques de la coque sont ;

- r : rayon de courbure moyen de la région 1,
- R : rayon de courbure moyen de la région 2,
- ga : grand axe moyen,
- j : angle délimitant la région 1 de la région 2,

Connaissant r , R et ga , on déduit la valeur de j , délimitant les deux régions, comme suit :

$$\varphi = \arccos \left[\frac{\frac{ga}{2} - r}{R - r} \right] \quad (\text{III-1})$$

Pour alléger l'écriture, on définit deux paramètres A et B tels que pour des valeurs de r , R et ga constantes, on a :

$$\begin{aligned} A &= (1 - \varepsilon) \cos \varphi \\ B &= (1 - \varepsilon) \sin \varphi \end{aligned} \quad \text{avec : } \varepsilon = \frac{r}{R} \quad (\text{III-2})$$

Les coordonnées cartésiennes d'un point $M(\alpha)$, défini par son angle α , de la région 1, $0 \leq \alpha \leq \varphi$ sont définies par :

$$\begin{cases} x_1(R, \alpha) = R(A + \varepsilon \cos \alpha) \\ y_1(R, \alpha) = R\varepsilon \sin \alpha \end{cases} \quad 0 \leq \alpha \leq \varphi \quad (\text{III-3})$$

Les coordonnées cartésiennes d'un point $M(\alpha)$, de la région 2, sont définies par :

$$\begin{cases} x_2(R, \alpha) = R \cos \alpha \\ y_2(R, \alpha) = R(\sin \alpha - B) \end{cases} \quad \varphi \leq \alpha \leq \pi/2 \quad (\text{III-4})$$

Les indices 1 et 2 rappellent les positions des points dans les régions 1 et 2 respectivement.

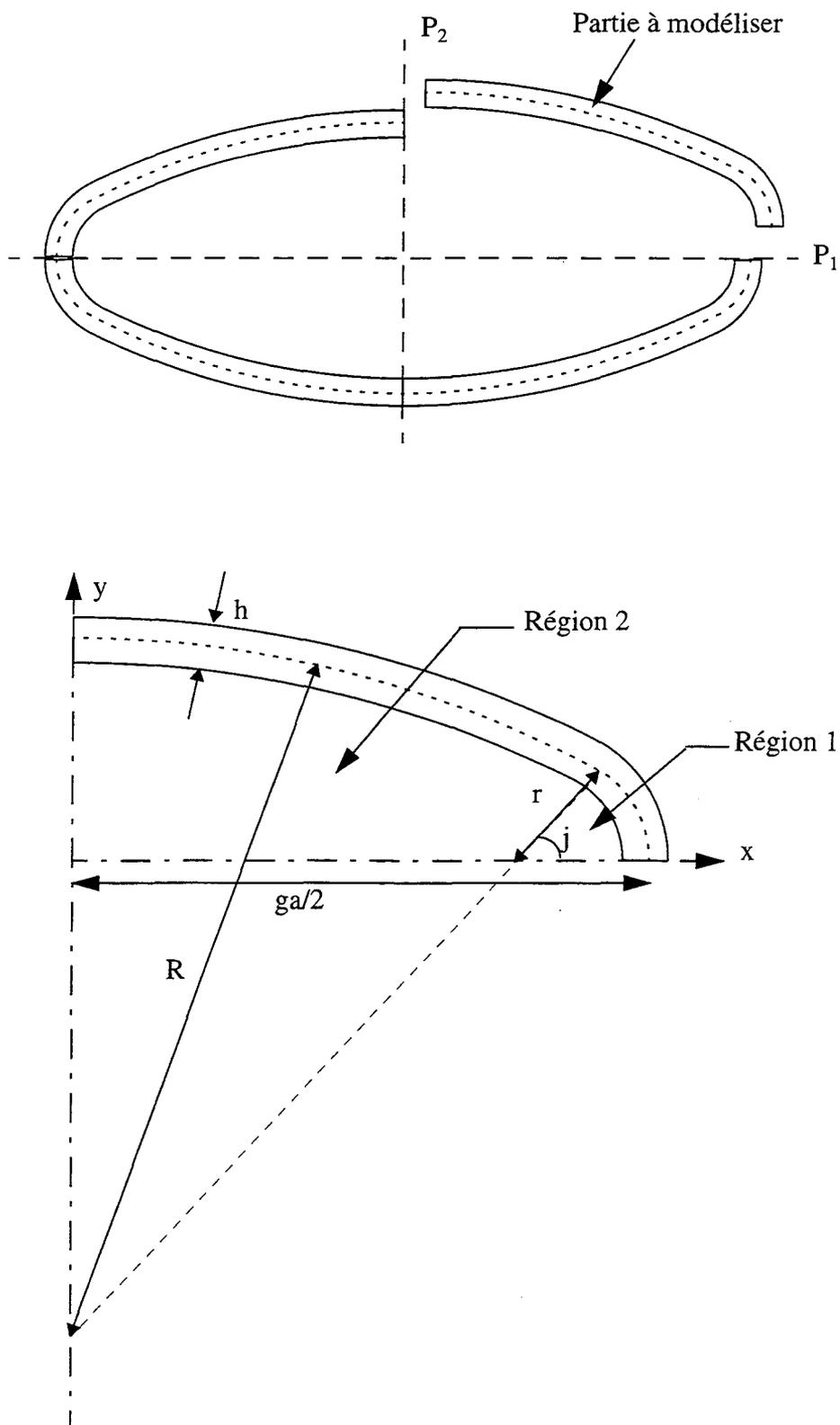


Fig. III.1 - Géométrie et paramètres géométriques de la coque.

III - 2 Utilisation de la méthode des éléments finis

III - 2.1 Présentation des différentes analyses nécessaires

Les différentes analyses nécessaires pour comparer les résultats des méthodes analytiques aux résultats donnés par la méthode des éléments finis sont celles du paragraphe (II - 2.2) chapitre (II) : une analyse statique pour pouvoir vérifier le champ de déplacement de la coque, une analyse modale pour déterminer les deux premiers modes de la structure et les deux premières fréquences correspondantes et enfin une analyse harmonique pour déterminer la fréquence de coupure de la coque.

III - 2.2 Modélisation

La modélisation choisie pour l'analyse de la coque est définie par la figure III.2.a et représente un quart de la structure : ceci est possible à cause des deux plans de symétrie P1 et P2 (Fig. III.1) en 2 dimensions, du fait que la structure est longue, on applique l'hypothèse des déformations planes. Elle comprend dix éléments à huit noeuds, deux éléments pour la partie correspondant au petit rayon de courbure et huit éléments pour le grand rayon de courbure. Le choix de cette modélisation a été retenu après avoir testé d'autres modélisations présentées dans la section suivante.

III - 2.3 Résultats

Les résultats obtenus par l'analyse bidimensionnelle à 10 éléments sont proches des résultats ayant été obtenus lors de l'analyse bidimensionnelle à 20 éléments (quadrilatères à 8 noeuds) (Fig. III.2.b), puis par une analyse tridimensionnelle à 10 éléments facettes pour les coques minces, (quadrilatères à 8 noeuds en 3D) (Fig. III.2.c) et enfin par une analyse tridimensionnelle par des éléments hexaèdres à 20 noeuds (Fig. III.2.d) ; pour une coque en aluminium d'épaisseur $h = 20$ mm, un grand rayon $R = 500$ mm, un grand axe moyen $ga = 500$ mm et pour différentes valeurs du petit rayon variant de 30 à 60 mm, la longueur de la coque pour les analyses tridimensionnelles est de 41.5 mm. Le choix des dimensions de la coque relève du fait que les études numériques et expérimentales faites sur le transducteur flexionnel de classe IV [21], montrent que : le rapport grand axe/ petit axe ne doit pas excéder 3. Dans le cas des coques mentionnées plus haut, le rapport grand axe petit axe varie de 2.4 à 3. Les valeurs de la première et de la seconde fréquence de résonance obtenues par les différentes analyses de la méthode des éléments finis, sont regroupés dans le tableau (III.1).

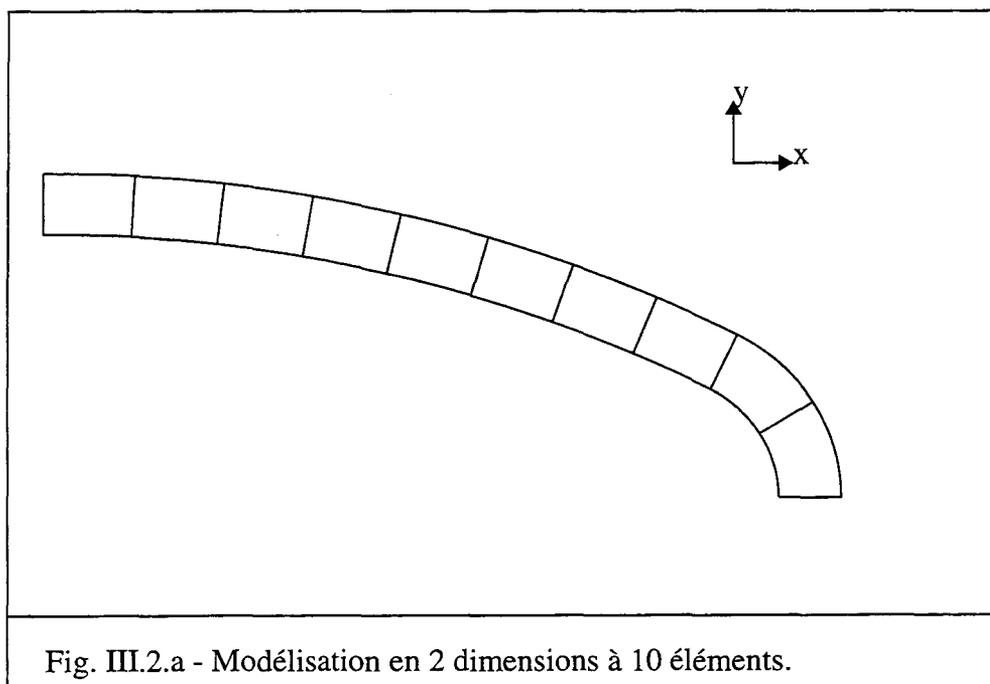
Ces résultats montrent que l'accord est parfait entre les valeurs des différentes modélisations et que le choix de la représentation de la figure III.2.a est valable. C'est cette modélisation qui va servir de référence pour les différentes comparaisons avec les méthodes analytiques.

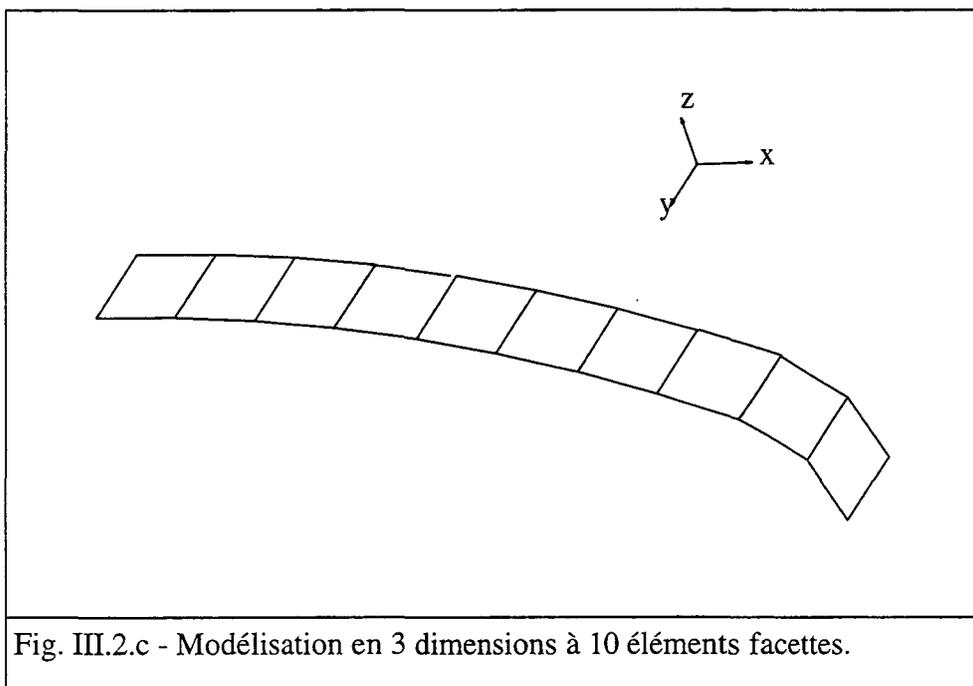
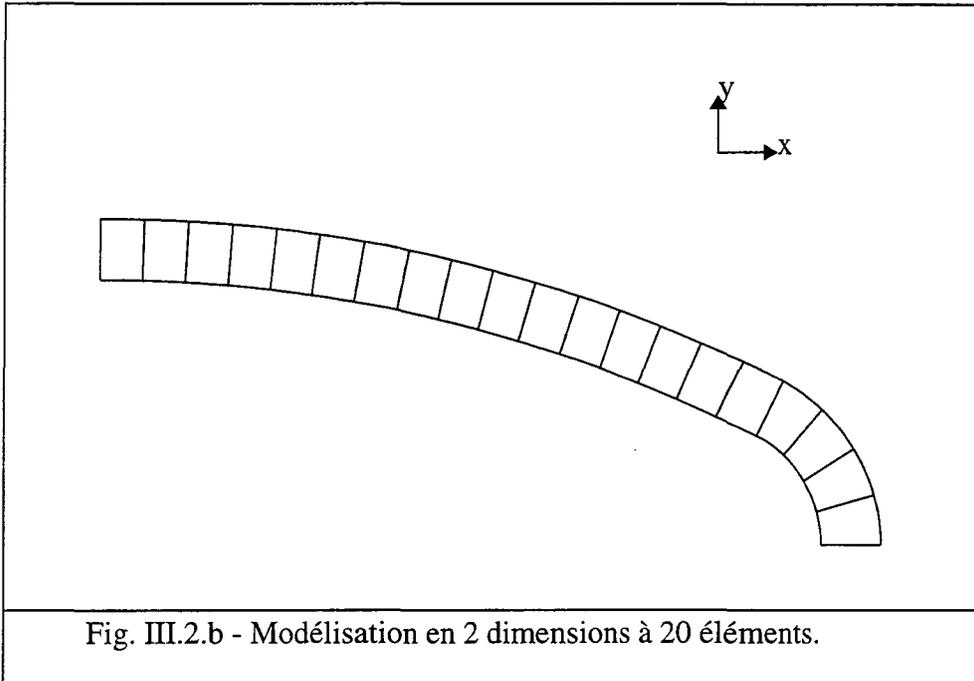
A noter que le plus grand écart entre ces valeurs, n'excède pas 1.4% pour la première fréquence et 3% pour la deuxième fréquence. Ces plus grands écarts sont obtenus en comparant les résultats donnés par l'analyse en 3 dimensions par des éléments facettes avec les autres résultats, ceci peut s'expliquer par le fait que les éléments facettes sont des éléments plans et ne correspondent pas parfaitement à la structure.

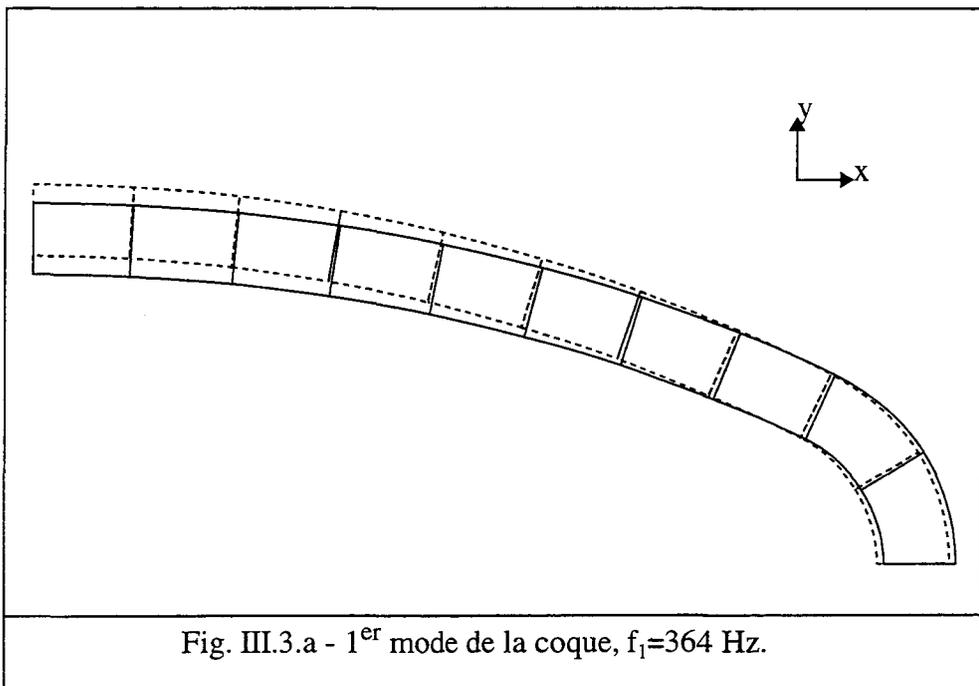
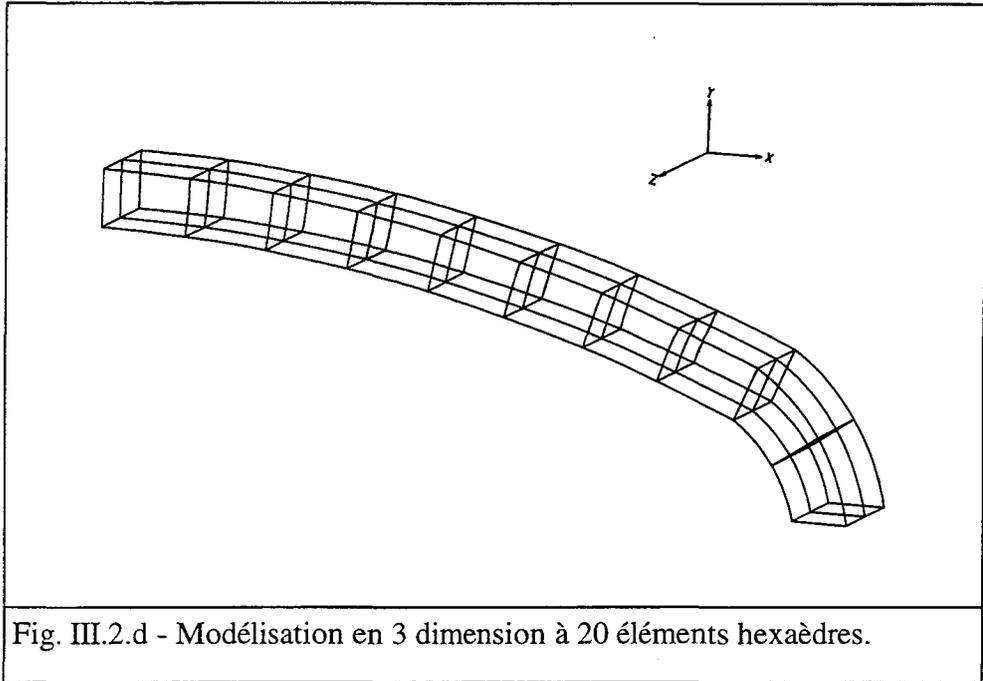
	f_1	f_1	f_1	f_1	f_2	f_2	f_2	f_2
analyse r en mm	2D à 10 éléments quadrilatè- res	2D à 20 éléments quadrilatè- res	3D à 10 éléments facettes	3D à 20 éléments hexaèdres	2D à 10 éléments- quadrilatères	2D à 20 éléments- quadrilatères	3D à 20 éléments facettes	3D à 20 éléments hexaèdres
30	380.	379.	380.	380.	2025.	2014.	2066.	2023.
40	372.	369.	372.	371.	1990.	1978.	2034.	1988.
50	364.	360.	364.	364.	1960.	1945.	2004.	1960.
60	357.	352.	356.	357.	1932.	1913.	1974.	1931.

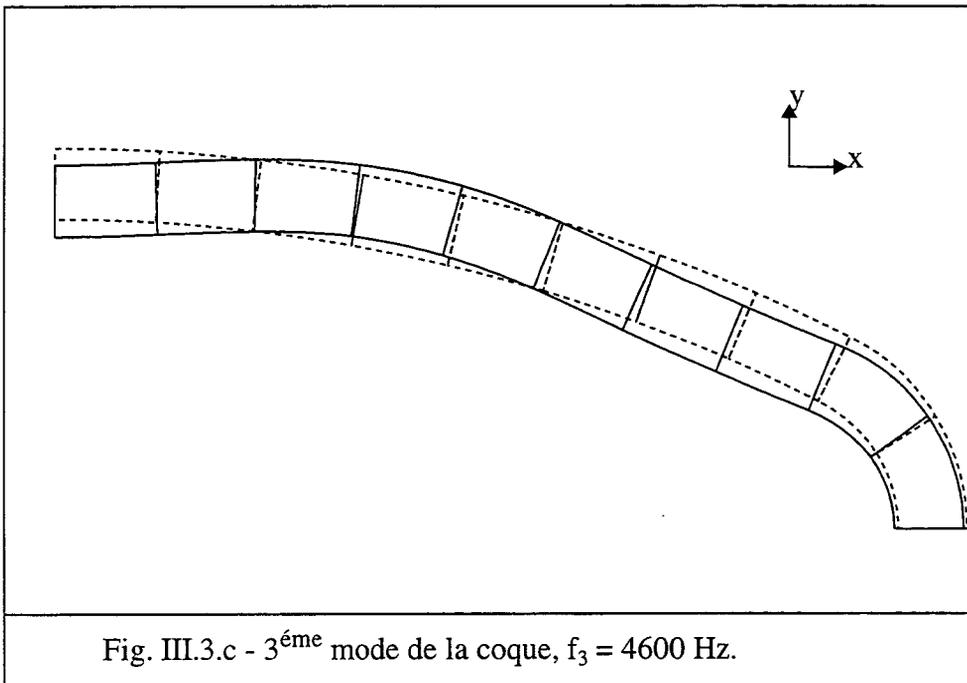
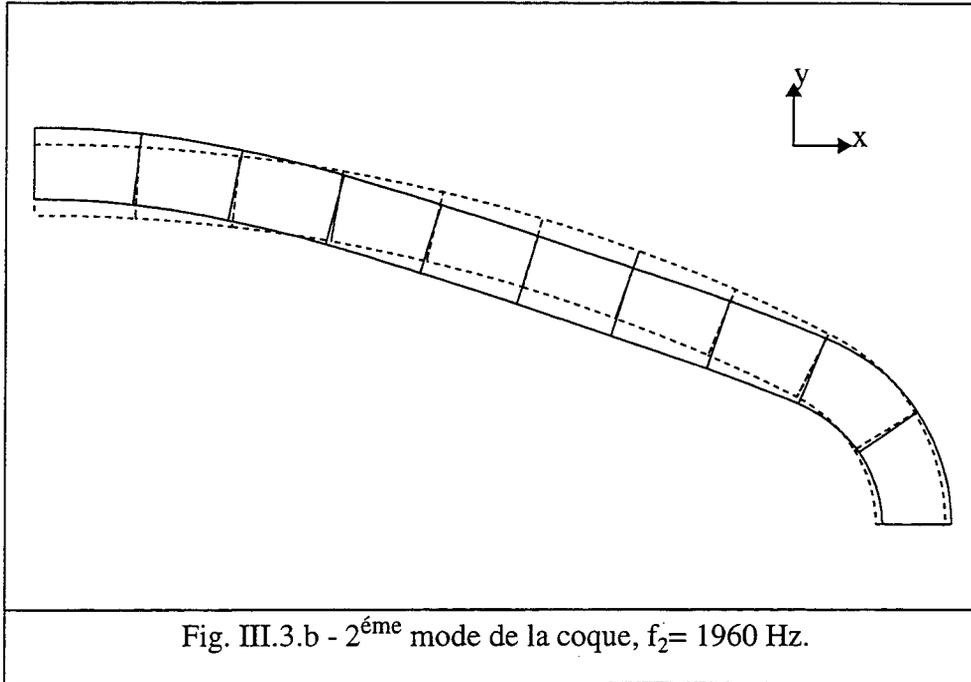
Tableau III.1 : 1^{ère} et 2^{ème} fréquence en Hz pour les coques de grand rayon, $R = 500$. mm, $h = 20$. mm et pour différentes valeurs de r .

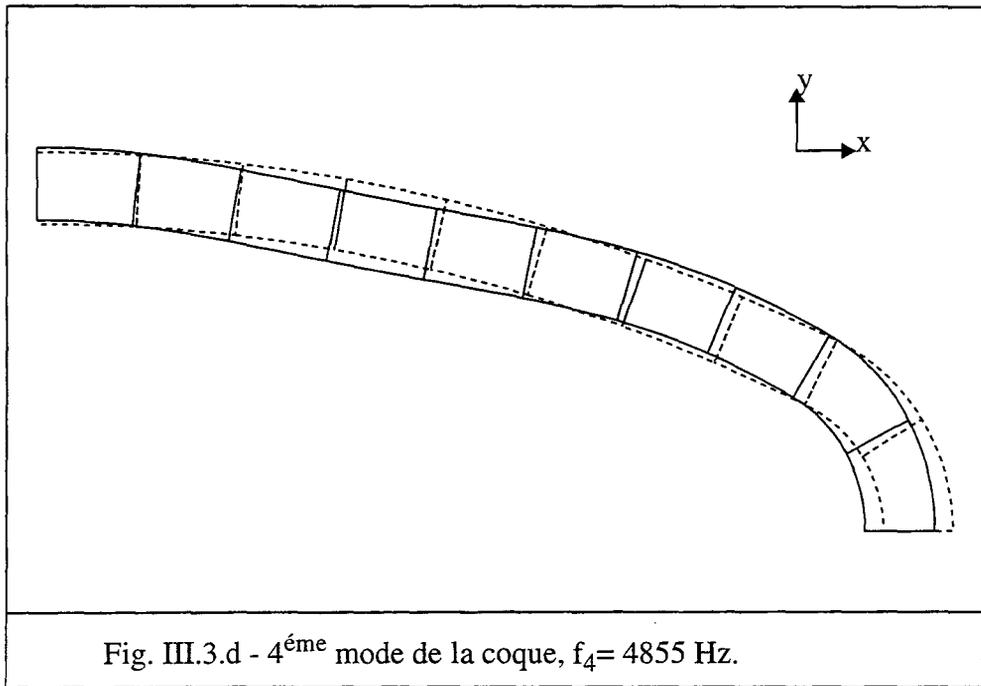
Les figures (III.3.a, III.3.d) représentent les 4 premiers modes et leur fréquences correspondantes obtenus par ATILA pour une coque en aluminium qui va servir de référence dans la suite, les paramètres géométriques de cette dernière sont : $r = 50$ mm, $R = 500$ mm et $h = 20$ mm, le grand axe moyen vaut 500 mm. Les dessins en pointillé représentent la coque au repos et ceux en traits pleins, la coque déformée.





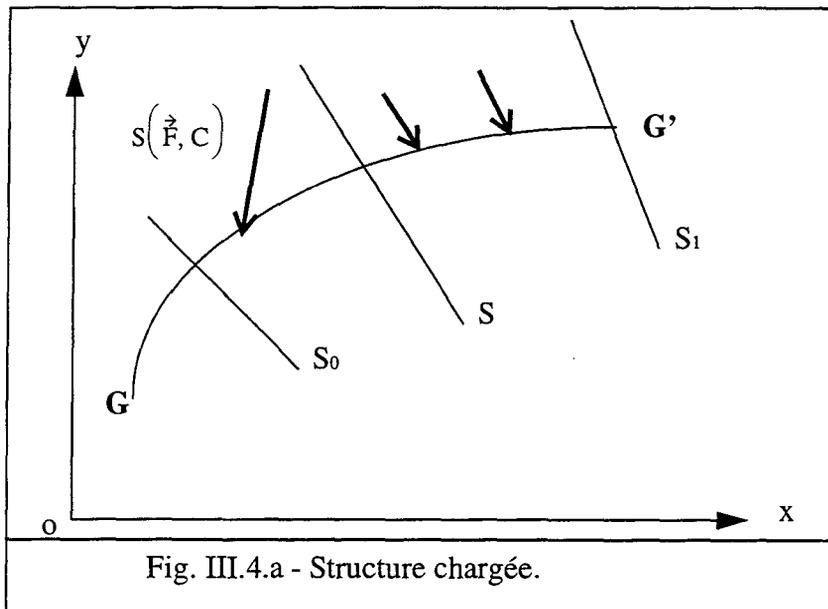






III - 3 Déterminations des déplacements des points d'une structure chargée

Considérons une structure GG' à plan moyen, chargée dans son plan et repérée par un système d'axe oxy situé dans son plan (Fig. III.4.a).

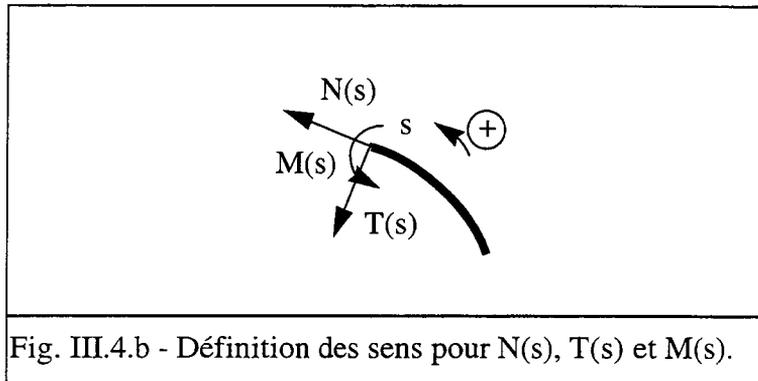


La structure reposant sans frottement sur des appuis invariables, soumise à un système $S(\vec{F}, C)$ de forces et de couples, (Fig. III.4.a) se déforme. Pendant le chargement, les points d'application des forces f_i se sont déplacés de l_i et les sections d'applications des couples C_i ont tourné de θ_i . Le système S a produit un travail t . Ce travail t ne dépendant que de l'état initial et de l'état final

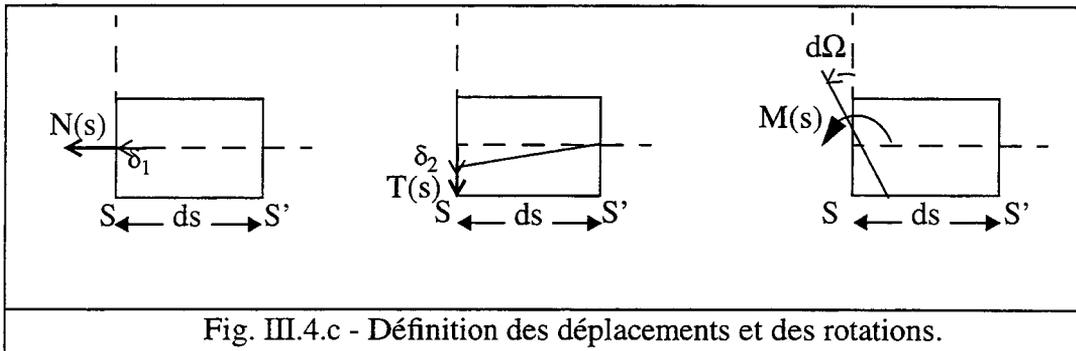
peut être restitué, intégralement par la structure au cours du déchargement. Le travail est donc emmagasiné par la structure sous forme d'énergie potentielle ; cette énergie est le potentiel interne.

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_i f_i \cdot \lambda_i + \sum_i C_i \cdot \phi_i \right) \quad (\text{III-5})$$

Par ailleurs, le système $S(\vec{F}, C)$ provoque dans une section S définie par l'abscisse s , un moment fléchissant $M(s)$, un effort tranchant $T(s)$ et un effort normal $N(s)$, comme indiqué sur la figure III.4.b.



a) Expression de l'énergie potentielle en fonction de $N(s)$, $T(s)$ et $M(s)$



- Sous l'action de l'effort normal $N(s)$, la section S subit vis-à-vis de la section S' supposée fixe, une translation dirigée suivant $N(s)$ et d'amplitude :

$$\delta_1 = \frac{N(s)}{E \cdot S} \cdot ds \quad (\text{III-6})$$

- Sous l'action de l'effort tranchant $T(s)$, le point G subit vis-à-vis de S' (supposée fixe), un déplacement dirigé suivant $T(s)$ et d'amplitude :

$$\delta_2 = \frac{T(s)}{G \cdot S_1} \cdot ds \quad (\text{III-7})$$

- De même sous l'action du moment fléchissant $M(s)$, la section S' subit vis-à-vis de la section S une rotation d'angle :

$$d\Omega = \frac{M(s)}{E \cdot I} \cdot ds \quad (\text{III-8})$$

- E : module d'élasticité longitudinale (module d'YOUNG),
- I : moment d'inertie,
- r : masse volumique,
- G : module d'élasticité transversale défini par : $G = \frac{E}{2(I + \nu)}$,
- S : surface,
- S₁ : surface réduite,
- h : épaisseur.

En remplaçant les déplacements δ_1 et δ_2 et les rotations $d\Omega$ par leur valeurs définies ci-dessus dans l'expression (III-5), l'énergie potentielle de la structure GG' s'écrit :

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot \int_{s_0}^{s_1} \left(\frac{M^2(s)}{E \cdot I} + \frac{T^2(s)}{G \cdot S_1} + \frac{N^2(s)}{E \cdot S} \right) \cdot ds \quad (\text{III-9})$$

b) Application de la théorie du potentiel interne pour le calcul des déplacements

Considérons toujours la structure GG' soumise à S, et appliquons au point A une force \vec{f} dirigée suivant D.

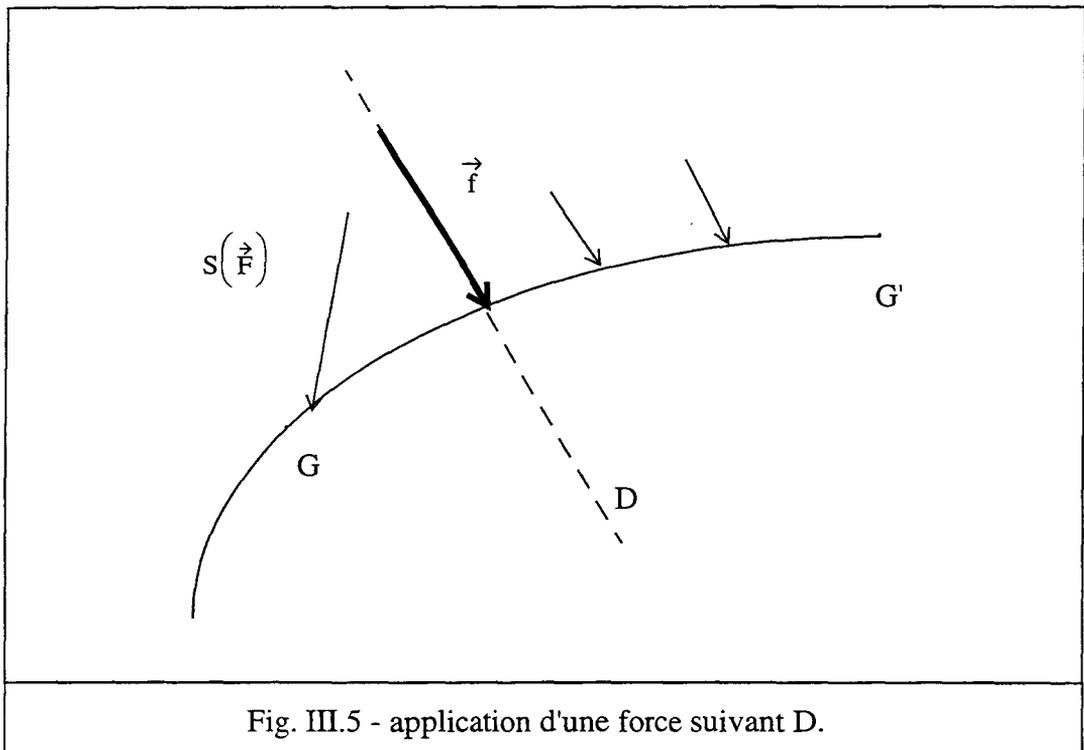


Fig. III.5 - application d'une force suivant D.

Sous l'action simultanée du système $S(\vec{F})$ et de la force \vec{f} , (Fig. III.5), la structure présente le potentiel : $W(S+f)$. D'après le théorème de Castigliano, le déplacement d recherché s'écrit :

$$\delta = \left[\frac{\partial}{\partial f} W(S + f) \right]_{f=0} \quad (\text{III-10})$$

Soient $\bar{M}(s)$, $\bar{N}(s)$ et $\bar{T}(s)$ le moment fléchissant, l'effort tranchant et l'effort normal provoqués par la force \vec{f} dans la section de la structure considérée (isostatique ou isostatique associée). Le déplacement dans la direction D due à cette force compte tenu de l'équation (III-5), s'écrit d'après les équations de Bertrand de Fontviolant :

$$\delta = \frac{l}{2} \cdot \int_{s_0}^s \left(\left[\frac{M(s)\bar{M}(s)}{EI} + \frac{T(s)\bar{T}(s)}{GS_1} + \frac{N(s)\bar{N}(s)}{Eh} \right] \right) ds \quad (\text{III-11})$$

Par le même principe, si on applique des couples à la structure, on peut déterminer la rotation de chaque section.

Nous allons maintenant appliquer cette méthode pour pouvoir :

- dans un premier temps, déterminer les déplacements de chaque point de la fibre moyenne de la structure puis la première fréquence de résonance de la coque paragraphe III - 4,
- dans un deuxième temps, déterminer la seconde fréquence de résonance et la fréquence d'antirésonance mécanique de la coque par l'application du principe des coefficients de flexibilité, paragraphe III - 5,
- dans un troisième temps, déterminer le mode membrane de la coque,

Pour cela, nous avons utilisé l'hypothèse suivante :

Les fibres rectilignes normales à la surface moyenne avant déformation restent, après déformation, rectilignes et normales à la surface moyenne déformée et ne s'allongent pas (hypothèse de KIRCHHOFF). Cette proposition permet de réduire un problème tridimensionnel à un problème à une ou deux dimensions, et revient à supposer que l'élément ne supporte pas de déformation de cisaillement.

Pour chacun des modes de la coque, fréquence et champ de déplacement correspondant, l'effet de l'effort tranchant et l'effort normal est pris en compte suivant son influence sur les résultats : la détermination du premier mode de la coque, seul, l'effet du moment fléchissant sera pris en compte. Pour la deuxième fréquence de résonance, la structure (1/4 de la coque) sera idéalisée avec un système de trois masses en tenant compte du moment fléchissant et de l'effort tranchant. Enfin en ce qui concerne la fréquence d'antirésonance mécanique de la coque, la structure sera idéalisée avec un système de deux masses concentrées en tenant compte cette fois-ci du moment fléchissant, de l'effort tranchant et de l'effort normal.

III - 4 Détermination de la première fréquence de résonance

Lors de l'analyse modale par la méthode des éléments finis, le champ de déplacement de la coque représenté par la figure III.3.a et qui correspond au premier mode montre que celui ci est un mode de flexion. D'où l'idée pour trouver un champ de déplacement équivalent est d'appliquer un chargement qui aurai le même effet sur la coque. On a choisi de charger la coque par une pression constante, uniformément répartie autour, comme indiqué sur la figure Fig. III.6.a.

III - 4.1 Principe

Comme pour la méthode des éléments finis, le principe énergétique est appliqué pour déterminer la première fréquence de résonance de la coque.

On suppose que les points de la surface moyenne se déplacent de manière périodique dans le temps :

$$\begin{cases} U(s,t) = u(s) \cdot \sin(\omega t) \\ V(s,t) = v(s) \cdot \sin(\omega t) \end{cases} \quad (\text{III-12})$$

s étant l'abscisse curviligne, t le temps et w la pulsation.

Le procédé de RAYLEIGH, appliqué ici pour le calcul de la fréquence, repose sur l'échange intervenant à chaque oscillation, entre les énergies potentielle et cinétique. A l'instant de la plus grande flexion, quand toutes les vitesses sont nulles, toute l'énergie est emmagasinée dans la coque sous forme d'énergie potentielle, tandis qu'au passage par la position d'équilibre, quand la coque est libre de contrainte, toute l'énergie apparaît sous forme d'énergie cinétique.

L'énergie de déformation est proportionnelle au carré des déplacements, donc indépendante de la fréquence, tandis que l'énergie cinétique est proportionnelle au carré de la vitesse, donc à w^2 . En écrivant leur égalité, on obtient une équation pour w^2 , d'où on peut déduire la fréquence propre, correspondant à la déformation admise.

On aura donc besoin de connaître l'expression de l'énergie potentielle U et celle de l'énergie cinétique T au passage par la position d'équilibre soit pour $t = 0$.

L'énergie cinétique au passage par la position d'équilibre est telle que :

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot \rho \omega^2 h \int_{s_0}^{s_1} (u^2(s) + v^2(s)) \cdot ds \quad (\text{III-13})$$

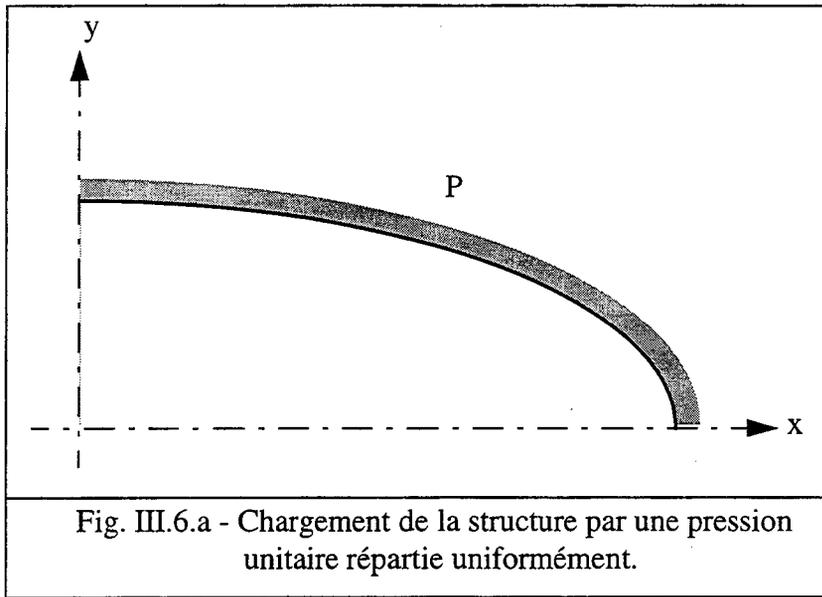
car les vitesses sont à ce moment :

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial}{\partial t} U(s,t) \right|_{t=0} = u(s) \cdot \omega \\ \left. \frac{\partial}{\partial t} V(s,t) \right|_{t=0} = v(s) \cdot \omega \end{cases} \quad (\text{III-14})$$

Donc, pour avoir l'expression de l'énergie cinétique, on a besoin de connaître les déplacements. Pour cela, la section suivante utilise la méthode présentée au paragraphe III - 3.

III - 4.2 Déplacements

Lorsque la structure est chargée par la pression p (Fig. III.6.a), on peut déterminer le moment fléchissant $M(s)$, l'effort tranchant $T(s)$ et l'effort normal $N(s)$. On désire évaluer le déplacement d provoqué par cette pression, d'un point $M(s)$ de la structure suivant une direction Δ ; pour cela on soumet la structure à un système \bar{S} constitué par une force unité appliquée en ce point, suivant la direction Δ (Fig. III-6.b).



Soient $\bar{M}(s)$ le moment, $\bar{T}(s)$ l'effort tranchant et $\bar{N}(s)$ l'effort normal produits par la système \bar{S} . Le déplacement de chaque point de la fibre moyenne, en cas de déformations planes, est donné par l'équation (III-15) :

$$\delta = (1 - \nu^2) \cdot \int_{s_0}^s \left(\left[\frac{M(s)\bar{M}(s)}{EI} + \frac{T(s)\bar{T}(s)}{GS_1} + \frac{N(s)\bar{N}(s)}{Eh} \right] \right) ds \quad \text{(III-15)}$$

avec :

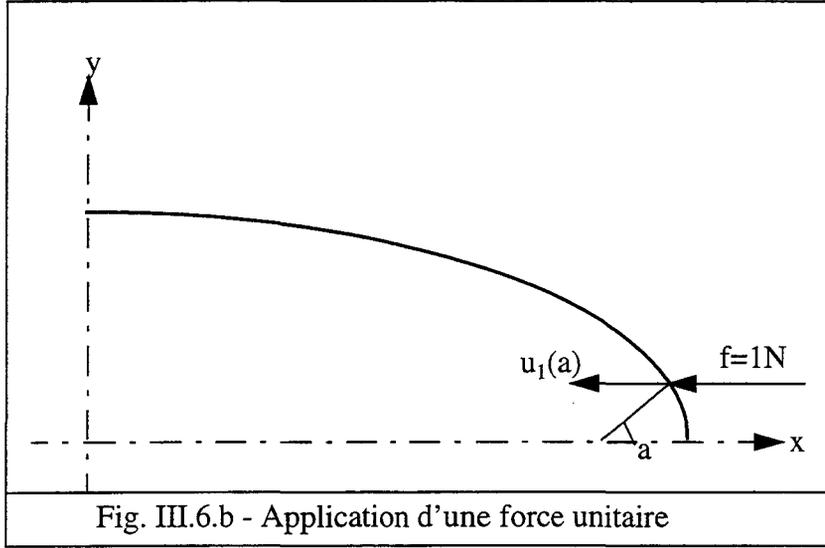
G : module d'élasticité transversale, défini par : $G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$.

I : moment d'inertie et vaut, dans le cas de la coque mentionnée plus haut (longueur unitaire) :

$$I = \frac{h^3}{12}$$

S_1 : surface réduite et vaut pour une section rectangulaire (longueur unitaire) :

$$S_1 = \frac{5}{6}h$$



Définissons $u_{iM}(a)$, $u_{iT}(a)$ et $u_{iN}(a)$ comme les déplacements horizontaux, $v_{iM}(a)$, $v_{iT}(a)$ et $v_{iN}(a)$ comme les déplacements verticaux de tout point M de la fibre moyenne dûs au moment (indice M), à l'effort tranchant (indice T) et à l'effort normal (indice N).

$M_i(a)$, $T_i(a)$ et $N_i(a)$ sont le moment fléchissant, l'effort tranchant et l'effort normal de tout point M de la fibre moyenne repéré par son angle (a) , ($i = 1$ pour la région 1 et $i = 2$ pour la région 2).

Par la méthode décrite plus haut, et après intégration, voir annexe 1, les déplacements obtenus peuvent être exprimés région par région :

a) Déplacements dans la région 1: $0 \leq \alpha \leq \varphi$

Pour tout point de la fibre moyenne de la région 1, les déplacements s'écrivent :

$$\begin{cases} u_{iM}(\alpha) = -p \frac{I-v^2}{EI} \cdot R^4 \varepsilon^2 \left[c_{iM} + \Delta_I (\cos \alpha + \alpha \sin \alpha) - \frac{A\varepsilon}{4} \cos(2\alpha) \right] \\ v_{iM}(\alpha) = -p \frac{I-v^2}{EI} \cdot R^4 \varepsilon^2 \left[\frac{A\varepsilon}{2} \alpha + \Delta_I (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) - \frac{A\varepsilon}{4} \sin(2\alpha) \right] \end{cases} \quad (\text{III-16})$$

$$\begin{cases} u_{iT}(\alpha) = p \frac{I-v^2}{GS_I} \cdot R^2 \left[\frac{I}{4} A\varepsilon \cos 2\alpha + c_{iT} \right] \\ v_{iT}(\alpha) = -p \frac{I-v^2}{GS_I} \cdot R^2 \left[\frac{I}{4} A\varepsilon \sin 2\alpha - 2\alpha \right] \end{cases} \quad (\text{III-17})$$

$$\begin{cases} u_{iN}(\alpha) = -p \frac{I-v^2}{Eh} R^2 \varepsilon \left[\frac{A}{4} \cos 2\alpha + \left(\varepsilon + \frac{h}{2R} \right) \cos \alpha + c_{iN} \right] \\ v_{iN}(\alpha) = -p \frac{I-v^2}{Eh} R^2 \varepsilon \left[\frac{A}{4} (2\alpha + \sin 2\alpha) + \left(\varepsilon + \frac{h}{2R} \right) \sin \alpha \right] \end{cases} \quad (\text{III-18})$$

b) Déplacements dans la région 2 : $\varphi \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

De la même manière, les déplacements de tout point de la région 2 s'écrivent :

$$\begin{cases} u_{2M}(\alpha) = -p \frac{I-v^2}{EI} \cdot R^4 \left[\left(-\frac{B}{2} \right) \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + \Delta_1 \left(\cos \alpha - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \sin \alpha \right) + \frac{B}{4} \sin(2\alpha) \right] \\ v_{2M}(\alpha) = -p \frac{I-v^2}{EI} \cdot R^4 \left[c_{2M} + \Delta_2 \left(\sin \alpha - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \cos \alpha \right) + \frac{B}{4} \cos(2\alpha) \right] \end{cases} \quad (III-19)$$

$$\begin{cases} u_{2T}(\alpha) = p \frac{I-v^2}{GS_I} \cdot R^2 \left[\frac{I}{4} \left(2 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) - \sin 2\alpha \right) \right] \\ v_{2T}(\alpha) = -p \frac{I-v^2}{GS_I} \cdot R^2 \left[\frac{I}{4} B \cos 2\alpha + c_{2T} \right] \end{cases} \quad (III-20)$$

$$\begin{cases} u_{2N}(\alpha) = p \frac{I-v^2}{Eh} R^2 \left[\frac{B}{4} (2(\pi/2 - \alpha) + \sin 2\alpha) - \left(I + \frac{h}{2R} \right) \cos \alpha \right] \\ v_{2N}(\alpha) = -p \frac{I-v^2}{Eh} R^2 \left[\frac{B}{4} \cos 2\alpha + \left(I + \frac{h}{2R} \right) \sin \alpha + c_{2N} \right] \end{cases} \quad (III-21)$$

Les quantités c_{1M} , c_{2M} , c_{1T} , c_{2T} , c_{1N} et c_{2N} sont des constantes indépendantes de l'angle α et sont exprimées en annexe 1.

III - 4.2.1 Comparaison avec la méthode des éléments finis

La première comparaison est relative au champ de déplacement de la coque de référence chargée par la pression uniformément répartie. La figure III.7 montre les déplacements des points de la fibre moyenne obtenus par une analyse statique à l'aide du code ATILA (courbe en traits pleins) et ceux obtenus par la méthode analytique : déplacements dus au moment fléchissant seul (courbe en pointillés (M)) et déplacements dus au moment fléchissant et à l'effort tranchant (courbe en pointillés et carrés (M+T)). Ces courbes sont quasi-identiques. Le plus grand écart entre les résultats obtenus par la méthode analytique et ceux obtenus par la méthode des éléments finis est celui qui correspond au déplacement en $x = 0$ soit pour $j=p/2$. Cet écart est de l'ordre de 1.4%.

Par ailleurs, la figure III.8.a montre la coque au repos puis déformée sous l'action de la pression. Le champ de déplacement a été obtenu par ATILA.

Sur la figure (III.8.b), on a présenté la coque au repos puis déformée, les champs de déplacements radial, tangential et enfin le module du vecteur déplacement de tout point de la fibre moyenne en ne tenant compte que du moment M à partir de la méthode analytique. Pour être visualisé, les valeurs des déplacements ont été multipliées par 1.10^{+07} .

On constate sur cette courbe que le noeud de vibration se trouve dans une position pour laquelle le déplacement est minimal, tout proche du point où le déplacement radial s'annule.

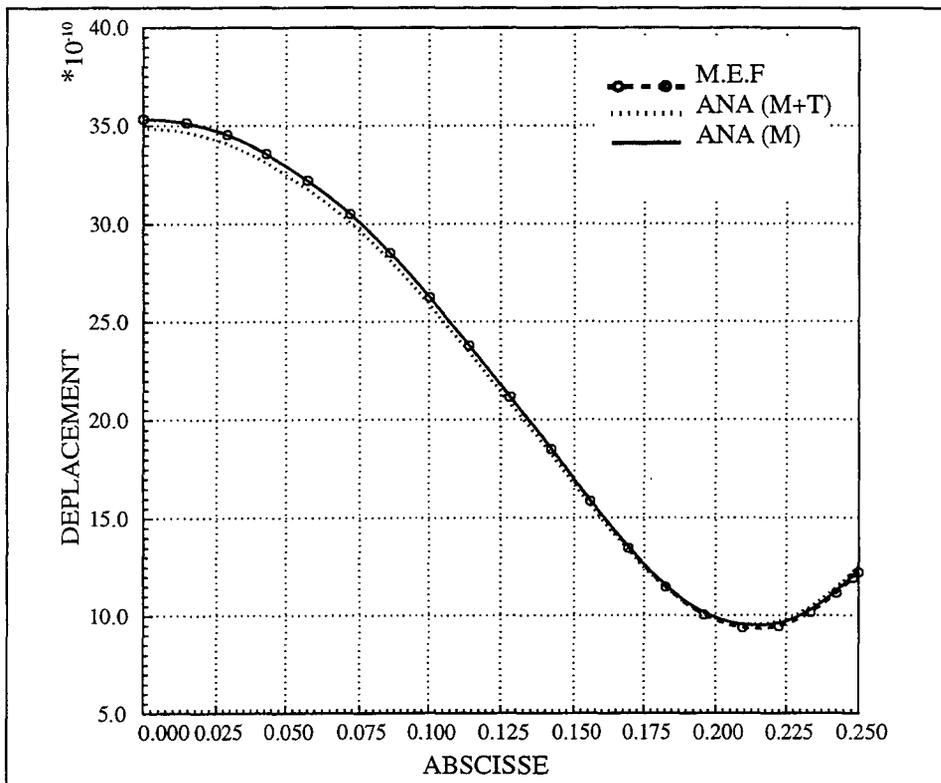


Fig. III.7 - Déplacement calculés par la méthode analytique et par la méthode des éléments finis.

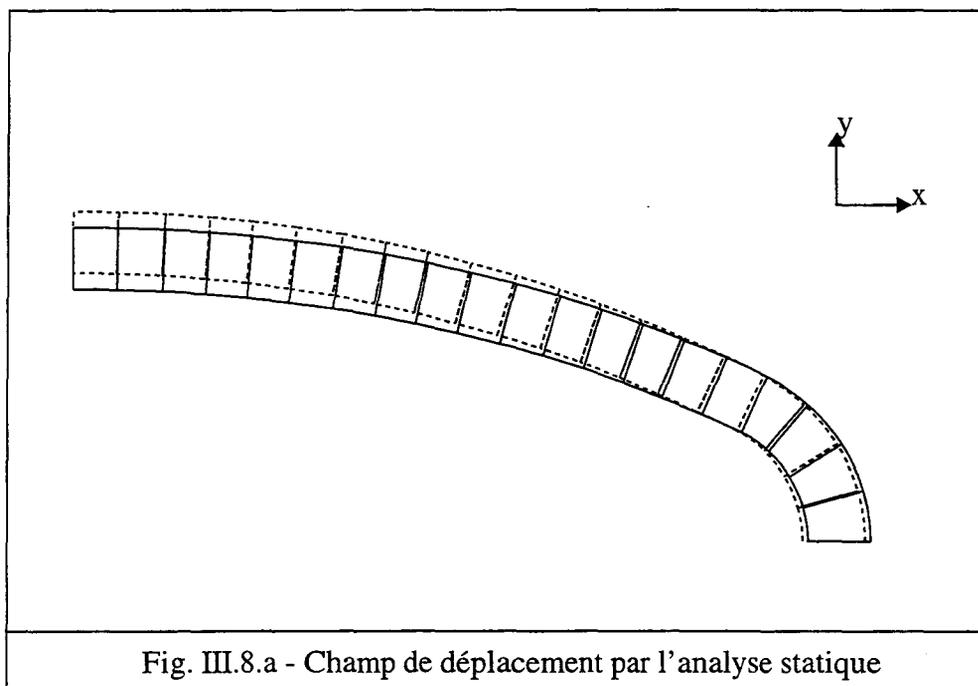


Fig. III.8.a - Champ de déplacement par l'analyse statique

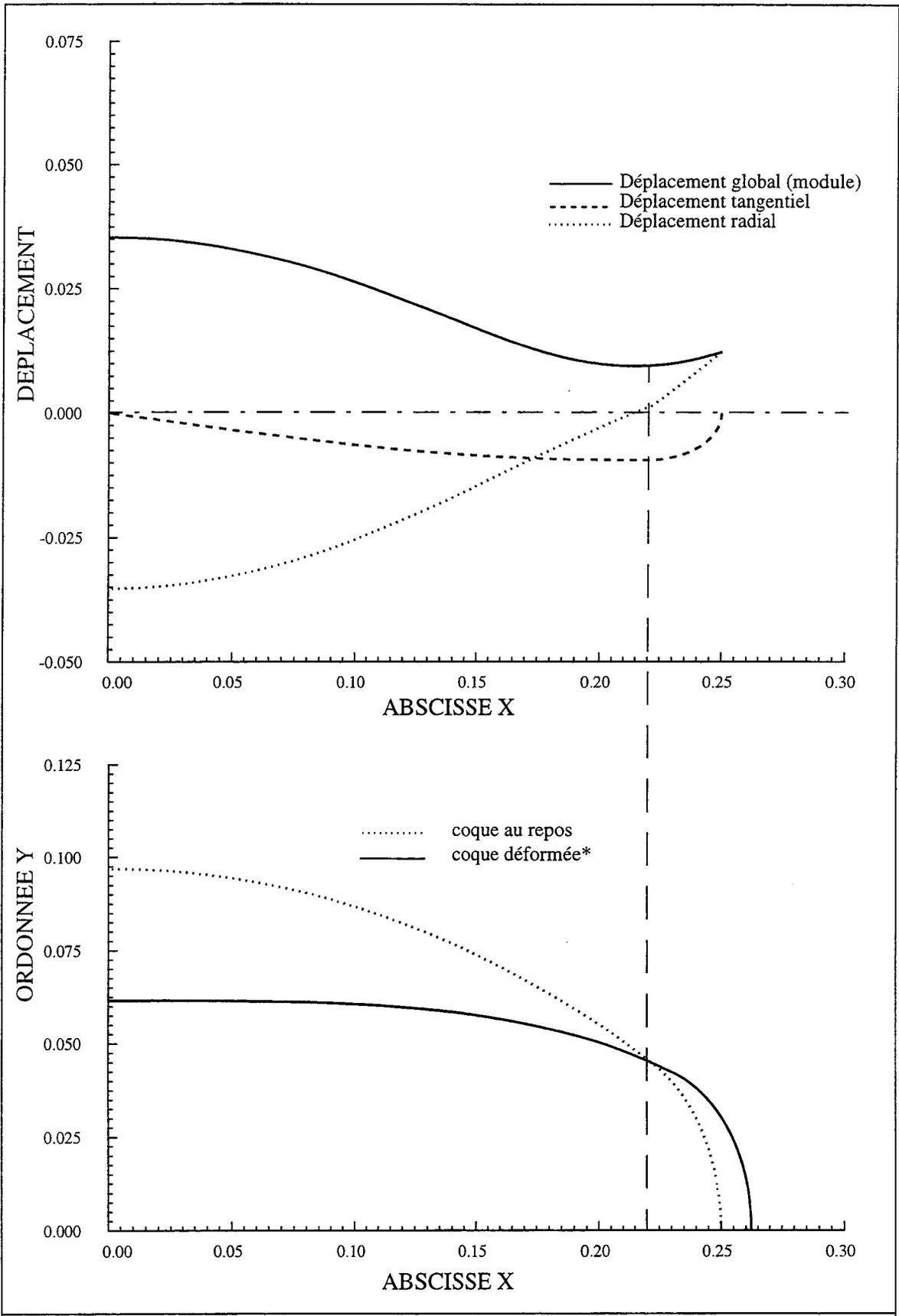


Fig. III.8.b - Coque au repos, déformée et champ de déplacement correspondant
 (*) : les valeurs des déplacements sont multipliées par $1. 10^{+07}$

III - 4.3 Première fréquence de résonance

Comme nous l'avons expliqué à la section (III - 4.1), pour avoir la première fréquence de résonance, il suffit de connaître l'énergie cinétique au passage par la position d'équilibre et l'énergie potentielle.

En utilisant l'expression (III.13) de l'énergie cinétique avec les hypothèses citées page 54, on obtient, l'énergie cinétique de flexion sous la forme :

$$E_{cf} = \frac{I}{2} \rho h \omega^2 \left[\int_0^\varphi (u^2_{1M}(\theta) + v^2_{1M}(\theta)) r d\theta + \int_\varphi^{\frac{\pi}{2}} (u^2_{2M}(\theta) + v^2_{2M}(\theta)) R d\theta \right] \quad (\text{III-22})$$

et l'énergie potentielle de flexion sous la forme :

$$E_{pf} = \frac{(I - v^2)}{2EI} \left(\int_0^\varphi M_1^2(\theta) r d\theta + \int_\varphi^{\frac{\pi}{2}} M_2^2(\theta) R d\theta \right) \quad (\text{III-23})$$

Quand on remplace les déplacements (III-16) et (III-19) par leurs valeurs dans la relation (III-22) et les moments dans la relation (III-23) voir annexe 1, après intégration on obtient pour la première pulsation ω_1 la valeur :

$$\omega_1 = \frac{h}{R^2} \sqrt{\frac{E \tilde{E}_{pf}}{12 (I - v^2) \tilde{E}_{cf}}} \quad (\text{III-24})$$

La première fréquence de résonance est alors définie par :

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} \quad (\text{III-25})$$

Les valeurs de \tilde{E}_{cf} et \tilde{E}_{pf} sont exprimées en annexe 1.

III - 4.4 Résultats

III - 4.4.1 Comparaison avec la méthode des éléments finis

Pour comparer les résultats obtenus par la méthode analytique, avec ceux obtenus par ATILA, deux familles de coques caractérisées par la valeur du grand axe moyen seront traitées :

- la famille de coque 1 admet un grand axe moyen de 500 mm, le petit rayon varie de 30 à 60 mm, le grand rayon varie de 300 à 600 mm et l'épaisseur varie de 14 à 25 mm.
- la famille de coque 2 admet un grand axe moyen de 1150 mm, le petit rayon varie de 80 à 140 mm, le grand rayon varie de 800 à 1200 mm et l'épaisseur varie de 30 à 70 mm.

Le choix de ces deux familles de coques a été retenu en référence aux deux exemples de transducteurs existant et que nous allons traiter au chapitre V.

La comparaison est faite sur la première fréquence de résonance pour les deux types de coque : les valeurs données par ATILA (f_1 (M.E.F)) sont comparées à celles de la méthode analytique, fréquences calculées sous l'effet du moment fléchissant seul (f_1 ANA (M)) puis sous l'effet combiné du moment fléchissant et de l'effort tranchant (f_1 ANA (M+T)).

Les tableaux (III.2, III.5) donnent les différentes valeurs de la première fréquence de la coque pour différentes valeurs du petit rayon et du grand rayon de courbure pour des épaisseurs de 20 et 25 mm, de la même manière, les tableaux (III.6, III.7) montrent les valeurs de la première fréquence du deuxième type de coque ($g_a = 1150$ mm), pour une épaisseur de 50 mm. Finalement les tableaux (III.8, III.9) donnent la variation de la première fréquence pour un petit rayon et un grand rayon constants et pour différentes valeurs de l'épaisseur.

r en mm	f_1 (M.E.F)	f_1 ANA (M)	f_1 ANA (M+T)	f_1 (M.E.F)	f_1 ANA (M)	f_1 ANA (M+T)
	R = 300. mm			R = 400. mm		
30.	328.	330.	329.	367.	368.	366.
40.	322.	325.	324.	358.	358.	357.
50.	317.	320.	319.	351.	351.	350.
60.	312.	315.	313.	345.	344.	342.

Tableau III.2 : Comparaison de la fréquence obtenue par la méthode des éléments finis (M.E.F) et par la méthode analytique (ANA), pour différentes valeurs de r et R pour h = 20. mm

r en mm	f_1 (M.E.F)	f_1 ANA (M)	f_1 ANA (M+T)	f_1 (M.E.F)	f_1 ANA (M)	f_1 ANA (M+T)
	R = 500. mm			R = 600. mm		
30.	380.	380.	378.	387.	387.	384.
40.	371.	371.	369.	378.	377.	374.
50.	364.	362.	360.	370.	367.	365.
60.	357.	354.	352.	364.	359.	357.

Tableau III.3 : Comparaison de la fréquence obtenue par la méthode des éléments finis (M.E.F) et par la méthode analytique (ANA) pour différentes valeurs de r et R pour h = 20 mm

r en mm	f_1 (M.E.F)	f_1 ANA (M)	f_1 ANA (M+T)	f_1 (M.E.F)	f_1 ANA (M)	f_1 ANA (M+T)
	R = 300. mm			R = 400. mm		
30.	409.	414.	410.	458.	460	456.
40.	402.	407.	404.	447.	449.	445.
50.	395.	393.	397.	438.	439.	436.
60.	389.	387.	390.	429.	430.	426.

Tableau III.4 : Comparaison de la fréquence obtenue par la méthode des éléments finis (M.E.F) et par la méthode analytique (ANA), pour différentes valeurs de r et R pour h = 25. mm

r en mm	f ₁ (M.E.F)	f ₁ ANA (M)	f ₁ ANA (M+T)	f ₁ (M.E.F)	f ₁ ANA (M)	f ₁ ANA (M+T)
	R = 500. mm			R = 600. mm		
30.	475.	476.	470.	483.	483.	478.
40.	463.	464.	460.	471.	471.	465.
50.	453.	452.	448.	461.	459.	454.
60.	444.	442.	438.	452.	448.	444.

Tableau III.5 : Comparaison de la fréquence obtenue par la méthode des éléments finis (M.E.F) et par la méthode analytique (ANA), pour différentes valeurs de r et R pour h = 25. mm

r en mm	f ₁ (M.E.F)	f ₁ ANA (M)	f ₁ ANA (M+T)	f ₁ (M.E.F)	f ₁ ANA (M)	f ₁ ANA (M+T)
	R = 800. mm			R = 1000. mm		
80.	165.	166.	165.	174.	174.	173.
100.	162.	163.	162.	167.	171.	169.
120.	159.	160.	159.	165.	167.	166.
140.	156.	157.	156.	162.	164.	163.

Tableau III.6 : Comparaison de la fréquence obtenue par la méthode des éléments finis (M.E.F) et par la méthode analytique (ANA), pour différentes valeurs de r et R pour h = 50 mm

r en mm	f ₁ (M.E.F)	f ₁ ANA (M)	f ₁ ANA (M+T)	f ₁ (M.E.F)	f ₁ ANA (M)	f ₁ ANA (M+T)
	R = 1200. mm			R = 1400. mm		
80.	178.	178.	177.	181.	181.	179.
100.	175.	174.	173.	177.	176.	175.
120.	172.	171.	170.	174.	173.	171.
140.	169.	167.	166.	171.	170.	168.

Tableau III.7: Comparaison de la fréquence obtenue par la méthode des éléments finis (M.E.F) et par la méthode analytique (ANA), pour différentes valeurs de r et R pour h = 50. mm

h en mm	f ₁ (M.E.F)	f ₁ ANA (M)	f ₁ ANA (M+T)
14.	257.	253.	252.
18.	328.	326.	324.
20.	364.	362.	359.
21.	380.	380.	377.
22.	400.	398.	395.
23.	417.	416.	413.
24.	435.	434.	430.
25.	453.	452.	448.

Tableau III.8 : Comparaison de la fréquence obtenue par la méthode des éléments finis (M.E.F) et par la méthode analytique (ANA), pour r = 50. mm R = 500. mm et différentes valeurs de h

h en mm	f_1 (M.E.F)	f_1 ANA (M)	f_1 ANA (M+T)
30.	103.	103.	102.
40.	136.	136.	136.
50.	167.	168.	169.
60.	204.	204.	203.
70.	238.	237.	236.

Tableau III.9 : Comparaison de la fréquence obtenue par la méthode des éléments finis (M.E.F) et par la méthode analytique (ANA), pour $r = 100$. mm, $R = 1000$. mm et différentes valeurs de h

III - 4.4.2 Analyse et interprétation des résultats

Les résultats obtenus par la méthode analytique sont en accord parfait avec ceux obtenus par la méthode des éléments finis, et montrent bien que l'hypothèse qui consistait à calculer la première fréquence de flexion sous l'effet du moment fléchissant seul est vérifiée, ce qui valide la méthode utilisée pour les types de coques présentées.

a) Variation de la première fréquence de résonance en fonction du grand rayon de courbure

Quand on examine, pour différentes valeurs du petit rayon de courbure, les variations de la première fréquence de résonance de la coque en fonction de son grand rayon de courbure pour les deux types de coque, l'une à grand axe moyen de 500 mm et d'épaisseur 20 mm et l'autre à grand axe moyen de 1150 mm et d'épaisseur 50 mm, on constate que les familles de courbes, (Fig. III.9.a) et (Fig. III.9.b), sont semblables : la fréquence augmente quand le grand rayon de courbure augmente, ce qui s'explique par le fait que le noeud de vibration se déplace vers la partie de la coque à petit rayon de courbure, ce qui rigidifie l'ensemble. Cette interprétation est confirmée par la représentation de la position du noeud de vibration (Fig. III-9-c) et (Fig. III-9-d). Ces deux figures présentent le déplacement radial en fonction de l'angle α pour différentes valeurs du grand rayon de courbure.

Le noeud de vibration se situe dans la partie à grand rayon de courbure pour les coques dont le grand rayon a une valeur comprise entre 300 et 500 mm, par contre pour la coque à grand rayon de courbure de 600 mm, le noeud de vibration se situe dans la région à petit rayon de courbure. Pour le deuxième type de coque ($g_a = 1150$ mm), le noeud de vibration se situe dans la région à grand rayon de courbure.

b) Variation de la première fréquence de résonance en fonction du petit rayon de courbure

Pour la variation de la première fréquence de résonance en fonction du petit rayon de courbure, pour différentes valeurs de son grand rayon et une épaisseur constante, on constate, (Fig. III.9.e) et (Fig. III.9.f), que la fréquence de résonance décroît linéairement quand le petit rayon augmente. C'est-à-dire que la coque devient plus souple. On remarque aussi quand on regarde, pour un grand rayon de courbure et une épaisseur constants, la variation du déplacement radial en fonction de l'angle α , (Fig. III.8.g) et (Fig. III.8.h), qu'il existe un point pour lequel le déplacement radial est le même, indépendamment de la valeur du petit rayon de courbure.

c) Variation de la première fréquence de résonance en fonction de l'épaisseur

La variation de la première fréquence de résonance de la coque en fonction de l'épaisseur est naturellement linéaire. On présente sur les figures (Fig. III.9.i) et (Fig. III.9.j) pour les deux familles de coque, cette variation.

La visualisation du noeud de vibration de la coque montre que celui-ci reste inchangé lorsque l'épaisseur varie, (Fig. III.9.k) et (Fig. III.9.l).

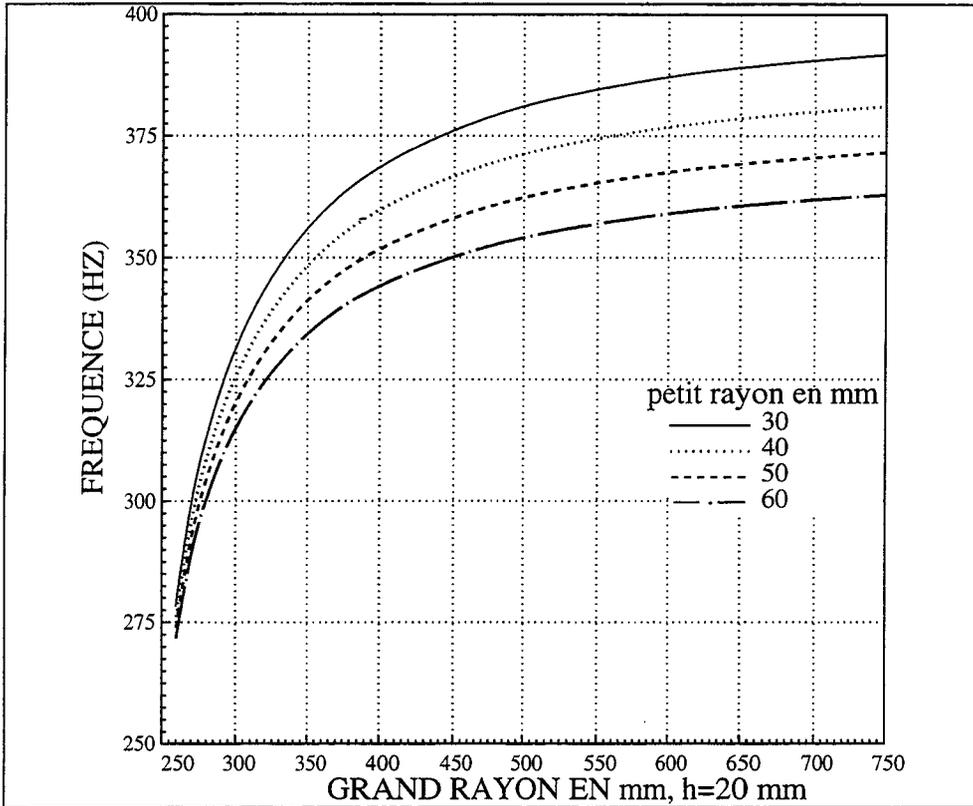


Fig. III.9.a Variation de la première fréquence en fonction de r , pour $ga=500$ mm.

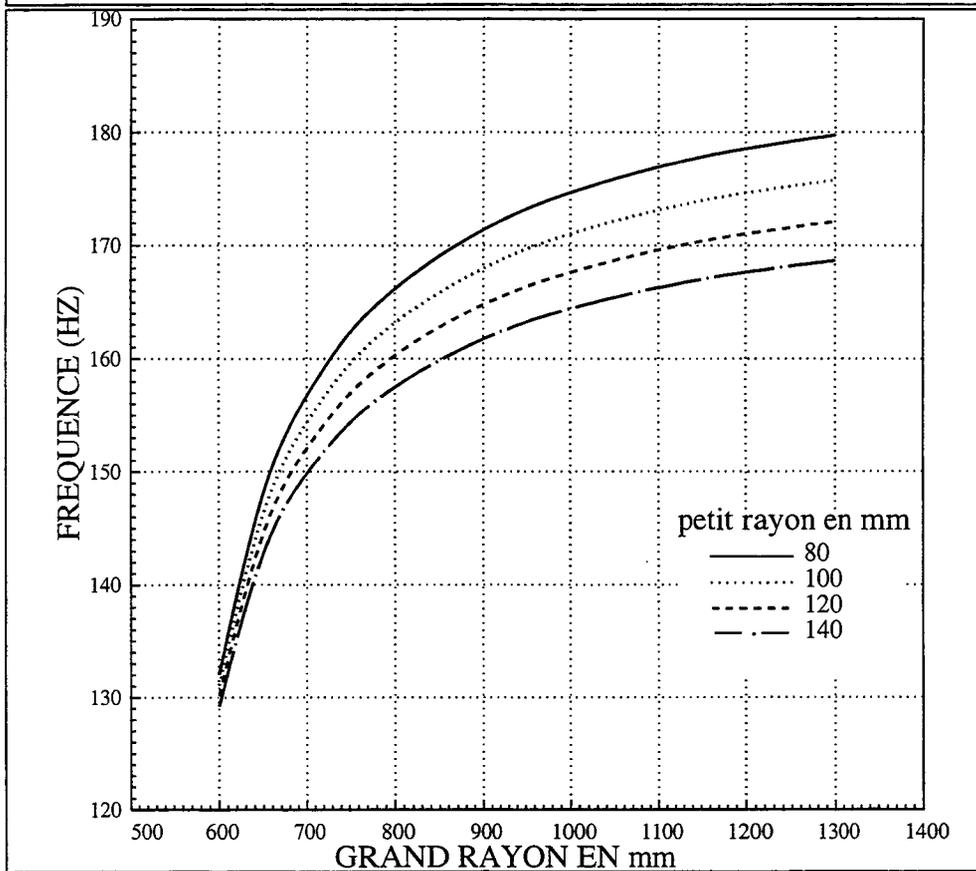


Fig. III.9.b Variation de la première fréquence en fonction de r ; pour $ga=1150$ mm.

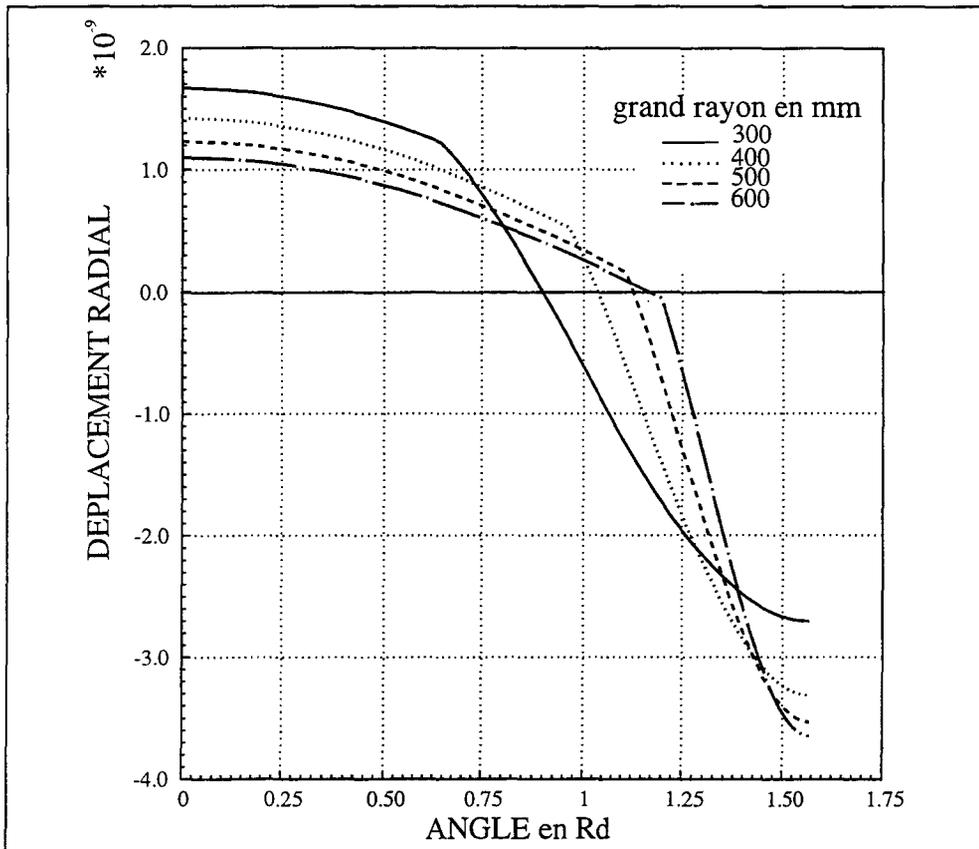


Fig. III.9.c - Déplacement radial $r=50$ mm ; $h=20$ mm, $ga = 500$ mm.

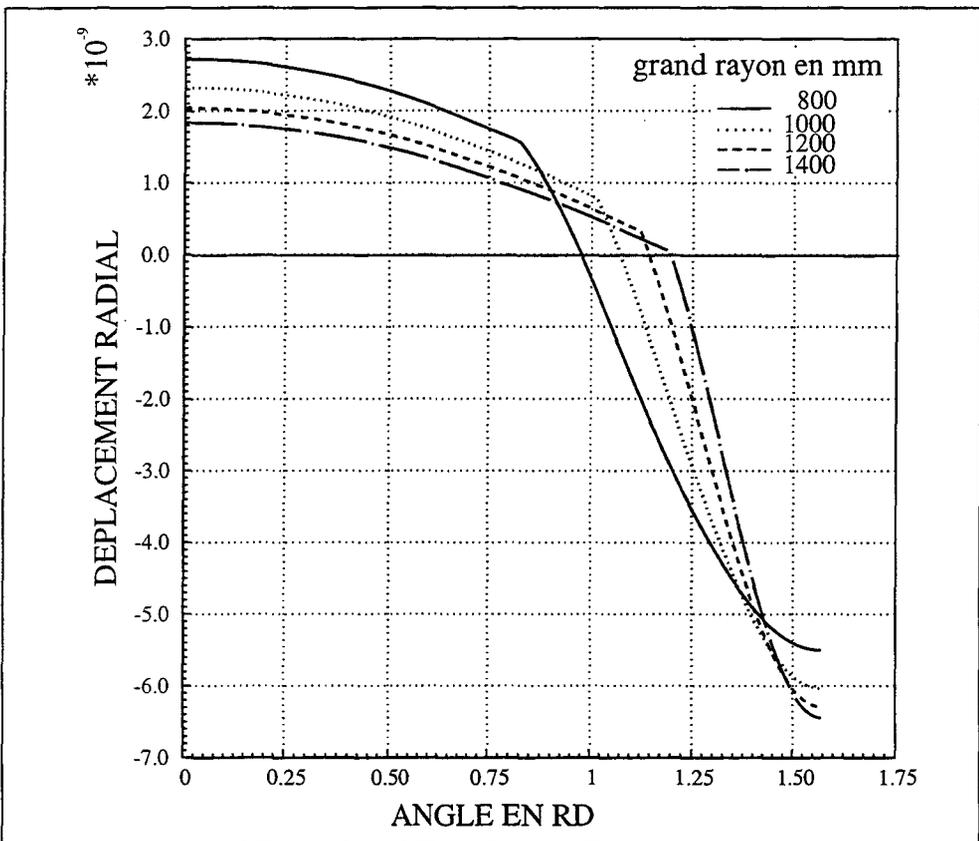


Fig. III.9.d - Déplacement radial $r=100$ mm ; $h=50$ mm, $ga = 1150$ mm.

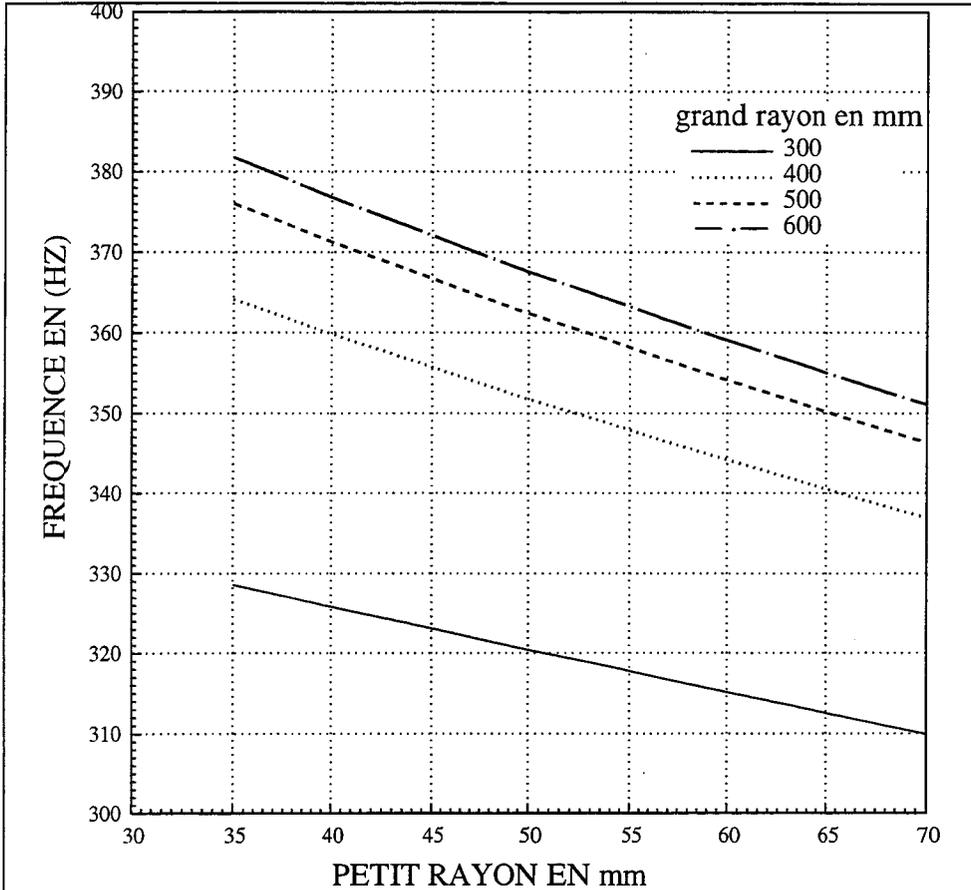


Fig. III.9.e - Variation de la première fréquence en fonction de R ; pour $ga = 500$ mm et $h = 20$ mm.

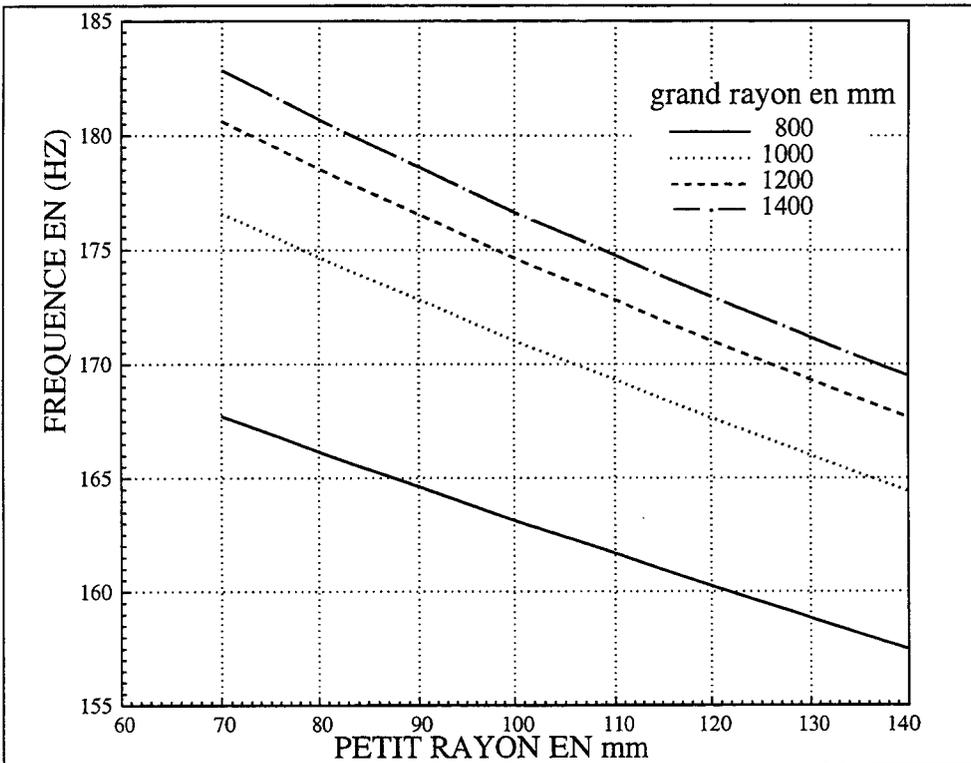


Fig. III.9.f - Variation de la première fréquence en fonction de R, pour $ga = 1150$ mm et $h = 50$ mm.

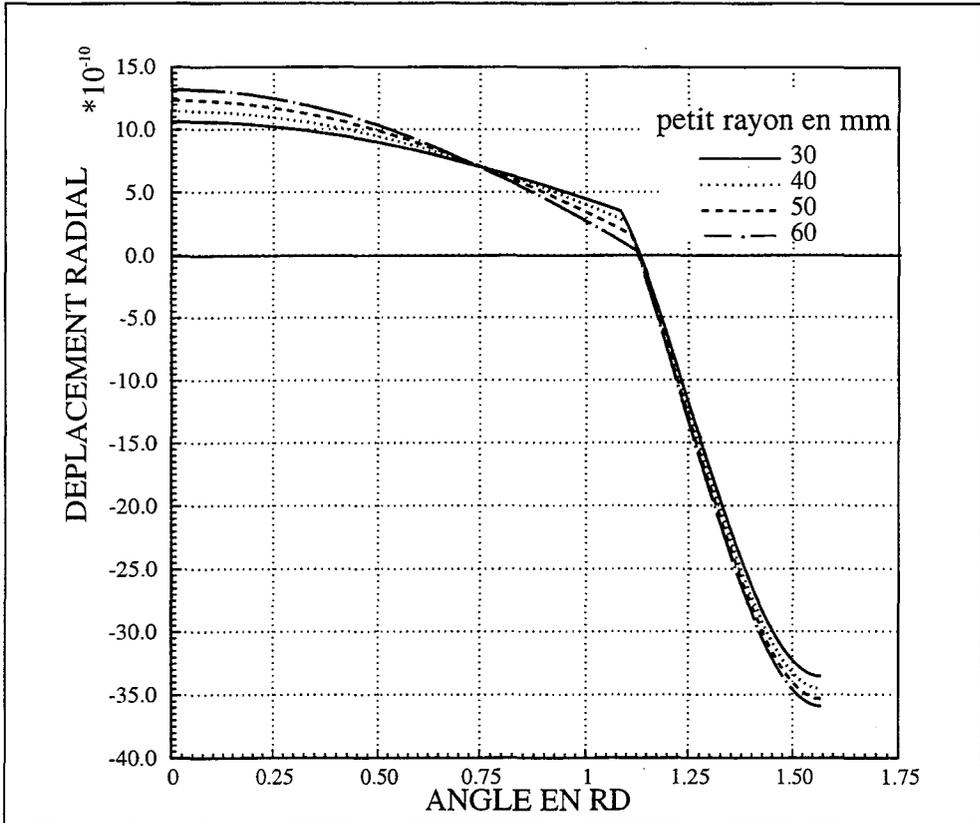


Fig. III.9.g - Déplacement radial en fonction de a , $R = 500$ mm, $h = 20$ mm.
 $g_a = 500$ mm.

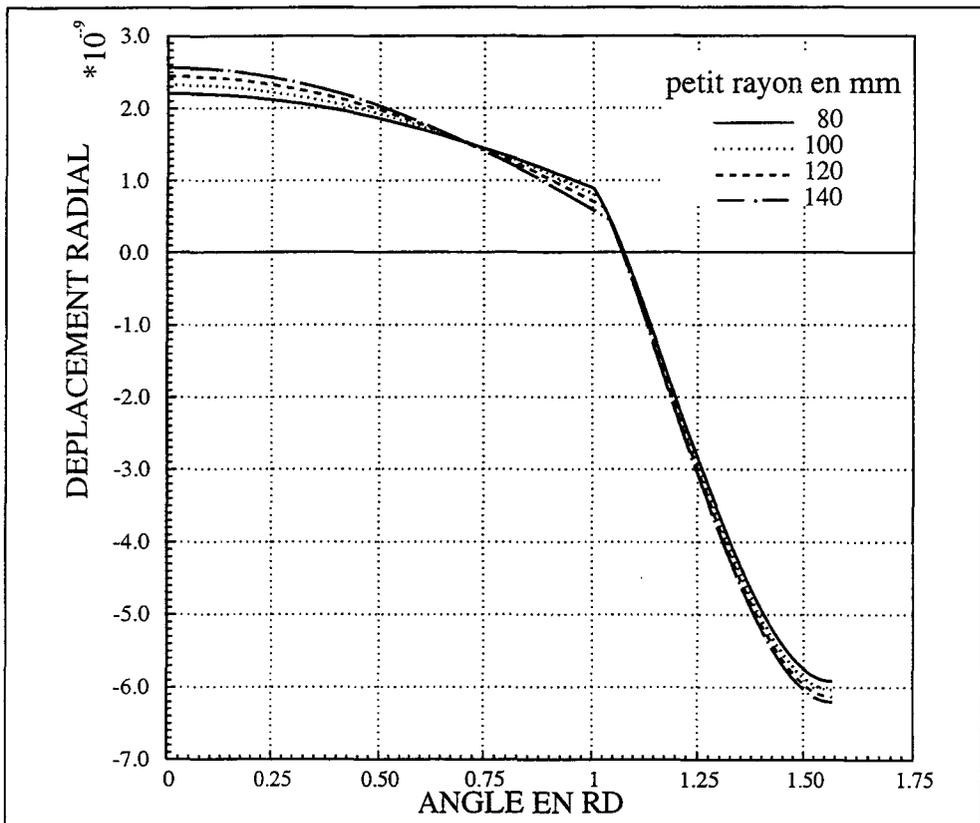


Fig. III.9.h - Déplacement radial en fonction de a , $R = 1000$ mm, $h = 50$ mm.
 $g_a = 1150$ mm.

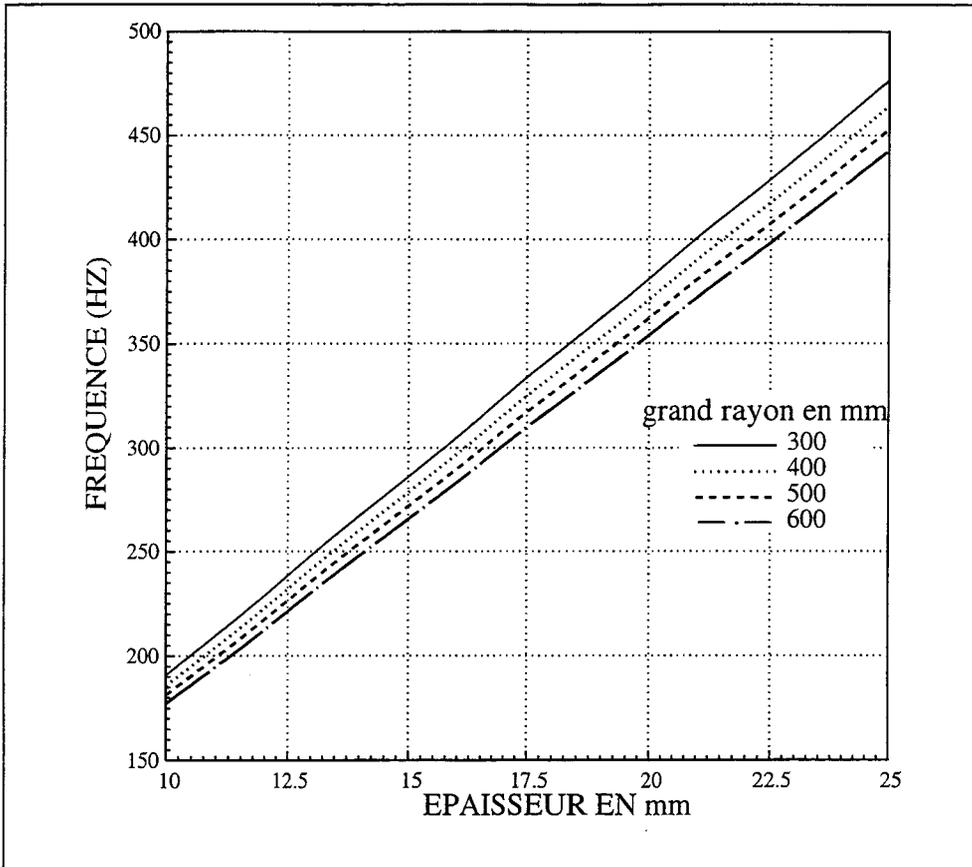


Fig. III.9.i - Variation de la première fréquence en fonction de h ga = 500 mm

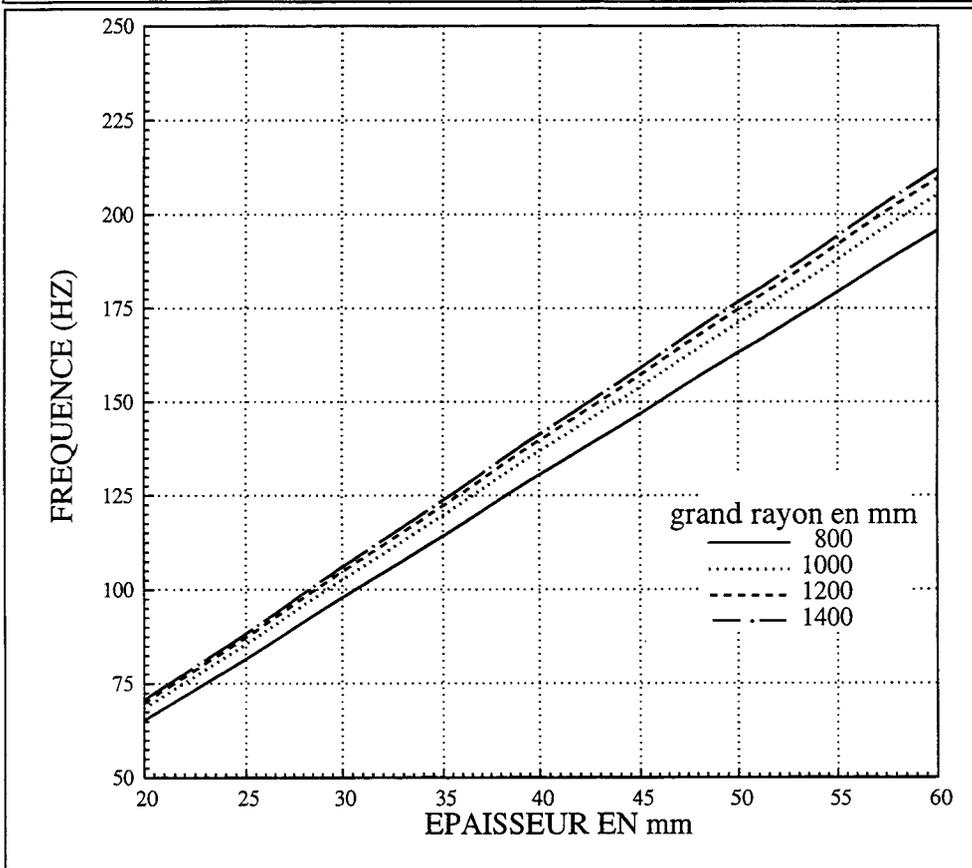


Fig. III.9.j - Variation de la première fréquence en fonction de h ga = 1150 mm.

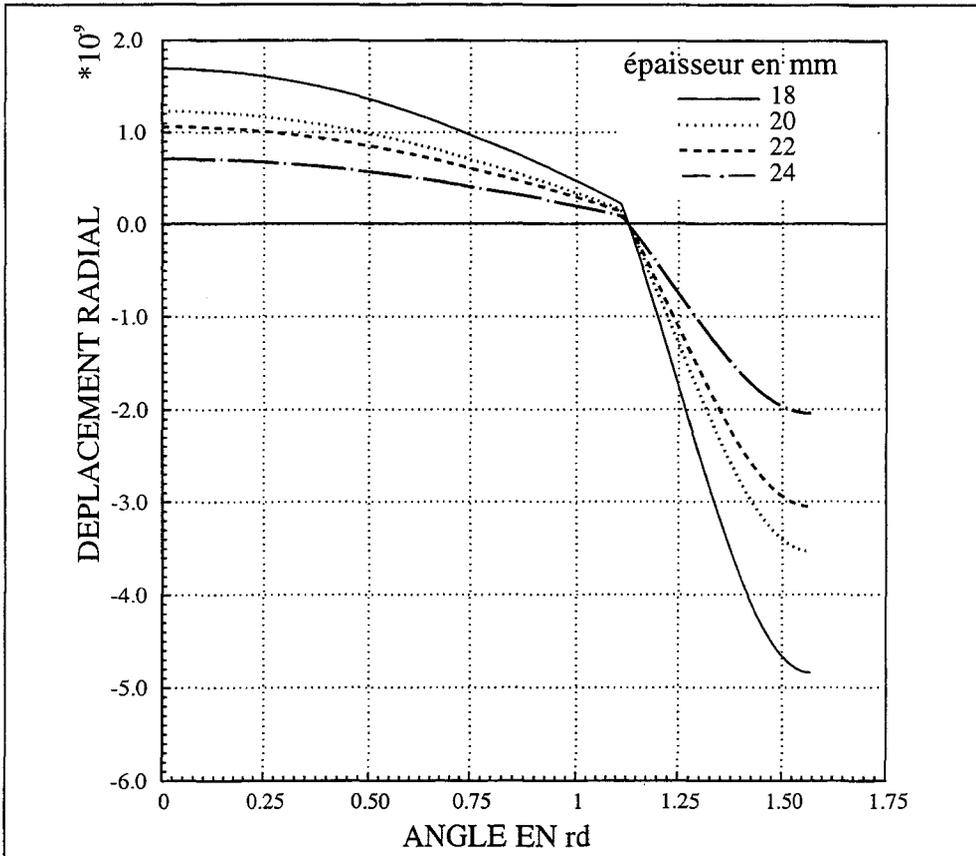


Fig. III.9.k - Déplacement radial en fonction de a, R = 500 mm, r = 50 mm.

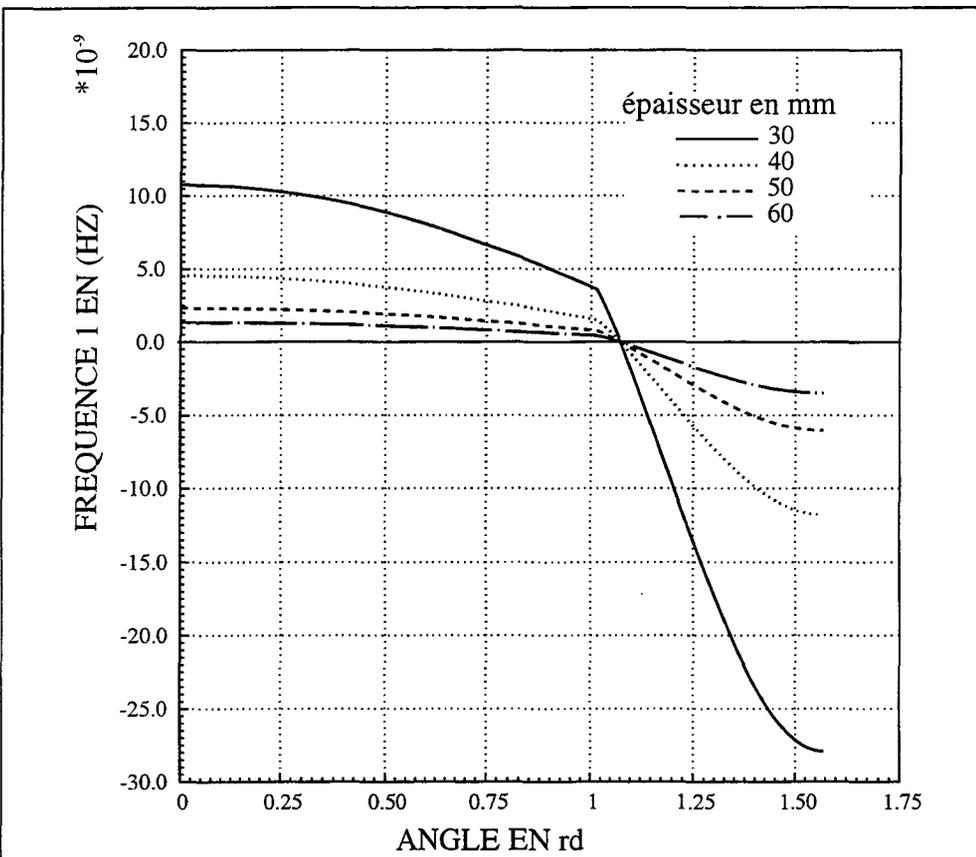


Fig. III.9.l - Déplacement radial en fonction de a, R = 1000 mm, r = 100 mm.

III - 5 Détermination de la deuxième fréquence de résonance

Pour déterminer la deuxième fréquence de résonance, ainsi que la fréquence de coupure de la coque, une méthode analytique fondée sur le principe des coefficients de flexibilité [45] est utilisée.

III - 5.1 Principe

On idéalise le 1/4 de coque utilisé pour nos modélisations avec un système de masses concentrées. En connaissant le premier mode : fréquence de résonance et champ de déplacement correspondant déterminés par la méthode du paragraphe III-3 et les coefficients de flexibilité, on peut déterminer les valeurs de ces masses. Par une analyse modale on peut connaître la deuxième fréquence de résonance et par une analyse harmonique on détermine la fréquence de coupure de la coque. Pour cela, le principe de la méthode des coefficients de flexibilité est rappelé.

III - 5.1.1 Méthode des coefficients de flexibilité

Considérons une structure élastique constituée d'un nombre n fini de masses discrètes positionnés aux noeuds i . Les coefficients de flexibilité a_{ij} , sont définis comme le déplacement du noeud i dû à une force unitaire appliquée au noeud j , comme indiqué figure III.10.a,

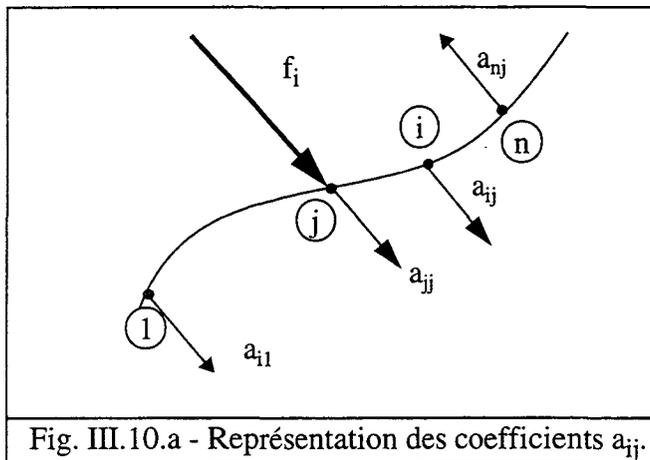


Fig. III.10.a - Représentation des coefficients a_{ij} .

Pour avoir le déplacement de chacun des noeuds, on doit appliquer n forces. Le principe de superposition peut être appliqué pour déterminer le déplacement de chacun des noeuds en termes de coefficients de flexibilité comme suit :

$$u_j = a_{j1}f_1 + \dots + a_{jn}f_n \quad (\text{III-26})$$

$$u_n = a_{n1}f_1 + \dots + a_{nn}f_n$$

ou encore sous forme matricielle :

$$\{U\} = [A] \{F\} \quad (\text{III-27})$$

avec :

$\{U\}$: vecteur déplacement des noeuds,

$[A]$: matrice flexibilité,

$\{F\}$: vecteur des forces f_i .

Multiplions les deux membres de l'égalité (III-27), par $[K]$ matrice raideur inverse de la matrice $[A]$, on obtient l'équation :

$$\{F\} = [K] \{U\} \quad (\text{III-28})$$

si on considère que le mouvement est harmonique, de pulsation w , et si on remplace les forces f_i par des forces d'inertie :

$$-m\ddot{u} = \omega^2 mu \quad (\text{III-29})$$

sous forme matricielle l'équation (III-29), s'écrit :

$$[K] \{U\} + [M] \{\ddot{U}\} = 0 \quad (\text{III-30})$$

soit encore :

$$[[K] - \omega^2 [M]] \{U\} = 0 \quad (\text{III-31})$$

équation différentielle d'un mouvement harmonique en vibrations libres.

Soit $[G]$ la matrice dynamique définie par :

$$[G] = [K] [M] = [A]^{-1} [M] \quad (\text{III-32})$$

dans ce cas l'équation du mouvement en fonction de la matrice dynamique G s'écrit :

$$[[G] - \frac{I}{\omega^2} [I]] \{U\} = 0 \quad (\text{III-33})$$

$[I]$: matrice unité.

L'équation caractéristique est obtenue en écrivant :

$$|[G] - \frac{I}{\omega^2} [I]| = 0 \quad (\text{III-34})$$

soit :

$$\lambda = \frac{I}{\omega^2} \quad (\text{III-35})$$

on obtient :

$$|[G] - \lambda [I]| = 0 \quad (\text{III-36})$$

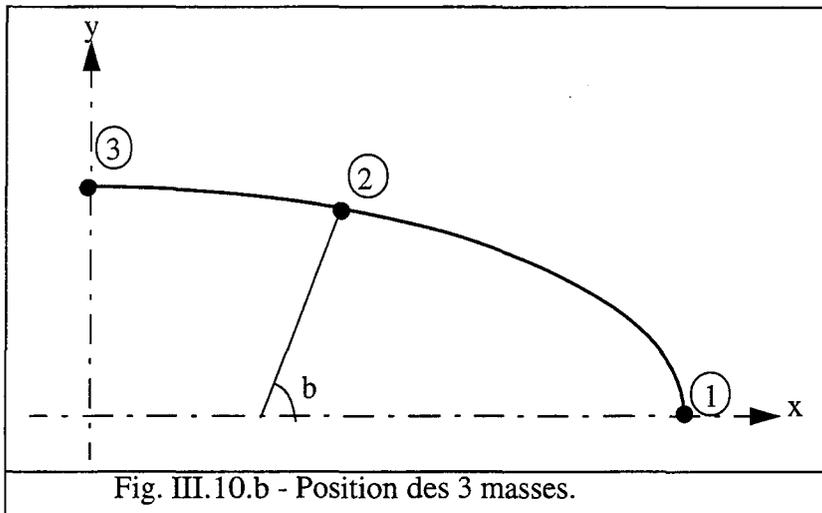
Les valeurs propres de $[G]$, seront les inverses des carrés des pulsations et les vecteurs propres correspondront au déplacement des noeuds.

Nous allons maintenant appliquer cette méthode pour déterminer la seconde fréquence de résonance et la fréquence d'antirésonance de la coque.

III - 5.2 Deuxième fréquence de résonance

III - 5.2.1 Cas à deux masses

Dans un premier temps, la structure a été idéalisée avec un système de deux masses concentrées localisées aux noeuds 1 et 3, pour la détermination des coefficients a_{ij} , on applique une force unitaire suivant la direction radiale conformément au paragraphe III - 3.



Les résultats obtenus dans ce cas sont comparés à ceux obtenus numériquement, ils sont présentés tableau (III.10) pour un petit rayon de 50 mm, une épaisseur de 20 mm et pour différentes valeurs du grand rayon de courbure. Les écarts observés sont importants, de plus lorsque le grand rayon de courbure augmente, la seconde fréquence de résonance obtenue numériquement augmente, alors que celle obtenue analytiquement diminue.

R en mm	frequence 2 (Hz) calculée par ATILA	fréquence 2 (Hz) calculée analytiquement	écart %
400.	1880.	2226.	15.5
500.	1960.	1867.	-4.9
600.	2000.	1687.	-18.5

Tableau III.10 : Deuxième fréquence obtenue par la méthode des éléments finis et par la méthode analytique dans le cas de 2 masses.

D'où l'idée d'idéaliser la structure avec un système de trois masses.

La troisième masse se trouve au milieu de la région à grand rayon de courbure (région 2). La position du noeud 2 où elle se trouve est définie par l'angle b tel que :

$$\beta = \varphi + \left(\frac{\left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right)}{2} \right) \quad (\text{III-37})$$

Le choix de cette position est expliqué dans le paragraphe suivant.

III - 5.2.2 Cas à trois masses

On va idéaliser la coque (1/4) avec un système de trois masses m_1 , m_2 et m_3 concentrées et localisées comme indiqué sur la figure III.10.b.

Le choix de la position de la troisième masse relève du fait que le raisonnement se fait sur le déplacement radial, or quand on regarde le champ de déplacements radial des points de la fibre moyenne (Fig. III.7), on voit très bien que les déplacements dans la région 2 sont beaucoup plus importants que dans la région 1 : la région à petit rayon de courbure étant plus rigide que la région à grand rayon de courbure.

Position de la troisième masse :

Ayant obtenu les valeurs de la deuxième fréquence de résonance de la coque numériquement, et après avoir déterminé la deuxième fréquence analytiquement, comme pour la première fréquence de résonance, on a fait varier l'angle b entre les valeurs φ_0 et $(\pi/2)$ c'est à dire couvrant toute la région 2. On constate que la position pour laquelle la valeur de la seconde fréquence analytique est proche de celle obtenue numériquement, est approximativement au milieu de la région 2.

Sur la figure (III.11), on a représenté 4 types de coques de la famille 1 ($ga = 500$ mm) toutes à petit rayon de courbure $r = 50$ mm et à épaisseur $h = 20$ mm, mais pour des valeurs du grand rayon de courbure variant de 300 mm à 600 mm. Pour chaque coque, on a montré la position du milieu de la région 2 et la valeur de la seconde fréquence de résonance obtenue numériquement.

Le système (3 masses) est régi par l'équation différentielle du mouvement harmonique en vibrations libres, soit :

$$[[K] - \omega^2 [M]] \{U\} = 0 \quad (\text{III-38})$$

de cette équation, on tire :

$$[[A]^{-1} - \omega^2 [M]] \{U\} = 0 \quad (\text{III-39})$$

soit encore :

$$[M] \{U\} = \frac{1}{\omega^2} [K] \{U\} \quad (\text{III-40})$$

à chaque mode i correspond une pulsation w_i et un champ de déplacement U_i .

Pour pouvoir déterminer la pulsation du deuxième mode, par la méthode du paragraphe III - 4, on détermine la première pulsation w_1 , par la méthode du paragraphe III - 3, on détermine le champ de déplacement U_1 correspondant au premier mode ; les coefficients de flexibilité a_{ij} sont déterminés dans la section suivante, et sont présentés en annexe II.

Connaissant le premier mode de pulsation w_1 et le champ U_1 , on peut déterminer les 3 masses de la matrice $[M]$.

a) Détermination des coefficients de flexibilité

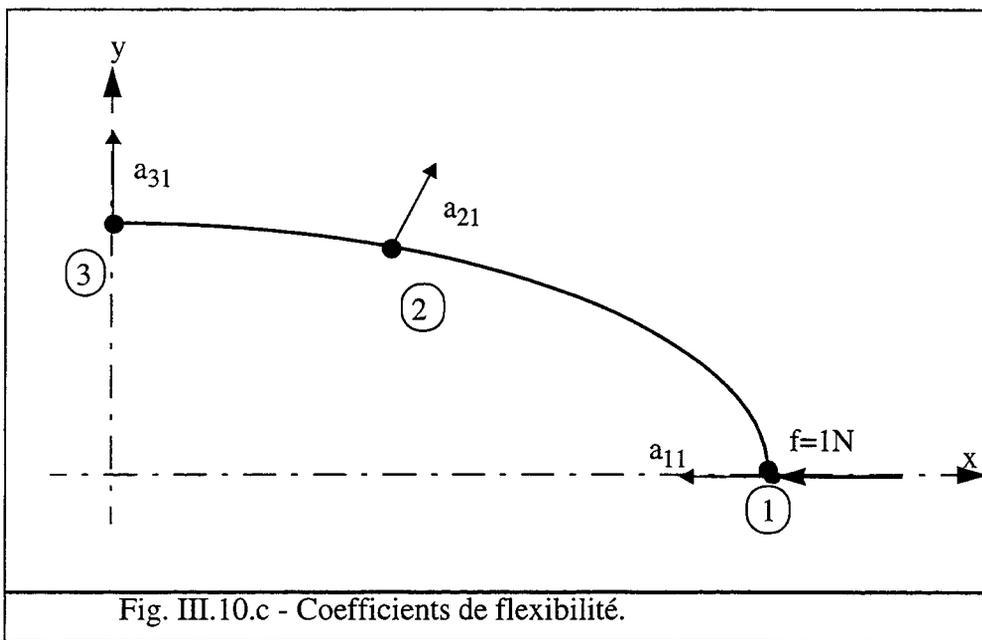
Si on note a_{ijM} , les coefficients de flexibilité dûs au moment M et a_{ijT} ceux dûs à l'effort tranchant T , exprimés en annexe II, la matrice A utilisée ici pour la détermination de la deuxième fréquence s'écrit :

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11M} + a_{11T} & a_{12M} + a_{12T} & a_{13M} + a_{13T} \\ a_{12M} + a_{12T} & a_{22M} + a_{22T} & a_{23M} + a_{23T} \\ a_{13M} + a_{13T} & a_{23M} + a_{23T} & a_{33M} + a_{33T} \end{bmatrix} \quad (\text{III-41})$$

Et le vecteur déplacement $\{\bar{U}\}$ s'écrit :

$$\{\bar{U}\} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{1M} + u_{1T} \\ u_{2M} + u_{2T} \\ u_{3M} + u_{3T} \end{Bmatrix} \quad (\text{III-42})$$

\bar{U} est surmonté d'une barre pour indiquer qu'il correspond au premier mode.



b) Déterminations des masses m_1 , m_2 et m_3

Soit $\{\bar{U}\}$ le vecteur déplacement de composantes u_i : déplacement radial du noeud i du mode 1 ; w_1 la pulsation du premier mode, alors :

$$\{\bar{U}\} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{III-43})$$

La matrice de flexibilité est :

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{III-44})$$

La matrice M étant :

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad (\text{III-45})$$

On a alors :

$$\{\underline{U}\} = \omega_j^2 [A] [M] \{\underline{U}\} \text{ ou } [K] \{\underline{U}\} = \omega_j^2 [M] \{\underline{U}\} \quad (\text{III-46})$$

De l'équation (III-46), on déduit les valeurs de m_1 , m_2 et m_3 comme suit :

$$\begin{cases} m_1 = \frac{I}{\omega_1^2} \left[k_{11} + k_{12} \frac{\bar{u}_2}{\bar{u}_1} + k_{13} \frac{\bar{u}_3}{\bar{u}_1} \right] \\ m_2 = \frac{I}{\omega_1^2} \left[k_{12} \frac{\bar{u}_1}{\bar{u}_2} + k_{22} + k_{23} \frac{\bar{u}_3}{\bar{u}_2} \right] \\ m_3 = \frac{I}{\omega_1^2} \left[k_{13} \frac{\bar{u}_1}{\bar{u}_3} + k_{23} \frac{\bar{u}_2}{\bar{u}_3} + k_{33} \right] \end{cases} \quad (\text{III-47})$$

III - 5.2.3 Deuxième fréquence de résonance

Après avoir déterminé les matrices de masse et de rigidité, on construit la matrice dynamique [G]. La plus grande des valeurs propres de cette matrice est celle qui correspond à la première pulsation ω_1 , la plus grande des deux autres valeurs propres notée ω_2 est celle qui correspond à la deuxième pulsation.

La pulsation ω_2 est telle que :

$$\omega_2 = \frac{I}{\sqrt{\lambda_2}} \quad (\text{III-48})$$

La deuxième fréquence de résonance est naturellement :

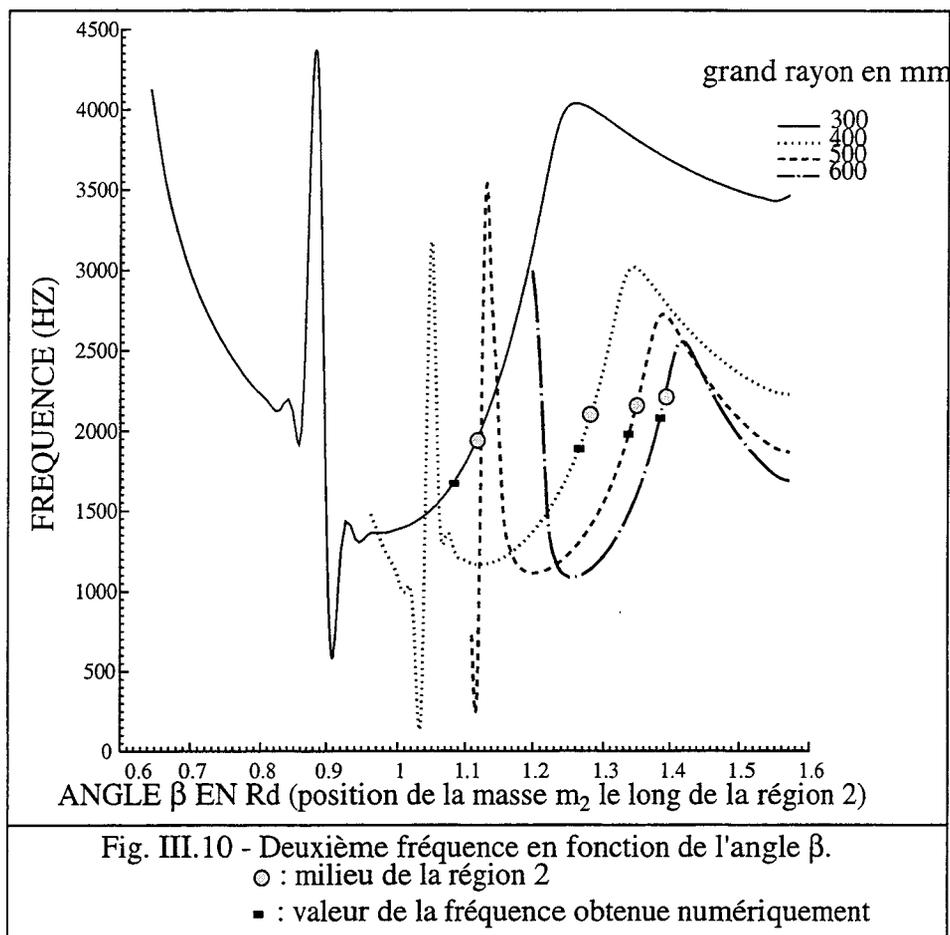
$$f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} \quad (\text{III-49})$$

III - 5.3 Résultats

III - 5.3.1 Comparaison avec la méthode des éléments finis

Les tableaux (III.11, III.14) présentent les différentes valeurs de la deuxième fréquence obtenues par la méthode utilisée et celles obtenues par ATILA. Pour les coques de grand axe moyen $ga = 500$ mm, le grand rayon varie de 300 à 600 mm, l'épaisseur vaut 20 mm et 25 mm et pour des valeurs du petit rayon variant de 30 à 60 mm. Le tableau (III.15) présente les valeurs pour un grand rayon $R = 500$ mm, un petit rayon $r = 50$ mm et pour différentes valeurs de l'épaisseur.

Les tableaux (III.16) et (III.17) présentent les différentes valeurs de la deuxième fréquence de résonance pour des coques de grand axe moyen $ga = 1150$ mm, le grand rayon varie de 800 mm à 1400 mm et pour une épaisseur $h = 50$ mm. Dans le tableau (III.18), la comparaison est faite pour une coque de grand rayon $R = 1000$ mm, de petit rayon $r = 100$ mm et pour différentes valeurs de l'épaisseur.



r en mm	f2 (M.E.F)	f2 (ANA)	écart %	f2 (M.E.F)	f2 (ANA)	écart %
	R = 300. mm			R = 400. mm		
30.	1736.	2345.	26.0	1941.	2038.	4.7
40.	1711.	2036.	16.0	1908.	1945.	1.9
50.	1688.	1848.	8.6	1880.	1910.	1.5
60.	1666.	1729.	3.6	1854.	1905.	2.6

Tableau III.11 : Comparaison de la fréquence obtenue par la méthode des éléments finis (M.E.F) et par la méthode analytique (ANA), pour différentes valeurs de r et R pour $h = 20$. mm et $ga = 500$. mm.

CHAPITRE III

r en mm	f2 (M.E.F)	f2 (ANA)	écart %	f2 (M.E.F)	f2 (ANA)	écart %
	R = 500. mm			R = 600. mm		
30.	2025.	2034.	0.4	2068.	2054.	-0.6
40.	1990.	2011.	1.0	2032.	2061.	1.4
50.	1960.	2021.	3.0	2000.	2086.	4.1
60.	1932.	2047.	5.6	1972.	2117.	6.8

Tableau III.12 : Comparaison de la fréquence obtenue par la méthode des éléments finis (M.E.F) et par la méthode analytique (ANA), pour différentes valeurs de r et R pour h = 20. mm et ga = 500. mm.

r en mm	f2 (M.E.F)	f2 (ANA)	écart %	f2 (M.E.F)	f2 (ANA)	écart %
	R = 300. mm			R = 400. mm		
30.	2138.	2723.	21.4	2391.	2451.	2.4
40.	2108.	2411.	12.5	2350.	2366.	0.6
50.	2079.	2218.	6.2	2313.	2337.	1.0
60.	2053.	2095.	2.0	2281.	2339.	2.4

Tableau III.13 : Comparaison de la fréquence obtenue par la méthode des éléments finis (M.E.F) et par la méthode analytique (ANA), pour différentes valeurs de r et R pour h = 20. mm et ga = 500. mm.

r en mm	f2 (M.E.F)	f2 (ANA)	écart %	f2 (M.E.F)	f2 (ANA)	écart %
	R = 500. mm			R = 600. mm		
30.	2448.	2471.	0.9	2546.	2507.	-1.5
40.	2450.	2461.	0.4	2500.	2528.	1.1
50.	2411.	2482.	2.8	2460.	2566.	4.1
60.	2375.	2518.	5.6	2422.	2607.	7.0

Tableau III.14 : Comparaison de la fréquence obtenue par la méthode des éléments finis (M.E.F) et par la méthode analytique (ANA), pour différentes valeurs de r et R pour h = 25. mm et ga = 500. mm.

h en mm	f2 (M.E.F)	f2 (ANA)	-écart %
14.	1398.	1440.	2.9
18.	1775.	1831.	3.0
20.	1960.	2021.	3.0
21.	2051.	2115.	3.0
22.	2143.	2208.	3.0
23.	2233.	2300.	3.3
24.	2322.	2392.	2.9
25.	2411.	2482.	2.8

Tableau III.15 : Comparaison de la fréquence obtenue par la méthode des éléments finis (M.E.F) et par la méthode analytique (ANA), pour r = 50. mm, R = 500. mm et pour différentes valeurs de h et ga = 50. mm.

r en mm	f2 (M.E.F)	f2 (ANA)	écart %	f2 (M.E.F)	f2 (ANA)	écart %
	R = 800. mm			R = 1000. mm		
80.	870.	933.	6.7	921.	930.	0.7
100.	857.	884.	3.0	896.	918.	2.3
120.	846.	857.	1.2	886.	917.	3.3
140.	836.	843.	0.8	875.	923.	1.8

Tableau III.16 : Comparaison de la fréquence obtenue par la méthode des éléments finis (M.E.F) et par la méthode analytique (ANA), pour différentes valeurs de r et R pour h = 50. mm et ga = 500. mm.

r en mm	f2 (M.E.F)	f2 (ANA)	écart %	f2 (M.E.F)	f2 (ANA)	écart %
	R = 1200. mm			R = 1400. mm		
80.	949.	947.	0.2	965.	962.	0.3
100.	935.	950.	2.6	951.	972.	2.1
120.	923.	960.	3.8	938.	986.	4.8
140.	911.	973.	6.3	926.	1000.	7.4

Tableau III.17 : Comparaison de la fréquence obtenue par la méthode des éléments finis (M.E.F) et par la méthode analytique (ANA), pour différentes valeurs de r et R pour h = 50. mm et ga = 1150. mm.

h en mm	f2 (M.E.F)	f2 (ANA)	-écart %
30.	559.	570.	1.9
40.	736.	748.	1.6
50.	896.	918.	2.4
60.	1075.	1080.	0.4
70.	1235.	1234.	0.0

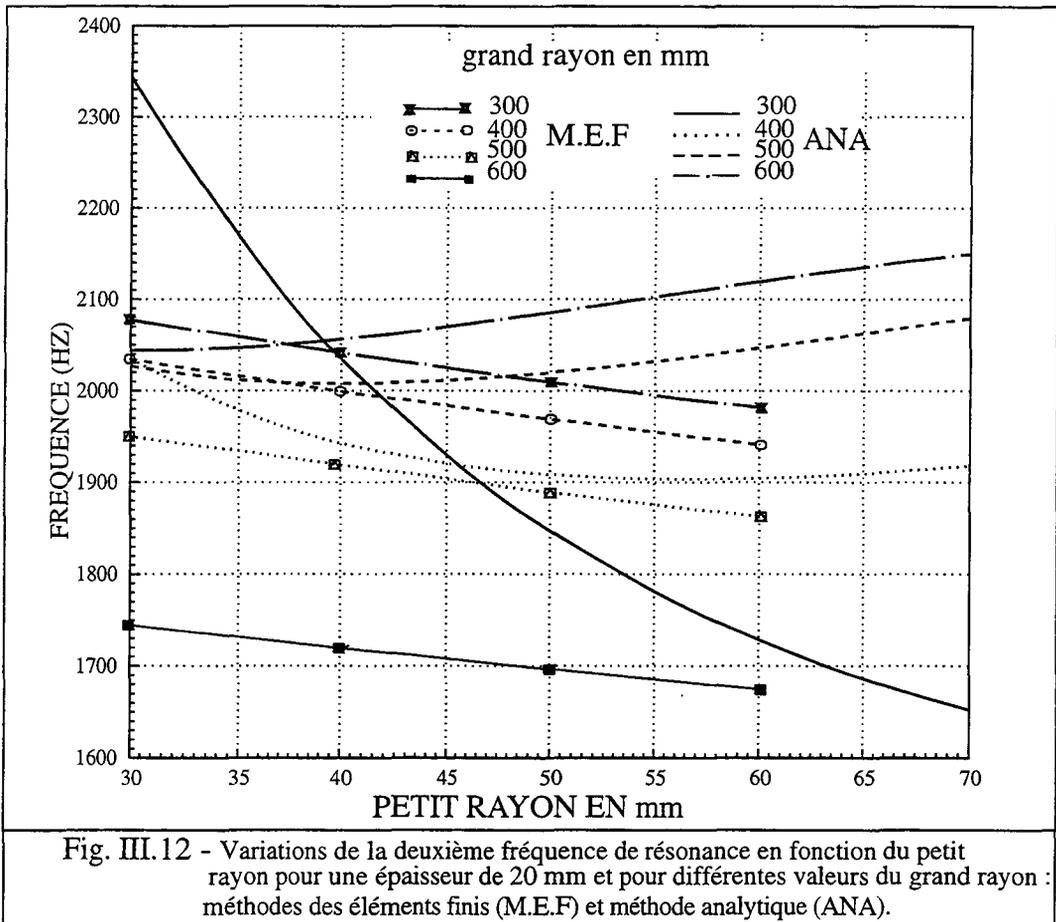
Tableau III.18 : Comparaison de la fréquence obtenue par la méthode des éléments finis (M.E.F) et par la méthode analytique (ANA), pour r = 100. mm, R = 1000. mm et pour différentes valeurs de h ga = 1150. mm.

III - 5.3.2 Analyse et interprétation des résultats

Pour les deux familles de coques testées, on constate que la méthode analytique a permis d'avoir des résultats satisfaisants comparés à ceux de la méthode des éléments finis ; néanmoins, pour le premier type de coque (ga = 500 mm) admettant un grand rayon de courbure R = 300 mm, l'écart observé est important. En résumé, pour les coques qui admettent un grand rayon de courbure R avec : $0,7 \leq R/(ga) \leq 1,2$, l'écart observé est de l'ordre de 7%. Dans les tableaux III.11 et III.13 où l'on montre la comparaison entre les résultats de la deuxième fréquence de résonance obtenus analytiquement et numériquement, pour des coques à grand rayon de courbure R = 300 mm, l'écart va jusqu'à 26%, dans ce cas le rapport grand rayon de courbure / grand axe moyen vaut 0.6. Pour la seconde famille de coque, le grand rayon de courbure varie de 800 mm à 1400 mm pour un grand axe moyen ga = 1150 mm c'est à dire : $0,7 \leq R/(ga) \leq 1,2$, l'écart est de l'ordre de 7% au maximum. Pour cette famille de coques, si l'on considère une coque à grand rayon de courbure R = 650 mm par exemple ((R/ga) = 0,56), l'écart est alors de

l'ordre de 12%. En ce qui concerne les variations de cette fréquence obtenue analytiquement en fonction des différents paramètres de la coque, on remarque qu'elle ne suit pas la même évolution que celle obtenue numériquement. Ceci est bien mis en évidence par la figure III.12 où l'on montre que la seconde fréquence de résonance obtenue par ATILA décroît linéairement quand le petit rayon de courbure augmente quelle que soit la valeur du grand rayon de courbure, alors que la fréquence obtenue analytiquement peut diminuer ou augmenter suivant la valeur ce dernier.

Donc pour des coques vérifiant la relation suivante : $0,7 \leq R/(ga) \leq 1,2$ les résultats de la méthode analytique proposée sont en bon accord avec les résultats numériques.



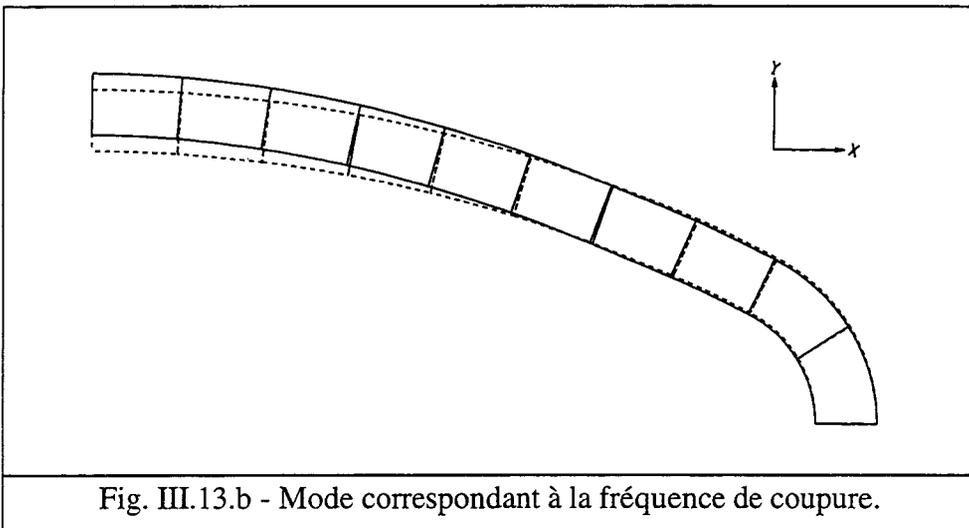
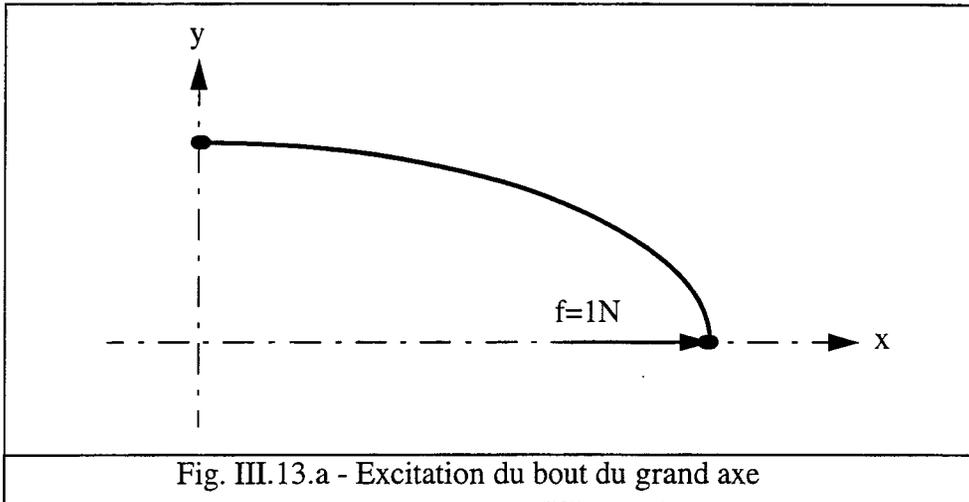
III - 6 Détermination de la fréquence d'antirésonance mécanique

III - 6.1 Principe

La fréquence de coupure a été définie comme la fréquence d'antirésonance mécanique de la coque, elle correspond au mode pour lequel, le déplacement au bout du grand axe est nul.

Le mode qui correspond au cas où le déplacement du bout du grand axe est nul, obtenu par l'analyse harmonique grâce au code ATILA, est présenté par la figure III.13.a. De la même manière, si on excite la coque au bout du grand axe par une force harmonique de pulsation w , Fig. III.13.b, on peut déterminer la fréquence pour laquelle le déplacement u_1 est nul.

De la même manière, si on excite la coque au bout du grand axe par une force harmonique de pulsation w , Fig. III.13.b, on peut déterminer la fréquence pour laquelle le déplacement u_1 est nul.



III - 6.1.1 Méthode

Le système est toujours régi par l'équation :

$$[[K] - \omega^2[M]] \{U\} = \{F\} \tag{III-50}$$

Pour la détermination de la fréquence de coupure, un système de deux masses concentrées, suffit : le déplacement du noeud 2 est négligeable Fig. III. devant celui des noeuds 1 et 3 et donc l'effet de la masse 2 peut être ignoré. Dans ce cas, la matrice $[A]$, utilisée est définie, (annexe 2), comme :

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11M} + a_{11T} + a_{11N} & a_{12M} + a_{12T} + a_{12N} \\ a_{12M} + a_{12T} + a_{12N} & a_{22M} + a_{22T} + a_{22N} \end{bmatrix} \tag{III-51}$$

et le vecteur déplacement $\{\bar{U}\}$ s'écrit :

$$\{\bar{U}\} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{1M} + u_{1T} + u_{1N} \\ u_{2M} + u_{2T} + u_{2N} \end{Bmatrix} \quad (\text{III-52})$$

En termes de coefficients de flexibilité a_{ij} , ce système devient pour le cas cité :

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin(\omega t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III-53})$$

pour déterminer les deux masses m_1 et m_2 , on procède de la même manière que pour le cas des trois masses, dans ce cas, m_1 et m_2 ont pour valeurs :

$$\begin{cases} m_1 = \frac{1}{\omega_c^2} \left[k_{11} + k_{12} \frac{\bar{u}_2}{\bar{u}_1} \right] \\ m_2 = \frac{1}{\omega_c^2} \left[k_{12} \frac{\bar{u}_1}{\bar{u}_2} + k_{22} \right] \end{cases} \quad (\text{III-54})$$

III - 6.2 Fréquence de coupure

Dans ce cas, la pulsation cherchée ω_c est celle qui correspond à un déplacement nul au bout du grand axe donc pour une valeur de : $u_1 = 0$. L'équation (III-53) devient :

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \end{Bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin(\omega t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III-55})$$

on déduit la valeur de ω_c comme :

$$\omega_c = \sqrt{\frac{a_{11}}{m_2 (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})}} \quad (\text{III-56})$$

La fréquence d'antirésonance mécanique, ou fréquence de coupure est alors définie par :

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} \quad (\text{III-57})$$

III - 6.3 Résultats

III - 6.3.1 Comparaison avec la méthode des éléments finis

Comme pour les deux premières fréquences, on va comparer les résultats de la méthode analytique proposée à ceux donnés par l'analyse harmonique du code ATILA.

Les résultats sont rassemblés dans les tableaux (III.19, III.22) :

CHAPITRE III

le tableau (III.19) présente les valeurs de la fréquence de coupure pour la coque de grand axe moyen $ga = 500$ mm, un grand rayon $R = 500$ mm, une épaisseur $h = 20$ mm et pour différentes valeurs du petit rayon, le tableau (III.20) présente les valeurs de la fréquence de coupure pour la coque de grand axe moyen $ga = 500$ mm, un petit rayon $r = 50$ mm, une épaisseur $h = 20$ mm et pour différentes valeurs du grand rayon et enfin les tableaux (III.21) et (III.22) présentent les valeurs de la fréquence de coupure pour différentes valeurs de l'épaisseur avec le grand rayon et le petit rayon tout deux constants pour les deux types de coque.

r en mm	f_c (M.E.F)	f_c (ANA)	écart %
30.	1290.	1211.	-6.5
40.	1115.	1132.	1.5
50.	1050.	1054.	0.4
60.	995.	983.	-1.2

Tableau III.19 : Comparaison de la fréquence obtenue par la méthode des éléments finis (M.E.F) et par la méthode analytique (ANA), pour différentes valeurs de r, $R = 500$. mm, $h = 20$. mm et $ga = 500$. mm.

R en mm	f_c (M.E.F)	f_c (ANA)	écart %
300.	1215.	1482.	18.0
400.	1188.	1247.	4.7
500.	1050.	1054.	1.3
600.	945.	929.	-1.7

Tableau III.20 : Comparaison de la fréquence obtenue par la méthode des éléments finis (M.E.F) et par la méthode analytique (ANA), pour différentes valeurs de R, $r = 50$. mm, $h = 20$. mm et $ga = 500$. mm.

h en mm	f_c (M.E.F)	f_c (ANA)	écart %
14.	821.	868.	5.4
18.	983.	1001.	1.7
20.	1050.	1054.	0.3
21.	1080.	1078.	-0.1
22.	1112.	1101.	-0.9
23.	1142.	1122.	-1.7
24.	1167.	1143.	-2.0
25.	1195.	1162.	-2.9

Tableau III.21 : Comparaison de la fréquence obtenue par la méthode des éléments finis (M.E.F) et par la méthode analytique (ANA), pour différentes valeurs de h, $R = 500$. mm, $r = 50$. mm et $ga = 500$. mm.

h en mm	f2 (M.E.F)	f2 (ANA)	écart %
30.	559.	570.	1.9
40.	736.	748.	1.6
50.	896.	918.	2.4
60.	1075.	1080.	0.4
70.	1235.	1235.	0.0

Tableau III.22: Comparaison de la fréquence obtenue par la méthode des éléments finis (M.E.F) et par la méthode analytique (ANA), pour différentes valeurs de h, R = 1000. mm, r = 100. mm et ga = 1150. mm.

III - 6.3.2 Analyse et interprétation des résultats

Les résultats obtenus analytiquement sont en bon accord avec ceux de la méthode des éléments finis, pour les coques dont le rapport R/ ga est compris entre 0.7 et 1.2, de la même manière que pour la deuxième fréquence de résonance ; dans ce cas, le plus grand écart est de l'ordre de 6%.

a) variation de la fréquence de coupure en fonction du petit rayon de courbure.

Lorsqu'on analyse, en fonction du petit rayon de courbure, les variations de la fréquence de coupure de la coque, pour différentes valeurs du grand rayon de courbure, on constate que cette fréquence diminue linéairement quand le petit rayon de courbure augmente (Fig. III.14.a) et (Fig. III.14.b).

b) variation de la fréquence de coupure en fonction du grand rayon de courbure.

Les variations de la fréquence de coupure en fonction du grand rayon de courbure sont représentées par les figures III.14.c et III.14.d pour les deux types de coque. On constate que cette fréquence passe par un maximum pour une valeur du grand rayon donnée, celle-ci étant différente pour chaque valeur du petit rayon de courbure.

c) variation de la fréquence de coupure en fonction de l'épaisseur.

Comme pour le calcul des deux premières fréquences de résonance, lorsque l'on modifie l'épaisseur de la coque, la fréquence de coupure augmente avec l'épaisseur quelle que soit la valeur du petit rayon de courbure, pour les deux types de coque. Les courbes présentées par les figures III.13.e et III.13.f ont été obtenues pour un grand rayon constant et pour différentes valeurs du petit rayon.

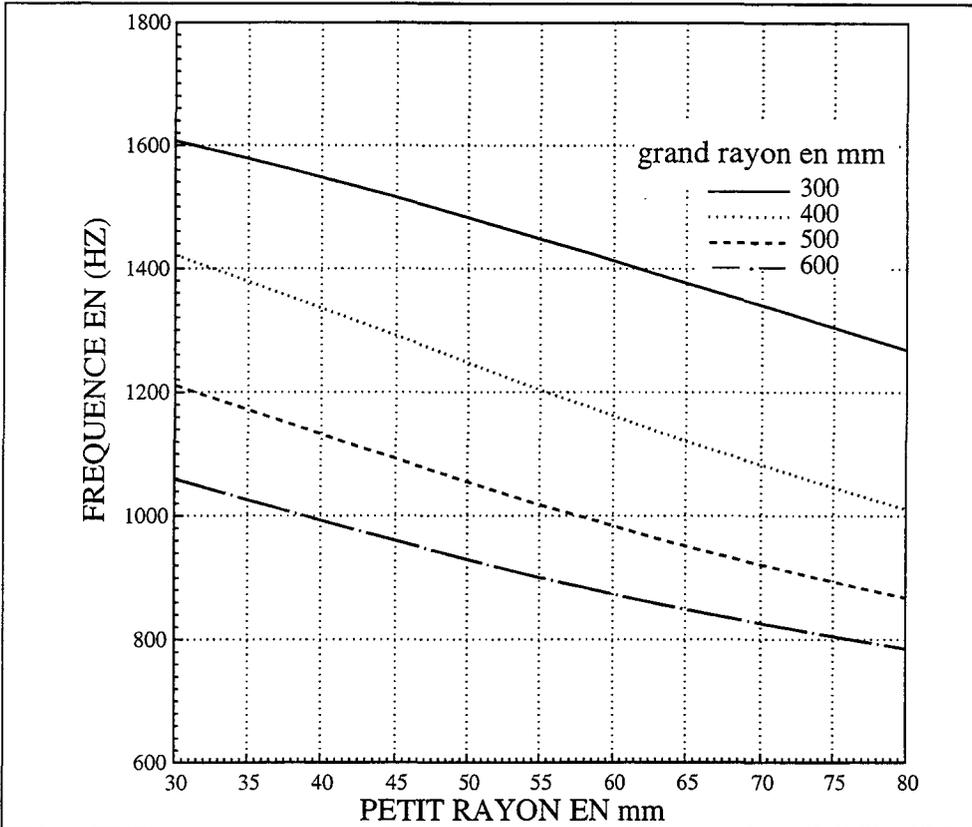


Fig. III.14.a - Variation de la fréquence de coupe en fonction de r.
h = 20 mm et ga = 500 mm.

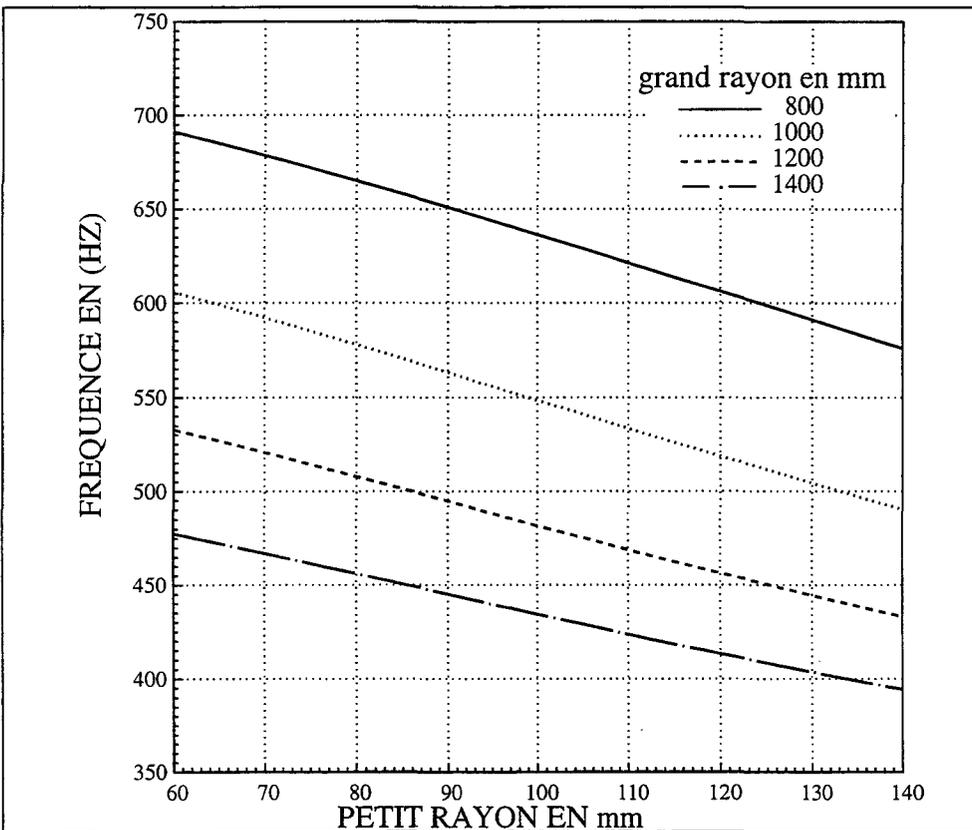


Fig. III.14.b - Variation de la fréquence de coupe en fonction de r.
h = 50 mm et ga = 1150 mm.

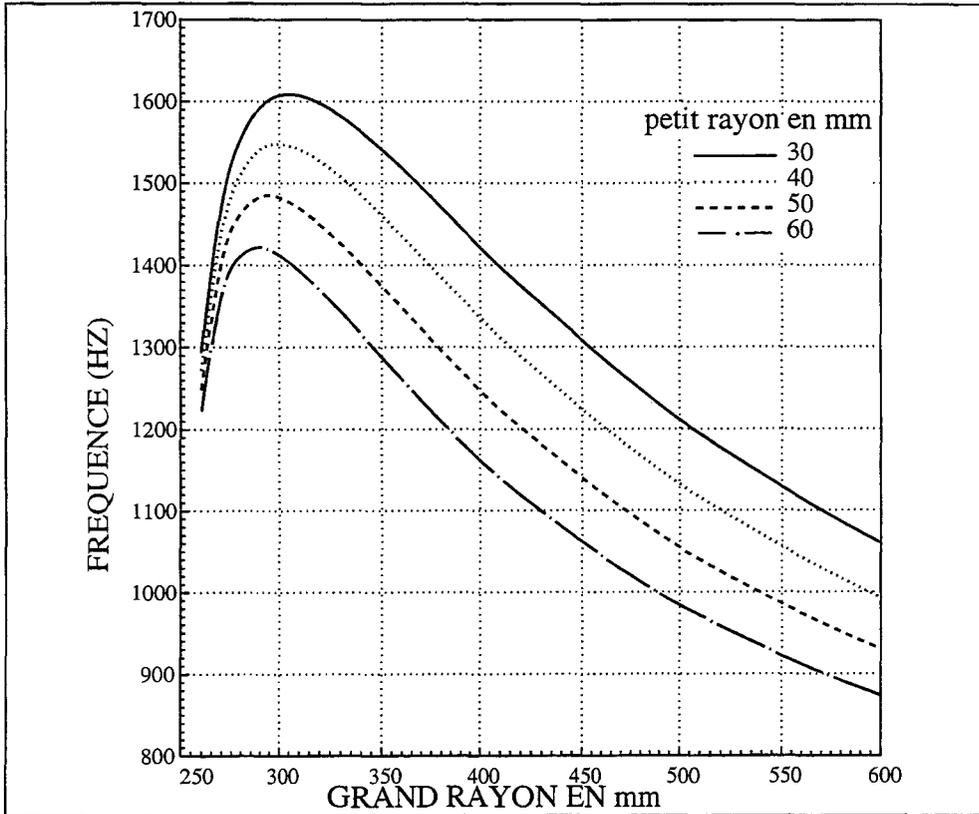


Fig. III.14.c - Variation de la fréquence de coupure en fonction de R. pour $ga = 500$ mm et $h = 20$ mm.

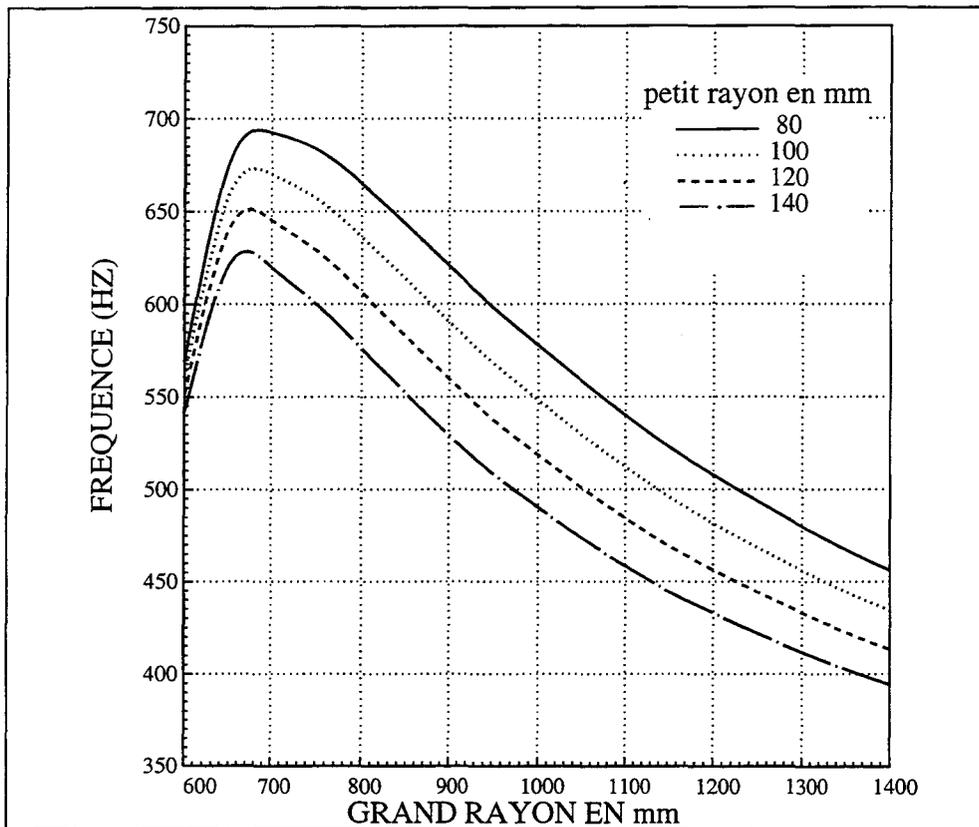


Fig. III.14.d - Variation de la fréquence de coupure en fonction de R. $ga = 1150$ mm et $h = 50$ mm.

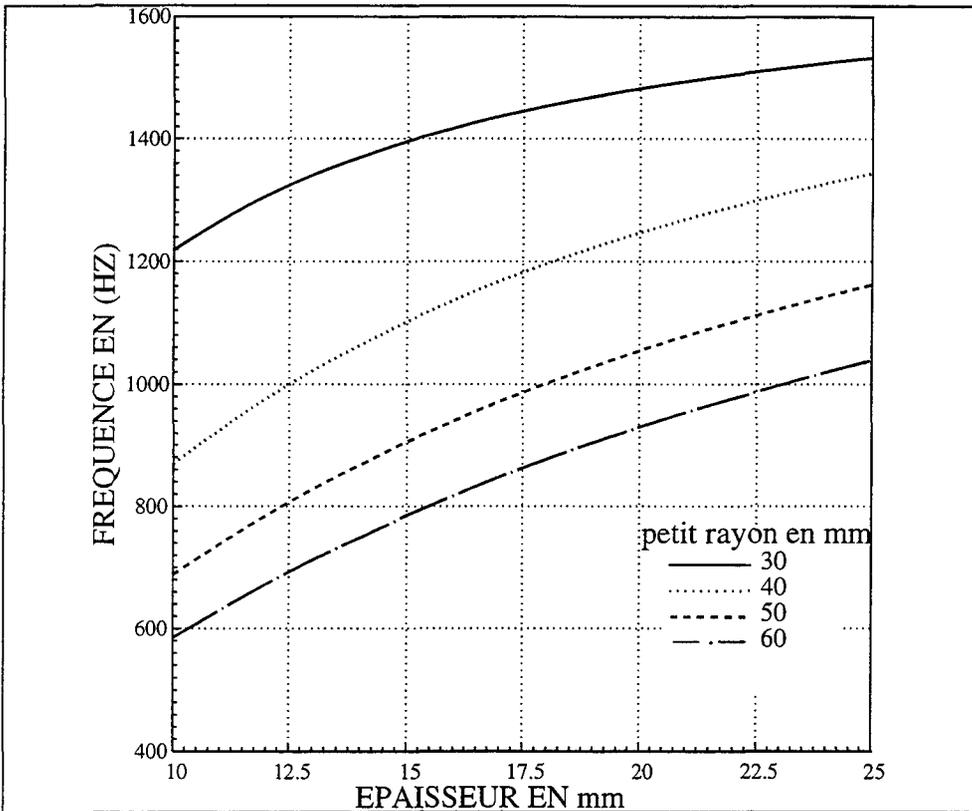


Fig. III.14.e - Variation de la fréquence de coupe en fonction de h.
ga = 500 mm.

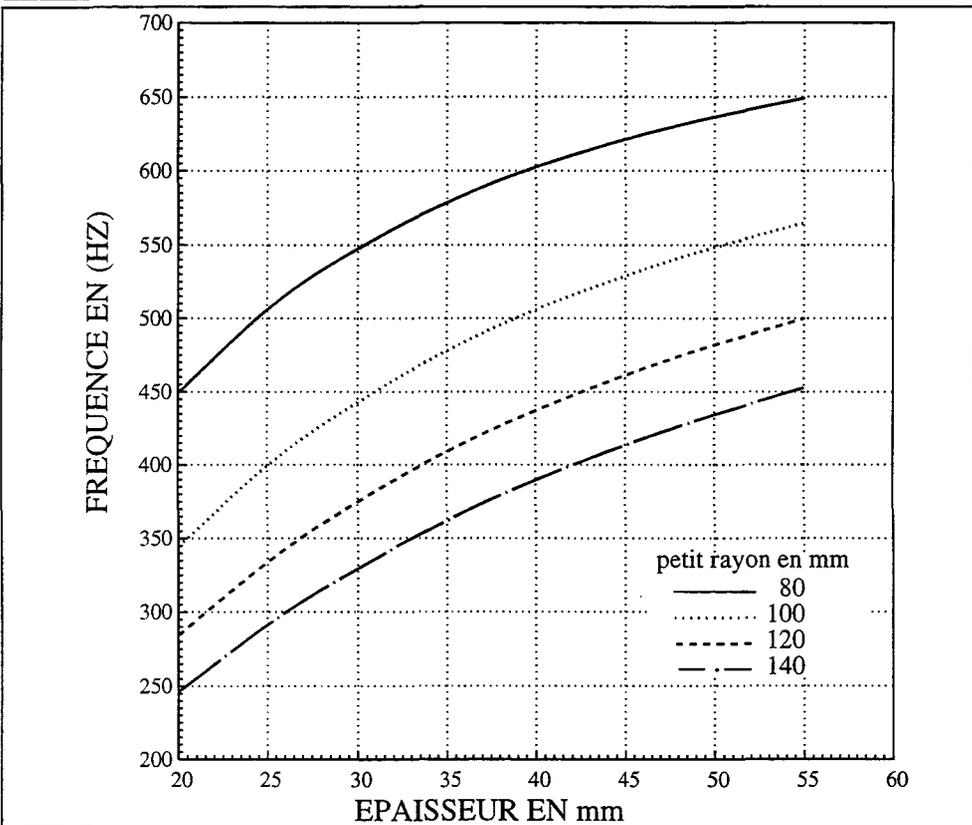


Fig. III.14.f - Variation de la fréquence de coupe en fonction de h.
ga = 1150 mm.

III - 7 Mode de membrane

III - 7.1 Principe

Le même principe pour la détermination de la première fréquence de flexion de la coque peut être appliqué, pour la détermination de la fréquence de membrane. Dans ce cas, seuls les déplacements dûs à l'effort normal seront pris en compte. L'énergie potentielle sera également déterminée à partir de l'effort normal uniquement.

III - 7.2 Déplacements

Les déplacements de tout point de la fibre moyenne de la coque, dûs à l'effort normal, obtenus par la méthode du paragraphe (III - 3.1.1), $u_{in}(a)$ et $v_{in}(a)$ sont exprimés ci-après :

$$\begin{cases} u_{1N}(\alpha) = -p \frac{1-v^2}{Eh} R^2 \varepsilon \left[\frac{A}{4} \cos 2\alpha + \left(\varepsilon + \frac{h}{2R} \right) \cos \alpha + c_{1N} \right] \\ v_{1N}(\alpha) = -p \frac{1-v^2}{Eh} R^2 \varepsilon \left[\frac{A}{4} (2\alpha + \sin 2\alpha) + \left(\varepsilon + \frac{h}{2R} \right) \sin \alpha \right] \end{cases} \quad (III-58)$$

$$\begin{cases} u_{2N}(\alpha) = p \frac{1-v^2}{Eh} R^2 \left[\frac{B}{4} \left(2 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + \sin 2\alpha \right) - \left(I + \frac{h}{2R} \right) \cos \alpha \right] \\ v_{2N}(\alpha) = -p \frac{1-v^2}{Eh} R^2 \left[\frac{B}{4} \cos 2\alpha + \left(I + \frac{h}{2R} \right) \sin \alpha + c_{2N} \right] \end{cases} \quad (III-59)$$

c_{1N} et c_{2N} sont des constantes indépendantes de l'angle a et sont exprimées en annexe 1.

III - 7.2.1 Comparaison avec la méthode des éléments finis

Quand on regarde le champ de déplacement de la coque donné par la méthode analytique (Fig. III.15.a) et celui donné par la méthode des éléments finis (Fig. III.15.b), on constate que le mode obtenu analytiquement est un mode de membrane pure, alors que celui de la méthode des éléments finis ne l'est pas : les analyses réalisées par ATILA ne permettent pas de dissocier la flexion de la membrane : ce qui peut déjà nous renseigner sur les valeurs de la fréquence de membrane.

III - 7.3 Fréquence de membrane

A partir des équations des déplacements (III.58) et (III.59) et de l'effort normal exprimés en annexe I, on détermine l'énergie cinétique et l'énergie potentielle comme pour le cas de la première fréquence de résonance.

L'énergie cinétique dans ce cas est :

$$E_{cm} = \frac{1}{2} h \rho \omega^2 \left(\int_0^\varphi [u_{1N}^2(\theta) + v_{1N}^2(\theta)] r d\theta + \int_\varphi^{\frac{\pi}{2}} [u_{2N}^2(\theta) + v_{2N}^2(\theta)] R d\theta \right) \quad (III-60)$$

L'énergie potentielle E_{pm} est :

$$E_{pm} = \frac{(1-\nu^2)}{2Eh} \left(\int_0^\varphi N_1^2(\theta) r d\theta + \int_\varphi^{\frac{\pi}{2}} N_2^2(\theta) R d\theta \right) \quad (\text{III-61})$$

Donc, la fréquence de membrane, est définie, par :

$$f_m = \frac{\omega_m}{2\pi} \quad (\text{III-62})$$

avec :

$$\omega_m = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{E}{(1-\nu^2)\rho} \frac{\tilde{E}_{pm}}{\tilde{E}_{cm}}} \quad (\text{III-63})$$

Les expressions de \tilde{E}_{pm} et \tilde{E}_{cm} sont précisées à l'annexe 1.

III - 7.4 Résultats

Les résultats analytiques obtenus pour une coque de grand rayon $R = 500$ mm, de petit rayon $r = 50$ mm et pour différentes valeurs de l'épaisseur sont différents de ceux obtenus par la méthode des éléments finis. La figure III.16 montre alors que plus l'épaisseur devient grande, plus l'écart devient petit. La figure III.17 montre aussi que plus l'épaisseur devient grande, plus on s'approche du mode de membrane pur. D'autre part, quand l'ellipse tend vers un cercle ($r=R$) et si on remplace r par R dans l'équation (III-63), on obtient la valeur exacte de la pulsation de membrane d'un anneau circulaire qui est :

$$\omega = \sqrt{\frac{E}{\rho R^2 (1-\nu^2)}} \quad (\text{III-64})$$

pulsation qui correspond au mode fondamental d'un anneau de rayon moyen R en déformations planes.

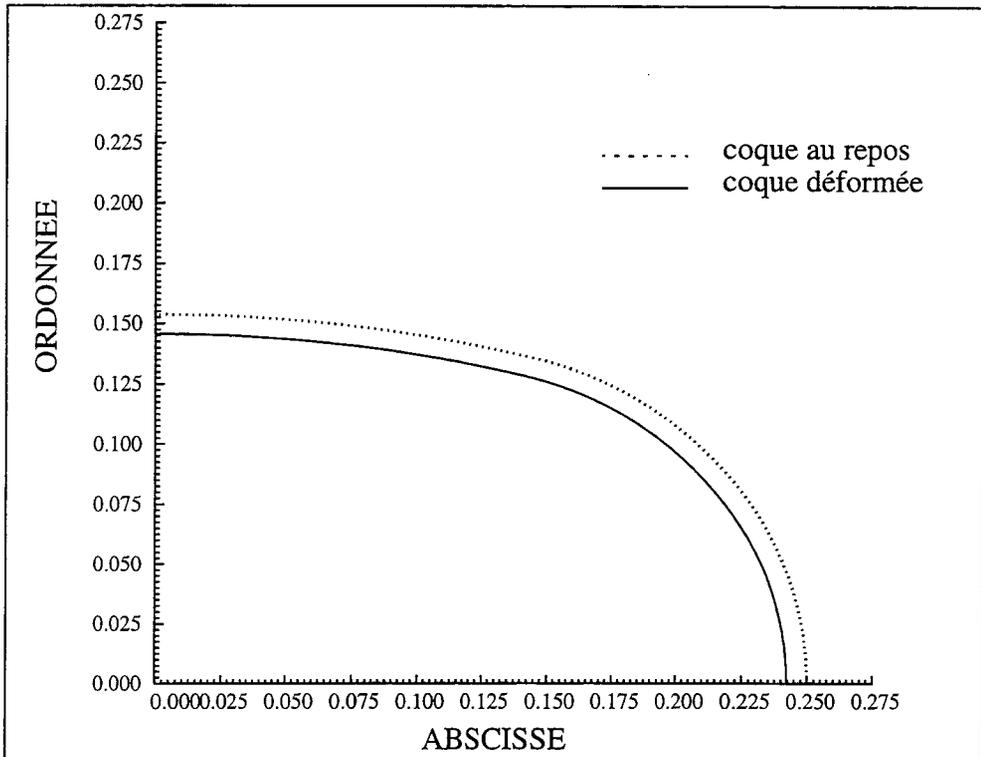


Fig. III.15.a - champ de déplacements obtenu analytiquement, pour la même coque, $f = 3303$ Hz.

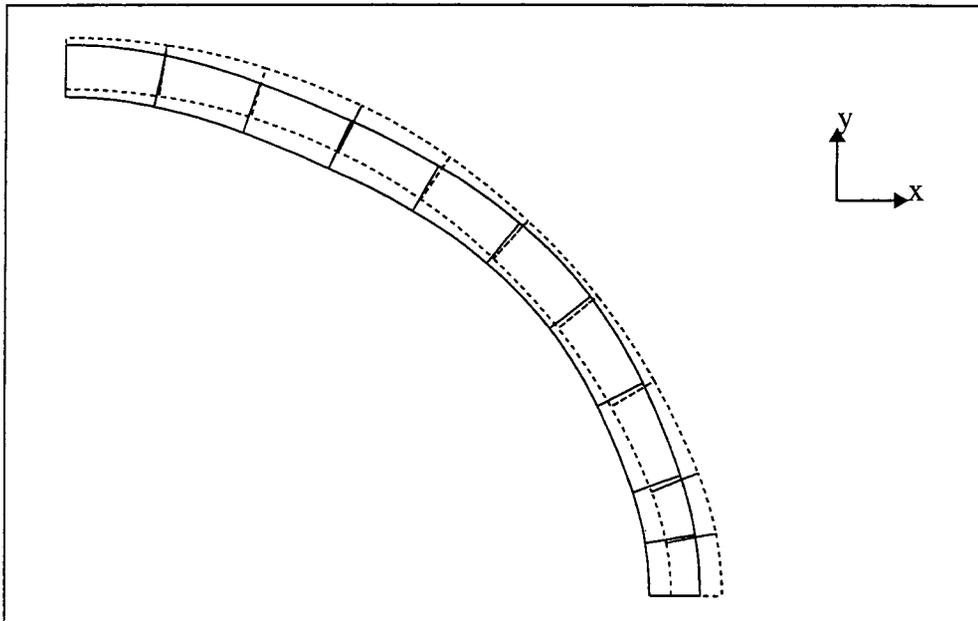
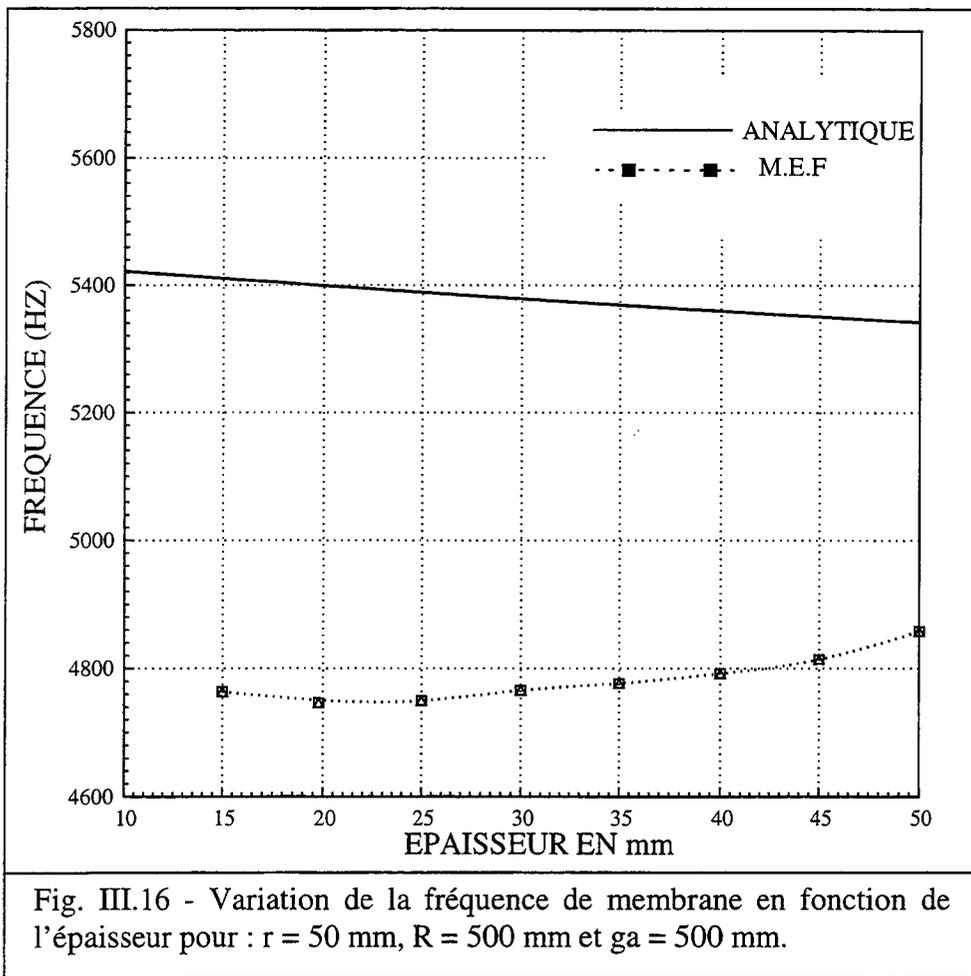
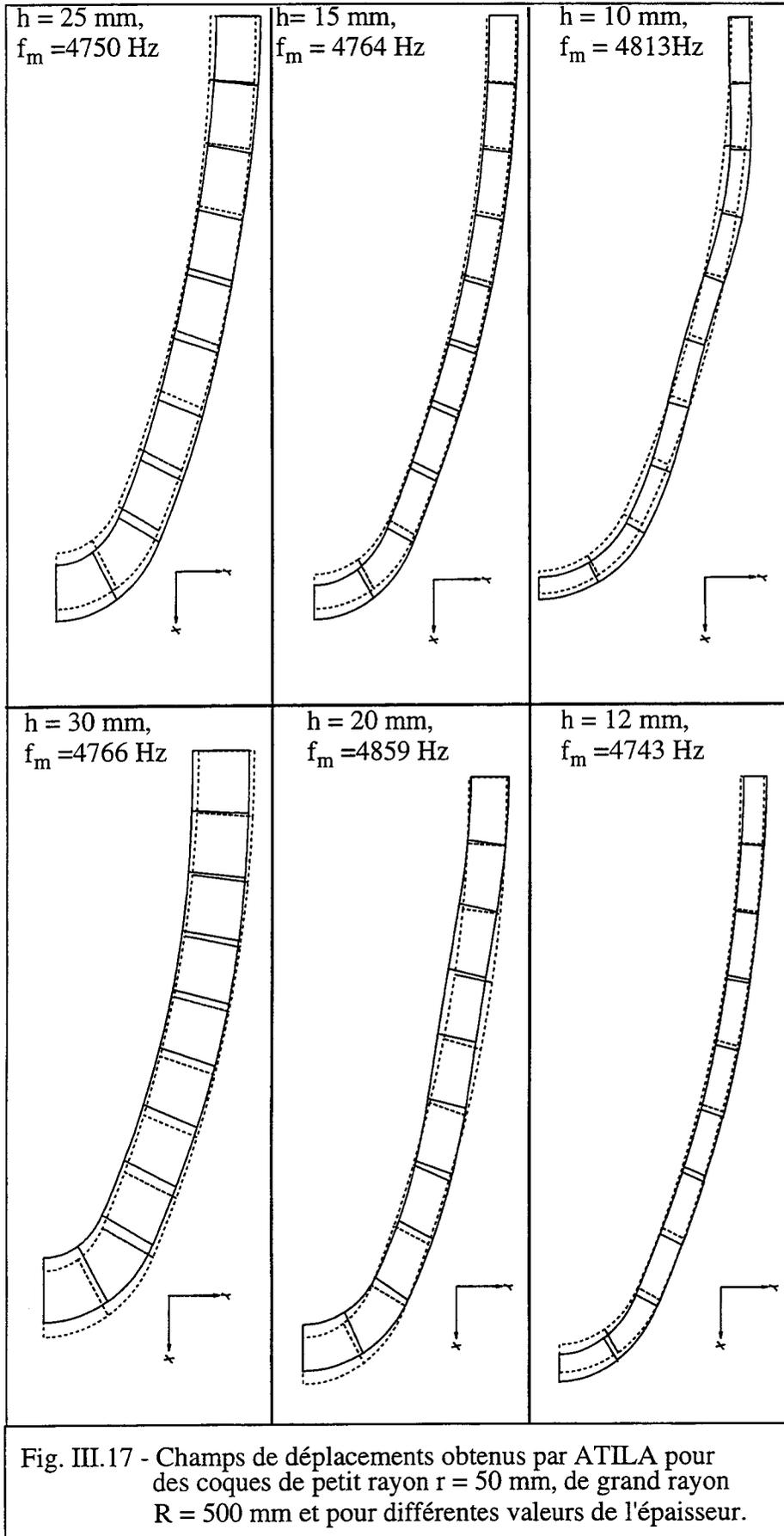


Fig. III.15.b - Champ de déplacement mode de membrane, obtenu par ATILA pour une coque de type ($g_a = 500$ mm), $r = 240$ mm, $R = 260$ mm et $h = 20$ mm, $f = 3883$ Hz.





III - 8 Conclusion

Les méthodes analytiques, présentées dans ce chapitre, donnent des bons résultats comparés à ceux de la méthode des éléments finis.

Comme on l'a montré pour la première fréquence de résonance, les résultats obtenus analytiquement sont en bon accord avec ceux obtenus numériquement pour tous les types de coques traités dans ce chapitre. On peut tirer de l'étude du premier mode de la coque les conclusions suivantes :

La première fréquence de résonance augmente avec le grand rayon de courbure quels que soient l'épaisseur et le petit rayon de courbure. Elle augmente linéairement avec l'épaisseur et diminue quand le petit rayon de courbure augmente.

Les valeurs de la deuxième fréquence de résonance obtenues analytiquement sont en accord avec celles de la méthode des éléments finis, uniquement pour des coques dont le rapport grand rayon de courbure / grand axe est compris entre 0.7 et 1.2. Pour les coques dont la géométrie respecte cette règle, le plus grand écart observé entre les deux méthodes est de l'ordre de 7%.

Pour la fréquence de coupure, quand la condition de géométrie citée plus haut est respectée, l'écart entre les deux méthodes n'excède pas 5%.

La fréquence de coupure diminue quand le petit rayon augmente, elle passe par un maximum quand le grand rayon augmente et enfin, elle augmente avec l'épaisseur.

Comme nous l'avons indiqué au chapitre II, la fréquence de résonance du transducteur est toujours proche de la fréquence d'antirésonance de la coque. Connaissant cette dernière et ses variations en fonction de la géométrie et de la nature du matériaux, on peut prédire le fonctionnement du transducteur complet.

La recherche d'espace maximum pour pouvoir insérer des moteurs magnétostrictifs évoqués au chapitre II, devient plus simple grâce à cette méthode analytique.

On possède maintenant tous les éléments nécessaires pour optimiser la coque des transducteurs flexensionnels de classe IV qui répond aux hypothèses du départ : matériau élastique, épaisseur constante. La méthode présentée dans ce chapitre pourrait s'appliquer à d'autres types de coques en général et à celle des autres transducteurs flexensionnels en particulier.

CHAPITRE IV***Détermination analytique des caractéristiques du moteur***

Dans ce chapitre, on présente une méthode analytique pour déterminer le premier mode de vibration longitudinal du moteur d'un transducteur flexionnel de classe IV, nécessaire pour la mise en place de son schéma équivalent. Ce moteur est constitué d'un ensemble de barreaux ou d'anneaux piézoélectriques séparés par des électrodes excitées alternativement. Sous excitation électrique, le moteur se met en vibration longitudinale pour exciter la coque à travers des inserts métalliques.

On retrouve ce même principe de fonctionnement dans d'autres types de transducteurs comme le Janus ou le Tonpilz ; à la différence du classe IV, ces deux derniers n'utilisent pas de coque pour rayonner l'onde acoustique dans le fluide, mais des pavillons. Ils seront décrits dans la première section de ce chapitre, pour valider la méthode analytique proposée.

Ce chapitre est divisé en trois parties : dans la première partie, on présente les transducteurs cités plus haut, dans la deuxième on détermine les fréquences de résonance des premiers modes propres des modèles des transducteurs, c'est à dire des modèles (poutres) ayant la même géométrie que les transducteurs, mais constitués en matériaux élastiques et dans la troisième, on étudie les transducteurs proprement dits en utilisant des céramiques piézoélectriques.

IV - 1 Description du Janus, Tonpiliz et du moteur du flexionnel de classe IV

IV - 1.1 Le transducteur type Tonpiliz

Ce transducteur [32], dont une présentation schématique est donnée par la figure (IV.1), est généralement constitué par :

- une colonne motrice formée d'un empilement de céramiques piézoélectriques annulaires, séparées, par des électrodes annulaires de même rayon. Les axes de polarisations des céramiques sont parallèles à l'axe du moteur, leurs orientations étant alternées. Les électrodes peuvent être très minces (quelques dixièmes de millimètres) et assurer seulement une fonction d'excitation électrique, ou épaisses (épaisseur comparable à celle des céramiques), au quel cas elles assurent de plus une fonction mécanique en contribuant à l'élasticité de la colonne,
- un pavillon, dont la face avant ou face « parlante » est au contact du fluide. Il assure l'adaptation d'impédance partielle entre la colonne motrice et le fluide et doit être constitué d'un matériau léger. Ses dimensions transversales sont liées aux conditions de rayonnement, en particulier au couplage entre transducteurs élémentaires d'une même base,
- une contremasse, constituée par un matériau de forte densité, destinée à minimiser la vibration arrière de la colonne motrice,
- une tige de précontrainte, qui assure la cohérence entre céramiques et électrodes et maintient les céramiques en état de compression permanente durant leur excitation, condition indispensable pour qu'elles fonctionnent correctement. Cette tige, généralement en acier traité, est de section faible.

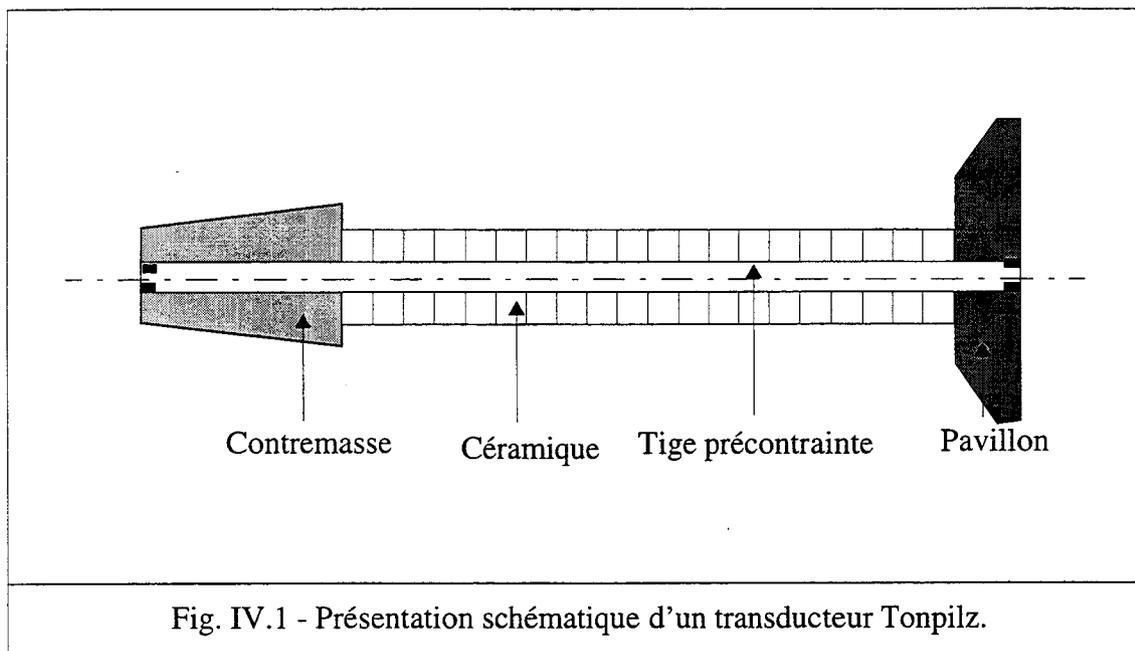
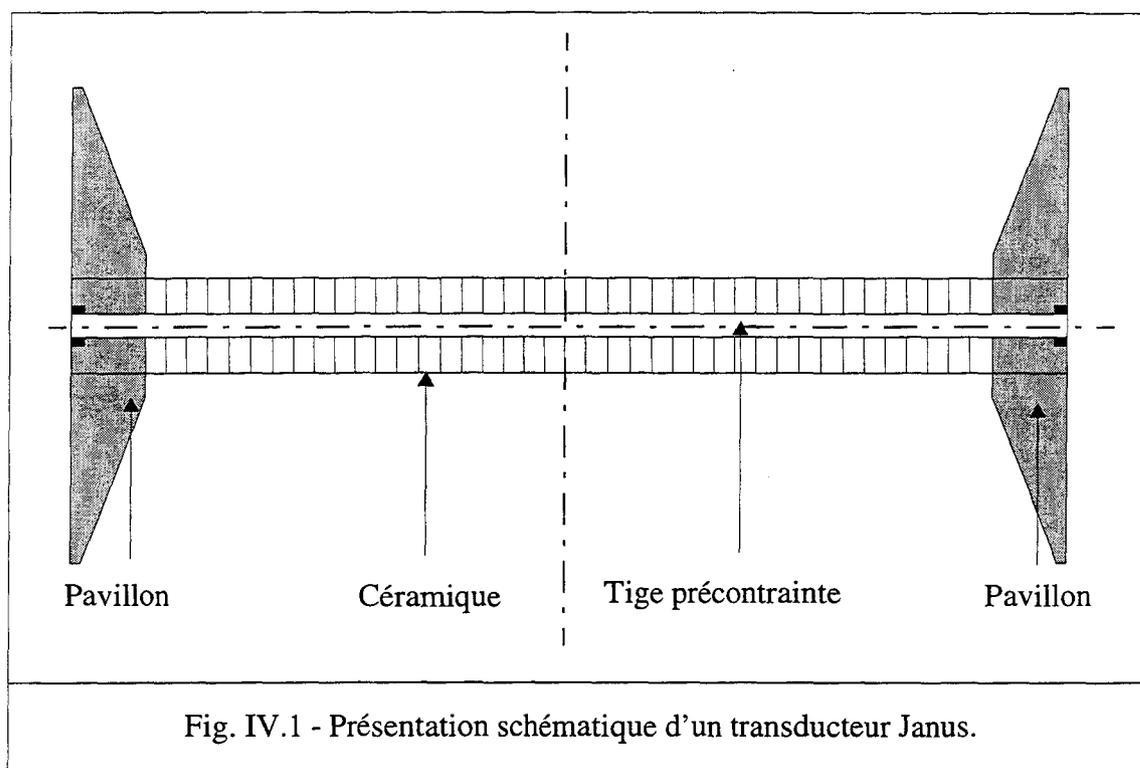


Fig. IV.1 - Présentation schématique d'un transducteur Tonpiliz.

IV - 1.2 Le transducteur type Janus

Le transducteur Janus, représenté schématiquement par la figure (IV.2), est formé d'une colonne de céramiques piézoélectriques [47] ou de barreaux d'alliages magnétostrictifs [5] compris entre deux pavillons identiques, qui rayonnent l'onde acoustique dans le fluide environnant. Comme dans un Tonpiliz, l'excitation électrique communique au moteur un mouvement de dilatation-compression qui entraîne les pavillons. Par ailleurs, l'existence d'un plan de symétrie du champ de déplacement normal à l'axe du transducteur autorise l'absence de contremasse, le plan nodal de référence étant automatiquement défini. Une résonance fondamentale en basse fréquence est possible si la compliance de la partie motrice d'une part, le poids des pavillons d'autre part, sont suffisants, et des solutions existent avec des dimensions raisonnables.

L'association de transducteurs Janus en antennes compactes ou lacunaires a déjà fait l'objet d'études démontrant son intérêt, en particulier en termes de rendement électroacoustique global et de directivité.



IV - 1.3 Moteur du transducteur flexionnel de classe IV

Le moteur du transducteur flexionnel de classe IV est représenté par la figure IV.3. Comme nous l'avons décrit au chapitre II, il est constitué d'un ensemble de barreaux ou d'anneaux de céramiques piézoélectriques. Plus récemment, des moteurs ont été constitués en matériaux magnétostrictifs [49] : pour un transducteur magnétostrictif de même volume, de même fréquence et de même bande passante que le transducteur piézoélectrique la puissance acoustique est théoriquement 35 fois supérieure.

Le moteur est séparé en deux parties symétriques par une poutre métallique, suivant les cas, il est limité par deux inserts métalliques qui servent de contact avec la coque.

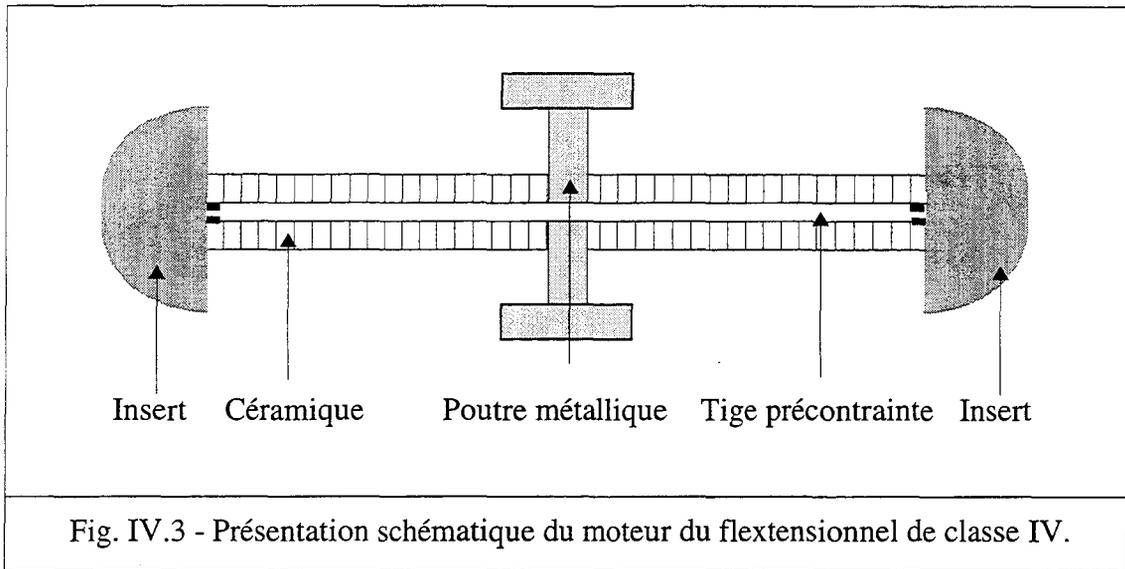


Fig. IV.3 - Présentation schématique du moteur du flexensionnel de classe IV.

Le principe de la méthode utilisée ici, repose sur la théorie des vibrations longitudinales des barres. Un rappel de cette méthode, bien détaillée dans la théorie des vibrations [50], est présenté dans la section suivante. Pour pouvoir appliquer cette méthode aux transducteurs cités, l'effet piézoélectrique est appliqué après avoir rappelé les principales caractéristiques des matériaux piézoélectriques.

IV - 2 Théorie générale sur les vibrations longitudinales des barres

Nous admettrons dans ce qui suit que pendant la vibration longitudinale d'une barre, les sections transversales restent planes et que le mouvement des points matériels appartenant à ces sections s'effectuent uniquement dans la direction de l'axe de la barre. Il est certain que les dilatations et compressions longitudinales qui se produisent pendant la vibration, seront accompagnées de déformations latérales, mais, dans ce qui suit, nous ne nous occuperons que des cas dans lesquels la longueur des ondes longitudinales est grande en comparaison de la section transversale de la barre. On pourra, dans ce cas, négliger, sans erreur appréciable, les déplacements latéraux qui peuvent se produire pendant la vibration longitudinale.

Dans ces conditions l'équation différentielle du mouvement d'un élément de la barre, représentée par la figure (IV.4), entre deux sections transversales mm' et nn' , peut s'écrire exactement comme celle d'un point matériel.

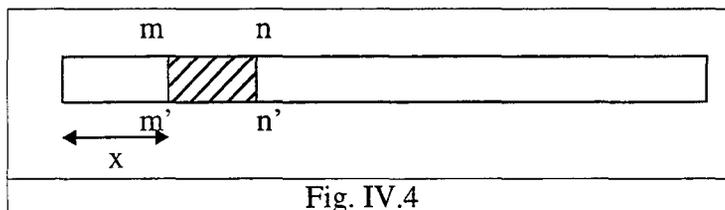


Fig. IV.4

Soient :

u_1 : le déplacement longitudinal d'une section transversale mn de la barre pendant la vibration,

e : l'élongation unitaire, définie par : $e = \frac{\partial u_1}{\partial x}$

L_1 : la longueur de la barre,

A_1 : l'aire de la section,

F : la force de traction longitudinale, tel que : $F = A_1 E \frac{\partial u_1}{\partial x}$

Pour une section transversale infiniment voisine, la force de traction sera :

$$F + dF = A_1 E \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} dx \right) \quad (IV.1)$$

La force d'inertie de l'élément mm'nn' de la barre est :

$$-A_1 \rho dx \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \quad (IV.2)$$

quand le principe de d'Alembert est appliqué, on arrive aux équations différentielles suivantes qui déterminent le mouvement de l'élément mm'nn'

$$-A \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + A_1 E \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 0 \quad (IV.3)$$

ou alors :

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \quad (IV.4)$$

avec :

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (IV.5)$$

Dans l'expression (IV.5), c n'est autre que la vitesse de propagation des ondes le long de la barre.

IV - 3 Application de la théorie

IV - 3.1 Cas homogène

IV - 3.1.1 Modèle type Janus

Pour schématiser le Janus, un cas simplifié est présenté par la figure IV.5 (a), il est représenté par une barre limitée par deux masses de chaque coté. Par symétrie, la partie à étudier est représentée par la figure IV.5 (b), elle correspond à une barre de longueur L_1 et de section A_1 , encastrée d'un coté ($x = 0$) et à laquelle est fixé une masse m de l'autre.

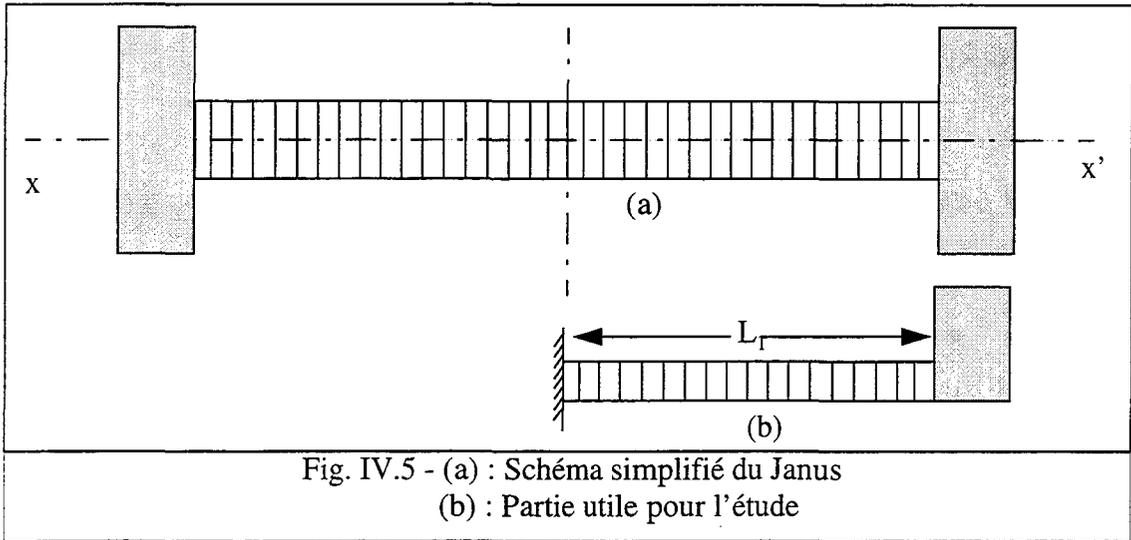


Fig. IV.5 - (a) : Schéma simplifié du Janus
(b) : Partie utile pour l'étude

Considérons la barre homogène de longueur L_1 , encastée ou libre d'un côté, et sollicitée par un poids fixé à l'autre extrémité, comme indiqué sur la figure (IV.6).

Dans ce qui va suivre nous allons tenir compte de la masse de la barre en désignant par u_1 les déplacements longitudinaux à partir de la position d'équilibre.-

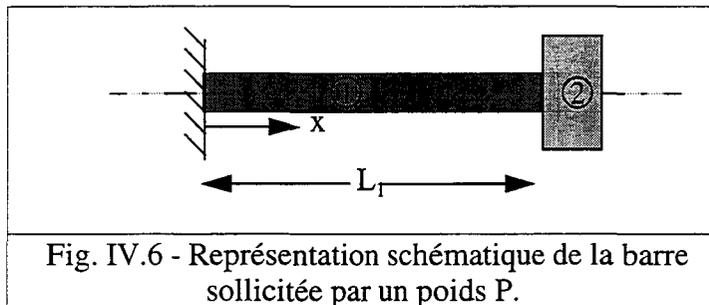


Fig. IV.6 - Représentation schématique de la barre sollicitée par un poids P.

si on appelle u_1 le déplacement longitudinal d'une section transversale de la barre (1), les équations du problème sont, comme indiqué dans la section précédente :

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \quad (IV.6)$$

A la partie ($x = L_1$), à laquelle est fixée la masse, la force de traction qui sollicite la barre doit être égale à la force d'inertie de la masse oscillante et on aura donc :

$$A_1 E \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)_{x=L_1} = -m \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \right)_{x=L_1} \quad (IV.7)$$

Si l'on suppose que le système est soumis à l'un des modes principaux de vibration, dont la fréquence est $\omega/2\pi$, le déplacement pourra être écrit sous la forme :

$$u_1 = X (\lambda_1 \cos \omega t + \beta_1 \sin \omega t) \quad (IV.8)$$

expression dans laquelle X représente une fonction normale de x seul et détermine l'allure de la vibration. En introduisant l'expression (IV.8) dans l'équation (IV.6) on trouve :

$$X = \lambda_2 \cos \omega \frac{x}{c} + \beta_2 \sin \omega \frac{x}{c} \quad (\text{IV.9})$$

où λ_2 et β_2 sont des constantes d'intégration à déterminer par les conditions aux limites.

a) Barre encastrée en $x = 0$

Si on considère que la barre est encastrée en $x = 0$, c'est le cas (homogène) qui correspond au Janus. Le déplacement pendant la vibration doit évidemment être nul en $x = 0$, ce qui conduit à :

$$(u_I)_{x=0} = 0 \quad (\text{IV.10})$$

de l'équation (IV.10), on obtient : $\lambda_2 = 0$, remplaçons λ_2 par sa valeur dans la relation (IV.7), on aboutit à :

$$A_I E \frac{\omega}{c} \cos \frac{\omega L_I}{c} = m \omega^2 \sin \frac{\omega L_I}{c} \quad (\text{IV.11})$$

Posons : $\xi = \frac{A_I \rho L_I}{m}$ rapport de la masse de la barre à la masse m et $\Gamma_I = \frac{\omega}{c} L_I = k L_I$, l'équation (IV.11) devient :

$$\xi = \Gamma_I \tan \Gamma_I \quad (\text{IV.12})$$

C'est l'équation de fréquence pour le cas étudié.

b) Barre libre en $x = 0$

Si on considère que la barre est libre, dans ce cas, la force en $x = 0$ doit être nulle, donc :

$$A_I E \left(\frac{\partial u_I}{\partial x} \right)_{x=0} = 0 \quad (\text{IV.13})$$

dans ce cas, on obtient : $\beta_2 = 0$, remplaçons β_2 par sa valeur dans l'équation (IV.9), on obtient :

$$\xi = -\frac{\Gamma_I}{\tan \Gamma_I} \quad (\text{IV.14})$$

Dans les équations (IV.12) et (IV.14), on a directement la pulsation en fonction des caractéristiques de la barre et du poids P .

c) Exemples

Pour valider ces résultats, une analyse modale par la méthode des éléments finis a été conduite : pour une barre de rayon intérieur $r_{i1} = 0.012$ m, de rayon extérieur $r_{e1} = 0.036$ m, d'une longueur $L_1 = 0.18$ m ; et une masse de rayon $r_2 = 0.05$ m et de longueur $L_2 = 0.05$ m. La figure (IV.7.a) présente la modélisation utilisée, elle ne correspond pas parfaitement au dessin de la figure (IV.6), ceci est dû à l'analyse axisymétrique utilisée. Les résultats sont rassemblés dans le tableau (IV.1) pour le cas où la barre et la masse sont en

aluminium, dans le tableau (IV.2), on rassemble les résultats pour le cas où la barre (1) est en aluminium et la masse en acier. La figure (IV.7.b) représente le premier mode de vibration longitudinale obtenu par ATILA pour le cas où la barre est libre en $x = 0$, et la figure (IV.7.c) représente le premier mode pour le cas où le barre est encadrée en $x = 0$.

exemples	fréquence 1 en Hz ATILA	fréquence 1 en Hz ANALYTIQUE	écart %
1 et 2 en aluminium	10590.	10853.	2.4
1 en aluminium et 2 acier	8970.	9050.	0.8

Tableau IV.1 : Comparaison des valeurs de la fréquence pour le cas ou la barre est libre en $x = 0$.

	fréquence 1 en Hz ATILA	fréquence 1 en Hz ANALYTIQUE	écart %
1 et 2 en aluminium	5280.	5244.	-0.6
1 en aluminium et 2 acier	3807.	3817.	0.2

Tableau IV.2 : Comparaison des valeurs de la fréquence pour le cas de la barre encadrée en $x = 0$.

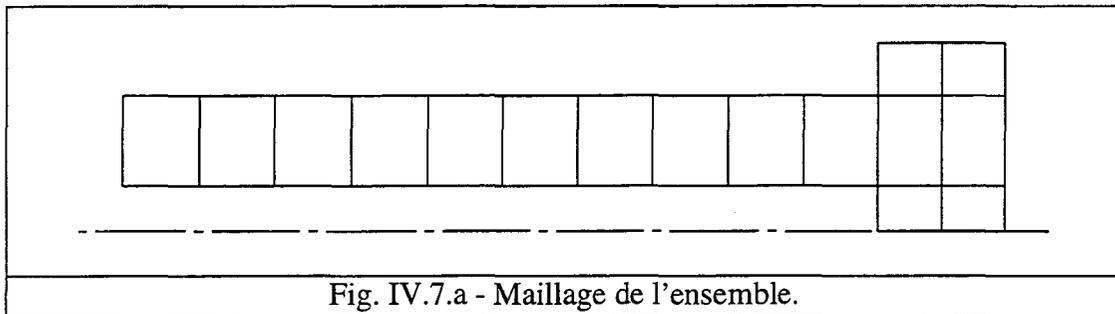


Fig. IV.7.a - Maillage de l'ensemble.

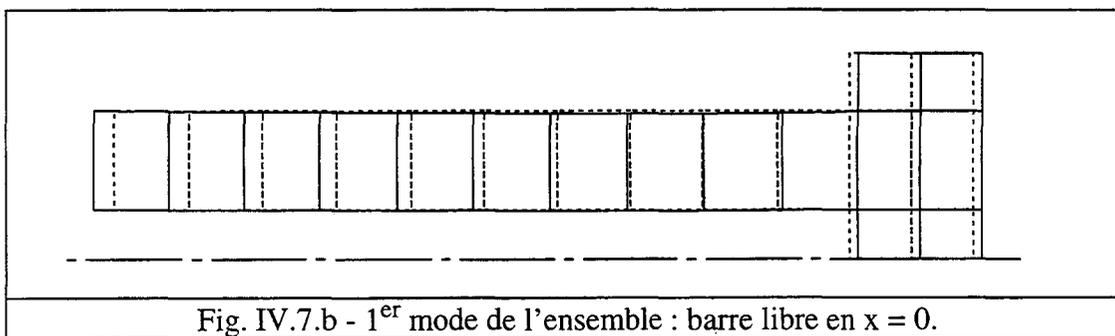


Fig. IV.7.b - 1^{er} mode de l'ensemble : barre libre en $x = 0$.

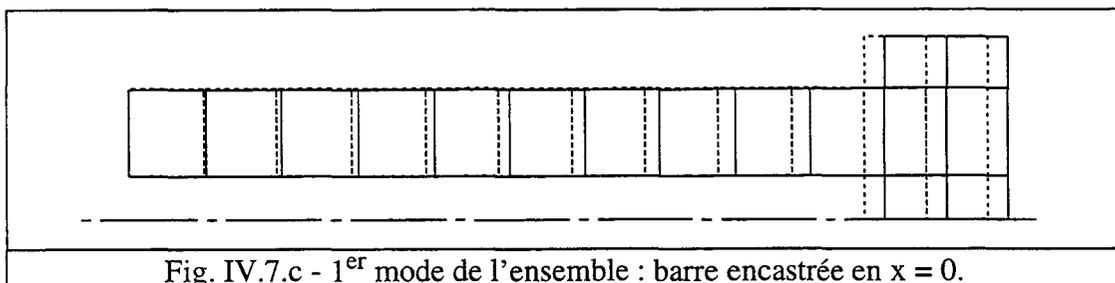
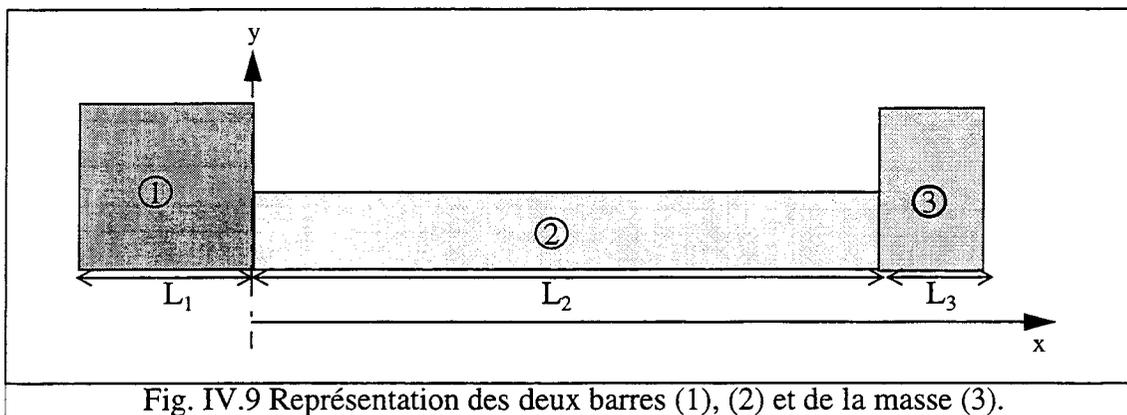
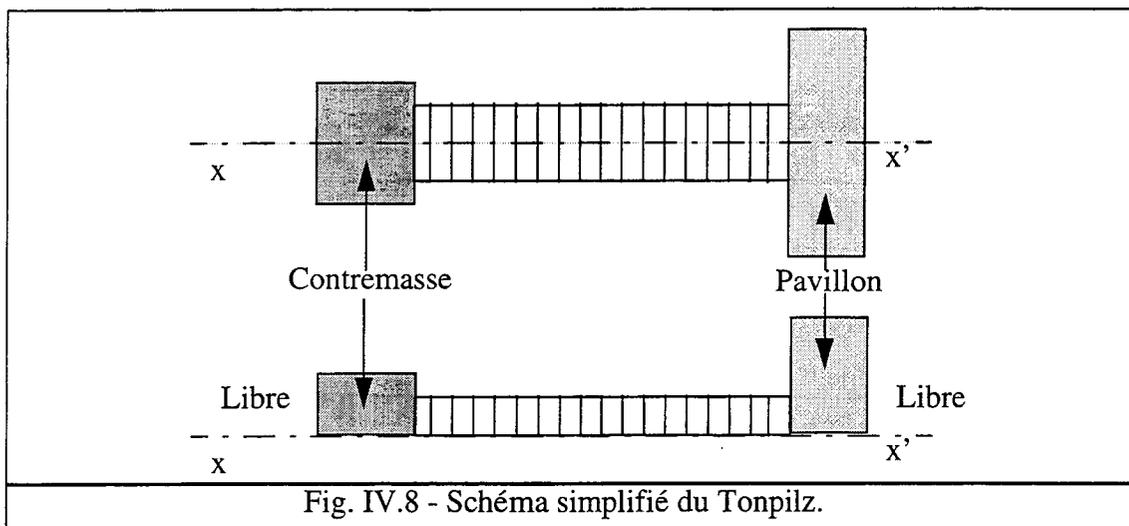


Fig. IV.7.c - 1^{er} mode de l'ensemble : barre encadrée en $x = 0$.

IV - 3.1.2 Modèle Tonpitz

Le même principe peut être appliqué pour déterminer les fréquences de résonances du premier mode propre de vibration longitudinale, du modèle type Tonpitz. En effet, le modèle de moteur à étudier, est représenté par la figure IV.8, seule la moitié, représentée par la figure (IV.9), est utilisée pour l'étude.



On considère dans ce cas que les parties 1 et 2 sont toutes les deux des barres et la partie 3 est considérée comme une masse fixée.

Si on définit par :

A_i : section transversale, L_i : longueur, et c_i telle que :

$$c_i = \sqrt{\frac{E_i}{\rho_i}} \tag{IV.15}$$

Les équations du mouvement, sont dans ce cas pour les deux barres (1 et 2)

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = c_i^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \tag{IV.16}$$

Si u_i varie sinusoïdalement comme $e^{j\omega t}$, on obtient :

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{c_i^2} u_i = 0 \quad (\text{IV.17})$$

Soit la solution :

$$u_i = \lambda_i \cos \frac{\omega}{c_i} x + \beta_i \sin \frac{\omega}{c_i} x, \quad (i = 1, 2). \quad (\text{IV.18})$$

Les quantités λ_i et β_i sont des constantes à déterminer par les conditions aux limites exprimées ci-après :

c1) en $x = 0$ on a égalité des déplacements :

$$u_1 = -u_2 \quad (\text{IV.19})$$

c2) en $x = L_2$, la force est égale à la force d'inertie de la masse :

$$A_2 E_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right)_{x=L_2} = -m \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{x=L_2} \quad (\text{IV.20})$$

c3) en $x = 0$, on a égalité des forces :

$$A_1 E_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)_{x=0} = A_2 E_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right)_{x=0}. \quad (\text{IV.21})$$

Posons :

$$\frac{\omega}{c_i} L_i = k_i L_i = \Gamma_i \quad (\text{IV.22})$$

la barre (1) est libre du coté $x = L_1$, dans ce cas la condition se traduit par :

c4) en $x = L_1$, $F = 0$ donc :

$$A_1 E_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)_{x=L_1} = 0 \quad (\text{IV.23})$$

ce qui se traduit par la quatrième équation :

$$\beta_1 = 0 \quad (\text{IV.24})$$

Quand on ajoute cette équation aux trois autres (IV.19, IV.21), et après avoir éliminé les constantes, en posant :

$$\bar{k} = \frac{\rho_2 c_2 A_2}{\rho_1 c_1 A_1}$$

on obtient :

$$\xi = \frac{\Gamma_2 (\tan \Gamma_1 \tan \Gamma_2 - \bar{k})}{\tan \Gamma_1 + k \tan \Gamma_2} \quad (\text{IV.25})$$

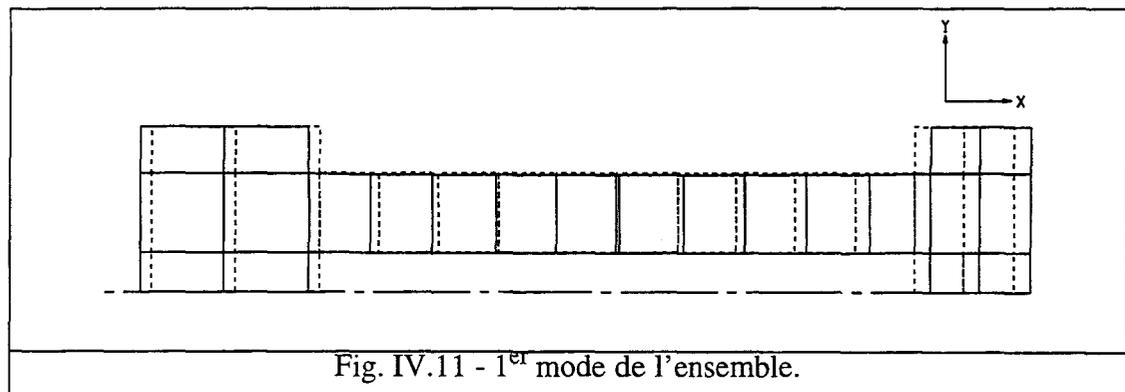
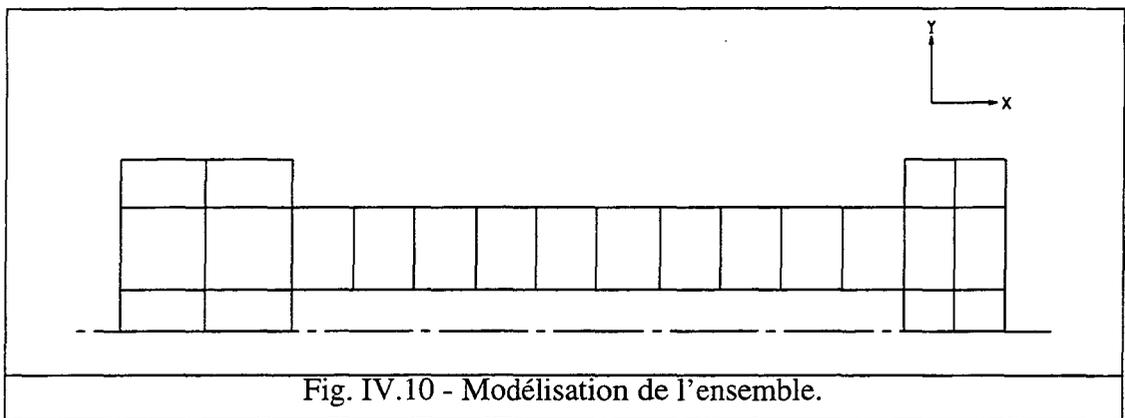
RESULTATS :

Le tableau (IV.3) présente alors une comparaison des résultats obtenus par la méthode analytique : relation (IV.25) et les résultats obtenus par ATILA, pour une barre (1) dont la section ad

met un rayon $r_1 = 0.05$ m et une longueur $L_1 = 0.05$ m, la barre L_2 est la même que la barre (1) de l'exemple précédent, ainsi que la masse. La modélisation choisie est celle représentée par la figure (IV.10). La figure (IV.11) montre alors le premier mode de résonance obtenu par ATILA.

	fréquence 1 en Hz ATILA	fréquence 1 en Hz ANALYTIQUE	écart %
(2) en aluminium, (1) et (3) en acier	5166.	5175.	0.1
(1), (2) et (3) en aluminium	7630.	7767.	1.7

Tableau IV.3 : Fréquences de résonance pour les deux cas de figures.



IV - 3.1.3 Modèle de moteur du transducteur flexionnel de classe IV

De la même manière, on va déterminer la fréquence de résonance du premier mode de vibration longitudinal du modèle du moteur du transducteur flexionnel de classe IV dont un schéma simplifié est représenté par la figure (IV.12), par symétrie, seul le (1/4) du moteur va servir pour l'étude.

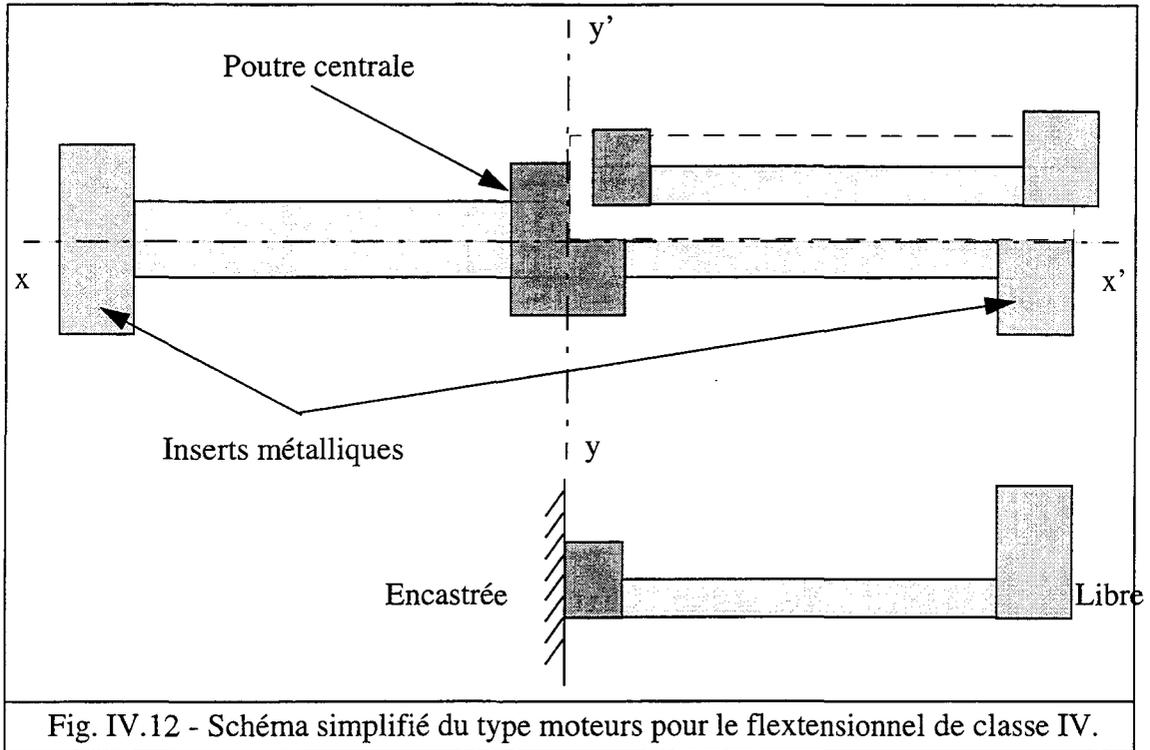


Fig. IV.12 - Schéma simplifié du type moteurs pour le flexionnel de classe IV.

Les trois premières conditions sont les mêmes que dans le cas précédent. La quatrième condition est celle qui traduit le fait que la barre (1) est encastrée en $x = L_1$.

Cette condition nous donne :

c'4) en $x = l_1$, on a :

$$u_1 = 0 \tag{IV.26}$$

Des quatre équations (IV.19, IV.21) et (IV.26), le système d'équation obtenu est tel que :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 \\ A_2 E_2 \frac{\omega}{c_2} (-\lambda_2 \sin \Gamma_2 + \beta_2 \cos \Gamma_2) = -m \omega^2 (\lambda_2 \cos \Gamma_2 + \beta_2 \sin \Gamma_2) \\ A_1 E_1 \frac{\omega}{c_1} \beta_1 = A_2 E_2 \frac{\omega}{c_2} \beta_2 \\ 0 = \lambda_1 \cos \Gamma_1 + \beta_1 \sin \Gamma_1 \end{cases} \tag{IV.27}$$

Si on élimine les constantes λ_i et β_i des équations précédentes, on aboutit à l'équation de fréquence, définie par la relation (IV.28).

$$\xi = \frac{\Gamma_2 (\tan \Gamma_2 + \bar{k} \tan \Gamma_1)}{1 - \bar{k} \tan \Gamma_1 \tan \Gamma_2} \tag{IV.28}$$

RESULTATS :

Le tableau (IV.4) résume alors la comparaison entre les résultats analytiques utilisant la relation (IV.28) et ceux donnés par ATILA, la figure (IV.12) montre le premier mode de résonance. La géométrie, la modélisation et le type d'analyse sont les mêmes que pour le cas précédent.

	fréquence 1 en Hz ATILA	fréquence 1 en Hz ANA	écart %
2 en aluminium, 1 et 3 en acier	3709.	3714.	0.1
1, 2 et 3 en aluminium	4659.	4767.	2.2

Tableau IV.4 : Fréquences pour les deux cas de figures.

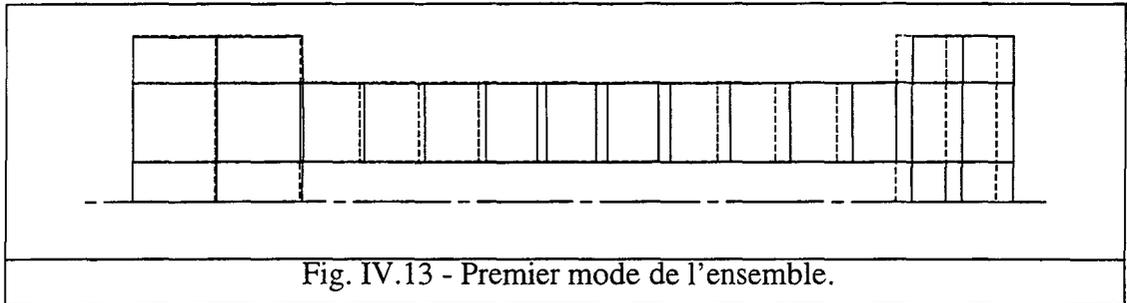


Fig. IV.13 - Premier mode de l'ensemble.

Nous allons maintenant appliquer ce principe pour déterminer les fréquences de résonance et d'antirésonance du premier mode de vibration longitudinale pour les transducteurs cités au paragraphe (IV.1). La différence essentielle par rapport à la partie précédente est que les vibrations ne seront plus libres, mais dues à l'effet piézoélectrique [4,8,48]. Sous excitation électrique, les moteurs vibrent. On propose ici de déterminer la fréquence de résonance et d'antirésonance du premier mode. L'étude se fait pour chaque cas en deux parties : la première partie traite le moteur sans tige de précontrainte et la seconde avec tige de précontrainte. Pour cela, un rappel des définitions des différents caractéristiques des matériaux piézoélectriques est présenté dans la partie suivante :

IV - 3.2 Cas piézoélectrique

IV - 3.2.1 Effet piézoélectrique

a) Propriétés des céramiques piézoélectriques couramment utilisées

Les céramiques piézoélectriques possèdent en dépit de certaines difficultés (leurs propriétés ne sont pas des fonctions linéaires des contraintes mécaniques ou électriques, le vieillissement provoque une variation des propriétés dans le temps) certaines symétries permettant de décrire leurs propriétés comme si le matériau les constituant était un cristal piézoélectrique unique dont l'axe de symétrie serait orienté dans la direction de polarisation.

La matrice des constantes élastiques a la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 & 0 \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(s_{11}-s_{12}) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.29})$$

La matrice des constantes diélectriques est de la forme :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.30})$$

La convention utilisée dans la description des propriétés piézoélectriques des céramiques est de définir l'axe \bar{z} de son repère cartésien comme axe de polarisation (Fig. IV.14). Comme la symétrie est totale autour de cet axe, la matrice des constantes piézoélectriques est de la forme :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.31})$$

En utilisant comme variables indépendantes la contrainte T et le champ électrique E, la relation qui lie T et E à S (déformation) et D (déplacement électrique) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} S_1 &= s_{11}^E T_1 + s_{12}^E T_2 + s_{13}^E T_3 + d_{31} E_3 \\ S_2 &= s_{12}^E T_1 + s_{11}^E T_2 + s_{13}^E T_3 + d_{13} E_3 \\ S_3 &= s_{13}^E T_1 + s_{13}^E T_2 + s_{33}^E T_3 + d_{33} E_3 \\ S_4 &= s_{44}^E T_4 + d_{15} E_2 \\ S_5 &= s_{44}^E T_5 + d_{15} E_1 \\ S_6 &= s_{66}^E T_6 \end{aligned} \quad (\text{IV.32})$$

$$\begin{aligned} D_1 &= \epsilon_1^T E_1 + d_{15} T_5 \\ D_2 &= \epsilon_1^T E_2 + d_{15} T_4 \\ D_3 &= \epsilon_3^T E_3 + d_{31} (T_1 + T_2) + d_{33} T_3 \end{aligned} \quad (\text{IV.33})$$

avec :

s_{ij}^E : constante de compliance élastique, définie par :

$$s_{ij}^{E,D} = \left. \frac{\partial S_i}{\partial T_j} \right|_{E,D} \quad (\text{IV.34})$$

ϵ_{ij}^E : constante diélectrique, définie par :

$$\varepsilon_{mn}^E = \left. \frac{\partial D_m}{\partial E_n} \right|_E \quad (IV.35)$$

b) Coefficient de couplage piézoélectrique

Le coefficient ou facteur de couplage piézoélectrique est parfois plus utile pour caractériser les possibilités d'utilisation d'un matériau piézoélectrique dans un projecteur de puissance que les coefficients de contrainte et déformation. Le coefficient de couplage est défini comme le rapport entre la densité d'énergie mutuelle U_{mut} et la moyenne géométrique des densités d'énergie de déformation élastique U_{elas} et de la densité d'énergie diélectrique U_{diel} .

$$k = \frac{U_{mut}}{\sqrt{U_{elas} U_{diel}}} \quad (IV.36)$$

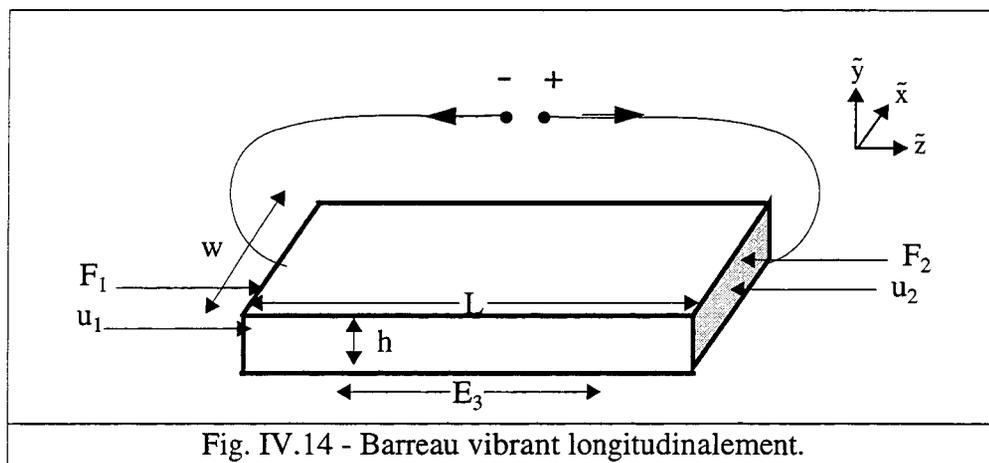
c) Exemple : barreau vibrant longitudinalement, champ électrique parallèle

Considérons un barreau de céramiques piézoélectriques long vibrant longitudinalement (Fig. IV.14), le champ électrique étant parallèle à la longueur. On suppose que la largeur et l'épaisseur sont faibles comparées à la longueur et que la seule contrainte significative est suivant la longueur qui est maintenant orientée suivant l'axe de polarisation \bar{z} . Négligeant les effets de bord :

$$D_1 = D_2 = 0 \quad (IV.37)$$

et

$$\frac{\partial D_3}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (IV.38)$$



De ce fait, D_3 est constant. Le choix des variables indépendantes les plus appropriées est D et T . Les équations de la piézoélectricité obtenues[48] sont :

$$S_3 = S_{33}^D T_3 + g_{33} D_3 \quad (IV.39)$$

$$E_3 = -g_{33} T_3 + \beta_{33}^T D_3 \quad (IV.40)$$

Si on considère plusieurs barreaux segmentés[48], alors :

$$\frac{\partial E_3}{\partial x} = 0 \Rightarrow E_3 = \text{cste} \quad (\text{IV.41})$$

appelons E_0 le terme constant dans les céramiques, dans ce cas E_3 peut s'écrire sous la forme :

$$E_3 = E_0 e^{j\omega t} \quad (\text{IV.42})$$

$$S_3 = S_{33}^E T_3 + d_{33} E_3 \quad (\text{IV.43})$$

$$D_3 = d_{33} T_3 + \epsilon_{33}^T E_3 \quad (\text{IV.44})$$

Dans les sections suivantes, nous allons déterminer le premier mode de vibration longitudinale des transducteurs type Janus, Tonpiliz et du moteur piézoélectrique du flexionnel de classe IV. Pour chaque cas présenté, la tension d'excitation sera de 1 Volt, l'axe de polarisation du matériau \bar{z} sera parallèle à l'axe x de la structure. Pour déterminer les fréquences de résonance et d'antirésonance du premier mode de vibration longitudinale, on va déterminer la valeur de l'impédance Z .

IV - 3.2.2 Etude du JANUS

Considérons maintenant comme dans le cas de la barre sollicitée par un poids fixé à son extrémité, une barre constituée d'un ensemble de dix anneaux de céramiques piézoélectriques longs et segmentés excités alternativement entre eux, à laquelle est fixée une masse m (Fig. IV.15). C'est le cas simplifié du Janus si la partie qui ne supporte pas la masse est libre.

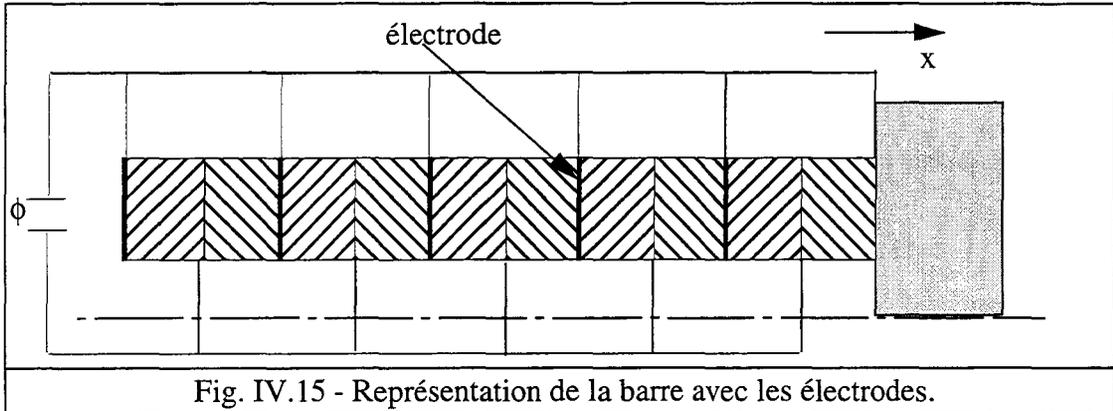


Fig. IV.15 - Représentation de la barre avec les électrodes.

a) Cas sans tige de précontrainte

Comme pour le cas du matériau élastique, la force de traction qui sollicite la barre doit être égale à la force d'inertie de la masse, ce qui s'exprime par :

à $x = L_1$, on a :

$$T_3 = -m \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \right)_{x=L_1} \frac{L_1}{A_1} \quad (\text{IV.45})$$

de l'équation (IV.43) on obtient T_3 comme :

$$T_3 = \frac{I}{s_{33}^E} (S_3 - d_{33}E_3) \quad (IV.46)$$

u_1 est toujours de la forme :

$$u_1 = (\lambda_1 \cos k_1 x + \beta_1 \sin k_1 x) e^{j\omega t} \quad (IV.47)$$

avec [48] :

$$k_1 = \frac{\omega}{c_1} \text{ et } c_1 = \frac{I}{\sqrt{\rho_1 S_{33}^E}} \quad (IV.48)$$

Si la barre est libre en $x = 0$, dans ce cas, on a :

$$T_3 = 0 \quad (IV.49)$$

donc, de l'équation (IV.43), on obtient :

$$S_3 = d_{33}E_3 = d_{33}E_0 e^{j\omega t} \quad (IV.50)$$

S_3 est telle que :

$$S_3 = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (IV.51)$$

des équations (IV.45) et (IV.50), on déduit les valeurs des deux constantes λ_1 et β_1 :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{d_{33}}{k} E_0 \\ \beta_1 = E_0 d_{33} \left[\frac{\xi \left(I - \frac{I}{\cos k L_1} \right) - k L_1 \tan k L_1}{\xi \tan k L_1 + k L_1} \right] \end{cases} \quad (IV.52)$$

L'intensité i du courant qui traverse le barreau est telle que :

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (IV.53)$$

q étant la quantité de charge définie par :

$$q = n A_1 [D_3]_{\text{moy}} \quad (IV.54)$$

Où n représente le nombre des céramiques et $[D_3]_{\text{moy}}$ représente la valeur moyenne, défini par :

$$[D_3]_{\text{moy}} = \frac{I}{L_1} \int_0^{L_1} D_3 dx \quad (IV.55)$$

quand on remplace les quantités (IV.54) et (IV.55) par leur valeurs, on aboutit à l'expression de l'intensité i , comme :

$$i = j\omega n A_1 E_0 e^{j\omega t} \left[\varepsilon_{33}^S + \frac{d_{33}^2}{s_{33}^E} \left(\frac{\xi \frac{\tan \Gamma_1 / 2}{\Gamma_1 / 2} + I}{\xi + \Gamma_1 / \tan \Gamma_1} \right) \right] \quad (IV.56)$$

d'où la valeur de l'impédance Z :

$$Z = \frac{L_I}{j\omega n^2 A_I \left[\epsilon_{33}^S + \frac{d_{33}^2}{s_{33}^E} \left(\frac{\xi \frac{\tan \Gamma_I / 2}{\Gamma_I / 2} + 1}{\xi + \Gamma_I / \tan \Gamma_I} \right) \right]} \quad (IV.57)$$

REMARQUE :

Si la barre est encastrée en $x = 0$, dans ce cas le déplacement est naturellement nul ce qui s'exprime par :

à $x = 0$, on a :

$$u_I = 0 \quad (IV.58)$$

la deuxième condition est la même que celle du cas où la barre est libre, elle est exprimée par la relation (IV.45), avec ces deux conditions on détermine les deux constantes λ_I et β_I définies par

$$\begin{cases} \beta_I = 0 \\ \lambda_I = E_0 d_{33k} \frac{1}{(\Gamma_I - (\Gamma_I \sin \Gamma_I) / \xi)} \end{cases} \quad (IV.59)$$

Après avoir calculé la valeur de l'intensité I, l'impédance Z obtenue est de la forme :

$$Z = \frac{L_I}{j\omega n^2 A_I \left[\epsilon_{33}^S + \frac{d_{33}^2}{s_{33}^E} \frac{\xi \tan \Gamma_I / \Gamma_I}{\xi - \Gamma_I \tan \Gamma_I} \right]} \quad (IV.60)$$

Pour les deux cas, la résonance est obtenue quand l'impédance électrique est maximum, l'antirésonance est obtenue quand Z est minimum.

RESULTATS :

Le tableau (IV.5) présente une comparaison entre les valeurs des fréquences de résonance et d'antirésonance ainsi que du coefficient de couplage pour un transducteur type Janus : cas où la barre (1) est encastrée en $x = 0$, relation (IV.57). Pour le cas où la barre est libre en $x = 0$ relation (IV.60), les résultats sont regroupés dans le tableau (IV.6). Les dimensions sont les mêmes que celle de l'exemple (IV.3.1.1), le matériau piézoélectrique est de la céramique type X9 et la masse est en acier.

type d'analyse	fréquence de résonance en Hz	fréquence d'antirésonance en Hz	Coefficient de couplage
ATILA	4341.	4823.	43.5
ANALYTIQUE	4362.	4861.	43.5
écart %	0.2	0.5	0.0

Tableau IV.5 : Résultats des deux méthodes pour le Janus sans tige de précontrainte.

type d'analyse	fréquence de résonance en Hz	fréquence d'antirésonance en Hz	Coefficient de couplage
ATILA	9170.	10028.	41.6
ANALYTIQUE	9318.	10248.	41.6
écart %	1.5	2.1	0.0

Tableau IV.6 : Résultats des deux méthodes pour le cas où la barre (1) est libre en $x = 0$.

La figure IV.16 montre alors les premiers modes de résonance et d'antirésonance obtenus par ATILA, pour les deux cas : barre libre et encastée en $x = 0$.

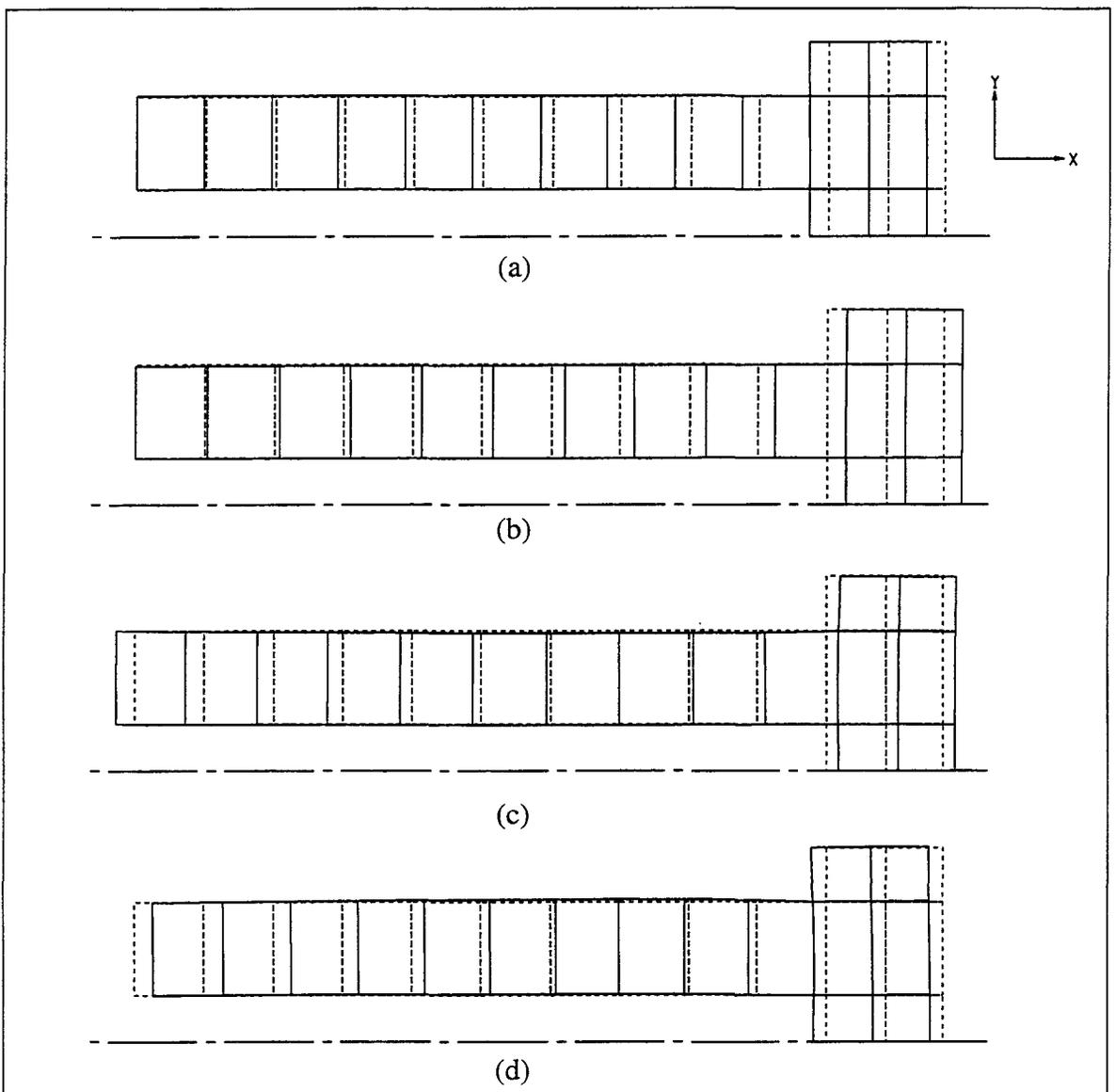


Fig. IV.16 - Modes de résonance et d'antirésonance :
 (a) : résonance, (b) antirésonance : pour la barre encastée en $x = 0$ (JANUS).
 (c) : résonance, (d) antirésonance : pour la barre libre en $x = 0$.

b) cas avec tige de précontrainte.

si on garde pour u_1 le déplacement de la barre tel que :

$$u_1 = (\lambda_1 \cos k_1 x + \beta_1 \sin k_1 x) e^{j\omega t} \quad (\text{IV.61})$$

et que l'on appelle le déplacement de la tige u'_1 avec :

$$u'_1 = (\lambda'_1 \cos k'_1 x + \beta'_1 \sin k'_1 x) e^{j\omega t} \quad (\text{IV.62})$$

où $k'_1 = \frac{\omega}{c'_1}$, avec : $c'_1 = \sqrt{\frac{E'_1}{\rho'_1}}$

E'_1 et ρ'_1 sont le module d'Young et la masse volumique de la tige de précontrainte. Les conditions aux limites, peuvent alors être exprimées ainsi :

en $x = L_1$, on a :

$$u_1 = u'_1 \quad (\text{IV.63})$$

La force à l'extrémité de la barre doit être égale à la force d'inertie de la masse :

Soient F la force dans la colonne de céramique et F' celle dans la tige de précontrainte

$$F + F' = -m \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \right)_{x=L_1} \quad (\text{IV.64})$$

autrement :

$$T_3 A_1 + T'_3 A'_1 = -m \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{x=L_1} \quad (\text{IV.65})$$

Dans le cas encastree, cette condition donne :

$$u_1 = u'_1 = 0 \quad (\text{IV.66})$$

comme pour les cas précédents, quand on élimine les constantes, on obtient pour l'impédance Z :

$$Z = \frac{L_1}{j\omega n^2 A_1 \left[\varepsilon_{33}^S + \frac{d_{33}^2}{s_{33}^E} \frac{\tan \Gamma_1 / \Gamma_1}{\left(1 + \frac{c'_1 \xi \tan \Gamma_1}{c \xi \tan \Gamma_1} - \frac{\Gamma_1 \tan \Gamma_1}{\xi} \right)} \right]} \quad (\text{IV.67})$$

Au lieu d'utiliser la relation (IV.67) pour déterminer les fréquences du premier mode, une solution approchée donnée par LORD RAYLEIGH est utilisée [50], elle consiste à ajouter le 1/3 du poids de la tige de précontrainte à celui de la barre, en supposant que la masse de la tige est faible par rapport à la masse fixe.

Autrement, Z obtenue sera de la forme :

$$Z = \frac{L_1}{j\omega n^2 A_1 \left[\varepsilon_{33}^S + \frac{d_{33}^2 \xi \tan \Gamma_1 / \Gamma_1}{s_{33}^E \xi - \Gamma_1 \tan \Gamma_1} \right]} \quad (\text{IV.68})$$

avec :

$$\xi = \xi + \xi_t / 3 \quad (\text{IV.69})$$

et : ξ_t représente le rapport du poids de la tige de précontrainte au poids P.

RESULTATS :

Les résultats obtenus sont rassemblés dans le tableau (IV.6) où l'on montre les valeurs obtenues par ATILA, celles obtenues par (IV.67) et enfin celle obtenues par (IV.69), pour le cas où la barre est encastree en $x = 0$. De même le tableau (IV.7) montre les résultats pour le cas où la barre est libre en $x = 0$.

type d'analyse	fréquence de résonance en Hz	fréquence d'antirésonance en Hz	Coefficient de couplage
ATILA	4416.	4883.	42.6
ANALYTIQUE (eq(IV.67))	4416.	4920.	44.0
écart % (avec ATILA)	0.0	1.7	3.0
ANALYTIQUE (eq(IV.68))	4380.	4881	44.0
écart % (avec ATILA)	-1.4	0.9	3.0

Tableau IV.7 : Comparaison des résultats pour Le Janus.

type d'analyse	fréquence de résonance en Hz	fréquence d'antirésonance en Hz	Coefficient de couplage
ATILA	9282.	10111.	39.7
ANALYTIQUE calcul : direct	9392.	10331.	41.6
écart % (avec ATILA)	0.6	2.1	4.6
ANALYTIQUE calcul : solution approchée	9342.	10277.	41.6
écart % (avec ATILA)	1.2	1.6	4.6

Tableau IV.8 : Comparaison des résultats pour le cas où la barre est libre en $x = 0$.

Les résultats obtenus montrent que l'accord entre les résultats analytiques et ceux de la méthode des éléments finis est excellent, les résultats obtenus par la méthode approchée sont peu différents des résultats de la méthode directe. Donc pour les exemples qui seront traités dans les sections suivantes, et pour les cas à tige de précontrainte la solution approchée sera utilisée.

IV - 3.2.3 Etude du Tonpitz

Considérons maintenant le cas du Tonpitz, formé par : une barre (1), d'une masse m_1 , ayant une section A_1 et une longueur L_1 constituée d'un matériau de masse volumique ρ_1 et d'un module d'élasticité E_1 , la masse m , a une longueur L_3 , constituée d'un matériau de caractéristiques ρ_3 et E_3 , entre la barre et la masse, un ensemble d'anneaux en matériau piézoélectrique, comme indiqué sur la figure (IV.8), les équations suivantes sont toujours valides :

$$u_i = \left(\lambda_i \cos \frac{\omega}{c_i} x + \beta_i \sin \frac{\omega}{c_i} x \right) e^{j\omega t} \quad (i = 1, 2). \quad (IV.70)$$

$$\text{avec : } c_1 = \sqrt{\frac{E_1}{\rho_1}}, c_2 = \frac{I}{\sqrt{\rho_2 S E_{33}}} \text{ et } \bar{r} = \frac{c_1 \rho_1 A_1}{c_2 \rho_2 A_2} \quad (IV.71)$$

Les conditions aux limites sont exprimées ci-après :

c1) en $x = 0$; on a égalité des déplacements :

$$u_1 = -u_2 \quad (IV.72)$$

c2) en $x = 0$, on a égalité des forces donc :

$$F_1|_{x=0} = F_2|_{x=0} \quad (IV.73)$$

c3) en $x = L_2$, la force de traction qui sollicite la barre B_2 doit être égale à la force d'inertie de la masse :

$$F_2|_{x=L_2} = -m \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \right) \Big|_{x=L_2} \quad (IV.74)$$

l'ensemble étant libre, cette condition est exprimée par :

c4) en $x = L_1$, la force F_1 est nulle, ce qui donne :

$$F_1|_{x=L_1} = 0 \quad (IV.75)$$

à partir des équations (IV.72, IV.75) on détermine les quatre constantes,

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\frac{E_0 d_{33}}{k_2} \frac{[(\tan \Gamma_1 / \Gamma_2) (I - I / \cos \Gamma_2) - (\tan \Gamma_1 \tan \Gamma_2) / \xi]}{(\bar{r} \tan \Gamma_1) / \Gamma_2 + (\tan \Gamma_2) / \Gamma_2 - (\bar{r} \tan \Gamma_1 \tan \Gamma_2) / \xi + I / \xi} \\ \lambda_2 = \frac{E_0 d_{33}}{k_2} \frac{[I / \xi + \tan \Gamma_2 / \Gamma_2 + \bar{r} \tan \Gamma_1 / (\Gamma_2 \cos \Gamma_2)]}{(\bar{r} \tan \Gamma_1) / \Gamma_2 + (\tan \Gamma_2) / \Gamma_2 - (\bar{r} \tan \Gamma_1 \tan \Gamma_2) / \xi + I / \xi} \\ \beta_1 = -\beta_2 = -\frac{E_0 d_{33}}{k_2} \frac{[(I / \Gamma_2) (I - I / \cos \Gamma_2) - (\tan \Gamma_2) / \xi]}{(\bar{r} \tan \Gamma_1) / \Gamma_2 + (\tan \Gamma_2) / \Gamma_2 - (\bar{r} \tan \Gamma_1 \tan \Gamma_2) / \xi + I / \xi} \end{cases} \quad (IV.76)$$

Connaissant les quatre constantes, on aboutit à l'impédance définie par :

$$Z = \frac{L_2}{jn^2 \omega A_2 \left\{ \varepsilon_{33}^s + \frac{d_{33}^2}{s_{33}^E} \left[\left(\frac{\tan \Gamma_2 / 2}{\Gamma_2 / 2} + \frac{1}{\xi} + \frac{\bar{r} \tan \Gamma_1}{\Gamma_2} \right) / \left((\bar{r} \tan \Gamma_1) / (\tan \Gamma_2) + 1 \right) - \bar{r} \Gamma_2 \tan \Gamma_1 / \xi + \Gamma_2 / \tan \Gamma_2 \xi \right] \right\}} \quad (IV.77)$$

RESULTATS :

De la même manière que dans les cas précédents, les tableaux (IV.9) et (IV.10), présentent la comparaison entre les deux méthodes pour la fréquence de résonance, la fréquence d'antirésonance et le coefficient de couplage. Pour les deux cas de figure, sans tige et avec tige, de précontrainte respectivement.

type d'analyse	fréquence de résonance en Hz	fréquence d'antirésonance en Hz	Coefficient de couplage
ATILA	6121.	6789.	41.5
ANALYTIQUE	6174.	6840.	43.3
écart %	0.8	1.4	4.15

Tableau IV.9 : Résultats des deux méthodes pour le Tonpilz sans tige de précontrainte.

type d'analyse	fréquence de résonance en Hz	fréquence d'antirésonance en Hz	Coefficient de couplage
ATILA	6245.	6943.	42.1
ANALYTIQUE	6295.	6963.	44.2
écart %	0.8	0.3	4.5

Tableau IV.10 : Résultats des deux méthodes pour le Tonpilz avec tige de précontrainte.

Dans la figure IV.17, on a montré le mode correspondant à la résonance et à l'antirésonance pour le cas sans tige de précontrainte.

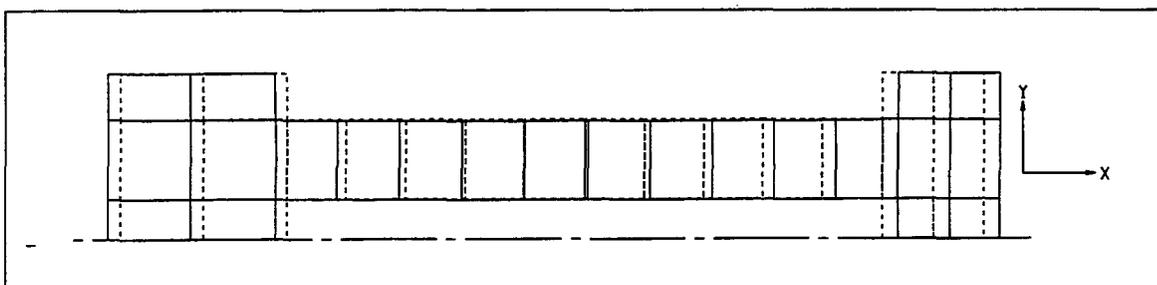


Fig. IV.17.a - Mode de résonance du transducteur de type Tonpilz.

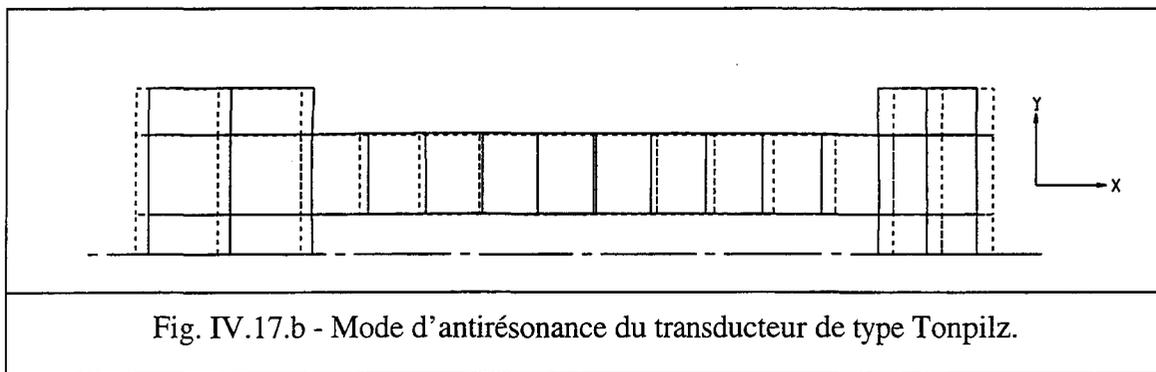


Fig. IV.17.b - Mode d'antirésonance du transducteur de type Tonpiliz.

IV - 3.2.4 Cas type du moteur du classe IV

Pour le moteur du transducteur flexensionnel de classe IV, la partie utile à l'étude est la même que celle du Tonpiliz, pour les conditions aux limites, seule la condition qui exprime qu'en $x = L_1$, la barre est encastrée Fig. IV.18

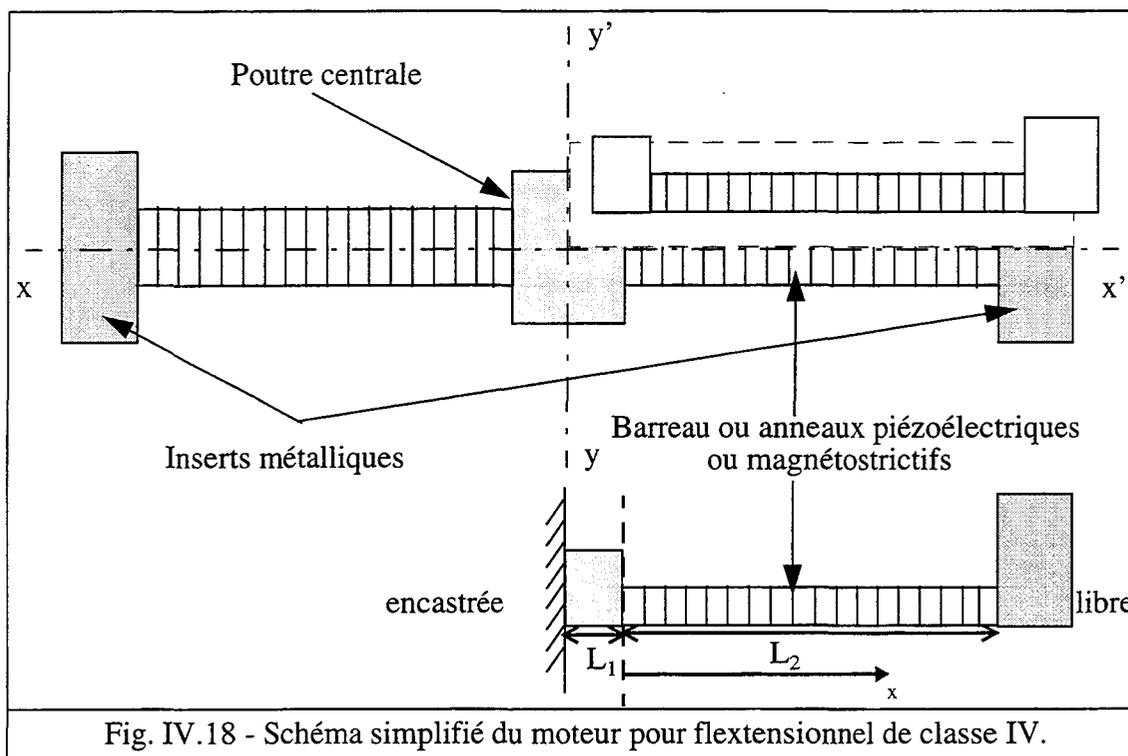


Fig. IV.18 - Schéma simplifié du moteur pour flexensionnel de classe IV.

Dans ce cas, les trois premières conditions sont les mêmes que pour le Tonpiliz, la quatrième, est celle qui exprime, qu'en $x = L_1$, la barre (1) est encastrée, figure IV.18, ce qui donne :

$$(u_1) \Big|_{x=L_1} = 0 \tag{IV.78}$$

encore une fois, quand on rajoute l'équation (IV.78) aux équations (IV.72-IV.74) on obtient les quatre constantes définies ci-après :

$$\left\{ \begin{aligned}
 \lambda_1 &= \frac{E_0 d_{33} \left[\frac{l}{\Gamma_2} \left(l - \frac{l}{\cos \Gamma_2} \right) - \frac{\tan \Gamma_2}{\xi} \right]}{k_2 \tan \Gamma_1 \left[\frac{\tan \Gamma_2}{\Gamma_2} + \frac{\bar{r} \tan \Gamma_2}{\xi \tan \Gamma_1} + \frac{l}{\xi} - \frac{\bar{r}}{\Gamma_2 \tan \Gamma_1} \right]} \\
 \lambda_2 &= \frac{E_0 d_{33} \left[(l/\xi) + ((\tan \Gamma_2)/\Gamma_2) - (\bar{r}/(\Gamma_2 \tan \Gamma_1 \cos \Gamma_2)) \right]}{k_2 \left[\frac{\tan \Gamma_2}{\Gamma_2} + \frac{\bar{r} \tan \Gamma_2}{\xi \tan \Gamma_1} + \frac{l}{\xi} - \frac{\bar{r}}{\Gamma_2 \tan \Gamma_1} \right]} \\
 \beta_1 &= -\beta_2 = -\frac{E_0 d_{33} \left[\frac{l}{\Gamma_2} \left(l - \frac{l}{\cos \Gamma_2} \right) - \frac{\tan \Gamma_2}{\xi} \right]}{k_2 \left[\frac{\tan \Gamma_2}{\Gamma_2} + \frac{\bar{r} \tan \Gamma_2}{\xi \tan \Gamma_1} + \frac{l}{\xi} - \frac{\bar{r}}{\Gamma_2 \tan \Gamma_1} \right]} \\
 \beta_1 &= -\beta_2
 \end{aligned} \right. \quad (IV.79)$$

L'impédance obtenue est de la forme :

$$Z = \frac{L_2}{jn^2 \omega A_2 \left\{ \varepsilon_{33}^s + \frac{d_{33}^2}{s E_{33}} \left[\frac{\tan \Gamma_2 / 2}{\Gamma_2 / 2} + \frac{l}{\xi} + \frac{\bar{r} \tan \Gamma_1}{\Gamma_2} \right] \right\}} \quad (IV.80)$$

$$\left[\left(\frac{\bar{r} \tan \Gamma_1}{\tan \Gamma_2} + l \right) - \left(\bar{r} \Gamma_2 \frac{\tan \Gamma_1}{\xi} - \frac{\Gamma_2}{\xi \tan \Gamma_2} \right) \right]$$

RESULTATS :

Les tableaux (IV.11) et (IV.12), montrent alors la comparaison entre les deux méthodes pour les deux cas de figures : avec tige de précontrainte et sans tige de précontrainte.

type d'analyse	fréquence de résonance en Hz	fréquence d'antirésonance en Hz	Coefficient de couplage
ATILA	4098.	4481.	40.4
ANALYTIQUE	4151.	4570.	41.8
écart %	1.2	3.	3.2

Tableau IV.11 : Résultats des deux méthodes pour le moteur du transducteur flexensionnel de classe IV sans tige de précontrainte.

type d'analyse	fréquence de résonance en Hz	fréquence d'antirésonance en Hz	Coefficient de couplage
ATILA	4147.	4514.	39.5
ANALYTIQUE	4156.	4576.	41.8
écart %	0.2	1.3	5.4

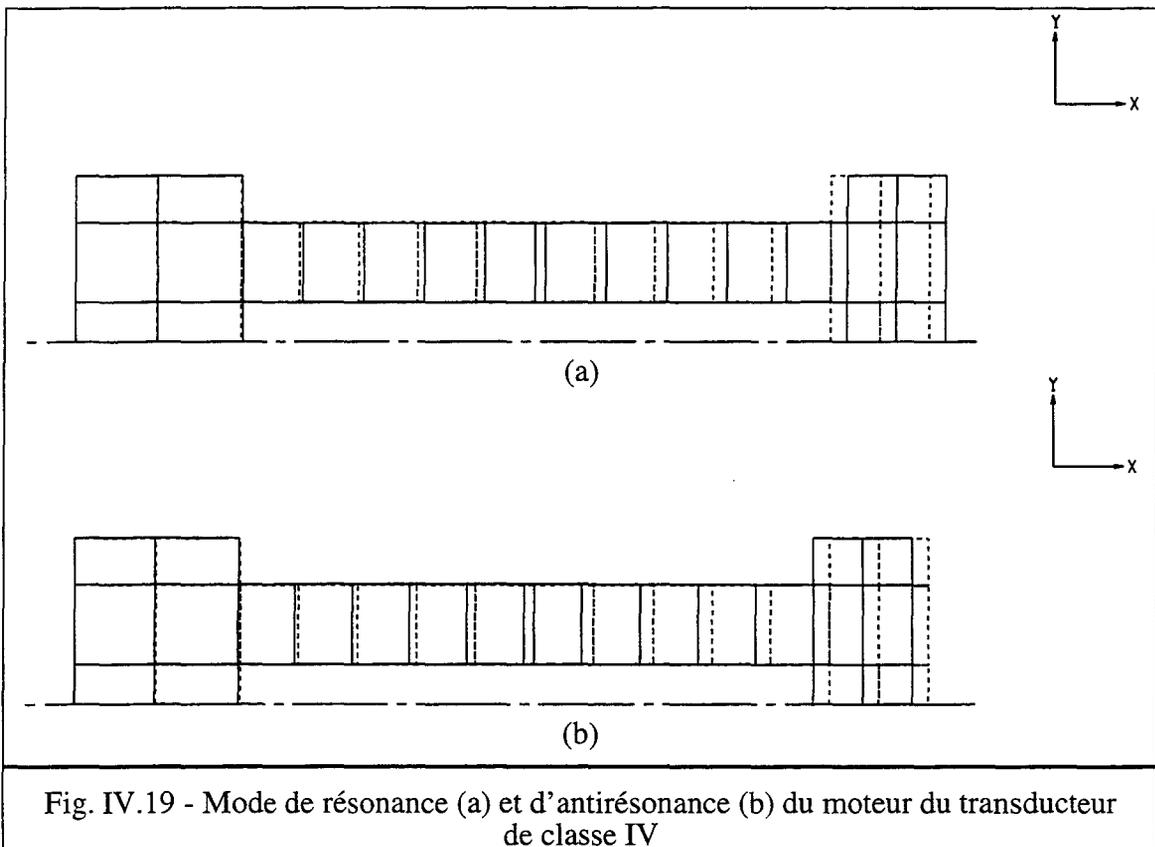
Tableau IV.12 : Résultats des deux méthodes pour le moteur du transducteur flexensionnel de classe IV avec tige de précontrainte.

La figure IV.19 montre le mode de résonance et d'antirésonance du moteur, obtenus par ATILA.

REMARQUE :

Pour chacun des cas étudiés, on peut déterminer le déplacement en tout point de la partie active, ceci peut permettre de calculer le déplacement à l'extrémité libre du moteur du classe IV par exemple. Pour la mise en place de son schéma équivalent il suffit alors de remplacer les deux constantes λ_2 et β_2 définies dans les relations (IV - 79) dans l'équation (IV.70) et on obtient alors u_2 comme :

$$u_2 = \left(\lambda_2 \cos \frac{\omega}{c_2} L_2 + \beta_2 \sin \frac{\omega}{c_2} L_2 \right) e^{j\omega t} \quad (\text{IV.81})$$



IV - 4 Conclusion

La méthode analytique présentée dans ce chapitre, testée sur plusieurs structures élastiques et piézoélectriques, a permis de déterminer le premier mode de vibration longitudinal des transducteurs type Janus, Tonpiliz et du moteur du transducteur flexensionnel de classe IV.

Les résultats obtenus par cette méthode, présentent un accord parfait comparés à ceux de la méthode des éléments finis.

Pour permettre la construction du schéma équivalent du moteur du transducteur flexensionnel classe IV, présenté au chapitre II, on a déterminé analytiquement les paramètres requis qui sont :

- l'impédance électrique du moteur,
- les fréquences de résonance et d'antirésonance du premier mode de vibration longitudinal,
- le déplacement au bout du moteur.

Pour les structures testées dans ce chapitre, on a utilisé des transducteurs constitués d'anneaux piézoélectriques; dans le chapitre suivant, nous allons étudier deux exemples de transducteurs flexensionnels de classe IV : le premier utilise un moteur constitué d'anneaux de céramiques piézoélectriques avec tige de précontrainte, alors que le deuxième utilise un moteur à barreaux de céramiques piézoélectriques.

Nous possédons maintenant tous les éléments nécessaires pour l'analyse du transducteur flexensionnel de classe IV. Le chapitre suivant présente alors le test de la méthode analytique : détermination des caractéristiques de ce transducteur dans l'air, conduite en parallèle avec la méthode des éléments finis.

CHAPITRE V

Exemples d'applications

Dans ce chapitre, on présente deux exemples de transducteurs flexionnels à moteur piézoélectrique :

le premier exemple, est un transducteur dont la géométrie de la coque est proche du premier type de coque traité dans le chapitre III à savoir, un grand axe moyen de 521. mm, et un moteur constitué d'anneaux piézoélectriques, avec tige de précontrainte.

Le deuxième exemple est un transducteur dont la coque fait partie de la deuxième famille de coques traitée au chapitre III, le grand axe moyen a pour valeur 1150. mm, le moteur est constitué cette fois de barreaux piézoélectriques, sans tige de précontrainte..

L'étude se déroule en trois parties :

Dans la première, on étudie le transducteur à l'aide de la méthode des éléments finis, pour construire un schéma équivalent global et donc on détermine les caractéristiques de son fonctionnement. Dans la deuxième, on mène une étude par les deux méthodes, éléments finis et méthode analytique, pour construire :

- le schéma équivalent de la coque seule, utilisant la méthode proposée au chapitre III,*
- le schéma équivalent du moteur, utilisant la méthode du chapitre IV.*

Dans la troisième on retrouve les caractéristiques du transducteur complet à partir du schéma équivalent obtenu en rassemblant les contributions séparées de la coque et du moteur.

Généralement, pour ce dernier schéma, on obtient plus de précision en associant l'insert à la coque et non au moteur [51]. Dans notre cas, on ne peut déterminer, analytiquement, les caractéristiques de la coque avec insert, pour cela, on a choisi de l'associer au moteur.

V - 1 EXEMPLE 1 : Transducteur à coque de type I ($g_a = 521$ mm).

V - 1.1 Description.

Le premier exemple de transducteur flexionnel de classe IV retenu, est celui dérivé du projecteur qui a été réalisé par le CERDSM dans le cadre d'un projet visant à utiliser une coque en matériau composite pour faire une source de forte puissance dont la fréquence de résonance dans l'eau soit de l'ordre de 350 Hz [22].

Le projecteur décrit par la figure V.1, comporte :

- une coque cylindrique, à section quasi-elliptique, en aluminium. La mesure moyenne du grand axe est de 521 mm, le rayon moyen de courbure à l'extrémité du petit axe est 598.5 mm, le rayon moyen de courbure à l'extrémité du grand axe est 46.5 mm et l'épaisseur est constante, elle vaut 21 mm. C'est le cas du premier type de coque du chapitre III,
- 12 colonnes de céramiques, comportant chacune 28 anneaux, montés en 6 moteurs parallèles. Chaque anneau a un diamètre extérieur de 56 mm, un diamètre intérieur de 20 mm et une épaisseur de 6.25 mm. La céramique est de type X9,
- une pièce métallique centrale et des inserts en acier qui assurent le raccordement des colonnes de céramiques et de la coque.

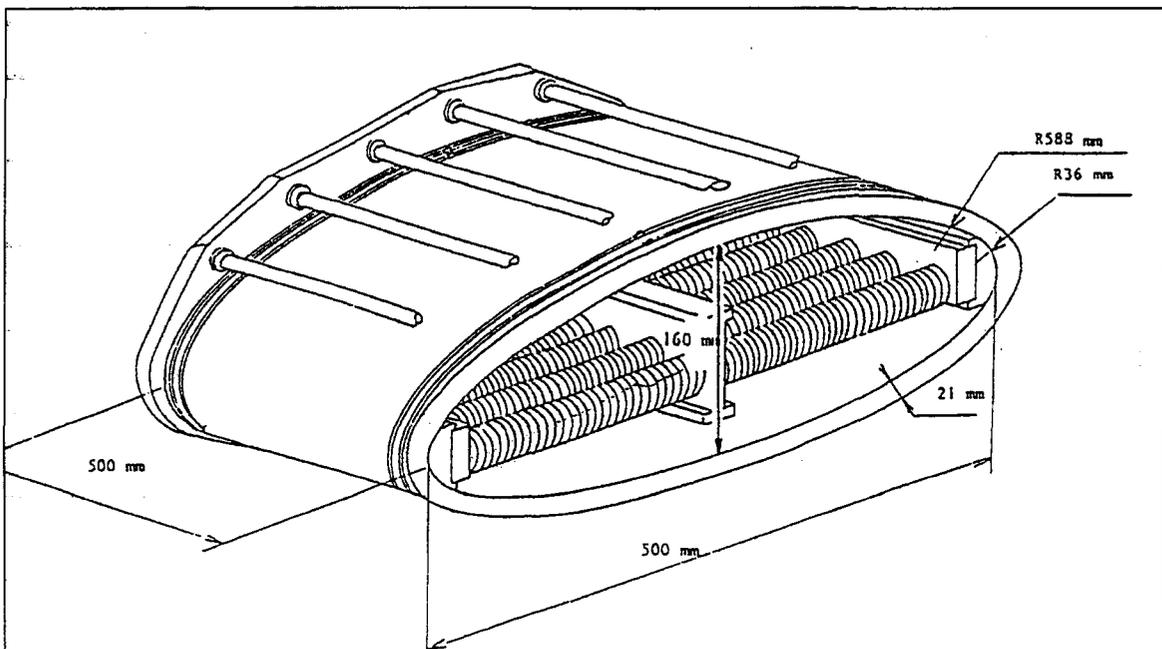


Fig. V.1 - Description schématique du flexionnel de classe IV à moteur piézoélectrique (tiré de [51]).

V - 1.2 Elaboration du schéma équivalent global du projecteur.

Pour identifier les éléments du schéma équivalent, une modélisation numérique relative à la structure a été conduite, à l'aide de la méthode des éléments finis et du code ATILA.

En ce qui concerne le projecteur figure V.1, si on néglige les effets de bord, la structure à modéliser peut d'abord être réduite à 1/6^{ème} de la structure globale, correspondant à un seul moteur figure V.2 (a). Ensuite, un sous-ensemble peut lui-même être réduit à 1/8^{ème} (soit 1/48^{ème} de la structure totale) à l'aide de trois plans de symétrie orthogonaux figure V.2 (b), compte tenu de l'excitation et du type de vibration du projecteur.

Dans le cadre de l'analyse par éléments finis, compte tenu de la gamme de fréquences utiles et pour limiter la taille du maillage, la colonne de céramique a été réduite à 4 tronçons, au lieu de 28. Le maillage utilisé est présenté figure V.3. Une analyse modale a fourni les premiers modes de vibration et leurs coefficients de couplage. Les résultats obtenus des trois premiers modes sont rassemblés dans le tableau V.1. La figure V.4 présente les champs de déplacement correspondants.

Par ailleurs, une analyse harmonique conduite en très basse fréquence (0 - 50 Hz) a fourni la capacité basse fréquence équivalente au projecteur C_{BF} et l'amplitude du déplacement à l'extrémité du petit axe, constante dans cette bande, V_{BF} .

Mode	Fréquence de résonance en Hz	Fréquence d' antirésonance en Hz	Coefficient de couplage k(%)
1	900.	940.	28.6
2	2200.	2221.	13.9
3	3604.	3920.	39.3

Tableau V.1 : Résultats de l'analyse par éléments finis du transducteur.

Comme indiqué au chapitre II, les différents éléments nécessaires à la mise en place d'un schéma équivalent qui sont obtenus par l'analyse numérique, sont :

$$\begin{aligned}
 f_r &= 900 \cdot \text{ Hz} & C_{BF} &= 0 \cdot 427 \text{ nF} \\
 f_a &= 940 \cdot \text{ Hz} & V_{BF} &= -1 \cdot 910^{-09} \text{ m}
 \end{aligned}
 \tag{V.1}$$

Avec ces valeurs et compte tenu des équations (II.17), du chapitre II, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \bar{C} &= 0 \cdot 0393 \text{ nF} & \bar{c} &= 1 \cdot 3610^{-07} \text{ m/N} \\
 \bar{L} &= 794 \cdot 2 \text{ H} & \bar{I} &= 0 \cdot 23 \text{ kg} \\
 \bar{C}_0 &= 0 \cdot 435 \text{ nF} & \bar{N} &= 0 \cdot 017 \text{ N/V}
 \end{aligned}
 \tag{V.2}$$

En fait, ces valeurs sont surmontées d'une barre pour indiquer qu'elles se rapportent au maillage de la figure V.3, (1/48^{ème} de la structure avec 4 tronçons de céramique). Les valeurs réelles du projecteur complet, s'obtiennent à l'aide des transformations suivantes :

CHAPITRE V

$$\begin{aligned}
 C_0 &= \bar{C}_0 \times 48 \times (7)^2 \\
 N &= \bar{N} \times 48 \times 7 \\
 c &= \bar{c} / 48 \\
 l &= \bar{l} \times 48 \\
 C &= \bar{C} \times 48 \times (7)^2 \\
 L &= \bar{L} / (48 \times (7)^2)
 \end{aligned}
 \tag{V.3}$$

Ce qui permet d'avoir comme valeurs, pour le projecteur complet :

$$\begin{aligned}
 C_0 &= 1.02 \quad \mu\text{F} \\
 N &= 5.71 \quad \text{N/V} \\
 c &= 2.8310^{-09} \quad \text{m/N} \\
 l &= 11.4 \quad \text{kg} \\
 C &= 92.4 \quad \text{nF} \\
 L &= 0.33 \quad \text{H}
 \end{aligned}
 \tag{V.4}$$

Le schéma équivalent ainsi obtenu, présenté à la figure V.5 permet de reproduire quasi exactement les comportements électrique et mécanique du premier mode du projecteur.

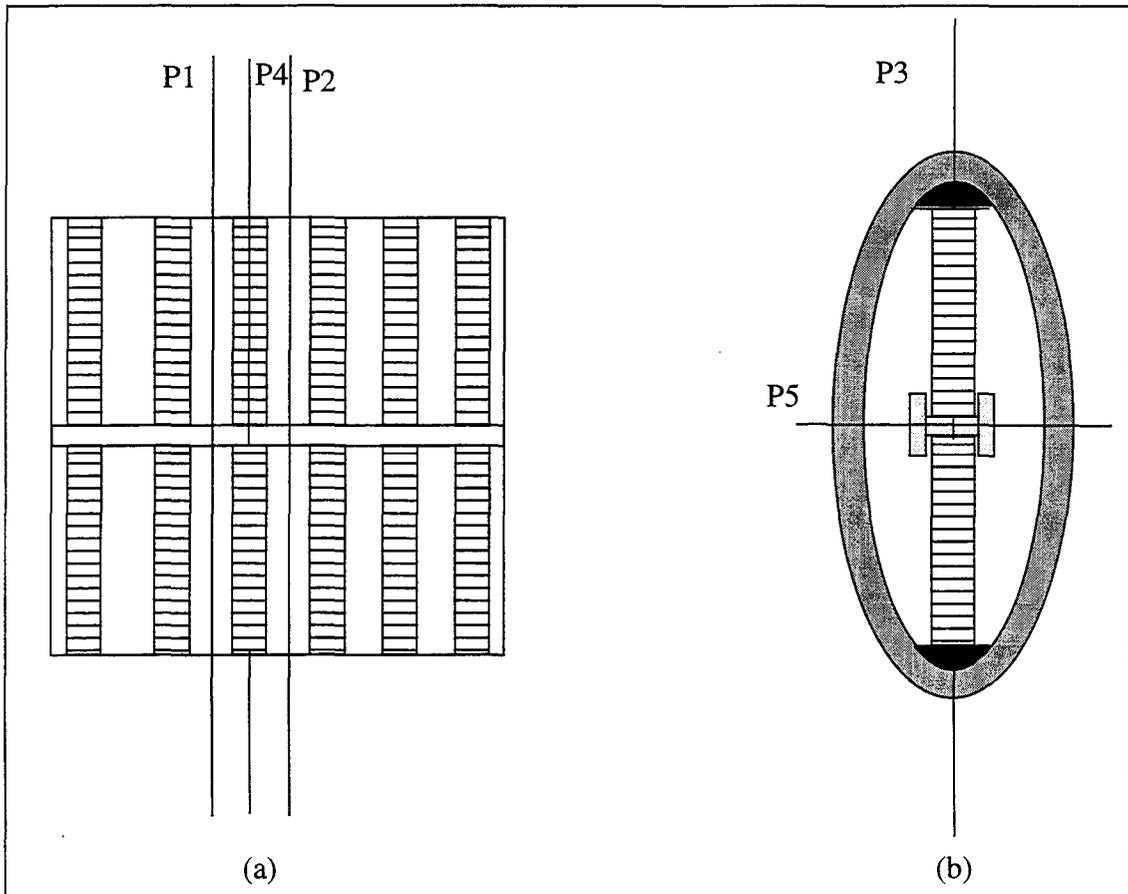


Fig. V.2 - Description schématique de la réduction du modèle de projecteur à 1/48^{ème} de la structure globale. (a) : les plans P1 et P2 isolent 1/6^{ème} de la structure. (a) et (b) : les plans P3, P4 et P5 isolent 1/48^{ème} de la structure.

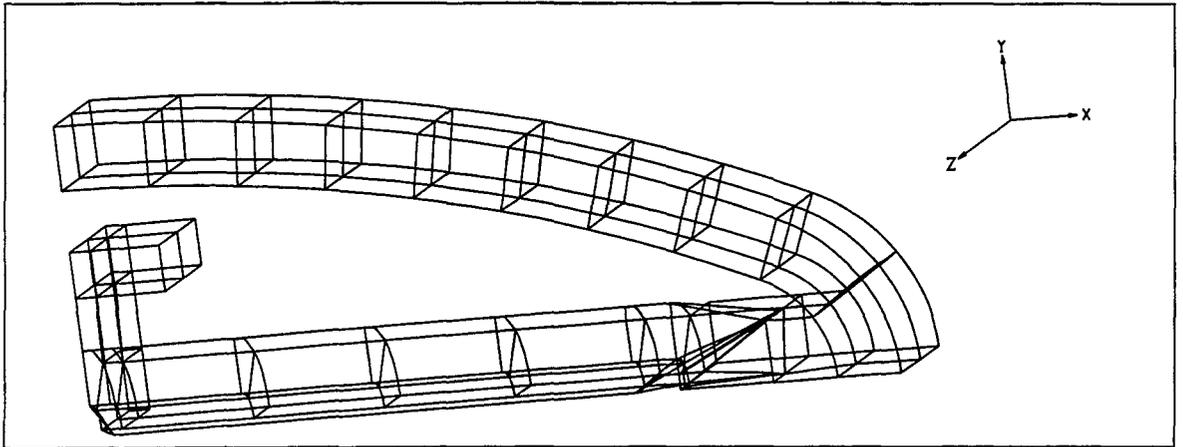


Fig. V.3 - Présentation schématique du maillage utilisé pour l'analyse par éléments finis du projecteur (1/48^{ème} de la structure)

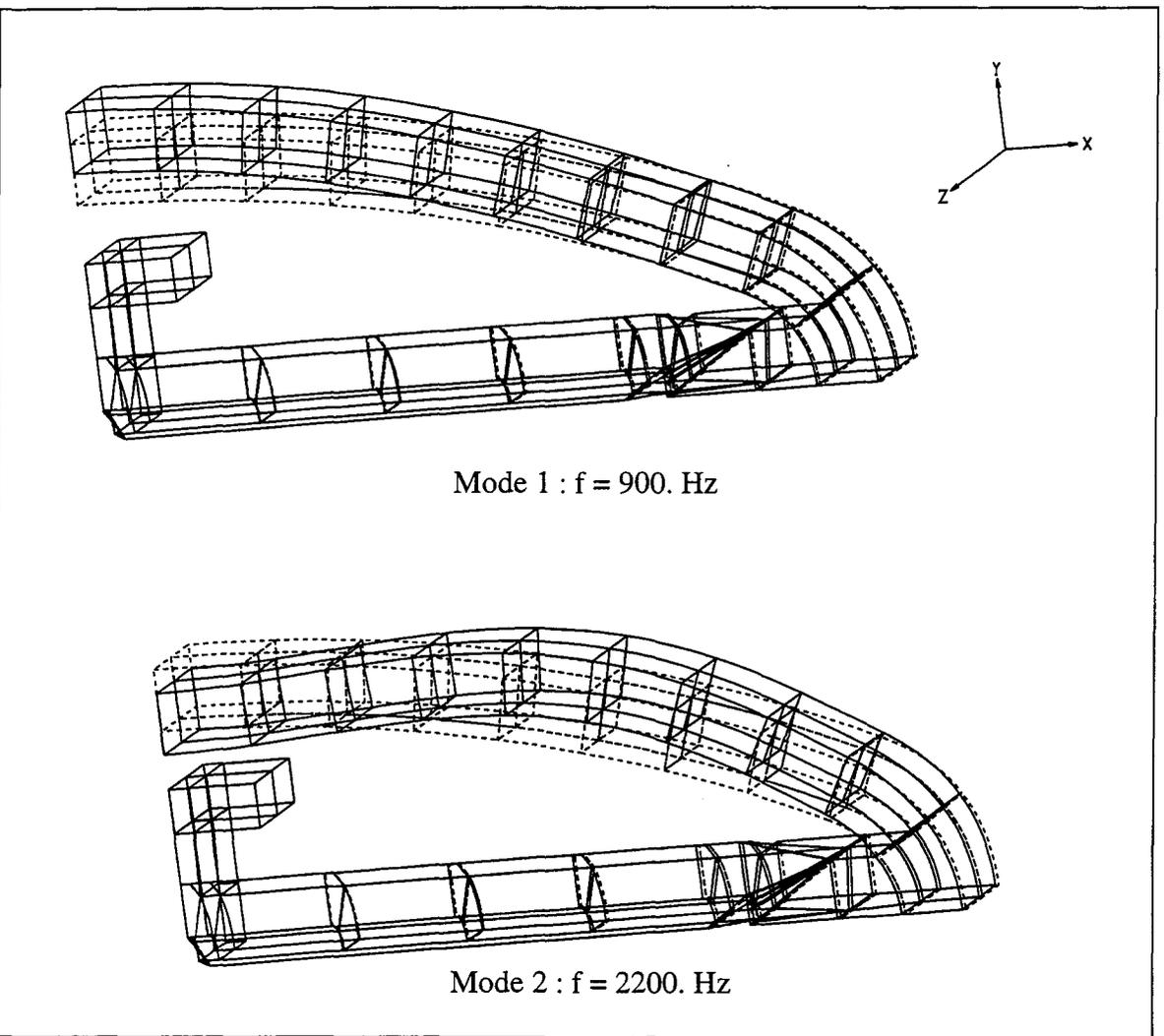


Fig. V.4 - Présentation schématique des champs de déplacement associés aux deux premiers modes propres du projecteur, calculés à l'aide du code ATILA (traits pointillés : position de repos, traits pleins : positions déplacées, les amplitudes des déplacements sont arbitraires).

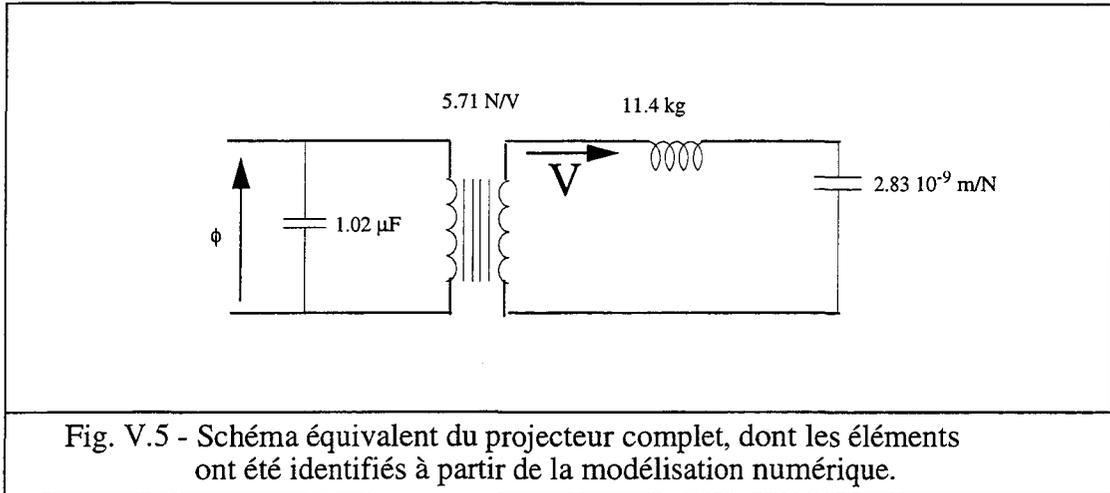


Fig. V.5 - Schéma équivalent du projecteur complet, dont les éléments ont été identifiés à partir de la modélisation numérique.

V - 1.3 Elaboration du schéma équivalent à partir des contributions séparées.

Dans ce qui va suivre, nous allons présenter l'élaboration du schéma équivalent du moteur seul, section (V.1.3.1) dont les éléments nécessaires à la mise en place vont être déterminés par les deux méthodes : la méthode des éléments finis, grâce au code ATILA et par la méthode analytique du chapitre IV, ensuite, de la même manière, le schéma équivalent de la coque seule va être déterminé, section (V.1.3.2), pour enfin retrouver le schéma équivalent global du projecteur dans l'air, section (V.1.3.3)

V - 1.3.1 Schéma équivalent du moteur seul.

Pour pouvoir identifier les différents paramètres du schéma équivalent de la colonne motrice, une analyse par la méthode des éléments finis a été conduite, le maillage utilisé est donné Fig. V.6.

La figure V.7, représente le mode de résonance fondamentale du moteur. Parallèlement, la méthode analytique, du paragraphe (VI - 3.2.4) du chapitre IV, a permis d'avoir la fréquence de résonance et la fréquence d'antirésonance du premier mode ainsi que le coefficient de couplage. Le déplacement au bout du moteur est obtenu analytiquement à partir de la connaissance de u_2 , pour $x=l_2$ (IV - 81). Le tableau (V.2) présente les valeurs obtenues par les deux méthodes.

ANALYSE	fréquence de résonance en HZ	fréquence d'antirésonance en Hz	capacité basse fréquence en nF
ATILA	3098.	3594.	0.483
ANALYTIQUE	3108.	3770.	0.500

Tableau V.2 : Valeurs obtenues par la méthode analytique et par ATILA.

REMARQUE :

les fréquences obtenues analytiquement présentent un bon accord avec celles obtenues par éléments finis, par contre, le déplacement en basse fréquence du bout du moteur est moins bon : ceci est dû au fait que le déplacement calculé analytiquement n'est pas au bout du moteur mais au bout de la barre constituée d'anneaux de céramiques.

ANALYSE	$\bar{c}_m 10^{-09}$ m/N	\bar{l}_m kg	\bar{C}_0 nF	\bar{N} N/V
ATILA	3.476	0.77	0.36	0.190
ANALYTIQUE	4.260	0.63	0.34	0.195

Tableau V.3 : Valeurs correspondantes au schéma de la figure V.8.

REMARQUE :

même si les valeurs du déplacement en bout du moteur obtenues analytiquement et par éléments finis sont peu proches, les valeurs du facteur de transformation obtenues par les deux méthodes sont en bon accord car la valeur de N est obtenue en considérant la moyenne des valeurs dans la gamme de fréquence utile.

Les valeurs du tableau (V.3) sont celles qui correspondent à la structure définie par la figure V.6, (1/48^{ème} de la structure). Les valeurs du moteur du projecteur complet sont alors présentées dans le tableau (V.4).

ANALYSE	$c_m 10^{-11}$ m/N	l_m kg	C_0 μ F	N N/V
ATILA	7.24	36.96	0.846	63.84
ANALYTIQUE	8.80	30.24	0.804	65.52

Tableau V.4 : Valeurs du moteur du projecteur complet.

Le schéma équivalent du moteur est représenté par la figure V.8. Les valeurs des différents paramètres présentées sont celles de la méthode analytique.

La figure V.9.a compare les variations du déplacement du bout du moteur avec la fréquence calculés par éléments finis, analytiquement et enfin à l'aide du schéma équivalent : les différents paramètres du circuit ayant été obtenus à partir des valeurs analytiques.

La figure V.9.b compare l'admittance électrique du moteur obtenue par les deux méthodes éléments finis et méthode analytique et à partir du schéma équivalent. L'accord entre les différentes méthodes est parfait.

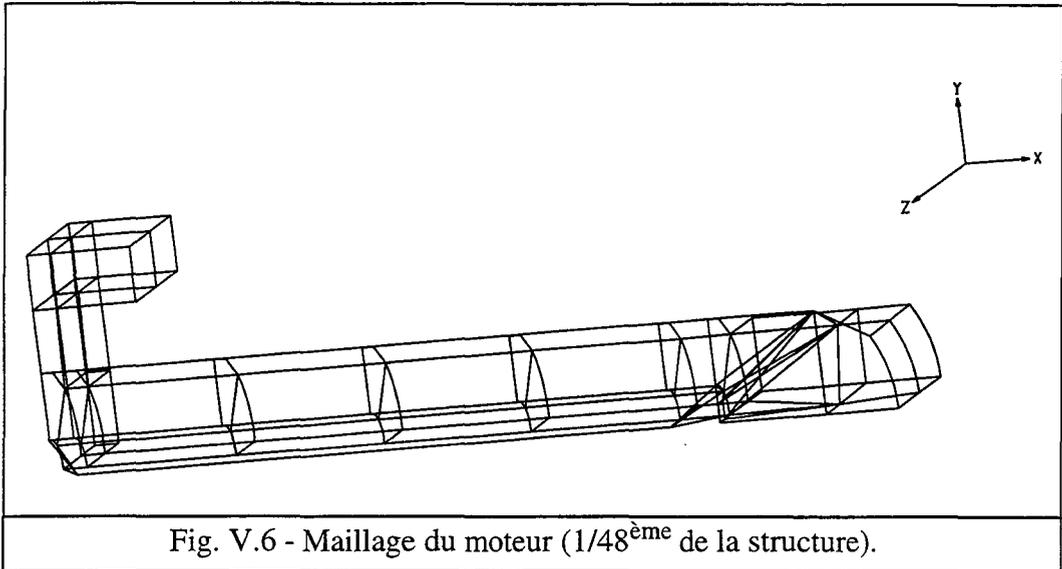


Fig. V.6 - Maillage du moteur (1/48^{ème} de la structure).

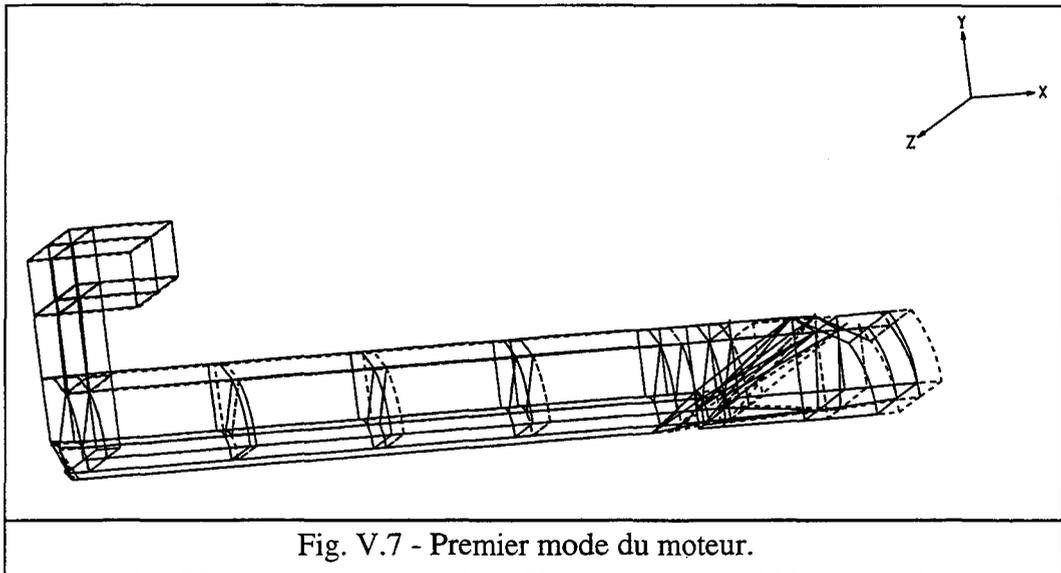


Fig. V.7 - Premier mode du moteur.

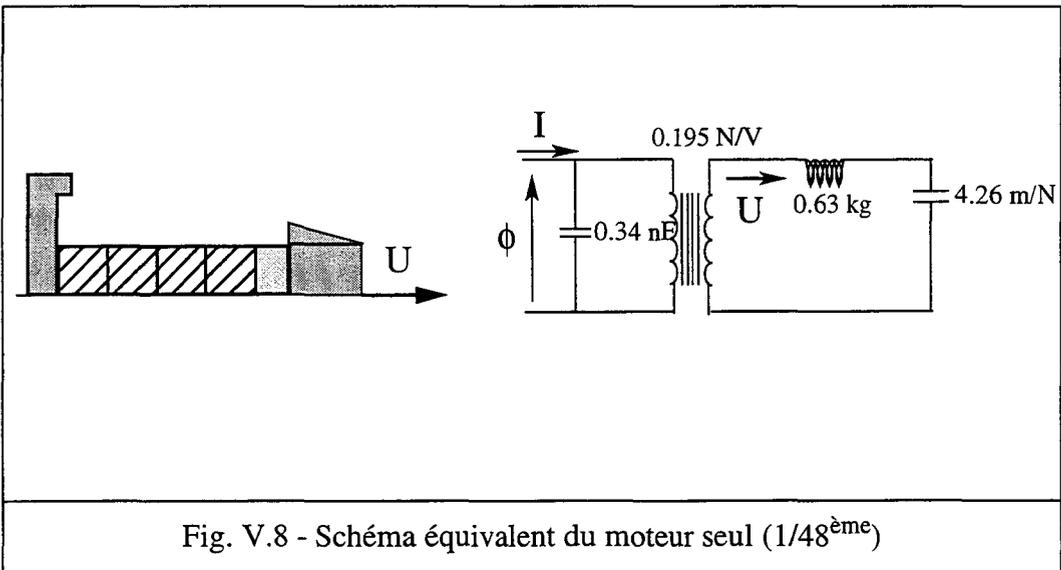


Fig. V.8 - Schéma équivalent du moteur seul (1/48^{ème})

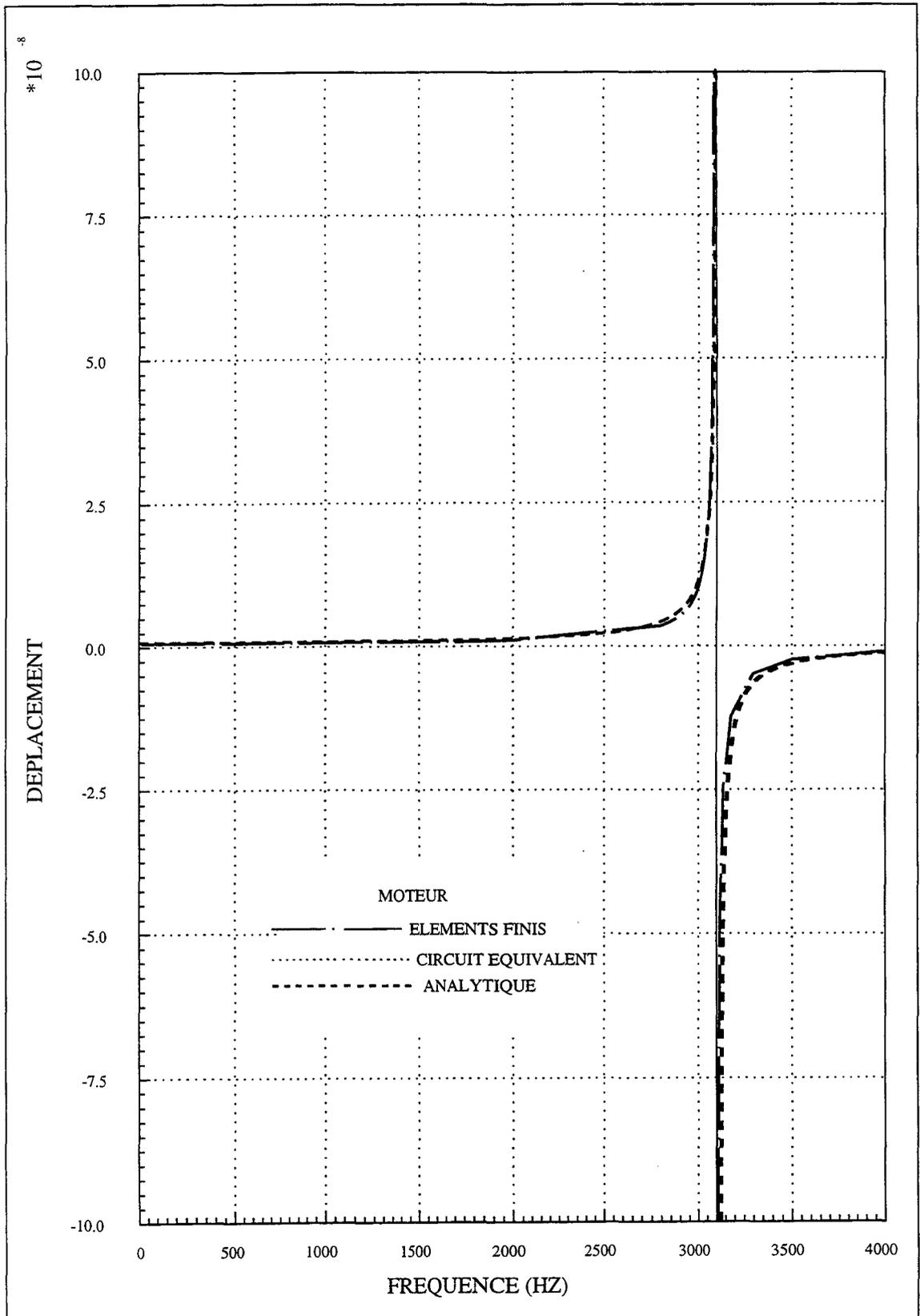


Fig. V.9.a - Variations avec la fréquence du déplacement à l'extrémité du moteur.

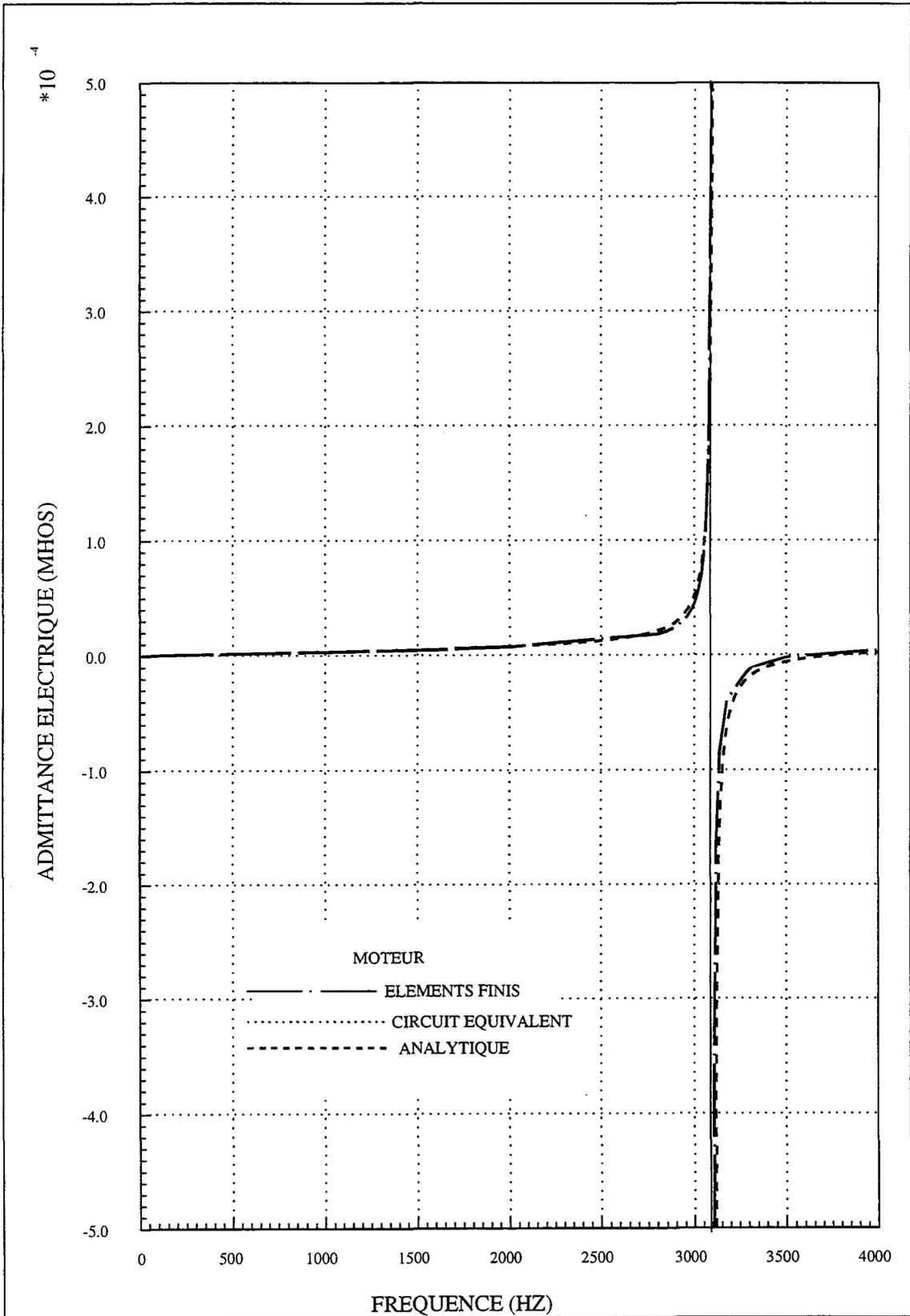


Fig. V.9.b - Variations avec la fréquence de l'admittance du moteur.

V - 1.3.2 Schéma équivalent de la coque seule.

Le maillage éléments finis utilisé pour identifier le schéma équivalent de la coque est donné à la figure V.10. Les représentations schématiques des deux premiers modes propres ainsi que du mode correspondant à la fréquence de coupure sont données à la figure V.11, correspondant aux fréquences de résonances des deux premiers modes f_1 , f_2 et à la fréquence de coupure f_c .

Le tableau (V.5) présente alors les différentes valeurs obtenues par éléments finis et par la méthode analytique. L'accord est parfait.

ANALYSE	f_1 en HZ	f_2 en HZ	f_c en HZ	α_1	α_2	u_{br} $10^{-08}m$
ATILA	363.	1938.	926.	-3.35	2.94	6.74
ANALYTIQUE	360.	1988.	955.	-3.30	9.02	6.58

Tableau V.5 : Comparaison des valeurs numériques et analytiques des différents paramètres nécessaires à la mise en place du schéma équivalent.

α_1 et α_2 sont définis comme :

$$\alpha_1 = \frac{v_1}{u_1} \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \frac{v_2}{u_2} \quad (V.5)$$

et sont obtenus à partir des vecteurs propres de la matrice dynamique [G] définie par la relation (III.33) du chapitre III.

Ce qui donne comme paramètres du schéma équivalents de la coque, les valeurs rassemblées dans le tableau (V.6).

ANALYSE	\bar{c}_1 en $10^{-07}m/N$	\bar{c}_2 en $10^{-09}m/N$	\bar{l}_1 en kg	\bar{l}_2 en kg
ATILA	0.595	8.2	3.28	0.82
ANALYTIQUE	0.583	7.4	3.36	0.86

Tableau V.6 : Paramètres du schéma équivalent de la coque obtenus par la méthode analytique et par la méthode des éléments finis, (résultats pour le 1/48^{ème} de la structure).

ANALYSE	c_1 en 10^{-9} m/N	c_2 en 10^{-10} m/N	l_1 en kg	l_2 en kg
ATILA	1.23	1.70	157.4	39.2
ANALYTIQUE	1.21	1.54	161.2	39.2

Tableau V.7 : Paramètres du schéma équivalent de la coque obtenus par la méthode analytique et par la méthode des éléments finis, (résultats pour la coque du projecteur complet).

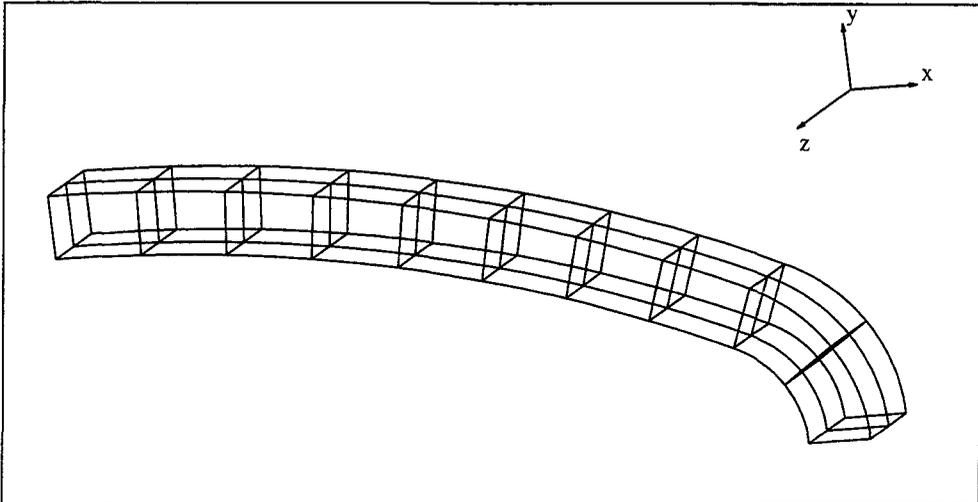


Fig. V.10 - Modélisation en 3 dimensions de la coque.

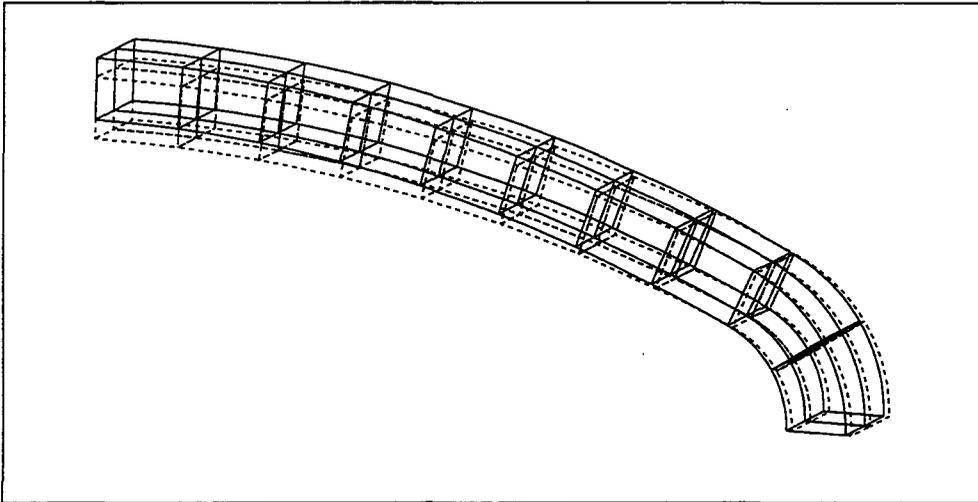


Fig. V.11.a - Premier mode de la coque.

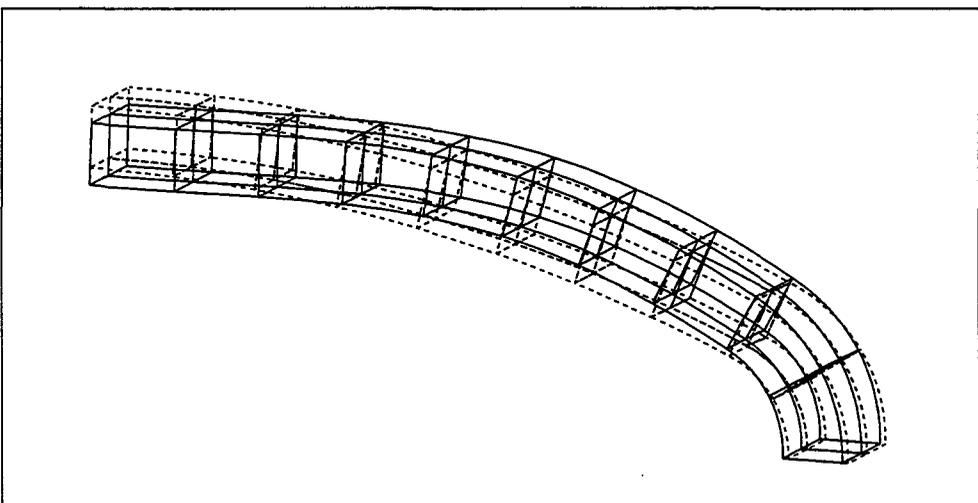
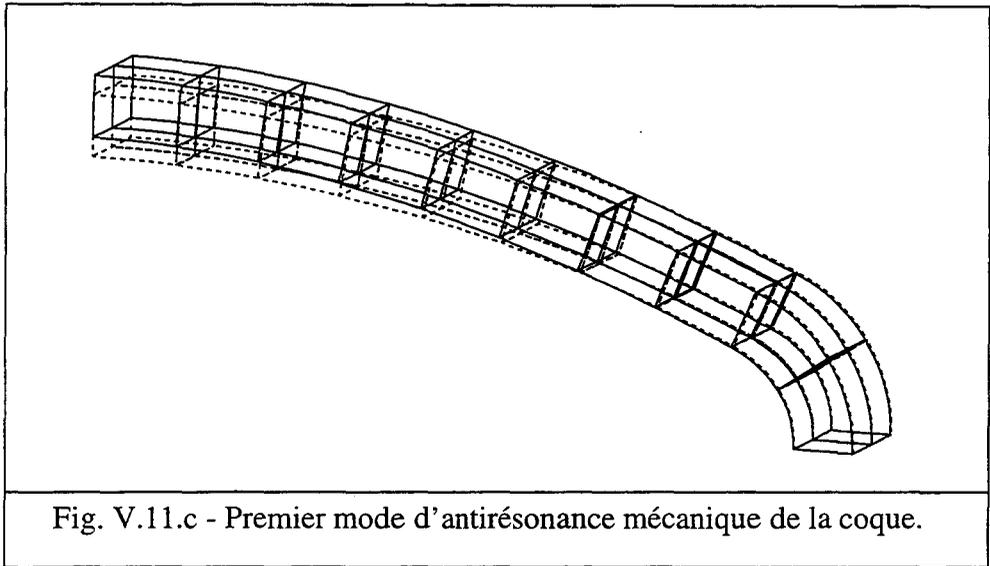


Fig. V.11.b - Second mode de la coque.



La figure V.12 présente alors les variations avec la fréquence de résonance du déplacement à l'extrémité du grand axe calculée par éléments finis, par la méthode analytique (annexe II) et enfin par schéma équivalent dont les valeurs utilisées sont celles de la méthode analytique. L'accord est parfait.

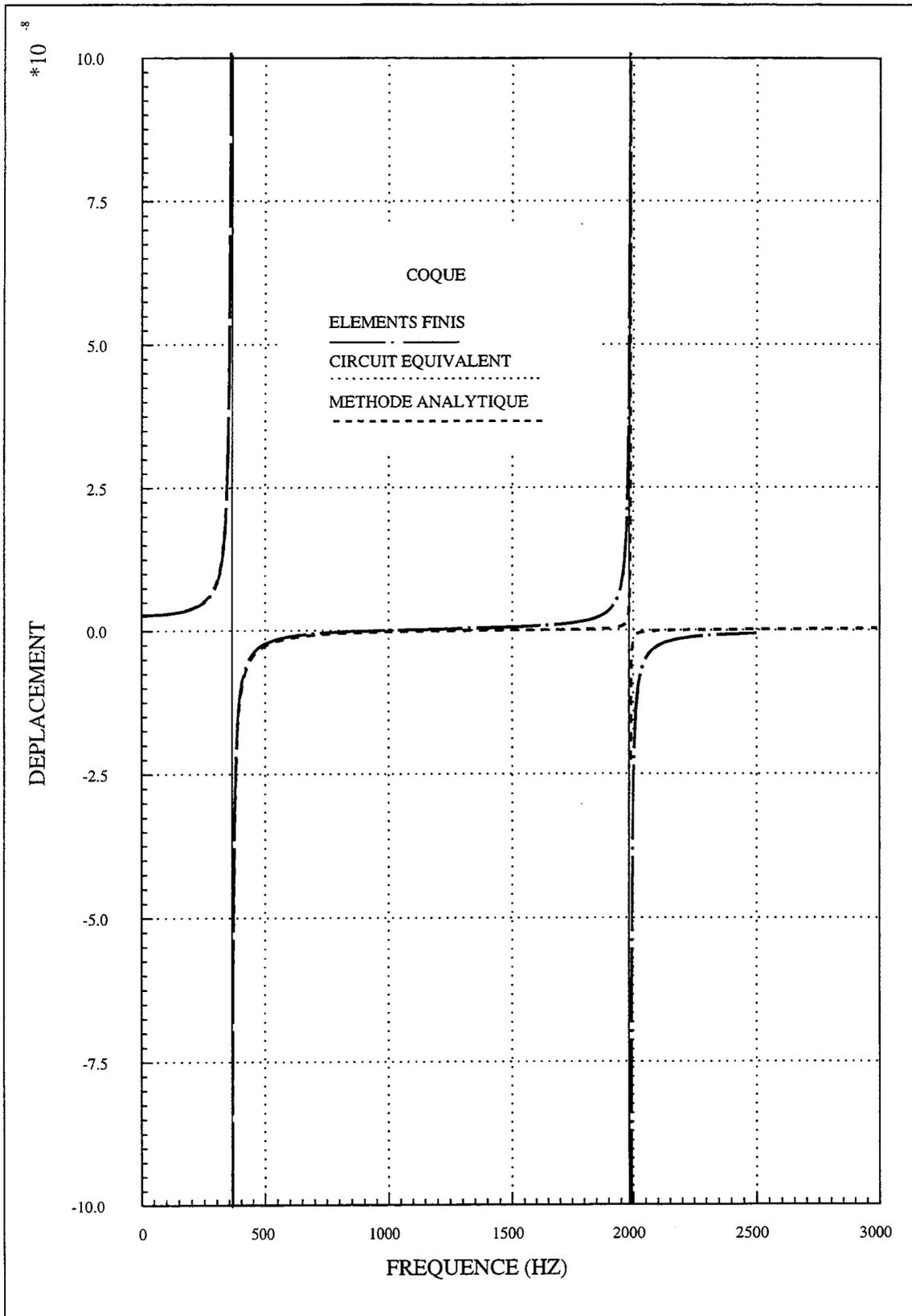


Fig. V.12 - Variations avec la fréquence du déplacement à l'extrémité du grand axe de la coque seule.

V - 1.3.3 Schéma équivalent du transducteur complet.

L'association des deux schémas équivalents, celui du moteur d'une part et celui de la coque d' autre part, conduit au schéma global de la figure V.13 avec comme variable la vitesse vibratoire u au bout du grand axe du projecteur.

A partir du schéma de la figure V.13 on détermine alors les caractéristiques du projecteur comme expliqué en II-4.4 . Les résultats obtenus par les deux méthodes, éléments finis et méthode analytique sont alors rassemblés dans le tableau (V.8).

La figure V.14 compare alors les variations avec la fréquence du déplacement à l'extrémité du grand axe calculées par éléments finis, à l'aide du schéma équivalent de la figure V.13. La même figure montre le déplacement du bout du grand axe de la coque avec le schéma équivalent à un mode de coque.

Si conformément à l'utilisation normale du flexensionnel, la vitesse vibratoire intéressante est v , à l'extrémité du petit axe, le calcul est aisé. A l'aide du schéma équivalent de la figure V.13, les composantes modales u_1 et u_2 de la vitesse u sont calculées en fonction de la fréquence. Ensuite :

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \tag{V.6}$$

où les coefficients α_1 et α_2 sont définis par la relation (V.5). Les variations du déplacement à l'extrémité du petit axe en fonction de la fréquence sont alors représentées à la figure V.15, dans trois cas : calcul direct par éléments finis, calcul à l'aide de la relation (V.6) et identification directe, selon le schéma de la figure V.2. Les trois courbes sont proches.

Le tableau V.8 présente alors les caractéristiques du projecteur calculées par les différentes méthodes.

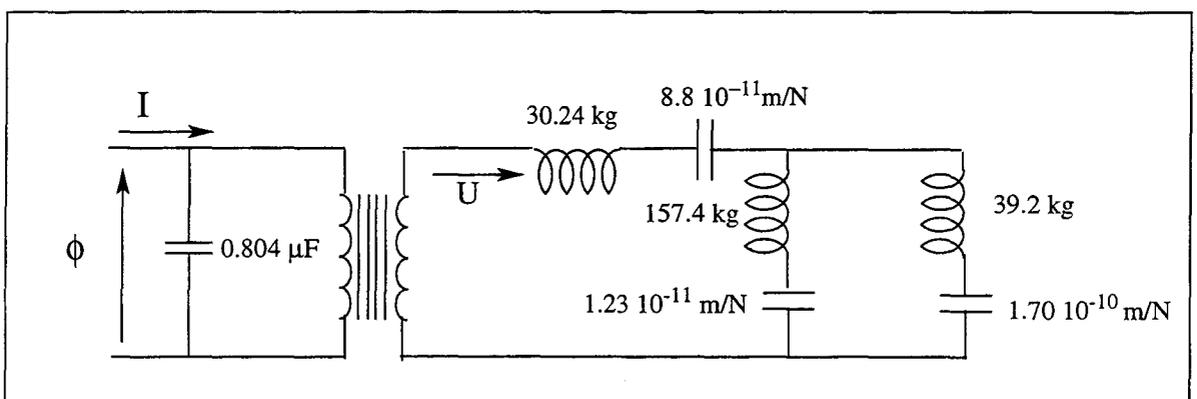


Fig. V.13 - Schéma équivalent du projecteur complet. La variable mécanique est la vitesse vibratoire au bout du grand axe.

CHAPITRE V

	Calcul direct	Calcul à l'aide du schéma équivalent analytique	écart %	Calcul à l'aide du schéma équivalent E.F	écart %
f_r (Hz)	900.	830.	7.7	830.	7.7
f_a (Hz)	940.5	863.	8.2	852.	9.4
k (%)	28.6	28.	2.1	22.3	22.
C_{bf} (μF)	1.12	1.16	3.4	1.12	0.
U_{bf} ($10^{-9}m$)	16.1	11.	31.	11.5	28.5

Tableau V.8 : Caractéristiques du projecteur.

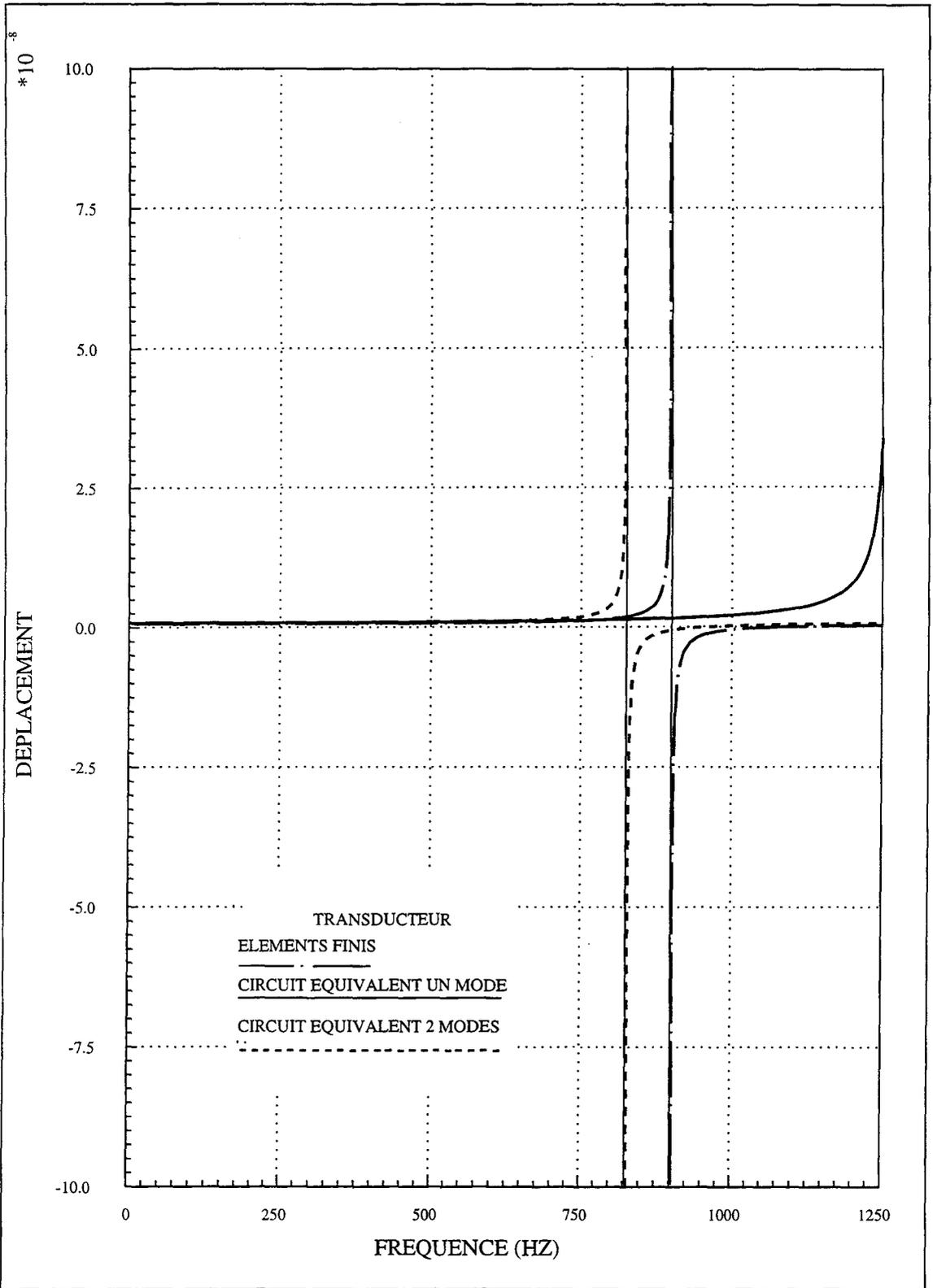


Fig. V.14 - Variations avec la fréquence du déplacement à l'extrémité du grand axe du projecteur complet.

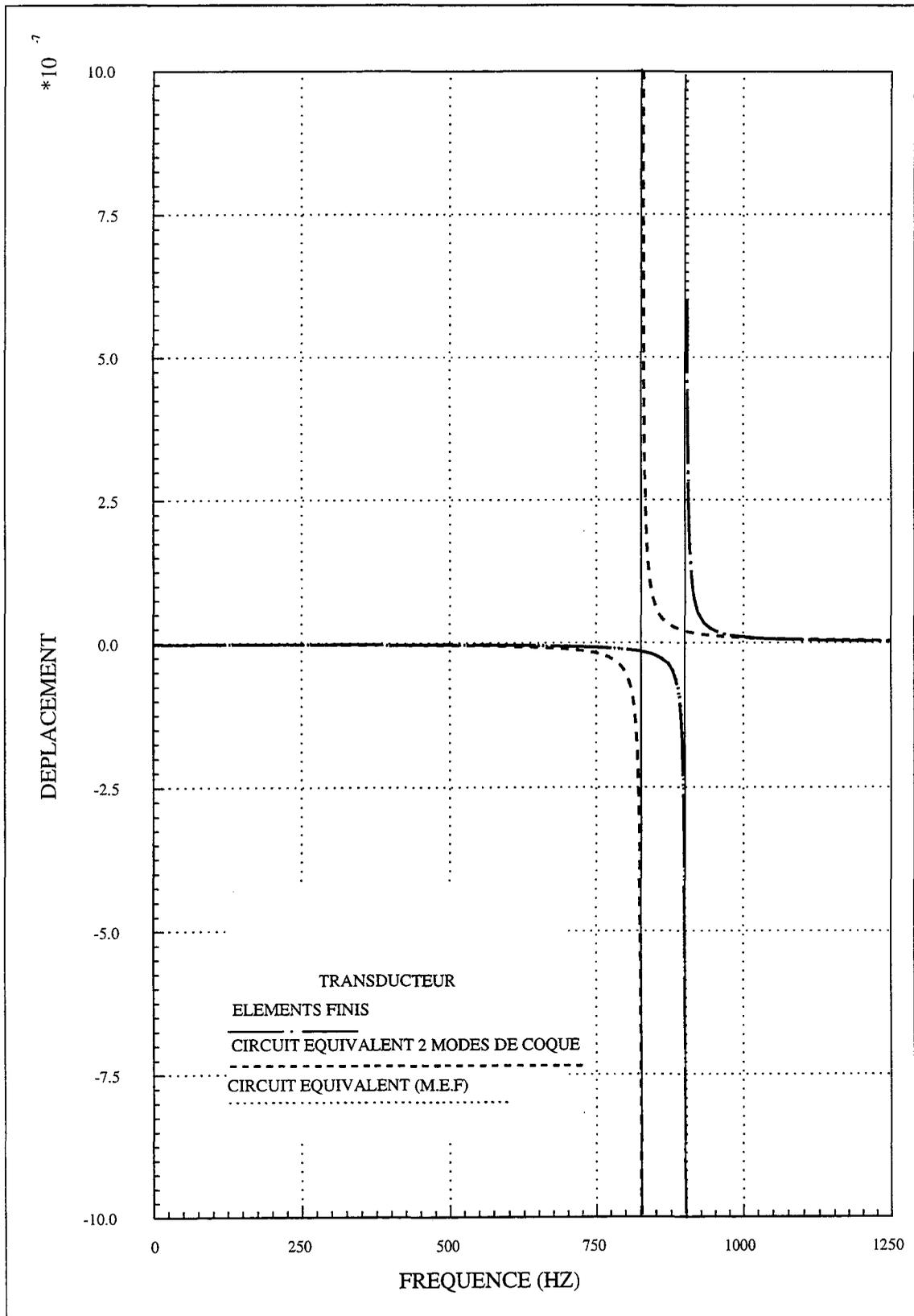


Fig. V.15 - Variations avec la fréquence du déplacement à l'extrémité du petit axe.

V - 2 Exemple 2 : transducteur à coque de type 2 (ga = 1150. mm).

V - 2.1 Description.

Le deuxième exemple de transducteur flexensionnel de classe IV présenté ici, est dérivé d'un exemple de projecteur élémentaire constitué de trois tronçons superposés et jointifs [52], il est composé d'une coque en aluminium, d'épaisseur 50 mm, le grand rayon de courbure vaut 1278.125 mm, le petit rayon vaut 100. mm, le grand axe moyen vaut 1150. mm ce qui correspond au deuxième type de coque cité dans le chapitre III, la longueur l vaut 150. mm. La colonne motrice est divisée en deux demi-piliers. Chaque demi-pilier est pris entre un insert et un fer central. Chaque demi-pilier est constitué de 20 céramiques piézoélectriques de type NAVY III.

Comme pour le premier exemple, par symétrie, seul le 1/8^{ème} de la structure est retenu. Pour limiter la taille du maillage, la colonne de céramique a été réduite à 3 tronçons au lieu de 20.

V - 2.2 Elaboration du schéma équivalent global du projecteur.

Comme pour le premier exemple, une analyse par la méthode des éléments finis a été conduite, le maillage utilisé est présenté par la figure V.16.a, les figure V.16.b et V.16.c montrent alors, les deux premiers modes du transducteur obtenus par ATILA.

Les résultats obtenus, sont regroupés dans le tableau (V.9)

Mode	Fréquence de résonance en Hz	Fréquence d'antirésonance en Hz	Coefficient de couplage k(%)
1	417.	447.	35.4
2	1068.	1079.	14.7
3	1738.	1934.	43.8

Tableau V.9 : Résultats de l'analyse par éléments finis du transducteur.

Les différents éléments nécessaires à la mise en place d'un schéma équivalent obtenus par l'analyse numérique sont :

$$\begin{aligned}
 f_r &= 417 \cdot 2 \quad \text{Hz} & C_{BF} &= 0 \cdot 49 \quad \text{nF} \\
 f_a &= 446 \cdot 2 \quad \text{Hz} & V_{BF} &= -1 \cdot 810^{-09} \quad \text{m}
 \end{aligned}
 \tag{V.7}$$

Avec ces valeurs et compte tenu des équations (II-17), du chapitre II, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \bar{C} &= 0 \cdot 0645 \quad \text{nF} & \bar{c} &= 5 \cdot 8710^{-08} \quad \text{m/N} \\
 \bar{L} &= 2255 \cdot 0 \quad \text{H} & l &= 2 \cdot 45 \quad \text{kg} \\
 \bar{C}_0 &= 0 \cdot 433 \quad \text{nF} & \bar{N} &= 3 \cdot 310^{-02} \quad \text{N/V}
 \end{aligned}
 \tag{V.8}$$

Valeurs se rapportant au maillage de la figure V.16, (1/8^{ème} de la structure avec 3 tronçons de céramique). Les valeurs réelles s'obtiennent à l'aide des transformations suivantes :

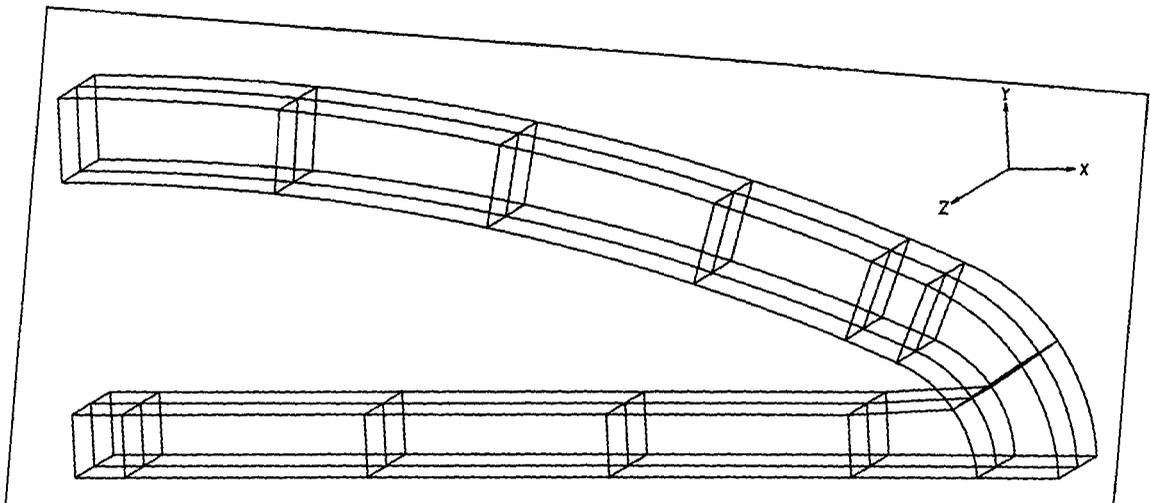


Fig. V.16.a - Modélisation du transducteur.

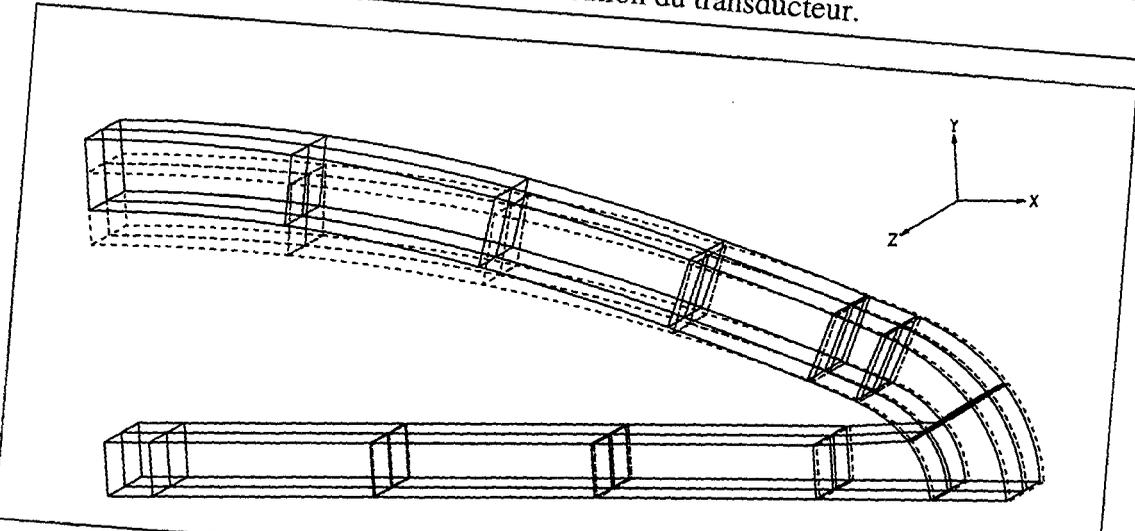


Fig. V.16.b - Premier mode du transducteur, $f = 417$.Hz.

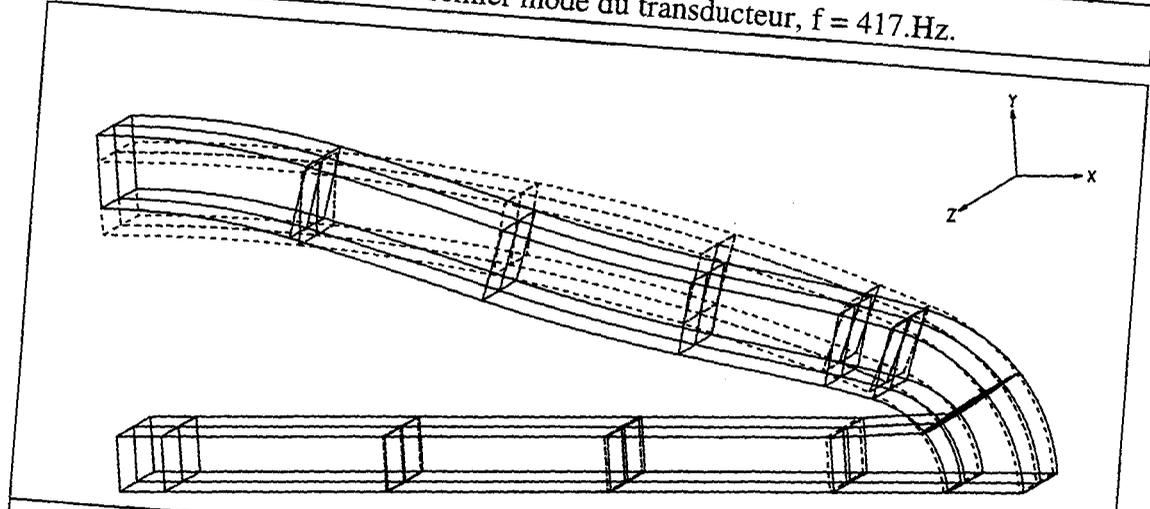


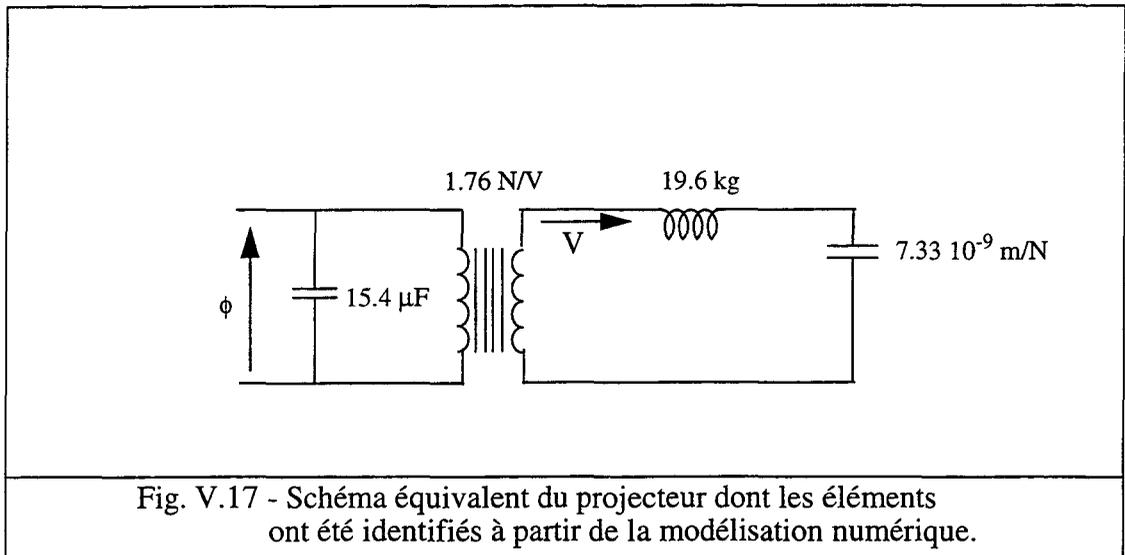
Fig. V.16.c - Deuxième mode du transducteur, $f = 1068$. Hz.

$$\begin{aligned}
 C_0 &= \bar{C}_0 \times 8 \times (20/3)^2 \\
 N &= \bar{N} \times 8 \times (20/3) \\
 c &= \bar{c}/8 \\
 l &= \bar{l} \times 8 \\
 C &= \bar{C} \times 8 \times (20/3)^2 \\
 L &= \bar{L}/(8 \times (20/3)^2)
 \end{aligned}
 \tag{V.9}$$

Ce qui donne comme valeurs pour le projecteur :

$$\begin{aligned}
 C_0 &= 15.4 \quad \mu\text{F} \\
 N &= 1.76 \quad \text{N/V} \\
 c &= 7.33 \cdot 10^{-09} \quad \text{m/N} \\
 l &= 19.6 \quad \text{kg} \\
 C &= 22.9 \quad \text{nF} \\
 L &= 6.34 \quad \text{H}
 \end{aligned}
 \tag{V.10}$$

La figure V.17 correspond dans ce cas au schéma équivalent globale du projecteur complet dans l'air.



V - 2.3 Elaboration du schéma équivalent à partir des contributions séparées.

V - 2.3.1 Schéma équivalent du moteur seul.

Les différentes valeurs nécessaires à la mise en place du schéma équivalent de la colonne motrice sont regroupées dans le tableau (V.10). De la même manière, les résultats des différents paramètres du circuit, obtenus par les deux méthodes sont regroupés dans le tableau (V.11).

La figure V.18 montre le maillage utilisé pour la modélisation du moteur et la figure V.18.b montre le premier mode de résonance obtenu par ATILA.

ANALYSE	fréquence de résonance en HZ	fréquence d'antirésonance en Hz	capacité basse fréquence en nF
ATILA	1520.	1848.	0.34
ANALYTIQUE	1466.	1858.	0.33

Tableau V.10 : Valeurs obtenues par la méthode analytique et par ATILA.

ANALYSE	$\bar{c}_m 10^{-09}$ m/N	\bar{l}_m kg	\bar{C}_0 nF	\bar{N} N/V
ATILA	2.3	4.8	0.347	0.28
ANALYTIQUE	2.5	4.7	0.336	0.28

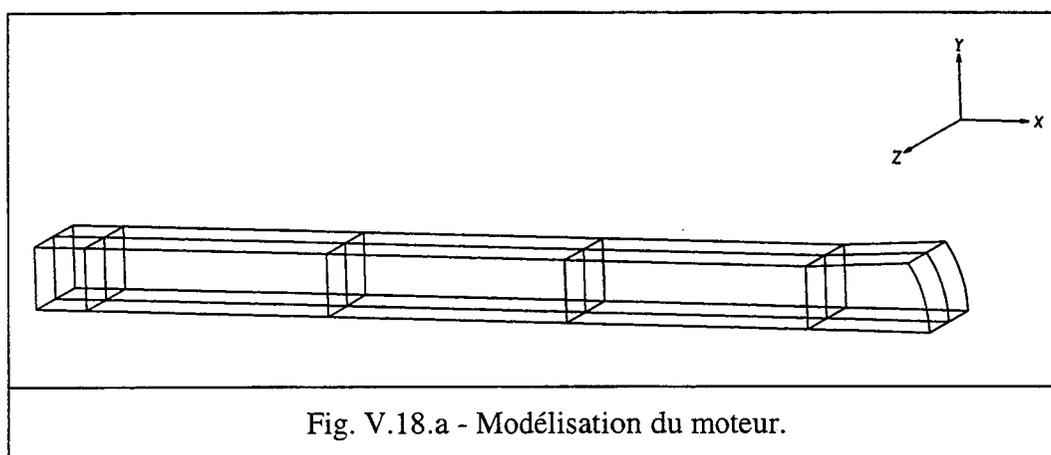
Tableau V.11 : Valeurs correspondantes au schéma de la figure V.18.a (1/8^{ème}).

Les valeurs du projecteur complet, déduites à partir du tableau précédent et des relation (V.9), sont alors présentées dans le tableau (V.12).

ANALYSE	$c_m 10^{-09}$ m/N	l_m kg	C_0 μ F	N N/V
ATILA	0.28	38.4	0.12	14.4
ANALYTIQUE	0.31	37.6	0.12	15.2

Tableau V.12 : Valeurs correspondantes au schéma du projecteur complet.

Le schéma équivalent du moteur est alors représenté par la figure V.19.



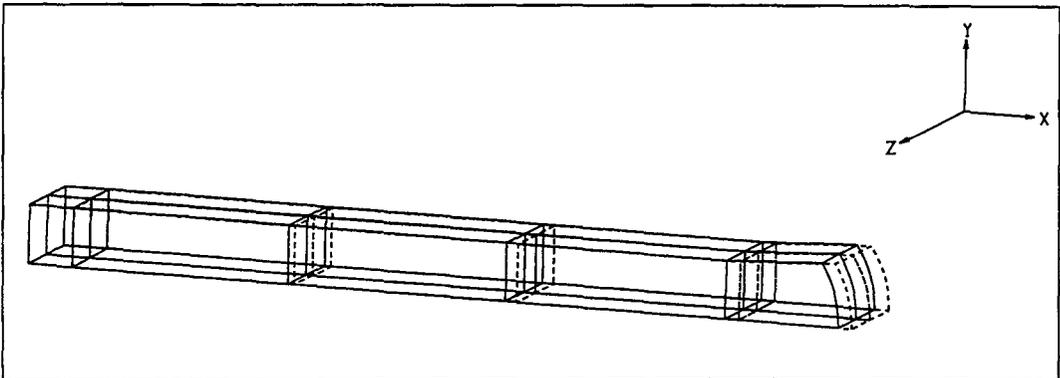


Fig. V.18.b - Premier mode de résonance du moteur.

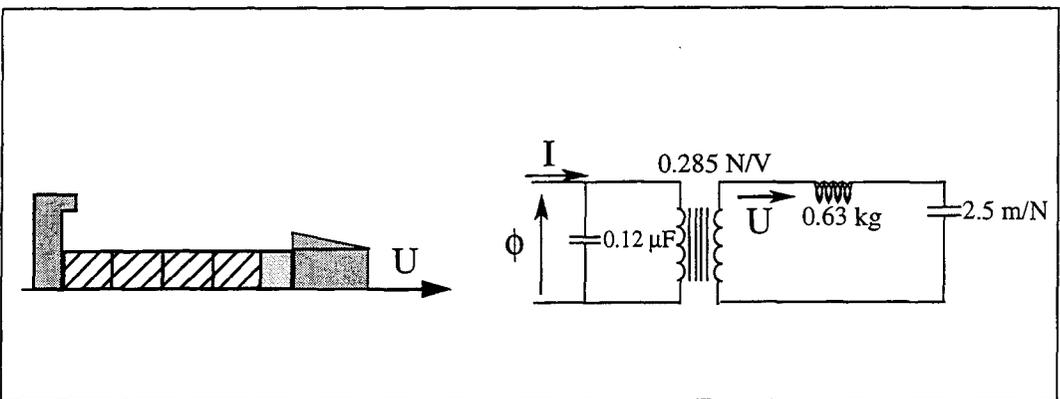


Fig. V.19 - Schéma équivalent du moteur seul.

La figure V.20.a compare les variations avec la fréquence du déplacement en bout de moteur calculé par éléments finis, analytiquement et à l'aide du schéma équivalent.

L'accord entre le déplacement obtenu analytiquement et par le schéma équivalent est parfait ; quant au déplacement obtenu par éléments finis, il est très peu différent de celui obtenu analytiquement ; ce résultat était prévisible, vu la différence entre les valeurs des fréquences obtenues par les deux méthodes, à noter que l'écart entre ces dernières valeurs n'excède pas 2.4 %. De la même manière, la figure V.20.b montre la variation de l'admittance du moteur en fonction de la fréquence par les différentes méthodes.

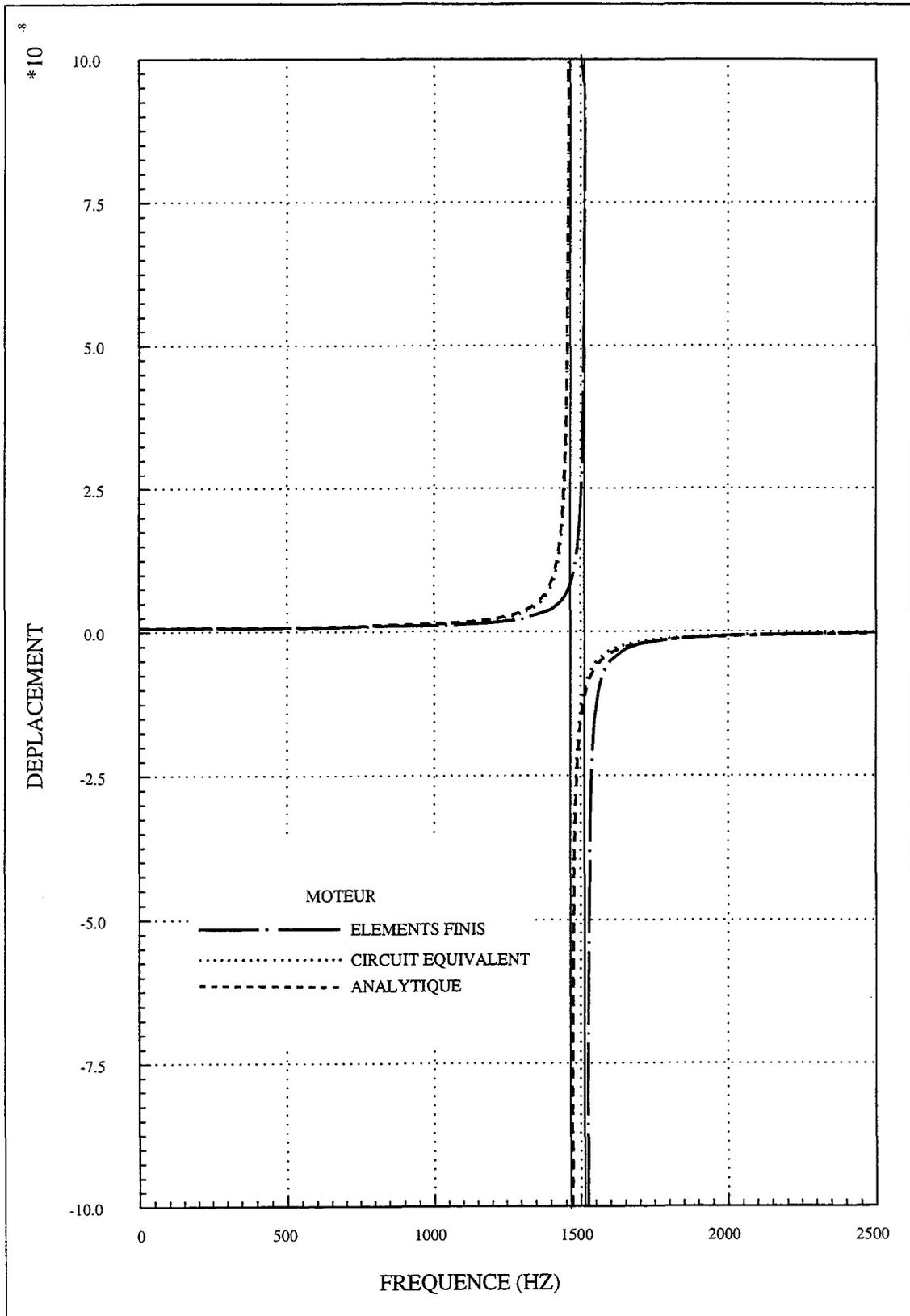


Fig. V.20.a - Variations avec la fréquence du déplacement à l'extrémité du moteur.

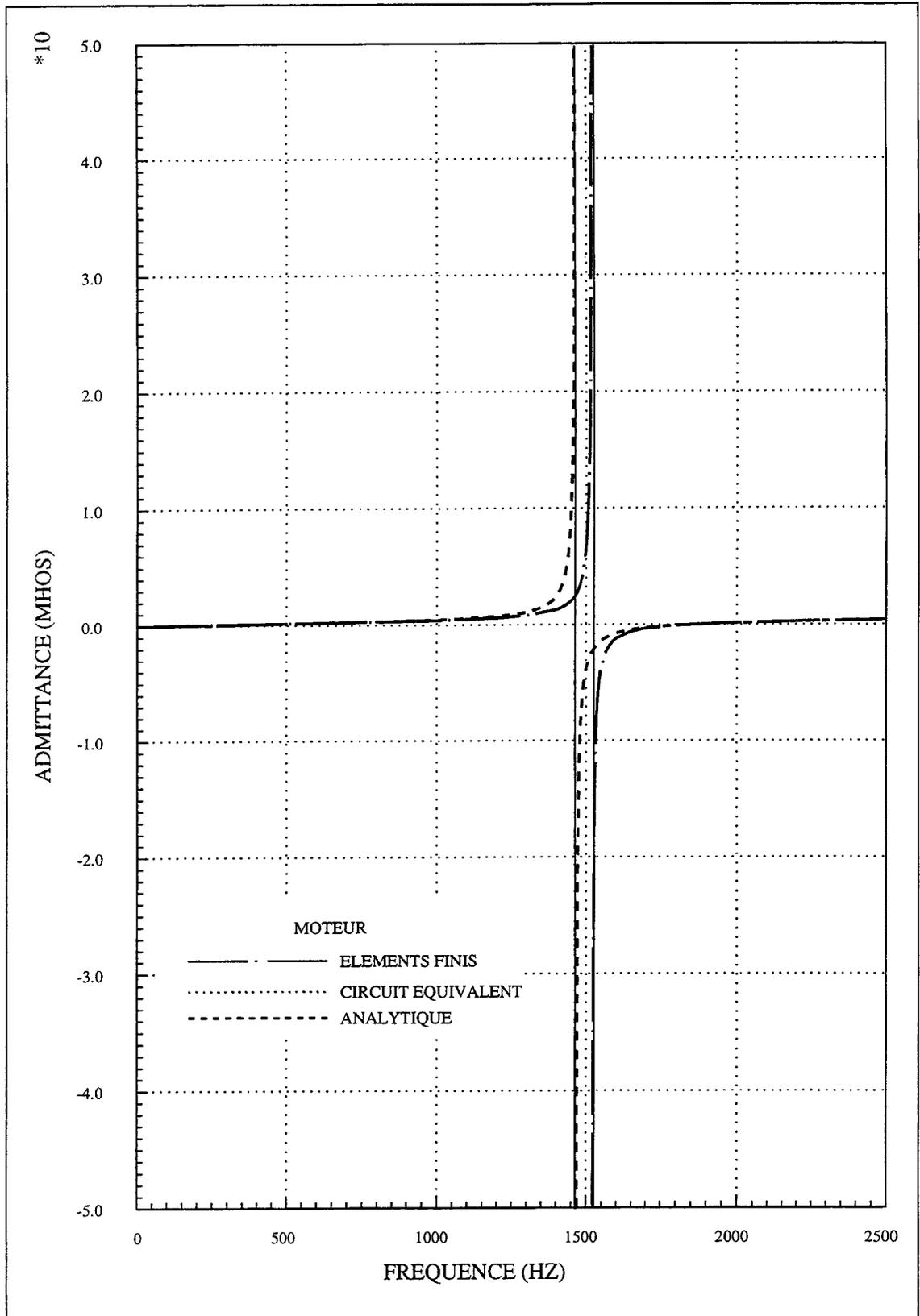


Fig. V.20.b - Variations avec la fréquence de l'admittance du moteur.

V - 2.3.2 Schéma équivalent de la coque seule.

Le maillage éléments finis utilisé pour identifier le schéma équivalent de la coque est donné à la figure V.21. Les représentations schématiques des deux premiers modes propres sont données à la figure V.22, correspondant aux fréquences de résonances des deux premiers modes f_1, f_2 .

Le tableau (V.13) montre alors les différentes valeurs obtenues par éléments finis et par la méthode analytique.

	f_1 en HZ	f_2 en HZ	f_c en HZ	α_1	α_2	u_{bf} 10^{-08} m
ATILA	176.8	955.	453.5	3.3	1.3	3.13
ANALYTIQUE	175.5	960.	461.3	3.3	10.2	3.02

Tableau V.13 : Valeurs obtenues par la méthode analytique et par ATILA.

Ce qui donne comme paramètres du schéma équivalent de la coque ($1/8^{\text{ème}}$) les valeurs rassemblées dans le tableau (V.14).

	\bar{c}_1 en 10^{-08} m/N	\bar{c}_2 en 10^{-09} m/N	\bar{l}_1 en kg	\bar{l}_2 en kg
ATILA	2.74	3.7	29.7	7.6
ANALYTIQUE	2.65	3.5	30.8	7.9

Tableau V.14 : Valeurs correspondantes au

A partir des relations (V.9), on obtient les paramètres du schéma équivalent de la coque du projecteur complet. Ces valeurs sont rassemblées dans le tableau (V.15).

	c_1 en 10^{-09} m/N	c_2 en 10^{-10} m/N	l_1 en kg	l_2 en kg
ATILA	3.42	4.66	237.	61.
ANALYTIQUE	3.32	4.32	246.	63.

Tableau V.15 : Paramètres du schéma équivalent de la coque obtenus par la méthode analytique et par la méthode des éléments finis, (résultats pour la coque du projecteur complet)

La figure V.23 montre alors les variations avec la fréquence du déplacement en bout du grand axe. par les différentes méthodes.

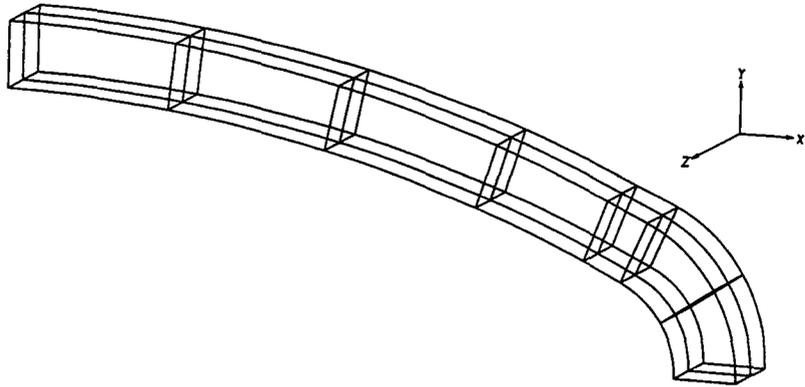


Fig. V.21. -Modélisation de la coque.

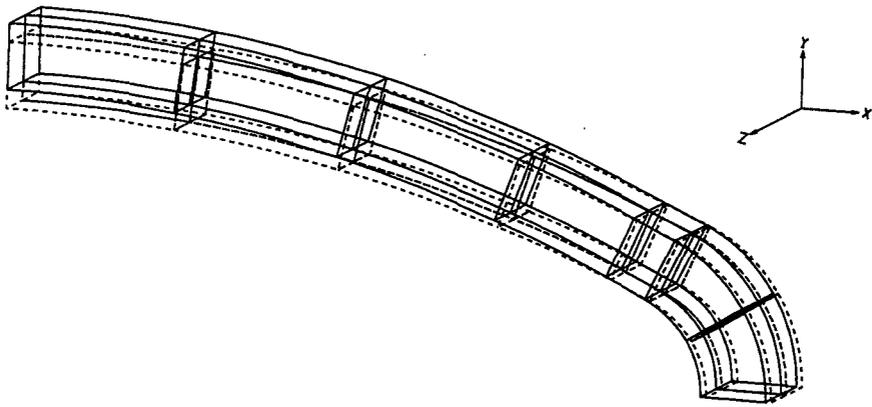


Fig. V.22.a - Premier mode de la coque, $f = 176$. Hz.

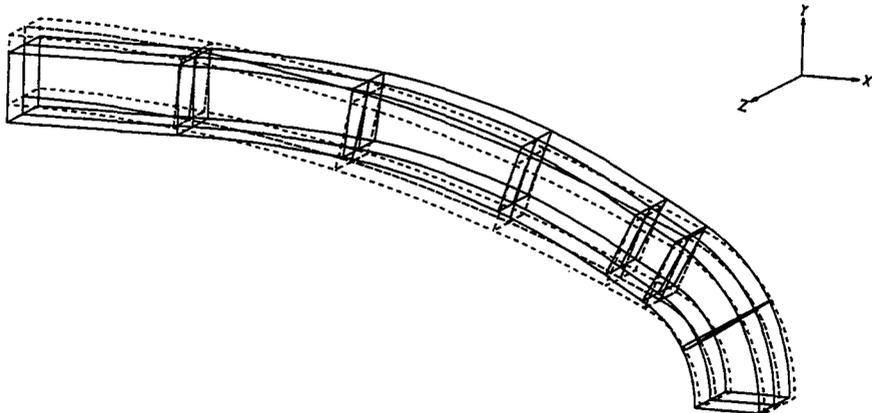


Fig. V.22.b - Second mode de la coque, $f = 955$. Hz.

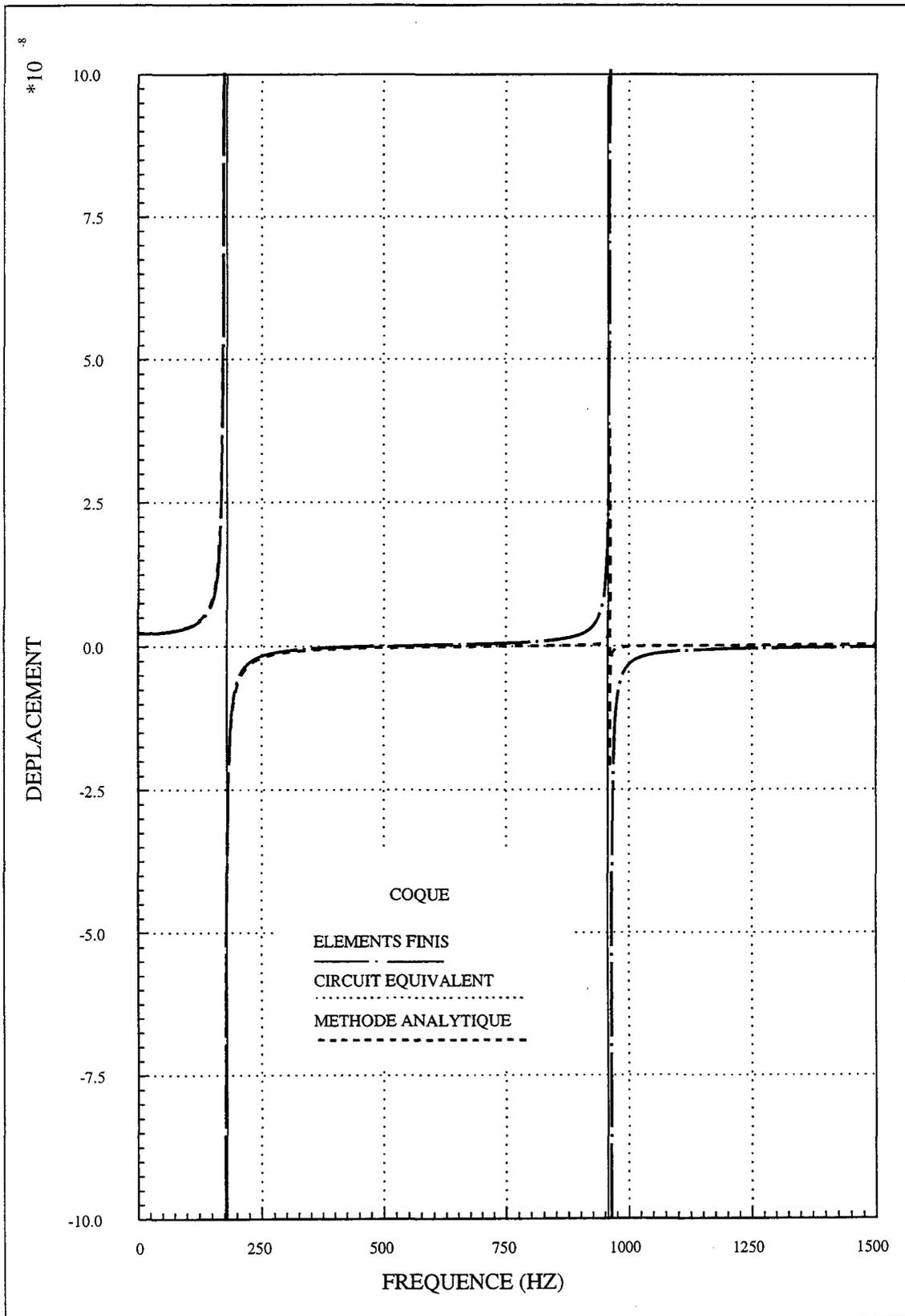


Fig. V.23 - Variations avec la fréquence du déplacement à l'extrémité du grand axe de la coque seule.

V - 2.3.3 Schéma équivalent du projecteur complet.

L'association des deux schémas équivalents précédents conduit au schéma global de la figure V.24 avec comme variable la vitesse vibratoire u au bout du grand axe du projecteur.

La figure V.26 montre alors les variations avec la fréquence du déplacement à l'extrémité du grand axe calculées par éléments finis, analytiquement et à l'aide du schéma global, à deux modes de coque. La même figure montre le résultat obtenu par schéma équivalent à l'aide d'un seul mode de coque.

La vitesse vibratoire V , à l'extrémité du petit axe, est obtenue à partir de la relation (V.6).

Les variations du déplacement à l'extrémité du petit axe en fonction de la fréquence sont représentées figure V.25, dans trois cas : calcul direct par éléments finis, calcul à l'aide de la relation (V.6) et identification directe. Les trois courbes sont très proches l'une de l'autre.

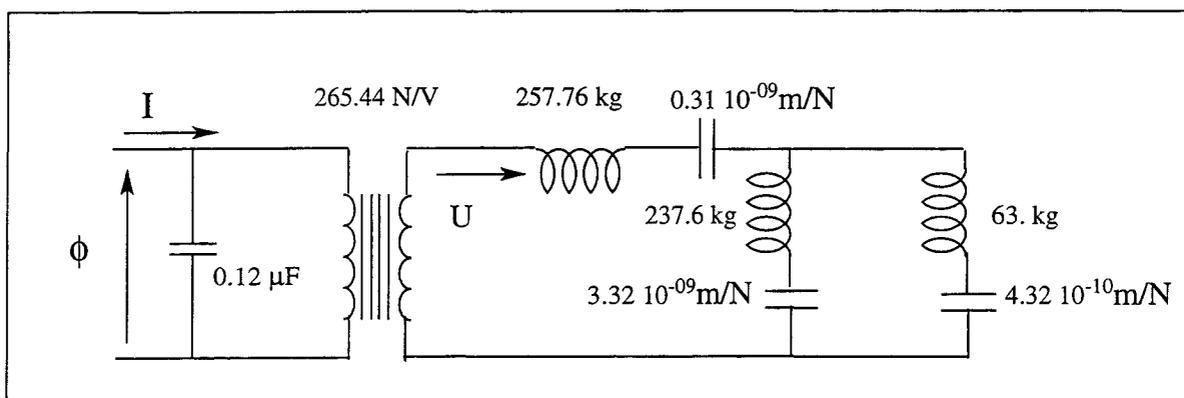


Fig. V.24 - Schéma équivalent du projecteur complet. La variable mécanique est la vitesse vibratoire au bout du grand axe. m/N

	Calcul direct	Calcul à l'aide du schéma équivalent analytique	écart % par rapport au calcul direct	Calcul à l'aide du schéma équivalent E.F	écart % par rapport au calcul direct
f_r (Hz)	417.	390.	6.5	392.	6.0
f_a (Hz)	447.	412.	8.4	413.	7.6
k (%)	35.4	33.	6.9	31.6	10.0
C_{bf} (nF)	17.6	18.6	4.9	17.8	0.6
U_{bf} ($10^{-9}m$)	13.0	10.8	16.8	10.4	20.0

Tableau V.16 :

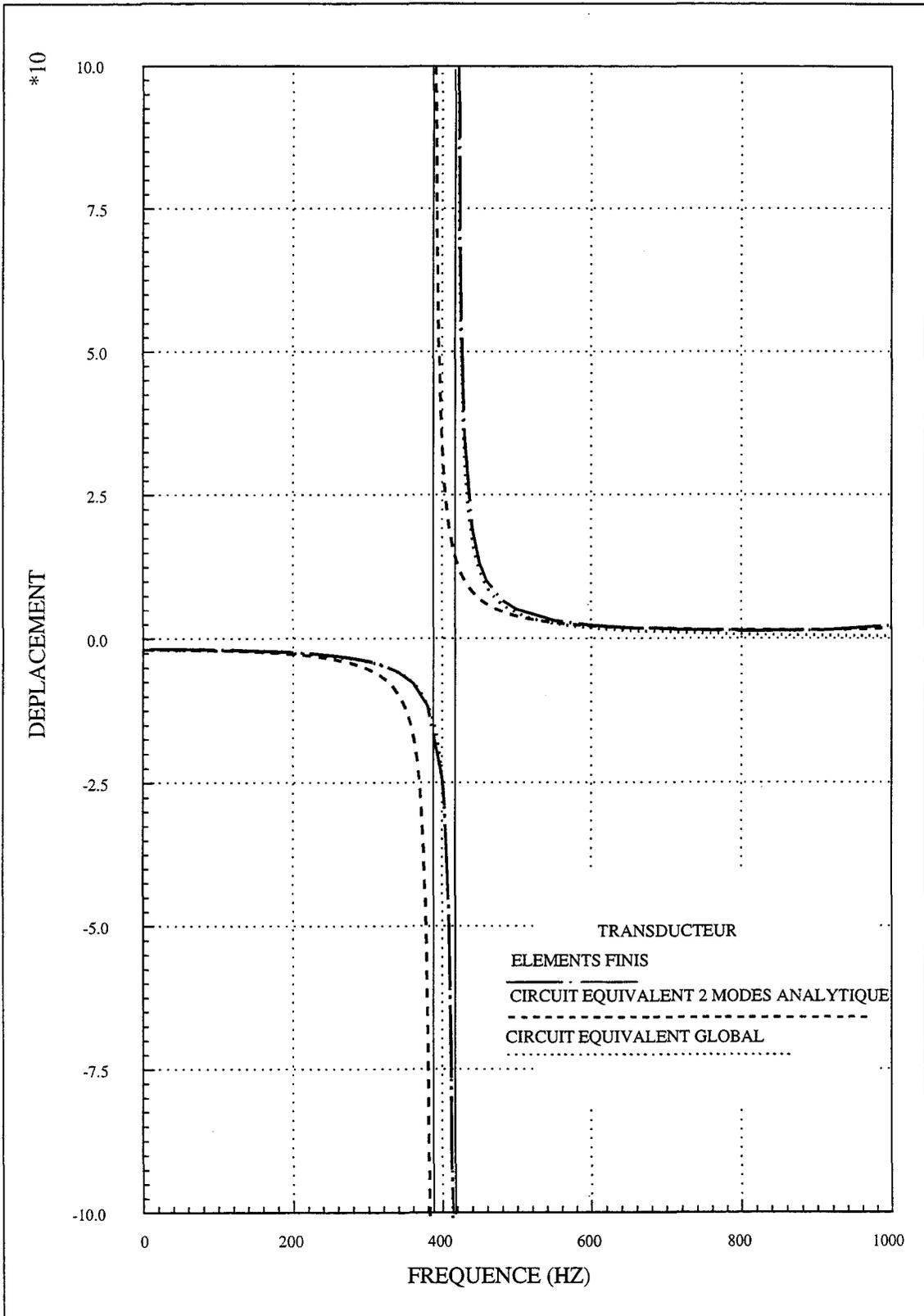


Fig. V.25 - Variations avec la fréquence du déplacement à l'extrémité du petit axe.

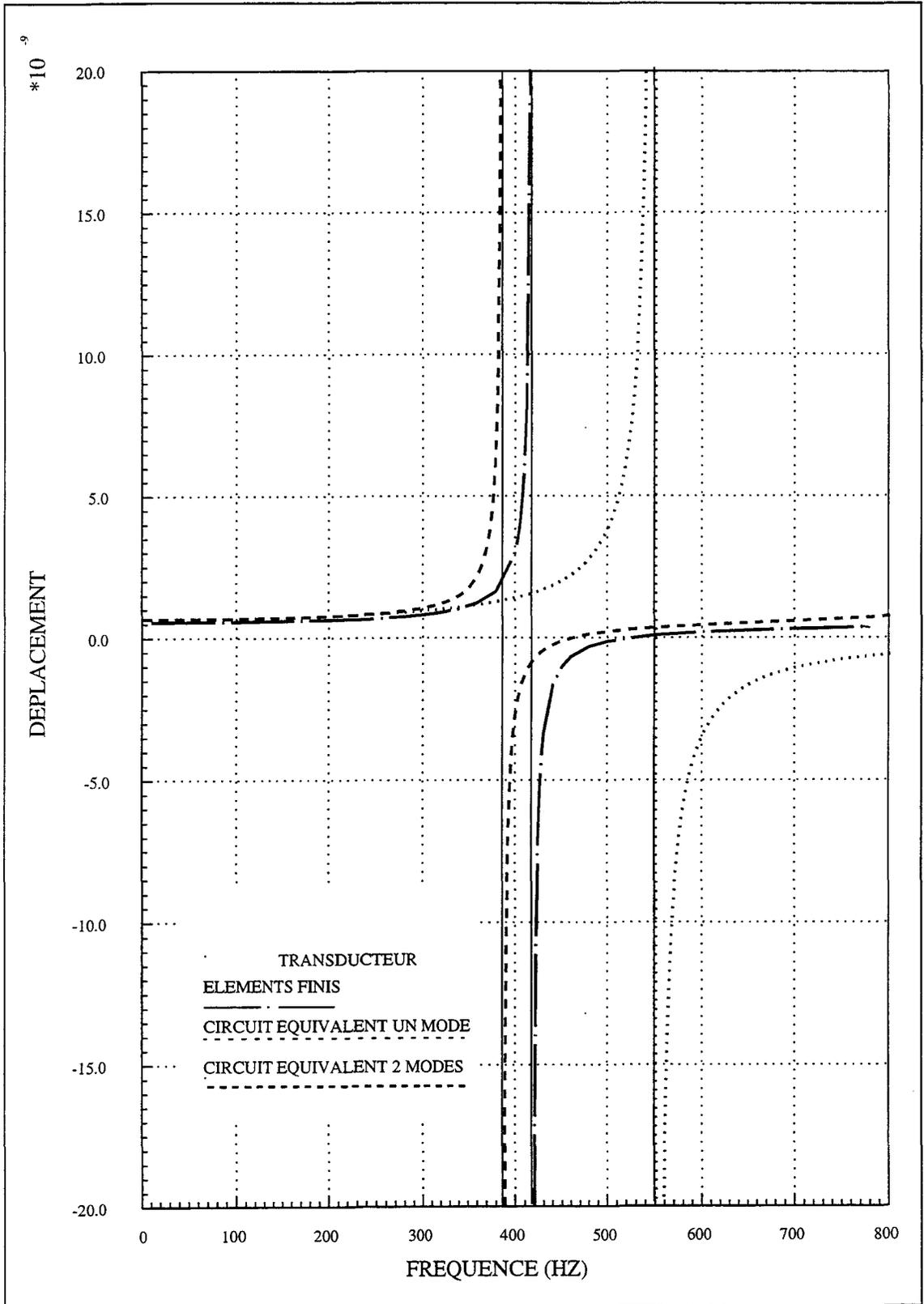


Fig. V.24 - Variations avec la fréquence du déplacement du bout du grand axe du projecteur. (Remarque : résultat établi pour 1/48ème du projecteur avec 3 tronçons de céramique par demi-moteur).

V - 3 Conclusion.

Dans ce chapitre et pour les deux exemples traités, la première étape a consisté à déterminer les caractéristiques du transducteur à partir d'un schéma équivalent global obtenu par modélisation numérique ; la seconde étape a consisté quant à elle, à déterminer ces mêmes caractéristiques à partir d'un schéma équivalent obtenu en assemblant : le circuit moteur à une branche motionnelle représentant son premier mode de vibration longitudinal au circuit de la coque à deux branches motionnelles représentant ses deux premiers modes de vibration.

Pour la construction de ce dernier schéma, on a utilisé pour comparer les résultats, les deux méthodes : analytique et numérique. L'accord est parfait.

Lorsqu'on compare les résultats analytiques à partir du schéma équivalent à contributions séparées, à ceux du schéma équivalent global déduit numériquement, l'écart observé pour la fréquence de résonance du transducteur est alors de l'ordre de 7%.

Les valeurs des caractéristiques du transducteur obtenues à partir du schéma équivalent global sont en bon accord avec celles du schéma équivalent à contributions séparées construit analytiquement.

On peut donc grâce à cette méthode analytique déterminer les caractéristiques du transducteur flexensionnel de classe IV dans l'air, à partir du modèle analytique proposé dans cette thèse.

CONCLUSION

La méthode analytique proposée dans cette thèse pour l'analyse des transducteurs flexensionnels de classe IV dans l'air, permet de traiter les problèmes liés à leur conception sans recourir aux approches numériques. Elle a été testée, avec succès sur deux exemples de transducteur. Cette méthode a permis grâce à la technique des schémas équivalents de déterminer analytiquement les caractéristiques du transducteur dans l'air.

Après avoir décrit le fonctionnement de ces transducteurs et leur représentation par des schémas équivalents, on a souligné l'intérêt d'une méthode analytique simple permettant leur conception et leur optimisation. Les possibilités offertes par cette méthode sont :

L'étude du comportement dynamique de la coque du transducteur qui consiste à déterminer les deux premiers modes de vibration et le premier mode d'antirésonance. Cette étude permet de déterminer les paramètres nécessaires à la représentation de la coque par un schéma équivalent à deux branches motionnelles, elle permet également de déterminer la variation de la fréquence d'antirésonance de la coque, fréquence proche de la fréquence de résonance du premier mode du transducteur complet.

Ce modèle peut être appliqué à d'autre type de coques en général et aux coques des autres transducteurs flexensionnels admettant la même symétrie de révolution que la coque du classe IV en particulier.

L'étude de la contribution du moteur par une méthode analytique permettant de déterminer son premier mode de vibration longitudinal nécessaire à la mise en place de son schéma équivalent. Cette méthode a été appliquée et testée, sur d'autres types de transducteurs comme le Janus et le Tonpilz.

Les résultats obtenus par cette méthode analytique sont en bon accord avec ceux obtenus en utilisant la méthode des éléments finis, ce qui confirme définitivement la validité du modèle proposé. Donc l'optimisation de la coque et du moteur pour la conception des transducteurs flexensionnels de classe IV à épaisseur de coque constante devient plus souple.

Le principe général développé ici peut s'appliquer à la modélisation des autres types de transducteurs flexensionnels.

La limitation du modèle réside dans le fait que les pertes mécaniques, diélectriques et piézoélectriques ne sont pas prises en compte et dans le fait que l'épaisseur de la coque est constante.

CONCLUSION

Les perspectives d'extension de ce travail peuvent être divisées en trois thèmes majeurs :

- La prise en compte de la variation de l'épaisseur de la coque pour pouvoir utiliser des coques en matériaux composites.
- L'association de l'insert à la coque, qui a fait partie du moteur dans les deux exemples du chapitre V.
- La prise en compte du rayonnement : le fonctionnement du transducteur dans un fluide lourd environnant peut être représenté avec une bonne approximation par un schéma équivalent; pour cela, la connaissance du champ de déplacement du transducteur dans l'air ainsi que les composantes de l'impédance de rayonnement est nécessaire.

Références bibliographiques

- [1] J. P. MARAGE,
"Sonars et Acoustique Sous-marine",
Thomson sintra asm, sophia antipolis, 1990.
- [2] R. PERSON,
"Transducers needs for Oceanography",
in Power Transducers for Sonics and Ultrasonics, SPRINGLER-VERLAG Heidelberg
édité par B. HAMONIC, O. B. WILSON, J. N. DECARPIGNY, (1990).
- [3] "Power Sonic and Ultrasonic Transducers Design",
SPRINGLER-VERLAG Heidelberg, edité par B.HAMONIC et J.N.DECARPIGNY,
(1988).
- [4] O. B. WILSON,
"Introduction to the Theory and Design of Sonar Transducers",
Peninsula Publishing Ed. , (1988).
- [5] F. CLAEYSSEN,
"Conception et Réalisation de Transducteurs Sonar Basse Fréquence à base d'alliage
Magnétostictifs Terres Rares-Fer",
Thèse de doctorat, INSA-LYON (1989).
- [6] P. M. MORSE,
"Vibration and Sound",
Ed. American Institute of Physics, (1981).
- [7] B. DUBUS,
"Analyse des Limitations de Puissance des Transducteurs Piézoélectriques",
Thèse de doctorat, Université des Sciences et Techniques de Lille, (1989),
- [8] B. DUBUS, J. C. DEBUS, D. BOUCHER,
"Finite Element Modeling of Piezoelectric Transducers Including Internal Losses",
117th ACOUST.Soc.Am. meeting, communication LL6, (1989).
- [9] B. BERNARD,
"Interactions Acoustiques entre Transducteurs de type Flextenseur",
Thèse de doctorat, Université de Valenciennes et du Hainaut Cambresis, (1994).
- [10] K. D. ROLT
"History of the Flextensional Electroacoustic Transducer",
J. Acoust. Soc. Am., **87** (3), (1990).
- [11] G. A. BRIGHAM, L. H. ROYSTER,
"Present Status in the Design of Flextensional Underwater Acoustic Transducer",
J. Acoust. Soc. Am., **38** , 879-880 (1965).

- [12] L. H. ROYSTER,
"Predicting the Effective Dynamic Coupling Coefficient of the Flexensional Transducer (Preliminary Design Consideration)",
J. Acoust. Soc. Am., **38**, 879-880 (1965).
- [13] L. H. ROYSTER,
"Flexensional Underwater Acoustics Transducer",
J. Acoust. Soc. Am., **45**, 671, 682 (1969)
- [14] R. A. NELSON Jr., L. H. ROYSTER, J. N. BOONE,
"Mathematical Model for the Class V Flexensional Underwater Acoustic Transducer",
J. Acoust. Soc. Am., **47**, 71(A) (1970).
- [15] J. N. BOONE, L. H. ROYSTER, R. A. NELSON Jr.,
"Mathematical Model for the Class II Flexensional Underwater Acoustic Transducer",
J. Acoust. Soc. Am., **47**, 71(A) (1970).
- [16] R. A. NELSON Jr., L. H. ROYSTER,
"Development of a Mathematical Model for the Class V Flexensional Underwater Acoustic Transducer",
J. Acoust. Soc. Am., **49**, 1609-1620 (1971)
- [17] W. P. MASON,
"Piezoelectric Crystals and their Applications to Ultrasonics",
Van Nostrand, Inc., New York, 486 (1950), 5th ed. (1960).
- [18] A. TACHIBANA,
"Partially Plated Thin-disk Piezoelectric Ceramic Vibrators",
Electro. Commun. Japan, **48**, N°6, 62-68 (1965).
- [19] G. CHERTOCK,
"Sound Radiation from Vibrating Surfaces",
J. Acoust. Soc. Am., **36**, 1305-1313 (1964).
- [20] J. OSWIN, J. DUNN,
"Frequency, Power and Depth Performance of Class IV Flexensional Transducers",
in Power Sonic and ultrasonic transducers design SPRINGLER-VERLAG Heidelberg, 121-133, (1990).
- [21] P. DUFOURCQ,
"Sources Acoustiques Basse Fréquence Modélisation De Flexenseur",
colloque de physique, colloque C2, supplément au N°2, tome 51, Février (1990).

- [22] J. C. DEBUS, J. N. DECARPIGNY, B. HAMONIC,
"Etude et Réalisation d'un Transducteur Flexensionnel de Classe IV à coque en GRP",
Convention c.86.48.826.334 avec la DCAN-Toulon pour le GERDSM, bon de com-
mande N°8 rapport final, (1988).
- [23] W. J. TOULIS,
"Electromechanical Coupling and Composite Transducers",
J. Acoust. Soc. Am., **35**, 74-80 (1963).
- [24] G. A. BRIGHAM,
"Computer Modeling of Oval Flexensional Underwater Transducer",
J. Acoust. Soc. Am., **50**, 141 (A) (1971).
- [25] G. A. BRIGHAM,
"In-plane Free Vibrations Of Tapered Oval Rings",
J. Acoust. Soc. Am., **54** N°2 (451-460) (1973).
- [26] G. A. BRIGHAM ,
"Analyse of the Class IV Flexensional Transducer by use of Waves Mechanics",
J. Acoust. Soc. Am., **56**, 31-39 (1974).
- [27] G. E. MARTIN,
"Vibrations of Coaxially Segmented, Longitudinally Polarized, Ferroelectric Tubes",
J. Acoust. Soc. Am., **36**, 1496-1506 (1964).
- [28] A. E. H. LOVE,
"A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity",
Dover, New York, (1944) 4th ed.
- [29] W. J. MARSHALL, J. A. PAGLIARINI, R. P. WHITE,
"Advences In Flexensional Transducer Design",
IEEE Oceans, 124-133 (1979).
- [30] J. C. DEBUS, B. HAMONIC, B. DAMIRI,
"Analysis of a Flexensional Transducer Using Piece-Part Equivalent Circuit Models:
Determination of the Shell Contribution",
Proceeding of Oceans 94 (II.289- II.294), (1994).
- [31] D. STANSFIELD,
"Underwater Electroacoustic Transducers",
Bath University Press (1990).
- [32] J. N. DECARPIGNY,
"Application de la Méthode des Éléments Finis à l'Etude des Transducteurs Piézoé-
lectriques", Thèse de doctorat d'état, université de Lille I (1985).

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [33] B. HAMONIC,
 "Contribution à l'Etude du Rayonnement de Transducteurs Utilisant les Vibrations de Coque Mince",
 Thèse de doctorat, université des sciences et techniques de lille (1987).
- [34] G. DHATT, G. TOUZOT,
 "Introduction à la Méthode des Eléments Finis"
 Collection Université de Compiègne Maloine ed. (1982).
- [35] "Notice d'utilisation du code de calcul ATILA",
 ISEN, 41 Boulevard Vauban 59046 LILLE CEDEX FRANCE.
- [36] O. C. ZIENKIEWICZ,
 "the Finite Element Method in Engineering Science",
 Mc Graw Hill ed, (1977).
- [37] K. J. BATH,
 "Finite Element Procedures in Engineering Analysis",
 Prentice Hall ed. (1982).
- [38] "Notice d'utilisation du code EQI",
 ISEN, 41 Boulevard Vauban 59046 LILLE CEDEX FRANCE.
- [39] A . LAVIE,
 "Modélisation du Rayonnement ou de la Diffraction Acoustique par une Méthode Mixte Equations Intégrales-champ nul",
 Thèse de Doctorat en Mécanique, Université des Sciences et Techniques de Lille (1989).
- [40] J. C. DEBUS, J. N. DECARPIGNY, B. HAMONIC,
 "Analysis of a Class IV Flextensional Transducer using Piece-Part Equivalent Circuit Model",
 proc. 3rd Workshop on power Transducers for sonic and ultrasonics, Orlando, (1992).
- [41] L. L. FOLDY,
 "Theory of Passive Linear Electroacoustic Transducers with Fixed Velocity Distribution",
 J. Acoust. Soc. Am., **21**, 595-604 (1949).
- [42] J. N. DECARPIGNY, B. HAMONIC, O. B. WILSON,
 "The Design of Low Frequency Underwater Acoustic Projectors: Present Status and Futur Trends",
 IEEE J.Oceanic Eng., Vol.OE-16, 107-122 (1991).
- [43] G. A. BRIGHAM, B. GLASS,
 "Present Status in Flextensional Transducer Technology",
 J. Acoust. Soc. Am., **68**, 1046-1052 (1980).

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [44] W. FLÜGGE, traduit par H. JACOT,
"Statique et Dynamique des coques",
Editions Eyrolles (1960).
- [45] W. T. THOMSON,
"Theory of Vibration with Applications",
Prentice. Hall., Englewood cliffs, NewJersey.
- [46] M. ALBIGES A. COIN,
"Résistance des Matériaux Appliquée",
Editions Eyrolles, (1975).
- [47] D. BOUCHER,
"Trends and Problems in Low Frequency Sonar Projector Design",
in Power Sonic and Ultrasonic Transducers Design, édité par B. HAMONC et J.N
DECARPIGNY, SPRINGLER-VERLAG, 100-120 (1988).
- [48] R. S. WOOLLETT,
"Sonar Transducer Fundamentals",
Published by NAVAL UNDERWATER SYSTEMS CENTER
- [49] J. C. DEBUS, J. N. DECARPIGNY, R. LE LETTY, F. CLAYSSSEN,
"Comparison of a Piezoelectric and a Magnetostrictive Class IV Flextensional Transducers",
proc. 1st European conference on Underwater acoustics, Luxembourg, (1992).
- [50] S. TIMOSHINKO,
"Théorie des Vibrations" (1947).
- [51] J. C. DEBUS, J. N. DECARPIGNY, B. HAMONIC, R. LE LETTY, F. CLAEYSSSEN,
"Analyse de la Faisabilité et de l'Intérêt d'un Transducteur Flexensionnel de Classe
IV à Moteur Magnétostrictif",
Convention N° C.90.34.211.00.170.75.01 avec la DRET, Rapport d'avancement mars
(1992).
- [52] J.N.DECARPIGNY, J. C. DEBUS, A. LAVIE, B. HAMONIC, R. BOSSUT, J. M. CAPRON,
"Etude d'un Nouveau Concept de Systeme d'Emission pour la Surveillance Active",
Convention C.89.48.603.005, avec G.E.R.D.S.M., Novembre (1989).

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ANNEXE I

Fréquences de flexion et de membrane

AI - 1 Déplacements

On considère une coque à anse de panier (deux rayons de courbure), du transducteur flexionnel de classe IV, de petit rayon moyen r , de grand rayon moyen R , d'épaisseur h et de grand axe moyen ga , chargée par une pression p uniformément répartie, comme indiqué sur la figure AI.1.

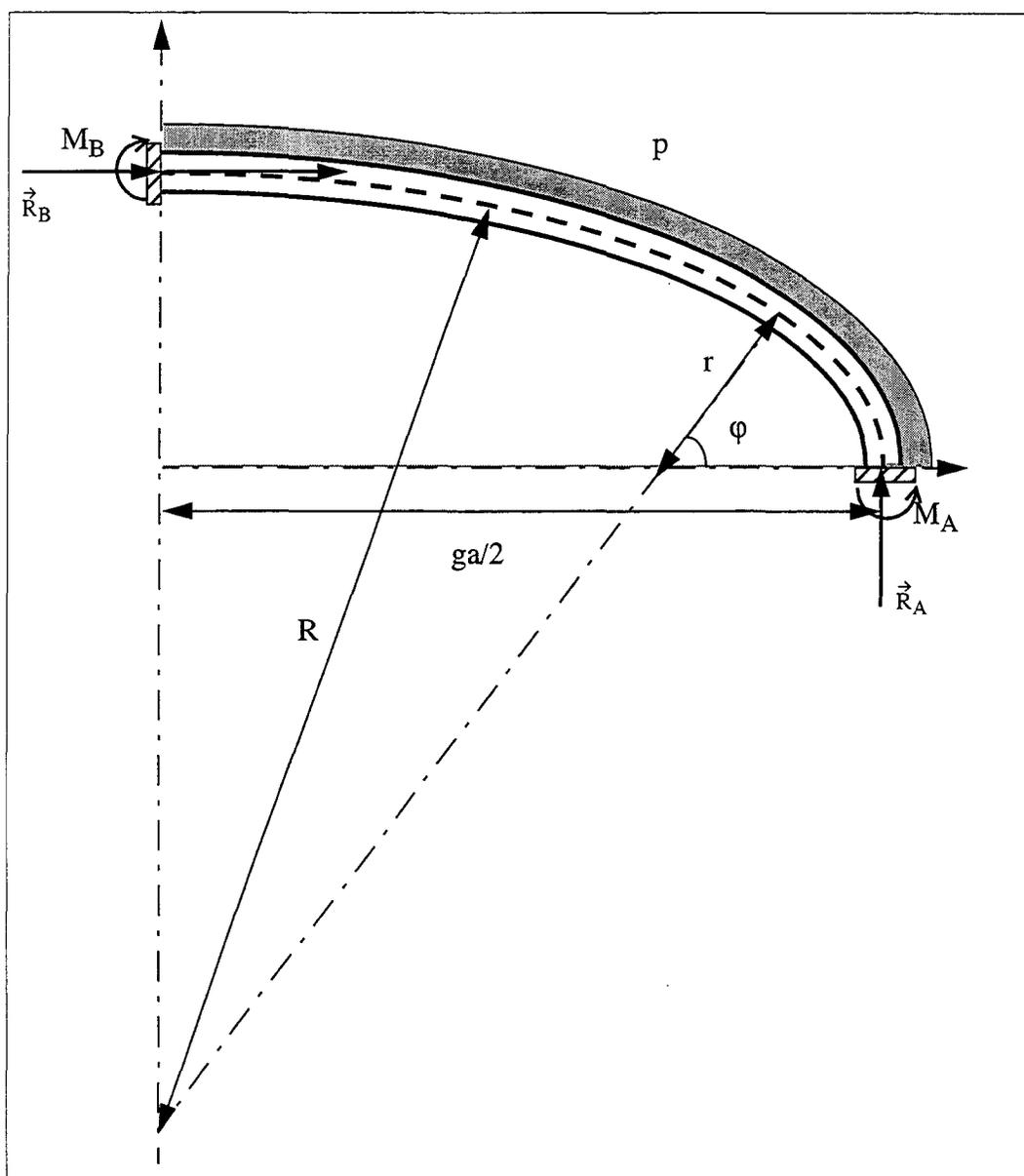


Fig AI.1 - Structure chargée par une pression uniformément répartie autour.

Sous l'effet de la pression p , il se produit une réaction d'appui en A : \vec{R}_A et en B : \vec{R}_B . En tout point $M(\theta)$ de la fibre moyenne, repéré par son angle θ , il se produit : un moment $M(\theta)$, un effort tranchant $T(\theta)$ et un effort normal $N(\theta)$.

Par l'écriture des équations de l'équilibre statique on obtient :

$$R_A = p \cdot R \left[(1 - \varepsilon) \cos \varphi + \left(\varepsilon + \frac{h}{2R} \right) \right] \quad (\text{AI.1})$$

avec : $\varepsilon = r/R$ et φ l'angle délimitant les régions 1 et 2 défini par : $\varphi = \arccos \left(\frac{\frac{(ga)}{2} - r}{R - r} \right)$, et ga le grand axe moyen.

Pour tout point $M(\theta)$ de la fibre moyenne, tel que $0 \leq \theta \leq \varphi$ (région 1) on a :

$$\begin{cases} M_1(\theta) = pR^2 \left(\Delta_1 + A\varepsilon \cos \theta \right) \\ T_1(\theta) = -pRA \sin \theta \\ N_1(\theta) = pR \left(A \cos \theta + \varepsilon + \frac{h}{2R} \right) \end{cases} \quad (\text{AI.2})$$

avec : $A = (1 - \varepsilon) \cos \varphi$

pour tout point $M(\theta)$ de la fibre moyenne, tel que $\varphi \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ (région 2) on a :

$$\begin{cases} M_2(\theta) = pR^2 (\Delta_2 - B \sin \theta) \\ T_2(\theta) = -pRB \cos \theta \\ N_2(\theta) = pR \left(1 - \frac{h}{2R} - B \sin \theta \right) \end{cases} \quad (\text{AI.3})$$

avec : $B = (1 - \varepsilon) \sin \varphi$

où Δ_1 et Δ_2 deux constantes indépendantes de θ , définies par :

$$\begin{cases} \Delta_1 = \left(\frac{-M_A}{p} - A\varepsilon \right) \\ \Delta_2 = \left(1 - \frac{M_A}{p} - A^2 - A\varepsilon - \varepsilon^2 \right) \end{cases} \quad (\text{AI.4})$$

\bar{M}_A représente le moment d'encastrement au point A et peut être déterminé en exprimant le fait qu'au point A il n'y a pas de rotation vue la symétrie de la structure.

$$r \int_0^\varphi M_1(\theta) d\theta + R \int_\varphi^{\pi/2} M_2(\theta) d\theta = 0 \quad (\text{AI.5})$$

ce qui donne pour valeur du moment d'encastrement :

$$\bar{M}_A = R^2 M_A = pR^2 \frac{(\pi/2 - \varphi) \left((1 - \varepsilon) - A\varepsilon - \varepsilon^2 \right) - A\varepsilon^2 \varphi - AB(1 + \varepsilon)}{\varepsilon\varphi + (\pi/2 - \varphi)} \quad (\text{AI.6})$$

Pour pouvoir déterminer le déplacement de chaque point de la fibre moyenne, on excite par une force unitaire suivant la direction dans laquelle le déplacement est recherché figure AI.2 :

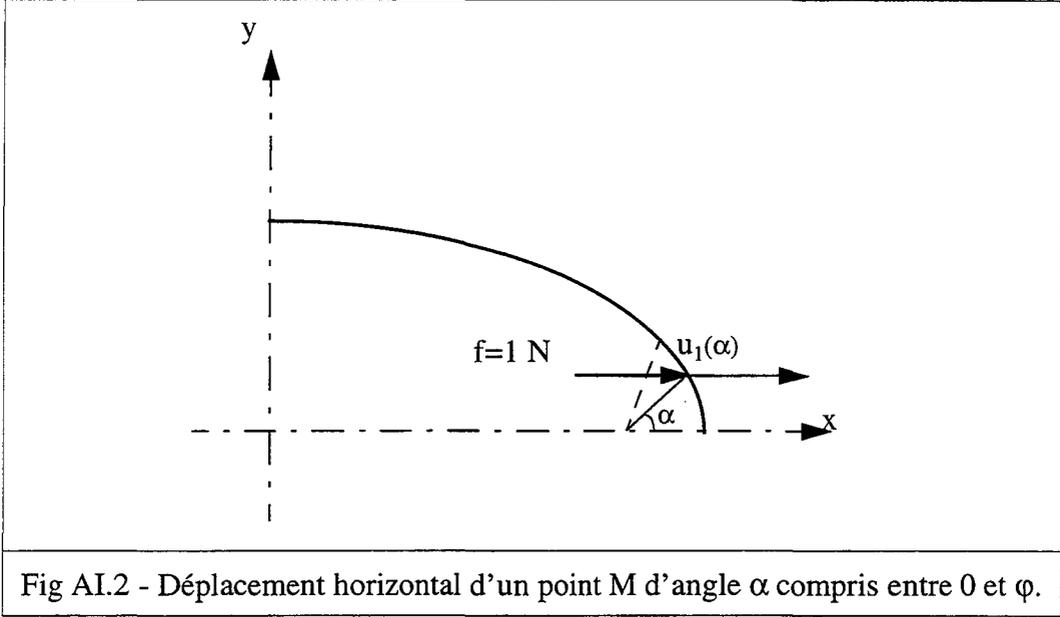


Fig AI.2 - Déplacement horizontal d'un point M d'angle α compris entre 0 et φ .

Par l'application de la force f , il se produit en tout point de la fibre moyenne un moment $\bar{M}(\theta)$, un effort tranchant $\bar{T}(\theta)$ et un effort normal $\bar{N}(\theta)$ tel que : pour avoir le déplacement dans une direction (ox) par exemple on aie ($i = 1,2$) :

$$u_i(\alpha) = u_{iM}(\alpha) + u_{iT}(\alpha) + u_{iN}(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{M_i(\theta) \bar{M}_i(\theta)}{EI} d\theta + \int_0^\alpha \frac{T_i(\theta) \bar{T}_i(\theta)}{GS_1} d\theta + \int_0^\alpha \frac{N_i(\theta) \bar{N}_i(\theta)}{Eh} d\theta$$

Pour tout point de la fibre moyenne de la région 1, les déplacements obtenus sont de la forme :

$$\begin{cases} u_{1M}(\alpha) = -p \frac{1-v^2}{EI} R^4 \varepsilon^2 \left[c_{1M} + \Delta_1 (\cos \alpha + \alpha \sin \alpha) - \frac{A\varepsilon}{4} \cos(2\alpha) \right] \\ v_{1M}(\alpha) = -p \frac{1-v^2}{EI} R^4 \varepsilon^2 \left[\frac{A\varepsilon}{2} \alpha + \Delta_1 (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) - \frac{A\varepsilon}{4} \sin(2\alpha) \right] \end{cases} \quad (\text{AI.7})$$

$$\begin{cases} u_{1T}(\alpha) = p \frac{1-v^2}{GS_1} R^2 \left[\frac{1}{4} A\varepsilon \cos 2\alpha + c_{1T} \right] \\ v_{1T}(\alpha) = -p \frac{1-v^2}{GS_1} R^2 \left[\frac{1}{4} A\varepsilon \sin 2\alpha - 2\alpha \right] \end{cases} \quad (\text{AI.8})$$

$$\begin{cases} u_{1N}(\alpha) = -p \frac{1-v^2}{Eh} R^2 \varepsilon \left[\frac{A}{4} \cos 2\alpha + \left(\varepsilon + \frac{h}{2R} \right) \cos \alpha + c_{1N} \right] \\ v_{1N}(\alpha) = -p \frac{1-v^2}{Eh} R^2 \varepsilon \left[\frac{A}{4} (2\alpha + \sin 2\alpha) + \left(\varepsilon + \frac{h}{2R} \right) \sin \alpha \right] \end{cases} \quad (\text{AI.9})$$

où c_{1M} , c_{1T} et c_{1N} sont des constantes indépendantes de l'angle α et sont définies par :

$$\begin{cases} c_{IM} = \frac{I}{\varepsilon^2} \left[\cos \varphi \left(\Delta_2 - \varepsilon^2 \Delta_1 \right) + \frac{I}{4} A \varepsilon^3 (2 - \cos 2\varphi) - \frac{I}{4} B (2 (\pi/2 - \varphi) + \sin 2\varphi) - B (\Delta_2 (\pi/2 - \varphi) - B \cos \varphi) \right] \\ c_{IT} = \frac{I}{4} (2 (\pi/2 - \varphi) - \sin 2\varphi - A \varepsilon \cos 2\varphi) \\ c_{IN} = -\frac{I}{4} A \varepsilon \cos 2\varphi - \varepsilon \left(\varepsilon + \frac{h}{2R} \right) \cos \varphi - \left(I + \frac{h}{2R} \right) \cos \varphi + \frac{I}{4} B (2 (\pi/2 - \varphi) + \sin 2\varphi) \end{cases} \quad (\text{AI.10})$$

b) Déplacements dans la région 2 : $\varphi \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

De la même manière, les déplacements de tout point de la région 2 sont de la forme :

$$\begin{cases} u_{2M}(\alpha) = -p \frac{I - \nu^2}{EI} R^4 \left[\left(-\frac{B}{2} \right) (\pi/2 - \alpha) + \Delta_1 (\cos \alpha - (\pi/2 - \alpha) \sin \alpha) + \frac{B}{4} \sin (2\alpha) \right] \\ v_{2M}(\alpha) = -p \frac{I - \nu^2}{EI} R^4 \left[c_{2M} + \Delta_2 (\sin \alpha - (\pi/2 - \alpha) \cos \alpha) + \frac{B}{4} \cos (2\alpha) \right] \end{cases} \quad (\text{AI.11})$$

$$\begin{cases} u_{2T}(\alpha) = p \frac{I - \nu^2}{GS_I} R^2 \left[\frac{I}{4} (2 (\pi/2 - \alpha) - \sin 2\alpha) \right] \\ v_{2T}(\alpha) = -p \frac{I - \nu^2}{GS_I} R^2 \left[\frac{I}{4} B \cos 2\alpha + c_{2T} \right] \end{cases} \quad (\text{AI.12})$$

$$\begin{cases} u_{2N}(\alpha) = p \frac{I - \nu^2}{Eh} R^2 \left[\frac{B}{4} (2 (\pi/2 - \alpha) + \sin 2\alpha) - \left(I + \frac{h}{2R} \right) \cos \alpha \right] \\ v_{2N}(\alpha) = -p \frac{I - \nu^2}{Eh} R^2 \left[\frac{B}{4} \cos 2\alpha + \left(I + \frac{h}{2R} \right) \sin \alpha + c_{2N} \right] \end{cases} \quad (\text{AI.13})$$

De la même manière, les constantes c_{2M} , c_{2T} et c_{2N} sont définies par :

$$\begin{cases} c_{2M} = \left[\sin \varphi \left(\varepsilon^2 \Delta_1 - \Delta_2 \right) + \frac{I}{4} A \varepsilon^3 (2\varphi + \sin 2\varphi) - \frac{I}{4} B (2 + \cos 2\varphi) - A \varepsilon (\Delta_3 (\pi/2 - \varphi) - B \cos \varphi) \right] \\ c_{2T} = -\frac{I}{4} (\cos 2\varphi + A \varepsilon (2\varphi - \sin 2\varphi)) \\ c_{2N} = \varepsilon \left[\frac{I}{4} A (2\varphi + \sin 2\varphi) + \varepsilon \left(I + \frac{h}{2R} \right) \sin \varphi \right] - \left(I + \frac{h}{2R} \right) \sin \varphi - \frac{I}{4} B \cos 2\varphi \end{cases} \quad (\text{AI.14})$$

AI - 2 Première fréquence de résonance de la coque

La première fréquence de résonance est obtenue lorsque l'on a égalité de l'énergie cinétique de flexion et de l'énergie potentielle de flexion.

AI - 2.1 Energie cinétique de flexion

L'énergie cinétique de flexion a été définie dans la chapitre III comme :

$$E_{cf} = \frac{I}{2} \rho h \omega^2 \left[\int_0^\varphi \left(u^2_{IM}(\theta) + v^2_{IM}(\theta) \right) R d\theta + \int_\varphi^{\frac{\pi}{2}} \left(u^2_{2M}(\theta) + v^2_{2M}(\theta) \right) R d\theta \right] \quad (\text{AI.15})$$

Quand on remplace dans la relation (AI.15) les déplacements par leur valeurs (AI.7) et (AI.11) et après intégration, l'énergie cinétique de la structure obtenue est de la forme :

$$E_{cf} = \frac{1}{2} \rho h R^5 \left(p \frac{1-v^2}{Eh} \right)^2 \bar{E}_{cf} \omega^2 \quad (\text{AI.16})$$

avec :

$$\begin{aligned} \bar{E}_{cf} = \varepsilon^5 & \left[\left(c_1^2 + \Delta_1^2 + \left(\frac{A\varepsilon}{4} \right)^2 \right) \varphi + \left(\Delta_1^2 + \left(\frac{A\varepsilon}{2} \right)^2 \right) \frac{\varphi^3}{3} + \Delta_1 (4c_1 + 3A\varepsilon) \sin \varphi - \frac{A\varepsilon}{4} \left(c_1 + \frac{A\varepsilon}{4} \right) \sin 2\varphi - \right. \\ & \left. \Delta_1 \left(2c_1 + \frac{7}{2} A\varepsilon \right) \varphi \cos \varphi - \Delta_1 A\varepsilon \varphi^2 \sin \varphi + \left(\frac{A\varepsilon}{2} \right)^2 \frac{\varphi}{2} \cos 2\varphi \right] + \\ & \left[\left(c_2^2 + \Delta_2^2 + \left(\frac{B}{4} \right)^2 \right) \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) + \frac{1}{3} \left(\Delta_2^2 + \left(\frac{B}{2} \right)^2 \right) \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right)^3 + \Delta_2 (4c_2 - 3B) \cos \varphi + \frac{B}{4} \left(c_2 - \frac{B}{4} \right) \sin 2\varphi + \right. \\ & \left. \Delta_2 \left(\frac{7}{2} B - 2c_2 \right) \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \sin \varphi + \Delta_2 B \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right)^2 \cos \varphi - \frac{1}{2} \left(\frac{B}{2} \right)^2 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \cos 2\varphi \right] \end{aligned} \quad (\text{AI.17})$$

AI - 2.2 Energie potentielle de flexion

L'énergie potentielle de flexion a été définie dans le chapitre III comme :

$$E_{pf} = \frac{(1-v^2)}{2EI} \left(\int_0^\varphi M_1^2(\theta) r d\theta + \int_\varphi^{\frac{\pi}{2}} M_2^2(\theta) R d\theta \right) \quad (\text{AI.18})$$

Lorsqu'on remplace les moments par leur valeurs exprimées par les relations (AI.2) et (AI.3) et après intégration de la relation (AI.18), l'énergie potentielle de flexion obtenue est de la forme :

$$E_{pf} = \frac{1}{2} h R^3 p \frac{1-v^2}{Eh} \bar{E}_{pf} \omega \quad (\text{AI.19})$$

avec :

$$\bar{E}_{pf} = \varepsilon \left[\Delta_1^2 \varphi + 2\Delta_1 \varphi \varepsilon \sin \varphi + \frac{1}{4} A^2 \varepsilon^2 (2\varphi + \sin 2\varphi) \right] + \left[\Delta_2^2 (\pi/2 - \varphi) - 2B\Delta_2 \cos \varphi + \frac{1}{4} B^2 (2(\pi/2 - \varphi) + \sin 2\varphi) \right] \quad (\text{AI.20})$$

Lorsque l'énergie cinétique de flexion est égale à l'énergie potentielle de flexion, on obtient la pulsation définie par :

$$\omega_l = \frac{h}{R^2} \sqrt{\frac{E}{I2(1-v^2)} \frac{\bar{E}_{pf}}{\bar{E}_{cf}}} \quad (\text{AI.21})$$

AI - 3 Fréquence de membrane

Comme pour le cas précédent, la fréquence de membrane est obtenue quand l'énergie cinétique de membrane est égale à l'énergie potentiel de membrane.

AI - 3.1 Energie cinétique de membrane

L'énergie cinétique de membrane est définie par :

$$E_{cm} = \frac{I}{2} h \rho \omega^2 \left(\int_0^\varphi [u^2_{1N}(\theta) + v^2_{1N}(\theta)] r d\theta + \int_\varphi^{\frac{\pi}{2}} [u^2_{2N}(\theta) + v^2_{2N}(\theta)] R d\theta \right) \quad (\text{AI.22})$$

Après avoir remplacé les déplacements par leur valeurs données par les relations (AI.9) et (AI.13) dans la relation (AI.22) et après intégration, on obtient l'énergie cinétique de membrane définie par :

$$E_{cm} = \frac{I}{2} \rho h R^5 \left(p \frac{1-v^2}{Eh} \right)^2 \bar{E}_{cm} \omega^2 \quad (\text{AI.23})$$

avec :

$$\begin{aligned} \bar{E}_{cm} = R^3 & \left[\left(c_{1N}^2 + \left(\varepsilon + \frac{h}{2R} \right)^2 + \left(\frac{A}{4} \right)^2 \right) \varphi + \left(\frac{A}{2} \right)^2 \frac{\varphi^3}{3} + \frac{A}{4} \left(c_{1N} + \frac{A}{4} \right) \sin 2\varphi \right. \\ & + \left. \left(\varepsilon + \frac{h}{2R} \right) \left(2c_{1N} + \frac{3}{2}A \right) \sin \varphi - A \left(\varepsilon + \frac{h}{2R} \right) \varphi \cos \varphi - \left(\frac{A}{2} \right)^2 \frac{\varphi \cos \varphi}{2} \right] \\ & + \left[\left(\left(I + \frac{h}{2R} \right)^2 + c_{2N}^2 + \left(\frac{B}{4} \right)^2 \right) \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) + \frac{I}{3} \left(\Delta_2^2 + \left(\frac{B}{2} \right)^2 \right) \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right)^3 + \left(2c_{2N} - 3\frac{B}{2} \right) \cos \varphi \right. \\ & \left. + B \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \left(I + \frac{h}{2R} \right) \sin \varphi + \frac{B}{4} \left(\frac{B}{4} - c_{2N} \right) \sin 2\varphi + \frac{I}{2} \left(\frac{B}{2} \right)^2 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \cos 2\varphi \right] \end{aligned} \quad (\text{AI.24})$$

AI - 3.2 Energie potentielle de membrane

L'énergie potentielle E_{pm} est définie par :

$$E_{pm} = \frac{(1-v^2)}{2Eh} \left(\int_0^\varphi N_1^2(\theta) r d\theta + \int_\varphi^{\frac{\pi}{2}} N_2^2(\theta) R d\theta \right) \quad (\text{AI.25})$$

Après intégration, on obtient :

$$E_{pm} = \frac{I}{2} R^3 p \frac{1-v^2}{Eh} \bar{E}_{pm} \quad (\text{AI.26})$$

avec :

$$\begin{aligned} \bar{E}_{pm} = \varepsilon & \left[\left(\varepsilon + \frac{h}{2R} \right)^2 \varphi + 2A \left(\varepsilon + \frac{h}{2R} \right) \sin \varphi + \frac{I}{4} A^2 (2\varphi + \sin 2\varphi) \right] \\ & + \left[\left(I + \frac{h}{2R} \right)^2 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) - 2B \cos \varphi + \frac{I}{4} B^2 \left(2 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) + \sin 2\varphi \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{AI.27})$$

La fréquence de membrane est alors définie par :

$$f_m = \frac{\omega_m}{2\pi} \quad (\text{III-28})$$

avec :

$$\omega_m = \frac{I}{R} \sqrt{\frac{E}{(1-v^2) \rho} \frac{\bar{E}_{pm}}{\bar{E}_{cm}}} \quad (\text{III-29})$$

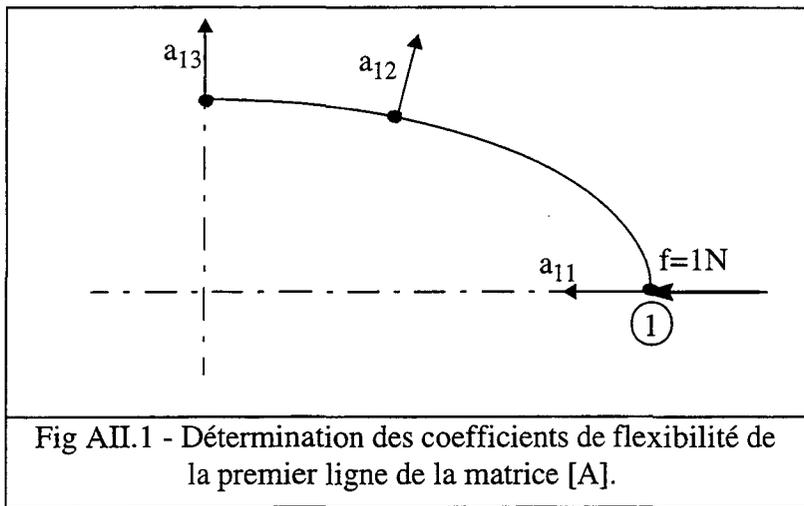
ANEXXE II

Coefficients de flexibilité

Cette annexe a pour objectif de montrer la détermination des coefficients de flexibilité et donc la construction de la matrice [A].

AII - 1 Eléments de la première ligne de la matrice de flexibilité

Pour la détermination des coefficients a_{ij} , on applique pour chaque cas i , une force unitaire suivant la direction normale à la fibre moyenne : les coefficients sont dans la direction radiale, comme indiqué sur la figure AII.1.



Lors de l'application de la force unitaire, il se produit en tout point de la structure un moment $M(\theta)$, un effort tranchant $T(\theta)$ et un effort normal $N(\theta)$, au noeud 1 il se produit un moment d'encastrement \bar{M}_1 tel que:

$$\bar{M}_1 = RM_1 \quad (\text{AII.1})$$

avec:

$$M_1 = \frac{A - B(\pi/2 - \varphi) + \varepsilon A + \varepsilon^2}{\varepsilon \varphi + (\pi/2 - \varphi)} \quad (\text{AII.2})$$

Comme pour la détermination des déplacements en annexe II, les coefficients obtenus sont de la forme:

$$\begin{aligned} a_{11M} &= R^3 \frac{1-\nu^2}{EI} \left[B(B + M_1) \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) - (M_1 + 2B) \cos \varphi + \frac{1}{4} \left(2 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) + \sin 2\varphi \right) + \varepsilon^2 M_1 (\cos \varphi - 1) + \frac{\varepsilon^3}{4} (2\varphi - \sin 2\varphi) \right] \\ a_{11T} &= R \frac{1-\nu^2}{GS_1} \frac{1}{4} [\pi - 2\varphi - \sin 2\varphi + \varepsilon (2\varphi + \sin 2\varphi)] \\ a_{11N} &= R \frac{1-\nu^2}{Eh} \frac{1}{4} [\pi - 2\varphi + \sin 2\varphi + \varepsilon (2\varphi - \sin 2\varphi)] \end{aligned} \quad (\text{AII.3})$$

$$a_{12M} = R^3 \frac{1-\nu^2}{EI} \left[\frac{1}{4} (\sin\beta (1 + \cos 2\beta) + 2 \cos\beta (\pi/2 - \beta)) - B (1 - \sin\beta \sin\varphi) + (B (\pi/2 - \varphi) - \cos\varphi) (M_d + A \sin\beta) + \varepsilon (B (\pi/2 - \varphi) - \cos\varphi) - \varepsilon^2 M_d (1 - \cos\varphi) + \frac{1}{4} \varepsilon^3 \sin\beta (-3 + 4 \cos\varphi - \cos 2\varphi) \right] \quad (\text{AII.4})$$

$$a_{12T} = R \frac{1-\nu^2}{GS_1} \frac{1}{4} \left[2 \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) \cos\beta - \sin\beta (1 + \cos 2\varphi) + \varepsilon \sin\beta (\cos 2\varphi - 1) \right]$$

$$a_{13M} = R^3 \frac{1-\nu^2}{EI} \left[-B (1 - \sin\varphi) + \left(B \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) - \cos\varphi \right) (M_d + A) + \varepsilon \left(B \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) - \cos\varphi \right) - \varepsilon^2 M_d (1 - \cos\varphi) + \frac{1}{4} \varepsilon^3 (-3 + 4 \cos\varphi - \cos 2\varphi) \right]$$

$$a_{13T} = R \frac{1-\nu^2}{GS_1} \frac{1}{4} [- (1 + \cos 2\varphi) + \varepsilon (\cos 2\varphi - 1)]$$

$$a_{13N} = R \frac{1-\nu^2}{Eh} \frac{1}{4} [1 + \cos 2\varphi - \varepsilon (\cos 2\varphi - 1)] \quad (\text{AII.5})$$

AII - 2 Eléments de la deuxième ligne de la matrice de flexibilité

Pour avoir les éléments de la deuxième ligne de la matrice de flexibilité, on applique la force unitaire au noeud 2 suivant la direction radiale figure (AII.2)

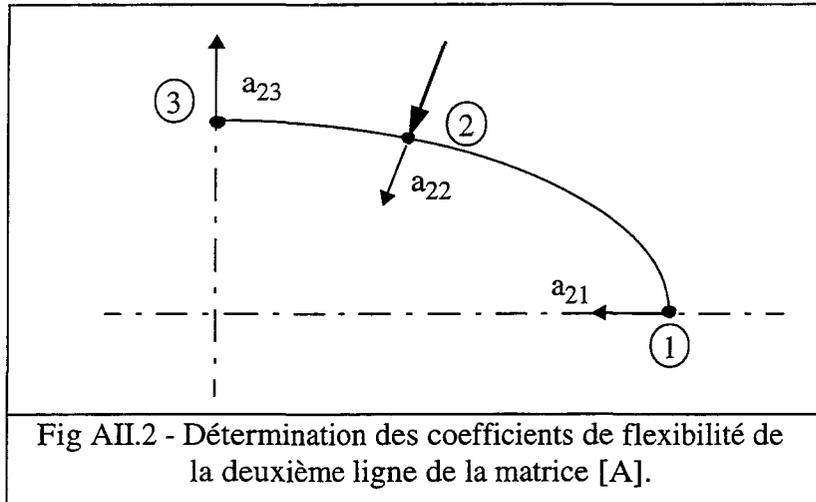


Fig AII.2 - Détermination des coefficients de flexibilité de la deuxième ligne de la matrice [A].

Quand on applique la force unitaire au noeud 2 suivant la direction radiale, il se produit un moment d'encastrement au noeud 1 défini par:

$$M_2 = RM_2 = R \frac{1 - \sin\beta \left(B + A (\pi/2 - \varphi) + \varepsilon \left((\pi/2 - \varphi) + B \right) + \varepsilon^2 \varphi \right)}{\varepsilon\varphi + (\pi/2 - \varphi)} \quad (\text{AII.6})$$

Ainsi on obtient les éléments de la deuxième ligne de la matrice [A]

$$a_{22M} = R^3 \frac{1-\nu^2}{EI} \left[\frac{1}{4} (\pi - 2\beta \cos 2\beta + \sin 2\beta - \sin^2\beta (\pi + 2\varphi + \sin 2\varphi)) + \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) A \sin\beta (M_2 + A \sin\beta) - (M_2 + 2A \sin\beta) (1 - \sin\beta \sin\varphi) - \varepsilon \sin\beta \left(1 - \sin\beta \sin\varphi - A \sin\beta \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \right) - \varepsilon^2 M_2 \sin\varphi \sin\beta + \frac{1}{4} \varepsilon^3 \sin^2\beta (2\varphi + 4 \sin\varphi + \sin 2\varphi) \right]$$

$$a_{22T} = R \frac{1-\nu^2}{GS_1} \frac{1}{4} \left[\sin^2\beta (2(\beta - \varphi) + \sin 2\varphi) - \sin 2\beta + 2 \cos^2\beta \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) + \varepsilon (2\varphi - \sin 2\varphi) \right]$$

(AII.7)

$$a_{23M} = R^3 \frac{1-\nu^2}{EI} \left[\frac{1}{4} (2 \cos \beta + 2 (\beta - \varphi) \sin \beta - \sin 2\varphi \sin \beta) + (M_d + A \sin \beta) \left(A \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) - 1 + \sin \varphi \right) - A (1 - \sin \beta \sin \varphi) \right. \\ \left. + \varepsilon \sin \beta \left(A \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) - 1 + \sin \varphi \right) - \varepsilon^2 \sin \varphi (M_d + \sin \beta) + \frac{1}{4} \varepsilon^3 \sin \beta (2\varphi + \sin 2\varphi) \right]$$

$$a_{23T} = R \frac{1-\nu^2}{GS_1} \frac{1}{4} [\sin \beta (2 (\beta - \varphi) + \sin 2\varphi) - 2 \cos \beta + \varepsilon \sin \beta (2\varphi - \sin 2\varphi)]$$

(AII.8)

AII - 3 Eléments de la troisième ligne de la matrice de flexibilité

Les éléments de la troisième ligne se déduisent de ceux de la deuxième en posant $\beta = \pi/2$

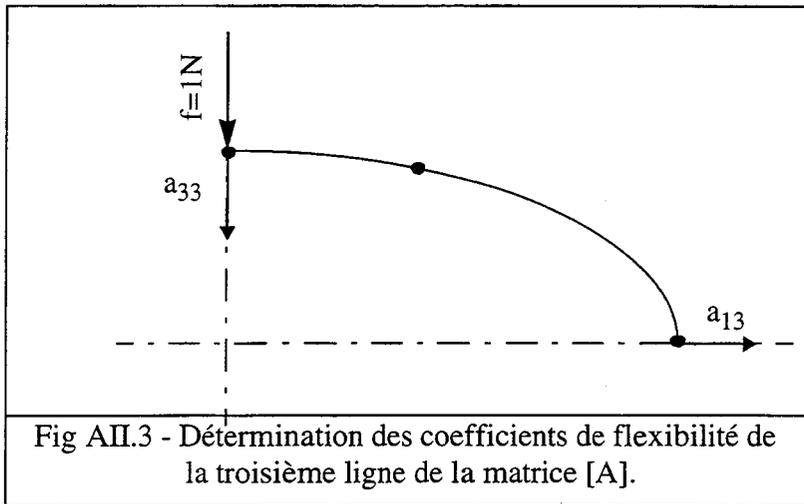


Fig AII.3 - Détermination des coefficients de flexibilité de la troisième ligne de la matrice [A].

Les derniers éléments de la matrice [A] sont obtenus en posant $\beta = \pi/2$, M_3 est aussi obtenu à partir de M_2 pour $\beta = \pi/2$. Ces éléments sont de la forme :

$$a_{33M} = R^3 \frac{1-\nu^2}{EI} \left[\frac{1}{4} \left(2 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) - \sin 2\varphi \right) + \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) A (M_3 + A) - (M_3 + 2A) (1 - \sin \varphi) - \varepsilon \left(1 - \sin \varphi - A \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \right) - \varepsilon^2 M_3 \sin \varphi + \frac{1}{4} \varepsilon^3 (2\varphi + 4 \sin \varphi + \sin 2\varphi) \right]$$

(AII.9)

$$a_{33T} = R \frac{1-\nu^2}{GS_1} \frac{1}{4} [\pi - 2\varphi + \sin 2\varphi + \varepsilon (2\varphi - \sin 2\varphi)]$$

$$a_{33N} = R \frac{1-\nu^2}{Eh} \frac{1}{4} [\pi - 2\varphi - \sin 2\varphi + \varepsilon (2\varphi + \sin 2\varphi)]$$

En fait, ici on a présenté le terme a_{33} seul, les autres éléments a_{31} et a_{32} sont déjà déterminés par les relations (AII.5) et (AII.8).

ANNEXE III

Résistance de rayonnement

Eléments complémentaires relatifs au calcul de l'impédance de rayonnement.

On définit la distribution de vitesse β sur la surface du transducteur par :

$$V_n = \beta V_0 \quad (\text{AIII.1})$$

où V_n est la vitesse vibratoire normale en un point de la surface du projecteur et V_0 la valeur de référence définie par:

$$V_0 = \omega U_0 \quad (\text{AIII.2})$$

U_0 est l'amplitude de vibration du petit axe du transducteur dans l'air et ω la pulsation.

L'impédance de rayonnement au sens de L.L. FOLDY [41] est alors donnée par:

$$z_r = \frac{1}{V_0} \iint_S p \beta \, dS \quad (\text{AIII.3})$$

Si on considère que les champs de vitesse normale et de pression sont constants le long d'une génératrice, cette relation devient :

$$z_r = \frac{l_m}{V_{0\Gamma}} \int p \beta \, d\Gamma \quad (\text{AIII.4})$$

où Γ est le contour d'une section droite du projecteur et (l_m) sa longueur.

ANNEXE IV

Equivalences électromécaniques

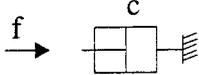
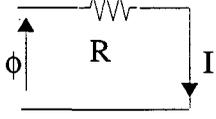
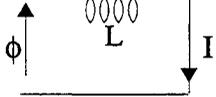
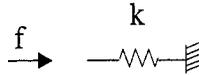
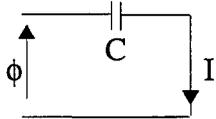
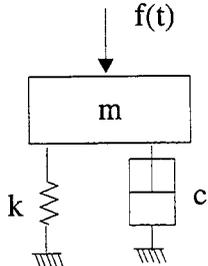
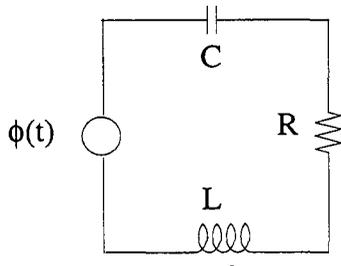
Mécanique	Electrique
Force (f)	Tension (ϕ)
Vitesse (v)	Courant (I)
Déplacement (u)	Charge (q)
Elasticité ($e=1/k$)	Inductance (L)
Masse (m)	Capacité (C)
Amortissement (c)	Résistance (R)
 $f = cv = c\dot{u}$	 $\phi = RI = R\dot{q}$
 $f = m\dot{v} = m\ddot{u}$	 $\phi = L\dot{I} = L\ddot{q}$
 $f = ku = k\int v dt$	 $\phi = q/C = (1/C)\int I dt$
 $m\dot{v} + cv + k\int v dt = f(t)$ $m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f(t)$	 $L\dot{I} + RI + (1/C)\int I dt = \phi(t)$ $L\ddot{q} + R\dot{q} + q/C = \phi(t)$

Tableau 1 : Analogies électromécaniques, tiré de [31]

